量子场论讲义

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io/cn/teaching.html

更新日期：2022 年 9 月 26 日

© 2018–2022 余钊焕 版权所有

参考书目

【1】 M. D. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*, Cambridge University Press (2014).

【2】 M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley (1995).

【3】 M. Srednicki, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press (2007).

【4】 B. G. Chen, D. Derbes, D. Griffiths, B. Hill, R. Sohn, and Y.-S. Ting (editors), *Lectures of Sidney Coleman on Quantum Field Theory*, World Scientific Publishing (2019).

【5】 L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, 2nd edition, Cambridge University Press (1996).

【6】 W. Greiner and J. Reinhardt, *Field Quantization*, Springer (1996).

【7】 W. Greiner and J. Reinhardt, *Quantum Electrodynamics*, 4th edition, Springer (2008).

【8】 W. Greiner and B. Müller, *Gauge Theory of Weak Interactions*, 4th edition, Springer (2009).

【9】 W. Greiner, S. Schramm, and E. Stein, *Quantum Chromodynamics*, 3rd edition, Springer (2006).

【10】 郑汉青，《量子场论》（上下册），北京大学出版社 (2018)。

【11】 李灵峰，《量子场论》，科学出版社 (2015)。

【12】 T. P. Cheng and L. F. Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Oxford University Press (1984).

【13】 S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Volume 1 *Foundations*, Cambridge University Press (1995).

【14】 S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Volume 2 *Modern Applications*, Cambridge University Press (1996).

【15】 S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Volume 3 *Supersymmetry*, Cambridge University Press (2000).

目　录

第 1 章　预备知识 **1**

1.1　量子场论的必要性 1
1.2　自然单位制 3
1.3　Lorentz 变换和 Lorentz 群 4
1.4　Lorentz 矢量 11
1.5　Lorentz 张量 14
1.6　作用量原理 19
1.6.1　经典力学中的作用量原理 19
1.6.2　经典场论中的作用量原理 21
1.7　Noether 定理、对称性与守恒定律 23
1.7.1　场论中的 Noether 定理 23
1.7.2　时空平移对称性 26
1.7.3　Lorentz 对称性 28
1.7.4　U(1) 整体对称性 31
习题 33

第 2 章　量子标量场 **35**

2.1　简谐振子的正则量子化 35
2.2　量子场论中的正则对易关系 38
2.3　实标量场的正则量子化 42
2.3.1　平面波展开 43
2.3.2　产生湮灭算符的对易关系 44
2.3.3　哈密顿量和总动量 47
2.3.4　粒子态 49
2.4　复标量场的正则量子化 53
2.4.1　平面波展开 54
2.4.2　选读：推导产生湮灭算符的对易关系 55
2.4.3　U(1) 整体对称性 57
2.4.4　选读：推导哈密顿量和总动量 59

习题 61

第 3 章 量子矢量场 63

3.1 量子 Poincaré 变换 63
3.1.1 量子 Poincaré 变换的生成元算符 63
3.1.2 Lorentz 代数和 Poincaré 代数 66
3.1.3 粒子 73
3.2 Lorentz 群的矢量表示 82
3.3 量子场的 Lorentz 变换 84
3.3.1 量子标量场的 Lorentz 变换 84
3.3.2 量子矢量场的 Lorentz 变换 86
3.4 有质量矢量场的正则量子化 88
3.4.1 极化矢量与平面波展开 90
3.4.2 选读：推导产生湮灭算符的对易关系 99
3.4.3 选读：推导哈密顿量和总动量 102
3.5 无质量矢量场的正则量子化 109
3.5.1 无质量情况下的极化矢量 109
3.5.2 无质量矢量场与规范对称性 111
3.5.3 选读：推导产生湮灭算符的对易关系 115
3.5.4 物理极化态 117
习题 123

第 4 章 量子旋量场 127

4.1 Lorentz 群的旋量表示 127
4.2 Dirac 旋量场 133
4.3 Dirac 方程 136
4.4 Dirac 旋量场的平面波展开 139
4.4.1 平面波解的一般形式 139
4.4.2 Weyl 表象中的平面波解 142
4.4.3 哈密顿量和产生湮灭算符 151
4.5 Dirac 旋量场的正则量子化 153
4.5.1 用等时对易关系量子化 Dirac 旋量场的困难 153
4.5.2 用等时反对易关系量子化 Dirac 旋量场 154
4.5.3 U(1) 整体对称性 157
4.5.4 粒子态 159
习题 162

第 5 章 量子场的相互作用 **165**
5.1 相互作用绘景 . . . 166
5.1.1 例 1：实标量场 . . . 170
5.1.2 例 2：有质量矢量场 . . . 172
5.2 时间演化算符和 S 矩阵 . . . 176
5.3 Wick 定理 . . . 182
5.3.1 正规乘积和 Wick 定理 . . . 182
5.3.2 选读：Wick 定理的证明 . . . 186
5.4 Feynman 传播子 . . . 190
5.4.1 实标量场的 Feynman 传播子 . . . 190
5.4.2 复标量场的 Feynman 传播子 . . . 193
5.4.3 有质量矢量场的 Feynman 传播子 . . . 195
5.4.4 无质量矢量场的 Feynman 传播子 . . . 197
5.4.5 Dirac 旋量场的 Feynman 传播子 . . . 198
5.5 散射截面和衰变宽度 . . . 201
5.5.1 跃迁概率 . . . 201
5.5.2 散射截面 . . . 205
5.5.3 两体散射运动学 . . . 208
5.5.4 衰变宽度 . . . 212
5.5.5 衰变运动学 . . . 214
习题 . . . 218

第 6 章 Feynman 图 **221**
6.1 Yukawa 理论 . . . 221
6.1.1 κ^1 阶 Feynman 图 . . . 224
6.1.2 κ^2 阶 Feynman 图 . . . 232
6.2 动量空间 Feynman 规则 . . . 244
6.3 ϕ^4 理论与对称性因子 . . . 248
6.4 一般内外线 Feynman 规则 . . . 253
习题 . . . 258

第 7 章 量子电动力学 **261**
7.1 U(1) 规范对称性与 QED . . . 261
7.2 正负电子湮灭到正负 μ 子 . . . 266
7.2.1 不变振幅 . . . 267
7.2.2 Dirac 矩阵求迹和缩并技巧 . . . 268
7.2.3 非极化散射截面 . . . 271

7.2.4　极化振幅 . . . 274
7.3　手征性与螺旋度 . . . 281
7.4　Coulomb 散射 . . . 284
7.4.1　$e^-\mu^-$ 散射 . . . 284
7.4.2　e^-p 散射 . . . 287
7.4.3　Coulomb 势能和 Yukawa 势能 . . . 289
7.5　交叉对称性和 Mandelstam 变量 . . . 293
7.6　Compton 散射 . . . 298
7.6.1　光子极化求和与 Ward 恒等式 . . . 300
7.6.2　非极化振幅模方和 Klein-Nishina 公式 . . . 302
7.6.3　高能行为和极化振幅 . . . 308
7.6.4　正负电子湮灭到双光子 . . . 314
习题 . . . 315

第 8 章　分立对称性和 Majorana 旋量场　319
8.1　标量场的分立变换 . . . 319
8.1.1　标量场的 P 变换 . . . 319
8.1.2　标量场的 T 变换 . . . 324
8.1.3　标量场的 C 变换 . . . 327
8.2　旋量场的分立变换 . . . 328
8.2.1　旋量场的 C 变换 . . . 328
8.2.2　Majorana 旋量场 . . . 333
8.2.3　旋量场的 P 变换 . . . 335
8.2.4　旋量场的 T 变换 . . . 338
8.3　矢量场的分立变换 . . . 341
8.3.1　有质量矢量场的 C、P、T 变换 . . . 341
8.3.2　电磁场的 C、P、T 变换 . . . 345
8.4　CP 变换 . . . 346
8.5　C、P、T 对称性 . . . 347
8.6　Weyl、Dirac 和 Majorana 旋量 . . . 352
8.6.1　左手和右手 Weyl 旋量 . . . 352
8.6.2　Dirac 和 Majorana 旋量场的分解 . . . 356
8.7　Majorana 旋量场相关 Feynman 规则 . . . 361
8.7.1　拉氏量和 CP 对称性 . . . 361
8.7.2　Feynman 规则 . . . 362
8.7.3　应用 . . . 369
习题 . . . 373

参考文献 **377**

附录 **A**　英汉对照 **379**

第 1 章　预备知识

量子场论 (quantum field theory) 与**粒子物理** (particle physics) 密切相关。粒子物理研究物质的基本结构和基本相互作用,组成物质的基本单元是**粒子** (particle)。自然界中存在 4 种基本相互作用，即**引力相互作用** (gravitational interaction)、**电磁相互作用** (electromagnetic interaction)、**强相互作用** (strong interaction) 和**弱相互作用** (weak interaction)，支配着基本粒子的运动和转化。

基本粒子指尚未发现内部结构的粒子。目前已发现 3 代基本**费米子** (fermion)，每一代包含带电**轻子** (lepton)、**中微子** (neutrino，即中性轻子)、下型**夸克** (quark)、上型夸克各一种。第 1 代基本费米子包括电子 (e)、电子型中微子 (ν_e)、下夸克 (d) 和上夸克 (u)；第 2 代包括 μ 子 (μ)、μ 子型中微子 (ν_μ)、奇夸克 (s) 和粲夸克 (c)；第 3 代包括 τ 子 (τ)、τ 子型中微子 (ν_τ)、底夸克 (b) 和顶夸克 (t)。某代某种费米子与它在另一代中相对应的费米子具有相同的量子数,但质量不同。

夸克的种类也称为**味道** (flavor)，6 种味道的夸克 d、u、s、c、b、t 具有不同的质量。每一味夸克都具有 3 种**颜色** (color)，同味异色的夸克具有相同质量，严格构成颜色三重态，与描述强相互作用的**量子色动力学**有关。除 3 代中微子以外，其它基本费米子都具有电荷 (electric charge)，参与电磁相互作用，相应的理论称为**量子电动力学**。所有基本费米子都参与弱相互作用，它与电磁相互作用统一由**电弱规范理论**描述，这个理论包含了量子电动力学。电弱规范理论和量子色动力学统称为**标准模型** (standard model)。

在标准模型中，费米子的相互作用由一些基本**玻色子** (boson) 传递。传递夸克间强相互作用的规范玻色子称为**胶子** (gluon)，传递电磁相互作用的规范玻色子是**光子** (photon)，传递弱相互作用的规范玻色子是 $W^{\pm}$ 和 Z^0 玻色子。此外，还存在一种 **Higgs 玻色子**，它与电弱规范对称性的自发破缺及基本粒子的质量起源有关。

标准模型是在研究基本粒子如何参与电磁、强、弱相互作用的过程中建立起来的，它的理论基础就是量子场论。在粒子物理理论和实验发展的过程中，量子场论起着极为关键的作用。反过来，粒子物理研究也极大地促进了量子场论的发展。

1.1　量子场论的必要性

量子力学是描述微观世界的物理理论。然而，非相对论性量子力学的适用范围有限，不能正确地描述伴随着高速粒子产生和湮灭的相对论性系统。为了合理而自洽地描述这样的系统，需

要用到量子场论，它结合了量子力学、相对性原理和**场** (field) 的概念。

在量子力学的基础课程中，量子化的对象常常是由**粒子**组成的动力学系统。如果对相对论性的粒子作类似的量子化，会遇到一些困难。1926 年，**Klein-Gordon 方程** [1, 2] 被提出来描述单个粒子的相对论性运动，它是第一个相对论性的波函数方程，形式为

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(\mathbf{x},t)=(-\hbar^2c^2\nabla^2+m^2c^4)\Psi(\mathbf{x},t). \tag{1.1}$$

它给出的自由粒子能量是

$$E=\pm\sqrt{|\mathbf{p}|^2c^2+m^2c^4}\,, \tag{1.2}$$

其中 $\mathbf{p}$ 为粒子动量，m 为粒子静止质量。可见，能量 E 可以为正，取值范围为 $mc^2\leq E<\infty$；也可以为负，取值范围为 $-\infty<E\leq mc^2$。即使粒子的初始能量为正，也可以通过跃迁到负能态而改变能量的符号。能量可取负无穷大意味着稳定的基态不存在，这在物理上是不可接受的，称为**负能量困难**。另一方面，通过 Klein-Gordon 方程构造符合概率守恒的连续性方程，则应该将粒子在空间中的概率密度定义为

$$\rho=\frac{\mathrm{i}\hbar}{2mc^2}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t}-\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\Psi\right). \tag{1.3}$$

然而，这样定义的 ρ 不总是正的，有可能在一些空间区域中取负值，不符合物理上对概率密度的要求。这就是**负概率困难**。

Klein-Gordon 方程出现负概率困难的根源在于方程中含有波函数对时间的二阶导数。Paul Dirac 于 1928 年提出的 **Dirac 方程** [3] 克服了这个问题，它只包含对时间的一阶导数，且具有 Lorentz 协变性。Dirac 方程描述自旋 (spin) 为 1/2 的粒子，一开始是用来描述电子 (electron) 的。Dirac 方程能够保证概率密度正定和概率守恒。但是，负能量困难仍然存在。

为了解决负能量困难，Dirac 提出真空 (vacuum) 是所有 $E<0$ 的态都被填满而所有 $E>0$ 的态都为空的状态 [4]。这样一来，*Pauli* 不相容原理会阻止一个 $E>0$ 的电子跃迁到 $E<0$ 的态，因而激发态电子的能量总是正的。如果负能海中缺失一个带有电荷 $-e$ 和能量 $-|E|$ 的电子，即产生一个空穴 (hole)，则空穴的行为等价于一个带有电荷 $+e$ 和能量 $+|E|$ 的“反粒子 (antiparticle)”，称为**正电子** (positron)。正电子在 1932 年被 Carl Anderson 发现 [5]。

但是，Dirac 的空穴理论仍然面临一些困难，比如，为何没有观测到无穷多个负能电子具有的无穷大电荷密度所引起的电场？另一方面，Dirac 方程一开始作为描述单个粒子波函数的方程提出来，但 Dirac 的解释却包含了无穷多个粒子。而且，像光子和 α 粒子这样具有整数自旋的玻色子，不满足 Pauli 不相容原理，空穴理论无法解决它们的负能量困难。此外，Dirac 方程只能描述自旋 1/2 的粒子，不能解决整数自旋粒子的负概率困难。

用相对论性的波函数方程描述单个粒子会遇到这么多困难，是否意味着处理这些问题的基础本身就不正确呢？确实是这样的。量子力学的一条基本原理是：观测量由物理 Hilbert 空间中的厄米算符 (Hermitian operator) 描写。然而，**时间**显然是一个观测量，却没有用一个厄米算符来描写它。在 Schrödinger 绘景 (picture) 中，描述系统的量子态时可以让态依赖于一个时间参数 t，这是时间的概念进入量子力学的方式，但并没有假定这个参数是某个厄米算符的本征值。

另一方面，粒子的空间位置 $\mathbf{x}$ 则是位置算符 $\hat{\mathbf{x}}$ 的本征值。可见，在量子力学中，对时间和空间的处理方式是完全不同的。而在狭义相对论中，Lorentz 对称性将两者混合起来。因此，在结合量子力学与狭义相对论的过程中出现困难，也是正常的。

那么，如何在量子力学中平等地处理时间和空间呢？一种途径是将时间提升为一个厄米算符，但这样做在实际操作中非常困难。另一种途径是将空间位置降格为一个参数，不再由厄米算符描写。这样，我们可以在每个空间点 $\mathbf{x}$ 处定义一个算符 $\hat{\Phi}(\mathbf{x})$，所有这些算符的集合称为**量子场** (quantum field)。在 Heisenberg 绘景中，量子场算符还依赖于时间 t，

$$\hat{\Phi}(\mathbf{x},t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar}\hat{\Phi}(\mathbf{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar}. \tag{1.4}$$

如此，量子化的对象变成是由依赖于时空坐标的场组成的动力学系统，这就是**量子场论**。这里的量子算符用 $\hat{}$ 符号标记，为了简化记号，后面将省略 $\hat{}$ 符号。

在量子场论中，前面提到的困难都可以得到解决。现在，Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程这样的相对论性方程描述的是自由量子场的运动。真空是量子场的基态，包含粒子的态则是激发态，激发态可以包含任意多个粒子。量子场论平等地描述正粒子和反粒子，由正反粒子的产生算符和湮灭算符表达出来的哈密顿量是正定的，不再出现负能量困难。不再将 ρ 解释成概率密度，而将它解释为单位体积内正粒子数与反粒子数之差，因而不存在负概率困难。

1.2 自然单位制

量子场论是结合量子力学和相对论的理论，因而时常出现约化 Planck 常数 $\hbar$ 和光速 c，这一点可以从上一节的几个公式中看出来。于是，为了简化表述，通常采用**自然单位制**，取

$$\hbar=c=1. \tag{1.5}$$

从而，Klein-Gordon 方程 (1.1) 化为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2+m^2\right)\Psi(\mathbf{x},t)=0. \tag{1.6}$$

根据 $1=c=2.998\times10^{10}\ \mathrm{cm/s}$，有

$$1\ \mathrm{s}=2.998\times10^{10}\ \mathrm{cm}. \tag{1.7}$$

利用转换关系

$$1=\hbar=6.582\times10^{-22}\ \mathrm{MeV\cdot s},\quad 1=\hbar c=1.973\times10^{-11}\ \mathrm{MeV\cdot cm}, \tag{1.8}$$

可得

$$1\ \mathrm{s}^{-1}=6.582\times10^{-22}\ \mathrm{MeV},\quad 1\ \mathrm{cm}^{-1}=1.973\times10^{-11}\ \mathrm{MeV}, \tag{1.9}$$

故

$$1\ \mathrm{GeV}^{-1}=6.582\times10^{-25}\ \mathrm{s}=1.973\times10^{-14}\ \mathrm{cm}. \tag{1.10}$$

可见，在自然单位制中，速度没有量纲 (dimension)；长度量纲与时间量纲相同，是能量量纲的倒数；能量、质量和动量具有相同的量纲。可以将能量单位电子伏特 (eV) 视作上述有量纲物理量的基本单位。

精细结构常数 (fine-structure constant)

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137.036} \tag{1.11}$$

是没有量纲的，它的数值在任何单位制下都应该相同。因此，自然单位制不可能将 $\hbar$、c、ε_0 和 e 这四个常数同时归一化。在量子场论中，通常再取真空介电常数

$$\varepsilon_0 = 1, \tag{1.12}$$

同时可得真空磁导率 $\mu_0 = (\varepsilon_0 c^2)^{-1} = 1$，这样做其实是采取了 Heaviside-Lorentz 单位制。从而，不同于 Gauss 单位制，真空 Maxwell 方程组中不会出现无理数 4π，

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \rho, \quad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \quad \nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla\times\mathbf{B} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}. \tag{1.13}$$

此处的单位制称为**有理化**的自然单位制。现在，精细结构常数可以简便地表达为 $\alpha = e^2/(4\pi)$，而单位电荷量

$$e = \sqrt{4\pi\alpha} = 0.3028 \tag{1.14}$$

是没有量纲的；4π 因子会出现在 Coulomb 定律中，点电荷 Q 的 Coulomb 势表达成

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi r}. \tag{1.15}$$

1.3 Lorentz 变换和 Lorentz 群

描述高速运动的系统需要用到**狭义相对论** [6]，它的基本原理如下。

(1) **光速不变原理**：在任意惯性参考系中，光速的大小不变。

(2) **狭义相对性原理**：在任意惯性参考系中，物理定律具有相同的形式。

任意两个惯性参考系的直角坐标由 **Lorentz 变换** [7] 联系起来。

如图 1.1 所示，设惯性坐标系 O' 沿着惯性坐标系 O 的 x 轴方向以速度 β 匀速运动，事件 P 在 O 系中的坐标为 (t, x, y, z)，在 O' 系中的坐标为 (t', x', y', z')，则 Lorentz 变换的形式是

$$t' = \gamma(t - \beta x), \quad x' = \gamma(x - \beta t), \quad y' = y, \quad z' = z, \tag{1.16}$$

其中 Lorentz 因子 $\gamma \equiv (1-\beta^2)^{-1/2}$。这种 Lorentz 变换称为沿 x 轴方向的**增速** (boost) 变换。在此变换下，有

$$t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = \gamma^2(t-\beta x)^2 - \gamma^2(x-\beta t)^2 - y^2 - z^2$$

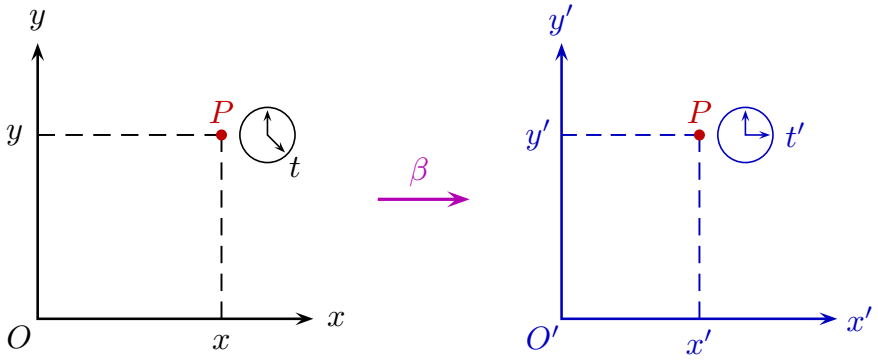


图 1.1: 惯性系 O' 相对于惯性系 O 沿 x 轴方向以速度 β 作匀速运动时，事件 P 在两个惯性系中的坐标。

$$= \frac{1}{1-\beta^2}(t^2+\beta^2x^2-2\beta xt-x^2-\beta^2t^2+2\beta xt)-y^2-z^2 = t^2-x^2-y^2-z^2. \quad (1.17)$$

可见，$t^2-x^2-y^2-z^2$ 在 Lorentz 变换下不变，是一个 **Lorentz 不变量** (invariant)。Lorentz 不变量在不同惯性系中具有相同的值，这是 Lorentz 变换对应的对称性，称为 **Lorentz 对称性**。

将时间坐标和空间坐标结合起来，构成四维 **Minkowski 时空** [8]，坐标记为

$$x^\mu = (x^0,x^1,x^2,x^3) = (t,x,y,z) = (x^0,\mathbf{x}), \quad \text{其中 } \mu = 0,1,2,3. \quad (1.18)$$

上式中四种记法是等价的。$\mathbf{x} = (x,y,z)$ 是一个三维空间矢量，用粗直体表示。x^μ 是一个**逆变** (contravariant) 的 Lorentz 四维**矢量** (vector)，“逆变”指它的**指标** (index) μ 写在右上角。受到 (1.17) 式的启发，可以定义 Lorentz 不变的**内积**[1]

$$x^2 \equiv x\cdot x \equiv (x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2 = (x^0)^2-|\mathbf{x}|^2. \quad (1.19)$$

引入对称的 **Minkowski 度规** (metric)

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

最右边的表达式是度规的矩阵形式，将 $g_{\mu\nu}$ 中两个指标 μ 和 ν 分别当作行和列的编号，空白的矩阵元是零。也就是说，$g_{00}=+1$，$g_{11}=g_{22}=g_{33}=-1$，其它分量都是 0。从而，把内积 (1.19) 化为求和式，

$$x^2 = (x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu \equiv g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu. \quad (1.21)$$

第二步采用了 **Einstein 求和约定：不写出求和符号，重复的指标即表示求和**。除非特别指出，后面默认使用这个约定。在上式中，用同个字母表示的指标分别在上标和下标重复出现并求和，这称为**缩并** (contraction)，是 Lorentz 不变量的特点。

[1] (1.19) 式在记号上有点混乱，第一个 x^2 是内积的记号，而第二个 x^2 代表第 2 个空间坐标，需注意区分。

为了进一步简化记号，定义**协变** (covariant) 的 Lorentz 四维矢量

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = (x^0, -\mathbf{x}). \tag{1.22}$$

“协变”指的是指标 μ 写在右下角。于是，内积 x^2 的表达式 (1.21) 简化为

$$x^2 = x^\mu x_\mu. \tag{1.23}$$

(1.22) 式可以看成用度规 $g_{\mu\nu}$ 通过缩并将逆变矢量 x^ν 的指标降下来，变成协变矢量 x_μ。从方阵的角度看，度规 $g_{\mu\nu}$ 的逆为

$$g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \tag{1.24}$$

满足

$$g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \delta^\mu{}_\nu, \tag{1.25}$$

其中 **Kronecker δ 符号**定义为

$$\delta^a{}_b = \delta_a{}^b = \delta^{ab} = \delta_{ab} = \begin{cases} 1, & a = b, \\ 0, & a \neq b. \end{cases} \tag{1.26}$$

Minkowski 度规 $g_{\mu\nu}$ 与它的逆 $g^{\mu\nu}$ 具有相同的矩阵形式，但更一般的度规可能与它的逆不同。将 (1.22) 式 $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu$ 两边都乘以 $g^{\sigma\mu}$，对 μ 缩并，得

$$g^{\sigma\mu}x_\mu = g^{\sigma\mu}g_{\mu\nu}x^\nu = \delta^\sigma{}_\nu x^\nu = x^\sigma, \tag{1.27}$$

这相当于用 $g^{\sigma\mu}$ 通过缩并将协变矢量 x_μ 的指标升起来，变成逆变矢量 x^σ。可见，逆变矢量与协变矢量是一一对应的，是对同一个 Lorentz 矢量的两种等价描述。

利用 Kronecker 符号的定义 (1.26)、(1.25) 式和度规的对称性，推出

$$g^{\mu\nu} = g^{\mu\rho}\delta^\nu{}_\rho = g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}g_{\sigma\rho} = g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}g_{\rho\sigma}, \tag{1.28}$$

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}\delta^\rho{}_\nu = g_{\mu\rho}g^{\rho\sigma}g_{\sigma\nu} = g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}g^{\rho\sigma}. \tag{1.29}$$

这两条式子表明，度规也可以用来对度规自身的指标进行升降。

将 Lorentz 增速变换 (1.16) 表达成矩阵与列矢量的乘积形式，

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \tag{1.30}$$

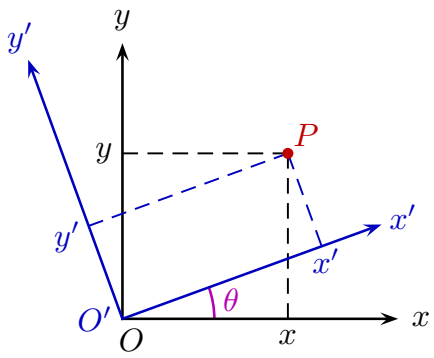


图 1.2: 惯性系 O' 相对于惯性系 O 绕 z 轴转动 θ 角时，事件 P 在两个惯性系中的坐标。

用四维矢量记号改写为

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}, \tag{1.31}$$

其中

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.32}$$

注意，将 $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ 视作矩阵时，偏左的指标 μ 表示行的编号，偏右的指标 ν 表示列的编号。$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ 的特点是保持内积 $x^2 = x^{\mu}x_{\mu}$ 不变，从而使 $x^{\mu}x_{\mu}$ 在不同惯性系中具有相同的值。我们将 $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ 推广为**所有保持 $x^{\mu}x_{\mu}$ 不变的线性变换**，称为（齐次）**Lorentz 变换**。由于

$$x'^2 = g_{\mu\nu}x'^{\mu}x'^{\nu} = g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}x^{\alpha}x^{\beta}, \quad x^2 = g_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}, \tag{1.33}$$

要得到 $x'^2 = x^2$，Lorentz 变换 $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ 必须满足**保度规条件**

$$g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta} = g_{\alpha\beta}. \tag{1.34}$$

空间旋转变换保持 $|\mathbf{x}|^2$ 不变，由 (1.19) 式可知，这种变换也属于 Lorentz 变换。如图 1.2 所示，惯性系 O' 相对于惯性系 O 绕 z 轴转动 θ 角，事件 P 在两个惯性系中的坐标满足

$$t' = t, \quad x' = x\cos\theta + y\sin\theta, \quad y' = -x\sin\theta + y\cos\theta, \quad z' = z. \tag{1.35}$$

因而相应的 Lorentz 变换矩阵为

$$[R_z(\theta)]^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\theta & \sin\theta & \\ & -\sin\theta & \cos\theta & \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.36}$$

可以验证它满足保度规条件 (1.34)。

$\delta^\mu{}_\nu$ 的矩阵形式是单位矩阵 $\mathbf{1}$，是一个特殊的 Lorentz 变换，使得 $x'^\mu = \delta^\mu{}_\nu x^\nu = x^\mu$，即 x^μ 在这个变换下不变。可见，$\delta^\mu{}_\nu$ 是**恒等变换**。对于任意 Lorentz 变换 $\Lambda^\alpha{}_\beta$，引入

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho \equiv g^{\mu\beta} g_{\rho\alpha} \Lambda^\alpha{}_\beta, \tag{1.37}$$

那么，由 (1.34) 和 (1.25) 式得

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho \Lambda^\rho{}_\nu = g^{\mu\beta} g_{\alpha\rho} \Lambda^\alpha{}_\beta \Lambda^\rho{}_\nu = g^{\mu\beta} g_{\beta\nu} = \delta^\mu{}_\nu. \tag{1.38}$$

上式表明，先作 Λ 变换，再作 Λ^{-1} 变换，相当于作恒等变换。也就是说，由 (1.37) 式定义的 Λ^{-1} 是 Λ 的**逆变换**，因而也是一个 Lorentz 变换。在这些记号下，协变矢量 x_μ 的 Lorentz 变换可以表达为

$$x'_\mu = g_{\mu\nu} x'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho x^\rho = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho g^{\rho\sigma} x_\sigma = x_\sigma (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\mu. \tag{1.39}$$

Λ^{-1} 既然是一个 Lorentz 变换，必定满足保度规条件

$$g_{\mu\nu} (\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha (\Lambda^{-1})^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}, \tag{1.40}$$

于是

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} &= g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} g_{\rho\sigma} = g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} g_{\mu\nu} (\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho (\Lambda^{-1})^\nu{}_\sigma = g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} g_{\mu\nu} g^{\mu\gamma} g_{\rho\delta} \Lambda^\delta{}_\gamma g^{\nu\phi} g_{\sigma\tau} \Lambda^\tau{}_\phi \\ &= \delta^\alpha{}_\delta \delta^\beta{}_\tau \delta^\gamma{}_\nu g^{\nu\phi} \Lambda^\delta{}_\gamma \Lambda^\tau{}_\phi = g^{\nu\phi} \Lambda^\alpha{}_\nu \Lambda^\beta{}_\phi. \end{aligned} \tag{1.41}$$

这给出了保度规条件 (1.34) 的等价形式

$$g^{\mu\nu} \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu = g^{\alpha\beta}. \tag{1.42}$$

将 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 视作矩阵 Λ，则其转置矩阵 Λ^{T} 的分量满足 $(\Lambda^{\mathrm{T}})_\nu{}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu$，由保度规条件 (1.34) 得

$$g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = (\Lambda^{\mathrm{T}})_\alpha{}^\mu g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta. \tag{1.43}$$

在最右边的表达式里，重复的相邻指标发生缩并，对应于矩阵乘法。用 $\mathbf{g}$ 代表度规矩阵，将上式写成矩阵等式

$$\Lambda^{\mathrm{T}} \mathbf{g} \Lambda = \mathbf{g}. \tag{1.44}$$

相应的行列式为 $\det(\mathbf{g}) = \det(\Lambda^{\mathrm{T}}) \det(\mathbf{g}) \det(\Lambda) = \det(\mathbf{g}) [\det(\Lambda)]^2$，因此 $[\det(\Lambda)]^2 = 1$，故

$$\det(\Lambda) = \pm 1. \tag{1.45}$$

Lorentz 坐标变换 $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ 的 Jacobi 行列式是

$$\mathcal{J} = \det \left[\frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} \right] = \det \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right) = \det(\Lambda), \tag{1.46}$$

于是 Lorentz 变换将体积元 $\mathrm{d}^4 x$ 变换为

$$\mathrm{d}^4 x' = |\mathcal{J}| \mathrm{d}^4 x = |\det(\Lambda)| \, \mathrm{d}^4 x = \mathrm{d}^4 x. \tag{1.47}$$

可见，Minkowski 时空的体积元 d^4x 是 Lorentz 不变的。

可以用 $\det(\Lambda)$ 的值给 Lorentz 变换分类，$\det(\Lambda)=+1$ 的变换称为**固有** (proper) Lorentz 变换，$\det(\Lambda)=-1$ 的则是**非固有** (improper) Lorentz 变换。此外，由保度规条件 (1.34) 得

$$1=g_{00}=g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{0}\Lambda^{\nu}{}_{0}=(\Lambda^{0}{}_{0})^2-\sum_{i=1}^{3}(\Lambda^{i}{}_{0})^2, \tag{1.48}$$

即

$$(\Lambda^{0}{}_{0})^2=1+\sum_{i=1}^{3}(\Lambda^{i}{}_{0})^2\geq 1, \tag{1.49}$$

故 $\Lambda^{0}{}_{0}\geq+1$ 或 $\Lambda^{0}{}_{0}\leq-1$。$\Lambda^{0}{}_{0}\geq+1$ 的 Lorentz 变换称为**保时向** (orthochronous) Lorentz 变换，$\Lambda^{0}{}_{0}\leq-1$ 的称为**反时向** (antichronous) Lorentz 变换。

在数学上，对称性由**群论**描述。对称变换的集合称为**群** (group)，群元素具有乘法，两个群元素的乘积就是两次对称变换相继作用，满足以下四个条件。

(1) 群对乘积具有*封闭性*，即群 G 中任意两个群元 g_1 和 g_2 的乘积仍属于此群，

$$g_1g_2\in G,\quad \forall g_1,g_2\in G. \tag{1.50}$$

(2) 群乘法满足*结合律*，

$$g_1(g_2g_3)=(g_1g_2)g_3,\quad \forall g_1,g_2,g_3\in G. \tag{1.51}$$

(3) 群 G 中必有一个*恒元* e，对应于恒等变换，它与任一群元 g 的乘积仍为 g，

$$eg=ge=g,\quad \forall g\in G. \tag{1.52}$$

(4) 任一群元 g 都可以在群 G 中找到一个*逆元* g^{-1}，它对应于逆变换，两者之积为恒元，

$$\forall g\in G,\quad \exists g^{-1}\in G,\quad \text{使得 } g^{-1}g=gg^{-1}=e. \tag{1.53}$$

在线性代数中，矩阵具有乘法，因而可逆方阵能够依照自身乘法关系构成群，即**矩阵群**。

群乘法讲究运算次序，g_1g_2 不一定等于 g_2g_1，也就是说，*交换律*不一定成立。满足交换律的群称为 **Abel 群**，不满足的称为**非 Abel 群**。如果群 G 的子集 H 中的元素依照原来的乘法规则也满足群的四个条件，则称 H 是 G 的**子群** (subgroup)，记作 $H<G$。

满足

$$O^{\mathrm{T}}O=OO^{\mathrm{T}}=\mathbf{1} \tag{1.54}$$

的实方阵 O 称为**实正交矩阵** (real orthogonal matrix)。所有 N 阶实正交矩阵构成**正交群** $\mathrm{O}(N)$。对 (1.54) 式取行列式，得 $1=\det(O^{\mathrm{T}})\det(O)=[\det(O)]^2$。可见，实正交矩阵 O 的行列式为

$$\det(O)=\pm1. \tag{1.55}$$

由 $\det(O)=1$ 的 N 阶实正交矩阵 O 构成的群称为**特殊正交群** $\mathrm{SO}(N)$。显然，$\mathrm{SO}(N)<\mathrm{O}(N)$。非 Abel 群 SO(3) 描述三维空间中的所有旋转变换，称为**空间旋转群**。Abel 群 SO(2) 描述二维平面上的所有旋转变换，或者说，描述绕某条固定轴的旋转变换，如 $R_z(\theta)$，因而 $\mathrm{SO}(2)<\mathrm{SO}(3)$。

满足

$$U^\dagger U=UU^\dagger=\mathbf{1} \tag{1.56}$$

的复方阵 U 称为**幺正矩阵** (unitary matrix)。所有 N 阶幺正矩阵构成**幺正群** $\mathrm{U}(N)$。对 (1.56) 式取行列式，得 $1=\det(U^\dagger)\det(U)=[\det(U)]^*\det(U)=|\det(U)|^2$。可见，幺正矩阵 U 的行列式满足

$$|\det(U)|=1. \tag{1.57}$$

由 $\det(U)=1$ 的 N 阶幺正矩阵 U 构成的群称为**特殊幺正群** $\mathrm{SU}(N)$。显然，$\mathrm{SU}(N)<\mathrm{U}(N)$。

所有 Lorentz 变换构成 **Lorentz 群**，它是非 Abel 群。保度规条件 $\Lambda^{\mathrm{T}}\mathbf{g}\Lambda=\mathbf{g}$ 是正交条件 (1.54) 推广到 1 个时间维度和 3 个空间维度时的形式，于是将 Lorentz 群记为 $\mathrm{O}(1,3)$。O(3) 群对应于 $\mathrm{O}(1,3)$ 群的纯空间部分，因而 $\mathrm{O}(3)<\mathrm{O}(1,3)$。所有固有 Lorentz 变换构成**固有 Lorentz 群**，记作 $\mathrm{SO}(1,3)$，显然 $\mathrm{SO}(1,3)<\mathrm{O}(1,3)$。

Lorentz 变换可以用一组连续变化的参数（如 β、θ 等）来描述，因而是一种**连续变换**，所以 Lorentz 群是一个**连续群**，参数的变化区域称为**群空间**。群空间中的一个点就是一个群元。如果群空间中的任意两点可以通过一条曲线连接起来，那么群空间是**连通**的，称相应的群为**简单连续群**，否则称为**混合连续群**。

Lorentz 群是一个混合连续群，整个群空间不是连通的，具有四个连通分支，如图 1.3 所示，分别是固有保时向分支 $[\det(\Lambda)=+1$ 且 $\Lambda^0{}_0\geq+1]$、固有反时向分支 $[\det(\Lambda)=+1$ 且 $\Lambda^0{}_0\leq-1]$、非固有保时向分支 $[\det(\Lambda)=-1$ 且 $\Lambda^0{}_0\geq+1]$ 和非固有反时向分支 $[\det(\Lambda)=-1$ 且 $\Lambda^0{}_0\leq-1]$，四个分支之间互不连通。恒元（即恒等变换）在固有保时向分支里，这个分支是 $\mathrm{SO}(1,3)$ 的子群，称为**固有保时向 Lorentz 群**，记作 $\mathrm{SO}^\uparrow(1,3)$，它包含物理上联系惯性参考系的所有 Lorentz 变换。*Lorentz 不变量*通常指的是在固有保时向 Lorentz 变换下不变的量。归纳起来，存在子群从属关系 $\mathrm{SO}(2)<\mathrm{SO}(3)<\mathrm{SO}^\uparrow(1,3)<\mathrm{SO}(1,3)<\mathrm{O}(1,3)$。

这里引入两个特殊的 Lorentz 变换。定义**宇称** (parity) 变换为

$$\mathcal{P}^\mu{}_\nu=(\mathcal{P}^{-1})^\mu{}_\nu=\begin{pmatrix}+1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}, \tag{1.58}$$

它是非固有保时向的，亦称为**空间反射** (space inversion) 变换。它的作用是让所有空间分量反向。定义**时间反演** (time reversal) 变换为

$$\mathcal{T}^\mu{}_\nu=(\mathcal{T}^{-1})^\mu{}_\nu=\begin{pmatrix}-1&&&\\&+1&&\\&&+1&\\&&&+1\end{pmatrix}, \tag{1.59}$$

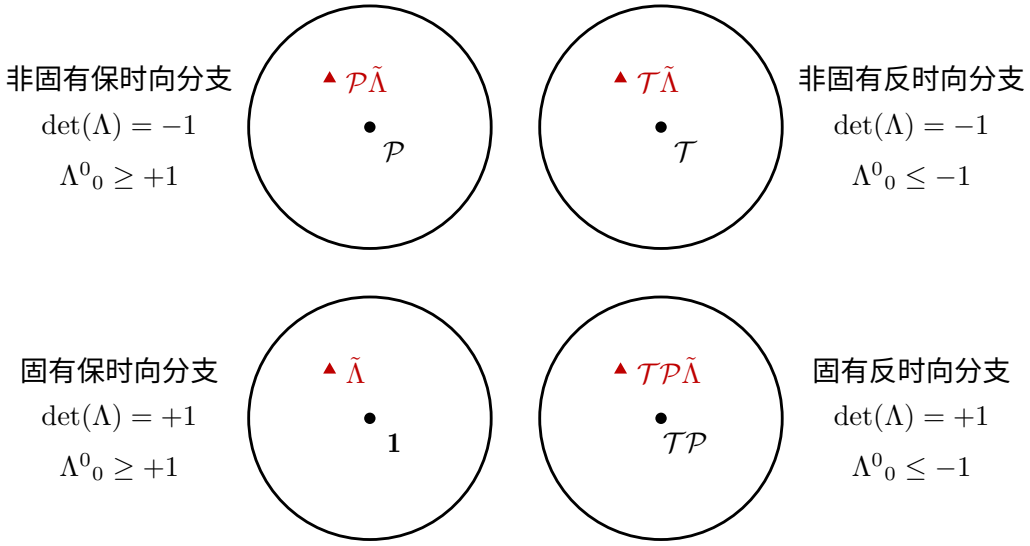


图 1.3: Lorentz 群的四个连通分支示意图。$\mathbf{1}$、$\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{T}$ 分别代表恒等变换、宇称变换和时间反演变换，$\tilde{\Lambda}$ 是固有保时向分支中的任意元素。

它是非固有反时向的，它的作用是让时间分量反向。对于固有保时向 Lorentz 群中的任意元素 $\tilde{\Lambda}$，乘上宇称变换或(和)时间反演变换得到 $\mathcal{P}\tilde{\Lambda}$、$\mathcal{T}\tilde{\Lambda}$ 和 $\mathcal{T}\mathcal{P}\tilde{\Lambda}$，它们分别属于 Lorentz 群的另外三个分支。

1.4 Lorentz 矢量

如果一些 m 阶方阵的乘法关系与群 G 中元素的乘法关系完全相同，就可以用这些矩阵来表示 G，这些矩阵构成了群 G 的一个 m 维**线性表示** (linear representation) $D(G)$。$D(G)$ 中的一个矩阵至少应该对应于 G 中的一个群元，可以对应于 G 中的多个群元，数学上称 G 与 $D(G)$ **同态** (homomorphism)，记作 $G \sim D(G)$，如图 1.4 所示。具体来说，对于群 G 中任意群元 g_1 和 g_2，表示 $D(G)$ 中相应的表示矩阵 $D(g_1)$ 和 $D(g_2)$ 满足**同态关系**

$$D(g_2 g_1) = D(g_2)D(g_1). \tag{1.60}$$

利用群的线性表示，可以将对称变换视作矩阵，将变换作用的态视作列矢量。

取群中所有元素的 1 维表示矩阵为 1，就构成了群的**恒等表示**，也称为*平庸表示*。如果群 G 中的每个群元一一对应于表示 $D(G)$ 中的每个矩阵，则 G 与 $D(G)$ **同构** (isomorphism)，记作 $G \cong D(G)$，此时称 $D(G)$ 是 G 的**忠实表示** (faithful representation)。如果 $D(G)$ 中所有矩阵都是幺正的，则称 $D(G)$ 是**幺正表示**。矩阵群本身就是自己的一个表示，称为*自身表示*，也称为**基础表示**。

如果群 G 中任意群元 g 在维度相同的两个线性表示 $D_1(G)$ 和 $D_2(G)$ 中的表示矩阵 $D_1(g)$ 和 $D_2(g)$ 存在同样的相似变换关系，即

$$D_2(g) = S^{-1} D_1(g) S, \quad \forall g \in G, \tag{1.61}$$

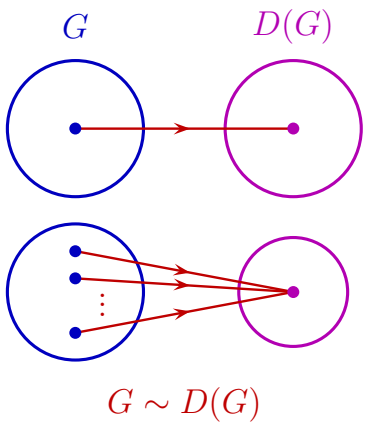


图 1.4: 群 G 与线性表示 $D(G)$ 同态示意图。上方的图表示一一对应，即同构；下方的图表示多一对应。

则称这两个表示是**等价**的。等价表示是在表示空间中取不同的基底得到的，没有本质上的差别。如果表示 $D(G)$ 的每个表示矩阵 $D(g)$ 都可以通过同一个相似变换化为相同形式的阶梯矩阵，

$$S^{-1}D(g)S = \begin{pmatrix} D_1(g) & M(g) \\ & D_2(g) \end{pmatrix}, \quad \forall g \in G, \tag{1.62}$$

其中 $D_1(g)$ 和 $D_2(g)$ 是方阵，$M(g)$ 可以是零矩阵，则称 $D(G)$ 是**可约表示**，否则称 $D(G)$ 为**不可约表示** (irreducible representation)。可以证明，集合 $\{D_1(g)\}$ 和 $\{D_2(g)\}$ 分别构成群 G 的线性表示。可约表示能够通过不可约表示构造出来，因此研究群表示的关键在于找到所有的不等价不可约表示。

在上一节中，我们已经用矩阵的形式表示过 Lorentz 变换 $\Lambda^\mu{}_\nu$，可见 $\{\Lambda^\mu{}_\nu\}$ 自然而然地构成了 Lorentz 群的一个 4 维线性表示，即基础表示。它是一个不可约忠实表示，称为**矢量表示**，因此 Lorentz 矢量 x^ν 可以看作 Lorentz 变换 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 所作用的态。

一般地，**Lorentz 矢量** A^μ 在定义上要求它在固有保时向 Lorentz 变换下满足

$$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu. \tag{1.63}$$

类似于 (1.39) 式，逆变矢量 A^μ 对应的协变矢量 $A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu$ 的固有保时向 Lorentz 变换为

$$A'_\mu = A_\nu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu. \tag{1.64}$$

任意两个 Lorentz 矢量 $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$ 和 $B^\mu = (B^0, \mathbf{B})$ 的内积定义为

$$A \cdot B \equiv A^\mu B_\mu = g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu = A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \tag{1.65}$$

由 (1.38) 式可知，它是固有保时向 *Lorentz* 变换的不变量，

$$A' \cdot B' = A'^\mu B'_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu B_\rho (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu = A^\nu B_\rho \delta^\rho{}_\nu = A^\nu B_\nu = A \cdot B. \tag{1.66}$$

像这样的不变量称为 **Lorentz 标量** (scalar)。由于度规 $g_{\mu\nu}$ 的对角元有正有负，Lorentz 矢量 A^μ 的自我内积 $A^2 = (A^0)^2 - |\mathbf{A}|^2$ 的符号不是确定的，可以分为三类。

(1) 若 $A^2>0$，即 $|A^0|>|\mathbf{A}|$，则称 A^μ 为**类时** (timelike) 矢量。

(2) 若 $A^2<0$，即 $|A^0|<|\mathbf{A}|$，则称 A^μ 为**类空** (spacelike) 矢量。

(3) 若 $A^2=0$，即 $|A^0|=|\mathbf{A}|$，则称 A^μ 为**类光** (lightlike) 矢量。

由于 A^2 是 Lorentz 不变量，不能通过 Lorentz 变换改变 A^μ 的类型。

以上讨论的是广义的 Lorentz 矢量，可通过宇称变换性质进一步将它们分为两种矢量。第一种矢量的宇称变换为

$$A'^\mu=\mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu, \tag{1.67}$$

称为**极矢量** (polar vector)，但经常直接简称为**矢量**，即狭义的矢量，其空间分量的宇称变换为 $\mathbf{A}'=-\mathbf{A}$。时空坐标 x^μ 就是一个极矢量。另一种矢量的宇称变换为

$$A'^\mu=-\mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu, \tag{1.68}$$

称为赝矢量，或者**轴矢量** (axial vector)，其空间分量的宇称变换为 $\mathbf{A}'=\mathbf{A}$。在经典力学中，空间坐标 $\mathbf{x}$ 和动量 $\mathbf{p}$ 都是极矢量，而角动量 $\mathbf{L}=\mathbf{x}\times\mathbf{p}$ 是轴矢量。在空间反射变换下，$\mathbf{x}'=-\mathbf{x}$，$\mathbf{p}'=-\mathbf{p}$，$\mathbf{L}'=\mathbf{x}'\times\mathbf{p}'=(-\mathbf{x})\times(-\mathbf{p})=\mathbf{L}$，与以上定义一致。

在狭义相对论中,自由质点的能量 E、动量 $\mathbf{p}$ 和(静止)质量 m 之间具有**色散关系** (dispersion relation)

$$E=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}. \tag{1.69}$$

可以用 E 和 $\mathbf{p}$ 组成一个 Lorentz 矢量

$$p^\mu=(E,\mathbf{p}), \tag{1.70}$$

称为**四维动量**。它是极矢量，自我内积为

$$p^2=p^\mu p_\mu=g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu=E^2-|\mathbf{p}|^2=m^2. \tag{1.71}$$

这是合理的，因为质量 m 在狭义相对论中是一个 Lorentz 不变量。p^μ 在 $m>0$ 时是类时矢量，在 $m=0$ 时是类光矢量。(1.71) 式称为**质壳** (mass shell) 条件，对应于四维动量空间中由质量 m 决定的三维双曲面(质壳)。

将对时空坐标的偏导数记为

$$\partial_\mu\equiv\frac{\partial}{\partial x^\mu}=\left(\frac{\partial}{\partial t},\nabla\right),\quad \partial^\mu\equiv\frac{\partial}{\partial x_\mu}=\left(\frac{\partial}{\partial t},-\nabla\right)=g^{\mu\nu}\partial_\nu, \tag{1.72}$$

则

$$\partial^\mu x^\nu=g^{\mu\rho}\partial_\rho x^\nu=g^{\mu\rho}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\rho}=g^{\mu\rho}\delta^\nu{}_\rho=g^{\mu\nu}. \tag{1.73}$$

上式中的指标始终是平衡的，因而这里关于时空导数指标位置的写法是合理的。对时空坐标作 Lorentz 变换 $x'^\mu=\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ 时，有 $x'_\mu=x_\rho(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu$，两边与 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 缩并，得 $\Lambda^\mu{}_\nu x'_\mu=x_\rho(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu\Lambda^\mu{}_\nu=x_\rho\delta^\rho{}_\nu$，即 $x_\nu=\Lambda^\mu{}_\nu x'_\mu$，故

$$\partial'^\mu=\frac{\partial}{\partial x'_\mu}=\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}=\Lambda^\mu{}_\nu\partial^\nu. \tag{1.74}$$

这是时空导数 ∂^μ 的 Lorentz 变换形式，它与 Lorentz 矢量的变换形式相同，因而可以将 ∂^μ 看作一个 Lorentz 矢量。相应地，∂_μ 的 Lorentz 变换是

$$\partial'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu. \tag{1.75}$$

定义 **d'Alembert 算符**

$$\partial^2 \equiv \partial^\mu \partial_\mu = \partial_0^2 - \nabla^2, \tag{1.76}$$

由保度规条件 (1.34) 得

$$\partial'^2 = g_{\mu\nu}\partial'^\mu \partial'^\nu = g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \partial^\rho \partial^\sigma = g_{\rho\sigma}\partial^\rho \partial^\sigma = \partial^2. \tag{1.77}$$

可见，∂^2 算符是 Lorentz 不变的。用它把 Klein-Gordon 方程 (1.6) 改写成紧凑的形式

$$(\partial^2 + m^2)\Psi(x) = 0, \tag{1.78}$$

其中 x 表示四维时空坐标。$\partial^2 + m^2$ 是 Lorentz 不变的，因此 Klein-Gordon 方程在不同惯性系中具有相同的形式，即具有 **Lorentz 协变性** (covariance)。

1.5 Lorentz 张量

Lorentz 张量 (tensor) 是 Lorentz 矢量的推广。一个 $p+q$ 阶的 (p,q) 型 **Lorentz 张量** $T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}$ 具有 p 个逆变指标和 q 个协变指标，并满足如下*固有保时向* Lorentz 变换规则：

$$T'^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} = \Lambda^{\mu_1}{}_{\rho_1}\cdots\Lambda^{\mu_p}{}_{\rho_p} T^{\rho_1\cdots\rho_p}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_q} (\Lambda^{-1})^{\sigma_1}{}_{\nu_1}\cdots(\Lambda^{-1})^{\sigma_q}{}_{\nu_q}. \tag{1.79}$$

这里的逆变指标和协变指标统称为 **Lorentz 指标**。完全用 Lorentz 张量表达出来的方程具有 *Lorentz 协变性*，在不同惯性系中具有相同的形式，从而满足狭义相对性原理。

Lorentz 标量是 0 阶 Lorentz 张量，不具有 Lorentz 指标；Lorentz 矢量是 1 阶 Lorentz 张量，具有 1 个 Lorentz 指标。Minkowski 度规 $g_{\mu\nu}$ 是一个 2 阶的 $(0,2)$ 型 Lorentz 张量，不过，它是常数，在任何惯性系中不变，Lorentz 变换规则就是保度规条件 (1.40)。由于 $\delta^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\rho \delta^\rho{}_\sigma (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\nu$，Kronecker 符号 $\delta^\mu{}_\nu$ 是一个 $(1,1)$ 型常数 Lorentz 张量。注意，虽然 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 具有两个指标，它却不是 Lorentz 张量。

用度规可以*升降*任意 Lorentz 张量的指标，从而改变张量的类型，不过，升降前后的两个 Lorentz 张量在物理意义上是等价的。比如，$T^{\mu\nu}{}_\rho = g_{\rho\sigma}T^{\mu\nu\sigma}$，用 $g_{\rho\sigma}$ 将 $(3,0)$ 型张量 $T^{\mu\nu\sigma}$ 降为 $(2,1)$ 型张量 $T^{\mu\nu}{}_\rho$。相应地，$T^{\mu\nu\rho} = g^{\rho\sigma}T^{\mu\nu}{}_\sigma$，用 $g^{\rho\sigma}$ 将 $(2,1)$ 型张量 $T^{\mu\nu}{}_\sigma$ 升为 $(3,0)$ 型张量 $T^{\mu\nu\rho}$。

对 (p,q) 型 Lorentz 张量的一个逆变指标和一个协变指标进行缩并，会得到一个 $(p-1,q-1)$ 型 Lorentz 张量。例如，由 (1.38) 式得

$$T'^{\mu\nu}{}_\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta T^{\alpha\beta}{}_\gamma (\Lambda^{-1})^\gamma{}_\mu = \Lambda^\nu{}_\beta T^{\alpha\beta}{}_\gamma \delta^\gamma{}_\alpha = \Lambda^\nu{}_\beta T^{\alpha\beta}{}_\alpha, \tag{1.80}$$

可见 $T^{\mu\nu}{}_{\mu}$ 是一个 Lorentz 矢量。可以通过缩并若干个 Lorentz 张量的所有指标来构造 Lorentz 不变量，这是因为在 Lorentz 变换下一对参加缩并的逆变指标和协变指标带来的 Λ 因子和 Λ^{-1} 因子总是相互抵消。比如，以下表达式都是 Lorentz 标量：

$$T^{\mu}{}_{\mu} = g_{\mu\nu}T^{\mu\nu}, \quad T^{\mu\nu}A_{\mu}B_{\nu}, \quad T^{\mu\nu}T_{\mu\nu}, \quad g_{\mu\sigma}T^{\mu\nu}{}_{\rho}T^{\sigma\rho}{}_{\nu}. \tag{1.81}$$

类似于 Lorentz 矢量，按宇称变换性质将 Lorentz 张量分成两种。第一种张量的宇称变换为

$$T'^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} = \mathcal{P}^{\mu_1}{}_{\rho_1}\cdots\mathcal{P}^{\mu_p}{}_{\rho_p}T^{\rho_1\cdots\rho_p}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_q}(\mathcal{P}^{-1})^{\sigma_1}{}_{\nu_1}\cdots(\mathcal{P}^{-1})^{\sigma_q}{}_{\nu_q}, \tag{1.82}$$

是狭义的**张量**。另一种张量的宇称变换为

$$T'^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} = -\mathcal{P}^{\mu_1}{}_{\rho_1}\cdots\mathcal{P}^{\mu_p}{}_{\rho_p}T^{\rho_1\cdots\rho_p}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_q}(\mathcal{P}^{-1})^{\sigma_1}{}_{\nu_1}\cdots(\mathcal{P}^{-1})^{\sigma_q}{}_{\nu_q}, \tag{1.83}$$

称为**赝张量** (pseudotensor)。因此，在宇称变换下，狭义的**标量** ϕ 满足 $\phi' = \phi$，而**赝标量** (pseudoscalar) φ 满足 $\varphi' = -\varphi$。

引入**四维 Levi-Civita 符号**

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1, & (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ 是 } (0,1,2,3) \text{ 的偶置换,} \\ -1, & (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ 是 } (0,1,2,3) \text{ 的奇置换,} \\ 0, & \text{其它情况。} \end{cases} \tag{1.84}$$

这里的置换 (permutation) 指的是将指标重新排列。调换两个指标的位置称为对换，奇置换通过奇数次对换得到，偶置换通过偶数次对换得到。这样定义出来的 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 是全反对称的，即关于任意两个指标反对称，如 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\rho\nu\mu\sigma} = -\varepsilon^{\sigma\nu\rho\mu}$。它的协变形式为

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}g_{\rho\gamma}g_{\sigma\delta}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}. \tag{1.85}$$

$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ 也是全反对称的，如

$$\varepsilon_{\nu\mu\rho\sigma} = g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}g_{\rho\gamma}g_{\sigma\delta}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}g_{\rho\gamma}g_{\sigma\delta}(-\varepsilon^{\beta\alpha\gamma\delta}) = -\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}. \tag{1.86}$$

根据定义，$\varepsilon_{0123} = g_{0\alpha}g_{1\beta}g_{2\gamma}g_{3\delta}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{00}g_{11}g_{22}g_{33}\varepsilon^{0123} = -\varepsilon^{0123}$，有

$$\varepsilon^{0123} = +1, \quad \varepsilon_{0123} = -1, \tag{1.87}$$

而且

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} -1, & (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ 是 } (0,1,2,3) \text{ 的偶置换,} \\ +1, & (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ 是 } (0,1,2,3) \text{ 的奇置换,} \\ 0, & \text{其它情况。} \end{cases} \tag{1.88}$$

从而

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 4!\,\varepsilon^{0123}\varepsilon_{0123} = -4!\,. \tag{1.89}$$

利用 Levi-Civita 符号可以把 Lorentz 变换矩阵的行列式 $\det(\Lambda)$ 按照行列式定义写成

$$\det(\Lambda)=\Lambda^0{}_\alpha\Lambda^1{}_\beta\Lambda^2{}_\gamma\Lambda^3{}_\delta\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}=-\frac{1}{4!}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta\Lambda^\rho{}_\gamma\Lambda^\sigma{}_\delta\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}. \tag{1.90}$$

于是

$$\varepsilon^{0123}=1=[\det(\Lambda)]^2=\det(\Lambda)\Lambda^0{}_\alpha\Lambda^1{}_\beta\Lambda^2{}_\gamma\Lambda^3{}_\delta\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}. \tag{1.91}$$

利用 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 的全反对称性质得到

$$\begin{aligned}\varepsilon^{1023}&=-\varepsilon^{0123}=-\det(\Lambda)\Lambda^0{}_\alpha\Lambda^1{}_\beta\Lambda^2{}_\gamma\Lambda^3{}_\delta\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\\&=-\det(\Lambda)\Lambda^1{}_\beta\Lambda^0{}_\alpha\Lambda^2{}_\gamma\Lambda^3{}_\delta\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}=\det(\Lambda)\Lambda^1{}_\beta\Lambda^0{}_\alpha\Lambda^2{}_\gamma\Lambda^3{}_\delta\varepsilon^{\beta\alpha\gamma\delta}.\end{aligned} \tag{1.92}$$

依此类推，可以证明

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}=\det(\Lambda)\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta\Lambda^\rho{}_\gamma\Lambda^\sigma{}_\delta\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}. \tag{1.93}$$

对于固有保时向 Lorentz 变换，$\det(\Lambda)=+1$，则

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}=\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta\Lambda^\rho{}_\gamma\Lambda^\sigma{}_\delta\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}. \tag{1.94}$$

对于宇称变换，$\det(\mathcal{P})=-1$，则

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}=-\mathcal{P}^\mu{}_\alpha\mathcal{P}^\nu{}_\beta\mathcal{P}^\rho{}_\gamma\mathcal{P}^\sigma{}_\delta\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}. \tag{1.95}$$

可见，$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 是一个 4 阶 Lorentz 赝张量。不过，它是常数，在任何惯性系中不变。

三维 Levi-Civita 符号定义为

$$\varepsilon^{ijk}=\begin{cases}+1, & (i,j,k)\text{ 是 }(1,2,3)\text{ 的偶置换},\\-1, & (i,j,k)\text{ 是 }(1,2,3)\text{ 的奇置换},\\0, & \text{其它情况},\end{cases} \tag{1.96}$$

满足

$$\varepsilon^{ijk}=\varepsilon^{0ijk},\quad \varepsilon^{123}=+1. \tag{1.97}$$

注意，我们通常用 i,j,k 等拉丁字母代表三维空间指标，而用 μ,ν,ρ 等希腊字母代表四维时空指标。ε^{ijk} 关于三个空间指标是全反对称的，有 $\varepsilon^{i23}\varepsilon^{i23}=\varepsilon^{123}\varepsilon^{123}=1$ 和 $\varepsilon^{i23}\varepsilon^{i32}=\varepsilon^{123}\varepsilon^{132}=-1$，依此类推，归纳出求和式

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{imn}=\delta^{jm}\delta^{kn}-\delta^{jn}\delta^{km}. \tag{1.98}$$

由 $\varepsilon^{ij3}\varepsilon^{ij3}=\varepsilon^{123}\varepsilon^{123}+\varepsilon^{213}\varepsilon^{213}=2$ 和 $\varepsilon^{ij3}\varepsilon^{ij1}=\varepsilon^{123}\varepsilon^{121}+\varepsilon^{213}\varepsilon^{211}=0$ 归纳出另一条求和式

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ijl}=2\delta^{kl}. \tag{1.99}$$

接下来讨论真空里的 Maxwell 方程组在 Lorentz 张量语言中的形式。在 Maxwell 方程组 (1.13) 中，ρ 是电荷密度，$\mathbf{J}$ 是电流密度，它们组成一个 Lorentz 矢量 $J^\mu=(\rho,\mathbf{J})$，称为**四维电流密度**。从而，将电流连续性方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{J}=0 \tag{1.100}$$

写成 Lorentz 协变的形式

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \tag{1.101}$$

此外，电场强度 $\mathbf{E}$ 和磁感应强度 $\mathbf{B}$ 可以用电势 Φ 和矢势 $\mathbf{A}$ 表达为

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{1.102}$$

Φ 和 $\mathbf{A}$ 组成一个 Lorentz 矢量 $A^\mu = (\Phi, \mathbf{A})$，称为**四维矢势**，则 (1.102) 式的分量形式为

$$E^i = -\partial_i A^0 - \partial_0 A^i, \quad B^i = \varepsilon^{ijk}\partial_j A^k, \quad i, j, k = 1, 2, 3. \tag{1.103}$$

引入电磁场的**场强张量** (field strength tensor)

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = -F^{\nu\mu}, \tag{1.104}$$

它是一个 2 阶反对称 Lorentz 张量。由于两个时空导数的次序可以交换，从上述定义推出

$$\begin{aligned} \partial^\rho F^{\mu\nu} &= \partial^\rho(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial^\mu\partial^\rho A^\nu - \partial^\mu\partial^\nu A^\rho + \partial^\nu\partial^\mu A^\rho - \partial^\nu\partial^\rho A^\mu \\ &= \partial^\mu F^{\rho\nu} + \partial^\nu F^{\mu\rho} = -\partial^\mu F^{\nu\rho} - \partial^\nu F^{\rho\mu}, \end{aligned} \tag{1.105}$$

即 **Bianchi 恒等式**

$$\partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} = 0. \tag{1.106}$$

$F^{\mu\nu}$ 的 $0i$ 分量为

$$F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = \partial_0 A^i + \partial_i A^0 = -E^i, \tag{1.107}$$

可见，F^{0i} 对应于电场强度。求和式 (1.98) 等价于 $\varepsilon^{jki}\varepsilon^{imn} = \delta^{jm}\delta^{kn} - \delta^{jn}\delta^{km}$，由此得到

$$\varepsilon^{ijk}B^k = \varepsilon^{ijk}\varepsilon^{kmn}\partial_m A^n = (\delta^{im}\delta^{jn} - \delta^{in}\delta^{jm})\partial_m A^n = \partial_i A^j - \partial_j A^i, \tag{1.108}$$

从而

$$F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = -\partial_i A^j + \partial_j A^i = -\varepsilon^{ijk}B^k, \tag{1.109}$$

故 $F^{\mu\nu}$ 的 ij 分量对应于磁感应强度。把 $F^{\mu\nu}$ 写成矩阵形式是

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.110}$$

Gauss 定律对应的方程

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \tag{1.111}$$

等价于

$$J^0 = \rho = \partial_i E^i = -\partial_i F^{0i} = \partial_i F^{i0} = \partial_i F^{i0} + \partial_0 F^{00} = \partial_\mu F^{\mu 0}, \tag{1.112}$$

而 Ampère 环路定律对应的 Ampère-Maxwell 方程

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{1.113}$$

相当于

$$J^i = \varepsilon^{ijk}\partial_j B^k - \partial_0 E^i = -\partial_j F^{ij} + \partial_0 F^{0i} = \partial_j F^{ji} + \partial_0 F^{0i} = \partial_\mu F^{\mu i}. \tag{1.114}$$

归纳起来，有

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu. \tag{1.115}$$

这个方程完全是用 Lorentz 张量写出来的，具有 Lorentz 协变性，因而它在不同惯性系中具有相同的形式，满足狭义相对性原理。

求和式 (1.99) 等价于 $\varepsilon^{kij}\varepsilon^{ijl} = 2\delta^{kl}$，故 $\varepsilon^{ijk}F^{jk} = -\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{jkl}B^l = -2\delta^{il}B^l = -2B^i$，即

$$B^i = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F^{jk}. \tag{1.116}$$

Gauss 磁定律对应的方程

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{1.117}$$

等价于

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \partial_i B^i = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\partial_i F^{jk} = -\frac{1}{6}(\varepsilon^{ijk}\partial_i F^{jk} + \varepsilon^{jki}\partial_j F^{ki} + \varepsilon^{kij}\partial_k F^{ij}) \\ &= -\frac{1}{6}\varepsilon^{ijk}(\partial_i F^{jk} + \partial_j F^{ki} + \partial_k F^{ij}). \end{aligned} \tag{1.118}$$

第三步通过更换指标字母写出三个相等的项，毕竟，对于参与缩并或求和的指标，更换指标字母不会影响结果。上式意味着

$$\partial^i F^{jk} + \partial^j F^{ki} + \partial^k F^{ij} = 0. \tag{1.119}$$

这是 Bianchi 恒等式 (1.106) 取纯空间分量的形式。将 Faraday 电磁感应定律对应的 Maxwell-Faraday 方程

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{1.120}$$

写成分量的形式，得 $-\partial_0 B^k = \varepsilon^{kmn}\partial_m E^n = -\varepsilon^{kmn}\partial_m F^{0n} = \varepsilon^{kmn}\partial_m F^{n0}$，从 (1.109) 式推出

$$\partial_0 F^{ij} = -\varepsilon^{ijk}\partial_0 B^k = \varepsilon^{ijk}\varepsilon^{kmn}\partial_m F^{n0} = (\delta^{im}\delta^{jn} - \delta^{in}\delta^{jm})\partial_m F^{n0} = \partial_i F^{j0} - \partial_j F^{i0}, \tag{1.121}$$

即

$$\partial^0 F^{ij} + \partial^i F^{j0} + \partial^j F^{0i} = 0. \tag{1.122}$$

这也是 Bianchi 恒等式 (1.106) 取特定分量的形式。

利用四维 Levi-Civita 符号定义电磁场的**对偶场强张量** (duel field strength tensor)

$$\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = -\tilde{F}^{\nu\mu}, \tag{1.123}$$

它也是一个 2 阶反对称 Lorentz 张量。$\tilde{F}^{\mu\nu}$ 的 $0i$ 分量为

$$\begin{aligned}\tilde{F}^{0i} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{0i\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\varepsilon^{0ijk}F_{jk} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}g_{j\mu}g_{k\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}g_{jm}g_{kn}F^{mn} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F^{jk} \\ &= -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{jkl}B^l = -\frac{1}{2}2\delta^{il}B^l = -B^i,\end{aligned} \tag{1.124}$$

第五步利用了 $g_{jm}F^{mn} = -\delta^{jm}F^{mn} = -F^{jn}$，倒数第二步用到求和关系 (1.99)。可见，$\tilde{F}^{0i}$ 对应于磁感应强度。另一方面，

$$\begin{aligned}\tilde{F}^{ij} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{ij\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\varepsilon^{ij0k}F_{0k} + \varepsilon^{ijk0}F_{k0}) = \varepsilon^{0ijk}F_{0k} = \varepsilon^{ijk}g_{0\mu}g_{k\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \varepsilon^{ijk}g_{00}g_{kl}F^{0l} = -\varepsilon^{ijk}F^{0k} = \varepsilon^{ijk}E^k,\end{aligned} \tag{1.125}$$

说明 $\tilde{F}^{ij}$ 对应于电场强度。$\tilde{F}^{\mu\nu}$ 的矩阵形式是

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.126}$$

由 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 的定义有

$$\begin{aligned}\partial_\mu\tilde{F}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu F_{\rho\sigma} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma}\partial_\mu F_{\rho\sigma} = -\frac{1}{6}(\varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma}\partial_\mu F_{\rho\sigma} + \varepsilon^{\nu\rho\sigma\mu}\partial_\rho F_{\sigma\mu} + \varepsilon^{\nu\sigma\mu\rho}\partial_\sigma F_{\mu\rho}) \\ &= -\frac{1}{6}\varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma}(\partial_\mu F_{\rho\sigma} + \partial_\rho F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\rho}),\end{aligned} \tag{1.127}$$

因此 Bianchi 恒等式 (1.106) 等价于

$$\partial_\mu\tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \tag{1.128}$$

从这些讨论可以看到，用 Lorentz 张量语言表达 Maxwell 方程组是十分简单的，而且方程的 Lorentz 协变性非常明确。

1.6 作用量原理

1.6.1 经典力学中的作用量原理

在经典力学中，质点力学系统可以用**拉格朗日量** (Lagrangian) 描述。对于具有 n 个自由度的系统，可以定义 n 个相互独立的**广义坐标** (generalized coordinate) q_i，它们的时间导数是**广义速度** (generalized velocity) $\dot{q}_i = \mathrm{d}q_i/\mathrm{d}t$。拉格朗日量是广义坐标和广义速度的函数 $L(q_i, \dot{q}_i)$。拉格朗日量的时间积分

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L[q_i(t), \dot{q}_i(t)] \tag{1.129}$$

称为**作用量**。

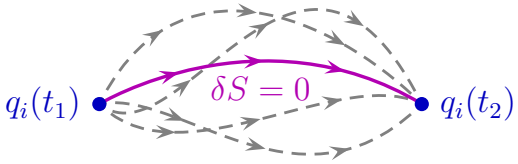


图 1.5: $\delta S = 0$ 对应的经典运动轨迹。

（最小）**作用量原理**指出，作用量的变分极值 ($\delta S = 0$) 对应于系统的经典运动轨迹。假设时间的变分 $\delta t = 0$，即不作时间坐标的变换，则

$$\delta \dot{q}_i = \delta \frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_i, \tag{1.130}$$

即时间导数的变分等于变分的时间导数。从而得到

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \delta L[q_i(t), \dot{q}_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \right) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_i \right) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \right) - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)\delta q_i \right] \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2},
\end{aligned} \tag{1.131}$$

其中第四、五步用了分部积分。再假设在初始和结束时刻广义坐标的变分为零，即 $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$，则上式最后一行第二项为零。由于变分 $\delta q_i(t)$ $(t_1 < t < t_2)$ 是任意的，$\delta S = 0$ 等价于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \cdots, n. \tag{1.132}$$

这是 **Euler-Lagrange 方程**，它给出质点系统的经典运动方程。如图 1.5 所示，满足 $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ 的运动轨迹有无数多条，而唯一的经典运动轨迹是 Euler-Lagrange 方程的解，对应着 $\delta S = 0$。

引入**广义动量** (generalized momentum)

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \cdots, n. \tag{1.133}$$

反解由上式表示的 n 个方程，就可以用 q_i 和 p_i 将 $\dot{q}_i$ 表达出来，然后用 Legendre 变换定义**哈密顿量** (Hamiltonian)

$$H(q_i, p_i) \equiv p_i\dot{q}_i - L, \tag{1.134}$$

它是 q_i 和 p_i 的函数。用 H 取替 L 来表达作用量 S，则作用量的变分为

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \delta L = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \delta(p_i\dot{q}_i - H) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\dot{q}_i\delta p_i + p_i\delta\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i \right). \tag{1.135}$$

由

$$p_i\delta\dot{q}_i = p_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_i\delta q_i) - \dot{p}_i\delta q_i, \tag{1.136}$$

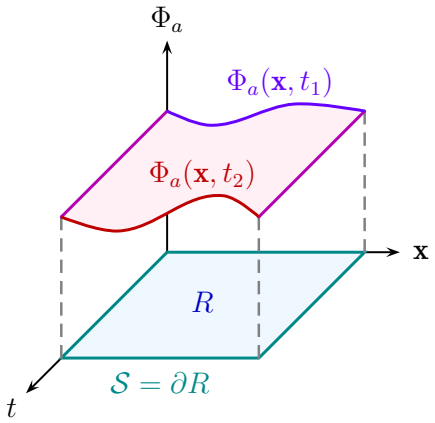


图 1.6: 时空区域 R 上的场 $\Phi_a(\mathbf{x}, t)$。

得

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left[\dot{q}_i \delta p_i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_i \delta q_i) - \dot{p}_i \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i\right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\delta q_i\right] + p_i \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2}. \end{aligned} \tag{1.137}$$

根据前面的假设 $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$，上式最后一行第二项为零，于是 $\delta S = 0$ 给出

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \cdots, n. \tag{1.138}$$

这是 **Hamilton 正则运动方程**，相当于用 $2n$ 个一阶方程代替原来的 n 个二阶 Euler-Lagrange 方程 (1.132)。广义坐标 q_i 和广义动量 p_i 统称为**正则变量**。

1.6.2 经典场论中的作用量原理

场是时空坐标 x^μ 的函数。在*经典场论*中，场 $\Phi(\mathbf{x}, t)$ 是系统的广义坐标，每一个空间点 $\mathbf{x}$ 都是一个自由度，因此场论相当于具有无穷多个连续自由度的质点力学。在**局域** (local) 场论中，拉格朗日量 $L = \int \mathrm{d}^3x\, \mathcal{L}(x)$，其中 $\mathcal{L}(x)$ 称为**拉格朗日量密度**，下文将它简称为**拉氏量**。这里的“局域”指 $\mathcal{L}(x)$ 只依赖于一个时空点 x^μ，没有再依赖于其它时空点。

设 $\mathcal{L}$ 是系统中 n 个场 $\Phi_a(\mathbf{x}, t)$ $(a = 1, \cdots, n)$ 及其时空导数 $\partial_\mu \Phi_a$ 的函数，则作用量表达为

$$S = \int \mathrm{d}t\, L = \int \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L}(\Phi_a, \partial_\mu \Phi_a). \tag{1.139}$$

(1.47) 式告诉我们，时空体积元 d^4x 是 Lorentz 不变的，如果拉氏量 $\mathcal{L}$ 也是 Lorentz 不变的，则作用量 S 就是 Lorentz 不变的，从而由作用量原理得到的运动方程满足狭义相对性原理。因此，构建相对论性场论的关键在于使用 Lorentz 不变的拉氏量 $\mathcal{L}$，即要求 $\mathcal{L}$ 是一个 *Lorentz 标量*。

图 1.6 描绘了时空区域 R 上的场 $\Phi_a(\mathbf{x}, t)$，其中三维空间坐标 $\mathbf{x}$ 仅用一条坐标轴表示，R 的边界面为 $\mathcal{S} = \partial R$。类似于前面质点力学的处理方式，假设时空坐标的变分 $\delta x^\mu = 0$，即不作

时空坐标的变换，则对场的时空导数的变分等于场变分的时空导数，

$$\delta(\partial_\mu \Phi_a) = \partial_\mu(\delta\Phi_a). \tag{1.140}$$

于是推出

$$\begin{aligned}\delta S &= \int \mathrm{d}^4x\, \delta\mathcal{L} = \int \mathrm{d}^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a}\,\delta\Phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\,\delta(\partial_\mu\Phi_a)\right] = \int \mathrm{d}^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a}\,\delta\Phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\,\partial_\mu(\delta\Phi_a)\right] \\ &= \int \mathrm{d}^4x \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a}\,\delta\Phi_a + \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\,\delta\Phi_a\right] - \left[\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\right]\delta\Phi_a\right\} \\ &= \int \mathrm{d}^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\right]\delta\Phi_a + \int \mathrm{d}^4x\,\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\,\delta\Phi_a\right].\end{aligned} \tag{1.141}$$

上式最后一行第二项的被积函数是关于时空坐标的全散度 (total divergence)，利用广义 *Stokes* 定理将它转化为积分区域边界面 $\mathcal{S}$ 上的积分：

$$\int \mathrm{d}^4x\,\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\,\delta\Phi_a\right] = \int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}\sigma_\mu\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\,\delta\Phi_a, \tag{1.142}$$

其中 $\mathrm{d}\sigma_\mu$ 是 $\mathcal{S}$ 上的面元。进一步假设在边界面 $\mathcal{S}$ 上 $\delta\Phi_a = 0$，则上式为零。我们通常讨论整个时空区域上的场，这里相当于假设 Φ_a 在无穷远时空边界上的变分为零，是很合理的。这样一来，由 $\delta S = 0$ 推出

$$\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a} = 0. \tag{1.143}$$

这就是**场的 Euler-Lagrange 方程**，它给出场的**经典运动方程**。

引入场的**共轭动量密度** (conjugate momentum density)

$$\pi_a(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\Phi}_a}. \tag{1.144}$$

这也称为*正则共轭场*。接着用 Legendre 变换将哈密顿量定义为

$$H \equiv \int \mathrm{d}^3x\,\pi_a\dot{\Phi}_a - L \equiv \int \mathrm{d}^3x\,\mathcal{H}, \tag{1.145}$$

其中**哈密顿量密度**是

$$\mathcal{H}(\Phi_a, \pi_a, \nabla\Phi_a) = \pi_a\dot{\Phi}_a - \mathcal{L}. \tag{1.146}$$

作用量变分为

$$\begin{aligned}\delta S &= \int \mathrm{d}^4x\,\delta\mathcal{L} = \int \mathrm{d}^4x\,\delta(\pi_a\dot{\Phi}_a - \mathcal{H}) \\ &= \int \mathrm{d}^4x \left[\dot{\Phi}_a\delta\pi_a + \pi_a\delta\dot{\Phi}_a - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\Phi_a}\,\delta\Phi_a - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi_a}\,\delta\pi_a - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\Phi_a)}\cdot\delta(\nabla\Phi_a)\right].\end{aligned} \tag{1.147}$$

方括号中的第二项和最后一项分别化为

$$\pi_a\delta\dot{\Phi}_a = \pi_a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\delta\Phi_a = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi_a\delta\Phi_a) - \dot{\pi}_a\delta\Phi_a, \tag{1.148}$$

$$-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\Phi_a)}\cdot\delta(\nabla\Phi_a)=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\Phi_a)}\cdot\nabla(\delta\Phi_a)=-\nabla\cdot\left[\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\Phi_a)}\,\delta\Phi_a\right]+\left[\nabla\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\Phi_a)}\right]\delta\Phi_a, \tag{1.149}$$

代入原表达式，得

$$\begin{aligned}\delta S=&\int\mathrm{d}^4x\left\{\left(\dot\Phi_a-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi_a}\right)\delta\pi_a-\left[\dot\pi_a+\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\Phi_a}-\nabla\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\Phi_a)}\right]\delta\Phi_a\right\}\\&+\int\mathrm{d}^4x\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi_a\delta\Phi_a)-\int\mathrm{d}^4x\,\nabla\cdot\left[\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\Phi_a)}\,\delta\Phi_a\right].\end{aligned} \tag{1.150}$$

与前面一样，假设在时空区域边界面上 $\delta\Phi_a=0$，则上式最后一行的两个全导数积分项均为零，于是，$\delta S=0$ 给出场的正则运动方程

$$\dot\Phi_a=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi_a},\quad \dot\pi_a=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\Phi_a}+\nabla\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\Phi_a)}. \tag{1.151}$$

场 Φ_a 和它的共轭动量密度 π_a 是系统的正则变量。

1.7 Noether 定理、对称性与守恒定律

连续变换对应的对称性称为连续对称性。Lorentz 对称性就是一种连续对称性。**Noether 定理** [9] 指出，

> 如果系统具有一种连续对称性，就必然存在一条对应的守恒定律。

Noether 定理首先是在经典物理中给出的，但实际上它适用于所有物理行为由作用量原理决定的系统。因此，可以将它推广到量子物理中。

1.7.1 场论中的 Noether 定理

下面在场论中证明 Noether 定理。在时空区域 R 中的作用量为

$$S=\int_R\mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}(\Phi_a,\partial_\mu\Phi_a). \tag{1.152}$$

考虑一个连续变换，使得

$$\Phi_a(x)\to\Phi'_a(x'), \tag{1.153}$$

其中已包含了坐标的变换

$$x^\mu\to x'^\mu. \tag{1.154}$$

它引起的拉氏量变换为

$$\mathcal{L}(x)\to\mathcal{L}'(x'). \tag{1.155}$$

记这个连续变换的无穷小变换形式为

$$\Phi'_a(x')=\Phi_a(x)+\delta\Phi_a,\quad x'^\mu=x^\mu+\delta x^\mu,\quad \mathcal{L}'(x')=\mathcal{L}(x)+\delta\mathcal{L}, \tag{1.156}$$

如果在此变换下

$$\delta S = \int_{R'} \mathrm{d}^4x'\, \mathcal{L}'(x') - \int_R \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L}(x) = 0, \tag{1.157}$$

则系统具有相应的连续对称性。

体积元的变化为

$$\mathrm{d}^4x' = |\mathcal{J}|\mathrm{d}^4x, \quad \mathcal{J} = \det\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right) \simeq \det\left[\delta^\mu{}_\nu + \frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial x^\nu}\right], \tag{1.158}$$

上式中约等于号表示只展开到一阶小量，下同。方阵 $\mathbf{A}$ 满足

$$\det[\exp(\mathbf{A})] = \exp[\mathrm{tr}(\mathbf{A})], \tag{1.159}$$

其中方阵的指数函数定义为

$$\exp(\mathbf{A}) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n}{n!}. \tag{1.160}$$

对于无穷小的 $\mathbf{A}$，把上式两边展开至一阶小量，得

$$\det(\mathbf{1} + \mathbf{A}) \simeq 1 + \mathrm{tr}(\mathbf{A}). \tag{1.161}$$

利用上式将 Jacobi 行列式 $\mathcal{J}$ 化为

$$\mathcal{J} \simeq 1 + \mathrm{tr}\left[\frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial x^\nu}\right] = 1 + \partial_\mu(\delta x^\mu), \tag{1.162}$$

从而，体积元的无穷小变换形式为

$$\mathrm{d}^4x' \simeq [1 + \partial_\mu(\delta x^\mu)]\mathrm{d}^4x. \tag{1.163}$$

作用量在此无穷小变换下的变分是

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{R'} \mathrm{d}^4x'\, \mathcal{L}'(x') - \int_R \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L}(x) \simeq \int_R \mathrm{d}^4x\, [1 + \partial_\mu(\delta x^\mu)][\mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}] - \int_R \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L}(x) \\ &\simeq \int_R \mathrm{d}^4x\, [\delta\mathcal{L} + \mathcal{L}(x)\partial_\mu(\delta x^\mu)] = \int_R \mathrm{d}^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a}\,\delta\Phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\,\delta(\partial_\mu\Phi_a) + \mathcal{L}\partial_\mu(\delta x^\mu)\right].\end{aligned} \tag{1.164}$$

记 x^μ 固定时的变分算符为 $\bar{\delta}$，满足

$$\bar{\delta}\Phi_a(x) = \Phi'_a(x) - \Phi_a(x). \tag{1.165}$$

$\bar{\delta}$ 算符可以与时空导数交换，

$$\bar{\delta}(\partial_\mu\Phi_a) = \partial_\mu(\bar{\delta}\Phi_a), \tag{1.166}$$

δ 算符则不一定可以。$\delta\Phi_a$ 与 $\bar{\delta}\Phi_a$ 的关系为

$$\begin{aligned}\delta\Phi_a &= \Phi'_a(x') - \Phi_a(x) = \Phi'_a(x') - \Phi'_a(x) + \Phi'_a(x) - \Phi_a(x) = \Phi'_a(x') - \Phi'_a(x) + \bar{\delta}\Phi_a \\ &\simeq \bar{\delta}\Phi_a + (\partial_\mu\Phi'_a)\delta x^\mu \simeq \bar{\delta}\Phi_a + (\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\mu,\end{aligned} \tag{1.167}$$

即

$$\bar{\delta}\Phi_a = \delta\Phi_a - (\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\mu. \tag{1.168}$$

将 (1.167) 式中的 Φ_a 替换为 $\partial_\mu\Phi_a$，即得

$$\delta(\partial_\mu\Phi_a) = \bar{\delta}(\partial_\mu\Phi_a) + \partial_\nu(\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\nu = \partial_\mu(\bar{\delta}\Phi_a) + \partial_\nu(\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\nu. \tag{1.169}$$

将 (1.167) 和 (1.169) 式代入 (1.164) 式，得到

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_R \mathrm{d}^4x \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a}[\bar{\delta}\Phi_a + (\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\mu] + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}[\partial_\mu(\bar{\delta}\Phi_a) + \partial_\nu(\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\nu] + \mathcal{L}\partial_\mu(\delta x^\mu) \right\} \\
&= \int_R \mathrm{d}^4x \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a}\bar{\delta}\Phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a}(\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\mu + \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\bar{\delta}\Phi_a\right] - \left[\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\right]\bar{\delta}\Phi_a \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\Phi_a)}\partial_\mu(\partial_\nu\Phi_a)\delta x^\mu + \mathcal{L}\partial_\mu(\delta x^\mu) \right\} \\
&= \int_R \mathrm{d}^4x \left\{ \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\right]\bar{\delta}\Phi_a + \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\bar{\delta}\Phi_a\right] \right. \\
&\qquad \left. + \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a}\frac{\partial\Phi_a}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\Phi_a)}\frac{\partial(\partial_\nu\Phi_a)}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \mathcal{L}\frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial x^\mu}\right] \right\} \\
&= \int_R \mathrm{d}^4x \left\{ \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\right]\bar{\delta}\Phi_a + \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\bar{\delta}\Phi_a + \mathcal{L}\delta x^\mu\right] \right\}.
\end{aligned} \tag{1.170}$$

第二步用到导数的乘积法则，最后一步用到涉及多元复合函数的求导关系

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\mathcal{L}\delta x^\mu) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a}\frac{\partial\Phi_a}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\Phi_a)}\frac{\partial(\partial_\nu\Phi_a)}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \mathcal{L}\frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial x^\mu}. \tag{1.171}$$

根据 Euler-Lagrange 方程 (1.143)，(1.170) 式最后一行花括号中第一项为零。由于积分区域 R 可以是任意的，$\delta S = 0$ 等价于第二项为零，即

$$\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\bar{\delta}\Phi_a + \mathcal{L}\delta x^\mu\right] = 0. \tag{1.172}$$

定义 **Noether 守恒流** (conserved current)

$$j^\mu \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\bar{\delta}\Phi_a + \mathcal{L}\delta x^\mu, \tag{1.173}$$

则有**守恒流方程**

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \tag{1.174}$$

方程 (1.174) 两边对整个三维空间积分，运用 *Gauss* 定理，得

$$0 = \int \mathrm{d}^3x\,\partial_\mu j^\mu = \int \mathrm{d}^3x\,\partial_0 j^0 + \int \mathrm{d}^3x\,\partial_i j^i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \mathrm{d}^3x\,j^0 + \int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}\sigma_i\,j^i, \tag{1.175}$$

其中 $i = 1, 2, 3$。对于整个三维空间而言，边界面 $\mathcal{S}$ 位于无穷远处。通常假设场 Φ_a 在无穷远处消失，从而在无穷远处 $j^i \to 0$，所以上式第二项为零。定义**守恒荷** (conserved charge)

$$Q \equiv \int \mathrm{d}^3x\,j^0, \tag{1.176}$$

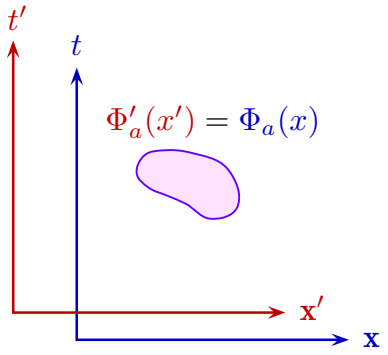


图 1.7: 时空平移变换示意图。

则由 (1.175) 式得

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \mathrm{d}^3x\, j^0 = 0. \tag{1.177}$$

可见，Q 不随时间变化，是守恒的。

综上，在场论中，如果一个系统具有某种连续对称性，则存在相应的守恒流 (1.173)，它满足守恒流方程 (1.174)，而守恒荷 (1.176) 不随时间变化。下面举一些应用 Noether 定理的例子。

1.7.2　时空平移对称性

时空坐标的**平移** (translation) 变换定义为

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}, \tag{1.178}$$

其中，a^{μ} 是平移变换参数，不依赖于 x^{μ}，故 $\mathrm{d}x'^{\mu} = \mathrm{d}x^{\mu}$。可见，时空平移变换保持 Minkowski 时空的**线元** (line element) $\mathrm{d}s$ 的平方 $\mathrm{d}s^2 \equiv g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu}$ 不变，即

$$g_{\mu\nu}\mathrm{d}x'^{\mu}\mathrm{d}x'^{\nu} = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu}. \tag{1.179}$$

所有时空平移变换构成**时空平移群**。

保持线元平方 $\mathrm{d}s^2$ 不变的变换称为 **Poincaré 变换** [10]，也称为非齐次 Lorentz 变换。所有 Poincaré 变换组成的集合称为 **Poincaré 群**。线元不变意味着距离不变，因而 Poincaré 群是 Minkowski 时空的**等距群** (isometry group)，记作 $\mathrm{ISO}(1,3)$。Lorentz 群是 Poincaré 群的子群，任意 Poincaré 变换可表示成 Lorentz 变换和时空平移变换的组合，也就是说，时空坐标的 Poincaré 变换表达为

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} + a^{\mu}. \tag{1.180}$$

利用保度规条件 (1.34)，容易验证这样的变换保持 $\mathrm{d}s^2$ 不变：

$$\mathrm{d}s'^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x'^{\mu}\mathrm{d}x'^{\nu} = g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\mathrm{d}x^{\rho}\mathrm{d}x^{\sigma} = g_{\rho\sigma}\mathrm{d}x^{\rho}\mathrm{d}x^{\sigma} = \mathrm{d}s^2. \tag{1.181}$$

数学上称 Poincaré 群是 Lorentz 群与时空平移群的半直积群。

Minkowski 时空是**均匀** (homogeneous) 的，处于其中的系统具有时空平移对称性。设 ε^μ 是无穷小平移变换参数，在无穷小时空平移变换

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu, \tag{1.182}$$

的作用下，场 $\Phi_a(x)$ 的形状不会改变，如图 1.7 所示，有

$$\Phi'_a(x') = \Phi'_a(x+\varepsilon) = \Phi_a(x), \tag{1.183}$$

故 $\delta\Phi_a = \Phi'_a(x') - \Phi_a(x) = 0$。现在，$\delta x^\mu = \varepsilon^\mu$，由 (1.168) 式得

$$\bar{\delta}\Phi_a = \delta\Phi_a - (\partial_\mu\Phi_a)\delta x^\mu = -\varepsilon^\rho\partial_\rho\Phi_a, \tag{1.184}$$

代入到 Noether 守恒流表达式 (1.173)，有

$$j^\mu = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\varepsilon^\rho\partial_\rho\Phi_a + \mathcal{L}\varepsilon^\mu = -\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\partial_\rho\Phi_a - \delta^\mu{}_\rho\mathcal{L}\right]\varepsilon^\rho. \tag{1.185}$$

从而，$\partial_\mu j^\mu = 0$ 给出

$$\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\partial_\rho\Phi_a - \delta^\mu{}_\rho\mathcal{L}\right] = 0, \tag{1.186}$$

各项乘以 $g^{\rho\nu}$，缩并，得

$$\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\partial^\nu\Phi_a - g^{\mu\nu}\mathcal{L}\right] = 0. \tag{1.187}$$

上式方括号部分是场的**能动张量** (energy-momentum tensor)

$$T^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\partial^\nu\Phi_a - g^{\mu\nu}\mathcal{L}, \tag{1.188}$$

它满足

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \tag{1.189}$$

因此，对 $T^{0\nu}$ ($\nu = 0,1,2,3$) 作全空间积分，就得到 4 个守恒荷。只要保证 $\mathcal{L}$ 是 Lorentz 标量，那么 $T^{\mu\nu}$ 就是 2 阶 Lorentz 张量。

$T^{\mu\nu}$ 的 00 分量为

$$T^{00} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\Phi}_a}\dot{\Phi}_a - \mathcal{L} = \pi_a\dot{\Phi}_a - \mathcal{L} = \mathcal{H}, \tag{1.190}$$

可见，T^{00} 就是哈密顿量密度 $\mathcal{H}$，对应于时间平移变换 $x'^0 = x^0 + \varepsilon^0$。$T^{00}$ 的全空间积分

$$H = \int \mathrm{d}^3x\, T^{00} = \int \mathrm{d}^3x\, \mathcal{H} \tag{1.191}$$

是场的哈密顿量，或者说**总能量**。它是时间平移变换的守恒荷，满足 $\mathrm{d}H/\mathrm{d}t = 0$，因此**时间平移对称性对应于能量守恒定律**。

$T^{\mu\nu}$ 的 $0i$ 分量

$$T^{0i} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\Phi}_a}\partial^i\Phi_a = \pi_a\partial^i\Phi_a \tag{1.192}$$

是场的动量密度，对应于空间平移变换 $x'^i = x^i + \varepsilon^i$。$T^{0i}$ 的全空间积分

$$P^i = \int \mathrm{d}^3x\, T^{0i} = \int \mathrm{d}^3x\, \pi_a \partial^i \Phi_a \tag{1.193}$$

是场的**总动量**。根据 (1.72) 式，上式的三维矢量形式为

$$\mathbf{P} = -\int \mathrm{d}^3x\, \pi_a \nabla \Phi_a. \tag{1.194}$$

总动量是空间平移变换的守恒荷，满足 $\mathrm{d}\mathbf{P}/\mathrm{d}t = 0$，因此**空间平移对称性对应于动量守恒定律**。

1.7.3 Lorentz 对称性

如前所述，在相对论性场论中，我们要求拉氏量 $\mathcal{L}$ 是 Lorentz 不变量，因而作用量 S 也是 Lorentz 不变的，系统具有 Lorentz 对称性。考虑无穷小固有保时向 Lorentz 变换

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu, \tag{1.195}$$

其中 $\omega^\mu{}_\nu$ 是变换的无穷小参数。由保度规条件 (1.34)，有

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = g_{\mu\nu}(\delta^\mu{}_\alpha + \omega^\mu{}_\alpha)(\delta^\nu{}_\beta + \omega^\nu{}_\beta) \simeq g_{\mu\nu}\delta^\mu{}_\alpha \delta^\nu{}_\beta + g_{\mu\nu}\delta^\mu{}_\alpha \omega^\nu{}_\beta + g_{\mu\nu}\omega^\mu{}_\alpha \delta^\nu{}_\beta \\ &= g_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} + \omega_{\beta\alpha}, \end{aligned} \tag{1.196}$$

可见，

$$\omega_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\rho}\omega^\rho{}_\nu \tag{1.197}$$

关于两个指标反对称：

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}. \tag{1.198}$$

因此，$\omega_{\mu\nu}$ 只有 6 个独立分量，分别对应于沿 3 个空间轴方向的增速变换和绕 3 个空间轴的旋转变换。

下面举两个例子说明 $\omega_{\mu\nu}$ 的具体形式。对于绕 z 轴旋转 θ 角的变换 (1.36)，利用三角函数展开式 $\cos\theta = 1 + \mathcal{O}(\theta^2)$ 和 $\sin\theta = \theta + \mathcal{O}(\theta^3)$，得

$$\omega^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & \theta & \\ & -\theta & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}\omega^\rho{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & -\theta & \\ & \theta & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.199}$$

对于沿 x 轴增速变换 (1.32)，定义**快度** (rapidity)

$$\xi \equiv \tanh^{-1}\beta, \tag{1.200}$$

则 $\beta = \tanh\xi$。利用双曲函数公式 $\tanh\xi = \sinh\xi/\cosh\xi$ 和 $\cosh^2\xi - \sinh^2\xi = 1$ 推出

$$\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} = (1-\tanh^2\xi)^{-1/2} = \left(\frac{\cosh^2\xi - \sinh^2\xi}{\cosh^2\xi}\right)^{-1/2} = \cosh\xi,$$

$$\beta\gamma = \tanh\xi\cosh\xi = \sinh\xi, \tag{1.201}$$

将 (1.32) 式改写成

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \cosh\xi & -\sinh\xi & & \\ -\sinh\xi & \cosh\xi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.202}$$

根据双曲函数展开式 $\cosh\xi = 1 + \mathcal{O}(\xi^2)$ 和 $\sinh\xi = \xi + \mathcal{O}(\xi^3)$，有

$$\omega^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\xi & & \\ -\xi & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}\omega^{\rho}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\xi & & \\ \xi & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.203}$$

在无穷小 Lorentz 变换 (1.195) 的作用下，

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} = (\delta^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu})x^{\nu} = x^{\mu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}, \tag{1.204}$$

对变换后的场 $\Phi'_a(x')$ 在 $\omega_{\mu\nu} = 0$ 附近作 Taylor 级数，展开到 $\omega_{\mu\nu}$ 的第一阶，得

$$\Phi'_a(x') = \Phi_a(x) + \omega_{\mu\nu}\left.\frac{\partial\Phi'_a(x')}{\partial\omega_{\mu\nu}}\right|_{\omega_{\mu\nu}=0} = \Phi_a(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(I^{\mu\nu})_{ab}\Phi_b(x) = \left[\delta_{ab} - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(I^{\mu\nu})_{ab}\right]\Phi_b(x), \tag{1.205}$$

其中

$$(I^{\mu\nu})_{ab} \equiv \frac{2\mathrm{i}}{\Phi_b(x)}\left.\frac{\partial\Phi'_a(x')}{\partial\omega_{\mu\nu}}\right|_{\omega_{\mu\nu}=0} \tag{1.206}$$

是 Φ_a 所属 Lorentz 群表示的**生成元** (generator)。由于 $\omega_{\mu\nu}$ 是反对称的，$(I^{\mu\nu})_{ab}$ 关于 μ 和 ν 反对称，

$$(I^{\mu\nu})_{ab} = -(I^{\nu\mu})_{ab}. \tag{1.207}$$

现在 $\delta x^{\mu} = x'^{\mu} - x^{\mu} = \omega^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}$，由 (1.168) 和 (1.156) 式得

$$\bar{\delta}\Phi_a = \delta\Phi_a - (\partial_\mu\Phi_a)\delta x^{\mu} = \Phi'_a(x') - \Phi_a(x) - (\partial_\mu\Phi_a)\delta x^{\mu} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\nu\rho}(I^{\nu\rho})_{ab}\Phi_b - (\partial_\nu\Phi_a)\omega^{\nu}{}_{\rho}x^{\rho}, \tag{1.208}$$

故 Noether 流为

$$\begin{aligned} j^{\mu} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\bar{\delta}\Phi_a + \mathcal{L}\delta x^{\mu} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\nu\rho}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}(I^{\nu\rho})_{ab}\Phi_b - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}(\partial_\nu\Phi_a)\omega^{\nu}{}_{\rho}x^{\rho} + \mathcal{L}\omega^{\mu}{}_{\rho}x^{\rho} \\ &= \frac{1}{2}\omega_{\nu\rho}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}(-\mathrm{i}I^{\nu\rho})_{ab}\Phi_b - \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\partial_\nu\Phi_a - \delta^{\mu}{}_{\nu}\mathcal{L}\right]\omega^{\nu}{}_{\rho}x^{\rho} \\ &= \frac{1}{2}\omega_{\nu\rho}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}(-\mathrm{i}I^{\nu\rho})_{ab}\Phi_b - T^{\mu}{}_{\nu}\omega^{\nu}{}_{\rho}x^{\rho}, \end{aligned} \tag{1.209}$$

其中

$$T^{\mu}{}_{\nu} \equiv T^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\partial_\nu\Phi_a - \delta^{\mu}{}_{\nu}\mathcal{L} \tag{1.210}$$

是能动张量 (1.188) 的另一种写法。利用度规可以进行以下指标升降操作,

$$T^{\mu}{}_{\nu}\omega^{\nu}{}_{\rho} = T^{\mu}{}_{\nu}\delta^{\nu}{}_{\sigma}\omega^{\sigma}{}_{\rho} = T^{\mu}{}_{\nu}g^{\nu\alpha}g_{\alpha\sigma}\omega^{\sigma}{}_{\rho} = T^{\mu\alpha}\omega_{\alpha\rho} = T^{\mu\nu}\omega_{\nu\rho}, \tag{1.211}$$

即参与缩并的 **Lorentz 指标一升一降不会改变表达式的结果**。再利用 $\omega_{\mu\nu}$ 的反对称性推出

$$\begin{aligned} T^{\mu}{}_{\nu}\omega^{\nu}{}_{\rho}x^{\rho} &= T^{\mu\nu}\omega_{\nu\rho}x^{\rho} = \frac{1}{2}(T^{\mu\nu}\omega_{\nu\rho}x^{\rho} - T^{\mu\nu}\omega_{\rho\nu}x^{\rho}) = \frac{1}{2}(T^{\mu\nu}\omega_{\nu\rho}x^{\rho} - T^{\mu\rho}\omega_{\nu\rho}x^{\nu}) \\ &= \frac{1}{2}\,\omega_{\nu\rho}(T^{\mu\nu}x^{\rho} - T^{\mu\rho}x^{\nu}). \end{aligned} \tag{1.212}$$

于是，Noether 流 (1.209) 化为

$$j^{\mu} = \frac{1}{2}\,\omega_{\nu\rho}\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\Phi_a)}(-\mathrm{i}I^{\nu\rho})_{ab}\Phi_b - \frac{1}{2}\,\omega_{\nu\rho}(T^{\mu\nu}x^{\rho} - T^{\mu\rho}x^{\nu}) = \frac{1}{2}\,\mathbb{J}^{\mu\nu\rho}\omega_{\nu\rho}, \tag{1.213}$$

其中

$$\mathbb{J}^{\mu\nu\rho} \equiv T^{\mu\rho}x^{\nu} - T^{\mu\nu}x^{\rho} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\Phi_a)}(-\mathrm{i}I^{\nu\rho})_{ab}\Phi_b. \tag{1.214}$$

$\partial_{\mu}j^{\mu} = 0$ 给出

$$\partial_{\mu}\mathbb{J}^{\mu\nu\rho} = 0, \tag{1.215}$$

守恒荷为

$$J^{\nu\rho} \equiv \int \mathrm{d}^3x\,\mathbb{J}^{0\nu\rho} = \int \mathrm{d}^3x\left[T^{0\rho}x^{\nu} - T^{0\nu}x^{\rho} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\Phi_a)}(-\mathrm{i}I^{\nu\rho})_{ab}\Phi_b\right]. \tag{1.216}$$

易见 $J^{\nu\rho} = -J^{\rho\nu}$，因而一共有 6 个独立的守恒荷，满足 $\mathrm{d}J^{\nu\rho}/\mathrm{d}t = 0$。

为明确物理含义，将 $J^{\nu\rho}$ 分解成两项:

$$J^{\nu\rho} = L^{\nu\rho} + S^{\nu\rho}. \tag{1.217}$$

第一项为

$$L^{\nu\rho} \equiv \int \mathrm{d}^3x\,(T^{0\rho}x^{\nu} - T^{0\nu}x^{\rho}), \tag{1.218}$$

关于指标的反对称性意味着它的纯空间分量 L^{jk} 中只有 3 个是独立的，利用三维 Levi-Civita 符号将 L^{jk} **对偶**成三维矢量 L^{i}，

$$L^{i} \equiv \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk}L^{jk} = (L^{23}, L^{31}, L^{12}). \tag{1.219}$$

由此推出

$$L^{i} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk}\int \mathrm{d}^3x\,(T^{0k}x^{j} - T^{0j}x^{k}) = \int \mathrm{d}^3x\,\varepsilon^{ijk}x^{j}T^{0k} = \int \mathrm{d}^3x\,\varepsilon^{ijk}x^{j}\pi_a\partial^{k}\Phi_a, \tag{1.220}$$

其中 $T^{0k} = \pi_a\partial^{k}\Phi_a$ 是动量密度 (1.192)。写成矢量形式，得

$$\mathbf{L} = -\int \mathrm{d}^3x\;\mathbf{x}\times(\pi_a\nabla\Phi_a), \tag{1.221}$$

这是场的**轨道角动量**。第二项为

$$S^{\nu\rho} \equiv \int \mathrm{d}^3x \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \Phi_a)} (-\mathrm{i} I^{\nu\rho})_{ab} \Phi_b = \int \mathrm{d}^3x \, \pi_a (-\mathrm{i} I^{\nu\rho})_{ab} \Phi_b, \tag{1.222}$$

同样，$S^{\nu\rho}$ 纯空间分量的对偶三维矢量为

$$S^i \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} S^{jk} = (S^{23}, S^{31}, S^{12}) = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \int \mathrm{d}^3x \, \pi_a (-\mathrm{i} I^{jk})_{ab} \Phi_b, \tag{1.223}$$

这是场的**自旋角动量**。$J^{\nu\rho}$ 纯空间分量的对偶三维矢量为

$$J^i \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} J^{jk} = L^i + S^i, \tag{1.224}$$

这是场的**总角动量**。固有保时向 Lorentz 群的纯空间部分就是空间旋转群 $\mathrm{SO}(3)$，而**空间旋转对称性对应于角动量守恒定律**。

另一方面，$L^{\nu\rho}$ 的 $i0$ 分量为

$$L^{i0} = \int \mathrm{d}^3x \, (T^{00} x^i - T^{0i} x^0) = \int \mathrm{d}^3x \, (x^i \mathcal{H} - x^0 \pi_a \partial^i \Phi_a) = \int \mathrm{d}^3x \, x^i \mathcal{H} - t P^i. \tag{1.225}$$

若 $\mathrm{d}S^{i0}/\mathrm{d}t = 0$，则 $\mathrm{d}J^{i0}/\mathrm{d}t = 0$ 意味着 $\mathrm{d}L^{i0}/\mathrm{d}t = 0$，再结合动量守恒 $\mathrm{d}P^i/\mathrm{d}t = 0$，得到

$$\frac{\mathrm{d}L^{i0}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \mathrm{d}^3x \, x^i \mathcal{H} - P^i = 0, \tag{1.226}$$

即

$$P^i = H v^i_{\mathrm{C}}, \quad v^i_{\mathrm{C}} \equiv \frac{1}{H} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \mathrm{d}^3x \, x^i \mathcal{H}. \tag{1.227}$$

在*低速极限*下，总能量约等于总质量，$H \simeq M$，故总动量 $\mathbf{P} \simeq M \mathbf{v}_{\mathrm{C}}$，而 $\mathbf{v}_{\mathrm{C}}$ 是**质心** (即质量中心，center of mass) 的运动速度。应用 Newton 第二定律，外力

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t} = M \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t}. \tag{1.228}$$

这就是*质心运动定理*。因此，L^{i0} 的守恒在经典力学中对应于**质心运动守恒定律**：当没有外力存在时，质心的加速度为零，质心保持静止或作匀速直线运动。

1.7.4 U(1) 整体对称性

考虑包含复场 $\phi(x)$ 及其复共轭场 $\phi^*(x)$ 的拉氏量

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^*) \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi. \tag{1.229}$$

对 ϕ 作 U(1) 整体变换

$$\phi'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta} \phi(x), \tag{1.230}$$

其中有理数 q 是常数，连续变换参数 θ 是实数。**整体** (global) 指 θ 不依赖于时空坐标 x^μ。

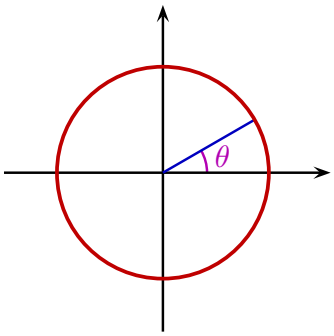


图 1.8: SO(2) 群空间示意图。

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}$ 是一个模为 1 的**相位因子** (phase factor)，可看作一个 1 维幺正矩阵 $U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}$，满足 (1.56) 式，故 U 的集合构成 **U(1) 群**，它是与 SO(2) 同构的 Abel 群。SO(2) 群空间是一个圆周，如图 1.8 所示，SO(2) 旋转变换参数 θ 在 $[0, 2\pi]$ 中的取值遍历圆周上的所有点，同时 θ 在 $[0, 2\pi/q]$ 中的取值对应于 $U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}$ 的所有取值，满足 $U(0) = U(2\pi/q) = 1$。

相应地，ϕ^* 的 U(1) 整体变换为

$$[\phi^*(x)]' = [\phi'(x)]^* = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}\phi^*(x). \tag{1.231}$$

容易看出，由 (1.229) 式定义的 $\mathcal{L}$ 在这种变换下不变，即具有 **U(1) 整体对称性**，q 称为相应的 **U(1) 荷**。与前面叙述的两种对称性不同，这里的对称性出现在由场构成的抽象空间中，与时间和空间相对独立 $(\delta x^\mu = 0)$，因而是一种**内部对称性**。

U(1) 整体变换的无穷小形式为

$$\phi'(x) = \phi(x) + \mathrm{i}q\theta\phi(x), \quad [\phi^*(x)]' = \phi^*(x) - \mathrm{i}q\theta\phi^*(x), \tag{1.232}$$

结合 $\delta x^\mu = 0$，有

$$\bar{\delta}\phi = \delta\phi = \mathrm{i}q\theta\phi, \quad \bar{\delta}\phi^* = \delta\phi^* = -\mathrm{i}q\theta\phi^*. \tag{1.233}$$

$\phi(x)$ 与 $\phi^*(x)$ 是线性独立的，代表两个相互独立的自由度，Noether 流 (1.173) 表达为

$$\begin{aligned} j^\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\bar{\delta}\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\bar{\delta}\phi^* = \partial^\mu\phi^*(\mathrm{i}q\theta\phi) + \partial^\mu\phi(-\mathrm{i}q\theta\phi^*) \\ &= \mathrm{i}q\theta[(\partial^\mu\phi^*)\phi - (\partial^\mu\phi)\phi^*] = -\mathrm{i}q\theta\phi^*\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi, \end{aligned} \tag{1.234}$$

其中，$\overleftrightarrow{\partial^\mu}$ 符号通过下式定义，

$$\phi^*\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi \equiv \phi^*\partial^\mu\phi - (\partial^\mu\phi^*)\phi. \tag{1.235}$$

扔掉无穷小参数 $-\theta$，定义 **U(1) 守恒流**

$$J^\mu \equiv \mathrm{i}q\phi^*\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi, \tag{1.236}$$

则 Noether 定理给出 $\partial_\mu J^\mu = 0$，相应的守恒荷是

$$Q = \int \mathrm{d}^3x\, J^0 = \mathrm{i}q\int \mathrm{d}^3x\, \phi^*\overleftrightarrow{\partial^0}\phi, \tag{1.237}$$

满足 $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = 0$。

在实际应用中，q 是由 Φ 场描述的粒子所携带的某种荷，如电荷、重子数、轻子数、奇异数、粲数、底数、顶数等。因此，一种 U(1) 整体对称性对应于一条荷数守恒定律，比如，**电磁 U(1) 整体对称性对应于电荷守恒定律**。

习　题

1.1 在自然单位制中，1 GeV^{-2} 等于多少 cm^2，也等于多少 cm^3/s？

1.2 推出绕 z 轴转动 θ 角的变换公式 (1.35)。验证相应的变换矩阵 (1.36) 满足保度规条件 (1.44)。

1.3 设四维动量 p^μ 和 k^μ 满足 $p^2 = m_1^2$ 和 $k^2 = m_2^2$，其中 $m_1, m_2 > 0$，证明

$$(p+k)^2 \geq (m_1+m_2)^2, \quad (p-k)^2 \leq (m_1-m_2)^2. \tag{1.238}$$

1.4 已知绕 x 轴旋转变换 $R_x(\theta)$、绕 y 轴旋转变换 $R_y(\theta)$、沿 y 轴增速变换 $B_y(\xi)$ 和沿 z 轴增速变换 $B_z(\xi)$ 的具体形式为

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \cos\theta & \sin\theta \\ & & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad R_y(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\theta & & -\sin\theta \\ & & 1 & \\ & \sin\theta & & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{1.239}$$

$$B_y(\xi) = \begin{pmatrix} \cosh\xi & & -\sinh\xi & \\ & 1 & & \\ -\sinh\xi & & \cosh\xi & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad B_z(\xi) = \begin{pmatrix} \cosh\xi & & & -\sinh\xi \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ -\sinh\xi & & & \cosh\xi \end{pmatrix}. \tag{1.240}$$

(a) 分别推出这四个变换的无穷小变换参数 $\omega_{\mu\nu}$ 的矩阵形式。

(b) 证明 $R_y(\theta_1)R_y(\theta_2) = R_y(\theta_1+\theta_2)$ 和 $B_y(\xi_1)B_y(\xi_2) = B_y(\xi_1+\xi_2)$。

1.5 证明 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\mu p_\nu = 0$。

1.6 用 **E** 和 **B** 将 $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ 和 $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ 表示出来。

1.7 根据 Euler-Lagrange 方程 (1.143)，从下列拉氏量导出场 $\phi(x)$ 或 $A^\mu(x)$ 的经典运动方程。

(a) $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{3!}\phi^3$，其中 m 和 λ 是常数。

(b) $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial^\nu A^\mu)\partial_\nu A_\mu + \frac{1}{2}m^2A^\mu A_\mu$，其中 m 是常数。

(c) $\mathcal{L} = -\frac{a}{2}(\partial^\nu A^\mu)\partial_\nu A_\mu - \frac{b}{2}(\partial^\mu A^\nu)\partial_\nu A_\mu$，其中 a 和 b 是常数。

(d) 对于上一小题，取 $a = 1$ 且 $b = -1$，然后用 $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ 表达经典运动方程。

第 2 章　量子标量场

本章讲述**标量场** (scalar field) 的**正则量子化** (canonical quantization) 方法。标量场的量子化可以看作简谐振子量子化的推广，因此我们先来回顾一下简谐振子的正则量子化程序。

2.1　简谐振子的正则量子化

一维**简谐振子** (simple harmonic oscillator) 的哈密顿量表达为

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\, m\omega^2 x^2, \tag{2.1}$$

其中 m 是质量，ω 是角频率。第一项是动能，第二项是势能。在量子力学中，把坐标 x 和动量 p 这两个正则变量看作厄米算符，要求它们满足**正则对易关系**

$$[x, p] \equiv xp - px = \mathrm{i}. \tag{2.2}$$

构造两个非厄米的无量纲算符

$$a = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(m\omega x + \mathrm{i}p), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(m\omega x - \mathrm{i}p). \tag{2.3}$$

a 称为**湮灭算符** (annihilation operator)，$a^\dagger$ 称为**产生算符** (creation operator)，两者互为厄米共轭 (Hermitian conjugate)。它们的对易关系是

$$\begin{aligned}[a, a^\dagger] &= \frac{1}{2m\omega}[m\omega x + \mathrm{i}p, m\omega x - \mathrm{i}p] = \frac{1}{2m\omega}([m\omega x, -\mathrm{i}p] + [\mathrm{i}p, m\omega x]) \\ &= \frac{1}{2}(-\mathrm{i}[x, p] + \mathrm{i}[p, x]) = -\mathrm{i}[x, p],\end{aligned} \tag{2.4}$$

则由正则对易关系 (2.2) 得

$$[a, a^\dagger] = 1. \tag{2.5}$$

同理推出

$$[a, a] = 0, \quad [a^\dagger, a^\dagger] = 0. \tag{2.6}$$

根据 (2.3) 式反过来用 a 和 $a^\dagger$ 表示 x 和 p，

$$x = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}\,(a + a^\dagger), \quad p = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{m\omega}{2}}\,(a - a^\dagger), \tag{2.7}$$

将哈密顿量表达成

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{2m}\frac{m\omega}{2}(a-a^\dagger)^2+\frac{m\omega^2}{2}\frac{1}{2m\omega}(a+a^\dagger)^2 \\ &= -\frac{\omega}{4}(aa-aa^\dagger-a^\dagger a+a^\dagger a^\dagger)+\frac{\omega}{4}(aa+aa^\dagger+a^\dagger a+a^\dagger a^\dagger)=\frac{\omega}{2}(aa^\dagger+a^\dagger a). \end{aligned} \tag{2.8}$$

由对易关系 (2.5) 得 $aa^\dagger = a^\dagger a + 1$，于是

$$H=\frac{\omega}{2}(2a^\dagger a+1)=\omega\left(a^\dagger a+\frac{1}{2}\right)=\omega\left(N+\frac{1}{2}\right), \tag{2.9}$$

其中 $N \equiv a^\dagger a$ 是个厄米算符，称为**粒子数算符**。N 还是个**半正定**算符，对于任意态矢 $|\Psi\rangle$，N 的**期待值** (expectation value) 非负：

$$\langle\Psi|\,N\,|\Psi\rangle=\langle\Psi|\,a^\dagger a\,|\Psi\rangle=\langle a\Psi|a\Psi\rangle\geq 0. \tag{2.10}$$

因此，哈密顿量是**正定**算符，$\langle\Psi|\,H\,|\Psi\rangle > 0$。

设 $|n\rangle$ 是 N 的本征态，满足归一化条件 $\langle n|n\rangle = 1$ 和本征方程

$$N\,|n\rangle=n\,|n\rangle\,. \tag{2.11}$$

由 $n=\langle n|\,n\,|n\rangle=\langle n|\,N\,|n\rangle\geq 0$ 可知，本征值 n 是一个非负实数。利用对易子公式

$$[AB,C] = ABC-ACB+ACB-CAB=A[B,C]+[A,C]B, \tag{2.12}$$

$$[A,BC] = ABC-BAC+BAC-BCA=[A,B]C+B[A,C], \tag{2.13}$$

推出

$$[N,a^\dagger]=[a^\dagger a,a^\dagger]=a^\dagger[a,a^\dagger]=a^\dagger,\quad [N,a]=[a^\dagger a,a]=[a^\dagger,a]a=-a, \tag{2.14}$$

故 $Na^\dagger = a^\dagger N + a^\dagger$，$Na = aN - a$。从而

$$Na^\dagger\,|n\rangle = (a^\dagger N+a^\dagger)\,|n\rangle=(n+1)a^\dagger\,|n\rangle\,, \tag{2.15}$$

$$Na\,|n\rangle = (aN-a)\,|n\rangle=(n-1)a\,|n\rangle\,. \tag{2.16}$$

可见，$a^\dagger\,|n\rangle$ 和 $a\,|n\rangle$ 都是 N 的本征态，本征值分别为 $n+1$ 和 $n-1$，也就是说，

$$a^\dagger\,|n\rangle=c_1\,|n+1\rangle\,,\quad a\,|n\rangle=c_2\,|n-1\rangle\,, \tag{2.17}$$

其中 c_1 和 c_2 是两个归一化常数。产生算符 $a^\dagger$ 将本征值为 n 的态变成本征值为 $n+1$ 的态，因而也称为*升算符* (raising operator)；湮灭算符 a 将本征值为 n 的态变成本征值为 $n-1$ 的态，因而也称为*降算符* (lowering operator)。为确定归一化常数的值，进行以下计算，

$$n+1 = \langle n|\,(N+1)\,|n\rangle=\langle n|\,(a^\dagger a+1)\,|n\rangle=\langle n|\,aa^\dagger\,|n\rangle=|c_1|^2\,\langle n+1|n+1\rangle=|c_1|^2, \tag{2.18}$$

$$n = \langle n|\,N\,|n\rangle=\langle n|\,a^\dagger a\,|n\rangle=|c_2|^2\,\langle n-1|n-1\rangle=|c_2|^2. \tag{2.19}$$

将 c_1 和 c_2 都取为正实数，得 $c_1=\sqrt{n+1}$ 和 $c_2=\sqrt{n}$，故

$$a^\dagger|n\rangle=\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\,,\quad a|n\rangle=\sqrt{n}\,|n-1\rangle\,. \tag{2.20}$$

从 N 的某个本征态 $|n\rangle$ 出发，用降算符 a 逐步操作，得到本征值逐次减小的一系列本征态

$$a|n\rangle\,,\ a^2|n\rangle\,,\ a^3|n\rangle\,,\ \cdots\,, \tag{2.21}$$

本征值分别为

$$n-1,\ n-2,\ n-3,\ \cdots \tag{2.22}$$

由于 $n\geq 0$，必定存在一个最小本征值 n_0，它的本征态 $|n_0\rangle$ 满足

$$a|n_0\rangle=0. \tag{2.23}$$

上式是使本征值停止减小的条件。于是 $N|n_0\rangle=a^\dagger a|n_0\rangle=0=0\,|n_0\rangle$，可见 $n_0=0$，即

$$|n_0\rangle=|0\rangle\,. \tag{2.24}$$

反过来，从 $|0\rangle$ 出发，用升算符 $a^\dagger$ 逐步操作，得到本征值逐次增加的一系列本征态

$$a^\dagger|0\rangle\,,\ (a^\dagger)^2|0\rangle\,,\ (a^\dagger)^3|0\rangle\,,\ \cdots\,, \tag{2.25}$$

本征值分别为

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots \tag{2.26}$$

综上，本征值 n 的取值是非负整数，是量子化的。用 $a^\dagger$ 和 $|0\rangle$ 将本征态 $|n\rangle$ 表示为

$$|n\rangle=c_3(a^\dagger)^n|0\rangle\,. \tag{2.27}$$

为确定归一化常数 c_3，进行以下运算，

$$\begin{aligned}\langle n|n\rangle &= |c_3|^2\langle 0|\,a^n(a^\dagger)^n|0\rangle=|c_3|^2\langle 1|\,a^{n-1}(a^\dagger)^{n-1}|1\rangle=1\cdot 2\,|c_3|^2\langle 2|\,a^{n-2}(a^\dagger)^{n-2}|2\rangle=\cdots\\ &=(n-1)!\,|c_3|^2\langle n-1|\,aa^\dagger|n-1\rangle=n!\,|c_3|^2\langle n|n\rangle\,,\end{aligned} \tag{2.28}$$

故 $|c_3|^2=1/n!$。取 c_3 为正实数，得 $c_3=1/\sqrt{n!}$，于是

$$|n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle\,. \tag{2.29}$$

从 (2.9) 式容易看出，$|n\rangle$ 也是 H 的本征态，

$$H|n\rangle=\omega\left(N+\frac{1}{2}\right)|n\rangle=\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)|n\rangle=E_n|n\rangle\,, \tag{2.30}$$

相应的能量本征值为

$$E_n=\omega\left(n+\frac{1}{2}\right). \tag{2.31}$$

基态 $|0\rangle$ 的能量本征值不是零，而是 $E_0=\omega/2$，称为**零点能** (zero-point energy)，也称为**真空能**。这是量子力学的特有结果。我们可以将 $|0\rangle$ 看作**真空态**，将 $n>0$ 的 $|n\rangle$ 看作包含 n 个**声子** (phonon) 的激发态，每个声子具有一份能量 ω。这样一来，n 表示声子的数目，故粒子数算符 N 描述声子数。$a^\dagger$ 的作用是产生一个声子，从而增加一份能量；a 的作用是湮灭一个声子，从而减少一份能量。这是将 $a^\dagger$ 和 a 称为产生算符和湮灭算符的原因。

2.2　量子场论中的正则对易关系

在量子力学中，Schrödinger 绘景和 Heisenberg 绘景提供了两种等价的描述方法，它们之间由含时的幺正变换相互联系。

在 **Schrödinger 绘景**中，态矢 $|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}}$ 代表随时间演化的物理态，而 Hilbert 空间中的算符 O^{S} 不依赖于时间。如果系统的哈密顿量 H 不含时间，则 $|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}}$ 与 $t=0$ 时刻态矢 $|\Psi(0)\rangle^{\mathrm{S}}$ 通过幺正变换 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}$ 联系起来，

$$|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\,|\Psi(0)\rangle^{\mathrm{S}}\,. \tag{2.32}$$

这里用到算符的指数函数。对于任意算符 A，指数函数定义为

$$\mathrm{e}^{A}\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^{n}}{n!}. \tag{2.33}$$

于是

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial t}\,|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}}=\mathrm{i}\,\frac{\partial\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}}{\partial t}\,|\Psi(0)\rangle^{\mathrm{S}}=H\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\,|\Psi(0)\rangle^{\mathrm{S}}=H\,|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}}\,, \tag{2.34}$$

这就是 **Schrödinger 方程** [11]，而 (2.32) 式其实是 Schrödinger 方程的解。

在 **Heisenberg 绘景**中，态矢 $|\Psi\rangle^{\mathrm{H}}$ 定义为

$$|\Psi\rangle^{\mathrm{H}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\,|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}}=|\Psi(0)\rangle^{\mathrm{S}}\,, \tag{2.35}$$

它不随时间演化，

$$\frac{\partial}{\partial t}\,|\Psi\rangle^{\mathrm{H}}=0. \tag{2.36}$$

而算符 $O^{\mathrm{H}}(t)$ 依赖于时间，通过一个含时的相似变换与 O^{S} 联系起来，

$$O^{\mathrm{H}}(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}O^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}. \tag{2.37}$$

由于 $[H,H]=0$，有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}H\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}=H\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}=H. \tag{2.38}$$

故哈密顿量 H 在这两种绘景中是相同的，

$$H^{\mathrm{H}}=H^{\mathrm{S}}=H. \tag{2.39}$$

由

$${}^{\mathrm{H}}\langle\Psi|\,O^{\mathrm{H}}(t)\,|\Psi\rangle^{\mathrm{H}}={}^{\mathrm{H}}\langle\Psi|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}O^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\,|\Psi\rangle^{\mathrm{H}}={}^{\mathrm{S}}\langle\Psi(t)|\,O^{\mathrm{S}}\,|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}} \tag{2.40}$$

可知，两种绘景中力学量在态上的期待值相同，因而两种绘景描述相同的物理。此外，可以推出

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\partial_0 O^{\mathrm{H}}(t)\;&=\;(\mathrm{i}\partial_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht})O^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}O^{\mathrm{S}}(\mathrm{i}\partial_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht})=-H\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}O^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}O^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}H\\&=\;-HO^{\mathrm{H}}(t)+O^{\mathrm{H}}(t)H,\end{aligned} \tag{2.41}$$

即 Heisenberg 绘景中的含时算符 $O^{\mathrm{H}}(t)$ 满足 **Heisenberg 运动方程**

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}O^{\mathrm{H}}(t)=[O^{\mathrm{H}}(t),H]. \tag{2.42}$$

上一节对简谐振子的量子化是在 Schrödinger 绘景中进行的，因为我们没有考虑坐标算符 x 和动量算符 p 的时间依赖性。将正则对易关系 (2.2) 改记为 $[x^{\mathrm{S}},p^{\mathrm{S}}]=\mathrm{i}$，它在 Heisenberg 绘景中的形式是

$$\begin{aligned}[x^{\mathrm{H}}(t),p^{\mathrm{H}}(t)] &= [\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}x^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht},\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}p^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}]=\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}x^{\mathrm{S}}p^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}p^{\mathrm{S}}x^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}[x^{\mathrm{S}},p^{\mathrm{S}}]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}=\mathrm{i}.\end{aligned} \tag{2.43}$$

可见，正则对易关系的形式不依赖于绘景。(2.43) 式是在同一时刻 t 成立的，称为**等时** (equal time) 对易关系。接下来的讨论在 Heisenberg 绘景中进行，**省略**绘景的标志性上标 H。

将讨论推广到具有 n 个自由度的系统，记 $q_i(t)$ 为系统在 Heisenberg 绘景中的广义坐标算符，$p_i(t)$ 为相应的广义动量算符，它们是系统的正则变量。由于不同自由度不应该相互影响，这些算符需要满足的等时对易关系为

$$[q_i(t),p_j(t)]=\mathrm{i}\delta_{ij},\quad [q_i(t),q_j(t)]=0,\quad [p_i(t),p_j(t)]=0. \tag{2.44}$$

1.1 节提到，在量子场论中，为了平等地处理时间和空间，空间坐标 $\mathbf{x}$ 应该与时间坐标 t 一样作为量子场算符 $\Phi(\mathbf{x},t)$ 的参数。场论讨论的是具有无穷多个连续自由度的系统，每一个空间点 $\mathbf{x}$ 上的 $\Phi(\mathbf{x},t)$ 都是一个广义坐标。为了从有限个分立自由度过渡到无穷多个连续自由度，我们先将整个空间离散化，划分成无穷多个小体积元 V_i，再取 $V_i\to 0$ 的极限来得到连续空间的结果。在体积元 V_i 中，定义相应的广义坐标

$$\Phi_i(t)\equiv\frac{1}{V_i}\int_{V_i}\mathrm{d}^3x\,\Phi(\mathbf{x},t), \tag{2.45}$$

这是场 $\Phi(\mathbf{x},t)$ 在 V_i 中的平均值。将 $\partial_\mu\Phi$ 和拉格朗日量密度 $\mathcal{L}(\Phi,\partial_\mu\Phi)$ 在 V_i 中的平均值记为

$$\partial_\mu\Phi_i\equiv\frac{1}{V_i}\int_{V_i}\mathrm{d}^3x\,\partial_\mu\Phi,\quad \mathcal{L}_i\equiv\frac{1}{V_i}\int_{V_i}\mathrm{d}^3x\,\mathcal{L}(\Phi,\partial_\mu\Phi), \tag{2.46}$$

当 V_i 取得足够小时，$\mathcal{L}_i$ 成为 Φ_i 和 $\partial_\mu\Phi_i$ 的函数 $\mathcal{L}_i(\Phi_i,\partial_\mu\Phi_i)$。拉格朗日量表达为

$$L(t)=\int\mathrm{d}^3x\,\mathcal{L}=\sum_i\int_{V_i}\mathrm{d}^3x\,\mathcal{L}=\sum_i V_i\frac{1}{V_i}\int_{V_i}\mathrm{d}^3x\,\mathcal{L}=\sum_i V_i\,\mathcal{L}_i(\Phi_i,\partial_\mu\Phi_i). \tag{2.47}$$

根据定义式 (1.133)，体积元 V_i 中的广义动量是

$$\Pi_i(t)=\frac{\partial L}{\partial(\partial_0\Phi_i)}=\sum_j V_j\frac{\partial\mathcal{L}_j}{\partial(\partial_0\Phi_i)}=\sum_j V_j\delta_{ji}\frac{\partial\mathcal{L}_i}{\partial(\partial_0\Phi_i)}=V_i\frac{\partial\mathcal{L}_i}{\partial(\partial_0\Phi_i)}. \tag{2.48}$$

由 (2.44) 式得到等时对易关系

$$[\Phi_i(t),\Pi_j(t)]=\mathrm{i}\delta_{ij},\quad [\Phi_i(t),\Phi_j(t)]=0,\quad [\Pi_i(t),\Pi_j(t)]=0. \tag{2.49}$$

引入

$$\pi_i(t) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial(\partial_0 \Phi_i)} = \frac{\Pi_i(t)}{V_i}, \tag{2.50}$$

则第一条和第三条等时对易关系可用 $\pi_i(t)$ 表达为

$$[\Phi_i(t), \pi_j(t)] = \mathrm{i}\,\frac{\delta_{ij}}{V_j}, \quad [\pi_i(t), \pi_j(t)] = 0. \tag{2.51}$$

从离散到连续，Kronecker 符号 δ_{ij} 将变成 δ 函数。**Dirac $\boldsymbol{\delta}$ 函数**定义为

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0, \end{cases} \tag{2.52}$$

而且满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \delta(x) = 1. \tag{2.53}$$

从而，对于任意连续函数 $f(x)$，有

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y\, f(y)\delta(x-y). \tag{2.54}$$

$\delta(x)$ 是偶函数，即

$$\delta(x) = \delta(-x), \tag{2.55}$$

而且满足

$$f(x)\delta(x-y) = f(y)\delta(x-y), \tag{2.56}$$

$$x\,\delta(x) = 0, \tag{2.57}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}px} = 2\pi\,\delta(p). \tag{2.58}$$

这里约定，函数 $f(x)$ 的 **Fourier 变换**为

$$\tilde{f}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} f(x), \tag{2.59}$$

而 *Fourier* 逆变换为

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} \tilde{f}(p). \tag{2.60}$$

(2.58) 式表明，$2\pi\,\delta(p)$ 是 $f(x) = 1$ 的 Fourier 变换。对于连续实函数 $f(x)$，若方程 $f(x) = 0$ 具有若干个分立的根 x_i，则

$$\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}. \tag{2.61}$$

用 3 个一维 δ 函数之积定义**三维 $\boldsymbol{\delta}$ 函数**

$$\delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3), \tag{2.62}$$

那么函数 $\delta^{(3)}(\mathbf{x})$ 只在 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 处非零，且 $\delta^{(3)}(\mathbf{0})=+\infty$，并满足 $\int \mathrm{d}^3x\,\delta^{(3)}(\mathbf{x})=1$。对于任意连续函数 $f(\mathbf{x})$，有

$$f(\mathbf{x}) = \int \mathrm{d}^3y\, f(\mathbf{y})\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{2.63}$$

$$f(\mathbf{x})\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = f(\mathbf{y})\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{2.64}$$

$$\mathbf{x}\,\delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \tag{2.65}$$

$\delta^{(3)}(\mathbf{x})$ 是关于 $\mathbf{x}$ 的偶函数，$\delta^{(3)}(\mathbf{x})=\delta^{(3)}(-\mathbf{x})$。由 (2.58) 式推出

$$\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = \int \mathrm{d}x^1\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}p^1x^1}\int \mathrm{d}x^2\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}p^2x^2}\int \mathrm{d}x^3\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}p^3x^3} = 2\pi\,\delta(p^1)\cdot 2\pi\,\delta(p^2)\cdot 2\pi\,\delta(p^3), \tag{2.66}$$

可见三维 δ 函数满足

$$\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}). \tag{2.67}$$

在三维空间中，函数 $f(\mathbf{x})$ 的 Fourier 变换是

$$\tilde{f}(\mathbf{p}) = \int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}f(\mathbf{x}), \tag{2.68}$$

逆变换是

$$f(\mathbf{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\tilde{f}(\mathbf{p}). \tag{2.69}$$

因此，$(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p})$ 是 $f(\mathbf{x})=1$ 的 Fourier 变换。

设 f_i 是 $f(\mathbf{x})$ 在 V_i 上的平均值，有

$$f_i = \sum_j f_j\,\delta_{ij} = \sum_j V_j\,f_j\,\frac{\delta_{ij}}{V_j}. \tag{2.70}$$

(2.63) 式是 (2.70) 式在 $V_i\to 0$ 时的极限形式。也就是说，在连续极限下，

$$\frac{\delta_{ij}}{V_j} \to \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{2.71}$$

另一方面，在此极限下，$\Phi_i(t)\to\Phi(\mathbf{x},t)$，$\partial_\mu\Phi_i\to\partial_\mu\Phi(\mathbf{x},t)$，$\mathcal{L}_i\to\mathcal{L}(\mathbf{x},t)$，从而 $\pi_i(t)$ 变成由 (1.144) 式定义的共轭动量密度，

$$\pi_i(t) = \frac{\partial\mathcal{L}_i}{\partial(\partial_0\Phi_i)} \to \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\Phi)} = \pi(\mathbf{x},t). \tag{2.72}$$

因此，等时对易关系 (2.49) 和 (2.51) 化为

$$[\Phi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)] = \mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad [\Phi(\mathbf{x},t),\Phi(\mathbf{y},t)]=0,\quad [\pi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)]=0. \tag{2.73}$$

推广到包含若干个场 Φ_a 的系统，假设不同的场不会相互影响，则

$$[\Phi_a(\mathbf{x},t),\pi_b(\mathbf{y},t)] = \mathrm{i}\delta_{ab}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad [\Phi_a(\mathbf{x},t),\Phi_b(\mathbf{y},t)]=0,\quad [\pi_a(\mathbf{x},t),\pi_b(\mathbf{y},t)]=0. \tag{2.74}$$

这就是**量子场论中的正则对易关系**。此时，系统的正则变量 $\Phi_a(\mathbf{x},t)$ 和 $\pi_a(\mathbf{x},t)$ 都是 Hilbert 空间中的算符。

2.3　实标量场的正则量子化

如果场 $\phi(x)$ 是 Lorentz 标量，就称它为**标量场**。在固有保时向 Lorentz 变换下，若时空坐标的变换为 $x' = \Lambda x$，则标量场 $\phi(x)$ 的变换形式是

$$\phi'(x') = \phi(x). \tag{2.75}$$

在本节中，我们讨论**实标量场** $\phi(x)$，它满足**自共轭** (self-conjugate) 条件

$$\phi^\dagger(x) = \phi(x). \tag{2.76}$$

量子化之后，$\phi(x)$ 是一个厄米算符。

假设 $\phi(x)$ 是不参与相互作用的**自由实标量场**，相应的 **Lorentz 不变拉氏量**是

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2, \tag{2.77}$$

其中 $m > 0$ 是实标量场的**质量**。第一项是动能项，第二项是质量项。注意到

$$\frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)\partial_\nu\phi = \frac{1}{2}[(\partial_0\phi)^2 - (\partial_1\phi)^2 - (\partial_2\phi)^2 - (\partial_3\phi)^2], \tag{2.78}$$

有

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} = \partial_0\phi = \partial^0\phi, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\phi)} = -\partial_i\phi = \partial^i\phi, \tag{2.79}$$

归纳起来得

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \partial^\mu\phi, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -m^2\phi. \tag{2.80}$$

因此，Euler-Lagrange 方程 (1.143) 给出

$$0 = \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = \partial_\mu\partial^\mu\phi + m^2\phi, \tag{2.81}$$

也就是说，$\phi(x)$ 满足 **Klein-Gordon 方程** [1, 2]

$$(\partial^2 + m^2)\phi(x) = 0. \tag{2.82}$$

这是实标量场的经典运动方程。

根据 (1.144) 式，实标量场 $\phi(x)$ 对应的共轭动量密度是

$$\pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} = \partial_0\phi(x), \tag{2.83}$$

即 $\pi(x)$ 是 $\phi(x)$ 的时间导数。由自共轭条件 (2.76) 得

$$\pi^\dagger(x) = \pi(x). \tag{2.84}$$

如果在拉氏量 (2.77) 的动能项中不引入 1/2 因子，就会得到 $\pi(x) = 2\partial_0\phi(x)$，则共轭动量密度没有得到**正则归一化** (canonical normalization)。在动能项中引入 1/2 因子之后，质量项也必须引入 1/2 因子，否则不会得到 Klein-Gordon 方程。

现在，把正则变量 $\phi(x)$ 和 $\pi(x)$ 看作 Hilbert 空间中的算符，要求它们满足等时对易关系

$$[\phi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)] = \mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \quad [\phi(\mathbf{x},t),\phi(\mathbf{y},t)] = 0, \quad [\pi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)] = 0. \tag{2.85}$$

这种做法称为**正则量子化**。

2.3.1 平面波展开

在量子力学中，无界空间中单粒子波函数 Ψ 的**平面波解** (plane-wave solution) 为

$$\Psi(\mathbf{x},t)=\exp(-\mathrm{i}Et+\mathrm{i}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}). \tag{2.86}$$

由

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial\Psi}{\partial t}=E\exp(-\mathrm{i}Et+\mathrm{i}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})=E\Psi,\quad -\mathrm{i}\nabla\Psi=\mathbf{p}\exp(-\mathrm{i}Et+\mathrm{i}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})=\mathbf{p}\Psi \tag{2.87}$$

可知，$\hat{E}=\mathrm{i}\partial/\partial t$ 是能量微分算符，

$$\hat{\mathbf{p}}=-\mathrm{i}\nabla \tag{2.88}$$

是动量微分算符。组合起来，**四维动量微分算符**是

$$\hat{p}^\mu=\mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial t},-\nabla\right)=\mathrm{i}\partial^\mu. \tag{2.89}$$

将平面波解改写成 $\Psi(x)=\exp(-\mathrm{i}p\cdot x)$，其中 $p^\mu=(E,\mathbf{p})$，$x^\mu=(t,\mathbf{x})$，则

$$\mathrm{i}\partial^\mu\Psi=\mathrm{i}\partial^\mu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}=p^\mu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}=p^\mu\Psi. \tag{2.90}$$

因此，p^μ 是 $\hat{p}^\mu=\mathrm{i}\partial^\mu$ 的本征值，平面波解 $\Psi(x)=\exp(-\mathrm{i}p\cdot x)$ 描述四维动量为 p^μ 的粒子。

现在讨论量子场论的情况。在无界空间中，设实标量场 $\phi(x)$ 满足的 Klein-Gordon 方程具有平面波解

$$\varphi(x)=\exp(-\mathrm{i}k\cdot x), \tag{2.91}$$

则

$$\partial^2\varphi=\partial^\mu\partial_\mu\varphi=\partial^\mu(-\mathrm{i}k_\mu\varphi)=(-\mathrm{i})^2k_\mu k^\mu\varphi=-k^2\varphi, \tag{2.92}$$

从而，Klein-Gordon 方程化为

$$0=(\partial^2+m^2)\varphi=-(k^2-m^2)\varphi=-[(k^0)^2-|\mathbf{k}|^2-m^2]\varphi. \tag{2.93}$$

这就要求 $(k^0)^2=|\mathbf{k}|^2+m^2$，即 $k^0=\pm E_{\mathbf{k}}$，其中

$$E_{\mathbf{k}}\equiv\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2}>0. \tag{2.94}$$

因此有两种平面波解。

(1) $k^0=E_{\mathbf{k}}$ 对应于**正能解**

$$\varphi^{(+)}_{\mathbf{k}}(x)=\exp[-\mathrm{i}(k^0x^0-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})]=\exp[-\mathrm{i}(E_{\mathbf{k}}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})]. \tag{2.95}$$

(2) $k^0=-E_{\mathbf{k}}$ 对应于**负能解**

$$\varphi^{(-)}_{\mathbf{k}}(x)=\exp[-\mathrm{i}(k^0x^0-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})]=\exp[\mathrm{i}(E_{\mathbf{k}}t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})]. \tag{2.96}$$

从而，满足 Klein-Gordon 方程的场算符 $\phi(\mathbf{x},t)$ 的一般解可写成如下形式，

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x},t) &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}\left[a_{\mathbf{k}}\varphi^{(+)}_{\mathbf{k}}(x)+\tilde{a}_{\mathbf{k}}\varphi^{(-)}_{\mathbf{k}}(x)\right]\\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}\left[a_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{\mathbf{k}}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+\tilde{a}_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{k}}t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right],\end{aligned} \tag{2.97}$$

其中 $a_{\mathbf{k}}$ 和 $\tilde{a}_{\mathbf{k}}$ 是两个只依赖于 $\mathbf{k}$ 的算符，$1/\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}$ 是归一化因子。这是一个 *Fourier* 展开式，把 $\phi(\mathbf{x},t)$ 展开成三维动量空间中的无穷多个动量模式 (mode)。取上式的厄米共轭，得

$$\begin{aligned}\phi^\dagger(\mathbf{x},t) &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}\left[a^\dagger_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{k}}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+\tilde{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{\mathbf{k}}t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]\\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}\left[a^\dagger_{-\mathbf{k}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{k}}t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+\tilde{a}^\dagger_{-\mathbf{k}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{\mathbf{k}}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right].\end{aligned} \tag{2.98}$$

第二步利用了如下性质：对整个三维动量空间进行积分时，将被积函数中的 $\mathbf{k}$ 替换成 $-\mathbf{k}$ 不会改变积分的结果，而 $E_{-\mathbf{k}}=E_{\mathbf{k}}$。于是，自共轭条件 $\phi^\dagger(\mathbf{x},t)=\phi(\mathbf{x},t)$ 意味着

$$\tilde{a}_{\mathbf{k}} = a^\dagger_{-\mathbf{k}}. \tag{2.99}$$

注意，由上式可以推出 $\tilde{a}^\dagger_{\mathbf{k}}=a_{-\mathbf{k}}$ 和 $\tilde{a}^\dagger_{-\mathbf{k}}=a_{\mathbf{k}}$。因而

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x},t) &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}\left[a_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{\mathbf{k}}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+a^\dagger_{-\mathbf{k}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{k}}t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]\\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}\left[a_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{\mathbf{k}}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+a^\dagger_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{k}}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right].\end{aligned} \tag{2.100}$$

第二步对方括号中第二项作变量替换 $\mathbf{k}\to-\mathbf{k}$。

把动量记号 $\mathbf{k}$ 替换成 $\mathbf{p}$，将 $\phi(\mathbf{x},t)$ 的平面波展开式整理成

$$\phi(\mathbf{x},t)=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+a^\dagger_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right), \tag{2.101}$$

其中 $p\cdot x=p^0t-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}$，且 $p^0>0$，满足**质壳条件**

$$p^0=E_{\mathbf{p}}\equiv\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\,. \tag{2.102}$$

$a_{\mathbf{p}}$ 是**湮灭算符**，对应于正能解 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}$；$a^\dagger_{\mathbf{p}}$ 是**产生算符**，对应于负能解 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}$。根据 (2.83) 式，共轭动量密度算符的平面波展开式为

$$\pi(\mathbf{x},t)=\partial_0\phi(\mathbf{x},t)=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{-\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}-a^\dagger_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right). \tag{2.103}$$

2.3.2 产生湮灭算符的对易关系

在三维空间中对 $\phi(\mathbf{x},t)$ 作 Fourier 变换，有

$$\int\mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\phi(x)=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int\mathrm{d}^3x\left[a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x}+a^\dagger_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\right]. \tag{2.104}$$

这里比 Fourier 变换公式 (2.68) 多乘了一个 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}q^0t}$ 因子，使指数因子变成 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}q^0t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}$。由 (2.67) 式得

$$\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(p-q)\cdot x} = \int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(p^0-q^0)t}\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} = (2\pi)^3\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(p^0-q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \tag{2.105}$$

$$\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(p+q)\cdot x} = \int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(p^0+q^0)t}\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} = (2\pi)^3\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(p^0+q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q}). \tag{2.106}$$

故

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\phi(x) &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left[a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p^0-q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) + a_{\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0+q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\left(a_{\mathbf{q}} + a_{-\mathbf{q}}^\dagger\mathrm{e}^{2\mathrm{i}q^0t}\right),\end{aligned} \tag{2.107}$$

在第一步中，$p^0 = \sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}$，$q^0 = \sqrt{|\mathbf{q}|^2+m^2}$，两个三维 δ 函数分别要求 $\mathbf{p}=\mathbf{q}$ 和 $\mathbf{p}=-\mathbf{q}$，都导致 $p^0=q^0$，利用 (2.63) 式对 d^3p 积分即得第二步结果。类似地，$\pi(\mathbf{x},t)$ 的 Fourier 变换为

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\pi(x) &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{-\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int \mathrm{d}^3x\left[a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x} - a_{\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\right] \\ &= \int \mathrm{d}^3p\,\frac{-\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left[a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p^0-q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) - a_{\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0+q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\right] \\ &= \frac{-\mathrm{i}q_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\left(a_{\mathbf{q}} - a_{-\mathbf{q}}^\dagger\mathrm{e}^{2\mathrm{i}q^0t}\right).\end{aligned} \tag{2.108}$$

从而

$$\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}[\pi(x) - \mathrm{i}q_0\phi(x)] = \int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\pi(x) - \mathrm{i}q_0\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\phi(x) = \frac{-2\mathrm{i}q_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}a_{\mathbf{q}} = -\mathrm{i}\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}\,a_{\mathbf{q}}, \tag{2.109}$$

即

$$a_{\mathbf{p}} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\left[\pi(x) - \mathrm{i}p_0\phi(x)\right]. \tag{2.110}$$

上式取厄米共轭，并使用自共轭条件 $\phi^\dagger=\phi$ 和 $\pi^\dagger=\pi$，得

$$a_{\mathbf{p}}^\dagger = \frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\left[\pi(x) + \mathrm{i}p_0\phi(x)\right]. \tag{2.111}$$

利用上面两个表达式和等时对易关系 (2.85)，令

$$x^0 = y^0 = t, \tag{2.112}$$

推出

$$\begin{aligned}[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\{\pi(\mathbf{x},t) - \mathrm{i}p_0\phi(\mathbf{x},t)\},\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot y}\{\pi(\mathbf{y},t) + \mathrm{i}q_0\phi(\mathbf{y},t)\}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x - q\cdot y)}\left[\pi(\mathbf{x},t) - \mathrm{i}p_0\phi(\mathbf{x},t),\ \pi(\mathbf{y},t) + \mathrm{i}q_0\phi(\mathbf{y},t)\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0-q^0)t} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} \left\{ \mathrm{i}q_0[\pi(\mathbf{x},t),\phi(\mathbf{y},t)] - \mathrm{i}p_0[\phi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)] \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0-q^0)t} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} \left[-\mathrm{i}(p_0+q_0)\mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \right] \\
&= \frac{E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} = \frac{E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}).
\end{aligned} \tag{2.113}
$$

倒数第二步用到 (2.63) 式，最后一步用到 (2.67) 式。根据 δ 函数的性质 (2.64)，有

$$
\frac{E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t} \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) = \frac{E_{\mathbf{q}}+E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{q}}E_{\mathbf{q}}}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{q}}-E_{\mathbf{q}})t} \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) = \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}). \tag{2.114}
$$

故

$$
[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}). \tag{2.115}
$$

类似地,

$$
\begin{aligned}
[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] &= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x+q\cdot y)} [\pi(\mathbf{x},t) - \mathrm{i}p_0\phi(\mathbf{x},t),\ \pi(\mathbf{y},t) - \mathrm{i}q_0\phi(\mathbf{y},t)] \\
&= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0+q^0)t} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} \left\{ -\mathrm{i}q_0[\pi(\mathbf{x},t),\phi(\mathbf{y},t)] - \mathrm{i}p_0[\phi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)] \right\} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0+q^0)t} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} (p_0-q_0) \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\
&= \frac{E_{\mathbf{q}}-E_{\mathbf{p}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} = \frac{E_{\mathbf{q}}-E_{\mathbf{p}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q}).
\end{aligned} \tag{2.116}
$$

$\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})$ 只在 $\mathbf{p}=-\mathbf{q}$ 处非零, 取值为 $+\infty$, 而 $E_{\mathbf{q}}-E_{\mathbf{p}}$ 在 $\mathbf{p}=-\mathbf{q}$ 处取值为零。由于 $\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})$ 在 $\mathbf{p}=-\mathbf{q}$ 处奇性比较弱，有

$$
(E_{\mathbf{q}}-E_{\mathbf{p}}) \delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q}) = 0, \tag{2.117}
$$

故

$$
[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] = 0. \tag{2.118}
$$

此外,

$$
[a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger - a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}}^\dagger = (a_{\mathbf{q}}a_{\mathbf{p}} - a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}})^\dagger = [a_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{p}}]^\dagger = 0. \tag{2.119}
$$

因此，我们可以直接改变两个湮灭算符或产生算符的乘积次序，即 $a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}} = a_{\mathbf{q}}a_{\mathbf{p}}$，$a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger = a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}}^\dagger$。

综上，产生湮灭算符满足**对易关系**

$$
[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \quad [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] = [a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0. \tag{2.120}
$$

这是对易关系 (2.5) 和 (2.6) 在量子场论中的推广。

2.3.3 哈密顿量和总动量

根据定义式 (1.146)，实标量场的哈密顿量密度为

$$\mathcal{H}=\pi\partial_0\phi-\mathcal{L}=(\partial_0\phi)^2-\frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi+\frac{1}{2}m^2\phi^2=\frac{1}{2}[(\partial_0\phi)^2+(\nabla\phi)^2+m^2\phi^2]. \tag{2.121}$$

对全空间积分，就得到**哈密顿量算符**

$$\begin{aligned}
H&=\int \mathrm{d}^3x\,\mathcal{H}=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\,[\pi^2+(\nabla\phi)^2+m^2\phi^2]\\
&=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\Big\{\left[(-\mathrm{i}p_0)(-\mathrm{i}q_0)+(\mathrm{i}\mathbf{p})\cdot(\mathrm{i}\mathbf{q})\right]\left(a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}-a_{\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)\left(a_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}-a_{\mathbf{q}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\right)\\
&\qquad\qquad+m^2\left(a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+a_{\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)\left(a_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}+a_{\mathbf{q}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\right)\Big\}\\
&=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\Big\{(p_0q_0+\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}+m^2)\left[a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}^\dagger\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x}+a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-q)\cdot x}\right]\\
&\qquad\qquad+(-p_0q_0-\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}+m^2)\left[a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+q)\cdot x}+a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\right]\Big\}\\
&=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\Big\{\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})(p_0q_0+\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}+m^2)\left[a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}^\dagger\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_0-q_0)t}+a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_0-q_0)t}\right]\\
&\qquad\qquad+\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})(-p_0q_0-\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}+m^2)\left[a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_0+q_0)t}+a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_0+q_0)t}\right]\Big\}\\
&=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}}\Big[(E_{\mathbf{p}}^2+|\mathbf{p}|^2+m^2)\left(a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^\dagger+a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}\right)\\
&\qquad\qquad+(-E_{\mathbf{p}}^2+|\mathbf{p}|^2+m^2)\left(a_{\mathbf{p}}a_{-\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}+a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\right)\Big],
\end{aligned}\tag{2.122}$$

倒数第二步用到 (2.105) 和 (2.106) 式。由质壳条件 (2.102) 得 $-E_{\mathbf{p}}^2+|\mathbf{p}|^2+m^2=0$，故最后表达式方括号中第二项没有贡献。从而

$$\begin{aligned}
H&=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}E_{\mathbf{p}}\left(a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^\dagger+a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}\right)=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}E_{\mathbf{p}}\left[2a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}+(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p})\right]\\
&=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}E_{\mathbf{p}}\,a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}+(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{E_{\mathbf{p}}}{2},
\end{aligned}\tag{2.123}$$

其中第二步用到对易关系 (2.120)。

这个结果可以看作是一维简谐振子哈密顿量 (2.9) 向无穷多自由度的推广。半正定算符

$$N_{\mathbf{p}}\equiv a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} \tag{2.124}$$

是三维动量空间中动量为 $\mathbf{p}$ 处的**粒子数密度算符**，每个粒子贡献的能量是 $E_{\mathbf{p}}$。在 (2.123) 式最后一行中，第一项代表所有动量模式所有粒子贡献的能量之和。由 (2.67) 式得

$$(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})=\int\mathrm{d}^3x=\tilde{V}, \tag{2.125}$$

其中 $\tilde{V}$ 是进行积分的空间体积，对于全空间而言是无穷大的。因此，(2.123) 式最后一行的第二项是一个正无穷大 c 数 (c-number，即经典的数，不是算符)，是真空的**零点能**，是所有动量

模式在全空间贡献的零点能之和。2.1 节末尾的讨论表明，一维简谐振子的零点能为 $E_0=\omega/2$。这是自由度为 1 时的结果，推广到无穷多自由度自然会得到正无穷大的零点能。如果不讨论引力现象，这个零点能通常并不重要，因为实验上只能测量两个能量之差。经过正则量子化之后，实标量场的哈密顿量 H 是正定算符，不存在负能量困难。

哈密顿量 H 与产生算符和湮灭算符的对易子分别为

$$[H,a_{\mathbf{p}}^\dagger]=\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\,E_{\mathbf{q}}[a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{q}},a_{\mathbf{p}}^\dagger]=\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\,E_{\mathbf{q}}a_{\mathbf{q}}^\dagger[a_{\mathbf{q}},a_{\mathbf{p}}^\dagger]=\int\mathrm{d}^3q\,E_{\mathbf{q}}a_{\mathbf{q}}^\dagger\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p})=E_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^\dagger,\tag{2.126}$$

$$[H,a_{\mathbf{p}}]=\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\,E_{\mathbf{q}}[a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{q}},a_{\mathbf{p}}]=\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\,E_{\mathbf{q}}[a_{\mathbf{q}}^\dagger,a_{\mathbf{p}}]a_{\mathbf{q}}=-\int\mathrm{d}^3q\,E_{\mathbf{q}}a_{\mathbf{q}}\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p})=-E_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}},\tag{2.127}$$

故

$$Ha_{\mathbf{p}}^\dagger=a_{\mathbf{p}}^\dagger H+E_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^\dagger,\quad Ha_{\mathbf{p}}=a_{\mathbf{p}}H-E_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}.\tag{2.128}$$

设 $|E\rangle$ 是 H 的本征态，本征值为 E，则

$$H|E\rangle=E|E\rangle.\tag{2.129}$$

从而，

$$Ha_{\mathbf{p}}^\dagger|E\rangle=(a_{\mathbf{p}}^\dagger H+E_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^\dagger)|E\rangle=(E+E_{\mathbf{p}})a_{\mathbf{p}}^\dagger|E\rangle,\tag{2.130}$$

$$Ha_{\mathbf{p}}|E\rangle=(a_{\mathbf{p}}H-E_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}})|E\rangle=(E-E_{\mathbf{p}})a_{\mathbf{p}}|E\rangle.\tag{2.131}$$

可见，当 $a_{\mathbf{p}}^\dagger|E\rangle\neq0$ 时，产生算符 $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ 的作用是使能量本征值增加 $E_{\mathbf{p}}$；当 $a_{\mathbf{p}}|E\rangle\neq0$ 时，湮灭算符 $a_{\mathbf{p}}$ 的作用是使能量本征值减少 $E_{\mathbf{p}}$。

根据 (1.194) 式，实标量场的**总动量算符**表达为

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}&=-\int\mathrm{d}^3x\,\pi\nabla\phi=-\int\frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}(-\mathrm{i}p_0)\left(a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}-a_{\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)(\mathrm{i}\mathbf{q})\left(a_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}-a_{\mathbf{q}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\right)\\
&=-\int\frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\,p_0\mathbf{q}}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\left[-a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}^\dagger\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x}-a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-q)\cdot x}+a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+q)\cdot x}+a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\right]\\
&=-\int\frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\,p_0\mathbf{q}}{(2\pi)^3\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\Big\{-\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\left[a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}^\dagger\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_0-q_0)t}+a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_0-q_0)t}\right]\\
&\qquad\qquad+\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\left[a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p^0+q^0)t}+a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0+q^0)t}\right]\Big\}\\
&=-\int\frac{\mathrm{d}^3p\,(-E_{\mathbf{p}}\mathbf{p})}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}}\left(a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^\dagger+a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}+a_{\mathbf{p}}a_{-\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}+a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\right)\\
&=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\left(a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^\dagger+a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}+a_{\mathbf{p}}a_{-\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}+a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\right).
\end{aligned}\tag{2.132}$$

先作 $\mathbf{p}\to-\mathbf{p}$ 的替换，再利用对易关系 (2.120)，可得

$$\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\left(a_{\mathbf{p}}a_{-\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}+a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\right)=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,(-\mathbf{p})\left(a_{-\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}+a_{-\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\left(a_{\mathbf{p}}a_{-\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t} + a^\dagger_{\mathbf{p}}a^\dagger_{-\mathbf{p}}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\right), \tag{2.133}$$

因而这个积分为零。可见，(2.132) 式最后一行圆括号中最后两项没有贡献。从而，

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\left(a_{\mathbf{p}}a^\dagger_{\mathbf{p}} + a^\dagger_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}\right) = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\left[2a^\dagger_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}} + (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\right] \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\,a^\dagger_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2}\,\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int \mathrm{d}^3p\,\mathbf{p}.\end{aligned} \tag{2.134}$$

由于 $\int \mathrm{d}^3p\,\mathbf{p} = \int \mathrm{d}^3p\,(-\mathbf{p}) = -\int \mathrm{d}^3p\,\mathbf{p}$，上式最后一行第二项没有贡献。于是，

$$\mathbf{P} = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\,a^\dagger_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}, \tag{2.135}$$

即总动量是所有动量模式所有粒子贡献的动量之和。

$\mathbf{P}$ 与产生湮灭算符的对易子为

$$[\mathbf{P}, a^\dagger_{\mathbf{p}}] = \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\,\mathbf{q}\,[a^\dagger_{\mathbf{q}}a_{\mathbf{q}}, a^\dagger_{\mathbf{p}}] = \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\,\mathbf{q}\,a^\dagger_{\mathbf{q}}[a_{\mathbf{q}}, a^\dagger_{\mathbf{p}}] = \int \mathrm{d}^3q\,\mathbf{q}\,a^\dagger_{\mathbf{q}}\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = \mathbf{p}\,a^\dagger_{\mathbf{p}}, \tag{2.136}$$

$$[\mathbf{P}, a_{\mathbf{p}}] = \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\,\mathbf{q}\,[a^\dagger_{\mathbf{q}}a_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{p}}] = \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\,\mathbf{q}\,[a^\dagger_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{p}}]a_{\mathbf{q}} = -\int \mathrm{d}^3q\,\mathbf{q}\,a_{\mathbf{q}}\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = -\mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}, \tag{2.137}$$

即

$$\mathbf{P}a^\dagger_{\mathbf{p}} = a^\dagger_{\mathbf{p}}\mathbf{P} + \mathbf{p}\,a^\dagger_{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{P}a_{\mathbf{p}} = a_{\mathbf{p}}\mathbf{P} - \mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}. \tag{2.138}$$

2.3.4 粒子态

对于任意动量 $\mathbf{p}$ 对应的湮灭算符 $a_{\mathbf{p}}$，假设**真空态** $|0\rangle$ 满足

$$a_{\mathbf{p}}\,|0\rangle = 0, \tag{2.139}$$

归一化为

$$\langle 0|0\rangle = 1. \tag{2.140}$$

根据哈密顿量 H 的表达式 (2.123)，将 H 作用到真空态上，得

$$H\,|0\rangle = E_{\mathrm{vac}}\,|0\rangle, \quad E_{\mathrm{vac}} = \delta^{(3)}(\mathbf{0})\int \mathrm{d}^3p\,\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}, \tag{2.141}$$

可见 $|0\rangle$ 的能量本征值是零点能 E_{vac}。也就是说，真空态是能量最低的态。此外，根据 (2.135) 式，$|0\rangle$ 的总动量本征值是零：

$$\mathbf{P}\,|0\rangle = \mathbf{0}\,|0\rangle, \tag{2.142}$$

即真空态不具有动量。

接着，定义**单粒子态**

$$|\mathbf{p}\rangle \equiv \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,a^\dagger_{\mathbf{p}}\,|0\rangle, \tag{2.143}$$

其中 $\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}$ 是归一化因子。根据 (2.130) 式，有

$$H\,|\mathbf{p}\rangle = (E_{\text{vac}} + E_{\mathbf{p}})\,|\mathbf{p}\rangle\,, \tag{2.144}$$

另一方面，由 (2.138) 式得

$$\mathbf{P}\,|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,\mathbf{P}\,a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\,|0\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}(a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\,\mathbf{P} + \mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}^{\dagger})\,|0\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,\mathbf{p}\,a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\,|0\rangle = \mathbf{p}\,|\mathbf{p}\rangle\,. \tag{2.145}$$

可以看出，相比于真空态 $|0\rangle$，单粒子态 $|\mathbf{p}\rangle$ 多了一份能量 $E_{\mathbf{p}}$，也多了一份动量 $\mathbf{p}$。因此，$|\mathbf{p}\rangle$ 描述的是一个动量为 $\mathbf{p}$ 的粒子，这个粒子的能量为 $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$，满足狭义相对论中的色散关系 (1.69)，而拉氏量 (2.77) 中实标量场的质量 m 就是粒子的**质量**。可以看到，产生算符 $a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$ 的作用是产生一个动量为 $\mathbf{p}$ 的粒子。

将湮灭算符作用在单粒子态上，得

$$a_{\mathbf{p}}\,|\mathbf{q}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{q}}}\,a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}^{\dagger}\,|0\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{q}}}\,[a_{\mathbf{q}}^{\dagger}a_{\mathbf{p}} + (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})]\,|0\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\,|0\rangle\,. \tag{2.146}$$

如果 $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$，则上式为零；如果 $\mathbf{p} = \mathbf{q}$，则单粒子态 $|\mathbf{q}\rangle = |\mathbf{p}\rangle$ 在 $a_{\mathbf{p}}$ 的作用下变成真空态 $|0\rangle$。可见，湮灭算符 $a_{\mathbf{p}}$ 的作用是减少一个动量为 $\mathbf{p}$ 的粒子。

单粒子态的内积为

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{q}|\mathbf{p}\rangle &= \sqrt{4E_{\mathbf{q}}E_{\mathbf{p}}}\,\langle 0|\,a_{\mathbf{q}}a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\,|0\rangle = \sqrt{4E_{\mathbf{q}}E_{\mathbf{p}}}\,\langle 0|\,[a_{\mathbf{p}}^{\dagger}a_{\mathbf{q}} + (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})]\,|0\rangle \\ &= 2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}).\end{aligned} \tag{2.147}$$

上式是 *Lorentz* 不变的，这是 (2.143) 式中归一化因子取成 $\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}$ 的原因，相关证明如下。

证明　引入 **Heaviside 阶跃函数** (step function)

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{2.148}$$

对于四维动量 p^{μ}，p^0 的符号在任意惯性系中不会改变，即 $\theta(p^0)$ 在任意固有保时向 Lorentz 变换下不变。一个物理粒子的四维动量 p^{μ} 满足质壳条件 $p^2 - m^2 = 0$ 且能量为正 $(p^0 > 0)$。因此，任意 Lorentz 标量函数 $F(p)$ 在物理动量区域上的 Lorentz 不变积分表达为

$$\begin{aligned}&\int \mathrm{d}^4p\,\delta(p^2-m^2)\theta(p^0)F(p) = \int \mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}p^0\,\delta[(p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2 - m^2]\theta(p^0)F(p^0,\mathbf{p}) \\ &= \int \mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}p^0\,\frac{\delta(p^0-E_{\mathbf{p}})}{2E_{\mathbf{p}}}\,F(p^0,\mathbf{p}) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{2E_{\mathbf{p}}}\,F(E_{\mathbf{p}},\mathbf{p}).\end{aligned} \tag{2.149}$$

第二步用到 (2.61) 式，$\theta(p^0)$ 挑选出方程 $(p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2 - m^2 = 0$ 的正根 $p^0 = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2} = E_{\mathbf{p}}$，而

$$\left.\frac{\partial[(p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2 - m^2]}{\partial p^0}\right|_{p^0=E_{\mathbf{p}}} = \left.2p^0\right|_{p^0=E_{\mathbf{p}}} = 2E_{\mathbf{p}}\,. \tag{2.150}$$

可见，

$$\frac{\mathrm{d}^3p}{2E_{\mathbf{p}}} \tag{2.151}$$

是相应的 **Lorentz 不变动量空间体积元**。对任意 Lorentz 标量函数 $g(\mathbf{q})$，按照 δ 函数定义，有

$$g(\mathbf{q}) = \int \mathrm{d}^3p\, \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})g(\mathbf{p}) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{2E_{\mathbf{p}}}\, 2E_{\mathbf{p}}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})g(\mathbf{p}). \tag{2.152}$$

由于上式最左边和最右边都是 Lorentz 不变的，

$$2E_{\mathbf{p}}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \tag{2.153}$$

必定是 Lorentz 不变的。**证毕**。

单粒子态 $|\mathbf{p}\rangle$ 的自我内积 $\langle\mathbf{p}|\mathbf{p}\rangle = 2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})$ 是发散的，原因在于产生算符 $a^\dagger_{\mathbf{p}}$ 是我们在无界空间中讨论量子场平面波解时定义的。内积有限的粒子态可通过构造**波包** (wave packet) 得到，见习题 2.3。

将标量场算符 $\phi(x)$ 作用到真空态 $|0\rangle$ 上，得到态矢

$$\phi(x)\,|0\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + a^\dagger_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)|0\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\, a^\dagger_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\,|0\rangle\,. \tag{2.154}$$

它与单粒子态 $|\mathbf{p}\rangle$ 的内积为

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{p}|\,\phi(x)\,|0\rangle &= \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{2E_{\mathbf{p}}}{2E_{\mathbf{q}}}}\,\langle 0|\,a_{\mathbf{p}}a^\dagger_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\,|0\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{q}}}}\,\langle 0|\,[a_{\mathbf{p}}, a^\dagger_{\mathbf{q}}]\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\,|0\rangle \\ &= \int \mathrm{d}^3q\,\sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{q}}}}\,\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\,\langle 0|0\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}.\end{aligned} \tag{2.155}$$

回顾量子力学，单粒子位置本征态 $|\mathbf{x}\rangle$ 与动量本征态 $|\mathbf{p}\rangle$ 之间的内积为

$$\langle\mathbf{p}|\mathbf{x}\rangle = (2\pi)^{-3/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \tag{2.156}$$

其中 $(2\pi)^{-3/2}$ 是归一化因子。两个内积的形式相似。因此，$\phi(x)\,|0\rangle$ 可视为 $t = x^0$ 时刻的单粒子位置本征态，$\phi(x)$ 作用在 $|0\rangle$ 上相当于在时空点 $x^\mu = (t, \mathbf{x})$ 处产生一个粒子。可以看出，在平面波展开式 (2.101) 中将归一化因子取为 $1/\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}$ 有助于使内积 (2.155) 具有 *Lorentz* 不变的形式。

进一步，定义动量分别为 $\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n$ 的 n 个粒子对应的**多粒子态**为

$$|\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle \equiv C_1 a^\dagger_{\mathbf{p}_1}\cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_n}\,|0\rangle\,, \quad C_1 = \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}}\cdots\sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}}\,. \tag{2.157}$$

根据 (2.128) 式，H 对它的作用给出

$$\begin{aligned}H\,|\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle &= C_1 H a^\dagger_{\mathbf{p}_1}\cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_n}\,|0\rangle = C_1(a^\dagger_{\mathbf{p}_1}H + E_{\mathbf{p}_1}a^\dagger_{\mathbf{p}_1})\cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_n}\,|\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle \\ &= C_1 a^\dagger_{\mathbf{p}_1} H a^\dagger_{\mathbf{p}_2}\cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_n}\,|0\rangle + E_{\mathbf{p}_1}\,|\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= C_1 a^\dagger_{\mathbf{p}_1} a^\dagger_{\mathbf{p}_2} H \cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_n} |0\rangle + (E_{\mathbf{p}_1} + E_{\mathbf{p}_2}) |\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle \\
&= \cdots = C_1 a^\dagger_{\mathbf{p}_1} a^\dagger_{\mathbf{p}_2} \cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_n} H |0\rangle + (E_{\mathbf{p}_1} + E_{\mathbf{p}_2} + \cdots + E_{\mathbf{p}_n}) |\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle \\
&= (E_{\text{vac}} + E_{\mathbf{p}_1} + E_{\mathbf{p}_2} + \cdots + E_{\mathbf{p}_n}) |\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle ,
\end{aligned} \tag{2.158}
$$

同理，$\mathbf{P}$ 对它的作用给出

$$
\mathbf{P} |\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \cdots + \mathbf{p}_n) |\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle . \tag{2.159}
$$

也就是说，多粒子态 $|\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle$ 的能量本征值和动量本征值直接由各个粒子的能量和动量叠加贡献。

由对易关系 (2.120) 得

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_i, \cdots, \mathbf{p}_j, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle &= \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \cdots \sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}}\, a^\dagger_{\mathbf{p}_1} \cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_i} \cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_j} \cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_n} |0\rangle \\
&= \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \cdots \sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}}\, a^\dagger_{\mathbf{p}_1} \cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_j} \cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_i} \cdots a^\dagger_{\mathbf{p}_n} |0\rangle \\
&= |\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_j, \cdots, \mathbf{p}_i, \cdots, \mathbf{p}_n\rangle .
\end{aligned} \tag{2.160}
$$

可以看到，对换多粒子态中的任意两个粒子，得到的态相同，即多粒子态对于全同粒子交换是对称的。这说明实标量场描述的粒子是一种玻色子，称为**标量玻色子** (scalar boson)，服从 **Bose-Einstein 统计** [12]。得到这个结论的关键在于两个产生算符相互对易。

双粒子态的内积为

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle = \sqrt{16 E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2} E_{\mathbf{q}_1} E_{\mathbf{q}_2}} \langle 0 | a_{\mathbf{q}_2} a_{\mathbf{q}_1} a^\dagger_{\mathbf{p}_1} a^\dagger_{\mathbf{p}_2} |0\rangle \\
&= \sqrt{16 E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2} E_{\mathbf{q}_1} E_{\mathbf{q}_2}} \left[(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1) \langle 0 | a_{\mathbf{q}_2} a^\dagger_{\mathbf{p}_2} |0\rangle + \langle 0 | a_{\mathbf{q}_2} a^\dagger_{\mathbf{p}_1} a_{\mathbf{q}_1} a^\dagger_{\mathbf{p}_2} |0\rangle \right] \\
&= \sqrt{16 E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2} E_{\mathbf{q}_1} E_{\mathbf{q}_2}} \left[(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1) \langle 0 | a_{\mathbf{q}_2} a^\dagger_{\mathbf{p}_2} |0\rangle + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_1) \langle 0 | a_{\mathbf{q}_2} a^\dagger_{\mathbf{p}_1} |0\rangle \right] \\
&= \sqrt{16 E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2} E_{\mathbf{q}_1} E_{\mathbf{q}_2}} \left[(2\pi)^6 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2) + (2\pi)^6 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_1) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_2) \right] \\
&= 4 E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2} (2\pi)^6 \left[\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2) + \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_2) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_1) \right] .
\end{aligned} \tag{2.161}
$$

此内积仅在两种条件下非零，一种是 $\mathbf{p}_1 = \mathbf{q}_1$ 且 $\mathbf{p}_2 = \mathbf{q}_2$，另一种是 $\mathbf{p}_1 = \mathbf{q}_2$ 且 $\mathbf{p}_2 = \mathbf{q}_1$。

定义动量均为 $\mathbf{q}$ 的 $n_{\mathbf{q}}$ 个粒子对应的多粒子态

$$
|n_{\mathbf{q}}\rangle \equiv C_2 (a^\dagger_{\mathbf{q}})^{n_{\mathbf{q}}} |0\rangle , \quad C_2 = (2E_{\mathbf{q}})^{n_{\mathbf{q}}/2}, \tag{2.162}
$$

则粒子数密度算符 $N_{\mathbf{p}} = a^\dagger_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}$ 对它的作用为

$$
\begin{aligned}
N_{\mathbf{p}} |n_{\mathbf{q}}\rangle &= C_2 a^\dagger_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} (a^\dagger_{\mathbf{q}})^{n_{\mathbf{q}}} |0\rangle = C_2 a^\dagger_{\mathbf{p}} \left[a^\dagger_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{p}} + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \right] (a^\dagger_{\mathbf{q}})^{n_{\mathbf{q}}-1} |0\rangle \\
&= C_2 a^\dagger_{\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{p}} (a^\dagger_{\mathbf{q}})^{n_{\mathbf{q}}-1} |0\rangle + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) C_2 a^\dagger_{\mathbf{p}} (a^\dagger_{\mathbf{q}})^{n_{\mathbf{q}}-1} |0\rangle \\
&= C_2 a^\dagger_{\mathbf{p}} (a^\dagger_{\mathbf{q}})^2 a_{\mathbf{p}} (a^\dagger_{\mathbf{q}})^{n_{\mathbf{q}}-2} |0\rangle + 2(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) C_2 a^\dagger_{\mathbf{p}} (a^\dagger_{\mathbf{q}})^{n_{\mathbf{q}}-1} |0\rangle \\
&= \cdots = C_2 a^\dagger_{\mathbf{p}} (a^\dagger_{\mathbf{q}})^{n_{\mathbf{q}}} a_{\mathbf{p}} |0\rangle + n_{\mathbf{q}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) C_2 a^\dagger_{\mathbf{p}} (a^\dagger_{\mathbf{q}})^{n_{\mathbf{q}}-1} |0\rangle \\
&= n_{\mathbf{q}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) C_2 a^\dagger_{\mathbf{p}} (a^\dagger_{\mathbf{q}})^{n_{\mathbf{q}}-1} |0\rangle .
\end{aligned} \tag{2.163}
$$

在动量空间对粒子数密度算符进行积分，得到的是**粒子数算符**

$$N \equiv \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} N_{\mathbf{p}} = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}. \tag{2.164}$$

由 (2.163) 式得

$$\begin{aligned} N\left|n_{\mathbf{q}}\right\rangle &= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} N_{\mathbf{p}} \left|n_{\mathbf{q}}\right\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} n_{\mathbf{q}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) C_2 a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}-1} \left|0\right\rangle \\ &= n_{\mathbf{q}} C_2 (a_{\mathbf{q}}^\dagger)^{n_{\mathbf{q}}} \left|0\right\rangle = n_{\mathbf{q}} \left|n_{\mathbf{q}}\right\rangle . \end{aligned} \tag{2.165}$$

因此，$\left|n_{\mathbf{q}}\right\rangle$ 是 N 的本征态，本征值为粒子数 $n_{\mathbf{q}}$。

更一般地，定义多粒子态

$$\left|n_{\mathbf{p}_1}, \cdots, n_{\mathbf{p}_m}\right\rangle \equiv C_3 (a_{\mathbf{p}_1}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_1}} \cdots (a_{\mathbf{p}_m}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_m}} \left|0\right\rangle , \quad C_3 = \prod_{i=1}^{m} (2E_{\mathbf{p}_i})^{n_{\mathbf{p}_i}/2}, \tag{2.166}$$

以描述动量为 $\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_m$ 的粒子分别有 $n_{\mathbf{p}_1}, \cdots, n_{\mathbf{p}_m}$ 个的状态。此时，有

$$\begin{aligned} & N\left|n_{\mathbf{p}_1}, \cdots, n_{\mathbf{p}_m}\right\rangle \\ =& \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} C_3 a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}_1}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_1}} \cdots (a_{\mathbf{p}_m}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_m}} \left|0\right\rangle \\ =& \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} C_3 \Big[a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{p}_1}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_1}} a_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}_2}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_2}} \cdots (a_{\mathbf{p}_m}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_m}} \left|0\right\rangle \\ & \qquad + n_{\mathbf{p}_1} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1) a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{p}_1}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_1}-1} (a_{\mathbf{p}_2}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_2}} \cdots (a_{\mathbf{p}_m}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_m}} \left|0\right\rangle \Big] \\ =& \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} C_3 \left[a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{p}_1}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_1}} a_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}_2}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_2}} \cdots (a_{\mathbf{p}_m}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_m}} \left|0\right\rangle \right] + n_{\mathbf{p}_1} \left|n_{\mathbf{p}_1}, \cdots, n_{\mathbf{p}_m}\right\rangle \\ =& \cdots = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} C_3 \left[a_{\mathbf{p}}^\dagger (a_{\mathbf{p}_1}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_1}} \cdots (a_{\mathbf{p}_m}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}_m}} a_{\mathbf{p}} \left|0\right\rangle \right] + (n_{\mathbf{p}_1} + \cdots + n_{\mathbf{p}_m}) \left|n_{\mathbf{p}_1}, \cdots, n_{\mathbf{p}_m}\right\rangle \\ =& (n_{\mathbf{p}_1} + \cdots + n_{\mathbf{p}_m}) \left|n_{\mathbf{p}_1}, \cdots, n_{\mathbf{p}_m}\right\rangle . \end{aligned} \tag{2.167}$$

可见，N 确实是描述总粒子数的算符。

2.4 复标量场的正则量子化

在本节中，我们讨论**复标量场** $\phi(x)$，它不满足自共轭条件 (2.76)，即

$$\phi^\dagger(x) \neq \phi(x). \tag{2.168}$$

自由复标量场的拉氏量具有 1.7.4 小节中 (1.229) 式的形式。不过，由于量子化之后 $\phi(x)$ 是算符，需要把那里的复共轭记号 $*$ 改成厄米共轭记号 $\dagger$，故 *Lorentz* 不变拉氏量为

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^\dagger) \partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi, \tag{2.169}$$

其中 $m>0$ 是复标量场的质量。$\phi(x)$ 与 $\phi^\dagger(x)$ 线性独立，是两个独立的正则变量，注意到

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\dagger)}=\partial^\mu\phi,\quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\dagger}=-m^2\phi,\quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}=\partial^\mu\phi^\dagger,\quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}=-m^2\phi^\dagger, \tag{2.170}$$

由 (1.143) 式推出经典运动方程

$$(\partial^2+m^2)\phi(x)=0,\quad (\partial^2+m^2)\phi^\dagger(x)=0. \tag{2.171}$$

也就是说，$\phi(x)$ 和 $\phi^\dagger(x)$ 均满足 Klein-Gordon 方程。

可以将复标量场 ϕ 分解为两个实标量场 ϕ_1 和 ϕ_2 的线性组合：

$$\phi=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1+\mathrm{i}\phi_2),\quad \phi^\dagger=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1-\mathrm{i}\phi_2). \tag{2.172}$$

从而，拉氏量 (2.169) 化为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}&=\frac{1}{2}[\partial^\mu(\phi_1-\mathrm{i}\phi_2)]\partial_\mu(\phi_1+\mathrm{i}\phi_2)-\frac{1}{2}m^2(\phi_1-\mathrm{i}\phi_2)(\phi_1+\mathrm{i}\phi_2)\\&=\frac{1}{2}(\partial^\mu\phi_1)\partial_\mu\phi_1-\frac{1}{2}m^2\phi_1^2+\frac{1}{2}(\partial^\mu\phi_2)\partial_\mu\phi_2-\frac{1}{2}m^2\phi_2^2.\end{aligned} \tag{2.173}$$

与 (2.77) 式比较可知，复标量场的拉氏量相当于两个质量相同的实标量场的拉氏量。

2.4.1　平面波展开

对于复标量场，我们可以遵循 2.3.1 小节中的方法讨论它的平面波展开式，区别在于不能够应用自共轭条件。从而，场算符 $\phi(\mathbf{x},t)$ 的一般解也具有 (2.97) 式的形式，

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x},t)&=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\left[a_\mathbf{k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+\tilde{a}_\mathbf{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_\mathbf{k}t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]\\&=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\left[a_\mathbf{k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+\tilde{a}_{-\mathbf{k}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right].\end{aligned} \tag{2.174}$$

第二步对方括号中第二项作变量替换 $\mathbf{k}\to-\mathbf{k}$。由于复标量场不满足自共轭条件 (2.76)，算符 $\tilde{a}_{-\mathbf{k}}$ 与 $a_\mathbf{k}$ 没有什么关系，改记为

$$b_\mathbf{k}^\dagger=\tilde{a}_{-\mathbf{k}}, \tag{2.175}$$

则展开式变成

$$\phi(\mathbf{x},t)=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\left[a_\mathbf{k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}+b_\mathbf{k}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]. \tag{2.176}$$

替换动量记号，把 $\phi(\mathbf{x},t)$ 的平面波展开式整理成

$$\phi(\mathbf{x},t)=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left(a_\mathbf{p}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+b_\mathbf{p}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right), \tag{2.177}$$

其中 p^0 满足质壳条件

$$p^0=E_\mathbf{p}\equiv\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}>0. \tag{2.178}$$

取厄米共轭，就得到 $\phi^\dagger(\mathbf{x},t)$ 的平面波展开式

$$\phi^\dagger(\mathbf{x},t)=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left(b_\mathbf{p}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+a_\mathbf{p}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right). \tag{2.179}$$

现在，$a_\mathbf{p}$ 和 $b_\mathbf{p}$ 是两个相互独立的湮灭算符，而 $a_\mathbf{p}^\dagger$ 和 $b_\mathbf{p}^\dagger$ 是两个相互独立的产生算符。

根据 (1.144) 式，$\phi(\mathbf{x},t)$ 对应的共轭动量密度是

$$\pi(\mathbf{x},t)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)}=\partial_0\phi^\dagger=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{-\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left(b_\mathbf{p}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}-a_\mathbf{p}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right), \tag{2.180}$$

$\phi^\dagger(\mathbf{x},t)$ 对应的共轭动量密度是

$$\pi^\dagger(\mathbf{x},t)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi^\dagger)}=\partial_0\phi=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{-\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left(a_\mathbf{p}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}-b_\mathbf{p}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right). \tag{2.181}$$

$\pi(\mathbf{x},t)$ 与 $\pi^\dagger(\mathbf{x},t)$ 互为厄米共轭。依照 (2.74) 式，等时对易关系为

$$\begin{aligned}
[\phi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)]&=\mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad [\phi(\mathbf{x},t),\phi(\mathbf{y},t)]=[\pi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)]=0,\\
[\phi^\dagger(\mathbf{x},t),\pi^\dagger(\mathbf{y},t)]&=\mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad [\phi^\dagger(\mathbf{x},t),\phi^\dagger(\mathbf{y},t)]=[\pi^\dagger(\mathbf{x},t),\pi^\dagger(\mathbf{y},t)]=0,\\
[\phi(\mathbf{x},t),\pi^\dagger(\mathbf{y},t)]&=[\phi^\dagger(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)]=[\phi(\mathbf{x},t),\phi^\dagger(\mathbf{y},t)]=[\pi(\mathbf{x},t),\pi^\dagger(\mathbf{y},t)]=0.
\end{aligned} \tag{2.182}$$

利用这些关系可推出以下产生湮灭算符的对易关系，具体推导过程见 2.4.2 小节选读内容。

$$\begin{aligned}
[a_\mathbf{p},a_\mathbf{q}^\dagger]&=(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}),\quad [a_\mathbf{p},a_\mathbf{q}]=[a_\mathbf{p}^\dagger,a_\mathbf{q}^\dagger]=0,\\
[b_\mathbf{p},b_\mathbf{q}^\dagger]&=(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}),\quad [b_\mathbf{p},b_\mathbf{q}]=[b_\mathbf{p}^\dagger,b_\mathbf{q}^\dagger]=0,\\
[a_\mathbf{p},b_\mathbf{q}^\dagger]&=[b_\mathbf{p},a_\mathbf{q}^\dagger]=[a_\mathbf{p},b_\mathbf{q}]=[a_\mathbf{p}^\dagger,b_\mathbf{q}^\dagger]=0.
\end{aligned} \tag{2.183}$$

这说明 $(a_\mathbf{p},a_\mathbf{p}^\dagger)$ 与 $(b_\mathbf{p},b_\mathbf{p}^\dagger)$ 是两套不同的产生湮灭算符，描述两种不同的玻色子。

2.4.2 选读：推导产生湮灭算符的对易关系

本小节推导产生湮灭算符的对易关系 (2.183)。

由

$$\begin{aligned}
\int\mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\phi(x)&=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\int\mathrm{d}^3x\left[a_\mathbf{p}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x}+b_\mathbf{p}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\right]\\
&=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left[a_\mathbf{p}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p^0-q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})+b_\mathbf{p}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0+q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\right]\\
&=\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{q}}}\left(a_\mathbf{q}+b_{-\mathbf{q}}^\dagger\mathrm{e}^{2\mathrm{i}q^0t}\right)
\end{aligned} \tag{2.184}$$

和

$$\int\mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\pi^\dagger(x)=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{-\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\int\mathrm{d}^3x\left[a_\mathbf{p}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x}-b_\mathbf{p}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \mathrm{d}^3p\, \frac{-\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left[a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p^0-q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) - b^\dagger_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0+q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\right] \\
&= \frac{-\mathrm{i}q_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} \left(a_{\mathbf{q}} - b^\dagger_{-\mathbf{q}}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}q^0t}\right), \qquad (2.185)
\end{aligned}
$$

得

$$
\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}(\pi^\dagger - \mathrm{i}q_0\phi) = \frac{-2\mathrm{i}q_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\, a_{\mathbf{q}} = -\mathrm{i}\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}\, a_{\mathbf{q}}. \qquad (2.186)
$$

于是,

$$
a_{\mathbf{p}} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}(\pi^\dagger - \mathrm{i}p_0\phi), \quad a^\dagger_{\mathbf{p}} = \frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}(\pi + \mathrm{i}p_0\phi^\dagger). \qquad (2.187)
$$

从而，有

$$
\begin{aligned}
[a_{\mathbf{p}}, a^\dagger_{\mathbf{q}}] &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x - q\cdot y)} \left[\pi^\dagger(\mathbf{x},t) - \mathrm{i}p_0\phi(\mathbf{x},t),\ \pi(\mathbf{y},t) + \mathrm{i}q_0\phi^\dagger(\mathbf{y},t)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0-q^0)t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} \left(\mathrm{i}q_0[\pi^\dagger(\mathbf{x},t), \phi^\dagger(\mathbf{y},t)] - \mathrm{i}p_0[\phi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{y},t)]\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0-q^0)t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})}\, (p_0+q_0)\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\
&= \frac{E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} = \frac{E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \\
&= (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \qquad (2.188)
\end{aligned}
$$

以及

$$
[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] = \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x + q\cdot y)} \left[\pi^\dagger(\mathbf{x},t) - \mathrm{i}p_0\phi(\mathbf{x},t),\ \pi^\dagger(\mathbf{y},t) - \mathrm{i}q_0\phi(\mathbf{y},t)\right] = 0. \qquad (2.189)
$$

另一方面，由

$$
\begin{aligned}
\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\phi^\dagger(x) &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \int \mathrm{d}^3x \left[b_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x} + a^\dagger_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\right] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left[b_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p^0-q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) + a^\dagger_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0+q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} \left(b_{\mathbf{q}} + a^\dagger_{-\mathbf{q}}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}q^0t}\right) \qquad (2.190)
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\pi(x) &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \frac{-\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \int \mathrm{d}^3x \left[b_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x} - a^\dagger_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\right] \\
&= \int \mathrm{d}^3p\, \frac{-\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left[b_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p^0-q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) - a^\dagger_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0+q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\right] \\
&= \frac{-\mathrm{i}q_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} \left(b_{\mathbf{q}} - a^\dagger_{-\mathbf{q}}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}q^0t}\right), \qquad (2.191)
\end{aligned}
$$

得

$$\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}(\pi - \mathrm{i}q_0\phi^\dagger) = \frac{-2\mathrm{i}q_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\, b_{\mathbf{q}} = -\mathrm{i}\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}\, b_{\mathbf{q}}. \tag{2.192}$$

于是,

$$b_{\mathbf{p}} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}(\pi - \mathrm{i}p_0\phi^\dagger), \quad b^\dagger_{\mathbf{p}} = \frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}(\pi^\dagger + \mathrm{i}p_0\phi). \tag{2.193}$$

从而，有

$$\begin{aligned}
[b_{\mathbf{p}}, b^\dagger_{\mathbf{q}}] &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x - q\cdot y)}\, [\pi(\mathbf{x},t) - \mathrm{i}p_0\phi^\dagger(\mathbf{x},t),\ \pi^\dagger(\mathbf{y},t) + \mathrm{i}q_0\phi(\mathbf{y},t)] \\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0-q^0)t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} \left\{\mathrm{i}q_0[\pi(\mathbf{x},t), \phi(\mathbf{y},t)] - \mathrm{i}p_0[\phi^\dagger(\mathbf{x},t), \pi^\dagger(\mathbf{y},t)]\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0-q^0)t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})}\, (p_0 + q_0)\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\
&= \frac{E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} = \frac{E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \\
&= (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}),
\end{aligned} \tag{2.194}$$

以及

$$[b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}] = \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x + q\cdot y)}\, [\pi(\mathbf{x},t) - \mathrm{i}p_0\phi^\dagger(\mathbf{x},t),\ \pi(\mathbf{y},t) - \mathrm{i}q_0\phi^\dagger(\mathbf{y},t)] = 0. \tag{2.195}$$

此外，还有

$$[a_{\mathbf{p}}, b^\dagger_{\mathbf{q}}] = \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x - q\cdot y)}\, [\pi^\dagger(\mathbf{x},t) - \mathrm{i}p_0\phi(\mathbf{x},t),\ \pi^\dagger(\mathbf{y},t) + \mathrm{i}q_0\phi(\mathbf{y},t)] = 0, \tag{2.196}$$

