量子場論

柳公權

量子场论

零散材料和部分课程笔记

授课教师：戴伍圣
天津大学理学院物理系

笔记整理、材料准备、讲稿打印：
陈玉柱、苟玉姿、郭然、李莎、李世霖
李文都、刘坦、刘彤、柳公权、皮竞辉、邢思雨
许利芳、张驰、赵辰辰、赵松雪、周池春
天津大学理学院物理系

v34.00.00

2017 年 4 月 5 日

前　　言

1）这不是《量子场论》课讲义。这里只是将部分讲义草稿、零散材料和一些课堂笔记简单地汇集在一起，供同学们课后参考。

2）由于是一些零散材料，这里将它分成若干部分。不同部分间的内容是相对独立的，甚至有时为了让每个部分都是自足的，不同部分间有少许内容是有些重复的。不过，同一个部分的不同章节之间是密切相关的。

3）随便翻开哪一页，你都会发现许多错误。方便的时候，请把你发现的错误告诉我。我的邮箱是daiwusheng@126.com。

目录

第一部分　相对论量子力学?经典场?量子场!

第一章　这些是什么方程？ 3
第二章　将方程作为波动方程的尝试 5
2.1　波动方程解释破坏因果律 5
2.1.1　标量方程(Klein-Gordon)方程：解法一 6
2.1.2　标量方程(Klein-Gordon)方程：解法二 12
2.1.3　因果律，对因果律的破坏 22
2.2　相对论+量子力学≠相对论量子力学；相对论量子力学为什么还算成功 23
2.3　正能与负能：一个颇有启发性的尝试 24
2.3.1　途径一：直接计算 24
2.3.2　途径二：更定性些 27
2.3.3　小结： 29
第三章　将方程作为经典场方程的尝试 31
第四章　它们是量子化的场! 33
4.1　场的态和态空间 35
4.1.1　态和态空间 35
4.1.2　真空态（基态），真空态的Lorentz不变性 36
4.1.3　零点能 37
4.1.4　Casimir效应 38
4.2　因果律，场量子化条件（标量场情况） 38
4.3　因果律，场量子化条件（旋量场情况） 41
第五章　总结 43

第二部分 经典场

第六章 经典场I:一般描述 47
6.1 场的概念和描述，定域场 47
6.1.1 力学与场论 47
6.1.2 最小作用量原理 49
6.1.3 Lagrange表述和Hamilton表述 50
6.2 场的Lagrange表述 50
6.2.1 场的Euler-Lagrange方程：分量形式 50
6.2.2 场的Euler-Lagrange方程：泛函形式 52
6.2.3 场的Euler-Lagrange方程：微分形式 55
6.2.4 泛函形式和微分形式的关系 57
6.3 场的Hamilton表述 58
6.3.1 场的Hamilton正则方程 58
6.3.2 正则动量，Legendre变换和Hamilton量 58
6.3.3 场的Poisson括号 61
6.3.4 正则坐标和动量的Poisson括号 62
6.4 附录：正则变换 63
6.4.1 经典力学中的正则变换 63
6.4.2 正则变换定义 63
6.4.3 正则变换生成函数 64
6.4.4 正则变换下的不变量 69
6.4.5 辛条件 69
6.4.6 保泊松括号 70
第七章 经典场II：自由场 71
7.1 自由场 71
7.2 我们需要一个什么样的作用量 72
7.2.1 对称性的要求 72
7.2.2 相对论不变性 73
7.2.3 能量有下界 73
7.2.4 可重整的要求 74
7.3 经典场：坐标和坐标的一阶导数 74
7.3.1 再具体些 75

7.4 自由场：Lagrange量的构造 75
7.4.1 标量场 75
7.4.2 旋量场 88
7.4.3 矢量场 103
7.4.4 张量场 130
第八章 经典场III：Noether定理 133
8.1 全局(global)对称性 135
8.2 群 136
8.2.1 量子情况 136
8.3 定域对称性 138
第九章 经典场IV：相互作用 143
9.1 可重整的要求 143
9.2 经典相互作用：非规范耦合 143
9.2.1 标量-标量耦合 143
9.2.2 自作用：标量场 146
9.2.3 自作用：旋量场 146
9.2.4 自作用：矢量场 147
9.2.5 自作用：张量场 147
9.2.6 旋量-标量耦合 147
9.2.7 旋量-矢量耦合 147
9.2.8 旋量-张量耦合 148
9.2.9 标量-矢量耦合 148
9.3 经典相互作用：规范耦合 149
9.3.1 全局的和定域的规范变换 149
9.3.2 协变导数 150
9.3.3 场强 153
9.3.4 规范群 154
9.3.5 场方程 156
9.3.6 再几何些 160
第十章 经典相互作用：对称破缺，Higgs机制 163
10.1 对称性自发破缺 163
10.2 实标量场：分立对称性的破缺 165
10.3 复标量场：连续对称性的破缺 168

10.4 Higgs机制 172
第十一章 经典场V：自由粒子解 181
第十二章 经典场VI：微扰处理 183
12.1 微扰处理：经典情况 183

第三部分 正则量子化方案：纲要

第十三章 量子化 187
13.1 为什么要量子化：一个理由 187
13.2 量子化方案 187
第十四章 正则量子化简述 189
14.1 经典与量子括号 189
14.2 力学与场的量子括号 191
14.3 两种量子化方案：全同粒子，交换作用 194
14.4 只有两种可能的量子化：Schwinger原理 194
14.5 微观因果律，自旋统计关系 195
14.6 Bose场和Fermi场的正则量子化条件 197
第十五章 谐振子：经典力学、量子力学、经典场论、量子场论 199
15.1 谐振子：量子力学（正则量子化方案） 199
15.1.1 能谱 201
15.1.2 占有数表象的波函数 204
15.1.3 坐标表象中的波函数 206
第十六章 量子力学：对称和反对称的全同粒子波函数；量子场论：对易和反对易的场量子化条件 209

第四部分 正则量子化方案：详述

第十七章 标量场的正则量子化 213
17.1 实标量场 213
17.2 复标量场（带电的标量场） 222
17.2.1 复标量场的能量，动量与荷 224
17.2.2 带电粒子与中性粒子 226
17.3 标量传播子 226

17.3.1 有经典源的Klein-Gordon场 . . . 234
17.3.2 由自由标量场Lagrange量直接得到标量传播子 . . . 236
17.4 协变对易关系，微观因果律 . . . 237
第十八章 旋量场的量子化 . . . 243
18.1 Dirac场的正则动量 . . . 243
18.2 粒子数表象下的物理量 . . . 245
18.3 真空态与粒子态 . . . 247
18.4 Dirac传播子 . . . 247
18.4.1 由自由旋量场Lagrange量直接得到Dirac传播子 . . . 249
18.5 旋量场量子化附录:Dirac矩阵与双线性协变量 . . . 250
18.5.1 γ^μ矩阵组成的完备集的一个应用 . . . 251
18.5.2 双线性协变量 . . . 251
18.5.3 投影算符 . . . 251
第十九章 电磁场量子化 . . . 255
19.1 电磁场量子化的困难 . . . 255
19.1.1 作为约束的规范条件使四个正则坐标A_μ不独立 . . . 255
19.1.2 电磁场没有与A_0共轭的正则动量π_0 . . . 256
19.1.3 简单的正则量子化不能给出电磁场的传播子 . . . 257
19.2 Lorenz规范下处理电磁场量子化的困难的一个方法 . . . 259
19.3 Lorenz规范下电磁场的量子化 . . . 263
19.3.1 Lorenz规范下的电磁场 . . . 263
19.3.2 Lorenz规范下的电磁场量子化 . . . 265
19.3.3 平面波展开 . . . 265
19.3.4 粒子数表象下的算符形式 . . . 267
19.3.5 态，负模态 . . . 268
19.3.6 Gupta-Bleuler电磁场量子化方案 . . . 269
第二十章 相互作用的微扰处理 . . . 273
20.1 引言 . . . 273
20.2 绘景（Heisenberg绘景、Schrödinger绘景、Dirac绘景（相互作用绘景）） . . . 273
20.2.1 Heisenberg绘景 . . . 274
20.2.2 Schrodinger绘景 . . . 275
20.2.3 相互作用绘景（Dirac绘景，Tomonige绘景） . . . 276

20.3 时间演化算子U矩阵S矩阵 . . . 279
20.3.1 U矩阵 . . . 279
20.3.2 S矩阵 . . . 280
20.4 Dyson展开微扰处理 . . . 281
20.4.1 编时乘积不影响协变性 . . . 283
20.5 Wick定理 . . . 284
20.5.1 收缩的各种情况 . . . 286
20.6 旋量QED的微扰处理 . . . 287
20.6.1 跃迁振幅S_{fi} . . . 289
20.7 Feynman规则 . . . 294
20.7.1 Moeller散射 . . . 294

第五部分 LSZ约化

第二十一章 标量场的LSZ约化公式 . . . 303
第二十二章 旋量场的LSZ约化公式 . . . 305
第二十三章 电磁场的LSZ约化公式 . . . 307

第六部分 路径积分量子化：量子力学

第二十四章 路径积分的基本思想及自由粒子的路径积分处理 . . . 311
24.1 自由粒子的传播子 . . . 312
24.2 确定归一化常数A . . . 317
24.3 Lagrange表述与Hamilton表述 . . . 319
24.4 路径积分量子化和正则量子化 . . . 322
24.5 补充:由算符方法出发计算自由粒子传播子。 . . . 325
24.6 跃迁振幅（传播子）的几种表示（小结） . . . 326
24.7 编时乘积 . . . 327
24.8 有源$J(t)$时的运动 . . . 329
24.9 生成泛函$Z_{ab}[J]$ . . . 336
24.9.1 泛函导数（数学准备） . . . 336
24.9.2 生成泛函$Z_{ab}[J]$ . . . 338
24.9.3 由生成泛函$Z_{ba}[J]$求跃迁矩阵元 . . . 339

24.10生成泛函$W_{ba}[J]$ 344
24.11存在相互作用$V(q)$时的跃迁矩阵元 346
第二十五章 自由粒子的路径积分：另一种方法 349
第二十六章 一维谐振子的路径积分：另一种方法 357
26.1 一维谐振子的Feynman传播子 359
26.2 粒子在恒力F作用下的经典作用量 366
26.3 一维线性谐振子的经典作用量 369

第七部分 路径积分量子化：标量场

第二十七章 标量场的生成泛函 375
27.1 Gauss型积分(Gaussian integration) 378
27.1.1 将Gauss积分推广到无穷维空间 382
27.2 自由标量粒子Green函数 384
27.3 路径积分和Green函数 389
27.4 Wick定理 391

第八部分 附录

第二十八章 群论简引 395
28.1 群，作为一种代数结构 396
28.1.1 各种群 397
28.1.2 群元，生成元 399
28.1.3 群的特征 400
28.1.4 这两个群相同吗？ 400
28.1.5 子群 401
28.1.6 商群 403
28.1.7 单群 404
28.2 表示 406
28.2.1 置换群表示和线性群表示 407
28.2.2 一般线性群 407
28.2.3 群的不变量与度量，由不变量来构造群 408
28.2.4 各种群之间的关系 409

28.2.5 连续矩阵群 409
28.3 拓扑群，李群：同时也是拓扑空间和流形的群 410
28.3.1 拓扑空间 411
28.3.2 拓扑群 413
28.3.3 李群 419

第二十九章 群 423
29.1 引言：对称性与群 423
29.1.1 操作，不变，对称 423
29.1.2 物理中的对称性 424
29.1.3 对称性与群 429
29.2 群 431
29.2.1 对称性与群 431
29.2.2 群，抽象群 435
29.2.3 群的分类 445
29.2.4 子群 448
29.2.5 群作用在集合上 449
29.2.6 群的商和群的扩张 456
29.2.7 变换群 463
29.2.8 表示 468
第三十章 李群简引 471
30.1 引言：预备知识 471
30.2 群，一种代数结构 471
30.3 拓扑空间，拓扑群 471
30.4 流形（微分流形，切空间） 472
30.4.1 $\mathbb{R}^n$ 472
30.4.2 流形，一个局部象$\mathbb{R}^n$的拓扑空间 473
30.4.3 流形的拓扑 473
30.4.4 在流形上建立坐标系 474
30.5 微分流形 485
30.5.1 同一流形上的不同的光滑结构 485
30.5.2 同一流形上的不同的微分结构 486

30.5.3 矩阵流形：M^n，$GL(n,\mathbb{R})$和$GL(n,\mathbb{R})$各种子集合：一个微分流形的例子 486
30.6 复流形，Riemann面 490
30.6.1 复流形 490
30.6.2 Riemann面（回顾） 490
30.7 商空间 502
30.7.1 等价，等价类 503
30.7.2 商，商空间 504
30.7.3 一些结论和一些例子 504
30.8 切空间 517
30.8.1 一点儿微积分，有人懂无穷小吗 517
30.8.2 线性化，微分算子，一次试着理解微积分中的无穷小的努力 . 518
30.8.3 导数 521
30.8.4 切与余切 524
30.8.5 切线，切空间 524
30.8.6 切丛，纤维丛 526
30.9 李群，作为群和微分流形 527
30.9.1 在微分流形上附加群结构 528
30.9.2 在$\mathbb{R}^n$上附加群结构：矩阵流形和它的子流形 529
30.9.3 在一个微分流形上附加不止一种群结构：S^1 535
30.9.4 可容纳和不可容纳群结构的微分流形 536
30.9.5 为微分流形附加群结构：群流形更多的例子 536
30.9.6 一点儿历史 537
30.10矩阵群 538
30.10.1一般线性群$GL(n,\mathbb{R})$ 538
30.10.2上三角群$UT(m,n)$ 539
第三十一章 李群的例子 541
31.1 Riemann面作为覆盖 541
31.2 迷向子群 541
31.3 半单群（待补充） 543
31.4 中心 543
31.5 覆盖，通用覆盖和商 544
31.6 单群，单李群 545

31.7 迷向子群的例子 . . . 545
31.8 $SO(n), O(n)$与$SU(n)$ . . . 547
31.9 直乘积群与商群 . . . 547
31.9.1 单射（injective）(一到一映射one to one或one–one)： . . . 547
31.9.2 满射（Surjective)：Y中的每一个元素在X中都有至少有一个原象 . . . 547
31.9.3 双射（bijection）:既是单射又是满射 . . . 547
31.9.4 例子 . . . 548
31.9.5 包含映射（inclusion map） 恒等映射（identity map） . . . 548
31.9.6 自同构（automorphism）与自同态（endomorphism） . . . 548
31.9.7 等价关系： . . . 548
31.9.8 等价类：所有等价的元素构成的集合 . . . 549
31.9.9 商空间（quotient space)：等价类构成的集合 . . . 549
31.9.10 拓扑空间的商仍是拓扑空间 . . . 549
31.9.11 商空间的例子 . . . 549
31.9.12 拓扑空间中的“粘” . . . 549
31.9.13 射影空间$\mathbf{R}P^n$（projective） . . . 550
31.9.14 关于射影空间 . . . 551
31.9.15 射影Hilbert空间 . . . 551
31.9.16 射影空间是否可定向 . . . 551
31.9.17 关于射影空间的一些结论 . . . 551
31.9.18 关于$SU(2)$和$SO(3)$ . . . 553
31.9.19 在空间中模掉群 . . . 553
31.9.20 子集的示性函数 . . . 555
31.9.21 证明：整数中同余是一种等价关系 . . . 557
31.9.22 拓扑群与群流形 . . . 558
31.9.23 一般线性群$GLn.\mathbf{K}$ . . . 559
31.9.24 线性射影群（linear projective group） . . . 559
第三十二章 变分法简引 . . . 561
32.1 等时变分：小引子和几个力学中的例子 . . . 561
32.1.1 泛函与变分 . . . 561
32.1.2 变分的性质 . . . 563
32.1.3 泛函的极限Euler方程 . . . 564

32.1.4 最速落径问题:例子 . . . 565
32.1.5 球面上的短程线:例 . . . 568
32.1.6 第二种形式的Euler方程 . . . 569
32.1.7 Euler-Lagrange方程 . . . 570
32.2 广义变分（全变分） . . . 571
第三十三章 杂项 . . . 583
33.1 各种归一化条件 . . . 583
33.2 附录：Weyl等式的证明 . . . 585
33.3 Hermite多项式 . . . 586
33.4 耦合摆 . . . 591
33.5 运动积分—首次积分 . . . 599
33.5.1 运动积分 . . . 599
33.5.2 封闭力学系统中独立运动积分的个数 . . . 600
33.5.3 首次积分（初积分，第一积分） . . . 600
33.6 空间的对称性质与相关的守恒律 . . . 601
33.6.1 空间的对称性与循环坐标（可遗坐标） . . . 601
33.6.2 广义动量守恒，线动量与角动量守恒 . . . 602
33.7 时间平移不变性与能量守恒 . . . 604
第三十四章 ϕ^4理论(待补充) . . . 607
34.0.1 对称因子（symmetry factor） . . . 611
34.0.2 ϕ^4理论的2点$Green$函数 . . . 612
34.0.3 求泛函导数的一个简化的记法 . . . 616
34.0.4 ϕ^4理论的4点$Green$函数 . . . 617
34.0.5 2−点Green函数 . . . 624
34.0.6 4−点Green函数 . . . 625
34.0.7 自能函数（全传播子） . . . 627
34.0.8 顶角函数 . . . 629
34.0.9 Legendre变换 . . . 633
第三十五章 顶角修正(待补充) . . . 637
第三十六章 路径积分部分零散资料（待整理） . . . 649
36.1 一个发散的振荡积分 . . . 649
36.1.1 在指数上加上一个实部：路径积分和Green函数 . . . 650
36.1.2 欧氏场论：Wick旋转 . . . 651

36.1.3 Wick定理 652

第一部分

相对论量子力学?经典场?量子场!

第一章　这些是什么方程？

我们的基本思路是由尽可能少的假设出发得到尽可能多的结论。我们的第一出发点就是相对论，无论是经典理论还是量子理论都要恪守相对论这一原则；我们的第二个假设就是量子的假设。

在物理中我们要回答一些基本问题：比如世界上有哪些粒子。对这个问题的回答最初是从实验上唯象地回答的。每看到一个新粒子就记下这个新粒子作为对这个问题的回答。但这种回答问题方式的问题在于，首先是有些靠运气，此外我们不能说清除了这些粒子外还有没有其它粒子。也就是说这种方式可以在某种程度上回答存在性的问题，但永远也回答不了唯一性的问题。

我们现在希望做的是不用这种最初等的唯象方式来回答这个问题。人们已经从一大堆唯象的结果总结出牛顿力学和电磁学。这两个基本理论的矛盾导致了相对论。相对论现在已经是我们的第一原理。相对论不能回答所有问题，但相对论确实可以将粒子的种类划到一个很小的范围。

前面我们由纯粹的相对论出发（借助了群论这样的数学工具，这就像我们回答力学问题要借助常微分方程的数学理论一样），对世界上粒子的种类做出了如下的限制：只能有自旋为$0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \cdots$的粒子。当然还不能回答这样的问题：比如，自旋为1的粒子有多少种。由相对论出发我们还得到了所有可能的，对应这些自旋的方程。

在由相对论得到这些方程时我们其实并没有回答所得到的这些方程究竟是什么方程，或者说我们没有解释这些方程中的量的物理意义是什么。我们是这样做的：一个量，比如，$\phi(x)$，考虑它的一个Lorentz变换$\phi(x) \to \phi'(x')$，要求这个量满足的方程必须是Lorentz协变的，问符合这一要求的方程能采取什么样的形式。而$\phi(x)$是什么，并没有说明。这就是说，由相对论的要求我们得到了一系列作为时空坐标函数的Lorentz标量$\phi(x)$，旋量$\psi(x)$，矢量$\phi^{\mu}(x)$，张量$\phi^{\mu\nu}(x)$满足的方程。但并不清楚$\phi(x)$，$\psi(x)$，$\phi^{\mu}(x)$和$\phi^{\mu\nu}(x)$是什么。（待补充）

第二章　将方程作为波动方程的尝试

我们可以做各种可能的尝试。有了量子力学的经验（这是Schrödinger教给我们的），我们的一个直接的选择是将这些方程理解为量子力学的相对论性波动方程。也就是说将这些量理解为波函数。但是这个尝试只取得了非常有限的成功。

2.1　波动方程解释破坏因果律

一个自然的尝试是将前面由相对论出发得到的方程解释成相对论波动方程。如果我们将所得到的相对论方程解释成单粒子的相对论波动方程，那么$\phi(x)$，$\psi(x)$等就是波函数，它们的模平方就是几率。在做了相对论波动方程这个解释后，我们相当于将力学量换成算符，即做下面的代换

$$E \to i\frac{\partial}{\partial t}, \mathbf{p} \to -i\nabla. \tag{2.1}$$

这个解释是否成功要看方程的解能否给出合理的结果。

这个方程的Lorentz协变性是完全不用再检验了。因为这些方程就是在Lorentz协变性的前提下得到的，因此肯定是协变的。除非加入了新的假设，如量子化条件，我们不需要再去检验协变性。

但是仅有协变性其实是不够的，原则上，一个出生时就超光速的系统也可以是Lorentz协变的。为此我们必须附加新的条件：

不能超光速

这不是相对论本来的要求，相对论其实只要求光速不变，不能超光速是另加的条件。这个要求还是非常合理的，相对论禁止由低于光速通过加速达到超光速。而我们的初始状态都是在低于光速的状态，这样相对论就禁止了超光速。

在量子力学的框架下检验是否超光速具体讲就是看类空传播的几率是不是零。

2.1.1 标量方程(Klein-Gordon)方程：解法一

下面我们首先考虑标量方程Klein-Gordon方程：

$$\left(\partial^2 + m^2\right)\phi\left(x\right) = 0. \tag{2.2}$$

我们现在将这个方程理解为相对论量子力学的自由粒子波动方程，自然$|\phi\left(x\right)|^2$就是几率。

我们将因果律作为相对论之后的第二个假设引入，为此我们在这里检验相对论量子力学的解释是否破坏因果律。因果律是一个时间演化上的概念。需要看的是结果在时间上是不是出现在原因之前。因此我们考虑一个由Klein-Gordon方程作为相对论波动方程决定的自由粒子的时间演化。

考虑一个粒子在$t_0 = 0$时刻处在$\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$点，即

$$\phi\left(\mathbf{x}_0, t_0\right) = \delta^3\left(\mathbf{x}_0\right)\delta\left(t_0\right). \tag{2.3}$$

我们要计算的是粒子在t时刻出现在$\mathbf{x}$点的几率。我们这里完全直观，当然也是不严格地，给出$\phi\left(\mathbf{x}, t\right)$随时间的演化。这里我们将Huygens原理形式地推广到四维（不一定对）：

$$\phi\left(\mathbf{x}, t\right) = i\int d^4x_0 G\left(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0\right)\phi\left(\mathbf{x}_0, t_0\right). \tag{2.4}$$

Huygens原理的意思是波前的每个点都将成为新的点波源。由这些点波源引起的波动在下一时刻叠加，形成新的波前（可见，初始的波前形状，即初条件，决定着后来的发展）。这些点波源的引起的波动当然是最容易计算的（就是方程的基本解）。将(2.3)代入(2.4)得

$$\begin{aligned}\phi\left(\mathbf{x}, t\right) &= i\int d^4x_0 G\left(\mathbf{x}, t; x_0, t_0\right)\delta^3\left(\mathbf{x}_0\right)\delta\left(t_0\right) \\ &= iG\left(\mathbf{x}, t; 0, 0\right).\end{aligned} \tag{2.5}$$

这样我们只需求出方程的基本解，也就是Green函数，就可以了。格林函数$G\left(\mathbf{x}, t; x_0, t_0\right)$满足的方程是

$$\left(\partial^2 + m^2\right)G\left(\mathbf{x}, t; x_0, t_0\right) = -\delta^3\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\right)\delta\left(t - t_0\right).$$

在我们的问题中

$$\left(\partial^2 + m^2\right)G\left(\mathbf{x}, t; 0, 0\right) = -\delta^3\left(\mathbf{x}\right)\delta\left(t\right).$$

简单表示成

$$\left(\partial^2 + m^2\right)G\left(x\right) = -\delta^4\left(x\right). \tag{2.6}$$

注意，这里我们有一点做得不好，由于我们现在将这个方程解释成相对论量子力学的波动方程。这是一种单粒子图像。只能分别讨论正能和负能情况。对正能情况，对能量E的积分只能在0到∞积分，但是下面的处理我们没有考虑这个因素，对能量的积分从$-\infty$到∞积分。不过鉴于方程两边对能量积分的积分限相同，可以验证，我们将积分都处理成$-\infty$到∞积分不会影响结果。解这个方程的最直接办法就是利用Fourier变换。

$$G(x)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ipx}G(p). \tag{2.7}$$

代回(2.6)，并将δ-函数也做Fourier变换：

$$\delta^4(x)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ipx},$$

有

$$\left(\partial^2+m^2\right)\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ipx}G(p)=-\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ipx}$$
$$\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ipx}\left[-\left(p^2-m^2\right)\right]G(p)=-\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ipx}.$$

对比有

$$\left(p^2-m^2\right)G(p)=1.$$

这样就得到了动量空间的Green函数：

$$G(p)=\frac{1}{p^2-m^2},\quad\left(p^2\neq m^2\right). \tag{2.8}$$

原则上我们需要通过Fourier变换的逆变换得到$G(x)$。但这是有问题的，式(2.8)在分母上是有奇点的，$p^2=m^2$。为了做这个逆变换分析一下这个奇点。为了将奇点分离出来，我们来处理一下分母：

$$\begin{aligned}p^2-m^2&=p^{0^2}-|\mathbf{p}|^2-m^2\\&=\left(p^0-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\right)\left(p^0+\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\right).\end{aligned}$$

于是式(2.8)变成：

$$G(p)=\frac{1}{\left(p^0-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\right)\left(p^0+\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\right)}. \tag{2.9}$$

下面分别考虑正能和负能情况。

正能情况

这里我们考虑$t>0$情况，后面我们会看到，这将对应正能的情况。显然，式(2.8)有两个一阶极点在$p^0=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}$和$p^0=-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}$。我们用$G^{(+)}$表示对应正能情况的Green函数。将(2.9)代入式(2.7)：

$$\begin{aligned}G^{(+)}(x)&=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ipx}G(p)\\&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\int\frac{dp^0}{2\pi}e^{-ip^0t}\frac{1}{\left(p^0-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\right)\left(p^0+\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\right)}.\end{aligned}\tag{2.10}$$

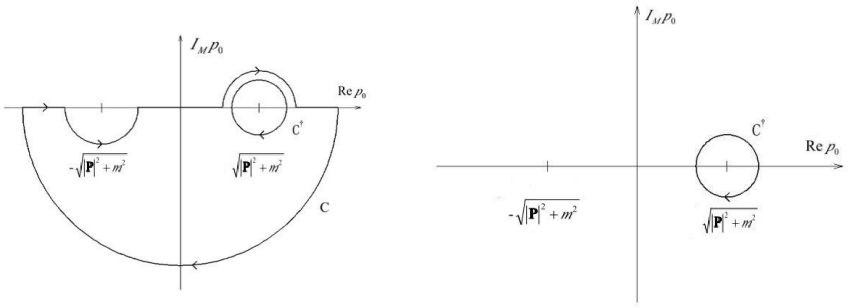


图 2.1: 正能情况: $t>0$

我们利用Cauchy留数定理来做这个积分。对$t>0$情况取积分路径C如图(2.1)，即大圆在下半平面。这样我们有：

$$\int\frac{dp^0}{2\pi}e^{-ip^0t}\frac{1}{\left(p^0-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\right)\left(p^0+\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\right)}\tag{2.11}$$

$$=\int\frac{dp^0}{2\pi}e^{-ip^0t}\frac{\overbrace{\frac{1}{p^0+\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}}^{\text{解析部分}}}{p^0-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}=\oint_C\frac{dp^0}{2\pi}e^{-ip^0t}\frac{\frac{1}{p^0+\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}}{p^0-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}.\tag{2.12}$$

按照这个路径，正能奇点$p^0=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}$被包含在路径中，对积分有贡献。这个奇点是Green函数的奇点。我们知道，Green函数的奇点对应的就是系统的谱，而自由粒子的谱就是粒子质量。所以，$t>0$给出的其实是正能情况的Green函数。

如图(2.1)，取一个以奇点$p^0=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}$为圆心的顺时针的园形路径$C^+$（上标的+号代表这是正能的那个奇点），路径$C$和$C^+$间没有奇点，利用Cauchy定理有：

$$\oint_C = \oint_{C^+}. \tag{2.13}$$

所以

$$\int \frac{dp^0}{2\pi} e^{-ip^0 t} \frac{\frac{1}{p^0+\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}}{p^0-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}} = \oint_{C^+} \frac{dp^0}{2\pi} e^{-ip^0 t} \frac{\frac{1}{p^0+\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}}{p^0-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}. \tag{2.14}$$

由留数定理可以直接算出这个积分，积分路径C^+是顺时针方向的，因此要加一个$-$号：

$$\begin{aligned}
\oint_{C^+} \frac{dp^0}{2\pi} e^{-ip^0 t} \frac{\frac{1}{p^0+\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}}{p^0-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}} &= -2\pi i Res\left(\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\right) \\
&= -2\pi i \left(\frac{1}{2\pi}\frac{e^{-i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t}}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}+\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}\right) \\
&= -i\frac{e^{-i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t}}{2\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

于是由(2.10-2.15)得到Green函数：

$$\begin{aligned}
G^{(+)}(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \left(-i\frac{e^{-i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t}}{2\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}\right) \\
&= -i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} e^{-i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t} \\
&= -i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}} e^{-ipx}.
\end{aligned}$$

由(2.5)，$E=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}$：

$$\begin{aligned}
\phi^{(+)}(\mathbf{x},t) &= iG^{(+)}(\mathbf{x},t;0,0) \\
&= iG^{(+)}(x) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} e^{-ipx}.
\end{aligned}$$

负能情况

这里我们考虑$t<0$情况，这对应负能的情况。用$G^{(-)}$表示对应负能的Green函数。将(2.9)代入式(2.7)：

$$\begin{aligned} G^{(-)}(x) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} G^{(-)}(p) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \int \frac{dp^0}{2\pi} e^{-ip^0t} \frac{1}{\left(p^0-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\right)\left(p^0+\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\right)}. \end{aligned}$$

重复正能情况中的步骤，利用Cauchy留数定理来做这个积分。对$t<0$情况取积分路径取积分路径C如图(G4)，有

$$\int \frac{dp^0}{2\pi} e^{-ip^0t} \frac{\overbrace{\frac{1}{p^0-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}}^{\text{解析部分}}}{p^0-\left(-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\right)} = \oint_C \frac{dp^0}{2\pi} e^{-ip^0t} \frac{\frac{1}{p^0-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}}{p^0-\left(-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\right)}.$$

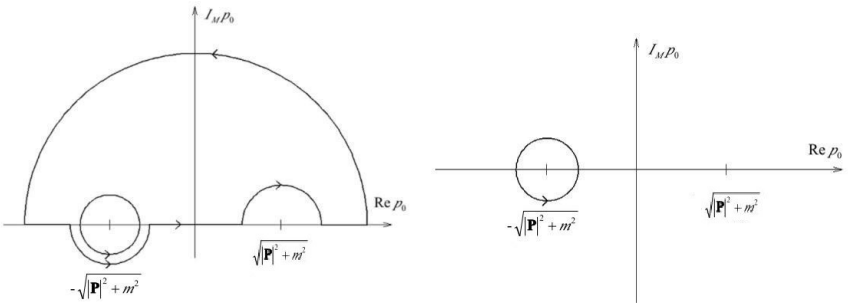


图 2.2: 负能情况：$t<0$

按照这个路径，负能奇点$p^0=-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}$被包含在路径中，对积分有贡献，$t<0$给出的其实是负能情况的Green函数。如图(2.2)，取一个以奇点$p^0=-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}$为圆心的园形路径$C^-$（上标的$-$号代表这是负能奇点）。路径$C$和$C^-$间没有奇点，利用Cauchy定理有：

$$\oint_C = \oint_{C^-}.$$

所以

$$\int \frac{dp^0}{2\pi} e^{-ip^0 t} \frac{\frac{1}{p^0-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}}{p^0-\left(-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\right)} = \oint_{C^-} \frac{dp^0}{2\pi} e^{-ip^0 t} \frac{\frac{1}{p^0-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}}{p^0-\left(-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\right)}.$$

由留数定理可以直接算出这个积分（C^-路径是逆时针方向的）：

$$\begin{aligned}
\oint_{C^-} \frac{dp^0}{2\pi} e^{-ip^0 t} \frac{\frac{1}{p^0-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}}{p^0-\left(-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\right)} &= 2\pi i Res\left(-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\right) \\
&= 2\pi i \left(\frac{1}{2\pi} \frac{e^{-i\left(-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\right)t}}{-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}\right) \\
&= -i\frac{e^{i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t}}{2\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}.
\end{aligned}$$

由上面的结果得到Green函数：

$$\begin{aligned}
G^{(-)}(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \left(-i\frac{e^{i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t}}{2\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}\right) \\
&= -i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} e^{i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t} \\
&= -i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}} e^{i\left(\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t+\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\right)}.
\end{aligned}$$

但是指数上的$\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t+\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}$不是四矢点乘。不过在积分中我们可以将它改造成四矢点乘的形式。考虑下面形式的积分：

$$\begin{aligned}
\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}f\left(|\mathbf{p}|^2\right)e^{i\left(\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t+\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\right)} &= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}f\left(|\mathbf{p}|^2\right)e^{i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \\
&= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}f\left(|\mathbf{p}|^2\right)e^{i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t}\left[\cos\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\right)+i\sin\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\right)\right] \\
&= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}f\left(|\mathbf{p}|^2\right)e^{i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t}\cos\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\right) \\
&= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}f\left(|\mathbf{p}|^2\right)e^{i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t}\left[\cos\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\right)-i\sin\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\right)\right] \\
&= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}f\left(|\mathbf{p}|^2\right)e^{i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t}e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \\
&= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}f\left(|\mathbf{p}|^2\right)e^{i\left(\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\right)} \\
&= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}f\left(|\mathbf{p}|^2\right)e^{ipx}. \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

这样有

$$G^{(-)}(x)=-i\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}e^{ipx}.$$

由(2.5)，$E=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}$：

$$\begin{aligned}
\phi^{(-)}(\mathbf{x},t) &= iG^{(-)}(\mathbf{x},t;0,0) \\
&= iG^{(-)}(x) \\
&= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E}e^{ipx}.
\end{aligned}$$

正确结果应该是

$$\phi^{(-)}(\mathbf{x},t)=-\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E}e^{ipx}.$$

2.1.2 标量方程(Klein-Gordon)方程：解法二

(可以用Klein-Gordon方程的类似Dirac方程的形式，即时间导数为一阶的形式。由此可直接计算时间演化)

下面我们首先考虑标量方程Klein-Gordon方程：

$$\left(\partial^2+m^2\right)\phi(x)=0.$$

我们现在将这个方程理解为相对论量子力学的自由粒子波动方程，自然$|\phi(x)|^2$就是几率。下面试着求解这个方程。

这是个二次微分方程，我们先将它改造成一个关于时间的一阶微分方程。先将方程的时间和空间分量明显地写出来：

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(\mathbf{x},t)=\left(-\nabla^2+m^2\right)\phi(\mathbf{x},t).$$

为了将方程改写成一阶的形式，先形式地开方：

$$\begin{aligned}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}&=i\frac{\partial}{\partial t}i\frac{\partial}{\partial t},\\ -\nabla^2+m^2&=\left(\pm\sqrt{-\nabla^2+m^2}\right)\left(\pm\sqrt{-\nabla^2+m^2}\right).\end{aligned}$$

这样方程变为

$$i\frac{\partial}{\partial t}\left[i\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{x},t)\right]=\left(\pm\sqrt{-\nabla^2+m^2}\right)\left[\left(\pm\sqrt{-\nabla^2+m^2}\right)\phi(\mathbf{x},t)\right].\tag{2.17}$$

开方开出正和负两种情况是自然的。出现这种情况的原因是相对论能动量关系是二次的，

$$E^2=|\mathbf{p}|^2+m^2.$$

对它开方也将得到正能负能两种结果：

$$E=\pm\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}.$$

在经典理论中，我们可以直接扔掉负能结果，只考虑正能的情况。这是因为，只要初始时刻系统的能量是正的，就永远是正的。但是，现在我们是在量子的框架下考虑问题，量子中存在跃迁，即使初始时刻系统处的能量是正的，通过量子跃迁也仍然可以跃迁到负能态。因此，我们分别考虑这两种情况。

下面我们非常不严格地做一件事，与其说这是在推导，不如说是在猜解。不过我们也能给出更严格些的推导。关系(2.1)给出了微分算符和能动量之间的关系。形式地我们有

$$E=i\frac{\partial}{\partial t},$$

而我们又有

$$E=\pm\sqrt{-\nabla^2+m^2},$$

从而

$$E\phi\left(\mathbf{x},t\right)\sim i\frac{\partial}{\partial t}\phi\left(\mathbf{x},t\right),$$
$$E\phi\left(\mathbf{x},t\right)\sim\pm\sqrt{-\nabla^2+m^2}\phi\left(\mathbf{x},t\right).$$

将这一结果带到(2.17)中有

$$i\frac{\partial}{\partial t}\left[i\frac{\partial}{\partial t}\phi\left(\mathbf{x},t\right)\right]=\left(\pm\sqrt{-\nabla^2+m^2}\right)\left[i\frac{\partial}{\partial t}\phi\left(\mathbf{x},t\right)\right].$$

这启发我们令

$$\Phi^{(\pm)}\left(\mathbf{x},t\right)\equiv i\frac{\partial}{\partial t}\phi^{(\pm)}\left(\mathbf{x},t\right),\tag{2.18}$$

这样就得到了以

$$H=\pm\sqrt{-\nabla^2+m^2}$$

为Hamilton量的运动方程：

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi^{(\pm)}\left(\mathbf{x},t\right)=\pm\sqrt{-\nabla^2+m^2}\Phi^{(\pm)}\left(\mathbf{x},t\right).$$

这里的$\Phi^{(\pm)}\left(\mathbf{x},t\right)$和$\phi^{(\pm)}\left(\mathbf{x},t\right)$分别对应着正能和负能情况。之所以在这里我们明确地标出正负能是因为在(2.17)中对应正负能的负号是消掉的，但是在作了前面的代换后，实际上得到了两个方程。于是这里我们同时考虑了正能和负能。

有了Hamilton量可以很容易地考虑时间演化问题。时间演化算符为

$$\begin{aligned}U^{(\pm)}\left(t,t_0\right)&=e^{-iHt}\\&=e^{-i\left(\pm\sqrt{-\nabla^2+m^2}\right)t}.\end{aligned}$$

有了时间演化算符，这样有

$$\Phi^{(\pm)}\left(\mathbf{x},t\right)=U^{(\pm)}\left(t,t_0\right)\Phi^{(\pm)}\left(\mathbf{x},t_0\right).$$

考虑一个粒子在$t_0=0$时刻处在$\mathbf{x}_0=\mathbf{0}$点，即

$$\Phi^{(\pm)}\left(\mathbf{x},t_0\right)=\delta^3\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\right)=\delta^3\left(\mathbf{x}\right).$$

注意，由于我们取$t_0=0$，这时的$\mathbf{x}$是空间间隔。

正能情况

我们先考虑正能情况，此时$H=\sqrt{-\nabla^2+m^2}$。

用$\Phi^{(+)}(\mathbf{x},t)$表示正能Hamilton量情况下的波函数，t时刻的波函数为

$$\begin{aligned}\Phi^{(+)}(\mathbf{x},t)&=U^{(+)}(t,t_0)\,\Phi^{(+)}(\mathbf{x},t_0)\\&=e^{-i\sqrt{-\nabla^2+m^2}t}\delta^3(\mathbf{x})\\&=e^{-i\sqrt{-\nabla^2+m^2}t}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\\&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{-i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\\&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{-i\left(\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\right)}\\&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{-ipx},\end{aligned}\tag{2.19}$$

这里$px=Et-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}$。推导中用到了$\delta$-函数的Fourier变换：

$$\delta(x)=\int\frac{dk}{2\pi}e^{ikx}.$$

在(2.17)中我们定义了这里的$\Phi^{(\pm)}(\mathbf{x},t)$与Klein-Gordon方程的解$\phi^{(\pm)}(\mathbf{x},t)$之间的关系：$\Phi^{(\pm)}(\mathbf{x},t)\equiv i\frac{\partial}{\partial t}\phi^{(\pm)}(\mathbf{x},t)$。为了得到$\phi^{(+)}(\mathbf{x},t)$我们将式(2.19)凑成对时间求导的形式。

$$\begin{aligned}\Phi^{(+)}(\mathbf{x},t)&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{-ipx}\\&=\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{-iE}e^{-i(Et-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})}\\&=\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{-iE}e^{-i(Et-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})}\\&=i\frac{\partial}{\partial t}2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E}e^{-i(Et-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})}\\&=i\frac{\partial}{\partial t}2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E}e^{-ipx}.\end{aligned}$$

这里在分母上乘上了2纯粹是因为为习惯和以后的方便。与式(2.17)对比就有

$$\phi^{(+)}(\mathbf{x},t)=2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E}e^{-ipx}.\tag{2.20}$$

只要做出这个积分，我们就得到了粒子在$(\mathbf{x},t)$点的几率振幅。

这里的$\phi^{(\pm)}(\mathbf{x},t)$就是Klein-Gordon方程的解。我们在上一章就知道$\phi^{(+)}(\mathbf{x},t)$必须是Lorentz标量，而这个结果不是明显Lorentz不变的形式。我们一定能将它改写成明显不变的形式。下面我们来做这件事。我们将证明$\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E}$就是一个Lorentz不变的体积元。

Lorentz不变的体积元

我们来凑一个满足相对论要求的Lorentz不变的体积元。一个Lorentz不变的结果可以让我们选择一个方便的参照系进行考虑，而结果对任意参照系成立，是普遍的。

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$$

显然是一个Lorentz不变的体积元。其中因子$\frac{1}{(2\pi)^4}$完全是为了方便，因为自由粒子能量动量的本征值是平面波，而平面波恰好是Fourier变换的形式。所以为了与Fourier变换的形式相适应加上了这个因子。这个体积元虽然是Lorentz不变的，但其中四动量的四个分量却是独立的：$d^4p = dp^0dp^1dp^2dp^3$。而我们知道在相对论中这四个分量并不独立，它们要满足能动量关系$E^2 = |\mathbf{p}|^2 + m^2$。这个关系的明显协变形式是

$$p^2 - m^2 = 0.$$

因此要在这个积分中加上这个约束：

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}(2\pi)\,\delta\left(p^2 - m^2\right),$$

这里加上因子2π还是为了与Fourier变换的形式一致。从相对论能动量关系中得到能量需要开方，这会给出负能。我们只考虑正能情况，因此还有加上限制$\theta\left(p^0\right)$，从而积分变成

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}(2\pi)\,\delta\left(p^2 - m^2\right)\theta\left(p^0\right).$$

加入的$\theta\left(p^0\right)$含有时间分量，但这不会破坏协变性。因为$\theta\left(p^0\right)$的值只取决于p^0的符号，而Lorentz变换不改变p^0的符号。这样我们就得到了一个明显Lorentz不变的形式。但是由于有δ-函数的限制，积分并不是真正的四重积分，而是三重。下面我们将δ-函数积分掉。计算是直接的。利用

$$\delta\left[f(x)\right] = \sum_{x_0^i} \frac{\delta\left[x - x_0^i\right]}{\left|\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0^i}}, \quad f\left(x_0^i\right) = 0,$$

即x_0^i是$f\left(x_0^i\right)=0$的第i个根，求和遍及所有根。具体到我们的问题中方程

$$p^2-m^2=\left(p^0\right)^2-\left(|\mathbf{p}|^2+m^2\right)=0$$

给出了两个根：

$$p^0=\pm\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\equiv\pm E.$$

相应地

$$\left|\frac{df\left(x\right)}{dx}\right|_{x=x_0^i}=\left|\frac{d\left[\left(p^0\right)^2-\left(|\mathbf{p}|^2+m^2\right)\right]}{dp^0}\right|_{p=\pm 2E}=2E,$$

从而有

$$\delta\left(p^2-m^2\right)=\frac{\delta\left(p^0-E\right)}{2E}+\frac{\delta\left(p^0+E\right)}{2E}.$$

再考虑正能的限制

$$\delta\left(p^2-m^2\right)\theta\left(p^0\right)=\left[\frac{\delta\left(p^0-E\right)}{2E}+\frac{\delta\left(p^0+E\right)}{2E}\right]\theta\left(p^0\right)=\frac{\delta\left(p^0-E\right)}{2E}.$$

这样我们就算出了前面的积分

$$\int\frac{d^4p}{\left(2\pi\right)^4}\left(2\pi\right)\delta\left(p^2-m^2\right)\theta\left(p^0\right)=\int\frac{d^3p}{\left(2\pi\right)^3}\frac{1}{2E},\tag{2.21}$$

这里的$E=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}$。

因此结果可以写成明显协变的形式：

$$\phi^{(+)}\left(\mathbf{x},t\right)=2\int\frac{d^4p}{\left(2\pi\right)^4}\left(2\pi\right)\delta\left(p^2-m^2\right)\theta\left(p^0\right)e^{-ipx}.$$

下面我们就来做式(2.17)中的这个积分。先换到球坐标

$$\begin{aligned}\phi^{(+)}\left(\mathbf{x},t\right)&=2\int_0^\infty\frac{1}{\left(2\pi\right)^3 2E}|\mathbf{p}|^2\,d\,|\mathbf{p}|\int_0^\pi\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi e^{-i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t}e^{i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|\cos\theta}\\&=2\int_0^\infty\frac{1}{\left(2\pi\right)^3 2E}|\mathbf{p}|^2\,d\,|\mathbf{p}|\,e^{-i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t}\left(2\pi\right)\int_{-1}^1 d\cos\theta e^{i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|\cos\theta}\\&=2\int_0^\infty\frac{1}{\left(2\pi\right)^2 2E}|\mathbf{p}|^2\,d\,|\mathbf{p}|\,e^{-i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t}\frac{2\sin\left(|\mathbf{p}|\,|\mathbf{x}|\right)}{|\mathbf{p}|\,|\mathbf{x}|}\\&=\frac{1}{\pi^2|\mathbf{x}|}\int_0^\infty\frac{1}{2E}|\mathbf{p}|\,d\,|\mathbf{p}|\,e^{-i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t}\sin\left(|\mathbf{p}|\,|\mathbf{x}|\right).\end{aligned}$$

为了去掉积分中不容易处理的$|\mathbf{p}|$，我们对参数求导：

$$\begin{aligned}\phi^{(+)}(\mathbf{x},t) &= -\frac{1}{\pi^2|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}\int_0^\infty \frac{1}{2E}d|\mathbf{p}|\,e^{-i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t}\cos(|\mathbf{p}||\mathbf{x}|)\\ &= -\frac{1}{2\pi^2|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}\int_0^\infty d|\mathbf{p}|\,\frac{e^{-i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t}}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}\cos(|\mathbf{p}||\mathbf{x}|).\end{aligned}$$

为了便于积分，将三角函数换成指数函数，利用$\sin(|\mathbf{p}||\mathbf{x}|)$是奇函数的性质，将积分限变成对称的：

$$\begin{aligned}\phi^{(+)}(\mathbf{x},t) &= -\frac{1}{2\pi^2|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}\int_{-\infty}^\infty d|\mathbf{p}|\,\frac{e^{-i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t}}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}\frac{1}{2}\left[\cos(|\mathbf{p}||\mathbf{x}|)-i\sin(|\mathbf{p}||\mathbf{x}|)\right]\\ &= -\frac{1}{4\pi^2|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}\int_{-\infty}^\infty d|\mathbf{p}|\,\frac{e^{-i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t}}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}e^{-i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|}\\ &= -\frac{1}{4\pi^2|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}\int_{-\infty}^\infty d|\mathbf{p}|\,\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}e^{-i\left(\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t+|\mathbf{p}||\mathbf{x}|\right)},\end{aligned}$$

其中

$$|\mathbf{p}|^2+m^2 = m^2\left(\frac{|\mathbf{p}|^2}{m^2}+1\right).$$

令

$$\frac{|\mathbf{p}|}{m} = \sinh(\xi), \tag{2.22}$$

于是

$$|\mathbf{p}|^2+m^2 = m^2\left[\sinh^2(\xi)+1\right] = m^2\cosh^2(\xi).$$

此外由(2.22)还有

$$d|\mathbf{p}| = md\sinh(\xi) = m\cosh(\xi)\,d\xi,$$

$$\begin{aligned}\phi^{(+)}(\mathbf{x},t) &= -\frac{1}{4\pi^2|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}\int_{-\infty}^\infty m\cosh(\xi)\,d\xi\frac{1}{m\cosh(\xi)}e^{-i[m\cosh(\xi)t+m\sinh(\xi)|\mathbf{x}|]}\\ &= -\frac{1}{4\pi^2|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}\int_{-\infty}^\infty d\xi e^{-im[\cosh(\xi)t+\sinh(\xi)|\mathbf{x}|]}.\end{aligned} \tag{2.23}$$

注意，由于我们取初始点为$(0,\mathbf{0})$，所以这里的t和$|\mathbf{x}|$分别为时间间隔和空间间隔。时空间隔为

$$s^2 = x^2 = t^2-|\mathbf{x}|^2,$$

为了讨论因果律的问题我们分别考虑时空间隔为类空和类时的两种情况：

$$\begin{array}{lll} s^2>0, & \text{即} \quad t^2>|\mathbf{x}|^2 & \text{类时，} \\ s^2<0, & \text{即} \quad t^2<|\mathbf{x}|^2 & \text{类空。} \end{array}$$

类时情况，$s^2>0$：

为了利用关系

$$\cosh[a+b]=\cosh[a]\cosh[b]+\sinh[a]\sinh[b],$$

我们针对类时情况，$t^2>|\mathbf{x}|^2$ 且$t>0$（即只关注未来）的情况做一个变换：

$$\begin{cases} t=\sqrt{s^2}\cosh(\zeta) \\ |\mathbf{x}|=\sqrt{s^2}\sinh(\zeta) \end{cases}.$$

由于在$t>0$，$|\mathbf{x}|>0$时总会有$\cosh(\zeta)>\sinh(\zeta)$，所以这个变换保证了类时的要求。这个变换用另两个独立变量$\sqrt{s^2}$和ζ代替了原来的两个变量$|\mathbf{x}|$和t，且保证了类时的要求。这样有

$$\begin{aligned} \cosh(\xi)t+\sinh(\xi)|\mathbf{x}| &= \cosh(\xi)\sqrt{s^2}\cosh(\zeta)+\sinh(\xi)\sqrt{s^2}\sinh(\zeta) \\ &= \sqrt{s^2}[\cosh(\xi)\cosh(\zeta)+\sinh(\xi)\sinh(\zeta)] \\ &= \sqrt{s^2}\cosh(\xi+\zeta). \end{aligned}$$

于是由(2.23)

$$\phi^{(+)}(\mathbf{x},t)\Big|_{s^2>0}=-\frac{1}{4\pi^2|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi e^{-im\sqrt{s^2}\cosh(\xi+\zeta)},$$

利用积分公式：

$$\int_{-\infty}^{\infty}d\xi e^{-ia\cosh(\xi+\zeta)}=-\pi[Y_0(a)+iJ_0(a)],$$

其中$Y_0(z)$为第二类Bessel函数，$J_0(z)$为Bessel函数。于是

$$\phi^{(+)}(\mathbf{x},t)\Big|_{s^2>0}=\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}\left[Y_0\left(m\sqrt{s^2}\right)+iJ_0\left(m\sqrt{s^2}\right)\right]. \tag{2.24}$$

这个结果实在类时的前提下得到的。

类空情况，$s^2<0$：

为了利用关系

$$\sinh[a+b]=\sinh[a]\cosh[b]+\cosh[a]\sinh[b],$$

我们针对类空情况，$t^2 < |\mathbf{x}|^2$ 且$t > 0$（即只关注未来）的情况做一个变换：

$$\begin{cases} t = \sqrt{-s^2}\sinh(\zeta) \\ |\mathbf{x}| = \sqrt{-s^2}\cosh(\zeta) \end{cases}.$$

由于在$t > 0$，$|\mathbf{x}| > 0$时总会有$\sinh(\zeta) < \cosh(\zeta)$，所以这个变换保证了类空的要求。同前面一样，这个变换用另两个独立变量$\sqrt{-s^2}$和ζ代替了原来的两个变量$|\mathbf{x}|$和t，且保证了类空的要求。这样有

$$\begin{aligned} \cosh(\xi)\, t + \sinh(\xi)\, |\mathbf{x}| &= \cosh(\xi)\sqrt{-s^2}\sinh(\zeta) + \sinh(\xi)\sqrt{-s^2}\cosh(\zeta) \\ &= \sqrt{-s^2}\left[\cosh(\xi)\sinh(\zeta) + \sinh(\xi)\cosh(\zeta)\right] \\ &= \sqrt{-s^2}\sinh(\xi+\zeta). \end{aligned}$$

于是由(2.23)

$$\phi^{(+)}(\mathbf{x},t)\Big|_{s^2<0} = -\frac{1}{4\pi^2|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-im\sqrt{-s^2}\sinh(\xi+\zeta)},$$

利用积分公式：

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-ia\sinh(\xi+\zeta)} = 2K_0(a),$$

其中$K_0(z)$是第二类变形Bessel函数。于是

$$\phi^{(+)}(\mathbf{x},t)\Big|_{s^2<0} = -\frac{1}{2\pi^2|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}K_0\left(m\sqrt{-s^2}\right). \tag{2.25}$$

这个结果是在类空的前提下得到的。

负能情况

上面得到的是正能的结果，下面考虑负能的情况。

$$H = -\sqrt{-\nabla^2 + m^2}.$$

时间演化算符为

$$\begin{aligned} U^{(-)}(t,t_0) &= e^{-iHt} \\ &= e^{i\sqrt{-\nabla^2+m^2}t}. \end{aligned}$$

一个粒子在$t_0=0$时刻处由$\mathbf{x}_0=\mathbf{0}$点出发的态的演化为

$$\begin{aligned}\Phi^{(-)}(\mathbf{x},t)&=U^{(-)}(t,t_0)\,\Phi(\mathbf{x}_0,t_0)\\&=e^{i\sqrt{-\nabla^2+m^2}t}\delta^3(\mathbf{x})\\&=e^{i\sqrt{-\nabla^2+m^2}t}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\\&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\\&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{i\left(\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t+\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\right)},\end{aligned}$$

但是指数上的$\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t+\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}$不是四矢点乘。利用(2.16)可将这个积分中指数部分改造成四矢点乘的形式：

$$\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{i\left(\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t+\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\right)}=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{ipx}.$$

与正能结果相同我们有

$$\Phi^{(-)}(\mathbf{x},t)=-i2\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E}e^{ipx}. \tag{2.26}$$

与式(2.17)对比有

$$\phi^{(-)}(\mathbf{x},t)=-2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E}e^{ipx}. \tag{2.27}$$

改成明显协变的形式是

$$\phi^{(-)}(\mathbf{x},t)=-2\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}(2\pi)\,\delta\left(p^2-m^2\right)\theta\left(p^0\right)e^{ipx}.$$

显然负能与正能的关系是

$$\phi^{(-)}(\mathbf{x},t)=-\left[\phi^{(+)}(\mathbf{x},t)\right]^*. \tag{2.28}$$

这样由正能的结果直接得到负能的结果。

类时情况，$s^2>0$：

$$\begin{aligned}\phi^{(-)}(\mathbf{x},t)\Big|_{s^2>0}&=-\left[\phi^{(+)}(\mathbf{x},t)\Big|_{s^2>0}\right]^*\\&=-\left[\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}\left[Y_0\left(m\sqrt{s^2}\right)+iJ_0\left(m\sqrt{s^2}\right)\right]\right]^*\\&=-\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}\left[Y_0\left(m\sqrt{s^2}\right)-iJ_0\left(m\sqrt{s^2}\right)\right].\end{aligned} \tag{2.29}$$

类空情况，$s^2<0$：

$$\begin{aligned}\phi^{(-)}(\mathbf{x},t)\Big|_{s^2<0} &= \left[\phi^{(+)}(\mathbf{x},t)\Big|_{s^2<0}\right]^* \\ &= -\left[-\frac{1}{2\pi^2|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}K_0\left(m\sqrt{-s^2}\right)\right]^* \\ &= \frac{1}{2\pi^2|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}K_0\left(m\sqrt{-s^2}\right). \end{aligned} \tag{2.30}$$

2.1.3 因果律，对因果律的破坏

现在我们得到了类空和类时情况下的正能和负能情况下的波函数。即然是波函数，那么它的模平方当然就是几率。由式(2.25)和(2.24)可以看出，不论是类时还是类空$|\psi(\mathbf{x},t)|^2$都不是零。而对类空情况而言这显然是个错误结果。这个结果破坏了因果律。

在此之前，我们只有一条要求（其实也还有定域性的要求），就是理论必须是相对论。这里需要增加另一条要求（注意，我们的原则是基本假设越少越好）：因果律的要求。也就是要求

先有原因，后有结果。

这条要求虽然是硬加进去的，但是显然是自然合理的。

满足因果律要求的同时还有满足相对论的要求：

相对论+因果律=类空间隔的事件是无关的。

这就是说一个粒子演化到一个类空的时间点的几率必须为零。因此将前面得到的相对论方程解释成相对论波动方程，从而将$\psi(\mathbf{x},t)$的模平方解释成几率，必然破坏因果律。这是绝对不能接受的。我们前面的努力实质上是将相对论与量子力学结合在一起的一个尝试。我们尝试得到一个相对论性的量子力学。但这个努力失败了。

Exercise 1 仿照对标量方程的讨论，讨论旋量方程（*Dirac*方程）

2.2 相对论+量子力学≠相对论量子力学；相对论量子力学为什么还算成功

前面我们已经看到，将相对论和量子力学结合起来得到相对论量子力学的尝试失败了。这个失败不只是实验精度上的，而是理论内部出现了不自洽：

如果因果律是默认的（这是一种宗教式的信仰），那么相对论量子力学将违背相对论（超光速）。

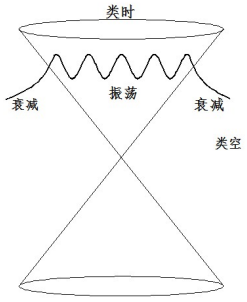


图 2.3: 相对论量子力学还算成功的原因

（一点小说明：相对论并没有要求不能超光速，只是要求光速不变。不过我们还是默认不能超光速是相对论的要求。）这一点和牛顿力学不同。牛顿力学虽然苛求地讲也是一个不正确的理论。但是那只是精度上的问题。它没有出现内部的自相矛盾。而相对论量子力学出现的问题是实质性的。原则上，这样一个理论从根本上就是错的，是绝对不能接受的。因为与它矛盾的是它自己，根本还轮不上与实验对比呢。

不过，这个尝试并不是那么一败涂地。事实上，如果你不是那么在乎这种理论上的不自洽，并且对数据的精度要求不是特别特别高的话，相对论量子力学还是可以工作的，经常地工作得还不错。

我们前面得到的结论表明，相对论波动方程的解释破坏因果律。因为计算结果表明超光速的几率不是零。但是由式(2.25)我们也可以看到，这种超光速的几率是指数衰减的。原则上讲，这个几率必须是零，衰减得再快也不行。但是，实用地讲，只要足够快，对数据的精度影响就不大。因此相对论量子力学在数据精度上还算成功。当然，这种成功是有限的，当精度要求再高些后，它就失效了。

在原子的谱方面，相对论量子力学给出的谱达到了很高的精度，这是因为它较好地考虑了磁效应（磁效应是电的一种纯粹的相对论效应）。但是也能够明显地看出进一步提高精度在原则上是不可能的[1]。相对论波动方程解释不了Lamb移动，反常磁矩等问题。

粒子的产生和消失，如光的发射和吸收，在量子力学的框架下完全没有解决的希望，因为这类现象与力学的最基本特征相矛盾：力学，无论是经典的还是量子的，都是粒子数守恒的。在力学的框架下没有根本解决粒子产生和消失的办法（虽然有一些极为漂亮的唯象办法，象爱因斯坦的自发辐射理论，核物理中的复数势等等）。因此，对这类问题即使从实用的角度相对论量子力学也是失败的。

相对论量子力学在理论上的实质性困难除表现为破坏因果律以外，还可以以其它方式表现出来。如相对论的标量方程在被解释成相对论波动方程的时候同时给出了负几率和负能量，这都是不能接受的。

Dirac，一个真正的天才，在量子力学的框架下为负能量找的解释是Fermi子海洋。这个想法虽然闪烁着天才的光芒，但是其如以太般的荒谬，以及完全不能解释Bose子产生消失告诉我们这个捉襟见肘的做法本质上并不比Klein-Gordon方程好多少。

（这一部分还可以增加一些相对论量子力学的内容，如Klein-Gordon方程给出负几率，负能量。Dirac方程在氢原子上的结果，以及存在的问题等等）

2.3 正能与负能：一个颇有启发性的尝试

前面的结果表明，将相对论方程解释为波动方程是不成功的，它破坏了因果律。这里我们来做一个尝试，看看有没有不破坏因果律的可能。

2.3.1 途径一：直接计算

破坏因果律体现在类空的传播几率不是零，这意味着出现了超光速的情况。下面我们来尝试能不能去掉这种破坏因果律的情况。

完整起见，将前面得到的结果罗列在下面：

[1]一个不合适的说法是认为由Klein-Gordon方程给出的氢原子能谱不精确因此这个方程是不对的。我们知道Klein-Gordon方程描述的是零自旋的标量粒子，而电子是自旋$\frac{1}{2}$的旋量粒子。也就是说，Klein-Gordon方程不适于描述电子，就像Dirac方程也不适合描述标量粒子一样。这个错误完全是历史原因造成的。Dirac方程由于描述的是自旋$\frac{1}{2}$的旋量粒子，自然给出的氢原子结果精度要好许多。

类时($s^2>0$)：

$$\phi^{(+)}(\mathbf{x},t)\Big|_{s^2>0}=\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}\left[Y_0\left(m\sqrt{s^2}\right)+iJ_0\left(m\sqrt{s^2}\right)\right],\qquad \text{正能，}$$

$$\phi^{(-)}(\mathbf{x},t)\Big|_{s^2>0}=-\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}\left[Y_0\left(m\sqrt{s^2}\right)-iJ_0\left(m\sqrt{s^2}\right)\right],\qquad \text{负能。}$$

类空($s^2<0$)：

$$\phi^{(+)}(\mathbf{x},t)\Big|_{s^2<0}=-\frac{1}{2\pi^2|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}K_0\left(m\sqrt{-s^2}\right),\qquad \text{正能，}$$

$$\phi^{(-)}(\mathbf{x},t)\Big|_{s^2<0}=\frac{1}{2\pi^2|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}K_0\left(m\sqrt{-s^2}\right),\qquad \text{负能。}$$

如前面已经分析过的，这四种情况的模平方都不是零。由于这时我们将所得到的相对论方程解释成相对论量子力学的波动方程，所以模平方就是几率。由于因果律的要求我们希望得到结果是，类时的模平方不是零，类空的模平方必须是零。

但是，由前面的结果其实很容易看出，正能$\phi^{(+)}(\mathbf{x},t)$和负能$\phi^{(-)}(\mathbf{x},t)$相差的是一个复共轭。而对类时情况，$\phi^{(\pm)}(\mathbf{x},t)\big|_{s^2>0}$即有实部又有虚部，对类空情况则只有虚部。这就是说，如果将正能负能的结果相加就会得到一个符合因果律的结果：类时不是零，类空等于零，即：

$$\begin{aligned}
&\phi^{(+)}(\mathbf{x},t)\Big|_{s^2>0}+\phi^{(-)}(\mathbf{x},t)\Big|_{s^2>0}\\
&=\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}\left[Y_0\left(m\sqrt{s^2}\right)+iJ_0\left(m\sqrt{s^2}\right)\right]-\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}\left[Y_0\left(m\sqrt{s^2}\right)-iJ_0\left(m\sqrt{s^2}\right)\right]\\
&=\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}\left[Y_0\left(m\sqrt{s^2}\right)+iJ_0\left(m\sqrt{s^2}\right)\right]+\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}\left[-Y_0\left(m\sqrt{s^2}\right)+iJ_0\left(m\sqrt{s^2}\right)\right]\\
&=\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}\left[iJ_0\left(m\sqrt{s^2}\right)\right]+\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}\left[iJ_0\left(m\sqrt{s^2}\right)\right]\\
&=i\frac{1}{2\pi|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}J_0\left(m\sqrt{s^2}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\phi^{(+)}(\mathbf{x},t)\Big|_{s^2<0}+\phi^{(-)}(\mathbf{x},t)\Big|_{s^2<0}\\
&=-\frac{1}{2\pi^2|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}K_0\left(m\sqrt{-s^2}\right)+\frac{1}{2\pi^2|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}K_0\left(m\sqrt{-s^2}\right)\\
&=0.
\end{aligned}$$

也就是说如果我们定义

$$\phi(\mathbf{x},t)\equiv\phi^{(+)}(\mathbf{x},t)+\phi^{(-)}(\mathbf{x},t),\tag{2.31}$$

则有类时情况

$$\phi(\mathbf{x},t)|_{s^2>0}=i\frac{1}{2\pi|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}J_0\left(m\sqrt{s^2}\right)\neq 0.$$

类空情况

$$\phi(\mathbf{x},t)|_{s^2<0}=0.$$

也就是说新定义的$\phi(\mathbf{x},t)$是符合因果律的。注意，这里的$\phi(\mathbf{x},t)$并不是波函数，本质上是Green函数。

但是，一个自然的问题是，$\phi(\mathbf{x},t)$是什么呢。它是$\phi^{(+)}(\mathbf{x},t)$和$\phi^{(-)}(\mathbf{x},t)$的和。本来$\phi^{(+)}(\mathbf{x},t)$和$\phi^{(-)}(\mathbf{x},t)$被解释成波函数，但是这个波函数解释显然已经失败，因为$\phi^{(+)}(\mathbf{x},t)$
和$\phi^{(-)}(\mathbf{x},t)$都破坏因果律。现在我们证明了$\phi^{(+)}(\mathbf{x},t)$和$\phi^{(-)}(\mathbf{x},t)$的和$\phi(\mathbf{x},t)$不破坏因果律，那么$\phi(\mathbf{x},t)$能被解释成波函数吗。不能。这可以从以下两个角度来理解。

第一个角度：认为这个单粒子波函数$\phi(\mathbf{x},t)$是正负能的迭加。这样做的最大问题是此时粒子处在正负能的迭加态，但是由于存在负能，粒子将落向负能。存在负能的世界能量没有下界。于是这将导致世界不稳定。

我们也可以换一个角度考虑这个问题：前面我们与正能完全平权地考虑了负能的情况，但是并没有给负能一个解释。我们知道，一个负能量是不允许的。我们这个世界有一个基本假设（注意：又一个基本假设）：能量是有下界的。这里的负能将导致能量没有下界。如果能量没有下界则世界不稳定，因为世界倾向于处在尽可能的低能状态。因此一个负能量是不能接受的，能量必须是正的。我们来试着理解一下这个负能。

时间演化算符是e^{-iHt}，在能量的本征态上将它写成

$$e^{-iEt},\qquad (E>0).$$

它描述了一个正能粒子沿由过去向未来，也就是时间正向的传播。对负能情况，在能量本征态上我们有

$$e^{-i(-E)t},\qquad (E<0). \tag{2.32}$$

它描述的是一个负能粒子沿由过去向未来，也就是时间正向的传播。但是，如前面已经说明的理由，一个负能量是不能接受的，它会使世界不稳定。我们必须认为这个能量是正的，但数学结果又不能改变，能够改变的只是我们的理解。强迫认为这个能量是正的，为了不改变数学结果将这个负号移动到时间上，将(2.32)式改成

$$e^{-iE(-t)},\qquad (E>0).$$

能量变成了正的，但粒子的传播方向变成了沿时间的负向，也就是由未来向过去传播。逆着时间传播，这也不是一个能够接受的概念。为了给这件事一个解释，我们回忆一个物理中的简单例子：正电流流进来，在效果上完全相当于负电流流出去。为此一个启发性观点是，如果我们将一个带负能的沿时间正向传播的粒子，理解为带正能的沿时间负向传播的反粒子。那么负能使世界不稳定的问题就能够得到一个解释。当然，代价是引入了一大类新粒子——反粒子。

就是说，如果我们将负能的情况理解为世界上除粒子外还有一类与它们对应的反粒子，那么当我们同时考虑这两种粒子时，因果律就不会被破坏了。但是，此时我们必须同时考虑两个粒子，也就是说，$\phi(\mathbf{x},t)$还是不能被解释成单粒子波函数。它根本不能描述单个粒子。

这个尝试虽然失败了，但是却给了我们一个启发，如果同时考虑正能和负能或者说在考虑正能粒子的同时引入反粒子，因果律是可以保持的。当然，波函数的解释肯定是不行了。

总结一下就是：所谓将$\phi(\mathbf{x},t)$解释成波函数，或者将意思说得完全些就是将$\phi(\mathbf{x},t)$理解为一个单粒子的波函数。$\phi^{(\pm)}(\mathbf{x},t)$分别对应正能和负能，这样我们便有了两个选择：

1. 认为这个单粒子波函数$\phi(\mathbf{x},t)$是正负能的迭加。负能会使世界不稳定，不能引入负能。

2. 认为$\phi(\mathbf{x},t)$是一个正粒子的正能波函数和一个反粒子的正能波函数的迭加。这根本不是一个单粒子波函数。

2.3.2 途径二：更定性些

如果我们仅仅希望得到这一小结的结果，那么根本不需要将$\phi^{(\pm)}(\mathbf{x},t)$求解出来。只作一些定性分析就足够了。我们下面给出这个定性分析。

基本思路是，将结果尽可能地用明显协变的形式写出来，这样就很容易看出这些结果在Lorentz变换下的性质。再由此出发分析结果。

由式(2.20)，(2.21)，(2.32)和(2.26)知

$$\begin{aligned}\phi^{(\pm)}(\mathbf{x},t) &= \pm 2\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E}e^{\mp ipx}\\ &= \pm 2\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}(2\pi)\,\delta\left(p^2-m^2\right)\theta\left(\pm p^0\right)e^{-ipx}.\end{aligned}$$

定义一个Lorentz不变的函数

$$\Delta^{(+)}(x) \equiv -i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}(2\pi)\,\delta\left(p^2-m^2\right)\theta\left(p^0\right)e^{-ipx} = -i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E}e^{-ipx},$$
$$\Delta^{(-)}(x) \equiv i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}(2\pi)\,\delta\left(p^2-m^2\right)\theta\left(-p^0\right)e^{-ipx} = i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E}e^{ipx}.$$

这里的$\Delta^{(+)}(x)$和$\Delta^{(-)}(x)$是Lorentz不变的函数。在定义中引入一个负号是为了使它们有性质：

$$\left[\Delta^{(+)}(x)\right]^* = \Delta^{(-)}(x). \tag{2.33}$$

可以将上述结果表示为

$$\begin{aligned}\phi^{(+)}(\mathbf{x},t) &= 2i\Delta^{(+)}(x),\\ \phi^{(-)}(\mathbf{x},t) &= 2i\Delta^{(-)}(x).\end{aligned} \tag{2.34}$$

归一化后我们有

$$\begin{aligned}\phi^{(+)}(\mathbf{x},t) &= i\Delta^{(+)}(x),\\ \phi^{(-)}(\mathbf{x},t) &= i\Delta^{(-)}(x).\end{aligned} \tag{2.35}$$

此外$\Delta^{(+)}(x)$和$\Delta^{(-)}(x)$显然还有性质

$$\begin{aligned}\Delta^{(+)}(-x) &= -\Delta^{(-)}(x),\\ \Delta^{(-)}(-x) &= -\Delta^{(+)}(x).\end{aligned} \tag{2.36}$$

显然$\phi^{(+)}(\mathbf{x},t) = -\left[\phi^{(-)}(\mathbf{x},t)\right]^*$。同样还可以给出$\phi(\mathbf{x},t)$的表示，由(2.31)，

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x},t) &= \phi^{(+)}(\mathbf{x},t) + \phi^{(-)}(\mathbf{x},t)\\ &= 2\left[i\Delta^{(+)}(x) + i\Delta^{(-)}(x)\right].\end{aligned}$$

由这个结果可以直接看出类空间隔情况下$\phi(\mathbf{x},t)$不是零。

如图（光锥-1），在类空区域可以通过一个连续Lorentz变换将时空坐标x变换成$-x$，而在类时的区域就不存在这样的变换。而$\Delta^{(+)}(x)$和$\Delta^{(-)}(x)$都是Lorentz不变的函数，即Lorentz标量。它们的结果在连续的Lorentz变换下是不变的。也就是说如果x与x'之间只差一个连续的Lorentz变换，则$\Delta^{(\pm)}(x) = \Delta^{(\pm)}(x')$。因此有：

类空情况($s^2<0$)，通过连续的Lorentz变换使$x\to -x$，从而使$\Delta^{(-)}(x)\big|_{s^2<0}$变换成$\Delta^{(-)}(-x)\big|_{s^2<0}$，由于$\Delta^{(-)}$是Lorentz不变的函数，所以$\Delta^{(-)}(x)\big|_{s^2<0} = \Delta^{(-)}(-x)\big|_{s^2<0}$。而由式(2.36)有$\Delta^{(-)}(-x) = -\Delta^{(+)}(x)$。所以

$$\Delta^{(-)}(x)\Big|_{s^2<0} = -\Delta^{(+)}(x)\Big|_{s^2<0}$$

（注意，这个结果只在类空情况下成立）。这样

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x},t)|_{s^2<0} &= 2\left[i\,\Delta^{(+)}(x)\Big|_{s^2<0} + i\,\Delta^{(-)}(x)\Big|_{s^2<0}\right] \\ &= 2\left[i\,\Delta^{(+)}(x)\Big|_{s^2<0} + i\left(-\Delta^{(+)}(x)\Big|_{s^2<0}\right)\right] \\ &= 0.\end{aligned}$$

这就是我们前面通过直接计算得到过的结论。

对类时情况，由图(1)中可以看出，没有将x变换成$-x$的连续Lorentz变换，所以$\phi(\mathbf{x},t)|_{s^2>0} \neq 0$。

可以看到，导致这个结果的根本原因是Lorentz不变函数$\Delta^{(+)}(x)$和$\Delta^{(-)}(x)$在类空时存在这样的关系：

$$\left[\Delta^{(+)}(x) + \Delta^{(-)}(x)\right]\Big|_{s^2<0} = 0. \tag{2.37}$$

这个性质是使$\phi(\mathbf{x},t)$符合因果律的原因。

2.3.3 小结：

前面我们从因果律角度出发直接证明了将相对论与量子论结合是不能给出相对论量子力学的。相对论量子力学只是一个近似。

在这一节中做了一个修复的尝试，看看能不能通过引入一些新的东西使因果律的要求在相对论量子力学的框架下得到满足。结果是失败了。我们确实修复了因果律，但却得不到一个单粒子力学的图像。具体说就是，要想满足因果律，就必须在考虑正粒子的同时考虑反粒子。而同时考虑不止一个粒子不是一个力学理论力所能及的（在量子力学中，总几率守恒，从而粒子不能产生和消失）。就是说要想满足因果律就必须引入反粒子，就必须放弃力学的图像。简单说就是

不想破坏因果律+不想要负能=放弃力学+反粒子

下面我们尝试场的图像。

第三章　将方程作为经典场方程的尝试

综上所述，将由相对论要求得到的方程理解为量子力学的波动方程，将$\phi(x)$等量理解为波函数是不成功的。那么我们换条路试试。$\phi(x)$显然可以被理解为场。所谓场，就是在空间每个点上都放上一个量：放的是标量，就是标量场；放的是旋量，就是旋量场；放的是矢量，就是矢量场.....。显然，一个自然的选择就是将相对论方程给出的$\phi(x)$等量理解为经典场。

前面指出的力学图像的一个致命的缺点是力学图像，无论是经典力学还是量子力学，都是单粒子的。在力学中我们不能描述产生和消失。在量子力学的框架下，总几率$\int dV\,|\phi(\mathbf{x},t)|^2$无论怎样演化都不会是零，而永远是1。也就是说总几率是守恒的，物质一旦出现，永远不会消失；当然，物质也不会凭空产生。在牛顿力学中我们就已经知道力学的这个特点了。但是在经典场论中，我们可以从某种意义上解决这个问题：一个经典场的强度是可以变化的。场可以由零变成变成任意大，也可以从有限值变成零。比如光的产生和消失就可以通过电磁场从零变到有限大和从有限大变成零来描述。比如在电磁场理论中可以通过一个电振子（这里的电振子就是天线）产生和吸收电磁波。就是说，在经典场理论中可以通过描述场的强度的改变描述物质的产生和消失。

经典场理论最成功的范例就是电磁学。但是，问题并没有真地解决。经典场理论中，场的变化是连续的。而我们知道，根据相对论，$E=mc^2$，任何粒子都可以产生和消失。许多粒子都有确定的质量。用场强度的强弱变化不可能描述一个有确定质量的粒子的产生和消失。因此经典场理论仍然不能解决我们的问题。顺便说一下，那么为什么电磁学那么成功呢。这是因为光子的静质量是零，产生多大能量的光子都是允许的（不过正因为如此，光的量子性也最强，它能在简单的实验条件下直接演示物质的粒子性和波动性。所以量子论的开始一直与光有关）。

当然，这个尝试也取得了虽然有限但非常辉煌的成功。经典电磁学是物理学理论的范例，经典Maxwell方程达到了经典物理中难以置信的精度。一个场理论的优势在这里得到了充分的发挥。当然，即使如此，经典场理论的精度也还是有限的。

第四章　它们是量子化的场!

相对论量子力学和经典场论都尝试过了，都不成功，它们在概念上都不能自圆其说，只能在非常局限的意义上作为一个近似的模型。下一步怎么办呢。

前面已经讲过，经典场其实是可以描述产生和消失的。只是这个产生和消失是通过场的连续变化来描述的，不能描述质量有限的粒子的产生和消失。描述粒子的产生和消失并不是什么样的场都行，粒子必须一个一个地产生，这就要求粒子产生消失伴随的能量变化必须是一份一份的。这也就是说我们引入了一个新的假设：世界上的粒子可以被分成几类，每类中粒子质量都是相同的。这种一份一份的能量我们是有经验的。量子化的谐振子就具有这种特征：量子振子的能量间隔是等距的，恰好可以用来描述一个一个的粒子。注意，经典理论中的振子是不行的，经典振子的能量是连续变化的。同样，一个量子力学中的振子是不够的，力学肯定不行，前面我们已经讲过，必须是场。场是什么，场就是无穷大自由度的力学体系（这一点在后面将有非常详尽的叙述）。一个力学振子的自由度就是空间的维数，三维振子的自由度就是三。一个无穷大自由度的振子系统就是一大堆振子。因此我们所要面对的就是无穷多个量子化的振子。

振子的特征是什么呢。从能量的角度上讲就是振子的动能和势能都是二次的。比如力学中的振子的运动方程、Hamilton量和Lagrange量分别为：

$$\begin{aligned}
&\text{运动方程} \quad && \ddot{x}+\omega^2 x=0,\\
&\text{Lagrange量} \quad && L=\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2-\tfrac{1}{2}m\omega^2x^2,\\
&\text{Hamilton量} \quad && H=\tfrac{p^2}{2m}+\tfrac{1}{2}m\omega^2x^2.
\end{aligned}$$

粗略地说就是

从运动方程角度讲：振子=坐标的二阶导数+一次方的坐标，

从Lagrange量的角度讲：振子=坐标一阶导数平方-二次方的坐标。

这条要求使得

自由场方程=场量的二阶导数+一次方场量，
自由场Lagrange量=场量一阶导数的平方-场量的平方。

因为谐振子就是这样的。

由相对论的要求出发我们当然可以得到高阶方程，但是这与同类粒子质量相同的要求矛盾。所以在前面我们有相对论出发得到场方程的时候我们都作了这个要求，只不过在这里才给了一个解释。注意，对场来说，这是无穷多个振子。

但是，这些振子都是经典的。象前面分析过的，它们不能描述一个一个的粒子。（由无穷多个力学中的振子给出场将在后面详细讲）。我们需要的是一个无穷多个量子化的振子。无穷多个振子将构成一个场，无穷多个量子化的振子显然构成的将是一个量子化的场。一个量子化的振子的正则坐标和正则动量被看成是算符。无穷多个耦合在一起的振子可以被看作是一条弹性弦。无穷多个弹性弦具有无穷多个自由度，完全确定一条弦的位置也需要无穷多个变量。如后面将要详细分析的那样，一条弦可以用一个连续的坐标的函数$\phi(x)$来描述，它是由无穷多个振子的正则坐标q_1，q_2，$\cdots$过渡来的。也就是说一条弦的正则坐标就是函数$\phi(x)$。如果这无穷多个振子的坐标在量子化后变成算符$\hat{q}_1$，$\hat{q}_2$，$\cdots$，那么由无穷多个$\hat{q}_1$，$\hat{q}_2$，$\cdots$得到的描述弦的正则坐标也应该是算符，$\phi(x) \to \hat{\phi}(x)$。这就是说由量子化的振子得到的量子化的弦。这种坐标的函数$\phi(x)$从数学上讲当然就是一种场。

总结前面得到的结论：

1. 要想描述产生和消失就必须用场；
2. 经典场可以描述产生和消失，但这种产生和消失引起的能量变化是连续的。因此不能用来描述具有确定质量粒子的产生和消失。
3. 要想描述具有确定质量粒子的产生和消失就必须用量子化的振子构成的场（因为量子化振子的能级间隔是分立的而且是等间距的）。这相当于要求自由场方程的阶数必须不能超过二阶，场量不能超过一次。

总结一下就是

经典场中场的强度的变化→连续的能量的产生和消失，
量子场中场的强度的变化→分立能量的产生和消失，
量子的振子场中场的强度的变化→能量以相同大小一份一份地产生和消失：粒子的产生和消失。

按照前面的分析，由无穷多个量子化振子构成的场的正则坐标也是一个算符，场算符。既然是算符，在进一步做下去之前我们就要回答这样一个问题：

场算符是什么空间中的算符？

4.1 场的态和态空间

算符只有在指明它所作用的态空间之后才真正有意义。一个不谈态的算符是没有意义的。所有算符运算都是作用在态上的，只是有些情况算符运算的结果对所有态都成立，就不明确一一标出态罢了。

4.1.1 态和态空间

那么场算符的态空间是什么呢。

在量子力学中，我们将力学量看作算符，态空间是Hilbert空间。我们知道这是一个单粒子的态空间，这个态空间是由粒子所有可能的状态张成的。

但是，我们之所以引入场理论就是为了克服固定粒子数的力学在对粒子产生和消失的描述上的局限。在经典场中场的强度的变化描述的就是产生和消失；自然量子化后的场，也就是场算符，描述的也将是产生和消失，是粒子的产生和消失（需要说明的是，无论是经典场描述的产生和消失还是量子场描述的产生和消失都必然是能量的产生和消失）。

既然场算符描述的是粒子的产生和消失，那么恒定粒子数的Hilbert空间肯定不是场算符的态空间。因为场算符的作用必将引起粒子数变化。也就是说，场算符的作用在Hilbert空间上不封闭。因此Hilbert空间不是场算符的态空间。

构造一个场算符的态空间是直接的。作为一个算符的态空间必须在该算符的作用下封闭。既然场算符的作用会引起粒子数的变化。那么一个直接的做法就是将不同固定粒子数的Hilbert空间加在一起，构成一个由无穷多个，包含各种粒子数的Hilbert空间的大的态空间。显然场算符在这个空间中的作用是封闭的。

如果我们用H^n表示n个粒子的Hilbert空间，这样场算符的态空间就是

$$\mathcal{H}_{Fock} = \mathcal{H}^1 \oplus \mathcal{H}^2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}^n \oplus \cdots .$$

这个空间称Fock空间，也叫巨Hilbert空间。

顺便说一下，为什么引入了任意多个有限粒子数的Hilbert空间就可以描述粒子的产生和消失了呢。原因是微妙的。将不管多大但有限数目的Hilbert空间加起来是不能描述粒子的产生和消失的。这是因为只要数目有限，不管多大，总可以通过加入足够多的粒子的办法使场算符的作用不封闭。但是，任意大其实就是无穷大的一种讼师式的说法。无穷大加任意数都仍然是无穷大。所以场算符的作用就封闭了。这就是说，要想描述粒子的产生和消失，就必须引入无穷大的自由度。这很微妙，甚至有些骗人，但确实是个不错的说法。

4.1.2 真空态（基态），真空态的Lorentz不变性

我们的出发点是相对论，一切都必须是Lorentz不变或协变的。这里我们引入了态，那么这个态是否符合相对论的要求呢。我们必须试试看。

最基础的态就是基态。基态是这样的态，它必须是能量最低的。对一个自由的系统，也就是没有相互作用的系统来说，我们选择能量和动量都为零的态作为基态。这也是我们也称基态为真空态的原因。基态有简并和不简并两种情况，我们这里考虑不简并的情况，即只有一个能动量最低的态。对简并的情况我们就考虑其中的一个。

我们来看看能量和动量为零的真空态在Lorentz变换下的性质。所谓一个能动量为零的态，意思就是能量和动量（一共有三个分量）在这个态上都有确定的取值，这个值是零。一个能动量有确定值的态（四动量的四个分量彼此对易）当然是能动量的本征态：

$$p^\mu |0\rangle = 0 |0\rangle .$$

看一个态是否Lorentz不变的就是看这个态在Lorentz群的变换下是否不变。在这里我们只需看这个态在Lorentz群的生成元$J^{\rho\sigma}$的作用下是否不变就可以了。$J^{\rho\sigma} |0\rangle$给出了一个态，如果真空态$|0\rangle$在Lorentz变换下不变，那么$J^{\rho\sigma} |0\rangle$与$|0\rangle$就应该是同一个态，即$J^{\rho\sigma} |0\rangle$与$|0\rangle$只能差一个常数，即

$$J^{\rho\sigma} |0\rangle \stackrel{?}{=} c^{\rho\sigma} |0\rangle .$$

这里的常数$c^{\rho\sigma}$也带Lorentz指标是为了保持协变性。既然Lorentz变换后的态$J^{\rho\sigma} |0\rangle$与$|0\rangle$只差一个常数，那么$J^{\rho\sigma} |0\rangle$一定也应是四动量p^μ的本征值为零的本征态：

$$p^\mu J^{\rho\sigma} |0\rangle \stackrel{?}{=} 0 |0\rangle . \tag{4.1}$$

是这样吗？我们来检验一下（以上加问号的等式都是待验证的）。

因为我们知道$p^\mu |0\rangle$的结果，将p^μ移动到$|0\rangle$旁边：

$$\begin{aligned} p^\mu J^{\rho\sigma} |0\rangle &= [p^\mu, J^{\rho\sigma}] |0\rangle + J^{\rho\sigma} p^\mu |0\rangle \\ &= [p^\mu, J^{\rho\sigma}] |0\rangle + 0 |0\rangle . \end{aligned}$$

四动量与Lorentz群的生成元$J^{\rho\sigma}$的对易关系我们是知道的

$$[p^\mu, J^{\rho\sigma}] = -i \left(g^{\rho\mu} p^\sigma - g^{\sigma\mu} p^\rho \right) .$$

带回上式

$$p^{\mu}J^{\rho\sigma}\left|0\right\rangle=-i\left(g^{\rho\mu}p^{\sigma}-g^{\sigma\mu}p^{\rho}\right)\left|0\right\rangle+0\left|0\right\rangle=0\left|0\right\rangle.$$

这样就验证了式(4.1)。一个能动量都是零的真空态确实是Lorentz不变的。在此基础上建立起的相对论场论是可以放心的。

同时我们也可以看出，一个能动量不为零的基态不是Lorentz不变的。

4.1.3 零点能

场的基态是一个什么样的基态呢。

猛地看上去，自由场的基态当然就是什么都没有的态。前面我们也提到，我们选择的基态是一个能动量都为零的态。可是等一等，前面我们曾经指出，为了描述能量为一份一份的粒子的产生，我们的场必须是一个具有振子特征的场。振子，我们知道振子的基态能量不是零。谐振子有零点能是量子力学中的一个基本常识。在量子力学中存在零点能的原因是一个被束缚在空间某个区域的态一定具有一个不是零的零点能。这很容易理解：一个被束缚在空间某个区域的粒子，它的位置在某种程度上就被确定了。自然，它的动量的测不准度就不是零。因此存在零点能。[1]现在我们认为自由场是一种振子场。自然就会存在零点能。

零点能是不可避免的，这是测不准关系的体现。一个粒子总可以凭空产生，只要它能够在测不准关系规定的时间和空间限度内消失。这种产生自虚空粒子是有着直接的可观测效果的：这些幽灵般的粒子可能会碰到在轨道上运动着的电子，这会改变这个电子的能量，从而改变能级结构，这就是Lamb移动；可以影响对这个电子磁矩的测量，这就是反常磁矩。所有这些都是纯粹的量子效应。后面我们会看到，在微扰论中，量子效应将出现在圈图中，因此计算这种纯量子效应需要计算圈图。而圈图会发散，需要做一种所谓的重正化的处理。经典体现在树图中，所以经典贡献不会有这种发散，不需要重正化。因此，重正化是量子理论的特征。

前面提到过，只有一个能动量为零的基态才是Lorentz不变的。那么这里出现的零点能会不会破坏Lorentz不变性呢。不会的，这种由于测不准性带来的能量，虽然有实实在在的可观测效应，但它仍不是经典理论中那种实实在在的能量。这种能量是一种纯粹的量子效应。这样产生的粒子是所谓虚粒子。而前面说的基态中能量为零，是指实粒子的能量，就是经典理论中的那种能量。

[1]对比一个位置完全确定的的粒子的动量完全不能确定的情况：位置完全确定的粒子的波函数为$\psi\left(0\right)=\delta\left(x\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{2\pi}e^{-ipx}$。此时显然动量取所有可能值。同样，对动量确定的粒子，动量表象下的波函数为$\psi\left(0\right)=\delta\left(p\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{2\pi}e^{-ipx}$，位置完全不确定。

零点能除了Lamb移动、反常磁矩这样的微观效应外，还可以有宏观的体现。我们来看一下Casimir效应。

4.1.4 Casimir效应

4.2 因果律，场量子化条件（标量场情况）

前面的分析表明，我们必须将场量理解为算符$\hat{\phi}(x)$。它将引起粒子的产生和消失。既然是算符，那么场算符间就会满足一定的代数关系，这就是量子化条件。那么场算符间应该满足什么样的量子化条件呢。

前面的分析表明，如果将场量$\phi(x)$理解为相对论量子力学中的波函数，那么结果将是破坏相对论下的因果律。现在我们将场量理解为算符，当然首先就要考虑如何使它们满足因果律的要求。

在相对论量子力学的理解中，我们将$\phi(x)$理解为一个粒子出现在x点的几率振幅。说明一点，前面计算的其实是粒子由$(0,\mathbf{0})$点传播到$(t,\mathbf{x})$点的几率振幅，本质上是个点源响应，也就是Green函数。只是我们将初始点取成$(0,\mathbf{0})$而没有将初始点随时标记出来容易引起些误解。这里我们从场的观点出发来重新考虑粒子由$(0,\mathbf{0})$点传播到$(t,\mathbf{x})$点的几率振幅。看看有没有可能不破坏因果律。

场算符$\hat{\phi}(x)$在量子力学的框架下被理解成一个粒子出现在x点的几率振幅；在经典场的框架下可直接用来描述产生和消失。**场在量子化之后，我们通过与经典场对比猜测它一定在描述粒子的产生和消失，因为经典场$\phi(x)$就是通过改变场的强度来描述在x点的以该场为载体的能量的产生和消失的。由于我们的场是量子化的，所以以该场为载体的能量的产生和消失是一份一份的。又因为我们的场本质上是一种谐振子场，所以这种以场为载体的一份一份的能量可以描述粒子的产生和消失。**因此我们猜测场算符$\hat{\phi}(x)$作用在真空态$|0\rangle$上给出的将是

$$\hat{\phi}(x)\,|0\rangle$$

将是在x点产生一个粒子的几率振幅。这个假设的依据是

1. 只要是量子理论就是几率性的。一个起产生作用的场算符作用在态空间中的任何一个态上给出的都将是态空间中的另一个态（态算符的作用是封闭的）。因此$\hat{\phi}(x)\,|0\rangle$一定是一个新的几率振幅。

2. 在这里场算符的作用是产生而不是消失是因为$|0\rangle$已经是真空态了，没有什么可消失的了。所以我们考虑它是产生的情况（消失的情况另有特别的意义）。

3. 我们将$\hat{\phi}(x)$作用在$|0\rangle$上只产生一个粒子作为我们的一个假设，后面将在这个假设的基础上得到正则量子化条件中的一条（尝试要求它与场的Hamilton量对易只产生一个粒子，即$[\hat{\phi}(x),\hat{H}(x)]=\hat{\phi}(x)\Rightarrow[\hat{\phi}(x),\hat{\pi}(x)]=1$）。

这样，场观点下在x点产生一个粒子的几率和量子力学观点下一个粒子出现在x点的几率应该是一样的。

$$\underbrace{\hat{\phi}(x)|0\rangle}_{\text{场观点下在}x\text{点产生一个粒子的几率振幅}}=\underbrace{\phi(x)}_{\text{量子力学观点一个粒子出现在}x\text{点的几率振幅}}$$

注意，这里的$\phi(x)$和$\hat{\phi}(x)|0\rangle$都是在一个点出现粒子的几率振幅，不是前面讲的一个粒子由x_0点出发传播到x点的几率振幅。从某一点传播到另一点的几率振幅本质上是Green函数。但是从某种意义上讲，我们可以将Green函数理解成不关心历史的波函数。这一点可参照式(2.5).

前面当我们将所得到的相对论方程解释为相对论量子力学的波动方程的时候，算出了一个在$y=(0,\mathbf{0})$点产生一个粒子，这个粒子运行到$x=(t,\mathbf{x})$点的几率振幅。在场观点下，粒子在x点和y点的几率振幅是$\hat{\phi}(y)|0\rangle$和$\hat{\phi}(x)|0\rangle$，自然粒子由x点运动到y点的几率振幅是它们的内积：

$$\left(\hat{\phi}(x)|0\rangle,\hat{\phi}(y)|0\rangle\right)=\left(\hat{\phi}(x)|0\rangle\right)^{\dagger}\hat{\phi}(y)|0\rangle=\langle 0|\left(\hat{\phi}(x)\right)^{*}\hat{\phi}(y)|0\rangle=\langle 0|\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)|0\rangle,$$

其中$\left(\hat{\phi}(x)\right)^{*}=\hat{\phi}(x)$，因为我们考虑的是实标量的情况。

可以看到，场算符的平均值是几率振幅。这并不奇怪，因为我们的场量子化就是将本来是一个数的几率振幅$\phi^{(+)}(x)$变成了算符$\hat{\phi}^{(+)}(x)$。将一个算符变成数的最直接的办法显然就是求平均值。

我们在这里考虑的是一个粒子的传播（不是两个粒子一起考虑），比如，考虑一个正粒子的传播，那么这里正粒子由y点运动到x点的几率振幅应该与量子力学图景下得到的几率振幅相同。由式(2.35)我们知道量子力学图景下得到的一个正粒子由$y=(0,\mathbf{0})$点运动到$x=(t,\mathbf{x})$的几率振幅为$\phi^{(+)}(\mathbf{x},t)=i\Delta^{(+)}(x)$。所以

$$\underbrace{\langle 0|\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(0)|0\rangle}_{\text{场观点}}=\underbrace{\phi(x)|_{\text{正能粒子}}}_{\text{量子力学观点}}.$$

注意，这是我们的猜测，不是推导结果。于是有

$$\langle 0|\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(0)|0\rangle=i\Delta^{(+)}(x).$$

原来为了方便我们将初始点取做$y=(0,\mathbf{0})$，这里我们将这个结果写回更普遍的形式，即由y点运动到x点的普遍形式：

$$\langle 0|\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)|0\rangle = i\Delta^{(+)}(x-y). \tag{4.2}$$

我们已经知道这个几率振幅是违背因果律的。因为它允许类空的传播。就是说，**我们即使将前面得到的相对论方程解释为场方程，也仍然不能解决这个因果律问题。要想解决违背因果律的问题我们需要引入新的假设**。其实，问题的根本原因在于相对论的要求与单粒子图像本质上是冲突的。我们不可能在一个单粒子图像下给出一个不违背因果律的结果。

所谓符合因果律的要求，就是让类空传播的几率是零。前面的我们曾经做过一个使类空的结果为零的尝试，当时的结果表明，从技术上讲，$\Delta^{(+)}(x-y)$不是零，但是如果引入另一个函数$\Delta^{(-)}(x-y)$，由式(2.37)，就可以有$\left[\Delta^{(+)}(x)+\Delta^{(-)}(x)\right]\big|_{s^2<0}=0$的结果。因此现在的问题就变成了看看如何由场算符得到函数$\Delta^{(-)}(x)$。

做到这点并不难，式(2.33)给出了关系$\left[\Delta^{(+)}(x)\right]^*=\Delta^{(-)}(x)$。这样只需对式(4.2)两边取复共轭就可以了：

$$\begin{aligned}\left[\langle 0|\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)|0\rangle\right]^* &= \left[i\Delta^{(+)}(x-y)\right]^*\\ \langle 0|\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x)|0\rangle &= -i\left[\Delta^{(+)}(x-y)\right]^*\\ \langle 0|\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x)|0\rangle &= -i\Delta^{(-)}(x-y).\end{aligned}$$

所以我们有

$$i\Delta^{(-)}(x-y) = -\langle 0|\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x)|0\rangle. \tag{4.3}$$

将式(4.2)与(4.3)相加得到

$$\begin{aligned}\langle 0|\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)|0\rangle - \langle 0|\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x)|0\rangle &= i\Delta^{(+)}(x-y)+i\Delta^{(-)}(x-y)\\ \langle 0|\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)-\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x)|0\rangle &= i\Delta^{(+)}(x-y)+i\Delta^{(-)}(x-y).\end{aligned}$$

用对易括号的形式表示就是

$$\langle 0|\left[\hat{\phi}(x),\hat{\phi}(y)\right]|0\rangle = i\Delta^{(+)}(x-y)+i\Delta^{(-)}(x-y).$$

我们将这个结果的类时和类空的情况分别写出来就是

$$\begin{aligned}\langle 0|\left[\hat{\phi}(x),\hat{\phi}(y)\right]|0\rangle\Big|_{s^2>0} &= i\Delta^{(+)}(x-y)+i\Delta^{(-)}(x-y)\big|_{s^2>0}\neq 0, \quad \text{类时;}\\ \langle 0|\left[\hat{\phi}(x),\hat{\phi}(y)\right]|0\rangle\Big|_{s^2<0} &= i\Delta^{(+)}(x-y)+i\Delta^{(-)}(x-y)\big|_{s^2<0}=0, \quad \text{类空。}\end{aligned} \tag{4.4}$$

显然，到了这里，虽然我们确实凑出了一个不破坏因果律的东西，但是却实质上已经放弃了单粒子图像，因为我们同时考虑了两个传播过程。

这个结果实质上表明，因果律实质上给出了对场算符的约束条件，也就是式(4.4)。这个约束条件的意义非常清楚：它要求两个不同时空点上的场算符，如果间隔是类时的则彼此间可以互相影响，这种影响体现在这两个不同时空点上的场算符不对易上，不对易就是说，操作顺序不同，其结果也不相同，这显然是在说它们之间存在着关系；如果间隔是类空的，则两算符彼此间不能有任何影响，也就是两算符对易。这体现的正是因果律的要求：**相互影响的两个事件一定是类时的，类空的两个事件间不能有联系**。这个条件其实对类时没有什么要求，但类空必须是零。因此这个条件可以写成

$$\langle 0|\left[\hat{\phi}(x),\hat{\phi}(y)\right]|0\rangle=0,\quad \text{如果}s^2<0\text{（类空）。}$$

这个要求实在平均值意义下的，换句话是，这个一个针对基态的平均值条件。如果我们加强一下要求，认为这个要求对任意态成立，则这个条件就变成了一个算符条件

$$\left[\hat{\phi}(x),\hat{\phi}(y)\right]=0,\quad \text{如果}s^2<0\text{（类空）。}$$

这个条件比刚才要强得多，我们以后其实是在这个条件下工作的，其实这就是场的正则量子化条件中的一条。

我们的处理完全是在相对论的框架下进行的，所得到的结果都是Lorentz不变的。式(4.4)中的结果在任何参照系中都成立。针对类空情况我们考虑一个特殊的参照系，在这个参照系中两个事件是同时发生的。即$x^0=y^0$。同时的当然是类空的，否则就是超距作用了。在这种情况下我们显然有

$$\langle 0|\left[\hat{\phi}(\mathbf{x}),\hat{\phi}(\mathbf{y})\right]|0\rangle=0,\quad x^0=y^0.$$

同样，如果我们将这个平均值意义下的要求加强成算符条件则有

$$\left[\hat{\phi}(\mathbf{x}),\hat{\phi}(\mathbf{y})\right]=0,\quad x^0=y^0.$$

后面我们会看到，这就是正则量子化方案中的等时对易关系。

换句话说，场的正则量子化条件其实是因果律强加给我们的。

4.3 因果律，场量子化条件（旋量场情况）

由前面得到的结果，以与标量场相同的方式可以得到旋量场必须用反对易关系量子化的条件。（练习）

第五章　总结

前面的结果表明：如果

1. 我们要求理论必须是相对论性的，
2. 我们要求理论符合因果律（不能超光速），
3. 我们要求世界是稳定的（这将要求能量有下界，即不能有真正的负能量），

那么

1. 必须用量子化的场来描述我们的世界，即场量被看作是算符，必须放弃力学的观点（即相对论量子力学），
2. 必须引入反粒子（如不引入反粒子就必须接受负能量，世界将不稳定），
3. 标量场以及自旋为整数的场的场量，量子化后就是场算符，必须满足对易的量子化条件；旋量场这样的自旋半整数的场的场量必须是反对易的。

当然在整个推导中我们还做了其它要求：

1. 要求了定域描述，
2. 要求了世界上的粒子可以被分成几类，每类中粒子质量都是相同的（这要求我们的场方程必须具有量子化谐振子特征，这条要求使自由场方程的阶数必须不能超过二阶，场量不能超过一次，因为谐振子就是这样的）。

第二部分

经典场

第六章　经典场I:一般描述

6.1　场的概念和描述，定域场

在回答什么是场之前，先来看看什么是粒子?我们不妨这样定义粒子：定域在空间某个点物体就是粒子；或者说，可以用有限多个坐标来描述的物体就是粒子。

好了，我们已经可以描述什么是场了。场就是针对粒子而言的。弥漫在空间某个区域的物体就是场。要描述场，我们必须给出这个区域内的每个点上的值。显然，在一个连续的空间中，这需要无穷多个值。也就是说，场的自由度是无穷大的。

这件事可以反过来说：如果你在空间的每个点上放一个量，就得到了一个场。显然，这需要无穷多个量，也就是说，自由度是无穷大。每个点放一个标量，就得到一个标量场；放一个旋量，就得到一个旋量场；放一个矢量，就得到一个矢量场...。（顺便说一下，在空间的每个点上放点儿什么总是个好想法，比如，粗略地讲，你在空间的每个点上建一个坐标系，你就得到了一个纤维丛。）

6.1.1　力学与场论

力学描述的对象是粒子。描述粒子要做的是指明它在空间中的位置。

场论描述的是场。描述场要做的是指明场在空间某个位置的取值。

力学描述的是有限大自由度的力学体系；场论描述的是无穷大自由度的体系。下面我们来做一个比喻性的描述。如果我们要描述一群数量巨大的粒子。原则上我们可以用力学的观点给出所有这些粒子的坐标，并列出一个数量等于系统自由度数的运动方程组，然后求解。你知道这基本上是不可能的（对弱耦合的谐振子系统我们还算有点办法）。但是我们也可以换一个思路：不去描述某个粒子在某个时间出现在某个地点的问题。而考虑在某个时间某个地点附近会出现多少个粒子。显然，在这种框架下，粒子越多，描述得越精确。当粒子足够多时，比如有无穷多个粒子，系统可以过渡到一个连续的极限。某个点附近有多少个粒子的这种描述可以转化成对某点处密度的描述。于是，空间的每个点上就有一个密度值，这样我们就得到了

一个密度场。于是，一个多自由度的力学问题通过被就转化成了一个无穷大自由度的力学问题而变成了一个场理论。

多粒子系统的场描述：

在力学的观点下，我们的注意力在于逐一给出每一个粒子的位置，其中第i个粒子在时刻t的位置用它的坐标来描述：

$$x_i(t).$$

转换成场观点后我们关注的是t时刻在原来这个第i个粒子所在的空间位置x_i点处的粒子数的密度

$$\varphi(x,t).$$

也就是说我们做了如下的转化

$$x_i(t) \to \varphi(x,t).$$

其中多粒子系统中某个粒子的标记i变成了它的坐标x，而对该粒子位置的描述，也就是坐标，变成了该位置处的粒子数密度。这个转变的一个深刻之处在于，在力学中时间的地位是微妙的。虽然位置是物理量，但时间不是物理量。时间是作为一个参数出现的。这样一来在力学中空间坐标和时间是完全不对称的。感觉总有些古怪。但在场观点中，空间坐标和时间的位置平等了，它们都不再是物理量了，所起的都是一个参数的作用。此时空间坐标x的作用与力学中标记粒子的参数i是一样的。于是力学中对i的求和将变成对x的积分。

总结一下就是，在将力学的观点变换成场观点时要做如下替换：

$$\begin{aligned} x_i(t) &\to \varphi(x,t), \\ {}_i &\to x, \\ \sum_i &\to \int dx. \end{aligned} \tag{6.1}$$

单粒子系统的场描述：

前面我们从多粒子图像讨论了从力学观点到场观点的过渡。一个问题是如果我们关心的是一个单粒子问题，如何考虑这个过渡。

在经典力学中，物体是定域在空间某个位置上的粒子。描述这样的粒子我们给出它的位置矢量

$$\mathbf{r}(t) = (x_i(t)), \quad i = 1,2,3.$$

位置矢量$\mathbf{r}(t)$由经典力学的动力学方程来确定。确定三维空间中的一个位置矢量$\mathbf{r}(t)$要给出全部三个分量，这三个分量用参数i描述。

量子力学启发我们可以用波的观点来描述一个单粒子。这个波当然是弥漫在全空间的，我们用

$$\varphi(\mathbf{x},t)$$

来描述它。$\varphi(\mathbf{x},t)$由经典的波动方程来描述（也就是前面我们得到的各种相对论性方程，在非相对论近似下便是Schrödinger方程）。注意，在这里，各种波动方程都是经典的，因为$\varphi(\mathbf{x},t)$是一个数而不是算符。要想确定$\varphi(\mathbf{x},t)$显然要给出$\varphi(\mathbf{x},t)$在空间每个点的值，这需要无穷多个分量，这无穷多个分量用参数$\mathbf{x}$来描述，也就是说系统的自由度是无穷大的。一个无穷大自由度的系统当然是一个场，就是说$\varphi(\mathbf{x},t)$是一个场。这就是说当我们用场$\varphi(\mathbf{x},t)$代替$\mathbf{r}(t)$来描述一个粒子时，我们已经由有限大自由度换成了无穷多自由度。做这种代换后，在力学中对参数i的求和$\sum_i$变成了对连续参数$\mathbf{x}$的积分$\int d\mathbf{x}$。这就是(6.1)中的代换。

6.1.2 最小作用量原理

在力学中，经典力学的运动方程（牛顿方程$F=ma$或等价的Euler-Lagrange方程）可由最小作用原理得到。经典的场方程（我们说过，从物理的角度上讲场就是无穷大自由度力学系统的力学）也服从最小作用原理。就是说经典运动都是符合最小作用原理的。在基本原理中，最小作用原理在表述和理解上是最简单的，从而也是最深刻的。当然，回答最小的是什么并不是一件容易的事。我们不妨称之为作用量。（关于作用量的的引入见《理论力学讲义》）。于是力学和场的经典运动方程都可表示为

$$\delta S=0.$$

每一条可能的运动轨道都对应一个作用量，也就是说作用量是轨道的函数。轨道本身就是用函数来表示的，因此作用量是函数的函数，称为泛函（后面我们会更详细地介绍泛函）。

作用量中包含的是整条轨道的信息，要将整条轨道而不是某一个点的信息包含在一个数中（作用量泛函将每条轨道给对应成一个数，就像函数将一个数对应成一个数一样），显然最直接的办法便是对整个过程积分。就是说我们可以将作用量表示成一个包含运动信息的函数对整个运动过程的积分。那么这个包含运动信息的函数应当怎样构造呢。从原则上讲，要与实验对比；从操作上讲，我们可以从对称性出发来构造。从实验的总结出的经验告诉我们，坐标和它的一阶导数可以完全确定一个经典系统的状态。因此我们假设这个与运动有关的函数是坐标和坐标一阶导数

的函数这个函数称为Lagrange量。因此作用量可以写成

$$S=\int_{t_1}^{t_2}dtL$$

的形式。

经典理论满足最小作用量原理，在量子力学中，我们认为粒子以权重e^{iS}走所有可能路径。

下面我们只关注场，也就是无穷大自由度的情况。

6.1.3 Lagrange表述和Hamilton表述

运动方程当然可以有许多等价的形式。这里我们将给出Lagrange方程和Hamilton正则方程。Lagrange方程与Hamilton方程相差一个Legendre变换。Lagrange表述中的动力学变量是广义坐标和广义速度；Hamilton表述中的动力学变量是广义坐标和广义动量。这两个方程知道了一个就可以通过Legendre变换立刻得到另一个。当然它们都可以从最小作用原理直接得到。

我们熟悉的运动方程的另一个表述就是牛顿的矢量分析的表述。但是我们将看到，Lagrange表述和Hamilton表述显然是更深刻的形式（这丝毫不影响牛顿的光辉）。因为由这两种表述我们可以很容易地过渡到量子理论：Lagrange表述给出量子理论的路径积分表述；Hamilton表述将给出量子理论的正则量子化的表述。

6.2 场的Lagrange表述

6.2.1 场的Euler-Lagrange方程：分量形式

在有限大自由度的力学中，我们为每一个自由度写下了一个运动方程。那么如何处理一个无穷大自由度的场呢，总不能为无穷多个自由度写下无穷多个方程啊。场$\varphi(\mathbf{x},t)$在空间的每个点都有一个取值（这里我们只考虑定域场）。这个取值是连续的。在任何一个有限大体积内都会有无穷多个取值。而作为出发点，现在我们只有有限大自由度力学的知识。我们先将无穷大自由度的场改造成有限大自由度的系统。可以这样做这件事。将空间分成若干小份（如果空间是无穷大的，那么就有无穷多份。但是这没关系，关键是这是可数的），为每个小份做一个标记i，每份的体积为V_i（图1）。当然在每一小份中场$\varphi(\mathbf{x},t)$仍有无穷多个取值。为了使自由度变成分立自由度，我们在这个小体积内对场$\varphi(\mathbf{x},t)$取平均

$$\varphi_i(t)=\frac{1}{V_i}\int_{V_i}d^3x\varphi(\mathbf{x},t).$$

这样我们得到的$\varphi_i(t)$与力学中的$x_i(t)$已经完全一样了。这样我们就可以为每一个$\varphi_i(t)$写一个与力学中一样的运动方程了。此时的系统是一个可数的多自由度系统，它的Lagrange量是

$$L(\cdots,\varphi_i,\cdots;\cdots,\dot{\varphi}_i,\cdots).$$

这样作用量便是

$$S=\int_{t_1}^{t_2}dtL(\cdots,\varphi_i,\cdots;\cdots,\dot{\varphi}_i,\cdots). \tag{6.2}$$

运动方程可由最小作用原理直接得到：

$$\delta S=0.$$

由此可直接得到运动方程：

$$\begin{aligned}\delta S&=\delta\int_{t_1}^{t_2}dtL(\cdots,\varphi_i,\cdots;\cdots,\dot{\varphi}_i,\cdots)\\&=\int_{t_1}^{t_2}dt\delta L(\cdots,\varphi_i,\cdots;\cdots,\dot{\varphi}_i,\cdots).\end{aligned}$$

注意，变分和微分、积分可以交换顺序（见理论力学讲义）。其中对Lagrange量的变分为

$$\delta L(\cdots,\varphi_i,\cdots;\cdots,\dot{\varphi}_i,\cdots)=\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi_i}\delta\varphi_i+\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_i}\delta\dot{\varphi}_i\right).$$

变分和微分交换顺序

$$\delta\dot{\varphi}=\frac{d}{dt}\delta\varphi,$$

于是

$$\begin{aligned}\delta L&=\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi_i}\delta\varphi_i+\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_i}\frac{d}{dt}\delta\varphi_i\right)\\&=\sum_i\left[\frac{\partial L}{\partial\varphi_i}\delta\varphi_i+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_i}\delta\varphi_i\right)-\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_i}\right)\delta\varphi_i\right].\end{aligned}$$

代回作用量变分中

$$\begin{aligned}\delta S&=\int_{t_1}^{t_2}dt\delta L\\&=\int_{t_1}^{t_2}dt\sum_i\left[\frac{\partial L}{\partial\varphi_i}\delta\varphi_i+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_i}\delta\varphi_i\right)-\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_i}\right)\delta\varphi_i\right]\\&=\int_{t_1}^{t_2}dt\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_i}\right)\delta\varphi_i+\sum_i\int_{t_1}^{t_2}dt\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_i}\delta\varphi_i\right)\\&=\int_{t_1}^{t_2}dt\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_i}\right)\delta\varphi_i+\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_i}\delta\varphi_i\Big|_{t_1}^{t_2}\right).\end{aligned}$$

我们这里考虑的是等时变分（简单变分），$\delta\varphi_i$在两端的取值为零

$$\delta\varphi_i\left(t_1\right)=\delta\varphi_i\left(t_2\right)=0.$$

于是最小作用原理要求

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}dt\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_i}\right)\delta\varphi_i=0.$$

这里的$\delta\varphi_i$是一个任意的变分，这要求被积函数是零，即

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_i}=0.$$

这是是一个方程组。是场的运动方程——Euler-Lagrange方程——的分量形式。每一个i就是一个场的分量，一共有多少个方程取决于我们将空间分成多少份。显然，对一个连续的场来说方程有无穷多个。

6.2.2 场的Euler-Lagrange方程：泛函形式

前面将连续的无穷大自由度的场离散化了，得到了一个由无穷多个自由度组成的方程组。此时的Lagrange量$L\left(\cdots,\varphi_i,\cdots;\cdots,\dot{\varphi}_i,\cdots\right)$是无穷多个变量$(\cdots,\varphi_i,\cdots;\cdots,\dot{\varphi}_i,\cdots)$的函数。$\varphi_i$是我们将场离散化得到的。但是我们的定域化假设要求场量$\varphi\left(\mathbf{x},t\right)$是连续函数。这就要是说这无穷多个变量$\cdots,\varphi_i,\cdots$连在一起其实是连续函数$\varphi\left(\mathbf{x},t\right)$。这就是说Lagrange量$L\left(\cdots,\varphi_i,\cdots;\cdots,\dot{\varphi}_i,\cdots\right)$此时可以看作是一个函数$\varphi\left(\mathbf{x},t\right)$的函数。也就是说，它是一个泛函。

关于泛函的数学小补充

可以这样理解泛函。考虑一个多变量的函数$F\left(y_1,y_2,\ldots y_N\right)$，这里$F$当然是变量$y_1,y_2,\ldots y_N$的函数。但是，如果相邻的两个变量变得非常接近，从而变量的个数趋于无穷，那么显然这些变量$y_1,y_2,\ldots y_N$的下标$1,2,\cdots N$将变成一个连续参数，我们用x来表示，即

$$1,2,\cdots N\to x,$$

。这样变量y_i就变成了连续参数x的函数，即

$$y_1,y_2,\ldots y_N\to y=y\left(x\right).$$

自然原来$y_1,y_2,\ldots y_N$的函数$F\left(y_1,y_2,\ldots y_N\right)$就变成了$y\left(x\right)$的函数，即

$$F\left(y_1,y_2,\ldots y_N\right)\to F\left[y\left(x\right)\right].$$

这种函数的函数我们称之为泛函。

对于泛函我们也可以做微积分。这里我们先来看看泛函的微分。我们并不打算严格地处理这个问题，只想通过与普通函数的微分做类比给出泛函微分。泛函的微分我们称作变分。

普通函数的微分是这样求的

$$\begin{aligned} df(\mathbf{x}) &= f(x_i + \Delta x_i) - f(x_i) \\ &= \sum_i \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} dx_i. \end{aligned}$$

仿照函数微分我们很容易得到泛函微分，也就是变分

$$\begin{aligned} \delta F[y(x)] &= F[y(x) + \delta y(x)] - F[y(x)] \\ &= \int dx \frac{\delta F[y(x)]}{\delta y(x)} \delta y(x). \end{aligned}$$

这里其实就是做了替换$x_i \to y(x)$和$\sum_i \to \int dx$。

在将离散化的场量写成一个函数后，我们得到了一个作为场量泛函的Lagrange量：

$$L(\cdots, \varphi_i, \cdots; \cdots, \dot{\varphi}_i, \cdots) \Rightarrow L[\varphi(\mathbf{x}, t), \dot{\varphi}(\mathbf{x}, t)].$$

于是式（6.2）变成了

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L[\varphi(\mathbf{x}, t), \dot{\varphi}(\mathbf{x}, t)]. \tag{6.3}$$

这是一个泛函形式的表达，由此当然我们也可以得到泛函形式的运动方程。

运动方程是由最小作用原理决定的，最小作用原理告诉我们经典系统按照使作用量最小的方式演化，即

$$\delta S = 0.$$

想要得到运动方程只需对式(6.3)求变分就是了：

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L[\varphi(\mathbf{x}, t), \dot{\varphi}(\mathbf{x}, t)].$$

变分和微分、积分可以交换顺序（见理论力学讲义），于是

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta L[\varphi(\mathbf{x}, t), \dot{\varphi}(\mathbf{x}, t)].$$

其中对Lagrange的变分为

$$\delta L\left[\varphi\left(\mathbf{x},t\right),\dot{\varphi}\left(\mathbf{x},t\right)\right]=\int d^{3}x\left(\frac{\delta L}{\delta\varphi}\delta\varphi+\frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}}\delta\dot{\varphi}\right). \tag{6.4}$$

变分和微分交换顺序

$$\delta\dot{\varphi}=\frac{d}{dt}\delta\varphi,$$

于是

$$\begin{aligned}\delta L&=\int d^{3}x\left(\frac{\delta L}{\delta\varphi}\delta\varphi+\frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}}\frac{d}{dt}\delta\varphi\right)\\&=\int d^{3}x\left[\frac{\delta L}{\delta\varphi}\delta\varphi+\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}}\delta\varphi\right)-\left(\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}}\right)\delta\varphi\right].\end{aligned}$$

代回作用量变分中

$$\begin{aligned}\delta S&=\int_{t_1}^{t_2}dt\delta L\\&=\int_{t_1}^{t_2}dt\int d^{3}x\left[\frac{\delta L}{\delta\varphi}\delta\varphi+\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}}\delta\varphi\right)-\left(\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}}\right)\delta\varphi\right]\\&=\int_{t_1}^{t_2}dt\int d^{3}x\left[\frac{\delta L}{\delta\varphi}-\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}}\right]\delta\varphi+\int d^{3}x\int_{t_1}^{t_2}dt\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}}\delta\varphi\right)\\&=\int_{t_1}^{t_2}dt\int d^{3}x\left[\frac{\delta L}{\delta\varphi}-\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}}\right]\delta\varphi+\int d^{3}x\left(\frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}}\delta\varphi\Big|_{t_1}^{t_2}\right).\end{aligned}$$

我们这里考虑的是等时变分（简单变分），$\delta\varphi$在两端的取值为零

$$\delta\varphi\left(\mathbf{x}_1,t_1\right)=\delta\varphi\left(\mathbf{x}_2,t_2\right)=0.$$

于是最小作用原理要求

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}dt\int d^{3}x\left[\frac{\delta L}{\delta\varphi}-\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}}\right]\delta\varphi=0.$$

这里的$\delta\varphi$是一个任意的变分，这要求被积函数是零，即

$$\frac{\delta L}{\delta\varphi}-\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}}=0.$$

这就是场的运动方程，Euler-Lagrange方程的泛函形式。

6.2.3 场的Euler-Lagrange方程：微分形式

为了描述经典场，前面首先我们将场离散化得到了分量形式的场的运动方程。但是由于场有无穷多个自由度，所以场方程组也包含了无穷多个方程（每个自由度都有一个方程）。这样的描述当然是很难操作的。随后，我们将无穷多个离散的点过渡到一个函数，得到了描述场的一个泛函方程。但是一个泛函方程是同样是很难操作的。

而且前面得到的方程中，对时间的导数处在了一个特殊的地位上：其中一项是Lagrange量对场量时间导数求导。在这里时间和空间是不平权的，不容易得到一个相对论协变的方程。下面我们进一步改造这个方程。

前面的结果表明，描述一个场，如果希望得到一个微分方程而不是泛函方程就必须对场进行逐点描述。但是将场离散化显然不是一个好办法。在分量形式方程的讨论中，Lagrange量是场量在空间各点取值平均值的函数，变量有无穷多个，此时得到的是微分方程。在泛函形式中，Lagrange量是场量的泛函，得到的是泛函方程。如果我们希望得到一个场的微分方程，显然我们仍应逐点描述，我们的定域假设保证了这是可以做到的。

Lagrange量和Hamilton量本质上都是广延量性质的量。对这样的量逐点描述是困难的。比如空间有一个质量分布，我们不能谈空间某一点的质量。描述一个这种广延性质的量我们采用的办法是引入密度。密度是强度量性质的量。我们当然可以给出它在空间每个点上的取值。这样质量$m=\lim\limits_{V_i\to 0}\sum_i\rho_iV_i$。对Lagrange量（或Hamilton量）我们也可以这样处理，引入Lagrange密度（或Hamilton密度）：

$$\begin{aligned} L(t) &= \lim_{V_i\to 0}\sum_i \mathcal{L}_i V_i \\ &= \sum_i \lim_{V_i\to 0}\int d^3x\mathcal{L}_i \qquad (6.5) \\ &= \int d^3x\mathcal{L}, \qquad (6.6) \end{aligned}$$

其中$\mathcal{L}_i$为第i个小格中的Lagrange密度。$\mathcal{L}_i$显然是场量$\varphi(\mathbf{x},t)$在第i个小格中的平均值$\varphi_i(t)$的函数（注意，不是泛函，因为$\varphi_i(t)$只是个数）。$\mathcal{L}_i$显然还是$\dot{\varphi}_i(t)$的函数。但是，象前面提到过的，如果$\mathcal{L}_i$只是$\varphi_i(t)$和$\dot{\varphi}_i(t)$的函数，那么不容易满足相对论协变的要求。要满足协变性的要求，必须让空间分量与时间分量有同等的地位。一个自然的办法是，让$\mathcal{L}_i$同时还是场量空间导数

$$\partial_a\varphi_i(t)=\frac{1}{V_i}\int_{V_i}d^3x\partial_a\varphi(\mathbf{x},t)\equiv\frac{1}{V_i}\int_{V_i}d^3x\frac{\partial\varphi(\mathbf{x},t)}{\partial x_a}$$

的函数，其中$a=x,y,z$，即

$$\mathcal{L}_i=\mathcal{L}_i\left(\varphi_i\left(t\right),\dot{\varphi}_i\left(t\right),\partial_a\varphi_i\left(t\right)\right).$$

这里的V_i是第i个小格的体积。写成更便于做相对论处理的形式：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_i&=\mathcal{L}_i\left(\varphi_i\left(t\right),\partial_t\varphi_i\left(t\right),\partial_a\varphi_i\left(t\right)\right)\\&=\mathcal{L}_i\left(\varphi_i\left(t\right),\partial_\mu\varphi_i\left(t\right)\right).\end{aligned}$$

当$V_i\to 0$时，我们就可以用这个无穷小小格所处的空间位置$\mathbf{x}$来标记这个小格，于是有

$$\varphi_i\left(t\right)\to\bar{\varphi}\left(\mathbf{x},t\right)=\lim_{V_i\to 0}\frac{1}{V_i}\int_{V_i}d^3x\varphi\left(\mathbf{x},t\right).$$

特别要注意的是$\bar{\varphi}\left(\mathbf{x},t\right)$与$\varphi\left(\mathbf{x},t\right)$的本质区别$\bar{\varphi}\left(\mathbf{x},t\right)$是$\varphi\left(\mathbf{x},t\right)$在空间$\mathbf{x}$点处的平均值。其实只有这个平均值才是我们真正关心的量。既是平均值，它就是个数，而不是原来的函数$\varphi\left(\mathbf{x},t\right)$（差别是微妙的，但你能理解对吧）。这样

$$\mathcal{L}_i\left(\varphi_i\left(t\right),\partial_\mu\varphi_i\left(t\right)\right)\to\mathcal{L}\left(\bar{\varphi}\left(\mathbf{x},t\right),\partial_\mu\bar{\varphi}\left(\mathbf{x},t\right)\right)$$

在不引起误解的情况下，为了方便，下面我们将用符号$\varphi\left(\mathbf{x},t\right)$来代替$\bar{\varphi}\left(\mathbf{x},t\right)$，也就是说，今后我们将$\varphi\left(\mathbf{x},t\right)$在平均值意义上进行理解。

由式（6.6）可直接得到作用量

$$\begin{aligned}S&=\int dtL\left(t\right)\\&=\int dt\int d^3x\mathcal{L}\left(\varphi\left(\mathbf{x},t\right),\partial_\mu\varphi\left(\mathbf{x},t\right)\right)\\&=\int d^4x\mathcal{L}\left(\varphi\left(\mathbf{x},t\right),\partial_\mu\varphi\left(\mathbf{x},t\right)\right).\end{aligned}$$

由$\delta S=0$可得运动方程。

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \int d^4x \delta \mathcal{L}\left(\varphi\left(\mathbf{x},t\right),\partial_\mu\varphi\left(\mathbf{x},t\right)\right) \\
&= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi\right)}\delta\partial_\mu\varphi\right] \\
&= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi\right)}\partial_\mu\delta\varphi\right] \\
&= \int d^4x \left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}\delta\varphi + \overbrace{\partial_\mu\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi\right)}\delta\varphi\right]}^{\text{表面项积分后为零}} - \partial_\mu\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi\right)}\right]\delta\varphi\right\} \\
&= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi\right)}\right]\delta\varphi.
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

$\delta\varphi$是任意的，于是$\delta S = 0$给出

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi\right)} = 0.
$$

这样，再做了几次尝试后，通过定域的假设，我们得到了一个微分形式的场方程。

6.2.4 泛函形式和微分形式的关系

前面我们通过分量形式的场方程得到了微分形式的场方程。我们在来看看场方程泛函形式和微分形式的关系。

由式（6.6）和作用量的表达式可知

$$
\delta S = \int dt \delta L = \int dt d^3x \left(\frac{\delta L}{\delta \varphi}\delta\varphi + \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}}\delta\dot{\varphi}\right). \tag{6.8}
$$

这是泛函形式的结果。

由式（6.7）知

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \varphi\right)}\delta\partial_\mu\varphi\right] \\
&= \int dtd^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_a \varphi\right)}\delta\partial_a\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_t \varphi\right)}\delta\partial_t\varphi\right] \\
&= \int dtd^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_a \varphi\right)}\partial_a\delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_t \dot{\varphi}\right)}\delta\dot{\varphi}\right] \\
&= \int dtd^3x \left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}\delta\varphi + \overbrace{\partial_a\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_a \varphi\right)}\delta\varphi\right]}^{\text{空间积分表面项为零}} - \partial_a\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_a \varphi\right)}\right]\delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_t \dot{\varphi}\right)}\delta\dot{\varphi}\right\} \\
&= \int dtd^3x \left\{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_a\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_a \varphi\right)}\right]\delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_t \dot{\varphi}\right)}\delta\dot{\varphi}\right\}
\end{aligned}$$

与式（6.8）对比：

$$\frac{\delta L}{\delta \varphi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_a\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_a \varphi\right)}, \tag{6.9}$$

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}. \tag{6.10}$$

这就是说在做了定域的假设后，我们将一个泛函导数变成了一个普通导数。

6.3 场的Hamilton表述

6.3.1 场的Hamilton正则方程

前面给出的是Lagrange方程，这里我们给出场的Hamilton正则方程。Lagrange方程与Hamilton方程相差一个Legendre变换。Lagrange表述中的动力学变量是广义坐标和广义速度；Hamilton表述中的动力学变量是广义坐标和广义动量。为此我们要先得到场的广义动量。

6.3.2 正则动量，Legendre变换和Hamilton量

象在Lagrange表述的处理中一样，我们可以从分量形式和泛函形式分别得到Hamilton正则方程。但是这里我们不准备重复前面的内容，而是尽量直接利用前面的结果得到Hamilton正则方程。我们将直接利用泛函形式的结果。

在有限大自由度的力学中，正则动量就是Lagrange量对广义速度的导数：$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$。类比前面泛函形式的结果我们可以知道这个一个自由度的正则动量的定义

可以表述成

$$\pi(\mathbf{x},t)\equiv\frac{\delta L(t)}{\delta\dot{\varphi}(\mathbf{x},t)}.$$

在式（6.10）中我们给出了泛函形式和微分形式的对比$\frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}$，可知

$$\pi(\mathbf{x},t)\equiv\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}(\mathbf{x},t)}.$$

这样由Legendre变换我们可以由Lagrange量得到Hamilton量，在力学中Legendre变换变换为$H=\sum_i p\dot{q}-L$。在前面给出的力学和场的对应中我们有$\sum_i\to\int d^3x$，这样

$$H(t)=\int d^3x\pi(\mathbf{x},t)\dot{\varphi}(\mathbf{x},t)-L(t).\tag{6.11}$$

用Lagrange密度表示Lagrange量

$$L(t)=\int d^3x\mathcal{L}(\mathbf{x},t).$$

则有

$$\begin{aligned}H(t)&=\int d^3x\pi(\mathbf{x},t)\dot{\varphi}(\mathbf{x},t)-\int d^3x\mathcal{L}(\mathbf{x},t)\\&=\int d^3x\left[\pi(\mathbf{x},t)\dot{\varphi}(\mathbf{x},t)-\mathcal{L}(\mathbf{x},t)\right].\end{aligned}$$

引入Hamilton密度

$$\mathcal{H}(\mathbf{x},t)\equiv\pi(\mathbf{x},t)\dot{\varphi}(\mathbf{x},t)-\mathcal{L}(\mathbf{x},t)$$

有

$$H(t)=\int d^3x\mathcal{H}(\mathbf{x},t).$$

当然，这里我们也引入了定域假设。

场的Hamilton正则方程：泛函形式

同样，由最小作用原理，$\delta S=0$，我们可以得到Hamilton正则方程，只需将动力学变量换成正则坐标和正则动量。由式(6.11)知

$$L(t)=\int d^3x\pi(\mathbf{x},t)\dot{\varphi}(\mathbf{x},t)-H(t).$$

$$\begin{aligned}\delta S &= \delta \int dt L \\ &= \delta \int dt \left[\int d^3x \pi \dot{\varphi} - H \right] \\ &= \int dt \left[\int d^3x \delta \left(\pi \dot{\varphi} \right) - \delta H \right] \\ &= \int dt \left[\int d^3x \left(\delta \pi \dot{\varphi} + \pi \delta \dot{\varphi} \right) - \delta H \right]\end{aligned}$$

其中

$$\pi \delta \dot{\varphi} = \pi \partial_t \delta \varphi = \partial_t \left(\pi \delta \varphi \right) - \partial_t \pi \delta \varphi .$$

于是

$$\begin{aligned}\delta S &= \int dt \left[\int d^3x \left[\delta \pi \dot{\varphi} + \partial_t \left(\pi \delta \varphi \right) - \partial_t \pi \delta \varphi \right] - \delta H \right] \\ &= \int dt \left[\int d^3x \left(\delta \pi \dot{\varphi} - \partial_t \pi \delta \varphi \right) - \delta H \right] + \int d^3x \int dt \overbrace{\partial_t \left(\pi \delta \varphi \right)}^{\text{表面项为零}} \\ &= \int dt \left[\int d^3x \left(\delta \pi \dot{\varphi} - \dot{\pi} \delta \varphi \right) - \delta H \right] .\end{aligned}$$

其中Hamilton量是坐标和动量的泛函，即$H\left[\varphi, \pi\right]$，于是

$$\delta H\left[\varphi, \pi\right] = \int d^3x \left(\frac{\delta H}{\delta \varphi} \delta \varphi + \frac{\delta H}{\delta \pi} \delta \pi \right) .$$

所以

$$\begin{aligned}\delta S &= \int dt \left[\int d^3x \left[\delta \pi \dot{\varphi} - \dot{\pi} \delta \varphi \right] - \int d^3x \left(\frac{\delta H}{\delta \varphi} \delta \varphi + \frac{\delta H}{\delta \pi} \delta \pi \right) \right] \\ &= \int dt \int d^3x \left[\delta \pi \dot{\varphi} - \dot{\pi} \delta \varphi - \frac{\delta H}{\delta \varphi} \delta \varphi - \frac{\delta H}{\delta \pi} \delta \pi \right] \\ &= \int dt \int d^3x \left[\left(\dot{\varphi} - \frac{\delta H}{\delta \pi} \right) \delta \pi - \left(\dot{\pi} + \frac{\delta H}{\delta \varphi} \right) \delta \varphi \right] .\end{aligned}$$

最小作用原理要求$\delta S = 0$。而$\delta \varphi$和$\delta \pi$是独立的变分所以有

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \frac{\delta H}{\delta \pi}, \\ \dot{\pi} &= -\frac{\delta H}{\delta \varphi}.\end{aligned} \tag{6.12}$$

这就是泛函形式的场的Hamilton方程。

场的Hamilton正则方程：微分形式

通过附加定域假设，我们同样可以得到Hamilton方程的微分形式。与（6.9）类比我们有

$$\frac{\delta H}{\delta \varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} - \partial_a \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_a \varphi)},$$
$$\frac{\delta H}{\delta \pi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} - \partial_a \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_a \pi)}.$$

这样场的Hamilton方程的微分形式就是

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} - \partial_a \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_a \pi)},$$
$$\dot{\pi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} + \partial_a \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_a \varphi)}.$$

6.3.3 场的Poisson括号

在力学中我们有正则方程的Poisson括号形式。这一形式有着明显的对称性，其含义非常深刻（见理论力学中的分析）。

考虑一个任意的场的泛函的随时间的变化（与力学对比可直接得到这个形式）：

$$\dot{u} = \int d^3x \left(\frac{\delta u}{\delta \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\delta u}{\delta \pi} \dot{\pi} \right).$$

由(6.12)

$$\dot{u} = \int d^3x \left(\frac{\delta u}{\delta \varphi} \frac{\delta H}{\delta \pi} - \frac{\delta u}{\delta \pi} \frac{\delta H}{\delta \varphi} \right).$$

定义经典Poisson括号

$$[u, v]_{cl} = \int d^3x \left(\frac{\delta u}{\delta \varphi} \frac{\delta v}{\delta \pi} - \frac{\delta v}{\delta \pi} \frac{\delta u}{\delta \varphi} \right).$$

于是

$$\dot{u} = [u, H]_{cl}.$$

这样Hamilton正则方程便可表示为更为对称的Poisson括号的形式：

$$\dot{\varphi} = [\varphi, H]_{cl},$$
$$\dot{\pi} = [\pi, H]_{cl}.$$

这样漂亮的对称形式一定有其深刻的含义。在力学中我们已有分析，下面我们会看到一些端倪。

6.3.4 正则坐标和动量的Poisson括号

我们来计算一下两个共轭的正则变量的Poisson括号：$[\varphi,\pi]_{cl}$，$[\varphi,\varphi]_{cl}$和$[\pi,\pi]_{cl}$。

在力学中我们考虑过$[q_i,p_j]_{cl}$，变换到场语言中我们有$i\to\mathbf{x}$和$j\to\mathbf{y}$。在力学中，我们考虑的本质上当然是同时的$[q_i(t),p_j(t)]_{cl}$。过渡到场，只是作替换$i\to\mathbf{x}$和$j\to\mathbf{y}$，并不涉及时间，所以对场我们自然考虑的是等时的情况：

$$[\varphi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)]_{cl}=?$$

按照前面的定义可以直接计算

$$[\varphi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)]_{cl}=\int d^3x'\left[\frac{\delta\varphi(\mathbf{x},t)}{\delta\varphi(\mathbf{x}',t)}\frac{\delta\pi(\mathbf{y},t)}{\delta\pi(\mathbf{x}',t)}-\frac{\delta\pi(\mathbf{y},t)}{\delta\varphi(\mathbf{x}',t)}\frac{\delta\varphi(\mathbf{x},t)}{\delta\pi(\mathbf{x}',t)}\right].$$

按照泛函变分定义我们有

$$\delta\varphi(\mathbf{x},t)=\int d^3x'\frac{\delta\varphi(\mathbf{x},t)}{\delta\varphi(\mathbf{x}',t)}\delta\varphi(\mathbf{x}',t).$$

很明显泛函导数是个δ-函数，因为

$$\delta\varphi(\mathbf{x},t)=\int d^3x'\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,\delta\varphi(\mathbf{x}',t).$$

所以

$$\frac{\delta\varphi(\mathbf{x},t)}{\delta\varphi(\mathbf{x}',t)}=\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}').$$

同理

$$\frac{\delta\pi(\mathbf{x},t)}{\delta\pi(\mathbf{x}',t)}=\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}').$$

由于正则坐标和正则动量是独立的所以有

$$\frac{\delta\pi(\mathbf{y},t)}{\delta\varphi(\mathbf{x}',t)}=0,$$
$$\frac{\delta\varphi(\mathbf{x},t)}{\delta\pi(\mathbf{x}',t)}=0.$$

于是

$$\begin{aligned}[\varphi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)]_{cl}&=\int d^3x'\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,\delta^3(\mathbf{y}-\mathbf{x}')\\&=\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}).\end{aligned}\tag{6.13}$$

同样的办法可以得到

$$[\varphi(\mathbf{x},t),\varphi(\mathbf{y},t)]_{cl}=0$$
$$[\pi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)]_{cl}=0. \tag{6.14}$$

在经典理论中这些结果是推导出来的。而在量子理论中，我们要用量子的Poisson括号（对易或反对易括号）来代替经典的Poisson括号。这样一来这样的结果就不能推导出来了，这个结果就变成了我们的要求，这便是正则量子化条件。因此说，Poisson括号是非常深刻的。

6.4 附录：正则变换

6.4.1 经典力学中的正则变换

正则变换就是保运动方程不变的变换。

先看一个小问题：

经典运动方程是

$$\delta S=0$$

这就是说作用量S相差一个常数，从而Lagrange量L相差一个全微分是不会改变运动方程的。也就是说L和$L+\frac{df}{dt}$给出的是完全等价的运动方程。而我们知道，正则动量由

$$p=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}$$

给出。这样L和$L+\frac{df}{dt}$给出的动量其实并不是同一个形式。而按照前面的分析，这两个动量显然给出的都等价地描述同一个系统，所以这两个动量间相差的应该是一个等价的变换。

下面我们来讨论普遍的保运动方程的变换。

6.4.2 正则变换定义

广义坐标$q=(q_1,q_2,q_3,....q_N)$，广义动量$p=(p_1,p_2,p_3,....p_N)$

与新广义坐标$Q=(Q_1,Q_2,Q_3,....Q_N)$，新广义动量$P=(P_1,P_2,P_3,....P_N)$

满足变换

$$q_i=q_i(Q_1,Q_2,Q_3,....Q_N,P_1,P_2,P_3,....P_N,t)$$
$$p_j=p_j(Q_1,Q_2,Q_3,....Q_N,P_1,P_2,P_3,....P_N,t)$$

在哈密顿力学力，正则变换将一组正则坐标(q,p)变为一组新的正则坐标(Q,P)，同时维持哈密顿方程的形式不变，即

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$
$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

新的变量下也有

$$\dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P}$$
$$\dot{P} = -\frac{\partial H'}{\partial Q}$$

其中H和H'分别是原本的哈密顿量和新的哈密顿量。

6.4.3 正则变换生成函数

原正则坐标下满足最小作用量原理

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [p\dot{q} - H(q,p,t)]dt = 0$$

新坐标也满足最小作用量原理

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [P\dot{Q} - H'(Q,P,t)]dt = 0$$

即有

$$p\dot{q} - H(q,p,t) = P\dot{Q} - H'(Q,P,t) + \frac{dG}{dt}$$

或改写成

$$p\dot{q} - P\dot{Q} + \left[H'(Q,P,t) - H(q,p,t)\right] = \frac{dG}{dt} \tag{6.15}$$

也可表示成全微分形式

$$pdq - PdQ + \left[H'(Q,P,t) - H(q,p,t)\right] dt = dG$$

G称为生成函数。

第一型生成函数

$$G = G(q, Q, t)$$

代入（6.15）有

$$p\dot{q} - P\dot{Q} + \left[H'(Q, P, t) - H(q, p, t)\right] = \frac{dG}{dt}$$

$$p\dot{q} - P\dot{Q} + \left[H'(Q, P, t) - H(q, p, t)\right] = \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial G}{\partial Q}\dot{Q}$$

于是

$$p = \frac{\partial G}{\partial q}$$

$$P = -\frac{\partial G}{\partial Q}$$

$$H'(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial G}{\partial t}$$

第二型生成函数

设G只依赖与原广义坐标与新广义动量，即

$$G = -QP + G(q, P, t)$$

代入（6.15）有

$$p\dot{q} - P\dot{Q} + \left[H'(Q, P, t) - H(q, p, t)\right] = \frac{dG}{dt}$$

有

$$p\dot{q} - P\dot{Q} + \left[H'(Q, P, t) - H(q, p, t)\right] = -Q\dot{P} - P\dot{Q} + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial G}{\partial P}\dot{P}$$

整理上式有

$$(p - \frac{\partial G}{\partial q})\dot{q} + (Q - \frac{\partial G}{\partial P})\dot{Q} = H(q, p, t) - H'(Q, P, t) + \frac{\partial G}{\partial t}$$

于是有方程成立

$$p = \frac{\partial G}{\partial q}$$

$$Q = \frac{\partial G}{\partial P}$$

$$H'(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial G}{\partial t}$$

第三型生成函数

设G只依赖与原广义动量与新广义坐标，即

$$G = qp + G(p, Q, t)$$

代入（6.15）有

$$p\dot{q} - P\dot{Q} + \left[H'(Q, P, t) - H(q, p, t)\right] = \frac{dG}{dt}$$

$$p\dot{q} - P\dot{Q} + \left[H'(Q, P, t) - H(q, p, t)\right] = q\dot{p} + \dot{q}p + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial G}{\partial Q}\dot{Q}$$

整理上式有

$$-(q + \frac{\partial G}{\partial p})\dot{q} - (P + \frac{\partial G}{\partial Q})\dot{Q} = H(q, p, t) - H'(Q, P, t) + \frac{\partial G}{\partial t}$$

于是有方程成立

$$q = -\frac{\partial G}{\partial p}$$
$$P = -\frac{\partial G}{\partial Q}$$
$$H'(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial G}{\partial t}$$

第四型生成函数

设G只依赖与原广义动量与新广义动量，即

$$G = qp - QP + G(p, P, t)$$

代入（6.15）有

$$p\dot{q} - P\dot{Q} + \left[H'(Q, P, t) - H(q, p, t)\right] = \frac{dG}{dt}$$

有

$$p\dot{q} - P\dot{Q} + \left[H'(Q, P, t) - H(q, p, t)\right] = q\dot{p} + \dot{q}p - Q\dot{P} - \dot{Q}P + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial G}{\partial P}\dot{P}$$

整理上式有

$$-(q + \frac{\partial G}{\partial p})\dot{p} - (\frac{\partial G}{\partial P} - Q)\dot{P} = H(q, p, t) - H'(Q, P, t) + \frac{\partial G}{\partial t}$$

于是有方程成立

$$q = -\frac{\partial G}{\partial p}$$
$$Q = \frac{\partial G}{\partial P}$$
$$H'(Q,P,t) = H(q,p,t) + \frac{\partial G}{\partial t}$$

举例

例1：第一型生成函数：$G = qQ$

$$G = qQ$$

有方程

$$p = \frac{\partial G}{\partial q} = Q$$
$$P = -\frac{\partial G}{\partial Q} = q$$

即将坐标换成动量，把动量换成坐标

哈密顿量

$$H' = H$$

例2：第二型生成函数：$G = g(q;t)P$

$$G = g(q;t)P$$

有方程

$$p = \frac{\partial G}{\partial q} = P\frac{\partial g}{\partial q}$$
$$Q = \frac{\partial G}{\partial P} = g(q;t)$$
$$H'(Q,P,t) = H(q,p,t) + \frac{\partial G}{\partial t}$$

例3：第二型生成函数：无穷小变换

$$\begin{aligned} G(q,P) &= P(q-Q)+\epsilon F(q,P)+O(\epsilon^2) \\ &= P(q-Q)+\epsilon F(q,p)+O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

G是正则变换的生成函数，总可以重复这些小的变换得到一个正则变换。

有方程

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial G}{\partial q} = P+\epsilon\frac{\partial F(q,P)}{\partial q} \\ Q &= \frac{\partial G}{\partial P} = q+\epsilon\frac{\partial F(q,P)}{\partial P} = q+\epsilon\frac{\partial F(q,P)}{\partial p} \end{aligned}$$

或者

$$\delta q=\epsilon\{q,F\},\delta p=\epsilon\{p,F\}.$$

例如，哈密顿就是无穷小时间平移的生成元，一个正则变换保正则变换。如果G是运动积分的一个常量，即和哈密顿量的泊松括号是零，那么就有

$$H'(Q,P)=H(p,q)$$

将G称为是哈密顿量对称性的生成元。

例4：时间依赖的正则变换

考虑特殊的时间依赖的正则变换，将$(q(t),p(t))$变到初始点$(q(t_0),p(t_0))$上去。由于这些是不依赖于时间的，所以H'必须是一个常数，事实上可以令其等于0。这个变换的生成函数（即第一型生成函数。），记为$G(q,Q=q(t_0),t)$，

$$p=\frac{\partial G}{\partial q}$$

$$H(q,\frac{\partial G}{\partial q},t)=-\frac{\partial G}{\partial t}$$

这就是哈密顿雅可比方程，我们解$P=p(t_0)=-\frac{\partial G}{\partial Q}(q,Q,t)|_{Q=q(t_0)}$，因为$q$是$Q,P$和$t$的方程，所以我们可以由初始值解出在坐标和动量下的运动方程。这时候G不是一个新东西，它满足

$$\frac{dG}{dt}=\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{\partial G}{\partial q}\dot{q}=-H(q,\frac{\partial G}{\partial q},t)+p\dot{q}=L$$

有

$$G = S = \int_{t_0}^{t} L dt$$

所以G就是轨迹$q(t)$的作用量，一个$q(t)$和$q(t_0)$的函数。

因此作用量是一个将系统从一个时刻变换到另一个时刻的正则变换。

6.4.4 正则变换下的不变量

6.4.5 辛条件

一个简单有效率的数学表示方法：辛标记。记

$$\xi^T = [q, p]$$

哈密顿正则方程可以简单的写成

$$\dot{\xi} = \Omega \frac{\partial H}{\partial \xi}$$

Ω是辛连接矩阵

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}$$

H是哈密顿量。在变换下，$\xi \to \Xi$，对应的$H \to H'$

在新正则坐标下哈密顿正则方程满足

$$\dot{\Xi} = \Omega \frac{\partial H'}{\partial \Xi}$$

其中H'和H满足

$$H' = H + \frac{dG}{dt} + P\dot{Q} - p\dot{q}$$

取G为第一型生成函数$G = G(q, Q, t)$，则$H' = H + \frac{\partial G}{\partial t}$

取坐标变换

$$\Xi = \Xi(\xi, t)$$

有

$$\dot{\Xi} = M\dot{\xi} + \frac{\partial \Xi}{\partial t}$$

其中M是雅可比矩阵满足$M_{ij} = \frac{\partial \Xi_i}{\partial \xi_j}$

代入哈密顿方程

$$M\dot{\xi} + \frac{\partial \Xi}{\partial t} = \Omega \frac{\partial H'}{\partial \Xi} = \Omega \frac{\partial H}{\partial \Xi} + \Omega \frac{\partial^2 G}{\partial \Xi \partial t}$$

假设正则变换是线性的不依赖于时间的，方程变为

$$M\dot{\xi} = \Omega\frac{\partial H}{\partial \Xi}$$

有

$$M\dot{\xi} = \Omega\frac{\partial \xi}{\partial \Xi}\frac{\partial H}{\partial \xi} = \Omega(M^{-1})^T\frac{\partial H}{\partial \xi} = -\Omega(M^{-1})^T\Omega\dot{\xi}$$

有

$$M = -\Omega(M^{-1})^T\Omega$$

即

$$M^T\Omega M = \Omega$$

可以看到一个变换是正则变换，当且仅当辛条件成立。

6.4.6 保泊松括号

设f, g为正则坐标(q, p)的函数

$$\{f, g\}_{(q,p)} = \sum_i (\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i})$$

用辛标记

$$\begin{aligned}\{f, g\}_\xi &= (\frac{\partial f}{\partial \xi})^T\Omega\frac{\partial g}{\partial \xi} \\ &= (\frac{\partial \Xi}{\partial \xi}\frac{\partial f}{\partial \Xi})^T\Omega\frac{\partial \Xi}{\partial \xi}\frac{\partial g}{\partial \Xi} \\ &= (\frac{\partial f}{\partial \Xi})^T M^T\Omega M\frac{\partial g}{\partial \Xi} \\ &= \{f, g\}_\Xi\end{aligned}$$

其中用到了$M^T\Omega M = \Omega$

可以看到任何两个函数关于正则变量的泊松括号都是不变量。

第七章　经典场II：自由场

上一章中我们讨论了经典场的描述和场的量子化原则。在这一章中我们只涉及经典场，包括自由场和场的相互作用两部分。当然，我们这里只限于讨论相对论性的场。

前面我们分别讨论了将这些方程解释成相对论波动方程、经典场方程和量子场方程的尝试。最后得到的结论是应该将这些方程理解为量子的场方程（这段尝试的真实历史要漫长曲折得多，而且与实验紧密联系）。在上一章中我们讨论了如何由一个经典理论出发得到量子理论。由经典理论得到量子理论的方式（量子化）的基本依据是：经典与量子理论的基本运算性质（定性性质）是一致的。因此在这里我们首先讨论经典场，在通过量子化手续得到量子场。无论如何要记住，经典理论只是量子理论的一个近似。

7.1　自由场

自由场就是没有相互作用的场。由于我们只限于讨论相对论性的场，所以场的种类其实是非常少的，只有标量场，旋量场，矢量场，张量场。

在前面一节我们介绍了场的Lagrange描述和Hamilton描述。这两种描述在量子理论中显示出它们是更加深刻理论形式。量子理论的正则形式的基础是Hamilton描述，量子理论的路径积分形式的基础是Lagrange描述。这里我们将分别给出相对论性场的这两种描述。

在前面我们已经从相对论不变的角度出发得到了相对论性的方程，一番分析后又知道了只能将这些方程解释成场方程。为了用Lagrange和Hamilton的语言来描述场我们应首先得到场的Lagrange量（或作用量）和Hamilton量。原则上，我们只需从相对论方程的角度出发凑出给出这些方程的Lagrange量和Hamilton量就可以了。但是，在这里我们准备从第一原理出发直接凑Lagrange量和Hamilton量。事实上，在实际操作中，我们更倾向于首先给出Lagrange量和Hamilton量，而不是运动方程。或者更本质地说，我们要给出的是场的作用量。

自由场是理论的基础，在力学中对应的就是惯性，也就是一个系统对相互作用的反应。但是我们也知道，脱离相互作用研究惯性是不够的。在力学中，如果只有自由粒子（相当于自由场），那么我们只知道这个粒子作匀速直线运动。究竟这个粒子的质量是多少，只考虑自由粒子是不能知道的。要想知道粒子质量（也就是自由场的性质），必须借助相互作用，$F = ma$会告诉我们质量。所以，完全弄清自由场，经常需要考虑相互作用。我们寻找自由场场方程的第一出发点是相对论。但是，相对论的要求经常会给出不止一种候选者，需要我们用相对论之外的要求做进一步选择。有时候我们就要借助相互作用的考虑。比如后面我们考虑是否可以有高阶张量场就是借助规范相互作用。

7.2 我们需要一个什么样的作用量

在我们所采用的理论框架下，作用量是最基本的，有了作用量基本上就有了整个理论。有了作用量，在经典理论中，由$\delta S = 0$，可以得到运动方程；有了作用量，在量子理论中，由$K(b,a) = \int \mathcal{D}q e^{iS}$得到的是跃迁振幅，而这是我们想得到全部。

得到作用量最本质的当然是靠实验。由实验中我们可以提炼出一些基本原则。比如由电磁学实验得到的相对论的要求，当然，从唯象规律中提炼这样的基本原则需要真正的天才。下面我们列举一些这样的原则，这些原则非常优美深刻，但是我们也要注意到物理定律最终是要从实验确定的，哪怕是最后一个唯象参数。终归需要一个实验，造物主的意图永远不可能被完全猜透。

7.2.1 对称性的要求

我们还不知道为什么对称性这样重要，只是知道对称性确实是这么重要。我们所给的解释是"自然应该是漂亮的，对称是漂亮的，所以正确的理论应该是对称的"。"自然应该是漂亮的"我同意，但是对称是否漂亮纯粹是看法问题，毕竟一幅精确对称的画很难认为是特别漂亮的。而且，显然一个理论也不会具有所有的对称性。于是，自然界选择的这种对称性为什么就比另一种自然没选择对称性更漂亮也是一个问题。不过反正自然确实是漂亮的，而确实也是对称的就是了。

对称性就是不变性，也就是在某种操作下不变的性质。具体到我们这里，操作就是变换。一个理论是否对称就看它在某个操作下变不变。

被要求对称的是什么

我们说物理定律是对称的，究竟被要求对称的是什么。

自然地，作为一个物理理论，我们要求观测结果是对称的。如果像牛顿教给我们的那样，我们认为动力学方程的解与观测是完全一致的。也就是说动力学方程的解应该是对称的。换句话说，我们要求解是对称的。

这个要求是正确的，但是在操作上意义不大。如果我们已经有了解，还去构造什么作用量，构造什么动力学方程。

退一步考虑。

我们认为解的对称性是蕴含在动力学方程中的。也就是说，动力学方程的对称性与解的对称性应该是一致的（这是个假设）。这就是说，我们退而求其次，要求动力学方程是对称的。

构造动力学方程有时也是困难的，在某些情况下由对称性来构造作用量更容易操作。为此，更退一步，要求作用量是对称的。

经常地，代替构造作用量我们是在构造Lagrange量。

当然我们也应看到，Lagrange量和作用量与运动方程的对应并不惟一，相差一个全微分项的Lagrange量对应同一个运动方程。同样，相差一个常数的作用量对应一个运动方程。

而且，从操作上讲，我们经常为了操作上的容易，考虑的其实都是Lagrange量在无穷小变换下的对称性。就像在前面我们由Poincaré群构造相对论性方程一样。

7.2.2 相对论不变性

最重要的一条对称性就是相对论不变性。也就是要求物理规律必须是相对论不变的。前面我们已经从相对论的要求出发得到了相对论不变的场方程，所以这一点就不再讲了。需要说明的是，一个符合相对论要求的理论，它的作用量S必须是Lorentz标量。作用量与Lagrange密度的关系是

$$S = \int d^4x \mathcal{L}.$$

积分体积元d^4x是Lorentz不变的，因此Lagrange密度也是Lorentz标量。

7.2.3 能量有下界

这个世界是稳定的。一个表现就是，你扔一个东西，它迟早会落到地上，达到一个最低能量状态。如果一个系统没有一个有限的最低能量，那么它就是不稳定的。也就是说只有一个能量有下界的系统才能是稳定的。这是因为系统总是趋于能量更低的状态。后面我们会看到，这是一条挺强的要求。

7.2.4 可重整的要求

对一个经典场来说没有这个问题。但是，当我们从一个经典场出发得到一个量子场的时候会同时引入了一个发散。稍微技术化一点儿的说法就是，从微扰论的角度说，经典场只有树图。当我们从这个经典场出发，通过一个所谓的量子化手段获得一个量子场后，就在微扰论中引入了圈图。而这些圈图是发散的。本质上，这些由量子化引入的圈图是测不准关系的结果。测不准当然是纯粹的量子效应。

发散是不允许的。因此必须通过一些手段去掉这些发散。这个去掉发散的手续被称为重整化。

经典场在经过量子化手续的处理后会给出一个量子场。但不是所有这样得到的量子场都是可以重整化的；或者说，不是所有的由量子化带来的发散都可以通过重整化手续去掉。这样，当我们考虑量子理论时候，就不是所有可能的经典理论都是允许的。只有那些在量子化后（量子化一定会带来无穷大）所得到的量子场是可以重整化的那些经典场才是允许的。因此可重整性成了一个由量子化带来的新要求。这一要求大大缩小了我们需要考虑的场的种类。许多场是不可重整的，因此不是一个合适的量子场论的候选者。

判断一个理论是否可重整化需要一些预备知识。在这里只需先知道可重整的一个必要条件就可以了：耦合常数必须没有量纲。

这就是说，单纯考虑经典场自由度太大了，我们需要量子理论的帮助使我们选择的范围小一些。

需要说明的是，按照前面的标准，引力场就不是一个合适的量子场，虽然它作为一个经典场是一个不错的场。

7.3 经典场：坐标和坐标的一阶导数

在力学中我们有一个来自于实验的基本假设，要想唯一地确定一个经典力学系统的状态，就要且只要用到坐标和坐标的一阶导数。这是因为牛顿的$F = ma$是一个二阶微分方程。由力学过渡到场就是由有限大自由度的力学过渡到无穷大自由度的力学，坐标由粒子的位置q变成了场量$\varphi(x,t)$。我们仍然认为确定一个场的的状态需要且只需要用到坐标和它的一阶导数。这当然是个假设，但被反复证明是正确的，从爱因斯坦的广义相对论到规范场都是这样的。这意味着，场方程也将是一个二阶的微分方程。这也意味着Lagrange密度

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi).$$

仅知道场方程是一个二阶的微分方程还不足以将方程确定下来。我们需要的更多。我们建立场理论，目的是描述自然中的粒子。我们采用了这样一个基本假设：自然界中的基本粒子可以分成几类，每类中的粒子都完全相同。用场来描述粒子，本质上是将粒子理解为场的量子化的激发。同一种粒子的质量是相同的。因此，场的激发必须是等间隔的。如果我们再加上简单性的假设，那么满足等间隔要求的就是谐振子了。一个类似谐振子的场方程要求是一个带有二次零阶导数项的二阶微分方程。

7.3.1 再具体些

Lagrange密度必须是Lorentz标量，于是构造一个Lagrange量就变成了用坐标和坐标的一阶导数凑一个Lorentz标量。如果考虑的是标量场，那就是标量场的坐标和坐标的一阶导数，如果是旋量场，就是坐标和坐标的一阶导数，等等。要写出所有可能的符合上述要求的项，再由此得到动力学方程，求解后与实验对比，确定凑Lagrange量时所引入的待定系数。在我们这里，与实验对比可以简化成与前面的由Lorentz群表示得到的场方程对比。

7.4 自由场：Lagrange量的构造

这里我们讨论自由场。这就像是在讲牛顿第一定律。但是我们将会看到，如前面提到过的，完全不借助相互作用完全弄清一个自由场是不可能的。这就像牛顿第一定律虽然是惯性定律，但是却不能给出质量的信息一样。

7.4.1 标量场

如前面分析过的，标量场是Poincaré群的标量表示。按照在力学中的经验我们已经假设，对一个经典场只需考虑到坐标和它的一阶导数，并且因为同类粒子都相同，需要用谐振子来描述，所以对自由场只考虑二次的情况。

Lagrange表述：Lagrange量的构造

构造一个无质量自由实标量场的Lagrange量，首先写出所有可能满足前面的基本要求的项

$$\mathcal{L} = a\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + b_\mu\partial^\mu\phi + c\phi^2,$$

这里b_μ是一个与ϕ无关的矢量。我们考虑的是自由粒子，或说自由场。自由场应该是各向同性的，这样Lagrange量中就不能有带有方向的量。因此应该没有与b_μ有关

的项。这样Lagrange量应为

$$\mathcal{L} = a\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + c\phi^2,$$

将它代入Euler-Lagrange方程场

$$\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}$$

由于

$$\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)} = 2a\partial_\mu\left(\partial^\mu\phi\right) = 2a\partial^2\phi$$

以及

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 2c\phi$$

代入Lagrange方程得

$$\begin{aligned} 2a\partial^2\phi &= 2c\phi \\ \left(a\partial^2\phi - c\phi\right) &= 0 \end{aligned}$$

原则上应该从这个方程求出解来，然后与实验对比，确定待定系数a和c。我们前面由相对论不变要求的得到的标量场方程（这就是Klein-Gordon方程，或Klein-Gordon-Schrödinger方程[1]。）

$$\left(\partial^2 + m^2\right)\phi = 0$$

在这里可以当作是由实验确定下来的一个结果，我们可以与这个方程对比得到系数。但是，我们可以看到，由于我们这里只有自由场方程，自由场方程的信息量是不够的。这就像由牛顿第一定律不能确定质量一样。我们不能从这个方程完全确定出系数。系数a和c可以确定到差一个常数的程度

$$\begin{aligned} a &= C, \\ c &= -Cm. \end{aligned}$$

这个常数C只能在引入相互作用的时候确定。于是

$$\mathcal{L} = C\left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m\phi^2\right).$$

[1]Schrödinger在得到它的Schrödinger方程的同时就已经得到了这个方程。但是由于负能困难它没有发表它。

确定系数C需要引入一个相互作用。这是一个普适常数，所以什么相互作用都会给出相同的值。我们不妨引入常值相互作用，相当于力学中的恒力。此时的动力学方程可以由实验确定，为

$$\left(\partial^2 + m^2\right)\phi = J \tag{7.1}$$

此时Lagrange量应为

$$\mathcal{L} = a\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + c\phi^2 + dJ\phi$$

于是

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 2c\phi + dJ$$

代入Lagrange方程有

$$\begin{aligned} 2a\partial^2\phi &= 2c\phi + dJ \\ 2a\partial^2\phi - 2c\phi - dJ &= 0 \end{aligned}$$

与（7.1）对比

$$\begin{aligned} 2a &= 1 \\ -2c &= m^2 \\ d &= 1 \end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned} 2a &= \frac{1}{2} \\ c &= -\frac{1}{2}m^2 \\ d &= 1 \end{aligned}$$

于是Lagrange量为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m\phi^2.$$

Hamilton表述

场量ϕ是广义坐标，相应的广义动量为

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0\phi\right)} = \partial_0\phi \\ &= \dot{\phi}. \end{aligned}$$

由Legendre变换可以直接得到Hamilton量

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \pi\dot{\phi} - \mathcal{L} \\ &= \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \\ &= \dot{\phi}^2 - \left[\frac{1}{2}\partial_0\phi\partial^0\phi + \frac{1}{2}\partial_i\phi\partial^i\phi\right] + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \\ &= \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\left(\nabla\phi\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \\ &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\left(\nabla\phi\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \\ &= \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\left(\nabla\phi\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2.\end{aligned}$$

Lagrange表述和Hamilton表述当然是等价的。由它们出发可以得到两套了不同的量子化途径：路径积分量子化和正则量子化。

无质量实标量场，$O\left(1\right)$对称性，$O\left(n\right)$($SO\left(n\right)\otimes O\left(1\right)$)对称性 有质量和无质量的场的对称性不同，我们分别考虑它们。

按照前面的分析，无质量的相对论不变的标量场场方程为

$$\partial^2\phi = 0,$$

Lagrange密度为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi.$$

这个Lagrange量显然在

$$\phi \to -\phi$$

变换下是不变的，也就是说它具有$O\left(1\right)$群对称性。

有（自旋以外）内部自由度的实标量场，$O\left(n\right)$ 有内部自由度的意思是，这个场除了Lorentz结构外，还具有自旋以外的其它内禀的结构（自旋这种内禀结构已经包含在Lorentz结构中）。如果一个内部自由度可以从已知的基本原理自然地导出，那当然是最好的了。但是如何处理不能被已知原理包含进去的内部自由度呢。自旋其实是最好的例子。在自旋没有从一个相对论的量子理论中自动给出的时候，我们被迫用Schrödinger方程来描述有自旋的粒子，我们的处理方式就是将这个内部自由度的各个分量写成一个表，当时我们用的是一个列矩阵。在我们可以相对论量子理论直接描述自旋之后，我们不在用这种很唯象的办法了。我们总会遇到未知的新的内部

自由度，描述这些内部自由度我们用的还是列表的方式。在这里，我们就考虑如何通过列表（这个表可以是一个列矩阵也可以是一个方阵）的方法描述内部自由度。可以看到，用这种方法描述内部自由度就意味着我们对这种内部自由度了解的还很不够。

我们将会看到，这种有内部自由度的场可以表示为一个多分量的场的形式。

我们考虑n个不同的无质量的标量场，$\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$。它们的Lagrange量为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 + \cdots + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_n\partial^\mu\phi_n.$$

将这些场看作是一个矢量的分量（你也可以将它们看作是一个方阵的矩阵元），即

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}.$$

这样得到的ϕ是有内部自由度的场，这本质上就是海森堡的同位旋的思想[2]。此时Lagrange量可以表示成

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 + \cdots + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_n\partial^\mu\phi_n \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_1, \partial_\mu\phi_2, \cdots, \partial_\mu\phi_n\right)\begin{pmatrix} \partial^\mu\phi_1 \\ \partial^\mu\phi_2 \\ \vdots \\ \partial^\mu\phi_n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\partial_\mu\tilde{\phi}\partial^\mu\phi \end{aligned} \tag{7.2}$$

这个Lagrange量显然具有在$O(n)$群的变换下是不变的。这是因为$O(n)$群保二次型$\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 + \partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 + \cdots + \partial_\mu\phi_n\partial^\mu\phi_n$。这可以直接看出在$O(n)$变换下有

$$\phi' = O\phi$$

[2]当初海森堡从强作用的角度考虑质子和中子（考虑强作用时电磁作用可以忽略），认为它们是一个类似于自旋的量的两个分量，这个类似于自旋的东西被称为同位旋。

在这样的变换下

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'\left(\phi'\right) &= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\widetilde{\phi'}\right)\left(\partial^\mu\phi'\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[\partial_\mu\widetilde{(O\phi)}\right]\left[\partial^\mu\left(O\phi\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\partial_\mu\left(\tilde{\phi}\tilde{O}\right)\right]\left[\partial^\mu\left(O\phi\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\partial_\mu\tilde{\phi}\tilde{O}O\partial^\mu\phi\end{aligned}$$

要使此式不变就要求

$$\tilde{O}O = 1$$

因此对称群为$O\left(n\right)$群。

有（自旋以外）内部自由度的实标量场，$SO\left(n\right)\otimes O\left(1\right)$　如前面已经分析过的，多分量的实标量场是$O\left(n\right)$对称的。这个对称性可以分开来写。一个具有$O\left(n\right)$对称性的系统一定具有纯旋转对称性，即$SO\left(n\right)$对称性。我们在$SO\left(n\right)$上附加一个反射，得到的就将是$O\left(n\right)$。因此，这个对称性可以写成

$$SO\left(n\right)\otimes\left(1,-1\right)$$

或者说

$$SO\left(n\right)\otimes O\left(1\right). \tag{7.3}$$

对称性。

结合上面的结果，我们可以将这个多分量的实标量场具有的$O\left(n\right)$群对称性写成

$$O\left(n\right) = SO\left(n\right)\otimes O\left(1\right)$$

对称性。可以这样理解这个结果，$O\left(n\right)$群与$SO\left(n\right)$群相差一个反射（$SO\left(n\right)$群可以理解成一个纯转动），即

$$O\left(n\right) = SO\left(n\right)\otimes\left(1,-1\right).$$

$O\left(1\right)$群可以理解为一维旋转群，一维旋转只有反射，也就是$(1,-1)$[3]。所以我们用(7.3)表示无质量标量场的$O\left(n\right)$对称性。

将对称性写成$SO\left(n\right)\otimes O\left(1\right)$比$O\left(n\right)$群的说法更好些，因为它分开了转动和$\phi\to-\phi$这两种对称性。当然，它们本质上是一样的。

[3] $O\left(1\right)$群是比较特殊的。它原则上没有$SO\left(1\right)$群，因为$SO\left(1\right)$群是平庸的，只有单位元。

作为一个例子，考虑这样的情况。Lagrange量(17.3)显然在变换

$$\phi_i \to (-1)^{\alpha_i}\,\phi_i$$

这里α_i在0和1之间任意选择，即

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}.$$

这个变换的行列式为1或−1，不是一个$SO(n)$群的对称性。我们可以将它形式地写成

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \left.\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\right|_{\det=1} \otimes (1,-1)$$

这里的下标$\det = 1$表示这是一个对角线上的元素为1或−1，而行列式为1的矩阵。我们知道行列式为1的矩阵构成的群是$SO(n)$群的一个子群。

有质量实标量场，$O(1)$对称性，$O(n)$($SO(n)\otimes O(1)$)对称性和对称性的破缺 按照前面的结果有质量的标量场的场方程为

$$\left(\partial^2 + m^2\right)\phi = 0.$$

Lagrange密度为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2\right).$$

这个Lagrange量与无质量的情况相同，也在

$$\phi \to -\phi$$

变换下是不变的，具有$O(1)$群对称性。

同样考虑n个具有相同质量的标量场，$\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$。它的Lagrange量为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 - m^2\phi_1^2\right) + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 - m^2\phi_2^2\right) + \cdots + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_n\partial^\mu\phi_n - m^2\phi_n^2\right).$$

将它们写成一个矢量

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}.$$

这样Lagrange量为

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 - m^2\phi_1^2\right) + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 - m^2\phi_2^2\right) + \cdots + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_n\partial^\mu\phi_n - m^2\phi_n^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_1, \partial_\mu\phi_2, \cdots, \partial_\mu\phi_n\right)\begin{pmatrix} \partial^\mu\phi_1 \\ \partial^\mu\phi_2 \\ \vdots \\ \partial^\mu\phi_n \end{pmatrix} - \frac{1}{2}m^2\left(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n\right)\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\partial_\mu\left(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n\right)\partial^\mu\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} - \frac{1}{2}m^2\left(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n\right)\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\partial_\mu\tilde{\phi}\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\tilde{\phi}\phi.
\end{aligned}$$