以及

$$\begin{aligned}
[a_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}] &= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x + q\cdot y)}\, [\pi^\dagger(\mathbf{x},t) - \mathrm{i}p_0\phi(\mathbf{x},t),\ \pi(\mathbf{y},t) - \mathrm{i}q_0\phi^\dagger(\mathbf{y},t)] \\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0+q^0)t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} \left\{-\mathrm{i}q_0[\pi^\dagger(\mathbf{x},t), \phi^\dagger(\mathbf{y},t)] - \mathrm{i}p_0[\phi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{y},t)]\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0+q^0)t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})}\, (p_0 - q_0)\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\
&= \frac{E_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-i(\mathbf{p}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} = \frac{E_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q}) = 0.
\end{aligned} \tag{2.197}$$

2.4.3 U(1) 整体对称性

类似于 1.7.4 小节的讨论，对复标量场 $\phi(x)$ 作 U(1) 整体变换

$$\phi'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\phi(x), \quad [\phi^\dagger(x)]' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}\phi^\dagger(x), \tag{2.198}$$

其中实常数 q 是 U(1) 荷，实数 θ 是不依赖于 x^μ 的变换参数，则拉氏量 (2.169) 不变，系统具有 U(1) 整体对称性。由于 θ 的取值是任意的，复标量场的取值具有一定的任意性，相差一个任意整体相位因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ 的复标量场描述相同的物理。相应的 **U(1) 守恒流算符**为

$$J^\mu = \mathrm{i}q\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial^\mu} \phi. \tag{2.199}$$

它是一个厄米算符，

$$(J^\mu)^\dagger = \{\mathrm{i}q[\phi^\dagger\partial^\mu\phi - (\partial^\mu\phi^\dagger)\phi]\}^\dagger = -\mathrm{i}q[(\partial^\mu\phi^\dagger)\phi - \phi^\dagger\partial^\mu\phi] = \mathrm{i}q\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi = J^\mu. \tag{2.200}$$

相应的 **U(1) 守恒荷算符**是

$$\begin{aligned}
Q &= \mathrm{i}q\int \mathrm{d}^3x\,\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial^0}\phi = \mathrm{i}q\int \mathrm{d}^3x\,[\phi^\dagger\partial^0\phi - (\partial^0\phi^\dagger)\phi] = \mathrm{i}q\int \mathrm{d}^3x\,(\phi^\dagger\pi^\dagger - \pi\phi) \\
&= \mathrm{i}q\int \frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{k}}}}\Big[\left(b_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)(-\mathrm{i}E_{\mathbf{k}})\left(a_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} - b_{\mathbf{k}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\right) \\
&\qquad\qquad - (-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}})\left(b_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} - a_{\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)\left(a_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} + b_{\mathbf{k}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\right)\Big] \\
&= q\int \frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{k}}}}\Big\{(E_{\mathbf{k}}+E_{\mathbf{p}})\left[a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-k)\cdot x} - b_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{k}}^\dagger\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-k)\cdot x}\right] \\
&\qquad\qquad + (E_{\mathbf{k}}-E_{\mathbf{p}})\left[b_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+k)\cdot x} - a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{k}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+k)\cdot x}\right]\Big\} \\
&= q\int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{k}}}}\Big\{(E_{\mathbf{k}}+E_{\mathbf{p}})\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{k})\left[a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{k}})t} - b_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{k}}^\dagger\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{k}})t}\right] \\
&\qquad\qquad + (E_{\mathbf{k}}-E_{\mathbf{p}})\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{k})\left[b_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{k}})t} - a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{k}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{k}})t}\right]\Big\} \\
&= q\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\left(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} - b_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{p}}^\dagger\right).
\end{aligned} \tag{2.201}$$

利用对易关系 (2.183)，可得

$$Q = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\left(q\,a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} - q\,b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}\right) - (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,q. \tag{2.202}$$

上式第二项是零点荷。在第一项的圆括号中，粒子数密度算符 $a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$ 的系数是 q，而粒子数密度算符 $b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}$ 的系数是 $-q$。可见，$(a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger)$ 描述的粒子具有的 U(1) 荷为 q，称为**正粒子**；另一方面，$(b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{p}}^\dagger)$ 描述的粒子具有相反的 U(1) 荷 $-q$，称为**反粒子**。因此，复标量场描述一对正反标量玻色子。除去零点荷，总荷 Q 是所有动量模式所有正反粒子贡献的 U(1) 荷之和。注意到 Q/q 的表达式与 (1.3) 式的全空间积分类似，但 Q/q 被解释为正粒子数与反粒子数之差，可正可负，因而不存在负概率困难。

这里单个粒子的 U(1) 荷 q 或 $-q$ 对总荷 Q 的贡献是相加性的，并且来自于一种内部对称性，因而是一种**内部相加性量子数** (internal additive quantum number)。实际上，**反粒子的所有内部相加性量子数都与正粒子相反**。

如果对实标量场作类似的 U(1) 整体变换，则自共轭条件 (2.76) 使得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\phi(x) = \phi'(x) = [\phi'(x)]^\dagger = [\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\phi(x)]^\dagger = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}\phi^\dagger(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}\phi(x). \tag{2.203}$$

上式要求 $q=0$。因此，对实标量场不能进行非平庸的 U(1) 整体变换。实际上，自共轭条件使实标量场描述的粒子不能具有任何非零的内部相加性量子数，也就是说，正粒子与反粒子是相同的，实标量场描述的是一种**纯中性粒子** (truly neutral particle)。

经过进一步计算，得到复标量场的哈密顿量算符

$$H=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,E_{\mathbf{p}}\left(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}+b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}\right)+(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,E_{\mathbf{p}}. \tag{2.204}$$

除了零点能，哈密顿量是所有动量模式所有正反粒子的能量之和。正粒子与反粒子具有相同的质量 m，因而动量为 $\mathbf{p}$ 时能量均为 $E_{\mathbf{p}}$。另一方面，复标量场的总动量算符为

$$\mathbf{P}=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\,(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}+b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}). \tag{2.205}$$

总动量是所有动量模式所有正反粒子的动量之和。具体推导过程见 2.4.4 小节选读内容。

2.4.4 选读：推导哈密顿量和总动量

根据 (1.146) 式，复标量场的哈密顿量密度为

$$\begin{aligned}\mathcal{H}&=\pi\partial_0\phi+\pi^\dagger\partial_0\phi^\dagger-\mathcal{L}=(\partial^0\phi^\dagger)\partial_0\phi+(\partial^0\phi)\partial_0\phi^\dagger-(\partial^\mu\phi^\dagger)\partial_\mu\phi+m^2\phi^\dagger\phi\\&=(\partial^0\phi)\partial_0\phi^\dagger+(\nabla\phi^\dagger)\cdot\nabla\phi+m^2\phi^\dagger\phi.\end{aligned} \tag{2.206}$$

于是，哈密顿量可以写成

$$\begin{aligned}H&=\int\mathrm{d}^3x\,\mathcal{H}=\int\mathrm{d}^3x\,[\pi^\dagger\pi+(\nabla\phi^\dagger)\cdot\nabla\phi+m^2\phi^\dagger\phi]\\&=\int\mathrm{d}^3x\,[\pi^\dagger\pi+\nabla\cdot(\phi^\dagger\nabla\phi)-\phi^\dagger\nabla^2\phi+m^2\phi^\dagger\phi]\\&=\int\mathrm{d}^3x\,[\pi^\dagger\pi-\phi^\dagger\partial^0\partial_0\phi+\phi^\dagger(\partial^0\partial_0-\nabla^2+m^2)\phi]\\&=\int\mathrm{d}^3x\,[\pi^\dagger\pi-\phi^\dagger\partial^0\partial_0\phi+\phi^\dagger(\partial^2+m^2)\phi].\end{aligned} \tag{2.207}$$

上式第三步用了导数的乘积法则，第四步扔掉了一个全散度，最后一行方括号里第三项可以通过 ϕ 的运动方程 (2.171) 消去。从而，得到

$$\begin{aligned}H&=\int\mathrm{d}^3x\,(\pi^\dagger\pi-\phi^\dagger\partial^0\partial_0\phi)\\&=\int\frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\Big\{(-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}})\left(a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}-b_{\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)(-\mathrm{i}E_{\mathbf{q}})\left(b_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}-a_{\mathbf{q}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\right)\\&\qquad\qquad-\left(b_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+a_{\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)(-E_{\mathbf{q}}^2)\left(a_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}+b_{\mathbf{q}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\right)\Big\}\\&=\int\frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\,E_{\mathbf{q}}}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\Big[(E_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{q}}+E_{\mathbf{q}}a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-q)\cdot x}+(E_{\mathbf{q}}b_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{q}}^\dagger+E_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}^\dagger)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x}\\&\qquad\qquad+(-E_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{q}}+E_{\mathbf{q}}b_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+q)\cdot x}+(-E_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger+E_{\mathbf{q}}a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{q}}^\dagger)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\Big]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\,E_{\mathbf{q}}}{(2\pi)^3\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \Big\{\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\big[(E_{\mathbf{p}}b^\dagger_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{q}} + E_{\mathbf{q}}a^\dagger_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t} \\
&\qquad + (E_{\mathbf{q}}b_{\mathbf{p}}b^\dagger_{\mathbf{q}} + E_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}a^\dagger_{\mathbf{q}})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t}\big] \\
&\qquad + \delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\big[(-E_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{q}} + E_{\mathbf{q}}b_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t} \\
&\qquad + (-E_{\mathbf{p}}b^\dagger_{\mathbf{p}}a^\dagger_{\mathbf{q}} + E_{\mathbf{q}}a^\dagger_{\mathbf{p}}b^\dagger_{\mathbf{q}})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t}\big]\Big\} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p\,E_{\mathbf{p}}^2}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}}\Big[b^\dagger_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{p}} + b_{\mathbf{p}}b^\dagger_{\mathbf{p}} + a_{\mathbf{p}}a^\dagger_{\mathbf{p}} + a^\dagger_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}} \\
&\qquad + (-a_{\mathbf{p}}b_{-\mathbf{p}} + b_{\mathbf{p}}a_{-\mathbf{p}})\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t} + (-b^\dagger_{\mathbf{p}}a^\dagger_{-\mathbf{p}} + a^\dagger_{\mathbf{p}}b^\dagger_{-\mathbf{p}})\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\Big] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}\Big[2b^\dagger_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{p}} + 2a^\dagger_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}} + 2(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) \\
&\qquad + (-a_{\mathbf{p}}b_{-\mathbf{p}} + b_{-\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}})\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t} + (-b^\dagger_{\mathbf{p}}a^\dagger_{-\mathbf{p}} + a^\dagger_{-\mathbf{p}}b^\dagger_{\mathbf{p}})\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\Big] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,E_{\mathbf{p}}\left(a^\dagger_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}} + b^\dagger_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{p}}\right) + (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,E_{\mathbf{p}}. \qquad (2.208)
\end{aligned}
$$

这就是 (2.204) 式。

根据 (1.194) 式，复标量场的总动量为

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P} &= -\int \mathrm{d}^3x\,(\pi\nabla\phi + \pi^\dagger\nabla\phi^\dagger) \\
&= -\int \frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\Big[-\mathrm{i}p_0\left(b_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} - a^\dagger_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)\mathrm{i}\mathbf{q}\left(a_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} - b^\dagger_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\right) \\
&\qquad - \mathrm{i}q_0\left(a_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} - b^\dagger_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\right)\mathrm{i}\mathbf{p}\left(b_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} - a^\dagger_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)\Big] \\
&= -\int \frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\Big[(-E_{\mathbf{p}}\,\mathbf{q}\,b_{\mathbf{p}}b^\dagger_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{q}}\,\mathbf{p}\,b^\dagger_{\mathbf{q}}b_{\mathbf{p}})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x} \\
&\qquad + (-E_{\mathbf{p}}\,\mathbf{q}\,a^\dagger_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{q}}\,\mathbf{p}\,a_{\mathbf{q}}a^\dagger_{\mathbf{p}})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-q)\cdot x} \\
&\qquad + (E_{\mathbf{p}}\,\mathbf{q}\,b_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}} + E_{\mathbf{q}}\,\mathbf{p}\,a_{\mathbf{q}}b_{\mathbf{p}})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+q)\cdot x} \\
&\qquad + (E_{\mathbf{p}}\,\mathbf{q}\,a^\dagger_{\mathbf{p}}b^\dagger_{\mathbf{q}} + E_{\mathbf{q}}\,\mathbf{p}\,b^\dagger_{\mathbf{q}}a^\dagger_{\mathbf{p}})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\Big] \\
&= -\int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\Big\{\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\Big[(-E_{\mathbf{p}}\,\mathbf{q}\,b_{\mathbf{p}}b^\dagger_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{q}}\,\mathbf{p}\,b^\dagger_{\mathbf{q}}b_{\mathbf{p}})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t} \\
&\qquad + (-E_{\mathbf{p}}\,\mathbf{q}\,a^\dagger_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{q}}\,\mathbf{p}\,a_{\mathbf{q}}a^\dagger_{\mathbf{p}})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t}\Big] \\
&\qquad + \delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\Big[(E_{\mathbf{p}}\,\mathbf{q}\,b_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}} + E_{\mathbf{q}}\,\mathbf{p}\,a_{\mathbf{q}}b_{\mathbf{p}})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t} \\
&\qquad + (E_{\mathbf{p}}\,\mathbf{q}\,a^\dagger_{\mathbf{p}}b^\dagger_{\mathbf{q}} + E_{\mathbf{q}}\,\mathbf{p}\,b^\dagger_{\mathbf{q}}a^\dagger_{\mathbf{p}})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t}\Big]\Big\} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p\,E_{\mathbf{p}}\,\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}}\Big[b_{\mathbf{p}}b^\dagger_{\mathbf{p}} + b^\dagger_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{p}} + a^\dagger_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}} + a_{\mathbf{p}}a^\dagger_{\mathbf{p}} \\
&\qquad + (b_{\mathbf{p}}a_{-\mathbf{p}} - a_{-\mathbf{p}}b_{\mathbf{p}})\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t} + (a^\dagger_{\mathbf{p}}b^\dagger_{-\mathbf{p}} - b^\dagger_{-\mathbf{p}}a^\dagger_{\mathbf{p}})\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\Big] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{\mathbf{p}}{2}\,(b_{\mathbf{p}}b^\dagger_{\mathbf{p}} + b^\dagger_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{p}} + a^\dagger_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}} + a_{\mathbf{p}}a^\dagger_{\mathbf{p}}) = \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\,(a^\dagger_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}} + b^\dagger_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{p}}) + \delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\mathrm{d}^3p\,\mathbf{p}
\end{aligned}
$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3}\, \mathbf{p}\, (a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}). \tag{2.209}$$

这就是 (2.205) 式。

习　题

2.1 设算符 a 与其厄米共轭 $a^\dagger$ 满足反对易关系

$$\{a, a^\dagger\} = 1, \quad \{a, a\} = \{a^\dagger, a^\dagger\} = 0, \tag{2.210}$$

其中**反对易子**定义为 $\{A, B\} \equiv AB + BA$。记算符 $N \equiv a^\dagger a$ 的本征值为 n，本征态为 $|n\rangle$，即 $N|n\rangle = n|n\rangle$，归一化为 $\langle n|n\rangle = 1$。

(a) 证明 $[N, a^\dagger] = a^\dagger$ 和 $[N, a] = -a$。

(b) 证明本征值 n 只能取 0 和 1，而且

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{1-n}\,|n+1\rangle\,, \quad a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\,. \tag{2.211}$$

2.2 已知产生湮灭算符的对易关系 (2.120)，以及 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 和 $\pi(\mathbf{x}, t)$ 的平面波展开式 (2.101) 和 (2.103)，推出等时对易关系 (2.85)。

2.3 用实标量场的单粒子态 (2.143) 构造波包，设

$$|\Psi_{\mathbf{p}}\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \frac{F_{\mathbf{p}}(\mathbf{q})}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} |\mathbf{q}\rangle\,, \tag{2.212}$$

其中函数 $F_{\mathbf{p}}(\mathbf{q})$ 满足

$$\int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} |F_{\mathbf{p}}(\mathbf{q})|^2 = 1, \quad \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} |F_{\mathbf{p}}(\mathbf{q})|^2\, \mathbf{q} = \mathbf{p}, \tag{2.213}$$

求内积 $\langle \Psi_{\mathbf{p}}|\Psi_{\mathbf{p}}\rangle$ 和总动量算符期待值 $\langle \Psi_{\mathbf{p}}|\,\mathbf{P}\,|\Psi_{\mathbf{p}}\rangle$。

2.4 复标量场 $\phi(x)$ 可以按 (2.172) 式分解为两个实标量场 $\phi_1(x)$ 和 $\phi_2(x)$ 的线性组合。设 $\phi_1(x)$ 和 $\phi_2(x)$ 的平面波展开式为

$$\phi_1(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left(c_{\mathbf{p}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + c_{\mathbf{p}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right), \tag{2.214}$$

$$\phi_2(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left(d_{\mathbf{p}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + d_{\mathbf{p}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right). \tag{2.215}$$

(a) 推导复标量场平面波展开式 (2.177) 和 (2.179) 中使用的产生湮灭算符 $(a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger, b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{p}}^\dagger)$ 与实标量场产生湮灭算符 $(c_{\mathbf{p}}, c_{\mathbf{p}}^\dagger, d_{\mathbf{p}}, d_{\mathbf{p}}^\dagger)$ 之间的关系。

(b) 根据上述关系及对易关系

$$\begin{aligned}
[c_{\mathbf{p}}, c_{\mathbf{q}}^\dagger] &= (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \quad [d_{\mathbf{p}}, d_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}),\\
[c_{\mathbf{p}}, c_{\mathbf{q}}] &= [c_{\mathbf{p}}^\dagger, c_{\mathbf{q}}^\dagger] = [d_{\mathbf{p}}, d_{\mathbf{q}}] = [d_{\mathbf{p}}^\dagger, d_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0,\\
[c_{\mathbf{p}}, d_{\mathbf{q}}] &= [c_{\mathbf{p}}^\dagger, d_{\mathbf{q}}^\dagger] = [c_{\mathbf{p}}, d_{\mathbf{q}}^\dagger] = [c_{\mathbf{p}}^\dagger, d_{\mathbf{q}}] = 0,
\end{aligned} \tag{2.216}$$

验证 $(a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger, b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{p}}^\dagger)$ 满足对易关系 (2.183)。

2.5 复标量场 $\phi(x)$ 的守恒荷算符 Q 可以用产生湮灭算符表达成 (2.202) 式。

(a) 证明

$$[Q, \phi] = -q\phi, \quad [Q, \phi^\dagger] = q\phi^\dagger. \tag{2.217}$$

(b) 设 $|Q'\rangle$ 是 Q 的本征态，本征值为 Q'，即 $Q|Q'\rangle = Q'|Q'\rangle$。论证 $\phi|Q'\rangle$ 和 $\phi^\dagger|Q'\rangle$ 的 Q 本征值分别为 $Q'-q$ 和 $Q'+q$。

2.6 对于复标量场 $\psi(x)$，真空态 $|0\rangle$ 满足 $a_{\mathbf{p}}|0\rangle = b_{\mathbf{p}}|0\rangle = 0$ 和 $\langle 0|0\rangle = 0$，引入动量为 $\mathbf{p}$ 的正标量玻色子态 $|\mathbf{p}^+\rangle \equiv \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, a_{\mathbf{p}}^\dagger|0\rangle$ 和反标量玻色子态 $|\mathbf{p}^-\rangle \equiv \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, b_{\mathbf{p}}^\dagger|0\rangle$。

(a) 求内积 $\langle \mathbf{q}^+|\mathbf{p}^+\rangle$、$\langle \mathbf{q}^-|\mathbf{p}^-\rangle$ 和 $\langle \mathbf{q}^-|\mathbf{p}^+\rangle$。

(b) 求 $\langle 0|\phi(x)|\mathbf{p}^+\rangle$、$\langle 0|\phi^\dagger(x)|\mathbf{p}^-\rangle$、$\langle \mathbf{p}^+|\phi^\dagger(x)|0\rangle$ 和 $\langle \mathbf{p}^-|\phi(x)|0\rangle$。

(c) 根据守恒荷算符的表达式 (2.202)，推出

$$Q\left|\mathbf{p}^+\right\rangle = (Q_{\text{vac}}+q)\left|\mathbf{p}^+\right\rangle, \quad Q\left|\mathbf{p}^-\right\rangle = (Q_{\text{vac}}-q)\left|\mathbf{p}^-\right\rangle, \tag{2.218}$$

其中

$$Q_{\text{vac}} \equiv -(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\, q\,. \tag{2.219}$$

第 3 章　量子矢量场

本章介绍**矢量场** (vector field) 的正则量子化。从 Lorentz 群的线性表示来看，标量场对应于恒等表示，矢量场对应于矢量表示，而 Lorentz 群的其它表示则对应于其它类型的场。为了更加深刻地理解各种量子场的性质，有必要了解 Lorentz 群的表示理论。在量子理论中，粒子由 Hilbert 空间中的态矢描述，相对论性的粒子运动与 Poincaré 变换对态矢的作用有关。因此，我们先来研究量子 Poincaré 变换，相关讨论会涉及到量子 Lorentz 变换和 Lorentz 群的表示理论。

3.1　量子 Poincaré 变换

3.1.1　量子 Poincaré 变换的生成元算符

1.7.2 小节提到，时空坐标的 Poincaré 变换 (Λ, a) 为

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}, \tag{3.1}$$

它是 Lorentz 变换 Λ 和时空平移变换 a 的组合。如果量子系统同时具有 Lorentz 对称性和时空平移对称性，那么相应的 Poincaré 变换 (Λ, a) 在物理 Hilbert 空间中诱导出态矢 $|\Psi\rangle$ 的线性幺正变换

$$|\Psi'\rangle = U(\Lambda, a)\,|\Psi\rangle\,, \tag{3.2}$$

其中 Λ 为固有保时向 Lorentz 变换，而 $U(\Lambda, a)$ 是一个线性幺正算符，描述**量子 Poincaré 变换**，满足

$$U^{\dagger}(\Lambda, a)U(\Lambda, a) = U(\Lambda, a)U^{\dagger}(\Lambda, a) = 1, \quad U^{-1}(\Lambda, a) = U^{\dagger}(\Lambda, a). \tag{3.3}$$

$U(\Lambda, a)$ 的幺正性保证态矢的内积在量子 Poincaré 变换下不变，

$$\langle\Psi'|\Psi'\rangle = \langle\Psi|\,U^{\dagger}(\Lambda, a)U(\Lambda, a)\,|\Psi\rangle = \langle\Psi|\Psi\rangle\,. \tag{3.4}$$

$U(\mathbf{1}, 0) = 1$ 是恒等变换算符。$a^{\mu} = 0$ 对应于 Lorentz 变换，因此

$$U(\Lambda) \equiv U(\Lambda, 0) \tag{3.5}$$

描述**量子 Lorentz 变换**，满足 $U^{-1}(\Lambda) = U^{\dagger}(\Lambda)$。$U(\mathbf{1}, a)$ 则描述**量子时空平移变换**。

对时空坐标先作 Poincaré 变换 (Λ_1, a_1)，得到 $x'^\mu = (\Lambda_1)^\mu{}_\nu x^\nu + a_1^\mu$，再作 Poincaré 变换 (Λ_2, a_2)，推出

$$x''^\mu = (\Lambda_2)^\mu{}_\nu x'^\nu + a_2^\mu = (\Lambda_2)^\mu{}_\nu[(\Lambda_1)^\nu{}_\rho x^\rho + a_1^\nu] + a_2^\mu = (\Lambda_2\Lambda_1)^\mu{}_\nu x^\nu + (\Lambda_2)^\mu{}_\nu a_1^\nu + a_2^\mu. \tag{3.6}$$

这相当于作 Poincaré 变换 $(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)$，因而存在同态关系

$$U(\Lambda_2, a_2)U(\Lambda_1, a_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2), \quad U(\Lambda_2)U(\Lambda_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1). \tag{3.7}$$

因此，集合 $\{U(\Lambda, a)\}$ 和 $\{U(\Lambda)\}$ 分别构成 Poincaré 群和 Lorentz 群的无限维幺正线性表示。从而，由

$$U^{-1}(\Lambda, a)U(\Lambda, a) = 1 = U(\mathbf{1}, 0) = U(\Lambda^{-1}\Lambda, \Lambda^{-1}a - \Lambda^{-1}a) = U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)U(\Lambda, a) \tag{3.8}$$

得到逆变换算符

$$U^{-1}(\Lambda, a) = U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a), \quad U^{-1}(\Lambda) = U(\Lambda^{-1}). \tag{3.9}$$

无穷小 Lorentz 变换 (1.195) 的矩阵形式是 $\Lambda = \mathbf{1} + \omega$，无穷小时空平移变换表达为 $a^\mu = \varepsilon^\mu$，其中 ω 和 ε^μ 是无穷小量。从而，无穷小 Poincaré 变换 $(\mathbf{1} + \omega, \varepsilon)$ 诱导的无穷小幺正算符为

$$\begin{aligned} U(\mathbf{1} + \omega, \varepsilon) &= 1 + \omega_{\mu\nu} \left.\frac{\partial U(\Lambda, a)}{\partial \omega_{\mu\nu}}\right|_{\omega_{\mu\nu}=\varepsilon_\mu=0} + \varepsilon_\mu \left.\frac{\partial U(\Lambda, a)}{\partial \varepsilon_\mu}\right|_{\omega_{\mu\nu}=\varepsilon_\mu=0} \\ &= 1 - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - \mathrm{i}\varepsilon_\mu P^\mu, \end{aligned} \tag{3.10}$$

这是在 $(\omega_{\mu\nu}, \varepsilon_\mu) = (0, 0)$ 附近对 $U(\Lambda, a)$ 作 Taylor 级数，只展开到 $\omega_{\mu\nu}$ 和 ε_μ 的一阶项，而

$$J^{\mu\nu} \equiv 2\mathrm{i} \left.\frac{\partial U(\Lambda)}{\partial \omega_{\mu\nu}}\right|_{\omega_{\mu\nu}=\varepsilon_\mu=0} \quad \text{和} \quad P^\mu \equiv \mathrm{i} \left.\frac{\partial U(\Lambda, a)}{\partial \varepsilon_\mu}\right|_{\omega_{\mu\nu}=\varepsilon_\mu=0} \tag{3.11}$$

分别是量子 Lorentz 变换和量子时空平移变换的**生成元算符**。根据 1.7.3 小节的讨论，实参数 $\omega_{\mu\nu}$ 是反对称的，因而 $J^{\mu\nu}$ 也是反对称的，

$$J^{\mu\nu} = -J^{\nu\mu}. \tag{3.12}$$

于是，$J^{\mu\nu}$ 有 6 个独立分量，而 P^μ 有 4 个独立分量。由 $U(\mathbf{1} + \omega, \varepsilon)$ 的幺正性推出

$$\begin{aligned} 1 &= U^\dagger(\mathbf{1} + \omega, \varepsilon)U(\mathbf{1} + \omega, \varepsilon) = \left[1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(J^{\mu\nu})^\dagger + \mathrm{i}\varepsilon_\mu(P^\mu)^\dagger\right]\left[1 - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - \mathrm{i}\varepsilon_\mu P^\mu\right] \\ &= 1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}[(J^{\mu\nu})^\dagger - J^{\mu\nu}] + \mathrm{i}\varepsilon_\mu[(P^\mu)^\dagger - P^\mu], \end{aligned} \tag{3.13}$$

最后一步忽略了 $\omega_{\mu\nu}$ 和 ε_μ 的二阶项。可见，$J^{\mu\nu}$ 和 P^μ 的所有分量都是厄米算符，

$$(J^{\mu\nu})^\dagger = J^{\mu\nu}, \quad (P^\mu)^\dagger = P^\mu. \tag{3.14}$$

根据逆变换表达式 (3.9) 和同态关系 (3.7)，有

$$U^{-1}(\Lambda, a)U(\mathbf{1} + \omega, \varepsilon)U(\Lambda, a) = U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)U[(\mathbf{1} + \omega)\Lambda, (\mathbf{1} + \omega)a + \varepsilon]$$

$$= U\{\Lambda^{-1}(\mathbf{1}+\omega)\Lambda, \Lambda^{-1}[(\mathbf{1}+\omega)a+\varepsilon]-\Lambda^{-1}a\}$$
$$= U(\mathbf{1}+\Lambda^{-1}\omega\Lambda, \Lambda^{-1}\omega a+\Lambda^{-1}\varepsilon). \tag{3.15}$$

对上式左边和最后一步分别展开，得

$$U^{-1}(\Lambda,a)U(\mathbf{1}+\omega,\varepsilon)U(\Lambda,a) = U^{-1}(\Lambda,a)\left(1-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}-\mathrm{i}\varepsilon_\mu P^\mu\right)U(\Lambda,a)$$
$$= 1-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}U^{-1}(\Lambda,a)J^{\mu\nu}U(\Lambda,a)-\mathrm{i}\varepsilon_\mu U^{-1}(\Lambda,a)P^\mu U(\Lambda,a), \tag{3.16}$$
$$U(\mathbf{1}+\Lambda^{-1}\omega\Lambda, \Lambda^{-1}\omega a+\Lambda^{-1}\varepsilon) = 1-\frac{\mathrm{i}}{2}(\Lambda^{-1}\omega\Lambda)_{\mu\nu}J^{\mu\nu}-\mathrm{i}(\Lambda^{-1}\omega a+\Lambda^{-1}\varepsilon)_\mu P^\mu. \tag{3.17}$$

利用 $(\Lambda^{-1})^\alpha{}_\beta = g^{\alpha\sigma}g_{\beta\rho}\Lambda^\rho{}_\sigma$，有

$$\begin{aligned}(\Lambda^{-1}\omega\Lambda)_{\mu\nu}J^{\mu\nu} &= g_{\mu\alpha}(\Lambda^{-1}\omega\Lambda)^\alpha{}_\nu J^{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}(\Lambda^{-1})^\alpha{}_\beta\omega^\beta{}_\gamma\Lambda^\gamma{}_\nu J^{\mu\nu}\\ &= g_{\mu\alpha}g^{\alpha\sigma}g_{\beta\rho}\Lambda^\rho{}_\sigma\omega^\beta{}_\gamma\Lambda^\gamma{}_\nu J^{\mu\nu} = \Lambda^\rho{}_\mu\omega_{\rho\gamma}\Lambda^\gamma{}_\nu J^{\mu\nu} = \omega_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}, \qquad (3.18)\\ (\Lambda^{-1}\omega a+\Lambda^{-1}\varepsilon)_\mu P^\mu &= g_{\mu\nu}(\Lambda^{-1})^\nu{}_\rho(\omega^\rho{}_\sigma a^\sigma P^\mu+\varepsilon^\rho P^\mu) = g_{\mu\nu}g^{\nu\beta}g_{\rho\alpha}\Lambda^\alpha{}_\beta(\omega^\rho{}_\sigma a^\sigma P^\mu+\varepsilon^\rho P^\mu)\\ &= \delta^\beta{}_\mu\Lambda^\alpha{}_\beta(\omega_{\alpha\sigma}a^\sigma P^\mu+\varepsilon_\alpha P^\mu) = \omega_{\alpha\sigma}\Lambda^\alpha{}_\mu a^\sigma P^\mu+\varepsilon_\alpha\Lambda^\alpha{}_\mu P^\mu\\ &= \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}(\Lambda^\mu{}_\rho a^\nu P^\rho-\Lambda^\nu{}_\rho a^\mu P^\rho)+\varepsilon_\mu\Lambda^\mu{}_\nu P^\nu, \qquad (3.19)\end{aligned}$$

代入 (3.17) 式，得

$$U(\mathbf{1}+\Lambda^{-1}\omega\Lambda, \Lambda^{-1}\omega a+\Lambda^{-1}\varepsilon) = 1-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}+\Lambda^\mu{}_\rho a^\nu P^\rho-\Lambda^\nu{}_\rho a^\mu P^\rho)-\mathrm{i}\varepsilon_\mu\Lambda^\mu{}_\nu P^\nu. \tag{3.20}$$

与 (3.16) 式比较，由 $\omega_{\mu\nu}$ 和 ε_μ 的任意性推出

$$U^{-1}(\Lambda,a)J^{\mu\nu}U(\Lambda,a) = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}+\Lambda^\mu{}_\rho a^\nu P^\rho-\Lambda^\nu{}_\rho a^\mu P^\rho, \tag{3.21}$$
$$U^{-1}(\Lambda,a)P^\mu U(\Lambda,a) = \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu. \tag{3.22}$$

取 $a^\mu = 0$，得

$$U^{-1}(\Lambda)J^{\mu\nu}U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}, \tag{3.23}$$
$$U^{-1}(\Lambda)P^\mu U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu. \tag{3.24}$$

因此，生成元算符 $J^{\mu\nu}$ 和 P^μ 在 $|\Psi'\rangle = U(\Lambda)|\Psi\rangle$ 中的期待值与它们在 $|\Psi\rangle$ 中的期待值之间的关系为

$$\langle\Psi'|J^{\mu\nu}|\Psi'\rangle = \langle\Psi|U^{-1}(\Lambda)J^{\mu\nu}U(\Lambda)|\Psi\rangle = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\langle\Psi|J^{\rho\sigma}|\Psi\rangle, \tag{3.25}$$
$$\langle\Psi'|P^\mu|\Psi'\rangle = \langle\Psi|U^{-1}(\Lambda)P^\mu U(\Lambda)|\Psi\rangle = \Lambda^\mu{}_\nu\langle\Psi|P^\nu|\Psi\rangle. \tag{3.26}$$

可将 $U^{-1}(\Lambda)J^{\mu\nu}U(\Lambda)$ 和 $U^{-1}(\Lambda)P^\mu U(\Lambda)$ 分别看作由量子 Lorentz 变换 $U(\Lambda)$ 诱导出来的 $J^{\mu\nu}$ 和 P^μ 算符的 Lorentz 变换，

$$J'^{\mu\nu} \equiv U^{-1}(\Lambda)J^{\mu\nu}U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}, \quad P'^\mu \equiv U^{-1}(\Lambda)P^\mu U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu. \tag{3.27}$$

这表明 $J^{\mu\nu}$ 是一个 *2* 阶 *Lorentz* 张量，而 P^μ 是一个 *Lorentz* 矢量。

3.1.2　Lorentz 代数和 Poincaré 代数

下面研究 (3.21) 式。考虑无穷小 Poincaré 变换 (3.10)，忽略二阶小量，(3.21) 式左边化为

$$\begin{aligned} U^{-1}(\mathbf{1}+\omega,\varepsilon)J^{\mu\nu}U(\mathbf{1}+\omega,\varepsilon) &= \left(1+\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\gamma\delta}J^{\gamma\delta}+\mathrm{i}\varepsilon_\gamma P^\gamma\right)J^{\mu\nu}\left(1-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta}-\mathrm{i}\varepsilon_\alpha P^\alpha\right) \\ &= J^{\mu\nu}-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}J^{\mu\nu}J^{\alpha\beta}+\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\gamma\delta}J^{\gamma\delta}J^{\mu\nu}-\mathrm{i}\varepsilon_\alpha J^{\mu\nu}P^\alpha+\mathrm{i}\varepsilon_\gamma P^\gamma J^{\mu\nu} \\ &= J^{\mu\nu}-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}[J^{\mu\nu},J^{\rho\sigma}]-\mathrm{i}\varepsilon_\rho[J^{\mu\nu},P^\rho]. \end{aligned} \tag{3.28}$$

(3.21) 式右边第一项变成

$$\begin{aligned} (\mathbf{1}+\omega)^\mu{}_\rho(\mathbf{1}+\omega)^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma} &= (\delta^\mu{}_\rho+\omega^\mu{}_\rho)(\delta^\nu{}_\sigma+\omega^\nu{}_\sigma)J^{\rho\sigma}=\delta^\mu{}_\rho\delta^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}+\delta^\mu{}_\rho\omega^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}+\omega^\mu{}_\rho\delta^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma} \\ &= J^{\mu\nu}+\omega^\nu{}_\sigma J^{\mu\sigma}+\omega^\mu{}_\rho J^{\rho\nu}=J^{\mu\nu}+\omega_{\rho\sigma}g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}+\omega_{\sigma\rho}g^{\mu\sigma}J^{\rho\nu} \\ &= J^{\mu\nu}+\omega_{\rho\sigma}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}+g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho}) \\ &= J^{\mu\nu}+\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}+g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho})+\frac{1}{2}\omega_{\sigma\rho}(g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho}+g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma}) \\ &= J^{\mu\nu}+\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}-g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho}+g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho}-g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma}), \end{aligned} \tag{3.29}$$

第五、七步用到 $J^{\mu\nu}$ 和 $\omega_{\mu\nu}$ 的反对称性。(3.21) 式右边第二、三项化为

$$\begin{aligned} (\mathbf{1}+\omega)^\mu{}_\rho\varepsilon^\nu P^\rho-(\mathbf{1}+\omega)^\nu{}_\rho\varepsilon^\mu P^\rho &= (\delta^\mu{}_\rho+\omega^\mu{}_\rho)\varepsilon^\nu P^\rho-(\delta^\nu{}_\rho+\omega^\nu{}_\rho)\varepsilon^\mu P^\rho=\varepsilon^\nu P^\mu-\varepsilon^\mu P^\nu \\ &= \varepsilon_\rho(g^{\nu\rho}P^\mu-g^{\mu\rho}P^\nu). \end{aligned} \tag{3.30}$$

比较上面三式，由 $\omega_{\rho\sigma}$ 和 ε_ρ 的任意性推出生成元算符 $J^{\mu\nu}$ 和 $J^{\rho\sigma}$ 的对易关系

$$\begin{aligned} [J^{\mu\nu},J^{\rho\sigma}] &= \mathrm{i}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}-g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma}-g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho}+g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho}) \\ &= \mathrm{i}[g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}-(\mu\leftrightarrow\nu)]-(\rho\leftrightarrow\sigma), \end{aligned} \tag{3.31}$$

以及 $J^{\mu\nu}$ 和 P^ρ 的对易关系

$$[J^{\mu\nu},P^\rho]=\mathrm{i}(g^{\nu\rho}P^\mu-g^{\mu\rho}P^\nu). \tag{3.32}$$

在 (3.31) 式第二行中，$(\mu\leftrightarrow\nu)$ 表示将前面的项 $g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}$ 的指标 μ 和 ν 对调，得到 $g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma}$；同理，$(\rho\leftrightarrow\sigma)$ 表示将前面的项 $\mathrm{i}(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}-g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma})$ 的指标 ρ 和 σ 对调，得到 $\mathrm{i}(g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho}-g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho})$。注意，(3.31) 式右边既关于 μ 和 ν 反对称，也关于 ρ 和 σ 反对称，而且关于 (μ,ν) 和 (ρ,σ) 反对称，这样的反对称性与等式左边一致。以生成元 $J^{\mu\nu}$ 的 6 个独立分量作为基底张成线性空间，空间中的任意矢量是 $J^{\mu\nu}$ 的线性组合，用对易关系 (3.31) 定义矢量乘法，则任意矢量乘积仍是此空间中的矢量，即乘法运算是封闭的，称此线性空间为 **Lorentz 代数**。

Lie 群是一类特殊的连续群，n 维 Lie 群的群空间由 n 个独立的连续实参数 θ^a $(a=1,2\cdots,n)$ 描述，具有 n 维微分流形的结构。$\mathrm{O}(N)$ 和 $\mathrm{SO}(N)$ 是 $N(N-1)/2$ 维 Lie 群，$\mathrm{U}(N)$ 是 N^2 维 Lie 群，$\mathrm{SU}(N)$ 是 N^2-1 维 Lie 群。对于 n 维 Lie 群的一个 m 维线性表示，在单位矩阵附近，无穷小变换对应的表示矩阵可展开为

$$\mathbf{1}+\mathrm{i}\theta^a t^a+\mathcal{O}(\theta^a\theta^b), \tag{3.33}$$

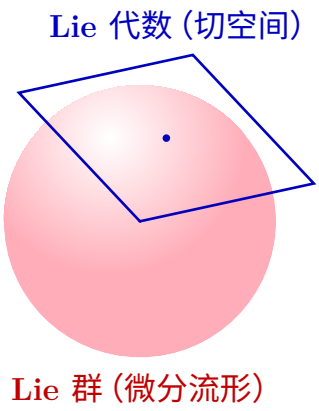


图 3.1: Lie 群和 Lie 代数的几何意义。

其中 t^a 是 n 个独立的 m 阶生成元矩阵。这些生成元满足对易关系

$$[t^a, t^b] = \mathrm{i} f^{abc} t^c, \quad a, b, c = 1, 2 \cdots, n, \tag{3.34}$$

其中实数 f^{abc} 称为**结构常数** (structure constant)，满足 $f^{abc} = -f^{bac}$。不同维的线性表示具有不同阶的生成元矩阵。不过，同一个 Lie 群所有线性表示的结构常数都是一样的，描述 Lie 群的局域性质。如果一个 Lie 群是 Abel 群，则结构常数都是零。生成元的对易子也称为 **Lie 括号**，是一种乘法运算。以生成元为基底张成的线性空间对 Lie 括号运算是封闭的，构成代数，称为 **Lie 代数**。Lie 代数刻画 Lie 群在恒元附近的局域结构，对应着微分流形在恒元处的切空间，如图 3.1 所示。

Lorentz 群是一个 6 维 Lie 群，它对应的 Lie 代数就是 Lorentz 代数。Lorentz 群任何线性表示的生成元都要满足 **Lorentz 代数关系** (3.31)。反过来，通过构造满足 (3.31) 式的生成元矩阵，可以得到 Lorentz 群的线性表示。

我们可以把算符 $J^{\mu\nu}$ 的 6 个独立分量组合成 2 个三维矢量算符

$$J^i \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} J^{jk}, \quad K^i \equiv J^{0i}, \tag{3.35}$$

即

$$\mathbf{J} = (J^{23}, J^{31}, J^{12}), \quad \mathbf{K} = (J^{01}, J^{02}, J^{03}). \tag{3.36}$$

纯空间部分的生成元 J^i 与 J^j 的对易关系为

$$\begin{aligned} [J^i, J^j] &= \frac{1}{4} \varepsilon^{ikl} \varepsilon^{jmn} [J^{kl}, J^{mn}] = \frac{\mathrm{i}}{4} \varepsilon^{ikl} \varepsilon^{jmn} \{[g^{lm} J^{kn} - (k \leftrightarrow l)] - (m \leftrightarrow n)\} \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2} \varepsilon^{ikl} \varepsilon^{jmn} [g^{lm} J^{kn} - (k \leftrightarrow l)] = \mathrm{i} \varepsilon^{ikl} \varepsilon^{jmn} g^{lm} J^{kn} = -\mathrm{i} \varepsilon^{ikl} \varepsilon^{jln} J^{kn} \\ &= \mathrm{i} \varepsilon^{ikl} \varepsilon^{jnl} J^{kn} = \mathrm{i} (\delta^{ij} \delta^{kn} - \delta^{in} \delta^{kj}) J^{kn} = -\mathrm{i} J^{ji} = \mathrm{i} J^{ij}, \end{aligned} \tag{3.37}$$

第三、四步用到三维 Levi-Civita 符号的反对称性，而倒数第三步用到 (1.98) 式。由 $J^{23} = J^1 = \varepsilon^{231} J^1$、$J^{31} = J^2 = \varepsilon^{312} J^2$ 和 $J^{12} = J^3 = \varepsilon^{123} J^3$ 归纳出

$$J^{ij} = \varepsilon^{ijk} J^k, \tag{3.38}$$

从而得到

$$[J^i, J^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk} J^k. \tag{3.39}$$

引入 2 个三维矢量

$$\theta^i \equiv -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\omega_{jk}, \quad \xi^i \equiv -\omega_{0i}, \tag{3.40}$$

即

$$\boldsymbol{\theta} = (-\omega_{23}, -\omega_{31}, -\omega_{12}), \quad \boldsymbol{\xi} = (-\omega_{01}, -\omega_{02}, -\omega_{03}), \tag{3.41}$$

这里 $\theta^3 = -\omega_{12}$ 是 (1.199) 式中绕 z 轴转动的角度 θ，而 $\xi^1 = -\omega_{01}$ 是 (1.203) 式中沿 x 轴增速的快度 ξ。从而，无穷小量子 Lorentz 变换化为

$$\begin{aligned} U(\mathbf{1}+\omega) &= 1 - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} = 1 - \mathrm{i}\omega_{23}J^{23} - \mathrm{i}\omega_{31}J^{31} - \mathrm{i}\omega_{12}J^{12} - \mathrm{i}\omega_{01}J^{01} - \mathrm{i}\omega_{02}J^{02} - \mathrm{i}\omega_{03}J^{03} \\ &= 1 + \mathrm{i}\,\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{J} + \mathrm{i}\,\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{K}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

对于绕 z 轴的旋转变换 $R_z(\theta^3)$，$\theta^1 = \theta^2 = \xi^i = 0$，上式意味着 $U[R_z(\theta^3)] = 1 + \mathrm{i}\theta^3 J^3 + \mathcal{O}[(\theta^3)^2]$，故

$$\left.\frac{\mathrm{d}U[R_z(\theta^3)]}{\mathrm{d}\theta^3}\right|_{\theta^3=0} = \mathrm{i}J^3, \tag{3.43}$$

则由初始条件 $U[R_z(0)] = 1$ 求得相应的量子旋转变换

$$U[R_z(\theta^3)] = \exp(\mathrm{i}\theta^3 J^3). \tag{3.44}$$

1.7.3 小节提到，空间旋转对称性对应着角动量守恒定律，因而 J^3 就是总角动量算符在 z 轴上的分量。同理，J^1 和 J^2 分别是总角动量算符在 x 轴和 y 轴上的分量。也就是说，生成元算符 $\mathbf{J}$ 就是**总角动量算符**。空间旋转群 SO(3) 是 Lorentz 群在纯空间部分的子群，总角动量算符 $\mathbf{J}$ 是**量子空间旋转变换**的生成元算符，而 (3.39) 式是 3 维 Lie 群 SO(3) 的 Lie 代数关系，相应的结构常数是 Levi-Civita 符号 ε^{ijk}。

SO(3) 群与 3 维 Lie 群 SU(2) 有着紧密的联系。在 SU(2) 群的基础表示中，3 个生成元矩阵表达为

$$\tau^i \equiv \frac{\sigma^i}{2}, \tag{3.45}$$

其中 σ^i 是 3 个 2×2 的 **Pauli 矩阵**，

$$\sigma^1 \equiv \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 \equiv \begin{pmatrix} & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.46}$$

它们都是既厄米又幺正的，

$$(\sigma^i)^{-1} = (\sigma^i)^\dagger = \sigma^i. \tag{3.47}$$

Pauli 矩阵的两两乘积为

$$(\sigma^1)^2 = (\sigma^2)^2 = (\sigma^3)^2 = \mathbf{1},$$

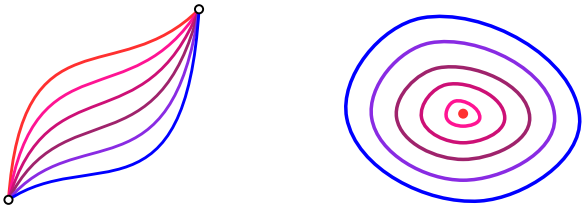


图 3.2: 曲线连续形变示意图。

$$\sigma^1\sigma^2 = \mathrm{i}\sigma^3, \quad \sigma^2\sigma^3 = \mathrm{i}\sigma^1, \quad \sigma^3\sigma^1 = \mathrm{i}\sigma^2, \tag{3.48}$$
$$\sigma^2\sigma^1 = -\mathrm{i}\sigma^3, \quad \sigma^3\sigma^2 = -\mathrm{i}\sigma^1, \quad \sigma^1\sigma^3 = -\mathrm{i}\sigma^2.$$

归纳起来，有

$$\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij} + \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\sigma^k, \tag{3.49}$$

右边第一项省略了 2×2 单位矩阵 $\mathbf{1}$。从而推出

$$[\sigma^i, \sigma^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\sigma^k - \mathrm{i}\varepsilon^{jik}\sigma^k = 2\mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\sigma^k, \tag{3.50}$$
$$\{\sigma^i, \sigma^j\} \equiv \sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i = 2\delta^{ij} + \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\sigma^k + \mathrm{i}\varepsilon^{jik}\sigma^k = 2\delta^{ij}. \tag{3.51}$$

于是，SU(2) 生成元 τ^i 的对易关系为

$$[\tau^i, \tau^j] = \frac{1}{4}[\sigma^i, \sigma^j] = \frac{\mathrm{i}}{2}\,\varepsilon^{ijk}\sigma^k = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\tau^k. \tag{3.52}$$

与 (3.39) 式比较发现，SU(2) 群的 Lie 代数关系与 SO(3) 群完全一致，这意味着 SU(2) 群在恒元附近的局域性质与 SO(3) 群一样。

但是，SU(2) 群的整体拓扑性质与 SO(3) 群不一样。SU(2) 和 SO(3) 的群空间都是连通的，根据 1.3 节的说法，它们都是简单 *Lie* 群。更仔细地讲，SU(2) 的群空间是**单连通**的，连接群空间中两点的任意两条曲线可以连续地形变成彼此，等价地，群空间内任意一条闭合曲线可以连续地收缩为一点，如图 3.2 所示。SO(3) 的群空间是**双连通**的，即**连通度**为 2，连接群空间中两点的曲线分成 2 类，同一类曲线能够连续地变化成彼此，不同类曲线则不能；相应地，闭合曲线也分为 2 类，有一类能连续收缩成一点，另一类不能。

图 3.3 表示 SO(3) 的群空间，它是半径为 π 的球体，每一点的两个角度坐标代表转动轴的方向，径向坐标代表绕轴转动的角度。绕某个轴转动 π 角与绕方向相反的另一个轴转动 π 角这

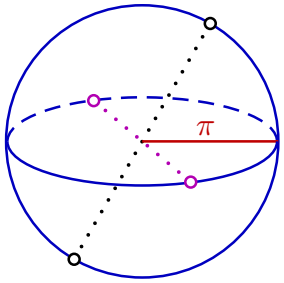


图 3.3: SO(3) 群空间示意图

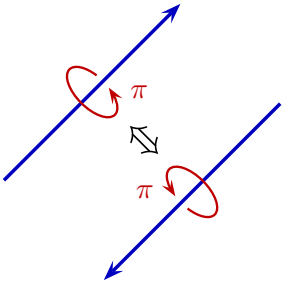


图 3.4: 一组对径点对应的等价旋转变换

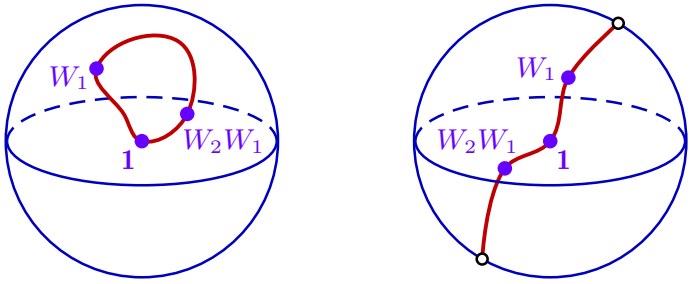


图 3.5: SO(3) 群空间中的两类闭合曲线，小空心圆代表两个对径点。左图中的闭合曲线可以连续收缩成一点。右图中的闭合曲线在对径点处发生跳跃，不能连续收缩成一点。

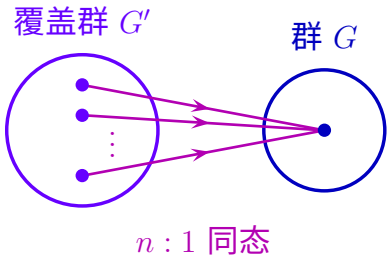


图 3.6: 覆盖群示意图

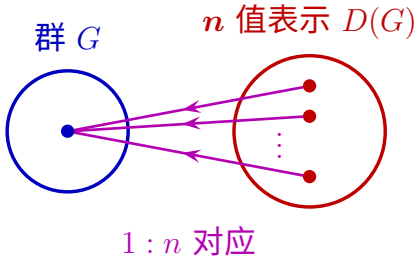


图 3.7: n 值表示

两个旋转变换是一样的，这体现在图 3.4 中。因此，球面上直径两端的点对应于同一个群元，这样的点称为对径点。如图 3.5 中左图所示，如果一条闭合曲线上的点都不在球面上，那么曲线可以连续收缩成一点。如图 3.5 中右图所示，如果一条闭合曲线通过球面上的某个点跳跃到它的对径点以形成闭合路径，那么对曲线进行连续形变时，参与跳跃的两个对径点只能成对地在球面上移动，不能通过连续形变消除这种跳跃，于是曲线不能连续收缩成一点。

另一方面，SU(2) 的群空间是半径为 2π 的球体，球面上所有的点都对应于群元 $-\mathbf{1}$。即使一条闭合曲线包含两个在球面上跳跃的点，在连续形变时这两个点可以在球面上自由移动，从而合成一个点，消除跳跃，因此任意闭合曲线能够连续收缩为一点，即连通度为 1。

数学上可以证明，如果简单 Lie 群 G 的群空间是 n 度连通的 $(n>1)$，那么必然存在一个单连通的简单 Lie 群 G' 与之同态，$G'\sim G$，同态对应关系为 $n:1$，即 G' 中的 n 个元素对应于 G 中的 1 个元素。此时称 G' 为 G 的**覆盖群** (covering group)，如图 3.6 所示。G' 的忠实表示是 G 的 $\boldsymbol{n}$ **值表示**，G' 与 G 具有相同的 Lie 代数。1.4 小节提到，在群的线性表示中，群元与表示矩阵之间具有一对一或者多对一的对应关系。但是，在图 3.7 展示的 n 值表示中，群元与表示矩阵之间具有 $1:n$ 的对应关系，因此 n 值表示不是线性表示。

SU(2) 群与 SO(3) 群具有一种 $2:1$ 的同态关系，$\mathrm{SU}(2)\sim\mathrm{SO}(3)$，SU(2) 的两个群元同态地对应于 SO(3) 的一个群元，因此 SU(2) 是 SO(3) 的覆盖群，SU(2) 的忠实表示是 SO(3) 的双值表示。

另一方面，**K** 是**增速算符**。**J** 与 **K** 的对易关系为

$$\begin{aligned}[J^i,K^j] &= \frac{1}{2}\varepsilon^{ikl}[J^{kl},J^{0j}] = \frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{ikl}\{[g^{l0}J^{kj}-(k\leftrightarrow l)]-(0\leftrightarrow j)\}\\ &= \mathrm{i}\varepsilon^{ikl}[g^{l0}J^{kj}-(0\leftrightarrow j)] = \mathrm{i}\varepsilon^{ikl}(g^{l0}J^{kj}-g^{lj}J^{k0}) = -\mathrm{i}\varepsilon^{ikl}g^{lj}J^{k0}\end{aligned}$$

$$= \mathrm{i}\varepsilon^{ikj}J^{k0} = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}J^{0k} = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}K^k, \tag{3.53}$$

而 **K** 自身的对易关系为

$$[K^i, K^j] = [J^{0i}, J^{0j}] = \mathrm{i}(g^{i0}J^{0j} - g^{00}J^{ij} - g^{ij}J^{00} + g^{0j}J^{i0}) = -\mathrm{i}J^{ij} = -\mathrm{i}\varepsilon^{ijk}J^k. \tag{3.54}$$

归纳起来，有

$$[J^i, J^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}J^k, \quad [J^i, K^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}K^k, \quad [K^i, K^j] = -\mathrm{i}\varepsilon^{ijk}J^k. \tag{3.55}$$

这是 Lorentz 代数关系 (3.31) 的另一种表达方式，具有 (3.34) 式的形式。可见，三个生成元 J^i 自己就可以构成封闭的代数，而三个生成元 K^i 不能。

下面研究 (3.22) 式。考虑无穷小 Poincaré 变换 (3.10)，忽略二阶小量，(3.22) 式左边化为

$$\begin{aligned} U^{-1}(\mathbf{1}+\omega,\varepsilon)P^\mu U(\mathbf{1}+\omega,\varepsilon) &= \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\gamma\delta}J^{\gamma\delta} + \mathrm{i}\varepsilon_\gamma P^\gamma\right) P^\mu \left(1 - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta} - \mathrm{i}\varepsilon_\alpha P^\alpha\right) \\ &= P^\mu - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}P^\mu J^{\alpha\beta} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\gamma\delta}J^{\gamma\delta}P^\mu - \mathrm{i}\varepsilon_\alpha P^\mu P^\alpha + \mathrm{i}\varepsilon_\gamma P^\gamma P^\mu \\ &= P^\mu - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}[P^\mu, J^{\rho\sigma}] - \mathrm{i}\varepsilon_\nu[P^\mu, P^\nu], \end{aligned} \tag{3.56}$$

(3.22) 式右边变成

$$(\mathbf{1}+\omega)^\mu{}_\nu P^\nu = P^\mu + \omega^\mu{}_\nu P^\nu = P^\mu + \omega_{\rho\sigma}g^{\mu\rho}P^\sigma = P^\mu + \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}(g^{\mu\rho}P^\sigma - g^{\mu\sigma}P^\rho). \tag{3.57}$$

两相比较，由 $\omega_{\mu\nu}$ 和 ε_μ 的任意性推出生成元算符的对易关系

$$[P^\mu, J^{\rho\sigma}] = \mathrm{i}(g^{\mu\rho}P^\sigma - g^{\mu\sigma}P^\rho), \tag{3.58}$$

$$[P^\mu, P^\nu] = 0. \tag{3.59}$$

这里第一个对易关系等价于 (3.32) 式。以生成元 $J^{\mu\nu}$ 和 P^μ 的 10 个独立分量作为基底张成线性空间，用对易关系 (3.31)、(3.58) 和 (3.59) 定义矢量乘法，就构成了 **Poincaré 代数**，这是 10 维 Poincaré 群的 Lie 代数。Lorentz 代数是 Poincaré 代数的子代数。

令 $H \equiv P^0$，则 $P^\mu = (H, \mathbf{P})$，进一步推出

$$[P^i, J^j] = \frac{1}{2}\varepsilon^{jkl}[P^i, J^{kl}] = \frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{jkl}(g^{ik}P^l - g^{il}P^k) = \frac{\mathrm{i}}{2}(-\varepsilon^{jil}P^l + \varepsilon^{jki}P^k) = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}P^k, \tag{3.60}$$

$$[P^i, K^j] = [P^i, J^{0j}] = \mathrm{i}(g^{i0}P^j - g^{ij}P^0) = \mathrm{i}\delta^{ij}H, \tag{3.61}$$

$$[H, K^i] = [P^0, J^{0i}] = \mathrm{i}(g^{00}P^i - g^{0i}P^0) = \mathrm{i}P^i, \tag{3.62}$$

$$[H, J^i] = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}[P^0, J^{jk}] = \frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{ijk}(g^{0j}P^k - g^{0k}P^j) = 0. \tag{3.63}$$

整理一下，有

$$[P^i, J^j] = -\mathrm{i}\varepsilon^{ijk}P^k, \quad [P^i, K^j] = \mathrm{i}\delta^{ij}H, \quad [H, K^i] = \mathrm{i}P^i, \tag{3.64}$$

$$[H, J^i] = [H, P^i] = [P^i, P^j] = 0. \tag{3.65}$$

(3.55)、(3.64) 和 (3.65) 式是 Poincaré 代数关系的另一种表达方式。

当 $\omega_{\mu\nu} = 0$ 而 $a^\mu = (t_*, \mathbf{0})$ 时，(3.11) 式意味着

$$\left.\frac{\mathrm{d}U(\mathbf{1}, a)}{\mathrm{d}t_*}\right|_{t_*=0} = -\mathrm{i}H. \tag{3.66}$$

若 H 不依赖于 t_*，则由初始条件 $U(\mathbf{1}, 0) = 1$ 求得**量子时间平移变换**

$$U(\mathbf{1}, a) = \exp(-\mathrm{i}Ht_*). \tag{3.67}$$

它将态矢从 t 时刻平移到 $t' = t + t_*$ 时刻。1.7.2 小节提到，时间平移对称性对应着能量守恒定律，因而生成元算符 H 就是**哈密顿量算符**。实际上，Schrödinger 绘景中态矢随时间演化的关系 (2.32) 里面的幺正变换 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}$ 就是一个量子时间平移变换。

若两个算符 A 和 B 相互对易，即 $[A, B] = 0$，则**二项式定理**成立：

$$(A + B)^n = \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} A^j B^{n-j}. \tag{3.68}$$

阶乘的定义可以推广到负整数：对于整数 $m < 0$，定义

$$m! \to \infty, \quad \frac{1}{m!} \to 0. \tag{3.69}$$

从而，对于 $j > n$，有 $[(n-j)!]^{-1} \to 0$。这样一来，我们可以将 (3.68) 式右边的级数化成无穷级数，

$$(A + B)^n = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{n!}{j!(n-j)!} A^j B^{n-j}. \tag{3.70}$$

由此推出

$$\mathrm{e}^{A+B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(A+B)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{n!}{j!(n-j)!} A^j B^{n-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^{n-j}}{(n-j)!} \right], \tag{3.71}$$

即

$$\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B \tag{3.72}$$

对 $[A, B] = 0$ 成立。值得注意的是，上式不仅对相互对易的算符成立，也对相互对易的同阶方阵成立。

当 $\omega_{\mu\nu} = 0$ 而 $a^\mu = (0, \mathbf{x}_*)$ 时，(3.11) 式表明

$$\left.\frac{\partial U(\mathbf{1}, a)}{\partial x_*^i}\right|_{\mathbf{x}_*=\mathbf{0}} = \mathrm{i}P^i, \tag{3.73}$$

由于 $[P^i, P^j] = 0$，求得**量子空间平移变换**

$$U(\mathbf{1}, a) = \exp(\mathrm{i}P^1 x_*^1) \exp(\mathrm{i}P^2 x_*^2) \exp(\mathrm{i}P^3 x_*^3) = \exp(\mathrm{i}\,\mathbf{P} \cdot \mathbf{x}_*). \tag{3.74}$$

第二步用到 (3.72) 式。它将态矢从 $\mathbf{x}$ 位置平移到 $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{x}_*$ 位置，空间平移对称性对应着动量守恒定律，因此生成元算符 $\mathbf{P}$ 就是**动量算符**。从而，$P^\mu = (H, \mathbf{P})$ 是**四维动量算符**。在量子力学中，与哈密顿量对易的力学量是守恒量，于是 $[H, \mathbf{P}] = [H, \mathbf{J}] = 0$ 意味着动量和总角动量都是守恒量。

由于 $[H, \mathbf{P}] = 0$，一般的量子时空平移变换可表达为

$$U(\mathbf{1}, a) = \exp(-\mathrm{i}Ht_*) \exp(\mathrm{i}\,\mathbf{P} \cdot \mathbf{x}_*) = \exp(-\mathrm{i}P^\mu a_\mu), \tag{3.75}$$

满足

$$\left.\frac{\partial U(\mathbf{1}, a)}{\partial a_\mu}\right|_{a_\mu = 0} = -\mathrm{i}P^\mu. \tag{3.76}$$

3.1.3 粒子

Poincaré 群描述 Minkowski 时空的对称性。粒子在 Minkowski 时空中运动，不同种类的粒子由质量、自旋和一些量子数加以区分。每个粒子具有一定的四维动量和自旋在某个空间方向上投影出来的量子数，对它作空间旋转或 Lorentz 增速变换时，四维动量会发生变化，而自旋投影的值有可能改变，变化方式由相应的 Lorentz 变换决定，但质量、自旋和其它量子数不会改变。当 $\Lambda = \mathbf{1}$ 时，(3.22) 式化为 $U^{-1}(\mathbf{1}, a) P^\mu U(\mathbf{1}, a) = P^\mu$，因此四维动量算符 P^μ 在量子时空平移变换下不变，从而内积 $P^2 = P^\mu P_\mu$ 也不变。另一方面，P^2 还是 Lorentz 标量，于是它的本征值 p^2 是 Poincaré 变换的不变量。对单个粒子而言，根据质壳关系 (1.71)，$p^2 = m^2$，则这个不变量是粒子质量 m 的平方。

实际上，粒子态由 Poincaré 群的**不可约幺正表示**描述，1939 年 Eugene Wigner 完成了这些表示的分类工作 [13]。一个**粒子**可以用一组在量子 Poincaré 变换下相互转化的态矢 $\{|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle\}$ 来定义，其中四维动量 p^μ 是四维动量算符 P^μ 在态矢 $|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle$ 上的本征值，

$$P^\mu |\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle = p^\mu |\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle, \tag{3.77}$$

而指标 σ 表征所有其它自由度，通常取分立值。2.3.4 小节定义的标量场单粒子态 $|\mathbf{p}\rangle$ 就是这样的态矢。

在量子时空平移变换 (3.75) 的作用下，单粒子态 $|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle$ 变换为

$$U(\mathbf{1}, a) |\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}P^\mu a_\mu} |\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^\mu a_\mu} |\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle, \tag{3.78}$$

只出现相位上的改变。另一方面，用量子 Lorentz 变换 $U(\Lambda)$ 作用得到单粒子态 $U(\Lambda) |\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle$，满足

$$\begin{aligned} P^\mu U(\Lambda) |\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle &= U(\Lambda) U^{-1}(\Lambda) P^\mu U(\Lambda) |\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle = \Lambda^\mu{}_\nu U(\Lambda) P^\nu |\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle \\ &= \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu U(\Lambda) |\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle, \end{aligned} \tag{3.79}$$

第二步用到 (3.24) 式。因此，$U(\Lambda) |\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle$ 的四维动量本征值为 $\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu$，这意味着它必定是态矢 $|\Psi_{\sigma'}(\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu)\rangle$ 的线性组合，即

$$U(\Lambda) |\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p) |\Psi_{\sigma'}(\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu)\rangle. \tag{3.80}$$

通过下面的方法可以得到系数 $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda,p)$ 的形式。

在固有保时向 Lorentz 变换下，p^μ 的内积 p^2 不变，p^0 的符号也不会改变。它们是所有惯性参考系的不变量。p^2 的每个数值和 p^0 的每种符号决定了一组四维动量 $\{p^\mu\}$，彼此之间由固有保时向 Lorentz 变换联系着，可以选取一个**标准四维动量** $k^\mu\in\{p^\mu\}$，使得

$$p^\mu = V^\mu{}_\nu(p)k^\nu, \tag{3.81}$$

其中 $V^\mu{}_\nu$ 是依赖于 p^μ 的固有保时向 Lorentz 变换。从而，标准四维动量 k^μ 代表了这组四维动量 $\{p^\mu\}$。可以将 $\{p^\mu\}$ 中任意元素 p^μ 对应的单粒子态 $|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle$ 定义为

$$|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle \equiv N(p)U[V(p)]\,|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle\,, \tag{3.82}$$

其中 $N(p)$ 是依赖于 p^μ 的归一化因子。上式左右两边出现同一个指标 σ，实际上，这条式子规定了指标 σ 与四维动量 p^μ 之间的关系。

对这个单粒子态作量子 Lorentz 变换 $U(\Lambda)$，得

$$\begin{aligned} U(\Lambda)\,|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle &= N(p)U[V(\Lambda p)]U^{-1}[V(\Lambda p)]U(\Lambda)U[V(p)]\,|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle \\ &= N(p)U[V(\Lambda p)]U[V^{-1}(\Lambda p)\,\Lambda\,V(p)]\,|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle \\ &= N(p)U[V(\Lambda p)]U(W)\,|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle\,, \end{aligned} \tag{3.83}$$

其中，固有保时向 Lorentz 变换

$$W^\mu{}_\nu = [V^{-1}(\Lambda p)\,\Lambda\,V(p)]^\mu{}_\nu \tag{3.84}$$

先将 k^μ 变换到 p^μ，再变换到 $(\Lambda p)^\mu$，最后变换回 k^μ：

$$W^\mu{}_\nu k^\nu = [V^{-1}(\Lambda p)\,\Lambda\,V(p)]^\mu{}_\nu k^\nu = [V^{-1}(\Lambda p)\,\Lambda]^\mu{}_\nu p^\nu = [V^{-1}(\Lambda p)]^\mu{}_\nu(\Lambda p)^\nu = k^\mu, \tag{3.85}$$

即 $W^\mu{}_\nu$ 保持 k^μ 不变。所有保持 k^μ 不变的固有保时向 Lorentz 变换 $\{W^\mu{}_\nu\}$ 构成 Lorentz 群的一个子群，称为标准动量 k^μ 对应的**小群** (little group)，类似于 (3.80) 式，有

$$U(W)\,|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W)\,|\Psi_{\sigma'}(k^\mu)\rangle\,, \tag{3.86}$$

其中 $D_{\sigma'\sigma}(W)$ 是线性组合系数。对于小群中任意两个变换 $(W_1)^\mu{}_\nu$ 和 $(W_2)^\mu{}_\nu$，由上式推出

$$\begin{aligned} &\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W_2W_1)\,|\Psi_{\sigma'}(k^\mu)\rangle = U(W_2W_1)\,|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle = U(W_2)U(W_1)\,|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle \\ &= U(W_2)\sum_{\sigma''} D_{\sigma''\sigma}(W_1)\,|\Psi_{\sigma''}(k^\mu)\rangle = \sum_{\sigma'\sigma''} D_{\sigma'\sigma''}(W_2)D_{\sigma''\sigma}(W_1)\,|\Psi_{\sigma'}(k^\mu)\rangle\,, \end{aligned} \tag{3.87}$$

从而得到同态关系

$$D_{\sigma'\sigma}(W_2W_1) = \sum_{\sigma''} D_{\sigma'\sigma''}(W_2)D_{\sigma''\sigma}(W_1). \tag{3.88}$$

可见，矩阵集合 $\{D(W)\}$ 构成这个小群的一个线性表示。

将 (3.86) 式代入 (3.83) 式，利用 (3.84) 式，得

$$\begin{aligned} U(\Lambda)\left|\Psi_\sigma(p^\mu)\right\rangle &= N(p)U[V(\Lambda p)]\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W)\left|\Psi_{\sigma'}(k^\mu)\right\rangle \\ &= N(p)\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}[V^{-1}(\Lambda p)\Lambda V(p)]U[V(\Lambda p)]\left|\Psi_{\sigma'}(k^\mu)\right\rangle . \end{aligned} \tag{3.89}$$

根据定义式 (3.82)，有 $\left|\Psi_{\sigma'}(\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu)\right\rangle = N(\Lambda p)U[V(\Lambda p)]\left|\Psi_{\sigma'}(k^\mu)\right\rangle$，即

$$U[V(\Lambda p)]\left|\Psi_{\sigma'}(k^\mu)\right\rangle = \frac{1}{N(\Lambda p)}\left|\Psi_{\sigma'}(\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu)\right\rangle , \tag{3.90}$$

代入 (3.89) 式，得

$$U(\Lambda)\left|\Psi_\sigma(p^\mu)\right\rangle = \frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}[V^{-1}(\Lambda p)\Lambda V(p)]\left|\Psi_{\sigma'}(\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu)\right\rangle . \tag{3.91}$$

与 (3.80) 式比较，推出系数公式

$$C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p) = \frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\, D_{\sigma'\sigma}[V^{-1}(\Lambda p)\Lambda V(p)]. \tag{3.92}$$

上述讨论表明，我们可以通过标准四维动量 k^μ 和相应的小群为单粒子态分类，物理上遇到以下三种情况[1]。

(1) 质量非零的粒子：$p^2 = m^2$ 且 $p^0 > 0$，其中质量 $m > 0$

此时 p^μ 是类时的，取标准四维动量为 $k^\mu = (m, 0, 0, 0)$，沿任意方向的 Lorentz 增速变换会改变 k^μ，任意空间旋转变换则保持 k^μ 不变，因此相应的小群是 SO(3)。

在量子力学中，归一化后的态矢仍然具有一定的任意性，态矢 $|\Psi\rangle$ 与相差一个相位因子的态矢 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}|\Psi\rangle$（$\varphi$ 为实数）描述相同的量子态。因此，一般地，量子 Lorentz 变换的同态关系 $U(\Lambda_2)U(\Lambda_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1)$ 应修正为

$$U(\Lambda_2)U(\Lambda_1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\Lambda_2,\Lambda_1)}U(\Lambda_2\Lambda_1). \tag{3.93}$$

若实相位 $\varphi(\Lambda_2, \Lambda_1)$ 不恒为零，则集合 $\{U(\Lambda)\}$ 不是 Lorentz 群的线性表示，而是**投影表示** (projective representation)。

对于任意小群变换 $W_1, W_2 \in \mathrm{SO}(3)$，则有

$$U(W_2)U(W_1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(W_2,W_1)}U(W_2W_1). \tag{3.94}$$

左右两边分别作用到态矢 $|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle$ 上，利用 (3.86) 式，得

$$\sum_{\sigma'\sigma''} D_{\sigma'\sigma''}(W_2)D_{\sigma''\sigma}(W_1)\left|\Psi_{\sigma'}(k^\mu)\right\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(W_2,W_1)}\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W_2W_1)\left|\Psi_{\sigma'}(k^\mu)\right\rangle , \tag{3.95}$$

[1]更详细的论证见参考书【13】第 2 章。

故

$$\sum_{\sigma''} D_{\sigma'\sigma''}(W_2)D_{\sigma''\sigma}(W_1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(W_2,W_1)}D_{\sigma'\sigma}(W_2W_1). \tag{3.96}$$

若 $\varphi(W_2, W_1)$ 不恒为零，则矩阵集合 $\{D(W)\}$ 构成小群 SO(3) 的投影表示。

这里遇到的投影表示就是 3.1.2 小节提到的 n 值表示，它的存在意味着群空间的连通度 $n > 1$，将这个群扩充为一个单连通的覆盖群，则相关的投影表示对应于覆盖群的线性表示。因此，应该用覆盖群的不等价不可约线性表示为粒子态分类。

在 Lie 群的群空间中，每个点对应一个群元，由于群的封闭性，两个群元的乘积一定对应于群空间中的某个点。从而，群空间中的一条曲线意味着一系列的群乘积，乘出来的群元连续地组合成这条曲线。考虑 SO(3) 群空间内一条闭合曲线，它从恒元出发，通过一系列群乘积相继经过 W_1 和 W_2W_1 两个点再回到恒元，相应的量子变换是 $U^{-1}(W_2W_1)U(W_2)U(W_1)$。如图 3.5 中左图所示，若这条曲线能连续地收缩成恒元这一点，则连续性意味着 $U^{-1}(W_2W_1)U(W_2)U(W_1)$ 是恒等变换 1。如图 3.5 中右图所示，若这条曲线包含奇数次对径点跳跃，则不能连续收缩成恒元一点，而 $U^{-1}(W_2W_1)U(W_2)U(W_1)$ 不一定是恒等变换。不过，如图 3.8 所示，重复走这条闭合曲线的路径两次，则包含偶数次对径点跳跃，可通过连续形变消除这些跳跃，从而收缩成恒元一点，也就是说，

$$[U^{-1}(W_2W_1)U(W_2)U(W_1)]^2 = 1. \tag{3.97}$$

由此得到 $U^{-1}(W_2W_1)U(W_2)U(W_1) = \pm 1$，即

$$U(W_2)U(W_1) = \pm U(W_2W_1). \tag{3.98}$$

可见，SO(3) 群的相位因子 $e^{\mathrm{i}\varphi(W_2,W_1)}$ 可取 ± 1。相位因子即能取 $+1$ 又能取 -1 的情况对应于双值表示。

SO(3) 群的覆盖群 SU(2) 是单连通的，群空间中任意经过恒元的闭合曲线都能收缩到恒元一点处，因此相位因子等于 1，不具有投影表示。群论知识告诉我们，SU(2) 群的不等价不可约线性表示都是幺正表示，记为

$$D^{(s)}, \quad s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \cdots \tag{3.99}$$

这里的 s 就是**自旋量子数**，线性表示 $D^{(s)}$ 的维度为 $2s+1$，表示矩阵元表达为 $D^{(s)}_{\sigma'\sigma}(W)$，其中 $\sigma', \sigma = -s, -s+1, \cdots, s-1, s$ 是自旋在某个方向上投影出来的本征值。因此，**自旋为 s 的有质量粒子具有 $2s+1$ 种自旋极化态**。根据 (3.91) 式，自旋为 s 的有质量单粒子态 $|\Psi_{s,\sigma}(p^\mu)\rangle$ 的量子 Lorentz 变换为

$$U(\Lambda)\,|\Psi_{s,\sigma}(p^\mu)\rangle = \frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\sum_{\sigma'} D^{(s)}_{\sigma'\sigma}[V^{-1}(\Lambda p)\Lambda V(p)]\,|\Psi_{s,\sigma'}(\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu)\rangle\,. \tag{3.100}$$

可见，量子 Lorentz 变换将 σ 对应的极化态变换成不同 σ' 对应的极化态的线性组合。

当 s 为整数 $(0, 1, 2, \cdots)$ 时，$D^{(s)}$ 是 SU(2) 群的非忠实线性表示，同时也是 SO(3) 群的线性表示，描述**整数自旋**的粒子。$D^{(0)}$ 是这两个群的恒等表示，描述零自旋粒子。$D^{(1)}$ 是 SO(3) 群的基础表示，描述自旋为 1 的粒子。

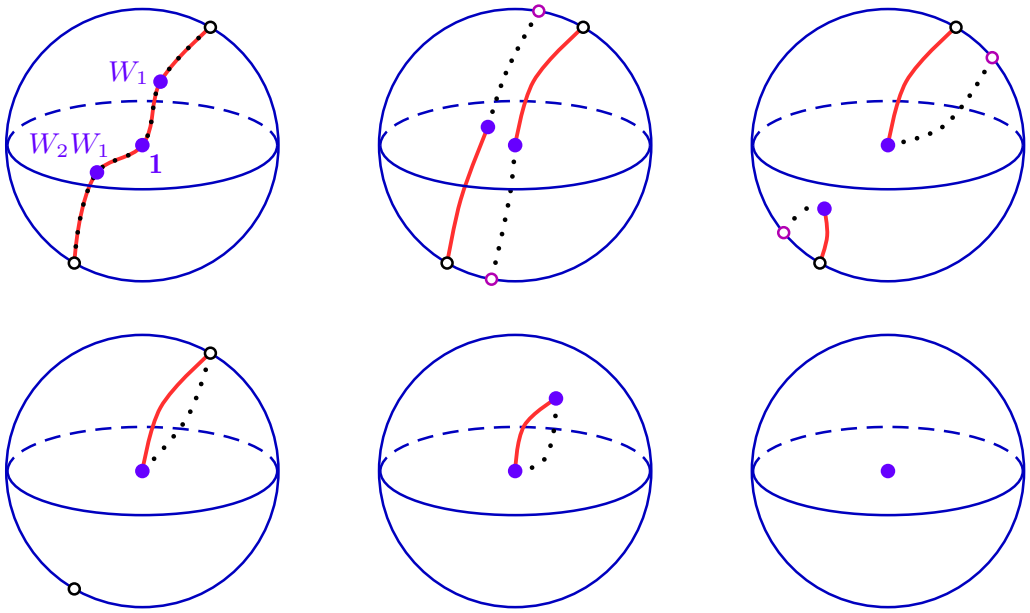


图 3.8: 对闭合曲线连续形变以消除偶数次对径点跳跃并收缩成恒元一点示意图。第一幅图沿同一闭合路径走了两遍。

当 s 为半奇数 $(1/2, 3/2, 5/2, \cdots)$ 时，$D^{(s)}$ 是 SU(2) 群的忠实线性表示，同时也是 SO(3) 群的双值表示，描述**半奇数自旋**的粒子。$D^{(1/2)}$ 是 SU(2) 群的基础表示，描述自旋为 1/2 的粒子。可见，半奇数自旋是量子理论特有的。

与子群 SO(3) 一样，固有保时向 Lorentz 群 $\mathrm{SO}^{\uparrow}(1,3)$ 也是双连通的，它的覆盖群是复数域 $\mathbb{C}$ 上的 2 阶**特殊线性群** $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$。在 Poincaré 群空间中，与恒元连通的部分对应于 $\mathrm{SO}^{\uparrow}(1,3)$ 与时空平移群的半直积群，它是双连通的，相应的覆盖群是 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 与时空平移群的半直积群。在 3.1.1 和 3.1.2 小节的讨论中，我们没有在量子 Poincaré 变换的同态关系 (3.7) 中引入相位因子，这相当于在覆盖群的线性表示中进行讨论，因而导出的结果是合理的。

(2) 质量为零的粒子：$p^2 = 0$ 且 $p^0 > 0$

此时 p^μ 是类光的，取标准四维动量为 $k^\mu = (\kappa, 0, 0, \kappa)$，其中 $\kappa > 0$，相应三维动量 $\mathbf{k}$ 沿 z 轴方向。相应小群中的任意变换 $W^\mu{}_\nu$ 满足 $W^\mu{}_\nu k^\nu = k^\mu$。

我们需要知道保持 k^μ 不变的小群是什么。为此，引入 $\tilde{k}^\mu = k^\mu/\kappa = (1,0,0,1)$。由 $W^\mu{}_\nu \tilde{k}^\nu = W^\mu{}_\nu k^\nu/\kappa = k^\mu/\kappa = \tilde{k}^\mu$ 得知，$\tilde{k}^\mu$ 也在小群变换下不变，相应的协变矢量满足 $\tilde{k}_\mu = \tilde{k}_\nu (W^{-1})^\nu{}_\mu$。再引入类时 Lorentz 矢量 $\tilde{t}^\mu = (1,0,0,0)$，小群变换 $W^\mu{}_\nu$ 对它作用的结果为 $t^\mu = W^\mu{}_\nu \tilde{t}^\nu$。从而推出

$$t^\mu \tilde{k}_\mu = W^\mu{}_\nu \tilde{t}^\nu \tilde{k}_\rho (W^{-1})^\rho{}_\mu = \delta^\rho{}_\nu \tilde{t}^\nu \tilde{k}_\rho = \tilde{t}^\nu \tilde{k}_\nu = 1. \tag{3.101}$$

考虑到 $\tilde{k}^\mu = (1,0,0,1)$，满足这样一个 $1 = t^\mu \tilde{k}_\mu = t^0 - t^3$ 条件的 t^μ 一般形式为

$$t^\mu = (1 + \zeta, \alpha, \beta, \zeta). \tag{3.102}$$

另一方面，t^μ 的自我内积是

$$t^\mu t_\mu = \delta^\nu{}_\mu t^\mu t_\nu = W^\rho{}_\mu t^\mu t_\nu (W^{-1})^\nu{}_\rho = \tilde{t}^\rho \tilde{t}_\rho = 1, \tag{3.103}$$

故 $t^\mu t_\mu = (1+\zeta)^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \zeta^2 = 1$，因而 ζ 与 α、β 的关系为

$$\zeta = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2), \quad \alpha, \beta \in (-\infty, +\infty), \tag{3.104}$$

实数 α 和 β 的取值不受约束。

考虑固有保时向 Lorentz 变换

$$S^\mu{}_\nu(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 1+\zeta & \alpha & \beta & -\zeta \\ \alpha & 1 & 0 & -\alpha \\ \beta & 0 & 1 & -\beta \\ \zeta & \alpha & \beta & 1-\zeta \end{pmatrix}, \tag{3.105}$$

可以验证它满足 $\mathbf{g} = S^{\mathrm{T}}\mathbf{g}S$ 和 $\det(S) = 1$。在 $S(\alpha, \beta)$ 的作用下，$\tilde{t}^\mu$ 的变换为

$$S^\mu{}_\nu(\alpha, \beta)\tilde{t}^\nu = t^\mu = W^\mu{}_\nu \tilde{t}^\nu. \tag{3.106}$$

这意味着

$$\tilde{t}^\rho = [S^{-1}(\alpha, \beta)]^\rho{}_\mu S^\mu{}_\nu(\alpha, \beta)\tilde{t}^\nu = [S^{-1}(\alpha, \beta)]^\rho{}_\mu W^\mu{}_\nu \tilde{t}^\nu, \tag{3.107}$$

也就是说，变换 $S^{-1}(\alpha, \beta)W$ 保持类时矢量 $\tilde{t}^\mu = (1, 0, 0, 0)$ 不变，所以它必定是一个空间旋转变换。容易验证 $S^\mu{}_\nu(\alpha, \beta)k^\nu = k^\nu$，即 $S(\alpha, \beta)$ 是一个小群变换，从而小群变换 $S^{-1}(\alpha, \beta)W$ 是保持 $k^\mu = (\kappa, 0, 0, \kappa)$ 不变的空间旋转变换，它必定是绕 z 轴转动某个 θ 角的旋转变换 $R_z(\theta)$，满足

$$S^{-1}(\alpha, \beta)W = R_z(\theta). \tag{3.108}$$

$R_z(\theta)$ 的具体形式见 (1.36) 式。于是，小群变换的最一般形式是

$$W(\alpha, \beta, \theta) = S(\alpha, \beta)R_z(\theta). \tag{3.109}$$

通过计算可知，$S(\alpha, \beta)$ 和 $R_z(\theta)$ 分别满足

$$S(\alpha_1, \beta_1)S(\alpha_2, \beta_2) = S(\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2), \tag{3.110}$$

$$R_z(\theta_1)R_z(\theta_2) = R_z(\theta_1 + \theta_2). \tag{3.111}$$

从而 $S(\alpha_1, \beta_1)S(\alpha_2, \beta_2) = S(\alpha_2, \beta_2)S(\alpha_1, \beta_1)$，$R_z(\theta_1)R_z(\theta_2) = R_z(\theta_2)R_z(\theta_1)$，因此 $\{S(\alpha, \beta)\}$ 和 $\{R_z(\theta)\}$ 分别构成小群的两个 Abel 子群。进一步推出

$$R_z^{-1}(\theta)S(\alpha, \beta)R_z(\theta) = S(\alpha\cos\theta - \beta\sin\theta, \alpha\sin\theta + \beta\cos\theta), \tag{3.112}$$

这意味着 $S(\alpha, \beta)$ 在任意小群元素的相似变换下变换到子群 $\{S(\alpha, \beta)\}$ 中的元素。在这种情况下，数学上称 $\{S(\alpha, \beta)\}$ 是小群的**不变子群** (invariant subgroup)。由于 α 和 β 的取值范围都是全

体实数，全体坐标点 (α,β) 组成一个二维平面。(3.110) 式表明 $S(\alpha,\beta)$ 是这个平面上的平移变换，(3.111) 和 (3.112) 式表明 $R_z(\theta)$ 是这个平面上的旋转变换，这些变换都保持二维平面上的 Euclid 线元平方 $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}\alpha^2+\mathrm{d}\beta^2$ 不变，由它们构成的小群是二维 Euclid 空间的等距群 ISO(2)。

现在讨论小群 ISO(2) 的生成元算符。ISO(2) 变换 (3.109) 的无穷小形式是 $W^\mu{}_\nu(\alpha,\beta,\theta)=\delta^\mu{}_\nu+\omega^\mu{}_\nu$，其中无穷小参数为

$$\omega^\mu{}_\nu=\begin{pmatrix}0&\alpha&\beta&0\\ \alpha&0&\theta&-\alpha\\ \beta&-\theta&0&-\beta\\ 0&\alpha&\beta&0\end{pmatrix}. \tag{3.113}$$

容易验证 $\omega^\mu{}_\nu k^\nu=0$，因而这样的无穷小变换保持 k^μ 不变。从而，反对称无穷小参数是

$$\omega_{\mu\nu}=g_{\mu\rho}\omega^\rho{}_\nu=\begin{pmatrix}0&\alpha&\beta&0\\ -\alpha&0&-\theta&\alpha\\ -\beta&\theta&0&\beta\\ 0&-\alpha&-\beta&0\end{pmatrix}, \tag{3.114}$$

即

$$\alpha=-\omega_{31}=\omega_{13}=\omega_{01}=-\omega_{10},\quad \beta=\omega_{23}=-\omega_{32}=\omega_{02}=-\omega_{20},\quad \theta=\omega_{21}=-\omega_{12}. \tag{3.115}$$

根据 (3.10) 式，相应的无穷小量子变换为

$$\begin{aligned}U(\mathbf{1}+\omega)&=1-\mathrm{i}(\omega_{31}J^{31}+\omega_{01}J^{01})-\mathrm{i}(\omega_{23}J^{23}+\omega_{02}J^{02})-\mathrm{i}\omega_{12}J^{12}\\ &=1+\mathrm{i}\alpha A+\mathrm{i}\beta B+\mathrm{i}\theta J^3,\end{aligned} \tag{3.116}$$

其中 $J^3=J^{12}$，而生成元算符 A 和 B 定义为

$$A\equiv J^{31}-J^{01}=J^2-K^1,\quad B\equiv -J^{23}-J^{02}=-J^1-K^2. \tag{3.117}$$

由 Lorentz 代数关系 (3.55) 推出小群 ISO(2) 的生成元算符 J^3、A 和 B 的对易关系

$$[J^3,A]=[J^3,J^2]-[J^3,K^1]=-\mathrm{i}J^1-\mathrm{i}K^2=\mathrm{i}B, \tag{3.118}$$

$$[J^3,B]=-[J^3,J^1]-[J^3,K^2]=-\mathrm{i}J^2+\mathrm{i}K^1=-\mathrm{i}A, \tag{3.119}$$

$$[A,B]=-[J^2,J^1]-[J^2,K^2]+[K^1,J^1]+[K^1,K^2]=\mathrm{i}J^3-\mathrm{i}J^3=0. \tag{3.120}$$

这与 Poincaré 代数关系 (3.64) 和 (3.65) 中的对易关系

$$[J^3,P^2]=\mathrm{i}P^1,\quad [J^3,P^1]=-\mathrm{i}P^2,\quad [P^2,P^1]=0 \tag{3.121}$$

相同，毕竟 J^3、P^1 和 P^2 生成了 xy 平面的 ISO(2) 群。

A 与 B 是相互对易的厄米算符，能够具有共同的本征态 $|\Psi_{a,b}(k^\mu)\rangle$，本征值分别为 a 和 b，满足

$$A\,|\Psi_{a,b}(k^\mu)\rangle = a\,|\Psi_{a,b}(k^\mu)\rangle\,,\quad B\,|\Psi_{a,b}(k^\mu)\rangle = b\,|\Psi_{a,b}(k^\mu)\rangle\,. \tag{3.122}$$

根据 (3.112) 式，小群 ISO(2) 的量子变换满足同态关系

$$U^{-1}[R_z(\theta)]U[S(\alpha,\beta)]U[R_z(\theta)] = U[S(\alpha\cos\theta-\beta\sin\theta,\alpha\sin\theta+\beta\cos\theta)]. \tag{3.123}$$

将上式展开到无穷小参数 α 和 β 的第一阶，得

$$U^{-1}[R_z(\theta)](1+\mathrm{i}\alpha A+\mathrm{i}\beta B)U[R_z(\theta)] = 1+\mathrm{i}(\alpha\cos\theta-\beta\sin\theta)A+\mathrm{i}(\alpha\sin\theta+\beta\cos\theta)B, \tag{3.124}$$

由 α 和 β 的任意性推出

$$U^{-1}[R_z(\theta)]AU[R_z(\theta)] = A\cos\theta+B\sin\theta,\quad U^{-1}[R_z(\theta)]BU[R_z(\theta)] = -A\sin\theta+B\cos\theta, \tag{3.125}$$

即 $AU[R_z(\theta)] = U[R_z(\theta)](A\cos\theta+B\sin\theta)$，$BU[R_z(\theta)] = U[R_z(\theta)](-A\sin\theta+B\cos\theta)$。那么，态矢 $|\Psi_{a,b,\theta}(k^\mu)\rangle \equiv U[R_z(\theta)]\,|\Psi_{a,b}(k^\mu)\rangle$ 是 A 和 B 的共同本征态，

$$\begin{aligned} A\,|\Psi_{a,b,\theta}(k^\mu)\rangle &= AU[R_z(\theta)]\,|\Psi_{a,b}(k^\mu)\rangle = U[R_z(\theta)](A\cos\theta+B\sin\theta)\,|\Psi_{a,b}(k^\mu)\rangle \\ &= U[R_z(\theta)](a\cos\theta+b\sin\theta)\,|\Psi_{a,b}(k^\mu)\rangle = (a\cos\theta+b\sin\theta)\,|\Psi_{a,b,\theta}(k^\mu)\rangle\,, \end{aligned} \tag{3.126}$$

$$\begin{aligned} B\,|\Psi_{a,b,\theta}(k^\mu)\rangle &= BU[R_z(\theta)]\,|\Psi_{a,b}(k^\mu)\rangle = U[R_z(\theta)](-A\sin\theta+B\cos\theta)\,|\Psi_{a,b}(k^\mu)\rangle \\ &= U[R_z(\theta)](-a\sin\theta+b\cos\theta)\,|\Psi_{a,b}(k^\mu)\rangle = (-a\sin\theta+b\cos\theta)\,|\Psi_{a,b,\theta}(k^\mu)\rangle\,. \end{aligned} \tag{3.127}$$

由于转动角 θ 取连续值，这里的本征值 $a\cos\theta+b\sin\theta$ 和 $-a\sin\theta+b\cos\theta$ 也是连续的。因此，只要 a 和 b 不全为零，就有一系列连续的本征态 $|\Psi_{a,b,\theta}(k^\mu)\rangle$。但是，实验上没有观测到无质量粒子具有以转动角 θ 作为连续自由度的物理态。因此，自然界中的物理态是 $a=b=0$ 的本征态，只由剩下的小群生成元算符 J^3 的本征值 σ 标记，记作 $|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle$，满足

$$A\,|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle = 0,\quad B\,|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle = 0,\quad J^3\,|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle = \sigma\,|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle\,. \tag{3.128}$$

J^3 是自旋角动量算符 $\mathbf{J}$ 沿 z 轴方向的分量，标准四维动量 $k^\mu=(\kappa,0,0,\kappa)$ 对应的三维动量 $\mathbf{k}$ 也沿着 z 轴方向，因此 σ 就是自旋角动量在动量方向上的投影本征值，称为**螺旋度** (helicity)。

无穷小量子变换 (3.116) 表明

$$\left.\frac{\partial U[S(\alpha,\beta)]}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=\beta=0} = \mathrm{i}A,\quad \left.\frac{\partial U[S(\alpha,\beta)]}{\partial\beta}\right|_{\alpha=\beta=0} = \mathrm{i}B,\quad \left.\frac{dU[R_z(\theta)]}{d\theta}\right|_{\theta=0} = \mathrm{i}J^3, \tag{3.129}$$

由此求得

$$U[S(\alpha,\beta)] = \exp(\mathrm{i}\alpha A+\mathrm{i}\beta B),\quad U[R_z(\theta)] = \exp(\mathrm{i}\theta J^3). \tag{3.130}$$

一般小群变换 (3.109) 对应的量子变换为

$$U[W(\alpha,\beta,\theta)] = U[S(\alpha,\beta)]U[R_z(\theta)] = \exp(\mathrm{i}\alpha A+\mathrm{i}\beta B)\exp(\mathrm{i}\theta J^3), \tag{3.131}$$

作用到单粒子物理态 $|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle$ 上，得

$$U[W(\alpha,\beta,\theta)]\,|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle = \exp(\mathrm{i}\sigma\theta)\,|\Psi_\sigma(k^\mu)\rangle\,. \tag{3.132}$$

与 (3.86) 式比较，有

$$D_{\sigma'\sigma}(W) = \exp(\mathrm{i}\sigma\theta)\delta_{\sigma'\sigma}. \tag{3.133}$$

另一方面，(3.84) 式化为

$$V^{-1}(\Lambda p)\Lambda V(p) = W = S[\alpha(\Lambda,p),\beta(\Lambda,p)]R_z[\theta(\Lambda,p)], \tag{3.134}$$

这个关系决定了 θ 对 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 和 p^μ 的依赖关系。根据 (3.91) 式，(3.82) 式定义的一般单粒子态 $|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle$ 的量子 Lorentz 变换为

$$U(\Lambda)\,|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle = \frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\,\exp[\mathrm{i}\sigma\theta(\Lambda,p)]\,|\Psi_\sigma(\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu)\rangle\,. \tag{3.135}$$

这个式子表明 $|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle$ 与变换后的态 $U(\Lambda)\,|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle$ 具有相同的 σ，也就是说，量子 Lorentz 变换 $U(\Lambda)$ 不会混合具有不同螺旋度的无质量粒子态。这意味着，**对无质量粒子来说，螺旋度 $\boldsymbol{\sigma}$ 是固有保时向 Lorentz 变换的不变量，在所有惯性系中取值相同。**因此，无质量粒子可根据螺旋度 σ 的值分类。

前面提到，固有保时向 Lorentz 群 $\mathrm{SO}^\uparrow(1,3)$ 的群空间是双连通的，与 $\mathrm{SO}(3)$ 的情况类似，群空间内从恒元出发、经过 Λ_1 和 $\Lambda_2\Lambda_1$ 再回到恒元的闭合曲线分为两类，一类能连续收缩成恒元一点，另一类不能。可以推出类似 (3.98) 式的关系

$$U(\Lambda_2)U(\Lambda_1) = \pm U(\Lambda_2\Lambda_1). \tag{3.136}$$

对于这里讨论的无质量粒子，(3.135) 式表明，相位因子 ±1 起源于绕 z 轴转动角度 $\theta = 2\pi$ 形成闭合曲线时引起的 $\exp(2\mathrm{i}\pi\sigma)$ 因子，即

$$\exp(2\mathrm{i}\pi\sigma) = \pm1. \tag{3.137}$$

这个条件限制了**无质量粒子螺旋度** σ 的取值，要求

$$\sigma = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm1, \pm\frac{3}{2}, \pm2, \cdots \tag{3.138}$$

σ 为整数对应于 $\mathrm{SO}^\uparrow(1,3)$ 的线性表示，σ 为半奇数对应于 $\mathrm{SO}^\uparrow(1,3)$ 的双值表示。由于螺旋度是自旋角动量在动量方向上的投影，**无质量粒子自旋量子数**可取

$$s = |\sigma| = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \cdots, \tag{3.139}$$

与有质量粒子的取值情况一样。

于是，**自旋为 $\boldsymbol{s}$ 的无质量粒子具有 2 种自旋极化态，对应于 2 种螺旋度 $\boldsymbol{\sigma = \pm s}$。**如果没有额外的条件，可以把 s 相同而 σ 不同的两种无质量粒子当作不同粒子对待。不过，额外的

条件是存在的。宇称变换会改变 σ 的符号，而电磁相互作用、强相互作用和引力相互作用都保持宇称守恒。如果无质量粒子不具有破坏宇称的相互作用，则螺旋度相反的两种粒子具有相同的相互作用行为，从而可以把它们当作同一种粒子的两种自由度。比如，作为电磁场的量子，**光子**是自旋为 1 的无质量粒子，具有 -1 和 $+1$ 两种螺旋度，分别对应于真空电磁波的左旋圆极化和右旋圆极化。假想的**引力子** (graviton) 是自旋为 2 的无质量粒子，具有 -2 和 $+2$ 两种螺旋度。

在标准模型中，自旋为 $1/2$ 的中微子没有质量，参与破坏宇称的弱相互作用，因而可以把螺旋度相反的两种中微子当作两种粒子，螺旋度为 $-1/2$ 的左旋中微子是狭义的**中微子**，螺旋度为 $+1/2$ 的右旋中微子称为**反中微子**。

(3) 真空：$p^\mu = (0,0,0,0)$

此时取标准四维动量为 $k^\mu = (0,0,0,0)$，它在任意 Lorentz 变换下不变，相应的小群是固有保时向 Lorentz 群 $\mathrm{SO}^\uparrow(1,3)$。

3.2 Lorentz 群的矢量表示

Lorentz 变换的无穷小参数 $\omega^\alpha{}_\beta$ 可以转化为

$$\begin{aligned}\omega^\alpha{}_\beta &= g^{\alpha\mu}\omega_{\mu\beta} = \frac{1}{2}(g^{\alpha\mu}\omega_{\mu\beta} - g^{\alpha\mu}\omega_{\beta\mu}) = \frac{1}{2}(g^{\alpha\mu}\omega_{\mu\nu}\delta^\nu{}_\beta - g^{\alpha\mu}\omega_{\nu\mu}\delta^\nu{}_\beta)\\ &= \frac{1}{2}(g^{\alpha\mu}\omega_{\mu\nu}\delta^\nu{}_\beta - g^{\alpha\nu}\omega_{\mu\nu}\delta^\mu{}_\beta) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\mathrm{i}(g^{\mu\alpha}\delta^\nu{}_\beta - g^{\nu\alpha}\delta^\mu{}_\beta) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta, \quad (3.140)\end{aligned}$$

其中 $(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta$ 定义为

$$(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta \equiv \mathrm{i}(g^{\mu\alpha}\delta^\nu{}_\beta - g^{\nu\alpha}\delta^\mu{}_\beta). \quad (3.141)$$

容易看出，$\mathcal{J}^{\mu\nu}$ 是反对称的，

$$\mathcal{J}^{\mu\nu} = -\mathcal{J}^{\nu\mu}. \quad (3.142)$$

它的另一种写法是

$$(\mathcal{J}^{\mu\nu})_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma}(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\gamma{}_\beta = \mathrm{i}g_{\alpha\gamma}(g^{\mu\gamma}\delta^\nu{}_\beta - g^{\nu\gamma}\delta^\mu{}_\beta) = \mathrm{i}(\delta^\mu{}_\alpha\delta^\nu{}_\beta - \delta^\nu{}_\alpha\delta^\mu{}_\beta). \quad (3.143)$$

这样的话，可以把无穷小 Lorentz 变换写成

$$(\Lambda_\omega)^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta + \omega^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta. \quad (3.144)$$

$\mathcal{J}^{\mu\nu}$ 与 $\mathcal{J}^{\rho\sigma}$ 的对易关系为

$$\begin{aligned}&[\mathcal{J}^{\mu\nu}, \mathcal{J}^{\rho\sigma}]^\alpha{}_\beta = (\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha{}_\gamma(\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\gamma{}_\beta - (\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\alpha{}_\gamma(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\gamma{}_\beta\\ &= \mathrm{i}^2(g^{\mu\alpha}\delta^\nu{}_\gamma - g^{\nu\alpha}\delta^\mu{}_\gamma)(g^{\rho\gamma}\delta^\sigma{}_\beta - g^{\sigma\gamma}\delta^\rho{}_\beta) - (\mu \leftrightarrow \rho, \nu \leftrightarrow \sigma)\\ &= -g^{\mu\alpha}\delta^\nu{}_\gamma g^{\rho\gamma}\delta^\sigma{}_\beta + g^{\mu\alpha}\delta^\nu{}_\gamma g^{\sigma\gamma}\delta^\rho{}_\beta + g^{\nu\alpha}\delta^\mu{}_\gamma g^{\rho\gamma}\delta^\sigma{}_\beta - g^{\nu\alpha}\delta^\mu{}_\gamma g^{\sigma\gamma}\delta^\rho{}_\beta - (\mu \leftrightarrow \rho, \nu \leftrightarrow \sigma)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -g^{\mu\alpha}g^{\rho\nu}\delta^{\sigma}{}_{\beta} + g^{\mu\alpha}g^{\sigma\nu}\delta^{\rho}{}_{\beta} + g^{\nu\alpha}g^{\rho\mu}\delta^{\sigma}{}_{\beta} - g^{\nu\alpha}g^{\sigma\mu}\delta^{\rho}{}_{\beta} - (\mu \leftrightarrow \rho, \nu \leftrightarrow \sigma) \\
&= -g^{\nu\rho}g^{\mu\alpha}\delta^{\sigma}{}_{\beta} + g^{\mu\rho}g^{\nu\alpha}\delta^{\sigma}{}_{\beta} + g^{\nu\sigma}g^{\mu\alpha}\delta^{\rho}{}_{\beta} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\alpha}\delta^{\rho}{}_{\beta} \\
&\quad -[-g^{\sigma\mu}g^{\rho\alpha}\delta^{\nu}{}_{\beta} + g^{\rho\mu}g^{\sigma\alpha}\delta^{\nu}{}_{\beta} + g^{\sigma\nu}g^{\rho\alpha}\delta^{\mu}{}_{\beta} - g^{\rho\nu}g^{\sigma\alpha}\delta^{\mu}{}_{\beta}] \\
&= g^{\nu\rho}(g^{\sigma\alpha}\delta^{\mu}{}_{\beta} - g^{\mu\alpha}\delta^{\sigma}{}_{\beta}) + g^{\mu\rho}(g^{\nu\alpha}\delta^{\sigma}{}_{\beta} - g^{\sigma\alpha}\delta^{\nu}{}_{\beta}) + g^{\nu\sigma}(g^{\mu\alpha}\delta^{\rho}{}_{\beta} - g^{\rho\alpha}\delta^{\mu}{}_{\beta}) + g^{\mu\sigma}(g^{\rho\alpha}\delta^{\nu}{}_{\beta} - g^{\nu\alpha}\delta^{\rho}{}_{\beta}) \\
&= -\mathrm{i}g^{\nu\rho}(\mathcal{J}^{\sigma\mu})^{\alpha}{}_{\beta} - \mathrm{i}g^{\mu\rho}(\mathcal{J}^{\nu\sigma})^{\alpha}{}_{\beta} - \mathrm{i}g^{\nu\sigma}(\mathcal{J}^{\mu\rho})^{\alpha}{}_{\beta} - \mathrm{i}g^{\mu\sigma}(\mathcal{J}^{\rho\nu})^{\alpha}{}_{\beta} \\
&= \mathrm{i}[g^{\nu\rho}(\mathcal{J}^{\mu\sigma})^{\alpha}{}_{\beta} - g^{\mu\rho}(\mathcal{J}^{\nu\sigma})^{\alpha}{}_{\beta} - g^{\nu\sigma}(\mathcal{J}^{\mu\rho})^{\alpha}{}_{\beta} + g^{\mu\sigma}(\mathcal{J}^{\nu\rho})^{\alpha}{}_{\beta}],
\end{aligned} \tag{3.145}
$$

即

$$
[\mathcal{J}^{\mu\nu}, \mathcal{J}^{\rho\sigma}] = \mathrm{i}(g^{\nu\rho}\mathcal{J}^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}\mathcal{J}^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}\mathcal{J}^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}\mathcal{J}^{\nu\rho}). \tag{3.146}
$$

可见，4×4 矩阵 $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ 满足 Lorentz 代数关系 (3.31)。回顾 1.4 节，$\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}$ 属于 Lorentz 群的 4 维矢量表示，因而 $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ 就是**矢量表示的生成元矩阵**，作用的对象是 Lorentz 矢量。

无穷小 Lorentz 变换 (3.144) 的矩阵记法为

$$
\Lambda_{\omega} = \mathbf{1} + \omega = \mathbf{1} - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}, \tag{3.147}
$$

它可以看作矩阵级数

$$
\Lambda = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}\right) = \mathrm{e}^{\omega} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\omega^n}{n!} \tag{3.148}
$$

只展开到 ω 一阶项的结果。矩阵 ω 与度规矩阵 $\mathbf{g}$ 满足

$$
(\mathbf{g}^{-1}\omega^{\mathrm{T}}\mathbf{g})^{\alpha}{}_{\beta} = g^{\alpha\gamma}(\omega^{\mathrm{T}})_{\gamma}{}^{\delta}g_{\delta\beta} = g^{\alpha\gamma}\omega^{\delta}{}_{\gamma}g_{\delta\beta} = g^{\alpha\gamma}\omega_{\beta\gamma} = -g^{\alpha\gamma}\omega_{\gamma\beta} = -\omega^{\alpha}{}_{\beta}, \tag{3.149}
$$

即

$$
\mathbf{g}^{-1}\omega^{\mathrm{T}}\mathbf{g} = -\omega. \tag{3.150}
$$

从而

$$
\mathbf{g}^{-1}\Lambda^{\mathrm{T}}\mathbf{g} = \mathbf{g}^{-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\omega^{\mathrm{T}})^n}{n!}\right]\mathbf{g} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{g}^{-1}\omega^{\mathrm{T}}\mathbf{g})^n}{n!} = \exp(\mathbf{g}^{-1}\omega^{\mathrm{T}}\mathbf{g}) = \mathrm{e}^{-\omega}. \tag{3.151}
$$

由于 $[-\omega, \omega] = 0$，根据 (3.151) 和 (3.72) 式，有

$$
\mathbf{g}^{-1}\Lambda^{\mathrm{T}}\mathbf{g}\,\Lambda = \mathrm{e}^{-\omega}\mathrm{e}^{\omega} = \mathrm{e}^{-\omega+\omega} = \mathrm{e}^{\mathbf{0}} = \mathbf{1}. \tag{3.152}
$$

故 $\Lambda^{\mathrm{T}}\mathbf{g}\,\Lambda = \mathbf{g}$，即 Λ 满足保度规条件 (1.44)。因此，由 (3.148) 式定义的 Λ 确实是 Lorentz 变换。此时，变换参数 $\omega_{\mu\nu}$ 不是无穷小量，而具有有限的数值，所以

$$
\Lambda = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}\right) \tag{3.153}
$$

是用 Lorentz 群矢量表示生成元 $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ 表达出来的**有限变换** (finite transformation)。由于变换参数 $\omega_{\mu\nu}$ 可以连续地变化到 $\omega_{\mu\nu} = 0$，用 (3.153) 式表达的 Lorentz 变换在群空间中与恒等变换相连通，因而它属于*固有保时向 Lorentz 群*。当 $\omega_{\mu\nu}$ 遍历群空间中所有参数取值时，Lorentz 变换 (3.153) 遍历所有的固有保时向 Lorentz 群元素。

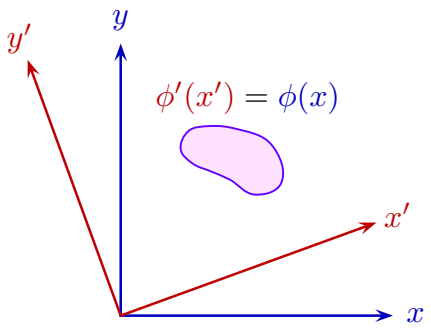


图 3.9: 在绕 z 轴空间旋转变换下，标量场 $\phi(x)$ 的变换示意图。

3.3　量子场的 Lorentz 变换

3.3.1　量子标量场的 Lorentz 变换

经过正则量子化之后，标量场 $\phi(x)$ 是物理 Hilbert 空间中的算符，类似于 (3.27) 式，$\phi(x)$ 的固有保时向 Lorentz 变换关系 (2.75) 表示为

$$\phi'(x') = U^{-1}(\Lambda)\phi(x')U(\Lambda) = \phi(x). \tag{3.154}$$

上式表明，变换后的标量场在变换后的时空点上的值等于变换前的标量场在变换前的时空点上的值。图 3.9 以空间旋转变换为例说明这种情况。由于 $x' = \Lambda x$ 等价于 $x = \Lambda^{-1}x'$，对 (3.154) 式作替换 $x' \to x$、$x \to \Lambda^{-1}x$，得

$$U^{-1}(\Lambda)\phi(x)U(\Lambda) = \phi(\Lambda^{-1}x). \tag{3.155}$$

相应地，$\phi(x)$ 在变换后的态 $|\Psi'\rangle$ 中的期待值为

$$\langle\Psi'|\,\phi(x)\,|\Psi'\rangle = \langle\Psi|\,U^{-1}(\Lambda)\phi(x)U(\Lambda)\,|\Psi\rangle = \langle\Psi|\,\phi(\Lambda^{-1}x)\,|\Psi\rangle\,. \tag{3.156}$$

另一方面，由 (1.74) 式得 $\partial^\mu\phi(x)$ 的相应 Lorentz 变换为

$$U^{-1}(\Lambda)\partial'^\mu\phi(x')U(\Lambda) = \partial'^\mu\phi'(x') = \partial'^\mu\phi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu\partial^\nu\phi(x). \tag{3.157}$$

于是，将实标量场量子化之后，拉氏量 (2.77) 的固有保时向 Lorentz 变换为

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(x') &= U^{-1}(\Lambda)\mathcal{L}(x')U(\Lambda) = \frac{1}{2}U^{-1}(\Lambda)[\partial'^\mu\phi(x')\partial'_\mu\phi(x') - m^2\phi^2(x')]U(\Lambda) \\
&= \frac{1}{2}\{g_{\mu\nu}U^{-1}(\Lambda)\partial'^\mu\phi(x')U(\Lambda)U^{-1}(\Lambda)\partial'^\nu\phi(x')U(\Lambda) - m^2[U^{-1}(\Lambda)\phi(x')U(\Lambda)]^2\} \\
&= \frac{1}{2}[g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\partial^\rho\phi(x)\Lambda^\nu{}_\sigma\partial^\sigma\phi(x) - m^2\phi^2(x)] = \frac{1}{2}[g_{\rho\sigma}\partial^\rho\phi(x)\partial^\sigma\phi(x) - m^2\phi^2(x)] \\
&= \mathcal{L}(x),
\end{aligned} \tag{3.158}$$

倒数第二步用到保度规条件 (1.34)。从而，

$$U^{-1}(\Lambda)\mathcal{L}(x)U(\Lambda) = \mathcal{L}(\Lambda^{-1}x). \tag{3.159}$$

可见，拉氏量 (2.77) 确实是一个 Lorentz 标量。

对于无穷小 Lorentz 变换 $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$，有

$$\begin{aligned}(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu &= g_{\nu\alpha}g^{\mu\beta}\Lambda^\alpha{}_\beta = g_{\nu\alpha}g^{\mu\beta}(\delta^\alpha{}_\beta + \omega^\alpha{}_\beta) = g_{\nu\beta}g^{\mu\beta} + g^{\mu\beta}\omega_{\nu\beta} = \delta^\mu{}_\nu - g^{\mu\beta}\omega_{\beta\nu} \\ &= \delta^\mu{}_\nu - \omega^\mu{}_\nu,\end{aligned} \tag{3.160}$$

从而

$$(\Lambda^{-1}x)^\mu = (\delta^\mu{}_\nu - \omega^\mu{}_\nu)x^\nu = x^\mu - \omega^\mu{}_\nu x^\nu. \tag{3.161}$$

在 x 处将 (3.155) 式右边展开到 ω 的一阶项，得

$$\begin{aligned}\phi(\Lambda^{-1}x) &= \phi(x) - \omega^\mu{}_\nu x^\nu\partial_\mu\phi(x) = \phi(x) - \omega_{\mu\nu}x^\nu\partial^\mu\phi(x) = \phi(x) - \frac{1}{2}(\omega_{\nu\mu}x^\mu\partial^\nu + \omega_{\mu\nu}x^\nu\partial^\mu)\phi(x) \\ &= \phi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\mathrm{i}(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu)\phi(x) = \phi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}L^{\mu\nu}\phi(x),\end{aligned} \tag{3.162}$$

其中微分算符 $L^{\mu\nu}$ 定义为

$$L^{\mu\nu} \equiv \mathrm{i}(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu). \tag{3.163}$$

根据 (3.10) 式，将 (3.155) 式左边展开到 ω 的一阶项，得

$$\begin{aligned}U^{-1}(\Lambda)\phi(x)U(\Lambda) &= \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\gamma\delta}J^{\gamma\delta}\right)\phi(x)\left(1 - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta}\right) \\ &= \phi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}\phi(x)J^{\alpha\beta} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\gamma\delta}J^{\gamma\delta}\phi(x) = \phi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}[\phi(x), J^{\mu\nu}].\end{aligned} \tag{3.164}$$

两相比较，给出

$$[\phi(x), J^{\mu\nu}] = L^{\mu\nu}\phi(x). \tag{3.165}$$

$L^{\mu\nu}$ 的纯空间分量 L^{ij} 的对偶三维矢量算符为

$$L^i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}L^{jk} = \frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{ijk}(x^j\partial^k - x^k\partial^j) = \frac{\mathrm{i}}{2}(\varepsilon^{ijk}x^j\partial^k - \varepsilon^{ikj}x^j\partial^k) = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}x^j\partial^k, \tag{3.166}$$

写成三维矢量外积的形式是

$$\mathbf{L} = -\mathrm{i}\,\mathbf{x}\times\nabla. \tag{3.167}$$

由于 $-\mathrm{i}\nabla = \hat{\mathbf{p}}$ 是动量微分算符 (2.88)，可以看出 $\mathbf{L}$ 是**轨道角动量微分算符**。根据 (3.35) 式，将 (3.165) 式的纯空间分量改写为

$$[\phi(x), \mathbf{J}] = \mathbf{L}\,\phi(x). \tag{3.168}$$

上式表明，总角动量算符 $\mathbf{J}$ 生成了轨道角动量，但没有生成自旋角动量。这说明标量场没有自旋，因此**标量玻色子的自旋为 0**。

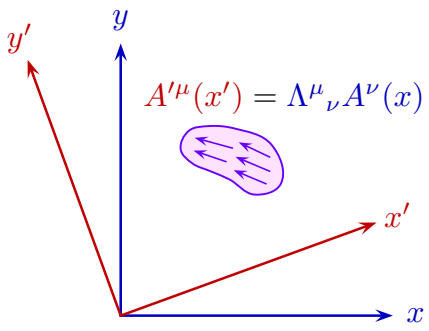


图 3.10: 在绕 z 轴空间旋转变换下，矢量场 $A^\mu(x)$ 的变换示意图。

3.3.2　量子矢量场的 Lorentz 变换

$\partial^\mu\phi(x)$ 是通过对标量场 $\phi(x)$ 取时空导数得到的 Lorentz 矢量。自身就是 Lorentz 矢量的量子场 $A^\mu(x)$ 也应该具有像 (3.157) 式那样的固有保时向 Lorentz 变换形式，即

$$A'^\mu(x') = U^{-1}(\Lambda)A^\mu(x')U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x), \tag{3.169}$$

或者写成

$$U^{-1}(\Lambda)A^\mu(x)U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x). \tag{3.170}$$

这就是**量子矢量场 $A^\mu(x)$ 的 Lorentz 变换形式**。图 3.10 以空间旋转变换为例说明矢量场的变换情况。在 Lorentz 变换下，除了矢量场的分布区域变换到新参考系的相应区域之外，矢量场的分量也要以 Lorentz 矢量分量的身份发生变换。相应地，$A^\mu(x)$ 在 $|\Psi'\rangle$ 中的期待值为

$$\langle\Psi'|\, A^\mu(x)\,|\Psi'\rangle = \langle\Psi|\, U^{-1}(\Lambda)A^\mu(x)U(\Lambda)\,|\Psi\rangle = \Lambda^\mu{}_\nu \langle\Psi|\, A^\nu(\Lambda^{-1}x)\,|\Psi\rangle\,. \tag{3.171}$$

根据 (3.147) 式，(3.169) 式的无穷小形式为

$$A'^\mu(x') = \left[\delta^\mu{}_\nu - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}(\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu\right]A^\nu(x) = A^\mu(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}(\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu A^\nu(x). \tag{3.172}$$

将上式与 (1.205) 式比较，可以发现 1.7.3 小节中的生成元 $I^{\mu\nu}$ 在矢量表示中对应于 $\mathcal{J}^{\mu\nu}$。

利用 (3.161) 式，在 x 处将 $A^\nu(\Lambda^{-1}x)$ 展开到 ω 的一阶项，得

$$\begin{aligned} A^\nu(\Lambda^{-1}x) &= A^\nu(x) - \omega^\alpha{}_\beta x^\beta\partial_\alpha A^\nu(x) = A^\nu(x) - \omega_{\alpha\beta}x^\beta\partial^\alpha A^\nu(x) \\ &= A^\nu(x) + \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}(x^\alpha\partial^\beta - x^\beta\partial^\alpha)A^\nu(x) = A^\nu(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}L^{\alpha\beta}A^\nu(x). \end{aligned} \tag{3.173}$$

从而，(3.170) 式右边展开为

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x) &= \left[\delta^\mu{}_\nu - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}(\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu\right]\left[A^\nu(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}L^{\alpha\beta}A^\nu(x)\right] \\ &= A^\mu(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}[L^{\rho\sigma}A^\mu(x) + (\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu A^\nu(x)]. \end{aligned} \tag{3.174}$$

另一方面，(3.170) 式左边的无穷小展开式是

$$U^{-1}(\Lambda)A^\mu(x)U(\Lambda) = \left(1+\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\gamma\delta}J^{\gamma\delta}\right)A^\mu(x)\left(1-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta}\right)$$
$$= A^\mu(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\alpha\beta}A^\mu(x)J^{\alpha\beta} + \frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\gamma\delta}J^{\gamma\delta}A^\mu(x) = A^\mu(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\rho\sigma}[A^\mu(x), J^{\rho\sigma}]. \tag{3.175}$$

由此得到

$$[A^\mu(x), J^{\rho\sigma}] = L^{\rho\sigma}A^\mu(x) + (\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu A^\nu(x). \tag{3.176}$$

生成元矩阵 $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ 纯空间分量的对偶三维矢量为

$$\mathcal{J}^i \equiv \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk}\mathcal{J}^{jk}, \quad \boldsymbol{\mathcal{J}} = (\mathcal{J}^{23}, \mathcal{J}^{31}, \mathcal{J}^{12}). \tag{3.177}$$

由于 $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ 满足 Lorentz 代数关系 (3.146)，$\mathcal{J}^i$ 满足 (3.39) 形式的 SO(3) 代数关系

$$[\mathcal{J}^i, \mathcal{J}^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\mathcal{J}^k. \tag{3.178}$$

再根据 (3.35) 和 (3.166) 式，将 (3.176) 式的纯空间分量改写为

$$[A^\mu(x), \mathbf{J}] = \mathbf{L}\,A^\mu(x) + (\boldsymbol{\mathcal{J}})^\mu{}_\nu A^\nu(x). \tag{3.179}$$

上式表明，总角动量算符 $\mathbf{J}$ 不仅生成了轨道角动量，还生成了由 $\boldsymbol{\mathcal{J}}$ 描述的**自旋角动量**。$\mathcal{J}^i$ 的具体矩阵形式为

$$(\mathcal{J}^1)^\mu{}_\nu = (\mathcal{J}^{23})^\mu{}_\nu = \mathrm{i}(g^{2\mu}\delta^3{}_\nu - g^{3\mu}\delta^2{}_\nu) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & -\mathrm{i} \\ & & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.180}$$

$$(\mathcal{J}^2)^\mu{}_\nu = (\mathcal{J}^{31})^\mu{}_\nu = \mathrm{i}(g^{3\mu}\delta^1{}_\nu - g^{1\mu}\delta^3{}_\nu) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \mathrm{i} \\ & & 0 & \\ & -\mathrm{i} & & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.181}$$

$$(\mathcal{J}^3)^\mu{}_\nu = (\mathcal{J}^{12})^\mu{}_\nu = \mathrm{i}(g^{1\mu}\delta^2{}_\nu - g^{2\mu}\delta^1{}_\nu) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & -\mathrm{i} & \\ & \mathrm{i} & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.182}$$

只关注纯空间部分，有

$$(\mathcal{J}^1\mathcal{J}^1)^i{}_j = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad (\mathcal{J}^2\mathcal{J}^2)^i{}_j = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad (\mathcal{J}^3\mathcal{J}^3)^i{}_j = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.183}$$

因此

$$(\boldsymbol{\mathcal{J}}^2)^i{}_j = (\mathcal{J}^1\mathcal{J}^1 + \mathcal{J}^2\mathcal{J}^2 + \mathcal{J}^3\mathcal{J}^3)^i{}_j = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix} = 2\delta^i{}_j. \tag{3.184}$$

根据 SU(2) 群表示理论，二阶 Casimir 算符 $\boldsymbol{\mathcal{J}}^2$ 的本征值为 $s(s+1)$，即 $(\boldsymbol{\mathcal{J}}^2)^i{}_j = s(s+1)\delta^i{}_j$，其中 s 为**自旋量子数**。可见，矢量场 $A^\mu(x)$ 空间分量的自旋量子数为

$$s = 1. \tag{3.185}$$

量子化之后，矢量场 $A^\mu(x)$ 描述**自旋为 1** 的粒子。实际上，$\mathcal{J}^1$、$\mathcal{J}^2$ 和 $\mathcal{J}^3$ 的纯空间部分是 SO(3) 群基础表示 $D^{(1)}$ 的生成元，而 $D^{(1)}$ 也是 SU(2) 群的伴随表示。

3.4　有质量矢量场的正则量子化

类似于电磁场，对任意矢量场 A^μ 定义反对称的场强张量

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \tag{3.186}$$

对于一个自由的**有质量**的实矢量场 A^μ，Lorentz 不变的拉氏量写作

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu. \tag{3.187}$$

其中，第一项是动能项，第二项是质量项，而 $m > 0$ 是矢量场的质量。动能项可用 A^μ 表达成

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= -\frac{1}{4}[(\partial_\mu A_\nu)\partial^\mu A^\nu - (\partial_\mu A_\nu)\partial^\nu A^\mu - (\partial_\nu A_\mu)\partial^\mu A^\nu + (\partial_\nu A_\mu)\partial^\nu A^\mu] \\ &= -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)\partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)\partial^\mu A^\nu. \end{aligned} \tag{3.188}$$

从而

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu = -F^{\mu\nu}, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu} = m^2 A^\nu. \tag{3.189}$$

Euler-Lagrange 方程 (1.143) 给出

$$0 = \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu} = -\partial_\mu F^{\mu\nu} - m^2 A^\nu, \tag{3.190}$$

因此，A^μ 的经典运动方程是 **Proca 方程** [14]

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0. \tag{3.191}$$

由 $\partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\partial_\nu\partial_\mu F^{\nu\mu} = -\partial_\mu\partial_\nu F^{\nu\mu} = -\partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu}$ 可知，

$$\partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \tag{3.192}$$

从 Proca 方程 (3.191) 得到

$$0 = \partial_\nu(\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu) = \partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2\partial_\nu A^\nu = m^2\partial_\nu A^\nu. \tag{3.193}$$

质量 $m \neq 0$ 意味着矢量场 A^μ 应当满足 **Lorenz 条件**

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \tag{3.194}$$

从而

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial^2 A^\nu - \partial^\nu\partial_\mu A^\mu = \partial^2 A^\nu. \tag{3.195}$$

因此，Proca 方程 (3.191) 等价于符合 Lorenz 条件的 *Klein-Gordon 方程*

$$(\partial^2 + m^2)A^\mu(x) = 0. \tag{3.196}$$

根据 (1.144) 式，A^μ 对应的共轭动量密度为

$$\pi_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^0 A^\mu)} = -\partial_0 A_\mu + \partial_\mu A_0 = -F_{0\mu}, \tag{3.197}$$

时间分量和空间分量分别是

$$\pi_0 = -F_{00} = 0, \quad \pi_i = -\partial_0 A_i + \partial_i A_0 = -F_{0i}. \tag{3.198}$$

由于 $\pi_0 = 0$，它不能作为与 A^0 对应的正则共轭场，因而不能为 A^0 构造正则对易关系。实际上，由于 Lorenz 条件 (3.194) 的存在，A^μ 只有 3 个独立分量，我们可以将 A^0 视作依赖于 3 个空间分量 A^i 的量。于是，正则量子化程序要求*独立*的正则变量满足*等时对易关系*

$$[A^i(\mathbf{x},t), \pi_j(\mathbf{y},t)] = \mathrm{i}\delta^i{}_j\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \quad [A^i(\mathbf{x},t), A^j(\mathbf{y},t)] = [\pi_i(\mathbf{x},t), \pi_j(\mathbf{y},t)] = 0. \tag{3.199}$$

由 (3.198) 式有

$$\pi^i = -\partial^0 A^i + \partial^i A^0 = -F^{0i} = F^{i0}, \tag{3.200}$$

写成空间矢量的形式为

$$\boldsymbol{\pi} = -\dot{\mathbf{A}} - \nabla A_0, \tag{3.201}$$

故

$$\dot{\mathbf{A}} = -\boldsymbol{\pi} - \nabla A_0. \tag{3.202}$$

对 Proca 方程 (3.191) 取 $\nu = 0$，得 $\partial_\mu F^{\mu 0} + m^2 A^0 = 0$，因此

$$A^0 = -\frac{1}{m^2}\,\partial_\mu F^{\mu 0} = -\frac{1}{m^2}\,\partial_i F^{i0} = -\frac{1}{m^2}\,\partial_i\pi^i = -\frac{1}{m^2}\,\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}. \tag{3.203}$$

通过上式可将 A^0 表达为 $\boldsymbol{\pi}$ 的函数。

3.4.1 极化矢量与平面波展开

矢量场 $A^\mu(x)$ 既然满足 Klein-Gordon 方程，应该具有两个平面波解，即正能解 $\exp(-\mathrm{i}p\cdot x)$ 和负能解 $\exp(\mathrm{i}p\cdot x)$。由于 $A^\mu(x)$ 带有一个 Lorentz 指标，平面波展开式的系数也必须具有一个这样的指标。一般地，对于确定的动量 $\mathbf{p}$，矢量场的正能解模式具有如下形式：

$$\varphi^\mu(x,\mathbf{p},\sigma)=e^\mu(\mathbf{p},\sigma)\exp(-\mathrm{i}p\cdot x),\quad p^0=E_{\mathbf{p}}=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\,. \tag{3.204}$$

这里的系数 $e^\mu(\mathbf{p},\sigma)$ 是 Lorentz 矢量，称为**极化矢量** (polarization vector)，它依赖于动量 $\mathbf{p}$，而且具有另外一个指标 σ 以描述矢量粒子的极化态。我们希望一组极化矢量能够构成 Lorentz 矢量空间的一组基底，从而用它们可以展开一个任意的 Lorentz 矢量。为了做到这一点，一组极化矢量应当是**线性独立且正交完备**的。Lorentz 矢量空间是一个 4 维线性空间，因而这样的极化矢量应当有 4 个，包括 1 个类时的极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p},0)$ 与 3 个类空的极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p},1)$、$e^\mu(\mathbf{p},2)$ 和 $e^\mu(\mathbf{p},3)$。

在没有额外约束的情况下，我们要求这 4 个极化矢量是实的，而且满足 Lorentz 矢量空间中的**正交归一关系**

$$e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e^\mu(\mathbf{p},\sigma')=g_{\sigma\sigma'}. \tag{3.205}$$

进一步，要求这组极化矢量满足**完备性关系**

$$\sum_{\sigma=0}^{3}g_{\sigma\sigma}e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e_\nu(\mathbf{p},\sigma)=g_{\mu\nu}. \tag{3.206}$$

从而，以极化矢量为基底可将任意 Lorentz 矢量 V_μ 展开成

$$V_\mu=g_{\mu\nu}V^\nu=\sum_{\sigma=0}^{3}g_{\sigma\sigma}e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e_\nu(\mathbf{p},\sigma)V^\nu=\sum_{\sigma=0}^{3}v_\sigma(\mathbf{p})e_\mu(\mathbf{p},\sigma), \tag{3.207}$$

其中展开系数 $v_\sigma(\mathbf{p})\equiv g_{\sigma\sigma}e_\nu(\mathbf{p},\sigma)V^\nu$。也就是说，这组极化矢量是完备的。

正交归一关系 (3.205) 和完备性关系 (3.206) 都是 *Lorentz* 协变的。只要在某个惯性系中取定一组符合这两个关系的极化矢量，通过 Lorentz 变换就可以在其它惯性系中得到依然满足这两个关系的一组极化矢量。

现在，我们根据与动量 p^μ 的关系选择一组极化矢量。首先，选取 2 个只有空间分量的类空**横向**极化矢量

$$e^\mu(\mathbf{p},1)=(0,\mathbf{e}(\mathbf{p},1)),\quad e^\mu(\mathbf{p},2)=(0,\mathbf{e}(\mathbf{p},2)). \tag{3.208}$$

此处

$$\mathbf{e}(\mathbf{p},1)=\frac{1}{|\mathbf{p}||\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|}(p^1p^3,p^2p^3,-|\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|^2),\quad \mathbf{e}(\mathbf{p},2)=\frac{1}{|\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|}(-p^2,p^1,0), \tag{3.209}$$

其中

$$|\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|\equiv\sqrt{(p^1)^2+(p^2)^2}\,. \tag{3.210}$$

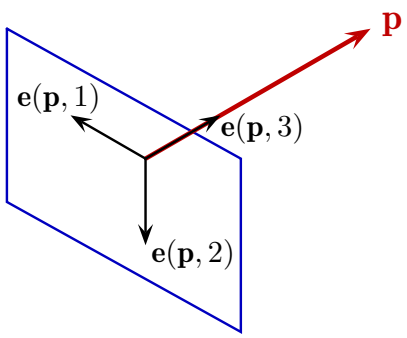


图 3.11: 极化矢量方向与动量方向示意图，$\mathbf{p}$ 垂直于 $\mathbf{e}(\mathbf{p},1)$ 和 $\mathbf{e}(\mathbf{p},2)$ 决定的平面。

“横向”指的是它们在三维空间中与 $\mathbf{p}$ 垂直，即

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}(\mathbf{p},1) = \frac{1}{|\mathbf{p}||\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|}[(p^1)^2p^3+(p^2)^2p^3-p^3|\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|^2]=0, \tag{3.211}$$

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}(\mathbf{p},2) = \frac{1}{|\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|}(-p^1p^2+p^2p^1)=0. \tag{3.212}$$

此外，存在如下关系：

$$\begin{aligned}\mathbf{e}(\mathbf{p},1)\cdot\mathbf{e}(\mathbf{p},1) &= \frac{1}{|\mathbf{p}|^2|\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|^2}[(p^1)^2(p^3)^2+(p^2)^2(p^3)^2+|\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|^4]\\ &= \frac{1}{|\mathbf{p}|^2|\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|^2}|\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|^2[(p^3)^2+|\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|^2]=1,\end{aligned} \tag{3.213}$$

$$\mathbf{e}(\mathbf{p},2)\cdot\mathbf{e}(\mathbf{p},2) = \frac{1}{|\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|^2}[(p^2)^2+(p^1)^2]=1, \tag{3.214}$$

$$\mathbf{e}(\mathbf{p},1)\cdot\mathbf{e}(\mathbf{p},2) = \frac{1}{|\mathbf{p}||\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|^2}(-p^1p^3p^2+p^2p^3p^1)=0. \tag{3.215}$$

也就是说，它们在三维空间中是正交归一的：

$$\mathbf{e}(\mathbf{p},i)\cdot\mathbf{e}(\mathbf{p},j)=\delta_{ij},\quad i,j=1,2. \tag{3.216}$$

因此，这两个横向极化矢量满足**四维横向条件**

$$p_\mu e^\mu(\mathbf{p},1)=p_\mu e^\mu(\mathbf{p},2)=0, \tag{3.217}$$

和正交归一关系

$$e_\mu(\mathbf{p},i)e^\mu(\mathbf{p},j)=-\mathbf{e}(\mathbf{p},i)\cdot\mathbf{e}(\mathbf{p},j)=-\delta_{ij}=g_{ij},\quad i,j=1,2. \tag{3.218}$$

图 3.11 示意性地画出 $\mathbf{p}$、$\mathbf{e}(\mathbf{p},1)$ 和 $\mathbf{e}(\mathbf{p},2)$，它们在三维空间中两两相互垂直。

接着，要求第 3 个类空极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p},3)$ 是**纵向**的，即在三维空间中与 $\mathbf{p}$ 平行，如图 3.11 所示。这样还不能确定它的时间分量，为此进一步要求它满足四维横向条件 $p_\mu e^\mu(\mathbf{p},3)=0$，而正交归一关系 (3.205) 将决定它的归一化。于是，纵向极化矢量的形式为

$$e^\mu(\mathbf{p},3)=\left(\frac{|\mathbf{p}|}{m},\frac{p^0\,\mathbf{p}}{m|\mathbf{p}|}\right). \tag{3.219}$$

容易验证，它确实满足四维横向条件

$$p_\mu e^\mu(\mathbf{p},3)=p^0\frac{|\mathbf{p}|}{m}-\mathbf{p}\cdot\frac{p^0\,\mathbf{p}}{m|\mathbf{p}|}=\frac{p^0|\mathbf{p}|}{m}-\frac{p^0|\mathbf{p}|}{m}=0, \tag{3.220}$$

和正交归一关系

$$e_\mu(\mathbf{p},3)e^\mu(\mathbf{p},3)=\frac{|\mathbf{p}|}{m}\frac{|\mathbf{p}|}{m}-\frac{(p^0)^2\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}}{m^2|\mathbf{p}|^2}=\frac{|\mathbf{p}|^2}{m^2}-\frac{(p^0)^2}{m^2}=-\frac{(p^0)^2-|\mathbf{p}|^2}{m^2}=-1=g_{33}; \tag{3.221}$$

$$e_\mu(\mathbf{p},3)e^\mu(\mathbf{p},i)=-\frac{p^0}{m|\mathbf{p}|}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}(\mathbf{p},i)=0,\quad i=1,2. \tag{3.222}$$

最后，我们可以将类时极化矢量取为正比于 p^μ 的矢量

$$e^\mu(\mathbf{p},0)=\frac{p^\mu}{m}=\frac{1}{m}(p^0,\mathbf{p}). \tag{3.223}$$

它符合归一关系

$$e_\mu(\mathbf{p},0)e^\mu(\mathbf{p},0)=\frac{p^2}{m^2}=1=g_{00}, \tag{3.224}$$

而且与满足四维横向条件的 3 个类空极化矢量正交，

$$e_\mu(\mathbf{p},0)e^\mu(\mathbf{p},i)=\frac{1}{m}\,p_\mu e^\mu(\mathbf{p},i)=0,\quad i=1,2,3. \tag{3.225}$$

不过，$e^\mu(\mathbf{p},0)$ 不满足四维横向条件，

$$p_\mu e^\mu(\mathbf{p},0)=\frac{p^2}{m}=m\neq 0. \tag{3.226}$$

实际上，我们找不到满足四维横向条件的类时极化矢量。原因在于，总可以取一个特殊惯性系使 $p^\mu=(m,\mathbf{0})$，而类时极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p},0)$ 的时间分量一定非零，故 $p_\mu e^\mu(\mathbf{p},0)=me^0(\mathbf{p},0)\neq 0$。由于 $p_\mu e^\mu(\mathbf{p},0)$ 是 Lorentz 不变的，在任意惯性系中均有 $p_\mu e^\mu(\mathbf{p},0)\neq 0$。

可以验证，由 (3.208)、(3.209)、(3.219) 和 (3.223) 式定义的这组极化矢量确实满足完备性关系 (3.206)：

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma=0}^{3}g_{\sigma\sigma}e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e_\nu(\mathbf{p},\sigma)\\
=\;&e_\mu(\mathbf{p},0)e_\nu(\mathbf{p},0)-e_\mu(\mathbf{p},1)e_\nu(\mathbf{p},1)-e_\mu(\mathbf{p},2)e_\nu(\mathbf{p},2)-e_\mu(\mathbf{p},3)e_\nu(\mathbf{p},3)\\
=\;&\frac{1}{m^2}\begin{pmatrix}p^0p^0&-p^0p^1&-p^0p^2&-p^0p^3\\-p^1p^0&p^1p^1&p^1p^2&p^1p^3\\-p^2p^0&p^2p^1&p^2p^2&p^2p^3\\-p^3p^0&p^3p^1&p^3p^2&p^3p^3\end{pmatrix}-\frac{1}{|\mathbf{p}|^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&p^1p^3p^1p^3&p^1p^3p^2p^3&-p^1p^3|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2\\0&p^2p^3p^1p^3&p^2p^3p^2p^3&-p^2p^3|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2\\0&-|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2p^1p^3&-|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2p^2p^3&|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^4\end{pmatrix}\\
&-\frac{1}{|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&p^2p^2&-p^2p^1&0\\0&-p^1p^2&p^1p^1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}-\frac{1}{m^2}\begin{pmatrix}|\mathbf{p}|^2&-p^0p^1&-p^0p^2&-p^0p^3\\-p^0p^1&\frac{(p^0)^2}{|\mathbf{p}|^2}p^1p^1&\frac{(p^0)^2}{|\mathbf{p}|^2}p^1p^2&\frac{(p^0)^2}{|\mathbf{p}|^2}p^1p^3\\-p^0p^2&\frac{(p^0)^2}{|\mathbf{p}|^2}p^2p^1&\frac{(p^0)^2}{|\mathbf{p}|^2}p^2p^2&\frac{(p^0)^2}{|\mathbf{p}|^2}p^2p^3\\-p^0p^3&\frac{(p^0)^2}{|\mathbf{p}|^2}p^3p^1&\frac{(p^0)^2}{|\mathbf{p}|^2}p^3p^2&\frac{(p^0)^2}{|\mathbf{p}|^2}p^3p^3\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{(p^1)^2}{m^2}\left[1-\frac{(p^0)^2}{|\mathbf{p}|^2}\right]-\frac{(p^1p^3)^2+(p^2)^2|\mathbf{p}|^2}{|\mathbf{p}|^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2} & \frac{p^1p^2}{m^2}\left[1-\frac{(p^0)^2}{|\mathbf{p}|^2}\right]-\frac{p^1p^2[(p^3)^2-|\mathbf{p}|^2]}{|\mathbf{p}|^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2} & \frac{p^1p^3}{m^2}\left[1-\frac{(p^0)^2}{|\mathbf{p}|^2}\right]+\frac{p^1p^3}{|\mathbf{p}|^2} \\
0 & \frac{p^1p^2}{m^2}\left[1-\frac{(p^0)^2}{|\mathbf{p}|^2}\right]-\frac{p^1p^2[(p^3)^2-|\mathbf{p}|^2]}{|\mathbf{p}|^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2} & \frac{(p^2)^2}{m^2}\left[1-\frac{(p^0)^2}{|\mathbf{p}|^2}\right]-\frac{(p^2p^3)^2+(p^1)^2|\mathbf{p}|^2}{|\mathbf{p}|^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2} & \frac{p^2p^3}{m^2}\left[1-\frac{(p^0)^2}{|\mathbf{p}|^2}\right]+\frac{p^2p^3}{|\mathbf{p}|^2} \\
0 & \frac{p^1p^3}{m^2}\left[1-\frac{(p^0)^2}{|\mathbf{p}|^2}\right]+\frac{p^1p^3}{|\mathbf{p}|^2} & \frac{p^2p^3}{m^2}\left[1-\frac{(p^0)^2}{|\mathbf{p}|^2}\right]+\frac{p^2p^3}{|\mathbf{p}|^2} & \frac{(p^3)^2}{m^2}\left[1-\frac{(p^0)^2}{|\mathbf{p}|^2}\right]-\frac{|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2}{|\mathbf{p}|^2}
\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{(p^1)^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2+(p^1)^2(|\mathbf{p}|^2-|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2)+(p^2)^2|\mathbf{p}|^2}{|\mathbf{p}|^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2} & -\frac{p^1p^2}{|\mathbf{p}|^2}+\frac{p^1p^2}{|\mathbf{p}|^2} & -\frac{p^1p^3}{|\mathbf{p}|^2}+\frac{p^1p^3}{|\mathbf{p}|^2} \\
0 & -\frac{p^1p^2}{|\mathbf{p}|^2}+\frac{p^1p^2}{|\mathbf{p}|^2} & -\frac{(p^2)^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2+(p^2)^2(|\mathbf{p}|^2-|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2)+(p^1)^2|\mathbf{p}|^2}{|\mathbf{p}|^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2} & -\frac{p^2p^3}{|\mathbf{p}|^2}+\frac{p^2p^3}{|\mathbf{p}|^2} \\
0 & -\frac{p^1p^3}{|\mathbf{p}|^2}+\frac{p^1p^3}{|\mathbf{p}|^2} & -\frac{p^2p^3}{|\mathbf{p}|^2}+\frac{p^2p^3}{|\mathbf{p}|^2} & -\frac{(p^3)^2+|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2}{|\mathbf{p}|^2}
\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1
\end{pmatrix} = g_{\mu\nu}.
\end{aligned}
\tag{3.227}
$$

当四维动量作 Lorentz 变换 $p^\mu \to \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu$ 时，这组极化矢量作相应的 Lorentz 变换 $e^\mu(\mathbf{p},\sigma) \to \Lambda^\mu{}_\nu e^\nu(\mathbf{p},\sigma)$，从而保持正交归一关系 (3.205)、完备性关系 (3.206) 和四维横向条件 (3.217) 和 (3.220)。

由于有质量矢量场 A^μ 必须满足 Lorenz 条件 (3.194)，正能解模式 (3.204) 应满足

$$
0 = \partial_\mu \varphi^\mu(x,\mathbf{p},\sigma) = -\mathrm{i}p_\mu e^\mu(\mathbf{p},\sigma)\exp(-\mathrm{i}p\cdot x),
\tag{3.228}
$$

即

$$
p_\mu e^\mu(\mathbf{p},\sigma) = 0.
\tag{3.229}
$$

也就是说，**描述有质量矢量场的极化矢量必须满足四维横向条件**。因此，类时极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p},0)$ 不能用于描述有质量矢量场 A^μ。这说明 A^μ 只有 3 个物理的极化状态，由类空的极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p},1)$、$e^\mu(\mathbf{p},2)$ 和 $e^\mu(\mathbf{p},3)$ 描述。根据完备性关系 (3.206)，这三个物理极化矢量满足

$$
-\sum_{\sigma=1}^{3} e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e_\nu(\mathbf{p},\sigma) = \sum_{\sigma=1}^{3} g_{\sigma\sigma}e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e_\nu(\mathbf{p},\sigma) = g_{\mu\nu} - g_{00}e_\mu(\mathbf{p},0)e_\nu(\mathbf{p},0) = g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2},
\tag{3.230}
$$

即具有求和关系

$$
\sum_{\sigma=1}^{3} e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e_\nu(\mathbf{p},\sigma) = -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}.
\tag{3.231}
$$

通过线性组合定义另一套物理的极化矢量 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)$，其中 $\lambda = +,0,-$：

$$
\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\pm) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\mp e^\mu(\mathbf{p},1) - \mathrm{i}e^\mu(\mathbf{p},2)\right],
\tag{3.232}
$$

$$
\varepsilon^\mu(\mathbf{p},0) \equiv e^\mu(\mathbf{p},3).
\tag{3.233}
$$

这样定义的 $\varepsilon^\mu(p,\pm)$ 是**复的**，而 $\varepsilon^\mu(p,0)$ 是实的。它们都满足**四维横向条件**

$$p_\mu \varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)=0,\quad \lambda=\pm,0. \tag{3.234}$$

它们还满足

$$\begin{aligned}
\varepsilon^*_\mu(\mathbf{p},\pm)\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\pm) &= \frac{1}{2}[\mp e_\mu(\mathbf{p},1)+\mathrm{i}e_\mu(\mathbf{p},2)][\mp e^\mu(\mathbf{p},1)-\mathrm{i}e^\mu(\mathbf{p},2)] \\
&= \frac{1}{2}\,e_\mu(\mathbf{p},1)e^\mu(\mathbf{p},1)+\frac{1}{2}\,e_\mu(\mathbf{p},2)e^\mu(\mathbf{p},2)=\frac{1}{2}(g_{11}+g_{22})=-1, &(3.235)\\
\varepsilon^*_\mu(\mathbf{p},\pm)\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\mp) &= \frac{1}{2}[\mp e_\mu(\mathbf{p},1)+\mathrm{i}e_\mu(\mathbf{p},2)][\pm e^\mu(\mathbf{p},1)-\mathrm{i}e^\mu(\mathbf{p},2)] \\
&= -\frac{1}{2}\,e_\mu(\mathbf{p},1)e^\mu(\mathbf{p},1)+\frac{1}{2}\,e_\mu(\mathbf{p},2)e^\mu(\mathbf{p},2)=\frac{1}{2}(-g_{11}+g_{22})=0, &(3.236)\\
\varepsilon^*_\mu(\mathbf{p},0)\varepsilon^\mu(\mathbf{p},0) &= e_\mu(\mathbf{p},3)e^\mu(\mathbf{p},3)=-1, &(3.237)\\
\varepsilon^*_\mu(\mathbf{p},\pm)\varepsilon^\mu(\mathbf{p},0) &= \frac{1}{2}[\mp e_\mu(\mathbf{p},1)+\mathrm{i}e_\mu(\mathbf{p},2)]e^\mu(\mathbf{p},3)=0, &(3.238)
\end{aligned}$$

即具有**正交归一关系**

$$\varepsilon^*_\mu(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda')=-\delta_{\lambda\lambda'}. \tag{3.239}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda=\pm,0}\varepsilon^*_\mu(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_\nu(\mathbf{p},\lambda) &= \frac{1}{2}[e_\mu(\mathbf{p},1)+\mathrm{i}e_\mu(\mathbf{p},2)][e_\nu(\mathbf{p},1)-\mathrm{i}e_\nu(\mathbf{p},2)] \\
&\quad +\frac{1}{2}[-e_\mu(\mathbf{p},1)+\mathrm{i}e_\mu(\mathbf{p},2)][-e_\nu(\mathbf{p},1)-\mathrm{i}e_\nu(\mathbf{p},2)]+e_\mu(\mathbf{p},3)e_\nu(\mathbf{p},3) \\
&= e_\mu(\mathbf{p},1)e_\nu(\mathbf{p},1)+e_\mu(\mathbf{p},2)e_\nu(\mathbf{p},2)+e_\mu(\mathbf{p},3)e_\nu(\mathbf{p},3) \\
&= \sum_{\sigma=1}^{3}e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e_\nu(\mathbf{p},\sigma), &(3.240)
\end{aligned}$$

与 (3.231) 式左边相等，因而存在**极化求和关系**

$$\sum_{\lambda=\pm,0}\varepsilon^*_\mu(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_\nu(\mathbf{p},\lambda)=-g_{\mu\nu}+\frac{p_\mu p_\nu}{m^2}. \tag{3.241}$$

这个关系是 Lorentz 协变的，四维横向条件 (3.234) 体现为

$$p^\nu\sum_{\lambda=\pm,0}\varepsilon^*_\mu(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_\nu(\mathbf{p},\lambda)=-p_\mu+\frac{p_\mu p^2}{m^2}=-p_\mu+p_\mu=0. \tag{3.242}$$

实际上，横向实极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p},1)$ 和 $e^\mu(\mathbf{p},2)$ 描述矢量场的**线极化**，振动方向被限制在由 $e^\mu(\mathbf{p},1)$ 或 $e^\mu(\mathbf{p},2)$ 与 $\mathbf{p}$ 决定的平面上。另一方面，横向复极化矢量 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p},+)$ 和 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p},-)$ 描述矢量场的**圆极化**，定义式 (3.232) 中线性组合系数之比 $\pm\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi/2}$ 意味着圆极化由两个相位差为 $\pm\pi/2$ 的线极化所合成。

3.1.3 小节提到，**螺旋度**是粒子的自旋角动量在动量方向上的投影。对于自旋为 1 的有质量粒子，螺旋度本征值的取值包括 -1、0 和 $+1$，对应于 3 种自旋极化态。动量 $\mathbf{p}$ 的方向由 $\hat{\mathbf{p}} \equiv \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ 表征，于是，在 Lorentz 群矢量表示中，**螺旋度矩阵**定义为

$$\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{J}} = \frac{1}{|\mathbf{p}|}\,\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\mathcal{J}} = \frac{1}{|\mathbf{p}|} \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & -\mathrm{i}p^3 & \mathrm{i}p^2 \\ & \mathrm{i}p^3 & 0 & -\mathrm{i}p^1 \\ & -\mathrm{i}p^2 & \mathrm{i}p^1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.243}$$

这里已经使用了 $\boldsymbol{\mathcal{J}}$ 的矩阵表达式 (3.180)、(3.181) 和 (3.182)。将 (3.209) 和 (3.219) 式代入 (3.232) 和 (3.233) 式，得到 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)$ 的列矢量形式为

$$\begin{aligned} \varepsilon^\mu(\mathbf{p},0) &= \frac{1}{m|\mathbf{p}|} \begin{pmatrix} |\mathbf{p}|^2 \\ p^0p^1 \\ p^0p^2 \\ p^0p^3 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^\mu(\mathbf{p},+) = \frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}||\mathbf{p}_\mathrm{T}|} \begin{pmatrix} 0 \\ -p^1p^3 + ip^2|\mathbf{p}| \\ -p^2p^3 - ip^1|\mathbf{p}| \\ |\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2 \end{pmatrix}, \\ \varepsilon^\mu(\mathbf{p},-) &= \frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}||\mathbf{p}_\mathrm{T}|} \begin{pmatrix} 0 \\ p^1p^3 + \mathrm{i}p^2|\mathbf{p}| \\ p^2p^3 - \mathrm{i}p^1|\mathbf{p}| \\ -|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.244}$$

从而推出

$$(\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{J}})^\mu{}_\nu \varepsilon^\nu(\mathbf{p},0) = \frac{1}{m|\mathbf{p}|^2} \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathrm{i}p^3p^0p^2 + \mathrm{i}p^2p^0p^3 \\ \mathrm{i}p^3p^0p^1 - \mathrm{i}p^1p^0p^3 \\ -\mathrm{i}p^2p^0p^1 + \mathrm{i}p^1p^0p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\,\varepsilon^\mu(\mathbf{p},0), \tag{3.245}$$

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{J}})^\mu{}_\nu \varepsilon^\nu(\mathbf{p},+) &= \frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}|^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i}p^2(p^3)^2 - p^1p^3|\mathbf{p}| + \mathrm{i}p^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2 \\ -\mathrm{i}p^1(p^3)^2 - p^2p^3|\mathbf{p}| - \mathrm{i}p^1|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2 \\ \mathrm{i}p^1p^2p^3 + (p^2)^2|\mathbf{p}| - \mathrm{i}p^1p^2p^3 + (p^1)^2|\mathbf{p}| \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}|^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|} \begin{pmatrix} 0 \\ -p^1p^3|\mathbf{p}| + \mathrm{i}p^2|\mathbf{p}|^2 \\ -p^2p^3|\mathbf{p}| - \mathrm{i}p^1|\mathbf{p}|^2 \\ |\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2|\mathbf{p}| \end{pmatrix} = +\varepsilon^\mu(\mathbf{p},+), \end{aligned} \tag{3.246}$$

$$(\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{J}})^\mu{}_\nu \varepsilon^\nu(\mathbf{p},-) = \frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}|^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|} \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathrm{i}p^2(p^3)^2 - p^1p^3|\mathbf{p}| - \mathrm{i}p^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2 \\ \mathrm{i}p^1(p^3)^2 - p^2p^3|\mathbf{p}| + \mathrm{i}p^1|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2 \\ -\mathrm{i}p^1p^2p^3 + (p^2)^2|\mathbf{p}| + \mathrm{i}p^1p^2p^3 + (p^1)^2|\mathbf{p}| \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}|^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|}\begin{pmatrix} 0 \\ -p^1p^3|\mathbf{p}| - \mathrm{i}p^2|\mathbf{p}|^2 \\ -p^2p^3|\mathbf{p}| + \mathrm{i}p^1|\mathbf{p}|^2 \\ |\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2|\mathbf{p}| \end{pmatrix} = -\varepsilon^\mu(\mathbf{p},-). \tag{3.247}$$

归纳起来，有

$$(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{J}})^\mu{}_\nu\varepsilon^\nu(\mathbf{p},\lambda) = \lambda\,\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda), \quad \lambda = \pm, 0. \tag{3.248}$$

上式说明极化矢量 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)$ 是螺旋度的本征态，本征值为 λ。因此，$\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)$ 描述动量为 $\mathbf{p}$、螺旋度为 λ 的矢量粒子的极化态。螺旋度 $\lambda = \pm1$ 对应于两种**横向极化** (transverse polarization)，包括**右旋极化** ($\lambda = +$) 和**左旋极化** ($\lambda = -$)；$\lambda = 0$ 对应于**纵向极化** (longitudinal polarization)。

有质量的实矢量场算符 $A^\mu(\mathbf{x},t)$ 的平面波展开式应当包含正能解和负能解的所有动量模式的所有极化态，形式为

$$A^\mu(\mathbf{x},t) = \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_{\lambda=\pm,0}\left[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right], \tag{3.249}$$

其中 $p^0 = E_\mathbf{p} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$，产生算符 $a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}$ 和湮灭算符 $a_{\mathbf{p},\lambda}$ 带着极化指标 λ。容易验证这个展开式满足自共轭条件

$$[A^\mu(\mathbf{x},t)]^\dagger = A^\mu(\mathbf{x},t). \tag{3.250}$$

将平面波展开式 (3.249) 代入 (3.179) 式左边和右边，分别得到

$$[A^\mu(x),\mathbf{J}] = \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_\lambda\left\{\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)[a_{\mathbf{p},\lambda},\mathbf{J}]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)[a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda},\mathbf{J}]\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right\} \tag{3.251}$$

和

$$\begin{aligned}\mathbf{L}\,A^\mu(x) + (\boldsymbol{\mathcal{J}})^\mu{}_\nu A^\nu(x) &= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_\lambda[-\mathrm{i}\delta^\mu{}_\nu\,\mathbf{x}\times\nabla + (\boldsymbol{\mathcal{J}})^\mu{}_\nu] \\ &\qquad\times\left\{\varepsilon^\nu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + \varepsilon^{\nu*}(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right\} \\ &= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_\lambda\Big\{[\delta^\mu{}_\nu\,\mathbf{x}\times\mathbf{p} + (\boldsymbol{\mathcal{J}})^\mu{}_\nu]\varepsilon^\nu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} \\ &\qquad + [-\delta^\mu{}_\nu\,\mathbf{x}\times\mathbf{p} + (\boldsymbol{\mathcal{J}})^\mu{}_\nu]\varepsilon^{\nu*}(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\Big\}.\end{aligned} \tag{3.252}$$

两相比较，有

$$\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)[a_{\mathbf{p},\lambda},\mathbf{J}] = [\delta^\mu{}_\nu\,\mathbf{x}\times\mathbf{p} + (\boldsymbol{\mathcal{J}})^\mu{}_\nu]\varepsilon^\nu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}. \tag{3.253}$$

两边与 $\hat{\mathbf{p}}$ 作内积，再利用 (3.248) 式，得

$$\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)[a_{\mathbf{p},\lambda},\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}] = (\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{J}})^\mu{}_\nu\varepsilon^\nu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda} = \lambda\,\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}, \tag{3.254}$$

从而推出

$$[a_{\mathbf{p},\lambda},\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}] = \lambda\,a_{\mathbf{p},\lambda}. \tag{3.255}$$

对上式取厄米共轭，得

$$\lambda\, a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} = [a_{\mathbf{p},\lambda},\, \hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}]^\dagger = [\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J},\, a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}], \tag{3.256}$$

即

$$(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J})a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} = a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}) + \lambda\, a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}. \tag{3.257}$$

真空态 $|0\rangle$ 定义为被任意 $a_{\mathbf{p},\lambda}$ 湮灭的态，满足

$$a_{\mathbf{p},\lambda}\,|0\rangle = 0. \tag{3.258}$$

另一方面，真空态不具有角动量，满足

$$\mathbf{J}\,|0\rangle = \mathbf{0}. \tag{3.259}$$

引入单粒子态

$$|\mathbf{p},\lambda\rangle \equiv \sqrt{2E_\mathbf{p}}\, a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\,|0\rangle\,, \quad \lambda = \pm, 0, \tag{3.260}$$

则 (3.257) 式意味着

$$(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J})\,|\mathbf{p},\lambda\rangle = \sqrt{2E_\mathbf{p}}\,(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J})a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\,|0\rangle = \sqrt{2E_\mathbf{p}}\,[a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}) + \lambda\, a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}]\,|0\rangle = \lambda\sqrt{2E_\mathbf{p}}\, a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\,|0\rangle\,, \tag{3.261}$$

即

$$(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J})\,|\mathbf{p},\lambda\rangle = \lambda\,|\mathbf{p},\lambda\rangle\,, \quad \lambda = \pm, 0. \tag{3.262}$$

自由的单粒子态没有轨道角动量，因而 $\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}$ 相当于螺旋度算符。可见，用产生算符 $a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}$ 定义的单粒子态 $|\mathbf{p},\lambda\rangle$ 是螺旋度本征态，本征值为 λ。

根据 (3.198) 式，共轭动量密度为

$$\begin{aligned}\pi_i \,=\, -\partial_0 A_i + \partial_i A_0 = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_{\lambda=\pm,0}\Big\{&[\mathrm{i}p_0\varepsilon_i(\mathbf{p},\lambda) - \mathrm{i}p_i\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)]a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} \\ &+ [-\mathrm{i}p_0\varepsilon_i^*(\mathbf{p},\lambda) + \mathrm{i}p_i\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda)]a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\Big\},\end{aligned} \tag{3.263}$$

引入

$$\tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p},\lambda) \equiv \varepsilon_i(\mathbf{p},\lambda) - \frac{p_i}{p_0}\,\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda), \tag{3.264}$$

则

$$p_0\varepsilon_i(\mathbf{p},\lambda) - p_i\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda) = p_0\tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p},\lambda), \tag{3.265}$$

从而将共轭动量密度的平面波展开式写得更加紧凑：

$$\pi_i(\mathbf{x},t) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_{\lambda=\pm,0}\left[\tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} - \tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right]. \tag{3.266}$$

显然它也满足自共轭条件

$$[\pi_i(\mathbf{x},t)]^\dagger = \pi_i(\mathbf{x},t). \tag{3.267}$$

根据平面波展开式 (3.249) 和 (3.266)，以及等时对易关系 (3.199)，推出产生湮灭算符的对易关系

$$[a_{\mathbf{p},\lambda}, a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}] = (2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \quad [a_{\mathbf{p},\lambda}, a_{\mathbf{q},\lambda'}] = [a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}, a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}] = 0. \tag{3.268}$$

具体推导过程见 3.4.2 小节选读内容。上式表明，两个产生算符相互对易，因此，与标量场类似，有质量矢量场描述的粒子是一种玻色子，称为**矢量玻色子** (vector boson)，自旋为 1。

根据 (1.146) 式，有质量矢量场的哈密顿量密度为

$$\mathcal{H} = \pi_i\partial_0 A^i - \mathcal{L} = -\boldsymbol{\pi}\cdot\dot{\mathbf{A}} + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu. \tag{3.269}$$

利用 (3.202) 和 (3.203) 式，有

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{\pi}\cdot\dot{\mathbf{A}} &= \boldsymbol{\pi}\cdot(\boldsymbol{\pi}+\nabla A_0) = \boldsymbol{\pi}^2 + \nabla\cdot(A_0\boldsymbol{\pi}) - A_0(\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}) \\ &= \boldsymbol{\pi}^2 + \nabla\cdot(A_0\boldsymbol{\pi}) + \frac{1}{m^2}(\nabla\cdot\boldsymbol{\pi})^2, \end{aligned} \tag{3.270}$$

$$-\frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu = -\frac{1}{2}m^2[(A_0)^2 - \mathbf{A}^2] = -\frac{1}{2m^2}(\nabla\cdot\boldsymbol{\pi})^2 + \frac{1}{2}m^2\mathbf{A}^2. \tag{3.271}$$

另一方面，由 (3.198) 和 (3.200) 式得

$$\frac{1}{2}F_{0i}F^{0i} = \frac{1}{2}\pi_i\pi^i = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}^2. \tag{3.272}$$

应用 (1.98) 式，推出

$$F^{ij} = \partial^iA^j - \partial^jA^i = (\delta^{im}\delta^{jn} - \delta^{in}\delta^{jm})\partial^mA^n = \varepsilon^{ijk}\varepsilon^{kmn}\partial^mA^n = -\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{kmn}\partial_mA^n, \tag{3.273}$$

从而，

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} &= \frac{1}{4}F^{ij}F^{ij} = \frac{1}{4}\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{kmn}(\partial_mA^n)\varepsilon^{ijl}\varepsilon^{lpq}\partial_pA^q = \frac{1}{2}\delta^{kl}\varepsilon^{kmn}(\partial_mA^n)\varepsilon^{lpq}\partial_pA^q \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon^{kmn}(\partial_mA^n)\varepsilon^{kpq}\partial_pA^q = \frac{1}{2}(\nabla\times\mathbf{A})^2. \end{aligned} \tag{3.274}$$

故

$$\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}F_{0i}F^{0i} + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\times\mathbf{A})^2. \tag{3.275}$$

于是，哈密顿量密度化为

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \boldsymbol{\pi}^2 + \nabla\cdot(A_0\boldsymbol{\pi}) + \frac{1}{m^2}(\nabla\cdot\boldsymbol{\pi})^2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\times\mathbf{A})^2 - \frac{1}{2m^2}(\nabla\cdot\boldsymbol{\pi})^2 + \frac{1}{2}m^2\mathbf{A}^2 \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}^2 + \nabla\cdot(A_0\boldsymbol{\pi}) + \frac{1}{2m^2}(\nabla\cdot\boldsymbol{\pi})^2 + \frac{1}{2}(\nabla\times\mathbf{A})^2 + \frac{1}{2}m^2\mathbf{A}^2. \end{aligned} \tag{3.276}$$

上式最后一行第二项是一个全散度，对全空间积分时它没有贡献。

于是，哈密顿量算符为

$$H = \int \mathrm{d}^3x\,\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\left[\boldsymbol{\pi}^2 + \frac{1}{m^2}(\nabla\cdot\boldsymbol{\pi})^2 + (\nabla\times\mathbf{A})^2 + m^2\mathbf{A}^2\right]. \tag{3.277}$$

经过进一步计算，推出

$$H=\sum_{\lambda=\pm,0}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,E_{\mathbf{p}}\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda}+(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{3}{2}\,E_{\mathbf{p}},\tag{3.278}$$

其中第一项是所有动量模式所有极化态所有矢量玻色子贡献的能量之和，第二项是零点能。另一方面，总动量算符为

$$\mathbf{P}=-\int\mathrm{d}^3x\,\pi_i\nabla A^i=\sum_{\lambda=\pm,0}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda}.\tag{3.279}$$

这表明总动量是所有动量模式所有极化态所有矢量玻色子贡献的动量之和。具体推导过程见 3.4.3 小节选读内容。

3.4.2 选读：推导产生湮灭算符的对易关系

本小节推导产生湮灭算符的对易关系 (3.268)。

利用

$$\begin{aligned}
&\int\mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}A^\mu\\
=&\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int\mathrm{d}^3x\sum_{\lambda=\pm,0}\left[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x}+\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\right]\\
=&\int\frac{\mathrm{d}^3p}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda=\pm,0}\left[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p^0-q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})+\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0+q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\right]\\
=&\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\sum_{\lambda=\pm,0}\left[\varepsilon^\mu(\mathbf{q},\lambda)a_{\mathbf{q},\lambda}+\varepsilon^{\mu*}(-\mathbf{q},\lambda)a^\dagger_{-\mathbf{q},\lambda}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}q^0t}\right]
\end{aligned}\tag{3.280}$$

和

$$\begin{aligned}
\int\mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\partial_0A^\mu=&\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{-\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int\mathrm{d}^3x\sum_{\lambda=\pm,0}\left[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x}-\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\right]\\
=&\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{-\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda=\pm,0}\Big[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p^0-q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\\
&\qquad-\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0+q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\Big]\\
=&\frac{-\mathrm{i}q_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\sum_{\lambda=\pm,0}\left[\varepsilon^\mu(\mathbf{q},\lambda)a_{\mathbf{q},\lambda}-\varepsilon^{\mu*}(-\mathbf{q},\lambda)a^\dagger_{-\mathbf{q},\lambda}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}q^0t}\right],
\end{aligned}\tag{3.281}$$

以及正交归一关系 (3.239)，推出

$$\begin{aligned}
\varepsilon^*_\mu(\mathbf{q},\lambda')\int\mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\left(\partial_0A^\mu-\mathrm{i}q_0A^\mu\right)=&\,\varepsilon^*_\mu(\mathbf{q},\lambda')\,\frac{-2\mathrm{i}q_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\sum_{\lambda=\pm,0}\varepsilon^\mu(\mathbf{q},\lambda)a_{\mathbf{q},\lambda}\\
=&-\mathrm{i}\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}\sum_{\lambda=\pm,0}(-\delta_{\lambda'\lambda})a_{\mathbf{q},\lambda}=\mathrm{i}\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}\,a_{\mathbf{q},\lambda'}.
\end{aligned}\tag{3.282}$$

由 Lorenz 条件 (3.194) 得

$$\partial_0 A^0 = -\partial_i A^i, \tag{3.283}$$

根据 (3.198) 式，有

$$\partial_0 A^i = -\partial_0 A_i = \pi_i - \partial_i A_0 = \pi_i - \partial_i A^0. \tag{3.284}$$

于是，湮灭算符 $a_{\mathbf{p},\lambda}$ 可表达为

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{p},\lambda} &= \frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\varepsilon_\mu^*(\mathbf{p},\lambda)\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\,(\partial_0 A^\mu - \mathrm{i}p_0 A^\mu) \\ &= \frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\,[\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda)\partial_0 A^0 + \varepsilon_i^*(\mathbf{p},\lambda)\partial_0 A^i - \mathrm{i}p_0\varepsilon_\mu^*(\mathbf{p},\lambda)A^\mu] \\ &= \frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\,\big[-\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda)\partial_i A^i + \varepsilon_i^*(\mathbf{p},\lambda)\pi_i - \varepsilon_i^*(\mathbf{p},\lambda)\partial_i A^0 \\ &\qquad\qquad - \mathrm{i}p_0\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda)A^0 - \mathrm{i}p_0\varepsilon_i^*(\mathbf{p},\lambda)A^i\,\big]. \end{aligned} \tag{3.285}$$

上式最后两行方括号中的第一项和第三项可以通过分部积分化为

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}[-\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda)\partial_i A^i - \varepsilon_i^*(\mathbf{p},\lambda)\partial_i A^0] &= \int \mathrm{d}^3x\,[\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda)(\partial_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x})A^i + \varepsilon_i^*(\mathbf{p},\lambda)(\partial_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x})A^0] \\ &= \int \mathrm{d}^3x\,[\mathrm{i}p_i\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}A^i + \mathrm{i}p_i\varepsilon_i^*(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}A^0] \\ &= \int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}[\mathrm{i}\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda)p_i A^i + \mathrm{i}p_i\varepsilon_i^*(\mathbf{p},\lambda)A^0], \end{aligned} \tag{3.286}$$

从而

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{p},\lambda} &= \frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\,\big[\mathrm{i}\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda)p_i A^i + \varepsilon_i^*(\mathbf{p},\lambda)\pi_i + \mathrm{i}p_i\varepsilon_i^*(\mathbf{p},\lambda)A^0 \\ &\qquad\qquad - \mathrm{i}p_0\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda)A^0 - \mathrm{i}p_0\varepsilon_i^*(\mathbf{p},\lambda)A^i\,\big] \\ &= \frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\,\{\varepsilon_i^*(\mathbf{p},\lambda)\pi_i - \mathrm{i}p^\mu\varepsilon_\mu^*(\mathbf{p},\lambda)A^0 - \mathrm{i}[p_0\varepsilon_i^*(\mathbf{p},\lambda) - p_i\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda)]A^i\}. \end{aligned} \tag{3.287}$$

再利用四维横向条件 (3.234) 和 (3.265) 式，得到

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{p},\lambda} &= \frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\,\left[-\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\pi_i(x) - \mathrm{i}p_0\tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)A^i(x)\right] \\ &= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\,\left[\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\pi_i(x) + \mathrm{i}p_0\tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)A^i(x)\right]. \end{aligned} \tag{3.288}$$

取厄米共轭，得

$$a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger = \frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\,\left[\varepsilon^{i}(\mathbf{p},\lambda)\pi_i(x) - \mathrm{i}p_0\tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p},\lambda)A^i(x)\right]. \tag{3.289}$$

利用等时对易关系 (3.199)，可得湮灭算符与产生算符的对易关系为

$$[a_{\mathbf{p},\lambda}, a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger]$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x-q\cdot y)}\big[\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\pi_i(\mathbf{x},t)+\mathrm{i}p_0\tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)A^i(\mathbf{x},t),\\
&\qquad\qquad \varepsilon^j(\mathbf{q},\lambda')\pi_j(\mathbf{y},t)-\mathrm{i}q_0\tilde{\varepsilon}_j(\mathbf{q},\lambda')A^j(\mathbf{y},t)\big]\\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x-q\cdot y)}\big\{-\mathrm{i}q_0\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\tilde{\varepsilon}_j(\mathbf{q},\lambda')[\pi_i(\mathbf{x},t),A^j(\mathbf{y},t)]\\
&\qquad\qquad +\mathrm{i}p_0\tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^j(\mathbf{q},\lambda')[A^i(\mathbf{x},t),\pi_j(\mathbf{y},t)]\big\}\\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x-q\cdot y)}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,[-q_0\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\tilde{\varepsilon}_j(\mathbf{q},\lambda')\delta^j{}_i-p_0\tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^j(\mathbf{q},\lambda')\delta^i{}_j]\\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0-q^0)t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}}\,[-E_{\mathbf{q}}\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{q},\lambda')-E_{\mathbf{p}}\tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^i(\mathbf{q},\lambda')]\\
&= -\frac{1}{2}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\,[\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p},\lambda')+\tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^i(\mathbf{p},\lambda')].
\end{aligned}
\tag{3.290}
$$

根据定义式 (3.264)、四维横向条件 (3.234) 和正交归一关系 (3.239)，有

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p},\lambda') &= \varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_i(\mathbf{p},\lambda')-\frac{1}{p_0}\,p_i\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda')\\
&= \varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_i(\mathbf{p},\lambda')+\frac{1}{p_0}\,p_0\varepsilon^{0*}(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda')\\
&= \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_\mu(\mathbf{p},\lambda')=-\delta_{\lambda\lambda'},
\end{aligned}
\tag{3.291}
$$

取复共轭，得

$$
\tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^i(\mathbf{p},\lambda')=-\delta_{\lambda\lambda'}. \tag{3.292}
$$

于是

$$
[a_{\mathbf{p},\lambda},a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}]=-\frac{1}{2}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\,(-\delta_{\lambda\lambda'}-\delta_{\lambda\lambda'})=(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}). \tag{3.293}
$$

另一方面，

$$
\begin{aligned}
&[a_{\mathbf{p},\lambda},a_{\mathbf{q},\lambda'}]\\
&= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x+q\cdot y)}\big[\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\pi_i(\mathbf{x},t)+\mathrm{i}p_0\tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)A^i(\mathbf{x},t),\\
&\qquad\qquad \varepsilon^{j*}(\mathbf{q},\lambda')\pi_j(\mathbf{y},t)+\mathrm{i}q_0\tilde{\varepsilon}_j^*(\mathbf{q},\lambda')A^j(\mathbf{y},t)\big]\\
&= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x+q\cdot y)}\big\{\mathrm{i}q_0\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\tilde{\varepsilon}_j^*(\mathbf{q},\lambda')[\pi_i(\mathbf{x},t),A^j(\mathbf{y},t)]\\
&\qquad\qquad +\mathrm{i}p_0\tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{j*}(\mathbf{q},\lambda')[A^i(\mathbf{x},t),\pi_j(\mathbf{y},t)]\big\}\\
&= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x+q\cdot y)}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,[q_0\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\tilde{\varepsilon}_j^*(\mathbf{q},\lambda')\delta^j{}_i-p_0\tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{j*}(\mathbf{q},\lambda')\delta^i{}_j]\\
&= \frac{-1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0+q^0)t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}}\,[E_{\mathbf{q}}\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{q},\lambda')-E_{\mathbf{p}}\tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{i*}(\mathbf{q},\lambda')]\\
&= -\frac{1}{2}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})e^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\,[\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\tilde{\varepsilon}_i^*(-\mathbf{p},\lambda')-\tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{i*}(-\mathbf{p},\lambda')].
\end{aligned}
\tag{3.294}
$$

对四维横向条件 (3.234) 取复共轭，得

$$
p_\mu\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)=p_0\varepsilon^{0*}(\mathbf{p},\lambda)+p_i\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)=0. \tag{3.295}
$$

将上式中的 $\mathbf{p}$ 替换成 $-\mathbf{p}$，得

$$p_0\varepsilon^{0*}(-\mathbf{p},\lambda)-p_i\varepsilon^{i*}(-\mathbf{p},\lambda)=0. \tag{3.296}$$

因此,

$$p_i\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)=-p_0\varepsilon^{0*}(\mathbf{p},\lambda),\quad -p_i\varepsilon^{i*}(-\mathbf{p},\lambda)=-p_0\varepsilon^{0*}(-\mathbf{p},\lambda), \tag{3.297}$$

或者写成

$$\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda)=p_0\varepsilon^{0*}(\mathbf{p},\lambda),\quad -\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(-\mathbf{p},\lambda)=p_0\varepsilon^{0*}(-\mathbf{p},\lambda). \tag{3.298}$$

从而,

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\tilde{\varepsilon}_i^*(-\mathbf{p},\lambda') &= \varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\left[\varepsilon_i^*(-\mathbf{p},\lambda)+\frac{p_i}{p_0}\,\varepsilon_0^*(-\mathbf{p},\lambda)\right]\\
&= \varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_i^*(-\mathbf{p},\lambda')+\frac{1}{p_0}\,p_i\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0^*(-\mathbf{p},\lambda')\\
&= \varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_i^*(-\mathbf{p},\lambda')-\frac{1}{p_0}\,p_0\varepsilon^{0*}(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0^*(-\mathbf{p},\lambda')\\
&= \varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_i^*(-\mathbf{p},\lambda')-\varepsilon^{0*}(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0^*(-\mathbf{p},\lambda'),
\end{aligned} \tag{3.299}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{i*}(-\mathbf{p},\lambda') &= \left[\varepsilon_i^*(\mathbf{p},\lambda)-\frac{p_i}{p_0}\,\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda)\right]\varepsilon^{i*}(-\mathbf{p},\lambda')\\
&= \varepsilon_i^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{i*}(-\mathbf{p},\lambda')-\frac{1}{p_0}\,\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda)p_i\varepsilon^{i*}(-\mathbf{p},\lambda')\\
&= \varepsilon_i^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{i*}(-\mathbf{p},\lambda')-\frac{1}{p_0}\,\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda)p_0\varepsilon^{0*}(-\mathbf{p},\lambda')\\
&= \varepsilon_i^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{i*}(-\mathbf{p},\lambda')-\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{0*}(-\mathbf{p},\lambda').
\end{aligned} \tag{3.300}$$

可见，$\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda)\tilde{\varepsilon}_i^*(-\mathbf{p},\lambda')-\tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{i*}(-\mathbf{p},\lambda')=0$，故

$$[a_{\mathbf{p},\lambda},a_{\mathbf{q},\lambda'}]=0. \tag{3.301}$$

3.4.3 选读：推导哈密顿量和总动量

下面逐项计算哈密顿量 (3.277)。

哈密顿量的第一项是

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\,\boldsymbol{\pi}^2\\
=\;&\frac{1}{2}\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}(\mathrm{i}p_0)(\mathrm{i}q_0)\left[\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}-\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right]\\
&\qquad\cdot\left[\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}-\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\right]\\
=\;&-\frac{1}{2}\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\;p_0q_0}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\Big[-\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x}\\
&\quad-\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{p},\lambda)\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-q)\cdot x}+\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+q)\cdot x}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{p},\lambda)\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{q},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\Big] \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\;p_0q_0}{(2\pi)^3\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\Big\{-\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\Big[\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_0-q_0)t} \\
&\qquad\qquad + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{p},\lambda)\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{q},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_0-q_0)t}\Big] \\
&\qquad -\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\Big[\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_0+q_0)t} \\
&\qquad\qquad + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{p},\lambda)\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{q},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_0+q_0)t}\Big]\Big\} \\
&= \sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{4E_{\mathbf{p}}}\,E_{\mathbf{p}}^2\Big[\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{p},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda'} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{p},\lambda)\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda'} \\
&\qquad -\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(-\mathbf{p},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}a_{-\mathbf{p},\lambda'}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{p},\lambda)\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(-\mathbf{p},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda'}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\Big]. \qquad (3.302)
\end{aligned}
$$

第二项是

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int\mathrm{d}^3x\,\frac{1}{m^2}(\nabla\cdot\boldsymbol{\pi})^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\,\frac{(\mathrm{i}p_0)(\mathrm{i}q_0)}{m^2}\Big[\mathrm{i}\,\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + \mathrm{i}\,\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\Big] \\
&\qquad\times\Big[\mathrm{i}\,\mathbf{q}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} + \mathrm{i}\,\mathbf{q}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{q},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\Big] \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\;p_0q_0}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}\,m^2}\Big\{-[\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)][\mathbf{q}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{q},\lambda')]a_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x} \\
&\qquad -[\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{p},\lambda)][\mathbf{q}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{q},\lambda')]a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-q)\cdot x} - [\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)][\mathbf{q}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{q},\lambda')]a_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+q)\cdot x} \\
&\qquad -[\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{p},\lambda)][\mathbf{q}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{q},\lambda')]a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\Big\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\;p_0q_0}{(2\pi)^3\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}\,m^2}\Big\{\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\Big([\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)][\mathbf{q}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{q},\lambda')]a_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_0-q_0)t} \\
&\qquad\qquad +[\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{p},\lambda)][\mathbf{q}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{q},\lambda')]a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_0-q_0)t}\Big) \\
&\qquad + \delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\Big([\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)][\mathbf{q}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{q},\lambda')]a_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_0+q_0)t} \\
&\qquad\qquad +[\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{p},\lambda)][\mathbf{q}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{q},\lambda')]a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_0+q_0)t}\Big)\Big\} \\
&= \sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{4E_{\mathbf{p}}}\frac{E_{\mathbf{p}}^2}{m^2}\Big\{[\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)][\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{p},\lambda')]a_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda'} \\
&\qquad + [\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{p},\lambda)][\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda')]a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda'} - [\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)][\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(-\mathbf{p},\lambda')]a_{\mathbf{p},\lambda}a_{-\mathbf{p},\lambda'}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t} \\
&\qquad -[\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{p},\lambda)][\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(-\mathbf{p},\lambda')]a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda'}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\Big\}. \qquad (3.303)
\end{aligned}
$$

第三项是

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int\mathrm{d}^3x\,(\nabla\times\mathbf{A})^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\Big[\mathrm{i}\,\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} - \mathrm{i}\,\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot\left[\mathrm{i}\,\mathbf{q}\times\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}-\mathrm{i}\,\mathbf{q}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{q},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\right]\\
=\;&\frac{1}{2}\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\Big\{[\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)]\cdot[\mathbf{q}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{q},\lambda')]a_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x}\\
&+[\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda)]\cdot[\mathbf{q}\times\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{q},\lambda')]a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-q)\cdot x}-[\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)]\cdot[\mathbf{q}\times\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{q},\lambda')]a_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\\
&-[\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda)]\cdot[\mathbf{q}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{q},\lambda')]a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\Big\}\\
=\;&\frac{1}{2}\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\Big\{\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\Big([\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)]\cdot[\mathbf{q}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{q},\lambda')]a_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_0-q_0)t}\\
&\qquad+[\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda)]\cdot[\mathbf{q}\times\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{q},\lambda')]a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_0-q_0)t}\Big)\\
&\quad-\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\Big([\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)]\cdot[\mathbf{q}\times\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{q},\lambda')]a_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_0+q_0)t}\\
&\qquad+[\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda)]\cdot[\mathbf{q}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{q},\lambda')]a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_0+q_0)t}\Big)\Big\}\\
=\;&\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{4E_{\mathbf{p}}}\Big\{[\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)]\cdot[\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda')]a_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda'}\\
&+[\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda)]\cdot[\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda')]a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda'}+[\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)]\cdot[\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{p},\lambda')]a_{\mathbf{p},\lambda}a_{-\mathbf{p},\lambda'}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\\
&+[\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda)]\cdot[\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*(-\mathbf{p},\lambda')]a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda'}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\Big\}.
\end{aligned}
\tag{3.304}
$$

第四项是

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int\mathrm{d}^3x\,m^2\mathbf{A}^2\\
=\;&\frac{1}{2}\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\;m^2}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\left[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right]\\
&\qquad\cdot\left[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}+\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{q},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\right]\\
=\;&\frac{1}{2}\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\;m^2}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\Big[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x}\\
&+\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{q},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-q)\cdot x}+\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\\
&+\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{q},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\Big]\\
=\;&\frac{1}{2}\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\;m^2}{(2\pi)^3\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\Big\{\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\Big[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_0-q_0)t}\\
&\qquad+\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{q},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_0-q_0)t}\Big]\\
&\quad+\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\Big[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_0+q_0)t}\\
&\qquad+\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{q},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_0+q_0)t}\Big]\Big\}\\
=\;&\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{4E_{\mathbf{p}}}m^2\Big[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda'}+\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda'}\\
&+\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{p},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}a_{-\mathbf{p},\lambda'}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}+\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(-\mathbf{p},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda'}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\Big].
\end{aligned}
\tag{3.305}
$$

综合起来，哈密顿量化为

$$H = \sum_{\lambda\lambda'} \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{4E_{\mathbf{p}}} \Big[f_1(\mathbf{p},\lambda,\lambda') a_{\mathbf{p},\lambda} a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda'} + f_1^*(\mathbf{p},\lambda,\lambda') a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} a_{\mathbf{p},\lambda'} + f_2(\mathbf{p},\lambda,\lambda') a_{\mathbf{p},\lambda} a_{-\mathbf{p},\lambda'} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t} + f_2^*(\mathbf{p},\lambda,\lambda') a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} a^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda'} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t} \Big], \tag{3.306}$$

其中，

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{p},\lambda,\lambda') \equiv\ & E_{\mathbf{p}}^2\, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{p},\lambda') + \frac{E_{\mathbf{p}}^2}{m^2}[\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)][\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{p},\lambda')] \\ & + [\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)]\cdot[\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda')] + m^2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda'), \end{aligned} \tag{3.307}$$

$$\begin{aligned} f_2(\mathbf{p},\lambda,\lambda') \equiv\ & -E_{\mathbf{p}}^2\, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(-\mathbf{p},\lambda') - \frac{E_{\mathbf{p}}^2}{m^2}[\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)][\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(-\mathbf{p},\lambda')] \\ & + [\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)]\cdot[\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{p},\lambda')] + m^2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{p},\lambda'). \end{aligned} \tag{3.308}$$

现在，我们计算 $f_1(\mathbf{p},\lambda,\lambda')$。由 (3.264)、(3.298) 和 (3.239) 式，可得

$$\begin{aligned} & \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{p},\lambda') = \left[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda) - \frac{\mathbf{p}}{p_0}\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\right]\cdot\left[\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda') - \frac{\mathbf{p}}{p_0}\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda')\right] \\ =\ & \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda') - \frac{\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)}{p_0}\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda') - \frac{\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda')}{p_0}\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda) + \frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0^2}\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda') \\ =\ & \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda') - \frac{\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)}{p_0}p_0\varepsilon^{0*}(\mathbf{p},\lambda') - \frac{\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda')}{p_0}p_0\varepsilon^{0}(\mathbf{p},\lambda) + \frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0^2}\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda') \\ =\ & -\varepsilon_\mu(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda') + \left(\frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0^2} - 1\right)\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda') = \delta_{\lambda\lambda'} - \frac{m^2}{E_{\mathbf{p}}^2}\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda'). \end{aligned} \tag{3.309}$$

另一方面，

$$\begin{aligned} & [\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)][\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\mathbf{p},\lambda')] \\ =\ & \left[\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda) - \frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0}\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\right]\left[\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda') - \frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0}\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda')\right] \\ =\ & [\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)][\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda')] - \frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0}[\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)]\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda') \\ & - \frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0}\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)[\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda')] + \frac{|\mathbf{p}|^4}{p_0^2}\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda') \\ =\ & p_0\varepsilon^0(\mathbf{p},\lambda)p_0\varepsilon^{0*}(\mathbf{p},\lambda') - \frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0}p_0\varepsilon^0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda') \\ & - \frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0}\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)p_0\varepsilon^{0*}(\mathbf{p},\lambda') + \frac{|\mathbf{p}|^4}{p_0^2}\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda') \\ =\ & \left(p_0^2 - 2|\mathbf{p}|^2 + \frac{|\mathbf{p}|^4}{p_0^2}\right)\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda') = \left[p_0^2 - |\mathbf{p}|^2 + \frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0^2}(|\mathbf{p}|^2 - p_0^2)\right]\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda') \\ =\ & \left(m^2 - m^2\frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0^2}\right)\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda') = \frac{m^4}{E_{\mathbf{p}}^2}\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda'). \end{aligned} \tag{3.310}$$

对于任意三维矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$，利用 (1.98) 式，有

$$(\mathbf{p}\times\mathbf{a})\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{b}) = \varepsilon^{ijk}p^j a^k \varepsilon^{imn} p^m b^n = (\delta^{jm}\delta^{kn} - \delta^{jn}\delta^{km})p^j a^k p^m b^n$$

$$= p^j a^k p^j b^k - p^j a^k p^k b^j = |\mathbf{p}|^2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - (\mathbf{p}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{p}\cdot\mathbf{b}), \tag{3.311}$$

从而得到

$$\begin{aligned}[\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)]\cdot[\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda')] &= |\mathbf{p}|^2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda') - [\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)][\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda')]\\ &= |\mathbf{p}|^2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda') - p_0\varepsilon^0(\mathbf{p},\lambda)p_0\varepsilon^{0*}(\mathbf{p},\lambda')\\ &= |\mathbf{p}|^2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda') - E_{\mathbf{p}}^2\varepsilon^0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{0*}(\mathbf{p},\lambda'). \end{aligned}\tag{3.312}$$

于是，(3.307) 式化为

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{p},\lambda,\lambda') &= E_{\mathbf{p}}^2\delta_{\lambda\lambda'} - m^2\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda') + m^2\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda')\\ &\quad +|\mathbf{p}|^2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda') - E_{\mathbf{p}}^2\varepsilon^0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{0*}(\mathbf{p},\lambda') + m^2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda')\\ &= E_{\mathbf{p}}^2\delta_{\lambda\lambda'} + E_{\mathbf{p}}^2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{p},\lambda') - E_{\mathbf{p}}^2\varepsilon^0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{0*}(\mathbf{p},\lambda')\\ &= E_{\mathbf{p}}^2\delta_{\lambda\lambda'} - E_{\mathbf{p}}^2\varepsilon_\mu(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda') = 2E_{\mathbf{p}}^2\delta_{\lambda\lambda'}. \end{aligned}\tag{3.313}$$

因此，

$$f_1(\mathbf{p},\lambda,\lambda') = f_1^*(\mathbf{p},\lambda,\lambda') = 2E_{\mathbf{p}}^2\delta_{\lambda\lambda'}. \tag{3.314}$$

接着，我们计算 $f_2(\mathbf{p},\lambda,\lambda')$。由 (3.264) 和 (3.298) 式得

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(-\mathbf{p},\lambda') &= \left[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda) - \frac{\mathbf{p}}{p_0}\,\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\right]\cdot\left[\boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{p},\lambda') + \frac{\mathbf{p}}{p_0}\,\varepsilon_0(-\mathbf{p},\lambda')\right]\\ &= \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{p},\lambda') - \frac{\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)}{p_0}\,\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{p},\lambda') + \frac{\varepsilon_0(-\mathbf{p},\lambda')}{p_0}\,\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda) - \frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0^2}\,\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0(-\mathbf{p},\lambda')\\ &= \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{p},\lambda') + \frac{\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)}{p_0}\,p_0\varepsilon^0(-\mathbf{p},\lambda') + \frac{\varepsilon_0(-\mathbf{p},\lambda')}{p_0}\,p_0\varepsilon^0(\mathbf{p},\lambda) - \frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0^2}\,\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0(-\mathbf{p},\lambda')\\ &= \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{p},\lambda') + \frac{1}{E_{\mathbf{p}}^2}(2E_{\mathbf{p}}^2 - |\mathbf{p}|^2)\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0(-\mathbf{p},\lambda'). \end{aligned}\tag{3.315}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}&[\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{p},\lambda)][\mathbf{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(-\mathbf{p},\lambda')]\\ &= \left[\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda) - \frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0}\,\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\right]\left[\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{p},\lambda') + \frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0}\,\varepsilon_0(-\mathbf{p},\lambda')\right]\\ &= [\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)][\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{p},\lambda')] + \frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0}[\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)]\varepsilon_0(-\mathbf{p},\lambda')\\ &\quad -\frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0}\,\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)[\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{p},\lambda')] - \frac{|\mathbf{p}|^4}{p_0^2}\,\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0(-\mathbf{p},\lambda')\\ &= -p_0\varepsilon^0(\mathbf{p},\lambda)p_0\varepsilon^0(-\mathbf{p},\lambda') + \frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0}\,p_0\varepsilon^0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0(-\mathbf{p},\lambda')\\ &\quad +\frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0}\,\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)p_0\varepsilon^0(-\mathbf{p},\lambda') - \frac{|\mathbf{p}|^4}{p_0^2}\,\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0(-\mathbf{p},\lambda')\\ &= \left(-p_0^2 + 2|\mathbf{p}|^2 - \frac{|\mathbf{p}|^4}{p_0^2}\right)\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0(-\mathbf{p},\lambda') = -\frac{1}{E_{\mathbf{p}}^2}(E_{\mathbf{p}}^2 - |\mathbf{p}|^2)^2\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0(-\mathbf{p},\lambda') \end{aligned}$$

$$= -\frac{m^4}{E_{\mathbf{p}}^2}\,\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0(-\mathbf{p},\lambda'), \tag{3.316}$$

而

$$\begin{aligned}[\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)]\cdot[\mathbf{p}\times\boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{p},\lambda')] &= |\mathbf{p}|^2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{p},\lambda') - [\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)][\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{p},\lambda')]\\ &= |\mathbf{p}|^2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{p},\lambda') + p_0\varepsilon^0(\mathbf{p},\lambda)p_0\varepsilon^0(-\mathbf{p},\lambda')\\ &= |\mathbf{p}|^2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{p},\lambda') + E_{\mathbf{p}}^2\varepsilon^0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^0(-\mathbf{p},\lambda'). \end{aligned}\tag{3.317}$$

于是，(3.308) 式化为

$$\begin{aligned}f_2(\mathbf{p},\lambda,\lambda') &= -E_{\mathbf{p}}^2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{p},\lambda') - (2E_{\mathbf{p}}^2-|\mathbf{p}|^2)\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0(-\mathbf{p},\lambda') + m^2\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0(-\mathbf{p},\lambda')\\ &\quad +|\mathbf{p}|^2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{p},\lambda') + E_{\mathbf{p}}^2\varepsilon^0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^0(-\mathbf{p},\lambda') + m^2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(-\mathbf{p},\lambda')\\ &= (-2E_{\mathbf{p}}^2+|\mathbf{p}|^2+m^2+E_{\mathbf{p}}^2)\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_0(-\mathbf{p},\lambda') = 0. \end{aligned}\tag{3.318}$$

因此，

$$f_2(\mathbf{p},\lambda,\lambda') = f_2^*(\mathbf{p},\lambda,\lambda') = 0. \tag{3.319}$$

将 (3.314) 和 (3.319) 式代入 (3.306) 式，再利用产生湮灭算符的对易关系 (3.268)，推出有质量矢量场的哈密顿量算符为

$$\begin{aligned}H &= \sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{4E_{\mathbf{p}}}\,2E_{\mathbf{p}}^2\delta_{\lambda\lambda'}(a_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda'}^\dagger + a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger a_{\mathbf{p},\lambda'}) = \sum_{\lambda}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}(a_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger + a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger a_{\mathbf{p},\lambda})\\ &= \sum_{\lambda=\pm,0}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,E_{\mathbf{p}}\,a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger a_{\mathbf{p},\lambda} + (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{3}{2}\,E_{\mathbf{p}}. \end{aligned}\tag{3.320}$$

这就是 (3.278) 式。

根据 (1.194) 式，有质量矢量场的总动量算符为

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= -\int\mathrm{d}^3x\,\pi_i\nabla A^i\\ &= -\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\,(\mathrm{i}p_0)\left[\tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} - \tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right]\\ &\qquad\times(\mathrm{i}\mathbf{q})\left[\varepsilon^i(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} - \varepsilon^{i*}(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\right]\\ &= \sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\;p_0\mathbf{q}}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\Big[-\tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{i*}(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x}\\ &\qquad-\tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^i(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-q)\cdot x} + \tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^i(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\\ &\qquad+\tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{i*}(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\Big]\\ &= \sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\;p_0\mathbf{q}}{(2\pi)^3\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\Big\{-\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\Big[\tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{i*}(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_0-q_0)t}\\ &\qquad\qquad+\tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^i(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_0-q_0)t}\Big] \end{aligned}$$

$$\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\Big[\tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^i(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_0+q_0)t} + \tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{i*}(\mathbf{q},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_0+q_0)t}\Big]\Big\}$$

$$= -\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathbf{p}}{2}\Big[\tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda'} + \tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^i(\mathbf{p},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda'}$$
$$+\tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^i(-\mathbf{p},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}a_{-\mathbf{p},\lambda'}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_\mathbf{p}t} + \tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{i*}(-\mathbf{p},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda'}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_\mathbf{p}t}\Big]. \tag{3.321}$$

由 (3.264) 和 (3.297) 式推出

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^i(-\mathbf{p},\lambda') &= \varepsilon_i(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^i(-\mathbf{p},\lambda') - \frac{\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)}{p_0}p_i\varepsilon^i(-\mathbf{p},\lambda')\\ &= \varepsilon_i(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^i(-\mathbf{p},\lambda') - \frac{\varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)}{p_0}p_0\varepsilon^0(-\mathbf{p},\lambda')\\ &= \varepsilon_i(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^i(-\mathbf{p},\lambda') - \varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^0(-\mathbf{p},\lambda'),\end{aligned} \tag{3.322}$$

从而,

$$-\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathbf{p}}{2}\Big[\tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^i(-\mathbf{p},\lambda')a_{\mathbf{p},\lambda}a_{-\mathbf{p},\lambda'}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_\mathbf{p}t} + \tilde{\varepsilon}_i^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{i*}(-\mathbf{p},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda'}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_\mathbf{p}t}\Big]$$
$$= \sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathbf{p}}{2}\Big\{[\varepsilon_i(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^i(-\mathbf{p},\lambda') - \varepsilon_0(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^0(-\mathbf{p},\lambda')]a_{\mathbf{p},\lambda}a_{-\mathbf{p},\lambda'}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_\mathbf{p}t}$$
$$+[\varepsilon_i^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{i*}(-\mathbf{p},\lambda') - \varepsilon_0^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{0*}(-\mathbf{p},\lambda')]a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda'}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_\mathbf{p}t}\Big\}$$
$$= \sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{-\mathbf{p}}{2}\Big\{[\varepsilon_i(-\mathbf{p},\lambda')\varepsilon^i(\mathbf{p},\lambda) - \varepsilon_0(-\mathbf{p},\lambda')\varepsilon^0(\mathbf{p},\lambda)]a_{-\mathbf{p},\lambda'}a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_\mathbf{p}t}$$
$$+[\varepsilon_i^*(-\mathbf{p},\lambda')\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda) - \varepsilon_0^*(-\mathbf{p},\lambda')\varepsilon^{0*}(\mathbf{p},\lambda)]a^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda'}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_\mathbf{p}t}\Big\}$$
$$= -\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathbf{p}}{2}\Big\{[\varepsilon_i(-\mathbf{p},\lambda')\varepsilon^i(\mathbf{p},\lambda) - \varepsilon_0(-\mathbf{p},\lambda')\varepsilon^0(\mathbf{p},\lambda)]a_{\mathbf{p},\lambda}a_{-\mathbf{p},\lambda'}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_\mathbf{p}t}$$
$$+[\varepsilon_i^*(-\mathbf{p},\lambda')\varepsilon^{i*}(\mathbf{p},\lambda) - \varepsilon_0^*(-\mathbf{p},\lambda')\varepsilon^{0*}(\mathbf{p},\lambda)]a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda'}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_\mathbf{p}t}\Big\}. \tag{3.323}$$

上式第二步进行了 $\mathbf{p}\to-\mathbf{p}$ 的替换和 $\lambda\leftrightarrow\lambda'$ 的互换，由于要对整个三维动量空间积分且对 λ 和 λ' 进行求和，这两种操作都不会改变结果。第三步用到产生湮灭算符的对易关系 (3.268)。留意到第一步与第三步的结果互为相反数，可知上式为零。因此，(3.321) 式最后两行方括号中最后两项没有贡献。再利用 (3.292) 式，推出

$$\mathbf{P} = -\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathbf{p}}{2}(-\delta_{\lambda\lambda'}a_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda'} - \delta_{\lambda\lambda'}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda'}) = \sum_\lambda\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathbf{p}}{2}(a_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} + a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda})$$
$$= \sum_{\lambda=\pm,0}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda} + \frac{3}{2}\,\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\mathrm{d}^3p\,\mathbf{p} = \sum_{\lambda=\pm,0}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda}. \tag{3.324}$$

这就是 (3.279) 式。

3.5 无质量矢量场的正则量子化

3.5.1 无质量情况下的极化矢量

当质量 $m=0$ 时，由 (3.208) 和 (3.209) 式定义的两个横向线极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p},1)$ 和 $e^\mu(\mathbf{p},2)$ 的形式不变，但 (3.219) 式显然不是纵向极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p},3)$ 的良好定义。此时，如果要求 $e^\mu(\mathbf{p},3)$ 的空间分量正比于 $\mathbf{p}$，则 $e^\mu(\mathbf{p},3)$ 一定不能符合四维横向条件；另一方面，类时极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p},0)$ 也不可能是四维横向的；相关论证过程作为习题 3.8 练习。因此，四维横向的独立极化矢量只有 $e^\mu(\mathbf{p},1)$ 和 $e^\mu(\mathbf{p},2)$ 这两个。此外，由于无质量情况下 $p^2=0$，也不能像 (3.223) 式那样将 $e^\mu(\mathbf{p},0)$ 取为正比于 p^μ 的矢量，否则将出现 $e_\mu(\mathbf{p},0)e^\mu(\mathbf{p},0)=0$ 而不能得到正确的归一化。于是，我们需要重新定义 $e^\mu(\mathbf{p},3)$ 和 $e^\mu(\mathbf{p},0)$。

在用 (3.208) 和 (3.209) 式定义 $e^\mu(\mathbf{p},1)$ 和 $e^\mu(\mathbf{p},2)$ 时，我们已经选取了一个特定的惯性参考系。在这个参考系中定义一个类时单位矢量

$$n^\mu=(1,0,0,0), \tag{3.325}$$

自我内积是 $n^2=1$。然后，将类时极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p},0)$ 在此参考系中的形式就取为 n^μ，即

$$e^\mu(\mathbf{p},0)=n^\mu=(1,0,0,0). \tag{3.326}$$

$e^\mu(\mathbf{p},0)$ 在其它惯性参考系中的形式可通过 Lorentz 变换得到。另一方面，用 p^μ 和 n^μ 将纵向极化矢量定义为

$$e^\mu(\mathbf{p},3)=\frac{p^\mu-(p\cdot n)n^\mu}{p\cdot n}. \tag{3.327}$$

无质量粒子的质壳条件 $p^2=(p^0)^2-|\mathbf{p}|^2=0$ 意味着

$$p^0=|\mathbf{p}|>0, \tag{3.328}$$

从而 $e^\mu(\mathbf{p},3)$ 在我们选取的参考系中表达为

$$e^\mu(\mathbf{p},3)=\frac{p^\mu-p^0n^\mu}{p^0}=\left(0,\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\right)=\frac{1}{|\mathbf{p}|}(0,p^1,p^2,p^3), \tag{3.329}$$

其空间分量与 $\mathbf{p}$ 平行，即在三维空间中是纵向的。

这样定义的 $e^\mu(\mathbf{p},0)$ 和 $e^\mu(\mathbf{p},3)$ 满足正交归一关系 (3.205)：

$$e_\mu(\mathbf{p},0)e^\mu(\mathbf{p},0)=n^2=1,\quad e_\mu(\mathbf{p},3)e^\mu(\mathbf{p},3)=-\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|^2}=-1, \tag{3.330}$$

$$e_\mu(\mathbf{p},0)e^\mu(\mathbf{p},1)=e_\mu(\mathbf{p},0)e^\mu(\mathbf{p},2)=e_\mu(\mathbf{p},0)e^\mu(\mathbf{p},3)=0, \tag{3.331}$$

$$e_\mu(\mathbf{p},3)e^\mu(\mathbf{p},i)=-\frac{1}{|\mathbf{p}|}\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}(\mathbf{p},i)=0,\quad i=1,2. \tag{3.332}$$

此外，可以验证，由 (3.208)、(3.209)、(3.326) 和 (3.327) 式定义的这组极化矢量确实满足完备性关系 (3.206)：

$$\sum_{\sigma=0}^{3}g_{\sigma\sigma}e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e_\nu(\mathbf{p},\sigma)$$

$$
\begin{aligned}
&= e_\mu(\mathbf{p},0)e_\nu(\mathbf{p},0) - e_\mu(\mathbf{p},1)e_\nu(\mathbf{p},1) - e_\mu(\mathbf{p},2)e_\nu(\mathbf{p},2) - e_\mu(\mathbf{p},3)e_\nu(\mathbf{p},3) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{|\mathbf{p}|^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p^1p^3p^1p^3 & p^1p^3p^2p^3 & -p^1p^3|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2 \\ 0 & p^2p^3p^1p^3 & p^2p^3p^2p^3 & -p^2p^3|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2 \\ 0 & -|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2p^1p^3 & -|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2p^2p^3 & |\mathbf{p}_\mathrm{T}|^4 \end{pmatrix} \\
&\quad - \frac{1}{|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p^2p^2 & -p^2p^1 & 0 \\ 0 & -p^1p^2 & p^1p^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{|\mathbf{p}|^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p^1p^1 & p^1p^2 & p^1p^3 \\ 0 & p^2p^1 & p^2p^2 & p^2p^3 \\ 0 & p^3p^1 & p^3p^2 & p^3p^3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(p^1)^2(p^3)^2+(p^2)^2|\mathbf{p}|^2+(p^1)^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2}{|\mathbf{p}|^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2} & -\frac{p^1p^2[(p^3)^2-|\mathbf{p}|^2]+p^1p^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2}{|\mathbf{p}|^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2} & \frac{p^1p^3}{|\mathbf{p}|^2} - \frac{p^1p^3}{|\mathbf{p}|^2} \\ 0 & -\frac{p^1p^2[(p^3)^2-|\mathbf{p}|^2]+p^1p^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2}{|\mathbf{p}|^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2} & -\frac{(p^2)^2(p^3)^2+(p^1)^2|\mathbf{p}|^2+(p^2)^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2}{|\mathbf{p}|^2|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2} & \frac{p^2p^3}{|\mathbf{p}|^2} - \frac{p^2p^3}{|\mathbf{p}|^2} \\ 0 & \frac{p^1p^3}{|\mathbf{p}|^2} - \frac{p^1p^3}{|\mathbf{p}|^2} & \frac{p^2p^3}{|\mathbf{p}|^2} - \frac{p^2p^3}{|\mathbf{p}|^2} & -\frac{|\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2+(p^3)^2}{|\mathbf{p}|^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{3.333}
$$

不过，$e^\mu(\mathbf{p},0)$ 和 $e^\mu(\mathbf{p},3)$ 都不满足四维横向条件：

$$
p_\mu e^\mu(\mathbf{p},0) = p\cdot n = p^0 = |\mathbf{p}| > 0, \quad p_\mu e^\mu(\mathbf{p},3) = -\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} = -|\mathbf{p}| = -p\cdot n < 0. \tag{3.334}
$$

横向线极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p},1)$ 和 $e^\mu(\mathbf{p},2)$ 具有求和关系

$$
\begin{aligned}
-\sum_{\sigma=1}^{2} e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e_\nu(\mathbf{p},\sigma) &= \sum_{\sigma=1}^{2} g_{\sigma\sigma}e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e_\nu(\mathbf{p},\sigma) = g_{\mu\nu} - g_{00}e_\mu(\mathbf{p},0)e_\nu(\mathbf{p},0) - g_{33}e_\mu(\mathbf{p},3)e_\nu(\mathbf{p},3) \\
&= g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu + \frac{p_\mu - (p\cdot n)n_\mu}{p\cdot n}\frac{p_\nu - (p\cdot n)n_\nu}{p\cdot n} \\
&= g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu + \frac{p_\mu p_\nu - (p\cdot n)p_\mu n_\nu - (p\cdot n)p_\nu n_\mu + (p\cdot n)^2 n_\mu n_\nu}{(p\cdot n)^2} \\
&= g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{(p\cdot n)^2} - \frac{p_\mu n_\nu + p_\nu n_\mu}{p\cdot n},
\end{aligned} \tag{3.335}
$$

即

$$
\sum_{\sigma=1}^{2} e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e_\nu(\mathbf{p},\sigma) = -g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{(p\cdot n)^2} + \frac{p_\mu n_\nu + p_\nu n_\mu}{p\cdot n}. \tag{3.336}
$$

仍然按照 (3.232) 式定义横向圆极化矢量 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\pm)$，则 (3.240) 式中的部分求和关系表明

$$
\sum_{\lambda=\pm} \varepsilon_\mu^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_\nu(\mathbf{p},\lambda) = \sum_{\sigma=1}^{2} e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e_\nu(\mathbf{p},\sigma), \tag{3.337}
$$

因而极化求和关系为

$$\sum_{\lambda=\pm}\varepsilon_\mu^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_\nu(\mathbf{p},\lambda)=-g_{\mu\nu}-\frac{p_\mu p_\nu}{(p\cdot n)^2}+\frac{p_\mu n_\nu+p_\nu n_\mu}{p\cdot n}. \tag{3.338}$$

四维横向条件 $p_\mu\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\pm)=0$ 在上式中体现为

$$p^\nu\sum_{\lambda=\pm}\varepsilon_\mu^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_\nu(\mathbf{p},\lambda)=-p_\mu-\frac{p_\mu p^2}{(p\cdot n)^2}+\frac{p_\mu(p\cdot n)+p^2n_\mu}{p\cdot n}=-p_\mu+p_\mu=0. \tag{3.339}$$

3.5.2 无质量矢量场与规范对称性

在自由有质量矢量场的拉氏量 (3.187) 中，令参数 $m=0$，就得到自由无质量实矢量场 $A^\mu(x)$ 的拉氏量

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{3.340}$$

其中 $F^{\mu\nu}\equiv\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu$。同样，令 Proca 方程 (3.191) 中 $m=0$，即得自由无质量矢量场的经典运动方程

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}=0. \tag{3.341}$$

根据 1.5 节的讨论，这个方程就是*无源*的 **Maxwell 方程**。*电磁场*是一种无质量矢量场。作为电磁场的量子，**光子** (photon) 是一种自旋为 1 的无质量矢量玻色子。

考虑对 $A^\mu(x)$ 作**规范变换** (gauge transformation)

$$A'^\mu(x)=A^\mu(x)+\partial^\mu\chi(x), \tag{3.342}$$

其中，作为变换参数的 $\chi(x)$ 是一个任意的 Lorentz 标量函数，依赖于时空坐标，因而这样的变换是**局域** (local) 变换。在此规范变换下，场强张量不变，

$$\begin{aligned}F'^{\mu\nu}(x)&=\partial^\mu[A^\nu(x)+\partial^\nu\chi(x)]-\partial^\nu[A^\mu(x)+\partial^\mu\chi(x)]\\&=\partial^\mu A^\nu(x)-\partial^\nu A^\mu(x)+\partial^\mu\partial^\nu\chi(x)-\partial^\nu\partial^\mu\chi(x)\\&=\partial^\mu A^\nu(x)-\partial^\nu A^\mu(x)=F^{\mu\nu}(x).\end{aligned} \tag{3.343}$$

因而拉氏量 (3.340) 和无源 Maxwell 方程 (3.341) 都不会改变，这称为**规范对称性** (gauge symmetry)。

拉氏量 (3.187) 中的质量项 $m^2A_\mu A^\mu/2$ 在规范变换下发生改变，因此自由的有质量矢量场不具有规范对称性。

规范对称性在经典电动力学中为人熟知，它表明四维矢势 $A^\mu(x)$ 不能被唯一地确定，因而不是直接观测量。电动力学中的直接观测量都不依赖于 $\chi(x)$，也就是说，不依赖于**规范**的选取。规范对称性的存在对研究无质量矢量场带来了不便。为了便于计算，常常将规范固定下来，使得计算过程依赖于选取的规范，不过，最后得出的可观测量必须是**规范不变** (gauge invariant) 的。

这里列出一些常见的规范条件。

$$\text{Lorenz 规范：}\qquad \partial_\mu A^\mu=0\,; \tag{3.344}$$

$$\text{Coulomb 规范：}\quad \nabla\cdot\mathbf{A}=0\,; \tag{3.345}$$

$$\text{瞬时规范：}\quad A^0=0\,; \tag{3.346}$$

$$\text{轴向规范：}\quad A^3=0\,. \tag{3.347}$$

在这些条件中，只有 **Lorenz 规范** [15] 是明显 Lorentz 协变的。注意，虽然 Lorenz 规范条件 $\partial_\mu A^\mu=0$ 看起来与有质量矢量场的 Lorenz 条件 (3.194) 相同，但是，在研究有质量矢量场时它是从运动方程推导出来的必须满足的条件，而在研究无质量矢量场时它只是一种人为选择。

对于任意的 $A^\mu(x)$，令规范变换函数 $\chi(x)$ 满足方程

$$\partial^2\chi(x)=-\partial_\mu A^\mu(x), \tag{3.348}$$

那么，作规范变换之后的场 $A'^\mu(x)$ 就会满足 Lorenz 规范条件，

$$\partial_\mu A'^\mu(x)=\partial_\mu A^\mu(x)+\partial^2\chi(x)=\partial_\mu A^\mu(x)-\partial_\mu A^\mu(x)=0. \tag{3.349}$$

但是，经过这种变换之后，矢量场仍然没有被唯一地确定：对于满足 Lorenz 规范条件的矢量场 $A^\mu(x)$，取满足齐次波动方程

$$\partial^2\tilde{\chi}(x)=0 \tag{3.350}$$

的任意规范变换函数 $\tilde{\chi}(x)$ 再作一次规范变换，都能得到满足 Lorenz 规范条件的另一个矢量场 $\tilde{A}'^\mu(x)=A^\mu(x)+\partial^\mu\tilde{\chi}(x)$。可见，存在无穷多个规范等价的矢量场，它们描述相同的物理，全都满足 Lorenz 规范条件 (3.344)。

矢量场 $A^\mu(x)$ 有 4 个分量，因而在没有任何约束的情况下可以具有 4 个独立的自由度。要求 Lorenz 规范条件成立将减少 1 个独立自由度。但是，上述规范等价性表明，$A^\mu(x)$ 并没有 3 个独立的自由度，否则它在强加 Lorenz 规范条件之后就必须唯一地确定下来。实际上，无质量矢量场 $A^\mu(x)$ 只具有 *2 个独立的自由度*，也就是说，有 2 个虚假 (spurious) 的自由度。3.1.3 小节讨论表明，自旋为 1 的无质量粒子具有 2 种独立的自旋极化态，以螺旋度 λ 来表征的话，就是 $\lambda=+1$（右旋极化）和 $\lambda=-1$（左旋极化）的态，分别对应于横向圆极化矢量 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p},+)$ 和 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p},-)$。等价地，也可以用横向线极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p},1)$ 和 $e^\mu(\mathbf{p},2)$ 代表这两种极化态。这样的独立极化态数目与无质量矢量场的独立自由度一致。

在上一节讨论*有质量*矢量场 $A^\mu(x)$ 的正则量子化时，由于场的时间分量 $A^0(x)$ 不拥有非零的共轭动量密度，因而没有将它作为独立的正则运动变量。但这种情况并没有使正则量子化出现困难，因为 Proca 方程要求 $A^0(x)$ 不是独立变量，而是由 (3.203) 式决定的，

$$A^0=-\frac{1}{m^2}\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}. \tag{3.351}$$

于是，以场的空间分量 $A^i(x)$ 作为 3 个独立正则变量进行量子化是足够的，自由度恰好与有质量矢量玻色子的 3 种物理极化态 (螺旋度 $\lambda=+1,0,-1$) 相符。

当 $m=0$ 时，(3.351) 式显然不能成立。因此，对于无质量矢量场，最好把 $A^0(x)$ 也当作独立的正则变量。为了使 $A^0(x)$ 拥有非零的共轭动量密度，可以在拉氏量中增加一个不会影响最

终物理结果的项，得到

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2, \tag{3.352}$$

其中 ξ 是一个可以自由选取的实参数。可以看出，在 $A^\mu(x)$ 满足 Lorenz 规范条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$ 的情况下，由 (3.352) 式定义的 $\mathcal{L}_1$ 等价于由 (3.340) 式定义的 $\mathcal{L}$。新增的项 $-(2\xi)^{-1}(\partial_\mu A^\mu)^2$ 破坏了规范对称性，相当于把规范固定下来，因而称为**规范固定项** (gauge-fixing term)。

如果将 ξ 看成一个不会传播的常数场，则由

$$\frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial(\partial_\mu\xi)} = 0, \quad \frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial\xi} = \frac{1}{2\xi^2}(\partial_\mu A^\mu)^2, \tag{3.353}$$

和 Euler-Lagrange 方程 (1.143) 可知，关于 ξ 的经典运动方程为

$$-\frac{1}{2\xi^2}(\partial_\mu A^\mu)^2 = 0. \tag{3.354}$$

这等价于 Lorenz 规范条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$。可见，引入 ξ 这样一个**辅助场** (auxiliary field) 可以强制 Lorenz 规范作为约束条件在经典层面上成立。这种方法相当于高等数学中的*拉格朗日乘数法*，它把具有 n 个变量与 k 个约束条件的最优化问题转换为具有 $n+k$ 个变量的极值方程组问题。

将 $\mathcal{L}_1$ 展开为

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)\partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)\partial^\mu A^\nu - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2, \tag{3.355}$$

根据 (1.144) 式，A^μ 对应的共轭动量密度是

$$\pi_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial(\partial^0 A^\mu)} = -\partial_0 A_\mu + \partial_\mu A_0 - \frac{1}{\xi}(\partial_\nu A^\nu)\frac{\partial(\partial_\rho A^\rho)}{\partial(\partial_0 A^\mu)} = -F_{0\mu} - \frac{1}{\xi}\,g_{0\mu}\partial_\nu A^\nu, \tag{3.356}$$

即

$$\pi_i = -F_{0i} = -\partial_0 A_i + \partial_i A_0, \quad \pi_0 = -\frac{1}{\xi}\,\partial_\mu A^\mu. \tag{3.357}$$

现在，A^0 具有相应的共轭动量密度 π_0。

正则量子化程序要求算符 A^μ 和 π_μ 满足*等时对易关系*

$$[A^\mu(\mathbf{x},t),\pi_\nu(\mathbf{y},t)] = \mathrm{i}\delta^\mu{}_\nu\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \quad [A^\mu(\mathbf{x},t),A^\nu(\mathbf{y},t)] = [\pi_\mu(\mathbf{x},t),\pi_\nu(\mathbf{y},t)] = 0. \tag{3.358}$$

但是，这样的等时对易关系与 Lorenz 规范条件相互矛盾。计算 A^0 与 $\partial_\mu A^\mu$ 的对易子，利用 (3.357) 式，得到

$$[A^0(\mathbf{x},t),\partial_\mu A^\mu(\mathbf{y},t)] = -\xi[A^0(\mathbf{x},t),\pi_0(\mathbf{y},t)] = -\mathrm{i}\xi\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{3.359}$$

上式在 $\mathbf{x}=\mathbf{y}$ 处非零，因而必有 $\partial_\mu A^\mu \neq 0$。所以，$A^\mu$ 作为场算符在满足等时对易关系的同时*不能*满足 Lorenz 规范条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$。这说明 Lorenz 规范条件虽然适用于经典场 $A^\mu(x)$，但对于量子场 $A^\mu(x)$ 来说限制太强了，下面会考虑弱化的 Lorenz 规范条件。

由于 $\partial_\mu A^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu$，有

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu - \frac{1}{\xi}\, g^{\mu\nu}\,(\partial_\rho A^\rho), \quad \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial A_\nu} = 0. \tag{3.360}$$

于是，从 $\mathcal{L}_1$ 导出关于 A^μ 的 Euler-Lagrange 方程

$$0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial A_\nu} = -\partial^2 A^\nu + \partial^\nu \partial_\mu A^\mu - \frac{1}{\xi}\, g^{\mu\nu}\partial_\mu(\partial_\rho A^\rho) = -\partial^2 A^\nu + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial^\nu(\partial_\rho A^\rho), \tag{3.361}$$

即 A^μ 的经典运动方程是

$$\partial^2 A^\mu - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = 0. \tag{3.362}$$

若取 $\xi = 1$，则上式化为 **d'Alembert 方程**

$$\partial^2 A^\mu(x) = 0, \tag{3.363}$$

这可以看作无质量情况下的 Klein-Gordon 方程。因此，把规范固定参数取为

$$\xi = 1 \tag{3.364}$$

会简化计算，这种取法称为 **Feynman 规范**，本节后续计算采用这个规范。在 Feynman 规范下，拉氏量化为

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 &= -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)\partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)\partial^\mu A^\nu - \frac{1}{2}\,\partial^\mu A_\mu(\partial_\nu A^\nu) \\
&= -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)\partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}\,\partial_\nu(A_\mu \partial^\mu A^\nu) - \frac{1}{2}\,A_\mu \partial_\nu \partial^\mu A^\nu - \frac{1}{2}\,\partial^\mu(A_\mu \partial_\nu A^\nu) + \frac{1}{2}\,A_\mu \partial^\mu \partial_\nu A^\nu \\
&= -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)\partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}\,\partial_\mu(A_\nu \partial^\nu A^\mu - A^\mu \partial_\nu A^\nu).
\end{aligned} \tag{3.365}$$

上式最后一行第二项是一个全散度，它不会影响作用量和运动方程，可以舍弃。因此，还能采用更加简化的拉氏量

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)\partial^\mu A^\nu. \tag{3.366}$$

由它推出的经典运动方程也是 d'Alembert 方程 (3.363)。此时共轭动量密度为

$$\pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial(\partial^0 A^\mu)} = -\partial_0 A_\mu. \tag{3.367}$$

对于 d'Alembert 方程 (3.363)，平面波正能解和负能解分别正比于 $\exp(-\mathrm{i}p\cdot x)$ 和 $\exp(\mathrm{i}p\cdot x)$，其中

$$p^0 = E_{\mathbf{p}} = |\mathbf{p}|. \tag{3.368}$$

使用上一小节讨论的实极化矢量组 $e^\mu(\mathbf{p},\sigma)$，对无质量实矢量场 $A^\mu(\mathbf{x},t)$ 作平面波展开，得

$$A^\mu(\mathbf{x},t) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\sigma=0}^{3} e^\mu(\mathbf{p},\sigma)\left(b_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right). \tag{3.369}$$

容易验证，这个展开式满足自共轭条件

$$[A^\mu(\mathbf{x},t)]^\dagger = A^\mu(\mathbf{x},t). \tag{3.370}$$

相应的共轭动量密度展开式为

$$\pi_\mu(\mathbf{x},t) = -\partial_0 A_\mu = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_{\sigma=0}^{3} e_\mu(\mathbf{p},\sigma)\left(b_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} - b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right), \tag{3.371}$$

它也满足自共轭条件

$$[\pi_\mu(\mathbf{x},t)]^\dagger = \pi_\mu(\mathbf{x},t). \tag{3.372}$$

根据平面波展开式 (3.369) 和 (3.371)，以及等时对易关系 (3.358)，推出产生湮灭算符的对易关系

$$[b_{\mathbf{p},\sigma}, b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma'}] = -(2\pi)^3 g_{\sigma\sigma'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \quad [b_{\mathbf{p},\sigma}, b_{\mathbf{q},\sigma'}] = [b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}, b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma'}] = 0. \tag{3.373}$$

具体推导过程见 3.5.3 小节选读内容。

3.5.3 选读：推导产生湮灭算符的对易关系

本小节推导产生湮灭算符的对易关系 (3.373)。

利用

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}A^\mu &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\int \mathrm{d}^3x \sum_{\sigma=0}^{3} e^\mu(\mathbf{p},\sigma)\left[b_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x} + b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\right]\\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_{\sigma=0}^{3} e^\mu(\mathbf{p},\sigma)\left[b_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p^0-q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) + b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0+q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\right]\\ &= \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{q}}}\sum_{\sigma=0}^{3}\left[e^\mu(\mathbf{q},\sigma)b_{\mathbf{q},\sigma} + e^\mu(-\mathbf{q},\sigma)b^\dagger_{-\mathbf{q},\sigma}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}q^0t}\right]\end{aligned} \tag{3.374}$$

和

$$\begin{aligned}&\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\partial_0 A^\mu\\ =& \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{-\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\int \mathrm{d}^3x \sum_{\sigma=0}^{3} e^\mu(\mathbf{p},\sigma)\left[b_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x} - b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\right]\\ =& \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{-\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_{\sigma=0}^{3} e^\mu(\mathbf{p},\sigma)\left[b_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p^0-q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) - b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0+q^0)t}\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\right]\\ =& \frac{-\mathrm{i}q_0}{\sqrt{2E_\mathbf{q}}}\sum_{\sigma=0}^{3}\left[e^\mu(\mathbf{q},\sigma)b_{\mathbf{q},\sigma} - e^\mu(-\mathbf{q},\sigma)b^\dagger_{-\mathbf{q},\sigma}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}q^0t}\right],\end{aligned} \tag{3.375}$$

以及正交归一关系 (3.205)，可得

$$e_\mu(\mathbf{q},\sigma')\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\left(\partial_0 A^\mu - \mathrm{i}q_0 A^\mu\right) = e_\mu(\mathbf{q},\sigma')\,\frac{-2\mathrm{i}q_0}{\sqrt{2E_\mathbf{q}}}\sum_{\sigma=0}^{3} e^\mu(\mathbf{q},\sigma)b_{\mathbf{q},\sigma}$$

$$= -\mathrm{i}\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}\sum_{\sigma=0}^{3} g_{\sigma'\sigma}b_{\mathbf{q},\sigma'} = -\mathrm{i}\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}\, g_{\sigma'\sigma'}b_{\mathbf{q},\sigma'}. \tag{3.376}$$

注意，虽然上式出现了重复的指标 σ'，但此处不需要对 σ' 求和。于是，

$$b_{\mathbf{p},\sigma} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\, g_{\sigma\sigma}e_{\mu}(\mathbf{p},\sigma)\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\,(\partial_0 A^{\mu} - \mathrm{i}p_0 A^{\mu}). \tag{3.377}$$

对上式取厄米共轭，得

$$b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma} = \frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\, g_{\sigma\sigma}e_{\mu}(\mathbf{p},\sigma)\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\,(\partial_0 A^{\mu} + \mathrm{i}p_0 A^{\mu}). \tag{3.378}$$

根据等时对易关系 (3.358)，湮灭算符与产生算符的对易关系为

$$\begin{aligned}
[b_{\mathbf{p},\sigma}, b^{\dagger}_{\mathbf{q},\sigma'}] &= \frac{g_{\sigma\sigma}g_{\sigma'\sigma'}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\, e_{\mu}(\mathbf{p},\sigma)e_{\nu}(\mathbf{q},\sigma')\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x - q\cdot y)} \\
&\qquad \times [\partial_0 A^{\mu}(\mathbf{x},t) - \mathrm{i}p_0 A^{\mu}(\mathbf{x},t),\ \partial_0 A^{\nu}(\mathbf{y},t) + \mathrm{i}q_0 A^{\nu}(\mathbf{y},t)] \\
&= \frac{g_{\sigma\sigma}g_{\sigma'\sigma'}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\, e_{\mu}(\mathbf{p},\sigma)e_{\nu}(\mathbf{q},\sigma')\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x - q\cdot y)} \\
&\qquad \times [-\pi^{\mu}(\mathbf{x},t) - \mathrm{i}p_0 A^{\mu}(\mathbf{x},t),\ -\pi^{\nu}(\mathbf{y},t) + \mathrm{i}q_0 A^{\nu}(\mathbf{y},t)] \\
&= \frac{g_{\sigma\sigma}g_{\sigma'\sigma'}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\, e_{\mu}(\mathbf{p},\sigma)e_{\nu}(\mathbf{q},\sigma')\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x - q\cdot y)} \\
&\qquad \times \{-\mathrm{i}q_0\,[\pi^{\mu}(\mathbf{x},t), A^{\nu}(\mathbf{y},t)] + \mathrm{i}p_0\,[A^{\mu}(\mathbf{x},t), \pi^{\nu}(\mathbf{y},t)]\} \\
&= \frac{g_{\sigma\sigma}g_{\sigma'\sigma'}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\, e_{\mu}(\mathbf{p},\sigma)e_{\nu}(\mathbf{q},\sigma')\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x - q\cdot y)}\,\big[-(p_0+q_0)g^{\mu\nu}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\big] \\
&= -\frac{E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\, g_{\sigma\sigma}g_{\sigma'\sigma'}e_{\mu}(\mathbf{p},\sigma)e^{\mu}(\mathbf{q},\sigma')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} \\
&= -\frac{E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\, g_{\sigma\sigma}g_{\sigma'\sigma'}e_{\mu}(\mathbf{p},\sigma)e^{\mu}(\mathbf{q},\sigma')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \\
&= -(2\pi)^3 g_{\sigma\sigma}g_{\sigma'\sigma'}e_{\mu}(\mathbf{p},\sigma)e^{\mu}(\mathbf{p},\sigma')\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \\
&= -(2\pi)^3 g_{\sigma\sigma}g_{\sigma'\sigma'}g_{\sigma\sigma'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) = -(2\pi)^3 g_{\sigma\sigma'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}).
\end{aligned} \tag{3.379}$$

倒数第二步用到正交归一关系 (3.205)。另一方面，两个湮灭算符之间的对易关系为

$$\begin{aligned}
[b_{\mathbf{p},\sigma}, b_{\mathbf{q},\sigma'}] &= \frac{-g_{\sigma\sigma}g_{\sigma'\sigma'}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\, e_{\mu}(\mathbf{p},\sigma)e_{\nu}(\mathbf{q},\sigma')\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x + q\cdot y)} \\
&\qquad \times [\partial_0 A^{\mu}(\mathbf{x},t) - \mathrm{i}p_0 A^{\mu}(\mathbf{x},t),\ \partial_0 A^{\nu}(\mathbf{y},t) - \mathrm{i}q_0 A^{\nu}(\mathbf{y},t)] \\
&= \frac{-g_{\sigma\sigma}g_{\sigma'\sigma'}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\, e_{\mu}(\mathbf{p},\sigma)e_{\nu}(\mathbf{q},\sigma')\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x + q\cdot y)} \\
&\qquad \times [-\pi^{\mu}(\mathbf{x},t) - \mathrm{i}p_0 A^{\mu}(\mathbf{x},t),\ -\pi^{\nu}(\mathbf{y},t) - \mathrm{i}q_0 A^{\nu}(\mathbf{y},t)] \\
&= \frac{-g_{\sigma\sigma}g_{\sigma'\sigma'}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\, e_{\mu}(\mathbf{p},\sigma)e_{\nu}(\mathbf{q},\sigma')\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x + q\cdot y)} \\
&\qquad \times \{\mathrm{i}q_0\,[\pi^{\mu}(\mathbf{x},t), A^{\nu}(\mathbf{y},t)] + \mathrm{i}p_0\,[A^{\mu}(\mathbf{x},t), \pi^{\nu}(\mathbf{y},t)]\} \\
&= \frac{-g_{\sigma\sigma}g_{\sigma'\sigma'}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\, e_{\mu}(\mathbf{p},\sigma)e_{\nu}(\mathbf{q},\sigma')\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x + q\cdot y)}\,\big[(q_0-p_0)g^{\mu\nu}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\big]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\, g_{\sigma\sigma}g_{\sigma'\sigma'}e_{\mu}(\mathbf{p},\sigma)e^{\mu}(\mathbf{q},\sigma')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} \\
&= \frac{E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\, g_{\sigma\sigma}g_{\sigma'\sigma'}e_{\mu}(\mathbf{p},\sigma)e^{\mu}(\mathbf{q},\sigma')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q}) = 0. \qquad (3.380)
\end{aligned}
$$

3.5.4 物理极化态

根据 (1.146)、(3.367) 和 (3.366) 式，无质量矢量场的哈密顿量密度是

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \pi_{\mu}\partial^0A^{\mu}-\mathcal{L}_2 = -(\partial_0A_{\mu})\partial^0A^{\mu}+\frac{1}{2}(\partial_{\mu}A_{\nu})\partial^{\mu}A^{\nu} \\
&= -\frac{1}{2}(\partial_0A_{\mu})\partial^0A^{\mu}+\frac{1}{2}(\partial_iA_{\mu})\partial^iA^{\mu} = -\frac{1}{2}\left[\pi_{\mu}\pi^{\mu}+(\nabla A_{\mu})\cdot(\nabla A^{\mu})\right]. \qquad (3.381)
\end{aligned}
$$

于是，哈密顿量算符表达为

$$
\begin{aligned}
H &= \int \mathrm{d}^3x\,\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\left[\pi_{\mu}\pi^{\mu}+(\nabla A_{\mu})\cdot(\nabla A^{\mu})\right] \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{\sigma\sigma'}\int \frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\, e_{\mu}(\mathbf{p},\sigma)e^{\mu}(\mathbf{q},\sigma') \\
&\quad\times\Big[(\mathrm{i}p_0)(\mathrm{i}q_0)\left(b_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}-b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)\left(b_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}-b^{\dagger}_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\right) \\
&\qquad+(\mathrm{i}\mathbf{p})\cdot(\mathrm{i}\mathbf{q})\left(b_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}-b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)\left(b_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}-b^{\dagger}_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\right)\Big] \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{\sigma\sigma'}\int \frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\, e_{\mu}(\mathbf{p},\sigma)e^{\mu}(\mathbf{q},\sigma')\Big[(p_0q_0+\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})b_{\mathbf{p},\sigma}b^{\dagger}_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x} \\
&\quad+(p_0q_0+\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-q)\cdot x}+(p_0q_0-\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})b_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+q)\cdot x} \\
&\quad+(-p_0q_0-\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}b^{\dagger}_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\Big] \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{\sigma\sigma'}\int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\, e_{\mu}(\mathbf{p},\sigma)e^{\mu}(\mathbf{q},\sigma')(p_0q_0+\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}) \\
&\quad\times\Big\{\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\left[b_{\mathbf{p},\sigma}b^{\dagger}_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_0-q_0)t}+b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_0-q_0)t}\right] \\
&\qquad-\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\left[b_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_0+q_0)t}+b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}b^{\dagger}_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_0+q_0)t}\right]\Big\} \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{\sigma\sigma'}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}}\Big[e_{\mu}(\mathbf{p},\sigma)e^{\mu}(\mathbf{p},\sigma')(E_{\mathbf{p}}^2+|\mathbf{p}|^2)(b_{\mathbf{p},\sigma}b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma'}+b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma'}) \\
&\qquad\qquad-e_{\mu}(\mathbf{p},\sigma)e^{\mu}(\mathbf{p},\sigma')(E_{\mathbf{p}}^2-|\mathbf{p}|^2)\left(b_{\mathbf{p},\sigma}b_{-\mathbf{p},\sigma'}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}+b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}b^{\dagger}_{-\mathbf{p},\sigma'}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\right)\Big] \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{\sigma\sigma'}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\, E_{\mathbf{p}}\, e_{\mu}(\mathbf{p},\sigma)e^{\mu}(\mathbf{p},\sigma')(b_{\mathbf{p},\sigma}b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma'}+b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma'}) \\
&= -\sum_{\sigma\sigma'}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}\, g_{\sigma\sigma'}(b_{\mathbf{p},\sigma}b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma'}+b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma'}) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}\sum_{\sigma=0}^{3}(-g_{\sigma\sigma})\,(b_{\mathbf{p},\sigma}b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}+b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma}) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\, E_{\mathbf{p}}\sum_{\sigma=0}^{3}(-g_{\sigma\sigma}b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma})\ +(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}\sum_{\sigma=0}^{3}(-g_{\sigma\sigma})^2
\end{aligned}
$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\, E_{\mathbf{p}} \left(-b^\dagger_{\mathbf{p},0} b_{\mathbf{p},0} + \sum_{\sigma=1}^{3} b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma} b_{\mathbf{p},\sigma} \right) + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\, 2E_{\mathbf{p}}. \tag{3.382}$$

上式最后一行第二项是零点能。第一项中类时极化态的贡献为负，与类空极化态的贡献不一样。造成这种情况的原因是 Minkowski 度规 $g_{\sigma\sigma'}$ 是一个**不定度规**，时间对角元 g_{00} 与空间对角元 g_{ii} 具有相反的符号。

将真空态 $|0\rangle$ 定义为被任意 $b_{\mathbf{p},\sigma}$ 湮灭的态，满足

$$b_{\mathbf{p},\sigma}|0\rangle = 0, \quad \langle 0|0\rangle = 1, \quad H|0\rangle = E_{\mathrm{vac}}|0\rangle, \quad E_{\mathrm{vac}} = 2\delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int \mathrm{d}^3p\, E_{\mathbf{p}} > 0. \tag{3.383}$$

动量为 $\mathbf{p}$、极化指标为 σ 的单粒子态定义为

$$|\mathbf{p},\sigma\rangle \equiv \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}|0\rangle, \tag{3.384}$$

它描述一个无质量矢量玻色子。从而，由

$$\begin{aligned}
[H, b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}] &= \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\, E_{\mathbf{q}} \sum_{\sigma'=0}^{3} (-g_{\sigma'\sigma'}) [b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma'} b_{\mathbf{q},\sigma'}, b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}] = \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\, E_{\mathbf{q}} \sum_{\sigma'=0}^{3} (-g_{\sigma'\sigma'}) b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma'} [b_{\mathbf{q},\sigma'}, b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\, E_{\mathbf{q}} \sum_{\sigma'=0}^{3} (-g_{\sigma'\sigma'}) b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma'} (2\pi)^3 (-g_{\sigma'\sigma}) \delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) \\
&= E_{\mathbf{p}} \sum_{\sigma'=0}^{3} g_{\sigma'\sigma'} g_{\sigma'\sigma} b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma'} = E_{\mathbf{p}} b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}
\end{aligned} \tag{3.385}$$

得

$$\begin{aligned}
H|\mathbf{p},\sigma\rangle &= \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, H b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}|0\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, (b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma} H + E_{\mathbf{p}} b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma})|0\rangle \\
&= \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, (E_{\mathrm{vac}} + E_{\mathbf{p}}) b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}|0\rangle = (E_{\mathrm{vac}} + E_{\mathbf{p}})|\mathbf{p},\sigma\rangle.
\end{aligned} \tag{3.386}$$

这看起来是一个正常的结果，说明单粒子态 $|\mathbf{p},\sigma\rangle$ 比真空多了一份能量 $E_{\mathbf{p}}$。

利用产生湮灭算符的对易关系 (3.373) 计算单粒子态的内积，得

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{q},\sigma'|\mathbf{p},\sigma\rangle &= \sqrt{4E_{\mathbf{q}}E_{\mathbf{p}}}\, \langle 0|\, b_{\mathbf{q},\sigma'} b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}|0\rangle = \sqrt{4E_{\mathbf{q}}E_{\mathbf{p}}}\, \langle 0|\left[b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma} b_{\mathbf{q},\sigma'} - (2\pi)^3 g_{\sigma\sigma'} \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \right]|0\rangle \\
&= -2E_{\mathbf{p}} (2\pi)^3 g_{\sigma\sigma'} \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}).
\end{aligned} \tag{3.387}$$

于是，

$$\langle \mathbf{p},0|\mathbf{p},0\rangle = -2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}), \quad \langle \mathbf{p},i|\mathbf{p},i\rangle = 2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}), \quad i = 1,2,3. \tag{3.388}$$

上式表明，单粒子态 $|\mathbf{p},0\rangle$ 的自我内积是负的，这不符合 Hilbert 空间中态矢的要求。而且，相应的能量期待值也是负的：

$$\langle \mathbf{p},0|\, H\, |\mathbf{p},0\rangle = (E_{\mathrm{vac}} + E_{\mathbf{p}})\, \langle \mathbf{p},0|\mathbf{p},0\rangle = -2E_{\mathbf{p}}(E_{\mathrm{vac}} + E_{\mathbf{p}})(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) < 0. \tag{3.389}$$

这个负能量结果在物理上看起来是不可接受的，它的根源在于不定度规。

不过，如前所述，无质量矢量场只有 2 种独立的物理极化态，对应于 2 种横向极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p},1)$ 和 $e^\mu(\mathbf{p},2)$，纵向极化和类时极化都应该是非物理的。选取一定的规范条件，应该可以除去非物理的极化态。由于 Lorenz 规范条件 $\partial_\mu A^\mu=0$ 与正则量子化程序不相容，我们不能直接使用这个条件，而需要将它转换到 Hilbert 空间中态矢的期待值上，要求任何**物理上允许的态矢** $|\Psi\rangle$ 必须满足

$$\langle\Psi|\,\partial_\mu A^\mu(x)\,|\Psi\rangle=0. \tag{3.390}$$

上式称为**弱 Lorenz 规范条件**。

将 $A^\mu(x)$ 的平面波展开式 (3.369) 分解成正能解和负能解两个部分，

$$A^\mu(x)=A^{\mu(+)}(x)+A^{\mu(-)}(x). \tag{3.391}$$

正能解部分为

$$A^{\mu(+)}(x)\equiv\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\sigma=0}^{3}e^\mu(\mathbf{p},\sigma)\,b_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{3.392}$$

其厄米共轭是负能解部分

$$A^{\mu(-)}(x)\equiv\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\sigma=0}^{3}e^\mu(\mathbf{p},\sigma)\,b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}=[A^{\mu(+)}(x)]^\dagger. \tag{3.393}$$

如果要求任何物理上允许的态矢 $|\Psi\rangle$ 必须满足 **Gupta-Bleuler 条件** [16, 17]

$$\partial_\mu A^{\mu(+)}(x)\,|\Psi\rangle=0, \tag{3.394}$$

则伴随有

$$\langle\Psi|\,\partial_\mu A^{\mu(-)}(x)=\langle\Psi|\,[\partial_\mu A^{\mu(+)}(x)]^\dagger=0, \tag{3.395}$$

从而弱 Lorenz 规范条件 (3.390) 得到满足：

$$\langle\Psi|\,\partial_\mu A^\mu(x)\,|\Psi\rangle=\langle\Psi|\,\partial_\mu A^{\mu(+)}(x)\,|\Psi\rangle+\langle\Psi|\,\partial_\mu A^{\mu(-)}(x)\,|\Psi\rangle=0. \tag{3.396}$$

可见，Gupta-Bleuler 条件比弱 Lorenz 规范条件稍强一些。

利用 (3.217) 和 (3.334) 式推出

$$\partial_\mu A^{\mu(+)}(x)=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{-\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left[p_\mu\sum_{\sigma=0}^{3}e^\mu(\mathbf{p},\sigma)\,b_{\mathbf{p},\sigma}\right]=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{-\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\,(p\cdot n)\,(b_{\mathbf{p},0}-b_{\mathbf{p},3}). \tag{3.397}$$

由于 $p\cdot n=p^0=E_{\mathbf{p}}$，Gupta-Bleuler 条件 (3.394) 意味着 $(b_{\mathbf{p},0}-b_{\mathbf{p},3})\,|\Psi\rangle=0$ 对任意非零动量 $\mathbf{p}$ 成立，即

$$b_{\mathbf{p},0}\,|\Psi\rangle=b_{\mathbf{p},3}\,|\Psi\rangle\,,\quad\langle\Psi|\,b^\dagger_{\mathbf{p},0}=\langle\Psi|\,b^\dagger_{\mathbf{p},3}. \tag{3.398}$$

于是

$$\langle\Psi|\,b^\dagger_{\mathbf{p},0}b_{\mathbf{p},0}\,|\Psi\rangle=\langle\Psi|\,b^\dagger_{\mathbf{p},3}b_{\mathbf{p},3}\,|\Psi\rangle\,. \tag{3.399}$$

这样一来，根据 (3.382) 式计算，物理态 $|\Psi\rangle$ 的能量期待值为

$$\begin{aligned}\langle\Psi|\,H\,|\Psi\rangle &= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,E_{\mathbf{p}}\,\langle\Psi|\left(-b^\dagger_{\mathbf{p},0}b_{\mathbf{p},0}+\sum_{\sigma=1}^{3}b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma}\right)|\Psi\rangle+E_{\mathrm{vac}}\,\langle\Psi|\Psi\rangle\\ &= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,E_{\mathbf{p}}\sum_{\sigma=1}^{2}\langle\Psi|\,b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma}\,|\Psi\rangle+E_{\mathrm{vac}}\,\langle\Psi|\Psi\rangle\,.\end{aligned}\tag{3.400}$$

也就是说，非物理的类时极化与纵向极化对能量的贡献总是相互抵消的，除了零点能，只有两种物理的横向极化才对能量有净贡献 (net contribution)。可见，要求 Gupta-Bleuler 条件成立会除去非物理极化态的贡献。

对于 $\sigma=0,3$ 的单粒子态 $|\mathbf{p},\sigma\rangle$，由 (3.397) 式得

$$\begin{aligned}\partial_\mu A^{\mu(+)}(x)\,|\mathbf{p},0\rangle &= \int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{-\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\,(q\cdot n)(b_{\mathbf{q},0}-b_{\mathbf{q},3})\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,b^\dagger_{\mathbf{p},0}\,|0\rangle\\ &= -\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}(q\cdot n)[b_{\mathbf{q},0},b^\dagger_{\mathbf{p},0}]\,|0\rangle\\ &= \mathrm{i}g_{00}\int\mathrm{d}^3q\,\frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}(q\cdot n)\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p})\,|0\rangle\\ &= \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}(p\cdot n)\,|0\rangle=\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}E_{\mathbf{p}}\,|0\rangle\,,\end{aligned}\tag{3.401}$$

$$\begin{aligned}\partial_\mu A^{\mu(+)}(x)\,|\mathbf{p},3\rangle &= \int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{-\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}q\cdot x}}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\,(q\cdot n)(b_{\mathbf{q},0}-b_{\mathbf{q},3})\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,b^\dagger_{\mathbf{p},3}\,|0\rangle\\ &= \mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}(q\cdot n)[b_{\mathbf{q},3},b^\dagger_{\mathbf{p},3}]\,|0\rangle\\ &= -\mathrm{i}g_{33}\int\mathrm{d}^3q\,\frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}(q\cdot n)\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p})\,|0\rangle\\ &= \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}(p\cdot n)\,|0\rangle=\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}E_{\mathbf{p}}\,|0\rangle\,.\end{aligned}\tag{3.402}$$

当 $\mathbf{p}\neq0$ 时，单粒子态 $|\mathbf{p},0\rangle$ 和 $|\mathbf{p},3\rangle$ 不符合 Gupta-Bleuler 条件 (3.394)，确实是非物理的态矢。对于 $\sigma=1,2$ 的单粒子态 $|\mathbf{p},\sigma\rangle$，由 $[b_{\mathbf{q},0},b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}]=[b_{\mathbf{q},3},b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}]=0$ 得

$$\partial_\mu A^{\mu(+)}(x)\,|\mathbf{p},\sigma\rangle=\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{-\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\,(q\cdot n)(b_{\mathbf{q},0}-b_{\mathbf{q},3})\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}\,|0\rangle=0.\tag{3.403}$$

可见，横向极化对应的单粒子态 $|\mathbf{p},1\rangle$ 和 $|\mathbf{p},2\rangle$ 确实是物理的，满足 Gupta-Bleuler 条件 (3.394)。

另一方面，由 (1.194) 式得无质量矢量场的总动量算符为

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= -\int\mathrm{d}^3x\,\pi_\mu\nabla A^\mu\\ &= -\sum_{\sigma\sigma'}\int\frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\,e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e^\mu(\mathbf{q},\sigma')\\ &\qquad\times(\mathrm{i}p_0)\left(b_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}-b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)(\mathrm{i}\mathbf{q})\left(b_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}-b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\sigma\sigma'} \int \frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\ p_0\mathbf{q}}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\, e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e^\mu(\mathbf{q},\sigma') \\
&\qquad \times \left[-b_{\mathbf{p},\sigma}b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x} - b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-q)\cdot x} + b_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+q)\cdot x} + b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\right] \\
&= \sum_{\sigma\sigma'} \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\ p_0\mathbf{q}}{(2\pi)^3\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\, e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e^\mu(\mathbf{q},\sigma') \\
&\qquad \times \Big\{ -\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\left[b_{\mathbf{p},\sigma}b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_0-q_0)t} + b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_0-q_0)t}\right] \\
&\qquad\quad + \delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\left[b_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_0+q_0)t} + b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_0+q_0)t}\right]\Big\} \\
&= \sum_{\sigma\sigma'} \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{\mathbf{p}}{2}\Big[- e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e^\mu(\mathbf{p},\sigma')(b_{\mathbf{p},\sigma}b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma'} + b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma'}) \\
&\qquad\qquad - e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e^\mu(-\mathbf{p},\sigma')\left(b_{\mathbf{p},\sigma}b_{-\mathbf{p},\sigma'}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t} + b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b^\dagger_{-\mathbf{p},\sigma'}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\right)\Big]. \qquad (3.404)
\end{aligned}
$$

对上式最后两行方括号内第二项的积分及求和作 $\mathbf{p}\to-\mathbf{p}$ 的替换和 $\sigma\leftrightarrow\sigma'$ 的互换，可得

$$
\begin{aligned}
&- \sum_{\sigma\sigma'} \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{\mathbf{p}}{2}\, e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e^\mu(-\mathbf{p},\sigma')\left(b_{\mathbf{p},\sigma}b_{-\mathbf{p},\sigma'}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t} + b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b^\dagger_{-\mathbf{p},\sigma'}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\right) \\
&= - \sum_{\sigma\sigma'} \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{-\mathbf{p}}{2}\, e_\mu(-\mathbf{p},\sigma')e^\mu(\mathbf{p},\sigma)\left(b_{-\mathbf{p},\sigma'}b_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t} + b^\dagger_{-\mathbf{p},\sigma'}b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\right) \\
&= \sum_{\sigma\sigma'} \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{\mathbf{p}}{2}\, e_\mu(-\mathbf{p},\sigma')e^\mu(\mathbf{p},\sigma)\left(b_{\mathbf{p},\sigma}b_{-\mathbf{p},\sigma'}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t} + b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b^\dagger_{-\mathbf{p},\sigma'}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\right). \qquad (3.405)
\end{aligned}
$$

可以看出，上式为零。于是，总动量化为

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P} &= -\sum_{\sigma\sigma'} \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{\mathbf{p}}{2}\, e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e^\mu(\mathbf{p},\sigma')(b_{\mathbf{p},\sigma}b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma'} + b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma'}) \\
&= -\sum_{\sigma\sigma'} \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{\mathbf{p}}{2}\, g_{\sigma\sigma'}(b_{\mathbf{p},\sigma}b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma'} + b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma'}) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{\mathbf{p}}{2}\sum_{\sigma=0}^{3}(-g_{\sigma\sigma})\left(b_{\mathbf{p},\sigma}b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma} + b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma}\right) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\sum_{\sigma=0}^{3}(-g_{\sigma\sigma}b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma}) + \delta^{(3)}(\mathbf{0})\int \mathrm{d}^3p\,\frac{\mathbf{p}}{2}\sum_{\sigma=0}^{3}(-g_{\sigma\sigma})^2 \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\left(-b^\dagger_{\mathbf{p},0}b_{\mathbf{p},0} + \sum_{\sigma=1}^{3} b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma}\right). \qquad (3.406)
\end{aligned}
$$

根据 (3.399) 式，物理态 $|\Psi\rangle$ 的动量期待值为

$$
\langle\Psi|\,\mathbf{P}\,|\Psi\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\,\langle\Psi|\left(-b^\dagger_{\mathbf{p},0}b_{\mathbf{p},0} + \sum_{\sigma=1}^{3} b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma}\right)|\Psi\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\sum_{\sigma=1}^{2}\langle\Psi|\,b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma}\,|\Psi\rangle\,. \qquad (3.407)
$$

同样，只有两种物理的横向极化才对动量有净贡献。

通过线性组合，可以用湮灭算符 $b_{\mathbf{p},1}$ 和 $b_{\mathbf{p},2}$ 定义另一组等价的湮灭算符

$$
a_{\mathbf{p},\pm} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\mp b_{\mathbf{p},1} + \mathrm{i}b_{\mathbf{p},2}), \qquad (3.408)
$$

相应的产生算符 $a^\dagger_{\mathbf{p},\pm}$ 可通过取厄米共轭得到。反过来，有

$$b_{\mathbf{p},1}=-\frac{1}{\sqrt{2}}(a_{\mathbf{p},+}-a_{\mathbf{p},-}),\quad b_{\mathbf{p},2}=-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(a_{\mathbf{p},+}+a_{\mathbf{p},-}).\tag{3.409}$$

利用对易关系 (3.373)，推出

$$\begin{aligned}
[a_{\mathbf{p},\pm},a^\dagger_{\mathbf{q},\pm}] &= \frac{1}{2}[\mp b_{\mathbf{p},1}+\mathrm{i}b_{\mathbf{p},2},\,\mp b^\dagger_{\mathbf{q},1}-\mathrm{i}b^\dagger_{\mathbf{q},2}]=\frac{1}{2}[b_{\mathbf{p},1},\,b^\dagger_{\mathbf{q},1}]+\frac{1}{2}[b_{\mathbf{p},2},\,b^\dagger_{\mathbf{q},2}]=(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}),\\
[a_{\mathbf{p},\pm},a^\dagger_{\mathbf{q},\mp}] &= \frac{1}{2}[\mp b_{\mathbf{p},1}+\mathrm{i}b_{\mathbf{p},2},\,\pm b^\dagger_{\mathbf{q},1}-\mathrm{i}b^\dagger_{\mathbf{q},2}]=-\frac{1}{2}[b_{\mathbf{p},1},\,b^\dagger_{\mathbf{q},1}]+\frac{1}{2}[b_{\mathbf{p},2},\,b^\dagger_{\mathbf{q},2}]=0,\\
[a_{\mathbf{p},\pm},a_{\mathbf{q},\pm}] &= \frac{1}{2}[\mp b_{\mathbf{p},1}+\mathrm{i}b_{\mathbf{p},2},\,\mp b_{\mathbf{q},1}+\mathrm{i}b_{\mathbf{q},2}]=0,\\
[a_{\mathbf{p},\pm},a_{\mathbf{q},\mp}] &= \frac{1}{2}[\mp b_{\mathbf{p},1}+\mathrm{i}b_{\mathbf{p},2},\,\pm b_{\mathbf{q},1}+\mathrm{i}b_{\mathbf{q},2}]=0,
\end{aligned}\tag{3.410}$$

而且，对 $\sigma=0,3$ 有

$$[a_{\mathbf{p},\pm},b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma}]=\frac{1}{2}[\mp b_{\mathbf{p},1}+\mathrm{i}b_{\mathbf{p},2},\,b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma}]=0,\quad [a_{\mathbf{p},\pm},b_{\mathbf{q},\sigma}]=\frac{1}{2}[\mp b_{\mathbf{p},1}+\mathrm{i}b_{\mathbf{p},2},\,b_{\mathbf{q},\sigma}]=0.\tag{3.411}$$

于是，这组产生湮灭算符的对易关系整理为

$$\begin{aligned}
&[a_{\mathbf{p},\lambda},a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}]=(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}),\quad [a_{\mathbf{p},\lambda},a_{\mathbf{q},\lambda'}]=[a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda},a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}]=0,\quad \lambda,\lambda'=\pm;\\
&[a_{\mathbf{p},\lambda},b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma}]=[b_{\mathbf{p},\sigma},a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda}]=[a_{\mathbf{p},\lambda},b_{\mathbf{q},\sigma}]=[a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda},b^\dagger_{\mathbf{q},\sigma}]=0,\quad \lambda=\pm,\ \sigma=0,3.
\end{aligned}\tag{3.412}$$

根据 (3.232) 式，用横向圆极化矢量 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\pm)$ 表示横向线极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p},1)$ 和 $e^\mu(\mathbf{p},2)$，有

$$e^\mu(\mathbf{p},1)=-\frac{1}{\sqrt{2}}[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},+)-\varepsilon^\mu(\mathbf{p},-)],\quad e^\mu(\mathbf{p},2)=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},+)+\varepsilon^\mu(\mathbf{p},-)].\tag{3.413}$$

从而，有

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma=1}^{2}e^\mu(\mathbf{p},\sigma)b_{\mathbf{p},\sigma} &= \frac{1}{2}[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},+)-\varepsilon^\mu(\mathbf{p},-)](a_{\mathbf{p},+}-a_{\mathbf{p},-})+\frac{1}{2}[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},+)+\varepsilon^\mu(\mathbf{p},-)](a_{\mathbf{p},+}+a_{\mathbf{p},-})\\
&= \varepsilon^\mu(\mathbf{p},+)a_{\mathbf{p},+}+\varepsilon^\mu(\mathbf{p},-)a_{\mathbf{p},-}=\sum_{\lambda=\pm}\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda},
\end{aligned}\tag{3.414}$$

取厄米共轭，得

$$\sum_{\sigma=1}^{2}e^\mu(\mathbf{p},\sigma)b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}=\sum_{\lambda=\pm}\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}.\tag{3.415}$$

于是，可将 $A^\mu(x)$ 的平面波展开式 (3.369) 改写成

$$\begin{aligned}
A^\mu(x) &= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\sigma=0,3}e^\mu(\mathbf{p},\sigma)\left(b_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+b^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)\\
&\quad+\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda=\pm}\left[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right],
\end{aligned}\tag{3.416}$$

第一行对应于非物理极化态，第二行对应于两种物理的圆极化态。

引入物理的单粒子态

$$|\mathbf{p},\lambda\rangle \equiv \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}\,|0\rangle\,, \quad \lambda=\pm, \tag{3.417}$$

类似于 (3.262) 式，可以推出

$$(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J})\,|\mathbf{p},\lambda\rangle = \lambda\,|\mathbf{p},\lambda\rangle\,, \quad \lambda=\pm, \tag{3.418}$$

即 $|\mathbf{p},\lambda\rangle$ 是本征值为 λ 的螺旋度本征态。因此 (3.408) 式定义的湮灭算符 $a_{\mathbf{p},\pm}$ 正是螺旋度 $\lambda=\pm$ 所对应的湮灭算符。

此外，由 (3.409) 式得

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma=1}^{2} b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}b_{\mathbf{p},\sigma} &= b^{\dagger}_{\mathbf{p},1}b_{\mathbf{p},1}+b^{\dagger}_{\mathbf{p},2}b_{\mathbf{p},2} = \frac{1}{2}(a^{\dagger}_{\mathbf{p},+}-a^{\dagger}_{\mathbf{p},-})(a_{\mathbf{p},+}-a_{\mathbf{p},-})+\frac{1}{2}(a^{\dagger}_{\mathbf{p},+}+a^{\dagger}_{\mathbf{p},-})(a_{\mathbf{p},+}+a_{\mathbf{p},-})\\ &= a^{\dagger}_{\mathbf{p},+}a_{\mathbf{p},+}+a^{\dagger}_{\mathbf{p},-}a_{\mathbf{p},-} = \sum_{\lambda=\pm} a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda},\end{aligned} \tag{3.419}$$

因而物理态 $|\Psi\rangle$ 的能量期待值 (3.400) 和动量期待值 (3.407) 也能表示为

$$\langle\Psi|\,H\,|\Psi\rangle = \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,E_{\mathbf{p}}\sum_{\lambda=\pm}\langle\Psi|\,a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda}\,|\Psi\rangle + E_{\mathrm{vac}}\,\langle\Psi|\Psi\rangle\,, \tag{3.420}$$

$$\langle\Psi|\,\mathbf{P}\,|\Psi\rangle = \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}\sum_{\lambda=\pm}\langle\Psi|\,a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda}\,|\Psi\rangle\,. \tag{3.421}$$

习　题

3.1 将 Lorentz 群的空间旋转生成元 J^i 和增速生成元 K^i 线性组合成

$$J^i_+ \equiv \frac{1}{2}(J^i+\mathrm{i}K^i), \quad J^i_- \equiv \frac{1}{2}(J^i-\mathrm{i}K^i). \tag{3.422}$$

通过对易关系 (3.55) 证明

$$[J^i_+,J^j_+] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}J^k_+, \quad [J^i_-,J^j_-] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}J^k_-, \quad [J^i_+,J^j_-] = 0. \tag{3.423}$$

因此，J^i_+ 和 J^i_- 是两套彼此独立的 SU(2) 群生成元，而 Lorentz 代数是两个 SU(2) 代数的直和。

3.2 根据对易关系 (3.64) 和 (3.65)，证明算符 $\mathbf{J}\cdot\mathbf{P}\equiv J^iP^i$ 满足

$$[H,\mathbf{J}\cdot\mathbf{P}] = 0, \quad [P^i,\mathbf{J}\cdot\mathbf{P}] = 0. \tag{3.424}$$

3.3 考虑 (3.105) 式表达的 Lorentz 变换 $S(\alpha,\beta)$ 和 (1.36) 式表达的旋转变换 $R_z(\theta)$。

(a) 验证 $\mathbf{g} = S^{\mathrm{T}}\mathbf{g}S$ 和 $\det(S)=1$。

(b) 推出 (3.110) 式。

(c) 推出 (3.112) 式。

3.4 定义 Lorentz 矢量表示的增速生成元

$$\mathcal{K}^i \equiv \mathcal{J}^{0i}. \tag{3.425}$$

(a) 根据 (3.141) 式，写出 $(\mathcal{K}^1)^\mu{}_\nu$、$(\mathcal{K}^2)^\mu{}_\nu$ 和 $(\mathcal{K}^3)^\mu{}_\nu$ 的矩阵表达式。

(b) 根据 $\mathcal{J}^i$ 的定义 (3.177) 以及 θ^i 和 ξ^i 的定义 (3.40)，证明有限 Lorentz 变换 (3.153) 可以表示为

$$\Lambda = \exp(\mathrm{i}\theta^i \mathcal{J}^i + \mathrm{i}\xi^i \mathcal{K}^i). \tag{3.426}$$

3.5 比较 (3.251) 和 (3.252) 式中负能解的系数，得到

$$\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)[a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}, \mathbf{J}] = [-\delta^\mu{}_\nu\, \mathbf{x}\times\mathbf{p} + (\boldsymbol{\mathcal{J}})^\mu{}_\nu]\varepsilon^{\nu*}(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}, \tag{3.427}$$

以此推出 $[\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}, a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}] = \lambda\, a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}$。

3.6 验证有质量矢量场 $A^\mu(\mathbf{x},t)$ 和 $\pi_i(\mathbf{x},t)$ 的平面波展开式 (3.249) 和 (3.266) 满足 (3.203) 式 $A^0 = -\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}/m^2$。

3.7 设有质量复矢量场 $A^\mu(x)$ 对应的拉氏量为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}F^\dagger_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + m^2 A^\dagger_\mu A^\mu, \tag{3.428}$$

其中 $F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$。

(a) 将 $A^\mu(x)$ 分解成两个实矢量场 $B^\mu(x)$ 和 $C^\mu(x)$ 的线性组合，

$$A^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(B^\mu + \mathrm{i}C^\mu), \tag{3.429}$$

证明拉氏量可化为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 B_\mu B^\mu - \frac{1}{4}C_{\mu\nu}C^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 C_\mu C^\mu, \tag{3.430}$$

其中 $B^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu$，而 $C^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu C^\nu - \partial^\nu C^\mu$。因此，复矢量场的拉氏量相当于两个质量相同的实矢量场的拉氏量。

(b) 证明 $A^\mu(x)$ 的平面波展开式为

$$A^\mu(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_{\lambda=\pm,0}\left[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right], \tag{3.431}$$

且产生湮灭算符满足对易关系

$$\begin{aligned}
[a_{\mathbf{p},\lambda}, a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}] &= (2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \quad [a_{\mathbf{p},\lambda}, a_{\mathbf{q},\lambda'}] = [a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}, a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}] = 0,\\
[b_{\mathbf{p},\lambda}, b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}] &= (2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \quad [b_{\mathbf{p},\lambda}, b_{\mathbf{q},\lambda'}] = [b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}, b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}] = 0,\\
[a_{\mathbf{p},\lambda}, b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}] &= [b_{\mathbf{p},\lambda}, a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}] = [a_{\mathbf{p},\lambda}, b_{\mathbf{q},\lambda'}] = [a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}, b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}] = 0.
\end{aligned} \tag{3.432}$$

3.8 考虑无质量情况下的极化矢量。

(a) 设类空的纵向极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p},3)$ 的空间分量正比于 $\mathbf{p}$，论证 $e^\mu(\mathbf{p},3)$ 不能满足四维横向条件 $p_\mu e^\mu(\mathbf{p},3)=0$。

(b) 论证类时极化矢量 $e^\mu(\mathbf{p},0)$ 不能满足四维横向条件 $p_\mu e^\mu(\mathbf{p},0)=0$。

第 4 章　量子旋量场

本章讨论**旋量场** (spinor field) 的正则量子化，旋量场对应于**旋量表示** (spinor representation)。旋量表示是固有保时向 Lorentz 群 $\mathrm{SO}^{\uparrow}(1,3)$ 的一个投影表示，也是相应覆盖群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的一个线性表示。Paul Dirac 在 1928 年首次将旋量表示引入到描述电子的理论中，建立了 Dirac 方程 [3]。$\mathrm{SO}^{\uparrow}(1,3)$ 和 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的 Lie 代数都是 Lorentz 代数，它们的表示可以通过构造满足 Lorentz 代数关系 (3.31) 的生成元矩阵来得到，下面我们就以这样的方式建立旋量表示。

4.1　Lorentz 群的旋量表示

首先，假设能够找到一组满足如下**反对易关系**的 $N\times N$ 矩阵 γ^{μ} $(\mu=0,1,2,3)$：

$$\{\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\}\equiv\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}+\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}=2g^{\mu\nu}\,\mathbf{1}=2g^{\mu\nu}. \tag{4.1}$$

最后一步是一种简写，省略了 $N\times N$ 单位矩阵 $\mathbf{1}$。这样的 γ^{μ} 称为 **Dirac 矩阵**，也称为 **$\boldsymbol{\gamma}$ 矩阵**。这个反对易关系意味着

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}=2g^{\mu\nu}-\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}. \tag{4.2}$$

当 $\mu\neq\nu$ 时，$g^{\mu\nu}=0$，而 γ^{μ} 与 γ^{ν} 是反对易的，即

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}=-\gamma^{\nu}\gamma^{\mu},\quad \mu\neq\nu. \tag{4.3}$$

当 $\mu=\nu$ 时，有

$$(\gamma^{0})^{2}=\frac{1}{2}\{\gamma^{0},\gamma^{0}\}=g^{00}=\mathbf{1},\quad (\gamma^{i})^{2}=\frac{1}{2}\{\gamma^{i},\gamma^{i}\}=g^{ii}=-\mathbf{1}. \tag{4.4}$$

因此，$(\gamma^{0})^{2}$ 的本征值都是 1，$(\gamma^{i})^{2}$ 的本征值都是 -1。这意味着 γ^{0} 的本征值为实数 ±1，γ^{i} 的本征值为虚数 $\pm\mathrm{i}$，将它们对角化，则对角元是这些本征值。这些性质告诉我们，γ^{0} 是厄米矩阵，γ^{i} 是反厄米矩阵，即

$$(\gamma^{0})^{\dagger}=\gamma^{0},\quad (\gamma^{i})^{\dagger}=-\gamma^{i}. \tag{4.5}$$

于是

$$(\gamma^{0})^{\dagger}\gamma^{0}=(\gamma^{0})^{2}=\mathbf{1},\quad (\gamma^{i})^{\dagger}\gamma^{i}=-(\gamma^{i})^{2}=\mathbf{1}. \tag{4.6}$$

可见 γ^{0} 和 γ^{i} 都是幺正矩阵。

然后，以 Dirac 矩阵的对易子定义另一组 $N \times N$ 矩阵

$$S^{\mu\nu} \equiv \frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \tag{4.7}$$

显然，$S^{\mu\nu}$ 关于 μ 和 ν 反对称，

$$S^{\mu\nu} = -S^{\nu\mu}. \tag{4.8}$$

因而 $S^{\mu\nu}$ 的独立分量有 6 个。

利用对易子公式

$$[AB, C] = ABC + ACB - ACB - CAB = A\{B, C\} - \{A, C\}B, \tag{4.9}$$

推出

$$\begin{aligned}[S^{\mu\nu}, \gamma^\rho] &= \frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu, \gamma^\rho] = \frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^\mu\gamma^\nu - (2g^{\nu\mu} - \gamma^\mu\gamma^\nu), \gamma^\rho] = \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^\mu\gamma^\nu, \gamma^\rho] \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2}(\gamma^\mu\{\gamma^\nu, \gamma^\rho\} - \{\gamma^\mu, \gamma^\rho\}\gamma^\nu) = \mathrm{i}(\gamma^\mu g^{\nu\rho} - \gamma^\nu g^{\mu\rho}).\end{aligned} \tag{4.10}$$

从而，根据对易子公式 (2.13) 有

$$\begin{aligned}[S^{\mu\nu}, S^{\rho\sigma}] &= \frac{\mathrm{i}}{4}[S^{\mu\nu}, \gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\gamma^\rho] = \frac{\mathrm{i}}{4}([S^{\mu\nu}, \gamma^\rho\gamma^\sigma] - [S^{\mu\nu}, \gamma^\sigma\gamma^\rho]) \\ &= \frac{\mathrm{i}}{4}([S^{\mu\nu}, \gamma^\rho]\gamma^\sigma + \gamma^\rho[S^{\mu\nu}, \gamma^\sigma] - [S^{\mu\nu}, \gamma^\sigma]\gamma^\rho - \gamma^\sigma[S^{\mu\nu}, \gamma^\rho]) \\ &= \frac{\mathrm{i}}{4}[\mathrm{i}(\gamma^\mu g^{\nu\rho} - \gamma^\nu g^{\mu\rho})\gamma^\sigma + \mathrm{i}\gamma^\rho(\gamma^\mu g^{\nu\sigma} - \gamma^\nu g^{\mu\sigma}) \\ &\qquad - \mathrm{i}(\gamma^\mu g^{\nu\sigma} - \gamma^\nu g^{\mu\sigma})\gamma^\rho - \mathrm{i}\gamma^\sigma(\gamma^\mu g^{\nu\rho} - \gamma^\nu g^{\mu\rho})] \\ &= \frac{\mathrm{i}^2}{4}(\gamma^\mu\gamma^\sigma g^{\nu\rho} - \gamma^\nu\gamma^\sigma g^{\mu\rho} + \gamma^\rho\gamma^\mu g^{\nu\sigma} - \gamma^\rho\gamma^\nu g^{\mu\sigma} \\ &\qquad - \gamma^\mu\gamma^\rho g^{\nu\sigma} + \gamma^\nu\gamma^\rho g^{\mu\sigma} - \gamma^\sigma\gamma^\mu g^{\nu\rho} + \gamma^\sigma\gamma^\nu g^{\mu\rho}) \\ &= \frac{\mathrm{i}^2}{4}[g^{\nu\rho}(\gamma^\mu\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\gamma^\mu) - g^{\mu\rho}(\gamma^\nu\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\gamma^\nu) - g^{\nu\sigma}(\gamma^\mu\gamma^\rho - \gamma^\rho\gamma^\mu) + g^{\mu\sigma}(\gamma^\nu\gamma^\rho - \gamma^\rho\gamma^\nu)] \\ &= \mathrm{i}(g^{\nu\rho}S^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}S^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}S^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}S^{\nu\rho}).\end{aligned} \tag{4.11}$$

可见，$S^{\mu\nu}$ 满足 Lorentz 代数关系 (3.31)，因而是 Lorentz 群某个表示的生成元矩阵。以 $S^{\mu\nu}$ 生成的表示就是**旋量表示**。

根据 3.2 节的讨论，一组变换参数 $\omega_{\mu\nu}$ 在 Lorentz 群的矢量表示中生成固有保时向的有限变换 (3.153)：

$$\Lambda = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}\right) = \mathrm{e}^X, \quad X \equiv -\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}. \tag{4.12}$$

类似地，这组参数在旋量表示中生成固有保时向的有限变换

$$D(\Lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right)^n = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right) = \mathrm{e}^Y, \quad Y \equiv -\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}. \tag{4.13}$$

这样定义的 $D(\Lambda)$ 是旋量表示中的 Lorentz 变换矩阵。由 (3.72) 式有

$$\mathrm{e}^{-Y}\mathrm{e}^Y = \mathrm{e}^{-Y+Y} = \mathrm{e}^{\mathbf{0}} = \mathbf{1}, \tag{4.14}$$

故 $D(\Lambda)$ 的逆矩阵为

$$D^{-1}(\Lambda)=\mathrm{e}^{-Y}=\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right). \tag{4.15}$$

这里介绍一些将会用到的对易子公式。对于算符或同阶方阵 B 与 A，以如下方式定义**多重对易子** $[B,A^{(n)}]$：

$$\begin{aligned}&[B,A^{(0)}]\equiv B,\quad [B,A^{(1)}]\equiv[[B,A^{(0)}],A]=[B,A]\\&[B,A^{(2)}]\equiv[[B,A^{(1)}],A]=[[B,A],A],\quad\cdots,\quad [B,A^{(n)}]\equiv[[B,A^{(n-1)}],A].\end{aligned} \tag{4.16}$$

从而

$$BA^k=\sum_{n=0}^{k}\frac{k!}{(k-n)!n!}\,A^{k-n}[B,A^{(n)}]. \tag{4.17}$$

下面用数学归纳法证明这个等式。

证明 当 $k=0$ 和 $k=1$ 时，(4.17) 式明显成立：

$$BA^0=B=[B,A^{(0)}]=\frac{0!}{(0-0)!0!}\,A^{0-0}[B,A^{(0)}], \tag{4.18}$$

$$BA^1=BA=AB+[B,A]=\frac{1!}{(1-0)!0!}\,A^{1-0}[B,A^{(0)}]+\frac{1!}{(1-1)!1!}\,A^{1-1}[B,A^{(1)}]. \tag{4.19}$$

假设 $k=m$ 时 (4.17) 式成立，则

$$\begin{aligned}BA^{m+1}&=\sum_{n=0}^{m}\frac{m!}{(m-n)!n!}\,A^{m-n}[B,A^{(n)}]A=\sum_{n=0}^{m}\frac{m!}{(m-n)!n!}\,A^{m-n}(A[B,A^{(n)}]+[[B,A^{(n)}],A])\\&=\sum_{n=0}^{m}\frac{m!}{(m-n)!n!}\,A^{m+1-n}[B,A^{(n)}]+\sum_{n=0}^{m}\frac{m!}{(m-n)!n!}\,A^{m-n}[B,A^{(n+1)}]\\&=\sum_{n=0}^{m}\frac{m!}{(m-n)!n!}\,A^{m+1-n}[B,A^{(n)}]+\sum_{j=1}^{m+1}\frac{m!}{(m-j+1)!(j-1)!}\,A^{m-j+1}[B,A^{(j)}]\\&=\frac{m!}{(m-0)!0!}\,A^{m+1}[B,A^{(0)}]+\sum_{n=1}^{m}\left[\frac{m!}{(m-n)!n!}+\frac{m!}{(m-n+1)!(n-1)!}\right]A^{m+1-n}[B,A^{(n)}]\\&\quad+\frac{m!}{[m-(m+1)+1]![(m+1)-1]!}\,A^{m-(m+1)+1}[B,A^{(m+1)}]\\&=A^{m+1}[B,A^{(0)}]+\sum_{n=1}^{m}\left[\frac{m!}{(m-n)!n!}+\frac{n}{m-n+1}\frac{m!}{(m-n)!n!}\right]A^{m+1-n}[B,A^{(n)}]\\&\quad+A^{m-(m+1)+1}[B,A^{(m+1)}]\\&=\frac{(m+1)!}{[(m+1)-0]!0!}\,A^{m+1}[B,A^{(0)}]+\sum_{n=1}^{m}\frac{(m+1)!}{(m-n+1)!n!}\,A^{m+1-n}[B,A^{(n)}]\\&\quad+\frac{(m+1)!}{[(m+1)-(m+1)]!(m+1)!}\,A^{m-(m+1)+1}[B,A^{(m+1)}]\\&=\sum_{n=0}^{m+1}\frac{(m+1)!}{[(m+1)-n]!n!}\,A^{(m+1)-n}[B,A^{(n)}],\end{aligned} \tag{4.20}$$

即 $k=m+1$ 时 (4.17) 式也成立。于是，(4.17) 式对任意非负整数 k 成立。**证毕**。

根据推广的阶乘定义 (3.69) 将 (4.17) 式右边的级数化成无穷级数，

$$BA^k=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!n!}\,A^{k-n}[B,A^{(n)}]. \tag{4.21}$$

利用上式推出

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-A}B\mathrm{e}^{A}&=\mathrm{e}^{-A}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,BA^k=\mathrm{e}^{-A}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!n!}\,A^{k-n}[B,A^{(n)}]\\&=\mathrm{e}^{-A}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k-n)!}\,A^{k-n}[B,A^{(n)}]=\mathrm{e}^{-A}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,\mathrm{e}^{A}[B,A^{(n)}],\end{aligned} \tag{4.22}$$

即

$$\mathrm{e}^{-A}B\mathrm{e}^{A}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[B,A^{(n)}]. \tag{4.23}$$

现在，我们继续讨论 Lorentz 群的旋量表示。由 (4.10) 和 (3.141) 式得

$$[\gamma^\mu,S^{\rho\sigma}]=-[S^{\rho\sigma},\gamma^\mu]=[S^{\sigma\rho},\gamma^\mu]=\mathrm{i}(\gamma^\sigma g^{\rho\mu}-\gamma^\rho g^{\sigma\mu})=\mathrm{i}(g^{\rho\mu}\delta^\sigma{}_\nu-g^{\sigma\mu}\delta^\rho{}_\nu)\gamma^\nu=(\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu\gamma^\nu. \tag{4.24}$$

从而，

$$\begin{aligned}[\gamma^\mu,Y^{(1)}]&=[\gamma^\mu,Y]=-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\rho\sigma}[\gamma^\mu,S^{\rho\sigma}]=-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\rho\sigma}(\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu\gamma^\nu=X^\mu{}_\nu\gamma^\nu,\\[\gamma^\mu,Y^{(2)}]&=[[\gamma^\mu,Y^{(1)}],Y]=X^\mu{}_\nu[\gamma^\nu,Y]=X^\mu{}_\nu X^\nu{}_\rho\gamma^\rho=(X^2)^\mu{}_\nu\gamma^\nu,\\&\cdots\\[\gamma^\mu,Y^{(n)}]&=(X^n)^\mu{}_\nu\gamma^\nu.\end{aligned} \tag{4.25}$$

再利用 (4.23) 式推出

$$D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda)=\mathrm{e}^{-Y}\gamma^\mu\mathrm{e}^{Y}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[\gamma^\mu,Y^{(n)}]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(X^n)^\mu{}_\nu\gamma^\nu=(\mathrm{e}^{X})^\mu{}_\nu\gamma^\nu, \tag{4.26}$$

即

$$D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda)=\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu. \tag{4.27}$$

类比 (3.24) 式，把上式看作旋量表示中 Dirac 矩阵 γ^μ 的 Lorentz 变换规则，那么 γ^μ 是一个 Lorentz 矢量。相应的协变矢量为

$$\gamma_\mu\equiv g_{\mu\nu}\gamma^\nu, \tag{4.28}$$

从而

$$\gamma_0=\gamma^0,\quad \gamma_i=-\gamma^i,\quad i=1,2,3. \tag{4.29}$$

$N\times N$ 单位矩阵 $\mathbf{1}$ 满足

$$D^{-1}(\Lambda)\,\mathbf{1}\,D(\Lambda)=\mathbf{1}, \tag{4.30}$$

因而 **1** 是一个 Lorentz 标量。生成元 $S^{\mu\nu}$ 的 Lorentz 变换为

$$D^{-1}(\Lambda)S^{\mu\nu}D(\Lambda)=\frac{\mathrm{i}}{4}[D^{-1}(\Lambda)\gamma^{\mu}D(\Lambda),D^{-1}(\Lambda)\gamma^{\nu}D(\Lambda)]=\frac{\mathrm{i}}{4}\,\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}[\gamma^{\rho},\gamma^{\sigma}]=\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}S^{\rho\sigma},\tag{4.31}$$

可见，$S^{\mu\nu}$ 是一个 2 阶反对称 Lorentz 张量。

引入一个新的 $N\times N$ 矩阵

$$\gamma^{5}\equiv\gamma_{5}\equiv\mathrm{i}\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}.\tag{4.32}$$

根据 (4.3) 式，有

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}=\begin{cases}+\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}, & (\mu,\nu,\rho,\sigma)\text{ 是 }(0,1,2,3)\text{ 的偶置换},\\ -\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}, & (\mu,\nu,\rho,\sigma)\text{ 是 }(0,1,2,3)\text{ 的奇置换}。\end{cases}\tag{4.33}$$

这种置换性质与四维 Levi-Civita 符号 (1.84) 相同,因而置换操作带来的符号在 $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ 与 $\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}$ 的乘积中相互抵消，如

$$\varepsilon_{1023}\gamma^{1}\gamma^{0}\gamma^{2}\gamma^{3}=-\varepsilon_{0123}(-\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3})=\varepsilon_{0123}\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}.\tag{4.34}$$

由此得到

$$\gamma^{5}=\mathrm{i}\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}=-\mathrm{i}\varepsilon_{0123}\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}=-\frac{\mathrm{i}}{4!}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}.\tag{4.35}$$

$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ 是 $(0,4)$ 型 Lorentz 张量，固有 Lorentz 变换为

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}(\Lambda^{-1})^{\alpha}{}_{\mu}(\Lambda^{-1})^{\beta}{}_{\nu}(\Lambda^{-1})^{\gamma}{}_{\rho}(\Lambda^{-1})^{\delta}{}_{\sigma}.\tag{4.36}$$

从而，对于固有保时向 Lorentz 变换 (4.12)，γ^{5} 的变换形式是

$$\begin{aligned}D^{-1}(\Lambda)\gamma^{5}D(\Lambda)&=-\frac{\mathrm{i}}{4!}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\Lambda^{\rho}{}_{\gamma}\Lambda^{\sigma}{}_{\delta}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\gamma^{\gamma}\gamma^{\delta}\\&=-\frac{\mathrm{i}}{4!}\,\varepsilon_{\kappa\lambda\tau\varepsilon}(\Lambda^{-1})^{\kappa}{}_{\mu}(\Lambda^{-1})^{\lambda}{}_{\nu}(\Lambda^{-1})^{\tau}{}_{\rho}(\Lambda^{-1})^{\varepsilon}{}_{\sigma}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\Lambda^{\rho}{}_{\gamma}\Lambda^{\sigma}{}_{\delta}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\gamma^{\gamma}\gamma^{\delta}\\&=-\frac{\mathrm{i}}{4!}\,\varepsilon_{\kappa\lambda\tau\varepsilon}\delta^{\kappa}{}_{\alpha}\delta^{\lambda}{}_{\beta}\delta^{\tau}{}_{\gamma}\delta^{\varepsilon}{}_{\delta}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\gamma^{\gamma}\gamma^{\delta}=-\frac{\mathrm{i}}{4!}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\gamma^{\gamma}\gamma^{\delta}=\gamma^{5}.\end{aligned}\tag{4.37}$$

可见，γ^{5} 是一个 Lorentz 标量。γ^{5} 的平方为

$$(\gamma^{5})^{2}=-\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}=-\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}\gamma^{3}\gamma^{2}\gamma^{1}\gamma^{0}=-(-\mathbf{1})^{3}=\mathbf{1}.\tag{4.38}$$

第二步利用偶置换将后面的 $\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}$ 转化为 $\gamma^{3}\gamma^{2}\gamma^{1}\gamma^{0}$。根据 (4.5) 式，$\gamma^{5}$ 是厄米矩阵，

$$(\gamma^{5})^{\dagger}=-\mathrm{i}(\gamma^{3})^{\dagger}(\gamma^{2})^{\dagger}(\gamma^{1})^{\dagger}(\gamma^{0})^{\dagger}=\mathrm{i}\gamma^{3}\gamma^{2}\gamma^{1}\gamma^{0}=\mathrm{i}\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}=\gamma^{5}.\tag{4.39}$$

此外，γ^{5} 与 γ^{μ} 反对易，

$$\{\gamma^{5},\gamma^{\mu}\}=\mathrm{i}(\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}\gamma^{\mu}+\gamma^{\mu}\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3})=\mathrm{i}(\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}\gamma^{\mu}-\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}\gamma^{\mu})=0,\tag{4.40}$$

即

$$\gamma^\mu\gamma^5 = -\gamma^5\gamma^\mu. \tag{4.41}$$

$\gamma^\mu\gamma^5$ 的 Lorentz 变换为

$$D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu\gamma^5 D(\Lambda) = D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda)D^{-1}(\Lambda)\gamma^5 D(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu\gamma^5, \tag{4.42}$$

因而它是一个 Lorentz 矢量。再引入

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = 2S^{\mu\nu}, \tag{4.43}$$

它正比于 $S^{\mu\nu}$，所以也是一个 2 阶反对称 Lorentz 张量：

$$D^{-1}(\Lambda)\sigma^{\mu\nu}D(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\sigma^{\rho\sigma}. \tag{4.44}$$

根据 (4.3) 式，当 $\mu \neq \nu$ 时，$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\gamma^\mu\gamma^\nu$，故 $\sigma^{\mu\nu}$ 的 6 个独立分量为

$$\sigma^{01} = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1, \quad \sigma^{02} = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^2, \quad \sigma^{03} = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^3, \quad \sigma^{12} = \mathrm{i}\gamma^1\gamma^2, \quad \sigma^{13} = \mathrm{i}\gamma^1\gamma^3, \quad \sigma^{23} = \mathrm{i}\gamma^2\gamma^3. \tag{4.45}$$

现在，我们拥有一组矩阵

$$\{\mathbf{1}, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}\}, \tag{4.46}$$

它们各自的独立分量个数之和为 $1 + 1 + 4 + 4 + 6 = 16$。上面已经讨论了这些矩阵的固有保时向 Lorentz 变换性质，下面研究它们的宇称变换性质。

用 γ^0 定义变换矩阵

$$D(\mathcal{P}) = \zeta\gamma^0, \tag{4.47}$$

其中 ζ 是一个复的相位因子，满足 $|\zeta|^2 = 1$。$D^\dagger(\mathcal{P})D(\mathcal{P}) = \zeta^*(\gamma^0)^\dagger\zeta\gamma^0 = |\zeta|^2(\gamma^0)^2 = \mathbf{1}$ 表明，$D(\mathcal{P})$ 是幺正矩阵，故

$$D^{-1}(\mathcal{P}) = D^\dagger(\mathcal{P}) = \zeta^*\gamma^0. \tag{4.48}$$

用 $D(\mathcal{P})$ 对 γ^0 和 γ^i 作相似变换，得

$$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^0 D(\mathcal{P}) = |\zeta|^2\gamma^0\gamma^0\gamma^0 = +\gamma^0, \quad D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^i D(\mathcal{P}) = |\zeta|^2\gamma^0\gamma^i\gamma^0 = -\gamma^i\gamma^0\gamma^0 = -\gamma^i. \tag{4.49}$$

利用宇称变换 $\mathcal{P}$ 的定义 (1.58)，将这两个式子归纳为

$$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^\mu{}_\nu\gamma^\nu. \tag{4.50}$$

可见，$D(\mathcal{P})$ 就是旋量表示中的**宇称变换矩阵**，它是非固有保时向的。上式是 γ^μ 的宇称变换形式，按照 1.4 节的定义，γ^μ 是**极矢量**。(4.49) 式说明 γ^0 是宇称本征态，本征值为 $+$，即具有**偶宇称**；γ^i 也是宇称本征态，本征值为 $-$，即具有**奇宇称**。

虽然单位矩阵 $\mathbf{1}$ 与 γ^5 都是 Lorentz 标量，但它们的宇称变换性质不同，

$$D^{-1}(\mathcal{P})\mathbf{1}D(\mathcal{P}) = +\mathbf{1}, \quad D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^5 D(\mathcal{P}) = \gamma^0\gamma^5\gamma^0 = -\gamma^5\gamma^0\gamma^0 = -\gamma^5. \tag{4.51}$$

根据 1.5 节的定义，**1** 是狭义的**标量**，具有偶宇称；γ^5 是**赝标量**，具有奇宇称。此外，$\gamma^\mu\gamma^5$ 的宇称变换是

$$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu\gamma^5 D(\mathcal{P}) = D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P})D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^5 D(\mathcal{P}) = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu\gamma^\nu\gamma^5, \tag{4.52}$$

即

$$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^0\gamma^5 D(\mathcal{P}) = -\gamma^0\gamma^5, \quad D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^i\gamma^5 D(\mathcal{P}) = +\gamma^i\gamma^5. \tag{4.53}$$

根据 1.4 节的定义，$\gamma^\mu\gamma^5$ 是**轴矢量**，其分量的宇称性质与 γ^μ 相反。最后，$\sigma^{\mu\nu}$ 的宇称变换为

$$D^{-1}(\mathcal{P})\sigma^{\mu\nu}D(\mathcal{P}) = \frac{\mathrm{i}}{2}[D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P}), D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\nu D(\mathcal{P})] = \frac{\mathrm{i}}{2}\mathcal{P}^\mu{}_\alpha\mathcal{P}^\nu{}_\beta[\gamma^\alpha,\gamma^\beta] = \mathcal{P}^\mu{}_\alpha\mathcal{P}^\nu{}_\beta\sigma^{\alpha\beta}, \tag{4.54}$$

即

$$D^{-1}(\mathcal{P})\sigma^{0i}D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^0{}_\alpha\mathcal{P}^i{}_\beta\sigma^{\alpha\beta} = -\sigma^{0i}, \quad D^{-1}(\mathcal{P})\sigma^{ij}D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^i{}_\alpha\mathcal{P}^j{}_\beta\sigma^{\alpha\beta} = +\sigma^{ij}. \tag{4.55}$$

可见，集合 (4.46) 是由标量 **1**、赝标量 γ^5、极矢量 γ^μ、轴矢量 $\gamma^\mu\gamma^5$ 和 2 阶反对称张量 $\sigma^{\mu\nu}$ 组成的。综合考虑固有保时向 Lorentz 变换和宇称变换，则这些矩阵的变换性质各不相同，因而彼此之间是线性独立的，总共有 16 个线性独立的矩阵。由于线性独立的 $N\times N$ 矩阵至多有 N^2 个，需要 $N\geq 4$ 才能得到 16 个这样的矩阵。取 $N=4$，就可以用这 16 个矩阵展开一个任意的 4×4 矩阵(展开系数为复数)，也就是说，它们构成一组完备的基底。另一方面，可以证明，满足反对易关系 (4.1) 的 Dirac 矩阵至少是 4 阶方阵。因此，将 Dirac 矩阵 γ^μ 取为 4×4 矩阵，而旋量表示是 Lorentz 群的一个 4 维表示。

4.2 Dirac 旋量场

在 Lorentz 群的旋量表示中，被变换矩阵 $D(\Lambda)$ 作用的态称为 **Dirac 旋量** (spinor)。由于 $D(\Lambda)$ 是 4×4 矩阵，一个 Dirac 旋量 ψ_a 应当具有 4 个分量 $(a=1,2,3,4)$，相应的固有保时向 Lorentz 变换为

$$\psi'_a = D_{ab}(\Lambda)\psi_b. \tag{4.56}$$

隐去旋量指标 a 和 b，上式化为

$$\psi' = D(\Lambda)\psi. \tag{4.57}$$

我们可以将 ψ 和 ψ' 看作列矢量，而上式右边的乘积就是线性代数中矩阵与列矢量的乘积。

进一步，如果 ψ_a 依赖于时空坐标 x^μ，它就成为 **Dirac 旋量场** $\psi_a(x)$。类似于 (3.169) 式，量子 Dirac 旋量场的 Lorentz 变换形式是

$$\psi'_a(x') = U^{-1}(\Lambda)\psi_a(x')U(\Lambda) = D_{ab}(\Lambda)\psi_b(x). \tag{4.58}$$

对于固有保时向 Lorentz 变换，由 (4.13) 式得到 $D_{ab}(\Lambda)$ 的无穷小形式为

$$D_{ab}(\Lambda) = \delta_{ab} - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})_{ab}, \tag{4.59}$$

于是，(4.58) 式的无穷小形式是

$$\psi'_a(x') = \psi_a(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})_{ab}\psi_b(x). \tag{4.60}$$

将上式与 (1.205) 式比较，可以发现 1.7.3 小节中的生成元 $I^{\mu\nu}$ 在旋量表示中对应于 $S^{\mu\nu}$。隐去旋量指标，则 (4.58) 式化为

$$\psi'(x') = U^{-1}(\Lambda)\psi(x')U(\Lambda) = D(\Lambda)\psi(x), \tag{4.61}$$

也可以写成

$$U^{-1}(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) = D(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x). \tag{4.62}$$

对于无穷小 Lorentz 变换，根据 (3.161) 式，在 x 处将 $\psi(\Lambda^{-1}x)$ 展开到 ω 的一阶项，得

$$\begin{aligned}\psi(\Lambda^{-1}x) &= \psi(x) - \omega^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}\partial_\mu\psi(x) = \psi(x) - \omega_{\mu\nu}x^{\nu}\partial^\mu\psi(x)\\ &= \psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\mathrm{i}(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu)\psi(x) = \psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}L^{\mu\nu}\psi(x),\end{aligned} \tag{4.63}$$

其中 $L^{\mu\nu}$ 是 (3.163) 式定义的微分算符。从而，(4.62) 式右边展开到 ω 一阶项的形式为

$$D(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x) = \left(\mathbf{1} - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right)\left[\psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}L^{\mu\nu}\psi(x)\right] = \psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(L^{\mu\nu} + S^{\mu\nu})\psi(x). \tag{4.64}$$

另一方面，根据 (3.10) 式将 (4.62) 式左边展开为

$$\begin{aligned}U^{-1}(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) &= \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}\right)\psi(x)\left(1 - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right)\\ &= \psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\psi(x)J^{\mu\nu} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}\psi(x) = \psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}[\psi(x), J^{\mu\nu}].\end{aligned} \tag{4.65}$$

两相比较，得到

$$[\psi(x), J^{\mu\nu}] = (L^{\mu\nu} + S^{\mu\nu})\psi(x). \tag{4.66}$$

$S^{\mu\nu}$ 纯空间分量的对偶三维矢量为

$$S^i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}S^{jk}, \quad \mathbf{S} = (S^{23}, S^{31}, S^{12}). \tag{4.67}$$

可以从 Lorentz 代数关系 (4.11) 推出类似于 (3.39) 式的 SU(2) 代数关系 $[S^i, S^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}S^k$，因而 S^i 是 SU(2) 群某个线性表示的生成元。根据 (3.35) 和 (3.166) 式，将 (4.66) 式的纯空间分量改写为

$$[\psi(x), \mathbf{J}] = (\mathbf{L} + \mathbf{S})\psi(x). \tag{4.68}$$

上式表明，除了轨道角动量 $\mathbf{L}$，总角动量算符 $\mathbf{J}$ 还生成了由 $\mathbf{S}$ 描述的*自旋角动量*。

利用 Pauli 矩阵 (3.46)，可以将 Dirac 矩阵表示成 2×2 分块形式：

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} & \sigma^i\\ -\sigma^i & \end{pmatrix}, \tag{4.69}$$

其中 $\mathbf{1}$ 表示 2×2 单位矩阵。容易验证，这样表示的 Dirac 矩阵符合 (4.5) 式，而且满足反对易关系 (4.1)：

$$\{\gamma^0,\gamma^0\} = 2\begin{pmatrix} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \\ & \mathbf{1}\end{pmatrix} = 2g^{00}, \tag{4.70}$$

$$\{\gamma^0,\gamma^i\} = \begin{pmatrix} -\sigma^i & \\ & \sigma^i\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma^i & \\ & -\sigma^i\end{pmatrix} = 0 = 2g^{0i}, \tag{4.71}$$

$$\{\gamma^i,\gamma^j\} = \begin{pmatrix} -\sigma^i\sigma^j-\sigma^j\sigma^i & \\ & -\sigma^i\sigma^j-\sigma^j\sigma^i\end{pmatrix} = -2\delta^{ij}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \\ & \mathbf{1}\end{pmatrix} = 2g^{ij}. \tag{4.72}$$

实际上，Dirac 矩阵有多种表示方式，(4.69) 式这种表示方式称为 **Weyl 表象**，也称为**手征表象** (chiral representation)。

Dirac 矩阵的所有表示方式都是等价的，彼此通过相似变换联系起来。如果 γ^μ 满足反对易关系 (4.1)，那么作相似变换后，$\gamma'^\mu \equiv U^{-1}\gamma^\mu U$ 也满足这个反对易关系：

$$\{\gamma'^\mu,\gamma'^\nu\} = U^{-1}\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}U = 2g^{\mu\nu}U^{-1}U = 2g^{\mu\nu}. \tag{4.73}$$

在 Weyl 表象中，根据 Pauli 矩阵的乘积关系 (3.48)，γ^5 的具体形式为

$$\begin{aligned}\gamma^5 &= \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \mathrm{i}\begin{pmatrix} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \sigma^1\\ -\sigma^1 & \end{pmatrix}\gamma^2\gamma^3 = \mathrm{i}\begin{pmatrix} -\sigma^1 & \\ & \sigma^1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \sigma^2\\ -\sigma^2 & \end{pmatrix}\gamma^3\\ &= \mathrm{i}\begin{pmatrix} & -\mathrm{i}\sigma^3\\ -\mathrm{i}\sigma^3 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \sigma^3\\ -\sigma^3 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & \\ & \mathbf{1}\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{4.74}$$

用 2×2 单位矩阵 $\mathbf{1}$ 和 Pauli 矩阵定义

$$\sigma^\mu \equiv (\mathbf{1},\boldsymbol{\sigma}), \quad \bar\sigma^\mu \equiv (\mathbf{1},-\boldsymbol{\sigma}), \tag{4.75}$$

那么，Dirac 矩阵表达式 (4.69) 可以简洁地归纳成

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} & \sigma^\mu\\ \bar\sigma^\mu & \end{pmatrix}. \tag{4.76}$$

生成元矩阵表达为

$$S^{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu] = \frac{\mathrm{i}}{4}\begin{pmatrix} \sigma^\mu\bar\sigma^\nu-\sigma^\nu\bar\sigma^\mu & \\ & \bar\sigma^\mu\sigma^\nu-\bar\sigma^\nu\sigma^\mu\end{pmatrix}. \tag{4.77}$$

利用 (3.50) 式将 $S^{\mu\nu}$ 的空间分量化为

$$S^{ij} = \frac{\mathrm{i}}{4}\begin{pmatrix} -\sigma^i\sigma^j+\sigma^j\sigma^i & \\ & -\sigma^i\sigma^j+\sigma^j\sigma^i\end{pmatrix}$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{4}\begin{pmatrix} -2\mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\sigma^k & \\ & -2\mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\sigma^k \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\begin{pmatrix} \sigma^k & \\ & \sigma^k \end{pmatrix}, \tag{4.78}$$

从 Pauli 矩阵的厄米性可知，S^{ij} 是厄米矩阵，

$$(S^{ij})^\dagger = S^{ij}. \tag{4.79}$$

由 (1.99) 式得自旋角动量矩阵

$$S^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}S^{jk} = \frac{1}{4}\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{jkl}\begin{pmatrix} \sigma^l & \\ & \sigma^l \end{pmatrix} = \frac{1}{4}2\delta^{il}\begin{pmatrix} \sigma^l & \\ & \sigma^l \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma^i & \\ & \sigma^i \end{pmatrix}, \tag{4.80}$$

即 S^i 是两个 SU(2) 群基础表示生成元 (3.45) 的直和，因此 S^i 所属 SU(2) 群线性表示是两个 SU(2) 基础表示的直和。于是，自旋角动量矩阵 $\mathbf{S}$ 的平方为

$$\mathbf{S}^2 = S^iS^i = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sigma^i\sigma^i & \\ & \sigma^i\sigma^i \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \\ & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) = s(s+1). \tag{4.81}$$

上式最后两步省略了 4×4 单位矩阵。可见，Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的自旋量子数是

$$s = \frac{1}{2}. \tag{4.82}$$

量子化之后，$\psi(x)$ 描述**自旋为 1/2** 的粒子。

4.3　Dirac 方程

为了写下 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的 Lorentz 不变拉氏量，我们需要结合两个旋量场来得到 Lorentz 标量。在 Weyl 表象中，$S^{\mu\nu}$ 的 $0i$ 分量为

$$S^{0i} = \frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^0,\gamma^i] = \frac{\mathrm{i}}{2}\gamma^0\gamma^i = \frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} -\sigma^i & \\ & \sigma^i \end{pmatrix}. \tag{4.83}$$

由 Pauli 矩阵的厄米性得

$$(S^{0i})^\dagger = -\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} -(\sigma^i)^\dagger & \\ & (\sigma^i)^\dagger \end{pmatrix} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} -\sigma^i & \\ & \sigma^i \end{pmatrix} = -S^{0i}. \tag{4.84}$$

可见，S^{0i} 不是厄米矩阵，而是反厄米矩阵。于是，当 $\omega_{0i}\neq 0$ 时，

$$D^\dagger(\Lambda) = \left[\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right)\right]^\dagger = \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})^\dagger\right] \neq \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right) = D^{-1}(\Lambda), \tag{4.85}$$

即 $D(\Lambda)$ 不是幺正矩阵。因此，$\psi^\dagger(x)\psi(x)$ 不是 Lorentz 标量：

$$\psi'^\dagger(x')\psi'(x') = \psi^\dagger(x)D^\dagger(\Lambda)D(\Lambda)\psi(x) \neq \psi^\dagger(x)\psi(x). \tag{4.86}$$

根据 (4.5) 式，有

$$(\gamma^0)^\dagger\gamma^0 = \gamma^0\gamma^0, \quad (\gamma^i)^\dagger\gamma^0 = -\gamma^i\gamma^0 = \gamma^0\gamma^i. \tag{4.87}$$

将这两条式子合起来写成一条常用的公式

$$(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\mu. \tag{4.88}$$

从而

$$(S^{\mu\nu})^\dagger\gamma^0 = -\frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]^\dagger\gamma^0 = -\frac{\mathrm{i}}{4}[(\gamma^\nu)^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger - (\gamma^\mu)^\dagger(\gamma^\nu)^\dagger]\gamma^0 = -\frac{\mathrm{i}}{4}\gamma^0(\gamma^\nu\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma^\nu) = \gamma^0 S^{\mu\nu}, \tag{4.89}$$

于是

$$\begin{aligned} D^\dagger(\Lambda)\gamma^0 &= \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})^\dagger\right]\gamma^0 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})^\dagger\right]^n\gamma^0 = \gamma^0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right)^n \\ &= \gamma^0\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right) = \gamma^0 D^{-1}(\Lambda). \end{aligned} \tag{4.90}$$

根据上式，定义 $\psi(x)$ 的 **Dirac 共轭**

$$\bar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x)\gamma^0, \tag{4.91}$$

则相应的 Lorentz 变换为

$$\bar{\psi}'(x') = \psi'^\dagger(x')\gamma^0 = \psi^\dagger(x)D^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \psi^\dagger(x)\gamma^0 D^{-1}(\Lambda) = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda). \tag{4.92}$$

这样一来，$\bar{\psi}(x)\psi(x)$ 就是一个 Lorentz 标量：

$$\bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)D(\Lambda)\psi(x) = \bar{\psi}(x)\psi(x). \tag{4.93}$$

$\bar{\psi}(x)\psi(x)$ 这种形式的量称为**旋量双线性型** (spinor bilinear)，利用 $\bar{\psi}(x)$ 还能构造 Lorentz 协变的其它旋量双线性型。$\bar{\psi}(x)\mathrm{i}\gamma^5\psi(x)$ 是一个 Lorentz 标量，

$$\bar{\psi}'(x')\mathrm{i}\gamma^5\psi'(x') = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)\mathrm{i}\gamma^5 D(\Lambda)\psi(x) = \bar{\psi}(x)\mathrm{i}\gamma^5\psi(x). \tag{4.94}$$

$\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ 和 $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)$ 都是 Lorentz 矢量，

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda)\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x), \tag{4.95}$$

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\gamma^5\psi'(x') = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu\gamma^5 D(\Lambda)\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\gamma^5\psi(x). \tag{4.96}$$

$\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)$ 是一个 2 阶反对称 Lorentz 张量，

$$\bar{\psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'(x') = \bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda)\sigma^{\mu\nu}D(\Lambda)\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\bar{\psi}(x)\sigma^{\rho\sigma}\psi(x). \tag{4.97}$$

如果将 $\psi(x)$ 看作旋量空间中的列矢量，则 $\psi^\dagger(x)$ 和 $\bar\psi(x)$ 都是行矢量，因而这些旋量双线性型都只是旋量空间中的 1×1 矩阵，也就是数。由 γ^0 和 γ^5 的厄米性及 (4.41)、(4.88) 式可知，这些旋量双线性型都是厄米的，也就是说，都是实数：

$$(\bar\psi\psi)^\dagger = (\psi^\dagger\gamma^0\psi)^\dagger = \psi^\dagger\gamma^0\psi = \bar\psi\psi, \tag{4.98}$$

$$(\bar\psi \mathrm{i}\gamma^5\psi)^\dagger = -\mathrm{i}\psi^\dagger\gamma^5\gamma^0\psi = \mathrm{i}\psi^\dagger\gamma^0\gamma^5\psi = \bar\psi\mathrm{i}\gamma^5\psi, \tag{4.99}$$

$$(\bar\psi\gamma^\mu\psi)^\dagger = \psi^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\psi = \bar\psi\gamma^\mu\psi, \tag{4.100}$$

$$(\bar\psi\gamma^\mu\gamma^5\psi)^\dagger = \psi^\dagger\gamma^5(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^5\gamma^0\gamma^\mu\psi = -\psi^\dagger\gamma^0\gamma^5\gamma^\mu\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\gamma^5\psi = \bar\psi\gamma^\mu\gamma^5\psi, \tag{4.101}$$

$$(\bar\psi\sigma^{\mu\nu}\psi)^\dagger = -\frac{\mathrm{i}}{2}\psi^\dagger[(\gamma^\nu)^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger - (\gamma^\mu)^\dagger(\gamma^\nu)^\dagger]\gamma^0\psi = -\frac{\mathrm{i}}{2}\psi^\dagger\gamma^0(\gamma^\nu\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma^\nu)\psi = \bar\psi\sigma^{\mu\nu}\psi. \tag{4.102}$$

量子化之后，这五个旋量双线性型成为厄米算符。

此外，包含时空导数的旋量双线性型 $\bar\psi(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x)$ 是 Lorentz 标量，

$$\begin{aligned}\bar\psi'(x')\gamma^\mu\partial'_\mu\psi'(x') &= \bar\psi(x)D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda)(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu\psi(x) = \bar\psi(x)\Lambda^\mu{}_\rho\gamma^\rho(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu\psi(x)\\ &= \bar\psi(x)\delta^\nu{}_\rho\gamma^\rho\partial_\nu\psi(x) = \bar\psi(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x).\end{aligned} \tag{4.103}$$

利用 $\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ 和 $\bar\psi\psi$ 写下自由 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的 *Lorentz* 不变拉氏量

$$\mathcal{L} = \mathrm{i}\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar\psi\psi, \tag{4.104}$$

其中 $m>0$ 是 Dirac 旋量场的质量。于是，

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} = \mathrm{i}\bar\psi\gamma^\mu, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = -m\bar\psi. \tag{4.105}$$

Euler-Lagrange 方程 (1.143) 给出

$$0 = \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = \mathrm{i}(\partial_\mu\bar\psi)\gamma^\mu + m\bar\psi. \tag{4.106}$$

对上式取厄米共轭，得到

$$0 = -\mathrm{i}(\gamma^\mu)^\dagger\partial_\mu(\psi^\dagger\gamma^0)^\dagger + m(\psi^\dagger\gamma^0)^\dagger = -\mathrm{i}(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0\partial_\mu\psi + m\gamma^0\psi = -\gamma^0(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi, \tag{4.107}$$

故 $\psi(x)$ 的经典运动方程为

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0. \tag{4.108}$$

上式就是 **Dirac 方程** [3]，标明旋量指标的形式为

$$[\mathrm{i}(\gamma^\mu)_{ab}\partial_\mu - m\delta_{ab}]\psi_b(x) = 0. \tag{4.109}$$

容易验证，Dirac 方程具有 Lorentz 协变性：

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial'_\mu - m)\psi'(x') = [\mathrm{i}\gamma^\mu(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu - m]D(\Lambda)\psi(x) = D(\Lambda)[\mathrm{i}D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda)(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu - m]\psi(x)$$

$$= D(\Lambda)[\mathrm{i}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\gamma^{\rho}(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu}\partial_{\nu} - m]\psi(x) = D(\Lambda)(\mathrm{i}\delta^{\nu}{}_{\rho}\gamma^{\rho}\partial_{\nu} - m)\psi(x)$$
$$= D(\Lambda)(\mathrm{i}\gamma^{\nu}\partial_{\nu} - m)\psi(x) = 0. \tag{4.110}$$

对 Dirac 方程 (4.108) 左边乘以 $(-\mathrm{i}\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)$，利用反对易关系 (4.1)，得

$$0 = (-\mathrm{i}\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)(\mathrm{i}\gamma^{\nu}\partial_{\nu} - m)\psi = (\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu} + m^2)\psi = \left[\frac{1}{2}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}(\partial_{\mu}\partial_{\nu} + \partial_{\nu}\partial_{\mu}) + m^2\right]\psi$$
$$= \left[\frac{1}{2}(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu})\partial_{\mu}\partial_{\nu} + m^2\right]\psi = (g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu} + m^2)\psi = (\partial^2 + m^2)\psi. \tag{4.111}$$

也就是说，自由的 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 满足 *Klein-Gordon 方程*

$$(\partial^2 + m^2)\psi(x) = 0. \tag{4.112}$$

(4.77) 式表明，旋量表示的生成元矩阵 $S^{\mu\nu}$ 在 Weyl 表象中是分块对角的，因而可将旋量表示分解为两个 2 维表示的直和。相应地，可以把具有 4 个分量的 Dirac 旋量场 ψ 分解为两个二分量旋量场 η_{L} 和 η_{R}：

$$\psi = \begin{pmatrix} \eta_{\mathrm{L}} \\ \eta_{\mathrm{R}} \end{pmatrix}. \tag{4.113}$$

这样的二分量旋量称为 **Weyl 旋量**，其中，η_{L} 称为**左手** (left-handed) Weyl 旋量，η_{R} 称为**右手** (right-handed) Weyl 旋量。

利用 (4.76) 式将 Dirac 方程 (4.108) 化为

$$0 = (\mathrm{i}\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi = \begin{pmatrix} -m & \mathrm{i}\sigma^{\mu}\partial_{\mu} \\ \mathrm{i}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu} & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_{\mathrm{L}} \\ \eta_{\mathrm{R}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\eta_{\mathrm{R}} - m\eta_{\mathrm{L}} \\ \mathrm{i}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\eta_{\mathrm{L}} - m\eta_{\mathrm{R}} \end{pmatrix}, \tag{4.114}$$

即

$$\begin{cases} \mathrm{i}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\eta_{\mathrm{L}} - m\eta_{\mathrm{R}} = 0, \\ \mathrm{i}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\eta_{\mathrm{R}} - m\eta_{\mathrm{L}} = 0. \end{cases} \tag{4.115}$$

这是两个相互耦合的方程。如果 $m = 0$，两个方程就各自独立了：

$$\mathrm{i}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\eta_{\mathrm{L}} = 0, \quad \mathrm{i}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\eta_{\mathrm{R}} = 0. \tag{4.116}$$

这两个独立方程称为 **Weyl 方程** [18]。可见，非零质量 m 的存在将左手和右手 Weyl 旋量场耦合起来。自旋角动量矩阵 S^i 的直和分解 (4.80) 表明，左手和右手 Weyl 旋量各自对应于一个 SU(2) 群基础表示。当 $m = 0$ 时，量子化之后的 $\eta_{\mathrm{L}}(x)$ 和 $\eta_{\mathrm{R}}(x)$ 各自描述自旋为 1/2 的粒子。

4.4 Dirac 旋量场的平面波展开

4.4.1 平面波解的一般形式

本小节讨论与表象选取无关的平面波解一般形式。

自由 Dirac 旋量场 $\psi_a(x)$ 满足 Klein-Gordon 方程 (4.112)，因而在无界空间中具有平面波解。对于确定的动量 $\mathbf{k}$，我们假设 Dirac 方程具有如下形式的平面波解：

$$\varphi_a(x,\mathbf{k}) = w_a(k^0,\mathbf{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}. \tag{4.117}$$

其中，系数 $w_a(k^0,\mathbf{k})$ 是四分量旋量，带着一个旋量指标 a。隐去旋量指标，将这个平面波解代入到 Dirac 方程 (4.108) 中，得到

$$0 = (\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\varphi(x,\mathbf{k}) = (\gamma^\mu k_\mu - m)w(k^0,\mathbf{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} = (k^0\gamma^0 - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma} - m)w(k^0,\mathbf{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}. \tag{4.118}$$

因此

$$(k^0\gamma^0 - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma} - m)w(k^0,\mathbf{k}) = 0. \tag{4.119}$$

对上式左乘 γ^0，得

$$[k^0 - \gamma^0(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}) - m\gamma^0]w(k^0,\mathbf{k}) = 0. \tag{4.120}$$

移项，将上式化为

$$[\gamma^0(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}) + m\gamma^0]w(k^0,\mathbf{k}) = k^0 w(k^0,\mathbf{k}). \tag{4.121}$$

这是矩阵 $[\gamma^0(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma})+m\gamma^0]$ 的*本征值方程*，具有非平庸解的条件是特征多项式 $\det[k^0-\gamma^0(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma})-m\gamma^0]$ 为零，即

$$\det[k^0 - \gamma^0(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}) - m\gamma^0] = 0. \tag{4.122}$$

这个方程的根给出 k^0 的本征值，相应的非平庸解是本征矢量。

利用 $(\gamma^0)^2 = \mathbf{1}$，将方程 (4.122) 化为

$$0 = \det[k^0\mathbf{1} - \gamma^0(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}) - m\gamma^0] = \det[\gamma^0(k^0\gamma^0 - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma} - m)] = \det(\gamma^0)\det(k^0\gamma^0 - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma} - m). \tag{4.123}$$

因而方程 (4.122) 等价于

$$\det(k^0\gamma^0 - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma} - m) = 0. \tag{4.124}$$

利用 $(\gamma^5)^2 = \mathbf{1}$，将上式左边化为

$$\begin{aligned}\det(k^0\gamma^0 - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma} - m) &= \det[(\gamma^5)^2(k^0\gamma^0 - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma} - m)] = \det[\gamma^5(k^0\gamma^0 - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma} - m)\gamma^5] \\ &= \det[(\gamma^5)^2(-k^0\gamma^0 + \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma} - m)] = \det[-(k^0\gamma^0 - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}) - m].\end{aligned} \tag{4.125}$$

这里第二步用到行列式性质

$$\det(AB) = \det(BA), \tag{4.126}$$

第三步用到 γ^5 与 γ^μ 反对易的性质 (4.41)。由反对易关系 (4.1) 有

$$(k_\mu\gamma^\mu)^2 = k_\mu k_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu = \frac{1}{2}k_\mu k_\nu(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu) = k_\mu k_\nu g^{\mu\nu}\,\mathbf{1} = k^2\,\mathbf{1} = [(k^0)^2 - |\mathbf{k}|^2]\,\mathbf{1}. \tag{4.127}$$

从而，

$$[\det(k^0\gamma^0 - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma} - m)]^2 = \det[(k^0\gamma^0 - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}) - m]\det[-(k^0\gamma^0 - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}) - m]$$

$$
\begin{aligned}
&= \det(k_\mu\gamma^\mu - m)\det(-k_\nu\gamma^\nu - m) = \det[(k_\mu\gamma^\mu - m)(-k_\nu\gamma^\nu - m)] \\
&= \det[-(k_\mu\gamma^\mu)^2 + m^2] = \det\{[-(k^0)^2 + |\mathbf{k}|^2 + m^2]\,\mathbf{1}\} \\
&= [-(k^0)^2 + |\mathbf{k}|^2 + m^2]^4 = [E_{\mathbf{k}}^2 - (k^0)^2]^4, \qquad (4.128)
\end{aligned}
$$

其中 $E_{\mathbf{k}} \equiv \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}$。于是，方程 (4.124) 化为

$$
0 = \det(k^0\gamma^0 - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma} - m) = [E_{\mathbf{k}}^2 - (k^0)^2]^2 = (E_{\mathbf{k}} + k^0)^2(E_{\mathbf{k}} - k^0)^2. \qquad (4.129)
$$

这个方程有 2 个根 $k^0 = \pm E_{\mathbf{k}}$；这 2 个根都是 2 重根，各自对应于 2 个线性独立的本征矢量；一共有 4 个线性独立的本征矢量。

(1) $k^0 = E_{\mathbf{k}}$ 对应于 2 个本征矢量

$$
w^{(+)}(E_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}, \sigma), \quad \sigma = 1, 2. \qquad (4.130)
$$

因而平面波解中有 2 个正能解，形式为

$$
w^{(+)}(E_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}, \sigma)\exp[-\mathrm{i}(E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})], \quad \sigma = 1, 2. \qquad (4.131)
$$

(2) $k^0 = -E_{\mathbf{k}}$ 对应于 2 个本征矢量

$$
w^{(-)}(-E_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}, \sigma), \quad \sigma = 1, 2. \qquad (4.132)
$$

因而平面波解中有 2 个负能解，形式为

$$
w^{(-)}(-E_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}, \sigma)\exp[\mathrm{i}(E_{\mathbf{k}}t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})], \quad \sigma = 1, 2. \qquad (4.133)
$$

将这 4 个本征矢量的正交归一关系取为

$$
\begin{aligned}
w^{(+)\dagger}(E_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}, \sigma)\, w^{(+)}(E_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}, \sigma') &= 2E_{\mathbf{k}}\delta_{\sigma\sigma'}, \quad w^{(-)\dagger}(-E_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}, \sigma)\, w^{(-)}(-E_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}, \sigma') = 2E_{\mathbf{k}}\delta_{\sigma\sigma'}, \\
w^{(+)\dagger}(E_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}, \sigma)\, w^{(-)}(-E_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}, \sigma') &= w^{(-)\dagger}(-E_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}, \sigma)\, w^{(+)}(E_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}, \sigma') = 0. \qquad (4.134)
\end{aligned}
$$

引入四分量旋量 $u(\mathbf{k}, \sigma)$ 和 $v(\mathbf{k}, \sigma)$，定义为

$$
u(\mathbf{k}, \sigma) \equiv w^{(+)}(E_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}, \sigma), \quad v(\mathbf{k}, \sigma) \equiv w^{(-)}(-E_{\mathbf{k}}, -\mathbf{k}, \sigma), \quad \sigma = 1, 2. \qquad (4.135)
$$

于是，Dirac 方程的正能解和负能解可以分别写作

$$
\begin{aligned}
\varphi^{(+)}(x, \mathbf{k}, \sigma) &\equiv w^{(+)}(E_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}, \sigma)\exp[-\mathrm{i}(E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})] = u(\mathbf{k}, \sigma)\exp[-\mathrm{i}(E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})], \qquad (4.136) \\
\varphi^{(-)}(x, \mathbf{k}, \sigma) &\equiv w^{(-)}(-E_{\mathbf{k}}, -\mathbf{k}, \sigma)\exp[\mathrm{i}(E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})] = v(\mathbf{k}, \sigma)\exp[\mathrm{i}(E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})]. \qquad (4.137)
\end{aligned}
$$

替换动量记号，得到

$$
\varphi^{(+)}(x, \mathbf{p}, \sigma) = u(\mathbf{p}, \sigma)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}, \quad \varphi^{(-)}(x, \mathbf{p}, \sigma) = v(\mathbf{p}, \sigma)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}, \quad p^0 = E_{\mathbf{p}} \equiv \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2} > 0\,. \qquad (4.138)
$$

从而，Dirac 旋量场算符 $\psi(\mathbf{x},t)$ 的平面波展开式可写作

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{x},t) &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\sigma=1}^{2}\left[\varphi^{(+)}(x,\mathbf{p},\sigma)\,c_{\mathbf{p},\sigma}+\varphi^{(-)}(x,\mathbf{p},\sigma)\,d^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}\right]\\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\sigma=1}^{2}\left[u(\mathbf{p},\sigma)c_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+v(\mathbf{p},\sigma)d^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right].\end{aligned} \tag{4.139}$$

其中，$c_{\mathbf{p},\sigma}$ 是湮灭算符，$d^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}$ 是产生算符，而且 $c_{\mathbf{p},\sigma}\neq d_{\mathbf{p},\sigma}$。**平面波旋量系数** $u(\mathbf{p},\sigma)$ 和 $v(\mathbf{p},\sigma)$ 的**正交归一关系**为

$$u^{\dagger}(\mathbf{p},\sigma)u(\mathbf{p},\sigma') = w^{(+)\dagger}(E_{\mathbf{p}},\mathbf{p},\sigma)\,w^{(+)}(E_{\mathbf{p}},\mathbf{p},\sigma') = 2E_{\mathbf{p}}\delta_{\sigma\sigma'}, \tag{4.140}$$

$$v^{\dagger}(\mathbf{p},\sigma)v(\mathbf{p},\sigma') = w^{(-)\dagger}(-E_{\mathbf{p}},-\mathbf{p},\sigma)\,w^{(-)}(-E_{\mathbf{p}},-\mathbf{p},\sigma') = 2E_{\mathbf{p}}\delta_{\sigma\sigma'}, \tag{4.141}$$

$$u^{\dagger}(\mathbf{p},\sigma)v(-\mathbf{p},\sigma') = w^{(+)\dagger}(E_{\mathbf{p}},\mathbf{p},\sigma)\,w^{(-)}(-E_{\mathbf{p}},\mathbf{p},\sigma') = 0. \tag{4.142}$$

4.4.2　Weyl 表象中的平面波解

本小节在 *Weyl* 表象中讨论 Dirac 方程的平面波解。

Dirac 旋量场描述自旋为 1/2 的有质量粒子，根据 3.1.3 小节讨论，这样的粒子具有 2 种自旋极化态，对应于螺旋度的 2 种本征值 $+1/2$ 和 $-1/2$。为便于表述，这里我们采用归一化的螺旋度本征值 $\lambda=\pm$。类似于矢量场情况，$\lambda=-$ 是左旋极化，$\lambda=+$ 是右旋极化。因此，无论是平面波正能解还是负能解，都能够以 2 种螺旋度本征态作为 2 个线性独立的本征矢量。

按照这个思路，把 2 个正能解表达为

$$\varphi^{(+)}(x,\mathbf{p},\lambda)=u(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x},\quad \lambda=\pm,\quad p^0=E_{\mathbf{p}}=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\,. \tag{4.143}$$

根据 Dirac 方程 (4.108)，有

$$0=(\mathrm{i}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)\varphi^{(+)}(x,\mathbf{p},\lambda)=(p_{\mu}\gamma^{\mu}-m)u(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{4.144}$$

即 $u(\mathbf{p},\lambda)$ 满足运动方程

$$(\not{p}-m)u(\mathbf{p},\lambda)=0, \tag{4.145}$$

其中 $\not{p}$ 的定义为

$$\not{p}\equiv p_{\mu}\gamma^{\mu}. \tag{4.146}$$

这种斜线记号称为 **Dirac 斜线** (slash)，是 Richard Feynman 引进的。

将四分量旋量 $u(\mathbf{p},\lambda)$ 分解为两个二分量旋量 $f_{\lambda}(\mathbf{p})$ 和 $g_{\lambda}(\mathbf{p})$，

$$u(\mathbf{p},\lambda)=\begin{pmatrix}f_{\lambda}(\mathbf{p})\\ g_{\lambda}(\mathbf{p})\end{pmatrix}, \tag{4.147}$$

那么，根据 Weyl 表象中的 Dirac 矩阵表达式 (4.76)，方程 (4.145) 化为

$$0=(\not{p}-m)u(\mathbf{p},\lambda)=\begin{pmatrix}-m & \sigma^{\mu}p_{\mu}\\ \bar{\sigma}^{\mu}p_{\mu} & -m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_{\lambda}(\mathbf{p})\\ g_{\lambda}(\mathbf{p})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{\mu}\sigma^{\mu}g_{\lambda}(\mathbf{p})-mf_{\lambda}(\mathbf{p})\\ p_{\mu}\bar{\sigma}^{\mu}f_{\lambda}(\mathbf{p})-mg_{\lambda}(\mathbf{p})\end{pmatrix}, \tag{4.148}$$

即

$$(p\cdot\sigma)g_\lambda(\mathbf{p})-mf_\lambda(\mathbf{p})=0, \tag{4.149}$$

$$(p\cdot\bar\sigma)f_\lambda(\mathbf{p})-mg_\lambda(\mathbf{p})=0. \tag{4.150}$$

由方程 (4.150) 得

$$g_\lambda(\mathbf{p})=\frac{p\cdot\bar\sigma}{m}\,f_\lambda(\mathbf{p}), \tag{4.151}$$

代入到方程 (4.149) 左边，推出

$$(p\cdot\sigma)g_\lambda(\mathbf{p})-mf_\lambda(\mathbf{p})=\frac{(p\cdot\sigma)(p\cdot\bar\sigma)}{m}\,f_\lambda(\mathbf{p})-mf_\lambda(\mathbf{p}). \tag{4.152}$$

为化简 $(p\cdot\sigma)(p\cdot\bar\sigma)$，将 (4.76) 式代入反对易关系 (4.1)，得

$$2g^{\mu\nu}\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \\ & \mathbf{1}\end{pmatrix}=\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=\begin{pmatrix}\sigma^\mu\bar\sigma^\nu+\sigma^\nu\bar\sigma^\mu & \\ & \bar\sigma^\mu\sigma^\nu+\bar\sigma^\nu\sigma^\mu\end{pmatrix}, \tag{4.153}$$

故

$$\sigma^\mu\bar\sigma^\nu+\sigma^\nu\bar\sigma^\mu=2g^{\mu\nu},\quad \bar\sigma^\mu\sigma^\nu+\bar\sigma^\nu\sigma^\mu=2g^{\mu\nu}. \tag{4.154}$$

因此，

$$(p\cdot\sigma)(p\cdot\bar\sigma)=p_\mu p_\nu\sigma^\mu\bar\sigma^\nu=\frac{1}{2}\,p_\mu p_\nu(\sigma^\mu\bar\sigma^\nu+\sigma^\nu\bar\sigma^\mu)=\frac{1}{2}\,p_\mu p_\nu 2g^{\mu\nu}=p^2=m^2, \tag{4.155}$$

从而 (4.152) 式变成

$$(p\cdot\sigma)g_\lambda(\mathbf{p})-mf_\lambda(\mathbf{p})=\frac{(p\cdot\sigma)(p\cdot\bar\sigma)}{m}\,f_\lambda(\mathbf{p})-mf_\lambda(\mathbf{p})=\frac{m^2}{m}\,f_\lambda(\mathbf{p})-mf_\lambda(\mathbf{p})=0. \tag{4.156}$$

可见，关系式 (4.151) 也符合方程 (4.149)。于是，任取非零 $f_\lambda(\mathbf{p})$ 都能使

$$u(\mathbf{p},\lambda)=\begin{pmatrix}f_\lambda(\mathbf{p})\\ \dfrac{p\cdot\bar\sigma}{m}\,f_\lambda(\mathbf{p})\end{pmatrix}, \tag{4.157}$$

满足运动方程 (4.145)。

在旋量表示中，螺旋度矩阵是自旋角动量矩阵 $\mathbf{S}$ 在动量 $\mathbf{p}$ 方向上的投影，即 $\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{S}$。对于 Weyl 表象，根据 (4.80) 式，有

$$\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{S}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma} & \\ & \hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}. \tag{4.158}$$

因而归一化螺旋度矩阵为

$$2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{S}=\begin{pmatrix}\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma} & \\ & \hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}. \tag{4.159}$$

上式的两个分块相同，因而左手和右手 Weyl 旋量对应的归一化螺旋度矩阵都是 $\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma}$，由 Pauli 矩阵的定义 (3.46) 得

$$\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma}=\frac{\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{|\mathbf{p}|}=\frac{1}{|\mathbf{p}|}\begin{pmatrix}p^3 & p^1-\mathrm{i}p^2\\ p^1+\mathrm{i}p^2 & -p^3\end{pmatrix}. \tag{4.160}$$

引入归一化螺旋度矩阵 $\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ 的本征矢量 $\xi_\lambda(\mathbf{p})$，称为**螺旋态**，满足本征值方程

$$(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_\lambda(\mathbf{p})=\lambda\,\xi_\lambda(\mathbf{p}),\quad \lambda=\pm. \tag{4.161}$$

求解这个方程，得到归一化本征矢量

$$\xi_+(\mathbf{p})=\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}}\begin{pmatrix}|\mathbf{p}|+p^3\\ p^1+\mathrm{i}p^2\end{pmatrix},\quad \xi_-(\mathbf{p})=\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}}\begin{pmatrix}-p^1+\mathrm{i}p^2\\ |\mathbf{p}|+p^3\end{pmatrix}, \tag{4.162}$$

这是螺旋态 $\xi_\lambda(\mathbf{p})$ 的具体形式。它们满足正交归一关系

$$\xi_\lambda^\dagger(\mathbf{p})\xi_{\lambda'}(\mathbf{p})=\delta_{\lambda\lambda'} \tag{4.163}$$

和完备性关系

$$\sum_{\lambda=\pm}\xi_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda^\dagger(\mathbf{p})=\mathbf{1}. \tag{4.164}$$

此外，由 $\hat{\mathbf{p}}=\mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ 得

$$(\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_\lambda(\mathbf{p})=\lambda|\mathbf{p}|\xi_\lambda(\mathbf{p}). \tag{4.165}$$

容易验证，(4.162) 式表达的螺旋态 $\xi_\lambda(\mathbf{p})$ 确实是 $\lambda=\pm$ 的本征态，

$$\begin{aligned}(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_+(\mathbf{p}) &= \frac{1}{|\mathbf{p}|\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}}\begin{pmatrix}p^3 & p^1-\mathrm{i}p^2\\ p^1+\mathrm{i}p^2 & -p^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|\mathbf{p}|+p^3\\ p^1+\mathrm{i}p^2\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{|\mathbf{p}|\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}}\begin{pmatrix}p^3(|\mathbf{p}|+p^3)+(p^1-\mathrm{i}p^2)(p^1+\mathrm{i}p^2)\\ (p^1+\mathrm{i}p^2)(|\mathbf{p}|+p^3)-p^3(p^1+\mathrm{i}p^2)\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{|\mathbf{p}|\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}}\begin{pmatrix}p^3|\mathbf{p}|+|\mathbf{p}|^2\\ (p^1+\mathrm{i}p^2)|\mathbf{p}|\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}}\begin{pmatrix}p^3+|\mathbf{p}|\\ p^1+\mathrm{i}p^2\end{pmatrix}\\ &= +\xi_+(\mathbf{p}),\end{aligned} \tag{4.166}$$

$$\begin{aligned}(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_-(\mathbf{p}) &= \frac{1}{|\mathbf{p}|\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}}\begin{pmatrix}p^3 & p^1-\mathrm{i}p^2\\ p^1+\mathrm{i}p^2 & -p^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-p^1+\mathrm{i}p^2\\ |\mathbf{p}|+p^3\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{|\mathbf{p}|\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}}\begin{pmatrix}-p^3(p^1-\mathrm{i}p^2)+(p^1-\mathrm{i}p^2)(|\mathbf{p}|+p^3)\\ (p^1+\mathrm{i}p^2)(-p^1+\mathrm{i}p^2)-p^3(|\mathbf{p}|+p^3)\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{|\mathbf{p}|\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}}\begin{pmatrix}(p^1-\mathrm{i}p^2)|\mathbf{p}|\\ -|\mathbf{p}|^2-p^3|\mathbf{p}|\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}}\begin{pmatrix}p^1-\mathrm{i}p^2\\ -|\mathbf{p}|-p^3\end{pmatrix}\\ &= -\xi_-(\mathbf{p}).\end{aligned} \tag{4.167}$$

而且符合正交归一关系 (4.163)，

$$\begin{aligned}\xi_+^\dagger(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p}) &= \frac{1}{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}\begin{pmatrix}|\mathbf{p}|+p^3 & p^1-\mathrm{i}p^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|\mathbf{p}|+p^3\\ p^1+\mathrm{i}p^2\end{pmatrix}\\ &= \frac{(|\mathbf{p}|+p^3)^2+|p^1+\mathrm{i}p^2|^2}{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)} = \frac{2|\mathbf{p}|^2+2p^3|\mathbf{p}|}{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)} = 1, \qquad (4.168)\\ \xi_-^\dagger(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) &= \frac{1}{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}\begin{pmatrix}-p^1-\mathrm{i}p^2 & |\mathbf{p}|+p^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-p^1+\mathrm{i}p^2\\ |\mathbf{p}|+p^3\end{pmatrix}\\ &= \frac{|-p^1+\mathrm{i}p^2|^2+(|\mathbf{p}|+p^3)^2}{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)} = \frac{2|\mathbf{p}|^2+2p^3|\mathbf{p}|}{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)} = 1, \qquad (4.169)\\ \xi_+^\dagger(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p}) &= \frac{1}{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}\begin{pmatrix}|\mathbf{p}|+p^3 & p^1-\mathrm{i}p^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-p^1+\mathrm{i}p^2\\ |\mathbf{p}|+p^3\end{pmatrix}\\ &= \frac{-(|\mathbf{p}|+p^3)(p^1-\mathrm{i}p^2)+(|\mathbf{p}|+p^3)(p^1-\mathrm{i}p^2)}{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)} = 0. \qquad (4.170)\end{aligned}$$

也满足完备性关系 (4.164)，

$$\begin{aligned}&\sum_{\lambda=\pm}\xi_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda^\dagger(\mathbf{p}) = \xi_+(\mathbf{p})\xi_+^\dagger(\mathbf{p})+\xi_-(\mathbf{p})\xi_-^\dagger(\mathbf{p})\\ =\ &\frac{1}{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}\begin{pmatrix}(|\mathbf{p}|+p^3)^2+|-p^1+\mathrm{i}p^2|^2 & (|\mathbf{p}|+p^3)(p^1-\mathrm{i}p^2)+(|\mathbf{p}|+p^3)(-p^1+\mathrm{i}p^2)\\ (|\mathbf{p}|+p^3)(p^1+\mathrm{i}p^2)+(|\mathbf{p}|+p^3)(-p^1-\mathrm{i}p^2) & |p^1+\mathrm{i}p^2|^2+(|\mathbf{p}|+p^3)^2\end{pmatrix}\\ =\ &\frac{1}{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}\begin{pmatrix}2|\mathbf{p}|^2+2p^3|\mathbf{p}| & \\ & 2|\mathbf{p}|^2+2p^3|\mathbf{p}|\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix} = \mathbf{1}. \qquad (4.171)\end{aligned}$$

为了让 $u(\mathbf{p},\lambda)$ 作为螺旋度本征态，我们设 $f_\lambda(\mathbf{p})$ 正比于 $\xi_\lambda(\mathbf{p})$，

$$f_\lambda(\mathbf{p}) = C_\lambda\,\xi_\lambda(\mathbf{p}). \qquad (4.172)$$

利用 (4.165) 式，将 (4.157) 式化为

$$u(\mathbf{p},\lambda) = \begin{pmatrix}f_\lambda(\mathbf{p})\\ \dfrac{p\cdot\bar\sigma}{m}f_\lambda(\mathbf{p})\end{pmatrix} = C_\lambda\begin{pmatrix}\xi_\lambda(\mathbf{p})\\ \dfrac{E_\mathbf{p}+\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{m}\xi_\lambda(\mathbf{p})\end{pmatrix} = C_\lambda\begin{pmatrix}\xi_\lambda(\mathbf{p})\\ \dfrac{E_\mathbf{p}+\lambda|\mathbf{p}|}{m}\xi_\lambda(\mathbf{p})\end{pmatrix}. \qquad (4.173)$$

为了使 $u(\mathbf{p},\lambda)$ 满足归一关系 (4.140)，我们取

$$C_\lambda = \sqrt{E_\mathbf{p}-\lambda|\mathbf{p}|}\,, \qquad (4.174)$$

则由

$$\sqrt{(E_\mathbf{p}+\lambda|\mathbf{p}|)(E_\mathbf{p}-\lambda|\mathbf{p}|)} = \sqrt{E_\mathbf{p}^2-\lambda^2|\mathbf{p}|^2} = \sqrt{E_\mathbf{p}^2-|\mathbf{p}|^2} = m \qquad (4.175)$$

有

$$C_\lambda\frac{E_\mathbf{p}+\lambda|\mathbf{p}|}{m} = \sqrt{E_\mathbf{p}-\lambda|\mathbf{p}|}\,\frac{E_\mathbf{p}+\lambda|\mathbf{p}|}{m} = \frac{\sqrt{E_\mathbf{p}+\lambda|\mathbf{p}|}}{m}\sqrt{(E_\mathbf{p}+\lambda|\mathbf{p}|)(E_\mathbf{p}-\lambda|\mathbf{p}|)}$$

$$= \sqrt{E_{\mathbf{p}} + \lambda|\mathbf{p}|}\,. \tag{4.176}$$

于是得到 $\boldsymbol{u}(\mathbf{p},\lambda)$ 的螺旋态表达式

$$u(\mathbf{p},\lambda) = \begin{pmatrix} \sqrt{E_{\mathbf{p}} - \lambda|\mathbf{p}|}\,\xi_\lambda(\mathbf{p}) \\ \sqrt{E_{\mathbf{p}} + \lambda|\mathbf{p}|}\,\xi_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p}) \\ \omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \tag{4.177}$$

其中，$\omega_\lambda(\mathbf{p})$ 定义为

$$\omega_\lambda(\mathbf{p}) \equiv \sqrt{E_{\mathbf{p}} + \lambda|\mathbf{p}|}\,, \tag{4.178}$$

它是关于 $\mathbf{p}$ 的偶函数，

$$\omega_\lambda(-\mathbf{p}) = \omega_\lambda(\mathbf{p}). \tag{4.179}$$

这样的话，根据 (4.159) 式，$u(\mathbf{p},\lambda)$ 是螺旋度本征态，本征值为 λ：

$$(2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{S})u(\mathbf{p},\lambda) = \begin{pmatrix} \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\,(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_\lambda(\mathbf{p}) \\ \omega_\lambda(\mathbf{p})\,(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p}) \\ \omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \lambda\, u(\mathbf{p},\lambda). \tag{4.180}$$

另一方面，将 2 个负能解表达为

$$\varphi^{(-)}(x,\mathbf{p},\lambda) = v(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}, \quad \lambda = \pm, \quad p^0 = E_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}\,. \tag{4.181}$$

根据 Dirac 方程 (4.108)，有

$$0 = (\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\varphi^{(-)}(x,\mathbf{p},\lambda) = (-p_\mu\gamma^\mu - m)v(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{4.182}$$

即 $v(\mathbf{p},\lambda)$ 满足运动方程

$$(\not{p} + m)v(\mathbf{p},\lambda) = 0. \tag{4.183}$$

同样，将四分量旋量 $v(\mathbf{p},\lambda)$ 分解为两个二分量旋量 $\tilde{f}_\lambda(\mathbf{p})$ 和 $\tilde{g}_\lambda(\mathbf{p})$，

$$v(\mathbf{p},\lambda) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_\lambda(\mathbf{p}) \\ \tilde{g}_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \tag{4.184}$$

则有

$$0 = (\not{p} + m)v(\mathbf{p},\lambda) = \begin{pmatrix} m & \sigma^\mu p_\mu \\ \bar{\sigma}^\mu p_\mu & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{f}_\lambda(\mathbf{p}) \\ \tilde{g}_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_\mu\sigma^\mu\tilde{g}_\lambda(\mathbf{p}) + m\tilde{f}_\lambda(\mathbf{p}) \\ p_\mu\bar{\sigma}^\mu\tilde{f}_\lambda(\mathbf{p}) + m\tilde{g}_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \tag{4.185}$$

即

$$(p\cdot\sigma)\tilde{g}_\lambda(\mathbf{p}) + m\tilde{f}_\lambda(\mathbf{p}) = 0, \tag{4.186}$$

$$(p\cdot\bar{\sigma})\tilde{f}_\lambda(\mathbf{p}) + m\tilde{g}_\lambda(\mathbf{p}) = 0. \tag{4.187}$$

由方程 (4.187) 得

$$\tilde{g}_\lambda(\mathbf{p}) = -\frac{p\cdot\bar{\sigma}}{m}\,\tilde{f}_\lambda(\mathbf{p}), \tag{4.188}$$

代入到方程 (4.186) 左边，由 (4.155) 式推出

$$(p\cdot\sigma)\tilde{g}_\lambda(\mathbf{p})+m\tilde{f}_\lambda(\mathbf{p})=-\frac{(p\cdot\sigma)(p\cdot\bar{\sigma})}{m}\,\tilde{f}_\lambda(\mathbf{p})+m\tilde{f}_\lambda(\mathbf{p})=-\frac{m^2}{m}\,\tilde{f}_\lambda(\mathbf{p})+m\tilde{f}_\lambda(\mathbf{p})=0. \tag{4.189}$$

可见，关系式 (4.188) 符合方程 (4.186)。于是，任取非零 $\tilde{f}_\lambda(\mathbf{p})$ 都能使

$$v(\mathbf{p},\lambda)=\begin{pmatrix}\tilde{f}_\lambda(\mathbf{p})\\ -\dfrac{p\cdot\bar{\sigma}}{m}\,\tilde{f}_\lambda(\mathbf{p})\end{pmatrix}, \tag{4.190}$$

满足运动方程 (4.183)。

为了让 $v(\mathbf{p},\lambda)$ 作为螺旋度本征态，我们设 $\tilde{f}_\lambda(\mathbf{p})$ 正比于 $\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})$，

$$\tilde{f}_\lambda(\mathbf{p})=\tilde{C}_\lambda\,\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}). \tag{4.191}$$

在这里我们没有选择让 $\tilde{f}_\lambda(\mathbf{p})$ 正比于 $\xi_\lambda(\mathbf{p})$，原因将在 4.5.4 小节中说明，现在姑且接受这种选择。从而，

$$v(\mathbf{p},\lambda)=\begin{pmatrix}\tilde{f}_\lambda(\mathbf{p})\\ -\dfrac{p\cdot\bar{\sigma}}{m}\,\tilde{f}_\lambda(\mathbf{p})\end{pmatrix}=\tilde{C}_\lambda\begin{pmatrix}\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\\ -\dfrac{E_\mathbf{p}+\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{m}\,\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\end{pmatrix}=\tilde{C}_\lambda\begin{pmatrix}\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\\ -\dfrac{E_\mathbf{p}-\lambda|\mathbf{p}|}{m}\,\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\end{pmatrix}. \tag{4.192}$$

为了使 $v(\mathbf{p},\lambda)$ 满足归一关系 (4.141)，我们取

$$\tilde{C}_\lambda=\lambda\sqrt{E_\mathbf{p}+\lambda|\mathbf{p}|}\,, \tag{4.193}$$

则由

$$\begin{aligned}-\tilde{C}_\lambda\frac{E_\mathbf{p}-\lambda|\mathbf{p}|}{m}&=-\lambda\sqrt{E_\mathbf{p}+\lambda|\mathbf{p}|}\,\frac{E_\mathbf{p}-\lambda|\mathbf{p}|}{m}=-\lambda\,\frac{\sqrt{E_\mathbf{p}-\lambda|\mathbf{p}|}}{m}\sqrt{(E_\mathbf{p}+\lambda|\mathbf{p}|)(E_\mathbf{p}-\lambda|\mathbf{p}|)}\\&=-\lambda\sqrt{E_\mathbf{p}-\lambda|\mathbf{p}|}\end{aligned} \tag{4.194}$$

得到 $\boldsymbol{v(\mathbf{p},\lambda)}$ 的螺旋态表达式

$$v(\mathbf{p},\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda\sqrt{E_\mathbf{p}+\lambda|\mathbf{p}|}\,\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\\ -\lambda\sqrt{E_\mathbf{p}-\lambda|\mathbf{p}|}\,\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\,\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\\ -\lambda\,\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\end{pmatrix}. \tag{4.195}$$

这样一来，$v(\mathbf{p},\lambda)$ 是螺旋度本征态，本征值为 $-\lambda$：

$$(2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{S})v(\mathbf{p},\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda\,\omega_\lambda(\mathbf{p})\,(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\\ -\lambda\,\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\,(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\end{pmatrix}=-\lambda\begin{pmatrix}\lambda\,\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\\ -\lambda\,\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\end{pmatrix}=-\lambda\,v(\mathbf{p},\lambda). \tag{4.196}$$

根据 $\xi_\lambda(\mathbf{p})$ 的正交归一关系 (4.163)，可以验证，$u(\mathbf{p},\lambda)$ 和 $v(\mathbf{p},\lambda)$ 满足 (4.140) 和 (4.141) 形式的正交归一关系：

$$u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)u(\mathbf{p},\lambda')=\begin{pmatrix}\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_\lambda^\dagger(\mathbf{p}) & \omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda^\dagger(\mathbf{p})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_{-\lambda'}(\mathbf{p})\xi_{\lambda'}(\mathbf{p})\\ \omega_{\lambda'}(\mathbf{p})\xi_{\lambda'}(\mathbf{p})\end{pmatrix}$$

$$= [\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\omega_{-\lambda'}(\mathbf{p}) + \omega_{\lambda}(\mathbf{p})\omega_{\lambda'}(\mathbf{p})]\xi^{\dagger}_{\lambda}(\mathbf{p})\xi_{\lambda'}(\mathbf{p}) = [\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\omega_{-\lambda'}(\mathbf{p})\delta_{\lambda\lambda'} + \omega_{\lambda}(\mathbf{p})\omega_{\lambda'}(\mathbf{p})]\delta_{\lambda\lambda'}$$
$$= [\omega^2_{-\lambda}(\mathbf{p}) + \omega^2_{\lambda}(\mathbf{p})]\delta_{\lambda\lambda'} = [(E_{\mathbf{p}} - \lambda|\mathbf{p}|) + (E_{\mathbf{p}} + \lambda|\mathbf{p}|)]\delta_{\lambda\lambda'} = 2E_{\mathbf{p}}\delta_{\lambda\lambda'}, \tag{4.197}$$

$$v^{\dagger}(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{p},\lambda') = \begin{pmatrix} \lambda\,\omega_{\lambda}(\mathbf{p})\xi^{\dagger}_{-\lambda}(\mathbf{p}) & -\lambda\,\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi^{\dagger}_{-\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'\,\omega_{\lambda'}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda'}(\mathbf{p}) \\ -\lambda'\,\omega_{-\lambda'}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda'}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$
$$= \lambda\lambda'[\omega_{\lambda}(\mathbf{p})\omega_{\lambda'}(\mathbf{p}) + \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\omega_{-\lambda'}(\mathbf{p})]\xi^{\dagger}_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda'}(\mathbf{p}) = \lambda\lambda'[\omega_{\lambda}(\mathbf{p})\omega_{\lambda'}(\mathbf{p}) + \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\omega_{-\lambda'}(\mathbf{p})]\delta_{\lambda\lambda'}$$
$$= \lambda^2[\omega^2_{\lambda}(\mathbf{p}) + \omega^2_{-\lambda}(\mathbf{p})]\delta_{\lambda\lambda'} = [(E_{\mathbf{p}} + \lambda|\mathbf{p}|) + (E_{\mathbf{p}} - \lambda|\mathbf{p}|)]\delta_{\lambda\lambda'} = 2E_{\mathbf{p}}\delta_{\lambda\lambda'}, \tag{4.198}$$

依照螺旋态的本征值方程 (4.161)，得到

$$(-\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_{-\lambda}(-\mathbf{p}) = -\lambda\,\xi_{-\lambda}(-\mathbf{p}), \tag{4.199}$$

从而

$$(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_{-\lambda}(-\mathbf{p}) = \lambda\,\xi_{-\lambda}(-\mathbf{p}). \tag{4.200}$$

可见，$\xi_{-\lambda}(-\mathbf{p})$ 与 $\xi_{\lambda}(\mathbf{p})$ 服从相同的本征值方程，这意味着 $\xi_{-\lambda}(-\mathbf{p}) \propto \xi_{\lambda}(\mathbf{p})$，故

$$\xi^{\dagger}_{\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda'}(-\mathbf{p}) \propto \xi^{\dagger}_{\lambda}(\mathbf{p})\xi_{\lambda'}(\mathbf{p}) = \delta_{\lambda\lambda'}. \tag{4.201}$$

于是，(4.142) 形式的正交关系也成立：

$$\begin{aligned} u^{\dagger}(\mathbf{p},\lambda)v(-\mathbf{p},\lambda') &= \begin{pmatrix} \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi^{\dagger}_{\lambda}(\mathbf{p}) & \omega_{\lambda}(\mathbf{p})\xi^{\dagger}_{\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'\,\omega_{\lambda'}(-\mathbf{p})\xi_{-\lambda'}(-\mathbf{p}) \\ -\lambda'\,\omega_{-\lambda'}(-\mathbf{p})\xi_{-\lambda'}(-\mathbf{p}) \end{pmatrix} \\ &= \lambda'[\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\omega_{\lambda'}(-\mathbf{p}) - \omega_{\lambda}(\mathbf{p})\omega_{-\lambda'}(-\mathbf{p})]\xi^{\dagger}_{\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda'}(-\mathbf{p}) \\ &\propto \lambda'[\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\omega_{\lambda'}(\mathbf{p}) - \omega_{\lambda}(\mathbf{p})\omega_{-\lambda'}(\mathbf{p})]\delta_{\lambda\lambda'} \\ &= \lambda[\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\omega_{\lambda}(\mathbf{p}) - \omega_{\lambda}(\mathbf{p})\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})]\delta_{\lambda\lambda'} = 0. \end{aligned} \tag{4.202}$$

整理一下，平面波旋量系数 $u(\mathbf{p},\lambda)$ 和 $v(\mathbf{p},\lambda)$ 满足**正交归一关系**

$$u^{\dagger}(\mathbf{p},\lambda)u(\mathbf{p},\lambda') = v^{\dagger}(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{p},\lambda') = 2E_{\mathbf{p}}\delta_{\lambda\lambda'}, \quad u^{\dagger}(\mathbf{p},\lambda)v(-\mathbf{p},\lambda') = v^{\dagger}(-\mathbf{p},\lambda)u(\mathbf{p},\lambda') = 0. \tag{4.203}$$

此外，由 (4.175) 式有

$$\omega_{\lambda}(\mathbf{p})\omega_{-\lambda}(\mathbf{p}) = \sqrt{(E_{\mathbf{p}} + \lambda|\mathbf{p}|)(E_{\mathbf{p}} - \lambda|\mathbf{p}|)} = m. \tag{4.204}$$

利用

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathbf{p},\lambda) &= u^{\dagger}(\mathbf{p},\lambda)\gamma^0 = \begin{pmatrix} \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi^{\dagger}_{\lambda}(\mathbf{p}) & \omega_{\lambda}(\mathbf{p})\xi^{\dagger}_{\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \omega_{\lambda}(\mathbf{p})\xi^{\dagger}_{\lambda}(\mathbf{p}) & \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi^{\dagger}_{\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \\ \bar{v}(\mathbf{p},\lambda) &= v^{\dagger}(\mathbf{p},\lambda)\gamma^0 = \begin{pmatrix} \lambda\,\omega_{\lambda}(\mathbf{p})\xi^{\dagger}_{-\lambda}(\mathbf{p}) & -\lambda\,\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi^{\dagger}_{-\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.205}$$

$$= \begin{pmatrix} -\lambda\,\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi^{\dagger}_{-\lambda}(\mathbf{p}) & \lambda\,\omega_{\lambda}(\mathbf{p})\xi^{\dagger}_{-\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \tag{4.206}$$

推出

$$\begin{aligned}
\bar{u}(\mathbf{p},\lambda)u(\mathbf{p},\lambda') &= \begin{pmatrix} \omega_{\lambda}(\mathbf{p})\xi^{\dagger}_{\lambda}(\mathbf{p}) & \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi^{\dagger}_{\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{-\lambda'}(\mathbf{p})\xi_{\lambda'}(\mathbf{p}) \\ \omega_{\lambda'}(\mathbf{p})\xi_{\lambda'}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \\
&= [\omega_{\lambda}(\mathbf{p})\omega_{-\lambda'}(\mathbf{p}) + \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\,\omega_{\lambda'}(\mathbf{p})]\delta_{\lambda\lambda'} = 2\omega_{\lambda}(\mathbf{p})\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\delta_{\lambda\lambda'} = 2m\delta_{\lambda\lambda'}, \qquad (4.207) \\
\bar{v}(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{p},\lambda') &= \begin{pmatrix} -\lambda\,\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi^{\dagger}_{-\lambda}(\mathbf{p}) & \lambda\,\omega_{\lambda}(\mathbf{p})\xi^{\dagger}_{-\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'\,\omega_{\lambda'}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda'}(\mathbf{p}) \\ -\lambda'\,\omega_{-\lambda'}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda'}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \\
&= -\lambda\lambda'[\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\omega_{\lambda'}(\mathbf{p}) + \omega_{\lambda}(\mathbf{p})\omega_{-\lambda'}(\mathbf{p})]\delta_{\lambda\lambda'} = -2\lambda^2\omega_{\lambda}(\mathbf{p})\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\delta_{\lambda\lambda'} \\
&= -2m\delta_{\lambda\lambda'}, \qquad (4.208) \\
\bar{u}(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{p},\lambda') &= \begin{pmatrix} \omega_{\lambda}(\mathbf{p})\xi^{\dagger}_{\lambda}(\mathbf{p}) & \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi^{\dagger}_{\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'\,\omega_{\lambda'}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda'}(\mathbf{p}) \\ -\lambda'\,\omega_{-\lambda'}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda'}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \\
&= \lambda'[\omega_{\lambda}(\mathbf{p})\omega_{\lambda'}(\mathbf{p}) - \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\omega_{-\lambda'}(\mathbf{p})]\xi^{\dagger}_{\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda'}(\mathbf{p}) \\
&= \lambda'[\omega_{\lambda}(\mathbf{p})\omega_{\lambda'}(\mathbf{p}) - \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\omega_{-\lambda'}(\mathbf{p})]\delta_{\lambda,-\lambda'} \\
&= -\lambda[\omega_{\lambda}(\mathbf{p})\omega_{-\lambda}(\mathbf{p}) - \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\omega_{\lambda}(\mathbf{p})]\delta_{\lambda,-\lambda'} = 0, \qquad (4.209) \\
\bar{v}(\mathbf{p},\lambda)u(\mathbf{p},\lambda') &= \begin{pmatrix} -\lambda\,\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi^{\dagger}_{-\lambda}(\mathbf{p}) & \lambda\,\omega_{\lambda}(\mathbf{p})\xi^{\dagger}_{-\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{-\lambda'}(\mathbf{p})\xi_{\lambda'}(\mathbf{p}) \\ \omega_{\lambda'}(\mathbf{p})\xi_{\lambda'}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \\
&= \lambda[-\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\omega_{-\lambda'}(\mathbf{p}) + \omega_{\lambda}(\mathbf{p})\omega_{\lambda'}(\mathbf{p})]\xi^{\dagger}_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{\lambda'}(\mathbf{p}) \\
&= \lambda[-\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\omega_{-\lambda'}(\mathbf{p}) + \omega_{\lambda}(\mathbf{p})\omega_{\lambda'}(\mathbf{p})]\delta_{-\lambda,\lambda'} \\
&= \lambda[-\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\omega_{\lambda}(\mathbf{p}) + \omega_{\lambda}(\mathbf{p})\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})]\delta_{-\lambda,\lambda'} = 0. \qquad (4.210)
\end{aligned}$$

整理一下，有

$$\bar{u}(\mathbf{p},\lambda)u(\mathbf{p},\lambda') = 2m\delta_{\lambda\lambda'}, \quad \bar{v}(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{p},\lambda') = -2m\delta_{\lambda\lambda'}, \quad \bar{u}(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{p},\lambda') = \bar{v}(\mathbf{p},\lambda)u(\mathbf{p},\lambda') = 0. \tag{4.211}$$

这些等式是 Lorentz 不变的。

另一方面，利用等式

$$\begin{aligned}
(p\cdot\bar{\sigma})\xi_{\lambda}(\mathbf{p}) &= (E_{\mathbf{p}} + \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_{\lambda}(\mathbf{p}) = (E_{\mathbf{p}} + \lambda|\mathbf{p}|)\xi_{\lambda}(\mathbf{p}) = \omega^2_{\lambda}(\mathbf{p})\xi_{\lambda}(\mathbf{p}), \qquad (4.212) \\
(p\cdot\sigma)\xi_{\lambda}(\mathbf{p}) &= (E_{\mathbf{p}} - \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_{\lambda}(\mathbf{p}) = (E_{\mathbf{p}} - \lambda|\mathbf{p}|)\xi_{\lambda}(\mathbf{p}) = \omega^2_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{\lambda}(\mathbf{p}), \qquad (4.213)
\end{aligned}$$

以及 (4.204) 式和 $\xi_{\lambda}(\mathbf{p})$ 的完备性关系 (4.164)，有

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda=\pm} u(\mathbf{p},\lambda)\bar{u}(\mathbf{p},\lambda) &= \sum_{\lambda=\pm} \begin{pmatrix} \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{\lambda}(\mathbf{p}) \\ \omega_{\lambda}(\mathbf{p})\xi_{\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{\lambda}(\mathbf{p})\xi^{\dagger}_{\lambda}(\mathbf{p}) & \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi^{\dagger}_{\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \\
&= \sum_{\lambda=\pm} \begin{pmatrix} \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\omega_{\lambda}(\mathbf{p})\xi_{\lambda}(\mathbf{p})\xi^{\dagger}_{\lambda}(\mathbf{p}) & \omega^2_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{\lambda}(\mathbf{p})\xi^{\dagger}_{\lambda}(\mathbf{p}) \\ \omega^2_{\lambda}(\mathbf{p})\xi_{\lambda}(\mathbf{p})\xi^{\dagger}_{\lambda}(\mathbf{p}) & \omega_{\lambda}(\mathbf{p})\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{\lambda}(\mathbf{p})\xi^{\dagger}_{\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\lambda=\pm} \begin{pmatrix} m\xi_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda^\dagger(\mathbf{p}) & (p\cdot\sigma)\xi_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda^\dagger(\mathbf{p}) \\ (p\cdot\bar{\sigma})\xi_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda^\dagger(\mathbf{p}) & m\xi_\lambda^\dagger(\mathbf{p})\xi_\lambda^\dagger(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} m & p\cdot\sigma \\ p\cdot\bar{\sigma} & m \end{pmatrix} = p_\mu\gamma^\mu + m. \qquad (4.214)
\end{aligned}
$$

通过等式

$$
\begin{aligned}
(p\cdot\bar{\sigma})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) &= (E_\mathbf{p} + \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) = (E_\mathbf{p} - \lambda|\mathbf{p}|)\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) = \omega_{-\lambda}^2(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}), \qquad (4.215) \\
(p\cdot\sigma)\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) &= (E_\mathbf{p} - \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) = (E_\mathbf{p} + \lambda|\mathbf{p}|)\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) = \omega_\lambda^2(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}), \qquad (4.216)
\end{aligned}
$$

得到

$$
\begin{aligned}
\sum_{\lambda=\pm} v(\mathbf{p},\lambda)\bar{v}(\mathbf{p},\lambda) &= \sum_{\lambda=\pm} \begin{pmatrix} \lambda\,\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \\ -\lambda\,\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda\,\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\,\xi_{-\lambda}^\dagger(\mathbf{p}) & \lambda\,\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^\dagger(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \\
&= \sum_{\lambda=\pm} \begin{pmatrix} -\lambda^2\omega_\lambda(\mathbf{p})\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^\dagger(\mathbf{p}) & \lambda^2\omega_\lambda^2(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^\dagger(\mathbf{p}) \\ \lambda^2\omega_{-\lambda}^2(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^\dagger(\mathbf{p}) & -\lambda^2\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^\dagger(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \\
&= \sum_{\lambda=\pm} \begin{pmatrix} -m\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^\dagger(\mathbf{p}) & (p\cdot\sigma)\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^\dagger(\mathbf{p}) \\ (p\cdot\bar{\sigma})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^\dagger(\mathbf{p}) & -m\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}^\dagger(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -m & p\cdot\sigma \\ p\cdot\bar{\sigma} & -m \end{pmatrix} = p_\mu\gamma^\mu - m. \qquad (4.217)
\end{aligned}
$$

整理一下，有如下螺旋度求和关系，或者说，**自旋求和关系**：

$$
\sum_{\lambda=\pm} u(\mathbf{p},\lambda)\bar{u}(\mathbf{p},\lambda) = \not{p} + m, \quad \sum_{\lambda=\pm} v(\mathbf{p},\lambda)\bar{v}(\mathbf{p},\lambda) = \not{p} - m. \qquad (4.218)
$$

用 $u(\mathbf{p},\lambda)$ 和 $v(\mathbf{p},\lambda)$ 把 Dirac 旋量场算符 $\psi(\mathbf{x},t)$ 的平面波展开式写作

$$
\begin{aligned}
\psi(\mathbf{x},t) &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}} \sum_{\lambda=\pm} \left[\varphi^{(+)}(x,\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda} + \varphi^{(-)}(x,\mathbf{p},\lambda)b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger\right] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}} \sum_{\lambda=\pm} \left[u(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + v(\mathbf{p},\lambda)b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right], \qquad (4.219)
\end{aligned}
$$

其中 $a_{\mathbf{p},\lambda}$ 是湮灭算符，$b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger$ 是产生算符，而且 $a_{\mathbf{p},\lambda} \neq b_{\mathbf{p},\lambda}$。于是

$$
\begin{aligned}
\psi^\dagger(\mathbf{x},t) &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}} \sum_{\lambda=\pm} \left[u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} + v^\dagger(\mathbf{p},\lambda)b_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\right], \qquad (4.220) \\
\bar{\psi}(\mathbf{x},t) &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}} \sum_{\lambda=\pm} \left[\bar{u}(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} + \bar{v}(\mathbf{p},\lambda)b_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\right]. \qquad (4.221)
\end{aligned}
$$

4.4.3 哈密顿量和产生湮灭算符

根据 (1.144) 和 (4.105) 式，$\psi(x)$ 对应的共轭动量密度是

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)} = \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^0 = \mathrm{i}\psi^\dagger, \tag{4.222}$$

它的平面波展开式为

$$\pi(\mathbf{x}, t) = \mathrm{i}\psi^\dagger(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}} \sum_{\lambda=\pm} \left[u^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} + v^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p},\lambda} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} \right]. \tag{4.223}$$

自由运动的旋量场 $\psi(x)$ 满足 Dirac 方程 (4.108)，相应地，拉氏量 (4.104) 化为

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0. \tag{4.224}$$

根据 (1.146) 式，自由 Dirac 旋量场的哈密顿量密度为

$$\mathcal{H} = \pi\partial_0\psi - \mathcal{L} = \pi\partial_0\psi = \mathrm{i}\psi^\dagger\partial_0\psi. \tag{4.225}$$

从而，哈密顿量算符为

$$\begin{aligned}
H &= \int \mathrm{d}^3 x\, \mathcal{H} = \int \mathrm{d}^3 x\, \psi^\dagger \mathrm{i}\partial_0 \psi \\
&= \sum_{\lambda\lambda'} \int \frac{\mathrm{d}^3 x\, \mathrm{d}^3 p\, \mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_\mathbf{p} E_\mathbf{q}}} \left[u^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} + v^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) b_{\mathbf{p},\lambda} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} \right] \\
&\qquad\qquad \times q_0 \left[u(\mathbf{q}, \lambda') a_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} - v(\mathbf{q}, \lambda') b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x} \right] \\
&= \sum_{\lambda\lambda'} \int \frac{\mathrm{d}^3 x\, \mathrm{d}^3 p\, \mathrm{d}^3 q\ q_0}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_\mathbf{p} E_\mathbf{q}}} \Big[u^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) u(\mathbf{q}, \lambda') a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} a_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-q)\cdot x} \\
&\qquad - v^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) v(\mathbf{q}, \lambda') b_{\mathbf{p},\lambda} b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x} - u^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) v(\mathbf{q}, \lambda') a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x} \\
&\qquad + v^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) u(\mathbf{q}, \lambda') b_{\mathbf{p},\lambda} a_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+q)\cdot x} \Big] \\
&= \sum_{\lambda\lambda'} \int \frac{\mathrm{d}^3 p\, \mathrm{d}^3 q\ E_\mathbf{q}}{(2\pi)^3 \sqrt{4E_\mathbf{p} E_\mathbf{q}}} \Big\{ \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \Big[u^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) u(\mathbf{q}, \lambda') a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} a_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_\mathbf{p} - E_\mathbf{q})t} \\
&\qquad\qquad - v^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) v(\mathbf{q}, \lambda') b_{\mathbf{p},\lambda} b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_\mathbf{p} - E_\mathbf{q})t} \Big] \\
&\qquad + \delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \Big[- u^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) v(\mathbf{q}, \lambda') a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_\mathbf{p} + E_\mathbf{q})t} \\
&\qquad\qquad + v^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) u(\mathbf{q}, \lambda') b_{\mathbf{p},\lambda} a_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_\mathbf{p} + E_\mathbf{q})t} \Big] \Big\} \\
&= \sum_{\lambda\lambda'} \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \Big[u^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) u(\mathbf{p}, \lambda') a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} a_{\mathbf{p},\lambda'} - v^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) v(\mathbf{p}, \lambda') b_{\mathbf{p},\lambda} b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda'} \\
&\qquad - u^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) v(-\mathbf{p}, \lambda') a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} b^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda'} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_\mathbf{p} t} + v^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) u(-\mathbf{p}, \lambda') b_{\mathbf{p},\lambda} a_{-\mathbf{p},\lambda'} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_\mathbf{p} t} \Big] \\
&= \sum_{\lambda\lambda'} \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} (2E_\mathbf{p} \delta_{\lambda\lambda'} a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} a_{\mathbf{p},\lambda'} - 2E_\mathbf{p} \delta_{\lambda\lambda'} b_{\mathbf{p},\lambda} b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda'})
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\lambda=\pm} \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} (a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} a_{\mathbf{p},\lambda} - b_{\mathbf{p},\lambda} b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}). \tag{4.226}$$

倒数第二步用到正交归一关系 (4.203)。

另一方面，利用正交归一关系 (4.203)，得到

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}^3 x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)\psi(\mathbf{x},t) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 x\, \mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm} \Big[u^\dagger(\mathbf{p},\lambda) u(\mathbf{q},\lambda') a_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-q)\cdot x} + u^\dagger(\mathbf{p},\lambda) v(\mathbf{q},\lambda') b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x} \Big] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm} \Big[u^\dagger(\mathbf{p},\lambda) u(\mathbf{q},\lambda') a_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t} \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \\
&\qquad\qquad + u^\dagger(\mathbf{p},\lambda) v(\mathbf{q},\lambda') b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t} \delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q}) \Big] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{\lambda'=\pm} \Big[u^\dagger(\mathbf{p},\lambda) u(\mathbf{p},\lambda') a_{\mathbf{p},\lambda'} + u^\dagger(\mathbf{p},\lambda) v(-\mathbf{p},\lambda') b^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda'} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t} \Big] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{\lambda'=\pm} (2E_{\mathbf{p}} \delta_{\lambda\lambda'} a_{\mathbf{p},\lambda'}) = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, a_{\mathbf{p},\lambda}.
\end{aligned} \tag{4.227}$$

从而将湮灭算符 $a_{\mathbf{p},\lambda}$ 和产生算符 $a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}$ 表示为

$$a_{\mathbf{p},\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \int \mathrm{d}^3 x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)\psi(\mathbf{x},t), \quad a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \int \mathrm{d}^3 x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} \psi^\dagger(\mathbf{x},t) u(\mathbf{p},\lambda). \tag{4.228}$$

同理推出

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}^3 x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} v^\dagger(\mathbf{p},\lambda)\psi(\mathbf{x},t) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 x\, \mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm} \Big[v^\dagger(\mathbf{p},\lambda) u(\mathbf{q},\lambda') a_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+q)\cdot x} + v^\dagger(\mathbf{p},\lambda) v(\mathbf{q},\lambda') b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x} \Big] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm} \Big[v^\dagger(\mathbf{p},\lambda) u(\mathbf{q},\lambda') a_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t} \delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q}) \\
&\qquad\qquad + v^\dagger(\mathbf{p},\lambda) v(\mathbf{q},\lambda') b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t} \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \Big] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{\lambda'=\pm} \Big[v^\dagger(\mathbf{p},\lambda) u(-\mathbf{p},\lambda') a_{-\mathbf{p},\lambda'} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t} + v^\dagger(\mathbf{p},\lambda) v(\mathbf{p},\lambda') b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda'} \Big] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{\lambda'=\pm} \Big(2E_{\mathbf{p}} \delta_{\lambda\lambda'} b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda'} \Big) = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}.
\end{aligned} \tag{4.229}$$

于是将产生算符 $b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}$ 和湮灭算符 $b_{\mathbf{p},\lambda}$ 表示成

$$b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \int \mathrm{d}^3 x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} v^\dagger(\mathbf{p},\lambda)\psi(\mathbf{x},t), \quad b_{\mathbf{p},\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \int \mathrm{d}^3 x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} \psi^\dagger(\mathbf{x},t) v(\mathbf{p},\lambda). \tag{4.230}$$

4.5 Dirac 旋量场的正则量子化

4.5.1 用等时对易关系量子化 Dirac 旋量场的困难

在标量场和矢量场的正则量子化程序中，我们先假设场算符与其共轭动量密度算符满足等时对易关系 (2.74)，然后推导出产生湮灭算符的对易关系，再通过计算给出正定的哈密顿量算符（对于无质量矢量场，需要用弱 Lorenz 规范条件来得到正的哈密顿量期待值），从而说明在量子场论中使用正则量子化方法是合理的。在本小节中，我们将尝试用类似的等时对易关系对 Dirac 旋量场进行量子化，不过，我们会发现这种方法并不能给出正定的哈密顿量算符，因而是不可行的。

假设 Dirac 旋量场算符 $\psi(x)$ 与其共轭动量密度算符 $\pi(x)$ 满足等时对易关系

$$[\psi_a(\mathbf{x},t),\pi_b(\mathbf{y},t)]=\mathrm{i}\delta_{ab}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad [\psi_a(\mathbf{x},t),\psi_b(\mathbf{y},t)]=[\pi_a(\mathbf{x},t),\pi_b(\mathbf{y},t)]=0. \tag{4.231}$$

这里将旋量指标明显地写出来。根据 (4.222) 式，这些关系等价于 $\psi(x)$ 与 $\psi^\dagger(x)$ 的等时对易关系

$$[\psi_a(\mathbf{x},t),\psi_b^\dagger(\mathbf{y},t)]=\delta_{ab}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad [\psi_a(\mathbf{x},t),\psi_b(\mathbf{y},t)]=[\psi_a^\dagger(\mathbf{x},t),\psi_b^\dagger(\mathbf{y},t)]=0. \tag{4.232}$$

接下来，我们计算产生湮灭算符的对易关系。由 (4.228) 式和正交归一关系 (4.203)，可得

$$\begin{aligned}
[a_{\mathbf{p},\lambda},a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger] &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x-q\cdot y)}u_a^\dagger(\mathbf{p},\lambda)[\psi_a(\mathbf{x},t),\psi_b^\dagger(\mathbf{y},t)]u_b(\mathbf{q},\lambda')\\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x-q\cdot y)}u_a^\dagger(\mathbf{p},\lambda)u_b(\mathbf{q},\lambda')\delta_{ab}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}}\,u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)u(\mathbf{q},\lambda')\\
&= \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\,u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)u(\mathbf{p},\lambda')(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})=(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}).
\end{aligned}\tag{4.233}$$

另外，有

$$[a_{\mathbf{p},\lambda},a_{\mathbf{q},\lambda'}]=\frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x+q\cdot y)}u_a^\dagger(\mathbf{p},\lambda)u_b^\dagger(\mathbf{q},\lambda')[\psi_a(\mathbf{x},t),\psi_b(\mathbf{y},t)]=0. \tag{4.234}$$

由 (4.230) 式和正交归一关系 (4.203)，可得

$$\begin{aligned}
[b_{\mathbf{p},\lambda},b_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger] &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x-q\cdot y)}v_b^\dagger(\mathbf{q},\lambda')[\psi_a^\dagger(\mathbf{x},t),\psi_b(\mathbf{y},t)]v_a(\mathbf{p},\lambda)\\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x-q\cdot y)}v_b^\dagger(\mathbf{q},\lambda')v_a(\mathbf{p},\lambda)(-\delta_{ba})\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\\
&= -\frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}}\,v^\dagger(\mathbf{q},\lambda')v(\mathbf{p},\lambda)\\
&= -\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\,v^\dagger(\mathbf{p},\lambda')v(\mathbf{p},\lambda)(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})=-(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}).
\end{aligned}\tag{4.235}$$

这个结果非同寻常地多了一个负号。此外，还有

$$[b_{\mathbf{p},\lambda}, b_{\mathbf{q},\lambda'}] = \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x+q\cdot y)} [\psi_a^\dagger(\mathbf{x},t), \psi_b^\dagger(\mathbf{y},t)] v_a(\mathbf{p},\lambda) v_b(\mathbf{q},\lambda') = 0, \tag{4.236}$$

$$[a_{\mathbf{p},\lambda}, b_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger] = \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x-q\cdot y)} u_a^\dagger(\mathbf{p},\lambda) v_b^\dagger(\mathbf{q},\lambda') [\psi_a(\mathbf{x},t), \psi_b(\mathbf{y},t)] = 0, \tag{4.237}$$

以及

$$\begin{aligned}
[a_{\mathbf{p},\lambda}, b_{\mathbf{q},\lambda'}] &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x+q\cdot y)} u_a^\dagger(\mathbf{p},\lambda) [\psi_a(\mathbf{x},t), \psi_b^\dagger(\mathbf{y},t)] v_b(\mathbf{q},\lambda') \\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x+q\cdot y)} u_a^\dagger(\mathbf{p},\lambda) v_b(\mathbf{q},\lambda') \delta_{ab}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}}\, u^\dagger(\mathbf{p},\lambda) v(\mathbf{q},\lambda') \\
&= \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}}{2E_{\mathbf{p}}}\, u^\dagger(\mathbf{p},\lambda) v(-\mathbf{p},\lambda') (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q}) = 0.
\end{aligned} \tag{4.238}$$

上式最后一步用到正交归一关系 (4.203)。

整理起来，通过等时对易关系 (4.231) 得到的产生湮灭算符对易关系为

$$\begin{aligned}
[a_{\mathbf{p},\lambda}, a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger] &= (2\pi)^3 \delta_{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \quad [a_{\mathbf{p},\lambda}, a_{\mathbf{q},\lambda'}] = [a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger, a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger] = 0, \\
[b_{\mathbf{p},\lambda}, b_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger] &= -(2\pi)^3 \delta_{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \quad [b_{\mathbf{p},\lambda}, b_{\mathbf{q},\lambda'}] = [b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger, b_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger] = 0, \\
[a_{\mathbf{p},\lambda}, b_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger] &= [b_{\mathbf{p},\lambda}, a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger] = [a_{\mathbf{p},\lambda}, b_{\mathbf{q},\lambda'}] = [a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger, b_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger] = 0.
\end{aligned} \tag{4.239}$$

利用这样的对易关系，可以把哈密顿量算符 (4.226) 化为

$$\begin{aligned}
H &= \sum_{\lambda=\pm} \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger a_{\mathbf{p},\lambda} - b_{\mathbf{p},\lambda} b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger) \\
&= \sum_{\lambda=\pm} \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger a_{\mathbf{p},\lambda} - b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger b_{\mathbf{p},\lambda}) + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} 2E_{\mathbf{p}}.
\end{aligned} \tag{4.240}$$

上式最后一行第二项是零点能。在第一项中由 $(a_{\mathbf{p},\lambda}, a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger)$ 描述的粒子对总能量的贡献为正，但由 $(b_{\mathbf{p},\lambda}, b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger)$ 描述的粒子对总能量的贡献为负。从而，粒子数密度 $b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger b_{\mathbf{p},\lambda}$ 越大，场的总能量越少，这显然是非物理的，会出现负能量困难。因此，用等时对易关系 (4.231) 对 Dirac 旋量场进行量子化是行不通的。

4.5.2　用等时反对易关系量子化 Dirac 旋量场

从 (4.240) 式的计算过程看出，如果在交换 $b_{\mathbf{p},\lambda}$ 和 $b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger$ 位置的同时能够改变圆括号中第二项的符号，就可以得到正定的哈密顿量算符。这意味着我们需要的不是 $b_{\mathbf{p},\lambda}$ 与 $b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger$ 的对易关系，而是反对易关系。为了得到合适的 $b_{\mathbf{p},\lambda}$ 与 $b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger$ 的反对易关系，则需要舍弃等时对易关系 (4.231)，代之以**等时反对易关系**

$$\{\psi_a(\mathbf{x},t), \pi_b(\mathbf{y},t)\} = \mathrm{i}\delta_{ab}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \quad \{\psi_a(\mathbf{x},t), \psi_b(\mathbf{y},t)\} = \{\pi_a(\mathbf{x},t), \pi_b(\mathbf{y},t)\} = 0. \tag{4.241}$$

采用反对易关系进行量子化的方法称为 **Jordan-Wigner 量子化**。根据 (4.222) 式，这些关系等价于 $\psi(x)$ 与 $\psi^\dagger(x)$ 的等时反对易关系

$$\{\psi_a(\mathbf{x},t),\psi_b^\dagger(\mathbf{y},t)\}=\delta_{ab}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad \{\psi_a(\mathbf{x},t),\psi_b(\mathbf{y},t)\}=\{\psi_a^\dagger(\mathbf{x},t),\psi_b^\dagger(\mathbf{y},t)\}=0. \tag{4.242}$$

接下来，我们计算产生湮灭算符的反对易关系。计算过程与上一小节类似，只是我们要将 (4.233) 至 (4.238) 式中表示对易的方括号改成表示反对易的花括号。由此得到

$$\begin{aligned}\{a_{\mathbf{p},\lambda},a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\} &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x-q\cdot y)}u_a^\dagger(\mathbf{p},\lambda)\{\psi_a(\mathbf{x},t),\psi_b^\dagger(\mathbf{y},t)\}u_b(\mathbf{q},\lambda')\\ &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x-q\cdot y)}u_a^\dagger(\mathbf{p},\lambda)u_b(\mathbf{q},\lambda')\delta_{ab}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\\ &= (2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}),\end{aligned} \tag{4.243}$$

和

$$\{a_{\mathbf{p},\lambda},a_{\mathbf{q},\lambda'}\}=\frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x+q\cdot y)}u_a^\dagger(\mathbf{p},\lambda)u_b^\dagger(\mathbf{q},\lambda')\{\psi_a(\mathbf{x},t),\psi_b(\mathbf{y},t)\}=0. \tag{4.244}$$

另外，有

$$\begin{aligned}\{b_{\mathbf{p},\lambda},b_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\} &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x-q\cdot y)}v_b^\dagger(\mathbf{q},\lambda')\{\psi_a^\dagger(\mathbf{x},t),\psi_b(\mathbf{y},t)\}v_a(\mathbf{p},\lambda)\\ &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x-q\cdot y)}v_b^\dagger(\mathbf{q},\lambda')v_a(\mathbf{p},\lambda)\delta_{ba}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\\ &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}}\,v^\dagger(\mathbf{q},\lambda')v(\mathbf{p},\lambda)\\ &= \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\,v^\dagger(\mathbf{p},\lambda')v(\mathbf{p},\lambda)(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})=(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}).\end{aligned} \tag{4.245}$$

与 (4.235) 式不同，上式结果具有正常的符号。此外，还有

$$\{b_{\mathbf{p},\lambda},b_{\mathbf{q},\lambda'}\}=\frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x+q\cdot y)}\{\psi_a^\dagger(\mathbf{x},t),\psi_b^\dagger(\mathbf{y},t)\}v_a(\mathbf{p},\lambda)v_b(\mathbf{q},\lambda')=0, \tag{4.246}$$

$$\{a_{\mathbf{p},\lambda},b_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\}=\frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x-q\cdot y)}u_a^\dagger(\mathbf{p},\lambda)v_b^\dagger(\mathbf{q},\lambda')\{\psi_a(\mathbf{x},t),\psi_b(\mathbf{y},t)\}=0, \tag{4.247}$$

以及

$$\begin{aligned}\{a_{\mathbf{p},\lambda},b_{\mathbf{q},\lambda'}\} &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x+q\cdot y)}u_a^\dagger(\mathbf{p},\lambda)\{\psi_a(\mathbf{x},t),\psi_b^\dagger(\mathbf{y},t)\}v_b(\mathbf{q},\lambda')\\ &= \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x+q\cdot y)}u_a^\dagger(\mathbf{p},\lambda)v_b(\mathbf{q},\lambda')\delta_{ab}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})=0.\end{aligned} \tag{4.248}$$

整理起来，通过等时反对易关系 (4.241) 得到的产生湮灭算符反对易关系为

$$\begin{aligned}&\{a_{\mathbf{p},\lambda},a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\}=(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}),\quad \{a_{\mathbf{p},\lambda},a_{\mathbf{q},\lambda'}\}=\{a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger,a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\}=0,\\ &\{b_{\mathbf{p},\lambda},b_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\}=(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}),\quad \{b_{\mathbf{p},\lambda},b_{\mathbf{q},\lambda'}\}=\{b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger,b_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\}=0,\\ &\{a_{\mathbf{p},\lambda},b_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\}=\{b_{\mathbf{p},\lambda},a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\}=\{a_{\mathbf{p},\lambda},b_{\mathbf{q},\lambda'}\}=\{a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger,b_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger\}=0.\end{aligned} \tag{4.249}$$

$(a_{\mathbf{p},\lambda}, a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda})$ 和 $(b_{\mathbf{p},\lambda}, b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda})$ 各自描述一种粒子。利用这样的反对易关系，把哈密顿量算符 (4.226) 化为

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\lambda=\pm}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\, E_{\mathbf{p}}(a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda} - b_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}) \\ &= \sum_{\lambda=\pm}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\, E_{\mathbf{p}}(a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda} + b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}b_{\mathbf{p},\lambda}) - (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\, 2E_{\mathbf{p}}. \end{aligned} \tag{4.250}$$

上式最后一行第二项是零点能。第一项是所有动量模式所有螺旋度所有粒子贡献的能量之和，它是**正定**的。可见，用等时反对易关系对 Dirac 旋量场进行正则量子化是合适的。

利用 (4.9) 式和反对易关系 (4.249)，可得哈密顿量 H 与产生湮灭算符的对易子为

$$\begin{aligned} [H, a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}] &= \sum_{\lambda'}\int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\, E_{\mathbf{q}}\left[a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}a_{\mathbf{q},\lambda'} + b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}b_{\mathbf{q},\lambda'},\, a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\right] \\ &= \sum_{\lambda'}\int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\, E_{\mathbf{q}}\Big(a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\{a_{\mathbf{q},\lambda'}, a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\} - \{a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}, a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\}a_{\mathbf{q},\lambda'} \\ &\qquad\qquad + b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\{b_{\mathbf{q},\lambda'}, a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\} - \{b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}, a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\}b_{\mathbf{q},\lambda'}\Big) \\ &= \sum_{\lambda'}\int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\, E_{\mathbf{q}}a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\{a_{\mathbf{q},\lambda'}, a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\} = \sum_{\lambda'}\int \mathrm{d}^3q\, E_{\mathbf{q}}a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\delta_{\lambda'\lambda}\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = E_{\mathbf{p}}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}, \end{aligned} \tag{4.251}$$

$$\begin{aligned} [H, a_{\mathbf{p},\lambda}] &= \sum_{\lambda'}\int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\, E_{\mathbf{q}}\left[a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}a_{\mathbf{q},\lambda'} + b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}b_{\mathbf{q},\lambda'},\, a_{\mathbf{p},\lambda}\right] = \sum_{\lambda'}\int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\, E_{\mathbf{q}}\left(-\{a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}, a_{\mathbf{p},\lambda}\}a_{\mathbf{q},\lambda'}\right) \\ &= -\sum_{\lambda'}\int \mathrm{d}^3q\, E_{\mathbf{q}}a_{\mathbf{q},\lambda'}\delta_{\lambda'\lambda}\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = -E_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p},\lambda}, \end{aligned} \tag{4.252}$$

$$\begin{aligned} [H, b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}] &= \sum_{\lambda'}\int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\, E_{\mathbf{q}}\left[a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}a_{\mathbf{q},\lambda'} + b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}b_{\mathbf{q},\lambda'},\, b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\right] = \sum_{\lambda'}\int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\, E_{\mathbf{q}}b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\{b_{\mathbf{q},\lambda'}, b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\} \\ &= \sum_{\lambda'}\int \mathrm{d}^3q\, E_{\mathbf{q}}b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\delta_{\lambda'\lambda}\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = E_{\mathbf{p}}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}, \end{aligned} \tag{4.253}$$

$$\begin{aligned} [H, b_{\mathbf{p},\lambda}] &= \sum_{\lambda'}\int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\, E_{\mathbf{q}}\left[a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}a_{\mathbf{q},\lambda'} + b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}b_{\mathbf{q},\lambda'},\, b_{\mathbf{p},\lambda}\right] = \sum_{\lambda'}\int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\, E_{\mathbf{q}}\left(-\{b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}, b_{\mathbf{p},\lambda}\}b_{\mathbf{q},\lambda'}\right) \\ &= -\sum_{\lambda'}\int \mathrm{d}^3q\, E_{\mathbf{q}}b_{\mathbf{q},\lambda'}\delta_{\lambda'\lambda}\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = -E_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{p},\lambda}. \end{aligned} \tag{4.254}$$

设 $|E\rangle$ 是 H 的本征态，本征值为 E，则

$$H\,|E\rangle = E\,|E\rangle\,. \tag{4.255}$$

从而推出

$$Ha^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\,|E\rangle = (a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}H + E_{\mathbf{p}}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda})\,|E\rangle = (E+E_{\mathbf{p}})a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\,|E\rangle\,, \tag{4.256}$$

$$Ha_{\mathbf{p},\lambda}\,|E\rangle = (a_{\mathbf{p},\lambda}H - E_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p},\lambda})\,|E\rangle = (E-E_{\mathbf{p}})a_{\mathbf{p},\lambda}\,|E\rangle\,, \tag{4.257}$$

$$Hb^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\,|E\rangle = (b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}H + E_{\mathbf{p}}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda})\,|E\rangle = (E+E_{\mathbf{p}})b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\,|E\rangle\,, \tag{4.258}$$

$$H b_{\mathbf{p},\lambda}\left|E\right\rangle = \left(b_{\mathbf{p},\lambda}H - E_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{p},\lambda}\right)\left|E\right\rangle = (E-E_{\mathbf{p}})b_{\mathbf{p},\lambda}\left|E\right\rangle . \tag{4.259}$$

可见，当 $a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\left|E\right\rangle$ 和 $b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\left|E\right\rangle$ 不为零时，产生算符 $a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}$ 和 $b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}$ 的作用都是使能量本征值增加 $E_{\mathbf{p}}$；当 $a_{\mathbf{p},\lambda}\left|E\right\rangle$ 和 $b_{\mathbf{p},\lambda}\left|E\right\rangle$ 不为零时，湮灭算符 $a_{\mathbf{p},\lambda}$ 和 $b_{\mathbf{p},\lambda}$ 的作用都是使能量本征值减少 $E_{\mathbf{p}}$。

根据 (1.194) 式，Dirac 旋量场的总动量算符为

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} &= -\int \mathrm{d}^3x\,\pi\nabla\psi = \int \mathrm{d}^3x\,\psi^\dagger(-\mathrm{i}\nabla)\psi \\
&= \sum_{\lambda\lambda'}\int \frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\left[u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} + v^\dagger(\mathbf{p},\lambda)b_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\right] \\
&\qquad\qquad \times\left[\mathbf{q}\,u(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} - \mathbf{q}\,v(\mathbf{q},\lambda')b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\right] \\
&= \sum_{\lambda\lambda'}\int \frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\;\mathbf{q}}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\Big[u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)u(\mathbf{q},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-q)\cdot x} \\
&\qquad - v^\dagger(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{q},\lambda')b_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)\cdot x} - u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{q},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)\cdot x} \\
&\qquad + v^\dagger(\mathbf{p},\lambda)u(\mathbf{q},\lambda')b_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+q)\cdot x}\Big] \\
&= \sum_{\lambda\lambda'}\int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\;\mathbf{q}}{(2\pi)^3\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\Big\{\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\Big[u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)u(\mathbf{q},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t} \\
&\qquad\qquad - v^\dagger(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{q},\lambda')b_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t}\Big] \\
&\qquad + \delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\Big[-u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{q},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t} \\
&\qquad\qquad + v^\dagger(\mathbf{p},\lambda)u(\mathbf{q},\lambda')b_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t}\Big]\Big\} \\
&= \sum_{\lambda\lambda'}\int \frac{\mathrm{d}^3p\;\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}}\Big[u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)u(\mathbf{p},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda'} - v^\dagger(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{p},\lambda')b_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda'} \\
&\qquad + u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)v(-\mathbf{p},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda'}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t} - v^\dagger(\mathbf{p},\lambda)u(-\mathbf{p},\lambda')b_{\mathbf{p},\lambda}a_{-\mathbf{p},\lambda'}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\Big] \\
&= \sum_{\lambda\lambda'}\int \frac{\mathrm{d}^3p\;\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}}(2E_{\mathbf{p}}\delta_{\lambda\lambda'}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda'} - 2E_{\mathbf{p}}\delta_{\lambda\lambda'}b_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda'}) \\
&= \sum_{\lambda=\pm}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}(a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda} - b_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}) = \sum_{\lambda=\pm}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}(a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda} + b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}b_{\mathbf{p},\lambda}) - 2\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int \mathrm{d}^3p\,\mathbf{p} \\
&= \sum_{\lambda=\pm}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathbf{p}(a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda} + b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}b_{\mathbf{p},\lambda}).
\end{aligned} \tag{4.260}$$

倒数第四步用到正交归一关系 (4.203)，倒数第二步用到反对易关系 (4.249)。总动量是所有动量模式所有螺旋度所有粒子贡献的动量之和。

4.5.3 U(1) 整体对称性

类似于复标量场，Dirac 旋量场也具有 U(1) 整体对称性。对 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 作 U(1) 整体变换

$$\psi'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\psi(x), \tag{4.261}$$

则 $\psi^\dagger(x)$ 和 $\bar\psi(x)$ 的相应变换为

$$[\psi^\dagger(x)]' = [\psi'(x)]^\dagger = \psi^\dagger(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}, \quad [\bar\psi(x)]' = \bar\psi'(x) = [\psi'(x)]^\dagger\gamma^0 = \bar\psi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}. \tag{4.262}$$

在此变换下，拉氏量 (4.104) 不变，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'(x) &= \bar\psi'(x)(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi'(x) = \bar\psi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\psi(x)\\ &= \bar\psi(x)(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = \mathcal{L}(x).\end{aligned} \tag{4.263}$$

于是，跟复标量场一样，Dirac 旋量场具有**相位任意性**，相差一个任意整体相位因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ 的 Dirac 旋量场描述相同的物理。容易验证，4.3 节中列举的旋量双线性型都在这种 U(1) 整体变换下不变。因此，用这些旋量双线性型构造的拉氏量都具有 U(1) 整体对称性。

U(1) 整体变换的无穷小形式为

$$\psi'(x) = \psi(x) + \mathrm{i}q\theta\psi(x). \tag{4.264}$$

由于 $\delta x^\mu = 0$，由 (1.168) 式得

$$\bar\delta\psi = \delta\psi = \mathrm{i}q\theta\psi. \tag{4.265}$$

按照 (1.173) 式，相应的 Noether 守恒流为

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\,\bar\delta\psi = \mathrm{i}\bar\psi\gamma^\mu(\mathrm{i}q\theta\psi) = -q\theta\bar\psi\gamma^\mu\psi. \tag{4.266}$$

扔掉无穷小参数 $-\theta$，定义 **U(1) 守恒流算符**

$$J^\mu \equiv q\bar\psi\gamma^\mu\psi, \tag{4.267}$$

则 Noether 定理给出

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \tag{4.268}$$

相应的 **U(1) 守恒荷算符**为

$$\begin{aligned}Q &= \int \mathrm{d}^3x\, J^0 = q\int \mathrm{d}^3x\,\bar\psi\gamma^0\psi = q\int \mathrm{d}^3x\,\psi^\dagger\psi\\
&= q\sum_{\lambda\lambda'}\int \frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{k}}}}\Big[u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} + v^\dagger(\mathbf{p},\lambda)b_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\Big]\\
&\qquad\qquad \times\Big[u(\mathbf{k},\lambda')a_{\mathbf{k},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} + v(\mathbf{k},\lambda')b^\dagger_{\mathbf{k},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\Big]\\
&= q\sum_{\lambda\lambda'}\int \frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{k}}}}\Big[u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)u(\mathbf{k},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{k},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-k)\cdot x}\\
&\qquad + v^\dagger(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{k},\lambda')b_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{\mathbf{k},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-k)\cdot x} + u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{k},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{\mathbf{k},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+k)\cdot x}\\
&\qquad + v^\dagger(\mathbf{p},\lambda)u(\mathbf{k},\lambda')b_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{k},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+k)\cdot x}\Big]\\
&= q\sum_{\lambda\lambda'}\int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{k}}}}\Big\{\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{k})\Big[u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)u(\mathbf{k},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{k},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{k}})t}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad\qquad + v^\dagger(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{k},\lambda')b_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{\mathbf{k},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_\mathbf{p}-E_\mathbf{k})t}\Big] \\
&\quad + \delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{k})\Big[u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{k},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{\mathbf{k},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_\mathbf{p}+E_\mathbf{k})t} \\
&\qquad\qquad + v^\dagger(\mathbf{p},\lambda)u(\mathbf{k},\lambda')b_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{k},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_\mathbf{p}+E_\mathbf{k})t}\Big]\Big\} \\
&= q\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2E_\mathbf{p}}\Big[u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)u(\mathbf{p},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda'} + v^\dagger(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{p},\lambda')b_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda'} \\
&\qquad + u^\dagger(\mathbf{p},\lambda)v(-\mathbf{p},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda'}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}E_\mathbf{p}t} + v^\dagger(\mathbf{p},\lambda)u(-\mathbf{p},\lambda')b_{\mathbf{p},\lambda}a_{-\mathbf{p},\lambda'}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}E_\mathbf{p}t}\Big] \\
&= q\sum_{\lambda\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2E_\mathbf{p}}(2E_\mathbf{p}\delta_{\lambda\lambda'}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda'} + 2E_\mathbf{p}\delta_{\lambda\lambda'}b_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda'}) = q\sum_{\lambda=\pm}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}(a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda} + b_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}) \\
&= \sum_{\lambda=\pm}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}(q\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda} - q\,b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}b_{\mathbf{p},\lambda}) + 2\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\mathrm{d}^3p\;q. \qquad (4.269)
\end{aligned}
$$

上式第二项是零点荷。从第一项的形式可以看出，由 $(a_{\mathbf{p},\lambda}, a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda})$ 描述的粒子是**正粒子**，携带的 U(1) 荷为 q；由 $(b_{\mathbf{p},\lambda}, b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda})$ 描述的粒子是**反粒子**，携带的 U(1) 荷为 $-q$。除去零点荷，总荷是所有动量模式所有螺旋度所有正反粒子贡献的 U(1) 荷之和。

4.5.4 粒子态

对于自由的 Dirac 旋量场，真空态 $|0\rangle$ 定义为被任意 $a_{\mathbf{p},\lambda}$ 和任意 $b_{\mathbf{p},\lambda}$ 湮灭的态，

$$
a_{\mathbf{p},\lambda}|0\rangle = b_{\mathbf{p},\lambda}|0\rangle = 0, \qquad (4.270)
$$

满足

$$
\langle 0|0\rangle = 1, \quad H|0\rangle = E_\mathrm{vac}|0\rangle, \quad E_\mathrm{vac} = -2\delta^{(3)}(\mathbf{0})\int\mathrm{d}^3p\,E_\mathbf{p}. \qquad (4.271)
$$

动量为 $\mathbf{p}$、螺旋度为 λ 的单个正粒子态和单个反粒子态分别定义为

$$
\big|\mathbf{p}^+,\lambda\big\rangle \equiv \sqrt{2E_\mathbf{p}}\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}|0\rangle, \quad \big|\mathbf{p}^-,\lambda\big\rangle \equiv \sqrt{2E_\mathbf{p}}\,b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}|0\rangle. \qquad (4.272)
$$

根据产生湮灭算符的反对易关系 (4.249)，单粒子态的内积是

$$
\begin{aligned}
\big\langle\mathbf{q}^+,\lambda'\big|\,\mathbf{p}^+,\lambda\big\rangle &= \sqrt{4E_\mathbf{q}E_\mathbf{p}}\,\langle 0|\,a_{\mathbf{q},\lambda'}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}|0\rangle = \sqrt{4E_\mathbf{q}E_\mathbf{p}}\,\langle 0|\,[(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) - a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{q},\lambda'}]\,|0\rangle \\
&= 2E_\mathbf{p}(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \qquad (4.273) \\
\big\langle\mathbf{q}^-,\lambda'\big|\,\mathbf{p}^-,\lambda\big\rangle &= \sqrt{4E_\mathbf{q}E_\mathbf{p}}\,\langle 0|\,b_{\mathbf{q},\lambda'}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}|0\rangle = 2E_\mathbf{p}(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \qquad (4.274) \\
\big\langle\mathbf{q}^-,\lambda'\big|\,\mathbf{p}^+,\lambda\big\rangle &= \sqrt{4E_\mathbf{q}E_\mathbf{p}}\,\langle 0|\,b_{\mathbf{q},\lambda'}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}|0\rangle = -\sqrt{4E_\mathbf{q}E_\mathbf{p}}\,\langle 0|\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}b_{\mathbf{q},\lambda'}|0\rangle = 0. \qquad (4.275)
\end{aligned}
$$

根据 (4.256) 和 (4.258) 式，有

$$
H\big|\mathbf{p}^+,\lambda\big\rangle = (E_\mathrm{vac}+E_\mathbf{p})\big|\mathbf{p}^+,\lambda\big\rangle, \quad H\big|\mathbf{p}^-,\lambda\big\rangle = (E_\mathrm{vac}+E_\mathbf{p})\big|\mathbf{p}^-,\lambda\big\rangle. \qquad (4.276)
$$

可见，$|\mathbf{p}^+,\lambda\rangle$ 和 $|\mathbf{p}^-,\lambda\rangle$ 都比真空态多了一份能量 $E_\mathbf{p} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}$。

将 $\psi(x)$ 的平面波解 (4.219) 代入 (4.68) 式左边，得

$$[\psi(x),\mathbf{J}]=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda=\pm}\left\{u(\mathbf{p},\lambda)[a_{\mathbf{p},\lambda},\mathbf{J}]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+v(\mathbf{p},\lambda)[b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda},\mathbf{J}]\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right\},\tag{4.277}$$

代入右边，得

$$\begin{aligned}(\mathbf{L}+\mathbf{S})\psi(x)&=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda=\pm}(-\mathrm{i}\,\mathbf{x}\times\nabla+\mathbf{S})\left[u(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+v(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right]\\&=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda=\pm}\left[(\mathbf{x}\times\mathbf{p}+\mathbf{S})u(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+(-\mathbf{x}\times\mathbf{p}+\mathbf{S})v(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right].\end{aligned}\tag{4.278}$$

两相比较，对于动量模式 $\mathbf{p}$ 和螺旋度 λ，有

$$u(\mathbf{p},\lambda)[a_{\mathbf{p},\lambda},\mathbf{J}]=(\mathbf{x}\times\mathbf{p}+\mathbf{S})u(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda},\quad v(\mathbf{p},\lambda)[b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda},\mathbf{J}]=(-\mathbf{x}\times\mathbf{p}+\mathbf{S})v(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}.\tag{4.279}$$

根据 (4.180) 和 (4.196) 式，$u(\mathbf{p},\lambda)$ 和 $v(\mathbf{p},\lambda)$ 分别是本征值为 λ 和 $-\lambda$ 的螺旋度本征态，因而

$$u(\mathbf{p},\lambda)[a_{\mathbf{p},\lambda},\,2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}]=2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot(\mathbf{x}\times\mathbf{p}+\mathbf{S})u(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}=(2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{S})u(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}=\lambda\,u(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda},\tag{4.280}$$

$$v(\mathbf{p},\lambda)[b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda},\,2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}]=2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot(-\mathbf{x}\times\mathbf{p}+\mathbf{S})v(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}=(2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{S})v(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}=-\lambda\,v(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}.\tag{4.281}$$

故

$$[a_{\mathbf{p},\lambda},\,2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}]=\lambda\,a_{\mathbf{p},\lambda},\quad[b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda},\,2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}]=-\lambda\,b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}.\tag{4.282}$$

由于 $\mathbf{J}$ 是厄米算符，对第一式取厄米共轭得

$$\lambda\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}=[a_{\mathbf{p},\lambda},\,2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}]^\dagger=(2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J})a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}-a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}(2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J})=[2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J},a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}].\tag{4.283}$$

于是

$$[2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J},a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}]=\lambda\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda},\quad[2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J},b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}]=\lambda\,b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}.\tag{4.284}$$

$\mathbf{J}$ 是总角动量算符，真空态 $|0\rangle$ 满足 $\mathbf{J}\,|0\rangle=\mathbf{0}$，由此得到

$$(2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J})a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\,|0\rangle=[a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}(2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J})+\lambda\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}]\,|0\rangle=\lambda\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\,|0\rangle\,,\tag{4.285}$$

$$(2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J})b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\,|0\rangle=[b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}(2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J})+\lambda\,b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}]\,|0\rangle=\lambda\,b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\,|0\rangle\,.\tag{4.286}$$

自由的单粒子态没有轨道角动量，而 $2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}$ 相当于归一化的螺旋度算符。因此，上面两式说明 $|\mathbf{p}^+,\lambda\rangle$ 和 $|\mathbf{p}^-,\lambda\rangle$ 都是螺旋度本征态，本征值为 λ：

$$(2\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J})\left|\mathbf{p}^\pm,\lambda\right\rangle=\lambda\left|\mathbf{p}^\pm,\lambda\right\rangle.\tag{4.287}$$

这正是我们所期望的。

以上讨论表明，产生算符 $a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}$ 的作用是产生一个动量为 $\mathbf{p}$、螺旋度为 λ 的正粒子，另一个产生算符 $b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}$ 的作用是产生一个动量为 $\mathbf{p}$、螺旋度为 λ 的反粒子。正粒子和反粒子具有相同的质量 m。

在 (4.191) 式中，我们选择让 $\tilde{f}_\lambda(\mathbf{p})$ 正比于 $\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})$，使得 $v(\mathbf{p},\lambda)$ 的螺旋度本征值为 $-\lambda$，从而得到 $b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}|0\rangle$ 的螺旋度本征值为 λ 的结果。如果我们选择让 $\tilde{f}_\lambda(\mathbf{p})$ 正比于 $\xi_\lambda(\mathbf{p})$，依照上述推导，$b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}|0\rangle$ 的螺旋度本征值就会变成 $-\lambda$；也就是说，$(b_{\mathbf{p},\lambda}, b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda})$ 将描述螺旋度为 $-\lambda$ 的反粒子。这不符合我们的记号，因此，我们将 $\tilde{f}_\lambda(\mathbf{p})$ 取为 (4.191) 式的形式。

由反对易关系 (4.249)，有

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{p},\lambda}\left|\mathbf{q}^+,\lambda'\right\rangle &= \sqrt{2E_{\mathbf{q}}}\, a_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}|0\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{q}}}\left[(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) - a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}a_{\mathbf{p},\lambda}\right]|0\rangle \\ &= \sqrt{2E_{\mathbf{q}}}\,(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\,|0\rangle\,, \end{aligned} \tag{4.288}$$

$$\begin{aligned} b_{\mathbf{p},\lambda}\left|\mathbf{q}^-,\lambda'\right\rangle &= \sqrt{2E_{\mathbf{q}}}\, b_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}|0\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{q}}}\left[(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) - b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}b_{\mathbf{p},\lambda}\right]|0\rangle \\ &= \sqrt{2E_{\mathbf{q}}}\,(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\,|0\rangle\,. \end{aligned} \tag{4.289}$$

可以看出，湮灭算符 $a_{\mathbf{p},\lambda}$ 的作用是减少一个动量为 $\mathbf{p}$、螺旋度为 λ 的正粒子，湮灭算符 $b_{\mathbf{p},\lambda}$ 的作用是减少一个动量为 $\mathbf{p}$、螺旋度为 λ 的反粒子。

将包含 2 个正粒子和 2 个反粒子的态记为

$$\left|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^+,\lambda_2;\,\mathbf{p}_3^-,\lambda_3;\,\mathbf{p}_4^-,\lambda_4\right\rangle \equiv \sqrt{16E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}E_{\mathbf{p}_3}E_{\mathbf{p}_4}}\, a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\lambda_1}a^\dagger_{\mathbf{p}_2,\lambda_2}b^\dagger_{\mathbf{p}_3,\lambda_3}b^\dagger_{\mathbf{p}_4,\lambda_4}|0\rangle\,. \tag{4.290}$$

多次利用反对易关系 (4.249)，调换产生算符的位置，可得

$$a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\lambda_1}a^\dagger_{\mathbf{p}_2,\lambda_2}b^\dagger_{\mathbf{p}_3,\lambda_3}b^\dagger_{\mathbf{p}_4,\lambda_4}|0\rangle = -b^\dagger_{\mathbf{p}_4,\lambda_4}a^\dagger_{\mathbf{p}_2,\lambda_2}b^\dagger_{\mathbf{p}_3,\lambda_3}a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\lambda_1}|0\rangle\,, \tag{4.291}$$

负号源自奇数次反对易。从而

$$\left|\mathbf{p}_4^-,\lambda_4;\,\mathbf{p}_2^+,\lambda_2;\,\mathbf{p}_3^-,\lambda_3;\,\mathbf{p}_1^+,\lambda_1\right\rangle = -\left|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^+,\lambda_2;\,\mathbf{p}_3^-,\lambda_3;\,\mathbf{p}_4^-,\lambda_4\right\rangle, \tag{4.292}$$

即交换第 1 和第 4 个粒子得到的态与原来的态相差一个负号。同理，交换其中任意两个粒子，也会出现一个负号。

对于包含多个全同粒子的态，交换任意两个全同粒子，需要对产生算符进行奇数次反对易，得到的态与原来的态相差一个负号，也就是说，态对全同粒子交换是*反对称*的。这说明 Dirac 旋量场描述的粒子是一种*费米子*，称为 **Dirac 费米子**，服从 **Fermi-Dirac 统计** [19, 20]。得到这个结论的关键在于两个产生算符*反对易*。对于两个相同的产生算符 $a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}$ 或 $b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}$，反对易关系导致

$$a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}|0\rangle = -a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}|0\rangle\,, \quad b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}|0\rangle = -b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}|0\rangle\,, \tag{4.293}$$

故

$$a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}|0\rangle = 0, \quad b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}|0\rangle = 0. \tag{4.294}$$

这说明在没有其它自由度的情况下，不存在动量和螺旋度都相同的两个正费米子或两个反费米子组成的态，这符合 **Pauli 不相容原理** [21]。

在第 2 章和第 3 章中，我们分别讨论了自旋为 0 的标量场和自旋为 1 的矢量场，合适的处理方式是通过对易关系对它们进行量子化，因而它们都描述*玻色子*。另一方面，在本章中，我们需要采用*反对易*关系才能对自旋为 1/2 的旋量场进行合适的量子化，因而旋量场描述的粒子是*费米子*。实际上，这样的状况是普遍的，存在**自旋－统计定理** [22, 23]：

整数自旋的物理场必须用对易关系进行量子化，对应的粒子是玻色子；半整数自旋的物理场必须用反对易关系进行量子化，对应的粒子是费米子。

可以从多个角度证明这个定理必须成立。4.5.1 和 4.5.2 小节的讨论说明哈密顿量算符的正定性要求它成立。此外，也可以从交换全同粒子的路径依赖性、散射矩阵的 Lorentz 不变性、因果性的角度加以证明[1]。

将两个正费米子组成的双粒子态记为

$$\left|\mathbf{p}_1^+, \lambda_1; \mathbf{p}_2^+, \lambda_2\right\rangle \equiv \sqrt{4E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}}\, a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\lambda_1} a^\dagger_{\mathbf{p}_2,\lambda_2} \left|0\right\rangle, \tag{4.295}$$

则双粒子态的内积关系是

$$\begin{aligned}
&\left\langle \mathbf{q}_1^+, \lambda_1'; \mathbf{q}_2^+, \lambda_2' \,\middle|\, \mathbf{p}_1^+, \lambda_1; \mathbf{p}_2^+, \lambda_2 \right\rangle \\
=\ & \sqrt{16E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}E_{\mathbf{q}_1}E_{\mathbf{q}_2}}\, \left\langle 0\right| a_{\mathbf{q}_2,\lambda_2'} a_{\mathbf{q}_1,\lambda_1'} a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\lambda_1} a^\dagger_{\mathbf{p}_2,\lambda_2} \left|0\right\rangle \\
=\ & \sqrt{16E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}E_{\mathbf{q}_1}E_{\mathbf{q}_2}} \Big[(2\pi)^3 \delta_{\lambda_1\lambda_1'} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1) \left\langle 0\right| a_{\mathbf{q}_2,\lambda_2'} a^\dagger_{\mathbf{p}_2,\lambda_2} \left|0\right\rangle \\
& \qquad\qquad - \left\langle 0\right| a_{\mathbf{q}_2,\lambda_2'} a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\lambda_1} a_{\mathbf{q}_1,\lambda_1'} a^\dagger_{\mathbf{p}_2,\lambda_2} \left|0\right\rangle \Big] \\
=\ & \sqrt{16E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}E_{\mathbf{q}_1}E_{\mathbf{q}_2}} \Big[(2\pi)^3 \delta_{\lambda_1\lambda_1'} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1) \left\langle 0\right| a_{\mathbf{q}_2,\lambda_2'} a^\dagger_{\mathbf{p}_2,\lambda_2} \left|0\right\rangle \\
& \qquad\qquad - (2\pi)^3 \delta_{\lambda_2\lambda_1'} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_1) \left\langle 0\right| a_{\mathbf{q}_2,\lambda_2'} a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\lambda_1} \left|0\right\rangle \Big] \\
=\ & \sqrt{16E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}E_{\mathbf{q}_1}E_{\mathbf{q}_2}} \left[(2\pi)^6 \delta_{\lambda_1\lambda_1'}\delta_{\lambda_2\lambda_2'} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1)\delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2)\right. \\
& \qquad\qquad \left. - (2\pi)^6 \delta_{\lambda_2\lambda_1'}\delta_{\lambda_1\lambda_2'} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_1)\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_2)\right] \\
=\ & 4E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}(2\pi)^6 \left[\delta_{\lambda_1\lambda_1'}\delta_{\lambda_2\lambda_2'} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1)\delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2)\right. \\
& \qquad\qquad \left. - \delta_{\lambda_1\lambda_2'}\delta_{\lambda_2\lambda_1'} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_2)\delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_1)\right].
\end{aligned} \tag{4.296}$$

上式最后两行方括号中第二项前面有一个负号，由产生湮灭算符的反对易关系引起。这是双费米子态内积关系与双玻色子态内积关系 (2.161) 在形式上的不同之处。

习　题

4.1 证明下列等式。

(a) $\gamma^\mu \not{p} = 2p^\mu - \not{p}\gamma^\mu$.