基于与前面同样的理由可以看出这个Lagrange量同样具有$O(N)$或$SO(n)\otimes O(1)$对称性。

但是，如果这n个标量场的质量不同，即Lagrange量为

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 - m_1^2\phi_1^2\right) + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 - m_2^2\phi_2^2\right) + \cdots + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_n\partial^\mu\phi_n - m_n^2\phi_n^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_1, \partial_\mu\phi_2, \cdots, \partial_\mu\phi_n\right)\begin{pmatrix} \partial^\mu\phi_1 \\ \partial^\mu\phi_2 \\ \vdots \\ \partial^\mu\phi_n \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\left(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n\right)\begin{pmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\partial_\mu\tilde{\phi}\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}\tilde{\phi}M\phi
\end{aligned}$$

这里$M \equiv diag\left(m_1, m_2, \cdots, m_n\right)$。质量的存在破坏了$O(n)$或$SO(n)\otimes O(1)$对称性[4]。但是，系统仍然在变换

$$\phi_i \to (-1)^{\alpha_i}\phi_i$$

[4]类比质子和中子的质量不同导致同位旋对称性破缺。

下不变，α_i在0和1之间任意选择。这时系统的对称性变为

$$\overbrace{O(1)\oplus O(1)\oplus\cdots\oplus O(1)}^{n\text{个}}=\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}.$$

这个对称性小多了。但显然质量的存在并没有去掉所有的对称性，仍然有对称性保留下来。

这n个质量中如果有一些是相同的，那么会有一些局部的对称性，这里就不考虑了。

无质量复标量场，$U(1)$对称性和$U(n)$($SU(n)\otimes U(1)$)对称性 前面考虑的是实标量场，这里考虑复标量场的情况。一个复标量场本质上相当于两个实标量场。考虑两个无质量实标量场的Lagrange量

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1+\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2.$$

做代换

$$\begin{aligned}\phi_1&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi+\phi^*),\\\phi_2&=-\frac{i}{\sqrt{2}}(\phi-\phi^*).\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}\phi&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1+i\phi_2),\\\phi^*&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1-i\phi_2).\end{aligned}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{L}&=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1+\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2\\&=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1-i\partial_\mu\phi_2)(\partial^\mu\phi_1+i\partial^\mu\phi_2)\\&=\partial_\mu\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1-i\phi_2)\partial^\mu\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1+i\phi_2).\end{aligned}$$

这样我们就得到

$$\mathcal{L}=\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi.$$

这是一个复标量场。可以看到，它本质上是两个实标量场。

这个场明显具有这样的对称性：

$$\phi \to e^{i\theta}\phi.$$

这是一种$U(1)$对称性。这个对称性在实标量场的情况下中变成$\phi \to -\phi$不变的对称性。

有（自旋以外）内部自由度的复标量场， $U(n)$ 像前面一样考虑n个复标量场$\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$。Lagrange量为

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi_1^* \partial^\mu \phi_1 + \partial_\mu \phi_2^* \partial^\mu \phi_2 + \cdots + \partial_\mu \phi_n^* \partial^\mu \phi_n.$$

将它们写成

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}.$$

则Lagrange量为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \partial_\mu \phi_1^* \partial^\mu \phi_1 + \partial_\mu \phi_2^* \partial^\mu \phi_2 + \cdots + \partial_\mu \phi_n^* \partial^\mu \phi_n \\ &= (\partial_\mu \phi_1^*, \partial_\mu \phi_2^*, \cdots, \partial_\mu \phi_n^*) \begin{pmatrix} \partial^\mu \phi_1^* \\ \partial^\mu \phi_2^* \\ \vdots \\ \partial^\mu \phi_n^* \end{pmatrix} \\ &= \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi. \end{aligned} \tag{7.4}$$

容易看出，这个Lagrange量是在n-维复空间中的旋转下不变的，也就是在$U(n)$群变换下不变的。$U(n)$群保复二次型$\partial_\mu \phi_1^* \partial^\mu \phi_1 + \partial_\mu \phi_2^* \partial^\mu \phi_2 + \cdots + \partial_\mu \phi_n^* \partial^\mu \phi_n$。

有（自旋以外）内部自由度的复标量场， $SU(n) \otimes U(1)$ 在$U(n)$变换下

$$\phi' = U\phi$$

Lagrange量（7.4）的变换下为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'\left(\phi'\right) &= \left(\partial_\mu \phi'^\dagger\right)\left(\partial^\mu \phi'\right)\\ &= \left[\partial_\mu \left(U\phi\right)^\dagger\right]\left[\partial^\mu \left(U\phi\right)\right]\\ &= \left[\partial_\mu \left(\phi^\dagger U^\dagger\right)\right]\left[\partial^\mu \left(U\phi\right)\right]\\ &= \partial_\mu\left(\phi^\dagger\right) U^\dagger U \partial^\mu\left(\phi\right)\end{aligned}$$

保Lagrange量不变要求

$$U^\dagger U = 1.$$

这是幺正矩阵构成的群，$U\left(n\right)$群。幺正矩阵满足行列式模为1，即$\left|\det U\right| = 1$的要求[5]。行列式模是1表明行列式可以是$e^{i\theta}$的形式。我们可以用$SU\left(N\right)$群的对称性来表示这个对称性。$SU\left(N\right)$群的行列式是1，这个对称性比$SU\left(N\right)$群的对称性大。$U\left(1\right)$群的群元和行列式都是$e^{i\theta}$。因此这个对称性也可以表示成

$$SU\left(n\right)\otimes U\left(1\right).$$

当然，这本质上就是$U\left(n\right)$对称性。

进一步，我们考虑这样一种有物理意义的例子。

我们将每个分量ϕ_i作为一个相位变化

$$\phi_i \to e^{i\theta}\phi_i,$$

也就是

$$\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \vdots\\ \phi_n\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}e^{i\theta_1}\phi_1\\ e^{i\theta_2}\phi_2\\ \vdots\\ e^{i\theta_n}\phi_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{i\theta_1} & & & \\ & e^{i\theta_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{i\theta_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \vdots\\ \phi_n\end{pmatrix}, \tag{7.5}$$

[5]

$$\begin{aligned}\det\left(U^\dagger U\right) &= 1\\ \det U^\dagger \det U &= 1\\ \left(\det U\right)^* \det U &= 1\\ \left|\det U\right| &= 1\end{aligned}$$

显然Lagrange量（7.4）在变换$diag\left(e^{i\theta_1},e^{i\theta_2},\cdots,e^{i\theta_n}\right)$下是不变的。这个变换的行列式是$e^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)}$，我们可以将这个变换表示成

$$e^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)/n}\begin{pmatrix} e^{i[(n-1)\theta_1-(\theta_2+\cdots+\theta_n)]/n} & & & \\ & e^{i[(n-1)\theta_2-(\theta_1+\theta_3+\cdots+\theta_n)]/n} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{i[(n-1)\theta_n-(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{n-1})]/n} \end{pmatrix}$$

这是一个$U\left(1\right)$的矩阵元$e^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)/n}$乘上一个行列式为1的矩阵的形式。我们知道行列式为1的矩阵构成$SU\left(n\right)$群。所以，每一个分量做一个相位变化相当于一个$SU\left(n\right)\otimes U\left(1\right)$的变换。在这个变换下不变，就是具有$SU\left(n\right)\otimes U\left(1\right)$对称性。

有质量复标量场，$U\left(1\right)$对称性，$U\left(n\right)\left(SU\left(n\right)\otimes U\left(1\right)\right)$对称性和对称性的破缺

有质量的复标量场同样是Poincaré群的标量表示。由Poincaré群的表示理论我们已经得到了场方程

$$\left(\partial^2+m^2\right)\phi=0.$$

相应的Lagrange密度为

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi-m^2\phi^*\phi\right).$$

显然它具有$U\left(1\right)$对称性。

考虑一个具有n个相同质量分量，$\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n$，的复标量场。Lagrange量为

$$\mathcal{L}=\left(\partial_\mu\phi_1^*\partial^\mu\phi_1-m_1^2\phi_1^*\phi_1\right)+\left(\partial_\mu\phi_2^*\partial^\mu\phi_2-m_2^2\phi_2^*\phi_2\right)+\cdots+\left(\partial_\mu\phi_n^*\partial^\mu\phi_n-m_n^2\phi_n^*\phi_n\right).$$

将场表示成

$$\phi=\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \vdots\\ \phi_n\end{pmatrix}$$

。此时Lagrange量（类比实标量场的情况）为

$$\mathcal{L}=\partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi-m^2\phi^\dagger\phi.$$

由于质量相同，所以这个Lagrange量同样具有$U\left(n\right)$或$SU\left(n\right)\otimes U\left(1\right)$对称性。

但是如果这n个标量场的质量不同，即Lagrange量为

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \left(\partial_\mu\phi_1^*\partial^\mu\phi_1 - m_1^2\phi_1^*\phi_1\right) + \left(\partial_\mu\phi_2^*\partial^\mu\phi_2 - m_2^2\phi_2^*\phi_2\right) + \cdots + \left(\partial_\mu\phi_n^*\partial^\mu\phi_n - m_n^2\phi_n^*\phi_n\right) \\ &= \left(\partial_\mu\phi_1^*, \partial_\mu\phi_2^*, \cdots, \partial_\mu\phi_n^*\right)\begin{pmatrix}\partial^\mu\phi_1\\ \partial^\mu\phi_2\\ \vdots\\ \partial^\mu\phi_n\end{pmatrix} - \left(\phi_1^*, \phi_2^*, \cdots, \phi_n^*\right)\begin{pmatrix}m_1^2 & & & \\ & m_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_n^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \vdots\\ \phi_n\end{pmatrix} \\ &= \partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi - \phi^\dagger M\phi\end{aligned}$$

这里$M \equiv diag\left(m_1, m_2, \cdots, m_n\right)$。质量不同使$U\left(n\right)$对称性破坏了。但是，仍然有对称性保持下来，系统仍然在变换

$$\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \vdots\\ \phi_n\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}e^{i\theta_1}\phi_1\\ e^{i\theta_2}\phi_2\\ \vdots\\ e^{i\theta_n}\phi_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{i\theta_1} & & & \\ & e^{i\theta_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{i\theta_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \vdots\\ \phi_n\end{pmatrix},$$

下不变。这时系统的对称性变为

$$\overbrace{U\left(1\right)\oplus U\left(1\right)\oplus\cdots\oplus U\left(1\right)}^{n\text{个}} = \begin{pmatrix}e^{i\theta_1} & & & \\ & e^{i\theta_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{i\theta_n}\end{pmatrix}.$$

是质量使没有质量时的$SU\left(n\right)\otimes U\left(1\right)$对称性破缺到了这样一个$U\left(1\right)\oplus U\left(1\right)\oplus\cdots\oplus U\left(1\right)$对称性。

与实标量场的情况一样，这n个质量中如果有一些是相同的，那么会有一些局部的对称性。

用方阵（而不是矢量）表示有（自旋以外）内部自由度的场

前面，在考虑一个具有（自旋以外）内部自由度的场（也就是一个多分量的场）的时候，我们将场$\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$写成一个矢量的分量，换句话说，我们用了一个矢量来表示一个多分量的场。但是显然，我们也可以用其它方式表示一个多分量的场。比如将场$\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$看作是一个方阵的矩阵元。当然，由于方阵的元的个数必须是一个数的平方，这时候可能会出现场分量数与矩阵元的个数不一样的情况。在这种情况下我们就可以用一些限制条件将那些多出来的自由度限制掉。

在用方阵代替列矩阵表示一个多分量的场以后，我们当然要求原来的各种内禀对称性仍然保持。以前面考虑的多分量的标量场为例，在用矢量表示的形式中，一个具有相同质量的多分量复标量场Lagrange量为

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi,$$

其中质量矩阵$M = m\mathbf{1}$。这个Lagrange量具有$U(n)$对称性。也就是说这个Lagrange量在变换

$$\phi \to U\phi$$

下不变。而如果我们用一个方阵$\mathbf{\Phi}$来表示同样这个场，当然要求$\mathbf{\Phi}$在同样的变换下不变，也就是要求Lagrange量在

$$\mathbf{\Phi} \to U\mathbf{\Phi}U^{-1} \tag{7.6}$$

变换下不变。$\mathbf{\Phi}$是一个方阵，Lagrange量不是，Lagrange量必须是一个数。于是问题就变成了怎样将用$\mathbf{\Phi}$表示的Lagrange量变成一个在变换（7.6）下不变的数呢。一个明显的答案就是取迹，迹是个不变量。我们可以将Lagrange量表示成

$$\mathcal{L} = tr\left[\partial_\mu \mathbf{\Phi}^\dagger \partial^\mu \mathbf{\Phi}\right] - m^2 tr\left[\mathbf{\Phi}^\dagger \mathbf{\Phi}\right].$$

这个Lagrange量与用矢量表示的Lagrange量当然是完全等价的。

7.4.2 旋量场

旋量场是Poincaré群的旋量表示，这是一种多值表示。事实上，多值表示是在Dirac引入Dirac方程之后才引入数学的。多值的旋量表示在概念上类似于复变函数中的多值函数。按照函数和表示的最初定义，函数和表示都必须是单值的。但是当多值情况变得有意义的时候，我们便引入了多值函数、多值表示。我们会看到，多值的根源在于拓扑的不平庸。

我们来构造一下旋量场的Lagrange量。旋量场ψ是一个旋量，一个列矢量。ψ必须是一个列矢量的原因是作为一种多值表示，它需要一个值有多个对应。这相当于不是转360^0恢复，而是转多圈才恢复。因此ψ不可能是一个普通的数。

Lagrange密度必须是一个标量，是一个数，因此每项都要是一个数。将一个列矢量凑成一个数的方式只能是将每项写成

$$\bar{\psi}\mathbf{D}\psi$$

的形式，这里$\bar{\psi}$应该是一个与ψ直接相关的行矢量（但是现在我们并不知道它与ψ的关系），$\mathbf{D}$是一个方阵。$\mathbf{D}$中应该包含一些包含导数∂^μ的部分和常数项。

$\bar{\psi}$是什么

现在的问题是$\bar{\psi}$是什么。最重要的一条要求是$\bar{\psi}\mathbf{D}\psi$必须是一个Lorentz标量。$\mathbf{D}$与ψ是无关的，我们在这里做一个假设（换别的假设也没关系，最后都会得到相同的结果）：只要$\mathbf{D}$是一个Lorentz标量，则$\bar{\psi}\mathbf{D}\psi$就必须是一个Lorentz标量。这样，如果我们取$\mathbf{D}$是一个常数（最简单的Lorentz标量），就要求$\bar{\psi}\psi$自己是一个Lorentz标量（这相当于我们在这里做一个假设，假设了$\mathbf{D}$自己就是一个Lorentz标量，从而假设了$\bar{\psi}\psi$也是一个Lorentz标量）。如果$\bar{\psi}\psi$是一个Lorentz标量，那么$\bar{\psi}$应该是什么呢。

在Lorentz变换下，

$$\psi \to \Lambda_\psi \psi$$
$$\bar{\psi} \to \bar{\psi}\Lambda_{\bar{\psi}}^{-1}$$

这里Λ_ψ和$\Lambda_{\bar{\psi}}^{-1}$是Lorentz群的表示，它们当然是维数相同的表示。由于$\bar{\psi}$和ψ是有限维的列矩阵，所以Λ_ψ和$\Lambda_{\bar{\psi}}^{-1}$是Lorentz群的有限维表示。这样$\bar{\psi}\psi$在Lorentz变换下为

$$\bar{\psi}\psi \to \bar{\psi}\Lambda_{\bar{\psi}}^{-1}\Lambda_\psi\psi.$$

$\bar{\psi}\psi$是Lorentz标量意味着

$$\Lambda_{\bar{\psi}}^{-1}\Lambda_\psi = 1. \tag{7.7}$$

这样选择$\bar{\psi}$的问题就变成了寻找一个按照符合（7.7）要求的$\Lambda_{\bar{\psi}}^{-1}$变换的$\bar{\psi}$的问题。猛地看上去，似乎选择$\Lambda_{\bar{\psi}}^{-1} = \Lambda_\psi^\dagger$，然后要求$\Lambda_\psi^\dagger\Lambda_\psi = 1$，从而选择$\bar{\psi} = \psi^\dagger$。这个看似自然的选择是错的。因为这样一来$\Lambda_\psi$就将是一个幺正变换，而Lorentz群是一个非紧的的群，它没有有限维幺正表示[6]。所以这个选择是错的。因此$\bar{\psi}$一定不是$\psi^\dagger$。但是无论如何$\psi^\dagger$都是一个合理的选择，它是一个行矩阵，它带的的复共轭保证了在需要的时候Lagrange量或Hamilton量是实的。我们不妨假设$\bar{\psi}$与$\psi^\dagger$相差一个变换，即

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\Gamma.$$

$\psi^\dagger$在Lorentz变换下的情况我们是知道的：

$$\psi^\dagger \to \psi^\dagger\Lambda_\psi^\dagger.$$

于是在Lorentz变换下

$$\bar{\psi}\psi = \psi^\dagger\Gamma\psi \to \psi^\dagger\Lambda_\psi^\dagger\Gamma\Lambda_\psi\psi.$$

[6]这是因为boost在旋量表示下不厄米。

这样要求$\bar{\psi}\psi$Lorentz不变相当于要求

$$\Gamma = \Lambda_\psi^\dagger \Gamma \Lambda_\psi.$$

问题变成了寻找一个满足这个条件的Γ。不失一般性，我们考虑无穷小Lorentz变换

$$\Lambda \to 1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu},$$

有

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \left(1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right)^\dagger \Gamma \left(1 + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}\right) \\
\Gamma &= \left(1 - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\left(S^{\mu\nu}\right)^\dagger\right) \Gamma \left(1 + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}\right) \\
\Gamma &= \Gamma + \Gamma\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\left(S^{\mu\nu}\right) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\left(S^{\mu\nu}\right)^\dagger \Gamma + \left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\left(S^{\mu\nu}\right)^\dagger\right) \Gamma \left(\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}\right)
\end{aligned}$$

由于$\omega_{\alpha\beta}$是小量，所以它的二次项可以去掉，有

$$\Gamma S^{\mu\nu} - S^{\mu\nu\dagger}\Gamma = 0$$

或

$$\Gamma S^{\mu\nu} = S^{\mu\nu\dagger}\Gamma \tag{7.8}$$

问题变成了构造一个满足（7.8）的Γ。Lorentz变换的生成元$S^{\mu\nu}$是已知的，可以选成

$$S^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu},$$

这里$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right] = \frac{i}{2}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\right)$[7]。这样很容易知道可以选择

$$\Gamma = \gamma^0.$$

于是

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0.$$

[7] Diracγ-矩阵满足

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}.$$

在Dirac-Pauli表示下γ-矩阵可以表示成

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}.$$

Lagrange表述：Lagrange量的构造

Lagrange量的形式被我们选作

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\mathbf{D}\psi,$$

并假设$\mathbf{D}$应该是一个Lorentz标量。

在这里我们必须做一个不自然的假设，假设旋量方程不包含二阶导数项。这不是一个自然的选择，自然的选择只包括标量、矢量和张量。旋量是Lorentz群的一个双值表示，旋量的方程是一阶的。这与从牛顿开始的传统是很不一样的。自从牛顿给出了$F = ma$这个二阶动力学方程以后，所有的动力学方程都是二阶的，再也没改过。牛顿考虑的是矢量，牛顿以后考虑的也都是标量、矢量和张量，因此动力学方程都是二阶的。旋量与标量、矢量和张量有着本质的不同，方程变成一阶的。

现在的问题是旋量场ψ究竟是一个几维的列矢量。

2×1的ψ 首先，ψ的列数应该是偶数，否则便是矢量场。最小的不为零的偶数是2，所以我们先从ψ是2×1列矢量试起。

如果ψ是2×1列矢量，$\mathbf{D}$一定是一个2×2方阵，是一个Lorentz标量，它应该包含导数项和常数项。我们来尽可能普遍地写出$\mathbf{D}$的可能的形式。

我们总可以找一组2×2方阵作为基展开任何一个2×2方阵。显然在我们现在的问题中选择一组Lorentz协变的基会方便得多。形式地将这组基写为

$$\sigma^\mu = \left\{\mathbf{1}, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3\right\}$$

那么$\mathbf{D}$中只能包含这样的项

$$\sigma^\mu\partial_\mu, \mathbf{1}, u_\mu\sigma^\mu$$

于是

$$\mathbf{D} = c\sigma^\mu\partial_\mu + d\mathbf{1} + eu_\mu\gamma^\mu.$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi}\mathbf{D}\psi \\ &= c\bar{\psi}\sigma^\mu\partial_\mu\psi + d\bar{\psi}\psi + eu_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\end{aligned}$$

自由粒子必须是各向同性的，因此Lagrange量中不能包含含有方向信息的矢量u_μ。所以Lagrange量应为

$$\mathcal{L} = c\bar{\psi}\sigma^\mu\partial_\mu\psi + d\bar{\psi}\psi$$

这部分先不讲。

4×1的ψ 如果ψ是4×1列矢量，$\mathbf{D}$一定是包含导数项和常数项的一个4×4方阵。现在需要找一组16个Lorentz协变的4×4方阵作为基，这样一组基是现成的，可以选成

$$\{\mathbf{1},\gamma_5,\gamma^\mu,\gamma_5\gamma^\mu,\sigma^{\mu\nu}\}$$

如果我们希望方程的导数是二阶的，从而Lagrange量中不能有二阶导数，那么构成Lorentz标量的所有可能的项就是以下这些

$$a^\mu\partial_\mu,b^\mu\gamma_5\partial_\mu,\gamma^\mu\partial_\mu,\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu,\sigma^{\mu\nu}e_\mu\partial_\nu,\mathbf{1},\gamma_5,u_\mu\gamma^\mu,v_\mu\gamma_5\gamma^\mu,w_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$$

其中u_μ，v_μ和$w_{\mu\nu}$是一些Lorentz矢量和张量（注意，Lagrange量中只包含场量和它的一阶导数，这是我们的前提假设）。而且$w_{\mu\nu}$应该是反对称的，因为$\sigma^{\mu\nu}$是反对称的。这样，$\mathbf{D}$的最普遍形式就应该写成

$$\mathbf{D}=a^\mu\partial_\mu+b^\mu\gamma_5\partial_\mu+c\gamma^\mu\partial_\mu+d\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu+\sigma^{\mu\nu}e_\mu\partial_\nu+f\mathbf{1}+g\gamma_5+hu_\mu\gamma^\mu+lv_\mu\gamma_5\gamma^\mu+qw_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}.$$

这样Lagrange量为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}&=\bar\psi\mathbf{D}\psi\\&=a^\mu\bar\psi\partial_\mu\psi+b^\mu\bar\psi\gamma_5\partial_\mu\psi+c\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi+d\bar\psi\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu\psi+e_\mu\bar\psi\sigma^{\mu\nu}\partial_\nu\psi+f\bar\psi\psi+g\bar\psi\gamma_5\psi\\&+hu_\mu\bar\psi\gamma^\mu\psi+lv_\mu\bar\psi\gamma_5\gamma^\mu\psi+qw_{\mu\nu}\bar\psi\sigma^{\mu\nu}\psi\end{aligned}\tag{7.9}$$

这里我们没考虑$\partial_\mu\bar\psi\gamma^\mu\psi$的项，因为$\partial_\mu\bar\psi\gamma^\mu\psi=\partial_\mu\left(\bar\psi\gamma^\mu\psi\right)-\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi$，只带来一个全微分项的差异。作为一个Lagrange量，这个形式的每项都可以。但是我们寻找的是自由粒子的Lagrange量，自由粒子具有最大的对称性。所以这个Lagrange量应该是时间平移不变、空间平移不变和空间各向同性的。空间各向同性要求Lagrange量中不能包含带有方向信息的量。因此，速度这样的量是不能包含的（速度的大小可以包含，因为它不包含方向）。这样一来方程（7.9）中就不能包含矢量这样有方向的量。因此包含a_μ，b_μ，e_μ，u_μ，v_μ和$w_{\mu\nu}$的项在自由场Lagrange量中是不出现的。于是Lagrange量变为

$$\mathcal{L}=c\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi+d\bar\psi\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu\psi+f\bar\psi\psi+g\bar\psi\gamma_5\psi.$$

需要说明的是，我们由对称性出发扔掉了所有的常矢量项，但是我们却保留了γ^μ这样的常矢量。这是因为，γ^μ对应的是内禀自由度，如果你愿意可以像$\bar\psi=\psi^\dagger\gamma^0$一样将$\gamma^\mu\psi$理解为一个整体。

Lagrange量的每项都是一个Lorentz标量。这个Lagrange量包含了两部分：标量部分和赝标量部分。我们假设了自由粒子具有最大的对称性。因此可以假设粒子不是标量的就是赝标量的。不会是混合的。这样Lagrange量只能是下面两种情况

$$\mathcal{L} = c\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi + f\bar{\psi}\psi, \tag{7.10}$$

$$\mathcal{L}_{pseudo} = d\bar{\psi}\gamma_5\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi + g\bar{\psi}\gamma_5\psi. \tag{7.11}$$

如果我们再引入一条基本假设，认为自由粒子Lagrange量必须是标量的，我们就选择了第一个Lagrange量（7.10）。

由Lagrange量（7.10）可以得到运动方程。选择$\bar{\psi}$作为场变量，Euler-Lagrange方程为

$$\partial_{\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}\bar{\psi}\right)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}}.$$

这里

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} &= c\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi + f\psi,\\ \partial_{\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}\bar{\psi}\right)} &= 0\end{aligned}$$

于是方程为

$$c\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi + f\psi = 0. \tag{7.12}$$

选择ψ作为场变量，Euler-Lagrange方程为

$$\partial_{\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}\psi\right)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}.$$

这里

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} &= f\bar{\psi},\\ \partial_{\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}\psi\right)} &= \partial_{\mu}\left\{c\bar{\psi}\gamma^{\mu}\right\} = c\partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\end{aligned}$$

方程为

$$c\partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu} - f\bar{\psi} = 0 \tag{7.13}$$

取方程（7.13）的厄米共轭[8]

$$\begin{aligned}
c^*\gamma^{\mu\dagger}\bar{\psi}^\dagger\overleftarrow{\partial}^\dagger_\mu - f^*\bar{\psi}^\dagger &= 0\\
c^*\gamma^{\mu\dagger}\partial_\mu\left(\psi^\dagger\gamma_0\right)^\dagger - f^*\left(\psi^\dagger\gamma_0\right)^\dagger &= 0\\
c^*\gamma^{\mu\dagger}\gamma_0\partial_\mu\psi - f^*\gamma_0\psi &= 0\\
c^*\gamma_0\gamma^\mu\partial_\mu\psi - f^*\gamma_0\psi &= 0\\
-c^*\gamma^\mu\partial_\mu\psi + f^*\psi &= 0
\end{aligned} \tag{7.14}$$

这里用到了$\gamma_0^\dagger = \gamma_0$，$\gamma^{\mu\dagger}\gamma_0 = \gamma_0\gamma^\mu$。与方程（7.12）对比有

$$\begin{aligned}
c^* &= -c\\
f^* &= f
\end{aligned}$$

可见，c与f中有一个是实数，有一个是纯虚数。取$c = ia$，$f = b$，这里a和b是实数。于是方程为

$$\begin{aligned}
ia\gamma^\mu\partial_\mu\psi + b\psi &= 0\\
\left(ia\ \not{\partial} + b\right)\psi &= 0.
\end{aligned}$$

我们需要与实验对比确定参数a和b。Dirac方程

$$\left(i\ \not{\partial} - m\right)\psi = 0.$$

在这里可以被视为来自于实验的唯象结果。对比有

$$\begin{aligned}
a &= C,\\
b &= -Cm.
\end{aligned}$$

[8]如果认为$\partial_\mu^\dagger = -\partial_\mu^\dagger$，则

$$\begin{aligned}
c^*\gamma^{\mu\dagger}\bar{\psi}^\dagger\overleftarrow{\partial}^\dagger_\mu - f^*\bar{\psi}^\dagger &= 0\\
-c^*\gamma^{\mu\dagger}\partial_\mu\left(\psi^\dagger\gamma_0\right)^\dagger - f^*\left(\psi^\dagger\gamma_0\right)^\dagger &= 0\\
-c^*\gamma^{\mu\dagger}\gamma_0\partial_\mu\psi - f^*\gamma_0\psi &= 0\\
-c^*\gamma_0\gamma^\mu\partial_\mu\psi - f^*\gamma_0\psi &= 0\\
-c^*\gamma^\mu\partial_\mu\psi - f^*\psi &= 0\\
c^*\gamma^\mu\partial_\mu\psi + f^*\psi &= 0
\end{aligned}$$

这样得到的Lagrange量为

$$\mathcal{L} = C\left(i\bar{\psi}\ \not{\partial}\psi - \bar{\psi}m\psi\right).$$

与标量场情况一样，这个对比并不能唯一地将这两个常数确定下来，整体可以相差一个常数，完全确定出待定参数需要通过相互作用。加上一个恒力J，方程为

$$\left(i\ \not{\partial} - m\right)\psi = J. \tag{7.15}$$

在恒力作用下的Lagrange量可写为

$$\mathcal{L} = C\left(i\bar{\psi}\ \not{\partial}\psi - \bar{\psi}m\psi\right) + \lambda\bar{\psi}J.$$

由Euler-Lagrange方程

$$\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\bar{\psi}\right)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}}.$$

其中

$$\begin{aligned}\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\bar{\psi}\right)} &= 0\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} &= C\left(i\ \not{\partial} - m\right)\psi + \lambda J\end{aligned}$$

可以得到方程为

$$C\left(i\ \not{\partial} - m\right)\psi = -\lambda J$$

与方程（7.15）对比

$$\begin{aligned}C &= 1\\ \lambda &= -1\end{aligned}$$

于是我们知道自由旋量场的Lagrange量为

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\left(i\ \not{\partial} - m\right)\psi.$$

Hamilton表述

同样我们也可以等价地采用Hamilton表述。

场量是ψ，相应的场动量为

$$\begin{aligned}\pi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 \psi\right)} \\ &= \frac{\partial}{\partial\left(\partial_0 \psi\right)}\left[\bar{\psi}\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi\right] \\ &= \bar{\psi} i\gamma^0 \\ &= i\psi^\dagger .\end{aligned}$$

若用$\bar{\pi}$表示对应$\bar{\psi}$的正则动量，则类似地有

$$\begin{aligned}\bar{\pi} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 \bar{\psi}\right)} \\ &= \frac{\partial}{\partial\left(\partial_0 \bar{\psi}\right)}\left[\bar{\psi}\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi\right] \\ &= 0.\end{aligned}$$

由Legendre变换可以直接得到Hamilton量

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \pi\dot{\psi} - \mathcal{L} \\ &= i\psi^\dagger\dot{\psi} - \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi \\ &= i\bar{\psi}\gamma^0\partial_0\psi - \bar{\psi}\left(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^j\partial_j - m\right)\psi \\ &= -i\bar{\psi}\gamma^j\partial_j\psi + m\bar{\psi}\psi \\ &= \bar{\psi}\left(-i\gamma^j\partial_j + m\right)\psi \\ &= \bar{\psi}\left(\gamma\cdot\mathbf{p} + m\right)\psi \\ &= \psi^\dagger\left(\alpha\cdot\mathbf{p} + \beta m\right)\psi .\end{aligned}$$

无质量旋量场，$U(1)$对称性，$U(n)$($SU(n)\otimes U(1)$)对称性

像在实标量场情况中那样，我们先考虑对称性大的无质量情况。无质量的旋量场Lagrange量为

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \not{\partial}\psi .$$

与复标量场情况相同，它显然在变换

$$\psi \to e^{i\theta}\psi$$

下不变[9]。这是一种$U(1)$对称性。

下面考虑多分量的情况。

[9]将旋量场写成两个实旋量和的形式。试试看，这种实旋量会不会像实标量场那样没有反粒子。

有（自旋以外）内部自由度的旋量场，$U(n)$ 考虑n个复标量场$\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n$，Lagrange量为

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_1 i \not{\partial} \psi_1 + \bar{\psi}_2 i \not{\partial} \psi_2 + \cdots + \bar{\psi}_n i \not{\partial} \psi_n.$$

将场表示成

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}.$$

Lagrange量为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}_1 i \not{\partial} \psi_1 + \bar{\psi}_2 i \not{\partial} \psi_2 + \cdots + \bar{\psi}_n i \not{\partial} \psi_n \\ &= \left(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \cdots, \bar{\psi}_n\right) i \not{\partial} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \\ &= \bar{\psi} i \not{\partial} \psi, \end{aligned} \tag{7.16}$$

这里$\bar{\psi} \equiv \left(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \cdots, \bar{\psi}_n\right)$。这个Lagrange量与复标量场一样，也是在$n$-维复空间中的旋转下不变的，也就是在$U(n)$群变换下不变的[10]。

有（自旋以外）内部自由度的旋量场，$SU(n) \otimes U(1)$ 与复标量场情况相同，这种幺正变换$U(n)$同样也可以用特殊幺正变换$SU(n)$再加一个$U(1)$变换来表示，即将$U(n)$群写成

$$SU(n) \otimes U(1).$$

同样也可以进一步考虑将每个分量ϕ_i作为一个相位变化的情况：

$$\psi_i \to e_i^{i\theta} \psi,$$

也就是

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} e_1^{i\theta_1}\psi_1 \\ e_2^{i\theta_2}\psi_2 \\ \vdots \\ e_n^{i\theta_n}\psi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & & \\ & e^{i\theta_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix},$$

[10]注意，这里的$\not{\partial}$不是这个空间中的矩阵，它可以被理解成一个数。

显然Lagrange量（7.16）在变换$diag\left(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \cdots, e^{i\theta_n}\right)$下是不变的。这个变换的行列式是$e^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)}$。同样我们可以将这个变换表示成（7.5）的形式。从而得到一个$U(1)$的矩阵元$e^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)/n}$乘上一个行列式为1的矩阵的形式。行列式为1的矩阵构成$SU(n)$群。所以，每一个分量做一个相位变化相当于一个$SU(n)\otimes U(1)$的变换。在这个变换下不变，就是具有$SU(n)\otimes U(1)$对称性。

有质量旋量场，$U(1)$对称性，$U(n)$($SU(n)\otimes U(1)$)对称性和对称性的破缺

有质量的旋量场场方程为

$$(i\not{\partial}-m)\psi=0.$$

相应的Lagrange量为

$$\mathcal{L}=\bar{\psi}(i\not{\partial}-m)\psi.$$

这个Lagrange量显然具有$U(1)$对称性，即在变换$\psi\to e^{i\theta}\psi$下不变。这与无质量情况是相同的。

考虑多分量的旋量场。一个具有n个相同质量分量$\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n$，的旋量场

$$\psi=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \vdots\\ \psi_n\end{pmatrix}$$

。此时Lagrange量（类比实标量场的情况）为

$$\mathcal{L}=\bar{\psi}i\not{\partial}\psi-m\bar{\psi}\psi.$$

这相当于质量矩阵$M\equiv m\mathbf{1}$（$\mathbf{1}$是单位阵）的情况。由于质量相同，所以这个Lagrange量与无质量情况一样具有$U(n)$或$SU(n)\otimes U(1)$对称性。

但是如果这n个旋量场的质量不同，即Lagrange量为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}&=\bar{\psi}_1(i\not{\partial}-m_1)\psi_1+\bar{\psi}_2(i\not{\partial}-m_2)\psi_2+\cdots+\bar{\psi}_n(i\not{\partial}-m_n)\psi_n\\&=\left(\bar{\psi}_1,\bar{\psi}_2,\cdots,\bar{\psi}_n\right)i\not{\partial}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \vdots\\ \psi_n\end{pmatrix}+\left(\bar{\psi}_1,\bar{\psi}_2,\cdots,\bar{\psi}_n\right)\begin{pmatrix}m_1&&&\\&m_2&&\\&&\ddots&\\&&&m_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \vdots\\ \psi_n\end{pmatrix}\\&=\bar{\psi}(i\not{\partial}-M)\psi,\end{aligned}\tag{7.17}$$

这里$M\equiv diag\left(m_1,m_2,\cdots,m_n\right)$。质量不同使$U\left(n\right)(SU\left(n\right)\otimes U\left(1\right))$对称性破坏了。但是，质量并没有破坏掉所有对称性，Lagrange量仍然在变换

$$\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \vdots\\ \psi_n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}e_1^{i\theta_1}\psi_1\\ e^{i\theta_2}\psi_2\\ \vdots\\ e^{i\theta_n}\psi_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{i\theta_1}&&&\\ &e^{i\theta_2}&&\\ &&\ddots&\\ &&&e^{i\theta_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \vdots\\ \psi_n\end{pmatrix},$$

下不变。对称性降低为

$$\overbrace{U\left(1\right)\oplus U\left(1\right)\oplus\cdots\oplus U\left(1\right)}^{n个}=\begin{pmatrix}e^{i\theta_1}&&&\\ &e^{i\theta_2}&&\\ &&\ddots&\\ &&&e^{i\theta_n}\end{pmatrix}.$$

质量使没有质量时的$SU\left(n\right)\otimes U\left(1\right)$对称性破缺到了一个更低的$U\left(1\right)\oplus U\left(1\right)\oplus\cdots\oplus U\left(1\right)$对称性。

与标量场的情况一样，这n个质量中如果有一些是相同的，那么会有一些局部的对称性。

用方阵（而不是矢量）表示有（自旋以外）内部自由度的场

前面，我们用方阵而不是列矩阵表示了复标量场，当然也可以用这种方法表示旋量场。

具有相同质量的多分量旋量场Lagrange量为

$$\mathcal{L}=\bar{\psi}\left(i\not{\partial}-m\right)\psi,$$

其中质量矩阵$M=m\mathbf{1}$。这个Lagrange量具有$U\left(n\right)$对称性，即Lagrange量在变换

$$\psi\to U\psi \tag{7.18}$$

下不变。用一个方阵$\mathbf{\Psi}$来表示同样这个场，当然要求$\mathbf{\Psi}$在同样的变换下不变，也就是要求Lagrange量在

$$\mathbf{\Psi}\to U\mathbf{\Psi}U^{-1} \tag{7.19}$$

变换下不变。$\mathbf{\Psi}$是一个方阵，Lagrange量必须是一个数。像处理复标量场一样我们利用迹将Lagrange量表示成一个在变换（7.18）下不变的数：

$$\mathcal{L}=tr\left[\bar{\mathbf{\Psi}}i\not{\partial}\mathbf{\Psi}\right]-mtr\left[\bar{\mathbf{\Psi}}^{\dagger}\mathbf{\Psi}\right].$$

这个Lagrange量与用矢量表示的Lagrange量当然是完全等价的。

手征性

无质量的粒子与有质量的粒子是有非常本质不同的。这种不同的根源是相对论。相对论要求无质量的粒子必须以光速运动，而光速是最特殊的。这导致了有质量和无质量粒子间的本质区别。

有质量和无质量粒子之间的一个重要区别是有质量粒子有自旋，而无质量粒子只有螺度。自旋有$2s+1$个分量，而螺度永远只有两个分量。这就是为什么自旋为1的光子只有两个偏振方向的原因。旋量粒子是自旋半整数的粒子。当自旋为$\frac{1}{2}$时，自旋分量与螺度分量都是两个，反而使这个区别不明显了。

一个以光速运动的粒子一个最明显的特征是没有一个观察它的参照系可以运动得比它更快。而一个低于光速的粒子我们可以有两套参照系，一套比它慢，一套比它块。如果这个粒子在比它慢的参照系中看是左旋的，那么在比它快的参照系中看就可以是右旋的。因此，比光速慢的粒子可以左旋，也可以右旋。但是，如果这个粒子以光速运动，那么就不存在比它快的参照系。这样，一个左旋的粒子永远左旋，一个右旋的粒子永远右旋。这就是说，一个没有质量，从而以光速运动的粒子，要不就是左旋的，要不就是右旋的。不可能既有左旋，又有右旋。这种左右旋的性质显然可以方便地用左右手来表示，所以这种性质被称为手征性。一个有质量的粒子是没有明确的手征性的。对于无质量的粒子，我们就可以将它们分成左手的和右手的两类。

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{1}\cdots\psi\\
&\gamma_5\cdots\frac{1}{2}\left(1\pm\gamma_5\right)\psi\\
&\gamma_0\cdots\frac{1}{2}\left(1\pm\gamma_0\right)\psi\\
&\gamma_1\\
&\gamma_2\\
&\gamma_3\\
&\gamma_5\gamma_0\\
&\gamma_5\gamma_1\\
&\gamma_5\gamma_2\\
&\gamma_5\gamma_3\\
&\sigma^{01}\\
&\sigma^{02}\\
&\sigma^{03}\\
&\sigma^{12}\\
&\sigma^{13}\\
&\sigma^{23}
\end{aligned}
$$

利用了

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2g^{\mu\nu}$$

于是

$$
\begin{aligned}
\{\gamma^\mu,\gamma^\mu\}=\gamma^\mu\gamma^\mu+\gamma^\mu\gamma^\mu&=2g^{\mu\mu}\\
\gamma^{\mu 2}&=g^{\mu\mu}\\
\left(\gamma^0\right)^2&=1\\
\left(\gamma^1\right)^2&=-1\\
\left(\gamma^2\right)^2&=-1\\
\left(\gamma^3\right)^2&=-1
\end{aligned}
$$

$$\gamma_0\frac{1}{2}\left(1\pm\gamma_0\right)\psi=\frac{1}{2}\left(\gamma_0\pm1\right)\psi=\pm\frac{1}{2}\left(1\pm\gamma_0\right)\psi$$
$$\gamma_1\frac{1}{2}\left(1\pm\gamma_1\right)\psi=\frac{1}{2}\left(\gamma_1\mp1\right)\psi=\mp\frac{1}{2}\left(1\pm\gamma_1\right)\psi$$
$$\vdots$$
$$\gamma_i\frac{1}{2}\left(1\pm\gamma_i\right)\psi=\frac{1}{2}\left(\gamma_i\pm1\right)\psi=\mp\frac{1}{2}\left(1\pm\gamma_i\right)\psi$$

$$\gamma_\mu\frac{1}{2}\left(1\pm\gamma_\mu\right)\psi=\pm g^{\mu\mu}\frac{1}{2}\left(1\pm\gamma_\mu\right)\psi$$

$$\gamma_5\gamma_0\frac{1}{2}\left(1\pm\gamma_5\gamma_0\right)\psi=\frac{1}{2}\left(\gamma_5\gamma_0\mp1\right)\psi=\mp\frac{1}{2}\left(1\pm\gamma_5\gamma_0\right)\psi$$
$$\gamma_5\gamma_i\frac{1}{2}\left(1\pm\gamma_5\gamma_i\right)\psi=\frac{1}{2}\left(\gamma_5\gamma_i\pm1\right)\psi=\pm\frac{1}{2}\left(1\pm\gamma_5\gamma_i\right)\psi$$

或

$$\gamma_5\gamma_\mu\frac{1}{2}\left(1\pm\gamma_5\gamma_\mu\right)\psi=\frac{1}{2}\left(\gamma_5\gamma_\mu\pm1\right)\psi=\mp g^{\mu\mu}\frac{1}{2}\left(1\pm\gamma_5\gamma_\mu\right)\psi$$
$$\sigma^{\mu\nu}\frac{1}{2}\left(1\pm\sigma^{\mu\nu}\right)\psi=\frac{1}{2}\left(\sigma^{\mu\nu}\pm g^{\mu\mu}g^{\nu\nu}\right)\psi$$

因此

$$\sigma^{0i}\frac{1}{2}\left(1\pm\sigma^{0i}\right)\psi=\frac{1}{2}\left(\sigma^{0i}\mp1\right)\psi=\mp\frac{1}{2}\left(1\pm\sigma^{0i}\right)\psi$$
$$\sigma^{ij}\frac{1}{2}\left(1\pm\sigma^{ij}\right)\psi=\frac{1}{2}\left(\sigma^{ij}\pm1\right)\psi=\pm\frac{1}{2}\left(1\pm\sigma^{ij}\right)\psi$$

其中利用了

$$\begin{aligned}\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}&=\frac{i}{2}\left[\gamma^\mu,\gamma^\nu\right]\frac{i}{2}\left[\gamma^\mu,\gamma^\nu\right]\\&=-\frac{1}{4}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu\right)\left(\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu\right)\\&=-\frac{1}{4}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\nu\gamma^\mu+\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\mu\right)\\&=-\frac{1}{4}\left(-\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu g^{\mu\mu}\gamma^\nu-\gamma^\mu g^{\nu\nu}\gamma^\mu-\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\nu\gamma^\mu\right)\\&=-\frac{1}{4}\left(-\gamma^\nu g^{\mu\mu}\gamma^\nu-g^{\mu\mu}g^{\nu\nu}-g^{\mu\mu}g^{\nu\nu}-\gamma^\mu g^{\nu\nu}\gamma^\mu\right)\\&=-\frac{1}{4}\left(-g^{\mu\mu}g^{\nu\nu}-g^{\mu\mu}g^{\nu\nu}-g^{\mu\mu}g^{\nu\nu}-g^{\mu\mu}g^{\nu\nu}\right)\\&=g^{\mu\mu}g^{\nu\nu}\end{aligned}$$

引入投影算符

$$P_\pm=\frac{1\pm\gamma_5}{2}$$

则可利用这个算符将旋量投影为左手的和右手的：

$$\psi_L = P_+\psi, \psi_R = P_-\psi$$

由此

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_L &= \psi_L^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger P_+^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger P_+\gamma^0 = \psi^\dagger\gamma^0 P_- = \bar{\psi}P_- \\ \bar{\psi}_R &= \psi_R^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger P_-^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger P_-\gamma^0 = \psi^\dagger\gamma^0 P_+ = \bar{\psi}P_+\end{aligned}$$

其中利用了

$$P_\pm\gamma^\mu = \gamma^\mu P_\mp$$

于是我们可以把Lagrange密度写为

$$\begin{aligned}L &= i\bar{\psi}\ \not{\partial}\psi \\ &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\left(P_+ + P_-\right)\psi \\ &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu P_+\psi + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu P_-\psi \\ &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu P_+^2\psi + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu P_-^2\psi \\ &= i\bar{\psi}P_-\gamma^\mu\partial_\mu P_+\psi + i\bar{\psi}P_+\gamma^\mu\partial_\mu P_-\psi \\ &= i\bar{\psi}_L\ \not{\partial}\psi_L + i\bar{\psi}_R\ \not{\partial}\psi_R\end{aligned}$$

这时由于左手部分和右手部分可以独立的变换

$$\psi_L \to U_L\psi_L, \psi_R \to U_R\psi_R$$

每一部分的变换规律与前面的ψ的规律完全相同，而两部分的变换又是独立的，因此这时系统的对称群扩大为两个$SU\left(2\right)\times U\left(1\right)$。

7.4.3 矢量场

描述矢量场我们用场量$\mathcal{A}^\mu$。我们没有采用场强$\mathcal{F}_{\mu\nu}$来描述矢量场是因为$\mathcal{F}_{\mu\nu}$包含的信息量是不够的。

如果我们仍然坚持Lagrange量只包含场量$\mathcal{A}^\mu$的二次方（在非Abel的情况下我们会引入非线性的四次方项，从而导致出现自作用），那么普遍地我们可以将Lagrange量的各项（必须是Lorentz标量）写成这样两种可能的项：

$$\bar{\mathcal{A}}^\mu D_{\mu\nu}\mathcal{A}^\nu, \bar{\mathcal{A}}_\mu D\mathcal{A}^\mu.$$

这里$\bar{\mathcal{A}}_\mu$应该是一个与$\mathcal{A}^\mu$直接相关的逆变矢量。这里$D_{\mu\nu}$和D包含导数∂^μ的部分和常数项，普遍地可以写成

$$D_{\mu\nu} = a\overleftarrow{\partial}_\mu\overrightarrow{\partial}_\nu + b\overleftarrow{\partial}_\nu\overrightarrow{\partial}_\mu,$$
$$D = c\overleftarrow{\partial}_\nu\overrightarrow{\partial}^\nu + d.$$

注意，由于不是旋量这样的多值表示，所以，在Lorentz时空这个空间中它不是一个矩阵。

$\bar{\mathcal{A}}_\mu$是什么

那么$\bar{\mathcal{A}}_\mu$是什么呢。确定$\bar{\mathcal{A}}_\mu$我们不妨由最简单的情况做，得到的结果是普遍的。这里考虑D是标量的情况。

$\mathcal{A}^\mu$和$\bar{\mathcal{A}}_\mu$是Lorentz矢量和Lorentz逆变矢量。

在Lorentz变换下，矢量变换为

$$\mathcal{A}^\mu \to \Lambda^\mu_{\mathcal{A}\sigma}\mathcal{A}^\sigma.$$

逆变矢量的Lorentz变换为[11]

$$\bar{\mathcal{A}}_\mu \to \bar{\mathcal{A}}_\rho\tilde{\Lambda}^\rho_{\bar{\mathcal{A}}\mu}.$$

由此我们可以得到$\bar{\mathcal{A}}^\nu$在Lorentz变换下的变换

$$\bar{\mathcal{A}}_\mu g^{\mu\nu} \to \bar{\mathcal{A}}_\rho\tilde{\Lambda}^\rho_{\bar{\mathcal{A}}\mu}g^{\mu\nu}$$
$$\bar{\mathcal{A}}^\nu \to \bar{\mathcal{A}}^\rho\tilde{\Lambda}_{\mathcal{A}\rho}{}^\nu$$

于是在Lorentz变换下

$$\bar{\mathcal{A}}_\mu D\mathcal{A}^\mu \to \bar{\mathcal{A}}_\rho\tilde{\Lambda}^\rho_{\bar{\mathcal{A}}\mu}D\Lambda^\mu_{\mathcal{A}\sigma}\mathcal{A}^\sigma$$

11

$$\mathcal{A}^\mu \to \Lambda^\mu_{\mathcal{A}\nu}\mathcal{A}^\nu$$
$$g_{\mu\rho}\mathcal{A}^\mu \to g_{\mu\rho}\Lambda^\mu_{\mathcal{A}\nu}\mathcal{A}^\nu$$
$$\mathcal{A}_\rho \to \Lambda_{\mathcal{A}\rho\nu}\mathcal{A}^\nu$$
$$\mathcal{A}_\rho \to \Lambda_{\mathcal{A}\rho}{}^\nu\mathcal{A}_\nu$$
$$\mathcal{A}_\rho \to \mathcal{A}_\nu\tilde{\Lambda}^\nu_{\mathcal{A}\rho}$$
$$\mathcal{A}_\rho \to \mathcal{A}_\nu\tilde{\Lambda}^\nu_{\mathcal{A}\rho}$$

这相当于

$$\bar{\mathcal{A}}^{\nu} g_{\nu\mu} D\mathcal{A}^{\mu} \to \bar{\mathcal{A}}^{\rho} \tilde{\Lambda}_{\bar{\mathcal{A}}\rho}{}^{\nu} g_{\nu\mu} D\Lambda^{\mu}_{\mathcal{A}\sigma} \mathcal{A}^{\sigma}$$

这要求

$$\tilde{\Lambda}_{\bar{\mathcal{A}}\rho}{}^{\nu} g_{\nu\mu} D\Lambda^{\mu}_{\mathcal{A}\sigma} = g_{\rho\sigma} D$$
$$\tilde{\Lambda}_{\bar{\mathcal{A}}\rho\nu} g^{\nu\mu} D\Lambda_{\mathcal{A}\mu\sigma} = g_{\rho\sigma} D$$

这里D是任意的标量，不论D是什么，这个关系都应该成立。我们取$D=1$，有

$$\tilde{\Lambda}_{\bar{\mathcal{A}}\rho\nu} g^{\nu\mu} \Lambda_{\mathcal{A}\mu\sigma} = g_{\rho\sigma}$$

写成矩阵的形式($g^{\nu\mu} = g_{\nu\mu}$)

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}}_{\bar{\mathcal{A}}} \mathbf{g}\, \mathbf{\Lambda}_{\mathcal{A}} = \mathbf{g}$$

这说明我们并不要求$\mathbf{\Lambda}_{\mathcal{A}}$是幺正的（幺正要求$\tilde{\mathbf{\Lambda}}_{\bar{\mathcal{A}}}\, \mathbf{\Lambda}_{\mathcal{A}} = \mathbf{1}$)。也就是说，我们不要求$\mathbf{\Lambda}_{\mathcal{A}}$非得是Lorentz的一个有限维幺正表示。这对我们非常重要，因为Lorentz群没有有限维幺正表示。回顾在旋量的情况中，Lorentz群没有有限维幺正表示的要求使得我们不能将$\bar{\psi}$选成$\tilde{\psi}$或$\psi^{\dagger}$，而只能在ψ上再乘上一个矩阵Γ。在矢量的情况中Lorentz群没有有限维幺正表示的要求不构成限制，因此我们可以任意选择$\bar{\mathcal{A}}_{\mu}$。既然是任意的，一个简单自然的选择是

$$\bar{\mathcal{A}}_{\mu} = \mathcal{A}^{*}_{\mu}.$$

如果场量$\mathcal{A}_{\mu}$描述的是一个有内部自由度的矢量场，这时$\mathcal{A}_{\mu}$是一个矩阵，那么这个选择就变成了

$$\bar{\mathcal{A}}_{\mu} = \mathcal{A}^{\dagger}_{\mu}.$$

场的描述：（自旋以外）内部自由度

如果矢量场$\mathcal{A}^{\mu}$有自旋以外的内部自由度，我们当然也可以像前面处理有内部自由度的标量场和旋量场的方法处理，将一系列的矢量场写成一个列矢量，即

$$\mathcal{A}^{\mu} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^{\mu}_{1} \\ \mathcal{A}^{\mu}_{2} \\ \vdots \\ \mathcal{A}^{\mu}_{n} \end{pmatrix}.$$

但是我们也可以采用前面讨论过的用方阵而不是列矢量来表示有内部自由度的场的方法来表示有内部自由度的矢量场。$\mathcal{A}^\mu$就是一个方阵

$$\mathcal{A}^\mu = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \mathcal{A}^\mu_{ij} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{A}^\mu$的不同分量表明内部自由度的存在。

无（自旋以外）内部自由度的矢量场

按照前面的分析，一个有（自旋以外）内部自由度的矢量场可以用一个方阵来描述。最简单的情况当然就是没有（自旋以外）内部自由度的情况，这时$\mathcal{A}^\mu$是一个1×1的矩阵，也就是一个数。我们先考虑这种简单情况，然后再将结果推广到更普遍的情况。

Lagrange量

如前面讨论的，一个有内部自由度的场用一个方阵表示，而一个Lagrange量一定是一个数。像在前面一样我们可以普遍地将Lagrange量取成迹的形式[12]：

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= tr\left(\bar{\mathcal{A}}^\mu D_{\mu\nu}\mathcal{A}^\nu + \bar{\mathcal{A}}_\mu D\mathcal{A}^\mu\right)\\ &= tr\left(a\partial_\mu\bar{\mathcal{A}}^\mu\partial_\nu\mathcal{A}^\nu + b\partial_\nu\bar{\mathcal{A}}^\mu\partial_\mu\mathcal{A}^\nu + c\partial_\nu\bar{\mathcal{A}}_\mu\partial^\nu\mathcal{A}^\mu + d\bar{\mathcal{A}}_\mu\mathcal{A}^\mu\right).\end{aligned}$$

在没有内部自由度的情况中$\mathcal{A}^\mu$是一个1×1的矩阵，也就是一个数。在这种情况下我们有而且Lagrange量中的迹也不用再求了，或者说，可以直接求出来。此时Lagrange量为

$$\mathcal{L} = a\partial_\mu\bar{\mathcal{A}}^\mu\partial_\nu\mathcal{A}^\nu + b\partial_\nu\bar{\mathcal{A}}^\mu\partial_\mu\mathcal{A}^\nu + c\partial_\nu\bar{\mathcal{A}}_\mu\partial^\nu\mathcal{A}^\mu + d\bar{\mathcal{A}}_\mu\mathcal{A}^\mu.$$

12

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= tr\left(\bar{\mathcal{A}}^\mu D_{\mu\nu}\mathcal{A}^\nu + \bar{\mathcal{A}}_\mu D\mathcal{A}^\mu\right)\\ &= tr\left(\bar{\mathcal{A}}^\mu\left(a\overleftarrow{\partial}_\mu\overrightarrow{\partial}_\nu + b\overleftarrow{\partial}_\nu\overrightarrow{\partial}_\mu\right)\mathcal{A}^\nu + \bar{\mathcal{A}}_\mu\left(c\overleftarrow{\partial}_\nu\overrightarrow{\partial}^\nu + d\right)\mathcal{A}^\mu\right)\\ &= tr\left(a\bar{\mathcal{A}}^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu\overrightarrow{\partial}_\nu\mathcal{A}^\nu + b\bar{\mathcal{A}}^\mu\overleftarrow{\partial}_\nu\overrightarrow{\partial}_\mu\mathcal{A}^\nu + c\bar{\mathcal{A}}_\mu\overleftarrow{\partial}_\nu\overrightarrow{\partial}^\nu\mathcal{A}^\mu + d\bar{\mathcal{A}}_\mu c\mathcal{A}^\mu\right)\\ &= tr\left(a\partial_\mu\bar{\mathcal{A}}^\mu\partial_\nu\mathcal{A}^\nu + b\partial_\nu\bar{\mathcal{A}}^\mu\partial_\mu\mathcal{A}^\nu + c\partial_\nu\bar{\mathcal{A}}_\mu\partial^\nu\mathcal{A}^\mu + d\bar{\mathcal{A}}_\mu\mathcal{A}^\mu\right)\end{aligned}$$

本质上我们关心的是解，是运动方程，所以Lagrange量相差一个全微分（这相当于作用量相差一个常数）是等价的，由于[13]

$$\partial_\nu \bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\mu \mathcal{A}^\nu = \partial_\mu \bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\nu \mathcal{A}^\nu + \partial_\nu \left(\bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\mu \mathcal{A}^\nu\right) - \partial_\mu \left(\bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\nu \mathcal{A}^\nu\right)$$

即$\partial_\nu \bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\mu \mathcal{A}^\nu$和$\partial_\mu \bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\nu \mathcal{A}^\nu$两项只相差一个全微分，所以可以只保留其中一项就可以：

$$\mathcal{L} = a\partial_\mu \bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\nu \mathcal{A}^\nu + c\partial_\nu \bar{\mathcal{A}}_\mu \partial^\nu \mathcal{A}^\mu + d\bar{\mathcal{A}}_\mu \mathcal{A}^\mu. \tag{7.20}$$

当$\mathcal{A}^\mu$是一个1×1的矩阵（也就是一个数）的时候我们还有

$$\mathcal{A}_\mu^\dagger(x) = \mathcal{A}_\mu^*(x).$$

这样Lagrange量变为

$$\mathcal{L} = a\partial_\mu \mathcal{A}^{\mu *} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu + c\partial_\nu \mathcal{A}_\mu^* \partial^\nu \mathcal{A}^\mu + d\mathcal{A}_\mu^* \mathcal{A}^\mu.$$

当然，这里的常数都还没有确定下来。为了确定这些常数，我们先回到物理意义比较明确的哈密顿量。

Hamilton量

由Lagrange量(7.20)出发[14]，通过Legendre变换我们可以直接得到Hamilton量。

---

[13]

$$\begin{aligned}
\partial_\nu \bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\mu \mathcal{A}^\nu &= \partial_\nu \left(\bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\mu \mathcal{A}^\nu\right) - \bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\nu \partial_\mu \mathcal{A}^\nu \\
&= \partial_\nu \left(\bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\mu \mathcal{A}^\nu\right) - \left[\partial_\mu \left(\bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\nu \mathcal{A}^\nu\right) - \partial_\mu \bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\nu \mathcal{A}^\nu\right] \\
&= \partial_\nu \left(\bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\mu \mathcal{A}^\nu\right) - \partial_\mu \left(\bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\nu \mathcal{A}^\nu\right) + \partial_\mu \bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\nu \mathcal{A}^\nu \\
&= \partial_\mu \bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\nu \mathcal{A}^\nu + \partial_\nu \left(\bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\mu \mathcal{A}^\nu\right) - \partial_\mu \left(\bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\nu \mathcal{A}^\nu\right)
\end{aligned}$$

[14]为了使得到的结果更普遍，我们尽量在最普遍的情况下做。

对应$\mathcal{A}_\alpha$的广义动量为[15]

$$\begin{aligned}\pi^\alpha &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial^0 \mathcal{A}_\alpha\right)} \\ &= a\partial_\mu \bar{\mathcal{A}}^\mu g_0^\alpha + c\partial_0 \bar{\mathcal{A}}^\alpha .\end{aligned} \tag{7.21}$$

对应$\bar{\mathcal{A}}_\alpha$的广义动量为[16]

$$\begin{aligned}\bar{\pi}^\alpha &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial^0 \bar{\mathcal{A}}_\alpha\right)} \\ &= a g_0^\alpha \partial_\nu \mathcal{A}^\nu + c\partial_0 \mathcal{A}^\alpha .\end{aligned} \tag{7.22}$$

15

$$\begin{aligned}\pi^\alpha &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial^0 \mathcal{A}_\alpha\right)} \\ &= \frac{\partial}{\partial\left(\partial^0 \mathcal{A}_\alpha\right)} tr\left(a\partial_\mu \bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\nu \mathcal{A}^\nu + c\partial_\nu \bar{\mathcal{A}}_\mu \partial^\nu \mathcal{A}^\mu + d\bar{\mathcal{A}}_\mu \mathcal{A}^\mu\right) \\ &= tr\left(a\left[\partial_\mu \bar{\mathcal{A}}^\mu \frac{\partial\left(\partial_\nu \mathcal{A}^\nu\right)}{\partial\left(\partial^0 \mathcal{A}_\alpha\right)}\right] + c\left[\partial_\nu \bar{\mathcal{A}}_\mu \frac{\partial\left(\partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right)}{\partial\left(\partial^0 \mathcal{A}_\alpha\right)}\right]\right) \\ &= tr\left(a\left[\partial_\mu \bar{\mathcal{A}}^\mu \frac{\partial\left(\partial^\nu \mathcal{A}_\nu\right)}{\partial\left(\partial^0 \mathcal{A}_\alpha\right)}\right] + c\left[\partial_\nu \bar{\mathcal{A}}^\mu \frac{\partial\left(\partial^\nu \mathcal{A}_\mu\right)}{\partial\left(\partial^0 \mathcal{A}_\alpha\right)}\right]\right) \\ &= tr\left(a\partial_\mu \bar{\mathcal{A}}^\mu g_0^\alpha + c\partial_\nu \bar{\mathcal{A}}^\mu g_0^\nu g_\mu^\alpha\right) \\ &= tr\left(a\partial_\mu \bar{\mathcal{A}}^\mu g_0^\alpha + c\partial_0 \bar{\mathcal{A}}^\alpha\right)\end{aligned}$$

16

$$\begin{aligned}\bar{\pi}^\alpha &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial^0 \bar{\mathcal{A}}_\alpha\right)} \\ &= \frac{\partial}{\partial\left(\partial^0 \bar{\mathcal{A}}_\alpha\right)} tr\left(a\partial_\mu \bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\nu \mathcal{A}^\nu + c\partial_\nu \bar{\mathcal{A}}_\mu \partial^\nu \mathcal{A}^\mu + d\bar{\mathcal{A}}_\mu \mathcal{A}^\mu\right) \\ &= tr\left(a\frac{\partial\left(\partial_\mu \bar{\mathcal{A}}^\mu\right)}{\partial\left(\partial^0 \bar{\mathcal{A}}_\alpha\right)}\partial_\nu \mathcal{A}^\nu + c\frac{\partial\left(\partial_\nu \bar{\mathcal{A}}_\mu\right)}{\partial\left(\partial^0 \bar{\mathcal{A}}_\alpha\right)}\partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right) \\ &= tr\left(a\frac{\partial\left(\partial^\mu \bar{\mathcal{A}}_\mu\right)}{\partial\left(\partial^0 \bar{\mathcal{A}}_\alpha\right)}\partial_\nu \mathcal{A}^\nu + c\frac{\partial\left(\partial^\nu \bar{\mathcal{A}}_\mu\right)}{\partial\left(\partial^0 \bar{\mathcal{A}}_\alpha\right)}\partial_\nu \mathcal{A}^\mu\right) \\ &= tr\left(a g_0^\alpha \partial_\nu \mathcal{A}^\nu + c g_0^\nu g_\mu^\alpha \partial_\nu \mathcal{A}^\mu\right) \\ &= tr\left(a g_0^\alpha \partial_\nu \mathcal{A}^\nu + c\partial_0 \mathcal{A}^\alpha\right)\end{aligned}$$

Hamilton量为[17]

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \pi^{\alpha}\dot{\mathcal{A}}_{\alpha} + \dot{\bar{\mathcal{A}}}_{\alpha}\bar{\pi}^{\alpha} - \mathcal{L} \\ &= (a+c)\,\dot{\bar{\mathcal{A}}}_0\dot{\mathcal{A}}^0 + c\dot{\bar{\mathcal{A}}}_i\dot{\mathcal{A}}^i - c\partial_i\bar{\mathcal{A}}_0\partial^i\mathcal{A}^0 - a\partial_i\bar{\mathcal{A}}^i\partial_j\mathcal{A}^j - c\partial_i\bar{\mathcal{A}}_j\partial^i\mathcal{A}^j - d\bar{\mathcal{A}}_\mu\mathcal{A}^\mu.\end{aligned} \tag{7.23}$$

[17]Hamilton量

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H} = \pi^{\alpha}\dot{\mathcal{A}}_{\alpha} + \dot{\bar{\mathcal{A}}}_{\alpha}\bar{\pi}^{\alpha} - \mathcal{L} \\
&= tr\left(a\partial_\mu\bar{\mathcal{A}}^\mu g_0^\alpha + c\partial_0\bar{\mathcal{A}}^\alpha\right)\dot{\mathcal{A}}_\alpha + \dot{\bar{\mathcal{A}}}_\alpha tr\left(ag_0^\alpha\partial_\nu\mathcal{A}^\nu + c\partial_0\mathcal{A}^\alpha\right) - tr\left(a\partial_\mu\bar{\mathcal{A}}^\mu\partial_\nu\mathcal{A}^\nu + c\partial_\nu\bar{\mathcal{A}}_\mu\partial^\nu\mathcal{A}^\mu + d\bar{\mathcal{A}}_\mu\mathcal{A}^\mu\right) \\
&= tr\left(a\partial_\mu\bar{\mathcal{A}}^\mu g_0^\alpha\dot{\mathcal{A}}_\alpha + c\dot{\bar{\mathcal{A}}}^\alpha\dot{\mathcal{A}}_\alpha\right) + tr\left(ag_0^\alpha\dot{\bar{\mathcal{A}}}_\alpha\partial_\nu\mathcal{A}^\nu + c\dot{\bar{\mathcal{A}}}_\alpha\dot{\mathcal{A}}^\alpha\right) - tr\left(a\partial_\mu\bar{\mathcal{A}}^\mu\partial_\nu\mathcal{A}^\nu + c\partial_\nu\bar{\mathcal{A}}_\mu\partial^\nu\mathcal{A}^\mu + d\bar{\mathcal{A}}_\mu\mathcal{A}^\mu\right) \\
&= tr\left(a\partial_\mu\bar{\mathcal{A}}^\mu\dot{\mathcal{A}}_0 + c\dot{\bar{\mathcal{A}}}^\alpha\dot{\mathcal{A}}_\alpha + a\dot{\bar{\mathcal{A}}}_0\partial_\nu\mathcal{A}^\nu + c\dot{\bar{\mathcal{A}}}_\alpha\dot{\mathcal{A}}^\alpha - a\partial_\mu\bar{\mathcal{A}}^\mu\partial_\nu\mathcal{A}^\nu - c\partial_\nu\bar{\mathcal{A}}_\mu\partial^\nu\mathcal{A}^\mu - d\bar{\mathcal{A}}_\mu\mathcal{A}^\mu\right) \\
&= tr\begin{pmatrix} a\dot{\bar{\mathcal{A}}}^0\dot{\mathcal{A}}_0 + a\partial_i\bar{\mathcal{A}}^i\dot{\mathcal{A}}_0 + c\dot{\bar{\mathcal{A}}}^0\dot{\mathcal{A}}_0 + c\dot{\bar{\mathcal{A}}}^i\dot{\mathcal{A}}_i + a\dot{\bar{\mathcal{A}}}_0\partial_\nu\mathcal{A}^\nu + c\dot{\bar{\mathcal{A}}}_0\dot{\mathcal{A}}^0 + c\dot{\bar{\mathcal{A}}}_i\dot{\mathcal{A}}^i \\ -a\dot{\bar{\mathcal{A}}}^0\partial_\nu\mathcal{A}^\nu - a\partial_i\bar{\mathcal{A}}^i\partial_\nu\mathcal{A}^\nu - c\partial_0\bar{\mathcal{A}}_\mu\partial^0\mathcal{A}^\mu - c\partial_i\bar{\mathcal{A}}_\mu\partial^i\mathcal{A}^\mu - d\bar{\mathcal{A}}_\mu\mathcal{A}^\mu \end{pmatrix} \\
&= tr\begin{pmatrix} a\dot{\bar{\mathcal{A}}}^0\dot{\mathcal{A}}_0 + a\partial_i\bar{\mathcal{A}}^i\dot{\mathcal{A}}_0 + c\dot{\bar{\mathcal{A}}}^0\dot{\mathcal{A}}_0 + c\dot{\bar{\mathcal{A}}}^i\dot{\mathcal{A}}_i + a\dot{\bar{\mathcal{A}}}_0\dot{\mathcal{A}}^0 + a\dot{\bar{\mathcal{A}}}_0\partial_i\mathcal{A}^i + c\dot{\bar{\mathcal{A}}}_0\dot{\mathcal{A}}^0 + c\dot{\bar{\mathcal{A}}}_i\dot{\mathcal{A}}^i \\ -a\dot{\bar{\mathcal{A}}}^0\dot{\mathcal{A}}^0 - a\dot{\bar{\mathcal{A}}}^0\partial_i\mathcal{A}^i - a\partial_i\bar{\mathcal{A}}^i\dot{\mathcal{A}}^0 - a\partial_i\bar{\mathcal{A}}^i\partial_j\mathcal{A}^j - c\dot{\bar{\mathcal{A}}}_0\dot{\mathcal{A}}^0 - c\partial_0\bar{\mathcal{A}}_i\partial^0\mathcal{A}^i - c\partial_i\bar{\mathcal{A}}_0\partial^i\mathcal{A}^0 - c\partial_i\bar{\mathcal{A}}_j\partial^i\mathcal{A}^j - d\bar{\mathcal{A}}_\mu\mathcal{A}^\mu \end{pmatrix} \\
&= tr\begin{pmatrix} \left(a\dot{\bar{\mathcal{A}}}^0\dot{\mathcal{A}}_0 + c\dot{\bar{\mathcal{A}}}^0\dot{\mathcal{A}}_0 + a\dot{\bar{\mathcal{A}}}_0\dot{\mathcal{A}}^0 + c\dot{\bar{\mathcal{A}}}_0\dot{\mathcal{A}}^0 - a\dot{\bar{\mathcal{A}}}^0\dot{\mathcal{A}}^0 - c\dot{\bar{\mathcal{A}}}_0\dot{\mathcal{A}}^0\right) \\ + \left(c\dot{\bar{\mathcal{A}}}^i\dot{\mathcal{A}}_i + c\dot{\bar{\mathcal{A}}}_i\dot{\mathcal{A}}^i - c\dot{\bar{\mathcal{A}}}_i\dot{\mathcal{A}}^i\right) + \left(a\partial_i\bar{\mathcal{A}}^i\dot{\mathcal{A}}_0 - a\partial_i\bar{\mathcal{A}}^i\dot{\mathcal{A}}^0\right) \\ + \left(a\dot{\bar{\mathcal{A}}}_0\partial_i\mathcal{A}^i - a\dot{\bar{\mathcal{A}}}^0\partial_i\mathcal{A}^i\right) - c\partial_i\bar{\mathcal{A}}_0\partial^i\mathcal{A}^0 - a\partial_i\bar{\mathcal{A}}^i\partial_j\mathcal{A}^j - c\partial_i\bar{\mathcal{A}}_j\partial^i\mathcal{A}^j - d\bar{\mathcal{A}}_\mu\mathcal{A}^\mu \end{pmatrix} \\
&= tr\left((a+c)\,\dot{\bar{\mathcal{A}}}_0\dot{\mathcal{A}}^0 + c\dot{\bar{\mathcal{A}}}_i\dot{\mathcal{A}}^i - c\partial_i\bar{\mathcal{A}}_0\partial^i\mathcal{A}^0 - a\partial_i\bar{\mathcal{A}}^i\partial_j\mathcal{A}^j - c\partial_i\bar{\mathcal{A}}_j\partial^i\mathcal{A}^j - d\bar{\mathcal{A}}_\mu\mathcal{A}^\mu\right)
\end{aligned}$$

其中用到我们有

$$\begin{aligned}
\pi^0 &= tr\left(a\partial_\mu\bar{\mathcal{A}}^\mu + c\partial_0\bar{\mathcal{A}}^0\right) \\
\pi^i &= tr\left(c\partial_0\bar{\mathcal{A}}^i\right) \\
\bar{\pi}^0 &= tr\left(\partial_\nu\mathcal{A}^\nu + c\partial_0\mathcal{A}^0\right) \\
\bar{\pi}^i &= tr\left(c\partial_0\mathcal{A}^i\right)
\end{aligned}$$

按照前面对$\bar{\mathcal{A}}$的讨论，我们选择了$\bar{\mathcal{A}}_\mu = \mathcal{A}_\mu^\dagger$。这样Lagrange量为

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= (a+c)\,\dot{\mathcal{A}}_0^\dagger\dot{\mathcal{A}}^0 + c\dot{\mathcal{A}}_i^\dagger\dot{\mathcal{A}}^i - c\partial_i\mathcal{A}_0^\dagger\partial^i\mathcal{A}^0 - a\partial_i\mathcal{A}^{i\dagger}\partial_j\mathcal{A}^j - c\partial_i\mathcal{A}_j^\dagger\partial^i\mathcal{A}^j - d\mathcal{A}_\mu^\dagger\mathcal{A}^\mu \\ &= (a+c)\left|\dot{\mathcal{A}}^0\right|^2 - c\left(\left|\dot{\mathcal{A}}_1\right|^2 + \left|\dot{\mathcal{A}}_2\right|^2 + \left|\dot{\mathcal{A}}_3\right|^2\right) \\ &- c\partial_i\mathcal{A}_0^\dagger\partial^i\mathcal{A}^0 - a\left|\partial_i\mathcal{A}^i\right|^2 - c\partial_i\mathcal{A}_j^\dagger\partial^i\mathcal{A}^j - d\left(\mathcal{A}_0^\dagger\mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_1^\dagger\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2^\dagger\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_3^\dagger\mathcal{A}_3\right) \\ &= (a+c)\left|\dot{\mathcal{A}}^0\right|^2 - c\left(\left|\dot{\mathcal{A}}_1\right|^2 + \left|\dot{\mathcal{A}}_2\right|^2 + \left|\dot{\mathcal{A}}_3\right|^2\right) \\ &- c\partial_i\mathcal{A}_0^\dagger\partial^i\mathcal{A}^0 - a\left|\partial_i\mathcal{A}^i\right|^2 - c\partial_i\mathcal{A}_j^\dagger\partial^i\mathcal{A}^j - d\left(|\mathcal{A}_0|^2 - |\mathcal{A}_1|^2 - |\mathcal{A}_2|^2 - |\mathcal{A}_3|^2\right)\end{aligned} \tag{7.24}$$

能量有下界

我们来确定待定常数a，c和d。我们的依据是这样一个基本假设：世界是稳定的。这是我们所引入的为数不多的基本假设之一。

Hamilton量必须有下界是一个非常强的要求。对自由粒子而言，能量有下界要求在任何情况下能量都必须是正的。我们可以考虑一些特殊情况而不失一般性。Lagrange量（7.24）第一项$(a+c)\left|\dot{\mathcal{A}}^0\right|^2$是包含$\dot{\mathcal{A}}^0$的唯一的一项。考虑$\dot{\mathcal{A}}^0$非常大的情况。这时Lagrange量只有第一项，即

$$\mathcal{H} \sim (a+c)\left|\dot{\mathcal{A}}^0\right|^2.$$

由于它是个平方项，要求它大于零就是要求

$$a \geq -c.$$

再考虑，比如，$\partial_1\mathcal{A}^1$特别大的情况，这时Lagrange量为

$$\mathcal{H} \sim -a\left|\partial_1\mathcal{A}^1\right|^2 - c\left|\partial^1\mathcal{A}^1\right|^2 = -(a+c)\left|\partial_1\mathcal{A}^1\right|^2.$$

这也是个平方项，要求它大于零就是要求

$$a \leq -c.$$

综合这两个结果有

$$a = -c$$

考虑$\left|\dot{\mathcal{A}}_1\right|$，$\left|\dot{\mathcal{A}}_2\right|$和$\left|\dot{\mathcal{A}}_3\right|$特别大的情况，我们有

$$\mathcal{H} \sim -c\left(\left|\dot{\mathcal{A}}_1\right|^2 + \left|\dot{\mathcal{A}}_2\right|^2 + \left|\dot{\mathcal{A}}_3\right|^2\right) \tag{7.25}$$

这是一个平方和，这项大于零要求

$$c \leq 0$$

从而

$$a = -c \geq 0$$

此时Hamilton量为

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= (a+c)\left|\dot{\mathcal{A}}^0\right|^2 - c\left(\left|\dot{\mathcal{A}}_1\right|^2 + \left|\dot{\mathcal{A}}_2\right|^2 + \left|\dot{\mathcal{A}}_3\right|^2\right) - c\partial_i\mathcal{A}_0^\dagger\partial^i\mathcal{A}^0 - a\left|\partial_i\mathcal{A}^i\right|^2 - c\partial_i\mathcal{A}_j^\dagger\partial^i\mathcal{A}^j \\
&\quad - d\left(|\mathcal{A}_0|^2 - |\mathcal{A}_1|^2 - |\mathcal{A}_2|^2 - |\mathcal{A}_3|^2\right) \\
&= (a-a)\left|\dot{\mathcal{A}}^0\right|^2 + a\left(\left|\dot{\mathcal{A}}_1\right|^2 + \left|\dot{\mathcal{A}}_2\right|^2 + \left|\dot{\mathcal{A}}_3\right|^2\right) + a\partial_i\mathcal{A}_0^\dagger\partial^i\mathcal{A}^0 - a\left|\partial_i\mathcal{A}^i\right|^2 + a\partial_i\mathcal{A}_j^\dagger\partial^i\mathcal{A}^j \\
&\quad - d\left(|\mathcal{A}_0|^2 - |\mathcal{A}_1|^2 - |\mathcal{A}_2|^2 - |\mathcal{A}_3|^2\right) \\
&= |a|\left(\left|\dot{\mathcal{A}}_1\right|^2 + \left|\dot{\mathcal{A}}_2\right|^2 + \left|\dot{\mathcal{A}}_3\right|^2\right) + |a|\,\partial_i\mathcal{A}_0^\dagger\partial^i\mathcal{A}^0 - |a|\left|\partial_i\mathcal{A}^i\right|^2 + |a|\,\partial_i\mathcal{A}_j^\dagger\partial^i\mathcal{A}^j - d\left(|\mathcal{A}_0|^2 - |\mathcal{A}_1|^2 - |\mathcal{A}_2|^2\right. \\
&= |a|\left(\left|\dot{\mathcal{A}}_1\right|^2 + \left|\dot{\mathcal{A}}_2\right|^2 + \left|\dot{\mathcal{A}}_3\right|^2 + \partial_i\mathcal{A}_0^\dagger\partial^i\mathcal{A}^0 - \left|\partial_i\mathcal{A}^i\right|^2 + \partial_i\mathcal{A}_j^\dagger\partial^i\mathcal{A}^j\right) - d\left(|\mathcal{A}_0|^2 - |\mathcal{A}_1|^2 - |\mathcal{A}_2|^2 - |\mathcal{A}_3|^2\right.
\end{aligned}$$

$\mathcal{F}^{\mu\nu}$

前面由能量有下界这样的条件将Lagrange量确定到

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= |a|\left(\partial_\mu\bar{\mathcal{A}}^\mu\partial_\nu\mathcal{A}^\nu - \partial_\nu\bar{\mathcal{A}}_\mu\partial^\nu\mathcal{A}^\mu\right) + d\bar{\mathcal{A}}_\mu\mathcal{A}^\mu && (7.26)\\
&= |a|\left(\partial_\mu\mathcal{A}^{\mu\dagger}\partial_\nu\mathcal{A}^\nu - \partial_\nu\mathcal{A}_\mu^\dagger\partial^\nu\mathcal{A}^\mu\right) + d\mathcal{A}_\mu^\dagger\mathcal{A}^\mu && (7.27)\\
&= |a|\left(\partial_\mu\mathcal{A}^{\mu*}\partial_\nu\mathcal{A}^\nu - \partial_\nu\mathcal{A}_\mu^*\partial^\nu\mathcal{A}^\mu\right) + d\mathcal{A}_\mu^*\mathcal{A}^\mu. && (7.28)
\end{aligned}$$

由此我们可以得到运动方程。

取$\mathcal{A}^\mu$为广义坐标，我们有

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha \mathcal{A}_\beta\right)} &= \partial_\alpha \frac{\partial}{\partial\left(\partial_\alpha \mathcal{A}_\beta\right)}\left[|a|\left(\partial_\mu \mathcal{A}^{\mu *} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu-\partial_\nu \mathcal{A}_\mu^* \partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right)+d \mathcal{A}_\mu^* \mathcal{A}^\mu\right] \\
&= |a| \partial_\alpha\left[\partial_\mu \mathcal{A}^{\mu *} \frac{\partial\left(\partial_\nu \mathcal{A}^\nu\right)}{\partial\left(\partial_\alpha \mathcal{A}_\beta\right)}-\partial_\nu \mathcal{A}_\mu^* \frac{\partial\left(\partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right)}{\partial\left(\partial_\alpha \mathcal{A}_\beta\right)}\right] \\
&= |a| \partial_\alpha\left[\partial_\mu \mathcal{A}^{\mu *} \frac{\partial\left(\partial_\nu \mathcal{A}_\rho\right)}{\partial\left(\partial_\alpha \mathcal{A}_\beta\right)} g^{\nu \rho}-\partial^\nu \mathcal{A}^{\mu *} \frac{\partial\left(\partial_\nu \mathcal{A}_\mu\right)}{\partial\left(\partial_\alpha \mathcal{A}_\beta\right)}\right] \\
&= |a| \partial_\alpha\left(\partial_\mu \mathcal{A}^{\mu *} g_\nu^\alpha g_\rho^\beta g^{\nu \rho}-\partial^\nu \mathcal{A}^{\mu *} g_\nu^\alpha g_\mu^\beta\right) \\
&= |a| \partial_\alpha\left(\partial_\mu \mathcal{A}^{\mu *} g^{\alpha \beta}-\partial^\alpha \mathcal{A}^{\beta *}\right) \\
&= |a|\left(\partial^\beta \partial_\mu \mathcal{A}^{\mu *}-\partial_\alpha \partial^\alpha \mathcal{A}^{\beta *}\right) \\
&= -|a| \partial_\alpha\left(\partial^\alpha \mathcal{A}^{\beta *}-\partial^\beta \mathcal{A}^{\alpha *}\right)
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_\beta} &= \frac{\partial}{\partial \mathcal{A}_\beta}\left[|a|\left(\partial_\mu \mathcal{A}^{\mu *} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu-\partial_\nu \mathcal{A}_\mu^* \partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right)+d \mathcal{A}_\mu^* \mathcal{A}^\mu\right] \\
&= d \mathcal{A}_\mu^* g^{\mu \beta} \\
&= d \mathcal{A}^{\beta *}.
\end{aligned}$$

这样运动方程为

$$-|a| \partial_\alpha\left(\partial^\alpha \mathcal{A}^{\beta *}-\partial^\beta \mathcal{A}^{\alpha *}\right)-d \mathcal{A}^{\beta *}=0 \tag{7.29}$$

另外，我们还可以取$\mathcal{A}_\mu^*$为广义坐标，此时

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha \mathcal{A}_\beta^*\right)} &= \partial_\alpha \frac{\partial}{\partial\left(\partial_\alpha \mathcal{A}_\beta^*\right)}\left[|a|\left(\partial_\mu \mathcal{A}^{\mu *} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu-\partial_\nu \mathcal{A}_\mu^* \partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right)+d \mathcal{A}_\mu^* \mathcal{A}^\mu\right] \\
&= |a| \partial_\alpha\left[\frac{\partial\left(\partial_\mu \mathcal{A}^{\mu *}\right)}{\partial\left(\partial_\alpha \mathcal{A}_\beta^*\right)} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu-\frac{\partial\left(\partial_\nu \mathcal{A}_\mu^*\right)}{\partial\left(\partial_\alpha \mathcal{A}_\beta^*\right)} \partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right] \\
&= |a| \partial_\alpha\left[\frac{\partial\left(\partial_\mu \mathcal{A}_\rho^*\right)}{\partial\left(\partial_\alpha \mathcal{A}_\beta^*\right)} g^{\mu \rho} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu-\frac{\partial\left(\partial_\nu \mathcal{A}_\mu^*\right)}{\partial\left(\partial_\alpha \mathcal{A}_\beta^*\right)} \partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right] \\
&= |a| \partial_\alpha\left(g_\mu^\alpha g_\rho^\beta g^{\mu \rho} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu-g_\nu^\alpha g_\mu^\beta \partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right) \\
&= |a| \partial_\alpha\left(g^{\alpha \beta} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu-\partial^\alpha \mathcal{A}^\beta\right) \\
&= |a|\left(\partial^\beta \partial_\nu \mathcal{A}^\nu-\partial_\alpha \partial^\alpha \mathcal{A}^\beta\right) \\
&= -|a| \partial_\alpha\left(\partial^\alpha \mathcal{A}^\beta-\partial^\beta \mathcal{A}^\alpha\right),
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}^*_\beta} &= \frac{\partial}{\partial \mathcal{A}^*_\beta}\left[|a|\left(\partial_\mu \mathcal{A}^{\mu *}\partial_\nu \mathcal{A}^\nu - \partial_\nu \mathcal{A}^*_\mu \partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right) + d\mathcal{A}^*_\mu \mathcal{A}^\mu\right] \\ &= d g^\beta_\mu \mathcal{A}^\mu \\ &= d\mathcal{A}^\beta .\end{aligned}$$

因此方程为

$$-|a|\,\partial_\alpha\left(\partial^\alpha \mathcal{A}^\beta - \partial^\beta \mathcal{A}^\alpha\right) - d\mathcal{A}^\beta = 0 \tag{7.30}$$

对方程（7.29）取复共轭有$-|a|\,\partial_\alpha\left(\partial^\alpha \mathcal{A}^\beta - \partial^\beta \mathcal{A}^\alpha\right) - d^*\mathcal{A}^\beta = 0$。与方程（7.30）对比有

$$d = d^*,$$

说明d是个实数。

方程（7.30）的形式启发我们引入

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu . \tag{7.31}$$

这可以使方程（7.30）表示成更紧凑的形式

$$|a|\,\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} + d\mathcal{A}^\nu = 0. \tag{7.32}$$

这个$\mathcal{F}^{\mu\nu}$具有明显的反对称形式，这一点是非常深刻的。回顾这个$\mathcal{F}^{\mu\nu}$是怎样得到的，我们可以看出，这是能量有下界的要求导致的（你可以尝试取一个对称的$\mathcal{F}^{\mu\nu}$，会发现能量不再有下界）。

当然，我们也可以用$\mathcal{F}^{\mu\nu}$来表示Lagrange量。$\mathcal{F}^{\mu\nu}$中只包含$\mathcal{A}^\mu$的导数项，因此只需将Lagrange量（7.26）中的含导数的项与$\mathcal{F}^{\mu\nu}$对应上。Lagrange量中的导数项是二次的，$\mathcal{F}^{\mu\nu}$是一次的，因此Lagrange量中一定是$\mathcal{F}^{\mu\nu}$的平方。$\mathcal{F}^{\mu\nu}$的平方是

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^*_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} &= \left(\partial_\mu \mathcal{A}^*_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}^*_\mu\right)\left(\partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right) \\ &= \left(\partial_\mu \mathcal{A}^*_\nu \partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial_\nu \mathcal{A}^*_\mu \partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial_\mu \mathcal{A}^*_\nu \partial^\nu \mathcal{A}^\mu + \partial_\nu \mathcal{A}^*_\mu \partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right) \\ &= 2\left(\partial_\mu \mathcal{A}^*_\nu \partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial_\mu \mathcal{A}^*_\nu \partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right)\end{aligned} \tag{7.33}$$

这与Lagrange量（7.26）中的含导数的项并不相等。但是其中

$$\begin{aligned}\partial_\mu \mathcal{A}^*_\nu \partial^\nu \mathcal{A}^\mu &= \partial_\mu \left(\mathcal{A}^*_\nu \partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right) - \mathcal{A}^*_\nu \partial_\mu \partial^\nu \mathcal{A}^\mu \\ &= \partial_\mu \left(\mathcal{A}^*_\nu \partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right) - \left[\partial^\nu \left(\mathcal{A}^*_\nu \partial_\mu \mathcal{A}^\mu\right) - \partial^\nu \mathcal{A}^*_\nu \partial_\mu \mathcal{A}^\mu\right] \\ &= \partial_\mu \left(\mathcal{A}^*_\nu \partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right) - \partial^\nu \left(\mathcal{A}^*_\nu \partial_\mu \mathcal{A}^\mu\right) + \partial^\nu \mathcal{A}^*_\nu \partial_\mu \mathcal{A}^\mu \\ &= \partial_\mu \mathcal{A}^{\mu *} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu + \partial_\mu \left(\mathcal{A}^*_\nu \partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right) - \partial^\nu \left(\mathcal{A}^*_\nu \partial_\mu \mathcal{A}^\mu\right) \\ &= \partial_\mu \mathcal{A}^{\mu *} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu + \partial_\mu \left(\mathcal{A}^*_\nu \partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right) - \partial_\mu \left(\mathcal{A}^{\mu *} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu\right) \\ &= \partial_\mu \mathcal{A}^{\mu *} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu + \partial_\mu \left(\mathcal{A}^*_\nu \partial^\nu \mathcal{A}^\mu - \mathcal{A}^{\mu *} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu\right)\end{aligned}$$

这样有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^*_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} &= 2\left(\partial_\mu \mathcal{A}^*_\nu \partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial_\mu \mathcal{A}^*_\nu \partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right) \\ &= 2\partial_\mu \mathcal{A}^*_\nu \partial^\mu \mathcal{A}^\nu - 2\partial_\mu \mathcal{A}^{\mu *} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu - 2\partial_\mu \left(\mathcal{A}^*_\nu \partial^\nu \mathcal{A}^\mu - \mathcal{A}^{\mu *} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu\right) \\ &= 2\left(\partial_\mu \mathcal{A}^*_\nu \partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial_\mu \mathcal{A}^{\mu *} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu\right) - 2\partial_\mu \left(\mathcal{A}^*_\nu \partial^\nu \mathcal{A}^\mu - \mathcal{A}^{\mu *} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu\right)\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\mathcal{F}^*_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} + \partial_\mu \left(\mathcal{A}^*_\nu \partial^\nu \mathcal{A}^\mu - \mathcal{A}^{\mu *} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu\right) = \left(\partial_\mu \mathcal{A}^*_\nu \partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial_\mu \mathcal{A}^{\mu *} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu\right)$$

这样Lagrange量可以写为

$$\mathcal{L} = -|a| \left(\frac{1}{2}\mathcal{F}^*_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} + \partial_\mu \left(\mathcal{A}^*_\nu \partial^\nu \mathcal{A}^\mu - \mathcal{A}^{\mu *} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu\right)\right) + d\mathcal{A}^*_\mu \mathcal{A}^\mu.$$

这个Lagrange量中包含一个全微分项。我们知道，Lagrange量相差一个全微分相当于作用量相差一个常数，不影响运动方程。因此我们可以将Lagrange量取成

$$\mathcal{L} = -\frac{|a|}{2}\mathcal{F}^*_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} + d\mathcal{A}^*_\mu \mathcal{A}^\mu. \tag{7.34}$$

$\tilde{\mathcal{F}}^{\mu\nu}$

前面我们引入了反对称张量

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu.$$

可以直接验证反对称的$\mathcal{F}^{\mu\nu}$满足[18]

$$\partial^\lambda \mathcal{F}^{\mu\nu} + \partial^\mu \mathcal{F}^{\nu\lambda} + \partial^\nu \mathcal{F}^{\lambda\mu} = 0. \tag{7.35}$$

这个结果其实有更深刻的理由：$\mathcal{F}$是$\mathcal{A}$的外微分，即

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A}$$

对外微分我们有（外微分是反对称的）

$$d^2 = 0,$$

因此

$$d\mathcal{F} = d^2\mathcal{A} = 0.$$

方程（7.35）可以写成更紧凑的形式[19]

$$\varepsilon_{\lambda\sigma\mu\nu}\partial^\lambda \mathcal{F}^{\mu\nu} = \partial^\lambda \left(\varepsilon_{\lambda\sigma\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}\right) = 0.$$

这启发我们引入这样一个反对称张量

$$\tilde{\mathcal{F}}^{\lambda\sigma} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\lambda\sigma\mu\nu}\mathcal{F}_{\mu\nu}.$$

这样（7.35）可以写成

$$\partial_\mu \tilde{\mathcal{F}}^{\mu\nu} = 0$$

的形式。

这个$\tilde{F}^{\mu\nu}$称为$\mathcal{F}^{\mu\nu}$的对偶张量。这个对偶在数学上有非常深刻的含义，就是所谓的Hodge$*$对偶。

18

$$\begin{aligned}
&\partial^\lambda \mathcal{F}^{\mu\nu} + \partial^\mu \mathcal{F}^{\nu\lambda} + \partial^\nu \mathcal{F}^{\lambda\mu} \\
&= \partial^\lambda \left(\partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right) + \partial^\mu \left(\partial^\nu \mathcal{A}^\lambda - \partial^\lambda \mathcal{A}^\nu\right) + \partial^\nu \left(\partial^\lambda \mathcal{A}^\mu - \partial^\mu \mathcal{A}^\lambda\right) \\
&= \partial^\lambda\partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\lambda\partial^\nu \mathcal{A}^\mu + \partial^\mu\partial^\nu \mathcal{A}^\lambda - \partial^\mu\partial^\lambda \mathcal{A}^\nu + \partial^\nu\partial^\lambda \mathcal{A}^\mu - \partial^\nu\partial^\mu \mathcal{A}^\lambda \\
&= 0
\end{aligned}$$

19

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\lambda\sigma\mu\nu}\left(\partial^\lambda \mathcal{F}^{\mu\nu} + \partial^\mu \mathcal{F}^{\nu\lambda} + \partial^\nu \mathcal{F}^{\lambda\mu}\right) &= 0 \\
\varepsilon_{\lambda\sigma\mu\nu}\partial^\lambda \mathcal{F}^{\mu\nu} + \varepsilon_{\lambda\sigma\mu\nu}\partial^\mu \mathcal{F}^{\nu\lambda} + \varepsilon_{\lambda\sigma\mu\nu}\partial^\nu \mathcal{F}^{\lambda\mu} &= 0 \\
\varepsilon_{\lambda\sigma\mu\nu}\partial^\lambda \mathcal{F}^{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\sigma\nu\lambda}\partial^\mu \mathcal{F}^{\nu\lambda} + \varepsilon_{\nu\sigma\lambda\mu}\partial^\nu \mathcal{F}^{\lambda\mu} &= 0 \\
3\varepsilon_{\lambda\sigma\mu\nu}\partial^\lambda \mathcal{F}^{\mu\nu} &= 0
\end{aligned}$$

$\mathcal{A}^\mu$：借助一点儿相互作用

基于与前面同样的理由，进一步确定Lagrange量需要借助一些相互作用。我们考虑一个恒力的作用。加入一个恒力J_μLagrange量普遍地可以写成（这也是考虑厄米要求后的最普遍的情况）

$$\mathcal{L} = -\frac{|a|}{2}\mathcal{F}^*_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} + |d|\,\mathcal{A}^*_\mu\mathcal{A}^\mu + \left(J^*_\mu\mathcal{A}^{\mu*} + J_\mu\mathcal{A}^\mu\right).$$

由此可得运动方程。

取$\mathcal{A}^\mu$为广义坐标有

$$\partial_\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha\mathcal{A}_\beta\right)} = -\,|a|\,\partial_\alpha\left(\partial^\alpha\mathcal{A}^{\beta*} - \partial^\beta\mathcal{A}^{\alpha*}\right)$$

和

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathcal{A}_\beta} &= \frac{\partial}{\partial\mathcal{A}_\beta}\left[-\frac{|a|}{2}\mathcal{F}^*_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} + d\mathcal{A}^*_\mu\mathcal{A}^\mu + \left(J^*_\mu\mathcal{A}^{\mu*} + J_\mu\mathcal{A}^\mu\right)\right]\\ &= d\mathcal{A}^*_\mu g^{\mu\beta} + J_\mu g^{\mu\beta}\\ &= d\mathcal{A}^{\beta*} + J^\beta.\end{aligned}$$

得到方程为

$$-\,|a|\,\partial_\alpha\left(\partial^\alpha\mathcal{A}^{\beta*} - \partial^\beta\mathcal{A}^{\alpha*}\right) - d\mathcal{A}^{\beta*} = J^\beta. \tag{7.36}$$

取$\mathcal{A}^*_\mu$为广义坐标有

$$\partial_\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha\mathcal{A}^*_\beta\right)} = -\,|a|\,\partial_\alpha\left(\partial^\alpha\mathcal{A}^\beta - \partial^\beta\mathcal{A}^\alpha\right),$$

和

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathcal{A}^*_\beta} &= \frac{\partial}{\partial\mathcal{A}^*_\beta}\left[-\frac{|a|}{2}\mathcal{F}^*_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} + d\mathcal{A}^*_\mu\mathcal{A}^\mu + \left(J^*_\mu\mathcal{A}^{\mu*} + J_\mu\mathcal{A}^\mu\right)\right]\\ &= dg^\beta_\mu\mathcal{A}^\mu + J^*_\mu g^{\mu\beta}\\ &= d\mathcal{A}^\beta + J^{\beta*}.\end{aligned}$$

得到方程为

$$-\,|a|\,\partial_\alpha\left(\partial^\alpha\mathcal{A}^\beta - \partial^\beta\mathcal{A}^\alpha\right) - d\mathcal{A}^\beta = J^{\beta*}. \tag{7.37}$$

现在，一切都取决于相互作用流的性质。我们取最简单的复标量场流作为例子[20]，得到的结果是普遍的。标量流为

$$J^\mu = \phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*.$$

[20] 实标量场是真标量场，没有守恒流。

显然有

$$J^{\mu *}=-\left(\phi^{*}\partial^{\mu}\phi-\phi\partial^{\mu}\phi^{*}\right)=-J^{\mu}.$$

于是（7.37）为

$$-|a|\,\partial_{\alpha}\left(\partial^{\alpha}\mathcal{A}^{\beta}-\partial^{\beta}\mathcal{A}^{\alpha}\right)-d\mathcal{A}^{\beta}=-J^{\beta}. \tag{7.38}$$

对比（7.36）和（7.38），有

$$\mathcal{A}^{\beta *}=-\mathcal{A}^{\beta}.$$

这要求场量$\mathcal{A}^{\mu}$是一个纯虚数。我们不妨将它表示成

$$\mathcal{A}^{\mu}\equiv igA^{\mu}. \tag{7.39}$$

这里g是为了今后方便引入的一个实参数，当然你也可以将它吸收到A^{μ}中。

$F^{\mu\nu}$和$\tilde{F}^{\mu\nu}$

利用（7.39）的关系，我们可以将矢量场Lagrange量和方程用实的A^{μ}表示。

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{\mu\nu}&=\partial^{\mu}\mathcal{A}^{\nu}-\partial^{\nu}\mathcal{A}^{\mu}\\&=ig\left(\partial^{\mu}A^{\nu}-\partial^{\nu}A^{\mu}\right)\\&\equiv igF^{\mu\nu}.\end{aligned}$$

由（7.34）有

$$\mathcal{L}=g^{2}\left(-\frac{|a|}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+dA_{\mu}A^{\mu}\right). \tag{7.40}$$

同样，可以引入

$$\tilde{\mathcal{F}}^{\mu\nu}=ig\tilde{F}^{\mu\nu}.$$

这样有

$$\tilde{F}^{\lambda\sigma}=\frac{1}{2}\varepsilon^{\lambda\sigma\mu\nu}F_{\mu\nu}.$$

无（自旋以外）内部自由度的自由矢量场Lagrange量

由此得到的运动方程为

$$|a|\,\partial_{\mu}F^{\mu\nu}+dA^{\nu}=0. \tag{7.41}$$

为了确定参数我们将所得结果与实验对比。将有质量的矢量场方程，也就是Proca方程

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu}+m^{2}A^{\nu}=0. \tag{7.42}$$

看作是唯象方程。

对比这两个方程我们有

$$d = Cm^2,$$
$$|a| = C.$$

于是Lagrange量为

$$\mathcal{L} = g^2 C \left(-\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + m^2 A_\mu A^\mu \right).$$

确定C仍需要借助相互作用。考虑一个恒力的作用，运动方程为

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = J^\nu. \tag{7.43}$$

相应的Lagrange量为

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= g^2 C \left(-\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + m^2 A_\mu A^\mu \right) + q J_\mu A^\mu. \\ &= g^2 \left(-\frac{C}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + C m^2 A_\mu A^\mu \right) + q J_\mu A^\mu\end{aligned}$$

方程为

$$2g^2 C \partial_\mu F^{\mu\nu} + 2g^2 C m^2 A^\nu = q J^\nu$$

与（7.43）有

$$C = \frac{1}{2g^2},$$
$$q = 1.$$

所以Lagrange量为

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + m^2 A_\mu A^\mu \right) + J_\mu A^\mu \\ &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu + J_\mu A^\mu.\end{aligned}$$

由此知自由矢量场的Lagrange量为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu.$$

自然地，我们也得到了运动方程

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0.$$

这里的运动方程是我们从Lagrange量得到了，不再是唯象的经验结果了。

场强

前面我们引入了张量$F^{\mu\nu}$来描述矢量场。这里我们考虑$F^{\mu\nu}$的各个分量。反对称的$F^{\mu\nu}$一共有6个分量，分别考虑它们。

其中三个分量是

$$F^{0i}=\partial^0 A^i-\partial^i A^0=\frac{\partial A^i}{\partial t}-\frac{\partial A^0}{\partial x_i}=\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}+\nabla A^0\right)^i.$$

容易看出，非常巧合，$F^{\mu\nu}$的这三个分量F^{0i}在三维转动下完全按照一个三维欧氏空间的矢量那样变换；也就是说，张量$F^{\mu\nu}$的这三个分量可以看作是三维空间中的一个矢量。我们将它写成

$$\mathbf{E}=\left(-F^{01},-F^{02},-F^{03}\right)=\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}+\nabla A^0.$$

这里的负号是出于习惯的考虑。

另外三个独立的分量是

$$F^{ij}=\partial^i A^j-\partial^j A^i=\frac{\partial A^j}{\partial x_i}-\frac{\partial A^i}{\partial x_j}$$

$$\begin{aligned}
F^{12}&=\frac{\partial A^2}{\partial x_1}-\frac{\partial A^1}{\partial x_2}=-\frac{\partial A_y}{\partial x}+\frac{\partial A_x}{\partial y}=-\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)=-\left(\nabla\times\mathbf{A}\right)_z\\
F^{23}&=\frac{\partial A^3}{\partial x_2}-\frac{\partial A^2}{\partial x_3}=-\frac{\partial A_z}{\partial y}+\frac{\partial A_y}{\partial z}=-\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)=-\left(\nabla\times\mathbf{A}\right)_x\\
F^{31}&=\frac{\partial A^1}{\partial x_3}-\frac{\partial A^3}{\partial x_1}=-\frac{\partial A_x}{\partial z}+\frac{\partial A_z}{\partial x}=-\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)=-\left(\nabla\times\mathbf{A}\right)_y
\end{aligned}$$

与前面F^{0i}的情况不同，这里的$\nabla\times\mathbf{A}$三维转动下是赝矢量而不是矢量。我们将这个赝矢表示为

$$\mathbf{B}=\left(-F^{23},-F^{31},-F^{12}\right)=\nabla\times\mathbf{A}.$$

写成矩阵形式：

$$F^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0&-E^1&-E^2&-E^3\\E^1&0&-B^3&B^2\\E^2&B^3&0&-B^1\\E^3&-B^2&B^1&0\end{pmatrix}$$

这就是说，四维时空中的张量$F^{\mu\nu}$的六个独立的分量可以分成两组：一组构成一个三维旋转下的矢量$\mathbf{E}$，另一组构成一个三维旋转下的赝矢量$\mathbf{B}$。这两组分量在

质量为零的无自旋以外的内部自由度的矢量场的情况下就是场强：电场和磁场。可见，电场和磁场本质上是一个张量的分量。它们不是某个四矢中的去掉一个时间分量后的三个空间分量（四矢的三个空间分量一般在三维旋转下也是个三矢），而是一个四维时空中张量中的六个分量分成两组，这两组一组是三维的矢量，一组是三维的赝矢量。所以，但我们看到一个三维矢量的时候不能立刻认为它就是四矢的三分量。同样，一个高维矢量或张量的分量完全可能在低维情况中按照矢量的变换变。

前面我们引入了张量$F^{\mu\nu}$的对偶张量$\tilde{F}^{\mu\nu}$。$\tilde{F}^{\mu\nu}$也是反对称张量，也只有6个独立分量。$\tilde{F}^{\mu\nu}$的各个分量可以直接看出

$$\begin{aligned}
\tilde{F}^{01} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{0123}F_{23} + \frac{1}{2}\varepsilon^{0132}F_{32} = F_{23} = g_{2\mu}g_{3\nu}F^{\mu\nu} = F^{23},\\
\tilde{F}^{02} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{0213}F_{13} + \frac{1}{2}\varepsilon^{0231}F_{31} = F_{31} = g_{3\mu}g_{1\nu}F^{\mu\nu} = F^{31},\\
\tilde{F}^{03} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{0312}F_{12} + \frac{1}{2}\varepsilon^{0321}F_{21} = F_{12} = g_{1\mu}g_{2\nu}F^{\mu\nu} = F^{12},\\
\tilde{F}^{12} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{1203}F_{03} + \frac{1}{2}\varepsilon^{1230}F_{30} = F_{03} = g_{0\mu}g_{3\nu}F^{\mu\nu} = -F^{03},\\
\tilde{F}^{23} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{2301}F_{01} + \frac{1}{2}\varepsilon^{2310}F_{10} = F_{01} = g_{0\mu}g_{1\nu}F^{\mu\nu} = -F^{01},\\
\tilde{F}^{31} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{3102}F_{02} + \frac{1}{2}\varepsilon^{3120}F_{20} = F_{02} = g_{0\mu}g_{2\nu}F^{\mu\nu} = -F^{02}.
\end{aligned}$$

于是有

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}.$$

可以看出，$\tilde{F}^{\mu\nu}$可以通过在$F^{\mu\nu}$中做代换

$$\mathbf{E} \to \mathbf{B}, \quad \mathbf{B} \to -\mathbf{E}$$

得到。

可以看出，$F^{\mu\nu}$和$\tilde{F}^{\mu\nu}$就是场强$\mathbf{E}$和$\mathbf{B}$。由$\mathbf{E}$和$\mathbf{B}$直接构造相对论不变量显然是麻烦的。但是借助$F^{\mu\nu}$和$\tilde{F}^{\mu\nu}$这个构造是显然的。所有可能的由$F^{\mu\nu}$和$\tilde{F}^{\mu\nu}$得到Lorentz标量的收缩方式只有这几种：$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$，$\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$和$F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$。用$\mathbf{E}$和$\mathbf{B}$表示就是

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= -\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = -2\left(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2\right),\\
F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} &= -4\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}.
\end{aligned}$$

有（自旋以外）内部自由度的矢量场

前面考虑的是无（自旋以外）内部自由度的矢量场。无（自旋以外）内部自由度的矢量场$\mathcal{A}^\mu$是一个1×1的矩阵，也就是一个数。但如果考虑（自旋以外）内部自由度，场量$\mathcal{A}^\mu$就是一个方阵。如果场量$\mathcal{A}^\mu$不是一个数而是一个方阵情况就复杂了。下面我们将无内部自由度的结果推广到有内部自由度的情况，方法不太严格。

场，场强

前面我们已经得到这样的结论，在无内部自由度情况下场量$\mathcal{A}^\mu$是一个纯虚数，可以用一个实的场量表示成$\mathcal{A}^\mu \equiv iA^\mu$的形式。当$\mathcal{A}^\mu$是一个方阵的时候，我们很自然地猜想它也可以表示成$\mathcal{A}^\mu \equiv i\mathbf{A}^\mu$的形式，其中$A^\mu$应该是一个相当于实数的方阵。我们知道，实数可以看作是一个自复共轭的数，也就是说，实数的复共轭就是它自己；对于一个实方阵来说，在转置共轭下自共轭的矩阵相当于实数，这样的矩阵就是实对称矩阵，实对称矩阵的本征值是实数；对于一个复方阵来说，在转置共轭下自共轭的矩阵相当于实数，这样的矩阵就是厄米矩阵，厄米矩阵的本征值是实数。这样我们可以类比地认为场量仍可以表示为

$$\mathcal{A}^\mu = ig\mathbf{A}^\mu \tag{7.44}$$

的形式，其中$\mathbf{A}^\mu$是一个厄米矩阵，$\mathbf{A}^{\mu\dagger} = \mathbf{A}^\mu$。

同样，张量$\mathcal{F}^{\mu\nu}$也是一个方阵。在无（自旋以外）内部自由度的情况下，它是反对称的。我们很自然的推广这一结论认为在$\mathcal{F}^{\mu\nu}$是一个方阵的情况下也是反对称的。且当$\mathcal{F}^{\mu\nu}$由$n\times n$方阵变成1×1方阵（也就是一个数）时，应当回到（7.31）的形式。在反对称和简单性的要求下一个方阵形式的$\mathcal{F}^{\mu\nu}$普遍地可以写成

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu - [\mathcal{A}^\mu, \mathcal{A}^\nu]\,. \tag{7.45}$$

注意，这是能表示成反对称的最简单形式。导数项（$\partial^\mu \mathcal{A}^\nu$）要表示成反对称只用到导数的一次方就可以了，而场量$\mathcal{A}^\mu$项要表示成反对称的形式就要用到$\mathcal{A}^\mu$的二次项了（其中的加减号并不重要，是习惯）。这样我们就得到了一个推广的场强$\mathcal{F}^{\mu\nu}$。可见，内部自由度的影响是非常大的。如果没有（自旋以外）内部自由度，场量$\mathcal{A}^\mu$是一个数，这样就没有$[\mathcal{A}^\mu, \mathcal{A}^\nu]$项了。但是如果有（自旋以外）内部自由度，场量$\mathcal{A}^\mu$就是一个方阵，它们一般地讲不对易，所以最普遍的反对称形式需要加上$[\mathcal{A}^\mu, \mathcal{A}^\nu]$这一项。可这是怎样的一项啊，它在场强中是二次的，这将意味着在Lagrange量中它会给出高次项，从而带来非线性。

Lagrange量

一个自然的假设是Lagrange量还保持原来的形式。仍然是

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} tr\left(\mathcal{F}^{\dagger}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2} m^2 tr\left(\mathcal{A}^{\dagger}_{\mu}\mathcal{A}^{\mu}\right). \tag{7.46}$$

但是场强$\mathcal{F}^{\mu\nu}$则是（7.45）给出的形式。注意，由于$\mathcal{A}^{\mu}$和$\mathcal{F}^{\mu\nu}$此时都已经是矩阵，所以复共轭$*$变成了厄米共轭$\dagger$。

但是，事情发生了微妙的变化，由于$\mathcal{F}^{\mu\nu}$中包含$[\mathcal{A}^{\mu}, \mathcal{A}^{\nu}]$项，这一项将给出四次方项。这已经超出了我们最初的假设，即假设Lagrange量中只包含二次方项。回忆当时我们假设只有二次方项的理由。当时我们说，只有二次方项是因为自然中粒子都属于几类，每一类中的粒子都具有相同的质量。只有二次的Lagrange量才能给出等间距的能量激发（对比谐振子情况），才能产生湮灭每个质量都相同的粒子。

那么这里出现了四次方项如何理解呢，它产生的粒子的质量还相同吗。

四次方项给出了相互作用。在Lagrange量（7.46）中只有矢量场$\mathcal{A}^{\mu}$，这种作用是自作用。这种自作用是去不掉的。因此，所有这样的粒子都不会是真正自由的自由粒子。它们永远纠缠在自作用中。对于一个始终处在相互作用中的粒子来说谈一个粒子的能量是没有意义的，这就像不能问地球的势能和太阳各自的势能一样。因此，相互作用是一个粒子的质量有些说不清是正常的。

存在自作用意味着这个Lagrange量给出的理论是非线性的。这就是说我们要对付一个非线性理论了。

$\mathcal{A}^{\mu}$和$\mathcal{F}^{\mu\nu}$

前面我们仿照无（自旋以外）内部自由度的矢量场的情况给出了有（自旋以外）内部自由度矢量场的场量$\mathcal{A}^{\mu}$的形式。在无（自旋以外）内部自由度的情况中，$\mathcal{A}^{\mu}$是个纯虚数。类比地（认为无（自旋以外）内部自由度是有（自旋以外）内部自由度的特殊情况），我们猜测在有（自旋以外）内部自由度的情况中，$\mathcal{A}^{\mu}$是一个i乘上厄米矩阵的形式。从而有$\mathcal{A}^{\mu} = ig\mathbf{A}^{\mu}$。

这样我们有

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{\mu\nu} &= \partial^{\mu}\mathcal{A}^{\nu} - \partial^{\nu}\mathcal{A}^{\mu} - [\mathcal{A}^{\mu}, \mathcal{A}^{\nu}] \\
&= \partial^{\mu} ig\mathbf{A}^{\nu} - \partial^{\nu} ig\mathbf{A}^{\mu} - [ig\mathbf{A}^{\mu}, ig\mathbf{A}^{\nu}] \\
&= ig\left(\partial^{\mu}\mathbf{A}^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}\right) + g^2\left[\mathbf{A}^{\mu}, \mathbf{A}^{\nu}\right] \\
&\equiv ig\mathbf{F}^{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

于是

$$\mathbf{F}^{\mu\nu} = (\partial^\mu \mathbf{A}^\nu - \partial^\nu \mathbf{A}^\mu) - ig\left[\mathbf{A}^\mu, \mathbf{A}^\nu\right].$$

而

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^{\mu\nu\dagger} &= \left(\partial^\mu \mathbf{A}^{\nu\dagger} - \partial^\nu \mathbf{A}^{\mu\dagger}\right) + ig\left[\mathbf{A}^\mu, \mathbf{A}^\nu\right]^\dagger \\ &= (\partial^\mu \mathbf{A}^\nu - \partial^\nu \mathbf{A}^\mu) + ig\left[\mathbf{A}^\nu, \mathbf{A}^\mu\right] \\ &= (\partial^\mu \mathbf{A}^\nu - \partial^\nu \mathbf{A}^\mu) - ig\left[\mathbf{A}^\mu, \mathbf{A}^\nu\right] \\ &= \mathbf{F}^{\mu\nu}\end{aligned}$$

用$\mathbf{A}^\mu$和$\mathbf{F}^{\mu\nu}$表示Lagrange量，有

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4} tr\left(\mathcal{F}^\dagger_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2}m^2 tr\left(\mathcal{A}^\dagger_\mu \mathcal{A}^\mu\right) \\ &= -\frac{1}{4} tr\left(-ig\mathbf{F}_{\mu\nu} ig\mathbf{F}^{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2}m^2 tr\left(-ig\mathbf{A}_\mu ig\mathbf{A}^\mu\right) \\ &= -\frac{1}{4} g^2 tr\left(\mathbf{F}_{\mu\nu}\mathbf{F}^{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2}g^2 m^2 tr\left(\mathbf{A}_\mu \mathbf{A}^\mu\right)\end{aligned}$$

将$\mathbf{A}_\mu$在一组完备基上展开

$\mathbf{A}_\mu$在这里是一个厄米矩阵，我们不妨选取一组厄米矩阵$\{T^a\}$，$a = 1, 2, \cdots n$，作为基将它展开

$$\mathbf{A}_\mu = A^a_\mu T^a, \quad a = 1, 2, \cdots n. \tag{7.47}$$

作为基的厄米矩阵$\{T^a\}$只需是完备的就可以。注意，我们要展开的是一个厄米矩阵，基也是厄米矩阵。我们假设展开系数A^a_μ是实数（因为这是我们的物理场），对一个$n \times n$厄米矩阵（厄米矩阵当然一般是复矩阵）来说，一共有n^2个独立的实参数。当我们的展开系数是实数时，就需要n^2个基。

这样场强为

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^{\mu\nu} &= (\partial^\mu \mathbf{A}^\nu - \partial^\nu \mathbf{A}^\mu) - ig\left[\mathbf{A}^\mu, \mathbf{A}^\nu\right] \\ &= (\partial^\mu A^{\nu a} T^a - \partial^\nu A^{\mu a} T^a) - ig\left[A^{\mu a}T^a, A^{\nu b}T^b\right] \\ &= \left(\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a}\right) T^a - igA^{\mu a}A^{\nu b}\left[T^a, T^b\right]\end{aligned}$$

为了后面计算简便，我们先不考虑Lorentz指标，将$\mathbf{A}_\mu$和$\mathbf{F}^{\mu\nu}$写成

$$\begin{aligned}&\mathbf{A} \equiv A^a T^a, \\ &\mathbf{F} \equiv G^a T^a - iK^{ab}\left[T^a, T^b\right],\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} A^a &\equiv A^{\mu a}, \\ \mathbf{F} &\equiv \mathbf{F}^{\mu\nu}, \\ G^a &\equiv \left(\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a}\right), \\ K^{ab} &\equiv g A^{\mu a} A^{\nu b}. \end{aligned} \tag{7.48}$$

这样Lagrange量为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} g^2 tr\left(\mathbf{F}^2\right) + \frac{1}{2} g^2 m^2 tr\left(\mathbf{A}^2\right) \\ &= -\frac{1}{4} g^2 tr\left(\left(G^a T^a - iK^{ab}\left[T^a, T^b\right]\right)\left(G^c T^c - iK^{cd}\left[T^c, T^d\right]\right)\right) + \frac{1}{2} g^2 m^2 tr\left(\left(A^a T^a\right)\left(A^b T^b\right)\right) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} &\left(G^a T^a - iK^{ab}\left[T^a, T^b\right]\right)\left(G^c T^c - iK^{cd}\left[T^c, T^d\right]\right) \\ &= G^a G^c T^a T^c - K^{ab} K^{cd}\left[T^a, T^b\right]\left[T^c, T^d\right] - i\left(G^a K^{cd} T^a\left[T^c, T^d\right] + G^c K^{ab}\left[T^a, T^b\right] T^c\right) \\ &= G^a G^c T^a T^c - K^{ab} K^{cd}\left[T^a, T^b\right]\left[T^c, T^d\right] - iK^{ab} G^c\left(T^c\left[T^a, T^b\right] + \left[T^a, T^b\right] T^c\right) \end{aligned}$$

这样

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} g^2 tr\left(\mathbf{F}^2\right) + \frac{1}{2} g^2 m^2 tr\left(\mathbf{A}^2\right) \\ &= -\frac{1}{4} g^2 tr\left(G^a G^c T^a T^c - K^{ab} K^{cd}\left[T^a, T^b\right]\left[T^c, T^d\right] - iK^{ab} G^c\left(T^c\left[T^a, T^b\right] + \left[T^a, T^b\right] T^c\right)\right) \\ &+ \frac{1}{2} g^2 m^2 A^a A^b tr\left(T^a T^b\right) \\ &= -\frac{1}{4} g^2\left(G^a G^c tr\left(T^a T^c\right) - K^{ab} K^{cd} tr\left(\left[T^a, T^b\right]\left[T^c, T^d\right]\right) - iK^{ab} G^c tr\left(T^c\left[T^a, T^b\right] + \left[T^a, T^b\right] T^c\right)\right) \\ &+ \frac{1}{2} g^2 m^2 A^a A^b tr\left(T^a T^b\right) \end{aligned}$$

T^a是厄米的基，即$T^{a\dagger} = T^a$。它们的对易子

$$\left[T^a, T^b\right]^\dagger = \left(T^a T^b - T^b T^a\right)^\dagger = T^b T^a - T^a T^b = -\left[T^a, T^b\right]$$

这就是说这个对易子是反厄米的。我们将这个反厄米的矩阵可以用一个厄米矩阵乘上i表示成

$$\left[T^a, T^b\right] = iQ^{ab}.$$

这里Q^{ab}是一个厄米矩阵，它与两个基T^a和T^b相联系，我们便给它加上了a和b两个指标来标记。厄米矩阵Q^{ab}当然可以用那些厄米矩阵的基T^a展开

$$Q^{ab}=C^{abc}T^c$$

这里的常数C^{abc}与三个基T^a，T^b和T^c相联系，所以用三个指标来标记。这样我们有

$$\left[T^a,T^b\right]=iC^{abc}T^c. \tag{7.49}$$

可见这是厄米矩阵满足的普遍规律。

分析一下这个结果。由（7.49）我们有

$$\begin{aligned}\left[T^a,T^b\right]^\dagger&=\left(iC^{abc}T^c\right)^\dagger\\ -\left[T^a,T^b\right]&=-iC^{abc*}T^c\\ \left[T^a,T^b\right]&=iC^{abc*}T^c\end{aligned} \tag{7.50}$$

与（7.49）对比我们有

$$C^{abc*}=C^{abc}, \tag{7.51}$$

即C^{abc}是实数。此外，交换指标a和b，我们有

$$\begin{aligned}\left[T^b,T^a\right]&=iC^{bac}T^c\\ -\left[T^a,T^b\right]&=iC^{bac}T^c\\ \left[T^a,T^b\right]&=i\left(-C^{bac}\right)T^c\end{aligned} \tag{7.52}$$

与（7.49）对比我们有

$$C^{abc}=-C^{bac}.$$

这就是说，C^{abc}是一个实数，且前两个指标反对称。

这样我们的Lagrange量变成

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}g^2\left(G^aG^ctr\left(T^aT^c\right)+K^{ab}K^{cd}C^{abf}C^{cde}tr\left(T^fT^e\right)+iK^{ab}G^ctrC^{abd}\left(T^cT^d+T^dT^c\right)\right)+\frac{1}{2}g^2m^2A^a$$

在Lagrange量中我们遇到的都是求迹，即$tr\left(T^aT^c\right)$。这里的T^a是我们选择的基，这个选择是任意的，我们当然可以将它选择成正交的，毕竟正交基是最方便的基。选择一个正交基是完全不失一般性的，我们选

$$tr\left(T^aT^b\right)=\kappa\delta^{ab}.$$

这样有

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}g^2\left(G^aG^c\kappa\delta^{ac}+K^{ab}K^{cd}C^{abf}C^{cde}\kappa\delta^{fe}+iK^{ab}G^cC^{abd}\left(\kappa\delta^{cd}+\kappa\delta^{dc}\right)\right)+\frac{1}{2}g^2m^2A^aA^b\kappa\delta^{ab}\\ &= -\frac{\kappa}{4}g^2\left(G^aG^a+K^{ab}K^{cd}C^{abe}C^{cde}+i2K^{ab}G^dC^{abd}\right)+\frac{\kappa}{2}g^2m^2A^aA^a\end{aligned}$$

将（7.48）代回来有

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{\kappa}{4}g^2\left(\left(\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu\right)\left(\partial^\mu A^{\nu a}-\partial^\nu A^{\mu a}\right)+gA^a_\mu A^b_\nu gA^{\mu c}A^{\nu d}C^{abe}C^{cde}+i2gA^a_\mu A^b_\nu\left(\partial^\mu A^{\nu d}-\partial^\nu A^{\mu d}\right)C^{ab}\right.\\ &\quad\left.+\frac{\kappa}{2}g^2m^2A^a_\mu A^{\mu a}\right.\end{aligned}$$

这里的$A^a_\mu A^b_\nu\left(\partial^\mu A^{\nu d}-\partial^\nu A^{\mu d}\right)C^{abd}=0$，因为$A^a_\mu A^b_\nu C^{abd}=0$（$C^{abd}=-C^{bad}$，反对称）。于是

$$\mathcal{L} = -\frac{\kappa}{4}g^2\left(\left(\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu\right)\left(\partial^\mu A^{\nu a}-\partial^\nu A^{\mu a}\right)+g^2A^a_\mu A^b_\nu A^{\mu c}A^{\nu d}C^{abe}C^{cde}\right)+\frac{\kappa}{2}g^2m^2A^a_\mu A^{\mu a}$$

我们可以引入

$$F^{\mu\nu a}=\partial^\mu A^{\nu a}-\partial^\nu A^{\mu a}+gC^{abc}A^{\mu b}A^{\nu c}$$

来更紧凑地表示这个Lagrange量。我们有

$$\begin{aligned}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a} &= \left(\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu+gC^{abc}A^b_\mu A^c_\nu\right)\left(\partial^\mu A^{\nu a}-\partial^\nu A^{\mu a}+gC^{ade}A^{\mu d}A^{\nu e}\right)\\ &= \left(\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu\right)\left(\partial^\mu A^{\nu a}-\partial^\nu A^{\mu a}\right)+\left(\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu\right)\left(gC^{ade}A^{\mu d}A^{\nu e}\right)\\ &\quad+\left(gC^{abc}A^b_\mu A^c_\nu\right)\left(\partial^\mu A^{\nu a}-\partial^\nu A^{\mu a}\right)+\left(gC^{abc}A^b_\mu A^c_\nu\right)\left(gC^{ade}A^{\mu d}A^{\nu e}\right)\\ &= \left(\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu\right)\left(\partial^\mu A^{\nu a}-\partial^\nu A^{\mu a}\right)+g^2A^b_\mu A^c_\nu A^{\mu d}A^{\nu e}C^{abc}C^{ade}\\ &= \left(\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu\right)\left(\partial^\mu A^{\nu a}-\partial^\nu A^{\mu a}\right)+g^2A^b_\mu A^c_\nu A^{\mu d}A^{\nu e}C^{bca}C^{dea}\end{aligned}$$

所以

$$\mathcal{L}=-\frac{\kappa}{4}g^2F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a}+\frac{\kappa}{2}g^2m^2A^a_\mu A^{\mu a}. \tag{7.53}$$

在没有（自旋以外的）内部自由度的情况下，由于$\mathbf{F}^{\mu\nu}=\left(\partial^\mu\mathbf{A}^\nu-\partial^\nu\mathbf{A}^\mu\right)-ig\left[\mathbf{A}^\mu,\mathbf{A}^\nu\right]$中第二项$[\mathbf{A}^\mu,\mathbf{A}^\nu]=0$，从而$\mathbf{F}^{\mu\nu}=\left(\partial^\mu\mathbf{A}^\nu-\partial^\nu\mathbf{A}^\mu\right)$，使得常数$g$消失了，但是，这个消失是由于没有（自旋以外的）内部自由度的情况过于简单造成的。当考虑有（自旋以外的）内部自由度的情况时，常数g出现了。常数g出现在两个地方，一个是Lagrange量整体有一个g^2的因子，再就是在自作用项中有一个相对的因子。对没有（自旋以外）内部自由度的情况，这个整体的g^2是没有的。我们习惯上不要这个整体因子，将Lagrange量写成

$$\mathcal{L}=-\frac{\kappa}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a}+\frac{\kappa}{2}m^2A^a_\mu A^{\mu a}. \tag{7.54}$$

蕴含在场中的代数结构

这个结果告诉我们，当我们选择了厄米性的时候，矢量场内部蕴含了一个代数结构。这个代数结构满足这样的条件

$$\left[T^a, T^b\right] = iC^{abc}T^c. \tag{7.55}$$

C^{abc}是实数，且

$$C^{abc} = -C^{bac}.$$

即C^{abc}的两个指标反对称。

为了方便，不是一般性地我们选择了这样的正交归一化条件

$$tr\left(T^aT^b\right) = \kappa\delta^{ab}.$$

这个结果在告诉我们，当我们选择了厄米性的时候，这种代数结构就已经蕴含在场中了，不需要另外强加给场这种对称性。

（这个结果直接做下去就会得到规范群只能是$SU(n)$的结论，以前有一些大统一方案引入了$SU(n)$以外的其它群其实是错的。而且这种代数结构也不只是矢量场的性质，只要要求厄米性，都会有这种结构。矢量场中蕴含的是代数结构，而物质场则是以这种代数为李代数的群的表示。一种代数对应不止一种群，我们要解决的是对应的同一种代数的不同的群所对应的物质场有什么差别）

无质量的矢量场——规范场

前面考虑的是普遍的矢量场的情况，是有质量的矢量场。可以很容易地猜测，如果没有质量（这时（7.54）只剩下了第一项），对称性一般会更大些。我们来分析一下没有质量时的对称性。此时Lagrange量为

$$\mathcal{L} = -\frac{\kappa}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a}. \tag{7.56}$$

无（自旋以外）内部自由度的无质量矢量场

如果是没有（自旋以外）内部自由度的情况。场量只有一个分量，这时只有一个厄米基$T^a = 1$就可以了。即$\mathbf{A}_\mu = A_\mu\mathbf{1} = A_\mu$。这样Lagrange量变为

$$\mathcal{L} = -\frac{\kappa}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{7.57}$$

其中

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu.$$

$F^{\mu\nu}$在变换

$$A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \Lambda$$

下不变：

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &\to \partial^\mu \left(A^\nu + \partial^\nu \Lambda\right) - \partial^\nu \left(A^\mu + \partial^\mu \Lambda\right) \\ &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + \partial^\mu \partial^\nu \Lambda - \partial^\nu \partial^\mu \Lambda \\ &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \\ &= F^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

$F^{\mu\nu}$在这个变换下不变自然Lagrange量也不变[21]。这个变换是将场量A^μ加上一个全微分。这个变换由于历史的原因被称作规范变换，在这个规范变换下不变的场称为规范场。

有（自旋以外）内部自由度的无质量矢量场（无穷小变换）

前面讨论的是只有一个厄米基$T^a = 1$的情况。这个结果可以直接推广到有多个厄米基$\{T^a\}$的包含（自旋以外）内部自由度的情况。为了完整我们仍从$\mathcal{A}^\mu$和$\mathcal{F}^{\mu\nu}$出发考虑这个问题。此时无质量的Lagrange量为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} tr\left(\mathcal{F}^\dagger_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}\right) \\ &= \frac{1}{4} tr\left(\mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}\right), \end{aligned}$$

其中

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu - \left[\mathcal{A}^\mu, \mathcal{A}^\nu\right].$$

这个Lagrange量也具有类似的对称性，但要复杂些。可以验证Lagrange量在变换

$$\mathcal{A}_\mu \to \mathcal{A}_\mu + \partial_\mu \Lambda - \left[\mathcal{A}_\mu, \Lambda\right] \tag{7.58}$$

下是不变的。

[21]这个规范变换其实是太强了。我们只需要求Lagrange量差一个全微分就可以了。但是它竟然要求$F^{\mu\nu}$不变。也许我们可以找一个更大的对称性。

$\mathcal{F}^{\mu\nu}$在这个变换下有[22]

$$\mathcal{F}^{\mu\nu}\to\mathcal{F}'_{\mu\nu}=\left(\partial_\mu\mathcal{A}'_\nu-\partial_\nu\mathcal{A}'_\mu\right)-\left[\mathcal{A}'_\mu,\mathcal{A}'_\nu\right]$$
$$=\left(\partial_\mu\left(\mathcal{A}_\nu+\partial_\nu\Lambda-\left[\mathcal{A}_\nu,\Lambda\right]\right)-\partial_\nu\left(\mathcal{A}_\mu+\partial_\mu\Lambda-\left[\mathcal{A}_\mu,\Lambda\right]\right)\right)-\left[\mathcal{A}_\mu+\partial_\mu\Lambda-\left[\mathcal{A}_\mu,\Lambda\right],\mathcal{A}_\nu+\partial_\nu\Lambda-\left[\mathcal{A}_\nu,\Lambda\right.\right.$$

[22]

$$\mathcal{F}^{\mu\nu}\to\mathcal{F}'_{\mu\nu}=\left(\partial_\mu\mathcal{A}'_\nu-\partial_\nu\mathcal{A}'_\mu\right)-\left[\mathcal{A}'_\mu,\mathcal{A}'_\nu\right]$$
$$=\left(\partial_\mu\left(\mathcal{A}_\nu+\partial_\nu\Lambda-\left[\mathcal{A}_\nu,\Lambda\right]\right)-\partial_\nu\left(\mathcal{A}_\mu+\partial_\mu\Lambda-\left[\mathcal{A}_\mu,\Lambda\right]\right)\right)-\left[\mathcal{A}_\mu+\partial_\mu\Lambda-\left[\mathcal{A}_\mu,\Lambda\right],\mathcal{A}_\nu+\partial_\nu\Lambda-\left[\mathcal{A}_\nu,\Lambda\right]\right]$$
$$=\left(\left(\partial_\mu\mathcal{A}_\nu+\partial_\mu\partial_\nu\Lambda-\partial_\mu\left(\mathcal{A}_\nu\Lambda-\Lambda\mathcal{A}_\nu\right)\right)-\left(\partial_\nu\mathcal{A}_\mu+\partial_\nu\partial_\mu\Lambda-\partial_\nu\left(\mathcal{A}_\mu\Lambda-\Lambda\mathcal{A}_\mu\right)\right)\right)$$
$$-\left[\mathcal{A}_\mu+\partial_\mu\Lambda-\mathcal{A}_\mu\Lambda+\Lambda\mathcal{A}_\mu,\mathcal{A}_\nu+\partial_\nu\Lambda-\mathcal{A}_\nu\Lambda+\Lambda\mathcal{A}_\nu\right]$$
$$=\left(\left(\partial_\mu\mathcal{A}_\nu+\partial_\mu\partial_\nu\Lambda-\partial_\mu\left(\mathcal{A}_\nu\Lambda\right)+\partial_\mu\left(\Lambda\mathcal{A}_\nu\right)\right)-\left(\partial_\nu\mathcal{A}_\mu+\partial_\nu\partial_\mu\Lambda-\partial_\nu\left(\mathcal{A}_\mu\Lambda\right)+\partial_\nu\left(\Lambda\mathcal{A}_\mu\right)\right)\right)$$
$$-\left(\mathcal{A}_\mu+\partial_\mu\Lambda-\mathcal{A}_\mu\Lambda+\Lambda\mathcal{A}_\mu\right)\left(\mathcal{A}_\nu+\partial_\nu\Lambda-\mathcal{A}_\nu\Lambda+\Lambda\mathcal{A}_\nu\right)+\left(\mathcal{A}_\nu+\partial_\nu\Lambda-\mathcal{A}_\nu\Lambda+\Lambda\mathcal{A}_\nu\right)\left(\mathcal{A}_\mu+\partial_\mu\Lambda-\mathcal{A}_\mu\Lambda+\Lambda\mathcal{A}_\mu\right)$$
$$=\left(\left(\partial_\mu\mathcal{A}_\nu+\partial_\mu\partial_\nu\Lambda-\partial_\mu\mathcal{A}_\nu\Lambda-\mathcal{A}_\nu\partial_\mu\Lambda+\partial_\mu\Lambda\mathcal{A}_\nu+\Lambda\partial_\mu\mathcal{A}_\nu\right)-\left(\partial_\nu\mathcal{A}_\mu+\partial_\nu\partial_\mu\Lambda-\partial_\nu\mathcal{A}_\mu\Lambda-\mathcal{A}_\mu\partial_\nu\Lambda+\partial_\nu\Lambda\mathcal{A}_\mu+\Lambda\partial_\nu\mathcal{A}_\mu\right.\right.$$
$$-\left(\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}_\nu+\partial_\mu\Lambda\mathcal{A}_\nu-\mathcal{A}_\mu\Lambda\mathcal{A}_\nu+\Lambda\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}_\nu\right)-\left(\mathcal{A}_\mu\partial_\nu\Lambda+\partial_\mu\Lambda\partial_\nu\Lambda-\mathcal{A}_\mu\Lambda\partial_\nu\Lambda+\Lambda\mathcal{A}_\mu\partial_\nu\Lambda\right)$$
$$+\left(\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}_\nu\Lambda+\partial_\mu\Lambda\mathcal{A}_\nu\Lambda-\mathcal{A}_\mu\Lambda\mathcal{A}_\nu\Lambda+\Lambda\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}_\nu\Lambda\right)-\left(\mathcal{A}_\mu\Lambda\mathcal{A}_\nu+\partial_\mu\Lambda\Lambda\mathcal{A}_\nu-\mathcal{A}_\mu\Lambda\Lambda\mathcal{A}_\nu+\Lambda\mathcal{A}_\mu\Lambda\mathcal{A}_\nu\right)$$
$$+\left(\mathcal{A}_\nu\mathcal{A}_\mu+\partial_\nu\Lambda\mathcal{A}_\mu-\mathcal{A}_\nu\Lambda\mathcal{A}_\mu+\Lambda\mathcal{A}_\nu\mathcal{A}_\mu\right)+\left(\mathcal{A}_\nu\partial_\mu\Lambda+\partial_\nu\Lambda\partial_\mu\Lambda-\mathcal{A}_\nu\Lambda\partial_\mu\Lambda+\Lambda\mathcal{A}_\nu\partial_\mu\Lambda\right)$$
$$-\left(\mathcal{A}_\nu\mathcal{A}_\mu\Lambda+\partial_\nu\Lambda\mathcal{A}_\mu\Lambda-\mathcal{A}_\nu\Lambda\mathcal{A}_\mu\Lambda+\Lambda\mathcal{A}_\nu\mathcal{A}_\mu\Lambda\right)+\left(\mathcal{A}_\nu\Lambda\mathcal{A}_\mu+\partial_\nu\Lambda\Lambda\mathcal{A}_\mu-\mathcal{A}_\nu\Lambda\Lambda\mathcal{A}_\mu+\Lambda\mathcal{A}_\nu\Lambda\mathcal{A}_\mu\right)$$

$$=\partial_\mu\mathcal{A}_\nu+\partial_\mu\partial_\nu\Lambda-\partial_\mu\mathcal{A}_\nu\Lambda-\mathcal{A}_\nu\partial_\mu\Lambda+\partial_\mu\Lambda\mathcal{A}_\nu+\Lambda\partial_\mu\mathcal{A}_\nu-\partial_\nu\mathcal{A}_\mu-\partial_\nu\partial_\mu\Lambda+\partial_\nu\mathcal{A}_\mu\Lambda+\mathcal{A}_\mu\partial_\nu\Lambda-\partial_\nu\Lambda\mathcal{A}_\mu-\Lambda\partial_\nu\mathcal{A}_\mu$$
$$-\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}_\nu-\partial_\mu\Lambda\mathcal{A}_\nu+\mathcal{A}_\mu\Lambda\mathcal{A}_\nu-\Lambda\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}_\nu-\mathcal{A}_\mu\partial_\nu\Lambda-\partial_\mu\Lambda\partial_\nu\Lambda+\mathcal{A}_\mu\Lambda\partial_\nu\Lambda-\Lambda\mathcal{A}_\mu\partial_\nu\Lambda$$
$$+\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}_\nu\Lambda+\partial_\mu\Lambda\mathcal{A}_\nu\Lambda-\mathcal{A}_\mu\Lambda\mathcal{A}_\nu\Lambda+\Lambda\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}_\nu\Lambda-\mathcal{A}_\mu\Lambda\mathcal{A}_\nu-\partial_\mu\Lambda\Lambda\mathcal{A}_\nu+\mathcal{A}_\mu\Lambda\Lambda\mathcal{A}_\nu-\Lambda\mathcal{A}_\mu\Lambda\mathcal{A}_\nu$$
$$+\mathcal{A}_\nu\mathcal{A}_\mu+\partial_\nu\Lambda\mathcal{A}_\mu-\mathcal{A}_\nu\Lambda\mathcal{A}_\mu+\Lambda\mathcal{A}_\nu\mathcal{A}_\mu+\mathcal{A}_\nu\partial_\mu\Lambda+\partial_\nu\Lambda\partial_\mu\Lambda-\mathcal{A}_\nu\Lambda\partial_\mu\Lambda+\Lambda\mathcal{A}_\nu\partial_\mu\Lambda$$
$$-\mathcal{A}_\nu\mathcal{A}_\mu\Lambda-\partial_\nu\Lambda\mathcal{A}_\mu\Lambda+\mathcal{A}_\nu\Lambda\mathcal{A}_\mu\Lambda-\Lambda\mathcal{A}_\nu\mathcal{A}_\mu\Lambda+\mathcal{A}_\nu\Lambda\mathcal{A}_\mu+\partial_\nu\Lambda\Lambda\mathcal{A}_\mu-\mathcal{A}_\nu\Lambda\Lambda\mathcal{A}_\mu+\Lambda\mathcal{A}_\nu\Lambda\mathcal{A}_\mu$$

$$=\partial_\mu\partial_\nu\Lambda-\partial_\nu\partial_\mu\Lambda-\partial_\mu\Lambda\partial_\nu\Lambda+\partial_\nu\Lambda\partial_\mu\Lambda$$
$$-\partial_\mu\mathcal{A}_\nu\Lambda-\mathcal{A}_\nu\partial_\mu\Lambda+\partial_\mu\Lambda\mathcal{A}_\nu+\Lambda\partial_\mu\mathcal{A}_\nu+\partial_\nu\mathcal{A}_\mu\Lambda+\mathcal{A}_\mu\partial_\nu\Lambda-\partial_\nu\Lambda\mathcal{A}_\mu-\Lambda\partial_\nu\mathcal{A}_\mu-\partial_\mu\Lambda\mathcal{A}_\nu-\mathcal{A}_\mu\partial_\nu\Lambda+\partial_\nu\Lambda\mathcal{A}_\mu+\mathcal{A}_\nu\partial_\mu\Lambda$$
$$+\partial_\mu\mathcal{A}_\nu-\partial_\nu\mathcal{A}_\mu+\mathcal{A}_\mu\Lambda\partial_\nu\Lambda-\Lambda\mathcal{A}_\mu\partial_\nu\Lambda+\partial_\mu\Lambda\mathcal{A}_\nu\Lambda-\partial_\mu\Lambda\Lambda\mathcal{A}_\nu-\mathcal{A}_\nu\Lambda\partial_\mu\Lambda+\Lambda\mathcal{A}_\nu\partial_\mu\Lambda-\partial_\nu\Lambda\mathcal{A}_\mu\Lambda+\partial_\nu\Lambda\Lambda\mathcal{A}_\mu$$
$$-\mathcal{A}_\mu\Lambda\mathcal{A}_\nu\Lambda+\Lambda\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}_\nu\Lambda+\mathcal{A}_\mu\Lambda\Lambda\mathcal{A}_\nu-\Lambda\mathcal{A}_\mu\Lambda\mathcal{A}_\nu+\mathcal{A}_\nu\Lambda\mathcal{A}_\mu\Lambda-\Lambda\mathcal{A}_\nu\mathcal{A}_\mu\Lambda-\mathcal{A}_\nu\Lambda\Lambda\mathcal{A}_\mu+\Lambda\mathcal{A}_\nu\Lambda\mathcal{A}_\mu$$
$$+\mathcal{A}_\mu\Lambda\mathcal{A}_\nu-\Lambda\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}_\nu+\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}_\nu\Lambda-\mathcal{A}_\nu\Lambda\mathcal{A}_\mu+\Lambda\mathcal{A}_\nu\mathcal{A}_\mu-\mathcal{A}_\mu\Lambda\mathcal{A}_\nu-\mathcal{A}_\nu\mathcal{A}_\mu\Lambda+\mathcal{A}_\nu\Lambda\mathcal{A}_\mu+\mathcal{A}_\nu\mathcal{A}_\mu-\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}_\nu$$

$$=\partial_\mu\mathcal{A}_\nu-\partial_\nu\mathcal{A}_\mu+\mathcal{A}_\nu\mathcal{A}_\mu-\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}_\nu-\partial_\mu\Lambda\partial_\nu\Lambda+\partial_\nu\Lambda\partial_\mu\Lambda$$
$$-\left(\partial_\mu\mathcal{A}_\nu-\partial_\nu\mathcal{A}_\mu\right)\Lambda+\Lambda\left(\partial_\mu\mathcal{A}_\nu-\partial_\nu\mathcal{A}_\mu\right)$$
$$+\left(\mathcal{A}_\mu\Lambda-\Lambda\mathcal{A}_\mu\right)\partial_\nu\Lambda+\partial_\mu\Lambda\left(\mathcal{A}_\nu\Lambda-\Lambda\mathcal{A}_\nu\right)-\left(\mathcal{A}_\nu\Lambda-\Lambda\mathcal{A}_\nu\right)\partial_\mu\Lambda-\partial_\nu\Lambda\left(\mathcal{A}_\mu\Lambda-\Lambda\mathcal{A}_\mu\right)$$
$$-\left(\mathcal{A}_\mu\Lambda\mathcal{A}_\nu-\mathcal{A}_\nu\Lambda\mathcal{A}_\mu\right)\Lambda+\Lambda\left(\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}_\nu-\mathcal{A}_\nu\mathcal{A}_\mu\right)\Lambda+\mathcal{A}_\mu\Lambda\Lambda\mathcal{A}_\nu-\mathcal{A}_\nu\Lambda\Lambda\mathcal{A}_\mu-\Lambda\left(\mathcal{A}_\mu\Lambda\mathcal{A}_\nu-\mathcal{A}_\nu\Lambda\mathcal{A}_\mu\right)$$
$$-\Lambda\left(\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}_\nu-\mathcal{A}_\nu\mathcal{A}_\mu\right)+\left(\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}_\nu-\mathcal{A}_\nu\mathcal{A}_\mu\right)\Lambda$$

这里考虑的是无穷小变换，我们可以略去所有Λ和$\partial_\mu\Lambda$的高阶项，这样有

$$\mathcal{F}'_{\mu\nu}=\left(\partial_\mu\mathcal{A}_\nu-\partial_\nu\mathcal{A}_\mu-\left[\mathcal{A}_\mu,\mathcal{A}_\nu\right]\right)+\Lambda\left(\partial_\mu\mathcal{A}_\nu-\partial_\nu\mathcal{A}_\mu-\left[\mathcal{A}_\mu,\mathcal{A}_\nu\right]\right)-\left(\partial_\mu\mathcal{A}_\nu-\partial_\nu\mathcal{A}_\mu-\left[\mathcal{A}_\mu,\mathcal{A}_\nu\right]\right)\Lambda$$
$$=\mathcal{F}_{\mu\nu}+\Lambda\mathcal{F}_{\mu\nu}-\mathcal{F}_{\mu\nu}\Lambda$$
$$=\left(1+\Lambda\right)\mathcal{F}_{\mu\nu}\left(1-\Lambda\right)$$

这里考虑的是无穷小变换，我们可以略去所有Λ和$\partial_\mu\Lambda$的高阶项，这样有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}'_{\mu\nu} &= \mathcal{F}_{\mu\nu} + \Lambda\mathcal{F}_{\mu\nu} - \mathcal{F}_{\mu\nu}\Lambda \\ &= (1+\Lambda)\,\mathcal{F}_{\mu\nu}\,(1-\Lambda)\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\mathcal{F}'_{\mu\nu}(x) &= (1+\Lambda)\,\mathcal{F}_{\mu\nu}\,(1-\Lambda) \\ &= \mathcal{F}_{\mu\nu} + [\Lambda, \mathcal{F}_{\mu\nu}]\end{aligned} \tag{7.60}$$

这样Lagrange量在这个变换下，略去高阶小量

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \to \mathcal{L}' &= \frac{1}{4} tr\left(\mathcal{F}'_{\mu\nu}\mathcal{F}'^{\mu\nu}\right) \\ &= \frac{1}{4} tr\left((1+\Lambda)\,\mathcal{F}_{\mu\nu}\,(1-\Lambda)\,(1+\Lambda)\,\mathcal{F}^{\mu\nu}\,(1-\Lambda)\right) \\ &= \frac{1}{4} tr\left((1+\Lambda)\,\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}\,(1-\Lambda)\right) \\ &= \frac{1}{4} tr\left(\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}\,(1-\Lambda)\,(1+\Lambda)\right) \\ &= \frac{1}{4} tr\left(\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}\right)\end{aligned}$$

这就是说，有（自旋以外）内部自由度的无质量矢量场具有(7.58)的规范对称性。

需要注意的是，在没有（自旋以外）内部自由度的情况中，场强$\mathcal{F}^{\mu\nu}$本身就是规范不变的，因为此时$[\Lambda, \mathcal{F}_{\mu\nu}] = 0$。但是在有（自旋以外）内部自由度的情况中，场强$\mathcal{F}^{\mu\nu}$在规范变换(7.58)下是变的，变成了(7.60)的形式，但是Lagrange量是规范不变的，从而保证了理论是规范不变的。

7.4.4 张量场

张量场同样是Lorentz（实质是Poincaré群）群的表示。普遍地我们可以将张量场表示成

$$T^{\mu\nu\rho\cdots}$$

即

$$\begin{aligned}\mathcal{F}'_{\mu\nu}(x) &= (1+\Lambda)\,\mathcal{F}_{\mu\nu}\,(1-\Lambda) \\ &= \mathcal{F}_{\mu\nu} + [\Lambda, \mathcal{F}_{\mu\nu}]\end{aligned} \tag{7.59}$$

这个场是Lorentz不变的经典场。但是，它作为一个量子场是不合适的，因为它会给出量纲为能量负幂次的耦合常数，从而导致理论不可重整（关于可重整性的判断后面会有详细讨论）。这一点可以这样简单分析：

考虑一个最简单的张量场$T^{\mu\nu}$。它作为一个无质量的自由场，Lagrange量中将包含这样的项：

$$\mathcal{L} \sim (\partial_\mu T^{\mu\nu})^2 + b\,(T^{\mu\nu})^2$$

在第二项加上一个常数是因为这里只考虑相对系数。

由第一项可以看出，场量$T^{\mu\nu}$的量纲应为$[T^{\mu\nu}] = \left[E^1\right]$，即能量量纲[23]。由第二项可以看出$[b] = \left[E^2\right]$，比如说可以选择$b = m^2$。

由后面的分析我们可以看出与张量场的耦合会导致负幂次的耦合常数，得到不可重整的理论。因此张量场不适宜作为一个量子场的候选者，虽然引力场就是由张量场描述的。

[23] $[\mathcal{L}] = \left[E^4\right]$,$[\partial_\mu] = \left[E^1\right]$

第八章　经典场III：Noether定理

由Wigner定理知量子理论中对称性有两类，幺正对成性和反幺正对称性。其中幺正对称性将对应守恒量。幺正对称性中一大类重要的对称性是连续对称性（连续对称性都是幺正对称性）。连续对称性和守恒律之间的一一对应关系就是Noether定理。

经典理论Noether定理告诉我们，每一个连续的对称性都对应着一个守恒流。

我们来证明这一点。

所谓对称，就是系统，具体讲就是系统Lagrange量（或Hamilton量），在变换下不变。

我们考虑的是连续的对称性，因此这里考虑无穷小变换就可以了。由于变换是连续的，有限大变换可以表示成一系列无穷小变换的和。

这里我们的场量用$\Phi_i(x), i=1,2\cdots N$表示，这样场可以表示为

$$\Phi=\begin{pmatrix}\Phi_1(x)\\ \vdots\\ \Phi_N(x)\end{pmatrix} \tag{8.1}$$

所谓对称，就是$\mathbb{L}$在无穷小变换$\Phi\longrightarrow\Phi+\delta\Phi$下不变。即：

$$\mathcal{L}(\Phi+\delta\Phi)=\mathcal{L}(\Phi)$$

或者表示成

$$\delta\mathcal{L}(\Phi)=\mathcal{L}(\Phi+\delta\Phi)-\mathcal{L}(\Phi)=0$$

由对称性条件$\delta\mathcal{L}(\Phi)=0$。可以直接推导出守恒流。（下面用了Einstein求和规则）

$$\delta\mathcal{L}(\Phi)=\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Phi_i}\delta\Phi_i+\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\Phi_i)}\delta(\partial_\mu\Phi_i) \tag{8.2}$$

注意，这里是我们已假定Lagrange量中只包含场量及其一阶导数：

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}(\Phi\partial_\mu\Phi)$$

由 Euler-Lagrange方程

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi_i}-\partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta\left(\partial_\mu \Phi_i\right)}=0$$

可以得到

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi_i}=\partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}(\Phi)}{\delta\left(\partial_\mu \Phi_i\right)}$$

带入到（34.1）式中

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{L}=&\partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta\left(\partial_\mu \Phi_i\right)} \delta \Phi_i+\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta\left(\partial_\mu \Phi_i\right)} \delta\left(\partial_\mu \Phi_i\right) \\ &=\partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta\left(\partial_\mu \Phi_i\right)} \delta \Phi_i+\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta\left(\partial_\mu \Phi_i\right)} \partial_\mu\left(\delta \Phi_i\right) \\ &=\partial_\mu\left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta\left(\partial \Phi_i\right)} \delta \Phi_i\right]\end{aligned}$$

变换变分与微分运算（δ与∂_μ可交换证明见理论力学讲义）。

对称性要求：

$$\delta \mathcal{L}=0$$

于是便有

$$\begin{aligned}\partial_\mu\left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta\left(\partial_\mu \Phi_i\right)} \delta \Phi_i\right]&=0 \\ \partial_\mu\left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta\left(\partial_\mu \Phi_i\right)} \frac{\delta \Phi}{\delta \epsilon}\right] \delta \epsilon&=0 \\ \partial_\mu\left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta\left(\partial_\mu \Phi_i\right)} \frac{\delta \Phi}{\delta \epsilon}\right]&=0\end{aligned}$$

其中$\delta\Phi_i$是任意的变分，是个小量，我们不妨将它表示成$\delta \Phi_i=\frac{\delta \Phi}{\delta \epsilon} \delta \epsilon$这里的$\delta$和$\epsilon$是任意小量。令

$$j^\mu \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta\left(\partial_\mu \Phi_i\right)} \frac{\delta \Phi}{\delta \epsilon}$$

为守恒流：

$$\partial_\mu j^\mu=0$$

j^μ的形式也可以表示成

$$j^\mu=\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta\left(\partial_\mu \Phi\right)} \frac{\delta \Phi}{\delta \epsilon}$$

这里

$$\frac{\delta \Phi}{\delta \epsilon}=\begin{pmatrix} \frac{\delta \Phi_1}{\delta \epsilon} \\ \vdots \\ \frac{\delta \Phi_N}{\delta \epsilon} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\left(\partial_\mu\Phi\right)}=\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\left(\partial_\mu\Phi_1\right)}\cdots\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\left(\partial_\mu\Phi_N\right)}\right)$$

这种矩阵表示得到的结果显然与前面写成分量形式的结果完全相同。

显然，不同的对称变换将给出不同的守恒流，不同的变换体现在$\delta\Phi$的形式中。在物理问题中我们主要关注这样一类变换(homogeneous,linear,untary)：

$$\delta\Phi=i\epsilon_a T^a\Phi$$

这个变换线性依赖于Φ，其中T^a是一组作用在$\Phi=\begin{pmatrix}\Phi_1\\ \vdots\\ \Phi_N\end{pmatrix}$，$N\times N$的厄米矩阵。$\epsilon_a$是无穷小参数。这个变换显然是一个幺正变换的无穷小变换形式：

$$\Phi\to\Phi^{'}=e^{i\epsilon_a T^a\Phi}\simeq\left(1+i\epsilon_a T^a\right)\Phi$$

8.1 全局(global)对称性

在这里我们考虑全局(global)对称性。与全局对应的是定域(global)对称性，它们区别在于变换参数ϵ_a是否是空间坐标x的函数。如果：

ϵ_a不是x的函数，则是全局对称性。如果ϵ_a是x的函数，则是定域对称性。

对全局对称性我们有：ϵ_a不含x

$$\begin{aligned}\delta\left(\partial_\mu\Phi\right)&=\partial_\mu\left(\delta\Phi\right)=\partial_\mu\left(i\epsilon_a T^a\Phi\right)\\&=i\epsilon_a T^a\partial_\mu\Phi\end{aligned}$$

即在全局($global$)变换中，$\partial_\mu\Phi$的变换与Φ的变换相同。显然在定域变换中不具备这样的性质。（前面我们应用了变分δ和微分∂_μ可交换，这可以直接证明：$\delta\left(\partial_\mu\Phi\right)=\partial_\mu\Phi^{'}-\partial_\mu\Phi=\partial_\mu\left(\Phi+\delta\Phi\right)-\partial\Phi=\partial_\mu\delta\Phi$）。

在这种全局对称性下我们可以将流写成：

$$j_\mu^a=-i\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\left(\partial_\mu\Phi\right)}T^a\Phi$$

（这里的“–”号没关系，它的选择本身具有一定的任意性。因为我们这里是由$\partial_\mu j^\mu=0$中得到的j^μ的形式，差个因子不会带来真正的问题。）

8.2 群

这里我们将变换取成

$$\delta\Phi = i\epsilon_a T^a \Phi$$

一个体系在某种变换下不变可以用群来描写。这里的T^a就可以看成是群的生成元。

8.2.1 量子情况

前面我们考虑的Noether定理完全是经典理论。并没有考虑量子化后的情况。这里我们来考虑场量子化以后的问题，具体讲就是，在给定对称性后，由Noether定理得到的守恒量与该对称性的关系。或者说在量子的情况中，由某个给定的对称性可以得到什么样的守恒量。

由Noether定理可以得到守恒流j^a_μ，由其时间分量j^a_0可得到一个守恒荷。这是很自然的事情。因为流守恒$\partial_\mu j^a_\mu = 0$写成分量形式就是

$$\frac{\partial j^a_0}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j^a} = 0$$

显然时间分量是个密度。其空间积分

$$Q^a = \int d^3x j^a_0 (x)$$

将给出一个守恒荷。

在讨论守恒荷前先将对称性具体确定下来。显然由$\delta\Phi = i\epsilon_a T^a\Phi$知对称变换的形式完全取决于$T^a$的形式，而对称性当然可由一个对对称群来确定。$T^a$就是这个群的生成元。$T^a$将满足一个生成元的代数关系。Noether定理考虑的是连续对称性。这个代数关系就是李代数。

$$\left[T^a, T^b\right] = if^{abc}T^c$$

这里的f^{abc}是结构常数。显然T^a定了(也就是f^{abc}定了，由Noether定理得到的守恒量关系也就定了)。

下面考虑量子化后的情况。

量子化了的场满足正则量子化条件

$$\begin{cases} [\Phi_i (x), \Pi_j (y)]^{ET}_{\pm} = i\delta_{ij}\delta^{(3)} (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ [\Phi_i (x), \Phi_j (y)]^{ET}_{\pm} = 0 \\ [\Pi_i (x), \Pi_j (y)]^{ET}_{\pm} = 0 \end{cases}$$

这里

$$[a,b]_{\pm} \equiv ab \pm ba$$

ET表示是等时对易关系$\left(x^0 = y^0\right)$ 其中$\Pi_i(x)$是场动量。由

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1(x) \\ \vdots \\ \Phi_N(x) \end{pmatrix}$$

确定。

下面计算守恒荷之间的对易关系

$$\begin{aligned} Q^a &= \int d^3x j_0^a(x) \\ &= \int d^3x \left(-i\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\left(\partial^0\Phi\right)}T^a\Phi\right) \\ &= \int d^3x \ \left(-i\ \Pi_i(x) T^a\Phi(x)\right) \quad \text{写成矩阵元的形式} \\ &= -i\int d^3x \ \left(\Pi_i(x) T_{ij}^a\Phi_j(x)\right) \end{aligned}$$

这样我们可以直接计算荷的对易关系：

$$\begin{aligned} \left[Q^a, Q^b\right] &= \left[-i\int d^3x\ \Pi_i(x) T_{ij}^a(x)\Phi_j(x), -i\int d^3y\ \Pi_k(y) T_{kl}^b(y)\Phi_l(y)\right] \\ &= -i\int d^3xd^3y\left[\Pi_i(x) T_{ij}^a(x)\Phi_j(x), \Pi_k(y) T_{kl}^b(y)\Phi_l(y)\right] \\ &= -\int d^3xd^3yT_{ij}^aT_{kl}^b\left[\Pi_i(x)\Phi_j(x), \Pi_k(y)\Phi_l(y)\right] \end{aligned}$$

计算式中的对易子

$$\begin{aligned} [ab,c] &= abc - cab \\ &= abc \pm acb \mp acb - cab \\ &= a[b,c]_{\pm} - [c,a]_{\pm} b \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} &\left[\Pi_i(x)\Phi_j(x), \Pi_k(y)\Phi_l(y)\right] \\ &= \Pi_i(x)\left[\Phi_j(x), \Pi_k(y)\Phi_l(y)\right]_{\pm} - \left[\Pi_k(y)\Phi_l(y), \Pi_i(x)\right]_{\pm}\Phi_j(x) \\ &= \Pi_i(x)\left[\Phi_j(x), \Pi_k(y)\right]_{\pm}\Phi_l(y) - \Pi_k(y)\left[\Phi_l(y), \Pi_i(x)\right]_{\pm}\Phi_j(x) \end{aligned}$$

这里我们考虑的荷是守恒流的时间分量，考虑的是某一时刻的荷。同时又$x^0 = y^0$

$$= i\delta_{jk}\delta^3\left(\vec{x}-\vec{y}\right)\Pi_i\left(x\right)\Phi_l\left(y\right) - i\delta_{li}\delta^3\left(\vec{x}-\vec{y}\right)\Pi_k\left(y\right)\Phi_j\left(x\right)$$

代回$\left[Q^a, Q^b\right]$的表达式

$$\begin{aligned}
\left[Q^a, Q^b\right] &= -\int d^3x d^3y T^a_{ij} T^b_{kl} \delta^3\left(\vec{x}-\vec{y}\right)\left(i\delta_{jk}\Pi_i\left(x\right)\Phi_l\left(y\right) - i\delta_{li}\Pi_k\left(y\right)\Phi_j\left(x\right)\right) \\
&= -i\int d^3x \left(T^a_{ij}T^b_{kl}\delta_{jk}\Pi_i\left(x\right)\Phi_l\left(x\right) - T^a_{ij}T^b_{kl}\delta_{li}\Pi_k\left(y\right)\Phi_j\left(x\right)\right) \\
&= -i\int d^3x \left(T^a_{ij}T^b_{kl}\Pi_i\left(x\right)\Phi_l\left(x\right) - T^b_{kl}T^a_{lj}\Pi_k\left(y\right)\Phi_j\left(x\right)\right) \\
&= -i\int d^3x \left(\Pi_i\left(x\right)T^a_{ij}T^b_{jl}\Phi_l\left(x\right) - \Pi_k\left(x\right)T^b_{kl}T^a_{lj}\Phi_j\left(x\right)\right)
\end{aligned}$$

写成矩阵相乘的形式

$$\begin{aligned}
&= -i\int d^3x \ \left(\Pi\left(x\right)T^aT^b\Phi_l\left(x\right) - \Pi\left(x\right)T^bT^a\Phi\left(x\right)\right) \\
&= -i\int d^3x \ \Pi\left(x\right)\left(T^aT^b - T^bT^a\right)\Phi\left(x\right) \\
&= -i\int d^3x \ \Pi\left(x\right)\left[T^a, T^b\right]\Phi\left(x\right)
\end{aligned}$$

由T^a满足的代数关系 $\left[T^a, T^b\right] = if^{abc}T^c$

$$\begin{aligned}
&= -i\int d^3x \ \Pi\left(x\right) if^{abc}T^c\Phi\left(x\right) \\
&= f^{abc}\int d^3x \ \Pi\left(x\right)T^c\Phi\left(x\right) \\
&= if^{abc}\left(-i\int d^3x \ \Pi\left(x\right)T^c\Phi\left(x\right)\right) \\
&= if^{abc}Q^c
\end{aligned}$$

即$\left[Q^a, Q^b\right] = if^{abc}Q^c$。

可以看到，由某对称得到的守恒荷所满足的代数关系与该群的生成元的李代数相同。这实质上是在告诉我们守恒量就是相应对称群的生成元。

(这个推导似乎依赖到正则量子化条件，以及表面项，可以进一步讨论)

8.3 定域对称性

前面讨论了全局（global）对称性。全局对称性是将场的所有点同时做某个变换。如果系统在这个变换下不变，则该系统具有这样的全局对称性。在我们考虑

的幺正变换情况下，这种变换可表示成$\delta\phi(x) = i\epsilon^a T^a\phi(x)$。这时的无穷小变换参数$\epsilon^a$是个不含$x$的常数。下面我们来考虑定域对称性是无穷小变换参数含x的情况，即$\delta\phi(x) = i\epsilon^a(x)T^a\phi(x)$

此时相当于空间不同点的场所做的变换也不同。如果系统在这种变换下不变，则所具有的便是定域对称性。

很明显，全局对称性$\delta\phi(x) = i\epsilon^a T^a\phi(x)$是定域对称性$\delta\phi(x) = i\epsilon^a(x)T^a\phi(x)$的一个特殊情况。因此如果系统具有一种定域对称性，那么它一定具有那种相应的全局对称性。（这一点很关键，它可以使我们由具备某种全局对称性的系统出发，对比相应的定域对称性。如果一个自由场都具有某种全局对称性，也就不必讨论相应的定域对称性了）。

在全局对称性中ϕ与∂_μ中的变换是相同的：

$$\delta\phi = i\epsilon^a T^a\phi$$
$$\delta(\partial^\mu\phi) = i\epsilon^a T^a\partial^\mu\phi$$

如果变换是定域的，那么ϕ的变换仍与全局变换时一样：$\delta\phi = i\epsilon^a(x)T^a\phi$

但是显然$\partial^\mu\phi$的变换肯定要受到影响，此时

$$\begin{aligned}\delta\partial^\mu\phi &= \partial^\mu\delta\phi \\ &= \partial^\mu(i\epsilon^a(x)T^a\phi) \\ &= i\epsilon^a(x)T^a\partial^\mu\phi + i(\partial^\mu\epsilon^a(x))T^a\phi\end{aligned}$$

这里的第一项与全局变换的情况相同。但由于无穷小参量含x，使变换中又多出了第二项。这一项的出现将破坏Lagrange量的定域对称性（这不奇怪;没有这一项时对称多了这一项自然不对称了）。

如果我们希望在某个全局变换下对称的理证，在相应的定域变换下也对称，那么就必须做一些修正。定域变换影响的是导数项∂^μ中。我们需要一个新的导数项使这个导数项在定域变换下不受影响。这一努力相当于去寻找一种新的导数的定义。这一新的导数中除普通导数外，将包含新的一项。这一项恰好抵消前面由于定域性带来的第二项的影响。换句话说我们将寻求一种新的导数$\mathcal{D}^\mu$来代替原来的导数∂^μ。使得在新导数下，导数项$\mathbb{D}^\mu$中的变换与ϕ的变换情况相同，即

$$\delta\mathcal{D}^\mu\phi = i\epsilon^a(x)T^a\mathcal{D}^\mu\phi$$

构造这样一个D^μ是直接的，只需将多出来的那一项减去就可以了。

普遍地，我们将D^μ，称之为协变微分（几何意义见微分几何）表示为：

$$\mathcal{D}^\mu = \partial^\mu + igT_a A_a^\mu$$

（指标a写在上、下都可以，因为它不是Lorentz指标）这里的常数g和A_a^μ由具体的对称变换定。这里A_a^μ是一个矢量。我们此时有两个选择：

1. A_a^μ本身就是一个矢量场。
2. A_a^μ是某个标量场的导数。如$\partial^\mu\sigma$。σ是一个标量场即A_a^μ本身就是一个矢量场。A_a^μ是某个标量场导数的情况不会给出我们需要的结果，后面我们将讨论一下（$\sigma-$模型）。

下面讨论A_a^μ本身为一矢量的情况。为了书写简便我们引入记法：令$\mathcal{Q}$=$\mathcal{Q}^a T^a$

这是因为我们将经常遇到$\mathcal{Q}^a T^a$的组合。

$\mathcal{Q}$是我们所关注的场，后面会看到它是一个规范场。我们会将它用规范群的生成元T^a展开。O^a是展开系数。（以后我们也经常用花体字表示这个场。这是由于希腊字母可使暂时采用$\mathcal{Q}$的形式）。

由$\mathcal{Q}$可以直接得到展开系数$\mathcal{Q}^a$，只需利用T^a的正交归一关系

$$\kappa\,\mathrm{tr}(T^a T^b) = \delta_{ab}$$

这样展开系数可直接得到

$$\mathcal{Q}^a = \kappa\,\mathrm{tr}(T^a\mathcal{Q})$$

需要注意的是，$\mathcal{Q}$此时是个矩阵。因为它是由对陈群（规范群）的生成元展开的，应用这个记法。协变微分便可表示成

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^\mu &= \partial^\mu + igT_a A_a^\mu \\ &= \partial^\mu + igA^\mu\end{aligned}$$

下面必须看一下在变换下矢量场A^μ应怎么变。确定A^μ变换规则的原则量。A^μ的变化应保证协变微分$\mathcal{D}^\mu$在该变换下保持与中相同的变换关系即

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{D}^\mu\phi &= i\epsilon_a T_a \mathcal{D}^\mu\phi \\ &= i\epsilon\mathcal{D}^\mu\phi\end{aligned}$$

下面讨论 A^μ的变换，看之$\mathcal{D}^\mu$中的变换：

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{D}^\mu\phi &= \delta(\partial^\mu\phi + igA^\mu\phi)\\ &= \delta\partial^\mu\phi + ig\delta(A^\mu\phi)\\ &= \delta\partial^\mu\phi + ig(\delta A^\mu)\phi + igA^\mu\delta\phi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta\partial^\mu\phi &= i\epsilon_a T_a\partial^\mu\phi + i(\partial^\mu\epsilon_a)T_a\phi\\ &= i\epsilon\partial^\mu\phi + i\partial^\mu\epsilon\phi\\ \delta\phi &= i\epsilon_a T_a\phi\\ &= i\epsilon\phi\end{aligned}$$

$$\delta\mathcal{D}^\mu\phi = i\epsilon\partial^\mu\phi + i\partial^\mu\epsilon\phi + ig(\delta A^\mu)\phi + igA^\mu i\epsilon\phi$$

考虑到$\mathcal{D}^\mu\phi = \partial^\mu\phi + igA^\mu\phi$

$$\begin{aligned}&= i\epsilon(\partial^\mu + igA^\mu)\phi - i\epsilon igA^\mu\phi + i\partial^\mu\epsilon\phi + ig(\delta A^\mu)\phi + igA^\mu i\epsilon\phi\\ &= i\epsilon\partial^\mu\phi - i\epsilon igA^\mu\phi + i\partial^\mu\epsilon\phi + ig(\delta A^\mu)\phi + igA^\mu i\epsilon\phi\end{aligned}$$