(b) $\not{p}\not{p} = p^2$.

(c) $\{\not{p}\not{k}\not{q}, \gamma^\mu\} = 2p^\mu \not{k}\not{q} - 2k^\mu \not{p}\not{q} + 2q^\mu \not{p}\not{k}$.

(d) $\gamma^\mu \gamma_\mu = 4$.

(e) $\sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} = 12$.

[1]详细讨论见参考书【1】第 12 章。

(f) $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\rho\sigma} = -24\mathrm{i}\gamma^5$.

(g) $\gamma_\mu\gamma^5 = -\dfrac{\mathrm{i}}{6}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$.

(h) $[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\gamma^5 = \mathrm{i}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\rho\gamma^\sigma$.

(i) $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\sigma^{\rho\sigma} = -2\mathrm{i}\sigma_{\mu\nu}\gamma^5$.

4.2 设自由 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的拉氏量为

$$\mathcal{L} = \frac{\mathrm{i}}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial_\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi, \tag{4.297}$$

证明由 Euler-Lagrange 方程 (1.143) 推出的经典运动方程也是 Dirac 方程 (4.108)。

4.3 对于平面波旋量系数 $u(\mathbf{p}, \lambda)$ 和 $v(\mathbf{k}, \lambda')$，证明下列等式。

(a) $(\bar{u}\gamma^\mu v)^* = \bar{v}\gamma^\mu u$.

(b) $(\bar{u}\gamma^5 v)^* = -\bar{v}\gamma^5 u$.

(c) $(\bar{u}\gamma^\mu\gamma^5 v)^* = \bar{v}\gamma^\mu\gamma^5 u$.

(d) $(\bar{u}\sigma^{\mu\nu} v)^* = \bar{v}\sigma^{\mu\nu} u$.

(e) $(\bar{u}\gamma^5\sigma^{\mu\nu} v)^* = -\bar{v}\gamma^5\sigma^{\mu\nu} u$.

4.4 证明 **Gordon 恒等式**

$$\bar{u}(\mathbf{p}, \lambda)\gamma^\mu u(\mathbf{k}, \lambda') = \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda)\left(\frac{p^\mu + k^\mu}{2m} + \frac{\mathrm{i}\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\right)u(\mathbf{k}, \lambda'), \tag{4.298}$$

其中 $q^\mu \equiv p^\mu - k^\mu$。

4.5 在球坐标系中，动量表达为 $\mathbf{p} = |\mathbf{p}|\,\hat{\mathbf{p}} = |\mathbf{p}|(s_\theta c_\phi, s_\theta s_\phi, c_\theta)$，其中 $s_\theta \equiv \sin\theta$，$c_\theta \equiv \cos\theta$。

(a) 推出

$$\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} c_\theta & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}s_\theta \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}s_\theta & -c_\theta \end{pmatrix}. \tag{4.299}$$

(b) 推出螺旋态表达式

$$\xi_+(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} c_{\theta/2} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}s_{\theta/2} \end{pmatrix}, \quad \xi_-(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}s_{\theta/2} \\ c_{\theta/2} \end{pmatrix}. \tag{4.300}$$

(c) 根据以上两步结果验证 $(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_+(\mathbf{p}) = +\xi_+(\mathbf{p})$，$(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_-(\mathbf{p}) = -\xi_-(\mathbf{p})$。

(d) 证明

$$\exp(\mathrm{i}\alpha\,\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = \cos\alpha + \mathrm{i}(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\sin\alpha. \tag{4.301}$$

4.6 在 **Dirac 表象**（也称为**标准表象**）中，γ 矩阵表达为

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \\ & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \end{pmatrix}. \tag{4.302}$$

(a) 验证它们满足反对易关系 (4.1)。

(b) 推出

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \end{pmatrix}. \tag{4.303}$$

(c) 将 Dirac 表象中的平面波旋量系数表达为

$$u(\mathbf{p}, s) = \sqrt{E_\mathbf{p} + m} \begin{pmatrix} \zeta_s \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_\mathbf{p} + m} \zeta_s \end{pmatrix}, \quad v(\mathbf{p}, s) = \sqrt{E_\mathbf{p} + m} \begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_\mathbf{p} + m} \eta_s \\ \eta_s \end{pmatrix}. \tag{4.304}$$

ζ_s 不依赖于动量 $\mathbf{p}$，是某个固定方向上的二分量自旋本征态，本征值为 $s = \pm 1/2$；η_s 是另一套类似的本征态，可以跟 ζ_s 不同；它们满足

$$\zeta_s^\dagger \zeta_{s'} = \delta_{ss'}, \quad \sum_{s=\pm 1/2} \zeta_s \zeta_s^\dagger = \mathbf{1}, \tag{4.305}$$

$$\eta_s^\dagger \eta_{s'} = \delta_{ss'}, \quad \sum_{s=\pm 1/2} \eta_s \eta_s^\dagger = \mathbf{1}. \tag{4.306}$$

证明 $u(\mathbf{p}, s)$ 和 $v(\mathbf{p}, s)$ 满足运动方程

$$(\not{p} - m) u(\mathbf{p}, s) = 0, \quad (\not{p} + m) v(\mathbf{p}, s) = 0, \tag{4.307}$$

正交归一关系

$$u^\dagger(\mathbf{p}, s) u(\mathbf{p}, s') = 2E_\mathbf{p} \delta_{ss'}, \quad v^\dagger(\mathbf{p}, s) v(\mathbf{p}, s') = 2E_\mathbf{p} \delta_{ss'}, \quad u^\dagger(\mathbf{p}, s) v(-\mathbf{p}, s') = 0, \tag{4.308}$$

和自旋求和关系

$$\sum_{s=\pm 1/2} u(\mathbf{p}, s) \bar{u}(\mathbf{p}, s) = \not{p} + m, \quad \sum_{s=\pm 1/2} v(\mathbf{p}, s) \bar{v}(\mathbf{p}, s) = \not{p} - m. \tag{4.309}$$

4.7 将 Weyl 表象中的 γ 矩阵 (4.69) 记为 γ^μ_W，Dirac 表象中的 γ 矩阵 (4.302) 记为 γ^μ_D，寻找幺正矩阵 U，使得 $\gamma^\mu_\mathrm{D} = U^\dagger \gamma^\mu_\mathrm{W} U$。

第 5 章　量子场的相互作用

第 2、3、4 章分别讨论了标量场、矢量场、旋量场的正则量子化。不过，这些讨论只涉及自由量子场的拉氏量，没有考虑到量子场的相互作用。像 (2.77)、(3.187) 和 (4.104) 式这样的自由场拉氏量包含着动能项和质量项，它们都是二次型，即每一项均包含 2 个场算符。如果我们更进一步，考虑拉氏量包含多于 2 个场算符的项，则这些项将描述场的**相互作用** (interaction)。在**局域**场论中，拉氏量 $\mathcal{L}(x)$ 中的相互作用项只能包含同一个时空点处的几个场，例如 $[\phi(x)]^3$；不能包含处于不同时空点上的场，例如 $[\phi(x)]^2\phi(y)$。这样可以保持理论的**因果性** (causality)。

相互作用项可以只包含同一个场，从而描述场的**自相互作用** (self-interaction)。例如，用实标量场 $\phi(x)$ 构造拉氏量

$$\mathcal{L}_{\phi^4} = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}\,m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\,\phi^4. \tag{5.1}$$

前两项与 (2.77) 式相同，第三项描述四个实标量场的自相互作用，其中，λ 是一个实**耦合常数** (coupling constant)，它的大小决定耦合的强度。$\mathcal{L}_{\phi^4}$ 描述实标量场的 $\boldsymbol{\phi^4}$ **理论**。

在自然单位制中，时空坐标 x^μ 的量纲是能量量纲的倒数，即 $[x^\mu] = [E]^{-1}$，故时空导数的量纲是 $[\partial_\mu] = [E]$，时空体积元的量纲则是 $[\mathrm{d}^4x] = [E]^{-4}$。由于作用量 $S = \int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}$ 没有量纲，拉氏量的量纲是

$$[\mathcal{L}] = [E]^4. \tag{5.2}$$

于是，从拉氏量 (5.1) 的第一项可以看出，标量场的量纲是

$$[\phi] = [E]. \tag{5.3}$$

从而，$[\phi^4] = [E]^4$，故 $[\lambda] = 1$，即耦合常数 λ 是无量纲的。类似地，分析拉氏量 (3.187)，容易发现矢量场 A^μ 的量纲是

$$[A^\mu] = [E]. \tag{5.4}$$

相互作用项也可以涉及不同的场。例如，用实标量场 $\phi(x)$ 和 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 构造拉氏量

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = \mathcal{L}_{\text{S}} + \mathcal{L}_{\text{D}} + \mathcal{L}_{\text{Y}}, \tag{5.5}$$

其中，

$$\mathcal{L}_{\text{S}} = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}\,m_\phi^2\phi^2 \tag{5.6}$$

包含 ϕ 的动能项和质量项，

$$\mathcal{L}_{\text{D}} = \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m_\psi\bar{\psi}\psi \tag{5.7}$$

包含 ψ 的动能项和质量项，而相互作用项

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Y}} = -\kappa\,\phi\bar{\psi}\psi \tag{5.8}$$

描述标量场 ϕ 与旋量场 ψ 之间的 **Yukawa 相互作用**，这里 κ 是实耦合常数。由拉氏量 (5.7) 的第一项可以看出，旋量场的量纲是

$$[\psi] = [\bar{\psi}] = [E]^{3/2}. \tag{5.9}$$

因此，$[\phi\bar{\psi}\psi] = [E]^4$，于是 Yukawa 耦合常数 κ 没有量纲。这类相互作用最先由汤川秀树 (Hideki Yukawa) 于 1935 年提出 [24]，当时引入 π 介子 (对应于 ϕ) 来传递核子 (对应于 ψ) 之间的强相互作用。$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}$ 描述 **Yukawa 理论**。

存在相互作用时，场的经典运动方程是非线性的。例如，由 Euler-Lagrange 方程 (1.143) 推出 ϕ^4 理论的运动方程为

$$(\partial^2 + m^2)\phi = -\frac{\lambda}{3!}\,\phi^3. \tag{5.10}$$

如果像 Yukawa 理论那样，相互作用项包含不同类型的场，则会得到多个相互耦合的运动方程。这样的运动方程在经典场论中尚不容易求解，在量子场论中就更加困难了。所幸的是，当耦合常数（如 λ、κ）比较小时，在**微扰论** (perturbation theory) 中利用微扰级数展开可以得到比较可靠的近似结果。本章和下一章介绍用微扰论处理量子场相互作用的思路。

如果拉氏量中的相互作用项 $\mathcal{L}_1$ 不包含场 $\Phi_a(x)$ 的时空导数 $\partial_\mu\Phi_a$，则 $\partial\mathcal{L}_1/\partial\dot{\Phi}_a = 0$。上面两个例子都属于这种情况。按照定义式 (1.144)，此时场的共轭动量密度 $\pi_a(x) = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\Phi}_a$ 不会受到 $\mathcal{L}_1(\Phi_a)$ 的影响，因而与没有相互作用时的量相同。将哈密顿量密度 $\mathcal{H}$ 分解成自由运动部分 $\mathcal{H}_0$（与没有相互作用时的哈密顿量密度相同）和相互作用部分 $\mathcal{H}_1$，

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1, \tag{5.11}$$

则根据定义式 (1.146) 有

$$\mathcal{H}_1(\Phi_a) = -\mathcal{L}_1(\Phi_a). \tag{5.12}$$

从而，哈密顿量中描述相互作用的项是

$$H_1 = \int \mathrm{d}^3x\,\mathcal{H}_1(\Phi_a) = -\int \mathrm{d}^3x\,\mathcal{L}_1(\Phi_a). \tag{5.13}$$

如果 $\mathcal{L}_1$ 包含场的时空导数 $\partial_\mu\Phi_a$，则共轭动量密度 $\pi_a(x) = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\Phi}_a$ 与没有相互作用的情况不同，$\mathcal{H}_1$ 的形式会复杂一些。

5.1　相互作用绘景

在 2.2 节中，我们已经介绍过在哈密顿量 H 不含时的情况下 Schrödinger 绘景与 Heisenberg 绘景之间的关系。由于 Heisenberg 绘景能够明确地处理场算符的时间依赖性，前面章节中自由

场的正则量子化程序都是在这个绘景中进行的。实际上，在 Schrödinger 绘景中也可以等价地讨论正则量子化。

接下来以实标量场为例进行表述。自由实标量场 $\phi(x)$ 的哈密顿量可以用产生湮灭算符表达成 (2.123) 式的形式：

$$H = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}. \tag{5.14}$$

它是不含时的。这里我们省略了零点能，因为零点能是一个 c 数，只决定总能量的零点，不会影响下面的讨论。湮灭算符 $a_{\mathbf{p}}$ 和产生算符 $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ 不依赖于时间 t，它们实际上是 *Schrödinger* 绘景中的算符。根据 (2.127) 式，$[a_{\mathbf{p}}, H] = E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}$，则

$$\begin{aligned}
[a_{\mathbf{p}}, (-\mathrm{i}Ht)^{(1)}] &= [a_{\mathbf{p}}, -\mathrm{i}Ht] = -\mathrm{i}t[a_{\mathbf{p}}, H] = -\mathrm{i}E_{\mathbf{p}} t a_{\mathbf{p}}, \\
[a_{\mathbf{p}}, (-\mathrm{i}Ht)^{(2)}] &= [[a_{\mathbf{p}}, (-\mathrm{i}Ht)^{(1)}], -\mathrm{i}Ht] = -\mathrm{i}E_{\mathbf{p}} t[a_{\mathbf{p}}, -\mathrm{i}Ht] = (-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}} t)^2 a_{\mathbf{p}}, \\
&\cdots \\
[a_{\mathbf{p}}, (-\mathrm{i}Ht)^{(n)}] &= (-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}} t)^n a_{\mathbf{p}}.
\end{aligned} \tag{5.15}$$

从而，由 (2.37) 和 (4.23) 式推出 Heisenberg 绘景中的湮灭算符为

$$a_{\mathbf{p}}^{\mathrm{H}}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} a_{\mathbf{p}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [a_{\mathbf{p}}, (-\mathrm{i}Ht)^{(n)}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}} t)^n a_{\mathbf{p}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}} t} a_{\mathbf{p}}. \tag{5.16}$$

对上式取厄米共轭，得到相应的产生算符为

$$a_{\mathbf{p}}^{\mathrm{H}\dagger}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} a_{\mathbf{p}}^\dagger \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{\mathbf{p}} t} a_{\mathbf{p}}^\dagger. \tag{5.17}$$

利用这两条关系，将自由实标量场的平面波展开式 (2.101) 表示成

$$\phi^{\mathrm{H}}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left(a_{\mathbf{p}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} \right) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left[a_{\mathbf{p}}^{\mathrm{H}}(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^{\mathrm{H}\dagger}(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right]. \tag{5.18}$$

在最右边的表达式中，场算符的时间依赖性只包含在 Heisenberg 绘景中的产生湮灭算符里面。反过来，在 Schrödinger 绘景中，自由实标量场的平面波展开式为

$$\begin{aligned}
\phi^{\mathrm{S}}(\mathbf{x}) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} \phi^{\mathrm{H}}(\mathbf{x}, t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} a_{\mathbf{p}}^{\mathrm{H}}(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} a_{\mathbf{p}}^{\mathrm{H}\dagger}(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left(a_{\mathbf{p}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right).
\end{aligned} \tag{5.19}$$

可见，场算符在 Schrödinger 绘景中确实不依赖于时间。同样，将共轭动量密度的展开式 (2.103) 变换到 Schrödinger 绘景中，则共轭动量密度也不依赖于时间：

$$\begin{aligned}
\pi^{\mathrm{S}}(\mathbf{x}) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} \pi^{\mathrm{H}}(\mathbf{x}, t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{-\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} \left[a_{\mathbf{p}}^{\mathrm{H}}(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} - a_{\mathbf{p}}^{\mathrm{H}\dagger}(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{-\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left(a_{\mathbf{p}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} - a_{\mathbf{p}}^\dagger \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right).
\end{aligned} \tag{5.20}$$

我们在 2.2 节中提到，正则对易关系的形式与绘景无关。这一点很容易验证，比如，实标量场的等时对易关系 (2.85) 在 Schrödinger 绘景中化为

$$[\phi^{\mathrm{S}}(\mathbf{x}),\pi^{\mathrm{S}}(\mathbf{y})]=\mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad [\phi^{\mathrm{S}}(\mathbf{x}),\phi^{\mathrm{S}}(\mathbf{y})]=[\pi^{\mathrm{S}}(\mathbf{x}),\pi^{\mathrm{S}}(\mathbf{y})]=0. \tag{5.21}$$

如果从这些正则对易关系和展开式 (5.19)、(5.20) 出发，可以推出产生湮灭算符的对易关系，结果必定与在 Heisenberg 绘景中导出的 (2.120) 式相同。于是，可以进一步导出哈密顿量的表达式 (5.14)。这说明在 Schrödinger 绘景中进行计算也会得到自洽结果。

*存在相互作用*时，在 Schrödinger 绘景中将系统的哈密顿量 H 分解为两个部分，

$$H^{\mathrm{S}}(t)=H_0^{\mathrm{S}}+H_1^{\mathrm{S}}(t). \tag{5.22}$$

其中，主要部分 H_0^{S} 是不含时的自由（没有相互作用）的哈密顿量；微扰部分 $H_1^{\mathrm{S}}(t)$ 描述相互作用，只给出较小的影响。H_1^{S} 可能含时，也可能不含时，这里讨论一般情况。此时可以建立**相互作用绘景** (interaction picture)，它也称为 *Dirac 绘景*。建立方式是把主要部分 H_0^{S} 的影响塞进态矢里面，将态矢定义为

$$|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{I}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}\,|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}}, \tag{5.23}$$

算符定义为

$$O^{\mathrm{I}}(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}O^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}. \tag{5.24}$$

这样一来，相互作用绘景中哈密顿量的自由部分与 Schrödinger 绘景相同，

$$H_0^{\mathrm{I}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}H_0^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}=H_0^{\mathrm{S}}; \tag{5.25}$$

但总哈密顿量不同，

$$H^{\mathrm{I}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}H^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}; \tag{5.26}$$

微扰部分则满足

$$H_1^{\mathrm{I}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}H_1^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}(H^{\mathrm{S}}-H_0^{\mathrm{S}})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}=H^{\mathrm{I}}-H_0^{\mathrm{S}}=H^{\mathrm{I}}-H_0^{\mathrm{I}}. \tag{5.27}$$

此时，Heisenberg 绘景与 Schrödinger 绘景的一般变换关系可表示为

$$|\Psi\rangle^{\mathrm{H}}=W^{\dagger}(t)\,|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}},\quad O^{\mathrm{H}}(t)=W^{\dagger}(t)O^{\mathrm{S}}W(t), \tag{5.28}$$

其中含时幺正变换算符 $W(t)$ 满足

$$\mathrm{i}\partial_0 W(t)=H^{\mathrm{S}}(t)W(t),\quad W(0)=1. \tag{5.29}$$

对于总哈密顿量 H^{S} 不含时的情况，有 $W(t)=\exp(-\mathrm{i}H^{\mathrm{S}}t)$，与 2.2 节一致。现在，Heisenberg 绘景的哈密顿量 $H^{\mathrm{H}}(t)$ 与 $H^{\mathrm{S}}(t)$ 的关系为

$$H^{\mathrm{H}}(t)\equiv W^{\dagger}(t)H^{\mathrm{S}}(t)W(t),\quad H^{\mathrm{S}}(t)=W(t)H^{\mathrm{H}}(t)W^{\dagger}(t), \tag{5.30}$$

故

$$\mathrm{i}\partial_0 W(t) = H^{\mathrm{S}}(t)W(t) = W(t)H^{\mathrm{H}}(t)W^\dagger(t)W(t) = W(t)H^{\mathrm{H}}(t). \tag{5.31}$$

取厄米共轭，得 $-\mathrm{i}\partial_0 W^\dagger(t) = H^{\mathrm{H}}(t)W^\dagger(t)$，从而推出

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\partial_0 O^{\mathrm{H}}(t) &= [\mathrm{i}\partial_0 W^\dagger(t)]O^{\mathrm{S}}W(t) + W^\dagger(t)O^{\mathrm{S}}[\mathrm{i}\partial_0 W(t)] \\ &= -H^{\mathrm{H}}(t)W^\dagger(t)O^{\mathrm{S}}W(t) + W^\dagger(t)O^{\mathrm{S}}W(t)H^{\mathrm{H}}(t) = [W^\dagger(t)O^{\mathrm{S}}W(t), H^{\mathrm{H}}(t)],\end{aligned} \tag{5.32}$$

即 Heisenberg 运动方程

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial t}\,O^{\mathrm{H}}(t) = [O^{\mathrm{H}}(t), H^{\mathrm{H}}(t)]. \tag{5.33}$$

这是要求 $W(t)$ 满足条件 (5.29) 的理由。

以 Schrödinger 绘景为中介，得到相互作用绘景与 Heisenberg 绘景之间的关系

$$|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{I}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}W(t)\,|\Psi\rangle^{\mathrm{H}}, \quad O^{\mathrm{I}}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}W(t)O^{\mathrm{H}}(t)W^\dagger(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}. \tag{5.34}$$

引入幺正变换算符

$$V(t) \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}W(t), \tag{5.35}$$

将以上关系简化为

$$|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{I}} = V(t)\,|\Psi\rangle^{\mathrm{H}}, \quad O^{\mathrm{I}}(t) = V(t)O^{\mathrm{H}}(t)V^\dagger(t). \tag{5.36}$$

由 $W(0) = 1$ 得 $V(0) = 1$。于是，相互作用绘景中等时对易关系的形式不变，如

$$\begin{aligned}[\phi^{\mathrm{I}}(\mathbf{x},t), \pi^{\mathrm{I}}(\mathbf{y},t)] &= [V(t)\phi^{\mathrm{H}}(\mathbf{x},t)V^\dagger(t),\, V(t)\pi^{\mathrm{H}}(\mathbf{y},t)V^\dagger(t)] = V(t)[\phi^{\mathrm{H}}(\mathbf{x},t), \pi^{\mathrm{H}}(\mathbf{y},t)]V^\dagger(t) \\ &= V(t)\mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})V^\dagger(t) = \mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}).\end{aligned} \tag{5.37}$$

当 $t = 0$ 时，三种绘景是一致的，

$$|\Psi(0)\rangle^{\mathrm{I}} = |\Psi(0)\rangle^{\mathrm{S}} = |\Psi\rangle^{\mathrm{H}}, \quad O^{\mathrm{I}}(0) = O^{\mathrm{S}} = O^{\mathrm{H}}(0). \tag{5.38}$$

在任意 t 时刻，均有

$${}^{\mathrm{I}}\langle\Psi(t)|\,O^{\mathrm{I}}(t)\,|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{I}} = {}^{\mathrm{S}}\langle\Psi(t)|\,O^{\mathrm{S}}\,|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}} = {}^{\mathrm{H}}\langle\Psi|\,O^{\mathrm{H}}(t)\,|\Psi\rangle^{\mathrm{H}}, \tag{5.39}$$

因而三种绘景描述相同的物理。如果没有相互作用，$H^{\mathrm{S}} = H_0^{\mathrm{S}}$，则相互作用绘景与 Heisenberg 绘景相同。

以上讨论以 $t = 0$ 作为绘景变换的参考时刻。如果想将参考时刻改为 $t = t_0$，只需要作替换 $t \to t - t_0$。

在 Schrödinger 绘景中，Schrödinger 方程是

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial t}\,|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}} = H^{\mathrm{S}}\,|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}}. \tag{5.40}$$

由此推出

$$\mathrm{i}\partial_0\,|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{I}} = \left(\mathrm{i}\partial_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}\right)|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}\mathrm{i}\partial_0\,|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}} = \left(-H_0^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}H^{\mathrm{S}}\right)|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}}$$

$$= \left(-H_0^{\mathrm{S}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t} H^{\mathrm{S}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t} |\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}} = \left(-H_0^{\mathrm{I}} + H^{\mathrm{I}}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t} |\Psi(t)\rangle^{\mathrm{S}}, \tag{5.41}$$

即

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle^{\mathrm{I}} = H_1^{\mathrm{I}} |\Psi(t)\rangle^{\mathrm{I}}. \tag{5.42}$$

这是态矢 $|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{I}}$ 的演化方程。可见，在相互作用绘景中，态矢的演化只由相互作用哈密顿量 H_1^{I} 决定。另一方面，有

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\partial_0 O^{\mathrm{I}}(t) &= (\mathrm{i}\partial_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}) O^{\mathrm{S}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t} O^{\mathrm{S}} (\mathrm{i}\partial_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}) \\ &= -H_0^{\mathrm{S}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t} O^{\mathrm{S}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t} O^{\mathrm{S}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t} H_0^{\mathrm{S}} = [\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t} O^{\mathrm{S}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}, H_0^{\mathrm{S}}], \end{aligned} \tag{5.43}$$

即

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} O^{\mathrm{I}}(t) = [O^{\mathrm{I}}(t), H_0^{\mathrm{S}}]. \tag{5.44}$$

这个方程表明相互作用绘景中算符的演化只由自由哈密顿量 $H_0^{\mathrm{S}} = H_0^{\mathrm{I}}$ 决定。

综上，在相互作用绘景中，态矢的演化规律与 Schrödinger 绘景中的运动方程 (5.40) 相同，但必须将那里的总哈密顿量 H^{S} 换成相互作用哈密顿量 H_1^{I}，这部分演化属于**动力学** (dynamics) **演化**；算符的演化规律与 Heisenberg 绘景中的运动方程 (5.33) 相同，但必须将那里的总哈密顿量 H^{H} 换成自由哈密顿量 H_0^{I}，这部分演化属于**运动学** (kinematics) **演化**。

在 Heisenberg 绘景中，对未加微扰的系统求出各个算符间的关系之后，加入微扰有可能改变这些关系。不过，加入微扰之后各个算符在相互作用绘景中的许多关系仍然与加入微扰之前它们在 Heisenberg 绘景中的关系相同，可以直接套用原来的公式，这就是相互作用绘景的好处。于是，在相互作用绘景中，具有相互作用的场算符的平面波展开式将与没有相互作用的场算符在 Heisenberg 绘景中的展开式相同。因此，在存在相互作用的情况下，我们仍然可以沿用第 2、3、4 章中导出的*自由量子场平面波展开式*，其中的产生湮灭算符满足原来的对易或反对易关系，这一点对接下来的讨论至关重要。

5.1.1 例 1：实标量场

下面以实标量场的 ϕ^4 理论为例讨论相互作用绘景。根据拉氏量 (5.1) 和 (1.144) 式，共轭动量密度为

$$\pi^{\mathrm{H}} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\phi^4}^{\mathrm{H}}}{\partial(\partial_0 \phi^{\mathrm{H}})} = \partial_0 \phi^{\mathrm{H}}, \tag{5.45}$$

与自由场形式相同。这里我们将 Heisenberg 绘景的标记 H 明确写出来。依照 (1.146) 式，哈密顿量密度为

$$\mathcal{H}^{\mathrm{H}} = \pi^{\mathrm{H}} \partial_0 \phi^{\mathrm{H}} - \mathcal{L}_{\phi^4}^{\mathrm{H}} = \frac{1}{2}[(\pi^{\mathrm{H}})^2 + (\nabla\phi^{\mathrm{H}})^2 + m^2(\phi^{\mathrm{H}})^2] + \frac{\lambda}{4!}(\phi^{\mathrm{H}})^4, \tag{5.46}$$

最后一项是相互作用项。将哈密顿量分解为

$$H^{\mathrm{H}} = \int \mathrm{d}^3x\, \mathcal{H}^{\mathrm{H}} = H_0^{\mathrm{H}} + H_1^{\mathrm{H}}, \tag{5.47}$$

其中，

$$H_0^{\mathrm{H}} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\,[(\pi^{\mathrm{H}})^2 + (\nabla\phi^{\mathrm{H}})^2 + m^2(\phi^{\mathrm{H}})^2] \tag{5.48}$$

与自由哈密顿量 (2.122) 第一行的形式相同，而

$$H_1^{\mathrm{H}} = \frac{\lambda}{4!}\int \mathrm{d}^3x\,(\phi^{\mathrm{H}})^4 \tag{5.49}$$

描述相互作用。

假设 $t=0$ 时，实标量场 $\phi(x)$ 的平面波展开式与自由场展开式 (5.19) 和 (5.20) 一样，

$$\phi^{\mathrm{I}}(\mathbf{x},0) = \phi^{\mathrm{H}}(\mathbf{x},0) = \phi^{\mathrm{S}}(\mathbf{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right), \tag{5.50}$$

$$\pi^{\mathrm{I}}(\mathbf{x},0) = \pi^{\mathrm{H}}(\mathbf{x},0) = \pi^{\mathrm{S}}(\mathbf{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{-\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} - a_{\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right), \tag{5.51}$$

其中，产生湮灭算符 $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ 和 $a_{\mathbf{p}}$ 满足对易关系 (2.120)。在 $t=0$ 时刻，由绘景变换关系 (5.28) 得到 $H_0^{\mathrm{H}}(0) = H_0^{\mathrm{S}}$。将以上 $\phi^{\mathrm{H}}(\mathbf{x},0)$ 和 $\pi^{\mathrm{H}}(\mathbf{x},0)$ 的平面波展开式代入 (5.48) 式，仿照 2.3.3 小节的推导过程，略去零点能，得到

$$H_0^{\mathrm{S}} = H_0^{\mathrm{H}}(0) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}E_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}, \tag{5.52}$$

即哈密顿量的自由部分 H_0^{S} 与 (5.14) 式的形式相同。类似于 (5.15) 式，我们有

$$[a_{\mathbf{p}}, (-\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t)^{(n)}] = (-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t)^n a_{\mathbf{p}}. \tag{5.53}$$

从而由 (4.23) 式得到

$$a_{\mathbf{p}}^{\mathrm{I}}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}a_{\mathbf{p}}, \quad a_{\mathbf{p}}^{\mathrm{I}\dagger}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}a_{\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}a_{\mathbf{p}}^\dagger. \tag{5.54}$$

于是，相互作用绘景中任意 t 时刻的场算符展开式为

$$\begin{aligned}\phi^{\mathrm{I}}(\mathbf{x},t) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}\phi^{\mathrm{S}}(\mathbf{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t} = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left[a_{\mathbf{p}}^{\mathrm{I}}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^{\mathrm{I}\dagger}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right] \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right),\end{aligned} \tag{5.55}$$

共轭动量密度的展开式为

$$\pi^{\mathrm{I}}(\mathbf{x},t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}\pi^{\mathrm{S}}(\mathbf{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t} = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{-\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} - a_{\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right). \tag{5.56}$$

正如所期望的，这两个式子与自由实标量场在 Heisenberg 绘景中的展开式 (2.101) 和 (2.103) 一致。

因此，根据产生湮灭算符的对易关系 (2.120)，可以证明 $\phi^{\mathrm{I}}(x)$ 和 $\pi^{\mathrm{I}}(x)$ 满足与 (2.85) 形式相同的等时对易关系[1]

$$[\phi^{\mathrm{I}}(\mathbf{x},t),\pi^{\mathrm{I}}(\mathbf{y},t)]=\mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad [\phi^{\mathrm{I}}(\mathbf{x},t),\phi^{\mathrm{I}}(\mathbf{y},t)]=[\pi^{\mathrm{I}}(\mathbf{x},t),\pi^{\mathrm{I}}(\mathbf{y},t)]=0. \tag{5.57}$$

此外，能够验证场算符展开式符合运动学演化方程 (5.44)：类似于 (2.126) 和 (2.127) 式，推出

$$[a_{\mathbf{p}},H_0^{\mathrm{S}}]=E_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}},\quad [a_{\mathbf{p}}^\dagger,H_0^{\mathrm{S}}]=-E_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^\dagger, \tag{5.58}$$

从而

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\phi^{\mathrm{I}}(\mathbf{x},t)&=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left(E_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}-E_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)\\&=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left([a_{\mathbf{p}},H_0^{\mathrm{S}}]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+[a_{\mathbf{p}}^\dagger,H_0^{\mathrm{S}}]\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)=[\phi^{\mathrm{I}}(\mathbf{x},t),H_0^{\mathrm{S}}].\end{aligned} \tag{5.59}$$

5.1.2 例 2：有质量矢量场

不难将上述讨论推广到复标量场、无质量矢量场和 Dirac 旋量场。但是，推广到有质量实矢量场 $A^\mu(x)$ 却会得到不同寻常的结果，原因在于 $A^0(x)$ 不是一个独立的场分量，不具备相应的共轭动量密度和正则对易关系，因而在绘景变换中具有特殊的性质。

假设参与相互作用的有质量矢量场具有拉氏量

$$\mathcal{L}^{\mathrm{H}}=\mathcal{L}_0^{\mathrm{H}}+\mathcal{L}_1^{\mathrm{H}}, \tag{5.60}$$

其中自由项为

$$\mathcal{L}_0^{\mathrm{H}}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{\mathrm{H}}F^{\mathrm{H},\mu\nu}+\frac{1}{2}m^2A_\mu^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H},\mu}, \tag{5.61}$$

相互作用项为

$$\mathcal{L}_1^{\mathrm{H}}=-gJ_\mu^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H},\mu}. \tag{5.62}$$

此处，g 是一个无量纲耦合常数，$J_\mu^{\mathrm{H}}(x)$ 是由其它场组成的流，如 $\bar\psi^{\mathrm{H}}(x)\gamma_\mu\psi^{\mathrm{H}}(x)$。根据 (1.143) 式及

$$\frac{\partial\mathcal{L}^{\mathrm{H}}}{\partial(\partial_\mu A_\nu^{\mathrm{H}})}=-F^{\mathrm{H},\mu\nu},\quad \frac{\partial\mathcal{L}^{\mathrm{H}}}{\partial A_\nu^{\mathrm{H}}}=m^2A^{\mathrm{H},\nu}-gJ^{\mathrm{H},\nu}, \tag{5.63}$$

Euler-Lagrange 方程给出

$$\partial_\mu F^{\mathrm{H},\mu\nu}+m^2A^{\mathrm{H},\nu}=gJ^{\mathrm{H},\nu}. \tag{5.64}$$

由于 $J_\mu^{\mathrm{H}}(x)$ 不包含 $A^{\mathrm{H},\mu}$ 的时间导数，共轭动量密度与自由场形式相同：

$$\pi_i^{\mathrm{H}}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^0A^{\mathrm{H},i})}=-F_{0i}^{\mathrm{H}},\quad \pi^{\mathrm{H},i}=F^{\mathrm{H},i0}=-\partial^0A^{\mathrm{H},i}+\partial^iA^{\mathrm{H},0}. \tag{5.65}$$

[1] 参考习题 2.2。

写成空间矢量的形式，得

$$\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}} = -\dot{\mathbf{A}}^{\mathrm{H}} - \nabla A^{\mathrm{H},0}, \quad \dot{\mathbf{A}}^{\mathrm{H}} = -\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}} - \nabla A^{\mathrm{H},0}. \tag{5.66}$$

当 $\nu = 0$ 时，运动方程变成

$$\partial_i F^{\mathrm{H},i0} + m^2 A^{\mathrm{H},0} = g J^{\mathrm{H},0}, \tag{5.67}$$

故

$$A^{\mathrm{H},0} = -\frac{1}{m^2}(\partial_i F^{\mathrm{H},i0} - g J^{\mathrm{H},0}) = -\frac{1}{m^2}(\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}} - g J^{\mathrm{H},0}). \tag{5.68}$$

与自由情况 (3.203) 不同，此处 $A^{\mathrm{H},0}$ 还依赖于 $J^{\mathrm{H},0}$。

根据 (3.275) 式和 (3.271) 式第一步结果，哈密顿量密度是

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{\mathrm{H}} &= \pi_i^{\mathrm{H}} \partial_0 A^{\mathrm{H},i} - \mathcal{L}^{\mathrm{H}} = -\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{\mathrm{H}} - \mathcal{L}^{\mathrm{H}} \\ &= -\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{\mathrm{H}} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}})^2 + \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{A}^{\mathrm{H}})^2 - \frac{1}{2} m^2 [(A^{\mathrm{H},0})^2 - (\mathbf{A}^{\mathrm{H}})^2] + g J^{\mathrm{H},0} A^{\mathrm{H},0} - g\, \mathbf{J}^{\mathrm{H}} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{H}}.\end{aligned} \tag{5.69}$$

我们需要知道它比自由哈密顿量密度 (3.276) 多了什么。利用 (5.66) 和 (5.68) 式，将 (5.69) 式第一项化为

$$\begin{aligned}-\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{\mathrm{H}} &= \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}} \cdot (\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}} + \nabla A^{\mathrm{H},0}) = (\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}})^2 + \nabla \cdot (A^{\mathrm{H},0} \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}}) - A^{\mathrm{H},0} \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}} \\ &= (\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}})^2 + \nabla \cdot (A^{\mathrm{H},0} \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}}) + \frac{1}{m^2}(\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}})^2 - \frac{g}{m^2} J^{\mathrm{H},0} \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}}.\end{aligned} \tag{5.70}$$

最后一行第二项是全散度，不会影响哈密顿量。(5.69) 式第四项中包括

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2} m^2 (A^{\mathrm{H},0})^2 &= -\frac{m^2}{2}\frac{1}{m^4}(\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}} - g J^{\mathrm{H},0})^2 \\ &= -\frac{1}{2m^2}(\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}})^2 - \frac{g^2}{2m^2}(J^{\mathrm{H},0})^2 + \frac{g}{m^2} J^{\mathrm{H},0} \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}},\end{aligned} \tag{5.71}$$

而第五项为

$$g J^{\mathrm{H},0} A^{\mathrm{H},0} = -\frac{g}{m^2} J^{\mathrm{H},0}(\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}} - g J^{\mathrm{H},0}) = -\frac{g}{m^2} J^{\mathrm{H},0} \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}} + \frac{g^2}{m^2}(J^{\mathrm{H},0})^2. \tag{5.72}$$

这里包含 J^μ 的项都是自由场不具备的，应该归为相互作用项。于是，我们将哈密顿量分解为

$$H^{\mathrm{H}} = \int \mathrm{d}^3 x\, \mathcal{H}^{\mathrm{H}} = H_0^{\mathrm{H}} + H_1^{\mathrm{H}}, \tag{5.73}$$

其中，

$$H_0^{\mathrm{H}} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3 x \left[(\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}})^2 + \frac{1}{m^2}(\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}})^2 + (\nabla \times \mathbf{A}^{\mathrm{H}})^2 + m^2 (\mathbf{A}^{\mathrm{H}})^2\right] \tag{5.74}$$

与自由哈密顿量 (3.277) 形式相同，而

$$H_1^{\mathrm{H}} = \int \mathrm{d}^3 x \left[-g\, \mathbf{J}^{\mathrm{H}} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{H}} - \frac{g}{m^2} J^{\mathrm{H},0} \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}} + \frac{g^2}{2m^2}(J^{\mathrm{H},0})^2\right] \tag{5.75}$$

描述相互作用。

根据等时对易关系 (3.199)，有

$$\begin{aligned}[A^{\mathrm{H},i}(x),(\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}}(y))^2] &= [A^{\mathrm{H},i}(x),\pi_j^{\mathrm{H}}(y)]\pi_j^{\mathrm{H}}(y)+\pi_j^{\mathrm{H}}(y)[A^{\mathrm{H},i}(x),\pi_j^{\mathrm{H}}(y)]\\ &= 2\mathrm{i}\delta^i{}_j\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\pi_j^{\mathrm{H}}(y)=-2\mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\pi^{\mathrm{H},i}(y),\end{aligned}\tag{5.76}$$

写成空间矢量的形式是

$$[\mathbf{A}^{\mathrm{H}}(x),(\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}}(y))^2]=-2\mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}}(y).\tag{5.77}$$

另一方面，用 ∇_y 表示对空间矢量 $\mathbf{y}$ 的梯度算符，得到

$$[A^{\mathrm{H},i}(x),\nabla_y\cdot\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}}(y)]=-\frac{\partial}{\partial y^j}[A^{\mathrm{H},i}(x),\pi_j^{\mathrm{H}}(y)]=-\mathrm{i}\delta^i{}_j\frac{\partial}{\partial y^j}\,\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})=-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y^i}\,\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\tag{5.78}$$

即

$$[\mathbf{A}^{\mathrm{H}}(x),\nabla_y\cdot\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}}(y)]=-\mathrm{i}\nabla_y\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\tag{5.79}$$

从而导出

$$\begin{aligned}[\mathbf{A}^{\mathrm{H}}(x),H_0^{\mathrm{H}}] &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3y\left\{[\mathbf{A}^{\mathrm{H}}(x),(\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}}(y))^2]+\frac{1}{m^2}[\mathbf{A}^{\mathrm{H}}(x),(\nabla_y\cdot\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}}(y))^2]\right\}\\ &= \int \mathrm{d}^3y\left\{-\mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}}(y)-\frac{\mathrm{i}}{m^2}[\nabla_y\cdot\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}}(y)]\nabla_y\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right\}\\ &= -\mathrm{i}\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}}(x)+\frac{\mathrm{i}}{m^2}\int d^3y\,\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\nabla_y[\nabla_y\cdot\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}}(y)]\\ &= -\mathrm{i}\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}}(x)+\frac{\mathrm{i}}{m^2}\nabla_x[\nabla_x\cdot\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}}(x)].\end{aligned}\tag{5.80}$$

第三步用了分部积分。

接下来转换到相互作用绘景，

$$\mathbf{A}^{\mathrm{I}}=V(t)\,\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\,V^\dagger(t),\quad \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{I}}=V(t)\,\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{H}}\,V^\dagger(t),\tag{5.81}$$

则

$$H_0^{\mathrm{S}}=H_0^{\mathrm{I}}=V(t)H_0^{\mathrm{H}}V^\dagger(t)=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\left[(\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{I}})^2+\frac{1}{m^2}(\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{I}})^2+(\nabla\times\mathbf{A}^{\mathrm{I}})^2+m^2(\mathbf{A}^{\mathrm{I}})^2\right].\tag{5.82}$$

将算符演化方程 (5.44) 应用到 $\mathbf{A}^{\mathrm{I}}$ 上，利用 (5.80) 式，推出

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\dot{\mathbf{A}}^{\mathrm{I}} &= [\mathbf{A}^{\mathrm{I}},H_0^{\mathrm{S}}]=V(t)\,[\mathbf{A}^{\mathrm{H}},H_0^{\mathrm{H}}]\,V^\dagger(t)\\ &= V(t)\left[-\mathrm{i}\pi^{\mathrm{H}}+\frac{\mathrm{i}}{m^2}\,\nabla(\nabla\cdot\pi^{\mathrm{H}})\right]V^\dagger(t)=-\mathrm{i}\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{I}}+\frac{\mathrm{i}}{m^2}\,\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{I}}),\end{aligned}\tag{5.83}$$

即

$$\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{I}}=-\dot{\mathbf{A}}^{\mathrm{I}}+\frac{1}{m^2}\,\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{I}}).\tag{5.84}$$

与 (3.201) 式和 (3.203) 式比较，可以看出，这个等式与自由场情况具有相同形式。

现在，假设 $t=0$ 时 $A^{\mu}(x)$ 和 $\pi_i(x)$ 的平面波展开式与 $t=0$ 时的自由场展开式 (3.249) 和 (3.266) 相同，

$$\begin{aligned} A^{\mathrm{I},\mu}(\mathbf{x},0) &= A^{\mathrm{H},\mu}(\mathbf{x},0)=A^{\mathrm{S},\mu}(\mathbf{x}) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda=\pm,0}\left[\varepsilon^{\mu}(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}+\varepsilon^{\mu *}(\mathbf{p},\lambda)a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right], \end{aligned} \tag{5.85}$$

$$\begin{aligned} \pi_i^{\mathrm{I}}(\mathbf{x},0) &= \pi_i^{\mathrm{H}}(\mathbf{x},0)=\pi_i^{\mathrm{S}}(\mathbf{x}) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda=\pm,0}\left[\tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}-\tilde{\varepsilon}_i^{*}(\mathbf{p},\lambda)a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right], \end{aligned} \tag{5.86}$$

其中，产生湮灭算符 $a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}$ 和 $a_{\mathbf{p},\lambda}$ 满足对易关系 (3.268)。在 $t=0$ 时刻，将以上 $A^{\mathrm{H},\mu}(\mathbf{x},0)$ 和 $\pi_i^{\mathrm{H}}(\mathbf{x},0)$ 的平面波展开式代入 (5.74) 式，仿照 3.4.3 小节的推导过程，略去零点能，得到

$$H_0^{\mathrm{S}}=H_0^{\mathrm{H}}(0)=\sum_{\lambda=\pm,0}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}E_{\mathbf{p}}a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}a_{\mathbf{p},\lambda}, \tag{5.87}$$

即哈密顿量的自由部分 H_0^{S} 具有 (3.278) 式的形式。从而

$$[H_0^{\mathrm{S}},a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}]=\sum_{\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}E_{\mathbf{q}}[a^{\dagger}_{\mathbf{q},\lambda'}a_{\mathbf{q},\lambda'},a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}]=\sum_{\lambda'}\int\mathrm{d}^3q\,E_{\mathbf{q}}a^{\dagger}_{\mathbf{q},\lambda'}\delta_{\lambda'\lambda}\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p})=E_{\mathbf{p}}a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}, \tag{5.88}$$

$$[H_0^{\mathrm{S}},a_{\mathbf{p},\lambda}]=\sum_{\lambda'}\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}E_{\mathbf{q}}[a^{\dagger}_{\mathbf{q},\lambda'}a_{\mathbf{q},\lambda'},a_{\mathbf{p},\lambda}]=-\sum_{\lambda'}\int\mathrm{d}^3q\,E_{\mathbf{q}}a_{\mathbf{q},\lambda'}\delta_{\lambda'\lambda}\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p})=-E_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p},\lambda}. \tag{5.89}$$

于是，我们能够得到与 (5.15) 形式相同的式子

$$[a_{\mathbf{p},\lambda},(-\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t)^{(n)}]=(-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t)^n a_{\mathbf{p},\lambda}, \tag{5.90}$$

再根据 (4.23) 式导出

$$a^{\mathrm{I}}_{\mathbf{p},\lambda}(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}a_{\mathbf{p},\lambda},\quad a^{\mathrm{I}\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}. \tag{5.91}$$

更进一步，推出

$$A^{\mathrm{I},\mu}(\mathbf{x},t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}A^{\mathrm{S},\mu}(\mathbf{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda=\pm,0}\left[\varepsilon^{\mu}(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+\varepsilon^{\mu *}(\mathbf{p},\lambda)a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right], \tag{5.92}$$

$$\pi_i^{\mathrm{I}}(\mathbf{x},t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}\pi_i^{\mathrm{S}}(\mathbf{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^{\mathrm{S}}t}=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{i}p_0}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda=\pm,0}\left[\tilde{\varepsilon}_i(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}-\tilde{\varepsilon}_i^{*}(\mathbf{p},\lambda)a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right]. \tag{5.93}$$

也就是说，对于任意 t 时刻，$A^{\mathrm{I},\mu}(x)$ 和 $\pi_i^{\mathrm{I}}(x)$ 的展开式与 Heisenberg 绘景中的自由场展开式 (3.249) 和 (3.266) 一致。这是我们期望的结果。

因此，$\pi_i^{\mathrm{I}}(x)$ 和 $A^{\mathrm{I},\mu}(x)$ 的关系也与自由场的 (3.198) 式一样，

$$\pi_i^{\mathrm{I}}=-\partial_0A_i^{\mathrm{I}}+\partial_iA_0^{\mathrm{I}}, \tag{5.94}$$

即

$$\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{I}} = -\dot{\mathbf{A}}^{\mathrm{I}} - \nabla A^{\mathrm{I},0}. \tag{5.95}$$

与 (5.84) 式比较，得到

$$A^{\mathrm{I},0} = -\frac{1}{m^2}\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{I}}. \tag{5.96}$$

这个式子不同于 Heisenberg 绘景中的关系式 (5.68)，反而与自由场的关系式 (3.203) 一致。实际上，由于 $A^{\mathrm{H},0}$ 不是独立的场分量，我们在 Heisenberg 绘景中可以利用 Euler-Lagrange 方程导出关系式 (5.68) 来确定它，但我们无法保证这个关系式在相互作用绘景中成立，因而不能直接通过相似变换定义 $A^{\mathrm{H},0}$ 在相互作用绘景中对应的量。

根据 (5.96) 式，相互作用哈密顿量 (5.75) 在相互作用绘景中将变成

$$\begin{aligned} H_1^{\mathrm{I}} &= V(t)H_1^{\mathrm{H}}V^\dagger(t) = \int \mathrm{d}^3x\,\left[-g\,\mathbf{J}^{\mathrm{I}}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{I}} - \frac{g}{m^2}\,J^{\mathrm{I},0}\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{I}} + \frac{g^2}{2m^2}(J^{\mathrm{I},0})^2\right] \\ &= \int \mathrm{d}^3x\,\left[-g\,\mathbf{J}^{\mathrm{I}}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{I}} + gJ^{\mathrm{I},0}A^{\mathrm{I},0} + \frac{g^2}{2m^2}(J^{\mathrm{I},0})^2\right] = \int \mathrm{d}^3x\,\left[gJ_\mu^{\mathrm{I}}A^{\mathrm{I},\mu} + \frac{g^2}{2m^2}(J^{\mathrm{I},0})^2\right] \\ &= \int \mathrm{d}^3x\,\left[-\mathcal{L}_1^{\mathrm{I}} + \frac{g^2}{2m^2}(J^{\mathrm{I},0})^2\right]. \end{aligned} \tag{5.97}$$

最后一行方括号中第一项 $-\mathcal{L}_1^{\mathrm{I}} = gJ_\mu^{\mathrm{I}}A^{\mathrm{I},\mu}$ 是我们期望得到的，具有 Lorentz 不变性。但第二项异乎寻常，不具有 Lorentz 不变性，我们将这个非协变项记为

$$\mathcal{H}_{J^0}^{\mathrm{I}} = \frac{g^2}{2m^2}(J^{\mathrm{I},0})^2. \tag{5.98}$$

在这里，$\mathcal{H}_{J^0}^{\mathrm{I}}$ 看起来会破坏理论的 Lorentz 协变性，不过，在后续微扰论分析中，我们将看到它的贡献恰好抵消了有质量矢量场传播子中的非协变项（见 5.4.3 小节和 6.4 节）。最终，理论仍然是 Lorentz 协变的。

5.2　时间演化算符和 S 矩阵

如前所述，在相互作用绘景中，态矢 $|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{I}}$ 承载着动力学演化，它的演化方程 (5.42) 是微扰论处理量子场相互作用的一个出发点。引入**时间演化算符** (time-evolution operator) $U(t,t_0)$，用于联系 t_0 和 t 两个时刻的态矢，

$$|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{I}} = U(t,t_0)\,|\Psi(t_0)\rangle^{\mathrm{I}}. \tag{5.99}$$

由 (5.36) 式有

$$|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{I}} = V(t)\,|\Psi\rangle^{\mathrm{H}} = V(t)V^\dagger(t_0)\,|\Psi(t_0)\rangle^{\mathrm{I}}. \tag{5.100}$$

因而可以将时间演化算符表示为

$$U(t,t_0) = V(t)V^\dagger(t_0). \tag{5.101}$$

容易看出，时间演化算符满足

$$U(t_0,t_0) = 1. \tag{5.102}$$

两个时间演化算符相继作用对应的乘法规则为

$$U(t_2,t_1)U(t_1,t_0)=V(t_2)V^\dagger(t_1)V(t_1)V^\dagger(t_0)=V(t_2)V^\dagger(t_0)=U(t_2,t_0). \tag{5.103}$$

上式取 $t_2=t_0$，即得

$$U(t_0,t_1)U(t_1,t_0)=U(t_0,t_0)=1, \tag{5.104}$$

故时间演化算符的逆算符为

$$U^{-1}(t,t_0)=U(t_0,t). \tag{5.105}$$

再由 $V(t)$ 的幺正性推出

$$U^\dagger(t,t_0)=V(t_0)V^\dagger(t)=U(t_0,t)=U^{-1}(t,t_0), \tag{5.106}$$

这表明时间演化算符是幺正算符。由于 $V(0)=1$，取 $t_0=0$，有

$$U(t,0)=V(t),\quad U^{-1}(t,0)=V^\dagger(t), \tag{5.107}$$

因而 $U(t,0)$ 就是联系 Heisenberg 绘景和相互作用绘景的幺正变换算符，(5.36) 式化为

$$|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{I}}=U(t,0)\,|\Psi\rangle^{\mathrm{H}},\quad O^{\mathrm{I}}(t)=U(t,0)O^{\mathrm{H}}(t)U^{-1}(t,0). \tag{5.108}$$

从态矢的演化方程 (5.42) 推出

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0)\,|\Psi(t_0)\rangle^{\mathrm{I}}=\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\,|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{I}}=H_1^{\mathrm{I}}(t)\,|\Psi(t)\rangle^{\mathrm{I}}=H_1^{\mathrm{I}}(t)U(t,t_0)\,|\Psi(t_0)\rangle^{\mathrm{I}}, \tag{5.109}$$

即

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0)=H_1^{\mathrm{I}}(t)U(t,t_0). \tag{5.110}$$

这是时间演化算符需要满足的微分方程，结合边值条件 (5.102)，将方程的解表达为

$$U(t,t_0)=1+(-\mathrm{i})\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\,H_1^{\mathrm{I}}(t_1)U(t_1,t_0). \tag{5.111}$$

上式左右两边均包含时间演化算符，重复迭代，得到级数

$$\begin{aligned}U(t,t_0)\;=\;&1+(-\mathrm{i})\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\,H_1^{\mathrm{I}}(t_1)+(-\mathrm{i})^2\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2\,H_1^{\mathrm{I}}(t_1)H_1^{\mathrm{I}}(t_2)\\&+\cdots+\left[(-\mathrm{i})^n\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}}\mathrm{d}t_n\,H_1^{\mathrm{I}}(t_1)\cdots H_1^{\mathrm{I}}(t_n)\right]+\cdots\end{aligned} \tag{5.112}$$

这个级数用起来不够方便，需要进一步化简。

从现在开始，我们将**省略**表示相互作用绘景的上标 I，因为本章余下内容均在相互作用绘景中讨论。

在级数 (5.112) 中，作为积分上限的时刻是降序排列的，即 $t\geq t_1\geq t_2\geq\cdots\geq t_n\geq\cdots\geq t_0$。由于积分上限相互依赖，这样的多重积分很难处理。为了将级数中每个积分的上限都扩展到 t

时刻，引入**时序乘积** (time-ordered product) 的概念。时序乘积使若干个含时算符的乘积强行按照它们相应的时刻从左到右降序排列。以 n 个 $H_1(t)$ 算符为例，用 T 表示这种时间排序，有

$$\mathsf{T}[H_1(t_1)H_1(t_2)\cdots H_1(t_n)] = H_1(t_{i_1})H_1(t_{i_2})\cdots H_1(t_{i_n}), \quad t_{i_1} \geq t_{i_2} \geq \cdots \geq t_{i_n}. \tag{5.113}$$

这里 $t_{i_1}, t_{i_2}, \cdots, t_{i_n}$ 是由 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 按照数值降序排列得到的。又如，两个标量场算符 $\phi(x)$ 和 $\phi(y)$ 的时序乘积可以用阶跃函数 (2.148) 表示为

$$\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)] = \phi(x)\phi(y)\theta(x^0-y^0) + \phi(y)\phi(x)\theta(y^0-x^0) = \begin{cases} \phi(x)\phi(y), & x^0 \geq y^0, \\ \phi(y)\phi(x), & x^0 < y^0. \end{cases} \tag{5.114}$$

如果一个算符包含一个费米子产生或湮灭算符，可称它为**费米子算符**。旋量场算符 $\psi(x)$ 和它的 Dirac 共轭 $\bar{\psi}(x)$ 都是费米子算符。对费米子算符作时序乘积时，需要顾及它们的反对易性质，因此，如果时间排序交换了两个相邻的费米子算符，则应该额外添加一个负号。比如，两个旋量场算符 $\psi_a(x)$ 和 $\bar{\psi}_b(y)$ 的时序乘积是

$$\mathsf{T}[\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)] = \psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)\theta(x^0-y^0) - \bar{\psi}_b(y)\psi_a(x)\theta(y^0-x^0) = \begin{cases} \psi_a(x)\bar{\psi}_b(y), & x^0 \geq y^0, \\ -\bar{\psi}_b(y)\psi_a(x), & x^0 < y^0. \end{cases} \tag{5.115}$$

在狭义相对论中，$(x-y)^2$ 描述两个时空点 x 和 y 之间的**时空间隔**。若 $(x-y)^2 < 0$，则称 x 和 y 具有**类空间隔**；类似地，$(x-y)^2 > 0$ 和 $(x-y)^2 = 0$ 分别对应于**类时间隔**和**类光间隔**。如果 x 和 y 具有类时或类光间隔，那么，在任意惯性参考系中，x^0 和 y^0 的大小关系是确定的，即不能通过 Lorentz 变换改变时序。假如两个事件具有因果联系，则它们发生的两个时空点必定具有类时或类光间隔，从而两个事件发生的先后次序是确定的。反过来，如果 x 和 y 具有类空间隔，则 x^0 和 y^0 的大小关系是不确定的，选取适当的惯性参考系，就可以得到 $x^0 > y^0$、$x^0 = y^0$ 和 $x^0 < y^0$ 三种情况。因此，如果两个事件发生的时空点具有类空间隔，它们发生的先后次序是不确定的，必定没有因果联系，否则将破坏因果性。

Lorentz 对称性对时序乘积的定义提出一定的要求。两个实标量场算符的对易子 $[\phi(x), \phi(y)]$ 称为 **Pauli-Jordan 传播函数** $D_{\mathrm{PJ}}(x-y)$ [25]，根据平面波展开式 (5.55)，它满足

$$\begin{aligned} D_{\mathrm{PJ}}(x-y) \equiv [\phi(x), \phi(y)] &= \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \left[a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x},\, a_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot y} + a_{\mathbf{q}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot y}\right] \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \left\{[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p\cdot x - q\cdot y)} + [a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{q}}]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x - q\cdot y)}\right\} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p\cdot x - q\cdot y)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x - q\cdot y)}] \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}\right] = -\mathrm{i}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3E_{\mathbf{p}}}\sin[p\cdot(x-y)]. \end{aligned} \tag{5.116}$$

第三、四步用到产生湮灭算符的对易关系 (2.120)。最后一步用到正弦函数与指数函数的关系

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}}{2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}). \tag{5.117}$$

当 $x^0-y^0=0$ 时，$\sin[p\cdot(x-y)]=\sin[\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})]$，则 (5.116) 式最后一步中的被积函数是 $\mathbf{p}$ 的奇函数，故对 $\mathbf{p}$ 积分的结果为零，即 $D_{\mathrm{PJ}}(x-y)=0$。另一方面，由于体积元 (2.151) 是 Lorentz 不变的，(5.116) 式倒数第二步的结果告诉我们，$D_{\mathrm{PJ}}(x-y)$ 是 Lorentz 不变量。如前所述，如果 x 和 y 具有类空间隔，就一定可以通过 Lorentz 变换使得 $x^0-y^0=0$；于是，$D_{\mathrm{PJ}}(x-y)=0$ 对所有类空间隔成立，即

$$[\phi(x),\phi(y)]=D_{\mathrm{PJ}}(x-y)=0,\quad (x-y)^2<0. \tag{5.118}$$

也就是说，当 $(x-y)^2<0$ 时，虽然两个实标量场算符 $\phi(x)$ 与 $\phi(y)$ 可能在不同惯性参考系中具有不同的时序，但一定满足 $\phi(x)\phi(y)=\phi(y)\phi(x)$。因此，用 (5.114) 式定义的时序乘积在所有惯性系中相同，不会违背 Lorentz 对称性。

对于 Dirac 旋量场，平面波展开式具有 (4.219) 和 (4.221) 的形式，故

$$\begin{aligned}
\{\psi_a(x),\bar\psi_b(y)\} &= \int\frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\sum_{\lambda\lambda'}\{u_a(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+v_a(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x},\\
&\qquad\qquad \bar u_b(\mathbf{q},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot y}+\bar v_b(\mathbf{q},\lambda')b_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot y}\}\\
&= \int\frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\sum_{\lambda\lambda'}\big[u_a(\mathbf{p},\lambda)\bar u_b(\mathbf{q},\lambda')\{a_{\mathbf{p},\lambda},a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p\cdot x-q\cdot y)}\\
&\qquad\qquad +v_a(\mathbf{p},\lambda)\bar v_b(\mathbf{q},\lambda')\{b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda},b_{\mathbf{q},\lambda'}\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x-q\cdot y)}\big]\\
&= \int\frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\sum_{\lambda\lambda'}(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\\
&\qquad\qquad \times[u_a(\mathbf{p},\lambda)\bar u_b(\mathbf{q},\lambda')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p\cdot x-q\cdot y)}+v_a(\mathbf{p},\lambda)\bar v_b(\mathbf{q},\lambda')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x-q\cdot y)}]\\
&= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\sum_{\lambda}\big[u_a(\mathbf{p},\lambda)\bar u_b(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}+v_a(\mathbf{p},\lambda)\bar v_b(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}\big]\\
&= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\left[(\not p+m)_{ab}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}-(-\not p+m)_{ab}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}\right]\\
&= (\mathrm{i}\gamma_\mu\partial^\mu_x+m)_{ab}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}\right]\\
&= (\mathrm{i}\gamma_\mu\partial^\mu_x+m)_{ab}\,D_{\mathrm{PJ}}(x-y),
\end{aligned}\tag{5.119}$$

其中 $\partial^\mu_x\equiv\partial/\partial x_\mu$。第二、三步用到产生湮灭算符的反对易关系 (4.249)，第五步用到自旋求和关系 (4.218)，最后一步用到 (5.116) 式。于是，由 (5.118) 式得

$$\{\psi_a(x),\bar\psi_b(y)\}=0,\quad (x-y)^2<0. \tag{5.120}$$

也就是说，当 $(x-y)^2<0$ 时，旋量场算符 $\psi_a(x)$ 和 $\bar\psi_b(y)$ 满足 $\psi_a(x)\bar\psi_b(y)=-\bar\psi_b(y)\psi_a(x)$，从而用 (5.115) 式定义的时序乘积在所有惯性系中相同。可见，当时间排序交换了两个相邻的费米子算符时，我们必须额外加上一个负号才不会违背 Lorentz 对称性。

现在考虑级数 (5.112) 的第 3 项，它包含一个关于 t_1 和 t_2 的二重积分，积分区域如图 5.1(a)

所示，先对 t_2 积分，再对 t_1 积分。这个二重积分可以重新表达为

$$\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2\,H_1(t_1)H_1(t_2)=\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_2\int_{t_2}^{t}\mathrm{d}t_1\,H_1(t_1)H_1(t_2)=\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_1}^{t}\mathrm{d}t_2\,H_1(t_2)H_1(t_1). \tag{5.121}$$

在第一步中，我们等价地改成先对 t_1 积分，再对 t_2 积分，积分区域不变，如图 5.1(b) 所示。第二步交换了积分变量 t_1 和 t_2，对应的积分区域如图 5.1(c) 所示。由此推出

$$\begin{aligned}2!\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2\,H_1(t_1)H_1(t_2)&=\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2\,H_1(t_1)H_1(t_2)+\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_1}^{t}\mathrm{d}t_2\,H_1(t_2)H_1(t_1)\\&=\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_2\,\mathsf{T}[H_1(t_1)H_1(t_2)].\end{aligned} \tag{5.122}$$

这里利用时序乘积将 t_1 和 t_2 的积分范围都扩展到整个 $[t_0,t]$ 区间，因为图 5.1(a) 中的积分区域与图 5.1(c) 中的积分区域恰好拼成一个正方形。在上式第一步第一项中，t_1 是 t_2 的积分上限，显然有 $t_1\geq t_2$，因而 $H_1(t_1)H_1(t_2)=\mathsf{T}[H_1(t_1)H_1(t_2)]$；在第二项中，$t_1$ 是 t_2 的积分下限，故 $t_2\geq t_1$，此时 $H_1(t_2)H_1(t_1)=\mathsf{T}[H_1(t_1)H_1(t_2)]$；两项相加，就得到第二步的结果。

将上述讨论推广到级数 (5.112) 中的第 $n+1$ 项，得

$$n!\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}}\mathrm{d}t_n\,H_1(t_1)\cdots H_1(t_n)=\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\cdots\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_n\,\mathsf{T}[H_1(t_1)\cdots H_1(t_n)]. \tag{5.123}$$

上式出现 $n!$ 是因为此时对 n 个时间积分变量有 $n!$ 种排列方式。于是，级数 (5.112) 可以用时序乘积表达为

$$\begin{aligned}U(t,t_0)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^n}{n!}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\cdots\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_n\,\mathsf{T}[H_1(t_1)\cdots H_1(t_n)]\\&\equiv\mathsf{T}\exp\left[-\mathrm{i}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\,H_1(t')\right].\end{aligned} \tag{5.124}$$

这个级数称为 **Dyson 级数** [26, 27]。它具有指数函数的级数展开形式，因而这里进一步用指数记号来表示。

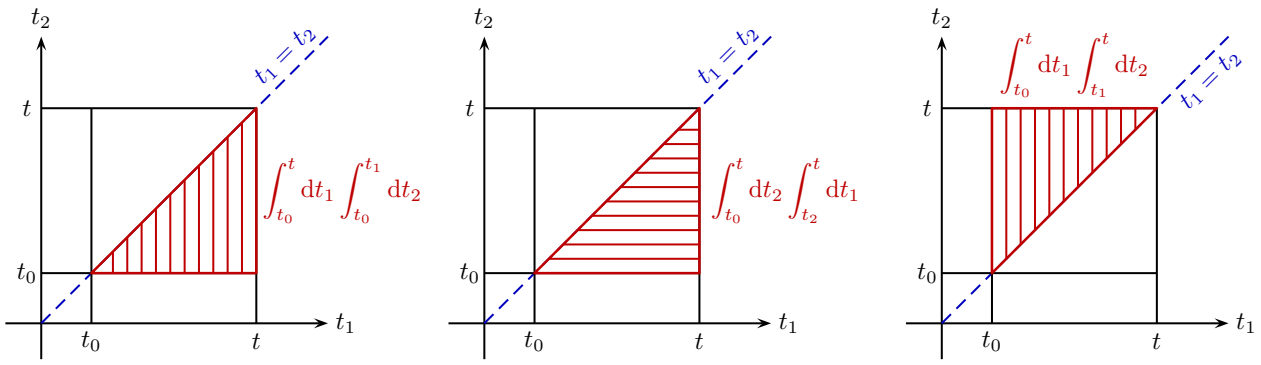


图 5.1: t_1-t_2 平面上的积分区域，三角形中的线段指示内层积分的方向和范围。

像 (5.13) 式一样，在局域场论中 $H_1(t)$ 是相应哈密顿量密度 $\mathcal{H}_1(x)$ 的空间积分

$$H_1(t) = \int \mathrm{d}^3x\, \mathcal{H}_1(x). \tag{5.125}$$

因此，时间演化算符满足

$$U(t,t_0) = \mathsf{T}\exp\left[-\mathrm{i}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t' \int \mathrm{d}^3x'\, \mathcal{H}_1(x')\right]. \tag{5.126}$$

***S* 矩阵**，也称为**散射矩阵** (scattering matrix)，是量子散射理论的核心概念，它描述系统从初态跃迁到末态的概率振幅。在相互作用绘景中，S 矩阵可以用时间演化算符来构造。

假设系统的初态 $|i\rangle$ 和末态 $|f\rangle$ 均处于自由状态, 而相互作用只发生在有限的时间间隔里, 那么相对地，初始时刻处于遥远过去，终末时刻处于遥远未来。这样的初末态称为**渐近态** (asymptotic state)。若将 t 时刻处描述系统的态矢记为 $|\Psi(t)\rangle$，它从遥远过去 $(t_0 \to -\infty)$ 的初态 $|i\rangle$ 演化而来，用时间演化算符 $U(t,t_0)$ 表达为

$$|\Psi(t)\rangle = \lim_{t_0\to-\infty} U(t,t_0)\,|i\rangle\,. \tag{5.127}$$

此过程相应的 S 矩阵元 S_{fi} 定义为态矢 $|\Psi(t)\rangle$ 演化到遥远未来 $(t \to +\infty)$ 处与末态 $|f\rangle$ 的内积，即

$$S_{fi} = \lim_{t\to+\infty}\langle f|\Psi(t)\rangle = \lim_{t\to+\infty}\lim_{t_0\to-\infty}\langle f|U(t,t_0)|i\rangle\,. \tag{5.128}$$

引入 ***S* 算符**，它在初态与末态之间的期待值就是 S 矩阵元 S_{fi}，即

$$S_{fi} = \langle f|S|i\rangle\,, \tag{5.129}$$

那么

$$S = U(+\infty,-\infty). \tag{5.130}$$

从而将 S 算符表达为相互作用哈密顿量 $H_1(t)$ 的积分级数,

$$\begin{aligned} S &= \mathsf{T}\exp\left[-\mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t'\, H_1(t')\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^n}{n!}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t_1\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t_n\,\mathsf{T}[H_1(t_1)\cdots H_1(t_n)] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^n}{n!}\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_n\,\mathsf{T}[\mathcal{H}_1(x_1)\cdots\mathcal{H}_1(x_n)]. \end{aligned} \tag{5.131}$$

由时间演化算符的幺正性可知，S 算符也是幺正的,

$$S^\dagger S = 1. \tag{5.132}$$

5.3 Wick 定理

5.3.1 正规乘积和 Wick 定理

在 5.2 节中，借助时序乘积，我们把 S 算符写成紧凑的级数形式 (5.131)。不过，如何适当地处理级数每一项中的时序乘积 $\mathsf{T}[\mathcal{H}_1(x_1)\cdots\mathcal{H}_1(x_n)]$ 呢？在量子场论中，相互作用哈密顿量密度 $\mathcal{H}_1(x)$ 是由若干个场算符构成的，因而我们需要处理的是多个场算符的时序乘积。这看来不是一个简单的问题，幸好接下来将要介绍的 Wick 定理提供了一种简便的处理方法。

在*相互作用绘景*中，实标量场 $\phi(x)$ 的平面波展开式 (5.55) 可以分解成两个部分：

$$\phi(x)=\phi^{(+)}(x)+\phi^{(-)}(x). \tag{5.133}$$

其中，正能解部分为

$$\phi^{(+)}(x)\equiv\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{5.134}$$

包含 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}$ 因子；负能解部分为

$$\phi^{(-)}(x)\equiv\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}a^{\dagger}_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{5.135}$$

包含 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}$ 因子。根据 (5.92) 式，我们同样可以把有质量矢量场 $A^\mu(x)$ 分为正能解和负能解两部分：

$$A^\mu(x)=A^{\mu(+)}(x)+A^{\mu(-)}(x), \tag{5.136}$$

其中，

$$A^{\mu(+)}(x)\equiv\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda=\pm,0}\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{5.137}$$

$$A^{\mu(-)}(x)\equiv\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda=\pm,0}\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}. \tag{5.138}$$

前面提到，Dirac 旋量场 $\psi_a(x)$ 在相互作用绘景中的平面波展开式也具有 Heisenberg 绘景中自由场展开式 (4.219) 的形式，即

$$\psi_a(x)=\psi_a^{(+)}(x)+\psi_a^{(-)}(x), \tag{5.139}$$

其中，

$$\psi_a^{(+)}(x)\equiv\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda=\pm}u_a(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{5.140}$$

$$\psi_a^{(-)}(x)\equiv\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda=\pm}v_a(\mathbf{p},\lambda)b^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}. \tag{5.141}$$

可以看到，各类量子场的正能解部分只包含湮灭算符，而负能解部分只包含产生算符。

引入**正规乘积** (normal product) 的概念，以 N 为记号，它的作用是将乘积中的所有湮灭算符移动到所有产生算符的右边，形成**正规排序** (normal order)。正规排序对于多个产生（或湮灭）算符之间谁先谁后没有规定，每一种排列都是等价的。不过，考虑到费米子算符的反对易性，移动算符的过程中如果涉及奇数次费米子算符之间的交换，就应该额外添加一个负号，这个规定与费米子产生湮灭算符的反对易性相匹配。例如，对于标量场的产生湮灭算符，有

$$\mathsf{N}(a_{\mathbf{p}}a^{\dagger}_{\mathbf{q}}a_{\mathbf{k}}a^{\dagger}_{\mathbf{l}}) = a^{\dagger}_{\mathbf{q}}a^{\dagger}_{\mathbf{l}}a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{k}} = a^{\dagger}_{\mathbf{l}}a^{\dagger}_{\mathbf{q}}a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{k}} = a^{\dagger}_{\mathbf{l}}a^{\dagger}_{\mathbf{q}}a_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{p}}, \tag{5.142}$$

第二步写出两个产生算符的另一种次序，第三步写出两个湮灭算符的另一种次序，而对易关系 $[a^{\dagger}_{\mathbf{q}}, a^{\dagger}_{\mathbf{l}}] = [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{k}}] = 0$ 保证这些表达式是等价的。对于旋量场的产生湮灭算符，有

$$\mathsf{N}(b_{\mathbf{p},\lambda_1}a^{\dagger}_{\mathbf{q},\lambda_2}a_{\mathbf{k},\lambda_3}b^{\dagger}_{\mathbf{l},\lambda_4}) = -a^{\dagger}_{\mathbf{q},\lambda_2}b^{\dagger}_{\mathbf{l},\lambda_4}b_{\mathbf{p},\lambda_1}a_{\mathbf{k},\lambda_3} = b^{\dagger}_{\mathbf{l},\lambda_4}a^{\dagger}_{\mathbf{q},\lambda_2}b_{\mathbf{p},\lambda_1}a_{\mathbf{k},\lambda_3} = -b^{\dagger}_{\mathbf{l},\lambda_4}a^{\dagger}_{\mathbf{q},\lambda_2}a_{\mathbf{k},\lambda_3}b_{\mathbf{p},\lambda_1}. \tag{5.143}$$

第二步写出两个产生算符的另一种次序，与第一步相差一个负号；第三步写出两个湮灭算符的另一种次序，与第二步相差一个负号；反对易关系 $\{a^{\dagger}_{\mathbf{q},\lambda_2}, b^{\dagger}_{\mathbf{l},\lambda_4}\} = \{b_{\mathbf{p},\lambda_1}, a_{\mathbf{k},\lambda_3}\} = 0$ 保证这些表达式是等价的。

场算符的正能解部分包含湮灭算符，负能解部分包含产生算符，因而正能解在正规排序中处于负能解右边。于是，两个标量场算符的正规乘积为

$$\mathsf{N}[\phi(x)\phi(y)] = \phi^{(-)}(x)\phi^{(-)}(y) + \phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(y) + \phi^{(+)}(x)\phi^{(+)}(y) + \phi^{(-)}(y)\phi^{(+)}(x), \tag{5.144}$$

最后一项中 $\phi^{(+)}(x)$ 被正规排序移动到 $\phi^{(-)}(y)$ 的右边。而两个旋量场算符的正规乘积为

$$\mathsf{N}[\psi_a(x)\psi_b(y)] = \psi^{(-)}_a(x)\psi^{(-)}_b(y) + \psi^{(-)}_a(x)\psi^{(+)}_b(y) + \psi^{(+)}_a(x)\psi^{(+)}_b(y) - \psi^{(-)}_b(y)\psi^{(+)}_a(x), \tag{5.145}$$

最后一项中 $\psi^{(+)}_a(x)$ 被正规排序移动到 $\psi^{(-)}_b(y)$ 的右边，并出现一个负号。湮灭算符对真空态 $|0\rangle$ 的作用为零，如 $a_{\mathbf{p}}|0\rangle = 0$，相应地，$\langle 0| a^{\dagger}_{\mathbf{p}} = 0$，因此，对一组产生湮灭算符的任意乘积取正规排序之后，真空期待值为零：

$$\langle 0|\, \mathsf{N}\left(\text{产生湮灭算符的乘积}\right) |0\rangle = 0. \tag{5.146}$$

用统一的记号 $\Phi_a(x)$ 代表一般的场算符，它可以是标量场 $\phi(x)$ 或 $\phi^{\dagger}(x)$，也可以是矢量场 $A^{\mu}(x)$ 的一个分量，还可以是旋量场 $\psi_a(x)$ 或 $\bar{\psi}_a(x)$ 的一个分量。比如，$\Phi_a(x)\Phi_b(x)\Phi_c(x)$ 可以表示 $\phi(x)\phi(x)\phi(x)$，也可以表示 $A_{\mu}(x)\bar{\psi}_a(x)\psi_b(x)$。后者不是 Lorentz 不变的，但可以利用 Dirac 矩阵线性地组合出 Lorentz 不变量 $A_{\mu}(x)\bar{\psi}_a(x)(\gamma^{\mu})_{ab}\psi_b(x) = A_{\mu}(x)\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)$。将 $\Phi_a(x)$ 分解为正能解部分 $\Phi^{(+)}_a(x)$ 和负能解部分 $\Phi^{(-)}_a(x)$，

$$\Phi_a(x) = \Phi^{(+)}_a(x) + \Phi^{(-)}_a(x), \tag{5.147}$$

则

$$\Phi_a(x)\Phi_b(y) = \Phi^{(-)}_a(x)\Phi^{(-)}_b(y) + \Phi^{(-)}_a(x)\Phi^{(+)}_b(y) + \Phi^{(+)}_a(x)\Phi^{(+)}_b(y) + \Phi^{(+)}_a(x)\Phi^{(-)}_b(y). \tag{5.148}$$

由于正能解包含湮灭算符，负能解包含产生算符，有

$$\Phi_a^{(+)}(x)\,|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\,\Phi_a^{(-)}(x) = 0, \tag{5.149}$$

从而推出

$$\langle 0|\,\Phi_a(x)\Phi_b(y)\,|0\rangle = \langle 0|\,\Phi_a^{(+)}(x)\Phi_b^{(-)}(y)\,|0\rangle\,. \tag{5.150}$$

现在，将 $\Phi_a(x)$ 与 $\Phi_b(y)$ 的正规乘积分解为

$$\mathsf{N}[\Phi_a(x)\Phi_b(y)] = \Phi_a^{(-)}(x)\Phi_b^{(-)}(y) + \Phi_a^{(-)}(x)\Phi_b^{(+)}(y) + \Phi_a^{(+)}(x)\Phi_b^{(+)}(y) + \epsilon_{ab}\Phi_b^{(-)}(y)\Phi_a^{(+)}(x), \tag{5.151}$$

其中，因子 $\epsilon_{ab} = \pm 1$ 考虑了费米子算符的反对易性。若 $\Phi_a(x)$ 和 $\Phi_b(y)$ 都是费米子算符，则 $\epsilon_{ab} = -1$；其余情况 $\epsilon_{ab} = +1$。利用 ϵ_{ab} 记号，依照两个产生（湮灭）算符的对易性或反对易性交换 (5.151) 式右边第一项（第三项）的两个场算符，得到

$$\begin{aligned}\mathsf{N}[\Phi_a(x)\Phi_b(y)] &= \epsilon_{ab}\Phi_b^{(-)}(y)\Phi_a^{(-)}(x) + \Phi_a^{(-)}(x)\Phi_b^{(+)}(y) + \epsilon_{ab}\Phi_b^{(+)}(y)\Phi_a^{(+)}(x) + \epsilon_{ab}\Phi_b^{(-)}(y)\Phi_a^{(+)}(x)\\ &= \epsilon_{ab}[\Phi_b^{(-)}(y)\Phi_a^{(-)}(x) + \epsilon_{ab}\Phi_a^{(-)}(x)\Phi_b^{(+)}(y) + \Phi_b^{(+)}(y)\Phi_a^{(+)}(x) + \Phi_b^{(-)}(y)\Phi_a^{(+)}(x)],\end{aligned} \tag{5.152}$$

即

$$\mathsf{N}[\Phi_a(x)\Phi_b(y)] = \epsilon_{ab}\,\mathsf{N}[\Phi_b(y)\Phi_a(x)]. \tag{5.153}$$

也就是说，两个场算符的位置交换后，正规乘积只相差一个由费米子算符反对易性导致的符号。另一方面，将 $\Phi_a(x)$ 与 $\Phi_b(y)$ 的时序乘积化为

$$\begin{aligned}\mathsf{T}[\Phi_a(x)\Phi_b(y)] &= \Phi_a(x)\Phi_b(y)\theta(x^0 - y^0) + \epsilon_{ab}\Phi_b(y)\Phi_a(x)\theta(y^0 - x^0)\\ &= \epsilon_{ab}[\epsilon_{ab}\Phi_a(x)\Phi_b(y)\theta(x^0 - y^0) + \Phi_b(y)\Phi_a(x)\theta(y^0 - x^0)],\end{aligned} \tag{5.154}$$

因此，两个场算符的位置交换后，时序乘积也只相差一个由费米子算符的反对易性导致的符号，

$$\mathsf{T}[\Phi_a(x)\Phi_b(y)] = \epsilon_{ab}\,\mathsf{T}[\Phi_b(y)\Phi_a(x)]. \tag{5.155}$$

当 $x^0 \geq y^0$ 时，$\Phi_a(x)$ 与 $\Phi_b(y)$ 的时序乘积为

$$\begin{aligned}\mathsf{T}[\Phi_a(x)\Phi_b(y)] &= \Phi_a(x)\Phi_b(y)\\ &= \Phi_a^{(-)}(x)\Phi_b^{(-)}(y) + \Phi_a^{(-)}(x)\Phi_b^{(+)}(y) + \Phi_a^{(+)}(x)\Phi_b^{(+)}(y) + \Phi_a^{(+)}(x)\Phi_b^{(-)}(y).\end{aligned} \tag{5.156}$$

把最后一项改写成

$$\begin{aligned}\Phi_a^{(+)}(x)\Phi_b^{(-)}(y) &= \epsilon_{ab}\Phi_b^{(-)}(y)\Phi_a^{(+)}(x) + \Phi_a^{(+)}(x)\Phi_b^{(-)}(y) - \epsilon_{ab}\Phi_b^{(-)}(y)\Phi_a^{(+)}(x)\\ &= \epsilon_{ab}\Phi_b^{(-)}(y)\Phi_a^{(+)}(x) + [\Phi_a^{(+)}(x), \Phi_b^{(-)}(y)]_{\mp}.\end{aligned} \tag{5.157}$$

这里 $[\cdot\,,\cdot]_- = [\cdot\,,\cdot]$ 代表对易子，$[\cdot\,,\cdot]_+ = \{\cdot\,,\cdot\}$ 代表反对易子。$\mp$ 号仅当 $\Phi_a(x)$ 和 $\Phi_b(y)$ 都是费米子算符时取正号，其余情况取负号。于是，由 (5.151) 式推出

$$\mathsf{T}[\Phi_a(x)\Phi_b(y)] = \mathsf{N}[\Phi_a(x)\Phi_b(y)] + [\Phi_a^{(+)}(x), \Phi_b^{(-)}(y)]_{\mp}. \tag{5.158}$$

注意，$[\Phi_a^{(+)}(x),\Phi_b^{(-)}(y)]_\mp$ 必定是一个 c 数，因为 $\Phi_a^{(+)}(x)$ 中湮灭算符与 $\Phi_b^{(-)}(y)$ 中产生算符的对易子或反对易子并不是算符，而是 c 数。从而，根据 (5.149) 和 (5.150) 式得到

$$\begin{aligned}[\Phi_a^{(+)}(x),\Phi_b^{(-)}(y)]_\mp &= \langle 0|\,[\Phi_a^{(+)}(x),\Phi_b^{(-)}(y)]_\mp\,|0\rangle = \langle 0|\,\Phi_a^{(+)}(x)\Phi_b^{(-)}(y)\,|0\rangle = \langle 0|\,\Phi_a(x)\Phi_b(y)\,|0\rangle \\ &= \langle 0|\,\mathsf{T}[\Phi_a(x)\Phi_b(y)]\,|0\rangle\,. \end{aligned} \tag{5.159}$$

当 $x^0 \le y^0$ 时，$\Phi_a(x)$ 与 $\Phi_b(y)$ 的时序乘积变成

$$\begin{aligned}\mathsf{T}[\Phi_a(x)\Phi_b(y)] &= \epsilon_{ab}\Phi_b(y)\Phi_a(x) \\ &= \epsilon_{ab}[\Phi_b^{(-)}(y)\Phi_a^{(-)}(x) + \Phi_b^{(-)}(y)\Phi_a^{(+)}(x) + \Phi_b^{(+)}(y)\Phi_a^{(+)}(x) + \Phi_b^{(+)}(y)\Phi_a^{(-)}(x)] \\ &= \epsilon_{ab}\{\Phi_b^{(-)}(y)\Phi_a^{(-)}(x) + \Phi_b^{(-)}(y)\Phi_a^{(+)}(x) + \Phi_b^{(+)}(y)\Phi_a^{(+)}(x) \\ &\qquad + \epsilon_{ab}\Phi_a^{(-)}(x)\Phi_b^{(+)}(y) + [\Phi_b^{(+)}(y),\Phi_a^{(-)}(x)]_\mp\} \\ &= \epsilon_{ab}\,\mathsf{N}[\Phi_b(y)\Phi_a(x)] + \epsilon_{ab}[\Phi_b^{(+)}(y),\Phi_a^{(-)}(x)]_\mp \\ &= \mathsf{N}[\Phi_a(x)\Phi_b(y)] + \epsilon_{ab}[\Phi_b^{(+)}(y),\Phi_a^{(-)}(x)]_\mp. \end{aligned} \tag{5.160}$$

最后一步用到 (5.153) 式。根据 (5.155) 式，有

$$\begin{aligned}&\epsilon_{ab}[\Phi_b^{(+)}(y),\Phi_a^{(-)}(x)]_\mp = \epsilon_{ab}\,\langle 0|\,[\Phi_b^{(+)}(y),\Phi_a^{(-)}(x)]_\mp\,|0\rangle = \epsilon_{ab}\,\langle 0|\,\Phi_b^{(+)}(y)\Phi_a^{(-)}(x)\,|0\rangle \\ &= \epsilon_{ab}\,\langle 0|\,\Phi_b(y)\Phi_a(x)\,|0\rangle = \epsilon_{ab}\,\langle 0|\,\mathsf{T}[\Phi_b(y)\Phi_a(x)]\,|0\rangle = \langle 0|\,\mathsf{T}[\Phi_a(x)\Phi_b(y)]\,|0\rangle\,. \end{aligned} \tag{5.161}$$

综合这两种情况，无论 x^0 和 y^0 孰大孰小，$\Phi_a(x)$ 与 $\Phi_b(y)$ 的时序乘积都可以统一地表达为

$$\mathsf{T}[\Phi_a(x)\Phi_b(y)] = \mathsf{N}[\Phi_a(x)\Phi_b(y)] + \langle 0|\,\mathsf{T}[\Phi_a(x)\Phi_b(y)]\,|0\rangle\,. \tag{5.162}$$

引入场算符的**缩并** (contraction) 概念，将两个场算符 $\Phi_a(x)$ 与 $\Phi_b(y)$ 的缩并定义为

$$\overbrace{\Phi_a(x)\Phi_b(y)} \equiv \langle 0|\,\mathsf{T}[\Phi_a(x)\Phi_b(y)]\,|0\rangle = \begin{cases} [\Phi_a^{(+)}(x),\Phi_b^{(-)}(y)]_\mp, & x^0 \ge y^0, \\ \epsilon_{ab}[\Phi_b^{(+)}(y),\Phi_a^{(-)}(x)]_\mp, & x^0 < y^0. \end{cases} \tag{5.163}$$

上式仅当 $\Phi_a^{(+)}(x)$ 中的湮灭算符与 $\Phi_b^{(-)}(y)$ 中的产生算符属于同一套产生湮灭算符时可得非零结果，因而不同类型的场算符（如标量场与旋量场）的缩并为零。两个场算符的缩并是一个 c 数，不会受到正规排序 N 的影响。在正规乘积中出现缩并记号时，参与缩并的一对场算符可以不相邻。为了使它们相邻，需要适当地交换场算符，交换时应计入费米子算符的反对易性引起的符号差异，我们约定这样得到的式子与原先的式子相等。例如，

$$\mathsf{N}(\Phi_a\overbrace{\Phi_b\Phi_c\Phi_d}\Phi_e\Phi_f) = \epsilon_{cd}\epsilon_{ef}\mathsf{N}(\Phi_a\overbrace{\Phi_b\Phi_d}\overbrace{\Phi_c\Phi_f}\Phi_e) = \epsilon_{cd}\epsilon_{ef}\overbrace{\Phi_b\Phi_d}\overbrace{\Phi_c\Phi_f}\mathsf{N}(\Phi_a\Phi_e). \tag{5.164}$$

于是，(5.162) 式可改记为

$$\mathsf{T}[\Phi_a(x)\Phi_b(y)] = \mathsf{N}[\Phi_a(x)\Phi_b(y) + \overbrace{\Phi_a(x)\Phi_b(y)}]. \tag{5.165}$$

上式表明，两个场算符的时序乘积等于它们的正规乘积加上它们的缩并。

这个结论可以推广成 **Wick 定理** [28]：

一组场算符的时序乘积可以分解为它们的正规乘积及所有可能缩并的正规乘积之和，也就是说，

$$\mathsf{T}[\Phi_{a_1}(x_1)\Phi_{a_2}(x_2)\cdots\Phi_{a_n}(x_n)] = \mathsf{N}\big[\Phi_{a_1}(x_1)\Phi_{a_2}(x_2)\cdots\Phi_{a_n}(x_n) + \big(\Phi_{a_1}\Phi_{a_2}\cdots\Phi_{a_n}\text{的所有可能缩并}\big)\big]. \quad (5.166)$$

例如，对于四个场算符的情况，有

$$\begin{aligned}\mathsf{T}(\Phi_a\Phi_b\Phi_c\Phi_d) = \mathsf{N}\big(&\Phi_a\Phi_b\Phi_c\Phi_d + \overbracket{\Phi_a\Phi_b}\Phi_c\Phi_d + \overbracket{\Phi_a\Phi_b\Phi_c}\Phi_d + \overbracket{\Phi_a\Phi_b\Phi_c\Phi_d}\\ &+ \Phi_a\overbracket{\Phi_b\Phi_c}\Phi_d + \Phi_a\overbracket{\Phi_b\Phi_c\Phi_d} + \Phi_a\Phi_b\overbracket{\Phi_c\Phi_d}\\ &+ \overbracket{\Phi_a\Phi_b}\overbracket{\Phi_c\Phi_d} + \overbracket{\Phi_a\overbracket{\Phi_b\Phi_c}\Phi_d} + \overbracket{\Phi_a\overbracket{\Phi_b\Phi_c\Phi_d}}\big).\end{aligned} \quad (5.167)$$

根据正规乘积的性质 (5.146)，上式的真空期待值为

$$\begin{aligned}\langle 0|\,\mathsf{T}(\Phi_a\Phi_b\Phi_c\Phi_d)\,|0\rangle &= \mathsf{N}(\overbracket{\Phi_a\Phi_b}\overbracket{\Phi_c\Phi_d} + \overbracket{\Phi_a\overbracket{\Phi_b\Phi_c}\Phi_d} + \overbracket{\Phi_a\Phi_b\Phi_c\Phi_d})\\ &= \overbracket{\Phi_a\Phi_b}\overbracket{\Phi_c\Phi_d} + \epsilon_{bc}\overbracket{\Phi_a\Phi_c}\overbracket{\Phi_b\Phi_d} + \epsilon_{cd}\epsilon_{bd}\overbracket{\Phi_a\Phi_d}\overbracket{\Phi_b\Phi_c}\\ &= \langle 0|\,\mathsf{T}(\Phi_a\Phi_b)\,|0\rangle\langle 0|\,\mathsf{T}(\Phi_c\Phi_d)\,|0\rangle + \epsilon_{bc}\langle 0|\,\mathsf{T}(\Phi_a\Phi_c)\,|0\rangle\langle 0|\,\mathsf{T}(\Phi_b\Phi_d)\,|0\rangle\\ &\quad + \epsilon_{cd}\epsilon_{bd}\langle 0|\,\mathsf{T}(\Phi_a\Phi_d)\,|0\rangle\langle 0|\,\mathsf{T}(\Phi_b\Phi_c)\,|0\rangle.\end{aligned} \quad (5.168)$$

5.3.2　选读：Wick 定理的证明

为了证明 Wick 定理，我们先证明以下引理。

引理　如果场算符 $\Phi_b(x_b)$ 的时间坐标比 n 个场算符 $\Phi_{a_1}(x_1),\cdots,\Phi_{a_n}(x_n)$ 的时间坐标都小，即 $x_b^0 \le x_1^0,\cdots,x_n^0$，那么，以下等式成立：

$$\begin{aligned}\mathsf{N}[\Phi_{a_1}(x_1)\cdots\Phi_{a_n}(x_n)]\Phi_b(x_b) = \mathsf{N}\big[&\Phi_{a_1}(x_1)\cdots\Phi_{a_n}(x_n)\Phi_b(x_b) + \overbracket{\Phi_{a_1}(x_1)\cdots\Phi_{a_n}(x_n)\Phi_b}(x_b)\\ &+\Phi_{a_1}(x_1)\overbracket{\Phi_{a_2}(x_2)\cdots\Phi_{a_n}(x_n)\Phi_b}(x_b) + \cdots\cdots + \Phi_{a_1}(x_1)\cdots\overbracket{\Phi_{a_n}(x_n)\Phi_b}(x_b)\big].\end{aligned} \quad (5.169)$$

如果 $\Phi_{a_1},\cdots,\Phi_{a_n}$ 中有些算符已经先彼此缩并了，也存在与 (5.169) 形式相同的等式，如

$$\begin{aligned}\mathsf{N}(\Phi_{a_1}\overbracket{\Phi_{a_2}\Phi_{a_3}}\Phi_{a_4}\Phi_{a_5}\cdots\Phi_{a_n})\Phi_b = \mathsf{N}\big(&\Phi_{a_1}\overbracket{\Phi_{a_2}\Phi_{a_3}}\Phi_{a_4}\Phi_{a_5}\cdots\Phi_{a_n}\Phi_b\\ &+ \overbracket{\Phi_{a_1}\overbracket{\Phi_{a_2}\Phi_{a_3}}\Phi_{a_4}\Phi_{a_5}\cdots\Phi_{a_n}\Phi_b} + \Phi_{a_1}\overbracket{\Phi_{a_2}\overbracket{\Phi_{a_3}\Phi_{a_4}}\Phi_{a_5}\cdots\Phi_{a_n}\Phi_b}\\ &+ \Phi_{a_1}\overbracket{\Phi_{a_2}\Phi_{a_3}}\overbracket{\Phi_{a_4}\Phi_{a_5}\cdots\Phi_{a_n}\Phi_b} + \cdots\cdots + \Phi_{a_1}\overbracket{\Phi_{a_2}\Phi_{a_3}\Phi_{a_4}\Phi_{a_5}\cdots\Phi_{a_n}\Phi_b}\big).\end{aligned} \quad (5.170)$$

证明　我们分四步来证明。

(1) 将 Φ_b 分解为正能解部分和负能解部分，$\Phi_b = \Phi_b^{(+)} + \Phi_b^{(-)}$，则可以证明正能解部分 $\Phi_b^{(+)}$ 满足

$$\mathsf{N}(\Phi_{a_1}\cdots\Phi_{a_n})\Phi_b^{(+)} = \mathsf{N}\big(\Phi_{a_1}\cdots\Phi_{a_n}\Phi_b^{(+)} + \overbracket{\Phi_{a_1}\cdots\Phi_{a_n}\Phi_b^{(+)}} + \Phi_{a_1}\overbracket{\Phi_{a_2}\cdots\Phi_{a_n}\Phi_b^{(+)}}$$

$$+\cdots\cdots+\Phi_{a_1}\cdots\overbrace{\Phi_{a_n}\Phi_b^{(+)}}\big). \tag{5.171}$$

由于 $x_b^0\leq x_1^0,\cdots,x_n^0$，$\Phi_{a_1}(x_i)$ $(i=1,\cdots,n)$ 与 $\Phi_b^{(+)}$ 的缩并为零：

$$\overbrace{\Phi_{a_i}(x_i)\Phi_b^{(+)}}(x_b)=\langle 0|\,\mathsf{T}\big[\Phi_{a_i}(x_i)\Phi_b^{(+)}(x_b)\big]\,|0\rangle=\langle 0|\,\Phi_{a_i}(x_i)\Phi_b^{(+)}(x_b)\,|0\rangle=0. \tag{5.172}$$

因此，(5.171) 式右边除第一项外的其它项均为零。另一方面，(5.171) 式左边和右边第一项已经是正规排序了，故 (5.171) 式成立。现在，只需要证明负能解部分 $\Phi_b^{(-)}$ 满足

$$\begin{aligned}\mathsf{N}(\Phi_{a_1}\cdots\Phi_{a_n})\Phi_b^{(-)}=\mathsf{N}\big(&\Phi_{a_1}\cdots\Phi_{a_n}\Phi_b^{(-)}+\overbrace{\Phi_{a_1}\cdots\Phi_{a_n}}\Phi_b^{(-)}+\Phi_{a_1}\overbrace{\Phi_{a_2}\cdots\Phi_{a_n}}\Phi_b^{(-)}\\&+\cdots\cdots+\Phi_{a_1}\cdots\overbrace{\Phi_{a_n}\Phi_b^{(-)}}\big).\end{aligned} \tag{5.173}$$

将 $\Phi_{a_1},\cdots,\Phi_{a_n}$ 都分解为正能解部分和负能解部分，则 $\mathsf{N}(\Phi_{a_1}\cdots\Phi_{a_n})$ 将包含 2^n 项，每一项是 j 个负能解部分 $(j=0,\cdots,n)$ 与 $n-j$ 个正能解部分之积

$$\Phi_{a_1}^{(-)}\cdots\Phi_{a_j}^{(-)}\Phi_{a_{j+1}}^{(+)}\cdots\Phi_{a_n}^{(+)}, \tag{5.174}$$

负能解部分都处于正能解部分的左边。

(2) 可以证明，通项 (5.174) 中右边正能解部分之积 $\Phi_{a_{j+1}}^{(+)}\cdots\Phi_{a_n}^{(+)}$ 满足

$$\begin{aligned}\mathsf{N}\big(\Phi_{a_{j+1}}^{(+)}\cdots\Phi_{a_n}^{(+)}\big)\Phi_b^{(-)}=\mathsf{N}\big(&\Phi_{a_{j+1}}^{(+)}\cdots\Phi_{a_n}^{(+)}\Phi_b^{(-)}+\overbrace{\Phi_{a_{j+1}}^{(+)}\cdots\Phi_{a_n}^{(+)}}\Phi_b^{(-)}+\Phi_{a_{j+1}}^{(+)}\overbrace{\Phi_{a_{j+2}}^{(+)}\cdots\Phi_{a_n}^{(+)}}\Phi_b^{(-)}\\&+\cdots\cdots+\Phi_{a_1}^{(+)}\cdots\overbrace{\Phi_{a_n}^{(+)}\Phi_b^{(-)}}\big).\end{aligned} \tag{5.175}$$

下面用*数学归纳法*证明 (5.175) 式。

对于 $\mathsf{N}\big(\Phi_{a_n}^{(+)}\big)\Phi_b^{(-)}$，存在与 (5.175) 形式相同的等式，这是因为由 (5.165) 式可以得到

$$\mathsf{N}\big(\Phi_{a_n}^{(+)}\big)\Phi_b^{(-)}=\Phi_{a_n}^{(+)}\Phi_b^{(-)}=\mathsf{T}\big(\Phi_{a_n}^{(+)}\Phi_b^{(-)}\big)=\mathsf{N}\big(\Phi_{a_n}^{(+)}\Phi_b^{(-)}+\overbrace{\Phi_{a_n}^{(+)}\Phi_b^{(-)}}\big). \tag{5.176}$$

这样的话，需要证明的是可以从上式递推地导出 (5.175) 式。

假设 $\mathsf{N}\big(\Phi_{a_k}^{(+)}\cdots\Phi_{a_n}^{(+)}\big)\Phi_b^{(-)}$ $(j+2\leq k\leq n)$ 满足与 (5.175) 形式相同的等式

$$\begin{aligned}\mathsf{N}\big(\Phi_{a_k}^{(+)}\cdots\Phi_{a_n}^{(+)}\big)\Phi_b^{(-)}=\mathsf{N}\big(&\Phi_{a_k}^{(+)}\cdots\Phi_{a_n}^{(+)}\Phi_b^{(-)}+\overbrace{\Phi_{a_k}^{(+)}\cdots\Phi_{a_n}^{(+)}}\Phi_b^{(-)}+\Phi_{a_k}^{(+)}\overbrace{\Phi_{a_{k+1}}^{(+)}\cdots\Phi_{a_n}^{(+)}}\Phi_b^{(-)}\\&+\cdots\cdots+\Phi_{a_k}^{(+)}\cdots\overbrace{\Phi_{a_n}^{(+)}\Phi_b^{(-)}}\big),\end{aligned} \tag{5.177}$$

那么，可以得到

$$\begin{aligned}&\mathsf{N}\big(\Phi_{a_{k-1}}^{(+)}\Phi_{a_k}^{(+)}\cdots\Phi_{a_n}^{(+)}\big)\Phi_b^{(-)}=\Phi_{a_{k-1}}^{(+)}\mathsf{N}\big(\Phi_{a_k}^{(+)}\cdots\Phi_{a_n}^{(+)}\big)\Phi_b^{(-)}\\=\;&\Phi_{a_{k-1}}^{(+)}\mathsf{N}\big(\Phi_{a_k}^{(+)}\cdots\Phi_{a_n}^{(+)}\Phi_b^{(-)}\big)+\mathsf{N}\big(\Phi_{a_{k-1}}^{(+)}\overbrace{\Phi_{a_k}^{(+)}\cdots\Phi_{a_n}^{(+)}}\Phi_b^{(-)}+\Phi_{a_{k-1}}^{(+)}\Phi_{a_k}^{(+)}\overbrace{\Phi_{a_{k+1}}^{(+)}\cdots\Phi_{a_n}^{(+)}}\Phi_b^{(-)}\\&+\cdots\cdots+\Phi_{a_{k-1}}^{(+)}\Phi_{a_k}^{(+)}\cdots\overbrace{\Phi_{a_n}^{(+)}\Phi_b^{(-)}}\big).\end{aligned} \tag{5.178}$$

进一步，我们整理上式第二步的第一项，

$$\Phi_{a_{k-1}}^{(+)}\mathsf{N}\big(\Phi_{a_k}^{(+)}\cdots\Phi_{a_n}^{(+)}\Phi_b^{(-)}\big)$$

$$
\begin{aligned}
&= \Phi^{(+)}_{a_{k-1}} \epsilon_1 \mathsf{N}\big(\Phi^{(-)}_b \Phi^{(+)}_{a_k} \cdots \Phi^{(+)}_{a_n}\big) = \epsilon_1 \Phi^{(+)}_{a_{k-1}} \Phi^{(-)}_b \Phi^{(+)}_{a_k} \cdots \Phi^{(+)}_{a_n} \\
&= \epsilon_1 \mathsf{T}\big(\Phi^{(+)}_{a_{k-1}} \Phi^{(-)}_b\big) \Phi^{(+)}_{a_k} \cdots \Phi^{(+)}_{a_n} = \epsilon_1 \mathsf{N}\big(\Phi^{(+)}_{a_{k-1}} \Phi^{(-)}_b + \overbrace{\Phi^{(+)}_{a_{k-1}} \Phi^{(-)}_b}\big) \Phi^{(+)}_{a_k} \cdots \Phi^{(+)}_{a_n} \\
&= \epsilon_1 \mathsf{N}\big(\Phi^{(+)}_{a_{k-1}} \Phi^{(-)}_b\big) \Phi^{(+)}_{a_k} \cdots \Phi^{(+)}_{a_n} + \epsilon_1 \overbrace{\Phi^{(+)}_{a_{k-1}} \Phi^{(-)}_b} \Phi^{(+)}_{a_k} \cdots \Phi^{(+)}_{a_n} \\
&= \epsilon_1 \epsilon_{a_{k-1}b} \mathsf{N}\big(\Phi^{(-)}_b \Phi^{(+)}_{a_{k-1}}\big) \Phi^{(+)}_{a_k} \cdots \Phi^{(+)}_{a_n} + \epsilon_1 \mathsf{N}\big(\overbrace{\Phi^{(+)}_{a_{k-1}} \Phi^{(-)}_b} \Phi^{(+)}_{a_k} \cdots \Phi^{(+)}_{a_n}\big) \\
&= \epsilon_1 \epsilon_{a_{k-1}b} \mathsf{N}\big(\Phi^{(-)}_b \Phi^{(+)}_{a_{k-1}} \Phi^{(+)}_{a_k} \cdots \Phi^{(+)}_{a_n}\big) + \mathsf{N}\big(\overbrace{\Phi^{(+)}_{a_{k-1}} \Phi^{(+)}_{a_k} \cdots \Phi^{(+)}_{a_n} \Phi^{(-)}_b}\big) \\
&= \mathsf{N}\big(\Phi^{(+)}_{a_{k-1}} \Phi^{(+)}_{a_k} \cdots \Phi^{(+)}_{a_n} \Phi^{(-)}_b\big) + \mathsf{N}\big(\overbrace{\Phi^{(+)}_{a_{k-1}} \Phi^{(+)}_{a_k} \cdots \Phi^{(+)}_{a_n} \Phi^{(-)}_b}\big).
\end{aligned} \tag{5.179}
$$

第一步多次利用 (5.153) 式，将 $\Phi^{(-)}_b$ 从正规乘积中的最右边移动到最左边，因而出现因子

$$
\epsilon_1 = \epsilon_{a_n b} \epsilon_{a_{n-1} b} \cdots \epsilon_{a_{k+1} b} \epsilon_{a_k b}. \tag{5.180}
$$

第三步利用到 $x^0_b \leq x^0_{k-1}$ 的条件。第四步使用了 (5.165) 式。第六至八步再多次利用 (5.153) 式。将 (5.179) 式代入 (5.178) 式，立即得到

$$
\begin{aligned}
\mathsf{N}\big(\Phi^{(+)}_{a_{k-1}} \Phi^{(+)}_{a_k} \cdots \Phi^{(+)}_{a_n}\big) \Phi^{(-)}_b = \mathsf{N}\big(&\Phi^{(+)}_{a_{k-1}} \Phi^{(+)}_{a_k} \cdots \Phi^{(+)}_{a_n} \Phi^{(-)}_b + \overbrace{\Phi^{(+)}_{a_{k-1}} \Phi^{(+)}_{a_k} \cdots \Phi^{(+)}_{a_n} \Phi^{(-)}_b} \\
&+ \Phi^{(+)}_{a_{k-1}} \overbrace{\Phi^{(+)}_{a_k} \cdots \Phi^{(+)}_{a_n} \Phi^{(-)}_b} + \cdots\cdots + \Phi^{(+)}_{a_{k-1}} \Phi^{(+)}_{a_k} \cdots \overbrace{\Phi^{(+)}_{a_n} \Phi^{(-)}_b}\big).
\end{aligned} \tag{5.181}
$$

因此，$\mathsf{N}\big(\Phi^{(+)}_{a_{k-1}} \Phi^{(+)}_{a_k} \cdots \Phi^{(+)}_{a_n}\big) \Phi^{(-)}_b$ 也满足与 (5.175) 形式相同的等式。结合 (5.176) 式，可知 (5.175) 式成立。

(3) 根据 (5.175) 式，通项 (5.174) 满足

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{N}\big(\Phi^{(-)}_{a_1} \cdots \Phi^{(-)}_{a_j} \Phi^{(+)}_{a_{j+1}} \cdots \Phi^{(+)}_{a_n}\big) \Phi^{(-)}_b = \Phi^{(-)}_{a_1} \cdots \Phi^{(-)}_{a_j} \mathsf{N}\big(\Phi^{(+)}_{a_{j+1}} \cdots \Phi^{(+)}_{a_n}\big) \Phi^{(-)}_b \\
= \Phi^{(-)}_{a_1} \cdots \Phi^{(-)}_{a_j} \mathsf{N}\big(&\Phi^{(+)}_{a_{j+1}} \cdots \Phi^{(+)}_{a_n} \Phi^{(-)}_b + \overbrace{\Phi^{(+)}_{a_{j+1}} \cdots \Phi^{(+)}_{a_n} \Phi^{(-)}_b} \\
&+ \Phi^{(+)}_{a_{j+1}} \overbrace{\Phi^{(+)}_{a_{j+2}} \cdots \Phi^{(+)}_{a_n} \Phi^{(-)}_b} + \cdots\cdots + \Phi^{(+)}_{a_1} \cdots \overbrace{\Phi^{(+)}_{a_n} \Phi^{(-)}_b}\big) \\
= \mathsf{N}\big(&\Phi^{(-)}_{a_1} \cdots \Phi^{(-)}_{a_j} \Phi^{(+)}_{a_{j+1}} \cdots \Phi^{(+)}_{a_n} \Phi^{(-)}_b + \Phi^{(-)}_{a_1} \cdots \Phi^{(-)}_{a_j} \overbrace{\Phi^{(+)}_{a_{j+1}} \cdots \Phi^{(+)}_{a_n} \Phi^{(-)}_b} \\
&+ \Phi^{(-)}_{a_1} \cdots \Phi^{(-)}_{a_j} \Phi^{(+)}_{a_{j+1}} \overbrace{\Phi^{(+)}_{a_{j+2}} \cdots \Phi^{(+)}_{a_n} \Phi^{(-)}_b} + \cdots\cdots + \Phi^{(-)}_{a_1} \cdots \Phi^{(-)}_{a_j} \Phi^{(+)}_{a_1} \cdots \overbrace{\Phi^{(+)}_{a_n} \Phi^{(-)}_b}\big).
\end{aligned} \tag{5.182}
$$

由

$$
\overbrace{\Phi^{(-)}_{a_i}(x_i) \Phi^{(-)}_b}(x_b) = \langle 0 | \, \mathsf{T}\big[\Phi^{(-)}_{a_i}(x_i) \Phi^{(-)}_b(x_b)\big] \, |0\rangle = 0, \tag{5.183}
$$

可得

$$
\begin{aligned}
\mathsf{N}\big(&\overbrace{\Phi^{(-)}_{a_1} \cdots \Phi^{(-)}_{a_j} \Phi^{(+)}_{a_{j+1}} \cdots \Phi^{(+)}_{a_n} \Phi^{(-)}_b} + \Phi^{(-)}_{a_1} \overbrace{\Phi^{(-)}_{a_2} \cdots \Phi^{(-)}_{a_j} \Phi^{(+)}_{a_{j+1}} \cdots \Phi^{(+)}_{a_n} \Phi^{(-)}_b} \\
&+ \cdots\cdots + \Phi^{(-)}_{a_1} \cdots \overbrace{\Phi^{(-)}_{a_j} \Phi^{(+)}_{a_{j+1}} \cdots \Phi^{(+)}_{a_n} \Phi^{(-)}_b}\big) = 0.
\end{aligned} \tag{5.184}
$$

因此，将上式左边添加到 (5.182) 式右边，等式仍然成立：

$$
\mathsf{N}\big(\Phi^{(-)}_{a_1} \cdots \Phi^{(-)}_{a_j} \Phi^{(+)}_{a_{j+1}} \cdots \Phi^{(+)}_{a_n}\big) \Phi^{(-)}_b
$$

$$
\begin{aligned}
= \mathsf{N}\big(&\Phi_{a_1}^{(-)}\cdots\Phi_{a_j}^{(-)}\Phi_{a_{j+1}}^{(+)}\cdots\Phi_{a_n}^{(+)}\Phi_b^{(-)} + \overbrace{\Phi_{a_1}^{(-)}\cdots\Phi_{a_j}^{(-)}\Phi_{a_{j+1}}^{(+)}\cdots\Phi_{a_n}^{(+)}}\Phi_b^{(-)} \\
&+ \Phi_{a_1}^{(-)}\overbrace{\Phi_{a_2}^{(-)}\cdots\Phi_{a_j}^{(-)}\Phi_{a_{j+1}}^{(+)}\cdots\Phi_{a_n}^{(+)}}\Phi_b^{(-)} + \cdots\cdots + \Phi_{a_1}^{(-)}\cdots\overbrace{\Phi_{a_j}^{(-)}\Phi_{a_{j+1}}^{(+)}\cdots\Phi_{a_n}^{(+)}}\Phi_b^{(-)} \\
&+ \Phi_{a_1}^{(-)}\cdots\Phi_{a_j}^{(-)}\overbrace{\Phi_{a_{j+1}}^{(+)}\cdots\Phi_{a_n}^{(+)}}\Phi_b^{(-)} + \Phi_{a_1}^{(-)}\cdots\Phi_{a_j}^{(-)}\Phi_{a_{j+1}}^{(+)}\overbrace{\Phi_{a_{j+2}}^{(+)}\cdots\Phi_{a_n}^{(+)}}\Phi_b^{(-)} \\
&+ \cdots\cdots + \Phi_{a_1}^{(-)}\cdots\Phi_{a_j}^{(-)}\Phi_{a_1}^{(+)}\cdots\overbrace{\Phi_{a_n}^{(+)}\Phi_b^{(-)}}\big).
\end{aligned}
\tag{5.185}
$$

也就是说，$\mathsf{N}(\Phi_{a_1}\cdots\Phi_{a_n})$ 分解后每一项都满足与 (5.173) 形式相同的等式，故 (5.173) 式成立。结合第 (1) 步结论，(5.169) 式成立。

(4) 如果 $\Phi_{a_1},\cdots,\Phi_{a_n}$ 中有些算符已经先彼此缩并了，可以按照第 (1)、(2)、(3) 步的方法进行类似的证明。因此，像 (5.170) 这样的等式也成立。**引理证毕**。

现在，我们利用这个引理来证明 Wick 定理。

证明 用*数学归纳法*证明。

当 $n=2$ 时，(5.166) 式变成

$$
\mathsf{T}[\Phi_{a_1}(x)\Phi_{a_2}(y)] = \mathsf{N}[\Phi_{a_1}(x)\Phi_{a_2}(y) + \overbrace{\Phi_{a_1}(x)\Phi_{a_2}}(y)]. \tag{5.186}
$$

这是成立的，因为它的形式与 (5.165) 式相同。

假设当 $n=k$ 时，(5.166) 式成立，即

$$
\mathsf{T}[\Phi_{a_1}(x_1)\cdots\Phi_{a_k}(x_k)] = \mathsf{N}\left[\Phi_{a_1}(x_1)\cdots\Phi_{a_k}(x_k) + \left(\Phi_{a_1}\cdots\Phi_{a_k}\text{的所有可能缩并}\right)\right]. \tag{5.187}
$$

如果 $x_{k+1}^0 \le x_1^0,\cdots,x_k^0$，我们就可以得到

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{T}[\Phi_{a_1}(x_1)\cdots\Phi_{a_k}(x_k)\Phi_{a_{k+1}}(x_{k+1})] = \mathsf{T}[\Phi_{a_1}(x_1)\cdots\Phi_{a_k}(x_k)]\Phi_{a_{k+1}}(x_{k+1}) \\
&= \mathsf{N}(\Phi_{a_1}\cdots\Phi_{a_k})\Phi_{a_{k+1}} + \mathsf{N}\left(\Phi_{a_1}\cdots\Phi_{a_k}\text{的所有可能缩并}\right)\Phi_{a_{k+1}}.
\end{aligned}
\tag{5.188}
$$

根据上述引理中的 (5.169) 式，(5.188) 式第二行第一项为

$$
\begin{aligned}
\mathsf{N}(\Phi_{a_1}\cdots\Phi_{a_k})\Phi_{a_{k+1}} = \mathsf{N}\big(&\Phi_{a_1}\cdots\Phi_{a_k}\Phi_{a_{k+1}} + \overbrace{\Phi_{a_1}\cdots\Phi_{a_k}}\Phi_{a_{k+1}} + \Phi_{a_1}\overbrace{\Phi_{a_2}\cdots\Phi_{a_k}}\Phi_{a_{k+1}} \\
&+\cdots+\Phi_{a_1}\cdots\overbrace{\Phi_{a_k}\Phi_{a_{k+1}}}\big),
\end{aligned}
\tag{5.189}
$$

上式右边的缩并项穷尽了只有一次缩并时与 $\Phi_{a_{k+1}}$ 有关的缩并。另一方面，上述引理中有些算符已经先彼此缩并的情况可以应用到 (5.188) 式第二行的其它项上，得到的项都包含缩并，在这些项里面，只包含一次缩并的项中的缩并必定与 $\Phi_{a_{k+1}}$ 无关，余下的项则穷尽了 $\Phi_{a_1}\cdots\Phi_{a_k+1}$ 的包含一次以上缩并的所有情况。因此，(5.188) 式已经包含了 $\Phi_{a_1}\cdots\Phi_{a_k+1}$ 的所有可能缩并，故

$$
\mathsf{T}[\Phi_{a_1}(x_1)\cdots\Phi_{a_{k+1}}(x_{k+1})] = \mathsf{N}\left[\Phi_{a_1}(x_1)\cdots\Phi_{a_{k+1}}(x_{k+1}) + \left(\Phi_{a_1}\cdots\Phi_{a_{k+1}}\text{的所有可能缩并}\right)\right]. \tag{5.190}
$$

因此，对于 $x_{k+1}^0 \le x_1^0,\cdots,x_k^0$ 的情形，当 $n=k+1$ 时 (5.166) 式也成立。结合 (5.186) 式，我们就证明了 (5.166) 式对 $x_1^0 \ge x_2^0 \ge \cdots \ge x_n^0$ 成立。

当 $x_1^0 \geq x_2^0 \geq \cdots \geq x_n^0$ 这个条件不成立时，我们可以交换 $\Phi_{a_1}(x_1)\Phi_{a_2}(x_2)\cdots\Phi_{a_n}(x_n)$ 中各个算符的位置，得到符合时序的乘积

$$\Phi'_{a_1}(x'_1)\Phi'_{a_2}(x'_2)\cdots\Phi'_{a_n}(x'_n),$$

其中时间坐标已经按降序排列，$x_1'^0 \geq x_2'^0 \geq \cdots \geq x_n'^0$。从而，等式

$$\mathsf{T}[\Phi'_{a_1}(x'_1)\cdots\Phi'_{a_n}(x'_n)] = \mathsf{N}\left[\Phi'_{a_1}(x'_1)\cdots\Phi'_{a_n}(x'_n) + \left(\Phi'_{a_1}\cdots\Phi'_{a_n}\text{的所有可能缩并}\right)\right] \tag{5.191}$$

成立。(5.155) 和 (5.153) 式表明，时序乘积与正规乘积关于算符交换的性质是相同的。因此，如果我们分别在时序乘积和正规乘积中通过交换算符将 $\Phi'_{a_1}(x'_1)\Phi'_{a_2}(x'_2)\cdots\Phi'_{a_n}(x'_n)$ 调回到原来的形式 $\Phi_{a_1}(x_1)\Phi_{a_2}(x_2)\cdots\Phi_{a_n}(x_n)$，将出现一个共同的因子 $\epsilon_2 = \pm 1$，它由费米子算符的反对易性所致。也就是说，我们得到了

$$\mathsf{T}[\Phi'_{a_1}(x'_1)\cdots\Phi'_{a_n}(x'_n)] = \epsilon_2\mathsf{T}[\Phi_{a_1}(x_1)\cdots\Phi_{a_n}(x_n)], \tag{5.192}$$

和

$$\begin{aligned}&\mathsf{N}\left[\Phi'_{a_1}(x'_1)\cdots\Phi'_{a_n}(x'_n) + \left(\Phi'_{a_1}\cdots\Phi'_{a_n}\text{的所有可能缩并}\right)\right]\\ &\quad = \epsilon_2\,\mathsf{N}\left[\Phi_{a_1}(x_1)\cdots\Phi_{a_n}(x_n) + \left(\Phi_{a_1}\cdots\Phi_{a_n}\text{的所有可能缩并}\right)\right].\end{aligned} \tag{5.193}$$

将它们分别代入 (5.191) 式的左右两边，消去 ϵ_2，我们就证明了 (5.166) 式对 $x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0$ 的任意次序成立。**证毕**。

5.4 Feynman 传播子

在应用 Wick 定理时，两个场算符的缩并是一种基本要素。在上一节中我们已经指出，仅当参与缩并的场算符中含有同一套产生湮灭算符时，缩并的结果才不为零。**Feynman 传播子** (propagator) [29] 就是这样的非零缩并，在本节中，我们将导出它们的显式结果。

5.4.1 实标量场的 Feynman 传播子

实标量场 $\phi(x)$ 的 Feynman 传播子 $D_{\mathrm{F}}(x-y)$ 定义为

$$D_{\mathrm{F}}(x-y) \equiv \overbrace{\phi(x)\phi(y)} = \langle 0|\,\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)]\,|0\rangle\,. \tag{5.194}$$

根据展开式 (5.134) 和 (5.135)，当 $x^0 > y^0$ 时，有

$$\begin{aligned}\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)]\,|0\rangle &= \langle 0|\,\phi(x)\phi(y)\,|0\rangle = \langle 0|\,\phi^{(+)}(x)\phi^{(-)}(y)\,|0\rangle\\ &= \int\frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\langle 0|\,a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}a_{\mathbf{q}}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot y}\,|0\rangle = \int\frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p\cdot x-q\cdot y)}}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\langle 0|\,[a_{\mathbf{p}},a_{\mathbf{q}}^\dagger]\,|0\rangle\end{aligned}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p\cdot x-q\cdot y)}}{(2\pi)^3\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\,\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{2E_{\mathbf{p}}}$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}(x^0-y^0)}}{2E_{\mathbf{p}}}. \tag{5.195}$$

第四步用到产生湮灭算符的对易关系 (2.120)。借助复变函数的知识，可以将上式最后一行中的因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}(x^0-y^0)}/(2E_{\mathbf{p}})$ 化为一维积分。

将 p^0 视作复变量，在 p^0 的复平面上考虑函数

$$\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0(x^0-y^0)}}{(p^0-E_{\mathbf{p}})(p^0+E_{\mathbf{p}})} \tag{5.196}$$

的曲线积分。这个函数具有两个一阶极点，$p^0=\pm E_{\mathbf{p}}$，均位于实轴上。图 5.2(a) 中画出了 p^0 复平面上的几条积分路径。路径 Γ_{F} 在两个极点处分别通过一个半径无穷小的半圆绕过极点，当 $R\to\infty$ 时，Γ_{F} 将从 $p^0=-\infty$ 一直延伸到 $p^0=+\infty$。将 Γ_{F} 与下半平面上的半圆弧 $\Gamma_R^{(-)}$ 组成一条围线 $C_{\mathrm{F}}^{(-)}=\Gamma_{\mathrm{F}}+\Gamma_R^{(-)}$，方向为顺时针方向，即反方向。由于 $x^0-y^0>0$，$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0(x^0-y^0)}$ 中的因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{Im}(p^0)(x^0-y^0)}$ 在下半平面 $(\mathrm{Im}\,p^0<0)$ 随着 R 增大而指数衰减，根据复分析的 Jordan 引理，有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R^{(-)}}\mathrm{d}p^0\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0(x^0-y^0)}}{(p^0-E_{\mathbf{p}})(p^0+E_{\mathbf{p}})}=0. \tag{5.197}$$

当 $R\to\infty$ 时，通过留数定理计算相应的积分主值，得

$$\int_{\Gamma_{\mathrm{F}}}\mathrm{d}p^0\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0(x^0-y^0)}}{(p^0-E_{\mathbf{p}})(p^0+E_{\mathbf{p}})}=\int_{C_{\mathrm{F}}^{(-)}}\mathrm{d}p^0\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0(x^0-y^0)}}{(p^0-E_{\mathbf{p}})(p^0+E_{\mathbf{p}})}$$

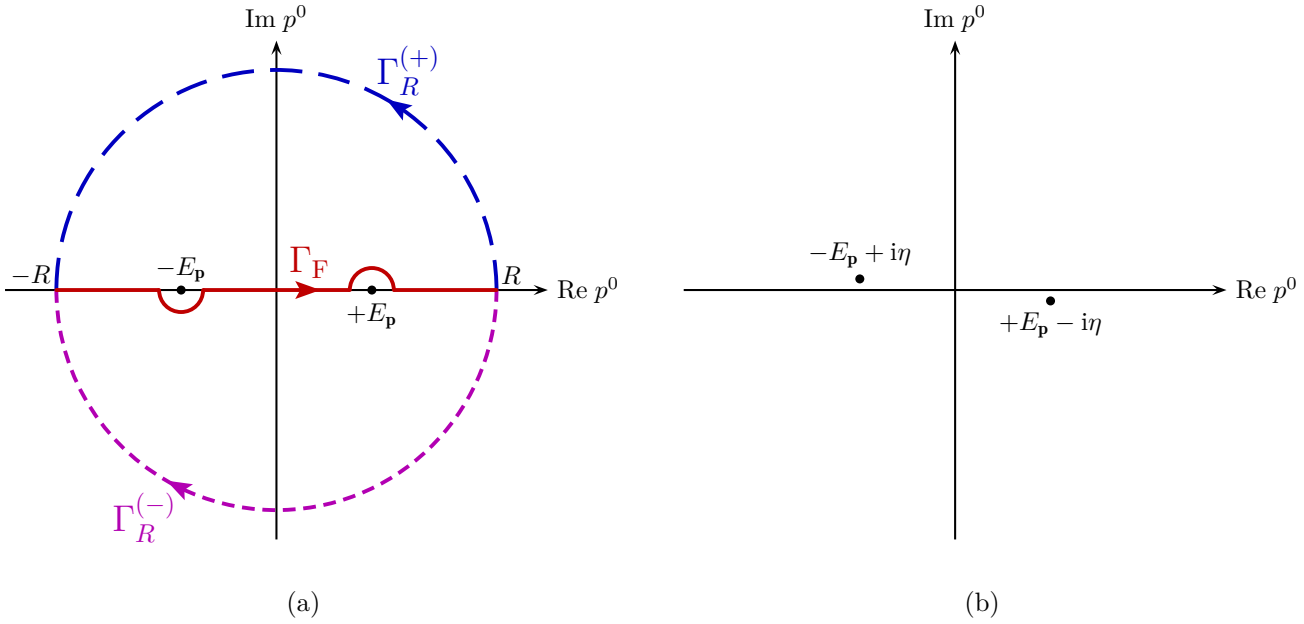


图 5.2: Feynman 传播子的极点和积分路径。

$$= -2\pi\mathrm{i}\operatorname*{Res}_{p^0=E_{\mathbf{p}}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0(x^0-y^0)}}{(p^0-E_{\mathbf{p}})(p^0+E_{\mathbf{p}})} = -2\pi\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}(x^0-y^0)}}{2E_{\mathbf{p}}}. \tag{5.198}$$

利用

$$(p^0-E_{\mathbf{p}})(p^0+E_{\mathbf{p}}) = (p^0)^2-E_{\mathbf{p}}^2 = (p^0)^2-|\mathbf{p}|^2-m^2 = p^2-m^2, \tag{5.199}$$

我们进一步得到

$$\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}(x^0-y^0)}}{2E_{\mathbf{p}}} = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_{\mathrm{F}}}\mathrm{d}p^0\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0(x^0-y^0)}}{(p^0-E_{\mathbf{p}})(p^0+E_{\mathbf{p}})} = \int_{\Gamma_{\mathrm{F}}}\frac{\mathrm{d}p^0}{2\pi}\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0(x^0-y^0)}}{p^2-m^2}. \tag{5.200}$$

如图 5.2(b) 所示，如果我们将左边极点沿正虚轴方向移动一个无穷小量 $\eta>0$，右边极点沿负虚轴方向同样移动无穷小量 η，则沿实轴积分将等价于原来沿 Γ_{F} 积分。此时，极点位置为 $p^0=\pm(E_{\mathbf{p}}-\mathrm{i}\eta)$，被积函数中的分母 p^2-m^2 应改成

$$\begin{aligned}[p^0-(E_{\mathbf{p}}-\mathrm{i}\eta)][p^0+(E_{\mathbf{p}}-\mathrm{i}\eta)] &= (p^0)^2-(E_{\mathbf{p}}-\mathrm{i}\eta)^2 = (p^0)^2-E_{\mathbf{p}}^2+2\mathrm{i}\eta E_{\mathbf{p}}+\eta^2\\ &\simeq p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon.\end{aligned} \tag{5.201}$$

最后一步忽略了 η 的二阶小量，而 $\epsilon=2\eta E_{\mathbf{p}}>0$ 也是一个无穷小量。于是得到

$$\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}(x^0-y^0)}}{2E_{\mathbf{p}}} = \int\frac{\mathrm{d}p^0}{2\pi}\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0(x^0-y^0)}}{[p^0-(E_{\mathbf{p}}-\mathrm{i}\eta)][p^0+(E_{\mathbf{p}}-\mathrm{i}\eta)]} = \int\frac{\mathrm{d}p^0}{2\pi}\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0(x^0-y^0)}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}. \tag{5.202}$$

将上式代入到 (5.195) 式，立即推出

$$\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)]\,|0\rangle = \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}p^0}{2\pi}\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0(x^0-y^0)}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon} = \int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}. \tag{5.203}$$

当 $x^0<y^0$ 时，时间排序将改变 $\phi(x)$ 和 $\phi(y)$ 的次序，有

$$\begin{aligned}\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)]\,|0\rangle &= \langle 0|\,\phi(y)\phi(x)\,|0\rangle = \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(y-x)}}{2E_{\mathbf{p}}} = \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{2E_{\mathbf{p}}}\\ &= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}(x^0-y^0)}}{2E_{\mathbf{p}}} = \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}(x^0-y^0)}}{2E_{\mathbf{p}}}.\end{aligned} \tag{5.204}$$

最后一步把积分变量 $\mathbf{p}$ 替换成 $-\mathbf{p}$。将 Γ_{F} 与上半平面上的半圆弧 $\Gamma_R^{(+)}$ 组成一条围线 $C_{\mathrm{F}}^{(+)}=\Gamma_{\mathrm{F}}+\Gamma_R^{(+)}$，方向为逆时针方向，即正方向。由于 $x^0-y^0<0$，$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0(x^0-y^0)}$ 中的因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{Im}(p^0)(x^0-y^0)}$ 在上半平面 ($\mathrm{Im}\,p^0>0$) 随着 R 增大而指数衰减，由 Jordan 引理得

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R^{(+)}}\mathrm{d}p^0\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0(x^0-y^0)}}{(p^0-E_{\mathbf{p}})(p^0+E_{\mathbf{p}})} = 0. \tag{5.205}$$

从而在 $R\to\infty$ 时推出

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_{\mathrm{F}}}\mathrm{d}p^0\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0(x^0-y^0)}}{(p^0-E_{\mathbf{p}})(p^0+E_{\mathbf{p}})} &= \int_{C_{\mathrm{F}}^{(+)}}\mathrm{d}p^0\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0(x^0-y^0)}}{(p^0-E_{\mathbf{p}})(p^0+E_{\mathbf{p}})}\\ &= 2\pi\mathrm{i}\operatorname*{Res}_{p^0=-E_{\mathbf{p}}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0(x^0-y^0)}}{(p^0-E_{\mathbf{p}})(p^0+E_{\mathbf{p}})} = -2\pi\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}(x^0-y^0)}}{2E_{\mathbf{p}}}.\end{aligned} \tag{5.206}$$

故

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}(x^0-y^0)}}{2E_{\mathbf{p}}}=-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_{\mathrm{F}}}\mathrm{d}p^0\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0(x^0-y^0)}}{p^2-m^2}=\int\frac{\mathrm{d}p^0}{2\pi}\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0(x^0-y^0)}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon},\tag{5.207}$$

代入到 (5.204) 式，即得

$$\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)]\,|0\rangle=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}p^0}{2\pi}\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0(x^0-y^0)}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}.\tag{5.208}$$

(5.208) 式和 (5.203) 式是一样的。因此，无论 x^0 和 y^0 孰大孰小，实标量场的 Feynman 传播子都可以表达为

$$D_{\mathrm{F}}(x-y)=\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)]\,|0\rangle=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}.\tag{5.209}$$

它是 Lorentz 不变的，而且是偶函数，

$$D_{\mathrm{F}}(y-x)=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}=D_{\mathrm{F}}(x-y),\tag{5.210}$$

第二步作了变量替换 $p^\mu\to-p^\mu$。可见

$$\overbrace{\phi(y)\phi(x)}=\overbrace{\phi(x)\phi(y)}.\tag{5.211}$$

5.4.2 复标量场的 Feynman 传播子

在相互作用绘景中，复标量场 $\phi(x)$ 的平面波展开式仍然具有 (2.177) 的形式。将 $\phi(x)$ 和 $\phi^\dagger(x)$ 分解为正能解和负能解部分，得

$$\phi(x)=\phi^{(+)}(x)+\phi^{(-)}(x),\quad \phi^\dagger(x)=\phi^{\dagger(+)}(x)+\phi^{\dagger(-)}(x),\tag{5.212}$$

其中，

$$\phi^{(+)}(x)\equiv\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\,a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x},\quad \phi^{(-)}(x)\equiv\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\,b^\dagger_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x},\tag{5.213}$$

$$\phi^{\dagger(+)}(x)\equiv\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\,b_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x},\quad \phi^{\dagger(-)}(x)\equiv\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\,a^\dagger_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}.\tag{5.214}$$

$(a_{\mathbf{p}},a^\dagger_{\mathbf{p}})$ 和 $(b_{\mathbf{p}},b^\dagger_{\mathbf{p}})$ 是两套相互独立的产生湮灭算符，根据场算符缩并的定义 (5.163)，有

$$\overbrace{\phi(x)\phi(y)}=\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi(x)\phi(y)]\,|0\rangle=0,\quad \overbrace{\phi^\dagger(x)\phi^\dagger(y)}=\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi^\dagger(x)\phi^\dagger(y)]\,|0\rangle=0.\tag{5.215}$$

复标量场的 Feynman 传播子是非平庸的缩并，定义为

$$D_{\mathrm{F}}(x-y)\equiv\overbrace{\phi(x)\phi^\dagger(y)}=\langle 0|\,\mathsf{T}[\phi(x)\phi^\dagger(y)]\,|0\rangle\,.\tag{5.216}$$

类似于上一小节的计算，利用产生湮灭算符的对易关系 (2.183)，得到

$$\langle 0|\,\phi(x)\phi^\dagger(y)\,|0\rangle\;=\;\langle 0|\,\phi^{(+)}(x)\phi^{\dagger(-)}(y)\,|0\rangle$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \langle 0|\, a_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}a_{\mathbf{q}}^{\dagger}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot y}\,|0\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{2E_{\mathbf{p}}}, \tag{5.217}$$

以及

$$\begin{aligned}\langle 0|\,\phi^{\dagger}(y)\phi(x)\,|0\rangle &= \langle 0|\,\phi^{\dagger(+)}(y)\phi^{(-)}(x)\,|0\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\langle 0|\, b_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot y}b_{\mathbf{q}}^{\dagger}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\,|0\rangle \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p\cdot y-q\cdot x)}}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\langle 0|\,[b_{\mathbf{p}},b_{\mathbf{q}}^{\dagger}]\,|0\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p\cdot y-q\cdot x)}}{(2\pi)^3\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}}\,\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{2E_{\mathbf{p}}}.\end{aligned} \tag{5.218}$$

归纳 $x^0>y^0$ 时的 (5.202) 式和 $x^0<y^0$ 时的 (5.207) 式，得

$$\theta(x^0-y^0)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}(x^0-y^0)}}{2E_{\mathbf{p}}} + \theta(y^0-x^0)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}(x^0-y^0)}}{2E_{\mathbf{p}}} = \int \frac{\mathrm{d}p^0}{2\pi}\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0(x^0-y^0)}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}, \tag{5.219}$$

其中 $\epsilon>0$ 是一个无穷小量。从而推出

$$\begin{aligned}&\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}[\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}+\theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}] \\ =& \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\left[\theta(x^0-y^0)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}(x^0-y^0)}}{2E_{\mathbf{p}}}+\theta(y^0-x^0)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}(x^0-y^0)}}{2E_{\mathbf{p}}}\right] \\ =& \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\int \frac{\mathrm{d}p^0}{2\pi}\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0(x^0-y^0)}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon},\end{aligned} \tag{5.220}$$

第一步将方括号中第二项的积分变量 $\mathbf{p}$ 替换成 $-\mathbf{p}$，从而把 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}$ 中的 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}$ 因子变成 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}$ 因子。将三维动量积分和 p^0 积分合成四维动量积分，得

$$\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}[\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}+\theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}] = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}. \tag{5.221}$$

于是，复标量场的 Feynman 传播子表达为

$$\begin{aligned}D_{\mathrm{F}}(x-y) &= \langle 0|\,\mathsf{T}[\phi(x)\phi^{\dagger}(y)]\,|0\rangle \\ &= \theta(x^0-y^0)\langle 0|\,\phi(x)\phi^{\dagger}(y)\,|0\rangle + \theta(y^0-x^0)\langle 0|\,\phi^{\dagger}(y)\phi(x)\,|0\rangle \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}[\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}+\theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}] \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}.\end{aligned} \tag{5.222}$$

可以看出，复标量场与实标量场具有相同形式的 Feynman 传播子。此外，由 (5.155) 式和 $D_{\mathrm{F}}(x-y)$ 的偶函数性质得

$$\overbrace{\phi^{\dagger}(x)\phi(y)} = \langle 0|\,\mathsf{T}[\phi^{\dagger}(x)\phi(y)]\,|0\rangle = \langle 0|\,\mathsf{T}[\phi(y)\phi^{\dagger}(x)]\,|0\rangle = D_{\mathrm{F}}(y-x) = D_{\mathrm{F}}(x-y). \tag{5.223}$$

也就是说，$\overbrace{\phi^{\dagger}(x)\phi(y)}$ 与 $\overbrace{\phi(x)\phi^{\dagger}(y)}$ 相等。

5.4.3 有质量矢量场的 Feynman 传播子

有质量实矢量场 $A^\mu(x)$ 的 Feynman 传播子 $\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y)$ 定义为

$$\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y) \equiv \overbrace{A^\mu(x)A^\nu(y)} = \langle 0|\, \mathsf{T}[A^\mu(x)A^\nu(y)]\,|0\rangle\,. \tag{5.224}$$

根据展开式 (5.137) 和 (5.138)、产生湮灭算符的对易关系 (3.268)、及极化求和关系 (3.241)，有

$$\begin{aligned}
&\langle 0|\, A^\mu(x)A^\nu(y)\,|0\rangle = \langle 0|\, A^{\mu(+)}(x)A^{\nu(-)}(y)\,|0\rangle \\
=& \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda\lambda'} \langle 0|\, \varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\varepsilon^{\nu*}(\mathbf{q},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot y}\,|0\rangle \\
=& \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p\cdot x-q\cdot y)}}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda\lambda'} \varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{\nu*}(\mathbf{q},\lambda')\,\langle 0|\, [a_{\mathbf{p},\lambda}, a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}]\,|0\rangle \\
=& \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p\cdot x-q\cdot y)}}{(2\pi)^3\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda\lambda'} \varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{\nu*}(\mathbf{q},\lambda')\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \\
=& \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} \sum_{\lambda} \varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon^{\nu*}(\mathbf{p},\lambda) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\left(-g^{\mu\nu}+\frac{p^\mu p^\nu}{m^2}\right)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{2E_{\mathbf{p}}},
\end{aligned} \tag{5.225}$$

以及

$$\langle 0|\, A^\nu(y)A^\mu(x)\,|0\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\left(-g^{\nu\mu}+\frac{p^\nu p^\mu}{m^2}\right)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(y-x)}}{2E_{\mathbf{p}}} = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\left(-g^{\mu\nu}+\frac{p^\mu p^\nu}{m^2}\right)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{2E_{\mathbf{p}}}. \tag{5.226}$$

从而，

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y) &= \langle 0|\, \mathsf{T}[A^\mu(x)A^\nu(y)]\,|0\rangle \\
&= \theta(x^0-y^0)\,\langle 0|\, A^\mu(x)A^\nu(y)\,|0\rangle + \theta(y^0-x^0)\,\langle 0|\, A^\nu(y)A^\mu(x)\,|0\rangle \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\left(-g^{\mu\nu}+\frac{p^\mu p^\nu}{m^2}\right)\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}[\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}+\theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}].
\end{aligned} \tag{5.227}$$

最后一行圆括号中的项 $p^\mu p^\nu/m^2$ 与 p^0 有关，因此不能直接应用 (5.219) 式合成四维动量积分。

为了得到简洁的表达式，我们需要将 $p^\mu p^\nu/m^2$ 转换为求导运算。记 $\partial_x^\mu \equiv \partial/\partial x_\mu$，利用阶跃函数与 δ 函数的关系

$$\theta'(x) = \delta(x), \tag{5.228}$$

推出

$$\begin{aligned}
&\partial_x^\mu\partial_x^\nu[\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}+\theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}] \\
=\;& \partial_x^\mu[-\mathrm{i}p^\nu\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} + g^{\nu0}\delta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} + \mathrm{i}p^\nu\theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)} \\
&\quad - g^{\nu0}\delta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}] \\
=\;& -p^\mu p^\nu\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} - \mathrm{i}g^{\mu0}p^\nu\delta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} - \mathrm{i}p^\mu g^{\nu0}\delta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} \\
&+ g^{\mu0}g^{\nu0}\partial_x^0\delta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} - p^\mu p^\nu\theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)} - \mathrm{i}g^{\mu0}p^\nu\delta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\mathrm{i}p^\mu g^{\nu 0}\delta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}+g^{\mu 0}g^{\nu 0}\partial_x^0\delta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}\\
=&-p^\mu p^\nu[\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}+\theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}]\\
&-\mathrm{i}(g^{\mu 0}p^\nu+g^{\nu 0}p^\mu)\delta(x^0-y^0)[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}]\\
&+g^{\mu 0}g^{\nu 0}\partial_x^0\delta(x^0-y^0)[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}],
\end{aligned}
\tag{5.229}
$$

故

$$
\begin{aligned}
&\frac{p^\mu p^\nu}{m^2}[\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}+\theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}]\\
=&-\frac{\partial_x^\mu\partial_x^\nu}{m^2}[\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}+\theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}]\\
&-\frac{\mathrm{i}}{m^2}(g^{\mu 0}p^\nu+g^{\nu 0}p^\mu)\delta(x^0-y^0)[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}]\\
&+\frac{g^{\mu 0}g^{\nu 0}}{m^2}\partial_x^0\delta(x^0-y^0)[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}].
\end{aligned}
\tag{5.230}
$$

由此将 $\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y)$ 分解成三个部分，

$$
\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y)=f_1^{\mu\nu}(x,y)+f_2^{\mu\nu}(x,y)+f_3^{\mu\nu}(x,y),
\tag{5.231}
$$

它们分别是

$$
f_1^{\mu\nu}(x,y)\equiv-\left(g^{\mu\nu}+\frac{\partial_x^\mu\partial_x^\nu}{m^2}\right)\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}[\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}+\theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}],
\tag{5.232}
$$

$$
f_2^{\mu\nu}(x,y)\equiv-\frac{\mathrm{i}}{m^2}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}(g^{\mu 0}p^\nu+g^{\nu 0}p^\mu)\delta(x^0-y^0)[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}],
\tag{5.233}
$$

$$
f_3^{\mu\nu}(x,y)\equiv\frac{g^{\mu 0}g^{\nu 0}}{m^2}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\partial_x^0\delta(x^0-y^0)[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}].
\tag{5.234}
$$

根据 (5.221) 式，$f_1^{\mu\nu}(x,y)$ 化为

$$
f_1^{\mu\nu}(x,y)=-\left(g^{\mu\nu}+\frac{\partial_x^\mu\partial_x^\nu}{m^2}\right)\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}(g^{\mu\nu}-p^\mu p^\nu/m^2)}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}.
\tag{5.235}
$$

$\delta(x^0-y^0)$ 只在 $x^0-y^0=0$ 处非零，该处有 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}(x^0-y^0)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}(x^0-y^0)}=1$，故

$$
f_2^{i0}(x,y)=f_2^{0i}(x,y)=-\frac{\mathrm{i}}{m^2}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{p^i}{2E_{\mathbf{p}}}\delta(x^0-y^0)[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}]=0.
\tag{5.236}
$$

上式中被积函数是关于 $\mathbf{p}$ 的奇函数，因而对整个三维动量空间积分为零。此外，利用 Fourier 变换公式

$$
\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}=\delta^{(3)}(\mathbf{x}),
\tag{5.237}
$$

导出

$$
f_2^{00}(x,y)=-\frac{\mathrm{i}}{m^2}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{2p^0}{2E_{\mathbf{p}}}\delta(x^0-y^0)[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}]
$$

$$= -\frac{2\mathrm{i}}{m^2}\,\delta(x^0-y^0)\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = -\frac{2\mathrm{i}}{m^2}\,\delta^{(4)}(x-y). \tag{5.238}$$

归纳起来，得到

$$f_2^{\mu\nu}(x,y) = -\frac{2\mathrm{i}}{m^2}\,g^{\mu 0}g^{\nu 0}\delta^{(4)}(x-y). \tag{5.239}$$

另一方面，根据 δ 函数的导数的定义，有

$$\int \mathrm{d}x\, f(x)\delta'(x-a) = -f'(a) = -\int \mathrm{d}x\, f'(x)\delta(x-a), \tag{5.240}$$

因而对 (5.234) 式中的被积函数可作替换

$$\partial_x^0\delta(x^0-y^0)[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}] \to -\delta(x^0-y^0)\partial_x^0[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}], \tag{5.241}$$

故

$$\begin{aligned} f_3^{\mu\nu}(x,y) &= -\frac{g^{\mu 0}g^{\nu 0}}{m^2}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\,\delta(x^0-y^0)\partial_x^0[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}] \\ &= -\frac{g^{\mu 0}g^{\nu 0}}{m^2}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\,\delta(x^0-y^0)[-\mathrm{i}p^0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} - \mathrm{i}p^0\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}] \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2m^2}\,g^{\mu 0}g^{\nu 0}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\delta(x^0-y^0)[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}] = \frac{\mathrm{i}}{m^2}\,g^{\mu 0}g^{\nu 0}\delta^{(4)}(x-y). \end{aligned} \tag{5.242}$$

综合起来，有质量矢量场 Feynman 传播子的表达式为

$$\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y) = \int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}(g^{\mu\nu}-p^\mu p^\nu/m^2)}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} - \frac{\mathrm{i}}{m^2}\,g^{\mu 0}g^{\nu 0}\delta^{(4)}(x-y). \tag{5.243}$$

第一项是 Lorentz 协变的，但第二项是非协变的。幸好，这个非协变项在微扰论中的贡献被相互作用哈密顿量密度中非协变项 (5.98) 的贡献精确抵消（见 6.4 节），从而理论是 Lorentz 协变的。因此，在实际计算中可以只保留协变项：

$$\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y) \to \int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}(g^{\mu\nu}-p^\mu p^\nu/m^2)}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}. \tag{5.244}$$

5.4.4 无质量矢量场的 Feynman 传播子

无质量实矢量场的 Feynman 传播子依赖于规范的选择，这里我们取 Feynman 规范 ($\xi=1$)。在相互作用绘景中，无质量矢量场 $A^\mu(x)$ 的平面波展开式仍然具有 (3.369) 的形式，正能解和负能解部分由 (3.392) 和 (3.393) 式给出：

$$A^{\mu(+)}(x) = \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\sigma=0}^{3}e^\mu(\mathbf{p},\sigma)b_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{5.245}$$

$$A^{\mu(-)}(x) = \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\sigma=0}^{3}e^\mu(\mathbf{p},\sigma)b_{\mathbf{p},\sigma}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}. \tag{5.246}$$

相应的 Feynman 传播子定义为

$$\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y) \equiv \overbrace{A^{\mu}(x)A^{\nu}}(y) = \langle 0|\, \mathsf{T}[A^{\mu}(x)A^{\nu}(y)]\,|0\rangle\,. \tag{5.247}$$

根据产生湮灭算符的对易关系 (3.373) 和极化矢量的完备性关系 (3.206)，得到

$$\begin{aligned}
&\langle 0|\, A^{\mu}(x)A^{\nu}(y)\,|0\rangle = \langle 0|\, A^{\mu(+)}(x)A^{\nu(-)}(y)\,|0\rangle \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\sigma\sigma'} \langle 0|\, e^{\mu}(\mathbf{p},\sigma)b_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}e^{\nu}(\mathbf{q},\sigma')b^{\dagger}_{\mathbf{q},\sigma'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot y}\,|0\rangle \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p\cdot x-q\cdot y)}}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\sigma\sigma'} e^{\mu}(\mathbf{p},\sigma)e^{\nu}(\mathbf{q},\sigma')\,\langle 0|\,[b_{\mathbf{p},\sigma}, b^{\dagger}_{\mathbf{q},\sigma'}]\,|0\rangle \\
&= -\int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p\cdot x-q\cdot y)}}{(2\pi)^3\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\sigma\sigma'} e^{\mu}(\mathbf{p},\sigma)e^{\nu}(\mathbf{q},\sigma')g_{\sigma\sigma'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \\
&= -\int \frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} \sum_{\sigma} g_{\sigma\sigma}e^{\mu}(\mathbf{p},\lambda)e^{\nu}(\mathbf{p},\lambda) = -g^{\mu\nu}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{2E_{\mathbf{p}}},
\end{aligned} \tag{5.248}$$

以及

$$\langle 0|\, A^{\nu}(y)A^{\mu}(x)\,|0\rangle = -g^{\nu\mu}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(y-x)}}{2E_{\mathbf{p}}} = -g^{\mu\nu}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{2E_{\mathbf{p}}}. \tag{5.249}$$

当质量 $m=0$ 时，(5.221) 式化为

$$\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}[\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} + \theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}] = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{p^2+\mathrm{i}\epsilon}. \tag{5.250}$$

于是，*Feynman* 规范下无质量矢量场的 Feynman 传播子可以表达为

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y) &= \langle 0|\, \mathsf{T}[A^{\mu}(x)A^{\nu}(y)]\,|0\rangle \\
&= \theta(x^0-y^0)\,\langle 0|\, A^{\mu}(x)A^{\nu}(y)\,|0\rangle + \theta(y^0-x^0)\,\langle 0|\, A^{\nu}(y)A^{\mu}(x)\,|0\rangle \\
&= -g^{\mu\nu}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}[\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} + \theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}g^{\mu\nu}}{p^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}.
\end{aligned} \tag{5.251}$$

5.4.5　Dirac 旋量场的 Feynman 传播子

Dirac 旋量场 $\psi_a(x)$ 的 Feynman 传播子 $S_{\mathrm{F},ab}(x-y)$ 定义为

$$S_{\mathrm{F},ab}(x-y) \equiv \overbrace{\psi_a(x)\bar{\psi}_b}(y) = \langle 0|\, \mathsf{T}[\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)]\,|0\rangle\,. \tag{5.252}$$

在相互作用绘景中，$\bar{\psi}_a(x)$ 的平面波展开式仍然具有 (4.221) 的形式，将它分解为正能解和负能解两个部分，有

$$\bar{\psi}_a(x) = \bar{\psi}_a^{(+)}(x) + \bar{\psi}_a^{(-)}(x), \tag{5.253}$$

其中,

$$\bar{\psi}_a^{(+)}(x) \equiv \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{\lambda=\pm} \bar{v}_a(\mathbf{p},\lambda) b_{\mathbf{p},\lambda} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{5.254}$$

$$\bar{\psi}_a^{(-)}(x) \equiv \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{\lambda=\pm} \bar{u}_a(\mathbf{p},\lambda) a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}. \tag{5.255}$$

再利用 $\psi_a^{(\pm)}(x)$ 的展开式 (5.140) 和 (5.141)、产生湮灭算符的反对易关系 (4.249)、自旋求和关系 (4.218)，得

$$\begin{aligned}
&\langle 0|\, \psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)\, |0\rangle = \langle 0|\, \psi_a^{(+)}(x)\bar{\psi}_b^{(-)}(y)\, |0\rangle \\
=& \int \frac{\mathrm{d}^3 p\, \mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda\lambda'} \langle 0|\, u_a(\mathbf{p},\lambda) a_{\mathbf{p},\lambda} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} \bar{u}_b(\mathbf{q},\lambda') a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot y}\, |0\rangle \\
=& \int \frac{\mathrm{d}^3 p\, \mathrm{d}^3 q\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p\cdot x - q\cdot y)}}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda\lambda'} u_a(\mathbf{p},\lambda)\bar{u}_b(\mathbf{q},\lambda') \langle 0|\, \{a_{\mathbf{p},\lambda}, a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\}\, |0\rangle \\
=& \int \frac{\mathrm{d}^3 p\, \mathrm{d}^3 q\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p\cdot x - q\cdot y)}}{(2\pi)^3 \sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda\lambda'} u_a(\mathbf{p},\lambda)\bar{u}_b(\mathbf{q},\lambda')\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \\
=& \int \frac{\mathrm{d}^3 p\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} \sum_{\lambda} u_a(\mathbf{p},\lambda)\bar{u}_b(\mathbf{p},\lambda) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} (\gamma_\mu p^\mu + m)_{ab} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{2E_{\mathbf{p}}},
\end{aligned} \tag{5.256}$$

以及

$$\begin{aligned}
&\langle 0|\, \bar{\psi}_b(y)\psi_a(x)\, |0\rangle = \langle 0|\, \bar{\psi}_b^{(+)}(y)\psi_a^{(-)}(x)\, |0\rangle \\
=& \int \frac{\mathrm{d}^3 p\, \mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda\lambda'} \langle 0|\, \bar{v}_b(\mathbf{p},\lambda) b_{\mathbf{p},\lambda} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot y} v_a(\mathbf{q},\lambda') b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\, |0\rangle \\
=& \int \frac{\mathrm{d}^3 p\, \mathrm{d}^3 q\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p\cdot y - q\cdot x)}}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda\lambda'} v_a(\mathbf{q},\lambda')\bar{v}_b(\mathbf{p},\lambda) \langle 0|\, \{b_{\mathbf{p},\lambda}, b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\}\, |0\rangle \\
=& \int \frac{\mathrm{d}^3 p\, \mathrm{d}^3 q\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p\cdot y - q\cdot x)}}{(2\pi)^3 \sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda\lambda'} v_a(\mathbf{q},\lambda')\bar{v}_b(\mathbf{p},\lambda)\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \\
=& \int \frac{\mathrm{d}^3 p\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(y-x)}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} \sum_{\lambda} v_a(\mathbf{p},\lambda)\bar{v}_b(\mathbf{p},\lambda) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} (\gamma^\mu p_\mu - m)_{ab} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{2E_{\mathbf{p}}}.
\end{aligned} \tag{5.257}$$

从而将 Feynman 传播子化为

$$\begin{aligned}
&S_{\mathrm{F},ab}(x-y) = \langle 0|\, \mathsf{T}[\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)]\, |0\rangle \\
=& \theta(x^0-y^0) \langle 0|\, \psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)\, |0\rangle - \theta(y^0-x^0) \langle 0|\, \bar{\psi}_b(y)\psi_a(x)\, |0\rangle \\
=& \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \left[\theta(x^0-y^0)(\gamma_\mu p^\mu + m)_{ab} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{2E_{\mathbf{p}}} - \theta(y^0-x^0)(\gamma^\mu p_\mu - m)_{ab} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{2E_{\mathbf{p}}} \right] \\
=& (\gamma_0)_{ab} \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} [E_{\mathbf{p}}\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} - E_{\mathbf{p}}\theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}] \\
&+ (\gamma_i)_{ab} \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} [p^i\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} - p^i\theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}]
\end{aligned}$$

$$+ m\delta_{ab}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\left[\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}+\theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}\right]. \tag{5.258}$$

对于任意解析函数 $f(p^0)$，可将 (5.219) 式推广为

$$\theta(x^0-y^0)\frac{f(E_{\mathbf{p}})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}(x^0-y^0)}}{2E_{\mathbf{p}}}+\theta(y^0-x^0)\frac{f(-E_{\mathbf{p}})\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}(x^0-y^0)}}{2E_{\mathbf{p}}}=\int\frac{\mathrm{d}p^0}{2\pi}\frac{\mathrm{i}f(p^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0(x^0-y^0)}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}, \tag{5.259}$$

这是因为左边第一项对应于 $p^0=E_{\mathbf{p}}$ 处的留数，第二项对应于 $p^0=-E_{\mathbf{p}}$ 处的留数。类似于 (5.221) 式，推出

$$\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}[f(E_{\mathbf{p}})\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}+f(-E_{\mathbf{p}})\theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}]=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}f(p^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}. \tag{5.260}$$

取 $f(p^0)=p^0$，把 (5.258) 式第一项变成

$$(\gamma_0)_{ab}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}[E_{\mathbf{p}}\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}-E_{\mathbf{p}}\theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}]=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}(\gamma_0p^0)_{ab}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}. \tag{5.261}$$

利用 (5.221) 式将 (5.258) 式后两项化成

$$\begin{aligned}
&(\gamma_i)_{ab}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}[p^i\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}-p^i\theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}]\\
&\quad+m\delta_{ab}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\left[\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}+\theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}\right]\\
&=[\mathrm{i}(\gamma_i)_{ab}\partial_x^i+m\delta_{ab}]\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\left[\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}+\theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}\right]\\
&=[\mathrm{i}(\gamma_i)_{ab}\partial_x^i+m\delta_{ab}]\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}(\gamma_ip^i+m)_{ab}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}.
\end{aligned} \tag{5.262}$$

把这三项加起来，得到 Dirac 旋量场的 Feynman 传播子

$$S_{\mathrm{F},ab}(x-y)=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}(\gamma_0p^0+\gamma_ip^i+m)_{ab}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}(\not{p}+m)_{ab}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}. \tag{5.263}$$

写成旋量空间矩阵的形式是

$$S_{\mathrm{F}}(x-y)=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}(\not{p}+m)}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}. \tag{5.264}$$

根据 Dirac 矩阵的反对易关系 (4.1)，有

$$\not{p}\not{p}=p_\mu p_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu=\frac{1}{2}p_\mu p_\nu(\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu)=p_\mu p_\nu g^{\mu\nu}=p^2, \tag{5.265}$$

从而得到

$$(\not{p}+m)(\not{p}-m)=\not{p}\not{p}-m^2=p^2-m^2, \tag{5.266}$$

故

$$(\not{p}+m)(\not{p}-m+\mathrm{i}\epsilon)=p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon(\not{p}+m). \tag{5.267}$$

$\mathrm{i}\epsilon(\not{p}+m)$ 是一个无穷小量，因而上式右边与 $p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon$ 等价，因此 (5.264) 式也可以表示成

$$S_{\mathrm{F}}(x-y)=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}(\not{p}+m)}{(\not{p}+m)(\not{p}-m+\mathrm{i}\epsilon)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{\not{p}-m+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}. \tag{5.268}$$

上式最右边在表达方式上更为简洁，但在矩阵的意义上不好理解，应将它转化回到 (5.264) 式来理解。

5.5 散射截面和衰变宽度

在没有相互作用的理论中，S 算符就是单位算符 1，因而 S 矩阵为 $S_{fi}=\langle f|i\rangle$。对于存在相互作用的理论，5.2 节的讨论表明，$S$ 算符可以展开为级数 (5.131)。这个级数的 $n=0$ 项也是单位算符，因此可以将 S 算符分解为

$$S=1+\mathrm{i}T, \tag{5.269}$$

其中 $\mathrm{i}T$ 包含所有 $n\geq 1$ 的项。从而，S 矩阵分解为

$$S_{fi}=\langle f|i\rangle+\langle f|\,\mathrm{i}T\,|i\rangle\,. \tag{5.270}$$

右边第一项意味着，即使理论中存在相互作用，初态也有一定概率自由地演化，也就是说，初态中的粒子仍然有一定概率不发生任何相互作用。由此可见，S 矩阵中真正描述相互作用的项是 $\langle f|\,\mathrm{i}T\,|i\rangle$。由于能动量守恒定律，初态 $|i\rangle$ 中所有粒子的四维动量之和 p_i^μ 必定等于末态 $|f\rangle$ 中所有粒子的四维动量之和 p_f^μ，这意味着散射矩阵元 $\langle f|\,\mathrm{i}T\,|i\rangle$ 的形式为

$$\langle f|\,\mathrm{i}T\,|i\rangle=(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i-p_f)\,\mathrm{i}\mathcal{M}. \tag{5.271}$$

这里四维 δ 函数体现了能动量守恒定律。$\mathcal{M}$ 是 Lorentz 不变的，称为**不变矩阵元** (invariant matrix element)，或者**不变散射振幅** (invariant scattering amplitude)，它是初末态动量的函数。

5.5.1 跃迁概率

在发生相互作用时，$i\to f$ 的跃迁概率可以表示成

$$P_{fi}=\frac{|\langle f|\,\mathrm{i}T\,|i\rangle|^2}{\langle i|i\rangle\,\langle f|f\rangle}, \tag{5.272}$$

其中，$\langle i|\mathrm{i}\rangle$ 和 $\langle f|f\rangle$ 分别是初态 $|i\rangle$ 和末态 $|f\rangle$ 的自我内积。根据 δ 函数的性质 (2.56)，上式右边的分子为

$$|\langle f|\,\mathrm{i}T\,|i\rangle|^2=[(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i-p_f)]^2|\mathcal{M}|^2=(2\pi)^{(4)}\delta^{(4)}(0)\cdot(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i-p_f)|\mathcal{M}|^2. \tag{5.273}$$

由 (2.58) 和 (2.67) 式，有

$$\int\mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}p\cdot x}=\int\mathrm{d}x^0\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}p^0x^0}\int\mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot x}=2\pi\,\delta(p^0)\cdot(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}), \tag{5.274}$$

可见，四维 δ 函数满足 Fourier 变换公式

$$\int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}p\cdot x} = (2\pi)^4\delta^{(4)}(p). \tag{5.275}$$

对于时空坐标的函数 $f(x)$，我们将 Fourier 变换约定为

$$\tilde{f}(p) = \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} f(x), \tag{5.276}$$

而逆变换为

$$f(x) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} \tilde{f}(p). \tag{5.277}$$

现在有

$$(2\pi)^4\delta^{(4)}(0) = \int \mathrm{d}^4x = \tilde{V}\tilde{T}. \tag{5.278}$$

其中，$\tilde{V}$ 是空间积分区域的体积，$\tilde{T}$ 是时间积分范围的长度，对于全空间全时间积分，它们趋于无穷大。于是，(5.273) 式化为

$$|\langle f|\,\mathrm{i}T\,|i\rangle|^2 = \tilde{V}\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i - p_f)|\mathcal{M}|^2. \tag{5.279}$$

现在，讨论 2 体初态到 n 体末态的跃迁过程，即初态包含 2 个粒子 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$，它们通过相互作用发生散射，从而产生包含 n 个粒子的末态。设初态中两个粒子的动量分别为 $\mathbf{p}_\mathcal{A}$ 和 $\mathbf{p}_\mathcal{B}$，则 $|i\rangle$ 可以用相应的产生算符表达为

$$|i\rangle = \sqrt{4E_\mathcal{A}E_\mathcal{B}}\, a^\dagger_{\mathbf{p}_\mathcal{A}} a^\dagger_{\mathbf{p}_\mathcal{B}}\,|0\rangle\,, \quad E_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = p^0_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \sqrt{|\mathbf{p}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}|^2 + m^2_{\mathcal{A},\mathcal{B}}}\,. \tag{5.280}$$

此处我们省略了产生算符的螺旋度指标（或者说，自旋指标）。$|0\rangle$ 是真空态，理论中任意湮灭算符作用到它身上都将得到零。类似地，末态 $|f\rangle$ 可以写成

$$|f\rangle = \left(\prod_{j=1}^{n} \sqrt{2E_j}\, a^\dagger_{\mathbf{p}_j}\right)|0\rangle\,, \quad E_j = p^0_j = \sqrt{|\mathbf{p}_j|^2 + m_j^2}\,. \tag{5.281}$$

其中，$\mathbf{p}_j$ $(j = 1, \cdots, n)$ 是 n 个末态粒子的动量。此时，初态和末态的四维总动量分别是

$$p^\mu_i = p^\mu_\mathcal{A} + p^\mu_\mathcal{B}, \quad p^\mu_f = \sum_{j=1}^{n} p^\mu_j. \tag{5.282}$$

当 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 粒子由两个不同的量子场描述时，可以把初态 $|i\rangle$ 改写为单粒子态的直积，

$$|i\rangle = \sqrt{2E_\mathcal{A}}\, a^\dagger_{\mathbf{p}_\mathcal{A}}\,|0\rangle_\mathcal{A} \otimes \sqrt{2E_\mathcal{B}}\, a^\dagger_{\mathbf{p}_\mathcal{B}}\,|0\rangle_\mathcal{B} = |\mathbf{p}_\mathcal{A}\rangle_\mathcal{A} \otimes |\mathbf{p}_\mathcal{B}\rangle_\mathcal{B}\,. \tag{5.283}$$

这里 $|0\rangle_\mathcal{A}$ 和 $|0\rangle_\mathcal{B}$ 分别是描述 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的两个量子场所对应的真空态。如同 (2.147) 式，单粒子态 $|\mathbf{p}_\mathcal{A}\rangle_\mathcal{A}$ 和 $|\mathbf{p}_\mathcal{B}\rangle_\mathcal{B}$ 的自我内积分别是

$$\langle \mathbf{p}_\mathcal{A}|\mathbf{p}_\mathcal{A}\rangle_\mathcal{A} = 2E_\mathcal{A}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = 2E_\mathcal{A}\tilde{V}, \quad \langle \mathbf{p}_\mathcal{B}|\mathbf{p}_\mathcal{B}\rangle_\mathcal{B} = 2E_\mathcal{B}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = 2E_\mathcal{B}\tilde{V}. \tag{5.284}$$

此处用到 (2.125) 式。于是，我们得到

$$\langle i|i\rangle = \langle \mathbf{p}_{\mathcal{A}}|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\rangle_{\mathcal{A}} \langle \mathbf{p}_{\mathcal{B}}|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle_{\mathcal{B}} = 4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}^2. \tag{5.285}$$

当 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 粒子是由同一个量子场描述的全同粒子时，若 $\mathbf{p}_{\mathcal{A}} \neq \mathbf{p}_{\mathcal{B}}$，则根据 (2.161) 或 (4.296) 式也能推出这个结果。如果末态不包含全同粒子，同理可得

$$\langle f|f\rangle = \prod_{j=1}^{n}(2E_j\tilde{V}). \tag{5.286}$$

从而将跃迁概率化为

$$P_{fi} = \frac{|\langle f|\,\mathrm{i}T\,|i\rangle|^2}{\langle i|i\rangle\,\langle f|f\rangle} = \frac{\tilde{V}\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i-p_f)|\mathcal{M}|^2}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}^2\prod_{j=1}^{n}(2E_j\tilde{V})} = \frac{\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i-p_f)\,|\mathcal{M}|^2}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}\prod_{j=1}^{n}(2E_j\tilde{V})}. \tag{5.287}$$

系统从遥远过去的初态 $|i\rangle$ 演化到遥远未来的末态 $|f\rangle$ 所经历的时间为 $\tilde{T}$，对于一组特定的末态动量 $\{p_j\}$，单位时间内的跃迁概率为

$$R_{\{p_j\}} = \frac{P_{fi}}{\tilde{T}} = \Big[4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}\prod_{j=1}^{n}(2E_j\tilde{V})\Big]^{-1}(2\pi)^4\delta^{(4)}\Big(p_{\mathcal{A}}+p_{\mathcal{B}}-\sum_{j=1}^{n}p_j\Big)|\mathcal{M}|^2. \tag{5.288}$$

此处四维 δ 函数可以分解为

$$\delta^{(4)}\Big(p_{\mathcal{A}}+p_{\mathcal{B}}-\sum_{j=1}^{n}p_j\Big) = \delta^{(3)}\Big(\mathbf{p}_{\mathcal{A}}+\mathbf{p}_{\mathcal{B}}-\sum_{j=1}^{n}\mathbf{p}_j\Big)\delta\Big(E_{\mathcal{A}}+E_{\mathcal{B}}-\sum_{j=1}^{n}E_j\Big). \tag{5.289}$$

在这样的 $2\to n$ 散射过程中，末态中 n 个粒子的动量可以取任意满足运动学要求的值，而能动量守恒定律对应的**运动学条件**

$$p_{\mathcal{A}}^{\mu}+p_{\mathcal{B}}^{\mu}-\sum_{j=1}^{n}p_j^{\mu} = 0 \tag{5.290}$$

已经体现在 (5.288) 式的四维 δ 函数中。为了计算总的跃迁率，我们需要将 $\{p_j\}$ 的所有可能取值包含起来，也就是说，需要对末态的动量相空间积分。

接下来，我们讨论如何包含末态粒子所有可能的动量取值。考察一维情况，先假定粒子局限在 $x\in[-L/2,L/2]$ 范围内运动，最后让 $L\to\infty$。为了确保动量算符 $\hat{p}_x=-\mathrm{i}\partial/\partial x$ 在区间 $[-L/2,L/2]$ 上是厄米算符，必须要求描述粒子的波函数 $\varphi(x)$ 满足周期性边界条件[2]

$$\varphi\left(-\frac{L}{2}\right) = \varphi\left(\frac{L}{2}\right). \tag{5.291}$$

作为动量本征态的波函数是平面波解 $\varphi_p(x)\propto\exp(\mathrm{i}px)$，结合周期性边界条件，有

$$\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}pL\right) = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}pL\right), \tag{5.292}$$

[2]参考曾谨言《量子力学》卷 I（第四版）§4.4.3。

故 $\exp(\mathrm{i}pL)=1$，这意味着 $pL=2k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$。因此，动量本征值是

$$p_k=\frac{2\pi}{L}k,\quad k\in\mathbb{Z}. \tag{5.293}$$

当 $L\to\infty$ 时，相邻动量本征值之差变成动量的微分，

$$\Delta p_k=p_{k+1}-p_k=\frac{2\pi}{L}\to\mathrm{d}p. \tag{5.294}$$

从而得到

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\Delta p_k=\frac{2\pi}{L}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\to\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}p, \tag{5.295}$$

即

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\to\frac{L}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}p. \tag{5.296}$$

推广到三维情况，先假定粒子局限在体积为 $\tilde{V}=L^3$ 的立方体中运动，周期性边界条件相当于将立方体表面上任意一点视作与位于相对的面上的对应点等同。满足此条件的动量本征值为

$$\mathbf{p}=\frac{2\pi}{L}(k_1,k_2,k_3),\quad k_1,k_2,k_3\in\mathbb{Z}. \tag{5.297}$$

当 $L\to\infty$ 时，我们得到

$$\sum_{k_1k_2k_3}\to\frac{L^3}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}^3p=\frac{\tilde{V}}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}^3p\,. \tag{5.298}$$

上式最左边代表对所有动量取值求和，当动量可取连续数值时，这种求和就化作最右边的动量相空间积分。将 n 个末态粒子的所有动量取值都考虑进来，要对 (5.288) 式积分，从而得到单位时间内 $2\to n$ 散射过程的跃迁概率为

$$\begin{aligned}R&=\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{\tilde{V}}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}^3p_j\right)R_{\{p_j\}}\\&=\frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}}\left(\prod_{j=1}^{n}\int\frac{\mathrm{d}^3p_j}{(2\pi)^32E_j}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}\Big(p_{\mathcal{A}}+p_{\mathcal{B}}-\sum_{j=1}^{n}p_j\Big)|\mathcal{M}|^2.\end{aligned} \tag{5.299}$$

根据 2.3.4 小节的讨论，我们知道体积元 (2.151) 是 Lorentz 不变的，因而上式中相空间体积元

$$\frac{\mathrm{d}^3p_j}{(2\pi)^32E_j} \tag{5.300}$$

也是 Lorentz 不变的。

以上讨论只对末态不包含全同粒子的情况成立。假如末态包含全同粒子，在做完上述末态相空间积分之后，还要除以相应的**末态对称性因子** $\mathcal{S}$，从而避免量子态的重复计算。如果末态中第 k 种粒子包含 n_k 个全同粒子，则

$$\mathcal{S}=\prod_k n_k!\,, \tag{5.301}$$

而跃迁概率变成

$$R=\frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\tilde{V}}\left(\prod_{j=1}^{n}\int\frac{\mathrm{d}^3p_j}{(2\pi)^32E_j}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}\Big(p_{\mathcal{A}}+p_{\mathcal{B}}-\sum_{j=1}^{n}p_j\Big)|\mathcal{M}|^2. \tag{5.302}$$

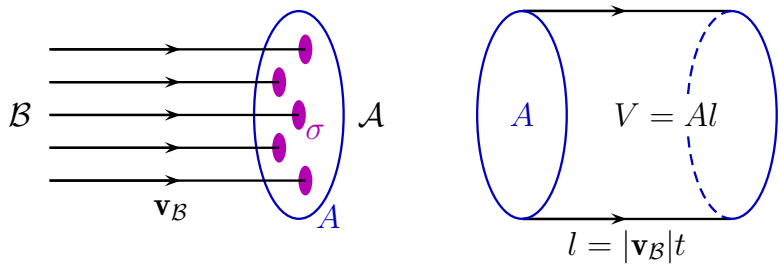


图 5.3: 束流打靶示意图。

5.5.2 散射截面

现在, 我们讨论**束流打靶**实验。如图 5.3 所示, 靶 (target) 由 $\mathcal{A}$ 粒子组成, 束流 (beam) 由 $\mathcal{B}$ 粒子组成。设束流中每个 $\mathcal{B}$ 粒子的运动速度相同, 记为 $\mathbf{v}_\mathcal{B}$, 按照狭义相对论, 有 $\mathbf{v}_\mathcal{B} \equiv \mathbf{p}_\mathcal{B}/E_\mathcal{B}$。记束流的横截面积为 A, 则 t 时间内束流的一个横截面经过的体积为 $V = A|\mathbf{v}_\mathcal{B}|t$。再设束流中 $\mathcal{B}$ 粒子的数密度为 $n_\mathcal{B}$, 从而, 体积 V 中的粒子数为 $N_\mathcal{B} = n_\mathcal{B}V = n_\mathcal{B}A|\mathbf{v}_\mathcal{B}|t$。在单位时间内穿过单位面积的 $\mathcal{B}$ 粒子数称为**流密度**, 记作 $j_\mathcal{B}$, 通过下式计算,

$$j_\mathcal{B} = \frac{N_\mathcal{B}}{At} = \frac{n_\mathcal{B}A|\mathbf{v}_\mathcal{B}|t}{At} = n_\mathcal{B}|\mathbf{v}_\mathcal{B}|. \tag{5.303}$$

考虑流密度为 $j_\mathcal{B}$ 的束流打到由 $N_\mathcal{A}$ 个 $\mathcal{A}$ 粒子组成的靶上, 则 t 时间内散射发生的次数可以表示为

$$N = N_\mathcal{A}\, j_\mathcal{B}\, \sigma\, t. \tag{5.304}$$

这里引入了物理量 σ, 由量纲分析知道它具有面积量纲, 称为**散射截面** (scattering cross section), 简称为**截面** (cross section)。散射截面相当于发生散射的有效面积, 表征散射过程的强度, 由 $\mathcal{A}$ 粒子与 $\mathcal{B}$ 粒子的相互作用性质决定。截面的常用单位是**靶** (barn), 记作 b,

$$1\ \mathrm{b} = 10^{-28}\ \mathrm{m}^2 = 2.568 \times 10^3\ \mathrm{GeV}^{-2}. \tag{5.305}$$

于是, 单位时间单位体积内散射发生的次数为

$$\mathcal{R} = \frac{N}{Vt} = \frac{N_\mathcal{A} j_\mathcal{B}\sigma}{V} = \frac{N_\mathcal{A} n_\mathcal{B}|\mathbf{v}_\mathcal{B}|\sigma}{V} = n_\mathcal{A} n_\mathcal{B}\sigma|\mathbf{v}_\mathcal{B}|, \tag{5.306}$$

其中 $n_\mathcal{A} = N_\mathcal{A}/V$ 相当于 $\mathcal{A}$ 粒子在体积 V 中的数密度。

如果只考虑一个 $\mathcal{B}$ 粒子打到一个 $\mathcal{A}$ 粒子上, 那么, 可以看作在体积 $\tilde{V}$ 中仅有这两个粒子, 因而 $n_\mathcal{A} = n_\mathcal{B} = 1/\tilde{V}$, 此时 $\mathcal{R}$ 可以用单位时间内的跃迁概率 R 表示为 $\mathcal{R} = R/\tilde{V}$。于是, 根据 (5.302) 式得到

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\mathcal{R}}{n_\mathcal{A} n_\mathcal{B}|\mathbf{v}_\mathcal{B}|} = \frac{R}{\tilde{V}}\frac{\tilde{V}^2}{|\mathbf{v}_\mathcal{B}|} = \frac{R\tilde{V}}{|\mathbf{v}_\mathcal{B}|} \\ &= \frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{4E_\mathcal{A}E_\mathcal{B}|\mathbf{v}_\mathcal{B}|}\left(\prod_{j=1}^{n}\int\frac{\mathrm{d}^3p_j}{(2\pi)^3 2E_j}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}\Big(p_\mathcal{A} + p_\mathcal{B} - \sum_{j=1}^{n} p_j\Big)|\mathcal{M}|^2.\end{aligned} \tag{5.307}$$

上式对 $\mathcal{A}$ 粒子静止的参考系成立。我们需要把它推广到任意惯性系，从而可以处理 $\mathcal{A}$ 粒子和 $\mathcal{B}$ 粒子处于任意运动状态的情况。为此应将散射截面 σ 定义为 Lorentz 不变量。(5.307) 式最后一行中，除了第二个因子 $(4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|)^{-1}$ 之外，其余部分是 Lorentz 不变的。在 $\mathcal{A}$ 粒子静止的参考系中，$|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$ 就是 $\mathcal{B}$ 粒子与 $\mathcal{A}$ 粒子之间的相对速度。一般地，**相对速度**定义为

$$v_{\mathrm{rel}} \equiv |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|, \tag{5.308}$$

其中 $\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \equiv \mathbf{p}_{\mathcal{A}}/E_{\mathcal{A}}$ 是 $\mathcal{A}$ 粒子的运动速度。不过，$E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\,v_{\mathrm{rel}}$ 并不是 Lorentz 不变量。我们要做的是将相对速度替换成另一个物理量 **Møller 速度**，定义是

$$v_{\mathrm{M\o l}} \equiv \frac{1}{E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}}\sqrt{(p_{\mathcal{A}}\cdot p_{\mathcal{B}})^2 - m_{\mathcal{A}}^2 m_{\mathcal{B}}^2}\,. \tag{5.309}$$

容易看出**入射流因子** $E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\,v_{\mathrm{M\o l}}$ 是 Lorentz 不变量。现在，我们将散射截面定义为

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\,v_{\mathrm{M\o l}}}\left(\prod_{j=1}^{n}\int\frac{\mathrm{d}^3p_j}{(2\pi)^3 2E_j}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}\Big(p_{\mathcal{A}}+p_{\mathcal{B}}-\sum_{j=1}^{n}p_j\Big)|\mathcal{M}|^2. \tag{5.310}$$

它是 Lorentz 不变的，而且 $\mathcal{R} = n_{\mathcal{A}}n_{\mathcal{B}}\sigma v_{\mathrm{M\o l}}$ 也是 Lorentz 不变的。当 $\mathcal{A}$ 粒子静止时，$E_{\mathcal{A}} = m_{\mathcal{A}}$，$\mathbf{p}_{\mathcal{A}} = \mathbf{0}$，故

$$v_{\mathrm{M\o l}} = \frac{1}{m_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}}\sqrt{m_{\mathcal{A}}^2E_{\mathcal{B}}^2 - m_{\mathcal{A}}^2m_{\mathcal{B}}^2} = \frac{\sqrt{E_{\mathcal{B}}^2-m_{\mathcal{B}}^2}}{E_{\mathcal{B}}} = \frac{|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}|}{E_{\mathcal{B}}} = |\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|, \tag{5.311}$$

此时截面定义式 (5.310) 可以恢复到 (5.307) 式。

在 (5.310) 式右边，不变振幅模方 $|\mathcal{M}|^2$ 是*动力学*因素，而其它部分都属于*运动学*因素。在运动学因素中，对末态动量的积分具有如下形式，

$$\int \mathrm{d}\Pi_n = \left(\prod_{j=1}^{n}\int\frac{\mathrm{d}^3p_j}{(2\pi)^3 2E_j}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}\Big(p_{\mathcal{A}}+p_{\mathcal{B}}-\sum_{j=1}^{n}p_j\Big). \tag{5.312}$$

这个积分称为 $\boldsymbol{n}$ **体不变相空间**。用这个记号把 (5.310) 式写得简洁一些，

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\,v_{\mathrm{M\o l}}}\int \mathrm{d}\Pi_n\,|\mathcal{M}|^2. \tag{5.313}$$

如果 (5.310) 式右边不作积分，则对应于**微分散射截面**

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\,v_{\mathrm{M\o l}}}\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{d}^3p_j}{(2\pi)^3 2E_j}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}\Big(p_{\mathcal{A}}+p_{\mathcal{B}}-\sum_{j=1}^{n}p_j\Big)|\mathcal{M}|^2. \tag{5.314}$$

注意，计算微分截面时不需要考虑末态对称性因子 $\mathcal{S}$，因而截面与微分截面之间的关系为

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}}\int \mathrm{d}\sigma. \tag{5.315}$$

如果末态不包含全同粒子，则 $\mathcal{S} = 1$。

下面进一步考察 Møller 速度 $v_{\text{Møl}}$ 的性质。设 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 粒子运动方向之间的夹角为 α，则

$$\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \cdot \mathbf{v}_{\mathcal{B}} = |\mathbf{v}_{\mathcal{A}}||\mathbf{v}_{\mathcal{B}}| \cos\alpha, \quad |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \times \mathbf{v}_{\mathcal{B}}| = |\mathbf{v}_{\mathcal{A}}||\mathbf{v}_{\mathcal{B}}| \sin\alpha, \tag{5.316}$$

故

$$(\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \cdot \mathbf{v}_{\mathcal{B}})^2 = |\mathbf{v}_{\mathcal{A}}|^2|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2 \cos^2\alpha = |\mathbf{v}_{\mathcal{A}}|^2|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2(1-\sin^2\alpha) = |\mathbf{v}_{\mathcal{A}}|^2|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2 - |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \times \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2. \tag{5.317}$$

从而推出

$$\begin{aligned}(1-\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \cdot \mathbf{v}_{\mathcal{B}})^2 &= 1 - 2\,\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \cdot \mathbf{v}_{\mathcal{B}} + (\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \cdot \mathbf{v}_{\mathcal{B}})^2 = 1 - 2\,\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \cdot \mathbf{v}_{\mathcal{B}} + |\mathbf{v}_{\mathcal{A}}|^2|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2 - |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \times \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2 \\ &= 1 + |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2 - |\mathbf{v}_{\mathcal{A}}|^2 - |\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2 + |\mathbf{v}_{\mathcal{A}}|^2|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2 - |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \times \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2 \\ &= |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2 - |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \times \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2 + (1-|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}|^2)(1-|\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2).\end{aligned} \tag{5.318}$$

将 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的四维动量分解为时间分量和空间分量，

$$p^\mu_{\mathcal{A}} = (E_{\mathcal{A}}, \mathbf{p}_{\mathcal{A}}) = E_{\mathcal{A}}(1, \mathbf{v}_{\mathcal{A}}), \quad p^\mu_{\mathcal{B}} = (E_{\mathcal{B}}, \mathbf{p}_{\mathcal{B}}) = E_{\mathcal{B}}(1, \mathbf{v}_{\mathcal{B}}). \tag{5.319}$$

这两个四维动量的内积为

$$p_{\mathcal{A}} \cdot p_{\mathcal{B}} = E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}} - \mathbf{p}_{\mathcal{A}} \cdot \mathbf{p}_{\mathcal{B}} = E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}(1 - \mathbf{v}_{\mathcal{A}} \cdot \mathbf{v}_{\mathcal{B}}). \tag{5.320}$$

于是导出

$$\begin{aligned}&(p_{\mathcal{A}} \cdot p_{\mathcal{B}})^2 - m_{\mathcal{A}}^2 m_{\mathcal{B}}^2 = E_{\mathcal{A}}^2 E_{\mathcal{B}}^2 (1 - \mathbf{v}_{\mathcal{A}} \cdot \mathbf{v}_{\mathcal{B}})^2 - m_{\mathcal{A}}^2 m_{\mathcal{B}}^2 \\ =\ & E_{\mathcal{A}}^2 E_{\mathcal{B}}^2 (|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2 - |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \times \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2) + E_{\mathcal{A}}^2 E_{\mathcal{B}}^2 (1 - |\mathbf{v}_{\mathcal{A}}|^2)(1 - |\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2) - m_{\mathcal{A}}^2 m_{\mathcal{B}}^2 \\ =\ & E_{\mathcal{A}}^2 E_{\mathcal{B}}^2 (|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2 - |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \times \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2) + (E_{\mathcal{A}}^2 - |\mathbf{p}_{\mathcal{A}}|^2)(E_{\mathcal{B}}^2 - |\mathbf{p}_{\mathcal{B}}|^2) - m_{\mathcal{A}}^2 m_{\mathcal{B}}^2 \\ =\ & E_{\mathcal{A}}^2 E_{\mathcal{B}}^2 (|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2 - |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \times \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2) + m_{\mathcal{A}}^2 m_{\mathcal{B}}^2 - m_{\mathcal{A}}^2 m_{\mathcal{B}}^2 \\ =\ & E_{\mathcal{A}}^2 E_{\mathcal{B}}^2 (|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2 - |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \times \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2).\end{aligned} \tag{5.321}$$

因此，由 Møller 速度的定义 (5.309) 得

$$\begin{aligned}v_{\text{Møl}} &= \frac{1}{E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}}\sqrt{(p_{\mathcal{A}} \cdot p_{\mathcal{B}})^2 - m_{\mathcal{A}}^2 m_{\mathcal{B}}^2} = \frac{1}{E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}}\sqrt{E_{\mathcal{A}}^2 E_{\mathcal{B}}^2 (|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2 - |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \times \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2)} \\ &= \sqrt{|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2 - |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \times \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|^2}.\end{aligned} \tag{5.322}$$

如果 $\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \times \mathbf{v}_{\mathcal{B}} = \mathbf{0}$，则

$$v_{\text{Møl}} = |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}| = v_{\text{rel}}, \tag{5.323}$$

即 Møller 速度与相对速度相同，入射流因子化为 $E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\,v_{\text{rel}}$。满足这个条件的一种情况是 $\mathbf{v}_{\mathcal{A}}$ 或 $\mathbf{v}_{\mathcal{B}}$ 为零，即 $\mathcal{A}$ 粒子或 $\mathcal{B}$ 粒子静止。另一种情况是 $\mathcal{A}$ 粒子与 $\mathcal{B}$ 粒子的运动方向相同或相反，后者在**对撞机** (collider) 实验中经常遇到。因为在束流迎头对撞时，两股束流中的粒子具有相反的运动方向。当 $v_{\text{Møl}} = v_{\text{rel}}$ 时，散射截面 (5.310) 化为

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|}\left(\prod_{j=1}^{n}\int\frac{\mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}\Big(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{j=1}^{n} p_j\Big)|\mathcal{M}|^2. \tag{5.324}$$

即

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \int \mathrm{d}\Pi_n \, |\mathcal{M}|^2. \tag{5.325}$$

注意，在非相对论极限下，$v_{\mathrm{rel}} = |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$ 确实是 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 的相对速度。但是，对于极端相对论极限下的束流对撞，$|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}| = |\mathbf{v}_{\mathcal{B}}| = 1$ 且 $\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = -\mathbf{v}_{\mathcal{A}}$，故 $v_{\mathrm{rel}} = |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}| = 2$，它是真空光速的 2 倍，显然不是真正意义的相对速度。

对粒子能动量的实验测量是在实验室参考系中进行的。不过，对于多个粒子组成的系统，在质量中心参考系（简称**质心系**，center-of-mass system）中描述粒子运动状态通常要比实验室系容易得多。质心系定义为使系统总动量为零的参考系，满足

$$\mathbf{p}_{\mathcal{A}} + \mathbf{p}_{\mathcal{B}} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{p}_j = \mathbf{0}. \tag{5.326}$$

质心系中系统的总能量称为**质心能** (center-of-mass energy) E_{CM}，满足

$$E_{\mathrm{CM}} = E_{\mathcal{A}} + E_{\mathcal{B}} = \sum_{j=1}^{n} E_j. \tag{5.327}$$

由 $(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}})^2 = (E_{\mathcal{A}} + E_{\mathcal{B}})^2 - (\mathbf{p}_{\mathcal{A}} + \mathbf{p}_{\mathcal{B}})^2 = (E_{\mathcal{A}} + E_{\mathcal{B}})^2 = E_{\mathrm{CM}}^2$ 可知，E_{CM} 是 Lorentz 不变量。

根据狭义相对性原理，物理定律在一切惯性参考系中具有相同的形式。如果某个过程能够在质心系中发生，则在其它惯性系中也能发生。因此，利用质心系可以简便地分析发生某个过程需要满足的运动学条件。在质心系中，当末态粒子动量 $\mathbf{p}_j$ 都为零时，质心能最低，为 $\sum_j m_j$。所以，发生 $2 \to n$ 散射过程的运动学条件是

$$E_{\mathrm{CM}} > \sum_{j=1}^{n} m_j, \tag{5.328}$$

即质心能应当大于末态粒子质量之和。若 $E_{\mathrm{CM}} = \sum_j m_j$，则末态相空间体积为零，散射过程不能发生。可以认为，质心能 E_{CM} 是激发粒子系统内部相互作用的有效能量。

5.5.3 两体散射运动学

接下来讨论 $2 \to 2$ 散射，即 $n = 2$ 的情况，此时末态包含 2 个粒子。在质心系中，有

$$\mathbf{p}_{\mathcal{A}} + \mathbf{p}_{\mathcal{B}} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}, \tag{5.329}$$

因而

$$|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}| = |\mathbf{p}_{\mathcal{B}}|, \quad |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|. \tag{5.330}$$

可见，初态中 $\mathbf{p}_{\mathcal{A}}$ 与 $\mathbf{p}_{\mathcal{B}}$ 大小相等，方向相反，故 $v_{\text{Møl}} = v_{\mathrm{rel}}$；末态中 $\mathbf{p}_1$ 与 $\mathbf{p}_2$ 也是大小相等，方向相反。这些动量在质心系中的关系如图 5.4 所示，其中 θ 是 $\mathbf{p}_1$ 与 $\mathbf{p}_{\mathcal{A}}$ 之间的夹角，称为**散射角** (scattering angle)。质心能满足

$$E_{\mathrm{CM}} = E_{\mathcal{A}} + E_{\mathcal{B}} = E_1 + E_2. \tag{5.331}$$

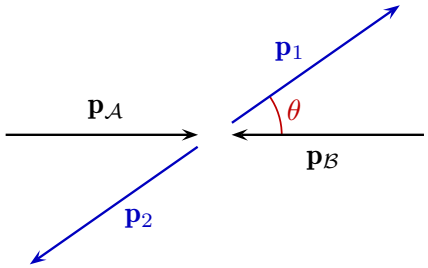


图 5.4: 质心系中 $2 \to 2$ 散射过程的动量示意图。

发生这个过程的运动学条件是

$$E_{\mathrm{CM}} > m_1 + m_2. \tag{5.332}$$

根据 (5.324) 和 (5.312) 式，$2 \to 2$ 散射截面可以写成

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_\mathcal{A}E_\mathcal{B}\,|\mathbf{v}_\mathcal{A} - \mathbf{v}_\mathcal{B}|} \int \mathrm{d}\Pi_2\,|\mathcal{M}|^2. \tag{5.333}$$

计算 2 体不变相空间中的积分，得到

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}\Pi_2 &= \int \frac{\mathrm{d}^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{\mathrm{d}^3p_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\mathcal{A} + p_\mathcal{B} - p_1 - p_2) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p_1}{(2\pi)^2 4E_1E_2} \delta(E_{\mathrm{CM}} - E_1 - E_2) \\
&= \int \mathrm{d}\Omega\, \mathrm{d}|\mathbf{p}_1|\, \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1E_2} \delta\Big(E_{\mathrm{CM}} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}\Big).
\end{aligned} \tag{5.334}$$

第二步结合三维 δ 函数 $\delta^{(3)}(\mathbf{p}_\mathcal{A} + \mathbf{p}_\mathcal{B} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)$ 作出 $\mathbf{p}_2$ 的三维积分。这样积分看起来没有效果，但实际上是要求 $\mathbf{p}_2$ 满足动量守恒条件 $\mathbf{p}_\mathcal{A} + \mathbf{p}_\mathcal{B} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$，因此后续计算中出现的 $\mathbf{p}_2$ 应该满足这个条件，在质心系中则体现为 $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$，故 $E_2 = \sqrt{|\mathbf{p}_2|^2 + m_2^2} = \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}$。第三步建立球坐标系，以 $\mathbf{p}_\mathcal{A}$ 方向为极轴方向，以散射角 θ 为**极角** (polar angle)，将 $\mathbf{p}_1$ 投影在垂直于 $\mathbf{p}_\mathcal{A}$ 的平面上以定义**方位角** (azimuthal angle) ϕ，从而将 $\mathbf{p}_1$ 动量空间的体积元分解为 $\mathrm{d}^3p_1 = |\mathbf{p}_1|^2\,\mathrm{d}|\mathbf{p}_1|\,\mathrm{d}\Omega$，其中立体角的微分

$$\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi. \tag{5.335}$$

θ 的取值范围为 $[0, \pi]$，ϕ 的取值范围为 $[0, 2\pi]$。现在，δ 函数的宗量是关于 $|\mathbf{p}_1|$ 的函数，利用 (2.61) 式，可得作出 $|\mathbf{p}_1|$ 的积分，得到

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}\Pi_2 &= \int \mathrm{d}\Omega\, \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1E_2} \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}|\mathbf{p}_1|} \Big(E_{\mathrm{CM}} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}\Big) \right|^{-1} \\
&= \int \mathrm{d}\Omega\, \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1E_2} \left(\frac{2|\mathbf{p}_1|}{2\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2}} + \frac{2|\mathbf{p}_1|}{2\sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2}} \right)^{-1} \\
&= \int \mathrm{d}\Omega\, \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1E_2} \left[|\mathbf{p}_1| \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \right]^{-1} = \int \mathrm{d}\Omega\, \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{16\pi^2 E_1E_2} \frac{E_1E_2}{|\mathbf{p}_1|(E_1 + E_2)}
\end{aligned}$$

$$= \int \mathrm{d}\Omega \, \frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2 E_{\mathrm{CM}}}. \tag{5.336}$$

将上式代入散射截面表达式 (5.333)，得

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\,|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \int \mathrm{d}\Omega \, \frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2 E_{\mathrm{CM}}} \, |\mathcal{M}|^2. \tag{5.337}$$

于是，质心系中关于立体角的微分散射截面是

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\,|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_{\mathrm{CM}}} \, |\mathcal{M}|^2. \tag{5.338}$$

利用末态粒子在质心系中的动量关系 $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$，得

$$E_{\mathrm{CM}} = E_1 + E_2 = E_1 + \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m_2^2} = E_1 + \sqrt{E_1^2 - m_1^2 + m_2^2}\,, \tag{5.339}$$

故

$$E_1^2 - m_1^2 + m_2^2 = (E_{\mathrm{CM}} - E_1)^2 = E_{\mathrm{CM}}^2 - 2E_{\mathrm{CM}}E_1 + E_1^2, \tag{5.340}$$

即

$$2E_{\mathrm{CM}}E_1 = E_{\mathrm{CM}}^2 + m_1^2 - m_2^2, \tag{5.341}$$

从而 E_1 表示为

$$E_1 = \frac{1}{2E_{\mathrm{CM}}} (E_{\mathrm{CM}}^2 + m_1^2 - m_2^2). \tag{5.342}$$

同理，E_2 表示为

$$E_2 = \frac{1}{2E_{\mathrm{CM}}} (E_{\mathrm{CM}}^2 + m_2^2 - m_1^2). \tag{5.343}$$

根据质壳条件，有

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}_1|^2 &= E_1^2 - m_1^2 = \frac{1}{4E_{\mathrm{CM}}^2} (E_{\mathrm{CM}}^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 - m_1^2 \\ &= \frac{1}{4E_{\mathrm{CM}}^2} [E_{\mathrm{CM}}^4 + m_1^4 + m_2^4 + 2E_{\mathrm{CM}}^2 m_1^2 - 2E_{\mathrm{CM}}^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_2^2 - 4E_{\mathrm{CM}}^2 m_1^2] \\ &= \frac{1}{4E_{\mathrm{CM}}^2} (E_{\mathrm{CM}}^4 + m_1^4 + m_2^4 - 2E_{\mathrm{CM}}^2 m_1^2 - 2E_{\mathrm{CM}}^2 m_2^2 - 4m_1^2 m_2^2) \\ &= \frac{1}{4E_{\mathrm{CM}}^2} \lambda(E_{\mathrm{CM}}^2, m_1^2, m_2^2). \end{aligned} \tag{5.344}$$

其中，λ 函数定义为

$$\lambda(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz, \tag{5.345}$$

它关于 x, y, z 对称。可见，末态粒子的动量满足

$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \frac{1}{2E_{\mathrm{CM}}} \lambda^{1/2}(E_{\mathrm{CM}}^2, m_1^2, m_2^2) = \frac{E_{\mathrm{CM}}}{2} \lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_1^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}, \frac{m_2^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right). \tag{5.346}$$

于是，(5.338) 式可以改写成

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{CM}}=\frac{1}{128\pi^2E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\left|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}-\mathbf{v}_{\mathcal{B}}\right|}\lambda^{1/2}\left(1,\frac{m_1^2}{E_{\mathrm{CM}}^2},\frac{m_2^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right)|\mathcal{M}|^2. \tag{5.347}$$

将类似分析应用到初态上，同理得质心系中初态粒子能量为

$$E_{\mathcal{A}}=\frac{1}{2E_{\mathrm{CM}}}(E_{\mathrm{CM}}^2+m_{\mathcal{A}}^2-m_{\mathcal{B}}^2),\quad E_{\mathcal{B}}=\frac{1}{2E_{\mathrm{CM}}}(E_{\mathrm{CM}}^2+m_{\mathcal{B}}^2-m_{\mathcal{A}}^2), \tag{5.348}$$

动量大小为

$$|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}|=|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}|=\frac{E_{\mathrm{CM}}}{2}\lambda^{1/2}\left(1,\frac{m_{\mathcal{A}}^2}{E_{\mathrm{CM}}^2},\frac{m_{\mathcal{B}}^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right). \tag{5.349}$$

下面讨论一些特殊情况。

(1) 如果散射过程关于对撞轴 ($\mathbf{p}_{\mathcal{A}}$ 对应的直线) 对称，则不变振幅 $\mathcal{M}$ 与 ϕ 无关，只是 θ 的函数，从而

$$\int\mathrm{d}\Omega\,|\mathcal{M}(\theta)|^2=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\,\sin\theta\,|\mathcal{M}(\theta)|^2=2\pi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\,\sin\theta\,|\mathcal{M}(\theta)|^2. \tag{5.350}$$

此时散射截面为

$$\sigma=\frac{1}{\mathcal{S}}\int\mathrm{d}\Omega\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{CM}}=\frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{64\pi E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}\left|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}-\mathbf{v}_{\mathcal{B}}\right|}\lambda^{1/2}\left(1,\frac{m_1^2}{E_{\mathrm{CM}}^2},\frac{m_2^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right)\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\,\sin\theta\,|\mathcal{M}(\theta)|^2. \tag{5.351}$$

(2) 如果初态 2 个粒子的质量相同，$m_{\mathcal{A}}=m_{\mathcal{B}}=m_i$，末态 2 个粒子的质量也相同，$m_1=m_2=m_f$，则 (5.342)、(5.343) 和 (5.348) 式意味着

$$E_{\mathcal{A}}=E_{\mathcal{B}}=E_1=E_2=\frac{E_{\mathrm{CM}}}{2}, \tag{5.352}$$

即初态两个粒子平分质心能，末态两个粒子也平分质心能。此时，如果末态 2 个粒子是全同的，那么末态对称性因子 $\mathcal{S}=2$，否则 $\mathcal{S}=1$。另一方面，由

$$\lambda(x,y,y)=x^2+2y^2-4xy-2y^2=x(x-4y) \tag{5.353}$$

得

$$\lambda^{1/2}\left(1,\frac{m^2}{E_{\mathrm{CM}}^2},\frac{m^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right)=\sqrt{1-\frac{4m^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}}, \tag{5.354}$$

故初末态动量大小为

$$|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}|=|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}|=\frac{E_{\mathrm{CM}}\beta_i}{2},\quad |\mathbf{p}_1|=|\mathbf{p}_2|=\frac{E_{\mathrm{CM}}\beta_f}{2}, \tag{5.355}$$

其中

$$\beta_i\equiv\sqrt{1-\frac{4m_i^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}}=\frac{|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}|}{E_{\mathcal{A}}}=\frac{|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}|}{E_{\mathcal{B}}},\quad \beta_f\equiv\sqrt{1-\frac{4m_f^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}}=\frac{|\mathbf{p}_1|}{E_1}=\frac{|\mathbf{p}_2|}{E_2}. \tag{5.356}$$

根据狭义相对论中运动速度的定义，β_i 是任一初态粒子在质心系中的运动速率，而 β_f 是任一末态粒子的运动速率。从而，由 $\mathbf{p}_\mathcal{B} = -\mathbf{p}_\mathcal{A}$ 得

$$|\mathbf{v}_\mathcal{A} - \mathbf{v}_\mathcal{B}| = \left|\frac{\mathbf{p}_\mathcal{A}}{E_\mathcal{A}} - \frac{\mathbf{p}_\mathcal{B}}{E_\mathcal{B}}\right| = \frac{2|\mathbf{p}_\mathcal{A}|}{E_\mathcal{A}} = 2\beta_i, \tag{5.357}$$

入射流因子变成

$$E_\mathcal{A}E_\mathcal{B}|\mathbf{v}_\mathcal{A} - \mathbf{v}_\mathcal{B}| = \frac{E_{\mathrm{CM}}^2\beta_i}{2}. \tag{5.358}$$

于是，(5.347) 式化为

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{CM}} = \frac{\beta_f|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2E_{\mathrm{CM}}^2\beta_i}. \tag{5.359}$$

(3) 如果初末态 4 个粒子的质量相同，$m_\mathcal{A} = m_\mathcal{B} = m_1 = m_2$，则 $\beta_i = \beta_f$，有

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{CM}} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2E_{\mathrm{CM}}^2}. \tag{5.360}$$

5.5.4 衰变宽度

即使没有与其它粒子散射，一个粒子也不一定是稳定的。不稳定粒子 $\mathcal{A}$ 自身可以通过相互作用**衰变** (decay) 成其它粒子。假设 t 时刻有 $N(t)$ 个静止的 $\mathcal{A}$ 粒子，每个 $\mathcal{A}$ 粒子在单位时间内发生衰变的概率是 Γ，那么 $t + \mathrm{d}t$ 时刻衰变引起的 $\mathcal{A}$ 粒子数量变化为 $\mathrm{d}N = -\Gamma N\mathrm{d}t$。以此求得

$$N(t) = N(0)\exp(-\Gamma t), \tag{5.361}$$

即 $\mathcal{A}$ 粒子数量随时间按指数规律下降。

于是，一个静止的 $\mathcal{A}$ 粒子在衰变之前存活的时间 t 服从指数分布，概率密度为

$$P(t) = \Gamma\exp(-\Gamma t) = \frac{1}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \tag{5.362}$$

其中

$$\tau \equiv \frac{1}{\Gamma} \tag{5.363}$$

称为粒子的**寿命** (lifetime)。由 t 的期待值

$$\langle t\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^\infty t\mathrm{e}^{-t/\tau}\mathrm{d}t = -\int_0^\infty t\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-t/\tau} = -t\mathrm{e}^{-t/\tau}\big|_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t/\tau}\mathrm{d}t = -\tau\mathrm{e}^{-t/\tau}\big|_0^\infty = \tau \tag{5.364}$$

可知，寿命是粒子存活的平均时间。在自然单位制中，Γ 具有质量的量纲，称为**衰变宽度** (decay width)，简称**宽度**。

$\mathcal{A}$ 粒子可能有多种衰变过程。在一次衰变中，某个衰变过程 $i \to f$ 发生的概率称为此过程的**分支比** (branching ratio)，记作 B_f。衰变过程 $i \to f$ 的**分宽度** (partial decay width) 定义为

$$\Gamma_f = \Gamma B_f, \tag{5.365}$$

它是 $\mathcal{A}$ 粒子静止系中衰变过程 $i \to f$ 在单位时间内发生的概率。所有衰变过程的分支比之和应该是归一的，故

$$\sum_f B_f = \frac{1}{\Gamma}\sum_f \Gamma_f = 1, \quad \Gamma = \sum_f \Gamma_f. \tag{5.366}$$

总宽度 Γ 是所有分宽度之和。

我们可以通过跃迁概率计算衰变过程 $i \to f$ 的分宽度。现在，初态 $|i\rangle$ 只包含 1 个粒子 $\mathcal{A}$，末态 $|f\rangle$ 则包含 $n \geq 2$ 个粒子。因此，$|i\rangle$ 的自我内积为

$$\langle i|i\rangle = 2E_{\mathcal{A}}\tilde{V}, \tag{5.367}$$

类似于 (5.287) 式，跃迁概率是

$$P_{fi} = \frac{|\langle f|\,\mathrm{i}T\,|i\rangle|^2}{\langle i|i\rangle\,\langle f|f\rangle} = \frac{\tilde{V}\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} - p_f)|\mathcal{M}|^2}{2E_{\mathcal{A}}\tilde{V}\prod_{j=1}^{n}(2E_jV)} = \frac{\tilde{T}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} - p_f)|\mathcal{M}|^2}{2E_{\mathcal{A}}\prod_{j=1}^{n}(2E_j\tilde{V})}. \tag{5.368}$$

对于一组特定的末态动量 $\{p_j\}$，单位时间内的跃迁概率为

$$R_{\{p_j\}} = \frac{P_{fi}}{\tilde{T}} = \left[2E_{\mathcal{A}}\prod_{j=1}^{n}(2E_j\tilde{V})\right]^{-1}(2\pi)^4\delta^{(4)}\Big(p_{\mathcal{A}} - \sum_{j=1}^{n}p_j\Big)|\mathcal{M}|^2. \tag{5.369}$$

将末态动量的所有取值考虑进来，可得单位时间内衰变过程 $i \to f$ 的发生概率为

$$R_f = \frac{1}{\mathcal{S}}\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{\tilde{V}}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3p_j\right)R_{\{p_j\}} = \frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{2E_{\mathcal{A}}}\left(\prod_{j=1}^{n}\int\frac{\mathrm{d}^3p_j}{(2\pi)^3 2E_j}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}\Big(p_{\mathcal{A}} - \sum_{j=1}^{n}p_j\Big)|\mathcal{M}|^2, \tag{5.370}$$

其中 $\mathcal{S}$ 是末态对称性因子。在 $\mathcal{A}$ 粒子静止系中，$E_{\mathcal{A}} = m_{\mathcal{A}}$，而 R_f 的值就是分宽度 Γ_f，故

$$\Gamma_f = \frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{2m_{\mathcal{A}}}\left(\prod_{j=1}^{n}\int\frac{\mathrm{d}^3p_j}{(2\pi)^3 2E_j}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}\Big(p_{\mathcal{A}} - \sum_{j=1}^{n}p_j\Big)|\mathcal{M}|^2. \tag{5.371}$$

若 $\mathcal{A}$ 粒子是标量粒子，自旋为 0，则 $\mathcal{A}$ 粒子静止系没有特殊的方向，于是，任何一个末态粒子在动量方向上呈球对称分布。若 $\mathcal{A}$ 粒子具有非零自旋，则自旋方向是 $\mathcal{A}$ 粒子静止系的特殊方向，于是，末态粒子在动量方向上呈轴对称分布，以 $\mathcal{A}$ 粒子自旋方向为轴；在实际情况中，初态中 $\mathcal{A}$ 粒子自旋的取向往往是不确定的，但它取不同方向的概率相同，那么，我们可以对 $\mathcal{A}$ 粒子的自旋方向取平均，从而末态粒子在动量方向上也呈球对称分布。

由于 $\mathcal{A}$ 粒子的静止系就是末态粒子的质心系，有 $E_{\mathrm{CM}} = m_{\mathcal{A}}$。因此，类似于 (5.328) 式，发生衰变的运动学条件是

$$m_{\mathcal{A}} > \sum_{j=1}^{n} m_j, \tag{5.372}$$

即 $\mathcal{A}$ 粒子只能向质量之和小于 $m_{\mathcal{A}}$ 的其它粒子衰变。

5.5.5　衰变运动学

下面分别讨论两体和三体衰变的运动学。

(1) 对于两体衰变，$n=2$。在 $\mathcal{A}$ 粒子的静止系中，由于 $E_{\rm CM}=m_{\mathcal{A}}$，(5.342) 和 (5.343) 式化为

$$E_1=\frac{1}{2m_{\mathcal{A}}}(m_{\mathcal{A}}^2+m_1^2-m_2^2),\quad E_2=\frac{1}{2m_{\mathcal{A}}}(m_{\mathcal{A}}^2+m_2^2-m_1^2). \tag{5.373}$$

而 (5.346) 式化为

$$|\mathbf{p}_1|=|\mathbf{p}_2|=\frac{m_{\mathcal{A}}}{2}\lambda^{1/2}\left(1,\frac{m_1^2}{m_{\mathcal{A}}^2},\frac{m_2^2}{m_{\mathcal{A}}^2}\right). \tag{5.374}$$

2 体不变相空间 (5.336) 变成

$$\int \mathrm{d}\Pi_2=\int \mathrm{d}\Omega\,\frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2 m_{\mathcal{A}}}. \tag{5.375}$$

此处 $\mathrm{d}\Omega=\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$，而 θ 和 ϕ 分别是 $\mathbf{p}_1$ 在球坐标系中的极角和方位角。于是，衰变过程 $i\to f$ 的分宽度表达为

$$\begin{aligned}\Gamma_f&=\frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{2m_{\mathcal{A}}}\int \mathrm{d}\Pi_2\,|\mathcal{M}|^2=\frac{1}{\mathcal{S}}\frac{|\mathbf{p}_1|}{32\pi^2 m_{\mathcal{A}}^2}\int \mathrm{d}\Omega\,|\mathcal{M}|^2\\&=\frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{64\pi^2 m_{\mathcal{A}}}\lambda^{1/2}\left(1,\frac{m_1^2}{m_{\mathcal{A}}^2},\frac{m_2^2}{m_{\mathcal{A}}^2}\right)\int \mathrm{d}\Omega\,|\mathcal{M}|^2.\end{aligned} \tag{5.376}$$

如果 $m_1\neq m_2$，则两个末态粒子必定不是全同粒子，而 $\mathcal{S}=1$。

如果 $\mathcal{A}$ 粒子的自旋为 0，或者对它的自旋方向取平均，按照前述讨论，末态粒子在动量方向上呈球对称分布。此时，不变振幅模方 $|\mathcal{M}|^2$ 与 θ、ϕ 无关，对立体角积分只给出一个 4π 因子，故分宽度为

$$\Gamma_f=\frac{1}{\mathcal{S}}\frac{|\mathbf{p}_1|}{8\pi m_{\mathcal{A}}^2}|\mathcal{M}|^2=\frac{1}{\mathcal{S}}\frac{|\mathcal{M}|^2}{16\pi m_{\mathcal{A}}}\lambda^{1/2}\left(1,\frac{m_1^2}{m_{\mathcal{A}}^2},\frac{m_2^2}{m_{\mathcal{A}}^2}\right). \tag{5.377}$$

进一步，如果末态 2 个粒子质量相同，$m_1=m_2=m$，则由 (5.354) 式得

$$\lambda^{1/2}\left(1,\frac{m_1^2}{m_{\mathcal{A}}^2},\frac{m_2^2}{m_{\mathcal{A}}^2}\right)=\lambda^{1/2}\left(1,\frac{m^2}{m_{\mathcal{A}}^2},\frac{m^2}{m_{\mathcal{A}}^2}\right)=\sqrt{1-\frac{4m^2}{m_{\mathcal{A}}^2}}. \tag{5.378}$$

从而，分宽度化为

$$\Gamma_f=\frac{1}{\mathcal{S}}\frac{|\mathcal{M}|^2}{16\pi m_{\mathcal{A}}}\sqrt{1-\frac{4m^2}{m_{\mathcal{A}}^2}}. \tag{5.379}$$

如果两个末态粒子是全同粒子，则 $\mathcal{S}=2$。

(2) 对于三体衰变，$n=3$，衰变过程 $i\to f$ 的分宽度表示成

$$\Gamma_f=\frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{2m_{\mathcal{A}}}\int \mathrm{d}\Pi_3\,|\mathcal{M}|^2, \tag{5.380}$$

其中，3 体不变相空间为

$$\int \mathrm{d}\Pi_3=\int \frac{\mathrm{d}^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1}\frac{\mathrm{d}^3p_2}{(2\pi)^3 2E_2}\frac{\mathrm{d}^3p_3}{(2\pi)^3 2E_3}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}}-p_1-p_2-p_3). \tag{5.381}$$

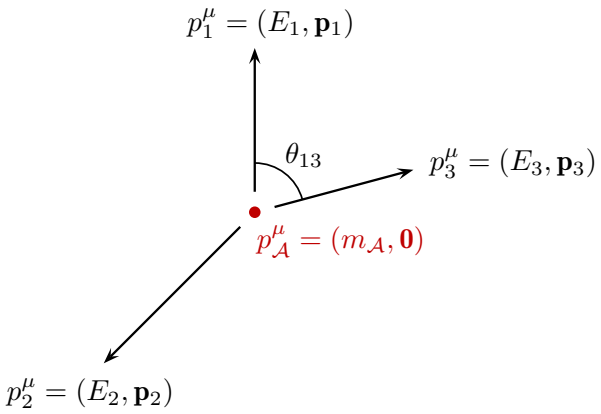


图 5.5: $\mathcal{A}$ 粒子静止系中三体衰变过程的动量示意图。

这里，我们只在 $\mathcal{A}$ 粒子的静止系中讨论它没有自旋或者对它的自旋方向取平均的情况，如前所述，此时末态粒子在动量方向上呈球对称分布，不变振幅模方 $|\mathcal{M}|^2$ 与末态粒子的运动方向无关。根据动量守恒定律，$\mathbf{0} = \mathbf{p}_{\mathcal{A}} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3$，即末态 3 个粒子的三维动量之和为零，因而这 3 个三维动量矢量处在同一个平面内，如图 5.5 所示。对于确定的 $\mathbf{p}_1$ 和 $\mathbf{p}_3$，第 2 个粒子的三维动量 $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3$ 由动量守恒定律决定。对 $\mathbf{p}_2$ 积分，可消去代表动量守恒定律的 $\delta^{(3)}(\mathbf{p}_{\mathcal{A}} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3)$，得到

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}\Pi_3 &= \frac{1}{8(2\pi)^5} \int \frac{\mathrm{d}^3 p_1\, \mathrm{d}^3 p_3}{E_1 E_2 E_3}\, \delta(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3) \\ &= \frac{1}{8(2\pi)^5} \int \mathrm{d}\Omega_1\, \mathrm{d}|\mathbf{p}_1|\, \mathrm{d}\Omega_3\, \mathrm{d}|\mathbf{p}_3|\, \frac{|\mathbf{p}_1|^2 |\mathbf{p}_3|^2}{E_1 E_2 E_3}\, \delta(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3). \end{aligned} \tag{5.382}$$

其中，Ω_1 和 Ω_3 分别是 $\mathbf{p}_1$ 和 $\mathbf{p}_3$ 对应的立体角。

对粒子 1 的质壳条件 $|\mathbf{p}_1|^2 + m_1^2 = E_1^2$ 两边求微分，得 $2|\mathbf{p}_1|\mathrm{d}|\mathbf{p}_1| = 2E_1 \mathrm{d}E_1$，对粒子 3 也可以得到类似的式子，故

$$|\mathbf{p}_1|\mathrm{d}|\mathbf{p}_1| = E_1 \mathrm{d}E_1, \quad |\mathbf{p}_3|\mathrm{d}|\mathbf{p}_3| = E_3 \mathrm{d}E_3. \tag{5.383}$$

从而，

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}\Pi_3 &= \frac{1}{8(2\pi)^5} \int \mathrm{d}\Omega_1\, \mathrm{d}\Omega_3\, \mathrm{d}E_1\, \mathrm{d}E_3\, \frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2}\, \delta(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3) \\ &= \frac{1}{4(2\pi)^4} \int \mathrm{d}\Omega_3\, \mathrm{d}E_1\, \mathrm{d}E_3\, \frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2}\, \delta(m_{\mathcal{A}} - E_1 - E_2 - E_3). \end{aligned} \tag{5.384}$$

第二步对 Ω_1 作了积分，由于粒子 1 在动量方向上呈球对称分布，此积分只给出一个 4π 因子。

将 $\mathbf{p}_1$ 与 $\mathbf{p}_3$ 方向之间的夹角记为 θ_{13}，则粒子 3 的立体角微分表示为

$$\mathrm{d}\Omega_3 = \sin\theta_{13}\, \mathrm{d}\theta_{13}\, \mathrm{d}\phi_3 = \mathrm{d}\cos\theta_{13}\, \mathrm{d}\phi_3, \tag{5.385}$$

其中 ϕ_3 是粒子 3 的方位角。这样的话，对 Ω_3 积分不是平庸的，这是因为 E_2 依赖于 $\cos\theta_{13}$，

$$E_2 = \sqrt{m_2^2 + |\mathbf{p}_2|^2} = \sqrt{m_2^2 + |\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3|^2} = \sqrt{m_2^2 + |\mathbf{p}_1|^2 + |\mathbf{p}_3|^2 + 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|\cos\theta_{13}}\,, \tag{5.386}$$

导致 $\delta(m_{\mathcal{A}}-E_1-E_2-E_3)$ 也依赖于 $\cos\theta_{13}$。由

$$\frac{\partial E_2}{\partial\cos\theta_{13}}=\frac{2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{2\sqrt{m_2^2+|\mathbf{p}_1|^2+|\mathbf{p}_3|^2+2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|\cos\theta_{13}}}=\frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2} \tag{5.387}$$

有

$$\left|\frac{\partial(m_{\mathcal{A}}-E_1-E_2-E_3)}{\partial\cos\theta_{13}}\right|=\frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2}. \tag{5.388}$$

再利用 (2.61) 式，作出关于 Ω_3 的积分，得

$$\begin{aligned}\int\mathrm{d}\Pi_3&=\frac{1}{4(2\pi)^4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi_3\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\cos\theta_{13}\int\mathrm{d}E_1\,\mathrm{d}E_3\,\frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2}\,\delta(m_{\mathcal{A}}-E_1-E_2-E_3)\\&=\frac{1}{4(2\pi)^4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi_3\int\mathrm{d}E_1\,\mathrm{d}E_3\,\frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}{E_2}\left|\frac{\partial(m_{\mathcal{A}}-E_1-E_2-E_3)}{\partial\cos\theta_{13}}\right|^{-1}\\&=\frac{1}{4(2\pi)^3}\int\mathrm{d}E_1\,\mathrm{d}E_3.\end{aligned} \tag{5.389}$$

从而，分宽度 (5.380) 化为

$$\Gamma_f=\frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{8m_{\mathcal{A}}}\int_{E_1^{\min}}^{E_1^{\max}}\mathrm{d}E_1\int_{E_3^{\min}}^{E_3^{\max}}\mathrm{d}E_3\,|\mathcal{M}(E_1,E_3)|^2. \tag{5.390}$$

注意，使用上式计算时需要把不变振幅 $\mathcal{M}$ 表达为 E_1 和 E_3 的函数，而且要仔细考虑 E_1 和 E_3 的积分上下限。

在实践中，把 E_1 和 E_3 当作积分变量并不方便，我们可以将它们替换成更加便利的变量。引入两个 Lorentz 不变量

$$s_{12}\equiv(p_1+p_2)^2=(p_{\mathcal{A}}-p_3)^2=m_{\mathcal{A}}^2+m_3^2-2m_{\mathcal{A}}E_3, \tag{5.391}$$

$$s_{23}\equiv(p_2+p_3)^2=(p_{\mathcal{A}}-p_1)^2=m_{\mathcal{A}}^2+m_1^2-2m_{\mathcal{A}}E_1, \tag{5.392}$$

它们在不同参考系中分别具有相同的值。我们可以把粒子 1 和 2 组成的系统看成一个等效粒子，四维动量为 $p_{12}^\mu=p_1^\mu+p_2^\mu$。由于 $p_{12}^2=(p_1+p_2)^2=s_{12}$，$\sqrt{s_{12}}$ 相当于这个等效粒子的质量，称为粒子 1 和 2 的**不变质量** (invariant mass)，它也是粒子 1 和 2 的质心能。类似地，$\sqrt{s_{23}}$ 是粒子 2 和 3 的不变质量。s_{12} 和 s_{23} 的微分分别正比于 E_3 和 E_1 的微分，

$$\mathrm{d}s_{12}=-2m_{\mathcal{A}}\mathrm{d}E_3,\quad \mathrm{d}s_{23}=-2m_{\mathcal{A}}\mathrm{d}E_1. \tag{5.393}$$

于是将分宽度的积分式 (5.390) 改写为

$$\Gamma_f=\frac{1}{\mathcal{S}}\frac{1}{256\pi^3m_{\mathcal{A}}^3}\int_{s_{12}^{\min}}^{s_{12}^{\max}}\mathrm{d}s_{12}\int_{s_{23}^{\min}}^{s_{23}^{\max}}\mathrm{d}s_{23}\,|\mathcal{M}(s_{12},s_{23})|^2. \tag{5.394}$$

使用上式计算时，需要把不变振幅 $\mathcal{M}$ 表达为 s_{12} 和 s_{23} 的函数。接下来，我们讨论 s_{12} 和 s_{23} 的积分上下限。这里把对 s_{23} 的积分放在内层，积分上下限会依赖于 s_{12}。

在粒子 1 和 2 的质心系中，$\tilde{\mathbf{p}}_1+\tilde{\mathbf{p}}_2=\mathbf{0}$，质心能 $\tilde{E}_{\rm CM}=\sqrt{s_{12}}$。这里我们用波浪线标记此参考系中的物理量。根据 (5.343) 式，粒子 2 的能量为

$$\tilde{E}_2=\frac{1}{2\sqrt{s_{12}}}(s_{12}-m_1^2+m_2^2). \tag{5.395}$$

动量守恒定律给出 $\tilde{\mathbf{p}}_3=\tilde{\mathbf{p}}_{\mathcal{A}}-\tilde{\mathbf{p}}_1-\tilde{\mathbf{p}}_2=\tilde{\mathbf{p}}_{\mathcal{A}}$，由 s_{12} 的 Lorentz 不变性有

$$\begin{aligned}
s_{12} &= (p_1+p_2)^2=(\tilde{p}_1+\tilde{p}_2)^2=(\tilde{p}_{\mathcal{A}}-\tilde{p}_3)^2=\tilde{p}_{\mathcal{A}}^2+\tilde{p}_3^2-2\,\tilde{p}_{\mathcal{A}}\cdot\tilde{p}_3\\
&= m_{\mathcal{A}}^2+m_3^2-2\tilde{E}_{\mathcal{A}}\tilde{E}_3+2\,\tilde{\mathbf{p}}_{\mathcal{A}}\cdot\tilde{\mathbf{p}}_3=m_{\mathcal{A}}^2+m_3^2-2\sqrt{|\tilde{\mathbf{p}}_3|^2+m_{\mathcal{A}}^2}\,\tilde{E}_3+2|\tilde{\mathbf{p}}_3|^2\\
&= m_{\mathcal{A}}^2+m_3^2-2\sqrt{\tilde{E}_3^2-m_3^2+m_{\mathcal{A}}^2}\,\tilde{E}_3+2\tilde{E}_3^2-2m_3^2\\
&= m_{\mathcal{A}}^2-2\sqrt{\tilde{E}_3^2-m_3^2+m_{\mathcal{A}}^2}\,\tilde{E}_3+2\tilde{E}_3^2-m_3^2.
\end{aligned} \tag{5.396}$$

整理得 $2\sqrt{\tilde{E}_3^2-m_3^2+m_{\mathcal{A}}^2}\,\tilde{E}_3=m_{\mathcal{A}}^2-s_{12}+2\tilde{E}_3^2-m_3^2$，两边平方，推出

$$\begin{aligned}
4(\tilde{E}_3^2-m_3^2+m_{\mathcal{A}}^2)\tilde{E}_3^2 &= (m_{\mathcal{A}}^2-s_{12}+2\tilde{E}_3^2-m_3^2)^2\\
&= (m_{\mathcal{A}}^2-s_{12}-m_3^2)^2+4\tilde{E}_3^4+4(m_{\mathcal{A}}^2-s_{12}-m_3^2)\tilde{E}_3^2.
\end{aligned} \tag{5.397}$$

再整理，得 $4s_{12}\tilde{E}_3^2=(m_{\mathcal{A}}^2-s_{12}-m_3^2)^2$，故粒子 3 的能量为

$$\tilde{E}_3=\frac{1}{2\sqrt{s_{12}}}(m_{\mathcal{A}}^2-s_{12}-m_3^2). \tag{5.398}$$

(5.395) 和 (5.398) 式右边是 Lorentz 不变的，而且，对于确定的 s_{12}，$\tilde{E}_2$ 和 $\tilde{E}_3$ 是确定的。

另一方面，由 s_{23} 的 Lorentz 不变性有

$$s_{23}=(p_2+p_3)^2=(\tilde{p}_2+\tilde{p}_3)^2=(\tilde{E}_2+\tilde{E}_3)^2-|\tilde{\mathbf{p}}_2+\tilde{\mathbf{p}}_3|^2, \tag{5.399}$$

这里，

$$|\tilde{\mathbf{p}}_2+\tilde{\mathbf{p}}_3|^2=|\tilde{\mathbf{p}}_2|^2+|\tilde{\mathbf{p}}_3|^2+2|\tilde{\mathbf{p}}_2||\tilde{\mathbf{p}}_3|\cos\tilde{\theta}_{23}, \tag{5.400}$$

其中 $\tilde{\theta}_{23}$ 是 $\tilde{\mathbf{p}}_2$ 与 $\tilde{\mathbf{p}}_3$ 方向之间的夹角。当 $\cos\tilde{\theta}_{23}=1$ 时，$|\tilde{\mathbf{p}}_2+\tilde{\mathbf{p}}_3|^2=|\tilde{\mathbf{p}}_2|^2+|\tilde{\mathbf{p}}_3|^2+2|\tilde{\mathbf{p}}_2||\tilde{\mathbf{p}}_3|=(|\tilde{\mathbf{p}}_2|^2+|\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2$，而 s_{23} 取得最小值

$$s_{23}^{\rm min}=(\tilde{E}_2+\tilde{E}_3)^2-(|\tilde{\mathbf{p}}_2|^2+|\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2=(\tilde{E}_2+\tilde{E}_3)^2-\left(\sqrt{\tilde{E}_2^2-m_2^2}+\sqrt{\tilde{E}_3^2-m_3^2}\right)^2. \tag{5.401}$$

当 $\cos\tilde{\theta}_{23}=-1$ 时，$|\tilde{\mathbf{p}}_2+\tilde{\mathbf{p}}_3|^2=|\tilde{\mathbf{p}}_2|^2+|\tilde{\mathbf{p}}_3|^2-2|\tilde{\mathbf{p}}_2||\tilde{\mathbf{p}}_3|=(|\tilde{\mathbf{p}}_2|^2-|\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2$，而 s_{23} 取得最大值

$$s_{23}^{\rm max}=(\tilde{E}_2+\tilde{E}_3)^2-(|\tilde{\mathbf{p}}_2|^2-|\tilde{\mathbf{p}}_3|)^2=(\tilde{E}_2+\tilde{E}_3)^2-\left(\sqrt{\tilde{E}_2^2-m_2^2}-\sqrt{\tilde{E}_3^2-m_3^2}\right)^2. \tag{5.402}$$

对于确定的 s_{12}，(5.401) 和 (5.402) 式分别给出 s_{23} 的积分下限和上限。注意，它们是 Lorentz 不变的。

在粒子 1 和 2 的质心系中，

$$s_{12}=(\tilde{p}_1+\tilde{p}_2)^2=(\tilde{E}_1+\tilde{E}_2)^2-|\tilde{\mathbf{p}}_1+\tilde{\mathbf{p}}_2|^2=(\tilde{E}_1+\tilde{E}_2)^2. \tag{5.403}$$

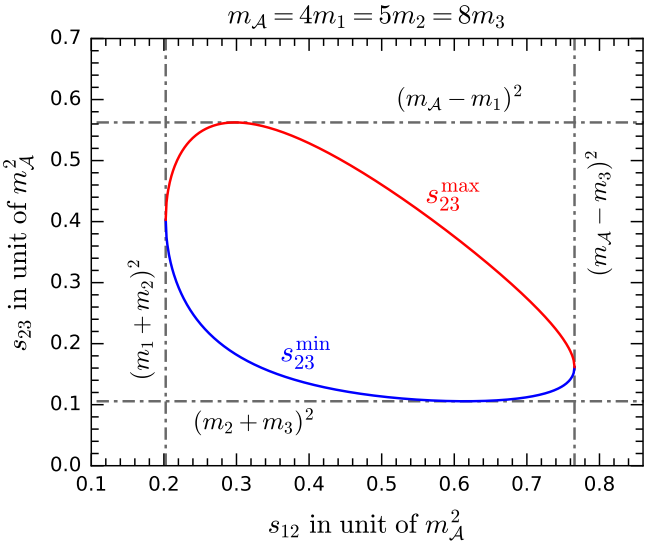


图 5.6: 当 $m_{\mathrm{A}} = 4m_1 = 5m_2 = 8m_3$ 时，三体衰变运动学的积分区域。

可见，当 $\tilde{E}_1 = m_1$ 且 $\tilde{E}_2 = m_2$ 时，s_{12} 取得最小值

$$s_{12}^{\min} = (m_1 + m_2)^2. \tag{5.404}$$

在 $\mathcal{A}$ 粒子的静止系中，根据 (5.391) 式，当 $E_3 = m_3$ 时，s_{12} 取得最大值

$$s_{12}^{\max} = m_{\mathcal{A}}^2 + m_3^2 - 2m_{\mathcal{A}}m_3 = (m_{\mathcal{A}} - m_3)^2. \tag{5.405}$$

注意 s_{12} 的积分下限 (5.404) 和积分上限 (5.405) 也是 Lorentz 不变的。

图 5.6 画出三体衰变运动学的积分区域，设 $m_{\mathcal{A}} = 4m_1 = 5m_2 = 8m_3$。

习　题

5.1 根据有质量实矢量场的平面波展开式 (3.249)，证明

$$[A^\mu(x), A^\nu(y)] = 0, \quad (x-y)^2 < 0. \tag{5.406}$$

5.2 对于 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 和实矢量场 $A^\mu(x)$，根据 Wick 定理写出

$$\mathsf{T}[A^\mu(x)\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\nu(y)\bar{\psi}(y)\gamma_\nu\psi(y)] \tag{5.407}$$

的正规乘积表达式，只需包含非零缩并。

5.3 一个粒子的质量为 m，四维动量为 $p^\mu = (E, p_x, p_y, p_z)$。将 z 轴方向视作纵向，则快度

$$\xi = \tanh^{-1}\frac{p_z}{E} \tag{5.408}$$

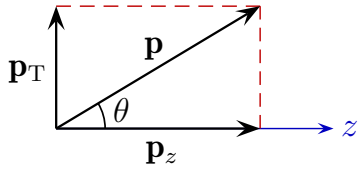


图 5.7: 纵向和横向动量示意图。

对应于沿纵向的 Lorentz 增速变换。定义**赝快度** (pseudorapidity)

$$\eta \equiv -\ln\tan\frac{\theta}{2}, \tag{5.409}$$

其中 θ 是动量 $\mathbf{p}$ 与 z 轴之间的夹角，如图 5.7 所示。横向动量表达为 $\mathbf{p}_\mathrm{T} = (p_x, p_y, 0)$，定义**横向能量**

$$E_\mathrm{T} \equiv \sqrt{m^2 + |\mathbf{p}_\mathrm{T}|^2} = \sqrt{m^2 + p_x^2 + p_y^2}\,. \tag{5.410}$$

(a) 证明 $\eta = \xi$ 对 $m = 0$ 成立。

(b) 证明

$$E = E_\mathrm{T}\cosh\xi, \quad p_z = E_\mathrm{T}\sinh\xi. \tag{5.411}$$

(c) 证明

$$\xi = \ln\frac{E + p_z}{E_\mathrm{T}}, \tag{5.412}$$

且

$$\xi = \frac{1}{2}\ln\frac{E + p_z}{E - p_z}. \tag{5.413}$$

(d) 假设这个粒子衰变为粒子 1 和粒子 2，证明

$$m = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2[E_{1\mathrm{T}}E_{2\mathrm{T}}\cosh(\xi_1 - \xi_2) - \mathbf{p}_{1\mathrm{T}}\cdot\mathbf{p}_{2\mathrm{T}}]}\,, \tag{5.414}$$

其中 m_i、$E_{i\mathrm{T}}$、$\mathbf{p}_{i\mathrm{T}}$ 和 ξ_i 分别是粒子 i 的质量、横向能量、横向动量和快度。

5.4 对于拉氏量 (3.428) 描述的有质量复矢量场 $A^\mu(x)$，推出 Feynman 传播子

$$\overbrace{A^\mu(x)A^{\nu\dagger}}(y) = \langle 0|\,\mathsf{T}[A^\mu(x)A^{\nu\dagger}(y)]\,|0\rangle \tag{5.415}$$

的表达式

$$\overbrace{A^\mu(x)A^{\nu\dagger}}(y) = \int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}(g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu/m^2)}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} - \frac{\mathrm{i}}{m^2}\,g^{\mu0}g^{\nu0}\delta^{(4)}(x-y). \tag{5.416}$$

第 6 章　Feynman 图

上一章告诉我们，为了预言散射截面和衰变宽度这样的实验观测量，需要从理论上计算不变振幅 $\mathrm{i}\mathcal{M}$。因此，根据 (5.271) 式，我们需要计算 S 矩阵的相互作用部分 $\langle f|\,\mathrm{i}T\,|i\rangle$。对于 S 矩阵所涉及的场算符的时序乘积，Wick 定理提供了处理方法。在本章中我们将看到，对微扰论某一阶应用 Wick 定理，能够得到散射振幅的表达式，而且相应的相互作用过程可以用 Feynman 图 (diagram) 表示出来。Feynman 图上的元素具有对应的表达式，这种对应就是 Feynman 规则 (rule)。

将一个相互作用理论的 Feynman 图元素和 Feynman 规则归纳出来之后，我们就可以绕开应用 Wick 定理时出现的繁琐计算，直接画出特定相互作用过程的 Feynman 图，并依照 Feynman 规则写出散射振幅表达式，大大地简化计算过程。

6.1　Yukawa 理论

接下来，我们以实标量场 $\phi(x)$ 和 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的 Yukawa 理论为例进行讨论，相应的拉氏量是 (5.5) 式。在这个理论中，根据 (5.12) 式，相互作用拉氏量 (5.8) 的相反数就是相互作用哈密顿量密度，

$$\mathcal{H}_1(x) = -\mathcal{L}_{\mathrm{Y}}(x) = \kappa\,\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x). \tag{6.1}$$

由 (5.131) 和 (5.269) 式，有

$$S = 1 + \mathrm{i}T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i})^n}{n!} \int \mathrm{d}^4x_1 \cdots \mathrm{d}^4x_n\, \mathsf{T}[\mathcal{H}_1(x_1)\cdots\mathcal{H}_1(x_n)]. \tag{6.2}$$

可见，S 算符的相互作用部分

$$\mathrm{i}T = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{i}T^{(n)}, \tag{6.3}$$

其中

$$\mathrm{i}T^{(n)} \equiv \frac{(-\mathrm{i})^n}{n!} \int \mathrm{d}^4x_1 \cdots \mathrm{d}^4x_n\, \mathsf{T}[\mathcal{H}_1(x_1)\cdots\mathcal{H}_1(x_n)]. \tag{6.4}$$

这是 $\mathrm{i}T$ 在微扰论中的级数展开式，n 是展开式的阶 (order)。将 (6.1) 式代入 (6.4) 式，即得 Yukawa 理论中通项 $\mathrm{i}T^{(n)}$ 的表达式

$$\mathrm{i}T^{(n)} = \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^n}{n!} \int \mathrm{d}^4x_1 \cdots \mathrm{d}^4x_n\, \mathsf{T}[\phi(x_1)\bar{\psi}(x_1)\psi(x_1)\cdots\phi(x_n)\bar{\psi}(x_n)\psi(x_n)]. \tag{6.5}$$

在第 n 阶，$\mathrm{i}T^{(n)}$ 包含一个 $(-\mathrm{i}\kappa)^n$ 因子。当耦合常数 κ 比较小时，计算贡献到相互作用过程的最低阶就能够得到比较精确的结果。

在 $\mathrm{i}T$ 展开式的第 1 阶，即 κ^1 阶，根据 Wick 定理 (5.166)，有

$$\mathrm{i}T^{(1)} = -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\, \mathsf{T}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)] = -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x) + \phi(x)\overbrace{\bar{\psi}(x)}\psi(x)]. \tag{6.6}$$

此处，非平庸的场缩并只有一项，这是因为实标量场 $\phi(x)$ 和 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 具有不同的产生湮灭算符，故

$$\overbrace{\phi(x)\bar{\psi}}(x) = \overbrace{\phi(x)\psi}(x) = 0. \tag{6.7}$$

(5.146) 式表明，对产生湮灭算符的乘积取正规排序之后，真空期待值为零。因此，为了得到非零的散射矩阵元 $\langle f|\,\mathrm{i}T\,|i\rangle$，初态 $|i\rangle$ 和末态 $|f\rangle$ 应当包含适当类型和数量的产生湮灭算符，使它们刚好能够与场算符一一发生缩并。

引入三种具有确定动量和螺旋度的单粒子态，

$$\text{旋量场 } \psi \text{ 的正费米子态 } \big|\mathbf{p}^+,\lambda\big\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\,|0\rangle\,, \tag{6.8}$$

$$\text{旋量场 } \psi \text{ 的反费米子态 } \big|\mathbf{p}^-,\lambda\big\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\,|0\rangle\,, \tag{6.9}$$

$$\text{标量场 } \phi \text{ 的玻色子态 } |\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, c^\dagger_{\mathbf{p}}|0\rangle. \tag{6.10}$$

为避免混淆，此处将 $\phi(x)$ 的产生算符改记为 $c^\dagger_{\mathbf{p}}$。对于正反粒子不同的情况，我们在动量的右上角用正号代表正粒子态，负号代表反粒子态。这些态可以单独作为初态，相应的共轭态可以单独作为末态。对真空态作用多个产生算符，就得到包含多个粒子的初态。比如，

$$\big|\mathbf{p}^+,\lambda;\,\mathbf{q}^-,\lambda';\,\mathbf{k}\big\rangle = \sqrt{8E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}E_{\mathbf{k}}}\, a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'} c^\dagger_{\mathbf{k}}\,|0\rangle \tag{6.11}$$

描述的初态包含 1 个动量为 $\mathbf{p}$、螺旋度为 λ 的 Dirac 正费米子 ψ，1 个动量为 $\mathbf{q}$、螺旋度为 λ' 的 Dirac 反费米子 $\bar{\psi}$，以及 1 个动量为 $\mathbf{k}$ 的实标量玻色子 ϕ。这里，我们用 ψ、$\bar{\psi}$ 和 ϕ 分别作为正费米子、反费米子和实标量玻色子的名称，符号与场的符号相同，但意义不同。另一方面，

$$\big\langle\mathbf{p}^+,\lambda;\,\mathbf{q}^-,\lambda';\,\mathbf{k}\big| = \sqrt{8E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}E_{\mathbf{k}}}\,\langle 0|\, a_{\mathbf{p},\lambda} b_{\mathbf{q},\lambda'} c_{\mathbf{k}} \tag{6.12}$$

描述相应的末态。注意，在上面两个式子中，特意让态矢符号中的动量排列次序与相应产生湮灭算符的排列次序相同，使得下文在表示场算符与初末态缩并方面比较方便。这种约定使末态记法与前面 2.3.4 和 4.5.4 两个小节中关于双粒子态的记法有所不同，对双费米子态实际上相差一个负号，但不会引起物理本质上的差异。

现在，利用 Dirac 旋量场和实标量场的正负能解展开式 (5.140)、(5.141)、(5.254)、(5.255)、(5.134) 和 (5.135)，我们讨论场算符与初末态的**非零缩并**。在正规乘积中，场算符的正能解部分位于右边，靠近初态，我们将 $\psi(x)$ 与正费米子初态的缩并定义为

$$\overbrace{\psi_a(x)\,\big|}\mathbf{p}^+,\lambda\big\rangle \equiv \psi^{(+)}_a(x)\,\big|\mathbf{p}^+,\lambda\big\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm} u_a(\mathbf{q},\lambda') a_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} |0\rangle \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm} u_a(\mathbf{q},\lambda') \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} \{a_{\mathbf{q},\lambda'}, a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\} |0\rangle \\
&= \int \mathrm{d}^3 q \frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm} u_a(\mathbf{q},\lambda') \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} \delta_{\lambda'\lambda} \delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) |0\rangle = u_a(\mathbf{p},\lambda) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} |0\rangle . \qquad (6.13)
\end{aligned}
$$

第四步用到产生湮灭算符的反对易关系 (4.249)。类似地，$\bar{\psi}(x)$ 与反费米子初态的缩并定义为

$$
\begin{aligned}
\overbrace{\bar{\psi}_a(x) |\mathbf{p}^-,\lambda\rangle} &\equiv \bar{\psi}^{(+)}_a(x) |\mathbf{p}^-,\lambda\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm} \bar{v}_a(\mathbf{q},\lambda') b_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} |0\rangle \\
&= \bar{v}_a(\mathbf{p},\lambda) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} |0\rangle . \qquad (6.14)
\end{aligned}
$$

此外，$\phi(x)$ 与实标量玻色子初态的缩并定义为

$$
\begin{aligned}
\overbrace{\phi(x) |\mathbf{p}\rangle} &\equiv \phi^{(+)}(x) |\mathbf{p}\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} c_{\mathbf{q}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, c^\dagger_{\mathbf{p}} |0\rangle \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} [c_{\mathbf{q}}, c^\dagger_{\mathbf{p}}] |0\rangle = \int \mathrm{d}^3 q \frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} \delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) |0\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} |0\rangle . \qquad (6.15)
\end{aligned}
$$

第四步用到产生湮灭算符的对易关系 (2.120)。这三种缩并均包含一个来自正能解的 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}$ 因子。

另一方面，正规乘积中场算符的负能解部分位于左边，靠近末态，我们将 $\bar{\psi}(x)$ 与正费米子末态的缩并定义为

$$
\begin{aligned}
\overbrace{\langle \mathbf{p}^+,\lambda| \bar{\psi}_a(x)} &\equiv \langle \mathbf{p}^+,\lambda| \bar{\psi}^{(-)}_a(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \langle 0| \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, a_{\mathbf{p},\lambda} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm} \bar{u}_a(\mathbf{q},\lambda') a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm} \bar{u}_a(\mathbf{q},\lambda') \langle 0| \{a_{\mathbf{p},\lambda}, a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\} \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x} = \langle 0| \bar{u}_a(\mathbf{p},\lambda) \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}. \qquad (6.16)
\end{aligned}
$$

$\psi(x)$ 与反费米子末态的缩并定义为

$$
\begin{aligned}
\overbrace{\langle \mathbf{p}^-,\lambda| \psi_a(x)} &\equiv \langle \mathbf{p}^-,\lambda| \psi^{(-)}_a(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \langle 0| \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, b_{\mathbf{p},\lambda} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} \sum_{\lambda'=\pm} v_a(\mathbf{q},\lambda') b^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x} \\
&= \langle 0| v_a(\mathbf{p},\lambda) \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}. \qquad (6.17)
\end{aligned}
$$

$\phi(x)$ 与实标量玻色子末态的缩并定义为

$$
\begin{aligned}
\overbrace{\langle \mathbf{p}| \phi(x)} &\equiv \langle \mathbf{p}| \phi^{(-)}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \langle 0| \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, c_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} c^\dagger_{\mathbf{q}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x} \langle 0| [c_{\mathbf{p}}, c^\dagger_{\mathbf{q}}] = \int \mathrm{d}^3 q \frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x} \langle 0| \delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = \langle 0| \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}. \qquad (6.18)
\end{aligned}
$$

这三种缩并均包含一个来自负能解的 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}$ 因子。

6.1.1 κ^1 阶 Feynman 图

根据 (6.6) 式，可以将 $\mathrm{i}T^{(1)}$ 分为两项，$\mathrm{i}T_1^{(1)} = \mathrm{i}T_1^{(1)} + \mathrm{i}T_2^{(1)}$，这两项分别是

$$\mathrm{i}T_1^{(1)} \equiv -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)], \tag{6.19}$$

$$\mathrm{i}T_2^{(1)} \equiv -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\, \mathsf{N}[\phi(x)\overbrace{\bar{\psi}(x)\psi(x)}]. \tag{6.20}$$

我们先来讨论 $\mathrm{i}T_1^{(1)}$。要得到非平庸的散射矩阵元 $\langle f|\,\mathrm{i}T_1^{(1)}\,|i\rangle$，初态和末态中需要包含 3 个粒子，可列出 8 种情况。

第 1 种情况中，考虑初态包含 1 对正反费米子和 1 个实标量玻色子，$|i\rangle = |\mathbf{p}^+, \lambda;\, \mathbf{q}^-, \lambda';\, \mathbf{k}\rangle$，末态是真空态，$\langle f| = \langle 0|$，相应的散射矩阵元为

$$\begin{aligned}
\langle 0|\,\mathrm{i}T_1^{(1)}\,\big|\mathbf{p}^+, \lambda;\, \mathbf{q}^-, \lambda';\, \mathbf{k}\big\rangle &= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\, \langle 0|\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)]\,\big|\mathbf{p}^+, \lambda;\, \mathbf{q}^-, \lambda';\, \mathbf{k}\big\rangle \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\, \langle 0|\,\phi^{(+)}(x)\bar{\psi}_a^{(+)}(x)\psi_a^{(+)}(x)\,\big|\mathbf{p}^+, \lambda;\, \mathbf{q}^-, \lambda';\, \mathbf{k}\big\rangle \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\, \langle 0|\,\mathsf{N}[\overbrace{\phi(x)\bar{\psi}_a(x)}\overbrace{\psi_a(x)}]\,\big|\mathbf{p}^+, \lambda;\, \mathbf{q}^-, \lambda';\, \mathbf{k}\big\rangle \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\, \langle 0|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}\bar{v}_a(\mathbf{q}, \lambda')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}u_a(\mathbf{p}, \lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\,|0\rangle \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\, \bar{v}(\mathbf{q}, \lambda')u(\mathbf{p}, \lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+q+k)\cdot x}\,\langle 0|0\rangle \\
&= -\mathrm{i}\kappa\, \bar{v}(\mathbf{q}, \lambda')u(\mathbf{p}, \lambda)\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(p+q+k).
\end{aligned} \tag{6.21}$$

第二步将场算符分解为正能解和负能解部分，本来应该有 8 项，但只有 1 项贡献非零。第三步用到场算符与初态缩并的定义。最后一步用到 $\langle 0|0\rangle = 1$ 以及 Fourier 变换公式 (5.275)，对 x 积分，得出一个体现初末态能动量守恒的四维 δ 函数。此处，对时空坐标积分意味着将所有时空点的贡献叠加起来。这个结果符合 (5.271) 式的形式，可见，相应的不变振幅为

$$\mathrm{i}\mathcal{M} = -\mathrm{i}\kappa\, \bar{v}(\mathbf{q}, \lambda')u(\mathbf{p}, \lambda). \tag{6.22}$$

图 6.1(a) 用图形表示这个过程，时间方向自左向右。这种图形化表示称为 **Feynman 图**。在 Feynman 图中，我们用**虚线**表示实标量玻色子的运动，**带箭头的实线**表示 Dirac 费米子的运动。图上用箭头标明三个粒子的四维动量 p^μ、q^μ 和 k^μ 的方向；这只是示意性的，不用精确对应于三维空间中三维动量的实际方向；此外，可以认为这些四维动量的相反数 $-p^\mu$、$-q^\mu$ 和 $-k^\mu$ 的方向与图上方向相反。

费米子线上的**箭头**代表费米子线的方向，可以认为这是某种 U(1) 荷（比如电荷）流动的方向，或者说**费米子数** (fermion number) 流动的方向。一条连续费米子线只有一个方向，它与正费米子的运动方向相同，而与反费米子的运动方向相反。因此，正费米子的动量方向与费米子线上的箭头方向相同，反费米子则相反。实标量场 $\phi(x)$ 描述的玻色子是自身的反粒子，不具有任何 U(1) 荷，因而不需要在线上标注箭头，即纯中性粒子的线上没有箭头。反过来，凡是正反粒

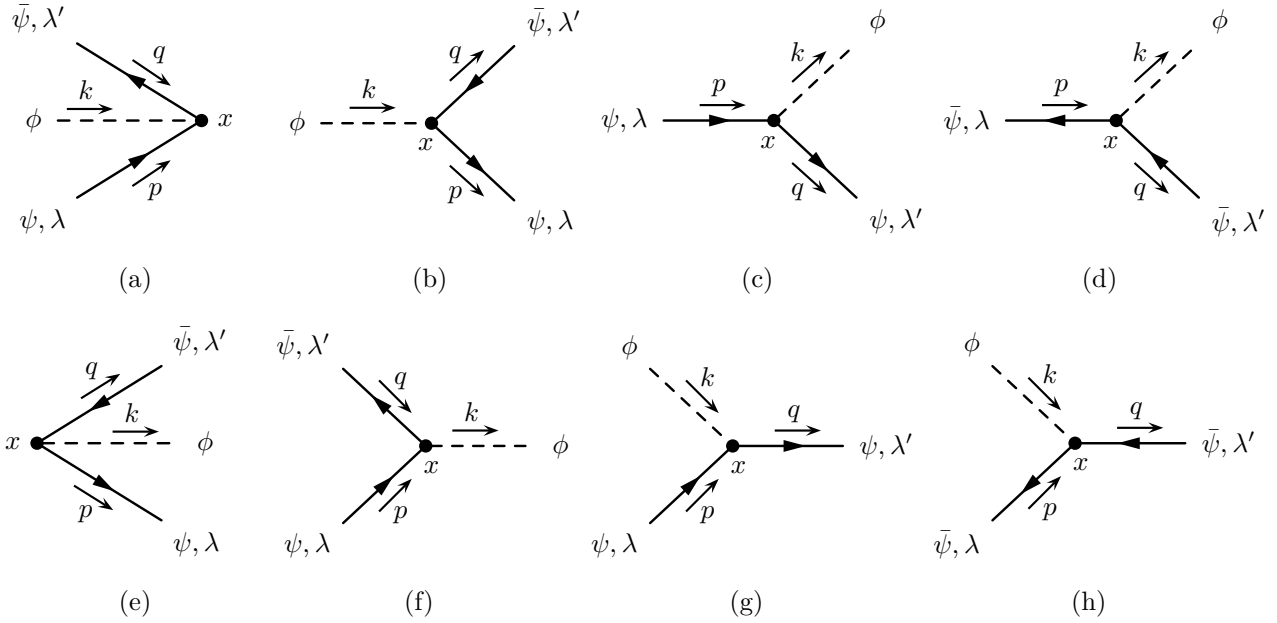


图 6.1: $\mathrm{i}T_1^{(1)}$ 贡献的 8 种三外线 Feynman 图。时间方向自左向右。

子不一样的情况，都应当在粒子线上标注箭头。三条粒子线相交代表相互作用的发生，称为**顶点** (vertex)。从顶点到初末态粒子的连线称为**外线** (external line)，也称为外腿 (external leg)。图 6.1(a) 包含 1 个顶点和 3 条外线。

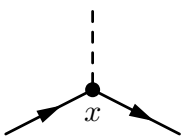
可以看到，Feynman 图清晰地体现了运动情况和相互作用过程。此外，还可以让 Feynman 图的每个部分对应于一个代数表达式，将这些表达式拼接起来，就得到散射矩阵元 $\langle f|\,\mathrm{i}T\,|i\rangle$ 的表达式。这样的对应过程形成一套 **Feynman 规则**。以图 6.1(a) 为例，根据 (6.21) 式，三条外线分别对应于场算符 $\phi(x)$、$\bar\psi(x)$、$\psi(x)$ 与初态的缩并，从而可以归纳出如下**位置空间**中的入射外线 Feynman 规则，

$$\psi,\lambda \xrightarrow{\ p\ } x \;=\; \langle 0|\,\overbrace{\psi(x)\,|\mathbf{p}^+,\lambda\rangle} \;=\; \langle 0|\,\psi^{(+)}(x)\,|\mathbf{p}^+,\lambda\rangle = u(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{6.23}$$

$$\bar\psi,\lambda \xleftarrow{\ p\ } x \;=\; \langle 0|\,\overbrace{\bar\psi(x)\,|\mathbf{p}^-,\lambda\rangle} \;=\; \langle 0|\,\bar\psi^{(+)}(x)\,|\mathbf{p}^-,\lambda\rangle = \bar v(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{6.24}$$

$$\phi \xrightarrow{\ p\ } x \;=\; \langle 0|\,\overbrace{\phi(x)\,|\mathbf{p}\rangle} \;=\; \langle 0|\,\phi^{(+)}(x)\,|\mathbf{p}\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}. \tag{6.25}$$

由于正费米子动量方向与线上方向相同，我们省略了标明动量方向的箭头；反费米子动量方向与线上方向相反，因而将两个箭头都标示出来。也就是说，**如果没有标明动量的方向，则它与粒子线上的方向相同**。另一方面，位置空间中 Yukawa 相互作用的顶点 Feynman 规则为



$$= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\,. \tag{6.26}$$

现在，我们可以绕过 Wick 定理，直接从图 6.1(a) 出发，根据 Feynman 规则写出散射矩阵元：

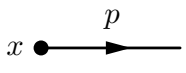
$$\langle 0|\,\mathrm{i}T_1^{(1)}\,\big|\mathbf{p}^+,\lambda;\,\mathbf{q}^-,\lambda';\,\mathbf{k}\big\rangle = -\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\bar{v}(\mathbf{q},\lambda')u(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+q+k)\cdot x} \tag{6.27}$$

在写下费米子的贡献时，应当注意次序，要**逆着费米子线上的方向**逐项写出来，这样得到的是数 $\bar{v}(\mathbf{q},\lambda')u(\mathbf{p},\lambda)$，而非矩阵 $u(\mathbf{p},\lambda)\bar{v}(\mathbf{q},\lambda')$。

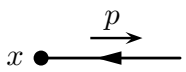
第 2 种情况中，考虑初态是真空态，$|i\rangle = |0\rangle$，末态包含 1 对正反费米子和 1 个实标量玻色子，$\langle f| = \langle \mathbf{p}^+,\lambda;\,\mathbf{q}^-,\lambda';\,\mathbf{k}|$，相应的散射矩阵元为

$$\begin{aligned}
\big\langle \mathbf{p}^+,\lambda;\,\mathbf{q}^-,\lambda';\,\mathbf{k}\big|\,\mathrm{i}T_1^{(1)}\,|0\rangle &= -\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\big\langle \mathbf{p}^+,\lambda;\,\mathbf{q}^-,\lambda';\,\mathbf{k}\big|\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)]\,|0\rangle \\
&= +\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\big\langle \mathbf{p}^+,\lambda;\,\mathbf{q}^-,\lambda';\,\mathbf{k}\big|\,\phi^{(-)}(x)\psi_a^{(-)}(x)\bar{\psi}_a^{(-)}(x)\,|0\rangle \\
&= +\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\langle \overbrace{\mathbf{p}^+,\lambda;\,\mathbf{q}^-,\lambda';\,\mathbf{k}\big|\,\mathsf{N}[\phi(x)\psi_a(x)}\bar{\psi}_a(x)]\,|0\rangle \\
&= +\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\langle 0|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}v_a(\mathbf{q},\lambda')\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\bar{u}_a(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\,|0\rangle \\
&= +\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\bar{u}(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{q},\lambda')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q+k)\cdot x} \\
&= +\mathrm{i}\kappa\,\bar{u}(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{q},\lambda')\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(p+q+k) \\
&= -\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\langle \overbrace{\mathbf{p}^+,\lambda;\,\mathbf{q}^-,\lambda';\,\mathbf{k}\big|\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)}]\,|0\rangle\,,
\end{aligned} \tag{6.28}$$

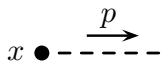
Feynman 图如图 6.1(e) 所示。由此可以归纳出如下位置空间中的出射外线 Feynman 规则，



$$= \langle \overbrace{\mathbf{p}^+,\lambda\big|\,\bar{\psi}(x)}\,|0\rangle = \big\langle \mathbf{p}^+,\lambda\big|\,\bar{\psi}^{(-)}(x)\,|0\rangle = \bar{u}(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{6.29}$$



$$= \langle \overbrace{\mathbf{p}^-,\lambda\big|\,\psi(x)}\,|0\rangle = \big\langle \mathbf{p}^-,\lambda\big|\,\psi^{(-)}(x)\,|0\rangle = v(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{6.30}$$



$$= \langle \overbrace{\mathbf{p}|\,\phi(x)}\,|0\rangle = \langle \mathbf{p}|\,\phi^{(-)}(x)\,|0\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}. \tag{6.31}$$

初末态粒子满足质壳条件 (1.71)，而且能量为正，称为**在壳** (on-shell) 粒子。入射外线联系着初态粒子，出射外线联系着末态粒子，因而外线上的动量是在壳的。

在 (6.28) 式的第二步中，我们交换了两个费米子场算符的位置，因而带来一个额外的负号，使最前面的符号从负号变为正号，这样的符号一直保留到倒数第二步的表达式中。不过，不应该认为这改变了顶点 Feynman 规则。应该认为顶点规则 (6.26) 仍然适用，只是在应用时需要考虑交换两个费米子场算符带来的额外负号。散射矩阵元是概率振幅，计算观测量时使用的是它的模方，因而额外的负号对观测量没有影响。然而，在下文中我们会看到，如果一个过程存在多个概率振幅，则振幅之间的**相对符号**会影响观测量。

在最后一步里面，我们调换第三步中两个费米子场算符的次序，回到相互作用拉氏量中的次序，从而将最前面的符号改回来，但代表场算符缩并的线会纠缠起来。经过这样的处理，我

们可以看出第一步与最后一步之间的联系：**计算散射矩阵元时，正规乘积的期待值等于将场算符与初末态缩并之后的结果，而且，当场算符次序保持相互作用拉氏量中的次序时，不会出现额外的负号。**这就是**散射矩阵元的缩并规律**。熟悉这个规律之后，我们可以在第一步结果上添加缩并线，直接写出最后一步，再调换场算符将纠缠的缩并线解开，得到第三步，从而跳过用正负能解表达的第二步。这个规律是普遍的，后面的计算会不断地验证它，并且，我们将利用它确定多个振幅之间的相对符号。

剩下的 6 种情况对应于 Feynman 图 6.1(b)、6.1(c)、6.1(d)、6.1(f)、6.1(g)、6.1(h)，相应的散射矩阵元如下。

图 6.1(b)：
$$
\begin{aligned}
&\left\langle \mathbf{p}^+,\lambda;\,\mathbf{q}^-,\lambda'\right|\mathrm{i}T_1^{(1)}\left|\mathbf{k}\right\rangle \\
&=-\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\left\langle \mathbf{p}^+,\lambda;\,\mathbf{q}^-,\lambda'\right|\mathsf{N}[\phi(x)\bar\psi(x)\psi(x)]\left|\mathbf{k}\right\rangle \\
&=+\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\left\langle \mathbf{p}^+,\lambda;\,\mathbf{q}^-,\lambda'\right|\psi_a^{(-)}(x)\bar\psi_a^{(-)}(x)\phi^{(+)}(x)\left|\mathbf{k}\right\rangle \\
&=+\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\left\langle \overbrace{\mathbf{p}^+,\lambda;\,\mathbf{q}^-,\lambda'\right|\mathsf{N}[\psi_a(x)\bar\psi_a(x)}\overbrace{\phi(x)}\left|\mathbf{k}\right\rangle \\
&=+\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,v_a(\mathbf{q},\lambda')\bar u_a(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-p-q)\cdot x}=+\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\bar u(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{q},\lambda')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-p-q)\cdot x} \\
&=+\mathrm{i}\kappa\,\bar u(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{q},\lambda')\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(k-p-q) \\
&=-\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\left\langle \overbrace{\mathbf{p}^+,\lambda;\,\mathbf{q}^-,\lambda'\right|\mathsf{N}[\phi(x)\bar\psi(x)}\overbrace{\psi(x)]}\left|\mathbf{k}\right\rangle .
\end{aligned}
\tag{6.32}
$$

图 6.1(c)：
$$
\begin{aligned}
&\left\langle \mathbf{q}^+,\lambda';\,\mathbf{k}\right|\mathrm{i}T_1^{(1)}\left|\mathbf{p}^+,\lambda\right\rangle \\
&=-\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\left\langle \mathbf{q}^+,\lambda';\,\mathbf{k}\right|\mathsf{N}[\phi(x)\bar\psi(x)\psi(x)]\left|\mathbf{p}^+,\lambda\right\rangle \\
&=-\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\left\langle \mathbf{q}^+,\lambda';\,\mathbf{k}\right|\phi^{(-)}(x)\bar\psi^{(-)}(x)\psi^{(+)}(x)\left|\mathbf{p}^+,\lambda\right\rangle \\
&=-\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\left\langle \overbrace{\mathbf{q}^+,\lambda';\,\mathbf{k}}\right|\mathsf{N}[\phi(x)\bar\psi(x)\overbrace{\psi(x)]}\left|\mathbf{p}^+,\lambda\right\rangle \\
&=-\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\bar u(\mathbf{q},\lambda')u(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q-k)\cdot x} \\
&=-\mathrm{i}\kappa\,\bar u(\mathbf{q},\lambda')u(\mathbf{p},\lambda)\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(p-q-k).
\end{aligned}
\tag{6.33}
$$

图 6.1(d)：
$$
\begin{aligned}
&\left\langle \mathbf{q}^-,\lambda';\,\mathbf{k}\right|\mathrm{i}T_1^{(1)}\left|\mathbf{p}^-,\lambda\right\rangle \\
&=-\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\left\langle \mathbf{q}^-,\lambda';\,\mathbf{k}\right|\mathsf{N}[\phi(x)\bar\psi_a(x)\psi_a(x)]\left|\mathbf{p}^-,\lambda\right\rangle \\
&=+\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\left\langle \mathbf{q}^-,\lambda';\,\mathbf{k}\right|\phi^{(-)}(x)\psi_a^{(-)}(x)\bar\psi_a^{(+)}(x)\left|\mathbf{p}^-,\lambda\right\rangle \\
&=+\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\left\langle \overbrace{\mathbf{q}^-,\lambda';\,\mathbf{k}\right|\mathsf{N}[\phi(x)\psi_a(x)}\overbrace{\bar\psi_a(x)]}\left|\mathbf{p}^-,\lambda\right\rangle \\
&=+\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,v_a(\mathbf{q},\lambda')\bar v_a(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q-k)\cdot x}=+\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\,\bar v(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{q},\lambda')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q-k)\cdot x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= +\mathrm{i}\kappa\, \bar{v}(\mathbf{p},\lambda) v(\mathbf{q},\lambda')\, (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p-q-k) \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4 x\, \big\langle \overbrace{\mathbf{q}^-, \lambda'; \mathbf{k}\big|\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)]\, \big|\mathbf{p}^-}, \lambda \big\rangle\,. \qquad (6.34)
\end{aligned}
$$

图 6.1(f)：

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathbf{k}|\, \mathrm{i}T_1^{(1)}\, \big|\mathbf{p}^+, \lambda;\, \mathbf{q}^-, \lambda' \big\rangle \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4 x\, \langle \mathbf{k}|\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)]\, \big|\mathbf{p}^+, \lambda;\, \mathbf{q}^-, \lambda' \big\rangle \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4 x\, \langle \mathbf{k}|\, \phi^{(-)}(x)\bar{\psi}^{(+)}(x)\psi^{(+)}(x)\, \big|\mathbf{p}^+, \lambda;\, \mathbf{q}^-, \lambda' \big\rangle \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4 x\, \big\langle \overbrace{\mathbf{k}|\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)]\, \big|\mathbf{p}^+}, \lambda;\, \mathbf{q}^-, \lambda' \big\rangle \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4 x\, \bar{v}(\mathbf{q},\lambda') u(\mathbf{p},\lambda) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+q-k)\cdot x} \\
&= -\mathrm{i}\kappa\, \bar{v}(\mathbf{q},\lambda') u(\mathbf{p},\lambda)\, (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+q-k). \qquad (6.35)
\end{aligned}
$$

图 6.1(g)：

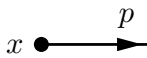
$$
\begin{aligned}
&\big\langle \mathbf{q}^+, \lambda'\big|\, \mathrm{i}T_1^{(1)}\, \big|\mathbf{p}^+, \lambda;\, \mathbf{k} \big\rangle \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4 x\, \big\langle \mathbf{q}^+, \lambda'\big|\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)]\, \big|\mathbf{p}^+, \lambda;\, \mathbf{k} \big\rangle \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4 x\, \big\langle \mathbf{q}^+, \lambda'\big|\, \bar{\psi}_a^{(-)}(x)\phi^{(+)}(x)\psi_a^{(+)}(x)\, \big|\mathbf{p}^+, \lambda;\, \mathbf{k} \big\rangle \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4 x\, \big\langle \overbrace{\mathbf{q}^+, \lambda'\big|\, \mathsf{N}[\bar{\psi}_a(x)\phi(x)\psi_a(x)]\, \big|\mathbf{p}^+}, \lambda;\, \mathbf{k} \big\rangle \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4 x\, \bar{u}(\mathbf{q},\lambda') u(\mathbf{p},\lambda) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+k-q)\cdot x} \\
&= -\mathrm{i}\kappa\, \bar{u}(\mathbf{q},\lambda') u(\mathbf{p},\lambda)\, (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+k-q) \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4 x\, \big\langle \overbrace{\mathbf{q}^+, \lambda'\big|\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)]\, \big|\mathbf{p}^+}, \lambda;\, \mathbf{k} \big\rangle\,. \qquad (6.36)
\end{aligned}
$$

图 6.1(h)：

$$
\begin{aligned}
&\big\langle \mathbf{q}^-, \lambda'\big|\, \mathrm{i}T_1^{(1)}\, \big|\mathbf{p}^-, \lambda;\, \mathbf{k} \big\rangle \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4 x\, \big\langle \mathbf{q}^-, \lambda'\big|\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)]\, \big|\mathbf{p}^-, \lambda;\, \mathbf{k} \big\rangle \\
&= +\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4 x\, \big\langle \mathbf{q}^-, \lambda'\big|\, \psi_a^{(-)}(x)\phi(x)\bar{\psi}_a^{(+)}(x)\, \big|\mathbf{p}^-, \lambda;\, \mathbf{k} \big\rangle \\
&= +\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4 x\, \big\langle \overbrace{\mathbf{q}^-, \lambda'\big|\, \mathsf{N}[\psi_a(x)\phi(x)\bar{\psi}_a(x)]\, \big|\mathbf{p}^-}, \lambda;\, \mathbf{k} \big\rangle \\
&= +\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4 x\, v_a(\mathbf{q},\lambda')\bar{v}_a(\mathbf{p},\lambda) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+k-q)\cdot x} = +\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4 x\, \bar{v}(\mathbf{p},\lambda) v(\mathbf{q},\lambda') \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+k-q)\cdot x} \\
&= +\mathrm{i}\kappa\, \bar{v}(\mathbf{p},\lambda) v(\mathbf{q},\lambda')\, (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+k-q) \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4 x\, \big\langle \overbrace{\mathbf{q}^-, \lambda'\big|\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)]\, \big|\mathbf{p}^-}, \lambda;\, \mathbf{k} \big\rangle\,. \qquad (6.37)
\end{aligned}
$$

可以验证，对于这 6 种情况，我们也能够从 Feynman 图出发，根据 Feynman 规则把散射矩阵元写出来。注意，顶点规则只有一种形式，即 (6.26) 式；不需要为顶点规则指定时间方向，它适用于各种不同的时间方向和动量方向。

接下来，我们讨论 $\mathrm{i}T_2^{(1)}$，即 (6.20) 式。它包含两个场算符之间的缩并，也就是 5.4 节讨论的 Feynman 传播子。为了使用 Feynman 图，我们需要为 Feynman 传播子设置 Feynman 规则。在位置空间中，Dirac 旋量场和实标量场 Feynman 传播子的 Feynman 规则分别为



$$= \overbrace{\psi(y)\bar{\psi}}(x) = S_{\mathrm{F}}(y-x) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{i}(\not{p}+m_\psi)}{p^2-m_\psi^2+\mathrm{i}\epsilon} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(y-x)}, \tag{6.38}$$



$$= \overbrace{\phi(y)\phi}(x) = D_{\mathrm{F}}(y-x) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{i}}{p^2-m_\phi^2+\mathrm{i}\epsilon} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(y-x)}. \tag{6.39}$$

这里用到 Feynman 传播子表达式 (5.264) 和 (5.209)，而 m_ψ 和 m_ϕ 分别是 ψ 粒子和 ϕ 粒子的质量。在位置空间中，Feynman 传播子是粒子从 x 处顶点传播到 y 处顶点的振幅，我们用一条连接两个顶点的粒子线表示，这样的线称为**内线** (internal line)。如前，Dirac 费米子的 Feynman 传播子用带箭头的实线表示，动量方向与箭头方向一致；标量玻色子的 Feynman 传播子用虚线表示，动量方向另外标明。在内线规则的表达式中，需要对动量 p^μ 的所有取值积分，因此，内线动量可以是在壳的，但更一般的情况是**离壳** (off-shell) 的，即不满足质壳条件 (1.71)，而且 p^0 也不一定为正。用内线表示的粒子称为**虚粒子** (virtual particle)，描述场的传播行为。虚粒子可以是在壳粒子，也可以是离壳粒子。反过来，用外线表示的粒子称为**实粒子** (real particle)，它一定是在壳粒子。

$\mathrm{i}T_2^{(1)}$ 剩下一个标量场 $\phi(x)$ 未参与缩并，我们可以让它与初态或末态缩并。考虑初态包含 1 个实标量玻色子，$|i\rangle = |\mathbf{k}\rangle$，末态是真空态，$\langle f| = \langle 0|$，相应的散射矩阵元为

$$\begin{aligned}
\langle 0|\,\mathrm{i}T_2^{(1)}\,|\mathbf{k}\rangle &= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\, \langle 0|\,\mathsf{N}[\phi(x)\overbrace{\bar{\psi}(x)\psi}(x)]\,|\mathbf{k}\rangle = -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\, \langle 0|\,\overbrace{\bar{\psi}_a(x)\psi}_a(x)\phi^{(+)}(x)\,|\mathbf{k}\rangle \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\, \langle 0|\,\mathsf{N}[\overbrace{\bar{\psi}_a(x)\psi}_a(x)\overbrace{\phi(x)}]\,|\mathbf{k}\rangle = +\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\, \langle 0|\,\mathsf{N}[\overbrace{\psi_a(x)\bar{\psi}}_a(x)\overbrace{\phi(x)}]\,|\mathbf{k}\rangle \\
&= +\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\, S_{\mathrm{F},aa}(x-x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} = +\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{tr}[S_{\mathrm{F}}(0)] \\
&= +\mathrm{i}\kappa\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(k) \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{tr}(\not{p}+m_\psi)}{p^2-m_\psi^2+\mathrm{i}\epsilon} \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\, \langle 0|\,\mathsf{N}[\overbrace{\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi}(x)]\,|\mathbf{k}\rangle\,.
\end{aligned} \tag{6.40}$$

第四步交换了正规乘积中两个费米子场算符的次序，因而带来一个额外的负号。第六步用到矩阵的迹的定义 $\mathrm{tr}[S_{\mathrm{F}}(0)] = S_{\mathrm{F},aa}(0)$。

相应 Feynman 图如图 6.2(a) 所示。$\mathrm{i}T_2^{(1)}$ 中参与缩并的费米子场算符 $\psi(x)$ 和 $\bar{\psi}(x)$ 具有相同的时空坐标 x，因而 Feynman 传播子从 x 处的顶点出发，传播回到 x 处的顶点，形成一个封闭的圈。这种包含圈结构的 Feynman 图称为**圈图** (loop diagram)。相反，不包含圈结构的 Feynman 图称为**树图** (tree diagram)，例如，图 6.1 中的 8 种 Feynman 图都是树图。

从上述计算过程可以看到，一个封闭的费米子圈贡献一个额外的负号，而且需要对 Dirac 矩阵（或其乘积）求迹。此外，圈图里出现对一个四维动量 p^μ 的积分 $\int \mathrm{d}^4p/(2\pi)^4$；这个 p^μ 的值



(a) (b)

图 6.2: $\mathrm{i}T_2^{(1)}$ 贡献的 2 种蝌蚪图。时间方向自左向右。

不能通过初末态的四维动量确定，因而是一个未定的四维动量，称为**圈动量** (loop momentum)，在积分时考虑了它的所有取值。这是两个普遍结论，下文还有更多例子。

在另一种情况中，考虑初态是真空态，$|i\rangle = |0\rangle$，末态包含 1 个标量玻色子，$\langle f| = \langle \mathbf{k}|$，相应的散射矩阵元为

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{k}|\, \mathrm{i}T_2^{(1)}\, |0\rangle &= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\, \langle \mathbf{k}|\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)]\, |0\rangle = -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\, \langle \mathbf{k}|\, \phi^{(-)}(x)\bar{\psi}_a(x)\psi_a(x)\, |0\rangle \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\, \langle \mathbf{k}|\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}_a(x)\psi_a(x)]\, |0\rangle = +\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\, \langle \mathbf{k}|\, \mathsf{N}[\phi(x)\psi_a(x)\bar{\psi}_a(x)]\, |0\rangle \\
&= +\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} S_{\mathrm{F},aa}(x-x) = +\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\, \mathrm{tr}[S_{\mathrm{F}}(0)] \\
&= +\mathrm{i}\kappa\, (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k) \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{tr}(\not{p} + m_\psi)}{p^2 - m_\psi^2 + \mathrm{i}\epsilon} \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\, \langle \mathbf{k}|\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)]\, |0\rangle\,.
\end{aligned} \tag{6.41}$$

图 6.2(b) 是相应的 Feynman 图。像图 6.2(a) 和 6.2(b) 这样包含一条外线的圈图称为**蝌蚪图** (tadpole diagram)。

图 6.1 和 6.2 中列举的 10 个 Feynman 图对应于 10 个动力学允许的过程。但是，其中大多数过程在运动学上并不允许，因为初态和末态不能同时满足能量和动量守恒定律。当 $m_\phi > 2m_\psi$ 时，有 2 个过程是例外的，运动学允许它们发生：Feynman 图 6.1(b) 对应于一个 ϕ 粒子**衰变**成一对正反 ψ 粒子的过程 $\phi \to \psi\bar{\psi}$，Feynman 图 6.1(f) 对应于一对正反 ψ 粒子**融合** (fusion) 成一个 ϕ 粒子的过程 $\psi\bar{\psi} \to \phi$。

接着，我们计算 $\phi \to \psi\bar{\psi}$ 过程对应的衰变宽度。根据 (5.271) 式，将 (6.32) 式中的 δ 函数因子 $(2\pi)^4\delta^{(4)}(k-p-q)$ 扔掉，就得到 $\phi \to \psi\bar{\psi}$ 衰变过程的不变振幅

$$\mathrm{i}\mathcal{M} = \mathrm{i}\kappa \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda) v(\mathbf{q}, \lambda'). \tag{6.42}$$

这是 $\mathrm{i}T$ 展开式第 1 阶的结果，它是贡献到这个过程的最低阶，即**领头阶** (leading order)。当 Yukawa 耦合常数 κ 比较小时，领头阶的贡献远大于更高阶的贡献。对上式取复共轭（等同于厄米共轭），得

$$(\mathrm{i}\mathcal{M})^* = [\mathrm{i}\kappa u^\dagger(\mathbf{p}, \lambda)\gamma^0 v(\mathbf{q}, \lambda')]^\dagger = -\mathrm{i}\kappa v^\dagger(\mathbf{q}, \lambda')\gamma^0 u(\mathbf{p}, \lambda) = -\mathrm{i}\kappa \bar{v}(\mathbf{q}, \lambda') u(\mathbf{p}, \lambda). \tag{6.43}$$

进而，不变振幅的模方是

$$\begin{aligned}|\mathcal{M}|^2 &= \kappa^2 \bar{u}(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{q},\lambda')\bar{v}(\mathbf{q},\lambda')u(\mathbf{p},\lambda) = \kappa^2 \bar{u}_a(\mathbf{p},\lambda)v_a(\mathbf{q},\lambda')\bar{v}_b(\mathbf{q},\lambda')u_b(\mathbf{p},\lambda) \\ &= \kappa^2 u_b(\mathbf{p},\lambda)\bar{u}_a(\mathbf{p},\lambda)v_a(\mathbf{q},\lambda')\bar{v}_b(\mathbf{q},\lambda') = \kappa^2 \operatorname{tr}[u(\mathbf{p},\lambda)\bar{u}(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{q},\lambda')\bar{v}(\mathbf{q},\lambda')]. \end{aligned} \tag{6.44}$$

在第一步的结果中，旋量空间中的行矢量 $\bar{u}(\mathbf{p},\lambda)$ 与列矢量 $v(\mathbf{q},\lambda')$ 相乘得到一个数，再乘以行矢量 $\bar{v}(\mathbf{q},\lambda')$ 与列矢量 $u(\mathbf{p},\lambda)$ 相乘得到的数。第二步将行矢量和列矢量的旋量指标明显地写出来，可以看成是对它们的分量进行求和，求和指标是 a 和 b。第三步将最右边的 $u_b(\mathbf{p},\lambda)$ 移动到左边，从而，$u_b(\mathbf{p},\lambda)\bar{u}_a(\mathbf{p},\lambda)$ 和 $v_a(\mathbf{q},\lambda')\bar{v}_b(\mathbf{q},\lambda')$ 可以分别看作矩阵 $u(\mathbf{p},\lambda)\bar{u}(\mathbf{p},\lambda)$ 和 $v(\mathbf{q},\lambda')\bar{v}(\mathbf{q},\lambda')$ 的 ba 分量和 ab 分量，因此，对 a 求和表示两个矩阵相乘，对 b 求和表示矩阵乘积的迹。

在计算 ϕ 的衰变宽度时，应当包含所有可能的末态，除了包含所有可能的动量取值之外，还要计及所有可能的螺旋态。因此，需要使用对末态粒子螺旋度求和的**非极化不变振幅模方**

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} &\equiv \sum_{\lambda\lambda'} |\mathcal{M}|^2 = \kappa^2 \sum_{\lambda\lambda'} \operatorname{tr}[u(\mathbf{p},\lambda)\bar{u}(\mathbf{p},\lambda)v(\mathbf{q},\lambda')\bar{v}(\mathbf{q},\lambda')] \\ &= \kappa^2 \sum_{\lambda'} \operatorname{tr}[(\not{p}+m_\psi)v(\mathbf{q},\lambda')\bar{v}(\mathbf{q},\lambda')] = \kappa^2 \operatorname{tr}[(\not{p}+m_\psi)(\not{q}-m_\psi)]. \end{aligned} \tag{6.45}$$

第三、四步用到自旋求和关系 (4.218)。这种把非极化振幅模方中的旋量计算转化为求迹运算的方法称为 **Casimir 技巧** (Casimir's trick)。

现在，我们需要对 Dirac 矩阵及其乘积求迹。对于 Dirac 矩阵的迹，有

$$\operatorname{tr}(\gamma^\mu) = \operatorname{tr}(\gamma^\mu\gamma^5\gamma^5) = -\operatorname{tr}(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^5) = -\operatorname{tr}(\gamma^5\gamma^5\gamma^\mu) = -\operatorname{tr}(\gamma^\mu). \tag{6.46}$$

第一步用到 (4.38) 式，第二步用到 (4.41) 式，第三步用到矩阵乘积的性质

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA), \tag{6.47}$$

第四步再用一次 (4.38) 式。可见，

$$\operatorname{tr}(\gamma^\mu) = 0, \tag{6.48}$$

故

$$\operatorname{tr}(\not{p}) = \operatorname{tr}(p_\mu\gamma^\mu) = p_\mu \operatorname{tr}(\gamma^\mu) = 0. \tag{6.49}$$

根据 (4.2) 式，两个 Dirac 矩阵乘积的迹满足

$$\operatorname{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = \operatorname{tr}(2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu) = 2g^{\mu\nu}\operatorname{tr}(\mathbf{1}) - \operatorname{tr}(\gamma^\nu\gamma^\mu) = 8g^{\mu\nu} - \operatorname{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu), \tag{6.50}$$

从而

$$\operatorname{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}, \tag{6.51}$$

于是得到

$$\operatorname{tr}(\not{p}\not{q}) = p_\mu q_\nu \operatorname{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4p_\mu q_\nu g^{\mu\nu} = 4\,p\cdot q. \tag{6.52}$$

利用这些公式，可将 (6.45) 式化为

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \kappa^2 \operatorname{tr}[(\not{p}\not{q} - m_\psi \not{p} + m_\psi \not{q} - m_\psi^2) = \kappa^2[\operatorname{tr}(\not{p}\not{q}) - m_\psi^2 \operatorname{tr}(\mathbf{1})] = 4\kappa^2(p\cdot q - m_\psi^2). \tag{6.53}$$

根据质壳条件 $k^2 = m_\phi^2$、$p^2 = q^2 = m_\psi^2$ 和能动量守恒关系 $k^\mu = p^\mu + q^\mu$，有

$$m_\phi^2 = k^2 = (p+q)^2 = p^2 + q^2 + 2\,p\cdot q = 2(m_\psi^2 + p\cdot q), \tag{6.54}$$

故

$$p\cdot q = \frac{m_\phi^2}{2} - m_\psi^2, \quad p\cdot q - m_\psi^2 = \frac{1}{2}(m_\phi^2 - 4m_\psi^2) = \frac{m_\phi^2}{2}\left(1 - \frac{4m_\psi^2}{m_\phi^2}\right). \tag{6.55}$$

ψ 与 $\bar\psi$ 是不全同的正反粒子，末态对称性因子 $\mathcal{S} = 1$，由 (5.379) 式得到 $\phi \to \psi\bar\psi$ 过程的领头阶衰变宽度

$$\begin{aligned}\Gamma(\phi \to \psi\bar\psi) &= \frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{16\pi m_\phi}\sqrt{1 - \frac{4m_\psi^2}{m_\phi^2}} = \frac{\kappa^2}{4\pi m_\phi}\sqrt{1 - \frac{4m_\psi^2}{m_\phi^2}}\,(p\cdot q - m_\psi^2) \\ &= \frac{\kappa^2 m_\phi}{8\pi}\left(1 - \frac{4m_\psi^2}{m_\phi^2}\right)^{3/2}.\end{aligned} \tag{6.56}$$

如果 $m_\phi = 2m_\psi$，则 $\Gamma(\phi \to \psi\bar\psi) = 0$，$\phi \to \psi\bar\psi$ 衰变过程不能发生。

6.1.2 κ^2 阶 Feynman 图

在 $\mathrm{i}T$ 展开式的第 2 阶，即 κ^2 阶，由 (6.5) 式得

$$\mathrm{i}T^{(2)} = \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{T}[\phi(x)\bar\psi(x)\psi(x)\phi(y)\bar\psi(y)\psi(y)] = \sum_{j=1}^{14}\mathrm{i}T_j^{(2)}, \tag{6.57}$$

根据 Wick 定理，共有 14 个非平庸的项 $\mathrm{i}T_j^{(2)}$。首先，有 1 项不包含缩并，

$$\mathrm{i}T_1^{(2)} = \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar\psi(x)\psi(x)\phi(y)\bar\psi(y)\psi(y)]. \tag{6.58}$$

其次，有 5 项包含 1 次缩并，

$$\mathrm{i}T_2^{(2)} = \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\overbrace{\phi(x)\bar\psi(x)\psi(x)\phi}(y)\bar\psi(y)\psi(y)], \tag{6.59}$$

$$\mathrm{i}T_3^{(2)} = \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar\psi(x)\overbrace{\psi(x)\phi(y)\bar\psi}(y)\psi(y)], \tag{6.60}$$

$$\mathrm{i}T_4^{(2)} = \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\phi(x)\overbrace{\bar\psi(x)\psi(x)\phi(y)\bar\psi(y)\psi}(y)], \tag{6.61}$$

$$\mathrm{i}T_5^{(2)} = \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\phi(x)\overbrace{\bar\psi(x)\psi}(x)\phi(y)\bar\psi(y)\psi(y)], \tag{6.62}$$

$$\mathrm{i}T_6^{(2)} = \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar\psi(x)\psi(x)\phi(y)\overbrace{\bar\psi(y)\psi}(y)]. \tag{6.63}$$

再次，有 6 项包含 2 次缩并，

$$\mathrm{i}T_7^{(2)} = \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\overbrace{\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)}\bar{\psi}(y)\psi(y)], \tag{6.64}$$

$$\mathrm{i}T_8^{(2)} = \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\overbrace{\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)}\psi(y)], \tag{6.65}$$

$$\mathrm{i}T_9^{(2)} = \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\overbrace{\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)}\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)], \tag{6.66}$$

$$\mathrm{i}T_{10}^{(2)} = \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\overbrace{\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)}\phi(y)\overbrace{\bar{\psi}(y)}\psi(y)], \tag{6.67}$$

$$\mathrm{i}T_{11}^{(2)} = \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\phi(x)\overbrace{\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)}\psi(y)]. \tag{6.68}$$

$$\mathrm{i}T_{12}^{(2)} = \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\phi(x)\overbrace{\bar{\psi}(x)\psi(x)}\phi(y)\overbrace{\bar{\psi}(y)}\psi(y)], \tag{6.69}$$

最后，有 2 项包含 3 次缩并，

$$\mathrm{i}T_{13}^{(2)} = \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\overbrace{\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)}\psi(y)], \tag{6.70}$$

$$\mathrm{i}T_{14}^{(2)} = \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\overbrace{\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)}\phi(y)\overbrace{\bar{\psi}(y)}\psi(y)]. \tag{6.71}$$

下面讨论几个相关过程。

(1) 首先，考虑 $\psi\bar{\psi}\to\psi\bar{\psi}$ 散射过程，初态记为 $|i\rangle = \left|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^-,\lambda_2\right\rangle$，末态记为 $\langle f| = \left\langle\mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^-,\lambda_2'\right|$。根据 (6.59) 式，$\mathrm{i}T_2^{(2)}$ 对这个过程贡献的散射矩阵元是

$$\begin{aligned}
&\left\langle\mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^-,\lambda_2'\right|\mathrm{i}T_2^{(2)}\left|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^-,\lambda_2\right\rangle\\
=&\frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\left\langle\mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^-,\lambda_2'\right|\mathsf{N}[\overbrace{\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)}\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)]\left|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^-,\lambda_2\right\rangle\\
=&\frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\left\langle\mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^-,\lambda_2'\right|\mathsf{N}[-\psi_a^{(-)}(x)\bar{\psi}_a^{(-)}(x)\overbrace{\phi(x)\phi}(y)\bar{\psi}_b^{(+)}(y)\psi_b^{(+)}(y)\\
&\quad-\psi_b^{(-)}(y)\bar{\psi}_b^{(-)}(y)\overbrace{\phi(x)\phi}(y)\bar{\psi}_a^{(+)}(x)\psi_a^{(+)}(x)+\psi_a^{(-)}(x)\bar{\psi}_b^{(-)}(y)\overbrace{\phi(x)\phi}(y)\bar{\psi}_a^{(+)}(x)\psi_b^{(+)}(y)\\
&\quad+\psi_b^{(-)}(y)\bar{\psi}_a^{(-)}(x)\overbrace{\phi(x)\phi}(y)\bar{\psi}_b^{(+)}(y)\psi_a^{(+)}(x)]\left|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^-,\lambda_2\right\rangle\\
=&-(-\mathrm{i}\kappa)^2\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\left\langle\mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^-,\lambda_2'\right|\mathsf{N}[\psi_a^{(-)}(x)\bar{\psi}_a^{(-)}(x)\overbrace{\phi(x)\phi}(y)\bar{\psi}_b^{(+)}(y)\psi_b^{(+)}(y)\\
&\quad-\psi_a^{(-)}(x)\bar{\psi}_b^{(-)}(y)\overbrace{\phi(x)\phi}(y)\bar{\psi}_a^{(+)}(x)\psi_b^{(+)}(y)]\left|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^-,\lambda_2\right\rangle\\
=&-(-\mathrm{i}\kappa)^2\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\\
&\times\Big\{\left\langle\overbrace{\mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^-,\lambda_2'}\right|\mathsf{N}[\overbrace{\psi_a(x)\bar{\psi}_a}(x)\overbrace{\phi(x)\phi}(y)\overbrace{\bar{\psi}_b(y)\psi_b}(y)]\left|\overbrace{\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^-}\right,\lambda_2\right\rangle\\
&\quad-\left\langle\overbrace{\mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^-,\lambda_2'}\right|\mathsf{N}[\overbrace{\psi_a(x)\bar{\psi}_b}(y)\overbrace{\phi(x)\phi}(y)\overbrace{\bar{\psi}_a(x)\psi_b}(y)]\left|\overbrace{\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^-}\right,\lambda_2\right\rangle\Big\}\\
=&(-\mathrm{i}\kappa)^2\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\Big\{\left\langle\overbrace{\mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^-,\lambda_2'}\right|\mathsf{N}[\overbrace{\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)}\phi(y)\overbrace{\bar{\psi}(y)\psi(y)}]\left|\overbrace{\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^-}\right,\lambda_2\right\rangle
\end{aligned}$$

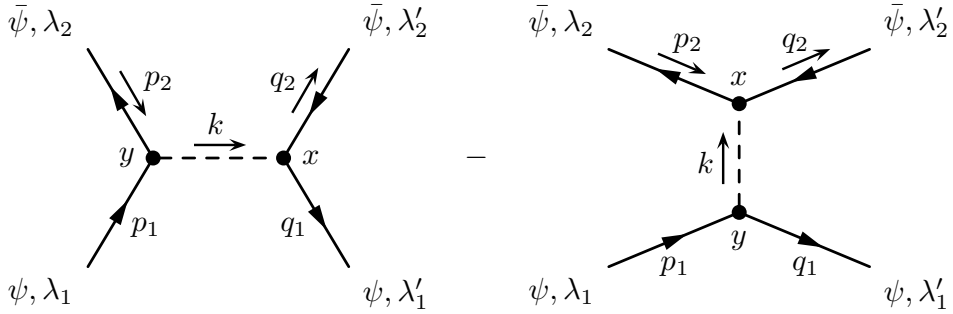


图 6.3: $\mathrm{i}T_2^{(2)}$ 贡献的 $\psi\bar\psi\to\psi\bar\psi$ 散射过程 Feynman 图，包含两个子图，相对符号为负。时间方向自左向右。

$$+\left\langle \mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^-,\lambda_2'\right|\mathsf{N}[\phi(x)\bar\psi(x)\psi(x)\phi(y)\bar\psi(y)\psi(y)]\left|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^-,\lambda_2\right\rangle\Big\}. \tag{6.72}$$

第二步将场算符分解为正负能解，得到 4 个非零项。根据 (5.211) 式，$\overbracket{\phi(y)\phi(x)}=\overbracket{\phi(x)\phi(y)}$，可以看出，对第 2 项交换时空坐标 x 和 y 得到的结果与第 1 项相同，因而可以只保留一项，再乘上一个 2! 因子，它刚好与最前面的 1/2! 因子抵消。类似地，第 3 项与第 4 项也具有这种交换 x 和 y 的对称性。在第三步中，我们只保留第 1 项和第 3 项，消去前面的 1/2! 因子，并提取一个整体负号出来。这个规律是普遍的：(6.4) **式里面 $\mathrm{i}\boldsymbol{T}^{(n)}$ 中的 $\boldsymbol{1/n!}$ 因子总是恰好与时空坐标的交换对称性引起的 $\boldsymbol{n!}$ 因子抵消**。第四步写成场算符与初末态缩并的形式，花括号中两项相差一个负号，即相对符号为负。第五步将场算符调回 (6.59) 式中的次序，不再出现额外的负号，验证了前述散射矩阵元的缩并规律。

相应的 Feynman 图如图 6.3 所示，包含 2 个子图，分别具有 2 个顶点、4 条外线和 1 条内线。相应地，这个过程的总不变振幅 $\mathrm{i}\mathcal{M}$ 是 2 个不变振幅的叠加，两者之间的相对符号为负，根据 (5.310) 式计算散射截面时，用到的是总不变振幅的模方 $|\mathcal{M}|^2$，这样的相对符号决定其中干涉项的符号，因此，对于正确地计算散射截面至关重要。

由 (6.72) 式倒数第二步的结果得

$$\begin{aligned}
&\left\langle \mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^-,\lambda_2'\right|\mathrm{i}T_2^{(2)}\left|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^-,\lambda_2\right\rangle\\
=\;&-(-\mathrm{i}\kappa)^2\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\\
&\times\Big[v_a(\mathbf{q}_2,\lambda_2')\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_2\cdot x}\bar u_a(\mathbf{q}_1,\lambda_1')\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_1\cdot x}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x-y)}}{k^2-m_\phi^2+\mathrm{i}\epsilon}\bar v_b(\mathbf{p}_2,\lambda_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2\cdot y}u_b(\mathbf{p}_1,\lambda_1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot y}\\
&\quad-v_a(\mathbf{q}_2,\lambda_2')\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_2\cdot x}\bar u_b(\mathbf{q}_1,\lambda_1')\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_1\cdot y}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x-y)}}{k^2-m_\phi^2+\mathrm{i}\epsilon}\bar v_a(\mathbf{p}_2,\lambda_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2\cdot x}u_b(\mathbf{p}_1,\lambda_1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot y}\Big]\\
=\;&-(-\mathrm{i}\kappa)^2\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\Big[\bar u(\mathbf{q}_1,\lambda_1')v(\mathbf{q}_2,\lambda_2')\frac{\mathrm{i}}{k^2-m_\phi^2+\mathrm{i}\epsilon}\bar v(\mathbf{p}_2,\lambda_2)u(\mathbf{p}_1,\lambda_1)\\
&\qquad\times(2\pi)^4\delta^{(4)}(k-q_1-q_2)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2-k)\\
&\qquad-\bar v(\mathbf{p}_2,\lambda_2)v(\mathbf{q}_2,\lambda_2')\frac{\mathrm{i}}{k^2-m_\phi^2+\mathrm{i}\epsilon}\bar u(\mathbf{q}_1,\lambda_1')u(\mathbf{p}_1,\lambda_1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times(2\pi)^4\delta^{(4)}(k+p_2-q_2)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1-q_1-k)\Big] \\
=\ &-(-\mathrm{i}\kappa)^2\left[\bar{u}(\mathbf{q}_1,\lambda_1')v(\mathbf{q}_2,\lambda_2')\frac{\mathrm{i}}{(p_1+p_2)^2-m_\phi^2+\mathrm{i}\epsilon}\bar{v}(\mathbf{p}_2,\lambda_2)u(\mathbf{p}_1,\lambda_1)\right. \\
&\left.-\bar{v}(\mathbf{p}_2,\lambda_2)v(\mathbf{q}_2,\lambda_2')\frac{\mathrm{i}}{(p_1-q_1)^2-m_\phi^2+\mathrm{i}\epsilon}\bar{u}(\mathbf{q}_1,\lambda_1')u(\mathbf{p}_1,\lambda_1)\right] \\
&\times(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2-q_1-q_2).
\end{aligned}
\tag{6.73}
$$

第二步对 x 和 y 分别积分，使方括号中每一项都具有 2 个四维 δ 函数，它们分别代表 2 个顶点处的能动量守恒关系；第一项的关系为 $k^\mu=q_1^\mu+q_2^\mu$ 和 $k^\mu=p_1^\mu+p_2^\mu$，第二项的关系为 $k^\mu=q_2^\mu-p_2^\mu$ 和 $k^\mu=p_1^\mu-q_1^\mu$。可见，**与同一顶点相连的内外线的四维动量应满足能动量守恒定律**。第三步对 k 积分，消去 1 个四维 δ 函数，剩下的 1 个四维 δ 函数 $\delta^{(4)}(p_1+p_2-q_1-q_2)$ 代表初末态 4 个粒子满足的能动量守恒定律。这符合 (5.271) 式的形式，相应的不变振幅为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}\mathcal{M}\ =\ &-(-\mathrm{i}\kappa)^2\left[\bar{u}(\mathbf{q}_1,\lambda_1')v(\mathbf{q}_2,\lambda_2')\frac{\mathrm{i}}{(p_1+p_2)^2-m_\phi^2+\mathrm{i}\epsilon}\bar{v}(\mathbf{p}_2,\lambda_2)u(\mathbf{p}_1,\lambda_1)\right. \\
&\left.-\bar{v}(\mathbf{p}_2,\lambda_2)v(\mathbf{q}_2,\lambda_2')\frac{\mathrm{i}}{(p_1-q_1)^2-m_\phi^2+\mathrm{i}\epsilon}\bar{u}(\mathbf{q}_1,\lambda_1')u(\mathbf{p}_1,\lambda_1)\right].
\end{aligned}
\tag{6.74}
$$

这个表达式不包含积分，内线动量由外线动量完全确定，这是树图的特征。

(2) $\mathrm{i}T_2^{(2)}$ 也可以贡献到 $\psi\psi\to\psi\psi$ 散射过程，记初态为 $|i\rangle=\left|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^+,\lambda_2\right\rangle$，末态为 $\langle f|=\left\langle\mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^+,\lambda_2'\right|$，由 (6.59) 式得散射矩阵元为

$$
\begin{aligned}
&\left\langle\mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^+,\lambda_2'\right|\mathrm{i}T_2^{(2)}\left|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^+,\lambda_2\right\rangle \\
=\ &\frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int\mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\left\langle\mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^+,\lambda_2'\right|\mathsf{N}[\overbrace{\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)}\overbrace{\phi}(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)]\left|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^+,\lambda_2\right\rangle \\
=\ &-\frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int\mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\left\langle\mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^+,\lambda_2'\right|\mathsf{N}[\bar{\psi}_a^{(-)}(x)\bar{\psi}_b^{(-)}(y) \\
&\qquad\times\overbrace{\phi(x)\phi}(y)\psi_a^{(+)}(x)\psi_b^{(+)}(y)]\left|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^+,\lambda_2\right\rangle.
\end{aligned}
\tag{6.75}
$$

上式最后一行出现了两个正能解旋量场算符对全同费米子初态的作用，作用结果为

$$
\begin{aligned}
&\psi_a^{(+)}(x)\psi_b^{(+)}(y)\left|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^+,\lambda_2\right\rangle \\
=\ &\int\frac{\mathrm{d}^3k_1\,\mathrm{d}^3k_2}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{k}_1}E_{\mathbf{k}_2}}}\sum_{\sigma_1\sigma_2}u_a(\mathbf{k}_1,\sigma_1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1\cdot x}u_b(\mathbf{k}_2,\sigma_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2\cdot y}\sqrt{4E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}}\,a_{\mathbf{k}_1,\sigma_1}a_{\mathbf{k}_2,\sigma_2}a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\lambda_1}a^\dagger_{\mathbf{p}_2,\lambda_2}|0\rangle \\
=\ &\int\frac{\mathrm{d}^3k_1\,\mathrm{d}^3k_2}{(2\pi)^6}\sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}}{E_{\mathbf{k}_1}E_{\mathbf{k}_2}}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_1\cdot x+k_2\cdot y)}\sum_{\sigma_1\sigma_2}u_a(\mathbf{k}_1,\sigma_1)u_b(\mathbf{k}_2,\sigma_2) \\
&\quad\times a_{\mathbf{k}_1,\sigma_1}[(2\pi)^3\delta_{\sigma_2\lambda_1}\delta^{(3)}(\mathbf{k}_2-\mathbf{p}_1)-a^\dagger_{\mathbf{p}_1,\lambda_1}a_{\mathbf{k}_2,\sigma_2}]a^\dagger_{\mathbf{p}_2,\lambda_2}|0\rangle \\
=\ &\int\frac{\mathrm{d}^3k_1\,\mathrm{d}^3k_2}{(2\pi)^6}\sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}_1}E_{\mathbf{p}_2}}{E_{\mathbf{k}_1}E_{\mathbf{k}_2}}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_1\cdot x+k_2\cdot y)}\sum_{\sigma_1\sigma_2}u_a(\mathbf{k}_1,\sigma_1)u_b(\mathbf{k}_2,\sigma_2) \\
&\quad\times(2\pi)^6[\delta_{\sigma_2\lambda_1}\delta^{(3)}(\mathbf{k}_2-\mathbf{p}_1)\delta_{\sigma_1\lambda_2}\delta^{(3)}(\mathbf{k}_1-\mathbf{p}_2)-\delta_{\sigma_1\lambda_1}\delta^{(3)}(\mathbf{k}_1-\mathbf{p}_1)\delta_{\sigma_2\lambda_2}\delta^{(3)}(\mathbf{k}_2-\mathbf{p}_2)]\,|0\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= [u_a(\mathbf{p}_2,\lambda_2)u_b(\mathbf{p}_1,\lambda_1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_2\cdot x+p_1\cdot y)} - u_a(\mathbf{p}_1,\lambda_1)u_b(\mathbf{p}_2,\lambda_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_1\cdot x+p_2\cdot y)}]\,|0\rangle \\
&= \mathsf{N}[\overbrace{\psi_a(x)\overbrace{\psi_b(y)}}\,|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^+,\lambda_2\rangle - \mathsf{N}[\overbrace{\psi_b(y)\overbrace{\psi_a(x)}}\,|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^+,\lambda_2\rangle \\
&= \mathsf{N}[\overbrace{\psi_a(x)\overbrace{\psi_b(y)}}\,|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^+,\lambda_2\rangle + \mathsf{N}[\overbrace{\psi_a(x)\overbrace{\psi_b(y)}}\,|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^+,\lambda_2\rangle\,. \qquad (6.76)
\end{aligned}
$$

可见，这种作用对应于场算符与初态的两种可能缩并。倒数第二、三步中第二项前面的负号体现了交换全同费米子的反对称性；交换两个场算符恢复原来的次序之后，这个负号没有出现在最后一步中，此时表示缩并的线纠缠起来。

(6.75) 式倒数第二行出现了两个负能解旋量场算符对全同费米子末态的作用，作用结果为

$$
\begin{aligned}
&\langle\mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^+,\lambda_2'|\,\bar\psi_a^{(-)}(x)\bar\psi_b^{(-)}(y) \\
&= \int\frac{\mathrm{d}^3k_1\,\mathrm{d}^3k_2}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{k}_1}E_{\mathbf{k}_2}}}\sum_{\sigma_1\sigma_2}\bar u_a(\mathbf{k}_1,\sigma_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1\cdot x}\bar u_b(\mathbf{k}_2,\sigma_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2\cdot y}\sqrt{4E_{\mathbf{q}_1}E_{\mathbf{q}_2}}\,\langle0|\,a_{\mathbf{q}_1,\lambda_1'}a_{\mathbf{q}_2,\lambda_2'}a^\dagger_{\mathbf{k}_1,\sigma_1}a^\dagger_{\mathbf{k}_2,\sigma_2} \\
&= \int\frac{\mathrm{d}^3k_1\,\mathrm{d}^3k_2}{(2\pi)^6}\sqrt{\frac{E_{\mathbf{q}_1}E_{\mathbf{q}_2}}{E_{\mathbf{k}_1}E_{\mathbf{k}_2}}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1\cdot x+k_2\cdot y)}\sum_{\sigma_1\sigma_2}\bar u_a(\mathbf{k}_1,\sigma_1)\bar u_b(\mathbf{k}_2,\sigma_2) \\
&\qquad\times\langle0|\,a_{\mathbf{q}_1,\lambda_1'}[(2\pi)^3\delta_{\lambda_2'\sigma_1}\delta^{(3)}(\mathbf{q}_2-\mathbf{k}_1) - a^\dagger_{\mathbf{k}_1,\sigma_1}a_{\mathbf{q}_2,\lambda_2'}]a^\dagger_{\mathbf{k}_2,\sigma_2} \\
&= \int\frac{\mathrm{d}^3k_1\,\mathrm{d}^3k_2}{(2\pi)^6}\sqrt{\frac{E_{\mathbf{q}_1}E_{\mathbf{q}_2}}{E_{\mathbf{k}_1}E_{\mathbf{k}_2}}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1\cdot x+k_2\cdot y)}\sum_{\sigma_1\sigma_2}\bar u_a(\mathbf{k}_1,\sigma_1)\bar u_b(\mathbf{k}_2,\sigma_2) \\
&\qquad\times\langle0|\,(2\pi)^6[\delta_{\lambda_2'\sigma_1}\delta^{(3)}(\mathbf{q}_2-\mathbf{k}_1)\delta_{\lambda_1'\sigma_2}\delta^{(3)}(\mathbf{q}_1-\mathbf{k}_2) - \delta_{\lambda_1'\sigma_1}\delta^{(3)}(\mathbf{q}_1-\mathbf{k}_1)\delta_{\lambda_2'\sigma_2}\delta^{(3)}(\mathbf{q}_2-\mathbf{k}_2)] \\
&= \langle0|\,[\bar u_a(\mathbf{q}_2,\lambda_2')\bar u_b(\mathbf{q}_1,\lambda_1')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(q_2\cdot x+q_1\cdot y)} - \bar u_a(\mathbf{q}_1,\lambda_1')\bar u_b(\mathbf{q}_2,\lambda_2')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(q_1\cdot x+q_2\cdot y)}] \\
&= \langle\overbrace{\mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^+,\lambda_2'|\,\mathsf{N}[\bar\psi_a(x)\bar\psi_b(y)}] - \langle\overbrace{\mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^+,\lambda_2'|\,\mathsf{N}[\bar\psi_b(y)\bar\psi_a(x)}] \\
&= \langle\overbrace{\mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^+,\lambda_2'|\,\mathsf{N}[\bar\psi_a(x)\bar\psi_b(y)}] + \langle\overbrace{\mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^+,\lambda_2'|\,\mathsf{N}[\bar\psi_a(x)\bar\psi_b(y)}]. \qquad (6.77)
\end{aligned}
$$

可见，这种作用对应于场算符与末态的两种可能缩并。

于是，(6.75) 式化为

$$
\begin{aligned}
&\langle\mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^+,\lambda_2'|\,\mathrm{i}T_2^{(2)}\,|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^+,\lambda_2\rangle \\
&= -\frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int\mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y \\
&\quad\times\Big\{\langle\overbrace{\mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^+,\lambda_2'|\,\mathsf{N}[\bar\psi_a(x)\bar\psi_b(y)\overbrace{\phi(x)\phi(y)\overbrace{\psi_a(x)\overbrace{\psi_b(y)}}}\,|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^+,\lambda_2\rangle \\
&\qquad-\langle\overbrace{\mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^+,\lambda_2'|\,\mathsf{N}[\bar\psi_b(y)\bar\psi_a(x)\overbrace{\phi(x)\phi(y)\overbrace{\psi_a(x)\overbrace{\psi_b(y)}}}\,|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^+,\lambda_2\rangle \\
&\qquad-\langle\overbrace{\mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^+,\lambda_2'|\,\mathsf{N}[\bar\psi_a(x)\bar\psi_b(y)\overbrace{\phi(x)\phi(y)\overbrace{\psi_b(y)\overbrace{\psi_a(x)}}}\,|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^+,\lambda_2\rangle \\
&\qquad+\langle\overbrace{\mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^+,\lambda_2'|\,\mathsf{N}[\bar\psi_b(y)\bar\psi_a(x)\overbrace{\phi(x)\phi(y)\overbrace{\psi_b(y)\overbrace{\psi_a(x)}}}\,|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^+,\lambda_2\rangle\Big\} \\
&= -(-\mathrm{i}\kappa)^2\int\mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y \\
&\quad\times\Big\{\langle\overbrace{\mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\,\mathbf{q}_2^+,\lambda_2'|\,\mathsf{N}[\bar\psi_a(x)\bar\psi_b(y)\overbrace{\phi(x)\phi(y)\overbrace{\psi_a(x)\overbrace{\psi_b(y)}}}\,|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\,\mathbf{p}_2^+,\lambda_2\rangle
\end{aligned}
$$

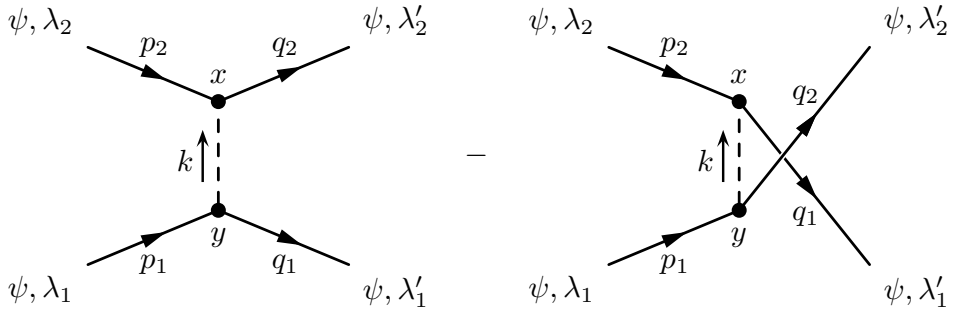


图 6.4: $\mathrm{i}T_2^{(2)}$ 贡献的 $\psi\psi \to \psi\psi$ 散射过程 Feynman 图，包含两个子图，相对符号为负。时间方向自左向右。

$$
\begin{aligned}
&\quad - \overbrace{\langle \mathbf{q}_1^+, \lambda_1'; \mathbf{q}_2^+, \lambda_2' | \, \mathsf{N}[\bar{\psi}_b(y)\bar{\psi}_a(x)\phi(x)\phi(y)\psi_a(x)\psi_b(y)] \, | \mathbf{p}_1^+, \lambda_1; \mathbf{p}_2^+, \lambda_2 \rangle}^{} \Big\} \\
&= (-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \mathrm{d}^4x \, \mathrm{d}^4y \\
&\quad \times \Big\{ \overbrace{\langle \mathbf{q}_1^+, \lambda_1'; \mathbf{q}_2^+, \lambda_2' | \, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)] \, | \mathbf{p}_1^+, \lambda_1; \mathbf{p}_2^+, \lambda_2 \rangle}^{} \\
&\qquad + \overbrace{\langle \mathbf{q}_1^+, \lambda_1'; \mathbf{q}_2^+, \lambda_2' | \, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)] \, | \mathbf{p}_1^+, \lambda_1; \mathbf{p}_2^+, \lambda_2 \rangle}^{} \Big\}.
\end{aligned} \tag{6.78}
$$

第一步花括号中有 4 项，对应于初态和末态各自的 2 种缩并；第 1 项与第 4 项、第 2 项与第 3 项分别具有交换时空坐标 x 和 y 的对称性，贡献相等，因此，在第二步中只保留第 1 项和第 2 项，并消去最前面的 1/2! 因子。第三步将场算符调回 (6.59) 式中的次序，不再出现额外的负号，符合散射矩阵元的缩并规律。根据这个规律，也可以直接写出第三步的结果，接着把纠缠的缩并线解开成第二步的形式，使得花括号中的两项相差一个负号，再往下计算。

这个 $\psi\psi \to \psi\psi$ 散射过程的 Feynman 图如图 6.4 所示，它包含 2 个子图，第 2 个子图可以通过交换第 1 个子图中末态两条费米子外线得到。相应地，这个过程的总不变振幅 $\mathrm{i}\mathcal{M}$ 是 2 个不变振幅的叠加，两者之间相差一个负号，它体现了交换末态全同费米子的反对称性。

如果交换第 1 个子图中初态的两条费米子外线，则得到的图与第 2 个子图基本相同，唯一的差别是两个顶点上的 x 和 y 标签位置相反，实际上就是 (6.78) 式第一步花括号中的第 3 项。同理，交换第 2 个子图中初态两条费米子外线得到的图对应于(6.78) 式第一步花括号中的第 4 项。如前所述，这两种情况的贡献在前面已经考虑了。可见，图 6.4 中的 2 个子图已经包括了 $\mathrm{i}T_2^{(2)}$ 贡献到 $\psi\psi \to \psi\psi$ 散射过程的**全部可能拓扑结构**。

由 (6.78) 式第二步的结果得

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathbf{q}_1^+, \lambda_1'; \mathbf{q}_2^+, \lambda_2' | \, \mathrm{i}T_2^{(2)} \, | \mathbf{p}_1^+, \lambda_1; \mathbf{p}_2^+, \lambda_2 \rangle \\
&= -(-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \mathrm{d}^4x \, \mathrm{d}^4y \, [\bar{u}_a(\mathbf{q}_2, \lambda_2')\bar{u}_b(\mathbf{q}_1, \lambda_1')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(q_2\cdot x + q_1\cdot y)} - \bar{u}_b(\mathbf{q}_2, \lambda_2')\bar{u}_a(\mathbf{q}_1, \lambda_1')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(q_2\cdot y + q_1\cdot x)}] \\
&\quad \times \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x-y)}}{k^2 - m_\phi^2 + \mathrm{i}\epsilon} u_a(\mathbf{p}_2, \lambda_2)u_b(\mathbf{p}_1, \lambda_1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_1\cdot y + p_2\cdot x)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -(-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} \Big[\bar{u}(\mathbf{q}_2,\lambda_2')u(\mathbf{p}_2,\lambda_2)\,\frac{\mathrm{i}}{k^2-m_\phi^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\bar{u}(\mathbf{q}_1,\lambda_1')u(\mathbf{p}_1,\lambda_1) \\
&\qquad\qquad \times (2\pi)^4\delta^{(4)}(k+p_2-q_2)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1-q_1-k) \\
&\qquad\quad - \bar{u}(\mathbf{q}_1,\lambda_1')u(\mathbf{p}_2,\lambda_2)\,\frac{\mathrm{i}}{k^2-m_\phi^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\bar{u}(\mathbf{q}_2,\lambda_2')u(\mathbf{p}_1,\lambda_1) \\
&\qquad\qquad \times (2\pi)^4\delta^{(4)}(k+p_2-q_1)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1-q_2-k)\Big] \\
&= -(-\mathrm{i}\kappa)^2\Big[\bar{u}(\mathbf{q}_2,\lambda_2')u(\mathbf{p}_2,\lambda_2)\,\frac{\mathrm{i}}{(p_1-q_1)^2-m_\phi^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\bar{u}(\mathbf{q}_1,\lambda_1')u(\mathbf{p}_1,\lambda_1) \\
&\qquad\quad - \bar{u}(\mathbf{q}_1,\lambda_1')u(\mathbf{p}_2,\lambda_2)\,\frac{\mathrm{i}}{(p_1-q_2)^2-m_\phi^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\bar{u}(\mathbf{q}_2,\lambda_2')u(\mathbf{p}_1,\lambda_1)\Big] \\
&\quad \times(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2-q_1-q_2).
\end{aligned}
\tag{6.79}
$$

可见，Feynman 图 6.4 第 1 个子图两个顶点处的能动量守恒关系是 $q_2-p_2=k=p_1-q_1$，而第 2 个子图的相应关系是 $q_1-p_2=k=p_1-q_2$。消去 k，均得到初末态的能动量守恒关系 $p_1+p_2=q_1+q_2$。

(3) 接着，讨论一对正反 ψ 粒子**湮灭** (annihilation) 成一对 ϕ 粒子的过程 $\psi\bar{\psi}\to\phi\phi$，初末态分别为 $|i\rangle=\big|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\mathbf{p}_2^-,\lambda_2\big\rangle$ 和 $\langle f|=\langle\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_2|$，$\mathrm{i}T_3^{(2)}$ 和 $\mathrm{i}T_4^{(2)}$ 都会贡献到这个过程。根据 (6.60) 和 (6.61) 式，有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}T_4^{(2)} &= \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\phi(x)\overbrace{\bar{\psi}_a(x)\psi_a(x)\phi(y)\bar{\psi}_b(y)}\psi_b(y)] \\
&= \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\phi(y)\bar{\psi}_b(y)\overbrace{\psi_b(y)\phi(x)\bar{\psi}_a}(x)\psi_a(x)] \\
&= \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4y\,\mathrm{d}^4x\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}_b(x)\overbrace{\psi_b(x)\phi(y)\bar{\psi}_a}(y)\psi_a(y)] = \mathrm{i}T_3^{(2)}.
\end{aligned}
\tag{6.80}
$$

第二步在正规乘积内移动了场算符的位置，第三步交换了时空坐标 x 和 y。从而可得

$$
\mathrm{i}T_3^{(2)}+\mathrm{i}T_4^{(2)} = 2\mathrm{i}T_3^{(2)} = (-\mathrm{i}\kappa)^2\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\langle\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_2|\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\overbrace{\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}}(y)\psi(y)].
\tag{6.81}
$$

可见，$\mathrm{i}T_3^{(2)}$ 和 $\mathrm{i}T_4^{(2)}$ 具有交换时空坐标的对称性，两项相加刚好抵消 1/2! 因子。于是，散射矩阵元为

$$
\begin{aligned}
&\langle\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_2|\,(\mathrm{i}T_3^{(2)}+\mathrm{i}T_4^{(2)})\,\big|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\mathbf{p}_2^-,\lambda_2\big\rangle \\
&= (-\mathrm{i}\kappa)^2\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\langle\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_2|\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}_a(x)\overbrace{\psi_a(x)\phi(y)\bar{\psi}}_b(y)\psi_b(y)]\,\big|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\mathbf{p}_2^-,\lambda_2\big\rangle \\
&= (-\mathrm{i}\kappa)^2\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\langle\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_2|\,\mathsf{N}[\phi^{(-)}(x)\phi^{(-)}(y)\overbrace{\psi_a(x)\bar{\psi}}_b(y)\bar{\psi}_a^{(+)}(x)\psi_b^{(+)}(y)]\,\big|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\mathbf{p}_2^-,\lambda_2\big\rangle\,.
\end{aligned}
\tag{6.82}
$$

这里出现两个负能解标量场算符对全同玻色子末态的作用，作用结果为

$$
\langle\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_2|\,\phi^{(-)}(x)\phi^{(-)}(y)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 q_1\, \mathrm{d}^3 q_2}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_{\mathbf{q}_1} E_{\mathbf{q}_2}}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(q_1\cdot x + q_2 \cdot y)} \sqrt{4E_{\mathbf{k}_1} E_{\mathbf{k}_2}}\, \langle 0|\, a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2} a^\dagger_{\mathbf{q}_1} a^\dagger_{\mathbf{q}_2} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 q_1\, \mathrm{d}^3 q_2}{(2\pi)^6} \sqrt{\frac{E_{\mathbf{k}_1} E_{\mathbf{k}_2}}{E_{\mathbf{q}_1} E_{\mathbf{q}_2}}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(q_1\cdot x + q_2 \cdot y)}\, \langle 0|\, a_{\mathbf{k}_1} [(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}_1) + a^\dagger_{\mathbf{q}_1} a_{\mathbf{k}_2}] a^\dagger_{\mathbf{q}_2} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 q_1\, \mathrm{d}^3 q_2}{(2\pi)^6} \sqrt{\frac{E_{\mathbf{k}_1} E_{\mathbf{k}_2}}{E_{\mathbf{q}_1} E_{\mathbf{q}_2}}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(q_1\cdot x + q_2 \cdot y)} \\
&\qquad \times \langle 0|\, (2\pi)^6 [\delta^{(3)}(\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}_1)\delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}_2) + \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}_1)\delta^{(3)}(\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}_2)] \\
&= \langle 0|\, [\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_2\cdot x + k_1 \cdot y)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1\cdot x + k_2 \cdot y)}] = \langle \overbrace{\mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2|\, \mathsf{N}[\phi(x)\phi(y)]} + \langle \overbrace{\mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2|\, \mathsf{N}[\phi(y)\phi(x)]} \\
&= \langle \overbrace{\mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2|\, \mathsf{N}[\phi(x)\phi(y)]} + \langle \overbrace{\mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2|\, \mathsf{N}[\phi(x)\phi(y)]}, \qquad (6.83)
\end{aligned}
$$

对应于场算符与末态的两种可能缩并，倒数第二、三步中第二项前面的正号体现了交换全同玻色子的对称性。另一方面，两个正能解标量场算符对全同玻色子初态的作用结果为

$$
\begin{aligned}
&\phi^{(+)}(x)\phi^{(+)}(y)\, |\mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2\rangle \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 q_1\, \mathrm{d}^3 q_2}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_{\mathbf{q}_1} E_{\mathbf{q}_2}}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(q_1\cdot x + q_2 \cdot y)} \sqrt{4E_{\mathbf{k}_1} E_{\mathbf{k}_2}}\, a_{\mathbf{q}_1} a_{\mathbf{q}_2} a^\dagger_{\mathbf{k}_1} a^\dagger_{\mathbf{k}_2}\, |0\rangle \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 q_1\, \mathrm{d}^3 q_2}{(2\pi)^6} \sqrt{\frac{E_{\mathbf{k}_1} E_{\mathbf{k}_2}}{E_{\mathbf{q}_1} E_{\mathbf{q}_2}}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(q_1\cdot x + q_2 \cdot y)} a_{\mathbf{q}_1} [(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{k}_1) + a^\dagger_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{q}_2}] a^\dagger_{\mathbf{k}_2}\, |0\rangle \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 q_1\, \mathrm{d}^3 q_2}{(2\pi)^6} \sqrt{\frac{E_{\mathbf{k}_1} E_{\mathbf{k}_2}}{E_{\mathbf{q}_1} E_{\mathbf{q}_2}}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(q_1\cdot x + q_2 \cdot y)} \\
&\qquad \times (2\pi)^6 [\delta^{(3)}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{k}_1)\delta^{(3)}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{k}_2) + \delta^{(3)}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{k}_1)\delta^{(3)}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{k}_2)]\, |0\rangle \\
&= [\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_2\cdot x + k_1 \cdot y)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_1\cdot x + k_2 \cdot y)}]\, |0\rangle = \mathsf{N}[\overbrace{\phi(x)\phi(y)}]\, |\mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2\rangle + \mathsf{N}[\overbrace{\phi(y)\phi(x)}]\, |\mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2\rangle \\
&= \mathsf{N}[\overbrace{\phi(x)\phi(y)}]\, |\mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2\rangle + \mathsf{N}[\overbrace{\phi(x)\phi(y)}]\, |\mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2\rangle\,, \qquad (6.84)
\end{aligned}
$$

对应于场算符与初态的两种可能缩并。类似地可以证明，$\boldsymbol{n}$ 个同类型正（负）能解场算符对 $\boldsymbol{n}$ 个相应全同粒子初（末）态的作用等价于这些场算符与初（末）态的 $\boldsymbol{n!}$ 种缩并。

现在，散射矩阵元 (6.82) 化为

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2|\, (\mathrm{i}T_3^{(2)} + \mathrm{i}T_4^{(2)})\, \big|\mathbf{p}_1^+, \lambda_1;\, \mathbf{p}_2^-, \lambda_2\big\rangle \\
&= (-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \mathrm{d}^4 x\, \mathrm{d}^4 y\, \{\langle \overbrace{\mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2|\, \mathsf{N}[\phi(x)\phi(y)\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)\bar{\psi}_a(x)\psi_b(y)]}\, \big|\overbrace{\mathbf{p}_1^+, \lambda_1;\, \mathbf{p}_2^-}, \lambda_2\big\rangle \\
&\qquad\qquad + \langle \overbrace{\mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2|\, \mathsf{N}[\phi(y)\phi(x)\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)\bar{\psi}_a(x)\psi_b(y)]}\, \big|\overbrace{\mathbf{p}_1^+, \lambda_1;\, \mathbf{p}_2^-}, \lambda_2\big\rangle\, \} \\
&= (-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \mathrm{d}^4 x\, \mathrm{d}^4 y\, \{\langle \overbrace{\mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2|\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)]}\, \big|\overbrace{\mathbf{p}_1^+, \lambda_1;\, \mathbf{p}_2^-}, \lambda_2\big\rangle \\
&\qquad\qquad + \langle \overbrace{\mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2|\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)]}\, \big|\overbrace{\mathbf{p}_1^+, \lambda_1;\, \mathbf{p}_2^-}, \lambda_2\big\rangle\, \}. \qquad (6.85)
\end{aligned}
$$

第二步结果符合散射矩阵元的缩并规律。相应的 Feynman 图如图 6.5 所示。它包含 2 个拓扑不

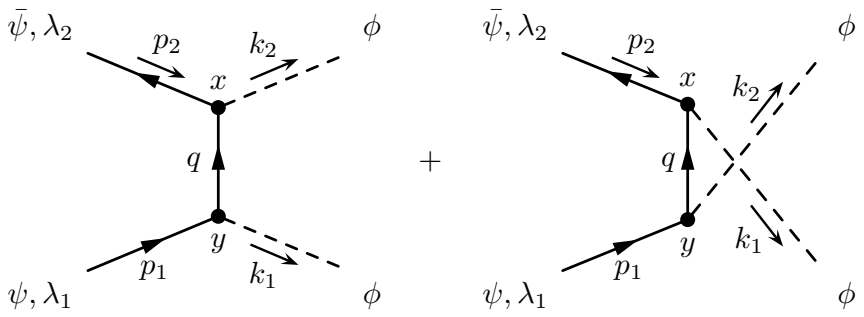


图 6.5: $\mathrm{i}T_3^{(2)} + \mathrm{i}T_4^{(2)}$ 贡献的 $\psi\bar{\psi} \to \phi\phi$ 散射过程 Feynman 图，包含两个子图，相对符号为正。时间方向自左向右。

等价的子图，相对符号为正，体现了交换末态两个全同玻色子的对称性。**拓扑不等价**指的是不能通过连续变形相互转换。

由 (6.85) 式第一步的结果得

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2 | \left(\mathrm{i}T_3^{(2)} + \mathrm{i}T_4^{(2)}\right) \left| \mathbf{p}_1^+, \lambda_1;\, \mathbf{p}_2^-, \lambda_2 \right\rangle \\
&= (-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_2\cdot x + k_1\cdot y)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1\cdot x + k_2\cdot y)}\right] \int \frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{i}(\not{q} + m_\psi)_{ab}}{q^2 - m_\psi^2 + \mathrm{i}\epsilon}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot(x-y)} \\
&\quad \times \bar{v}_a(\mathbf{p}_2, \lambda_2) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2\cdot x} u_b(\mathbf{p}_1, \lambda_1) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot y} \\
&= (-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4} \Big[\bar{v}(\mathbf{p}_2, \lambda_2) \frac{\mathrm{i}(\not{q} + m_\psi)}{q^2 - m_\psi^2 + \mathrm{i}\epsilon}\, u(\mathbf{p}_1, \lambda_1) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q + p_2 - k_2) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 - k_1 - q) \\
&\qquad\qquad + \bar{v}(\mathbf{p}_2, \lambda_2) \frac{\mathrm{i}(\not{q} + m_\psi)}{q^2 - m_\psi^2 + \mathrm{i}\epsilon}\, u(\mathbf{p}_1, \lambda_1) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q + p_2 - k_1) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 - k_2 - q) \Big] \\
&= (-\mathrm{i}\kappa)^2 \left[\bar{v}(\mathbf{p}_2, \lambda_2) \frac{\mathrm{i}(\not{p}_1 - \not{k}_1 + m_\psi)}{(p_1 - k_1)^2 - m_\psi^2 + \mathrm{i}\epsilon}\, u(\mathbf{p}_1, \lambda_1) + \bar{v}(\mathbf{p}_2, \lambda_2) \frac{\mathrm{i}(\not{p}_1 - \not{k}_2 + m_\psi)}{(p_1 - k_2)^2 - m_\psi^2 + \mathrm{i}\epsilon}\, u(\mathbf{p}_1, \lambda_1) \right] \\
&\quad \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2).
\end{aligned}
\tag{6.86}
$$

可见，Feynman 图 6.5 第 1 个子图两个顶点处的能动量守恒关系是 $k_2 - p_2 = q = p_1 - k_1$，而第 2 个子图的相应关系是 $k_1 - p_2 = q = p_1 - k_2$。消去 q，均得到初末态的能动量守恒关系 $p_1 + p_2 = k_1 + k_2$。

(4) 根据 (6.62) 和 (6.63) 式，有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}T_5^{(2)} &= \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!} \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, \mathsf{N}[\phi(x)\overbrace{\bar{\psi}(x)\psi}(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)] \\
&= \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!} \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, \mathsf{N}[\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)\phi(x)\overbrace{\bar{\psi}(x)\psi}(x)] \\
&= \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!} \int \mathrm{d}^4y\, \mathrm{d}^4x\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\overbrace{\bar{\psi}(y)\psi}(y)] = \mathrm{i}T_6^{(2)},
\end{aligned}
\tag{6.87}
$$

故

$$
\mathrm{i}T_5^{(2)} + \mathrm{i}T_6^{(2)} = 2\mathrm{i}T_5^{(2)} = (-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, \mathsf{N}[\phi(x)\overbrace{\bar{\psi}(x)\psi}(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)]. \tag{6.88}
$$

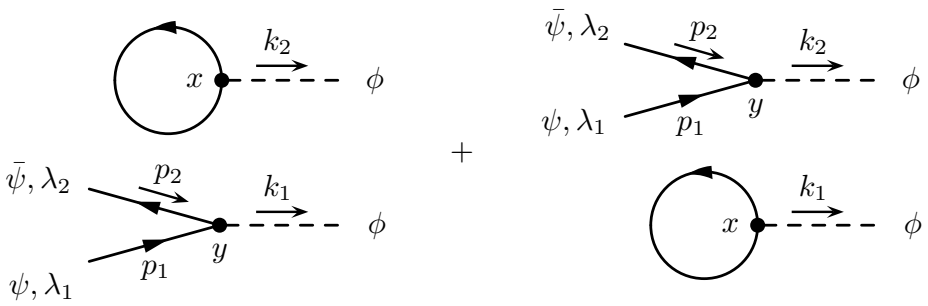


图 6.6: $\mathrm{i}T_5^{(2)} + \mathrm{i}T_6^{(2)}$ 贡献的 Feynman 图。时间方向自左向右。

考虑初态是一对正反费米子，$|i\rangle = \left|\mathbf{p}_1^+, \lambda_1; \mathbf{p}_2^-, \lambda_2\right\rangle$，末态是一对全同玻色子，$\langle f| = \langle \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2|$，则 $\mathrm{i}T_5^{(2)} + \mathrm{i}T_6^{(2)}$ 对散射矩阵元的贡献为

$$\begin{aligned}
&\langle \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2| \left(\mathrm{i}T_5^{(2)} + \mathrm{i}T_6^{(2)}\right) \left|\mathbf{p}_1^+, \lambda_1; \mathbf{p}_2^-, \lambda_2\right\rangle \\
&= (-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, \langle \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2| \mathsf{N}[\phi(x)\bar\psi(x)\psi(x)\phi(y)\bar\psi(y)\psi(y)] \left|\mathbf{p}_1^+, \lambda_1; \mathbf{p}_2^-, \lambda_2\right\rangle \\
&= (-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, \{\langle \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2| \mathsf{N}[\phi(x)\bar\psi(x)\psi(x)\phi(y)\bar\psi(y)\psi(y)] \left|\mathbf{p}_1^+, \lambda_1; \mathbf{p}_2^-, \lambda_2\right\rangle \\
&\qquad\qquad + \langle \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2| \mathsf{N}[\phi(x)\bar\psi(x)\psi(x)\phi(y)\bar\psi(y)\psi(y)] \left|\mathbf{p}_1^+, \lambda_1; \mathbf{p}_2^-, \lambda_2\right\rangle \}.
\end{aligned} \tag{6.89}$$

在第二步中，我们跳过用正负能解表达的步骤，直接按照前述规律写下场算符与初末态的 2 种可能缩并。图 6.6 是相应的 Feynman 图，包含 2 个子图。每个子图都具有 2 个不相连的部分，这些部分是上一小节讨论过的，它们之间不会相互影响。由于末态中有一个 ϕ 粒子没有跟其它粒子连接起来，这种图既不满足能动量守恒定律，也不会贡献到 $\psi\bar\psi \to \phi\phi$ 散射过程。

(5) 根据 (6.64) 和 (6.65) 式，有

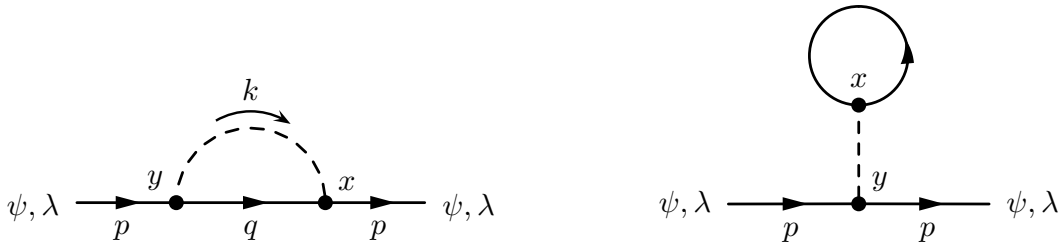
$$\begin{aligned}
\mathrm{i}T_7^{(2)} &= \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!} \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar\psi(x)\psi(x)\phi(y)\bar\psi(y)\psi(y)] \\
&= \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!} \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, \mathsf{N}[\phi(y)\bar\psi(y)\psi(y)\phi(x)\bar\psi(x)\psi(x)] \\
&= \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!} \int \mathrm{d}^4y\, \mathrm{d}^4x\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar\psi(x)\psi(x)\phi(y)\bar\psi(y)\psi(y)] = \mathrm{i}T_8^{(2)},
\end{aligned} \tag{6.90}$$

故

$$\mathrm{i}T_7^{(2)} + \mathrm{i}T_8^{(2)} = 2\mathrm{i}T_7^{(2)} = (-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar\psi(x)\psi(x)\phi(y)\bar\psi(y)\psi(y)]. \tag{6.91}$$

考虑初态和末态均是一个动量为 $\mathbf{p}$、螺旋度为 λ 的 ψ 粒子，即 $|i\rangle = |\mathbf{p}^+, \lambda\rangle$，$\langle f| = \langle \mathbf{p}^+, \lambda|$，散射矩阵元是

$$\begin{aligned}
&\left\langle \mathbf{p}^+, \lambda\right| \left(\mathrm{i}T_7^{(2)} + \mathrm{i}T_8^{(2)}\right) \left|\mathbf{p}^+, \lambda\right\rangle \\
&= (-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, \left\langle \mathbf{p}^+, \lambda\right| \mathsf{N}[\phi(x)\bar\psi(x)\psi(x)\phi(y)\bar\psi(y)\psi(y)] \left|\mathbf{p}^+, \lambda\right\rangle \\
&= (-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, \left\langle \mathbf{p}^+, \lambda\right| \mathsf{N}[\phi(x)\bar\psi(x)\psi(x)\phi(y)\bar\psi(y)\psi(y)] \left|\mathbf{p}^+, \lambda\right\rangle
\end{aligned}$$



(a) $\mathrm{i}T_7^{(2)} + \mathrm{i}T_8^{(2)}$ 贡献的自能图　　(b) $\mathrm{i}T_9^{(2)} + \mathrm{i}T_{10}^{(2)}$ 贡献的自能图

图 6.7: ψ 粒子的单圈自能图。时间方向自左向右。

$$
\begin{aligned}
&= (-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, \langle \overbrace{\mathbf{p}^+, \lambda|}\, \mathsf{N}[\bar\psi(x)\overbrace{\phi(x)\phi(y)}\overbrace{\psi(x)\bar\psi(y)}\overbrace{\psi(y)}]\, \overbrace{|\mathbf{p}^+, \lambda\rangle} \\
&= (-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, \bar u(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x-y)}}{k^2 - m_\phi^2 + \mathrm{i}\epsilon} \int \frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{i}(\not q + m_\psi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot(x-y)}}{q^2 - m_\psi^2 + \mathrm{i}\epsilon}\, u(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot y} \\
&= (-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \frac{\mathrm{d}^4k\, \mathrm{d}^4q}{(2\pi)^8}\, \bar u(\mathbf{p},\lambda)\, \frac{\mathrm{i}}{k^2 - m_\phi^2 + \mathrm{i}\epsilon} \frac{\mathrm{i}(\not q + m_\psi)}{q^2 - m_\psi^2 + \mathrm{i}\epsilon}\, u(\mathbf{p},\lambda) \\
&\qquad \times (2\pi)^4\delta^{(4)}(q + k - p)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p - q - k) \\
&= (-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}\, \bar u(\mathbf{p},\lambda)\, \frac{\mathrm{i}}{(p-q)^2 - m_\phi^2 + \mathrm{i}\epsilon} \frac{\mathrm{i}(\not q + m_\psi)}{q^2 - m_\psi^2 + \mathrm{i}\epsilon}\, u(\mathbf{p},\lambda)(2\pi)^4\delta^{(4)}(0).
\end{aligned} \tag{6.92}
$$

相应的 Feynman 图如图 6.7(a) 所示，是一个圈图。这种初末态都是同一个粒子的圈图称为该粒子的**自能图** (self-energy diagram)。倒数第二步对时空坐标 x 和 y 积分，得到 2 个相等的四维 δ 函数，说明 2 个顶点处的能动量守恒关系相同，都是 $p = q + k$。最后一步对 k 积分，剩下 1 个四维 δ 函数 $\delta^{(4)}(0) = \delta^{(4)}(p - p)$ 以体现初末态满足的能动量守恒定律；此时，还剩下一个未定的圈动量 q^μ，需要对它的所有取值积分。相应的不变振幅是

$$
\mathrm{i}\mathcal{M} = (-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}\, \bar u(\mathbf{p},\lambda)\, \frac{\mathrm{i}}{(p-q)^2 - m_\phi^2 + \mathrm{i}\epsilon} \frac{\mathrm{i}(\not q + m_\psi)}{q^2 - m_\psi^2 + \mathrm{i}\epsilon}\, u(\mathbf{p},\lambda). \tag{6.93}
$$

一般地，具有 n 个未定圈动量的圈图称为 $\boldsymbol{n}$ **圈图**。1 圈图也称为**单圈图**。Feynman 图 6.7(a) 以及 6.2(a)、6.2(b) 都是单圈图。在这些图上再连接一条合适的内线，就得到 2 圈图。

(6) 根据 (6.66) 和 (6.67) 式，有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}T_9^{(2)} &= \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!} \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, \mathsf{N}[\overbrace{\phi(x)\bar\psi(x)}\overbrace{\psi(x)\phi(y)}\bar\psi(y)\psi(y)] \\
&= \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!} \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, \mathsf{N}[\overbrace{\phi(y)\bar\psi(y)\psi(y)}\phi(x)\overbrace{\bar\psi(x)}\psi(x)] \\
&= \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!} \int \mathrm{d}^4y\, \mathrm{d}^4x\, \mathsf{N}[\overbrace{\phi(x)\bar\psi(x)\psi(x)}\phi(y)\overbrace{\bar\psi(y)}\psi(y)] = \mathrm{i}T_{10}^{(2)},
\end{aligned} \tag{6.94}
$$

故

$$
\mathrm{i}T_9^{(2)} + \mathrm{i}T_{10}^{(2)} = 2\mathrm{i}T_9^{(2)} = (-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, \mathsf{N}[\overbrace{\phi(x)\bar\psi(x)}\overbrace{\psi(x)\phi(y)}\bar\psi(y)\psi(y)]. \tag{6.95}
$$

$\mathrm{i}T_9^{(2)}+\mathrm{i}T_{10}^{(2)}$ 也会贡献到 ψ 粒子的单圈自能图，对应的散射矩阵元为

$$\begin{aligned}
&\left\langle \mathbf{p}^+,\lambda\right|\left(\mathrm{i}T_9^{(2)}+\mathrm{i}T_{10}^{(2)}\right)\left|\mathbf{p}^+,\lambda\right\rangle \\
=\;&(-\mathrm{i}\kappa)^2\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\left\langle \mathbf{p}^+,\lambda\right|\mathsf{N}[\overbrace{\phi(x)\bar\psi(x)}\overbrace{\psi(x)\phi(y)}\bar\psi(y)\psi(y)]\left|\mathbf{p}^+,\lambda\right\rangle \\
=\;&(-\mathrm{i}\kappa)^2\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\left\langle \overbrace{\mathbf{p}^+,\lambda\right|\mathsf{N}[\overbrace{\phi(x)\bar\psi(x)}\overbrace{\psi(x)\phi(y)}\overbrace{\bar\psi(y)\psi(y)}]}\left|\mathbf{p}^+,\lambda\right\rangle ,
\end{aligned}\tag{6.96}$$

Feynman 图如图 6.7(b) 所示。

(7) 考虑初态和末态均是一个动量为 $\mathbf{k}$ 的 ϕ 粒子，即 $|i\rangle=|\mathbf{k}\rangle$，$\langle f|=\langle\mathbf{k}|$，根据 (6.68) 式，$\mathrm{i}T_{11}^{(2)}$ 对散射矩阵元的贡献是

$$\begin{aligned}
&\langle\mathbf{k}|\,\mathrm{i}T_{11}^{(2)}\,|\mathbf{k}\rangle=\frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\overbrace{\bar\psi(x)\overbrace{\psi(x)\phi(y)}\bar\psi(y)}\psi(y)]\,|\mathbf{k}\rangle \\
=\;&\frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\{\langle\overbrace{\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)}\bar\psi_a(x)\psi_a(x)\phi(y)\bar\psi_b(y)\psi_b(y)]\,|\mathbf{k}\rangle \\
&\qquad+\langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar\psi_a(x)\psi_a(x)\phi(y)\bar\psi_b(y)\psi_b(y)]\,|\mathbf{k}\rangle\,\} \\
=\;&-\frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\{\langle\overbrace{\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)}\psi_a(x)\bar\psi_b(y)\psi_b(y)\bar\psi_a(x)\phi(y)]\,|\mathbf{k}\rangle \\
&\qquad+\langle\overbrace{\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(y)}\psi_b(y)\bar\psi_a(x)\psi_a(x)\bar\psi_b(y)\phi(x)]\,|\mathbf{k}\rangle\,\} \\
=\;&-(-\mathrm{i}\kappa)^2\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\langle\overbrace{\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)}\psi_b(y)\bar\psi_a(x)\psi_a(x)\bar\psi_b(y)\phi(y)]\,|\mathbf{k}\rangle \\
=\;&-(-\mathrm{i}\kappa)^2\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}S_{\mathrm{F},ba}(y-x)S_{\mathrm{F},ab}(x-y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot y} \\
=\;&-(-\mathrm{i}\kappa)^2\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\int\frac{\mathrm{d}^4p\,\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^8}\;\mathrm{tr}\left[\frac{\mathrm{i}(\not p+m_\psi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(y-x)}}{p^2-m_\psi^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{i}(\not q+m_\psi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot(x-y)}}{q^2-m_\psi^2+\mathrm{i}\epsilon}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot y} \\
=\;&-(-\mathrm{i}\kappa)^2\int\frac{\mathrm{d}^4p\,\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^8}\;\mathrm{tr}\left[\frac{\mathrm{i}(\not p+m_\psi)}{p^2-m_\psi^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{i}(\not q+m_\psi)}{q^2-m_\psi^2+\mathrm{i}\epsilon}\right](2\pi)^4\delta^{(4)}(q-p-k)(2\pi)^4\delta^{(4)}(k+p-q) \\
=\;&-(-\mathrm{i}\kappa)^2\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\;\mathrm{tr}\left[\frac{\mathrm{i}(\not p+m_\psi)}{p^2-m_\psi^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{i}(\not k+\not p+m_\psi)}{(k+p)^2-m_\psi^2+\mathrm{i}\epsilon}\right](2\pi)^4\delta^{(4)}(0).
\end{aligned}\tag{6.97}$$

第三步通过调换场算符位置将纠缠的缩并线解开；花括号中两项均需要交换奇数次相邻费米子场算符，因而产生一个额外的负号；这两项具有交换时空坐标 x 和 y 的对称性，因而在第四步中合为一项，消去 1/2! 因子。相应的 Feynman 图如图 6.8 所示，这是 ϕ 粒子的单圈自能图。

类似于 Feynman 图 6.2(a) 和 6.2(b)，这里验证了一个普遍的结论：**一个封闭的费米子圈贡献一个额外的负号，并且需要对 Dirac 矩阵的乘积求迹。**这种负号是重要的，有可能影响观测量。如果一个封闭的费米子圈上有 n 个顶点，则具有 n 条费米子内线，求迹是对 n 个 Feynman 传播子的乘积进行的。我们已经验证了 $n=1$ 和 $n=2$ 的情形。当 $n=3$ 时，场算符的缩并结构为

$$\mathsf{N}[\overbrace{\bar\psi_a(x)\overbrace{\psi_a(x)\bar\psi_b(y)}\overbrace{\psi_b(y)\bar\psi_c(z)}\psi_c(z)}]=-\,\mathsf{N}[\overbrace{\psi_c(z)\bar\psi_a(x)}\overbrace{\psi_a(x)\bar\psi_b(y)}\overbrace{\psi_b(y)\bar\psi_c(z)}]$$

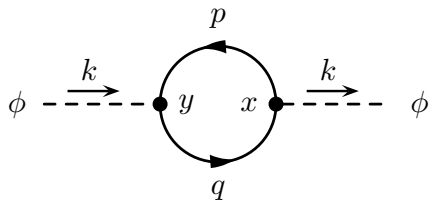
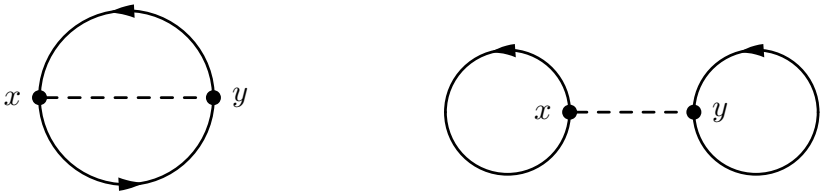


图 6.8: $\mathrm{i}T_{11}^{(2)}$ 贡献的 ϕ 粒子单圈自能图。时间方向自左向右。



(a) $\mathrm{i}T_{13}^{(2)}$ 对应的图　　(b) $\mathrm{i}T_{14}^{(2)}$ 对应的图

图 6.9: $\mathrm{i}T_{13}^{(2)}$ 和 $\mathrm{i}T_{14}^{(2)}$ 对应的气泡图。

$$
\begin{aligned}
&= -S_{\mathrm{F},ca}(z-x)S_{\mathrm{F},ab}(x-y)S_{\mathrm{F},bc}(y-z) \\
&= -\operatorname{tr}[S_{\mathrm{F}}(z-x)S_{\mathrm{F}}(x-y)S_{\mathrm{F}}(y-z)],
\end{aligned} \tag{6.98}
$$

确实出现了负号和求迹。这个结论显然可以推广到任意 n 的情形。

(8) 在这里，我们再次写下 $\mathrm{i}T_{13}^{(2)}$ 和 $\mathrm{i}T_{14}^{(2)}$ 的表达式 (6.70) 和 (6.71)：

$$
\mathrm{i}T_{13}^{(2)} = \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\overbrace{\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)}], \tag{6.99}
$$

$$
\mathrm{i}T_{14}^{(2)} = \frac{(-\mathrm{i}\kappa)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\overbrace{\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)}\overbrace{\bar{\psi}(y)\psi(y)}]. \tag{6.100}
$$

在这两个式子中，正规乘积里面所有场算符都已经参与缩并了，可以直接画出相应的 Feynman 图，分别如图 6.9(a) 和 6.9(b) 所示。这种不包含任何外线的圈图称为**气泡图** (bubble diagram)。由于没有余下需要与初末态缩并的场算符，$\mathrm{i}T_{13}^{(2)}$ 和 $\mathrm{i}T_{14}^{(2)}$ 可以贡献到任意初末态的散射矩阵元中。不过，这些气泡图只会产生一些相位因子，没有可观测的物理效应。

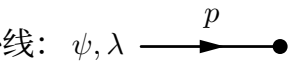
6.2 动量空间 Feynman 规则

在上一节中，我们利用 Wick 定理计算散射矩阵元 $\langle f|\,\mathrm{i}T\,|i\rangle$，将计算过程中的各个部分表达成图形，画出 Feynman 图，并从中归纳出一套*位置空间*中的 Feynman 规则。理解这些规律之后，反过来，我们可以对各个过程画出所有拓扑不等价的 Feynman 图，然后通过 Feynman 规则写出相应*散射矩阵元* $\langle f|\,\mathrm{i}T\,|i\rangle$ *的代数表达式*。不过，当同一过程存在多个子图且涉及费米子场算符时，需要回到带着缩并的表达式，将缩并线解开，以确定各个子图之间的相对符号。

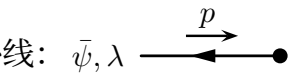
在位置空间 Feynman 规则中，每个顶点对应于一个时空积分，积分的结果是使得出入顶点的内外线上的四维动量满足能动量守恒关系。最后，我们得到依赖于外线动量、但不依赖于

时空坐标的结果，而散射矩阵元 $\langle f|\,\mathrm{i}T\,|i\rangle$ 分解为不变振幅 $\mathrm{i}\mathcal{M}$ 与表示能动量守恒定律的因子 $(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i-p_f)$ 之积。利用这个规律，我们将 Feynman 规则改成**不依赖于时空坐标的形式**，称为**动量空间**中的 Feynman 规则，然后从 Feynman 图直接给出**不变振幅 $\mathrm{i}\mathcal{M}$ 的代数表达式**，进一步简化计算。

根据上一节体现的规律，Yukawa 理论在动量空间中的 Feynman 规则如下。

1. Dirac 正费米子入射外线：

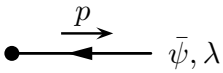
$= u(\mathbf{p},\lambda)$.

2. Dirac 反费米子入射外线：

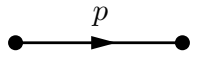
$= \bar v(\mathbf{p},\lambda)$.

3. Dirac 正费米子出射外线：

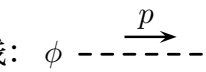
$= \bar u(\mathbf{p},\lambda)$.

4. Dirac 反费米子出射外线：

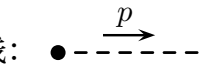
$= v(\mathbf{p},\lambda)$.

5. Dirac 费米子传播子：

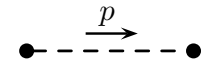
$= \dfrac{\mathrm{i}(\not{p}+m_\psi)}{p^2-m_\psi^2+\mathrm{i}\epsilon} = \dfrac{\mathrm{i}}{\not{p}-m_\psi+\mathrm{i}\epsilon}$.

6. 实标量玻色子入射外线：

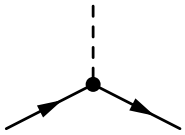
$= 1$.

7. 实标量玻色子出射外线：

$= 1$.

8. 实标量玻色子传播子：

$= \dfrac{\mathrm{i}}{p^2-m_\phi^2+\mathrm{i}\epsilon}$.

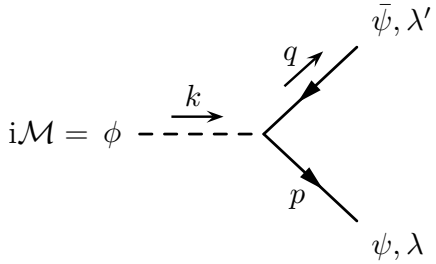
9. Yukawa 相互作用顶点：
$= -\mathrm{i}\kappa$.