我们引入协变微分$\mathcal{D}^\mu$的目的是使$\mathcal{D}^\mu\phi$的变换与ϕ的变换相同，即$\delta\mathcal{D}^\mu\phi = i\epsilon\partial^\mu\phi$。因此$\delta A^\mu$中$-i\epsilon igA^\mu\phi + i\partial^\mu\epsilon\phi + ig(\delta A^\mu)\phi + igA^\mu i\epsilon\phi = 0$确定

$$\begin{aligned}(\epsilon A^\mu - A^\mu\epsilon)\phi + i\frac{1}{g}\partial^\mu\epsilon\phi &= -i(\delta A^\mu)\phi\\ \delta A^\mu &= i[\epsilon, A^\mu] - \frac{1}{g}\partial^\mu\epsilon(\mathbb{L}(\partial_\mu\phi))\end{aligned}$$

这就是说要使$\mathcal{D}^\mu\phi$与ϕ以相同的方式变换则δA^μ要以这种方式变换。

回顾前面我们所做的，为了使得Lagrange量中含有导数$\partial_\mu\phi$的场($\mathbb{L}(\partial_\mu\phi)$)定域规范不变。我们引入了一个场$A^a_\mu$，这相当于引入了一个相互作用。这种相互作用的引入使得系统定域不变。这种相互作用就是规范相互作用。A^a_μ就是规范场。显然不同的对称群将给出不同的规范场A^a_μ。这个对称群就是规范群。

第九章　经典场IV：相互作用

从牛顿的观点看，前面的对自由场的讨论就是他的第一定律，一个关于自由粒子的定律。这是一切的基础。相互作用就是牛顿的第二定律，它告诉我们一个粒子在力的作用下如何反映，这是物理定律的最核心的部分。

一个具体的相互作用的形式只能由实验确定，从理论上构造相互作用有无数种可能的方式。非常奇怪的是，大自然选择了很特殊的一种相互作用，规范相互作用。我们下面分别讨论规范的和非规范的相互作用方式。

前面我们已经分析过，自由场是二次的。这样高于二次的便都是相互作用。关键是怎样引入它们。

9.1　可重整的要求

构造相互作用的原则除了相对论这样的自然的要求以外一个特别重要的要求就是这个相互作用应该是可重整的。也就是说，相互作用的耦合常数应该是没有量纲的。可重整的要求将去掉大量的相互作用的候选者。当然，可重整是量子的要求，我们这里考虑的是经典的相互作用。经典相互作用没有这个要求，因此候选者就会很多。为此，我们不得不提前引入可重整的要求，以便能使我们将相互作用的选择范围缩小一些。

可重整的要求简单说就是要求耦合常数没有量纲，理由我们以后讨论。

9.2　经典相互作用：非规范耦合

你随便写一种耦合方式一般都是非规范耦合。耦合方式除了几个基本要求外是任意的。我们首先分别考虑几种非规范耦合。

9.2.1　标量-标量耦合

先考虑标量场和标量场耦合。考虑N个标量ϕ_1，ϕ_2，$\cdots$，ϕ_n之间的耦合。普遍

地，我们可以将Lagrange量写成

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 - m_1^2\phi_1^2\right) + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 - m_2^2\phi_2^2\right) + \cdots + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_n\partial^\mu\phi_n - m_n^2\phi_n^2\right) - V\left(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n\right) \\ &= \frac{1}{2}\partial_\mu\tilde{\phi}\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}\tilde{\phi}M\phi - V\left(\phi\right),\end{aligned}$$

这里我们已经将这几个场写成一个列矢量的形式

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}.$$

由此可以得到动力学方程

$$\left(\partial^2 + M\right)\phi = \frac{\partial V\left(\phi\right)}{\partial\phi},$$

这里

$$\frac{\partial V\left(\phi\right)}{\partial\phi} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi_1} \\ \frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi_n} \end{pmatrix},$$

以及

$$M = \begin{pmatrix} m_1^2 & & & \\ & m_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_n^2 \end{pmatrix}.$$

相互作用的形式当然取决于$V\left(\phi\right) = V\left(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n\right)$的形式。我们不妨将$V\left(\phi\right)$级数展开。

$$V\left(\phi\right) = V\left(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n\right) = a_i\phi_i + b_{ij}\phi_i\phi_j + c_{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k + d_{ijkl}\phi_i\phi_j\phi_k\phi_l + \cdots,$$

注意这里的重复指标求和。这样

$$\frac{\partial V\left(\phi\right)}{\partial\phi_s} = a_s + b_{is}\phi_i + c_{ijs}\phi_i\phi_j + d_{ijks}\phi_i\phi_j\phi_k + \cdots$$

这里的零次项和二次项是不本质的，零次项可以直接扔掉，一次项总可以通过重新定义ϕ_i将整个方程变得只有二次项。

可重整的要求

像以前一样，为了将可能的相互作用形式减少一些，我们借助一下还没有讲到的可重整的要求。可重整的要求简单地讲要求耦合常数没有量纲或有能量正幂次量纲。耦合常数没有量纲的理论是可重整的，耦合常数有能量正幂次量纲的理论是超可重整的[1]。我们选择的理论必须是可重整或超可重整，所以它们的耦合常数不能有小于零的幂次。

简单起见，我们考虑一个d维空间中的ϕ^n理论。它的Lagrange量形如（由于只考虑量纲，我们并不给出精确的形式，且不写出对分析没什么影响的质量项）

$$\mathcal{L} \sim \left(\partial^\mu \phi\right)^2 + \lambda \phi^n.$$

Lagrange密度的量纲是

$$[\mathcal{L}] = E^d.$$

我们有

$$[\mathcal{L}] = \left[\left(\partial^\mu \phi\right)^2\right] = E^d,$$

从而

$$[\partial^\mu \phi] = E^{d/2}.$$

因为$[\partial^\mu] = E^1$，所以

$$[\phi] = E^{d/2-1}.$$

因为$[\lambda \phi^n] = E^d$，所以

$$[\lambda] = E^{n\left(1-\frac{d}{2}\right)+d}$$

可重整要求$[\lambda] \geq E^0$，于是对$d \geq 2$有

$$n \leq \frac{d}{\frac{d}{2}-1}.$$

这个结果告诉我们在四维时空中，即$d = 4$，可重整要求$n \leq 4$。我们还可以看到，对$d = 2$，n取任何值理论都可重整[2]。

[1] 可重整理论中有无穷多个发散的图，但是发散可以通过重整化的方法去掉。超可重整理论中有限多个发散的图，当然也没有问题。不可重整的理论中的无穷大是不能通过重整化方式去掉的。

[2] $n \leq \frac{d}{\frac{d}{2}-1}$, $d = 5$则$n \leq \frac{5}{\frac{5}{2}-1} = \frac{10}{3}$, 这意味着在五维空间中没有可重整的标量耦合的理论。且可重整的理论只存在于足够低的维数空间中。这可能还意味着，量子的可重整要求对空间维数有一个最大维数要求

这里我们暂时先只考虑四维情况。这样我们的标量场耦合就不能超过ϕ^4。鉴于此，我们在这里先只考虑小于四次方的耦合，

$$V(\phi)=V(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n)=c_{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k+d_{ijkl}\phi_i\phi_j\phi_k\phi_l.$$

这样Lagrange量为

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\tilde{\phi}\partial^\mu\phi-\frac{1}{2}\tilde{\phi}M\phi-c_{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k-d_{ijkl}\phi_i\phi_j\phi_k\phi_l, \tag{9.1}$$

运动方程为

$$\left(\partial^2+m_s^2\right)\phi_s=c_{ijs}\phi_i\phi_j+d_{ijks}\phi_i\phi_j\phi_k. \tag{9.2}$$

9.2.2 自作用：标量场

前面讨论的是几个标量场ϕ_1，ϕ_2，$\cdots$，ϕ_n之间的相互作用，这里我们考虑只有一种场ϕ的情况。由于只有一种场，因此这里的作用是自作用。

只有一种场的时候，Lagrange量（9.1）变为

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-\frac{1}{2}m^2\phi^2-\frac{\lambda_3}{3!}\phi^3-\frac{\lambda_4}{4!}\phi^4, \tag{9.3}$$

运动方程（9.2）变为

$$\left(\partial^2+m_s^2\right)\phi_s=\frac{\lambda_3}{2!}\phi_j^2+\frac{\lambda_4}{3!}\phi^3. \tag{9.4}$$

这里我们加入了一个$\frac{1}{n!}$的因子是为了形式上好看一些，对比Lagrange量和运动方程就知道了。

出于在四维空间中的可重整的考虑，这里写出的是ϕ^4和ϕ^3。普遍地，当然也可以写出ϕ^n：

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-\frac{1}{2}m^2\phi^2-\frac{\lambda}{n!}\phi^n, \tag{9.5}$$

只不过n不同的ϕ^n理论在不同维数的空间中可重整罢了。比如，ϕ^3在六维空间中是可重整的（它在四维空间中是超可重整的）；ϕ^6在三维空间中是可重整的。

9.2.3 自作用：旋量场

最简单的旋量场的自作用，也就是一种旋量-旋量耦合显然是

$$\mathcal{L}_I=g\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi.$$

只有四个旋量在一起才能保证Lagrange量是一个数。但是很容易验证，由于$[\psi]=\left[E^{3/2}\right]$，使得$[g]=E^{-2}$。耦合常数量纲小于零，这个理论是不可重整的。

9.2.4 自作用：矢量场

矢量场的自作用最简单的情况就是

$$\mathcal{L}_I = g\left(A_\mu A^\mu\right)\left(A_\mu A^\mu\right).$$

两个A_μ不是相互作用，只有四个旋量在一起才能保证Lagrange量是一个Lorentz标量。由于$[A^\mu] = E^1$，所以$[g] = E^0$，这个理论是可重整的。

这样的自作用是真实的，它将出现在非Abel的规范场里。

9.2.5 自作用：张量场

场量$T^{\mu\nu}$的量纲应为$[T^{\mu\nu}] = \left[E^1\right]$，自作用会出现类似

$$\mathcal{L}_I = g\left(T_{\mu\nu}T^{\mu\nu}\right)^2$$

的相互作用，这里耦合常数的量纲$[g] = E^0$，可重整。

9.2.6 旋量-标量耦合

一个旋量场ψ与一个标量场ϕ耦合，其相互作用部分的Lagrange量如果加上简单性的要求可以写成

$$\mathcal{L}_I = g\bar{\psi}\psi\phi.$$

这里我们被迫同时引入了$\bar{\psi}$和ψ，因为Lagrange量必须是一个数，而ψ是一个列矩阵。我们必须检验这个理论是不是可重整，也就是看看耦合常数的量纲。

前面我们已经知道$[\psi] = \left[E^{3/2}\right]$和$[\phi] = E^1$。可见$[g] = E^0$，没有量纲，这是一个可重整的理论。

如果我们不要求系统保持宇称，那么

$$\mathcal{L}_I = g\bar{\psi}\gamma_5\psi\phi$$

也是一个选择。这时$\mathcal{L}_I$不是一个标量，而是一个赝标量。旋量-矢量耦合

9.2.7 旋量-矢量耦合

一个旋量场ψ与一个矢量场A^μ耦合，最简单的方式就是

$$\mathcal{L}_I = g\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu.$$

我们来看看这种方式是不是可重整的。

我们有$[A^\mu] = E^1$，这样有$[g] = E^0$，没有量纲，它可重整。显然其它简单的方式会给出不可重整的结果。

如果不在乎宇称，那么也可以有

$$\mathcal{L}_I = g\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi A^\mu,$$

这种耦合方式。

这种旋量-矢量耦合的一个特别重要的特殊情况就是后面要讨论的规范耦合。但是，显然，在这里矢量场A^μ没有必要是一个规范场，它就是一个矢量场而已，比如它可以有质量，等等。

9.2.8 旋量-张量耦合

一个旋量场ψ与一个张量场$T^{\mu\nu}$耦合。可能的相互作用形式是

$$g\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial^\nu T_{\mu\nu}, \tag{9.6}$$

$$g\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi T_{\mu\nu} \tag{9.7}$$

或

$$g\bar{\psi}\psi T^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \tag{9.8}$$

其中g是耦合常数。张量场$T^{\mu\nu}$的量纲为$[T^{\mu\nu}] = \left[E^1\right]$，旋量场的量纲为$[\psi] = \left[E^{3/2}\right]$。这样我们有

（9.6）要求$[g] = \left[E^{-1}\right]$，不可重整。

（9.7）要求$[g] = \left[E^0\right]$，可重整。

（9.8）要求$[g] = \left[E^{-1}\right]$，不可重整。

但是这里的（9.7）等于零，因为我们$\sigma^{\mu\nu}$是反对称的，而$T_{\mu\nu}$是对称的，至少对引力是如此。

9.2.9 标量-矢量耦合

按照简单性原则，我们可以将这个Lagrange量写成

$$\mathcal{L}_I = g\phi A_\mu A^\mu.$$

这样$[g] = E^1$，这是一个超可重整理论。这启发我们构造一个可重整的理论，

$$\mathcal{L}_I = g\phi^2 A_\mu A^\mu,$$

这里$[g]=E^0$。

如果考虑导数耦合，我们也可以有

$$\mathcal{L}_I = g\phi\partial_\mu A^\mu,$$

仍然$[g]=E^1$，超可重整。此外，

$$\mathcal{L}_I = g\phi^2\partial_\mu A^\mu,$$

$[g]=E^0$，可重整。

9.3 经典相互作用：规范耦合

前面讨论的是一个普遍的场之间的相互作用的原则，给出的是相互作用的可能的形式。显然大自然中的相互作用不会有那么多，但又肯定包含在前面这些种普遍的形式中。最让人不可思议的是，大自然中的为数不多的几种相互作用都依循着一个特别简单的原则，就是对称性的原则。为什么会是这样，我们是不清楚的。

9.3.1 全局的和定域的规范变换

我们先普遍地考虑一个有（自旋以外）内部自由度的场，它可以是标量场也可以是矢量场。按照前面的分析，一个有（自旋以外）内部自由度的场可以将它的分量写在一个列矩阵中：

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}. \tag{9.9}$$

这里的ψ表示一个标量场或是一个旋量场。有（自旋以外）内部自由度的ψ是一个复线性空间中的矢量。前面我们已经发现，在各分量的质量相同的情况下，自由的标量场和旋量场的Lagrange量（从而运动方程）当ψ在复空间旋转时是不变的（原因是Lagrange量是二次型）。也就是说，ψ在

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \to U \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

下是不变的。U在这里代表一个复空间中的旋转（如前面讨论的，一个复空间中的旋转可以由一个$U(n)$群描述；或者说，复空间中的保内积的旋转构成一个$U(n)$群）。这样一个各分量的质量相同或没有质量的旋量场所具有的对称性就是ψ在变换

$$\psi(x) \to U\psi(x) \tag{9.10}$$

下不变。

这个对称性意味着ψ的各个分量的选择是任意的（用自旋做个比方就是规定那个方向向上都是一样的；用同位旋做个比方就是把哪个分量当质子或中子都行）。注意，ψ的不同分量是自旋以外的内部自由度。这个对称性是无质量场本身就具有的。

式（9.10）对空间中每一点x上的$\psi(x)$都施以同一个变换$U\psi(x)$，也就是都做同样一个旋转。不过，这个变换是任意选取的。

想象这样一种情况。还是这一个有内部自由度的旋量场（9.9）。空间中的每一个点上都有一个观测者，每个观测者都可以任意地选择一个自己喜欢的旋转。我们将空间x点上的观测者选取的参数表示为$U(x)$。每个观测者选取的旋转一般地讲当然不会相同（不过我们不妨要求两个相邻点的选择是连续的光滑的，这个假设是合理的，这使我们可以用微积分），比如转过不同的角度。如果我们要求在空间中的每个观测者看来这个对称性都得以保持；也就是说，虽然每个不同点上的观测者都会选择自己的旋转$U(x)$，x不同$U(x)$也不同，而他们都觉得这个世界像是为他们自己设计的，因为不管他们怎样选择这个旋转，这个对称性都会保持。当然，这其实是提出了更高的要求，要求这个场一人来称万人心。也就是要求场在变换

$$\psi(x) \to U(x)\psi(x) \tag{9.11}$$

下不变。我们称（9.10）为全局规范变换，因为它对全空间各点都是一样的；而称（9.11）为定域规范变换，因为这个变换是逐点的。规范变换这个名字完全是历史原因，来自Weyl，并不准确。

9.3.2 协变导数

所谓一个物理系统在一个变换下不变，本质上是所观测到的物理现象不变，物理现象和运动方程的解是一一对应的，运动方程和Lagrange量在Lagrange量差一个全微分项的时候是对应的。因此，所谓系统在某个变换下不变可以认为是运动方程后Lagrange量在这个变换下不变。一个系统的Lagrange量中包含ψ和它的导数$\partial^\mu\psi$。一个有质量的自由场包含两项，导数项和质量项。我们说这个场具有某个对称性的

时候实际上是在说这两项分别具有这种对称性[3]。由前面的分析很容易看出，保持这种对称性要求$\partial^\mu\psi$和ψ必须以同一个方式变换，这样才能抵消这种变化。也就是说在ψ按照（9.10）的方式变换的时候，即$\psi(x)\to U(x)\psi(x)$。$\partial^\mu\psi$也必须按照同样的方式变换，即

$$\partial^\mu\psi(x)\to U(x)\left[\partial^\mu\psi(x)\right].$$

对$U(x)=const$，即变换在全空间是一个常数的情况，这一点很容易做到，因为$\partial^\mu\psi\to\partial^\mu(U\psi)=U(\partial^\mu\psi)$。事实上，前面分析有内部自由度的场的对称性的时候我们就是这样做的。但是，当$U(x)$在空间的不同点上取值不同的时候，做到这一点就复杂了。此时

$$\partial^\mu\psi(x)\to\partial^\mu\left[U(x)\psi(x)\right]\neq U(x)\left[\partial^\mu\psi(x)\right].$$

也就是说，$\partial^\mu\psi(x)$的变换规律与$\psi(x)$并不相同。此时

$$\partial^\mu\psi(x)\to\partial^\mu\left[U(x)\psi(x)\right]=U(x)\left[\partial^\mu\psi(x)\right]+\left[\partial^\mu U(x)\right]\psi(x),\tag{9.12}$$

多出了$\left[\partial^\mu U(x)\right]\psi(x)$这一项。

导致$\partial^\mu\psi$和ψ按照不同方式变换的原因显然是变换$U(x)$是逐点变化的，使得对$U(x)$的求导$\partial^\mu U(x)\neq 0$造成的（观察（9.12）的第二项）。那么如何使对ψ的导数和ψ按照相同方式变换呢。我们来观察一下。在这个问题中只有三个东西：$\psi(x)$，$U(x)$和∂^μ。$\psi(x)$是我们要处理的对象，不能动；$U(x)$是任给的，不能动。只剩下看上去更不能动导数∂^μ。那么我们能否通过改变导数的定义使ψ的导数和ψ按照相同方式变换呢，我们来试一下。

$\partial^\mu\psi$和ψ按照不同方式变换的原因是因为求导运算会作用在变换$U(x)$上。要想抵消（9.12）中$\left[\partial^\mu U(x)\right]\psi(x)$这一项的影响，我们需要在导数算子中引入不求导的项。普遍地我们可以这样引入新的导数算子

$$D_\mu\equiv\partial_\mu-\mathcal{A}_\mu(x),\tag{9.13}$$

这里我们在导数项中引入了不求导的项$\mathcal{A}_\mu(x)$。现在我们寄希望于$D_\mu\phi(x)$与$\phi(x)$按照相同的方式变换。也就是说我们要求在变换$U(x)$下有

$$\psi(x)\to\psi'(x)=U(x)\psi(x)$$

并且

$$D_\mu\psi(x)\to\left[D_\mu\psi(x)\right]'=U(x)\left[D_\mu\psi(x)\right].\tag{9.14}$$

[3]这个要求可能太强了，氢原子的两项加在一起给出了更高的动力学对称性。

我们来看看要做到这点需要对所添加的$\mathcal{A}_\mu(x)$项有什么要求。需要注意的是，当导数是∂_μ的时候，在变换后还是∂_μ。但由于D_μ中包含$\mathcal{A}_\mu(x)$，变换后$\mathcal{A}_\mu(x)$也会变化，所以新的导数算子D_μ在变换后也会变，即

$$D_\mu \to D'_\mu = \partial_\mu - \mathcal{A}'_\mu(x).$$

我们来直接计算$D_\mu\psi(x)$变换后的结果

$$\begin{aligned}
D_\mu\psi(x) \to [D_\mu\psi(x)]' &= D'_\mu\psi'(x) \\
&= \left[\partial_\mu - \mathcal{A}'_\mu(x)\right][U(x)\psi(x)] \\
&= \partial_\mu[U(x)\psi(x)] - \mathcal{A}'_\mu(x)[U(x)\psi(x)] \\
&= \partial_\mu U(x)\psi(x) + U(x)\partial_\mu\psi(x) - \mathcal{A}'_\mu(x)U(x)\psi(x) \\
&= U(x)\partial_\mu\psi(x) - U(x)\mathcal{A}_\mu(x)\psi(x) + U(x)\mathcal{A}_\mu(x)\psi(x) + \partial_\mu U(x)\psi(x) - \mathcal{A}'_\mu(x)U(x)\psi(x) \\
&= U(x)D_\mu\psi(x) + U(x)\mathcal{A}_\mu(x)\psi(x) + \partial_\mu U(x)\psi(x) - \mathcal{A}'_\mu(x)U(x)\psi(x)
\end{aligned}$$

按照（9.14）中的要求，必须有$D_\mu\psi(x) \to U(x)[D_\mu\psi(x)]$，所以必须要求

$$U(x)\mathcal{A}_\mu(x)\psi(x) + \partial_\mu U(x)\psi(x) - \mathcal{A}'_\mu(x)U(x)\psi(x) = 0.$$

这样我们有

$$U(x)\mathcal{A}_\mu(x) + \partial_\mu U(x) - \mathcal{A}'_\mu(x)U(x) = 0,$$

于是有

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}'_\mu(x)U(x) &= U(x)\mathcal{A}_\mu(x) + \partial_\mu U(x) \\
\mathcal{A}'_\mu(x) &= U(x)\mathcal{A}_\mu(x)U^{-1}(x) + [\partial_\mu U(x)]U^{-1}(x).
\end{aligned}$$

也就是说，如果我们要求$D_\mu\psi(x)$与$\psi(x)$按相同的方式变换，就必须要求新引入的导数算子中的$\mathcal{A}_\mu(x)$按

$$\mathcal{A}_\mu(x) \to \mathcal{A}'_\mu(x) = U(x)\mathcal{A}_\mu(x)U^{-1}(x) + [\partial_\mu U(x)]U^{-1}(x)$$

的方式变。

我们来看看新的导数算子如何变换。$D_\mu\psi(x)$与$\psi(x)$按相同的方式变换，由（9.14）我们有

$$D_\mu\psi(x) \to [D_\mu\psi(x)]' = D'_\mu\psi'(x) = U(x)[D_\mu\psi(x)] = U(x)D_\mu U^{-1}(x)U(x)\psi(x)$$

对比有（注意到$\psi'(x)=U(x)\psi(x)$）

$$D_\mu \to D'_\mu = U(x) D_\mu U^{-1}(x).$$

可见D_μ在$U(x)$变换下是一个张量。

D_μ被我们称做协变导数。D_μ有着很深的几何背景。一个平直的空间中的导数算子就是∂_μ。但是当空间是弯曲的时候，显然∂_μ变不再合适了。这时就可以引入协变导数$D_\mu=\partial_\mu-\Gamma_\mu(x)$，这里的$\Gamma_\mu(x)$就是用来修正空间弯曲带来的影响的，称为联络。空间弯曲的全部信息都包含在联络$\Gamma_\mu(x)$中，所以联络是一个核心重要的量。（9.13）中的$\mathcal{A}_\mu(x)$显然就是联络。这说明与定域规范变换有关的这些东西有着深刻的数学背景。从更加物理的角度说，这个场的引入完全是为了平衡元由定域规范变换带来的变化。换句话说，$\mathcal{A}_\mu(x)$是定域规范不变要求的产物，是一个由定域规范不变引入的场。我们称它为规范场。

9.3.3 场强

为了使ψ的导数与ψ按照相同方式变换，我们引入了协变导数D_μ。在讨论普遍的矢量场的时候我们引入了一个反对称张量，并指出反对称是一个非常深刻的性质。由协变导数D_μ我们也可以直接构造一个具有反对称性质的量，

$$[D_\mu, D_\nu].$$

很容易证明它在$U(x)$变换下是一个张量[4]。

[4]

$$\begin{aligned}[D_\mu, D_\nu] &\to \left[D'_\mu, D'_\nu\right] \\ &= \left\{D'_\mu D'_\nu - D'_\nu D'_\mu\right\} \\ &= \Omega(x) D_\mu \Omega^{-1}(x) \Omega(x) D_\nu \Omega^{-1}(x) - \Omega(x) D_\nu \Omega^{-1}(x) \Omega(x) D_\mu \Omega^{-1}(x) \\ &= \Omega(x) [D_\mu, D_\nu] \Omega^{-1}(x)\end{aligned}$$

可以直接计算出$[D_\mu, D_\nu]$的具体形式，这是个微分算子，我们将它作用在$\psi(x)$上

$$
\begin{aligned}
[D_\mu, D_\nu]\phi(x) = & \\
&= [\partial_\mu - \mathcal{A}_\mu(x), \partial_\nu - \mathcal{A}_\nu(x)]\phi(x) \\
&= (\partial_\mu - \mathcal{A}_\mu(x))(\partial_\nu - \mathcal{A}_\nu(x))\phi(x) - (\partial_\nu - \mathcal{A}_\nu(x))(\partial_\mu - \mathcal{A}_\mu(x))\phi(x) \\
&= [\partial_\mu - \mathcal{A}_\mu(x)][\partial_\nu\phi(x) - \mathcal{A}_\nu(x)\phi(x)] - [\partial_\nu - \mathcal{A}_\nu(x)][\partial_\mu\phi(x) - \mathcal{A}_\mu(x)\phi(x)] \\
&= -\left\{\begin{array}{l} -\partial_\mu\partial_\nu\phi(x) + \partial_\mu(\mathcal{A}_\nu(x)\phi(x)) + \mathcal{A}_\mu(x)\partial_\nu\phi(x) - \mathcal{A}_\mu(x)\mathcal{A}_\nu(x)\phi(x) \\ +\partial_\nu\partial_\mu\phi(x) - \partial_\nu(\mathcal{A}_\mu(x)\phi(x)) - \mathcal{A}_\nu(x)\partial_\mu\phi(x) + \mathcal{A}_\nu(x)\mathcal{A}_\mu(x)\phi(x) \end{array}\right\} \\
&= -\left\{\begin{array}{l} -\partial_\mu\partial_\nu\phi(x) + \partial_\mu\mathcal{A}_\nu(x)\phi(x) + \mathcal{A}_\nu(x)\partial_\mu\phi(x) + \mathcal{A}_\mu(x)\partial_\nu\phi(x) \\ -\mathcal{A}_\mu(x)\mathcal{A}_\nu(x)\phi(x) + \partial_\nu\partial_\mu\phi(x) - \partial_\nu\mathcal{A}_\mu(x)\phi(x) - \mathcal{A}_\mu(x)\partial_\nu\phi(x) \\ -\mathcal{A}_\nu(x)\partial_\mu\phi(x) + \mathcal{A}_\nu(x)\mathcal{A}_\mu(x)\phi(x) \end{array}\right\} \\
&= -\{\partial_\mu\mathcal{A}_\nu(x)\phi(x) - \partial_\nu\mathcal{A}_\mu(x)\phi(x) - \mathcal{A}_\mu(x)\mathcal{A}_\nu(x)\phi(x) + \mathcal{A}_\nu(x)\mathcal{A}_\mu(x)\phi(x)\} \\
&= -\{\partial_\mu\mathcal{A}_\nu(x) - \partial_\nu\mathcal{A}_\mu(x) - [\mathcal{A}_\mu(x), \mathcal{A}_\nu(x)]\}\phi(x).
\end{aligned}
$$

由这个结果可以直接看出

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = -[D_\mu, D_\nu],$$

这就是我们在普遍地讨论矢量场的时候引入的场强。

我们这里引入$\mathcal{A}_\mu(x)$是为了保持ψ的导数与ψ按照相同方式变换而引入了协变导数D_μ。在D_μ中包含了一个时空位置的函数就是$\mathcal{A}_\mu(x)$。从几何的角度讲，引入协变导数的原因是空间不是平直的，联络$\mathcal{A}_\mu(x)$反映了空间弯曲的情况。从物理的角度看，$\mathcal{A}_\mu(x)$显然可以被理解成一个相对论的矢量场，它一定是前面我们讨论的普遍的矢量场的一种特殊情况。这就是说，一个规范相互作用完全可以有一个几何上的原因。如果我们用协变导数D_μ代替普通导数∂_μ，那么一个弯曲空间在我们看来就是平直的了。这本质上就是爱因斯坦的广义协变的思想。即认为物理定律在一切参照系中都相同。在用协变导数D_μ代替普通导数∂_μ后，在弯曲空间中的物理定律的形式与平直空间中的形式是一样的。因此，我们可以认为场$\mathcal{A}_\mu(x)$或场强$\mathcal{F}_{\mu\nu}$实质上体现的是弯曲空间的几何性质。参与相互作用的粒子都是弯曲空间中的自由粒子。

需要注意的是，在广义相对论中，弯曲的是四维时空。在我们现在考虑的问题中，弯曲的是一个内禀空间，它与$\psi(x)$的相位相联系。

9.3.4 规范群

前面提到一个各分量质量相同或零质量的有（自旋以外）内部自由度的场在复空间旋转下是不变的。而当我们要求在空间中每个点这一对称性都保持的时候，我

们将得到一个被称为规范场的矢量相互作用。这样一个复空间中的旋转将构成一个群。选定一个群，就确定了一个规范场，这个群被称为规范群。

稍微仔细一些地来看一下这件事。

一个复空间中的旋转U可以表示成

$$U(\Theta)=e^{i\Theta},$$

的形式[5]。旋转的方式由Θ决定。普遍地，一个复空间中的旋转可以由一个$U(n)$群描述（或者说，复空间中的保内积的旋转构成一个$U(n)$群），所以$U(\Theta)$是一个$U(n)$群的群元。普遍地，一个$U(n)$群的群元可以用生成元表示成

$$U(\Theta)=e^{i\alpha^a T^a},$$

的形式。这里$\Theta=\alpha^a T^a$中T^a是所选定的$U(n)$群的生成元，α^a是转动的参数。这样一个没有质量的旋量场所具有的对称性就是ψ在变换

$$\psi(x)\to e^{i\Theta}\psi(x)=e^{i\alpha^a T^a}\psi(x) \tag{9.15}$$

下不变。

当我们采用（9.15）的形式描述这个变换的时候，变换$U(\Theta)$由一组参数$\{\alpha^a\}$，每一组这样的参数都给出一个变换。参数$\{\alpha^a\}$一旦给定，对空间中每一点x上的$\psi(x)$都施以同一个变换$e^{i\alpha^a T^a}$，也就是都做同样一个旋转。不过，这个变换是任意选取的，也就是说参数$\{\alpha^a\}$是可以随便取的。这就是全局规范变换。

而如果空间中的每一个点上都有一个观测者，每个观测者都选择不同的参数$\{\alpha^a(x)\}$，则变换为

$$\psi(x)\to\psi(x)\,e^{i\Theta(x)}=\psi(x)\,e^{i\alpha^a(x)T^a}.$$

---

[5]二维实空间旋转可以写成矩阵$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$。考虑无穷小旋转，在单位元$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$附近展开：

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\cos\epsilon & -\sin\epsilon\\ \sin\epsilon & \cos\epsilon\end{pmatrix}&\simeq\begin{pmatrix}1&-\epsilon\\ \epsilon&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\epsilon\end{aligned}$$

不过形式上我们更愿意将这个展开写成

$$\begin{pmatrix}\cos\epsilon & -\sin\epsilon\\ \sin\epsilon & \cos\epsilon\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-i\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\epsilon=\mathbf{1}-i\sigma_2\epsilon\sim e^{-i\sigma_2\epsilon},$$

σ_2是Pauli矩阵。引入i是因为我们有这样的结论：一个幺正算符总可以写成$U=e^{iH}$的形式，其中H是一个厄米算符。

这便是定域规范不变。

$$\begin{aligned}\mathcal{A}'_{\mu}(x) &= U(x)\mathcal{A}_{\mu}(x)U^{-1}(x) + [\partial_{\mu}U(x)]U^{-1}(x) \\ &= e^{i\Theta(x)}\mathcal{A}_{\mu}(x)e^{-i\Theta(x)} + \left[\partial_{\mu}e^{i\Theta(x)}\right]e^{-i\Theta(x)} \\ &= e^{i\Theta(x)}\mathcal{A}_{\mu}(x)e^{-i\Theta(x)} + i\partial_{\mu}\Theta(x)e^{i\Theta(x)}e^{-i\Theta(x)} \\ &= e^{i\Theta(x)}\mathcal{A}_{\mu}(x)e^{-i\Theta(x)} + i\partial_{\mu}\Theta(x).\end{aligned}$$

可以看出，在规范变换下，$\mathcal{A}(x)$所作的变换可以分成两部分：一部分是作一个旋转，即$\mathcal{A}_{\mu}(x) \to e^{i\Theta(x)}\mathcal{A}_{\mu}(x)e^{-i\Theta(x)}$；另一部分是作一个平移$\mathcal{A}_{\mu}(x) \to i\partial_{\mu}\Theta(x)$。在没有（自旋以外）的内部自由度的情况下，我们有$\mathcal{A}_{\mu}(x) \to \mathcal{A}_{\mu}(x) + i\partial_{\mu}\Theta(x)$，即只有平移的情况。

9.3.5 场方程

我们可以直接由规范场的Lagrange量得到场方程，之所以推迟到现在才做这件事是因为我们希望采用协变微分这种更自然的形式来表达。我们由（7.53），$\mathcal{L} = -\frac{\kappa}{4}g^2F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a}$，给出的Lagrange量出发做这件事，当然要去掉（7.53）中的质

量项。直接计算我们有[6]

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^{\rho d}} = -\frac{\kappa}{2} g^3 C^{adc} A^{\nu c} F^a_{\rho\nu} - \frac{\kappa}{2} g^3 C^{abd} A^{\mu b} F^a_{\mu\rho}.$$

[6]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F^{\mu\nu a}}{\partial A^{\rho d}} &= \frac{\partial}{\partial A^{\rho d}} \left(\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a} + g C^{abc} A^{\mu b} A^{\nu c} \right) \\
&= g C^{abc} A^{\nu c} \delta^\mu_\rho \delta^{bd} + g C^{abc} A^{\mu b} \delta^\nu_\rho \delta^{cd} \\
&= g C^{adc} A^{\nu c} g^\mu_\rho + g C^{abd} A^{\mu b} g^\nu_\rho \\
&= g C^{adc} A^{\nu c} g^\mu_\rho + g C^{abd} A^{\mu b} g^\nu_\rho
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F^a_{\mu\nu}}{\partial A^{\rho d}} &= g_{\mu\lambda} g_{\nu\tau} \frac{\partial F^{\lambda\tau a}}{\partial A^{\rho d}} \\
&= g_{\mu\lambda} g_{\nu\tau} \left(g C^{adc} A^{\tau c} g^\lambda_\rho + g C^{abd} A^{\lambda b} g^\tau_\rho \right) \\
&= g C^{adc} A^c_\nu g_{\mu\rho} + g C^{abd} A^b_\mu g_{\nu\rho}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F^{\mu\nu a}}{\partial_\sigma A^{\rho d}} &= \frac{\partial}{\partial_\sigma A^{\rho d}} \left(\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a} + g C^{abc} A^{\mu b} A^{\nu c} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial_\sigma A^{\rho d}} \left(g^{\mu\lambda} \partial_\lambda A^{\nu a} - g^{\nu\lambda} \partial_\lambda A^{\mu a} \right) \\
&= g^{\mu\lambda} \delta^\sigma_\lambda \delta^\nu_\rho \delta^{ad} - g^{\nu\lambda} \delta^\sigma_\lambda \delta^\mu_\rho \delta^{ad} \\
&= g^{\mu\lambda} g^\sigma_\lambda g^\nu_\rho \delta^{ad} - g^{\nu\lambda} g^\sigma_\lambda g^\mu_\rho \delta^{ad} \\
&= g^{\mu\sigma} g^\nu_\rho \delta^{ad} - g^{\nu\sigma} g^\mu_\rho \delta^{ad}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F^a_{\mu\nu}}{\partial_\sigma A^{\rho d}} &= g_{\mu\lambda} g_{\nu\tau} \frac{\partial F^{\lambda\tau a}}{\partial_\sigma A^{\rho d}} \\
&= g_{\mu\lambda} g_{\nu\tau} \left(g^{\lambda\sigma} g^\tau_\rho \delta^{ad} - g^{\tau\sigma} g^\lambda_\rho \delta^{ad} \right) \\
&= g^\sigma_\mu g_{\nu\rho} \delta^{ad} - g_{\mu\rho} g^\sigma_\nu \delta^{ad}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial A^{\mu a}}{\partial A^{\rho d}} = \delta^\mu_\rho \delta^{ad} = g^\mu_\rho \delta^{ad}$$

$$\frac{\partial A^a_\mu}{\partial A^{\rho d}} = g_{\mu\lambda} \frac{\partial A^{\lambda a}}{\partial A^{\rho d}} = g_{\mu\lambda} g^\lambda_\rho \delta^{ad} = g_{\mu\rho} \delta^{ad}$$

$$\frac{\partial A^{\mu a}}{\partial_\sigma A^{\rho d}} = \frac{\partial A^a_\mu}{\partial_\sigma A^{\rho d}} = 0$$

因此

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^{\rho d}} &= \frac{\partial}{\partial A^{\rho d}} \left(-\frac{\kappa}{4} g^2 F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu a} \right) \\
&= -\frac{\kappa}{4} g^2 \frac{\partial F^a_{\mu\nu}}{\partial A^{\rho d}} F^{\mu\nu a} - \frac{\kappa}{4} g^2 F^a_{\mu\nu} \frac{\partial F^{\mu\nu a}}{\partial A^{\rho d}} \\
&= -\frac{\kappa}{4} g^2 \left(g C^{adc} A^c_\nu g_{\mu\rho} + g C^{abd} A^b_\mu g_{\nu\rho} \right) F^{\mu\nu a} - \frac{\kappa}{4} g^2 F^a_{\mu\nu} \left(g C^{adc} A^{\nu c} g^\mu_\rho + g C^{abd} A^{\mu b} g^\nu_\rho \right) \\
&= -\frac{\kappa}{4} g^3 C^{adc} A^c_\nu F^{\nu a}_\rho - \frac{\kappa}{4} g^3 C^{abd} A^b_\mu F^{\mu a}_\rho - \frac{\kappa}{4} g^3 F^a_{\rho\nu} C^{adc} A^{\nu c} - \frac{\kappa}{4} g^3 F^a_{\mu\rho} C^{abd} A^{\mu b} \\
&= -\frac{\kappa}{2} g^3 C^{adc} A^{\nu c} F^a_{\rho\nu} - \frac{\kappa}{2} g^3 C^{abd} A^{\mu b} F^a_{\mu\rho}
\end{aligned}$$

场强$F^{\mu\nu}$是反对称性的，如果我们考虑的是半单李代数的情况，那么结构常数C^{adc}也可以是全反对称性（前面我们讨论过，由厄米性的要求自动蕴含在场中的代数结构其结构常数C^{abc}只需前两个指标反对称，用不着三个指标都反对称。但是如果我们考虑的是半单李代数这种特殊情况，那么结构常数的三个指标就都是反对称的。我们将采用这个假设，但是也要注意，这告诉我们，下面的结果不是完全普适的，只对半单李代数的情况成立），这样有[7]

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^{\rho d}} = \kappa g^3 C^{abd} A^{\mu b} F^a_{\rho\mu}.$$

进一步地[8]

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\sigma A^{\rho d}\right)} = \kappa g^2 F_\rho^{\sigma d}.$$

7

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^{\rho d}} &= -\frac{\kappa}{2} g^3 C^{adc} A^{\nu c} F^a_{\rho\nu} + \frac{\kappa}{2} g^3 C^{abd} A^{\mu b} F^a_{\rho\mu} \\
&= \frac{\kappa}{2} g^3 C^{acd} A^{\mu c} F^a_{\rho\mu} + \frac{\kappa}{2} g^3 C^{abd} A^{\mu b} F^a_{\rho\mu} \\
&= \frac{\kappa}{2} g^3 C^{abd} A^{\mu b} F^a_{\rho\mu} + \frac{\kappa}{2} g^3 C^{abd} A^{\mu b} F^a_{\rho\mu} \\
&= \kappa g^3 C^{abd} A^{\mu b} F^a_{\rho\mu}
\end{aligned}$$

8

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\sigma A^{\rho d}\right)} &= \frac{\partial}{\partial \left(\partial_\sigma A^{\rho d}\right)} \left(-\frac{\kappa}{4} g^2 F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu a}\right) \\
&= -\frac{\kappa}{4} g^2 \frac{\partial F^a_{\mu\nu}}{\partial \left(\partial_\sigma A^{\rho d}\right)} F^{\mu\nu a} - \frac{\kappa}{4} g^2 F^a_{\mu\nu} \frac{\partial F^{\mu\nu a}}{\partial \left(\partial_\sigma A^{\rho d}\right)} \\
&= -\frac{\kappa}{4} g^2 \left(g^\sigma_\mu g_{\nu\rho} \delta^{ad} - g_{\mu\rho} g^\sigma_\nu \delta^{ad}\right) F^{\mu\nu a} - \frac{\kappa}{4} g^2 F^a_{\mu\nu} \left(g^{\mu\sigma} g^\nu_\rho \delta^{ad} - g^{\nu\sigma} g^\mu_\rho \delta^{ad}\right) \\
&= -\frac{\kappa}{4} g^2 g^\sigma_\mu g_{\nu\rho} \delta^{ad} F^{\mu\nu a} + \frac{\kappa}{4} g^2 g_{\mu\rho} g^\sigma_\nu \delta^{ad} F^{\mu\nu a} - \frac{\kappa}{4} g^2 F^a_{\mu\nu} g^{\mu\sigma} g^\nu_\rho \delta^{ad} + \frac{\kappa}{4} g^2 F^a_{\mu\nu} g^{\nu\sigma} g^\mu_\rho \delta^{ad} \\
&= -\frac{\kappa}{4} g^2 F_\rho^{\sigma d} + \frac{\kappa}{4} g^2 F_\rho^{\sigma d} - \frac{\kappa}{4} g^2 F_\rho^{\sigma d} + \frac{\kappa}{4} g^2 F_\rho^{\sigma d} \\
&= \frac{\kappa}{2} g^2 F_\rho^{\sigma d} - \frac{\kappa}{2} g^2 F_\rho^{\sigma d} \\
&= \kappa g^2 F_\rho^{\sigma d}
\end{aligned}$$

其中最后一步利用了$F^{\mu\nu}$的反对称性。

这样，运动方程为[9]

$$\partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\sigma A^{\rho d}\right)}=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^{\rho d}}$$
$$\partial_\mu F^{\mu\nu a}+g C^{abc} A_\mu^b F^{\mu\nu c}=0.$$

两边同乘T^a并求和[10]

$$\partial_\mu F^{\mu\nu a} T^a+g C^{abc} A_\mu^b F^{\mu\nu c} T^a=0$$
$$\partial_\mu \mathbf{F}^{\mu\nu}-i g A_\mu^b F^{\mu\nu c}\left[T^b, T^c\right]=0$$
$$\partial_\mu \mathbf{F}^{\mu\nu}-i g\left[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{F}^{\mu\nu}\right]=0,$$

其中

$$\mathbf{F}^{\mu\nu}=F^{\mu\nu a} T^a,$$
$$\mathbf{A}_\mu=A_\mu^a T^a.$$

9

$$\partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\sigma A^{\rho d}\right)}=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^{\rho d}}$$
$$\partial_\sigma \kappa g^2 F_\rho^{\sigma d}=\kappa g^3 C^{abd} A^{\mu b} F_{\rho\mu}^a$$
$$\partial_\sigma F_\rho^{\sigma d}=g C^{abd} A^{\mu b} F_{\rho\mu}^a$$
$$\partial_\sigma F_\nu^{\sigma d}=g C^{abd} A^{\mu b} F_{\nu\mu}^a$$
$$\partial_\sigma F^{\nu\sigma d}=g C^{abd} A_\mu^b F^{\nu\mu a}$$
$$\partial_\mu F^{\nu\mu d}=g C^{abd} A_\mu^b F^{\nu\mu a}$$
$$\partial_\mu F^{\mu\nu d}-g C^{abd} A_\mu^b F^{\mu\nu a}=0$$
$$\partial_\mu F^{\mu\nu d}-g C^{cbd} A_\mu^b F^{\mu\nu c}=0$$
$$\partial_\mu F^{\mu\nu a}+g C^{abc} A_\mu^b F^{\mu\nu c}=0$$

10

$$\partial_\mu F^{\mu\nu a} T^a+g C^{abc} A_\mu^b F^{\mu\nu c} T^a=0$$
$$\partial_\mu \mathbf{F}^{\mu\nu}-i g A_\mu^b F^{\mu\nu c}\left[T^b, T^c\right]=0$$
$$\partial_\mu \mathbf{F}^{\mu\nu}-i g A_\mu^b F^{\mu\nu c} T^b T^c+i g A_\mu^b F^{\mu\nu c} T^c T^b=0$$
$$\partial_\mu \mathbf{F}^{\mu\nu}-i g \mathbf{A}_\mu \mathbf{F}^{\mu\nu}+i g \mathbf{F}^{\mu\nu} \mathbf{A}_\mu=0$$
$$\partial_\mu \mathbf{F}^{\mu\nu}-i g\left[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{F}^{\mu\nu}\right]=0$$

我们也可以将方程的形式用$\mathcal{A}^\mu$来表示：

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = ig\mathbf{F}^{\mu\nu},$$
$$\mathcal{A}^\mu = ig\mathbf{A}^\mu,$$

从而

$$\frac{1}{ig}\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{(ig)^2} ig\left[\mathcal{A}^\mu, \mathcal{F}^{\mu\nu}\right] = 0$$
$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} - \left[\mathcal{A}^\mu, \mathcal{F}^{\mu\nu}\right] = 0.$$

利用D_μ作用在张量上的结果

$$D_\mu \mathcal{B}(x) = \partial_\mu \mathcal{B}(x) - \left[\mathcal{A}_\mu(x), \mathcal{B}(x)\right]$$

我们有[11]

$$D_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0.$$

9.3.6 再几何些

前面我们从一个物理的要求（即要求（自旋以外）各内部自由度不可区分）出发引入了协变导数。协变导数是一个非常几何的概念。我们从几何的角度进一步分析一下这件事。

在平直空间中关于矢量我们有这样的知识，一个矢量有大小和方向（当然还要满足平行四边形法则），但没有一个起点。因此我们可以直接比较两个矢量，而不必考虑这个矢量是哪个点上的矢量。

但是，如果是弯曲空间，空间不同点上的矢量是无法比较的。为了比较两个矢量，我们应当首先将这两个矢量移动到同一个点上去。这个移动当然应该是平行移动。也就是说，每次移动后的矢量都与原来的矢量平行。

[11] 参侯伯元、侯伯宇《物理学家用的微分几何（第二版）》P100(转下一页脚注)

对任意张量场Σ，协变微分运算都可以形式地表示为

$$D\Sigma = d + [\Gamma, \Sigma]$$

其中d为外微分，Γ为联络，而方括号$[,]$的意义如下：对张量场Σ的所有逆变指标左作用Γ，而对其所有协变指标乘以$(-1)^{k+1}$后右作用Γ（k的含义：将张量Σ表示为$(1,1)$型张量K与一个k形式ω的乘积，即$\Sigma = K\omega$）。根据这个原则，对于矢量场$\phi(x)$，由于只有一个逆变指标，只需用Γ左作用即可：$D\phi(x) = \partial\phi(x) + \Gamma(x)\phi(x)$；对张量场$\Sigma(x)$，由于它是$(1,1)$型张量，因此应该用$\Gamma$左作用一次，再加上右作用一次及一个负号（$k=0$），因此$D\Sigma(x) = \partial\Sigma(x) + \Gamma(x)\Sigma(x) - \Sigma(x)\Gamma(x) = \partial\Sigma(x) + [\Gamma(x), \Sigma(x)]$，此处的$[,]$表示对易括号。

在平直的空间中，平行的定义是直接的，但是在弯曲的空间中，平行定义本身将是一个不小的问题。事实上，这个定义是随意的。显然，平行移动涉及两个点之间的联系问题，为此我们引入了联络。从某种意义上讲，联络体现的就是如何进行平行移动。当平行移动的基本原则确定下来后，联络反映的就是空间弯曲的情况了。

第十章　经典相互作用：对称破缺，Higgs机制

我们已经看到，一个有（自旋以外）内部自由度但没有质量（或各分量的质量相同）的场具有$U(n) = SU(n) \times U(1)$对称性。但是如果存在质量这个对称性就破坏了，这个问题会出现在规范场的情况中。我们现在用规范场来描述电磁、弱和强三种作用。弱作用所对应的规范场是有质量的。可是如果存在质量，这个场就是一个普通的矢量场，而不是一个规范场（质量破坏了规范对称性）。那怎么解决这个矛盾呢，也就是说，怎样在不破坏规范对称性的前提下考虑一个有质量的规范场呢。

我们考虑的是一个物理问题，对一个物理问题来说，本质上只有观测才是有意义的，其它都是中间过程。一个物体是否有质量，从观测的意义上讲就是要看它是否表现出惯性。只要表现出惯性就是有质量。产生惯性的原因其实我们从来都是不知道的。在所有现有理论中，质量都是一个唯象参数，它标记了惯性的大小，但是完全不反映质量的起源。在操作意义上讲，质量与摩擦系数是一样的，摩擦系数只是唯象地标记了摩擦的大小，而完全不考虑摩擦的起源。事实上，当我们刚刚考虑摩擦的时候还对产生摩擦的原因一无所知。后来我们知道了，摩擦就是两个物理中分子间的电磁作用，这样我们完全可以由电磁作用出发计算出摩擦系数。这就是说，我们说得摩擦实际上是由一个持续不断的电磁相互作用产生的。

解决质量问题的办法与处理摩擦的思路是一样的。我们认为质量是一个标记惯性的唯象参数，而惯性则产生于一个持续的相互作用。由于存在一个这样的持续的相互作用，当物体受到外力的时候，会对外力有不同的反映，这就是惯性。将质量理解成一个持续不断的相互作用的结果就是解决规范场质量问题的核心思想。

10.1　对称性自发破缺

在讨论质量问题之前我们先泛泛讨论一下对称性自发破缺。

先以磁性为例。我们不妨粗粗地按照磁性将物质分成两类：一种是可以带有磁

性的，一种不可以。可以带磁性的物质我们不妨称它为磁性物质，不能带磁性的物质我们不妨称它为非磁性物质。

所谓带磁性是指它在没有外磁场的情况下仍然带有磁性。就是说这种物质在没有外磁场的情况下可以存在这样的态：它内部的小磁筹可以有足够多的比例指向一个方向，从而使它带有磁性。非磁性物质就不能做到这一点，当外磁场撤掉之后，它内部的磁筹均匀地指向各个方向，从而使它没有磁性。

这就是说，一个磁性物质是具备带有磁性能力的物质，但是并不等于它在任何时候都是带磁性的，它的磁筹完全可以处在一种各向同性的状态。一个非磁性的物质在磁场中磁筹也会偏离各向同性，从而表现出磁性质。但是当外磁场撤掉后，它的磁筹会立刻恢复到各向同性的状态。也就是说，一个磁性物质存在一种在没有外场的情况下也具有磁性的状态，而非磁性物质则不具有这样的状态。一个磁性物质处在具有磁性的状态是不需要外力维持的，原则上是可以自发形成的。而非磁性物质如果没有外力的维持是不可能有磁性质的，也就是说，非磁性物质原则上不可能自发地具有磁性。

但是一个磁性物质真的能自发地有不具有磁性转化成具有磁性的状态吗。显然也不能。没有磁性的状态对称性很高，有磁性后，系统便有了一个优势方向，对称性降低了。可是，对一个磁性物体来说，这个优势方向是可以随便选取的，选哪个方向完全是任意的。究竟选哪个方向需要一个外界因素指出来。这个外界因素可以是非常微小的扰动，它是用来破坏对称性的。不论扰动多小，都会破坏对称性。使系统从对称变到不对称。由此可以知道，一个磁性物质确实是可以自发磁化的。因为外因的作用只是指出一个优势方向，其作用的强度是可以忽略的。这就像是一个直立在地上的几十吨重的杆，处在一种不稳定的平衡状态。对它来说，空间是各向同性的，倒向哪个方向都一样。这时只需要蚊子那么大的小扰动，这个杆就轰然倒下了。它倒下时释放出大量的能量。这个能量不是那只蚊子给它的，是它自己本身就具有的。蚊子只是破坏了对称性。从某种意义上讲，你可以认为这个杆的倒下是自发的。这就是我们平时不这样放一个杆的原因，因为我们知道它会自发地倒下。

可见，一个物体能否在没有外场的时候带有磁性完全取决于它自身的性质。如果它有这样一个具有磁性的态那么它就可以在某些微小扰动下达到这个态，并处在这个态上。这个过程就像杆倒下一样，你可以认为是自发的。这就是说，这个物体可以自发磁化。如果它不具备这样的磁性的态，那么它就不会自发磁化。

一句话，一个系统可不可以自发地处在某个不对称的态上，或者说一个系统是不是可以自发磁化，完全取决于这个系统本身有没有这样一个态。

在场的问题中，同样，是否可以自发破缺完全取决于这个场是否有这样的一个

不对称的态，如果有它就可以自发破缺。现在我们还都是在经典场的情况下讨论的这件事，如果是量子场，只需认为是场算符平均值对称自发破缺就是了。

10.2 实标量场：分立对称性的破缺

先考虑一个实标量场的对称性自发破缺的例子。这里我们将场看作是一个经典的场。

一个没有质量的自由标量场的Lagrange量是

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-V(\phi).$$

这个Lagrange量的自由部分$L=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_i\partial^\mu\phi_i$具有在变换

$$\phi\to-\phi \tag{10.1}$$

下不变的对称性，这是一个$O(1)$对称性。考虑同样具有这样的对称性的相互作用$V(\phi)$。按照前面的讨论，如果我们只讨论多项式的势，考虑到可重整的要求，在四维时空中方次最高到四次。但是如果我们仍要求$V(\phi)$具有（10.1）的对称性，那么$V(\phi)$中就不能出现三次方项ϕ^3。这样，一个可重整的，具有（10.1）对称性的势就是

$$V=\frac{1}{2!}a\phi^2+\frac{\lambda}{4!}\phi^4. \tag{10.2}$$

我们仍坚持以前引入的一个基本假设，认为世界是稳定的。这样必须有$\lambda>0$，否则势能曲线开口向下，能量没有下界，世界不稳定了。

显然，这样一来，二次项的系数a的符号会带来很本质的不同。

- $a>0$情况

  在这种情况中，$a=m^2$就是粒子的质量。我们可以直接计算这个经典场

  $$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_i\partial^\mu\phi_i-\frac{1}{2!}a\phi^2-\frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

  的基态（能量最低态）。

  $$\frac{\partial V}{\partial\phi}=a\phi+\frac{\lambda}{6}\phi^3=0$$

  由于$a>0$且$\lambda>0$，显然有$\phi=0$[1]。此时$V(\phi)|_{\phi=0}=0$。

[1]注意，是能量而不是Lagrange量的最小值。

- $a<0$情况

  显然这时不能将ϕ^2项理解为质量项了，否则粒子的质量就会是虚的[2]，这时的ϕ^2项也是一种相互作用。我们再来看看经典场的基态。极小值由

$$\frac{\partial V}{\partial \phi}=a\phi+\frac{\lambda}{6}\phi^3=0$$

  确定，我们有[3]极值为

$$\phi=0,\quad \phi=\pm\sqrt{\frac{6\left(-a\right)}{\lambda}}\equiv\pm\ \phi_0.$$

  其中$\phi_0=\sqrt{6\left(-a\right)/\lambda}$。能量最小态（真空态）是二度简并的，出现在$\phi=\pm\phi_0$处，如图。

  此时的基态能量小于零，我们不妨将基态移为零。这时候我们面临一个选择：我们有两个能量最低态，选择哪个当作场量为零的点呢，左边还是右边。我们此时的境遇与将一个磁性物质磁化是一样的了。磁性物质存在一个表现出磁性的态（表现出磁性的态当然是个不对称的态），完全不需要借助外界力量的维持，系统就可以处在这个态上。但是，如果系统开始的时候处在无磁性的态上，此时系统处在各向同性的最大对称性状态，那么过渡到磁性态需要一个小扰动帮助它指出一个磁化的方向，磁化方向的选择是完全任意的。选择磁化方向后，各向同性的对称性就被破坏了。在我们现在的情况中也是一样，我们可以任意选择左或右，选择后，对称性就被破坏了。

  我们将基态平移到场量为0的位置（如图），引入

$$\tilde{\phi}=\phi-\phi_0.$$

[2] 当粒子的速度超过光速时质量会变为虚数，因此虚质量可以对应这种快子。

[3]

$$\phi\left(a+\frac{\lambda}{6}\phi^2\right)=0$$

$$\phi=0,\ \phi^2=-\frac{6a}{\lambda}$$

具体地，我们可以将（10.2）写成[4]

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2!}a\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \\ &= \frac{1}{2!}a\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \frac{3a^2}{2\lambda} - \frac{3a^2}{2\lambda} \\ &= \frac{\lambda}{4!}\left(\phi^2 - \phi_0^2\right)^2 - \frac{3a^2}{2\lambda}. \end{aligned}$$

此时当$\phi = \phi_0$时$V = -\frac{3a^2}{2\lambda}$。只需将$V \to V + \frac{3a^2}{2\lambda}$就可以将基态移为零。移动后$V$变成

$$V = \frac{\lambda}{4!}\left(\phi^2 - \phi_0^2\right)^2.$$

它在$\phi = \phi_0$时为零。下面将两个简并基态中的一个移动到坐标原点[5]

4

$$\begin{aligned} V &= \frac{\lambda}{24}\left(\phi^2 - \phi_0^2\right)^2 - \frac{3a^2}{2\lambda} \\ &= \frac{\lambda}{24}\left(\phi^4 - 2\phi^2\phi_0^2 + \phi_0^4\right) - \frac{3a^2}{2\lambda} \\ &= \frac{\lambda}{24}\phi^4 - \frac{\lambda}{12}\phi^2\phi_0^2 + \frac{\lambda}{24}\phi_0^4 - \frac{3a^2}{2\lambda} \\ &= \frac{\lambda}{24}\phi^4 - \frac{\lambda}{12}\phi^2\frac{6(-a)}{\lambda} + \frac{\lambda}{24}\left(\frac{6(-a)}{\lambda}\right)^2 - \frac{3a^2}{2\lambda} \\ &= \frac{\lambda}{24}\phi^4 + \frac{1}{2}a\phi^2 + \frac{3a^2}{2\lambda} - \frac{3a^2}{2\lambda} \\ &= \frac{\lambda}{24}\phi^4 + \frac{1}{2}a\phi^2 \end{aligned}$$

5

$$\begin{aligned} V &= \frac{\lambda}{4!}\left(\phi^2 - \phi_0^2\right)^2 \\ &= \frac{\lambda}{4!}\left(\phi - \phi_0\right)^2\left(\phi + \phi_0\right)^2 \\ &= \frac{\lambda}{4!}\left(\phi - \phi_0\right)^2\left(\left(\phi - \phi_0\right) + 2\phi_0\right)^2 \\ &= \frac{\lambda}{4!}\tilde{\phi}^2\left(\tilde{\phi} + 2\phi_0\right)^2 \\ &= \frac{\lambda}{24}\tilde{\phi}^2\left(\tilde{\phi}^2 + 2\phi_0\tilde{\phi} + 4\phi_0^2\right) \\ &= \frac{\lambda}{4!}\tilde{\phi}^4 + \frac{\lambda\phi_0}{12}\tilde{\phi}^3 + \frac{\lambda\phi_0^2}{6}\tilde{\phi}^2 \\ &= \frac{\lambda\phi_0^2}{6}\tilde{\phi}^2 + \frac{\lambda\phi_0}{12}\tilde{\phi}^3 + \frac{\lambda}{24}\tilde{\phi}^4 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{\lambda}{4!}\left(\phi^2-\phi_0^2\right)^2 \\
&= \frac{\lambda}{4!}\left(\phi-\phi_0\right)^2\left(\phi+\phi_0\right)^2 \\
&= \frac{\lambda}{4!}\left(\phi-\phi_0\right)^2\left(\left(\phi-\phi_0\right)+2\phi_0\right)^2 \\
&= \frac{\lambda}{4!}\tilde{\phi}^2\left(\tilde{\phi}^2+2\phi_0\tilde{\phi}+4\phi_0^2\right) \\
&= \frac{\lambda\phi_0^2}{6}\tilde{\phi}^2+\frac{\lambda\phi_0}{12}\tilde{\phi}^3+\frac{\lambda}{24}\tilde{\phi}^4.
\end{aligned}
$$

可以看到，这样我们得到的新标量场$\tilde{\phi}$获得了质量，出现了$\tilde{\phi}^2$项。其质量为$m^2=\frac{\lambda\phi_0^2}{6}>0$。

此外，相互作用中出现了三次方项。在没有三次方项的时候，势能V中只包含ϕ的偶数项。因此只有偶数条外线的相互作用。这时可以定义这样一个量子数

$$P_C=(-1)^N,$$

其中N为参与相互作用的粒子的总数。但是出现了三次项后，允许两个粒子在相互作用之后变为一个粒子，或一个粒子变成两个粒子。这样P_C不再是守恒量。对称性发生了破缺，在$\phi\to-\phi$下三次方项$\tilde{\phi}^3$不再是不变的了。这是破缺的是一个分立对称性。下面我们讨论连续对称性破缺的情况。

10.3 复标量场：连续对称性的破缺

在实标量场的情况下，我们讨论的是分立对称性的破缺，这里我们讨论复标量场的情况，这时候破缺的连续对称性。

一个复标量场相当于两个实标量场，一个做实部，一个做虚部：

$$\phi=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1+i\phi_2\right).$$

前面我们考虑了具有$O(1)$对称性的实标量场，出于与前面同样的考虑我们讨论具有$U(1)$对称性的复标量场，取势能为

$$V\left(\phi,\phi^*\right)=a\phi^*\phi+\lambda\left(\phi^*\phi\right)^2. \tag{10.3}$$

它显然在变换

$$\phi\to e^{i\theta}\phi$$

下不变。这里显然没有三次项，因为要在这个变换下不变，场量必须以$\phi^*\phi$的形式出现。用两个实场表示就是[6]

$$\begin{aligned} V(\phi,\phi^*) &= a\phi^*\phi+\lambda(\phi^*\phi)^2 \\ &= \frac{a}{2}\phi_1^2+\frac{a}{2}\phi_2^2+\frac{\lambda}{4}\phi_1^4+\frac{\lambda}{2}\phi_1^2\phi_2^2+\frac{\lambda}{4}\phi_2^4. \end{aligned}$$

- $a>0$情况

  在$a>0$情况中，$a=m^2$就是质量。此时的经典基态就是$\phi=0$。此时$U(1)$对称性仍然保持。这时两个实标量场ϕ_1和ϕ_2都有$\sqrt{\frac{a}{2}}$的质量。

- $a<0$情况

  这时候$\phi^*\phi$或ϕ_1和ϕ_2的系数不再能被解释成质量，否则我们就会有虚质量。

  我们先看一下这时候能量的基态（真空态），由于动能项总是正的，我们直接来看势能的最小值，这是直接的：

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial\phi} &= \frac{\partial}{\partial\phi}\left[a\phi^*\phi+\lambda(\phi^*\phi)^2\right]=0 \\ a\phi^*+2\lambda(\phi^*\phi)\phi^* &= 0 \\ \phi^*\phi &= -\frac{a}{2\lambda} \\ |\phi|^2 &= \frac{(-a)}{2\lambda}\equiv|\phi_0|^2 \end{aligned}$$

6

$$\begin{aligned} V(\phi,\phi^*) &= a\phi^*\phi+\lambda(\phi^*\phi)^2 \\ &= \frac{a}{2}\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right)+\frac{\lambda}{4}\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right)^2 \\ &= \frac{a}{2}\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right)+\frac{\lambda}{4}\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right)^2 \\ &= \frac{a}{2}\phi_1^2+\frac{a}{2}\phi_2^2+\frac{\lambda}{4}\left(\phi_1^4+2\phi_1^2\phi_2^2+\phi_2^4\right) \\ &= \frac{a}{2}\phi_1^2+\frac{a}{2}\phi_2^2+\frac{\lambda}{4}\phi_1^4+\frac{\lambda}{2}\phi_1^2\phi_2^2+\frac{\lambda}{4}\phi_2^4 \end{aligned}$$

我们可以将（10.3）写成[7]

$$\begin{aligned} V &= a\phi^*\phi + \lambda\left(\phi^*\phi\right)^2 \\ &= a\phi^*\phi + \lambda\left(\phi^*\phi\right)^2 + \lambda\left(\frac{a}{2\lambda}\right)^2 - \lambda\left(\frac{a}{2\lambda}\right)^2 \\ &= \lambda\left(\phi^*\phi - \frac{(-a)}{2\lambda}\right)^2 - \lambda\left(\frac{(-a)}{2\lambda}\right)^2 \\ &= \lambda\left(|\phi|^2 - |\phi_0|^2\right)^2 - \lambda\left(|\phi_0|^2\right)^2 \end{aligned}$$

的形式。做一个$V \to V + \lambda\left(\frac{(-a)}{2\lambda}\right)^2$的移动将基态移为零，有

$$V = \lambda\left(\phi^*\phi - |\phi_0|^2\right)^2.$$

此时，势能的最小值出现在

$$|\phi|^2 = \frac{(-a)}{2\lambda}$$

的圆上，这些ϕ的最小值的圆的圆心是$\phi = 0$（如图）。与实标量场情况相同，我们将系统的基态移到$\phi = 0$处。这时候我们面临一个问题，在以$\phi = 0$为圆心，以$\frac{(-a)}{2\lambda}$为半径的圆上都是基态，移动哪个点呢。这就是需要我们来破缺对称性了。在实标量场的情况中只有两个基态，我们要做的是在两个里选一个，现在要做的是在圆上的无穷多个点上选一个。简单起见我们选择实轴上的一个点。这相当于选择

$$\phi_0 = \sqrt{\frac{(-a)}{2\lambda}},$$

这是一个实数。引入一个移动后的新场

$$\tilde{\phi} = \phi - \phi_0.$$

7

$$\begin{aligned} V &= \lambda\left(\phi^*\phi - \frac{(-a)}{2\lambda}\right)^2 \\ &= \lambda\left((\phi^*\phi)^2 - \frac{(-a)}{\lambda}\phi^*\phi + \left(\frac{(-a)}{2\lambda}\right)^2\right) \\ &= \lambda\left(\phi^*\phi\right)^2 + a\phi^*\phi + \lambda\left(\frac{a}{2\lambda}\right)^2 \\ &= a\phi^*\phi + \lambda\left(\phi^*\phi\right)^2 + \lambda\left(\frac{a}{2\lambda}\right)^2 \end{aligned}$$

这样势能为[8]

$$\begin{aligned} V &= \lambda\left(\phi^*\phi - \phi_0^2\right)^2 \\ &= \lambda\left[\tilde{\phi}^*\tilde{\phi} + \phi_0\left(\tilde{\phi}^* + \tilde{\phi}\right)\right]^2. \end{aligned}$$

移动后的$\tilde{\phi}$也是一个复标量场，我们可以用两个实标量场来表示它：

$$\tilde{\phi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{\phi}_1 + i\tilde{\phi}_2\right).$$

这样有

$$\begin{aligned} V &= \lambda\left[\left|\tilde{\phi}\right|^2 + \phi_0\left(2\,\mathrm{Re}\,\tilde{\phi}\right)\right]^2 \\ &= \lambda\left[\frac{1}{2}\left(\tilde{\phi}_1^2 + \tilde{\phi}_2^2\right) + 2\phi_0\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\phi}_1\right]^2 \\ &= \lambda\left[\frac{1}{2}\left(\tilde{\phi}_1^2 + \tilde{\phi}_2^2\right) + \sqrt{2}\phi_0\tilde{\phi}_1\right]^2 \\ &= \lambda\left[2\phi_0^2\tilde{\phi}_1^2 + \sqrt{2}\phi_0\tilde{\phi}_1\left(\tilde{\phi}_1^2 + \tilde{\phi}_2^2\right) + \frac{1}{4}\left(\tilde{\phi}_1^2 + \tilde{\phi}_2^2\right)^2\right] \\ &= 2\lambda\phi_0^2\tilde{\phi}_1^2 + \sqrt{2}\lambda\phi_0\tilde{\phi}_1\left(\tilde{\phi}_1^2 + \tilde{\phi}_2^2\right) + \frac{1}{4}\lambda\left(\tilde{\phi}_1^2 + \tilde{\phi}_2^2\right)^2. \end{aligned}$$

移动基态后，对称破缺了。我们得到了两个移动后的新实标量场$\tilde{\phi}_1$和$\tilde{\phi}_2$。可以看到，这里有$\tilde{\phi}_1^2$项，没有$\tilde{\phi}_2^2$项，这就是说原来都没有质量的两个实标量场在对称自发破缺后其中的一个获得了质量，大小为$m^2 = 2\lambda\phi_0^2$，另一个仍然没有质量。其实进一步地我们可以有非常普遍地证明存在一个无质量的有效场是一个连续对称性的自发对称破缺的普遍结论。这就是Goldstone定理。

Goldstone定理：如果系统的对称性由具有N个生成元的连续对称群描述，自发破缺后变为一个具有N'个生成元的对称群，则将有$N - N'$个无质量的有效场出现。

8

$$\begin{aligned} V &= \lambda\left(\phi^*\phi - \phi_0^2\right)^2 \\ &= \lambda\left[\left(\tilde{\phi}^* + \phi_0\right)\left(\tilde{\phi} + \phi_0\right) - F^2\right]^2 \\ &= \lambda\left[\tilde{\phi}^*\tilde{\phi} + \phi_0\left(\tilde{\phi}^* + \tilde{\phi}\right) + \phi_0^2 - \phi_0^2\right]^2 \\ &= \lambda\left[\tilde{\phi}^*\tilde{\phi} + \phi_0\left(\tilde{\phi}^* + \tilde{\phi}\right)\right]^2 \end{aligned}$$

我们可以看到，实标量场和复标量场它们的Lagrange量都是对称的（所考虑的实标量场是$O(1)$对称，复标量场是$U(1)$对称），但是这两个种情况的基态的对称性要低。这一点构成了规范场在保持规范对称性的同时又获得质量基础。

10.4 Higgs机制

我们关心的是规范场如何在不破坏运动方程规范对称的情况下获得质量。我们将看到，如果我们将一个有四次方自作用的复标量场（这样这样基态才可能对称破缺）与一个矢量场规范耦合（也就是在原来的自作用上再附加一个规范耦合），那么那个Goldstone定理给出的，当系统发生自发对称破缺时会出现的无质量的Goldstone粒子，便不再出现了（只剩下那个有质量的标量粒子），代之以这个矢量场获得了质量。原来没有质量的矢量粒子只有两个自旋分量（螺度），获得质量后，自旋有了三个分量，承担了消失了一个标量粒子而失掉的那个自由度。或者说，原来那个无质量的Goldstone粒子的自由度变成了矢量场的纵向自由度，从而使矢量场获得质量。这时候，自作用导致的那个有质量的标量粒子仍然存在，这个粒子被称作Higgs粒子。这个新的粒子是否存在，或者说这个有质量标量粒子的自由度是不是物理的完全取决于能否在实验中观测到。实验正在进行中。

$U(1)$规范场

这里我们考虑一个Higgs机制的简单例子：$U(1)$规范场的情况。

一个有自作用的复标量场的Lagrange量为

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= (\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi) - V(\phi, \phi^*) \\ &= (\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2\end{aligned}$$

如果$\mu^2 > 0$，那么这一项就是通常的质量项；但是如果$\mu^2 < 0$，就像前面分析的那样就会出现基态不在$\phi = 0$处的情况，也就是会出现对称自发破缺。这时的Lagrange量在整体规范变换$\phi \to \phi' = e^{-i\theta}\phi$下是不变的，但是基态却不具有这样的对称性。这个系统在对称自发破后（当然需要人为选择破缺方式，在自然中则归结为我们不了解的自然因素的扰动），按照Goldstone的结果会出现一个有质量的标量粒子和一个无质量的标量粒子。现在我们让这个自作用的标量场与一个规范场耦合。具体操作就是用协变导数代替普通导数，即

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$$

这样参与规范耦合的标量场Lagrange量为

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \left[\left(\left(\partial_\mu + igA_\mu\right)\phi\right)^* \left(\partial^\mu + igA^\mu\right)\phi\right] - \mu^2\phi^*\phi - \lambda\left(\phi^*\phi\right)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \left[\left(\partial_\mu - igA_\mu\right)\phi^* \left(\partial^\mu + igA^\mu\right)\phi\right] - \mu^2\phi^*\phi - \lambda\left(\phi^*\phi\right)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{10.4}$$

一个Lagrange量当然包含自由的矢量场部分。

我们仍将复标量场ϕ写成实部和虚部的形式

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 + i\phi_2\right).$$

Lagrange量为[9]

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \left\{\left(\partial_\mu - igA_\mu\right)\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\right]^* \left(\partial^\mu + igA^\mu\right)\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\right]\right\} \\ &- \mu^2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\right]^*\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\right] - \lambda\left\{\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\right]^*\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\right]\right\}^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}\left[D_\mu^*\phi_1 D^\mu\phi_1 + D_\mu^*\phi_2 D^\mu\phi_2\right] - \frac{1}{2}\mu^2\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right) - \frac{1}{4}\lambda\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.\end{aligned}$$

在我们的情况中，$\mu^2 < 0$，不是质量。这样另一个参数λ必满足

$$\lambda > 0,$$

以使得势能曲线开口向上，如果开口向下则系统能量没有下界，不稳定了。

[9]

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \left\{\left(\partial_\mu - igA_\mu\right)\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\right]^* \left(\partial^\mu + igA^\mu\right)\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\right]\right\} \\ &- \mu^2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\right]^*\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\right] - \lambda\left\{\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\right]^*\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\right]\right\}^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\partial_\mu - igA_\mu\right)\left(\phi_1 - i\phi_2\right)\left(\partial^\mu + igA^\mu\right)\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\right] - \frac{1}{2}\mu^2\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right) - \frac{1}{4}\lambda\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left[\left(\partial_\mu - igA_\mu\right)\phi_1 - i\left(\partial_\mu - igA_\mu\right)\phi_2\right]\left[\left(\partial^\mu + igA^\mu\right)\phi_1 + i\left(\partial^\mu + igA^\mu\right)\phi_2\right]\right\} \\ &- \frac{1}{2}\mu^2\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right) - \frac{1}{4}\lambda\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(\partial_\mu - igA_\mu\right)\phi_1\left(\partial^\mu + igA^\mu\right)\phi_1 + i\left(\partial_\mu - igA_\mu\right)\phi_1\left(\partial^\mu + igA^\mu\right)\phi_2 - i\left(\partial_\mu - igA_\mu\right)\phi_2\left(\partial^\mu + igA^\mu\right)\phi_1\right. \\ &\left. + \left(\partial_\mu - igA_\mu\right)\phi_2\left(\partial^\mu + igA^\mu\right)\phi_2\right\} - \frac{1}{2}\mu^2\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right) - \frac{1}{4}\lambda\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\partial_\mu - igA_\mu\right)\phi_1\left(\partial^\mu + igA^\mu\right)\phi_1 + \left(\partial_\mu - igA_\mu\right)\phi_2\left(\partial^\mu + igA^\mu\right)\phi_2\right] - \frac{1}{2}\mu^2\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right) - \frac{1}{4}\lambda\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}\left[D_\mu^*\phi_1 D^\mu\phi_1 + D_\mu^*\phi_2 D^\mu\phi_2\right] - \frac{1}{2}\mu^2\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right) - \frac{1}{4}\lambda\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\end{aligned}$$

我们仍然来看一看能量的最小值出现在哪里，这可以直接求势能的最小值：

$$\begin{aligned} V\left(\phi_1,\phi_2\right) &= \frac{1}{4}\lambda\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right)^2+\frac{1}{2}\mu^2\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right) \\ &= \left[\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right)+\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sqrt{\lambda}}\right]^2-\frac{1}{4}\frac{\mu^4}{\lambda}, \end{aligned}$$

因此势能在

$$\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right)+\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sqrt{\lambda}}=0$$

即

$$\sqrt{\phi_1^2+\phi_2^2}=\sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}\equiv\phi_0,$$

或

$$|\phi|=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\phi_1^2+\phi_2^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_0$$

时取最小值

$$V_{\min}=-\frac{1}{4}\frac{\mu^4}{\lambda}.$$

注意这里的$\mu^2<0$，因此$\sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$是大于零的实数，即$V_{\min}=-\frac{1}{4}\frac{\mu^4}{\lambda}$。

首先将系统基态移动为零

$$V\left(\phi_1,\phi_2\right)\to V\left(\phi_1,\phi_2\right)-V_{\min}=\left[\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right)+\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sqrt{\lambda}}\right]^2. \tag{10.5}$$

可以更简洁地表示成[10]

$$V\left(\phi_1,\phi_2\right)=\frac{1}{4}\lambda\left(2\left|\phi\right|^2-\phi_0^2\right)^2.$$

[10]

$$\begin{aligned} V\left(\phi_1,\phi_2\right) &= \left[\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right)+\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sqrt{\lambda}}\right]^2 \\ &= \left[\sqrt{\lambda}\left|\phi\right|^2+\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sqrt{\lambda}}\right]^2 \\ &= \lambda\left(\left|\phi\right|^2+\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\lambda}\right)^2 \\ &= \lambda\left(\left|\phi\right|^2-\frac{1}{2}\frac{-\mu^2}{\lambda}\right)^2 \\ &= \lambda\left(\left|\phi\right|^2-\frac{1}{2}\phi_0^2\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\lambda\left(2\left|\phi\right|^2-\phi_0^2\right)^2 \end{aligned}$$

显然，在做了式（10.5）给出的移动后，在$|\phi| = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_0$时$V(\phi_1, \phi_2) = 0$。

我们用一种与前面少许不同的方式处理来做这件事。ϕ是一个复标量场，我们以前将它写成实部加虚部的形式

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2).$$

。当然我们也可以用极坐标来表示这件事，即

$$\begin{aligned}\phi &= |\phi| e^{i\theta} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2} e^{i \arctan \phi_2/\phi_1}.\end{aligned}$$

纯粹是为了后面形式上的方便，我们暂时将场的形式写成

$$\sqrt{2}\phi = \sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2} e^{i \arctan \phi_2/\phi_1}.$$

现在能量零点在半径为ϕ_0的圆上，我们要做的是将能量零点移动到场量为零的位置上。我们可以这样做（方法不是唯一的）。在极坐标下移动前的矢径是$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2}$，幅角是$\arctan \phi_2/\phi_1$。一个复场中包含两个实场，在直角坐标表示中，我们用实部和虚部来表示这两个实场；在极坐标表示中，我们用矢径和幅角来表示这两个实场。移动的方式，也就是打破对称性的方式，完全是任意的。我们这样来完成移动，代替这个矢径和幅角，我们引入新的矢径h和幅角Φ，将场量写成

$$\sqrt{2}\phi = (h + \phi_0) e^{i\Phi/\phi_0} \tag{10.6}$$

h和幅角Φ当然是实的。这样选取移动方式的目的是这个形式很容易做规范变换，而规范变换在后面对我们是非常重要的。这样

$$\begin{aligned}V(\phi_1, \phi_2) \to V(h, \Phi) &= \frac{1}{4}\lambda\left(2|\phi|^2 - \phi_0^2\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\lambda\left(|h + \phi_0|^2 - \phi_0^2\right)^2\end{aligned}$$

在$h = 0$的时候有$V(0, \Phi) = 0$。也就是说用新场量h和Φ来描述，能量的最小值出现在场量$h = 0$的地方。

由前面的Goldstone定理我们已经知道，这样的对称破缺会导致无质量的自作用的复标量场变成一个有质量的实标量场和一个没有质量的实标量场（Goldstone粒子）。前面我们破缺对称性的方式是直接移动，$\tilde{\phi} = \phi - \phi_0$。现在我们采用了另一种形式的破缺（移动）方式（破缺方式是任选的），式（10.6），我们来看看在这种破

缺方式下复标量场会怎样。将变换（10.6）代入自由复标量场的Lagrange量中有

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \left(\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi\right) - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda \left(\phi^* \phi\right)^2 \\
&= \left[\partial_\mu \left(\frac{\phi_0 + h}{\sqrt{2}} e^{i\Phi/\phi_0}\right)^* \partial^\mu \left(\frac{\phi_0 + h}{\sqrt{2}} e^{i\Phi/\phi_0}\right)\right] - \mu^2 \left(\frac{\phi_0 + h}{\sqrt{2}} e^{i\Phi/\phi_0}\right)^* \left(\frac{\phi_0 + h}{\sqrt{2}} e^{i\Phi/\phi_0}\right) \\
&- \lambda \left[\left(\frac{\phi_0 + h}{\sqrt{2}} e^{i\Phi/\phi_0}\right)^* \left(\frac{\phi_0 + h}{\sqrt{2}} e^{i\Phi/\phi_0}\right)\right]^2 \\
&= \left(\partial_\mu \frac{\phi_0 + h}{\sqrt{2}} e^{-i\Phi/\phi_0} + \frac{\phi_0 + h}{\sqrt{2}} \partial_\mu e^{-i\Phi/\phi_0}\right) \left(\partial^\mu \frac{\phi_0 + h}{\sqrt{2}} e^{i\Phi/\phi_0} + \frac{\phi_0 + h}{\sqrt{2}} \partial^\mu e^{i\Phi/\phi_0}\right) \\
&- \mu^2 \frac{\left(\phi_0 + h\right)^2}{2} - \lambda \frac{\left(\phi_0 + h\right)^4}{4} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\mu h e^{-i\Phi/\phi_0} + \frac{\phi_0 + h}{\sqrt{2}} \left(\frac{-i}{\phi_0}\right) \partial_\mu \Phi e^{-i\Phi/\phi_0}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \partial^\mu h e^{i\Phi/\phi_0} + \frac{\phi_0 + h}{\sqrt{2}} \left(i \frac{1}{\phi_0}\right) \partial^\mu \Phi e^{i\Phi/\phi_0}\right) \\
&- \mu^2 \frac{\left(\phi_0 + h\right)^2}{2} - \lambda \frac{\left(\phi_0 + h\right)^4}{4} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\mu h e^{-i\Phi/\phi_0} - i \frac{\phi_0 + h}{\sqrt{2}\phi_0} \partial_\mu \Phi e^{-i\Phi/\phi_0}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \partial^\mu h e^{i\Phi/\phi_0} + i \frac{\phi_0 + h}{\sqrt{2}\phi_0} \partial^\mu \Phi e^{i\Phi/\phi_0}\right) \\
&- \mu^2 \frac{\left(\phi_0 + h\right)^2}{2} - \lambda \frac{\left(\phi_0 + h\right)^4}{4} \\
&= \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - i \frac{\phi_0 + h}{2\phi_0} \partial_\mu \Phi \partial^\mu h + i \frac{\phi_0 + h}{2\phi_0} \partial_\mu h \partial^\mu \Phi + \frac{\left(\phi_0 + h\right)^2}{2\phi_0^2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \mu^2 \frac{\left(\phi_0 + h\right)^2}{2} - \lambda \frac{\left(\phi_0 + h\right)^4}{4} \\
&= \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{\left(\phi_0 + h\right)^2}{2\phi_0^2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \mu^2 \frac{\left(\phi_0 + h\right)^2}{2} - \lambda \frac{\left(\phi_0 + h\right)^4}{4}
\end{aligned}
$$

这个Lagrange量中不包含Φ的二次项，这就是说Φ场是没有质量的，说明在自发对称破缺发生后产生了一个无质量的粒子，仍然是Goldstone定理的结果。这不奇怪，Goldstone定理是严格的，其结论不依赖破缺方式的选择。

下面我们来看看如果在复标量场自作用的基础上再加上一个规范耦合，会是什么结果。

将代换（10.6）代入（10.4），有[11]

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \left[\left(\partial_\mu - igA_\mu\right)\phi^*\left(\partial^\mu + igA^\mu\right)\phi\right] - \mu^2\phi^*\phi - \lambda\left(\phi^*\phi\right)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - \mu^2\phi^*\phi - \lambda\left(\phi^*\phi\right)^2 - ig\phi^*\partial^\mu\phi A_\mu + ig\partial_\mu\phi^*\phi A^\mu + g^2\phi^*\phi A_\mu A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h + \frac{\left(\phi_0+h\right)^2}{2\phi_0^2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - \mu^2\frac{\left(\phi_0+h\right)^2}{2} - \lambda\frac{\left(\phi_0+h\right)^4}{4} \\
&- ig\left(\frac{\phi_0+h}{\sqrt{2}}e^{i\Phi/\phi_0}\right)^*\partial^\mu\left(\frac{\phi_0+h}{\sqrt{2}}e^{i\Phi/\phi_0}\right)A_\mu + ig\partial_\mu\left(\frac{\phi_0+h}{\sqrt{2}}e^{i\Phi/\phi_0}\right)^*\left(\frac{\phi_0+h}{\sqrt{2}}e^{i\Phi/\phi_0}\right)A^\mu \\
&+ g^2\left(\frac{\phi_0+h}{\sqrt{2}}e^{i\Phi/\phi_0}\right)^*\left(\frac{\phi_0+h}{\sqrt{2}}e^{i\Phi/\phi_0}\right)A_\mu A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h + \frac{\left(\phi_0+h\right)^2}{2\phi_0^2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - \mu^2\frac{\left(\phi_0+h\right)^2}{2} - \lambda\frac{\left(\phi_0+h\right)^4}{4} + g^2\frac{\left(\phi_0+h\right)^2}{2}A_\mu A^\mu \\
&- \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + g\frac{\left(\phi_0+h\right)^2}{\phi_0}\partial^\mu\Phi A_\mu.
\end{aligned}$$

[11]

$$\begin{aligned}
&\left(\partial_\mu - igA_\mu\right)\phi^*\left(\partial^\mu + igA^\mu\right)\phi \\
&= \left(\partial_\mu\phi^* - igA_\mu\phi^*\right)\left(\partial^\mu\phi + igA^\mu\phi\right) \\
&= \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - igA_\mu\phi^*\partial^\mu\phi + \partial_\mu\phi^*igA^\mu\phi - igA_\mu\phi^*igA^\mu\phi \\
&= \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - ig\phi^*\partial^\mu\phi A_\mu + ig\partial_\mu\phi^*\phi A^\mu + g^2\phi^*\phi A_\mu A^\mu
\end{aligned}$$

因此Lagrange量

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \left[\left(\partial_\mu - igA_\mu\right)\phi^*\left(\partial^\mu + igA^\mu\right)\phi\right] - \mu^2\phi^*\phi - \lambda\left(\phi^*\phi\right)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - ig\phi^*\partial^\mu\phi A_\mu + ig\partial_\mu\phi^*\phi A^\mu + g^2\phi^*\phi A_\mu A^\mu - \mu^2\phi^*\phi - \lambda\left(\phi^*\phi\right)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - \mu^2\phi^*\phi - \lambda\left(\phi^*\phi\right)^2 - ig\phi^*\partial^\mu\phi A_\mu + ig\partial_\mu\phi^*\phi A^\mu + g^2\phi^*\phi A_\mu A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

将变换（10.6）代入并利用前面自由场的结果有

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta + \frac{\left(\phi_0+\eta\right)^2}{2\phi_0^2}\partial_\mu\xi\partial^\mu\xi - \mu^2\frac{\left(\phi_0+\eta\right)^2}{2} - \lambda\frac{\left(\phi_0+\eta\right)^4}{4} \\
&- ig\left(\frac{\phi_0+\eta}{\sqrt{2}}e^{i\xi/\phi_0}\right)^*\partial^\mu\left(\frac{\phi_0+\eta}{\sqrt{2}}e^{i\xi/\phi_0}\right)A_\mu + ig\partial_\mu\left(\frac{\phi_0+\eta}{\sqrt{2}}e^{i\xi/\phi_0}\right)^*\left(\frac{\phi_0+\eta}{\sqrt{2}}e^{i\xi/\phi_0}\right)A^\mu \\
&+ g^2\left(\frac{\phi_0+\eta}{\sqrt{2}}e^{i\xi/\phi_0}\right)^*\left(\frac{\phi_0+\eta}{\sqrt{2}}e^{i\xi/\phi_0}\right)A_\mu A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta + \frac{\left(\phi_0+\eta\right)^2}{2\phi_0^2}\partial_\mu\xi\partial^\mu\xi - \mu^2\frac{\left(\phi_0+\eta\right)^2}{2} - \lambda\frac{\left(\phi_0+\eta\right)^4}{4} + g^2\frac{\left(\phi_0+\eta\right)^2}{2}A_\mu A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&- ig\frac{\phi_0+\eta}{\sqrt{2}}e^{-i\xi/\phi_0}\left(\partial^\mu\frac{\phi_0+\eta}{\sqrt{2}}e^{i\xi/\phi_0} + \frac{\phi_0+\eta}{\sqrt{2}}\partial^\mu e^{i\xi/\phi_0}\right)A_\mu \\
&+ ig\left(\partial_\mu\frac{\phi_0+\eta}{\sqrt{2}}e^{-i\xi/\phi_0} + \frac{\phi_0+\eta}{\sqrt{2}}\partial_\mu e^{-i\xi/\phi_0}\right)\frac{\phi_0+\eta}{\sqrt{2}}e^{i\xi/\phi_0}A^\mu \\
&= \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta + \frac{\left(\phi_0+\eta\right)^2}{2\phi_0^2}\partial_\mu\xi\partial^\mu\xi - \mu^2\frac{\left(\phi_0+\eta\right)^2}{2} - \lambda\frac{\left(\phi_0+\eta\right)^4}{4} + g^2\frac{\left(\phi_0+\eta\right)^2}{2}A_\mu A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&- ig\frac{\phi_0+\eta}{\sqrt{2}}e^{-i\xi/\phi_0}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\partial^\mu\eta e^{i\xi/\phi_0} + i\frac{1}{\phi_0}\frac{\phi_0+\eta}{\sqrt{2}}\partial^\mu\xi e^{i\xi/\phi_0}\right)A_\mu \\
&+ ig\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu\eta e^{-i\xi/\phi_0} - i\frac{1}{\phi_0}\frac{\phi_0+\eta}{\sqrt{2}}\partial_\mu\xi e^{-i\xi/\phi_0}\right)\frac{\phi_0+\eta}{\sqrt{2}}e^{i\xi/\phi_0}A^\mu \\
&= \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta + \frac{\left(\phi_0+\eta\right)^2}{2\phi_0^2}\partial_\mu\xi\partial^\mu\xi - \mu^2\frac{\left(\phi_0+\eta\right)^2}{2} - \lambda\frac{\left(\phi_0+\eta\right)^4}{4} + g^2\frac{\left(\phi_0+\eta\right)^2}{2}A_\mu A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&- ig\frac{\phi_0+\eta}{2}\partial^\mu\eta A_\mu + g\frac{\left(\phi_0+\eta\right)^2}{2\phi_0}\partial^\mu\xi A_\mu + ig\frac{\phi_0+\eta}{2}\partial_\mu\eta A^\mu + g\frac{\left(\phi_0+\eta\right)^2}{2\phi_0}\partial_\mu\xi A^\mu
\end{aligned}$$

我们关心的是质量项，而质量项是二次项，因此我们在这里只观察二次项，有[12]

$$\mathcal{L} \sim -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{1}{2}\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + \frac{1}{2}g^2\phi_0^2 A_\mu A^\mu + g\phi_0 \partial^\mu \Phi A_\mu + \mu^2 h^2 + \frac{\mu^4}{4\lambda},$$

原来的规范场A_μ没有二次项，也就是没有质量项。但是对称破缺后出现了二次项，$\frac{1}{2}g^2\phi_0^2 A_\mu A^\mu$，这暗示我们出现了质量项，从而也就使规范场获得了质量。但是，这里出现二次项的同时还出现了一个交叉项$g\phi_0\partial^\mu\Phi A_\mu$，这样，我们就不能简单地将二次项解释成质量项了。我们来看看这一项。

我们的Lagrange量是定域规范不变的。因此我们可以尝试找一个合适的规范变换将Lagrange量中我们不需要的项变换掉。当然这在一般情况下是不可能做到的，只能对某些特殊的Lagrange量才能成功。

我们选择这样的规范变换

$$\phi \to \phi' = e^{-i\Phi/\phi_0}\phi = \frac{\phi_0 + h}{\sqrt{2}},$$

即取

$$\theta(x) = \frac{\Phi(x)}{\phi_0}.$$

这时，势A_μ在这个变换下

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu\theta(x) = A_\mu + \frac{1}{g\phi_0}\partial_\mu\Phi.$$

---

[12]

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \sim{}& \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta + \frac{1}{2}\partial_\mu\xi\partial^\mu\xi - \mu^2\frac{\phi_0^2}{2} - \mu^2\frac{2\phi_0\eta}{2} - \mu^2\frac{\eta^2}{2} - \lambda\frac{\phi_0^4}{4} - \lambda\frac{4\phi_0^3\eta}{4} - \lambda\frac{6\phi_0^2\eta^2}{4} \\
&+ g^2\frac{\phi_0^2}{2}A_\mu A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + g\frac{\phi_0^2}{\phi_0}\partial^\mu\xi A_\mu \\
={}& -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta + \frac{1}{2}\partial_\mu\xi\partial^\mu\xi - \mu^2\frac{\phi_0^2}{2} - \lambda\frac{\phi_0^4}{4} - \mu^2\phi_0\eta - \lambda\phi_0^3\eta - \mu^2\frac{\eta^2}{2} - \lambda\frac{6\phi_0^2\eta^2}{4} \\
&+ \frac{1}{2}g^2\phi_0^2 A_\mu A^\mu + g\phi_0\partial^\mu\xi A_\mu \\
={}& -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta + \frac{1}{2}\partial_\mu\xi\partial^\mu\xi - \mu^2\frac{-\frac{\mu^2}{\lambda}}{2} - \lambda\frac{\left(-\frac{\mu^2}{\lambda}\right)^2}{4} - \left[\mu^2 + \lambda\left(-\frac{\mu^2}{\lambda}\right)\right]\phi_0\eta \\
&- \left(\mu^2\frac{1}{2} + \lambda\frac{3\left(-\frac{\mu^2}{\lambda}\right)}{2}\right)\eta^2 + \frac{1}{2}g^2\phi_0^2 A_\mu A^\mu + g\phi_0\partial^\mu\xi A_\mu \\
={}& -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta + \frac{1}{2}\partial_\mu\xi\partial^\mu\xi + \frac{\mu^4}{2\lambda} - \frac{\mu^4}{4\lambda} + \mu^2\eta^2 + \frac{1}{2}g^2\phi_0^2 A_\mu A^\mu + g\phi_0\partial^\mu\xi A_\mu \\
={}& -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta + \frac{1}{2}\partial_\mu\xi\partial^\mu\xi + \frac{1}{2}g^2\phi_0^2 A_\mu A^\mu + g\phi_0\partial^\mu\xi A_\mu + \mu^2\eta^2 + \frac{\mu^4}{4\lambda}
\end{aligned}$$

场在规范变换下是不变的

$$F_{\mu\nu} \to F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}.$$

Lagrange量在变换下为

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= \left[\left(\partial_\mu - igA'_\mu\right)\phi'^*\left(\partial^\mu + igA'^\mu\right)\phi'\right] - \mu^2\phi'^*\phi' - \lambda\left(\phi'^*\phi'\right)^2 - \frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} \\
&= \left[\left(\partial_\mu - igA'_\mu\right)\frac{\phi_0+h}{\sqrt{2}}\left(\partial^\mu + igA'^\mu\right)\frac{\phi_0+h}{\sqrt{2}}\right] - \mu^2\frac{(\phi_0+h)^2}{2} - \lambda\frac{(\phi_0+h)^4}{4} - \frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\partial_\mu - igA'_\mu\right)(\phi_0+h)\right]\left[\left(\partial^\mu + igA'^\mu\right)(\phi_0+h)\right] \\
&- \frac{1}{2}\mu^2\left(\phi_0^2 + 2\phi_0 h + h^2\right) - \frac{1}{4}\lambda\left(\phi_0^4 + 4\phi_0^3 h + 6\phi_0^2 h^2 + 4\phi_0 h^3 + h^4\right) - \frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\partial_\mu h - igA'_\mu(\phi_0+h)\right)\right]\left[\left(\partial^\mu h + igA'^\mu(\phi_0+h)\right)\right] \\
&- \frac{1}{2}\mu^2\phi_0^2 - \frac{1}{2}\mu^2 2\phi_0 h - \frac{1}{2}\mu^2 h^2 - \frac{1}{4}\lambda\phi_0^4 - \frac{1}{4}\lambda 4\phi_0^3 h - \frac{1}{4}\lambda 6\phi_0^2 h^2 - \frac{1}{4}\lambda 4\phi_0 h^3 - \frac{1}{4}\lambda h^4 - \frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left[\partial_\mu h\partial^\mu h - igA'_\mu(\phi_0+h)\partial^\mu h\right] + \left[\partial_\mu h igA'^\mu(\phi_0+h) - igA'_\mu(\phi_0+h)igA'^\mu(\phi_0+h)\right]\right\} \\
&- \frac{1}{4}\left(2\mu^2 + \lambda\phi_0^2\right)\phi_0^2 - \left(\mu^2 + \lambda\phi_0^2\right)\phi_0 h - \frac{1}{2}\left(\mu^2 + 3\lambda\phi_0^2\right)h^2 - \lambda\phi_0 h^3 - \frac{1}{4}\lambda h^4 - \frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\left[\partial_\mu h\partial^\mu h + g^2 A'_\mu A'^\mu\left(\phi_0^2 + 2\phi_0 h + h^2\right)\right] - \frac{1}{4}\mu^2\phi_0^2 \\
&- \frac{1}{2}\left(\mu^2 + 3\lambda\phi_0^2\right)h^2 - \lambda\phi_0 h^3 - \frac{1}{4}\lambda h^4 - \frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h + \frac{1}{2}g^2\phi_0^2 A'_\mu A'^\mu + \frac{1}{2}g^2 A'_\mu A'^\mu h(2\phi_0 + h) \\
&- \frac{1}{4}\mu^2\phi_0^2 - \frac{1}{2}\left(3\lambda\phi_0^2 + \mu^2\right)h^2 - \lambda\phi_0 h^3 - \frac{1}{4}\lambda h^4.
\end{aligned}$$

可以看到，在做了这个规范变换后（这个规范变换当然不会影响结果），Lagrange量中不再出现标量场Φ，而同时出现了二次的矢量场项$\frac{1}{2}g^2\phi_0^2 A'_\mu A'^\mu$，这就是说原来没有质量的矢量场$A^\mu$获得了质量。也就是说，自发对称破缺后出现的无质量的Goldstone粒子在引入规范场后不再出现，而原本无质量的规范场获得了质量。由于标量Goldstone粒子的消失而去掉的自由度被矢量场获得了。我们知道，自旋为1的无质量的矢量场只有两个两个螺度自由度，而自旋为1的有质量的矢量场则有三个自由度：除了无质量情况下的两个螺度自由度外，还会有一个纵向自由度。这个纵向自由度就是由那个消失了的Goldstone粒子转化来的。我们也看到，矢量场通过这种方式获得质量的同时还要伴随着产生一个有质量的标量场，这就是Higgs粒子。找到了它，这种使矢量场获得质量的机制就可以认为被证实了。

第十一章　经典场V：自由粒子解

（待补充）

第十二章　经典场VI：微扰处理

12.1　微扰处理：经典情况

出于可重整的考虑，在四维时空中我们只关心势$V(\phi)$小于四次方的情况，它们的Lagrange量是（9.1），运动方程是（9.2）。精确求解这个问题当然是困难的，我们采用微扰的办法。

第三部分

正则量子化方案：纲要

第十三章　量子化

13.1　为什么要量子化：一个理由

当我告诉你这个世界是由$F = ma$描述的时候，你一定有一个问题：为什么是这样呢？（如果你没有这样的问题，那么最好去学工程）。牛顿说，实验如此。我们有理由不满意，我们需要一个理由。

如果我告诉你这个世界是本着一个经济的原则运转的，也就是$\delta S = 0$。至于作用量S是什么就要由实验定了。好多了；容易理解多了。（如果你对还需要由实验定这件事不太满意的话，那么你可以做一个数学家。最小作用量原理也许是可以由更漂亮的理论物理理论推导出来，但是，再完美的物理论最终都要有一个由实验确定的参数，至少一个。而那些原则，如对称性，本质上当然也是由实验确定的。）但是粒子在出发前怎样知道这条路最短呢？它走过吗？我们还是需要一个理由。

好了，我告诉你粒子并不知道哪条路最短，它等几率地走所有可能的道路，不过有一个权重因子e^{iS}。你满意些了吗？至少比前面好多了吧。这个回答就是量子理论给出的答案。这也是我们现在物理知识的极限。

你当然还可以问，为什么权重因子是e^{iS}而不是别的函数。还没人知道这件事，但完全可以期待有一个解答。

这就是说，引入量子理论我们可以更加接近真正的答案。

当然，量子理论可以有各种等价的表述。这里采用的是路径积分量子化的表述。是最容易理解的表述。

13.2　量子化方案

泛泛地讲，量子化方案有正则量子化和路径积分量子化两种。正则量子化方案是基于Hamilton表述的。路径积分量子化是基于Lagrange表述的。

正则量子化是一种将力学量（在场论中就是场算符）看作算符的方案。方式是将经典的Poisson括号替换成量子的Poisson括号——对易或反对易括号（对力学只

有对易括号，因为力学本质上考虑的是单粒子情况，并不能自动包含全同粒子的交换性质。量子交换性质需要通过额外的对称和反对称化构造来描述。一个粒子当然就体现不出交换性质了。而对称和反对称反映的是交换性质，所以就没有反对易括号了。这里的对易括号反映的也不是Bose子的交换性质）。正则量子化所做的就是

$$[,]_{cl} \Longrightarrow \frac{1}{i\hbar}[,].$$

路径积分量子化则不将力学量看作算符。它直接推广最小作用原理，本质上是做代换

$$\delta S = 0 \Longrightarrow \int Dq e^{i\frac{S[q]}{\hbar}}.$$

可见，量子理论是由Planck常数$\hbar$标志的。当$\hbar \to 0$时（注意，$\hbar$并不会真的变小，$\hbar \to 0$是指系统作用量S很大），回到经典理论。$\hbar$是最小的作用量，也就是说，$\hbar$是作用量的自然单位。

下面我们将讨论各种量子化的表述。

第十四章　正则量子化简述

在这次场论中我们以路径积分量子化为主要的量子化的方案。对另一个重要的量子化方案——正则量子化——方案的介绍不够。正则量子化是量子力学和量子场论诞生时的样子。我们在这里对这个方案做一个简要描述。对这个方案的一个稍微详细些的方案在老版的场论讲义中有一些。

14.1　经典与量子括号

如何得到一个量子理论看上去是一件极其困难的事。经典理论是量子理论的近似，而不是反过来。试图由一个近似的结果得到一个精确的结果基本上是不可能的。给出同一个近似结果的原始结果显然会有无数种。想想看，如果我给你Taylor展开的前一、两项你能猜出原函数吗。要做这件事当然我们需要一些基本假设，也就是猜测结果的思路。

猜测一个量子理论显然只能以经典力学作为出发点（还有别的出发点吗）。经典力学有许多种等价的表示，由哪种表示出发呢。这并不容易决断，我们只好分别尝试力学的Lagrange表述和Hamilton表述。先考虑Hamilton表述。

Hamilton表述也有两种等价的形式，我们从哪种出发呢。显然Poisson括号的形式更漂亮，先试试它。

Poisson括号的经典力学形式显然不能保留了，实验证明它是不精确的。但是，经常的（宏观情况）它还是很准确。说明这个括号有着它深刻的合理性。那么如何在抛弃这个括号本身的同时又保留它的那种深刻的合理性呢。首先当然要先弄清这个种合理性体现在哪里。这只好猜一猜了。

在经典Poisson括号的具体形式背后，显然隐含着一种代数结构。经典Poisson括

号具有以下代数性质：

$$\begin{aligned}
&[A,B]=-[B,A], && \text{反对称，} && (1)\\
&[A,B+C]=[A,B]+[A,C], && \text{线性，} && (2)\\
&[A,c]=0, \qquad c\text{是数，} && && (3)\\
&[A,BC]=[A,B]C+B[A,C], && && (4)\\
&[[A,B],C]+[[B,C],A]+[[C,A],B]=0. && \text{Jacobi恒等式。} && (5)
\end{aligned} \tag{14.1}$$

性质(1)表明了力学中蕴含着一种深刻的反对称结构，这种结构会在很多看上去不相关的问题中出现。从操作上讲，这种结构也使我们在构造这种二元运算的时候去掉了许多可能性。使构造变得容易。

性质(2)说明这是一种线性结构，这是很本质的。（一个线性的反对称构造，可能性少多了）。

性质(3)和(4)给出了一种微分运算的暗示，比如性质(4)基本上就是莱布尼兹法则。这本质上是在暗示这是一种矢量。

Jacobi恒等式的要求进一步缩小了我们的选择范围。

在物理中给出有意义构造必须基于我们对一个物理系统状态的描述，选择了一种对状态的描述其实是选择了一种观察世界的方式，是物理中最基本的问题。、

在经典力学中，

我们假设（这是基于经验的），经典力学系统的状态可由坐标和动量完全描述。这就是说，经典力学系统的状态空间是由坐标和动量张起来的$2s$维空间（s是自由度）。我们认为在这样一个确定性的系统中任何物理量都将是坐标q和动量p的函数。前面的讨论已经暗示这种代数结构中包含了微分的性质。一个可能的实现是

$$[A(q,p),B(q,p)]_{cl}=\frac{\partial A(q,p)}{\partial q}\frac{\partial B(q,p)}{\partial p}-\frac{\partial B(q,p)}{\partial p}\frac{\partial A(q,p)}{\partial q}.$$

这个实现实际上是取了一个坐标和动量的函数$A(q,p)$，在此基础上实现了这种代数结构。附加一些在物理中显然满足的限制，这个构造其实是唯一的。这就是经典的Poisson括号，或者说，经典Poisson括号是这种代数结构的一种实现。这种实现是基于我们对经典力学中的态的描述的基本假设。

量子理论显然是另外一种可能的实现。为了得到量子理论我们先做一个假设

量子理论与经典理论的代数结构是相同的。

也就是说，这个取近似的过程是保持这些基本代数结构的。近似总是更粗糙些，但我们认为量子的经典近似还没有粗糙到破坏原来的代数结构的程度。从某种意义上讲，这种代数结构是经典量子这个过渡中的一个不变量。

这就是说，我们要为代数结构(14.1)再找一个实现。前面已经提到，这种函数实现（即坐标和动量的函数）基本上是唯一的。更大的改变需要我们改变对态的描述。如果改变了对态的描述那么物理学就发生了革命。

如何改变对态的描述呢，上面的第三条性质$[A,B+C]=[A,B]+[A,C]$，也就是线性性质，显然暗示了一种线性结构。因此我们不妨将状态空间取成一个线性空间。这样一来，一般地讲，A,B,C等就是这个线性空间上的算符。

在此基础上一个最简单的实现就是

$$[A,B]=AB-BA.$$

这是这个代数关系的一个算符实现。这就是说为了得到一个量子理论，我们要在经典理论的基础上做这样一个代换：

$$[A,B]_{cl}\Longrightarrow const\,[A,B]\,. \tag{14.2}$$

作为一个物理理论这个常数当然只能由实验来定，实验告诉我们这个替换是

$$[A,B]_{cl}\Longrightarrow\frac{1}{i\hbar}[A,B]\,.$$

做这个替换的更具体的处理见《高等量子力学讲义》。

（显然，一个自然的想法就是，看看还有没有这个代数结构的另外的实现。如果有，就得到了另一种基本的物理理论，但这几乎肯定建立在改变对态的描述的基础上，是又一次的革命）。

我们很幸运，这个基本的代数结构在经典近似中被保留了下来。如果经典近似再粗糙些，破坏了这个结构，真不知道如何得到量子理论。也许就需要另一个牛顿从虚无中创造一个物理理论了。

经典理论毫无疑问是量子理论在大作用量情况下的一个近似。就是说

$$[A,B]=i\hbar\,[A,B]_{cl}+O\left(\hbar^2\right),$$

或者

$$AB-BA=i\hbar\left(\frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial B}{\partial p}-\frac{\partial B}{\partial p}\frac{\partial A}{\partial q}\right)+O\left(\hbar^2\right).$$

它在$\hbar\to 0$时回到经典理论。

14.2 力学与场的量子括号

我们已经提到，量子括号的经典近似Poisson括号虽然在形式上与量子括号有很大不同，但是这个近似其实是很精细的，它保持了量子括号的所有运算性质。反过来说，经典Poisson括号所有的性质量子括号都会有，也都必须有。

在经典Poisson括号中，对正则共轭变量对我们有性质

$$
\begin{aligned}
[q,p]_{cl} &= 1,\\
[q,q]_{cl} &= 0,\\
[p,p]_{cl} &= 0.
\end{aligned}
$$

我们要求量子括号也满足同样的性质，按照（14.2）给出的替换，要求同样有

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{i\hbar}[q,p] &= 1,\\
\frac{1}{i\hbar}[q,q] &= 0,\\
\frac{1}{i\hbar}[p,p] &= 0.
\end{aligned}
$$

或者

$$
\begin{aligned}
[q,p] &= i\hbar,\\
[q,q] &= 0,\\
[p,p] &= 0.
\end{aligned}
$$

这是我们要求经典与量子括号具有相同的性质的结果，对量子理论来说，这个要求其实是强加的。这个条件就是正则量子化条件。写出它的前提是要求经典与量子括号具有相同的性质。

这个条件是对所有的正则共轭变量对成立的。但是需要说明一点的是，对角动量这样的具有周期性的正则变量需要一些专门的讨论。

以上是力学，或者说是有限大自由度力学中的结果。象在前面从有限大自由度力学过渡到无穷大自由度力学（也就是场）那样，我们将有限大自由度力学的正则量子化条件过渡到场的正则量子化条件。这里我么不必从头做起，直接利用前面的结果就可以了。

简单起见，考虑一个一维的多粒子系统（图2）。其中

第i个粒子的正则共轭变量对为(q_i,p_i)，

第j个粒子的正则共轭变量对为(q_j,p_j)。

一维中的自由度就是粒子。按照前面给出的单粒子的正则量子化条件对i和j两个粒

子我们分别有

$$[q_i, p_i] = i\hbar,$$
$$[q_i, q_i] = 0,$$
$$[p_i, p_i] = 0,$$

和

$$[q_j, p_j] = i\hbar,$$
$$[q_j, q_j] = 0,$$
$$[p_j, p_j] = 0.$$

两个独立的粒子的正则坐标和正则动量是没有关系的，它们当然对易：

$$[q_i, p_j] = [q_j, p_i] = 0,$$
$$[q_i, q_j] = 0,$$
$$[p_i, p_j] = 0.$$

总结一下就是

$$[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij},$$
$$[q_i, q_j] = 0,$$
$$[p_i, p_j] = 0,$$

下面我们采用在经典情况下已经讨论过了的那个力学与场的对应，取连续性极限

$$\text{一串粒子} \Longrightarrow \text{弦},$$
$$q \Longrightarrow \varphi,$$
$$i \Longrightarrow x,$$
$$q_i \Longrightarrow \varphi(x).$$

前面已经给出

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Longrightarrow \pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}(x)}.$$

当分立的标记i变成连续的变量x时，克罗内克符号自然变成了δ-函数：

$$\delta_{ij} \Longrightarrow \delta(x - y).$$

需要稍微说明一下的是，δ_{ij}的取值是0和1，而$\delta(x-y)$的取值则是0和∞。这会带来些麻烦。这个问题在量子力学中我们曾仔细讨论过，根源是，所有散射态（自由粒子是最简单的散射态）都不是平方可积的。这就是说它们本质上不是Hilbert空间中的矢量，因为Hilbert空间要求有内积。但是这件事还是有一些解决办法，在这里我们不讨论这件事。

由前面的对应可以看出，在连续化以后，只有同一时空点上的场坐标和场动量$\varphi(x,t)$和$\pi(x,t)$才代表同一个粒子（一个粒子不能同时出现在两个空间点上）。由上面的过渡我们有

$$\begin{aligned}
&[q_i,p_j]=i\hbar\delta_{ij} \quad \Longrightarrow \quad [\varphi(x,t),\pi(y,t)]=i\hbar\delta^3(x-y),\\
&[q_i,q_j]=0 \qquad\quad \Longrightarrow \quad [\varphi(\mathbf{x},t),\varphi(\mathbf{y},t)]=0,\\
&[p_i,p_j]=0 \qquad\quad \Longrightarrow \quad [\pi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)]=0.
\end{aligned}$$

这样我们就由有限大自由度力学的正则量子化条件过渡到了场的正则量子化条件。

14.3 两种量子化方案：全同粒子，交换作用

这部分内容待补充。

14.4 只有两种可能的量子化：Schwinger原理

前面我们从力学的量子化条件过渡到了无穷大自由度的场的量子化条件。一个自然的问题是这种量子化条件是唯一的吗。在这一节中我们说明在平庸空间中量子化条件不止这一种，而是有且只有两种：对易的量子化条件和反对易的量子化条件。

在这里要说明的一点是为什么在量子力学中只出现一种正则量子化条件，而在场理论中则有两种。

其实，在量子力学的理论中我们已经知道，仅有Schrödinger方程或Heisenberg方程这样的动力学方程的量子力学理论是不完全的。完全的量子力学理论还要加上全同粒子交换对称性的内容。就是说，对全同的Bose子我们要另外地构造对称和对称化的态矢。这种对称的和反对称的态矢是量子力学动力学方程所不能直接给出的。而前面的从力学到场论的过渡我们本质上只考虑了量子力学中的动力学方程，而没有考虑交换对称性。因此没有得到全部的量子化条件。场理论是自动包含交换对称性的，而全同粒子的交换对称性有两种，从而可以想象，场量子化条件也应该有两种。

从另一个角度看，在上一章中我们的尝试已经表明，要想不破坏因果律，标量场必须采用对易关系的量子化条件，旋量场必须采用反对易的量子化条件。

这里的分析（不能算是证明）充其量只能算是一个存在性的说明。那么是不是只有这两种量子化方式呢。我们将从Schwinger原理出发证明存在且只存在两种量子化方式：对易和反对易量子化。

但是注意，Schwinger原理只是说存在且只能存在两种量子化方案。但是并没有说什么样的场应该采用什么样的量子化方案。回答这个问题要靠因果律。也就是说，因果律将告诉我们什么样的场用什么样的量子化条件。

关于Schwinger原理在《高等量子力学讲义》中我们做了详细的介绍，这里就暂时不讲了。只是提一下，在这个证明中，我们引入了新的假设：简单性原则。与所有的基本假设一样，这只能算是一种信念。

14.5 微观因果律，自旋统计关系

Schwinger原理指出只有对易和反对易两种可能的量子化条件，相对论允许的场有许多种。我们的问题是那么我们对哪种场用哪种量子化条件呢。Schwinger原理不能回答这个问题。回答这个问题需要增加新的条件。注意，我们的原则是尽可能不增加新的要求，从尽可能少的假设出发建立整个理论体系，所引入的假设要尽可能地基本。

前面的尝试已经告诉我们，如果我们采用量子化的场观点，即将场量当作是算符（例如标量场$\phi \to \hat{\phi}$），同时又要求必须满足因果律，那么标量场算符必须满足条件：

$$\left[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)\right] = 0，\text{当时空间隔} x-y \text{为类空时。} \tag{14.3}$$

而旋量场算符必须满足条件：

$$\left\{\hat{\psi}(x), \hat{\psi}(y)\right\} = 0，\text{当时空间隔} x-y \text{为类空时。} \tag{14.4}$$

在由相对论的要求出发得到各种相对论性方程的一部份中，我们曾得到结论：

$$\text{相对论} \Longrightarrow \begin{cases} \text{标量、矢量场具有整数自旋；} \\ \text{旋量场具有半整数自旋。} \end{cases} \quad \text{而且只有整数，半整数这两种情况。}$$

在得到这一结论时我们唯一的出发点就是相对论，利用了群论作为数学工具（就像牛顿力学利用微积分一样）。我们证明了Lorentz群有两个Casimir算符，也就是说有两个不变量，它们对应着静止质量和自旋。当然，将这两个不变量解释成静止质量

和自旋是我们出于物理的考虑做出的。其中也确实隐含着相对论之外的假设，尤其是将不变量与自旋联系起来的的假设其中隐含着量子的成分。我们知道，在经典力学中空间旋转对称性也仍然与$SO(3)$群相联系。但是，在经典力学的框架下群论能做的事情并不多。这是因为经典力学中的力学量是连续变化的，角动量可以取任何值。而量子情况中存在空间取向量子化，角动量只能取某些分立值。这样将角动量与群表示联系起来才有实质意义。

在前面一章我们只尝试了标量和最简单旋量这两种情况。原则上我们可以更普遍地做这件事。我们可以验证，如果我们坚持因果律对所有自旋为整数的的场（称为Bose场），场算符都必须满足对易关系；对所有自旋为半整数的场（称为Fermi场），场算符都必须满足反对易关系。就是说

$$\text{因果律} \Longrightarrow \begin{cases} \text{Bose场算符要满足对易的量子化条件；} \\ \text{Fermi场算符要满足反对易的量子化条件。} \end{cases}$$

在前面，由Schwinger原理我们可以知道（在拓扑平庸的空间中）Schwinger原理我们就可以得到这样的结论：

$$\text{Schwinger原理} \Longrightarrow \text{只有两种量子化方式} \begin{cases} \text{对易的量子化；} \\ \text{反对易的量子化。} \end{cases}$$

观察对易和反对易这两种量子化条件，考虑$x=y$，即在同一点：

$$\begin{aligned} \left[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(x)\right] &= \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x) - \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x) = 0, \\ \left\{\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(x)\right\} &= \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x) + \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x) = 2\hat{\phi}^2(x). \end{aligned}$$

由结果可以看到Bose场量子化条件(14.3)对$x=y$的情况没有给出任何限制，因为结果本身已经是零了。也就是说量子化条件对Bose情况中可处于同一个态上的粒子的数目没有限制（这里是在坐标表象中考虑，如果在动量表象中考虑同处一态的意思就是动量相同）。但是对Fermi情况，$\left\{\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(x)\right\} = 2\hat{\phi}^2(x)$，并不自动满足Fermi场量子化条件(14.4)的要求。这就是说量子化条件(14.4)将对Fermi情况给出一个限制

$$\hat{\phi}^2(x) = 0.$$

这就是要求两个粒子不能同处在一个态上，这就是Pauli原理的要求。这就是说Bose子和Fermi子在Pauli原理上的差异本质上是这两种场的不同的量子化条件决定的。而Bose和Fermi子分别满足哪种量子化条件是因果律的要求。注意，只有因果律的要求是得不到这个结果的。是因果律再加上量子化的要求给出的这个结论。

考虑了量子化的因果律被称为**微观因果律**（一般地说，量子效应总是微观时明显）。也就是说，Pauli原理本质上是微观因果律的要求。总结一下这个结论就是

$$\begin{cases} \text{对易的量子化}\Longrightarrow\text{一个态上的粒子数没有限制；} \\ \text{反对易的量子化}\Longrightarrow\text{一个态上的只能容纳一个粒子（Pauli原理）。} \end{cases}$$

从统计物理的角度讲，有了一个态上的粒子数的限制完全从统计的角度出发我们就可以得到统计分布：

$$\begin{aligned} &\text{一个态上的粒子数没有限制}\Longrightarrow\text{Bose-Einstein统计；} \\ &\text{一个态上的只能容纳一个粒子}\Longrightarrow\text{Fermi-Dirac统计。} \end{aligned}$$

综合前面的一系列结果我们直接得到这样结论

$$\text{微观因果律}\Longrightarrow\begin{cases} \text{自旋为整数的粒子服从Bose-Einstein统计；} \\ \text{自旋为半整数的粒子服从Fermi-Dirac统计。} \end{cases}$$

这样我们就从微观因果律的角度给出了自旋和统计的关系。这个结论就是所谓的自旋统计定理。这一结果是非常深刻的。

14.6 Bose场和Fermi场的正则量子化条件

有了前面的结果，我们已经知道：

- Schwinger原理要求（拓扑平庸的空间中）只能有两种可能的量子化方案。
- 微观因果律要求Bose场采用对易的正则量子化条件，Fermi场采用反对易的正则量子化条件。

具体地讲就是，Bose场算符要满足

$$\begin{aligned} &[\varphi(x,t),\pi(y,t)]=i\hbar\delta^3(x-y), \\ &[\varphi(\mathbf{x},t),\varphi(\mathbf{y},t)]=0, \\ &[\pi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)]=0; \end{aligned}$$

而Fermi场算符要满足

$$\begin{aligned} &\{\psi(x,t),\pi(y,t)\}=i\hbar\delta^3(x-y), \\ &\{\psi(\mathbf{x},t),\psi(\mathbf{y},t)\}=0, \\ &\{\pi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)\}=0. \end{aligned}$$

看上去问题解决了，其实不是这样的。这里的正则量子化条件是在要求量子括号与经典括号保持相同的运算性质的前提下得到的。而正则共轭变量对的经典Poisson括号的结果（6.13，6.14）是在所有的动力学变量的分量彼此独立的前提下得到的。如果存在约束正则量子化条件就会出现问题。事实上，规范场就是以规范条件为约束条件的场，在规范场的量子化问题中这里得到的量子化条件很难直接应用。也就是说，这里虽然给出了量子化的整体原则，但在具体问题中还会遇到新的困难。

此外，我们很自然地要求经典理论中的各种对称性在量子化后仍然保持。这也是个基本假设。比如，一个相对论性的经典理论在量子化后必须仍然是Lorentz不变的。一个具有规范对称性的经典场，在量子化以后仍然应该是规范不变的（除非你选定了规范）。

第十五章　谐振子：经典力学、量子力学、经典场论、量子场论

在这一节中，我们将演示正则量子化条件中包含了全部量子的信息。我们将看到，只要在经典理论上附加上正则量子化条件，就会得到一个完整的量子理论。具体地，我们将演示只要在经典谐振子上加上正则量子化条件后就会得到量子谐振子。也就是说

经典谐振子+正则量子化条件=量子谐振子

在场论中，我们得到量子场的方法仍然是在经典场上加上正则量子化条件。尤其是，像在前面提到的，我们的场论实质上是一个量子化了的谐振子场（也就是在空间的每一个点上都放一个谐振子）。因此，比喻性地，（正则）量子化一个经典场就是对空间每一个点上的经典谐振子都做一次这一节中所做的量子化。

15.1　谐振子：量子力学（正则量子化方案）

一维谐振子的Hamilton量为

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2,$$

首先进行一下无量纲化，用$\hbar\omega$去除等式两边

$$\begin{aligned}\frac{H}{\hbar\omega} &= \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{m\hbar\omega}+\frac{m\omega^2}{\hbar\omega}x^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{p}{\sqrt{m\hbar\omega}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)^2\right],\end{aligned}$$

令$P=\frac{p}{\sqrt{m\hbar\omega}},Q=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$,可得

$$H=\frac{1}{2}\left(P^2+Q^2\right)\hbar\omega.$$

由Heisenberg的正则量子化条件知

$$[x,p]=i\hbar,$$

由此可以算出Q,P的对易关系

$$\begin{aligned}[Q,P] &= \left[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x,\frac{p}{\sqrt{m\hbar\omega}}\right]\\ &= \frac{1}{\hbar}[x,p]\\ &= i,\end{aligned}$$

所以可得

$$[Q,P]=i.$$

在这里我们取一个线性变换（正则变换）

$$a=\frac{1}{\sqrt{2}}(Q+iP), \tag{15.1}$$

那么自然有

$$a^{\dagger}=\frac{1}{\sqrt{2}}(Q-iP). \tag{15.2}$$

$a^{\dagger}$和a是互为厄米共轭的关系，直接的推导可以得到新算符a^{+}和a的对易关系。

$$\begin{aligned}\left[a,a^{\dagger}\right] &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(Q+iP),\frac{1}{\sqrt{2}}(Q-iP)\right]\\ &= \frac{1}{2}([Q,-iP]+[iP,Q])\\ &= 1,\end{aligned}$$

即

$$\left[a,a^{\dagger}\right]=1.$$

下面我们就用$a^{\dagger}$，a来表示H,由（15.1）（15.2）可得

$$Q=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a+a^{\dagger}\right),$$

$$P=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a-a^{\dagger}\right).$$

由此可得$a^{\dagger}a$表示的H的形式

$$H=\left(a^{\dagger}a+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega. \tag{15.3}$$

注意，这里的$\frac{1}{2}\hbar\omega$是量子理论所特有的，它是零点能。是真空涨落引起的，而真空涨落完全是测不准关系的结果。因此说它是纯粹的量子效应。

15.1.1 能谱

在有了用$a^\dagger, a$表示的H之后就可以着手求谐振子的能谱，也就是H的本征值。

系统的基态

首先我们来确定系统的基态，基态是系统所能取得最低能态。也是H的最低的本征值。当然也就是H的最小平均值。下面来求H的平均值。以便看看其最小的平均值会是什么，H的平均值为（注意：最小的能量平均值肯定是本征值，否则就会有至少两本征值的平均，这样一来就必须有一个低于平均值的能态。与最小能量的说法就矛盾了）

$$\begin{aligned}\langle\psi|H|\psi\rangle &= \langle\psi|\left(a^\dagger a+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega|\psi\rangle \\ &= \langle\psi|a^\dagger a|\psi\rangle\hbar\omega+\frac{1}{2}\hbar\omega\langle\psi|\psi\rangle \\ &= |a|\psi\rangle|^2\hbar\omega+\frac{1}{2}\hbar\omega. \end{aligned} \tag{15.4}$$

这里的$|\psi\rangle$是任意的（并非本征态矢）归一化态矢。我们知道任何量的模平方都将大于或等于零，因此有

$$|a|\psi\rangle|^2 \geq 0.$$

由此可知

$$\langle\psi|H|\psi\rangle \geq \frac{1}{2}\hbar\omega,$$

这就是说$\frac{1}{2}\hbar\omega$是系统所可能取得最低能态（因为$|\psi\rangle$是任意态）,如果将$|\psi\rangle$取成H的本征态$|E\rangle$,则有

$$\langle E|H|E\rangle \geq \frac{1}{2}\hbar\omega,$$

所以

$$E \geq \frac{1}{2}\hbar\omega.$$

这就是说$\frac{1}{2}\hbar\omega$是系统的最低能量本征态的本征值。即

$$\begin{aligned}H|E_0\rangle &= E_0|E_0\rangle \\ &= \frac{1}{2}\hbar\omega|E_0\rangle,\end{aligned}$$

所以

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega.$$

各级激发态能谱

下面在基态基础上求各级激发态能量。我们先选取任意一个H的本征态$|E\rangle$有

$$H|E\rangle = E|E\rangle.$$

现在除了H还有两个算符a和$a^\dagger$,它们作用在$|E\rangle$上将得到两个新的态矢（如果作用的结果不为零的话）：$a|E\rangle$和$a^\dagger|E\rangle$,将H分别作用在这两个态矢上

$$\begin{aligned} Ha|E\rangle &= ([H,a]+aH)\,|E\rangle \\ &= [H,a]\,|E\rangle + Ea|E\rangle. \end{aligned}$$

这里需要计算$[H,a]$

$$[H,a] = \left[a^\dagger a, a\right]\hbar\omega = -a\hbar\omega.$$

于是有

$$\begin{aligned} Ha|E\rangle &= -\hbar\omega a|E\rangle + Ea|E\rangle \\ &= (E-\hbar\omega)\,a|E\rangle. \end{aligned} \tag{15.5}$$

这就是说态$a|E\rangle$也是H的本征态，其本征值为“$E-\hbar\omega$”。在此基础上不妨定义态$|E'\rangle = a|E\rangle$,此时$|E'\rangle$的本征值就是$E-\hbar\omega$。同样再求一下$Ha|E'\rangle$。就会像前面一样得到$a|E'\rangle$也是一个H的本征态，其本征值为

$$E-\hbar\omega-\hbar\omega = E-2\hbar\omega.$$

同样的处理重复下去就会知道：$E, E-\hbar\omega, E-2\hbar\omega, E-3\hbar\omega\cdots$都是$H$的本征值。类似地，我们将$H$作用到态矢$a^\dagger|E\rangle$上。

$$\begin{aligned} Ha^\dagger|E\rangle &= \left(\left[H,a^\dagger\right]+a^\dagger H\right)|E\rangle \\ &= \left[H,a^\dagger\right]|E\rangle + Ea^\dagger|E\rangle \end{aligned}$$

其中

$$\left[H,a^\dagger\right] = \left[a^\dagger a, a^\dagger\right]\hbar\omega = a^\dagger\hbar\omega,$$

这样便有

$$\begin{aligned} Ha^\dagger|E\rangle &= \hbar\omega a^\dagger|E\rangle + Ea^\dagger|E \\ &= (E+\hbar\omega)\,a^\dagger|E\rangle. \end{aligned} \tag{15.6}$$

可见$a^\dagger|E\rangle$也是H的本征态，相应本征值为$(E+\hbar\omega)$。仿照前面的做法，可知$E+\hbar\omega, E+2\hbar\omega, E+3\hbar\omega\cdots$都是$H$的本征值。

这里的E是我们任取的一个值。前面已经找到了系统的基态$E_0=\frac{1}{2}\hbar\omega$。同时还知道序列$E-\hbar\omega, E-2\hbar\omega\cdots$都是$H$的本征值。既然$E_0$是最低态了，那么$E_0-\hbar\omega$及以下各态便不可能再是本征态了。由前面的推导知$E_0-\hbar\omega$对应的本征态是$a|E_0\rangle$。这样的态不存在便有

$$a|E_0\rangle=0, \tag{15.7}$$

由此我们可求得H作用在$|E_0\rangle$上的结果

$$H|E_0\rangle=\left(a^\dagger a+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega|E_0\rangle=\frac{1}{2}\hbar\omega|E_0\rangle.$$

这说明$|E_0\rangle$和$\frac{1}{2}\hbar\omega$确实是系统基态态矢和本征值。前面由不等式出发确定了能量下限（即基态能量）的方法，但没有给出基态本征矢（但那却是整个方法的基础）的性质。这是在前面讨论的基础上给出了基态态矢所应满足的关系$a|E_0\rangle=0$。这是以后求各级本征态矢的基础。

此外，讨论能级下限（即基态能量）后，还应看一看能量有否上限。由于只要求$E\geq\frac{1}{2}\hbar\omega$。那么$\frac{1}{2}\hbar\omega+n\hbar\omega$的能级都应存在。既没有上限。归纳一下前面的结果，可以知道谐振子的能级可表示为

$$E_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega,\qquad n=0,1,2\cdots$$

或

$$H|E_n\rangle=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega|E_n\rangle.$$

因为E_n完全可由n来表示

$$H|n\rangle=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega|n\rangle,$$

将（15.3）式代入得

$$\left(a^\dagger a+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega|n\rangle=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega|n\rangle.$$

所以

$$a^\dagger a|n\rangle=n|n\rangle,$$

这诱导我们引入一个新算符$N\equiv a^\dagger a$,这样有

$$N|n\rangle=n|n\rangle.$$

15.1.2 占有数表象的波函数

前面得到了系统的能谱，下面来看看波函数或说态矢的情况：讨论波函数和讨论能谱不同，在讨论波函数时，必须针对某个具体的表象。基态态矢$|0\rangle$，根据（15.7）式的讨论，由

$$a|0\rangle = 0$$

来确定。下面我们以$|0\rangle$为基础来构造各个能级的态矢。由（15.5）知

$$|E_n\rangle \equiv |n\rangle$$

$$Ha^\dagger|n\rangle = (E_n + \hbar\omega)\, a^\dagger|n\rangle,$$

而同时还知道

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle.$$

因为

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega,$$

所以

$$\begin{aligned} H|n+1\rangle &= E_{n+1}|n+1\rangle \\ &= (E_n + \hbar\omega)|n+1\rangle. \end{aligned}$$

对比得

$$a^\dagger|n\rangle = \lambda(n)|n+1\rangle. \tag{15.8}$$

同理可得

$$a|n\rangle = \eta(n)|n-1\rangle.$$

只要定出$\lambda(n)$和$\eta(n)$就可以知道相邻能级态矢间的关系了，从而可由基矢$|0\rangle$定出全部态矢。对前面两方程两边求复共轭得

$$\langle n|a = \lambda^*(n)\langle n+1| \tag{15.9}$$

$$\langle n|a^\dagger = \eta^*(n)\langle n-1|, \tag{15.10}$$

(15.9)×(15.8)及(15.10)×(15.8)有

$$\langle n|aa^\dagger|n\rangle = |\lambda(n)|^2\langle n+1|n+1\rangle$$

$$\langle n|aa^\dagger|n\rangle = |\eta(n)|^2\langle n-1|n-1\rangle.$$

这样便有

$$\begin{aligned}|\lambda(n)|^2 &= \langle n|aa^\dagger|n\rangle \\ &= \langle n|a^\dagger a+1|n\rangle \\ &= \langle n|N|n\rangle+1 \\ &= n+1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\eta(n)|^2 &= \langle n|a^\dagger a|n\rangle \\ &= \langle n|N|n\rangle \\ &= n.\end{aligned}$$

我们不妨将$\lambda(n)$和$\eta(n)$取为实数，即$\lambda(n)=\sqrt{n+1}, \eta(n)=\sqrt{n}$。这样便有

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \qquad n=1,2,3\cdots \tag{15.11}$$

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \ \ n=1,2,3\cdots, \tag{15.12}$$

我们已经注意到，算符a的作用是将$|n\rangle$变成$|n-1\rangle$，即将一个能级。而$a^\dagger$则是升一级。因此在这里，当我们讨论的对象是能级的时候。便称$a^\dagger$和a分别为能级的上升，下降算符。由此出发。我们可以用归纳法得到$|n\rangle$态矢与基矢$|0\rangle$的关系,因为

$$|n+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}}a^\dagger|n\rangle,$$

所以

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{1}}a^\dagger|0\rangle$$

$$\begin{aligned}|2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}a^\dagger|1\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}a^\dagger\frac{1}{\sqrt{1}}a^\dagger|0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}\left(a^\dagger\right)^2|0\rangle\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}a^\dagger|2\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}a^\dagger\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}\left(a^\dagger\right)^2|0\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{1\cdot 2\cdot 3}}\left(a^\dagger\right)^3|0\rangle \\
&\vdots \\
|n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(a^\dagger\right)^n|0\rangle. \qquad (15.13)
\end{aligned}
$$

既然前面已由（15.7）式定出了$|0\rangle$。那么由此式出发自然就可构造出各级态矢$|n\rangle$。

15.1.3 坐标表象中的波函数

这里我们换个表象来做这件事，对任意态矢$|n\rangle$插入恒等式$\int dQ|Q\rangle\langle Q| = 1$，$Q$是前面定义过得无量纲坐标。

$$
\begin{aligned}
|n\rangle &= \int dQ|Q\rangle\langle Q|n\rangle \\
&= \int dQ\Psi_n(Q)|Q\rangle
\end{aligned}
$$

其中$\psi_n(Q)\equiv\langle Q|n\rangle$即为第$n$个能级在坐标表象中的波函数。求波函数还是由基态求起：由

$$a|0\rangle = 0$$

出发,在坐标表象中，我们可以确定基态波函数将式（15.1）代入可知

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(Q+iP)|0\rangle = 0$$

写在坐标表象中

$$\left(Q+\frac{d}{dQ}\right)\psi_0(Q) = 0.$$

这是一个普通的常微分方程。它的解便是坐标表示下的基态波函数：

$$
\begin{aligned}
\psi_0(Q) &= ce^{-\frac{1}{2}Q^2} \\
&= ce^{-\frac{1}{2}\alpha^2x^2}
\end{aligned}
$$

其中$Q\equiv\alpha x,\quad \alpha=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$,可由归一化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi_0(x)|^2dx = 1$$

求得

$$c=\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

这样一个归一化的基态波函数为

$$\psi_0(x)=\sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

在ψ_0的基态上，可由（15.13）式得到各级波函数，将（15.13）式写在坐标表象中便是

$$\psi_n(Q)=\frac{1}{\sqrt{n!}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(Q-\frac{d}{dQ}\right)\right]^n\psi_0(Q).$$

显然有此可自然地得到各级$\psi_n(x)$

下面我们稍微具体的处理一下这个式子，这里涉及了一个$\left(Q-\frac{d}{dQ}\right)^n f(Q)$的问题，先来看看$n=1$的情况，在$n=1$时可以凑出下面这个式子：

$$\left(Q-\frac{d}{dQ}\right)f(Q)=-e^{-\frac{1}{2}Q^2}\frac{d}{dQ}\left(e^{-\frac{1}{2}Q^2}f(Q)\right)$$

可由数学归纳法证明

$$\left(Q-\frac{d}{dQ}\right)^n f(Q)=(-1)^n e^{-\frac{1}{2}Q^2}\frac{d^n}{dQ^n}\left(e^{-\frac{1}{2}Q^2}f(Q)\right).$$

这样便有

$$\begin{aligned}\psi_n(Q) &= \frac{c}{\sqrt{n!2^n}}(-1)^n e^{-\frac{1}{2}Q^2}\frac{d^n}{dQ^n}e^{-Q^2}\\ &= \frac{c}{\sqrt{n!2^n}}e^{-\frac{1}{2}Q^2}H_n(Q),\end{aligned}$$

其中

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}.$$

当然这个波函数还要进行归一化。结果是

$$\psi_n(x)=\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}2^n n!}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\alpha^2x^2}H_n(\alpha x).$$

Exercise 2 作为一个零维场论φ^4模型，考虑含x^4势能的一维谐振子

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2+\lambda x^4.$$

用代数方法、路径积分方法分别求解这个模型。

第十六章　量子力学：对称和反对称的全同粒子波函数；量子场论：对易和反对易的场量子化条件

(待补充)

第四部分

正则量子化方案：详述

第十七章　标量场的正则量子化

17.1　实标量场

自由实标量场的Klein-Gordon方程为

$$(\partial^2 + m^2)\phi = 0 \tag{17.1}$$

相应的Lagrange量为：（参考相应的章节）

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m\phi^2) \tag{17.2}$$

标量场的正则量子化条件：（引用相关的章节）

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] &= i\delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \\ [\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)] &= 0 \\ [\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] &= 0 \end{aligned} \tag{17.3}$$

其中$\pi(\mathbf{x}, t)$为场的正则动量：

$$\pi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}(\mathbf{x}, t)}$$

将Lagrange量的形式代入后得

$$\pi(\mathbf{x}, t) = \dot{\phi}(\mathbf{x}, t) \tag{17.4}$$

可以看到，这里正则动量正比于速度。

至此我们已经将Klein-Gordon方程量子化。下面我们换一下表象。（不过不妨回忆一下处理谐振子问题时的情况在那里，在已经有了$[x, p] = i$的量子化之后，我们又引入了其在占有数表象下的表示形式，对场的量子化的进一步处理我们也采用类似的思路。）

(这部分内容与前面章节重复，为了完整，仍写在这里。)下面将坐标表象变到动量（能量，粒子数）表象，插入动量的本征函数$\int dp\,|p\rangle\langle p|$。而动量本征函数就是平面波。因此这个做法在操作上就是做一个平面波展开。

怎样做这个展开呢，还需要做一些讨论。要将任意一个函数展开，当然要用一个完备集。而我们已经知道，Klein-Gordon方程的自由粒子解正能解，也有负能解。它们合在一起才构成完备集。因此不能随便舍弃负能部分，要同时用e^{ipx}和e^{-ipx}展开。此外，Klein-Gordon方程是相对论性的。这要求我们所选择相对论不变的体积元。即$\int\sqrt{-g}dp$的形式。这里

$$g=\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix} \tag{17.5}$$

所以$\det(g)=-1$,于是$\int\sqrt{-g}d^4p=\int d^4p$ 同时，我们还知道能量和动量并不是独立的，它们满足能动量关系$E^2=|\mathbf{k}|^2+m^2$或写成Lorentz不变的形式$k^2-m^2=0$。此外，虽然在表示中既有正能部分又有负能部分，但我们只采用正的能量$\omega_k=\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2}$来表示，负能部分对应的便是$-\omega_k$。

这样可以将场量$\phi(x)$用平面波展开，并写成明显相对论协变的形式。

$$\phi(x)=\int\sqrt{-g}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}2\pi\delta(k^2-m^2)\theta(k_0)[A(k)e^{-ipx}+A^\dagger(k)e^{ipx}] \tag{17.6}$$

这里的

$$\theta(k_0)=\begin{cases}1, & k_0>0\\0, & k_0\neq 0\end{cases}$$

这是一个数（1或0），不影响Lorentz不变性。系数$\frac{1}{(2\pi)^4}$也体现了相空间的大小。δ函数前的2π因子来自Fourier变换所采用的形式，因为很明显这种展开形式是一种Fourier变换。

式（17.6）中$A(k)$和$A^\dagger(k)$是展开的系数。由于场量子化后$\phi(x)$是算符了，$A(k)$，$a^\dagger(k)$与$\phi(x)$的差异只是换了个表象，自然其展开式系数$A(k)$和$A^\dagger(k)$也是算符。

由(17.6)式我们已经看出，这种展开是Lorentz不变的。这个明显Lorentz不变的表达式可以写成更方便处理的不再明显不变的的形式（当然，仍然是Lorentz不变的，只是不再明显不变）。

先处理δ函数，由δ函数的性质知：

$$\delta[f(x)] = \frac{\delta(x-x_0)}{|f'(x_0)|},\ \ f(x_0)=0$$
$$k^2-m^2 = k^{0^2} - |\mathbf{k}|^2 - m^2 = k^{0^2} - (|\mathbf{k}|^2+m^2) = 0$$
$$k^0 = \pm\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2} \equiv \pm\omega_k,\ \ \omega_k \equiv \sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2}$$

这里$f(x)$中的x取k^0，

$$|f'(x_0)| = \left|\frac{d}{dk^0}(k^{0^2}-|\mathbf{k}|^2-m^2)\right|_{k^0=\pm\omega_k} = 2\omega_k$$

$$\delta(k^2-m^2) = \frac{\delta(k^0-\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2})}{2\omega_k} + \frac{\delta(k^0+\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2})}{2\omega_k} \tag{17.7}$$

而(17.6)式中阶跃函数$\theta(k^0)$要求只取正能部分，即$k^0=\omega_k$的部分

$$\delta(k^2-m^2)\theta(k^0) = \frac{\delta(k^0-\omega_k)}{2\omega_k}$$

这样前面(17.6)式中的Lorentz不变体积元变为：

$$\begin{aligned}\int d^4k\delta(k^2-m^2)\theta(k^0) &= \int d^3k dk_0 \frac{\delta(k^0-\omega_k)}{2\omega_k} \\ &= \int \frac{d^3k}{2\omega_k}\end{aligned}$$

式中所有k^0都取为$k^0=\omega_k=\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2}$.

这其实也就证明了，体积元$\frac{d^3k}{2\omega_k}$是一个Lorentz不变体积元。虽然它看上去不太像。这样展开式(17.6)变成：

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}[A(k)e^{-ikx}+A^\dagger(k)(k)e^{ikx}] \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left[\frac{A(k)}{\sqrt{2\omega_k}}e^{-ikx}+\frac{A^\dagger(k)}{\sqrt{2\omega_k}}e^{ikx}\right] \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}[a(k)e^{-ikx}+a^\dagger(k)e^{ikx}]\end{aligned} \tag{17.8}$$

其中

$$a(k) \equiv \frac{A(k)}{\sqrt{2\omega_k}}$$
$$a^\dagger(k) \equiv \frac{A^\dagger(k)}{\sqrt{2\omega_k}}$$

这样的取法不是唯一的[1]。由(17.4)式我们知道了广义动量$\pi=\dot{\phi}$。这样便可以由（17.8）式出发得到广义动量$\pi(x)$的平面波展开。

$$\begin{aligned}\pi(x)=\dot{\phi}(x)&=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}[-i\omega_k a(k)e^{-ikx}+i\omega_k a^\dagger(ke^{ikx}]\\&=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}(i\omega_k)[-a(k)e^{-ikx}+a^\dagger(k)\,e^{ikx}]\end{aligned}\tag{17.9}$$

我们把这两个场的平面波展开式总结在下面：

$$\begin{cases}\phi(x)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}[a(k)e^{-ikx}+a^\dagger(k)\,e^{ikx}]\\ \pi(x)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}(i\omega_k)[-a(k)e^{-ikx}+a^\dagger(k)\,e^{ikx}]\end{cases}$$

这个展开式本质上相当于换了一个表象，即由坐标表象换到了粒子数表象，动量表象或能量表象。坐标表象的场算符是$\phi(x)$，$\pi(x)$。新表象的场算符是$a(k)$和$a^\dagger(k)$。由ϕ，π的对易关系当然可以直接求出$a(k)$和$a^\dagger(k)$的对易关系。

求$[a,a^\dagger]$有两个途径。一个是由(17.4)式通过逆变换求出$a(k)$和$a^\dagger(k)$的表达式。再直接计算它们的对易关系。另一个途径是将(17.4)式(17.9)式代入$[\phi,\pi]=i\delta^3(\mathbf{x}'-\mathbf{x})$中，从而解出$[a,a^\dagger]$应满足的关系。下面依循第二个途径做这件事：

$$\begin{aligned}[\phi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{x}',t)]&=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\frac{i\omega_{k'}}{\sqrt{2\omega_{k'}}}\\&\quad\times[a(k)e^{-ikx}+a^\dagger(k)e^{ikx},a\left(k'\right)e^{-ik'x'}+a^\dagger\left(k'\right)e^{ik'x'}]\\&=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\frac{i\omega_{k'}}{\sqrt{2\omega_{k'}}}\\&\quad\times\{-[a(k),a(k')]e^{-i(kx+k'x')}+[a^\dagger(k),a^\dagger(k')]e^{i(kx+k'x')}\\&\quad+[a(k),a^\dagger(k')]e^{-i(kx-k'x')}-[a^\dagger(k),a(k')]e^{i(kx-k'x')}\}\\&=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\frac{i\omega_{k'}}{\sqrt{2\omega_{k'}}}\\&\quad\times\{-[a(k),a(k')]e^{-i(kx+k'x')}+[a^\dagger(k),a^\dagger(k')]e^{i(kx+k'x')}\\&\quad=+[a(k),a^\dagger(k')]e^{-i(kx-k'x')}+[a(k'),a^\dagger(k)]e^{i(kx-k'x')}\}\end{aligned}$$

我们的目标是要使$[\phi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{x}',t)]=i\delta^3(\mathbf{x}'-\mathbf{x})$，为了达到这个目的，这里取

$$\begin{aligned}\left[a(k),a(k')\right]&=0\\\left[a^\dagger(k),a^\dagger(k')\right]&=0\\\left[a(k),a^\dagger(k')\right]&=(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\end{aligned}$$

[1]由于成稿于不同时期，这个讲义中不同部分采用的各种约定(如归一化)并不完全相同。以后再将它们统一起来。

于是

$$\begin{aligned}
[\phi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{x}',t)] &= \frac{i}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\{(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')(e^{-i(kx-k\prime x')}+e^{i(kx-k\prime x')})\}\\
&= \frac{i}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\frac{\omega_{k'}}{\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}}(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\\
&\times(e^{-i(\omega_k-\omega_{k\prime})t}e^{i(kx-k\prime x')}+e^{i(\omega_k-\omega_{k\prime})t}e^{-i(kx-k\prime x')})\\
&= \frac{i}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}(e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}+e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')})\\
&= \frac{i}{2}2\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}\\
&= i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}')
\end{aligned}$$

推导中用到了δ函数是偶函数的性质和等时对易关系中$t=t'$的条件。

这样我们就得到了a，$a^\dagger$的对易关系：

$$\begin{cases}
[a(k),a(k')]=0,\\
\left[a^\dagger(k),a^\dagger(k')\right]=0,\\
\left[a(k),a^\dagger(k')\right]=(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')
\end{cases}$$

至此我们已由坐标表象的场算符的对易关系出发得到了粒子数表象下的场算符的关系。在坐标表象中可以用广义坐标$\phi(x)$及广义动量$\pi(x)$这两个场算符来表示Lagrange量，Hamilton量及动量算符。很自然的由（17.8）（17.9）两式出发也可以用$a,a^\dagger$来表示这些算符。首先看Hamilton量。由（17.2）式知表征自旋为零的标量的Lagrange密度为：

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-m^2\phi^2)$$

可以由Legendre变换[2]直接得到Hamilton密度的形式：

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \pi\dot{\phi}-\mathcal{L}\\
&= \pi^2-\frac{1}{2}\left[\dot{\phi}^2-(\nabla\phi)^2-m^2\phi^2\right]\\
&= \pi^2-\frac{1}{2}\pi^2+\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2+\frac{1}{2}m^2\phi^2\\
&= \frac{1}{2}\left[\pi^2+(\nabla\phi)^2+m^2\phi^2\right]
\end{aligned}$$

[2]Legendre变换见6.3.2的内容

这样相应的Hamilton量为：

$$
\begin{aligned}
H &= \int d^3x \mathcal{H} \\
&= \int d^3x \frac{1}{2}[\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2] \\
&= \frac{1}{2}\int d^3x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{k'}}} \\
&\{(i\omega_k)(i\omega_{k'})[-a(k)e^{-ikx} + a^\dagger(k)e^{ikx}][-a(k')e^{-ik'x} + a^\dagger(k')e^{ik'x}] \\
&+ (-\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')[-a(k)e^{-ikx} + a^\dagger(k)e^{ikx}][-a(k')e^{-ik'x} + a^\dagger(k')e^{ik'x}] \\
&+ m^2[a(k)e^{-ikx} + a^\dagger(k)e^{ikx}][a(k')e^{-ik'x} + a^\dagger(k')e^{ik'x}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int d^3x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \\
&\{\frac{-\omega_k\omega_{k'} - \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}^{'}}{\sqrt{2\omega_k}\sqrt{2\omega_{k'}}}[-a(k)e^{-ikx} + a^\dagger(k)e^{ikx}][-a(k')e^{-ik'x} + a^\dagger(k')e^{ik'x}] \\
&+ m^2[a(k)e^{-ikx} + a^\dagger(k)e^{ikx}][a(k')e^{-ik'x} + a^\dagger(k')e^{ik'x}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \\
&\{\frac{-\omega_k\omega_{k'} - \mathbf{k}\cdot k'}{\sqrt{2\omega_k}\sqrt{2\omega_{k'}}} \int d^3x[a(k)a(k')e^{-i(\omega_k+\omega_{k'})t}e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}^{'})\cdot\mathbf{x}} + a^\dagger(k)a^\dagger(k')e^{i(\omega_k+\omega_{k'})t}e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \\
&- a(k)a^\dagger(k')e^{-i(\omega_k-\omega_{k'})t}e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} - a^\dagger(k)a(k')e^{i(\omega_k-\omega_{k'})t}e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}] \\
&+ m^2\int d^3x[a(k)a(k')e^{-i(\omega_k+\omega_{k'})t}e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} + a^\dagger(k)a^\dagger(k')e^{i(\omega_k+\omega_{k'})t}e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \\
&+ a(k)a^\dagger(k')e^{-i(\omega_k-\omega_{k'})t}e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} + a^\dagger(k)a(k')e^{i(\omega_k-\omega_{k'})t}e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}]\}
\end{aligned}
$$

其中

$$
\int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k})
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\{\frac{-\omega_k\omega_{k'} - \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}'}{\sqrt{2\omega_k}\sqrt{2\omega_{k'}}}\{[a(k)a(k')e^{-i(\omega_k+\omega_{k'})t} + a^\dagger(k)a^\dagger(k')e^{i(\omega_k+\omega_{k'})t}]\delta^3(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \\
&- [a(k)a^\dagger(k')e^{-i(\omega_k-\omega_{k'})t} + a^\dagger(k)a(k')e^{i(\omega_k-\omega_{k'})t}]\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\} \\
&+ \frac{m^2}{\sqrt{2\omega_k}\sqrt{2\omega_{k'}}}\{[a(k)a(k')e^{-i(\omega_k+\omega_{k'})t} + a^\dagger(k)a^\dagger(k')e^{i(\omega_k+\omega_{k'})t}]\delta^3(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \\
&+ [a(k)a^\dagger(k')e^{-i(\omega_k-\omega_{k'})t} + a^\dagger(k)a(k')e^{i(\omega_k-\omega_{k'})t}]\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left\{\frac{-\omega_k^2+|\mathbf{k}|^2}{2\omega_k}[a(k)a(-k)e^{-i2\omega_k t}+a^\dagger(k)a^\dagger(-k)e^{i2\omega_k t}]\right.\\
&\left.-\frac{-\omega_k^2-|\mathbf{k}|^2}{2\omega_k}[a(k)a^\dagger(k)+a^\dagger(k)a(k)]\right\}\\
&+\left\{\frac{m^2}{2\omega_k}[a(k)a(-k)e^{-i2\omega_k t}+a^\dagger(k)a^\dagger(-k)e^{i2\omega_k t}]\right.\\
&\left.+\frac{m^2}{2\omega_k}[a(k)a^\dagger(k)+a^\dagger(k)a(k)]\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\{\frac{-\omega_k^2+|\mathbf{k}|^2+m^2}{2\omega_k}[a(k)a(-k)e^{-i2\omega_k t}+a^\dagger(k)a^\dagger(-k)e^{i2\omega_k t}]\\
&+\frac{\omega_k^2+|\mathbf{k}|^2+m^2}{2\omega_k}[a(k)a^\dagger(k)+a^\dagger(k)a(k)]\}\\
&= \frac{1}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\omega_k(a(k)a^\dagger(k)+a^\dagger(k)a(k)) \qquad (17.10)\\
&= \frac{1}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\omega_k(2a^\dagger(k)a(k)+[a(k),a^\dagger(k)])\\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\omega_k(a^\dagger(k)a(k)+\frac{1}{2}[a(k),a^\dagger(k)]) \qquad (17.11)
\end{aligned}
$$

其中$\omega_k^2=|\mathbf{k}|^2+m^2$，$\frac{-\omega_k^2+|\mathbf{k}|^2+m^2}{2\omega_k}=0$，$\frac{\omega_k^2+|\mathbf{k}|^2+m^2}{2\omega_k}=\omega_k$。

这便是用$a,a^\dagger$表示的H的形式，需要注意的是式中第二项

$$
\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\omega_k\frac{1}{2}[a(k),a^\dagger(k)]=\frac{1}{2}\int d^3k\omega_k\delta(0)\to\infty
$$

$$
[a(k),a^\dagger(k)]=(2\pi)^3\delta(0)
$$

是发散的。在讨论谐振子的时候我们已知道这一项是零点能，是真空能。这是纯量子效应引起的真空涨落造成的。这个发散倒不带来太大困难，因为它只是个常数，可以简单地把它切掉。这相当于重新选择一个能量零点，之所以可以这样做是因为我们的实验只能测出能量的差值。绝对的能量大小是测不出来的。因在理论中只要对能量的差值进行描述就可以了。

扔掉这一项后Hamilton量为：

$$
H=\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\omega_k a^\dagger(k)a(k)
$$

$\mathbf{P} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\mathbf{k}a^\dagger(k)a(k)$。零点动量相消与扔掉这项前的

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\omega_k \frac{1}{2}(a(k)a^\dagger(k) + a^\dagger(k)a(k))$$
$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\omega_k (a^\dagger(k)a(k) + \frac{1}{2}[a(k), a^\dagger(k)])$$

对比可知，扔掉这项相当于人为地硬性要求（17.11）式中的$[a(k), a^\dagger(k)] = 0$或将(17.10)式中的产生算符$a^\dagger(k)$始终写在湮灭算符的左边。这个为了去掉零点能而人为要求的次序被称为正规乘积（normal order）。对任意两个算符$\phi_1\phi_2$我们用符号

$$N(\phi_1\phi_2) \equiv : \phi_1\phi_2 :\equiv \phi_1\phi_2 - \langle 0|\, \phi_1\phi_2 \,|0\rangle \tag{17.12}$$

来表示正规乘积。（这里用$\langle 0|\, \hat{O} \,|0\rangle$来表示某一算符在基态的期待值。现在还只是个形式化的表述，后面在介绍了态的概念后将赋予它明确的意义）。

对任意场算符$\phi(x)$可以写成正频和负频两部分。

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}(a(k)e^{-ik\cdot x} + a^\dagger(k)e^{ik\cdot x}) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}a(k)e^{-ik\cdot x} + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}a^\dagger(k)e^{ik\cdot x} \\ &\equiv \phi^+(x) + \phi^-(x)\end{aligned}$$

其中正频部分

$$\phi^+(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}a(k)e^{-ik\cdot x}$$

负频部分

$$\phi^-(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}a^\dagger(k)e^{ik\cdot x}$$

可见正频部分对应湮灭算符，负频部分对应产生算符。这样（17.12）式可表示为：

$$\begin{aligned}&: \phi_1\phi_2 := \phi_1\phi_2 - \langle 0|\, \phi_1\phi_2 \,|0\rangle \\ &= (\phi_1^+ + \phi_1^-)(\phi_2^+ + \phi_2^-) - \langle 0|\, \phi_1\phi_2 \,|0\rangle \\ &= \phi_1^+\phi_2^\dagger + \phi_1^-\phi_2^+ + \phi_1^+\phi_2^- + \phi_1^-\phi_2^- - \langle 0|\, \phi_1\phi_2 \,|0\rangle \\ &= \phi_1^+\phi_2^\dagger + \phi_1^-\phi_2^+ + \phi_2^-\phi_1^+ + [\phi_1^+, \phi_2^-] + \phi_1^-\phi_2^- - \langle 0|\, \phi_1\phi_2 \,|0\rangle \\ &= \phi_1^+\phi_2^\dagger + \phi_1^-\phi_2^+ + \phi_2^-\phi_1^+ + \phi_1^-\phi_2^- + [\phi_1^+, \phi_2^-] - \langle 0|\, \phi_1\phi_2 \,|0\rangle\end{aligned}$$

其中$[\phi_1^+,\phi_2^-]$是个数。如前面讨论它恰好给出零点能，即真空期待值。另一项

$$\langle 0|\,\phi_1\phi_2\,|0\rangle = \langle 0|\,\phi_1^+\phi_2^-\,|0\rangle = \langle 0|\,\phi_2^-\phi_1^\dagger + [\phi_1^+,\phi_2^-]\,|0\rangle = \langle 0|\,[\phi_1^+,\phi_2^-]\,|0\rangle = [\phi_1^+,\phi_2^-]$$

是个数，这是因为$\langle 0|\,\phi^- = 0$，$\phi^\dagger\,|0\rangle = 0$。它们都给出真空期待值，因此相等。

$$:\phi_1\phi_2: = \phi_1^+\phi_2^+ + \phi_1^-\phi_2^+ + \phi_2^-\phi_1^+ + \phi_1^-\phi_2^-$$

显见(17.12)式给出的正规乘积的定义是由减除零点能的目的出发的，给出的结论就是产生算符ϕ^-始终在左边，湮灭算符ϕ^+始终在右边。

正规乘积的好处可以很明显的看出。由于$\langle 0|\,\phi^- = 0$，$\phi^+\,|0\rangle = 0$，所以所有正规乘积真空期待值都为零，即

$$\langle 0|:\phi_1\phi_2\cdots\phi_n:|0\rangle = 0$$

这在后面的内容中有着非常重要的应用。

不难看出玻色场算符的正规乘积就是将算符取成对易。

今后如不做特别声明，所有乘积都是正规乘积。

前面讨论了场量子化，也就是将场量看成是算符（即所谓二项量子化）。既是算符那么就必须讨论这些算符究竟是作用在什么空间上，也就是作用在什么态上的问题[3]。

我们首先来定义一个真空态，也就是基态，仿照量子力学中的做法，定义基态为$a(k)\,|0\rangle = 0$。即$a(k)$是个湮灭算符。这样任意一个态$|k\rangle$便是：

$$a^\dagger(k)\,|0\rangle = |k\rangle \tag{17.13}$$

在量子力学中，态空间是Hilbert空间，一个n粒子的系统对应一个n粒子的Hilbert态空间，但这里的算符a，$a^\dagger$显然不是这种空间中的算符。因为a，$a^\dagger$可以将一个n粒子空间中的态矢变成$n-1$或$n+1$个粒子空间中的态矢。那么什么样的空间才对应a，$a^\dagger$这样的算符呢？一个很直接的方案便是取所有可能粒子数的Hilbert空间的直和。这样构成的大空间被称为Fock空间。显然a，$a^\dagger$的作用出不了这个空间的范围。如果我们用$\mathcal{H}_n$来表示m个粒子的Hilbert空间，那么Fock空间R_F为

$$R_F = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n \oplus \cdots$$

显然a，$a^\dagger$是这个空间中的算符。它们在这个空间中的作用是封闭的。

[3] 见相应的章节4.1的内容。

Fock空间是无穷个固定粒子数的Hilbert空间，以直和加在一起构成的，也称为巨Hilbert空间（Grand Hilbert Space）。

Fock空间中各态的构造与量子力学中谐振子的情况相似，任意一个态可由$|k_1, k_2 \cdots k_N\rangle = a^\dagger(k_1)a^\dagger(k_2)\cdots a^\dagger(k_N)\,|0\rangle$的方式构造，其中$k_i$表示动量为$k_i$的单粒子。

一个包含n个动量为k的全同粒子的态可由：

$$|n(k)\rangle = \frac{1}{\sqrt{n(k_i)!}} a^\dagger(k)^{n(k)}\,|0\rangle$$

的方式生成。

在粒子数表象中，由Hamilton量的形式，我们可直接定义粒子数算符为

$$N = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} a^\dagger(k)a(k)$$

很明显有：

$$N\,|n(k)\rangle = n(k)\,|n(k)\rangle$$

Fock空间显然还可以表示成

$$|n(k_1), n(k_2)\cdots n(k_l)\rangle = \prod_{i=1}^{l} \frac{1}{\sqrt{n(k_i)!}} a^\dagger(k_i)^{n(k_i)}\,|0\rangle$$

$n(k_i)$是具有动量k_i的粒子的个数。这样

$$N\,|n(k_1), n(k_2)\cdots n(k_l)\rangle = \sum_{i=1}^{l} n(k_i)\,|n(k_1), n(k_2)\cdots n(k_l)\rangle$$

17.2 复标量场（带电的标量场）

前面讨论的是实标量场，即$\phi^\dagger = \phi$。实标量场描述的是中性的标量粒子。

复标量场实质上有两个独立的部分，就是它的实部和虚部，所以，任何一个复函数都可以用两个独立的实函数来构造，写成$c = a + ib$的形式。同理，复标量场也可以用两个实标量场来构造：

$$\phi \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \tag{17.14}$$

则

$$\phi^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2)$$

其中ϕ_1, ϕ_2是两个独立的实标量场，系数$\frac{1}{\sqrt{2}}$是个归一化常数。

这样的复标量场的Lagrange密度为：

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi \tag{17.15}$$

这样写的原因是由于这可以使我们得到两个关于ϕ_1, ϕ_2的独立的Klein-Gordon方程。（注：在这里我们用$\phi^\dagger$而不用ϕ^*是为了与以后的内容形式上的统一，其实对标量场用ϕ^*就可以了）。

为了与Dirac场的Lagrange量在形式上相似一些，还可以将复标量场的Lagrange量写成：

$$\mathcal{L} = \phi^\dagger(-\partial_\mu \partial^\mu - m^2)\phi$$

可以证明此式与（17.15）式等价:

$$\phi^\dagger \partial_\mu \partial^\mu \phi = -\partial \mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi$$

于是

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\phi^\dagger \partial_\mu \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi \\ &= -\partial_\mu \left(\phi^\dagger \partial^\mu \phi\right) + \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi\end{aligned}$$

其中$-\partial_\mu \left(\phi^\dagger \partial^\mu \phi\right)$只差此一项四维散度，$\partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi$与（17.15）式相同。

因此这是复标量场Lagrange量的另一种等价形式。

为将复标量场量子化，先求其共轭动量。（也可以从另一个途径出发进行量子化，即利用已知的ϕ_1，ϕ_2的量子化结果$[a_i, a_i^\dagger] = 1$，求$[a, b]$）

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}^\dagger$$

由Schwinger原理得到的玻色场量子化的等时对易关系为

$$\left[\phi\left(\mathbf{x}, t\right), \pi\left(\mathbf{x}', t\right)\right] = i\delta^3\left(\mathbf{x}' - \mathbf{x}\right)$$

在前面，我们已经将实标量场ϕ_1，ϕ_2用平面展开（也就是进行了Fourier变换，变换到了粒子数表象（也是动量表象，能量表象））。展开后的形式为：

$$\phi_i(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left[a_i\left(k\right) e^{-ik\cdot x} + a_i^\dagger\left(k\right) e^{ik\cdot x}\right]$$

下标i取1和2。并且已经得到了a，$a^\dagger$间的对易关系：

$$\left[a_i\left(k\right), a_j^\dagger\left(k'\right)\right] = (2\pi)^3 \delta^3\left(k' - k\right) \delta_{ij}$$

这里加上的δ_{ij}体现了ϕ_1，ϕ_2是彼此独立的。

像我们用ϕ，$\phi^\dagger$来代替ϕ_1，ϕ_2一样，这里也引入a，b，$a^\dagger$，$b^\dagger$来代替a_1，a_2，$a_1^\dagger$，$a_2^\dagger$。

定义：

$$
\begin{aligned}
a\left(k\right) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left[a_1\left(k\right)+ia_2\left(k\right)\right] \\
b\left(k\right) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left[a_1\left(k\right)-ia_2\left(k\right)\right]
\end{aligned}
$$

这样有

$$
\begin{aligned}
a^\dagger\left(k\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[a_1^\dagger\left(k\right)-ia_2^\dagger\left(k\right)\right] \\
b^\dagger\left(k\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[a_1^\dagger\left(k\right)+ia_2^\dagger\left(k\right)\right]
\end{aligned}
$$

算子a，b，$a^\dagger$，$b^\dagger$间的对易关系很容易通过$[a_i,a_j^\dagger]$的对易关系得到：

$$
\begin{aligned}
\left[a\left(k\right),a^\dagger\left(k'\right)\right] &= [\frac{1}{\sqrt{2}}\left[a_1\left(k\right)+ia_2\left(k\right)\right],\frac{1}{\sqrt{2}}\left[a^\dagger\left(k'\right)-ia_2^\dagger\left(k'\right)\right]] \\
&= \frac{1}{2}\left(\left[a_1\left(k\right),a_1^\dagger\left(k\right)\right]+\left[a_2\left(k\right),a_2^\dagger\left(k\right)\right]\right) \\
&= \frac{1}{2}(2\pi)^3\left(\delta^3\left(k'-k\right)+\delta^3\left(k'-k\right)\right) \\
&= (2\pi)^3\delta^3\left(k'-k\right)
\end{aligned}
$$

即

$$
\left[a\left(k\right),a^\dagger\left(k'\right)\right]=(2\pi)^3\delta^3\left(k'-k\right)
$$

同理

$$
\left[b\left(k\right),b^\dagger\left(k'\right)\right]=(2\pi)^3\delta^3\left(k'-k\right)
$$

17.2.1 复标量场的能量，动量与荷

与实标量场类似，由Legendre变换知：（也可由Noether定理通过时间平移不变性得到）

$$
\begin{aligned}
H &=: \int d^3x\mathcal{H}: \\
&=: \int d^3x(\pi\dot{\phi}+\pi^\dagger\phi^\dagger-\mathcal{L}): \\
&=: \int d^3x(\pi^\dagger\pi+\nabla\phi^\dagger\cdot\nabla\phi+m^2\phi^\dagger\phi):
\end{aligned}
$$

其中利用了$\pi=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}=\dot{\phi}^*$，$\pi^*=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}^*}=\dot{\phi}$。将$\phi$的平面波展开式代入

$$H=:\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\omega_k\left[a^\dagger(k)\,a(k)+b^\dagger(k)\,b(k)\right]:$$

定义两个数算符

$$N_a\equiv\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}a^\dagger(k)\,a(k)$$
$$N_b\equiv\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}b^\dagger(k)\,b(k)$$

于是

$$H=\omega_k\left(N_a+N_b\right)$$

由Neother定理可知动量为：（空间平移对称性）

$$\mathbf{P}=\int d^3x(\pi\nabla\phi+\pi^\dagger\nabla\phi^\dagger)$$

将场算符的平面波展开代入

$$\begin{aligned}\mathbf{P}&=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\mathbf{k}\left(a^\dagger(k)\,a(k)+b^\dagger(k)\,b(k)\right)\\&=\mathbf{k}\left(N_a+N_b\right)\end{aligned}$$

复标量场有一个新的对称性，即Lagrange量在场量改变某一常相位后不变，即

$$\phi\to e^{i\theta}\phi,\quad\phi^\dagger\to e^{-i\theta}\phi^\dagger$$

这里的θ是一个常数。这是一种全局的对称性，是$U(1)$对称性。

由Noether定理可知$U(1)$群给出的守恒流为

$$j_\mu=i(\phi^\dagger\partial_\mu\phi-\phi\partial_\mu\phi^\dagger)$$

满足

$$\partial^\mu j_\mu=0$$

于是守恒荷为

$$\begin{aligned}Q&=\int d^3xj^0\\&=\int d^3xi(\phi^\dagger\partial_0\phi-\phi\partial_0\phi^\dagger)\\&=\int d^3xi(\phi^\dagger\dot{\phi}-\phi\dot{\phi}^\dagger)\end{aligned}$$

将场算符的平面波展开代入，

$$\begin{aligned} Q &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[a^\dagger(k)\, a(k) - b^\dagger(k)\, b(k) \right] \\ &= N_a - N_b \end{aligned}$$

1934年Pauli和Weisskopf将N_a，N_b分别解释成正、反粒子。它们带有相反电荷，Q是系统的净余电荷。

反物质最初由Dirac从解释Dirac方程的负能解引入，而Pauli和Weisskopf的工作则将反物质的概念推广到Bose的情况。

17.2.2 带电粒子与中性粒子

带电粒子都有一个电荷与之相反的反粒子伴。

中性粒子的反粒子就是它们本身，这是由于中性粒子的场算符有$\phi^\dagger = \phi$的性质。这个性质使场的自由度减少了一半，恰好去掉了反粒子那部分。

不过需要强调的是这里的中性粒子是指那些反粒子是其本身的粒子，而并不仅仅是指电中性粒子。比如中微子是有反粒子的，但它却是电中性的。这里的中性粒子是指满足$\phi^\dagger = \phi$的真正的中性粒子。