10. 出入每个顶点的内外线四维动量满足能动量守恒关系。
11. 每个未定的圈动量 p^μ 贡献一个积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}$。
12. 每个封闭的费米子圈贡献一个额外的负号，并需要对费米子传播子的乘积求迹。

除了关于顶点的第 9 条规则具有 Yukawa 相互作用特有的形式之外，其它规则具有**一般性**。注意，顶点规则与拉氏量中的相互作用项直接对应：将 Yukawa 相互作用项 $\mathcal{L}_\mathrm{Y}=-\kappa\,\phi\bar\psi\psi$ 中的场算符 ϕ、ψ 和 $\bar\psi$ 剥离，再乘以 i，就得到顶点规则的表达式 $-\mathrm{i}\kappa$。

对于某个物理过程，我们可以根据这些 Feynman 规则画出微扰论某一阶上所有拓扑不等价的 Feynman 图，再给出不变振幅的表达式。下面举一些上一节中已经出现过的例子予以比较，我们将画出相关过程的所有拓扑不等价 Feynman 图，再根据动量空间中的 Feynman 规则，逆着费米子线上的箭头方向将图形翻译成代数表达式。

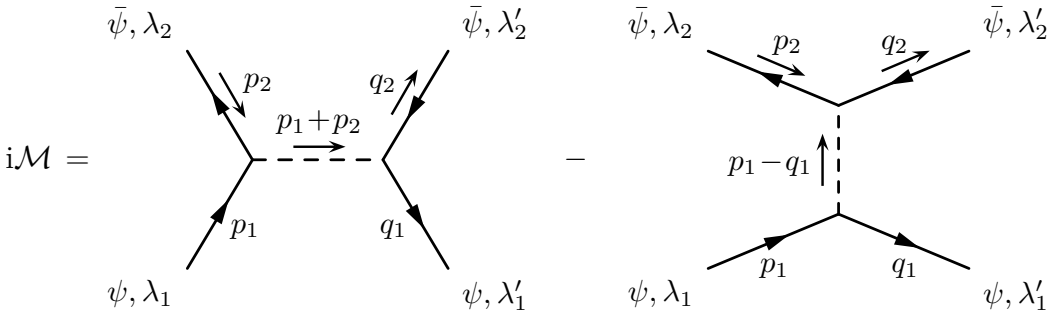
(1) $\phi \to \psi\bar{\psi}$ 衰变过程的领头阶不变振幅为



$$= -\mathrm{i}\kappa\bar{u}(\mathbf{p}, \lambda)v(\mathbf{q}, \lambda'). \tag{6.101}$$

对于上式中的 Feynman 图，我们在不引起混淆的情况下省略了顶点上的圆点。这个结果与 (6.42) 式整体相差一个负号，这是因为此处没有像 (6.32) 式的计算过程那样调换旋量场算符的位置以符合末态中湮灭算符的次序。不过，这个过程只有一个 Feynman 图，没有干涉效应，额外的负号不会影响衰变宽度。像这样的**整体符号差异无关紧要**，它不会改变振幅模方，因而不会影响观测量的计算结果。

(2) 在领头阶，$\psi\bar{\psi} \to \psi\bar{\psi}$ 散射过程具有 2 个拓扑不等价的 Feynman 图，它们之间的**相对符号至关重要**，不变振幅为



$$\begin{aligned}
&= (-\mathrm{i}\kappa)^2\Big[\bar{u}(\mathbf{q}_1, \lambda_1')v(\mathbf{q}_2, \lambda_2')\,\frac{\mathrm{i}}{(p_1+p_2)^2 - m_\phi^2 + \mathrm{i}\epsilon}\,\bar{v}(\mathbf{p}_2, \lambda_2)u(\mathbf{p}_1, \lambda_1) \\
&\qquad - \bar{v}(\mathbf{p}_2, \lambda_2)v(\mathbf{q}_2, \lambda_2')\,\frac{\mathrm{i}}{(p_1-q_1)^2 - m_\phi^2 + \mathrm{i}\epsilon}\,\bar{u}(\mathbf{q}_1, \lambda_1')u(\mathbf{p}_1, \lambda_1)\Big].
\end{aligned} \tag{6.102}$$

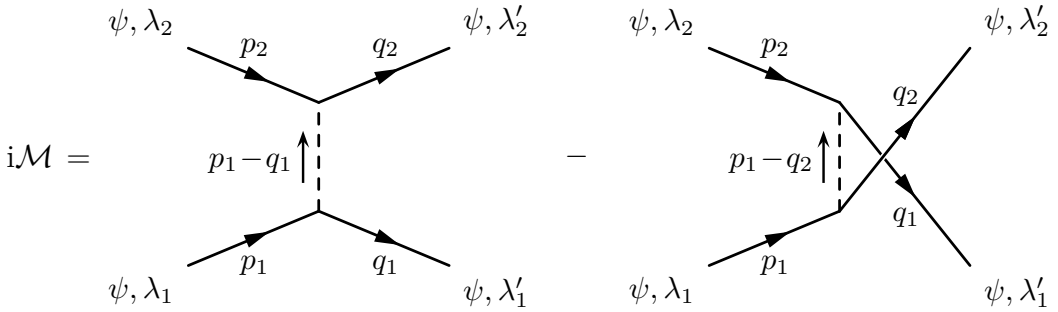
这里利用顶点处的能动量守恒关系，从外线动量决定内线动量。从 Feynman 图本身看不出它们之间的相对符号，我们应当写出缩并表达式进行考察，先保持场算符位置画出 2 种拓扑不等价的缩并方式，再调换场算符位置将缩并线解开：

$$\begin{aligned}
&\big\langle \mathbf{q}_1^+, \lambda_1';\, \mathbf{q}_2^-, \lambda_2' \big|\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)]\, \big|\mathbf{p}_1^+, \lambda_1;\, \mathbf{p}_2^-, \lambda_2\big\rangle \\
&\quad + \big\langle \mathbf{q}_1^+, \lambda_1';\, \mathbf{q}_2^-, \lambda_2' \big|\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)]\, \big|\mathbf{p}_1^+, \lambda_1;\, \mathbf{p}_2^-, \lambda_2\big\rangle \\
&= -\big\langle \mathbf{q}_1^+, \lambda_1';\, \mathbf{q}_2^-, \lambda_2' \big|\, \mathsf{N}[\psi_a(x)\bar{\psi}_a(x)\phi(x)\phi(y)\bar{\psi}_b(y)\psi_b(y)]\, \big|\mathbf{p}_1^+, \lambda_1;\, \mathbf{p}_2^-, \lambda_2\big\rangle
\end{aligned}$$

$$+\langle \overbrace{\mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\ \mathbf{q}_2^-,\lambda_2'|\,\mathsf{N}[\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)\phi(x)\phi(y)\bar{\psi}_a(x)\psi_b(y)]\,|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\ \mathbf{p}_2^-,\lambda_2}\rangle\,. \tag{6.103}$$

由此可知，两个子振幅的符号相反，从而确定 (6.102) 式第一步两个子图之间的相对符号为负。最后的 $\mathrm{i}\mathcal{M}$ 表达式与 (6.74) 式在整体上相差一个负号，但不会影响散射截面的计算结果。

(3) $\psi\psi\to\psi\psi$ 散射过程在领头阶具有 2 个拓扑不等价的 Feynman 图，不变振幅为



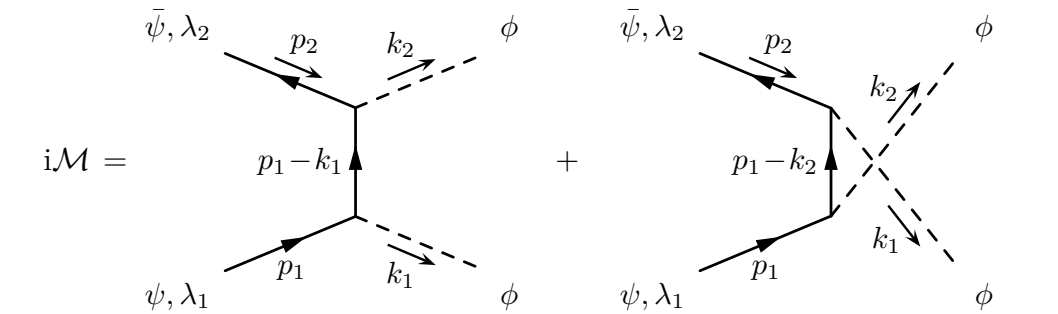
$$\begin{aligned}
&= (-\mathrm{i}\kappa)^2\Big[\bar{u}(\mathbf{q}_2,\lambda_2')u(\mathbf{p}_2,\lambda_2)\,\frac{\mathrm{i}}{(p_1-q_1)^2-m_\phi^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\bar{u}(\mathbf{q}_1,\lambda_1')u(\mathbf{p}_1,\lambda_1)\\
&\qquad -\bar{u}(\mathbf{q}_1,\lambda_1')u(\mathbf{p}_2,\lambda_2)\,\frac{\mathrm{i}}{(p_1-q_2)^2-m_\phi^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\bar{u}(\mathbf{q}_2,\lambda_2')u(\mathbf{p}_1,\lambda_1)\Big].
\end{aligned} \tag{6.104}$$

在这里，画出拓扑不等价 Feynman 图的关键在于注意外线与顶点连接情况的不同：在第一个图中，p_1 外线与 q_1 外线交于同一顶点；在第二个图中，p_1 外线则与 q_2 外线交于同一顶点。相关的缩并表达式为

$$\begin{aligned}
&\langle \overbrace{\mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\ \mathbf{q}_2^+,\lambda_2'|\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}_a(x)\psi_a(x)\phi(y)\bar{\psi}_b(y)\psi_b(y)]\,|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\ \mathbf{p}_2^+,\lambda_2}\rangle\\
&\quad+\langle \overbrace{\mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\ \mathbf{q}_2^+,\lambda_2'|\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}_a(x)\psi_a(x)\phi(y)\bar{\psi}_b(y)\psi_b(y)]\,|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\ \mathbf{p}_2^+,\lambda_2}\rangle\\
&=-\langle \overbrace{\mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\ \mathbf{q}_2^+,\lambda_2'|\,\mathsf{N}[\bar{\psi}_a(x)\bar{\psi}_b(y)\phi(x)\phi(y)\psi_a(x)\psi_b(y)]\,|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\ \mathbf{p}_2^+,\lambda_2}\rangle\\
&\quad+\langle \overbrace{\mathbf{q}_1^+,\lambda_1';\ \mathbf{q}_2^+,\lambda_2'|\,\mathsf{N}[\bar{\psi}_b(y)\bar{\psi}_a(x)\phi(x)\phi(y)\psi_a(x)\psi_b(y)]\,|\mathbf{p}_1^+,\lambda_1;\ \mathbf{p}_2^+,\lambda_2}\rangle\,.
\end{aligned} \tag{6.105}$$

可见，两个 Feynman 图的相对符号为负，体现了交换末态全同费米子的反对称性。

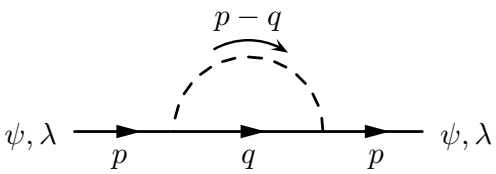
(4) 在领头阶，$\psi\bar{\psi}\to\phi\phi$ 湮灭过程具有 2 个拓扑不等价的 Feynman 图，不变振幅为



$$\begin{aligned}
&= (-\mathrm{i}\kappa)^2\Big[\bar{v}(\mathbf{p}_2,\lambda_2)\,\frac{\mathrm{i}(\not{p}_1-\not{k}_1+m_\psi)}{(p_1-k_1)^2-m_\psi^2+\mathrm{i}\epsilon}\,u(\mathbf{p}_1,\lambda_1)\\
&\qquad+\bar{v}(\mathbf{p}_2,\lambda_2)\,\frac{\mathrm{i}(\not{p}_1-\not{k}_2+m_\psi)}{(p_1-k_2)^2-m_\psi^2+\mathrm{i}\epsilon}\,u(\mathbf{p}_1,\lambda_1)\Big].
\end{aligned} \tag{6.106}$$

这两个 Feynman 图中的费米子线结构相同，因而相对符号为正，体现交换末态全同玻色子的对称性。这里的 $\mathrm{i}\mathcal{M}$ 表达式与 (6.86) 式最后一步的结果完全一致。

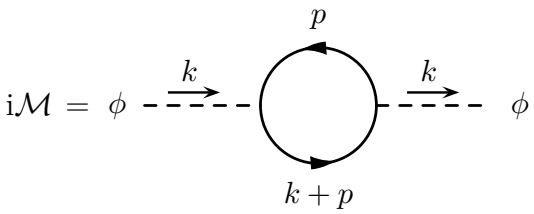
(5) 对于 $\mathrm{i}T_7^{(2)} + \mathrm{i}T_8^{(2)}$ 贡献的 ψ 粒子单圈自能图，不变振幅为



$$= (-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \frac{\mathrm{d}^4 q}{(2\pi)^4}\, \bar{u}(\mathbf{p},\lambda)\, \frac{\mathrm{i}(\not{q} + m_\psi)}{q^2 - m_\psi^2 + \mathrm{i}\epsilon}\, u(\mathbf{p},\lambda)\, \frac{\mathrm{i}}{(p-q)^2 - m_\phi^2 + \mathrm{i}\epsilon}. \tag{6.107}$$

这个结果与 (6.93) 式相同。

(6) 对于 ϕ 粒子的单圈自能图，不变振幅为



$$= -(-\mathrm{i}\kappa)^2 \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4}\ \mathrm{tr}\left[\frac{\mathrm{i}(\not{p} + m_\psi)}{p^2 - m_\psi^2 + \mathrm{i}\epsilon} \frac{\mathrm{i}(\not{k} + \not{p} + m_\psi)}{(k+p)^2 - m_\psi^2 + \mathrm{i}\epsilon}\right]. \tag{6.108}$$

由于这个 Feynman 图包含一个封闭的费米子圈，上式出现了负号和求迹。这个结果与 (6.97) 式最后一步的结果一致。

6.3 ϕ^4 理论与对称性因子

如果拉氏量的相互作用项中含有多个**全同**的量子场，那么，在应用 Wick 定理时需要考虑一些等价的缩并方式，涉及到一些组合因子和对称性因子。在本节中，我们以实标量场的 ϕ^4 理论为例讨论这种情况。

由 (5.1) 式，ϕ^4 理论的相互作用拉氏量为

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{\lambda}{4!}\,\phi^4, \tag{6.109}$$

根据 (5.12) 式，相互作用哈密顿量密度是

$$\mathcal{H}_1 = -\mathcal{L}_1 = \frac{\lambda}{4!}\,\phi^4. \tag{6.110}$$

(6.4) 式表明，$\mathrm{i}T$ 展开式的第 n 阶通项为

$$\mathrm{i}T^{(n)} = \frac{(-\mathrm{i})^n}{n!} \int \mathrm{d}^4 x_1 \cdots \mathrm{d}^4 x_n\, \mathsf{T}[\mathcal{H}_1(x_1) \cdots \mathcal{H}_1(x_n)]$$

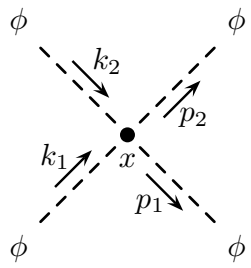


图 6.10: $\mathrm{i}T_1^{(1)}$ 贡献的 $\phi\phi \to \phi\phi$ 散射过程 Feynman 图。时间方向自左向右。

$$= \frac{1}{n!}\left(\frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\right)^n \int \mathrm{d}^4x_1 \cdots \mathrm{d}^4x_n \, \mathsf{T}[\phi^4(x_1)\cdots\phi^4(x_n)]. \tag{6.111}$$

$\mathrm{i}T$ 展开式的第 1 阶（即 λ^1 阶）涉及 4 个实标量场算符的时序乘积，由 Wick 定理将得到 (5.167) 的形式；这里的 4 个场算符是全同的，具有交换对称性，因此，6 种包含 1 次缩并的项彼此相等，3 种包含 2 次缩并的项也彼此相等，故有

$$\mathrm{i}T^{(1)} = \frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\int \mathrm{d}^4x \, \mathsf{T}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)] = \sum_{j=1}^{3} \mathrm{i}T_j^{(1)}, \tag{6.112}$$

其中，

$$\mathrm{i}T_1^{(1)} = \frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\int \mathrm{d}^4x \, \mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)], \tag{6.113}$$

$$\mathrm{i}T_2^{(1)} = \frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\,6\int \mathrm{d}^4x \, \mathsf{N}[\overbrace{\phi(x)\phi}(x)\phi(x)\phi(x)], \tag{6.114}$$

$$\mathrm{i}T_3^{(1)} = \frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\,3\int \mathrm{d}^4x \, \mathsf{N}[\overbrace{\phi(x)\phi}(x)\overbrace{\phi(x)\phi}(x)]. \tag{6.115}$$

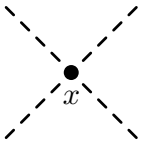
现在，考虑 $\phi\phi \to \phi\phi$ 散射过程，设初态为 $|i\rangle = |\mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2\rangle$，末态为 $\langle f| = \langle \mathbf{p}_1;\, \mathbf{p}_2|$，则 $\mathrm{i}T_1^{(1)}$ 贡献到这个过程的散射矩阵元是

$$\begin{aligned}
&\langle \mathbf{p}_1;\, \mathbf{p}_2|\, \mathrm{i}T_1^{(1)}\, |\mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2\rangle = \frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\int \mathrm{d}^4x \, \langle \mathbf{p}_1;\, \mathbf{p}_2|\, \mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)]\, |\mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2\rangle \\
&= \frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\,4!\int \mathrm{d}^4x \, \langle \overbrace{\mathbf{p}_1;\, \mathbf{p}_2|\, \mathsf{N}[\phi(x)\phi}(x)\overbrace{\phi(x)\phi}(x)]\, |\mathbf{k}_1;\, \mathbf{k}_2\rangle \\
&= -\mathrm{i}\lambda\int \mathrm{d}^4x \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1+p_2)\cdot x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_1+k_2)\cdot x} = -\mathrm{i}\lambda\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(k_1+k_2-p_1-p_2).
\end{aligned} \tag{6.116}$$

第二步根据 (6.83) 和 (6.84) 式让 2 个场算符与全同玻色子初态缩并、另外 2 个场算符与全同玻色子末态缩并，一共有 4! 种缩并方式，因而出现一个**组合因子** 4!，这个因子恰好与前面的 1/4! 因子抵消。第三步用到 (6.15) 和 (6.18) 式。

图 6.10 是相应的 Feynman 图。可以看出，在位置空间中，实标量玻色子入射和出射外线的 Feynman 规则就是 (6.25) 和 (6.31) 式。实际上，外线和内线的 Feynman 规则是由拉氏量中的自由部分决定的，因而不依赖于相互作用理论，具有一般性。(6.39) 式也是 ϕ^4 理论中实标量

玻色子的内线规则，此时 (6.39) 式中的 m_ϕ 就是拉氏量 (5.1) 中的 m。ϕ^4 理论的顶点 Feynman 规则由拉氏量中的相互作用项 (6.109) 决定，形式为



$$= -\mathrm{i}\lambda \int \mathrm{d}^4x\,. \tag{6.117}$$

应用这些规则，可以根据 Feynman 图 6.10 直接写出 (6.116) 式的第三步。

相互作用拉氏量 (6.109) 包含 4 个全同的实标量场 $\phi(x)$ 之积，当它们与初末态缩并时，会出现 4! 种等价的缩并方式，从而产生一个组合因子 4!，它恰好与 (6.109) 式中的 1/4! 因子抵消。也就是说，我们在 (6.109) 式中引入一个 1/4! 因子是为了使顶点规则 (6.117) 中不会出现额外的组合因子，方便 Feynman 图的计算。

从 Feynman 图的角度可以清楚地看出组合因子 4! 的来源：由于实标量玻色子是纯中性粒子，它的粒子线上没有箭头 (注意，并非指表示动量方向的箭头)，四条粒子线对顶点而言是不可区分的；第一条外线有 4 种连接顶点的选择，之后第二条外线有 3 种连接选择，而第三条外线只剩 2 种连接选择，第四条外线则只有 1 种连接选择，一共有 $4\cdot3\cdot2\cdot1=4!$ 种连接方式。

由 (6.116) 式的最后一步可以看出，$\phi\phi\to\phi\phi$ 散射过程的领头阶不变振幅为

$$\mathrm{i}\mathcal{M} = -\mathrm{i}\lambda. \tag{6.118}$$

由于初末态四个粒子质量相同，根据 (5.360) 式，质心系中关于立体角的微分散射截面是

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{CM}} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2E_{\mathrm{CM}}^2} = \frac{\lambda^2}{64\pi^2E_{\mathrm{CM}}^2}, \tag{6.119}$$

它不依赖于 $\mathbf{p}_1$ 的极角 θ 和方位角 ϕ。对 $\mathbf{p}_1$ 的立体角 Ω 积分，就可以得到散射截面。

由于末态两个 ϕ 粒子是全同的，末态对称性因子 $\mathcal{S}=2$，计算散射截面时需要除以 $\mathcal{S}$ 来避免量子态的重复计算。具体来说，在质心系中，末态中两个 ϕ 粒子的动量大小相等，方向相反；当 $\mathbf{p}_1$ 的方向是 (θ,ϕ) 时，$\mathbf{p}_2$ 的方向是 $(\pi-\theta,\phi+\pi)$；反过来，当 $\mathbf{p}_1$ 的方向是 $(\pi-\theta,\phi+\pi)$ 时，$\mathbf{p}_2$ 的方向则是 (θ,ϕ)；然而，由于末态两个 ϕ 粒子是全同的，这两个情况实际上对应于同一个量子态。因此，如果我们对 Ω 作 4π 立体角的积分，就会双重计算每个量子态，这是需要除以 $\mathcal{S}=2$ 的原因。于是，$\phi\phi\to\phi\phi$ 的领头阶散射截面为

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{S}}\int \mathrm{d}\Omega \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{2}\,4\pi\,\frac{\lambda^2}{64\pi^2E_{\mathrm{CM}}^2} = \frac{\lambda^2}{32\pi E_{\mathrm{CM}}^2}. \tag{6.120}$$

接下来，我们讨论 $\mathrm{i}T_2^{(1)}$ 贡献的 ϕ 粒子自能图。记初态为 $|i\rangle=|\mathbf{k}\rangle$，末态为 $\langle f|=\langle\mathbf{k}|$，则 $\mathrm{i}T_2^{(1)}$ 对散射矩阵元的贡献为

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{k}|\,\mathrm{i}T_2^{(1)}\,|\mathbf{k}\rangle &= \frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\,6\int \mathrm{d}^4x\ \langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\overbrace{\phi(x)\phi}(x)\phi(x)\phi(x)]\,|\mathbf{k}\rangle \\ &= \frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\,6\cdot2\int \mathrm{d}^4x\ \langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\overbrace{\phi(x)\overbrace{\phi(x)\phi}(x)\phi}(x)\overbrace{\phi(x)}]\,|\mathbf{k}\rangle\end{aligned}$$

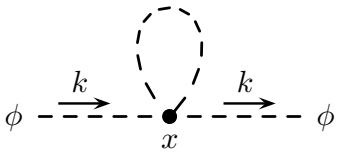


图 6.11: $\mathrm{i}T_2^{(1)}$ 贡献的 ϕ 粒子自能图。

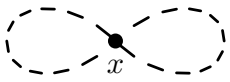


图 6.12: $\mathrm{i}T_3^{(1)}$ 贡献的气泡图。

$$= \frac{-\mathrm{i}\lambda}{2}\int \mathrm{d}^4x\ \langle \mathbf{k}|\, \mathsf{N}[\overbrace{\phi(x)\phi(x)}\overbrace{\phi(x)\phi(x)}]\,|\mathbf{k}\rangle\,. \tag{6.121}$$

第一步中的组合因子 6 计算了对 $\phi^4(x)$ 中取 2 个场算符相互缩并的组合数，第二步中的组合因子 2 计算了对余下 2 个场算符与初末态缩并的组合数。这两个组合因子将分母 $4! = 24$ 约化为 2，得到第三步的结果，这样剩下的 2 称为 Feynman 图的**对称性因子** (symmetry factor)。

Feynman 图如图 6.11 所示，它具有一条开始并结束于同一个顶点的内线，由于实标量玻色子的内线上没有箭头，这条内线的两端对于这个顶点而言是不可分辨的，即是全同的，因而用内线的两端连接顶点时的 2 种连接方式实际上是同一种，在计算时需要除以 2，否则就会双重计算。这就是因子 2 称为 Feynman 图的对称性因子的原因，它体现了 Feynman 图关于全同粒子线的对称性。实际上，分析 *Feynman* 图对称性得到的因子总是与散射矩阵元计算中剩下的因子相同，下面将继续验证这个规律。如果先画出 Feynman 图，再利用位置空间的 Feynamn 规则写出散射矩阵元，则最后必须**除以 Feynman 图的对称性因子**才能得出正确的结果。

在

$$\mathrm{i}T_3^{(1)} = \frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\,3\int \mathrm{d}^4x\,\mathsf{N}[\overbrace{\phi(x)\phi(x)}\overbrace{\phi(x)\phi(x)}] = \frac{-\mathrm{i}\lambda}{8}\int \mathrm{d}^4x\,\mathsf{N}[\overbrace{\phi(x)\phi(x)}\overbrace{\phi(x)\phi(x)}] \tag{6.122}$$

的表达式中，正规乘积里面所有场算符都已经参与缩并了，因此它的 Feynman 图是气泡图，如图 6.12 所示。由上式第二步可见，对称性因子为 8。从 Feynman 图的角度看，图中 2 个始末端连接同一顶点的圈各自贡献一个因子 2，而这 2 个圈彼此也是全同的，再贡献一个因子 2，故 Feynman 图的对称性因子为 $2\cdot 2\cdot 2 = 8$，验证了上述规律。

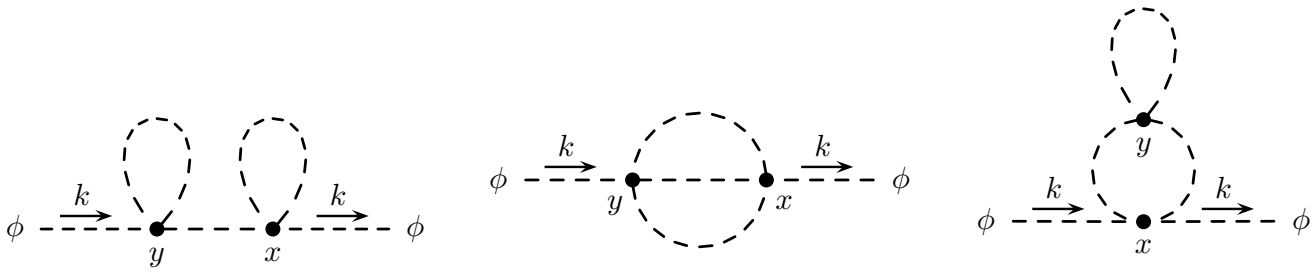
在 $\mathrm{i}T$ 展开式的第 2 阶，即 λ^2 阶，由 (6.111) 式有

$$\mathrm{i}T^{(2)} = \frac{1}{2!}\left(\frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\right)^2\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{T}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]. \tag{6.123}$$

通过 Wick 定理可以将上式化为许多个包含正规乘积的项，这里我们只讨论对 ϕ 粒子的自能图有贡献的项，有 3 种情况。

第 1 种情况具有如下缩并结构，

$$\begin{aligned}\mathrm{i}T_1^{(2)} &= \frac{1}{2!}\left(\frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\right)^2 4\cdot 4\cdot 3\cdot 3\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\phi(x)\overbrace{\phi(x)\phi(x)}\overbrace{\phi(x)\phi(y)}\overbrace{\phi(y)\phi(y)}\phi(y)]\\ &= \frac{1}{2!}\frac{(-\mathrm{i}\lambda)^2}{4}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\phi(x)\overbrace{\phi(x)\phi(x)}\overbrace{\phi(x)\phi(y)}\overbrace{\phi(y)\phi(y)}\phi(y)].\end{aligned} \tag{6.124}$$



(a) $\mathrm{i}T_1^{(2)}$ 贡献的图　(b) $\mathrm{i}T_2^{(2)}$ 贡献的图　(c) $\mathrm{i}T_3^{(2)}$ 贡献的图

图 6.13: $\mathrm{i}T^{(2)}$ 贡献的 ϕ 粒子自能图。

在第一步中，从 $\phi^4(x)$ 和 $\phi^4(y)$ 里面分别取 1 个 $\phi(x)$ 和 1 个 $\phi(y)$ 出来缩并的方法有 $4\cdot 4$ 种，再从余下的 3 个 $\phi(x)$ [或 $\phi(y)$] 中取 2 个 $\phi(x)$ [或 $\phi(y)$] 出来缩并的方法有 $C_3^2=3$ 种，因而组合因子为 $4\cdot 4\cdot 3\cdot 3$。$\mathrm{i}T_1^{(2)}$ 对散射矩阵元的贡献为

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{k}|\,\mathrm{i}T_1^{(2)}\,|\mathbf{k}\rangle &= \frac{1}{2!}\frac{(-\mathrm{i}\lambda)^2}{4}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\{\langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]\,|\mathbf{k}\rangle \\ &\qquad + \langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]\,|\mathbf{k}\rangle\,\} \\ &= \frac{(-\mathrm{i}\lambda)^2}{4}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\;\langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]\,|\mathbf{k}\rangle\,. \end{aligned}\tag{6.125}$$

第一步包含 2 种与初末态缩并的方式，这 2 种方式关于时空坐标 x 和 y 的交换是对称的，因而可以合成一项，贡献一个 2! 因子，恰好与最前面的 1/2! 因子抵消，从而得到第二步的结果，它表明这个过程的对称性因子为 4。图 6.13(a) 是相应的 Feynman 图，具有 2 个始末端连接同一个顶点的圈，各自贡献一个因子 2，故 Feynman 图的对称性因子为 $2\cdot 2=4$。

第 2 种情况具有如下缩并结构，

$$\begin{aligned}\mathrm{i}T_2^{(2)} &= \frac{1}{2!}\left(\frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\right)^2 4\cdot 4\cdot 6\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)] \\ &= \frac{1}{2!}\frac{(-\mathrm{i}\lambda)^2}{6}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]. \end{aligned}\tag{6.126}$$

在第一步中，从 $\phi^4(x)$ 和 $\phi^4(y)$ 里面分别取 3 个 $\phi(x)$ 和 3 个 $\phi(y)$ 出来的方法有 $C_4^3C_4^3=4\cdot 4$ 种，将这 3 个 $\phi(x)$ 和 3 个 $\phi(y)$ 彼此缩并的排列方法有 $3!=6$ 种，因而组合因子是 $4\cdot 4\cdot 6$。$\mathrm{i}T_2^{(2)}$ 对散射矩阵元的贡献为

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{k}|\,\mathrm{i}T_2^{(2)}\,|\mathbf{k}\rangle &= \frac{1}{2!}\frac{(-\mathrm{i}\lambda)^2}{6}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\{\langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]\,|\mathbf{k}\rangle \\ &\qquad + \langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]\,|\mathbf{k}\rangle\,\} \\ &= \frac{(-\mathrm{i}\lambda)^2}{6}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\;\langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]\,|\mathbf{k}\rangle\,. \end{aligned}\tag{6.127}$$

第一步包含 2 种与初末态缩并的方式，它们关于 x 和 y 的交换是对称的，合为一项之后，抵消掉最前面的 $1/2!$ 因子，结果表明这个过程的对称性因子为 6。图 6.13(b) 是相应的 Feynman 图，有 3 条全同内线连接两个不同的顶点，这 3 条内线有 3! 种排列方法，故 Feynman 图的对称性因子为 $3! = 6$。

第 3 种情况包含具有如下缩并结构的两项，

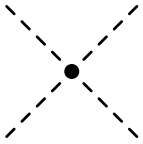
$$\begin{aligned} \mathrm{i}T_3^{(2)} &= \frac{1}{2!}\left(\frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\right)^2 6\cdot 6\cdot 2\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\{\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\overbrace{\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)}\overbrace{\phi(y)\phi(y)}] \\ &\qquad + \mathsf{N}[\overbrace{\phi(x)\phi(x)}\overbrace{\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)}\phi(y)\phi(y)]\} \\ &= \frac{(-\mathrm{i}\lambda)^2}{8}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[\phi(x)\phi(x)\overbrace{\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)}\overbrace{\phi(y)\phi(y)}]. \end{aligned} \tag{6.128}$$

在第一步中，花括号内的两项关于 x 和 y 的交换是对称的，合为一项则抵消掉最前面的 $1/2!$ 因子。两项具有相同的组合因子；在每一项中，从 $\phi^4(x)$ 和 $\phi^4(y)$ 里面分别取 2 个 $\phi(x)$ 和 2 个 $\phi(y)$ 出来的方法有 $C_4^2C_4^2 = 6\cdot 6$ 种，将这 2 个 $\phi(x)$ 和 2 个 $\phi(y)$ 彼此缩并的排列方法有 2 种，因而组合因子为 $6\cdot 6\cdot 2$。$\mathrm{i}T_3^{(2)}$ 对散射矩阵元的贡献为

$$\begin{aligned} \langle\mathbf{k}|\,\mathrm{i}T_3^{(2)}\,|\mathbf{k}\rangle &= \frac{(-\mathrm{i}\lambda)^2}{8}\,2\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\overbrace{\phi(x)}\overbrace{\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)}]\,|\mathbf{k}\rangle \\ &= \frac{(-\mathrm{i}\lambda)^2}{4}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\langle\mathbf{k}|\,\mathsf{N}[\overbrace{\phi(x)}\overbrace{\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)}]\,|\mathbf{k}\rangle\,. \end{aligned} \tag{6.129}$$

在第一步中，与初末态缩并的方式有 2 种，因而组合因子为 2，结果表明对称性因子为 4。相应的 Feynman 图如图 6.13(c) 所示，图中始末端连接同一顶点的 1 个圈贡献一个因子 2，连接两个不同顶点的 2 条全同内线有 2 种排列方法，故 Feynman 图的对称性因子为 $2\cdot 2 = 4$。

在动量空间中，除了顶点规则外，6.2 节里面关于实标量场的 Feynman 规则也适用于 ϕ^4 理论；具体来说，仍然适用的规则包括实标量玻色子的外线规则 6 和 7，内线规则 8，以及规则 10 和 11。此外，还应该加上以下两条规则。

- ϕ^4 相互作用顶点： $= -\mathrm{i}\lambda$.
- 每个 Feynman 图的表达式要除以它的对称性因子。

注意，将 ϕ^4 相互作用项 $\mathcal{L}_1 = -\lambda\phi^4/4!$ 中的 4 个场算符 ϕ 剥离，乘以 i，还要再乘上 4 个 ϕ 的排列数 4!，才得到顶点规则的表达式 $-\mathrm{i}\lambda$。

6.4 一般内外线 Feynman 规则

上述讨论表明，外线和内线的 Feynman 规则不依赖于相互作用理论，是由拉氏量中的自由部分决定的，具有一般性。在本节中，我们讨论复标量场、有质量实矢量场和无质量实矢量场的一般内外线规则，这些规则适用于各种相关的相互作用理论。

(1) 复标量场 $\phi(x)$ 描述的玻色子有正反之分，引入两种动量为 $\mathbf{p}$ 的单粒子态，

$$\text{正标量玻色子 } \phi \text{ 的单粒子态 } \left|\mathbf{p}^{+}\right\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\left|0\right\rangle, \tag{6.130}$$

$$\text{反标量玻色子 } \bar{\phi} \text{ 的单粒子态 } \left|\mathbf{p}^{-}\right\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, b_{\mathbf{p}}^{\dagger}\left|0\right\rangle. \tag{6.131}$$

现在由复标量场的正负能解展开式 (5.213) 和 (5.214) 计算场算符与初末态缩并的结果。$\phi(x)$ 与正标量玻色子初态的缩并为

$$\begin{aligned}\overbrace{\phi(x)\left|\mathbf{p}^{+}\right\rangle} \equiv \phi^{(+)}(x)\left|\mathbf{p}^{+}\right\rangle &= \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\, a_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\left|0\right\rangle \\ = \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3}\frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}[a_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{p}}^{\dagger}]\left|0\right\rangle &= \int \mathrm{d}^3 q\,\frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p})\left|0\right\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\left|0\right\rangle.\end{aligned} \tag{6.132}$$

第四步用到产生湮灭算符的对易关系 (2.183)。类似地，$\phi^{\dagger}(x)$ 与反标量玻色子初态的缩并为

$$\overbrace{\phi^{\dagger}(x)\left|\mathbf{p}^{-}\right\rangle} \equiv \phi^{\dagger(+)}(x)\left|\mathbf{p}^{-}\right\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\, b_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, b_{\mathbf{p}}^{\dagger}\left|0\right\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\left|0\right\rangle. \tag{6.133}$$

另一方面，$\phi^{\dagger}(x)$ 与正标量玻色子末态的缩并为

$$\begin{aligned}\overbrace{\left\langle\mathbf{p}^{+}\right|\phi^{\dagger}}(x) \equiv \left\langle\mathbf{p}^{+}\right|\phi^{\dagger(-)}(x) &= \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3}\,\left\langle 0\right|\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, a_{\mathbf{p}}\,\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\, a_{\mathbf{q}}^{\dagger}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x} \\ = \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3}\frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\left\langle 0\right|[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^{\dagger}] &= \int \mathrm{d}^3 q\,\frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\left\langle 0\right|\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = \left\langle 0\right|\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x},\end{aligned} \tag{6.134}$$

而 $\phi(x)$ 与反标量玻色子末态的缩并为

$$\overbrace{\left\langle\mathbf{p}^{-}\right|\phi}(x) \equiv \left\langle\mathbf{p}^{-}\right|\phi^{(-)}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3}\,\left\langle 0\right|\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, b_{\mathbf{p}}\,\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\, b_{\mathbf{q}}^{\dagger}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x} = \left\langle 0\right|\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}. \tag{6.135}$$

我们用**带箭头的虚线**表示复标量玻色子的运动，线上的箭头可认为是某种 U(1) 荷流动的方向，或者说是玻色子数流动的方向。根据上述结果及 Feynman 传播子表达式 (5.222)，我们写下位置空间中复标量场的一般内外线规则，

ϕ ---$\overset{p}{\blacktriangleright}$--- x $= \langle 0|\,\overbrace{\phi(x)\left|\mathbf{p}^{+}\right\rangle} = \langle 0|\,\phi^{(+)}(x)\left|\mathbf{p}^{+}\right\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x},$ (6.136)

$\bar{\phi}$ ---$\overset{p}{\blacktriangleleft}$--- x $= \langle 0|\,\overbrace{\phi^{\dagger}(x)\left|\mathbf{p}^{-}\right\rangle} = \langle 0|\,\phi^{\dagger(+)}(x)\left|\mathbf{p}^{-}\right\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x},$ (6.137)

x ---$\overset{p}{\blacktriangleright}$--- ϕ $= \overbrace{\left\langle\mathbf{p}^{+}\right|\phi^{\dagger}}(x)\left|0\right\rangle = \left\langle\mathbf{p}^{+}\right|\phi^{\dagger(-)}(x)\left|0\right\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x},$ (6.138)

x ---$\overset{p}{\blacktriangleleft}$--- $\bar{\phi}$ $= \overbrace{\left\langle\mathbf{p}^{-}\right|\phi}(x)\left|0\right\rangle = \left\langle\mathbf{p}^{-}\right|\phi^{(-)}(x)\left|0\right\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x},$ (6.139)

x ---$\overset{p}{\blacktriangleright}$--- y $= \overbrace{\phi(y)\phi^{\dagger}}(x) = D_{\mathrm{F}}(y-x) = \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{p^2 - m_{\phi}^2 + \mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(y-x)}.$ (6.140)

其中，m_ϕ 是标量玻色子 ϕ 的质量。

(2) 有质量实矢量场 $A^\mu(x)$ 描述一种纯中性的矢量玻色子 A，具有 3 种螺旋度 $\lambda=\pm,0$。记动量为 $\mathbf{p}$、螺旋度为 λ 的 A 单粒子态为 $|\mathbf{p},\lambda\rangle=\sqrt{2E_\mathbf{p}}\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}|0\rangle$。根据有质量矢量场的正负能解展开式 (5.137) 和 (5.138)，$A^\mu(x)$ 与实矢量玻色子初态的缩并为

$$\begin{aligned}
&\overbrace{A^\mu(x)\,|\mathbf{p},\lambda\rangle} \equiv A^{\mu(+)}(x)\,|\mathbf{p},\lambda\rangle \\
&=\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{q}}}\sum_{\lambda'=\pm,0}\varepsilon^\mu(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}\sqrt{2E_\mathbf{p}}\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}|0\rangle \\
&=\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{\sqrt{E_\mathbf{p}}}{\sqrt{E_\mathbf{q}}}\sum_{\lambda'=\pm,0}\varepsilon^\mu(\mathbf{q},\lambda')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}[a_{\mathbf{q},\lambda'},a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}]\,|0\rangle \\
&=\int\mathrm{d}^3q\,\frac{\sqrt{E_\mathbf{p}}}{\sqrt{E_\mathbf{q}}}\sum_{\lambda'=\pm,0}\varepsilon^\mu(\mathbf{q},\lambda')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}\delta_{\lambda'\lambda}\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p})\,|0\rangle=\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\,|0\rangle\,,
\end{aligned}\tag{6.141}$$

而 $A^\mu(x)$ 与实矢量玻色子末态的缩并为

$$\begin{aligned}
&\overbrace{\langle\mathbf{p},\lambda|\,A^\mu(x)} \equiv \langle\mathbf{p},\lambda|\,A^{\mu(-)}(x) \\
&=\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\langle0|\sqrt{2E_\mathbf{p}}\,a_{\mathbf{p},\lambda}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{q}}}\sum_{\lambda'=\pm,0}\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{q},\lambda')a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x} \\
&=\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{\sqrt{E_\mathbf{p}}}{\sqrt{E_\mathbf{q}}}\sum_{\lambda'=\pm,0}\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{q},\lambda')\langle0|\,[a_{\mathbf{p},\lambda},a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}]\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x} \\
&=\int\mathrm{d}^3q\,\frac{\sqrt{E_\mathbf{p}}}{\sqrt{E_\mathbf{q}}}\sum_{\lambda'=\pm,0}\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{q},\lambda')\langle0|\,\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}=\langle0|\,\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}.
\end{aligned}\tag{6.142}$$

上面两式的第四步均用到产生湮灭算符的对易关系 (3.268)。我们用**波浪线**表示有质量实矢量玻色子的运动，根据上述结果写下位置空间中有质量实矢量场的一般外线规则，

$$A,\lambda;\mu \overset{p}{\sim\!\!\sim\!\!\bullet} x \;=\langle0|\,\overbrace{A^\mu(x)\,|\mathbf{p},\lambda\rangle}\;=\langle0|\,A^{\mu(+)}(x)\,|\mathbf{p},\lambda\rangle=\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x},\tag{6.143}$$

$$x \overset{p}{\bullet\!\!\sim\!\!\sim} A,\lambda;\mu \;=\overbrace{\langle\mathbf{p},\lambda|\,A^\mu(x)}\,|0\rangle\;=\langle\mathbf{p},\lambda|\,A^{\mu(-)}(x)\,|0\rangle=\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}.\tag{6.144}$$

现在讨论有质量实矢量场的内线规则。我们在前面的计算中已经发现，有质量矢量场的 Feynman 传播子表达式 (5.243) 包含一个非协变项。接下来的讨论将表明这个非协变项在微扰论中的贡献恰好被相互作用哈密顿量密度中非协变项 (5.98) 的贡献抵消，因而理论仍然具有 Lorentz 协变性。

与前面一样，假设相互作用拉氏量具有 (5.62) 的形式，那么，由 (5.97) 式可知，相互作用绘景中的相互作用哈密顿量密度为

$$\mathcal{H}_1(x)=gJ_\mu(x)A^\mu(x)+\frac{g^2}{2m_A^2}[J^0(x)]^2.\tag{6.145}$$

其中，g 是耦合常数，m_A 是实矢量玻色子的质量，而上式右边第二项就是非协变项 (5.98)。根据 (6.4) 式，$\mathrm{i}T$ 展开式的前 2 阶为

$$\mathrm{i}T^{(1)} = -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\, \mathsf{T}\Big[gJ_\mu(x)A^\mu(x) + \frac{g^2}{2m_A^2}J^0(x)J^0(x)\Big], \tag{6.146}$$

$$\mathrm{i}T^{(2)} = \frac{(-\mathrm{i})^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{T}\Big\{\Big(gJ_\mu(x)A^\mu(x) + \frac{g^2}{2m_A^2}[J^0(x)]^2\Big) \times \Big(gJ_\nu(y)A^\nu(y) + \frac{g^2}{2m_A^2}[J^0(y)]^2\Big)\Big\}. \tag{6.147}$$

应用 Wick 定理之后，Feynman 传播子 $\overbrace{A^\mu(x)A^\nu}(y) = \Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y)$ 出现在 $n \geqslant 2$ 的 $\mathrm{i}T^{(n)}$ 中。比如，$\mathrm{i}T^{(2)}$ 包含一个出现 Feynman 传播子的 g^2 阶的项，

$$\begin{aligned}\mathrm{i}T_1^{(2)} &= \frac{(\mathrm{i}g)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}[J_\mu(x)\overbrace{A^\mu(x)J_\nu(y)A^\nu}(y)] \\ &= \frac{(\mathrm{i}g)^2}{2}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}\,[J_\mu(x)J_\nu(y)\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y)] \\ &= \frac{(\mathrm{i}g)^2}{2}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}\Big\{J_\mu(x)J_\nu(y) \\ &\qquad \times\Big[\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}(g^{\mu\nu}-p^\mu p^\nu/m_A^2)}{p^2-m_A^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)} - \frac{\mathrm{i}}{m_A^2}\,g^{\mu0}g^{\nu0}\delta^{(4)}(x-y)\Big]\Big\}.\end{aligned} \tag{6.148}$$

第三步用到 (5.243) 式，最后一步方括号中的第二项是非协变项。另一方面，$\mathrm{i}T^{(1)}$ 也包含一个 g^2 阶的项，

$$\begin{aligned}\mathrm{i}T_1^{(1)} &= -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\mathsf{N}\left[\frac{g^2}{2m_A^2}\,J^0(x)J^0(x)\right] = \frac{(\mathrm{i}g)^2}{2}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}\left[\frac{\mathrm{i}}{m_A^2}\,J^0(x)J^0(y)\delta^{(4)}(x-y)\right] \\ &= \frac{(\mathrm{i}g)^2}{2}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}\left[\frac{\mathrm{i}}{m_A^2}\,J_\mu(x)J_\nu(y)g^{\mu0}g^{\nu0}\delta^{(4)}(x-y)\right].\end{aligned} \tag{6.149}$$

上式是非协变的。在微扰论的 g^2 阶计算中，必须同时考虑 $\mathrm{i}T_1^{(2)}$ 和 $\mathrm{i}T_1^{(1)}$ 的贡献。两者相加，则非协变项恰好相消，得到一个 Lorentz 协变的表达式：

$$\mathrm{i}T_1^{(2)} + \mathrm{i}T_1^{(1)} = \frac{(\mathrm{i}g)^2}{2}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathsf{N}\left\{J_\mu(x)J_\nu(y)\left[\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}(g^{\mu\nu}-p^\mu p^\nu/m_A^2)}{p^2-m_A^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}\right]\right\}. \tag{6.150}$$

上式方括号里面的部分是 Feynman 传播子表达式 (5.243) 中的 Lorentz 协变项，在实际计算中，只有这一项有贡献。因此，我们可以将位置空间中有质量实矢量场的一般内线规则设置为

$$x;\nu \overset{p}{\bullet\!\!\sim\!\!\rightarrow\!\!\bullet} y;\mu \;=\; \overbrace{A^\mu(y)A^\nu}(x) \text{ 的 Lorentz 协变项}$$

$$= \int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}(g^{\mu\nu}-p^\mu p^\nu/m_A^2)}{p^2-m_A^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(y-x)}. \tag{6.151}$$

(3) 无质量实矢量场 $A^\mu(x)$ 描述一种纯中性的无质量矢量玻色子 A，具有螺旋度 $\lambda = \pm$ 的 2 种物理态。记动量为 $\mathbf{p}$、螺旋度为 λ 的 A 粒子态为 $|\mathbf{p},\lambda\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}|0\rangle$。由无质量矢量场

的平面波展开式 (3.416)，正能解部分和负能解部分可以表示成

$$A^{\mu(+)}(x)=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\left[\sum_{\sigma=0,3}e^{\mu}(\mathbf{p},\sigma)b_{\mathbf{p},\sigma}+\sum_{\lambda=\pm}\varepsilon^{\mu}(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\right],\tag{6.152}$$

$$A^{\mu(-)}(x)=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\left[\sum_{\sigma=0,3}e^{\mu}(\mathbf{p},\sigma)b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}+\sum_{\lambda=\pm}\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}\right].\tag{6.153}$$

从而，根据产生湮灭算符的对易关系 (3.412)，$A^{\mu}(x)$ 与实矢量玻色子初态的缩并为

$$\begin{aligned}
&\overbrace{A^{\mu}(x)\,|\mathbf{p},\lambda\rangle}\equiv A^{\mu(+)}(x)\,|\mathbf{p},\lambda\rangle\\
=&\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}\left[\sum_{\sigma=0,3}e^{\mu}(\mathbf{q},\sigma)b_{\mathbf{q},\sigma}+\sum_{\lambda'=\pm}\varepsilon^{\mu}(\mathbf{q},\lambda')a_{\mathbf{q},\lambda'}\right]\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}\,|0\rangle\\
=&\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}\left\{\sum_{\sigma=0,3}e^{\mu}(\mathbf{q},\sigma)[b_{\mathbf{q},\sigma},a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}]+\sum_{\lambda'=\pm}\varepsilon^{\mu}(\mathbf{q},\lambda')[a_{\mathbf{q},\lambda'},a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}]\right\}|0\rangle\\
=&\int\mathrm{d}^3q\,\frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}}\sum_{\lambda'=\pm}\varepsilon^{\mu}(\mathbf{q},\lambda')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}\delta_{\lambda'\lambda}\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p})\,|0\rangle=\varepsilon^{\mu}(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\,|0\rangle\,,
\end{aligned}\tag{6.154}$$

而 $A^{\mu}(x)$ 与实矢量玻色子末态的缩并为

$$\begin{aligned}
&\langle\overbrace{\mathbf{p},\lambda|\,A^{\mu}(x)}\equiv\langle\mathbf{p},\lambda|\,A^{\mu(-)}(x)\\
=&\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\,\langle0|\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,a_{\mathbf{p},\lambda}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\left[\sum_{\sigma=0,3}e^{\mu}(\mathbf{q},\sigma)b^{\dagger}_{\mathbf{q},\sigma}+\sum_{\lambda'=\pm}\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{q},\lambda')a^{\dagger}_{\mathbf{q},\lambda'}\right]\\
=&\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\,\langle0|\left\{\sum_{\sigma=0,3}e^{\mu}(\mathbf{q},\sigma)[a_{\mathbf{p},\lambda},b^{\dagger}_{\mathbf{q},\sigma}]+\sum_{\lambda'=\pm}\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{q},\lambda')[a_{\mathbf{p},\lambda},a^{\dagger}_{\mathbf{q},\lambda'}]\right\}\\
=&\int\mathrm{d}^3q\,\frac{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{E_{\mathbf{q}}}}\sum_{\lambda'=\pm}\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{q},\lambda')\,\langle0|\,\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}=\langle0|\,\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}.
\end{aligned}\tag{6.155}$$

我们用**波浪线**表示无质量实矢量玻色子的运动，根据上述结果及 *Feynman* 规范下的 Feynman 传播子表达式 (5.251)，写下**位置空间**中无质量实矢量场的一般内外线规则，

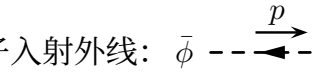
$A,\lambda;\mu$ —(p)→ x $=\langle0|\,\overbrace{A^{\mu}(x)\,|\mathbf{p},\lambda\rangle}=\langle0|\,A^{\mu(+)}(x)\,|\mathbf{p},\lambda\rangle=\varepsilon^{\mu}(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}$, (6.156)

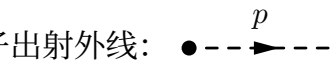
x —(p)→ $A,\lambda;\mu$ $=\langle\overbrace{\mathbf{p},\lambda|\,A^{\mu}(x)}\,|0\rangle=\langle\mathbf{p},\lambda|\,A^{\mu(-)}(x)\,|0\rangle=\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}$, (6.157)

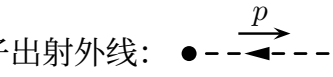
$x;\nu$ —(p)→ $y;\mu$ $=\overbrace{A^{\mu}(y)A^{\nu}}(x)=\Delta_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(y-x)=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}g^{\mu\nu}}{p^2+\mathrm{i}\epsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(y-x)}$. (6.158)

(4) 在**动量空间**中，上述内外线 Feynman 规则具有如下形式。

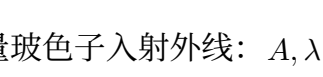
1. 正标量玻色子入射外线：ϕ ---(p)→● $=1$.

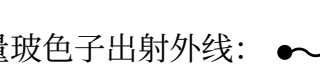
2. 反标量玻色子入射外线：$\bar{\phi}$  $= 1$.

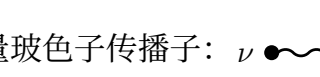
3. 正标量玻色子出射外线： $\phi = 1$.

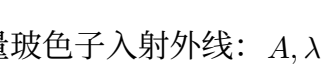
4. 反标量玻色子出射外线： $\bar{\phi} = 1$.

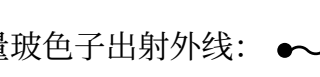
5. 复标量玻色子传播子： $= \dfrac{\mathrm{i}}{p^2 - m_\phi^2 + \mathrm{i}\epsilon}$.

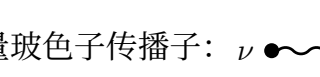
6. 有质量实矢量玻色子入射外线：$A, \lambda; \mu$  $= \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda)$.

7. 有质量实矢量玻色子出射外线： $A, \lambda; \mu = \varepsilon^{\mu *}(\mathbf{p}, \lambda)$.

8. 有质量实矢量玻色子传播子：ν  $\mu = \dfrac{-\mathrm{i}(g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu / m_A^2)}{p^2 - m_A^2 + \mathrm{i}\epsilon}$.

9. 无质量实矢量玻色子入射外线：$A, \lambda; \mu$  $= \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda)$.

10. 无质量实矢量玻色子出射外线： $A, \lambda; \mu = \varepsilon^{\mu *}(\mathbf{p}, \lambda)$.

11. 无质量实矢量玻色子传播子：ν  $\mu = \dfrac{-\mathrm{i}g^{\mu\nu}}{p^2 + \mathrm{i}\epsilon}$ （Feynman 规范）.

习 题

6.1 对于 6.1 节讨论的 Yukawa 理论，画出 $\psi\phi \to \psi\phi$ 散射过程的所有领头阶 Feynman 图，确定子图之间的相对符号，根据动量空间 Feynman 规则写出不变振幅 $\mathrm{i}\mathcal{M}$ 的表达式。

6.2 在 6.3 节讨论的实标量场 ϕ^4 理论中，对于 $\phi\phi \to \phi\phi$ 散射过程，画出所有包含 2 个顶点的单圈 Feynman 图，分析它们的对称性因子。

6.3 考虑拉氏量

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \chi)\partial_\mu \chi - \frac{1}{2} m_\chi^2 \chi^2 + (\partial^\mu \phi^\dagger)\partial_\mu \phi - m_\phi^2 \phi^\dagger \phi + \lambda\, \chi \phi^\dagger \phi. \tag{6.159}$$

其中 $\chi(x)$ 是实标量场，相应的玻色子记作 χ。$\phi(x)$ 是复标量场，相应的正反玻色子记作 ϕ 和 $\bar{\phi}$。λ 是实耦合常数。

(a) λ 的量纲是什么?

(b) 写出动量空间中的顶点 Feynman 规则。

(c) 当 $m_\chi > 2m_\phi$ 时，画出 $\chi \to \phi\bar{\phi}$ 衰变过程的领头阶 Feynman 图，并计算相应的衰变宽度。

(d) 画出下列散射过程的所有领头阶 Feynman 图。

i. $\phi\phi \to \phi\phi$.

ii. $\phi\bar{\phi} \to \phi\bar{\phi}$.

iii. $\phi\chi \to \phi\chi$.

iv. $\phi\bar{\phi} \to \chi\chi$.

v. $\chi\chi \to \chi\chi$.

6.4 考虑拉氏量

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}\,m_\phi^2\phi^2 - \frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\,m_A^2 A_\mu A^\mu + \frac{\kappa}{2}\,\phi A_\mu A^\mu, \tag{6.160}$$

其中 $\phi(x)$ 是实标量场，$A^\mu(x)$ 是实矢量场，相应玻色子分别记作 ϕ 和 A，κ 是实耦合常数。

(a) 写出动量空间中的顶点 Feynman 规则。

(b) 当 $m_\phi > 2m_A$ 时，画出 $\phi \to AA$ 衰变过程的领头阶 Feynman 图，计算衰变宽度。

(c) 画出 $AA \to AA$ 散射过程的所有领头阶 Feynman 图。

6.5 对于有质量复矢量场 $A^\mu(x)$，在拉氏量 (3.428) 中加入相互作用项

$$\mathcal{L}_1 = -g(J_\mu A^\mu + J_\mu^\dagger A^{\mu\dagger}), \tag{6.161}$$

其中 g 是实耦合常数，$J_\mu(x)$ 是由其它场组成的复流。

(a) 论证 Feynman 传播子 (5.416) 中的非协变项在微扰论的 g^2 阶计算中没有贡献，因而位置空间中有质量复矢量场的内线规则为



$$= \overbrace{A^\mu(y)A^{\nu\dagger}}(x) \text{ 的 Lorentz 协变项}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}(g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu/m_A^2)}{p^2 - m_A^2 + \mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(y-x)}. \tag{6.162}$$

这里的 m_A 就是拉氏量 (3.428) 中的 m。

(b) 根据平面波展开式 (3.431)，推出位置空间中有质量复矢量场的外线规则为



$$= \langle 0|\,\overbrace{A^\mu(x)\,|\mathbf{p}^+,\lambda\rangle} = \langle 0|\,A^{\mu(+)}(x)\,|\mathbf{p}^+,\lambda\rangle$$

$$= \varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{6.163}$$

$$\bar{A},\lambda;\mu \xrightarrow{p} x = \langle 0|\, \overbrace{A^{\mu\dagger}(x)\,|\mathbf{p}^-,\lambda\rangle} = \langle 0|\, A^{\mu\dagger(+)}(x)\,|\mathbf{p}^-,\lambda\rangle$$
$$= \varepsilon^{\mu}(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{6.164}$$

$$x \xrightarrow{p} A,\lambda;\mu = \langle \overbrace{\mathbf{p}^+,\lambda|\, A^{\mu\dagger}(x)}\,|0\rangle = \langle \mathbf{p}^+,\lambda|\, A^{\mu\dagger(-)}(x)\,|0\rangle$$
$$= \varepsilon^{\mu *}(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{6.165}$$

$$x \xrightarrow{p} \bar{A},\lambda;\mu = \langle \overbrace{\mathbf{p}^-,\lambda|\, A^{\mu}(x)}\,|0\rangle = \langle \mathbf{p}^-,\lambda|\, A^{\mu(-)}(x)\,|0\rangle$$
$$= \varepsilon^{\mu *}(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}. \tag{6.166}$$

因此，动量空间中有质量复矢量场的一般内外线规则为

- 有质量正矢量玻色子入射外线：$A,\lambda;\mu \xrightarrow{p} = \varepsilon^{\mu}(\mathbf{p},\lambda)$.
- 有质量反矢量玻色子入射外线：$\bar{A},\lambda;\mu \xrightarrow{p} = \varepsilon^{\mu}(\mathbf{p},\lambda)$.
- 有质量正矢量玻色子出射外线：$\xrightarrow{p} A,\lambda;\mu = \varepsilon^{\mu *}(\mathbf{p},\lambda)$.
- 有质量反矢量玻色子出射外线：$\xrightarrow{p} \bar{A},\lambda;\mu = \varepsilon^{\mu *}(\mathbf{p},\lambda)$.
- 有质量复矢量玻色子传播子：$\nu \xrightarrow{p} \mu = \dfrac{-\mathrm{i}(g^{\mu\nu} - p^{\mu}p^{\nu}/m_A^2)}{p^2 - m_A^2 + \mathrm{i}\epsilon}$.

第 7 章　量子电动力学

除了中微子之外，基本费米子都携带电荷，参与**电磁相互作用**。表 7.1 列出基本费米子 f 以 e 为单位的电荷 Q_f 和质量 m_f。对于带电轻子来说，正粒子带负电，记作 e^-、μ^-、τ^-；反粒子带正电，记作 e^+、μ^+、τ^+。电荷是电磁相互作用的源，单位电荷量 e 表征电磁相互作用强度，光子是传递电磁相互作用的媒介粒子。描述带电费米子如何参与电磁相互作用的量子场理论称为**量子电动力学** (quantum electrodynamics)，简称 **QED**，于 20 世纪中叶由朝永振一郎 [30]、Julian Schwinger [31, 32]、Richard Feynman [29, 33, 34] 和 Freeman Dyson [26, 27] 建立起来，是第一个自洽的相对论性量子场论。QED 是标准模型的一个组成部分。

7.1　U(1) 规范对称性与 QED

记 f 为标准模型中某种带电的基本费米子，它对应于一个 Dirac 旋量场 $\psi_f(x)$。我们可以写下相应的自由场拉氏量，

$$\mathcal{L}_{\text{free}} = \mathrm{i}\bar{\psi}_f(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi_f(x) - m_f\bar{\psi}_f(x)\psi_f(x). \tag{7.1}$$

表 7.1: 标准模型中的基本费米子。

费米子 f	带电轻子 (e,μ,τ)	中微子 (ν_e,ν_μ,ν_τ)	下型夸克 (d,s,b)	上型夸克 (u,c,t)
电荷 Q_f	-1	0	$-1/3$	$2/3$
质量 m_f	$m_e = 0.5110$ MeV $m_\mu = 105.7$ MeV $m_\tau = 1.777$ GeV	$m_{\nu_e} = 0$ $m_{\nu_\mu} = 0$ $m_{\nu_\tau} = 0$	$m_d = 4.67$ MeV $m_s = 93.4$ MeV $m_b = 4.18$ GeV	$m_u = 2.16$ MeV $m_c = 1.27$ GeV $m_t = 172.7$ GeV

注：这里列出的电荷是正费米子电荷。表中 d、u、s 夸克的质量是 2 GeV 能标处的 $\overline{\text{MS}}$ 质量，c 和 b 夸克的质量分别是 m_c 和 m_b 能标处的 $\overline{\text{MS}}$ 质量。标准模型中 3 代中微子均无质量。1998 年实验发现中微子振荡，表明中微子具有质量，所以需要扩充标准模型才能正确描述中微子物理。

其中 m_f 是费米子 f 的质量。如 4.5.3 小节所述，$\mathcal{L}_{\text{free}}$ 具有 U(1) 整体对称性。具体来说，对 Dirac 旋量场 $\psi_f(x)$ 作 U(1) 整体变换

$$\psi'_f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta}\psi_f(x), \tag{7.2}$$

其中 Q_f 是正费米子 f 的电荷，也看成是场 $\psi_f(x)$ 的电荷，而 θ 是连续变换参数。于是 $\bar{\psi}'_f(x) = \bar{\psi}_f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Q_f\theta}$，而拉氏量不变：

$$\mathcal{L}'_{\text{free}} = \mathrm{i}\bar{\psi}'_f\gamma^\mu\partial_\mu\psi'_f - m_f\bar{\psi}'_f\psi'_f = \mathrm{i}\bar{\psi}_f\gamma^\mu\partial_\mu\psi_f - m_f\bar{\psi}_f\psi_f = \mathcal{L}_{\text{free}}. \tag{7.3}$$

根据 Noether 定理，电荷守恒定律成立。

如果将上述变换参数 θ 改为依赖时空坐标 x^μ 的 Lorentz 标量函数 $\theta(x)$，则相应的变换

$$\psi'_f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\psi_f(x) \tag{7.4}$$

称为 **U(1) 规范变换**。此时，由于

$$\partial_\mu\psi'_f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\partial_\mu\psi_f(x) + \mathrm{i}Q_f\partial_\mu\theta(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\psi_f(x), \tag{7.5}$$

我们不会得到 $\mathcal{L}'_{\text{free}} = \mathcal{L}_{\text{free}}$，故不存在相应的对称性。容易看出，原因是上式多出正比于 $\partial_\mu\theta(x)$ 的第二项，导致 $\partial_\mu\psi'_f(x) \neq \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\partial_\mu\psi_f(x)$。

为了得到对称性，可以将作用在 $\psi_f(x)$ 上的时空导数 ∂_μ 替换为**协变导数** (covariant derivative)

$$D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i}Q_f eA_\mu(x), \tag{7.6}$$

其中 $A_\mu(x)$ 是*电磁场*，e 是*单位电荷量* (1.14)。并要求在 $\psi_f(x)$ 作 U(1) 规范变换 (7.4) 的同时，$A_\mu(x)$ 作规范变换

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\,\partial_\mu\theta(x). \tag{7.7}$$

将上式与 (3.342) 式比较，可知 $\theta(x) = -e\chi(x)$，而 $\chi(x)$ 是 3.5.2 小节用到的规范变换函数。这样一来，$D_\mu\psi_f(x)$ 的变换形式就与 (7.4) 式相同：

$$\begin{aligned}
[D_\mu\psi_f(x)]' &= \partial_\mu\psi'_f(x) + \mathrm{i}Q_f eA'_\mu(x)\psi'_f(x) \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\partial_\mu\psi_f(x) + \mathrm{i}Q_f\partial_\mu\theta(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\psi_f(x) + \mathrm{i}Q_f e\left[A_\mu(x) - \frac{1}{e}\,\partial_\mu\theta(x)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}\psi_f(x) \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}[\partial_\mu + \mathrm{i}Q_f eA_\mu(x)]\psi_f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_f\theta(x)}D_\mu\psi_f(x).
\end{aligned} \tag{7.8}$$

从而，只要将拉氏量修改为

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = \mathrm{i}\bar{\psi}_f(x)\gamma^\mu D_\mu\psi_f(x) - m_f\bar{\psi}_f(x)\psi_f(x), \tag{7.9}$$

就能得到 $\mathcal{L}'_{\text{gauge}} = \mathcal{L}_{\text{gauge}}$，即 $\mathcal{L}_{\text{gauge}}$ 在同时让 $\psi_f(x)$ 作 U(1) 规范变换 (7.4)、$A_\mu(x)$ 作规范变换 (7.7) 的情况下不变。这种对称性称为 **U(1) 规范对称性**。

如 3.5.2 小节所述，当电磁场 $A_\mu(x)$ 作规范变换 (7.7) 时，场强张量 $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$ 不变，因此电磁场的动能项 $-F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/4$ 是规范对称性所允许的。另一方面，质量项 $m^2A_\mu A^\mu/2$ 不满足规范对称性。换言之，**规范对称性禁止光子具有质量**。

现在写下量子电动力学的拉氏量，

$$\mathcal{L}_{\text{QED}}=\sum_f(\mathrm{i}\bar\psi_f\gamma^\mu D_\mu\psi_f-m_f\bar\psi_f\psi_f)-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},\quad f=e,\,\mu,\,\tau,\,d_i,\,s_i,\,b_i,\,u_i,\,c_i,\,t_i. \tag{7.10}$$

其中，$i=1,2,3$ 是夸克的颜色指标。这个拉氏量具有 U(1) 规范对称性。因此，我们说 QED 是一种 U(1) **规范理论** (gauge theory)，而电磁场是一种 U(1) **规范场** (gauge field)，光子是一种**规范玻色子** (gauge boson)。$\mathcal{L}_{\text{QED}}$ 包含场的动能项和质量项。除此之外，把协变导数展开，可以发现 $\mathcal{L}_{\text{QED}}$ 还包含相互作用项

$$\mathcal{L}_{\text{int}}=-\sum_f Q_f eA_\mu\bar\psi_f\gamma^\mu\psi_f, \tag{7.11}$$

描述费米子 f 的电磁相互作用。这样的相互作用称为**规范相互作用**，而单位电荷量 e 是一个**规范耦合常数**。

容易看出，$\mathcal{L}_{\text{QED}}$ 也具有 U(1) 整体对称性。类似于 4.5.3 小节的做法，根据 Noether 定理将相应守恒流定义成

$$J^\mu_{\text{EM}}=\sum_f Q_f e\bar\psi_f\gamma^\mu\psi_f. \tag{7.12}$$

J^μ_{EM} 称为**电磁流** (electromagnetic current)，满足电磁流守恒方程

$$\partial_\mu J^\mu_{\text{EM}}=0. \tag{7.13}$$

可见，QED 相互作用拉氏量具有流耦合形式

$$\mathcal{L}_{\text{int}}=-A_\mu J^\mu_{\text{EM}}. \tag{7.14}$$

注意到 (3.189) 的第一式，推出

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{\text{QED}}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}=-F^{\mu\nu},\quad \frac{\partial\mathcal{L}_{\text{QED}}}{\partial A_\nu}=-J^\nu_{\text{EM}}. \tag{7.15}$$

从而，Euler-Lagrange 方程 (1.143) 给出

$$0=\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}_{\text{QED}}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}-\frac{\partial\mathcal{L}_{\text{QED}}}{\partial A_\nu}=-\partial_\mu F^{\mu\nu}+J^\nu_{\text{EM}}, \tag{7.16}$$

故电磁场的经典运动方程为

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}=J^\nu_{\text{EM}}. \tag{7.17}$$

这是有源的 **Maxwell 方程** (1.115)，源为带电费米子的电磁流。

另一方面，由

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{\text{QED}}}{\partial(\partial_\mu\psi_f)}=\mathrm{i}\bar{\psi}_f\gamma^\mu,\quad \frac{\partial\mathcal{L}_{\text{QED}}}{\partial\psi_f}=-m_f\bar{\psi}_f-Q_feA_\mu\bar{\psi}_f\gamma^\mu, \tag{7.18}$$

有

$$0=\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}_{\text{QED}}}{\partial(\partial_\mu\psi_f)}-\frac{\partial\mathcal{L}_{\text{QED}}}{\partial\psi_f}=\mathrm{i}(\partial_\mu\bar{\psi}_f)\gamma^\mu+m_f\bar{\psi}_f+Q_feA_\mu\bar{\psi}_f\gamma^\mu. \tag{7.19}$$

取厄米共轭，利用 (4.88) 式，得

$$0=-\mathrm{i}(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0\partial_\mu\psi_f+m_f\gamma^0\psi_f+Q_feA_\mu(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0\psi_f=-\gamma^0(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu-m_f-Q_feA_\mu\gamma^\mu)\psi_f, \tag{7.20}$$

于是推出 ψ_f 的经典运动方程

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu-m_f)\psi_f=0. \tag{7.21}$$

也就是说，只要把 Dirac 方程中的普通导数替换成协变导数，就得到 QED 中费米子场的经典运动方程。

对这个方程左乘 $(\mathrm{i}\gamma^\nu D_\nu+m_f)$，得

$$0=(\mathrm{i}\gamma^\nu D_\nu+m_f)[(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu-m_f)\psi_f]=(-\gamma^\nu\gamma^\mu D_\nu D_\mu-m_f^2)\psi_f=-(\not{D}^2+m_f^2)\psi_f, \tag{7.22}$$

其中,

$$\begin{aligned}\not{D}^2&=\gamma^\mu\gamma^\nu D_\mu D_\nu=\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu D_\mu D_\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu D_\nu D_\mu)=\frac{1}{2}[(2g^{\mu\nu}-\gamma^\nu\gamma^\mu)D_\mu D_\nu+\gamma^\mu\gamma^\nu D_\mu D_\nu]\\&=D^2+\frac{1}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]D_\mu D_\nu.\end{aligned} \tag{7.23}$$

调整 Lorentz 指标，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]D_\mu D_\nu&=\frac{1}{4}([\gamma^\mu,\gamma^\nu]D_\mu D_\nu+[\gamma^\nu,\gamma^\mu]D_\nu D_\mu)=\frac{1}{4}([\gamma^\mu,\gamma^\nu]D_\mu D_\nu-[\gamma^\mu,\gamma^\nu]D_\nu D_\mu)\\&=\frac{1}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu][D_\mu,D_\nu],\end{aligned} \tag{7.24}$$

根据定义式 (4.43)，$\not{D}^2$ 化为

$$\not{D}^2=D^2-\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma^{\mu\nu}[D_\mu,D_\nu]. \tag{7.25}$$

对 ψ_f 连续作用两次协变导数，得

$$\begin{aligned}D_\mu D_\nu\psi_f&=(\partial_\mu+\mathrm{i}Q_feA_\mu)(\partial_\nu\psi_f+\mathrm{i}Q_feA_\nu\psi_f)\\&=\partial_\mu\partial_\nu\psi_f+\mathrm{i}Q_fe\partial_\mu(A_\nu\psi_f)+\mathrm{i}Q_feA_\mu\partial_\nu\psi_f-Q_f^2e^2A_\mu A_\nu\psi_f,\end{aligned} \tag{7.26}$$

故 $[D_\mu,D_\nu]$ 对 ψ_f 的作用为

$$\begin{aligned}[D_\mu,D_\nu]\psi_f&=D_\mu D_\nu\psi_f-D_\nu D_\mu\psi_f=\mathrm{i}Q_fe[\partial_\mu(A_\nu\psi_f)+A_\mu\partial_\nu\psi_f-\partial_\nu(A_\mu\psi_f)-A_\nu\partial_\mu\psi_f]\\&=\mathrm{i}Q_fe[(\partial_\mu A_\nu)\psi_f-(\partial_\nu A_\mu)\psi_f]=\mathrm{i}Q_feF_{\mu\nu}\psi_f.\end{aligned} \tag{7.27}$$

由 ψ_f 场构型的任意性有

$$[D_\mu, D_\nu] = \mathrm{i}Q_f e F_{\mu\nu}. \tag{7.28}$$

也就是说，协变导数的对易子 $[D_\mu, D_\nu]$ 实际上不包含对 ψ_f 的求导操作，而直接对应于场强张量 $F_{\mu\nu}$。$\not{D}^2$ 进一步化为

$$\not{D}^2 = D^2 + \frac{Q_f e}{2} F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}. \tag{7.29}$$

于是，ψ_f 的运动方程 (7.22) 变成

$$\left(D^2 + m_f^2 + \frac{Q_f e}{2} F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right)\psi_f = 0. \tag{7.30}$$

与自由 Dirac 旋量场满足的 Klein-Gordon 方程 (4.112) 相比，不仅普通导数替换成协变导数，还多出一个正比于 $F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$ 的项。

回顾 (1.109)、(1.107)、(4.78) 和 (4.83) 式，有

$$F_{ij} = F^{ij} = -\varepsilon^{ijk}B^k, \quad F_{0i} = -F^{0i} = E^i, \tag{7.31}$$

$$\sigma^{ij} = 2S^{ij} = \varepsilon^{ijk}\begin{pmatrix}\sigma^k & \\ & \sigma^k\end{pmatrix}, \quad \sigma^{0i} = 2S^{0i} = \mathrm{i}\begin{pmatrix}-\sigma^i & \\ & \sigma^i\end{pmatrix}, \tag{7.32}$$

故

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} &= F_{ij}\sigma^{ij} + 2F_{0i}\sigma^{0i} = -\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ijl}B^k\begin{pmatrix}\sigma^l & \\ & \sigma^l\end{pmatrix} + 2\mathrm{i}E^i\begin{pmatrix}-\sigma^i & \\ & \sigma^i\end{pmatrix} \\ &= -2\delta^{kl}\begin{pmatrix}B^k\sigma^l & \\ & B^k\sigma^l\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-\mathrm{i}E^i\sigma^i & \\ & \mathrm{i}E^i\sigma^i\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}(\mathbf{B}+\mathrm{i}\,\mathbf{E})\cdot\boldsymbol{\sigma} & \\ & (\mathbf{B}-\mathrm{i}\,\mathbf{E})\cdot\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{7.33}$$

因而电子场 ψ_e 的运动方程可以写成

$$\left[(\partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu)^2 + m_e^2 + e\begin{pmatrix}(\mathbf{B}+\mathrm{i}\,\mathbf{E})\cdot\boldsymbol{\sigma} & \\ & (\mathbf{B}-\mathrm{i}\,\mathbf{E})\cdot\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}\right]\psi_e = 0. \tag{7.34}$$

这里采用缩写 $(\partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu)^2 \equiv (\partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu)(\partial^\mu - \mathrm{i}eA^\mu)$，即 Lorentz 矢量的平方指它的自我内积。在非相对论近似下，此方程对应于量子力学里描述电子在电磁场中运动的 **Schrödinger-Pauli 方程** [35]

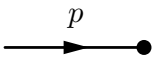
$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle = \left[\frac{1}{2m_e}(-\mathrm{i}\nabla + e\mathbf{A})^2 - eA^0 + \mu_\mathrm{B}\,\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right]|\Psi\rangle, \tag{7.35}$$

其中 $|\Psi\rangle$ 是电子的自旋双重态，而

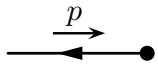
$$\mu_\mathrm{B} = \frac{e}{2m_e} \tag{7.36}$$

是 **Bohr 磁子** (magneton)。可见，正比于 $F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$ 的项描述费米子的内禀**磁偶极矩** (magnetic dipole moment)，$\pm\mathrm{i}\,\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ 项是相对论修正。

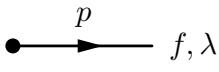
下面给出 QED 的 Feynman 规则。由于电磁场是无质量矢量场，如 3.5.2 小节所述，对 QED 进行正则量子化时，需要加入规范固定项 $-(2\xi)^{-1}(\partial_\mu A^\mu)^2$，并可采用 Feynman 规范 ($\xi = 1$) 以得到简单的结果。根据第 6 章的知识，我们写出 QED 的动量空间 Feynman 规则如下。

1. 正费米子 f 入射外线：

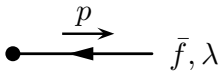
$= u(\mathbf{p},\lambda)$.

2. 反费米子 $\bar{f}$ 入射外线：

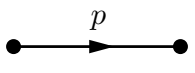
$= \bar{v}(\mathbf{p},\lambda)$.

3. 正费米子 f 出射外线：

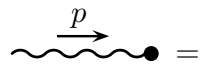
$= \bar{u}(\mathbf{p},\lambda)$.

4. 反费米子 $\bar{f}$ 出射外线：

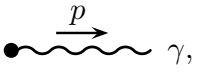
$= v(\mathbf{p},\lambda)$.

5. 费米子 f 传播子：

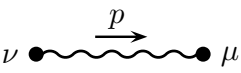
$= \dfrac{\mathrm{i}(\not{p}+m_f)}{p^2-m_f^2+\mathrm{i}\epsilon} = \dfrac{\mathrm{i}}{\not{p}-m_f+\mathrm{i}\epsilon}$.

6. 光子 γ 入射外线：

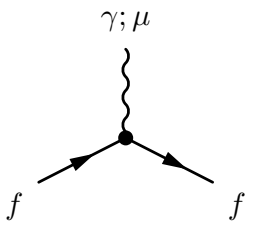
$= \varepsilon_\mu(\mathbf{p},\lambda)$.

7. 光子 γ 出射外线：

$= \varepsilon_\mu^*(\mathbf{p},\lambda)$.

8. 光子 γ 传播子：

$= \dfrac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{p^2+\mathrm{i}\epsilon}$ (Feynman 规范).

9. QED 相互作用顶点：

$= -\mathrm{i}Q_f e\gamma^\mu$.

注意，我们在这里将光子记作 γ，但不要与 Dirac 矩阵 γ^μ 混淆。在这些规则中，Lorentz 指标 μ 和 ν 既可以写成上标，也可以写成下标，只要在写出不变振幅表达式时保证相同指标上下缩并即可。QED 顶点规则可以这样得到：将相互作用拉氏量 $-Q_f e A_\mu \bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_f$ 中的场算符 A_μ、ψ_f 和 $\bar{\psi}_f$ 剥离，再乘以 i，就是顶点规则表达式 $-\mathrm{i}Q_f e\gamma^\mu$。

7.2　正负电子湮灭到正负 μ 子

在本节中，我们讨论一个典型的 QED 散射过程，一对正负电子湮灭成一对正负 μ 子，即 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$。这个过程的领头阶 Feynman 图是一个包含 2 个 QED 顶点的树图，如图 7.1 所示，只有 1 种拓扑结构。由于 μ 子质量比电子质量大得多，根据能动量守恒定律，此过程仅当正负电子对的质心能 $E_{\mathrm{CM}} > 2m_\mu$ 时才能发生。

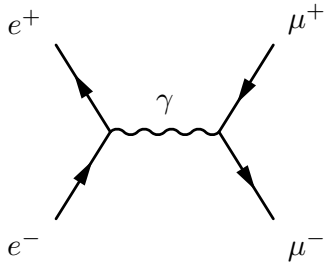


图 7.1: $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 领头阶 Feynman 图。

7.2.1 不变振幅

根据 QED 的 Feynman 规则和 $Q_e = Q_\mu = -1$，$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 过程的不变振幅为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}\mathcal{M} = & \\
& = \bar{v}(\mathbf{k}_2, \lambda_2)\,(\mathrm{i}e\gamma^\mu)\,u(\mathbf{k}_1, \lambda_1)\,\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{q^2}\,\bar{u}(\mathbf{p}_1, \lambda_1')\,(\mathrm{i}e\gamma^\nu)\,v(\mathbf{p}_2, \lambda_2') \\
& = \frac{\mathrm{i}e^2}{q^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2, \lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1, \lambda_1)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1, \lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2, \lambda_2'). \qquad (7.37)
\end{aligned}
$$

根据能动量守恒，光子传播子的四维动量 q^μ 满足

$$q^\mu = k_1^\mu + k_2^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu. \qquad (7.38)$$

从而，运动学要求

$$q^2 = (p_1 + p_2)^2 = E_{\mathrm{CM}}^2 > 4m_\mu^2. \qquad (7.39)$$

于是，这个过程的光子传播子 $\dfrac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{q^2 + \mathrm{i}\epsilon}$ 在运动学允许的区域上没有极点，因此我们在写下不变振幅时可以丢弃无穷小量 $\mathrm{i}\epsilon$。一般来说，**传播子分母上的无穷小量 $\mathrm{i}\epsilon$ 对于圈图计算是必要的，但在树图计算中通常可以忽略。**

根据 γ^0 的厄米性和 (4.88) 式，有 $(\gamma^\mu)^\dagger(\gamma^0)^\dagger = (\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\mu$，故 $\mathrm{i}\mathcal{M}$ 表达式中旋量双线性型 $\bar{v}(k_2, \lambda_2)\gamma^\mu u(k_1, \lambda_1)$ 的复共轭为

$$(\bar{v}\gamma^\mu u)^* = (\bar{v}\gamma^\mu u)^\dagger = (v^\dagger\gamma^0\gamma^\mu u)^\dagger = u^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger(\gamma^0)^\dagger v = u^\dagger\gamma^0\gamma^\mu v = \bar{u}\gamma^\mu v. \qquad (7.40)$$

类似地，$(\bar{u}\gamma_\mu v)^* = \bar{v}\gamma_\mu u$。于是，$\mathrm{i}\mathcal{M}$ 的复共轭为

$$(\mathrm{i}\mathcal{M})^* = -\frac{\mathrm{i}e^2}{q^2}\,\bar{u}(\mathbf{k}_1, \lambda_1)\gamma^\nu v(\mathbf{k}_2, \lambda_2)\,\bar{v}(\mathbf{p}_2, \lambda_2')\gamma_\nu u(\mathbf{p}_1, \lambda_1'). \qquad (7.41)$$

从而，不变振幅的模方是

$$\begin{aligned}|\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{(q^2)^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\,[\bar{u}(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\gamma^\nu v(\mathbf{k}_2,\lambda_2)]\,\bar{v}(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\gamma_\nu u(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\\ &= \frac{e^4}{E_{\mathrm{CM}}^4}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\,[\bar{u}(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\gamma^\nu v(\mathbf{k}_2,\lambda_2)]\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\,\bar{v}(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\gamma_\nu u(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\\ &= \frac{e^4}{E_{\mathrm{CM}}^4}\,\mathrm{tr}[v(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\bar{v}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\,\bar{u}(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\gamma^\nu]\\ &\qquad\times\mathrm{tr}[u(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\,\bar{v}(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\gamma_\nu].\end{aligned}\tag{7.42}$$

第二步调换了 $[\bar{u}(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\gamma^\nu v(\mathbf{k}_2,\lambda_2)]$ 的位置。第三步采取计算 (6.44) 式时使用过的 *Casimir* 技巧，因而出现求迹运算。

实际实验通常不会控制入射粒子的自旋状态，即采用非极化的入射束流。另一方面，粒子探测器 (detector) 通常也不能区分出射粒子的自旋状态。因而在计算上述过程的散射截面时，需要对**入射**正负电子的螺旋度 λ_1 和 λ_2 **取平均**，对**出射**正负 μ 子的螺旋度 λ_1' 和 λ_2' **求和**。也就是说，应当计算**非极化**不变振幅模方

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} &\equiv \frac{1}{2}\sum_{\lambda_1=\pm}\frac{1}{2}\sum_{\lambda_2=\pm}\sum_{\lambda_1'=\pm}\sum_{\lambda_2'=\pm}|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4}\sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_1'\lambda_2'}|\mathcal{M}|^2\\ &= \frac{e^4}{4E_{\mathrm{CM}}^4}\sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_1'\lambda_2'}\mathrm{tr}[v(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\bar{v}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\,\bar{u}(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\gamma^\nu]\\ &\qquad\times\mathrm{tr}[u(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\,\bar{v}(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\gamma_\nu]\\ &= \frac{e^4}{4E_{\mathrm{CM}}^4}\mathrm{tr}[(\not{k}_2-m_e)\gamma^\mu(\not{k}_1+m_e)\gamma^\nu]\;\mathrm{tr}[(\not{p}_1+m_\mu)\gamma_\mu(\not{p}_2-m_\mu)\gamma_\nu].\end{aligned}\tag{7.43}$$

最后一步用到自旋求和关系 (4.218)。现在，问题归结为计算 Dirac 矩阵乘积的迹。

7.2.2　Dirac 矩阵求迹和缩并技巧

在上一章中，我们计算过 Dirac 矩阵的迹和 2 个 Dirac 矩阵乘积的迹，即 (6.48) 和 (6.51) 式：$\mathrm{tr}(\gamma^\mu)=0$，$\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu)=4g^{\mu\nu}$。实际上，利用 $(\gamma^5)^2=\mathbf{1}$、$\gamma^5\gamma^\mu=-\gamma^\mu\gamma^5$ 和 $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$，可得

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\text{奇数个 Dirac 矩阵之积}) &= \mathrm{tr}(\text{奇数个 Dirac 矩阵之积}\times\gamma^5\gamma^5)\\ &= -\mathrm{tr}(\gamma^5\times\text{奇数个 Dirac 矩阵之积}\times\gamma^5)\\ &= -\mathrm{tr}(\gamma^5\gamma^5\times\text{奇数个 Dirac 矩阵之积})\\ &= -\mathrm{tr}(\text{奇数个 Dirac 矩阵之积}).\end{aligned}\tag{7.44}$$

因此，奇数个 Dirac 矩阵乘积的迹为零。这个结论自然包含 $\mathrm{tr}(\gamma^\mu)=0$。

对于 4 个 Dirac 矩阵乘积的迹，多次利用 $\gamma^\mu\gamma^\nu=2g^{\mu\nu}-\gamma^\nu\gamma^\mu$，有

$$\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = \mathrm{tr}(2g^{\mu\nu}\gamma^\rho\gamma^\sigma-\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = \mathrm{tr}(2g^{\mu\nu}\gamma^\rho\gamma^\sigma-2\gamma^\nu g^{\mu\rho}\gamma^\sigma+\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\sigma)$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{tr}(2g^{\mu\nu}\gamma^\rho\gamma^\sigma - 2\gamma^\nu g^{\mu\rho}\gamma^\sigma + 2\gamma^\nu\gamma^\rho g^{\mu\sigma} - \gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu) \\
&= 2g^{\mu\nu}\operatorname{tr}(\gamma^\rho\gamma^\sigma) - 2g^{\mu\rho}\operatorname{tr}(\gamma^\nu\gamma^\sigma) + 2g^{\mu\sigma}\operatorname{tr}(\gamma^\nu\gamma^\rho) - \operatorname{tr}(\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu) \\
&= 8g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - 8g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + 8g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - \operatorname{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma),
\end{aligned} \tag{7.45}$$

故 $\operatorname{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})$。

根据定义，$\gamma^5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$，因而它相当于 4 个 Dirac 矩阵之积。于是，γ^5 与奇数个 Dirac 矩阵乘积的迹为零。利用 $(\gamma^0)^2 = \mathbf{1}$ 和 $\gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5$，得

$$\operatorname{tr}(\gamma^5) = \operatorname{tr}(\gamma^5\gamma^0\gamma^0) = -\operatorname{tr}(\gamma^0\gamma^5\gamma^0) = -\operatorname{tr}(\gamma^0\gamma^0\gamma^5) = -\operatorname{tr}(\gamma^5). \tag{7.46}$$

可见 $\operatorname{tr}(\gamma^5) = 0$。

由于 $(\gamma^\mu)^2 = \pm\mathbf{1}$ 在 $\mu = 0$ 时取正号、在 $\mu = 1,2,3$ 时取负号，若 $\mu = \nu$，则 $\operatorname{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5) = \pm\operatorname{tr}(\gamma^5) = 0$。若 $\mu \neq \nu$，取 $\alpha \neq \mu,\nu$，再利用 $(\gamma^\alpha)^2 = \pm\mathbf{1}$、$\gamma^\mu\gamma^\alpha = -\gamma^\alpha\gamma^\mu$ 和 $\gamma^\nu\gamma^\alpha = -\gamma^\alpha\gamma^\nu$ 推出

$$\operatorname{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5) = \pm\operatorname{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5\gamma^\alpha\gamma^\alpha) = \mp\operatorname{tr}(\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5\gamma^\alpha) = \mp\operatorname{tr}(\gamma^\alpha\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5) = -\operatorname{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5). \tag{7.47}$$

故 $\operatorname{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5) = 0$ 对任意 μ 和 ν 成立。

对于 $\operatorname{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5)$，只要 (μ,ν,ρ,σ) 这 4 个指标中有 2 个指标相等，就能够类似地推出 $\operatorname{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5) = 0$。因此，仅当 (μ,ν,ρ,σ) 是 $(0,1,2,3)$ 的某种置换时，才能得到例外的结果；由于 Dirac 矩阵的反对易性质，此时有 $\operatorname{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5) = \pm\operatorname{tr}(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^5)$，且偶置换取正号，奇置换取负号。根据四维 Levi-Civita 符号的定义 (1.84)，即得 $\operatorname{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5) = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\operatorname{tr}(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^5)$。现在，

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^5) &= \operatorname{tr}(\mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) = -\operatorname{tr}(\mathrm{i}\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^1\gamma^2\gamma^3) \\
&= \operatorname{tr}(\mathrm{i}\gamma^2\gamma^3\gamma^2\gamma^3) = \operatorname{tr}(\mathrm{i}\gamma^3\gamma^3) = -\operatorname{tr}(\mathrm{i}) = -4\mathrm{i},
\end{aligned} \tag{7.48}$$

因而 $\operatorname{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5) = -4\mathrm{i}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$。

总结起来，有下列**求迹公式**，

$$\operatorname{tr}(\mathbf{1}) = 4, \tag{7.49}$$

$$\operatorname{tr}(\text{奇数个 Dirac 矩阵之积}) = 0, \tag{7.50}$$

$$\operatorname{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}, \tag{7.51}$$

$$\operatorname{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}), \tag{7.52}$$

$$\operatorname{tr}(\gamma^5) = 0, \tag{7.53}$$

$$\operatorname{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5) = 0, \tag{7.54}$$

$$\operatorname{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5) = -4\mathrm{i}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}. \tag{7.55}$$

除了求迹，还经常遇到 Lorentz 指标的缩并运算。首先，

$$\gamma^\mu\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu = \frac{1}{2}(g_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu + g_{\nu\mu}\gamma^\nu\gamma^\mu) = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4. \tag{7.56}$$

其次，

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = 2g^{\mu\nu}\gamma_\mu - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_\mu = 2\gamma^\nu - 4\gamma^\nu = -2\gamma^\nu. \tag{7.57}$$

再次，

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu = 2g^{\mu\nu}\gamma^\rho\gamma_\mu - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma_\mu = 2\gamma^\rho\gamma^\nu + 2\gamma^\nu\gamma^\rho = 2\{\gamma^\rho,\gamma^\nu\} = 4g^{\nu\rho}. \tag{7.58}$$

最后，

$$\begin{aligned}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu &= 2g^{\mu\nu}\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu = 2\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\nu - 4g^{\rho\sigma}\gamma^\nu \\ &= 2\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\nu - 2(\gamma^\rho\gamma^\sigma + \gamma^\sigma\gamma^\rho)\gamma^\nu = -2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu. \end{aligned}\tag{7.59}$$

另一方面，我们可能会遇到 Levi-Civita 符号的缩并。首先，(1.89) 式告诉我们 $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -24$。其次，根据 Levi-Civita 符号的性质，$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\mu}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu}$ 只在 $\mu=\nu$ 时非零，即 $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\mu}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} \propto \delta^\mu{}_\nu$。取 $\mu=\nu=3$，得 $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma3}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma3} = 3!\,\varepsilon^{0123}\varepsilon_{0123} = -6$，故比例系数为 -6。因此 $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\mu}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} = -6\delta^\mu{}_\nu$。再次，$\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}$ 仅在 $(\mu,\nu)=(\rho,\sigma)$ 或 $(\mu,\nu)=(\sigma,\rho)$ 时非零，而且这两种情况的数值互为相反数，故 $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} \propto \delta^\mu{}_\rho\delta^\nu{}_\sigma - \delta^\mu{}_\sigma\delta^\nu{}_\rho$。取 $(\mu,\nu)=(2,3)$，得 $\varepsilon^{\alpha\beta23}\varepsilon_{\alpha\beta23} = 2!\,\varepsilon^{0123}\varepsilon_{0123} = -2$，因而 $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = -2(\delta^\mu{}_\rho\delta^\nu{}_\sigma - \delta^\mu{}_\sigma\delta^\nu{}_\rho)$。

总结起来，有下列**缩并公式**，

$$\gamma^\mu\gamma_\mu = 4, \tag{7.60}$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = -2\gamma^\nu, \tag{7.61}$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu = 4g^{\nu\rho}, \tag{7.62}$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu = -2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu, \tag{7.63}$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -24, \tag{7.64}$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\mu}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} = -6\delta^\mu{}_\nu, \tag{7.65}$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = -2(\delta^\mu{}_\rho\delta^\nu{}_\sigma - \delta^\mu{}_\sigma\delta^\nu{}_\rho). \tag{7.66}$$

在实际计算中，经常遇到四维动量与 Dirac 矩阵的缩并，我们进一步导出下列有用公式。

$$\gamma^\mu\not{p} = p_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu = p_\nu(2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu) = 2p^\mu - \not{p}\gamma^\mu, \tag{7.67}$$

$$\not{p}\not{k} = p_\mu\gamma^\mu\not{k} = p_\mu(2k^\mu - \not{k}\gamma^\mu) = 2\,p\cdot k - \not{k}\not{p}, \tag{7.68}$$

$$\not{p}\not{p} = \frac{1}{2}(\not{p}\not{p} + \not{p}\not{p}) = \frac{1}{2}\,2\,p\cdot p = p^2, \tag{7.69}$$

$$\gamma^\mu\not{p}\gamma_\mu = p_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = -2p_\nu\gamma^\nu = -2\not{p}, \tag{7.70}$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\not{p}\gamma_\mu = p_\rho\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu = 4p_\rho g^{\nu\rho} = 4p^\nu, \tag{7.71}$$

$$\gamma^\mu\not{p}\not{k}\gamma_\mu = p_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu\not{k}\gamma_\mu = 4p_\nu k^\nu = 4\,p\cdot k, \tag{7.72}$$

$$\mathrm{tr}(\not{p}\not{k}) = p_\mu k_\nu\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4p_\mu k_\nu g^{\mu\nu} = 4\,p\cdot k, \tag{7.73}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\not{p}\not{k}\not{q}\not{l}) &= p_\mu k_\nu q_\rho l_\sigma\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4p_\mu k_\nu q_\rho l_\sigma(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \\ &= 4[(p\cdot k)(q\cdot l) - (p\cdot q)(k\cdot l) + (p\cdot l)(k\cdot q)], \end{aligned}\tag{7.74}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\not{p}\gamma^\mu\not{k}\gamma^\nu) &= p_\rho k_\sigma \operatorname{tr}(\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\nu) = 4p_\rho k_\sigma(g^{\rho\mu}g^{\sigma\nu} - g^{\rho\sigma}g^{\mu\nu} + g^{\rho\nu}g^{\mu\sigma}) \\ &= 4(p^\mu k^\nu + p^\nu k^\mu - g^{\mu\nu}p\cdot k), \end{aligned} \tag{7.75}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\not{p}\gamma^\mu\not{k}\gamma^\nu)\operatorname{tr}(\not{q}\gamma_\mu\not{l}\gamma_\nu) &= 16(p^\mu k^\nu + p^\nu k^\mu - g^{\mu\nu}p\cdot k)(q_\mu l_\nu + q_\nu l_\mu - g_{\mu\nu}q\cdot l) \\ &= 32[(p\cdot q)(k\cdot l) + (p\cdot l)(k\cdot q)]. \end{aligned} \tag{7.76}$$

当求迹和缩并计算非常复杂时，可利用 `Mathematica` 程序包 `FeynCalc`[1] 辅助计算。

7.2.3 非极化散射截面

现在，我们回到 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 非极化振幅模方的计算。根据上一小节的求迹公式，(7.43) 式的第一个迹化为

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}[(\not{k}_2 - m_e)\gamma^\mu(\not{k}_1 + m_e)\gamma^\nu] &= \operatorname{tr}(\not{k}_2\gamma^\mu\not{k}_1\gamma^\nu) - m_e^2\operatorname{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) \\ &= 4[k_2^\mu k_1^\nu + k_2^\nu k_1^\mu - g^{\mu\nu}(k_1\cdot k_2 + m_e^2)], \end{aligned} \tag{7.77}$$

其中第一步丢弃了具有奇数个 Dirac 矩阵乘积的项。同理，第二个迹变成

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}[(\not{p}_1 + m_\mu)\gamma_\mu(\not{p}_2 - m_\mu)\gamma_\nu] &= \operatorname{tr}(\not{p}_1\gamma_\mu\not{p}_2\gamma_\nu) - m_\mu^2\operatorname{tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu) \\ &= 4[p_{1\mu}p_{2\nu} + p_{1\nu}p_{2\mu} - g_{\mu\nu}(p_1\cdot p_2 + m_\mu^2)]. \end{aligned} \tag{7.78}$$

于是，(7.43) 式化为

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{4e^4}{E_{\mathrm{CM}}^4}[k_2^\mu k_1^\nu + k_2^\nu k_1^\mu - g^{\mu\nu}(k_1\cdot k_2 + m_e^2)][p_{1\mu}p_{2\nu} + p_{1\nu}p_{2\mu} - g_{\mu\nu}(p_1\cdot p_2 + m_\mu^2)] \\ &= \frac{4e^4}{E_{\mathrm{CM}}^4}\big[2(k_1\cdot p_1)(k_2\cdot p_2) + 2(k_1\cdot p_2)(k_2\cdot p_1) - 2\,p_1\cdot p_2(k_1\cdot k_2 + m_e^2) \\ &\qquad - 2\,k_1\cdot k_2(p_1\cdot p_2 + m_\mu^2) + 4(k_1\cdot k_2 + m_e^2)(p_1\cdot p_2 + m_\mu^2)\big] \\ &= \frac{8e^4}{E_{\mathrm{CM}}^4}[(k_1\cdot p_1)(k_2\cdot p_2) + (k_1\cdot p_2)(k_2\cdot p_1) + m_e^2(p_1\cdot p_2) + m_\mu^2(k_1\cdot k_2) + 2m_e^2m_\mu^2]. \end{aligned} \tag{7.79}$$

现在，非极化振幅模方表达成四维动量内积的函数，具有明显的 Lorentz 不变性。

在质心系中，入射和出射粒子的三维动量如图 7.2 所示，将散射角 θ 定义为末态 μ^- 动量 $\mathbf{p}_1$ 与初态 e^- 动量 $\mathbf{k}_1$ 的方向夹角。质心系的总动量为零，即

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}, \tag{7.80}$$

故有 $|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2|$ 和 $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$。根据 (5.352) 式，质心能 $q^0 = E_{\mathrm{CM}}$ 平分在两个入射粒子上，也平分在两个出射粒子上，

$$k_1^0 = k_2^0 = p_1^0 = p_2^0 = \frac{E_{\mathrm{CM}}}{2}. \tag{7.81}$$

[1]相关网址：https://feyncalc.github.io

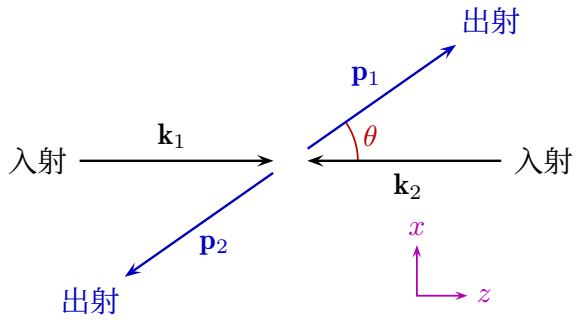


图 7.2: 质心系中 $2 \to 2$ 散射过程动量示意图。$\mathbf{k}_1$ 和 $\mathbf{k}_2$ 是两个入射粒子的三维动量，$\mathbf{p}_1$ 和 $\mathbf{p}_2$ 是两个出射粒子的三维动量，散射角 θ 为 $\mathbf{p}_1$ 与 $\mathbf{k}_1$ 方向之间的夹角。

由此推出

$$|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| = \sqrt{(k_2^0)^2 - m_e^2} = \sqrt{\frac{E_{\rm CM}^2}{4} - m_e^2} = \frac{E_{\rm CM}}{2}\,\beta_e, \tag{7.82}$$

$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \sqrt{(p_2^0)^2 - m_\mu^2} = \sqrt{\frac{E_{\rm CM}^2}{4} - m_\mu^2} = \frac{E_{\rm CM}}{2}\,\beta_\mu, \tag{7.83}$$

其中

$$\beta_e \equiv \sqrt{1 - \frac{4m_e^2}{E_{\rm CM}^2}} = \frac{|\mathbf{k}_1|}{k_1^0} = \frac{|\mathbf{k}_2|}{k_2^0}, \quad \beta_\mu \equiv \sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{E_{\rm CM}^2}} = \frac{|\mathbf{p}_1|}{p_1^0} = \frac{|\mathbf{p}_2|}{p_2^0} \tag{7.84}$$

分别是电子和 μ 子在质心系中的**运动速率**。

现在推导四维动量之间内积的表达式。质心能 $E_{\rm CM}$ 满足

$$E_{\rm CM}^2 = q^2 = (k_1 + k_2)^2 = k_1^2 + k_2^2 + 2\,k_1 \cdot k_2 = 2(m_e^2 + k_1 \cdot k_2), \tag{7.85}$$

同理有 $E_{\rm CM}^2 = 2(m_\mu^2 + p_1 \cdot p_2)$，故

$$k_1 \cdot k_2 = \frac{E_{\rm CM}^2}{2} - m_e^2, \quad p_1 \cdot p_2 = \frac{E_{\rm CM}^2}{2} - m_\mu^2. \tag{7.86}$$

根据能动量守恒定律，$k_1 + k_2 = p_1 + p_2$，则 $k_1 - p_1 = p_2 - k_2$。从而推出

$$m_e^2 + m_\mu^2 - 2\,k_1 \cdot p_1 = (k_1 - p_1)^2 = (p_2 - k_2)^2 = m_e^2 + m_\mu^2 - 2\,k_2 \cdot p_2, \tag{7.87}$$

所以有

$$k_2 \cdot p_2 = k_1 \cdot p_1 = k_1^0 p_1^0 - |\mathbf{k}_1||\mathbf{p}_1|\cos\theta = \frac{E_{\rm CM}^2}{4}(1 - \beta_e\beta_\mu\cos\theta). \tag{7.88}$$

另一方面，也有 $k_1 - p_2 = p_1 - k_2$，同理推出

$$k_2 \cdot p_1 = k_1 \cdot p_2 = k_1^0 p_2^0 + |\mathbf{k}_1||\mathbf{p}_2|\cos\theta = \frac{E_{\rm CM}^2}{4}(1 + \beta_e\beta_\mu\cos\theta). \tag{7.89}$$

由 $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ 得 $q \cdot k_1 = q^0 k_1^0 = E_{\rm CM}^2/2$，由此可见

$$q \cdot k_1 = q \cdot k_2 = q \cdot p_1 = q \cdot p_2 = \frac{E_{\rm CM}^2}{2}. \tag{7.90}$$

利用以上表达式，将非极化振幅模方化为

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{8e^4}{E_{\rm CM}^4}\left[\frac{E_{\rm CM}^4}{16}(1-\beta_e\beta_\mu\cos\theta)^2+\frac{E_{\rm CM}^4}{16}(1+\beta_e\beta_\mu\cos\theta)^2\right.\\ &\qquad\left.+m_\mu^2\left(\frac{E_{\rm CM}^2}{2}-m_e^2\right)+m_e^2\left(\frac{E_{\rm CM}^2}{2}-m_\mu^2\right)+2m_e^2m_\mu^2\right]\\ &= \frac{e^4}{E_{\rm CM}^2}\left[E_{\rm CM}^2(1+\beta_e^2\beta_\mu^2\cos^2\theta)+4(m_e^2+m_\mu^2)\right]\\ &= 16\pi^2\alpha^2\left[1+\beta_e^2\beta_\mu^2\cos^2\theta+\frac{4(m_e^2+m_\mu^2)}{E_{\rm CM}^2}\right],\end{aligned}\tag{7.91}$$

其中**精细结构常数**定义为

$$\alpha\equiv\frac{e^2}{4\pi}.\tag{7.92}$$

此处 $\overline{|\mathcal{M}|^2}\propto\alpha^2$，因而我们说 $e^+e^-\to\mu^+\mu^-$ 过程的领头阶是 α^2 阶，而 Feynman 图 7.1 包含 2 个 QED 顶点。由此可以推断，包含 n 个 QED 顶点的 Feynman 图对应于 α^n 阶过程。

$\overline{|\mathcal{M}|^2}$ 依赖于 θ，但不依赖于方位角 ϕ。根据 (5.359) 式，非极化微分散射截面为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{\beta_\mu\overline{|\mathcal{M}|^2}}{64\pi^2E_{\rm CM}^2\beta_e}=\frac{\alpha^2\beta_\mu}{4E_{\rm CM}^2\beta_e}\left[1+\beta_e^2\beta_\mu^2\cos^2\theta+\frac{4(m_e^2+m_\mu^2)}{E_{\rm CM}^2}\right].\tag{7.93}$$

利用

$$\int_0^\pi\mathrm{d}\theta\,\sin\theta=\int_{-1}^1\mathrm{d}\cos\theta=2,\quad\int_0^\pi\mathrm{d}\theta\,\sin\theta\cos^2\theta=\int_{-1}^1\cos^2\theta\,\mathrm{d}\cos\theta=\frac{2}{3},\tag{7.94}$$

此过程末态对称性因子 $\mathcal{S}=1$，对全立体角积分，得到非极化散射截面

$$\begin{aligned}\sigma &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^\pi\mathrm{d}\theta\,\sin\theta\,\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{\pi\alpha^2\beta_\mu}{2E_{\rm CM}^2\beta_e}\left[2+\frac{2}{3}\beta_e^2\beta_\mu^2+\frac{8(m_e^2+m_\mu^2)}{E_{\rm CM}^2}\right]\\ &= \frac{\pi\alpha^2\beta_\mu}{3E_{\rm CM}^2\beta_e}\left[3+\left(1-\frac{4m_e^2}{E_{\rm CM}^2}\right)\left(1-\frac{4m_\mu^2}{E_{\rm CM}^2}\right)+\frac{12(m_e^2+m_\mu^2)}{E_{\rm CM}^2}\right]\\ &= \frac{4\pi\alpha^2\beta_\mu}{3E_{\rm CM}^2\beta_e}\left[1+\frac{2(m_e^2+m_\mu^2)}{E_{\rm CM}^2}+\frac{4m_e^2m_\mu^2}{E_{\rm CM}^4}\right]=\frac{4\pi\alpha^2\beta_\mu}{3E_{\rm CM}^2\beta_e}\left(1+\frac{2m_e^2}{E_{\rm CM}^2}\right)\left(1+\frac{2m_\mu^2}{E_{\rm CM}^2}\right).\end{aligned}\tag{7.95}$$

图 7.3 根据上式画出散射截面 σ 随质心能 $E_{\rm CM}$ 的变化曲线，同时标注着 PETRA 对撞机上 TASSO 探测器测量到的实验数据 [36]。可以看到，QED 领头阶预言结果与实验数据符合得比较好。

由于 $m_e\ll m_\mu<E_{\rm CM}/2$，我们可以近似地忽略电子质量，则 $\beta_e\simeq1$，而散射截面近似为

$$\sigma\simeq\frac{4\pi\alpha^2\beta_\mu}{3E_{\rm CM}^2}\left(1+\frac{2m_\mu^2}{E_{\rm CM}^2}\right).\tag{7.96}$$

若 $E_{\rm CM}\gg m_\mu$，则 $\beta_\mu\simeq1$，散射截面进一步近似为

$$\sigma\simeq\frac{4\pi\alpha^2}{3E_{\rm CM}^2}.\tag{7.97}$$

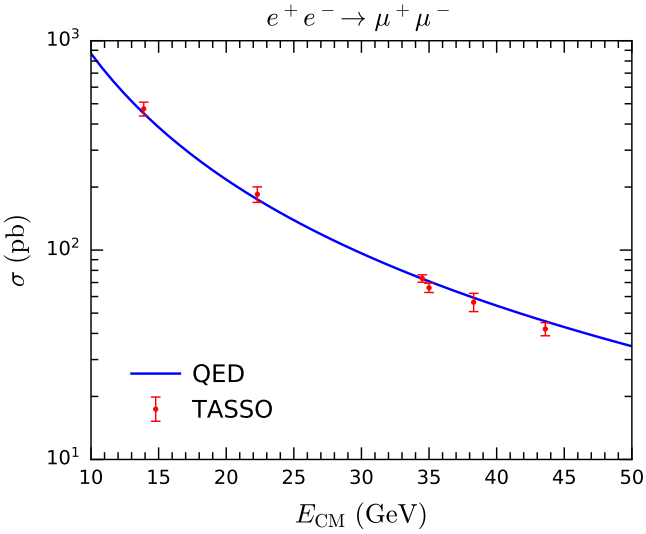


图 7.3: $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 散射截面。实验数据来自 TASSO 合作组 [36]。

7.2.4　极化振幅

根据 (7.37) 式，螺旋度为 λ_1 和 λ_2 的 e^- 和 e^+ 湮灭到螺旋度为 λ_1' 和 λ_2' 的 μ^- 和 μ^+ 的过程对应的极化不变振幅为

$$\mathcal{M}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1',\lambda_2') = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar v(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\,\bar u(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2'). \tag{7.98}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1',\lambda_2' = \pm$，而 $\bar v(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)$ 和 $\bar u(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2')$ 都是用旋量双线性型表达的 Lorentz 矢量。在本小节中，我们将探索极化振幅的显明表达式。

依照图 7.2 中空间直角坐标系的定义，z 轴沿 $\mathbf{k}_1$ 方向，初末态四个粒子的动量均位于 xz 平面上，则末态 μ^- 和 μ^+ 四维动量的分量表达式为

$$p_1^\mu = \frac{E_{\rm CM}}{2}(1,\beta_\mu s_\theta,0,\beta_\mu c_\theta),\quad p_2^\mu = \frac{E_{\rm CM}}{2}(1,-\beta_\mu s_\theta,0,-\beta_\mu c_\theta). \tag{7.99}$$

这里我们采用了缩写 $s_\theta \equiv \sin\theta$ 和 $c_\theta \equiv \cos\theta$。根据 (4.162) 式和三角函数倍角公式

$$s_\theta = 2s_{\theta/2}c_{\theta/2},\quad 1+c_\theta = 2c_{\theta/2}^2,\quad 1-c_\theta = 2s_{\theta/2}^2, \tag{7.100}$$

得到相应螺旋态 $\xi_{\lambda_1'}(\mathbf{p}_1)$ 和 $\xi_{\lambda_2'}(\mathbf{p}_2)$ 的形式为

$$\xi_+(\mathbf{p}_1) = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}_1|^2(1+c_\theta)}}\begin{pmatrix}|\mathbf{p}_1|(1+c_\theta)\\ |\mathbf{p}_1|s_\theta\end{pmatrix} = \frac{1}{2c_{\theta/2}}\begin{pmatrix}2c_{\theta/2}^2\\ 2s_{\theta/2}c_{\theta/2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_{\theta/2}\\ s_{\theta/2}\end{pmatrix}, \tag{7.101}$$

$$\xi_-(\mathbf{p}_1) = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}_1|^2(1+c_\theta)}}\begin{pmatrix}-|\mathbf{p}_1|s_\theta\\ |\mathbf{p}_1|(1+c_\theta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-s_{\theta/2}\\ c_{\theta/2}\end{pmatrix}, \tag{7.102}$$

$$\xi_+(\mathbf{p}_2) = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}_2|^2(1-c_\theta)}}\begin{pmatrix}|\mathbf{p}_2|(1-c_\theta)\\ -|\mathbf{p}_2|s_\theta\end{pmatrix} = \frac{1}{2s_{\theta/2}}\begin{pmatrix}2s_{\theta/2}^2\\ -2s_{\theta/2}c_{\theta/2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s_{\theta/2}\\ -c_{\theta/2}\end{pmatrix}, \tag{7.103}$$

$$\xi_-(\mathbf{p}_2) = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}_2|^2(1-c_\theta)}}\begin{pmatrix}|\mathbf{p}_2|s_\theta\\ |\mathbf{p}_2|(1-c_\theta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_{\theta/2}\\ s_{\theta/2}\end{pmatrix}. \tag{7.104}$$

可以看出，当正负 μ 子的动量在空间中转动 θ 角时，旋量空间中的螺旋态只转动 $\theta/2$ 角，这正是自旋 $1/2$ 的特征。

另一方面，初态 e^- 和 e^+ 的四维动量分量为

$$k_1^\mu = \frac{E_{\rm CM}}{2}(1,0,0,\beta_e), \quad k_2^\mu = \frac{E_{\rm CM}}{2}(1,0,0,-\beta_e). \tag{7.105}$$

与 μ^- 和 μ^+ 四维动量的差异在于 β_μ 换成 β_e，且 $\theta = 0$。因此，只要将 μ^- 和 μ^+ 螺旋态表达式中的 θ 取为 0，就得到 e^- 和 e^+ 螺旋态 $\xi_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1)$ 和 $\xi_{\lambda_2}(\mathbf{k}_2)$ 的如下表达式，

$$\xi_+(\mathbf{k}_1) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \xi_-(\mathbf{k}_1) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad \xi_+(\mathbf{k}_2) = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}, \quad \xi_-(\mathbf{k}_2) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}. \tag{7.106}$$

在 Weyl 表象中，

$$\gamma^0\gamma^\mu = \begin{pmatrix}&\mathbf{1}\\ \mathbf{1}&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&\sigma^\mu\\ \bar\sigma^\mu&\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar\sigma^\mu&\\ &\sigma^\mu\end{pmatrix}, \tag{7.107}$$

根据 (4.177) 和 (4.195) 式，正负电子贡献的 Lorentz 矢量 $\bar v(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)$ 化为

$$\begin{aligned}
&\bar v(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1) = v^\dagger(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^0\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\\
=\ &\begin{pmatrix}\lambda_2\omega_{\lambda_2}(\mathbf{k}_2)\xi^\dagger_{-\lambda_2}(\mathbf{k}_2) & -\lambda_2\omega_{-\lambda_2}(\mathbf{k}_2)\xi^\dagger_{-\lambda_2}(\mathbf{k}_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar\sigma^\mu&\\ &\sigma^\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_{-\lambda_1}(\mathbf{k}_1)\xi_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1)\\ \omega_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1)\xi_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1)\end{pmatrix}\\
=\ &\lambda_2\omega_{\lambda_2}(\mathbf{k}_2)\omega_{-\lambda_1}(\mathbf{k}_1)\xi^\dagger_{-\lambda_2}(\mathbf{k}_2)\bar\sigma^\mu\xi_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1) - \lambda_2\omega_{-\lambda_2}(\mathbf{k}_2)\omega_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1)\xi^\dagger_{-\lambda_2}(\mathbf{k}_2)\sigma^\mu\xi_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1).
\end{aligned} \tag{7.108}$$

按照定义式 (4.178)，有

$$\omega_+(\mathbf{k}_2)\omega_+(\mathbf{k}_1) = \sqrt{(k_2^0+|\mathbf{k}_2|)(k_1^0+|\mathbf{k}_1|)} = \sqrt{\frac{E_{\rm CM}(1+\beta_e)}{2}\frac{E_{\rm CM}(1+\beta_e)}{2}} = \frac{E_{\rm CM}(1+\beta_e)}{2}, \tag{7.109}$$

$$\omega_-(\mathbf{k}_2)\omega_-(\mathbf{k}_1) = \sqrt{(k_2^0-|\mathbf{k}_2|)(k_1^0-|\mathbf{k}_1|)} = \sqrt{\frac{E_{\rm CM}(1-\beta_e)}{2}\frac{E_{\rm CM}(1-\beta_e)}{2}} = \frac{E_{\rm CM}(1-\beta_e)}{2}. \tag{7.110}$$

再由

$$\sqrt{1-\beta_e^2} = \sqrt{1-\left(1-\frac{4m_e^2}{E_{\rm CM}^2}\right)} = \frac{2m_e}{E_{\rm CM}} \tag{7.111}$$

导出

$$\omega_-(\mathbf{k}_2)\omega_+(\mathbf{k}_1) = \omega_+(\mathbf{k}_2)\omega_-(\mathbf{k}_1) = \sqrt{\frac{E_{\rm CM}(1+\beta_e)}{2}\frac{E_{\rm CM}(1-\beta_e)}{2}} = \frac{E_{\rm CM}}{2}\sqrt{1-\beta_e^2} = m_e. \tag{7.112}$$

将 (4.75) 和 (3.46) 式代入，得到 $\xi^\dagger_{-\lambda_2}(\mathbf{k}_2)\sigma^\mu\xi_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1)$ 和 $\xi^\dagger_{-\lambda_2}(\mathbf{k}_2)\bar\sigma^\mu\xi_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1)$ $(\mu = 0,1,2,3)$ 的分量表达式为

$$\xi^\dagger_+(\mathbf{k}_2)\sigma^\mu\xi_+(\mathbf{k}_1) = \begin{pmatrix}0 & -1\end{pmatrix}\sigma^\mu\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = (0,-1,-\mathrm{i},0) = -\xi^\dagger_+(\mathbf{k}_2)\bar\sigma^\mu\xi_+(\mathbf{k}_1), \tag{7.113}$$

$$\xi_-^\dagger(\mathbf{k}_2)\sigma^\mu\xi_-(\mathbf{k}_1) = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\sigma^\mu\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = (0,1,-\mathrm{i},0) = -\xi_-^\dagger(\mathbf{k}_2)\bar\sigma^\mu\xi_-(\mathbf{k}_1), \tag{7.114}$$

$$\xi_-^\dagger(\mathbf{k}_2)\sigma^\mu\xi_+(\mathbf{k}_1) = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\sigma^\mu\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = (1,0,0,1), \qquad \xi_-^\dagger(\mathbf{k}_2)\bar\sigma^\mu\xi_+(\mathbf{k}_1) = (1,0,0,-1), \tag{7.115}$$

$$\xi_+^\dagger(\mathbf{k}_2)\sigma^\mu\xi_-(\mathbf{k}_1) = \begin{pmatrix}0 & -1\end{pmatrix}\sigma^\mu\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = (-1,0,0,1), \quad \xi_+^\dagger(\mathbf{k}_2)\bar\sigma^\mu\xi_-(\mathbf{k}_1) = (-1,0,0,-1). \tag{7.116}$$

从而，初末 Lorentz 矢量 $\bar v(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)$ 的分量表达式是

$$\begin{aligned}
\bar v(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+) &= -\omega_-(\mathbf{k}_2)\omega_-(\mathbf{k}_1)\xi_+^\dagger(\mathbf{k}_2)\bar\sigma^\mu\xi_+(\mathbf{k}_1) + \omega_+(\mathbf{k}_2)\omega_+(\mathbf{k}_1)\xi_+^\dagger(\mathbf{k}_2)\sigma^\mu\xi_+(\mathbf{k}_1)\\
&= -\frac{E_{\mathrm{CM}}(1-\beta_e)}{2}(0,1,\mathrm{i},0) + \frac{E_{\mathrm{CM}}(1+\beta_e)}{2}(0,-1,-\mathrm{i},0)\\
&= E_{\mathrm{CM}}(0,-1,-\mathrm{i},0), \qquad (7.117)\\
\bar v(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-) &= \omega_+(\mathbf{k}_2)\omega_+(\mathbf{k}_1)\xi_-^\dagger(\mathbf{k}_2)\bar\sigma^\mu\xi_-(\mathbf{k}_1) - \omega_-(\mathbf{k}_2)\omega_-(\mathbf{k}_1)\xi_-^\dagger(\mathbf{k}_2)\sigma^\mu\xi_-(\mathbf{k}_1)\\
&= \frac{E_{\mathrm{CM}}(1+\beta_e)}{2}(0,-1,\mathrm{i},0) - \frac{E_{\mathrm{CM}}(1-\beta_e)}{2}(0,1,-\mathrm{i},0)\\
&= E_{\mathrm{CM}}(0,-1,\mathrm{i},0), \qquad (7.118)\\
\bar v(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+) &= \omega_+(\mathbf{k}_2)\omega_-(\mathbf{k}_1)\xi_-^\dagger(\mathbf{k}_2)\bar\sigma^\mu\xi_+(\mathbf{k}_1) - \omega_-(\mathbf{k}_2)\omega_+(\mathbf{k}_1)\xi_-^\dagger(\mathbf{k}_2)\sigma^\mu\xi_+(\mathbf{k}_1)\\
&= m_e(1,0,0,-1) - m_e(1,0,0,1) = 2m_e(0,0,0,-1), \qquad (7.119)\\
\bar v(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-) &= -\omega_-(\mathbf{k}_2)\omega_+(\mathbf{k}_1)\xi_+^\dagger(\mathbf{k}_2)\bar\sigma^\mu\xi_-(\mathbf{k}_1) + \omega_+(\mathbf{k}_2)\omega_-(\mathbf{k}_1)\xi_+^\dagger(\mathbf{k}_2)\sigma^\mu\xi_-(\mathbf{k}_1)\\
&= -m_e(-1,0,0,-1) + m_e(-1,0,0,1) = 2m_e(0,0,0,1). \qquad (7.120)
\end{aligned}$$

另一方面，正负 μ 子贡献的 Lorentz 矢量 $\bar u(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2')$ 化为

$$\begin{aligned}
&\bar u(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2') = u^\dagger(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma^0\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\\
&= \begin{pmatrix}\omega_{-\lambda_1'}(\mathbf{p}_1)\xi_{\lambda_1'}^\dagger(\mathbf{p}_1) & \omega_{\lambda_1'}(\mathbf{p}_1)\xi_{\lambda_1'}^\dagger(\mathbf{p}_1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar\sigma_\mu & \\ & \sigma_\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_2'\omega_{\lambda_2'}(\mathbf{p}_2)\xi_{-\lambda_2'}(\mathbf{p}_2)\\ -\lambda_2'\omega_{-\lambda_2'}(\mathbf{p}_2)\xi_{-\lambda_2'}(\mathbf{p}_2)\end{pmatrix}\\
&= \lambda_2'\omega_{-\lambda_1'}(\mathbf{p}_1)\omega_{\lambda_2'}(\mathbf{p}_2)\xi_{\lambda_1'}^\dagger(\mathbf{p}_1)\bar\sigma_\mu\xi_{-\lambda_2'}(\mathbf{p}_2) - \lambda_2'\omega_{\lambda_1'}(\mathbf{p}_1)\omega_{-\lambda_2'}(\mathbf{p}_2)\xi_{\lambda_1'}^\dagger(\mathbf{p}_1)\sigma_\mu\xi_{-\lambda_2'}(\mathbf{p}_2). \qquad (7.121)
\end{aligned}$$

此时有

$$\omega_+(\mathbf{p}_1)\omega_+(\mathbf{p}_2) = \frac{E_{\mathrm{CM}}(1+\beta_\mu)}{2}, \quad \omega_-(\mathbf{p}_1)\omega_-(\mathbf{p}_2) = \frac{E_{\mathrm{CM}}(1-\beta_\mu)}{2}, \tag{7.122}$$

$$\omega_+(\mathbf{p}_1)\omega_-(\mathbf{p}_2) = \omega_-(\mathbf{p}_1)\omega_+(\mathbf{p}_2) = m_\mu. \tag{7.123}$$

利用三角函数公式

$$c_{\theta/2}^2 - s_{\theta/2}^2 = c_\theta, \quad s_{\theta/2}^2 + c_{\theta/2}^2 = 1, \tag{7.124}$$

推出 $\xi_{\lambda_1'}^\dagger(\mathbf{p}_1)\sigma_\mu\xi_{-\lambda_2'}(\mathbf{p}_2)$ 和 $\xi_{\lambda_1'}^\dagger(\mathbf{p}_1)\bar\sigma_\mu\xi_{-\lambda_2'}(\mathbf{p}_2)$ 的分量为

$$\xi_+^\dagger(\mathbf{p}_1)\sigma_\mu\xi_+(\mathbf{p}_2) = \begin{pmatrix}c_{\theta/2} & s_{\theta/2}\end{pmatrix}\sigma_\mu\begin{pmatrix}s_{\theta/2}\\-c_{\theta/2}\end{pmatrix} = (0,c_\theta,-\mathrm{i},-s_\theta) = -\xi_+^\dagger(\mathbf{p}_1)\bar\sigma_\mu\xi_+(\mathbf{p}_2), \tag{7.125}$$

$$\xi_-^\dagger(\mathbf{p}_1)\sigma_\mu\xi_-(\mathbf{p}_2) = \begin{pmatrix}-s_{\theta/2} & c_{\theta/2}\end{pmatrix}\sigma_\mu\begin{pmatrix}c_{\theta/2}\\ s_{\theta/2}\end{pmatrix} = (0,-c_\theta,-\mathrm{i},s_\theta) = -\xi_-^\dagger(\mathbf{p}_1)\bar\sigma_\mu\xi_-(\mathbf{p}_2), \tag{7.126}$$

$$\xi_+^\dagger(\mathbf{p}_1)\sigma_\mu\xi_-(\mathbf{p}_2) = \begin{pmatrix}c_{\theta/2} & s_{\theta/2}\end{pmatrix}\sigma_\mu\begin{pmatrix}c_{\theta/2}\\ s_{\theta/2}\end{pmatrix} = (1,-s_\theta,0,-c_\theta), \tag{7.127}$$

$$\xi_+^\dagger(\mathbf{p}_1)\bar\sigma_\mu\xi_-(\mathbf{p}_2) = (1,s_\theta,0,c_\theta), \tag{7.128}$$

$$\xi_-^\dagger(\mathbf{p}_1)\sigma_\mu\xi_+(\mathbf{p}_2) = \begin{pmatrix}-s_{\theta/2} & c_{\theta/2}\end{pmatrix}\sigma_\mu\begin{pmatrix}s_{\theta/2}\\ -c_{\theta/2}\end{pmatrix} = (-1,-s_\theta,0,-c_\theta), \tag{7.129}$$

$$\xi_-^\dagger(\mathbf{p}_1)\bar\sigma_\mu\xi_+(\mathbf{p}_2) = (-1,s_\theta,0,c_\theta). \tag{7.130}$$

从而，末态 Lorentz 矢量 $\bar u(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,\lambda_2')$ 的分量是

$$\begin{aligned}\bar u(\mathbf{p}_1,+)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,-) &= -\omega_-(\mathbf{p}_1)\omega_-(\mathbf{p}_2)\xi_+^\dagger(\mathbf{p}_1)\bar\sigma_\mu\xi_+(\mathbf{p}_2)+\omega_+(\mathbf{p}_1)\omega_+(\mathbf{p}_2)\xi_+^\dagger(\mathbf{p}_1)\sigma_\mu\xi_+(\mathbf{p}_2)\\ &= -\frac{E_{\mathrm{CM}}(1-\beta_\mu)}{2}(0,-c_\theta,\mathrm{i},s_\theta)+\frac{E_{\mathrm{CM}}(1+\beta_\mu)}{2}(0,c_\theta,-\mathrm{i},-s_\theta)\\ &= E_{\mathrm{CM}}(0,c_\theta,-\mathrm{i},-s_\theta),\end{aligned} \tag{7.131}$$

$$\begin{aligned}\bar u(\mathbf{p}_1,-)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,+) &= \omega_+(\mathbf{p}_1)\omega_+(\mathbf{p}_2)\xi_-^\dagger(\mathbf{p}_1)\bar\sigma_\mu\xi_-(\mathbf{p}_2)-\omega_-(\mathbf{p}_1)\omega_-(\mathbf{p}_2)\xi_-^\dagger(\mathbf{p}_1)\sigma_\mu\xi_-(\mathbf{p}_2)\\ &= \frac{E_{\mathrm{CM}}(1+\beta_\mu)}{2}(0,c_\theta,\mathrm{i},-s_\theta)-\frac{E_{\mathrm{CM}}(1-\beta_\mu)}{2}(0,-c_\theta,-\mathrm{i},s_\theta)\\ &= E_{\mathrm{CM}}(0,c_\theta,\mathrm{i},-s_\theta),\end{aligned} \tag{7.132}$$

$$\begin{aligned}\bar u(\mathbf{p}_1,+)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,+) &= \omega_-(\mathbf{p}_1)\omega_+(\mathbf{p}_2)\xi_+^\dagger(\mathbf{p}_1)\bar\sigma_\mu\xi_-(\mathbf{p}_2)-\omega_+(\mathbf{p}_1)\omega_-(\mathbf{p}_2)\xi_+^\dagger(\mathbf{p}_1)\sigma_\mu\xi_-(\mathbf{p}_2)\\ &= m_\mu(1,s_\theta,0,c_\theta)-m_\mu(1,-s_\theta,0,-c_\theta) = 2m_\mu(0,s_\theta,0,c_\theta),\end{aligned} \tag{7.133}$$

$$\begin{aligned}\bar u(\mathbf{p}_1,-)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,-) &= -\omega_+(\mathbf{p}_1)\omega_-(\mathbf{p}_2)\xi_-^\dagger(\mathbf{p}_1)\bar\sigma_\mu\xi_+(\mathbf{p}_2)+\omega_-(\mathbf{p}_1)\omega_+(\mathbf{p}_2)\xi_-^\dagger(\mathbf{p}_1)\sigma_\mu\xi_+(\mathbf{p}_2)\\ &= -m_\mu(-1,s_\theta,0,c_\theta)+m_\mu(-1,-s_\theta,0,-c_\theta) = 2m_\mu(0,-s_\theta,0,-c_\theta).\end{aligned} \tag{7.134}$$

将上述表达式代入 (7.98) 式，就得到极化振幅的显明表达式。下面分 4 类螺旋度构型进行讨论。

(1) 当正负电子具有相反螺旋度 ($\lambda_1=-\lambda_2$)、正负 μ 子也具有相反螺旋度 ($\lambda_1'=-\lambda_2'$) 时，极化振幅为

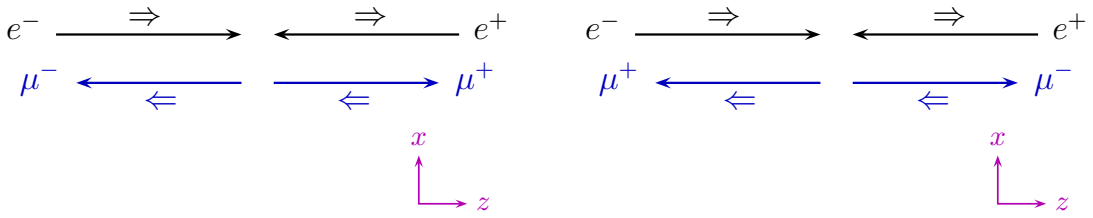
$$\mathcal{M}(+,-,+,-) = \frac{e^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\,\bar v(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+)\,\bar u(\mathbf{p}_1,+)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,-) = -e^2(1+\cos\theta), \tag{7.135}$$

$$\mathcal{M}(-,+,-,+) = \frac{e^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\,\bar v(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-)\,\bar u(\mathbf{p}_1,-)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,+) = -e^2(1+\cos\theta), \tag{7.136}$$

$$\mathcal{M}(+,-,-,+) = \frac{e^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\,\bar v(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+)\,\bar u(\mathbf{p}_1,-)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,+) = e^2(1-\cos\theta), \tag{7.137}$$

$$\mathcal{M}(-,+,+,-) = \frac{e^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\,\bar v(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-)\,\bar u(\mathbf{p}_1,+)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,-) = e^2(1-\cos\theta). \tag{7.138}$$

我们发现 $\mathcal{M}(+,-,+,-)=\mathcal{M}(-,+,-,+)$ 且 $\mathcal{M}(+,-,-,+)=\mathcal{M}(-,+,+,-)$。实际上，QED 是一个**宇称守恒**的理论。在宇称变换下，粒子的动量方向反转，角动量方向不变，因而螺旋度



(a) $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2') = (+,-,+,-)$, $\theta = \pi$　　(b) $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2') = (+,-,-,+)$, $\theta = 0$

图 7.4: $\lambda_1 = -\lambda_2$ 且 $\lambda_1' = -\lambda_2'$ 时的零振幅构型示意图。

翻转，但 θ 角不变。于是，对所有螺旋度作翻转变换之后，宇称守恒保证 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 微分散射截面 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$ 不变，故振幅模方 $|\mathcal{M}|^2$ 不变，而振幅至多相差一个相位因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，

$$\mathcal{M}(-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_1', -\lambda_2') = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\mathcal{M}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2'). \tag{7.139}$$

对于这里的两种情况，相位因子都是 1。

根据 (5.359) 式，$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2') = (+,-,+,-)$ 和 $(-,+,-,+)$ 两种构型对应的极化微分散射截面相等，为

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\lambda_1=-\lambda_2=\lambda_1'=-\lambda_2'} = \frac{\beta_\mu e^4(1+\cos\theta)^2}{64\pi^2 E_{\mathrm{CM}}^2 \beta_e} = \frac{\alpha^2\beta_\mu(1+\cos\theta)^2}{4E_{\mathrm{CM}}^2\beta_e}. \tag{7.140}$$

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2') = (+,-,-,+)$ 和 $(-,+,+,-)$ 对应的极化微分截面也相等，为

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\lambda_1=-\lambda_2=-\lambda_1'=\lambda_2'} = \frac{\alpha^2\beta_\mu(1-\cos\theta)^2}{4E_{\mathrm{CM}}^2\beta_e}. \tag{7.141}$$

可以看到，当 $\theta = \pi$ 时，$\mathcal{M}(+,-,+,-) = 0$。此时，动量和角动量构型如图 7.4(a) 所示，双线箭头 $\Rightarrow$ 表示自旋角动量的方向，与动量方向一致时螺旋度为正，反之为负。e^+e^- 系统的角动量为 1，方向为 z 轴正向，投影在 z 轴上的本征值必定为 $+1$；$\mu^+\mu^-$ 系统的角动量为 1，方向为 z 轴负向，投影在 z 轴上的本征值必定为 -1。初末态系统的角动量投影本征值不同，不满足角动量守恒，因此振幅为零。当 $\theta \neq \pi$ 时，$\mu^+\mu^-$ 系统的角动量有一定概率在 z 轴上投影出本征值 $+1$，在振幅上体现为一个 $(1+\cos\theta)$ 因子。

对图 7.4(b) 可作类似分析，因此 $\theta = 0$ 时有 $\mathcal{M}(+,-,-,+) = 0$，而 $\theta \neq 0$ 时振幅上出现一个 $(1-\cos\theta)$ 因子。

(2) 当正负电子具有相同螺旋度 $(\lambda_1 = \lambda_2)$、正负 μ 子也具有相同螺旋度 $(\lambda_1' = \lambda_2')$ 时，极化振幅为

$$\mathcal{M}(+,+,+,+) = \frac{e^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\bar{v}(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,+) = -\frac{4e^2 m_e m_\mu\cos\theta}{E_{\mathrm{CM}}^2}, \tag{7.142}$$

$$\mathcal{M}(-,-,-,-) = \frac{e^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\bar{v}(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,-) = -\frac{4e^2 m_e m_\mu\cos\theta}{E_{\mathrm{CM}}^2}, \tag{7.143}$$

$$\mathcal{M}(+,+,-,-) = \frac{e^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\bar{v}(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,-) = \frac{4e^2 m_e m_\mu\cos\theta}{E_{\mathrm{CM}}^2}, \tag{7.144}$$

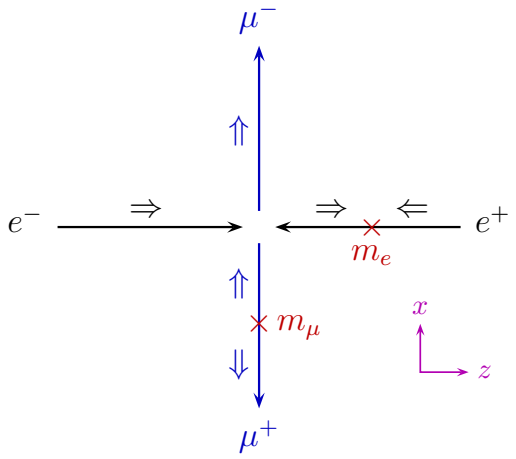


图 7.5: $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2') = (+,+,+,+)$ 且 $\theta = \pi/2$ 时的零振幅构型示意图。

$$\mathcal{M}(-,-,+,+) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\,\bar{v}(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,+) = \frac{4e^2 m_e m_\mu \cos\theta}{E_{\rm CM}^2}. \tag{7.145}$$

这些振幅都正比于 $m_e m_\mu \cos\theta$，宇称变换引起的相位因子都是 1。这四个振幅对应的极化微分截面相等，为

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\lambda_1=\lambda_2,\lambda_1'=\lambda_2'} = \frac{\beta_\mu}{64\pi^2 E_{\rm CM}^2 \beta_e}\,\frac{16e^4 m_e^2 m_\mu^2 \cos^2\theta}{E_{\rm CM}^4} = \frac{4\alpha^2 m_e^2 m_\mu^2 \beta_\mu \cos^2\theta}{E_{\rm CM}^6 \beta_e}. \tag{7.146}$$

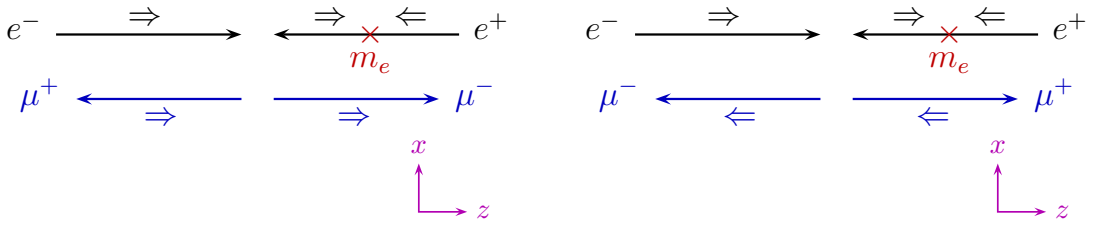
光子是 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 过程的中间态，它的自旋为 1，因而在质心系中角动量也为 1。不过，具有相同螺旋度的正反粒子对系统在质心系中的角动量为 0，必须翻转其中一个粒子的螺旋度才能得到角动量 1。

实际上，粒子的**质量可以翻转螺旋度**。对于无质量的自由粒子，螺旋度在任意惯性系中不变。然而，对于有质量的自由粒子，螺旋度在不同惯性系中可以具有不同的值；毕竟，在静止系中粒子动量为零，因而螺旋度不确定。可以将质量看作一种耦合，耦合螺旋度相反的两种状态，效果是翻转粒子的螺旋度。

对于这里的情况，必须翻转 e^- 或 e^+ 的螺旋度来得到系统角动量为 1 的态，因此振幅中出现一个 $2m_e/E_{\rm CM}$ 因子；同时必须翻转 μ^- 或 μ^+ 的螺旋度，从而出现一个 $2m_\mu/E_{\rm CM}$ 因子。由于运动学上要求 $E_{\rm CM}/2 > m_\mu \gg m_e$，这四个振幅受到严重压低，贡献可以忽略。这种效应称为**螺旋度压低** (helicity suppression)。

当 $\theta = \pi/2$ 时，出现零振幅。对于 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2') = (+,+,+,+)$，零振幅构型如图 7.5 所示。图中 e^+ 被质量耦合（用 $\times$ 表示）翻转螺旋度，使得角动量为 0 的 e^+e^- 系统转化成角动量为 1 的光子。随后，光子转化成角动量为 1 的 $\mu^+\mu^-$ 系统。最后，质量耦合将 μ^+ 的螺旋度翻转，从而得到角动量为 0 的 $\mu^+\mu^-$ 系统。但是，光子的角动量沿 z 轴正向，当 $\theta = \pi/2$ 时不可能转化成角动量沿 x 轴正向的 $\mu^+\mu^-$ 系统，因而振幅为零。当 $\theta \neq \pi/2$ 时，光子转化成 $\mu^+\mu^-$ 系统的概率在振幅上体现为一个 $\cos\theta$ 因子。

(3) 当正负电子具有相同螺旋度 $(\lambda_1 = \lambda_2)$、正负 μ 子具有相反螺旋度 $(\lambda_1' = -\lambda_2')$ 时，极



(a)　$\theta = 0$　　(b)　$\theta = \pi$

图 7.6: $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2') = (+,+,+,-)$ 时的零振幅构型示意图。

化振幅为

$$\mathcal{M}(+,+,+,-) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\bar{v}(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,-) = \frac{2e^2 m_e \sin\theta}{E_{\rm CM}}, \tag{7.147}$$

$$\mathcal{M}(-,-,-,+) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\bar{v}(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,+) = -\frac{2e^2 m_e \sin\theta}{E_{\rm CM}}, \tag{7.148}$$

$$\mathcal{M}(+,+,-,+) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\bar{v}(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,+) = \frac{2e^2 m_e \sin\theta}{E_{\rm CM}}, \tag{7.149}$$

$$\mathcal{M}(-,-,+,-) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\bar{v}(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,-) = -\frac{2e^2 m_e \sin\theta}{E_{\rm CM}}. \tag{7.150}$$

这些振幅都正比于 $m_e \sin\theta$，宇称变换引起的相位因子都是 -1。这四个振幅对应的极化微分截面相等，为

$$\left.\frac{{\rm d}\sigma}{{\rm d}\Omega}\right|_{\lambda_1=\lambda_2,\lambda_1'=-\lambda_2'} = \frac{\beta_\mu}{64\pi^2 E_{\rm CM}^2 \beta_e}\frac{4e^4 m_e^2 \sin^2\theta}{E_{\rm CM}^2} = \frac{\alpha^2 m_e^2 \beta_\mu \sin^2\theta}{E_{\rm CM}^4 \beta_e}. \tag{7.151}$$

这里初态 e^+e^- 系统的角动量为 0，必须翻转 e^- 或 e^+ 的螺旋度来得到角动量为 1 的态，因而振幅中出现一个 $2m_e/E_{\rm CM}$ 因子，受到螺旋度压低。由于 $E_{\rm CM}/2 > m_\mu \gg m_e$，这四个振幅的贡献可以忽略。当 $\theta = 0, \pi$ 时，出现零振幅。对于 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2') = (+,+,+,-)$，零振幅构型如图 7.6(a) 和 7.6(b) 所示。末态 $\mu^+\mu^-$ 系统的角动量为 1，当 $\theta = 0$ 或 π 时，它在 z 轴上的投影必定为 $+1$ 或 -1，而 e^+e^- 系统角动量的投影为 0，不满足角动量守恒，故振幅为零。当 $\theta \neq 0, \pi$ 时，$\mu^+\mu^-$ 系统的角动量有一定概率在 z 轴上投影出本征值 0，在振幅上体现为一个 $\sin\theta$ 因子。

(4) 当正负电子具有相反螺旋度 $(\lambda_1 = -\lambda_2)$、正负 μ 子具有相同螺旋度 $(\lambda_1' = \lambda_2')$ 时，极化振幅为

$$\mathcal{M}(+,-,+,+) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\bar{v}(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,+) = -\frac{2e^2 m_\mu \sin\theta}{E_{\rm CM}}, \tag{7.152}$$

$$\mathcal{M}(-,+,-,-) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\bar{v}(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,-) = \frac{2e^2 m_\mu \sin\theta}{E_{\rm CM}}, \tag{7.153}$$

$$\mathcal{M}(-,+,+,+) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\bar{v}(\mathbf{k}_2,+)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,-)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,+) = -\frac{2e^2 m_\mu \sin\theta}{E_{\rm CM}}, \tag{7.154}$$

$$\mathcal{M}(+,-,-,-) = \frac{e^2}{E_{\rm CM}^2}\bar{v}(\mathbf{k}_2,-)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,+)\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\gamma_\mu v(\mathbf{p}_2,-) = \frac{2e^2 m_\mu \sin\theta}{E_{\rm CM}}. \tag{7.155}$$

这些振幅都正比于 $m_\mu \sin\theta$，宇称变换引起的相位因子都是 -1。这四个振幅对应的极化微分截面相等，为

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\lambda_1=-\lambda_2,\lambda_1'=\lambda_2'} = \frac{\beta_\mu}{64\pi^2 E_{\mathrm{CM}}^2 \beta_e}\frac{4e^4 m_\mu^2 \sin^2\theta}{E_{\mathrm{CM}}^2} = \frac{\alpha^2 m_\mu^2 \beta_\mu \sin^2\theta}{E_{\mathrm{CM}}^4 \beta_e}. \tag{7.156}$$

这里末态 $\mu^+\mu^-$ 系统的角动量为 0，必须翻转 μ^- 或 μ^+ 的螺旋度来得到角动量为 1 的态，因而振幅中出现一个 $2m_\mu/E_{\mathrm{CM}}$ 因子，受到螺旋度压低。若 $E_{\mathrm{CM}}/2 \gg m_\mu$，则这四个振幅的贡献可以忽略。当 $\theta = 0, \pi$ 时，出现零振幅。理由类似于第 (3) 类情况，振幅同样正比于 $\sin\theta$。

利用上述 16 个极化振幅表达式，我们可以直接计算非极化振幅模方，

$$\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{1}{4}\sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_1'\lambda_2'} |\mathcal{M}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1',\lambda_2')|^2 \\
&= \frac{e^2}{4}\left[2(1+\cos\theta)^2 + 2(1-\cos\theta)^2 + 4\frac{16m_e^2 m_\mu^2\cos^2\theta}{E_{\mathrm{CM}}^4} + 4\frac{4m_e^2\sin^2\theta}{E_{\mathrm{CM}}^2} + 4\frac{4m_\mu^2\sin^2\theta}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right] \\
&= e^2\left[1+\cos^2\theta + \frac{16m_e^2m_\mu^2\cos^2\theta}{E_{\mathrm{CM}}^4} + \frac{4(m_e^2+m_\mu^2)(1-\cos^2\theta)}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right] \\
&= e^2\left[1 + \left(1-\frac{4m_e^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right)\left(1-\frac{4m_\mu^2}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right)\cos^2\theta + \frac{4(m_e^2+m_\mu^2)}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right] \\
&= 16\pi^2\alpha^2\left[1+\beta_e^2\beta_\mu^2\cos^2\theta + \frac{4(m_e^2+m_\mu^2)}{E_{\mathrm{CM}}^2}\right],
\end{aligned} \tag{7.157}$$

结果与通过求迹运算得到的 (7.91) 式一致。

7.3 手征性与螺旋度

本节探讨旋量场的**手征性** (chirality) 与自旋 1/2 费米子的螺旋度之间的关系。

在 *Weyl* 表象 (4.69) 中，利用

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & \\ & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \tag{7.158}$$

引入**左手投影矩阵** P_{L} 和**右手投影矩阵** P_{R}，

$$P_{\mathrm{L}} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{1}-\gamma^5) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \\ & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad P_{\mathrm{R}} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{1}+\gamma^5) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \\ & \mathbf{1} \end{pmatrix}. \tag{7.159}$$

它们是厄米的，而且具有投影性

$$P_{\mathrm{L}}^2 = P_{\mathrm{L}}, \quad P_{\mathrm{R}}^2 = P_{\mathrm{R}}, \tag{7.160}$$

正交性

$$P_{\mathrm{L}}P_{\mathrm{R}} = P_{\mathrm{R}}P_{\mathrm{L}} = \mathbf{0}, \tag{7.161}$$

和完备性

$$P_{\mathrm{L}} + P_{\mathrm{R}} = \mathbf{1}. \tag{7.162}$$

另外，由 $\gamma^5\gamma^\mu=-\gamma^\mu\gamma^5$ 有

$$P_{\mathrm{L}}\gamma^\mu=\gamma^\mu P_{\mathrm{R}},\quad P_{\mathrm{R}}\gamma^\mu=\gamma^\mu P_{\mathrm{L}}. \tag{7.163}$$

回顾 (4.113) 式，Dirac 旋量场 ψ 可分解为左手 Weyl 旋量场 η_{L} 和右手 Weyl 旋量场 η_{R}。利用投影矩阵，定义**左手**的四分量旋量场

$$\psi_{\mathrm{L}}\equiv P_{\mathrm{L}}\psi=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \\ & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_{\mathrm{L}}\\ \eta_{\mathrm{R}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta_{\mathrm{L}}\\ 0\end{pmatrix}, \tag{7.164}$$

和**右手**的四分量旋量场

$$\psi_{\mathrm{R}}\equiv P_{\mathrm{R}}\psi=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \\ & \mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_{\mathrm{L}}\\ \eta_{\mathrm{R}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \eta_{\mathrm{R}}\end{pmatrix}. \tag{7.165}$$

可见，左右手投影矩阵正好挑选出具有相应手征性的分量。

根据定义，左手旋量场 ψ_{L} 的 Dirac 共轭为

$$\bar\psi_{\mathrm{L}}=(\psi_{\mathrm{L}})^\dagger\gamma^0=\frac{1}{2}[(1-\gamma^5)\psi]^\dagger\gamma^0=\frac{1}{2}\psi^\dagger(1-\gamma^5)\gamma^0=\frac{1}{2}\psi^\dagger\gamma^0(1+\gamma^5)=\bar\psi P_{\mathrm{R}}. \tag{7.166}$$

注意，上式中 $1\pm\gamma^5$ 是 $\mathbf{1}\pm\gamma^5$ 的简化写法。同理得右手旋量场 ψ_{R} 的 Dirac 共轭为

$$\bar\psi_{\mathrm{R}}=\bar\psi P_{\mathrm{L}}. \tag{7.167}$$

对包含若干个 Dirac 矩阵的旋量场双线性型进行左右手投影分解，得

$$\bar\psi\psi=\bar\psi(P_{\mathrm{L}}+P_{\mathrm{R}})\psi=\bar\psi(P_{\mathrm{L}}^2+P_{\mathrm{R}}^2)\psi=\bar\psi_{\mathrm{R}}\psi_{\mathrm{L}}+\bar\psi_{\mathrm{L}}\psi_{\mathrm{R}}, \tag{7.168}$$

$$\bar\psi\gamma^\mu\psi=\bar\psi\gamma^\mu(P_{\mathrm{L}}^2+P_{\mathrm{R}}^2)\psi=\bar\psi P_{\mathrm{R}}\gamma^\mu P_{\mathrm{L}}\psi+\bar\psi P_{\mathrm{L}}\gamma^\mu P_{\mathrm{R}}\psi=\bar\psi_{\mathrm{L}}\gamma^\mu\psi_{\mathrm{L}}+\bar\psi_{\mathrm{R}}\gamma^\mu\psi_{\mathrm{R}}, \tag{7.169}$$

$$\bar\psi\gamma^\mu\gamma^\nu\psi=\bar\psi\gamma^\mu\gamma^\nu(P_{\mathrm{L}}^2+P_{\mathrm{R}}^2)\psi=\bar\psi_{\mathrm{R}}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi_{\mathrm{L}}+\bar\psi_{\mathrm{L}}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi_{\mathrm{R}}, \tag{7.170}$$

$$\bar\psi\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\psi=\bar\psi\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho(P_{\mathrm{L}}^2+P_{\mathrm{R}}^2)\psi=\bar\psi_{\mathrm{L}}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\psi_{\mathrm{L}}+\bar\psi_{\mathrm{R}}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\psi_{\mathrm{R}}. \tag{7.171}$$

可见，**包含偶数（奇数）个 Dirac 矩阵的旋量场双线性型耦合手征性相反（相同）的旋量场。**于是，拉氏量 (4.104) 中的 Dirac 旋量场质量项分解为

$$-m\bar\psi\psi=-m(\bar\psi_{\mathrm{R}}\psi_{\mathrm{L}}+\bar\psi_{\mathrm{L}}\psi_{\mathrm{R}}), \tag{7.172}$$

也就是说，**质量 m 将左手旋量场 ψ_{L} 与右手旋量场 ψ_{R} 耦合起来。**

在**高能极限**下，忽略旋量场的质量 m，则 $E_{\mathbf{p}}\simeq|\mathbf{p}|$，故

$$\omega_+(\mathbf{p})=\sqrt{E_{\mathbf{p}}+|\mathbf{p}|}\simeq\sqrt{2E_{\mathbf{p}}},\quad \omega_-(\mathbf{p})=\sqrt{E_{\mathbf{p}}-|\mathbf{p}|}\simeq 0. \tag{7.173}$$

按照平面波旋量系数 u 和 v 的螺旋态表达式 (4.177) 和 (4.195)，有

$$u(\mathbf{p},+)=\begin{pmatrix}\omega_-(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p})\\ \omega_+(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p})\end{pmatrix}\simeq\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\begin{pmatrix}0\\ \xi_+(\mathbf{p})\end{pmatrix}, \tag{7.174}$$

$$u(\mathbf{p},-) = \begin{pmatrix}\omega_+(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p})\\ \omega_-(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p})\end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\begin{pmatrix}\xi_-(\mathbf{p})\\ 0\end{pmatrix}, \tag{7.175}$$

$$v(\mathbf{p},+) = \begin{pmatrix}\omega_+(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p})\\ -\omega_-(\mathbf{p})\xi_-(\mathbf{p})\end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\begin{pmatrix}\xi_-(\mathbf{p})\\ 0\end{pmatrix}, \tag{7.176}$$

$$v(\mathbf{p},-) = \begin{pmatrix}-\omega_-(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p})\\ \omega_+(\mathbf{p})\xi_+(\mathbf{p})\end{pmatrix} \simeq \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\begin{pmatrix}0\\ \xi_+(\mathbf{p})\end{pmatrix}. \tag{7.177}$$

此时, 螺旋度不同的 u 和 v 显示出不同的手征性, $u(\mathbf{p},+)$ 和 $v(\mathbf{p},-)$ 是右手的, $u(\mathbf{p},-)$ 和 $v(\mathbf{p},+)$ 是左手的。可见，**高能极限下手征性等价于螺旋度**。回顾 4.4.2 小节，$u(\mathbf{p},\lambda)$ 是本征值为 λ 的螺旋度本征态，与螺旋度为 λ 的正费米子相关；而 $v(\mathbf{p},\lambda)$ 是本征值为 $-\lambda$ 的螺旋度本征态，却与螺旋度为 λ 的反费米子相关。用投影矩阵作用，有

$$u_{\mathrm{L}}(\mathbf{p},-) = P_{\mathrm{L}}u(\mathbf{p},-) \simeq u(\mathbf{p},-), \quad u_{\mathrm{R}}(\mathbf{p},+) = P_{\mathrm{R}}u(\mathbf{p},+) \simeq u(\mathbf{p},+), \tag{7.178}$$

$$u_{\mathrm{L}}(\mathbf{p},+) = P_{\mathrm{L}}u(\mathbf{p},+) \simeq 0, \quad u_{\mathrm{R}}(\mathbf{p},-) = P_{\mathrm{R}}u(\mathbf{p},-) \simeq 0, \tag{7.179}$$

$$v_{\mathrm{L}}(\mathbf{p},+) = P_{\mathrm{L}}v(\mathbf{p},+) \simeq v(\mathbf{p},+), \quad v_{\mathrm{R}}(\mathbf{p},-) = P_{\mathrm{R}}v(\mathbf{p},-) \simeq v(\mathbf{p},-), \tag{7.180}$$

$$v_{\mathrm{L}}(\mathbf{p},-) = P_{\mathrm{L}}v(\mathbf{p},-) \simeq 0, \quad v_{\mathrm{R}}(\mathbf{p},+) = P_{\mathrm{R}}v(\mathbf{p},+) \simeq 0. \tag{7.181}$$

相应的 Dirac 共轭满足

$$\bar{u}_{\mathrm{L}}(\mathbf{p},-) = \bar{u}(\mathbf{p},-)P_{\mathrm{R}} \simeq \bar{u}(\mathbf{p},-), \quad \bar{u}_{\mathrm{R}}(\mathbf{p},+) = \bar{u}(\mathbf{p},+)P_{\mathrm{L}} \simeq u(\mathbf{p},+), \tag{7.182}$$

$$\bar{u}_{\mathrm{L}}(\mathbf{p},+) = \bar{u}(\mathbf{p},+)P_{\mathrm{R}} \simeq 0, \quad \bar{u}_{\mathrm{R}}(\mathbf{p},-) = \bar{u}(\mathbf{p},-)P_{\mathrm{L}} \simeq 0, \tag{7.183}$$

$$\bar{v}_{\mathrm{L}}(\mathbf{p},+) = \bar{v}(\mathbf{p},+)P_{\mathrm{R}} \simeq v(\mathbf{p},+), \quad \bar{v}_{\mathrm{R}}(\mathbf{p},-) = \bar{v}(\mathbf{p},-)P_{\mathrm{L}} \simeq v(\mathbf{p},-), \tag{7.184}$$

$$\bar{v}_{\mathrm{L}}(\mathbf{p},-) = \bar{v}(\mathbf{p},-)P_{\mathrm{R}} \simeq 0, \quad \bar{v}_{\mathrm{R}}(\mathbf{p},+) = \bar{v}(\mathbf{p},+)P_{\mathrm{L}} \simeq 0. \tag{7.185}$$

据此，将投影矩阵作用到 $\psi(x)$ 平面波解 (4.219) 上，得到左右手旋量场的平面波解

$$\psi_{\mathrm{L}}(x) = P_{\mathrm{L}}\psi(x) \simeq \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left[u(\mathbf{p},-)a_{\mathbf{p},-}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + v(\mathbf{p},+)b^{\dagger}_{\mathbf{p},+}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right], \tag{7.186}$$

$$\psi_{\mathrm{R}}(x) = P_{\mathrm{R}}\psi(x) \simeq \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left[u(\mathbf{p},+)a_{\mathbf{p},+}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + v(\mathbf{p},-)b^{\dagger}_{\mathbf{p},-}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right]. \tag{7.187}$$

相应的 Dirac 共轭为

$$\bar{\psi}_{\mathrm{L}}(x) = [\psi_{\mathrm{L}}(x)]^{\dagger}\gamma^0 \simeq \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left[\bar{u}(\mathbf{p},-)a^{\dagger}_{\mathbf{p},-}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} + \bar{v}(\mathbf{p},+)b_{\mathbf{p},+}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\right],$$

$$\bar{\psi}_{\mathrm{R}}(x) = [\psi_{\mathrm{R}}(x)]^{\dagger}\gamma^0 \simeq \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left[\bar{u}(\mathbf{p},+)a^{\dagger}_{\mathbf{p},+}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} + \bar{v}(\mathbf{p},-)b_{\mathbf{p},-}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\right]. \tag{7.188}$$

也就是说，**在高能极限下，忽略质量，左手旋量场 $\boldsymbol{\psi_{\mathrm{L}}(x)}$ 描述左旋极化的正费米子和右旋极化的反费米子，右手旋量场 $\boldsymbol{\psi_{\mathrm{R}}(x)}$ 描述右旋极化的正费米子和左旋极化的反费米子，$\boldsymbol{\psi_{\mathrm{L}}(x)}$ 和 $\boldsymbol{\psi_{\mathrm{R}}(x)}$ 成为两个相互独立的场。**

在高能极限下，由投影矩阵性质推出

$$\bar{u}(\mathbf{q},-)u(\mathbf{p},-) \simeq \bar{u}(\mathbf{q},-)P_{\mathrm{R}}P_{\mathrm{L}}u(\mathbf{p},-) = 0, \quad \bar{u}(\mathbf{q},+)u(\mathbf{p},+) \simeq \bar{u}(\mathbf{q},+)P_{\mathrm{L}}P_{\mathrm{R}}u(\mathbf{p},+) = 0, \tag{7.189}$$

$$\bar{v}(\mathbf{q},-)v(\mathbf{p},-) \simeq \bar{v}(\mathbf{q},-)P_{\mathrm{L}}P_{\mathrm{R}}v(\mathbf{p},-) = 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q},+)v(\mathbf{p},+) \simeq \bar{v}(\mathbf{q},+)P_{\mathrm{R}}P_{\mathrm{L}}v(\mathbf{p},+) = 0. \tag{7.190}$$

此时两个平面波旋量系数之间夹着零个 Dirac 矩阵，不能耦合相同螺旋度，只能耦合相反螺旋度，这是左右手投影分解式 (7.168) 在平面波旋量系数上的体现。一般地，有

$$\bar{u}(\mathbf{q},\lambda)u(\mathbf{p},\lambda) \simeq 0, \qquad \bar{v}(\mathbf{q},\lambda)v(\mathbf{p},\lambda) \simeq 0, \tag{7.191}$$

$$\bar{u}(\mathbf{q},-\lambda)\gamma^{\mu}u(\mathbf{p},\lambda) \simeq 0, \qquad \bar{v}(\mathbf{q},-\lambda)\gamma^{\mu}v(\mathbf{p},\lambda) \simeq 0, \tag{7.192}$$

$$\bar{u}(\mathbf{q},\lambda)\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}u(\mathbf{p},\lambda) \simeq 0, \qquad \bar{v}(\mathbf{q},\lambda)\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}v(\mathbf{p},\lambda) \simeq 0, \tag{7.193}$$

$$\bar{u}(\mathbf{q},-\lambda)\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}u(\mathbf{p},\lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q},-\lambda)\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}v(\mathbf{p},\lambda) \simeq 0. \tag{7.194}$$

对于 u 和 v 一起构成的旋量双线性型，则有

$$\bar{u}(\mathbf{q},-\lambda)v(\mathbf{p},\lambda) \simeq 0, \qquad \bar{v}(\mathbf{q},-\lambda)u(\mathbf{p},\lambda) \simeq 0, \tag{7.195}$$

$$\bar{u}(\mathbf{q},\lambda)\gamma^{\mu}v(\mathbf{p},\lambda) \simeq 0, \qquad \bar{v}(\mathbf{q},\lambda)\gamma^{\mu}u(\mathbf{p},\lambda) \simeq 0, \tag{7.196}$$

$$\bar{u}(\mathbf{q},-\lambda)\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}v(\mathbf{p},\lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q},-\lambda)\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}u(\mathbf{p},\lambda) \simeq 0, \tag{7.197}$$

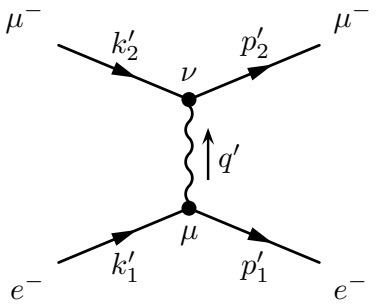
$$\bar{u}(\mathbf{q},\lambda)\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}v(\mathbf{p},\lambda) \simeq 0, \quad \bar{v}(\mathbf{q},\lambda)\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}u(\mathbf{p},\lambda) \simeq 0. \tag{7.198}$$

容易看出，在高能极限下，忽略质量，只有 $\lambda_1 = -\lambda_2$ 且 $\lambda_1' = -\lambda_2'$ 的螺旋度构型对 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 极化振幅 (7.98) 的贡献非零，与上一小节的计算结果一致。如果不忽略质量，则其它螺旋度构型的贡献正比于质量，表现出螺旋度压低效应。

7.4　Coulomb 散射

7.4.1　$e^-\mu^-$ 散射

现在，我们讨论与 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 湮灭过程关系密切的 $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ 散射过程。这个过程对应于电子受 μ 子 Coulomb 电场影响而发生的 **Coulomb 散射**。它的领头阶费曼图与图 7.1 类似，但线的方向不同，相应的不变振幅为



$$\mathrm{i}\mathcal{M} = \bar{u}(p_1')\,(\mathrm{i}e\gamma^{\mu})\,u(k_1')\,\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{q'^2}\,\bar{u}(p_2')\,(\mathrm{i}e\gamma^{\nu})\,u(k_2')$$

$$= \frac{\mathrm{i}e^2}{q'^2}\,\bar{u}(p_1')\gamma^\mu u(k_1')\,\bar{u}(p_2')\gamma_\mu u(k_2'). \tag{7.199}$$

为简便起见，这里我们将平面波旋量系数 u 和 $\bar{u}$ 写成在壳四维动量的函数，而且没有显明写出对螺旋度的依赖。虚光子的四维动量 q'^μ 满足

$$q'^\mu = k_1'^\mu - p_1'^\mu = p_2'^\mu - k_2'^\mu. \tag{7.200}$$

$\mathrm{i}\mathcal{M}$ 的复共轭是

$$(\mathrm{i}\mathcal{M})^* = -\frac{\mathrm{i}e^2}{q'^2}\,\bar{u}(k_1')\gamma^\nu u(p_1')\,\bar{u}(k_2')\gamma_\nu u(p_2'), \tag{7.201}$$

非极化振幅模方为

$$\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4(q'^2)^2}\sum_{\text{spins}}\bar{u}(p_1')\gamma^\mu u(k_1')\,\bar{u}(k_1')\gamma^\nu u(p_1')\,\bar{u}(p_2')\gamma_\mu u(k_2')\,\bar{u}(k_2')\gamma_\nu u(p_2') \\
&= \frac{e^4}{4(q'^2)^2}\sum_{\text{spins}}\mathrm{tr}[u(p_1')\bar{u}(p_1')\gamma^\mu u(k_1')\,\bar{u}(k_1')\gamma^\nu]\,\mathrm{tr}[u(p_2')\bar{u}(p_2')\gamma_\mu u(k_2')\,\bar{u}(k_2')\gamma_\nu] \\
&= \frac{e^4}{4(q'^2)^2}\,\mathrm{tr}[(\not{p}_1' + m_e)\gamma^\mu(\not{k}_1' + m_e)\gamma^\nu]\,\mathrm{tr}[(\not{p}_2' + m_\mu)\gamma_\mu(\not{k}_2' + m_\mu)\gamma_\nu].
\end{aligned} \tag{7.202}$$

其中，$\sum_{\text{spins}}$ 表示对自旋求和，即对螺旋度求和。容易看出，这个结果等价于对 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 非极化振幅模方 (7.43) 作以下动量替换，

$$k_1^\mu \to k_1'^\mu, \quad k_2^\mu \to -p_1'^\mu, \quad p_1^\mu \to p_2'^\mu, \quad p_2^\mu \to -k_2'^\mu. \tag{7.203}$$

注意这样的替换正好使得 $q^\mu \to q'^\mu$。可见，这两个过程确实具有密切的关系，这种关系称为**交叉对称性** (crossing symmetry)。通过动量替换，我们可以从 (7.79) 式直接得到 $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ 非极化振幅模方的表达式

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{8e^4}{(q'^2)^2}\,[(k_1'\cdot p_2')(p_1'\cdot k_2') + (k_1'\cdot k_2')(p_1'\cdot p_2') - m_e^2(p_2'\cdot k_2') - m_\mu^2(k_1'\cdot p_1') + 2m_e^2m_\mu^2]. \tag{7.204}$$

在质心系中，根据 5.5.3 小节关于两体散射运动学的讨论，初末态粒子的动量满足

$$|\mathbf{k}_1'| = |\mathbf{k}_2'| = |\mathbf{p}_1'| = |\mathbf{p}_2'| = \frac{E_{\text{CM}}}{2}\,\lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_e^2}{E_{\text{CM}}^2}, \frac{m_\mu^2}{E_{\text{CM}}^2}\right) \equiv Q. \tag{7.205}$$

也就是说，初末态四个粒子的动量大小都是 Q。另一方面，它们的能量是

$$k_1'^0 = p_1'^0 = \frac{E_{\text{CM}}^2 + m_e^2 - m_\mu^2}{2E_{\text{CM}}} \equiv E_e, \quad k_2'^0 = p_2'^0 = \frac{E_{\text{CM}}^2 + m_\mu^2 - m_e^2}{2E_{\text{CM}}} \equiv E_\mu, \tag{7.206}$$

其中 E_e 是初末态电子的能量，E_μ 是初末态 μ 子的能量。设散射角 θ 为 $\mathbf{k}_1'$ 与 $\mathbf{p}_1'$ 方向的夹角，则四维动量的内积表达为

$$k_1'\cdot p_1' = k_1'^0p_1'^0 - |\mathbf{k}_1'||\mathbf{p}_1'|\cos\theta = E_e^2 - Q^2\cos\theta, \tag{7.207}$$

$$k_1' \cdot p_2' = k_1'^0 p_2'^0 + |\mathbf{k}_1'||\mathbf{p}_2'|\cos\theta = E_e E_\mu + Q^2\cos\theta, \tag{7.208}$$

$$k_2' \cdot p_2' = k_2'^0 p_2'^0 - |\mathbf{k}_2'||\mathbf{p}_2'|\cos\theta = E_\mu^2 - Q^2\cos\theta, \tag{7.209}$$

$$k_2' \cdot p_1' = k_2'^0 p_1'^0 + |\mathbf{k}_2'||\mathbf{p}_1'|\cos\theta = E_e E_\mu + Q^2\cos\theta, \tag{7.210}$$

$$k_1' \cdot k_2' = k_1'^0 k_2'^0 + |\mathbf{k}_1'||\mathbf{k}_2'| = E_e E_\mu + Q^2, \tag{7.211}$$

$$p_1' \cdot p_2' = p_1'^0 p_2'^0 + |\mathbf{p}_1'||\mathbf{p}_2'| = E_e E_\mu + Q^2, \tag{7.212}$$

$$q'^2 = (k_1' - p_1')^2 = 2m_e^2 - 2\,k_1' \cdot p_1' = 2(m_e^2 - E_e^2 + Q^2\cos\theta) = -2Q^2(1-\cos\theta). \tag{7.213}$$

对任意 $\theta > 0$，有 $q'^2 < 0$，即虚光子是类空的。

于是，$\overline{|\mathcal{M}|^2}$ 化为

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{8e^4}{4Q^4(1-\cos\theta)^2}\big[(E_eE_\mu + Q^2\cos\theta)^2 + (E_eE_\mu + Q^2)^2 \\ &\qquad - m_e^2(E_\mu^2 - Q^2\cos\theta) - m_\mu^2(E_e^2 - Q^2\cos\theta) + 2m_e^2m_\mu^2\big] \\ &= \frac{32\pi^2\alpha^2}{Q^4(1-\cos\theta)^2}\big\{2E_e^2E_\mu^2 - m_\mu^2E_e^2 - m_e^2E_\mu^2 + 2m_e^2m_\mu^2 + Q^4(1+\cos^2\theta) \\ &\qquad + Q^2[2E_eE_\mu(1+\cos\theta) + (m_e^2+m_\mu^2)\cos\theta]\big\}.\end{aligned} \tag{7.214}$$

接着按照 (5.338) 式计算微分散射截面，式中的入射流因子

$$E_\mathcal{A}E_\mathcal{B}|\mathbf{v}_\mathcal{A} - \mathbf{v}_\mathcal{B}| = E_eE_\mu\left(\frac{Q}{E_e} + \frac{Q}{E_\mu}\right) = E_eE_\mu\frac{Q(E_\mu+E_e)}{E_eE_\mu} = QE_{\mathrm{CM}}, \tag{7.215}$$

故微分截面为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} &= \frac{1}{64\pi^2}\frac{1}{E_\mathcal{A}E_\mathcal{B}|\mathbf{v}_\mathcal{A}-\mathbf{v}_\mathcal{B}|}\frac{|\mathbf{p}_1'|}{E_{\mathrm{CM}}}\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{64\pi^2}\frac{1}{QE_{\mathrm{CM}}}\frac{Q}{E_{\mathrm{CM}}}\overline{|\mathcal{M}|^2} \\ &= \frac{\alpha^2}{2E_{\mathrm{CM}}^2Q^4(1-\cos\theta)^2}\big\{2E_e^2E_\mu^2 - m_\mu^2E_e^2 - m_e^2E_\mu^2 + 2m_e^2m_\mu^2 \\ &\qquad + Q^4(1+\cos^2\theta) + Q^2[2E_eE_\mu(1+\cos\theta) + (m_e^2+m_\mu^2)\cos\theta]\big\}.\end{aligned} \tag{7.216}$$

由于分母上的 $(1-\cos\theta)^2$ 因子，微分截面对于向前散射 ($\theta \to 0$) 具有奇性，这是 Coulomb 散射的一个普遍特征。当散射角 θ 很小时，$\cos\theta \simeq 1 - \theta^2/2 + \mathcal{O}(\theta^4)$，有

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \propto \frac{1}{\theta^4}, \quad \theta \to 0. \tag{7.217}$$

$(1-\cos\theta)^2$ 因子来源于光子传播子贡献的 $q'^2 = -2Q^2(1-\cos\theta)$，故奇性来自接近质壳的虚光子 ($q'^2 \simeq 0$)。

当 $E_{\mathrm{CM}} \gg m_e$ 时，忽略电子质量，有 $E_e \simeq Q \simeq \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2}$，微分截面化为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} &\simeq \frac{\alpha^2}{2E_{\mathrm{CM}}^2Q^2(1-\cos\theta)^2}[2E_\mu^2 - m_\mu^2 + Q^2 + Q^2\cos^2\theta + 2QE_\mu + 2QE_\mu\cos\theta + m_\mu^2\cos\theta] \\ &= \frac{\alpha^2}{2E_{\mathrm{CM}}^2Q^2(1-\cos\theta)^2}[(E_\mu+Q)^2 + (E_\mu + Q\cos\theta)^2 - m_\mu^2(1-\cos\theta)].\end{aligned} \tag{7.218}$$

在高能极限 ($E_{\mathrm{CM}} \gg m_\mu > m_e$) 下，$Q \simeq E_e \simeq E_\mu \simeq E_{\mathrm{CM}}/2$，则微分截面变成

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \simeq \frac{\alpha^2[4+(1+\cos\theta)^2]}{2E_{\mathrm{CM}}^2(1-\cos\theta)^2} = \frac{\alpha^2[1+\cos^4(\theta/2)]}{2E_{\mathrm{CM}}^2\sin^4(\theta/2)}. \tag{7.219}$$

第二步用到三角函数倍角公式 (7.100)。

7.4.2 e^-p 散射

质子 (proton) p 是自旋为 1/2 的稳定费米子，质量为 $m_p = 938.3$ MeV。它是一种**复合粒子**，具有内部结构，可以看作由 2 个 u 夸克和 1 个 d 夸克组成的束缚态。质子携带的电荷 Q_p 是这些夸克的电荷之和，即 $Q_p = 2Q_u + Q_d = +1$。像这样能够贡献到质子的相加性量子数（如电荷）的夸克称为**价夸克** (valence quark)。由于量子涨落，质子参与相互作用时有一定概率出现一对正反夸克 $q\bar{q}$，q 与 $\bar{q}$ 携带的相加性量子数正好相互抵消，这样的夸克称为**海夸克** (sea quark)。

一个相互作用过程通常涉及一个典型的能量或动量大小，比如质心能 E_{CM} 或上一小节用到的动量 Q，这样的量称为**能标** (energy scale)。当能标远小于 m_p 时，质子在相互作用过程中就像没有结构的点粒子一样。此时，我们可以用一个 Dirac 旋量场来描述质子，并使用 $Q_p = +1$ 的 QED 相互作用顶点。

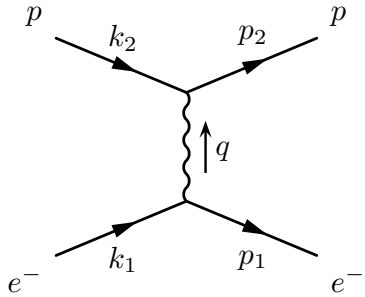
下面讨论电子与质子的 Coulomb 散射 $e^-p \to e^-p$。在非相对论性经典物理学中，假设入射电子的动量远小于质子质量 m_p，从而可取 $m_p \to \infty$ 的极限，则质子在散射前后都是静止的，初末态电子的运动速率相同，记为 v，运动方向相差散射角 θ，那么，Coulomb 力引起的微分散射截面为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\alpha^2}{4m_e^2v^4\sin^4(\theta/2)}. \tag{7.220}$$

这个式子就是 **Rutherford 公式** [37]。可见，$\theta \to 0$ 时 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega \propto \theta^{-4}$ 的奇性在经典物理层面就已经出现了。

在 QED 中，$e^-p \to e^-p$ 散射过程的领头阶不变振幅为

$\mathrm{i}\mathcal{M} =$



$$\begin{aligned} &= \bar{u}(p_1)\,(\mathrm{i}e\gamma^\mu)\,u(k_1)\,\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{q^2}\,\bar{u}(p_2)\,(-\mathrm{i}e\gamma^\nu)\,u(k_2) \\ &= -\frac{\mathrm{i}e^2}{q^2}\,\bar{u}(p_1)\gamma^\mu u(k_1)\,\bar{u}(p_2)\gamma_\mu u(k_2). \end{aligned} \tag{7.221}$$

相比于 (7.199) 式，这个结果多出一个负号，这是因为 $Q_p = -Q_\mu = +1$。由于这里只有一幅 Feynman 图，这个符号差异不会影响振幅模方。类比 (7.204) 式，$e^-p \to e^-p$ 非极化振幅模方为

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{8e^4}{(q^2)^2}\left[(k_1\cdot p_2)(p_1\cdot k_2) + (k_1\cdot k_2)(p_1\cdot p_2) - m_e^2(p_2\cdot k_2) - m_p^2(k_1\cdot p_1) + 2m_e^2m_p^2\right]. \tag{7.222}$$

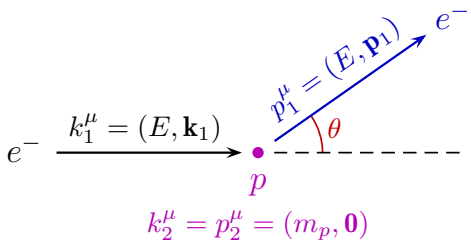


图 7.7: 当入射电子动量远小于 m_p 时，$e^- p \to e^- p$ 过程的动量示意图。

现在，我们在入射电子动量远小于 m_p 的极限下推导 Rutherford 公式的 QED 相对论性修正。如图 7.7 所示，此时散射前后的质子是静止的，初末态电子的能量都是 E，四维动量分解为

$$k_1^\mu = (E, \mathbf{k}_1), \quad k_2^\mu = (m_p, \mathbf{0}), \quad p_1^\mu = (E, \mathbf{p}_1), \quad p_2^\mu = (m_p, \mathbf{0}). \tag{7.223}$$

初末态电子的动量大小相等，记为

$$Q \equiv |\mathbf{k}_1| = |\mathbf{p}_1| = \sqrt{E^2 - m_e^2}\,. \tag{7.224}$$

根据狭义相对论中的定义，初末态电子的运动速率为

$$v = \frac{Q}{E} = \sqrt{1 - \frac{m_e^2}{E^2}}\,, \tag{7.225}$$

因而

$$m_e^2 = E^2 - Q^2 = E^2(1 - v^2). \tag{7.226}$$

四维动量的内积可以表达成

$$k_1 \cdot p_1 = E^2 - Q^2 \cos\theta = E^2(1 - v^2\cos\theta), \quad k_2 \cdot p_2 = m_p^2, \tag{7.227}$$

$$k_1 \cdot p_2 = k_2 \cdot p_1 = k_1 \cdot k_2 = p_1 \cdot p_2 = m_p E, \tag{7.228}$$

$$q^2 = (k_1 - p_1)^2 = 2m_e^2 - 2E^2 + 2Q^2\cos\theta = -2Q^2(1 - \cos\theta). \tag{7.229}$$

从而，非极化振幅模方化为

$$\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{8e^4}{4Q^4(1-\cos\theta)^2}\left[m_p^2E^2 + m_p^2E^2 - m_e^2m_p^2 - m_p^2E^2(1 - v^2\cos\theta) + 2m_e^2m_p^2\right] \\
&= \frac{32\pi^2\alpha^2}{Q^4(1-\cos\theta)^2}\left(m_p^2E^2 + m_p^2E^2v^2\cos\theta + m_e^2m_p^2\right) \\
&= \frac{32\pi^2\alpha^2}{Q^4(1-\cos\theta)^2}\left[m_p^2E^2 + m_p^2E^2v^2\cos\theta + m_p^2E^2(1 - v^2)\right] \\
&= \frac{32\pi^2\alpha^2m_p^2}{v^2Q^2(1-\cos\theta)^2}\left[2 - v^2(1-\cos\theta)\right] = \frac{16\pi^2\alpha^2m_p^2}{v^2Q^2\sin^4(\theta/2)}\left(1 - v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right).
\end{aligned} \tag{7.230}$$

末态两体不变相空间积分是

$$\int \mathrm{d}\Pi_2 = \int \frac{\mathrm{d}^3p_1}{(2\pi)^3 2p_1^0}\frac{\mathrm{d}^3p_2}{(2\pi)^3 2p_2^0}(2\pi)^4\delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) = \int \frac{\mathrm{d}^3p_1}{(2\pi)^2 4p_1^0p_2^0}\delta(k_1^0 + k_2^0 - p_1^0 - p_2^0)$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}Q\,Q^2}{16\pi^2 E m_p}\,\delta\Big(E + m_p - \sqrt{Q^2+m_e^2} - m_p\Big) = \int \frac{\mathrm{d}\Omega\,Q^2}{16\pi^2 E m_p}\left|\frac{\mathrm{d}\big(E-\sqrt{Q^2+m_e^2}\big)}{\mathrm{d}Q}\right|^{-1}$$

$$= \int \mathrm{d}\Omega\,\frac{Q^2}{16\pi^2 E m_p}\left|\frac{2Q}{2\sqrt{Q^2+m_e^2}}\right|^{-1} = \int \mathrm{d}\Omega\,\frac{Q}{16\pi^2 m_p}. \tag{7.231}$$

第四步用到 (2.61) 式。入射流因子

$$E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}-\mathbf{v}_{\mathcal{B}}| = E m_p \frac{Q}{E} = Q m_p. \tag{7.232}$$

此过程末态对称性因子 $\mathcal{S}=1$，根据 (5.325) 式，散射截面是

$$\sigma = \frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}-\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|}\int \mathrm{d}\Pi_2\,\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4Qm_p}\int \mathrm{d}\Omega\,\frac{Q\overline{|\mathcal{M}|^2}}{16\pi^2 m_p} = \frac{1}{64\pi^2 m_p^2}\int \mathrm{d}\Omega\,\overline{|\mathcal{M}|^2}\,, \tag{7.233}$$

微分散射截面为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{64\pi^2 m_p^2} = \frac{\alpha^2}{4v^2Q^2\sin^4(\theta/2)}\left(1 - v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right), \quad Q \ll m_p. \tag{7.234}$$

上式是 QED 对 Rutherford 公式 (7.220) 的修正，称为 **Mott 公式**。Mott 公式跟 Rutherford 公式一样不依赖于 m_p，因而 $m_p \to \infty$ 的极限是存在的。在低速极限下，$v \ll 1$，$Q \simeq m_e v$，则 Mott 公式退化成 Rutherford 公式。

7.4.3 Coulomb 势能和 Yukawa 势能

从前面两个小节可以看到，QED 中带电粒子通过交换虚光子发生 Coulomb 散射。在非相对论极限下，Mott 公式退化为 Rutherford 公式，因而光子传播子的效应应该等价于电动力学中的 Coulomb 电势。这是接下来要论证的观点。

考虑两种带电费米子 f 和 f'，电荷分别为 Q_f 和 $Q_{f'}$，讨论 Coulomb 散射过程 $ff' \to ff'$。记初态四维动量为 k_1 和 k_2，末态四维动量为 p_1 和 p_2。在非相对论极限下，$|\mathbf{k}_i|, |\mathbf{p}_i| \ll m_f, m_{f'}$，粒子能量近似为质量，即

$$k_1^\mu \simeq (m_f, \mathbf{k}_1), \quad k_2^\mu \simeq (m_{f'}, \mathbf{k}_2), \quad p_1^\mu \simeq (m_f, \mathbf{p}_1), \quad p_2^\mu \simeq (m_{f'}, \mathbf{p}_2). \tag{7.235}$$

在此极限下，可将正费米子的平面波旋量系数 u 表达为

$$u(\mathbf{p}, s) \simeq \sqrt{m}\begin{pmatrix}\zeta_s \\ \zeta_s\end{pmatrix}, \tag{7.236}$$

其中 $\mathbf{p}$ 是动量，而不依赖于 $\mathbf{p}$ 的 ζ_s 是某个固定方向上的二分量自旋本征态，本征值为 $s = \pm 1/2$，满足正交归一关系和完备性关系，

$$\zeta_{s'}^\dagger \zeta_s = \delta_{s's}, \quad \sum_{s=\pm 1/2} \zeta_s \zeta_s^\dagger = \mathbf{1}. \tag{7.237}$$

例如，在 z 轴方向上，自旋矩阵 $\sigma^3/2 = \mathrm{diag}(1/2, -1/2)$ 的本征态为

$$\zeta_{+1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \zeta_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{7.238}$$

这样的 $u(\mathbf{p}, s)$ 在 $\mathbf{p} \to \mathbf{0}$ 极限下满足运动方程 (4.145)，

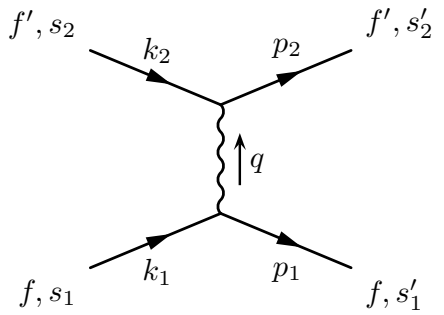
$$(\not{p} - m)u(\mathbf{p}, s) = \begin{pmatrix} -m & \sigma^\mu p_\mu \\ \bar{\sigma}^\mu p_\mu & -m \end{pmatrix} u(\mathbf{p}, s) \simeq m^{3/2} \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_s \\ \zeta_s \end{pmatrix} = 0, \tag{7.239}$$

也满足正交归一关系 (4.140)，

$$u^\dagger(\mathbf{p}, s')u(\mathbf{p}, s) \simeq m \begin{pmatrix} \zeta_{s'}^\dagger & \zeta_{s'}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_s \\ \zeta_s \end{pmatrix} = 2m\zeta_{s'}^\dagger \zeta_s \simeq 2E_{\mathbf{p}}\delta_{s's}. \tag{7.240}$$

于是，$ff' \to ff'$ 散射过程的 QED 领头阶不变振幅为

$\mathrm{i}\mathcal{M} =$



$$\begin{aligned} &= \bar{u}(\mathbf{p}_1, s_1')\,(-\mathrm{i}Q_f e\gamma^\mu)\,u(\mathbf{k}_1, s_1)\,\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{q^2}\,\bar{u}(\mathbf{p}_2, s_2')\,(-\mathrm{i}Q_{f'} e\gamma^\nu)\,u(\mathbf{k}_2, s_2) \\ &= \frac{\mathrm{i}Q_f Q_{f'} e^2}{q^2}\,\bar{u}(\mathbf{p}_1, s_1')\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1, s_1)\,\bar{u}(\mathbf{p}_2, s_2')\gamma_\mu u(\mathbf{k}_2, s_2). \end{aligned} \tag{7.241}$$

由

$$u(\mathbf{k}_1, s_1) \simeq \sqrt{m_f} \begin{pmatrix} \zeta_{s_1} \\ \zeta_{s_1} \end{pmatrix}, \quad \bar{u}(\mathbf{p}_1, s_1') \simeq \sqrt{m_f} \begin{pmatrix} \zeta_{s_1'}^\dagger & \zeta_{s_1'}^\dagger \end{pmatrix}, \tag{7.242}$$

得

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, s_1')\gamma^0 u(\mathbf{k}_1, s_1) \simeq m_f \begin{pmatrix} \zeta_{s_1'}^\dagger & \zeta_{s_1'}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{s_1} \\ \zeta_{s_1} \end{pmatrix} = 2m_f \zeta_{s_1'}^\dagger \zeta_{s_1} = 2m_f \delta_{s_1' s_1}, \tag{7.243}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, s_1')\gamma^i u(\mathbf{k}_1, s_1) \simeq m_f \begin{pmatrix} \zeta_{s_1'}^\dagger & \zeta_{s_1'}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{s_1} \\ \zeta_{s_1} \end{pmatrix} = 0. \tag{7.244}$$

同理有

$$\bar{u}(\mathbf{p}_2, s_2')\gamma_0 u(\mathbf{k}_2, s_2) \simeq 2m_{f'}\delta_{s_2' s_2}, \quad \bar{u}(\mathbf{p}_2, s_2')\gamma_i u(\mathbf{k}_2, s_2) \simeq 0, \tag{7.245}$$

因此在非相对论极限下只有时间分量 $\bar{u}\gamma^0 u$ 的贡献。再注意到 $q^0 = k_1^0 - p_1^0 \simeq m_f - m_f = 0$，则

$$q^2 = (q^0)^2 - |q|^2 \simeq -|\mathbf{q}|^2, \tag{7.246}$$

将不变振幅化为

$$\mathrm{i}\mathcal{M} \simeq -\frac{\mathrm{i}Q_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2}\,(2m_f\delta_{s_1's_1})(2m_{f'}\delta_{s_2's_2}). \tag{7.247}$$

上式只在 $s_1' = s_1$ 且 $s_2' = s_2$ 时非零，也就是说，非相对论性的 Coulomb 散射不改变费米子的自旋状态。

上式 $2m_f$ 和 $2m_{f'}$ 因子跟归一化取法有关。依照 4.5.4 小节的相对论性归一化取法，正费米子态定义为 $|\mathbf{p}^+, s\rangle \equiv \sqrt{2E_\mathbf{p}}\, a^\dagger_{\mathbf{p},s}\,|0\rangle$，满足 $\langle \mathbf{k}^+, s' \,|\, \mathbf{p}^+, s\rangle = 2E_\mathbf{p}(2\pi)^3\delta_{ss'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{k})$。在非相对论性量子力学中，通常将正费米子态定义为

$$\big|\mathbf{p}^+, s\big\rangle_{\mathrm{NR}} \equiv a^\dagger_{\mathbf{p},s}\,|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\,\big|\mathbf{p}^+, s\big\rangle\,, \tag{7.248}$$

满足内积关系

$${}_{\mathrm{NR}}\big\langle \mathbf{k}^+, s' \,\big|\, \mathbf{p}^+, s\big\rangle_{\mathrm{NR}} = (2\pi)^3\delta_{ss'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{k}), \tag{7.249}$$

相应地，外线规则变成

$$f, s \xrightarrow{\quad p \quad} \bullet = \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\,u(\mathbf{p}, s), \qquad \bullet \xrightarrow{\quad p \quad} f, s = \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\,\bar{u}(\mathbf{p}, \lambda). \tag{7.250}$$

因此，非相对论性归一化不变振幅是

$$\mathrm{i}\mathcal{M}_{\mathrm{NR}} \simeq -\frac{\mathrm{i}Q_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2}\,\delta_{s_1's_1}\delta_{s_2's_2}, \tag{7.251}$$

其中 $\mathbf{q} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_1$。相应的散射矩阵元为

$${}_{\mathrm{NR}}\big\langle \mathbf{p}_2^+, s_2'; \mathbf{p}_1^+, s_1' \big|\, \mathrm{i}T\, \big|\mathbf{k}_1^+, s_1; \mathbf{k}_2^+, s_2\big\rangle_{\mathrm{NR}} = \mathrm{i}\mathcal{M}_{\mathrm{NR}}(2\pi)^4\delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2). \tag{7.252}$$

另一方面，对于 f 粒子进入势场 $V(\mathbf{x})$ 发生的散射过程，非相对论性量子力学的 **Born 近似**给出散射矩阵元

$${}_{\mathrm{NR}}\big\langle \mathbf{p}_1^+, s_1 \big|\, \mathrm{i}T\, \big|\mathbf{k}_1^+, s_1\big\rangle_{\mathrm{NR}} = -\mathrm{i}\tilde{V}(\mathbf{q}) \cdot 2\pi\,\delta(E_{\mathbf{p}_1} - E_{\mathbf{k}_1}), \tag{7.253}$$

其中 $\tilde{V}(\mathbf{q})$ 是 $V(\mathbf{x})$ 的 Fourier 变换，

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) \equiv \int \mathrm{d}^3x\, V(\mathbf{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}. \tag{7.254}$$

这里相当于对引起势场 $V(\mathbf{x})$ 的 f' 粒子的动量作积分，因而没有相关的三维动量 δ 函数因子。

比较这两个理论的散射矩阵元，我们得到

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{|\mathbf{q}|^2}. \tag{7.255}$$

对它求 Fourier 逆变换，推出 **Coulomb 势能**

$$V(\mathbf{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\,\tilde{V}(\mathbf{q})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{(2\pi)^3}\int |\mathbf{q}|^2\mathrm{d}|\mathbf{q}|\mathrm{d}\Omega\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}}{|\mathbf{q}|^2}$$

$$= \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \mathrm{d}|\mathbf{q}| \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_{-1}^1 \mathrm{d}\cos\theta \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}|\mathbf{q}||\mathbf{x}|\cos\theta} = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4\pi^2} \int_0^\infty \mathrm{d}|\mathbf{q}| \, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\mathbf{q}||\mathbf{x}|} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}|\mathbf{q}||\mathbf{x}|}}{\mathrm{i}|\mathbf{q}||\mathbf{x}|}$$
$$= \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4\mathrm{i}\pi^2 r} \left(\int_0^\infty \mathrm{d}|\mathbf{q}| \, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|} - \int_0^\infty \mathrm{d}|\mathbf{q}| \, \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|} \right), \tag{7.256}$$

其中 $r \equiv |\mathbf{x}|$。作变量替换 $Q = -|\mathbf{q}|$，将第二个积分化为

$$-\int_0^\infty \mathrm{d}|\mathbf{q}| \, \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|} = \int_0^{-\infty} \mathrm{d}Q \, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}Qr}}{-Q} = \int_{-\infty}^0 \mathrm{d}Q \, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}Qr}}{Q} = \int_{-\infty}^0 \mathrm{d}|\mathbf{q}| \, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|}, \tag{7.257}$$

最后一步作了变量替换 $|\mathbf{q}| = Q$。因而可将 $V(\mathbf{x})$ 表达成

$$V(r) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4\mathrm{i}\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}|\mathbf{q}| \, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|} \tag{7.258}$$

利用留数定理计算这个积分，被积函数在 $|\mathbf{q}| = 0$ 处存在单极点，在 $|\mathbf{q}|$ 复平面上沿实轴和上半圆周积分，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}|\mathbf{q}| \, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|} = \mathrm{i}\pi \operatorname*{Res}_{|\mathbf{q}|=0} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|} = \mathrm{i}\pi. \tag{7.259}$$

于是 Coulomb 势能化为

$$V(r) = \frac{Q_f Q_{f'} e^2}{4\pi r}. \tag{7.260}$$

从而，f' 粒子引起的 **Coulomb 势**为

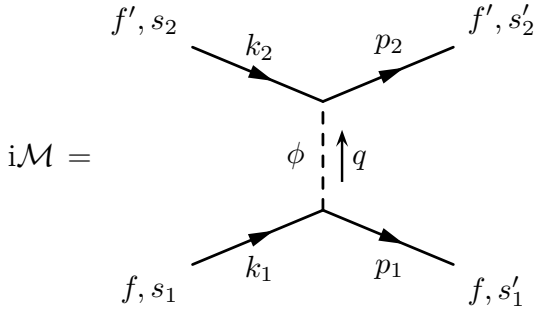
$$\Phi(r) = \frac{V(r)}{Q_f e} = \frac{Q_{f'} e}{4\pi r}. \tag{7.261}$$

这正是电动力学中点电荷电势的形式。

Coulomb 势是长程势，以 r^{-1} 规律衰减。Coulomb 势能 $V(r)$ 的符号由电荷 Q_f 和 $Q_{f'}$ 的符号决定。当 Q_f 与 $Q_{f'}$ 同号时，$V(r) > 0$，r 越小，势能越大，Coulomb 势是**排斥势**。当 Q_f 与 $Q_{f'}$ 异号时，$V(r) < 0$，r 越小，势能越小，Coulomb 势是**吸引势**。

我们已经看到，光子传播子在非相对论极限下的效应等价于 Coulomb 势。类似地，Yukawa 理论中标量玻色子 ϕ 的传播子应该等价于一种 **Yukawa 势**。与光子不同的是，ϕ 具有质量 m_ϕ。下面推导 Yukawa 势能的形式。

假设存在两种参与 Yukawa 相互作用的费米子 f 和 f'，相应的 Yukawa 耦合常数均为 κ。根据 6.2 节的 Feynman 规则，$ff' \to ff'$ 散射过程的领头阶不变振幅为



$$= \bar{u}(\mathbf{p}_1, s_1')\,(-\mathrm{i}\kappa)\,u(\mathbf{k}_1, s_1)\,\frac{\mathrm{i}}{q^2 - m_\phi^2}\,\bar{u}(\mathbf{p}_2, s_2')\,(-\mathrm{i}\kappa)\,u(\mathbf{k}_2, s_2)$$
$$= -\frac{\mathrm{i}\kappa^2}{q^2 - m_\phi^2}\,\bar{u}(\mathbf{p}_1, s_1')u(\mathbf{k}_1, s_1)\,\bar{u}(\mathbf{p}_2, s_2')u(\mathbf{k}_2, s_2). \tag{7.262}$$

由于

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1, s_1')u(\mathbf{k}_1, s_1) \simeq m_f \begin{pmatrix} \zeta_{s_1'}^\dagger & \zeta_{s_1'}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{s_1} \\ \zeta_{s_1} \end{pmatrix} = 2m_f \delta_{s_1' s_1}, \quad \bar{u}(\mathbf{p}_2, s_2')u(\mathbf{k}_2, s_2) \simeq 2m_{f'}\delta_{s_2' s_2}, \tag{7.263}$$

振幅化为

$$\mathrm{i}\mathcal{M} = \frac{\mathrm{i}\kappa^2}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2}\,(2m_f\delta_{s_1' s_1})(2m_{f'}\delta_{s_2' s_2}). \tag{7.264}$$

类比前面 Coulomb 散射的计算，即得 Yukawa 势场 $V(\mathbf{x})$ 的 Fourier 变换

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) = -\frac{\kappa^2}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2}. \tag{7.265}$$

于是，ϕ 传播子对应的 **Yukawa 势能**为

$$V(\mathbf{x}) = -\kappa^2 \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} = -\frac{\kappa^2}{4\pi^2} \int_0^\infty \mathrm{d}|\mathbf{q}| \int_{-1}^1 \mathrm{d}\cos\theta\, \frac{|\mathbf{q}|^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}|\mathbf{q}|r\cos\theta}}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2}$$
$$= -\frac{\kappa^2}{4\pi^2} \int_0^\infty \mathrm{d}|\mathbf{q}|\, \frac{|\mathbf{q}|^2}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\mathbf{q}|r} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}|\mathbf{q}|r}}{\mathrm{i}|\mathbf{q}|r} = -\frac{\kappa^2}{4\mathrm{i}\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}|\mathbf{q}|\, \frac{|\mathbf{q}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2}. \tag{7.266}$$