对于满足$\phi^\dagger = \phi$的真正的中性粒子还有更进一步的性质。

由Neother定理得到的荷守恒流为：

$$j_\mu = i(\phi^\dagger \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^\dagger)$$

满足$\partial_\mu j^\mu = 0$。由于$\phi^\dagger = \phi$，所以有

$$j_\mu = 0$$

这使得$\partial_\mu j^\mu = 0$自然满足，因此这种粒子不守恒，可以随意地消失或产生。光子就是这类粒子的典型。

17.3 标量传播子

前面我们讨论了自由Klein-Gordon方程的问题，而我们的最终目的则是要讨论相互作用的问题。

包含外场作用的Klein-Gordon方程，即有源的Klein-Gordon方程的形式为

$$\left(\partial^2 + m^2\right) \phi(x) = j(x)$$

我们知道处理这种有源方程的标准方法是Green函数方法，Green函数就是点源响应可定义为

$$\left(\partial^2+m^2\right)\triangle_F(x-y)=-\delta^4(x-y) \tag{17.16}$$

这样，在求出Green函数以后，相应的有源情况下的场量$\phi(x)$可由Green函数表示出来：

$$\phi(x)=\phi_0(x)-\int d^4y\triangle_F(x-y)\,j(y)$$

其中$\phi_0(x)$为自由粒子解。

那么如何求Green函数呢？一个方法就是作积分变换。$\triangle_F(x-y)$的Fourier变换可写为

$$\triangle_F(x-y)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik\cdot(x-y)}\triangle_F(k) \tag{17.17}$$

将它代回方程（17.16）可得

$$\left(\partial_x^2+m^2\right)\triangle_F(x-y)=-\delta^4(x-y)$$

$$\left(\partial_x^2+m^2\right)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik\cdot(x-y)}\triangle_F(k)=-\delta^4(x-y)$$

$$\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[(-ik)^2+m^2\right]e^{-ik\cdot(x-y)}\triangle_F(k)=-\delta^4(x-y)$$

$$\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik\cdot(x-y)}\left[-\left(k^2-m^2\right)\right]\triangle_F(k)=-\delta^4(x-y)$$

因为

$$\delta^4(x-y)=\delta^4(y-x)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{ik\cdot(y-x)}$$

$$\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik\cdot(x-y)}\left[-\left(k^2-m^2\right)\right]\triangle_F(k)=-\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik\cdot(x-y)}$$

对比可得

$$\left(k^2-m^2\right)\triangle_F(k)=1$$

有

$$\triangle_F(k)=\frac{1}{k^2-m^2} \tag{17.18}$$

这是Green函数在动量空间的表示。但是这个结果并不正确，因为这个解是通过Fourier变换（17.17）得到的。而这个解却不能使（17.17）式定义的Fourier变换成立，这是因为在$k^2=m^2$出现奇点。由于这个奇点的存在Fourier变换便不能定义。

下面我们来具体分析一下这个奇点。（17.18）式的分母形如：

$$\begin{aligned} k^2-m^2 &= \left(k^0\right)^2-|\mathbf{k}|^2-m^2 \\ &= \left(k^0+\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2}\right)\left(k^0-\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2}\right) \end{aligned}$$

即：

$$\triangle_F(k)=\frac{1}{\left(k^0+\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2}\right)\left(k^0-\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2}\right)}$$

这意味着存在两个一阶极点，位置分别在

$$k^0=\pm\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2}$$

处，即在d^4k积分中的对dk^0积分时将遇到问题。处理这类问题可以用复变函数中的方法。将对k^0的积分拓展到复平面，可以选取合适的路径，一种比较常用的方法是这样的，将$\triangle_F(k)$取成

$$\triangle_F(k)=\frac{1}{k^2-m^2+i\epsilon}$$

的形式，这样有

$$\triangle_F(k)=\frac{1}{\left(k^0+\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2}-i\epsilon\right)\left(k^0-\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2}+i\epsilon\right)}$$

奇点位置及积分路径如图（17.1）。

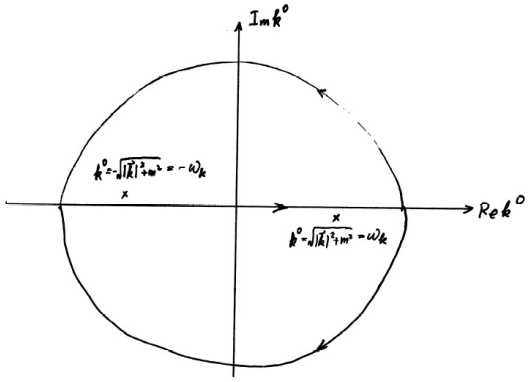


图 17.1: Green函数的奇点位置及积分路径

经过一些代数运算可将$\triangle_F(k)$分解成两项和的形式：

$$\triangle_F(k)=\frac{1}{2k^0}\left(\frac{1}{k^0-\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2}+i\epsilon}+\frac{1}{k^0+\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2}-i\epsilon}\right)$$

代回（17.17）式便有：（这里令$\omega_k=\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2}$）

$$\begin{aligned}\triangle_F(x-y)&=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik\cdot(x-y)}\triangle_F(k)\\&=\int\frac{dk^0}{2\pi}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{-ik^0\cdot\left(x^0-y^0\right)}e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\frac{1}{2k^0}\left(\frac{1}{k^0-\omega_k+i\epsilon}+\frac{1}{k^0+\omega_k-i\epsilon}\right)\\&=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\left(\underbrace{\int\frac{dk^0}{2\pi}\frac{1}{2k^0}\frac{e^{-ik^0\cdot\left(x^0-y^0\right)}}{k^0-\omega_k+i\epsilon}}_{I}+\underbrace{\int\frac{dk^0}{2\pi}\frac{1}{2k^0}\frac{e^{-ik^0\cdot\left(x^0-y^0\right)}}{k^0+\omega_k-i\epsilon}}_{II}\right)\end{aligned}$$

下面分别计算I，II两个积分。

为了计算这两个积分，我们先来看一个普遍情况，这两个积分都可以写成形如：（始终认为$\epsilon\to0$）

$$\lim_{\epsilon\to0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk^0}{2\pi}\left(k^0\right)^n\frac{e^{-ik^0\tau}}{k^0-\omega_k+i\epsilon}$$

此时有奇点$k^0=\omega_k-i\epsilon$在下半平面。$\tau>0$时，积分路径取下半平面(如图17.2), 以保证指数收敛(取下半平面$Imk^0<0$，使指数上的实部为$-i\cdot\left(-iImk^0\right)\tau=-Imk^0\tau<0$，从而保证收敛) 此时，闭合的积分路径中有一个奇点积分结果为$2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\omega_k\right)$（留

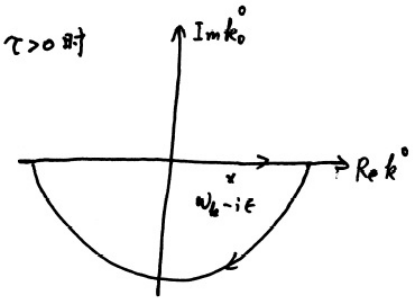


图 17.2: $\tau>0$的积分路径

数定理）。

$\tau<0$时，为使指数函数收敛，积分路径应在上半平面闭合(如图17.3)。此时闭合的路径中没有奇点，积分为零。 这样有

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk^0}{2\pi}\left(k^0\right)^n\frac{e^{-ik^0\cdot\tau}}{k^0-\omega_k+i\epsilon}&=\begin{cases}-2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\omega_k\right)=-2\pi i\frac{1}{2\pi}\omega_k^ne^{-i\omega_k\tau}=-i\omega_k^ne^{-i\omega_k\tau},\ (\tau>0)\\0,\ (\tau<0)\end{cases}\\&=-\theta(\tau)i\omega_k^ne^{-i\omega_k\tau}\end{aligned}$$

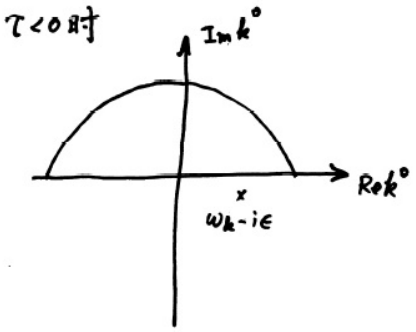


图 17.3: $\tau < 0$的积分路径

对$\tau > 0$，由于路径积分是顺时针方向的，所以有一个负号（规定逆时针方向为正）。

这样有普遍公式

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk^0}{2\pi}\left(k^0\right)^n\frac{e^{-ik^0\tau}}{k^0-\omega_k+i\epsilon}=-i\theta(\tau)\omega_k^n e^{-i\omega_k\tau} \tag{17.19}$$

应用这个公式可得：

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk^0}{2\pi}\left(k^0\right)^n\frac{e^{-ik^0\tau}}{k^0+\omega_k-i\epsilon}\overset{k_0\to -k_0}{=}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{+\infty}^{-\infty}\frac{d\left(-k^0\right)}{2\pi}\left(-k^0\right)^n\frac{e^{-i\left(-k^0\right)\tau}}{-k^0+\omega_k-i\epsilon}\\
&=-\left(-1\right)^n\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk^0}{2\pi}\left(k^0\right)^n\frac{e^{-ik^0(-\tau)}}{k^0-\omega_k+i\epsilon}\\
&=\left(-1\right)^n i\theta(-\tau)\omega_k^n e_{=}^{-i\omega_k(-\tau)}
\end{aligned}$$

这样有

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk^0}{2\pi}\left(k^0\right)^n\frac{e^{-ik^0\tau}}{k^0+\omega_k-i\epsilon}=\left(-1\right)^n i\theta(-\tau)\omega_k^n e^{-i\omega_k(-\tau)} \tag{17.20}$$

由这两个稍普遍些的关系可以直接得到I，II两个积分的结果：

$$\begin{aligned}
I&=\int\frac{dk^0}{2\pi}\frac{1}{2k^0}\frac{e^{-ik^0\left(x^0-y^0\right)}}{k^0-\omega_k+i\epsilon}=-i\theta(x^0-y^0)\frac{1}{2\omega_k}e^{-i\omega_k\left(x^0-y^0\right)}\\
II&=\int\frac{dk^0}{2\pi}\frac{1}{2k^0}\frac{e^{-ik^0\left(x^0-y^0\right)}}{k^0+\omega_k-i\epsilon}=-i\theta(y^0-x^0)\frac{1}{2\omega_k}e^{i\omega_k\left(x^0-y^0\right)}
\end{aligned}$$

这样便得到了

$$\begin{aligned}\triangle_F(x-y) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \left\{ -i\theta(x^0-y^0)\frac{1}{2\omega_k} e^{-i\omega_k(x^0-y^0)} - i\theta(y^0-x^0)\frac{1}{2\omega_k} e^{i\omega_k(x^0-y^0)} \right\} \\ &= -i\theta(x^0-y^0)\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\,2\omega_k} e^{-i\left[\omega_k(x^0-y^0)-\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right]} \quad \text{第一项} \\ &\quad - i\theta(y^0-x^0)\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\,2\omega_k} e^{i\left[\omega_k(x^0-y^0)+\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right]} \quad \text{第二项}\end{aligned}$$

这里的第一项指数上的部分很容易写成四矢标记的形式$k\cdot(x-y)$，但第二项的指数却不是一个明显标积的形式。下面我们来试着将它写成明显标积的形式：

第二项中有这样的因子

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} d^3k e^{i(\omega_k\tau+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} &= \int_{-\infty}^{+\infty} d^3k e^{i\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2}\tau} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} && (17.21)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d^3k e^{i\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2}\tau} \left[\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) + i\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\right] && (17.22)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d^3k e^{i\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2}\tau} \cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) && (17.23)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d^3k e^{i\sqrt{|-\mathbf{k}|^2+m^2}\tau} \cos(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) && (17.24)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d^3k e^{i[\omega_{-k}\tau+(-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}]}, \quad \text{其中}\omega_k=\omega_{-k} && (17.25)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d^3k e^{i(\omega_k\tau-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} && (17.26)\end{aligned}$$

因此我们可以将第二项中的$\mathbf{k}$换成$-\mathbf{k}$而不影响结果。这样有

$$\begin{aligned}\triangle_F(x-y) &= -i\theta(x^0-y^0)\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\,2\omega_k} e^{-i\left[\omega_k(x^0-y^0)-\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right]} \\ &\quad - i\theta(y^0-x^0)\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\,2\omega_k} e^{i\left[\omega_k(x^0-y^0)+\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right]} \\ &= -i\theta(x^0-y^0)\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\,2\omega_k} e^{-ik\cdot(x-y)} \\ &\quad - i\theta(y^0-x^0)\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\,2\omega_k} e^{ik\cdot(x-y)}\end{aligned}$$

或者换一个写法：

$$i\triangle_F(x-y) = \theta(x^0-y^0)\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\,2\omega_k} e^{-ik\cdot(x-y)} + \theta(y^0-x^0)\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\,2\omega_k} e^{ik\cdot(x-y)} \tag{17.27}$$

由此可以直接看出，

$$x^0 > y^0\text{时}, \qquad i\triangle_F(x-y) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\,2\omega_k} e^{-ik(x-y)} \qquad \text{正能解} k^0 = \omega_k\text{，推迟}$$

$$x^0 < y^0\text{时}, \qquad i\triangle_F(x-y) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\,2\omega_k} e^{-ik(y-x)} \qquad \text{负能解} k^0 = -\omega_k\text{，超前}$$

由前面的计算我们知道，这两种情况分别对应着正能解和负能解。正能解和负能解是伴随着相对论必然出现的。在经典问题中我们可以扔掉负能部分，但在量子理论中，负能部分不能扔掉（原因前面已经讲过），也就是说在量子理论中，$x^0 > y^0$时的向前传播部分与$x^0 < y^0$时的向后传播部分都要保留。那么如何理解超前部分呢？这部分的物理图像显然是一个负能的粒子逆着时间的方向传播。不过我们并没有看到过负能量，也没见过逆时间方向传播。于是Feynman将这种情况解释成一个正能量的反粒子沿时间正向传播。这个解释并不违背因果律，这是因为在实验上我们不能区分前面的两种等价情况。

下面我们进一步讨论$\triangle_F(x-y)$的性质。

令

$$i\triangle(x-y) \equiv \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\,2\omega_k} e^{-ik(x-y)}$$

则有

$$i\triangle(y-x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\,2\omega_k} e^{-ik(y-x)}$$

这样（17.27）式可写成紧凑一些的形式：

$$i\triangle_F(x-y) = \theta(x^0-y^0)\; i\triangle(x-y) + \theta(y^0-x^0) i\triangle(y-x) \tag{17.28}$$

前面的讨论是从求Klein-Gordon方程的Green函数的角度出发得到的Feynman传播子，我们现在要处理的是量子场问题，自然就希望给出场算子$\hat{\phi}$和$\hat{\phi}^\dagger$与传播子的关系，下面就来做这个努力。

传播子是一个普通的数函数，而量子化的场量则是算符。显然要想用场量表示传播子就必须通过某种运算将算符的运算结果变成数。

将算符变成数的运算有两种是比较直接的：

1 算符的平均值（期待值）是一个数；

2 两个算符的对易子是一个数。

这两个途径我们都将尝试一下。在这一节中先考虑第一个途径，即求平均值。

求平均值是针对某个态而言的，我们对真空态求场算符的平均值。在（17.27）（17.28）式给出的结果中涉及到两个时空点x和y，一个自然的作法便是计算真空期待值$\langle 0|\,\phi(x)\,\phi(y)\,|0\rangle$。由于各激发态可由场算符作用在真空态上得到，所以在任何态上就计算矩阵元（平均值是对角的矩阵元），都可归结为求真空期待值。

由前面可知，场$\phi(x)$可展成如下形式：

$$\phi(x)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left[a(k)\,e^{-ikx}+a^{\dagger}(k)\,e^{ikx}\right]$$

由此出发可直接计算：

$$\begin{aligned}\langle 0|\,\phi(x)\,\phi(y)\,|0\rangle=\langle 0|\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left[a(k)\,e^{-ik\cdot x}+a^{\dagger}(k)\,e^{ik\cdot x}\right]\\ \times\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{k'}}}\left[a(k')\,e^{-ik'\cdot y}+a^{\dagger}(k')\,e^{ik'\cdot y}\right]|0\rangle\end{aligned}$$

我们知道

$$\begin{aligned}\langle 0|\,a(k)a(k')\,|0\rangle&=0\\ \langle 0|\,a^{\dagger}(k)a^{\dagger}(k')\,|0\rangle&=0\\ \langle 0|\,a^{\dagger}(k)a(k')\,|0\rangle&=0\end{aligned}$$

$$\left\langle 0\left|a(k)a^{\dagger}(k')\right|0\right\rangle=\langle k\,|k'\rangle=(2\pi)^3\delta^3(k-k')$$

或者

$$\left\langle 0\left|a(k)a^{\dagger}(k')\right|0\right\rangle=\left\langle 0\left|(2\pi)^3\delta^3(k'-k)-a^{\dagger}(k')a(k)\right|0\right\rangle=(2\pi)^3\delta^3(k'-k)$$

这样有

$$\begin{aligned}\langle 0|\,\phi(x)\,\phi(y)\,|0\rangle&=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{k'}}}\left\langle 0\left|a(k)a^{\dagger}(k')\right|0\right\rangle e^{-ik\cdot x}e^{ik'\cdot y}\\ &=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_k}}\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{k'}}}(2\pi)^3\delta^3(k-k')\,e^{-i(k\cdot x-k'\cdot y)}\\ &=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}e^{-ik(x-y)}\\ &=i\triangle(x-y)\end{aligned}$$

同理

$$\langle 0|\,\phi(y)\,\phi(x)\,|0\rangle=i\triangle(y-x)$$

将这两个结果代到（17.28）式中有

$$\begin{aligned} i\triangle_F(x-y) &= \theta(x^0-y^0)i\triangle(x-y)+\theta(y^0-x^0)i\triangle(y-x) \\ &= \theta(x^0-y^0)\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle+\theta(y^0-x^0)\langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle \\ &\equiv \langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle \end{aligned}$$

这里引入了一个新算符T，称为编时算符，定义为：

$$T\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)=\begin{cases}\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y), & x^0>y^0\\ \hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x), & y^0>x^0\end{cases}$$

这样我们得到了一个Green函数的新形式：

$$i\triangle_F(x-y)=\langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle$$

17.3.1 有经典源的Klein-Gordon场

由前面知有源的Klein-Gordon方程为

$$\left(\partial^2+m^2\right)\phi(x)=j(x)$$

相应的Lagrange量为

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left[(\partial\phi)^2-m^2\phi^2\right]+j(x)\phi(x)$$

前面我们已经求得了Klein-Gordon方程的Green函数。由此Green函数就可解出有源情况下的$\phi(x)$。Green函数有推迟的解也有超前的解。我们这里处理普遍的推迟Green函数的情况。

推迟Green函数可写成：

$$i\triangle_{Retarded}=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}\theta(x^0-y^0)\left(e^{-ik\cdot(x-y)}-e^{ik\cdot(x-y)}\right) \tag{17.29}$$

其中的阶跃函数$\theta(x^0-y^0)$保证了这个函数是推迟的。在原来的Feynman传播子$i\triangle_F(x-y)$中既有推迟部分，也有超前部分。

这个推迟的Green函数满足方程：

$$\left(\partial^2+m^2\right)\triangle_{Retarded}(x-y)=-\delta^4(x-y)$$

由Green函数可得到场$\phi(x)$：

$$\phi(x)=\phi_0(x)-\int d^4y\triangle_{Retarded}(x-y)j(y)$$

将（17.29）式给出的$\triangle_{Retarded}$代入：

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \phi_0(x) + i\int d^4y i\triangle_{Retarded}(x-y)\, j(y) \\ &= \phi_0(x) + i\int d^4y \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}\theta(x^0-y^0)\left(e^{-ik\cdot(x-y)} - e^{ik\cdot(x-y)}\right) j(y)\end{aligned}$$

在继续计算之前先要讨论一下源$j(y)$的加入方式，整个过程是这样的。源$j(y)$没有加入时，场为$\phi_0(x)$，即自由场。在某个时刻，源$j(y)$加入了，这时场与外源耦合。在随后的某一时刻$j(y)$被撤掉，最典型的这类过程就是散射过程。在这计算中，我们会考虑源$j(y)$作用的全过程，这样在积分中$\theta(x^0-y^0)$将可一直取成1。于是有

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \phi_0(x) + i\int d^4y \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}\left(e^{-ik\cdot(x-y)} - e^{ik\cdot(x-y)}\right) j(y) \\ &= \phi_0(x) + i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}\int d^4y\left(e^{-ik\cdot x}e^{ik\cdot y} - e^{ik\cdot x}e^{-ik\cdot y}\right) j(y) \\ &= \phi_0(x) + i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}\left(e^{-ik\cdot x}\int d^4y e^{ik\cdot y} j(y) - e^{ik\cdot x}\int d^4y e^{-ik\cdot y} j(y)\right)\end{aligned}$$

由Fourier变换：

$$\begin{aligned}f(x) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik\cdot x}\tilde{f}(k) \\ \tilde{f}(k) &= \int d^4x e^{ik\cdot x} f(x)\end{aligned}$$

这样我们有源$j(y)$的Fourier变换：

$$\begin{aligned}\tilde{j}(k) &= \int d^4y e^{ik\cdot y} j(y) \\ \tilde{j}^*(k) &= \left(\int d^4y e^{ik\cdot y} j(y)\right)^* \\ &= \int d^4y e^{-ik\cdot y} j(y)\end{aligned}$$

这样便有

$$\phi(x) = \phi_0(x) + i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}\left(e^{-ik\cdot x}\tilde{j}(k) - e^{ik\cdot x}\tilde{j}^*(k)\right)$$

此外，我们还知道自由Klein-Gordon场可展开成

$$\phi_0(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left[a(k)e^{-ik\cdot x} + a^\dagger(k)e^{ik\cdot x}\right]$$

这样便有

$$\phi(x)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_k}}\left[a(k)e^{-ik\cdot x}+a^\dagger(k)e^{ik\cdot x}\right]+\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_k}}\left(\frac{i}{\sqrt{2\omega_k}}\tilde{j}(k)e^{-ik\cdot x}-\frac{i}{\sqrt{2\omega_k}}e^{ik\cdot x}\tilde{j}^*(k)\right)$$

$$\phi(x)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_k}}\left(a(k)+\frac{i}{\sqrt{2\omega_k}}\tilde{j}(k)\right)e^{-ik\cdot x}+\left(a^\dagger(k)-\frac{i}{\sqrt{2\omega_k}}\tilde{j}^*(k)\right)e^{ik\cdot x}$$

与自由场的结果对比可以明显地看出有源情况就是将自由场的产生、湮灭算符用新的形式代替：

$$\begin{cases}a(k)\to a(k)+\frac{i}{\sqrt{2\omega_k}}\tilde{j}(k)\\ a^\dagger(k)\to a^\dagger(k)-\frac{i}{\sqrt{2\omega_k}}\tilde{j}^*(k)\end{cases}\tag{17.30}$$

这样可以猜出相应的Hamilton量应为

$$H=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\omega_k\left(a^\dagger(k)-\frac{i}{\sqrt{2\omega_k}}\tilde{j}^*(k)\right)\left(a(k)+\frac{i}{\sqrt{2\omega_k}}\tilde{j}(k)\right)$$

其它量也可类似算出。据此我们很容易计算出能量的真空期待值：

$$\langle0|H|0\rangle=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}\left|\tilde{j}(k)\right|^2$$

相应的粒子数为

$$\int dN=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}\left|\tilde{j}(k)\right|^2$$

17.3.2 由自由标量场Lagrange量直接得到标量传播子

前面我们已经讨论过。传播子是Klein-Gordon方程的Green函数。Green函数的性质由自由粒子方程决定，那么显然如果我们知道了自由粒子方程亦或是知道了决定方程的自由粒子Lagrange量，自然相应的Green函数，也就是自由粒子传播子就已经决定了。那么是否可以一见到自由粒子Lagrange量就立刻知道其传播子的形式呢。这是可以的，方法是这样的：我们将标量自由粒子Lagrange量写成

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-m^2\phi\right)\equiv\frac{1}{2}\phi D(x)\phi$$

经过这种形式上的变换便有一个微分算符$D(x)$。这个微分算符经过Fourier变换后在动量空间中的逆算符便是动量空间中的传播子。

具体方法是这样的，先确定$D(x)$的形式。显然，如果令

$$D(x)=\overleftarrow{\partial_\mu}\overrightarrow{\partial^\mu}-m^2$$

则前面的等式成立。下面验证一下：

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\phi D\left(x\right)\phi=\frac{1}{2}\phi\left(\overleftarrow{\partial_{\mu}}\overrightarrow{\partial^{\mu}}-m^{2}\right)\phi=\frac{1}{2}\left(\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi-m^{2}\phi\right)$$

对$D\left(x\right)$做Fourier变换，也就是将它变换到动量空间相当于做替换

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\partial_{\mu}}&\rightarrow-ik^{\mu}\\\overleftarrow{\partial_{\mu}}&\rightarrow ik_{\mu}\end{aligned}$$

这样有

$$D\left(k\right)=k^{2}-m^{2}$$

下面是求这个算符的逆运算。考虑奇点情况后，（只有考虑了移开实轴上的奇点才能有逆运算）有

$$\triangle_{F}=D^{-1}\left(k\right)=\frac{1}{k^{2}-m^{2}+i\epsilon}$$

取$+i\epsilon$的理由与前面的分析相同。对复标量场情况也一样

$$\begin{aligned}\mathcal{L}&=\partial_{\mu}\phi^{\dagger}\partial^{\mu}\phi-m^{2}\phi^{\dagger}\phi\\&=\phi^{\dagger}\left(\overleftarrow{\partial_{\mu}}\overrightarrow{\partial^{\mu}}-m^{2}\right)\phi\\&\equiv\phi^{\dagger}D\left(x\right)\phi\end{aligned}$$

所以

$$D\left(x\right)=\overleftarrow{\partial_{\mu}}\overrightarrow{\partial^{\mu}}-m^{2}$$

做前面的代换

$$D\left(k\right)=k^{2}-m^{2}$$

于是有

$$\triangle_{F}=\frac{1}{k^{2}-m^{2}+i\epsilon}$$

与实标量场情况相同。

17.4 协变对易关系，微观因果律

前面我们用等时对易关系（这里讲同时在相对论理论中同时失去了绝对意义，怎样理解等时对易关系），给出了正则量子化条件，但是在相对论理论中同时失去

了绝对意义，怎样理解等式对易关系。那么基于等时对易关系的量子化方案会是相对论不变的吗？对易关系能告诉我们的是对易子中的两个量之间是否相关，或者说彼此之间有没有影响。如果两个量的对易子为零，就意味着它们彼此间是完全无关的。如果不为零，则意味着彼此间有影响。

我们现在考虑的是相对论性理论，这样就有了一个自然的限制就是任何速度都不能大于光速。任何速度当然包括相互作用传播的速度，一个正确的相对论性理论应当自然满足这些要求。

因果律对任何理论来讲都是一个自然的要求。它要求先有原因再有结果。在相对论性理论中这个要求意味着如果两个事件是相互关联的，那么它们之间的间隔必须是类时的，换句话说，类空间隔的两个事件间必须是完全无关的，这个要求与光速为最大速度的要求是一致的。

那么我们现在考虑的相对论量子场是不是满足这种因果律的要求呢？要确定这一点最直接的方法就是去计算两点场算符之间的对易关系，即计算

$$
\begin{aligned}
[\phi(x),\phi(y)] &= \left[\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left(a(k)e^{-ik\cdot x}+a^\dagger(k)e^{ik\cdot x}\right), \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\left(a(p)e^{-ip\cdot y}+a^\dagger(p)e^{ip\cdot y}\right)\right] \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\left[a(k)e^{-ik\cdot x}+a^\dagger(k)e^{ik\cdot x}, a(p)e^{-ip\cdot y}+a^\dagger(p)e^{ip\cdot y}\right] \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\left(\left[a^\dagger(k),a(p)\right]e^{i(k\cdot x-p\cdot y)}+\left[a(k),a^\dagger(p)\right]e^{-i(k\cdot x-p\cdot y)}\right) \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}\left(-e^{ik(x-y)}+e^{-ik(x-y)}\right) \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}\left(e^{-ik(x-y)}-e^{ik(x-y)}\right) \\
&= i\triangle^{(+)}(x-y)+i\triangle^{(-)}(x-y) \qquad (17.31)
\end{aligned}
$$

其中用到了

$$\left[a(k),a^\dagger(k')\right]=(2\pi)^3\delta^3\left(k'-k\right)$$

其中定义了

$$
\begin{aligned}
i\triangle^{(+)}(x-y) &\equiv \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}e^{-ik(x-y)} \\
i\triangle^{(-)}(x-y) &\equiv -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}e^{ik(x-y)}
\end{aligned}
$$

其中显然有

$$i\triangle^{(+)}(x-y)=-i\triangle^{(-)}(y-x)$$

我们定义：

$$i\triangle(x-y)\equiv[\phi(x),\phi(y)]=i\triangle^{(+)}(x-y)+i\triangle^{(-)}(x-y)$$

此函数被称为Pauli-Jordan函数。容易看出此函数还可写成：

$$\triangle(x-y)=-\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\sin k\cdot(x-y)}{\omega_k}$$

由Pauli-Jordon函数的定义$\triangle(x-y)\equiv[\phi(x),\phi(y)]$可知，由于$\phi(x),\phi(y)$是Lorentz不变的标量场，所以$\triangle(x)$也是Lorentz不变的。那么我们就应该能够将$\triangle(x)$的表达式写成明显的Lorentz不变形式。下面就做这件事：

$$\begin{aligned}i\triangle(x)&=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}\left(e^{-ik\cdot x}-e^{ik\cdot x}\right)\\&=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}\left(e^{-i(\omega_k x_0-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}-e^{i(\omega_k x_0-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right)\end{aligned}$$

由17.21可知：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}d^3ke^{i(\omega_k x_0+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}=\int_{-\infty}^{+\infty}d^3ke^{i(\omega_k x_0-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}$$

于是有

$$\begin{aligned}i\triangle(x)&=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}\left(e^{-i(\omega_k x_0-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}-e^{i(\omega_k x_0+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right)\\&=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}\int dk_0(\delta(k_0-\omega_k)-\delta(k_0+\omega_k))e^{-i(k_0x_0-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\\&=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}\int dk_0\epsilon(k_0)(\delta(k_0-\omega_k)+\delta(k_0+\omega_k))e^{-ik\cdot x}\\&=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^3}\epsilon(k_0)\frac{1}{2\omega_k}(\delta(k_0-\omega_k)-\delta(k_0+\omega_k))e^{-ik\cdot x}\\&\int\frac{d^4k}{(2\pi)^3}\theta(k_0)\delta\left(k^2-m^2\right)e^{-ik\cdot x}\end{aligned}$$

其中

$$\epsilon(k_0)=\begin{cases}+1, & k_0>0\\-1, & k_0<0\end{cases}$$

其中用到17.7

$$\delta\left(k^2-m^2\right)=\frac{1}{2\omega_k}\left[\delta(k_0-\omega_k)+\delta(k_0+\omega_k)\right]$$

这样Pauli-Jordon函数可写成Lorentz不变的形式：

$$i\triangle(x)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^3}\theta(k_0)\delta\left(k^2-m^2\right)e^{-ik\cdot x}$$

式中都是Lorentz标量，自然$i\triangle(x)$也是Lorentz标量了。

由上面的计算结果出发就可以讨论微观因果律的问题了。

因果律讨论的是发生在两个时空点上的事件的关系问题。量子场论中这个问题便是两个时空点上的场量的关系问题。我们知道量子理论中两个量是否有关是看它们的对易子是否为零。如果为零则无关，不为零则有关。前面已经计算得

$$[\phi(x),\phi(y)]\equiv i\triangle(x-y)$$

下面分析对易子的性质。由正则量子化知，等时对易关系

$$[\phi(\mathbf{x},x_0),\phi(\mathbf{y},y_0)]\equiv i\triangle(\mathbf{x}-\mathbf{y},0)=0$$

此时的间隔

$$(x-y)^2=0^2-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2=-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2<0$$

是类空的。

前面已经知道$\triangle(x-y)$是个Lorentz标量，它在Lorentz变换下是不变的。而我们可以通过Lorentz变换将$(0,\mathbf{x}-\mathbf{y})$变到$(x'-y')=(x'_0-y'_0,\mathbf{x}'-\mathbf{y}')$，而这个变换是保长度的，即在这个变换中$(x-y)^2$是不变的。这样经过Lorentz变换后仍有$\triangle(x-y)=0$和$(x-y)^2<0$，即

$$[\phi(x),\phi(y)]\equiv i\triangle(x-y)=0,\quad (x-y)^2<0$$

类空。

而在类时间隔的情况下这个值不为零。

这个结果表明，如果事件间隔是类空的，则它们之间没有影响，这相当于说信号不能超光速传播。而如果事件间隔是类时的，则有可能彼此有因果关系，也就是有影响。这个结果就是所谓的微观因果律。

叫微观因果律是指在量子力学情况下的因果律。宏观因果律，即在经典物理没有超光速的信号传播已经很好地观测过了。

这里的结果表明，正则量子化关系实质是对微观因果律的要求。等时对易关系是在一个特殊的参照中观察的结果，其实等时对易关系可以等价地表示为协变的形式$[\phi(x),\phi(y)]\equiv 0$当$(x-y)^2<0$ 时类空。

其实我们还可以从另一个途径得到这一结果。我们曾得到

$$[\phi(x),\phi(y)]=i\triangle(x-y)\equiv i\triangle^{(+)}(x-y)+i\triangle^{(-)}(x-y)$$

且

$$i\triangle^{(+)}(x-y)=-i\triangle^{(-)}(y-x)$$

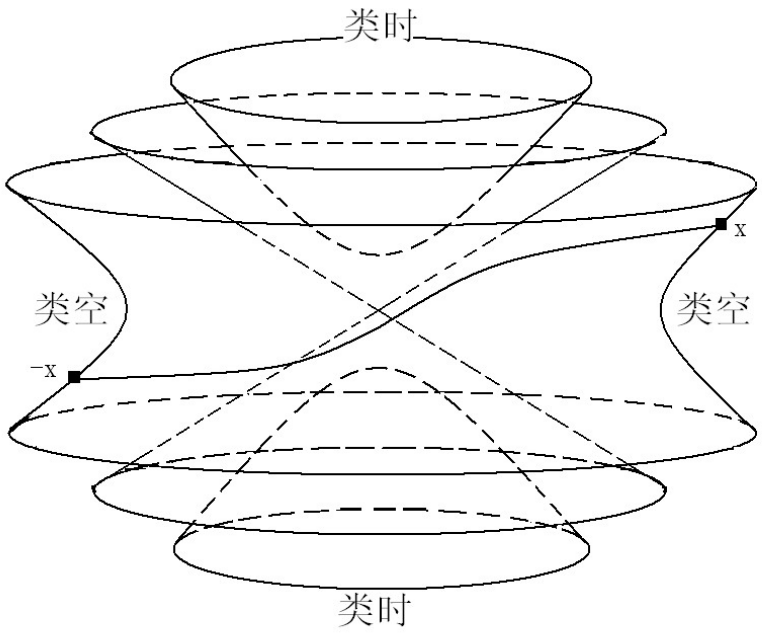


图 17.4: 微观因果律

于是有

$$[\phi(x),\phi(y)]=i\triangle^{(+)}(x-y)-i\triangle^{(+)}(y-x)$$

在类空间隔下$(x-y)^2<0$可以通过连续的Lorentz变换实现$(x-y)\overset{LorentzC}{\rightarrow}-(x-y)$的变换（如图17.4），而$[\phi(x),\phi(y)]$在Lorentz变换下是不变的。于是有（注意$\triangle^{(+)}$是Lorentz不变的，所以可以只变其中一个$\triangle^{(+)}$）

$$[\phi(x),\phi(y)]=i\triangle^{(+)}(x-y)-i\triangle^{(+)}(y-x)=0$$

而在类时间隔下$(x-y)^2>0$则不存在$x-y\rightarrow-(x-y)$的连续的Lorentz变换，因此$[\phi(x),\phi(y)]=i\triangle(x-y)\neq0$.

第十八章　旋量场的量子化

与标量场的量子化方式一样。按照正则量子化方案，我们将强行要求正则坐标和正则动量满足某种对易关系，也就是将它们看做算符。这样我们第一步就是要求出Dirac场的广义动量。

18.1　Dirac场的正则动量

Dirac场的Lagrange量为：

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi$$

下面有广义动量的定义直接求：

$$\begin{aligned}
\pi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \\
&= \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}}[\bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi] \\
&= \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}}[\bar{\psi}(i\gamma^0 \partial_0 \psi + i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla\psi - m\psi)] \\
&= i\bar{\psi}\gamma^0 \\
&= i\psi^\dagger
\end{aligned}$$

其中$\partial_0\psi = \dot{\psi}$。

有了广义动量便可以进行直接的量子化了。现在的问题是采用什么样的量子化方案呢？由Schwinger原理得到了两种可能的量子化方案。一个是对易的，另一个是反对易的。并且证明了反对易的量子化可以给出Pauli不相容原理的结果，也就是说反对易方式的量子化Fermi的情况。

这样，由Schwinger原理的结果，我们将量子化方案取作：（等时对易关系）

$$\{\psi_a(\mathbf{x},t),\pi_b(\mathbf{x}',t)\}=i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\delta_{ab}$$
$$\{\psi_a(\mathbf{x},t),\psi_b(\mathbf{x}',t)\}=0$$
$$\{\pi_a(\mathbf{x},t),\pi_b(\mathbf{x}',t)\}=0$$

将广义动量的关系$\pi=i\psi^+$代入得：

$$\begin{aligned}\{\psi_a(\mathbf{x},t),\psi_b^+(\mathbf{x}',t)\}&=\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\delta_{ab}\\ \{\psi_a(\mathbf{x},t),\psi_b(\mathbf{x}',t)\}&=0\\ \{\psi_a^\dagger(\mathbf{x},t),\psi_b^\dagger(\mathbf{x}',t)\}&=0\end{aligned}\tag{18.1}$$

下面的步骤与Klein-Gordon场的相同，我们这里不给出太多细节。

经过前面的处理。我们已经完成坐标表象下的场量子化。为了今后的方便，下面将场算符换到粒子数（能量，动量）表象。

将场量$\psi(x)$和$\bar{\psi}(x)$做Fourier变换（或看做平面波展开）

$$\psi(x)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\sum_{s=1,2}[b_s(p)u_s(p)e^{-ipx}+d_s^\dagger(p)\upsilon_s(p)e^{ipx}]\tag{18.2}$$

其中$b_s(p)u_s(p)e^{-ip\cdot x}$和$d_s^\dagger(p)\upsilon_s(p)e^{ip\cdot x}$分别代表正能和负能部分。

由于Dirac粒子解的正，负能部分分别是不同的函数u,v。所以展开系数也就不再是互为共轭的b和$b^\dagger$而是新的系数$d^\dagger$了。量子化后，坐标表象下的场量$\psi(x)$成为算符。相应地，粒子数表象下的场量b和$d^\dagger$也将成为算符。

此时场量的Hermite共轭和Dirac共轭可直接计算得到：

$$\psi^\dagger(x)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\sum_{s=1,2}[b_s^\dagger(p)u_s^\dagger(p)e^{ip\cdot x}+d_s(p)\upsilon_s^\dagger(p)e^{-ip\cdot x}]$$

左乘γ^0得Dirac共轭

$$\bar{\psi}(x)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\sum_{s=1,2}[b_s^\dagger(p)\bar{u}_s(p)e^{ipx}+d_s(p)\bar{\upsilon}_s(p)e^{-ipx}]\tag{18.3}$$

采用处理Klein-Gordon场同样的方法，我们可以得到粒子数表象下场算符$a^\dagger,a,b^\dagger,b$间的对易关系：

$$\{b_s(\mathbf{p})b_{s'}^\dagger(\mathbf{p}')\}=(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta_{ss'}$$
$$\{d_s(\mathbf{p})d_{s'}^\dagger(\mathbf{p}')\}=(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta_{ss'}$$

18.2 粒子数表象下的物理量

下面我们将Hamilton量，动量，电荷等物理量也在粒子数表象下表示出来，其方式与在Klein-Gordon场中的一样。这些物理量在坐标表象中的形式可由Neother定理得到。当然Hamilton量也可以通过Legendre变换得到。

Hamilton量：

这里我们由Legendre变换出发来得到坐标表象下的Hamilton量，Legendre变换：

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

这就要求我们找出所有的广义坐标和广义动量。Dirac场的Lagrange密度：

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi$$

在Lagrange量中有两个独立的广义坐标ψ和$\psi^\dagger$。我们要分别求出它们对应的广义动量π_ψ和$\pi_{\psi^\dagger}$：

$$\pi_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = i\psi^\dagger$$
$$\pi_{\psi^\dagger} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^\dagger} = 0$$

这样便得到：

$$\begin{aligned}
H &= \int d^3x(\pi_\psi \dot{\psi} + \pi_{\psi^\dagger}\dot{\psi}^\dagger - L) \\
&= \int d^3x(\pi\dot{\psi} - L) \\
&= \int d^3x(i\psi^\dagger\dot{\psi} - \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi) \\
&= \int d^3x\bar{\psi}(i\gamma_0\dot{\psi} - i\gamma_0\dot{\psi} - i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla\psi + m\psi) \\
&= \int d^3x\bar{\psi}(-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla\psi + m\psi) \\
&= \int d^3x\psi^\dagger(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + \beta m)\psi \\
&= \int d^3x\psi^\dagger H_D\psi
\end{aligned}$$

其中$\boldsymbol{\gamma}=\beta\boldsymbol{\alpha}$,$\gamma_0=\beta$,$\boldsymbol{\alpha}=\beta\boldsymbol{\gamma}$，$H_D=-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla+\beta m=\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}+\beta m$. 这正是Dirac微分算符的平均值，其物理意义是非常明显的。

下面我们将平面波展开式(18.2)和(18.3)代入到上式中并应用(18.1) 式给出的反对易关系。就可直接计算得到粒子数表象的Hamilton量。当然，象在Klein-Gordon场中讨论过的那样。这里取正规乘积，即扔掉无穷大的零点能。

这样Hamilton量为：

$$H=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_s E_p(b_s^\dagger(p)b_s(p)+d_s^\dagger(p)d_s(p))$$

同样还可以得到动量

$$\begin{aligned}\mathbf{p}&=-\int d^3x\pi\nabla\psi\\&=\int d^3x\psi^+(-i\nabla)\psi\\&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_s\mathbf{p}(b_s^\dagger(\mathbf{p})b_s(\mathbf{p})+d_s^\dagger(\mathbf{p})d_s(\mathbf{p}))\end{aligned}$$

注意这是$\mathbf{p}=-i\nabla$的平均值。同样与复标量场相同。Dirac场也存在着整体规范不变性：$\psi\to e^{i\theta}$，$\bar\psi\to\bar\psi e^{-i\theta}$

按照Neother定理。这个对称性也将带来一个守恒流

$$\begin{aligned}j^\mu&=\bar\psi\gamma^\mu\psi\\\partial_\mu j^\mu&=0\end{aligned}$$

由此可以求得守恒荷为：

$$\begin{aligned}Q&=\int d^3xj^0\\&=\int d^3x:\psi^\dagger\psi:\\&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_s(b_s^\dagger(\mathbf{p})b_s(\mathbf{p})-d_s^\dagger(\mathbf{p})d_s(\mathbf{p}))\end{aligned}$$

即电荷为正反粒子荷的差，也就是净余电荷。定义：

$$\begin{aligned}N_+&\equiv\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_s b_s^\dagger(\mathbf{p})b_s(\mathbf{p})\\N_-&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_s d_s^\dagger(\mathbf{p})d_s(\mathbf{p})\end{aligned}$$

$$Q=N_+-N_-$$

18.3 真空态与粒子态

有了前面的关系我们可以定义真空态，再根据真空态的定义来构造Fock空间的态。

定义真空态为：

$$b_s(\mathbf{p})\,|0\rangle = 0$$
$$d_s(\mathbf{p})\,|0\rangle = 0$$

由此我们可构造各态为

$$\prod_{i=1}^{N} d_{s_i}^{\dagger}(\mathbf{p}_i)\prod_{i=1}^{N} b_{s_j}^{\dagger}(\mathbf{p}_j)\,|0\rangle$$

这是一个Fock空间的态。

18.4 Dirac传播子

与处理Klein-Gordon方程相似，我们来考虑Dirac方程的Green函数。

有源的Dirac方程可写成为：

$$(i\partial\!\!\!/ - m)\psi(x) = j(x) \tag{18.4}$$

我们用Green函数方法来处理这类问题。Dirac方程的Green函数满足：

$$(i\partial\!\!\!/ - m)S_F(x-y) = \delta^4(x-y)$$

这样方程（18.4）的解可表示成：

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \int d^4y S_F(x-y)j(y)$$

其中$\psi_0(x)$为自由粒子解。

求$S_F(x-y)$的方法与标量场中求$\triangle_F(x-y)$的方法相同，即通过Fourier变换。再考虑奇点情况可得

$$S_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot(x-y)} S_F(p)$$

从而得动量空间Green函数的方程：

$$(p\!\!\!/ - m)S_F(p) = 1$$

于是有

$$S_F(p) = \frac{1}{\not{p} - m}$$

这时分母上有矩阵不容易处理，要先处理一下。分子分母同乘$(\not{p} + m)$

$$\begin{aligned} S_F(p) &= \frac{1}{\not{p} - m} \\ &= \frac{\not{p} + m}{(\not{p} - m)(\not{p} + m)}, \text{ 其中} \not{p}^2 = p^2 \\ &= \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \end{aligned}$$

这里的坐标空间情况与标量传播子的情况一样。因此其处理也是一样的：

$$S_F(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon}$$

相应的坐标空间的Green函数的形式为

$$S_F(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

很容易验证

$$S_F(x - y) = (i\not{\partial} + m)\triangle_F(x - y)$$

证明：

$$\triangle_F(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot(x-y)} \triangle_F(p),$$

其中

$$\triangle_F(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \tag{18.5}$$

$$\begin{aligned} (i\not{\partial} + m)\triangle_F(x - y) &= (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) e^{-ip(x-y)} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &= S_F(x - y) \end{aligned}$$

用处理Klein-Gordon场同样的方法可得传播子的一个重要结果：

$$iS_F(x-y)=\langle 0|\,T\psi(x)\bar{\psi}(y)\,|0\rangle$$

即Dirac场的传播子也是Dirac场算符的编时乘积的真空期待值。

可见Dirac场的传播子由于其分母也是p^2-m^2。因此其各种处理和结果都与Klein-Gordon场相同，只是分子上是一个矩阵。它们的差别源于Klein-Gordon场的自由粒子解是个标量e^{-ipx}，而Dirac场是个旋量，其自由粒子解是个旋量$u_s(p)e^{-ip\cdot x}$，或$\upsilon_s(p)e^{ip\cdot x}$，这里的$u$，$\upsilon$是表示旋量的矩阵。

18.4.1 由自由旋量场Lagrange量直接得到Dirac传播子

与Klein-Gordon方程相同，我们可由自由旋量场Lagrange量直接得到Dirac的传播子。

$$L=\bar{\psi}(i\vec{\partial}+m)\psi\equiv\bar{\psi}D(x)\psi$$

作代换

$$\vec{\partial}\to -ip$$

于是有

$$D(p)=\not{p}-m$$

考虑奇点情况有

$$S_F(p)=D^{-1}(p)=\frac{1}{\not{p}-m+i\epsilon}=\frac{\not{p}+m}{p^2-m^2+i\epsilon}$$

分母处理的方法与标量场情况相同。

18.5 旋量场量子化附录:Dirac矩阵与双线性协变量

在Dirac方程理论中引入了γ^μ矩阵，这是一个4×4矩阵。

我们知道一个一般的4×4矩阵有$4\times4=16$个独立的矩阵元。这样我们总可以将任意一个4×4矩阵用16个线性独立的4×4矩阵构成的完备集展开。

例如最简单完备集是:（当然这是一个显然但平庸的构造）

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ldots$$

这样完备集可以有无穷种构造方式。当然也可以用γ矩阵的各种方式的乘积来构造这样一个16个4×4的γ矩阵组成的完备集。

构造如表18.1

表 18.1: 完备集的构造

I	标量	1
γ^μ	矢量	4
$\sigma^{\mu\nu}=\frac{i}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]$	张量	6
$\gamma^\mu\gamma^5$	赝矢	4
γ^5	赝标	1
		共16个

其中

$$\gamma_5=\gamma^5\equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3=-\frac{i}{4!}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma$$

γ^5的性质：

$$(\gamma^5)^\dagger=\gamma^5$$
$$(\gamma^5)^2=1$$
$$\{\gamma^5,\gamma^\mu\}=0$$

这样就得到了一组基

$$\Gamma=\{I,\gamma_\mu,\sigma_{\mu\nu},\gamma_5\gamma_\mu,\gamma_5\}$$

容易证明它是归一的，即$\Gamma^2=1$。关于完备性的证明也暂且略去。

标量、矢量、赝标的差异在于赝标、赝矢在分立的宇称变换下会多出一个负号，而它们在连续变换下是一样的。

18.5.1 γ^μ矩阵组成的完备集的一个应用

对一个未知的矢量Γ^μ，Γ^μ是个4×4矩阵，我们总可以用完备集Γ将其展开成$\Gamma^\mu = A(q^2)\gamma_\mu + B(q^2)\sigma_{\mu\nu}q^\nu$的形式。这里的$q^\nu$是一个四动量，或更普遍地讲是一个四矢量。

这种展开有很实际的应用价值，比如自旋$\frac{1}{2}$的带电点粒子的电磁顶点时$-ie\gamma^\mu$。那么一个有内部自由度的自旋$\frac{1}{2}$带电点粒子的顶点应该是什么呢？显然它也应是一个矢量，也可写成（都满足Dirac方程）$-ie\Gamma^\mu$的形式。只不过不知道Γ^μ的具体形式。这样就可以采用前面的展开式。计算出截面即Rosenbluth公式，再与实验结果对比确定$A(q^2), B(q^2)$的形式。$A(q^2), B(q^2)$就是形状因子。

18.5.2 双线性协变量

在高量中讨论Dirac方程的时候我们曾得到流$j^\mu = i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$。$j^\mu$是Lozentz协变的。相似地我们还可以得到几类类似的流：如(表18.2)。

表 18.2: 几个类似的流

$\bar{\psi}\psi$	标量	1
$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	矢量	4
$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	张量	6
$\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi$	赝矢	4
$\bar{\psi}\gamma_5\psi$	赝标	1

同样也可以证明它们是Lozentz协变的。

18.5.3 投影算符

波函数的归一化,Dirac方程的自由粒子解：

$$u_s(p) = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi_s \end{pmatrix}$$

$$v_s(p) = -\sqrt{E+m}\begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\varepsilon\chi_s \\ \varepsilon\chi_s \end{pmatrix}$$

其中$s=\pm\frac{1}{2}$，$\chi_{\frac{1}{2}}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\chi_{-\frac{1}{2}}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，$\varepsilon=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$。

波函数的正交归一条件则选为[1]

$$\begin{cases}\bar{u}_s(p)u_\sigma(p)=2m\delta_{s\sigma}\\ \bar{v}_s(p)v_\sigma(p)=-2m\delta_{s\sigma}\end{cases}$$

引入能量投影算符。（这在结果在今后求非极化截面的时候是一个非常有用的工具）。

$$\Lambda_+(p)=\sum_s u_s(p)\bar{u}_s(p)$$
$$\Lambda_-(p)=\sum_s v_s(p)\bar{v}_s(p)$$

为什么称它们为投影算符呢。我们将它作用在态上看看：

$$\begin{aligned}\Lambda_+(p)u_\sigma(p)&=\sum_s u_s(p)\bar{u}_s(p)u_\sigma(p)\\&=\sum_s u_s(p)2m\delta_{s\sigma}\\&=2mu_\sigma(p)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_-(p)v_\sigma(p)&=\sum_s v_s(p)\bar{v}_s(p)v_\sigma(p)\\&=\sum_s v_s(p)(-2m)\delta_{s\sigma}\\&=-2mv_\sigma(p)\end{aligned}$$

这里的$\pm2m$是归一化因子。如果当初选择归一化常数为1，那么就有$\Lambda_+u_s=u_s$，$\Lambda_-v_s=v_s$。也就是说$\Lambda_\pm$分别将正负能态投影到它们自身。

同样我们还可证明

$$\Lambda_+(p)v_\sigma(p)=\sum_s u_s(p)\bar{u}_s(p)v_\sigma(p)=0$$
$$\Lambda_-(p)v_\sigma(p)=0$$

[1] 另一个常见的选择是

$$\begin{cases}\bar{u}_s(p)u_\sigma(p)=\delta_{s\sigma}\\ \bar{v}_s(p)v_\sigma(p)=-\delta_{s\sigma}\end{cases}$$

这样，就可以通过将$\Lambda_{\pm}$作用在一个态上，将正能态，负能态分别投影出来。其它态在投影后都为零了。这正是投影的本意。如在三维空间，x方向的单位矢$\hat{i}$就是一个x方向的投影算符，作用在一个任意三矢$\mathbf{p}$上后有$\hat{i}\cdot\mathbf{p}=p_x$，即将$x$分量投影出来。

下面我们计算出投影算符的直接依赖于p的形式。

我们不妨来凑这个形式。投影算符要求

$$\Lambda_+(p)u_\sigma(p)=2mu_\sigma(p)$$

动量表象的Dirac方程则是

$$(\not{p}-m)u_\sigma(p)=0$$

两边加上$2mu_\sigma(p)$

$$\begin{aligned}(\not{p}-m)u_\sigma(p)+2mu_\sigma(p)&=2mu_\sigma(p)\\(\not{p}+m)u_\sigma(p)&=2mu_\sigma(p)\end{aligned}$$

这样直接的对比便可给出

$$\Lambda_+(p)=\not{p}+m$$

同理有

$$\Lambda_-(p)v_\sigma(p)=-2mv_\sigma(p)$$

证明方式相同。相应的Dirac方程是

$$(\not{p}+m)v_\sigma(p)=0$$

两边加上$-2mv_\sigma(p)$

$$\begin{aligned}(\not{p}+m)v_\sigma(p)-2mv_\sigma(p)&=-2mv_\sigma(p)\\(\not{p}-m)v_\sigma(p)&=-2mv_\sigma(p)\\\Lambda_-(p)&=\not{p}-m\end{aligned}$$

这样我们便得到了一个非常有用的结果

$$\begin{aligned}\Lambda_+(p)&=\sum_s u_s(p)\bar{u}_s(p)=\not{p}+m\\\Lambda_-(p)&=\sum_s v_s(p)\bar{v}_s(p)=\not{p}-m\end{aligned}$$

这个结果最常见的应用是求非极化的跃迁矩阵元。

第十九章　电磁场量子化

19.1　电磁场量子化的困难

电磁场（或更普遍的说规范场）量子化的困难可以从几个不同的角度来谈，但它们在本质上是一样的。下面我们就从几个不同的出发点来看这个困难。（再强调一次，这只是从不同的角度表述同一个困难。）

19.1.1　作为约束的规范条件使四个正则坐标A_μ不独立

前面曾仔细讨论过正则量子化方法。正规量子化方案本质上是强加给正则坐标和正则动量一个正则量子化要求$[q,p]=i$。但做到这一点的前提是正则坐标以及正则动量彼此间必须是独立的。而如果系统是一个有约束的系统，那么正则坐标及正则动量之间便不再是独立的了，便不能直接通过要求$[q,p]=i$来量子化。

电磁场正是这样一个有约束的系统。我们知道，电磁场具有规范对称性，电磁场的场量电磁势的选择不是唯一的。彼此相差一个四维散度的两个电磁势将给出相同的物理结果，即理论的形式在变换

$$A'^{\mu}(x)=A^{\mu}(x)+\partial^{\mu}\Lambda(x)$$

下是不变的。电磁场的这种对称性使得我们必须选择一种特殊的规范从而将$A^{\mu}(x)$固定下来。规范条件的选择是完全任意的。常见的规范条件有这样几种（表19.1）

表 19.1:　几种常见的规范

Coulomb规范	$\nabla\cdot\mathbf{A}=0$
轴（axial）规范	$A_3=0$
瞬时（temporal）规范(Hamilton规范)	$A_0=0$
Lorenz规范	$\partial_\mu A^\mu=0$

最常见的两种规范，一种是Coulomb规范，另一种是Lorenz规范。

在Coulomb 规范下对电磁场进行量子化有一个明显的缺点，就是它不是Lorentz协变的。一个不协变的理论在处理原子之类的问题的时候用着还比较方便，但处理粒子物理中的相对论效应不可忽略的问题时便不合适了。但是这种规范的好处是，量子化后所得的态都是真正的物理态。（在Lorenz规范下并不能做到这点。）

为了得到Lorentz协变的结果，可以采用Lorenz规范[1]。但这样做的结果是会引入非物理态。如纵向光子态和标量光子态。好在这些我们还都能对付，使它们的出现并不影响最后的物理结果。

19.1.2 电磁场没有与A_0共轭的正则动量π_0

正则量子化的第一步是求出正则坐标A^μ的共轭动量π^μ：

$$\pi^\mu = \frac{\partial L}{\partial\left(\dot{A}_\mu\right)}$$

在前面我们已经得电磁场的Lagrange量为：

$$L=-\frac{1}{4}F^2$$

其中电磁场张量是

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

所以

$$\pi^\mu = \frac{\partial}{\partial\left(\partial_0 A_\mu\right)}\left(-\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right)$$

利用关系

$$\frac{\partial\left(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right)}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)} = 4F^{\mu\nu}$$

得到

$$\pi^\mu = -F^{0\mu}$$

[1]关于Lorenz规范，这里要给出一个历史注记。在绝大部分现代的场论书中这一规范条件都被称为Lorentz规范。这里的Lorentz指的是那位发现Lorentz变换以及一系列经典电磁理论结果的Hendrik Antoon Lorentz。其实这个规范条件是Ludwig Valentin Lorenz 于1867年给出的。这一年H A Lorentz才14岁。

这样正则动量的分量为

$$\pi^0 = -F^{00} = 0$$
$$\pi^i = -F^{0i} = E^i$$

显然这里出问题了。因为正则量子化是要求正则坐标A_μ和正则动量π^μ满足某种给定的算符关系。但这里的A^0分量没有对应的π^0，因此直接的正则量子化方案便失效了。

19.1.3 简单的正则量子化不能给出电磁场的传播子

一个正确的量子化方案当然包含给出相应的传播子。但是如果我们直接采用处理Klein-Gordon场的量子化方案，即简单地令电磁场的各正则坐标和正则动量满足正则量子化条件，那么便不能得到电磁场的传播子。下面具体的讨论一下。

前面我们介绍了一个由Lagrange量直接得到传播子的方法。简单起见我们就从这里出发来讨论传播子的问题。

电磁场Lagrange量为：

$$L = -\frac{1}{4}F^2$$
$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

为了得到传播子我们要将Lagrange量写成

$$L = -\frac{1}{4}F^2 \equiv \frac{1}{2}A^\mu D_{\mu\nu}\left(x\right)A^\nu$$

的形式。现在要做的就是要凑出微分算子$D_{\mu\nu}$的形式。容易验证$D_{\mu\nu}\left(x\right)$可以取成

$$D_{\mu\nu}\left(x\right) = -g_{\mu\nu}\overleftarrow{\partial}_\rho\overrightarrow{\partial^\rho} + \overleftarrow{\partial}_\nu\overrightarrow{\partial}_\mu$$

下面验证一下。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}A^\mu D_{\mu\nu}A^\nu \\
&= \frac{1}{2}A^\mu\left(-g_{\mu\nu}\overleftarrow{\partial}_\rho\overrightarrow{\partial^\rho} + \overleftarrow{\partial}_\nu\overrightarrow{\partial}_\mu\right)A^\nu \\
&= \frac{1}{2}\left(-g_{\mu\nu}\partial_\rho A^\mu\partial^\rho A_\nu + \partial_\nu A^\mu\partial_\mu A^\nu\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\partial_\rho A_\nu\partial^\rho A^\nu + \partial_\nu A_\mu\partial^\mu A^\nu\right)
\end{aligned}$$

此外

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F^2 \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) \\ &= -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu + \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu\right)\end{aligned}$$

可见微分算符$D_{\mu\nu}(x)$确实是我们所要找的。

下面我们通过代换：

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\partial^\mu} &\to -ik^\mu \\ \overleftarrow{\partial_\mu} &\to +ik_\mu\end{aligned}$$

将坐标空间的$D(x)$换到动量空间：

$$\begin{aligned}D_{\mu\nu}(k) &= -g_{\mu\nu}\left(ik_\rho\right)\left(-ik^\rho\right) + \left(ik_\upsilon\right)\left(-ik_\mu\right) \\ &= -g_{\mu\nu}k^2 + k_\mu k_\upsilon\end{aligned}$$

下面我们来求它的逆算符。求逆算符的方法之一是从分析Lorentz 结构以及逆算符的定义入手。逆算符的定义是($AA^{-1}=1$)

$$D_{\mu\nu}(k)\, D^{-1\nu\sigma}(k) = g_\mu^\sigma \tag{19.1}$$

由分析Lorentz结构出发我们可以取逆算符形如：

$$D^{-1\nu\sigma} \equiv A\left(k^2\right) g^{\nu\sigma} + B\left(k^2\right) k^\nu k^\sigma$$

其中$A\left(k^2\right), B\left(k^2\right)$为待定系数，它们是$k^2$的函数，其形式由(19.1)式确定：

$$\begin{aligned}D_{\mu\nu}(k)\, D^{-1\nu\sigma}(k) &= \left(-g_{\mu\nu}k^2 + k_\mu k_\upsilon\right)\left(Ag^{\nu\sigma} + Bk^\nu k^\sigma\right) \\ &= -Ag_\mu^\sigma k^2 + Ak_\mu k^\sigma - Bk^2 k_\mu k^\sigma + Bk^2 k_\mu k^\sigma \\ &= -Ak^2 g_\mu^\sigma + Ak_\mu k^\sigma\end{aligned}$$

与(19.1)式对比会发现：第一项要求

$$-Ak^2 = 1$$

第二项要求

$$A = 0$$

显然这两个要求是矛盾的。就是说满足构成逆算符条件的A并不存在，这意味着逆算符并不存在。而同时我们还知道，传播子与逆算符的关系是一样的，即：

$$D_F^{\mu\nu}(k) = D^{-1\mu\nu}(k)$$

所以传播子也不存在，这个结果对其他规范场也成立。很容易证明$\frac{D_{\mu\nu}}{k^2}$是投影算符,满足$\frac{D_{\mu\nu}}{k^2}\frac{D^{\nu\sigma}}{k^2} = \frac{D_\mu^\sigma}{k^2}$, 平方等于自己是投影算符的性质。

19.2 Lorenz规范下处理电磁场量子化的困难的一个方法

前面我们从三个角度讨论了电磁场量子化的困难。这个困难是所有规范场所共有的。如何解决这个困难呢。我们就从前边讨论过的这三个角度逐一讨论。

首先，电磁场（以及所有规范场）都是有约束条件（规范条件）的场，这个约束由于电磁场本身的规范对称性而可以随意选择。前面已讲过几种常见的规范选择。在场量子化中最常用的是两种规范Coulomb规范和Lorenz规范。由于Coulomb规范下的量子化已在非相对论场论中介绍过。这里只是讨论Lorenz规范的情况。

规范条件是一种约束，加入这个约束的一种处理方法就是Lagrange不定乘子法。

自由电磁场的作用量为

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(x) = \int d^4x \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) \tag{19.2}$$

Lorenz规范条件（约束条件）为

$$\partial_\sigma A^\sigma = 0 \tag{19.3}$$

下面我们用Lagrange不定乘子法将约束（19.3）加入到电磁场的作用量（19.2）中去。加入约束首先要凑足量纲。然后再选一个不定参数，这里我们取作用量为：

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) + \int d^4x \left(-\frac{1}{2\xi}(\partial_\sigma A^\sigma)^2\right) \\ &= \int d^4x \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\sigma A^\sigma)^2\right) \end{aligned}$$

Lagrange量为：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\sigma A^\sigma)^2 \tag{19.4}$$

这里的参数ξ可以任意选取（有的书也取成$\frac{\xi}{2}$的形式）。显然ξ选取的不同给出了不同的规范条件。这里的项

$$-\frac{1}{2\xi}\left(\partial_\sigma A^\sigma\right)^2$$

称为规范固定项。不同的规范固定参数的选取对应不同的规范选择。

Feynman-Fermi 规范

$$\xi = 1$$

Landau规范

$$\xi = 0$$

注：在另一形式的规范固定项的选择中，规范固定项被选成$-\frac{\xi}{2}\left(\partial_\sigma A^\sigma\right)^2$”这时$\xi = 1$是Feynman-Fermi规范，$\xi = \infty$是Landau规范

需要说明的一点是，这种做法如果是有意义的，就必须要求物理结果不依赖固定参数的选择。可以证明这一点是满足的。

下面我们分别看一下加入规范固定项的电磁场Lagrange量是否能解决前面讲过的那几个困难。

在加入规范固定项以前，电磁场由Lagrange量（运动方程）及规范条件共同确定，即

$$\begin{cases} \mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^2 \\ \partial_\mu A^\mu = 0(\text{或者其他的规范条件}) \end{cases}$$

共同确定电磁场。

加入规范固定项后

$$\begin{cases} L = -\frac{1}{4}F^2 - \frac{1}{2\xi}\left(\partial_\sigma A^\sigma\right)^2 \\ f\left(\xi\right) = 0 \end{cases}$$

$f\left(\xi\right)$的形式就是选规范。这样就将对A_μ的约束转化成对$\xi \ll 0$的约束，A_μ便不再有约束了。

如果此时不考虑规范条件，而仅由Lagrange量中的场量出发对场进行量子化，其结果当然是错误的。但通过Lagrange不定乘子法将规范条件加入Lagrange量后，由于约束的存在而导致的场量间的不独立将转嫁到不定参数上，而场量此时已经是彼此独立的了。可以直接用通常的正则量子化方法将其量子化。也就是说，加入规范固定项后解决了前面提到的第一个问题。

在加入规范固定项之前，场量的A^0分量没有对应的正则动量π^0。这使得量子化无法进行。那么加入规范固定项之后是否有相应的π^0呢。不妨试试看：

$$\pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\dot{A}^\mu\right)} = -F_{0\mu} - \frac{1}{\xi}g_{\mu 0}\left(\partial_\sigma A^\sigma\right)$$

这样便有：

$$\pi^0 = -\frac{1}{\xi}\left(\partial_\sigma A^\sigma\right) \neq 0\ ,\ \frac{1}{\xi} \neq 0, \xi \neq \infty$$

这样一来A^0就有对应的正则动量π^0了。

事实上，从另一个角度考虑也可以同样得到这个结果。之所以和A^0对应的$\pi^0 = 0$，是由于Lagrange量中没有$\dot{A}_0$这样的项。加上这样的一项自然就会得到π^0了。显然$\partial_\sigma A^\sigma$中有$\dot{A}_0$这样的项（Fermi（1932））。

这样就自然解决了前面提到的第二个问题。

在加上规范固定项之前，我们得不到电磁场的传播子。微分算符$D_{\mu\nu}$没有逆算符。那么加上规范固定项后$D_{\mu\nu}$是否有逆算符可以直接尝试。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}\left(\partial_\sigma A^\sigma\right)^2 \equiv \frac{1}{2}A^\mu D_{\mu\nu}\left(x\right)A^\nu$$

此时的微分算符可写为：

$$D_{\mu\nu}\left(x\right) = -g_{\mu\nu}\overleftarrow{\partial}_\sigma\overrightarrow{\partial^\sigma} + \overleftarrow{\partial}_\nu\overrightarrow{\partial^\mu} - \frac{1}{\xi}\overleftarrow{\partial}_\mu\overrightarrow{\partial}_\nu$$

比较以前，多出$-\frac{1}{\xi}\overleftarrow{\partial}_\mu\overrightarrow{\partial}_\nu$项。

验证：第三项

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}A^\mu\left(-\frac{1}{\xi}\overleftarrow{\partial}_\mu\overrightarrow{\partial}_\nu\right)A^\nu &= -\frac{1}{2\xi}\partial_\mu A^\mu\partial_\nu A^\nu \\ &= -\frac{1}{2\xi}\left(\partial_\sigma A^\sigma\right)^2\end{aligned}$$

与Lagrange量中的第三项相同。用代换

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\partial^\mu} &\to -ik^\mu \\ \overleftarrow{\partial}_\mu &\to +ik_\mu\end{aligned}$$

将$D_{\mu\nu}\left(x\right)$换到动量空间：

$$\begin{aligned}D_{\mu\nu}\left(k\right) &= -g_{\mu\nu}\left(ik_\rho\right)\left(-ik^\rho\right) + \left(ik_\nu\right)\left(-ik_\mu\right) - \frac{1}{\xi}\left(ik_\mu\right)\left(-ik_\nu\right) \\ &= -g_{\mu\nu}k^2 + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)k_\mu k_\nu\end{aligned}$$

下面求它的逆算符。分析Lorentz结构可以知道逆算符应具有如下形式，

$$D^{-1\nu\sigma}\left(k\right) = A\left(k^2\right)g^{\nu\sigma} + B\left(k^2\right)k^\nu k^\sigma$$

$A\left(k^2\right), B\left(k^2\right)$为待定系数。下面由逆算符的要求

$$D_{\mu\nu}(k) D^{-1\nu\sigma}(k) = g_\mu^\sigma \tag{19.5}$$

确定$A\left(k^2\right)$和$B\left(k^2\right)$。

直接计算：

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}(k) D^{-1\nu\sigma}(k) &= \left(-g_{\mu\nu}k^2 + \left(1-\frac{1}{\xi}\right)k_\mu k_\upsilon\right)\left(Ag^{\nu\sigma} + Bk^\nu k^\sigma\right) \\ &= -Ak^2 g_\mu^\sigma + A\left(1-\frac{1}{\xi}\right)k_\mu k^\sigma - Bk^2 k_\mu k^\sigma + \left(1-\frac{1}{\xi}\right)Bk^2 k_\mu k^\sigma \\ &= -Ak^2 g_\mu^\sigma + \left[A\left(1-\frac{1}{\xi}\right) - \frac{1}{\xi}Bk^2\right]k_\mu k^\sigma \end{aligned}$$

与(19.5)式对比知：

$$\begin{cases} -Ak^2 = 1 \\ A\left(1-\frac{1}{\xi}\right) - \frac{1}{\xi}Bk^2 = 0 \end{cases}$$

容易得：

$$\begin{cases} A\left(k^2\right) = -\frac{1}{k^2} \\ B\left(k^2\right) = (1-\xi)\frac{1}{(k^2)^2} \end{cases}$$

考虑奇点情况后有

$$D^{-1\nu\sigma}(k) = -\frac{1}{k^2+i\epsilon}g^{\mu\nu} + (1-\xi)\frac{1}{\left(k^2+i\epsilon\right)^2}k^\mu k^\nu$$

可知传播子

$$D_F^{\mu\nu}(k) = -\frac{g^{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon} + (1-\xi)\frac{k^\mu k^\nu}{\left(k^2+i\epsilon\right)^2}$$

注：这里的第二项有分母$\frac{1}{(k^2+i\epsilon)^2} = \frac{1}{k^2(k^2+i\epsilon)}$，可以认为规则是将$i\epsilon$加在$k^2$上，或说加在质量平方上。

许多情况下，我们取Feynman-Fermi规范$\xi = 1$，这样便有传播子：

$$D_F^{\mu\nu}(k) = -\frac{g^{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon}$$

可见加入规范固定项后，我们便一下子解决了前面的困难。我们已经从三个方面证明了这一点。但这种方法也会带来麻烦，我们知道，本来电磁场只有两个偏振方向，这样一番处理后，四个分量都有了，多了两个非物理态。

19.3 Lorenz规范下电磁场的量子化

在讨论Lorenz规范下电磁场的量子化之前，先求出加入规范条件后场的正则动量。

19.3.1 Lorenz规范下的电磁场

前面已经详细讨论过，通过加入规范固定项可以解决电磁场（乃至各种规范场）量子化时遇到的困难。加入规范固定项后的电磁场Lagrange量为

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\frac{1}{2\xi}\left(\partial_\sigma A^\sigma\right)^2$$

这个带有规范固定项的Lagrange量已包含了Lorenz规范条件。这个规范固定项就是通过Lagrange不定乘子法加进去的Lorenz条件。

由此可以直接求场的正则动量

$$\pi_\mu=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\dot{A}^\mu\right)}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 A^\mu\right)}=\frac{\partial}{\partial\left(\partial_0 A^\mu\right)}\left(-\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}-\frac{1}{2\xi}\left(\partial_\sigma A^\sigma\right)^2\right)$$

利用关系

$$\begin{cases}\frac{\partial\left(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right)}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)}=4F^{\mu\nu}\\ \frac{\partial}{\partial\left(\partial^\nu A_\mu\right)}\left(\partial_\sigma A^\sigma\right)^2=2g_\nu^\mu\left(\partial_\sigma A^\sigma\right)\end{cases}$$

可得

$$\begin{aligned}\pi_\mu&=-\frac{1}{4}\left(4F_{0\mu}\right)-\frac{1}{2\xi}\left(2g_{\mu 0}\left(\partial_\sigma A^\sigma\right)\right)\\&=-F_{0\mu}-\frac{1}{\xi}g_{\mu 0}\left(\partial_\sigma A^\sigma\right)\end{aligned}$$

只要$\frac{1}{\xi}$不是0。前面讨论过，我们就会得到四个独立的正则动量。同样，将Lagrange量带入欧拉-拉格朗日方程，还可以得到场方程：

$$\partial^2 A^\mu-\left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\left(\partial_\sigma A^\sigma\right)=0$$

很明显，在考虑Lorenz规范条件$\partial_\sigma A^\sigma$后，这里得到的方程就是Lorenz规范下的Maxwell方程；

$$\partial^2 A^\mu=0$$

这正是d′Alembert方程。规范固定项中的规范参数的选择是任意的，这里我们选择所谓的Fermi-Feynman规范（这是最简单的选择）。即选择$\xi = 1$。这样Lagrange量为

$$\begin{aligned}
L=&-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\left(\partial_\sigma A^\sigma\right)^2 \\
&= -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) - \frac{1}{2}\left(\partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu\right) \\
&= -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu + \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu\right) - \frac{1}{2}\left(\partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu\right) \\
&= -\frac{1}{4}\left(2\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - 2\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu\right) - \frac{1}{2}\left(\partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu\right) \\
&= -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - \frac{1}{2}\partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu \\
&= -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu\right)
\end{aligned}$$

恰好我们有关系

$$\left(\partial_\mu A^\mu\right)^2 - \partial_\mu A^\nu \partial_\nu A^\mu = \partial_\mu\left[A_\nu\left(g^{\mu\nu}\partial_\rho A^\rho - \partial^\nu A^\mu\right)\right]$$

下面证明这一点：

$$\begin{aligned}
\partial_\mu\left[A_\nu\left(g^{\mu\nu}\partial_\rho A^\rho - \partial^\nu A^\mu\right)\right] &= \partial_\mu A^\mu \partial_\rho A^\rho - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - A_\nu \partial^\nu \partial_\rho A^\rho + A_\nu \partial_\mu \partial^\nu A^\mu \\
&= \partial_\mu A^\mu \partial_\rho A^\rho - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu
\end{aligned}$$

其中

$$A_\nu \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = A_\nu \partial^\nu \partial_\mu A^\mu - A_\nu \partial^\nu \partial_\rho A^\rho + A_\nu \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = 0$$

这样L转化为：

$$L= -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \frac{1}{2}\partial_\mu\left[A_\nu\left(g^{\mu\nu}\partial_\rho A^\rho - \partial^\nu A^\mu\right)\right]$$

其中全微分项$\partial_\mu\left[A_\nu\left(g^{\mu\nu}\partial_\rho A^\rho - \partial^\nu A^\mu\right)\right]$可作为表面项扔掉

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu$$

这是在Fermi-Feynman规范下的电磁场Lagrange量，相应的场量为：

$$\pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 A^\mu\right)} = -\partial_0 A^\mu \tag{19.6}$$

得到场动量后，就可以着手进行量子化了。

19.3.2 Lorenz规范下的电磁场量子化

由于加入了规范固定项，电磁场的四个分量A_μ便是彼此独立的了。相应的动量π_μ也彼此独立。这样就可以履行正则量子化的手续了。

但是事情还没有这么简单。我们知道对光子这样的玻色场应该采用对易关系量子化。这要求我们要使场坐标和动量$[A^\mu，\pi^\nu]=A^\mu\pi^\nu-\pi^\nu A^\mu$ 等于某个值。但由于A^μ，π^ν是矢量，因而乘积$A^\mu\pi^\nu$构成Lorentz张量。为了协变起见，必须要求等式右边也有一个Lorentz张量。显然在平直空间中最自然的选择就是$g^{\mu\nu}$。

但是这种协变的要求将带来一个问题，就是$g^{\mu\nu}\neq\delta^{\mu\nu}$，而是$g^{00}=1$，$g^{ii}=-1$，也就是说等时对易关系中有三个空间坐标是$-1$，而时间分量是$+1$，这样得到的正则量子化关系是

$$\begin{cases}\left[A^\mu\left(\mathbf{x},t\right),\pi^\nu\left(\mathbf{x}',t\right)\right]=ig^{\mu\nu}\delta^3\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right)\\ \left[A^\mu\left(\mathbf{x},t\right),A^\nu\left(\mathbf{x}',t\right)\right]=0\\ \left[\pi^\mu\left(\mathbf{x},t\right),\pi^\nu\left(\mathbf{x}',t\right)\right]=0\end{cases}$$

已知$\pi_\mu=\dot{A}_\mu$。所以正则量子化关系也可以写为

$$\left[A^\mu\left(\mathbf{x},t\right),\dot{A}^\nu\left(\mathbf{x}',t\right)\right]=-ig^{\mu\nu}\delta^3\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right)$$

由$g^{\mu\nu}$带来的符号上的不确定性导致的后果是出现了负模态这样的非物理态，不过幸亏我们很快就发现，在考虑了规范条件后，这些困难可以被克服。

19.3.3 平面波展开

像前面一样，平面波展开的目的是将坐标表象换到能量（动量，粒子数）表象中，在电磁场中，我们也这样处理。

平面波展开首先要知道构成的完全集的平面波解的形式。对标量场而言，平面波解就是简单的$e^{-ik\cdot x}$。回忆旋量场的平面波解由于其自禀结构较标量场复杂，解的形式由两部分组成：$u_s\left(p\right)e^{-ip\cdot x}$，其中$u\left(p\right)$是与动量$p$和自旋有关的旋量部分，粒子的自旋在这部分体现。那么矢量场呢？它的平面波解显然也应像旋量场一样有一个与动量和自旋有关的部分。同时这个解必须是个Lorentz矢量。而$e^{-i\mathbf{p}\cdot x}$部分只是个Lorentz标量。根据上面的讨论我们可以将矢量场的平面波解取成

$$A_\mu\left(k,\lambda,x\right)=N_k\epsilon_\mu\left(\mathbf{k},\lambda\right)e^{-ik\cdot x}$$

的形式。这里N_k是归一化常数。这里的$\epsilon_\mu\left(\mathbf{k},\lambda\right)$是一个 Lorentz矢量，它是动量$\mathbf{k}$和自旋$\lambda$的函数，称为极化矢量。

我们要讨论的矢量场有两种。有质量矢量场，如$w^{\pm}, z^{0}$, 和无质量的矢量场，如光子。Maxwell场是无质量矢量场。这两种矢量场之间有一个很大的区别在自旋上。有质量的矢量场自旋有3个分量。我们选取动量方向作为参考。一个分量平行于动量方向，另两个方向则垂直于动量方向。而无静止质量的光子，则由于其速度为光速，它失去了平行于动量的纵向分量，而只有两个横向分量。这就是光的两个偏振方向，且光是横波。

自旋**S**本来是一个三维空间中的矢量（赝势）。它有三个空间分量。但如果我们讨论相对论理论，为了使理论形式是明显协变的，我们必须将这一三维空间中的矢量推广成四维的形式。极化矢量是自旋的函数，自旋出于相对论协变的考虑有四个分量（一纵两横加上一个标量（时间）分量）。那么与这四个分量对应的极化矢量当然也会有相应的四个形式。极化矢量的一些具体结果和表示我们在用到时再讲。

前面说过，光子（无质量矢量场）只有两个横向分量，并没有纵向分量和时间分量。即只有横光子没有纵光子和标量光子。在Coulomb规范下的电磁场量子化。由于没有Lorentz协变性的要求，可以只考虑这两个横光子分量，横向条件$k\cdot\epsilon\left(\mathbf{k}\cdot 1\right)=k\cdot\epsilon\left(\mathbf{k}\cdot 2\right)=0$。但在协变规范下，为了协变必须四个分量同时考虑。这样便会出现非物理态——纵光子和标量光子。于是处理电磁场量子化的一个中心问题便是如何去掉这些非物理态。

通过讨论我们已经知道协变规范。要同时采用四个光子极化分量，这样平面波展式为：

$$A^{\mu}\left(x\right)=\int\frac{d^{3}k}{\left(2\pi\right)^{3}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{k}}}\sum_{\lambda=0}^{3}\left(a\left(\mathbf{k},\lambda\right)\epsilon^{\mu}\left(\mathbf{k},\lambda\right)e^{-ik\cdot x}+a^{\dagger}\left(\mathbf{k},\lambda\right)\epsilon^{\mu}\left(\mathbf{k},\lambda\right)e^{ik\cdot x}\right)$$

(对比在Coulomb规范下的量子化对λ 的求和是$\lambda=1,2$。) 这样相应的共轭动量为($\pi_{\mu}=-\partial^{0}A_{\mu}$)

$$\pi^{\mu}\left(x\right)=\int\frac{d^{3}k}{\left(2\pi\right)^{3}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{k}}}i\omega_{k}\sum_{\lambda=0}^{3}\left(a\left(\mathbf{k},\lambda\right)\epsilon^{\mu}\left(\mathbf{k},\lambda\right)e^{-ik\cdot x}-a^{\dagger}\left(\mathbf{k},\lambda\right)\epsilon^{\mu}\left(\mathbf{k},\lambda\right)e^{ik\cdot x}\right)$$

这样我们就得到了坐标表象下的场量和场动量。

像处理标量场和旋量场那样，可由此得到能量（动量，粒子数）表象下的量子化条件。

$$\begin{cases}\left[a\left(k',\lambda'\right),a^{\dagger}\left(k,\lambda\right)\right]=-\left(2\pi\right)^{3}g_{\lambda\lambda'}\delta^{3}\left(\mathbf{k}'-\mathbf{k}\right)\\ \left[a\left(k',\lambda'\right),a\left(k,\lambda\right)\right]=\left[a^{\dagger}\left(k',\lambda'\right),a^{\dagger}\left(k,\lambda\right)\right]=0\end{cases}$$

推导这个关系时用到了极化矢量的正交关系。

$$\epsilon^{\mu}\left(\mathbf{k},\lambda\right)\epsilon_{\mu}\left(\mathbf{k},\lambda'\right)=g_{\lambda\lambda'}\tag{19.7}$$

注意这里的$g_{\lambda\lambda'}$并不是Lorentz度规张量，只是个符号而已。它的值是±1，取法与$g_{\mu\nu}$相同。

19.3.4 粒子数表象下的算符形式

同样我们也可以得到用a,$a^\dagger$表示的各种物理量。

将平面波展式代入，Hamilton量

$$\begin{aligned}
H=&\int d^3x\mathcal{H}\left(x\right)\\
=&-\frac{1}{2}\int d^3x:\left(\pi^\mu\pi_\mu+\nabla A^\mu\nabla A_\mu\right):\\
=&\frac{1}{2}\int d^3x\int\frac{d^3k'}{\left(2\pi\right)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{k'}}}\int\frac{d^3k}{\left(2\pi\right)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\\
&\times\sum_{\lambda'=0}^{3}\sum_{\lambda=0}^{3}\epsilon^\mu\left(\mathbf{k}',\lambda'\right)\epsilon_\mu\left(\mathbf{k},\lambda\right)\left(\omega_{k'}\omega_k+\mathbf{k}'\cdot\mathbf{k}\right)\\
&\times\Big(a\left(\mathbf{k}',\lambda'\right)a\left(k,\lambda\right)e^{-i(k'+k)\cdot x}+a^\dagger\left(\mathbf{k}',\lambda'\right)a^\dagger\left(\mathbf{k},\lambda\right)e^{i(k'+k)\cdot x}\\
&-a^\dagger\left(\mathbf{k},\lambda\right)a\left(\mathbf{k}',\lambda'\right)e^{-i(k'-k)\cdot x}-a^\dagger\left(\mathbf{k}',\lambda'\right)a\left(\mathbf{k},\lambda\right)e^{i(k'-k)\cdot x}\Big)
\end{aligned}$$

对x的积分可得到两个δ函数：

$$\left(2\pi\right)^3\delta^3\left(\mathbf{k}'+\mathbf{k}\right)\text{和}\left(2\pi\right)^3\delta^3\left(\mathbf{k}'-\mathbf{k}\right)$$

这样式中的项

$$\omega_{k'}\omega_k+\mathbf{k}'\cdot\mathbf{k}\overset{\mathbf{k}'=-\mathbf{k}}{=}\omega_k^2-\left|\mathbf{k}\right|^2=0$$

$$\omega_{k'}\omega_k+\mathbf{k}'\cdot\mathbf{k}\overset{\mathbf{k}'=\mathbf{k}}{=}\omega_k^2+\left|\mathbf{k}\right|^2$$

再利用前面的极化矢量正交关系(19.7)式有：

$$\begin{aligned}
H=&\int\frac{d^3k}{\left(2\pi\right)^3}\omega_k\sum_{\lambda=0}^{3}\left(-g_{\lambda\lambda}\right)a^\dagger\left(\mathbf{k},\lambda\right)a\left(\mathbf{k},\lambda\right)\\
=&\int\frac{d^3k}{\left(2\pi\right)^3}\omega_k\left(\sum_{\lambda=1}^{3}a^\dagger\left(\mathbf{k},\lambda\right)a\left(\mathbf{k},\lambda\right)-a^\dagger\left(\mathbf{k},0\right)a\left(\mathbf{k},0\right)\right)
\end{aligned}$$

同理还可得动量：

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}=&\int d^3x:\partial^0A^\mu\nabla A_\mu:\\
=&\int\frac{d^3k}{\left(2\pi\right)^3}\mathbf{k}\left(\sum_{\lambda=1}^{3}a^\dagger\left(\mathbf{k},\lambda\right)a\left(\mathbf{k},\lambda\right)-a^\dagger\left(\mathbf{k},0\right)a\left(\mathbf{k},0\right)\right)
\end{aligned}$$

类似的办法可以将各种算符在粒子数表象下表示。

19.3.5 态，负模态

像以前处理标量场和旋量场一样，我们可以构造Fock空间的光子态。但在电磁场情况下我们会遇到一个困难，就是负模态问题。

首先定义真空态：

$$a\left(\mathbf{k},\lambda\right)\left|0\right\rangle=0$$

由此可构造更高的激发态

$$\left|n_{\mathbf{k},\lambda}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{n_{\mathbf{k},\lambda}!}}\left(a_{\mathbf{k},\lambda}^{\dagger}\right)^{n_{\mathbf{k},\lambda}}\left|0\right\rangle$$

下面我们来计算$\left|1_{\mathbf{k},\lambda}\right\rangle$态的模：

$$\left|1_{\mathbf{k},\lambda}\right\rangle=a_{\mathbf{k},\lambda}^{\dagger}\left|0\right\rangle$$

其模为

$$\begin{aligned}\left\langle 1_{\mathbf{k},\lambda}\mid 1_{\mathbf{k},\lambda}\right\rangle&=\left\langle 0\left|a_{\mathbf{k},\lambda}a_{\mathbf{k},\lambda}^{\dagger}\right|0\right\rangle\\&=\left\langle 0\left|-\left(2\pi\right)^{3}g_{\lambda\lambda}\delta^{3}\left(\mathbf{k}-\mathbf{k}\right)+a_{\mathbf{k},\lambda}^{\dagger}a_{\mathbf{k},\lambda}\right|0\right\rangle\\&=-\left(2\pi\right)^{3}g_{\lambda\lambda}\delta^{3}\left(0\right)\end{aligned}$$

其中$\left\langle 0\right|a_{\mathbf{k},\lambda}^{\dagger}a_{\mathbf{k},\lambda}\left|0\right\rangle=0$

这个结果的麻烦是显然的:

$$\begin{aligned}g_{00}&=1,\\g_{ii}&=-1\end{aligned}$$

这样一来g_{00}情况求模平方将给出负值。这个时间分量的光子我们称为标量光子。它的模是负的。（注：这里的$\delta^{3}\left(0\right)$来自于δ函数归一化。）

负模态的困难还会连带的引起其它一些困难。比如我们也可以算Hamilton量的$\left|1_{\mathbf{k},\lambda}\right\rangle$态的期待值

$$\left\langle 1_{\mathbf{k},\lambda}\right|H\left|1_{\mathbf{k},\lambda}\right\rangle=\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{\left(2\pi\right)^{3}}\left\langle 1_{\mathbf{k},\lambda}\right|\left.1_{\mathbf{k},\lambda}\right\rangle$$

其中用到$H\left|1_{\mathbf{k},0}\right\rangle=\omega\left|1_{\mathbf{k},0}\right\rangle$。这样就会给出负能量。

那么怎样解决这些困难呢？

19.3.6 Gupta-Bleuler电磁场量子化方案

这里遇到的负模，负能的困难是由于我们在量子化时计入了两个非物理态——纵光子和标量光子。既然是非物理态出点问题也就不奇怪了。

如何解决这个问题呢？首先我们要弄清对一个理论的期望定到多高合适呢。前面的结果中有非物理态，这当然有些麻烦。但检验一个理论的方法是与实验对比。只要与实验一致，理论就是对的。那么应将理论中的什么结果与实验进行对比呢，显然是可观测量。在量子理论中期待值是可观测量。只要期待值中不出现非物理光子的贡献，那么这个理论就是可以接受的。下面来看看怎样做到这一点，即如何使非物理光子在可观测量中不出现。

我们的量子化是在Lorenz规范下进行的，下面考虑一下Lorenz条件给出了什么限制。Lorenz条件是$\partial_\mu A^\mu(x)=0$。这样最直接的要求就是：

$$\partial_\mu \hat{A}^\mu(x)=0$$

这里的场量$\hat{A}^\mu(x)$在量子化后已是算符。这就是说我们要求场算符满足Lorenz条件（如果算符满足要求，其期待值自然满足要求）。但这个要求太强了，这个条件并不能得到满足。因为量子化条件要求：

$$\left[A^\mu(x),\pi^\nu\left(x'\right)\right]=ig^{\mu\nu}\delta^3\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right)$$

两边求导，即用$\frac{\partial}{\partial x^\mu}$作用：

$$\begin{aligned}\text{左边}&=\partial_\mu\left[A^\mu(x),\pi^\nu\left(x'\right)\right]\overset{\because\partial_\mu A^\mu=0}{=}0\\ \text{右边}&=\partial_\mu\left[ig^{\mu\nu}\delta^3\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right)\right]\neq 0\end{aligned}$$

两个结果矛盾，说明假设的前提有误，即

$$\partial_\mu \hat{A}^\mu(x)\neq 0$$

我们放松条件看看。要求$\partial_\mu A^\mu$的本征值为零。即要求

$$\partial_\mu A^\mu(x)\left|\phi\right\rangle=0$$

但这个要求仍然太强了。为了看清这一点我们将$A_\mu(x)$分成正频和负频两部分。即：

$$A_\mu(x)=A_\mu^{(+)}(x)+A_\mu^{(-)}(x)$$

$$A_{\mu}^{(-)}(x)=\int\frac{d^{3}k}{(2\pi)^{3}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{k}}}\sum_{\lambda=0}^{3}a^{\dagger}(\mathbf{k},\lambda)\,\epsilon^{\mu}(\mathbf{k},\lambda)\,e^{ik\cdot x}$$

$$A_{\mu}^{(+)}(x)=\int\frac{d^{3}k}{(2\pi)^{3}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{k}}}\sum_{\lambda=0}^{3}a(\mathbf{k},\lambda)\,\epsilon^{\mu}(\mathbf{k},\lambda)\,e^{-ik\cdot x}$$

显然有

$$\partial_{\mu}A^{\mu(-)}(x)\left|0\right\rangle\neq0$$

这是因为$A^{\mu(-)}(x)$中有产生算符$a^{\dagger}(\mathbf{k},\lambda)$，这样一来$\partial_{\mu}A^{\mu}(x)\left|\phi\right\rangle\neq0$。

我们将条件再放松，要求Lorenz条件在平均值意义下满足，即

$$\begin{aligned}\left\langle\phi\left|\partial_{\mu}A^{\mu}\right|\phi\right\rangle&=\left\langle\phi\left|\partial_{\mu}A^{\mu(+)}+\partial_{\mu}A^{\mu(-)}\right|\phi\right\rangle\\&=\left\langle\phi\left|\partial_{\mu}A^{\mu(+)}\right|\phi\right\rangle+\left\langle\phi\left|\partial_{\mu}A^{\mu(-)}\right|\phi\right\rangle\\&=0\end{aligned}$$

这就是说，我们要求Lorenz条件只在可观测的意义下到满足。这个要求比将Lorenz条件作为算符条件弱得多。这也是我们放松条件能放松到的底线了，没有比平均值条件更低的普适的条件了。不过我们会看到，放松到平均值条件恰好可以解决我们的问题：它可以在可观测物理量中去掉非物理光子的贡献。这个方案是Gupta提出，Bleuler发展的。

我们也可以看到，这个平均值意义下的Lorenz条件也可以等价地写成

$$\partial_{\mu}A^{\mu(+)}(x)\left|\phi\right\rangle=0\tag{19.8}$$

或

$$\left\langle\phi\right|\partial_{\mu}A^{\mu(-)}(x)=0\tag{19.9}$$

下面我们来看看那两个非物理态会怎么样。在动量空间中考虑(19.8)式的条件。

$$\partial_{\mu}A^{\mu(+)}(x)\left|\phi\right\rangle=\partial_{\mu}\int\frac{d^{3}k}{(2\pi)^{3}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{k}}}\sum_{\lambda=0}^{3}a^{\dagger}(\mathbf{k},\lambda)\,\epsilon^{\mu}(\mathbf{k},\lambda)\,e^{ik\cdot x}\left|\phi\right\rangle=0$$

求导后得

$$\int\frac{d^{3}k}{(2\pi)^{3}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{k}}}e^{-ik\cdot x}\sum_{\lambda=0}^{3}k\cdot\epsilon(\mathbf{k},\lambda)\,a(\mathbf{k},\lambda)\left|\phi\right\rangle=0\tag{19.10}$$

这里有$k\cdot\epsilon\left(\mathbf{k},\lambda\right)$部分。由极化矢量$\epsilon\left(\mathbf{k},\lambda\right)=0$性质知：

$$\begin{cases} k\cdot\epsilon\left(\mathbf{k},1\right)=0 \\ k\cdot\epsilon\left(\mathbf{k},2\right)=0 \\ k\cdot\epsilon\left(\mathbf{k},0\right)=-k\cdot\epsilon\left(\mathbf{k},3\right) \end{cases}$$

其中$k\cdot\epsilon\left(\mathbf{k},1\right)=0$和$k\cdot\epsilon\left(\mathbf{k},2\right)=0$就是是横波条件。

将这个条件代回（19.10）式中：

$$\int\frac{d^3k}{\left(2\pi\right)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}e^{-ik\cdot x}\left(k\cdot\epsilon\left(\mathbf{k},0\right)a\left(\mathbf{k},0\right)+k\cdot\epsilon\left(\mathbf{k},3\right)a\left(\mathbf{k},3\right)\right)\left|\phi\right\rangle=0$$

$$\int\frac{d^3k}{\left(2\pi\right)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}e^{-ik\cdot x}k\cdot\epsilon\left(\mathbf{k},0\right)\left(a\left(\mathbf{k},0\right)-a\left(\mathbf{k},3\right)\right)\left|\phi\right\rangle=0$$

所以有

$$\left(a\left(\mathbf{k},0\right)-a\left(\mathbf{k},3\right)\right)\left|\phi\right\rangle=0 \tag{19.11}$$

取共轭有

$$\left\langle\phi\right|\left(a^{\dagger}\left(\mathbf{k},0\right)-a^{\dagger}\left(\mathbf{k},3\right)\right)=0 \tag{19.12}$$

事实上（19.11）（19.12）两式是（19.8）（19.9）两式条件的另一种表示形式。

如果这个条件是对的，那么期待值中便不应有非物理光子的贡献。我们来计算标量光子数的期待值：

$$\left\langle\phi\left|a^{\dagger}\left(\mathbf{k},0\right)a\left(\mathbf{k},0\right)\right|\phi\right\rangle=\left\langle\phi\left|a^{\dagger}\left(\mathbf{k},3\right)a\left(\mathbf{k},3\right)\right|\phi\right\rangle$$

其中

$$\left\langle\phi\right|a^{\dagger}\left(\mathbf{k},0\right)=\left\langle\phi\right|a^{\dagger}\left(\mathbf{k},3\right)$$

$$a\left(\mathbf{k},0\right)\left|\phi\right\rangle=a\left(\mathbf{k},3\right)\left|\phi\right\rangle$$

即

$$\begin{aligned}&\left\langle\phi\right|a^{\dagger}\left(\mathbf{k},0\right)a\left(\mathbf{k},0\right)-a^{\dagger}\left(\mathbf{k},3\right)a\left(\mathbf{k},3\right)\left|\phi\right\rangle\\&=\left\langle\phi\right|N\left(\mathbf{k},0\right)-N\left(\mathbf{k},3\right)\left|\phi\right\rangle\\&=0\end{aligned}$$

这就是说，虽然标量光子和纵光子数并不为零。但它们的和始终为零。也就是说它们对可观测量的总贡献为零。这样一来在观测中就看不到非物理光子。

下面看一下能量，前面已得到

$$\begin{aligned} H &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\omega_{\mathbf{k}}\left(\sum_{\lambda=1}^{3} a^{\dagger}(\mathbf{k},\lambda)\, a(\mathbf{k},\lambda) - a^{\dagger}(\mathbf{k},0)\, a(\mathbf{k},0)\right) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\omega_{\mathbf{k}}\left(\sum_{\lambda=1}^{2} a^{\dagger}(\mathbf{k},\lambda)\, a(\mathbf{k},\lambda) + a^{\dagger}(\mathbf{k},3)\, a(\mathbf{k},3) - a^{\dagger}(\mathbf{k},0)\, a(\mathbf{k},0)\right) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \langle\phi| H |\phi\rangle &= \langle\phi| \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\omega_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^{2} a^{\dagger}(\mathbf{k},\lambda)\, a(\mathbf{k},\lambda) |\phi\rangle \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\omega_k \sum_{\lambda=1}^{2} n(k,\lambda) \end{aligned}$$

即非物理态光子不影响物理量的观测值。当然非物理态在计算可观测的平均值前，比如在算符中，始终是出现的。

第二十章　相互作用的微扰处理

20.1　引言

前面我们讨论的始终是对自由场的处理,而我们真正关心的则是相互作用的情况。处理自由场是为了处理相互作用做准备的。

采用微扰处理实在是不得已而为之的事。因为除了几个刻意简化的玩具模型以外，我们一般不要指望能遇到可精确求解的情况。

微扰处理的基础首先是要存在一个小量，然后将理论按这个小量的幂次展开。这个小量是否足够的小是决定理论收敛性好坏的首要依据。在相互作用理论中我们选取的小量是相互作用的耦合常数。（当然，你应该将这个数选成一个无量纲的数，否则怎样谈大小呢。）在电磁场理论中，这一常数为$\alpha \sim \frac{1}{137}$。这是一个很小的量。这个量保证了微扰QED的精确性。而在强作用中，耦合常数$\alpha \sim 1$。（再加上色紧闭带来的处理束缚态的麻烦）使微扰QCD并不像微扰QED那样辉煌。

此外，即使耦合常数较小，展开的收敛性是否很好也还是个问题。这取决于我们所展开的函数的性质，而这一点是很难普遍证明的。

我们采用的微扰方式决定了这一方法不太适合处理束缚态。虽然也有Bethe-Salpeter方法这样的处理束缚态问题的理论，但都很大的局限性。

后面我们会看到，发散问题将一直困扰着我们，我们掩盖这些缺陷的那块布就是重整化方法。虽然在数学中有着比较成熟的处理发散级数和发散积分的理论，这一方法的成功你仍然可以认为是一个谜。

20.2　绘景（Heisenberg绘景、Schrödinger绘景、Dirac绘景（相互作用绘景））

在量子场论中，对同一个问题我们可以采用不同的等价描述。这些彼此等价的描述就是我们所说的不同绘景。不同绘景之间的差异在于其所描述的对象对事件的

依赖的不同。在量子理论中我们所要描述的对象就是态和算符。事实上量子理论所给出的可观测量就是某种物理量算符在某些特定态上的取值，或是态在某个物理量算符作用下的跃迁几率振幅（矩阵元）。我们知道各种不同的量子理论等价描述之间可通过幺正变换相联系。也就是说通过幺正变换可以实现不同绘景之间的转换。

需要说明的一点是，所谓等价的就是两种描述应该给出完全相同的可观测结果。

原则上我们可以构造出无穷种绘景。

我们常用的是三种绘景：Heisenberg绘景，在这种绘景中算符随时间变化而态不随时间变化；在Schrödinger绘景中，情况则正好相反；而在相互作用绘景中我们得到的则是一组奇妙的组合。习题：构造一个你自己的绘景，看看用你的绘景能做点什么

20.2.1 Heisenberg绘景

在Heisenberg绘景中算符随时间变化，满足Heisenberg方程。此时将系统对时间的依赖全部归因于算符对时间的依赖，而态矢则不随时间变化。

（场）算符满足的Heisenberg方程为

场坐标方程：

$$\dot{\phi}^H(x,t)=\frac{1}{i}\left[\phi^H(x,t),H\right] \tag{20.1}$$

其中上标H表示在Heisenberg绘景中。

场动量方程：

$$\dot{\pi}^H(x,t)=\frac{1}{i}\left[\pi^H(x,t),H\right] \tag{20.2}$$

显然，在我们的理论中其它力学量算符都是由ϕ^H，π^H组成的。它们也满足同样的方程：

$$\dot{O}^H(t)=\frac{1}{i}\left[O^H(t),H\right] \tag{20.3}$$

可以形式地解这个微分方程。其解为

$$O^H(t)=e^{iHt}O^H(0)\,e^{-iHt} \tag{20.4}$$

这一结果可直接验证：

$$\begin{aligned}\dot{O}^H(t)&=iHe^{iHt}O^H(0)\,e^{-iHt}+e^{iHt}O^H(0)\,(-iH)\,e^{-iHt}\\&=iH\left(e^{iHt}O^H(0)\,e^{-iHt}\right)+e^{iHt}O^H(0)\,e^{-iHt}\,(-iH)\\&=iHO^H(t)+O^H(t)\,(-iH)\\&=\frac{1}{i}\left[O^H(t),H\right]\end{aligned} \tag{20.5}$$

可见(20.4)式确实是Heisenberg方程的解。

在Heisenberg表象中态矢不随时间变化，即

$$\partial_t \left|\psi\right\rangle^H = 0 \tag{20.6}$$

在量子理论中我们的最终目的是要求跃迁矩阵元。在Heisenberg表象中矩阵元为

$${}^H\left\langle\psi_2\right| O^H(t) \left|\psi_1\right\rangle^H = {}^H\left\langle\psi_2\right| e^{iHt} O^H(0)\, e^{-iHt} \left|\psi_1\right\rangle^H \tag{20.7}$$

20.2.2 Schrodinger绘景

在Heisenberg绘景中，力学量算符随时间变化而态矢则不随时间变化。显然我们也可以建立其他类型的绘景。建立绘景的一个自然的要求显然是绘景改变后可观测量不应改变。下面就以这个条件为出发点建立一个新绘景。

首先来找一个可观测量。显然跃迁矩阵元是一个合适的选择。下面就来找一个使矩阵元

$${}^H\left\langle\psi_2\right| O^H(t) \left|\psi_1\right\rangle^H = {}^H\left\langle\psi_2\right| e^{iHt} O^H(0)\, e^{-iHt} \left|\psi_1\right\rangle^H \tag{20.8}$$

不变。显然如果我们取新绘景下的算符和态矢为：

$$O^S(\mathbf{x}) = O^S(\mathbf{x}, 0) \tag{20.9}$$

$$\left|\psi\right\rangle^S = e^{-iHt} \left|\psi\right\rangle^H \tag{20.10}$$

容易看出这是的算符$O^S(\vec{x})$不随时间变化，而态$\left|\psi\right\rangle^S$则因$e^{-iHt}$的作用与时间有关了。在这个绘景下显然有：

$$\begin{aligned} {}^S\left\langle\psi_2\right| O^S(\mathbf{x}) \left|\psi_1\right\rangle^S &= {}^H\left\langle\psi_2\right| e^{iHt} O^S(\mathbf{x}, 0)\, e^{-iHt} \left|\psi_1\right\rangle^H \\ &= {}^H\left\langle\psi_2\right| O^H(\mathbf{x}, t) \left|\psi_1\right\rangle^H \end{aligned} \tag{20.11}$$

即跃迁矩阵元是不变的。

下面看一下新表象下的态矢如何随时间变化。将(20.10)式两边对时间求导：

$$\begin{aligned} \partial_t \left|\psi\right\rangle^S &= \left(\partial_t e^{-iHt}\right) \left|\psi\right\rangle^H \\ &= -iH e^{-iHt} \left|\psi\right\rangle^H \\ &= -iH \left|\psi\right\rangle^S \end{aligned} \tag{20.12}$$

其中$\left|\psi\right\rangle^H$不随时间变化。所以

$$i\partial_t \left|\psi\right\rangle^S = H \left|\psi\right\rangle^S \tag{20.13}$$

这正是Schrodinger方程。由此我们也可以看出Schrodinger方程和Heisenberg方程间的等价性。

这个新绘景由于其态矢按Schrodinger方程演化算符不变而称之为Schrodinger绘景（还记得由于$O^H(t)$算符按Heisenberg方程演化态矢不变，而称该表象为Heisenberg绘景）

20.2.3 相互作用绘景（Dirac绘景，Tomonige绘景）

在具体问题中，考虑相互作用的时候往往可以将H-氏量写成

$$H = H_0 + H_I \tag{20.14}$$

的形式。原则上这两部分是任意分的。但在具体问题中一些特殊的分离方式显得特别有意义。比如H_0是自由场部分，H_I是相互作用部分，或（尤其是）H_I远小于H_0的情况。在这种情况下我自然而然地便有一种希望能够去找一个将相互作用部分与自由粒子分开的绘景。显然这种绘景更适合相互作用的问题处理。这种表象被自然地称作相互作用表象。

寻找一个新绘景的原则仍然是可观测量不应在绘景变换后发生改变。可观测量仍选跃迁矩阵元，即绘景的变换要保持

$${}^H\langle\psi_2|\, O^H(t)\, |\psi_1\rangle^H \tag{20.15}$$

不变。

在知道变换的具体形式之前我们先假设这个变换为

$$|\psi\rangle^I = \Omega\, |\psi\rangle^H \tag{20.16}$$

所以

$$|\psi\rangle^H = \Omega^{-1}\, |\psi\rangle^I \tag{20.17}$$

这里$|\psi\rangle^I$是相互作用表象下的态矢。

要求跃迁矩阵元(20.14)不变就是要求

$${}^H\langle\psi_2|\, O^H(t)\, |\psi_1\rangle^H = {}^I\langle\psi_2|\, \Omega O^H(t)\, \Omega^{-1}\, |\psi_1\rangle^I = {}^I\langle\psi_2|\, O^I(t)\, |\psi_1\rangle^I \tag{20.18}$$

这里

$$O^I(t) = \Omega O^H(t)\, \Omega^{-1} \tag{20.19}$$

是相互作用表象下的算符（上面用到了Ω幺正的性质）。表象绘景变换必须保内积$\langle\psi|\ \psi\rangle$不变，因此$\Omega$必须幺正。

为了猜测Ω的具体形式，我们来看一下态矢$|\psi\rangle^I$随时间的变化，即求$|\psi\rangle^I$对时间的导数

$$\begin{aligned} i\partial_t |\psi\rangle^I &= i\partial_t \left(\Omega |\psi\rangle^H\right) \\ &= i\left(\partial_t \Omega\right) |\psi\rangle^H \\ &= i\left(\partial_t \Omega\right) \Omega^{-1} |\psi\rangle^I \end{aligned} \tag{20.20}$$

我们的目的是以某种方式将H_0与H_I分开，由(20.20)式出发我们可以有一个自然而直接的选择（注意这仅仅是一种选择而已，不同的选择给出不同的绘景）

$$i\partial_t \Omega = H_I \Omega \tag{20.21}$$

如定义

$$\left(\partial_t \Omega\right) \Omega^{-1} = H_I \tag{20.22}$$

则得相互作用绘景。这样(20.20)式便成为

$$i\partial_t |\psi\rangle^I = H_I \Omega \Omega^{-1} |\psi\rangle^I \tag{20.23}$$

所以

$$i\partial_t |\psi\rangle^I = H_I |\psi\rangle^I \tag{20.24}$$

这就是说在(20.21)式给出的选择下相互作用绘景的态矢$|\psi\rangle^I$的演化只与相互作用部分的H-氏量有关。而与H_0无关。$\dot{\Omega}$

下面看一下力学量随时间的演化方式。

$$\begin{aligned} \dot{O}^I(t) &= \dot{\Omega} O^H \Omega^{-1} + \Omega \dot{O}^H \Omega^{-1} + \Omega O^H \dot{\Omega}^{-1} \\ &= \frac{1}{i} H_I \Omega O^H \Omega^{-1} + \Omega \frac{1}{i} \left[O^H(t), H\right] \Omega^{-1} + \Omega O^H \left(\frac{1}{i} H_I \Omega\right)^{-1} \end{aligned} \tag{20.25}$$

其中利用了式(20.22)和(20.3)。因为

$$O^I(t) = \Omega O^H(t) \Omega^{-1} = \Omega O^H(t) \Omega^\dagger \tag{20.26}$$

$$\Omega^{-1} = \Omega^\dagger \tag{20.27}$$

所以

$$\begin{aligned}\dot{O}^I(t) &= \dot{\Omega}O^H\Omega^\dagger + \Omega\dot{O}^H\Omega^\dagger + \Omega O^H\dot{\Omega}^\dagger \\ &= \frac{1}{i}H_I\Omega O^H\Omega^{-1} + \Omega\frac{1}{i}\left[O^H(t), H\right]\Omega^{-1} + \Omega O^H\left(-\frac{1}{i}\right)\Omega^\dagger H_I^\dagger \\ &= \frac{1}{i}\left\{H_I O^I + \Omega\left[O^H(t), H_0 + H_I\right]\Omega^{-1} - \Omega O^H\Omega^{-1}H_I\right\} \\ &= \frac{1}{i}\left\{H_I O^I + \Omega\left[O^H(t), H_0\right]\Omega^{-1} + \Omega\left[O^H(t), H_I\right]\Omega^{-1} - \Omega O^H\Omega^{-1}H_I\right\} \\ &= \frac{1}{i}\left\{H_I O^I + \Omega\left[O^H(t), H_0\right]\Omega^{-1} + \Omega\left[O^H(t), H_I\right]\Omega^{-1} - O^I H_I\right\} \\ &= \frac{1}{i}\left\{\left[H_I, O^I\right] + \left[\Omega O^H\Omega^{-1}, H_0\right] + \left[\Omega O^H\Omega^{-1}, H_I\right]\right\} \\ &= \frac{1}{i}\left\{\left[H_I, O^I\right] + \left[O^I, H_0\right] + \left[O^I, H_I\right]\right\} \\ &= \frac{1}{i}\left[O^I, H_0\right] \end{aligned} \tag{20.28}$$

其中

$$\Omega H\Omega^{-1} = 1 \tag{20.29}$$

所以

$$\dot{O}^I = \frac{1}{i}\left[O^I, H_0\right] \tag{20.30}$$

即相互作用表象下力学量算符按H-氏量中H_0部分演化。

综上所述可以看到态矢的演化由H_I决定，而算符的演化由H_0决定。即

$$\begin{cases} i\partial_t\left|\psi\right\rangle^I = H_I\left|\psi\right\rangle^I \\ \dot{O}^I = \frac{1}{i}\left[O^I, H_0\right] \end{cases} \tag{20.31}$$

这正好满足了前面我们关于将H_I和H_0分离开考虑的希望。在今后的微扰处理中，我们将采用这种方便的绘景。

其实我们还可以得到相互作用绘景与其他绘景的更具体的变换形式。

方程(20.30)的解是：

$$O^I(t) = e^{iH_0t}O(0)e^{-iH_0t} \tag{20.32}$$

我们仍从要求矩阵元不变的角度出发：即要求

$${}^I\left\langle\psi\right|O^I(t)\left|\psi\right\rangle^I = {}^H\left\langle\psi\right|O^H(t)\left|\psi\right\rangle^H \tag{20.33}$$

由式(20.32)我们有

$$\left\langle\psi\right|O^I(t)\left|\psi\right\rangle^I = {}^I\left\langle\psi\right|e^{iH_0t}O(0)e^{-iH_0t}\left|\psi\right\rangle^I \tag{20.34}$$

因为

$$\begin{aligned} O^H(t) &= e^{iHt}O^H(0)e^{-iHt} \\ &= e^{iHt}O(0)e^{-iHt} \end{aligned} \tag{20.35}$$

而

$$\begin{aligned} {}^H\langle\psi|O^H(t)|\psi\rangle^H &=^H \langle\psi|e^{iHt}O(0)e^{-iHt}|\psi\rangle^H \\ &=^H \langle\psi|e^{iHt}\left(e^{-iH_0t}e^{iH_0t}\right)O(0)\left(e^{-iH_0t}e^{iH_0t}\right)e^{-iHt}|\psi\rangle^H \\ &=^H \langle\psi|e^{iHt}e^{-iH_0t}O^I(t)e^{iH_0t}e^{-iHt}|\psi\rangle^H \end{aligned} \tag{20.36}$$

与(20.34)式对比可知

$$|\psi\rangle^I = e^{iH_0t}e^{-iHt}|\psi\rangle^H \tag{20.37}$$

需要注意的是三个绘景在$t=0$时刻重叠。

20.3 时间演化算子U矩阵S矩阵

由于相互作用在绘景中可将相互作用部分和自由部分考虑。这将给我们带来很大的便利。从这以后我们将在这个绘景中考虑相互作用的问题。

20.3.1 U矩阵

在相互作用绘景中为描述态矢演化我们引入下面的算符

$$|t\rangle^I = U(t,t_0)|t_0\rangle^I \tag{20.38}$$

我们称$U(t,t_0)$为时间演化算子。这样引入时间演化算子的依据是，在相互作用绘景中态矢演化的方程为

$$i\partial_t|t\rangle^I = H_I(t)|t\rangle^I \tag{20.39}$$

这是一个一阶线性微分方程。求解一阶线性微分方程只需要一个初条件。也就是说用一个初始时刻的态矢$|t_0\rangle$作初条件便可完全确定这以后的演化了。很明显时间演化算符应有下列性质

$$\begin{cases} U(t,t) = \mathbf{1} \\ U(t,t')U(t',t_0) = U(t,t_0) \\ U(t_0,t) = U^{-1}(t,t_0) \end{cases} \tag{20.40}$$

上述性质为群性质。将式(20.38)代入(20.39)有

$$i\partial_t U\left(t,t_0\right)\left|t_0\right\rangle = H_I\left(t\right)U\left(t,t_0\right)\left|t_0\right\rangle \tag{20.41}$$

可见$U\left(t,t_0\right)$必须满足方程：（初态$|t_0\rangle$是任意的）

$$i\partial_t U\left(t,t_0\right) = H_I\left(t\right)U\left(t,t_0\right) \tag{20.42}$$

由U满足的方程我们可以进一步讨论U的性质。

取(20.42)的共轭方程

$$-i\partial_t U^{\dagger}\left(t,t_0\right) = U^{\dagger}\left(t,t_0\right)H_I\left(t\right) \tag{20.43}$$

其中$H_I\left(t\right)$厄米。$U^{\dagger}\left(t,t_0\right)$乘以式(20.42)减去式(20.43)乘以$U\left(t,t_0\right)$，得

$$iU^{\dagger}\partial_t U - \left(-i\partial_t U^{\dagger}U\right) = U^{\dagger}H_I U - U^{\dagger}H_I U \tag{20.44}$$

所以

$$i\partial_t\left(U^{\dagger}U\right) = 0 \tag{20.45}$$

所以

$$U^{\dagger}\left(t,t_0\right)U\left(t,t_0\right) = constant \tag{20.46}$$

下面在确定这个常数。

由于

$$U\left(t_0,t_0\right) = \mathbf{1} \Longrightarrow U^{\dagger}\left(t_0,t_0\right)U\left(t_0,t_0\right) = \mathbf{1} \tag{20.47}$$

而由(20.45)式知

$$U^{\dagger}\left(t,t_0\right)U\left(t,t_0\right) \tag{20.48}$$

不随时间变化。所以

$$U^{\dagger}\left(t,t_0\right)U\left(t,t_0\right) = 1 \tag{20.49}$$

这说明U算子是幺正算子。

20.3.2 S矩阵

真正的相互作用过程是发生在整个时间区域的。因为一般地讲势分布在整个空间中。所以粒子应始终处在相互作用中。但实际情况往往是势虽然分布在整个空间中但由于我们遇到的势一般衰减较快，所以真正起重要作用的区域其实是很小的。

在此区域外将粒子近似看成是自由粒子一般不会带来太大误差。更何况如果真要在全空间考虑相互作用我们也不会处理。

在这种简化了的物理图像基础上，我们来考虑一种特殊的情况。假设初态粒子是一个自由粒子。初态时间$t=-\infty$。经过一番传播后在某一时刻发生相互作用。然后再作为自由粒子传播到$t=\infty$去。容易看出这种情况无非就是将$U(t,t_0)$中t,t_0取做$\pm\infty$的情况。即

$$|\infty\rangle^I = \lim_{\substack{t\to\infty \\ t_0\to-\infty}} U(t,t_0)\,|-\infty\rangle^I \tag{20.50}$$

由于$U(\infty,-\infty)$这个特殊的时间演化算子非常常用。它虽然特殊但意义重要，我们就定义

$$S \equiv U(\infty,-\infty) = \lim_{\substack{t\to\infty \\ t_0\to-\infty}} U(t,t_0) \tag{20.51}$$

这样一来便有：

$$|\infty\rangle = S\,|-\infty\rangle \tag{20.52}$$

显然S满足所有U矩阵的性质。事实上我们在用场论作为工具进行计算的时候。计算的主要内容就是这个S矩阵。

20.4 Dyson展开微扰处理

显然不能对精确求解时间演化算子（Dyson算子）抱任何幻想。只能进行微扰处理。$U(t,t_0)$所满足的微分方程是

$$i\partial_t U(t,t_0) = H_I(t)\,U(t,t_0) \tag{20.53}$$

方程的边条件是

$$U(t,t) = \mathbf{1} \tag{20.54}$$

微扰求解这样一个方程的方法是将它化成一个等价的积分方程，对方程两边做形式积分

$$U(t,t_0) = -i\int_{t_0}^{t} dt' H_I\left(t'\right) U\left(t',t\right) + c \tag{20.55}$$

我们可利用边条件来确定c。显然有

$$U(t_0,t_0) = -i\int_{t_0}^{t_0} dt' H_I\left(t'\right) U\left(t',t_0\right) + c \tag{20.56}$$

所以

$$\mathbf{1} = 0 + c \tag{20.57}$$

所以

$$c = \mathbf{1} \tag{20.58}$$

这样考虑边条件后的等价积分方程为

$$U(t, t_0) = \mathbf{1} - i \int_{t_0}^{t} dt' H_I\left(t'\right) U\left(t', t_0\right) \tag{20.59}$$

这是一个Volterra型积分方程。可通过逼近法将其将其展成计数Neumann-Liouville级数来求解。得到这个展开的方法是反复地迭代。这样便有：

$$\begin{aligned} U(t, t_0) = \mathbf{1} &+ (-i) \int_{t_0}^{t} dt_1 H_I(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) \\ &+ \cdots + (-i)^2 \int_{t_0}^{t} dt_1 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) H_I(t_2) \cdots H_I(t_n) + \cdots \end{aligned} \tag{20.60}$$

如果H_I是一个小量那么我们可以期望这是个收敛的级数（这是一个算符方程，级数能够收敛其实只是我们的愿望和猜想）。

由这个展开式我们可以看到相互作用绘景的优越性。在时间演化算子（知道了这个算子原则上就知道了一切）的微扰展开式中只出现了H_I而不再出现H_0。在许多问题中由于我们可将H_I取代成一个小量，这样就可以采用微扰处理。如果没将H_0分出来，那么微扰法便不能用了。

虽然这种展开使微扰求解成为可能，但由于级数中的各个乘在一起的积分的积分上限各不相同从而使得问题变得很难处理。不过Dyson想出了一个好办法来解决这一问题。

困难在于积分上限不同。我么可以将积分上限统一写成t，即在整个时间范围内积分。当然这样做的结果要求我们用阶跃函数来抵消这个变化。以第二项为例：

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) \\ &= \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) \theta(t_1 - t_2) \end{aligned} \tag{20.61}$$

其中$\theta(t_1 - t_2)$保证了$t_1 < t_2$也就确定了时序。我们用同样是指定时序的编时乘积来做这件事。我们有

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 T\left[H_I(t_1) H_I(t_2)\right] \\ &= 2 \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) \theta(t_1 - t_2) \end{aligned} \tag{20.62}$$

这是因为编时乘积的积分区域扩大了一倍。或者由编时乘积性质也可看出

$$T\left[\phi\left(x\right)\phi\left(y\right)\right]=\theta\left(x^{0}-y^{0}\right)\phi\left(x\right)\phi\left(y\right)+\theta\left(y^{0}-x^{0}\right)\phi\left(x\right)\phi\left(y\right) \tag{20.63}$$

对积分而言这将多贡献出一项。这样便有：

$$\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2H_I\left(t_1\right)H_I\left(t_2\right)=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t}dt_2T\left[H_I\left(t_1\right)H_I\left(t_2\right)\right] \tag{20.64}$$

由式(20.63)可以看出编时乘积中如果有n个相乘的算符，那么编时乘积就会给出$n!$项。因此我们有：

$$\begin{aligned}U\left(t,t_0\right)=&\mathbf{1}+\left(-i\right)\int_{t_0}^{t}dt_1H_I\left(t_1\right)+\frac{\left(-i\right)^2}{2!}\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t}dt_2T\left[H_I\left(t_1\right)H_I\left(t_2\right)\right]\\&+\cdots+\frac{\left(-i\right)^n}{n!}\int_{t_0}^{t}\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}}dt_1\cdots dt_nT\left[H_I\left(t_1\right)H_I\left(t_2\right)\cdots H_I\left(t_n\right)\right]+\cdots\\=&\sum_n\frac{\left(-i\right)^n}{n!}\int_{t_0}^{t}\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}}dt_1\cdots dt_nT\left[H_I\left(t_1\right)H_I\left(t_2\right)\cdots H_I\left(t_n\right)\right]\\=&Te^{-i\int_{t_0}^{t}dtH_I(t)}\end{aligned} \tag{20.65}$$

这样我们有S矩阵

$$\begin{aligned}S=&U\left(\infty,-\infty\right)\\=&Te^{-i\int_{-\infty}^{\infty}dtH_I(t)}\\=&Te^{-i\int_{-\infty}^{\infty}dx^4\mathcal{H}_I(x)}\\=&\mathbf{1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-i\right)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}dx_1^4\cdots dx_n^4T\left[\mathcal{H}_I\left(x_1\right)\mathcal{H}_I\left(x_2\right)\cdots\mathcal{H}_I\left(x_n\right)\right]\end{aligned}$$

其中$\mathcal{H}_I\left(x\right)$是$\mathcal{H}$-氏密度。

20.4.1 编时乘积不影响协变性

当我们将普通乘积改写成编时乘积以后一个问题便自然地出现了。那就是编时乘积会不会破坏原来的协变性。

在类时间隔的情况下，Lorentz变换不影响时间顺序。因此编时乘积不影响协变性。

在类空间隔，由于此时的联系是会超光速的，因此Lorentz变换可能会引起时序变化，但由于此时

$$\left[\mathcal{H}_I\left(x_1\right),\mathcal{H}_I\left(x_2\right)\right]=0$$

对易的算符表明乘积顺序的改变将不影响结果。所以编时乘积不影响协变性。

20.5 Wick定理

绝大多数情况下我们都不能得到精确结果，而只能微扰处理。通过Dyson展开我们得到了一个S矩阵的微扰级数。级数中的每一项都包含了一个长算符的编时乘积。但是显然编时乘积不是一种容易处理的形式。最好能用一种较容易处理算符乘积形式来代替编时乘积。

用场论方法处理问题的时候最终的目的是要求跃迁矩阵元$\langle f|\,S\,|i\rangle$。而当初在处理零点能发散问题的曾经引入过一种正规乘积。正规乘积的特点是其真空期待值为零。因此计算这种算符乘积的矩阵元时会因为有许多项为零而是计算简化。下面我们要做的就是将不容易处理的编时乘积用容易处理正规乘积表示。

下面用归纳法诸葛处理不同个数长算子的乘积。

1、一个算子的情况

$$T\left[\phi\left(x\right)\right]=:\phi\left(x\right):$$

2、两个算子的情况

$$T\left[\phi_1\left(x_1\right)\phi_2\left(x_2\right)\right]\neq:\phi_1\left(x_1\right)\phi_2\left(x_2\right):$$

ϕ_1和ϕ_2可以是两种场。

我们来计算这两种乘积的差，假设$t_1>t_2$。（$\phi_i=\phi_i^+ +\phi_i^-$分成正负频两部分。正规乘积要求$\phi_i^-$始终在左边。将$\phi_2^-$换到$\phi_1$的左边要分别与$\phi_1^+,\phi_1^-$交换位置。如果是不同的场或Boson，那么这个交换不改变符号。如果是Fermi，则这个交换带来一个负号。ϕ_1^-,ϕ_2^-都是产生算子，不同的场或同一Boson场对易，同一Fermi场反对易。既然是常数，求他的期待值当然不会有什么影响。这两项相等是因为$\phi_1\phi_2$展开的其他三项的真空期待值为零）

$$\begin{aligned}
T\left[\phi_1\left(x_1\right)\phi_2\left(x_2\right)\right]-:\phi_1\left(x_1\right)\phi_2\left(x_2\right):&\equiv T\left[\phi_1\phi_2\right]-:\phi_1\phi_2:=\phi_1\phi_2-:\phi_1\left(\phi_2^+ +\phi_2^-\right):\\
&=\phi_1\phi_2-:\phi_1\phi_2^+ +\phi_1\phi_2^-:=\phi_1\phi_2-\left(\phi_1\phi_2^+ \pm\phi_2^-\phi_1\right)\\
&=\phi_1\left(\phi_2^+ +\phi_2^-\right)-\phi_1\phi_2^+ \mp\phi_2^-\phi_1=\phi_1\phi_2^+ +\phi_1\phi_2^- -\phi_1\phi_2^+ \mp\phi_2^-\phi_1\\
&=\phi_1\phi_2^- \mp\phi_2^-\phi_1=\left[\phi_1,\phi_2^-\right]_{\mp}=\left[\phi_1^+ +\phi_1^-,\phi_2^-\right]_{\mp}=\left[\phi_1^+,\phi_2^-\right]_{\mp}+\left[\phi_1^-,\phi_2^-\right]_{\mp}\\
&=\left[\phi_1^+,\phi_2^-\right]_{\mp}=\text{constant}=\langle 0|\left[\phi_1^+,\phi_2^-\right]_{\mp}|0\rangle=\langle 0|\,\phi_1^+\phi_2^- \mp\phi_2^-\phi_1^+\,|0\rangle\\
&=\langle 0|\,\phi_1^+\phi_2^-\,|0\rangle=\langle 0|\,\phi_1\phi_2\,|0\rangle=\langle 0|\,T\left[\phi_1\phi_2\right]|0\rangle\\
&=\underbrace{\phi_1\left(x_1\right)\phi_2}\left(x_2\right)
\end{aligned}$$

我们用$\phi_1\phi_2$来表示编时乘积与正规乘积之差，称$\phi_1\phi_2$为收缩，这样有

$$\phi_1(x_1)\phi_2(x_2) = \langle 0|T[\phi_1\phi_2]|0\rangle$$

而编时乘积的真空期待值就是传播子（Green函数）。这一点在讨论场量子化时已经讨论过。

这样一来对二个场算符的情况我们就有

$$\begin{aligned} T[\phi_1\phi_2] &=: \phi_1\phi_2 : + \phi_1\phi_2 \\ &=: \phi_1\phi_2 : + \langle 0|T[\phi_1\phi_2]|0\rangle \end{aligned}$$

以上是两个场算符的结果。下面考虑三个场算符的编时乘积与正规乘积的关系。假设$t_1, t_2 > t_3$。

$$\begin{aligned} T[\phi_1\phi_2\phi_3] &= T[\phi_1\phi_2]\phi_3 \\ &= (:\phi_1\phi_2: + \phi_1\phi_2)\left(\phi_3^+ + \phi_3^-\right) \\ &= \underbrace{:\phi_1\phi_2:\phi_3^+}_{\text{仍是正规乘积}} + \phi_1\phi_2\phi_3^+ + \underbrace{:\phi_1\phi_2:\phi_3^-}_{\text{不再是正规乘积}} + \phi_1\phi_2\phi_3^- \\ &=: \phi_1\phi_2:\phi_3^+ + :\phi_1\phi_2:\phi_3^- + \phi_1\phi_2\left(\phi_3^+ + \phi_3^-\right) \\ &=: \phi_1\phi_2:\phi_3^+ + \phi_3^- : \phi_1\phi_2 : - \phi_3^- : \phi_1\phi_2 : + : \phi_1\phi_2 : \phi_3^- + \phi_1\phi_2\phi_3 \\ &=: \phi_1\phi_2\phi_3 : + \left[:\phi_1\phi_2:, \phi_3^-\right] + \phi_1\phi_2\phi_3 \end{aligned}$$

其中：因为

$$:\phi_1\phi_2\phi_3: = \underbrace{:\phi_1\phi_2:\phi_3^+ + \phi_3^- : \phi_1\phi_2 :}_{\text{都是正规乘积}}$$

这里都是正号的原因是Boson自然是正，Fermi因交换两次也是正号。

其中

$$\begin{aligned} \left[:\phi_1\phi_2:, \phi_3^-\right] &= \left[\phi_1\phi_2^+ \pm \phi_2^-\phi_1, \phi_3^-\right] \\ &= \left[\phi_1\phi_2^+, \phi_3^-\right] \pm \left[\phi_2^-\phi_1, \phi_3^-\right] \\ &= \phi_1\left[\phi_2^+, \phi_3^-\right]_\mp \pm \left[\phi_1, \phi_3^-\right]_\mp \phi_2^+ \pm \left(\pm\left[\phi_2^-, \phi_3^-\right]_\mp \phi_1 + \phi_2^-\left[\phi_1, \phi_3^-\right]_\mp\right) \\ &= \phi_1\left[\phi_2^+, \phi_3^-\right]_\mp \pm \left[\phi_1^+, \phi_3^-\right]_\mp \phi_2^+ \pm \left[\phi_1^-, \phi_3^-\right]_\mp \phi_2^+ \pm \phi_2^-\left[\phi_1^+, \phi_3^-\right]_\mp \pm \phi_2^-\left[\phi_1^-, \phi_3^-\right]_\mp \\ &= \phi_1\left[\phi_2^+, \phi_3^-\right]_\mp \pm \left[\phi_1^+, \phi_3^-\right]_\mp \phi_2^+ \pm \phi_2^-\left[\phi_1^+, \phi_3^-\right]_\mp \\ &= \phi_1\left[\phi_2^+, \phi_3^-\right]_\mp \pm \left[\phi_1^+, \phi_3^-\right]_\mp \phi_2 \end{aligned}$$

其中+：Boson，−：Fermi。

$$\begin{aligned}\left[\phi_1\phi_2^+,\phi_3^-\right] &= \phi_1\phi_2^+\phi_3^- - \phi_3^-\phi_1\phi_2^+ \\ &= \phi_1\phi_2^+\phi_3^- \mp \phi_1\phi_3^-\phi_2^+ \pm \phi_1\phi_3^-\phi_2^+ - \phi_3^-\phi_1\phi_2^+ \\ &= \phi_1\left[\phi_2^+,\phi_3^-\right]_\mp \pm \left[\phi_1,\phi_3^-\right]_\mp \phi_2^+\end{aligned}$$

已知

$$\left[\phi_1^+,\phi_2^-\right]_\mp = \underbrace{\phi_1\phi_2}$$

所以

$$\left[\phi_1\phi_2^+,\phi_3^-\right] = \phi_1\underbrace{\phi_2\phi_3}\pm = \underbrace{\phi_1\phi_3}\phi_2$$

所以编时乘积

$$\begin{aligned}T\left[\phi_1\phi_2\phi_3\right] &=: \phi_1\phi_2\phi_3 : + \phi_1\underbrace{\phi_2\phi_3} \pm \underbrace{\phi_1\phi_3}\phi_2 + \underbrace{\phi_1\phi_2}\phi_3 \\ &=: \phi_1\phi_2\phi_3 : + : \phi_1\underbrace{\phi_2\phi_3} : + : \underbrace{\phi_1\phi_2}\phi_3 : + : \underbrace{\phi_1\phi_2\phi_3} :\end{aligned}$$

这个结果可推广至n个场算符的情况。

$$\begin{aligned}T\left[\phi_1\phi_2\phi_3\cdots\phi_n\right] =: \phi_1\phi_2\phi_3\cdots\phi_n : \\ + : \underbrace{\phi_1\phi_2}\phi_3\cdots\phi_n : + : \underbrace{\phi_1\phi_2}\phi_3\cdots\phi_n : + \cdots \text{一次收缩} \\ + : \underbrace{\phi_1\phi_2}\underbrace{\phi_3\phi_4}\cdots\phi_n : + : \phi_1\overbrace{\phi_2\phi_3}\phi_4\cdots\phi_n : + \cdots \text{二次收缩} \\ + : \underbrace{\phi_1\phi_2}\underbrace{\phi_3\phi_4}\cdots\underbrace{\phi_i\phi_j}\cdots\phi_n : + \cdots \text{三次收缩} \\ \vdots \\ + \cdots \qquad \text{高次收缩}\end{aligned}$$

这就是Wick定理。通过这一定理我们将编时乘积化成了若干个正规乘积。正规乘积处理起来容易的多。

20.5.1 收缩的各种情况

等于零的收缩

不同场的情况：$\underbrace{\phi\left(x_1\right)\psi}\left(x_2\right) = \langle 0|\left[\phi^+\left(x_1\right),\psi^-\left(x_2\right)\right]|0\rangle = 0$

同种场的情况：$\underbrace{\phi\left(x_1\right)\phi}\left(x_2\right) = \langle 0|\left[\phi^+\left(x_1\right),\phi^-\left(x_2\right)\right]_\mp|0\rangle = 0$

这两种情况都是$\langle 0|\,\phi^{\pm}\,|0\rangle$或$\langle 0|\,\phi^{+},\phi^{-}\,|0\rangle$的形式。因此都为零。不为零的收缩：

$$\text{标量场：}\quad \underbrace{\phi\left(x_1\right)\phi^{\dagger}}\left(x_2\right)=\langle 0|\,T\phi\left(x_1\right)\phi\left(x_2\right)|0\rangle=i\Delta_F\left(x_1-x_2\right)$$

$$\text{旋量场：}\quad \underbrace{\psi\left(x_1\right)\bar{\psi}}\left(x_2\right)=\langle 0|\,T\psi\left(x_1\right)\bar{\psi}\left(x_2\right)|0\rangle=iS_F\left(x_1-x_2\right)$$

$$\text{矢量场：}\quad \underbrace{A_{\mu}\left(x_1\right)A_{\nu}}\left(x_2\right)=\langle 0|\,TA_{\mu}\left(x_1\right)A_{\nu}\left(x_2\right)|0\rangle=iD_{F_{\mu\nu}}\left(x_1-x_2\right)$$

即各种收缩都是相应场的传播子。

20.6 旋量QED的微扰处理

QED是微扰处理成功的典范。事实上在以往的各种物理理论中还没有一个像QED那样以那样惊人的精度被检验过。微扰QED成功的原因在于其耦合常数是一个无量纲的小量$\alpha=\frac{1}{137}$。

下面我们由前面的结果出发做QED的微扰处理。

电动力学是描述电磁相互作用的理论，也就是描述带电粒子间相互作用的理论。如果带电粒子是一个标量粒子，那么描述相应的电磁相互作用理论便是标量QED。如果带电粒子是旋量粒子，描述它的便是旋量QED。这里我们以旋量QED为例介绍这一处理过程（旋量QED当然会比标量QED处理起来繁琐些，但其在实际工作应用较多。因为QED处理的大多数问题都是Fermi间的相互作用问题）

我们可以通过最小代换

$$\partial_{\mu}\longrightarrow\partial_{\mu}+ieA_{\mu}\equiv D_{\mu},\ \left(p_{\mu}\longrightarrow p_{\mu}ieA_{\mu}\right)$$

来引入电磁相互作用。这种用协变微分的方式引入相互作用的方法是引入规范相互作用的标准方法。电磁场是$U\left(1\right)$规范场，其生成元是i。之所以称之为最小耦合、最小代换是因为这个结果同样可由最小作用量原理得到。或者这种耦合是满足最小作用原理的。

QED的Lagrange量为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}=&\mathcal{L}_{Dirac}+\mathcal{L}_{EM}+\mathcal{L}_{I}\\&=\bar{\psi}\left(i\not{D}-m\right)\psi-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\\&=\bar{\psi}\left[i\left(\not{\partial}+ie\not{A}\right)-m\right]\psi-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\\&=\bar{\psi}\left[i\not{\partial}-m\right]\psi-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-e\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi A^{\mu}\end{aligned}$$

这样由最小代换我们知道了相互作用的Lagrange量和Hamilton量的形式：

$$\mathcal{L}_I = -:e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu:$$

$$\mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_I =:e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu:$$

这里将正规乘积明显地写出来，表示去掉零点能。由这个Lagrange量我们可以通过Euler-Lagrange方程直接得到相应的运动方程：

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \equiv j^\mu \\ \left(i\partial\!\!\!/ - m - eA\!\!\!/\right)\psi = 0 \\ \bar{\psi}\left(-i\partial\!\!\!/ - m - eA\!\!\!/\right) = 0 \end{cases}$$

这里$\partial_\mu j^\mu = 0$流守恒。（注：前面的最小耦合可由定域规范不变性得到，见规范场）

由旋量场与电磁场耦合的Hamilton量$\mathcal{H}_I$出发。在相互作用绘景中我们可以得到S矩阵的微扰级数的形式：

$$\begin{aligned}
S &= \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int dx_1^4\cdots dx_n^4 T\left[\mathcal{H}_I(x_1)\mathcal{H}_I(x_2)\cdots\mathcal{H}_I(x_n)\right] \\
&= \mathbf{1} + (-i)\int dx^4 T\left[\mathcal{H}_I(x)\right] \\
&+ \frac{(-i)^2}{2!}\int dx_1^4 dx_2^4 T\left[\mathcal{H}_I(x_1)\mathcal{H}_I(x_2)\right] \\
&+ \cdots \\
&+ \frac{(-i)^n}{n!}\int dx_1^4\cdots dx_n^4 T\left[\mathcal{H}_I(x_1)\mathcal{H}_I(x_2)\cdots\mathcal{H}_I(x_n)\right] \\
&+ \cdots \\
&= \mathbf{1} + (-ie)\int dx^4 T\left[:\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x):\right] \\
&+ \frac{(-ie)^2}{2!}\int dx_1^4 dx_2^4 T\left[:\bar{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)A^\mu(x_1)::\bar{\psi}(x_2)\gamma_\mu\psi(x_2)A^\mu(x_2):\right] \\
&+ \cdots \\
&+ \frac{(-ie)^n}{n!}\int dx_1^4\cdots dx_n^4 T\left[:\bar{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)A^\mu(x_1)::\bar{\psi}(x_2)\gamma_\mu\psi(x_2)A^\mu(x_2):\cdots:\bar{\psi}(x_n)\gamma_\mu\psi(x_n)A^\mu(x_n):\right] \\
&+ \cdots
\end{aligned}$$

这个级数中的每项都包含一个编时乘积。这个编时乘积可通过Wick定理进行处理。在做进一步的处理之前先来看看我们最终的目的。

20.6.1 跃迁振幅S_{fi}

物理学所要描述的就是演化问题。具体到量子理论中就是要知道有一个态到另一个态的跃迁几率。

S矩阵是一种特殊的时间演化算子。它将一个态$|i\rangle$由$-\infty$时间演化到$+\infty$时间。我们关系的是，在$+\infty$时间处它跃迁到某一特殊末态$|f\rangle$的几率。这个几率振幅显然是：

$$S_{fi}=\langle f|\,S\,|i\rangle$$

我们已经知道初末态$|i\rangle,|f\rangle$是$t=\mp\infty$时的态，是自由态。而前面已经建立了Fock空间来描述这些态。下面来看看态的可能的形式和如何由真空态出发构造出这些态。

我们没有考虑任意的时间演化算符$U(t,t_0)$而是考虑它的一种特殊情况$S=U(\infty,-\infty)$的原因是我们希望初末状态都是自由粒子态。而在前几章中则已经充分讨论过自由场的量子化问题。且构造了相应的Fock空间。$\bar{s}$

初态和末态中可以含有任意数目的任意粒子

$$|i\rangle=|ps,\cdots,\bar{p}\bar{s}\cdots,k\lambda\cdots\rangle=b^{+}(ps)\cdots d^{+}(\bar{p}\bar{s})\cdots a^{+}(k\lambda)\cdots|0\rangle$$

$$|f\rangle=\left|p's',\cdots,\bar{p}'\bar{s}'\cdots,k'\lambda'\cdots\right\rangle=\langle 0|\,b\left(p's'\right)\cdots d\left(\bar{p}\bar{s}\right)\cdots a^{+}(k\lambda)$$

这里(ps)和$(\bar{p}\bar{s})$表示正反Fermion的动量和自旋。$(k\lambda)$则是光子的动量和极化（自旋）。可见在讨论S矩阵时我们可以利用自由场的结果。事实上在微扰论中，相互作用被简化为一个个顶点，顶点外的部分均为自由粒子。

现在我们就可以计算跃迁振幅了。在许多问题中（如碰撞问题），更关心的是粒子的动量而不是位置，初条件是粒子的动量而非位置，因此常在动量空间中计算。这里先由坐标空间的结果出发。最后过渡到动量空间。场算符在这两种表示间的变换就是Fourier变换。也就是平面波展开。$\psi(x),\bar{\psi}(x),A^{\mu}(x)$的平面波展开式分别为：

$$\psi(x)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\sum_s\left[b_s(p)\,u_s(p)\,e^{-ip\cdot x}+d_s(p)\,v_s(p)\,e^{ip\cdot x}\right]$$

$$\bar{\psi}(x)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\sum_s\left[b_s^{+}(p)\,\bar{u}_s(p)\,e^{ip\cdot x}+d_s(p)\,v_s(p)\,e^{-ip\cdot x}\right]$$

$$A^{\mu}(x)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\sum_{\lambda}\left[a_{\lambda}(\mathbf{k})\,\epsilon^{\mu}(\mathbf{k}\lambda)\,e^{-ik\cdot x}+a_{\lambda}^{+}(\mathbf{k})\,\epsilon^{\mu}(\mathbf{k}\lambda)\,e^{ik\cdot x}\right]$$

（注：这是混用了$a(\mathbf{k}\lambda)$和$a_{\lambda}(\mathbf{k})$的写法，应调整一致）

这样原则上我们就可以计算$S_{fi}=\langle f|\,S\,|i\rangle$了。只需直接代进入计算即可。但是在做这件事之前先要做的因该是将编时乘积换乘正规乘积。下面逐项考虑Dyson展开中的各级微扰。将用编时乘积表示S矩阵（S矩阵是演化算符）的各阶项用正规乘积表示。并用图示编时这些贡献（Feynman图）。

零阶：

$$S^{(0)}=\mathbf{1}$$

这表示不发生反应的过程。是我们不关心的。

$$\begin{aligned}
S^{(1)} &= -i\int dx^4 T\left[\mathcal{H}_I(x)\right] \\
&= -ie\int dx^4 T\left[:\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x):\right] \\
&= -ie\int dx^4 :\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x): \\
&= -ie\int dx^4 :\left(\bar{\psi}^{(+)}+\bar{\psi}^{(-)}\right)\gamma_\mu\left(\psi^{(+)}+\psi^{(-)}\right)\left(A^{\mu(+)}+A^{\mu(-)}\right): \\
&= -ie\int dx^4 :\bar{\psi}^{(+)}\gamma_\mu\psi^{(+)}A^{\mu(+)}+\bar{\psi}^{(+)}\gamma_\mu\psi^{(+)}A^{\mu(-)} \\
&+\bar{\psi}^{(+)}\gamma_\mu\psi^{(-)}A^{\mu(+)}+\bar{\psi}^{(+)}\gamma_\mu\psi^{(-)}A^{\mu(-)}+\bar{\psi}^{(-)}\gamma_\mu\psi^{(+)}A^{\mu(+)} \\
&+\bar{\psi}^{(-)}\gamma_\mu\psi^{(+)}A^{\mu(-)}+\bar{\psi}^{(-)}\gamma_\mu\psi^{(-)}A^{\mu(+)}+\bar{\psi}^{(-)}\gamma_\mu\psi^{(-)}A^{\mu(+)}:
\end{aligned}$$

这里我们将产生（负频），消失（正频）部分用图示画出了:

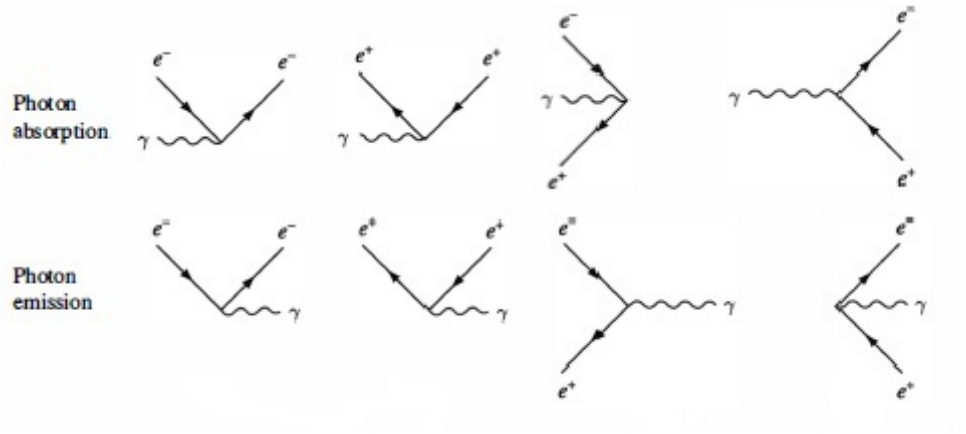


图 20.1: $S^{(1)}$中的8项贡献

用这些图像规则就可以将$S^{(1)}$中的8项贡献分别用图形表示出来。可以看出，写出各种可能的项（对$S^{(1)}$来说的8项）的工作。就是画出所有可能的图的过程。在实

际工作中，我们所做的就是先画出需要的图。在根据图的Feynman规则写出S矩阵的表达式。这里需要强调一点的是Fermion线中的箭头不是动量方向。而标记的是正反粒子的情况。正粒子进去是（**插入图**），反粒子进去就是（**插入图**）。而光子是真中性粒子。反粒子就是它自己。所以便不用箭头标记了（动量是单独标记的）。

再一点需要说明的是，当我们按照Feynman图算出S矩阵的时候，Fermion线部分要逆着Fermion线写，这一点非常重要。因为只有这样才能保证矩阵元是一个数。$\bar{\psi}$是行矩阵，ψ是列矩阵，只有$\bar{\psi}$在ψ前才能得到数。

下面回来讨论$S^{(1)}$的结果。$S^{(1)}$中有8个过程。由Feynman图中可以很直观地看出来这8个过程都是两个Fermion和一个光子的过程。由运动学可明显看出这8个过程是不存在了。是运动学禁戒的。他们不能同时满足能动量守恒。（**插入图**）

既然QED的S矩阵的零阶微扰平庸。一阶微扰是运动学禁戒的。那么有意义的最低阶贡献就是二阶项了。下面处理二阶项。用Wick将编时乘积分解成正规乘积。

$$\begin{aligned}S^{(2)}&=\frac{(-ie)^2}{2!}\int dx_1^4dx_2^4T\left[:\mathcal{H}_I\left(x_1\right)::\mathcal{H}_I\left(x_2\right):\right]\\&=\frac{(-ie)^2}{2!}\int dx_1^4dx_2^4T\left[:\bar{\psi}\left(x_1\right)\gamma_\mu\psi\left(x_1\right)A^\mu\left(x_1\right)::\bar{\psi}\left(x_2\right)\gamma_\nu\psi\left(x_2\right)A^\nu\left(x_2\right):\right]\end{aligned}$$

注意每个$\mathcal{H}_I\left(x\right)$都应是正规乘积形式的以去掉零点。用Wick定理展开，去掉收缩为零的项，如$\underbrace{\psi\left(x_1\right)\psi}\left(x_2\right)$ 或者$\underbrace{\bar{\psi}\left(x_1\right)\bar{\psi}}\left(x_2\right)$ 或者$\underbrace{\psi\left(x_1\right)A}_\mu\left(x_2\right)$

$$\begin{aligned}S^{(2)}=&\text{(i)}\frac{(-ie)^2}{2!}\int dx_1^4dx_2^4:\bar{\psi}\left(x_1\right)\gamma_\mu\psi\left(x_1\right)\bar{\psi}\left(x_2\right)\gamma_\nu\psi\left(x_2\right)A^\mu\left(x_1\right)A^\nu\left(x_2\right):\\&+\text{(ii)}\frac{(-ie)^2}{2!}\int dx_1^4dx_2^4:\bar{\psi}\left(x_1\right)\gamma_\mu\underbrace{\psi\left(x_1\right)\bar{\psi}}\left(x_2\right)\gamma_\nu\psi\left(x_2\right)A^\mu\left(x_1\right)A^\nu\left(x_2\right):\\&+\text{(iii)}\frac{(-ie)^2}{2!}\int dx_1^4dx_2^4:\underbrace{\bar{\psi}\left(x_1\right)\gamma_\mu\psi\left(x_1\right)\bar{\psi}\left(x_2\right)\gamma_\nu\psi}\left(x_2\right)A^\mu\left(x_1\right)A^\nu\left(x_2\right):\\&+\text{(iv)}\frac{(-ie)^2}{2!}\int dx_1^4dx_2^4:\bar{\psi}\left(x_1\right)\gamma_\mu\psi\left(x_1\right)\bar{\psi}\left(x_2\right)\gamma_\nu\psi\left(x_2\right)\underbrace{A^\mu\left(x_1\right)A}^\nu\left(x_2\right):\\&+\text{(v)}\frac{(-ie)^2}{2!}\int dx_1^4dx_2^4:\bar{\psi}\left(x_1\right)\gamma_\mu\underbrace{\psi\left(x_1\right)\bar{\psi}}\left(x_2\right)\gamma_\nu\psi\left(x_2\right)\underbrace{A^\mu\left(x_1\right)A}^\nu\left(x_2\right):\\&+\text{(vi)}\frac{(-ie)^2}{2!}\int dx_1^4dx_2^4:\underbrace{\bar{\psi}\left(x_1\right)\gamma_\mu\psi\left(x_1\right)\bar{\psi}\left(x_2\right)\gamma_\nu\psi}\left(x_2\right)\underbrace{A^\mu\left(x_1\right)A}^\nu\left(x_2\right):\\&+\text{(vii)}\frac{(-ie)^2}{2!}\int dx_1^4dx_2^4:\underbrace{\bar{\psi}\left(x_1\right)\gamma_\mu\psi\left(x_1\right)\bar{\psi}\left(x_2\right)\gamma_\nu\psi}\left(x_2\right)A^\mu\left(x_1\right)A^\nu\left(x_2\right):\\&+\text{(viii)}\frac{(-ie)^2}{2!}\int dx_1^4dx_2^4:\underbrace{\bar{\psi}\left(x_1\right)\gamma_\mu\psi\left(x_1\right)\bar{\psi}\left(x_2\right)\gamma_\nu\psi}\left(x_2\right)\underbrace{A^\mu\left(x_1\right)A}^\nu\left(x_2\right):\end{aligned}$$

下面简单分析这几项的含义：(i)是两个独立的$S^{(1)}$中的过程。即一个Fermion发射或吸收一个光子。在$S^{(1)}$的分析中已经指出这种情况是运动学禁戒的。(ii) (iii)两种情况中有两条光子外线和两条Fermion外线,这样的过程有许多.

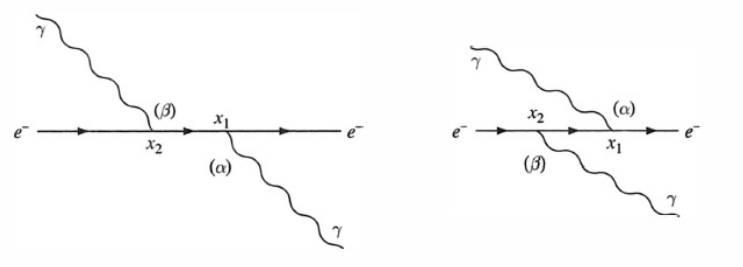


图 20.2: Fermion和光子散射的过程

(iv)这是两Fermion散射湮灭的过程。

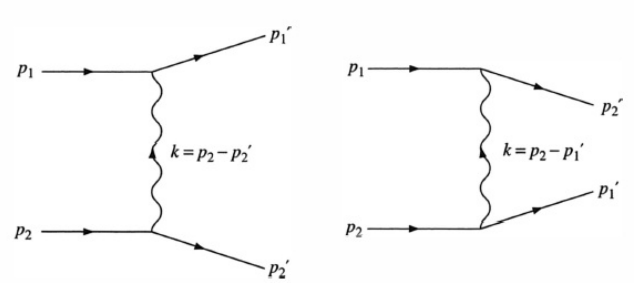


图 20.3: 两个Fermion散射湮灭的过程

(v) (vi)电子自能。体现了没有裸中子。电子处在云雾中。

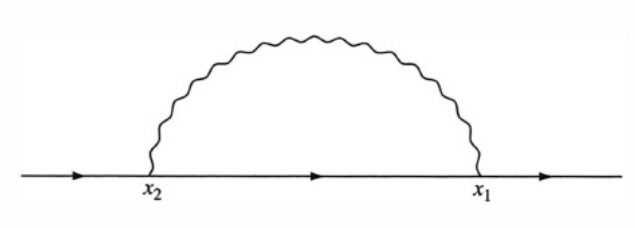


图 20.4: 电子自能

(vii)真空极化。正负电子对。

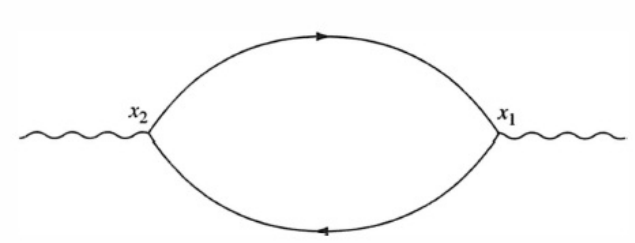


图 20.5: 真空极化

(viii)真空涨落。无外线。只在初末态相同时对跃迁矩阵元贡献一个相位。

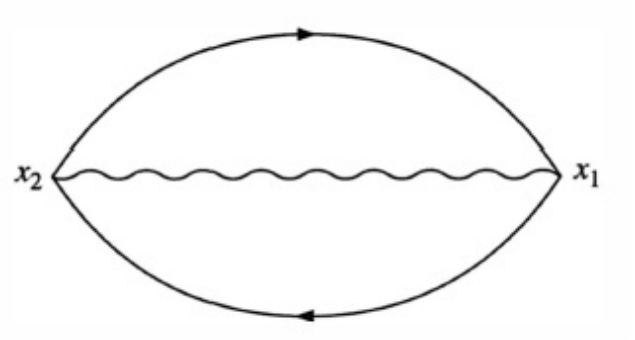


图 20.6: 真空涨落

总结前面的结果可以知道下面的图形规则。**（在此插入图）**用这三种图来表示相互作用**（在此插入图）**

有了$S^{(1)}S^{(2)}$的微扰结果。我们就可以将前面的各级展式用图形表示。这种图形和表达式间的对应是很直接的。只是Fermion图的情况特殊一些。这里先单独考虑一下这部分。即(vii)项的情况；

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{\bar{\psi}\left(x_1\right)\gamma_\mu\psi\left(x_1\right)\bar{\psi}\left(x_2\right)\gamma_\nu\psi}\left(x_2\right)A^\mu\left(x_1\right)A^\nu\left(x_2\right)\\
&=\underbrace{\bar{\psi}_\alpha\left(x_1\right)\left(\gamma_\mu\right)'_{\alpha\beta}\psi_\beta\left(x_1\right)\bar{\psi}_\lambda\left(x_2\right)\left(\gamma_\nu\right)_{\lambda\delta}\psi_\delta}\left(x_2\right)A^\mu\left(x_1\right)A^\nu\left(x_2\right)\\
&=\left(\gamma_\mu\right)_{\alpha\beta}\left(\gamma_\nu\right)_{\lambda\delta}\underbrace{\bar{\psi}_\alpha\left(x_1\right)\psi_\delta}\left(x_2\right)\underbrace{\psi_\beta\left(x_1\right)\bar{\psi}_\lambda}\left(x_2\right)A^\mu\left(x_1\right)A^\nu\left(x_2\right)\\
&=\left(\gamma_\mu\right)_{\alpha\beta}\left(\gamma_\nu\right)_{\lambda\delta}\left[-iS_F\left(x_{2-}x_1\right)\right]_{\delta\alpha}\left[iS_F\left(x_{1-}x\right)\right]_{\beta\lambda}A^\mu\left(x_1\right)A^\nu\left(x_2\right)\\
&=-\left(\gamma_\mu\right)_{\alpha\beta}\left[iS_F\left(x_{1-}x_2\right)\right]_{\beta\lambda}\left(\gamma_\nu\right)_{\lambda\delta}\left[iS_F\left(x_{2-}x_1\right)\right]_{\delta\alpha}A^\mu\left(x_1\right)A^\nu\left(x_2\right)\\
&=-tr\left[\gamma_\mu iS_F\left(x_{1-}x_2\right)\gamma_\nu iS_F\left(x_{2-}x_1\right)\right]A^\mu\left(x_1\right)A^\nu\left(x_2\right)
\end{aligned}
$$

这就是说Fermion图将给出一个负trace。由前面的讨论结果我们可以总结出图形规则。

20.7 Feynman规则

我们现在要做的是将前面得到的各级微扰的展式用图形规则表示出来。其实我们关心的并不是S矩阵本身。而是跃迁矩阵元

$$\langle f|\, S\, |i\rangle$$

S矩阵有许多项。（原则上我们应该将$\psi = \psi^+ + \psi^-$代进去得到各种可能的项。但在我们只关心矩阵元$\langle f|\, S\, |i\rangle$时，许多项为零。这里我们关心的是$\langle f|\, S\, |i\rangle$的图形规则。）

下面从一些具体的过程出发来总结这个规则。

20.7.1 Moeller散射

考虑一个电子——电子散射的过程

$$ee \longrightarrow ee$$

电子初末态动量和自旋为：

$$e\left(p_1 s_1\right) e\left(p_2 s_2\right) \longrightarrow e\left(p_1' s_1'\right) e\left(p_2' s_2'\right)$$

初态为：

$$|i\rangle = \left|e\left(p_1 s_1\right) e\left(p_2 s_2\right)\right\rangle = b^+\left(p_1 s_1\right) b^+\left(p_2 s_2\right)|0\rangle$$

末态为：

$$\langle f| = \left\langle e\left(p_1' s_1'\right) e\left(p_2' s_2'\right)\right| = \langle 0|\, b\left(p_2' s_2'\right) b\left(p_1' s_1'\right)$$

这样我们可以直接计算矩阵元

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \langle f|\, S^{(2)}\, |i\rangle \\ &= \langle 0|\, b\left(p_2' s_2'\right) b\left(p_1' s_1'\right) S^{(2)} b^+\left(p_1 s_1\right) b^+\left(p_2 s_2\right)|0\rangle \end{aligned}$$

$S^{(2)}$已通过Wick分解写成了正规乘积的形式。正规乘积的真空期待值为零。因此只有$S^{(2)}$中同时含有bb和b^+b^+的项才不为零。（交换时会给出一个常数项。这个项不为

零）下面只写出不为零的项。

$$
\begin{aligned}
S_{fi} &= \langle f| S^{(2)} |i\rangle \\
&= \langle 0| b\left(p_2' s_2'\right) b\left(p_1' s_1'\right) S^{(2)} b^{+}\left(p_1 s_1\right) b^{+}\left(p_2 s_2\right) |0\rangle \\
&= \langle 0| b\left(p_2' s_2'\right) b\left(p_1' s_1'\right) \left[\frac{(-ie)^2}{2!}\int dx_1^4 dx_2^4 \colon \bar{\psi}\left(x_1\right)\gamma_\mu \psi\left(x_1\right)\bar{\psi}\left(x_2\right)\gamma_\nu\psi\left(x_2\right) \underbrace{A^\mu\left(x_1\right) A^\nu}\left(x_2\right) \colon\right] \\
& b^{+}\left(p_1 s_1\right) b^{+}\left(p_2 s_2\right) |0\rangle
\end{aligned}
$$

将场算符$\bar{\psi}, \psi$分成正频和负频部分。显然真正能保留下来的便只剩与态中的产生湮灭算符配对的部分了。

$$
\begin{aligned}
S_{fi} &= \langle f| S^{(2)} |i\rangle \\
&= \langle 0| b\left(p_2' s_2'\right) b\left(p_1' s_1'\right) S^{(2)} b^{+}\left(p_1 s_1\right) b^{+}\left(p_2 s_2\right) |0\rangle \\
&= \langle 0| b\left(p_2' s_2'\right) b\left(p_1' s_1'\right) \left[\frac{(-ie)^2}{2!}\int dx_1^4 dx_2^4 \colon \bar{\psi}\left(x_1\right)\gamma_\mu \psi\left(x_1\right)\bar{\psi}\left(x_2\right)\gamma_\nu\psi\left(x_2\right) A^\mu\left(x_1\right) A^\nu\left(x_2\right) \colon\right] b^{+}\left(p_1 s_1\right. \\
&= \frac{(-ie)^2}{2!}\int dx_1^4 dx_2^4 \langle 0| b\left(p_2' s_2'\right) b\left(p_1' s_1'\right) \colon \left[\bar{\psi}^{(+)}\left(x_1\right)+\bar{\psi}^{(-)}\left(x_1\right)\right]\gamma_\mu\left[\psi^{(+)}\left(x_1\right)+\psi^{(-)}\left(x_1\right)\right] \\
&\left[\bar{\psi}^{(+)}\left(x_2\right)+\bar{\psi}^{(-)}\left(x_2\right)\right]\gamma_\nu\left[\psi^{(+)}\left(x_2\right)+\psi^{(-)}\left(x_2\right)\right] \colon b^{+}\left(p_1 s_1\right) b^{+}\left(p_2 s_2\right)|0\rangle \underbrace{A^\mu\left(x_1\right) A^\nu}\left(x_2\right) \\
&= \frac{(-ie)^2}{2!}\int dx_1^4 dx_2^4 \langle 0| b\left(p_2' s_2'\right) b\left(p_1' s_1'\right) \colon \bar{\psi}^{(-)}\left(x_1\right)\gamma_\mu\psi^{(+)}\left(x_1\right)\bar{\psi}^{(-)}\left(x_2\right)\gamma_\nu\psi^{(+)}\left(x_2\right) \colon \\
& b^{+}\left(p_1 s_1\right) b^{+}\left(p_2 s_2\right)|0\rangle \underbrace{A^\mu\left(x_1\right) A^\nu}\left(x_2\right)
\end{aligned}
$$

将（2-6-5）中$\bar{\psi},\psi$的形式代入

$$
\begin{aligned}
S_{fi} &= \langle f|\, S^{(2)}\, |i\rangle \\
&= \langle 0|\, b\left(p_2's_2'\right) b\left(p_1's_1'\right) S^{(2)} b^{+}\left(p_1s_1\right) b^{+}\left(p_2s_2\right)|0\rangle \\
&= \langle 0|\, b\left(p_2's_2'\right) b\left(p_1's_1'\right) \\
&\left[\frac{(-ie)^2}{2!}\int dx_1^4 dx_2^4 :\, \bar{\psi}\left(x_1\right)\gamma_\mu\psi\left(x_1\right)\bar{\psi}\left(x_2\right)\gamma_\nu\psi\left(x_2\right)A^\mu\left(x_1\right)A^\nu\left(x_2\right) :\right] b^{+}\left(p_1s_1\right) b^{+}\left(p_2s_2\right)|0\rangle \\
&= \frac{(-ie)^2}{2!}\int dx_1^4 dx_2^4 \langle 0|\, b\left(p_2's_2'\right) b\left(p_1's_1'\right) \\
&: \left[\bar{\psi}^{(+)}\left(x_1\right)+\bar{\psi}^{(-)}\left(x_1\right)\right]\gamma_\mu\left[\psi^{(+)}\left(x_1\right)+\psi^{(-)}\left(x_1\right)\right]\left[\bar{\psi}^{(+)}\left(x_2\right)+\bar{\psi}^{(-)}\left(x_2\right)\right]\gamma_\nu\left[\psi^{(+)}\left(x_2\right)+\psi^{(-)}\left(x_2\right)\right] : \\
&b^{+}\left(p_1s_1\right) b^{+}\left(p_2s_2\right)|0\rangle\, A^\mu\left(x_1\right)A^\nu\left(x_2\right) \\
&= \frac{(-ie)^2}{2!}\int dx_1^4 dx_2^4 \langle 0|\, b\left(p_2's_2'\right) b\left(p_1's_1'\right) \\
&: \bar{\psi}^{(-)}\left(x_1\right)\gamma_\mu\psi^{(+)}\left(x_1\right)\bar{\psi}^{(-)}\left(x_2\right)\gamma_\nu\psi^{(+)}\left(x_2\right) : b^{+}\left(p_1s_1\right) b^{+}\left(p_2s_2\right)|0\rangle\, A^\mu\left(x_1\right)A^\nu\left(x_2\right) \\
&= \frac{(-ie)^2}{2!}\int dx_1^4 dx_2^4 \langle 0|\, b\left(p_2's_2'\right) b\left(p_1's_1'\right) \\
&\left(\int \frac{d^3q_1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{q_1}}}\sum_{\sigma_1} b^{+}\left(q_1\sigma_1\right)\bar{u}\left(q_1\sigma_1\right)e^{iq_1\cdot x_1}\right)\gamma_\mu\left(\int \frac{d^3q_2}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{q_2}}}\sum_{\sigma_2} b\left(q_2\sigma_2\right)u\left(q_2\sigma_2\right)e^{-iq_2\cdot x_2}\right) \\
&\left(\int \frac{d^3q_3}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{q_3}}}\sum_{\sigma_3} b^{+}\left(q_3\sigma_3\right)\bar{u}\left(q_3\sigma_3\right)e^{iq_3\cdot x_2}\right)\gamma_\nu\left(\int \frac{d^3q_4}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{q_4}}}\sum_{\sigma_4} b\left(q_4\sigma_4\right)u\left(q_4\sigma_4\right)e^{-iq_4\cdot x_2}\right) \\
&b^{+}\left(p_1s_1\right) b^{+}\left(p_2s_2\right)|0\rangle\, A^\mu\left(x_1\right)A^\nu\left(x_2\right) \\
&= \frac{(-ie)^2}{2!}\int dx_1^4 dx_2^4 \sum_{\sigma_1}\sum_{\sigma_2}\sum_{\sigma_3}\sum_{\sigma_4}\int \frac{d^3q_1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{q_1}}}\int \frac{d^3q_2}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{q_2}}} \\
&\int \frac{d^3q_3}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{q_3}}}\int \frac{d^3q_4}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{q_4}}}\bar{u}\left(q_1\sigma_1\right)\gamma_\mu u\left(q_2\sigma_2\right)e^{i(q_1-q_2)x_1}\bar{u}\left(q_3\sigma_3\right)\gamma_\nu u\left(q_4\sigma_4\right)e^{i(q_3-q_4)x_2} \\
&\langle 0|\, b\left(p_2's_2'\right) b\left(p_1's_1'\right) : b^{+}\left(q_1\sigma_1\right) b\left(q_2\sigma_2\right) b^{+}\left(q_3\sigma_3\right) b\left(q_4\sigma_4\right) : b^{+}\left(p_1s_1\right) b^{+}\left(p_2s_2\right)|0\rangle \\
&\times iD_F^{\mu v}\left(x_1-x_2\right)
\end{aligned}
$$

先单独处理一下上面的真空期待值部分。其中

$$
\begin{aligned}
&\langle 0|\, b\left(p_2's_2'\right) b\left(p_1's_1'\right) : b^{+}\left(q_1\sigma_1\right) b\left(q_2\sigma_2\right) b^{+}\left(q_3\sigma_3\right) b\left(q_4\sigma_4\right) : b^{+}\left(p_1s_1\right) b^{+}\left(p_2s_2\right)|0\rangle \\
&\qquad = -\langle 0|\, b\left(p_2's_2'\right) b\left(p_1's_1'\right) b^{+}\left(q_1\sigma_1\right) b^{+}\left(q_3\sigma_3\right) b\left(q_2\sigma_2\right) b\left(q_4\sigma_4\right) b^{+}\left(p_1s_1\right) b^{+}\left(p_2s_2\right)|0\rangle
\end{aligned}
$$

将产生算符b^+换到左边。将湮灭算符b右边。利用关系：

$$\left\{b\left(p,s\right),b^+\left(q,\sigma\right)\right\}=\left(2\pi\right)^3\delta_{s\sigma}\delta^3\left(\mathbf{p}-\mathbf{q}\right)$$

所以

$$b\left(p,s\right)b^+\left(q,\sigma\right)+b^+\left(q,\sigma\right)b\left(p,s\right)=\left(2\pi\right)^3\delta_{s\sigma}\delta^3\left(\mathbf{p}-\mathbf{q}\right)$$

所以

$$b\left(p,s\right)b^+\left(q,\sigma\right)=\left(2\pi\right)^3\delta_{s\sigma}\delta^3\left(\mathbf{p}-\mathbf{q}\right)-b^+\left(q,\sigma\right)b\left(p,s\right)$$

此外还有：

$$\begin{aligned}\left\langle 0\right|b\left(p,s\right)b^+\left(q,\sigma\right)\left|0\right\rangle&=\left\langle 0\right|\left(2\pi\right)^3\delta_{s\sigma}\delta^3\left(\mathbf{p}-\mathbf{q}\right)\left|0\right\rangle-\left\langle 0\right|b^+\left(q,\sigma\right)b\left(p,s\right)\left|0\right\rangle\\&=\left(2\pi\right)^3\delta_{s\sigma}\delta^3\left(\mathbf{p}-\mathbf{q}\right)\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\left\langle 0\right|b\left(p_2's_2'\right)b\left(p_1's_1'\right):b^+\left(q_1\sigma_1\right)b\left(q_2\sigma_2\right)b^+\left(q_3\sigma_3\right)b\left(q_4\sigma_4\right):b^+\left(p_1s_1\right)b^+\left(p_2s_2\right)\left|0\right\rangle\\&\quad=-\left\langle 0\right|b\left(p_2's_2'\right)b\left(p_1's_1'\right)b^+\left(q_1\sigma_1\right)b^+\left(q_3\sigma_3\right)b\left(q_2\sigma_2\right)b\left(q_4\sigma_4\right)b^+\left(p_1s_1\right)b^+\left(p_2s_2\right)\left|0\right\rangle\\&\quad=-\left\langle 0\right|b\left(p_2's_2'\right)\left(2\pi\right)^3\delta_{s_1'\sigma_1}\delta^3\left(\mathbf{p}_1'-\mathbf{q}\right)b^+\left(q_3\sigma_3\right)b\left(q_2\sigma_2\right)b\left(q_4\sigma_4\right)b^+\left(p_1s_1\right)b^+\left(p_2s_2\right)\left|0\right.\\&\quad+\left\langle 0\right|b\left(p_2's_2'\right)b^+\left(q_1\sigma_1\right)b\left(p_1's_1'\right)b^+\left(q_3\sigma_3\right)b\left(q_2\sigma_2\right)b\left(q_4\sigma_4\right)b^+\left(p_1s_1\right)b^+\left(p_2s_2\right)\left|0\right\rangle\\&\quad=-\left(2\pi\right)^3\delta_{s_1'\sigma_1}\delta^3\left(\mathbf{p}_1'-\mathbf{q}_1\right)\left(2\pi\right)^3\delta_{s_2'\sigma_3}\delta^3\left(\mathbf{p}_2'-\mathbf{q}_3\right)\left\langle 0\right|b\left(q_2\sigma_2\right)b\left(q_4\sigma_4\right)b^+\left(p_1s_1\right)b^+\left(p\right.\\&\quad+\left(2\pi\right)^3\delta_{s_2'\sigma_1}\delta^3\left(\mathbf{p}_2'-\mathbf{q}_1\right)\left\langle 0\right|b\left(p_1's_1'\right)b^+\left(q_3\sigma_3\right)b\left(q_2\sigma_2\right)b\left(q_4\sigma_4\right)b^+\left(p_1s_1\right)b^+\left(p_2s_2\right)\left|0\right\rangle\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}&\left\langle 0\right|b\left(q_2\sigma_2\right)b\left(q_4\sigma_4\right)b^+\left(p_1s_1\right)b^+\left(p_2s_2\right)\left|0\right\rangle\\&=\left(2\pi\right)^3\delta_{s_1\sigma_4}\delta^3\left(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_4\right)\left\langle 0\right|b\left(q_2\sigma_2\right)b^+\left(p_2s_2\right)\left|0\right\rangle-\left\langle 0\right|b\left(q_2\sigma_2\right)b^+\left(p_1s_1\right)b\left(q_4\sigma_4\right)b^+\left(p_2s_2\right)\left|0\right\rangle\\&=\left(2\pi\right)^3\delta_{s_1\sigma_4}\delta^3\left(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_4\right)\left(2\pi\right)^3\delta_{s_2\sigma_2}\delta^3\left(\mathbf{p}_2-\mathbf{q}_2\right)-\left(2\pi\right)^3\delta_{s_1\sigma_2}\delta^3\left(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_2\right)\left\langle 0\right|b\left(q_4\sigma_4\right)b^+\left(p_2s_2\right)\left|0\right\rangle\\&=\left(2\pi\right)^3\delta_{s_1\sigma_4}\delta^3\left(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_4\right)\left(2\pi\right)^3\delta_{s_2\sigma_2}\delta^3\left(\mathbf{p}_2-\mathbf{q}_2\right)-\left(2\pi\right)^3\delta_{s_1\sigma_2}\delta^3\left(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_2\right)\left(2\pi\right)^3\delta_{s_2\sigma_4}\delta^3\left(\mathbf{p}_2-\mathbf{q}_4\right)\end{aligned}$$

其中

$$
\begin{aligned}
&\langle 0|\, b\left(p_1' s_1'\right) b^{+}\left(q_3\sigma_3\right) b\left(q_2\sigma_2\right) b\left(q_4\sigma_4\right) b^{+}\left(p_1 s_1\right) b^{+}\left(p_2 s_2\right)|0\rangle \\
&= (2\pi)^3 \delta_{s_1'\sigma_3}\delta^3\left(\mathbf{p}_1'-\mathbf{q}_3\right)\langle 0|\, b\left(q_2\sigma_2\right) b\left(q_4\sigma_4\right) b^{+}\left(p_1 s_1\right) b^{+}\left(p_2 s_2\right)|0\rangle \\
&= -(2\pi)^3 \delta_{s_1'\sigma_1}\delta^3\left(\mathbf{p}_1'-\mathbf{q}_1\right)(2\pi)^3 \delta_{s_2'\sigma_3}\delta^3\left(\mathbf{p}_2'-\mathbf{q}_3\right)\Big\{(2\pi)^3 \delta_{s_1\sigma_4}\delta^3\left(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_4\right)(2\pi)^3 \delta_{s_2\sigma_2}\delta^3\left(\mathbf{p}_2-\mathbf{q}_2\right) \\
&-(2\pi)^3 \delta_{s_1\sigma_2}\delta^3\left(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_2\right)(2\pi)^3 \delta_{s_2\sigma_4}\delta^3\left(\mathbf{p}_2-\mathbf{q}_4\right)\Big\} \\
&+(2\pi)^3 \delta_{s_2'\sigma_1}\delta^3\left(\mathbf{p}_2'-\mathbf{q}_1\right)(2\pi)^3 \delta_{s_1'\sigma_3}\delta^3\left(\mathbf{p}_1'-\mathbf{q}_3\right)\Big\{(2\pi)^3 \delta_{s_1\sigma_4}\delta^3\left(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_4\right)(2\pi)^3 \delta_{s_2\sigma_2}\delta^3\left(\mathbf{p}_2-\mathbf{q}_2\right) \\
&-(2\pi)^3 \delta_{s_1\sigma_2}\delta^3\left(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_2\right)(2\pi)^3 \delta_{s_2\sigma_4}\delta^3\left(\mathbf{p}_2-\mathbf{q}_4\right)\Big\} \\
&=(2\pi)^{12}\Big\{-\delta_{s_1'\sigma_1}\delta^3\left(\mathbf{p}_1'-\mathbf{q}_1\right)\delta_{s_2'\sigma_3}\delta^3\left(\mathbf{p}_2'-\mathbf{q}_3\right)\delta_{s_1\sigma_4}\delta^3\left(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_4\right)\delta_{s_2\sigma_2}\delta^3\left(\mathbf{p}_2-\mathbf{q}_2\right) \\
&+\delta_{s_1'\sigma_1}\delta^3\left(\mathbf{p}_1'-\mathbf{q}_1\right)\delta_{s_2'\sigma_3}\delta^3\left(\mathbf{p}_2'-\mathbf{q}_3\right)\delta_{s_1\sigma_2}\delta^3\left(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_2\right)\delta_{s_2\sigma_4}\delta^3\left(\mathbf{p}_2-\mathbf{q}_4\right) \\
&+\delta_{s_2'\sigma_1}\delta^3\left(\mathbf{p}_2'-\mathbf{q}_1\right)\delta_{s_1'\sigma_3}\delta^3\left(\mathbf{p}_1'-\mathbf{q}_3\right)\delta_{s_1\sigma_4}\delta^3\left(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_4\right)\delta_{s_2\sigma_2}\delta^3\left(\mathbf{p}_2-\mathbf{q}_2\right) \\
&+\delta_{s_2'\sigma_1}\delta^3\left(\mathbf{p}_2'-\mathbf{q}_1\right)\delta_{s_1'\sigma_3}\delta^3\left(\mathbf{p}_1'-\mathbf{q}_3\right)\delta_{s_1\sigma_2}\delta^3\left(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_2\right)\delta_{s_2\sigma_4}\delta^3\left(\mathbf{p}_2-\mathbf{q}_4\right)\Big\}
\end{aligned}
$$

代回矩阵元中

$$
\begin{aligned}
S_{fi} &= \frac{(-ie)^2}{2!}\int dx_1^4 dx_2^4 \int dx_1^4 dx_2^4 \sum_{\sigma_1}\sum_{\sigma_2}\sum_{\sigma_3}\sum_{\sigma_4}\int d^3q_1\int d^3q_2\int d^3q_3\int d^3q_4 \frac{1}{\sqrt{2E_{q_1}}}\frac{1}{\sqrt{2E_{q_2}}}\frac{1}{\sqrt{2E_{q_3}}}\frac{1}{\sqrt{2E_{q_4}}} \\
&\times \bar{u}\left(q_1\sigma_1\right)\gamma_\mu u\left(q_2\sigma_2\right)e^{i(q_1-q_2)x_1}\bar{u}\left(q_3\sigma_3\right)\gamma_\nu u\left(q_4\sigma_4\right)e^{i(q_3-q_4)x_2} \\
&\times\Big\{-\delta_{s_1'\sigma_1}\delta^3\left(\mathbf{p}_1'-\mathbf{q}_1\right)\delta_{s_2'\sigma_3}\delta^3\left(\mathbf{p}_2'-\mathbf{q}_3\right)\delta_{s_1\sigma_4}\delta^3\left(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_4\right)\delta_{s_2\sigma_2}\delta^3\left(\mathbf{p}_2-\mathbf{q}_2\right) \\
&+\delta_{s_1'\sigma_1}\delta^3\left(\mathbf{p}_1'-\mathbf{q}_1\right)\delta_{s_2'\sigma_3}\delta^3\left(\mathbf{p}_2'-\mathbf{q}_3\right)\delta_{s_1\sigma_2}\delta^3\left(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_2\right)\delta_{s_2\sigma_4}\delta^3\left(\mathbf{p}_2-\mathbf{q}_4\right) \\
&+\delta_{s_2'\sigma_1}\delta^3\left(\mathbf{p}_2'-\mathbf{q}_1\right)\delta_{s_1'\sigma_3}\delta^3\left(\mathbf{p}_1'-\mathbf{q}_3\right)\delta_{s_1\sigma_4}\delta^3\left(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_4\right)\delta_{s_2\sigma_2}\delta^3\left(\mathbf{p}_2-\mathbf{q}_2\right) \\
&+\delta_{s_2'\sigma_1}\delta^3\left(\mathbf{p}_2'-\mathbf{q}_1\right)\delta_{s_1'\sigma_3}\delta^3\left(\mathbf{p}_1'-\mathbf{q}_3\right)\delta_{s_1\sigma_2}\delta^3\left(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}_2\right)\delta_{s_2\sigma_4}\delta^3\left(\mathbf{p}_2-\mathbf{q}_4\right)\Big\} \\
&\times iD_F^{\mu v}\left(x_1-x_2\right) \\
&= \frac{(-ie)^2}{2!}\int dx_1^4 dx_2^4 \frac{1}{\sqrt{2E_{p_1}}}\frac{1}{\sqrt{2E_{p_2}}}\frac{1}{\sqrt{2E_{p_1'}}}\frac{1}{\sqrt{2E_{p_2'}}} \\
&\times\Big\{-\bar{u}\left(p_1',s_1'\right)\gamma_\mu u\left(p_2,s_2\right)e^{i\left(p_1'-p_2\right)x_1}\bar{u}\left(p_2',s_2'\right)\gamma_\nu u\left(p_1,s_1\right)e^{i\left(p_2'-p_1\right)x_2} \\
&+\bar{u}\left(p_1',s_1'\right)\gamma_\mu u\left(p_1,s_1\right)e^{i\left(p_1'-p_1\right)x_1}\bar{u}\left(p_2',s_2'\right)\gamma_\nu u\left(p_2,s_2\right)e^{i\left(p_2'-p_2\right)x_2} \\
&+\bar{u}\left(p_2',s_2'\right)\gamma_\mu u\left(p_2,s_2\right)e^{i\left(p_2'-p_2\right)x_1}\bar{u}\left(p_1',s_1'\right)\gamma_\nu u\left(p_1,s_1\right)e^{i\left(p_1'-p_1\right)x_2} \\
&-\bar{u}\left(p_2',s_2'\right)\gamma_\mu u\left(p_1,s_1\right)e^{i\left(p_2'-p_1\right)x_1}\bar{u}\left(p_1',s_1'\right)\gamma_\nu u\left(p_2,s_2\right)e^{i\left(p_1'-p_2\right)x_2}\Big\} \\
&\times iD_F^{\mu v}\left(x_1-x_2\right)
\end{aligned}
$$

下面处理一下式中的空间积分：

$$\int dx_1^4 dx_2^4 e^{i(k_1-k_2)x_1} e^{i(k_3-k_4)x_2} iD_F^{\mu v}\left(x_1-x_2\right)$$

利用Fourier变换将$iD_F^{\mu v}\left(x_1-x_2\right)$变换到动量空间

$$f(x)=\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik\cdot x}\tilde{f}(\mathbf{k})$$

$$iD_F^{\mu v}\left(x_1-x_2\right)=\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik\cdot(x_1-x_2)} iD_F^{\mu v}(k)$$

$$\begin{aligned}
&\int dx_1^4 dx_2^4 e^{i(k_1-k_2)x_1} e^{i(k_3-k_4)x_2} iD_F^{\mu v}\left(x_1-x_2\right) \\
&=\int dx_1^4 dx_2^4 e^{i(k_1-k_2)x_1} e^{i(k_3-k_4)x_2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik\cdot(x_1-x_2)} iD_F^{\mu v}(k) \\
&=\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} iD_F^{\mu v}(k) \int dx_1^4 e^{i(k_1-k_2-k)x_1} \int dx_2^4 e^{i(k_3-k_4+k)x_2} \\
&=\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} iD_F^{\mu v}(k)(2\pi)^4 \delta^4(k_1-k_2-k)(2\pi)^4 \delta^4(k_3-k_4+k) \\
&=(2\pi)^4 \delta^4(k_3-k_4+k_1-k_2) iD_F^{\mu v}\left(k_1-k_2\right)
\end{aligned}$$

因为$\int d^4x e^{ik\cdot x}=(2\pi)^4\delta^4(k)$。代入矩阵元中:

$$\begin{aligned}
S_{fi}=&\frac{(-ie)^2}{2!}\frac{1}{\sqrt{2E_{p_1}}}\frac{1}{\sqrt{2E_{p_2}}}\frac{1}{\sqrt{2E_{p_1'}}}\frac{1}{\sqrt{2E_{p_2'}}} \\
&\times\Big\{-(2\pi)^4\delta^4\left(p_1'-p_2+p_2'-p_1\right)\bar{u}\left(p_1',s_1'\right)\gamma_\mu u\left(p_2,s_2\right)\bar{u}\left(p_2',s_2'\right)\gamma_\nu u\left(p_1,s_1\right)iD_F^{\mu v}\left(p_1'-p_2\right) \\
&+(2\pi)^4\delta^4\left(p_1'-p_1+p_2'-p_2\right)\bar{u}\left(p_1',s_1'\right)\gamma_\mu u\left(p_1,s_1\right)\bar{u}\left(p_2',s_2'\right)\gamma_\nu u\left(p_2,s_2\right)iD_F^{\mu v}\left(p_1'-p_1\right) \\
&+(2\pi)^4\delta^4\left(p_2'-p_2+p_1'-p_1\right)\bar{u}\left(p_2',s_2'\right)\gamma_\mu u\left(p_2,s_2\right)\bar{u}\left(p_1',s_1'\right)\gamma_\nu u\left(p_1,s_1\right)iD_F^{\mu v}\left(p_2'-p_2\right) \\
&-(2\pi)^4\delta^4\left(p_2'-p_1+p_1'-p_2\right)\bar{u}\left(p_2',s_2'\right)\gamma_\mu u\left(p_1,s_1\right)\bar{u}\left(p_1',s_1'\right)\gamma_\nu u\left(p_2,s_2\right)iD_F^{\mu v}\left(p_2'-p_1\right)\Big\}
\end{aligned}$$

整理一下

$$
\begin{aligned}
S_{fi} = & \frac{(-ie)^2}{2!}\frac{1}{\sqrt{2E_{p_1}}}\frac{1}{\sqrt{2E_{p_2}}}\frac{1}{\sqrt{2E_{p_1'}}}\frac{1}{\sqrt{2E_{p_2'}}}(2\pi)^4\delta^4\left(p_1'-p_2+p_2'-p_1\right) \\
& \times\left\{-\bar{u}\left(p_1',s_1'\right)\gamma_\mu u\left(p_2,s_2\right)\bar{u}\left(p_2',s_2'\right)\gamma_\nu u\left(p_1,s_1\right)iD_F^{\mu v}\left(p_1'-p_2\right)\right. \\
& +\bar{u}\left(p_1',s_1'\right)\gamma_\mu u\left(p_1,s_1\right)\bar{u}\left(p_2',s_2'\right)\gamma_\nu u\left(p_2,s_2\right)iD_F^{\mu v}\left(p_1'-p_1\right) \\
& +\bar{u}\left(p_2',s_2'\right)\gamma_\mu u\left(p_2,s_2\right)\bar{u}\left(p_1',s_1'\right)\gamma_\nu u\left(p_1,s_1\right)iD_F^{\mu v}\left(p_2'-p_2\right) \\
& \left.-\bar{u}\left(p_2',s_2'\right)\gamma_\mu u\left(p_1,s_1\right)\bar{u}\left(p_1',s_1'\right)\gamma_\nu u\left(p_2,s_2\right)iD_F^{\mu v}\left(p_2'-p_1\right)\right\} \\
= & \frac{1}{2!}\frac{1}{\sqrt{2E_{p_1}}}\frac{1}{\sqrt{2E_{p_2}}}\frac{1}{\sqrt{2E_{p_1'}}}\frac{1}{\sqrt{2E_{p_2'}}}(2\pi)^4\delta^4\left(p_1'-p_2+p_2'-p_1\right) \\
& \times\left\{-\bar{u}\left(p_1',s_1'\right)(-ie\gamma_\mu)u\left(p_2,s_2\right)\bar{u}\left(p_2',s_2'\right)(-ie\gamma_\nu)u\left(p_1,s_1\right)iD_F^{\mu v}\left(p_1'-p_2\right)\right. \\
& +\bar{u}\left(p_1',s_1'\right)(-ie\gamma_\mu)u\left(p_1,s_1\right)\bar{u}\left(p_2',s_2'\right)(-ie\gamma_\nu)u\left(p_2,s_2\right)iD_F^{\mu v}\left(p_1'-p_1\right) \\
& +\bar{u}\left(p_2',s_2'\right)(-ie\gamma_\mu)u\left(p_2,s_2\right)\bar{u}\left(p_1',s_1'\right)(-ie\gamma_\nu)u\left(p_1,s_1\right)iD_F^{\mu v}\left(p_2'-p_2\right) \\
& \left.-\bar{u}\left(p_2',s_2'\right)(-ie\gamma_\mu)u\left(p_1,s_1\right)\bar{u}\left(p_1',s_1'\right)(-ie\gamma_\nu)u\left(p_2,s_2\right)iD_F^{\mu v}\left(p_2'-p_1\right)\right\}
\end{aligned}
$$

（注：这里由于归一化的选取问题使结果中包含了因子$\frac{1}{\sqrt{2E_{p_1}}}\frac{1}{\sqrt{2E_{p_2}}}\frac{1}{\sqrt{2E_{p_1'}}}\frac{1}{\sqrt{2E_{p_2'}}}$。这个因为将归一化选取的不同而不同。适当的归一化选择将使这个因子等于1。详见归一化的详述。）

我们令：并用图形表示。

$$
\begin{aligned}
S_{fi} = & \frac{1}{2!}\left\{-\bar{u}\left(p_1',s_1'\right)(-ie\gamma_\mu)u\left(p_2,s_2\right)\bar{u}\left(p_2',s_2'\right)(-ie\gamma_\nu)u\left(p_1,s_1\right)iD_F^{\mu v}\left(p_1'-p_2\right)\right. \\
& +\bar{u}\left(p_1',s_1'\right)(-ie\gamma_\mu)u\left(p_1,s_1\right)\bar{u}\left(p_2',s_2'\right)(-ie\gamma_\nu)u\left(p_2,s_2\right)iD_F^{\mu v}\left(p_1'-p_1\right) \\
& +\bar{u}\left(p_2',s_2'\right)(-ie\gamma_\mu)u\left(p_2,s_2\right)\bar{u}\left(p_1',s_1'\right)(-ie\gamma_\nu)u\left(p_1,s_1\right)iD_F^{\mu v}\left(p_2'-p_2\right) \\
& \left.-\bar{u}\left(p_2',s_2'\right)(-ie\gamma_\mu)u\left(p_1,s_1\right)\bar{u}\left(p_1',s_1'\right)(-ie\gamma_\nu)u\left(p_2,s_2\right)iD_F^{\mu v}\left(p_2'-p_1\right)\right\}
\end{aligned}
$$

第五部分

LSZ约化

第二十一章　标量场的LSZ约化公式

（待补充）

第二十二章　旋量场的LSZ约化公式

（待补充）

第二十三章　电磁场的LSZ约化公式

（待补充）

第六部分

路径积分量子化：量子力学

第二十四章　路径积分的基本思想及自由粒子的路径积分处理

由a点到b点的几率振幅等于a、b两点间各种可能的路径的几率振幅之和（迭加原理）。每条路径的几率大小相等，但对总几率幅贡献的权重不同，权重即为其相角。即：

$$\begin{aligned} K(b,a) &= \sum_{\substack{[q(t)] \\ a\to b}} \phi[q(t)] \\ &= \sum_{\substack{[q(t)] \\ a\to b}} |\phi[q(t)]|\, e^{i\theta[q(t)]} \\ &= \sum_{\substack{[q(t)] \\ a\to b}} const e^{i\theta[q(t)]} \\ &= \sum_{\substack{[q(t)] \\ a\to b}} const e^{i\frac{S[q(t)]}{\hbar}} \end{aligned}$$

其中$q(t)$是一条可能的路径，相角θ是路径$q(t)$的泛函一个自然的选择是作用量。将求和形式化地写成积分：

$$K(b,a) = const \int_a^b \mathcal{D}q(t) e^{i\frac{S[q(t)]}{\hbar}} \tag{24.1}$$

这里的体积元是形式化引入的，在数学上并不严格。在高量中我们没有明确写出$const$，相当于将它吸收到$\mathcal{D}q(t)$的定义中，$K(b,a)$作为几率振幅，$const$相当于一个归一化常数。确定波函数的归一化常数的条件是总几率为“1”。确定$const$的条件是几率幅的群性质（见《高量》）。

$$K(b,a)=\sum_{\substack{[q(t)]\\ a\to b}}k(b,c)k(c,a)$$
$$=\int_{\text{全空间}}dq_c k(b,c)k(c,a)$$

下面我们据此计算自由粒子的传播子。

24.1 自由粒子的传播子

我们要计算的是几率振幅

$$K(q_b,t_b;q_a,t_a)=\langle q_b,t_b\,|q_a,t_a\rangle$$

这里可以采用这种Dirac符号的形式但这不是必须的。将时间间隔

$$T=t_b-t_a$$

分成N份，即

$$T=t_b-t_a=N\epsilon$$

$$\epsilon=\frac{t_b-t_a}{N}=\frac{T}{N}$$

显然，$N\to\infty$时便是我们想要的结果。（此处少图一张）

利用$K(b,a)$的群性质，我们有：

$$\begin{aligned}K(b,a)&=\sum_{\substack{[q(t)]\\ a\to b}}K(N,N-1)K(N-1,N-2)\cdots K(n+1,n)\cdots K(1,0)\\&=\sum_{\substack{[q(t)]\\ a\to b}}K(q_N,t_N;q_{N-1},t_{N-1})K(q_{N-1},t_{N-1};q_{N-2},t_{N-2})\cdots K(q_{n+1},t_{n+1};q_n,t_n)\cdots K(q_1,t_1;q_0,t_0)\\&=\int dq_{N-1}\int dq_{N-2}\cdots\int dq_n\cdots\int dq_1K(q_N,t_N;q_{N-1},t_{N-1})\cdots K(q_{n+1},t_{n+1};q_n,t_n)\cdots K(q_1,t_1;q_0\end{aligned}\tag{24.2}$$

如果用Dirac符号就是插入恒等式$\int dq_n\,|q_n,t_n\rangle\langle q_n,t_n|$，

$$\langle b\,|a\rangle = \langle q_N, t_N\,|q_0, t_0\rangle = \int dq_{N-1}dq_{N-2}\cdots dq_n\cdots dq_1\,\langle q_N, t_N\,|q_{N-1}, t_{N-1}\rangle\,\langle q_{N-1}, t_{N-1}\,|q_{N-2}, t_{N-2}\rangle$$
$$\cdots|q_{n+1}, t_{n+1}\rangle\,\langle q_{n+1}, t_{n+1}\,|q_n, t_n\rangle\,\langle q_n, t_n|\cdots|q_0, t_0\rangle$$

可见传播子的群性质相当于插入恒等式。

$$1 = \int dq\,|q, t\rangle\,\langle q, t|$$

注：我们知道，这个恒等式本质上也是一种归一化条件，所以群性质被用来求归一化常数。

下面我们来看看在一个小的时间间隔内传播子的结果。

一个普通积分，如果积分区域很小，则有

$$\int_x^{x+\triangle x} dx f(x) \sim f(x)\Delta x$$

我们现在的问题是要求

$$K(q, t; q+\triangle q, t+\Delta t) = \int\limits_{(q,t\to q+\triangle q, t+\Delta t)} \mathcal{D}q e^{i\frac{S}{\hbar}}$$

在$\triangle q$，$\Delta t \to 0$时，我们不妨认为

$$\int \mathcal{D}q e^{i\frac{S}{\hbar}} = A e^{i\frac{S}{\hbar}} \tag{24.3}$$

某条路径积分的作用量为所有无限小间隔内作用量的和，即

$$S = \int dtL = \sum_{n=0}^{N-1} dtL = \sum_{n=0}^{N-1} \epsilon L_n$$

其中$dt \equiv \epsilon$为一小时间间隔，无限小间隔内的作用量$S_n(\epsilon) = \epsilon L_n$。根据（24.2）有

$$\begin{aligned} K(b, a) &= \int \prod_{n=1}^{N-1} dq_n A e^{\frac{i}{\hbar}S_{N-1}} A e^{\frac{i}{\hbar}S_{N-2}} \cdots A e^{\frac{i}{\hbar}S_n} \cdots A e^{\frac{i}{\hbar}S_0} \\ &= \int \prod_{n=1}^{N-1} dq_n A^N e^{\frac{i}{\hbar}\sum\limits_{n=0}^{N-1} S_n} \end{aligned} \tag{24.4}$$

与（24.1）

$$K(b,a)=\int_a^b \mathcal{D}q(t)conste^{i\frac{S}{\hbar}}$$

对比可知

$$\int \mathcal{D}q \longleftrightarrow \int \prod_{n=1}^{N-1} dq_n \tag{24.5}$$

这样问题就转化成了计算一系列的普遍积分。

下面计算自由粒子的情况：

$$L=\frac{1}{2}m\dot{q}^2$$

$$\begin{aligned} S_n &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} dtL \\ &= (t_{n+1}-t_n)\frac{1}{2}m\dot{q}^2 \\ &= \epsilon\frac{1}{2}m\left(\frac{q_{n+1}-q_n}{\epsilon}\right)^2 \\ &= \frac{m}{2\epsilon}(q_{n+1}-q_n)^2 \end{aligned} \tag{24.6}$$

其中$\dot{q}=\frac{q_{n+1}-q_n}{t_{n+1}-t_n}=\frac{q_{n+1}-q_n}{\epsilon}$，$\epsilon=t_{n+1}-t_n$这样我们就是要求积分

$$\int dq_n e^{\frac{im}{2h\epsilon}[(q_{n+1}-q_n)^2+(q_n-q_{n-1})^2]}$$

这是一个二次型的积分，这类积分我们可以普遍处理。这是高斯型积分，我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx x^{2n}e^{-a^2x^2}=\frac{\Gamma(N+\frac{1}{2})}{a^{2n+1}}$$

下面普遍地处理一下这类积分

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} dq_n e^{-\alpha(q_{n+1}-q_n)^2-\beta(q_n-q_{n-1})^2} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dq_n e^{-(\alpha+\beta)\left(q_n-\frac{\alpha q_{n+1}+\beta q_{n-1}}{\alpha+\beta}\right)^2-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}(q_{n+1}-q_{n-1})^2} \\ &= e^{-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}(q_{n+1}-q_{n-1})^2}\int_{-\infty}^{+\infty} d\left(q_n-\frac{\alpha q_{n+1}+\beta q_{n-1}}{\alpha+\beta}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} dq_n e^{-\left(\sqrt{\alpha+\beta}\right)^2\left(q_n-\frac{\alpha q_{n+1}+\beta q_{n-1}}{\alpha+\beta}\right)^2} \\ &= e^{-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}(q_{n+1}-q_{n-1})^2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{\alpha+\beta}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha+\beta}}e^{-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}(q_{n+1}-q_{n-1})^2} \end{aligned} \tag{24.7}$$

$$
\begin{aligned}
&\int dq_n e^{\frac{im}{2\hbar\epsilon}[(q_{n+1}-q_n)^2+(q_n-q_{n-1})^2]} \\
&= \int dq_n e^{-\frac{m}{2i\hbar\epsilon}(q_{n+1}-q_n)^2-\frac{m}{2i\hbar\epsilon}(q_n-q_{n-1})^2} \\
&= \int dq_n e^{-a(q_{n+1}-q_n)^2-a(q_n-q_{n-1})^2} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2a}} e^{-\frac{a}{2}(q_{n+1}-q_{n-1})^2}
\end{aligned} \tag{24.8}
$$

其中$a \equiv \frac{m}{2i\hbar\epsilon}$。可以看到，每次积分后都又留下一个Gauss积分。

由（24.4），（24.6）和（24.8）式可知自由粒子传播子为

$$
\begin{aligned}
K(b,a) &= \lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{n=1}^{N-1} dq_n A^N e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=0}^{N-1} S_n} \\
&= \lim_{N\to\infty} A^N \int_{-\infty}^{+\infty} dq_1 dq_2 \cdots dq_{N-1} e^{\frac{i}{\hbar}(S_0+S_1+\cdots+S_{-1})} \\
&= \lim_{N\to\infty} A^N \int_{-\infty}^{+\infty} dq_1 dq_2 \cdots dq_{N-1} e^{-a[(q_0-q_1)^2+(q_1-q_2)^2+\cdots+(q_{N-1}-q_N)^2]} \\
&= \lim_{N\to\infty} A^N \int_{-\infty}^{+\infty} dq_2 \cdots dq_{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dq_1 e^{-a[(q_0-q_1)^2+(q_1-q_2)^2]-a[(q_2-q_3)^2+\cdots+(q_{N-1}-q_N)^2]} \\
&= \lim_{N\to\infty} A^N \int_{-\infty}^{+\infty} dq_2 \cdots dq_{N-1} \sqrt{\frac{\pi}{2a}} e^{-\frac{1}{2}a(q_0-q_2)^2} e^{-a[(q_2-q_3)^2+\cdots+(q_{N-1}-q_N)^2]}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{N\to\infty} A^N \int_{-\infty}^{+\infty} dq_2 \cdots dq_{N-1} \sqrt{\frac{\pi}{2a}} e^{-\frac{a}{2}(q_0-q_2)^2 - a[(q_2-q_3)^2 - \cdots - a(q_{N-1}-q_N)^2} \\
&= \lim_{N\to\infty} A^N \int_{-\infty}^{+\infty} dq_3 \cdots dq_{N-1} \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \int_{-\infty}^{+\infty} dq_2 e^{-\frac{a}{2}(q_0-q_2)^2 - a(q_2-q_3)^2 - a(q_3-q_4)^2 - \cdots - a(q_{N-1}-q_N)^2} \\
&= \lim_{N\to\infty} A^N \int_{-\infty}^{+\infty} dq_3 \cdots dq_{N-1} \sqrt{\frac{\pi^2}{3a^2}} e^{-\frac{a}{3}(q_0-q_3)^2 - a(q_3-q_4)^2 - \cdots - a(q_{N-1}-q_N)^2} \\
&= \lim_{N\to\infty} A^N \int_{-\infty}^{+\infty} dq_4 \cdots dq_{N-1} \sqrt{\frac{\pi^2}{3a^2}} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{a}{3}+a}} e^{-\frac{\frac{a}{3}\cdot a}{\frac{a}{3}+a}(q_0-q_4)^2 - \cdots - a(q_{N-1}-q_N)^2} \\
&= \lim_{N\to\infty} A^N \int_{-\infty}^{+\infty} dq_4 \cdots dq_{N-1} \sqrt{\frac{\pi^3}{4a^3}} e^{-\frac{a}{4}(q_0-q_4)^2 - \cdots - a(q_{N-1}-q_N)^2} \\
&\cdots\cdots \\
&= \lim_{N\to\infty} A^N \sqrt{\frac{\pi^{(N-1)}}{[(N-1)+1]\, a^{(N-1)}}} e^{-\frac{a}{N-1+1}(q_0-q_N)^2} \\
&= \lim_{N\to\infty} A^N \sqrt{\frac{\pi^{N-1}}{Na^{N-1}}} e^{-\frac{a}{N}(q_0-q_N)^2}
\end{aligned} \tag{24.9}
$$

这样我们就算出了这个积分.

将前面的结果总结在这里：（24.7）

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\alpha(y-x)^2 - \beta(x-z)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha+\beta}} e^{-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}(y-z)^2}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} dq_0 dq_1 \cdots dq_{N-1} e^{-a[(q_0-q_1)^2 + (q_1-q_2)^2 + \cdots + (q_{N-1}-q_N)^2]} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{n=1}^{N-1} dq_n e^{-a[(q_0-q_1)^2 + (q_1-q_2)^2 + \cdots + (q_{N-1}-q_N)^2]} \\
&= \sqrt{\frac{\pi^{N-1}}{Na^{N-1}}} e^{-\frac{a}{N}(q_0-q_N)^2}
\end{aligned}
$$

现在我们只要确定了常项A就可完全得到传播子$K(b,a)$.我们将会看到A本质上是一个归一化因子。由它的定义就可以猜到，A中必包含时间间隔ϵ。这里先给出A的结果，后面专门讨论如何得到它。

$$
A = \sqrt{\frac{m}{i2\pi\hbar\epsilon}} \tag{24.10}
$$

将（24.10）代入（24.9）式

$$
\begin{aligned}
K(b,a) &= \lim_{N\to\infty} A^N \sqrt{\frac{\pi^{N-1}}{Na^{N-1}}} e^{-\frac{a}{N}(q_0-q_N)^2} \\
&= \lim_{N\to\infty} \sqrt{\frac{a^N}{\pi^N}} \sqrt{\frac{\pi^{N-1}}{Na^{N-1}}} e^{-\frac{a}{N}(q_0-q_N)^2} \\
&= \lim_{N\to\infty} \sqrt{\frac{a}{N\pi}} e^{-\frac{a}{N}(q_0-q_N)^2} \\
&= \sqrt{\frac{m}{i2\pi\hbar N\epsilon}} e^{-\frac{m}{2i\hbar N\epsilon}(q_0-q_N)^2} \\
&= \sqrt{\frac{m}{i2\pi\hbar(t_b-t_a)}} e^{-\frac{m}{2i\hbar(t_b-t_a)}(q_b-q_a)^2} \\
&= \sqrt{\frac{m}{i2\pi\hbar(t_b-t_a)}} e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\frac{(q_b-q_a)^2}{t_b-t_a}} \\
&= \sqrt{\frac{m}{i2\pi\hbar(t_b-t_a)}} e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\left(\frac{q_b-q_a}{t_b-t_a}\right)^2(t_b-t_a)} \\
&= \sqrt{\frac{m}{i2\pi\hbar(t_b-t_a)}} e^{\frac{i}{\hbar}S_{cl}}
\end{aligned}
$$

其中$N\epsilon = t_b - t_a = T$，$q_0 = q_a$，$q_N = q_b$；这正是非相对论的自由粒子的传播子。

24.2 确定归一化常数A

确定这个常数是路径积分中的一个关键问题。事实上，求解A的困难来源于路径积分的一个本质的数学困难，就是路径积分方法没有很好的定义测度。如果我们很好地定义了测度，那么积分原则上就可以自动进行。算出积分后便可直接利用归一化条件计算这个常数，而实际情况是我们只能针对某几种特殊的系统计算这一常数（如Hamilton量为二次型系统），计算方法也不止一种。

波函数ψ其实与传播子$K(b,a)$是一样的。$\psi(x)$只是不关心历史的，它们之间有关系：

$$
\psi(q',t') = \int_{-\infty}^{+\infty} dq K(q',t';q,t)\psi(qt)
$$

下面就利用这个关系来确定归一化常数A

A的定义是：

$$
K(q't';qt) \overset{q'\to q}{\equiv} Ae^{\frac{i}{\hbar}S} \tag{24.11}
$$

将（24.11）代入

$$\psi(q't') = \int_{-\infty}^{+\infty} dq K(q', t'; q, t)\psi(q, t)$$

$$\psi(q't') = \int_{-\infty}^{+\infty} dq A e^{\frac{i}{\hbar}S}\psi(q, t)$$

其中时间间隔ϵ内的作用量（考虑势能）为$S = \frac{m}{2\epsilon}(q' - q)^2 - V(q, t)\epsilon$，$t' = t + \epsilon$。

$$\psi(q', t + \epsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} dq A e^{\frac{i}{\hbar}(\frac{m}{2\epsilon}(q'-q)^2 - V(q,t)\epsilon)}\psi(q, t)$$

做变量代换：

$$q = q' + \eta$$

$$\psi(q', t + \epsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta A e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2\epsilon}\eta^2} e^{-\frac{i}{\hbar}V(q'+\eta,t)\epsilon}\psi(q' + \eta, t)$$

积分中有η的振荡函数，显然，当η大的时候积分结果将强烈抵消，因此只有在η小的时候才有贡献。这样我们可将$\psi(q' + \eta, t)$按η展开。

$$\psi(q' + \eta, t) = \psi(q', t) + \eta\frac{\partial\psi}{\partial q'} + \frac{\eta^2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial q'^2} + \cdots$$

再将$\psi(q', t' + \epsilon)$按ϵ展开：

$$\psi(q', t' + \epsilon) = \psi(q', t) + \epsilon\frac{\partial\psi}{\partial t} + \cdots$$

此外

$$e^{-\frac{i}{\hbar}V(q'+\eta,t)\epsilon} = 1 - \frac{i}{\hbar}\epsilon V\left(q', t\right) + \cdots \approx 1 - \frac{i}{\hbar}\epsilon V(q, t)$$

这里$\epsilon V(q' + \eta, t) \approx \epsilon V(q, t)$。代到原式中：

$$\psi(q, t) + \epsilon\frac{\partial\psi}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta A e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2\epsilon}\eta^2}\left[1 - \frac{i}{\hbar}\epsilon V(q, t)\right]\left[\psi(q, t) + \eta\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\eta^2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial q'^2}\right]$$

我们所考虑的是无限小间隔下的情况，即$\epsilon \to 0$的情况。这样便要求

$$A\int_{-\infty}^{+\infty} d\eta e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2\epsilon}\eta^2} = 1$$

由之前给出的Gauss积分的公式知：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\eta e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2\epsilon}\eta^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta e^{-\frac{m}{i2\hbar\epsilon}\eta^2} = \sqrt{\frac{i2\pi\hbar\epsilon}{m}}$$

$$A\sqrt{\frac{i2\pi\hbar\epsilon}{m}} = 1$$

$$A = \sqrt{\frac{m}{i2\pi\hbar\epsilon}} = \sqrt{\frac{a}{\pi}}$$

这样我们便确定出了这个归一化常数。在简单的问题中，我们有许多办法来确定这个A,但在稍微复杂一些的问题中（不是二次型的）便得不到它了。注意我们这里的讨论并不局限于自由粒子，而普适于所有动能为$\frac{p^2}{2m}$的系统，V可任意取。当然这里只得到A，而不是最终的传播子中的那个常数。

24.3 Lagrange表述与Hamilton表述

在力学中我们有两种等价表述——Lagrange表述与Hamilton表述。量子力学的算符形式采用的是Hamilton表述，而路径积分形式的量子力学则采用的Lagrange表述。Lagrange表述与Hamilton表述间通过Legendre变换联系（这两种表述间的关系详见《理论力学》和《高量》讲义）。在路径积分体系中，Lagrange表述与Hamilton表述间的转换是非常自然而直接的，仅相当于插入一个恒等式（这相当于加入了一个动量空间中的积分）。下面我们来具体的做这件事。

我们已经知道，由Lagrange表述的传播子是一个对相位（权重因子）$e^{\frac{i}{\hbar}S}$的在坐标空间中的泛函积分：

$$\begin{aligned} K(b,a) &= \int_a^b \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar}S[q(t)]} \\ &= \int_a^b \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b} dtL} \\ &= \int_a^b \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b} dt(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q))} \end{aligned} \tag{24.12}$$

下面我们在这个积分中插入一个恒等式。已知一个Gauss积分的结果

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{ap^2+bp} = \sqrt{\frac{\pi}{-a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}$$

插入恒等式只能插“1”。由这个Gauss积分的结果出发我们来凑一个等于“1”的关系。在上面的式子中两边同除式子的右边。

$$\sqrt{\frac{-a}{\pi}}e^{-\frac{b^2}{4a}}\int_{-\infty}^{+\infty}dpe^{ap^2+bp}=1$$

或：

$$\sqrt{\frac{-a}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}dpe^{ap^2+bp-\frac{b^2}{4a}}=1$$

这里选

$$\begin{aligned}a&=-\frac{i}{\hbar}\frac{\epsilon}{2m}\\b&=\frac{i}{\hbar}\dot{q}\epsilon\end{aligned}$$

(做出这个选择的意图很明显，这样一来第一项ap^2将成为动能项，第二项也是Legendre变换的形式)。代入上式中有

$$\sqrt{\frac{i\epsilon}{2\pi\hbar m}}\int_{-\infty}^{+\infty}dpe^{\frac{i}{\hbar}\left(-\frac{p^2}{2m}\right)\epsilon+\frac{i}{\hbar}p\dot{q}\epsilon-\frac{i}{\hbar}\frac{1}{2}m\dot{q}^2\epsilon}=1$$

整理得：

$$\sqrt{\frac{i\epsilon}{2\pi\hbar m}}\int_{-\infty}^{+\infty}dpe^{\frac{i}{\hbar}(p\dot{q}-\frac{p^2}{2m}-\frac{1}{2}m\dot{q}^2)\epsilon}=1$$

将前面的系统凑成$A(=\sqrt{\frac{m}{i2\pi\hbar\epsilon}})$的形式

$$2\pi\hbar\sqrt{\frac{i\epsilon}{2\pi\hbar m}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}(p\dot{q}-\frac{p^2}{2m}-\frac{1}{2}m\dot{q}^2)\epsilon}=1$$

$$\sqrt{\frac{i2\pi\hbar\epsilon}{m}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}(p\dot{q}-\frac{p^2}{2m}-\frac{1}{2}m\dot{q}^2)\epsilon}=1$$

$$\frac{1}{A}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}(p\dot{q}-\frac{p^2}{2m}-\frac{1}{2}m\dot{q}^2)\epsilon}=1 \tag{24.13}$$

下面将这个恒等式插入传播子中。（24.3）式及（24.4）式知传播子为：

$$
\begin{aligned}
K(b,a) &= \int \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar}S[q(t)]} \\
&= \lim_{N\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{n=1}^{N-1}dq_n A^N e^{\frac{i}{\hbar}\sum\limits_{n=0}^{N-1}S_n} \\
&= \lim_{N\to\infty} A^N \int_{-\infty}^{+\infty} dq_1 dq_2\cdots dq_{N-1} e^{\frac{i}{\hbar}(S_0+S_1+\cdots+S_{-1})} \\
&= \lim_{N\to\infty} A^N \int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{n=1}^{N-1}dq_n e^{\frac{i}{\hbar}\sum\limits_{n=1}^{N-1}(\frac{1}{2}m\dot{q}_n^2-V(q_n))\epsilon}
\end{aligned}
\tag{24.14}
$$

这里$A=\sqrt{\frac{m}{i2\pi\hbar\epsilon}}$，$\dot{q}_n=\frac{q_{n+1}-q_n}{\epsilon}$。我们可证明对$\frac{1}{2}m\dot{q}^2$形式的系统，$A$都是这个形式。为了抵消掉指数上的$\frac{1}{2}m\dot{q}^2$项，插入恒等式。将N个（24.13）式连乘

$$
\prod_{n=0}^{N-1}\frac{1}{A}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}(p_n\dot{q_n}-\frac{p_n^2}{2m}-\frac{1}{2}m\dot{q_n}^2)\epsilon}=\prod_{n=0}^{N-1}1
$$

即

$$
\frac{1}{A^N}\int_{-\infty}^{+\infty}(\prod_{n=0}^{N-1}\frac{dp_n}{2\pi\hbar})e^{\frac{i}{\hbar}(p_n\dot{q_n}-\frac{p_n^2}{2m}-\frac{1}{2}m\dot{q_n}^2)\epsilon}=1
$$

插入（24.14）式

$$
\begin{aligned}
K(b,a) &= \lim_{N\to\infty}A^N\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{n=1}^{N-1}dq_n e^{\frac{i}{\hbar}\sum\limits_{n=1}^{N-1}(\frac{1}{2}m\dot{q}_n^2-V(q_n))\epsilon}\cdot\frac{1}{A^N}\int_{-\infty}^{+\infty}(\prod_{n=0}^{N-1}\frac{dp_n}{2\pi\hbar})e^{\frac{i}{\hbar}(p_n\dot{q_n}-\frac{p_n^2}{2m}-\frac{1}{2}m\dot{q_n}^2)\epsilon} \\
&= \lim_{N\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{n=1}^{N-1}dq_n\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{n=0}^{N-1}\frac{dp_n}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}(p_n\dot{q_n}-\frac{p_n^2}{2m}-V(q_n))\epsilon}
\end{aligned}
$$

取$\int\prod\limits_{n=1}^{N-1}dq_n\to\int\mathcal{D}q$，$\int\prod\limits_{n=0}^{N-1}\frac{dp_n}{2\pi\hbar}\to\int\mathcal{D}p$

$$
K(b,a)=\int\mathcal{D}q\int\mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}dt(p\dot{q}-\frac{p^2}{2m}-V(q_n))}
$$

定义Hamilton量

$$
H(p,q)=\frac{p^2}{2m}+V(q_n)
$$

这样传播子为：

$$K(b,a)=\int Dq\int Dpe^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}dt(p\dot{q}-H)}$$

这样我们就用Hamilton表述代替了Lagrange表述。这个结果是通过插入一个动量空间的积分而自然得到的。Legendre变换也同时自然地得到了。这就是说，在量子力学的路径积分表述中Lagrange表述与Hamilton表述可通过插入动量积分的方式很自然地相互转换。

24.4 路径积分量子化和正则量子化

在路径积分中我们是常数来表示物理量，而在正则量子化方案中表示物理量的是算符。这里我们来看看这两者间的联系。也就是路径积分和正则量子化的关系。

首先我们考虑正则量子化中的情况。在坐标表象中我们有，坐标算符和动量算符

$$\begin{aligned}\hat{q}&=q\\ \hat{p}&=-i\hbar\frac{\partial}{\partial q}\end{aligned}\tag{24.15}$$

它们的本征态由

$$\begin{aligned}\hat{q}\left|q\right\rangle&=q\left|q\right\rangle\quad\left|q\right\rangle=\delta(q'-q)\\ \hat{p}\left|p\right\rangle&=p\left|p\right\rangle\quad\left|p\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}pq'}\end{aligned}\tag{24.16}$$

给出。这里我们选取的归一化方案为

$$\begin{aligned}\left\langle q_1\right.\left|q_2\right\rangle&=\delta(q_1-q_2)\\ \left\langle p\right.\left|q\right\rangle&=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-\frac{i}{\hbar}pq}\\ \left\langle q\right.\left|p\right\rangle&=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}pq}\end{aligned}\tag{24.17}$$

（有的书中（kaku）选$\left\langle p\right.\left|q\right\rangle\sim e^{\frac{i}{\hbar}pq},\left\langle q\right.\left|p\right\rangle\sim e^{-\frac{i}{\hbar}pq}$但那种选法不好，会带来$v=\frac{x_0-x_1}{\triangle t}$的尴尬定义）这样便有完备关系

$$\begin{aligned}\int dq\left|q\right\rangle\left\langle q\right|&=1\\ \int dp\left|p\right\rangle\left\langle p\right|&=1\end{aligned}\tag{24.18}$$

(如果愿意也可选另一套归一化方案)即

$$|p\rangle = e^{ipq'}$$

此时完备关系变成了

$$\int \frac{dp}{2\pi\hbar} |p\rangle \langle p| = 1$$

可以证明这套关系的选择是自洽的：

$$\begin{aligned}
\langle q_1 | q_2\rangle &= \int dp \langle q_1 | p\rangle \langle p | q_2\rangle \\
&= \int dp \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}pq_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}pq_2} \\
&= \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}pq_1} e^{-\frac{i}{\hbar}pq_2} \\
&= \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}p(q_1-q_2)} \\
&= \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar}p(q_2-q_1)} \\
&= \delta(q_1 - q_2)
\end{aligned}$$

此外，态随时间的演化为

$$|q,t\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} |q\rangle \tag{24.19}$$

下面我们来计算跃变矩阵元

$$\langle q_b, t_b | q_a, t_a\rangle = \langle q_N, t_N | q_0, t_0\rangle$$

将$a \to b$分成N等份，插入恒等式

$$1 = \int dq |q,t\rangle \langle q,t|$$

$$\begin{aligned}
\langle q_N, t_N | q_0, t_0\rangle = \int dq_{N-1} dq_{N-2} \cdots dq_n \cdots dq_1 \langle q_N, t_N | q_{N-1}, t_{N-1}\rangle \langle q_{N-1}, t_{N-1} | q_{N-2}, t_{N-2}\rangle \cdots \\
|q_{n+1}, t_{n+1}\rangle \langle q_{n+1}, t_{n+1} | q_n, t_n\rangle \langle q_n, t_n| \cdots |q_0, t_0\rangle
\end{aligned} \tag{24.20}$$

下面考虑其中的一个无穷小时间间隔的跃迁

$$\begin{aligned}
&\langle q_{n+1}, t_{n+1} | q_n, t_n\rangle \overset{(24.19)}{=} \langle q_{n+1}| e^{-\frac{i}{\hbar}\hbar\hat{H}(\hat{q},\hat{p})t_{n+1}} e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}(\hat{q},\hat{p})t_n} |q_n\rangle \\
&= \langle q_{n+1}| e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(\hat{q},\hat{p})(t_{n+1}-t_n)} |q_n\rangle \\
&= \langle q_{n+1}| e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(\hat{q},\hat{p})\epsilon} |q_n\rangle \\
&\overset{(24.15)}{=} \langle q_{n+1}| e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(q_n, \frac{\partial}{\partial q_n})\epsilon} |q_n\rangle \\
&= e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(q_n, \frac{\partial}{\partial q_n})\epsilon} \langle q_{n+1} | q_n\rangle
\end{aligned} \tag{24.21}$$

其中$t_{n+1}-t_n\equiv\epsilon$。插入恒等式

$$\begin{aligned}
&\overset{(24.18)}{=} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(q_n,\frac{\partial}{\partial q_n})\epsilon}\int dp_n\left\langle q_{n+1}\right|\left.p_n\right\rangle\left\langle p_n\right|\left.q_n\right\rangle\\
&\overset{(24.17)}{=} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(q_n,\frac{\partial}{\partial q_n})\epsilon}\int dp_n\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}p_nq_{n+1}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-\frac{i}{\hbar}p_nq_n}\\
&= e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(q_n,\frac{\partial}{\partial q_n})\epsilon}\int\frac{dp_n}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}p_n(q_{n+1}-q_n)}
\end{aligned}\tag{24.22}$$

其中

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial q}e^{\frac{i}{\hbar}pq}=pe^{\frac{i}{\hbar}pq}\tag{24.23}$$

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(q_n,\frac{\partial}{\partial q_n})\epsilon}e^{\frac{i}{\hbar}p(q_{n+1}-q_n)}=e^{-\frac{i}{\hbar}H(\dot{q}_n,p_n)}e^{\frac{i}{\hbar}p(q_{n+1}-q_n)}$$

$$\begin{aligned}
&=\int\frac{dp_n}{2\pi\hbar}e^{-\frac{i}{\hbar}H(q_n,p_n)\epsilon}e^{\frac{i}{\hbar}p_n(q_{n+1}-q_n)}\text{已完全变成常数}\\
&=\int\frac{dp_n}{2\pi\hbar}e^{-\frac{i}{\hbar}H(q_n,p_n)\epsilon}e^{\frac{i}{\hbar}p_n\frac{q_{n+1}-q_n}{\epsilon}\epsilon}\frac{q_{n+1}-q_n}{\epsilon}\overset{\epsilon\to0}{\sim}\dot{q}_n\\
&=\int\frac{dp_n}{2\pi\hbar}e^{-\frac{i}{\hbar}H(q_n,p_n)\epsilon}e^{\frac{i}{\hbar}p_n\dot{q}_n\epsilon}\\
&=\int\frac{dp_n}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}(p_n\dot{q}_n-H(q_n,p_n))\epsilon}
\end{aligned}$$

代回（24.20）式中

$$\begin{aligned}
\left\langle q_b,t_b\right|\left.q_a,t_a\right\rangle&=\int dq_{N-1}dq_{N-2}\cdots dq_n\cdots dq_1\int\frac{dp_{N-1}}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}(p_{N-1}\dot{q}_{N-1}-H(q_{N-1}p_{N-1}))\epsilon}\\
&\cdots\int\frac{dp_n}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}(p_n\dot{q}_n-H(q_np_n))\epsilon}\cdots\int\frac{dp_0}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}(p_0\dot{q}_0-H(q_0p_0))\epsilon}\\
&=\int dq_{N-1}dq_{N-2}\cdots dq_n\cdots dq_1\int\frac{dp_{N-1}}{2\pi\hbar}\cdots\frac{dp_n}{2\pi\hbar}\cdots\frac{dp_0}{2\pi\hbar}\\
&\times e^{\frac{i}{\hbar}[p_{N-1}\dot{q}_{N-1}-H(q_{N-1}p_{N-1})+\cdots+p_n\dot{q}_n-H(q_np_n)+\cdots+p_0\dot{q}_0-H(q_0p_0)]\epsilon}\\
&=\int\prod_{n=1}^{N-1}dq_n\int\prod_{n=0}^{N-1}\frac{dp_n}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}\sum\limits_{n=0}^{N-1}[p_n\dot{q}_n-H(q_np_n)]\epsilon}\\
&=\int\prod_{n=1}^{N-1}dq_n\int\prod_{n=0}^{N-1}\frac{dp_n}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}dt[p\dot{q}-H(q,p)]\epsilon}\\
&=\int Dq\int Dpe^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}[p\dot{q}-H(q,p)]\epsilon}\\
&=K(b,a)
\end{aligned}$$

其中

$$\int \prod_{n=1}^{N-1} dq_n \to \int \mathcal{D}q$$
$$\int \prod_{n=0}^{N-1} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \to \int \mathcal{D}P$$

也就是说

$$K(b,a) = \langle q_b, t_b \,|q_a, t_a\rangle = \langle b \,|a\rangle \tag{24.24}$$

我们已在路程积分量子化和正则量子化之间建立了联系。这种常数（路径积分）和q-数间的转换的关键在于（24.20）式，即

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial q}e^{\frac{i}{\hbar}pq} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q}e^{\frac{i}{\hbar}pq} = pe^{\frac{i}{\hbar}pq}$$

这个结果给出了$-i\hbar\frac{\partial}{\partial q} \leftrightarrow p$之间的转换.

24.5 补充:由算符方法出发计算自由粒子传播子。

这一节中已建立了Feynman传播子与算符方法中的跃迁矩阵元间的关系。下面我们由此出发计算自由粒子的传播子。

$$\begin{aligned}
K(b,a) &= \langle q_b, t_b \,|q_a, t_a\rangle \\
&= \langle q_b|\, e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(\hat{q},\hat{p})t_b} e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}(\hat{q},\hat{p})t_a} \,|q_a\rangle \\
&= \langle q_b|\, e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(\hat{q},\hat{p})(t_b-t_a)} \,|q_a\rangle \\
&= \langle q_b|\, e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\hat{p}^2}{2m}(t_b-t_a)} \,|q_a\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dp \,\langle q_b \,|p\rangle \,\langle p|\, e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\hat{p}^2}{2m}(t_b-t_a)} \,|q_b\rangle
\end{aligned} \tag{24.25}$$

其中自由粒子Hamilton量$\hat{H}(\hat{q},\hat{p}) = \frac{\hat{p}^2}{2m}$，插入恒等式$1 = \int_{-\infty}^{\infty} dp \,|p\rangle \,\langle p|$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}(t_b-t_a)} \frac{1}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}p(q_b-q_a)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}\left(p(q_b-q_a)-\frac{p^2}{2m}(t_b-t_a)\right)} \qquad \text{这是个Gauss积分可直接积出} \tag{24.26}$$

$$= \sqrt{\frac{m}{i2\pi\hbar(t_b-t_a)}} e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m(q_b-q_a)^2}{2(t_b-t_a)}} \tag{24.27}$$

其中

$$\begin{aligned}\langle q|\ p\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}pq_b}\\ \langle p|\ q_a\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-\frac{i}{\hbar}pq_a}\\ \langle p|\, e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\hat{p}^2}{2m}(t_b-t_a)} &= \langle p|\, e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}(t_b-t_a)}\end{aligned}$$

也可以将结果的形式写得更明确些。

$$\begin{aligned}K(b,a) &\overset{(24.26)}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}\left(p\frac{q_b-q_a}{t_b-t_a}-\frac{p^2}{2m}\right)(t_b-t_a)}\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}(p\dot{q}-H)(t_b-t_a)}\\ &\overset{(24.27)}{=} \sqrt{\frac{m}{i2\pi\hbar(t_b-t_a)}}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{1}{2}m(\frac{q_b-q_a}{t_b-t_a})^2(t_b-t_a)}\\ &= \sqrt{\frac{m}{i2\pi\hbar(t_b-t_a)}}e^{\frac{i}{\hbar}S_{cl}} \qquad (24.28)\end{aligned}$$

$$S_{cl} = \int Ldt = \frac{1}{2}m(\frac{q_b-q_a}{t_b-t_a})^2(t_b-t_a) \qquad (24.29)$$

至此我们已经用几种方法算出了自由粒子的传播子。它们是Lagrange方法，Hamilton方法和利用了算符方法。这些方法可分成二类：一类是这里普遍采用的分立方法，即将时间间隔分成N份。这时的测度由$\int\prod_{n=1}^{N-1}dq_n\to\int\mathcal{D}q$，$\int\prod_{n=0}^{N-1}\frac{dp_n}{2\pi\hbar}\to\int\mathcal{D}p$定义。即将泛函积分变成求积。另一个途径是连续的方式。这是我们在高量讲义中采用的方法。在这种方法里我们没有给出$\mathcal{D}q$的具体定义，而是绕过了它。

24.6 跃迁振幅（传播子）的几种表示（小结）

前面我们分别从不同途径得到了传播子（也就是从某一时空点到另一时空点的几率振幅）的各种形式，它们是

$K(b,a) = \int\mathcal{D}qe^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}dtL(p\dot{q})}$ Lagrange表示

$K(b,a) = \int\mathcal{D}q\int\mathcal{D}pe^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}dt[p\dot{q}-H(q,p)]}$ Hamilton表示

$K(b,a) = \langle q_b,t_b\,|q_a,t_a\rangle$ 正则量子化表示

$$= \int dq_{N-1}\cdots dq_n\cdots dq_1\,\langle q_N,t_N\,|q_{N-1},t_{N-1}\rangle\cdots|q_{n+1},t_{n+1}\rangle\,\langle q_{n+1},t_{n+1}\,|q_n,t_n\rangle\,\langle q_n,t_n|\cdots|q_0,t_0\rangle$$

这三种形式当然是等价的。可以看到在量子力学的路径积分表述中Lagzange形式。Hamitlon正则形式。乃至正则量子化的算符语言的表述都可以自动出现和相互转换。

有一点要强调的是我们一直处理的是有限维积分。但其最终的结果只有在$N \to \infty$时才成立。这一过渡我们究竟有多大把握还需详细讨论。

特别需要指出的是，在前面得到的结果中曾用到动能项是二次型的条件，即动能项为$\frac{1}{2}m\dot{q}^2$或$\frac{p^2}{2m}$，也就是说有些结果只适用于这种特殊情况。

那么我们在什么地方用到这一条件呢？其实原则上我们可以分别从第一原理出发独立的得到这三种表述而不涉及动能项的形式。但当我们试图建立它们之间的联系时便不可避免地要用到这一条件。因此说上面几次形式间等价性（尤指Lagrange和Hamilton两种表述）是依赖动能项是二次型这个前提的。更具体地说当我们用到归一化$A = \sqrt{\frac{m}{i2\pi\hbar\epsilon}}$这个条件时应想到这是以二次型的动能项为前提的.

24.7 编时乘积

在正则量子化方案中。在计算S矩阵时我们要用的编时乘积。这里会看到编时乘积的要求（即按时序排列）在路径积分中是自然满足的。（原因很简单，当我们将时间分成N等份的时候，自然的就得到S一个按时间顺序排列的序列）

下面我们来考虑空间坐标算符$\hat{q}(t)$的编时乘积计算两个态$|q_b, t_b\rangle$和$|q_a, t_a\rangle$的跃迁矩阵元。之所以要考虑坐标算符的编时乘积是因为在场论中场量（即场的广义坐标）的编时乘积具有特殊的意义。

下面先来看怎样有正则量子化的求跃迁矩阵元的问题过渡到路程积分表述。

一个简单的例子

$$\langle b|\,\hat{q}(t)\,|a\rangle = \langle q_b, t_b|\,\hat{q}(t)\,|q_a, t_a\rangle \quad t_b < t_i < t_a$$

将整个时间段分成N份，并使t_i恰好是一个格上的时间点。然后像前面的处理一样插入一系列的恒等式。

$$1 = \int dq_n\,|q_n, t_n\rangle\,\langle q_n, t_n| \tag{24.30}$$

$$\begin{aligned}\langle q_b, t_b|\,\hat{q}_i(t_i)\,|q_a, t_a\rangle &= \langle q_N, t_N|\,\hat{q}_i(t_i)\,|q_0, t_0\rangle \\ &= \int dq_{N-1}\cdots dq_1\,\langle q_N, t_N\,|q_{N-1}, t_{N-1}\rangle \\ &\times\cdots|q_{i+1}, t_{i+1}\rangle\,\langle q_{i+1}, t_{i+1}|\,\hat{q}_i(t_i)\,|q_i, t_i\rangle\,\langle q_i, t_i|\cdots|q_0, t_0\rangle\end{aligned} \tag{24.31}$$

$$\begin{aligned}\hat{q}(t_i)\left|q_i,t_i\right\rangle &= q(t_i)\left|q_i,t_i\right\rangle \\ &= \int dq_{N-1}\cdots dq_1\left\langle q_N,t_N\right.\left|q_{N-1},t_{N-1}\right\rangle \\ &\times\cdots\left|q_{i+1},t_{i+1}\right\rangle\left\langle q_{i+1},t_{i+1}\right|\hat{q}_i(t_i)\left|q_i,t_i\right\rangle\left\langle q_i,t_i\right|\cdots\left|q_0,t_0\right\rangle \qquad (24.32)\end{aligned}$$

此时$q(t_i)$已是常数可写到前面

$$= \int dq_{N-1}\cdots dq_1 q(t_i)\left\langle q_N,t_N\right.\left|q_{N-1},t_{N-1}\right\rangle\cdots\left|q_{i+1},t_{i+1}\right\rangle\left\langle q_{i+1},t_{i+1}\right.\left|q_i,t_i\right\rangle\left\langle q_i,t_i\right|\cdots\left|q_0,t_0\right\rangle$$

$$\begin{aligned}&= \int \mathcal{D}q\int \mathcal{D}pq(t_i)e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}dt(p\dot{q}-H(q,p))} \quad \text{Hamilton表述}\\ &= \int \mathcal{D}qq(t_i)e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}dtL(p\dot{q})} \qquad \text{Lagrange表述}\end{aligned}$$

下面计算包含两个坐标算符的跃迁矩阵元。对$t_i > t_j$我们来计算

$$\left\langle b\right|\hat{q}(t_i)\hat{q}(t_j)\left|a\right\rangle = \left\langle q_b,t_b\right|\hat{q}(t_i)\hat{q}(t_j)\left|q_a,t_a\right\rangle$$

仍将$t_b - t_a$的时间间隔分成N份，使t_i，t_j都落在分割点上，并插入前面的恒等式（24.30）

$$\begin{aligned}\left\langle q_b,t_b\right|\hat{q}(t_i)\hat{q}(t_j)\left|q_a,t_a\right\rangle &= \left\langle q_N,t_N\right|\hat{q}(t_i)\hat{q}(t_j)\left|q_0,t_0\right\rangle \\ &= \int dq_{N-1}\cdots dq_1\left\langle q_N,t_N\right.\left|q_{N-1},t_{N-1}\right\rangle\cdots \\ &\times\left|q_{i+1},t_{i+1}\right\rangle\left\langle q_{i+1},t_{i+1}\right|\hat{q}_i(t_i)\left|q_i,t_i\right\rangle\left\langle q_i,t_i\right|\cdots\left\langle q_{j+1},t_{j+1}\right|\hat{q}(t_j)\left|q_j,t_j\right\rangle\left\langle q_j,t_j\right|\ldots\left|q_0,t_0\right\rangle \\ &= \int dq_{N-1}\cdots dq_1 q_i(t_i)q_j(t_j)\left\langle q_N,t_N\right.\left|q_{N-1},t_{N-1}\right\rangle\cdots \\ &\times\left|q_{i+1},t_{i+1}\right\rangle\left\langle q_{i+1},t_{i+1}\right|q_i,t_i\rangle\left\langle q_i,t_i\right|\cdots\left\langle q_{j+1},t_{j+1}\right|q_j,t_j\rangle\left\langle q_j,t_j\right|\ldots\left|q_0,t_0\right\rangle \\ &= \int \mathcal{D}q\int \mathcal{D}pq(t_i)q(t_j)e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}dt[p\dot{q}-H(q,p)]} \quad \text{Hamilton表述} \\ &= \int \mathcal{D}qq(t_i)q(t_j)e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}dtL(p\dot{q})} \quad \text{Lagrange表述} \qquad (24.33)\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\hat{q}_i(t_i)\left|q_i,t_i\right\rangle &= q_i(t_i)\left|q_i,t_i\right\rangle \\ \hat{q}_j(t_i)\left|q_j,t_j\right\rangle &= q_j(t_j)\left|q_j,t_j\right\rangle\end{aligned}$$

上面考虑的是$t_i > t_j$的情况，那么如果$t_i < t_j$会怎么样呢？显然此时我们不再能在$t_b - t_a$这段时间间隔分成N份后使t_i，t_j都放在合适的分割点上。于是就不能再

用前面那种方式定义路径积分了。因此路径积分表述要求正则量子化的算符必须按时间顺序排列。末时间在左，初时间在右。这就是说路径积分表述自动要求满足时序要求即编时乘积。这一点其实并不奇怪，在正则量子化体系中编时乘积是在求S矩阵时出现的，而路径积分则直接给出的就是S矩阵的结果。自然编时乘积的要求当然要蕴含在路径积分的定义中了。

因此，路径积分只能给出那些编时乘积形式的跃迁矩阵元的结果，或说路径积分只对应于那些编时乘积形式的跃迁矩阵元用T表示编时乘积，我们有

$$\begin{aligned}\langle q_b,t_b|\,T[\hat{q}(t_i)\hat{q}(t_j)]\,|q_a,t_a\rangle &= \int\mathcal{D}q\int\mathcal{D}pq(t_i)q(t_j)e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}dt[p\dot{q}-H(q,p)]}\\ &= \int\mathcal{D}qq(t_i)q(t_j)e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}dtL(p\dot{q})}\end{aligned}$$

推广到多个算符我们有

$$\begin{aligned}\langle q_b,t_b|\,T[\hat{q}(t_i)\hat{q}(t_j)\cdots\hat{q}(t_k)]\,|q_a,t_a\rangle &= \int\mathcal{D}q\int\mathcal{D}pq(t_i)q(t_j)\cdots q(t_k)e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}dt[p\dot{q}-H(q,p)]}\\ &= \int\mathcal{D}qq(t_i)q(t_j)\cdots q(t_k)e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}dtL(p\dot{q})}\end{aligned}$$

这一结果很容易推广到场论中。

再强调一点，在路径积分中的一系列$q(t_i)q(t_j)$由于是C数。它们的顺序无所谓。我们强调的是路径积分的定义是基于分割时间。不满足时序要求的排列不能定义路径积分。因此与路径积分对应的正则量子化体系下的跃迁振幅中的算符必须是编时乘积的顺序。可见路径积分表述肯定有的很深刻的内涵。

24.8 有源$J(t)$时的运动

这里我们来考虑一种特殊的运动。粒子后势场$V(q)$和含时流$J(t)$同时作用中运动的情况。这种情况从力学的角度理解就是粒子在一个势$V(q)$中运动的同时还受到一个力$J(t)$作用（如受迫振子，$V(q)=\frac{1}{2}m\omega^2q^2$，$J(t)$是外加的力）。不过做这件事更重要的意义还在于借助源$J(t)$可以构造几个生成泛函（$Z(J),W(J),T(J)$）它们在场论中。尤其是微扰处理中起着非常核心的作用。

此时的Lagrange量为：

$$L(\dot{q},q)=\frac{1}{2}m\dot{q}^2-V(q)+J(t)q$$

Hamilton量为：

$$H(p,q)=\frac{p^2}{2m}+V(q)-J(t)q$$

我们不来直接处理这个复杂的问题，而先考虑$V(q)=0$的情况，亦即先考虑只有流存在时的情况，得到结果后再回到$V(q)\neq 0$的情况来。$V(q)=0$时的Hamilton量为:

$$H(p,q)=\frac{p^2}{2m}-J(t)q$$

由$\int\prod_{n=1}^{N-1}dq_n\to\int\mathcal{D}q$，$\int\prod_{n=0}^{N-1}\frac{dp_n}{2\pi\hbar}\to\int\mathcal{D}p$立刻便可得此时的传播子：

$$\begin{aligned}
K(b,a)&=K(q_bt_b;q_at_a)\\
&=\int\mathcal{D}q\int\mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}dt(p\dot{q}-H)}\ q_b=q_N\ t_b\ =t_N\ q_a=q_0\ t_a=t_0\\
&=\int\prod_{n=1}^{N-1}dq_n\int\prod_{n=0}^{N-1}\frac{dp_n}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=0}^{N-1}[p_n\dot{q}_n-\frac{p_n^2}{2m}+J(t_n)q_n]\epsilon}\\
&=\int dq_{N-1}\cdots dq_1\int\frac{dp_{N-1}}{2\pi\hbar}\cdots\frac{dp_0}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=0}^{N-1}[p_n\frac{(q_{n+1}-q_n)}{\epsilon}-\frac{p_n^2}{2m}+J(t_n)q_n]\epsilon}\\
&=\int dq_{N-1}\cdots dq_1\int\frac{dp_{N-1}}{2\pi\hbar}\cdots\frac{dp_0}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=0}^{N-1}[p_n(q_{n+1}-q_n)-\frac{p_n^2}{2m}\epsilon+J(t_n)q_n\epsilon]}\\
&=\int\frac{dp_{N-1}}{2\pi\hbar}\cdots\frac{dp_0}{2\pi\hbar}e^{-\frac{i}{\hbar}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{p_n^2}{2m}\epsilon}\int dq_{N-1}\cdots dq_1e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=0}^{N-1}[p_nq_{n+1}-p_nq_n+J(t_n)q_n\epsilon]}
\end{aligned}$$

我们先对坐标q积分,其中$\sum_{n=0}^{N-1}[p_nq_{n+1}-p_nq_n+J(t_n)q_n\epsilon]=\sum_{n=0}^{N-1}[p_nq_{n+1}-(p_n-\epsilon J(t_n))q_n]$

$$\begin{aligned}
&=p_{N-1}q_N-(p_{N-1}-\epsilon J(t_{N-1}))q_{N-1}+p_{N-2}q_{N-1}-(p_{N-2}-\epsilon J(t_{N-2}))q_{N-2}\\
&+\cdots+p_2q_3-(p_2-\epsilon J(t_2))q_2\\
&+p_1q_2-(p_1-\epsilon J(t_1))q_1+p_0q_1-(p_0-\epsilon J(t_0))q_0\\
&=p_{N-1}q_N-[-\epsilon J(t_{N-1})+p_{N-1}-p_{N-2}]q_{N-1}-[-\epsilon J(t_{N-2})+p_{N-2}-p_{N-3}]q_{N-2}\\
&-\cdots-[-\epsilon J(t_2)+p_2-p_1]q_2-[-\epsilon J(t_1)+p_1-p_0]q_1\\
&-[p_0-\epsilon J(t_0)]q_0\\
&=p_{N-1}q_N-\sum_{n=1}^{N-1}[-\epsilon J(t_n)+p_n-p_{n-1}]q_n-[p_0-\epsilon J(t_0)]q_0
\end{aligned}$$

将这个结果代回对坐标q_n的积分中,

$$\begin{aligned}
&\int dq_{N-1}\cdots dq_1 e^{\frac{i}{\hbar}\{p_{N-1}q_N-\sum_{n=1}^{N-1}[-\epsilon J(t_n)+p_n-p_{n-1}]q_n-[p_0-\epsilon J(t_0)q_0\}}\\
&=\int dq_{N-1}\cdots dq_1 e^{-\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N-1}[-\epsilon J(t_n)+p_n-p_{n-1}]q_n} e^{\frac{i}{\hbar}[p_{N-1}q_N-[p_0-\epsilon J(t_0)q_0]}\\
&=e^{\frac{i}{\hbar}[p_{N-1}q_N-[p_0-\epsilon J(t_0)]}\int dq_{N-1}\cdots dq_1 e^{-\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N-1}[-\epsilon J(t_n)+p_n-p_{n-1}]q_n}
\end{aligned}$$

其中$q_N=q_b$, $q_0=q_a$,

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} dq_{N-1}\cdots dq_1 e^{-\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N-1}[-\epsilon J(t_n)+p_n-p_{n-1}]q_n}\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{n=1}^{N-1}dq_n\prod_{n=1}^{N-1}e^{-\frac{i}{\hbar}[-\epsilon J(t_n)+p_n-p_{n-1}]q_n}\\
&=\prod_{n=1}^{N-1}\int_{-\infty}^{\infty}dq_n e^{-\frac{i}{\hbar}[-\epsilon J(t_n)+p_n-p_{n-1}]q_n}
\end{aligned}\tag{24.34}$$

利用公式$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{ik(x-y)}=\delta(x-y)$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dq_n e^{-\frac{i}{\hbar}[-\epsilon J(t_n)+p_n-p_{n-1}]q_n} &= 2\pi\hbar\delta[-\epsilon J(t_n)+p_n-p_{n-1}]\\
&=\prod_{n=1}^{N-1}2\pi\hbar[-\epsilon J(t_n)+p_n-p_{n-1}]\\
&=(2\pi\hbar)^{N-1}\delta[-\epsilon J(t_{N-1})+p_{N-1}-p_{N-2}]\cdots\delta[-\epsilon J(t_1)+p_1-p_0]
\end{aligned}$$

代回$K(b,a)$中：

$$\begin{aligned}
K(b,a)=&\int\frac{1}{(2\pi\hbar)^N}dp_{N-1}\cdots dp_0 e^{-\frac{i}{\hbar}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{p_n^2}{2m}\epsilon} e^{\frac{i}{\hbar}[p_{N-1}q_b-[p_0-\epsilon J(t_0)q_a]}\\
&\times(2\pi\hbar)^{N-1}\delta[-\epsilon J(t_{N-1})+p_{N-1}-p_{N-2}]\cdots\delta[-\epsilon J(t_2)+p_2-p_1]\delta[-\epsilon J(t_1)+p_1-p_0]
\end{aligned}$$

简化起见，令$J(t_n)=J_n$

$$=\int\frac{dp_{N-1}}{2\pi\hbar}\int dp_{N-2}\cdots dp_0\delta[-\epsilon J_{N-1}+p_{N-1}-p_{N-2}]\cdots\delta[-\epsilon J_2+p_2-p_1]\delta[-\epsilon J_1+p_1-p_0]$$
$$\times e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p_{N-1}^2}{2m}\epsilon}e^{\frac{i}{\hbar}p_{N-1}q_b}e^{-\frac{i}{\hbar}\sum\limits_{n=0}^{N-2}\frac{p_n^2}{2m}\epsilon}e^{-\frac{i}{\hbar}(p_0-\epsilon J_0)q_a}$$
$$=\int\frac{dp_{N-1}}{2\pi\hbar}e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p_{N-1}^2}{2m}\epsilon}e^{\frac{i}{\hbar}p_{N-1}q_b}\int dp_{N-2}\cdots dp_0\delta[-\epsilon J_{N-1}+p_{N-1}-p_{N-2}]\cdots\delta[-\epsilon J_2+p_2-p_1]\delta[-\epsilon J_1+p_1-$$
$$\times e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p_{N-2}^2}{2m}\epsilon}e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p_{N-3}^2}{2m}\epsilon}\cdots e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p_2^2}{2m}\epsilon}e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p_1^2}{2m}\epsilon}e^{-\frac{i}{\hbar}(p_0-\epsilon J_0)q_a}$$
$$=\int\frac{dp_{N-1}}{2\pi\hbar}e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p_{N-1}^2}{2m}\epsilon}e^{\frac{i}{\hbar}p_{N-1}q_b}\int dp_{N-2}\cdots dp_1\delta[-\epsilon J_{N-1}+p_{N-1}-p_{N-2}]\cdots\delta[-\epsilon J_3+p_3-p_2]\delta[-\epsilon J_2+p_2-$$
$$\times e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p_{N-2}^2}{2m}\epsilon}\cdots e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p_2^2}{2m}\epsilon}e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p_1^2}{2m}\epsilon}e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\epsilon}{2m}[-\epsilon J_1+p_1]^2}e^{-\frac{i}{\hbar}[-\epsilon J_0-\epsilon J_1+p_1]q_a}$$
$$=\int\frac{dp_{N-1}}{2\pi\hbar}e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p_{N-1}^2}{2m}\epsilon}e^{\frac{i}{\hbar}p_{N-1}q_b}\int dp_{N-2}\cdots dp_2\delta[(-\epsilon J_{N-1}+p_{N-1})-p_{N-2}]\cdots\delta[(-\epsilon J_3+p_3)-p_2]$$
$$e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p_{N-2}^2}{2m}\epsilon}\cdots e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p_2^2}{2m}\epsilon}e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\epsilon}{2m}[-\epsilon J_2+p_2]^2}e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\epsilon}{2m}[-\epsilon J_1-\epsilon J_2+p_2]}e^{-\frac{i}{\hbar}[-\epsilon J_0-\epsilon J_1-\epsilon J_2+p_2]q_a}$$

$$=\int\frac{dp_{N-1}}{2\pi\hbar}e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p_{N-1}^2}{2m}\epsilon}e^{\frac{i}{\hbar}p_{N-1}q_b}\int dp_{N-2}\cdots dp_3\delta[(-\epsilon J_{N-1}+p_{N-1})-p_{N-2}]\cdots\delta[(-\epsilon J_4+p_4)-p_3]$$
$$e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p_{N-2}^2}{2m}\epsilon}\cdots e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\epsilon}{2m}[-\epsilon J_3+p_3]^2}e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\epsilon}{2m}[-\epsilon J_2-\epsilon\mathbf{J}_3+\mathbf{p}_3]^2}e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\epsilon}{2m}[-\epsilon J_1-\epsilon\mathbf{J}_2-\epsilon\mathbf{J}_3+\mathbf{p}_3]^2}e^{-\frac{i}{\hbar}[-\epsilon J_0-\epsilon\mathbf{J}_1-\epsilon J_2-\epsilon\mathbf{J}_3+\mathbf{p}_3]q_a}$$
$$=\int\frac{dp_{N-1}}{2\pi\hbar}e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p_{N-1}^2}{2m}\epsilon}e^{\frac{i}{\hbar}p_{N-1}q_b}$$
$$e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\epsilon}{2m}[-\epsilon J_{N-1}+p_{N-1}]^2}e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\epsilon}{2m}[-\epsilon J_{N-1}-\epsilon J_{N-2}+p_{N-1}]^2}\cdots e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\epsilon}{2m}[-\epsilon J_{N-1}-\cdots-\epsilon J_3+p_{N-1}]^2}e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\epsilon}{2m}[-\epsilon J_{N-1}-\cdots-\epsilon J_2+p_{N-1}]^2}$$
$$\times e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\epsilon}{2m}[-\epsilon J_{N-1}-\cdots-\epsilon J_1+p_{N-1}]^2}e^{-\frac{i}{\hbar}[-\epsilon J_0-\epsilon\mathbf{J}_1-\cdots-\epsilon J_{N-1}+p_{N-1}]q_a}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{dp_{N-1}}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p_{N-1}^2}{2m}\epsilon} e^{\frac{i}{\hbar}p_{N-1}q_b} \\
&e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\epsilon}{2m}[\sum_{n=N-1}^{N-1}-\epsilon J_n+p_{N-1}]^2} e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\epsilon}{2m}[\sum_{n=N-2}^{N-1}-\epsilon J_n+p_{N-1}]^2} \cdots e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\epsilon}{2m}[\sum_{n=3}^{N-1}-\epsilon J_n+p_{N-1}]^2} e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\epsilon}{2m}[\sum_{n=2}^{N-1}-\epsilon J_n+p_{N-1}]^2} \\
&e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\epsilon}{2m}[\sum_{n=1}^{N-1}-\epsilon J_n+p_{N-1}]^2} e^{-\frac{i}{\hbar}[\sum_{n=0}^{N-1}-\epsilon J_n+p_{N-1}]q_a} \\
&= \int \frac{dp_{N-1}}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p_{N-1}^2}{2m}\epsilon} e^{\frac{i}{\hbar}p_{N-1}q_b} e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\epsilon}{2m}\sum_{m=1}^{N-1}[\sum_{n=m}^{N-1}-\epsilon J_n+p_{N-1}]^2} e^{-\frac{i}{\hbar}[\sum_{n=0}^{N-1}-\epsilon J_n+p_{N-1}]q_a} \\
&= \int \frac{dp_{N-1}}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p_{N-1}^2}{2m}\epsilon} e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\epsilon}{2m}\sum_{m=1}^{N-1}[\sum_{n=m}^{N-1}-\epsilon J_n+p_{N-1}]^2} e^{-\frac{i}{\hbar}[\sum_{n=0}^{N-1}-\epsilon J_n q_a+p_{N-1}q_a-p_{N-1}q_b]} \\
&= e^{\frac{i}{\hbar}q_a\sum_{n=0}^{N-1}\epsilon J_n} \int \frac{dp_{N-1}}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p_{N-1}^2}{2m}\epsilon} e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\epsilon}{2m}\sum_{m=1}^{N-1}[\sum_{n=m}^{N-1}-\epsilon J_n+p_{N-1}]^2} e^{\frac{i}{\hbar}(q_b-q_a)p_{N-1}} \\
&= e^{\frac{i}{\hbar}q_a\sum_{n=0}^{N-1}\epsilon J_n} \int \frac{dp_{N-1}}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\epsilon}{2m}\{p_{N-1}^2+\sum_{m=1}^{N-1}[\sum_{n=m}^{N-1}(-\epsilon J_n)+p_{N-1}]^2\}} e^{\frac{i}{\hbar}(q_b-q_a)p_{N-1}}
\end{aligned}
$$

其中：

$$
\begin{aligned}
&p_{N-1}^2 + \sum_{m=1}^{N-1}\left[\sum_{n=m}^{N-1}(-\epsilon J_n) + {p_{N-1}}^2\right] \\
&= p_{N-1}^2 + \sum_{m=1}^{N-1}\left[\left(\sum_{n=m}^{N-1}(-\epsilon J_n)\right)^2 + 2p_{N-1}\sum_{n=m}^{N-1}(-\epsilon J_n) + p_{N-1}^2\right] \\
&= p_{N-1}^2 + \sum_{m=1}^{N-1}\left[\left(\sum_{n=m}^{N-1}(-\epsilon J_n)\right)^2 + 2p_{N-1}\sum_{n=m}^{N-1}(-\epsilon J_n)\right] + \sum_{m=1}^{N-1}p_{N-1}^2 \\
&= \sum_{m=1}^{N-1}\left[\left(\sum_{n=m}^{N-1}(-\epsilon J_n)\right)^2 + 2p_{N-1}\sum_{n=m}^{N-1}(-\epsilon J_n)\right] + \sum_{m=0}^{N-1}p_{N-1}^2
\end{aligned}
\tag{24.35}
$$

下面我们将求和下限都凑成$m=0$

$$
= \sum_{m=0}^{N-1}\left[\left(\sum_{n=m}^{N-1}(-\epsilon J_n)\right)^2 + 2p_{N-1}\sum_{n=m+1}^{N-1}(-\epsilon J_n)\right] + \sum_{m=0}^{N-1}p_{N-1}^2 \tag{24.36}
$$

这个改动带来一个小麻烦，即当$m=N-1$时$n=N$就会出现$\sum_{N}^{N-1}$形式的求和。

我们只需认为$\sum_{N}^{N-1}=0$（即下限大于上限时结果为零）即回避了这个困难

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{m=0}^{N-1}\left[\left(\sum_{n=m}^{N-1}(-\epsilon J_n)\right)^2+2p_{N-1}\sum_{n=m+1}^{N-1}(-\epsilon J_n)+p_{N-1}^2\right]\\
&=\sum_{n=0}^{N-1}\left[p_{N-1}-\sum_{n=m+1}^{N-1}\epsilon J_n\right]^2
\end{aligned}
$$

代回$K(b,a)$的结果中

$$
\begin{aligned}
&=e^{\frac{i}{\hbar}q_a\sum\limits_{n=0}^{N-1}\epsilon J_n}\int\frac{dp_{N-1}}{2\pi\hbar}e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\epsilon}{2m}\sum\limits_{n=0}^{N-1}[p_{N-1}-\sum\limits_{n=m+1}^{N-1}\epsilon J_n]^2}e^{\frac{i}{\hbar}(q_b-q_a)p_{N-1}}\\
&=e^{\frac{i}{\hbar}q_a\sum\limits_{n=0}^{N-1}\epsilon J_n}\int\frac{dp_{N-1}}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}(q_b-q_a)p_{N-1}-\frac{1}{2m}\sum\limits_{n=0}^{N-1}[p_{N-1}-\sum\limits_{n=m+1}^{N-1}\epsilon J_n]^2}
\end{aligned}
$$

还记得$J_n=J(t_n)$

$$
K(b,a)=e^{\frac{i}{\hbar}q_a\sum\limits_{n=0}^{N-1}\epsilon J(t_n)}\int\frac{dp_{N-1}}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}(q_b-q_a)p_{N-1}-\frac{1}{2m}\sum\limits_{n=0}^{N-1}[p_{N-1}-\sum\limits_{n=m+1}^{N-1}\epsilon J_n]^2}
$$

前面我们是将连续的路径分割成N份。显然当$N\to\infty$时，便会回到连续的情况。

下面将求和还原成积分。要做到这点，需要模糊一下我们所分的格。我们有$t_0=t_a$，$t_N=t_b$,但在$N\to\infty$时不妨认为$t_{N-1}\simeq t_N=t_b$。这样一来我们可以引入一个冲量（注意，由$J(t)$的位置可以看出它起到的是力的作用。所以$I=\int Fdt$就是冲量）

$$
I(t)\equiv\lim_{N\to\infty}\sum_{n=m+1}^{N-1}\epsilon J(t_n)\overset{\substack{t_b=t_N\approx t_{N-1}\\ t\equiv t_{m+1}}}{=\!=\!=}\int_t^{t_b}d\tau J(\tau)=\int_{t_a}^{t_b}d\tau\theta(\tau-t)J(\tau)
$$

其中$\theta(\tau-t)$是阶跃函数，用来保证积分下限是t。

这样传播子$K(b,a)$为：（令$P\equiv P_{N-1}$）

$$
\begin{aligned}
K(b,a)&=e^{\frac{i}{\hbar}q_a\int_{t_a}^{t_b}d\tau J(\tau)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}\left\{p(q_b-q_a)-\int_{t_a}^{t_b}dt\frac{1}{2m}[p-\int_t^{t_b}d\tau J(\tau)]^2\right\}}\\
&=e^{\frac{i}{\hbar}q_aI(t_a)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}\left\{p(q_b-q_a)-\int_{t_a}^{t_b}dt\frac{1}{2m}[p-I(t)]^2\right\}}\\
&=e^{\frac{i}{\hbar}q_aI(t_a)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}\left\{p(q_b-q_a)-\int_{t_a}^{t_b}dt[\frac{p^2}{2m}-\frac{p}{m}I(t)+\frac{1}{2m}I^2(t)]\right\}}
\end{aligned}
$$

显然这是个指数为二次型的$Gauss$积分。

$$
\begin{aligned}
&= e^{\frac{i}{\hbar}q_aI(t_a)}e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}dt\frac{1}{2m}I^2(t)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}e^{-\frac{i}{\hbar}\left\{\frac{p^2}{2m}(t_b-t_a)-\frac{p}{m}\int_{t_a}^{t_b}dtI(t)\right\}}e^{\frac{i}{\hbar}p(q_b-q_a)}\\
&= e^{\frac{i}{\hbar}[q_aI(t_a)-\frac{1}{2m}\int_{t_a}^{t_b}dtI^2(t)]}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}e^{-\frac{i}{\hbar}[\frac{1}{2m}(t_b-t_a)]p^2+\frac{i}{\hbar}[(q_b-q_a)+\frac{1}{m}\int_{t_a}^{t_b}dtI(t)]p}
\end{aligned}
$$

由$Gauss$积分公式：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dxe^{-i\alpha x^2\pm i\beta x}=\sqrt{\frac{\pi}{i\alpha}}e^{\frac{i\beta^2}{4\alpha}}$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}e^{-\frac{i}{\hbar}\left[\frac{t_b-t_a}{2m}\right]p^2+\frac{i}{\hbar}\left[(q_b-q_a)+\frac{1}{m}\int_{t_a}^{t_b}dtI(t)\right]p}\\
&=\frac{1}{2\pi\hbar}\sqrt{\frac{\pi}{\frac{i}{\hbar}[\frac{t_b-t_a}{2m}]}}e^{\frac{\frac{i}{\hbar^2}\left[(q_b-q_a)+\frac{1}{m}\int_{t_a}^{t_b}dtI(t)\right]^2}{4\frac{1}{\hbar}\left[\frac{t_b-t_a}{2m}\right]}}\\
&=\sqrt{\frac{m}{i2\pi\hbar(t_b-t_a)}}e^{\frac{i}{\hbar}\left[(q_b-q_a)+\frac{1}{m}\int_{t_a}^{t_b}dtI(t)\right]^2\frac{m}{2}\frac{1}{t_b-t_a}}\\
&=\sqrt{\frac{m}{i2\pi\hbar(t_b-t_a)}}e^{\frac{i}{\hbar}\left[(q_b-q_a)^2+2\frac{q_b-q_a}{m}\int_{t_a}^{t_b}dtI(t)+\frac{1}{m^2}\left(\int_{t_a}^{t_b}dtI(t)\right)^2\right]\frac{m}{2}\frac{1}{t_b-t_a}}\\
&=\sqrt{\frac{m}{i2\pi\hbar(t_b-t_a)}}e^{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m}{2}\frac{(q_b-q_a)^2}{t_b-t_a}+\frac{q_b-q_a}{t_b-t_a}\int_{t_a}^{t_b}dtI(t)+\frac{1}{2m(t_b-t_a)}\left(\int_{t_a}^{t_b}dtI(t)\right)^2\right]}
\end{aligned}
$$

代回传播子表达式中

$$K(b,a)=\sqrt{\frac{m}{i2\pi\hbar(t_b-t_a)}}e^{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m}{2}\frac{(q_b-q_a)^2}{t_b-t_a}+\frac{q_b-q_a}{t_b-t_a}\int_{t_a}^{t_b}dtI(t)+\frac{1}{2m(t_b-t_a)}\left(\int_{t_a}^{t_b}dtI(t)\right)^2+q_aI(t_a)-\frac{1}{2m}\int_{t_a}^{t_b}dtI^2(t)\right]}$$

这便是一个与流$J(t)$相互作用的粒子的传播子。注意这里并没有将与势$V(g)$的作用包括进来。在做进一步的讨论之前，先看这个结果的一个特例

$$J(t)=f$$

f不含时。这就是粒子在恒力f作用下的情况，此时的冲量为：

$$
\begin{aligned}
I(t)&=\int_t^{t_b}d\tau J(\tau)=\int_t^{t_b}d\tau f=(t_b-t)f\\
\int_{t_a}^{t_b}dtI(t)&=\int_{t_a}^{t_b}dt(t_b-t)f=\frac{1}{2}(t_b-t_a)^2f\\
\int_{t_a}^{t_b}dtI^2(t)&=\int_{t_a}^{t_b}dt(t_b-t)^2f^2=\frac{1}{3}(t_b-t_a)^3f^2
\end{aligned}
$$

代回$K(b,a)$表达式中：

$$K(b,a)=\sqrt{\frac{m}{i2\pi\hbar(t_b-t_a)}}e^{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m}{2}\frac{(q_b-q_a)^2}{t_b-t_a}+\frac{q_b-q_a}{t_b-t_a}\frac{1}{2}(t_b-t_a)^2f+\frac{1}{2m(t_b-t_a)}\frac{1}{4}(t_b-t_a)^4f^2+q_a(t_b-t_a)f-\frac{1}{2m}\frac{1}{3}(t_b-t_a)^3f^2\right]}$$

整理得：

$$K(b,a)=\sqrt{\frac{m}{i2\pi\hbar(t_b-t_a)}}e^{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m}{2}\frac{(q_b-q_a)^2}{t_b-t_a}+\frac{1}{2}(q_b+q_a)(t_b-t_a)f-\frac{(t_b-t_a)^3}{24m}f^2\right]}$$

这就是粒子在恒力f的作用下的传播子。这一点很容易看出来，因为粒子在恒力作用下的作用量为：

$$S_{cl}=\frac{m}{2}\frac{(q_b-q_a)^2}{t_b-t_a}+\frac{1}{2}(q_b+q_a)(t_b-t_a)f-\frac{(t_b-t_a)^3}{24m}f^2$$

（计算过程见《高量》讲义）。也就是说

$$K(b,a)=\sqrt{\frac{m}{i2\pi\hbar(t_b-t_a)}}e^{\frac{i}{\hbar}S_{cl}}$$

前面的归一化因子$\sqrt{\frac{m}{i2\pi\hbar(t_b-t_a)}}$对所有的二次型Lagrange量都适用(见《高量》讲义第二章第三节)。所有二次型Larange量的这个归一化因子都相同。所不同的只是指数上的作用量S_{cl}。

显然$J(t)=0\,(f=0)$时将得到自由粒子的传播子。

24.9 生成泛函$Z_{ab}[J]$

在量子理论中，核心问题就是计算跃迁矩阵元。在许多问题中，计算跃迁矩阵元的工作简化成计算S矩阵。（即$t\to\pm\infty$的情况）。这一问题的微扰处理使产生计算编时乘积的问题。这里就来讨论一种计算编时乘积（实际上是计算关联函数）的方法。即生成泛函的方法。这里的生成泛函就是关联函数（或说编时乘积的期待值）的生成泛函。这部分内容我们虽然是在量子力学中得出，但其更多的应用则是在场论中。

24.9.1 泛函导数（数学准备）

这里我们只关注后面将要用到的泛函的运算规则。泛函的运算规则与普通函数非常近似。函数就是一种映射。将函数（如坐标）映射到数的就是普通函数。将函数映射成数的就是泛函。这样我们就有

一维情况

$$\frac{\delta J(y)}{\delta J(x)}=\delta(x-y)$$
$$\frac{\delta}{\delta J(x)}\int dyJ(y)\phi(y)=\phi(x) \tag{24.37}$$

四维情况

$$\frac{\delta J(y)}{\delta J(x)}=\delta^4(x-y)$$
$$\frac{\delta}{\delta J(x)}\int d^4yJ(y)\phi(y)=\phi(x) \tag{24.38}$$

与普通函数导数对比便很容易理解

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_i}=\delta_{ij},\ \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_j x_jz_j=z_i$$

容易看出，泛函中的坐标x,y所起的作用就是普通函数中的坐标指标i,j。

莱布尼茨$(Leibniz)$法则：

$$\frac{\delta(JI)}{\delta f(x)}=J\frac{\delta I}{\delta f(x)}+I\frac{\delta J}{\delta f(x)}$$

泛函的Taylor展开：

在$f=0$附近展开：

$$J[f]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int dx_1\cdots dx_nf(x_1)\cdots f(x_n)\frac{\delta^nJ[f(x)]}{\delta f(x_1)\cdots\delta f(x_n)}\bigg|_{f=0}$$

在$f=g$的附近展开：

$$J[f]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int dx_1\cdots dx_n[f(x_1)-g(x_1)]\cdots[f(x_n)-g(x_n)]\frac{\delta^nJ[f(x)]}{\delta f(x_1)\cdots\delta f(x_n)}\bigg|_{f=g} \tag{24.39}$$

几个有用的例子

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}e^{i\int d^D y J(y)\phi(y)}=\phi(x)\,e^{i\int d^D y J(y)\phi(y)} \tag{24.40}$$

D表示积分的维度。

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\cdots\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_n)}e^{i\int d^D y J(y)\phi(y)}=\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\,e^{i\int d^D y J(y)\phi(y)} \tag{24.41}$$

这样自然有：

$$\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)=\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\,e^{i\int d^D y J(y)\phi(y)}\Big|_{J=0}$$

其中积分中的D代表积分的维数

$$\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)=\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\cdots\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_n)}e^{i\int d^D y J(y)\phi(y)}\Big|_{J=0} \tag{24.42}$$

由（24.40）式可知：

$$V[\phi(x)]=V\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right]e^{i\int d^D y J(y)\phi(y)}\Big|_{J=0} \tag{24.43}$$

这里的$V[\phi(x)]$是一个任意泛函（这启发我们只要知道了$J\neq 0$ $V=0$时的$K(b,a)$，便可通过这种方法得到$V\neq 0$时的$K(b,a)$）

24.9.2 生成泛函$Z_{ab}[J]$

前面我们计算的有源$J(t)$情况下的跃迁振幅$k(b,a)\equiv K(g_b t_b;g_a t_a)$显然是$J(t)$的一个泛函，我们定义：

$$Z_{ba}[J]\equiv k(q_b t_b;q_a t_a)=\begin{cases}\int\mathcal{D}q\int\mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}dt[p\dot{q}-H+J(t)q]}\text{，Hamilton表述}\\ \int\mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}dt[L+J(t)q]}\text{，Lagrange表述}\end{cases} \tag{24.44}$$

其中H和L分别为自由粒子的Hamilton量和Lagrange量

$$H=\frac{p^2}{2m},\quad L=\frac{1}{2}m\dot{q}^2$$

下面求$Z_{ba}[J]$对J的泛函导数:

$$\begin{aligned}\frac{\hbar}{i}\frac{\delta Z_{ba}[J]}{\delta J(t)}&=\begin{cases}\int\mathcal{D}q\int\mathcal{D}p q(t)e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}dt[p\dot{q}-H+J(t)q]}\text{,Hamilton表述}\\ \int\mathcal{D}q q(t)\,e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}dt[L+J(t)q]}\text{，Lagrange表述}\end{cases}\\ &=\langle q_b t_b|\hat{q}(t)|q_a t_a\rangle_J\\ &=\langle b|\hat{q}(t)|a\rangle_J\end{aligned}$$

下标J表示这个矩阵元是有外源$J(t)$情况下的结果。即：

$$\langle b|\hat{q}(t)|a\rangle_J = \langle q_b,t_b|\hat{q}(t)|q_a,t_a\rangle_J = \frac{\hbar}{i}\frac{\delta Z_{ba}[J]}{\delta J(t)}$$

同样我们还有：

$$\left(\frac{\hbar}{i}\right)^2\frac{\delta^2 Z_{ba}[J]}{\delta J(t_1)\delta J(t_2)} = \begin{cases}\int\mathcal{D}q\int\mathcal{D}pq(t_1)q(t_2)e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}dt[p\dot{q}-H+J(t)q]}, & \text{Hamilton表述}\\ \int\mathcal{D}qq(t_1)q(t_2)e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}dt[L+J(t)q]}, & \text{Lagrange表述}\end{cases}$$
$$= \langle q_bt_b|T[\hat{q}(t_1),\hat{q}(t_2)]|q_at_a\rangle_J$$
$$= \langle b|T[\hat{q}(t_1),\hat{q}(t_2)]|a\rangle_J$$

即路径积分自动满足时序要求。

T表示编时乘积。即：

$$\langle b|T[\hat{q}(t_1),\hat{q}(t_2)]|a\rangle_J = \langle q_bt_b|T[\hat{q}(t_1),\hat{q}(t_2)]|q_at_a\rangle_J = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2\frac{\delta^2 Z_{ba}[J]}{\delta J(t_1)\delta J(t_2)}$$

这个结果很容易推广到n个算符的编时乘积的情况

$$\langle b|T[\hat{q}(t_1)\cdots\hat{q}(t_n)]|a\rangle_J = \langle q_bt_b|T[\hat{q}(t_1)\ldots\hat{q}(t_n)]|q_at_a\rangle_J = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^n\frac{\delta^n Z_{ba}[J]}{\delta J(t_1)\ldots\delta J(t_n)}$$

这一结果表明任意坐标算符的编时乘积的矩阵元均可由对泛函$Z_{ba}[J]$求泛函导数得到。因此称$Z_{ba}[J]$为生成泛函。类似的生成泛函不只这一种($Z_{ba}[J]$将生成各种可能的图，$W[J]$只生成连接图)，还有$W[J]$和$\Gamma[J]$.

24.9.3 由生成泛函$Z_{ba}[J]$求跃迁矩阵元

我们已经知道，坐标算符的编时乘积可由对生成泛函$Z_{ba}[J]$求泛函导数得到。在I-7节中我们已经计算出了$Z_{ba}[J]$的具体形式，这样就可以由此出发计算矩阵元了。

先考虑矩阵元

$$\langle b|\hat{q}(t)|a\rangle_{J=0} = \langle q_b,t_b|\hat{q}(t)|q_a,t_a\rangle_{J=0}$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle q_b, t_b \left|\hat{q}\left(t\right)\right| q_a, t_a\right\rangle_{J=0} &= \frac{\hbar}{i}\frac{\delta Z_{ba}\left[J\right]}{\delta J\left(t\right)}\bigg|_{J=0} \\
&= \frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J\left(t\right)}\sqrt{\frac{m}{i2\pi\hbar\left(t_b-t_a\right)}} \\
&\times e^{\frac{i}{\hbar}\left(\frac{m}{2}\frac{\left(q_b-q_a\right)^2}{t_b-t_a}+\frac{\left(q_b-q_a\right)}{t_b-t_a}\int_{t_a}^{t_b}dtI(t)+\frac{1}{2m\left(t_b-t_a\right)}\left(\int_{t_a}^{t_b}dtI(t)\right)^2+q_aI[t_a]-\frac{1}{2m}\int_{t_a}^{t_b}dtI^2(t)\right)} \\
&= \sqrt{\frac{m}{i2\pi\hbar\left(t_b-t_a\right)}}e^{\frac{i}{\hbar}\left(\frac{m}{2}\frac{\left(q_b-q_a\right)^2}{t_b-t_a}+\frac{q_b-q_a}{t_b-t_a}\int_{t_a}^{t_b}dtI(t)+\frac{1}{2m\left(t_b-t_a\right)}\left(\int_{t_a}^{t_b}dtI(t)\right)^2+q_aI[t_a]-\frac{1}{2m}\int_{t_a}^{t_b}dtI^2(t)\right)} \\
&\times \frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J\left(t\right)}\{\frac{i}{\hbar}[\frac{m}{2}\frac{\left(q_b-q_a\right)^2}{t_b-t_a}+\frac{q_b-q_a}{t_b-t_a}\int_{t_a}^{t_b}dtI\left(t\right) \\
&+\frac{1}{2m\left(t_b-t_a\right)}\left(\int_{t_a}^{t_b}dtI\left(t\right)\right)^2+q_aI\left[t_a\right]-\frac{1}{2m}\int_{t_a}^{t_b}dtI^2\left(t\right)]_{J=1}\} \\
&= Z_{ba}\left[0\right]\{\frac{q_b-q_a}{t_b-t_a}\frac{\delta}{\delta J\left(t\right)}\int_{t_a}^{t_b}dt'I\left(t'\right)|_{J=0}+\frac{1}{2m\left(t_b-t_a\right)}\frac{\delta}{\delta J\left(t\right)}\left(\int_{t_a}^{t_b}dt'I\left(t'\right)\right)^2\bigg|_{J=0} \\
&+q_a\frac{\delta}{\delta J\left(t\right)}I\left[t_a\right]|_{J=0}-\frac{1}{2m}\frac{\delta}{\delta J\left(t\right)}\int_{t_a}^{t_b}dt'I^2\left(t'\right)\bigg|_{J=0}\}
\end{aligned}
$$

$$
Z_{ba}\left[0\right]=\sqrt{\frac{m}{i2\pi\hbar\left(t_b-t_a\right)}}e^{\frac{i}{\hbar}\left(\frac{m}{2}\frac{\left(q_b-q_a\right)^2}{t_b-t_a}+\frac{q_b-q_a}{t_b-t_a}\int_{t_a}^{t_b}dtI(t)+\frac{1}{2m\left(t_b-t_a\right)}\left(\int_{t_a}^{t_b}dtI(t)\right)^2+q_aI[t_a]-\frac{1}{2m}\int_{t_a}^{t_b}dtI^2(t)\right)_J}
$$

其中

$$
\frac{\delta}{\delta J\left(t\right)}\int_{t_a}^{t_b}dt^{'}I\left(t'\right)=\int_{t_a}^{t_b}dt'\frac{\delta}{\delta J\left(t\right)}I\left(t'\right)=\int_{t_a}^{t_b}dt'\frac{\delta}{\delta J\left(t\right)}\int_{t_a}^{t_b}d\tau J\left(\tau\right)\theta\left(\tau-t'\right)
$$

$$
I\left(t\right)=\int_{t}^{t_b}d\tau J\left(\tau\right)=\int_{t_a}^{t_b}d\tau J\left(\tau\right)\theta\left(\tau-t\right)
$$

$$
\int_{t_a}^{t_b}dt'\theta\left(t-t'\right)=\int_{t_a}^{t}dt\cdot 1=\left(t-t_a\right)
$$

$$
\frac{\delta}{\delta J\left(t\right)}\left(\int_{t_a}^{t_b}dt'I\left(t'\right)\right)^2|_{J=0}=\left(2\int_{t_a}^{t_b}dt'I\left(t'\right)\ \frac{\delta}{\delta J\left(t\right)}\int_{t_a}^{t_b}dt^{''}I\left(t''\right)\right)|_{J=0}\overset{I(t)^{J=0}}{=}0
$$

$$
\frac{\delta}{\delta J\left(t\right)}I\left(t_a\right)|_{J=0}=\frac{\delta}{\delta J\left(t\right)}\int_{t_a}^{t_b}d\tau J\left(\tau\right)=1
$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta J(t)}\int_{t_a}^{t_b}dt^{'}I^2\left(t'\right)|_{J=0}&=\int_{t_a}^{t_b}dt'2I\left(t'\right)\frac{\delta I\left(t'\right)}{\delta J(t)}|_{J=0}\\&=\int_{t_a}^{t_b}dt'2I\left(t'\right)\theta\left(t-t'\right)|_{J=0}\\&=\int_{t_a}^{t}dt'2I\left(t'\right)|_{J=0}\\&=2\int_{t_a}^{t}dt'\int_{t'}^{t_b}d\tau\underbrace{J(\tau)}|_{J=0}\\&=0\end{aligned}$$

其中

$$\frac{\delta I\left(t'\right)}{\delta J(t)}=\theta$$

$$\left\langle q_bt_b\left|\hat{q}(t)\right|q_at_a\right\rangle_{J=0}=\frac{\hbar}{i}\frac{Z_{ba}[J]}{\delta J(t)}\bigg|_{J=0}=\left(q_a+\frac{q_b-q_a}{t_b-t_a}(t-t_a)\right)\delta Z_{ba}[0]$$

这样我们就由生成泛函直接求出了坐标算符的矩阵元。可见$Z_{ba}[J]$确实是个生成泛函。下面我们来进一步求两个坐标算符的编时乘积的矩阵元。方法像前面一样。

$$\left\langle b\left|T\left[\hat{q}\left(t_1\right),\hat{q}\left(t_2\right)\right]\right|a\right\rangle_{J=0}\equiv\left\langle q_bt_b\left|T\left[\hat{q}\left(t_1\right),\hat{q}\left(t_2\right)\right]\right|q_at_a\right\rangle_{J=0}$$

$$\left\langle q_bt_b\left|T\left[\hat{q}\left(t_1\right),\hat{q}\left(t_2\right)\right]\right|q_at_a\right\rangle_{J=0}=\left(\frac{\hbar}{i}\right)^2\frac{\delta^2Z_{ba}[J]}{\delta J\left(t_1\right)\delta J\left(t_2\right)}\bigg|_{J=0}=\left(\frac{\hbar}{i}\right)^2\frac{\delta^2}{\delta J\left(t_1\right)\delta J\left(t_2\right)}\left(Ae^{\frac{i}{\hbar}B[J]}\right)\bigg|_{J=0}$$

其中

$$A\equiv\sqrt{\frac{m}{i2\pi\hbar\left(t_b-t_a\right)}}$$

$$\begin{aligned}B\equiv&\frac{m}{2}\frac{\left(q_b-q_a\right)^2}{t_b-t_a}+\frac{\left(q_b-q_a\right)}{t_b-t_a}\int_{t_a}^{t_b}dtI(t)+\frac{1}{2m\left(t_b-t_a\right)}\left(\int_{t_a}^{t_b}dtI(t)\right)^2+q_aI\left(t_a\right)-\frac{1}{2m}\int_{t_a}^{t_b}dtI^2(t)\\&=A\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J\left(t_1\right)}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J\left(t_2\right)}e^{\frac{i}{\hbar}B[J]}\right)\bigg|_{J=0}\\&=A\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J\left(t_1\right)}\left(e^{\frac{i}{\hbar}B[J]}\frac{\delta}{\delta J\left(t_2\right)}B[J]\right)\bigg|_{J=0}\\&=A\frac{\hbar}{i}\left(\left(\frac{\delta}{\delta J\left(t_1\right)}e^{\frac{i}{\hbar}B[J]}\right)\frac{\delta}{\delta J\left(t_2\right)}B[J]+e^{\frac{i}{\hbar}B[J]}\frac{\delta^2}{\delta J\left(t_1\right)\delta J\left(t_2\right)}B[J]\right)_{J=0}\\&=A\frac{\hbar}{i}\left(\frac{i}{\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}B[J]}\frac{\delta B[J]}{\delta J\left(t_1\right)}\frac{\delta B[J]}{\delta J\left(t_2\right)}+e^{\frac{i}{\hbar}B[J]}\frac{\delta^2B[J]}{\delta J\left(t_1\right)\delta J\left(t_2\right)}\right)_{J=0}\\&=\left(Ae^{\frac{i}{\hbar}B[J]}\frac{\hbar}{i}\left(\frac{i}{\hbar}\frac{\delta B[J]}{\delta J\left(t_1\right)}\frac{\delta B[J]}{\delta J\left(t_2\right)}+\frac{\delta^2B[J]}{\delta J\left(t_1\right)\delta J\left(t_2\right)}\right)\right)_{J=0}\\&=Z_{ba}[0]\left(\frac{\delta B[J]}{\delta J\left(t_1\right)}\frac{\delta B[J]}{\delta J\left(t_2\right)}+\frac{\hbar}{i}\frac{\delta^2B[J]}{\delta J\left(t_1\right)\delta J\left(t_2\right)}\right)_{J=0}\end{aligned}\tag{24.45}$$

其中

$$\begin{aligned}\frac{\delta B[J]}{\delta J(t_1)}|_{J=0} &= \frac{q_b-q_a}{t_b-t_a}\underbrace{\frac{\delta}{\delta J(t_1)}\int_{t_a}^{t_b}dtI(t)}+q_a\underbrace{\frac{\delta}{\delta J(t_1)}I(t_a)}\\ &= \frac{q_b-q_a}{t_b-t_a}(t_b-t_a)+q_a\end{aligned}$$

$\frac{\delta}{\delta J(t_1)}\int_{t_a}^{t_b}dtI(t)=t_1-t_a$，$\frac{\delta}{\delta J(t_1)}I(t_a)=1$，其他项为0。

$$\frac{\delta B[J]}{\delta J(t_2)}|_{J=0}=\frac{q_b-q_a}{t_b-t_a}(t_2-t_a)+q_a$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta^2 B[J]}{\delta J(t_1)\delta J(t_2)}\Big|_{J=0} &= \left(\frac{\delta}{\delta J(t_1)}\frac{\delta B[J]}{\delta J(t_2)}\right)\Big|_{J=0}\\ &= \frac{\delta}{\delta J(t_1)}\left[\frac{q_b-q_a}{t_b-t_a}\frac{\delta}{\delta J(t_2)}\int_{t_a}^{t_b}dtI(t)+\frac{1}{2m(t_b-t_a)}\frac{\delta}{\delta J(t_2)}\left(\int_{t_a}^{t_b}dtI(t)\right)^2\right.\\ &\left.+q_a\frac{\delta}{\delta J(t_2)}I(t)-\frac{1}{2m}\frac{\delta}{\delta J(t_2)}\int_{t_a}^{t_b}dtI^2(t)\right]_{J=0}\\ &= \frac{\delta}{\delta J(t_1)}\left[\frac{q_b-q_a}{t_b-t_a}(t_2-t_a)+\frac{1}{2m(t_b-t_a)}\left(2\int_{t_a}^{t_b}dtI(t)\overline{\frac{\delta}{\delta J(t_2)}\int_{t_a}^{t_b}dtI(t)}\right)\right.\\ &\left.+q_a-\frac{1}{2m}\int_{t_a}^{t_b}dt2I(t)\theta(t_2-t)\right]_{J=0}\\ &= \frac{\delta}{\delta J(t_1)}\left(\frac{t_2-t_a}{m(t_b-t_a)}\int_{t_a}^{t_b}dtI(t)-\frac{1}{m}\int_{t_a}^{t_b}dtI(t)\theta(t_2-t)\right)_{J=0}\\ &= \frac{t_2-t_a}{m(t_b-t_a)}\frac{\delta}{\delta J(t_1)}\int_{t_a}^{t_b}dtI(t)-\frac{1}{m}\frac{\delta}{\delta J(t_1)}\int_{t_a}^{t_2}dtI(t)\Big|_{J=0}\\ &= \frac{t_2-t_a}{m(t_b-t_a)}(t_1-t_a)-\frac{1}{m}\int_{t_a}^{t_2}dt\frac{\delta I(t)}{\delta J(t_1)}\end{aligned}$$

下面来计算第二项

$$\int_{t_a}^{t_2}dt\frac{\delta I(t)}{\delta J(t_1)}=\int_{t_a}^{t_2}dt\theta(t_1-t)$$

其中

$$\frac{\delta I(t')}{\delta J(t)}=\theta(t-t')$$

这一项的复杂之处在于它的积分限不是全部时间区域。而前面24.2式的中的结果是针对全空间积分得到的。如果不是在整个空间区域中积分，那么就有可能出

现$\frac{\delta}{\delta J(x)}\int dyJ(y)\phi(y)=\int dy\delta(x-y)\phi(y)$中的点$x$不在积分区域中的情况。这样一来这个公式就失效了，因此做这个积分必须分情况进行分析。$t_1>t_2$时，

$$\int_{t_a}^{t_2}dt\theta(t_1-t)=t_2-t_a$$

即在积分区域$[t_a,t_2]$内$\theta(t_1-t)=1$。$t_1<t_2$时

$$\int_{t_a}^{t_2}dt\theta(t_1-t)=\int_{t_a}^{t1}dt=t_1-t_a$$

即只有在$t<t_1$时$\theta(t_1-t)=1$，否则为零。将这两种情况的结果合并起来写，则有：

$$\int_{t_a}^{t_2}dt\theta(t_1-t)=\underbrace{\theta(t_1-t_2)(t_2-t_a)}+\underbrace{\theta(t_2-t_1)(t_1-t_a)}$$

这样便有：

$$\begin{aligned}\left.\frac{\delta^2B[J]}{\delta J(t_1)\delta J(t_2)}\right|_{J=0}&=\frac{t_2-t_a}{m(t_b-t_a)}(t_1-t_a)-\frac{1}{m}[\theta(t_1-t_2)(t_2-t_a)+\theta(t_2-t_1)(t_1-t_a)]\\&=\frac{1}{m(t_b-t_a)}[(t_2-t_a)(t_1-t_a)-\theta(t_1-t_2)(t_2-t_a)(t_b-t_a)\\&-\theta(t_2-t_1)(t_1-t_a)(t_b-t_a)]\end{aligned}$$

将结果改写成对称一些的形式

$$\begin{aligned}t_b-t_a&=(t_b-t_1)+(t_1-t_a)\\t_b-t_a&=(t_b-t_2)+(t_2-t_a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left.\frac{\delta^2B[J]}{\delta J(t_1)\delta J(t_2)}\right|_{J=0}\\&=\frac{1}{m(t_b-t_a)}\{(t_2-t_a)(t_1-t_a)-\theta(t_1-t_2)(t_2-t_a)[(t_b-t_1)+(t_1-t_a)]\\&-\theta(t_2-t_1)(t_1-t_a)[(t_b-t_2)+(t_2-t_a)]\}\\&=\frac{1}{m(t_b-t_a)}\{(t_2-t_a)(t_1-t_a)-\theta(t_1-t_2)(t_2-t_a)(t_b-t_1)-\theta(t_1-t_2)(t_2-t_a)(t_1-t_a)\\&-\theta(t_2-t_1)(t_1-t_a)(t_b-t_2)-\theta(t_2-t_1)(t_1-t_a)(t_2-t_a)\}\\&=\frac{1}{m(t_b-t_a)}\{-\theta(t_1-t_2)(t_2-t_a)(t_b-t_1)-\theta(t_2-t_1)(t_1-t_a)(t_b-t_2)\\&+\underbrace{(t_2-t_a)(t_1-t_a)[1-\theta(t_1-t_2)-\theta(t_2-t_1)]}\}\\&=-\left\{\frac{\theta(t_1-t_2)(t_2-t_a)(t_b-t_1)}{m(t_b-t_a)}+\frac{\theta(t_2-t_1)(t_1-t_a)(t_b-t_2)}{m(t_b-t_a)}\right\}\end{aligned}\tag{24.46}$$

将所得结果代回（24.45）式中便可得到两个坐标编时乘积的矩阵元：

$$\begin{aligned}\langle b|T\left[\hat{q}\left(t_1\right),\hat{q}\left(t_2\right)\right]|a\rangle &= \langle q_b t_b|T\left[\hat{q}\left(t_1\right),\hat{q}\left(t_2\right)\right]|q_a t_a\rangle \\ &= Z_{ba}[0]\left\{i\hbar\frac{\theta\left(t_1-t_2\right)\left(t_2-t_a\right)\left(t_b-t_1\right)}{m\left(t_b-t_a\right)}+i\hbar\frac{\theta\left(t_2-t_1\right)\left(t_1-t_a\right)\left(t_b-t_2\right)}{m\left(t_b-t_a\right)}\right. \\ &+\left.\left(q_a+\frac{q_b-q_a}{t_b-t_a}\left(t_1-t_a\right)\right)\left(q_a+\frac{q_b-q_a}{t_b-t_a}\left(t_2-t_a\right)\right)\right\} \\ &= Z_{ba}[0]\left\{i\hbar\left[\frac{\theta\left(t_1-t_2\right)\left(t_2-t_a\right)\left(t_b-t_1\right)}{m\left(t_b-t_a\right)}+\frac{\theta\left(t_2-t_1\right)\left(t_1-t_a\right)\left(t_b-t_2\right)}{m\left(t_b-t_a\right)}\right]\right. \\ &+\left.\left(q_a+\frac{q_b-q_a}{t_b-t_a}\left(t_1-t_a\right)\right)\left(q_a+\frac{q_b-q_a}{t_b-t_a}\left(t_2-t_a\right)\right)\right\}\end{aligned}$$

由这个结果，或更清晰的由24.10式可以看出。所得的矩阵元中包括两部分。一部分含有系数$i\hbar$.另一部分则没有$i\hbar$而是两个算符矩阵元$\langle b|\hat{q}\left(t_1\right)|a\rangle$和$\langle b|\hat{q}\left(t_2\right)|a\rangle$的简单乘积。包含$i\hbar$的这部分是真正的量子效应。它来源于算符$\hat{q}\left(t_1\right)$与$\hat{q}\left(t_2\right)$的可对易性。这部分贡献与场论中的相连图部分相联系。可见生成泛函$Z_{ba}[J]$生成了相连图又生成的不相连图。因此$Z_{ba}[J]$是所有图的生成泛函。

容易看出对这里的生成泛函只能求到二阶泛函导数。三阶及三阶以上导数为零。不为零的高阶导数要考虑$V(g)\neq 0$的情况。

24.10 生成泛函$W_{ba}[J]$

前面我们引入了生成泛函$Z_{ba}[J]$，计算表明（它是所有可能图（相连的和不相连的）的生成泛函）$Z_{ba}[J]$中包含两部分贡献。一部分是由于算符之间不对易的性质带来的，是纯粹的量子效应，另一部分则是平庸的贡献。下面定义一个新的生成泛函[1]：

$$Z_{ba}[J]=e^{\frac{i}{\hbar}W_{ba}[J]} \tag{24.47}$$

即：

$$W_{ba}[J]=\frac{\hbar}{i}\ln Z_{ba}[J] \tag{24.48}$$

[1]生成泛函

$$Z_{ba}=\int_a^b \mathcal{D}q e^{i\left[S_{cl}+J(t)q\right]},$$

对比式（24.47），有

$$e^{\frac{i}{\hbar}W_{ba}[J]}=\int_a^b \mathcal{D}q e^{i\left[S_{cl}+J(t)q\right]},$$

这样我们可以看到$W_{ba}[J]$相对于一个“量子”作用量（注意，它还不是有效作用量）。

可以证明这个生成泛函给出的只是对应量子效应的那部分贡献，在场理论中则对应相连图的情况。下面我们来说明$W_{ba}[J]$确实满足我们期望中的要求。即只包含量子的贡献。将$W_{ba}[J]$对流$J(t)$求泛函导数

$$\frac{\delta W_{ba}[J]}{\delta J(t)}=\frac{\hbar}{i}\frac{1}{Z_{ba}[J]}\frac{\delta Z_{ba}[J]}{\delta J(t)}\equiv\langle\hat{q}(t)\rangle_J \tag{24.49}$$

这里我们将$\frac{\delta W}{\delta J}$定义成$\langle\hat{q}(t)\rangle_J$是因为它其实就是一个归一化了的矩阵元（期待值）[2]。这是因为

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\delta Z_{ba}[J]}{\delta J(t)}=\langle b|\hat{q}(t)|a\rangle_J$$

这样便有

$$\frac{\delta W_{ba}[J]}{\delta J(t)}=\frac{\frac{\hbar}{i}\frac{\delta Z_{ba}[J]}{\delta J(t)}}{Z_{ba}[J]}=\frac{\langle b|\hat{q}(t)|a\rangle}{Z_{ba}[J]}=\langle\hat{q}(t)\rangle_J$$

也就是在矩阵元的结果中除掉了$Z_{ba}[J]$的值。这样得到的结果便是归一的了。

只考虑一个算符的情况自然谈不上对易不对易。当然也就区分不出量子效应。下面我们来考虑两个算符的情况。

$$\begin{aligned}\frac{\hbar}{i}\frac{\delta^2W_{ba}[J]}{\delta J(t_1)\delta J(t_2)}&=\left(\frac{\hbar}{i}\right)^2\frac{\delta}{\delta J(t_1)}\left(\frac{\delta}{\delta J(t_2)}\ln Z_{ba}[J]\right)\\&=\left(\frac{\hbar}{i}\right)^2\frac{\delta}{\delta J(t_1)}\left(\frac{1}{Z_{ba}[J]}\frac{\delta Z_{ba}[J]}{\delta J(t_2)}\right)\\&=\left(\frac{\hbar}{i}\right)^2\left(\left(\frac{\delta}{\delta J(t_1)}\frac{1}{Z_{ba}[J]}\right)\frac{\delta Z_{ba}[J]}{\delta J(t_2)}+\frac{1}{Z_{ba}[J]}\frac{\delta}{\delta J(t_1)}\left(\frac{\delta Z_{ba}[J]}{\delta J(t_2)}\right)\right)\\&=\left(\frac{\hbar}{i}\right)^2\left(-\left(\frac{1}{Z_{ba}[J]}\right)^2\frac{\delta Z_{ba}[J]}{\delta J(t_1)}\frac{\delta Z_{ba}[J]}{\delta J(t_2)}+\frac{1}{Z_{ba}[J]}\frac{\delta^2Z_{ba}[J]}{\delta J(t_1)\delta J(t_2)}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\hbar}{i}\frac{\delta^2W_{ba}[J]}{\delta J(t_1)\delta J(t_2)}&=\left(\frac{\hbar}{i}\right)^2\frac{1}{Z_{ba}[J]}\frac{\delta^2Z_{ba}[J]}{\delta J(t_1)\delta J(t_2)}-\left(\frac{\hbar}{i}\right)^2\left(\frac{1}{Z_{ba}[J]}\right)^2\frac{\delta Z_{ba}[J]}{\delta J(t_1)}\frac{\delta Z_{ba}[J]}{\delta J(t_2)}\\&=\left(\frac{\hbar}{i}\right)^2\frac{\frac{\delta^2Z_{ba}[J]}{\delta J(t_1)\delta J(t_2)}}{Z_{ba}[J]}-\left(\frac{\hbar}{i}\right)\frac{\frac{\delta Z_{ba}[J]}{\delta J(t_1)}}{Z_{ba}[J]}\left(\frac{\hbar}{i}\right)\frac{\frac{\delta Z_{ba}[J]}{\delta J(t_2)}}{Z_{ba}[J]}\end{aligned} \tag{24.50}$$

[2]

$$\frac{\delta W_{ba}[J]}{\delta J(t)}=\frac{\frac{\hbar}{i}\frac{\delta Z_{ba}[J]}{\delta J(t)}}{Z_{ba}[J]}=\frac{\langle b|T[\hat{q}(t)]|a\rangle_J}{\langle b|a\rangle_J}$$

与（24.49）式的结果对比知第二项[3]

$$\underbrace{\left(\frac{\hbar}{i}\right)^2\left(\frac{1}{Z_{ba}[J]}\right)^2\frac{\delta Z_{ba}[J]}{\delta J(t_1)}\frac{\delta Z_{ba}[J]}{\delta J(t_2)}}=\langle\hat{q}(t_1)\rangle_J\langle\hat{q}(t_2)\rangle_J$$

$$\frac{\delta Z_{ba}[J]}{\delta J(t_1)}=\frac{\langle b|\hat{q}(t_1)|a\rangle_J}{Z_{ba}[J]}$$
$$\frac{\delta Z_{ba}[J]}{\delta J(t_2)}=\frac{\langle b|\hat{q}(t_2)|a\rangle_J}{Z_{ba}[J]}$$

$$\left(\frac{\hbar}{i}\right)^2\left(\frac{1}{Z_{ba}[J]}\right)^2\frac{\delta^2 Z_{ba}[J]}{\delta J(t_1)\delta J(t_2)}=\frac{\langle q_b t_b|T[\hat{q}(t_1),\hat{q}(t_2)]|q_a t_a\rangle}{(Z_{ba}[J])^2}\equiv\langle T[\hat{q}(t_1)\ \ \hat{q}(t_2)]\rangle_J$$

也就是说这一项是归一化了的编时乘积的矩阵元，这样我们便有

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\delta^2 W_{ba}[J]}{\delta J(t_1)\delta J(t_2)}=\underbrace{\langle T[\hat{q}(t_1)\ \ \hat{q}(t_2)]\rangle_J}_{\text{经典+量子}}-\underbrace{\langle\hat{q}(t_1)\rangle_J\langle\hat{q}(t_2)\rangle_J}_{\text{经典}}$$

由这个结果我们可以直接看出，在之前给出的结果中不含$i\hbar$的贡献的项已被减除掉了。被减除掉的项是两个算符元期待值的简单乘积。在场论的处理中我们将会看到被减掉的这部分是所谓的不相连图的贡献了。因此说$Z_{ba}[J]$则是所有图的生成泛函。

24.11 存在相互作用$V(q)$时的跃迁矩阵元

前面的讨论是在相互作用势$V(q)=0$的前提下进行的。在这里我们来讨论$V(q)\neq 0$的情况（由之前的结果可以看出$V(q)=0$情况下的生成泛函Z_{ba}只能求到二阶泛函导数，二阶以上泛函导数均为零）考虑作用势$V(q)$后的系统Lagrange量和Hamilton量为：

$$L(q,\dot{q})=\frac{1}{2}m\dot{q}^2-V(q)+J(t)q$$
$$H(p,q)=\frac{p^2}{2m}+V(q)-J(t)q$$

[3]

$$\begin{aligned}\frac{\hbar}{i}\frac{\delta^2 W_{ba}[J]}{\delta J(t_1)\delta J(t_2)}&=\left(\frac{\hbar}{i}\right)^2\frac{1}{Z_{ba}[J]}\frac{\delta^2 Z_{ba}[J]}{\delta J(t_1)\delta J(t_2)}-\left(\frac{\hbar}{i}\right)^2\left(\frac{1}{Z_{ba}[J]}\right)^2\frac{\delta Z_{ba}[J]}{\delta J(t_1)}\frac{\delta Z_{ba}[J]}{\delta J(t_2)}\\&=\left(\frac{\hbar}{i}\right)^2\frac{\frac{\delta^2 Z_{ba}[J]}{\delta J(t_1)\delta J(t_2)}}{Z_{ba}[J]}-\left(\frac{\hbar}{i}\right)\frac{\frac{\delta Z_{ba}[J]}{\delta J(t_1)}}{Z_{ba}[J]}\left(\frac{\hbar}{i}\right)\frac{\frac{\delta Z_{ba}[J]}{\delta J(t_2)}}{Z_{ba}[J]}\\&=\frac{\langle b|T[q(t_1)q(t_2)]|a\rangle_J}{\langle b|a\rangle_J}-\frac{\langle b|T[q(t_1)]|a\rangle_J}{\langle b|a\rangle_J}\frac{\langle b|T[q(t_2)]|a\rangle_J}{\langle b|a\rangle_J}\end{aligned}$$

相应的生成泛函，也就是传播子为：

$$Z_{ba}[J]=\begin{cases}\int\mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}dt\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2-V(q)+J(t)q\right)}, & \text{Lagrange表述}\\ \int\mathcal{D}q\int\mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}dt\left(p\dot{q}-\frac{p2}{2m}-V(q)+J(t)q\right)}, & \text{Hamilton表述}\end{cases}\tag{24.51}$$

显然除非势$V(q)$是q的二次型，否则这个积分便不能被解析的积出。但我们得以用（7）式的结果将（1）式的生成泛函用$V(q)=0$时的生成泛函$Z_{ba}^{0}[J]$表示。$Z_{ba}[J]$就是前几节求得的$V(q)=0$时的$Z_{ba}[J]$。加个“0”只是强调$V(q)=0$

$$Z_{ba}^{0}[J]\equiv\begin{cases}\int\mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}dt\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2+J(t)q\right)}, & \text{Lagrange表述}\\ \int\mathcal{D}q\int\mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}dt\left(p\dot{q}-\frac{p2}{2m}+J(t)q\right)}, & \text{Hamilton表述}\end{cases}\tag{24.52}$$

这样便有

$$\begin{aligned}Z_{ba}[J]&=\int\mathcal{D}q\int\mathcal{D}p e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}dtV(q)}e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}dt\left(p\dot{q}-\frac{p2}{2m}+J(t)q\right)}\\&=e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}dtV\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J(t)}\right)}\int\mathcal{D}q\int\mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}dt\left(p\dot{q}-\frac{p2}{2m}+J(t)q\right)}\end{aligned}\tag{24.53}$$

$$Z_{ba}[J]=e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}dtV\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J(t)}\right)}Z_{ba}^{0}[J]$$

对一般的$V(q)$，我们要用微扰法求其结果。当然微扰展开的级数是否能收敛还要具体问题具体分析。

第二十五章　自由粒子的路径积分：另一种方法

路径积分中的核心问题是求跃迁振幅

$$K(b,a)=K(x_2,t_2;x_1,t_1)=\int_{x_1=x(t_1)}^{x_2=x(t_2)}\mathcal{D}x(t)\,e^{\frac{iS[x(t)]}{\hbar}},$$

其中作用量S定义为

$$S=\int_{t_1}^{t_2}L(x,\dot{x},t)\,dt.$$

这样原则上，在知道了Lagrange量的形式后就确定了$K(b,a)$的结果。自由粒子的Lagrange量为

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2. \tag{25.1}$$

我们用$\bar{x}(t)$表示由x_1点到x_2点的经典路径，这样的任意一条路径可表示为

$$x(t)=\bar{x}(t)+y(t), \tag{25.2}$$

其中$y(t)$是一个非常任意的变化。因此$x(t)$便是一条任意的路径。（此处应该插一图）显然，在端点时

$$y(t_1)=y(t_2)=0.$$

由(25.2)式还可得$\dot{x}(t)$

$$\dot{x}(t)=\dot{\bar{x}}(t)+\dot{y}(t). \tag{25.3}$$

将(25.3)式代入到Lagrange量中

$$L(\dot{x})=L\left(\dot{\bar{x}}+\dot{y}\right)$$

由此式将Lagrange量$L(\dot{x})$在$\dot{\bar{x}}$附近展开得

$$L\left(\dot{\bar{x}}+\dot{y}\right)=L\left(\dot{\bar{x}}\right)+\left.\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right|_{\dot{\bar{x}}}\dot{y}+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}\partial\dot{x}}\right|_{\dot{\bar{x}}}\dot{y}^2. \tag{25.4}$$

这个展示只能展到二阶项。因为$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$只到二阶项。下一级展开项为零。所以（25.4）式给出的是一个精确地结果。不是取近似。这样可以得到作用量为

$$\begin{aligned}S &= \int_{t_1}^{t_2} L\left(\dot{x}\right)dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt\left[L\left(\dot{\bar{x}}\right)+\left.\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right|_{\dot{\bar{x}}}\dot{y}+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}\partial\dot{x}}\right|_{\dot{\bar{x}}}\dot{y}^2\right].\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right|_{\dot{\bar{x}}} &= \left.\frac{\partial}{\partial\dot{x}}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)\right|_{\dot{\bar{x}}} \\ &= m\,\dot{x}|_{\dot{\bar{x}}} \\ &= m\dot{\bar{x}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}\partial\dot{x}}\right|_{\dot{\bar{x}}} &= \left.\frac{1}{2}m\right|_{\dot{\bar{x}}} \\ &= \frac{m}{2}.\end{aligned}$$

所以原式

$$\begin{aligned}S &= \int_{t_1}^{t_2} L\left(\dot{x}\right)dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt\left[L\left(\dot{\bar{x}}\right)+m\dot{\bar{x}}\dot{y}+\frac{1}{2}m\dot{y}^2\right],\end{aligned}$$

其中第二项

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} m\dot{\bar{x}}\dot{y}dt &= \int_{t_1}^{t_2} m\dot{\bar{x}}\frac{dy}{dt}dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} m\dot{\bar{x}}dy \\ &= m\dot{\bar{x}}y\int_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2} m\ddot{\bar{x}}ydt \\ &= 0.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}S &= \int_{t_1}^{t_2} dt\left[L\left(\dot{\bar{x}}\right)+\frac{1}{2}m\dot{y}^2\right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dtL\left(\dot{\bar{x}}\right)+\frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2}\dot{y}^2dt \\ &= S_{cl}+\frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2}\dot{y}^2dt.\end{aligned}$$

这里的S_{cl}是经典运动的作用量，也就是由最小作用原理δS_{cl}确定的那个作用量。下面就先求一下自由粒子的这个S_{cl}

$$\begin{aligned} S_{cl} &= \int_{t_1}^{t_2} dtL\left(\dot{\bar{x}}\right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt\left[\frac{1}{2}m\dot{\bar{x}}^2\right] \\ &= \frac{1}{2}m\dot{\bar{x}}^2 t\int_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\dot{\bar{x}}^2\right]t \\ &= \frac{1}{2}m\dot{\bar{x}}^2 t\int_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt\left(m\ddot{\bar{x}}\right)t \\ &= \frac{1}{2}m\dot{\bar{x}}^2 t\int_{t_1}^{t_2} \end{aligned}$$

这里的$\bar{x}(t)$表示的是经典自由粒子的路径。由Euler Lagrange equation可以解出$\dot{\bar{x}} = const$的结果，即匀速直线运动。我们知道，对匀速直线运动，由（x_1, t_1）出发到达（x_2, t_2）的过程有关系

$$x_2 - x_1 = \dot{\bar{x}}\left(t_2 - t_1\right),$$

所以

$$\dot{\bar{x}} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

代入S_{cl}的结果中有

$$S_{cl} = \frac{1}{2}m\frac{\left(x_2 - x_1\right)^2}{t_2 - t_1}. \tag{25.5}$$

这就是自由粒子的经典作用量。于是任意路径的作用量便为

$$S = \frac{1}{2}m\frac{\left(x_2 - x_1\right)^2}{t_2 - t_1} + \frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2}\dot{y}^2 dt. \tag{25.6}$$

在用路径积分的方法处理问题时。中心问题是要求跃迁几率振幅

$$K\left(b, a\right) = K\left(x_{2,}t_2; x_{1,}t_1\right).$$

按照$K\left(b, a\right)$的表达式可得

$$\begin{aligned} K\left(x_{2,}t_2; x_{1,}t_1\right) &= \int_{x_1=x(t_1)}^{x_2=x(t_2)} \mathcal{D}x\left(t\right)e^{\frac{iS[x(t)]}{\hbar}} \\ &= \int_{x_1=x(t_1)}^{x_2=x(t_2)} \mathcal{D}x\left(t\right)e^{\frac{iS_{cl}}{\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2}\dot{y}^2 dt}. \end{aligned}$$

这是的S_{cl}对积分而言已是一个常数。这里的积分是对各种可能的路径积分，经典路径已经是常数了，那么积分实际是对$y(t)$进行的。我们做一个变换将对$x(t)$的积分换成对$y(t)$的积分。

$$\begin{aligned}\mathcal{D}x\left(t\right) &= \left|\frac{\delta x(t)}{\delta y\left(t\right)}\right|\mathcal{D}y\left(t\right)\\ &= \left|\frac{\delta\left(\bar{x}(t)\right)+y\left(t\right)}{\delta y\left(t\right)}\right|\mathcal{D}y\left(t\right)\\ &= \mathcal{D}y\left(t\right)\end{aligned}$$

注：对$y(t)$而言$\bar{x}(t)$是常量,可以将$\left|\frac{\delta x(t)}{\delta y(t)}\right|$理解成泛函积分中变换的雅可比。这样便有

$$\begin{aligned}K\left(x_{2},t_{2};x_{1},t_{1}\right) &= e^{\frac{iS_{cl}}{\hbar}}\int_{y(t_1)=0}^{y(t_2)=0}\mathcal{D}y\left(t\right)e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2}\dot{y}^{2}dt}\\ &= e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\frac{\left(x_2-x_1\right)^2}{t_2-t_1}}\int_{y(t_1)=0}^{y(t_2)=0}\mathcal{D}y\left(t\right)e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2}\dot{y}^{2}dt}.\end{aligned}\tag{25.7}$$

可以直接看到，在将$x(t)$取成$\bar{x}\left(t\right)+y\left(t\right)$后，跃迁振幅$K\left(x_{2},t_{2};x_{1},t_{1}\right)$可表示成两部分乘积的形式，其中一部分只与经典路径$\bar{x}\left(t\right)$有关。定积分后的结果当然只与积分限有关。因此这部分是x_{2},x_{1}和t_{2},t_{1}的函数，另一部分的被积函数部分则只与$y(t)$有关。积分的上下限是$y(t_2)=0$和$y(t_1)=0$。因此积分结果将与t_1,t_2及$y_1\left(=0\right)$和$y_2\left(=0\right)$有关。既然y_{1},y_{2}是零。那么结果自然就只依赖于t_1,t_2了（与x_1,x_2当然也无关）这是一个自由粒子系统，能量当然是守恒的。这意味着系统具有时间平移不变性（孤立系统都具备这样的性质），所以对时间的依赖应该只依赖于时间的间隔（t_2-t_1），而与时刻的选取无关。就是说第二部分只是（t_2-t_1）的函数。我们定义

$$A\left(t_2-t_1\right)\equiv\int_0^0\mathcal{D}y\left(t\right)e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2}\dot{y}^{2}(t)dt},\tag{25.8}$$

下一步要做的就是解出这个$A\left(t_2-t_1\right)$。此时的跃迁振幅可表示为

$$K\left(x_{2},t_{2};x_{1},t_{1}\right)=A\left(t_2-t_1\right)e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\frac{\left(x_2-x_1\right)^2}{t_2-t_1}}.\tag{25.9}$$

下面要做的显然是确定$A\left(t_2-t_1\right)$的形式。由于我们没有很好的定义这种泛函积分。所以$A\left(t_2-t_1\right)$不能通过对式（25.8）的直接运算得到，于是要想确定它就要通过利用一些诸如$K\left(b,a\right)$的性质之类的关系来获得。

下面先来回顾一下传播子$K\left(b,a\right)$的一些性质。当时得到一个重要关系是传播子的群性质，以及其与波函数的关系。所谓群性质是指

$$K\left(x_{2,}t_2;x_{1,}t_1\right)=\int dxK\left(x_{2,}t_2;x_{,}t\right)K\left(x_{,}t;x_{1,}t_1\right), \tag{25.10}$$

波函数与传播子的关系为

$$\psi\left(x_{2,}t_2\right)=\int dx_1K\left(x_{2,}t_2;x_{1,}t_1\right)\psi\left(x_{1,}t_1\right).$$

波函数作为一个普通的函数有一个自然的性质就是（δ函数的性质）

$$\psi\left(x_{2,}t\right)=\int dx_1\delta\left(x_2-x_1\right)\psi\left(x_{1,}t\right),$$

两式对比可得

$$K\left(x_{2,}t;x_{1,}t\right)=\delta\left(x_2-x_1\right). \tag{25.11}$$

这样就可以利用$K\left(b,a\right)$的这些性质来试看求$A\left(t_2-t_1\right)$的形式了。简单起见，考虑一维的情况（自由粒子的结果很容易推广到高维中）

$$\begin{aligned}\delta\left(x_2-x_1\right) &= K\left(x_{2,}t';x_{1,}t'\right)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}dxK\left(x_{2,}t';x,t\right)K\left(x_{,}t;x_{1,}t'\right)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}dxA\left(t'-t\right)e^{i\frac{S_{cl}\left(x_2,t';x,t\right)}{\hbar}}A\left(t-t'\right)e^{i\frac{S_{cl}\left(x,t;x_1,t'\right)}{\hbar}}\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}dxA\left(t'-t\right)A\left(t-t'\right)e^{i\frac{S_{cl}\left(x_2,t';x,t\right)}{\hbar}}e^{i\frac{S_{cl}\left(x,t;x_1,t'\right)}{\hbar}},\end{aligned}$$

由$A\left(t-t'\right)$的定义可知

$$\begin{aligned}A\left(t-t'\right) &= \int_0^0\mathcal{D}y(t)e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\int_{t'}^{t}\dot{y}^2(t)dt}\\ &= \int_0^0\mathcal{D}y(t)e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\int_{t}^{t'}\dot{y}^2(t)dt}\\ &= \left[\int_0^0\mathcal{D}y(t)e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\int_{t}^{t'}\dot{y}^2(t)dt}\right]^*\\ &= A^*\left(t'-t\right),\end{aligned}$$

此外由作用量$S_{cl}\left(x,t';x,t\right)$的定义可知

$$S_{cl}\left(x,t;x,t'\right)=-S_{cl}\left(x,t';x,t\right),$$

代回到前面的式子中有

$$\begin{aligned}\delta\left(x_2-x_1\right) &= \int_{-\infty}^{\infty}dxA\left(t'-t\right)A^*\left(t'-t\right)e^{i\frac{S_{cl}\left(x_2,t';x,t\right)-S_{cl}\left(x_1,t';x,t\right)}{\hbar}}\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}dx\left|A\left(t'-t\right)\right|^2e^{i\frac{S_{cl}\left(x_2,t';x,t\right)-S_{cl}\left(x_1,t';x,t\right)}{\hbar}}.\end{aligned}$$

至此我们考虑的都是一个有限的传播。下面将这个问题化成一个无限小距离上的传播，即令

$$\Delta x = x_2 - x_1(\text{趋于}0)$$

这样便有

$$\begin{aligned} S_{cl}\left(x_2,t';x,t\right) - S_{cl}\left(x_1,t';x,t\right) &= S_{cl}\left(x_1+\Delta x,t';x,t\right) - S_{cl}\left(x_1,t';x,t\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} S_{cl}\left(x_1,t';x,t\right)\cdot\Delta x \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{m}{2}\frac{\left(x_1-x\right)^2}{t'-t}\right)\cdot\left(x_2-x_1\right) \\ &= m\frac{\left(x_1-x\right)}{t'-t}\left(x_2-x_1\right) \\ &\equiv p(x)\left(x_2-x_1\right), \end{aligned}$$

其中已令

$$p\left(x\right) = \frac{\partial S_{cl}\left(x_1,t';x,t\right)}{\partial x_1} = m\frac{x_1-x}{t'-t}, \tag{25.12}$$

于是得

$$\delta\left(x_2-x_1\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left|A\left(t'-t\right)\right|^2 e^{i\frac{p(x)(x_2-x_1)}{\hbar}}.$$

我们的目的是要解释$A\left(t'-t\right)$,下面来凑一凑形式；δ函数可以表示成积分的形式

$$\delta\left(x\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{ikx}.$$

这样便有

$$k \equiv \frac{p}{\hbar},$$

$$\delta\left(x_2-x_1\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}e^{i\frac{p(x)(x_2-x_1)}{\hbar}}.$$

于是有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}e^{i\frac{p(x)(x_2-x_1)}{\hbar}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\left|A\left(t'-t\right)\right|^2 e^{i\frac{p(x)(x_2-x_1)}{\hbar}} \\ &= \left|A\left(t'-t\right)\right|^2\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{i\frac{p(x)(x_2-x_1)}{\hbar}} \\ &= \left|A\left(t'-t\right)\right|^2\int_{-\infty}^{+\infty} dp\left|\frac{dx}{dp}\right| e^{i\frac{p(x)(x_2-x_1)}{\hbar}} \\ &= \left|A\left(t'-t\right)\right|^2\left|\frac{dx}{dp}\right|\int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{i\frac{p(x)(x_2-x_1)}{\hbar}} \\ &= \left|A\left(t'-t\right)\right|^2\left|\frac{dx}{dp}\right| 2\pi\hbar\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}e^{i\frac{p(x)(x_2-x_1)}{\hbar}}. \end{aligned}$$

两边对比得

$$\left|A\left(t'-t\right)\right|^2\left|\frac{dx}{dp}\right|2\pi\hbar=1,$$

于是得$A\left(t'-t\right)$的结果

$$\left|A\left(t'-t\right)\right|^2=\frac{1}{2\pi\hbar}\left|\frac{dp}{dx}\right|.$$

有（25.12）式得

$$\begin{aligned}\left|A\left(t'-t\right)\right|^2 &= \frac{1}{2\pi\hbar}\left|\frac{\partial^2 S_{cl}\left(x_1,t';x,t\right)}{\partial x_1\partial x}\right| \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar}\left|-m\frac{1}{t'-t}\right|.\end{aligned}$$

于是有

$$\left|A\left(t'-t\right)\right|^2=\frac{m}{2\pi\hbar\left(t'-t\right)}.$$

由前面的讨论知这里的$A\left(t'-t\right)$是一个复数而不是个实数。因此有

$$A\left(t'-t\right)=e^{i\varphi}\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\left(t'-t\right)}},\tag{25.13}$$

这样便有了一个待定的参数φ。我们要通过一些条件来确定它（与波函数的归一化相似）由前面知这里的$A\left(t'-t\right)$是通过条件

$$\lim_{t_2\to t_1}K\left(x_2,t_2;x_1,t_1\right)=\delta\left(x_2-x_1\right)\tag{25.14}$$

求出的。当然选择φ取值的原则也应满足是此项条件。此时的传播子为

$$\begin{aligned}K\left(x_2,t_2;x_1,t_1\right) &= A\left(t_2-t_1\right)e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\frac{\left(x_2-x_1\right)^2}{t_2-t_1}} \\ &= e^{i\varphi}\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\left(t_2-t_1\right)}}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\frac{\left(x_2-x_1\right)^2}{t_2-t_1}}.\end{aligned}\tag{25.15}$$

为了与（25.14)式中的δ函数对比。我们选择这样一个δ函数的表示

$$\delta\left(x_2-x_1\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{\left(x_2-x_1\right)^2}{t}}\right],$$

取$t\equiv t_2-t_1$，则

$$\delta\left(x_2-x_1\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\lim_{t_2\to t_1}\left[\frac{1}{\sqrt{t_2-t_1}}e^{-\frac{\left(x_2-x_1\right)^2}{t_2-t_1}}\right].$$

而由（25.14）（25.15）式，我们有

$$\begin{aligned}
\lim_{t_2\to t_1} K\left(x_2,t_2;x_1,t_1\right) &= \lim_{t_2\to t_1} e^{i\varphi}\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\left(t_2-t_1\right)}}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\frac{\left(x_2-x_1\right)^2}{t_2-t_1}} \\
&= \lim_{t_2\to t_1} e^{i\varphi}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{m}{2\hbar\left(t_2-t_1\right)}}e^{-\frac{1}{i\hbar}\frac{m}{2}\frac{\left(x_2-x_1\right)^2}{t_2-t_1}} \\
&= \lim_{t_2\to t_1} e^{i\varphi}\frac{\sqrt{i}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{m}{2\hbar i\left(t_2-t_1\right)}}e^{-\frac{1}{i\hbar}\frac{m}{2}\frac{\left(x_2-x_1\right)^2}{t_2-t_1}} \\
&= e^{i\varphi}\sqrt{i}\lim_{\tau_2\to\tau_1}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{1}{\left(\tau_2-\tau_1\right)}}e^{-\frac{\left(x_2-x_1\right)^2}{\tau_2-\tau_1}}, \quad \tau_i\equiv\frac{2\hbar i}{m}t_i \\
&= e^{i\varphi}\sqrt{i}\delta\left(x_2-x_1\right).
\end{aligned}$$

与（25.14）式对比要求

$$e^{i\varphi}\sqrt{i}=1,$$

即

$$\begin{aligned}
e^{i\varphi} &= \frac{1}{\sqrt{i}} \\
&= e^{i\frac{\pi}{4}}.
\end{aligned}$$

代入（25.15）式有

$$K\left(x_2,t_2;x_1,t_1\right)=\frac{1}{\sqrt{i}}\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\left(t_2-t_1\right)}}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\frac{\left(x_2-x_1\right)^2}{t_2-t_1}}.$$

这样我们便得到了一维情况下的自由粒子的Feynman传播子。

$$\begin{aligned}
K\left(x_2,t_2;x_1,t_1\right) &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\left(t_2-t_1\right)}}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\frac{\left(x_2-x_1\right)^2}{t_2-t_1}} \\
&= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\left(t_2-t_1\right)}}e^{\frac{i}{\hbar}S_{cl}},
\end{aligned} \tag{25.16}$$

同时我们也得到了一个路径积分的结果

$$\int_{y(t_1)=0}^{y(t_2)=0}\mathcal{D}y\left(t\right)e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2}\dot{y}^2dt}=\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\left(t_2-t_1\right)}}, \tag{25.17}$$

三维情况的结果也不难得到

$$K\left(\mathbf{x}_2,t_2;\mathbf{x}_1,t_1\right)=\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\left(t_2-t_1\right)}\right)^{\frac{3}{2}}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\frac{\left(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1\right)^2}{t_2-t_1}}. \tag{25.18}$$

第二十六章　一维谐振子的路径积分：另一种方法

普通的二次型Lagrange量可以写为

$$L = a\left(t\right)x^{2} + b\left(t\right)x\dot{x} + c\left(t\right)\dot{x}^{2} + d\left(t\right)x + e\left(t\right)\dot{x} + f\left(t\right). \tag{26.1}$$

采用与处理自由粒子问题同样的处理。将任意一条路径$x(t)$表示成由最小作用原理得到的经典路径$\bar{x}(t)$，再加一个与$x(t)$相对应的任意扰动$y(t)$的形式

$$x\left(t\right) = \bar{x}\left(t\right) + y\left(t\right),\ \dot{x}\left(t\right) = \dot{\bar{x}}\left(t\right) + \dot{y}\left(t\right)\ . \tag{26.2}$$

在端点处有

$$y\left(t_{1}\right) = 0,\ y\left(t_{2}\right) = 0. \tag{26.3}$$

将Lagrange量在$\bar{x}\left(t\right)$及$\dot{\bar{x}}\left(t\right)$附近展开。由于$L$是二次型的,所以Taylor展开只能进行到二次项。展开结果是精确的。

$$L\left(x,\dot{x},t\right) = L\left(\bar{x},\dot{\bar{x}},t\right) + \left.\frac{\partial L}{\partial x}\right|_{\bar{x}} y + \left.\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right|_{\dot{\bar{x}}}\dot{y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^{2}L}{\partial x^{2}}y^{2} + 2\frac{\partial^{2}L}{\partial x\partial\dot{x}}y\dot{y} + \frac{\partial^{2}L}{\partial\dot{x}^{2}}\dot{y}^{2}\right)\Bigg|_{\bar{x}\dot{\bar{x}}} \tag{26.4}$$

因此可以直接计算作用量

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_{1}}^{t_{2}} dtL\left(x,\dot{x},t\right) \\ &= \int_{t_{1}}^{t_{2}} dtL\left(\bar{x},\dot{\bar{x}},t\right) + \int_{t_{1}}^{t_{2}} dt\left(\frac{\partial L}{\partial x}y + \frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\dot{y}\right)\Big|_{\bar{x}\dot{\bar{x}}} + \int_{t_{1}}^{t_{2}} dt\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^{2}L}{\partial x^{2}}y^{2} + 2\frac{\partial^{2}L}{\partial x\partial\dot{x}}y\dot{y} + \frac{\partial^{2}L}{\partial\dot{x}^{2}}\dot{y}^{2}\right)\Big|_{\bar{x}\dot{\bar{x}}} \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \int_{t_{1}}^{t_{2}} dt\left(\frac{\partial L}{\partial x}y + \frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\dot{y}\right) &= \int_{t_{1}}^{t_{2}} dt\left[\frac{\partial L}{\partial x}y + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}y\right) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}y\right] \\ &= \int_{t_{1}}^{t_{2}} dt\left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right]y + \frac{\partial L}{\partial\dot{x}}y\int_{t_{1}}^{t_{2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

此外

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2a(t)\,,\ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2} = 2c(t)\,,\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}} = b(t)$$

这样的作用量变为

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_1}^{t_2} dt L\left(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t\right) + \int_{t_1}^{t_2} dt\left[a(t) y^2 + b(t) y\dot{y} + c(t)\dot{y}^2\right] \\ &= S_{cl} + \int_{t_1}^{t_2} dt\left[a(t) y^2 + b(t) y\dot{y} + c(t)\dot{y}^2\right] \end{aligned} \tag{26.5}$$

将S代回传播子$K(x_2,t_2;x_1,t_1)$的表达式中

$$\begin{aligned} K(x_2,t_2;x_1,t_1) &= \int_{x_1=x(t_1)}^{x_2=x(t_2)} \mathcal{D}x(t)\, e^{i\frac{S}{\hbar}} \\ &= \int_{x_1=x(t_1)}^{x_2=x(t_2)} \mathcal{D}x(t)\, e^{i\frac{S_{cl}}{\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_1}^{t_2} dt\left[a(t)y^2+b(t)y\dot{y}+c(t)\dot{y}^2\right]} \end{aligned}$$

对针对各种可能路径的积分而言，已固定路径的S_{cl}便是个常数，剩下的部分便只是对$y(t)$积分了。所以

$$K(x_2,t_2;x_1,t_1) = e^{i\frac{S_{cl}}{\hbar}} \int_{y(t_1)=0}^{y(t_2)=0} \mathcal{D}y(t)\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_1}^{t_2} dt\left[a(t)y^2+b(t)y\dot{y}+c(t)\dot{y}^2\right]}.$$

我们可以看到，第二部分的积分中只出现了Lagrange量中的二次项的系数$a(t), b(t), c(t)$.而一次项及常数项的系数都没有出现。（一次项及常数项的作用则只在包含S_{cl}的部分中体现）这就是说，所有具有相同二次项的Lagrange量在计算传播子时,这部分都相同，与自由粒子的处理类似。定义

$$A(t_2,t_1) \equiv \int_{y(t_1)=0}^{y(t_2)=0} \mathcal{D}y(t)\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_1}^{t_2} dt\left[a(t)y^2+b(t)y\dot{y}+c(t)\dot{y}^2\right]}. \tag{26.6}$$

这时

$$K(x_2,t_2;x_1,t_1) = A(t_2,t_1)\, e^{i\frac{S_{cl}}{\hbar}}, \tag{26.7}$$

就是说所有二次项系数相同的$A(t_2,t_1)$都相同，而在a,b,c不含时的情况下$A(t_2,t_1) = A(t_2-t_1)$。

Exercise 3 计算粒子在恒力作用下的传播子。提示：利用$A(t_2,t_1)$只与*Lagrange*量中二次项系数有关这一性质。

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + Fx.$$

$$S_{cl}=\frac{m}{2}\frac{(x_2-x_1)^2}{t_2-t_1}+\frac{F(t_2-t_1)}{2}(x_1+x_2)-\frac{F^2(t_2-t_1)^3}{24m}.$$

解答：该情况二次项部分与自由粒子相同。因此

$$A(t_2-t_1)=A_{free}(t_2-t_1)=\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t_2-t_1)}}$$

代入*(26.7)*式得

$$K(x_2,t_2;x_1,t_1)=\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t_2-t_1)}}e^{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m}{2}\frac{(x_2-x_1)^2}{t_2-t_1}+\frac{F(t_2-t_1)}{2}(x_1+x_2)-\frac{F^2(t_2-t_1)^3}{24m}\right]}$$

26.1 一维谐振子的Feynman传播子

作为二次型的一个最简单例子。我们考虑谐振子的情况。谐振子的Lagrange量为

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}m\omega^2x^2. \tag{26.8}$$

谐振子是二次型的，因此可直接利用（26.7）式结果。此时的各项系数与t无关。因此有$A(t_2,t_1)=A(t_2-t_1)$。令

$$t_2-t_1\equiv T,$$

有

$$\begin{aligned}K(x_2,t_2;x_1,t_1) &= A(t_2-t_1)e^{i\frac{S_{cl}}{\hbar}}\\ &= A(T)e^{i\frac{S_{cl}}{\hbar}}.\end{aligned} \tag{26.9}$$

其中的S_{cl}为经典谐振子的作用量

$$S_{cl}=\frac{m\omega}{2\sin(T\omega)}\left[\left(x_2^2+x_1^2\right)\cos(\omega T)-2x_1x_2\right],\ \omega T\neq n\pi \tag{26.10}$$

与自由粒子的情况相同。剩下的问题是要确立$A(T)$，用的方法也与自由粒子中的处理相同，即利用传播子的群性质。以及等时的传播子将趋于一个δ函数的性质

$$K(x_2,t;x_1,t)=\delta(x_2-x_1),$$

$$\begin{aligned}\delta(x_2-x_1) &= K\left(x_2,t';x_1,t'\right)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}dxK\left(x_2,t';x,t\right)K\left(x,t;x_1,t'\right).\end{aligned}$$

因为

$$\left(\int \mathcal{D}(x)\, e^{\frac{-i}{\hbar}\int_{t_1}^{t_2} dtL}\right)^* = \int \mathcal{D}(x)\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_2}^{t_1} dtL},$$

可证

$$K\left(x,t;x_1,t'\right) = K^*\left(x_1,t';x,t\right).$$

所以

$$\delta(x_2-x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx K\left(x_2,t';x,t\right) K^*\left(x_1,t';x,t\right).$$

由（26.9)式可知

$$K\left(x_2,t';x,t\right) = A(T)\, e^{i\frac{S(x_2,t';x,t)}{\hbar}}$$

$$K^*\left(x_1,t';x,t\right) = A^*(T)\, e^{-i\frac{S(x_1,t';x,t)}{\hbar}},$$

这样便有

$$\delta(x_2-x_1) = |A(T)|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{\frac{i}{\hbar}[S(x_2,t';x,t)-S(x_1,t';x,t)]}.$$

在$x_2-x_1\to 0$时有

$$\begin{aligned} S\left(x_2,t';x,t\right) - S\left(x_1,t';x,t\right) &= \frac{\partial}{\partial x_1} S\left(x_1,t';x,t\right)(x_2-x_1) \\ &\equiv p(x)(x_2-x_1). \end{aligned}$$

其中$p(x)\equiv \frac{\partial}{\partial x_1} S\left(x_1,t';x,t\right)$。所以

$$\begin{aligned} \delta(x_2-x_1) &= |A(T)|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{\frac{i}{\hbar}p(x)(x_2-x_1)} \\ &= |A(T)|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dp \left|\frac{dx}{dp}\right| e^{\frac{i}{\hbar}p(x)(x_2-x_1)} \\ &= |A(T)|^2 \left|\frac{dx}{dp}\right| \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{\frac{i}{\hbar}p(x)(x_2-x_1)} \\ &= |A(T)|^2 \frac{2\pi\hbar}{\left|\frac{dp}{dx}\right|} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}p(x)(x_2-x_1)}. \end{aligned}$$

因为

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx},$$

所以有

$$|A(T)|^2 \frac{2\pi\hbar}{\left|\frac{dp}{dx}\right|} = 1,$$

$$\begin{aligned}
|A(T)|^2 &= \frac{\left|\frac{dp}{dx}\right|}{2\pi\hbar} \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar}\left|\frac{\partial^2 S(x_1,t';x,t)}{\partial x_1 \partial x}\right| \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar}\left|\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{m\omega}{2\sin(\omega T)}\left[\left(x_1^2+x^2\right)\cos(\omega T)-2x_1 x\right]\right]\right\}\right| \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar}\left|\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{m\omega}{\sin(\omega T)}\left[x_1\cos(\omega T)-x\right]\right\}\right| \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar}\frac{m\omega}{\sin(\omega T)}.
\end{aligned}$$

与自由粒子的情况相似,$A(T)$是个复数,

$$A(T)=e^{i\varphi}\sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar}\frac{m\omega}{\sin(\omega T)}}.$$

这样便得到传播子

$$\begin{aligned}
K(x_2,t_2;x_1,t_1) &= A(T)\,e^{\frac{i}{\hbar}S_{cl}(x_2,t_2;x_1t_1)} \\
&= e^{i\varphi}\sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar}\frac{m\omega}{\sin(\omega T)}}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m\omega}{2\sin(\omega T)}\left[\left(x_2^2+x_1^2\right)\cos(\omega T)-2x_1x_2\right]}.
\end{aligned}$$

其中有一个待确定的参数φ,我们利用$K(b,a)$的性质来确定φ（与在自由粒子中的处理一样），传播子应满足

$$\lim_{t_2\to t_1}K(x_2,t_2;x_1,t_1)=\delta(x_2-x_1).$$

在谐振子的情况中便是要求

$$\lim_{T\to 0}e^{i\varphi}\sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar}\frac{m\omega}{\sin(\omega T)}}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m\omega}{2\sin(\omega T)}\left[\left(x_2^2+x_1^2\right)\cos(\omega T)-2x_1x_2\right]}=\delta(x_2-x_1).$$

这个被取极限的式子中有三角函数，比较复杂，不过我们还应注意到φ的结果应是一个常数，那么它在任何情况下都应该是普通的。这样不妨再取$\omega\to 0$的情况，因为φ的结果在$\omega\to 0$时也应成立。这样不妨先对式子左边取$\omega\to 0$得极限，再取$T\to 0$的极限。

三角函数中有著名的极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

下面就将式子左边凑成相应形式，并取$\omega\to 0$

$$\begin{aligned}
\text{左边} &= \lim_{\omega\to 0}e^{i\varphi}\sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar}\frac{m}{T}\frac{m\omega}{\sin(\omega T)}}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{1}{2}\frac{m}{T}\frac{1}{\frac{\sin(\omega T)}{\omega T}}\left[\left(x_2^2+x_1^2\right)\cos(\omega T)-2x_1x_2\right]}\\
&= e^{i\varphi}\sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar}\frac{m}{T}}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{1}{2}\frac{m}{T}\left[\left(x_2^2+x_1^2\right)-2x_1x_2\right]}\\
&= e^{i\varphi}\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar T}}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\frac{(x_2-x_1)^2}{T}}.
\end{aligned}$$

再对此式取$T\to 0$的极限（此式已与自由粒子形式完全相同，这是因为当$\omega=0$时不振动，且Lagrange量也成自由粒子的Lagrange量了）。利用

$$\delta(x_2-x_1)=\lim_{T\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{T}}e^{-\frac{(x_2-x_1)^2}{T}}\right],$$

有

$$\lim_{\omega\to 0}e^{i\varphi}\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar T}}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\frac{(x_2-x_1)^2}{T}}=e^{i\varphi}\sqrt{i}\delta(x_2-x_1).$$

这要求

$$e^{i\varphi}=\frac{1}{\sqrt{i}},$$

这样便得传播子

$$K(x_2,t_2;x_1,t_1)=\sqrt{\frac{1}{2\pi i\hbar}\frac{m\omega}{\sin(\omega T)}}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m\omega}{2\sin(\omega T)}\left[\left(x_2^2+x_1^2\right)\cos(\omega T)-2x_1x_2\right]}. \tag{26.11}$$

这是我们经常要用到的谐振子的传播子形式。但是这个形式有一个虽然往往我们并不关心而又确定存在的问题。那就是在当T取某些点时这个结果将失效（失效的方式将在后面讨论）。这些点就是使$sin(\omega T)=0$的点,即

$$T_n=n\frac{\pi}{\omega},\quad n\in Z.$$

下面想一些办法来处理一下这些点上的问题。对我们来讲，处理这个问题的方法比问题本身更重要些。其基本思想与前面讲过的一些办法其实并无多大分别。

要处理这个问题，首先要搞清在$T_n=n\frac{\pi}{\omega}$时$K(b,a)$的结果。直接计算显然不太容易，我们不妨还是利用传播子的群性质。由两个或多个容易直接计算的传播子通过式（26.10）简接计算该传播子。

以下的计算中所涉及的困难之处都是角度问题。为了便于处理和表示下面，采用关系

$$\frac{1}{\sqrt{i}}=e^{-i\frac{\pi}{4}},$$

这样(26.11)式可写成

$$K\left(x_2,t_2;x_1,t_1\right)=e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar}\frac{m\omega}{\sin\left(\omega T\right)}}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m\omega}{2\sin(\omega T)}\left[\left(x_2^2+x_1^2\right)\cos(\omega T)-2x_1x_2\right]}.$$

为了计算$T_n=n\frac{\pi}{\omega},n$为整数的结果，先算一下能直接计算的$T=\frac{1}{2}\frac{\pi}{\omega}$的$K\left(b,a\right)$.26.11)式在$T<\frac{\pi}{\omega}$时是没有问题的。然后再利用群性质用两个这样的传播子合成一个n为整数的传播子。

$$K\left(x_2,t_1+\frac{1}{2}\frac{\pi}{\omega};x_1,t_1\right)=e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar}}e^{-\frac{i}{\hbar}m\omega x_1x_2}.$$

由群性质，我们知道

$$\begin{aligned}K\left(x_2,t_1+\frac{\pi}{\omega};x_1,t_1\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty}dxK\left(x_2,t_1+\frac{\pi}{\omega};x,t_1+\frac{1}{2}\frac{\pi}{\omega}\right)K\left(x,t_1+\frac{1}{2}\frac{\pi}{\omega};x_1,t_1\right)\\ &= e^{-i\frac{\pi}{2}}\frac{m\omega}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}dxe^{-\frac{i}{\hbar}m\omega(x_2x+xx_1)}.\end{aligned}$$

因为

$$\delta\left(x\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{ikx},$$

所以

$$\begin{aligned}K\left(x_2,t_1+\frac{\pi}{\omega};x_1,t_1\right) &= e^{-i\frac{\pi}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\left(\frac{m\omega}{\hbar}x\right)}{2\pi}e^{-\frac{i}{\hbar}m\omega x(x_2+x_1)}\\ &= e^{-i\frac{\pi}{2}}\delta\left(x_2+x_1\right).\end{aligned}$$

由此出发还可以继续计算$n=2$的情况

$$\begin{aligned}K\left(x_2,t_1+2\frac{\pi}{\omega};x_1,t_1\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty}dxK\left(x_2,t_1+2\frac{\pi}{\omega};x,t_1+\frac{\pi}{\omega}\right)K\left(x,t_1+\frac{\pi}{\omega};x_1,t_1\right)\\ &= e^{-i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\delta\left(x_2+x\right)\delta\left(x+x_1\right)\\ &= e^{-i\pi}\delta\left(x_2-x_1\right),\end{aligned}$$

这样继续做下去可以归纳出任意n值的结果

$$K\left(x_2,t_1+n\frac{\pi}{\omega};x_1,t_1\right)=e^{-in\frac{\pi}{2}}\delta\left(x_2-(-1)^n x_1\right). \tag{26.12}$$

这使得我们必须让结果满足一个额外的条件

$$\lim_{T\to\left(\frac{n\pi}{\omega}\right)^+}K\left(x_2,t_1+T;x_1,t_1\right)=e^{-in\frac{\pi}{2}}\delta\left(x_2-(-1)^n x_1\right). \tag{26.13}$$