现在，被积函数在上半复平面 $|\mathbf{q}| = \mathrm{i}m_\phi$ 处存在单极点，沿实轴和上半圆周积分，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}|\mathbf{q}|\, \frac{|\mathbf{q}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} = 2\mathrm{i}\pi \operatorname*{Res}_{|\mathbf{q}|=\mathrm{i}m_\phi} \frac{|\mathbf{q}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} = 2\mathrm{i}\pi \left.\frac{|\mathbf{q}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}| + \mathrm{i}m_\phi}\right|_{|\mathbf{q}|=\mathrm{i}m_\phi} = \mathrm{i}\pi \mathrm{e}^{-m_\phi r}. \tag{7.267}$$

因此，Yukawa 势能的形式是

$$V(r) = -\frac{\kappa^2}{4\pi r}\,\mathrm{e}^{-m_\phi r}. \tag{7.268}$$

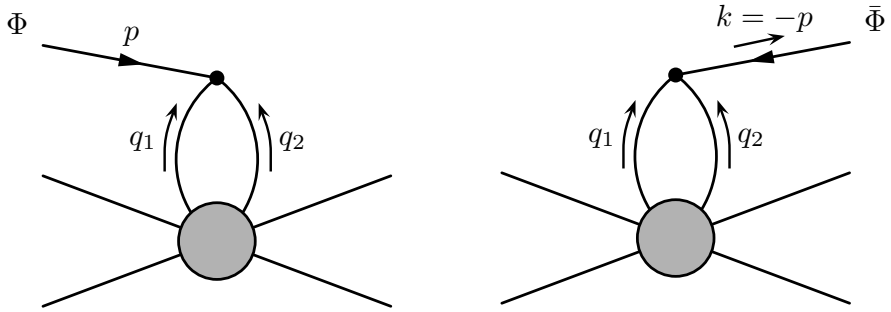
由于 $V(r) < 0$，r 越小，势能越小，Yukawa 势是吸引势。在长矩离处，指数因子 $\mathrm{e}^{-m_\phi r}$ 使 Yukawa 势迅速衰减，因而它是短程势。$r_0 \equiv 1/m_\phi$ 是 Yukawa 势的特征长度，即 Yukawa 相互作用的力程。若标量玻色子 ϕ 没有质量，则 Yukawa 势能与 Coulomb 势能形式类似。

7.5 交叉对称性和 Mandelstam 变量

在上一节中我们看到，$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 与 $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ 过程具有交叉对称性，利用相应的动量替换规则 (7.203)，可以从前者的计算结果直接得到后者的非极化振幅模方。

交叉对称性的一般表述如下。如果一个过程的初态包含一个四维动量为 p^μ 的粒子 Φ，从初态中移除 Φ 并在末态中添加一个四维动量为 k^μ 的反粒子 $\bar{\Phi}$ 而得到另一个过程，则这两个过程的不变振幅可以通过动量替换 $k^\mu = -p^\mu$ 联系起来，

$$\mathcal{M}(\Phi(p) + \cdots \to \cdots) = \mathcal{M}(\cdots \to \bar{\Phi}(k) + \cdots). \tag{7.269}$$



(a) 正粒子 Φ 入射　　(b) 反粒子 $\bar{\Phi}$ 出射

图 7.8: 交叉对称性示意图。

物理的初末态粒子必须具有正能量，但 $k^\mu = -p^\mu$ 意味着 Φ 和 $\bar{\Phi}$ 不可能同时具有正能量，因而看起来有一个过程是非物理的。实际上，应当将这个等式看成一个重复利用振幅计算的数学技巧：对第一个过程的振幅作动量替换 $p^\mu \to -k^\mu$，再解析延拓到物理区域就得到第二个过程的振幅。可以这样想象交叉对称性：一个粒子沿着时间方向运动等价于它的反粒子逆着时间方向运动，这样的反粒子具有负能量和相反动量。

把 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 交叉成 $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$，需要先将初态 e^+ (动量为 k_2) 换成末态 e^- (动量为 p_1')，引起动量替换 $k_2^\mu \to -p_1'^\mu$；再将末态 μ^+ (动量为 p_2) 换成初态 μ^- (动量为 k_2')，引起动量替换 $p_2^\mu \to -k_2'^\mu$；初态 e^- 和末态 μ^- 不需要交叉，可以直接修改相应的动量记号。这样就得到替换规则 (7.203)。

交叉一个粒子的典型 Feynman 图如图 7.8 所示，灰色圆形象征一些 Feynman 图结构，图 7.8(a) 中有一个正粒子 Φ 进入顶点，图 7.8(b) 相应地替换成一个反粒子 $\bar{\Phi}$ 离开顶点，两幅图的其余部分完全相同。由于顶点处能动量守恒，图 7.8(a) 中四维动量满足 $q_1^\mu + q_2^\mu + p^\mu = 0$，图 7.8(b) 则满足 $q_1^\mu + q_2^\mu - k^\mu = 0$。因此，只要 $k^\mu = -p^\mu$，两幅图在振幅上的差异就仅仅是 $\Phi(p)$ 与 $\bar{\Phi}(k)$ 的外线因子（即极化矢量、平面波旋量系数等）之间的差异。

如果 Φ 是标量玻色子，则 $\Phi(p)$ 和 $\bar{\Phi}(k)$ 的外线因子都是 1，两个振幅没有差异，(7.269) 式成立。如果 Φ 是正矢量玻色子，则 $\Phi(p)$ 的外线因子为 $\varepsilon_\mu(p,\lambda)$。观察极化矢量表达式 (3.244)，可知 $\varepsilon_\mu(-p,\lambda) = \varepsilon_\mu^*(p,\lambda)$ 对 $\lambda = 0, \pm$ 成立。因此，当 $k^\mu = -p^\mu$ 时，有

$$\varepsilon_\mu(p,\lambda) = \varepsilon_\mu(-k,\lambda) = \varepsilon_\mu^*(k,\lambda). \tag{7.270}$$

最右边正是 $\bar{\Phi}(k)$ 的外线因子，故 (7.269) 式成立。

如果 Φ 是 *Dirac* 正费米子，则 $\Phi(p)$ 和 $\bar{\Phi}(k)$ 的外线因子分别为平面波旋量系数 $u(p)$ 和 $v(k)$。在计算自旋求和时将 p 替换成 $-k$，可得

$$\sum_{\text{spins}} u(p)\bar{u}(p) = \not{p} + m = -(\not{k} - m) = -\sum_{\text{spins}} v(k)\bar{v}(k), \tag{7.271}$$

因而两个过程的非极化振幅模方 $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ 相差一个整体负号。可见，交叉一个费米子时，除了作动量替换 $p^\mu \to -k^\mu$，还要去除一个整体负号才能得到正确的 $\overline{|\mathcal{M}|^2}$。当我们将 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 交叉成 $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ 时，交叉了两个费米子，产生了两个整体负号，它们正好相互抵消。

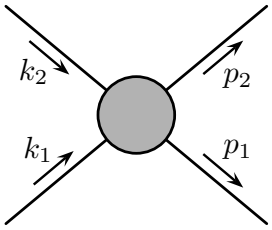


图 7.9: $2 \to 2$ 散射过程四维动量示意图。

如果想让振幅层面上的 (7.269) 式在交叉费米子时成立，则需要对平面波旋量系数采取特殊的定义。我们依然按照 (4.177) 式将平面波旋量系数 $u(p,\lambda)$ 定义为

$$u(p,\lambda) = \begin{pmatrix} \sqrt{p^0 - \lambda|\mathbf{p}|}\,\xi_\lambda(\mathbf{p}) \\ \sqrt{p^0 + \lambda|\mathbf{p}|}\,\xi_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix}. \tag{7.272}$$

由螺旋态的本征值方程 (4.161) 得 $-(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_\lambda(-\mathbf{p}) = \lambda\,\xi_\lambda(-\mathbf{p})$，故

$$(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_\lambda(-\mathbf{p}) = -\lambda\,\xi_\lambda(-\mathbf{p}). \tag{7.273}$$

可见，$\xi_\lambda(-\mathbf{p})$ 是螺旋度为 $-\lambda$ 的本征态。从而，我们可以将 $v(p,\lambda)$ 定义成

$$v(p,\lambda) = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sqrt{p^0 + \lambda|\mathbf{p}|}\,\xi_\lambda(-\mathbf{p}) \\ -\mathrm{i}\sqrt{p^0 - \lambda|\mathbf{p}|}\,\xi_\lambda(-\mathbf{p}) \end{pmatrix}. \tag{7.274}$$

与 (4.184) 式比较，有 $\tilde{f}_\lambda(\mathbf{p}) = \mathrm{i}\sqrt{p^0 + \lambda|\mathbf{p}|}\,\xi_\lambda(-\mathbf{p})$，$\tilde{g}_\lambda(\mathbf{p}) = -\mathrm{i}\sqrt{p^0 - \lambda|\mathbf{p}|}\,\xi_\lambda(-\mathbf{p})$。利用 $m = \sqrt{(p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2} = \sqrt{(p^0 + \lambda|\mathbf{p}|)(p^0 - \lambda|\mathbf{p}|)}$，推出

$$\begin{aligned} -\frac{p\cdot\bar{\sigma}}{m}\,\tilde{f}_\lambda(\mathbf{p}) &= -\frac{\mathrm{i}}{m}\sqrt{p^0 + \lambda|\mathbf{p}|}\,(p^0 + \mathbf{p}\cdot\sigma)\xi_\lambda(-\mathbf{p}) = -\frac{\mathrm{i}}{m}\sqrt{p^0 + \lambda|\mathbf{p}|}\,(p^0 - \lambda|\mathbf{p}|)\xi_\lambda(-\mathbf{p}) \\ &= -\mathrm{i}\sqrt{p^0 - \lambda|\mathbf{p}|}\,\xi_\lambda(-\mathbf{p}) = \tilde{g}_\lambda(\mathbf{p}), \end{aligned} \tag{7.275}$$

符合 (4.188) 式。因此，这样定义的 $v(p,\lambda)$ 满足运动方程 (4.183)，也可以验证它满足正交归一关系 (4.203)、(4.211) 和自旋求和关系 (4.218)。如此，当 $k^\mu = -p^\mu$ 时，可以推出

$$\begin{aligned} u(p,\lambda) &= u(-k,\lambda) = \begin{pmatrix} \sqrt{-k^0 - \lambda|\mathbf{k}|}\,\xi_\lambda(-\mathbf{k}) \\ \sqrt{-k^0 + \lambda|\mathbf{k}|}\,\xi_\lambda(-\mathbf{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}(k^0 + \lambda|\mathbf{k}|)]^{1/2}\,\xi_\lambda(-\mathbf{k}) \\ [\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}(k^0 - \lambda|\mathbf{k}|)]^{1/2}\,\xi_\lambda(-\mathbf{k}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}(k^0 + \lambda|\mathbf{k}|)^{1/2}\,\xi_\lambda(-\mathbf{k}) \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}(k^0 - \lambda|\mathbf{k}|)^{1/2}\,\xi_\lambda(-\mathbf{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sqrt{k^0 + \lambda|\mathbf{k}|}\,\xi_\lambda(-\mathbf{k}) \\ -\mathrm{i}\sqrt{k^0 - \lambda|\mathbf{k}|}\,\xi_\lambda(-\mathbf{k}) \end{pmatrix} = v(k,\lambda), \end{aligned} \tag{7.276}$$

则 $\Phi(p)$ 和 $\bar{\Phi}(k)$ 的外线因子相等，(7.269) 式成立。注意，平方根函数是多值函数，在上式推导过程中，我们利用 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi} = -1$ 对两个平方根函数采用了不同的取值方式。

进一步，我们可以定义一些便于应用交叉关系的物理量。对于 $2 \to 2$ 散射，按照图 7.9 表示的四维动量，定义三个 Lorentz 不变的 **Mandelstam 变量** [38]：

$$s \equiv (k_1 + k_2)^2 = (p_1 + p_2)^2, \tag{7.277}$$

$$t \equiv (k_1 - p_1)^2 = (k_2 - p_2)^2, \tag{7.278}$$

$$u \equiv (k_1 - p_2)^2 = (k_2 - p_1)^2. \tag{7.279}$$

第二步均用到能动量守恒关系 $k_1^\mu + k_2^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$。

记这些四维动量对应的质量为 m_1、m_2、m_1'、m_2'，满足

$$k_1^2 = m_1^2, \quad k_2^2 = m_2^2, \quad p_1^2 = m_1'^2, \quad p_2^2 = m_2'^2. \tag{7.280}$$

于是，四维动量的两两内积可以用 Mandelstam 变量和质量表示为

$$k_1 \cdot k_2 = \frac{1}{2}(s - k_1^2 - k_2^2) = \frac{1}{2}(s - m_1^2 - m_2^2), \qquad p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{2}(s - m_1'^2 - m_2'^2), \tag{7.281}$$

$$k_1 \cdot p_1 = -\frac{1}{2}(t - k_1^2 - p_1^2) = -\frac{1}{2}(t - m_1^2 - m_1'^2), \quad k_2 \cdot p_2 = -\frac{1}{2}(t - m_2^2 - m_2'^2), \tag{7.282}$$

$$k_1 \cdot p_2 = -\frac{1}{2}(u - k_1^2 - p_2^2) = -\frac{1}{2}(u - m_1^2 - m_2'^2), \quad k_2 \cdot p_1 = -\frac{1}{2}(u - m_2^2 - m_1'^2). \tag{7.283}$$

此外，能够推出

$$\begin{aligned} s + t + u &= (k_1 + k_2)^2 + (k_1 - p_1)^2 + (k_1 - p_2)^2 = 3k_1^2 + k_2^2 + p_1^2 + p_2^2 + 2\,k_1 \cdot (k_2 - p_1 - p_2) \\ &= 3k_1^2 + k_2^2 + p_1^2 + p_2^2 - 2k_1^2 = k_1^2 + k_2^2 + p_1^2 + p_2^2, \end{aligned} \tag{7.284}$$

故

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_1'^2 + m_2'^2, \tag{7.285}$$

即 Mandelstam 变量之和是初末态粒子质量平方和。

t 和 u 均定义为某个初态动量与某个末态动量之差的平方，看起来它们可以互换定义。在实际应用中，通常用初末态中两个性质相近的粒子来定义 t。比如，对于 7.4.1 小节的 $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ 散射过程，通常用初态电子动量 k_1' 与末态电子动量 p_1' 定义 $t = (k_1' - p_1')^2$，从而虚光子动量满足 $q'^2 = t$。

在质心系中，$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{0}$，有

$$s = (k_1^0 + k_2^0)^2 = E_{\mathrm{CM}}^2, \tag{7.286}$$

故 $\sqrt{s} = E_{\mathrm{CM}}$ 就是质心能。对于任意 $2 \to n$ 散射过程，将 s 定义成所有初态或末态四维动量之和的平方，

$$s = (k_1 + k_2)^2 = \Big(\sum_i p_i\Big)^2, \tag{7.287}$$

则 $\sqrt{s}$ 就是这个过程的质心能。

可以用 Mandelstam 变量表达任意 $2 \to 2$ 散射过程的 $\overline{|\mathcal{M}|^2}$。对于 7.2 节的 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 过程，非极化振幅模方 (7.79) 可化为

$$\begin{aligned} &\overline{|\mathcal{M}(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)|^2} \\ &= \frac{8e^4}{s^2}\left[(k_1 \cdot p_1)(k_2 \cdot p_2) + (k_1 \cdot p_2)(k_2 \cdot p_1) + m_\mu^2(k_1 \cdot k_2) + m_e^2(p_1 \cdot p_2) + 2m_e^2 m_\mu^2\right] \end{aligned}$$

$$= \frac{8e^4}{s^2}\left[\frac{1}{4}(t-m_e^2-m_\mu^2)^2+\frac{1}{4}(u-m_e^2-m_\mu^2)^2+\frac{1}{2}m_\mu^2(s-2m_e^2)+\frac{1}{2}m_e^2(s-2m_\mu^2)+2m_e^2m_\mu^2\right]$$
$$= \frac{8e^4}{s^2}\left[\frac{t^2+u^2}{4}-\frac{t+u}{2}(m_e^2+m_\mu^2)+\frac{1}{2}(m_e^2+m_\mu^2)^2+\frac{s}{2}(m_e^2+m_\mu^2)\right]. \tag{7.288}$$

由 (7.285) 式得 $s+t+u=2m_e^2+2m_\mu^2$，即 $t+u=2(m_e^2+m_\mu^2)-s$，故

$$\begin{aligned}&\overline{|\mathcal{M}(e^+e^-\to\mu^+\mu^-)|^2}\\ &= \frac{8e^4}{s^2}\left[\frac{t^2+u^2}{4}-\frac{2(m_e^2+m_\mu^2)-s}{2}(m_e^2+m_\mu^2)+\frac{1}{2}(m_e^2+m_\mu^2)^2+\frac{s}{2}(m_e^2+m_\mu^2)\right]\\ &= \frac{2e^4}{s^2}[t^2+u^2+4s(m_e^2+m_\mu^2)-2(m_e^2+m_\mu^2)^2].\end{aligned} \tag{7.289}$$

现在，将 $e^+e^-\to\mu^+\mu^-$ 交叉成 $e^-\mu^-\to e^-\mu^-$。根据动量替换规则 (7.203)，有

$$(k_1+k_2)^2\to(k_1'-p_1')^2,\quad (k_1-p_1)^2\to(k_1'-p_2')^2,\quad (k_1-p_2)^2\to(k_1'+k_2')^2, \tag{7.290}$$

即 Mandelstam 变量的替换规则为

$$s\to t,\quad t\to u,\quad u\to s. \tag{7.291}$$

可见，**交叉对称性对应于 Mandelstam 变量的调换**，这样的调换保持 (7.285) 式不变。据此，我们从 (7.289) 式直接得到 $e^-\mu^-\to e^-\mu^-$ 过程的非极化振幅模方

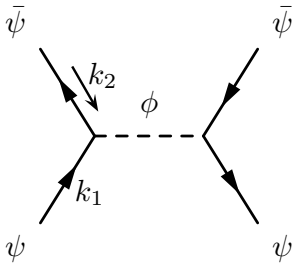
$$\overline{|\mathcal{M}(e^-\mu^-\to e^-\mu^-)|^2}=\frac{2e^4}{t^2}[u^2+s^2+4t(m_e^2+m_\mu^2)-2(m_e^2+m_\mu^2)^2]. \tag{7.292}$$

容易验证，这个结果与 (7.204) 式一致。

$e^+e^-\to\mu^+\mu^-$ 过程的虚光子动量满足 $q^2=s$，交叉成 $e^-\mu^-\to e^-\mu^-$ 过程之后，虚光子动量满足 $q'^2=t$。一般来说，当 $2\to2$ 散射 Feynman 图只含一条内线时，内线动量的内积等于一个 Mandelstam 变量 s、t 或 u，我们称这种图为 ***s* 通道** (channel)、***t* 通道**或 ***u* 通道**的 Feynman 图。$e^+e^-\to\mu^+\mu^-$ 和 $e^-\mu^-\to e^-\mu^-$ 的领头阶 Feynman 图分别对应于 s 通道和 t 通道。

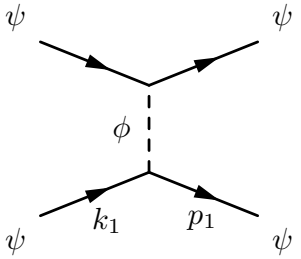
以 Yukawa 理论为例，三种通道具有如下特点。

s 通道：



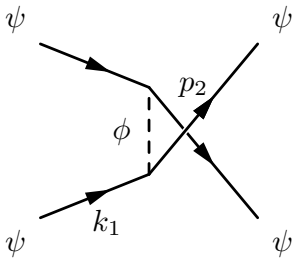
$$\propto\frac{1}{(k_1+k_2)^2-m_\phi^2}=\frac{1}{s-m_\phi^2} \tag{7.293}$$

t 通道：



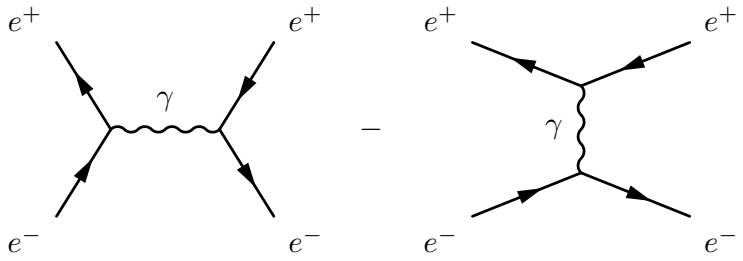
$$\propto\frac{1}{(k_1-p_1)^2-m_\phi^2}=\frac{1}{t-m_\phi^2} \tag{7.294}$$

u **通道：**



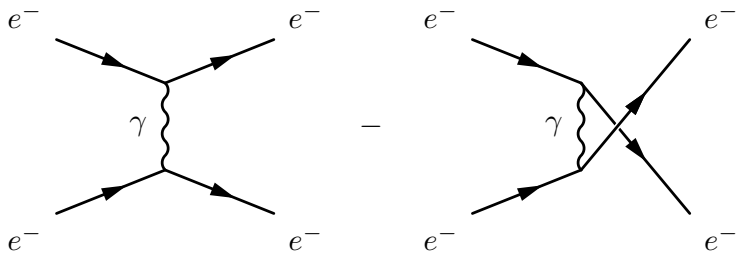
$$\propto \frac{1}{(k_1-p_2)^2-m_\phi^2}=\frac{1}{u-m_\phi^2} \tag{7.295}$$

一个散射过程可以包含多个通道的 Feynman 图。在 QED 中，**Bhabha 散射** $e^+e^-\to e^+e^-$ 在领头阶具有 1 个 s 通道和 1 个 t 通道的 Feynman 图，如下。



(7.296)

Møller 散射 $e^-e^-\to e^-e^-$ 在领头阶具有 1 个 t 通道和 1 个 u 通道的 Feynman 图，如下。



(7.297)

在质心系中，假设初末态四个粒子的质量都是 m，动量如图 7.2 所示，则有

$$k_1^0=k_2^0=p_1^0=p_2^0=\frac{E_{\rm CM}}{2}=\frac{\sqrt{s}}{2}, \tag{7.298}$$

$$|\mathbf{k}_1|=|\mathbf{k}_2|=|\mathbf{p}_1|=|\mathbf{p}_2|=\frac{\sqrt{s}}{2}\sqrt{1-\frac{4m^2}{s}}\equiv Q. \tag{7.299}$$

从而得到

$$t=(k_1-p_1)^2=k_1^2+p_1^2-2\,k_1\cdot p_1=2m^2-2k_1^0p_1^0+2|\mathbf{k}_1||\mathbf{p}_1|\cos\theta=-2Q^2(1-\cos\theta), \tag{7.300}$$

$$u=(k_1-p_2)^2=k_1^2+p_2^2-2\,k_1\cdot p_2=2m^2-2k_1^0p_2^0-2|\mathbf{k}_1||\mathbf{p}_2|\cos\theta=-2Q^2(1+\cos\theta). \tag{7.301}$$

于是，$\theta\to 0$ 时 $t\to 0$，$\theta\to\pi$ 时 $u\to 0$。另一方面，$s=E_{\rm CM}^2$ 与散射角 θ 无关。三种通道的传播子对散射角 θ 的依赖截然不同。

7.6　Compton 散射

电子与光子的散射过程 $e^-\gamma\to e^-\gamma$ 称为 **Compton 散射** [39]。1923 年，Arthur Compton 用 X 射线照射核外电子，发现 X 射线因失去能量而波长变长。他使用的 X 射线光子能量约为

17 keV，远大于原子结合能，因而核外电子可以看成是自由的。根据相对论运动学，Compton 推导出光子的波长变化 $\Delta\lambda$ 与散射角 θ 的关系

$$\Delta\lambda = \frac{2\pi}{m_e}(1-\cos\theta). \tag{7.302}$$

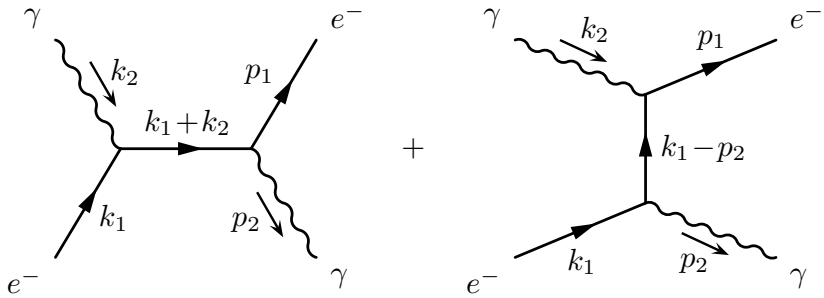
他的实验结果证实了这条公式，从而为光的粒子性提供了直接证据。

另一方面，对于低能电磁辐射与电子散射的过程，Joseph Thomson 根据经典电磁学推导出微分散射截面

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\cos\theta} = \pi r_e^2(1+\cos^2\theta) = \frac{\pi\alpha^2}{m_e^2}(1+\cos^2\theta), \tag{7.303}$$

其中 $r_e \equiv \alpha/m_e$ 是电子的经典半径。在 QED 中，我们应该能够得到这条微分截面公式的相对论修正。

Compton 散射在 QED 领头阶具有 1 个 s 通道和 1 个 u 通道[2]的 Feynman 图，不变振幅为

$\mathrm{i}\mathcal{M} =$ 

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon_\mu^*(p_2)\,\bar u(p_1)\,(\mathrm{i}e\gamma^\mu)\,\frac{\mathrm{i}(\not k_1+\not k_2+m_e)}{(k_1+k_2)^2-m_e^2}\,(\mathrm{i}e\gamma^\nu)\,u(k_1)\,\varepsilon_\nu(k_2)\\
&\quad+\varepsilon_\nu(k_2)\,\bar u(p_1)\,(\mathrm{i}e\gamma^\nu)\,\frac{\mathrm{i}(\not k_1-\not p_2+m_e)}{(k_1-p_2)^2-m_e^2}\,(\mathrm{i}e\gamma^\mu)\,u(k_1)\,\varepsilon_\mu^*(p_2)\\
&= -\mathrm{i}e^2\varepsilon_\mu^*(p_2)\,\varepsilon_\nu(k_2)\,\bar u(p_1)\left[\frac{\gamma^\mu(\not k_1+\not k_2+m_e)\gamma^\nu}{(k_1+k_2)^2-m_e^2}+\frac{\gamma^\nu(\not k_1-\not p_2+m_e)\gamma^\mu}{(k_1-p_2)^2-m_e^2}\right]u(k_1).
\end{aligned} \tag{7.304}$$

两幅图的电子线具有相同的拓扑结构，可通过连续变形相互转换，因而相对符号为正。这里我们没有显明写出振幅对螺旋度的依赖。

根据质壳条件 $k_1^2=m_e^2$ 和 $k_2^2=p_2^2=0$，传播子的分母化为

$$(k_1+k_2)^2-m_e^2 = 2\,k_1\cdot k_2, \quad (k_1-p_2)^2-m_e^2 = -2\,k_1\cdot p_2. \tag{7.305}$$

由 (7.67) 式得 $\not k_1\gamma^\nu = 2k_1^\nu - \gamma^\nu\not k_1$，再利用运动方程 (4.145)，推出

$$(\not k_1+m_e)\gamma^\nu u(k_1) = (2k_1^\nu-\gamma^\nu\not k_1+m_e\gamma^\nu)u(k_1) = 2k_1^\nu u(k_1)-\gamma^\nu(\not k_1-m_e)u(k_1) = 2k_1^\nu u(k_1). \tag{7.306}$$

从而将振幅化简成

$$\mathrm{i}\mathcal{M} = -\mathrm{i}e^2\varepsilon_\mu^*(p_2)\varepsilon_\nu(k_2)\bar u(p_1)\left(\frac{\gamma^\mu\not k_2\gamma^\nu+2\gamma^\mu k_1^\nu}{2\,k_1\cdot k_2}+\frac{\gamma^\nu\not p_2\gamma^\mu-2\gamma^\nu k_1^\mu}{2\,k_1\cdot p_2}\right)u(k_1). \tag{7.307}$$

[2]有些书称其为 t 通道。

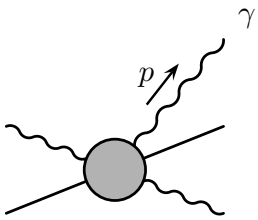
7.6.1　光子极化求和与 Ward 恒等式

接下来需要对初态自旋状态取平均、末态自旋状态求和以计算非极化振幅模方。除了涉及对电子的螺旋度求和之外，还涉及对光子的螺旋度求和，即对光子的极化状态求和，亦即计算

$$\sum_{\text{spins}} \varepsilon_\mu^*(p)\varepsilon_\nu(p) = \sum_{\lambda=\pm} \varepsilon_\mu^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_\nu(\mathbf{p},\lambda) = -g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{(p\cdot n)^2} + \frac{p_\mu n_\nu + p_\nu n_\mu}{p\cdot n}. \tag{7.308}$$

第二步用到极化求和关系 (3.338)。本小节讨论光子极化求和的简化方法。

考虑出射一个动量为 p^μ 的光子的任意 QED 过程，不变振幅为



$$= \mathrm{i}\mathcal{M}(p) = \mathrm{i}M^\mu(p)\,\varepsilon_\mu^*(p). \tag{7.309}$$

这里我们将出射光子的极化矢量 $\varepsilon_\mu^*(p)$ 提出来，振幅的余下部分记作 $M^\mu(p)$。对光子极化求和，振幅模方变成

$$\begin{aligned}\sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}(p)|^2 &= \sum_{\lambda=\pm} \varepsilon_\mu^*(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_\nu(\mathbf{p},\lambda) M^\mu(p) M^{\nu*}(p) \\ &= \left[-g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{(p\cdot n)^2} + \frac{p_\mu n_\nu + p_\nu n_\mu}{p\cdot n}\right] M^\mu(p) M^{\nu*}(p).\end{aligned} \tag{7.310}$$

根据 QED 相互作用拉氏量 (7.14)，上述过程的散射矩阵元具有以下形式，

$$\begin{aligned}\langle f|\,\mathrm{i}T\,|i\rangle &\propto \int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_n\,\langle\cdots;\,\overbrace{\mathbf{p},\lambda|\,\mathsf{N}[A_\mu(x_1)}J^\mu_{\text{EM}}(x_1)\cdots]\,|i\rangle \\ &= \int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_n\,\varepsilon_\mu^*(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x_1}\,\langle\cdots|\,\mathsf{N}[J^\mu_{\text{EM}}(x_1)\cdots]\,|i\rangle\,.\end{aligned} \tag{7.311}$$

可见，

$$M^\mu(p) \propto \int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x_1}\,\langle\cdots|\,\mathsf{N}[J^\mu_{\text{EM}}(x_1)\cdots]\,|i\rangle\,. \tag{7.312}$$

在经典层面上，电磁流 J^μ_{EM} 满足守恒流方程 $\partial_\mu J^\mu_{\text{EM}} = 0$。如果我们假设 $\partial_\mu J^\mu_{\text{EM}} = 0$ 在量子层面上也成立，就可以推出

$$\begin{aligned}0 &= \int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x_1}\,\langle\cdots|\,\mathsf{N}[\partial_\mu J^\mu_{\text{EM}}(x_1)\cdots]\,|i\rangle \\ &= -\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_n\,(\partial_\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x_1})\,\langle\cdots|\,\mathsf{N}[J^\mu_{\text{EM}}(x_1)\cdots]\,|i\rangle \\ &= -\mathrm{i}p_\mu \int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x_1}\,\langle\cdots|\,\mathsf{N}[J^\mu_{\text{EM}}(x_1)\cdots]\,|i\rangle \propto p_\mu M^\mu(p),\end{aligned} \tag{7.313}$$

第二步用到分部积分。于是得到

$$p_\mu M^\mu(p) = 0. \tag{7.314}$$

这个表达式称为 **Ward 恒等式** [40]，它对于入射光子的情况同样成立。Ward 恒等式告诉我们，**只要将不变振幅中任何一个入射或出射光子的极化矢量替换成相应的四维动量，则结果为零。**

虽然这里我们利用了经典的守恒流方程，但实际上可以在量子场论中严格地证明 Ward 恒等式，相关证明留待后文叙述。Ward 恒等式是电磁流守恒在量子层面上的体现，与 QED 的规范对称性密切相关。规范变换 $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \chi$ 在动量空间中体现为 $\varepsilon^*_\mu(p) \to \varepsilon^*_\mu(p) - \mathrm{i}p_\mu$，因此振幅 $\varepsilon^*_\mu(p)M^\mu(p)$ 的规范不变性等价于 Ward 恒等式 $p_\mu M^\mu(p) = 0$。

应用 Ward 恒等式，我们发现 (7.310) 式方括号中后两项都没有贡献，从而得到

$$\sum_{\lambda=\pm} \varepsilon^*_\mu(\mathbf{p},\lambda)\varepsilon_\nu(\mathbf{p},\lambda)M^\mu(p)M^{\nu*}(p) = -g_{\mu\nu}M^\mu(p)M^{\nu*}(p). \tag{7.315}$$

也就是说，在 QED 计算中可以使用替换关系

$$\sum_{\text{spins}} \varepsilon^*_\mu(p)\varepsilon_\nu(p) \to -g_{\mu\nu}\,. \tag{7.316}$$

这就是处理光子极化求和的简化方法。

现在用 Compton 散射振幅 (7.304) 验证 Ward 恒等式。将振幅表达为

$$\mathrm{i}\mathcal{M} = \mathrm{i}\varepsilon^*_\mu(p_2)\,\varepsilon_\nu(k_2)M^{\mu\nu}, \tag{7.317}$$

则

$$M^{\mu\nu} = -e^2\,\bar{u}(p_1)\left[\frac{\gamma^\mu(\not{k}_1+\not{k}_2+m_e)\gamma^\nu}{(k_1+k_2)^2-m_e^2} + \frac{\gamma^\nu(\not{k}_1-\not{p}_2+m_e)\gamma^\mu}{(k_1-p_2)^2-m_e^2}\right]u(k_1). \tag{7.318}$$

运动方程 (4.145) 表明

$$\not{k}_1 u(k_1) = m_e u(k_1), \tag{7.319}$$

两边取厄米共轭，右乘 γ^0，得

$$\bar{u}(k_1)\not{k}_1 = \bar{u}(k_1)m_e. \tag{7.320}$$

再利用 $k_1^\mu + k_2^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$，有

$$\not{p}_2 u(k_1) = -(\not{k}_1 - \not{p}_2 - \not{k}_1)u(k_1) = -(\not{k}_1 - \not{p}_2 - m_e)u(k_1), \tag{7.321}$$

$$\bar{u}(p_1)\not{p}_2 = \bar{u}(p_1)(\not{k}_1 + \not{k}_2 - \not{p}_1) = \bar{u}(p_1)(\not{k}_1 + \not{k}_2 - m_e). \tag{7.322}$$

从而

$$\begin{aligned}
p_{2\mu}M^{\mu\nu} &= -e^2\,\bar{u}(p_1)\left[\frac{\not{p}_2(\not{k}_1+\not{k}_2+m_e)\gamma^\nu}{(k_1+k_2)^2-m_e^2} + \frac{\gamma^\nu(\not{k}_1-\not{p}_2+m_e)\not{p}_2}{(k_1-p_2)^2-m_e^2}\right]u(k_1) \\
&= -e^2\,\bar{u}(p_1)\left[\frac{(\not{k}_1+\not{k}_2-m_e)(\not{k}_1+\not{k}_2+m_e)\gamma^\nu}{(k_1+k_2)^2-m_e^2} - \frac{\gamma^\nu(\not{k}_1-\not{p}_2+m_e)(\not{k}_1-\not{p}_2-m_e)}{(k_1-p_2)^2-m_e^2}\right]u(k_1) \\
&= -e^2\,\bar{u}(p_1)\left[\frac{(\not{k}_1+\not{k}_2)^2-m_e^2}{(k_1+k_2)^2-m_e^2}\,\gamma^\nu - \gamma^\nu\,\frac{(\not{k}_1-\not{p}_2)^2-m_e^2}{(k_1-p_2)^2-m_e^2}\right]u(k_1),
\end{aligned} \tag{7.323}$$

由 (7.69) 式得 $(\not{k}_1+\not{k}_2)^2=(k_1+k_2)^2$ 和 $(\not{k}_1-\not{p}_2)^2=(k_1-p_2)^2$，故 $p_{2\mu}M^{\mu\nu}=0$。同理可以验证 $k_{2\mu}M^{\mu\nu}=0$。

其实，Ward 恒等式不仅对光子外线成立，对光子内线也成立。设光子传播子的四维动量为 p^μ，则 p^μ 流入或流出的振幅 $M^\mu(p)$ 满足 Ward 恒等式 (7.314)。

以 $e^+e^-\to\mu^+\mu^-$ 过程为例，根据 (7.37) 式，光子传播子的四维动量为 $q^\mu=k_1^\mu+k_2^\mu$，电子线部分的振幅为 $M^\mu(q)=\mathrm{i}e\bar{v}(k_2)\gamma^\mu u(k_1)$。运动方程 (4.183) 表明

$$\not{k}_2 v(k_2)=-m_e v(k_2), \tag{7.324}$$

两边取厄米共轭，右乘 γ^0，得

$$\bar{v}(k_2)\not{k}_2=-\bar{v}(k_2)m_e. \tag{7.325}$$

再利用 $\not{k}_1 u(k_1)=m_e u(k_1)$ 即可推出 Ward 恒等式

$$q_\mu M^\mu(q)=\mathrm{i}e\bar{v}(k_2)\not{q}u(k_1)=\mathrm{i}e\bar{v}(k_2)(\not{k}_1+\not{k}_2)u(k_1)=\mathrm{i}e\bar{v}(k_2)(m_e-m_e)u(k_1)=0. \tag{7.326}$$

同理可验证 μ 子线部分的振幅也满足 Ward 恒等式。

7.6.2　非极化振幅模方和 Klein-Nishina 公式

利用

$$\begin{aligned}[\bar{u}(p_1)\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu u(k_1)]^* &= u^\dagger(k_1)(\gamma^\nu)^\dagger(\gamma^\rho)^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 u(p_1)=u^\dagger(k_1)\gamma^0\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu u(p_1)\\ &=\bar{u}(k_1)\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu u(p_1),\end{aligned} \tag{7.327}$$

对 (7.307) 式取复共轭，得

$$(\mathrm{i}\mathcal{M})^*=\mathrm{i}e^2\varepsilon_\rho(p_2)\varepsilon_\sigma^*(k_2)\bar{u}(k_1)\left(\frac{\gamma^\sigma\not{k}_2\gamma^\rho+2\gamma^\rho k_1^\sigma}{2\,k_1\cdot k_2}+\frac{\gamma^\rho\not{p}_2\gamma^\sigma-2\gamma^\sigma k_1^\rho}{2\,k_1\cdot p_2}\right)u(p_1). \tag{7.328}$$

于是，非极化振幅模方为

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2\\ &= \frac{e^4}{4}\sum_{\text{spins}}\varepsilon_\mu^*(p_2)\varepsilon_\rho(p_2)\varepsilon_\nu(k_2)\varepsilon_\sigma^*(k_2)\,\mathrm{tr}\left[u(p_1)\bar{u}(p_1)\left(\frac{\gamma^\mu\not{k}_2\gamma^\nu+2\gamma^\mu k_1^\nu}{2\,k_1\cdot k_2}+\frac{\gamma^\nu\not{p}_2\gamma^\mu-2\gamma^\nu k_1^\mu}{2\,k_1\cdot p_2}\right)\right.\\ &\qquad\left.\times u(k_1)\bar{u}(k_1)\left(\frac{\gamma^\sigma\not{k}_2\gamma^\rho+2\gamma^\rho k_1^\sigma}{2\,k_1\cdot k_2}+\frac{\gamma^\rho\not{p}_2\gamma^\sigma-2\gamma^\sigma k_1^\rho}{2\,k_1\cdot p_2}\right)\right]\\ &= \frac{e^4}{4}(-g_{\mu\rho})(-g_{\nu\sigma})\,\mathrm{tr}\left[(\not{p}_1+m_e)\left(\frac{\gamma^\mu\not{k}_2\gamma^\nu+2\gamma^\mu k_1^\nu}{2k_1\cdot k_2}+\frac{\gamma^\nu\not{p}_2\gamma^\mu-2\gamma^\nu k_1^\mu}{2k_1\cdot p_2}\right)\right.\\ &\qquad\left.\times(\not{k}_1+m_e)\left(\frac{\gamma^\sigma\not{k}_2\gamma^\rho+2\gamma^\rho k_1^\sigma}{2\,k_1\cdot k_2}+\frac{\gamma^\rho\not{p}_2\gamma^\sigma-2\gamma^\sigma k_1^\rho}{2\,k_1\cdot p_2}\right)\right]\\ &= \frac{e^4}{16}\,\mathrm{tr}\left[(\not{p}_1+m_e)\left(\frac{\gamma^\mu\not{k}_2\gamma^\nu+2\gamma^\mu k_1^\nu}{k_1\cdot k_2}+\frac{\gamma^\nu\not{p}_2\gamma^\mu-2\gamma^\nu k_1^\mu}{k_1\cdot p_2}\right)\right.\end{aligned}$$

$$\times(\not{k}_1+m_e)\left(\frac{\gamma_\nu\not{k}_2\gamma_\mu+2\gamma_\mu k_{1\nu}}{k_1\cdot k_2}+\frac{\gamma_\mu\not{p}_2\gamma_\nu-2\gamma_\nu k_{1\mu}}{k_1\cdot p_2}\right)\Bigg]$$
$$=\frac{e^4}{16}\left[\frac{A}{(k_1\cdot k_2)^2}+\frac{B+C}{(k_1\cdot k_2)(k_1\cdot p_2)}+\frac{D}{(k_1\cdot p_2)^2}\right], \tag{7.329}$$

其中,

$$A\equiv \mathrm{tr}[(\not{p}_1+m_e)(\gamma^\mu\not{k}_2\gamma^\nu+2\gamma^\mu k_1^\nu)(\not{k}_1+m_e)(\gamma_\nu\not{k}_2\gamma_\mu+2\gamma_\mu k_{1\nu})], \tag{7.330}$$
$$B\equiv \mathrm{tr}[(\not{p}_1+m_e)(\gamma^\mu\not{k}_2\gamma^\nu+2\gamma^\mu k_1^\nu)(\not{k}_1+m_e)(\gamma_\mu\not{p}_2\gamma_\nu-2\gamma_\nu k_{1\mu})], \tag{7.331}$$
$$C\equiv \mathrm{tr}[(\not{p}_1+m_e)(\gamma^\nu\not{p}_2\gamma^\mu-2\gamma^\nu k_1^\mu)(\not{k}_1+m_e)(\gamma_\nu\not{k}_2\gamma_\mu+2\gamma_\mu k_{1\nu})], \tag{7.332}$$
$$D\equiv \mathrm{tr}[(\not{p}_1+m_e)(\gamma^\nu\not{p}_2\gamma^\mu-2\gamma^\nu k_1^\mu)(\not{k}_1+m_e)(\gamma_\mu\not{p}_2\gamma_\nu-2\gamma_\nu k_{1\mu})]. \tag{7.333}$$

这里 A 来自 s 通道 Feynman 图，D 来自 u 通道 Feynman 图，而 B 和 C 是两个通道的交叉项。

把 A 展开，会得到 16 项，其中有 8 项包含奇数个 Dirac 矩阵之积，相应的迹为零。A 中余下的 8 项为

$$\begin{aligned}A=\ &\mathrm{tr}(\not{p}_1\gamma^\mu\not{k}_2\gamma^\nu\not{k}_1\gamma_\nu\not{k}_2\gamma_\mu)+2\,\mathrm{tr}(\not{p}_1\gamma^\mu\not{k}_1\not{k}_1\not{k}_2\gamma_\mu)+2\,\mathrm{tr}(\not{p}_1\gamma^\mu\not{k}_2\not{k}_1\not{k}_1\gamma_\mu)+4k_1^2\,\mathrm{tr}(\not{p}_1\gamma^\mu\not{k}_1\gamma_\mu)\\&+m_e^2\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\not{k}_2\gamma^\nu\gamma_\nu\not{k}_2\gamma_\mu)+2m_e^2\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\not{k}_1\not{k}_2\gamma_\mu)+2m_e^2\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\not{k}_2\not{k}_1\gamma_\mu)+4m_e^2k_1^2\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma_\mu).\end{aligned} \tag{7.334}$$

利用 7.2.2 小节提供的求迹和缩并公式化简这些项，得

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\not{p}_1\gamma^\mu\not{k}_2\gamma^\nu\not{k}_1\gamma_\nu\not{k}_2\gamma_\mu)&=\mathrm{tr}(\gamma_\mu\not{p}_1\gamma^\mu\not{k}_2\gamma^\nu\not{k}_1\gamma_\nu\not{k}_2)=\mathrm{tr}[(-2\not{p}_1)\not{k}_2(-2\not{k}_1)\not{k}_2]\\&=4\,\mathrm{tr}[\not{p}_1\not{k}_2(2k_1\cdot k_2-\not{k}_2\not{k}_1)]=8\,k_1\cdot k_2\,\mathrm{tr}(\not{p}_1\not{k}_2)-4k_2^2\,\mathrm{tr}(\not{p}_1\not{k}_1)\\&=32(k_1\cdot k_2)(p_1\cdot k_2),\end{aligned} \tag{7.335}$$
$$2\,\mathrm{tr}(\not{p}_1\gamma^\mu\not{k}_1\not{k}_1\not{k}_2\gamma_\mu)=2k_1^2\,\mathrm{tr}(\not{p}_1\gamma^\mu\not{k}_2\gamma_\mu)=-4m_e^2\,\mathrm{tr}(\not{p}_1\not{k}_2)=-16m_e^2\,p_1\cdot k_2, \tag{7.336}$$
$$2\,\mathrm{tr}(\not{p}_1\gamma^\mu\not{k}_2\not{k}_1\not{k}_1\gamma_\mu)=2k_1^2\,\mathrm{tr}(\not{p}_1\gamma^\mu\not{k}_2\gamma_\mu)=-16m_e^2\,p_1\cdot k_2, \tag{7.337}$$
$$4k_1^2\,\mathrm{tr}(\not{p}_1\gamma^\mu\not{k}_1\gamma_\mu)=-8m_e^2\,\mathrm{tr}(\not{p}_1\not{k}_1)=-32m_e^2\,p_1\cdot k_1, \tag{7.338}$$
$$m_e^2\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\not{k}_2\gamma^\nu\gamma_\nu\not{k}_2\gamma_\mu)=4m_e^2\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\not{k}_2\not{k}_2\gamma_\mu)=4m_e^2k_2^2\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma_\mu)=0, \tag{7.339}$$
$$2m_e^2\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\not{k}_1\not{k}_2\gamma_\mu)=8m_e^2\,k_1\cdot k_2\,\mathrm{tr}(\mathbf{1})=32m_e^2\,k_1\cdot k_2, \tag{7.340}$$
$$2m_e^2\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\not{k}_2\not{k}_1\gamma_\mu)=32m_e^2\,k_1\cdot k_2, \tag{7.341}$$
$$4m_e^2k_1^2\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma_\mu)=16m_e^4\,\mathrm{tr}(\mathbf{1})=64m_e^4. \tag{7.342}$$

从而将 A 化作

$$A=32(k_1\cdot k_2)(p_1\cdot k_2)-32m_e^2\,p_1\cdot k_2-32m_e^2\,p_1\cdot k_1+64m_e^2\,k_1\cdot k_2+64m_e^4. \tag{7.343}$$

根据 7.5 节知识，此处四维动量和 Mandelstam 变量满足以下关系。

$$k_1\cdot k_2=p_1\cdot p_2=\frac{1}{2}(s-m_e^2),\quad k_1\cdot p_1=-\frac{1}{2}(t-2m_e^2),\quad k_2\cdot p_2=-\frac{t}{2}, \tag{7.344}$$

$$k_1\cdot p_2 \;=\; k_2\cdot p_1 = -\frac{1}{2}(u-m_e^2),\quad s+t+u=2m_e^2. \tag{7.345}$$

我们进而用 Mandelstam 变量将 A 表达为

$$\begin{aligned} A \;&=\; 8[-(s-m_e^2)(u-m_e^2)+2m_e^2(u-m_e^2)+2m_e^2(t-2m_e^2)+4m_e^2(s-m_e^2)+8m_e^4] \\ &=\; 8[-(s-m_e^2)(u-m_e^2)+2m_e^2(2s+t+u)-2m_e^4] = 8[-(s-m_e^2)(u-m_e^2)+2m_e^2 s+2m_e^4] \\ &=\; 8[-(s-m_e^2)(u-m_e^2)+2m_e^2(s-m_e^2)+4m_e^4]. \end{aligned} \tag{7.346}$$

为了下面计算方便，这里消去 t，保留 s 和 u。毕竟，$e^-\gamma\to e^-\gamma$ 是 s 和 u 通道的过程。

容易看出，对 (7.330) 式作动量替换 $k_2^\mu\leftrightarrow -p_2^\mu$，就得到 (7.333) 式。注意到光子的反粒子是它自己，将 $e^-\gamma\to e^-\gamma$ 过程 s 通道 Feynman 图的初态和末态光子相互交叉，就得到 u 通道 Feynman 图，因而动量替换规则是 $k_2^\mu\leftrightarrow -p_2^\mu$。据此，对 A 的以上表达式作替换 $(k_1+k_2)^2 = s\leftrightarrow u=(k_1-p_2)^2$，就得到 D 的表达式

$$D = 8[-(s-m_e^2)(u-m_e^2)+2m_e^2(u-m_e^2)+4m_e^4]. \tag{7.347}$$

类似地，把 B 展开，余下 8 项，

$$\begin{aligned} B \;=\;& \mathrm{tr}(\not p_1\gamma^\mu \not k_2\gamma^\nu \not k_1\gamma_\mu \not p_2\gamma_\nu) + 2\,\mathrm{tr}(\not p_1\gamma^\mu \not k_1\gamma_\mu \not p_2\not k_1) - 2\,\mathrm{tr}(\not p_1\not k_1\not k_2\gamma^\nu \not k_1\gamma_\nu) - 4\,\mathrm{tr}(\not p_1\not k_1\not k_1\not k_1) \\ &+ m_e^2\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu \not k_2\gamma^\nu\gamma_\mu \not p_2\gamma_\nu) + 2m_e^2\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma_\mu \not p_2\not k_1) - 2m_e^2\,\mathrm{tr}(\not k_1\not k_2\gamma^\nu\gamma_\nu) - 4m_e^2\,\mathrm{tr}(\not k_1\not k_1). \end{aligned} \tag{7.348}$$

对各项作缩并求迹运算，得

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\not p_1\gamma^\mu \not k_2\gamma^\nu \not k_1\gamma_\mu \not p_2\gamma_\nu) \;&=\; \mathrm{tr}[\not p_1\gamma^\mu \not k_2(2k_1^\nu - \not k_1\gamma^\nu)\gamma_\mu \not p_2\gamma_\nu] \\ &=\; 2\,\mathrm{tr}(\not p_1\gamma^\mu \not k_2\gamma_\mu \not p_2\not k_1) - \mathrm{tr}(\not p_1\gamma^\mu \not k_2\not k_1\gamma^\nu\gamma_\mu \not p_2\gamma_\nu) \\ &=\; -4\,\mathrm{tr}(\not p_1\not k_2\not p_2\not k_1) - 4\,\mathrm{tr}(\not p_1\not p_2\not k_2\not k_1) \\ &=\; -16[(p_1\cdot k_2)(p_2\cdot k_1) - (p_1\cdot p_2)(k_1\cdot k_2) + (p_1\cdot k_1)(p_2\cdot k_2)] \\ &\quad\; -16[(p_1\cdot p_2)(k_1\cdot k_2) - (p_1\cdot k_2)(p_2\cdot k_1) + (p_1\cdot k_1)(p_2\cdot k_2)] \\ &=\; -32(p_1\cdot k_1)(p_2\cdot k_2), \end{aligned} \tag{7.349}$$

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{tr}(\not p_1\gamma^\mu \not k_1\gamma_\mu \not p_2\not k_1) \;&=\; -4\,\mathrm{tr}(\not p_1\not k_1\not p_2\not k_1) = -16[(p_1\cdot k_1)(p_2\cdot k_1) - (p_1\cdot p_2)k_1^2 + (p_1\cdot k_1)(p_2\cdot k_1)] \\ &=\; -32(p_1\cdot k_1)(p_2\cdot k_1) + 16m_e^2\, p_1\cdot p_2, \end{aligned} \tag{7.350}$$

$$-2\,\mathrm{tr}(\not p_1\not k_1\not k_2\gamma^\nu \not k_1\gamma_\nu) \;=\; 4\,\mathrm{tr}(\not p_1\not k_1\not k_2\not k_1) = 32(p_1\cdot k_1)(k_1\cdot k_2) - 16m_e^2\, p_1\cdot k_2, \tag{7.351}$$

$$-4\,\mathrm{tr}(\not p_1\not k_1\not k_1\not k_1) \;=\; -4k_1^2\,\mathrm{tr}(\not p_1\not k_1) = -16m_e^2\, p_1\cdot k_1, \tag{7.352}$$

$$m_e^2\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu \not k_2\gamma^\nu\gamma_\mu \not p_2\gamma_\nu) \;=\; 4m_e^2\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu \not k_2 p_{2\mu}) = 4m_e^2\,\mathrm{tr}(\not p_2\not k_2) = 16m_e^2\, p_2\cdot k_2, \tag{7.353}$$

$$2m_e^2\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma_\mu \not p_2\not k_1) \;=\; 8m_e^2\,\mathrm{tr}(\not p_2\not k_1) = 32m_e^2\, p_2\cdot k_1, \tag{7.354}$$

$$-2m_e^2\,\mathrm{tr}(\not k_1\not k_2\gamma^\nu\gamma_\nu) \;=\; -8m_e^2\,\mathrm{tr}(\not k_1\not k_2) = -32m_e^2\, k_1\cdot k_2, \tag{7.355}$$

$$-4m_e^2\,\mathrm{tr}(\not k_1\not k_1) \;=\; -16m_e^2k_1^2 = -16m_e^4. \tag{7.356}$$

代入到 B 中，并用 Mandelstam 变量表达，有

$$\begin{aligned}
B &= -32(p_1\cdot k_1)(p_2\cdot k_2)-32(p_1\cdot k_1)(p_2\cdot k_1)+32(p_1\cdot k_1)(k_1\cdot k_2)+16m_e^2\,p_1\cdot p_2\\
&\quad -16m_e^2\,p_1\cdot k_2-16m_e^2\,p_1\cdot k_1+16m_e^2\,p_2\cdot k_2+32m_e^2\,p_2\cdot k_1-32m_e^2\,k_1\cdot k_2-16m_e^4\\
&= -8[t(t-2m_e^2)+(t-2m_e^2)(u-m_e^2)+(t-2m_e^2)(s-m_e^2)-m_e^2(s-m_e^2)-m_e^2(u-m_e^2)\\
&\quad -m_e^2(t-2m_e^2)+m_e^2t+2m_e^2(u-m_e^2)+2m_e^2(s-m_e^2)+2m_e^4]\\
&= -8[t(t+u+s)-m_e^2(4t+s+u)+6m_e^4]=-8(-m_e^2t+4m_e^4)\\
&= -8[-m_e^2(2m_e^2-s-u)+4m_e^4]=-8[m_e^2(s-m_e^2)+m_e^2(u-m_e^2)+4m_e^4]. \qquad (7.357)
\end{aligned}$$

同样，这里消去 t，保留 s 和 u。

对 (7.331) 式作动量替换 $k_2^\mu\leftrightarrow -p_2^\mu$，即 $s\leftrightarrow u$，将得到 (7.332) 式。故

$$C=-8[m_e^2(u-m_e^2)+m_e^2(s-m_e^2)+4m_e^4]=B. \qquad (7.358)$$

s 与 u 通道的交叉项 B 和 C 恰好相等。

现在，我们将 A、B、C、D 重新用四维动量内积表达成

$$A = 32[(k_1\cdot k_2)(k_1\cdot p_2)+m_e^2\,k_1\cdot k_2+m_e^4], \qquad (7.359)$$

$$B = C = 16(-m_e^2\,k_1\cdot k_2+m_e^2\,k_1\cdot p_2-2m_e^4), \qquad (7.360)$$

$$D = 32[(k_1\cdot k_2)(k_1\cdot p_2)-m_e^2\,k_1\cdot p_2+m_e^4]. \qquad (7.361)$$

代入到 (7.329) 式中，得

$$\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{e^4}{16}\left[\frac{A}{(k_1\cdot k_2)^2}+\frac{2B}{(k_1\cdot k_2)(k_1\cdot p_2)}+\frac{D}{(k_1\cdot p_2)^2}\right]\\
&= 2e^4\left[\frac{k_1\cdot p_2}{k_1\cdot k_2}+\frac{m_e^2}{k_1\cdot k_2}+\frac{m_e^4}{(k_1\cdot k_2)^2}-\frac{m_e^2}{k_1\cdot p_2}+\frac{m_e^2}{k_1\cdot k_2}-\frac{2m_e^4}{(k_1\cdot k_2)(k_1\cdot p_2)}\right.\\
&\qquad \left.+\frac{k_1\cdot k_2}{k_1\cdot p_2}-\frac{m_e^2}{k_1\cdot p_2}+\frac{m_e^4}{(k_1\cdot p_2)^2}\right]\\
&= 2e^4\left[\frac{k_1\cdot p_2}{k_1\cdot k_2}+\frac{k_1\cdot k_2}{k_1\cdot p_2}+2m_e^2\left(\frac{1}{k_1\cdot k_2}-\frac{1}{k_1\cdot p_2}\right)+m_e^4\left(\frac{1}{k_1\cdot k_2}-\frac{1}{k_1\cdot p_2}\right)^2\right]. \qquad (7.362)
\end{aligned}$$

考虑实验室参考系，初态电子静止，初态光子通过 Compton 散射将能动量传递给末态电子，如图 7.10 所示。在自然单位制中，$\hbar=c=1$，光子的能量 E 等于它的**角频率** ω，即 $E=\hbar\omega=\omega$，而波长 λ 与角频率的关系为 $\lambda=2\pi c/\omega=2\pi/\omega$。因此，我们用角频率 ω 和 ω' 分别表示初末态光子的能量。初末态四维动量表示为

$$k_1^\mu=(m_e,\mathbf{0}),\quad k_2^\mu=(\omega,\mathbf{k}_2),\quad p_1^\mu=(p_1^0,\mathbf{p}_1),\quad p_2^\mu=(\omega',\mathbf{p}_2), \qquad (7.363)$$

其中

$$\omega=|\mathbf{k}_2|,\quad \omega'=|\mathbf{p}_2|. \qquad (7.364)$$

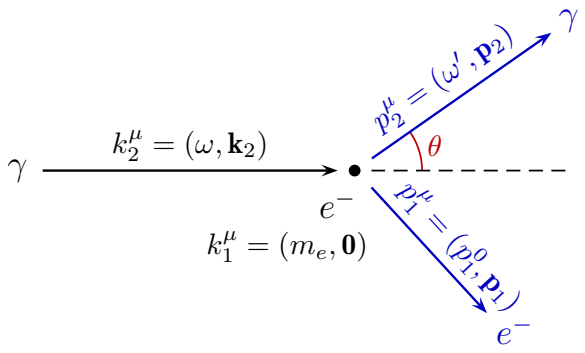


图 7.10: 实验室系中 Compton 散射过程动量示意图。

利用质壳条件和能动量守恒，有

$$\begin{aligned} m_e^2 &= p_1^2 = (k_1 + k_2 - p_2)^2 = k_1^2 + 2k_1 \cdot (k_2 - p_2) - 2k_2 \cdot p_2 \\ &= m_e^2 + 2m_e(\omega - \omega') - 2\omega\omega'(1 - \cos\theta), \end{aligned} \tag{7.365}$$

$$(p_1^0)^2 = m_e^2 + |\mathbf{p}_1|^2 = m_e^2 + |\mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_2|^2 = m_e^2 + \omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega'\cos\theta, \tag{7.366}$$

故

$$m_e(\omega - \omega') = \omega\omega'(1 - \cos\theta), \tag{7.367}$$

$$p_1^0 = \sqrt{m_e^2 + \omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega'\cos\theta}\,. \tag{7.368}$$

因此，由

$$\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} = \frac{\omega - \omega'}{\omega'\omega} = \frac{1 - \cos\theta}{m_e} \tag{7.369}$$

得到出射光子与入射光子的波长之差

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\pi\left(\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega}\right) = \frac{2\pi}{m_e}(1 - \cos\theta). \tag{7.370}$$

这就是 Arthur Compton 得到的关系式 (7.302)。据此，我们用入射光子角频率 ω 和散射角 θ 将出射光子角频率表达成

$$\omega' = \left(\frac{1 - \cos\theta}{m_e} + \frac{1}{\omega}\right)^{-1} = \frac{\omega}{1 + \dfrac{\omega}{m_e}(1 - \cos\theta)}. \tag{7.371}$$

再利用

$$k_1 \cdot k_2 = m_e\omega, \quad k_1 \cdot p_2 = m_e\omega', \tag{7.372}$$

将非极化振幅模方化为

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 2e^4\left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} + 2m_e\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'}\right) + m_e^2\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'}\right)^2\right]$$

$$= 2e^4\left[\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\omega}{\omega'}-2m_e\frac{1-\cos\theta}{m_e}+m_e^2\frac{(1-\cos\theta)^2}{m_e^2}\right]=2e^4\left(\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\omega}{\omega'}-\sin^2\theta\right). \quad (7.373)$$

对末态两体不变相空间积分，得

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}\Pi_2 &= \int \frac{\mathrm{d}^3p_1}{(2\pi)^3 2p_1^0}\frac{\mathrm{d}^3p_2}{(2\pi)^3 2p_2^0}(2\pi)^4\delta^{(4)}(k_1+k_2-p_1-p_2)=\int\frac{\mathrm{d}^3p_2}{(2\pi)^2 4p_1^0p_2^0}\delta(m_e+\omega-p_1^0-\omega')\\
&=\int\frac{\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\cos\theta\,\mathrm{d}\omega'\,\omega'^2}{16\pi^2\omega' p_1^0}\delta\Big(m_e+\omega-\sqrt{m_e^2+\omega^2+\omega'^2-2\omega\omega'\cos\theta}-\omega'\Big)\\
&=\int\frac{\mathrm{d}\cos\theta\,\omega'}{8\pi p_1^0}\left|\frac{\partial(\sqrt{m_e^2+\omega^2+\omega'^2-2\omega\omega'\cos\theta}+\omega')}{\partial\omega'}\right|^{-1}\\
&=\int\frac{\mathrm{d}\cos\theta\,\omega'}{8\pi p_1^0}\left|\frac{2\omega'-2\omega\cos\theta}{2p_1^0}+1\right|^{-1}=\int\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{8\pi}\frac{\omega'}{\omega'+p_1^0-\omega\cos\theta}\\
&=\int\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{8\pi}\frac{\omega'}{m_e+\omega(1-\cos\theta)}=\int\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{8\pi}\frac{\omega'}{m_e+m_e(\omega-\omega')/\omega'}\\
&=\int\mathrm{d}\cos\theta\,\frac{\omega'^2}{8\pi m_e\omega}. \end{aligned} \quad (7.374)$$

倒数第三步用到能量守恒关系 $p_1^0+\omega'=m_e+\omega$，倒数第二步用到 (7.367) 式。于是，散射截面表达为

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{4E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}-\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|}\int\mathrm{d}\Pi_2\,\overline{|\mathcal{M}|^2}=\frac{1}{4k_1^0k_2^0|\mathbf{k}_2|/k_2^0}\int\mathrm{d}\cos\theta\,\frac{\omega'^2}{8\pi m_e\omega}\,\overline{|\mathcal{M}|^2}\\
&=\int\mathrm{d}\cos\theta\,\frac{\omega'^2}{32\pi m_e^2\omega^2}\,\overline{|\mathcal{M}|^2}. \end{aligned} \quad (7.375)$$

微分散射截面是

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\cos\theta}=\frac{\omega'^2}{32\pi m_e^2\omega^2}\,\overline{|\mathcal{M}|^2}=\frac{2e^4\omega'^2}{32\pi m_e^2\omega^2}\left(\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\omega}{\omega'}-\sin^2\theta\right), \quad (7.376)$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\cos\theta}=\frac{\pi\alpha^2\omega'^2}{m_e^2\omega^2}\left(\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\omega}{\omega'}-\sin^2\theta\right). \quad (7.377)$$

上式称为 **Klein-Nishina 公式** [41]，它是 Thomson 微分截面 (7.303) 的 QED 修正。

在非相对论极限下，入射光子能量 $\omega\to0$，则

$$\frac{\omega'}{\omega}=\frac{1}{1+\dfrac{\omega}{m_e}(1-\cos\theta)}\to1, \quad (7.378)$$

从而得到

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\cos\theta}\simeq\frac{\pi\alpha^2}{m_e^2}(1+\cos^2\theta). \quad (7.379)$$

此时 Klein-Nishina 公式退化到 Thomson 微分截面公式，而截面近似为

$$\sigma\simeq\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\cos\theta\,\frac{\pi\alpha^2}{m_e^2}(1+\cos^2\theta)=\frac{8\pi\alpha^2}{3m_e^2}. \quad (7.380)$$

7.6.3　高能行为和极化振幅

下面讨论 Compton 散射的高能极限。

在质心系中，动量如图 7.2 所示，散射角 θ 定义为初末态电子动量 $\mathbf{k}_1$ 与 $\mathbf{p}_1$ 方向之间的夹角。根据 5.5.3 小节知识，粒子能量为

$$k_1^0 = p_1^0 = \frac{s+m_e^2}{2\sqrt{s}} \equiv E_e, \quad k_2^0 = p_2^0 = \frac{s-m_e^2}{2\sqrt{s}} \equiv \omega, \tag{7.381}$$

动量大小为

$$|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| = |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \omega. \tag{7.382}$$

于是

$$k_1 \cdot k_2 = k_1^0 k_2^0 - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 = \omega(E_e + \omega), \quad k_1 \cdot p_2 = k_1^0 p_2^0 - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = \omega(E_e + \omega\cos\theta), \tag{7.383}$$

故

$$\frac{k_1 \cdot p_2}{k_1 \cdot k_2} = \frac{E_e + \omega\cos\theta}{E_e + \omega}. \tag{7.384}$$

在**高能极限**下，$\sqrt{s} \gg m_e$，或者说，$\omega \gg m_e$，因而可以忽略电子质量，得到

$$E_e \simeq \omega \simeq \frac{\sqrt{s}}{2}. \tag{7.385}$$

只保留非极化振幅模方 (7.362) 方括号中前两项，有

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} &\simeq 2e^4\left(\frac{k_1\cdot p_2}{k_1\cdot k_2} + \frac{k_1\cdot k_2}{k_1\cdot p_2}\right) = 2e^4\left(\frac{E_e+\omega\cos\theta}{E_e+\omega} + \frac{E_e+\omega}{E_e+\omega\cos\theta}\right) \\ &\simeq 4e^4\left(\frac{1+\cos\theta}{4} + \frac{1}{1+\cos\theta}\right).\end{aligned} \tag{7.386}$$

对于向后散射，$\theta = \pi$，而 $\cos\theta = -1$，上式发散，奇性来自圆括号中的第二项。

若要避免发散，则在奇性项分母处不能忽略 m_e。将 E_e 展开到 m_e^2/ω^2 阶，得

$$E_e = \sqrt{m_e^2+\omega^2} = \omega\sqrt{1+\frac{m_e^2}{\omega^2}} \simeq \omega\left(1+\frac{m_e^2}{2\omega^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{m_e^4}{\omega^4}\right), \tag{7.387}$$

奇性项分母化为

$$E_e + \omega\cos\theta \simeq \omega\left(1+\cos\theta+\frac{m_e^2}{2\omega^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{m_e^4}{\omega^4}\right). \tag{7.388}$$

因此，不发散的表达式是

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} \simeq 4e^4\left[\frac{1+\cos\theta}{4} + \frac{1}{1+\cos\theta+m_e^2/(2\omega^2)}\right]. \tag{7.389}$$

根据 (5.338) 式，微分截面

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\cos\theta} \simeq \frac{2\pi}{64\pi^2}\frac{1}{2\omega^2}\frac{\omega}{2\omega}\overline{|\mathcal{M}|^2} \simeq \frac{\pi\alpha^2}{2\omega^2}\left[\frac{1+\cos\theta}{4} + \frac{1}{1+\cos\theta+m_e^2/(2\omega^2)}\right]. \tag{7.390}$$

当 $\omega \gg m_e$ 时，微分截面虽然在 $\theta = \pi$ 处没有发散，但数值非常大。

接下来分析 Compton 散射的极化振幅。不变振幅 (7.304) 按 Feynman 图分解为 s 和 u 通道分别贡献的两个部分，$\mathcal{M} = \mathcal{M}_s + \mathcal{M}_u$。将螺旋度依赖显明写出来，两个通道的极化振幅为

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_s(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1',\lambda_2') &= -\frac{e^2}{s-m_e^2}\,\varepsilon_\mu^*(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\varepsilon_\nu(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma^\mu(\not{k}_1+\not{k}_2+m_e)\gamma^\nu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\\
&\simeq -\frac{e^2}{4\omega^2}\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\not{\varepsilon}^*(\mathbf{p}_2,\lambda_2')(\not{k}_1+\not{k}_2)\not{\varepsilon}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)u(\mathbf{k}_1,\lambda_1), \qquad (7.391)\\
\mathcal{M}_u(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1',\lambda_2') &= -\frac{e^2}{u-m_e^2}\,\varepsilon_\mu^*(\mathbf{p}_2,\lambda_2')\varepsilon_\nu(\mathbf{k}_2,\lambda_2)\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\gamma^\nu(\not{k}_1-\not{p}_2+m_e)\gamma^\mu u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)\\
&\simeq \frac{e^2}{4\omega^2 c_{\theta/2}^2}\,\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\not{\varepsilon}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)(\not{k}_1-\not{p}_2)\not{\varepsilon}^*(\mathbf{p}_2,\lambda_2')u(\mathbf{k}_1,\lambda_1). \qquad (7.392)
\end{aligned}$$

第二步在高能极限下忽略电子质量，并利用了

$$s-m_e^2 = (k_1+k_2)^2-m_e^2 = 2\,k_1\cdot k_2 = 2\omega(E_e+\omega) \simeq 4\omega^2, \qquad (7.393)$$

$$u-m_e^2 = (k_1-p_2)^2-m_e^2 = -2\,k_1\cdot p_2 = -2\omega(E_e+\omega\cos\theta) \simeq -4\omega^2\cos^2\frac{\theta}{2}. \qquad (7.394)$$

容易看出，$\theta=\pi$ 处的奇性来自 u 通道。不过，$\mathcal{M}_u$ 中的因子 $(2c_{\theta/2}^2)^{-1} = (1+\cos\theta)^{-1}$ 在模方 $|\mathcal{M}_u|^2$ 中变成 $(1+\cos\theta)^{-2}$，这样的奇性看起来强于非极化振幅模方 (7.386) 中 $\sim(1+\cos\theta)^{-1}$ 的奇性。我们将通过下面的计算看到奇性是如何减弱的。

为计算极化振幅，我们先导出振幅中各个因子的显明表达式。在高能极限下，初末态电子四维动量近似为

$$k_1^\mu \simeq \omega(1,0,0,1), \quad p_1^\mu \simeq \omega(1,s_\theta,0,c_\theta), \qquad (7.395)$$

参照 7.2.4 小节，相应的螺旋态为

$$\xi_+(\mathbf{k}_1) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \xi_-(\mathbf{k}_1) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad \xi_+(\mathbf{p}_1) = \begin{pmatrix}c_{\theta/2}\\s_{\theta/2}\end{pmatrix}, \quad \xi_-(\mathbf{p}_1) = \begin{pmatrix}-s_{\theta/2}\\c_{\theta/2}\end{pmatrix}. \qquad (7.396)$$

根据 7.3 节，高能极限下的平面波旋量系数为

$$u(\mathbf{k}_1,+) \simeq \sqrt{2\omega}\begin{pmatrix}0\\\xi_+(\mathbf{k}_1)\end{pmatrix} = \sqrt{2\omega}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad u(\mathbf{k}_1,-) \simeq \sqrt{2\omega}\begin{pmatrix}\xi_-(\mathbf{k}_1)\\0\end{pmatrix} = \sqrt{2\omega}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad (7.397)$$

$$u(\mathbf{p}_1,+) \simeq \sqrt{2\omega}\begin{pmatrix}0\\\xi_+(\mathbf{p}_1)\end{pmatrix} = \sqrt{2\omega}\begin{pmatrix}0\\0\\c_{\theta/2}\\s_{\theta/2}\end{pmatrix}, \quad u(\mathbf{p}_1,-) \simeq \sqrt{2\omega}\begin{pmatrix}\xi_-(\mathbf{p}_1)\\0\end{pmatrix} = \sqrt{2\omega}\begin{pmatrix}-s_{\theta/2}\\c_{\theta/2}\\0\\0\end{pmatrix}. \qquad (7.398)$$

$u(\mathbf{p}_1,\lambda_1')$ 的 Dirac 共轭是

$$\begin{aligned}\bar{u}(\mathbf{p}_1,+) &= u^\dagger(\mathbf{p}_1,+)\gamma^0 \simeq \sqrt{2\omega}\begin{pmatrix}0 & \xi_+^\dagger(\mathbf{p}_1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&\mathbf{1}\\ \mathbf{1}&\end{pmatrix}\\ &= \sqrt{2\omega}\begin{pmatrix}\xi_+^\dagger(\mathbf{p}_1) & 0\end{pmatrix} \simeq \sqrt{2\omega}\begin{pmatrix}c_{\theta/2} & s_{\theta/2} & 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad (7.399)\\ \bar{u}(\mathbf{p}_1,-) &\simeq \sqrt{2\omega}\begin{pmatrix}0 & \xi_-^\dagger(\mathbf{p}_1)\end{pmatrix} \simeq \sqrt{2\omega}\begin{pmatrix}0 & 0 & -s_{\theta/2} & c_{\theta/2}\end{pmatrix}. \qquad (7.400)\end{aligned}$$

另一方面，初末态光子的四维动量是

$$k_2^\mu = \omega(1,0,0,-1), \quad p_2^\mu = \omega(1,-s_\theta,0,-c_\theta). \qquad (7.401)$$

根据 (3.244) 式，末态光子极化矢量表达为

$$\begin{aligned}\varepsilon^\mu(\mathbf{p}_2,+) &= \frac{\omega^2}{\sqrt{2}\omega^2 s_\theta}(0,-s_\theta c_\theta,\mathrm{i}s_\theta,s_\theta^2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-c_\theta,\mathrm{i},s_\theta), \qquad (7.402)\\ \varepsilon^\mu(\mathbf{p}_2,-) &= \frac{\omega^2}{\sqrt{2}\omega^2 s_\theta}(0,s_\theta c_\theta,\mathrm{i}s_\theta,-s_\theta^2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,c_\theta,\mathrm{i},-s_\theta). \qquad (7.403)\end{aligned}$$

令 $\theta=0$，即得初态光子极化矢量

$$\varepsilon^\mu(\mathbf{k}_2,+) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,\mathrm{i},0), \quad \varepsilon^\mu(\mathbf{k}_2,-) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,\mathrm{i},0). \qquad (7.404)$$

极化矢量与 Dirac 矩阵的缩并为

$$\begin{aligned}\not{\varepsilon}(\mathbf{k}_2,+) &= \gamma^\mu\varepsilon_\mu(\mathbf{k}_2,+) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^1-\mathrm{i}\gamma^2)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}&\sigma^1-\mathrm{i}\sigma^2\\ -\sigma^1+\mathrm{i}\sigma^2&\end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix}&&&0\\ &&1&\\ &0&&\\ -1&&&\end{pmatrix}, \qquad (7.405)\\ \not{\varepsilon}(\mathbf{k}_2,-) &= \gamma^\mu\varepsilon_\mu(\mathbf{k}_2,-) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\gamma^1-\mathrm{i}\gamma^2)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}&-\sigma^1-\mathrm{i}\sigma^2\\ \sigma^1+\mathrm{i}\sigma^2&\end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix}&&&-1\\ &&0&\\ &1&&\\ 0&&&\end{pmatrix}, \qquad (7.406)\\ \not{\varepsilon}^*(\mathbf{p}_2,+) &= \gamma^\mu\varepsilon_\mu^*(\mathbf{p}_2,+) = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_\theta\gamma^1+\mathrm{i}\gamma^2-s_\theta\gamma^3)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}&&&c_\theta\sigma^1+\mathrm{i}\sigma^2-s_\theta\sigma^3\\ -c_\theta\sigma^1-\mathrm{i}\sigma^2+s_\theta\sigma^3&&&\end{pmatrix}\\ &= \sqrt{2}\begin{pmatrix}&&-s_{\theta/2}c_{\theta/2}&c_{\theta/2}^2\\ &&-s_{\theta/2}^2&s_{\theta/2}c_{\theta/2}\\ s_{\theta/2}c_{\theta/2}&-c_{\theta/2}^2&&\\ s_{\theta/2}^2&-s_{\theta/2}c_{\theta/2}&&\end{pmatrix}, \qquad (7.407)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\not{\varepsilon}^*(\mathbf{p}_2,-) &= \gamma^\mu\varepsilon^*_\mu(\mathbf{p}_2,-) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-c_\theta\gamma^1+\mathrm{i}\gamma^2+s_\theta\gamma^3)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} & -c_\theta\sigma^1+\mathrm{i}\sigma^2+s_\theta\sigma^3\\ c_\theta\sigma^1-\mathrm{i}\sigma^2-s_\theta\sigma^3 & \end{pmatrix}\\ &= \sqrt{2}\begin{pmatrix} & & s_{\theta/2}c_{\theta/2} & s^2_{\theta/2}\\ & & -c^2_{\theta/2} & -s_{\theta/2}c_{\theta/2}\\ -s_{\theta/2}c_{\theta/2} & -s^2_{\theta/2} & & \\ c^2_{\theta/2} & s_{\theta/2}c_{\theta/2} & & \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{7.408}$$

第一步，按照 (7.391) 式计算 s 通道极化振幅 $\mathcal{M}_s$。$\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\not{\varepsilon}^*(\mathbf{p}_2,\lambda_2')$ 化为

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\not{\varepsilon}^*(\mathbf{p}_2,+) \simeq 2\sqrt{\omega}\begin{pmatrix}0 & 0 & -s_{\theta/2} & c_{\theta/2}\end{pmatrix}, \quad \bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\not{\varepsilon}^*(\mathbf{p}_2,-) \simeq \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{7.409}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\not{\varepsilon}^*(\mathbf{p}_2,-) \simeq 2\sqrt{\omega}\begin{pmatrix}c_{\theta/2} & s_{\theta/2} & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\not{\varepsilon}^*(\mathbf{p}_2,+) \simeq \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{7.410}$$

可见，当末态中电子与光子具有相反螺旋度时，贡献为零。这是因为螺旋度相反的电子和光子组成一个角动量为 3/2 的系统，而 s 通道电子传播子对应于一个自旋为 1/2 的类时虚粒子，违背角动量守恒。如果不忽略电子质量，则会出现受到螺旋度压低的非零贡献。$(k_1+k_2)^\mu \simeq (2\omega,0,0,0)$ 与 Dirac 矩阵的缩并表达成

$$\not{k}_1+\not{k}_2 = (k_1+k_2)_\mu\begin{pmatrix} & \sigma^\mu\\ \bar{\sigma}^\mu & \end{pmatrix} \simeq 2\omega\begin{pmatrix} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \end{pmatrix} = 2\omega\begin{pmatrix} & & 1 & 0\\ & & 0 & 1\\ 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \end{pmatrix}. \tag{7.411}$$

乘到 $\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\not{\varepsilon}^*(\mathbf{p}_2,\lambda_2')$ 后面，得

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\not{\varepsilon}^*(\mathbf{p}_2,+)(\not{k}_1+\not{k}_2) \simeq 4\omega^{3/2}\begin{pmatrix}-s_{\theta/2} & c_{\theta/2} & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{7.412}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\not{\varepsilon}^*(\mathbf{p}_2,-)(\not{k}_1+\not{k}_2) \simeq 4\omega^{3/2}\begin{pmatrix}0 & 0 & c_{\theta/2} & s_{\theta/2}\end{pmatrix}, \tag{7.413}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\not{\varepsilon}^*(\mathbf{p}_2,-)(\not{k}_1+\not{k}_2) \simeq \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{7.414}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\not{\varepsilon}^*(\mathbf{p}_2,+)(\not{k}_1+\not{k}_2) \simeq \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{7.415}$$

$\mathcal{M}_s$ 表达式 (7.391) 最后两个因子 $\not{\varepsilon}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)$ 的表达式是

$$\not{\varepsilon}(\mathbf{k}_2,+)u(\mathbf{k}_1,+) \simeq 2\sqrt{\omega}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \not{\varepsilon}(\mathbf{k}_2,+)u(\mathbf{k}_1,-) \simeq \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$\not{\varepsilon}(\mathbf{k}_2,-)u(\mathbf{k}_1,-) \simeq 2\sqrt{\omega}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \not{\varepsilon}(\mathbf{k}_2,-)u(\mathbf{k}_1,+) \simeq \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}. \tag{7.416}$$

当初态中电子与光子具有相反螺旋度时，贡献也为零，理由同上。

将这些因子乘起来，就得到 $\mathcal{M}_s$ 的计算结果。由于 $\mathcal{M}_s$ 的初末态平面波旋量系数之间夹着 3 个 Dirac 矩阵，我们从 (7.194) 式推断螺旋度相反的初末态电子在高能极限下没有贡献，即

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,-\lambda)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,\lambda_2')(\not{k}_1+\not{k}_2)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)u(\mathbf{k}_1,\lambda)\simeq 0,\quad \lambda=\pm. \tag{7.417}$$

对于初末态电子螺旋度相同的情况，非零结果只有

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,+)(\not{k}_1+\not{k}_2)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,+)u(\mathbf{k}_1,+)\simeq 8\omega^2 c_{\theta/2}, \tag{7.418}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,-)(\not{k}_1+\not{k}_2)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,-)u(\mathbf{k}_1,-)\simeq 8\omega^2 c_{\theta/2}. \tag{7.419}$$

相应的极化振幅为

$$\mathcal{M}_s(+,+,+,+)=\mathcal{M}_s(-,-,-,-)\simeq -2e^2c_{\theta/2}. \tag{7.420}$$

可见，在高能极限下，s 通道贡献只来自四个粒子全部右旋极化和全部左旋极化的螺旋度构型。这两种构型在宇称变换下相互转换，由于宇称守恒，它们的振幅至多相差一个相位因子，此处相位因子为 1。

第二步，按照 (7.392) 式计算 u 通道极化振幅 $\mathcal{M}_u$。$\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)$ 化为

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,+)\simeq 2\sqrt{\omega}\begin{pmatrix}0 & 0 & s_{\theta/2} & 0\end{pmatrix},\quad \bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,-)\simeq -2\sqrt{\omega}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & c_{\theta/2}\end{pmatrix}, \tag{7.421}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,+)\simeq -2\sqrt{\omega}\begin{pmatrix}c_{\theta/2} & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,-)\simeq -2\sqrt{\omega}\begin{pmatrix}0 & s_{\theta/2} & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{7.422}$$

$(k_1-p_2)^\mu\simeq\omega(0,s_\theta,0,1+c_\theta)=2\omega(0,s_{\theta/2}c_{\theta/2},0,c_{\theta/2}^2)$ 与 Dirac 矩阵的缩并是

$$\begin{aligned}\not{k}_1-\not{p}_2 &= (k_1-p_2)_\mu\begin{pmatrix}&\sigma^\mu\\ \bar{\sigma}^\mu&\end{pmatrix}\simeq 2\omega\begin{pmatrix}&-s_{\theta/2}c_{\theta/2}\sigma^1-c_{\theta/2}^2\sigma^3\\ s_{\theta/2}c_{\theta/2}\sigma^1+c_{\theta/2}^2\sigma^3&\end{pmatrix}\\ &= 2\omega\begin{pmatrix}&&-c_{\theta/2}^2&-s_{\theta/2}c_{\theta/2}\\ &&-s_{\theta/2}c_{\theta/2}&c_{\theta/2}^2\\ c_{\theta/2}^2&s_{\theta/2}c_{\theta/2}&&\\ s_{\theta/2}c_{\theta/2}&-c_{\theta/2}^2&&\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{7.423}$$

乘到 $\bar{u}(\mathbf{p}_1,\lambda_1')\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)$ 后面，得

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,+)(\not{k}_1-\not{p}_2)\simeq 4\omega^{3/2}\begin{pmatrix}s_{\theta/2}c_{\theta/2}^2 & s_{\theta/2}^2c_{\theta/2} & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{7.424}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,-)(\not{k}_1-\not{p}_2)\simeq 4\omega^{3/2}\begin{pmatrix}0 & 0 & s_{\theta/2}^2c_{\theta/2} & -s_{\theta/2}c_{\theta/2}^2\end{pmatrix}, \tag{7.425}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,-)(\not{k}_1-\not{p}_2)\simeq 4\omega^{3/2}\begin{pmatrix}-s_{\theta/2}c_{\theta/2}^2 & c_{\theta/2}^3 & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{7.426}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,+)(\not{k}_1-\not{p}_2)\simeq 4\omega^{3/2}\begin{pmatrix}0 & 0 & c_{\theta/2}^3 & s_{\theta/2}c_{\theta/2}^2\end{pmatrix}. \tag{7.427}$$

$\mathcal{M}_u$ 表达式 (7.392) 最后两个因子 $\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,\lambda_2')u(\mathbf{k}_1,\lambda_1)$ 的表达式是

$$\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,+)u(\mathbf{k}_1,+)\simeq 2\sqrt{\omega}\begin{pmatrix}-s_{\theta/2}c_{\theta/2}\\-s_{\theta/2}^2\\0\\0\end{pmatrix},\quad \not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,+)u(\mathbf{k}_1,-)\simeq 2\sqrt{\omega}\begin{pmatrix}0\\0\\-c_{\theta/2}^2\\-s_{\theta/2}c_{\theta/2}\end{pmatrix},\tag{7.428}$$

$$\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,-)u(\mathbf{k}_1,+)\simeq 2\sqrt{\omega}\begin{pmatrix}s_{\theta/2}c_{\theta/2}\\-c_{\theta/2}^2\\0\\0\end{pmatrix},\quad \not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,-)u(\mathbf{k}_1,-)\simeq 2\sqrt{\omega}\begin{pmatrix}0\\0\\-s_{\theta/2}^2\\s_{\theta/2}c_{\theta/2}\end{pmatrix}.\tag{7.429}$$

同样根据 (7.194) 式，我们知道螺旋度相反的初末态电子没有贡献，即

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,-\lambda)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,\lambda_2)(\not{k}_1-\not{p}_2)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,\lambda'_2)u(\mathbf{k}_1,\lambda)\simeq 0,\quad \lambda=\pm.\tag{7.430}$$

对于初末态电子螺旋度相同的情况，非零结果只有

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,+)(\not{k}_1-\not{p}_2)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,+)u(\mathbf{k}_1,+)\simeq -8\omega^2 s_{\theta/2}^2c_{\theta/2},\tag{7.431}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,-)(\not{k}_1-\not{p}_2)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,-)u(\mathbf{k}_1,-)\simeq -8\omega^2 s_{\theta/2}^2c_{\theta/2},\tag{7.432}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,+)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,-)(\not{k}_1-\not{p}_2)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,-)u(\mathbf{k}_1,+)\simeq -8\omega^2 c_{\theta/2}^3,\tag{7.433}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1,-)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,+)(\not{k}_1-\not{p}_2)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,+)u(\mathbf{k}_1,-)\simeq -8\omega^2 c_{\theta/2}^3.\tag{7.434}$$

相应的极化振幅为

$$\mathcal{M}_u(+,+,+,+)=\mathcal{M}_u(-,-,-,-)\simeq -\frac{2e^2s_{\theta/2}^2}{c_{\theta/2}},\tag{7.435}$$

$$\mathcal{M}_u(+,-,+,-)=\mathcal{M}_u(-,+,-,+)\simeq -2e^2c_{\theta/2}.\tag{7.436}$$

这些表达式再次体现 QED 中的宇称守恒。可见，$\theta=\pi$ 处的奇性来自全部粒子螺旋度相同的 u 通道振幅 $\mathcal{M}_u(\pm,\pm,\pm,\pm)$，而 $\bar{u}(\mathbf{p}_1,\pm)\not{\epsilon}(\mathbf{k}_2,\pm)(\not{k}_1-\not{p}_2)\not{\epsilon}^*(\mathbf{p}_2,\pm)u(\mathbf{k}_1,\pm)$ 包含一个 $c_{\theta/2}$ 因子，将振幅中原本 $\sim c_{\theta/2}^{-2}$ 的奇性减弱成 $\sim c_{\theta/2}^{-1}$ 的奇性。

现在，将 s 和 u 通道的贡献加起来，$\mathcal{M}=\mathcal{M}_s+\mathcal{M}_u$，得到非零极化振幅

$$\mathcal{M}(+,+,+,+)=\mathcal{M}(-,-,-,-)\simeq -2e^2c_{\theta/2}-\frac{2e^2s_{\theta/2}^2}{c_{\theta/2}}=-\frac{2e^2}{c_{\theta/2}},\tag{7.437}$$

$$\mathcal{M}(+,-,+,-)=\mathcal{M}(-,+,-,+)\simeq -2e^2c_{\theta/2}.\tag{7.438}$$

于是，非极化振幅模方为

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2}&=\frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2\simeq\frac{1}{4}\left[2|\mathcal{M}(+,-,+,-)|^2+2|\mathcal{M}(+,+,+,+)|^2\right]\\&\simeq\frac{1}{2}\left(4e^4c_{\theta/2}^2+\frac{4e^4}{c_{\theta/2}^2}\right)=4e^4\left(\frac{1+c_\theta}{4}+\frac{1}{1+c_\theta}\right),\end{aligned}\tag{7.439}$$

与 (7.386) 式一致。

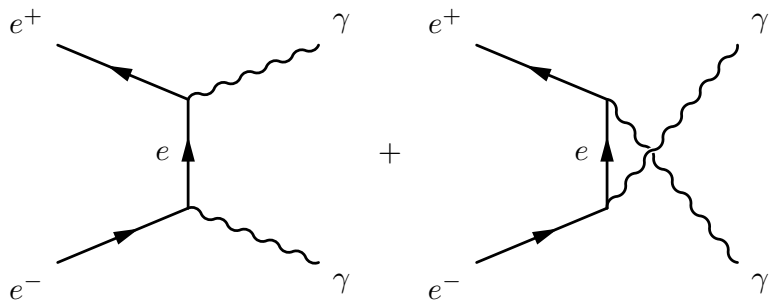


图 7.11: $e^+e^- \to \gamma\gamma$ 领头阶 Feynman 图。

7.6.4　正负电子湮灭到双光子

在 QED 领头阶，正负电子湮灭到双光子过程 $e^+e^- \to \gamma\gamma$ 的 Feynman 图如图 7.11 所示，它与 Compton 散射过程具有交叉对称性。

设初态 e^- 和 e^+ 的动量分别为 k_1' 和 k_2'，末态两个光子的动量为 p_1' 和 p_2'。对比 (7.304) 式可以发现，将 $e^-\gamma \to e^-\gamma$ 交叉成 $e^+e^- \to \gamma\gamma$ 时，需要把初态 γ (动量为 k_2) 换成末态 γ (动量为 p_1')，并把末态 e^- (动量为 p_1) 换成初态 e^+ (动量为 k_2')，引起动量替换规则

$$k_1^\mu \to k_1'^\mu, \quad k_2^\mu \to -p_1'^\mu, \quad p_1^\mu \to -k_2'^\mu, \quad p_2^\mu \to p_2'^\mu. \tag{7.440}$$

对 (7.362) 式应用这个替换规则，由于只交叉一个费米子，需要移除一个整体负号，从而得到 $e^+e^- \to \gamma\gamma$ 非极化振幅模方

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 2e^4 \left[\frac{k_1' \cdot p_2'}{k_1' \cdot p_1'} + \frac{k_1' \cdot p_1'}{k_1' \cdot p_2'} + 2m_e^2 \left(\frac{1}{k_1' \cdot p_1'} + \frac{1}{k_1' \cdot p_2'} \right) - m_e^4 \left(\frac{1}{k_1' \cdot p_1'} + \frac{1}{k_1' \cdot p_2'} \right)^2 \right]. \tag{7.441}$$

在质心系中，记 $\mathbf{k}_1'$ 与 $\mathbf{p}_1'$ 之间的夹角为 θ，则

$$k_1' \cdot p_1' = k_1'^0 p_1'^0 - |\mathbf{k}_1'||\mathbf{p}_1'| \cos\theta = \frac{s}{4}(1 - \beta_e \cos\theta), \tag{7.442}$$

$$k_1' \cdot p_2' = k_1'^0 p_2'^0 + |\mathbf{k}_1'||\mathbf{p}_2'| \cos\theta = \frac{s}{4}(1 + \beta_e \cos\theta), \tag{7.443}$$

其中 $\beta_e = \sqrt{1 - 4m_e^2/s}$。从而，

$$\frac{k_1' \cdot p_2'}{k_1' \cdot p_1'} + \frac{k_1' \cdot p_1'}{k_1' \cdot p_2'} = \frac{1 + \beta_e \cos\theta}{1 - \beta_e \cos\theta} + \frac{1 - \beta_e \cos\theta}{1 + \beta_e \cos\theta} = \frac{2(1 + \beta_e^2 \cos^2\theta)}{1 - \beta_e^2 \cos^2\theta}, \tag{7.444}$$

$$\frac{1}{k_1' \cdot p_1'} + \frac{1}{k_1' \cdot p_2'} = \frac{4}{s} \left(\frac{1}{1 - \beta_e \cos\theta} + \frac{1}{1 + \beta_e \cos\theta} \right) = \frac{8}{s(1 - \beta_e^2 \cos^2\theta)}. \tag{7.445}$$

于是得到

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 32\pi^2\alpha^2 \left[\frac{2(1 + \beta_e^2 \cos^2\theta)}{1 - \beta_e^2 \cos^2\theta} + \frac{16m_e^2}{s(1 - \beta_e^2 \cos^2\theta)} - \frac{64m_e^4}{s^2(1 - \beta_e^2 \cos^2\theta)^2} \right]. \tag{7.446}$$

由 (5.359) 式得相应的微分散射截面为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{64\pi^2 s\beta_e} = \frac{\alpha^2}{s\beta_e} \left[\frac{1 + \beta_e^2 \cos^2\theta}{1 - \beta_e^2 \cos^2\theta} + \frac{8m_e^2}{s(1 - \beta_e^2 \cos^2\theta)} - \frac{32m_e^4}{s^2(1 - \beta_e^2 \cos^2\theta)^2} \right]. \tag{7.447}$$

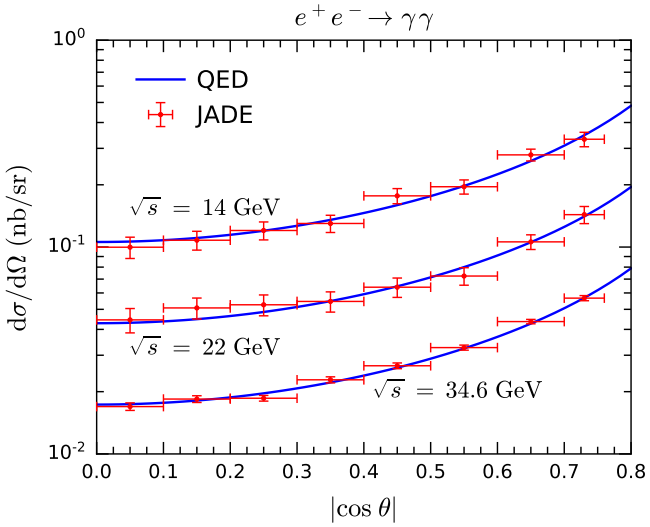


图 7.12: $e^+e^- \to \gamma\gamma$ 微分散射截面。实验数据来自 JADE 合作组 [42]。

对上式积分计算散射截面 σ 时，应当注意此过程的末态对称性因子 $\mathcal{S} = 2$。

PETRA 对撞机上的 JADE 探测器测量了质心能 $\sqrt{s} = 14,\ 22,\ 34.6$ GeV 的 $e^+e^- \to \gamma\gamma$ 微分散射截面 [42]，数据如图 7.12 所示。根据 (7.447) 式计算的 QED 预言值用实线画在图上，与实验数据基本吻合。

习　题

7.1 在 QED 领头阶，Bhabha 散射 $e^+e^- \to e^+e^-$ 和 Møller 散射 $e^-e^- \to e^-e^-$ 的 Feynman 图分别如 (7.296) 和 (7.297) 所示。

(a) 忽略电子质量，证明 Bhabha 散射的非极化振幅模方为

$$\overline{|\mathcal{M}_{\mathrm{B}}|^2} = 32\pi^2\alpha^2 \left[u^2 \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{t} \right)^2 + \frac{t^2}{s^2} + \frac{s^2}{t^2} \right]. \tag{7.448}$$

(b) 利用交叉对称性，求出 Møller 散射的非极化振幅模方 $\overline{|\mathcal{M}_{\mathrm{M}}|^2}$。

7.2 考虑另一种形式的 **Yukawa 理论**，拉氏量为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2 + \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m_\psi\bar{\psi}\psi - \kappa\,\phi\bar{\psi}\mathrm{i}\gamma^5\psi, \tag{7.449}$$

其中 ϕ 是实标量场，ψ 是 Dirac 旋量场，κ 是实耦合常数。

(a) 写出动量空间中的顶点 Feynman 规则。

(b) 设 $m_\phi > 2m_\psi$，画出衰变过程 $\phi \to \psi\bar{\psi}$ 的领头阶 Feynman 图，计算非极化振幅模方 $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ 和衰变宽度 Γ。

(c) 画出湮灭过程 $\psi\bar{\psi}\to\phi\phi$ 的领头阶 Feynman 图。设 $m_\psi=m_\phi=0$，计算非极化振幅模方 $\overline{|\mathcal{M}|^2}$，并在质心系中求出微分散射截面 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$。

7.3 考虑**四费米子相互作用理论**，拉氏量为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}=&\sum_{f=\mu,e,\nu_\mu,\nu_e}(\mathrm{i}\bar{\psi}_f\gamma^\mu\partial_\mu\psi_f-m_f\bar{\psi}_f\psi_f)\\&-\frac{G_\mathrm{F}}{\sqrt{2}}\left[\bar{\psi}_{\nu_\mu}\gamma^\rho(1-\gamma^5)\psi_\mu\bar{\psi}_e\gamma_\rho(1-\gamma^5)\psi_{\nu_e}+\bar{\psi}_\mu\gamma^\rho(1-\gamma^5)\psi_{\nu_\mu}\bar{\psi}_{\nu_e}\gamma_\rho(1-\gamma^5)\psi_e\right],\end{aligned}\tag{7.450}$$

其中 Dirac 旋量场 ψ_μ、ψ_e、ψ_{ν_μ} 和 ψ_{ν_e} 分别描述 μ 子、电子、μ 子型中微子和电子型中微子，Fermi 常数 $G_\mathrm{F}=1.166\times10^{-5}\ \mathrm{GeV}^{-2}$，方括号中两项互为厄米共轭。

(a) 写出动量空间中所有顶点的 Feynman 规则。

(b) 画出三体衰变过程 $\mu^-\to e^-\bar{\nu}_e\nu_\mu$ 的 Feynman 图。设 $m_e=m_{\nu_e}=m_{\nu_\mu}=0$，计算非极化振幅模方 $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ 和衰变宽度 Γ。

(c) 计算 μ 子寿命 $\tau=1/\Gamma$ 的数值，以秒为单位。

7.4 考虑**标准模型**里面电中性矢量玻色子 Z 和带电矢量玻色子 $W^\pm$ 与第一代轻子的相互作用，拉氏量为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}=&-\frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu}+\frac{1}{2}m_Z^2Z_\mu Z^\mu-\frac{1}{2}W^-_{\mu\nu}W^{+,\mu\nu}+m_W^2W^-_\mu W^{+,\mu}\\&+\mathrm{i}\bar{\psi}_e\gamma^\mu\partial_\mu\psi_e-m_e\bar{\psi}_e\psi_e+\mathrm{i}\bar{\psi}_{\nu_e}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_{\nu_e}\\&-\frac{g}{2\cos\theta_\mathrm{W}}Z_\mu\left[\bar{\psi}_e\gamma^\mu(g_\mathrm{V}^e-g_\mathrm{A}^e\gamma^5)\psi_e+\bar{\psi}_{\nu_e}\gamma^\mu(g_\mathrm{V}^{\nu_e}-g_\mathrm{A}^{\nu_e}\gamma^5)\psi_{\nu_e}\right]\\&-\frac{g}{\sqrt{2}}\left(W^+_\mu\bar{\psi}_{\nu_e}\gamma^\mu P_\mathrm{L}\psi_e+\mathrm{H.c.}\right).\end{aligned}\tag{7.451}$$

其中，实矢量场 Z^μ 描述质量为 $m_Z=91.19\ \mathrm{GeV}$ 的 Z 玻色子；复矢量场 $W^{+,\mu}$ 描述质量为 $m_W=80.38\ \mathrm{GeV}$ 的 $W^\pm$ 玻色子，且 $W^{-,\mu}\equiv(W^{+,\mu})^\dagger$，相应的内外线 Feynman 规则见习题 6.5。场强张量 $Z_{\mu\nu}\equiv\partial_\mu Z_\nu-\partial_\nu Z_\mu$，$W^\pm_{\mu\nu}\equiv\partial_\mu W^\pm_\nu-\partial_\nu W^\pm_\mu$。Dirac 旋量场 ψ_e 和 ψ_{ν_e} 分别描述电子和电子型中微子。g 是实的弱耦合常数，θ_W 是弱混合角。g_V^e、g_A^e、$g_\mathrm{V}^{\nu_e}$、$g_\mathrm{A}^{\nu_e}$ 都是实的无量纲常数。H.c. 代表厄米共轭。

(a) 写出动量空间中所有顶点的 Feynman 规则。

(b) 画出衰变过程 $Z\to e^+e^-$ 和 $Z\to\nu_e\bar{\nu}_e$ 的 Feynman 图。计算 $Z\to e^+e^-$ 的非极化振幅模方 $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ 和衰变分宽度 $\Gamma(Z\to e^+e^-)$。类比给出衰变分宽度 $\Gamma(Z\to\nu_e\bar{\nu}_e)$。

(c) 画出衰变过程 $W^+\to e^+\nu_e$ 的 Feynman 图，计算非极化振幅模方 $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ 和衰变分宽度 $\Gamma(W^+\to e^+\nu_e)$。

(d) 已知

$$\cos^2\theta_\mathrm{W}=\frac{m_W^2}{m_Z^2},\quad g=\frac{e}{\sin\theta_\mathrm{W}},\quad g_\mathrm{V}^e=-\frac{1}{2}+2\sin^2\theta_\mathrm{W},\quad g_\mathrm{A}^e=-\frac{1}{2},\quad g_\mathrm{V}^{\nu_e}=g_\mathrm{A}^{\nu_e}=\frac{1}{2}.\tag{7.452}$$

计算上述三个衰变分宽度的数值，以 GeV 为单位。

第 8 章　分立对称性和 Majorana 旋量场

相对于连续变换，不能用连续变化的参数描述的对称变换称为**分立** (discrete) 变换，也称为离散变换。如果系统的作用量在一种分立变换下不变，则系统具有相应的**分立对称性** (discrete symmetry)。1.3 节末提到的宇称变换和时间反演变换是两种重要的分立变换。本章讨论量子场的分立变换和分立对称性，顺便介绍 Majorana 旋量场。

8.1　标量场的分立变换

8.1.1　标量场的 P 变换

时空坐标 $x^\mu = (t, \mathbf{x})$ 的**宇称变换**由 (1.58) 式给出，即

$$\mathcal{P}^\mu{}_\nu = (\mathcal{P}^{-1})^\mu{}_\nu = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1). \tag{8.1}$$

这是一种非固有保时向 Lorentz 变换，将 x^μ 变换为 $x'^\mu = \mathcal{P}^\mu{}_\nu x^\nu = (\mathcal{P}x)^\mu = (t, -\mathbf{x})$，将时空导数 ∂_μ 变换为 $\partial'_\mu = (\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu$，将四维动量 $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ 变换为 $p'^\mu = (\mathcal{P}p)^\mu = (E, -\mathbf{p})$，但同时保持时空体积元不变，$\mathrm{d}^4x' = |\det(\mathcal{P})|\,\mathrm{d}^4x = \mathrm{d}^4x$。如果系统的作用量 $S = \int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}(x)$ 在宇称变换下不变，则运动方程的形式也在宇称变换下不变，此时称系统是**宇称守恒**的，即具有**空间反射对称性**。在宇称守恒的理论中，拉氏量 $\mathcal{L}(x)$ 的宇称变换应当满足 $\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x)$，从而使得 $S' = \int \mathrm{d}^4x'\,\mathcal{L}'(x') = \int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}(x) = S$。

类似于 3.1.1 小节的讨论，在宇称守恒的量子理论中，宇称变换在 Hilbert 空间中诱导出态矢 $|\Psi\rangle$ 的线性幺正变换

$$|\Psi'\rangle = U(\mathcal{P})\,|\Psi\rangle = P\,|\Psi\rangle\,, \tag{8.2}$$

称为 $\boldsymbol{P}$ **变换**，其中 $P \equiv U(\mathcal{P})$ 是一个线性幺正算符。根据同态关系和 $\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{P}$，有

$$P^{-1} = U^{-1}(\mathcal{P}) = U(\mathcal{P}^{-1}) = U(\mathcal{P}) = P, \tag{8.3}$$

即 P 是自身的逆变换算符。从而 $P^2 = P^{-1}P = 1$，故相继两次 P 变换的作用等同于恒等变换。由 P 的幺正性得

$$P^\dagger = P^{-1} = P, \tag{8.4}$$

因而 P 是厄米算符。此时，由量子场算符构成的拉氏量在宇称变换下不变意味着 $\mathcal{L}'(x') = P^{-1}\mathcal{L}(x')P = \mathcal{L}(x)$。作替换 $x' \to x$，$x \to \mathcal{P}^{-1}x = \mathcal{P}x$，将这个式子等价地写成

$$P^{-1}\mathcal{L}(x)P = +\mathcal{L}(\mathcal{P}x). \tag{8.5}$$

使拉氏量满足上式，也就是说，让拉氏量具有偶宇称(指上式右边的 $+$ 号)，就能得到宇称守恒的量子场论。

现在讨论量子 Poincaré 变换 $U(\Lambda, a)$ 的生成元算符 $J^{\mu\nu}$ 和 P^μ 在宇称守恒理论中的 P 变换。同态关系 (3.7) 对一般的 Lorentz 变换 Λ 成立，可用于宇称变换 $\mathcal{P}$，故

$$P^{-1}U(\Lambda, a)P = U^{-1}(\mathcal{P})U(\Lambda, a)U(\mathcal{P}) = U^{-1}(\mathcal{P})U(\Lambda\mathcal{P}, a) = U(\mathcal{P}^{-1}\Lambda\mathcal{P}, \mathcal{P}^{-1}a), \tag{8.6}$$

相应的无穷小变换为

$$P^{-1}U(\mathbf{1} + \omega, \varepsilon)P = U(\mathbf{1} + \mathcal{P}^{-1}\omega\mathcal{P}, \mathcal{P}^{-1}\varepsilon). \tag{8.7}$$

上式与 (3.15) 式类似，因而可以推出类似于 (3.23) 和 (3.24) 式的 P 变换规则

$$P^{-1}J^{\mu\nu}P = \mathcal{P}^\mu{}_\rho\mathcal{P}^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}, \quad P^{-1}P^\mu P = \mathcal{P}^\mu{}_\nu P^\nu. \tag{8.8}$$

从而，由 (3.35) 式定义的 J^i 和 K^i 在 P 变换下变成

$$P^{-1}J^iP = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}P^{-1}J^{jk}P = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\mathcal{P}^j{}_l\mathcal{P}^k{}_m J^{lm} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}(-\delta^j{}_l)(-\delta^k{}_m)J^{lm} = +J^i, \tag{8.9}$$

$$P^{-1}K^iP = P^{-1}J^{0i}P = \mathcal{P}^0{}_0\mathcal{P}^i{}_j J^{0j} = -\delta^i{}_j J^{0j} = -K^i, \tag{8.10}$$

即

$$P^{-1}\mathbf{J}P = +\mathbf{J}, \quad P^{-1}\mathbf{K}P = -\mathbf{K}. \tag{8.11}$$

总角动量算符 $\mathbf{J}$ 具有偶宇称，体现了它作为三维轴矢量的变换性质，因此角动量在宇称变换下不变。将四维动量算符分解为 $P^\mu = (H, \mathbf{P})$，就得到

$$P^{-1}HP = +H, \quad P^{-1}\mathbf{P}P = -\mathbf{P}. \tag{8.12}$$

动量算符 $\mathbf{P}$ 具有奇宇称，体现了它作为三维极矢量的变换性质，而动量方向在宇称变换下反转。哈密顿量算符 H 的宇称为偶，而 $P^{-1}HP = +H$ 等价于 $[H, P] = 0$，后者在量子理论中意味着宇称算符 P 是一个守恒量。

通常来说，我们希望一个物理理论包含比较多的对称性，从而具有比较优良的性质。为了得到一个宇称守恒的量子场论，首先，需要让拉氏量中的自由部分在宇称变换下不变，这是容易做到的；其次，还得要求拉氏量中的相互作用部分也在宇称变换下不变，这一点并不是平庸的。实际上，尽管宇称在电磁相互作用和强相互作用中守恒，在弱相互作用中却遭到极大的破坏。这个出乎意料的现象是 1956 年李政道和杨振宁对当时的实验结果进行理论分析时发现的 [43]。为了分析量子场论中的宇称守恒情况，我们需要知道各种量子场在 P 变换下的性质。

下面先讨论自由的复标量场 $\phi(x)$，拉氏量为 (2.169) 式，$\phi(x)$ 的运动方程是 Klein-Gordon 方程 $(\partial^2+m^2)\phi(x)=0$。宇称变换翻转了动量的方向，因而 P 变换对正标量玻色子 ϕ 的单粒子态 $|\mathbf{p}^+\rangle=\sqrt{2E_\mathbf{p}}\,a^\dagger_\mathbf{p}|0\rangle$ 的作用为

$$P\left|\mathbf{p}^+\right\rangle=\eta_P\left|-\mathbf{p}^+\right\rangle, \tag{8.13}$$

其中 η_P 是一个复的**相位因子**，满足 $|\eta_P|=1$。出现 η_P 的原因是相差一个相位因子的态矢描述相同的物理。

真空态在 P 变换下不变，故 $P|0\rangle=|0\rangle$。从而，

$$P\left|\mathbf{p}^+\right\rangle=P^{-1}|\mathbf{p}^+\rangle=\sqrt{2E_\mathbf{p}}\,P^{-1}a^\dagger_\mathbf{p}P|0\rangle, \tag{8.14}$$

与 $P|\mathbf{p}^+\rangle=\eta_P|-\mathbf{p}^+\rangle=\sqrt{2E_\mathbf{p}}\,\eta_P a^\dagger_{-\mathbf{p}}|0\rangle$ 比较，推出

$$P^{-1}a^\dagger_\mathbf{p}P=\eta_P a^\dagger_{-\mathbf{p}},\quad P^{-1}a_\mathbf{p}P=\eta^*_P a_{-\mathbf{p}}, \tag{8.15}$$

其中第二式由第一式取厄米共轭得到，注意 $(P^{-1}a^\dagger_\mathbf{p}P)^\dagger=(P^\dagger a^\dagger_\mathbf{p}P)^\dagger=P^\dagger a_\mathbf{p}P=P^{-1}a_\mathbf{p}P$。这是产生湮灭算符的 P 变换形式。另一方面，P 变换对反标量玻色子 $\bar\phi$ 的单粒子态 $|\mathbf{p}^-\rangle=\sqrt{2E_\mathbf{p}}\,b^\dagger_\mathbf{p}|0\rangle$ 的作用为 $P|\mathbf{p}^-\rangle=\tilde\eta_P|-\mathbf{p}^-\rangle$，出现另一个相位因子 $\tilde\eta_P$，同理推出

$$P^{-1}b^\dagger_\mathbf{p}P=\tilde\eta_P b^\dagger_{-\mathbf{p}},\quad P^{-1}b_\mathbf{p}P=\tilde\eta^*_P b_{-\mathbf{p}}. \tag{8.16}$$

于是，复标量场 $\phi(x)$ 的平面波展开式 (2.177) 在 P 变换下化为

$$\begin{aligned}P^{-1}\phi(x)P&=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left(P^{-1}a_\mathbf{p}P\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+P^{-1}b^\dagger_\mathbf{p}P\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)\\&=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left(\eta^*_P a_{-\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+\tilde\eta_P b^\dagger_{-\mathbf{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right)\\&=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left[\eta^*_P a_\mathbf{p}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(\mathcal{P}x)}+\tilde\eta_P b^\dagger_\mathbf{p}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(\mathcal{P}x)}\right],\end{aligned} \tag{8.17}$$

最后一步作了变量替换 $\mathbf{p}\to-\mathbf{p}$，并利用 $(\mathcal{P}p)\cdot x=p\cdot(\mathcal{P}x)$。为了保持 $\phi(x)$ 的运动方程形式不变，我们必须要求 η_P 和 $\tilde\eta_P$ 满足关系式

$$\eta^*_P=\tilde\eta_P, \tag{8.18}$$

使得 $\phi(x)$ 和 $\phi^\dagger(x)$ 的 P 变换为

$$P^{-1}\phi(x)P=\eta^*_P\phi(\mathcal{P}x),\quad P^{-1}\phi^\dagger(x)P=\eta_P\phi^\dagger(\mathcal{P}x), \tag{8.19}$$

即 $P^{-1}\phi(x)P$ 与 $\phi(\mathcal{P}x)$ 只相差一个常数因子 η^*_P。从而，作宇称变换后，$\phi'(x')=P^{-1}\phi(x')P=\eta^*_P\phi(\mathcal{P}x')=\eta^*_P\phi(x)$ 也满足 Klein-Gordon 方程，

$$(\partial'^2+m^2)\phi'(x')=\eta^*_P(\partial^2+m^2)\phi(x)=0. \tag{8.20}$$

这样的话，$b^\dagger_{\mathbf{p}}$ 和 $b_{\mathbf{p}}$ 的 P 变换 (8.16) 变成

$$P^{-1}b^\dagger_{\mathbf{p}}P=\eta_P^* b^\dagger_{-\mathbf{p}},\quad P^{-1}b_{\mathbf{p}}P=\eta_P b_{-\mathbf{p}}. \tag{8.21}$$

现在讨论拉氏量 (2.169) 的宇称变换性质。这会涉及时空导数的宇称变换 $\partial'_\mu=(\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu$，为便于表述，我们在形式上以时空导数的宇称变换定义 P 变换，

$$P^{-1}\partial_\mu P\equiv\partial'_\mu=(\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu,\quad P^{-1}\partial^\mu P=\partial'^\mu=\mathcal{P}^\mu{}_\nu\partial^\nu. \tag{8.22}$$

于是，拉氏量中动能项算符 $(\partial^\mu\phi^\dagger)\partial_\mu\phi$ 的 P 变换为

$$\begin{aligned}P^{-1}\partial^\mu\phi^\dagger(x)\partial_\mu\phi(x)P&=P^{-1}\partial^\mu PP^{-1}\phi^\dagger(x)PP^{-1}\partial_\mu PP^{-1}\phi(x)P\\&=|\eta_P|^2\mathcal{P}^\mu{}_\nu(\mathcal{P}^{-1})^\rho{}_\mu\partial^\nu\phi^\dagger(\mathcal{P}x)\partial_\rho\phi(\mathcal{P}x)=+\partial^\mu\phi^\dagger(\mathcal{P}x)\partial_\mu\phi(\mathcal{P}x),\end{aligned} \tag{8.23}$$

质量项算符 $\phi^\dagger\phi$ 的 P 变换为

$$P^{-1}\phi^\dagger(x)\phi(x)P=P^{-1}\phi^\dagger(x)PP^{-1}\phi(x)P=|\eta_P|^2\phi^\dagger(\mathcal{P}x)\phi(\mathcal{P}x)=+\phi^\dagger(\mathcal{P}x)\phi(\mathcal{P}x). \tag{8.24}$$

以上两式最右边表达式中的 $+$ 号表明算符 $(\partial^\mu\phi^\dagger)\partial_\mu\phi$ 和 $\phi^\dagger\phi$ 都具有偶宇称。因此，自由复标量场的拉氏量 (2.169) 满足 (8.5) 式，即拉氏量在宇称变换下不变。

在 P 变换下，(2.199) 式中的 U(1) 守恒流算符 $\mathrm{i}\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi$ 变成

$$P^{-1}\mathrm{i}\phi^\dagger(x)\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi(x)P=\mathrm{i}P^{-1}\phi^\dagger(x)PP^{-1}\overleftrightarrow{\partial^\mu}PP^{-1}\phi(x)P=\mathcal{P}^\mu{}_\nu\mathrm{i}\phi^\dagger(\mathcal{P}x)\overleftrightarrow{\partial^\nu}\phi(\mathcal{P}x), \tag{8.25}$$

符合 $\mathrm{i}\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi$ 作为极矢量的变换规则。

在质心系中考虑一对正反标量玻色子 $\phi\bar\phi$ 组成的态

$$\left|\phi\bar\phi\right\rangle=\int\mathrm{d}^3p\,\Phi(\mathbf{p})a^\dagger_{\mathbf{p}}b^\dagger_{-\mathbf{p}}\left|0\right\rangle, \tag{8.26}$$

其中 $\Phi(\mathbf{p})$ 是动量空间中的波函数。当轨道角动量的量子数为 L 时，$\Phi(\mathbf{p})$ 正比于球谐函数 $Y_{LM}(\theta,\phi)$，其中 θ 和 ϕ 分别是球坐标系中动量 $\mathbf{p}$ 的极角和方位角。$-\mathbf{p}$ 的极角为 $\pi-\theta$，方位角为 $\pi+\phi$，由 $Y_{LM}(\pi-\theta,\pi+\phi)=(-)^LY_{LM}(\theta,\phi)$ 得

$$\Phi(-\mathbf{p})=(-)^L\Phi(\mathbf{p}). \tag{8.27}$$

于是，$\left|\phi\bar\phi\right\rangle$ 的 P 变换为

$$\begin{aligned}P\left|\phi\bar\phi\right\rangle&=\int\mathrm{d}^3p\,\Phi(\mathbf{p})P^{-1}a^\dagger_{\mathbf{p}}PP^{-1}b^\dagger_{-\mathbf{p}}P\left|0\right\rangle=|\eta_P|^2\int\mathrm{d}^3p\,\Phi(\mathbf{p})a^\dagger_{-\mathbf{p}}b^\dagger_{\mathbf{p}}\left|0\right\rangle\\&=\int\mathrm{d}^3p\,\Phi(-\mathbf{p})a^\dagger_{\mathbf{p}}b^\dagger_{-\mathbf{p}}\left|0\right\rangle=(-)^L\int\mathrm{d}^3p\,\Phi(\mathbf{p})a^\dagger_{\mathbf{p}}b^\dagger_{-\mathbf{p}}\left|0\right\rangle=(-)^L\left|\phi\bar\phi\right\rangle.\end{aligned} \tag{8.28}$$

第三步作了变量替换 $\mathbf{p}\to-\mathbf{p}$。这个结果表明 $\left|\phi\bar\phi\right\rangle$ 是 P 算符的本征态，本征值 $(-)^L$ 是可观测量，称作 $\left|\phi\bar\phi\right\rangle$ 的**宇称**。宇称是一种**相乘性量子数** (multiplicative quantum number)，态矢的总

宇称是各部分贡献的宇称之积。波函数 $\Phi(\mathbf{p})$ 对 $\left|\phi\bar{\phi}\right\rangle$ 宇称的贡献为 $(-)^L$，这部分称为**轨道宇称** (orbital parity)。扣除轨道宇称之后，剩下的部分称为**内禀宇称** (intrinsic parity)。$\left|\phi\bar{\phi}\right\rangle$ 的内禀宇称为 $+$，因此我们说一对正反标量玻色子的内禀宇称为偶。

接下来讨论自由的实标量场 $\phi(x)$，拉氏量为 (2.77) 式。比较它的平面波展开式 (2.101) 与 (2.177) 式，可以看出，实标量场的情况相当于要求以上讨论在 $b_{\mathbf{p}} = a_{\mathbf{p}}$ 的条件下进行，由此推出

$$\eta_P = \tilde{\eta}_P = \eta_P^*. \tag{8.29}$$

于是，相位因子 η_P 是实数，满足 $\eta_P^2 = |\eta_P|^2 = 1$，故

$$\eta_P = \pm 1. \tag{8.30}$$

若 $\eta_P = +1$，则实标量场 $\phi(x)$ 是狭义的**标量场**，P 变换为

$$P^{-1}\phi(x)P = +\phi(\mathcal{P}x), \tag{8.31}$$

宇称为偶。若 $\eta_P = -1$，则称它是**赝标量场**，P 变换为

$$P^{-1}\phi(x)P = -\phi(\mathcal{P}x), \tag{8.32}$$

宇称为奇。容易看出，无论实标量场 $\phi(x)$ 具有哪种宇称，拉氏量 (2.77) 都在宇称变换下不变。不过，与旋量场发生宇称守恒的相互作用时，宇称不同的实标量场 $\phi(x)$ 具有不同的性质，可以通过实验来分辨。

对于复标量场 $\phi(x)$，宇称变换相位因子的取值实际上是任意的。如 2.4.3 小节所述，自由的复标量场具有 U(1) 整体对称性 $\phi'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\phi(x)$，相应的守恒荷算符 Q 由 (2.202) 式给出，满足 (2.217) 式，即 $[Q, \phi] = -q\phi$。由此得到多重对易子表达式

$$[\phi, Q^{(1)}] = q\phi, \quad [\phi, Q^{(2)}] = [[\phi, Q^{(1)}], Q] = q[\phi, Q] = q^2\phi, \quad \cdots, \quad [\phi, Q^{(n)}] = q^n\phi, \tag{8.33}$$

再利用 (4.23) 式，推出

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta Q}\phi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta Q} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[\phi, (-\mathrm{i}\theta Q)^{(n)}] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i}\theta)^n}{n!}[\phi, Q^{(n)}] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i}q\theta)^n}{n!}\phi = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}\phi. \tag{8.34}$$

用 Q 和 P 定义一个新的幺正算符

$$P' \equiv \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta Q}P, \tag{8.35}$$

满足 $P'^{-1} = P'^{\dagger} = P^{\dagger}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta Q} = P^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta Q}$，则复标量场 $\phi(x)$ 的 P' 变换为

$$P'^{-1}\phi(x)P' = P^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta Q}\phi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta Q}P = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}P^{-1}\phi(x)P = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}\eta_P^*\phi(\mathcal{P}x) = \eta_P'^*\phi(\mathcal{P}x), \tag{8.36}$$

其中

$$\eta_P' \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\eta_P \tag{8.37}$$

是 P' 算符的相位因子。尽管 P' 算符不是厄米的，它的作用与 P 算符的作用在实质上是相同的，能够将 $\phi(x)$ 变换成 $\phi(\mathcal{P}x)$，只相差一个相位因子 η'_P。因此，我们可以用 P' 取代 P 作为宇称变换算符，而相位因子 η'_P 将取代原来的 η_P。由于 U(1) 变换参数 θ 是任意的，η'_P 的取值也是任意的。

另一方面，*实标量场* $\phi(x)$ 不具备 U(1) 整体对称性，因而相应宇称变换相位因子不具有这样的任意性。可以认为，实标量场的 U(1) 荷 $q=0$，守恒荷算符 $Q=0$，因而用 (8.35) 式定义的 P' 与 P 相同。

这个结论可以推广到其它分立对称性和其它量子场：**分立变换的相位因子对于像复标量场这样的复场是任意的，对于像实标量场这样的自共轭场则是确定的。**

8.1.2 标量场的 T 变换

x^μ 的**时间反演变换**由 (1.59) 式给出，即

$$\mathcal{T}^\mu{}_\nu = (\mathcal{T}^{-1})^\mu{}_\nu = \mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1). \tag{8.38}$$

这是一种非固有反时向 Lorentz 变换，将 $x^\mu=(t,\mathbf{x})$ 变换为 $x'^\mu=(\mathcal{T}x)^\mu=(-t,\mathbf{x})$，将 ∂_μ 变换为 $\partial'_\mu=(\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu$，将 $p^\mu=(E,\mathbf{p})$ 变换为 $p'^\mu=(\mathcal{T}p)^\mu=(-E,\mathbf{p})$，同时保持时空体积元不变，$\mathrm{d}^4x'=|\det(\mathcal{T})|\,\mathrm{d}^4x=\mathrm{d}^4x$。于是，只要拉氏量在时间反演变换下不变，满足 $\mathcal{L}'(x')=\mathcal{L}(x)$，系统就具有**时间反演对称性**。

在具有时间反演对称性的量子理论中，时间反演变换在 Hilbert 空间中诱导出态矢 $|\Psi\rangle$ 的 ***T* 变换**

$$|\Psi'\rangle = U(\mathcal{T})\,|\Psi\rangle = T\,|\Psi\rangle\,, \tag{8.39}$$

其中 $T\equiv U(\mathcal{T})$。T 是自身的逆变换算符，$T^{-1}=T$。仿照上面关于 P 变换的讨论，根据同态关系 (3.7)，量子 Poincaré 变换 $U(\Lambda,a)$ 满足

$$T^{-1}U(\Lambda,a)T = U^{-1}(\mathcal{T})U(\Lambda,a)U(\mathcal{T}) = U(\mathcal{T}^{-1}\Lambda\mathcal{T},\mathcal{T}^{-1}a), \tag{8.40}$$

由此推出类似于 (3.21) 和 (3.22) 式的 T 变换规则

$$T^{-1}\mathrm{i}J^{\mu\nu}T = \mathrm{i}\mathcal{T}^\mu{}_\rho\mathcal{T}^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}, \quad T^{-1}\mathrm{i}P^\mu T = \mathrm{i}\mathcal{T}^\mu{}_\nu P^\nu. \tag{8.41}$$

这里我们保留了推导过程中的虚数 i。

如果时间反演算符 T 与宇称算符 P 一样是线性幺正算符，那么，

$$T^{-1}HT = T^{-1}P^0T = \mathcal{T}^0{}_0P^0 = -H. \tag{8.42}$$

这意味着哈密顿量算符 H 在 T 变换下发生改变，导致理论不具有时间反演对称性，与我们的假设矛盾。因此，T 不可能是线性幺正算符。不过，对称变换在量子力学中不一定要用线性幺正算符表述，也可以用**反线性** (antilinear) **反幺正** (antiunitary) **算符**描述。

一般地，在反线性反幺正算符 U 的作用下，态矢 $|\Psi_1\rangle$ 和 $|\Psi_2\rangle$ 满足

$$U(a\,|\Psi_1\rangle + b\,|\Psi_2\rangle) = a^* U\,|\Psi_1\rangle + b^* U\,|\Psi_2\rangle\,, \quad \langle U\Psi_1|U\Psi_2\rangle = \langle\Psi_1|\Psi_2\rangle^*\,, \tag{8.43}$$

其中 a 和 b 是任意复数。第一个等式代表反线性，第二个等式代表反幺正。反线性意味着

$$-\,\mathrm{i}\,|\Psi_1\rangle = U^{-1}U(-\mathrm{i}\,|\Psi_1\rangle) = U^{-1}\mathrm{i}U\,|\Psi_1\rangle\,, \tag{8.44}$$

即

$$U^{-1}\mathrm{i}U = -\mathrm{i}. \tag{8.45}$$

对任意复数 a，则有 $U^{-1}a\,U = a^*$。反线性反幺正算符 U 的厄米共轭算符 $U^\dagger$ 通过下式定义，

$$\big\langle\Psi_1|U^\dagger\Psi_2\big\rangle \equiv \langle U\Psi_1|\Psi_2\rangle^* = \langle\Psi_2|U\Psi_1\rangle\,. \tag{8.46}$$

因而反幺正意味着

$$\big\langle\Psi_1|U^{-1}U\Psi_2\big\rangle = \langle\Psi_1|\Psi_2\rangle = \langle U\Psi_1|U\Psi_2\rangle^* = \big\langle\Psi_1|U^\dagger U\Psi_2\big\rangle\,, \tag{8.47}$$

故

$$U^{-1} = U^\dagger. \tag{8.48}$$

这个等式与线性幺正算符满足的等式相同。

现在，我们将 T 算符定义为*反线性反幺正算符*，满足

$$T^{-1}\mathrm{i}T = -\mathrm{i}, \quad T^{-1} = T^\dagger. \tag{8.49}$$

那么，(8.41) 式表明生成元算符 $J^{\mu\nu}$ 和 P^μ 的 T 变换为

$$T^{-1}J^{\mu\nu}T = -\mathcal{T}^\mu{}_\rho\mathcal{T}^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}, \quad T^{-1}P^\mu T = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu P^\nu, \tag{8.50}$$

即

$$T^{-1}\mathbf{J}T = -\mathbf{J}, \quad T^{-1}\mathbf{K}T = +\mathbf{K}, \quad T^{-1}HT = +H, \quad T^{-1}\mathbf{P}T = -\mathbf{P}. \tag{8.51}$$

从而，哈密顿量算符 H 在时间反演变换下不变，满足 $[H,T]=0$，符合理论具有时间反演对称性的假设。此外，动量算符 $\mathbf{P}$ 和总角动量算符 $\mathbf{J}$ 在 T 变换下分别反转成 $-\mathbf{P}$ 和 $-\mathbf{J}$。时间反演变换相当于*逆着时间方向进行观察*，因而动量和角动量的方向都会反转。

下面讨论自由的*复标量场* $\phi(x)$。T 变换会翻转粒子态对应的动量方向，因而产生湮灭算符的 T 变换为

$$T^{-1}a^\dagger_{\mathbf{p}}T = \eta_T a^\dagger_{-\mathbf{p}}, \quad T^{-1}a_{\mathbf{p}}T = \eta_T^* a_{-\mathbf{p}}, \quad T^{-1}b^\dagger_{\mathbf{p}}T = \tilde{\eta}_T b^\dagger_{-\mathbf{p}}, \quad T^{-1}b_{\mathbf{p}}T = \tilde{\eta}_T^* b_{-\mathbf{p}}, \tag{8.52}$$

其中 η_T 和 $\tilde{\eta}_T$ 是两个模为 1 的相位因子。于是，平面波展开式的 T 变换为

$$T^{-1}\phi(x)T = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left(T^{-1}a_{\mathbf{p}}TT^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}T + T^{-1}b^\dagger_{\mathbf{p}}TT^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}T\right)$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left(\eta_T^* a_{-\mathbf{p}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} + \tilde{\eta}_T b_{-\mathbf{p}}^\dagger \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} \right)$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left[\eta_T^* a_{\mathbf{p}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(\mathcal{T}x)} + \tilde{\eta}_T b_{\mathbf{p}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(\mathcal{T}x)} \right], \tag{8.53}$$

最后一步作了变量替换 $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$，并利用 $(\mathcal{P}p)\cdot x = p\cdot(\mathcal{P}x) = -p\cdot(\mathcal{T}x)$。为了保持 $\phi(x)$ 的运动方程形式不变，$T^{-1}\phi(x)T$ 与 $\phi(\mathcal{T}x)$ 最多只能相差一个常数因子，因此必须要求

$$\eta_T^* = \tilde{\eta}_T, \tag{8.54}$$

使得 $\phi(x)$ 和 $\phi^\dagger(x)$ 的 T 变换为

$$T^{-1}\phi(x)T = \eta_T^* \phi(\mathcal{T}x), \quad T^{-1}\phi^\dagger(x)T = \eta_T \phi^\dagger(\mathcal{T}x) \tag{8.55}$$

为方便表述，在形式上以时空导数的时间反演变换定义 T 变换，

$$T^{-1}\partial_\mu T \equiv \partial'_\mu = (\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu, \quad T^{-1}\partial^\mu T = \partial'^\mu = \mathcal{T}^\mu{}_\nu \partial^\nu. \tag{8.56}$$

那么算符 $(\partial^\mu\phi^\dagger)\partial_\mu\phi$、$\phi^\dagger\phi$ 和 $\mathrm{i}\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial^\mu} \phi$ 的 T 变换是

$$T^{-1}\partial^\mu\phi^\dagger(x)\partial_\mu\phi(x)T = |\eta_T|^2 \mathcal{T}^\mu{}_\nu (\mathcal{T}^{-1})^\rho{}_\mu \partial^\nu\phi^\dagger(\mathcal{T}x)\partial_\rho\phi(\mathcal{T}x) = +\partial^\mu\phi^\dagger(\mathcal{T}x)\partial_\mu\phi(\mathcal{T}x), \tag{8.57}$$
$$T^{-1}\phi^\dagger(x)\phi(x)T = |\eta_T|^2 \phi^\dagger(\mathcal{T}x)\phi(\mathcal{T}x) = +\phi^\dagger(\mathcal{T}x)\phi(\mathcal{T}x), \tag{8.58}$$
$$T^{-1}\mathrm{i}\phi^\dagger(x)\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi(x)T = -|\eta_T|^2 \mathcal{T}^\mu{}_\nu \mathrm{i}\phi^\dagger(\mathcal{T}x)\overleftrightarrow{\partial^\nu}\phi(\mathcal{T}x) = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu \mathrm{i}\phi^\dagger(\mathcal{T}x)\overleftrightarrow{\partial^\nu}\phi(\mathcal{T}x). \tag{8.59}$$

可见，自由复标量场的拉氏量 (2.169) 在时间反演变换下不变，满足

$$T^{-1}\mathcal{L}(x)T = +\mathcal{L}(\mathcal{T}x). \tag{8.60}$$

令 $b_{\mathbf{p}} = a_{\mathbf{p}}$，就得到自由实标量场 $\phi(x)$ 的情况，此时 $\eta_T = \tilde{\eta}_T = \eta_T^*$，故 $\eta_T^2 = |\eta_T|^2 = 1$，有

$$\eta_T = \pm 1. \tag{8.61}$$

因此，存在两类实标量场，一类具有 $\eta_T = +1$，相应的 T 变换为

$$T^{-1}\phi(x)T = +\phi(\mathcal{T}x); \tag{8.62}$$

另一类具有 $\eta_T = -1$，相应的 T 变换为

$$T^{-1}\phi(x)T = -\phi(\mathcal{T}x). \tag{8.63}$$

无论哪一类实标量场 $\phi(x)$，自由拉氏量 (2.77) 都具有时间反演不变性。

8.1.3 标量场的 C 变换

除了宇称和时间反演，另一种重要的分立变换是**电荷共轭** (charge conjugation)。电荷共轭变换将正反粒子互相转换，不只转换正反电荷，也转换所有其它正反 U(1) 守恒荷，但对时空坐标、四维动量、角动量和螺旋度没有影响。

在具有**电荷共轭对称性**的量子理论中，电荷共轭变换在 Hilbert 空间中诱导出态矢 $|\Psi\rangle$ 的线性幺正变换

$$|\Psi'\rangle = C\,|\Psi\rangle\,, \tag{8.64}$$

称为 $\boldsymbol{C}$ **变换**。C 是自身的逆变换算符，满足

$$C^\dagger = C^{-1} = C, \tag{8.65}$$

因而是厄米的。

对于自由的复标量场 $\phi(x)$，C 变换将正粒子态转化成反粒子态，形式为

$$C\left|\mathbf{p}^+\right\rangle = \eta_C\left|\mathbf{p}^-\right\rangle, \tag{8.66}$$

其中 η_C 是相位因子。真空态在 C 变换下不变，满足 $C\,|0\rangle = |0\rangle$，从而

$$\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,C^{-1}a^\dagger_{\mathbf{p}}C\,|0\rangle = C\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,a^\dagger_{\mathbf{p}}\,|0\rangle = C\left|\mathbf{p}^+\right\rangle = \eta_C\left|\mathbf{p}^-\right\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,\eta_C b^\dagger_{\mathbf{p}}\,|0\rangle\,, \tag{8.67}$$

即

$$C^{-1}a^\dagger_{\mathbf{p}}C = \eta_C b^\dagger_{\mathbf{p}}, \quad C^{-1}a_{\mathbf{p}}C = \eta^*_C b_{\mathbf{p}}. \tag{8.68}$$

第一个等式等价于 $a^\dagger_{\mathbf{p}} = \eta_C C b^\dagger_{\mathbf{p}} C^{-1}$，因而 $\eta^*_C a^\dagger_{\mathbf{p}} = |\eta_C|^2 C b^\dagger_{\mathbf{p}} C^{-1} = C b^\dagger_{\mathbf{p}} C^{-1}$，即

$$C^{-1}b^\dagger_{\mathbf{p}}C = \eta^*_C a^\dagger_{\mathbf{p}}, \quad C^{-1}b_{\mathbf{p}}C = \eta_C a_{\mathbf{p}}. \tag{8.69}$$

于是，复标量场 $\phi(x)$ 的 C 变换为

$$\begin{aligned} C^{-1}\phi(x)C &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}(C^{-1}a_{\mathbf{p}}C\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + C^{-1}b^\dagger_{\mathbf{p}}C\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}(\eta^*_C b_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + \eta^*_C a^\dagger_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}), \end{aligned} \tag{8.70}$$

故

$$C^{-1}\phi(x)C = \eta^*_C\phi^\dagger(x), \quad C^{-1}\phi^\dagger(x)C = \eta_C\phi(x). \tag{8.71}$$

可见，C 变换使 $\phi(x)$ 与其厄米共轭场 $\phi^\dagger(x)$ 相互转换。注意到等时对易关系 (2.182)，算符 $(\partial^\mu\phi^\dagger)\partial_\mu\phi$、$\phi^\dagger\phi$ 和 $\mathrm{i}\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi$ 的 C 变换是

$$C^{-1}\partial^\mu\phi^\dagger(x)\partial_\mu\phi(x)C = |\eta_C|^2\partial^\mu\phi(x)\partial_\mu\phi^\dagger(x) = +\partial^\mu\phi^\dagger(x)\partial_\mu\phi(x), \tag{8.72}$$

$$C^{-1}\phi^\dagger(x)\phi(x)C = |\eta_C|^2\phi(x)\phi^\dagger(x) = +\phi^\dagger(x)\phi(x), \tag{8.73}$$

$$C^{-1}\mathrm{i}\phi^\dagger(x)\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi(x)C = |\eta_C|^2\mathrm{i}\phi(x)\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi^\dagger(x) = -\mathrm{i}\phi^\dagger(x)\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi(x). \tag{8.74}$$

因此，自由复标量场的拉氏量 (2.169) 在电荷共轭变换下不变，满足

$$C^{-1}\mathcal{L}(x)C = +\mathcal{L}(x). \tag{8.75}$$

对正反标量玻色子态 (8.26) 作 C 变换，得

$$\begin{aligned} C\left|\phi\bar{\phi}\right\rangle &= \int \mathrm{d}^3p\,\Phi(\mathbf{p})C^{-1}a^\dagger_{\mathbf{p}}CC^{-1}b^\dagger_{-\mathbf{p}}C\left|0\right\rangle = |\eta_C|^2\int \mathrm{d}^3p\,\Phi(\mathbf{p})b^\dagger_{\mathbf{p}}a^\dagger_{-\mathbf{p}}\left|0\right\rangle \\ &= \int \mathrm{d}^3p\,\Phi(\mathbf{p})a^\dagger_{-\mathbf{p}}b^\dagger_{\mathbf{p}}\left|0\right\rangle = \int \mathrm{d}^3p\,\Phi(-\mathbf{p})a^\dagger_{\mathbf{p}}b^\dagger_{-\mathbf{p}}\left|0\right\rangle \\ &= (-)^L\int \mathrm{d}^3p\,\Phi(\mathbf{p})a^\dagger_{\mathbf{p}}b^\dagger_{-\mathbf{p}}\left|0\right\rangle = (-)^L\left|\phi\bar{\phi}\right\rangle. \end{aligned} \tag{8.76}$$

第三步交换两个产生算符，第四步作了变量替换 $\mathbf{p}\to-\mathbf{p}$，第五步用了 (8.27) 式。可见，$\left|\phi\bar{\phi}\right\rangle$ 是 C 算符的本征态，本征值 $(-)^L$ 是可观测量，称为 ***C* 宇称** (C-parity)。扣除波函数 $\Phi(\mathbf{p})$ 贡献的 $(-)^L$ 因子之后，剩下的 C 宇称为 $+$，即一对正反标量玻色子的内禀 C 宇称为偶。

对于自由的*实标量场*，$\phi^\dagger(x)=\phi(x)$，(8.71) 中两个等式表明 $\eta_C=\eta_C^*$，故 $\eta_C^2=|\eta_C|^2=1$，有

$$\eta_C = \pm 1, \tag{8.77}$$

这是 C 宇称的两种取值。也就是说，存在两类实标量场，一类具有偶的 C 宇称，$\eta_C=+1$，相应的 C 变换为

$$C^{-1}\phi(x)C = +\phi(x); \tag{8.78}$$

另一类具有奇的 C 宇称，$\eta_C=-1$，相应的 C 变换为

$$C^{-1}\phi(x)C = -\phi(x). \tag{8.79}$$

无论实标量场 $\phi(x)$ 具有哪种 C 宇称，自由拉氏量 (2.77) 都具有电荷共轭不变性。

8.2　旋量场的分立变换

8.2.1　旋量场的 C 变换

首先，讨论自由 *Dirac 旋量场* $\psi(x)$ 的 C 变换。因为电荷共轭变换在互换正反粒子的同时，不改变动量 $\mathbf{p}$ 和螺旋度 $\lambda=\pm$，所以 C 变换将正费米子态 $|\mathbf{p}^+,\lambda\rangle=\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\left|0\right\rangle$ 转化成反费米子态 $|\mathbf{p}^-,\lambda\rangle=\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\left|0\right\rangle$，满足

$$C\left|\mathbf{p}^+,\lambda\right\rangle = \zeta_C\left|\mathbf{p}^-,\lambda\right\rangle, \tag{8.80}$$

其中 ζ_C 是相位因子。由此推出

$$C^{-1}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}C=\zeta_C b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda},\quad C^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}C=\zeta_C^* b_{\mathbf{p},\lambda},\quad C^{-1}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}C=\zeta_C^* a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda},\quad C^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda}C=\zeta_C a_{\mathbf{p},\lambda}. \tag{8.81}$$

从而，平面波展开式 (4.219) 的 C 变换为

$$\begin{aligned} C^{-1}\psi(x)C &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda}\left[u(\mathbf{p},\lambda)C^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}C\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+v(\mathbf{p},\lambda)C^{-1}b^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}C\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right] \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda}\left[\zeta_C^{*}\,u(\mathbf{p},\lambda)b_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+\zeta_C^{*}\,v(\mathbf{p},\lambda)a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right]. \end{aligned} \tag{8.82}$$

为了得到 $\psi(x)$ 的电荷共轭场，我们需要探讨平面波旋量系数 $u(\mathbf{p},\lambda)$ 和 $v(\mathbf{p},\lambda)$ 之间的关系。在 *Weyl* 表象 (4.69) 中，对螺旋态表达式 (4.205) 和 (4.206) 进行转置，得

$$\bar{u}^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda)=\begin{pmatrix}\omega_{\lambda}(\mathbf{p})\xi^{*}_{\lambda}(\mathbf{p})\\ \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi^{*}_{\lambda}(\mathbf{p})\end{pmatrix},\quad \bar{v}^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda)=\begin{pmatrix}-\lambda\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi^{*}_{-\lambda}(\mathbf{p})\\ \lambda\omega_{\lambda}(\mathbf{p})\xi^{*}_{-\lambda}(\mathbf{p})\end{pmatrix}. \tag{8.83}$$

另一方面，按照螺旋态的具体形式 (4.162)，$\mathrm{i}\sigma^2$ 对 $\xi^{*}_{\lambda}(\mathbf{p})$ 的作用为

$$\mathrm{i}\sigma^2\xi^{*}_{+}(\mathbf{p}) = N\begin{pmatrix}&1\\-1&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|\mathbf{p}|+p^3\\ p^1-\mathrm{i}p^2\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}p^1-\mathrm{i}p^2\\ -(|\mathbf{p}|+p^3)\end{pmatrix}=-\xi_{-}(\mathbf{p}), \tag{8.84}$$

$$\mathrm{i}\sigma^2\xi^{*}_{-}(\mathbf{p}) = N\begin{pmatrix}&1\\-1&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-p^1-\mathrm{i}p^2\\ |\mathbf{p}|+p^3\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}|\mathbf{p}|+p^3\\ p^1+\mathrm{i}p^2\end{pmatrix}=+\xi_{+}(\mathbf{p}), \tag{8.85}$$

其中归一化因子 $N\equiv[2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)]^{-1/2}$。归纳起来，得

$$\mathrm{i}\sigma^2\xi^{*}_{\lambda}(\mathbf{p})=-\lambda\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}),\quad \mathrm{i}\sigma^2\xi^{*}_{-\lambda}(\mathbf{p})=\lambda\xi_{\lambda}(\mathbf{p}). \tag{8.86}$$

引入旋量空间中的**电荷共轭矩阵**

$$\mathcal{C}\equiv\mathrm{i}\gamma^0\gamma^2=\mathrm{i}\begin{pmatrix}&\mathbf{1}\\ \mathbf{1}&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&\sigma^2\\ -\sigma^2&\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\sigma^2&\\ &\mathrm{i}\sigma^2\end{pmatrix}, \tag{8.87}$$

就可以导出平面波旋量系数的关系式

$$\mathcal{C}\bar{u}^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda) = \begin{pmatrix}-\omega_{\lambda}(\mathbf{p})\mathrm{i}\sigma^2\xi^{*}_{\lambda}(\mathbf{p})\\ \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\mathrm{i}\sigma^2\xi^{*}_{\lambda}(\mathbf{p})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\omega_{\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\\ -\lambda\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p})\end{pmatrix}=v(\mathbf{p},\lambda), \tag{8.88}$$

$$\mathcal{C}\bar{v}^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda) = \begin{pmatrix}\lambda\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\mathrm{i}\sigma^2\xi^{*}_{-\lambda}(\mathbf{p})\\ \lambda\omega_{\lambda}(\mathbf{p})\mathrm{i}\sigma^2\xi^{*}_{-\lambda}(\mathbf{p})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{\lambda}(\mathbf{p})\\ \omega_{\lambda}(\mathbf{p})\xi_{\lambda}(\mathbf{p})\end{pmatrix}=u(\mathbf{p},\lambda). \tag{8.89}$$

于是，$\psi(x)$ 的 C 变换化为

$$C^{-1}\psi(x)C=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda}\left[\zeta_C^{*}\,\mathcal{C}\bar{v}^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda)b_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+\zeta_C^{*}\,\mathcal{C}\bar{u}^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda)a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right]=\zeta_C^{*}\psi^{\mathrm{C}}(x), \tag{8.90}$$

其中

$$\psi^{\mathrm{C}}(x)\equiv\mathcal{C}\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(x) \tag{8.91}$$

便是 $\psi(x)$ 的**电荷共轭场**。

现在研究电荷共轭矩阵 $\mathcal{C}$ 的性质。利用 $(\sigma^2)^{\mathrm{T}} = -\sigma^2$、$\gamma^0$ 的厄米性、γ^2 的反厄米性和 $\gamma^2\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^2$，有

$$\mathcal{C}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}(\sigma^2)^{\mathrm{T}} & \\ & \mathrm{i}(\sigma^2)^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sigma^2 & \\ & -\mathrm{i}\sigma^2 \end{pmatrix} = -\mathcal{C}, \tag{8.92}$$

$$\mathcal{C}^\dagger = -\mathrm{i}(\gamma^2)^\dagger(\gamma^0)^\dagger = \mathrm{i}\gamma^2\gamma^0 = -\mathrm{i}\gamma^0\gamma^2 = -\mathcal{C}, \tag{8.93}$$

$$\mathcal{C}^\dagger\mathcal{C} = \gamma^0\gamma^2\gamma^0\gamma^2 = -(\gamma^0)^2(\gamma^2)^2 = \mathbf{1}, \tag{8.94}$$

也就是说，

$$\mathcal{C}^{\mathrm{T}} = \mathcal{C}^\dagger = \mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C}. \tag{8.95}$$

可见 $\mathcal{C}$ 是幺正矩阵。根据 Pauli 矩阵 (3.46) 的定义和性质，有 $\sigma^2\sigma^1\sigma^2 = \mathrm{i}\sigma^2\sigma^3 = -\sigma^1 = -(\sigma^1)^{\mathrm{T}}$、$\sigma^2\sigma^2\sigma^2 = \sigma^2 = -(\sigma^2)^{\mathrm{T}}$ 和 $\sigma^2\sigma^3\sigma^2 = \mathrm{i}\sigma^1\sigma^2 = -\sigma^3 = -(\sigma^3)^{\mathrm{T}}$，归纳得到

$$\sigma^2\mathbf{1}\sigma^2 = \mathbf{1}^{\mathrm{T}}, \quad \sigma^2\boldsymbol{\sigma}\sigma^2 = -\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}, \tag{8.96}$$

因此

$$\sigma^2\sigma^\mu\sigma^2 = (\bar\sigma^\mu)^{\mathrm{T}}, \quad \sigma^2\bar\sigma^\mu\sigma^2 = (\sigma^\mu)^{\mathrm{T}}. \tag{8.97}$$

进而推出

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{-1}\gamma^\mu\mathcal{C} &= \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sigma^2 & \\ & -\mathrm{i}\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \sigma^\mu \\ \bar\sigma^\mu & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\sigma^2 & \\ & \mathrm{i}\sigma^2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} & \sigma^2\sigma^\mu\sigma^2 \\ \sigma^2\bar\sigma^\mu\sigma^2 & \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} & (\bar\sigma^\mu)^{\mathrm{T}} \\ (\sigma^\mu)^{\mathrm{T}} & \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{8.98}$$

$$\mathcal{C}^{-1}\gamma^5\mathcal{C} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sigma^2 & \\ & -\mathrm{i}\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & \\ & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\sigma^2 & \\ & \mathrm{i}\sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\sigma^2)^2 & \\ & (\sigma^2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & \\ & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \tag{8.99}$$

即得 γ^μ 和 γ^5 关于 $\mathcal{C}$ 的相似变换性质

$$\mathcal{C}^{-1}\gamma^\mu\mathcal{C} = -(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}}, \quad \mathcal{C}^{-1}\gamma^5\mathcal{C} = \gamma^5. \tag{8.100}$$

由于 $\mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C}$，这两个式子等价于

$$\mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}}\mathcal{C} = -\gamma^\mu, \quad \mathcal{C}^{-1}(\gamma^5)^{\mathrm{T}}\mathcal{C} = \gamma^5. \tag{8.101}$$

如果 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 携带电荷 Q，那么，根据 (7.21) 式，相应的运动方程是

$$[\gamma^\mu(\mathrm{i}\partial_\mu - QeA_\mu) - m]\psi = 0. \tag{8.102}$$

对上式取厄米共轭，再右乘 γ^0，得

$$0 = \psi^\dagger[(\gamma^\mu)^\dagger(-\mathrm{i}\partial_\mu - QeA_\mu) - m]\gamma^0 = \bar\psi[-\gamma^\mu(\mathrm{i}\partial_\mu + QeA_\mu) - m], \tag{8.103}$$

转置，推出

$$[-(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}}(\mathrm{i}\partial_\mu + QeA_\mu) - m]\bar{\psi}^{\mathrm{T}} = 0. \tag{8.104}$$

利用 (8.100) 式将上式化为

$$0 = [\mathcal{C}^{-1}\gamma^\mu\mathcal{C}(\mathrm{i}\partial_\mu + QeA_\mu) - m\,\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}]\bar{\psi}^{\mathrm{T}} = \mathcal{C}^{-1}[\gamma^\mu(\mathrm{i}\partial_\mu + QeA_\mu) - m]\mathcal{C}\bar{\psi}^{\mathrm{T}}, \tag{8.105}$$

从而得到电荷共轭场 $\psi^{\mathrm{C}}(x)$ 的运动方程

$$[\gamma^\mu(\mathrm{i}\partial_\mu + QeA_\mu) - m]\psi^{\mathrm{C}} = 0. \tag{8.106}$$

对比 $\psi(x)$ 的运动方程 (8.102)，可以看出 $\psi^{\mathrm{C}}(x)$ 确实携带相反的电荷 $-Q$。同理，$\psi^{\mathrm{C}}(x)$ 携带的任何 U(1) 守恒荷都与 $\psi(x)$ 相反。

根据 (8.95) 和 (8.101) 式，电荷共轭场 $\psi^{\mathrm{C}}(x)$ 的 Dirac 共轭为

$$\begin{aligned}\bar{\psi}^{\mathrm{C}} &= (\psi^{\mathrm{C}})^\dagger\gamma^0 = (\mathcal{C}\bar{\psi}^{\mathrm{T}})^\dagger\gamma^0 = [(\gamma^0)^{\mathrm{T}}(\bar{\psi}\mathcal{C}^{\mathrm{T}})^\dagger]^{\mathrm{T}} = [(\gamma^0)^{\mathrm{T}}(\psi^\dagger\gamma^0\mathcal{C}^\dagger)^\dagger]^{\mathrm{T}} = [(\gamma^0)^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma^0\psi]^{\mathrm{T}} \\ &= [\mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}(\gamma^0)^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma^0\psi]^{\mathrm{T}} = -(\mathcal{C}\gamma^0\gamma^0\psi)^{\mathrm{T}} = (\mathcal{C}^{\mathrm{T}}\psi)^{\mathrm{T}},\end{aligned} \tag{8.107}$$

即

$$\bar{\psi}^{\mathrm{C}}(x) = \psi^{\mathrm{T}}(x)\,\mathcal{C}, \tag{8.108}$$

于是

$$C^{-1}\bar{\psi}C = C^\dagger\psi^\dagger C\gamma^0 = (C^{-1}\psi C)^\dagger\gamma^0 = (\zeta_C^*\psi^{\mathrm{C}})^\dagger\gamma^0 = \zeta_C\bar{\psi}^{\mathrm{C}} = \zeta_C\psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}. \tag{8.109}$$

也就是说，Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 及其 Dirac 共轭场 $\bar{\psi}(x)$ 的 C 变换是

$$C^{-1}\psi(x)C = \zeta_C^*\psi^{\mathrm{C}}(x) = \zeta_C^*\,\mathcal{C}\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(x), \quad C^{-1}\bar{\psi}(x)C = \zeta_C\bar{\psi}^{\mathrm{C}}(x) = \zeta_C\psi^{\mathrm{T}}(x)\,\mathcal{C}. \tag{8.110}$$

仿照 (8.107) 式的推导，由 (8.88) 和 (8.89) 式推出

$$\bar{v}(\mathbf{p},\lambda) = u^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda)\,\mathcal{C}, \quad \bar{u}(\mathbf{p},\lambda) = v^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda)\,\mathcal{C}. \tag{8.111}$$

考虑一般的旋量双线性型 $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$，其中 Γ 是旋量空间中的任意 4×4 矩阵，则

$$C^{-1}\bar{\psi}\Gamma\psi C = C^{-1}\bar{\psi}C\Gamma C^{-1}\psi C = |\zeta_C|^2\psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\Gamma\mathcal{C}\bar{\psi}^{\mathrm{T}} = \psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\Gamma\mathcal{C}\bar{\psi}^{\mathrm{T}} = -\bar{\psi}\,\mathcal{C}^{\mathrm{T}}\Gamma^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{\mathrm{T}}\psi. \tag{8.112}$$

最后一步进行了转置。需要注意的是，**转置两个旋量场会交换两者的位置，为了与反对易关系相匹配，必须引进一个额外的负号**。从而，由 (8.95) 式得到 $\bar{\psi}\Gamma\psi$ 的 C 变换

$$C^{-1}\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)C = \bar{\psi}(x)\mathcal{C}^{-1}\Gamma^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\psi(x) = \bar{\psi}(x)\Gamma^{\mathrm{C}}\psi(x), \tag{8.113}$$

其中

$$\Gamma^{\mathrm{C}} \equiv \mathcal{C}^{-1}\Gamma^{\mathrm{T}}\mathcal{C} \tag{8.114}$$

可视为矩阵 Γ 的电荷共轭变换。根据 (8.101) 式，有

$$\mathbf{1}^{\mathrm{C}} = \mathcal{C}^{-1}\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathcal{C} = +\mathbf{1}, \qquad (\mathrm{i}\gamma^5)^{\mathrm{C}} = \mathcal{C}^{-1}(\mathrm{i}\gamma^5)^{\mathrm{T}}\mathcal{C} = +\mathrm{i}\gamma^5, \tag{8.115}$$

$$(\gamma^\mu)^{\mathrm{C}} = \mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}}\mathcal{C} = -\gamma^\mu, \qquad (\gamma^\mu\gamma^5)^{\mathrm{C}} = \mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu\gamma^5)^{\mathrm{T}}\mathcal{C} = +\gamma^\mu\gamma^5, \tag{8.116}$$

$$(\gamma^\mu\gamma^\nu)^{\mathrm{C}} = \mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu\gamma^\nu)^{\mathrm{T}}\mathcal{C} = +\gamma^\nu\gamma^\mu, \quad (\sigma^{\mu\nu})^{\mathrm{C}} = \mathcal{C}^{-1}(\sigma^{\mu\nu})^{\mathrm{T}}\mathcal{C} = -\sigma^{\mu\nu}. \tag{8.117}$$

于是，各种旋量双线性型的 C 变换为

$$C^{-1}\bar\psi(x)\psi(x)C = +\bar\psi(x)\psi(x), \tag{8.118}$$

$$C^{-1}\bar\psi(x)\mathrm{i}\gamma^5\psi(x)C = +\bar\psi(x)\mathrm{i}\gamma^5\psi(x), \tag{8.119}$$

$$C^{-1}\bar\psi(x)\gamma^\mu\psi(x)C = -\bar\psi(x)\gamma^\mu\psi(x), \tag{8.120}$$

$$C^{-1}\bar\psi(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)C = +\bar\psi(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x), \tag{8.121}$$

$$C^{-1}\bar\psi(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)C = -\bar\psi(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x). \tag{8.122}$$

拉氏量 (4.104) 中的动能项算符 $i\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ 在 C 变换下化为

$$\begin{aligned} C^{-1}\mathrm{i}\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi C &= \mathrm{i}\psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma^\mu\mathcal{C}\partial_\mu\bar\psi^{\mathrm{T}} = -\mathrm{i}\psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{-1}\gamma^\mu\mathcal{C}\partial_\mu\bar\psi^{\mathrm{T}} = \mathrm{i}\psi^{\mathrm{T}}(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}}\partial_\mu\bar\psi^{\mathrm{T}} \\ &= -\mathrm{i}(\partial_\mu\bar\psi)\gamma^\mu\psi = -\mathrm{i}\partial_\mu(\bar\psi\gamma^\mu\psi) + \mathrm{i}\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi. \end{aligned} \tag{8.123}$$

最后的表达式中第一项是全散度，全时空积分后对作用量没有贡献，可以丢弃，因而上式表明动能项算符在 C 变换下不变。所以，自由 Dirac 旋量场的拉氏量 (4.104) 具有电荷共轭不变性。

对于 7.3 节讨论的手征旋量场 $\psi_{\mathrm{L}}(x)$ 和 $\psi_{\mathrm{R}}(x)$，算符 $\bar\psi_{\mathrm{R}}\psi_{\mathrm{L}} = \bar\psi P_{\mathrm{L}}\psi = \bar\psi(1-\gamma^5)\psi/2$ 和 $\bar\psi_{\mathrm{L}}\psi_{\mathrm{R}} = \bar\psi P_{\mathrm{R}}\psi = \bar\psi(1+\gamma^5)\psi/2$ 在 C 变换下不变，满足

$$C^{-1}\bar\psi_{\mathrm{R}}(x)\psi_{\mathrm{L}}(x)C = +\bar\psi_{\mathrm{R}}(x)\psi_{\mathrm{L}}(x), \tag{8.124}$$

$$C^{-1}\bar\psi_{\mathrm{L}}(x)\psi_{\mathrm{R}}(x)C = +\bar\psi_{\mathrm{L}}(x)\psi_{\mathrm{R}}(x). \tag{8.125}$$

另一方面，左手流算符

$$\bar\psi_{\mathrm{L}}\gamma^\mu\psi_{\mathrm{L}} = \bar\psi\gamma^\mu P_{\mathrm{L}}\psi = \frac{1}{2}\,\bar\psi\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi \tag{8.126}$$

和右手流算符

$$\bar\psi_{\mathrm{R}}\gamma^\mu\psi_{\mathrm{R}} = \bar\psi\gamma^\mu P_{\mathrm{R}}\psi = \frac{1}{2}\,\bar\psi\gamma^\mu(1+\gamma^5)\psi \tag{8.127}$$

的 C 变换为

$$C^{-1}\bar\psi_{\mathrm{L}}(x)\gamma^\mu\psi_{\mathrm{L}}(x)C = -\bar\psi_{\mathrm{R}}(x)\gamma^\mu\psi_{\mathrm{R}}(x), \tag{8.128}$$

$$C^{-1}\bar\psi_{\mathrm{R}}(x)\gamma^\mu\psi_{\mathrm{R}}(x)C = -\bar\psi_{\mathrm{L}}(x)\gamma^\mu\psi_{\mathrm{L}}(x), \tag{8.129}$$

两者在 C 变换下相互转化，并出现一个负号。在弱相互作用中，左手流算符和右手流算符参与不同的规范相互作用，因而电荷共轭对称性遭到破坏。

在质心系中考虑一对正反费米子 $\psi\bar\psi$ 组成的系统，当轨道角动量和总自旋角动量的量子数分别为 L 和 S 时，态矢表达为

$$\left|\psi\bar\psi\right\rangle_{L,S} = \sum_{\lambda\lambda'}\int \mathrm{d}^3p\,\Phi(\mathbf{p},\lambda,\lambda')a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda'}\left|0\right\rangle, \tag{8.130}$$

波函数 $\Phi(\mathbf{p},\lambda,\lambda')$ 满足

$$\Phi(-\mathbf{p},\lambda',\lambda)=(-)^{L}(-)^{S+1}\Phi(\mathbf{p},\lambda,\lambda'), \tag{8.131}$$

其中 $(-)^{S+1}$ 因子来自交换 λ 和 λ' 时 Clebsch-Gordan 系数的性质。$\left|\psi\bar{\psi}\right\rangle_{L,S}$ 的 C 变换为

$$\begin{aligned}
C\left|\psi\bar{\psi}\right\rangle_{L,S} &= \sum_{\lambda\lambda'}\int \mathrm{d}^3p\,\Phi(\mathbf{p},\lambda,\lambda')C^{-1}a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}CC^{-1}b^{\dagger}_{-\mathbf{p},\lambda'}C\left|0\right\rangle \\
&= |\zeta_C|^2\sum_{\lambda\lambda'}\int \mathrm{d}^3p\,\Phi(\mathbf{p},\lambda,\lambda')b^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}a^{\dagger}_{-\mathbf{p},\lambda'}\left|0\right\rangle = -\sum_{\lambda\lambda'}\int \mathrm{d}^3p\,\Phi(\mathbf{p},\lambda,\lambda')a^{\dagger}_{-\mathbf{p},\lambda'}b^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}\left|0\right\rangle \\
&= -\sum_{\lambda\lambda'}\int \mathrm{d}^3p\,\Phi(-\mathbf{p},\lambda',\lambda)a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}b^{\dagger}_{-\mathbf{p},\lambda'}\left|0\right\rangle = (-)^{L+S}\sum_{\lambda\lambda'}\int \mathrm{d}^3p\,\Phi(\mathbf{p},\lambda,\lambda')a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}b^{\dagger}_{-\mathbf{p},\lambda'}\left|0\right\rangle \\
&= (-)^{L+S}\left|\psi\bar{\psi}\right\rangle_{L,S}.
\end{aligned} \tag{8.132}$$

第三步利用反对易关系 (4.249) 交换了两个产生算符，第四步作了变量替换 $\mathbf{p}\to-\mathbf{p}$ 和 $\lambda\leftrightarrow\lambda'$。可见，$\left|\psi\bar{\psi}\right\rangle_{L,S}$ 的 C 宇称为 $(-)^{L+S}$，扣除波函数 $\Phi(\mathbf{p},\lambda,\lambda')$ 对 C 宇称的贡献 $(-)^{L+S+1}$ 之后，我们发现一对正反费米子的内禀 C 宇称为奇。

8.2.2 Majorana 旋量场

如果 $\psi(x)$ 与它的电荷共轭场相同，$\psi(x)=\psi^{\mathrm{C}}(x)$，即满足自共轭条件

$$\psi(x)=\mathcal{C}\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(x), \tag{8.133}$$

那么，$\psi(x)$ 就是一种纯中性的场，不携带任何 U(1) 守恒荷，称为 **Majorana 旋量场** [44]。上式称为 **Majorana 条件**。于是，Majorana 旋量场满足 $\bar{\psi}(x)=\bar{\psi}^{\mathrm{C}}(x)$，根据 (8.108) 式，Majorana 条件等价于

$$\bar{\psi}(x)=\psi^{\mathrm{T}}(x)\,\mathcal{C}. \tag{8.134}$$

这个等式右边没有出现 $\psi^{\dagger}(x)$，而出现 $\psi^{\mathrm{T}}(x)$，表明 $\bar{\psi}(x)$ 与 $\psi(x)$ 线性相关。因此，$\bar{\psi}(x)$ 并不是独立于 $\psi(x)$ 的场变量，这一点与 Dirac 旋量场不同。

由 (8.82) 和 (8.90) 式得 $\psi^{\mathrm{C}}(x)$ 的平面波展开式为

$$\psi^{\mathrm{C}}(x)=\zeta_C C^{-1}\psi(x)C=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda}\left[u(\mathbf{p},\lambda)b_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+v(\mathbf{p},\lambda)a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right]. \tag{8.135}$$

与 (4.219) 式比较，可知 Majorana 条件 (8.133) 意味着

$$b_{\mathbf{p},\lambda}=a_{\mathbf{p},\lambda}. \tag{8.136}$$

因此，Majorana 旋量场 $\psi(x)$ 的平面波展开式是

$$\psi(x)=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda=\pm}\left[u(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+v(\mathbf{p},\lambda)a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right], \tag{8.137}$$

产生湮灭算符满足反对易关系

$$\{a_{\mathbf{p},\lambda}, a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\} = (2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \quad \{a_{\mathbf{p},\lambda}, a_{\mathbf{q},\lambda'}\} = \{a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}, a^\dagger_{\mathbf{q},\lambda'}\} = 0. \tag{8.138}$$

类似于实标量场，Majorana 旋量场描述一种纯中性费米子，正费米子与反费米子相同，称为 **Majorana 费米子**。(8.81) 式表明 $\zeta_C = \zeta_C^*$，故

$$\zeta_C = \pm 1. \tag{8.139}$$

也就是说，Majorana 旋量场的 C 宇称要么为偶，要么为奇。

对于 Majorana 旋量场 $\psi(x)$，C 变换关系 (8.110) 化为

$$C^{-1}\psi(x)C = \zeta_C\psi(x), \quad C^{-1}\bar\psi(x)C = \zeta_C\bar\psi(x). \tag{8.140}$$

进而，在 C 变换下，由 Majorana 旋量场组成的一般旋量双线性型 $\bar\psi(x)\Gamma\psi(x)$ 变成

$$C^{-1}\bar\psi(x)\Gamma\psi(x)C = C^{-1}\bar\psi(x)C\Gamma C^{-1}\psi(x)C = \zeta_C^2\,\bar\psi(x)\Gamma\psi(x) = +\bar\psi(x)\Gamma\psi(x), \tag{8.141}$$

即非平庸的 $\bar\psi\Gamma\psi$ 算符的 C 宇称必须为偶。这表明 Majorana 旋量场不能构成 C 宇称为奇的算符 $\bar\psi\gamma^\mu\psi$ 和 $\bar\psi\sigma^{\mu\nu}\psi$，即

$$\bar\psi(x)\gamma^\mu\psi(x) = 0, \quad \bar\psi(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x) = 0. \tag{8.142}$$

由 Majorana 旋量场构成的非平庸双线性型则具有与 Dirac 旋量场相同的 C 变换规则。

自由 Majorana 旋量场 $\psi(x)$ 的 Lorentz 不变拉氏量为

$$\mathcal{L} = \frac{\mathrm{i}}{2}\,\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \frac{1}{2}\,m\bar\psi\psi = \frac{\mathrm{i}}{2}\,\psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \frac{1}{2}\,m\psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\psi, \tag{8.143}$$

需要注意的是，应用 Euler-Lagrange 方程求经典运动方程时，拉氏量中的 ψ^{T} 扮演的角色跟 ψ 相同。如果将前后两个旋量场分别标记为 ψ_1 和 ψ_2，动量项算符可化为

$$\psi_1^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_2 = (\psi_1^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_2)^{\mathrm{T}} = -(\partial_\mu\psi_2^{\mathrm{T}})(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{\mathrm{T}}\psi_1 = (\partial_\mu\psi_2^{\mathrm{T}})\,\mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\psi_1 = -(\partial_\mu\psi_2^{\mathrm{T}})\,\mathcal{C}\gamma^\mu\psi_1, \tag{8.144}$$

质量项算符可化为

$$\psi_1^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\psi_2 = (\psi_1^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\psi_2)^{\mathrm{T}} = -\psi_2^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{\mathrm{T}}\psi_1 = \psi_2^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\psi_1, \tag{8.145}$$

则

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_1} = -\frac{\mathrm{i}}{2}(\partial_\mu\psi_2^{\mathrm{T}})\,\mathcal{C}\gamma^\mu - \frac{1}{2}\,m\psi_2^{\mathrm{T}}\mathcal{C}, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_2} = -\frac{1}{2}\,m\psi_1^{\mathrm{T}}\mathcal{C}. \tag{8.146}$$

由于 ψ_1 和 ψ_2 都是 ψ，我们得到

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} = \frac{\mathrm{i}}{2}\,\psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma^\mu, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_1} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_2} = -\frac{\mathrm{i}}{2}(\partial_\mu\psi^{\mathrm{T}})\,\mathcal{C}\gamma^\mu - m\psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}, \tag{8.147}$$

Euler-Lagrange 方程 (1.143) 给出

$$0 = \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = \mathrm{i}(\partial_\mu\psi^{\mathrm{T}})\,\mathcal{C}\gamma^\mu + m\psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}. \tag{8.148}$$

对上式转置，并利用 $(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{\mathrm{T}} = -\mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}}\mathcal{C} = \mathcal{C}\gamma^\mu = -\mathcal{C}^{\mathrm{T}}\gamma^\mu$，推出

$$0 = \mathrm{i}(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{\mathrm{T}}\partial_\mu\psi + m\,\mathcal{C}^{\mathrm{T}}\psi = \mathcal{C}^{\mathrm{T}}(-\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + m\psi). \tag{8.149}$$

可见，自由的 Majorana 旋量场 $\psi(x)$ 也满足 *Dirac 方程*

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0. \tag{8.150}$$

这与平面波展开式 (8.137) 相容。

8.2.3 旋量场的 P 变换

接着，讨论自由 *Dirac 旋量场* $\psi(x)$ 的 P 变换。宇称变换反转动量方向，但保持角动量不变，因而会翻转螺旋度 λ 的符号。平面波展开式 (4.219) 中的旋量系数 $u(\mathbf{p},\lambda)$ 和 $v(\mathbf{p},\lambda)$ 都是用螺旋态 $\xi_\lambda(\mathbf{p})$ 表达出来的，而宇称变换联系着螺旋态 $\xi_\lambda(\mathbf{p})$ 和 $\xi_{-\lambda}(-\mathbf{p})$。(4.200) 式表明，$\xi_{-\lambda}(-\mathbf{p})$ 和 $\xi_\lambda(\mathbf{p})$ 是同一个本征值方程 (4.161) 的归一化解，因而两者至多相差一个模为 1 的相位因子。下面求出这个相位因子的形式。

利用 $(|\mathbf{p}|+p^3)(|\mathbf{p}|-p^3) = |\mathbf{p}|^2-(p^3)^2 = (p^1)^2+(p^2)^2 = (p^1+\mathrm{i}p^2)(p^1-\mathrm{i}p^2)$，将螺旋态表达式 (4.162) 化为

$$\begin{aligned}
\xi_+(\mathbf{p}) &= \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}}\begin{pmatrix}|\mathbf{p}|+p^3\\ p^1+\mathrm{i}p^2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}}\begin{pmatrix}\frac{|\mathbf{p}|+p^3}{p^1-\mathrm{i}p^2}(p^1-\mathrm{i}p^2)\\ \frac{p^1+\mathrm{i}p^2}{|\mathbf{p}|-p^3}(|\mathbf{p}|-p^3)\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}}\begin{pmatrix}\frac{(|\mathbf{p}|+p^3)(p^1+\mathrm{i}p^2)}{(p^1)^2+(p^2)^2}(p^1-\mathrm{i}p^2)\\ \frac{p^1+\mathrm{i}p^2}{|\mathbf{p}|-p^3}(|\mathbf{p}|-p^3)\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|+p^3)}}\frac{p^1+\mathrm{i}p^2}{|\mathbf{p}|-p^3}\begin{pmatrix}p^1-\mathrm{i}p^2\\ |\mathbf{p}|-p^3\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|(|\mathbf{p}|-p^3)}}\frac{p^1+\mathrm{i}p^2}{\sqrt{(p^1)^2+(p^2)^2}}\begin{pmatrix}p^1-\mathrm{i}p^2\\ |\mathbf{p}|-p^3\end{pmatrix} = \kappa_{\mathbf{p},+}\xi_-(-\mathbf{p}),
\end{aligned} \tag{8.151}$$

其中 $\kappa_{\mathbf{p},+}$ 是相位因子

$$\kappa_{\mathbf{p},\lambda} \equiv \frac{\lambda p^1+\mathrm{i}p^2}{\sqrt{(p^1)^2+(p^2)^2}} \tag{8.152}$$

在 $\lambda=+$ 时的特例。再由 $|\kappa_{\mathbf{p},\lambda}|^2 = \kappa^*_{\mathbf{p},+}\kappa_{\mathbf{p},+} = 1$ 推出 $\xi_-(-\mathbf{p}) = \kappa^*_{\mathbf{p},+}\xi_+(\mathbf{p})$，故

$$\xi_-(\mathbf{p}) = \kappa^*_{-\mathbf{p},+}\xi_+(-\mathbf{p}) = \frac{-p^1+\mathrm{i}p^2}{\sqrt{(p^1)^2+(p^2)^2}}\xi_+(-\mathbf{p}) = \kappa_{\mathbf{p},-}\xi_+(-\mathbf{p}). \tag{8.153}$$

归纳起来，有

$$\xi_\lambda(\mathbf{p}) = \kappa_{\mathbf{p},\lambda}\xi_{-\lambda}(-\mathbf{p}). \tag{8.154}$$

可见 $\kappa_{\mathbf{p},\lambda}$ 就是想要得到的相位因子。它的具体形式与我们对螺旋态 $\xi_\lambda(\mathbf{p})$ 的约定有关。

于是，在 Weyl 表象中，(4.177) 和 (4.195) 式表达的平面波旋量系数 $u(\mathbf{p},\lambda)$ 和 $v(\mathbf{p},\lambda)$ 满足

$$\gamma^0 u(\mathbf{p},\lambda) = \begin{pmatrix}&\mathbf{1}\\ \mathbf{1}&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p})\\ \omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p})\\ \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p})\end{pmatrix} = \kappa_{\mathbf{p},\lambda}\begin{pmatrix}\omega_\lambda(-\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(-\mathbf{p})\\ \omega_{-\lambda}(-\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(-\mathbf{p})\end{pmatrix}, \tag{8.155}$$

$$\gamma^0 v(\mathbf{p},\lambda) = \begin{pmatrix} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \\ \lambda\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \\ -\lambda\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \kappa_{\mathbf{p},-\lambda} \begin{pmatrix} \lambda\omega_{-\lambda}(-\mathbf{p})\xi_\lambda(-\mathbf{p}) \\ -\lambda\omega_\lambda(-\mathbf{p})\xi_\lambda(-\mathbf{p}) \end{pmatrix}. \tag{8.156}$$

注意到

$$\kappa_{\mathbf{p},-\lambda} = \frac{-\lambda p^1 + \mathrm{i}p^2}{\sqrt{(p^1)^2+(p^2)^2}} = -\frac{\lambda p^1 - \mathrm{i}p^2}{\sqrt{(p^1)^2+(p^2)^2}} = -\kappa^*_{\mathbf{p},\lambda}, \tag{8.157}$$

我们有

$$\gamma^0 u(\mathbf{p},\lambda) = \kappa_{\mathbf{p},\lambda} u(-\mathbf{p},-\lambda), \quad \gamma^0 v(\mathbf{p},\lambda) = -\kappa^*_{\mathbf{p},\lambda} v(-\mathbf{p},-\lambda). \tag{8.158}$$

为了得到自洽的宇称变换结果，我们将正反费米子态 $|\mathbf{p}^+,\lambda\rangle$ 和 $|\mathbf{p}^-,\lambda\rangle$ 的 P 变换表达成

$$P\left|\mathbf{p}^+,\lambda\right\rangle = \zeta_P \kappa^*_{-\mathbf{p},-\lambda}\left|-\mathbf{p}^+,-\lambda\right\rangle, \quad P\left|\mathbf{p}^-,\lambda\right\rangle = \tilde{\zeta}_P \kappa^*_{-\mathbf{p},-\lambda}\left|-\mathbf{p}^-,-\lambda\right\rangle, \tag{8.159}$$

其中 ζ_P 和 $\tilde{\zeta}_P$ 是两个相位因子。从而推出 $a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}$ 和 $a_{\mathbf{p},\lambda}$ 的 P 变换

$$P^{-1} a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} P = \zeta_P \kappa^*_{-\mathbf{p},-\lambda} a^\dagger_{-\mathbf{p},-\lambda}, \quad P^{-1} a_{\mathbf{p},\lambda} P = \zeta^*_P \kappa_{-\mathbf{p},-\lambda} a_{-\mathbf{p},-\lambda}, \tag{8.160}$$

以及 $b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}$ 和 $b_{\mathbf{p},\lambda}$ 的 P 变换

$$P^{-1} b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} P = \tilde{\zeta}_P \kappa^*_{-\mathbf{p},-\lambda} b^\dagger_{-\mathbf{p},-\lambda}, \quad P^{-1} b_{\mathbf{p},\lambda} P = \tilde{\zeta}^*_P \kappa_{-\mathbf{p},-\lambda} b_{-\mathbf{p},-\lambda}. \tag{8.161}$$

据此，Dirac 旋量场平面波展开式 (4.219) 的 P 变换为

$$\begin{aligned} P^{-1}\psi(x)P &= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_\lambda \left[u(\mathbf{p},\lambda) P^{-1} a_{\mathbf{p},\lambda} P \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + v(\mathbf{p},\lambda) P^{-1} b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} P \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} \right] \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_\lambda \left[\zeta^*_P \kappa_{-\mathbf{p},-\lambda} u(\mathbf{p},\lambda) a_{-\mathbf{p},-\lambda} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + \tilde{\zeta}_P \kappa^*_{-\mathbf{p},-\lambda} v(\mathbf{p},\lambda) b^\dagger_{-\mathbf{p},-\lambda} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} \right] \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_\lambda \left[\zeta^*_P \kappa_{\mathbf{p},\lambda} u(-\mathbf{p},-\lambda) a_{\mathbf{p},\lambda} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(\mathcal{P}x)} + \tilde{\zeta}_P \kappa^*_{\mathbf{p},\lambda} v(-\mathbf{p},-\lambda) b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(\mathcal{P}x)} \right] \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_\lambda \left[\zeta^*_P \gamma^0 u(\mathbf{p},\lambda) a_{\mathbf{p},\lambda} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(\mathcal{P}x)} - \tilde{\zeta}_P \gamma^0 v(\mathbf{p},\lambda) b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(\mathcal{P}x)} \right]. \end{aligned} \tag{8.162}$$

第三步作了变量替换 $\mathbf{p}\to-\mathbf{p}$ 和 $\lambda\to-\lambda$，第四步用到 (8.158) 式。

为了保持 $\psi(x)$ 的运动方程形式不变，我们必须要求

$$\zeta^*_P = -\tilde{\zeta}_P, \tag{8.163}$$

使 $b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}$ 和 $b_{\mathbf{p},\lambda}$ 的 P 变换化为

$$P^{-1} b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} P = -\zeta^*_P \kappa^*_{-\mathbf{p},-\lambda} b^\dagger_{-\mathbf{p},-\lambda}, \quad P^{-1} b_{\mathbf{p},\lambda} P = -\zeta_P \kappa_{-\mathbf{p},-\lambda} b_{-\mathbf{p},-\lambda}, \tag{8.164}$$

而 $\psi(x)$ 的 P 变换为

$$P^{-1}\psi(x)P = D(\mathcal{P})\psi(\mathcal{P}x), \tag{8.165}$$

其中

$$D(\mathcal{P}) \equiv \zeta_P^* \gamma^0 \tag{8.166}$$

是旋量空间中的**宇称变换矩阵**。$D(\mathcal{P})$ 在 4.1 节中已经出现，与 (4.47) 式比较，有 $\zeta_P^* = \zeta$。于是，作宇称变换后，$\psi'(x') = P^{-1}\psi(x')P = D(\mathcal{P})\psi(\mathcal{P}x') = D(\mathcal{P})\psi(x)$ 也满足 Dirac 方程，

$$\begin{aligned}(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial'_\mu - m)\psi'(x') &= [\mathrm{i}\gamma^\mu (\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu - m] D(\mathcal{P})\psi(x) \\ &= D(\mathcal{P})[\mathrm{i}D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P})(\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu - m]\psi(x) \\ &= D(\mathcal{P})[\mathrm{i}\mathcal{P}^\mu{}_\rho \gamma^\rho (\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu - m]\psi(x) = D(\mathcal{P})(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0. \end{aligned} \tag{8.167}$$

第三步用到 (4.50) 式。

宇称变换矩阵 $D(\mathcal{P})$ 是幺正的，满足

$$D^{-1}(\mathcal{P}) = D^\dagger(\mathcal{P}) = \zeta_P \gamma^0. \tag{8.168}$$

由 $P^{-1}\psi^\dagger(x)P = [P^{-1}\psi(x)P]^\dagger = [\zeta_P^* \gamma^0 \psi(\mathcal{P}x)]^\dagger = \zeta_P \psi^\dagger(\mathcal{P}x)\gamma^0$ 得

$$P^{-1}\bar{\psi}(x)P = P^{-1}\psi^\dagger(x)P\,\gamma^0 = \zeta_P \psi^\dagger(\mathcal{P}x)\gamma^0\gamma^0 = \bar{\psi}(\mathcal{P}x)\zeta_P \gamma^0, \tag{8.169}$$

即 $\bar{\psi}(x)$ 的 P 变换为

$$P^{-1}\bar{\psi}(x)P = \bar{\psi}(\mathcal{P}x)D^{-1}(\mathcal{P}). \tag{8.170}$$

从而，一般旋量双线性型 $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$ 的 P 变换为

$$P^{-1}\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)P = P^{-1}\bar{\psi}(x)P\Gamma P^{-1}\psi(x)P = \bar{\psi}(\mathcal{P}x)D^{-1}(\mathcal{P})\Gamma D(\mathcal{P})\psi(\mathcal{P}x). \tag{8.171}$$

在 4.1 节已经推导出以下结果，

$$D^{-1}(\mathcal{P})\mathbf{1}D(\mathcal{P}) = +\mathbf{1}, \qquad D^{-1}(\mathcal{P})\mathrm{i}\gamma^5 D(\mathcal{P}) = -\mathrm{i}\gamma^5, \tag{8.172}$$

$$D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \gamma^\nu, \qquad D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^\mu\gamma^5 D(\mathcal{P}) = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu \gamma^\nu\gamma^5, \tag{8.173}$$

$$D^{-1}(\mathcal{P})\sigma^{\mu\nu} D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma \sigma^{\rho\sigma}. \tag{8.174}$$

由此得到各种旋量双线性型的 P 变换，

$$P^{-1}\bar{\psi}(x)\psi(x)P = +\bar{\psi}(\mathcal{P}x)\psi(\mathcal{P}x), \tag{8.175}$$

$$P^{-1}\bar{\psi}(x)\mathrm{i}\gamma^5\psi(x)P = -\bar{\psi}(\mathcal{P}x)\mathrm{i}\gamma^5\psi(\mathcal{P}x), \tag{8.176}$$

$$P^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)P = \mathcal{P}^\mu{}_\nu \bar{\psi}(\mathcal{P}x)\gamma^\nu\psi(\mathcal{P}x), \tag{8.177}$$

$$P^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)P = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu \bar{\psi}(\mathcal{P}x)\gamma^\nu\gamma^5\psi(\mathcal{P}x), \tag{8.178}$$

$$P^{-1}\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)P = \mathcal{P}^\mu{}_\rho \mathcal{P}^\nu{}_\sigma \bar{\psi}(\mathcal{P}x)\sigma^{\rho\sigma}\psi(\mathcal{P}x), \tag{8.179}$$

$$P^{-1}\bar{\psi}_{\mathrm{R}}(x)\psi_{\mathrm{L}}(x)P = \bar{\psi}_{\mathrm{L}}(\mathcal{P}x)\psi_{\mathrm{R}}(\mathcal{P}x), \tag{8.180}$$

$$P^{-1}\bar{\psi}_{\mathrm{L}}(x)\psi_{\mathrm{R}}(x)P = \bar{\psi}_{\mathrm{R}}(\mathcal{P}x)\psi_{\mathrm{L}}(\mathcal{P}x), \tag{8.181}$$

$$P^{-1}\bar{\psi}_{\mathrm{L}}(x)\gamma^{\mu}\psi_{\mathrm{L}}(x)P = \mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu}\bar{\psi}_{\mathrm{R}}(\mathcal{P}x)\gamma^{\nu}\psi_{\mathrm{R}}(\mathcal{P}x), \tag{8.182}$$

$$P^{-1}\bar{\psi}_{\mathrm{R}}(x)\gamma^{\mu}\psi_{\mathrm{R}}(x)P = \mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu}\bar{\psi}_{\mathrm{L}}(\mathcal{P}x)\gamma^{\nu}\psi_{\mathrm{L}}(\mathcal{P}x). \tag{8.183}$$

根据以上宇称变换性质，$\bar{\psi}\psi$ 是狭义的标量算符，$\bar{\psi}\mathrm{i}\gamma^5\psi$ 是赝标量算符，$\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$ 是极矢量算符，$\bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma^5\psi$ 是轴矢量算符。另一方面，左手流算符 $\bar{\psi}_{\mathrm{L}}\gamma^{\mu}\psi_{\mathrm{L}}$ 和右手流算符 $\bar{\psi}_{\mathrm{R}}\gamma^{\mu}\psi_{\mathrm{R}}$ 在 P 变换下相互转化。在弱相互作用中，左手流算符和右手流算符参与不同的规范相互作用，因而空间反射对称性遭到破坏。动能项算符 $\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi$ 的 P 变换为

$$\begin{aligned} P^{-1}\mathrm{i}\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x)P &= \mathrm{i}\bar{\psi}(\mathcal{P}x)D^{-1}(\mathcal{P})\gamma^{\mu}D(\mathcal{P})(\mathcal{P}^{-1})^{\nu}{}_{\mu}\partial_{\nu}\psi(\mathcal{P}x) \\ &= \mathrm{i}\bar{\psi}(\mathcal{P}x)\mathcal{P}^{\mu}{}_{\rho}\gamma^{\rho}(\mathcal{P}^{-1})^{\nu}{}_{\mu}\partial_{\nu}\psi(\mathcal{P}x) = +\mathrm{i}\bar{\psi}(\mathcal{P}x)\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi(\mathcal{P}x), \end{aligned} \tag{8.184}$$

因此，自由 Dirac 旋量场的拉氏量 (4.104) 在宇称变换下不变。

在质心系中考虑一对正反费米子 $\psi\bar{\psi}$ 组成的系统，设两个粒子的螺旋度相反，轨道角动量量子数为 L 的态矢为

$$\left|\psi\bar{\psi}\right\rangle = \sum_{\lambda}\int \mathrm{d}^3p\,\Phi(\mathbf{p})a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}b^{\dagger}_{-\mathbf{p},-\lambda}\left|0\right\rangle, \quad \Phi(-\mathbf{p}) = (-)^L\Phi(\mathbf{p}), \tag{8.185}$$

相应的 P 变换是

$$\begin{aligned} P\left|\psi\bar{\psi}\right\rangle &= \sum_{\lambda}\int \mathrm{d}^3p\,\Phi(\mathbf{p})P^{-1}a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}PP^{-1}b^{\dagger}_{-\mathbf{p},-\lambda}P\left|0\right\rangle \\ &= -|\zeta_P|^2\sum_{\lambda}\int \mathrm{d}^3p\,\Phi(\mathbf{p})\kappa^*_{-\mathbf{p},-\lambda}\kappa^*_{\mathbf{p},\lambda}a^{\dagger}_{-\mathbf{p},-\lambda}b^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}\left|0\right\rangle = -\sum_{\lambda}\int \mathrm{d}^3p\,\Phi(-\mathbf{p})\kappa^*_{\mathbf{p},\lambda}\kappa^*_{-\mathbf{p},-\lambda}a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}b^{\dagger}_{-\mathbf{p},-\lambda}\left|0\right\rangle \\ &= -(-)^L\sum_{\lambda}\int \mathrm{d}^3p\,\Phi(\mathbf{p})a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}b^{\dagger}_{-\mathbf{p},-\lambda}\left|0\right\rangle = (-)^{L+1}\left|\psi\bar{\psi}\right\rangle. \end{aligned} \tag{8.186}$$

第三步作了变量替换 $\mathbf{p}\to-\mathbf{p}$ 和 $\lambda\to-\lambda$，第四步用到

$$\kappa^*_{\mathbf{p},\lambda}\kappa^*_{-\mathbf{p},-\lambda} = \frac{\lambda p^1 - \mathrm{i}p^2}{\sqrt{(p^1)^2+(p^2)^2}}\frac{\lambda p^1 + \mathrm{i}p^2}{\sqrt{(p^1)^2+(p^2)^2}} = 1. \tag{8.187}$$

可见，$\left|\psi\bar{\psi}\right\rangle$ 的总宇称为 $(-)^{L+1}$，包含轨道宇称 $(-)^L$ 和内禀宇称 $-$。也就是说，一对正反费米子的内禀宇称为奇。

对于自由的 *Majorana 旋量场* $\psi(x)$，$b_{\mathbf{p},\lambda} = a_{\mathbf{p},\lambda}$，则 $\tilde{\zeta}_P = \zeta_P$，从而 $\zeta^*_P = -\tilde{\zeta}_P = -\zeta_P$，因此

$$\zeta_P = \pm\mathrm{i}, \tag{8.188}$$

故 Majorana 旋量场的宇称是虚数。

8.2.4 旋量场的 T 变换

下面讨论自由 *Dirac 旋量场* $\psi(x)$ 的 T 变换。时间反演变换同时反转动量和角动量的方向，因而会保持螺旋度 λ 不变。另一方面，T 变换是反幺正的，将一个复数变换成它的复共轭。因

此 T 变换联系着螺旋态 $\xi_\lambda(\mathbf{p})$ 和 $\xi^*_\lambda(-\mathbf{p})$，它们都出现在 (8.86) 式中。对 (8.86) 式取复共轭，利用 (8.154) 式，得

$$\mathrm{i}\sigma^2\xi_\lambda(\mathbf{p}) = -\lambda\xi^*_{-\lambda}(\mathbf{p}) = -\lambda\kappa^*_{\mathbf{p},-\lambda}\xi^*_\lambda(-\mathbf{p}), \tag{8.189}$$

故

$$\mathrm{i}\sigma^2\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) = \lambda\kappa^*_{\mathbf{p},\lambda}\xi^*_{-\lambda}(-\mathbf{p}). \tag{8.190}$$

$\mathrm{i}\sigma^2$ 出现在矩阵

$$\mathcal{C}\gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\sigma^2 & \\ & \mathrm{i}\sigma^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\mathbf{1} & \\ & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sigma^2 & \\ & \mathrm{i}\sigma^2 \end{pmatrix} \tag{8.191}$$