下面我们从另一个角度出发，直接求$T_n\to n\frac{\pi}{\omega}$中的$K\left(b,a\right)$看一下（26.11）式给出的$K\left(b,a\right)$形式能否满足（26.11）式给出的条件，如果不满足该条件，则想办法凑成满足条件的形式。我们取

$$T=n\frac{\pi}{\omega}+\delta t,\qquad\left(0<\delta t<<1\right),$$

再令$\delta t\to 0$也能得到$T_n=n\frac{\pi}{\omega}$时的结果。此时

$$\begin{aligned}\sin\left(\omega T\right)&=\sin\left(n\pi+\omega\delta t\right)\\&=(-1)^n\sin\left(\omega\delta t\right)\\&\approx(-1)^n\omega\delta t.\end{aligned} \tag{26.14}$$

将这个结果代入到传播子中去得

$$\begin{aligned}K\left(x_2,t_1+n\frac{\pi}{\omega}+\delta t;x_1,t_1\right)&=e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar}\frac{m\omega}{\sin\left(n\pi+\omega\delta t\right)}}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m\omega}{2\sin(n\pi+\omega\delta t)}\left[\left(x_2^2+x_1^2\right)\cos(n\pi+\omega\delta t)-2x_1x_2\right]}\\&\approx e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar}\frac{m\omega}{(-1)^n\omega\delta t}}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m\omega}{2(-1)^n\omega\delta t}\left[\left(x_2^2+x_1^2\right)(-1)^n-2x_1x_2\right]}\\&=\frac{1}{\sqrt{(-1)^n}}e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar}\frac{m}{\delta t}}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2\delta t}\left[\left(x_2^2+x_1^2\right)-(-1)^{-n}2x_1x_2\right]}\\&=\frac{1}{\sqrt{(-1)^n}}e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\delta t}}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2\delta t}\left[\left(x_2^2+x_1^2\right)-(-1)^n2x_1x_2\right]}\\&=\frac{1}{\sqrt{(-1)^n}}e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\delta t}}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2\delta t}\left[x_2-(-1)^nx_1\right]^2}.\end{aligned}$$

在自由粒子情况中我们有结果

$$\lim_{t_2-t_1}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{m}{2\hbar i\left(t_2-t_1\right)}}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\frac{(x_2-x_1)^2}{t_2-t_1}}=\delta\left(x_2-x_1\right), \tag{26.15}$$

与此对比有

$$\begin{aligned}
K\left(x_2,t_1+n\frac{\pi}{\omega};x_1,t_1\right) &= \lim_{\delta t\to 0}K\left(x_2,t_1+n\frac{\pi}{\omega}+\delta t;x_1,t_1\right)\\
&= \lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\sqrt{(-1)^n}}e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\delta t}}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2\delta t}\left[x_2-(-1)^n x_1\right]^2}\\
&= \frac{1}{\sqrt{(-1)^n}}\lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{m}{2i\hbar\delta t}}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2\delta t}\left[x_2-(-1)^n x_1\right]^2}\\
&= \frac{1}{\sqrt{(-1)^n}}\delta\left[x_2-(-1)^n x_1\right]\\
&= \pm e^{-in\frac{\pi}{2}}\delta\left[x_2-(-1)^n x_1\right].
\end{aligned}$$

这个结果较(26.12)式的结果多出取“-”号的一种情况，这样便与（26.13）式的要求不符。

下面我们就来猜测如何改变$K\left(b,a\right)$的形式，使之满足这个额外条件，也就是说要看看满足该条件的$K\left(b,a\right)$形式是什么。

受上述推导的启发，可以将上述过程倒退来推导一下，以得到新的$K\left(b,a\right)$

$$\begin{aligned}
e^{-i\frac{\pi}{2}n}\delta\left[x_2-(-1)^n x_1\right] &= e^{-i\frac{\pi}{2}n}\lim_{\delta t\to 0}\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i\delta t}}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\frac{\left[x_2-(-1)^n x_1\right]^2}{\delta t}}\\
&= e^{-i\frac{\pi}{2}n}e^{-i\frac{\pi}{4}}\lim_{\delta t\to 0}\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar\omega\delta t}}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m\omega}{(-1)^n 2\omega}\frac{\left[x_2-(-1)^n x_1\right]^2}{\delta t}(-1)^n}\\
&= e^{-i\frac{\pi}{2}n}e^{-i\frac{\pi}{4}}\lim_{\delta t\to 0}\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar\left|\sin\left(\omega\delta t\right)\right|}}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m\omega}{2\sin(\omega T)}\left[\left(x_2^2+x_1^2\right)(-1)^n-2x_1x_2\right]}\\
&\approx e^{-i\frac{\pi}{2}n}e^{-i\frac{\pi}{4}}\lim_{\delta t\to 0}\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar\left|\sin\left(\omega T\right)\right|}}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m\omega}{2\sin(\omega T)}\left[\left(x_2^2+x_1^2\right)\cos(\omega T)-2x_1x_2\right]},
\end{aligned}$$

因为

$$e^{-i\frac{\pi}{2}n}=e^{-i\frac{\pi}{2}\left[T\frac{\omega}{\pi}\right]},$$

所以

$$e^{-i\frac{\pi}{2}n}\delta\left[x_2-(-1)^n x_1\right]\approx e^{-i\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+\left[T\frac{\omega}{\pi}\right]\right)}\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar\left|\sin\left(\omega T\right)\right|}}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m\omega}{2\sin(\omega T)}\left[\left(x_2^2+x_1^2\right)\cos(\omega T)-2x_1x_2\right]}.$$

显然由此可以知道，在取

$$K\left(x_2,t_2;x_1,t_1\right)=e^{-i\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+\left[T\frac{\omega}{\pi}\right]\right)}\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar\left|\sin\left(\omega T\right)\right|}}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m\omega}{2\sin(\omega T)}\left[\left(x_2^2+x_1^2\right)\cos(\omega T)-2x_1x_2\right]}$$

时，条件（26.15）应得到满足。这就是所要求的在$T=n\frac{\pi}{\omega}$时也可用的传播子。这种做法相当于扔掉了$\frac{1}{\sqrt{(-1)^n}}$所能给出的$-e^{-i\frac{\pi}{2}n}$的情况。

下面我们试着给出另一种处理方法（这是自己给出的一种方法，要仔细确定它是否正确）,这里给出另一种自己编的推导方法。我们已得到传播子，形如

$$K\left(x_2,t_2;x_1,t_1\right)=e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar\sin\left(\omega T\right)}}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m\omega}{2\sin(\omega T)}\left[\left(x_2^2+x_1^2\right)\cos(\omega T)-2x_1x_2\right]}.$$

有性质

$$\sin\left(\omega T\right)=(-1)^{\left[T\frac{\omega}{\pi}\right]}\left|\sin\left(\omega T\right)\right|,$$

所以

$$\begin{aligned}K\left(x_2,t_2;x_1,t_1\right) &= e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar\,(-1)^{\left[T\frac{\omega}{\pi}\right]}\left|\sin\left(\omega T\right)\right|}}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m\omega}{2\sin(\omega T)}\left[\left(x_2^2+x_1^2\right)\cos(\omega T)-2x_1x_2\right]}\\ &= e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{1}{(-1)^{\left[T\frac{\omega}{\pi}\right]}}}\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar\left|\sin\left(\omega T\right)\right|}}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m\omega}{2\sin(\omega T)}\left[\left(x_2^2+x_1^2\right)\cos(\omega T)-2x_1x_2\right]}.\end{aligned}$$

又因为

$$\sqrt{\frac{1}{(-1)^{\left[T\frac{\omega}{\pi}\right]}}}=\pm e^{-in\frac{\pi}{2}},$$

所以

$$K\left(x_2,t_2;x_1,t_1\right)=\pm e^{-i\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+\left[T\frac{\omega}{\pi}\right]\right)}\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar\left|\sin\left(\omega T\right)\right|}}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m\omega}{2\sin(\omega T)}\left[\left(x_2^2+x_1^2\right)\cos(\omega T)-2x_1x_2\right]}.$$

这不满足（26.13）的要求。我们弃掉一种情况，只取“+”号的那个结果。于是有

$$K\left(x_2,t_2;x_1,t_1\right)=e^{-i\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+\left[T\frac{\omega}{\pi}\right]\right)}\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar\left|\sin\left(\omega T\right)\right|}}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m\omega}{2\sin(\omega T)}\left[\left(x_2^2+x_1^2\right)\cos(\omega T)-2x_1x_2\right]}$$

这便是前面得到的结果。

26.2 粒子在恒力F作用下的经典作用量

粒子在恒力F作用下的经典作用量

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+fx,\tag{26.16}$$

所谓经典作用量就是满足最小作用原理的那个最小作用量。已经知道在最小作用原理下，运动方程就是Euler-Lagrange方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0.$$

将Lagrange量代入后，可得运动方程

$$m\ddot{x} = f. \tag{26.17}$$

即

$$F = ma.$$

Newton运动定律。方程(26.17)的通解为

$$\dot{x} = \frac{f}{m}t + c_1, \tag{26.18}$$

$$x = \frac{1}{2}\frac{f}{m}t^2 + c_1 t + c_2, \tag{26.19}$$

其边条件为

$$(x_a, t_a), \quad (x_b, t_b) \ . \tag{26.20}$$

我们有几个途径可以得到所需要形式的作用量。这里需要说明一点。本来作用量的计算是非常直接而简单的。但在路径积分的计算中，人们更愿意将它表示成相对于边条件x_a, t_a, x_b, t_b更对称的形式。凑成这样的形式尚小需周折。（注意：我们有更漂亮的办法，但需较多背景知识）

方法一（直接算），由式（26.18)(26.19)(26.20)可有

$$x_a = \frac{1}{2}\frac{f}{m}t_a^2 + c_1 t_a + c_2, \tag{26.21}$$

$$x_b = \frac{1}{2}\frac{f}{m}t_b^2 + c_1 t_b + c_2. \tag{26.22}$$

（26.22）−（26.21）⇒

$$c_1 = \frac{1}{T}\left[(x_b - x_a) - \frac{1}{2}\frac{f}{m}\left(t_b^2 - t_a^2\right)\right], \qquad T \equiv t_b - t_a$$

（26.22）+（26.21）⇒

$$c_2 = \frac{1}{2}\left[(x_b + x_a) - \frac{1}{2}\frac{f}{m}\left(t_b^2 + t_a^2\right) - c_1\left(t_b + t_a\right)\right]$$

由此直接求S_{cl}

$$\begin{aligned} S_{cl} &= \int_{t_a}^{t_b} L dt \\ &= \int_{t_a}^{t_b} \left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 + fx\right) dt \\ &= \int_{t_a}^{t_b} \left[\frac{m}{2}\left(\frac{f}{m}t + c_1\right)^2 + f\left(\frac{1}{2}\frac{f}{m}t^2 + c_1 t + c_2\right)\right] dt \\ &= \frac{f^2 T^3}{3m} + \frac{f^2}{m}t_a t_b T + c_1 f\left(t_b^2 - t_a^2\right) + \left(\frac{1}{2}mc_1^2 + c_2 f\right)T. \end{aligned}$$

将c_1, c_2的形式代入，一番繁琐但不困难的整理后可得

$$\begin{aligned} S_{cl} &= \frac{m\left(x_b-x_a\right)^2}{2T}+\frac{1}{2}fT\left(x_b+x_a\right)-\frac{f^2}{24m}T^3 \\ &= \frac{m\left(x_b-x_a\right)^2}{2\left(t_b-t_a\right)}+\frac{1}{2}f\left(t_b-t_a\right)\left(x_b+x_a\right)-\frac{f^2}{24m}\left(t_b-t_a\right)^3, \end{aligned}$$

在（26.19）中已得到运动方程

$$x=\frac{1}{2}\frac{f}{m}t^2+c_1t+c_2,$$

其中有两个待定参数，下面对这个式子作一下变形。并引入两个新参数来代替$c_{1,}c_2$。先做一个移动$t\to t-a$。这样就引入了一个新参数a。这样有

$$x=\frac{1}{2}\frac{f}{m}\left(t-a\right)^2+c\left(t-a\right)+c'.$$

这时参数多了一个，但这不是真的。下面用初条件(x_a,t_a)定一下参数。显然有

$$a=t_a,\quad c'=x_a,$$

这样便有

$$x=x_a+c\left(t-t_a\right)+\frac{f}{2m}\left(t-t_a\right)^2. \tag{26.23}$$

由于还有一个条件(x_b,t_b)没用上，所以c尚未确定。再将(x_b,t_b)代入定出

$$\begin{aligned} c &= \frac{x_b-x_a}{t_b-t_a}-\frac{f}{2m}\left(t_b-t_a\right) \\ &\equiv \frac{x_b-x_a}{T}-\frac{f}{2m}T. \end{aligned}$$

由（26.23)式可得

$$\dot{x}=c+\frac{f}{m}\left(t-t_a\right)$$

代回Lagrange量中得

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2}\left[c+\frac{f}{m}\left(t-t_a\right)\right]^2+f\left[x_a+c\left(t-t_a\right)+\frac{f}{m}\left(t-t_a\right)^2\right] \\ &= \frac{m}{2}c^2+fx_a+2fc\left(t-t_a\right)+\frac{f}{m}\left(t-t_a\right)^2, \end{aligned}$$

由此可直接得到作用量

$$\begin{aligned} S_{cl} &= \int_{t_a}^{t_b} L dt \\ &= \int_{t_a}^{t_b} \left[\frac{m}{2} c^2 + f x_a + 2fc\left(t - t_a\right) + \frac{f}{m}\left(t - t_a\right)^2 \right] dt \\ &= \left(\frac{m}{2} c^2 + f x_a \right)\left(t_b - t_a\right) + fc\left(t_b - t_a\right)^2 + \frac{1}{3}\frac{f}{m}\left(t_b - t_a\right)^3 . \end{aligned}$$

将c的形式代入即得

$$S_{cl} = \frac{m\left(x_b - x_a\right)^2}{2\left(t_b - t_a\right)} + \frac{1}{2} f\left(t_b - t_a\right)\left(x_b + x_a\right) - \frac{f^2}{24m}\left(t_b - t_a\right)^3 .$$

26.3 一维线性谐振子的经典作用量

一维线性谐振子的经典作用量，Lagrange量为

$$L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} m\omega^2 x^2, \tag{26.24}$$

代入Euler-Lagrange中得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$

则

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{26.25}$$

它的通解是

$$x\left(t\right) = A\sin\left(\omega t + \alpha\right), \tag{26.26}$$

$$\dot{x}\left(t\right) = A\omega\cos\left(\omega t + \alpha\right).$$

边条件为

$$\left(x_1, t_1\right), \quad \left(x_2, t_2\right) .$$

由此我们求S_{cl}

$$\begin{aligned} S_{cl} &= \int_{t_1}^{t_2} L\left(x, \dot{x}\right) dt \\ &= \frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2} \left(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2\right) dt, \end{aligned}$$

因为

$$\frac{d}{dt}(x\dot{x}) = \dot{x}\dot{x} + x\ddot{x},$$

所以

$$\dot{x}^2 = \frac{d}{dt}(x\dot{x}) - x\ddot{x}.$$

因此

$$\begin{aligned} S_{cl} &= \frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{d}{dt}(x\dot{x}) - x\ddot{x} - \omega^2 x^2\right)dt \\ &= \frac{m}{2}\left[x\dot{x}\right]_{t_1}^{t_2} + \frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2} x\left(\ddot{x} - \omega^2 x\right)dt, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} S_{cl} &= \frac{m}{2}\left[x\dot{x}\right]_{t_1}^{t_2} \\ &= \frac{m}{2}\left[x(t_2)\dot{x}(t_2) - x(t_1)\dot{x}(t_1)\right]. \end{aligned}$$

由（26.25）（26.26）式可以计算出$x(t_1), x(t_2), \dot{x}(t_1), \dot{x}(t_2)$，不过为了凑成对称一些的形式，可以做一些变形。由边条件，我们知

$$x(t_1) = A\sin(\omega t_1 + \alpha),$$

$$x(t_2) = A\sin(\omega t_2 + \alpha),$$

此外

$$\dot{x}(t_1) = A\omega\cos(\omega t_1 + \alpha),$$

$$\dot{x}(t_2) = A\omega\cos(\omega t_2 + \alpha),$$

将$x(t)$凑成含边条件的形式

$$\begin{aligned} x(t) &= A\sin(\omega t + \alpha) \\ &= A\sin(\omega t - \omega t_1 + \omega t_1 + \alpha) \\ &= A\sin[\omega(t - t_1) + (\omega t_1 + \alpha)] \\ &= A\sin[\omega(t - t_1)]\cos(\omega t_1 + \alpha) + A\sin(\omega t_1 + \alpha)\cos[\omega(t - t_1)] \\ &= \frac{\dot{x}(t_1)}{\omega}\sin[\omega(t - t_1)] + x(t_1)\cos[\omega(t - t_1)]. \end{aligned} \tag{26.27}$$

这时式中已没有振幅A和α，由（26.27）可直接求$x\left(t_2\right)$

$$x\left(t_2\right)=\frac{1}{\omega}\dot{x}\left(t_1\right)\sin\left[\omega\left(t_2-t_1\right)\right]+x\left(t_1\right)\cos\left[\omega\left(t_2-t_1\right)\right],$$

这样可解出$\dot{x}\left(t_1\right)$

$$\dot{x}\left(t_1\right)=\frac{\omega}{\sin\left[\omega\left(t_2-t_1\right)\right]}\left\{x\left(t_2\right)-x\left(t_1\right)\cos\left[\omega\left(t_2-t_1\right)\right]\right\},$$

同理可得

$$\dot{x}\left(t_2\right)=\frac{\omega}{\sin\left[\omega\left(t_2-t_1\right)\right]}\left\{-x\left(t_1\right)-x\left(t_2\right)\cos\left[\omega\left(t_2-t_1\right)\right]\right\}.$$

将以上结果代回作用量表达式可得

$$\begin{aligned}S_{cl}&=\frac{m}{2}\left[x\left(t_2\right)\dot{x}\left(t_2\right)-x\left(t_1\right)\dot{x}\left(t_1\right)\right]\\&=\frac{m\omega}{2\sin\left[\omega\left(t_2-t_1\right)\right]}\left[\left(x_2^2+x_1^2\right)\cos\left[\omega\left(t_2-t_1\right)\right]-2x_2x_1\right].\end{aligned}$$

因为

$$T\equiv t_2-t_1,\quad x\left(t_2\right)\equiv x_2,\quad x\left(t_1\right)\equiv x_1,$$

所以

$$S_{cl}=\frac{m\omega}{2\sin\left(\omega T\right)}\left[\left(x_2^2+x_1^2\right)\cos\left(\omega T\right)-2x_2x_1\right].$$

第七部分

路径积分量子化：标量场

第二十七章　标量场的生成泛函

这里将量子力学（一次量子化）中的路径积分的结果应用到场理论中。如在量子力学中一样，我们关心在有源$J(x)$存在时的真空到真空的跃迁几率振幅。在量子力学中其实我们已经看到有源$J(x)$存在时的真空-真空跃迁振幅正是我们需要的生成泛函（它对源$J(x)$的泛函导数恰好给出广义坐标算符编时乘积的真空期待值。$\left.\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(t_1)\cdots J(t_n)}\right|_{J=0} \propto i^n \langle 0,\infty| T\left[\hat{q}\left(t_1\right)\ldots\hat{q}\left(t_n\right)\right]|0,-\infty\rangle$），在存在源$J(x)$时标量场的真空-真空的跃迁振幅为（$\hbar=1$）

$$Z[J]=\int \mathcal{D}\phi e^{i\int d^4x\left[\mathcal{L}(\phi)+J(x)\phi(x)+\frac{i}{2}\epsilon\phi^2\right]} \propto \langle 0,\infty|\, 0,-\infty\rangle^J \tag{27.1}$$

其中

$$\mathcal{L}(\phi)=\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\right)\left(\partial^\mu\phi\right)-\frac{m^2}{2}\phi^2+V(\phi)$$

为Klein-Gordon场的Lagrange密度。

这里我们要处理的是自由Klein-Gordon场。我们要处理的是一个震荡型积分，积分会遇到发散问题，为了让积分能描述有限的物理事实，我们需要做相应的数学处理，我们给积分添加一个实部，保证积分衰减，即加上小量$\frac{i}{2}\epsilon\phi^2$以确保$Z[J]$为真空-真空跃迁振幅。下面我们考虑自由场的情况。自由Klein-Gordon场的Lagrange密度为：

$$\mathcal{L}_0=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-\frac{m^2}{2}\phi^2$$

相应的真空-真空跃迁振幅为：

$$\begin{aligned}
Z_0[J] &= \int \mathcal{D}\phi e^{i\int d^4x\left[\mathcal{L}_0+J\phi+\frac{i}{2}\epsilon\phi^2\right]} \\
&= \int \mathcal{D}\phi e^{i\int d^4x\left\{\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-\frac{m^2}{2}\phi+J\phi+\frac{i}{2}\epsilon\phi^2\right\}} \\
&= \int \mathcal{D}\phi e^{i\int d^4x\left\{\frac{1}{2}\left[\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-\left(m^2-i\epsilon\right)\phi^2\right]+J\phi\right\}}
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi &= \partial_\mu\left(\phi\partial^\mu\phi\right) - \phi\partial_\mu\partial^\mu\phi \\ &= \partial_\mu\left(\phi\partial^\mu\phi\right) - \phi\partial^2\phi\end{aligned}$$

这里

$$\partial^2 \equiv \partial_\mu\partial^\mu = \Box$$

所以

$$\begin{aligned}\int d^4x\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi &= \int d^4x\partial_\mu\left(\phi\partial^\mu\phi\right) - \int d^4x\phi\partial^2\phi \\ &= -\int d^4x\phi\partial^2\phi\end{aligned}$$

其中$\int d^4x\partial_\mu\left(\phi\partial^\mu\phi\right)$为表面项，在我们的考虑的问题中为零。所以

$$Z_0\left[J\right] = \int \mathcal{D}\phi e^{i\int d^4x\left\{\frac{1}{2}\left[-\phi\partial^2\phi - \left(m^2-i\epsilon\right)\phi^2\right]+J\phi\right\}}$$

$$Z_0\left[J\right] = \int \mathcal{D}\phi e^{-i\int d^4x\left[\frac{1}{2}\phi\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right)\phi - J\phi\right]} \tag{27.2}$$

这里采用的是路径积分的考虑。在这里的场量ϕ是完全任意的，不受任何限制，在无数个这样的ϕ中当然也包含了经典路径。即满足最小作用原理（或者说满足Klein-Gordon方程的场量）。我们用ϕ_0来表示这个经典路径的场量。

在我们的问题中作用量为

$$S = -\int d^4x\left(\frac{1}{2}\phi\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right)\phi - J\phi\right)$$

或者写成

$$S = \int d^4x\left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 + J\phi + \frac{i}{2}\epsilon\phi^2\right)$$

经典场ϕ_0满足最小作用原理$\delta S = 0$。即满足有源的Klein-Gordon方程

$$\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right)\phi_0\left(x\right) = J(x)$$

我们将任意的场量ϕ写成经典场中ϕ_0再加上一个任意项的形式（图）即作代换

$$\phi \to \phi_0 + \phi$$

这样我们有

$$Z_0[J]=\int\mathcal{D}\phi e^{-i\int d^4x\left\{\frac{1}{2}(\phi_0+\phi)\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right)(\phi_0+\phi)-J(\phi_0+\phi)\right\}}$$
$$=\int\mathcal{D}\phi e^{-i\int d^4x\left[\frac{1}{2}\phi\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right)\phi+\frac{1}{2}\phi_0\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right)\phi_0+\frac{1}{2}\phi\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right)\phi_0+\frac{1}{2}\phi_0\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right)\phi-J\phi_0-J\phi\right]}$$

下面整理上面这个式子：我们有

$$\begin{aligned}\int d^4x\phi\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right)\phi_0&=\int d^4x\left[\phi\partial^2\phi_0+\left(m^2-i\epsilon\right)\phi\phi_0\right]\\&=\int d^4x\partial\left(\phi\partial\phi_0\right)-\int d^4x\partial\phi\partial\phi_0+\int d^4x\left(m^2-i\epsilon\right)\phi\phi_0\\&=-\int d^4x\partial\phi\partial\phi_0+\int d^4x\left(m^2-i\epsilon\right)\phi\phi_0\end{aligned}$$

其中$\int d^4x\partial\left(\phi\partial\phi_0\right)=0$为表面项。同理

$$\int d^4x\phi_0\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right)\phi=-\int d^4x\partial\phi_0\partial\phi+\int d^4x\left(\left(m^2-i\epsilon\right)\phi_0\phi\right)$$

所以

$$\int d^4x\phi_0\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right)\phi=\int d^4x\phi\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right)\phi_0=\int d^4xJ\phi$$

其中$J=\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right)\phi_0$。

这样有

$$\begin{aligned}Z_0[J]&=\int\mathcal{D}\phi e^{-i\int d^4x\left[\frac{1}{2}\phi\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right)\phi+\frac{1}{2}J\phi_0+J\phi-J\phi_0-J\phi\right]}\\&=\int\mathcal{D}\phi e^{-i\int d^4x\left[\frac{1}{2}\phi\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right)\phi-\frac{1}{2}J(x)\phi_0\right]}\end{aligned}$$

这里的经典场ϕ_0满足

$$\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right)\phi_0=J(x)$$

这个方程的解可利用格林函数给出：

$$\phi_0(x)=-\int d^4y\Delta_F(x-y)J(y)$$

其中$\Delta_F(x-y)$为Green函数。在这里也就是标量场的Feynman传播子，满足

$$\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right)\Delta_F(x)=-\delta^4(x)$$

将ϕ_0的解代回$Z_0[J]$中有：

$$\begin{aligned}Z_0[J] &= \int \mathcal{D}\phi e^{-i\int d^4x\left[\frac{1}{2}\phi\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right)\phi-\frac{1}{2}J(x)\left[-\int d^4y\Delta_F(x-y)J(y)\right]\right]} \\ &= \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{i}{2}\int d^4x\left[\phi\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right)\phi\right]} e^{-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)} \\ &= \underbrace{e^{-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)}}_{I} \underbrace{\int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{i}{2}\int d^4x\left[\phi\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right)\phi\right]}}_{II}\end{aligned}$$

经过代换$\phi \to \phi_0+\phi$，$Z_0[J]$被分成两部分，第I部分与ϕ无关，其中只包含源$J(x)$与传播子$\Delta_F(x-y)$场量ϕ的影响则完全归入第II部分，而这部分的实质是对所有的ϕ的积分。因此积分结果中将不包含ϕ，即第二部分实质上是一个常数。这样我们就可以将$Z_0[J]$表示成：

$$Z_0[J] = Ne^{-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)} \tag{27.3}$$

$Z_0[J]$是一个跃迁振幅，因此N将由归一化确定。这个结果也可由推广到函数空间中的Gauss积分得到，下面就从这个途径再得到一次这样的结果。 由（34.2）式给出的$Z_0[J]$的表达式为：

$$\begin{aligned}Z_0[J] &= \int \mathcal{D}\phi e^{-i\int d^4x\left[\frac{1}{2}\phi\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right)\phi-J\phi\right]} \\ &= \int \mathcal{D}\phi e^{-\int\left[\frac{1}{2}\left(\phi,i\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right)\phi\right)-iJ\phi\right]}\end{aligned}$$

利用公式

$$\int \mathcal{D}\phi e^{-\left[\frac{1}{2}(\phi,A\phi)+(b,\phi)+c\right]} = \frac{1}{\sqrt{\det A}} e^{\frac{1}{2}\left(b,A^{-1}b\right)-c}$$

其中$(\phi,A\phi)=\int dxdy\phi(x)A\phi(y)$。可以得到

$$A = i\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right)，\ b=-iJ，\ c=0$$

$$Z_0[J] = \frac{1}{\sqrt{\det i\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right)}} e^{\frac{i}{2}\int dxdyJ(x)\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right)^{-1}J(y)}$$

27.1 Gauss型积分(Gaussian integration)

这里我们要普遍的处理*Gauss*积分，这种指数为二次型的积分可以精确的积分出。

最简单的一重Gauss积分为：

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

证明：

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-a\left(x^2+y^2\right)} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2}\right)^2$$

在极坐标中计算这个积分

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-a\left(x^2+y^2\right)} \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} r dr e^{-ar^2} \\
&= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\infty} d\left(r^2\right) e^{-ar^2} \\
&= \frac{\pi}{a}
\end{aligned}$$

由此可以解出：

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

下面考虑更普遍的二次型的Gauss积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2+bx+c} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{b^2}{4a}+c}$$

证明：令

$$q(x) \equiv -ax^2 + bx + c$$

下面考虑$q(x)$的最小值

注：在路径积分中我们遇到的积分是$\int \mathcal{D}\phi]^{-iS[\phi]}$,而作用量$S[\phi]$的最小值$\delta S = 0$其实就是经典路径。$\frac{dq}{dx} = -2ax + b = 0 \Rightarrow$最小值在$\bar{x} = \frac{b}{2a}$处，所以最小值

$$q(\bar{x}) = \frac{b^2}{4a} + c$$

下面将$q(x)$写成最小值$q(\bar{x})$加上另一部分的形式：

$$\begin{aligned}
q(x) &\equiv q(\bar{x}) - a(x-\bar{x})^2 \\
&= q(\bar{x}) + \eta(x) \\
\eta(x) &= -a(x-\bar{x})^2
\end{aligned}$$

这样积分可表示为：

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2+bx+c} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{q(x)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{q(\bar{x})-a(x-\bar{x})^2} \\ &= e^{q(\bar{x})} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-a(x-\bar{x})^2} \\ &= e^{q(\bar{x})} \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{b^2}{4a}+c}\end{aligned}$$

下面将Gauss积分推广到多重积分，方便起见，考虑这种形式的Gauss积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2} = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

推广到n重积分有：

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots dx_n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2} = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\prod_{i=1}^{n} a_i^{\frac{1}{2}}}$$

将这个结果用矩阵表示：

$$x \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

将$a_1 \dots a_n$看成是一对角矩阵的元

$$A \equiv \begin{pmatrix} a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

因为A是对角阵，这样有：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 = \tilde{x} A x = (x, Ax)$$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \dots a_n = \det A$$

这样积分为

$$d^n x = dx_1 \cdots dx_n$$

这里x是n维矢量

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^n x e^{-\frac{1}{2}(x,Ax)} = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{(\det A)^{\frac{1}{2}}}$$

或

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n x}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x,Ax)} = \frac{1}{(\det A)^{\frac{1}{2}}}$$

由于任意实对称矩阵总可以对角化，所以这个结果也适用于A为实对称阵矩阵的情况。

推广到任意二次型有：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n x}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\left[\frac{1}{2}(x,Ax)+(b,x)+c\right]} = \frac{1}{(\det A)^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{1}{2}\left(b,A^{-1}b\right)-c}$$

证：令（A为对角阵）

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{1}{2}(x, Ax) + (b, x) + c \\ &= \frac{1}{2}\sum_i a_i x_i^2 + \sum_i b_i x_i + c \end{aligned}$$

求$Q(x)$的最小值

$$\frac{dQ(x)}{dx_j} = a_j \bar{x}_j + b_j = 0$$

$\bar{x}_j$为最小值。写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = 0，\ \bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$$

$$A\bar{x} + b = 0$$

$$\bar{x} = -A^{-1}b$$

这样：

$$\begin{aligned}
Q(\bar{x}) &= \frac{1}{2}(\bar{x}A\bar{x}) + (b,\bar{x}) + c \\
&= \frac{1}{2}\left(\bar{x}A\left(-A^{-1}b\right)\right) + (b,\bar{x}) + c \\
&= -\frac{1}{2}(\bar{x},b) + (b,\bar{x}) + c \\
&= \frac{1}{2}(b,\bar{x}) + c \\
&= \frac{1}{2}\left(b,-A^{-1}b\right) + c \\
&= -\frac{1}{2}\left(b,A^{-1}b\right) + c
\end{aligned}$$

可以将$Q(x)$表示成：

$$Q(x) = Q(\bar{x}) + \frac{1}{2}[x-\bar{x}, A(x-\bar{x})]$$

于是

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n x}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\left[\frac{1}{2}(x,Ax)+(b,x)+c\right]} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n x}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-Q(\bar{x})} e^{-\frac{1}{2}[x-\bar{x},A(x-\bar{x})]} \\
&= e^{-Q(\bar{x})} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n x}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}[x-\bar{x},A(x-\bar{x})]} \\
&= \frac{1}{(\det A)^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{1}{2}\left(bA^{-1}b\right)-c}
\end{aligned}$$

27.1.1 将Gauss积分推广到无穷维空间

前面关于Gauss积分的证明是有限维空间中的结果，那里的矢量$x = (x_1 \cdots x_n)$，是n维的。现在我们不加证明的认为这一结果在无穷维空间中仍然成立（这一假设并不安全，需要严格证明）

定义无穷维矢量的内积：

仿照有限维内积定义：$(x,x) = \sum_i a_i x_i$.这个定义是对各维分量的指标求和。假设我们处理的无穷维的指标是连续的。则该空间的矢量为$f(t)$即连续函数。t为指标。这样的内积自然可以定义成

$$(f,f) = \int dt\,[f(t)]^2$$

在场论中，我们考虑的无穷维矢量是场量$\phi(x)$。其指标是时空坐标x。相应的内积为：

$$(\phi\phi)=\int d^4x\left[\phi(x)\right]^2$$

下面要做的是一个稍微大胆些的推广。我们要以为前面的关于Gauss积分的结果也适用于路径积分中的函数空间中的Gauss型积分，推广

$$\int_{-\infty}^{\infty}(dx)\,e^{-\frac{1}{2}(xAx)}=\frac{1}{(\det A)^{\frac{1}{2}}}$$

这里的积分测度定义为$(dx)\equiv\frac{d^nx}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$。

到函数空间有：

$$\int\mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{2}(\phi,A\phi)}=\frac{1}{(\det A)^{\frac{1}{2}}}$$

或者

$$\int\mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{2}\int dx\phi(x)A\phi(x)}=\frac{1}{(\det A)^{\frac{1}{2}}}$$

这里的A可以是一个，比如说，微分算符。需要注意的是，这个推广在数学上并不足够严格。

同样的，这个结果也可推广到复数域。推广：

$$\int(dz^*)\,(dz)\,e^{-(z^*,Az)}=\frac{1}{\det A}$$

其中积分测度：

$$(dz)\equiv\frac{dz}{(2\pi i)^{\frac{1}{2}}},\ (dz^*)\equiv\frac{dz^*}{(2\pi i)^{\frac{1}{2}}}$$

到复函数空间中有：

$$\int\mathcal{D}\phi^*\mathcal{D}\phi e^{-(\phi^*,A\phi)}=\frac{1}{\det A}$$

或

$$\int\mathcal{D}\phi^*\mathcal{D}\phi e^{-\int dx\phi^*(x)A\phi(x)}=\frac{1}{\det A}$$

对更普遍的二次型有：

$$\int\mathcal{D}\phi e^{-\left[\frac{1}{2}(\phi,A\phi)+(b,\phi)+c\right]}=\frac{1}{(\det A)^{\frac{1}{2}}}e^{\frac{1}{2}\left(b,A^{-1}b\right)-c}$$

这里的内积分别为：

$$(\phi,\phi)=\int dx\phi\left(x\right)\phi\left(x\right)\qquad \text{对比矩阵}\left(a,b\right)=\tilde{a}b=\sum_{i}a_{i}b_{i}$$

$$(\phi,A\phi)=\int dxdy\phi\left(x\right)A\phi\left(y\right)\quad \text{对比矩阵}\left(a,Ab\right)=\tilde{a}Ab=\sum_{ij=1}a_{i}A_{ij}b_{j}$$

推广到复数域的厄米矩阵。由Gauss积分知：

$$\int_{-\infty}^{\infty}dxdye^{-\frac{1}{2}a\left(x^{2}+y^{2}\right)}=\frac{2\pi}{a}$$

作代换：

$$z=x+iy$$
$$z^{*}=x-iy$$

$$x=\frac{1}{2}\left(z+z^{*}\right)$$
$$y=\frac{1}{2i}\left(z-z^{*}\right)$$

$$dxdy=\left|\begin{array}{cc}\frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial z^{*}}\\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z^{*}}\end{array}\right|=\left|\begin{array}{cc}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2i} & -\frac{1}{2i}\end{array}\right|dzdz^{*}=-\frac{1}{2i}dzdz^{*}$$

27.2 自由标量粒子Green函数

在这里我们将看到由真空-真空跃迁振幅可以得到Green函数。这就是说，全部动力学信息都包含在这个真空-真空跃迁振幅中。真空-真空跃迁振幅是Green函数的生成泛函这一点其实在量子力学中就已经看出来。在那里我们看到$Z_0[J]$是标量算符（在这里是场算符）编时乘积的真空期待值。也就是Green函数。

标量场真空-真空振幅为

$$Z_{0}[J]=Ne^{-\frac{i}{2}\int d^{4}xd^{4}yJ(x)\Delta_{F}(x-y)J(y)}$$

将它Taylor展开：

$$\begin{aligned}Z_0[J] = N\{1 + &\left[-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\,\Delta_F(x-y)\,J(y)\right] \\ &+ \frac{1}{2!}\left[-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\,\Delta_F(x-y)\,J(y)\right]^2 \\ &+ \frac{1}{3!}\left[-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\,\Delta_F(x-y)\,J(y)\right]^3 \\ &+ ....\}\end{aligned}$$

可以看到Taylor展开的每项都是：

$$-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\,\Delta_F(x-y)\,J(y)$$

的不同方次。在场论(尤其是碰撞理论中)，我们更愿意在动量表象中考虑问题。下面将这一项换到动量表象。由于动量本征函数是平面波，所以这个表象变换实质上也是$Fourier$变换。源的变换为：

$$J(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} J(p)\, e^{-ipx}$$

传播子的$Fourier$变换为：

$$\Delta_F(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon}e^{-ikx} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\Delta_F(k)\, e^{-ikx}$$

注：这是因为$\Delta F(x)$满足的方程为

$$\left(\partial^2 + m^2 - i\epsilon\right)\Delta F(x) = -\delta^4(x)$$

在动量空间中有$(k_\mu \Leftrightarrow -i\partial_\mu)$

$$\begin{aligned}\left(-k^2 + m^2 - i\epsilon\right)\Delta F(p) &= -1 \\ \Delta F(k) &= \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon}\end{aligned}$$

于是有：$\left(\delta^4(p)=\int\frac{d^4x}{(2\pi)^4}e^{-ipx}\right)$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta F(x-y)J(y)\\
&=-\frac{i}{2}\int d^4xd^4y\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}J(p_1)e^{-ip_1x}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-m^2+i\epsilon}e^{-ik(x-y)}\int\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}J(p_2)e^{-ip_2x}\\
&=-\frac{i}{2}\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}d^4xd^4y\frac{J(p_1)J(p_2)}{k^2-m^2+i\epsilon}e^{-i(p_1+k)x}e^{-i(p_2-k)y}\\
&=-\frac{i}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\int d^4p_1d^4p_2\frac{J(p_1)J(p_2)}{k^2-m^2+i\epsilon}\int\frac{d^4x}{(2\pi)^4}e^{-i(p_1+k)x}\int\frac{d^4y}{(2\pi)^4}e^{-i(p_2-k)y}\\
&=-\frac{i}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\int d^4p_1d^4p_2\frac{J(p_1)J(p_2)}{k^2-m^2+i\epsilon}\delta^4(p_1+k)\delta^4(p_2-k)\\
&=-\frac{i}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{J(k)J(k)}{k^2-m^2+i\epsilon}\\
&=\frac{1}{2}\int d^4kiJ(-k)\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon}iJ(k)\equiv\ \text{此处有一个Feynman图}\quad\text{Feynman规则}
\end{aligned}
$$

这样我们可以得到动量空间中的Feynman规则

$$
\text{此处有一个Feynman图}=\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}\qquad\text{传播子}
$$

$$
\text{此处有一个Feynman图}=iJ(p)\quad\text{顶点}
$$

这样展开式中每项都是

$$
\begin{aligned}
&-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta F(x-y)J(y)\\
&=\frac{1}{2}\int d^4kiJ(-k)\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon}iJ(k)\\
&=\frac{1}{2}\times--\times
\end{aligned}
$$

这样在源$J(x)$中真空-真空跃迁振幅$Z_0[J]$便可图示为（这样我们去掉归一化常数N）

$$
Z_0[J]=1+\frac{1}{2}x--x+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\begin{pmatrix}x--x\\x--x\end{pmatrix}+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\begin{pmatrix}x--x\\x--x\\x--x\end{pmatrix}+\cdots
$$

这些图描述了在有源$J(x)$存在时的真空-真空跃迁。这个结果可以直观的理解成，两个源之间一个粒子的传播$(x--x)$,两个粒子的传播$\binom{x--x}{x--x}\cdots$这并不奇怪。因为所

谓真空-真空跃迁实质上就是在真空中产生一些粒子。然后湮灭掉。不同阶的近似实质上就是将这一多个虚粒子参与的过程简化成：一个虚粒子过程（一阶$x--x$）二个虚粒子过程（两阶 $\begin{matrix} x--x \\ x--x \end{matrix}$ ...）。源$J(x)$的存在使这一过程更丰富了。

可以看到，$Z_0[J]$的Taylor展开各项就是不同次方的Green函数。因此$Z_0[J]$就是Green函数的生成函数（母函数）（回忆数学中生成函数（母函数）的概念)。

前面我们Taylor实际上是对泛函而不是普通的函数进行的，也就是说这是个泛函的Taylor展开。下面普通讨论一下泛函的Taylor展开。

先讨论一个多元普通函数的Taylor展开：

$$\begin{aligned} F\{y\} &= F(y_1 \cdots y_k) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{k} \cdots \sum_{i_n=0}^{k} \frac{1}{n!} T_n(i_1 \cdots i_n)\, y_{i1} \cdots y_{in} \end{aligned}$$

其中

$$T_n = \left. \frac{\partial^n F\{y\}}{\partial y_1 \cdots \partial y_n} \right|_{y=0}$$

一个直接的办法可以使我们由这个普通的函数过渡到泛函。即将分立的$(y_1 \ldots y_n)$取成连续函数。具体讲就是将分立的指标$i = 1 \cdots n$变成连续的指标x。这样：

$$y_i \to y(x) \ , \ i \to x \ , \quad (-\infty < x < \infty)$$

求和此时变成积分

$$\sum_i \to \int dx$$

这样

$$F\{y\} = F(y_1 \cdots y_k) \to F[y(x)]$$

其中$F(y_1 \cdots y_k)$是函数，$F[y(x)]$是泛函。

直接推广函数的Taylor展开式有

$$F[y] = \sum_0^{\infty} \int dx_1 \ldots dx_n \frac{1}{n!} T_n(x_1 \ldots x_n)\, y(x_1) \ldots y(x_n)$$

其中

$$T_n(x_1 \cdots x_n) = \left. \frac{\delta}{\delta y(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta y(x_n)} F[y] \right|_{y=0}$$

这里$F[y(x)]$是$T_n(x_1 \cdots x_n)$的生成泛函（Taylor展开各项)。

利用这个数学结果我们可以由$Z_0[J]$—生成泛函得到各阶Green函数。

$Z_0[J]$的形式前面已经得到，其中包含了一个归一化的常数N，那里得到的$Z_0[J]$是没有归一化的。而$Z_0[J]$是跃迁振幅显然应当归一化。$Z_0[J]$是存在源$J(x)$的真空-真空跃迁振幅：

$$Z_0[J] = \langle 0,\infty | 0,-\infty \rangle^J$$

一个自然的归一化条件是

$$Z_0[J=0] = Z_0[0] = 1$$

即不存在源时几率振幅是1。

这种归一化其实很容易形式的得到。前面我们已经得到未归一化的$Z_0[J]$为：

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{-i\int d^4x\left\{\frac{1}{2}\phi\left[\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right)\phi\right]-J\phi\right\}} \tag{27.4}$$

或

$$Z_0[J] = e^{-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)}\int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{i}{2}\int d^4x\phi\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right)\phi} \tag{27.5}$$

显然（34.3）式可以归一化成：

$$Z_0[J] = \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{-i\int d^4x\left[\frac{1}{2}\phi\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right)\phi-J\phi\right]}}{\int \mathcal{D}\phi e^{-i\int d^4x\left[\frac{1}{2}\phi(\partial^2+m^2-i\epsilon)\phi\right]}}$$

$Z_0[0]=1$的条件显然满足。这样（34.4）式变为：

$$Z_0[J] = e^{-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)}$$

这是$e^{i\theta}$的形式，显然是归一的。J=0 自然$Z_0[0]=0$.

由前面的讨论我们已经看到$F[y]$是$T_n(x_{1\cdots}x_n) = \frac{\delta}{\delta y(x_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta y(x_n)}F[y]|_{y=0}$的生成泛函。这里将$F[y]$取成$Z_0[J]$。那么也可以生成一系列函数

$$\tau(x_1\cdots x_n) = \frac{1}{i^n}\frac{\delta^n Z_0[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\bigg|_{J=0}$$

这里我们乘上系数$\frac{1}{i^n}$是为了后面讨论时形式上的方便。

在量子力学中我们已经证明$Z_0[J]$是坐标算符编时乘积的真空期待值的生成泛函。在场论中只需将$q(t)$换成场的广义坐标$\phi(x)$即可得这个结果在场论中的对应结果：

$$\frac{\delta^n Z_0[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}|_{J=0} = i^n \langle 0|T[\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)]|0\rangle$$

这样我们有：

$$\langle 0|T[\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)]|0\rangle = \frac{1}{i^n}\frac{\delta^n Z_0[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\bigg|_{J=0}$$

对比可以知道：

$$\tau(x_1\cdots x_n) = \langle 0|T[\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)]|0\rangle$$

27.3 路径积分和Green函数

这里我们来看路径积分与Green函数的关系以标量场为例,作用量为

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\int d^4x\partial(\varphi\partial\varphi) - \int d^4x\left[\frac{1}{2}\varphi\partial^2\varphi + \frac{1}{2}m^2\varphi^2\right] \\ &= -\int d^4x\left[\frac{1}{2}\varphi\left(\partial^2+m^2\right)\varphi\right]. \end{aligned} \tag{27.6}$$

相应的路径积分表示的跃迁振幅为

$$\int \mathcal{D}\varphi e^{iS[\varphi]}\left(=\int \mathcal{D}\varphi e^{-i\int d^4x\left[\frac{1}{2}\varphi\left(\partial^2+m^2\right)\varphi\right]}\right),$$

这是一个振荡积分。我们知道在场论中经常要处理的是形如

$$\int \mathcal{D}\varphi\varphi\cdots\varphi e^{iS[\varphi]} \tag{27.7}$$

的积分。在比喻意义上讲这相当于对φ^n作Fourier变换。而我们知道，能够做Fourier变换的只有绝对可积函数。φ^n显然不行。如果仍想对φ^n做指数型积分变换。那么最直接的方式就是将Fourier变换改成Laplace变换

$$\begin{aligned} \int dx e^{ipx} f(x) &\to \int dx e^{i(p+iq)x} f(x) \\ &= \int dx e^{ipx-qx} f(x). \end{aligned} \tag{27.8}$$

这就是说Fourier变换变成Laplace变换，就是在变换核e^{ipx}上乘上一个指数衰减因子e^{-qx}.或者说在指数ipx上加上$-qx$项。类比到路径积分中要使积分（27.7）可积。也可以通过加上这样一个因子的方式做到

$$e^{iS} \to e^{iS-\epsilon\int d^4x\frac{1}{2}\varphi^2}. \tag{27.9}$$

这样积分(27.7)变成了

$$\int \mathcal{D}\varphi\varphi\cdots\varphi e^{iS[\varphi]-\epsilon\int d^4x\frac{1}{2}\varphi^2}. \tag{27.10}$$

下面我们来看看对自由标量场来说这个改变意味着什么。指数上

$$\begin{aligned}
&iS-\epsilon\int d^4x\frac{1}{2}\varphi^2\\
&=i\left(S+i\epsilon\int d^4x\frac{1}{2}\varphi^2\right)\\
&=i\left(-\int d^4x\frac{1}{2}\varphi\left(\partial^2+m^2\right)\varphi+\int d^4x\frac{1}{2}\varphi\left(i\epsilon\right)\varphi\right)\\
&=i\left(-\int d^4x\frac{1}{2}\varphi\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right)\varphi\right).
\end{aligned} \tag{27.11}$$

也就是说

$$m^2\to m^2-i\epsilon \tag{27.12}$$

相当加了一个虚质量。引入这个虚质量后，Klein-Gordon方程变成

$$\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right)\varphi\left(x\right)=0. \tag{27.13}$$

有源的情况为

$$\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right)\varphi\left(x\right)=j\left(x\right). \tag{27.14}$$

求它的Green函数,Green函数服从的点源方程为

$$\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right)G\left(x-y\right)=-\delta^4\left(x-y\right), \tag{27.15}$$

为解这个方程做积分变换

$$G\left(x-y\right)=\int\frac{d^4k}{\left(2\pi\right)^4}e^{-ik(x-y)}G\left(k\right). \tag{27.16}$$

代回（27.15）有

$$\left(k^2-m^2-i\epsilon\right)G\left(k\right)=1, \tag{27.17}$$

于是

$$G\left(k\right)=\frac{1}{k^2-m^2+i\epsilon}, \tag{27.18}$$

通过变换（**??**)可以得到$G\left(x-y\right)$,

$$G\left(x-y\right)=\int\frac{d^4k}{\left(2\pi\right)^4}e^{-ik(x-y)}\frac{1}{k^2-m^2+i\epsilon}. \tag{27.19}$$

（推导参考第。。。章）

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} \left\{ \int \frac{dk^0}{2\pi} \frac{1}{2k^0} \frac{e^{-ik^0\left(x^0-y^0\right)}}{k^2-\omega_k+i\epsilon} + \int \frac{dk^0}{2\pi} \frac{1}{2k^0} \frac{e^{-ik^0\left(x^0-y^0\right)}}{k^2+\omega_k-i\epsilon} \right\} \tag{27.20}$$

这时积分路径上没有奇点，这个积分可以积出来。就是Feynman传播子。因此

$$G(x-y) = \Delta_F(x-y). \tag{27.21}$$

瞧，当我们试图使路径积分收敛的时候。我们自动得到了Feynman传播子。

回忆小场论中，为了算出Green函数。由于积分路径上有奇点（E轴）。积分没有定义，于是便有各种可能的路径选择。不同的路径给出不同的积分结果。最后得到一个Lorentz不变函数族。Feynman传播子只是其中一个。从路径积分的观点。我们很容易看出选择Feynman，Green函数的理由。

27.4 Wick定理

场算符编时乘积的真空期待值就是Green函数。普遍地，我们考虑多点Green函数：

$$\langle 0|T\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_{2n})|0\rangle, \tag{27.22}$$

可以证明

$$\langle 0|T\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_{2n})|0\rangle = \frac{1}{i_n} \sum_{\text{所有组合}} \Delta(x_{i1}-x_{i2})\cdots\Delta(x_{i2n-1}-x_{i2n}). \tag{27.23}$$

这个结果就是Wick定理（对比在正则场论中的情况）特例

$$\begin{aligned} &\langle 0|T\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)|0\rangle \\ &= \frac{1}{i^2}\left[\Delta(x_1-x_2)\Delta(x_3-x_4)+\Delta(x_1-x_3)\Delta(x_2-x_4)+\Delta(x_1-x_4)\Delta(x_2-x3)\right]. \end{aligned} \tag{27.24}$$

第八部分

附录

第二十八章　群论简引

数学中有一些基本的数学结构，如代数结构、拓扑结构等等。群是是一种基本的代数结构。作为一种基本的数学结构，它是非常抽象的，从而也是非常普遍的。

群的概念最初来自于非常具体的问题。慢慢地完成了从具体群到抽象群的过渡。这个逐步抽象化的过程就是群论自身完善的过程。

群论概念的线索很早就已经出现，最终明确在伽罗华（Évariste Galois）关于代数方程解的工作中。十九岁的孩子伽罗华在杀死他的决斗的前一夜匆匆写下了他的发现的梗概，告诉了我们什么是群，开创了数学中最生机勃勃的方向之一——群论。杀害他的不是那场决斗，是那些给伽罗华提鞋都不配的学术垃圾：他们让伽罗华两次没考上大学，将一个十几岁的真正的天才赶到了社会上，要了他的命。取得一个好成绩的唯一办法是将自己的水平降到一个与出题人相同的水平上，可是伽罗华没有屈尊。

群的概念来自于对称性。比如伽罗华引入的群就是反映代数方程中的函数的对称性的置换群。对称性有许多种：几何中的各种直观对称性，代数中的函数对称性，数论中的对称性。由于对称性其实就是保持某种性质不变的性质，即在变换下不变。因此各种不变性也都可由群来描述。

历史上，首先发现的当然是与某种具体对称性相联系的具体群。在不同的问题中人们发现了许多这样的具体群。这是一个自然的问题是来自不同问题的这些群是同一个群吗？如果不是它们之间又有什么关系呢？为了回答这些问题我们要作这样一件事：定义什么是两个群相同。我们知道相同从来的都是个相对的概念。比如我们来看两个人是否相同。如果只考虑性别，那么随便两个男人便是相同的。如果考虑的是成绩，那么成绩相同的就是相同。可是如果考虑足够多的细节，那么没有两个人是相同的。这就是说，定义相同本身就是个大问题。比如，一个群来自于某种几何图形的直观对称性；另一个群来自于某个函数对称性。它们一样吗？如果用来源或直观意义来定义相同，那它们就不相同。但如果我们从更抽象地考虑这个问题，比如只要这两个群（当然也是两个集合）的元素存在着一一对应关系，就认为它们

是一样的，那么它们可以被看成是一个群。这就是说，首先我们要将具体群抽象化。（回忆数学史上最伟大的抽象化——自然数的引入。数人是1、2、3，数星星也是1、2、3，虽然人和星星完全没有共同点）抽象化后的群中最重要的反映代数结构的内容保留下来了，与代数结构无关的部分被抹去了。着这样的抽象的意义上我们可以有一个两个群是否相同的合理概念了。这就是说，群发展中的一个重要的环节就是群的抽象化。当我们弄清楚这种抽象群的性质后，在遇到某个具体问题时，再将这个抽象群赋予具体的意义，即将它在一个具体的问题中找一个表示，这样所有的抽象群的结论都可以直接用过来了。我们顺便说一下，定义两个群相同尽管用别的标准，比如，如果你并不需要一一对应这么强的要求那么你也可以放松一些，多对一的对应也没什么不可以，这样也是一种相同。毕竟，我们说两本《红楼梦》是一样的，并不是非要这两本书的每一页的分子排布都一样。

28.1 群，作为一种代数结构

群是一种代数结构。你当然可以在没有赋予它某个具体含义的时候完整地研究它。

群是被赋予了一个二元运算的集合[1]，用G表示。这个二元运算是抽象的，不特指某种特殊的运算。它可以是你随便给一种运算，比如它可以是乘法、加法或对易子运算，等等。这个二元运算我们泛泛地称之为“乘”，用“$\circ$”来表示。这个二元运算给出映射

$$\circ:\ G\times G\to G \qquad\qquad (f,g)\to f\circ g$$

即这个映射将集合$G\times G$仍然映射到G自己；将G中的一对元素(f,g)映射成一个新元素$h=f\circ g$。满足：

(1) 封闭：对所有$f,g\in G$都有$f\circ g\in G$；

(2) 结合律：乘法满足结合律：$(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$；

(3) 单位元：存在元素e，对所有元素都有$g\circ e=e\circ g=g$；

(4) 逆元：对任意元素g都有g^{-1}使得$g\circ g^{-1}=g^{-1}\circ g=e$。

其实这四条要求中有些要求并不都是必须的，(3)和(4)两条改成

(3') 单位元：存在元素e，对所有元素都有$e\circ g=g$；

[1]思考：设想一个有两个二元运算的代数结构。

(4') 逆元：对任意元素g都存在元素h使得$h \circ g = e$。

同样可以得到等价的群的定义，这可以直接证明。当然，群还有一些其它等价的定义。

当然你还可以随便给出其它一组相容的要求得到新的代数结构。比如由群的定义出发，适当改变各种条件（如增加或减少一些条件）还可以得到各种代数结构，例如：

- 交换群：增加交换律要求。
- 半群(semi-group)：只满足封闭性(1)和结合律(2)两个要求。例：正整数集合在加法下构成半群。
- 亚群：只满足封闭性要求(1)。
- 交换半群：满足封闭性(1)和结合律(2)两个要求外再加上交换律。
- 有单位元的半群(monoid)：只满足封闭性(1)、结合律(2)和单位元(3)这三个要求。
- 拟群(quasi-group)：满足封闭性要求(1)和左商律和右商律。左商律和右商律的意思是：对任意$f, g \in G$，都存在元素a, b使得$f \circ a = g$和$b \circ f = g$。
- 圈(loop)：只满足封闭性(1)，单位元(3)和逆元(4)三个要求。但没有结合律。即圈是非结合的；结合圈就是群。
- groupoid：只要求单位元和逆。

进一步地，如果你进一步再引入另一个二元运算什么的，你就会得到其它代数结构。

28.1.1 各种群

群显然会有许多种，有多少种群，要看你如何分类。在数学中分类是一个核心重要的问题。我们当然希望找的这样一种分类方式，当我们写出这个数学对象（在这里我们的数学对象就是群）的所有分类特征时，这个数学对象就被唯一地确定了。或者说，通过写出一个数学对象的全部分类特征，这个数学对象就被完全描述了。

分类就是在一类事物中提取有限个特征。这个特征如果是可以量化的，那么不同的对象就会有一个相应的特征值，给定了这个特征值也就确定了这个特征。

分类可以由各种方式。比如对群来说，按照群元的数量我们可以将群分成*有限群*和*无限群*。按照群的是否可分解来分，我们可以将群分成*单群*和不是单群。按照群元的相邻关系分，我们可以将群分成*分立群*和*连续群*。按照群元的乘法是否可交换来分，我们可以将群分成*Abel群*（可交换）和非*Abel群*（不可交换）。按照群元在某种运算方式下的行为分，则可以有比如说：循环群，等等。

以上是针对抽象群讨论的分类。在具体群中我们的分类就与具体群中赋予群的表示的特征有关了。如果群元被表示成一个置换操作，那么这个群就被称为置换群；如果群元被表示成一个矩阵，二元运算被定义成了矩阵乘法，那么这个群就被称为某个线性群。更具体地，如果群元被表示成一个旋转操作，那么这个群就被称为旋转群。

可以看出，对抽象群的分类是本质的，按照某个具体群的表示直观意义分类是带有随机性和不本质的。但考虑具体群经常是非常有意义的。事实是，直接研究抽象群是困难的，无所依托，我们经常考虑的是它们在具体群上的实现：分析某个具体群性质，再从中抽象出抽象群的普遍性质。

先看两个极为重要的群。

变换群

事实上，人们刚刚开始群研究的时候考虑的全都是变换群。那时候考虑的都是与各种具体问题中的各种具体对称性有关的群。与对称有关的群是由这样一类操作构成的集合，它们把所要研究的集合中的元素便成仍然是这个集合中的另外一些元素，在这些变换后，所考虑的对象不变。如，对一个正三角形的三个顶点施行第一个顶点变成第二个顶点，第二个变成第三个，第三个变成第一个的变换后，这个正三角形不变。可以看出，所有这类操作的一个共同的特征是，它们是针对某一集合中的点施行一对一的变换。即，将集合中的一个点变成集合中的另外一个点。这类集合内的一一变换构成的群我们称为变换群。即，

- 变换群：集合中所有一一变换构成的群。

变换群，尤其是在物理中，是非常重要的。举个例子，一个三维欧氏空间中所有点组成的集合，我们可以为不同点之间找到各种一一对应，也就是为所有点找到一个一一的变换。这些变换中当然会有一些变换可以构成群，所有这些变换构成的群就是一个大的变换群。我们非常熟悉这个大变换群的各种子群。比如，平移群，旋转群等等，它们都是将一个集合映射到它自身的变换组成的群。

变换群的一个重要特征是（这也是具体群的特征），它们是针对某一个集合的。因此它们不是抽象群。抽象群的重要意义是将群本身的性质提取出来，而不依赖于

别施行变换的那个集合的性质。这当然是非常重要的，因为我们知道，群的性质与被施行变换的集合的性质并没有必然的关系。但是正如前面我们提到过的，直接研究抽象群非常困难，我们经常先研究一个具体群，再将这具体群的性质提取出来，得到抽象群的性质。事实上，我们可以为每一个抽象群找到一个变换群的对应，基于下面的这个重要定理：

- Cayley定理：任何群都同构于一个变换群。

置换群

有限的变换群就是置换群。这样一来，所有前面的关于变换群的性质就可以直接移植到置换群中。其中最重要的就是Cayley定理。Cayley定理在置换群中的对应自然就是

- Cayley定理：任何有限群都同构于一个置换群[2]。

它的重要意义在于，Cayley定理实际是在告诉我们，每个有限群都会有一个置换群表示。因此置换群在有限群理论中起着重要作用。

线性群

线性群是线性矢量空间上的变换群，很显然，这样一个群完全可以表示成一个矩阵群。线性群我们后面将专门讲。

28.1.2 群元，生成元

群首先是一个集合，集合中的元素就是群元。在抽象群中群元就是群元，是满足某些抽象代数关系的形式化的东西。在具体群中（具体群可以看作是抽象群的各种实现），群元就被赋予了各种操作上的意义。比如，在置换群中，某个群元就是一个置换操作；在旋转群中，某个群元就是一个转动操作；在矩阵群中，某个群元就是一个矩阵。

一个群中有许多群元。但是群元和群元是不一样的。有些群元可以由其它群元生成；有些则更基本些，它们不能由其它群元生成。在具体群中这一点很容理解。群元是一个操作，有些操作可以有两个相继的操作来完成，如转动180度可以有两个相继的转动90度来完成。

[2]这里的置换群指的是对称群（所有置换构成的群）和它的所有子群。这与物理的常用的说法不太一样，在物理中我们说的置换群经常指的是对称群。

- 生成元：如果一个群中的所有的群元都能由某几个群元通过群的那个二元运算构造出来，那么这几个群元就被称为群的生成元。即任意群元g可表示成

$$g = a_1^{n_1} \circ a_2^{n_2} \circ a_3^{n_3} \circ \cdots$$

  的形式。注意，这里的幂次n_i可取负幂次，因为每个群元都有逆元。

28.1.3 群的特征

描述一个人我们要从这个人身上提取许多典型信息，如身高，体重，肤色等等。这些信息的特点是：

- 不同的人的这些特征应尽可能不一样。
- 不应该总在改变。也就是说这些特征应该是这个人的特性，也应该是是这个人的属性。

群（其它数学对象也是一样）的特征也是这样一些量：不同的群一般不同；当其它东西变化时它不变（例如一个矩阵的行列式，迹等）。

- 阶(order)：有限群G的阶就是群元的个数，用$|G|$表示。
- 秩(rank)：有限群G的秩就是生成元的个数。

28.1.4 这两个群相同吗？

在引言中我们已经遇到过群理论中的一个基本问题：这两个群相同吗？这样的问题。那时候我们指出为了回答这个问题需要将具体群抽象化。现在抽象化的工作已经做完了，我们应该更具体地回答这个问题了。

像在引言中已经讲过的，怎样定义相同与我们的需要有直接关系。比如，如果我们要求两个物体相同必须是相同到它们是在同一时间由同一批粒子组成的，那么这个世界上就没有相同的东西了。如果放松一下要求，只要求组成物质的基本粒子是同一种粒子，那么相同的东西就很多了。再放松一下，比如我们要做一个天平，两个托盘质量一样就可以认为相同了，颜色形状不同不是很重要。这就是说，如果你希望做一个天平那么你不妨适当降低一下相同的定义中的要求，够用就行，没必要不计成本地苛求。

群也一样。如果你要求只有两个群描述的问题（比如旋转对称）完全一样才能算它们一样，那么群只能与自己一样了。但放松一些要求，如果只要求它们的抽象

代数结构相同的话，那么相同的群就会很多。一个来自于几何图形对称性的群，完全可能与一个来自置换问题的群相同（事实上，不管你从什么问题中得到的群，都能找到一个来自于置换的群与它相同）。

下面更具体些：

对于一个作为抽象代数结构的群来说，两个群相同最强的要求莫过于要求两个群的元素是一一对应的（别忘了，群首先是一个集合），这些一一对应的元素满足的代数关系也相同，这种情况我们称之为**同构**（isomorphic）。也就是（注：$\leftrightarrows$表示一一映射）

> 任意g_1，$g_2 \in G$，h_1，$h_2 \in H$，如果$g_1 \leftrightarrows g_2$和$h_1 \leftrightarrows h_2$，则$g_1 \circ g_2 \leftrightarrows h_1 \circ h_2$。

显然，同构是一个非常强的要求，它要求一一对应。经常地，放松一些要求得到的**相同**也很有用。比如我们可以将一一对应放松成多对一的，即

> 任意g_1，$g_2 \in G$，h_1，$h_2 \in H$，如果$g_1 \to g_2$和$h_1 \to h_2$，则$g_1 \circ g_2 \to h_1 \circ h_2$。

这种情况我们称之为**同态**（homomorphism）。同态的概念是群表示的基础。显然一一的同态就是同构。

28.1.5 子群

群首先是一个集合，集合的各种性质自然在群中也会有。一个集合有子集，一个群相应地也有子群。子群的定义是自然的，它有两个要素：首先它是一个子集；此外它还要是一个群。因此子群就是

- 子群：某个群的一个仍是群的子集。

一个群可以有不同的子群。一个群有什么样的子群本身反映的就是这个群本身的性质；或者说，一个群的子群的各种特征本质上也就是这个群的各种特征。子群是一个首要特征就是它的群特征，一个群能够有什么样的群作它的子群当然是它的一个重要特征。

一个群有两个显然的子群：一个是只有单位元一个元素组成的群；另一个是这个群本身。这两种情况是平庸的，以后我们提到的子群都默认不包含着两种平庸情况。

一个群包含子群的情况可以用来对这个群进行分类。比如，一定有的群包含许多子群，而另外一些群则没有非平庸的子群。这两个群当然是不一样的。区别它们

包含子群情况的不同就是一种分类。不包含子群的群显然要比包含子群的群简单，细分起来，有些子群也会有自己的子群。因此，一个群包含不包含子群，包含什么样的子群是这个群的重要性质。这种群的包含关系暗示着一种分解，显然不能再分解的群具有特殊的意义，这种群就是单群，它是群的基本构件。

一种最重要的子群是不变子群，这是群论中的一个核心的概念。为了引入不变子群，我们先引入陪集的概念。

- 陪集：子群$H \subset G$和一个元素$g \in G$且$g \notin H$，定义了一个关于子群H的左陪集gH，和一个关于子群H的右陪集Hg。[3]

一般地讲左陪集不等于右陪集，即$gH \neq Hg$。但是如果某个子群的左陪集等于右陪集，我们就称它为不变子群，即

- 不变子群（invariant subgroup）或正规子群（normal subgroup）：左陪集等于右陪集的子群。即$gH = Hg$或$gHg^{-1} = H$。

由不变子群的条件$gHg^{-1} = H$可以直接看出为什么H被称为不变子群：H显然在所有群元g的变换下（$H' = gHg^{-1} = H$)不变。

由不变子群出发我们可以定义群论中最重要的概念之一单群。[4]

我们来看几种重要的子群：

循环群是一类重要的群，而一个群的循环群子群则有特别意味。首先定义循环群：

- 循环群（cyclic group）：集合$\left\{g, g^1, \cdots, g^n = e\right\}$就是一个循环群。

循环群的最重要的特征是它是由一个元素生成的，当然它是Abel的。关于循环群我们有这样的显然的定理：

---

[3] 1) 陪集定义中我们特别明确了所取G中的元素g不是所考虑的子集H中的元素。这是因为如果$g \in H$，则显然必有$gH = H$（重排定理）。

2) 陪集和子群中没有公共的元素。

3) 陪集中没有单位元，因此陪集一定不是子群。

4) 不同的左（右）陪集没有公共元素。即两个由公共元素的左（右）陪集必是同一个陪集。

5) 群G显然等于子群H和所有左（或右）陪集的并集。群G的阶数等于子群H阶数的整数倍。

6) 子群的群元数与陪集的元素数相等。

[4] 在这里我们还可以以不变子群作为一个例子来说明为什么数学书看上去很难。按照前面的解释和定义，不变子群显然不难理解，但如果我少说几句话，而用符号$H \lhd G$表示H是G的不变子群，那么你还看得懂吗？如果前面所有的东西都写成这样呢？玛雅人的文字不好懂，并不说明它们的文化先进，学问高深。

- 定理：同阶循环群同构。

这里我们考虑作为子群的循环群的性质。有限群G中任意一个元素a一定有这样的性质：总可以找到一个整数n_a使得$a^{n_a} = e$。n_a的最小值称为元素a的阶，记作$|a|$。显然$\{a\}$中一定存在一个群的一个生成元（它可以生成其它元素），就记为a。这时由生成元a得到的集合$\left\{a, a^1, \cdots, a^{n_a} = e\right\}$构成的群就是循环群。这就是说一个群一定有一个循环群的子群。当然一个群中还可能会有其它循环子群，如$\left\{b, b^1, \cdots, b^{n_b} = e\right\}$，$\left\{c, c^1, \cdots, c^{n_c} = e\right\}$，$\cdots$。显然，$a$，$b$，$c$，$\cdots$都是群$G$的生成元。群$G$的阶与这些生成元的阶有这样的关系：

$$|G| = |a| + |b| + |c| + \cdots .$$

一个群的另一种非常有意义的子群是中心化子（center）：

- 中心化子(center)：群中所有与其它群元都对易的元素构成的不变子群，称为群的中心化子。

中心化子携带了一个群的核心信息，在单群分类中起着非常重要的作用。

这样的东西还有很多，例如，正规化子。

28.1.6 商群

某些集合中的元素可以按某种规则进一步分成几类；而另一些集合中的元素则不能。比如，一个班上的学生的集合可以进一步地按照男女分成两类；而一个男生班的学生按照性别就不能再进一步分类了。显然可以进一步分类的集合复杂些，不可以进一步分类的集合简单些、基本些。从某种意义上讲，这些复杂的集合可以由简单的集合来组成。或者说，一个复杂的集合可以分解成一些简单的集合。这种进一步分类的方法显然不是唯一的。群的商结构体现的就是这样一种思路。

粗略地讲，我们可以将群中的某些元素组成的子集合（这样的子集合不一定仍构成群）看作是一个元素。这样一来，我们就得到了一个元素个数少一些的新的集合（这是因为这个集合中的每个元素都可以是一个包含了许多元素的子集合）。这样原来的集合就被，从某种意义上讲，压缩了。如果这样得到的新的（元素个数少一些的）集合仍然构成一个群。那么你就得到了原来群的一个商群。

具体地讲，我们可以这样将一个群压缩成（注意，不是分解成）一个以它的子群和陪集作为元素组成的元素个数少一些的群。之所以可以这样做是因为我们可以（并且在前面已经）证明一个子群和它的各个左陪集（或右陪集）中的元素并不重复。这就是说，我们可以将一个群分成由它的某一个子群和这个子群的所有陪集组

成的几个子集合（注意，陪集并不构成群）。如果我们将这个子群和各个陪集都分别看作是一个元素，那么我们就得到一个新的集合（注意，这个集合并不一定就能构成一个群）。如果这个集合又恰好构成一个群，那么这个群就是原来那个群的商群。

这样问题就变成了什么样的子群和它的陪集作为元素仍然可以构成一个群呢。可以证明，只有不变子群和它的陪集（不变子群的左陪集等于右陪集）才能构成一个群。因此，只有不变子群才能定义商群。或者，不太严格地说，一个群只能被它的不变子群整除。群G关于不变子群H的商群记作G/H。

需要说明一点的是，两个集合构成的元素如何作乘法。规则是两个集合中的元素两两相乘，得到的新的集合在去掉重复的元素后（即，重复的元素只保留一个），得到的集合就是它们的乘积。

28.1.7 单群

当代科学的主流思想仍然是最好能为每件事找一个基元。找基元的工作永远是这一学科最前沿的工作，工作在这一领域的人永远是这一学科的领袖，至少是精神领袖，当然他们也往往是最聪明的。寻找基元经常是精神上的一种追求，就象文学艺术一样纯净而不沾染世俗气。虽然从事这一工作的人有时为了获得经济支持也会违心地向那些他们在内心深处看不起的芸芸众生暗示这种工作的应用远景，但这些工作一般都没有近期的应用价值，即使有也不会真的被它们的研究者真正重视——应用是肤浅和暂时的，他们这样认为。

在物理里寻找基元从来都是个核心任务。当然，知道存在某种基元是一个重大进步，只要回忆一下物理中的原子论的历史就知道了。数学中同样有基元，数的基元是素数，群的基元就是单群。其实确定基元的原则是很朴实的，不能再分解的就是基元。

怎样的群可以看作是不能分解的呢，当然，这首先取决于你怎样分解它。我们采用这样一种方式来确定群的基元：首先引入一个压缩的概念，然后将单群（群的基元）定义成不可压缩的群。这个做法是否合理取决于压缩的定义是否合理。

我们这样定义压缩。我们将群的压缩看作是一个粗粒化过程：在尽可能保持原来的信息的基础上尽可能地将群变小。所谓粗粒化，一个简单的例子就是画示意图，你可以用一个三角代表一座山，虽然细节几乎剩不下什么了，但主体结构还是有的。关键是要协调尽可能多地减少细节和尽可能多地保存信息之间的矛盾。

群是一个集合，随便将某几个元素对应成另一个集合中的一个元素也可以被看作是一种压缩。但这种压缩一般地讲是失真的，因为这样得到的新集合一般地讲不再是一个群。话句话说，压缩后的群不像原来的群了。这是不好的压缩（这样压缩

一张照片你一定不会满意）。这就是说，虽然压缩后肯定会损失信息，但是我们还是要求压缩前后它们应该彼此很像（对压缩照片来说这就是要求等比例压缩）。

一个群压缩后还是一个群，这显然要求这种压缩至少是同态压缩。同态我们在前面已经定义过了，它是一种多对一对应。也就是说我们将一个群中的几个群元对应作为它的压缩的另一个群中的一个群元。多对一的对应给出的自然是一个压缩，压缩后的群群元的数量减少了。那么什么是群的基元也就顺理成章地被定义为不能被同态压缩的群。

这种同态压缩其实就是将群中的几个元素对应为一个元素。我们有要求等比例压缩。显然商群就满足这个条件：商群是将群中不变子群和它的各个陪集分别看成一个元素构成的群，而且子群和陪集中元素个数相同——标准的等比例压缩，压缩后不会变形。所以同态压缩的过程就是一个求商群的过程，也就是一个群被自己的不变子群除的过程。（商群被称作商群不奇怪，这种等比例压缩显然更像是一个除法的过程）。

稍微具体些，所有群都一定有两个平庸的与它同态的群：它本身和e。也就是说一个群一定会有这样两个压缩。不能被同态压缩的群就是只能被压缩成它自己和e的群。因此单群就是只能被压缩成它自己和e的群，或者说不能被同态压缩的群（平庸情况除外）。

前面我们已经将单群定义不可压缩的群。那么什么样的群不可压缩呢。由关于商群的分析可以看到，

- 一个群只能被它的不变子群“整除”；
- 一个群能否被压缩（当然是指同态压缩）就取决于它能不能被其它群“整除”。

因此很显然，只有一个群没有不变子群的时候才不能被其它群“整除”，从而不能被压缩。因此，被定义成不能被压缩的单群其实就是没有不变子群的群。因此单群可以被定义成没有不变子群（正规子群）的群。即，没有不变子群的群就是单群。

简单看一下单群的分类，我们会看到，世界上所有的群只有这并不多的几类，不奇怪，重要的东西当然会很简单（虽然证起来不那么容易）。

- 单群分类定理：每个有限单群一定同构于下面几种情况：
  1. 素数阶循环群；
  2. 交错群[5]；

[5]交错群，记为A_n，是n个文字对称群中全体偶置换构成的子群。

3. 16个李群无限族中的一个[6]；

4. 26个散在单群中的一个。

28.2 表示

表示就是为你要表示的东西和一种你熟悉或用起来方便的东西之间建立一种对应关系。为每一个人起一个名字就是为每个人找了一个表示。与起名字一样，我们为每个人起一个名字，不同人的名字可以重复（虽然我们并不希望这样），但我们不会为同一个人起两个名字。这也是表示的普遍原则。换句话说，找表示就是去找一种多对一的，但决不能是一对多的对应关系。为某一个群找一个表示自然就是去找一个群，这个群（当然是个集合）中的元素与你要表示的那个群（也是个集合）中的元素呈某种对应关系。这种对应关系是多（被表示的群）对一（用来表示的群）的。这个群就是原来那个群的一个表示。很显然群之间的这种多对一个关系是一种同态关系。显然，你可以立刻构造出两种平庸的表示：将所有群元多对应成单位元e；将每个元素多对应成自己，或者稍微不平庸些，将同一群中的元素对应成还是这个群的另一些元素，当然，这样得到的表示还是这个群本身（重排定理）。

群的一个表示就是一个与它同态的另一个群。同态可以简单地分成这样的类。最平庸的同态是将所有群元都对应成单位元，这也构成一个表示，称为平庸表示。另一个极端就是取一个一一的同态，也就是同构，来构成表示。这样的表示完全不损失信息，被称为忠实表示。

也就是说随便一个与这个群同态的群都可以作为这个群的一个表示。但是显然，我们为一个群找表示显然是为了方便，我们不会用一个更加抽象，更加难处里的群来作为一个群的表示。一般地，我们都会选一个比较容易处理的具体群；经常地，我们会选一个变换群。变换群一般比较直观，而且Cayley定理保证了我们能为每个群都找到一个变换群表示。常常用到的两个变换群表示是置换群表示和线性群表示。也就是说，在研究抽象群的时候，我们经常由于直接研究抽象群比较困难，因此就去为抽象群找一个具体群作为表示，由这个作为表示的具体群得到的性质通常是普遍的。但是要注意，在实际问题中，这个做法经常翻过来。我们在一个具体的问题中遇到了一个变换群，进一步地将它抽象化为一个抽象群。如在代数方程的伽罗华理论中，我们遇到了置换群；在空间旋转问题中，我们遇到各种线性群。究竟是为一个抽象群找一个具体群表示，再由具体群得到的各种性质一般化为抽象群的性质；还是为一个具体问题中遇到的具体群找一个更普遍的抽象群背景要根据具体

[6]Chevalley群（9类），Steinberg群（4类），Suzuki群和Ree群（3类）。

问题来定。

28.2.1 置换群表示和线性群表示

两个最常用的变换群表示就是置换群表示和线性群表示，究竟用哪种表示取决于具体问题。因此置换群和线性群是被研究的最彻底的群。在我们的问题中主要介绍线性群表示。

变换群是一个自身到自身映射构成的群。当然，如前面我们强调的，讨论变换群要关注被变换的那个集合。不同的集合中的一一变换给出的具体的变换群当然也不同。如果我们考虑的被变换的集合是一个线性矢量空间，那么我们得到的变换群就是线性群。一个线性矢量空间中的变换，也就是不同矢量间的变换，可以用一个矩阵来表示，因此线性群就是一个矩阵群（注意，不同矢量之间的变换就是一个线性变换，并不一定非得为这个线性变换找一个矩阵表示。再注意，这个表示是指某个线性变换算符的矩阵表示，不是前面讲的群表示）。

28.2.2 一般线性群

变换群强调了所变换的集合，线性群所变换的集合是一个线性矢量空间V。这个空间中所有可逆的变换构成一个群，这个群就是一般线性群，记为$GL(V)$，其中V表示这个一般线性群是线性矢量空间V上的一个线性群。具体地，在给定了空间V后，我们可以将一般线性群更具体地表示：一个n维复线性矢量空间上的一般线性群我们记为$GL(n,\mathbf{C})$，一个n维实线性矢量空间上的一般线性群我们记为$GL(n,\mathbf{R})$。

一个线性矢量空间上自身到自身的变换可以用一个矩阵来表示，因此一个n维线性矢量空间上的一般线性群就是一个n阶的矩阵群。这个线性矢量空间V就是表示空间。空间的维数，从而也是矩阵的维数，就是这个线性群表示的维数。

一般线性群就是矩阵群。不同矩阵构成的群就是复一般线性群$GL(n,\mathbf{C})$的不同的子群。比如

- 由所有n阶实矩阵构成的实一般线性群$GL(n,\mathbf{R})$；
- 由所有行列式为1的n阶复矩阵构成的复特殊线性群$SL(n,\mathbf{C})$，这里的特殊就是指行列式为1；
- 由所有行列式为1的n阶实矩阵构成的实特殊线性群$SL(n,\mathbf{R})$；
- 由所有n阶幺正矩阵（$\mathbf{U}^\dagger=\mathbf{U}^{-1}$或$\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}=1$）构成的幺正群$U(n)$；

- 由所有行列式为1的n阶幺正矩阵构成的特殊幺正群$SU\left(n\right)$；
- 由所有n阶正交矩阵（$\tilde{\mathbf{O}}=\mathbf{O}^{-1}$或$\tilde{\mathbf{O}}\mathbf{O}=1$）构成的正交群$O\left(n,\mathbf{C}\right)$和$O\left(n,\mathbf{R}\right)$；
- 由所有行列式为1的n阶正交矩阵构成的特殊正交群$SO\left(n,\mathbf{C}\right)$和$SO\left(n,\mathbf{R}\right)$。

28.2.3 群的不变量与度量，由不变量来构造群

从代数上讲，各种线性群（矩阵群）保各种二次型不变。各种空间中的长度（度量）原则上是可以任意定的。但是二次型的度量从来具有特殊的重要性。线性群所保的各种二次型当然可以被理解成各种空间中的长度。这样一来线性群$O\left(n\right)$保的二次型$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$就可以被理解成欧氏空间中的长度。从某种意义上讲，如果你愿意从变换下的不变量的角度出发，你就可以认为欧氏空间是由线性群$O\left(n\right)$保长度的空间。这样，闵氏空间就可以被认为是其度量为$SO\left(m,n\right)$群所保的二次型$x_1^2+\cdots+x_m^2+x_{m+1}^2+\cdots+x_{m+n}^2$的空间；等等。

从另一个角度讲，我们也可以由不变量出发来定义群。这并不难理解，对称性可以由群来描述，而所谓对称性就是指某种在变换下不变的性质。给定着这个不变的量自然便可以找到相应的变换，这个变换构成的群便可以视为由这个不变量定义的群。当然这种定义不是唯一的，一个群和它的子群当然可以对应同一个不变量。比如我们就可以将

- 保二次型$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$不变的群定义成一个群，简单分析可以看出这个不变量给出的就是正交群$O\left(n\right)$，如果再加上行列式为1的要求给出的就是特殊正交群$SO\left(n\right)$；
- 保不正定的二次型$x_1^2+\cdots+x_m^2+x_{m+1}^2+\cdots+x_{m+n}^2$不变给出的就是正交群$O\left(m,n\right)$，如果再加上行列式为1的要求给出的就是特殊正交群$SO\left(n\right)$；
- 保复的二次型$\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2+\cdots+\left|z_n\right|^2=z_1z_1^*+z_2z_2^*+\cdots+z_nz_n^*$不变给出的就是幺正群$U\left(n\right)$；
- 保不正定的复二次型$-\left|z_1\right|^2+-\left|z_2\right|^2-\cdots-\left|z_m\right|^2+\left|z_{m+1}\right|^2+\left|z_{m+2}\right|^2+\cdots+\left|z_{m+n}\right|^2$不变给出的就是正交群$U\left(m,n\right)$，如果再加上行列式为1的要求给出的就是特殊正交群$SU\left(m,n\right)$；
- 保反厄米二次型$\left(z_{n+1}z_1^*-z_1z_{n+1}^*\right)+\left(z_{n+2}z_2^*-z_2z_{n+2}^*\right)+\cdots+\left(z_{2n}z_n^*-z_nz_{2n}^*\right)$不变给出的是正交群$SO^*\left(2n\right)$；

- 保双线性形式$(x_1y_{n+1}+x_{n+1}y_1)+(x_2y_{n+2}+x_{n+2}y_2)+\cdots+(x_ny_{2n}+x_{2n}y_n)$，其中$x_i$和$y_i$是矢量$x=(x_1,\cdots,x_n;x_{n+1},\cdots,x_{2n})$和$y=(y_1,\cdots,y_n;y_{n+1},\cdots,y_{2n})$的分量，不变的是辛群$Sp(2n,\mathbf{C})$。如果矩阵是实矩阵，则是实辛群$Sp(2n,\mathbf{R})$；如果矩阵是幺正的，则是幺正辛群$Sp(2n)$。可以看出，辛群显然与力学有直接关系：你可以将$x_1,\cdots,x_n$理解成广义坐标，将$x_{n+1},\cdots,x_{2n}$理解成广义动量。

28.2.4 各种群之间的关系

群首先是一个集合，这样各种群的交、并显然会给出其它集合。这些交、并得到集合仍然可以构成群。如

$$\begin{aligned}SU(n)&=SL(n,\mathbf{C})\cap U(n)\\SU(m,n)&=SL(m+n,\mathbf{C})\cap U(m,n)\\SO(n,\mathbf{C})&=SL(n,\mathbf{C})\cap O(n,\mathbf{C})\\SO(n,\mathbf{R})&=SL(n,\mathbf{R})\cap O(n,\mathbf{R})\\Sp(2n)&=Sp(2n,\mathbf{C})\cap U(2n)\end{aligned}$$

28.2.5 连续矩阵群

一般线性群就是一个由n阶矩阵构成的群。不同的矩阵独立的矩阵元个数也是不一样的。如果所有这些独立的矩阵元都分别随一个连续的参数变化，那么我们就得到了一个连续矩阵群。一个群可以由许多参数，只要有一个参数连续变化就是连续群。连续的群参数的个数称为这个连续群的维数。

不同矩阵群的参数参数的个数当然也不一样，这取决于构成这个矩阵群矩阵的性质。不同性质的矩阵独立矩阵元的个数也不同。每个矩阵元如果是实数则需要一个参数，如果是复数则需要两个参数。这样我们可以由不同矩阵独立矩阵元的个数直接知道各种矩阵群的参数个数：

- 复一般线性群$GL(n,\mathbf{C})$有$2n^2$个参数；
- 实一般线性群$GL(n,\mathbf{C})$有n^2个参数；
- 复特殊线性群$SL(n,\mathbf{C})$有$2\left(n^2-1\right)$个参数；
- 实特殊线性群$SL(n,\mathbf{C})$有$2\left(n^2-1\right)$个参数；

- 幺正群$U(n)$有n^2个参数；
- 特殊幺正群$SU(n)$有n^2-1个参数；
- 复正交群$O(n,\mathbf{C})$和复特殊正交群$SO(n,\mathbf{C})$有$n(n-1)$个参数（$O(n,\mathbf{C})$与$SO(n,\mathbf{C})$参数个数相同是因为正交矩阵本身自动满足行列式为±1的要求，因此这个要求并不增加一个约束。特殊表现在只取行列式为$+1$的那一支）；
- 实正交群$O(n,\mathbf{R})$和实特殊正交群$SO(n,\mathbf{R})$有$\frac{1}{2}n(n-1)$个参数；
- 复辛群$Sp(2n,\mathbf{C})$有$2n(2n+1)$个参数；
- 实辛群$Sp(2n,\mathbf{R})$有$n(2n+1)$个参数。

28.3 拓扑群，李群：同时也是拓扑空间和流形的群

前面我们完全从代数的角度引入了群。从现在起我么将会发现，一个具有群结构的集合，同时还可能具有其它结构。比如，这个群的集合同时还具有某种拓扑结构，是一个拓扑空间；这个群的集合同时还是一个流形。一个集合同时具有几种数学结构是不奇怪的。研究一个同时具有几种代数结构的集合可以分别从不同的角度入手。比如，研究一个李群，我们既可以将它当作一个群来研究，也可以把它当作一个拓扑空间来考虑，又可以认为它是一个流形。当然更能同时从这三个角度研究。

例如：如果一个群的群元由若干个参数确定，即$g=g(s_1,s_2,\cdots,s_r)$，其中有些参数是连续变化的，有些是分立的。这些参数张成了一个参数空间。这时候，每个群元显然可以看成是由这r个参数所张成的r维参数空间中的一个点。这样一来，一个参数化了的群同时又将是一个空间。也就是说，这时候一个群同时具有了群和一个空间两重性质；或者说，此时群具有了代数和几何两种结构。群的这个参数空间如果恰好又是一个拓扑空间，那么这个群就是一个拓扑群（拓扑空间不一定是连续的）。此时这个群中蕴含了两种结构：代数结构和拓扑结构。群的这个参数空间如果恰好还具有微分结构，那么这个群就是一个李群。

这就是说，一个群，除了作为群与生俱来的代数结构以外，还可能具有其它结构。具体地讲，比如，拓扑和微分结构。换句话说，

- 拓扑群是一个群，也是一个拓扑空间；
- 李群是一个群，也是一个微分流形（从而也是一个拓扑空间）。

这就是说，在物理中具有非常本质意义的李群是这样的一个集合：它是一个群，是一个拓扑空间，是一个流形。因此我们可以分别从这三个角度去研究它。在同一个李群中相互关联的这三个因素经常使问题得到简化而不是复杂。

28.3.1 拓扑空间

为了说明拓扑群，我们先简单介绍一下拓扑：

拓扑结构是代数结构以外的另一种重要的数学结构。我们已经看到，群是一种具有某种代数结构的集合。一个集合除了具有某种代数结构外还可以具有某种拓扑结构。我们将看到，拓扑群就是一个既有代数结构同时又具有某种拓扑结构的集合。

所谓拓扑结构指的就是相邻关系。给定一个集合，集合中的元素是散落着的，彼此之间没有什么关系，就是一个一个独立的元素，谁也不离谁更近些，谁也不离谁更远些。但是如果我们赋予这些元素一些不同的关系，这个集合就被赋予了不同的结构。如果我们赋予了这个集合中元素相邻关系，那么我们就赋予了这个集合一个拓扑结构（比如在度量空间这样一个特殊拓扑空间，不同元素（点）之间被赋予了一个距离，从而有了一个相邻关系）。而所谓拓扑空间就是被赋予了拓扑结构的空间。

举个例子：带有比喻性的我们可以认为，社会就是一个拓扑空间。一个人的集合并不是社会，社会是由人和人与人之间的各种关系构成的。换句话说，如果我们给一个人的集合赋予一套人与人之间的关系，那么我们就得到了一个社会。如果给同样的这些人赋予另外一种人与人之间的关系，我们就得到了另一个社会。显然人与人之间的关系是可以随便给的。但是一个必要的前题是不能矛盾（如，如果已令A是B的哥哥，B是C的哥哥，就不能再让C是A的哥哥）。给定人与人之间的关系其实就是给定了人与人之间的相邻关系。显然，如果让所有人都只与自己有关（自己是自己的邻域），那么你肯定能得到一个社会。

我们可以从两个角度定义拓扑空间。1)可以从开集的角度定义拓扑空间；2)可以从邻域的角度定义拓扑空间。

1)**拓扑空间就是一个在其上定义了开集的集合。**简单说，所谓拓扑空间就是将一堆开集粘在一起得到的空间。不同的拓扑体现在这些开集的不同。也就是说，定义拓扑首先要定义开集。我们这样来定义开集：

- 开集的并是开集；

- 有限多开集的交是开集。

注意，第一条要求中，可以是无限多开集也可以是有限多开集。但是，第二条要求中，必须是有限多开集。这非常重要，因为无限多开集的交可以是闭集。这个定义搞得这么抽象是为了避免使用距离的概念。

我们要在一个大的集合中定义开集（从而在这个大集合中定义拓扑），显然还要明确两件事：一个是这个大集合本身；此外这个大集合中两个开集的交集完全可能是空集，我们要为这个空集找一个位置。为此我们在为一个集合（就是那个大集合）定义拓扑的时候还要明确这个大集合本身和空集的地位。我们要求

- 这个大集合是开集；
- 空集是开集。

有了这些我们便得到了一个拓扑空间。如果我们将上面的说法用数学的习惯表示得更明确些的话就是

> 一个大集合S上的一个开集族$T(S)=\{O_1,O_2,O_3,\cdots\}$定义了$S$上的一个拓扑。具有拓扑$T(S)$的集合$S$就是一个拓扑空间，记作$(S,T(S))$。

这里的O_i是开集。有了这些开集也就有了邻域。每个开集都是指定点的邻域。按照前面的说法自然有

- 任意多O_i的并集仍属于$T(S)$（即开集的并仍是开集，因为$T(S)$中的元素全是开集）；
- 任意有限多O_i的交集仍属于$T(S)$（即开集的交仍是开集，因为$T(S)$中的元素全是开集）；
- 大集合本身S属于$T(S)$；
- 空集$\varnothing$属于$T(S)$。

为了体验一下这几条限制究竟有多强，我们来看一个简单的例子。这几个例子也说明拓扑可以是离散的。

Example 4 取大集合$S=\{A,B,C,D\}$。我们可以定义它的拓扑为

$$T=\{O_1,O_2,O_3,O_4,O_5\}=\left\{\{\varnothing\},\overbrace{\{A,B,C,D\}}^{S},\{A\},\{A,B\},\{A,B,D\}\right\}$$

但是上面的四个条件便不是那么容易满足的，比如这样的集合族就不能认为是开集，从而也就不能认为定义了拓扑：$\left\{\{\varnothing\},\overbrace{\{A,B,C,D\}}^{S},\{A\},\{A,B\},\{B,C,D\}\right\}$，因为$\{A,B\}\cap\{B,C,D\}=\{D\}\notin T$，此时$\{D\}$不是开集（因为它不属于$T$），便不满足开集交也是开集的要求。

需要注意的是，在上面的例子中，在集合$S=\{A,B,C,D\}$还可以定义许多种拓扑。当然，对一个给定的集合究竟能一共能定义多少种拓扑还不清楚。

2)前面我们从开集的角度定义了拓扑和拓扑空间，其实有了开集的概念也就有了邻域。

- 某点的邻域就是包含某点的一个开集，或者说就是以该点为内点的开集。

当然这个开集属于那个大集合。由邻域出发定义拓扑，有了前面用开集定义拓扑的经历很容易理解：邻域就是一个开集。一个开集$\{A,B\}$就是元素A的一个邻域。这样由邻域定义拓扑也就顺理成章了。就是说，只要指定了邻域就指定了拓扑。由邻域的角度定义拓扑不如前面由开集直接定义拓扑来的简洁。我们这里不详细介绍。

现在，我们再来看看拓扑究竟是什么。其实只要搞清什么样的变换是拓扑变换便知道什么是拓扑了（本质上，拓扑关注的是在拓扑变换下不变的那些性质）。粗略地讲，拓扑变换就是保持相邻关系不变的变换。在一个拓扑变换下，形状，大小都可以变得面目全非，但是点与点的相邻关系不会改变。注意，这个点集不一定是连续的，可以是离散的，只不过在离散的情况下相邻关系有些抽象，是人为硬生生（当然要满足开集的要求）加上去的。所以说，保持相邻关系变换就是拓扑变换，而相邻关系就是由邻域（开集）规定的，因此说，给定了邻域就是给定了拓扑。拓扑研究的就是保持相邻关系前题下集合的各种性质。

一个拓扑空间还可以附加一些额外的条件，如在一个拓扑空间中附加一个可分性的要求（即任意两个点的邻域没有交集），那么我们就得到了一个Hausdorff空间（Hausdorff空间当然是一个拓扑空间）；如在一个拓扑空间中引入一个度量，那么就得到了一个度量空间（度量空间当然是一个Hausdorff空间，当然也是一个拓扑空间）。

28.3.2 拓扑群

对一个集合我们附加一个拓扑结构就得到了一个拓扑空间。如果在这个已经赋予了拓扑结构的集合中再附加一个群结构，那么我们就得到了一个拓扑群；或者说，

如果一个集合在具有某种拓扑结构的同时（从而是个拓扑空间）还具有群结构，那么这个拓扑空间同时也是一个拓扑群。也就是我们前面说的，拓扑群是一个群，也是一个拓扑空间；拓扑群的群元是一个拓扑空间中的点。

如何给一个集合赋予一个拓扑结构我们已经从开集的角度讨论过了。怎样的一个集合是一个群（或者说怎样的集合具有群结构）我们早就知道了（满足那四条公理）。因此构造一个拓扑群不是什么难事。只是要同时满足开集条件和群条件罢了。

一个具有群结构的集合中的每一个元素要满足群的四条要求。而如果在赋予这个集合群结构之后再赋予这个集合拓扑结构，那么这个集合除了满足群公理之外还要满足拓扑的要求。我们前面提到过，拓扑的核心就是保持相邻关系，保持相邻关系的变换就是拓扑变换。一个集合是群，就是要求这个集合中的每一个元素满足群公理；一个集合是拓扑空间（也就是一个相邻关系被指定后的集合），就是要求这个集合中的元素间的相邻关系在变换后仍然保持；一个集合是一个群，同时又是一个拓扑空间（也就是拓扑群）就是要求这个集合要同时满足群公理和拓扑要求。具体讲，在这样一个集合上，当我们保持一个群性质时，还同时要保持拓扑性质。

群性质对拓扑性质有可能带来破坏的其实只有两条：

- 封闭性
- 逆元

如果我们要求在保持群性质的同时还要保持拓扑性质，也就是还要保持元素间的相邻关系，那么我们就必须对这两条可能破坏拓扑性质的群运算加以限制，要求这两个运算保持元素间的相邻关系。也就是要求

群运算必须保持相邻关系。

具体讲就是

- 如果$f\circ g=h$，那么f邻域中的元素和g邻域中元素的乘积一定是h邻域中的元素。
- f邻域中的元素的逆一定是f^{-1}邻域中的元素。

也就是说，拓扑群中的群运算是要保持相邻关系的。

我们可以看到，其实对拓扑群的这两条要求本质上体现的是连续性。事实上，连续性是拓扑的核心。连续性本质上是由邻域定义的，因此对一个离散的集合给定邻域也可以理解为某种不太直观的连续。保持邻域就是保持连续性，就是保持拓扑。因此这种保持邻域的要求就是连续性要求。因此

拓扑群就是一个乘法运算和取逆运算都保持邻域的群。也就是一个乘法运算和取逆运算都连续的群。

为一个群指定一个拓扑本身就要小心翼翼地，拓扑（开集或邻域）本身就是很强的要求。如果同时又要求这个拓扑性质在群运算下仍然保持，简单地尝试就会发现这是一个挺难做到的事情（当然一定能做到）。不过有一个构造离散拓扑群的方便的方法：只需让每一个元素的邻域就是它自己就可以了。就是说我们总可以通过将一个元素的邻域取作它自己的方式将一个离散群变成拓扑群。就是说总可以为离散群

$$G=\{e,A,B,\cdots,C\}$$

指定一个拓扑

$$\begin{aligned}T&=\{O_\varnothing,O_e,O_A,O_B,\cdots,O_C,O_G\}\\&=\left\{\{\varnothing\},\{e\},\{A\},\{B\},\cdots,\{C\},\{AB\},\{AC\},\cdots,\{BC\},\cdots,\{ABC\},\cdots\overbrace{\{e,A,B,\cdots,C\}}^{S}\right\}\end{aligned}$$

是它成为一个拓扑群。

拓扑群的子群，拓扑子群和不变拓扑子群

拓扑群既是一个群又是一个拓扑空间。当然，它还首先是一个集合。如果这个集合的一个子集合是原来群结构的一个子群，那么这个子集合当然就是这个拓扑群的一个子群。一个自然的问题是，这个子群仍然是一个拓扑群吗。不一定，但如果这个子群仍然是拓扑群，那么这个子群就是原来群的一个拓扑子群。显然，一个拓扑子群从群的角度讲它是一个子群；从拓扑空间的角度讲它是一个子空间。

不变拓扑子群就是一个拓扑子群，同时又是一个不变子群。

两个拓扑群同构

拓扑群具有群和拓扑空间两重身份。考虑拓扑群的同构要同时考虑群和拓扑这两个因素。两个拓扑群，它们群同构不一定拓扑同构（拓扑同构我们称为同胚）；它们拓扑同构（胚），不一定群同构。这就是说，我们可以赋予两个群不同的拓扑结构；也可以赋予两个拓扑空间不同群结构。可见要求两个拓扑群同构条件要严格得多。只有这两个拓扑群既群同构又拓扑同胚我们才说这两个拓扑群同构。

拓扑群的整体性质：连通性，同伦

拓扑群既是群又是拓扑空间，这样我们可以从群和拓扑空间两个角度来研究拓扑群。这就是说我们完全可以将拓扑群当作一个拓扑空间来考虑，关注它的拓扑性质。

拓扑结构的一个重要的方面就是*连通性*。简单地讲，如果一个集合能够被分成两个没有交集的集合，那么它们就不是连通的；否则就是连通的。

一个重要的性质是，两个连通空间的直积也是连通的。

一个不连通的拓扑空间完全可以是*局部连通*的，比如两个不相交连通开集的并。局部连通是指每个点的邻域都是一个连通的空间。

一个连通空间可以是单连通的，也可以是多连通的。所谓单连通和多连通就是指一个连通的空间有多少种连通的方式。具体讲就是指连接两个点的方式有多少种；或者从一个点出发再回到这个点的方式有多少种。

现在的问题变成了这里说的连接方式是指什么。连接两个点的道路可以有很多，它们算是不同种方式还是算做同一种方式呢。为此我们引进同伦概念。（下面我们引入同伦的概念但并不追求严格性）**同伦**是指如果连接两个点的两条道路可以从一条连续地变到另一条，那么这两条道路同伦。

显然，选两个点在这里并不本质，将两条曲线首尾相接就会得到一条闭曲线。因此我们完全可以只考虑一条闭曲线就可以说明一切。由闭曲线我们可以将同伦定义成通过一点的两条闭曲线，如果其中一条可以连续地变成另一条这两条闭曲线就同伦。

所有同伦的道路（曲线）构成一个**同伦类**。同伦是非常重要的一个拓扑概念。一个特殊的同伦类具有特别的重要性：所有能收缩成一点的曲线构成的同伦类。

有同伦我们可以定义连通度，从而确定一个拓扑空间的连通性。如果一个拓扑空间中有n个同伦类，那么就这个空间就是n度连通的。比如一个圆环，可以有绕任意圈的道路，因此有无穷多个同伦类，所以圆环是无穷度连通的。

基本群

由同伦的概念我们可以引入基本群的概念。基本群就是同伦群。

一个道路的集合当然也是一个集合，对这样一个集合当然也可以赋予它群结构。赋予一个群结构的第一步就是定义一个二元运算。然后看看这个集合的各个元素在这个二元运算下是否封闭什么的。所以我们首先要做的就是为道路引入一个二元运算。

几乎没有什么选择余地地我们将把两条道路接起来的操作定义作一个二元运算。也就是说，我们将两的道路连在一起叫做两个道路的乘法。显然，两条道路连在一起的前题是它们有一个共同点。也就是说，有共同点的道路才可以做乘法。

考虑通过一点所有闭曲线构成的集合。在这个集合中所有曲线都通过同一点保证了集合中的所有曲线都可以做乘法。显然在这个乘法下这个集合是封闭的（注意我们可是将所有过这点的曲线都包括在这个集合中了，由于乘法得到也只能是过这点的曲线，所以肯定是封闭的）。还可以证明这个乘法是结合的（将三条曲线通过一点连在一起肯定是结合的）。我们可以将能收缩成一点的道路取作单位元。将一条道路的反方向定义成逆。这样，过一点的闭道路在将两条道路在这点接在一起的乘法下构成了一个群。这个群被称为基本群或同伦群。

这里的同伦群定义中似乎有一个特殊性，这个群好像跟某一个特殊点有着某种联系，从而显得不那么本质。其实这个特殊点的选择是不失一般性的：可以证明一个弧连通空间中不同点的基本群同构。也就是说，其实一个空间中的基本群与点的选择无关，反映的是这个空间的性质（弧连通是指空间中的任意两点可以用一条曲线（弧）连接）。

基本群在拓扑中有着非常重要的意义。本质上它是由一个空间所有的同伦类构成的群。反映着这个空间的基本拓扑性质。

覆盖，Hausdorff空间，通用覆盖空间

如果我让你用几张纸将另外一张纸盖上，你不会误解我们意思，就是让你将它盖上，默认的要求是要盖严，也就是说，盖好后不能留下空档。当然，我们知道，有些时候一张纸要用好几张纸盖（比如，盖住一个球面要至少用两张纸），有时候一张纸可以讲要盖住的纸盖上好几遍（比如，一张足够长的纸可以将一个圆桶盖上好几遍）。将这件事稍微推广一下，去考虑一个普遍的空间的覆盖是很自然的事情。我们总可以用几个空间将某一个空间覆盖上。

覆盖的原则其实只有一个：要盖严，不能留缝隙。富裕点儿没关系，关键是盖严。

在一个问题就是是所有的集合都能够被其它集合覆盖吗。考虑一个离散的集合：比如它有两个元素，怎样覆盖它们，你会觉得我们取另外两个元素，或者更多的元素，再给个对应关系，不就将它们盖上了嘛。这里的问题是你怎样算是盖严，没有缝隙；你怎样让人相信你的这两个元素不是放在了被覆盖的那两个元素的缝隙中。更何况我们给的集合是一个拓扑空间，这种覆盖还要考虑拓扑结构。为此我们不妨来一个简单的图像：只去覆盖那些本来就没有缝隙的空间，这样就容易盖严了。没

有缝隙的空间其实就是任意两个点之间都有无穷个点的空间，这种空间的显然一个很直接的特性就是任何两个点都可以分属于两个不相交的邻域，亦即这个空间是可以切开的，任意两个点都可以从中间划上一刀切成两半。这种没有缝隙的空间我们叫它**Hausdorff空间**。Hausdorff空间当然是一个拓扑空间，是一个附加了可分性要求的拓扑空间。

为Hausdorff空间引入一个覆盖的概念是直接的。以直观的二维为例，覆盖就是用一些片去将一个面，比如球面或轮胎面盖上。盖上后，这些小片其实已经融入这个被覆盖的空间中，成为这个空间的一部分（这个被覆盖的空间其实经常可以被覆盖好几层），也就是说这些片可以看作是这个空间的子集。因此，将一个空间盖严其实只需要求某个空间的一个子集族的中的子集的并集等于这个空间就可以了。为了避免平庸我们要求这些子集不包括空集。就是说

> 如果一个集合G的子集族$\{H_i\}(H_i \in G$且$H_i \neq \varnothing)$中的子集的并集等于这个集合（$\bigcup\limits_i H_i = G$），则这个子集族$\{H_i\}$就称为G的一个**覆盖**。

注意：这个作为覆盖的子集合族其实是很大的，原则上它可以将这个被覆盖的集合覆盖任意多遍。

如果这个作为覆盖的子集族中一些子集构成的小一些的子集族也能构成这个集合的一个覆盖，那么我们就称这个小一些的子集族是一个**子覆盖**。如果这个覆盖中的子集个数是有限的，就是**有限子覆盖**。如果这些子集族中的子集是开集，这个覆盖就是**开覆盖**。

一个空间可以将另一个空间覆盖很多遍。一个特别有意义情况是，如果一个单连通的空间可以将另一个空间覆盖甚至覆盖上很多遍（一张单连通的纸覆盖一个圆桶就是这种情况）。我们称这种能够覆盖其它空间的单连通空间为这个被覆盖空间的一个**通用覆盖空间**。

紧，紧化

所谓紧致性就是闭且有界。这个概念说起来抽象，在与物理有关的具体问题中并不难：你只需知道球和轮胎面是紧的，R^n是非紧的就不难知道紧和不紧的区别了。

我们有这样的定理：

- Heine-Borel定理：有界闭区间的每一个开覆盖都有一个有限子覆盖。

因此我们也可以将紧空间（Hausdorff空间）定义成每一个开覆盖都有一个有限子覆盖的空间。

一个空间如果每一个点都有一个紧邻域，我们就称这个空间是**局部紧**的。最著名的局部紧的例子是R^n。可见一个不紧的空间完全可以是局部紧的。但一个紧空间一定是局部紧的。

将一个不紧的空间通过一些改变变成紧的空间就是紧化。一个被紧化了的空间当然不再是原来的空间了，它被改造成了另一个空间。比如，我们为一个平面增加一个点就可以将它变成一个球面。球面是紧的，平面（R^2）是非紧的，因此我们说通过加一个点将平面变成球面的过程是一个紧化的过程。紧化前后的空间的关系是平面同胚于球面的一个部分。将这一思路普遍化就是，如果一个空间A与另一个空间B的一个拓扑子空间同胚，那么我们就说空间A嵌入了空间B。如果空间B又是紧的，那么就说空间B是空间A的紧化。

28.3.3 李群

如果一个集合既是一个群，又是一个微分流形，那么它就是一个李群。

李群是一个拓扑群。它是一个群运算可微的特殊拓扑群。李群是一个群，说明它具有群的代数结构。李群是一个拓扑群，也就是说它同时是一个拓扑空间，因此李群具有拓扑结构，考虑李群还要关注它的整体性质；具体讲，李群的拓扑结构就是它作为一个微分流形的拓扑结构。当然，我们可以研究它的局部性质。

当我们将李群作为一种特殊的拓扑群时，研究李群的拓扑结构就是非常自然的事。不过李引入李群的时候是将李群作为微分方程理论中的一个连续变换群提出的，李的思路是将伽罗华在代数方程上方法借用到微分方程中来。而且李当初只是关心群的局部性质，而不是整体性质。

李群的局部结构可以通过研究它的李代数（它的生成元的代数）来进行。不同的李群可以有相同的李代数。也就是说，局部性质相同的李群整体性质（拓扑性质）可以不同。我们将会考虑具有相同李代数的不同李群间的关系，这将引出覆盖群的概念。

李群的定义

李群首先是一个连续群，它的群元由一组连续的参数确定：

$$g = g\left(s_1, s_2, \cdots s_r\right)$$

换句话说李群的群元是一组参数$s_1, s_2, \cdots s_r$的连续函数。前面我们说过，李群的一

个重要特点是其群运算的可微性，这就是说这个参数的函数$g\left(s_1, s_2, \cdots s_r\right)$应该是可微的。如果$g\left(s_1, s_2, \cdots s_r\right)$仅仅是一个连续的拓扑空间上的一个点（元素）那么如果我们要求这个拓扑空间是一个微分流形就必须加上$g\left(s_1, s_2, \cdots s_r\right)$可微的条件。但是，李群除了是一个连续的拓扑空间外还是一个群，这就是说李群只是一类非常特殊的具有群结构的连续拓扑空间。这个附加在连续拓扑空间上的群性质保证了可微性。也就是说，要求函数$g\left(s_1, s_2, \cdots s_r\right)$可微其实是不必要的，只需要求连续就可以了，群性质，具体说是封闭性，保证了这个连续群的可微性。由此我们可以看到，当一个集合同时具有几种结构的时候，这几种结构的性质是相互影响的。研究一个具有多种结构的数学对象其实会简化问题，同时使理解更加深刻。定义李群不需要附加可微性要求就是希尔伯特第五问题，这个问题是二十世纪五十年代解决的。

前面讲过的一般线性群就是物理中非常重要的李群。

连通性

李群首先是一个拓扑空间，拓扑空间的各种性质自然一个李群全都有。李群的一个重要的整体（拓扑）性质就是连通性。拓扑空间有单连通的，多连通的和不连通的，李群也有。

比起一个普遍的拓扑空间来说，李群有它的特殊性。首先一个群必须有一个单位元，而且只有一个单位元。这就是说，李群的这个拓扑空间中必须包含一个是单位元的点。一个单连通的连续拓扑空间构成的李群中当然包含着这个单位元，也就是说，从单位元出发可以连续地到达任何一个群元。如果一个李群是不连通的，那么群元的集合将被分为不相交的几部分，或者说不相连的几部分，成这些部分为叶。由于群只有一个单位元，所以只有一叶中包含单位元。

举个例子，特殊正交群$SO\left(n\right)$就是行列式为1的正交群$O\left(n\right)$。$O\left(n\right)$其实还有行列式为-1的一叶。这两叶是不连通的，也就是说$O\left(n\right)$群是不连通的。因此区分不连通群的群元除了给出连续参数$s_1, s_2, \cdots s_r$还要指明它们所在的叶。将包含单位元的那一叶与另一叶中的元素相乘就能得到另一叶。

覆盖群，通用覆盖群

李群是一个拓扑空间，因此拓扑空间的性质，如紧性，覆盖等概念当然都可以直接搬到拓扑空间上来。显然，如果群流形（当然是一个拓扑空间）是紧的，那么这个群就是紧的；如果一个群的群流形是另一群的群流形的覆盖，那么这个群就是那个群的覆盖群。如果一个群的群流形是单连通的，那么这个群就是单连通的群。如果一个单连通群的群流形是另一个群的通用覆盖空间，那么这个群就是一个通用

覆盖群。我们有这样的普遍结论：

- 一个多连通群总有一个唯一地通用覆盖群。

  比如，$SU(2)$就是$SO(3)$的覆盖群。
  （这部分没讲完，以后补上）

第二十九章　群

29.1　引言：对称性与群

先来看一个问题。

地球围着太阳转。束缚住地球的是万有引力。万有引力是平方反比力，势能$V(\mathbf{r}) \propto \frac{1}{r}$。这里的$V(\mathbf{r})$是三维空间中的势，是三维空间中的矢量$\mathbf{r} = (r, \theta, \varphi)$的函数。但是，万有引力其实只是径向距离$r$的函数：$V(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r}$，而与角度$\theta$和$\varphi$无关。就是说，这种力是球对称的。就是说你向各个方向望去，都是一样的。

那么，在这种球对称的力的作用下运动的地球的轨道是球对称的吗。猛地一想，地球的运动轨迹似乎也应该是球对称的。但是你知道不是的。首先，地球只在一个平面上运动，不是在一个球面上运动。也就是说，如果你向一个方向看去能看到地球，那么你抬头看去就不会看到地球了。这就是说，轨道（也就是系统所能处的状态）的对称性与系统相互作用间的对称性是不一样的。进一步地，对平方反比力来说，轨道一般是椭圆的。一个平面上的椭圆的对称性当然与平方反比力的球对称不一样，轨道的对称性小多了。那么系统状态的对称性与力的对称性之间有关系吗，有什么关系。更普遍地，对一般的有心力$V(\mathbf{r}) = f(r)$，轨道虽然也在一个平面上，但却是不封闭的。那么为什么平方反比力的轨道就是封闭的。这与力的对称性有什么关系。

一个显然的结论是，轨道（也就是系统状态）的对称性与系统相互作用的对称性不一样，比相互作用的对称性小。

一个自然的问题是，轨道（系统状态）的对称性与相互作用势的对称性之间有关系吗；如果有关系，关系是什么。

回答这个问题的就是群。

29.1.1　操作，不变，对称

一般地讲，对一个东西操作一下，它就会变成另外一个样子。

但是，在一些特殊的情况下（这种情况并不多），这个东西在某个操作后与原来一样，没有任何改变。比如，一个正方形在旋转90度后不变；一个方程在作了某个变换后不变；一个物理定律在观测者换了一个参照系后不变，等等。旋转，对公式作变换，换一个参照系都是一种操作。如果一个东西在操作后没有任何改变，我们就说它在这个操作下是不变的，或者说是对称的。

在某个操作后不变的情况其实是很少的，很少很少的。因此一旦我们要求一个东西具有某种对称性，那么这个条件其实是非常强的，符合要求的没有多少：

到宿舍找一个正方形的东西给我，你找不来几件，对吗。

找一个旋转30度后不变的平面几何图形，其实也只有很少的一类（虽然有从正十二边形到圆形之间的无数中正多边形，但就图形种类来说是非常少的）。

如果我们要求物理定律在伽利略变换下是不变的（或者说对称），那么符合这个要求的物理定律没有几种候选者，其中最简单的一种只能是（自由粒子拉氏量）$L = \frac{1}{2}mv^2$。

如果你要求物理定律在洛仑兹变换下是不变的（或者说对称），那么你只能得到很少的几种物理定律没有几种候选者，它们是麦克斯韦方程，狄拉克方程……，没有几种。

如果你要求相互作用必须满足某种对称性，那么也没有几种候选者。

大自然选择了几种对称性，然后就有了整个世界。这是爱因斯坦告诉我们的。

大自然为什么选择这几种对称性，而不是那几种对称性，我们还不知道。

你或许喜欢红色的衣服，为什么会喜欢红色，你说得清吗。一定有原因，但我们不知道。物理对大自然的了解只是知道她喜欢红色。

29.1.2 物理中的对称性

小时候，当我们说对称性的时候指的一般都是几何对称性。也就是一个几何图形在某个变换下不变。

当几何对称性的概念被更深刻地揭示为在操作下不变这种不变性概念后，我们就可以考虑物理的对称性了。下面我们来看看在物理中我们都遇到过什么样的对称性的概念，以及物理中曾利用对称性的概念曾做过些什么。

经典理论

很久很久以前，物理中就主动利用对称性的概念了。最著名的例子就是，从对称性出发，要求行星轨道是圆形，由此得到了大量的关于天文（从而关于历法）的正确的定量结论。这一对称性虽然后来被证明只是一个近似对称性（行星轨道是椭

圆），但这个理论整体上是非常成功的。更重要的是，这个理论主动地使用了对称性的概念，将对称性作为一个前提和出发点，在不知道行星运行的力学定律（那要等到牛顿出世）的情况下得到了很准确的物理结果。当然，我们也必须看到，这个对称性是粗糙的，如果你坚持，也可以认为是错的。毕竟，在经典力学中，不会有真正的圆形轨道，这个圆形对称性其实是不存在的，虽然它是一个很好的近似。

下面我们来看经典理论中几个具体的例子。

相对性原理 可以说，物理中的第一个深刻的对称性发现是伽利略作出的。伽利略发现了惯性。他指出**物理定律在一切惯性参照系中看来都是一样的**。迄今为止，还很难有比这更深刻的物理发现。这个发现构成了整个物理的基础。

伽利略的这个发现被称为相对性原理，其实就是相对论。相对论就是一个关于对称性的理论。相对论描述的就是物理系统与参照系改变有关的对称性，也就是物理系统在参照系改变下的不变性。物理系统在参照系改变下不便，描述物理系统的物理定律自然在参照系变换下变。这样我们就可以据此检验我们得到的理论是不是正确的：如果这个理论在参照系改变后不变，那么这个理论就有可能是对的；否则就肯定是错的。伽利略认为惯性参照系之间的变换是伽利略变换。牛顿定律在伽利略变换下就是不变的，因此只要伽利略对称性是对的，它就是对的。

按照这个思路，我们可以检验其它理论。比如电磁学。可是电磁学在伽利略变换下不是不变的。按照相对性原理，物理理论必须在参照系变换下不变。因此电磁学和伽利略变换之中必有一个错的。爱因斯坦说，是伽利略变换错了。爱因斯坦在相对性原理”物理定律在一切惯性参照系中看来都是一样的”的基础上附加了一个光速不变的限制，从而将参照系间的变换由伽利略变换变成了洛伦兹变换。一个光速不变的相对性原理就是狭义相对论。电磁学在洛仑兹变换下是不变的。符合狭义相对论要求的对称性。那牛顿力学呢。牛顿力学错了，但牛顿力学异常辉煌。

爱因斯坦的相对性原理与伽利略的相对性原理的核心部分是完全一样的：**物理定律在一切惯性参照系中看来都是一样的**。这个对称性的思想是核心。所附加的光速不变的要求是限定了对称性的种类。没有光速不变的要求就是伽利略相对论；加上光速不变要求就是爱因斯坦的相对论。

爱因斯坦的最重要的贡献，从某种意义上讲，是告诉我们要以对称性为出发点，而不只是被动地在发现了物理定律之后才去分析它的对称性。先猜测一个物理定律的对称性，再看看满足这些对称性的定律能有哪些可能的形式。在此基础上，由实验确定出这几种符合对称性要求的可能物理定律形式中正确的那一个。对称性能把物理定律确定到什么程度呢。比你想象的效率高得多。

爱因斯坦要求不同惯性系之间的变换是洛伦兹变换，并要求物理定律在洛仑兹

变换下是不变的。由此他给出了相对论性的牛顿第二定律。现在我们仍像爱因斯坦当年教给我们的那样处理场。我们写出所有可能的在洛仑兹变换下不变的场，发现果然得到了描述这个世界所需要的所有的场。

爱因斯坦走得更远。他将相对性原理推广成**物理定律在一切参照系中看来都是一样的**。这个思想爱因斯坦称之为广义相对性原理。不再是惯性系了。这可是个本质改进。从此，我们可以由对称性出发描述相互作用了。他要求物理定律在不同非惯性系中看起来也是一样的，得到了描述万有引力的定律，广义相对论。

现在我们仍在沿着爱因斯坦所指出的道路向前走着。我们给出不同的参照系，给出这些参照系之间的变换，然后写出在这些变换下不变的可能的理论形式，就得到了描述各种相互作用的理论。这就是规范场。现在我们已经知道，自然界中的每种基本相互作用都与一种对称性相联系。事实上，我们现在确实是从对称性出发来确定相互作用的形式的。

一句话，有了对称性，就有了一个理论。

对称性和守恒律 经典力学中，在伽利略原理之外的另一个有关对称性的深刻的发现是对称性与守恒律的关系。在经典力学中人们首先发现了动量守恒与空间平移对称性（不变性）之间的关系，进而发现了能量守恒与时间平移对称性（不变性）之间的关系。最后，Noether告诉我们，经典力学中每一个连续对称性都与一个守恒律相联系。比如，空间旋转对称性对应角动量守恒。

这就是说，我们只要知道了一个对称性，就可以得到一个守恒律。这个结论有多重要呢。我们只需回顾这样一个事实：可以认为，经典力学中最核心的问题就是求解牛顿的运动方程。而我们知道，只要找齐全部的守恒量（一共$2s-1$个，s是自由度数）也就得到了这个解。因为全部守恒量就是全部的运动积分。本来在不解方程的情况下寻找运动积分是困难的[1]。但是，对称性相对容易找得多，而Noether定理告诉我们找到了对称性就是找到了守恒量，也就是找到了运动积分。当然，即使从对称性出发找齐全部守恒量也仍然是非常困难的。但是，每找到一个守恒量，问题的求解就前进了一步。具体说，一个力学问题将是s个二阶微分方程的联立求解。找到一个守恒量就相当于将问题转化为一个$s-1$个二阶微分方程和1个一阶微分方程的问题，等等。问题大大地简化了。

仍然来看那个地球围着太阳转的问题。这是一个三维空间中的质点运动的问题。系统的对称性是明显的。哈氏量中没有θ和φ，这个系统是空间旋转对称的。按

[1]除了一些最简单的情况。想想看，全部运动积分有$2s-1$个。这就是说，一个三维的单粒子问题也有5个。找到一些简单的能量、动量和角动量守恒还是容易的，但在一个复杂一些的相互作用中一眼就能看出的守恒量就很少了。

照Noether的结论，系统的角动量守恒；也就是说，角动量$\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$的大小和方向都是永远不变的，是一个常矢量。而而动量$\mathbf{p}$永远垂直于角动量（$\mathbf{p}\cdot\mathbf{L}=\mathbf{0}$），角动量是一个常矢量。动量永远垂直于一个常矢量说明，虽然这是个三维问题，但地球永远在一个平面中运动。于是一个三维问题变成了一个二维问题。二维问题的方程数量当然比三维问题少了。也就是说，从求解运动方程的角度，知道了对称性后，方程的数目减少了；或者说一些方程其实已经被解出来了（在这个问题中，描述z方向运动的方程就被解出来了：z坐标不随时间变化，$z(t)=const$）。这样一来，在知道了有心力问题的对称性（也就是三维空间旋转对称）之后，我们要处理的只是一个二维问题了。这个例子告诉我们，找对称性就是找守恒量，就是在解方程。

那么如果我告诉你，平方反比力这种特殊的有心力系统实际上有比三维空间旋转对称更高的四维空间旋转对称，你会怎么想呢。如果你只考虑相互作用，也就是势能，那么平方反比力就是三维空间旋转对称的。但是，决定系统性质的是整个哈氏量，并不只是势能。当你将整个哈氏量一起考虑的时候，你会发现平方反比力哈氏量的对称性是更高的四维旋转对称（别的有心力就不是这样了）。这有什么好处呢。按照前面Noether的结论，一定会有更多的守恒量。这个守恒量就是Laplace-Runge-Lenz矢量（$\mathbf{A}=\mathbf{p}\times\mathbf{L}-mk\frac{\mathbf{r}}{r}$）[2]。Laplace-Runge-Lenz矢量体现着轨道的进动。对于一个椭圆轨道，它沿着椭圆的半长轴。Laplace-Runge-Lenz矢量守恒，也就是说Laplace-Runge-Lenz矢量是一个常矢量。这说明地球轨道是不进动的，是一个椭圆。除平方反比之外的有心力，都只有三维空间旋转对称性。只有角动量守恒，Laplace-Runge-Lenz矢量不守恒。所以它们的轨道是进动的。万有引力是平方反比力是牛顿的结论，爱因斯坦的广义相对论告诉我们这只是个近似的结果。万有引力真正遵从的规律对平方反比有一个小偏离。从而使Laplace-Runge-Lenz矢量不再守恒，轨道进动，不再是椭圆。引力场越强，这个偏离越明显。太阳系中，距太阳最近的行星是水星，它感受到的引力场最强，从而轨道进动效应最明显。这也是引力偏离牛顿引力定律的第一个迹象。

我们可以看到，对称性与守恒量存在着一一对应关系；守恒量（运动积分）与运动方程的解之间有着直接的联系。给出了全部对称性，也就给出了全部守恒量（运动积分），从而也就给出了运动方程的解。由此可知，如果你完全了解了系统的对称性，那么你也就完全了解了系统的运动（解）。如果你只了解系统的一部分对称性，那么你就对系统的解有了一部分的了解。对对称性知道得越多，对系统了解得就越多。

[2]Laplace-Runge-Lenz矢量更多地被称为Runge-Lenz矢量。但是这个矢量是Laplace最早发现的。

对称性与相互作用 前面讲到了，由伽利略的相对性原理和爱因斯坦的相对性原理，就可以写出拉氏量（或哈氏量）的动能部分（如果是场就是自由场部分）。从某种意义上讲，动能和自由场部分描述的是惯性，是粒子或场对相互作用的反应。那么相互作用部分呢，如果确定拉氏量（或哈氏量）中相互作用部分的形式。过去，只能由实验一点儿一点儿地试。万有引力定律，电磁学都是这样试出来的[3]。在爱因斯坦由对称性出发得到了引力相互作用的理论之后，我们学会了另一套方法，由对称性出发：1) 先猜一个对称性，2) 再看看符合这个对称性的可能的理论形式都有哪些，3) 与实验对比，确定出这几种可能的理论形式中对的那种，4) 如果这几种理论形式中没有对的就再猜一种对称性，然后重复前面的步骤。有这种方法我们得到了描述引力理论，强相互作用理论和弱相互作用理论。电磁理论当然也可以这样得到，但是电磁作用在知道这种方法之前就已经得到了。要知道，自然界中只有这四种基本的相互作用。知道对称性有多重要了吧。

量子理论

在经典理论中，对称性的思想已经显示出非常的重要性。在量子理论中，它的重要性其实还要本质的多。

首先，经典理论中的各种结论仍然有效。比如相对性原理、对称性和守恒律关系。分析与经典问题中的分析是仿佛的。

更重要的是，对称性和守恒律的关系有了更丰富深刻的内容。在经典理论中并不给出守恒量的一些对称性，给出了经典理论中没有的守恒量，如空间反射对称性给出了宇称。在经典理论中没有宇称这种物理量。Noether的结论被推广到了包含分立对称性的情况。Noether定理被推广成更普遍的Wigner定理：所有幺正对称性对应守恒律。此外，时间反演对称性在量子理论中虽然并不给出守恒量（时间反演对称性不是幺正对称性），但仍能给出许多信息。

出现了经典理论中没有的对称性，比如全同粒子的交换对称性。

在经典理论中，对称性就可以在不求解运动方程的前提下告诉我们许多关于解的信息，告诉我们什么样的解可能存在，什么样的轨道不可能是解。比如对称性告诉我们，只有那些在一个平面上的，不进动的轨道才有可能作为地球轨道的解。

[3]万有引力定律是第谷积累了大量的观测数据（实验物理），开普勒根据这些观测数据给出了经验公式（唯象学，有些偏实验些，有些偏理论些），牛顿在这些经验公式的基础上给出了万有引力定律（理论物理）。电磁学则是更多人的努力，库仑、法拉第、安培等许许多多人的实验与唯象总结，最后由麦克斯韦集大成。需要注意的是，牛顿和麦克斯韦都即是物理学家又是数学家。亚里士多德，物理学的祖师，交给我们的研究物理的方法是哲学思辩；伽利略告诉我们实验是物理学的基础；牛顿教给我们要用数学来描述这个世界。牛顿以后，我们就再也没有离开过牛顿所指出的这条道路。

量子理论中，对称性同样可以做到这点。量子理论与经典理论有着很本质的不同。经典理论中的束缚态，轨道可以连续变化，在对称性允许的范围内是稠密的。但是，量子力学束缚态是分立的，只有某些轨道（在量子问题中我们用轨道表示可能的状态）才能存在（虽然数量也可以是无穷多的）。那么哪些分立的轨道可以存在呢，对称性仍然可以告诉我们。用更量子力学的说法就是，对称性可以告诉我们关于谱的许多事情。非常神奇吧，这可是很大的信息量。

量子的场理论中，我们会遇到更多的新的经典理论中没有的对称性。比如，在量子化问题中遇到的对称性（BRST），在重正化中遇到的对称性，等等。

29.1.3 对称性与群

牛顿告诉我们，物理学最重要的任务就是用数学来描述这个世界。实验工作积累数据，唯象工作整理数据，但是最终我们需要像牛顿那样用数学写出理论结果来。

如何用数学描述对称性呢。描述对称性的数学工具就是群。这是下面全部内容将要讲的。

这里先不讲什么是群，而是先将前面提到的物理学中有关对称性的例子与群做一个对应。不用去管那些符号是什么意义，你只要来体会一下群的重要性就行，感受一下物理学与群论的联系就行。

与伽利略相对性原理相联系的是伽利略群。拉氏量$L = \frac{1}{2}mv^2$就是在这个群的变换下不变的。

与爱因斯坦相对性原理相联系的是洛伦兹群，$SO(3,1)$群。这是物理学中最重要的群之一，它蕴含着狭义相对论的要求。我们会看到，只需要将在洛仑兹群下不变的场方程中简单的那几个写出来，我们就得到了描述这个世界的全部场方程。各种物理中的基本粒子对应洛伦兹群的各种表示。我们会看到，当我们写出洛伦兹群的表示的时候，自旋自动地出现了。

Noether的结论也可以表述成如果一个系统的哈氏量在某个群下不变，那么这个群的生成元就是一个守恒量。这有什么好处吗。好处是，在数学中我们早已熟悉了群和它的生成元。

在地球围着太阳转的问题中，我们所讲过的空间旋转对称性使得这个系统的角动量是守恒的，正是这个结论使方程的解限制在一个平面上。三维空间旋转对称性是由$SO(3)$群来刻画的。角动量的三个分量正是$SO(3)$群的三个生成元。我们还知道，地球的运动其实具有更高的对称性，四维空间旋转对称性。四维空间旋转对称性是由$SO(4)$刻画的。角动量和Laplace-Runge-Lenz矢量就是$SO(4)$群的生成元。

洛伦兹群的各种表示给出了这个世界上的所有场方程这件事一定给你留下了深刻的印象[4]。由于洛伦兹群是对相对论的数学描述，而相对论的有效性是我们非常熟悉的一件事。因此这个结果不完全是个意外。但是如果我告诉电磁作用是$U(1)$对称性，弱相互作用是$SU(2)$对称性，强相互作用是$SU(3)$对称性，你会怎么想呢。（暂时不要去管这几个群名字的意思，粗略地讲，你可以将$SU(n)$群与n-维复空间中旋转对称性联系起来。注意：一个群可以与某个具体的操作，如旋转，相联系，但是，本质上，群就是群，完全不必非得做这个联系）现代物理中研究相互作用一个方法就是，给一个群，看看它是不是对应一种真实的作用。

在量子力学中群的重要性是难以形容的。只告诉你这样一个事实：给我一个对称性，我告诉你哈氏量具有这种对称性的分子的谱的结构。更多的后面会一一讲到。

对称性在粒子物理和固体物理中的作用几乎是决定性的。在粒子物理中，对称性告诉我们世界上有哪些粒子，没有哪些粒子。在固体物理中，对称性告诉我们，可以存在什么样的晶体，不可以存在什么样的晶体。

是群将对称性变成了一个极具操作性的概念。

[4]猛地一想，相对论协变的方程那还不是要多少有多少。洛伦兹群的理论告诉我们，其实只有这几类。

29.2 群

29.2.1 对称性与群

上一章中，我们知道了对称性的重要性。如何用数学工具来描述对称性，这是现在的问题。

对称性就是在操作下不变。也就是说描述对称性，首先要描述操作。从数学的角度观察操作。

对称操作

来研究一个很特殊例子，一个直观的几何对称性的例子。

感性上说，一个正三角形挺对称的，我们就来研究它。

按照前面的说法，对称性就是在操作下不变。那就先来看看一个正三角形在什么操作下不变[5]。如图：

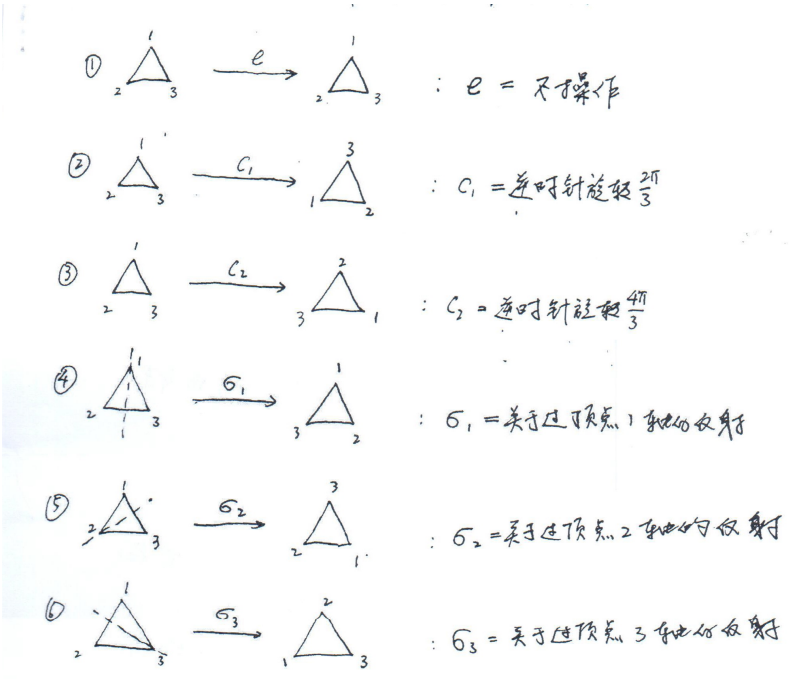


图 29.1: 正三角形的对称性

[5]注意，我们现在只考虑对称操作的性质，至于其它不与对称性的操作相联系的例子我们暂时先不去管它。如果这些与对称性无关的操作也存在与对称性操作同样的性质，那就让它们存在好了，那不是我们的问题。

下面我们来试试这六种操作都有些什么性质。需要强调的一点是。对这个三角形，我们可以做无数种操作。比如旋转10^0等等。但大部分的操作不是对称操作。以上的六中操作是使正三角形保持不变的操作。即对称操作。也就是说。下面我们考虑的只是对称操作的性质。所有的一次作用都已经在上面了。一个自然的想法便是看看两次作用的情况。比如可以试试先操作c_1,在执行操作c_2。简记为c_2c_1,相继执行这两个操作的结果很容易看出相当于不操作，也就是e操作。即

$$c_2c_1 = e$$

那么如果交换操作顺序呢，很容易得到

$$c_1c_2 = e$$

原来

$$c_1c_2 = c_2c_1.$$

再试试别的

$$\sigma_1\sigma_2 = c_1$$

也就是分别做两次关于过1,2两点的反射。相当于一次的$\frac{2\pi}{3}$旋转。交换一次操作次序呢

$$\sigma_2\sigma_1 = c_2$$

与c_1和c_2两个操作不同。

$$\sigma_1\sigma_2 \neq \sigma_2\sigma_1$$

也就是说这两种操作的顺序不能换。

下面我们将所有两次相继操作的结果都算一下，列在下面的表中，总结一下这里的规律（对有限次的操总可以这样做）在这个表中操作的顺序是行×列:

	e	c_1	c_2	σ_1	σ_2	σ_3
e	e	c_1	c_2	σ_1	σ_2	σ_3
c_1	c_1	c_2	e	σ_3	σ_1	σ_2
c_2	c_2	e	c_1	σ_2	σ_3	σ_1
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	e	c_1	c_2
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1	c_2	e	c_1
σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	c_1	c_2	e

观察这个列出全部两次相继作用的表，可以看到对称操作具有这样几个性质：

① 任意一个相继操作的结果都可由一个单次操作得到。具体到这个问题就是针对正三角形的，任何两次对称操作都必须是这六种对称操作中的一种。

② 任意一个操作，总可以找到另一个对称操作与它相继作用给出的不操作（也就是e）结果。或者换一个角度。每个操作都会有一个效果上与它完全相反的逆操作，效果是抵消前一个操作。从上面的表中可以看出c_1的逆是c_2, σ_3的逆是σ_3自己。关于逆，我们还可以看出如果操作A是B的逆。那么B一定是A的逆。

③ 一个不操作的操作（可以称它为恒等操作）显然是必须的。不操作显然是对称操作。恒等操作，你去观察那个表，是前面两条性质的基础。当然，两个操作是否可交换也是一条引入注目的性质，但是鉴于有的操作可交换，有的操作不可交换。这样的性质就只能是局部而不是普遍地性质了。上面看的是两个操作的作用，下面来看看三个相继的操作。由前面两个相继操作的经验知。三个操作彼此肯定不能交换顺序。我们只来看看在保持顺序（不交换）的前提下多个相继作用的性质。随便试几个

$$\begin{aligned} c_1\left(c_2\sigma_2\right) &= c_1\sigma_3 = \sigma_2 \\ \left(c_1c_2\right)\sigma_2 &= e\sigma_2 = \sigma_2 \end{aligned}$$

原来对称操作是结合的（你当然可以试遍所有可能的性质来验证这个性质）这就是说

④ 多个对称操作是结合的。

以上结果表明，有些对称操作可以符合上述四条性质（这并不是说不保持对称性的操作就不能符合上述性质）。

前面考虑的正三角形的例子中，只有有限多个操作。那么如果一个系统在无穷多个操作下具有某种不变性，操作所满足的性质与前面有限个操作相同吗[6]，我们来试试。

一个圆旋转任意角度都是不变的。也就是说，圆在任意二维旋转操作下是不变的。一个二维旋转操作将点(x, y)变换到(x', y')[7]。这个二维旋转操作可以用矩阵表

[6]注意，从有限到无限的过渡永远不是自然的，虽然有些有限情况下得到的结果确实可以推广到无限中去。举一个例子：如果a是一个有限大的数，那么$a+1 \neq a$；但是对无穷大确有$\infty + 1 = \infty$。

[7]这是在变换点，你也可以变换坐标系。这就是主动观点和被动观点的区分。后面我们会涉及这方面的内容。

示成

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

注意到每一个转动角度的取值θ都会给出一个操作，因此二维转动对应无穷多个操作。我们来看看它的性质。由于这种旋转操作是用一个矩阵来表示。所以很多性质可直接利用矩阵性质得到。

我们要做的的是看看前面有限次操作的各种性质在无穷多次对称操作下是不是还有：

1）还是先看看两个相继作用：

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}.$$

与有限个操作的情况相似，任何两个操作的相继作用都可由一次单次操作来完成。

2）这个矩阵是不奇异的，当然可以找到逆矩阵。很容易看出$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$的逆矩阵

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

的意义就是旋转$-\theta$角。从操作上很明显是一个相反的操作。每个操作都有逆操作这个性质与有限次操作的情况相同。

3）单位阵就是单位元。这一点也与有限的情况一样。

4）结合律是显然的。矩阵乘法本来就是结合的。

虽然普遍地讲矩阵乘法是不对易的，但是这里的二维旋转的矩阵是对易的。不过前面我们已经看到，对称操作有的是对易的，有的是不对易的，因此是否对易并不是对称操作的特征，最多只能算是区分不同操作的标记。

这就是群

前面我们已经看到，对称操作似乎可以具有某些共同的特征：对一个由对称操作构成的集合，总有

① 封闭：任意对称操作的相继作用的效果总可以用一次对称操作给出；

② 逆：任何对称操作总有一个相反的操作；

③ 单位元：可以不操作；

④ 结合律：操作在保持顺序的情况下可以任意分组。

你可以再试一些其它例子，可以发现这四条性质是非常普遍的。虽然有些特殊的对称操作具有更多的性质（如对易），但都是不普遍的。如果满足这四条要求，我们就说它构成了一个群。群就是这样在研究对称性时被发现的。当时是伽罗华在研究代数方程解的对称性时创造了群的概念。

注意：

前面我们只是说，许多对称操作都具有群性质，但没有说所有对称操作都具有群性质。对称操作就是操作后系统没有变化。这个要求其实是非常弱的，不足以将对称操作限制为具有群性质的操作。比如Wigner已经证明，在量子力学中存在反幺正对称性，也就是说，粒子系统可以在一个反幺正操作下不变。而反幺正操作不构成群，反幺正操作不封闭，两次反幺正操作不再是反幺正操作。

群也不必非得与对称性有关。整数在加法运算下（加法运算当然也是一种操作）也构成群，但这与对称性没什么关系。

你还要注意，对称性是核心重要的，但不是一切。就举一个例子吧。后面的内容中一个重要的话题就是对称性和简并的密切关系。但是，简并不一定就有对称性（偶然简并）；对称性不一定对应简并（一维谐振子空间反射对称，但一维束缚态无简并）。

29.2.2 群，抽象群

历史上，群的发现非常类似于前面我们“发现”它的过程。群概念的线索很早就已经出现。最终明确它通过的同样是一个对称性的例子：代数方程求解。是伽罗华（Évariste Galois）发现了群。十九岁的孩子伽罗华在杀死他的决斗的前一夜匆匆写下了他的发现的梗概，告诉了我们什么是群，开创了数学中最生机勃勃的方向之一——群论。杀害他的不是那场决斗，是那些给伽罗华提鞋都不配的学术垃圾：他们让伽罗华两次没考上大学，将一个十几岁的真正的天才赶到了社会上，要了他的命。取得一个好成绩的唯一办法是将自己的水平降到一个与出题人相同的水平上，可是伽罗华没有屈尊。

伽罗华当时要处理的是当时数学中的一个极为重要的问题，代数方程的解的问题。五次方程没有根式解是拉格朗日首先猜测的，但是他没能给出证明。阿贝尔给出了这个结论的第一个证明，在阿贝尔的证明中实质上引入了域的概念。阿贝尔的工作当然是天才的。但是他只是回答了五次方程是否有普遍的根式解的问题。同样

是考虑五次方程根式解的问题，完全独立于阿贝尔，伽罗华从一个更普遍的问题入手：什么样的代数方程有根式解。他引入了群，给出了代数方程是否有根式解的普遍结论。

现在我们知道，伽罗华在代数方程中遇到的对称性给出的群就是置换群。前面我们得到群通过的则是几何中的例子。当后面我们给出物理中的群的例子时，你也就看到群在物理中的应用了。

总之，无论是发现群的历史还是前面我们自己所做的都是从先由具体的例子出发总结出各种对称操作都共有的一些性质，这些性质被总结成四条。只要满足这四条要求我们就说：这构成了一个群。

进一步要做的就是将这一从非常具体的问题中总结出的群概念从数学的角度做一些进一步的提炼和讨论。这样做是重要的。人们得到的第一个微分方程就是牛顿的$F = ma$。但是系统的，完全与力学无关的独立的微分方程理论成为了极为重要的数学分支。这些已成为纯粹数学的微分方程理论又反过来在包含物理在内的各种学科中起了不可估量的作用。对于群这样一个来自于各种具体问题的概念，我们也要首先将它抽象化成一个纯粹的数学理论，像在微分方程理论中那样，这样做一方面可以使我们对它的理解更加深入，另一方面，可以使这一概念的适用性变得尽可能的广。

数学结构

数学作为人类最古老的学科之一是非常庞大的。有恢弘的结构和无穷的细节。当我们梳理这个古老而庞大的学科的时候，会发现它的脉络是清晰的。存在一些基本的数学结构。如代数结构、拓扑结构、序结构等等。一个数学对象可以分别或同时具有这几种结构。前面我们得到的群就是是一种代数结构，是最基本的代数结构之一。当我们将群结构从一些具体问题的外壳中提取出来的后，它作为一种基本的数学结构，变得非常抽象，从而也非常普遍。当我们将这些抽象的数学精神再注入回具体的问题中时，它将又将变得非常鲜活有力。

数学中存在着各种结构，代数结构是其中的一种。而代数结构又有许多种，群是其中的一种。群以外的代数结构还有，比如，环、域等。

群作为一种代数结构：抽象群

当我们从代数结构的角度来考虑群的时候，我们所做的其实就是抽象化的工作。当我们处理一个旋转三角形的问题时，一开始并不容易注意到这个问题中蕴含着的代数结构。在进一步地考虑了许多对称操作的问题后，这种代数结构慢慢地显

示出来了。群的概念从最初的非常具体的问题中的群，慢慢地过渡到了抽象群。这个逐步抽象化的过程就是群论自身完善的过程。

稍微具体些地考虑一下抽象化的过程。考虑一些例子：

1. 仍考虑前面正三角性的例子。正三角形在这样的操作下不变：e =不操作；c_1 =逆时针旋转$\frac{2\pi}{3}$；c_2 =逆时针旋转$\frac{4\pi}{3}$。前面已经分析过，这些变换有关系：$c_1c_2 = e$；$c_1e = c_1$；$c_2e = c_2$；$c_1^{-1} = c_2$；$c_2^{-1} = c_1$。它们构成了一个群。

2. 考虑下面三个矩阵$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$；$c_1 = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$；$c_2 = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$。可以直接验证它们也满足$c_1c_2 = e$；$c_1e = c_1$；$c_2e = c_2$；$c_1^{-1} = c_2$；$c_2^{-1} = c_1$。但是注意，这只是四个矩阵，并不是操作[8]。但它们与前面由旋转构成的群满足同样的关系。

3. 考虑时钟数。$e = 0$，$c_1 = 1$，$c_2 = 2$。我们有$c_1 + c_2 = 1 + 2 = 0 = e$；$c_1 + e = 1 + 0 = 1 = c_1$；$c_2 + e = 2 + 0 = 2 = c_2$；因为$c_1 + c_2 = e$所以$c_1^{-1} = c_2$；同理$c_2^{-1} = c_1$。这是几个数在做加法。这些数也不是操作，它们在加法下也满足与前面三角形旋转以及那三个矩阵相同的关系。

看到这三个例子，一个自然的问题就是

它们都是群吗？它们同一个群吗？

这种相似性无论如何都在暗示我们，这三种情况都是群。但如果我们希望将后两种情况也算作群就必须修改前面关于群的定义。这需要做两方面的修改：

- 将前面群定义中的操作去掉。
- 将两个相继操作推广成任意一个二元运算。

修改了群的定义后，后面两种情况也是群了。这回答了第一个问题。但这时群的定义抽象多了。

那么这三个看上去很不一样的群是同一个群吗。

为了回答这个问题我们要做的是：定义什么是两个群相同。

我们知道相同从来的都是个相对的概念。比如我们来看两个人是否相同。如果只考虑性别，那么随便两个男人便是相同的。如果考虑的是成绩，那么成绩相同的

[8]以后我们会发现，可以用这三个矩阵来表示前面的操作。

就是相同。可是如果考虑足够多的细节，那么没有两个人是相同的。这就是说，定义相同本身就是个大问题。

对于两个不同来源的具体群，如果用来源或直观意义来定义相同，那它们就不相同。但如果我们从更抽象地考虑这个问题，比如只要这两个群（当然也是两个集合）的元素以及元素之间的运算存在着一一对应关系，就认为它们是一样的，那么它们就可能被看成是一个群。这就是说，回答这个问题，本质上我们要将具体群抽象化。抽象化后的群中的最重要的反映代数结构的内容保留下来了，与代数结构无关的部分被抹去了。回忆一下数学史上最伟大的抽象化——自然数的引入。数人是1、2、3，数星星也是1、2、3，虽然人和星星完全没有共同点。这个抽象化去掉了不必要的细节，只保留了我们关心的量的特征。

在这样的抽象的意义上我们就可以有不同群是否相同的合理概念了。如果两个具体群在抽象化后变成了同一个抽象群，那么它们就是同一个群。

具体的群被抽象化后，我们面对的就是一种纯粹的代数结构。当我们弄清楚这种抽象群的性质后，在遇到某个具体问题时，再将这个抽象群赋予具体的意义，即将它在一个具体的问题中找一个表示，这样所有的抽象群的结论都可以直接用过来了。

顺便说一下，定义两个群相同尽管用别的标准，比如，如果你并不需要一一对应这么强的要求那么你也可以放松一些，多对一的对应也没什么不可以，这样也是一种相同。毕竟，我们说两本《红楼梦》是一样的，并不是非要这两本书的每一页的分子排布都一样。

下面我们就将前面得到的针对操作的具体群抽象化。摆脱对”操作”这一概念的依赖。抽象化后，群成为了一种代数结构。你就可以在没有赋予它某个具体含义的时候完整地研究它。

首先，

群是一个集合。

集合中的元素可以是操作也可以不是。在做了这个抽象化后，群就摆脱了对”操作”和”对称性”两个概念的依赖。

由前面的群定义中我们还可以看到，群这个集合的两个元素存在着一个运算，一个将两个元素映射到一个元素的运算。这是一个二元运算。这就是说

群是被赋予了一个二元运算的集合[9]**。**

[9]思考：设想一个有两个二元运算的代数结构。

我们用G表示表示这个集合。这个二元运算是抽象的，不特指某种特殊的运算。它可以是你随便给一种运算，比如它可以是乘法、加法或对易子运算，等等。这个二元运算我们泛泛地称之为"乘"，用"$\circ$"来表示。这个二元运算给出映射

$$\circ:\ G\times G\to G \qquad\qquad (f,g)\to f\circ g$$

即这个映射将集合$G\times G$仍然映射到G自己；将G中的一对元素(f,g)映射成一个新元素$h=f\circ g$。

现在我们可以给群一个更抽象的描述，这也就是抽象群的定义：

群是被赋予了一个二元运算的，并满足下面四条要求的集合。

(1) 封闭：对所有$f,g\in G$都有$f\circ g\in G$.

(2) 结合律：乘法满足结合律：$(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$.

(3) 单位元：存在元素e，对所有元素都有$g\circ e=e\circ g=g$.

(4) 逆元：对任意元素g都有g^{-1}使得$g\circ g^{-1}=g^{-1}\circ g=e$.

只要满足这些要求就是群，是不是操作都不所谓。

需要说明的是，这四条要求并不像看上去那么独立，其实定义一个群，完全可以通过更弱一些的要求。可以将(3)和(4)两条改成

(3') 单位元：存在元素e，对所有元素都有$e\circ g=g$.

(4') 逆元：对任意元素g都存在元素h使得$h\circ g=e$.

可以证明，这样定义的群与前面定义的群是完全等价的。当然，群还可以有其它一些等价的定义。

这个定义中，只强调了集合中元素间的代数关系，而对元素本身没有提出任何要求。这就是抽象化。就像我们教小孩儿数1、2、3时，并不指出，也不关心究竟是1个什么，2个什么一样。这样一来，群就变成了一个纯粹的代数结构了。

在群论的历史中，引入了抽象群的概念是一个伽罗华引入群论以后最重要的进展，它使我们知道了群究竟是什么。进一步地也就是我们知道了群以外的其它代数结构是什么（那些数学结构许多也是在具体的问题中首先发现的）。是Cayley告诉了我们什么是抽象群。他引入了乘法表，就是我们在前面针对正三角形的对称操作画的那个表。乘法表也叫Cayley表。通过这张表，Cayley回答了我们前面提出的问题：这两个群一样吗。Cayley说，如果两个群的乘法表一样，那么不管群元或者群元间的运算是什么，它们都是同一个抽象群。

在Cayley之前，那时是十九世纪，群就是置换群；Cayley之后，群就是群。

更多的代数结构

抽象化有什么好处呢。这里只举一个例子。

群是一种代数结构。还有没有其它代数结构呢。当然我们仍然可以像引入群那样从一些具体问题入手，逐步抽象出其它代数结构。但是，当我们有了抽象的群概念后这件事做起来要方便得多。最直接的办法自然是，由抽象群的四条要求出发，增加、减少或改变一些条件。自然就会得到更多的代数结构。

那么什么样的条件可以增加、减少或改变呢。只有一个要求：相容。也就是所有这些条件之间不能矛盾。这就足够了。

从抽象群的概念出发可以衍生出下面这些代数结构：

- 交换群：增加交换律要求。
- 半群(semi-group)：只满足封闭性(1)和结合律(2)两个要求。例：正整数集合在加法下构成半群。
- 亚群：只满足封闭性要求(1)。
- 交换半群：满足封闭性(1)和结合律(2)两个要求外再加上交换律。
- 有单位元的半群(monoid)：只满足封闭性(1)、结合律(2)和单位元(3)这三个要求。
- 拟群(quasi-group)：满足封闭性要求(1)和左商律和右商律。左商律和右商律的意思是：对任意$f, g \in G$，都存在元素a, b使得$f \circ a = g$和$b \circ f = g$。
- 圈(loop)：只满足封闭性(1)，单位元(3)和逆元(4)三个要求。但没有结合律。即圈是非结合的；结合圈就是群。
- groupoid：只要求单位元和逆。

当然，我们还可以走得更远。比如可以进一步再引入另一个二元运算，你就会得到更多的代数结构。

这些代数结构有意义吗。有的有（像前面举的这些例子），有的没有（你自己试着构造一些）。那些有意义呢。只能就事论事了。只有到具体的问题中我们才知道所得到的是不是一个有用的概念。

在回答这样得到的代数结构是否有意义的问题时，我们其实也感受到了抽象化的局限性。当除了相容性之外毫无顾忌地发展我们的抽象概念时，立刻，我们就会得到一大堆代数结构。怎样取舍呢。这就是过度抽象化结果。

真实的而非人为做作的问题是我们的路标。物理问题就是这些有意义的问题中的一种。

抽象化是必须的，它可以使我们站得更高，认识得更深。过度抽象化是毒品，在对它的迷恋中，毫无价值地耗掉我们的一生。

抽象化总是诱人的，但我们必须回到具体真实的问题中来。防止走向没有生命力的过度抽象化。

群元，生成元

前面我们将群看作是一种代数结构，一个集合，鸟瞰了一下群。现在我们一个群的构成，看看组成群的基本要素，群元。

群首先是一个集合，集合中的元素就是群元。在抽象群中群元就是群元，是满足某些抽象代数关系的形式化的东西。在具体群中（具体群可以看作是抽象群的各种实现），群元就被赋予了各种意义，有些是操作上的意义。比如，在整数在加法下构成的群中，群元就是整数;；在矩阵群中，某个群元就是一个矩阵，但如果这个矩阵是一个矢量空间中的变换矩阵，那么这个作为群元的矩阵就同时具有了变换操作的意义；在置换群中，群元就是一个置换操作；在旋转群中，某个群元就是一个转动操作。

一个群中有许多群元。我们当然希望将这些群元分一下类。

观察前面讲过的正三角形的对称群的例子。我们会发现有些群元（操作）可以由其它群元（操作）生成。比如，旋转$\frac{4\pi}{3}$的操作就可以用旋转$\frac{2\pi}{3}$的操作连续作用两次来产生同样的效果。我们就将这些可以生成其它群元的群元叫做生成元。

- 生成元：如果一个群中的所有的群元都能由某几个群元通过群的那个二元运算构造出来，那么这几个群元就被称为群的生成元。即任意群元g可表示成

$$g = a_1^{n_1} \circ a_2^{n_2} \circ a_3^{n_3} \circ \cdots$$

  的形式。

注意，这里的幂次n_i可取负幂次，因为每个群元都有逆元。

显然，这个结论适合的是群元分立的情况。那么如果群元是连续的呢。是不是也可以找到一个生成元呢。

我们来看一个简单的群元连续的例子。前面我们谈过的二维旋转构成一个群。它的群元是$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$。所谓找生成元就是找这样一个东西。找到后，随便

哪个群元都可以由它来产生。第一个想法自然是像分立群那样，找一个能生成其它群元的群元。显然，对连续的群元来说，很难通过指定一个特殊的角度θ来做到这点。

不过对一个连续的的东西我们其实知道它是可以由无限小的东西积累得到的。那么我们就来看看对二维旋转一个无限小变换是怎样的。得到这样一个无限小变换的方法自然是做Taylor展开。在哪点展开呢，对于群我们有一个自然的选择，那就是每个群都有一个单位元。可以在单位元附近展开。二维旋转的单位元显然是个单位阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，也就是$\theta = 0$，不旋转。

展开是直接的：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos\epsilon & -\sin\epsilon \\ \sin\epsilon & \cos\epsilon \end{pmatrix} &\simeq \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \epsilon \end{aligned}$$

显然，不同的无穷小量可以给出不同的无穷小群元。无穷多的无穷小群元乘在一起，就会给出一个有限大群元。在这个展开式中出现了三个量：$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$和$\epsilon$。群的性质体现在那个量里面呢。或者说，这三个中的哪个是群的DNA呢。显然单位矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$不是，它太平庸了。$\epsilon$呢，它是一个连续的参数，可以随便取值，每个值对应一个群元。一个可以去任何值的数显然不是DNA；再说，一个群的性质体现在一个数里面的可能性太小了。那么生成元只能是$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$了，它就是这个群的生成元。不过形式上我们更愿意将这个展开写成

$$\begin{pmatrix} \cos\epsilon & -\sin\epsilon \\ \sin\epsilon & \cos\epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \epsilon = \mathbf{1} - i\sigma_2\epsilon, \ \sigma_2\text{是Pauli矩阵}$$

有这个习惯的一个原因是，这个结果还可以这样得到：

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \exp\left[\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} \right] = \exp\left[-i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \theta \right] = e^{-i\sigma_2\epsilon}$$

引入i是因为我们有这样的结论：一个幺正算符总可以写成$U = e^{iH}$的形式，其

中H是一个厄米算符[10]。

这样我们就得到了一个连续群生成元的概念。对更普遍的情况，生成元会有不止一个。生成元之间也会有某些代数关系。这些生成元代数会反映出群的许多性质。

当然，后面我们也会看到，由于连续群的生成元是通过将群元在单位元附近展开得到的。只能反映群的局域性质，而不能体现群的整体性质。整体性质需要引入拓扑量。用拓扑特征来标记由代数给出的局部性质，从而描述整个群的性质。

它们都是群

来看看在我们熟悉的问题中，在一个具体问题中，群是怎样出现的。群散落在数学和物理的各种具体问题中。

- 刚体在运动中当然要保持它的形状。保持形状是通过保持刚体内各点间的距离来实现的。在运动中，如果刚体内各点间距离不变当然刚体的形状就不变了。运动可以看成是一种变换：将刚体从一个位置变换到另一个位置。可以证明，所有保持距离的变换构成一个群。（你来证明这件事。提示，刚体的运动就是平移加旋转）这个群就是刚体运动群。作为刚体运动的一个特例，就是点粒子的运动，点粒子的运动群就是平移群。这就是说，力学中的运动就构成一个群。

- 在刚体的运动中，如果除了保持长度外，还保持一个点不动。从运动上讲，这就是一个刚体的定点转动。这样刚体运动群变成了一个转动群。

- 伽利略的相对性原理告诉我们，经典力学定律在所有惯性系中都是一样的。经典力学中不同惯性系之间的变换就是伽利略变换：$x'=x-vt$，$y'=y$，$z'=z$，$t'=t$。伽利略变换就构成了一个群，就是伽利略群。

- 爱因斯坦的狭义相对性原理告诉我们，物理定律确实应该在所有惯性系中都相同，但同时光速必须是不变的。这样一来不同惯性系间的变换就变成了洛伦兹变换：$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$，$y'=y$，$z'=z$，$t'=\frac{t-(v/c^2)x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$。洛伦兹变换也构成一个群，就是洛伦兹群。这个对称性构成了我们物理学的基础。我们可以看到，所有物理中所有可能存在的物质都是由这个对称性决定的：所有物理场都是洛伦兹群的不同表示。

[10] 引入这样一个厄米算符很重要是因为在物理中我们有这样的结论：如果一个系统在某个连续群下是不变的，那么这个群的生成元是一个守恒量。

- 晶体的最重要的特征就是晶体是点阵平移对称的。点阵平移对称性构成一个群。与前面的群不同，这个对称性是分立的，不是连续的。关于晶体一个自然的问题是，平移对称的点阵能有多少种，是有限种，还是无穷种。有了群论，我们就可以回答这个问题了。在群论中，这个问题变成了，有多少中点阵平移群。答案是，有限种。群论还可以告诉我们具体有多少种。

- 整数在加法下构成群（$\mathbb{Z}^+$）；实数和复数在加法下也构成群（$\mathbb{R}^+$和$\mathbb{C}^+$）；非零实数和复数在乘法下构成群（$\mathbb{R}^\times$和$\mathbb{C}^\times$）。

- 四元数± 1，$\pm i$，$\pm j$，$\pm k$在乘法规则：$ij = k$，$jk = i$，$ki = j$，$ji = -k$，$kj = -i$，$ik = -j$，$i^2 = j^2 = k^2 = -1$下构成一个群（$\mathbb{Q}_8$）。

- 非奇异的$n \times n$方阵在矩阵乘法下构成群，群元可以在随便的一个域$\mathbb{K}$上取值。称为$\mathbb{K}$域上的一般线性群，$GL(n, \mathbb{K})$。对于实数和复数域的情况，如果我们对矩阵加以限制，只考虑行列式为1的矩阵，可以发现这样的矩阵也够成群。成为特殊线性群，$SL(n, \mathbb{K})$。注意，这确实是很特殊的线性群。一般的非奇异矩阵的行列式当然可以取任何非零值。我们还可以看到，一个n-矢量空间V中的所有线性变换（自同构）构成的群$GL(V)$其实就是一般线性群。

- n个元素的集合中元素的所有可能的置换构成一个群，称为对称群，S_n。一个n个元素的集合的所有可能置换有$n!$个，所以对称群S_n的群元个数有$n!$个。显然，这$n!$个对称操作中的某些操作在一起也会构成群，这就是置换群。它显然比对称群小一些。伽罗华最开始发现的就是置换群。像前面提到过的，在Cayley引入抽象群之前，群指的就是置换群。

- 复变函数的一个重要结论是，由解析函数给出的变换是保形变换（在导数不为零的点处）。其中特别重要的是分式线性变换$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$，$ad - bc \neq 0$是特别重要的。罗巴切夫斯基的非欧几何提出后很长时间不被接受，一个很重要原因就是它完全是抽象推理，没有一个好的实现。Klein给出了一个不借助曲面的罗巴切夫斯基几何的实现，而后Poincaré对Klein的模型做了很漂亮的改进，Poincaré的这个模型就与分式线性变换有很直接的关系。当我们将扩充的复平面（复平面加上一个∞）看作Riemann球以后，复平面上的直线就变成Riemann球上的圆（加上∞之后，直线被紧化成一个圆）。这时原来复平面上的线性变换就成了Riemann球上的分式线性变换。这时的分式线性变换其实就是Riemann球上的线性变换。容易验证，分式线性变换构成一个群。逆是$z \mapsto \frac{-dz+b}{cz-a}$。

这样的例子还可以日以继夜地举下去。这样不停地做下去，我们会得到一个群的动物园。一个自然的问题是

这些群之间有关系吗？什么关系？

我们当然不打算象动植物分类学那样地回答这个问题。下面我们系统地讨论群的分类问题。

29.2.3 群的分类

看了那么多群，一个自然的问题是，群有多少种，都有哪些种。

这个问题的答案其实在你手中：这要看你打算怎样分类了。按性别分类人就有两类，按种族分类人就有上千种.....。一个好的分类是至关重要的。事实上，分类在数学中是一个核心问题。经常有许多数学家将分类几乎看作是数学中唯一的问题。我们当然希望找的这样一种分类方式，当我们写出这个数学对象（在这里我们的数学对象就是群）的所有分类特征时，这个数学对象就被唯一地确定了。或者说，通过写出一个数学对象的全部分类特征，这个数学对象就被完全描述了。

分类就是在一类事物中提取一些特征。用这有限个特征对我们要研究的对象进行标记。这个特征如果是可以量化的，那么不同的对象就会有一个相应的特征量，给定了这个特征量也就确定了这个特征。这个量化的特征量可以是随便什么数学对象。可以是一个数，也可以，比如说，是一个群（拓扑性质就是用同伦群（基本群）和同调群来标记拓扑分类的）。

分类首先要做的就是认出相同的群，区分不同的群。然后将相同的归为一组，将不同的按照不同的原则进行分类。

这两个群相同吗？这两个群像吗？

在开始的时候我们已经遇到过群论中的这个基本问题：这两个群相同吗?。Cayley在抽象群的意义上给出了一个回答：如果乘法表相同，它们就是同一个抽象群。但是，用乘法表来判断两个群是否为一个群的方式原则上固然可行，但对一个阶数高的有限群，尤其对连续群就很难或无法操作了。所以我们需要再一次地回答这个问题。

对于一个作为抽象代数结构的群来说，两个群相同最强的要求莫过于要求两个群的元素是一一对应的（别忘了，群首先是一个集合），这些一一对应的元素满足的代数关系也相同。这种保代数结构的一一对应当然是一种相同，我们称之为**同构**（isomorphic）。也就是（注：$\leftrightarrows$表示一一映射）

任意g_1，$g_2 \in G$，h_1，$h_2 \in H$，如果$g_1 \leftrightarrows h_1$和$g_2 \leftrightarrows h_2$，则$g_1 \circ g_2 \leftrightarrows h_1 \circ h_2$。

这种相同在集合的意义上是最强的了。这是一种保集合代数结构的一一映射。（我们会看到，保集合拓扑性质的一一映射就是同胚）。你可以证明，也很显然，这种同构是会给出相同的乘法表的。在这个意义下你会发现，不管你从什么问题中得到的有限群群，都能找到一个来自于置换的群与它相同。

像在引言中已经讲过的，怎样定义相同与我们的需要有直接关系。比如，如果我们要求两个物体相同必须是相同到它们是在同一时间由同一批粒子组成的，那么这个世界上就没有相同的东西了。如果放松一下要求，只要求组成物质的基本粒子是同一种粒子，那么相同的东西就很多了。再放松一下，比如我们要做一个天平，两个托盘质量一样就可以认为相同了，颜色形状不同不是很重要。这就是说，如果你希望做一个天平那么你不妨适当降低一下相同的定义中的要求，够用就行，没必要不计成本地苛求。

这就是说，两个群相同不相同这存在一个标准问题。低标准的相同你也可以认为是相似，或者很相似。

同构是一个非常强的要求，它要求一一对应。放松一些要求也可以得到的弱一些的相同，你也可以说那是一种相似。比如我们可以将一一对应放松成多对一的，即

任意g_1，$g_2 \in G$，h_1，$h_2 \in H$，如果$g_1 \to h_1$和$g_2 \to h_2$，则$g_1 \circ g_2 \to h_1 \circ h_2$。

这种情况我们称之为**同态**（homomorphism）。同态的概念是群表示的基础。显然一一的同态就是同构。

这样，从某种意义上讲，我们区分了群，指出了哪些群其实是一个群，哪些群很相似，或者说有很密切的关系。

下面我们进一步，但是粗略地谈一下分类问题。

分分类

分类原则上是可以很随意的，我们要找的的一个好的分类。而对什么是好的分类我们并没有一个定义。下面我们只是通过一些例子来泛泛地讨论一下群分类的原则，后面遇到具体问题，我们还会再次回到分类这个问题上来。

群，首先是一个集合。这样集合的分类自然地就可以借鉴到群的问题中。比如，

- 集合中的元素可以使有限的也可以是无限的。同样，按照群元的数量可以将群分成有限群和无限群。

- 集合可以是离散的，也可以是连续的。同样，按照群元的连续性可以将群分成分立群和连续群。本来按照群的微分性质还可将连续群分成可微的和不可微的。但是，群的封闭性保证了，只要连续就可微。因此这个分类就不必须了。

在集合上附加一些要求，可以构成各种空间。只要这些要求与群的那几条要求不矛盾，这些空间就可以同时也是一个群。比如，

- 在一个拓扑空间（后面讲）上附加一个群结构，即除了要求这个集合的元素间满足拓扑空间的要求以外，还要满足群的那四条要求（做到这点要小心翼翼地），这样就得到了一个拓扑群。可以是离散的，也可以是连续的。这就是说，拓扑群既是一个群，同时又是一个拓扑空间。

- 在一个一个微分流形上附加一个群结构，那么这个既是一个群，又是一个微分流形的集合就是一个李群。微分流形是拓扑空间的一个特殊情况，李群当然也就是一类特殊的拓扑群。

空间可以有各种子结构和商结构，群自然也会有。一个集合可以由几个集合求并得到，群也可以；一个空间可以由其它空间"乘"（扩张）出来，群也可以。一个特别有意义的情况是

- 就像整数可以按照能否整除的性质分为素数和合数一样，群也可以从商的角度分成单群和不是单群。单群就是群的素数。

- 进一步地，对李群情况可以有单李群；单李群并不一定是单抽象群。

按照群元间运算的性质也可以对群进行分类：

- 按照群元的乘法是否可交换来分，我们可以将群分成Abel群（可交换）和非Abel群（不可交换）。

- 按照群元在某种运算方式下的行为分，则可以有，比如说，循环群，等等。

描述一个人我们要从这个人身上提取许多典型信息，如身高，体重，肤色等等。这些信息的特点是1)不同的人的这些特征应尽可能不一样。2)不应该总在改变。也就是说这些特征应该是这个人的特性，也应该是是这个人的属性。

群（其它数学对象也是一样）的特征也是这样一些量：不同的群一般不同；当其它东西变化时它不变（例如一个矩阵的行列式，迹等）。对有限群我们可以有这样的特征量。

- 阶(order)：有限群G的阶就是群元的个数，用$|G|$表示。
- 秩(rank)：有限群G的秩就是生成元的个数。

对连续群我们将

- 群参数化所需参数的个数称为连续群的阶；
- 将最大的对易的生成元的个数称为秩(Lie群的秩就是它的Lie代数的秩)。

根据这些特征量，我们就可以对群进行进一步分类。

29.2.4 子群

前面我们主要是将所有的群作为对象进行考虑，下面我们针对一个群进行讨论。

在这节以及以后的各节中我们会看到，群作为一个集合，像许多集合一样，可以具有子结构，商结构。

群首先是一个集合，集合的各种性质自然在群中也会有。一个集合有子集，一个群相应地也有子群。子群首先是一个群，因此它有两个要素：首先它是一个子集；此外它还要是一个群。因此子群就是

- 子群：某个群的一个仍是群的子集。

子集可以有很多，但仍是群的子集就不多了。

一个群可以有不同的子群。一个群有什么样的子群本身反映的就是这个群本身的性质；或者说，一个群的子群的各种特征本质上也就是这个群的各种特征。子群是一个首要特征就是它的群特征，一个群能够有什么样的群作它的子群当然是它的一个重要特征。

一个群有两个显然的子群：一个是只有单位元一个元素组成的群；另一个是这个群本身。这两种情况是平庸的，以后我们提到的子群都默认不包含着两种平庸情况。

一个群包含子群的情况可以用来对这个群进行分类。比如，一定有的群包含许多子群，而另外一些群则没有非平庸的子群。这两个群当然是不一样的。区别它们

包含子群情况的不同就是一种分类。不包含子群的群显然要比包含子群的群简单，细分起来，有些子群也会有自己的子群，子群的子群也会有子群。这样就会得到一个子群链。因此，一个群包含不包含子群，包含什么样的子群，有一个什么样的子群链是这个群的重要性质。

子结构与后面要讲的商结构是两种核心重要的结构。当然，你也可以由此出发对群进行分类。

子群本身也会有很多种，如不变子群等等，后面我们还会仔细讨论各种子群的性质。

29.2.5 群作用在集合上

前面我们看到，群论的研究有一个从具体群到抽象群的过程。是在经历了这样一个过程之后，我们才真正知道了什么是群。一个抽象群就是一个代数结构，群就是群。不再有更多的含义。但是，无论是为了研究群本身还是为了应用群概念，我们经常考虑的是一个群在一个集合上的作用。作用到一个集合上的群就是这个集合的变换群。

变换群

人们刚刚开始群研究的时候考虑的其实全都是变换群。那时候考虑的都是与各种具体问题中的各种具体对称性有关的群。与对称有关的群是由这样一类操作构成的集合，它们把所要研究的集合中的元素便成仍然是这个集合中的另外一些元素，在这些变换后，所考虑的对象不变。如，对一个正三角形的三个顶点施行第一个顶点变成第二个顶点，第二个变成第三个，第三个变成第一个的变换后，这个正三角形不变。可以看出，所有这类操作的一个共同的特征是，它们是针对某一集合中的点施行一对一的变换。即，将集合中的一个点变成集合中的另外一个点。这类集合内的一一变换构成的群我们称为变换群。即，

- 变换群：集合中所有一一变换构成的群。

对一个变换群来说，我们必须明确原来群中的各种东西在这个被作用的集合中的意义。首先，毋庸置疑地群元就是一个针对集合中元素的操作。那么群中的那个二元运算"$\circ$"呢。我们将它解释为两个相继的操作（由于我们引入群的时候考虑的就是具体群，所以那时候已经对群元间的乘法解释为相继操作）。单位元则被理解为不操作。也就是我们要求群G对集合M的作用满足

- $(g_1 \circ g_2)\, m = g_1\,(g_2 m)$，$g_1, g_2 \in G$，$m \in M$；
- $em = m$。

注意，这两个要求仅仅是为了赋予二元运算和单位元以意义。

变换群的一个重要特征是（这也是具体群的特征），它们是针对某一个集合的。因此它们不是抽象群。抽象群的重要意义是将群本身的性质提取出来，而不依赖于别施行变换的那个集合的性质。这当然是非常重要的，因为我们知道，群的性质与被施行变换的集合的性质并没有必然的关系。但是正如前面我们提到过的，直接研究抽象群非常困难，我们经常先研究一个具体群，再将这具体群的性质提取出来，得到抽象群的性质。事实上，我们可以为每一个抽象群找到一个变换群的对应，基于下面的这个重要定理：

- Cayley定理：任何群都同构于一个变换群。

群在集合上的可能的作用

群在集合上都能够有哪些作用呢。我们试试看。一个作用是否看一看作是群在集合上的作用就取决于能不能将群元间的二元运算解释为相继作用；能不能将单位元解释成不操作。也就是满足不满足前面的要求。

先看一种作用

$$gm$$

即群元从左边作用在集合M的元素m上。这时显然有

$$(g_1 \circ g_2)\, m = g_1\,(g_2 m)$$

这就是说二元运算可以被理解为相继作用，因此左作用可以被理解成群在集合上的作用。

自然，我们再试试右作用，mg，这时有$(g_1 \circ g_2)\, m = mg_1 g_2 = (mg_1)\, g_2 \neq (mg_2)\, g_1$。因此在这个作用中，二元运算不再能被理解为相继作用，因此这种右作用不能被理解成群在集合上的作用。

就是说，直接的右作用是不行的，稍作观察很容易发现，形如

$$mg^{-1}$$

的右作用是可以的。这时有

$$(g_1 \circ g_2)\, m = m\,(g_1 g_2)^{-1} = mg_2^{-1} g_1^{-1} = \left(mg_2^{-1}\right) g_1^{-1}.$$

这个结果告诉我们这样的方式的右作用是一种可能的作用。

还有什么可能的形式呢。我们试试左右一起作用：

$$gmg^{-1}$$

试试二元运算：

$$(g_1 \circ g_2)\, m = g_1 g_2 m \left(g_1 g_2\right)^{-1} = g_1 g_2 m g_2^{-1} g_1^{-1} = g_1 \left(g_2 m g_2^{-1}\right) g_1^{-1}$$

二元运算也可以被理解为相继作用，因此这也是一种可能的作用。

当然你还可以试试其它可能的作用。比如$g^{-1}m$，但是你会发现除了上述三种作用外，已经没有简单的作用了。当然，要是你愿意，也可以试试其它形式复杂些的作用。这就是说，所有可能的简单作用只有这三种了。在不同的情况中我们将分别尝试这三种作用。

轨道

当我们将群考虑成一个集合的变换群的时候，群元就是一个操作，就是将集合中一个点变换成另一个点的操作。考虑一个稍微具体的例子，前面提到的那个二维旋转群，它可以看作是二维平面上的一个变换群。它的每个群元就是将二维平面上的一个点旋转一个角度。如果在二维平面上任选一个点，然后用所有的群元去作用它。那么显然我们会得到平面上的一个圆。也就是说，这个群对平面上一点的作用在平面上留下了一条轨迹。普遍地讲，一个群的所有群元对集合中的一个点作用都会留下一条条轨迹。这样我们就得到了轨道的概念：

- 轨道：一个群G中所有元素作用在集合M中一点m上将得到M的一个子集，称为过m点的轨道。

看几个轨道的例子。

Example 5 显然前面提到的二维旋转群的每条轨道都是一个圆，不同的轨道是半径不同的一个个同心圆。三维旋转群的每条轨道都是一个球面。不同的轨道是一个个同心球面。

Example 6 空间反射群作用在空间上。一个点和由这点反射得到的点构成一条轨道。当然，如果这点在反射平面上，那么它自己就是一条轨道。由此你可以看到，轨道并不一定是连续的。空间反射群是分立群。

一般地讲，

- 群作用在另一个点m'上会得到另一条轨道；
- 但如果m'就在过m点的那条轨道上，那么得到的仍然是过m点的那条轨道。

仍考虑前面的那个例子：二维旋转群作用在平面上一点m上得到的轨道是一个过m点的圆。如果在考虑二维旋转群作用在这个圆外一点，那么得到的轨道将是一个过m点的圆的同心圆。如果所选的这个点仍在过m点的圆上，那么得到的显然还是这个过m点的圆。

可以证明不同的轨道是不交叉的：

- 轨道要不就不相交，要不就重合。

显然有一种特殊的情况，就是

- 群作用在一个集合上只有一条轨道，这时我们就说，群在这个集合上是传递的。

Example 7 二维旋转群在一个圆上就是传递的。

Example 8 平移群在整个空间上传递。这很好理解，由任意一点出发，总可以通过平移到达其它任何点。

显然，二维旋转群在一个平面不是传递的；每个同心圆都是一条轨道。三维旋转群在三维空间上不是传递的，每个同心球面都是一条轨道。

群作用在群上：群作为群的变换群

群作用在集合上，成为这个集合的变换群。只需满足$(g_1 \circ g_2)\, m = g_1\,(g_2 m)$和$em = m$两条要求以满足群中的二元运算是相继作用，单位元是不作用的要求。群本身就是一个特殊的集合，群作用在群上，也就是群作为群的的变换群，显然将会给出一些特别的有意义的结果。下面我们将考虑几种非常特殊的情况：

- 群作用在自身上；
- 一个群的子群作用在这个群上；
- 群作用在它的子群上。

在具体考虑这些问题之前，我们先回顾一下前面得到的群作用在集合上的几种可能的方式。

前面讨论过，群作用在集合上只有三种可能的方式，它们被称为

$$\text{左作用：} gm$$
$$\text{右作用：} mg^{-1}$$
$$\text{共轭作用：} gmg^{-1}$$

显然，群作用在群上也只可能有这三种方式。

群作用在自身上

左作用和右作用：重排定理 可以很容易地看出，一个群通过左作用、右作用和共轭作用作用到自己身上得到的还是自己：

群G左作用在自身的一个元素$m = g'$上将得到一条过g'的轨道：$g'' = gm = gg'$。你可以证明，这条轨道其实就是群G自己。这个结论就是所谓的**重排定理**。

同样，群G右作用在自身的一个元素$m = g'$上同样将得到一条过g'的轨道：$g'' = mg^{-1} = g'g^{-1}$。很容易看出，这条轨道仍然是群G自己。这是因为封闭性要求g^{-1}也是群中的一个元素。通过与前面相同的证明思路，你可以发现这其实也是重排定理。

群左作用和右作用在自身上得到的轨道都是这个群自己的结论其实是在告诉我们群的乘法表（Caylay表）每行每列都将包含群中的每一个元素。由于乘法表的行列数就是群元的个数（群的阶），所以每个元素任意一个行列中都只出现一次。

由重排定理可以直接看出，群左、右作用在自身上只有一条轨道，是传递的。

共轭作用：共轭元素类 除了左右作用，群作用在集合上还有共轭作用。

用群中所有群元对群元g_1共轭作用：$g_2 = gg_1g^{-1}$，我们得到一条过g_1的轨道。用所有群元再对在这条轨道外的另一个群元取共轭作用，我们就得到另一条轨道。这个过程进行下去，我们就会得到一系列的轨道。每条轨道就是一个共轭类。每个共轭类中的元素都是彼此共轭的。

需要说明的是，这里的类指的是等价类。我们会在后面引入商群概念时介绍等价类。

子群作用在群上：左陪集，右陪集

前面考虑的是一个群作用在自身上，现在考虑一个群的子群作为这个群的变换

群。

H是G的子群。

- H在G上的左作用，hg：

将子群H中的所有元素左作用在群G中的元素g上，将得到过g一条轨道。显然轨道有两种：

一种情况是g就是子群H中的元素，即$g \in H$。由重排定理很容易看出，过$g = h$的轨道就是子群H。

另一种情况是g不是子群H中的元素，即$g \notin H$。这样也会得到一条过g的轨道，这条轨道显然不是一个群。因为G的单位元在H中；而$g \notin H$，因此g^{-1}也不在H中。这样一来也就是说，过g的轨道中没有单位元，因此不是群。这条由左作用得到的轨道gH称为子群H的一个右陪集。同样，将子群H作用在过g的轨道外的一个元素g'（$\notin H$）上，将得到另一条过g'的轨道。也就得到了另一个陪集。这样做下去当然就得到一系列轨道，一系列陪集。

- H在G上的右作用，gh^{-1}：

与左作用一样，H右作用在G中的一个元素g上，也得到一条轨道。如果$g \in H$，则过g的轨道就是子群H。如果$g \notin H$，则得到了一个左陪集，Hg^{-1}(写Hg也行，反正g^{-1}也是群G的一个元素)。

注意，右作用只能是gh^{-1}而不是gh。但是，由于我们要作用遍G中所有的元素，而g^{-1}与g同样是G中的一个普通元素，所以在遍历所有元素后gh^{-1}与gh得到的陪集情况相同。

不同的轨道是不相交的。因此陪集与陪集间，陪集与子群间没有交集。

关于左右陪集，我们有这样的结论：左右陪集的的个数相同。子群H的陪集个数称为自群H在群G中的指数，用$[G : H]$。此外我们还有Lagrange定理：$|G| = [G : H]\,|H|$。

- 共轭作用，hgh^{-1}：

如果$g \in H$，显然共轭作用hgh^{-1}给出的过g的轨道就是子群H的共轭类。

如果$g \notin H$，则hgh^{-1}（我没想好这是什么）。

群作用在它的子群上：共轭子群，不变子群

再来考虑群G作用在子群H上的结果，同样还是分别考虑那三种可能的作用。

- G中的所有元素作用在H中的一个元素上：左作用、右作用和共轭作用的轨道

将群G中的所有元素g左作用在子群H的一个元素h上，得到过h的一条轨道，Gh。显然由于h也是G中的一个元素，这样作用的结果给出的仍然是群G。同样，将群G中的所有元素g右作用在子群H的一个元素h上，也得到过h的一条轨道，hG。同样给出的也仍然是群G。也就是说，一个群G左右作用在它自己的子群上的结果是平庸的，就是它自己。

将群G中的所有元素g共轭作用在子群H的一个元素h上，自然便得到过h的一条轨道，ghg^{-1}。由于h同样是G中的元素，这样得到的显然是一个h的共轭类。

可见，这种将G中的所有元素作用在H中的一个元素上得到轨道的作用方式结果有些平庸。我们试试另一种作用方式。

- G中的一个元素作用在H中的所有元素上：共轭子群，不变子群，中心

将G中的一个元素左、右和共轭作用在H中的所有元素上得到的是：gH，Hg^{-1}和gHg^{-1}。左右作用得到的gH和Hg^{-1}就是H在G中的左右陪集；如果g恰是H中的元素，那么左右作用得到的就是H自己。这都是些已经讨论过或平庸的情况。

共轭作用给出的集合gHg^{-1}中的元素是ghg^{-1}。由于封闭性，gHg^{-1}显然是H的子集。一个自然的问题是这个子集能够成一个群吗；或者说gHg^{-1}是G的一个子群吗。这要看群的那几条要求能否满足。单位元显然是有的：子群H中包含单位元e，而$geg^{-1}=e$。逆是有的：$\left(ghg^{-1}\right)^{-1}=gh^{-1}g^{-1}$。$ghg^{-1}$肯定是$G$的一个群元，所以以$ghg^{-1}$为元素的运算一定满足结合律。$\left(gh_1g^{-1}\right)\left(gh_2g^{-1}\right)=gh_1h_2g^{-1}$，而$h_1h_2\in H$，所以封闭性也满足。这就是说，$gHg^{-1}$也是群$G$的一个子群，它是$G$的子群$H$在$G$的一个群元$g$的共轭作用下得到的，因此称$gHg^{-1}$为$H$的一个共轭子群。每给一个群元$g$就会得到一个$H$的共轭子群。

一类特别重要的子群是那些自共轭的子群。也就是自己就是自己的共轭子群的子群。也就是

$$H=gHg^{-1}.$$

显然，这样的子群在任意群元g的共轭作用下是不变的。因此称为不变子群（注意，左右作用是平庸的）。不变子群也叫正规子群。

对不变子群的定义$H = gHg^{-1}$稍做变形得到$Hg = gH$，因此不变子群也经常被说成是左陪集等于右陪集。

可以看到，如果存在一个由与所有群元都对易的群元构成的子群（注意，这里指的是全部这样的元素构成的子群，不是这样元素中的一部分），那么它一定是一个不变子群，这种特殊的不变子群成为群的中心。显然，并不是所有的群都有中心。

中心只有一个，因为中心的中心还是它自己。

中心一定是Abel的。Abel群的中心就是它自己。

29.2.6 群的商和群的扩张

前面已经看到，群存在子群结构，子群是一个子集合。作为一个粗略的比喻，这是一种类似加减法的结构。这里我们来考虑群的一种类似乘除法的结构，商结构。

加减法是一种增加和减少的操作；乘除法则是一种扩大和压缩的操作。

对一个集合来说，增加和减少是通过增加和减少集合的元素来完成的。如果原来的集合是一个群，增加减少元素后这个集合便不一定再是群了。如果仍要求增加减少元素后的集合还是群，就要附加一些条件，即要求增加减少元素时不要破坏群的那四条基本要求。

扩大和压缩稍微复杂些。压缩的基本思路就是将集合中的元素分成一些组，再将这些组的规模压缩小一些，比如按照某种规则减少这个组中元素的个数。扩大则是为每组元素再配几个元素，得到一个新的集合。扩大和缩小后会得到一个新的集合。当然，如果原来的集合具有某种结构，那么扩大和缩小后这个结构一般地讲会被破坏掉。比如一个群被扩大和缩小后得到的新集合一般来说不再是一个群了（增加减少的情况也是这样）。如果我们要求一个群被扩大和缩小后仍然是一个群，那么显然就要对这种扩大和缩小的操作附加一些限制。

商空间

群是一种特定的集合，在讨论群的商的概念前我们现普遍讨论一下普遍的商的概念。

前面已经提到，求商是一种扩大和缩小的操作。所谓扩大和缩小就是先将集合中的元素按照某种规则分成若干组，再将每个组的元素个数减少，从而达到压缩的目的。于是一个自然的问题就是：按照什么样的规则分组呢。普遍地，我们引入等价和等价类的概念。（注意，我们完全可以在不引入等价关系的情况下定义商，但是对我们来说，严格性和普遍性本质上都不是我们的真正目的。）

等价，等价类 所谓按照某种规则分组，首先要明确不同元素间的关系。对于一个数学问题来说，我们应该首先定义什么是关系。关系的例子很容易找，比如大于、小于就是一种关系。在不会引起误解的情况下我们放弃一些严格化，不给出关系的严格定义而直接引入等价关系的概念。

其实等价是一个常见的概念。相等当然是一种等价但是等价的概念要更宽泛。不能简单地说等价还是不等价，要说明在什么意义上等价。两个不同的人当然会很不同。当如果只考虑他们的性别则完全可能是等价的，比如，他们都是男性。在数学中，从各种具体的等价关系中抽象出普遍的等价关系：如果一个关系"$\sim$"满足

1. 反身性：$a \sim a$；（自己与自己等价）

2. 对称性：如$a \sim b$，则$b \sim a$；

3. 传递性：如$a \sim b$，$b \sim c$，则$a \sim c$，

则这种关系被称为等价关系。如果两个元素间满足这种关系，那么这两个元素就在这种关系下等价。

所有等价的元素构成的集合就被称为一个等价类。

等价关系中非常重要的一条就是传递性。传递性告诉我们，按照一个等价关系将一个集合分成的各个等价类之间是没有交集的。因为如果不同等价类之间存在交集，那么由传递性可以看出它们必属于同一个等价类。

商：压缩一个集合 现在我们来考虑如何压缩一个集合。

比喻性地说，压缩（放大也是一样）有两种：不变形的和变形的。不变形的压缩是一种等比例的压缩，变形的则是不等比例的。对一个一般的抽象的集合如何定义变形呢。所谓变形，就是某种特征性质改变了。对一个集合，至少我们可以这样做，挑出一些这个集合的特征，然后看看压缩后的那个集合中这些特征还保持不保持。比如，原来的集合是一个群，压缩后还是群吗，等等。

下面看看怎样来压缩一个集合。这里我们虽然主要谈的是压缩，但是同样的分析也适用于放大。

一个合理的压缩显然是这样的，不管能做到哪种程度，我们总是希望信息将可能地得到保留。一个能够保留信息的压缩方式就是，如果集合中某几个元素是一样的，那么我们就只保留其中一个元素。这样一来，信息得到了保留，集合则变小了。

那么哪几个元素是一样的呢。前面我们已经讨论过，两个东西是否一样，其实取决于你问什么。一个过度苛求的"一样"很可能是不能满足的：如果要求两个印刷

的字在显微镜下看也不能有任何区别，那么哪怕是同一版，同一次印刷的两本红楼梦也是不同的。但如果我们要求的是排版格式相同，那么同一版的红楼梦都是相同的。于是就有了这样的问题，我们会问，红楼梦有多少个版本，而不是问红楼梦有多少本（虽然某些版只有一本）。经过这样的压缩，我们就可以在红楼梦的一百多个版本中每个版本只挑一本来研究了。于是，在版本一样这个"一样"的意义上，多少万本红楼梦书的集合被压缩成一百多个版本了。于是我们得到了一个新的集合，一个压缩后的集合。

回顾一下我们压缩红楼梦的过程：

1. 给出一个"一样"的定义，在这里"一样"的意思就是同一版；
2. 按照这个"一样"的定义将所有红楼梦这个集合中的几乎无数本书分成一百多组；
3. 每组选一本书作为代表，用这些代表书组成一个新的集合。这样得到的新集合就是原来有所有红楼梦组成的集合的压缩集合。

$$\{\text{红楼梦，红楼梦，红楼梦，}\ldots\ldots\} \overset{\text{压缩}}{\Longrightarrow} \{\text{庚辰本，乙卯本，甲戌本，}^{11}\ldots\ldots\}.$$

这种压缩显然是比较版本的人干的。如果你现在找个学法律的人来为红楼梦分类，那么他可能只将红楼梦分成两类{正版，盗版}。这也是一种压缩，一切取决于"一样"的定义。

同样按照这个原则我们可以压缩随便一个集合。按照前面的说法，压缩一个集合首先要确定"一样"。很自然地，我们可以将前面定义的等价就当作"一样"。下面的一切就自动进行了：

1. 确定一种等价关系（根据需要随便选一种）；
2. 按照这种等价关系将集合分成若干个等价类；
3. 在每个等价类中选一个代表，由这些代表组成一个新集合，就得到了一个压缩后的集合。

显然，这样压缩后得到的集合很象是对原来的集合做了一个除法。这样压缩得到的集合就称为原来集合的商。

齐性空间和商群 对一个集合求商的思想是，先将集合中的元素按照某种等价关系分组；然后在每个组中任选[12]一个代表元素组成一个新的集合。这个新集合就是压缩后的集合，就是原来集合的商。

所指定的等价关系决定了分组的情况，而不同的分组情况会给出不同的商。

既然是压缩，就不可避免地损失信息。所得到商空间不可能完全保留原来的信息。我们需要确定的是在一个压缩的过程中，什么样的信息保留了下来，什么样的信息损失了。比如，当我们将一个矩形的一对平行边看作是等价的时候，也就是认为这两个边上的对应点其实是同一个点。矩形两条平行边对应的点如果是同一个点，那么得到的自然就是圆柱了。在这个求商空间的过程中，空间的拓扑性质改变了：平面和圆柱的拓扑不同。

这个问题也可以反过来问：如果我们希望保留集合某些指定性质，那么我们在指定等价关系时需要满足一些什么样的限制。打一个比方，一个整数除以一个整数，得到的商还是整数吗；如果要求商仍是整数，那么除数需要满足什么要求呢。

具体到群的问题中，上面的问题变成了：

- 一个群，压缩后还是一个群吗；如果还是群，是哪个群；如果不是群，是什么。
- 如果要求群的商还是一个群，那么在选择等价关系时应满足什么限制呢。

一个群模掉（暂时用这个叫法）随便一个等价关系，都会给出一个商空间。等价关系当然可以随便指定，于是我们又遇到了数学中总会遇到的问题：在数量可怕的各种等价关系的可能选择中，如何选取一些有意义的等价关系[13]。

到现在为止，我们接触过的与群有关的等价关系就是群作用在集合上所得到的轨道，可以证明，每条轨道都构成一个等价类。

一个集合只能模掉自己集合中的元素所构成的等价类来得到商。群作用在集合上得到的轨道当然是所作用的这个集合的一个子集合。一般地讲，轨道不是这个群的子集合；除非群所作用的集合就是群自己或是自己的子集，这样得到的才是由群

[12]之所以可以任意选，是因为按照给定的等价关系分在一组中的元素是完全等价的。不必再作区分。一个例子是，如果你为某个班的新生分配宿舍，男生去男生宿舍，女生去女生宿舍。按照性别这个等价关系，学生被分成两类。不需要再进一步区分。至于这些学生还有其它差别，如身高，则与分配宿舍无关。

[13]什么算是有意义，就像问怎样算是漂亮一样是没有一个特别明确的标准的。从抽象化后的几乎无穷多种干巴巴的候选者中挑出为数极少的有意义的情况，需要的是天才。如果天才也做不了这件事，那么就去问问大自然。

元素组成的等价类。这就是说，群G作用在集合M上得到的轨道所构成的等价类有两种：

- 一种情况是，轨道是M的子集，但不是G的子集。这时，集合M可以模掉轨道得到一个商空间。一般地讲，M不是一个群，所得到的商空间也不是一个群。
- 另一种情况是，所作用的集合M就是群G自己或者是群G的子群。这样得到的轨道是群G的子集。集合M模掉轨道就是群G模掉轨道，这时候得到的就是群G的一个商空间。一般地讲，这个商空间也不是群。但是在特殊情况下可以得到群。

下面，我们只考虑第二种情况中模掉子群的情况，第一种情况同样非常重要，但暂时不在这里讲。

前面已经讲过，所谓求商，就是将一个集合压缩成以这个集合中的等价类作为元素的新集合。具体讲就是，在每个等价类中选一个代表元素构成一个新的集合，这个集合就是原来集合的商。

对于一个群G，我们特别关心的是群G模掉由它的一个子群H（子群当然会有不同的选择）和这个子群的陪集gH构成的等价类所得到的商。子群H作用在这个群G上得到的轨道就是这个子群H和这个子群的陪集gH。在这个子群和各个陪集中选择一个代表元素构成一个新的集合就得到了这个群的一个商

$$G/H$$

一般地讲，商G/H不再构成一个群。要知道群的要求是很苛刻的。这样得到的新的集合就是一个齐性空间，或称G-齐性空间。

容易看出，群G在自己的G-齐性空间上一定是传递的。也就是说，群G作用在G-齐性空间上只有一条轨道。

很显然，群G自己一定是自己的一个G-齐性空间，因为群G作用在自己上只有一条轨道（重排定理）。群G本身一定是一个G-齐性空间是一条非常重要的结论，这条结论实际上是我们研究李群（更普遍地讲是拓扑群）的一个基本方法的依据。李群是一种拓扑群，拓扑群是一个群的同时又是一个拓扑空间，拓扑变换保相邻关系。群在自身上的传递性使得我们可以先研究某一个局部的性质，再将这个局部性质通过群作用传递到群中的所有地方。我们研究李群的一个特别重要的方法就是先研究单位元附近的性质，也就是将对群的研究转化为对它的李代数的研究。

如果在某些情况下（非常特殊），G/H仍然是一个群，那么G/H就被称为G的一个商群。

那么在什么条件下G/H仍是一个群呢。可以证明，如果子群H是G的不变子群，那么G/H就仍然是一个群；也就是说，G/H给出了G的商群。从一个比喻性的角度说，一个群可以被它的不变子群整除。一个群的不变子群一般地讲会有不止一种，因此它的商群也会有不止一种。这不难理解，一个整数当然可以被不止一个数整除。求商群之所以要除掉一个群的子群，是因为这保证了这个群比被除的那个群小。数的整除也是一样，一个数只能被比它小的数整除。

Example 9 *平移群是欧几里德群的子群，旋转群则是欧几里德群的商群。*

Example 10 *平移群是Poincaré群的子群，Lorentz群则是Poincaré群的商群。注意，Lorentz群是四维闵氏空间中的旋转。*

显然，一个群被压缩后还是群是最保持信息的一种压缩（注意，压缩是一个粗粒化过程，总会损失信息）。可以直接看出这种压缩是一种同态压缩。压缩后虽然细节损失了，但主体结构（群结构）保持了下来。可以粗略地认为，商群的这种压缩是一种等比例压缩：商群是将群中不变子群和它的各个陪集当作等价类，而不变子群和陪集中元素个数相同，这保证了压缩是等比例压缩，压缩后不会变形。所以求商群的过程就是一个同态压缩的过程。

单群 前面我们看到了，对一个群我们可以作一种"除法"，也就是求它的商空间。特别有意义的情况是一个群"除"它的子群。一般地讲，一个群"除"掉它的子群之后会得到这个群的一个齐性空间。如果这个子群很特殊，是这个群的不变子群，那么这个齐性空间也将是一个群，就是这个群的商群。这时我们可以比喻性地说，这个群可以被某个群"整除"。显然，"整除"的情况是很少的，不变子群当然要比一般的子群少。这样一种特殊的情况自然地出现了：有没有这样一种群，它不能被任何群整除。也就是说，有没有相当于素数的群。

寻找这样一种相当于素数的群是非常重要的。泛泛地讲，当代科学的主流思想仍然是最好能为每件事找一个基元。找基元的工作永远是这一学科最前沿的工作，工作在这一领域的人永远是这一学科的领袖，至少是精神领袖，当然他们也往往是最聪明的。寻找基元经常是精神上的一种追求，就象文学艺术一样纯净而不沾染世俗气。虽然从事这一工作的人有时为了获得经济支持也会违心地向那些他们在内心深处看不起的芸芸众生暗示这种工作的应用远景，但这些工作一般都没有近期的应用价值，即使有也不会真的被它们的研究者真正重视——应用是肤浅和暂时的，他们这样认为。

在物理里寻找基元从来都是个核心任务。当然，知道存在某种基元是一个重大进步，只要回忆一下物理中的原子论的历史就知道了。数学中同样有基元。研究数的数学是数论，数论中的核心问题就是研究数的基元——素数。对一个群来书，基元就是单群。确定基元的原则是很朴实的，不能再分解的就是基元。当然，我们说不能再分解的时候，要指明分解的方式。

一个不能被任何群"整除"的群被称为单群。由于一个群只能被它的不变子群"整除"，所以，一个不能被任何群整除一定是没有不变子群的群。因此，也可以用没有"不变子群的群"来作为单群的定义。

单群在群中的重要性就像素数在数中的重要性。因此研究群的一个重要途径就是研究单群。单群分类是群论中的一个核心问题。有限群的分类这项庞大的工作刚刚完成，这个工作给出了下面的结论。

- 单群分类定理：每个有限单群一定同构于下面几种情况：

  1. 素数阶循环群；
  2. 交错群[14]；
  3. 16个李群无限族中的一个[15]；
  4. 26个散在单群中的一个。

群的扩张

商群就是群的"除法"。那么很自然地我们会想到，有没有群的"乘法"。这种乘法是有的，称为群的扩张。需要说明的一点是，只要变大了，就可以认为是一种扩张。在这个意义上，"加法"和"乘法"都是一种扩张。也就是说，普遍地，只要一个群里包含着另外一个群，那么这个大一些的群都是那个小一些的群的扩张。但是在这里，我们只考虑相当于"乘法"的那种扩张。而且，我们的讨论只限于群之间的扩张，不包含一般齐性空间的问题。

"乘法"可以考虑成是"除法"的逆运算。为了引入"乘法"，我们先来看看前面已经讨论过的"除法"，也就是商群。如果群N是群G的不变子群，那么群$Q \cong G/N$就是G的商群。由这个"除法"的定义出发，我们可以将"乘法"定义成：

- 对于群G，Q，和N，如果有$Q \cong G/N$，那么群G就是群N通过群Q的扩张；也有人称群G是群Q通过群N的扩张

[14]交错群，记为A_n，是n个文字对称群中全体偶置换构成的子群。
[15]Chevalley群（9类），Steinberg群（4类），Suzuki群和Ree群（3类）。

显然，如果G，Q，和N都是群，那么群N一定是群G的不变子群。

群的扩张问题是一个非常困难的远没有解决的问题。除了对于循环群通过循环群扩张这样的简单情况，我们还没有什么普遍结果。

直乘积扩张 群的扩张肯定是存在的，因为一定存在所谓的直乘积扩张。也就是说，两个群的直乘积$N \otimes Q \cong G$一定是一个扩张。此时，N和Q显然都是群G的不变子群。两个群的直乘积是这样定义的：

- 如果$N = \{e, n_1, n_2, \cdots\}$，$Q = \{e, q_1, q_2, \cdots\}$，则$G \cong N \otimes Q = \{e, n_1e, n_2e, \cdots, n_1q_1, n_2q_1, \cdots, \}$。注意，$N$和$Q$是两个无关的群，它们的群元$n_i$和$q_i$间都是对易的。

群的扩张是一个非常专门的复杂的问题。我们这里只是一个很简单的介绍。

29.2.7 变换群

粗略地说，一个群作用在一个集合上，那么这个群就是这个集合的变换群。

前面我们讨论的群作用在群上的情况就是将群看作是自己的一个变换群。但是这是一种极特殊的情况。其实这样得到的本质上考虑的还是抽象群，因为这时所谓的群在集合上的作用其实是群的乘法。也就是说，前面只是利用变换群的概念来处理抽象群。得到的结论当然是非常普遍的。但是其实当我们提到变换群的时候，真正关心的是作用在一个一般集合上的变换群。

变换群的例子基本上是不用特别举的。因为到现在为止我们遇到的大多数群都是变换群。在这里我们介绍两种特别有意义的变换群：线性群和置换群。它们的特殊重要性体现在这两种变换群在群表示论中的核心地位。

线性群和置换群的重要性使它们有各自独立的一章来讨论，这里我们只在最基本的概念上做一些介绍。

线性群

变换群强调了所变换的集合，线性群所变换的集合是一个线性矢量空间。也就是说，线性群是线性矢量空间上的变换群。所有这些线性空间上的变换构成群，某些特定的线性变换也构成群。

一般线性群 变换群是一个自身到自身映射构成的群。当然，如前面我们强调的，讨论变换群要关注被变换的那个集合。不同的集合中的一一变换给出的具体的变换群当然也不同。如果我们考虑的被变换的集合是一个矢量空间，那么我们得到的变

换群就是线性群。一个线性矢量空间中的变换，也就是不同矢量间的变换。具体些，考虑一个由矢量

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

张成的n-维矢量空间V。这个矢量空间中两个矢量之间的变换

$$\mathbf{x}'=Ax$$

或

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{12} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

，可以用一个矩阵A来表示。这种线性变换显然是要求有逆变换的，也就是要求变换矩阵是非奇异的。所有这些矢量空间V中的全部线性变换可以很容易验证会构成一个群，这个群就是一般线性群，记为$GL(V)$[16]。由于所有这些线性变换是由$n\times n$非奇异矩阵（行列式不为零）构成的，因此你也可以认为一般线性群是一个矩阵群。

一个矢量空间V可以定义在一个域$\mathbb{K}$上，这样变换矩阵自然也就定义在这个域上；也就是说，矩阵元在域$\mathbb{K}$中取值。具体地，一个定义在域$\mathbb{K}$上的n维线性空间中的一般线性群记为$GL(n,\mathbb{K})$。我们最常遇到的域是复数域$\mathbb{C}$和实数域$\mathbb{R}$。这两个域上的一般线性群为$GL(n,\mathbb{C})$和$GL(n,\mathbb{R})$。就是说，由所有n阶复矩阵构成的群就是复一般线性群$GL(n,\mathbb{C})$；由所有n阶实矩阵构成的群就是实一般线性群$GL(n,\mathbb{R})$。

典型群　一般线性群是一个矢量空间上所有线性变换构成的群。它的不同子群显然是一些特殊的线性变换构成的群。这些一般线性群$GL(n,\mathbb{K})$的子群被Weyl称为典型群，是极为重要的一类群。

显然一般线性群的子群有许多种，需要我们做的是挑出有意义的那些种。由于"有意义"是没有定义的，所以选择"有意义"的这件事只能靠一个人的直觉和经验。

我们将从几个角度挑出这些"有意义"的子群。

[16]很容易看出，包括奇异矩阵在内的所有$n\times n$矩阵的集合，记作$gl(n,\mathbb{K})$不够成群，因为没有逆元。

1. 将线性群看作是矩阵群，这样不同性质的矩阵会构成不同的群。这些不同性质的矩阵当然反映的也是不同的线性变换。

2. 某些特别有意义的线性变换将构成群。当然，这些线性变换也会对应不同的矩阵。

3. 由不变量出发来定义群。也就是说，考虑保持某量不变的变换所构成的群。当然这些变换会对应某些特殊性质的矩阵。

我们将会看到，上面这三种情况会有各种重合的情况。也就是说，某些特殊性质的矩阵恰好给出的就是某个特别有意义的变换。这些特别有意义的变换又对应着某些不变量。

对于第三种情况我们先多讨论一些，因为这种情况在物理里是非常有意义的。一些可以线性群保一些二次型不变。各种空间中的长度（度量）原则上是可以任意定的。但是二次型的度量从来具有特殊的重要性。线性群所保的各种二次型当然可以被理解成各种空间中的长度。比如二次型$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$就可以被理解成欧氏空间中的长度，二次型$x_1^2+\cdots+x_m^2-x_{m+1}^2-\cdots-x_{m+n}^2$可以看作是一种闵氏空间中的度量。那么什么样的变换保这样的二次型呢，这些变换对应的矩阵又是什么样的矩阵呢。这样得到的线性群自然可以被看作是由由不变量定义的群。这并不难理解，对称性可以由群来描述，而所谓对称性就是指某种在变换下不变的性质。给定着这个不变的量自然便可以找到相应的变换，这个变换构成的群自然便可以视为由这个不变量定义的群。当然这种定义不是唯一的，一个群和它的子群当然可以对应同一个不变量。也就是说，仅给不变量并不能唯一地确定一个群。

我们来看看几种重要的的典型群，也就是复一般线性群$GL(n,\mathbb{C})$的几种子群。

复特殊线性群$SL(n,\mathbb{C})$和实特殊线性群$SL(n,\mathbb{R})$ 一般线性群$GL(n,\mathbb{C})$和实特殊线性群$GL(n,\mathbb{R})$是由所有非奇异$n\times n$实或复矩阵构成的群。此时矩阵的行列式可以是非零的任意值。它们的一种特殊情况——行列式为1的$n\times n$实或复矩阵——可以证明也构成群。这类群被称为复和实的特殊线性群。这里的特殊指的就是行列式为1这件事。在物理中，这类特殊情况是最重要的情况。

物理问题中，这类群中有特殊重要性的是$SL(2,\mathbb{C})$，它是固有洛伦兹群的通用覆盖群（也就是说，$SL(n,\mathbb{C})$是单连通的）。

正交群$O(n)$，$O(m,n)$与特殊正交群$SO(n)$，$SO(m,n)$ 从矩阵的角度讲，所

有的n阶正交矩阵可以构成一个群，这就是正交群$O(n)$。正交矩阵或正交变换满足

$$\tilde{O}=O^{-1}\text{ 或}\tilde{O}O=1$$

同样，行列式为1的n阶正交矩阵也构成群，这就是特殊正交群$SO(n)$。

正交变换的一个特别有意义的例子就是欧氏空间中的旋转变换。

正交群$O(n)$与特殊正交群$SO(n)$都是保二次型

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$$

不变的群。这个二次型可以很自然地被理解成n维欧氏空间中的度量。

在物理中一个特别有意义的二次型是$m+n$维闵氏空间中的度量

$$x_1^2+\cdots+x_m^2-x_{m+1}^2-\cdots-x_{m+n}^2$$

保这个二次型不变的群是正交群$O(m,n)$与特殊正交群$SO(m,n)$。这里的特殊仍然指的是行列式为1。

我们后面会看到，这样的群是不紧的。研究这种群的需求完全来自于物理。

幺正群$U(n)$，$U(m,n)$与特殊幺正群$SU(n)$，$SU(m,n)$ 从矩阵的角度讲，所有的n阶幺正矩阵可以构成一个群，这就是幺正群$U(n)$。幺正矩阵或幺正变换满足

$$U^{\dagger}=U^{-1}\text{ 或}U^{\dagger}U=1$$

幺正变换在物理中是特别有意义的。

行列式为1的n阶幺正矩阵也构成群，这就是特殊幺正群$SU(n)$。

幺正群$U(n)$和特殊幺正群$SU(n)$都是保复的二次型

$$|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_n|^2=z_1z_1^*+z_2z_2^*+\cdots+z_nz_n^*$$

不变的群。由此也可以看出，只给出所保的二次型是不能唯一地确定群的。

由幺正群所保的二次型可以看出，幺正变换可以看作是一种复空间中的旋转。

象在考虑正交群时所作的那样，将上面的复二次型推广成

$$-|z_1|^2-|z_2|^2-\cdots-|z_m|^2+|z_{m+1}|^2+|z_{m+2}|^2+\cdots+|z_{m+n}|^2$$

保这个二次型的群就是非紧的幺正群$U(m,n)$和特殊幺正群$SU(m,n)$。特殊指的是行列式为1。

正交群$SO^*(2n)$　从保某些量不变的角度出发我们还可以定义保反厄米二次型

$$\left(z_{n+1}z_1^* - z_1 z_{n+1}^*\right) + \left(z_{n+2}z_2^* - z_2 z_{n+2}^*\right) + \cdots + \left(z_{2n}z_n^* - z_n z_{2n}^*\right)$$

不变给的正交群$SO^*(2n)$。注意这个二次型的反厄米性质。

复辛群$Sp(2n,\mathbb{C})$**，实辛群**$Sp(2n,\mathbb{R})$**和幺正辛群**$Sp(2n)$　在Hamilton系统中，一个n个自由度的力学系统的相空间是$2n$维的。在这样的力学系统中，线性正则变换将构成一个群，这个群保双线性形式

$$(x_1 y_{n+1} + x_{n+1}y_1) + (x_2 y_{n+2} + x_{n+2}y_2) + \cdots + (x_n y_{2n} + x_{2n}y_n)$$

，不变，其中x_i和y_i是矢量$x = (x_1, \cdots, x_n; x_{n+1}, \cdots, x_{2n})$和$y = (y_1, \cdots, y_n; y_{n+1}, \cdots, y_{2n})$的分量，这就是辛群。如果群元是复矩阵则是复辛群$Sp(2n,\mathbb{C})$,。如果群元矩阵是实矩阵，则是实辛群$Sp(2n,\mathbb{R})$；如果矩阵是幺正的，则是幺正辛群$Sp(2n)$。这里的$x_1, \cdots, x_n$是广义坐标，$x_{n+1}, \cdots, x_{2n}$是广义动量。

置换群

置换是这样一种变换，它重新排列集合中元素的顺序。某一个置换可以表示成

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \tag{29.1}$$

它表示将集合(a,b,c)重新排列成(b,c,a)。显然，置换可以构成群。

置换群是一大类重要的有限变换群。置换群是历史上第一个被明确的群，也就是伽罗华的那个群。

对称群　一个由n个元素组成的集合的全体置换将构成一个群，被称为n阶对称群，记为S_n。显然它有$n!$个群元。

置换群　对称群显然可以有各种子群。对称群S_n的不同子群被称为置换群。

群理论中，置换群的地位特别重要的原因是我们有下面的定理：

- Cayley定理：任何有限群都同构于一个置换群[17]。

有了这个结论我们可以说，（在同构的意义下）有限的变换群就是置换群。后面，在表示论中我们会看到，Cayley定理实际是在告诉我们，每个有限群都会有一个置换群表示。因此置换群在有限群理论中起着重要作用。

[17]这里的置换群指的是对称群（所有置换构成的群）和它的所有子群。这与物理的常用的说法不太一样，在物理中我们说的置换群经常指的是对称群。

置换群与线性群

前面我们介绍了线性群与置换群这两种重要的变换群。这里我们可以看到它们之间的关系：事实上，每个置换操作都可以由一个线性变换来实现。比如前面(29.1)中的置换操作可以这样来实现：

$$\begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

这个结果是深刻的。结合Cayley定理，它是在告诉我们每一个有限群也总会同构于一个线性群。可见线性群是一类特别重要的群。

那么与对称群S_n对应的这种线性群是什么样的线性群呢。很容易验证$\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。这就是说，这是一个正交矩阵。这个结论是普遍的。对称群S_n其实是正交群的子群。

29.2.8 表示

表示就是为你要表示的东西和一种你熟悉或用起来方便的东西之间建立一种对应关系。为每一个人起一个名字就是为每个人找了一个表示。与起名字一样，我们为每个人起一个名字，不同人的名字可以重复（虽然我们并不希望这样），但我们不会为同一个人起两个名字。这也是表示的普遍原则。换句话说，找表示就是去找一种多对一的，但决不能是一对多的对应关系。为某一个群找一个表示自然就是去找一个群，这个群（当然是个集合）中的元素与你要表示的那个群（也是个集合）中的元素呈某种对应关系。这种对应关系是多（被表示的群）对一（用来表示的群）的。这个群就是原来那个群的一个表示。很显然群之间的这种多对一个关系是一种同态关系。显然，你可以立刻构造出两种平庸的表示：将所有群元多对应成单位元e；将每个元素多对应成自己，或者稍微不平庸些，将同一群中的元素对应成还是这个群的另一些元素，当然，这样得到的表示还是这个群本身（重排定理）。

群的一个表示就是一个与它同态的另一个群。同态可以简单地分成这样的类。最平庸的同态是将所有群元都对应成单位元，这也构成一个表示，称为平庸表示。

另一个极端就是取一个一一的同态，也就是同构，来构成表示。这样的表示完全不损失信息，被称为忠实表示。

也就是说随便一个与这个群同态的群都可以作为这个群的一个表示。但是显然，我们为一个群找表示显然是为了方便，我们不会用一个更加抽象，更加难处里的群来作为一个群的表示。一般地，我们都会选一个比较容易处理的具体群；经常地，我们会选一个变换群。变换群一般比较直观，而且Cayley定理保证了我们能为每个群都找到一个变换群表示。

置换群表示和线性群表示

前面介绍的线性群和置换群由于Caylay定理而显得特别普遍。Caylay定理保证了，每个有限群都可以找到一个置换群表示，从而找到一个线性群表示。究竟用哪种表示取决于具体问题。因此置换群和线性群是被研究的最彻底的群。在物理问题中主要涉及的是线性群表示。事实上，我们后面提到群表示时一般默认它是线性群表示。置换群表示在数学中用到的比较多。但是，在物理中，由于全同粒子问题，以及张量运算指标的复杂性也使得置换群变得非常重要。

第三十章　李群简引

30.1　引言：预备知识

这门《大场论之李群简引》课程假设了听课的学生已经有了《群论》和《大场论之群论简引》两门课的基础。即使如此课程还是被安排成自足的。由于第一部分内容是在前两门课中，尤其是《大场论之群论简引》中讲过的，所以这里只列出提纲，相应的内容可以到前面两门课的讲义中找。

30.2　群，一种代数结构

- 定义
- 有限群和无限群；连续群

30.3　拓扑空间，拓扑群

- 拓扑结构：拓扑结构就是相邻关系。
- 拓扑空间：被赋予了某个相邻关系的集合。
- 一个集合可以被赋予多种拓扑结构。
- 定义拓扑的两种等价的角度：开集和邻域。
- 拓扑空间的定义
- 拓扑变换：保拓扑（相邻关系）的变换。
- 在拓扑空间上附加其它结构：如度量等。

- 拓扑群：既是拓扑空间又是群的集合（同时具有拓扑结构和群（代数）结构）。
- 拓扑群是一个乘法和取逆都保持邻域的群。
- 拓扑群的子群、拓扑子群和不变拓扑子群。
- 拓扑群的同构：拓扑同胚并且群同构。
- 拓扑群的整体性质。
  - 连通性：连通，单连通，多连通，连通度
  - 同伦，同伦类
- 基本群
- 覆盖，通用覆盖

以上我们介绍了拓扑空间和拓扑群，下面我们考虑一个非常特殊的拓扑空间——流形。如果我们赋予流形这个特殊的拓扑空间一个群结构，我的得到的拓扑群就是李群。一件多少有些出乎预料的是当我们赋予流形一个群结构的之后，这个流形就变成了一个微分流形。这就是说，只有一个微分流形才能容纳一个群结构。

30.4 流形（微分流形，切空间）

30.4.1 $\mathbb{R}^n$

我们遇到的第一个空间就是$\mathbb{R}^n$，事实上，当我们说到空间的时候，我们想的就是$\mathbb{R}^n$，再具体些就是$\mathbb{R}^3$。在非离散的拓扑空间中，它是最简单的。后面当我们说一个拓扑空间是拓扑平庸的时候，我们的意思指的就是这个空间拓扑同胚于$\mathbb{R}^n$。

$\mathbb{R}^n$就是实数域上（这就是$\mathbb{R}$的含义）的n-维线性空间。这个空间中的元素就是一个n-维矢量（也称作点），这个矢量可以用一组n个实数表示：

$$x = \left(x^1, x^2, \cdots\right).$$

这n个实数$\left(x^1, x^2, \cdots\right)$被称为矢量$x$的坐标。

$\mathbb{R}^n$中的两个矢量之间可以定义加法，规则是对应的坐标相加，如

$$x + y = \left(x^1 + y^1, x^2 + y^2, \cdots\right).$$

两个矢量相加仍然是一个$\mathbb{R}^n$中的矢量。也就是说，在矢量加法下封闭。

$\mathbb{R}^n$中还可以定义数与矢量的乘法，就是将数与每一个坐标相乘：

$$ax = \left(ax^1, ax^2, \cdots\right).$$

前面提到了加法下的封闭性，我们还可以进一步验证，$\mathbb{R}^n$在矢量加法可以构成一个群，由于矢量加法满足交换律，$\mathbb{R}^n$构成的群是一个Abel群。

同样可以验证数与矢量的乘法满足结合律（$a\left(bx\right) = \left(ab\right)x$）和分配律（$a\left(x+y\right) = ax + ay$）。

30.4.2 流形，一个局部象$\mathbb{R}^n$的拓扑空间

如果我们给一个集合中的元素规定一个相邻关系，那么这个集合就成了一个拓扑空间。如果我们再附加一个要求，要求这个拓扑空间的每一个局部，也就是一个元素的邻域（别忘了，一个集合就是因为我们规定了一个相邻关系，也就是邻域，才成了一个拓扑空间）都是一个$\mathbb{R}^n$，那么这个拓扑空间就是一个流形了。换个说法就是，流形就是用一大堆$\mathbb{R}^n$粘在一起得到的。因此我们可以将流形定义成

能够用$\mathbb{R}^n$粘出来的空间。

也可以反过来描述这件事：

流形就是一个局部象$\mathbb{R}^n$的拓扑空间。

我们来看个例子。$\mathbb{R}^2$就是平面。用$\mathbb{R}^2$粘成流形，就相当于把一大堆小纸片糊在一起，看看能粘一个什么，唯一的要求是不能剪破。显然能做的事很多。可以糊一个球，可以糊一个轮胎，……，总之你想糊什么就糊什么，只要不剪破就行。不管你得到什么它都是一个二维流形。我们再发挥一点儿想象力（其实根本想象不出来），用一小块儿一小块儿的$\mathbb{R}^3$（也就是一个个的小方块儿）来粘个东西，你得到的就是一个三维流形。自然，你用一个个小块儿的$\mathbb{R}^n$来粘一个流形，你得到的就是一个n维流形。现在你知道了，流形有它自己的维数。

30.4.3 流形的拓扑

流形是一个拓扑空间，自然会有它一系列的拓扑性质。所谓拓扑性质就是那些在拓扑变换下不变的性质。拓扑空间就是一个指定了相邻关系的集合，拓扑变换则是指保持相邻关系不变的变换。所谓保持相邻关系不变就是原来相邻的元素在变换后仍然相邻。这就是拓扑变换是连续的。

拓扑性质，也就是在拓扑变换下不变的性质。维数就是一个拓扑性质，洞的个数也是。拓扑性质是在拓扑变换，也就是在连续变换下不变的量。因此描述这些性质需要用一些在拓扑变换下不变的量。贝蒂数，欧拉示性数，同调群等等就是这样的量。寻找这些拓扑不变量是需要天才的。现在我们发现，物理可以帮助数学家做这件事。

拓扑是粗糙的，信息量不大。当我告诉你一个东西上有一个洞的之后，你并不能画出这个东西，因为拓扑不包含形状的信息。但是，拓扑性质是深刻的，因为它是整体性质。

我们以前熟悉的一个整体性质的例子就是复函数的奇点。我们知道，一个复函数的奇点反应的就是这个函数的整体性质。这一点可以由Cauchy留数定理看出来。这个定理告诉我们，一个闭路积分的结果只与这个路径所包含的奇点有关，而与路径的形状无关。这说明这个积分结果反映的不是几何（局部）性质，而是函数的整体性质。

30.4.4 在流形上建立坐标系

地图和地图册

显然，$\mathbb{R}^n$是最简单的流形。研究它我们最常用也是最有效的办法就是建立一套坐标系。在$\mathbb{R}^n$中建立坐标系的的方法是简单直接的，因为在$\mathbb{R}^n$这样简单的情况中，整体性质和局部性质是一样的。笛卡尔教了我们怎么做。但是，如果流形具有更一般的拓扑性质，比如一个球，要在上面建立坐标系就困难了。其实这样的困难我们早就遇到过，我们很早就有为地球建立坐标系，也就是画地图的需要。我们采用的办法是，将地球分成许多小块儿，然后将它们装订成一个地图册。我们对付流形用的就是这个办法。这个思想本质上就是将一个流形分成许多小$\mathbb{R}^n$块儿，然后在每块上按照笛卡尔的方法建立一个坐标系。之所以总能够做到这点，是因为我们就是这样定义的流形：流形是用一大堆$\mathbb{R}^n$块儿粘起来的，当然也可以把它再切开。这就是说，描述一个$\mathbb{R}^n$这样简单的流形，我们只需建立一个坐标系就可以了，但是描述一个更一般的流形，显然一个坐标系就不够了。想想我们如何为地球画地图（不考虑那些比例不准确的地图，也就是那些球极投影的地图）：我们将地球分成许多小块块，每块都基本上是一个平面，我们为每块画一个地图，也就是在每一块小平面上建一个坐标系。然后把这一大叠小地图装订成册，这样我们就有了一个地图册。

我们也这样对付一个流形，用若干个$\mathbb{R}^n$覆盖这个流形，这是一定能做到的。然后在每个$\mathbb{R}^n$上建立一个坐标系，我们称之为坐标卡。然后将所有这些建立了坐标系的$\mathbb{R}^n$装订在一起，这样我们就有了一个图册来描述这个流形。

描述一个流形需要多少个$\mathbb{R}^n$来覆盖呢。也与画地图一样，多了不怕，反正画细致点儿就是了。但是少了肯定不行。一个$\mathbb{R}^n$流形用一个$\mathbb{R}^n$就可以覆盖了。但是如果是一个球面，我们最少也得用两个$\mathbb{R}^n$来覆盖。一般地讲，一个拓扑不平庸的流形都需要用不止一个$\mathbb{R}^n$来覆盖。显然，如果我们用一些$\mathbb{R}^n$将流形完全覆盖好之后，这些$\mathbb{R}^n$之间一定有彼此重叠的部分。

我们先用一些$\mathbb{R}^n$将流形严丝合缝地覆盖好，然后再每一个$\mathbb{R}^n$上建立一个坐标系。现在问题来了，在这些$\mathbb{R}^n$重叠的部分，流形上的一个点将被不同$\mathbb{R}^n$上建立的坐标系描述，我们必须协调好这件事。协调好这件事的方式显然是在这两个$\mathbb{R}^n$上的坐标系之间建立一个坐标变换。

坐标变换就是一个函数，如果这个函数是可微的，那么这个流形就被称为微分流形。

需要说明的是，我们在覆盖一个流形的不同的$\mathbb{R}^n$上建立坐标系的方式是完全任意的。比如我们可以在一个$\mathbb{R}^n$上建立一个直角坐标系，而在另一个$\mathbb{R}^n$上建立一个球坐标系。

坐标卡，坐标卡集，相容

前面其实是泛泛而谈。这里我们仔细分析怎样叫用一个$\mathbb{R}^n$去覆盖一个流形。

考虑一个例子。我们用一个$\mathbb{R}^2$(也就是一个平面）去覆盖一个S^2（也就是一个球面)。这个问题就是我们为地球画地图时遇到的。显然，直接覆盖是不行的。一个平面不能没有缝隙地覆盖在一个球面上。我们只能按照一定的规则将球面上的点一一对应到平面上。对应的方式当然有无数种，比如球极投影。但是我们知道，只用一个$\mathbb{R}^2$是不能将一个S^2完全覆盖的，或者说，一个S^2上的所有点不能一一对应到一个$\mathbb{R}^2$上。比如球极投影，如果把一个S^2向一个$\mathbb{R}^2$上投影，南极和北极将被投影成一个点。之所以这样，是因为$\mathbb{R}^2$与S^2不是拓扑等价的。只有拓扑等价才能一一对应。为此我们可以将S^2切开成两部分（如果你愿意也可以切成三部分、四部分)，这样南极和北极分别在一片上。这时每一片都与$\mathbb{R}^2$与拓扑等价。我们就可以将这两片分别投影到两个建立了坐标系的$\mathbb{R}^2$上。于是就得到了两个地图。将它们订在一起就得到了一个地图册。

这就是说，所谓覆盖，就是先将一个流形分成若干拓扑等价于$\mathbb{R}^n$的几部分（这几部分可以重叠)，然后将这几部分一一对应到一些$\mathbb{R}^n$上。这与用一些拓扑等价于$\mathbb{R}^n$的橡皮膜将一个流形包裹起来是完全一样的（想象用两片或更多橡皮膜包裹一个球面)。在这些$\mathbb{R}^n$上建立坐标系，我们就得到了一张张地图。

这个为流形建立坐标系的手续我们示意性地画在图（30.1）中。先用一片片拓

扑同胚于$\mathbb{R}^n$的小片将流形M盖严（严格些讲是流形M上的一个开集与$\mathbb{R}^n$中的一个开集同胚），这些片之间可以重合，但不能留缝隙。这些小片我们用U_a表示。所谓盖严的意思就是所有这些小片的并给出整个流形，即

$$U_a \cup U_b \cup \cdots = M.$$

每个小片U_a都是一个开集，所有这些小开集U_a的集合$\{U_a\}$便构成了流形M的一个开覆盖。

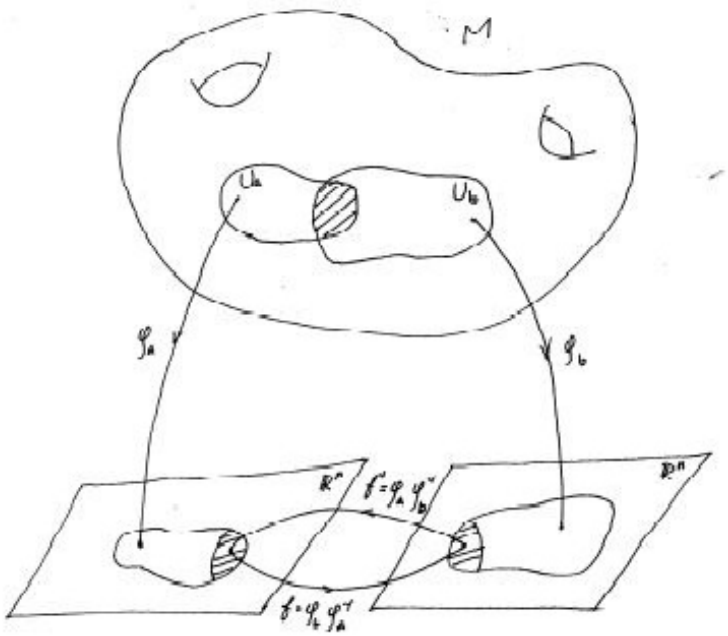


图 30.1: M: n维流形；U_a, U_b: 流形M上拓扑等价于$\mathbb{R}^n$两片。

每个小片U_a，U_b，U_c，$\cdots$都与$\mathbb{R}^n$同胚，所以可以将它们分别与一个$\mathbb{R}^n$建立一一对应关系，也就是找一系列的映射φ_a，φ_b，φ_c，$\cdots$，将U_a，U_b，U_c，$\cdots\cdots$上的点映射到各个$\mathbb{R}^n$上去。如果我们在所有这些$\mathbb{R}^n$上建立了坐标系$(x_1^a, x_2^a, \cdots)$，$\left(x_1^b, x_2^b, \cdots\right)$，$(x_1^c, x_2^c, \cdots)$，$\cdots$，那么与这些$\mathbb{R}^n$一一对应的$U_a$，$U_b$，$U_c$，$\cdots$都便分别都有了一个自己的坐标系，$U_a$，$U_b$，$U_c$，$\cdots$上的每个点都有了坐标$(x_1^a, x_2^a, \cdots)$，$\left(x_1^b, x_2^b, \cdots\right)$，$(x_1^c, x_2^c, \cdots)$，$\cdots$。我们将每组

$$(U_a, \varphi_a)$$

称作一个坐标卡（chart）[1]。所有这些坐标卡的集合

$$\{(U_a,\varphi_a),(U_a,\varphi_a),(U_a,\varphi_a),\cdots\}$$

就是一个坐标卡集。

图(30.1)中画出了其中的两片：U_a和U_b。U_a和U_b之间有重合（阴影）部分。我们在$\mathbb{R}^n$上建立坐标系$(x_1^a,x_2^a,\cdots)$和$\left(x_1^b,x_2^b,\cdots\right)$，于是与这两个$\mathbb{R}^n$一一对应的$U_a$和$U_b$便分别都有了一个自己的坐标系。问题的关键在于$U_a$和$U_b$重叠的阴影部分。在这部分中，每个点都由建立在$U_a$和$U_b$上的两个坐标系描述。于是每个点都将有两组坐标$(x_1^a,x_2^a,\cdots)$和$\left(x_1^b,x_2^b,\cdots\right)$。这两组坐标描述的是同一个点，因此这两组坐标间的关系完全就是坐标变换。如图，这个坐标变换与映射φ_a和φ_b的关系为

$$f=\varphi_b\circ\varphi_a^{-1}.$$

可见，坐标变换（当然也是个映射）f反映的就是映射φ_a和φ_b的性质，而φ_a和φ_b是将流形M上的开集映射到$\mathbb{R}^n$上的映射。$\mathbb{R}^n$是朴实无华的，因此映射φ_a和φ_b反映的是流形M的性质。所以映射f反映的就是流形M的性质。注意到覆盖U_a，U_b，U_c，$\cdots$的选取原则上是任意的（如可以任意选择它们的个数、大小、形状等等），因此它们的交集（阴影区域）的位置也是任意的，原则上可以包含任何一个点。因此由f的性质得到的结论将是流形M的普遍性质。如果我们建立的是实坐标系，则f就是一个实函数。如果这个实函数f是k阶可导的，我们就说U_a和U_b这两个坐标卡是C^k相容的。

我们来看几个例子：

$\mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}^n$是最简单的流形，它最少可以用一个$\mathbb{R}^n$来覆盖。因此只需要一个坐标系就可以了。这时候的映射φ_a取恒等映射就可以了。

当然，如果你愿意，也可以取一些建立了坐标系的$\mathbb{R}^n$去覆盖这个$\mathbb{R}^n$。这些坐标系间的坐标变换就是我们早就知道了的最简单的坐标变换。比如，如果两个$\mathbb{R}^n$中建立的都是笛卡尔坐标系，那么变化就是平移和旋转。如果一个是笛卡尔坐标，一个是球坐标，那么坐标变换就是直角坐标和球坐标之间的坐标变换。

n-维线性空间V n-维线性空间中的每一个矢量都可以与n个实数相对应。这就是说，n-维线性空间与$\mathbb{R}^n$同构。前面$\mathbb{R}^n$中的结论在这里也成立。

[1]坐标卡这个词翻译得不够形象，原来的chart意思更加明显，就是航海图。航海时就是拿着一大叠分得很细的航海图，一张一张地走。

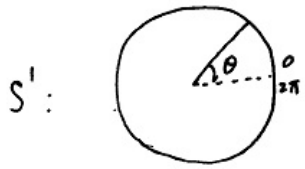


图 30.2: 这不能算是坐标系，因为$\theta = 0$和$\theta = 2\pi$是同一个点

S^1　圆环S^1猛地看上去最自然的坐标系就是（如图30.2）选择一个0到2π的极坐标是最自然的，但是这不是一个正确的选择，因为此时有一个点将被两个坐标描述，0和2π（如图30.2）。且不说一个点有两个坐标本来就是不对的，这个结果还将导致的一个直接后果，就是如果我们能在这个流形上做微积分的话，那么对坐标为0的这个点求导，就会发现这个点的邻域中包含着2π附近的点，一个无穷小区间，在这个坐标系下变成有限大的了。因此我们只能用几个同胚于$\mathbb{R}^1$的拓扑平庸的空间去覆盖它。在$\mathbb{R}^1$上我们当然可以很安全地建立坐标系。

第一步，我们要选择几个$\mathbb{R}^1$覆盖圆环S^1。

圆环S^1不能用一个$\mathbb{R}^1$覆盖，至少需要两个，当然多了没关系。我们不妨选择两个$\mathbb{R}^1$，也就是两条直线来覆盖它。一种方式是用一条直线包围除去南极点的部分，另一条则包围除去北极点的部分，即

$$U_1 = \text{除去南极点的部分},$$
$$U_2 = \text{除去北极点的部分}。$$

它们重叠的地方很多，只有南北极两个点不重叠（如图30.3）。这样我们就去掉了有两个坐标的那个点（这个点的选择是任意的，选成南北极是为了方便）。

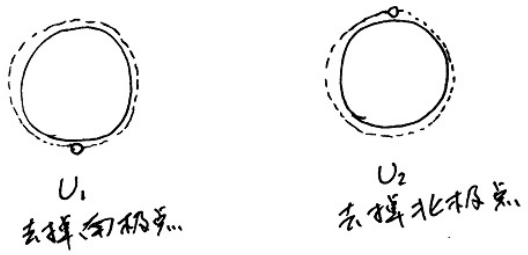


图 30.3: 去掉有两个坐标的点

这种覆盖方式不是唯一的，比如我们可以用多个$\mathbb{R}^1$去覆盖，也可以让这两个$\mathbb{R}^1$重叠部分少一些（但必须重叠）。也可以去掉其它点，等等。

下一步，我们要在这两个$\mathbb{R}^1$上建立坐标系。

建立坐标系要做两个方面的事：在$\mathbb{R}^1$上建立一个坐标系和将流形上的点与$\mathbb{R}^1$上的点建立一个对应。

在一个$\mathbb{R}^1$上建立坐标系的方式有许多种。下面我们选几种当作例子。

两个一维的笛卡尔坐标系 我们在两个$\mathbb{R}^1$上分别建立一套笛卡尔坐标系。包含北极点的$\mathbb{R}^1$上建立的一维坐标系称作x_1，包含南极点的$\mathbb{R}^1$上建立的一维坐标系称作x_2。现在要做的就是将S^1上的点一一对应到$\mathbb{R}^1$上。我们知道这是一定能做到的，因为除掉南极和北极点的圆与$\mathbb{R}^1$是同构的。选择哪种对应方式是完全任意的。一个非常方便且常用的方式是球极投影，如图30.4。

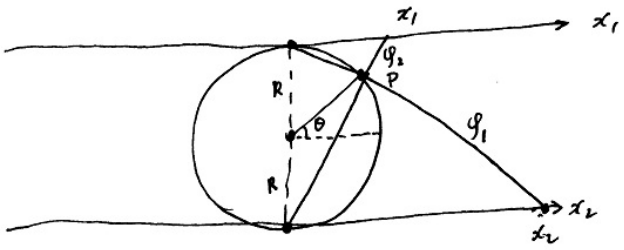


图 30.4: 球极投影

我们仍利用前面我们在S^1上建立的那个错误的坐标系，当然在利用这个错误的坐标系时我们去掉了那个有两个坐标的危险点（去掉这个点不会损失什么，我们有两个坐标系，在其中一个坐标系中没有得到描述的点，将在另一个坐标系中得到描述）。我们的选取的同构于$\mathbb{R}^1$的U_1和U_2避免了这个麻烦。

如图30.4我们可以得到在球极投影下的两个映射

$$\begin{aligned}\varphi_1 &: x_2 = 2R\cot\frac{\theta}{2},\\ \varphi_2 &: x_1 = 2R\tan\frac{\theta}{2}.\end{aligned}\tag{30.1}$$

同一个点P（对应一个θ值）在两个坐标系上分别对应两个坐标，x_1和x_2。它们之间的坐标变换前面已经给出

$$f = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$$

由（30.1）可知

$$\varphi_1^{-1} : \theta = 2\,\mathrm{arccot}\,\frac{x_2}{2R}$$

因此（注意∘是复合函数的意思）有

$$f=\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}:x_1=2R\tan\left(\operatorname{arccot}\frac{x_2}{2R}\right)$$

因为

$$\tan\left(\operatorname{arccot}\frac{x_2}{2R}\right)=\tan\left(\arctan\frac{2R}{x_2}\right)=\frac{2R}{x_2}$$

这样有

$$f=\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}:x_1=\frac{(2R)^2}{x_2}\tag{30.2}$$

注意，这个变换可以从图中直接得到（相似三角形）：$\frac{x_2}{2R}=\frac{2R}{x_1}$。

这样我们就得到从U_1到U_2的坐标变换。

两个极坐标 我们仍采用原来的去掉了南极和北极的两个$\mathbb{R}^1$。但是这次我们在$\mathbb{R}^1$上建立的是两个极坐标系。一个去掉了北极，坐标选做$\theta_1\in(0,2\pi)$，一个去掉了南极，坐标选做$\theta_2\in(0,2\pi)$。（这里的两个$\mathbb{R}^1$的编号与前面弄反了，前面的U_1对应这里的U_2，U_2对应这里的U_1，先这样吧，否则又要重算一遍）。

这种覆盖的选择使我们将不得不先分段考虑，如图30.5。



图 30.5: 分段考虑

$$\varphi_1:\begin{cases}\theta_1=\theta-\frac{\pi}{2}, & \left(\frac{\pi}{2}<\theta\le 2\pi\right)\\ \theta_1=\theta+\frac{3\pi}{2}, & \left(0\le\theta<\frac{\pi}{2}\right)\end{cases},\tag{30.3}$$

$$\varphi_2:\begin{cases}\theta_2=\theta+\frac{\pi}{2}, & \left(0\le\theta<\frac{3\pi}{2}\right)\\ \theta_2=\theta-\frac{3\pi}{2}, & \left(\frac{3\pi}{2}<\theta\le 2\pi\right)\end{cases}.\tag{30.4}$$

它们之间的坐标变换为

$$f=\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}$$

由（30.3）可知

$$\varphi_1^{-1}:\begin{cases}\theta=\theta_1+\frac{\pi}{2}, & \left(\frac{\pi}{2}<\theta\leq 2\pi\right)\\ \theta=\theta_1-\frac{3\pi}{2}, & \left(0\leq\theta<\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

于是有

$$\begin{aligned}&\text{第一象限：}\theta_2=\theta+\frac{\pi}{2}=\left(\theta_1-\frac{3\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\theta_1-\pi,\\ &\text{第二象限：}\theta_2=\theta+\frac{\pi}{2}=\left(\theta_1+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\theta_1+\pi,\\ &\text{第三象限：}\theta_2=\theta+\frac{\pi}{2}=\left(\theta_1+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\theta_1+\pi,\\ &\text{第四象限：}\theta_2=\theta_1-\frac{3\pi}{2}=\left(\theta_1+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{3\pi}{2}=\theta_1-\pi.\end{aligned}$$

整理一下有

$$\begin{aligned}&\text{第一、四象限：}\theta_2=\theta_1-\pi,\\ &\text{第二、三象限：}\theta_2=\theta_1+\pi.\end{aligned}$$

这样我们就得到了这两个坐标系之间的坐标变换。

一个笛卡尔坐标，一个极坐标 仍采用原来的去掉了南极和北极的两个$\mathbb{R}^1$。这次我们在去掉南极的那个$\mathbb{R}^1$上建立笛卡尔坐标系，在去掉北极的那个$\mathbb{R}^1$上建立极坐标系，坐标选做$\theta_1\in(0,2\pi)$，如图30.6。这样做当然不方便，纯粹是为了展示一下坐标系选择的随意性。

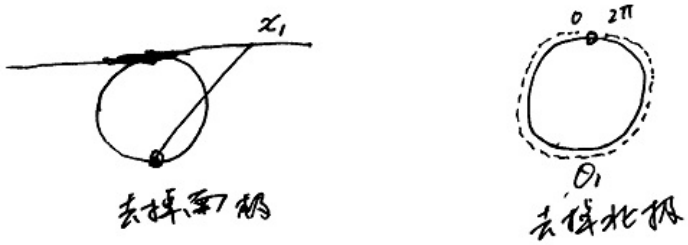


图 30.6: 坐标系选择的任意性

由前面的结果（30.1）和（30.3），可以直接得到

$$\varphi_1:x_1=2R\tan\frac{\theta}{2}.$$

$$\varphi_2:\begin{cases}\theta_1=\theta-\frac{\pi}{2}, & \left(\frac{\pi}{2}<\theta\leq 2\pi\right)\\ \theta_1=\theta+\frac{3\pi}{2}, & \left(0\leq\theta<\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

我们有

$$\varphi_1^{-1}:\theta=2\arctan\frac{x_1}{2R}.$$

于是坐标变换为

$$f=\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}:\begin{cases}\theta_1=\theta-\frac{\pi}{2}=2\arctan\frac{x_1}{2R}-\frac{\pi}{2}, & \left(\frac{\pi}{2}<\theta\leq 2\pi\right)\\ \theta_1=\theta+\frac{3\pi}{2}=2\arctan\frac{x_1}{2R}+\frac{3\pi}{2}, & \left(0\leq\theta<\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}. \tag{30.5}$$

这里我们针对同一种覆盖给出了三种坐标系，当然我们还可以给出不同的覆盖，如用更多的$\mathbb{R}^1$去覆盖S^1。在这些覆盖上建立不同的坐标系。可见坐标系的选择是人为的。但是，这种选择会受到流形拓扑的限制，比如就不能用一个$\mathbb{R}^1$去覆盖S^1。

S^2和S^n 有了前面S^1的经验我们可以直接给出笛卡尔坐标下S^2的两个坐标卡之间的坐标变换（如图30.7）。要知道，如果我们垂直于两个坐标系过球心做一个剖面，那么得到的就是S^1的情况。我们很容易得出

$$\mathbf{r}_2=\frac{(2R)^2}{r_1}\frac{\mathbf{r}_1}{r_1}. \tag{30.6}$$

这里$\frac{\mathbf{r}_1}{r_1}$是$\mathbf{r}_1$坐标系上的方向矢量。

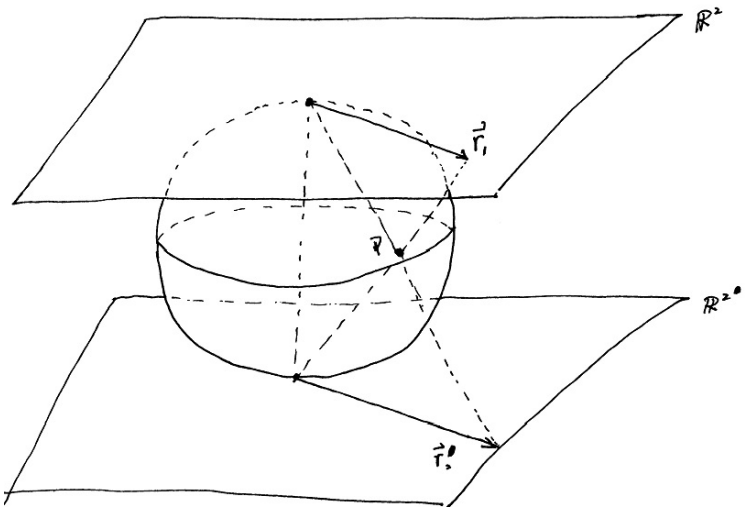


图 30.7: 两个坐标卡的坐标变换

（30.6）给出的这个结果对n-维球面S^n也成立。在S^n的情况中，$\mathbf{r}_1$和$\mathbf{r}_2$分别是两个$\mathbb{R}^n$上的矢量。

S^2，复结构 前面我们为S^2建立了直角坐标系。对于S^2这种特殊情况，我们还可以用两个复平面去覆盖它。也就是将球面上的每个点对应上一个复数。两个坐标系使得球面上的每个点都有两个复数与它对应。有了前面的为S^2建立两个笛卡尔坐标系的变换关系结果我们很容易给出两个复坐标系变换，只需将$\mathbf{r}_1=(x_1,y_1)$和$\mathbf{r}_2=(x_2,y_2)$换成

$$z_1=x_1+iy_1,$$

$$z_2=x_2+iy_2.$$

这样r_1被换成$|z_1|$。于是（30.6）变为

$$z_2=\frac{(2R)^2}{|z_1|}\frac{z_1}{|z_1|}=\frac{(2R)^2}{|z_1|^2}z_1=\frac{(2R)^2}{z_1z_1^*}z_1=\frac{(2R)^2}{z_1^*}.$$

这件事的重要性在于，我们演示了一种复结构。

我们可以看到，这里得到的变换函数$z_2=(2R)^2/z_1^*$不是解析函数。

考虑定向性的坐标卡：以S^n为例

前面我们考虑了一些在流形S^2和S^n上建立坐标系的例子。S^2和S^n不是拓扑平庸的流形，但是还算简单。它们最少用两个$\mathbb{R}^n$就可以覆盖住。我们在$\mathbb{R}^n$上建立了坐标系。而我们在建立坐标系的时候完全没有考虑流形的定向性。所谓定向性，粗略地说就是，如果你在过一个点的小邻域里建立了一个右手坐标系，那么当这个点沿着任意一条曲线运动到流形上的另一个点的时候，这个坐标系还是右手系。当然也可以是这样。你从一点出发，沿任意一条闭曲线回到这个点，原来是右手系，现在还是右手系。

前面我们为S^n建立了坐标卡。当时我们没有考虑定向性。我们在覆盖S^n的两个$\mathbb{R}^n$上建立的坐标系没有考虑定向性。比如，过北极的坐标系如果是右手的，那么过南极的就是左手的了（图30.4）。

显然，如果我们在同一个流形上建立的两个坐标系保持相同的定向是有意义的。事实上我们会发现，如果一个流形上的所有的坐标系保持相同的定向，其结果是深刻的。下面看几个例子。

S^1：考虑定向 我们重新为S^2建立坐标系，如图30.8。容易看出，与前面图30.4中建立的坐标系的结果相比，只需将x_2替换成$-x_2$。这样坐标变换就是

$$x_1=-\frac{(2R)^2}{x_2}.$$

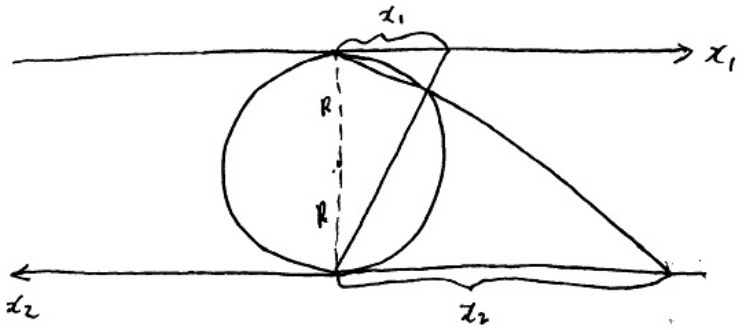


图 30.8: 考虑定向后建立坐标系

S^2，复结构 同样，我们可以在覆盖S^2的两个$\mathbb{R}^2$上建立复坐标系。也就是用两个复平面去覆盖S^2。

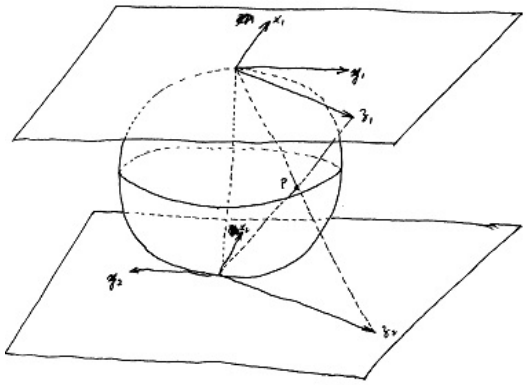


图 30.9: 复结构

利用前面S^2的结果。考虑定向性以后，坐标系如图30.9。在过北极的复平面中的我们有$\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1)$，替换成复数为

$$z_1 = x_1 + iy_1,$$

在过南极的复平面中的我们有$\mathbf{r}_2 = (x_2, -y_2)$，替换成复数为

$$z_2^* = x_2 - iy_2 = (x_2 + iy_2)^*$$

像前面一样，在前面的为S^2建立两个笛卡尔坐标系的结果的变换关系结果（30.6）中将$\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1)$和$\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2)$换成这里的$z_1$和$z_2$，注意$r_1$换成$|z_1|$，得到

$$z_2^* = \frac{(2R)^2}{|z_1|}\frac{z_1}{|z_1|} = \frac{(2R)^2}{|z_1|^2}z_1 = \frac{(2R)^2}{z_1 z_1^*}z_1 = \frac{(2R)^2}{z_1^*},$$

于是有

$$z_2 = \frac{(2R)^2}{z_1}.$$

在所建的坐标系没有反映流形的定性的时候，我们得到的变换函数$z_2 = (2R)^2/z_1^*$不是解析函数。当考虑了定向性以后，变换函数变成解析的了[2]。这个事实是深刻的，在后面的讨论复流形的时候我们会看到。

30.5 微分流形

前面我们为流形建立了坐标系，这样我们就可以象笛卡尔教我们的那样为流形上的每个点指定一个坐标了。为此我们引入了不只是一个坐标系，而是一个坐标卡集。也就是一大堆建立在$\mathbb{R}^n$上的坐标系，这些坐标系之间有重叠的部分，在这些重叠的部分中，一个流形上的点会被不止一个坐标系中的坐标描述，这些坐标之间必须有一个很好的配合，反映在它们之间的坐标变换中（两组或多组坐标描述同一个点当然需要一个合适的坐标变换了，所谓合适，比如说，变换必须是可逆的）。

前面我们给出一些流形的例子，也给出了在这些流形上建立坐标系的例子。我们给出了$\mathbb{R}^n$和S^n建立坐标卡的例子。我们看到$\mathbb{R}^n$和S^n上的坐标变换函数，如（30.2）（30.5）和（30.6）都是可微函数。这件事反应的是流形本身的性质。比如如果流形是一个三角形，这时在顶角处就不再是可微的。这种变换函数间的可微性不是来自于坐标卡的选择，而是流形自身。如果坐标卡之间是C^k相容的，也就是变换函数是k阶可导的，则我们称这个流形为C^k流形。如果坐标卡之间是C^∞相容的，也就是变换函数是∞阶可导的，则我们称这个流形为C^∞流形，也就是光滑流形。

30.5.1 同一流形上的不同的光滑结构

我们可以在同一流形上建立许多个坐标卡，那么一个自然的问题是，我们在一个流形上可以建立不止一个光滑结构吗。我们可以构造性地回答这个问题。考虑一个例子：

$\mathbb{R}^1$上的不同的光滑结构

$\mathbb{R}^1$是一个最简单的流形。我们下面来为它建立坐标卡。

[2]回忆复变函数，一个解析函数是自变量为z的函数。因此$f(z)$是解析的，$f(z,z^*)$不是解析的。

我们用两个$\mathbb{R}^1$来覆盖这个$\mathbb{R}^1$，这时当然有$\mathbb{R}^1 \cup \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}^1$。然后在其中一个覆盖$\mathbb{R}^1$的$\mathbb{R}^1$上建立坐标系，相应的坐标卡为$(U_a, \varphi_a)$，这里的$U_a$就是$\mathbb{R}^1$，

$$\varphi_a : x_1 = ax$$

。然后我们在另一个覆盖$\mathbb{R}^1$的$\mathbb{R}^1$上建立坐标系，相应的坐标卡为(U_b, φ_b)，这里的U_b也是$\mathbb{R}^1$，我们取映射为

$$\varphi_b : x_2 = bx$$

这样坐标变换为

$$f = \varphi_b \circ \varphi_a^{-1} : x_2 = b\left(\frac{x_1}{a}\right).$$

显然，这两种坐标卡是C^∞相容的。

但是如果取的一个映射是

$$\varphi_a : x_1 = x^3,$$

则变换为

$$f = \varphi_b \circ \varphi_a^{-1} : x_2 = b\left(\sqrt[3]{x_1}\right).$$

很明显，这两个坐标卡不是C^∞相容的，因为$\sqrt[3]{x_1}$在$x_1 = 0$点没有导数。

由于$\mathbb{R}^1$只需要用一个$\mathbb{R}^1$就可以覆盖，因此我们可以将前面的(U_a, φ_a)和(U_b, φ_b)分别看成两个坐标卡集。这就是说，我们可以赋予一个流形不止一个光滑结构。一个是C^∞的，一个不是。

30.5.2 同一流形上的不同的微分结构

那么同一流形上能容纳的不同的微分结构吗。也就是说，能不能有两种不同的C^∞相容的坐标卡集。与光滑结构不同，我们很难举出一个明显的例子。现在我们已经知道，一个流形上可以容纳不止一个微分结构。历史上第一个例子是米尔诺的七维球。其实在高维流形上，比如$\mathbb{R}^4$，经常存在多种微分结构。只是维数小于三维的情况比较简单，只有一种微分结构。

如果一个流形有不止一种微分结构，就是说存在另一个流形，与它拓扑同胚，但不微分同胚。

30.5.3 矩阵流形：M^n，$GL(n,\mathbb{R})$和$GL(n,\mathbb{R})$各种子集合：一个微分流形的例子

前面系统讨论了几个流形的例子。在这些例子中，我们可以看出，所建立的坐标卡间的变换的变换函数，如果是实函数，就是可微函数；如果是复函数，就是解

析函数。因此所考虑的流形就是可微流形，或者解析流形。

下面我们在举一个微分流形的例子，这个例子对我们是特别重要的。

M^n

考虑一个由所有$n\times n$矩阵

$$M=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的集合。也就是说，集合中的每个点都是一个$n\times n$矩阵。我们要确定的是，1）这是不是一个流形；2）这是不是一个微分流形。

要回答这两个问题，我们首先要看这个集合能不能用一些$\mathbb{R}^n$来覆盖；或者说，这个集合能不能用一些$\mathbb{R}^n$粘出来；或者说，这个集合是不是局部象$\mathbb{R}^n$。做到这点的关键是要看能不能构造一个由这个集合向$\mathbb{R}^n$的映射，构造出映射后，再建立坐标系，给出坐标变换，进而坐标变换函数是否可微，从而判断是不是微分流形。

我们可以直接构造$n\times n$矩阵的集合向$\mathbb{R}^n$的映射：

$$M\xrightarrow{f}(a_{11},\cdots,a_{1n},a_{21},\cdots,a_{2n},a_{n1},\cdots,a_{nn})$$

也就是将$n\times n$矩阵映射成一个n^2维矢量。而我们知道，所有这些n^2维矢量的全体构成的就是$\mathbb{R}^{n^2}$，也就是一个维n^2维欧氏空间。这就是说，我们只用一个$\mathbb{R}^{n^2}$就将$n\times n$矩阵的集合覆盖了。或者说，$n\times n$矩阵的集合就是$\mathbb{R}^{n^2}$自己。

好了，既然$n\times n$矩阵的集合就是$\mathbb{R}^{n^2}$，那么它当然是一个流形，它当然也是一个微分流形（参考第30.4.4节）。

$GL(n,\mathbb{R})$

考虑$n\times n$矩阵构成的集合M^n的一个子集：一个由$n\times n$可逆矩阵构成的集合，我们称这个集合为$GL(n,\mathbb{R})$，G是一般的意思，L是线性的意思，n表示矩阵的维数，表示矩阵元是实的。那么这是一个流形吗，是一个微分流形吗。

可逆矩阵就是行列式不为零的矩阵。这就是说，$GL(n,\mathbb{R})$就是在M^n中去掉$\det M=0$的矩阵。

我们先来看一个例子：$GL(1,\mathbb{R})$。M^1就是$\mathbb{R}^1$，也就是实轴。$\det M=0$的M^1就是在实轴上去掉坐标原点。一个点是一个闭集，而M^1或者说$\mathbb{R}^1$是一个开集。一个

开集去掉一个子闭集还是一个开集。因此去掉坐标原点的实轴，也就是$GL(1,\mathbb{R})$仍然是一个开集，其实就是$(-\infty,0)\cup(0,\infty)$。这是两个流形的并，当然是一个流形。这两个流形$(-\infty,0)$和$(0,\infty)$明显是两个微分流形，它们的并当然是微分流形。只是$GL(1,\mathbb{R})$这个流形的拓扑与$\mathbb{R}^1$不同，它是不连通的。但它确实是一个微分流形，一个不连通的微分流形。

再来看一个例子：$GL(2,\mathbb{R})$。M^2就是$\mathbb{R}^{2^2}=\mathbb{R}^4$，就是四维欧氏空间。假设$M^2$的矩阵是

$$M=\begin{pmatrix} t & x \\ y & z \end{pmatrix}$$

行列式为零给出的就是

$$\det\begin{pmatrix} t & x \\ y & z \end{pmatrix}=tz-xy=0$$

我们知道$tz-xy=0$给出的就是$\mathbb{R}^4$中的一个三维超曲面，将$\mathbb{R}^4$分为不连通的两部分。由于这个三维超曲面在$\mathbb{R}^4$中是个闭集，所以去掉了这个超曲面的$\mathbb{R}^4$仍然是个开集，是个流形，是个微分流形。只是连通性变了。

这个结论很明显可以推广到更普遍的情况。那就是$GL(n,\mathbb{R})$，也就是去掉了$\det M=0$的M^n，是一个微分流形。只是它可能不再是连通的了。

去掉了$\det M=0$的M^n还剩下些什么

$GL(n,\mathbb{R})$就是去掉了$\det M=0$矩阵的M^n。那么去掉了$\det M=0$的矩阵之后还剩下些什么呢。

还是先看看$GL(1,\mathbb{R})$这个例子。去掉了$\det M=0$矩阵的M^1就是去掉了坐标原点的实轴。那么剩下的当然就是$\det M>0$的正实轴和$\det M<0$的负实轴。原来M^n被分成了两片。

普遍地，对$n\times n$矩阵来说，行列式$\det M$也是一个数。它在$(-\infty,\infty)$区间内取值。去掉了$\det M=0$的矩阵，剩下的当然就是$\det M>0$和$\det M<0$的矩阵了。这就是说，原来的M^n被按照行列式的正负分成了两片。它们是不连通的。也就是说去掉了$\det M=0$的矩阵后剩下的$GL(n,\mathbb{R})$就只是$\det M>0$和$\det M<0$的两种矩阵了。直观地看，它被分成两片了。

$GL(n,\mathbb{R})$的一些子集合

$GL(n,\mathbb{R})$是一个大集合，我们很自然地考虑它的子集合。尤其是我们已经看到，$GL(n,\mathbb{R})$是不连通的，它是由一些连通的片组成的。因此我们很自然地考虑这

些连通的部分，也就是它的这些连通的子集合。它们当然是微分流形。

$SL(n,\mathbb{R})$ 最简单地我们考虑

$$\det M > 0$$

$$\det M < 0$$

的两片。这当然没问题。但是由于矩阵经常被我们用来做变换，因此那些不改变大小的变换变得非常有意义。这些变换就是$\det M = 1$的变换。$\det M = 1$的矩阵当然构成$GL(n,\mathbb{R})$中的一个连通的片。我们把这些$\det M = 1$的矩阵构成的$GL(n,\mathbb{R})$的连通的子集叫做$SL(n,\mathbb{R})$，S在这里是特殊的意思。写清楚些就是

$$SL(n,\mathbb{R}) = \{M \in GL(n,\mathbb{R}) : \det M = 1\}$$

$O(n)$ 作为变换，那些保大小和形状的变换具有特殊意义。我们知道，保大小和形状就是要保任意两点的距离不变。如果我们采用Riemann度量，也就是正定二次型的度量。那么保长度的变换要满足（见群论讲义）

$$M\tilde{M} = 1$$

这样有

$$\det\left(M\tilde{M}\right) = \det M \det \tilde{M} = (\det M)^2 = 1$$

因此

$$\det M = \pm 1$$

可见$O(n)$是$GL(n,\mathbb{R})$的一个也不连通的子集合。写清楚些就是

$$O(n) = \left\{M \in GL(n,\mathbb{R}) : M\tilde{M} = 1\right\}$$

$SO(n)$ $O(n)$显然是在$GL(n,\mathbb{R})$的两个不连通的片中各取了$\det M = 1$和$\det M = -1$一部分。如果我们只关心一个连通的片，那么就只在$O(n)$中取$\det M = 1$的部分就可以了，我们把这部分叫做$SO(n)$。写清楚些就是

$$SO(n) = \left\{M \in GL(n,\mathbb{R}) : M\tilde{M} = 1, \det M = 1\right\}$$

或

$$SO(n) = O(n) \cap SL(n,\mathbb{R})$$

当然你也可以取$\det M = -1$的部分。我们后面会讨论这件事。

能在矩阵流形（M^n，$GL(n,\mathbb{R})$和$GL(n,\mathbb{R})$各种子集合）上附加群结构吗

这是个自然的问题，当然我们知道，构造一个拓扑群是困难的，不过在这里，能否附加群结构是不难看出来的。

M^n肯定不行。因为它包含了$\det M=0$的不可逆矩阵。

$GL(n,\mathbb{R})$可以，你可以自己试试证明这件事。

那么$GL(n,\mathbb{R})$的各种子集呢。

我们知道，$GL(n,\mathbb{R})$是去掉了$\det M=0$的矩阵，它被分成$\det M>0$和$\det M<0$两片。$\det M<0$的那片肯定不行，因为没有单位元（单位矩阵的行列式当然大于零）。你可以证明，$\det M>0$的那片可以附加群结构。

有了这些结果我们可以直接看出$O(n)$和$SO(n)$都可以附加群结构。

附加了群结构的$GL(n,\mathbb{R})$就是一般线性群。

能够附加群结构的$GL(n,\mathbb{R})$的子集合就是各种经典群。

30.6 复流形，Riemann面

30.6.1 复流形

前面我们还看到了一个为S^2建立两个复坐标系的例子，在这个例子中，变换函数是解析（全纯）的。如果这样，我们就得到了一个复流形。我们知道，解析的要求是非常苛刻的，因此具有一个复结构的流形是很少的。

我们已经看到，有了光滑流形的概念，很容易引入复流形的概念。一个光滑流形就是坐标卡之间的坐标变换函数是光滑函数。那么显然，如我们为这个流形建立的是复坐标卡，自然不同的复坐标卡之间的变换是一个复函数。按照定义实光滑流形的思路，很容易想到将

变换函数是复解析函数的流形定义为复解析流形。

复流形的一个我们熟悉的例子就是Riemann面。事实上，n-维复流形就是对Riemann面概念的推广。

30.6.2 Riemann面（回顾）

这只是对复变函数课中内容的一个回顾。回顾这件事一方面是将它作为复流形的一个例子。更重要的是为以后的群的多值表示做一些准备。

单值化：划分单值分支和引入Riemann面

Riemann面最初是Riemann为了将多值函数单值化而引入的。Weyl将它推广到任意复流形。

当我们第一次学习根式函数的时候我们就遇到了多值函数。也就是一个自变量对应两个函数值。当然我们知道，这种一对多的映射根本就不能算是一个函数。函数都是单值的，也就是一对一或多对一的映射。在函数的定义中之所以要去掉一对多的情况是为了避免

$$y = f(x) = \begin{cases} \sin x \\ \ln x \end{cases}$$

这种没有意义的情况。而且显然，在这种情况下你是无法处理微积分等任何有意义的运算（比如，你无法确定Δy是多少）。但是，如果一个函数的多值性是这个函数本身的一种有意义的属性我们就要想办法将这种多值性考虑进来。

可见，多值函数根本就不能作为函数，为此我们必须对它们进行单值化，也就是将它们改造成单值函数。

将多值函数改造成多值函数的方法有两种：一种是划分单值分支；另一种就是引入Riemann面。

划分单值分支 处理多值函数一个直接的办法是将一个多值函数分割成几个单值函数。也就是所谓的划分单值分支的办法。这个办法将一个n-值函数划分成n个独立的函数（如图(5a)）。

可以这样来做。一个多值函数就是一个一对多的函数。当然它的反函数是一个多对一的函数（这样的映射是可以作为函数的）。我们可以将这些一对多或多对一划分成几个一一映射的区域。这样的一一映射当然就是一个个单值函数了。这些被划分成一一映射的区域被称为单叶域。

我们以根式函数为例说明这个问题。

考虑函数

$$w^n = z$$

我们在极坐标表示中考虑：

$$w = \rho e^{i\varphi}$$

$$z = re^{i\theta}$$

由$w^n = z$有

$$\rho^n e^{in\varphi} = re^{i\theta}$$

于是

$$\rho^n = r$$
$$e^{in\varphi} = e^{i\theta}$$

这样

$$\rho = \sqrt[n]{r}$$
$$n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

因此

$$\varphi = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}$$

容易看出，当$k \geq n$时，将给出与k在$0 \sim n-1$之间取值时相同的值[3]。所以真正有意义的是

$$\varphi = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1.$$

这样我们就可以划分单叶域，如图(5a-1)。

w-平面中每一个扇形区域都是一个单叶域。w-平面每个扇形区域与整个z-平面区域都是一一映射的，也就是说，将z-平面映射到这样一个扇形区域的映射是一一映射，从而给出了一个函数。每个这样的扇形区域被我们称为一个单值分支，从一个扇形区域每进入下一个扇形区域就进入了一个新的分支。

用这种办法，我们将一个n-值函数变成了n个单值函数。

引入Riemann面 Riemann的办法是天才的。他看到，一个多值函数之所以是一对多的，是因为这个函数的定义域是复平面上的某一个区域的缘故。当自变量在这个区域中取值的时候，函数对每一个自变量都给出不止一个函数值。他的想法是，推广复平面的概念（类比前面推广$\mathbb{R}^n$的概念得到流形方式），引入一个由多层复平面粘在一起得到的空间。在这个新的空间上原来的多值函数是单值的了。显然，要做到这点，原来的函数如果是一个n-值函数，那么就要用n层复平面来粘这个空间，这个空间就是Riemann面。这样，在Riemann面这个推广的复平面上，一对多的映

[3]例如，在$n = 3$时

$$\frac{k}{n}2\pi = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi, \frac{2\pi}{3} + 2\pi, \frac{4\pi}{3} + 2\pi, 4\pi, \frac{2\pi}{3} + 4\pi, \frac{4\pi}{3} + 4\pi, 6\pi, \cdots$$

在$e^{i\varphi}$中等价于

$$\frac{k}{n}2\pi = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 0, \cdots$$

射变成了一对一的映射，函数变成单值的了。也就是说，通过引入Riemann面，可以将多值函数单值化。

仔细观察引入Riemann面的方式。对于一个n-值函数，就引入一个由n个复平面粘起来的Riemann面。我们知道，复平面（不是扩展的复平面）就是$\mathbb{R}^2$。因此，这个得到Riemann面的方式与将$\mathbb{R}^n$粘起来得到一个流形的方式是完全一样的。这就是说，Riemann面就是一个由$\mathbb{R}^2$粘起来的东西。由前面我们对流形的定义可以看出，Riemann面是一个流形，一个有复结构的特殊的流形。也可以说，Riemann面是一个由复平面粘起来的流形。由于在复函数中我们感兴趣的是解析函数，所以对这类流形我们更关注解析流形的情况。

下面我们再稍微仔细地看一下Riemann面。

引入Riemann面的最初动机就是将多值函数单值化。Riemann则直接推广复平面上区域的概念。他为一个n-值函数$w=f(z)$准备了一个n层的'复平面'。这样原来定义域（也就是z-平面）上的每个z都变成了n个z。原来一个z对应n个w，现在变成了，一n个z对应n个w。于是，函数又变成一对一的了。粗略地说，Riemann面就是针对n-值函数，将原来的一层复平面变成了n层，从而获得了n倍的自变量，使一对多映射变成了一对一映射。达到了单值化的目的。

支点和割线

那么Riemann面究竟是什么样的面呢。它显然不能是单摆浮搁的n层复平面，因为我们的自变量是连续取值的。我们必须把这n层复平面复平面由某种方式连接起来，或者说粘起来。怎么粘呢，我们以$w=\sqrt{z}$为例研究一下这件事。由于我们根本不可能将一个复函数画出来（那需要四维），我们只画出实函数$y^2=x$的情况，可以看到，一个自变量x对应两个函数值y。复函数的事由你自己想象（如图30.10）。观察一下图30.10。我们看到，虽然$y^2=x$是一个多值函数，但是其实并不是每一个自变量x都对应两个y值。其实x_1点只对应一个函数值，x_1以外的点都是一对多的。这就是说，一个多值函数并不是每个点都是多值的，也有一些是单值的。显然，当我们将一层复平面'揭开'成n层复平面的时候，这个单值的点是'揭不开'，就是说它应该是不同层共有的点。这n层复平面其实就在这一点上粘起来。这个点我们叫它支点，这是因为，我们把Riemann面的每层都叫做一个分支（这是由前面划分单值分支的方法中起的名字）。也就是说，支点，也就是那些不同层的面共有的点，是连接不同层Riemann面的点。

我们可以将这个结论推得更广些。

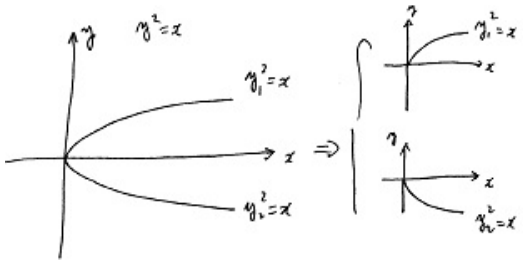


图 30.10: 一个自变量对应两个函数值

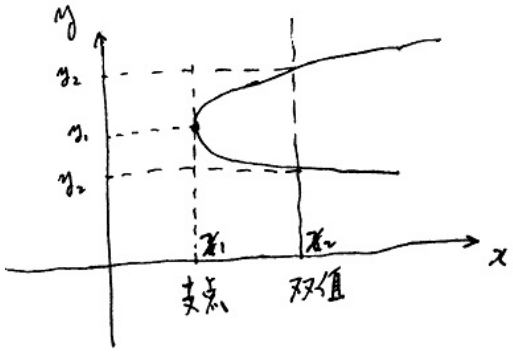


图 30.11: 多值函数

一个n-值函数（n也可以是无穷），如果某些点是m-值的（$m < n$），那么这些点就是支点。

我们再来仔细看看支点。

仍以$w^2 = z$为例。开方可以得到$w = \pm\sqrt{z}$。可以看到，对$z \neq 0$的点，每一个z都对应两个w值，也就是$\pm\sqrt{z}$。但是，对$z = 0$这个点，一个z对应一个w值。按照前面定义，$z = 0$就是支点。我们任取两条闭路径，路径Γ_1不绕过支点$z = 0$，路径Γ_2绕过$z = 0$，（如图30.12）。

先来看看自变量z沿着两条路径走一圈的变化：

$$\Gamma_1 : z = re^{i\theta} \to re^{i\theta}$$
$$\Gamma_2 : z = re^{i\theta} \to re^{i(\theta+2\pi)}$$

由此我们可以得到w沿着两条路径走一圈的变化：

$$\Gamma_1 : w = re^{i\frac{\theta}{2}} \to \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$$
$$\Gamma_2 : z = re^{i\frac{\theta}{2}} \to \sqrt{r}e^{i\frac{\theta+2\pi}{2}}$$

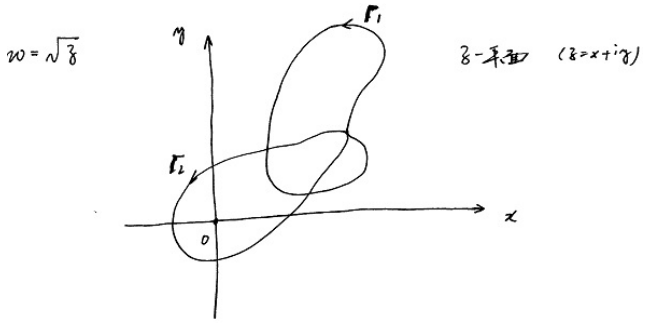


图 30.12: Γ_1 :不绕支点的路径；Γ_2 :绕支点的路径

可见，如果闭合路径不包含支点，那么绕行一圈后函数w没有变化，但是如果闭合路径包含了支点，那么绕行一圈后函数w的幅角变化$\frac{2\pi}{n}$（在这里是$\frac{2\pi}{2}$）。这就意味着，绕行支点一周后，进入了下一分支。

这个结果是普遍的：

绕行支点一周就会进入下一个分支。

如果一个点是支点，那么绕它一圈就会就会进入下一分支，这也是这种点被称为支点的原因。

前面，我们以根式函数$w^2 = z$为例讨论了支点。不过前面我们只讨论了这个函数的一个支点，其实这个函数还有一个支点

$$z = \infty.$$

如何判断支点我们后面再讲。

我们已经看到，绕支点一周就会进入下一个分支。如果我们只在一个单值分支中考虑问题，我们必须限制自己不要绕支点一周，这样做的最直接方式就是用一条线将两个支点连起来，比如在$w^2 = z$的情况中就是用一条线将支点$z = 0$与支点$z = \infty$连接起来。这样如果不切割割线，就没有哪条路径可以绕这两个支点中任何一个支点一周了,如图（30.13）。

考虑一个更普遍些的函数

$$w = \sqrt{(z-a)(z-b)}$$

它有两个支点$z = a$和$z = b$，那么割线就是连接这两个点的一条线，倒不一定非得是直线（如图30.14）。如果绕支点，比如$z = a$一周，按照前面的分析，w的幅角将改变$\frac{2\pi}{n}$，这里$n = 2$，也就是改变π。如果我们的闭合路径包含支点又不切割割

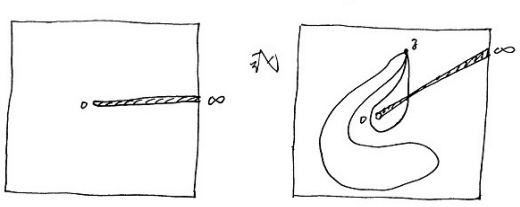


图 30.13: $w=\sqrt{z}$的支点（$z=0$和$z=\infty$）和割线

线，那么只能将两个支点同时包含进去，如图5e。这样，这个闭合路径绕两个支点a和b各一周。于是幅角的改变将是$\frac{2\pi}{n}+\frac{2\pi}{n}=\frac{4\pi}{n}\overset{n=2}{=}2\pi$。这就是说，$w$的幅角改变$2\pi$，也就是没有改变，即没有进入另一个分支。

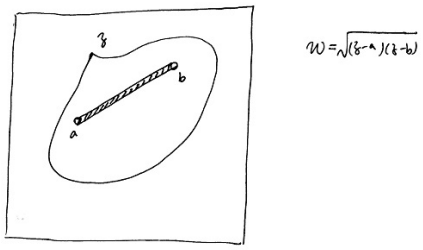


图 30.14: $w=\sqrt{(z-a)(z-b)}$的支点和割线

总结前面的结果我们得到结论，

如果路径切割割线就进入下一个分支；如果不切割割线（即使闭合路径包含支点）也不会进入下一个分支。

当然，所有这一切都依赖于支点和割线的确定。下面我们通过例子讨论一下如何确定支点和割线。

支点和割线举例： $w=\sqrt[n]{P_m(z)}$

我们只考虑根式函数

$$w=\sqrt[n]{P_m(z)}$$

的情况，这里$P_m(z)$是一个m次多项式，它当然可以用它的零点表示成

$$P_m(z)=(z-a_1)^{m_1}(z-a_2)^{m_2}(z-a_3)^{m_3}\cdots$$

其中m_1，m_2和m_3是$P_m(z)$零点的重数，满足

$$m_1+m_2+m_3\cdots=m$$

我们只是不加证明地给出结果。

$w=\sqrt[n]{P_m(z)}$显然是一个n值函数。前面说过，如果哪个z对应的w少于n个，那么这个点就是支点。显然，$P_m(z)$的零点符合这样的条件（对比前面讨论过的$w=\sqrt{z}$的情况，$z=0$是单值，其它都是二值），∞也符合这样的条件。这就是说

$$P_m(z)\text{的零点和}\infty\text{都可能是支点。}$$

那么究竟哪个是支点呢，我们有以下结论：

- 如果$\frac{m_i}{n}$不是整数，那么a_i就是支点；
- 如果$\frac{m}{n}$不是整数，那么∞就是支点。

确定了支点，下面的问题就是确定割线。割线是支点的连线，但是将哪些支点连在一起好呢。我们有以下结论：

- 如果$\frac{m_i+m_j+\cdots+m_k}{n}$是整数，那么$a_i$，$a_j$，$\cdots$，$a_k$的连线就是割线。

看一个更具体的小例子吧：

$$w=\sqrt{z^3-1}.$$

割线的候选者是z^3-1的根和∞。即

$$1,e^{i\frac{2\pi}{3}},e^{-i\frac{2\pi}{3}},\infty.$$

这里没有重根，因此$\frac{m_a}{n}=\frac{1}{3}$不是整数。因此$z^3-1$的根$1,e^{i\frac{2\pi}{3}},e^{-i\frac{2\pi}{3}}$都是支点。

此外，$\frac{m}{n}=\frac{3}{2}$不是整数。因此∞也是支点。

这个函数一共有4个支点。下面我们来画割线。由于这里没有重根，每个根的重数都是一重，所以凑$\frac{m_i+m_j+\cdots+m_k}{n}=\frac{m_i+m_j+\cdots+m_k}{2}$是整数的情况非常直接。只有$\frac{1+1}{2}=1$是整数的情况。三个根的重数都是1，所以随便在三个根里找两个就可以，比如1和$e^{i\frac{2\pi}{3}}$，将它们连起来作为一条割线。然后再把剩下的$e^{-i\frac{2\pi}{3}}$和∞连起来作为另一条割线，如图（30.15）。

当然，也可以选，比如$e^{i\frac{2\pi}{3}}$和$e^{-i\frac{2\pi}{3}}$与1和∞的组合，这样割线如图（30.16）。

从图中可以看到，这两种割线的选择是不影响拓扑性质的。普遍地我们有

支点和割线的数量是由函数性质决定的，是函数的整体，也就是拓扑，性质。割线的选择不影响拓扑性质。

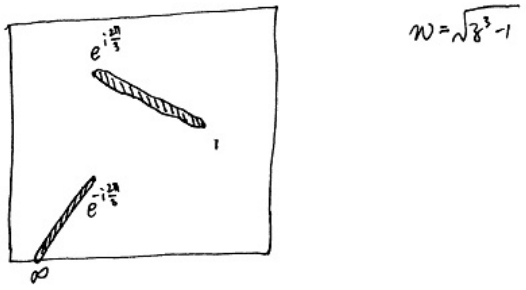


图 30.15: $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$和∞连起来作为割线

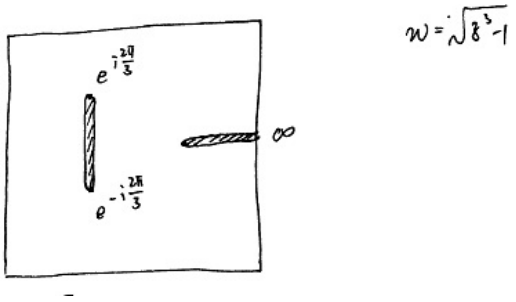


图 30.16: $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$和$e^{-i\frac{2\pi}{3}}$与1和∞的组合

紧Riemann面

扩充的复平面：Riemann球 扩充的复平面就是复平面加上一个无穷远点；或者说，扩充复平面就是紧化了的复平面。这就是说，从拓扑上讲复平面和扩充的复平面是不同的。复平面是$\mathbb{R}^2$，而扩充的复平面是S^2。换句话说，

复平面是一个平面，扩充复平面是一个球面。

这就是说，扩充复平面是紧的，是一个紧Riemann面。

需要强调的是，所谓用复平面粘成一个Riemann面，其实我们做的经常是用Riemann球，也就是扩充复平面粘成Riemann面。

一条割线的情况：$w=\sqrt{z}$，球面 下面我们来看几个稍微不平庸的例子。

我们已经看到，有几条割线其实确定了Riemann面的拓扑性质。以$w=\sqrt{z}$为例我们来看一下具体的Riemann面。画Riemann面的关键注意不同分支之间的联系，割线就是两个分支间的门槛。

$w=\sqrt{z}$是二值的，有两个分支。按照前面的分析，割线是0到∞的射线。通过割线时就进入下一支，或者说，进入下一层Riemann面。Riemann面可以示意性地

画成图（30.17）中的样子。

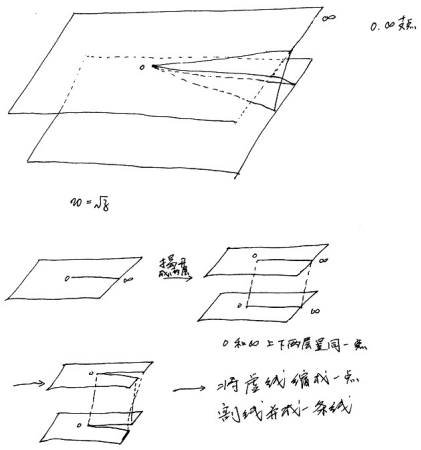


图 30.17: $w=\sqrt{z}$的Riemann面

但是我们知道我们考虑复函数其实是在扩充复平面上：

$$\text{复平面}+\infty=\text{扩充复平面}$$

扩充复平面其实是一个将∞看作是一个点，也就是紧化了之后得到空间。我们知道，做了这个紧化以后，复平面变成了Riemann球，这是我们接触的第一个Riemann面。

所以图（30.17）中的Riemann面只有在紧化以后才是我们真正的想要的。我们下面做这个紧化，如图（30.18）。可以看到，$w=\sqrt{z}$的Riemann面是一个球面S^2。

两条割线的情况：$w=\sqrt{z^3-1}$，轮胎面 由前面的分析我们已经看到，$w=\sqrt{z^3-1}$有两条割线，如图如图（30.15）或（30.16）。由于是二次根式，它也是双值的。按照前面的原则我们可以直接画出它的Riemann面，如图（30.19）。

可以看到，从拓扑的角度讲，支点间谁和谁连成割线，只要满足了基本要求，还是很任意的，不会影响拓扑性质。

紧Riemann面上的复函数

前面我们举的例子都是紧Riemann面的例子。

Riemann球就是一个最简单的紧Riemann面的例子。我们又看到另外两个根式函数的Riemann面都是紧的。紧Riemann面使我们特别关心的，关于紧Riemann面我们不加证明地给出以下几个结论：

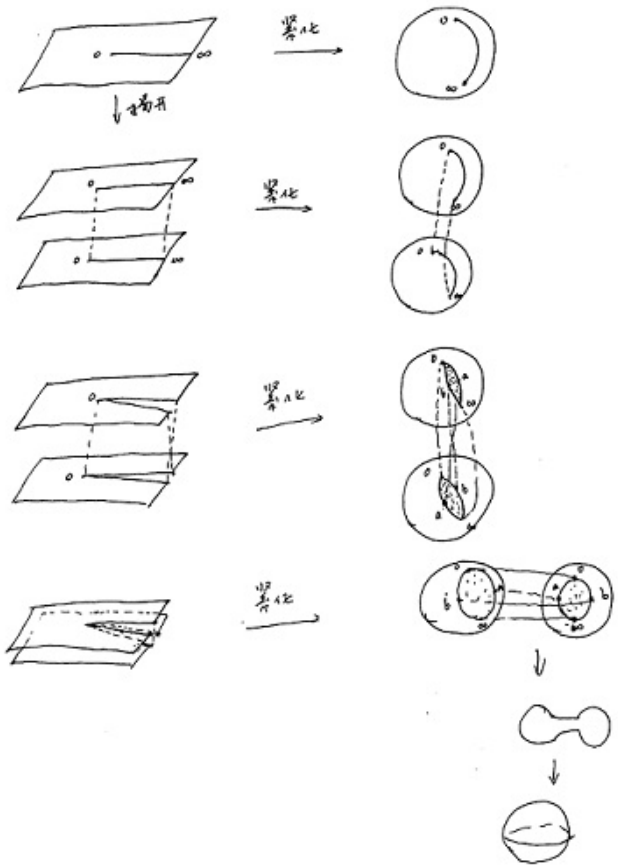


图 30.18: 紧化的$w = \sqrt{z}$的Riemann面

- 代数函数的Riemann面都是紧的。
- 在Riemann面上奇点都是极点的函数都是有理函数。

这一条的逆命题倒是不难理解：有理函数的奇点都是极点。此外还有，

- Riemann球面上的解析函数是常数。

这一结论就是我们在复变函数课中接触到的复平面上的解析函数为常数的那个结论。我们还有比这更普遍的结论：

- 紧Riemann面上的解析函数是常数。

注意，我们感兴趣的其实并不是Riemann面上的解析函数，而是有奇点的函数，尤其是亚纯函数。

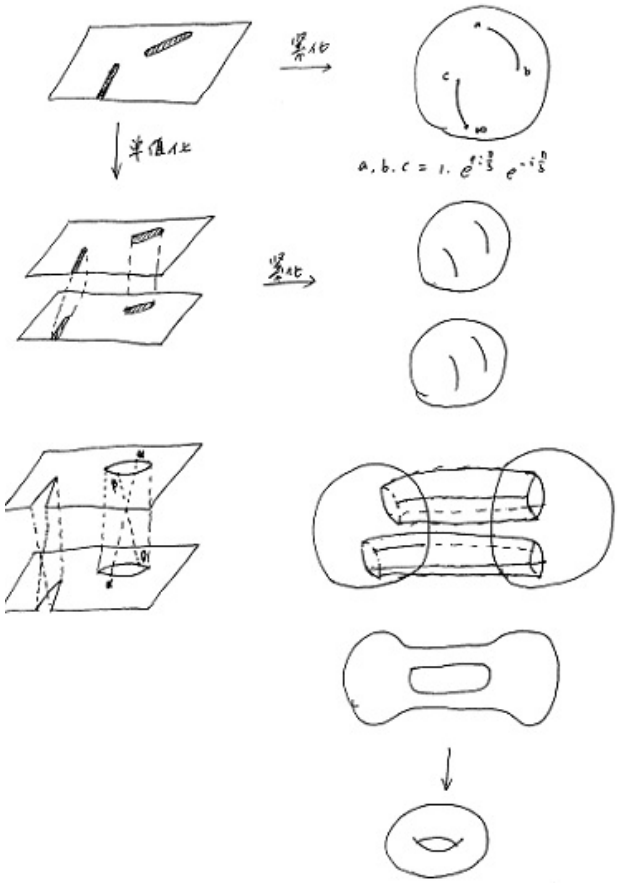


图 30.19: $w=\sqrt{z^3-1}$的Riemann面

函数的整体性质：奇点，割线，Riemann面的拓扑

当面对一个函数的时候，我们以前更注重一个函数的各种局部性质，比如某点的曲率什么的；研究方法往往是，比如Taylor展开。

但是函数还有更有趣的性质，整体性质。比如在$x=0$附近，函数

$$y=\sin x|_{x\to 0}\sim x$$

和

$$y=x$$

是完全一样的，如图(30.20)。但是，它们的整体性质显然不同，$y=\sin x$有无穷多个零点（如果你考虑的是它的倒数就是无穷多个奇点），是一个周期函数。而$y=x$则是单调的，只有一个零点。

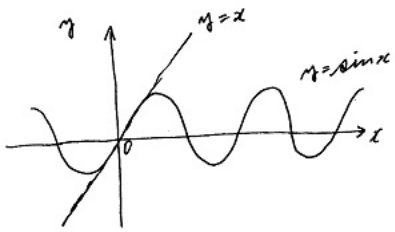


图 30.20: $y=\sin x$和$y=x$

这一点我们在讨论流形的时候早有体会：流形的局部都是$\mathbb{R}^n$，但是把许多$\mathbb{R}^n$粘起来就是另外一回事了。这里的这个例子也演示了这一点：$y=\sin x$和$y=x$都是一个一维流形，在任何局部都象$\mathbb{R}^1$。但是，$y=\sin x$整体不再是$\mathbb{R}^1$，而$y=x$自己就是$\mathbb{R}^1$。

前面Riemann面的例子已经告诉我们，一个函数整体性质可以由这个函数的Riemann面的拓扑性质反映。而Riemann面的拓扑性质，从前面构造的角度说，取决于割线。不同的割线给出不同的粘贴方式（或者说，不同的割线，给出不同的商空间），而割线则完全取决于函数的支点。我们知道，支点一定是奇点，因为在支点附近是没有导数的：此时导数与路径有关。我们会发现，

函数的整体性质其实是有它的奇点决定的。

这是一个非常深刻的结果。它告诉我们，对一个很难求出的函数，分析它的奇点（这经常是相对容易的），就会对这个函数了解很多，因为奇点反映的是这个函数的整体性质。

我们会看到，一个多值函数会有一个自己的Riemann面。我们可以证明Riemann面是可定向的。由于Riemann面是一维复线，因而是二维实曲面。从拓扑上我们已经完全弄清了二维曲面的拓扑分类。所有可定向的紧二维曲面都拓扑等价于带有若干个环柄的曲面如图（30.21）。环柄的个数成为亏格。（顺便说一下，所有二维不可定向曲面都拓扑等价于一个面上粘不同数量的Möbius带）。

将一个代数曲线与一个紧曲面联系起来是一个非常深刻有力的研究方法。这一方法始于Riemann。

30.7 商空间

在《群论》的第一章中我们已经讲了商空间的概念。这里先复习一下，然后讨论一些有意义的例子。

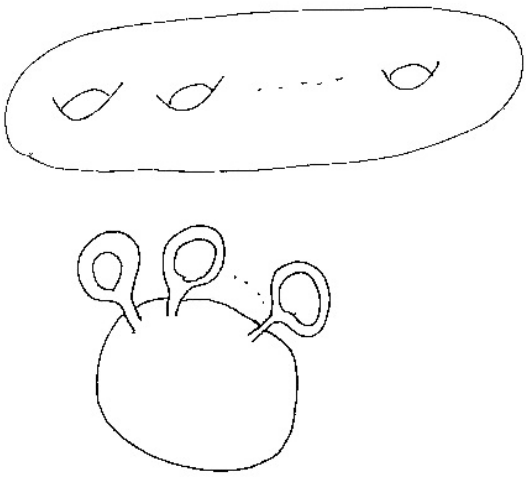


图 30.21: 紧二维曲面拓扑等价于带有若干个环柄的曲面

求一个集合的商，就是对我们在数的四则运算中求一个数的商的概念的推广。

求商的过程就是压缩的过程。所谓压缩，就是将集合中的几个元素压缩成一个元素。具体讲就是先将集合中的元素分组，然后在每组中任选一个代表元素组成一个新的集合，这个新的集合就是原来集合的商。显然，作为商的集合比原来小了。

不难发现，求商的问题的关键是如何分组。不同的分组会给出不同的商。比如，一个数除以2，就是分成两个一组，每组取一个，组成新的数。结果自然就是，比如，2/2就是1，4/2就是2。

为此我们要讨论一下如何分组的问题。

30.7.1 等价，等价类

求商是一个粗粒化的过程。它将具有某种共同特征的元素分在一组，然后任取其中一个组成新的集合。比如，考虑一个人的集合。一个人有几乎无数的特征，完全相同的两个人是没有的。但是在某一个特征上相同的人是很多的。比如，按照性别，人可以被分成两组：男和女；按照年龄人可以被分成一百多组：一岁一组；按照民族，分成几百组；按照国籍，分成二百多组，等等。这种分组的原则就是，分在一个组的人在你关心的某一个特征上是彼此完全相同的。于是，世界上所有的人这个有六十多亿个元素的集合，对性别这种等价关系求得的商就是一男一女两人人组成的集合，这两个人是从世界上所有男人和女人中任取的；对民族这种等价关系求得的商就是一个几百人组成的集合，每个民族选一个代表；对国籍这种等价关系求得的商，就是一个二百多人的集合，每个国家出一个人，等等。

现在我们的问题就是定义相同，或者说等价了。

等价关系是一种特殊的关系，我们用‘∼’表示关系。等价关系被定义为满足

1. 反身性：$a \sim a$；

2. 对称性：如$a \sim b$，则$b \sim a$；

3. 传递性：如$a \sim b$，$b \sim c$，则$a \sim c$，

的关系。如果两个元素间满足这种关系，那么这两个元素就在这种关系下等价。所有等价的元素构成的集合就被称为一个等价类。

30.7.2 商，商空间

这样我们就知道了，求商的过程就是一个按等价类压缩的过程。

将一个集合M按照一个等价类∼压缩，也就是求商，我们记作

$$Q = M/\sim .$$

称作模掉一个等价类∼。

例如，我们有一个集合

$$M = \{a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_m, c_1, \cdots, c_l, \cdots\}$$

按照某一个等价关系∼将它分组，

$$\{[a_1, \cdots, a_n], [b_1, \cdots, b_m], [c_1, \cdots, c_l], \cdots\}$$

每一个等价类中任取一个代表元素组成一个新的集合，得到了一个商集合：

$$M/\sim = \{a_i, b_j, c_k, \cdots\}$$

30.7.3 一些结论和一些例子

来看几个具体的求商的一些结论和例子。后面我们将给出更多的例子。

注意，求商的最关键的地方是指明等价关系。（注：下面的等号是同胚的意思）

周期

周期的意思是说，经过某一给定间隔的点都是等价的。

我们先考虑一维的情况。

$$x \sim x + a$$

这里a就是一个周期。就是说任意一点x和与它间隔距离a的点是等价的，或者索性说，就是一个点。显然，如果将实轴上间隔a的点都看作是一个点，那么实轴其实就是一个周长为a的一个圆，如图（30.22）。

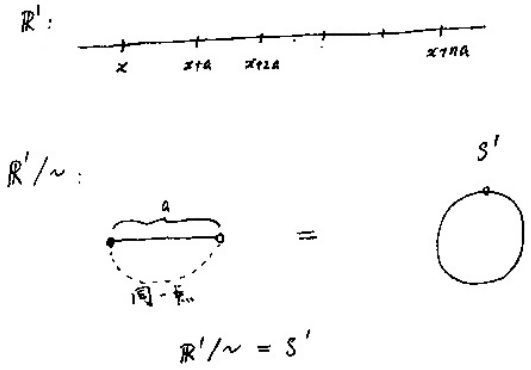


图 30.22:

也就是说：

$$\mathbb{R}^1/\sim = S^1$$

二维情况也可以同样考虑。如果在$\mathbb{R}^2$上我们要求

$$x \sim x + a$$

这里a是x方向上的周期。这就是说x方向是一个周长为a的圆，如图（30.23），

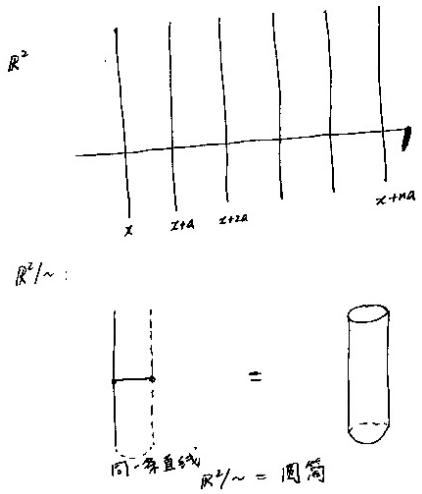


图 30.23:

也就是说，

$$\mathbb{R}^2/\sim = \text{圆筒}$$

如果在$\mathbb{R}^2$上我们要求

$$x \sim x + a$$
$$y \sim y + b$$

这里a和b分别是x和y方向上的周期。这就是说x方向是一个周长为a的圆，y方向是一个周长为b的圆，如图（30.24），

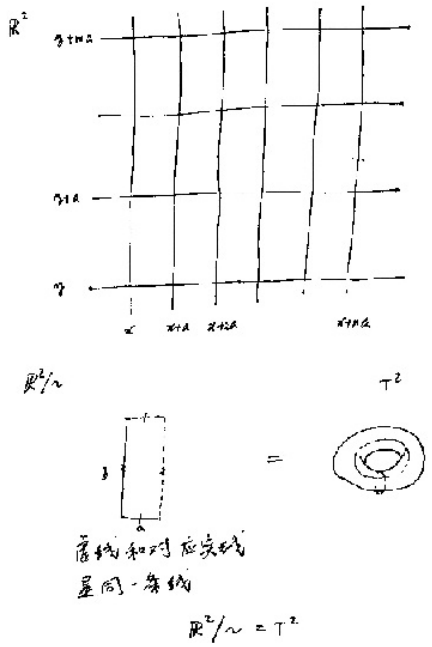


图 30.24:

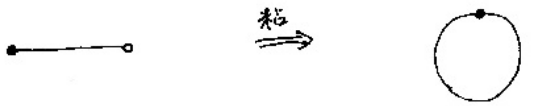
也就是说

$$\mathbb{R}^2/\sim = T^2$$

这是一个轮胎面。容易想象更高维的情况。

拓扑中的'粘'

我们已经不止一次地用到粘的概念，那么粘在一起是什么意思呢。粘在一起就是将重叠的点看作是等价的点，或者说是同一个点。也就是说，粘在一起，就是模掉一个等价关系。比如，一条线段，如果我们认为它的两个端点是等价的，那么就相当于将它的两个端点粘在一起，这样就得到了一个圆环，如图（30.25(a)）。再比如，一个矩形，如果我们认为它的对边等价，我们就得到了一个轮胎面，如图（30.25(b)）但是，如果我们认为一个矩形两条对边的中心对称的点等价，那么粘起这两条边就得到了Möbius带，如图（30.25(c)）。如果我们再将另外两个边轴对称点也粘上，那么得到的就是Klein瓶，如图（30.25(d)）。如果我们把矩形的两个对边的中心对称的点都沾上，那么我们得到的就是射影平面$\mathbb{R}P^2$，如图（30.25(e)）。如果将这个矩形的四条边上的所有点都认为是等价的，也就是将所有这些点粘在一起，那么我们得到的就是一个球面，如图（30.25(f)）；其实扩充复平面就是这样得到的。



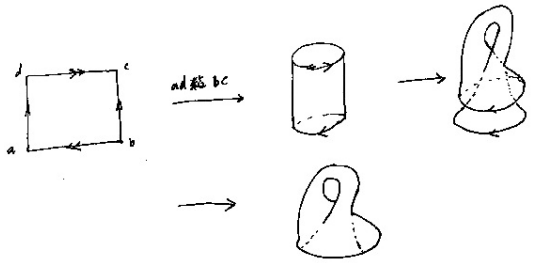
(a)



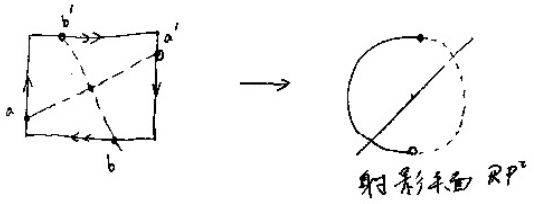
(b)



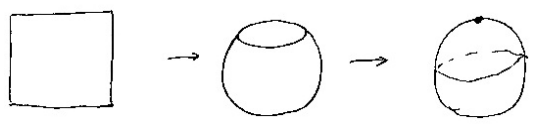
(c)



(d)



(e)



(f)

图 30.25:

在粘矩形的各个边的时候，我们得到了一些紧的空间，如轮胎面，球面。也就是说，我们实际上是对$\mathbb{R}^2$进行了紧化。

当然，你可以用这种办法粘出各种东西。

实射影空间$\mathbb{R}P^n$

所谓对一个集合求商，就是将集合中的一些元素看作是等价的，也就是一个元素。$\mathbb{R}P^n$是这样的一个稍微抽象些的例子。

如果我们将过原点的直线上的所有点都看作是一个点，也就是看作是等价的，那么我们得到的就是$\mathbb{R}P^n$。

可以看到，模掉一个过原点的直线就是只保留方向（具体讲是方位，不区分直线的两个方向）而不关心长度。也就是说，$\mathbb{R}P^n$是一个将过一个点的直线的方向看作是一个点得到的空间。或者说，$\mathbb{R}P^n$是一个只关心取向而不关心长度的空间。

球面模掉（粘起）对径点：$\mathbb{R}P^n = S^n/\sim$ 既然是将一条直线上的点都看作是一个点，那么这条直线上有两个点还是无穷多个点都是一样的。我们先来看看将一个球面的对径点粘起来是什么。

$\mathbb{R}P^1$ 我们先考虑最简单情况，将一个圆环S^1的对径点粘起来的情况，如图（30.26）。这里的等价关系就是对径点等价。我们有

$$\mathbb{R}P^1 = S^1/\sim = S^1 = S^1/\mathbb{Z}_2.$$

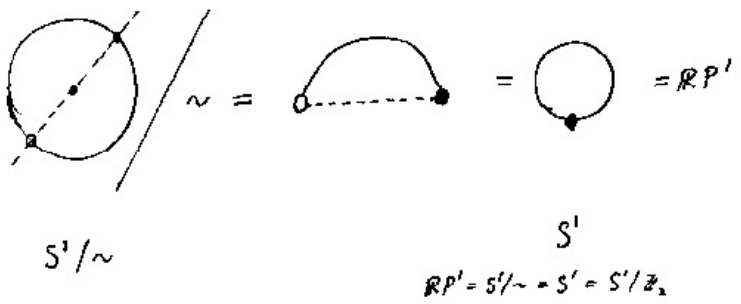


图 30.26:

$\mathbb{R}P^2$　同样，我们考虑将一个球面的对径点粘起来，这样我们就得到了一个去掉了半个赤道的上半球面，如图（30.27）。这就是$\mathbb{R}P^2$。拓扑地看，这等价于去掉半个周长的圆盘。

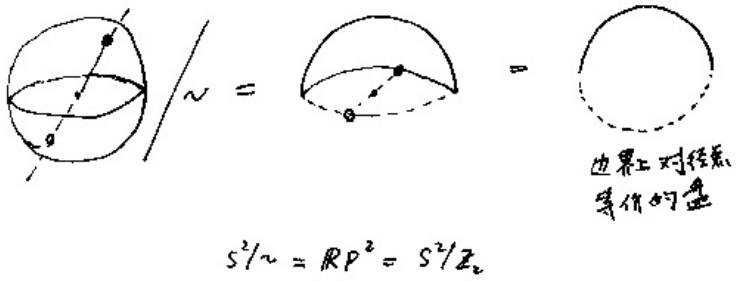


图 30.27:

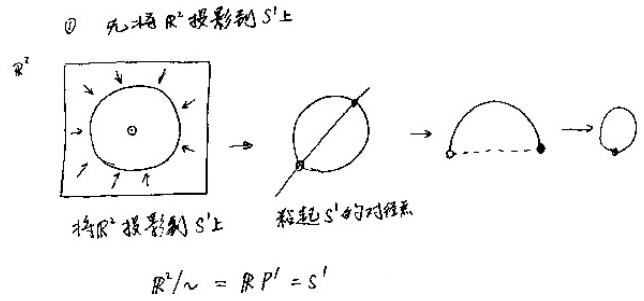
由球面得到$\mathbb{R}P^2$的方式就是将球面上的两个点看作是一个点，因此我们有

$$\mathbb{R}P^2 = S^2/\sim .$$

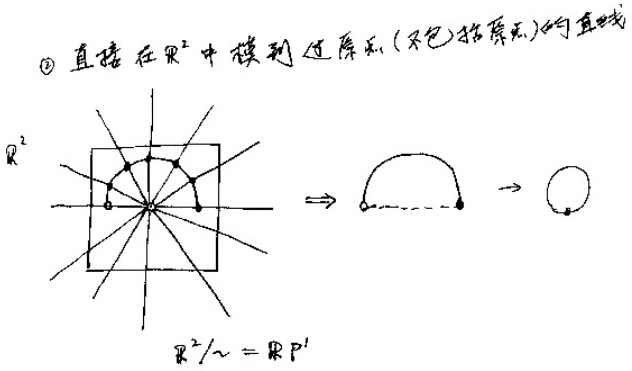
$\mathbb{R}P^n$　前面的结论可以推广到将n-维球面的对径点粘起来得到$\mathbb{R}P^n$。我们有

$$\mathbb{R}P^n = S^n/\sim .$$

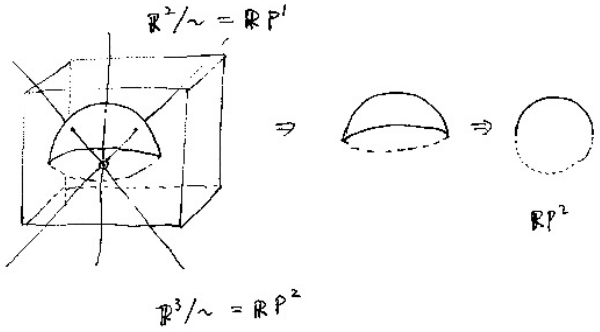
$\mathbb{R}^n$模掉过原点直线：$\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}^n/\sim$　很容易看到，球面模掉对径点与在$\mathbb{R}^n$中模掉过原点（但不包含原点）的直线是完全等价的。这相当于先将$\mathbb{R}^{n+1}$投影到球面S^n上，再将球面的对径点粘起来。



(a)



(b)



(c)

图 30.28:

在图（30.28(a)），图（30.28(b)）和图（30.28(c)）中我们演示了这一得到$\mathbb{R}^2$和$\mathbb{R}^3$的过程。我们采用了两种方式得到$\mathbb{R}P^n$，一种是将$\mathbb{R}^n$投影到一个球面S^n上，再由S^n用前面的办法得到$\mathbb{R}P^n$。还有就是直接在$\mathbb{R}^n$中模掉直线。我们用这两种方式，图（30.28(a)）和图（30.28(b)），演示了$\mathbb{R}P^2 = \mathbb{R}^2/\sim$。在图（30.28(c)）中演

示了$\mathbb{R}P^3 = \mathbb{R}^3/\sim$。我们可以得到普遍的结论

$$\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}^n/\sim .$$

$\mathbb{R}P^n$是一个流形 前面我们通过商空间的方式定义了$\mathbb{R}P^n$，但是这种方式只是定义了商空间的拓扑，并没有说明它是一个流形。我们还要按照前面流形的定义证明它是一个流形。

其实$\mathbb{R}P^n$是一个流形是容易看出的。在前面，图（30.25(e)），我们已经看到$\mathbb{R}P^n$是$\mathbb{R}^{n+1}$模掉一些流形（直线）得到的。这样得到的东西是流形当然是不奇怪的。

所谓证明一个拓扑空间是一个流形，就是将它用一系列的$\mathbb{R}^n$覆盖，或者说证明它局部确实象$\mathbb{R}^n$。

$\mathbb{R}P^n$是一个抽象的空间，我们先以比较直观的$\mathbb{R}P^1$为例。

我们将S^1的对径点粘起来得到$\mathbb{R}P^1$，这是一个两个端点等价的半圆。由于这两个端点等价，我们不能用一个$\mathbb{R}^1$去覆盖它（别忘了，$\mathbb{R}P^1$就是S^1）。最直接的想法显然是用两个角度θ_1和θ_2来刻画这个半圆。这当然是最好的。但是由于我们要考虑的是普遍的$\mathbb{R}P^n$，那时候没有这么直观的，因此我们要做得更好些。我们要想到，$\mathbb{R}P^n$是由$\mathbb{R}^{n+1}$模掉一条直线得到的。因此最好将$\mathbb{R}P^n$与$\mathbb{R}^{n+1}$联系起来。 如图

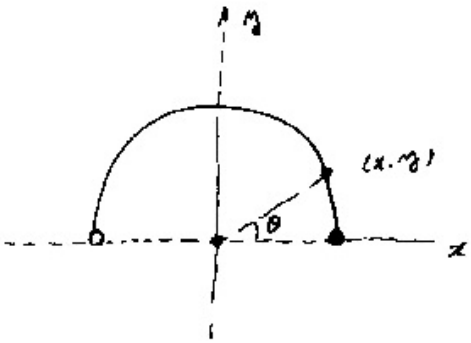


图 30.29:

(30.29)，$\mathbb{R}P^1$嵌在$\mathbb{R}^2$中每个点有一个自然的坐标(x, y)，但是这两个坐标不独立。我们前面选择的一个参数θ才是独立的。我们只需将(x, y)与θ联系起来就是了。这个联系是自然的。比如选（记住我们要选两组）

$$\tan\theta_1 = \frac{y}{x}.$$

我们知道，$\arctan\theta_1$不能同时覆盖半圆的两个端点（它不能对付$x=0$的情况），我们不妨选另一组坐标为

$$\cot\theta_2=\frac{x}{y}.$$

这组坐标可以覆盖$x=0$，但不能覆盖$y=0$。两组坐标在一起正好覆盖了整个$\mathbb{R}P^1$。这就是说，对$\mathbb{R}P^1$我们可以选择这样建立两套坐标：

$$\left(\theta_1=\arctan\frac{y}{x}\right),\left(\theta_1=\operatorname{arccot}\frac{x}{y}\right).$$

即

$$\begin{aligned}\varphi_a(x,y):\tan\theta_1&=\frac{y}{x},\\ \varphi_b(x,y):\cot\theta_2&=\frac{x}{y}.\end{aligned}$$

坐标变换

$$\varphi_a^{-1}(x,y):y=x\tan\theta_1.$$

$$\varphi_b\circ\varphi_a^{-1}:\tan\theta_2=\frac{x}{y}\bigg|_{y=x\tan\theta_1}=\frac{x}{x\tan\theta_1}=\frac{1}{\tan\theta_1}$$

于是有

$$\varphi_b\circ\varphi_a^{-1}:\theta_2=\arctan\frac{1}{\tan\theta_1}=\arctan(\cot\theta_1)=\frac{\pi}{2}-\theta_1.$$

这个变换当然是可微的，所以$\mathbb{R}P^1$是微分流形。

下面我们给出另一个更容易推广到高维的证明。

为流形建立坐标系的关键就是找一个流形的局部到$\mathbb{R}^n$的映射，什么映射都行。前面我们找了一个映射，这里我们再找一个。

还是以$\mathbb{R}P^1$为例：

$\mathbb{R}P^1$就是将$\mathbb{R}^2$中的任意一条过原点（不包括原点）的直线等价为一个点。我们在$\mathbb{R}^2$中随便画一条不过原点的直线，不失一般性，我们将这条直线选做垂直于x-轴（如图30.30）。这样除去与它平行的直线外的所有的直线都与这条直线有一个交点。索性就将这个交点当作是那个模掉等价关系后的点就是了，或者说就做这样的一个$\mathbb{R}P^1$到$\mathbb{R}^1$的映射好了。 垂直于x-轴的线上的x坐标都是一样的，区别只是y坐标。这样我们其实就有了一个一维的坐标。其实就是这条直线上点的y坐标，写为

$$(y)$$

。现在我们要做的就是找一个映射$\varphi_a(x,y):(x,y)\to(y)$。这个映射的关键是降一维，方式是只取直线上点的纵坐标

$$\varphi_a(x,y):\underset{-}{\left(x',y'\right)}=\frac{(x,y)}{x}\to\left(1,\frac{y}{x}\right)$$

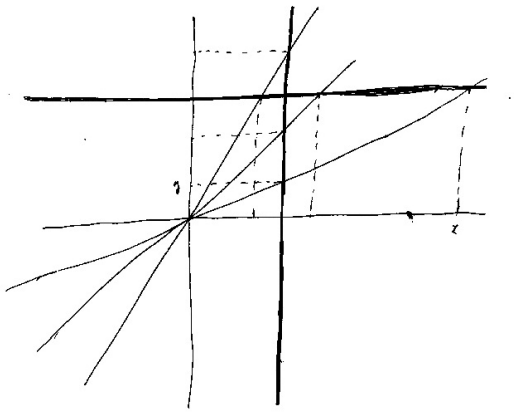


图 30.30:

这样，其中一个坐标轴退化为常数1，相当于没有坐标。即$\left(1,\frac{y}{x}\right)$就是$\left(\frac{y}{x}\right)$。这里我们用$\underline{x'}$表示去掉其中$\frac{x}{x}=1$这样的没有任何信息的坐标。

但是我们知道，不管怎样画这条直线，都会有一条直线与这条直线平行。因此总有一个$\mathbb{R}P^1$中的点在我们这里是表示不出来的。这就是说，一条直线，也就是一个$\mathbb{R}^1$是覆盖不了$\mathbb{RP}^1$的。为此我们必须引入另一个坐标卡。只要画出另一条不与这条直线平行的直线就可以了。最方便的显然是再取一条平行于x轴直线。显然这时的坐标是

$$(x)$$

映射$\varphi_b\left(x,y\right):(x,y)\to(x)$是

$$\varphi_b\left(x,y\right):\left(x',\underline{y'}\right)=\frac{(x,y)}{y}\to\left(\frac{x}{y},1\right).$$

可以直接得到

$$\varphi_a^{-1}\left(\left(1,\frac{y}{x}\right)\right)=\left(1,\frac{y}{x}\right)x=(x,y)\,.$$

于是有

$$\begin{aligned}\varphi_b\circ\varphi_a^{-1}&=\left.\frac{(x,y)}{y}\right|_{((x,y))=\left(1,\frac{y}{x}\right)x}\\&=\left(1,\frac{y}{x}\right)\frac{x}{y}.\end{aligned}$$

即变换是乘上$\frac{x}{y}$。这是个直观的结果。我们得到一组坐标的方式是除以x，得到另一组坐标的方式是除以y。自然，这两组变换之间的关系是先乘一个坐标恢复成$\mathbb{R}^2$中的情况，再除以另一个坐标了得到新的坐标。

这个处理很容易推广到$\mathbb{R}P^n$。

前面的结果已经启发我们，对$\mathbb{R}P^n$我们可以首先将它嵌入到$\mathbb{R}^{n+1}$中，这一定能做到，因为$\mathbb{R}P^n$就是$\mathbb{R}^{n+1}$模掉一条直线得到的。于是$\mathbb{R}P^n$上的每个点在$\mathbb{R}^{n+1}$中都有一个自然的坐标$\left(x^1,x^2,x^3,\cdots,x^n,x^{n+1}\right)$，但是我们只需要$n$个坐标。仿照前面的做法，分别选取$n+1$个垂直于各个轴的超平面，这些过原点的直线与这些超平面的交点的坐标给出了一个坐标卡。这样选取$n+1$个坐标卡U_i，$(i=1,2,\cdots n)$。第i个坐标卡U_i的坐标选成

$$\left(\frac{x^1}{x^i},\cdots,\frac{x^{i-1}}{x^i},\frac{x^{i+1}}{x^i},\cdots,\frac{x^n}{x^i},\frac{x^{n+1}}{x^i}\right)$$

这样我们就得到$n+1$个坐标卡，每个坐标卡有n个坐标。

下面我们来看看这n个坐标卡之间的变换。

坐标变换就是将$\left(\frac{x^1}{x^i},\cdots,\frac{x^{i-1}}{x^i},\frac{x^{i+1}}{x^i},\cdots,\frac{x^n}{x^i},\frac{x^{n+1}}{x^i}\right)$变换为另一个坐标卡上的坐标$\left(\frac{x^1}{x^j},\cdots,\frac{x^{i-1}}{x^j},\frac{x^{i+1}}{x^j},\cdots,\frac{x^n}{x^j},\frac{x^{n+1}}{x^j}\right)$。将$\mathbb{R}P^n$中坐标卡$U_i$中的点映射到$\mathbb{R}^{n+1}$中的映射为

$$\varphi_a\left(\left(x^1,x^2,x^3,\cdots,x^n,x^{n+1}\right)\right):\left(y^1,y^2,\cdots,\underset{-}{y^i},\cdots,y^n,y^{n+1}\right)=\frac{\left(x^1,x^2,x^3,\cdots,x^n,x^{n+1}\right)}{x^i},$$

注意$\underset{-}{y^i}$表示去掉其中$\frac{x^i}{x^i}=1$这样的没有任何信息的坐标，也就是没有y^i这个坐标。那么逆变换

$$\varphi_a^{-1}\left(\left(y^1,y^2,\cdots,\underset{-}{y^i},\cdots,y^n,y^{n+1}\right)\right)=\left(y^1,y^2,\cdots,\underset{-}{y^i},\cdots,y^n,y^{n+1}\right)x^i.$$

而相对于U_j的

$$\varphi_b\left(\left(x^1,x^2,x^3,\cdots,x^n,x^{n+1}\right)\right):\left(y^1,y^2,\cdots,\underset{-}{y^j},\cdots,y^n,y^{n+1}\right)=\frac{\left(x^1,x^2,x^3,\cdots,x^n,x^{n+1}\right)}{x^j},$$

于是将U_i中的坐标变换到U_j中的变换就是就是

$$\begin{aligned}\varphi_b\circ\varphi_a^{-1}&=\left.\frac{\left(x^1,x^2,x^3,\cdots,x^n,x^{n+1}\right)}{x^j}\right|_{\left(x^1,x^2,x^3,\cdots,x^n,x^{n+1}\right)=\left(y^1,y^2,\cdots,\underset{-}{y^i},\cdots,y^n,y^{n+1}\right)x^i}\\&=\frac{\left(y^1,y^2,\cdots,\underset{-}{y^i},\cdots,y^n,y^{n+1}\right)x^i}{x^j}\\&=\left(y^1,y^2,\cdots,\underset{-}{y^i},\cdots,y^n,y^{n+1}\right)\frac{x^i}{x^j}.\end{aligned}$$

即在每个坐标上乘以$\frac{x^i}{x^j}$。

因为$\mathbb{R}P^n$是去掉了原点的$\mathbb{R}^n$模掉过原点的直线，所以不会出现除以零的情况，这个流形一定是光滑流形，是微分流形。

射影Hilbert空间 量子力学的状态空间是一个Hilbert空间，也就是一个有内积的线性空间。但是我们知道，其实我们并不需要这么大的Hilber空间。量子力学中的一个态其实只是Hilbert空间中长度为1的矢量。既然所有的矢量的长度都是一样的，那么只关心矢量的方向就可以了。这就是说，量子力学的态空间，其实是一个只关心矢量方向的Hilbert空间。我们前面已经分析过，射影空间就是一个只关心取向而不关心长度的空间。因此，量子力学中的状态空间，其实是一个射影Hilbert空间。

$\mathbb{R}P^n$的定向性 那么$\mathbb{R}P^n$是可定向的吗。我们有这样的结论：

- n为奇数时，$\mathbb{R}P^n$可定向（记得$\mathbb{R}P^1 = S^1$）；
- n为偶数时，$\mathbb{R}P^n$不可定向。

其它 我们把$\mathbb{R}P^n$的一些小结论罗列在下面，其中有些已经在前面说过了：

- $\mathbb{R}P^0$同胚于一个点。
- $\mathbb{R}P^n$同胚于一个圆S^1。
- $\mathbb{R}P^n$中的$\mathbb{R}P^{n-1}$的补是$\mathbb{R}^n$。可以看一个简单的例子：$\mathbb{R}P^1 = S^1$，$\mathbb{R}P^0$ =一个点。S^1去掉一个点是$\mathbb{R}^1$。
- $\mathbb{R}P^n$是紧的。

此外，我们前面讲过，$GL(n,\mathbb{R})$流形基本上就是$\mathbb{R}^n$。这里我们看到，由$\mathbb{R}^n$通过模掉一些东西可以得到各种拓扑空间。可以想象$GL(n,\mathbb{R})$流形模掉一些东西也可以得到各种其它流形。我们已经说过，在$GL(n,\mathbb{R})$流形上可以附加群结构，得到$GL(n,\mathbb{R})$群。我们将会看到，在$GL(n,\mathbb{R})$流形的许多商空间上也可以附加群结构，这就是$GL(n,\mathbb{R})$群的各种子群，如果得到的商空间还是流形，那就是$GL(n,\mathbb{R})$群的李子群。

$PL(n,\mathbb{R})$

前面讲了矩阵流形$GL(n,\mathbb{R})$，它是一个所有可逆的$n\times n$矩阵的集合。我们模仿在$\mathbb{R}^n$中模掉直线（也就是只保留方向，去掉长度的信息）的方式将$GL(n,\mathbb{R})$中只相差常数倍的矩阵，即

$$M = kM,$$

看作是等价的，也就是模掉只差常数倍的矩阵。这样我们就得到一个新空间

$$PL(n,\mathbb{R}) = GL(n,\mathbb{R}) / \sim .$$

复射影空间$\mathbb{C}P^n$

很容易推广实射影空间$\mathbb{R}P^n$到复射影空间$\mathbb{C}P^n$。只需将$\mathbb{R}P^n$中的实直线换成复直线就可以了。但是也要看到，复直线在实数的观点看来是二维平面。因此有

$$\mathbb{C}P^1 = S^2$$

此外也不难看出

$$\mathbb{C}P^n = S^{2n+1} / \left[z \sim e^{i\theta} z \right]$$

四元数射影空间实射影空间$\mathbb{H}P^n$

30.8 切空间

30.8.1 一点儿微积分，有人懂无穷小吗

微积分的微妙之处出在于它基于一种超出人们想象力的无穷小计算。无穷小并不是数，不能按照数的规则进行计算。当得知两个无穷小的比值$\triangle y/\triangle x$等于某一个数的时候，其实我们对此并没有什么直观的感受。我们的智力只能跟踪有限大的东西，无穷小不是我们的智力可以想象的，也没有任何经验可以借鉴。但是我们知道这些结果是对的，这些结果来自牛顿和莱布尼兹那惊人的直觉。拥有这样的直觉能力的人不需要什么严格，他们可以直接看到结果。严格是那些缺乏想象力的人的工具。

我们在处理无穷小时做的是，先将它们当作有限大的普通数处理，比如我们会写出$\triangle y/\triangle x$这样的式子，先心安理得地将它们当作普通的数计算，然后突然宣布它们其实是无穷小。而更糟糕的是，当我们宣布它们是无穷小的时候我们完全不试图解释什么是无穷小，不试图解释无穷小和零的区别。代之以给出一些取极限的抽象运算规则，这些规则一点儿也不直观（在牛顿看来它们肯定是直观的，但我们不行）。

看一个小问题。无穷大不是数，所以绝不能按照数的规则去运算。不能做$\infty + \infty = 2 \times \infty$这样的运算，也不能回答$\frac{2\times\infty}{\infty}$等于多少这样的问题。无穷小也不是数，也不能像数那样运算。但是我们总是毫不犹豫地写下$\frac{2\triangle x}{\triangle x} = 1$这样的结果。显然，这是非常不安全的。

我理解不了无穷小，所以只能稍微严格地处理一下它，用严格给自己壮壮胆。必须承认这种所谓的严格完全是在牛顿莱布尼兹的伟大直觉下的指引下做到的。在这里我们可以看到严格的好处，同时也能看到严格做法的软弱为力。严格只是在吃直觉的剩饭。那么严格有什么好处呢。好处就是，直觉需要天才，严格谁都行。

30.8.2 线性化，微分算子，一次试着理解微积分中的无穷小的努力

一个函数$f(x)$是复杂的。我们可以在某一点a将它展开成幂级数，你不妨认为这一结论与无穷小无关。

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n+\cdots.$$

在这里我们遇到一些展开系数$f^{(n)}(a)$，它们是什么呢，我们也不知道。我们只是知道，如果一个函数可以在一个解析点展开成幂级数，那么就把它的系数形式地写成$f^{(n)}(a)$。这与写成c_n没什么区别的。

这里x是任意的，a是你指定的点。当然一般地讲它们的差是有限的，我们不妨将这个差写作

$$\triangle x=x-a.$$

这不会有任何问题的。这样我们就有

$$f(x)=f(a)+f'(a)\triangle x+\frac{1}{2!}f''(a)(\triangle x)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(\triangle x)^n+\cdots. \quad (30.7)$$

下面我们试着讨论一下无穷小。

显然，无穷小就是a非常非常接近x的情况。那么什么是非常非常接近呢。我们先来看看最接近的情况，也就是它们重合的情况。这时候我们遇到的就不是无穷小，而是零了。但是零是好理解的。什么是零呢，我们不妨这样定义

$$\triangle x=0$$

这样我们自然有

$$(\triangle x)^2=0$$

$$\vdots$$

$$(\triangle x)^n=0$$

$$\vdots$$

零当然容易了。下面我们来定义无穷小。方便起见，先引进个符号吧。前面我们用△表示有限大，我们下面用d，希腊字母△的拉丁字母对应。无穷小当然要比零大一些，但也不能大多少，只大一丁丁点儿。比零大要求

$$dx \neq 0$$

否则就是零了。但也不能大太多，只能大一点儿，不妨让一点儿步要求

$$(dx)^2 = 0$$

这样自然会有

$$\begin{aligned}(dx)^3 &= 0\\ &\vdots\\ (dx)^n &= 0\\ &\vdots\end{aligned}$$

这样我们就定义了一个比零大一点的东西，定义方式是模仿定义零的路子，即零被定义成$\triangle x = 0$，无穷小被定义成$dx \neq 0$但$(dx)^2 = 0$。

注意，我们处理的是我们不懂的无穷小，不能把他们当数算。否则会从$(dx)^2 = 0$中解出$dx = 0$。

由（30.7）可以看到，引入了无穷小以后，我们已经在a点附近将函数$f(x)$线性化了，我们有

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,dx. \tag{30.8}$$

这样一来在a点附近我们就用一条过a点的直线局部地代替了曲线$f(x)$，这就是做了线性化。

在做了线性化之后可以看到原来的展开系数$f'(a)$就是函数$f(x)$在a点的切线的斜率。这样我们就可以将函数$f(x)$在a点的导数定义成函数$f(x)$在a点的切矢量的斜率。

这样定义的好处是我们对无穷小只要求$(dx)^2 = 0$，也就是比零大一点儿（零是$dx = 0$），而没有对无穷小进行运算[4]。

[4]那么这个定义与原来的定义一致吗。这是显然的，你只要仍然愿意对无穷小运算，那么改写（30.8）就会得到

$$f'(a) \overset{x\to a}{=} \frac{f(x) - f(a)}{dx}.$$

这就是原来的导数的定义。

前面我们将导数定义成了斜率。下面我们继续来试着理解微分。

仍然改写（30.8）我们有

$$f(x)-f(a)=f'(a)\,dx.$$

很自然地可以定义$\triangle f(x)=f(x)-f(a)$，当$x\to a$时，$\triangle$变成了无穷小，用d表示，有[5]

$$df(x)=f'(x)\,dx. \tag{30.9}$$

显然，d就是微分，这是一个无穷小。

我们考虑多元函数的情况，也就是更高维数的情况。

通过与前面完全相同的步骤，Taylor展开，认为$(dx_n)^2=0$，等等，我们有

$$df(x)=\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}dx_n, \tag{30.10}$$

这里$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。有了前面的经验，我们很自然地将

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1},\frac{\partial f(x)}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \tag{30.11}$$

看作是函数$f(x)$所代表的曲线在x点的切线的斜率。从这个形式上我们可以看出，忘掉这个结果的来历，将微分d直接理解成一个n-维空间中矢量，基矢是

$$(dx_1,dx_2,\cdots,dx_n), \tag{30.12}$$

就可以了。

这样一来，完全不引入无穷小，我们也定义了微分d。函数$f(x)$在x点的微分d被定义成一个与x相联系矢量空间V_x中的矢量。如果选（30.12）作为基矢，这个矢量就是（30.11）。当然，这样一来，如果我们在另一个点x'做微分，我们就得考虑另一个矢量空间$V_{x'}$。于是当我们做微分的时候，空间中的每个点都被赋予了一个矢量空间V_x。这个空间的维数与原来空间的维数是相同的。

这个理解的最大的好处是，我们引入了一个与认为$(dx_n)^2=0$是完全相容的微分d的定义，而完全没有涉及无穷小。

从现在起，$df(x)$不再是一个无穷小，而是一个矢量了。如果$f(x)$是一个n维空间中的函数，那么$df(x)$就是一个n维空间中的矢量。这样一来，微分算子d就是一个作用在函数$f(x)$上的矢量了。既然是个作用我们就要给出作用规则。这需要公理

[5]这里我们将a换成了x，反正它们几乎是一个点

式地加上一条规则。这个作用当然应该与牛顿和莱布尼兹得到的微分规则相同。所以必须要求

$$d(fg) = (df)\, g + f\, (dg) \tag{30.13}$$

注意，虽然我们要求的这个作用规则与通过无穷小运算得到的相同，但是我们并没有要求无穷小。由此可见，这种做法的优势是严格好看，但不是什么干大事儿的法儿。当然，作为一个线性空间中的算符，它应满足线性的要求

$$d(af + bg) = adf + bdg. \tag{30.14}$$

现在我们看到，无穷小$df\,(x)$被理解成了与空间中某个点相联系的一个线性空间V_x中的一个矢量。这样最大的好处就是不必再引入无穷小这样的说不清的量了。当然，我们也看到，这样做的最大好处是避免争论，后面我们还可以看到这种方式还便于推广，但是，其实这种方法很难自己原创地工作，因为我们很难依循这样的思路给出莱布尼兹法则（30.13）。此时莱布尼兹法则只能作为一个不加解释的公理强行引入。

由此我们可以看到，严格性只是给那些平庸的人看的。牛顿，莱布尼兹这样的天才可以直觉地看到结果。他们靠天才的直觉工作。他们是真正的建筑师。他们在大楼盖好之前已经看到了整座楼。只有那些砌墙的才会脸红脖子粗地争论：不砌上第57层砖怎么砌第58层转啊。这帮愚蠢的人。

30.8.3 导数

前面我们引入了微分。我们看到，微分是与空间中某一个点相联系的线性空间中的矢量。这样我们就不再采用我们不理解的无穷小定义微分了。导数同样是一个微妙的东西，如果我们不可求严格性，导数就是两个无穷小的商，

$$\frac{df\,(x\,(t))}{dt}$$

这当然也是不能理解的。同样，我们也试着把它严格化（严格化后，与其说是帮助我们理解，还不如说是，驳倒了我们，让我们放弃去理解这件事的努力）。

虽然我们要做的是严格化，但是我们必须看到，在大多数情况下，严格很难给我们什么启发。我们必须求助于我们不理解的，但完全是天才的直觉的给出的那些结果。

我们仔细观察一下导数这个原始的定义式。

求导是对一个参数求导，而不是对自变量求导。我们知道，函数$f\,(x\,(t))$是一个数，t是一个参数。所以导数$\frac{df(x(t))}{dt}$应该是一个数。

我们不难看出，导数$\frac{df(x(t))}{dt}$与微分$df\left(x\left(t\right)\right)$是有关系的，我们的任务是找出这个关系。前面我们已经弄清微分$df\left(x\left(t\right)\right)$是一个矢量，不是一个数。既然$\frac{df(x(t))}{dt}$是一个数，那么我们就要找到一个将矢量$df\left(x\left(t\right)\right)$变成数的映射。显然，一个自然的把矢量变成数的映射就是内积。既然是内积，那么就需要另一个矢量。问题是将矢量$df\left(x\left(t\right)\right)$与什么样的矢量做内积。我们先假设这个矢量为$V$，这就是说我们要求

$$\left(df\left(x\left(t\right)\right),V\right)=\frac{df\left(x\left(t\right)\right)}{dt}. \tag{30.15}$$

那么V是什么呢。我们先来看看$df\left(x\left(t\right)\right)$是什么样的矢量。$df\left(x\left(t\right)\right)$是以$(dx_1,dx_2,\cdots,dx_n)$为基的矢量，在这个基下我们可以将矢量$df\left(x\left(t\right)\right)$写成分量的形式（参（30.10））

$$df\left(x\left(t\right)\right)=\left(\frac{\partial f\left(x\right)}{\partial x_1},\frac{\partial f\left(x\right)}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f\left(x\right)}{\partial x_n}\right) \tag{30.16}$$

就像前面我们所谓的严格定义微分不得不借助牛顿和莱布尼兹的直觉结果一样（看看（30.13）就知道了）。我们这里仍然不得不参照他们的直觉结果（如果严格的方法真的能工作，我们就不需要天才了，但是我们需要天才）。牛顿和莱布尼兹告诉我们

$$\frac{df\left(x\left(t\right)\right)}{dt}=\frac{\partial f\left(x\left(t\right)\right)}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial f\left(x\left(t\right)\right)}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\cdots+\frac{\partial f\left(x\left(t\right)\right)}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}.$$

对比（30.15），（30.16）与（30.16）我们可以明显看出，与$df\left(x\left(t\right)\right)$做内积的矢量$V$写成分量形式应该形如

$$V=\left(\frac{dx_1}{dt},\frac{dx_2}{dt},\cdots,\frac{dx_n}{dt}\right). \tag{30.17}$$

现在的问题是，如果V取这样的分量形式，那么这是在什么基下的分量。显然这应该是一个与$df\left(x\left(t\right)\right)$的基正交的基$(dx_1,dx_2,\cdots,dx_n)$（否则就不能写成这样的对角的形式）。假设这个基为$e_i^V$，那么就要求

$$\left(dx_i,e_j^V\right)=\delta_{ij}. \tag{30.18}$$

现在我们要做的就是来构造一个满足（30.18）要求的基。一个直接简单的构造显然是

$$\left(dx_i,e_j^V\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}x_i=\delta_{ij}. \tag{30.19}$$

这里的x_i显然是dx_i部分提供的，因此对应e_j^V的（也就是提供指标j的）就应该

是$\frac{\partial}{\partial x_j}$。这启发我们将基取成[6]

$$e_i^V = \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{30.20}$$

这样由（30.17）我们就有

$$V = \frac{dx_1}{dt}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{dx_2}{dt}\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + \frac{dx_n}{dt}\frac{\partial}{\partial x_n}. \tag{30.21}$$

这就是说，$\frac{dx_i}{dt}$应该是一个数。这样我们就找到了一个与$df\left(x\left(t\right)\right)$做内积给出数的矢量$V$，也就是满足（30.15）的矢量。式（30.19）和（30.20）启发我们，这个矢量V就是导数$\frac{d}{dt}$。也就是说，由（30.15），（30.19）和（30.20）的对比可知

$$V = \frac{d}{dt}.$$

这就是说，V与微分$df\left(x\left(t\right)\right)$的内积，就是$V$作用在函数$f\left(x\left(t\right)\right)$上的结果，即

$$\left(df\left(x\left(t\right)\right), V\right) = Vf\left(x\left(t\right)\right) = \frac{df\left(x\left(t\right)\right)}{dt}.$$

也就是说，V就是导数$\frac{d}{dt}$。这样一来就不必将导数$\frac{d}{dt}$理解成无穷小运算了，导数也是一个矢量了。

但是，仔细观察前面的结果我们会发现将V作为导数的定义必将面对一个问题，那就是在V也就是$\frac{d}{dt}$的定义中有$\frac{dx_i}{dt}$这样的项，这样一来我们就等于用导数定义导数了。因此我们必须说明$\frac{dx_i}{dt}$的含义。x是空间中的一个点。那么$x\left(t\right) = \left(x_1\left(t\right), x_2\left(t\right), \cdots, x_n\left(t\right)\right)$显然是在空间中划出了一条曲线。那么$\frac{dx(t)}{dt} = \left(\frac{dx_1(t)}{dt}, \frac{dx_2(t)}{dt}, \cdots, \frac{dx_n(t)}{dt}\right)$是什么意思呢。这里$x_i$是$t$的函数。我们由前面的定义取$x_i\left(t\right)$的微分，有

$$dx_i = x'\left(t\right)dt.$$

这里的$x'\left(t\right)$在前面被理解成一个展开系数。它表示的是将函数$x_i\left(t\right)$在某点附近线性化的斜率，也就是代替原来的那条函数曲线的直线的斜率，也就是切线的斜率。标记的是沿t方向函数$x_i\left(t\right)$变化的速率。推广这个结果，现在我们就知道了$\frac{dx(t)}{dt} = \left(\frac{dx_1(t)}{dt}, \frac{dx_2(t)}{dt}, \cdots, \frac{dx_n(t)}{dt}\right)$实际上是曲线$x\left(t\right)$在$t$点的切线的斜率。这样一来我们就定义了$\frac{dx(t)}{dt}$，避免了用导数定义导数的尴尬。

注意，$x\left(t\right)$是空间中的一条曲线，$f\left(x\left(t\right)\right)$是在这条曲线上取值的一个函数。曲线有切线，斜率是$\frac{dx(t)}{dt} \equiv x'\left(t\right)$。但是不能说$\frac{df(x(t))}{dt}$是个斜率，因为$f\left(x\left(t\right)\right)$并不是

[6]注意，如果我们取成$\left(dx_i, e_j^X\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}x_j = \delta_{ij}$，那么对应$e_j^X$的就是$x_j$，这显然不是一个合适的基的候选者。因为由（30.10）中我们可以看出，dx_i中的x_i相当于$df\left(x\right)$中的$f\left(x\right)$，也就是相当于一个函数，是一个数。而e_j^X必须是一个矢量。

一条空间中的曲线。这样**我们就利用空间一条曲线的切线这样一个几何结果，定义了一个在这条曲线上取值的任意函数$f\left(x\left(t\right)\right)$的导数**$\frac{df(x(t))}{dt}$。这中间没有用无穷小运算。当然，我们借助了牛顿和莱布尼兹通过无穷小运算得到的结果。要知道，纯粹的严格化，也就是形式化，是什么也得不到的。

这样我们由（30.17）就看到，$V=\frac{d}{dt}$就是切矢量。

30.8.4 切与余切

前面我们已经定义了微分和导数这两个微积分中最基本的概念。猛地看上去微分d和导数$\frac{d}{dt}$都是矢量。不过我们已经看到，它们的内积是一个数$(df\left(x\left(t\right)\right),V)=\left(df\left(x\left(t\right)\right),\frac{d}{dt}\right)=\frac{df(x(t))}{dt}$。对比两个矢量相乘，我们知道两个列矢量是乘不到一起的。必须先将一个转置，如果是复数，还要取复共轭。也可以回忆一下左矢和右矢。右矢空间会有一个对偶空间，右矢空间中的矢量，一般地，在对偶空间中都会有一个与它对偶的矢量，这个对偶的矢量就是左矢。两个右矢内积，其实是要找出其中一个的对偶矢量，再让另一个矢量乘上这个对偶矢量。这就是说，与列矢量对偶的是行矢量；与右矢对偶的是左矢；与一个复数对偶的是它的复共轭。在我们这里与导数对偶的就是微分。

我们将导数这个矢量称为切矢量，而将与它对偶的矢量，微分，称作余切矢量。与切矢量就是对偶矢量。

30.8.5 切线，切空间

前面我们不通过无穷小运算引入了微分和导数等概念。这样做本来除了满足洁癖一样的病态的数学要求外没有什么太大价值（数学需要严格是因为他们经常考虑一些自然中完全没有对应的的东西，完全是人造的，因此谁也不知道对不对，只能靠严格维持生存。但是牛顿考虑的完全是自然中存在的数学，他不需要严格，自然是造物主造的，当然不会错。你用不着严格，只需把算出来的结果与实验结果对对就知道了）。但是我们前面做的事却有更加实际的意义。以前我们对微分和导数的定义是在欧氏空间中，这时候一条曲线的切线与这条曲线都落在同一个欧氏空间中。这时候定义导数可以通过$\triangle y/\triangle x$来定义；定义一个矢量只需要通过将两点连线就可以做到。但是，如果我们在一个任意的流形上做这件事就不那么简单了。此时$\triangle y/\triangle x$的意义不明确了，切线也不在原来的流形中了。这时候，前面的那些努力就派上用场了。