中，它对平面波旋量系数的作用是

$$\mathcal{C}\gamma^5 u(\mathbf{p},\lambda) = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sigma^2 & \\ & \mathrm{i}\sigma^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p}) \\ \omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_\lambda(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = -\lambda\kappa^*_{\mathbf{p},-\lambda}\begin{pmatrix} \omega_{-\lambda}(-\mathbf{p})\xi^*_\lambda(-\mathbf{p}) \\ \omega_\lambda(-\mathbf{p})\xi^*_\lambda(-\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \tag{8.192}$$

$$\mathcal{C}\gamma^5 v(\mathbf{p},\lambda) = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sigma^2 & \\ & \mathrm{i}\sigma^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda\omega_\lambda(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \\ -\lambda\omega_{-\lambda}(\mathbf{p})\xi_{-\lambda}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \lambda\kappa^*_{\mathbf{p},\lambda}\begin{pmatrix} \lambda\omega_\lambda(-\mathbf{p})\xi^*_{-\lambda}(-\mathbf{p}) \\ -\lambda\omega_{-\lambda}(-\mathbf{p})\xi^*_{-\lambda}(-\mathbf{p}) \end{pmatrix}. \tag{8.193}$$

由 (8.157) 式得 $\kappa^*_{\mathbf{p},-\lambda} = -\kappa_{\mathbf{p},\lambda}$，从而推出

$$\mathcal{C}\gamma^5 u(\mathbf{p},\lambda) = \lambda\kappa_{\mathbf{p},\lambda}u^*(-\mathbf{p},\lambda), \quad \mathcal{C}\gamma^5 v(\mathbf{p},\lambda) = \lambda\kappa^*_{\mathbf{p},\lambda}v^*(-\mathbf{p},\lambda). \tag{8.194}$$

为了得到自洽的时间反演变换结果，我们将正反费米子态 $|\mathbf{p}^+,\lambda\rangle$ 和 $|\mathbf{p}^-,\lambda\rangle$ 的 T 变换表达为

$$T\left|\mathbf{p}^+,\lambda\right\rangle = \zeta_T\lambda\kappa^*_{-\mathbf{p},\lambda}\left|-\mathbf{p}^+,-\lambda\right\rangle, \quad T\left|\mathbf{p}^-,\lambda\right\rangle = \tilde{\zeta}_T\lambda\kappa^*_{-\mathbf{p},\lambda}\left|-\mathbf{p}^-,-\lambda\right\rangle, \tag{8.195}$$

其中 ζ_T 和 $\tilde{\zeta}_T$ 是两个相位因子。由此得到 $a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}$ 和 $a_{\mathbf{p},\lambda}$ 的 T 变换

$$T^{-1}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}T = \zeta_T\lambda\kappa^*_{-\mathbf{p},\lambda}a^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda}, \quad T^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}T = \zeta^*_T\lambda\kappa_{-\mathbf{p},\lambda}a_{-\mathbf{p},\lambda}, \tag{8.196}$$

和 $b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}$ 和 $b_{\mathbf{p},\lambda}$ 的 T 变换

$$T^{-1}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}T = \tilde{\zeta}_T\lambda\kappa^*_{-\mathbf{p},\lambda}b^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda}, \quad T^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda}T = \tilde{\zeta}^*_T\lambda\kappa_{-\mathbf{p},\lambda}b_{-\mathbf{p},\lambda}. \tag{8.197}$$

注意到 $T^{-1}\mathrm{i}T = -\mathrm{i}$，Dirac 旋量场平面波展开式 (4.219) 的 T 变换是

$$\begin{aligned}
T^{-1}\psi(x)T &= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_\lambda T^{-1}\left[u(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + v(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right]T \\
&= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_\lambda\left[\zeta^*_T\lambda\kappa_{-\mathbf{p},\lambda}u^*(\mathbf{p},\lambda)a_{-\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} + \tilde{\zeta}_T\lambda\kappa^*_{-\mathbf{p},\lambda}v^*(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\right] \\
&= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_\lambda\left[\zeta^*_T\lambda\kappa_{\mathbf{p},\lambda}u^*(-\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(\mathcal{T}x)} + \tilde{\zeta}_T\lambda\kappa^*_{\mathbf{p},\lambda}v^*(-\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(\mathcal{T}x)}\right] \\
&= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_\lambda\left[\zeta^*_T\mathcal{C}\gamma^5u(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(\mathcal{T}x)} + \tilde{\zeta}_T\mathcal{C}\gamma^5v(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(\mathcal{T}x)}\right].
\end{aligned} \tag{8.198}$$

第三步作了变量替换 $\mathbf{p}\to-\mathbf{p}$，第四步用到 (8.194) 式。

为了让 $\psi(x)$ 的运动方程具有时间反演对称性，$T^{-1}\psi(x)T$ 与 $\psi(\mathcal{T}x)$ 最多只能相差一个常数矩阵，因而必须要求

$$\zeta_T^*=\tilde{\zeta}_T, \tag{8.199}$$

使得

$$T^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger T=\zeta_T^*\lambda\kappa_{-\mathbf{p},\lambda}^* b_{-\mathbf{p},\lambda}^\dagger,\quad T^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda}T=\zeta_T\lambda\kappa_{-\mathbf{p},\lambda}b_{-\mathbf{p},\lambda}, \tag{8.200}$$

且 $\psi(x)$ 的 T 变换为

$$T^{-1}\psi(x)T=D(\mathcal{T})\psi(\mathcal{T}x), \tag{8.201}$$

其中

$$D(\mathcal{T})\equiv\zeta_T^*\mathcal{C}\gamma^5 \tag{8.202}$$

是旋量空间中的**时间反演矩阵**。

由 $D^\dagger(\mathcal{T})D(\mathcal{T})=\zeta_T\gamma^5\mathcal{C}^\dagger\zeta_T^*\mathcal{C}\gamma^5=|\zeta_T|^2\gamma^5\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}\gamma^5=\mathbf{1}$ 可知，时间反演矩阵 $D(\mathcal{T})$ 是幺正的，满足

$$D^{-1}(\mathcal{T})=D^\dagger(\mathcal{T})=\zeta_T\gamma^5\mathcal{C}^{-1}. \tag{8.203}$$

对 (8.201) 式取厄米共轭，得 $T^{-1}\psi^\dagger(x)T=\psi^\dagger(\mathcal{T}x)D^\dagger(\mathcal{T})=\psi^\dagger(\mathcal{T}x)\zeta_T\gamma^5\mathcal{C}^{-1}$。由 γ^0 的厄米性有 $(\gamma^0)^*=(\gamma^0)^{\mathrm{T}}$，由 (8.101) 式得 $\mathcal{C}^{-1}(\gamma^0)^{\mathrm{T}}=-\gamma^0\mathcal{C}^{-1}$，再利用 $\gamma^5\gamma^0=-\gamma^0\gamma^5$ 推出

$$T^{-1}\bar{\psi}(x)T=T^{-1}\psi^\dagger(x)T(\gamma^0)^*=\psi^\dagger(\mathcal{T}x)\zeta_T\gamma^5\mathcal{C}^{-1}(\gamma^0)^{\mathrm{T}}=\psi^\dagger(\mathcal{T}x)\gamma^0\zeta_T\gamma^5\mathcal{C}^{-1}, \tag{8.204}$$

即 $\bar{\psi}(x)$ 的 T 变换为

$$T^{-1}\bar{\psi}(x)T=\bar{\psi}(\mathcal{T}x)D^{-1}(\mathcal{T}). \tag{8.205}$$

据此，一般旋量双线性型 $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$ 的 T 变换是

$$T^{-1}\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)T=T^{-1}\bar{\psi}(x)TT^{-1}\Gamma TT^{-1}\psi(x)T=\bar{\psi}(\mathcal{T}x)D^{-1}(\mathcal{T})\Gamma^*D(\mathcal{T})\psi(\mathcal{T}x), \tag{8.206}$$

即问题归结为计算 $D^{-1}(\mathcal{T})\Gamma^*D(\mathcal{T})$。

根据 γ^5 的厄米性、γ^i 的反厄米性和 (8.101) 式，有

$$D^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^5)^*D(\mathcal{T})=\gamma^5\mathcal{C}^{-1}(\gamma^5)^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma^5=(\gamma^5)^3=\gamma^5, \tag{8.207}$$

$$D^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^0)^*D(\mathcal{T})=\gamma^5\mathcal{C}^{-1}(\gamma^0)^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma^5=-\gamma^5\gamma^0\gamma^5=\gamma^0, \tag{8.208}$$

$$D^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^i)^*D(\mathcal{T})=-\gamma^5\mathcal{C}^{-1}(\gamma^i)^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma^5=\gamma^5\gamma^i\gamma^5=-\gamma^i. \tag{8.209}$$

进而得到

$$D^{-1}(\mathcal{T})\mathbf{1}^*D(\mathcal{T})=+\mathbf{1},\quad D^{-1}(\mathcal{T})(\mathrm{i}\gamma^5)^*D(\mathcal{T})=-\mathrm{i}\gamma^5, \tag{8.210}$$

$$D^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^\mu)^*D(\mathcal{T})=-\mathcal{T}^\mu{}_\nu\gamma^\nu, \tag{8.211}$$

$$D^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^\mu\gamma^5)^*D(\mathcal{T})=D^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^\mu)^*D(\mathcal{T})D^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^5)^*D(\mathcal{T})=-\mathcal{T}^\mu{}_\nu\gamma^\nu\gamma^5, \tag{8.212}$$

$$\begin{aligned} D^{-1}(\mathcal{T})(\sigma^{\mu\nu})^* D(\mathcal{T}) &= -\frac{\mathrm{i}}{2} D^{-1}(\mathcal{T})[(\gamma^\mu)^*(\gamma^\nu)^* - (\gamma^\nu)^*(\gamma^\mu)^*]D(\mathcal{T}) \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{2}\mathcal{T}^\mu{}_\rho \mathcal{T}^\nu{}_\sigma(\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\gamma^\mu) = -\mathcal{T}^\mu{}_\rho\mathcal{T}^\nu{}_\sigma\sigma^{\rho\sigma}. \end{aligned} \tag{8.213}$$

于是，各种旋量双线性型的 T 变换为

$$T^{-1}\bar{\psi}(x)\psi(x)T = +\bar{\psi}(\mathcal{T}x)\psi(\mathcal{T}x), \tag{8.214}$$

$$T^{-1}\bar{\psi}(x)\mathrm{i}\gamma^5\psi(x)T = -\bar{\psi}(\mathcal{T}x)\mathrm{i}\gamma^5\psi(\mathcal{T}x), \tag{8.215}$$

$$T^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)T = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu\bar{\psi}(\mathcal{T}x)\gamma^\nu\psi(\mathcal{T}x), \tag{8.216}$$

$$T^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)T = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu\bar{\psi}(\mathcal{T}x)\gamma^\nu\gamma^5\psi(\mathcal{T}x), \tag{8.217}$$

$$T^{-1}\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)T = -\mathcal{T}^\mu{}_\rho\mathcal{T}^\nu{}_\sigma\bar{\psi}(\mathcal{T}x)\sigma^{\rho\sigma}\psi(\mathcal{T}x), \tag{8.218}$$

$$T^{-1}\bar{\psi}_{\mathrm{R}}(x)\psi_{\mathrm{L}}(x)T = +\bar{\psi}_{\mathrm{R}}(\mathcal{T}x)\psi_{\mathrm{L}}(\mathcal{T}x), \tag{8.219}$$

$$T^{-1}\bar{\psi}_{\mathrm{L}}(x)\psi_{\mathrm{R}}(x)T = +\bar{\psi}_{\mathrm{L}}(\mathcal{T}x)\psi_{\mathrm{R}}(\mathcal{T}x), \tag{8.220}$$

$$T^{-1}\bar{\psi}_{\mathrm{L}}(x)\gamma^\mu\psi_{\mathrm{L}}(x)T = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu\bar{\psi}_{\mathrm{L}}(\mathcal{T}x)\gamma^\nu\psi_{\mathrm{L}}(\mathcal{T}x), \tag{8.221}$$

$$T^{-1}\bar{\psi}_{\mathrm{R}}(x)\gamma^\mu\psi_{\mathrm{R}}(x)T = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu\bar{\psi}_{\mathrm{R}}(\mathcal{T}x)\gamma^\nu\psi_{\mathrm{R}}(\mathcal{T}x). \tag{8.222}$$

动能项算符 $\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ 的 T 变换为

$$\begin{aligned} T^{-1}\mathrm{i}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x)T &= -\mathrm{i}\bar{\psi}(\mathcal{T}x)D^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^\mu)^* D(\mathcal{T})(\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu\psi(\mathcal{T}x) \\ &= \mathrm{i}\bar{\psi}(\mathcal{T}x)\mathcal{T}^\mu{}_\rho\gamma^\rho(\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu\psi(\mathcal{T}x) = +\mathrm{i}\bar{\psi}(\mathcal{T}x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(\mathcal{T}x). \end{aligned} \tag{8.223}$$

因此，自由 Dirac 旋量场的拉氏量 (4.104) 在时间反演变换下不变。由于 T 变换是反线性的，Dirac 方程 $(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0$ 的时间反演对称性意味着运动方程 $[-\mathrm{i}(\gamma^\mu)^*\partial'_\mu - m]\psi'(x') = 0$ 成立，这一点在下面的推导中得到验证：

$$\begin{aligned} [-\mathrm{i}(\gamma^\mu)^*\partial'_\mu - m]\psi'(x') &= [-\mathrm{i}(\gamma^\mu)^*(\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu - m]T^{-1}\psi(x')T \\ &= D(\mathcal{T})[-\mathrm{i}D^{-1}(\mathcal{T})(\gamma^\mu)^* D(\mathcal{T})(\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu - m]\psi(\mathcal{T}x') \\ &= D(\mathcal{T})[\mathrm{i}\mathcal{T}^\mu{}_\rho\gamma^\rho(\mathcal{T}^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu - m]\psi(x) \\ &= D(\mathcal{T})(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0. \end{aligned} \tag{8.224}$$

对于自由的 *Majorana 旋量场* $\psi(x)$，$b_{\mathbf{p},\lambda} = a_{\mathbf{p},\lambda}$，则 $\zeta_T = \tilde{\zeta}_T = \zeta_T^*$，故

$$\zeta_T = \pm 1. \tag{8.225}$$

8.3 矢量场的分立变换

8.3.1 有质量矢量场的 C、P、T 变换

接下来讨论自由*有质量复矢量场* $A^\mu(x)$ 的 C、P、T 变换，拉氏量为 (3.428) 式，平面波展开式 (3.431) 用极化矢量 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)$ $(\lambda = \pm, 0)$ 表达。宇称变换联系着 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)$ 和 $\varepsilon^\mu(-\mathbf{p},-\lambda)$，根

据极化矢量的具体形式 (3.244)，有

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\mu}(-\mathbf{p},+) &= \frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}||\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|}\begin{pmatrix}0\\-p^1p^3-\mathrm{i}p^2|\mathbf{p}|\\-p^2p^3+\mathrm{i}p^1|\mathbf{p}|\\|\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|^2\end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}||\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|}\begin{pmatrix}0\\p^1p^3+\mathrm{i}p^2|\mathbf{p}|\\p^2p^3-\mathrm{i}p^1|\mathbf{p}|\\-|\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|^2\end{pmatrix}\\ &= -\varepsilon^{\mu}(\mathbf{p},-) = \mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu}\varepsilon^{\nu}(\mathbf{p},-), \qquad (8.226)\\ \varepsilon^{\mu}(-\mathbf{p},-) &= -\varepsilon^{\mu}(\mathbf{p},+) = \mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu}\varepsilon^{\nu}(\mathbf{p},+), \qquad (8.227)\\ \varepsilon^{\mu}(-\mathbf{p},0) &= \frac{1}{m|\mathbf{p}|}\begin{pmatrix}|\mathbf{p}|^2\\-p^0p^1\\-p^0p^2\\-p^0p^3\end{pmatrix} = \frac{1}{m|\mathbf{p}|}\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|\mathbf{p}|^2\\p^0p^1\\p^0p^2\\p^0p^3\end{pmatrix} = \mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu}\varepsilon^{\nu}(\mathbf{p},0). \qquad (8.228)\end{aligned}$$

因此宇称变换与极化矢量的关系为

$$\varepsilon^{\mu}(-\mathbf{p},-\lambda) = \mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu}\varepsilon^{\nu}(\mathbf{p},\lambda). \qquad (8.229)$$

时间反演变换联系着 $\varepsilon^{\mu}(\mathbf{p},\lambda)$ 和 $\varepsilon^{\mu*}(-\mathbf{p},\lambda)$，由

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\mu*}(-\mathbf{p},+) &= \frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}||\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|}\begin{pmatrix}0\\-p^1p^3+\mathrm{i}p^2|\mathbf{p}|\\-p^2p^3-\mathrm{i}p^1|\mathbf{p}|\\|\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|^2\end{pmatrix} = \mathcal{T}^{\mu}{}_{\nu}\varepsilon^{\nu}(\mathbf{p},+), \qquad (8.230)\\ \varepsilon^{\mu*}(-\mathbf{p},-) &= \frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{p}||\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|}\begin{pmatrix}0\\p^1p^3+\mathrm{i}p^2|\mathbf{p}|\\p^2p^3-\mathrm{i}p^1|\mathbf{p}|\\-|\mathbf{p}_{\mathrm{T}}|^2\end{pmatrix} = \mathcal{T}^{\mu}{}_{\nu}\varepsilon^{\nu}(\mathbf{p},-), \qquad (8.231)\\ \varepsilon^{\mu*}(-\mathbf{p},0) &= \frac{1}{m|\mathbf{p}|}\begin{pmatrix}|\mathbf{p}|^2\\-p^0p^1\\-p^0p^2\\-p^0p^3\end{pmatrix} = \frac{1}{m|\mathbf{p}|}\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|\mathbf{p}|^2\\p^0p^1\\p^0p^2\\p^0p^3\end{pmatrix} = -\mathcal{T}^{\mu}{}_{\nu}\varepsilon^{\nu}(\mathbf{p},0), \qquad (8.232)\end{aligned}$$

推出时间反演变换与极化矢量的关系

$$(-)^{1+\lambda}\varepsilon^{\mu*}(-\mathbf{p},\lambda) = \mathcal{T}^{\mu}{}_{\nu}\varepsilon^{\nu}(\mathbf{p},\lambda). \qquad (8.233)$$

类似于标量场和旋量场的 C、P、T 变换规律，$C^{-1}A^{\mu}(x)C$、$P^{-1}A^{\mu}(x)P$ 和 $T^{-1}A^{\mu}(x)T$ 应当分别正比于 $A^{\mu\dagger}(x)$、$\mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu}A^{\nu}(\mathcal{P}x)$ 和 $\mathcal{T}^{\mu}{}_{\nu}A^{\nu}(\mathcal{T}x)$，为此，将产生湮灭算符的 C、P、T 变换表达成

$$C^{-1}a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}C = \xi_C b^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}, \qquad C^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}C = \xi^*_C b_{\mathbf{p},\lambda}, \qquad (8.234)$$

$$C^{-1}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}C=\xi^*_C a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda},\qquad C^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda}C=\xi_C a_{\mathbf{p},\lambda},\tag{8.235}$$

$$P^{-1}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}P=\xi_P a^\dagger_{-\mathbf{p},-\lambda},\qquad P^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}P=\xi^*_P a_{-\mathbf{p},-\lambda},\tag{8.236}$$

$$P^{-1}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}P=\xi^*_P b^\dagger_{-\mathbf{p},-\lambda},\qquad P^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda}P=\xi_P b_{-\mathbf{p},-\lambda},\tag{8.237}$$

$$T^{-1}a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}T=\xi_T(-)^{1+\lambda}a^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda},\quad T^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}T=\xi^*_T(-)^{1+\lambda}a_{-\mathbf{p},\lambda},\tag{8.238}$$

$$T^{-1}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}T=\xi^*_T(-)^{1+\lambda}b^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda},\quad T^{-1}b_{\mathbf{p},\lambda}T=\xi_T(-)^{1+\lambda}b_{-\mathbf{p},\lambda},\tag{8.239}$$

其中 ξ_C、ξ_P 和 ξ_T 是相位因子。从而推出

$$\begin{aligned}C^{-1}A^\mu(x)C&=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_\lambda[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)C^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}C\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)C^{-1}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}C\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}]\\&=\xi^*_C\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_\lambda[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)b_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}],\end{aligned}\tag{8.240}$$

$$\begin{aligned}P^{-1}A^\mu(x)P&=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_\lambda[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)P^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}P\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)P^{-1}b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}P\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}]\\&=\xi^*_P\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_\lambda[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)a_{-\mathbf{p},-\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{-\mathbf{p},-\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}]\\&=\xi^*_P\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_\lambda[\varepsilon^\mu(-\mathbf{p},-\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(\mathcal{P}x)}+\varepsilon^{\mu*}(-\mathbf{p},-\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(\mathcal{P}x)}]\\&=\xi^*_P\mathcal{P}^\mu{}_\nu\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_\lambda[\varepsilon^\nu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(\mathcal{P}x)}+\varepsilon^{\nu*}(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(\mathcal{P}x)}],\end{aligned}\tag{8.241}$$

$$\begin{aligned}T^{-1}A^\mu(x)T&=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_\lambda T^{-1}[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}]T\\&=\xi^*_T\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_\lambda[(-)^{1+\lambda}\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)a_{-\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}+(-)^{1+\lambda}\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{-\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}]\\&=\xi^*_T\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_\lambda[(-)^{1+\lambda}\varepsilon^{\mu*}(-\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(\mathcal{T}x)}+(-)^{1+\lambda}\varepsilon^\mu(-\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(\mathcal{T}x)}]\\&=\xi^*_T\mathcal{T}^\mu{}_\nu\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_\lambda[\varepsilon^\nu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(\mathcal{T}x)}+\varepsilon^{\nu*}(\mathbf{p},\lambda)b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(\mathcal{T}x)}],\end{aligned}\tag{8.242}$$

因此，有质量复矢量场 $A^\mu(x)$ 的分立变换为

$$C^{-1}A^\mu(x)C=\xi^*_C A^{\mu\dagger}(x),\qquad C^{-1}A^{\mu\dagger}(x)C=\xi_C A^\mu(x),\tag{8.243}$$

$$P^{-1}A^\mu(x)P=\xi^*_P\mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x),\quad P^{-1}A^{\mu\dagger}(x)P=\xi_P\mathcal{P}^\mu{}_\nu A^{\nu\dagger}(\mathcal{P}x),\tag{8.244}$$

$$T^{-1}A^\mu(x)T=\xi^*_T\mathcal{T}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{T}x),\quad T^{-1}A^{\mu\dagger}(x)T=\xi_T\mathcal{T}^\mu{}_\nu A^{\nu\dagger}(\mathcal{T}x).\tag{8.245}$$

利用 (8.22) 和 (8.56) 式，场强张量 $F^{\mu\nu}=\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu$ 的 C、P、T 变换为

$$C^{-1}F^{\mu\nu}(x)C=\xi^*_C[\partial^\mu A^{\nu\dagger}(x)-\partial^\nu A^{\mu\dagger}(x)]=\xi^*_C F^{\mu\nu\dagger}(x),\tag{8.246}$$

$$P^{-1}F^{\mu\nu}(x)P=\xi^*_P\mathcal{P}^\mu{}_\rho\mathcal{P}^\nu{}_\sigma[\partial^\rho A^\sigma(\mathcal{P}x)-\partial^\sigma A^\rho(\mathcal{P}x)]=\xi^*_P\mathcal{P}^\mu{}_\rho\mathcal{P}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\mathcal{P}x),\tag{8.247}$$

$$T^{-1}F^{\mu\nu}(x)T = \xi_T^*\mathcal{T}^\mu{}_\rho\mathcal{T}^\nu{}_\sigma[\partial^\rho A^\sigma(\mathcal{T}x) - \partial^\sigma A^\rho(\mathcal{T}x)] = \xi_T^*\mathcal{T}^\mu{}_\rho\mathcal{T}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\mathcal{T}x). \tag{8.248}$$

由 (1.95) 式得

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\mathcal{P}^{-1})^\alpha{}_\rho(\mathcal{P}^{-1})^\beta{}_\sigma &= -\mathcal{P}^\mu{}_\gamma\mathcal{P}^\nu{}_\delta\mathcal{P}^\rho{}_\tau\mathcal{P}^\sigma{}_\phi\varepsilon^{\gamma\delta\tau\phi}(\mathcal{P}^{-1})^\alpha{}_\rho(\mathcal{P}^{-1})^\beta{}_\sigma = -\mathcal{P}^\mu{}_\gamma\mathcal{P}^\nu{}_\delta\delta^\alpha{}_\tau\delta^\beta{}_\phi\varepsilon^{\gamma\delta\tau\phi}\\ &= -\mathcal{P}^\mu{}_\rho\mathcal{P}^\nu{}_\sigma\varepsilon^{\rho\sigma\alpha\beta}.\end{aligned} \tag{8.249}$$

同理有

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\mathcal{T}^{-1})^\alpha{}_\rho(\mathcal{T}^{-1})^\beta{}_\sigma = -\mathcal{T}^\mu{}_\rho\mathcal{T}^\nu{}_\sigma\varepsilon^{\rho\sigma\alpha\beta}. \tag{8.250}$$

从而，对偶场强张量 $\tilde{F}^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}/2$ 的 C、P、T 变换是

$$C^{-1}\tilde{F}^{\mu\nu}(x)C = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}C^{-1}F_{\rho\sigma}(x)C = \xi_C^*\tilde{F}^{\mu\nu\dagger}(x), \tag{8.251}$$

$$\begin{aligned}P^{-1}\tilde{F}^{\mu\nu}(x)P &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P^{-1}F_{\rho\sigma}(x)P = \frac{1}{2}\xi_P^*\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\alpha\beta}(\mathcal{P}x)(\mathcal{P}^{-1})^\alpha{}_\rho(\mathcal{P}^{-1})^\beta{}_\sigma\\ &= -\frac{1}{2}\xi_P^*\mathcal{P}^\mu{}_\rho\mathcal{P}^\nu{}_\sigma\varepsilon^{\rho\sigma\alpha\beta}F_{\alpha\beta}(\mathcal{P}x) = -\xi_P^*\mathcal{P}^\mu{}_\rho\mathcal{P}^\nu{}_\sigma\tilde{F}^{\rho\sigma}(\mathcal{P}x),\end{aligned} \tag{8.252}$$

$$\begin{aligned}T^{-1}\tilde{F}^{\mu\nu}(x)T &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}T^{-1}F_{\rho\sigma}(x)T = \frac{1}{2}\xi_T^*\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\alpha\beta}(\mathcal{T}x)(\mathcal{T}^{-1})^\alpha{}_\rho(\mathcal{T}^{-1})^\beta{}_\sigma\\ &= -\frac{1}{2}\xi_T^*\mathcal{T}^\mu{}_\rho\mathcal{T}^\nu{}_\sigma\varepsilon^{\rho\sigma\alpha\beta}F_{\alpha\beta}(\mathcal{T}x) = -\xi_T^*\mathcal{T}^\mu{}_\rho\mathcal{T}^\nu{}_\sigma\tilde{F}^{\rho\sigma}(\mathcal{T}x).\end{aligned} \tag{8.253}$$

可见，$\tilde{F}^{\mu\nu}$ 的 P、T 变换性质与 $F^{\mu\nu}$ 不同，相差一个负号。

于是，动能项算符 $F^\dagger_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ 的 C、P、T 变换为

$$C^{-1}F^\dagger_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)C = |\xi_C|^2F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu\dagger}(x) = +F^\dagger_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x), \tag{8.254}$$

$$P^{-1}F^\dagger_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)P = |\xi_P|^2F^\dagger_{\alpha\beta}(\mathcal{P}x)(\mathcal{P}^{-1})^\alpha{}_\mu(\mathcal{P}^{-1})^\beta{}_\nu\mathcal{P}^\mu{}_\rho\mathcal{P}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\mathcal{P}x) = +F^\dagger_{\mu\nu}(\mathcal{P}x)F^{\mu\nu}(\mathcal{P}x), \tag{8.255}$$

$$T^{-1}F^\dagger_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)T = |\xi_T|^2F^\dagger_{\alpha\beta}(\mathcal{T}x)(\mathcal{T}^{-1})^\alpha{}_\mu(\mathcal{T}^{-1})^\beta{}_\nu\mathcal{T}^\mu{}_\rho\mathcal{T}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\mathcal{T}x) = +F^\dagger_{\mu\nu}(\mathcal{T}x)F^{\mu\nu}(\mathcal{T}x). \tag{8.256}$$

另一方面，质量项算符 $A^\dagger_\mu A^\mu$ 的 C、P、T 变换是

$$C^{-1}A^\dagger_\mu(x)A^\mu(x)C = |\xi_C|^2A_\mu(x)A^{\mu\dagger}(x) = +A^\dagger_\mu(x)A^\mu(x), \tag{8.257}$$

$$P^{-1}A^\dagger_\mu(x)A^\mu(x)P = |\xi_P|^2A^\dagger_\rho(\mathcal{P}x)(\mathcal{P}^{-1})^\rho{}_\mu\mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x) = +A^\dagger_\mu(\mathcal{P}x)A^\mu(\mathcal{P}x), \tag{8.258}$$

$$T^{-1}A^\dagger_\mu(x)A^\mu(x)T = |\xi_T|^2A^\dagger_\rho(\mathcal{T}x)(\mathcal{T}^{-1})^\rho{}_\mu\mathcal{T}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x) = +A^\dagger_\mu(\mathcal{T}x)A^\mu(\mathcal{T}x). \tag{8.259}$$

因此，拉氏量 (3.428) 在 C、P、T 变换下都是不变的。

对于自由的有质量实矢量场，$A^{\mu\dagger}(x) = A^\mu(x)$，(8.243)、(8.244) 和 (8.245) 式意味着 $\xi_C = \xi_C^*$、$\xi_P = \xi_P^*$ 和 $\xi_T = \xi_T^*$，故

$$\xi_C = \pm1, \quad \xi_P = \pm1, \quad \xi_T = \pm1. \tag{8.260}$$

当 $\xi_P = +1$ 时，$A^\mu(x)$ 是**极矢量场**，满足 $P^{-1}A^\mu(x)P = \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x)$；当 $\xi_P = -1$ 时，$A^\mu(x)$ 是**轴矢量场**，满足 $P^{-1}A^\mu(x)P = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x)$。无论 ξ_C、ξ_P 和 ξ_T 取 ±1 中的哪些值，自由有质量实矢量场的拉氏量 (3.187) 在 C、P、T 变换下都是不变的。

8.3.2 电磁场的 C、P、T 变换

相比于有质量矢量场，无质量矢量场只有两个物理的极化矢量 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p},+)$ 和 $\varepsilon^\mu(\mathbf{p},-)$，但 C、P、T 变换性质是类似的。自由无质量复矢量场 $A^\mu(x)$ 的 C、P、T 变换形式同样由 (8.243)、(8.244)、(8.245) 式给出（习题 8.3）。对于自由无质量实矢量场，ξ_C、ξ_P 和 ξ_T 的取值只能是 ±1。电磁场是一种无质量实矢量场，可以通过 QED 相互作用来确定 ξ_C、ξ_P 和 ξ_T 的取值。

在相互作用绘景中，参与相互作用的量子场与自由场具有形式相同的平面波展开式，因此前面推导出来的量子场 C、P、T 变换性质照样成立。于是，理论的 C、P、T 对称性由拉氏量中相互作用项的 C、P、T 变换性质所决定。

在 QED 理论中，相互作用项的算符形式为 $A_\mu\bar\psi\gamma^\mu\psi$。根据 $\bar\psi\gamma^\mu\psi$ 算符的 C 变换 (8.120)、P 变换 (8.177) 和 T 变换 (8.216)，电磁场 $A^\mu(x)$ 的 C、P、T 变换必须是

$$C^{-1}A^\mu(x)C = -A^\mu(x), \tag{8.261}$$
$$P^{-1}A^\mu(x)P = \mathcal{P}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{P}x), \tag{8.262}$$
$$T^{-1}A^\mu(x)T = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu A^\nu(\mathcal{T}x), \tag{8.263}$$

才能使 QED 相互作用项分别在 C、P、T 变换下不变。也就是说，必须取

$$\xi_C=-1,\quad \xi_P=+1,\quad \xi_T=-1. \tag{8.264}$$

这样的取法是做得到的，因此我们说 QED 理论同时具有 C、P、T 对称性，即具有电荷共轭对称性、空间反射对称性和时间反演对称性。

从而，电磁场是 C 宇称为奇的极矢量场。相应场强张量 $F^{\mu\nu}$ 和对偶场强张量 $\tilde F^{\mu\nu}$ 的 C、P、T 变换是

$$C^{-1}F^{\mu\nu}(x)C = -F^{\mu\nu}(x), \tag{8.265}$$
$$P^{-1}F^{\mu\nu}(x)P = \mathcal{P}^\mu{}_\rho\mathcal{P}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\mathcal{P}x), \tag{8.266}$$
$$T^{-1}F^{\mu\nu}(x)T = -\mathcal{T}^\mu{}_\rho\mathcal{T}^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\mathcal{T}x), \tag{8.267}$$
$$C^{-1}\tilde F^{\mu\nu}(x)C = -\tilde F^{\mu\nu}(x), \tag{8.268}$$
$$P^{-1}\tilde F^{\mu\nu}(x)P = -\mathcal{P}^\mu{}_\rho\mathcal{P}^\nu{}_\sigma \tilde F^{\rho\sigma}(\mathcal{P}x), \tag{8.269}$$
$$T^{-1}\tilde F^{\mu\nu}(x)T = \mathcal{T}^\mu{}_\rho\mathcal{T}^\nu{}_\sigma \tilde F^{\rho\sigma}(\mathcal{T}x). \tag{8.270}$$

$F^{\mu\nu}$ 和 $\tilde F^{\mu\nu}$ 的 C 宇称均为奇。$F^{\mu\nu}$ 与 $\tilde F^{\mu\nu}$ 的 P、T 变换都相差一个负号。就 P 变换性质而言，$F^{\mu\nu}$ 是狭义的张量，而 $\tilde F^{\mu\nu}$ 是赝张量。于是，算符 $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 和 $\tilde F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 的 C、P、T 变换为

$$C^{-1}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)C = +F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x), \tag{8.271}$$
$$P^{-1}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)P = +F^{\mu\nu}(\mathcal{P}x)F_{\mu\nu}(\mathcal{P}x), \tag{8.272}$$
$$T^{-1}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)T = +F^{\mu\nu}(\mathcal{T}x)F_{\mu\nu}(\mathcal{T}x), \tag{8.273}$$
$$C^{-1}\tilde F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)C = +\tilde F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x), \tag{8.274}$$

$$P^{-1}\tilde{F}^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)P = -\tilde{F}^{\mu\nu}(\mathcal{P}x)F_{\mu\nu}(\mathcal{P}x), \tag{8.275}$$

$$T^{-1}\tilde{F}^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)T = -\tilde{F}^{\mu\nu}(\mathcal{T}x)F_{\mu\nu}(\mathcal{T}x). \tag{8.276}$$

可见，$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 的 C 宇称和宇称均为偶，而 $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 的 C 宇称为偶，宇称为奇。

8.4　CP 变换

C 变换和 P 变换相继作用，就形成 ***CP* 变换**。CP 变换既反转动量的方向，又将正反粒子互换，但保持角动量不变。在弱相互作用中，左手流算符 $\bar{\psi}_{\mathrm{L}}\gamma^{\mu}\psi_{\mathrm{L}}$ 和右手流算符 $\bar{\psi}_{\mathrm{R}}\gamma^{\mu}\psi_{\mathrm{R}}$ 参与不同的规范相互作用，导致电荷共轭对称性和空间反射对称性都遭到极大的破坏，但 ***CP* 对称性**却近似成立，只受到微小的破坏。另一方面，实验上还没有迹象表明电磁和强相互作用的 CP 对称性受到破坏。

对于复标量场 $\phi(x)$，根据 (8.15)、(8.21)、(8.68) 和 (8.69) 式，产生湮灭算符的 CP 变换是

$$(CP)^{-1}a^{\dagger}_{\mathbf{p}}CP = \eta_C P^{-1}b^{\dagger}_{\mathbf{p}}P = \eta_C\eta^{*}_P b^{\dagger}_{-\mathbf{p}}, \quad (CP)^{-1}a_{\mathbf{p}}CP = \eta^{*}_C P^{-1}b_{\mathbf{p}}P = \eta^{*}_C\eta_P b_{-\mathbf{p}}, \tag{8.277}$$

$$(CP)^{-1}b^{\dagger}_{\mathbf{p}}CP = \eta^{*}_C P^{-1}a^{\dagger}_{\mathbf{p}}P = \eta^{*}_C\eta_P a^{\dagger}_{-\mathbf{p}}, \quad (CP)^{-1}b_{\mathbf{p}}CP = \eta_C P^{-1}a_{\mathbf{p}}P = \eta_C\eta^{*}_P a_{-\mathbf{p}}. \tag{8.278}$$

由 (8.19) 和 (8.71) 式得到 $\phi(x)$ 和 $\phi^{\dagger}(x)$ 的 CP 变换

$$(CP)^{-1}\phi(x)CP = \eta^{*}_C\eta_P\phi^{\dagger}(\mathcal{P}x), \quad (CP)^{-1}\phi^{\dagger}(x)CP = \eta_C\eta^{*}_P\phi(\mathcal{P}x). \tag{8.279}$$

由 (8.24)、(8.25)、(8.73)、(8.74) 式推出算符 $\phi^{\dagger}\phi$ 和 $\mathrm{i}\phi^{\dagger}\overleftrightarrow{\partial^{\mu}}\phi$ 的 CP 变换

$$(CP)^{-1}\phi^{\dagger}(x)\phi(x)CP = +\phi^{\dagger}(\mathcal{P}x)\phi(\mathcal{P}x), \tag{8.280}$$

$$(CP)^{-1}\mathrm{i}\phi^{\dagger}(x)\overleftrightarrow{\partial^{\mu}}\phi(x)CP = -\mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu}\mathrm{i}\phi^{\dagger}(\mathcal{P}x)\overleftrightarrow{\partial^{\nu}}\phi(\mathcal{P}x). \tag{8.281}$$

可见，$\phi^{\dagger}\phi$ 的 ***CP* 宇称**为偶。

对于 *Dirac* 旋量场 $\psi(x)$，根据 C 变换关系 (8.118)–(8.122)、(8.124)、(8.125)、(8.128)、(8.129) 和 P 变换关系 (8.175)–(8.183)，各种旋量双线性型的 CP 变换是

$$(CP)^{-1}\bar{\psi}(x)\psi(x)CP = +\bar{\psi}(\mathcal{P}x)\psi(\mathcal{P}x), \tag{8.282}$$

$$(CP)^{-1}\bar{\psi}(x)\mathrm{i}\gamma^5\psi(x)CP = -\bar{\psi}(\mathcal{P}x)\mathrm{i}\gamma^5\psi(\mathcal{P}x), \tag{8.283}$$

$$(CP)^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)CP = -\mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu}\bar{\psi}(\mathcal{P}x)\gamma^{\nu}\psi(\mathcal{P}x), \tag{8.284}$$

$$(CP)^{-1}\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\gamma^5\psi(x)CP = -\mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu}\bar{\psi}(\mathcal{P}x)\gamma^{\nu}\gamma^5\psi(\mathcal{P}x), \tag{8.285}$$

$$(CP)^{-1}\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)CP = -\mathcal{P}^{\mu}{}_{\rho}\mathcal{P}^{\nu}{}_{\sigma}\bar{\psi}(\mathcal{P}x)\sigma^{\rho\sigma}\psi(\mathcal{P}x), \tag{8.286}$$

$$(CP)^{-1}\bar{\psi}_{\mathrm{R}}(x)\psi_{\mathrm{L}}(x)CP = \bar{\psi}_{\mathrm{L}}(\mathcal{P}x)\psi_{\mathrm{R}}(\mathcal{P}x), \tag{8.287}$$

$$(CP)^{-1}\bar{\psi}_{\mathrm{L}}(x)\psi_{\mathrm{R}}(x)CP = \bar{\psi}_{\mathrm{R}}(\mathcal{P}x)\psi_{\mathrm{L}}(\mathcal{P}x), \tag{8.288}$$

$$(CP)^{-1}\bar{\psi}_{\mathrm{L}}(x)\gamma^{\mu}\psi_{\mathrm{L}}(x)CP = -\mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu}\bar{\psi}_{\mathrm{L}}(\mathcal{P}x)\gamma^{\nu}\psi_{\mathrm{L}}(\mathcal{P}x), \tag{8.289}$$

$$(CP)^{-1}\bar{\psi}_{\mathrm{R}}(x)\gamma^{\mu}\psi_{\mathrm{R}}(x)CP = -\mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu}\bar{\psi}_{\mathrm{R}}(\mathcal{P}x)\gamma^{\nu}\psi_{\mathrm{R}}(\mathcal{P}x). \tag{8.290}$$

可以看到，$\bar{\psi}\psi$ 的 CP 宇称为偶，$\bar{\psi}\mathrm{i}\gamma^5\psi$ 的 CP 宇称为奇。$\bar{\psi}_{\mathrm{R}}\psi_{\mathrm{L}}$ 与 $\bar{\psi}_{\mathrm{L}}\psi_{\mathrm{R}}$ 在 CP 变换下相互转化。左手流算符 $\bar{\psi}_{\mathrm{L}}\gamma^{\mu}\psi_{\mathrm{L}}$ 和右手流算符 $\bar{\psi}_{\mathrm{R}}\gamma^{\mu}\psi_{\mathrm{R}}$ 在 CP 变换后分别回到自身。

对于有质量复矢量场 $A^{\mu}(x)$，由 (8.243) 和 (8.244) 式得到 $A^{\mu}(x)$ 和 $A^{\mu\dagger}(x)$ 的 CP 变换

$$(CP)^{-1}A^{\mu}(x)CP = \xi_C^*\xi_P\mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu}A^{\nu}(\mathcal{P}x), \quad (CP)^{-1}A^{\mu\dagger}(x)CP = \xi_C\xi_P^*\mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu}A^{\nu}(\mathcal{P}x). \tag{8.291}$$

由 (8.246)、(8.247)、(8.251)、(8.252) 式推出 $F^{\mu\nu}$ 和 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 的 CP 变换

$$(CP)^{-1}F^{\mu\nu}(x)CP = \xi_C^*\xi_P\mathcal{P}^{\mu}{}_{\rho}\mathcal{P}^{\nu}{}_{\sigma}F^{\rho\sigma\dagger}(\mathcal{P}x), \tag{8.292}$$

$$(CP)^{-1}\tilde{F}^{\mu\nu}(x)CP = -\xi_C^*\xi_P\mathcal{P}^{\mu}{}_{\rho}\mathcal{P}^{\nu}{}_{\sigma}\tilde{F}^{\rho\sigma\dagger}(\mathcal{P}x). \tag{8.293}$$

另一方面，自共轭场的 CP 宇称是其 C 宇称与宇称之积。实标量场 $\phi(x)$ 的 CP 宇称是 $\eta_C\eta_P$，取值为 ±1。*Majorana* 旋量场 $\psi(x)$ 的 CP 宇称是 $\zeta_C\zeta_P$，取值为 $\pm\mathrm{i}$。有质量实矢量场 $A^{\mu}(x)$ 的 CP 宇称是 $\xi_C\xi_P$，取值为 ±1。

电磁场 $A^{\mu}(x)$ 的 CP 宇称是 $\xi_C\xi_P=-1$，CP 变换为

$$(CP)^{-1}A^{\mu}(x)CP = -\mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu}A^{\nu}(\mathcal{P}x), \tag{8.294}$$

场强张量 $F^{\mu\nu}$ 和对偶场强张量 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 的 CP 变换是

$$(CP)^{-1}F^{\mu\nu}(x)CP = -\mathcal{P}^{\mu}{}_{\rho}\mathcal{P}^{\nu}{}_{\sigma}F^{\rho\sigma}(\mathcal{P}x), \tag{8.295}$$

$$(CP)^{-1}\tilde{F}^{\mu\nu}(x)CP = \mathcal{P}^{\mu}{}_{\rho}\mathcal{P}^{\nu}{}_{\sigma}\tilde{F}^{\rho\sigma}(\mathcal{P}x). \tag{8.296}$$

算符 $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 和 $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 的 CP 变换为

$$(CP)^{-1}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)CP = +F^{\mu\nu}(\mathcal{P}x)F_{\mu\nu}(\mathcal{P}x), \tag{8.297}$$

$$(CP)^{-1}\tilde{F}^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)CP = -\tilde{F}^{\mu\nu}(\mathcal{P}x)F_{\mu\nu}(\mathcal{P}x). \tag{8.298}$$

可见，$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 的 CP 宇称为偶，$\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 的 CP 宇称为奇。

8.5 C、P、T 对称性

前文讨论的所有自由量子场理论都同时具有 C、P、T 对称性。一个相互作用理论是否具有 C、P、T 对称性，则取决于拉氏量中的相互作用项是否在 C、P、T 变换下不变。由于 C、P、T 相位因子的任意性，我们可以对它们取合适的值，使理论具有尽可能多的分立对称性。在一些由量子场构成的算符的分立变换中，相位因子被抵消掉了，使得这些算符具有明确的 C、P、T 变换性质，这些性质在分析分立对称性的过程中起着重要作用。为便于应用，表 8.1 总结了由复标量场 $\phi(x)$、*Dirac* 旋量场 $\psi(x)$ 和电磁场 $A^{\mu}(x)$ 构成的一些算符的 C、P、T 变换性质，里面用到的 $[-]^{\mu}$ 符号定义为

$$[-]^{\mu} = \begin{cases} +1, & \mu = 0, \\ -1, & \mu = 1,2,3. \end{cases} \tag{8.299}$$

表 8.1: 一些算符的 C、P、T 变换性质。

算符	C	P	T	CP	CPT
i	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$
∂^μ	$+$	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	$[-]^\mu$	$-$
$(\partial^\mu\phi^\dagger)\partial_\mu\phi$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\phi^\dagger\phi$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\mathrm{i}\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi$	$-$	$[-]^\mu$	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	$-$
$\mathrm{i}\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\bar\psi\psi$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\bar\psi\mathrm{i}\gamma^5\psi$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\bar\psi\gamma^\mu\psi$	$-$	$[-]^\mu$	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	$-$
$\bar\psi\gamma^\mu\gamma^5\psi$	$+$	$-[-]^\mu$	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	$-$
$\bar\psi\sigma^{\mu\nu}\psi$	$-$	$[-]^\mu[-]^\nu$	$-[-]^\mu[-]^\nu$	$-[-]^\mu[-]^\nu$	$+$
$\bar\psi_\mathrm{R}\psi_\mathrm{L}$	$+$	$\bar\psi_\mathrm{L}\psi_\mathrm{R}$	$+$	$\bar\psi_\mathrm{L}\psi_\mathrm{R}$	$\bar\psi_\mathrm{L}\psi_\mathrm{R}$
$\bar\psi_\mathrm{L}\psi_\mathrm{R}$	$+$	$\bar\psi_\mathrm{R}\psi_\mathrm{L}$	$+$	$\bar\psi_\mathrm{R}\psi_\mathrm{L}$	$\bar\psi_\mathrm{R}\psi_\mathrm{L}$
$\bar\psi_\mathrm{L}\gamma^\mu\psi_\mathrm{L}$	$-\bar\psi_\mathrm{R}\gamma^\mu\psi_\mathrm{R}$	$[-]^\mu\bar\psi_\mathrm{R}\gamma^\mu\psi_\mathrm{R}$	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	$-$
$\bar\psi_\mathrm{R}\gamma^\mu\psi_\mathrm{R}$	$-\bar\psi_\mathrm{L}\gamma^\mu\psi_\mathrm{L}$	$[-]^\mu\bar\psi_\mathrm{L}\gamma^\mu\psi_\mathrm{L}$	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	$-$
A^μ	$-$	$[-]^\mu$	$[-]^\mu$	$-[-]^\mu$	$-$
$F^{\mu\nu}$	$-$	$[-]^\mu[-]^\nu$	$-[-]^\mu[-]^\nu$	$-[-]^\mu[-]^\nu$	$+$
$\tilde F^{\mu\nu}$	$-$	$-[-]^\mu[-]^\nu$	$[-]^\mu[-]^\nu$	$[-]^\mu[-]^\nu$	$+$
$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$F^{\mu\nu}\tilde F_{\mu\nu}$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$

注: 这里 $\phi(x)$ 是复标量场, $\psi(x)$ 是 Dirac 旋量场, $A^\mu(x)$ 是电磁场, $F^{\mu\nu}$ 和 $\tilde F^{\mu\nu}$ 是电磁场的场强张量和对偶场强张量。

在拉氏量 (5.5) 描述的 Yukawa 理论中，实标量场 $\phi(x)$ 与 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的相互作用算符是 $\phi\bar\psi\psi$，那么，C、P、T 对称性要求 $\phi(x)$ 的相位因子为

$$\eta_C = \eta_P = \eta_T = +1, \tag{8.300}$$

则 $\phi(x)$ 是狭义的标量场，C 宇称和宇称均为偶。

在拉氏量 (7.449) 描述的另一种 Yukawa 理论中，实标量场 $\phi(x)$ 与 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的相互作用算符是 $\phi\bar\psi\mathrm{i}\gamma^5\psi$，那么，$C$、$P$、$T$ 对称性要求 $\phi(x)$ 的相位因子为

$$\eta_C = +1, \quad \eta_P = \eta_T = -1, \tag{8.301}$$

则 $\phi(x)$ 是赝标量场，C 宇称为偶，宇称为奇。

将 C、P、T 变换相继作用，就得到 ***CPT* 变换**，相应的变换算符记作

$$\Theta \equiv CPT. \tag{8.302}$$

由 $\Theta^\dagger\Theta = T^\dagger P^\dagger C^\dagger CPT = 1$ 得

$$\Theta^{-1} = \Theta^\dagger = T^\dagger P^\dagger C^\dagger = T^{-1}P^{-1}C^{-1}, \tag{8.303}$$

而且

$$\Theta^{-1}\mathrm{i}\Theta = T^{-1}P^{-1}C^{-1}\mathrm{i}CPT = T^{-1}\mathrm{i}T = -\mathrm{i}. \tag{8.304}$$

可见，Θ 跟 T 一样是反线性反幺正算符。

从表 8.1 可以看到，像 $\mathrm{i}\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial^\mu} \phi$、$\bar\psi\gamma^\mu\psi$、$\bar\psi\gamma^\mu\gamma^5\psi$、$A^\mu$ 这样具有 1 个未缩并 Lorentz 指标的厄米算符，在 CPT 变换下得到一个负号，即 CPT 相位因子为奇；另一方面，像 $(\partial^\mu\phi^\dagger)\partial_\mu\phi$、$\phi^\dagger\phi$、$\mathrm{i}\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi$、$\bar\psi\psi$、$\bar\psi\mathrm{i}\gamma^5\psi$、$\bar\psi\sigma^{\mu\nu}\psi$、$F^{\mu\nu}$、$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 这样具有 0 个或 2 个未缩并 Lorentz 指标的厄米算符，在 CPT 变换下得到一个正号，即 CPT 相位因子为偶。

这种情况是普遍的，我们可以对量子场选取适当的 C、P、T 相位因子，使得由各种量子场和时空导数构成的厄米算符在 CPT 变换下的奇偶性与算符中未缩并 Lorentz 指标个数的奇偶性相同，即具有奇（偶）数个未缩并 Lorentz 指标的厄米算符的 CPT 相位因子为奇（偶）。在相对论性的局域量子场论里，拉氏量 $\mathcal{L}(x)$ 是一个厄米的 Lorentz 标量，必须由不携带未缩并 Lorentz 指标的厄米算符构成，因此 $\mathcal{L}(x)$ 的 CPT 相位因子为偶，即 $\mathcal{L}(x)$ 在 CPT 变换下不变。这就是 ***CPT* 定理**，它的准确表述如下：

> 如果一个局域量子场论由一个在固有保时向 *Lorentz* 变换下不变的厄米拉氏量 $\mathcal{L}(x)$ 描述，而且场的量子化遵循自旋－统计定理，那么 $\mathcal{L}(x)$ 在 CPT 变换下不变，满足
>
> $$\Theta^{-1}\mathcal{L}(x)\Theta = +\mathcal{L}(-x). \tag{8.305}$$

拉氏量的 CPT 不变性意味着作用量、场的运动方程和哈密顿量 H 都在 CPT 变换下不变，有

$$\Theta^{-1}H(t)\Theta = +H(-t), \tag{8.306}$$

因而理论具有 ***CPT* 对称性**。

在相互作用绘景中，CPT 对称性意味着相互作用部分的哈密顿量 H_1 满足

$$\Theta^{-1}H_1(t)\Theta = +H_1(-t), \tag{8.307}$$

则时间演化算符 (5.124) 的 CPT 变换为

$$\begin{aligned}\Theta^{-1}U(t,t_0)\Theta &= \Theta^{-1}\,\mathsf{T}\exp\left[-\mathrm{i}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t\,H_1(t)\right]\Theta = \mathsf{T}\exp\left[\mathrm{i}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t\,\Theta^{-1}H_1(t)\Theta\right]\\ &= \mathsf{T}\exp\left[\mathrm{i}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t\,H_1(-t)\right] = \mathsf{T}\exp\left[-\mathrm{i}\int_{-t_0}^{-t}\mathrm{d}t\,H_1(t)\right] = U(-t,-t_0),\end{aligned} \tag{8.308}$$

倒数第二步作了变量替换 $t \to -t$。从而 S 算符 (5.130) 的 CPT 变换是

$$\Theta^{-1} S \Theta = \Theta^{-1} U(+\infty, -\infty)\Theta = U(-\infty, +\infty) = U^{\dagger}(+\infty, -\infty) = S^{\dagger}, \tag{8.309}$$

第三步用到 (5.106) 式。

CPT 定理的证明可追溯到 1954 年 Gerhart Lüders 和 Wolfgang Pauli 的工作 [45]。由于 CPT 定理成立的条件在量子场论中普遍得到满足，因而 CPT 对称性被认为是一个广泛存在的对称性。实验上尚未发现破坏 CPT 对称性的现象。CPT 对称性保证**正粒子和反粒子的质量和寿命完全相同，电荷等守恒荷的大小相等，符号相反**。这些结论在电荷共轭对称性遭到破坏时仍然成立，因而并不平庸。

现在证明 CPT 对称性保证正反粒子的质量相同。一个静止的 $\mathcal{A}$ 粒子对应的态矢是哈密顿量 H（可包含相互作用项）、自旋角动量平方 $\mathbf{S}^2$ 和自旋角动量第 3 分量 S^3 的共同本征态，本征值为 $\mathcal{A}$ 粒子质量 $m_{\mathcal{A}}$、$s(s+1)$ 和 σ。由于 CPT 变换不改变自旋量子数 s，下面的讨论与 s 无关，我们将这个态矢记作 $|\mathcal{A}, \sigma\rangle$，满足 $\langle \mathcal{A}, \sigma | \mathcal{A}, \sigma \rangle = 1$ 和

$$H |\mathcal{A}, \sigma\rangle = m_{\mathcal{A}} |\mathcal{A}, \sigma\rangle . \tag{8.310}$$

CPT 对称性意味着 (8.306) 式成立，利用它将 $\mathcal{A}$ 粒子质量表达为

$$m_{\mathcal{A}} = \langle \mathcal{A}, \sigma | H |\mathcal{A}, \sigma\rangle = \langle \mathcal{A}, \sigma | \Theta^{-1} H \Theta |\mathcal{A}, \sigma\rangle . \tag{8.311}$$

作为 C、P 和 T 的联合变换，CPT 变换将正反粒子互换，反转角动量的方向，同时保持动量不变。从而，CPT 变换将 S^3 本征值为 σ 的 $\mathcal{A}$ 粒子转化为 S^3 本征值为 $-\sigma$ 的反粒子 $\bar{\mathcal{A}}$，相应的量子态是

$$|\mathcal{A}, \sigma\rangle_{\Theta} \equiv \Theta |\mathcal{A}, \sigma\rangle = \chi_{\mathcal{A}} \left|\bar{\mathcal{A}}, -\sigma\right\rangle , \tag{8.312}$$

其中 $\chi_{\mathcal{A}}$ 是相位因子。利用 (8.303) 和 (8.46) 式，将 (8.311) 式化为

$$m_{\mathcal{A}} = \langle \mathcal{A}, \sigma | \Theta^{\dagger} H |\mathcal{A}, \sigma\rangle_{\Theta} = {}_{\Theta}\langle \mathcal{A}, \sigma | H |\mathcal{A}, \sigma\rangle^{*}_{\Theta} = {}_{\Theta}\langle \mathcal{A}, \sigma | H |\mathcal{A}, \sigma\rangle_{\Theta} . \tag{8.313}$$

另一方面，$\left|\bar{\mathcal{A}}, -\sigma\right\rangle$ 是静止的 $\bar{\mathcal{A}}$ 粒子的哈密顿量本征态，本征值为 $\bar{\mathcal{A}}$ 粒子质量 $m_{\bar{\mathcal{A}}}$，故

$$m_{\bar{\mathcal{A}}} = \left\langle \bar{\mathcal{A}}, -\sigma \right| H \left|\bar{\mathcal{A}}, -\sigma\right\rangle = |\chi_{\mathcal{A}}|^2 {}_{\Theta}\langle \mathcal{A}, \sigma | H |\mathcal{A}, \sigma\rangle_{\Theta} = {}_{\Theta}\langle \mathcal{A}, \sigma | H |\mathcal{A}, \sigma\rangle_{\Theta} = m_{\mathcal{A}}. \tag{8.314}$$

这样就证明了反粒子 $\bar{\mathcal{A}}$ 的质量与正粒子 $\mathcal{A}$ 相同。

接下来在微扰论最低阶证明 CPT 对称性保证正反粒子的寿命相同 [46]。考虑哈密顿量的相互作用部分包含两个成分，其中主要成分 H_{s} 描述较强的相互作用，如强相互作用，而微扰成分 H_{w} 描述引起衰变的较弱相互作用，如电磁或弱相互作用。CPT 对称性意味着

$$\Theta^{-1} H_{\mathrm{s}}(t) \Theta = H_{\mathrm{s}}(-t), \quad \Theta^{-1} H_{\mathrm{w}}(t) \Theta = H_{\mathrm{w}}(-t). \tag{8.315}$$

考虑在 $t = 0$ 时刻静止的 $\mathcal{A}$ 粒子发生衰变过程 $\mathcal{A} \to f$，其中 f 代表所有可能的衰变末态。描述 $\mathcal{A}$ 粒子的态矢 $|\mathcal{A}, \sigma\rangle$ 是 H_{s} 的本征态。在 H_{w} 的最低阶，$\mathcal{A}$ 粒子的衰变宽度表达为

$$\Gamma_{\mathcal{A}} = 2\pi \sum_{f} \delta(E_{\mathcal{A}} - E_f) \left|\langle f | U(+\infty, 0) H_{\mathrm{w}}(0) |\mathcal{A}, \sigma\rangle\right|^2 , \tag{8.316}$$

其中 $E_{\mathcal{A}}=m_{\mathcal{A}}$，$E_f$ 是末态 f 中所有粒子的能量之和，时间演化算符 $U(+\infty,0)$ 只用 $H_{\rm s}$ 定义。相应地，反粒子 $\bar{\mathcal{A}}$ 的衰变过程是 $\bar{\mathcal{A}}\to\bar f$，末态 $\bar f$ 中的粒子都是 f 中的反粒子，态矢 $\left|\bar{\mathcal{A}},\sigma\right\rangle$ 也是 $H_{\rm s}$ 的本征态，CPT 变换式 (8.312) 成立。$\bar{\mathcal{A}}$ 粒子的衰变宽度为

$$\Gamma_{\bar{\mathcal{A}}}=2\pi\sum_{\bar f}\delta(E_{\mathcal{A}}-E_{\bar f})\left|\left\langle\bar f\right|U(+\infty,0)H_{\rm w}(0)\left|\bar{\mathcal{A}},\sigma\right\rangle\right|^2. \tag{8.317}$$

注意 $\mathcal{A}$ 和 $\bar{\mathcal{A}}$ 的衰变宽度都不依赖于 σ 的取值。

对 $|f\rangle$ 作 CPT 变换，得

$$|f\rangle_\Theta\equiv\Theta\,|f\rangle=\chi_f\left|\bar f\right\rangle, \tag{8.318}$$

其中 χ_f 是相位因子。由 (8.308) 和 (8.315) 式推出

$$\begin{aligned}\langle f|\,U(+\infty,0)H_{\rm w}(0)\,|\mathcal{A},\sigma\rangle&=\langle f|\,\Theta^{-1}U(-\infty,0)\Theta\Theta^{-1}H_{\rm w}(0)\Theta\,|\mathcal{A},\sigma\rangle\\&={}_\Theta\langle f|\,U(-\infty,0)H_{\rm w}(0)\,|\mathcal{A},\sigma\rangle^*_\Theta,\end{aligned} \tag{8.319}$$

$$\begin{aligned}|\langle f|\,U(+\infty,0)H_{\rm w}(0)\,|\mathcal{A},\sigma\rangle|^2&=|{}_\Theta\langle f|\,U(-\infty,0)H_{\rm w}(0)\,|\mathcal{A},\sigma\rangle^*_\Theta|^2\\&=\left|\left\langle\bar f\right|U(-\infty,0)H_{\rm w}(0)\left|\bar{\mathcal{A}},-\sigma\right\rangle\right|^2.\end{aligned} \tag{8.320}$$

再利用 $U(-\infty,0)=U(-\infty,+\infty)U(+\infty,0)=S^\dagger U(+\infty,0)$，将 (8.316) 式化为

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mathcal{A}}&=2\pi\sum_{\bar f}\delta(E_{\mathcal{A}}-E_{\bar f})\left|\left\langle\bar f\right|S^\dagger U(+\infty,0)H_{\rm w}(0)\left|\bar{\mathcal{A}},-\sigma\right\rangle\right|^2\\&=2\pi\sum_{\bar f}\delta(E_{\mathcal{A}}-E_{\bar f})\left|\sum_{\bar f'}\left\langle\bar f\right|S^\dagger\left|\bar f'\right\rangle\left\langle\bar f'\right|U(+\infty,0)H_{\rm w}(0)\left|\bar{\mathcal{A}},-\sigma\right\rangle\right|^2\\&=2\pi\sum_{\bar f,\bar f',\bar f''}\delta(E_{\mathcal{A}}-E_{\bar f})\left\langle\bar f\right|S^\dagger\left|\bar f'\right\rangle\left\langle\bar f'\right|U(+\infty,0)H_{\rm w}(0)\left|\bar{\mathcal{A}},-\sigma\right\rangle\\&\qquad\times\left\langle\bar f\right|S^\dagger\left|\bar f''\right\rangle^*\left\langle\bar f''\right|U(+\infty,0)H_{\rm w}(0)\left|\bar{\mathcal{A}},-\sigma\right\rangle^*\end{aligned} \tag{8.321}$$

第二步插入了一组完备集

$$\sum_{\bar f'}\left|\bar f'\right\rangle\left\langle\bar f'\right|=1. \tag{8.322}$$

注意到 S 矩阵元只在初末态能量相等时非零，且 $SS^\dagger=1$，对 $\bar f$ 求和的部分化为

$$\begin{aligned}&\sum_{\bar f}\delta(E_{\mathcal{A}}-E_{\bar f})\left\langle\bar f\right|S^\dagger\left|\bar f'\right\rangle\left\langle\bar f\right|S^\dagger\left|\bar f''\right\rangle^*=\sum_{\bar f}\delta(E_{\mathcal{A}}-E_{\bar f})\left(\left\langle\bar f'\right|S\left|\bar f\right\rangle\left\langle\bar f\right|S^\dagger\left|\bar f''\right\rangle\right)^*\\&=\delta(E_{\mathcal{A}}-E_{\bar f'})\left\langle\bar f'\right|SS^\dagger\left|\bar f''\right\rangle^*=\delta(E_{\mathcal{A}}-E_{\bar f'})\delta_{\bar f'\bar f''},\end{aligned} \tag{8.323}$$

从而推出

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mathcal{A}}&=2\pi\sum_{\bar f',\bar f''}\delta(E_{\mathcal{A}}-E_{\bar f'})\delta_{\bar f'\bar f''}\left\langle\bar f'\right|U(+\infty,0)H_{\rm w}(0)\left|\bar{\mathcal{A}},-\sigma\right\rangle\left\langle\bar f''\right|U(+\infty,0)H_{\rm w}(0)\left|\bar{\mathcal{A}},-\sigma\right\rangle^*\\&=2\pi\sum_{\bar f'}\delta(E_{\mathcal{A}}-E_{\bar f'})\left|\left\langle\bar f'\right|U(+\infty,0)H_{\rm w}(0)\left|\bar{\mathcal{A}},-\sigma\right\rangle\right|^2=\Gamma_{\bar{\mathcal{A}}}.\end{aligned} \tag{8.324}$$

于是，正粒子 $\mathcal{A}$ 与反粒子 $\bar{\mathcal{A}}$ 的衰变宽度相等，因而寿命相同。

8.6　Weyl、Dirac 和 Majorana 旋量

8.6.1　左手和右手 Weyl 旋量

Dirac 旋量场和 Majorana 旋量场都可以分解为左手和右手的 Weyl 旋量场，为了更深刻地认识旋量场，我们在本节进一步研究 *Weyl 旋量*。

用 (4.75) 式引入的 σ^μ 和 $\bar{\sigma}^\mu$ 定义 2×2 矩阵

$$s^{\mu\nu} \equiv \frac{\mathrm{i}}{4}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu), \tag{8.325}$$

由 $(\sigma^\mu)^\dagger = \sigma^\mu$ 和 $(\bar{\sigma}^\mu)^\dagger = \bar{\sigma}^\mu$ 推出

$$(s^{\mu\nu})^\dagger = -\frac{\mathrm{i}}{4}[(\bar{\sigma}^\nu)^\dagger(\sigma^\mu)^\dagger - (\bar{\sigma}^\mu)^\dagger(\sigma^\nu)^\dagger] = -\frac{\mathrm{i}}{4}(\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu - \bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu) = \frac{\mathrm{i}}{4}(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu), \tag{8.326}$$

从而将 *Weyl 表象*中的旋量表示生成元 (4.77) 化为

$$S^{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{4}\begin{pmatrix}\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu & \\ & \bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s^{\mu\nu} & \\ & (s^{\mu\nu})^\dagger\end{pmatrix}. \tag{8.327}$$

也就是说，4×4 矩阵 $S^{\mu\nu}$ 是 2×2 矩阵 $s^{\mu\nu}$ 和 $(s^{\mu\nu})^\dagger$ 的直和，因而 $s^{\mu\nu}$ 和 $(s^{\mu\nu})^\dagger$ 是两个 Lorentz 群 2 维表示的生成元。

对于 Lorentz 变换 Λ 的一组变换参数 $\omega_{\mu\nu}$，用 $s^{\mu\nu}$ 生成固有保时向的有限变换

$$d(\Lambda) \equiv \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}s^{\mu\nu}\right), \tag{8.328}$$

它属于*左手* Weyl 旋量所处的 2 维表示。相应的逆变换矩阵为

$$d^{-1}(\Lambda) = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}s^{\mu\nu}\right), \tag{8.329}$$

取厄米共轭，得

$$d^{-1\dagger}(\Lambda) = \exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}(s^{\mu\nu})^\dagger\right]. \tag{8.330}$$

这其实是用 $(s^{\mu\nu})^\dagger$ 生成的固有保时向有限变换，属于*右手* Weyl 旋量所处的 2 维表示。于是，旋量表示的 4×4 变换矩阵 (4.13) 分解为

$$D(\Lambda) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right) = \begin{pmatrix}\exp(-\mathrm{i}\omega_{\mu\nu}s^{\mu\nu}/2) & \\ & \exp[-\mathrm{i}\omega_{\mu\nu}(s^{\mu\nu})^\dagger/2]\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}d(\Lambda) & \\ & d^{-1\dagger}(\Lambda)\end{pmatrix}. \tag{8.331}$$

因此，4 维旋量表示 $\{D(\Lambda)\}$ 是 2 维表示 $\{d(\Lambda)\}$ 和 $\{d^{-1\dagger}(\Lambda)\}$ 的直和。

利用 (8.97) 式推出

$$\sigma^2 s^{\mu\nu}\sigma^2 = \frac{\mathrm{i}}{4}(\sigma^2\sigma^\mu\sigma^2\sigma^2\bar{\sigma}^\nu\sigma^2 - \sigma^2\sigma^\nu\sigma^2\sigma^2\bar{\sigma}^\mu\sigma^2) = \frac{\mathrm{i}}{4}[(\bar{\sigma}^\mu)^{\mathrm{T}}(\sigma^\nu)^{\mathrm{T}} - (\bar{\sigma}^\nu)^{\mathrm{T}}(\sigma^\mu)^{\mathrm{T}}] = -(s^{\mu\nu})^{\mathrm{T}}, \tag{8.332}$$

故

$$\sigma^2 d(\Lambda)\sigma^2 = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^2 s^{\mu\nu}\sigma^2\right) = \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(s^{\mu\nu})^{\mathrm{T}}\right] = \left[\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}s^{\mu\nu}\right)\right]^{\mathrm{T}} = d^{-1\mathrm{T}}(\Lambda). \tag{8.333}$$

将 Pauli 矩阵 σ^2 看作一个幺正变换矩阵，满足

$$(\sigma^2)^{-1} = (\sigma^2)^\dagger = \sigma^2, \tag{8.334}$$

则 (8.333) 式意味着 $d(\Lambda)$ 与 $d^{-1\mathrm{T}}(\Lambda)$ 由一个相似变换联系起来，相似变换矩阵为 σ^2。根据 1.4 节定义，线性表示 $\{d(\Lambda)\}$ 和 $\{d^{-1\mathrm{T}}(\Lambda)\}$ 是等价的。由于 $(\sigma^2)^* = -\sigma^2$，(8.333) 式的复共轭为

$$\sigma^2 d^*(\Lambda)\sigma^2 = d^{-1\dagger}(\Lambda). \tag{8.335}$$

线性表示 $\{d^*(\Lambda)\}$ 是 $\{d(\Lambda)\}$ 的复共轭表示，而线性表示 $\{d^{-1\dagger}(\Lambda)\}$ 与 $\{d^*(\Lambda)\}$ 等价。

于是，**左手 Weyl 旋量**

$$\eta_a = \begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix} \tag{8.336}$$

的固有保时向 Lorentz 变换为

$$\eta'_a = [d(\Lambda)]_a{}^b\eta_b, \quad a, b = 1, 2. \tag{8.337}$$

η_a 是表示 $\{d(\Lambda)\}$ 中的态。引入反对称的**二维 Levi-Civita 符号** ε^{ab}，定义为

$$\varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = 1, \quad \varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = 0, \tag{8.338}$$

它与 Pauli 矩阵 σ^2 的关系是

$$\varepsilon^{ab} = \begin{pmatrix} & 1\\ -1 & \end{pmatrix} = (\mathrm{i}\sigma^2)^{ab}. \tag{8.339}$$

通过 ε^{ab} 定义

$$\eta^a \equiv \varepsilon^{ab}\eta_b = \begin{pmatrix} & 1\\ -1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\eta_2\\ -\eta_1\end{pmatrix}, \tag{8.340}$$

则

$$\eta^1 = \eta_2, \quad \eta^2 = -\eta_1. \tag{8.341}$$

(8.333) 式等价于 $\sigma^2 d(\Lambda) = d^{-1\mathrm{T}}(\Lambda)\sigma^2$，故 η^a 的 Lorentz 变换为

$$\eta'^a = \varepsilon^{ab}\eta'_b = \varepsilon^{ab}[d(\Lambda)]_b{}^c\eta_c = \mathrm{i}[\sigma^2 d(\Lambda)]^{ac}\eta_c = \mathrm{i}[d^{-1\mathrm{T}}(\Lambda)\sigma^2]^{ac}\eta_c = [d^{-1\mathrm{T}}(\Lambda)]^a{}_b\varepsilon^{bc}\eta_c, \tag{8.342}$$

即

$$\eta'^a = [d^{-1\mathrm{T}}(\Lambda)]^a{}_b\eta^b. \tag{8.343}$$

可见 η^a 是表示 $\{d^{-1\mathrm{T}}(\Lambda)\}$ 中的态。由于这个表示等价于 $\{d(\Lambda)\}$，η^a 也是左手 Weyl 旋量。

两种左手 Weyl 旋量 η_a 与 η^a 是等价的，它们的关系类似于 Lorentz 逆变矢量 A^μ 与协变矢量 $A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu$ 之间的关系，而 ε^{ab} 的作用类似于度规 $g_{\mu\nu}$，相当于 2 维旋量空间的度规。ε^{ab} 用于提升旋量指标。用

$$\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = -1, \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0 \tag{8.344}$$

定义 ε_{ab}，则

$$\varepsilon_{ab} = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} = (-\mathrm{i}\sigma^2)_{ab}, \tag{8.345}$$

满足

$$\varepsilon_{ab}\varepsilon^{bc} = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} = \delta_a{}^c, \tag{8.346}$$

即 ε_{ab} 是 ε^{ab} 的逆矩阵。于是 (8.341) 式表明

$$\eta_a = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\eta^2 \\ \eta^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \end{pmatrix} = \varepsilon_{ab}\eta^b, \tag{8.347}$$

也就是说，ε_{ab} 用于下降旋量指标。

任意两个左手 Weyl 旋量 η_a 和 ζ_a 的内积

$$\eta^a\zeta_a = \varepsilon^{ab}\eta_b\zeta_a = \varepsilon_{ab}\eta^a\zeta^b \tag{8.348}$$

在固有保时向 Lorentz 变换下不变，满足

$$\eta'^a\zeta'_a = [d^{-1\mathrm{T}}(\Lambda)]^a{}_b\eta^b[d(\Lambda)]_a{}^c\zeta_c = \eta^b[d^{-1}(\Lambda)]_b{}^a[d(\Lambda)]_a{}^c\zeta_c = \eta^b\delta_b{}^c\zeta_c = \eta^a\zeta_a. \tag{8.349}$$

第二步用了转置性质 $[d^{-1\mathrm{T}}(\Lambda)]^a{}_b = [d^{-1}(\Lambda)]_b{}^a$。可见 $\eta^a\zeta_a$ 是 Lorentz 标量。由 (8.341) 式得

$$\eta^a\zeta_a = \eta^1\zeta_1 + \eta^2\zeta_2 = \eta_2\zeta_1 - \eta_1\zeta_2 = -\eta_2\zeta^2 - \eta_1\zeta^1 = -\eta_a\zeta^a, \tag{8.350}$$

即参与缩并的旋量指标一升一降会多出一个负号。这种性质与 Lorentz 矢量内积 $A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu$ 截然不同，原因在于我们使用的旋量空间度规 ε^{ab} 是反对称的。

上式的特例

$$\eta^a\eta_a = -\eta_a\eta^a \tag{8.351}$$

表明，如果 η_a 和 η^a 是通常的复数，则 $\eta^a\eta_a = 0$。为了使 $\eta^a\eta_a \neq 0$，必须要求左手 Weyl 旋量 η^a 与 η_a 反对易，即它们是 **Grassmann 数**。任意两个 *Grassmann* 数都是反对易的。若干个 Grassmann 数的线性组合也是 Grassmann 数，因此，η_a 是 Grassmann 数意味着 $\eta^a = \varepsilon^{ab}\eta_b$ 也是 Grassmann 数。虽然如此，Grassmann 数是反对易的 c 数，不是算符。对 Grassmann 数表达的旋量场进行量子化，才得到旋量场算符，而 Grassmann 数的反对易性质与旋量场算符的反对易关系相匹配。

假设 η_a 和 ζ^a 都是 Grassmann 数，则 $\eta_a\zeta^a = -\zeta^a\eta_a$，相应地，我们将省略旋量指标的内积写成

$$\eta\zeta \equiv \eta^a\zeta_a = -\eta_a\zeta^a = \zeta^a\eta_a = \zeta\eta. \tag{8.352}$$

这样一来，内积 $\eta\zeta$ 和 $\zeta\eta$ 是相等的。内积 $\eta^a\eta_a$ 有以下等价表达式，

$$\eta\eta=\eta^a\eta_a=\varepsilon_{ab}\eta^a\eta^b=-\eta^1\eta^2+\eta^2\eta^1=-2\eta^1\eta^2=2\eta_2\eta_1=\eta_2\eta_1-\eta_1\eta_2=-\varepsilon^{ab}\eta_a\eta_b=-\eta_a\eta^a. \tag{8.353}$$

将左手 Weyl 旋量 η_a 的复共轭记为

$$\eta_{\dot a}^\dagger=\begin{pmatrix}\eta_{\dot 1}^\dagger\\ \eta_{\dot 2}^\dagger\end{pmatrix}. \tag{8.354}$$

量子化之后，算符 η_a 和 $\eta_{\dot a}^\dagger$ 互为厄米共轭。对 (8.337) 式两边取复共轭，得到 $\eta_{\dot a}^\dagger$ 的 Lorentz 变换

$$\eta_{\dot a}'^\dagger=[d^*(\Lambda)]_{\dot a}{}^{\dot b}\eta_{\dot b}^\dagger. \tag{8.355}$$

引进指标上带着点号的二维 Levi-Civita 符号

$$\varepsilon^{\dot a\dot b}=\begin{pmatrix}&1\\-1&\end{pmatrix}=(\mathrm{i}\sigma^2)^{\dot a\dot b},\quad \varepsilon_{\dot a\dot b}=\begin{pmatrix}&-1\\1&\end{pmatrix}=(-\mathrm{i}\sigma^2)_{\dot a\dot b}, \tag{8.356}$$

其分量数值与 ε^{ab} 和 ε_{ab} 分别相同。定义

$$\eta^{\dagger\dot a}\equiv\varepsilon^{\dot a\dot b}\eta_{\dot b}^\dagger=\begin{pmatrix}&1\\-1&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_{\dot 1}^\dagger\\ \eta_{\dot 2}^\dagger\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta_{\dot 2}^\dagger\\ -\eta_{\dot 1}^\dagger\end{pmatrix}, \tag{8.357}$$

则

$$\eta^{\dagger\dot 1}=\eta_{\dot 2}^\dagger,\quad \eta^{\dagger\dot 2}=-\eta_{\dot 1}^\dagger. \tag{8.358}$$

(8.335) 式等价于 $\sigma^2d^*(\Lambda)=d^{-1\dagger}(\Lambda)\sigma^2$，故 $\eta^{\dagger\dot a}$ 的 Lorentz 变换为

$$\eta'^{\dagger\dot a}=\varepsilon^{\dot a\dot b}\eta_{\dot b}'^\dagger=\varepsilon^{\dot a\dot b}[d^*(\Lambda)]_{\dot b}{}^{\dot c}\eta_{\dot c}^\dagger=\mathrm{i}[\sigma^2d^*(\Lambda)]^{\dot a\dot c}\eta_{\dot c}^\dagger=\mathrm{i}[d^{-1\dagger}(\Lambda)\sigma^2]^{\dot a\dot c}\eta_{\dot c}^\dagger=[d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot a}{}_{\dot b}\varepsilon^{\dot b\dot c}\eta_{\dot c}^\dagger, \tag{8.359}$$

即

$$\eta'^{\dagger\dot a}=[d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot a}{}_{\dot b}\eta^{\dagger\dot b}. \tag{8.360}$$

可见，$\eta^{\dagger\dot a}$ 是线性表示 $\{d^{-1\dagger}(\Lambda)\}$ 中的态，因而是**右手 Weyl 旋量**。由于表示 $\{d^*(\Lambda)\}$ 等价于 $\{d^{-1\dagger}(\Lambda)\}$，$\eta_{\dot a}^\dagger$ 也是右手 Weyl 旋量。因此，在这套符号约定中，不带点的旋量指标对应于左手 Weyl 旋量及其表示，而带点的旋量指标对应于右手 Weyl 旋量及其表示。

任意两个右手 Weyl 旋量 $\eta^{\dagger\dot a}$ 和 $\zeta^{\dagger\dot a}$ 的内积

$$\eta_{\dot a}^\dagger\zeta^{\dagger\dot a}=\varepsilon_{\dot a\dot b}\eta^{\dagger\dot b}\zeta^{\dagger\dot a}=\varepsilon^{\dot a\dot b}\eta_{\dot a}^\dagger\zeta_{\dot b}^\dagger \tag{8.361}$$

在固有保时向 Lorentz 变换下不变，满足

$$\eta_{\dot a}'^\dagger\zeta'^{\dagger\dot a}=[d^*(\Lambda)]_{\dot a}{}^{\dot b}\eta_{\dot b}^\dagger[d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot a}{}_{\dot c}\zeta^{\dagger\dot c}=\eta_{\dot b}^\dagger[d^\dagger(\Lambda)]^{\dot b}{}_{\dot a}[d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot a}{}_{\dot c}\zeta^{\dagger\dot c}=\eta_{\dot b}^\dagger\delta^{\dot b}{}_{\dot c}\zeta^{\dagger\dot c}=\eta_{\dot a}^\dagger\zeta^{\dagger\dot a}. \tag{8.362}$$

第二步用了转置性质 $[d^*(\Lambda)]_{\dot a}{}^{\dot b}=[d^\dagger(\Lambda)]^{\dot b}{}_{\dot a}$。可见 $\eta_{\dot a}^\dagger\zeta^{\dagger\dot a}$ 是 Lorentz 标量。由 (8.358) 式得

$$\eta_{\dot a}^\dagger\zeta^{\dagger\dot a}=\eta_{\dot 1}^\dagger\zeta^{\dagger\dot 1}+\eta_{\dot 2}^\dagger\zeta^{\dagger\dot 2}=-\eta^{\dagger\dot 2}\zeta^{\dagger\dot 1}+\eta^{\dagger\dot 1}\zeta^{\dagger\dot 2}=-\eta^{\dagger\dot 2}\zeta_{\dot 2}^\dagger-\eta^{\dagger\dot 1}\zeta_{\dot 1}^\dagger=-\eta^{\dagger\dot a}\zeta_{\dot a}^\dagger, \tag{8.363}$$

即参与缩并的带点旋量指标一升一降会多出一个负号。假设右手 Weyl 旋量 $\eta^{\dagger\dot{a}}$ 和 $\zeta^\dagger_{\dot{a}}$ 都是 *Grassmann 数*，则 $\eta^{\dagger\dot{a}}\zeta^\dagger_{\dot{a}} = -\zeta^\dagger_{\dot{a}}\eta^{\dagger\dot{a}}$。将省略带点旋量指标的内积写成

$$\eta^\dagger\zeta^\dagger \equiv \eta^\dagger_{\dot{a}}\zeta^{\dagger\dot{a}} = -\eta^{\dagger\dot{a}}\zeta^\dagger_{\dot{a}} = \zeta^\dagger_{\dot{a}}\eta^{\dagger\dot{a}} = \zeta^\dagger\eta^\dagger, \tag{8.364}$$

则内积 $\eta^\dagger\zeta^\dagger$ 和 $\zeta^\dagger\eta^\dagger$ 相等。

可以看到，只要将不带点和带点的旋量指标分别缩并完毕，就得到 Lorentz 标量。另一方面，缩并一个不带点的指标和一个带点的指标并不能得到 Lorentz 不变量，比如，$\eta^a\zeta^\dagger_{\dot{a}}$ 和 $\eta^{\dagger\dot{a}}\zeta_a$ 都不是 Lorentz 标量。对于 Weyl 旋量算符 η_a 和 ζ_a，有

$$(\eta\zeta)^\dagger = (\eta^a\zeta_a)^\dagger = (\zeta_a)^\dagger(\eta^a)^\dagger = \zeta^\dagger_{\dot{a}}\eta^{\dagger\dot{a}} = \zeta^\dagger\eta^\dagger, \tag{8.365}$$

即 $\zeta^\dagger\eta^\dagger$ 是 $\eta\zeta$ 的厄米共轭算符，而厄米共轭操作将左手和右手 Weyl 旋量算符相互转换。

8.6.2　Dirac 和 Majorana 旋量场的分解

依照上一小节关于旋量指标的约定，将 *Dirac 旋量场* $\psi(x)$ 分解成左手 Weyl 旋量场 $\eta_a(x)$ 和右手 Weyl 旋量场 $\zeta^{\dagger\dot{a}}(x)$，形式为

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \eta_a(x) \\ \zeta^{\dagger\dot{a}}(x) \end{pmatrix}. \tag{8.366}$$

在量子化之前，$\eta_a(x)$ 和 $\zeta^{\dagger\dot{a}}(x)$ 是 Grassmann 数，因而 $\psi(x)$ 也是 Grassmann 数。这是在 8.2.1 小节中转置两个旋量场必须添加一个额外负号的原因。

根据 (8.331) 式，$\psi(x)$ 的固有保时向 Lorentz 变换 (4.58) 表达成

$$\begin{pmatrix} \eta'_a(x') \\ \zeta'^{\dagger\dot{a}}(x') \end{pmatrix} = \psi'(x') = D(\Lambda)\psi(x) = \begin{pmatrix} [d(\Lambda)]_a{}^b\eta_b(x) \\ [d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}\zeta^{\dagger\dot{b}}(x) \end{pmatrix}. \tag{8.367}$$

$\psi(x)$ 的 Dirac 共轭是

$$\bar\psi = \psi^\dagger\gamma^0 = \begin{pmatrix} \eta^\dagger_{\dot{a}} & \zeta^a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \delta^{\dot{b}}{}_{\dot{a}} \\ \delta_b{}^a & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta^a & \eta^\dagger_{\dot{a}} \end{pmatrix}. \tag{8.368}$$

保持旋量指标平衡，则 Dirac 方程 (4.114) 化为

$$\begin{pmatrix} -m\delta_a{}^b & \mathrm{i}(\sigma^\mu)_{a\dot{b}}\partial_\mu \\ \mathrm{i}(\bar\sigma^\mu)^{\dot{a}b}\partial_\mu & -m\delta^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_b \\ \zeta^{\dagger\dot{b}} \end{pmatrix} = 0, \tag{8.369}$$

因而 Dirac 矩阵的指标形式是

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} & (\sigma^\mu)_{a\dot{b}} \\ (\bar\sigma^\mu)^{\dot{a}b} & \end{pmatrix}. \tag{8.370}$$

注意，γ^μ 中的 γ^0 与 (8.368) 式中用于定义 Dirac 共轭的 γ^0 具有不同的指标结构，两者本质不同，有些书将后者记为 β 以示区别。

于是，γ^μ 的 Lorentz 变换规则 (4.27) 左边变成

$$\begin{aligned} D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda) &= \begin{pmatrix} [d^{-1}(\Lambda)]_a{}^c & \\ & [d^\dagger(\Lambda)]^{\dot a}{}_{\dot c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & (\sigma^\mu)_{c\dot d} \\ (\bar\sigma^\mu)^{\dot c d} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [d(\Lambda)]_d{}^b & \\ & [d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot d}{}_{\dot b} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} & [d^{-1}(\Lambda)]_a{}^c(\sigma^\mu)_{c\dot d}[d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot d}{}_{\dot b} \\ [d^\dagger(\Lambda)]^{\dot a}{}_{\dot c}(\bar\sigma^\mu)^{\dot c d}[d(\Lambda)]_d{}^b & \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{8.371}$$

右边化为

$$\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu = \begin{pmatrix} & \Lambda^\mu{}_\nu(\sigma^\nu)_{a\dot b} \\ \Lambda^\mu{}_\nu(\bar\sigma^\nu)^{\dot a b} & \end{pmatrix}. \tag{8.372}$$

两相比较，推出

$$[d^{-1}(\Lambda)]_a{}^c(\sigma^\mu)_{c\dot d}[d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot d}{}_{\dot b} = \Lambda^\mu{}_\nu(\sigma^\nu)_{a\dot b}, \quad [d^\dagger(\Lambda)]^{\dot a}{}_{\dot c}(\bar\sigma^\mu)^{\dot c d}[d(\Lambda)]_d{}^b = \Lambda^\mu{}_\nu(\bar\sigma^\nu)^{\dot a b}. \tag{8.373}$$

这分别是 σ^μ 和 $\bar\sigma^\mu$ 的 Lorentz 变换规则。

对于任意 Weyl 旋量 η 和 ζ，定义

$$\eta\sigma^\mu\zeta^\dagger \equiv \eta^a(\sigma^\mu)_{a\dot b}\zeta^{\dagger\dot b}, \quad \eta^\dagger\bar\sigma^\mu\zeta \equiv \eta^\dagger_{\dot a}(\bar\sigma^\mu)^{\dot a b}\zeta_b, \tag{8.374}$$

则相应的固有保时向 Lorentz 变换为

$$\begin{aligned} \eta'\sigma^\mu\zeta'^\dagger &= [d^{-1\mathrm{T}}(\Lambda)]^a{}_c\eta^c(\sigma^\mu)_{a\dot b}[d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot b}{}_{\dot d}\zeta^{\dagger\dot d} = \eta^c[d^{-1}(\Lambda)]_c{}^a(\sigma^\mu)_{a\dot b}[d^{-1\dagger}(\Lambda)]^{\dot b}{}_{\dot d}\zeta^{\dagger\dot d} \\ &= \eta^c\Lambda^\mu{}_\nu(\sigma^\nu)_{c\dot d}\zeta^{\dagger\dot d} = \Lambda^\mu{}_\nu\eta\sigma^\nu\zeta^\dagger, \end{aligned} \tag{8.375}$$

$$\begin{aligned} \eta'^\dagger\bar\sigma^\mu\zeta' &= [d^*(\Lambda)]_{\dot a}{}^{\dot c}\eta^\dagger_{\dot c}(\bar\sigma^\mu)^{\dot a b}[d(\Lambda)]_b{}^d\zeta_d = \eta^\dagger_{\dot c}[d^\dagger(\Lambda)]^{\dot c}{}_{\dot a}(\bar\sigma^\mu)^{\dot a b}[d(\Lambda)]_b{}^d\zeta_d \\ &= \eta^\dagger_{\dot c}\Lambda^\mu{}_\nu(\bar\sigma^\nu)^{\dot c d}\zeta_d = \Lambda^\mu{}_\nu\eta^\dagger\bar\sigma^\mu\zeta. \end{aligned} \tag{8.376}$$

这意味着 $\eta\sigma^\mu\zeta^\dagger$ 和 $\eta^\dagger\bar\sigma^\mu\zeta$ 都是 Lorentz 矢量。

(8.97) 第一式给出 $(\mathrm{i}\sigma^2)\sigma^\mu(\mathrm{i}\sigma^2) = -(\bar\sigma^\mu)^{\mathrm{T}}$，相应的指标形式为

$$\varepsilon^{ac}(\sigma^\mu)_{c\dot d}\varepsilon^{\dot d\dot b} = -[(\bar\sigma^\mu)^{\mathrm{T}}]^{a\dot b} = -(\bar\sigma^\mu)^{\dot b a}. \tag{8.377}$$

对于 Weyl 旋量场 $\eta_a(x)$ 和 $\zeta^{\dagger\dot a}(x)$，有

$$\begin{aligned} [\eta^a(\sigma^\mu)_{a\dot b}\zeta^{\dagger\dot b}]^\dagger &= \zeta^b(\sigma^\mu)_{b\dot a}\eta^{\dagger\dot a} = -\eta^{\dagger\dot a}(\sigma^\mu)_{b\dot a}\zeta^b = -\varepsilon^{\dot a\dot c}\eta^\dagger_{\dot c}(\sigma^\mu)_{b\dot a}\varepsilon^{bd}\zeta_d \\ &= \eta^\dagger_{\dot c}\varepsilon^{db}(\sigma^\mu)_{b\dot a}\varepsilon^{\dot a\dot c}\zeta_d = -\eta^\dagger_{\dot c}(\bar\sigma^\mu)^{\dot c d}\zeta_d = -[\zeta^\dagger_{\dot d}(\bar\sigma^\mu)^{\dot d c}\eta_c]^\dagger, \end{aligned} \tag{8.378}$$

第二步用到 Grassmann 数的性质。于是

$$(\eta\sigma^\mu\zeta^\dagger)^\dagger = \zeta\sigma^\mu\eta^\dagger = -\eta^\dagger\bar\sigma^\mu\zeta = -(\zeta^\dagger\bar\sigma^\mu\eta)^\dagger. \tag{8.379}$$

类似地，$\eta\sigma^\mu\bar\sigma^\nu\zeta \equiv \eta^a(\sigma^\mu)_{a\dot b}(\bar\sigma^\nu)^{\dot b c}\zeta_c$ 和 $\eta^\dagger\bar\sigma^\mu\sigma^\nu\zeta^\dagger \equiv \eta^\dagger_{\dot a}(\bar\sigma^\mu)^{\dot a b}(\sigma^\nu)_{b\dot c}\zeta^{\dagger\dot c}$ 都是二阶 Lorentz 张量。(8.97) 第二式给出 $(-\mathrm{i}\sigma^2)\bar\sigma^\mu(-\mathrm{i}\sigma^2) = -(\sigma^\mu)^{\mathrm{T}}$，相应的指标形式为

$$\varepsilon_{\dot a\dot c}(\bar\sigma^\mu)^{\dot c d}\varepsilon_{db} = -[(\sigma^\mu)^{\mathrm{T}}]_{\dot a b} = -(\sigma^\mu)_{b\dot a}. \tag{8.380}$$

利用 (8.346) 式推出

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\dot a\dot c}(\bar\sigma^\nu)^{\dot c d}(\sigma^\mu)_{d\dot e}\varepsilon^{\dot e\dot b} &= \varepsilon_{\dot a\dot c}(\bar\sigma^\nu)^{\dot c d}\delta_d{}^f(\sigma^\mu)_{f\dot e}\varepsilon^{\dot e\dot b} = \varepsilon_{\dot a\dot c}(\bar\sigma^\nu)^{\dot c d}\varepsilon_{dg}\varepsilon^{gf}(\sigma^\mu)_{f\dot e}\varepsilon^{\dot e\dot b}\\ &= (-\sigma^\nu)_{g\dot a}(-\bar\sigma^\mu)^{\dot b g} = (\bar\sigma^\mu)^{\dot b g}(\sigma^\nu)_{g\dot a},\end{aligned}\tag{8.381}$$

故

$$\begin{aligned}[\eta^a(\sigma^\mu)_{a\dot b}(\bar\sigma^\nu)^{\dot b c}\zeta_c]^\dagger &= \zeta_{\dot c}^\dagger(\bar\sigma^\nu)^{\dot c b}(\sigma^\mu)_{b\dot a}\eta^{\dagger\dot a} = -\eta^{\dagger\dot a}(\bar\sigma^\nu)^{\dot c b}(\sigma^\mu)_{b\dot a}\zeta_{\dot c}^\dagger = -\varepsilon^{\dot a\dot d}\eta_{\dot d}^\dagger(\bar\sigma^\nu)^{\dot c b}(\sigma^\mu)_{b\dot a}\varepsilon_{\dot e\dot c}\zeta^{\dagger\dot e}\\ &= \eta_{\dot d}^\dagger\varepsilon_{\dot e\dot c}(\bar\sigma^\nu)^{\dot c b}(\sigma^\mu)_{b\dot a}\varepsilon^{\dot a\dot d}\zeta^{\dagger\dot e} = \eta_{\dot d}^\dagger(\bar\sigma^\mu)^{\dot d g}(\sigma^\nu)_{g\dot e}\zeta^{\dagger\dot e} = [\zeta^e(\sigma^\nu)_{e\dot g}(\bar\sigma^\mu)^{\dot g d}\eta_d]^\dagger,\end{aligned}\tag{8.382}$$

即

$$(\eta\sigma^\mu\bar\sigma^\nu\zeta)^\dagger = \zeta^\dagger\bar\sigma^\nu\sigma^\mu\eta^\dagger = \eta^\dagger\bar\sigma^\mu\sigma^\nu\zeta^\dagger = (\zeta\sigma^\nu\bar\sigma^\mu\eta)^\dagger.\tag{8.383}$$

将各种 Dirac 旋量双线性型分解成 Weyl 旋量的组合，得到

$$\bar\psi\psi = \begin{pmatrix}\zeta^a & \eta_{\dot a}^\dagger\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_a\\ \zeta^{\dagger\dot a}\end{pmatrix} = \zeta^a\eta_a + \eta_{\dot a}^\dagger\zeta^{\dagger\dot a} = \zeta\eta + \eta^\dagger\zeta^\dagger,\tag{8.384}$$

$$\bar\psi\gamma^5\psi = \begin{pmatrix}\zeta^a & \eta_{\dot a}^\dagger\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\delta_a{}^b & \\ & \delta^{\dot a}{}_{\dot b}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_b\\ \zeta^{\dagger\dot b}\end{pmatrix} = -\zeta^a\eta_a + \eta_{\dot a}^\dagger\zeta^{\dagger\dot a} = -\zeta\eta + \eta^\dagger\zeta^\dagger,\tag{8.385}$$

$$\begin{aligned}\bar\psi\gamma^\mu\psi &= \begin{pmatrix}\zeta^a & \eta_{\dot a}^\dagger\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & (\sigma^\mu)_{a\dot b}\\ (\bar\sigma^\mu)^{\dot a b} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_b\\ \zeta^{\dagger\dot b}\end{pmatrix} = \zeta^a(\sigma^\mu)_{a\dot b}\zeta^{\dagger\dot b} + \eta_{\dot a}^\dagger(\bar\sigma^\mu)^{\dot a b}\eta_b\\ &= \zeta\sigma^\mu\zeta^\dagger + \eta^\dagger\bar\sigma^\mu\eta,\end{aligned}\tag{8.386}$$

$$\begin{aligned}\bar\psi\gamma^\mu\gamma^5\psi &= \begin{pmatrix}\zeta^a & \eta_{\dot a}^\dagger\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & (\sigma^\mu)_{a\dot b}\\ (\bar\sigma^\mu)^{\dot a b} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\delta_b{}^c & \\ & \delta^{\dot b}{}_{\dot c}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_c\\ \zeta^{\dagger\dot c}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\zeta^a & \eta_{\dot a}^\dagger\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & (\sigma^\mu)_{a\dot b}\\ (\bar\sigma^\mu)^{\dot a b} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\eta_b\\ \zeta^{\dagger\dot b}\end{pmatrix} = \zeta^a(\sigma^\mu)_{a\dot b}\zeta^{\dagger\dot b} - \eta_{\dot a}^\dagger(\bar\sigma^\mu)^{\dot a b}\eta_b\\ &= \zeta\sigma^\mu\zeta^\dagger - \eta^\dagger\bar\sigma^\mu\eta,\end{aligned}\tag{8.387}$$

$$\begin{aligned}\bar\psi\sigma^{\mu\nu}\psi &= \frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix}\zeta^a & \eta_{\dot a}^\dagger\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\sigma^\mu\bar\sigma^\nu - \sigma^\nu\bar\sigma^\mu)_a{}^b & \\ & (\bar\sigma^\mu\sigma^\nu - \bar\sigma^\nu\sigma^\mu)^{\dot a}{}_{\dot b}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_b\\ \zeta^{\dagger\dot b}\end{pmatrix}\\ &= \frac{\mathrm{i}}{2}\zeta^a(\sigma^\mu\bar\sigma^\nu - \sigma^\nu\bar\sigma^\mu)_a{}^b\eta_b + \frac{\mathrm{i}}{2}\eta_{\dot a}^\dagger(\bar\sigma^\mu\sigma^\nu - \bar\sigma^\nu\sigma^\mu)^{\dot a}{}_{\dot b}\zeta^{\dagger\dot b}\\ &= \frac{\mathrm{i}}{2}\zeta(\sigma^\mu\bar\sigma^\nu - \sigma^\nu\bar\sigma^\mu)\eta + \frac{\mathrm{i}}{2}\eta^\dagger(\bar\sigma^\mu\sigma^\nu - \bar\sigma^\nu\sigma^\mu)\zeta^\dagger.\end{aligned}\tag{8.388}$$

这些双线性型分别被分解成两项，每一项都是由 Weyl 旋量表达的 Lorentz 张量。进一步推出

$$\bar\psi_{\mathrm R}\psi_{\mathrm L} = \frac{1}{2}\bar\psi(1-\gamma^5)\psi = \zeta\eta,\qquad \bar\psi_{\mathrm L}\psi_{\mathrm R} = \frac{1}{2}\bar\psi(1+\gamma^5)\psi = \eta^\dagger\zeta^\dagger,\tag{8.389}$$

$$\bar\psi_{\mathrm L}\gamma^\mu\psi_{\mathrm L} = \frac{1}{2}\bar\psi(\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma^5)\psi = \eta^\dagger\bar\sigma^\mu\eta,\qquad \bar\psi_{\mathrm L}\gamma^\mu\psi_{\mathrm R} = \frac{1}{2}\bar\psi(\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5)\psi = \zeta\sigma^\mu\zeta^\dagger.\tag{8.390}$$

另一方面，自由 Dirac 旋量场的拉氏量 (4.104) 分解为

$$\mathcal{L} = \bar\psi(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = \begin{pmatrix}\zeta^a & \eta_{\dot a}^\dagger\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-m\delta_a{}^b & \mathrm{i}(\sigma^\mu)_{a\dot b}\partial_\mu\\ \mathrm{i}(\bar\sigma^\mu)^{\dot a b}\partial_\mu & -m\delta^{\dot a}{}_{\dot b}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_b\\ \zeta^{\dagger\dot b}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}&= -m\zeta^a\eta_a + \mathrm{i}\zeta^a(\sigma^\mu)_{a\dot{b}}\partial_\mu\zeta^{\dagger\dot{b}} + \mathrm{i}\eta_{\dot{a}}^\dagger(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b}\partial_\mu\eta_b - m\eta_{\dot{a}}^\dagger\zeta^{\dagger\dot{a}}\\&= \mathrm{i}\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\eta + \mathrm{i}\zeta\sigma^\mu\partial_\mu\zeta^\dagger - m(\zeta\eta + \eta^\dagger\zeta^\dagger).\end{aligned} \tag{8.391}$$

如果质量 $m=0$，则

$$\mathcal{L}_{\mathrm{L}} = \mathrm{i}\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\eta \quad 和 \quad \mathcal{L}_{\mathrm{R}} = \mathrm{i}\zeta\sigma^\mu\partial_\mu\zeta^\dagger \tag{8.392}$$

分别描述自由的左手 Weyl 旋量场 $\eta_a(x)$ 和右手 Weyl 旋量场 $\zeta^{\dagger\dot{a}}(x)$，相应的运动方程是 Weyl 方程 (4.116)，即

$$\mathrm{i}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\eta = 0, \quad \mathrm{i}\sigma^\mu\partial_\mu\zeta^\dagger = 0. \tag{8.393}$$

接下来讨论 Weyl 旋量场的分立变换。首先，电荷共轭矩阵 (8.87) 的指标形式为

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\sigma^2 & \\ & \mathrm{i}\sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{ab} & \\ & \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} \end{pmatrix}. \tag{8.394}$$

将 $\psi(x)$ 的电荷共轭场 (8.91) 分解成 Weyl 旋量场，得到

$$\psi^{\mathrm{C}}(x) = \mathcal{C}\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(x) = \mathcal{C}\begin{pmatrix}\zeta^b(x) & \eta_b^\dagger(x)\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{ab} & \\ & \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\zeta^b(x)\\ \eta_b^\dagger(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\zeta_a(x)\\ \eta^{\dagger\dot{a}}(x)\end{pmatrix}. \tag{8.395}$$

从而，Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的 C 变换 (8.90) 化为

$$\begin{pmatrix} C^{-1}\eta_a(x)C \\ C^{-1}\zeta^{\dagger\dot{a}}(x)C \end{pmatrix} = C^{-1}\psi(x)C = \zeta_C^*\psi^{\mathrm{C}}(x) = \begin{pmatrix}\zeta_C^*\zeta_a(x)\\ \zeta_C^*\eta^{\dagger\dot{a}}(x)\end{pmatrix}, \tag{8.396}$$

即左右手 Weyl 旋量场的 C 变换是

$$C^{-1}\eta_a(x)C = \zeta_C^*\zeta_a(x), \quad C^{-1}\zeta^{\dagger\dot{a}}(x)C = \zeta_C^*\eta^{\dagger\dot{a}}(x). \tag{8.397}$$

可见，电荷共轭变换将 η 和 ζ 相互转换。对上面两式取厄米共轭，得到 $C^{-1}\eta_b^\dagger(x)C = \zeta_C\zeta_b^\dagger(x)$ 和 $C^{-1}\zeta^b(x)C = \zeta_C\eta^b(x)$，分别与 $\varepsilon^{\dot{a}\dot{b}}$ 和 ε_{ab} 缩并，推出

$$C^{-1}\eta^{\dagger\dot{a}}(x)C = \zeta_C\zeta^{\dagger\dot{a}}(x), \quad C^{-1}\zeta_a(x)C = \zeta_C\eta_a(x). \tag{8.398}$$

其次，Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的 P 变换 (8.165) 表达为

$$\begin{pmatrix} P^{-1}\eta_a(x)P \\ P^{-1}\zeta^{\dagger\dot{a}}(x)P \end{pmatrix} = P^{-1}\psi(x)P = \zeta_P^*\gamma^0\psi(\mathcal{P}x) = \zeta_P^*\begin{pmatrix} & \delta^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} \\ \delta_a{}^b & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_b(\mathcal{P}x)\\ \zeta^{\dagger\dot{b}}(\mathcal{P}x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\zeta_P^*\zeta^{\dagger\dot{a}}(\mathcal{P}x)\\ \zeta_P^*\eta_a(\mathcal{P}x)\end{pmatrix}, \tag{8.399}$$

注意此处 γ^0 的指标结构与 (8.368) 式中一样。于是得到左右手 Weyl 旋量场的 P 变换

$$P^{-1}\eta_a(x)P = \zeta_P^*\zeta^{\dagger\dot{a}}(\mathcal{P}x), \quad P^{-1}\zeta^{\dagger\dot{a}}(x)P = \zeta_P^*\eta_a(\mathcal{P}x), \tag{8.400}$$

也就是说，宇称变换将左手和右手 Weyl 旋量场相互转换。取厄米共轭得 $P^{-1}\eta_b^\dagger(x)P = \zeta_P\zeta^b(\mathcal{P}x)$ 和 $P^{-1}\zeta^b(x)P = \zeta_P\eta_b^\dagger(\mathcal{P}x)$，两边与 $\mathrm{i}\sigma^2 = \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} = -\varepsilon_{ab}$ 缩并，推出

$$P^{-1}\eta^{\dagger\dot{a}}(x)P = -\zeta_P\zeta_a(\mathcal{P}x), \quad P^{-1}\zeta_a(x)P = -\zeta_P\eta^{\dagger\dot{a}}(\mathcal{P}x). \tag{8.401}$$

最后，矩阵 (8.191) 的指标形式是

$$\mathcal{C}\gamma^5 = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sigma^2 & \\ & \mathrm{i}\sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{ab} & \\ & -\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} \end{pmatrix}, \tag{8.402}$$

而 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的 T 变换 (8.201) 化为

$$\begin{pmatrix} T^{-1}\eta_a(x)T \\ T^{-1}\zeta^{\dagger\dot{a}}(x)T \end{pmatrix} = T^{-1}\psi(x)T = \zeta_T^*\mathcal{C}\gamma^5\psi(\mathcal{T}x) = \zeta_T^* \begin{pmatrix} \varepsilon^{ab} & \\ & -\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_b(\mathcal{T}x) \\ \zeta^{\dagger\dot{b}}(\mathcal{T}x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_T^*\eta^a(\mathcal{T}x) \\ -\zeta_T^*\zeta_{\dot{a}}^\dagger(\mathcal{T}x) \end{pmatrix}, \tag{8.403}$$

则左右手 Weyl 旋量场的 T 变换是

$$T^{-1}\eta_a(x)T = \zeta_T^*\eta^a(\mathcal{T}x), \quad T^{-1}\zeta^{\dagger\dot{a}}(x)T = -\zeta_T^*\zeta_{\dot{a}}^\dagger(\mathcal{T}x). \tag{8.404}$$

取厄米共轭，有 $T^{-1}\eta_{\dot{b}}^\dagger(x)T = \zeta_T\eta^{\dagger\dot{b}}(\mathcal{T}x)$ 和 $T^{-1}\zeta^b(x)T = -\zeta_T\zeta_b(\mathcal{T}x)$，与 $\mathrm{i}\sigma^2 = \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} = -\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} = -\varepsilon_{ab} = \varepsilon^{ab}$ 缩并，得

$$T^{-1}\eta^{\dagger\dot{a}}(x)T = -\zeta_T\eta_{\dot{a}}^\dagger(\mathcal{T}x), \quad T^{-1}\zeta_a(x)T = \zeta_T\zeta^a(\mathcal{T}x). \tag{8.405}$$

下面讨论 *Majorana 旋量场*。根据 (8.395) 式，Majorana 条件 (8.133) 意味着

$$\begin{pmatrix} \eta_a \\ \zeta^{\dagger\dot{a}} \end{pmatrix} = \psi = \mathcal{C}\bar{\psi}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \zeta_a \\ \eta^{\dagger\dot{a}} \end{pmatrix}, \tag{8.406}$$

即 $\eta = \zeta$，这表明 Majorana 旋量场中的左手和右手 Weyl 旋量场是相关的。因此，可以将 Majorana 旋量场 $\psi(x)$ 分解成

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \eta_a(x) \\ \eta^{\dagger\dot{a}}(x) \end{pmatrix}, \tag{8.407}$$

而自由 Majorana 旋量场的拉氏量 (8.143) 分解为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}\bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \eta^a & \eta_{\dot{a}}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -m\delta_a{}^b & \mathrm{i}(\sigma^\mu)_{a\dot{b}}\partial_\mu \\ \mathrm{i}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b}\partial_\mu & -m\delta^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_b \\ \eta^{\dagger\dot{b}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}[\mathrm{i}\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\eta + \mathrm{i}\eta\sigma^\mu\partial_\mu\eta^\dagger - m(\eta\eta + \eta^\dagger\eta^\dagger)]. \end{aligned} \tag{8.408}$$

(8.379) 式意味着 $(\partial_\mu\eta)\sigma^\mu\eta^\dagger = -\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\eta$，可将上式方括号中第二项化为

$$\mathrm{i}\eta\sigma^\mu\partial_\mu\eta^\dagger = \mathrm{i}\partial_\mu(\eta\sigma^\mu\eta^\dagger) - \mathrm{i}(\partial_\mu\eta)\sigma^\mu\eta^\dagger = \mathrm{i}\partial_\mu(\eta\sigma^\mu\eta^\dagger) + \mathrm{i}\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\eta. \tag{8.409}$$

扔掉全散度项 $\mathrm{i}\partial_\mu(\eta\sigma^\mu\eta^\dagger)$，拉氏量变成

$$\mathcal{L} = \mathrm{i}\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\eta - \frac{1}{2}m(\eta\eta + \eta^\dagger\eta^\dagger). \tag{8.410}$$

(8.379) 和 (8.383) 式表明，$\eta\sigma^\mu\eta^\dagger = -\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\eta$，$\eta\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\eta = \eta\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\eta$，$\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\eta^\dagger = \eta^\dagger\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu\eta^\dagger$。对于 Majorana 旋量场，(8.386) 和 (8.388) 式化为

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \eta\sigma^\mu\eta^\dagger + \eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\eta = -\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\eta + \eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\eta = 0, \tag{8.411}$$

$$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi = \frac{\mathrm{i}}{2}(\eta\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\eta - \eta\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\eta) + \frac{\mathrm{i}}{2}(\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\eta^\dagger - \eta^\dagger\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu\eta^\dagger) = 0, \tag{8.412}$$

这样就验证了 (8.142) 式。

8.7 Majorana 旋量场相关 Feynman 规则

6.1.1 小节提到, 由于 Dirac 旋量场可以携带某种 U(1) 荷, 相应费米子线上的箭头代表 $U(1)$ 荷流动的方向，或者说费米子数流动的方向。另一方面，Majorana 旋量场不能携带任何 U(1) 荷，不存在费米子数流动的方向，相应的费米子线则不应该具备箭头。如果相互作用过程涉及到 Majorana 旋量场与 Dirac 旋量场的耦合，带箭头与不带箭头的费米子线将在顶点处交汇，导致**费米子数破坏** (fermion-number violation)，我们需要研究适用于这种情况的 Feynman 规则。本节讨论一个简单例子，更一般的情况可参考文献 [47]。

8.7.1 拉氏量和 CP 对称性

考虑由复标量场 $\phi(x)$、Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 和 Majorana 旋量场 $\chi(x)$ 构成的拉氏量

$$\mathcal{L}=(\partial^\mu\phi^\dagger)\partial_\mu\phi-m_\phi^2\phi^\dagger\phi+\bar\psi(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu-m_\psi)\psi+\frac{1}{2}\bar\chi(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu-m_\chi)\chi+\mathcal{L}_{\text{int}},\tag{8.413}$$

其中相互作用拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\text{int}}=\kappa\,\phi^\dagger\bar\chi P_{\mathrm{R}}\psi+\kappa^*\phi\bar\psi P_{\mathrm{L}}\chi,\tag{8.414}$$

κ 是一个复耦合常数。$\mathcal{L}_{\text{int}}$ 中两项互为厄米共轭,

$$(\kappa\,\phi^\dagger\bar\chi P_{\mathrm{R}}\psi)^\dagger=\kappa^*\psi^\dagger P_{\mathrm{R}}\gamma^0\chi=\kappa^*\psi^\dagger\gamma^0P_{\mathrm{L}}\chi=\kappa^*\phi\bar\psi P_{\mathrm{L}}\chi,\tag{8.415}$$

因而 $\mathcal{L}_{\text{int}}$ 是厄米的。这样的相互作用涉及一个标量场和两个旋量场, 属于 Yukawa 相互作用。作 U(1) 整体变换

$$\phi'(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\phi(x),\quad \psi'(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\psi(x),\tag{8.416}$$

则拉氏量 $\mathcal{L}$ 不变。可见，这个理论具有一个 U(1) 整体对称性，而复标量场 $\phi(x)$ 和 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 的 U(1) 荷相同，均为 q。将耦合常数分解为实部和虚部，$\kappa=\kappa_{\mathrm{R}}+\mathrm{i}\kappa_{\mathrm{I}}$，则相互作用拉氏量化为

$$\mathcal{L}_{\text{int}}=\kappa_{\mathrm{R}}(\phi^\dagger\bar\chi P_{\mathrm{R}}\psi+\phi\bar\psi P_{\mathrm{L}}\chi)+\kappa_{\mathrm{I}}(\mathrm{i}\phi^\dagger\bar\chi P_{\mathrm{R}}\psi-\mathrm{i}\phi\bar\psi P_{\mathrm{L}}\chi).\tag{8.417}$$

设三个量子场的 C、P 变换为

$$C^{-1}\phi(x)C=\eta_C^*\phi^\dagger(x),\quad C^{-1}\psi(x)C=\zeta_C^*\mathcal{C}\bar\psi^{\mathrm{T}}(x),\quad C^{-1}\chi(x)C=\tilde\zeta_C^*\chi(x),\tag{8.418}$$

$$P^{-1}\phi(x)P=\eta_P^*\phi(\mathcal{P}x),\quad P^{-1}\psi(x)P=\zeta_P^*\gamma^0\psi(\mathcal{P}x),\quad P^{-1}\chi(x)P=\tilde\zeta_P^*\gamma^0\chi(\mathcal{P}x),\tag{8.419}$$

则算符 $\phi^\dagger\bar\chi P_{\mathrm{R}}\psi$ 的 C、P 变换是

$$\begin{aligned}C^{-1}\phi^\dagger(x)\bar\chi(x)P_{\mathrm{R}}\psi(x)C&=\eta_C\zeta_C^*\tilde\zeta_C\phi(x)\chi^{\mathrm{T}}(x)\mathcal{C}P_{\mathrm{R}}\mathcal{C}\bar\psi^{\mathrm{T}}(x)=-\eta_C\zeta_C^*\tilde\zeta_C\phi(x)\bar\psi(x)\mathcal{C}^{\mathrm{T}}P_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{\mathrm{T}}\chi(x)\\&=\eta_C\zeta_C^*\tilde\zeta_C\phi(x)\bar\psi(x)\mathcal{C}^{-1}P_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\chi(x)=\eta_C\zeta_C^*\tilde\zeta_C\phi(x)\bar\psi(x)P_{\mathrm{R}}\chi(x),\end{aligned}\tag{8.420}$$

$$\begin{aligned}P^{-1}\phi^\dagger(x)\bar\chi(x)P_{\mathrm{R}}\psi(x)P&=\eta_P\zeta_P^*\tilde\zeta_P\phi^\dagger(\mathcal{P}x)\bar\chi(\mathcal{P}x)\gamma^0P_{\mathrm{R}}\gamma^0\psi(\mathcal{P}x)\\&=\eta_P\zeta_P^*\tilde\zeta_P\phi^\dagger(\mathcal{P}x)\bar\chi(\mathcal{P}x)P_{\mathrm{L}}\psi(\mathcal{P}x).\end{aligned}\tag{8.421}$$

同理推出算符 $\phi\bar{\psi}P_{\mathrm{L}}\chi$ 的 C、P 变换

$$C^{-1}\phi(x)\bar{\psi}(x)P_{\mathrm{L}}\chi(x)C = \eta_C^*\zeta_C\tilde{\zeta}_C^*\phi^\dagger(x)\bar{\chi}(x)P_{\mathrm{L}}\psi(x), \tag{8.422}$$

$$P^{-1}\phi(x)\bar{\psi}(x)P_{\mathrm{L}}\chi(x)P = \eta_P^*\zeta_P\tilde{\zeta}_P^*\phi(\mathcal{P}x)\bar{\psi}(\mathcal{P}x)P_{\mathrm{R}}\chi(\mathcal{P}x). \tag{8.423}$$

可以看到，无论在 C 变换下还是在 P 变换下，相互作用拉氏量 $\mathcal{L}_{\mathrm{int}}$ 都不能保持不变，因此理论不具有电荷共轭对称性和空间反射对称性。换言之，这个理论既是 ***C* 破坏** (C-violation) 的，又是 ***P* 破坏** (P-violation) 的。

进一步，算符 $\phi^\dagger\bar{\chi}P_{\mathrm{R}}\psi$ 和 $\phi\bar{\psi}P_{\mathrm{L}}\chi$ 的 CP 变换为

$$(CP)^{-1}\phi^\dagger(x)\bar{\chi}(x)P_{\mathrm{R}}\psi(x)CP = \eta_{CP}\,\phi(\mathcal{P}x)\bar{\psi}(\mathcal{P}x)P_{\mathrm{L}}\chi(\mathcal{P}x), \tag{8.424}$$

$$(CP)^{-1}\phi(x)\bar{\psi}(x)P_{\mathrm{L}}\chi(x)CP = \eta_{CP}^*\,\phi^\dagger(\mathcal{P}x)\bar{\chi}(\mathcal{P}x)P_{\mathrm{R}}\psi(\mathcal{P}x), \tag{8.425}$$

其中 $\eta_{CP} \equiv \eta_C\eta_P^*\zeta_C^*\zeta_P\tilde{\zeta}_C\tilde{\zeta}_P^*$。如果我们适当选取相位因子的值，使得 $\eta_{CP} = \eta_{CP}^* = +1$，则算符 $\phi^\dagger\bar{\chi}P_{\mathrm{R}}\psi + \phi\bar{\psi}P_{\mathrm{L}}\chi$ 在 CP 变换下不变，而相互作用拉氏量 (8.417) 中 κ_{R} 对应的项具有 CP 对称性，κ_{I} 对应的项引起 ***CP* 破坏** (CP-violation)。如果相位因子的取值使得 $\eta_{CP} = \eta_{CP}^* = -1$，则算符 $\mathrm{i}\phi^\dagger\bar{\chi}P_{\mathrm{R}}\psi - \mathrm{i}\phi\bar{\psi}P_{\mathrm{L}}\chi$ 在 CP 变换下不变，而 κ_{I} 对应的项具有 CP 对称性，κ_{R} 对应的项引起 CP 破坏。因此，当 $\kappa_{\mathrm{R}} \neq 0$ 且 $\kappa_{\mathrm{I}} \neq 0$ 时，相互作用拉氏量 $\mathcal{L}_{\mathrm{int}}$ 看起来会破坏 CP 对称性。

不过，Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 是复场，它的相位具有任意性，可用于吸收耦合常数 $\kappa \equiv |\kappa|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$ 的相位 φ。如果将 Dirac 旋量场重新定义为 $\psi'(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\psi(x)$，则 $\bar{\psi}'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\psi(x)$，于是

$$\mathcal{L}_{\mathrm{int}} = |\kappa|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\,\phi^\dagger\bar{\chi}P_{\mathrm{R}}\psi + |\kappa|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\phi\bar{\psi}P_{\mathrm{L}}\chi = |\kappa|(\phi^\dagger\bar{\chi}P_{\mathrm{R}}\psi' + \phi\bar{\psi}'P_{\mathrm{L}}\chi) \tag{8.426}$$

描述同一个理论。但此时耦合常数 $|\kappa|$ 是实数，不会引起 CP 破坏。因此，这个理论实际上是具有 CP 对称性的。一般来说，**当一个理论中所有复耦合常数的相位不能完全被复场吸收时，才会出现 *CP* 破坏。**

在接下来的讨论中，不失一般性，将耦合常数 κ 取为*实数*，相互作用拉氏量表达为

$$\mathcal{L}_{\mathrm{int}} = \kappa(\phi^\dagger\bar{\chi}\Gamma_1\psi + \phi\bar{\psi}\Gamma_2\chi), \tag{8.427}$$

这里引入了

$$\Gamma_1 = P_{\mathrm{R}}, \quad \Gamma_2 = P_{\mathrm{L}}. \tag{8.428}$$

下面许多结论具有一般性，与 Γ_1 和 Γ_2 的具体形式无关。

8.7.2 Feynman 规则

现在讨论这个理论的 Feynman 规则。将 Dirac 旋量场 $\psi(x)$、复标量场 $\phi(x)$ 和 Majorana 旋量场 $\chi(x)$ 的平面波展开式表达为

$$\psi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_\lambda[u(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + v(\mathbf{p},\lambda)b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}], \tag{8.429}$$

$$\phi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (c_{\mathbf{p}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + d^\dagger_{\mathbf{p}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}), \tag{8.430}$$

$$\chi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_\lambda [u(\mathbf{p},\lambda) f_{\mathbf{p},\lambda} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + v(\mathbf{p},\lambda) f^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}]. \tag{8.431}$$

相应地，引入以下单粒子态，

$$\text{Dirac 正费米子 } \psi \text{ 的单粒子态 } \left|\mathbf{p}^+,\lambda\right\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, a^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} \left|0\right\rangle, \tag{8.432}$$

$$\text{Dirac 反费米子 } \bar\psi \text{ 的单粒子态 } \left|\mathbf{p}^-,\lambda\right\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, b^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} \left|0\right\rangle, \tag{8.433}$$

$$\text{正标量玻色子 } \phi \text{ 的单粒子态 } \left|\mathbf{p}^+\right\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, c^\dagger_{\mathbf{p}} \left|0\right\rangle, \tag{8.434}$$

$$\text{反标量玻色子 } \bar\phi \text{ 的单粒子态 } \left|\mathbf{p}^-\right\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, d^\dagger_{\mathbf{p}} \left|0\right\rangle, \tag{8.435}$$

$$\text{Majorana 费米子 } \chi \text{ 的单粒子态 } \left|\mathbf{p},\lambda\right\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, f^\dagger_{\mathbf{p},\lambda} \left|0\right\rangle. \tag{8.436}$$

注意，Majorana 费米子 χ 是纯中性的，动量记号的右上角没有正负号，以此与 Dirac 费米子相区分。Dirac 旋量场与初末态的缩并见 (6.23)、(6.24)、(6.29) 和 (6.30) 式，复标量场的见 (6.136)–(6.139) 式。Majorana 旋量场与初末态的缩并定义为

$$\langle 0|\, \overbrace{\chi(x)\, |\mathbf{p},\lambda\rangle} \equiv \langle 0|\, \chi^{(+)}(x)\, |\mathbf{p},\lambda\rangle = u(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{8.437}$$

$$\langle 0|\, \overbrace{\bar\chi(x)\, |\mathbf{p},\lambda\rangle} \equiv \langle 0|\, \bar\chi^{(+)}(x)\, |\mathbf{p},\lambda\rangle = \bar v(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{8.438}$$

$$\langle \mathbf{p},\lambda|\, \overbrace{\bar\chi(x)\, |0\rangle} \equiv \langle \mathbf{p},\lambda|\, \bar\chi^{(-)}(x)\, |0\rangle = \bar u(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{8.439}$$

$$\langle \mathbf{p},\lambda|\, \overbrace{\chi(x)\, |0\rangle} \equiv \langle \mathbf{p},\lambda|\, \chi^{(-)}(x)\, |0\rangle = v(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}. \tag{8.440}$$

由于相互作用哈密顿量密度 $\mathcal{H}_1 = -\mathcal{L}_{\text{int}}$，从 (6.4) 式得到 S 算符展开式中 $n=1$ 的项

$$\begin{aligned} \mathrm{i}T^{(1)} &= -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x\, \mathsf{T}[\mathcal{H}_1(x)] = \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x\, \mathsf{T}[\mathcal{L}_{\text{int}}(x)] \\ &= \mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4 x\, \mathsf{T}[\phi^\dagger(x)\bar\chi(x)\Gamma_1\psi(x) + \phi(x)\bar\psi(x)\Gamma_2\chi(x)]. \end{aligned} \tag{8.441}$$

根据 Wick 定理 (5.166)，$\mathrm{i}T^{(1)}$ 只包含下面两项，

$$\mathrm{i}T^{(1)}_1 = \mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4 x\, \mathsf{N}[\phi^\dagger(x)\bar\chi(x)\Gamma_1\psi(x)], \quad \mathrm{i}T^{(1)}_2 = \mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4 x\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar\psi(x)\Gamma_2\chi(x)]. \tag{8.442}$$

考虑 $\psi \to \chi\phi$ 衰变过程，初态为 $\left|\mathbf{p}^+,\lambda\right\rangle$，末态为 $\left|\mathbf{q},\lambda';\mathbf{k}^+\right\rangle$，$\mathrm{i}T^{(1)}_1$ 贡献的散射矩阵元是

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{q},\lambda';\mathbf{k}^+\right| \mathrm{i}T^{(1)}_1 \left|\mathbf{p}^+,\lambda\right\rangle &= \mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4 x \left\langle \mathbf{q},\lambda';\mathbf{k}^+\right| \mathsf{N}[\phi^\dagger(x)\bar\chi(x)\Gamma_1\psi(x)] \left|\mathbf{p}^+,\lambda\right\rangle \\ &= \mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4 x \left\langle \overbrace{\mathbf{q},\lambda';\mathbf{k}^+\right| \mathsf{N}[\phi^\dagger(x)}\bar\chi(x)\Gamma_1\overbrace{\psi(x)]\left|\mathbf{p}^+}, \lambda\right\rangle \\ &= \mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4 x\, \bar u(\mathbf{q},\lambda')\Gamma_1 u(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q-k)\cdot x} \\ &= \mathrm{i}\kappa\, \bar u(\mathbf{q},\lambda')\Gamma_1 u(\mathbf{p},\lambda)\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(p-q-k). \end{aligned} \tag{8.443}$$

这是计算散射矩阵元的**第一种**方法，与 6.1 节介绍的方法一样。

利用电荷共轭变换，可以引进**第二种**计算方法。将相互作用算符 $\bar{\chi}\Gamma_1\psi$ 化为

$$\bar{\chi}\Gamma_1\psi = (\bar{\chi}\Gamma_1\psi)^{\mathrm{T}} = -\psi^{\mathrm{T}}\Gamma_1^{\mathrm{T}}\bar{\chi}^{\mathrm{T}} = -\psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}\Gamma_1^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}\bar{\chi}^{\mathrm{T}} = \psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\mathcal{C}\Gamma_1^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}\bar{\chi}^{\mathrm{T}} = \bar{\psi}^{\mathrm{C}}\Gamma_1^{\mathrm{C}}\chi^{\mathrm{C}}, \quad (8.444)$$

最后一步用到 (8.91)、(8.108) 和 (8.114) 式。同理推出 $\bar{\psi}\Gamma_2\chi = \bar{\chi}^{\mathrm{C}}\Gamma_2^{\mathrm{C}}\psi^{\mathrm{C}}$。再由 Majorana 条件 $\chi = \chi^{\mathrm{C}}$ 得

$$\bar{\chi}\Gamma_1\psi = \bar{\psi}^{\mathrm{C}}\Gamma_1^{\mathrm{C}}\chi, \quad \bar{\psi}\Gamma_2\chi = \bar{\chi}\Gamma_2^{\mathrm{C}}\psi^{\mathrm{C}}. \quad (8.445)$$

从而将 (8.442) 式改写为

$$\mathrm{i}T_1^{(1)} = \mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\, \mathsf{N}[\phi^\dagger(x)\bar{\psi}^{\mathrm{C}}(x)\Gamma_1^{\mathrm{C}}\chi(x)], \quad \mathrm{i}T_2^{(1)} = \mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\chi}(x)\Gamma_2^{\mathrm{C}}\psi^{\mathrm{C}}(x)]. \quad (8.446)$$

注意，此时旋量场算符排列的次序与原来相反。现在，$\mathrm{i}T_1^{(1)}$ 贡献的 $\psi \to \chi\phi$ 散射矩阵元也可以表达成

$$\begin{aligned}\left\langle \mathbf{q},\lambda';\mathbf{k}^+\right|\mathrm{i}T_1^{(1)}\left|\mathbf{p}^+,\lambda\right\rangle &= \mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\left\langle \mathbf{q},\lambda';\mathbf{k}^+\right|\mathsf{N}[\phi^\dagger(x)\bar{\psi}_a^{\mathrm{C}}(x)(\Gamma_1^{\mathrm{C}})_{ab}\chi_b(x)]\left|\mathbf{p}^+,\lambda\right\rangle \\ &= -\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\left\langle \mathbf{q},\lambda';\mathbf{k}^+\right|\phi^{\dagger(-)}(x)\chi_b^{(-)}(x)(\Gamma_1^{\mathrm{C}})_{ab}\bar{\psi}_a^{\mathrm{C}(+)}(x)\left|\mathbf{p}^+,\lambda\right\rangle. \quad (8.447)\end{aligned}$$

根据 (8.88)–(8.90) 式，电荷共轭场 $\psi^{\mathrm{C}}(x)$ 的平面波展开式是

$$\begin{aligned}\psi^{\mathrm{C}}(x) &= \mathcal{C}\bar{\psi}^{\mathrm{T}} = \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_\lambda\left[\mathcal{C}\bar{v}^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda)b_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + \mathcal{C}\bar{u}^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right] \\ &= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_\lambda[u(\mathbf{p},\lambda)b_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + v(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}], \quad (8.448)\end{aligned}$$

跟 (8.429) 式的差异只在于 a 与 b 互换。相应 Dirac 共轭的展开式为

$$\bar{\psi}^{\mathrm{C}}(x) = \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_\lambda[\bar{u}(\mathbf{p},\lambda)b_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} + \bar{v}(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}]. \quad (8.449)$$

据此，将电荷共轭场 $\psi^{\mathrm{C}}(x)$ 和 $\bar{\psi}^{\mathrm{C}}(x)$ 与初末态的缩并定义成

$$\langle 0|\overbrace{\psi^{\mathrm{C}}(x)\left|\mathbf{p}^-,\lambda\right\rangle} \equiv \langle 0|\psi^{\mathrm{C}(+)}(x)\left|\mathbf{p}^-,\lambda\right\rangle = u(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}, \quad (8.450)$$

$$\langle 0|\overbrace{\bar{\psi}^{\mathrm{C}}(x)\left|\mathbf{p}^+,\lambda\right\rangle} \equiv \langle 0|\bar{\psi}^{\mathrm{C}(+)}(x)\left|\mathbf{p}^+,\lambda\right\rangle = \bar{v}(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}, \quad (8.451)$$

$$\left\langle\overbrace{\mathbf{p}^-,\lambda\right|\bar{\psi}^{\mathrm{C}}}(x)|0\rangle \equiv \left\langle\mathbf{p}^-,\lambda\right|\bar{\psi}^{\mathrm{C}(-)}(x)|0\rangle = \bar{u}(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}, \quad (8.452)$$

$$\left\langle\overbrace{\mathbf{p}^+,\lambda\right|\psi^{\mathrm{C}}}(x)|0\rangle \equiv \left\langle\mathbf{p}^+,\lambda\right|\psi^{\mathrm{C}(-)}(x)|0\rangle = v(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}. \quad (8.453)$$

散射矩阵元 (8.447) 变成

$$\left\langle \mathbf{q},\lambda';\mathbf{k}^+\right|\mathrm{i}T_1^{(1)}|\mathbf{p}^+,\lambda\rangle = -\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\left\langle\overbrace{\mathbf{q},\lambda';\mathbf{k}^+\right|\mathsf{N}[\phi^\dagger(x)}\chi_b(x)(\Gamma_1^{\mathrm{C}})_{ab}\overbrace{\bar{\psi}_a^{\mathrm{C}}(x)]\left|\mathbf{p}^+,\lambda\right\rangle}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\, v_b(\mathbf{q},\lambda')(\Gamma_1^{\mathrm{C}})_{ab}\bar{v}_a(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q-k)\cdot x} \\
&= -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x\, \bar{v}(\mathbf{p},\lambda)\Gamma_1^{\mathrm{C}} v(\mathbf{q},\lambda')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q-k)\cdot x} \\
&= -\mathrm{i}\kappa\, \bar{v}(\mathbf{p},\lambda)\Gamma_1^{\mathrm{C}} v(\mathbf{q},\lambda')\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(p-q-k) \\
&= \mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4x \left\langle \overbrace{\mathbf{q},\lambda';\, \mathbf{k}^+\big|\, \mathsf{N}[\phi^\dagger(x)\bar{\psi}^{\mathrm{C}}(x)\Gamma_1^{\mathrm{C}}\chi(x)]}\, \big|\mathbf{p}^+,\lambda\right\rangle .
\end{aligned} \tag{8.454}
$$

最后一步将第一步里面的场算符移回相互作用拉氏量中的次序。倒数第二行是第二种方法的计算结果。根据 (8.88)、(8.111) 和 (8.114) 式，有

$$
\begin{aligned}
-\bar{v}(\mathbf{p},\lambda)\Gamma_1^{\mathrm{C}} v(\mathbf{q},\lambda') &= -u^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda)\,\mathcal{C}\Gamma_1^{\mathrm{C}}\mathcal{C}\bar{u}^{\mathrm{T}}(\mathbf{q},\lambda') = u^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda)\,\mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}\Gamma_1^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}\bar{u}^{\mathrm{T}}(\mathbf{q},\lambda') \\
&= [u^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda)\,\Gamma_1^{\mathrm{T}}\bar{u}^{\mathrm{T}}(\mathbf{q},\lambda')]^{\mathrm{T}} = \bar{u}(\mathbf{q},\lambda')\Gamma_1 u(\mathbf{p},\lambda).
\end{aligned} \tag{8.455}
$$

由此可见，第二种方法的结果与第一种方法的结果 (8.443) 相等。

另一方面，考虑 $\bar{\psi}\to\chi\bar{\phi}$ 衰变过程，初态为 $|\mathbf{p}^-,\lambda\rangle$，末态为 $|\mathbf{q},\lambda';\mathbf{k}^-\rangle$。根据 (8.442) 式按第一种方法计算，$\mathrm{i}T_2^{(1)}$ 贡献的散射矩阵元是

$$
\begin{aligned}
\left\langle \mathbf{q},\lambda';\mathbf{k}^-\right|\mathrm{i}T_2^{(1)}\left|\mathbf{p}^-,\lambda\right\rangle &= \mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x \left\langle \mathbf{q},\lambda';\mathbf{k}^-\right|\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}(x)\Gamma_2\chi(x)]\left|\mathbf{p}^-,\lambda\right\rangle \\
&= \mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x \left\langle \overbrace{\mathbf{q},\lambda';\, \mathbf{k}^-\big|\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}_a(x)(\Gamma_2)_{ab}\chi_b(x)]}\, \big|\mathbf{p}^-,\lambda\right\rangle \\
&= -\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x \left\langle \overbrace{\mathbf{q},\lambda';\, \mathbf{k}^-\big|\, \mathsf{N}[\phi(x)\chi_b(x)(\Gamma_2)_{ab}\bar{\psi}_a(x)]}\, \big|\mathbf{p}^-,\lambda\right\rangle \\
&= -\mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\, v_b(\mathbf{q},\lambda')(\Gamma_2)_{ab}\bar{v}_a(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q-k)\cdot x} \\
&= -\mathrm{i}\kappa\,\bar{v}(\mathbf{p},\lambda)\Gamma_2 v(\mathbf{q},\lambda')\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(p-q-k).
\end{aligned} \tag{8.456}
$$

根据 (8.446) 式按第二种方法计算，$\mathrm{i}T_2^{(1)}$ 贡献的散射矩阵元为

$$
\begin{aligned}
\left\langle \mathbf{q},\lambda';\mathbf{k}^-\right|\mathrm{i}T_2^{(1)}\left|\mathbf{p}^-,\lambda\right\rangle &= \mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x \left\langle \mathbf{q},\lambda';\mathbf{k}^-\right|\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\chi}(x)\Gamma_2^{\mathrm{C}}\psi^{\mathrm{C}}(x)]\left|\mathbf{p}^-,\lambda\right\rangle \\
&= \mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x \left\langle \overbrace{\mathbf{q},\lambda';\, \mathbf{k}^-\big|\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\chi}(x)}\Gamma_2^{\mathrm{C}}\overbrace{\psi^{\mathrm{C}}(x)]}\, \big|\mathbf{p}^-,\lambda\right\rangle \\
&= \mathrm{i}\kappa\int \mathrm{d}^4x\, \bar{u}(\mathbf{q},\lambda')\Gamma_2^{\mathrm{C}} u(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q-k)\cdot x} \\
&= \mathrm{i}\kappa\,\bar{u}(\mathbf{q},\lambda')\Gamma_2^{\mathrm{C}} u(\mathbf{p},\lambda)\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(p-q-k).
\end{aligned} \tag{8.457}
$$

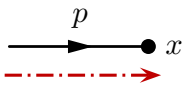
利用 (8.89)、(8.111) 和 (8.114) 式，有

$$
\begin{aligned}
\bar{u}(\mathbf{q},\lambda')\Gamma_2^{\mathrm{C}} u(\mathbf{p},\lambda) &= v^{\mathrm{T}}(\mathbf{q},\lambda')\,\mathcal{C}\Gamma_2^{\mathrm{C}}\mathcal{C}\bar{v}^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda) = -v^{\mathrm{T}}(\mathbf{q},\lambda')\,\mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}\Gamma_2^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}\bar{v}^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda) \\
&= -[v^{\mathrm{T}}(\mathbf{q},\lambda')\Gamma_2^{\mathrm{T}}\bar{v}^{\mathrm{T}}(\mathbf{p},\lambda)]^{\mathrm{T}} = -\bar{v}(\mathbf{p},\lambda)\Gamma_2 v(\mathbf{q},\lambda'),
\end{aligned} \tag{8.458}
$$

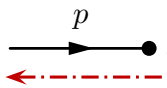
故两种方法的计算结果相等。

以上计算表明，这两种方法都是有效的，在实际计算中可采用任意一种方法。现在需要归纳出一套与这两种方法同时相容的 Feynman 规则，这样的规则将特别适用于处理费米子数破坏过程。

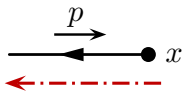
为此，在每条连续费米子线附近添加一条**带箭头的点划线**，表示**费米子流** (fermion flow) 的方向。费米子流的两种方向分别对应于上述两种计算方法。当费米子流方向与 Dirac 费米子线上箭头方向相同时，采用第一种计算方法；当费米子流方向与 Dirac 费米子线上箭头方向相反时，采用与电荷共轭场有关的第二种计算方法。这样一来，两种费米子流方向是等价的，对每条连续费米子线可采取任意一种方向进行计算。于是，位置空间中费米子的外线规则如下。

1. Dirac 正费米子 ψ 入射外线：

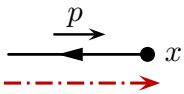
$= \langle 0|\,\overbrace{\psi(x)\,|\mathbf{p}^+,\lambda\rangle}\, = u(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}$，



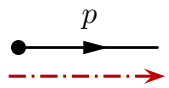
$= \langle 0|\,\overbrace{\psi^{\mathrm{C}}(x)\,|\mathbf{p}^+,\lambda\rangle}\, = \bar{v}(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}$.

2. Dirac 反费米子 $\bar{\psi}$ 入射外线：

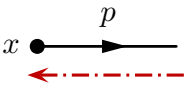
$= \langle 0|\,\overbrace{\bar{\psi}(x)\,|\mathbf{p}^-,\lambda\rangle}\, = \bar{v}(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}$，



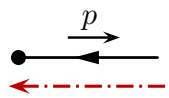
$= \langle 0|\,\overbrace{\psi^{\mathrm{C}}(x)\,|\mathbf{p}^-,\lambda\rangle}\, = u(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}$.

3. Dirac 正费米子 ψ 出射外线：

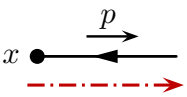
$= \overbrace{\langle \mathbf{p}^+,\lambda|\,\bar{\psi}(x)}\,|0\rangle = \bar{u}(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}$，



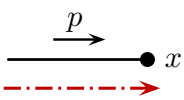
$= \overbrace{\langle \mathbf{p}^+,\lambda|\,\bar{\psi}^{\mathrm{C}}(x)}\,|0\rangle = v(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}$.

4. Dirac 反费米子 $\bar{\psi}$ 出射外线：

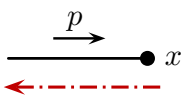
$= \overbrace{\langle \mathbf{p}^-,\lambda|\,\psi(x)}\,|0\rangle = v(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}$，



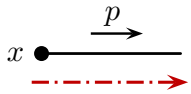
$= \overbrace{\langle \mathbf{p}^-,\lambda|\,\psi^{\mathrm{C}}(x)}\,|0\rangle = \bar{u}(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}$.

5. Majorana 费米子 χ 入射外线：

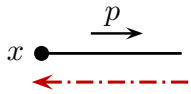
$= \langle 0|\,\overbrace{\chi(x)\,|\mathbf{p},\lambda\rangle}\, = u(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}$，



$= \langle 0|\,\overbrace{\bar{\chi}(x)\,|\mathbf{p},\lambda\rangle}\, = \bar{v}(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}$.

6. Majorana 费米子 χ 出射外线：

$= \overbrace{\langle \mathbf{p},\lambda|\,\bar{\chi}(x)}\,|0\rangle = \bar{u}(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}$，



$= \overbrace{\langle \mathbf{p},\lambda|\,\chi(x)}\,|0\rangle = v(\mathbf{p},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}$.

Majorana 费米子线上没有箭头，Feynman 规则依赖于费米子流方向与动量方向之间的异同。从每条连续费米子线写出散射振幅时，总是**逆着费米子流方向**逐项写下费米子的贡献。

对于上述 $\psi \to \chi\phi$ 和 $\bar{\psi} \to \chi\bar{\phi}$ 过程，第一种计算方法对应于

$$\left\langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ \middle| \mathrm{i}T_1^{(1)} \middle| \mathbf{p}^+, \lambda \right\rangle = \quad \psi, \lambda \quad \phi\ (k),\ x,\ p,\ q,\ \chi, \lambda' \quad = \mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4 x\, \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda') \Gamma_1 u(\mathbf{p}, \lambda) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q-k)\cdot x}, \tag{8.459}$$

$$\left\langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^- \middle| \mathrm{i}T_2^{(1)} \middle| \mathbf{p}^-, \lambda \right\rangle = \quad \bar{\psi}, \lambda \quad \bar{\phi}\ (k),\ x,\ p,\ q,\ \chi, \lambda' \quad = -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4 x\, \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) \Gamma_2 v(\mathbf{q}, \lambda') \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q-k)\cdot x}. \tag{8.460}$$

第二种计算方法对应于

$$\left\langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^+ \middle| \mathrm{i}T_1^{(1)} \middle| \mathbf{p}^+, \lambda \right\rangle = \quad \psi, \lambda \quad \phi\ (k),\ x,\ p,\ q,\ \chi, \lambda' \quad = -\mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4 x\, \bar{v}(\mathbf{p}, \lambda) \Gamma_1^{\mathrm{C}} v(\mathbf{q}, \lambda') \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q-k)\cdot x}, \tag{8.461}$$

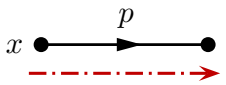
$$\left\langle \mathbf{q}, \lambda'; \mathbf{k}^- \middle| \mathrm{i}T_2^{(1)} \middle| \mathbf{p}^-, \lambda \right\rangle = \quad \bar{\psi}, \lambda \quad \bar{\phi}\ (k),\ x,\ p,\ q,\ \chi, \lambda' \quad = \mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4 x\, \bar{u}(\mathbf{q}, \lambda') \Gamma_2^{\mathrm{C}} u(\mathbf{p}, \lambda) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q-k)\cdot x}. \tag{8.462}$$

两种方法在 Feynman 图上的差异只是费米子流的方向不同，即点划线的箭头方向不同。额外的负号来自两个费米子场算符的交换。观察各个 Feynman 图元素与振幅表达式的关系，归纳出位置空间中的顶点 Feynman 规则，

$$\phi,\ x,\ \psi,\ \chi \quad = \mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4 x\, \Gamma_1, \qquad \phi,\ x,\ \psi,\ \chi \quad = \mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4 x\, \Gamma_2, \tag{8.463}$$

$$\phi,\ x,\ \psi,\ \chi \quad = \mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4 x\, \Gamma_1^{\mathrm{C}}, \qquad \phi,\ x,\ \psi,\ \chi \quad = \mathrm{i}\kappa \int \mathrm{d}^4 x\, \Gamma_2^{\mathrm{C}}. \tag{8.464}$$

研究 $\mathrm{i}T^{(2)}$ 对散射矩阵元的贡献时，可能遇到像 $\mathsf{N}[\bar{\chi}(y)\Gamma_1\overbrace{\psi(y)\bar{\psi}}(x)\Gamma_2\chi(x)]$ 这样的表达式。如果采用第一种方法进行计算，则 Dirac 旋量场 Feynman 传播子在位置空间中的 Feynman 规则与 (6.38) 式类似，表达为

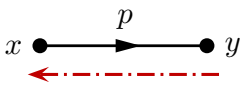


$$= \overbrace{\psi(y)\bar{\psi}}(x) = S_{\mathrm{F}}(y-x) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}(\not{p}+m_\psi)}{p^2-m_\psi^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(y-x)}. \tag{8.465}$$

由 (8.445) 式推出

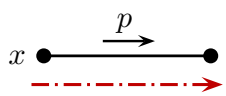
$$\mathsf{N}[\bar{\chi}(y)\Gamma_1\overbrace{\psi(y)\bar{\psi}}(x)\Gamma_2\chi(x)] = \mathsf{N}[\overbrace{\bar{\psi}^{\mathrm{C}}(y)\Gamma_1^{\mathrm{C}}\chi(y)\bar{\chi}(x)\Gamma_2^{\mathrm{C}}\bar{\psi}^{\mathrm{C}}}(x)] = \mathsf{N}[\bar{\chi}(x)\Gamma_2^{\mathrm{C}}\overbrace{\psi^{\mathrm{C}}(x)\bar{\psi}^{\mathrm{C}}}(y)\Gamma_1^{\mathrm{C}}\chi(y)], \tag{8.466}$$

根据场算符缩并的定义 (5.163)，如果采用第二种方法进行计算，则相应的 Feynman 传播子是



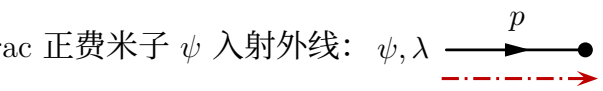
$$\begin{aligned}
&= \overbrace{\psi^{\mathrm{C}}(x)\bar{\psi}^{\mathrm{C}}}(y) = \langle 0|\,\mathsf{T}[\psi^{\mathrm{C}}(x)\bar{\psi}^{\mathrm{C}}(y)]\,|0\rangle = \langle 0|\,\mathsf{T}[\mathcal{C}\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(x)\psi^{\mathrm{T}}(y)\mathcal{C}]\,|0\rangle \\
&= -\mathcal{C}\{\langle 0|\,\mathsf{T}[\psi(y)\bar{\psi}(x)]\,|0\rangle\}^{\mathrm{T}}\mathcal{C} = \mathcal{C}^{-1}[\overbrace{\psi(y)\bar{\psi}}(x)]^{\mathrm{T}}\mathcal{C} \\
&= \mathcal{C}^{-1}S_{\mathrm{F}}^{\mathrm{T}}(y-x)\mathcal{C} = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathcal{C}^{-1}\mathrm{i}(\not{p}+m_\psi)^{\mathrm{T}}\mathcal{C}}{p^2-m_\psi^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(y-x)} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}(-\not{p}+m_\psi)}{p^2-m_\psi^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(y-x)}.
\end{aligned} \tag{8.467}$$

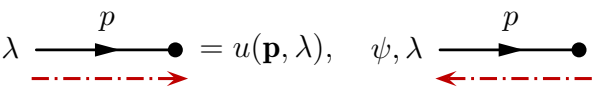
最后一步用到 (8.101) 式。另一方面，Majorana 旋量场的 Feynman 传播子为



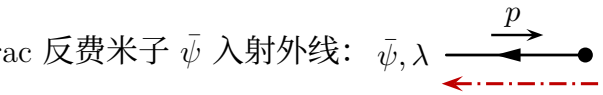
$$= \overbrace{\chi(y)\bar{\chi}}(x) = S_{\mathrm{F}}(y-x) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}(\not{p}+m_\chi)}{p^2-m_\chi^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(y-x)}. \tag{8.468}$$

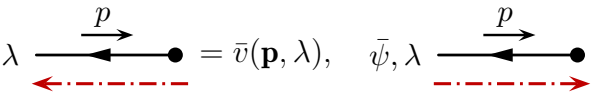
转换到动量空间，我们推出以下 Feynman 规则。

1. Dirac 正费米子 ψ 入射外线：

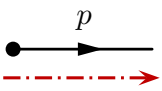
$= u(\mathbf{p},\lambda)$，

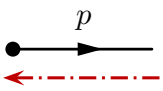
$= \bar{v}(\mathbf{p},\lambda)$.

2. Dirac 反费米子 $\bar{\psi}$ 入射外线：

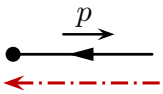
$= \bar{v}(\mathbf{p},\lambda)$，

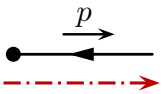
$= u(\mathbf{p},\lambda)$.

3. Dirac 正费米子 ψ 出射外线：

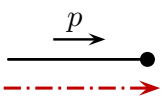
$= \bar{u}(\mathbf{p},\lambda)$，

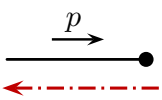
$= v(\mathbf{p},\lambda)$.

4. Dirac 反费米子 $\bar{\psi}$ 出射外线：

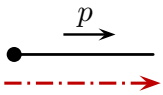
$= v(\mathbf{p},\lambda)$，

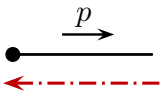
$= \bar{u}(\mathbf{p},\lambda)$.

5. Majorana 费米子 χ 入射外线：

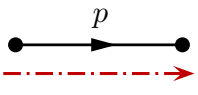
$= u(\mathbf{p},\lambda)$，

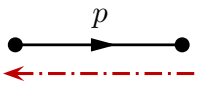
$= \bar{v}(\mathbf{p},\lambda)$.

6. Majorana 费米子 χ 出射外线：

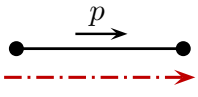
$= \bar{u}(\mathbf{p}, \lambda)$, 

$= v(\mathbf{p}, \lambda)$.

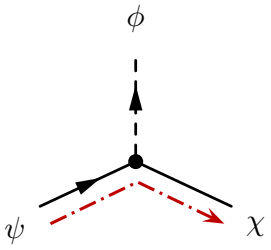
7. Dirac 费米子传播子：

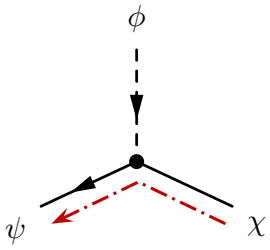
$= \dfrac{\mathrm{i}(\not{p} + m_\psi)}{p^2 - m_\psi^2 + \mathrm{i}\epsilon}$, 

$= \dfrac{\mathrm{i}(-\not{p} + m_\psi)}{p^2 - m_\psi^2 + \mathrm{i}\epsilon}$.

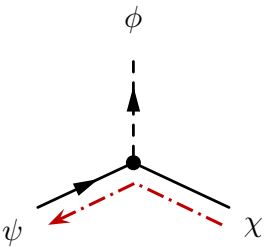
8. Majorana 费米子传播子：

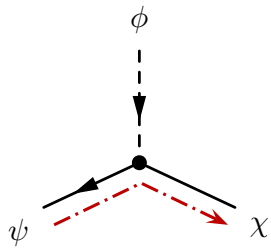
$= \dfrac{\mathrm{i}(\not{p} + m_\chi)}{p^2 - m_\chi^2 + \mathrm{i}\epsilon}$.

9. Yukawa 相互作用顶点：

$= \mathrm{i}\kappa\,\Gamma_1$, 

$= \mathrm{i}\kappa\,\Gamma_2$,



$= \mathrm{i}\kappa\,\Gamma_1^{\mathrm{C}}$, 

$= \mathrm{i}\kappa\,\Gamma_2^{\mathrm{C}}$.

注意，Majorana 费米子是纯中性粒子，如果末态包含超过 1 个全同的 Majorana 费米子，计算散射截面或衰变宽度时需要考虑末态对称性因子 $\mathcal{S}$。假如拉氏量的某个相互作用项包含 2 个或以上全同的 Majorana 旋量场，类似于 6.3 节的讨论，在导出顶点 Feynman 规则时需要考虑组合因子，计算时还需要留意 *Feynman* 图的对称性因子。

8.7.3 应用

下面应用上一小节推导出来的 Feynman 规则进行计算。考虑 $\chi\chi \to \psi\bar{\psi}$ 湮灭过程，领头阶 Feynman 图如图 8.1 所示，包含一个 t 通道和一个 u 通道的 Feynman 图。现在，费米子流方向有多种取法，但各种取法的计算结果应该是等价的。

设初态两个 Majorana 费米子 χ 的四维动量为 k_1^μ 和 k_2^μ，末态 Dirac 费米子 ψ 和 $\bar{\psi}$ 的四

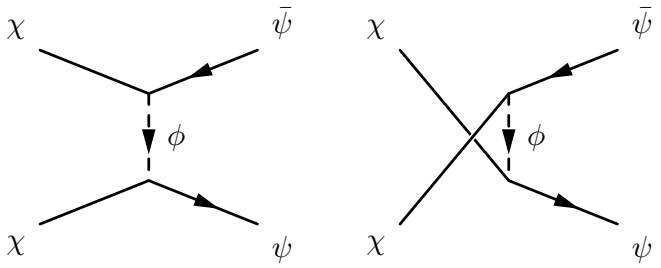
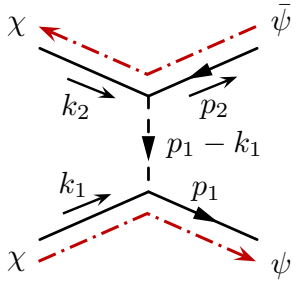


图 8.1: $\chi\chi \to \psi\bar{\psi}$ 领头阶 Feynman 图，左图为 t 通道，右图为 u 通道。

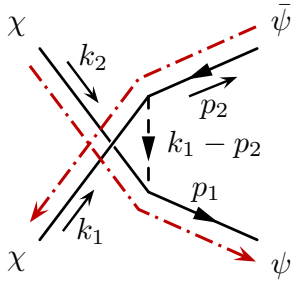
维动量为 p_1^μ 和 p_2^μ，令 $t=(k_1-p_1)^2$，$u=(k_1-p_2)^2$。添加带箭头的点划线表示费米子流方向，应用动量空间 Feynman 规则，t 和 u 通道 Feynman 图贡献的不变振幅分别是

$$\mathrm{i}\mathcal{M}_t = \quad = \bar{u}(p_1)(\mathrm{i}\kappa\Gamma_2)u(k_1)\,\frac{\mathrm{i}}{(p_1-k_1)^2-m_\phi^2}\,\bar{v}(k_2)(\mathrm{i}\kappa\Gamma_1)v(p_2)$$



$$= -\frac{\mathrm{i}\kappa^2}{t-m_\phi^2}\,\bar{u}(p_1)\Gamma_2 u(k_1)\bar{v}(k_2)\Gamma_1 v(p_2), \tag{8.469}$$

$$\mathrm{i}\mathcal{M}_u = \quad = \bar{v}(k_1)(\mathrm{i}\kappa\Gamma_1)v(p_2)\,\frac{\mathrm{i}}{(k_1-p_2)^2-m_\phi^2}\,\bar{u}(p_1)(\mathrm{i}\kappa\Gamma_2)u(k_2)$$



$$= -\frac{\mathrm{i}\kappa^2}{u-m_\phi^2}\,\bar{v}(k_1)\Gamma_1 v(p_2)\bar{u}(p_1)\Gamma_2 u(k_2). \tag{8.470}$$

这里省略了螺旋度指标。根据

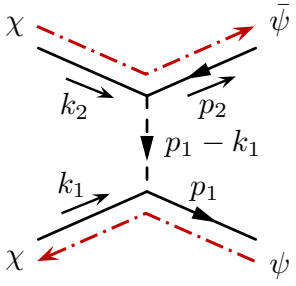
$$\begin{aligned}
&\overbrace{\langle \mathbf{p}_1^+;\,\mathbf{p}_2^-|\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}_a(x)(\Gamma_2)_{ab}\chi_b(x)\phi^\dagger(y)\bar{\chi}_c(y)(\Gamma_1)_{cd}\psi_d(y)]\,|\mathbf{k}_1;\,\mathbf{k}_2\rangle}\\
&+\overbrace{\langle \mathbf{p}_1^+;\,\mathbf{p}_2^-|\,\mathsf{N}[\phi(x)\bar{\psi}_a(x)(\Gamma_2)_{ab}\chi_b(x)\phi^\dagger(y)\bar{\chi}_c(y)(\Gamma_1)_{cd}\psi_d(y)]\,|\mathbf{k}_1;\,\mathbf{k}_2\rangle}\\
=\;&\overbrace{\langle \mathbf{p}_1^+;\,\mathbf{p}_2^-|\,\mathsf{N}[\psi_d(y)\bar{\psi}_a(x)(\Gamma_2)_{ab}\phi(x)\phi^\dagger(y)(\Gamma_1)_{cd}\bar{\chi}_c(y)\chi_b(x)]\,|\mathbf{k}_1;\,\mathbf{k}_2\rangle}\\
&-\overbrace{\langle \mathbf{p}_1^+;\,\mathbf{p}_2^-|\,\mathsf{N}[\psi_d(y)\bar{\psi}_a(x)(\Gamma_2)_{ab}\phi(x)\phi^\dagger(y)(\Gamma_1)_{cd}\chi_b(x)\bar{\chi}_c(y)]\,|\mathbf{k}_1;\,\mathbf{k}_2\rangle}\,,
\end{aligned} \tag{8.471}$$

这两个 Feynman 图的相对符号为负，因而总振幅是

$$\mathrm{i}\mathcal{M} = \mathrm{i}\mathcal{M}_t - \mathrm{i}\mathcal{M}_u. \tag{8.472}$$

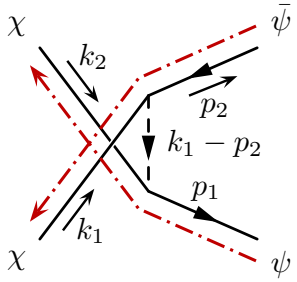
当然，我们也可以选择其它费米子流方向进行计算。比如，同时反转 (8.469) 式中 Feynman 图上两条点划线的方向，则 t 通道振幅变成

$$\mathrm{i}\tilde{\mathcal{M}}_t = \quad = \bar{v}(k_1)(\mathrm{i}\kappa\Gamma_2^{\mathrm{C}})v(p_1)\,\frac{\mathrm{i}}{(p_1-k_1)^2-m_\phi^2}\,\bar{u}(p_2)(\mathrm{i}\kappa\Gamma_1^{\mathrm{C}})u(k_2)$$



$$= -\frac{\mathrm{i}\kappa^2}{t-m_\phi^2}\,\bar{v}(k_1)\Gamma_2^{\mathrm{C}}v(p_1)\bar{u}(p_2)\Gamma_1^{\mathrm{C}}u(k_2). \tag{8.473}$$

反转 (8.470) 式中 Feynman 图上一条点划线的方向，u 通道振幅化为

$\mathrm{i}\tilde{\mathcal{M}}_u =$ 

$= \bar{v}(k_1)(\mathrm{i}\kappa\Gamma_1)v(p_2)\,\dfrac{\mathrm{i}}{(k_1-p_2)^2-m_\phi^2}\,\bar{v}(k_2)(\mathrm{i}\kappa\Gamma_2^{\mathrm{C}})v(p_1)$

$$= -\frac{\mathrm{i}\kappa^2}{u-m_\phi^2}\,\bar{v}(k_1)\Gamma_1 v(p_2)\bar{v}(k_2)\Gamma_2^{\mathrm{C}}v(p_1). \tag{8.474}$$

根据

$$\begin{aligned}
&\big\langle \mathbf{p}_1^+;\,\mathbf{p}_2^- \big|\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\chi}_a(x)(\Gamma_2^{\mathrm{C}})_{ab}\psi_b^{\mathrm{C}}(x)\phi^\dagger(y)\bar{\psi}_c^{\mathrm{C}}(y)(\Gamma_1^{\mathrm{C}})_{cd}\chi_d(y)]\,\big|\mathbf{k}_1;\,\mathbf{k}_2\big\rangle \\
&+\big\langle \mathbf{p}_1^+;\,\mathbf{p}_2^- \big|\, \mathsf{N}[\phi(x)\bar{\chi}_a(x)(\Gamma_2^{\mathrm{C}})_{ab}\psi_b^{\mathrm{C}}(x)\phi^\dagger(y)\bar{\chi}_c(y)(\Gamma_1)_{cd}\psi_d(y)]\,\big|\mathbf{k}_1;\,\mathbf{k}_2\big\rangle \\
=&\big\langle \mathbf{p}_1^+;\,\mathbf{p}_2^- \big|\, \mathsf{N}[\bar{\psi}_c^{\mathrm{C}}(y)\psi_b^{\mathrm{C}}(x)(\Gamma_2^{\mathrm{C}})_{ab}\phi(x)\phi^\dagger(y)(\Gamma_1^{\mathrm{C}})_{cd}\chi_d(y)\bar{\chi}_a(x)]\,\big|\mathbf{k}_1;\,\mathbf{k}_2\big\rangle \\
&+\big\langle \mathbf{p}_1^+;\,\mathbf{p}_2^- \big|\, \mathsf{N}[\psi_d(y)\psi_b^{\mathrm{C}}(x)(\Gamma_2^{\mathrm{C}})_{ab}\phi(x)\phi^\dagger(y)\bar{\chi}_a(x)\bar{\chi}_c(y)(\Gamma_1)_{cd}]\,\big|\mathbf{k}_1;\,\mathbf{k}_2\big\rangle\,,
\end{aligned} \tag{8.475}$$

这两个 Feynman 图的相对符号为正，因而总振幅是

$$\mathrm{i}\tilde{\mathcal{M}} = \mathrm{i}\tilde{\mathcal{M}}_t + \mathrm{i}\tilde{\mathcal{M}}_u. \tag{8.476}$$

利用 (8.88)、(8.89)、(8.111) 和 (8.114) 式，有

$$\begin{aligned}
\bar{v}(k_1)\Gamma_2^{\mathrm{C}}v(p_1)\bar{u}(p_2)\Gamma_1^{\mathrm{C}}u(k_2) &= u^{\mathrm{T}}(k_1)\,\mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}\Gamma_2^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\mathcal{C}\bar{u}^{\mathrm{T}}(p_1)v^{\mathrm{T}}(p_2)\,\mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}\Gamma_1^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\mathcal{C}\bar{v}^{\mathrm{T}}(k_2) \\
&= [u^{\mathrm{T}}(k_1)\Gamma_2^{\mathrm{T}}\bar{u}^{\mathrm{T}}(p_1)v^{\mathrm{T}}(p_2)\Gamma_1^{\mathrm{T}}\bar{v}^{\mathrm{T}}(k_2)]^{\mathrm{T}} \\
&= \bar{v}(k_2)\Gamma_1 v(p_2)\bar{u}(p_1)\Gamma_2 u(k_1), \qquad (8.477) \\
\bar{v}(k_1)\Gamma_1 v(p_2)\bar{v}(k_2)\Gamma_2^{\mathrm{C}}v(p_1) &= \bar{v}(k_1)\Gamma_1 v(p_2)u^{\mathrm{T}}(k_2)\,\mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}\Gamma_2^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\mathcal{C}\bar{u}^{\mathrm{T}}(p_1) \\
&= -\bar{v}(k_1)\Gamma_1 v(p_2)[u^{\mathrm{T}}(k_2)\,\Gamma_2^{\mathrm{T}}\bar{u}^{\mathrm{T}}(p_1)]^{\mathrm{T}} \\
&= -\bar{v}(k_1)\Gamma_1 v(p_2)\bar{u}(p_1)\Gamma_2 u(k_2), \qquad (8.478)
\end{aligned}$$

故 $\mathrm{i}\tilde{\mathcal{M}}_t = \mathrm{i}\mathcal{M}_t$，$\mathrm{i}\tilde{\mathcal{M}}_u = -\mathrm{i}\mathcal{M}_u$，因此

$$\mathrm{i}\tilde{\mathcal{M}} = \mathrm{i}\tilde{\mathcal{M}}_t + \mathrm{i}\tilde{\mathcal{M}}_u = \mathrm{i}\mathcal{M}_t - \mathrm{i}\mathcal{M}_u = \mathrm{i}\mathcal{M}. \tag{8.479}$$

可见，根据费米子流方向的不同取法计算出来的结果确实是等价的。

接下来计算 $\chi\chi \to \psi\bar{\psi}$ 的非极化振幅模方 $\overline{|\mathcal{M}|^2}$。使用 Γ_1 和 Γ_2 的具体形式 (8.428)，得

$$\mathrm{i}\mathcal{M}_t = -\frac{\mathrm{i}\kappa^2}{t-m_\phi^2}\,\bar{u}(p_1)P_{\mathrm{L}}u(k_1)\bar{v}(k_2)P_{\mathrm{R}}v(p_2), \quad (\mathrm{i}\mathcal{M}_t)^* = \frac{\mathrm{i}\kappa^2}{t-m_\phi^2}\,\bar{u}(k_1)P_{\mathrm{R}}u(p_1)\bar{v}(p_2)P_{\mathrm{L}}v(k_2), \tag{8.480}$$

$$\mathrm{i}\mathcal{M}_u = -\frac{\mathrm{i}\kappa^2}{u-m_\phi^2}\,\bar{v}(k_1)P_{\mathrm{R}}v(p_2)\bar{u}(p_1)P_{\mathrm{L}}u(k_2), \quad (\mathrm{i}\mathcal{M}_u)^* = \frac{\mathrm{i}\kappa^2}{u-m_\phi^2}\,\bar{v}(p_2)P_{\mathrm{L}}v(k_1)\bar{u}(k_2)P_{\mathrm{R}}u(p_1). \tag{8.481}$$

从而，单纯 t 通道对非极化振幅模方的贡献是

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}_t|^2} &= \frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}_t|^2 = \frac{\kappa^4}{4(t-m_\phi^2)^2}\sum_{\text{spins}}\bar{u}(p_1)P_{\mathrm{L}}u(k_1)\bar{u}(k_1)P_{\mathrm{R}}u(p_1)\bar{v}(k_2)P_{\mathrm{R}}v(p_2)\bar{v}(p_2)P_{\mathrm{L}}v(k_2)\\ &= \frac{\kappa^4}{4(t-m_\phi^2)^2}\,\mathrm{tr}[(\not{p}_1+m_\psi)P_{\mathrm{L}}(\not{k}_1+m_\chi)P_{\mathrm{R}}]\,\mathrm{tr}[(\not{k}_2-m_\chi)P_{\mathrm{R}}(\not{p}_2-m_\psi)P_{\mathrm{L}}],\end{aligned} \tag{8.482}$$

根据左右手投影矩阵的性质 (7.163)、(7.160) 和 (7.161)，有

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}[(\not{p}_1+m_\psi)P_{\mathrm{L}}(\not{k}_1+m_\chi)P_{\mathrm{R}}] &= \mathrm{tr}[(\not{p}_1+m_\psi)(\not{k}_1P_{\mathrm{R}}+m_\chi P_{\mathrm{L}})P_{\mathrm{R}}] = \mathrm{tr}[(\not{p}_1+m_\psi)\not{k}_1P_{\mathrm{R}}]\\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}[(\not{p}_1+m_\psi)\not{k}_1(1+\gamma^5)] = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\not{p}_1\not{k}_1) = 2\,k_1\cdot p_1,\end{aligned} \tag{8.483}$$

$$\mathrm{tr}[(\not{k}_2-m_\chi)P_{\mathrm{R}}(\not{p}_2-m_\psi)P_{\mathrm{L}}] = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}[(\not{k}_2-m_\chi)\not{p}_2(1-\gamma^5)] = 2\,k_2\cdot p_2, \tag{8.484}$$

故

$$\overline{|\mathcal{M}_t|^2} = \frac{\kappa^4(k_1\cdot p_1)(k_2\cdot p_2)}{(t-m_\phi^2)^2}. \tag{8.485}$$

另一方面，单纯 u 通道的贡献为

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}_u|^2} &= \frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}_u|^2 = \frac{\kappa^4}{4(u-m_\phi^2)^2}\sum_{\text{spins}}\bar{v}(k_1)P_{\mathrm{R}}v(p_2)\bar{v}(p_2)P_{\mathrm{L}}v(k_1)\bar{u}(p_1)P_{\mathrm{L}}u(k_2)\bar{u}(k_2)P_{\mathrm{R}}u(p_1)\\ &= \frac{\kappa^4}{4(u-m_\phi^2)^2}\,\mathrm{tr}[(\not{k}_1-m_\chi)P_{\mathrm{R}}(\not{p}_2-m_\psi)P_{\mathrm{L}}]\,\mathrm{tr}[(\not{p}_1+m_\psi)P_{\mathrm{L}}(\not{k}_2+m_\chi)P_{\mathrm{R}}]\\ &= \frac{\kappa^4(k_1\cdot p_2)(k_2\cdot p_1)}{(u-m_\phi^2)^2}.\end{aligned} \tag{8.486}$$

而 t 和 u 通道的交叉贡献是

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{M}_t^*\mathcal{M}_u} &= \frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}\mathcal{M}_t^*\mathcal{M}_u\\ &= \frac{\kappa^4}{4(t-m_\phi^2)(u-m_\phi^2)}\sum_{\text{spins}}\bar{u}(k_1)P_{\mathrm{R}}u(p_1)\bar{u}(p_1)P_{\mathrm{L}}u(k_2)\bar{v}(p_2)P_{\mathrm{L}}v(k_2)\bar{v}(k_1)P_{\mathrm{R}}v(p_2),\end{aligned} \tag{8.487}$$

其中

$$\sum_{\text{spins}}\bar{u}(k_1)P_{\mathrm{R}}u(p_1)\bar{u}(p_1)P_{\mathrm{L}}u(k_2)\bar{v}(p_2)P_{\mathrm{L}}v(k_2)\bar{v}(k_1)P_{\mathrm{R}}v(p_2)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\text{spins}} \bar{u}(k_1)P_{\mathrm{R}}u(p_1)\bar{u}(p_1)P_{\mathrm{L}}u(k_2)[u^{\mathrm{T}}(p_2)\,\mathcal{C}P_{\mathrm{L}}\mathcal{C}\bar{u}^{\mathrm{T}}(k_2)]^{\mathrm{T}}[u^{\mathrm{T}}(k_1)\,\mathcal{C}P_{\mathrm{R}}\mathcal{C}\bar{u}^{\mathrm{T}}(p_2)]^{\mathrm{T}} \\
&= \sum_{\text{spins}} \bar{u}(k_1)P_{\mathrm{R}}u(p_1)\bar{u}(p_1)P_{\mathrm{L}}u(k_2)\bar{u}(k_2)\,\mathcal{C}^{\mathrm{T}}P_{\mathrm{L}}^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{\mathrm{T}}u(p_2)\bar{u}(p_2)\,\mathcal{C}^{\mathrm{T}}P_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{\mathrm{T}}u(k_1) \\
&= \mathrm{tr}[(\not{k}_1+m_\chi)P_{\mathrm{R}}(\not{p}_1+m_\psi)P_{\mathrm{L}}(\not{k}_2+m_\chi)\,\mathcal{C}^{-1}P_{\mathrm{L}}^{\mathrm{T}}\mathcal{C}(\not{p}_2+m_\psi)\,\mathcal{C}^{-1}P_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}\mathcal{C}] \\
&= \mathrm{tr}[(\not{k}_1+m_\chi)\not{p}_1P_{\mathrm{L}}(\not{k}_2+m_\chi)P_{\mathrm{L}}(\not{p}_2+m_\psi)P_{\mathrm{R}}] = m_\chi\,\mathrm{tr}[(\not{k}_1+m_\chi)\not{p}_1P_{\mathrm{L}}(\not{p}_2+m_\psi)P_{\mathrm{R}}] \\
&= m_\chi\,\mathrm{tr}[(\not{k}_1+m_\chi)\not{p}_1\not{p}_2P_{\mathrm{R}}] = \frac{m_\chi}{2}\,\mathrm{tr}[(\not{k}_1+m_\chi)\not{p}_1\not{p}_2(1+\gamma^5)] \\
&= \frac{m_\chi^2}{2}\,\mathrm{tr}(\not{p}_1\not{p}_2) = 2m_\chi^2(p_1\cdot p_2),
\end{aligned}
\tag{8.488}
$$

则

$$
\overline{\mathcal{M}_t^*\mathcal{M}_u} + \mathrm{H.c.} = \frac{\kappa^4 m_\chi^2(p_1\cdot p_2)}{2(t-m_\phi^2)(u-m_\phi^2)} + \mathrm{H.c.} = \frac{\kappa^4 m_\chi^2(p_1\cdot p_2)}{(t-m_\phi^2)(u-m_\phi^2)}. \tag{8.489}
$$

于是，$\chi\chi\to\psi\bar{\psi}$ 的非极化振幅模方为

$$
\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \overline{|\mathcal{M}_t-\mathcal{M}_u|^2} = \overline{|\mathcal{M}_t|^2} + \overline{|\mathcal{M}_u|^2} - (\overline{\mathcal{M}_t^*\mathcal{M}_u} + \mathrm{H.c.}) \\
&= \kappa^4\left[\frac{(k_1\cdot p_1)(k_2\cdot p_2)}{(t-m_\phi^2)^2} + \frac{(k_1\cdot p_2)(k_2\cdot p_1)}{(u-m_\phi^2)^2} - \frac{m_\chi^2(p_1\cdot p_2)}{(t-m_\phi^2)(u-m_\phi^2)}\right].
\end{aligned}
\tag{8.490}
$$

习　题

8.1 利用 (8.11) 和 (8.12) 式，证明算符 $\mathbf{J}\cdot\mathbf{P}\equiv J^iP^i$ 满足

$$
P^{-1}(\mathbf{J}\cdot\mathbf{P})P = -\mathbf{J}\cdot\mathbf{P}. \tag{8.491}
$$

设 $|E,\mathbf{p},\sigma\rangle$ 是哈密顿量算符 H、动量算符 $\mathbf{P}$ 和算符 $\mathbf{J}\cdot\mathbf{P}$ 的共同本征态，满足

$$
H|E,\mathbf{p},\sigma\rangle = E|E,\mathbf{p},\sigma\rangle, \quad \mathbf{P}|E,\mathbf{p},\sigma\rangle = \mathbf{p}|E,\mathbf{p},\sigma\rangle, \quad \mathbf{J}\cdot\mathbf{P}|E,\mathbf{p},\sigma\rangle = \sigma|E,\mathbf{p},\sigma\rangle. \tag{8.492}
$$

用 P 变换定义 $|E,\mathbf{p},\sigma\rangle'\equiv P|E,\mathbf{p},\sigma\rangle$，证明

$$
H|E,\mathbf{p},\sigma\rangle' = |E,\mathbf{p},\sigma\rangle', \quad \mathbf{P}|E,\mathbf{p},\sigma\rangle' = -\mathbf{p}|E,\mathbf{p},\sigma\rangle', \quad \mathbf{J}\cdot\mathbf{P}|E,\mathbf{p},\sigma\rangle' = -\sigma|E,\mathbf{p},\sigma\rangle'. \tag{8.493}
$$

8.2 根据 (8.36) 式，证明

$$
P'^{-1}\left|\phi\bar{\phi}\right\rangle = (-)^L\left|\phi\bar{\phi}\right\rangle, \tag{8.494}
$$

其中 $\left|\phi\bar{\phi}\right\rangle$ 是一对正反标量玻色子 $\phi\bar{\phi}$ 组成的态 (8.26)，L 是它的轨道角动量量子数。

8.3 类似于 (3.416) 式，无质量复矢量场 $A^\mu(x)$ 的平面波展开式为

$$
A^\mu(x) = \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\lambda=\pm}\left[\varepsilon^\mu(\mathbf{p},\lambda)a_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + \varepsilon^{\mu*}(\mathbf{p},\lambda)c^\dagger_{\mathbf{p},\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right]
$$

$$+\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{\sigma=0,3} e^{\mu}(\mathbf{p},\sigma)\left(b_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+d^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right). \tag{8.495}$$

其中极化矢量 $\varepsilon^{\mu}(\mathbf{p},\lambda)$ $(\lambda=\pm)$ 的表达式由 (3.244) 式给出，极化矢量 $e^{\mu}(\mathbf{p},\sigma)$ $(\sigma=0,3)$ 的表达式是 (3.326) 和 (3.329) 式。

(a) 证明

$$e^{\mu}(-\mathbf{p},\sigma)=\mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu}e^{\nu}(\mathbf{p},\sigma),\quad \sigma=0,3. \tag{8.496}$$

(b) 根据产生湮灭算符的 C、P、T 变换

$$C^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}C=\xi_C^{*}c_{\mathbf{p},\lambda},\qquad C^{-1}c^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}C=\xi_C^{*}a^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}, \tag{8.497}$$

$$C^{-1}b_{\mathbf{p},\sigma}C=\xi_C^{*}d_{\mathbf{p},\sigma},\qquad C^{-1}d^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}C=\xi_C^{*}b^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}, \tag{8.498}$$

$$P^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}P=\xi_P^{*}a_{-\mathbf{p},-\lambda},\qquad P^{-1}c^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}P=\xi_P^{*}c^{\dagger}_{-\mathbf{p},-\lambda}, \tag{8.499}$$

$$P^{-1}b_{\mathbf{p},\sigma}P=\xi_P^{*}b_{-\mathbf{p},\sigma},\qquad P^{-1}d^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}P=\xi_P^{*}d^{\dagger}_{-\mathbf{p},\sigma}, \tag{8.500}$$

$$T^{-1}a_{\mathbf{p},\lambda}T=\xi_T^{*}a_{-\mathbf{p},\lambda},\qquad T^{-1}c^{\dagger}_{\mathbf{p},\lambda}T=\xi_T^{*}c^{\dagger}_{-\mathbf{p},\lambda}, \tag{8.501}$$

$$T^{-1}b_{\mathbf{p},\sigma}T=-\xi_T^{*}b_{-\mathbf{p},\sigma},\qquad T^{-1}d^{\dagger}_{\mathbf{p},\sigma}T=-\xi_T^{*}d^{\dagger}_{-\mathbf{p},\sigma}, \tag{8.502}$$

推出 $A^{\mu}(x)$ 的 C、P、T 变换 (8.243)、(8.244)、(8.245)。

参考文献

[1] O. Klein, "Quantentheorie und fünfdimensionale relativitätstheorie," *Z. Phys.* **37** (1926) 895–906.

[2] W. Gordon, "Der Comptoneffekt nach der Schrödingerschen theorie," *Z. Phys.* **40** (1926) 117–133.

[3] P. A. M. Dirac, "The quantum theory of the electron," *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **117** (1928) 610–624.

[4] P. A. M. Dirac, "A theory of electrons and protons," *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **126** (1930) 360–365.

[5] C. D. Anderson, "The positive electron," *Phys. Rev.* **43** (1933) 491–494.

[6] A. Einstein, "On the electrodynamics of moving bodies," *Annalen Phys.* **17** (1905) 891–921.

[7] H. A. Lorentz, "Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light," *Proceedings of the Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences* **6** (1904) 809–831.

[8] H. Minkowski, "Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern," *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* **1908** (1908) 53–111.

[9] E. Noether, "Invariante Variationsprobleme," *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* **1918** (1918) 235–257.

[10] H. Poincaré, "Sur la dynamique de l'électron," *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* **21** (1906) 129–176.

[11] E. Schrödinger, "An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules," *Phys. Rev.* **28** (1926) 1049–1070.

[12] S. N. Bose, "Planck's law and light quantum hypothesis," *Z. Phys.* **26** (1924) 178–181.

[13] E. P. Wigner, "On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz Group," *Annals Math.* **40** (1939) 149–204.

[14] A. Proca, "Sur la theorie ondulatoire des electrons positifs et negatifs," *J. Phys. Radium* **7** (1936) 347–353.

[15] L. V. Lorenz, "Ueber die Identitíat der Schwingungen des Lichts mit den elektrischen Stríomen," *Ann. der Physik und Chemie* **131** (1867) 243–263.

[16] S. N. Gupta, "Theory of longitudinal photons in quantum electrodynamics," *Proc. Phys. Soc. A* **63** (1950) 681–691.

[17] K. Bleuler, "Eine neue Methode zur Behandlung der longitudinalen und skalaren Photonen," *Helv. Phys. Acta* **23** (1950) 567–586.

[18] H. Weyl, "Electron and Gravitation. 1.," *Z. Phys.* **56** (1929) 330–352.

[19] E. Fermi, "Sulla quantizzazione del gas perfetto monoatomico," *Rendiconti Lincei* **3** (1926) 145–149.

[20] P. A. M. Dirac, "On the Theory of quantum mechanics," *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **112** (1926) 661–677.

[21] W. Pauli, "Über den Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur der Spektren," *Z. Phys.* **31** (1925) 765–783.

[22] M. Fierz, "Über die relativistische Theorie kräftefreier Teilchen mit beliebigem Spin," *Helv. Phys. Acta* **12** (1939) 3–37.

[23] W. Pauli, "The Connection Between Spin and Statistics," *Phys. Rev.* **58** (1940) 716–722.

[24] H. Yukawa, "On the interaction of elementary particles I," *Proc. Phys. Math. Soc. Jap.* **17** (1935) 48–57.

[25] P. Jordan and W. Pauli, "Zur Quantenelektrodynamik ladungsfreier Felder," *Z. Phys.* **47** (1928) 151–173.

[26] F. J. Dyson, "The radiation theories of Tomonaga, Schwinger, and Feynman," *Phys. Rev.* **75** (1949) 486–502.

[27] F. J. Dyson, "The S matrix in quantum electrodynamics," *Phys. Rev.* **75** (1949) 1736–1755.

[28] G. C. Wick, "The evaluation of the collision matrix," *Phys. Rev.* **80** (1950) 268–272.

[29] R. P. Feynman, "The theory of positrons," *Phys. Rev.* **76** (1949) 749–759.

[30] S. Tomonaga, "On a relativistically invariant formulation of the quantum theory of wave fields," *Prog. Theor. Phys.* **1** (1946) 27–42.

[31] J. S. Schwinger, "On quantum electrodynamics and the magnetic moment of the electron," *Phys. Rev.* **73** (1948) 416–417.

[32] J. S. Schwinger, "Quantum electrodynamics. I a covariant formulation," *Phys. Rev.* **74** (1948) 1439.

[33] R. P. Feynman, "Space-time approach to quantum electrodynamics," *Phys. Rev.* **76** (1949) 769–789.

[34] R. P. Feynman, "Mathematical formulation of the quantum theory of electromagnetic interaction," *Phys. Rev.* **80** (1950) 440–457.

[35] W. Pauli, "Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons," *Z. Phys.* **43** (1927) 601–623.

[36] **TASSO** Collaboration, W. Braunschweig *et al.*, "A measurement of muon pair production in e^+e^- annihilation at center-of-mass energies 35 GeV $\leq \sqrt{s} \leq$ 46.8 GeV," *Z. Phys. C* **40** (1988) 163–170. [Erratum: Z.Phys.C 42, 348 (1989)].

[37] E. Rutherford, "The scattering of alpha and beta particles by matter and the structure of the atom," *Phil. Mag. Ser. 6* **21** (1911) 669–688.

[38] S. Mandelstam, "Determination of the pion - nucleon scattering amplitude from dispersion relations and unitarity. General theory," *Phys. Rev.* **112** (1958) 1344–1360.

[39] A. H. Compton, "A Quantum Theory of the Scattering of X-rays by Light Elements," *Phys. Rev.* **21** (1923) 483–502.

[40] J. C. Ward, "An Identity in Quantum Electrodynamics," *Phys. Rev.* **78** (1950) 182.

[41] O. Klein and Y. Nishina, "Über die Streuung von Strahlung durch freie Elektronen nach der neuen relativistischen Quantendynamik von Dirac," *Z. Phys.* **52** (1929) 853–868.

[42] **JADE** Collaboration, W. Bartel *et al.*, "Measurement of the processes $e^+e^- \to e^+e^-$ and $e^+e^- \to \gamma\gamma$ at PETRA," *Z. Phys. C* **19** (1983) 197.

[43] T. D. Lee and C. N. Yang, "Question of parity conservation in weak interactions," *Phys. Rev.* **104** (1956) 254–258.

[44] E. Majorana, "Teoria simmetrica dell'elettrone e del positrone," *Nuovo Cim.* **14** (1937) 171–184.

[45] W. Pauli, *Niels Bohr and the development of physics*. Pergamon Press, London, 1955.

[46] 李政道, 李政道讲义：粒子物理和场论. 上海科学技术出版社, 上海, 2006.

[47] A. Denner, H. Eck, O. Hahn, and J. Kublbeck, "Feynman rules for fermion number violating interactions," *Nucl. Phys. B* **387** (1992) 467–481.

附录 A　英汉对照

Additive quantum number: 相加性量子数
Annihilation operator: 湮灭算符
Antichronous: 反时向
Antilinear: 反线性
Antiunitary: 反幺正
Antiparticle: 反粒子
Asymptotic state: 渐近态
Auxiliary field: 辅助场
Axial vector: 轴矢量
Azimuthal angle: 方位角
Beam: 束流
Bohr magneton: Bohr 磁子
Boost: 增速
Boson: 玻色子
Branching ratio: 分支比
Bubble diagram: 气泡图
Canonical normalization: 正则归一化
Canonical quantization: 正则量子化
Casimir's trick: Casimir 技巧
Causality: 因果性
Center-of-mass energy: 质心能
Center-of-mass system: 质心系
Channel: 通道
Charge conjugation: 电荷共轭
Chiral representation: 手征表象
Chirality: 手征性
Collider: 对撞机
Color: 颜色
Conjugate momentum density: 共轭动量密度
Conserved charge: 守恒荷
Conserved current: 守恒流
Contraction: 缩并
Contravariant vector: 逆变矢量
Coupling constant: 耦合常数
Covariance: 协变性
Covariant derivative: 协变导数
Covariant vector: 协变矢量
Covering group: 覆盖群
Creation operator: 产生算符
Cross section: 截面
Crossing symmetry: 交叉对称性
C-violation: C 破坏
CP-violation: CP 破坏
Decay: 衰变
Decay width: 衰变宽度
Detector: 探测器
Dirac slash: Dirac 斜线
Discrete symmetry: 分立对称性
Dispersion relation: 色散关系
Dynamics: 动力学
Electric charge: 电荷
Electromagnetic current: 电磁流
Electromagnetic interaction: 电磁相互作用
Electron: 电子
Energy-momentum tensor: 能动张量
Energy scale: 能标
Expectation value: 期待值
External leg: 外腿
External line: 外线
Faithful representation: 忠实表示
Fermion: 费米子
Fermion flow: 费米子流

Fermion number: 费米子数
Fermion-number violation: 费米子数破坏
Feynman diagram: Feynman 图
Feynman propagator: Feynman 传播子
Feynman rule: Feynman 规则
Field: 场
Field strength tensor: 场强张量
Fine-structure constant: 精细结构常数
Finite transformation: 有限变换
Flavor: 味道
Fusion: 融合
Gauge boson: 规范玻色子
Gauge field: 规范场
Gauge-fixing term: 规范固定项
Gauge invariant: 规范不变量
Gauge symmetry: 规范对称性
Gauge theory: 规范理论
Gauge transformation: 规范变换
Generalized coordinate: 广义坐标
Generator: 生成元
Global: 整体
Gluon: 胶子
Gravitational interaction: 引力相互作用
Group: 群
Hamiltonian: 哈密顿量
Helicity: 螺旋度
Helicity suppression: 螺旋度压低
Hermitian conjugate: 厄米共轭
Hermitian operator: 厄米算符
Homogeneous: 均匀
Homomorphism: 同态
Improper: 非固有
Interaction: 相互作用
Interaction picture: 相互作用绘景
Internal line: 内线
Intrinsic parity: 内禀宇称
Invariant mass: 不变质量
Invariant matrix element: 不变矩阵元
Invariant scattering amplitude: 不变散射振幅
Invariant subgroup: 不变子群
Irreducible representation: 不可约表示
Isometry group: 等距群
Isomorphism: 同构
Kinematics: 运动学
Lagrangian: 拉格朗日量
Leading order: 领头阶
Left-handed: 左手
Lepton: 轻子
Lifetime: 寿命
Lightlike: 类光
Line element: 线元
Linear representation: 线性表示
Little group: 小群
Local: 局域
Longitudinal polarization: 纵向极化
Loop diagram: 圈图
Loop momentum: 圈动量
Lowering operator: 降算符
Mass shell: 质壳
Magnetic dipole moment: 磁偶极矩
Metric: 度规
Mode: 模式
Multiplicative quantum number: 相乘性量子数
Neutrino: 中微子
Normal order: 正规排序
Normal product: 正规乘积
Off-shell: 离壳
On-shell: 在壳
Orbital parity: 轨道宇称
Orthochronous: 保时向
Parity: 宇称
Partial decay width: 分宽度
Particle: 粒子
Particle physics: 粒子物理

Permutation: 置换
Perturbation theory: 微扰论
Phase factor: 相位因子
Phonon: 声子
Photon: 光子
Picture: 绘景
Plane-wave solution: 平面波解
Polar angle: 极角
Polar vector: 极矢量
Polarization vector: 极化矢量
Positron: 正电子
Projective representation: 投影表示
Proper: 固有
Proton: 质子
Pseudoscalar: 赝标量
Pseudotensor: 赝张量
P-violation: P 破坏
Quantum chromodynamics: 量子色动力学
Quantum electrodynamics: 量子电动力学
Quantum field: 量子场
Quantum field theory: 量子场论
Quark: 夸克
Raising operator: 升算符
Right-handed: 右手
Real orthogonal matrix: 实正交矩阵
Real particle: 实粒子
Scalar: 标量
Scalar boson: 标量玻色子
Scalar field: 标量场
Scattering angle: 散射角
Scattering cross section: 散射截面
Scattering matrix: 散射矩阵
Sea quark: 海夸克
Self-conjugate: 自共轭
Self-energy diagram: 自能图
Self-interaction: 自相互作用
Simple harmonic oscillator: 简谐振子
Space inversion: 空间反射
Spacelike: 类空
Spin: 自旋
Spinor: 旋量
Spinor bilinear: 旋量双线性型
Spinor field: 旋量场
Spinor representation: 旋量表示
Standard model: 标准模型
Step function: 阶跃函数
Strong interaction: 强相互作用
Structure constant: 结构常数
Subgroup: 子群
Symmetry factor: 对称性因子
Tadpole diagram: 蝌蚪图
Target: 靶
Tensor: 张量
Time-evolution operator: 时间演化算符
Time-ordered product: 时序乘积
Time reversal: 时间反演
Timelike: 类时
Total divergence: 全散度
Translation: 平移
Transverse polarization: 横向极化
Tree diagram: 树图
Truly neutral particle: 纯中性粒子
Unitary: 幺正
Unitary matrix: 幺正矩阵
Vacuum: 真空
Valence quark: 价夸克
Vector: 矢量
Vector boson: 矢量玻色子
Vector field: 矢量场
Vertex: 顶点
Virtual particle: 虚粒子
Wave packet: 波包
Weak interaction: 弱相互作用
Zero-point energy: 零点能