在欧氏空间中，我们只在这同一个空间中就可以处理曲线和导数。但是在流形中做不到这点。本来，一个直接想到的办法是将一个流形嵌入到一个更高维的欧氏

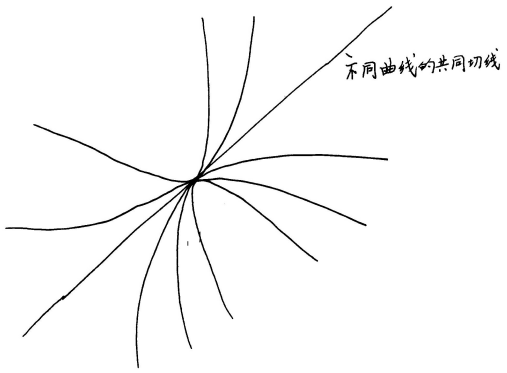


图 30.31: （以二维情况为例）流形上的一族以同一条直线为切线的曲线构成一个等价类。这一族拥有共同切线的曲线构成的等价类就可以作为这条切线的内蕴的定义

空间中。但是，且不说这种借助流形以外空间的办法是不漂亮的，更重要的是这种方法本身也是困难的。我们必须知道这个流形能够嵌入到几维的欧氏空间中。虽然我们知道惠特尼嵌入定理所给出的欧氏空间的维数的上限，但是真正的维数我们并不知道。总之，无论如何，我们都应该发展一套内蕴的定义微分，导数和切线的方法。前面的方法就可以做到这一点。

先来看看如何内蕴地定义切线。

如果将一个流形嵌入到$\mathbb{R}^n$中，也就是不内蕴地引入切线，那么切线是是很容易定义的。首先要强调的是切线必须是过一点的切线。先看看一维的情况。一条曲线就是一个一维流形，将它嵌入到$\mathbb{R}^2$中，切线只需定义成$\mathbb{R}^2$中只与这条曲线交于一点的直线。考虑二维流形的情况。一个二维流形可以看作是嵌入到$\mathbb{R}^3$中的一个二维曲面。它的切线可就复杂了，过这个曲面上任一点的切线有无穷条。每条曲线都有自己的切线，不过同一条切线可以对应不止一条，事实上是无穷条曲线。

曲线是有方向的（沿参数增长的方向），所以切线也是有方向的，是一个矢量，也就是切矢量。不难想象，一个曲面上过一点所有曲线的切线，或者说切矢量会张成一个线性矢量空间。这个线性空间是曲面过一点的所有切线张成的，所以很自然地，这个线性空间就被称为这个流形的过这一点的切空间。

很显然，过流形的每一点都有一个切空间。切空间是一个线性空间（就是这个流形在这个点附近的线性化），切空间的维数与流形的维数相同。

不过，这里我们引入切线和切空间的方式都依赖一个将所考虑的流形嵌入的欧氏空间$\mathbb{R}^n$。那么如何能够内蕴地做这件事呢。我们看到过流形上一点，会有无穷多条曲线与一条切矢量相切。而曲线是直接内蕴地定义在流形上的。这就启发我们索

性将过一点与同一个切矢量相切的所有曲线看作是一个等价类。这个等价类就可以定义为切线。抽象了点儿，但内蕴了。

现在我们就可以直接定义切线了。我们已经知道，流形上某一点上所有函数的导数就构成一个线性空间，这个线性空间中的矢量就是切线。过x点的切矢量就是前面定义了的在这点上的导数

$$V_x = \frac{dx_1}{dt}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{dx_2}{dt}\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + \frac{dx_n}{dt}\frac{\partial}{\partial x_n}.$$

矢量的基是

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right).$$

在这组基下矢量可表示为

$$V_x = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \cdots, \frac{dx_n}{dt}\right).$$

为了完整我们重复一下前面讲过的内容。切矢量当然是具有某些特殊性质的矢量，它应该满足这样两条要求：

线性

$$V_x(af + bg) = aV_x f + bV_x g.$$

和莱布尼兹法则

$$V_x(fg) = (V_x f)\, g + f\,(V_x g)\,,$$

其中f和g是在流形上某一条曲线上取值的函数。

过流形M上一点x的所有切矢量构成一个切空间，记作T_xM。

30.8.6 切丛，纤维丛

下面我们来考虑一个稍微物理点儿的例子。考虑一个在某个流形上运动的粒子。我们知道，完全描述这个粒子的状态需要这个粒子的坐标和坐标的一阶导数，也就是速度。就是说这个粒子的状态空间其实是(x, V)组成的。用前面讲的几何化的语言来说就是，这个粒子的状态空间其实是流形再加上这个流形上各点的切空间，也就是M加上所有的T_xM。我们称这样一个东西为切丛，记为$T\,(M)$。你看，切丛的定义其实是非常有意义的，至少从物理的角度讲是这样。就是说，经典力学的状态空间是一个切丛。

这个概念显然可以更普遍一些。我们在画一个粒子的态空间的时候，我们其实并没有拘泥于切空间是一个切线这样的限制。我们常常以坐标做一个坐标轴，以速

度做另一个坐标轴。这就是说，其实我们只需在流形的每个点上再建一个满足前面切空间定义的空间就是了，不一定非要坚持画成切线的样子。

可以看出，这种做法就像是在流形的每个点上都长出了毛。毛是一根根纤维。一个长满了毛的流形就是一丛纤维，所以我们称这种长了毛的流形为纤维丛。流形M称为底流形，每个点上的空间就是纤维。

在我们的例子中，流形上长出的的毛是切空间。显然你还可以长其它的毛，那样你就得到了别的纤维丛。

坐标系是笛卡尔引进来的，这件事的重要性怎样强调都不会过分。坐标系将几何和代数联系在了一起，后来微分几何等等许多数学中非常本质的发展都与这件事有直接关系。原则上，一个二维笛卡尔坐标系就可以看成是一个纤维丛，比如将x轴当作底流形，那么y轴就是纤维了。从纤维丛的角度来说，x轴和y轴不必垂直，其实怎么放都行。只需将它看作是一个在$\mathbb{R}^1$中的每个点都长出一个$\mathbb{R}^1$毛就行了。

纤维丛是现代最重要的数学概念之一。

30.9 李群，作为群和微分流形

我们可以为一个集合附加上各种结构。比如，

- 我们可以为集合中各个元素之间赋予运算，可以赋予一种运算，也可以赋予多种运算；
- 我们可以要求集合中各个元素之间满足某种代数关系；
- 我们可以要求集合中各个元素之间满足某种相邻关系；
- 我们可以在集合中各个元素之间引入距离；
- 。。。。。。
- 我们也可以同时赋予这个集合多种结构，只要它们彼此是相容的。

当我们为一个集合指定了一个相邻关系后，这个集合就变成了一个拓扑空间；如果再为这个集合指定一个代数结构，比如再指定一个群结构，这个既是拓扑空间又是群的集合便是一个有群结构的拓扑空间，或者说是一个有拓扑结构的群，也就是拓扑群。这个同时具有代数结构和拓扑结构的集合中的元素要同时满足两种要求，代数的和拓扑的，当然这两种关系必须是相容的。

如果我们考虑的这个拓扑空间是一个流形，也就是说集合中的元素是连续分布的，那么我们得到的就是一个有群性质的流形，或者说一个连续的群，也就是我们这里要讨论的李群。

一个连续的流形当然并不一定是一个可微流形，但是希尔伯特第五问题在二十世纪五十年代的解决告诉我们，如果一个流形同时具有一个群结构，那么这个流形一定是一个可微流形。也就是说，当我们定义一个李群的时候不必再加上可微性要求，只要求连续就可以了，群的封闭性要求保证了可微性。这样我们就知道了

李群是一个群，也是一个微分流形。

30.9.1 在微分流形上附加群结构

前面我们已经讲了许多微分流形。按照我们刚刚定义的李群，只要我们为这些微分流形附加上群结构，我们就得到了李群。在一个拓扑空间附加群结构的难度我们在《大场论之群论简引》中已经见到过了。这里我们考虑的拓扑空间比较特殊，它是一个微分流形。我们先在前面谈到的几个微分流形上附加群结构。

所谓为一个流形（或更普遍的拓扑空间）附加群结构，就是让集合中的每个点具有双重身份。一方面，它是流形上的一个点，另一方面，它是一个群的群元。作为流形上的一个点，我们要关注不同点的位置，更准确地说是相邻关系（别忘了，流形首先是一个拓扑空间）；作为群的群元，我们还要要求流形上不同的点之间满足群的代数关系。

具体方式是，先定义一个乘法，然后看流形上各点在这个乘法下是否满足群性质。

考虑一个n维流形M。流形上的点用n个量标记为

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) .$$

所谓给这个流形M附加一个群结构就是从这n个量$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$构造一个群元

$$g = g(x_1, x_2, \cdots, x_n) .$$

然后要求群元$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$满足群的代数要求。即

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, g'\left(x_1', x_2', \cdots, x_n'\right) = g''\left(x_1'', x_2'', \cdots, x_n''\right) \tag{30.22}$$

等等。所有这些群元的集合G就是一个群。而由于这些群元与流形M上的点一一对应，这个集合G就是原来的集合M。

能不能为流形附加群结构，能为一个流形附加几种群结构完全取决于由$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$构造满足群要求的$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的方式有多少种。

30.9.2 在$\mathbb{R}^n$上附加群结构：矩阵流形和它的子流形

$\mathbb{R}^n$

我们要构造的是李群，所以只考虑微分流形。最简单的微分流形是$\mathbb{R}^n$。

$\mathbb{R}^n$是一个线性矢量空间。我们首先要指定一个乘法。对$\mathbb{R}^n$来说一个最自然的乘法就是矢量加法。很容易看出，$\mathbb{R}^n$在矢量加法下构成一个群，一个Abel群。

加法群给出的$\mathbb{R}^n$上各点间的变换关系 此时的群元是

$$g = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

既然它是一个群，那么自然要满足群的各种要求。比如，封闭性要求

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \left(x_1', x_2', \cdots, x_n'\right) = \left(x_1'', x_2'', \cdots, x_n''\right)$$

这就是说，当我们将流形$\mathbb{R}^n$赋予这样的群结构时，在流形的不同点之间我们就引入了这样的变换关系

$$\begin{aligned} x_1'' &= x_1 + x_1' \\ x_2'' &= x_2 + x_2' \\ &\vdots \\ x_n'' &= x_n + x_n'. \end{aligned}$$

这个关系是群性质引进来的。是群性质在流形各点间建立了这样的变化关系。所以当一个流形同时还是一个李群的时候，这个集合有着更丰富的结构。

很容易看出，不同的群结构，会引入不同的变换关系。

我们再对$\mathbb{R}^n$试试其它的可能性。

从$\mathbb{R}^n$到M^n：矩阵流形

$\mathbb{R}^n$中的点是一个n维矢量。描述这样一个点需要n个数。我们一般把n个数排列成一个列矢量。但是其实我们完全可以换一种排法，比如将这些数排列成方阵。当然，不是n为任何数都能做到这点，但对$\mathbb{R}^{n^2}$是可以做到的。我们可以将一个n^2维矢量折叠成一个$n \times n$矩阵，即将

$$(x_1, x_2, \cdots, x_{n^2})$$

折叠成

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{(n-1)n+1} & x_{(n-1)n+2} & \cdots & x_{n^2} \end{pmatrix}$$

信息量是一样的。这样我们就得到了一个$n \times n$方阵。这当然还是原来的$\mathbb{R}^{n^2}$流形，但是此时这个$\mathbb{R}^{n^2}$还同时是M^n（M^n是所有$n \times n$矩阵的集合）。当然还是可以定义矩阵加法作为乘法，这还是会给出前面得到Abel群。

不过对方阵我们还可以定义别的乘法，最自然的就是矩阵乘法。我们来看看此时的$\mathbb{R}^{n^2}$，或者说是M^n，在矩阵乘法下能不能构成一个群。

显然我们不能为它附加群结构。因为不是每个元素，在这里就是$n \times n$矩阵都有逆。因此流形$\mathbb{R}^{n^2}$，或者说是M^n，上不能附加群结构。

瞧，我们的第一个不平庸的努力就不能作为李群。不过这是我们的第一个挫折，也是最后一个挫折。再试试$\mathbb{R}^{n^2}$，或者说是M^n，的各种子集合。

$GL(n,\mathbb{R})$

导致M^n不能附加群结构的原因是M^n中有些矩阵是不可逆矩阵。自然的想法就是将M^n中所有没有逆的矩阵去掉，也就是把在M^n中把所有的行列式为零的矩阵去掉，这样得到的$M^n - \{\det M = 0\}$的集合就有逆了。其它要求是很容易被满足的：封闭显然是满足的，可逆矩阵乘可逆矩阵还是可逆矩阵，因为$\det(MN) = \det(M)\det(N)$。谁都不能是零。矩阵乘法本来就满足结合律。单位矩阵就是单位元。而前面我们已经证明，M^n中去掉行列式为零的矩阵后生下的部分仍然是一个微分流形。这是因为$\{\det M = 0\}$是一个闭集，M^n是一个开集，在开集中去掉一个闭集还是一个开集。因此这样得到的群是一个李群。

好了，我们终于又通过一种方法为$\mathbb{R}^n$，其实只是$\mathbb{R}^{n^2}$，附加了群结构。这样得到的群，就是$GL(n,\mathbb{R})$，一个由$n \times n$可逆矩阵构成的集合。这满足了有逆的要求。因此$GL(n,\mathbb{R})$流形同时可以被赋予群结构，乘法就是矩阵乘法。

这样一来，$GL(n,\mathbb{R})$也同时是一个群。就是一般线性群。

前面我们已经分析过，$GL(n,\mathbb{R})$是不连通的流形，它由$\det M > 0$的矩阵集合和$\det M < 0$矩阵集合组成不连通的两片。因此$GL(n,\mathbb{R})$群的群流形（李群的那个微分流形也被称为群流形）是不连通的两片。

$GL(n,\mathbb{R})$的各种子群：典型群

考虑$GL(n,\mathbb{R})$的各种子群，这些子群被称作典型群。

$SL(n,\mathbb{R})$ $GL(n,\mathbb{R})$流形是由不连通的两片组成，一片$\det M>0$，另一片$\det M<0$。如果我们只考虑其中一片那么我们得到的就是连通的流形了。本来，作为流形，考虑哪一片都可以。但是当我们附加群结构的时候就不一样了。容易看出，$\det M<0$那片虽然作为微分流形没问题，但是却不能被赋予群结构。因为这部分没有单位元（单位元$\det \mathbf{1}=1>0$）。这样只有$GL(n,\mathbb{R})$流形的$\det M>0$的子流形才能作为$GL(n,\mathbb{R})$群的子群。$GL(n,\mathbb{R})$流形的$\det M>0$的子流形中如果我们只考虑$\det M=1$的特殊情况（选择作为子群的子流形必须包含$\det M=1$的部分，这样才能有单位元），那么我们得到的子流形或子群就是特殊线性群，$SL(n,\mathbb{R})$。

注意，$GL(n,\mathbb{R})$流形就是去掉了$\det M=0$的$\mathbb{R}^{n^2}$。$SL(n,\mathbb{R})$流形当然是$\mathbb{R}^{n^2}-\{\det M=0\}$流形的子流形。这个子流形就是附加上了

$$\det M=1$$

的限制的$\mathbb{R}^{n^2}$（取$\det M=1$时已自动去掉了$\det M=0$的部分）。我们得到的$SL(n,\mathbb{R})$其实是$\mathbb{R}^{n^2}$中的一个超曲面。当然，它是连通的。总结一下，特殊线性群就是

$$SL(n,\mathbb{R})=\{M\in GL(n,\mathbb{R}):\det M=1\}.$$

这个关系在前面讲流形的时候我们也给出过，但是这里的含义很不相同。那里是$SL(n,\mathbb{R})$流形，这里是$SL(n,\mathbb{R})$群（当然，$SL(n,\mathbb{R})$群同时也是$SL(n,\mathbb{R})$流形）。

看一个简单的例子，$SL(2,\mathbb{R})$。

$SL(2,\mathbb{R})$是$\mathbb{R}^{2^2}=\mathbb{R}^4$中的一个由$\det M=1$给出的超曲面。取这个$2\times 2$矩阵为

$$M=\begin{pmatrix} t & x\\ y & z\end{pmatrix}$$

$\det M=1$给出

$$\det\begin{pmatrix} t & x\\ y & z\end{pmatrix}=tz-xy=1. \tag{30.23}$$

这个$tz-xy=1$给出的超曲面就是$SL(2,\mathbb{R})$流形。它当然是连通的了。

这时候由（30.23）我们就有

$$M=\begin{pmatrix} \frac{1-xy}{z} & x\\ y & z\end{pmatrix},\quad z\neq 0.$$

必须说，这个构造不是很好，当$z=0$时会出些问题。

群给出的流形上各点间的变换关系 此时，这个流形同时还是一个群。流形各点间要满足群的要求。封闭性（30.22）要求

$$\begin{pmatrix} \frac{1-xy}{z} & x \\ y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1-x'y'}{z'} & x' \\ y' & z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1-x''y''}{z''} & x'' \\ y'' & z'' \end{pmatrix}$$

这给出变换

$$\begin{pmatrix} \frac{1-x''y''}{z''} & x'' \\ y'' & z'' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} yx'+zz' & -xz'-\frac{1-xy}{z}x' \\ -zy'-y\frac{1-x'y'}{z'} & xy'+\frac{1-xy}{z}\frac{1-x'y'}{z'} \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{aligned} x''&=yx'+zz',\\ y''&=-zy'-y\frac{1-x'y'}{z'},\\ z''&=xy'+\frac{1-xy}{z}\frac{1-x'y'}{z'}. \end{aligned}$$

这是给流形附加矩阵乘法这样的群结构时带来的流形上各点间的变换性质。

可见流形上附加了群结构以后，群的各点间出现了新的关系。这一结果是深刻的。

$O(n)$ 前面在讲流形的时候我们也特别考虑了$O(n)$流形。它对我们的特殊意义在于，作为变换，它保大小和形状，这就是经典力学中刚体（刚体是经典力学中最基本的物体）的运动。保大小和形状的变换矩阵满足

$$M\tilde{M}=1,$$

这就是正交矩阵。满足这一要求的群我们称为正交群（因为它是由正交矩阵构成的群），即

$$O(n)=\left\{M\in GL(n,\mathbb{R}):M\tilde{M}=1\right\}$$

由此我们可以得到（见前面相应章节）

$$\det M=\pm 1.$$

显然，$O(n)$是不连通的。仍然分成$\det M>0$和$\det M<0$的两部分。

考虑$O(1)$这个例子。$O(1)$是由$M\tilde{M}=1$的1×1矩阵构成的群。$\det M=\pm 1$不作为新的条件，它可以由正交条件$M\tilde{M}=1$推出。显然这只有两个元素，$\{1,-1\}$。这是一个不连通的点流形。

再看看$O(2)$。这是满足$M\tilde{M}=1$的2×2矩阵

$$M=\begin{pmatrix} t & x \\ y & z \end{pmatrix}$$

构成的群。这给出

$$M\tilde{M}=\begin{pmatrix} t & y \\ x & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t & x \\ y & z \end{pmatrix}=1$$

于是

$$\begin{pmatrix} t & y \\ x & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t & x \\ y & z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t^2+y^2 & xt+zy \\ xt+zy & x^2+z^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

我们有

$$t^2+y^2=1 \tag{30.24}$$

$$x^2+z^2=1 \tag{30.25}$$

$$xt+zy=0 \tag{30.26}$$

这相当于在$\mathbb{R}^4$中家了三个约束，因此这个流形是一个一维流形。

直接的构造是由(30.26)得到

$$t=-\frac{zy}{x}$$

再代人前面的关系，求出各个矩阵元。但象前面提到过的，这种方式并不好。它在$x=0$处有些麻烦。我们换一种方式。

既然只有一个独立的自由度，我们就想办法用一个参数来表示它。(30.24)和(30.25)的形式很明显启发我们令

$$t=\cos\theta$$

$$y=\sin\theta$$

$$x=\cos\varphi$$

$$z=\sin\varphi$$

于是(30.24)，(30.25)自动满足，这样做相当于已经考虑了一个约束。代入(30.26)有

$$\cos\varphi\cos\theta+\sin\varphi\sin\theta=0$$

$$\cos(\theta-\varphi)=0$$

于是有

$$\theta-\varphi=\frac{\pi}{2}+n\pi$$
$$\varphi=\theta-\frac{\pi}{2}-n\pi$$

于是矩阵为

$$M=\begin{pmatrix} t & x \\ y & z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \cos\varphi \\ \sin\theta & \sin\varphi \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} \cos\theta & \cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}-n\pi\right) \\ \sin\theta & \sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}-n\pi\right) \end{pmatrix}$$

这有两种情况：

$n=$奇数

$$M_{even}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

和$n=$偶数

$$M_{odd}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

两个结果。这时候$O(2)$是一个一维流形的特征已经很明显了，因为只需要一个参数就可以描述这个流形。

此外可以看出，M_{even}和M_{odd}之间的关系为

$$M_{even}=M_{odd}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

这里的$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$其实是一个反射。

这两个结果的行列式分别为

$$\det M_{even}=1,$$
$$\det M_{odd}=-1.$$

即流形是由不连通的两片组成的。

由于这里的参数在$\theta=2n\pi$时给出的是同一个矩阵，这就是说这个流形其实是周期的，相当于两个端点接在一起的直线。所以这个一维流形在拓扑上同胚于S^1。但是，显然$\det M=\pm1$会分别给出两个S^1，这就是说，$O(2)$是由两个不相连的S^1组成的流形，即$O(2)$流形是两个一维圆环。

$SO(n)$ $SO(n)$就是在$O(n)$取了$\det M = 1$的那一部分，即

$$SO(n) = \left\{ M \in GL(n, \mathbb{R}) : M\tilde{M} = 1, \det M = 1 \right\}.$$

它当然是连通的。如果是$SO(1)$，那就只有单位元。

如果是$SO(2)$，那就是

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

如前面分析过的，这是一个S^1。

30.9.3 在一个微分流形上附加不止一种群结构：S^1

前面我们为$\mathbb{R}^n$附加了群结构。我们看到，在$\mathbb{R}^n$上可以以矢量加法做乘法，直接附加一个Abel群结构。也可以通过折叠将某些$\mathbb{R}^n$变成一个矩阵流形，去掉一些元素（注意，这样就不再是原来的$\mathbb{R}^n$了）附加另一种群结构，给出矩阵群。

我们的一个自然的问题是，在一个流形上能够附加不止一种群结构吗。这是可以的。

考虑在S^1上附加群结构。S^1是拓扑不平庸的最简单的流形了。

S^1是一个一维流形，只用一个参数，比如θ，就可以描述了。这个参数有一个特点就是它必须是周期性的。

所谓为一个流形附加一个群结构，就是在流形上的点之间附加一个乘法，再要求它在这个乘法下满足群要求。所以关键就在于如何为流形上的点之间定义乘法。首先，我们要看看这个流形是几维流形。如果是n维的，那么流形上的一个点就由这n个参数共同描述。至于怎样由这n个参数描述流形上的这个点则是很随意的。因此，我们只需由这n个参数构造出可以定义不同的乘法的东西作为群元。

具体到S^1，它只有一个参数θ（注意，这里所谓的它只有一个参数是指它是一维的。这样拓扑不平庸的流形当然不能只用一套坐标系。所以会出现0和2π是同一个点的问题），一个最直接的构造显然是

$$g(\theta) = e^{i\theta}.$$

这个构造的关键是所构造的群元$e^{i\theta}$是周期函数。乘法就是普通的数的乘法。当θ转一周之后，它也回到了起点。这个群元g是一个复数，所以它是一个复数域上的群。它显然满足群的四条要求。既然群元都是数，所以是在乘法下是可交换的。因此得到的群是Abel群。这个群元的一个重要特点是它的模为1，即$|g| = 1$。这个群被称为$U(1)$群，U的意思是说，它是个幺正群。

我们再尝试其它的构造。

根据上一节的结果，我们还有一个在实数域上的构造，一个单参数矩阵：

$$g(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

乘法定义为矩阵的乘法。这当然构成一个群，就是$SO(2)$群。群元$g(\theta)$对应的流形上的点是θ。

所谓赋予这个流形一个群结构是说，让这个点同时也是一个群元，g。就是说给定一个群元g，我们就可以知道它是流形上的哪个点；给定流形上的一个点θ，就可以知道群元g。显然前面的两种构造都符合这个要求。这样我们就赋予一个流形S^1两种群结构。这也构造性地说明，一个流形可以被赋予不止一种群结构。

30.9.4 可容纳和不可容纳群结构的微分流形

一个李群一定是一个微分流形，一个自然的问题就是一个微分流形是不是一个李群，或者说一个微分流形能否同时容纳一个群的结构呢。有了我们在《大场论：群论简引》中构造拓扑群的经验，我们可以知道，在一个拓扑结构中再插入一个群结构是非常困难的，但同时，一个拓扑结构中也可以插入不止一个群结构。作为结果，

- 一个微分流形有可能不能插入一个群结构，比如二维球面S^2；

同时，

- 一个微分流形也可能容纳不止一个群结构，如S^3既是$SU(2)$的群流形，也是$Sp(1)$的群流形。

30.9.5 为微分流形附加群结构：群流形更多的例子

李群是一个附加了群结构的微分流形。这个微分流形我们也称它为这个李群的群流形。

下面我们不加分析地给出更多的例子，具体的分析可以按照前面的方式。

- 正交群$SO(2)$群的群流形是S^1，一个一维圆环；
- 幺正群$SU(2)$的群流形是S^3，一个三维球面；
- 辛群$Sp(1)$的群流形也是S^3，一个三维球面。

纯粹是为了有一个感性认识，我们再给出几个更复杂的群的群流形的例子，其中涉及到商群。所有这些例子我们都会在后面给出详细说明。这里则仅仅是些例子的罗列。由这里我们可以看到不同的微分流形可以具有什么样的群结构，或者反过来不同的群的群流形是什么。

$$\begin{aligned}
S^{n-1} &= \frac{SO(n)}{SO(n-1)}, \\
S^{2n-1} &= \frac{SU(n)}{SU(n-1)} = \frac{U(n)}{U(n-1)}, \\
G_d(\mathbb{R}^n) &= \frac{O(n)}{O(n)\times O(n-d)}, \\
G_d(\mathbb{C}^n) &= \frac{U(n)}{U(n)\times U(n-d)}, \\
S^3 &= SU(2) = Sp(1),
\end{aligned}$$

等等。这里$\mathbb{E}^n$是n维欧氏空间，$G_d(\mathbb{R}^n)$是将$\mathbb{R}^n$中的d维平面看作一个点构成的Grassmann流形，$G_d(\mathbb{C}^n)$是相应的复情况。

例子中涉及到的商群的概念见《群论讲义》第一章。

30.9.6 一点儿历史

群是伽罗华为了解决代数方程求解问题时提出的，伽罗华的群就是置换群。李(S. Lie)的一个想法是，将伽罗华的分立群变成可微的连续群，然后象伽罗华用分立群解决代数方程求解问题那样解决微分方程的求解问题。于是我们就有了李群。不过李的这个用群来解决微分方程求解的问题至今也没有完全解决。

李定义的李群是一组连续参数$s_1, s_2, \cdots s_r$的连续可微函数$g = g(s_1, s_2, \cdots s_r)$作为群元构成的集合。李当年引入李群是为了解决微分方程求解问题，自然地他要求这个连续群同时还是可微的。而当我们要求一个集合同时具有几种不同的结构的时候，这几种结构彼此相容的要求其实给出了许多限制条件。在李群的问题中，要求集合既是一个流形又是一个群，此时群的封闭性要求已经保证了可微性，这就是希尔伯特第五问题。

现在，其实我们经常去研究一些具有多种结构的数学对象。比如，我们本来只想研究拓扑性质，但我们会给这个集合再附加一个，比如，微分结构。看上去这样的做法是一个普遍的问题变得特殊了，但这个做法其实会使问题大大简化。后面我们会看到，研究一个具有群这样的代数结构的流形要方便得多。

李提出了李群之后，本质上讨论的都是李群的局部性质（虽然李的研究中不可避免地也会无意中涉及一些整体的概念）。所谓局部性质就是某点附近的性质，具

体到李群就是单位元附近的性质。举个例子。函数$y = \sin x$与函数$y = x$在$x = 0$点附近的局部性质是一样的，但是很明显它们的整体性质完全不同，一个是周期函数一个是单调的。但是我们已经看到，李群同时是一个拓扑空间，当然也要考虑它的整体也就是拓扑性质。

是嘉当（E. Cartan）和韦尔（H. Weyl）首先讨论了李群的整体性质。尤其是他们给出了单李群的整体性质和这个群的李代数（局部性质）之间的关系。嘉当从李群作为一个微分流形的角度讨论了李群；韦尔则系统建立了紧李群的表示，它证明了，一个紧李群一定可以同构于一个有限维一般线性群$GL(n,\mathbb{R})$（彼得-韦尔（Peter-Weyl）定理）。彼得-韦尔定理还告诉我们（在这个定理的证明中）一个紧李群一定可以有一个以无限维希尔伯特（Hilbert）空间为表示空间的表示——幺正表示。这个结果在量子力学中的重要性是不言而喻的，基于这个结果，我们可以将一个量子力学系统，比如氢原子，的态按照它的对称群表示分类。

30.10 矩阵群

矩阵群的重要性在于你平时遇到的基本上全都是矩阵群。

矩阵群就是前面我们为矩阵流形附加了群结构得到的群。那里我们强调了这个群作为微分流形的一面。这里我们更强调它的代数方面。

我们已经看到，矩阵流形同时是个矩阵。因此当矩阵流形附加了群结构变成了矩阵群之后它就有了代数的一面。自然地，矩阵的各种性质可以直接用来描述这个矩阵群。显然，如果一个矩阵性质被用来描述矩阵群，就有一个自然的要求：当我们用某个性质描述群的时候，这个性质在两个矩阵相乘后必须仍然保持（封闭性）；逆矩阵是不是仍是这类矩阵（逆）；这种矩阵是否包含单位阵（单位元）。比如，对称矩阵是矩阵的一个要求，那么能不能用对称作为这个群的特征呢。这就看两个对称矩阵相乘是不是仍然是对称矩阵，这样才能满足群的封闭性要求。简单说就是，看看这类矩阵是否能构成一个群。

30.10.1 一般线性群$GL(n,\mathbb{R})$

一般线性群$GL(n,\mathbb{R})$是所有非奇异的$n \times n$矩阵构成的群，这已经是实数域上最大的群。所有其它实数域上的矩阵群都是它的各种子群。

得到一般线性群的各种子群的方式是直接的，就是对矩阵附加一些条件，比如上三角，对称什么的。唯一的要求是这些限制不要破坏群性质。

下面我们只关注矩阵群作为矩阵的一面。

30.10.2 上三角群$UT(m,n)$

顾名思义，上三角群就是上三角矩阵构成的群。UT是upper triangular的意思。

上三角矩阵$UT(m,n)$定义为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * & * & a_{1,m+n} \\ * & * & * & * & * & * \\ a_{m,1} & * & * & * & * & a_{m,m+n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{m+1,m+1} & * & a_{m+1,m+n} \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & a_{m+1,m+n} & * & a_{m+n,m+n} \end{pmatrix}$$

这是一个$(m+n)\times(m+n)$阶矩阵。

第三十一章　李群的例子

31.1　Riemann面作为覆盖

一个多值函数在复平面上是有奇点（支点）的。使得复平面是多连通的。将$z-$平面单值化我们得到了Riemann面的概念。函数在Riemann上是单值的（推广了区域的概念），也就是说Riemann面是单连通的。这样单连通的Riemann面是多连通的$z-$平面的覆盖：

（这里有一幅图）

31.2　迷向子群

1. 群G作用在空间M上，保持某个空间中的点m不变的群元（$gm=m$）构成G的一个子群G_m，称为群G在m点的迷向子群（isotropic subgroup），也称稳定子群（stability subgroup）或小群（little group）。

2. 迷向子群显然同时带着群G和群G所作用的空间M的信息。

3. 同一条轨道上的迷向子群同构。

4. 传递：如果群G对空间M的作用只有一条轨道。那么就说G对M的作用是传递的。

5. G齐性流形：如果群G在流形M上是传递的，那么流形M就是G齐性流形。（另一定义见9）

6. 定理：

   如果群G在流形M上是传递的，或者说如果流形M是G齐性流形，而G_m是M上m点的迷向子群，则有

   $$M \simeq G/G_m$$

即M与G/G_m同构（同胚）。如果可微则微分同胚。

7. G/G_m得到的是以G_m和G_m的所有陪集作元素的一个群，或说一个空间。

8. 在空间M上传递的群不是唯一的。如$SU(2)$和$O(2)$都在S^2上传递。显然迷向子群也不会相同。$SO(2)$在S^2上的迷向子群必须是$SO(2)$的子群。

   $O(2)$在S^2上的迷向子群必须是$O(2)$的子群。

9. 齐性空间还可以这样定义：

   如果H是Lie群G的子群，则

   $$M = G/H$$

   为齐性空间，即前面的G齐性空间。

   这个定义的好处是给定一个Lie群G可以找到不止一个齐性流形。每一个子群（不一定是Lie子群（自采）

   都对应一个G齐性空间。这里G为Lie群的限制也许可以去掉（自采））。

10. $M = G/H$是一个齐性空间，但不一定是一个群。当子群H是不变子群的时候，齐性空间$M = G/H$也是一个群，是G的商群。
    商群是整除后的结果，也就是说群G被它的子群除以后得到的还是群，对“除不开”的H就不再是群（相当于不能整除，即做除法后不能得到整数）而是更广泛的空间了（相当于做除法后得到了分数）。

11. （9）中的结论表明：群G的子群H可以在空间$M = G/H$上作为G的迷向子群。

12. 齐性空间与商群

    前面由群作用在集合上的角度引入了齐性空间（引入迷向子群）和商群。下面我们换一个角度并给出一个从群角度出发的定义。

    (a) 陪集作为空间：齐性空间

    由群G的子群H可以得到H的左，右陪集g_iH和Hg_i。对群而言，不同元素给出的陪集不相交（除非相等）左陪集的集合$\{gH\}$就是G齐性空间，记为G/H。注意：齐性空间G/H的元素是陪集而不是群元。也就是将一个陪集看作一个等价类，或，更操作性地说，任选陪集中一个元素作为G/H的元素（模掉等价类）。当然齐性空间G/H不一定能构成群。在一些特殊情况下G/H也是一个群，就是下面所说的商群。

(b) 商群：如果子群H是G的正规子群，那么可以证明齐性空间G/H将是一个群，称为G的商群。

i. 一个群不一定有正规子群

ii. 一个群可以有不止一个正规子群，从而有不止一个商群

(c) 群G在自身上当然是传递的（重排定理），即群G作用到自身上只有一条轨道。或者说从任一点（群元）出发都可以得到全部其它群元

(d) G齐性空间可以被定义成在群G作用下只有一条轨道（传递）的空间。（见（5））

(e) 综合（4）（5）可知群G本身一定是一个G齐性空间。

(f) G本身是一个G齐性空间的结论可以得到拓扑群的重要结论。拓扑群就是同时是一个拓扑空间的群。拓扑变换当然是保相邻关系的，也就是保邻域的。这就允许我们只研究一个群元的邻域中的元素的性质，再将这个结论通过群作用传递到所有群元。处理李群时就是这样做的（李群当然是拓扑群）：我们只讨论单位元附近的性质，就知道了整个群的性质。（拓扑不平庸的情况也是基于这个方法，先讨论讨论不同"片"上的性质，再根据整体的拓扑结构给出整个拓扑空间的结果）。这就是说，我们可以通过研究Lie代数来研究Lie群。Lie代数是Lie群流形在某一点的切空间，是Lie群流形在该点线性化得到的。这就是Lie代数在Lie群研究中有核心重要的地位的原因。

(g) 关于齐性空间（传递性）

前面从两个角度定义了齐性空间

i. 如果群G在空间M上传递，则G模掉M上的一个迷向子群就得到一个齐性空间。

ii. 群G（不必要是Lie群）模掉它的任一个子群H得到齐性空间G/H（即一个由子群H和H的所有陪集为元素构成的子空间），显然G在空间G/H上传递。

31.3 半单群（待补充）

31.4 中心

1. 定义：群G中所有与所有元素对易的元素构成的子群称为群G的中心。

2. 中心一定是正规子群，因为它的左陪集=右陪集（对易）。

3. 中心是所有的那些对所有G中元素对易的元素构成的子群。显然中心的中心一定是它自己，因此只有一个中心。

4. 正规子群有许多，其中Abel正规子群也会有不只一种。中心是一种Abel正规子群，但中心是唯一的。

5. Abel群的中心是它自己。

6. 例：$GL\left(N,C\right)$的中心是单位矩阵的倍数

$$const\cdot\mathbf{1}=\begin{pmatrix} c & & & \\ & c & & \\ & & \ddots & \\ & & & c \end{pmatrix}.$$

这是中心是连续群的情况。

7. 例：$SO\left(n\right)$的中心是Z_n

$SP\left(2n\right)$的中心是Z_2

$Spin\left(2n+1\right)$的中心是Z_2

$Spin\left(2n\right)\begin{cases} n=odd: Z_4 \\ n=even: Z_2\times Z_2 \end{cases}$

这些是中心是分立群的例子。

31.5 覆盖，通用覆盖和商

1. 一个空间一定是它的商空间的覆盖（自采）

2. 单连通的覆盖是通用覆盖

下面考虑群：

3. 通用覆盖是唯一的。

4. 一个单连通群G可以有若干个离散正规子群K，每个商群G/K都给出一个以G为通用覆盖群的群。所有的G/K将给出所有由G覆盖的群。

$\{G/K_1,G/K_2,\cdots\}$

5. 所有这些离散不变子群K_i都是G的中心Z的一个离散不变子群。而商群G/K的中心是Z/K。

31.6 单群，单李群

1. 定义：没有正规子群的群。

2. 如果群是整数。那么单群就是素数，即不能被“整除”的数。单群被“除”以后，得到的不再是一个群。但是单群（整数）仍可以作除法。只不过得到的商G/H不再是群（整数），而是一个齐性空间（分数）。

3. 一个单纯Lie群是指没有连通正规Lie子群的Lie群。

4. 一个单纯Lie群不一定是单纯抽象群。

   一个没有连通正规Lie子群的Lie群完全可以有正规的分立子群。

   如$SU(2)$是一个单纯Lie群，但它不是单纯抽象群。因为它有一个正规分立子群$Z_2(=\{1,-1\})$。

5. 粗略地讲，一个不连通的Lie群可以看成是一个连通Lie群和一个分立群的组合。单纯Lie群主要是希望提出其中的Lie（连续）部分。

31.7 迷向子群的例子

1. $S^2 \simeq SO(3)/SO(2)$ （自采）。（$S^n \simeq SO(n+1)/SO(n)$）

   (a) 先找在S^2上传递的群：$SO(3)$在S^2上传递。

   (b) 再找$SO(3)$在S^2上的迷向子群。注意由于$SO(3)$在S^2上传递，即只有一条轨道。所以$SO(3)$在S^2上所有点的迷向子群同构（因为同一轨道上的迷向子群同构（3））。随便在球面S^2上选一点。显然使这点不变的全部变换是以连接原点O和m点的直线为轴的定轴转动群$SO(2)$。即$G_m = SO(2)$。但由于所有点的G_m同构所以只提$SO(2)$就可以。

   这里有一个图

   (c) 于是按照定理（6），我们有$S^2 \simeq SO(3)/SO(2)$

   (d) 这说明S^2是$SO(3)$的齐性流形

   (e) 普遍情况，$S^2 \simeq SO(n+1)/SO(n)$，即S^n是$SO(n+1)$齐性流形。

2. $RP^n \simeq SO(n+1)/SO(n)$

   (a) RP^n就是一个R^{n+1}只关心其中矢量的方向得到的少了一维的空间，更操作一些地说就是R^{n+1}中模掉过原点的所有直线。这也相当于将球面S^n模掉对径点。

   (b) $SO(n+1)$在S^n上传递。RP^n是S^n的商空间：$RP^n \simeq S^n/\sim$，所以$SO(n+1)$在RP^n上也传递（这里我们用到了这样一个看起来是显然的结论：一个群G如果在空间M上传递，那么G在M的商空间$M/\sim$上一定也传递。因为商群中的元素就是原来群G中的元素。商群中元素是某个等价类中元素的代表）。

   (c) 寻找RP^n上$SO(n+1)$的迷向子群，（$SO(n+1)$的迷向子群的意思是说它首先必须是$SO(n+1)$的子群）RP^n是对径点粘在一起的球面S^n。S^n。S^n上$SO(n+1)$的迷向子群是$SO(n)$（如$SO(3)$的迷向子群是$SO(2)$）。$O(n)$与$SO(n)$的区别是在$SO(n)$的基础上加一个反射，正好将对径点反射到一起。所以S^n上的迷向子群是$SO(n)$。而RP^n上的迷向子群是$SO(n)$。而RP^n上的迷向子群是$O(n)$。

   (d) 按照定理6，有$RP^n \simeq SO(n+1)/O(n)$

3. $S^n \simeq O(n+1)/O(n)$

   (a) 注：前面已经得到$S^n \simeq SO(n+1)/SO(n)$（见1）。这说明在S^n上传递的群不止一种。$O(n)$，$SO(n)$都在S^n上传递。$SO(n)$是$O(n)$的不变子群$O(n)/SO(n) = Z_2$也是$O(n)$齐性空间（详见4）。

   (b) $O(n+1)$在S^n上显然是传递的。（$SO(n+1)$在S^n上是传递的，$O(n+1)$就是$SO(n+1)$上加上反射。）

4. $Z_2 = O(n)/SO(n)$

5. $\mathbf{E}^3 = E^3/SO(3)$

   (a) $\mathbf{E}^3$:欧几德里空间

   E^3 :欧几德里群

   (b) 注：欧几德里群的群流形是6维的（平移+旋转）不是欧几里得空间$\mathbf{E}^3$。

   (c) E^3群在$\mathbf{E}^3$上传递。（$SO(3)$在$\mathbf{E}^3$上有无数条轨道（不同的r就对应不同的轨道）。但平移和旋转一起便在$\mathbf{E}^3$上传递了，即由一点出发，通过平移和旋转可以达到$\mathbf{E}^3$中的任何点。）

(d) 找E^3在$\mathbf{E}^3$上的迷向子群：想象将坐标系固定在（待续）

31.8 $SO(n), O(n)$与$SU(n)$

1. 矢量是$SO(n)$变换下的矢量

   赝矢是$O(n)$变换下的矢量

   旋量是$SU(n)$变换下的矢量

31.9 直乘积群与商群

1. 我们有（商）

   $O(3)/SO(3) = Z_2$

   $SU(2)/Z_2 = SO(3)$

   我们还有（直乘积群）：$Z_2 \times SO(3) = O(3)$。它们有什么关系？

31.9.1 单射（injective）(一到一映射one to one或one–one)：

如果$x \neq x'$则$f(x) \neq f\left(x'\right)$。单射$f: X \to Y$不一定能将$Y$射满，例：$x \to e^x$，$x \in R$但$e^x > 0$是单射不是满射。

（这里有一幅图）

31.9.2 满射（Surjective）：Y中的每一个元素在X中都有至少有一个原象

$x \to x^2$就不是满射，也不是单射。

$x \to x^3 + x^2$是满射不是单射

31.9.3 双射（bijection）:既是单射又是满射

$x \to x^3$是双射

例：$x \to \sin x$既不是单射，也不是满射，当然不是双射

当定义域（domian）为$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$。值域（range）为$y \in [-1, 1]$时，$x \to \sin x$为双射。

注：以上X，Y都是$\mathbf{R}$

31.9.4 例子

例：$GL(n,\mathbf{R})$中的群元M（即一个非奇异n阶方阵）作为$R^n \to R^n$的映射$(x \to Mx)$时既是单射又是满射。

31.9.5 包含映射（inclusion map） 恒等映射（identity map）

$f : A \to B$，$a \in A$，$f(a) = a$

如果$A \subset B$，则是包含映射，记作：i：$A \to B$。

如果$A = B$，则是恒等映射，记作：$id_A : A \to B$。

31.9.6 自同构（automorphism）与自同态（endomorphism）

1. 自同构：一个集合自身到自身的同构映射。

   自同态：一个集合自身到自身的同态映射

2. 自同构例子：矢量空间中的非奇异的线性变换。$GL(V)$以及$GL(V)$的所有子群

3. 自同构例子：矢量空间中包含奇异情况的线性变换，其中非奇异情况同构自然同态，奇异情况没有逆变换。

   同态以及各种子群。

4. 矢量空间中所有线性自同构变换构成的群就是$GL(V)$群。即$Aut\, V = \{f : V \to V | f$线性，可逆$\}$

5. 矢量空间中所有自同构变换：$End\, V = \{f : V \to V | f$线性$\}$

6. $Aut\, V \subset End\, V$

31.9.7 等价关系：

1. $a \sim a$

2. $a \sim b$则$b \sim a$

3. $a \sim b$，$b \sim c$则$a \sim c$

31.9.8 等价类：所有等价的元素构成的集合

31.9.9 商空间（quotient space）：等价类构成的集合

具体地：将一个集合分成几个等价类。在每个等价类中任取一个元素（反正所有这些元素都等价）构成的集合。

例：集合$\{a_1，\cdots，a_n，b_1，\cdots，b_m，c_1，\cdots，c_k，\cdots\}$的商空间为$\{a_1，b_1，c_1，\cdots\}$。这里$a_1$，$b_1$，$c_1$分别是类$[a_1]$，$[a_1]$，$[a_1]$的代表（representative）

例：城市中人的集合的一个商空间就是这个城市有多少户。

2

31.9.10 拓扑空间的商仍是拓扑空间

$$S/\mathbf{R}=S'$$

其中S是拓扑空间，R随便是什么，S'是另一个拓扑空间

注意：求商保持拓扑，但其它映射不一定。

（这里有一幅图）

31.9.11 商空间的例子

找一个集合的商空间首先要指定一个等价关系，然后将集合中的元素按这个等价关系分成等价类。取每个等价类的代表构成一个新的集合就是商空间

$\mathbf{R}/x\tilde{}x+2\pi n=S^1$，$x\in\mathbf{R}$，$n\in\mathbf{Z}$

将间隔$2n\pi$的点都看作一类

（这里有一幅图）

$[x]=\{x\in R|x\tilde{}x+2n\pi\}$等价类，即$[x]=\{\cdots x-2\pi，x，x+2\pi，x+4\pi，x+6\pi，\cdots\}$

注意到$2\pi-0=2\pi$。即2π与0是一类，即看作一点，将实轴$\mathbf{R}$上所有相差$2n\pi$的点看作一点，则商空间为（x作为代表）

（这里有一幅图）

31.9.12 拓扑空间中的“粘”

在拓扑中可以通过”粘”得到各种拓扑的过程就是在求商空间。

粘就是将一些点看作等价的，如将线段的两个端点粘在一起得到圆，就是将端点看作等价的点。

（这里有一幅图）

因此， 第二个图就是第一个图的商空间

不同的等价关系（不同的黏合方式）给出不同的商空间。一个矩形，认为对边上的点等价就得到圆柱，认为两对边上点分别等价就得到轮胎面，认为对边上中心对称的点等价就得到möbius带。

31.9.13 射影空间$\mathbf{R}P^n$（projective）

将一条过原点的直线上的点视为等价的点，即过原点直线上的点构成等价类。

面投影：

将与直线相交的两个点视为等价~

1. （这里有一幅图）

   即 $S^1/\sim \cong S^1 \cong RP^1 = S^1/Z_2$

2. （这里有一幅图）

   $S^2/\sim \cong \mathbf{R}P^2 = S^2/Z_2$

3. 对n维情况，我们有$\mathbf{R}P^n = S^n/Z_2$，即$\mathbf{R}P^n$是S^n的一个商空间。

体投影：在$\mathbf{R}^n$空间中将过原点，但不包含原点的直线上的点看作一个点。

前面将直线上的两个点看作一个点不会降维数。现在是将一条直线上所有点看作一点，所以维数都降一维。

1. $\mathbf{R}^{2\sim}$：过原点但不含原点的直线上点，等价

   （这里有一幅图）

   $\mathbf{R}^2/\sim = \mathbf{R}P^1$

2. $\mathbf{R}^3$

   （这里有一幅图）

   $\mathbf{R}^3/\sim = \mathbf{R}P^2$

3. $\mathbf{R}^n$

   $\mathbf{R}^n/\sim = \mathbf{R}P^{n-1}$

31.9.14 关于射影空间

射影空间将一条过原点（但不包括原点）直线上的点看作一个等价类。这就是说射影空间中的一个点代表的是一个方向（注意这个方向指一条直线的方位，而不关心（不区分）这条直线的两个方向）。原来直线上点间距离的信息被去掉了。

（这里有一幅图）

31.9.15 射影Hilbert空间

这种只关心取向而不关心长度的空间一个特别有意义的例子就是量子力学中的Hilbert空间。量子力学中其实我们只关心矢量的方向，所有态矢的长度都是1。或者说不同长度的态矢对应的其实都是同一态。因此量子力学中的Hilbert空间其实是射影空间，称为射影Hilbert空间。在这里，从某种意义上讲射影空间是一个去掉了冗余信息的空间。

31.9.16 射影空间是否可定向

RP^n $\begin{cases} n=\text{偶数} & \text{不可定向} \\ n=\text{奇数} & \text{可定向} \end{cases}$

例：$RP^1 = S^1$，可定向是显然的

例：　　$RP^2 = S^2/Z_2$不可定向

这里S^2是可定向的，但S^2/Z_2不可定向。

31.9.17 关于射影空间的一些结论

1. RP^0同胚于一个点
2. RP^1同胚于S^1
3. RP^n中RP^{n-1}的补是$\mathbf{E}^n$

   例：$RP^1 \simeq S^1$，RP^0同胚于一个点

   而S^1去掉一个点$= E^1$

   （这里有一幅图）
4. $RP^3 \simeq SO(3)$

   证明：思路如下

   (a) $RP^3 \simeq S^3/Z_2$　$RP^n = S^n/Z_2$

(b) $SU(2) \simeq S^3$

(c) $SO(3) \simeq SU(2)/Z_2$

于是有$RP^3 \simeq S^3/Z_3 \simeq SU(2)/Z_2 \simeq SO(3)$

证毕

附证明细节：

(a) $RP^3 \simeq S^3/Z_2$ 是 $RP^n = S^n/Z_2$的特例

(b) $SU(2) \simeq S^3$:二阶幺正群$SU(2)$的群元在矩阵表示下可用一个2×2，行列式为1的幺正矩阵表示；即

$\begin{cases} U^\dagger U=1 \\ \det U=1 \end{cases}$

设$U=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$U^{-1}=\frac{1}{\det U}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

此外，$\because \det U=1 \therefore U^{-1}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

幺正要求$U^\dagger = U^{-1}$，即$\begin{pmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{cases} a^*=d \\ b^*=-c \end{cases}$ 于是$U=\begin{pmatrix} a & -c^* \\ c & a^* \end{pmatrix}$

我们得到

$$\det U = ad-bc = |a|^2+|c|^2 = 1 \quad (\blacktriangle)$$

这就是$SU(2)$群的群元所必须满足的限制。

这里$SU(2)$的群元a，c是复数，表示成

$\begin{cases} a=x+iy \\ c=z+iw \end{cases}$

于是($\blacktriangle$)式的限制变成一个实数关系

$$x^2+y^2+z^2+w^2=1 \qquad (\bigstar)$$

这就是说$SU(2)$群一共有4个实连续参数。但加上限制条件便只有三个是独立的。

(a) 一个连续群的参数张成一个参数空间，限制(★)式表明$SU(2)$的群流形是一个四维空间中的三维球面S^3，即$SU(2) \simeq S^3$

(b) $SO(3) \simeq SU(2)/Z_2$

31.9.18 关于$SU(2)$和$SO(3)$

1. $SU(2)$的群流形是S^3

   $SO(3)$的群流形是$RP^3\left(\simeq S^3/Z_2\right)$

   (a) 即$SU(2) \simeq S^3$

   $SO(3) \simeq RP^3 \simeq S^3/Z_2$

2. 显然$SU(2)$是$SO(3)$的覆盖群，由于$SU(2)$是单连通的所以是一个通用覆盖。

3. 由S^3和RP^3的关系很容易看到$SO(3)$是$SU(2)$的商群：

   RP^3就是S^3粘合对径点后得到的，粘合对径点就是将两点看作一个点，即$/Z_2$

4. S^3是单连通的

   RP^3是多连通的

   用S^2和RP^2比较容易说明这个问题（S^1与RP^1与S^3和RP^3情况很不同。$S^1 = RP^1$是无穷连通的）

   (a) （这里有一幅图）

31.9.19 在空间中模掉群

1. 所谓模掉就是将一个等价类中所有的元素看作一个元素。具体操作就是将一个类中的元素用其中一个元素代表。当然模掉的却是空间自己的元素，也就是说将空间按空间中的等价类压缩。

2. 模掉或者说将空间按等价类压缩的关键就要在空间中指定一个等价关系，从而从空间中的元素构成若干等价类，再按等价类压缩。

3. 指定等价关系的一个办法就是利用群作用在这个空间上，得到一些在该群作用下的等价类。也就是将每一个轨道上的点看作一类。具体地，将群G中的每一群元q_i作用到空间的每一点x上。这样将得到一组点$\{g_1x, g_2x, g_3x, \cdots\}$构成空间中的一个轨道。将一个轨道上所有点看作一个等价类。这就是这个群作用在这个空间上给出的等价类。

4. 所谓空间/群就是指空间模掉这些群作用下得到的轨道所得到的商空间。

5. 例：$E^3/SO\,(3) = E^1_+$

   E^n是n维欧氏空间，E^1_+是一维欧氏空间中取正值的部分。

   $SO\,(3)$对称是三维欧氏空间E^3中的旋转对称。E^n在$SO\,(3)$群作用下得到的轨道是不同半径的球面（当然这样得到的等价类（轨道）具有$SO\,(3)$对称性）。也就是说由任一点出发由$SO\,(3)$（三维旋转）变换得到的点看作是一个等价类，即将半径为r的球面上的点都看作是一个点。这样E^3中的一个点(r,θ,φ)在模掉$SO\,(3)$后就变成$r \in E^1_+$了。

6. 例：$T^n = E^n/Z^n$

   这里T^n是$n-$维环面。也就是$n-$维轮胎面

$$T^n = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1}_{n\text{个}}$$

   E^n是n维欧氏空间，Z在这里是整数在加法下构成的群，Z其实也是一维平移群。

   以$T^1 = E^1/Z = S^1$为例

   E^1是一个有度量的一维R^1，也就是实轴。Z是整数在加法下构成的群，也就是看作一个点

   （这里有一幅图）

   再看$T^2 = E^2/Z^2$，这里Z^2表示模掉Z两次

   （这里有一幅图）

   $T^2 = E^2/Z^2 = S^1 \times S^1$

7. n个全同粒子位形空间$= E^{3n}/S_n$

   这里S_n是n阶对称群。n个可分辨粒子的位形空间是E^{3n}，但全同粒子间的置换是不可察觉的，要模掉。n个全同粒子间的置换是S^n，所以是E^{3n}/S_n。

   （E^{3n}在S_n作用下的轨道比较复杂）

31.9.20 子集的示性函数

如果A是X的子集，而函数

$\chi_A(x)=1 \quad x\in A$

$\chi_A(x)=0 \quad x\notin A, x\in X$

则$\chi_A(x)$是子集A的示性函数。

证明以下结论

1. $n-$维空间中的平移构成一个群（平移群）
2. $n-$维空间中的旋转构成一个群（$O(n)$群）
3. $n-$维空间中的平移和旋转一起构成一个群（欧几里德群（Euclidean group）E^n）

证明：

1. 证明平移构成一个群

$$T_{\vec{a}}X=X+a\ X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}a=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}h$$

   (a) $T_bT_a=T_{a+b}\ \ \vec{a}+\vec{b}$仍是矢量

   (b) $T_c(T_bT_a)=T_{\vec{c}}T_{\vec{a}+\vec{b}}=T_{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}$

   $(T_cT_b)T_a=T_{b+c}T_a=T_{a+b+c}$

   即$T_c(T_bT_a)=(T_cT_b)T_a$

   (c) $T_0T_a=T_aT_0=T_a$

   (d) $T_a^{-1}=T_{-a}$

2. 证明转动构成一个群

   方法一：给出$n-$维空间的转动矩阵，然后证明它是一个群。

   方法二：（思路）

   (a) 首先证明描述欧氏空间中转动的矩阵一定是正交矩阵：

转动一定是保长度的，设矢量$X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

X的长度为：$\widetilde{X}\cdot X$。

设转动矩阵为O，则转动后$X'=OX$，转动后的长度为$\widetilde{X}'\cdot X'=\widetilde{X}\widetilde{O}OX$，保长度显然要求$\widetilde{O}O=1$。这说明$O$一定是一个正交矩阵。即保长度矩阵一定是正交矩阵。

（注：保长度就是保内积，保内积前提就是保矢量夹角。于是正交变换后原来正交的矢量还是正交的。）

但保长度的变换不一定是转动。转动还必须保原点不动，这是满足的：

$$O\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}=\left.\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}\right\}n\text{个}$$

所以O是一个转动。

注：正交"变换"就是实的幺正变换。

(b) 再证正交矩阵构成一个群

i. $\widetilde{O_1O_2}O_1O_2=\widetilde{O_2}\widetilde{O_1}O_1O_2=\mathbf{1}$

ii. 矩阵乘法满足结合律

iii. 单位元$=\mathbf{1}$，$\because\widetilde{\mathbf{1}}=\mathbf{1}$

iv. $O^{-1}=\widetilde{O}\because\widetilde{O}O=\mathbf{1}$

3. 证明转动+平移构成一个群

转动+平移的操作定义为：$SX=\underbrace{OX}_{\text{转动}}+\underbrace{a}_{\text{平移}}$

(a) $S_2S_1X=S_2\left(O_1X+a_1\right)=\left(O_2\left(O_1X+a_1\right)+a_2\right)=O_2O_1X+O_2a_1+a_2$ (▲)

前面已证转动的封闭性，即$O_2O_1=O_3$，O_2a_1给出一个矢量，平移的封闭性给出$O_2a_1+a_2=a_3$。

所以$S_2S_1X=S_3X$，S_3仍是一个转动+平移

(b)

$$\begin{aligned} S_3\left(S_2S_1X\right) &= S_3\left(O_2O_1X+O_2a_1+a_2\right) \\ &= O_3\left(O_2O_1X+O_2a_1+a_2\right)+a_3 \\ &= O_3O_2O_1X+O_3O_2a_1+O_3a_2+a_3 \end{aligned}$$

而

$$\left(S_3S_2\right)S_1X = \left(S_3S_2\right)\left(O_1X+a_1\right)$$

由式(▲)我们有两个S作用的结果

$$S_3S_2 = O_3O_2+O_3a_2+a_3$$

于是

$$\begin{aligned} \left(S_3S_2\right)S_1X &= O_3O_2\left(O_1X+a_1\right)+O_3a_2+a_3 \\ &= O_3O_2O_1X+O_3O_2a_1+O_3a_2+a_3 \end{aligned}$$

(c) $S_0=\mathbf{1}+0=\mathbf{1}$ 单位元

(d) $X^{'}=SX=OX+a$ 逆元

显然$X=O^{-1}\left(X^{'}-a\right)=\widetilde{O}\left(X^{'}-a\right)$

$\because S^{-1}X'=S^{-1}SX=X$

对比有$S^{-1}X=\widetilde{O}\left(X-a\right)$，因此转动+平移构成一个群（欧几德里群）

证毕

31.9.21 证明：整数中同余是一种等价关系

证明：下面我们用$z|a$表示$\frac{z}{a}$的余数。

1. $z|a=z|a$，即自己与自己同余。
2. 如果$z_1|a=z_2|a$，则$z_2|a=z_1|a$。
3. 如果$z_1|a=z_2|a$且$z_2|a=z_3|a$，则$z_1|a=z_3|a$

以上三条说明同余（即余数相同）是一种等价关系。

注1：对z，$a \in Z$，0，1，$\cdots$，$a-1$构成a个等价类，

即 $\underbrace{[i]}_{\text{等价类}} = \{z \in Z | z|a = i\}$

注2：在同余等价的意义下，集合$\{0, 1, \cdots, a-1\}$构成整数集合Z的商空间，$Z/\sim \underset{\text{同构}}{\cong} Z_a$，$Z_a$构成一个$a$阶循环群。

此时有$0+1=1$,$1+1=2$，$\cdots$，$1+(a-1)=0$

即非负整数在加法下不构成群。但$Z/\sim$（$\sim$指同余等价关系）构成一个循环群Z_a

31.9.22 拓扑群与群流形

1. 如果一个拓扑空间同时还是一个群，那么我们就有了一个拓扑群。

2. 如果这个拓扑空间是一个流形，这个流形就是群流形。

3. 拓扑群的子群也是拓扑群。

4. 离散群在离散拓扑的意义下也称拓扑群。事实上所有群在考虑离散拓扑的意义下都是拓扑群。

5. 拓扑群的子群是拓扑群的例子

   $\mathbf{C}\setminus\{0\}$（去掉原点的复平面）在乘法下构成一个拓扑群。乘法就是普通的复数乘法，去掉原点是为了有逆。群的乘法就是：$\left(r_1 e^{i\theta_1}\right)\cdot\left(r_2 e^{i\theta_2}\right)$。复数乘法$\mathbf{C}\setminus\{0\}$的子空间$\mathbf{S}^1$元素为$e^{i\theta}$。在复数乘法下也构成群（$U(1)$群）。$\mathbf{S}^1$当然也是个拓扑空间。即$U(1)$群的群流形是$\mathbf{S}^1$。

6. 一个群流形的例子

   $SU(2)$的群流形是$\mathbf{S}^3$。

   $SU(2)$ $\mathbf{S}^3$

   $e^{i(\alpha T_1+\beta T_2+\gamma T_3)} \longleftrightarrow (\alpha,\beta,\gamma)$

   群元 $\mathbf{S}^3$上的点

7. $\mathbf{R}\setminus\{0\}$在加法下是群

   它的正实数子空间$\mathbf{R}_+$也构成一个群，它们都是拓扑群。

8. 矢量空间$\mathbf{E}^n$在加法下构成群

   它的子空间——单位长度矢量构成的空间$\mathbf{S}^n$，也在矢量加法下构成群。它也是拓扑群。

9. 四元数在加法下构成群，群流形是$\mathbf{R}^4$，四元数在乘法下也构成群。群流形是$\mathbf{R}^4 \setminus \{0\}$。注意到四元数与$\mathbf{R}^4$都有四个分量这件事就不难理解四元数在乘法下构成的群的子群是$\mathbf{S}^3$，也是拓扑群。

   注：在这里我们有时混用空间和群的符号。

31.9.23 一般线性群$GLn.\mathbf{K}$

1. $GL(n,\mathbf{K})$是在域$\mathbf{K}$上的。也就是$n \times n$矩阵的群元是域$\mathbf{K}$中的元素。$\mathbf{K}$可以是实数域$\mathbf{R}$，可以是复数域$\mathbf{C}$，也可以是四元数域$\mathbf{H}$，或者其它域。

   注意$\mathbf{R}$，$\mathbf{C}$为对易域，$\mathbf{H}$为不可对易域。

2. $GL(n,\mathbf{K})$是拓扑群，它的子群当然也是拓扑群。

3. $GL(n,\mathbf{R})$的群流形是$\mathbf{R}^{n^2}$。$GL(n,\mathbf{R})$群元有n^2个。

   $GL(n,\mathbf{C})$的群流形是$\mathbf{C}^{n^2}$或$\mathbf{R}^{(2n)^2}$

   $GL(n,\mathbf{H})$的群流形是$\mathbf{R}^{(4n)^2}$

4. 仿射群。将n阶的$GL(n,\mathbf{R})$扩充成$n+1$阶

   $$\left(\begin{array}{cc} L & t \\ 0 & 1 \end{array} \right) \qquad \begin{array}{l} L \in GL(n,\mathbf{R}) \\ t \in \mathbf{R}^n \end{array} \Big\}$$

   也构成群，即仿射群$A(n,\mathbf{R})$（affine group）

31.9.24 线性射影群（linear projective group）

1. 将一般线性群$GL(n,\mathbf{K})$中相差一个常数因子的矩阵看作是等价的，即认为$A \sim kA$。这样得到的$GL(n,\mathbf{K})$的商群$PL(n,\mathbf{K}) = GL(n,\mathbf{K}) / \{k\mathbf{1}_n\}$，称为线性射影群（$\mathbf{1}_n$为$n \times n$单位阵）

2. 对比将$\mathbf{R}^n$模掉长度的商空间是射影空间，不考虑长度只考虑方向（即将一条直线投影到一点）的矢量空间就是射影空间。

第三十二章　变分法简引

32.1　等时变分：小引子和几个力学中的例子

32.1.1　泛函与变分

所谓变分法就是求泛函极值的方法。首先在介绍变分法以前我们应该明确泛函与普通函数，尤其是复合函数的区别：泛函$J[f(x)]$的自变量是$f(x)$;复合函数$g(f(x))$的自变量是x。泛函$J[f(x)]$的变化是函数$f(x)$的变化引起的，如$f(x) \to f(x) + \varepsilon \sin(x)$;复合函数$g(f(x))$的变化是数$x$的变化引起的，如$x \to x + \varepsilon$（如果考虑的是无穷小变化只需取$\varepsilon$为小量）。

下面我们考虑一种简单情况下的泛函极值问题，即函数曲线两端固定，当作$f(x) \to f(x) + \varepsilon\eta(x)$，$\eta(x)$为任意函数，变化对坐标$x$不变化（两端不固定，$x \to x + \varepsilon$的变分称为全变分）。如图：

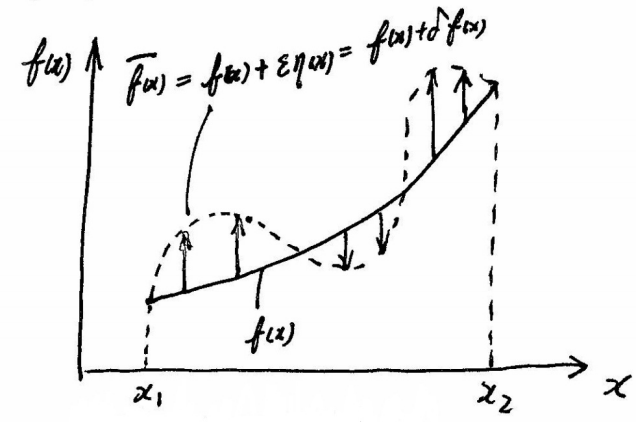


图 32.1: 简单变分（等时变分）

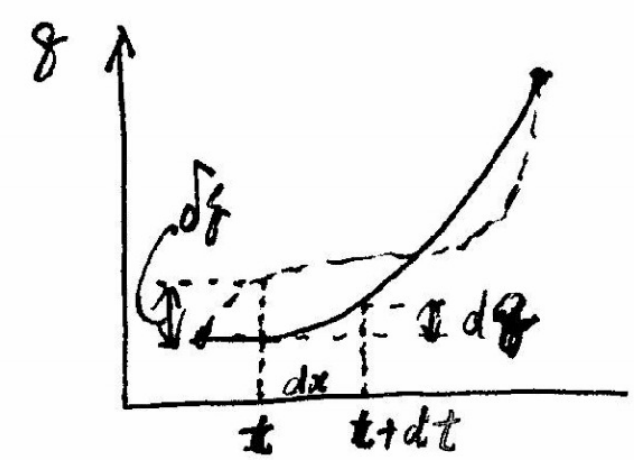


图 32.2: $\delta t = 0$简单变分（注意$\delta x = 0$）

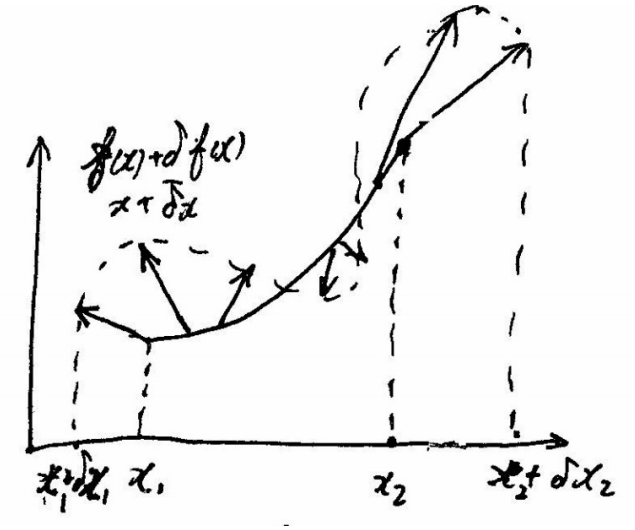


图 32.3: 全变分

图中函数形式改变后的新函数$\bar{f}(x)$为（新函数用$\bar{f}(x)$表示而不用$f'(x)$表示是为了与导数区别）

$$\bar{f}(x) = f(x) + \varepsilon\eta(x).$$

与微分情况类似，我们定义变分

$$\begin{aligned} \delta f(x) &= \bar{f}(x) - f(x) = \varepsilon\eta(x) \\ \delta f(x_1) &= \delta f(x_2) = 0. \end{aligned} \tag{32.1}$$

为了区别于全变分，有时我们将（32.1）中定义的变分称作简单变分，或者由于$\delta t = 0$而称为等时变分。

很明显，变分和微分是完全不同的两回事。从作了变分的函数形式上看原则上你将认不出这个函数原来的形式是什么，而作了微分后的函数只是数值有所变化，函数形式没有变化。

32.1.2 变分的性质

变分和微分的定义在形式上的相似性使它们的各种性质和运算规则在形式上也是相似的。对变分我们有

$$\begin{aligned} \delta(f+g) &= \delta f + \delta g \\ \delta(fg) &= f\delta g + g\delta f \\ \delta\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{g\delta f - f\delta g}{g^2}. \end{aligned} \tag{32.2}$$

变分有一条非常重要的性质：变分与微分以及积分的运算次序是可交换的：即

$$\begin{aligned} \delta(df) &= d(\delta f) \\ \delta\int f dx &= \int \delta f dx. \end{aligned} \tag{32.3}$$

我们来证明着一点。微分情况：由变分定义

$$\begin{aligned} \delta f &= \bar{f} - f \\ d(\delta f) &= d\bar{f} - df. \end{aligned} \tag{32.4}$$

再由变分定义知

$$\delta(df) = d\bar{f} - df. \tag{32.5}$$

比较（32.4）式和（32.5）式右边可以得到

$$d(\delta f) = \delta(df).$$

积分情况：由变分定义

$$\begin{aligned} \delta\int_1^2 f dx &= \int_1^2 \bar{f} dx - \int_1^2 f dx \\ &= \int_1^2 (\bar{f} - f)\, dx \\ &= \int_1^2 \delta f dx, \end{aligned}$$

即

$$\delta \int f dx = \int \delta f dx.$$

32.1.3 泛函的极限Euler方程

函数的极限是通过导数为零（$df = 0$）得到的，类似地当我们希望求泛函极值的时候，对应的便是变分

$$\delta J\left[q_1, q_2\right] = 0.$$

下面的问题是如何求变分δJ。为了解决这一问题。首先来考虑一个普遍的问题。问题：如果关系F与若干个彼此独立的量f_1,f_2,$f_3 \ldots f_n$相关，当变量f_i发生无限小变化$\triangle q_i$时F如何变化。

$$\begin{aligned}
\triangle F &= \lim_{\triangle f_i \to 0} F\left(f_1 + \triangle f_1, f_2 + \triangle f_2, \cdots, f_n + \triangle f_n\right) - F\left(f_1, f_2, \cdots, f_n\right) \\
&= \lim_{\triangle f_i \to 0} F\left(f_1 + \triangle f_1, f_2 + \triangle f_2, \cdots, f_n + \triangle f_n\right) - F\left(f_1, f_2 + \triangle f_2, \cdots, f_n + \triangle f_n\right) \\
&+ F\left(f_1, f_2 + \triangle f_2, \cdots, f_n + \triangle f_n\right) \\
&- F\left(f_1, f_2, \cdots, f_n + \triangle f_n\right) + F\left(f_1, f_2, \cdots, f_n + \triangle f_n\right) + \cdots \\
&= \lim_{\triangle f_1 \to 0} \frac{F\left(f_1 + \triangle f_1, f_2 + \triangle f_2, \cdots, f_n + \triangle f_n\right) - F\left(f_1, f_2 + \triangle f_2, \cdots, f_n + \triangle f_n\right)}{\triangle f_1} \triangle f_1 \\
&+ \lim_{\triangle f_2 \to 0} \frac{F\left(f_1, f_2 + \triangle f_2, \cdots, f_n + \triangle f_n\right) - F\left(f_1, f_2, \cdots, f_n + \triangle f_n\right)}{\triangle f_2} \triangle f_2 \\
&+ \cdots \\
&= \frac{\partial F}{\partial f_1} \triangle f_1 + \frac{\partial F}{\partial f_2} \triangle f_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial f_n} \triangle f_n.
\end{aligned}$$

$\triangle f_i$是无穷小时，如果f_i是函数，$\triangle F$就是变分δF

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial f_1}\delta f_1 + \frac{\partial F}{\partial f_2}\delta f_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial f_n}\delta f_n; \tag{32.6}$$

如果f_i是一般变量，$\triangle F$就是普通微分dF

$$dF = \frac{\partial F}{\partial f_1}df_1 + \frac{\partial F}{\partial f_2}df_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial f_n}df_n. \tag{32.7}$$

注：这里F体现的是变量f_i之间的关系。有了以上概念我们开始考虑泛函极值。为了与力学问题联系，我们考虑形如

$$J\left[f\left(x\right)\right] = \int_1^2 F\left(f\left(x\right), \dot{f}\left(x\right), x\right) dx \tag{32.8}$$

的泛函，其中

$$\dot{f} = \frac{df}{dx}$$

由前面的分析，泛函取极值的条件应是

（图）

$$\delta J\left[f\left(x\right)\right] = 0. \tag{32.9}$$

$$\begin{aligned}
\delta J &= \delta \int_1^2 F\left(f, \dot{f}, x\right) dx \\
&= \int_1^2 \delta F\left(f, \dot{f}, x\right) dx \\
&= \int_1^2 \left(\frac{\partial F}{\partial f}\delta f + \frac{\partial F}{\partial \dot{f}}\delta \dot{f}\right) dx \\
&= \int_1^2 \left(\frac{\partial F}{\partial f}\delta f + \frac{\partial F}{\partial \dot{f}}\left(\frac{d}{dx}\delta f\right)\right) dx \\
&= \int_1^2 \left(\frac{\partial F}{\partial f}\delta f + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{f}}\delta f\right) - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial \dot{f}}\delta f\right) dx \\
&= \int_1^2 \left(\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial \dot{f}}\right)\delta f dx + \frac{\partial F}{\partial \dot{f}}\delta f\Big|_1^2 \\
&= \int_1^2 \left(\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial \dot{f}}\right)\delta f dx,
\end{aligned}$$

其中$\delta \dot{f} = \delta \frac{d}{dx} f = \frac{d}{dx}\delta f$，$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{f}}\delta f\right) = \left(\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial \dot{f}}\right)\delta f + \frac{\partial F}{\partial \dot{f}}\left(\frac{d}{dx}\delta f\right)$，$\delta f(1) = \delta f(2) = 0$。极值条件要求：

$$\delta J = \int_1^2 dx \left(\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial \dot{f}}\right)\delta f = 0. \tag{32.10}$$

因为δf是任意的，所以要满足这一条件（32.10）只有

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial \dot{f}} = 0, \tag{32.11}$$

这就是Euler方程。由此方程解出的F可给出泛函J的极值。

下面我们来看几个泛函极值的例子。

32.1.4 最速落径问题:例子

背景（伯努利、牛顿）

问题：质点在重力作用下由静止开始无摩擦地沿某曲线落向较低的另一点。什么样的曲线可以使这一过程所需时间最短。

这个问题中要求的是一条曲线的方程。显然，这是个泛函极值问题。首先我们应写出这个泛函所要求的是这个过程所需的时间

$$t=\int_1^2 dt=\int_1^2 \frac{ds}{\frac{ds}{dt}}=\int_1^2 \frac{ds}{\upsilon}. \tag{32.12}$$

曲线上的小线元

$$\begin{aligned} ds&=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}\\ &=dy\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\\ &=dy\sqrt{1+(x')^2} \end{aligned}$$

其中$x'=\frac{dx}{dy}$。由机械能守恒我们知在任一时刻的速度υ都将满足

$$T+U=\text{const}=0. \tag{32.13}$$

我们将const取为零是因为我们可以自由的选择势能零点。我们选择$y=0$处为势能零点。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\upsilon^2+(-mgy)&=0\\ \upsilon&=\sqrt{2gy} \end{aligned}$$

$$t=\int_1^2 dy\sqrt{\frac{1+x'^2}{2gy}}. \tag{32.14}$$

现在的问题变成了求使泛函t取最小值的路径曲线函数$y(x)$的形式，按照前面的分析，此时我们有

$$F=\sqrt{\frac{1+x'^2}{2gy}}. \tag{32.15}$$

要想使泛函t取极值，则F必须满足Euler方程（32.11）

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dy}\frac{\partial F}{\partial x'}=0.$$

由于F中不显含x所以有$\frac{\partial F}{\partial x}=0$。于是Euler方程变为

$$\frac{d}{dy}\frac{\partial F}{\partial x'}=0, \tag{32.16}$$

即

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = const \equiv \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

这种常数的选取完全是历史习惯，a的确定取决于两点的相对位置选择。

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x'} &= \frac{1}{2}\frac{2x'}{\sqrt{y}\sqrt{1+x'^2}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} \\ \frac{x'^2}{y\left(1+x'^2\right)} &= \frac{1}{2a}.\end{aligned} \tag{32.17}$$

这是所求曲线要满足的微分方程。

$$\begin{aligned}2ax'^2 &= y + yx'^2 \\ \left(2a-y\right)x'^2 &= y \\ x'^2 &= \frac{y}{2a-y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dy} &= \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2a-y}} = \frac{y}{\sqrt{2ay-y^2}} \\ dx &= \frac{y}{\sqrt{2ay-y^2}}dy.\end{aligned}$$

作代换

$$\begin{aligned}y &= a\left(1-\cos\theta\right) \\ dy &= a\sin\theta d\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}dx &= \frac{a\left(1-\cos\theta\right)}{\sqrt{2a^2\left(1-\cos\theta\right)-a^2\left(1-\cos\theta\right)^2}}a\sin\theta d\theta \\ &= \frac{a\left(1-\cos\theta\right)}{a\sqrt{2-2\cos\theta-1+2\cos\theta+\cos\theta^2}}a\sin\theta d\theta \\ &= a\left(1-\cos\theta\right)d\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= \int a\left(1-\cos\theta\right)d\theta \\ &= a\left(\theta-\sin\theta\right)+c.\end{aligned}$$

我们要求此路径过原点$(0,0)$由此可确定积分常数$c=0$（$\theta=0,x=0,y=0\Longrightarrow 0=0+c$）。这样我们便得到了最速落径的曲线方程

$$\begin{aligned} x &= a\left(\theta-\sin\theta\right) \\ y &= a\left(1-\cos\theta\right). \end{aligned} \tag{32.18}$$

这是一个旋轮线方程。

32.1.5 球面上的短程线:例

短程线（测地线）问题是变分法的一个重要应用（相应的更高维的问题是最小曲面问题）。短程线问题是讲曲面上两点之间的长度最短的曲线是哪条，即求最短曲线的方程。我们来考虑这类问题中最简单的一个——球面问题（平面情况除外）。

以球心为原点随便建一个坐标系我们有

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta. \end{aligned} \tag{32.19}$$

球面上的线元

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2} \\ &= \sqrt{(dr)^2+r^2\left(d\theta\right)^2+r^2\sin^2\theta\left(d\varphi\right)^2}. \end{aligned} \tag{32.20}$$

在球面上$dr=0$，

$$\begin{aligned} ds &= r\sqrt{\left(d\theta\right)^2+\sin^2\theta\left(d\varphi\right)^2} \\ &= d\theta r\sqrt{1+\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2}. \end{aligned} \tag{32.21}$$

这样两点间曲线长度为

$$S[\varphi]=\int_1^2 d\theta\sqrt{1+\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2}. \tag{32.22}$$

此时$F(\theta,\varphi,\varphi')=\sqrt{1+\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2}$不显含$\varphi$，代入Euler方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial\varphi}-\frac{d}{d\theta}\frac{\partial F}{\partial\dot{\varphi}}=0\quad\frac{\partial F}{\partial\varphi}=0\\ \frac{d}{d\theta}\frac{\partial F}{\partial\dot{\varphi}}=0\\ \frac{\partial F}{\partial\dot{\varphi}}=\frac{\sin^2\theta\dot{\varphi}}{\sqrt{1+\sin^2\theta\dot{\varphi}^2}}=c.\end{aligned}$$

c是积分常数。如果该曲线过$\theta=0$的点，即z轴过所设两点中的一个点，则有$c=0$。这样便有解

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}&=0\\ \varphi&=\text{const}\end{aligned}\tag{32.23}$$

即短程线是过两极的一个大圆（经线），由于坐标系的建立是任意的，我们总可以将坐标系（两极）选在一个合理的位置上，所以这个结论是普遍的，短程线是过这两点大圆上的较短弧。

32.1.6 第二种形式的Euler方程

首先我们将前面得到的Euler方程变换成另一种形式，在许多问题中（F中不显含参数x）这个形式都更方便些。之前我们得到的的Euler方程（32.11）为

$$\frac{\partial F}{\partial f}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial\dot{f}}=0.$$

方程两边同乘$\dot{f}$，可以得到

$$\dot{f}\frac{\partial F}{\partial f}-\dot{f}\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial\dot{f}}=0.\tag{32.24}$$

取F的全导数

$$\frac{dF}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial f}\dot{f}+\frac{\partial F}{\partial\dot{f}}\frac{d\dot{f}}{dx}\tag{32.25}$$

将（32.24）式和（32.25）式两式相加

$$\frac{dF}{dx}-\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial f}\dot{f}-\frac{\partial F}{\partial\dot{f}}\frac{d\dot{f}}{dx}+\dot{f}\frac{\partial F}{\partial f}-\dot{f}\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial\dot{f}}=0$$

$$\frac{dF}{dx}-\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial\dot{f}}\frac{d\dot{f}}{dx}-\dot{f}\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial\dot{f}}=0.$$

也可进一步改进其形式为

$$\frac{d}{dx}\left(F-\dot{f}\frac{\partial F}{\partial \dot{f}}\right)-\frac{\partial F}{\partial x}=0 \tag{32.26}$$

这个新形式的Euler方程的好处在于，当F中不显含x的时候$\frac{\partial F}{\partial x}=0$，于是方程化为

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(F-\dot{f}\frac{\partial F}{\partial \dot{f}}\right)&=0\\ F-\dot{f}\frac{\partial F}{\partial \dot{f}}&=\text{const}\end{aligned} \tag{32.27}$$

最速落径问题通常直接用这个方程解决——将dx提出而不是dy。在物理中由于经常用第一种形式的Euler方程，所以前面两个例子都用第一种形式的Euler方程解决。

32.1.7 Euler-Lagrange方程

前面已经讨论过，按照Hamilton最小作用原理。真实运动$q(t)$就是使作用量泛函S取最小值的运动。根据附录I中的有关变分法的介绍，我们可以将这一原理表述成

$$\delta S=0 \tag{32.28}$$

这种形式上的简洁起源于原理的简单性，但是需要注意的是这种简洁的表述并不能带来真正的简化。问题中的复杂性隐含在S的定义的形式中。

特别需要强调的是$\delta S=0$这种表述仅能给出极值而不仅是极小值，也有极大值的可能性。不过在力学问题中给出的往往是极小值。按照前面介绍的变分法我们知道由S的定义$S=\int_1^2 L dt$出发可以直接得到泛函极值条件。下面我们就针对力学系统来做这件事。

显然不能指望一个物理系统仅用一组广义坐标和广义动量就能描述。普遍地我们有

$$S=\int_1^2 dtL \tag{32.29}$$

下面我们来求泛函S的简单变分（等时变分），此时$\delta t=0$。

$$\begin{aligned}\delta S&=\delta\int_1^2 dtL\left(q_1,q_2\cdots q_i\cdots\dot{q}_1,\dot{q}_2\cdots\dot{q}_i\cdots,t\right)\\&=\int_1^2 dt\delta L\\&=\int_1^2 dt\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right)\\&=\int_1^2 dt\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\frac{d}{dt}\delta q_i\right)\\&=\int_1^2 dt\sum_i\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i\right)\right]\\&=\int_1^2 dt\sum_i\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right]\delta q_i+\sum_i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i\Big|_{t_1}^{t_2}\\&=\int_1^2 dt\sum_i\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right]\delta q_i\end{aligned}$$

其中$\delta\dot{q}=\frac{d}{dt}\delta q$，$\delta q_i\left(t_1\right)=\delta q_i\left(t_2\right)=0$。由于$\delta q_i$是任意选取的，所以有

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}=0 \tag{32.30}$$

这个熟悉的形式在数学中被称为Euler方程。在物理中由于Lagrange曾从另外的途径也得到过这个方程，所以在物理中这个方程往往被称为Euler-Lagrange方程，函数L被称为拉氏量。

这个方程是由$\delta S=0$得到的。是泛函极值条件，所以只要某个运动$q\left(t\right)$满足这个方程，就会给出作用量S的极值。这样一来，求解一个力学问题就变成了求解Lagrange方程的问题。也就是说我们将用L氏方程取代$F=ma$作为我们解决力学问题的出发点。

32.2 广义变分（全变分）

前面讨论最小作用原理应用的变分原理，在那里各种路径运动的时间是给定的：(t_2-t_1)，下面我们尝试一种更一般的变分。这种变分除q变化外，时间t也在变化。它与前面所采取的变分的区别如图所示：

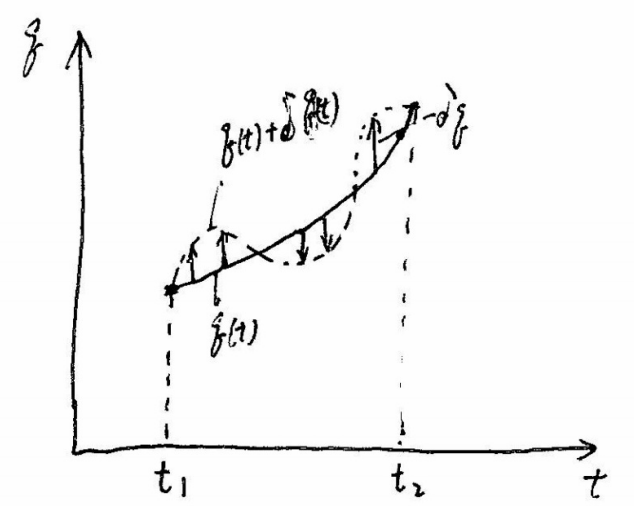


图 32.4: 在这种变分中$\delta t = 0$

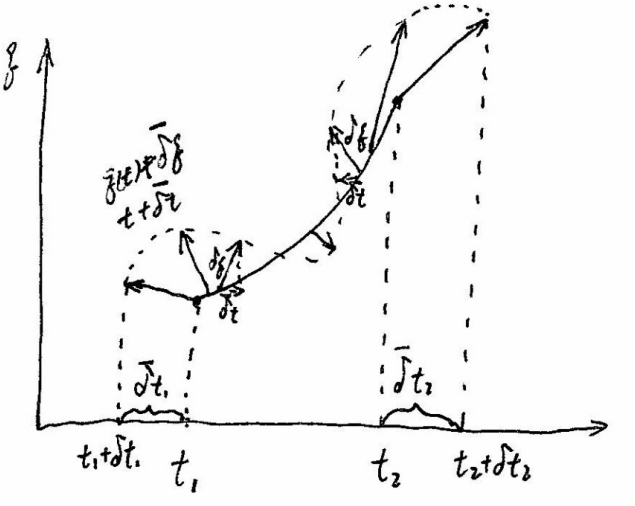


图 32.5: 在这种变分中$\bar{\delta} t \neq 0$

我们用$\bar{\delta}$来表示这种更一般的变分。下面先看一下这两种变分的区别

$$\begin{aligned} \delta t &= 0 \\ \bar{\delta} t\left(t\right) &= t^{'}-t. \end{aligned} \tag{32.31}$$

$\bar{\delta}t$在t轴上有投影，所以$\bar{\delta}t$是t的函数。

$$\begin{aligned} \delta q\left(t\right) &= q^{\prime}\left(t\right)-q\left(t\right) \\ \bar{\delta} q\left(t\right) &= q^{\prime}\left(t+\bar{\delta} t\right)-q\left(t\right) \end{aligned} \Rightarrow q^{\prime}\left(t\right)=q\left(t\right)+\delta q\left(t\right). \tag{32.32}$$

由此出发看一看这两种变分的联系。因为

$$\begin{aligned} q^{\prime}\left(t+\bar{\delta} t\right) &= q\left(t+\bar{\delta} t\right)+\delta q\left(t+\bar{\delta} t\right) \\ &= q\left(t\right)+\frac{dq\left(t\right)}{dt}\bar{\delta} t+\delta q\left(t\right)+\delta\frac{dq\left(t\right)}{dt}\bar{\delta} t \end{aligned}$$

其中$\delta\frac{dq(t)}{dt}\bar{\delta}t=0$。由此可知：

$$q^{\prime}\left(t+\bar{\delta} t\right)-q\left(t\right)=\delta q\left(t\right)+\frac{dq\left(t\right)}{dt}\bar{\delta} t\left(t\right)$$

$$q^{\prime}\left(t+\bar{\delta} t\right)=\bar{\delta} q\left(t\right)$$

于是有：

$$\bar{\delta} q\left(t\right)=\delta q\left(t\right)+\frac{dq\left(t\right)}{dt}\bar{\delta} t\left(t\right)$$

从这里可以直接看到$\bar{\delta}$和δ的关系.

在前面的推导中，只需要将q换成$\dot{q}$便可得：

$$\bar{\delta}\dot{q}\left(t\right)=\delta\dot{q}\left(t\right)+\frac{d\dot{q}\left(t\right)}{dt}\bar{\delta} t\left(t\right)$$

这里要注意的是$\bar{\delta}\dot{q}\neq\frac{d}{dt}\left(\bar{\delta} q\right)$;而$\bar{\delta}\dot{q}=\frac{d}{dt}\delta q$

再来看看t的情况

$$t^{'}=t+\bar{\delta} t$$

$$dt^{'}=\frac{dt^{'}}{dt}dt=\left(1+\frac{d\bar{\delta} t\left(t\right)}{dt}\right)dt$$

$$dt^{'}-dt=dt\frac{d\bar{\delta}t\left(t\right)}{dt}$$

$$dt^{'}-dt=\bar{\delta}\left(dt\right)$$

$$\bar{\delta}\left(dt\right)=dt\frac{d\bar{\delta}t\left(t\right)}{dt}=\delta t+dt\frac{d\bar{\delta}t\left(t\right)}{dt}\quad\delta t=0 \tag{32.33}$$

总结上面得到的$\bar{\delta}$和δ关系的规律可以看出

$$\bar{\delta}=\delta+\bar{\delta}t\frac{d}{dt} \tag{32.34}$$

其实这个式子是普遍的，对任意函数都成立，证明如下：

$$\begin{aligned}\delta f\left(q,\dot{q},t\right)&=\frac{\partial f}{\partial q}\delta q+\frac{\partial f}{\partial\dot{q}}\delta\dot{q}+\frac{\partial f}{\partial\dot{q}}\delta t,\delta t=0\\\frac{\partial f}{\partial\dot{q}}\delta t&=0\\&=\frac{\partial f}{\partial q}\delta q+\frac{\partial f}{\partial\dot{q}}\delta\dot{q}\end{aligned}$$

那么当然也有：

$$\begin{aligned}\bar{\delta}f\left(q,\dot{q},t\right)&=\frac{\partial f}{\partial q}\bar{\delta}q+\frac{\partial f}{\partial\dot{q}}\bar{\delta}\dot{q}+\frac{\partial f}{\partial t}\bar{\delta}t\\&=\frac{\partial f}{\partial q}\delta q+\frac{\partial f}{\partial\dot{q}}\delta\dot{q}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{dq}{dt}\bar{\delta}t+\frac{\partial f}{\partial\dot{q}}\frac{d\dot{q}}{dt}\bar{\delta}t+\frac{\partial f}{\partial t}\bar{\delta}t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial q}\delta q+\frac{\partial f}{\partial\dot{q}}\delta\dot{q}&=\delta f\\\frac{\partial f}{\partial q}\frac{dq}{dt}\bar{\delta}t+\frac{\partial f}{\partial\dot{q}}\frac{d\dot{q}}{dt}\bar{\delta}t+\frac{\partial f}{\partial t}\bar{\delta}t&=\left(\frac{\partial f}{\partial q}\frac{dq}{dt}+\frac{\partial f}{\partial\dot{q}}\frac{d\dot{q}}{dt}+\frac{\partial f}{\partial t}\right)\bar{\delta}t\\&=\frac{df}{dt}\bar{\delta}t\end{aligned}$$

$$\bar{\delta}f\left(q,\dot{q},t\right)=\delta f+\frac{df}{dt}\bar{\delta}t$$

所以有

$$\bar{\delta}f=\delta f+\frac{df}{dt}\bar{\delta}t$$

由此我们便可以对作用量求这种更一般的变分；这种变分可以表示为：

$$\bar{\delta}S=\int_{t_1+\bar{\delta}t_1}^{t_2+\bar{\delta}t_2}L\left(q_i+\bar{\delta}q_i,\dot{q}_i+\bar{\delta}q_it+\bar{\delta}t\right)d\left(t+\bar{\delta}t\right)-\int_{t_1}^{t_2}L\left(q,\dot{q},t\right)dt$$

或

$$\bar{\delta}S=\int_{t_1^{'}}^{t_2^{'}}dt^{'}L\left(q_i^{'},\dot{q}_i^{'}t^{'}\right)-\int_{t_1}^{t_2}dtL\left(q,\dot{q},t\right)$$

下面我们直接推导：

$$\begin{aligned}\bar{\delta}S&=\bar{\delta}\int_{t_1}^{t_2}dtL\\&=\int_{t_1}^{t_2}\bar{\delta}\left(dtL\right)\\&=\int_{t_1}^{t_2}\left(\bar{\delta}dt\right)L+dt\bar{\delta}L\end{aligned}$$

由(32.31)式知$\bar{\delta}dt=dt\frac{d\bar{\delta}t}{dt}$ 所以

$$\begin{aligned}\bar{\delta}S&=\int_{t_1}^{t_2}dt\frac{d\bar{\delta}t}{dt}L+dt\bar{\delta}L\\&=\int_{t_1}^{t_2}dt\left[\frac{d\bar{\delta}t}{dt}L+\bar{\delta}L\right]\qquad\because\bar{\delta}L=\delta L+\frac{dL}{dt}\bar{\delta}t\\&=\int_{t_1}^{t_2}dt\left[\frac{d\bar{\delta}t}{dt}L+\frac{dL}{dt}\bar{\delta}t+\delta L\right]\\&=\int_{t_1}^{t_2}dt\left[\frac{d}{dt}\left(\bar{\delta}tL\right)+\delta L\right]\\&=\int_{t_1}^{t_2}dt\left[\frac{d}{dt}\left(\bar{\delta}tL\right)+\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i\right)\right]\\&=\int_{t_1}^{t_2}dt\left[\frac{d}{dt}\left(\bar{\delta}tL+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i\right)+\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)\delta q_i\right]\end{aligned}$$

由(32.32)知：

$$\begin{aligned}\delta q_i&=\bar{\delta}q_i-\bar{\delta}t\frac{dq_i}{dt}\\&=\int_{t_1}^{t_2}dt\left[\frac{d}{dt}\left(\bar{\delta}tL+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\left(\bar{\delta}q_i-\bar{\delta}t\frac{dq_i}{dt}\right)\right)+\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)\delta q_i\right]\\&=\int_{t_1}^{t_2}dt\left[\frac{d}{dt}\left(\bar{\delta}t\left(L-\frac{dq_i}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\bar{\delta}q_i\right)+\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)\delta q_i\right]\end{aligned}$$

我们定义广义动量

$$
\begin{aligned}
p_i &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{d}{dt} \left(p_i \bar{\delta} q_i - \bar{\delta} t \left[p_i \dot{q}_i - L \right] \right) + \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \right] \\
\left[p_i \dot{q}_i - L \right] &= H
\end{aligned}
$$

于是考虑到Legendre变换有：

$$
\begin{aligned}
\bar{\delta} S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{d}{dt} \left(p_i \bar{\delta} q_i - H \bar{\delta} t \right) + \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right] \\
&= \left(p_i \bar{\delta} q_i - H \bar{\delta} t \right)_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \\
\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= 0
\end{aligned}
$$

注意这里的重复指标求和。

由Lagarange方程知第二部分为零，这样便有：

$$
\bar{\delta} S = \left[p_i \bar{\delta} q_i - H \bar{\delta} t \right]_{t_1}^{t_2} \tag{32.35}
$$

由此我们可以定义正则共轭变量对。我们定义作用量的广义变分中任意变量变分的系数就是它的正则共轭变量。

比如在这里，q_i的共轭变量是p_i，当然我们知道，“t”的共轭变量是“$-H$”。当然，我们知道，在严格意义形式地看下，由于时间t并不是像坐标那样的力学量，所以t和$-H$并不真的是一对正则变量。

我们会看到正则共轭变量对在量子力学中的位置是非常重要的。比如测不准关系中不能被同时测准的物理量以及正则量子化中的共轭变量对。

式32.35启发我们定义这样一个量：

$$
F(t) \equiv \sum_{i=1}^{N} p_i \bar{\delta} q_i - H \bar{\delta} t \tag{32.36}
$$

此时作用量的广义变分便可写成：

$$
\bar{\delta} S = F(t_2) - F(t_1)
$$

的形式。也就是说这里我们将作用量的广义变分可以表示成某一函数在两个端点上取值的差的形式。这一函数$F(t)$有着它更深一层的含义。下面具体讨论这一点。

四.任意力学量的正则变换及无穷小变换的生成元。

1正则变换

描述一个物理系统，可以用不同组的广义坐标及广义动量。如可以用(x,y,z)也可用(r,θ,φ)等等。更具体的讲任意一个物理量f都可以用不同组广义坐标和广义动量描述，如：

$$f(q,p) \quad \text{或} f(Q,P)$$

一个非常重要的问题便是：当广义坐标和广义动量由(q,p)变成(Q,P)时，f如何变化。

下面我们具体讨论这一变换。

考虑一组广义坐标和广义动量：

q,p $\left(\text{如}x,y\right)$

相应的$\mathcal{H}$氏量为：$H(q,p,t)$

另一组新的广义坐标和广义动量取作：

$$\begin{aligned} Q &= Q(q,p,t) \\ P &= P(q,p,t) \end{aligned} \tag{32.37}$$

如：

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}$$

相应的$\mathcal{H}$氏量我们表示为$K(Q,P,t)$

它们当然应分别满足正则方程

第一组：

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

第二组：

$$\begin{cases} \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \end{cases}$$

相应的最小作用原理的形式为：

第一组：

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H(q,p,t) \right] dt = 0 \tag{32.38}$$

第二组：

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^{n} P_i \dot{Q}_i - K(Q,P,t) \right] dt = 0 \tag{32.39}$$

我们的目的是建立(q,p)和(Q,P)两种表述之间的联系。由前面的两组最小作用原理的形式看似乎知需要令（32.38）（32.39）中的被积函数相等便可找到相应的变换关系了。其实一个更普遍的关系也可同时满足（32.38）（32.39）两式。

取一函数：

$$G = G(q,Q,t)$$

我们要求它满足：

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{dG}{dt} dt = \delta \{ G[q(t_2), Q(t_2), t_2] - G[q(t_1), Q(t_1), t_1] \} = 0$$

这样便可以很容易看出关系：

$$\lambda \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H \right) = \sum_{i=1}^{n} P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dG}{dt} \tag{32.40}$$

可直接满足（32.38）（32.39）式，（λ是常数表征一种尺度变换）。式（32.40）给出了(p,q)和(P,Q)间的变换关系，满足这一变换关系的广义坐标和广义动量都可以用来描述同一物理系统。

$\lambda = 1$ 的变换为正则变换

$\lambda \neq 1$ 的变换为扩展的正则变换

（如式（32.40）中不含t，则称为限制正则变换）

2.无穷小正则变换

往往对我们非常有意义的是所谓的无穷小变换，下面就来讨论这种无穷小变换：

$$\begin{cases} Q_i = q_i + \delta q_i \\ P_i = p_i + \delta p_i \end{cases} \quad \delta\text{不是变分是个任意变化}$$

在把这个变换关系式代入到（32.40）中之前先改变一下（32.40）的形式。这里只考虑$\lambda = 1$，即正则变换的形式：

$$\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - \sum_{i=1}^{n} P_i dQ_i - (H - K)\, dt = dG$$

将前面的无穷小变换带入此式：

$$\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - \sum_{i=1}^{n} \left(p_i + \bar{\delta} p_i\right) d\left(q_i + \bar{\delta} q_i\right) - (H - K)\, dt = dG$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - \sum_{i=1}^{n} \delta p_i dq_i - \sum_{i=1}^{n} p_i d\delta q_i - \sum_{i=1}^{n} \delta p_i d\delta q_i - (H - K)\, dt = dG$$

因为

$$\sum_i d\left(p_i \delta q_i\right) = \sum_i dp_i \delta q_i + \sum_i p_i d\delta q_i$$

代回上式

$$-\sum_{i=1}^{n} \delta p_i dq_i - \sum_i d\left(p_i \delta q_i\right) + \sum_i dp_i \delta q_i + \sum_{i=1}^{n} \delta p_i d\delta q_i - (H - K)\, dt = dG$$

其中

$$\sum_{i=1}^{n} \delta p_i d\delta q_i \sim 0 \quad \text{有两个}\delta$$

$$\sum_{i=1}^{n} dp_i \delta q_i - \sum_{i=1}^{n} dq_i \delta p_i - (H - K)\, dt = d\left[G + \sum_i p_i \delta q_i\right]$$

可令

$$\epsilon F'\left(q, p, t\right) \equiv G + \sum_i p_i \delta q_i$$

代回原方程：

$$\sum_{i=1}^{n} dp_i \delta q_i - \sum_{i=1}^{n} dq_i \delta p_i - (H - K)\, dt = \epsilon dF^{'}$$
$$= \epsilon \left[\frac{\partial F^{'}}{\partial t} dt + \frac{\partial F^{'}}{\partial q} dq + dp \right]$$

两边对比得：

$$\begin{cases} K = H + \epsilon \frac{\partial F^{'}}{\partial t} \\ \delta q_i = \epsilon \frac{\partial F^{'}}{\partial p} \\ \delta p_i = -\epsilon \frac{\partial F^{'}}{\partial q} \end{cases} \tag{32.41}$$

可见在无穷小变换下，K, q_i, p_i的变换均可由对$F^{'}$的关系直接给出，由于这个原因，我们称$F^{'}$为变换的生成元（generator）

此时可以很容易基于上述推导直接得到任意函数

$$f = f\left(q_1, q_2 \cdots q_n, p_1, p_2 \cdots p_n\right)$$

的无穷小正则变换关系：

$$\begin{aligned} \delta f &= f\left(q_i + \delta q_i; p_i + \delta p_i\right) - f\left(q_i, p_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \delta p_i \right) \\ \delta q_i = \epsilon \frac{\partial F^{'}}{\partial p_i} \quad \delta p_i &= -\epsilon \frac{\partial F^{'}}{\partial q_i} \\ &= \epsilon \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial F^{'}}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial F^{'}}{\partial q_i} \right) \\ &= \epsilon \left[f, F^{'} \right]_{cl} \end{aligned}$$

这样我们便得到了任意函数的无穷小正则变换的形式

$$\delta f = \epsilon \left[f, F^{'} \right]_{cl}$$

这里所给出的生成元$F^{'}$可表征的变换可以有许多种，并不是确定的。这是因为$F^{'}$中的函数G并没有确定。

纯粹是为了书写上的习惯，我们令

$$F \equiv \epsilon F^{'} = G + \sum_i p_i \delta q_i$$

这样正则变换可表示为：

$$\delta \Omega = [\Omega, F]_{cl} \tag{32.42}$$

我们可以看到，这里的生成元F中有一个任意函数G,因此F基本上也是一个任意函数。我们不妨试着取

$$F \equiv \sum_{i=1}^{n} p_i \bar{\delta} q_i - H \bar{\delta} t \tag{32.43}$$

由(32.43)式我们已经看到，这种定义的F可以看作是一个无穷小的生成元。它在作用量积分中产生改变$\bar{\delta} t$。这里看一下这个生成元的一个特殊情况：

例：

$$F = -H \bar{\delta} t$$

此时$\bar{\delta} q = 0$，$\bar{\delta} p = 0$，$t \to t + \bar{\delta} t$ 即时间演化

带入方程(32.43)中，可以看几个正则变换：

$$\begin{aligned}
\delta q_i &= [q_i, F]_{cl} = \left[q_i, -H \bar{\delta} t\right]_{cl} = -\frac{\partial H}{\partial p_i} \bar{\delta} t = -\dot{q}_i \bar{\delta} t \\
\delta p_i &= [p_i, F]_{cl} = \left[p_i, -H \bar{\delta} t\right]_{cl} = \frac{\partial H}{\partial q_i} \bar{\delta} t = -\dot{p}_i \bar{\delta} t
\end{aligned}$$

$$\text{由} \bar{\delta} q = 0 \text{也可知} \Longrightarrow \delta q_i + \dot{q} \bar{\delta} t = \bar{\delta} q = 0 \Longrightarrow \delta q = -\dot{q} \bar{\delta} t \tag{32.44}$$

同理

$$\bar{\delta} p = 0 \Longrightarrow \quad \delta p = -\dot{p} \bar{\delta} t \tag{32.45}$$

由此可知，$F = -H \bar{\delta} t$确实是时间演化的生成元。

(32.45)对称变换：

前面我们得到

$$\bar{\delta} S = F\left(t_2\right) - F\left(t_1\right)$$

当在某一变换下W保持不变，即$\bar{\delta} W = 0$时，则称此变换为对称变换。

此时

$$F(t_2) - F(t_1) = 0$$

即

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

也就是说对称变换的生成元是运动学常数是守恒量。

第三十三章　杂项

33.1　各种归一化条件

关于场中$\phi(x)$展开式中体积元的取法约有三种常用的形式。它们各有利弊.很难说哪种是最好的。

这几种形式的区别在于2π及$2\omega_k$的方次上.它们可以分别取成

$$\frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \tag{33.1}$$

$$\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \tag{33.2}$$

$$\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k} \tag{33.3}$$

下面逐一分析：

1. 采用这种方式的$\phi(x)$，其展开式为：

$$\phi(x)=\int\frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left(a(k)e^{-ikx}+a^{\dagger}(k)e^{ikx}\right) \tag{33.4}$$

由正则量子化关系$[\phi,\pi]=i\delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}^{'}\right)$可得$\left[a(k),a^{\dagger}\left(k^{'}\right)\right]=\delta^3\left(\mathbf{k}-\mathbf{k}^{'}\right)$。这种$a$，$a^{\dagger}$的对易关系被归一化成“**1**”.形式最简单，意义也明显.但缺点是由于因子是$\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}$而不是$\frac{1}{2\omega_k}$，因而不是Lorentz不变的且对应$d^3k$的因子是$(2\pi)^{\frac{3}{2}}$不太自然（相当于采用正逆都是$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$Fourier变换）。我们知道三维相空间的体积是

$$\int\frac{dp_xdp_ydp_zdxdydz}{h^3}=V\int\frac{d^3p}{h^3}=V\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3\hbar^3}\overset{\hbar=1}{=}V\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3} \tag{33.5}$$

这标志着相空间的大小，这诱使我们愿意采用2π与dp同幂次的形式.这就是说（33.1）形式的体积元$aa^{\dagger}$的对易关系最自然，但不是Lorentz不变的.而且2π的形式不好看.相应的态归一化为

$$\begin{aligned}\left\langle k|k'\right\rangle &= \langle 0|\, a\left(k\right) a^{\dagger}\left(k\right)|0\rangle \\ &= \langle 0|\, \delta^{3}\left(\mathbf{k}-\mathbf{k}^{'}\right) - a^{\dagger}\left(k\right) a\left(k\right)|0\rangle \\ &= \delta^{3}\left(\mathbf{k}-\mathbf{k}^{'}\right)\langle 0|0\rangle \\ &= \delta^{3}\left(\mathbf{k}-\mathbf{k}^{'}\right)\end{aligned} \tag{33.6}$$

2. 这种体积元对应的展开式为：

$$\phi\left(x\right)=\int\frac{d^{3}k}{\left(2\pi\right)^{3}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{k}}}\left(a\left(k\right)e^{-ikx}+a^{\dagger}\left(k\right)e^{ikx}\right) \tag{33.7}$$

给出的a，$a^{\dagger}$的对易关系为：

$$\left[a\left(k\right),a^{\dagger}\left(k^{'}\right)\right]=\left(2\pi\right)^{3}\delta^{3}\left(\mathbf{k}-\mathbf{k}^{'}\right) \tag{33.8}$$

这个对易关系不归一，但归到常数$(2\pi)^{3}$上.与归一没有本质区别，只是形式不好看.但$\frac{d^{3}k}{(2\pi)^{3}}$的形式却很好看，这种好看的形式直接对应相空间的意义$\int\frac{d^{3}pd^{3}x}{h^{3}}$，不过由于有因子$\frac{1}{\sqrt{2\omega_{k}}}$.它仍不是Lorentz不变的。相应的态归一化为

$$\left\langle k|k'\right\rangle=\left(2\pi\right)^{3}\delta^{3}\left(\mathbf{k}-\mathbf{k}^{'}\right) \tag{33.9}$$

3. 与之相应的展开式为：

$$\phi\left(x\right)=\int\frac{d^{3}k}{\left(2\pi\right)^{3}}\frac{1}{2\omega_{k}}\left(a\left(k\right)e^{-ikx}+a^{\dagger}\left(k\right)e^{ikx}\right) \tag{33.10}$$

对应的a，$a^{\dagger}$的对易关系为：

$$\left[a\left(k\right),a^{\dagger}\left(k^{'}\right)\right]=\left(2\pi\right)^{3}2\omega_{k}\delta^{3}\left(\mathbf{k}-\mathbf{k}^{'}\right) \tag{33.11}$$

它的最大优点是，该体积元是Lorentz不变的，且有$\frac{d^{3}k}{(2\pi)^{3}}$的优美形式.（即表示着相空间的大小$\int\frac{d^{3}pd^{3}x}{h^{3}}$）。但它的最大缺点是$a$，$a^{\dagger}$的对易子不但不归一而且归到一个可变的量$2\omega_{k}$上。而这个量不是Lorentz标量。这使得$a$，$a^{\dagger}$的对易子不是明显Lorentz不变的形式。相应态的归一为：

$$\left\langle k|k'\right\rangle=\left(2\pi\right)^{3}2\omega_{k}\delta^{3}\left(\mathbf{k}-\mathbf{k}^{'}\right) \tag{33.12}$$

33.2 附录：Weyl等式的证明

$$e^A \cdot e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]},$$

$$[A,[A,B]]=0, \qquad [B,[A,B]]=0.$$

证：引入函数

$$f(\lambda) \equiv e^{\lambda A} e^{\lambda B},$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda} f(\lambda) &= \left(\frac{d}{d\lambda} e^{\lambda A}\right) e^{\lambda B} + e^{\lambda A}\left(\frac{d}{d\lambda} e^{\lambda B}\right) \\
&= A e^{\lambda A} e^{\lambda B} + e^{\lambda A} B e^{\lambda B} \\
&= A e^{\lambda A} e^{\lambda B} + e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} e^{\lambda A} e^{\lambda B} \\
&= \left(A + e^{\lambda A} B e^{-\lambda A}\right) e^{\lambda A} e^{\lambda B},
\end{aligned}$$

由Campbell-Hausdaff公式

$$e^A B e^{-A} = B + [A,B] + \frac{1}{2!}[A,[A,B]] + \cdots$$

所以

$$\frac{d}{d\lambda} f(\lambda) = (A + B + \lambda[A,B]) f(\lambda).$$

下面解方程

$$\frac{d}{d\lambda} f(\lambda) = (A + B + \lambda[A,B]) f(\lambda),$$

$$\frac{d}{f(\lambda)} f(\lambda) = (A + B + \lambda[A,B]) d\lambda,$$

$$\ln f(\lambda) = \lambda(A+B) + \frac{1}{2}\lambda^2 [A,B] + C,$$

$$f(\lambda) = C e^{\lambda(A+B)+\frac{1}{2}\lambda^2[A,B]}.$$

当$\lambda = 0$时，$f(0) = 0$, 可定出$C = 1$，于是有

$$e^{\lambda A} e^{\lambda B} = e^{\lambda(A+B)+\frac{1}{2}\lambda^2[A,B]}.$$

当$\lambda = 1$时

$$e^A \cdot e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}.$$

33.3 Hermite多项式

求解方程

$$\frac{d^2H}{d\xi^2}-2\xi\frac{dH}{d\xi}+(\lambda-1)H=0$$

这个方程没有奇点，可以在$\xi=0$的邻域将$H\left(\xi\right)$Taylor展开求级数解

$$H\left(\xi\right)=\sum_{v=0}^{\infty}a_v\xi^v$$

将这个级数代入方程，其中各项为

$$\frac{d^2H}{d\xi^2}=\sum_{v=0}^{\infty}a_v v(v-1)\xi^{v-2}$$

令

$$v'=v-2$$

则

$$v=v'+2$$

所以

$$\frac{d^2H}{d\xi^2}=\sum_{v'=-2}^{\infty}a_{v'+2}\left(v'+2\right)\left(v'+1\right)\xi^{v'}$$

由于$v'=-2,v'=-1$的这两项为零。

$$\begin{aligned}\frac{d^2H}{d\xi^2} &= \sum_{v'=0}^{\infty}a_{v'+2}\left(v'+2\right)\left(v'+1\right)\xi^{v'}\\ &= \sum_{v=0}^{\infty}a_{v+2}\left(v+2\right)\left(v+1\right)\xi^{v}\end{aligned}$$

$$\xi\frac{dH}{d\xi}=\sum_{v=0}^{\infty}a_v v\xi^v$$

代入原方程

$$\sum_{v=0}^{\infty}a_{v+2}\left(v+2\right)\left(v+1\right)\xi^v-2\sum_{v=0}^{\infty}a_v v\xi^v+(\lambda-1)\sum_{v=0}^{\infty}a_v\xi^v=0$$

所以

$$\sum_{v=0}^{\infty}\left[a_{v+2}\left(v+2\right)\left(v+1\right)-a_v(2v-\lambda+1)\right]\xi^v=0$$

这里要求ξ取任何值时求和都为0。因此只能是系数为零

$$a_{v+2}\left(v+2\right)\left(v+1\right)-a_v(2v-\lambda+1)=0$$

这样便得到递推关系

$$a_{v+2}=\frac{2v-\lambda+1}{\left(v+2\right)\left(v+1\right)}a_\nu$$

有了这个递推关系在知道a_0和a_1后便可得到全部系数a_v了，a_0和a_1由波函数的标准条件确定,到这里我们便得到了一个级数形式数。下面考察这个级数的收敛性。看一看$v\to\infty$时级数的行为，此时两高次项系数的比值为

$$\frac{a_{v+2}}{a_v}=\frac{2v-\lambda+1}{\left(v+2\right)\left(v+1\right)}\underset{v\to\infty}{\to}\frac{2}{v}$$

考察该级数的敛散性，我们将它与熟悉的e^{ξ^2}级数相比较，e^{ξ^2}的级数展开为

$$e^{\xi^2}=\sum_{v=0}^{\infty}b_v\xi^v=1+\xi^2+\cdots+\frac{\xi^v}{(\frac{v}{2})!}+\frac{\xi^{v+2}}{(\frac{v}{2}+1)!}+\cdots$$

这个级数的高次项系数的比值为

$$\frac{b_{v+2}}{b_v}=\frac{\frac{1}{(\frac{v}{2}+1)!}}{\frac{1}{(\frac{v}{2})!}}=\frac{(\frac{v}{2})!}{(\frac{v}{2}+1)!}=\frac{1}{\frac{v}{2}+1}\underset{v\to\infty}{\to}\frac{2}{v}$$

我们可以看到$\frac{a_{v+2}}{a_v}$与$\frac{b_{v+2}}{b_v}$在高次项上的行为是一样的，这意味着$H\left(\xi\right)$与e^{ξ^2}的发散速度是一样快的，而肯定比波函数$\psi\sim H\left(\xi\right)e^{-\frac{\xi}{2}}$中的$e^{-\frac{\xi}{2}}$的发散速度快，因此不能将$H\left(\xi\right)$取成无穷级数而必须在某个$v$值上截断。我们取这个截断的$v$值为$v=n$，这样截断后有$a_{v>n}=0$。所以

$$a_{n+2}=\frac{2n-\lambda+1}{\left(n+2\right)\left(n+1\right)}a_n\overset{\text{截断}}{=}0$$

$$2n-\lambda+1=0$$

$$\lambda=2n+1,\ \ n=0,1,2\cdots$$

（需要注意的是，由于递推关系是a_v和a_{v+2}之间的，所以有两个待定常数a_0，a_1。a_0和a_1和引领一个级数系列。a_0引领偶数项；a_1引领奇数项）这样得到的多项式$H_n\left(\xi\right)$即为Hermite多项式

$$\frac{d^2H_n}{d\xi^2}-2\xi\frac{dH_n}{d\xi}+2nH_n=0$$

前面我们得到了Hermite多项式的级数形式。为了使用方便我们给出Hermite多项式的各种表示形式。Hermite多项式的解析多表达式。这里给出Hermite多项式的一个微分表达式，取函数

$$u = e^{-\xi^2}$$

这个函数的n阶导数$\frac{d^2u}{d\xi^n}$一定是个复杂得多项式，我们把它泛泛的表示成

$$\frac{d^n u}{d\xi^n} \equiv (-1)^n f_n(\xi) e^{-\xi^2} \tag{33.13}$$

取这种形式是因为每次求导肯定要出一个(-1)因子，而指数$e^{-\xi^2}$在找任意阶导数后总会保留下来。为了凑Hermite方程的形式我们对$\frac{d^2u}{d\xi^n}$求二阶导数

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\frac{d^n u}{d\xi^{n+2}}\right) &= \frac{d^{n+2}u}{d\xi^{n+2}} \\
&= -\frac{d^{n+1}}{d\xi^{n+2}}(2\xi u) \\
&= -2\frac{d^n}{d\xi}\left[\frac{d}{d\xi}(\xi u)\right] \\
&= -2\frac{d^n}{d\xi^n}\left(u + \xi\frac{du}{d\xi}\right) \\
&= -2\frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}}\frac{d}{d\xi}\left[u + \xi\frac{du}{d\xi}\right]
\end{aligned}$$

逐次求导

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\frac{d^n u}{d\xi^{n+2}}\right) = -2(n+1)\frac{d^n u}{d\xi^n} - 2\frac{d^{n+1}u}{d\xi^{n+1}}$$

整理得

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\frac{d^n u}{d\xi^n}\right) + 2\frac{d}{d\xi}\left(\frac{d^n u}{d\xi^n}\right) + 2(n+1)\left(\frac{d^n u}{d\xi^n}\right) = 0 \tag{33.14}$$

将（33.13)式代入得

$$\frac{d^2 f_n}{d\xi^2} - 2\xi\frac{df_n}{d\xi} + 2nf_n = 0$$

这正是Hermite方程。可见

$$f_n(\xi) = H_n(\xi)$$

这样就有

$$\frac{d^n}{d\xi^n}e^{-\xi^2} \equiv (-1)^n H_n(\xi) e^{-\xi^2}$$

所以

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}$$

这就是Hermite多项式的一个微分表达式,递推关系利用前面结果。函数

$$u = e^{-\xi^2}$$

由（33.14）知满足关系

$$\frac{d^{n+2}u}{d\xi^{n+2}} + 2\xi \frac{d^{n+1}u}{d\xi^{n+1}} + 2(n+1)\frac{d^n u}{d\xi^n} = 0$$

两边同乘$(-1)^n e^{\xi^2}$

$$(-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^{n+2}u}{d\xi^{n+2}} + 2\xi(-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^{n+1}u}{d\xi^{n+1}} + 2(n+1)(-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n u}{d\xi^n} = 0$$

$$\left[(-1^{n+2}) e^{\xi^2} \frac{d^{n+2}u}{d\xi^{n+2}}\right] - 2\xi \left[(-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^{n+1}u}{d\xi^n}\right] + 2(n+1)\left[(-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n u}{d\xi^n}\right] = 0$$

由

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}$$

所以

$$H_{n+2}(\xi) - 2\xi H_{n+1}(\xi) + 2(n+1) H_n(\xi) = 0$$

$$H_{n+1}(\xi) - 2\xi H_n(\xi) + 2n H_{n-1}(\xi) = 0$$

这是一个Hermite多项式的递推关系,也可利用Hermite多项式的母函数得到的递推关系（前面的微分表达式也可由母函数得出）Hermite多项式的母函数为

$$\begin{aligned} G(\xi, s) &= e^{-s^2+2s\xi} \left(= e^{\xi^2-(s-\xi)^2}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(\xi)}{n!} s^n \end{aligned}$$

对ξ求导

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \xi} &= 2s e^{-s^2+2s\xi} \\ &= 2sG(\xi, s) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(\xi)}{n!} 2s^{n+1} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \xi}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{n!}\frac{dH_n\left(\xi\right)}{d\xi}$$

$H_n\left(\xi\right)$中只有ξ，偏导数写成全导数，两数中s^n的系数应该相等有

$$\frac{dH_n\left(\xi\right)}{d\xi}=2nH_{n-1}\left(\xi\right)$$

前面的那个递推关系也可利用母函数求出，对s求导

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial s} &= \left(-2s+2\xi\right)e^{-s^2+2s\xi}\\ &= \left(-2s+2\xi\right)G\left(\xi,s\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-2s+2\xi\right)}{n!}H_n\left(\xi\right)s^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[-2\frac{H_n\left(\xi\right)}{n!}s^{n+1}+2\frac{\xi H_n\left(\xi\right)}{n!}s^n\right]\end{aligned}$$

比较两边s^u项的系数有

$$H_{n+1}\left(\xi\right)-2\xi H_n\left(\xi\right)+2nH_{n-1}\left(\xi\right)=0$$

这就是前面的那个递推关系,Hermite多项式不是直接正交而是加权正交。正交关系就是考虑$H_m\left(\xi\right)H_n\left(\xi\right)$ 的内积情况

$$\begin{aligned}G\left(\xi,s\right) &= e^{-s^2+2\xi s}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n\left(\xi\right)}{n!}s^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G\left(\xi,t\right) &= e^{-t^2+2\xi t}\\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{H_m\left(\xi\right)}{m!}t^m\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G\left(\xi,s\right)G\left(\xi,t\right) &= e^{-\left(t^2+s^2\right)+2\xi(t+s)}\\ &= e^{2ts+\xi^2}e^{-(t+s-\xi)^2}\end{aligned}$$

$$G\left(\xi,s\right)G\left(\xi,t\right)=\sum_{m=0,n=0}^{\infty}\frac{H_m\left(\xi\right)H_n\left(\xi\right)}{m!n!}t^m s^n \tag{33.15}$$

$$e^{2ts+\xi^2}e^{-(t+s-\xi)^2}=\sum_{m=0,n=0}^{\infty}\frac{H_m(\xi)H_n(\xi)}{m!n!}t^m s^n \tag{33.16}$$

两边同乘e^{ξ^2}并积分$\int_{-\infty}^{\infty}d\xi$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{2ts}e^{-(t+s-\xi)^2}d\xi=\sum_{m=0,n=0}^{\infty}\frac{t^m s^n}{m!n!}\int_{-\infty}^{\infty}H_m(\xi)H_n(\xi)e^{-\xi^2}d\xi \tag{33.17}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{2ts}e^{-(t+s-\xi)^2}d\xi=e^{2ts}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=e^{2ts}\sqrt{\pi}=\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2ts)^n}{n!}$$

所以

$$\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}2^n\frac{t^n s^n}{n!}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^m s^n}{m!n!}\int_{-\infty}^{\infty}H_m(\xi)H_n(\xi)e^{-\xi^2}d\xi$$

$$\sqrt{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2^n n!\frac{t^m s^n}{n!m!}\delta_{mn}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^m s^n}{n!m!}\int_{-\infty}^{\infty}H_m(\xi)H_n(\xi)e^{-\xi^2}d\xi$$

对比得

$$\int_{-\infty}^{\infty}H_m(\xi)H_n(\xi)e^{-\xi^2}d\xi=\sqrt{\pi}2^n n!\delta_{mn}$$

这就是Hermite多项式的加权正交关系,作为本征函数的Hermite多项式,Hermite多项式满足的方程为

$$\frac{d^2}{d\xi^2}H_n-2\xi\frac{d}{d\xi}H_n+2nH_n=0$$

可见H_n是算符

$$\hat{A}=\frac{d^2}{d\xi^2}-2\xi\frac{d}{d\xi}$$

的本征函数

$$\hat{A}H_n=-2nH_n$$

本征值是$-2n$。

33.4 耦合摆

s_0弹簧原长（如图）

$$\begin{cases} x_1=l\sin\theta_1 & \dot{x}_1=l\cos\theta_1\dot{\theta}_1 \\ y_1=l-l\cos\theta_1 & \dot{y}_1=l\sin\theta_1\dot{\theta}_1 \\ x_2=l\sin\theta_2+s_0 & \dot{x}_2=l\cos\theta_2\dot{\theta}_2 \\ y_2=l-l\cos\theta_2 & \dot{y}_2=l\sin\theta_2\dot{\theta}_2 \end{cases} \tag{33.18}$$

动能

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2\right)+\frac{1}{2}m\left(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2\right) \\ &= \frac{1}{2}ml^2\left(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(ml^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_1+0\cdot\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+0\cdot\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1+ml^2\dot{\theta}_2\dot{\theta}_2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\dot{\theta}_1\ \dot{\theta}_2\right)\begin{pmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{33.19}$$

所以

$$M=\begin{pmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{pmatrix}=ml^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \dot{\theta}=\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \tag{33.20}$$

所以

$$T=\frac{1}{2}\dot{\theta}^{\dagger}M\dot{\theta} \tag{33.21}$$

势能

$$U=U_{\text{重}}+U_{\text{弹}} \tag{33.22}$$

重力势能+弹性势能

$$\begin{aligned} U &= mgy_1+mgy_2 \\ &= mg\left(l-l\cos\theta_1\right)+mg\left(l-l\cos\theta_2\right) \\ &= mgl\left(2-\cos\theta_1-\cos\theta_2\right)\sim mgl\left(2-\left(1-\frac{\theta_1^2}{2}\right)-\left(1-\frac{\theta_2^2}{2}\right)\right) \\ &= mgl\frac{\theta_1^2+\theta_2^2}{2} \end{aligned} \tag{33.23}$$

$$U_{\Sigma}=\frac{1}{2}k\left(s-s_0\right)^2 \tag{33.24}$$

s弹簧伸长

其中

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(l\sin\theta_2+s_0-l\sin\theta_1\right)^2+\left(l-l\cos\theta_2-\left(l-l\cos\theta_1\right)\right)^2} \\ &= \sqrt{\left[l\left(\sin\theta_2-\sin\theta_1\right)+s_0\right]^2+l^2\left(\cos\theta_2-\cos\theta_1\right)^2} \end{aligned}$$

对微震动取近似$\sin\theta\sim\theta\cos\theta\sim1-\frac{\theta^2}{2}$

$$s \sim \sqrt{\left[l(\theta_2-\theta_1)+s_0\right]^2+l^2\left(-\theta_2/2+\theta_1/2\right)^2} \tag{33.25}$$

其中四次方略去，所以有

$$s \sim l(\theta_2-\theta_1)+s_0 \tag{33.26}$$

$$\begin{aligned} U_\Sigma &= \frac{1}{2}k\left(s-s_0\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}kl^2(\theta_2-\theta_1)^2 \end{aligned} \tag{33.27}$$

则

$$\begin{aligned} U &= U+U_\Sigma \\ &= mgl\frac{\theta_1^2+\theta_2^2}{2}+\frac{1}{2}kl^2(\theta_2-\theta_1)^2 \\ &= mgl\frac{\theta_1^2+\theta_2^2}{2}+\frac{1}{2}kl^2\left(\theta_2^2+\theta_1^2\right)-kl^2\theta_1\theta_2 \\ &= \frac{1}{2}\left(mgl+kl^2\right)\theta_1^2+\frac{1}{2}\left(mgl+kl^2\right)\theta_2^2-kl^2\theta_1\theta_2 \end{aligned}$$

由此我们可以得到恢复系数矩阵

$$K_{\alpha\beta}=\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\right)_0, \quad q_1=\theta_1, q_2=\theta_2 \tag{33.28}$$

所以

$$K_{11}=\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\theta_1\partial\theta_1}\right)_0=mgl+kl^2 \tag{33.29}$$

$$K_{12}=\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\right)_0=-kl^2 \tag{33.30}$$

$$K_{21}=\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\right)_0=-kl^2 \tag{33.31}$$

$$K_{22}=\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\theta_2\partial\theta_2}\right)_0=mgl+kl^2 \tag{33.32}$$

所以

$$K=\begin{pmatrix} mgl+kl^2 & -kl^2 \\ -kl^2 & mgl+kl^2 \end{pmatrix} \tag{33.33}$$

所以

$$U=\frac{1}{2}\theta^{\dagger}K\theta,\quad \theta\equiv\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix},\quad \theta^{\dagger}\equiv(\theta_1\ \theta_2) \tag{33.34}$$

所以Lagrange量为

$$\begin{aligned}L&=T-U\\&=\frac{1}{2}ml^2\left(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2\right)-\frac{1}{2}\left(mgl+kl^2\right)\theta_1^2-\frac{1}{2}\left(mgl+kl^2\right)\theta_2^2+kl^2\theta_1\theta_2\\&=\frac{1}{2}\dot{\theta}\dagger M\dot{\theta}-\frac{1}{2}\theta\dagger K\theta\end{aligned} \tag{33.35}$$

由多自由度体系微震动的普遍性，这样的Lagrange量的运动方程为

$$M\ddot{\theta}+k\theta=0$$

其本征值得方程为

$$\det\left(k-\omega^2M\right)=0 \tag{33.36}$$

$$\begin{vmatrix}k_{11}-\omega^2M_{11} & k_{12}-\omega^2M_{12}\\ k_{12}-\omega^2M_{12} & k_{22}-\omega^2M_{22}\end{vmatrix}=0 \tag{33.37}$$

所以

$$\begin{vmatrix}mgl+kl^2-\omega^2ml^2 & -kl^2\\ -kl^2 & mgl+kl^2-\omega^2ml^2\end{vmatrix}=0 \tag{33.38}$$

$$l^2\begin{vmatrix}mg+kl-\omega^2ml & -kl\\ -kl & mg+kl-\omega^2ml\end{vmatrix}=0 \tag{33.39}$$

$$\begin{vmatrix}mg+kl-\omega^2ml & -kl\\ -kl & mg+kl-\omega^2ml\end{vmatrix}=0 \tag{33.40}$$

因为

$$\left(mg+kl-\omega^2ml\right)^2-k^2l^2=0 \tag{33.41}$$

所以

$$mg+kl-\omega^2ml=\pm kl \tag{33.42}$$

$$\begin{cases}mg+kl-\omega^2ml=kl\\ mg+kl-\omega^2ml=-kl\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\omega_1^2=\frac{g}{l}\\ \omega_2^2=\frac{mg+2kl}{ml}\end{cases} \tag{33.43}$$

$$\omega_1^2 = \frac{q}{l} \tag{33.44}$$

时，解矢量方程为

$$\left(K - \omega_1^2 M\right) A^{(1)} = 0 \tag{33.45}$$

$$\begin{pmatrix} mg + kl - \omega_1^2 ml & -kl \\ -kl & mg + kl - \omega_1^2 ml \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \end{pmatrix} = 0 \tag{33.46}$$

$$\begin{cases} \left[mg + kl - \omega_1^2 ml\right] A_1^{(1)} - klA_2^{(1)} = 0 \\ -klA_1^{(1)} + \left[mg + kl - \omega_1^2 ml\right] A_2^{(1)} = 0 \end{cases} \tag{33.47}$$

我们知道$s = 2$个方程的非齐次线性方程组只有$s - 1 = 1$个独立的方程，也就是说不能解出$A_1^{(1)}, A_2^{(1)}$。只能得到$\frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}}$（即选$A_1^{(1)}$为自由未知数）方程组化为

$$\begin{cases} A_1^{(1)} - A_2^{(1)} = 0 \\ -A_1^{(1)} + A_2^{(1)} = 0 \end{cases} \tag{33.48}$$

所以$A_1^{(1)}/A_2^{(1)} = 1$

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l} \Longrightarrow \omega_1 = \pm\sqrt{\frac{g}{l}} \tag{33.49}$$

与ω_1^2对应的一个特解为

$$\begin{aligned} \theta_1^{(1)} &= \left(C_{\omega_1} e^{i\omega_1 t} + C_{-\omega_1} e^{-i\omega_1 t}\right) A_1^{(1)} \\ &= C^{(1)} \cos\left(\omega_1 t + \varphi_1\right) A_1^{(1)} \\ &= A_1'^{(1)} \cos\left(\omega_1 t + \varphi_1\right) \end{aligned} \tag{33.50}$$

$$\begin{aligned} \theta_2^{(1)} &= \left(C_{\omega_1} e^{i\omega_1 t} + C_{-w_1} e^{-i\omega_1 t}\right) A_2^{(1)} \\ &= \left(C_{w_1} e^{i\omega_1 t} + C_{-w_1} e^{-i\omega_1 t}\right) A_1^{(1)} \\ &= A_1'^{(1)} \cos\left(\omega_1 t + \varphi_1\right) \end{aligned} \tag{33.51}$$

$$\theta_1^{(1)}(t) = \theta_2^{(1)}(t) \tag{33.52}$$

说明两摆同步。当

$$\omega_2^2 = \frac{mg + 2kl}{ml} \tag{33.53}$$

时

$$\left(k-\omega_2^2 M\right) A^{(2)}=0 \tag{33.54}$$

$$\begin{pmatrix} mg+kl-\omega_2^2 ml & -kl \\ -kl & mg+kl-\omega_2^2 ml \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^{(2)} \\ A_2^{(2)} \end{pmatrix}=0 \tag{33.55}$$

将ω_2^2代入

$$\begin{pmatrix} mg+kl-\frac{mg+2kl}{ml} ml & -kl \\ -kl & mg+kl-\frac{mg+2kl}{ml} ml \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^{(2)} \\ A_2^{(2)} \end{pmatrix}=0 \tag{33.56}$$

$$\begin{pmatrix} -kl & -kl \\ -kl & -kl \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^{(2)} \\ A_2^{(2)} \end{pmatrix}=0 \tag{33.57}$$

所以

$$\begin{cases} A_1^{(2)}+A_2^{(2)}=0 \\ A_1^{(2)}+A_2^{(2)}=0 \end{cases} \tag{33.58}$$

所以$A_1^{(2)}=-A_2^{(2)}$

$$\omega_2^2=\frac{mg+2kl}{ml} \Longrightarrow \omega_2=\pm\sqrt{\frac{mg+2kl}{ml}} \tag{33.59}$$

$$\begin{aligned} \theta_1^{(2)} &= \left(C_{\omega_2} e^{i\omega_2 t}+C_{-\omega_2} e^{-i\omega_2 t}\right) A_1^{(2)} \\ &= C^{(2)} \cos\left(\omega 2t+\varphi_2\right) A_1^{(2)} \\ &= A_1'^{(2)} \cos\left(\omega_2 t+\varphi_2\right) \end{aligned} \tag{33.60}$$

$$\theta_2^{(2)}-\theta_1^{(2)}=-A_1'^{(2)} \cos\left(\omega_2 t+\varphi_2\right) \tag{33.61}$$

$$\theta_2^{(2)}=-\theta_1^{(2)} \tag{33.62}$$

说明两摆相位相反。

可见对应两个本征频率ω_1,ω_2有两个本征振动（两个特解）。一般的振动（方程的通解）是这两个本征振动的线性迭加。

$$\theta_\alpha(t)=\sum_{r=1}^{2}\theta_\alpha^{(r)}=\sum_{r=1}^{2}A_\alpha'^{(r)}\cos(\omega_r t+\varphi_r)\,(\alpha=1,2) \tag{33.63}$$

所以

$$\theta_1(t)=A_1'^{(1)}\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+A_1'^{(2)}\cos(\omega_2 t+\varphi_2) \tag{33.64}$$

$$\theta_2(t)=A_1'^{(1)}\cos(\omega_1 t+\varphi_1)-A_1'^{(2)}\cos(\omega_2 t+\varphi_2) \tag{33.65}$$

其中

$$\omega_1=\sqrt{\frac{g}{l}} \tag{33.66}$$

同步振动，弹力始终为0.所以ω_1中无k，与单摆相同。

$$\omega_2=\sqrt{\frac{mg+2kl}{ml}} \tag{33.67}$$

既有单摆又有弹簧。

注意：对两个本征振动而言，θ_1,θ_2都在随时间变化，这说明θ_1,θ_2不是最好的广义坐标选择。那么能否取一套新的广义坐标使每一个广义坐标对应一个本征振动。

在本征振动模式下，只有一个这样的广义坐标随时间变化。可以普遍地证明，这样的坐标可以找到它们就是所谓的简正坐标。耦合摆的简正坐标,我们早已分析过，如取

$$\begin{cases}\xi_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1+\theta_2)\\ \xi_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1-\theta_2)\end{cases} \tag{33.68}$$

则对应两种本征振动各只有一个坐标随时间变化。可解得

$$\begin{cases}\theta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1+\xi_2)\\ \theta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1-\xi_2)\end{cases} \tag{33.69}$$

求导有

$$\begin{cases}\dot\theta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\dot\xi_1+\dot\xi_2\right)\\ \dot\theta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\dot\xi_1-\dot\xi_2\right)\end{cases} \tag{33.70}$$

将这个结果代入Lagrange量的表达式中。动能

$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{2}ml^2\left(\dot\theta_1^2+\dot\theta_1^2\right)\\&=\frac{1}{2}ml^2\left[\frac{1}{2}\left(\dot\xi_1+\dot\xi_2\right)^2+\frac{1}{2}\left(\dot\xi_1-\dot\xi_2\right)^2\right]\\&=\frac{1}{2}ml^2\left[\dot\xi_1^2+\dot\xi_2^2\right]\end{aligned} \tag{33.71}$$

势能

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{2}\left(mgl+kl^2\right)\theta_1^2+\frac{1}{2}\left(mgl+kl^2\right)\theta_2^2-kl^2\theta_1\theta_2\\ &= \frac{1}{2}\left(mgl+kl^2\right)\frac{1}{2}\left(\xi_1+\xi_2\right)^2+\frac{1}{2}\left(mgl+kl^2\right)\frac{1}{2}\left(\xi_1-\xi_2\right)^2-kl^2\frac{1}{2}\left(\xi_1+\xi_2\right)\left(\xi_1-\xi_2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(mgl+kl^2\right)\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right)-kl^2\frac{1}{2}\left(\xi_1^2-\xi_2^2\right)\\ &= \frac{1}{2}mgl\xi_1^2+\frac{1}{2}\left(mgl+2kl^2\right)\xi_2^2\end{aligned} \tag{33.72}$$

所以Lagrange量为

$$\begin{aligned}L &= T-U\\ &= \frac{1}{2}ml^2\left[\dot{\xi}_1^2+\dot{\xi}_2^2\right]-\left[\frac{1}{2}mgl\xi_1^2+\frac{1}{2}\left(mgl+2kl^2\right)\xi_2^2\right]\\ &= \frac{1}{2}\dot{\xi}\dagger M_\xi\dot{\xi}-\frac{1}{2}\xi^\dagger K_\xi\xi\end{aligned} \tag{33.73}$$

其中

$$\dot{\xi}\equiv\begin{pmatrix}\dot{\xi}_1\\ \dot{\xi}_2\end{pmatrix} \tag{33.74}$$

$$\dot{\xi}^\dagger\equiv\begin{pmatrix}\dot{\xi}_1\dot{\xi}_2\end{pmatrix}$$

$$\xi=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} \tag{33.75}$$

$$\xi^\dagger=\left(\xi_1\xi_2\right) \tag{33.76}$$

$$M_\xi=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}ml^2 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}ml^2\end{pmatrix} \tag{33.77}$$

$$K_\xi=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}mgl & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\left(mgl+2kl^2\right)\end{pmatrix} \tag{33.78}$$

在选取简正坐标后M_ξ,K_ξ已对角化。（在量子力学中我们所要做的一个重要工作就是选择合适的表系，使得Hamilton量在该表象长对角化）与前面的做法相同，我们可以得到一个运动方程组

$$\begin{cases}ml^2\ddot{\xi}_1+mgl\xi_1=0\\ ml^2\ddot{\xi}_2+\left(2kl^2+mgl\right)\xi_2=0\end{cases} \tag{33.79}$$

明显可以看出，这个方程组是两个独立的常微分方程，是我们所熟悉的谐振子方程。简单变化有

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 + \sqrt{\frac{g}{l}}^2 \xi_1 = 0 \\ \ddot{\xi}_2 + \sqrt{\frac{mgl+2kl^2}{ml^2}}^2 \xi_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{mgl+2kl^2}{ml^2}} \end{cases} \tag{33.80}$$

可见简正坐标的引入将耦合的两个振子变成了连个独立的谐振子。这两个独立的振子之间没有相互作用。这种思想的应用非常广泛。现代物理中的声子的概念，乃至场论中的处理都是将相互作用化成独立的谐振子。

还可以看出，振动频率并没有改变。这很容易理解，频率是可观测的物理量。你计算时坐标系的选择怎么会影响物理量的数值呢？同样我们可以得到解

$$\begin{cases} \xi_1 = C^{(1)} \cos\left(\omega_1 t + \varphi^{(1)}\right) \\ \xi_2 = C^{(2)} \cos\left(\omega_2 t + \varphi^{(2)}\right) \end{cases} \tag{33.81}$$

可见这是两个独立的振子。

33.5 运动积分—首次积分

33.5.1 运动积分

我们的运动方程——Newton方程——呈一个对时间的二阶微分方程。求解这个动力学的过程本质上是做了两次积分。显然每次积分都将带来一个积分常数。它们的值要求初始条件来确定。这些常数及它们的各种组合在运动过程中当然是不变的（否则怎么能叫常数呢）它们可以表示成$\dot{q}q$的函数，它们的值在运动中保持不变。这些函数是我们通过对运动方程积分得到的。我们会看到，在运动过程中保持不变的量在解决问题中对我们有着特别的意义。在运动中保持不变的这些函数我们称之为运动积分。

可见当我们完全解出了一个力学问题的时候其实就相当于已经找到了全部的运动积分。在更多的时候我们考虑的是这个问题的逆问题，即如果我们找到了全部的运动积分，那么我们就已经找到了这个力学问题的全部解。那么运动积分是什么呢，它们就是运动中的一些不变量，或者索性说它们就是各种守恒量。根据noether定理我们知道，找守恒量除了直接求解方程（找运动常数）的方法外。其实还可以根据系统的对称性来找。这样在由对称性找到守恒量。也就是运动积分之后。我们就等于得到了运动方程的全部或部分解。

可见，对称性，或者说守恒量可以在很大程度上帮助我们解决一个力学问题或者说帮助我们去找运动方程的解。

33.5.2 封闭力学系统中独立运动积分的个数

一个封闭的力学体系中包含多少个运动积分呢？由微分方程的性质就可以确定这件事。

我们去考虑一个封闭的系统。假设某自由度数为S个。显然S个自由度的系统要用ST二阶微分方程来描述。而S个二阶微分方程组成的微分方程组的一般解中将包含$2S$个积分常数。这样猛地看上去运动积分似乎有$2S$个。但其实不然，我们还应该注意到在封闭系统的运动方程中并不显含时间。我们知道，积分常数的确定是通过初始条件来做到的。而对于一个不显含时间的微分方程来说初试时间的选择是无所谓的。也就是说完全任意的。而显然初试时间t_0是作为初始条件之一出现在问题中的，这样在通过初始条件求积分常数时，t_0将会出现在积分常数中，如果t_0的选择是任意的。那么就意味着包含t_0的积分常数也带有任意性。这样的量作为运动积分显然不合适。应当将它们从运动积分的名单中去掉。究竟要去掉几个呢。我们不妨利用积分常数选择的任意性（总可以通过适当的变换改变积分常数的形式和含义）将一个积分常数就选作t_0。而不让t_0再出现在其它积分常数中。这样一来我们就知道了封闭系统中积分常数中有一个是任意的。不然作为运动积分。这样对一个S个自由度的系统来说，独立的运动积分个数就是$2S-1$个。

33.5.3 首次积分（初积分，第一积分）

运动方程是二阶微分方程。要解出此方程（组）需要进行两次积分。对大多数问题而言我们不能将这两次积分都进行到底，也就是说该问题可能是不可积的。是不能得到（或我们不知道怎样得到）其解析解的。幸运的是在许多这类问题中我们虽然不能把积分进行到底，但往往能进行第一次的积分。这第一次积分也将给出一个运动常数。同样得到一个降了一阶的微分方程，形如

$$f(q_1 q_2 ... \dot{q}_1 \dot{q}_2 ... t) = c \tag{33.82}$$

这个一阶微分方程就是运动方程的首次积分。或称初积分，第一积分。在许多力学问题中首次积分包含了许多重要的解的信息。尤其是它们包含了守恒律。

例：最简单的封闭体系——做一维运动的自由粒子

运动方程

$$m\ddot{x} = 0 \tag{33.83}$$

初始条件：$t_0 = 0$时(x_0, v_0),首次积分

$$m\dot{x} = c \tag{33.84}$$

代入初始条件

$$mv_0 = v \tag{33.85}$$

所以有

$$\dot{x} = v_0 \tag{33.86}$$

再次积分

$$x = v_0 t + c' \tag{33.87}$$

代入初始条件

$$x_0 = v_0 t_0 + c' \tag{33.88}$$

所以

$$c' = x_0 - v_0 t_0 \tag{33.89}$$

显然首次积分给出了守恒量mv_0(动量)。c'中有t_0去掉这个常数。有一个运动积分

$$c = mv_0, \qquad (2s - 1 = 2 \times 1 - 1 = 1) \tag{33.90}$$

33.6 空间的对称性质与相关的守恒律

我们且不去普遍地证明noether定理，而是来看看它的几个特殊情况。在力学中我们主要关注的是一些连续的对称性。

33.6.1 空间的对称性与循环坐标（可遗坐标）

我们已经讨论过对称性，就是在某种操作下不变的性质。空间对称性当然就是在空间变换下不变的性质。那么这种性质在一个力学问题中怎样具体地体现呢？

力学系统的性质体现在系统的作用量或Lagrange量中。自然其对称性质在作用量和Lagrange量中也应有所体现。系统具有某种空间对称性意味着它的Lagrange量在相应的空间坐标变换是不变的。假设这个空间坐标变换是

$$q \to q^{'} = q + \Delta q \tag{33.91}$$

将相应的Lagrange量变化为

$$L(q) \to L(q^{'}) = L(q + \Delta q) \sim L(q) + \frac{\partial L}{\partial q}\Delta q \tag{33.92}$$

显然，如果系统在坐标变换(33.91)下是不变的，即具有这种对称性，将自然应有

$$L(q^{'}) = L(q)$$

这就要求(见(33.92)式)

$$\frac{\partial L}{\partial q}=0 \tag{33.93}$$

这就是说如果系统具有$q\to q'$的对称性，则Lagrange量满足(33.93)式，(33.93)式显然在告诉我们，L中此时不应显含广义坐标q这样的坐标，即不显含在L中的坐标被称为循环坐标（cyclic）或可遗坐标（ignorable)。（有一些书中这两个定义是不一样的，它们定义不出现在动能中的坐标为循环坐标，不出现在Lagrange量中的坐标为可遗坐标，但在本课程中我们不采用这种区分)。

33.6.2 广义动量守恒，线动量与角动量守恒

现在我们来看一下对称性在力学问题的处理中能派上什么用场。

我们已经讨论过，如果系统具有某种空间对称性，则有

$$\frac{\partial L}{\partial q}=0 \tag{33.94}$$

下面看看这个条件对系统运动方程Euler-Lagrange方程的影响。

Euler-Lagrange方程为

$$\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=0 \tag{33.95}$$

显然若

$$\frac{\partial L}{\partial q}=0 \tag{33.96}$$

即q是一个循环坐标，则方程化为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)=0 \tag{33.97}$$

我们知道运动方程是一个二阶微分方程。要解出这个方程实际上要进行两次的求积分的过程。显然这个方程很容易对时间求第一次积分

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=const \tag{33.98}$$

由前面的论证知，这时我们得到的是一个运动方程的首次积分。常数const是运动常数。也就是一个运动中的守恒量。很明显，在考虑了对称性（或等价地说找到了守恒量）后。运动方程得到了非常大的简化。由二阶微分方程降一阶而成为一阶微分方程。同时通过研究守恒量我们对运动的性质有了甚至比直接解方程更深刻的

了解。那么我们得到的这个运动常数的物理意义是什么呢?我们不妨针对几个特例来看看。在我们考虑的问题中，势能中不显含广义速度，这样我们就有

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left[T-V\left(q\right)\right]=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}=const \tag{33.99}$$

那么$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$的物理含义是什么呢？很明显这与广义坐标$q$的选取有直接的关系（至少会影响量纲）我们取特例看一看

1.$q=x$,即直角坐标分量x是循环坐标的情况

在直角坐标下

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right) \tag{33.100}$$

所以

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}=p_x\text{,线动量的}x\text{分量} \tag{33.101}$$

这说明如果系统在操作$x\to x+\Delta x$变换下是不变的，即系统具有x方向的坐标平移对称性。则系统线动量在x方向上守恒。

同理可知，任意方向上的坐标平移对称性都将导致该方向上的线动量守恒，这正是noether定理的一个结果。

2.$q=\theta$’即角变量是循环坐标的情况

在极坐标系下（如有心力运动）

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2) \tag{33.102}$$

所以

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}\cdot r=p_\theta\cdot r=L \tag{33.103}$$

角动量

这说明如果系统具有空间转动对称性，即在操作$\theta\to\theta+\Delta\theta$变换下不变，则系统与$\theta$对应的角动量分量守恒。这是noether定理的另一个结果。

可见，这里的所谓动量并不仅仅指线动量，而依广义坐标的选取不同而对应不同的动量。线坐标对应线动量，角坐标对应角动量。这启发我们定义一个对应广义坐标的广义动量

$$p_q\equiv\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \tag{33.104}$$

在q是循环坐标的时候，对应的广义动量是守恒量。这里的(p,q)构成一个共轭的正则变量对。此外，可以看出，如果坐标系的选择不合适，则循环坐标将不出现。这就要求我们合理选择坐标系。

33.7 时间平移不变性与能量守恒

由前一节对空间对称性的讨论我们可以知道，如果我们记某力学系统具有在空间坐标q变换下的不变性，就意味着有

$$\frac{\partial L}{\partial q}=0 \tag{33.105}$$

即L中不显含q，显然如果力学体系具有时间平移不变性则将满足

$$\frac{\partial L}{\partial t}=0 \tag{33.106}$$

，即Lagrange量中不显含时间（特别要注意的一点是不显含时间不等于不随时间变化，L中不显含时间但可以显含$q,\dot{q}$，而$q,\dot{q}$可以是时间的函数。）我们就由

$$\frac{\partial L}{\partial t}=0 \tag{33.107}$$

的条件出发看看能得到什么。

考虑■与时间的关系的最直接的途径是求■对时间的全导数

$$\frac{dL}{dt}=\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right)+\frac{\partial L}{\partial t}, \tag{33.108}$$

所以

$$\frac{dL}{dt}-\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right)=\frac{\partial L}{\partial t} \tag{33.109}$$

如果系统具有时间平移不变性，即

$$\frac{\partial L}{\partial t}=0. \tag{33.110}$$

则有

$$\frac{dL}{dt}-\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q}\right)=0 \tag{33.111}$$

至此我们并没有用到力学的什么结果。仅仅做个全导数。当然也就得不到什么物理结果。下面我们右用动力学方程—Euler-Lagrange方程。

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=0\Longrightarrow\frac{\partial L}{\partial q_i}=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{33.112}$$

代入（33.111)式中

$$\frac{dL}{dt}-\sum_i\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q}\right)=0 \tag{33.113}$$

因为

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)=\ddot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}+\dot{q}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{33.114}$$

所以

$$\frac{dL}{dt}-\sum_i\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)=0,\frac{d}{dt}\left(\sum_i\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-L\right)=0 \tag{33.115}$$

很明显我们得到了一个守恒量，我们将它定义成

$$h=\sum_i\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-L \tag{33.116}$$

这样便有

$$\frac{dh}{dt}=0 \tag{33.117}$$

那么这里的h的物理意义是什么呢？我们逐项分析

$$\sum_i\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\sum_i\dot{q}_i\frac{\partial\left(T-U\right)}{\partial \dot{q}_i} \tag{33.118}$$

因为U中不含广义速度$\dot{q}$,所以

$$\sum_i\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\sum_i\dot{q}_i\frac{\partial\left(T\right)}{\partial \dot{q}_i} \tag{33.119}$$

为了弄清这一项的物理意义，我们回忆第一章中讲过的任意广义坐标下动能的形式。在约束是集合约束（不含时）时，动能是广义速度的二次齐次函数

$$T=\frac{1}{2}\sum_{kl}M_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l \tag{33.120}$$

对齐次函数我们有

$$f\left(\lambda x,\lambda y\right)=\lambda^n f\left(x,y\right) \tag{33.121}$$

显然动能就是这样一个二次齐次函数。所以有

$$\sum_i\dot{q}_i\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=2T, \tag{33.122}$$

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 2T, \tag{33.123}$$

$$h = 2T - L = 2T - (T - U) = T + U \tag{33.124}$$

可见h是动能和势能的和，表征了系统的能量，这样有

$$\frac{dh}{dt} = \frac{d}{dt}(T + U) = \frac{dE}{dt} = 0 \tag{33.125}$$

所以能量

$$E = \text{const}, \tag{33.126}$$

即时间平移对称给出了能量守恒的结果。在上一节我们曾引入广义动量

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \tag{33.127}$$

由此可将前面的结果表示成

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \tag{33.128}$$

这样定义的量我们称之为哈密顿量，注意：h和H的区别在于$h\left(q_i \dot{q}_i\right)$是$q_i \dot{q}$的函数，$H\left(q_i p_i\right)$是$q_i p_i$的函数。

第三十四章　ϕ^4理论(待补充)

ϕ^4理论的$\mathcal{L}$氏密度可以写为

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{g}{4!}\phi^4 \\ &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}.\end{aligned}$$

相互作用部分为

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{g}{4!}\phi^4. \tag{34.1}$$

我们先讨论ϕ^4理论的生成泛函。前面已求得相互作用场的生成泛函为

$$Z[J] = Ne^{i\int d^4x\mathcal{L}_{int}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right)}Z_0[J]. \tag{34.2}$$

但是我们希望得到的是归一化了的生成泛函$Z[J]$。由前面的讨论已经知道,$Z[J]$的归一化条件为

$$Z[0] = 1.$$

这样归一化了的生成泛函自然可普遍地写为

$$\begin{aligned}Z[J] &= \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{i\mathcal{S}+i\int d^4xJ\phi}}{\int \mathcal{D}\phi e^{i\mathcal{S}}} \\ &= \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{i\mathcal{S}+i\int d^4xJ\phi}}{\int \mathcal{D}\phi e^{i\mathcal{S}+i\int d^4xJ\phi}\Big|_{J=0}}.\end{aligned} \tag{34.3}$$

由式（34.2）和式（34.3）我们可得归一化了的相互作用场的的生成泛函为

$$\text{归一化的}Z[J] = \frac{\text{未归一化的}Z[J]}{\text{未归一化的}Z[J]\big|_{J=0}}$$

$$
\begin{aligned}
Z[J] &= \frac{e^{i\int d^4z\mathcal{L}_{int}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)}Z_0[J]}{e^{i\int d^4z\mathcal{L}_{int}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)}Z_0[J]\Big|_{J=0}} \\
&= \frac{e^{i\int d^4z\mathcal{L}_{int}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)}e^{-\frac{i}{2}\int dxdyJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)}}{e^{i\int d^4z\mathcal{L}_{int}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)}e^{-\frac{i}{2}\int dxdyJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)}\Big|_{J=0}},
\end{aligned}
\tag{34.4}
$$

其中$Z_0[J]=Ne^{-\frac{i}{2}\int dxdyJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)}$。在场论中我们一般只能用微扰法处理（少数的精确解没有实际对应），即$\mathcal{L}_{int}$是小量的情况($\mathcal{L}_{int}(\phi)=-\frac{g}{4!}\phi^4$)。这样可以将指数展开

$$
\begin{aligned}
\text{分子} &= e^{i\int d^4z\mathcal{L}_{int}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)}Z_0[J] \\
&= \left\{1+i\int d^4z\mathcal{L}_{int}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)+\cdots\right\}Z_0[J] \\
&= \left\{1+i\int d^4z\left\{-\frac{g}{4!}\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right]^4\right\}+O(g^2)\right\}Z_0[J] \\
&= \left\{1-\frac{ig}{4!}\int d^4z\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right]^4+O(g^2)\right\}Z_0[J] \\
&= Z_0[J]-\frac{ig}{4!}\int d^4z\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right]^4Z_0[J]+O(g^2).
\end{aligned}
\tag{34.5}
$$

下面我们要算出这个泛函导数

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}Z_0[J] &= \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}e^{-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)} \\
&= -\int dxJ(x)\Delta_F(x-z)e^{-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)}
\end{aligned}
\tag{34.6}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^2Z_0[J] &= \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\left\{\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}Z_0[J]\right\} \\
&= -\frac{1}{i}\Delta_F(z-z)e^{-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)} \\
&\quad -\int d^4xJ(x)\Delta_F(x-z)\frac{1}{i}(-i)\int d^4xJ(x)\Delta_F(x-z)e^{-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)} \\
&= \left\{i\Delta_F(0)+\left[\int d^4xJ(x)\Delta_F(x-z)\right]^2\right\}e^{-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)}
\end{aligned}
\tag{34.7}
$$

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^3 Z_0[J] = \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\left\{\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^2 Z_0[J]\right\} \tag{34.8}$$

$$= \left\{\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\left[\int d^4x J(x)\,\Delta_F(x-z)\right]^2\right\} e^{-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y J(x)\Delta_F(x-y)J(y)}$$

$$+ \left\{i\Delta_F(0) + \left[\int d^4x J(x)\,\Delta_F(x-z)\right]^2\right\}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)} e^{-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y J(x)\Delta_F(x-y)J(y)}$$

$$= \left\{\frac{1}{i}\Delta_F(z-z)\,2\int d^4x J(x)\,\Delta_F(x-z)\right\} e^{-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y J(x)\Delta_F(x-y)J(y)}$$

$$+ \left\{i\Delta_F(0) + \left[\int d^4x J(x)\,\Delta_F(x-z)\right]^2\right\}\frac{1}{i}(-i)\int d^4x J(x)\,\Delta_F(x-z)\, e^{-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y J}$$

$$= \left\{2\left[-i\Delta_F(0)\right]\int d^4x J(x)\,\Delta_F(x-z) + \left[-i\Delta_F(0)\right]\int d^4x J(x)\,\Delta_F(x-z) - \left[\int d^4\right.\right.$$

$$\times e^{-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y J(x)\Delta_F(x-y)J(y)}$$

$$= \left\{3\left[-i\Delta_F(0)\right]\int d^4x J(x)\,\Delta_F(x-z) - \left(\int d^4x J(x)\,\Delta_F(x-z)\right]^3\right) e^{-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y J(x)}$$

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^4 Z_0[J] = \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\left\{\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^3 Z_0[J]\right\} \tag{34.9}$$

$$= \left\{3\left[-i\Delta_F(0)\right]\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\int d^4x J(x)\,\Delta_F(x-z) - \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\left[\int d^4x J(x)\,\Delta_F(x-z)\right]\right.$$

$$\times e^{-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y J(x)\Delta_F(x-y)J(y)}$$

$$+ \left\{3\left[-i\Delta_F(0)\right]\int d^4x J(x)\,\Delta_F(x-z) - \left[\int d^4x J(x)\,\Delta_F(x-z)\right]^3\right\}$$

$$\times \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)} e^{-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y J(x)\Delta_F(x-y)J(y)} \tag{34.10}$$

$$
\begin{aligned}
&= \{3\left[-i\Delta_F(0)\right]\frac{1}{i}\Delta_F(z-z) - 3\left[\int d^4x J(x)\,\Delta_F(x-z)\right]^2\frac{1}{i}\Delta_F(z-z)\} \\
&\times e^{-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y J(x)\Delta_F(x-y)J(y)} \\
&+ \left\{3\left[-i\Delta_F(0)\right]\int d^4x J(x)\,\Delta_F(x-z) - \left[\int d^4x J(x)\,\Delta_F(x-z)\right]^3\right\} \\
&\times \left[-\int d^4x J(x)\,\Delta_F(x-z)\right] e^{-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y J(x)\Delta_F(x-y)J(y)} \\
&= \{3\left[-i\Delta_F(0)\right]^2 + 3i\Delta_F(0)\left[\int d^4x J(x)\,\Delta_F(x-z)\right]^2 \\
&+ 3\left[-i\Delta_F(0)\right]\left[\int d^4x J(x)\,\Delta_F(x-z)\right]^2 + \left[\int d^4x J(x)\,\Delta_F(x-z)\right]^4\} \times e^{-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y J(x)\Delta_F(x-y)J(y)} \\
&= \left\{3\left[-i\Delta_F(0)\right]^2 + 6i\Delta_F(0)\left[\int d^4x J(x)\,\Delta_F(x-z)\right]^2 + \left[\int d^4x J(x)\,\Delta_F(x-z)\right]^4\right\} \times e^{-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y J(x)\Delta_F(
\end{aligned}
\tag{34.11}
$$

这个结果可以用图来表示，采用以下对应：此处为图

传播子$i\Delta_F(x-y)$:

$i\Delta_F(0) = i\Delta_F(x-x)$,即两个点$x, y$粘在了一起：

$$
\begin{aligned}
\left[i\Delta_F(0)\right]\left[\int dx J(x)\,\Delta_F(x-z)\right]^2 &= \left[\int dx J(x)\,\Delta_F(x-z)\right]\left[i\Delta_F(0)\right]\left[\int dy J(y)\,\Delta_F(y-z)\right] \\
&= -\left[\int dx J(x)\,\Delta_F(x-z)\right]\left[i\Delta_F(z-z)\right]\left[\int dy \Delta_F(y-z)\,J(y)\right]
\end{aligned}
\tag{34.12}
$$

$\left[i\Delta_F(0)\right]\left[\int dx J(x)\,\Delta_F(x-z)\right]^2$:

$\left[i\Delta_F(0)\right]^2 = \left[i\Delta_F(z-z)\right]\left[i\Delta_F(z-z)\right]$

$$
\begin{aligned}
\left[\int d^4x J(x)\,\Delta_F(x-z)\right]^4 &= \int d^4x_1 J(x_1)\,i\Delta_F(x_1-z)\int d^4x_2 J(x_2)\,i\Delta_F(x_2-z) \\
&\int d^4x_3 J(x_3)\,i\Delta_F(x_3-z)\int d^4x_4 J(x_4)\,i\Delta_F(x_4-z)
\end{aligned}
\tag{34.13}
$$

$\left[\int d^4x J(x)\,\Delta_F(x-z)\right]^4$:

这样用图表示的结果为

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^4 e^{-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)}$$
$$=[\qquad\qquad]\,e^{-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)} \tag{34.14}$$

下面我们来看看每个图前面系数的来源。它们来自对称性。

34.0.1 对称因子（symmetry factor）

在前面得到的图形规则中看到不同的图形前有不同的系数：（此处少图）

产生这些因子的原因是：我们要给出所有可能的图，且要给出所有可能的画法。

在ϕ^4理论中，图形的基结构是（图），即每个定点有四条外线。这是由相互作用形式$\phi^4=\phi\phi\phi\phi$决定的。由（图）组成的图的方式也不同。如（图）是由（图）粘合两条线得到的。一共有三种可能的方式。（图）称作真空图（没有外线）

（图）

这里(ij)表示将i，j两点粘合在一起。

（图）是由（图）粘合一点得到的，共有6种可能的方式。

（图）

（图）没有粘合，所以只有一种方式。

这便是对称因子的来源。

这样便有

$$Z[J]=\frac{e^{i\int d^4x\mathcal{L}_{int}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)}e^{-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)}}{e^{i\int d^4x\mathcal{L}_{int}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)}e^{-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)}\Big|_{J=0}}$$
$$=\frac{\left\{1-\frac{ig}{4!}\int d^4z\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right]^4+O(g^2)\right\}e^{-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)}}{\left\{1-\frac{ig}{4!}\int d^4z\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right]^4+O(g^2)\right\}e^{-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)}\Big|_{J=0}} \tag{34.15}$$

将$\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right]^4 Z_0[J]$的结果代入，分母上令$J=0$可以得到

$$Z[J]=\frac{\left\{1-\frac{ig}{4!}\int d^4z\,[\text{（图）}]\right\}e^{-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)}}{1-\frac{ig}{4!}\int d^4z\,[\text{（图）}]} \tag{34.16}$$

有外线的图（图）和（图）在$J=0$时为零。因为外线中含有$J(x)$。这就是说归一化实质上是将真空涨落规定为“1”。

将分母$Taylor$展开并略去g^2项的贡献

$$\begin{aligned} Z[J]&=\left\{1-\frac{ig}{4!}\int d^4z\left[\text{（图）}\right]\right\}e^{-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)}\left\{1+\frac{ig}{4!}\int d^4z\left[\text{（图）}\right]\right\}\\ &=\left\{1-\frac{ig}{4!}\int d^4z\left[\text{（图）}\right]\right\}e^{-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)} \end{aligned} \tag{34.17}$$

这样我们得到归一化的真空—真空跃迁振幅为

$$Z[J]=\left\{1-\frac{ig}{4!}\int d^4z\left[\text{（图）}\right]\right\}e^{-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)}$$

需要看到的是归一化后真空图（无外线）的贡献没有了，事实上我们可以证明，对任意一阶微扰归一化的$Z[J]$都不存在真空图的贡献。真空图的贡献在量子理论中往往是首先被切掉的。

这样我们就得到了ϕ^4理论的归一化的生成泛函，下面就可以利用它来得到各阶$Green$函数。

34.0.2 ϕ^4理论的2点$Green$函数

由前面得到的ϕ^4理论的$Green$函数生成泛函可以直接得到$Green$函数。

$$\begin{aligned} \tau(x_1,x_2)&=\left(\frac{1}{i}\right)^2\frac{\delta^2Z[J]}{\delta J(x_2)\delta J(x_1)}\bigg|_{J=0}\\ &=\left(\frac{1}{i}\right)^2\frac{\delta^2}{\delta J(x_2)\delta J(x_1)}\left[1-\frac{ig}{4!}\int d^4z\left(\text{（图）}\right)\right]e^{-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)} \end{aligned} \tag{34.18}$$

其中第一项：

$$\left(\frac{1}{i}\right)^2\frac{\delta^2}{\delta J(x_2)\delta J(x_1)}e^{-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)}\bigg|_{J=0}=i\Delta_F(x_1-x_2) \tag{34.19}$$

第二项为：

$$\left(\frac{1}{i}\right)^2\frac{\delta^2}{\delta J(x_2)\delta J(x_1)}\left[-\frac{ig}{4!}\int d^4z\left(\text{（图）}\right)e^{-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)}\right]\bigg|_{J=0} \tag{34.20}$$

其中一阶导数

$$\begin{aligned} &\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\left[-\frac{ig}{4!}\int d^4z\left(\text{（图）}\right)e^{-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)}\right]\\ &=\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\left[-\frac{ig}{4!}\int d^4z\left(\text{（图）}\right)\right]e^{-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)}\\ &+\left[-\frac{ig}{4!}\int d^4z\left(\text{（图）}\right)\right]\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}e^{-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)} \end{aligned} \tag{34.21}$$

其中

$$\begin{aligned}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\int d^4z\,(\text{（图）}) &= \int d^4z\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\left[i\Delta_F(0)\right]\left[\int dxJ(x)\,\Delta_F(x-z)\right]^2 \\ &= \int d^4z\left[i\Delta_F(0)\right]2\left[\int dxJ(x)\,\Delta_F(x-z)\right]\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\int dxJ(x)\,\Delta_F(x-z) \\ &= \int d^4z\left[i\Delta_F(0)\right]2\left[\int dxJ(x)\,\Delta_F(x-z)\right]\left[-i\Delta_F(x_1-z)\right]\end{aligned} \tag{34.22}$$

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\int d^4z\,(\text{（图）})\Big|_{J=0} = 0 \tag{34.23}$$

其中

$$\begin{aligned}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\int d^4z\,(\text{（图）}) &= \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\int d^4z\left[\int d^4xJ(x)\,\Delta_F(x-z)\right]^4 \\ &= \int d^4z\;4\left[\int d^4xJ(x)\,\Delta_F(x-z)\right]^3\left[-i\Delta_F(x_1-z)\right]\end{aligned} \tag{34.24}$$

在求二阶导数时我们要取$J=0$，因此并不需要算出所有的项，只需将不为零的项保留下来。

$$\begin{aligned}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\int d^4z\right]\Big|_{J=0} &= \int d^4z2\left[i\Delta_F(0)\right]\left[-i\Delta_F(x_2-z)\right]\left[-i\Delta_F(x_1-z)\right] \\ &= \int d^4z2\left[i\Delta_F(0)\right]\left[i\Delta_F(x_2-z)\right]\left[i\Delta_F(x_1-z)\right] \\ \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\int d^4z\right]\Big|_{J=0} &= 0\end{aligned} \tag{34.25}$$

这样有：

$$\begin{aligned}&(\frac{1}{i})^2\frac{\delta^2}{\delta J(x_2)\delta J(x_1)}\left[-\frac{ig}{4!}\int d^4z(\text{（图）})\cdot e^{-\frac{i}{2}\int dxdyJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)}\right]\Big|_{J=0} \\ &= (\frac{1}{i})^2\frac{\delta^2}{\delta J(x_2)\delta J(x_1)}\left[-\frac{ig}{4!}6\int d^4z(\text{（图）})\cdot e^{-\frac{i}{2}\int dxdyJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)}\right]\Big|_{J=0} \\ &= (-\frac{ig}{4!}6)\,(\frac{1}{i})^2\frac{\delta^2}{\delta J(x_2)\delta J(x_1)}\left[\int d^4z(\text{（图）})\cdot e^{-\frac{i}{2}\int dxdyJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)}\right]\Big|_{J=0} \\ &= (-\frac{ig}{4!}6)2\cdot\int d^4z\left[i\Delta_F(0)\right]\left[i\Delta_F(x_2-z)\right]\left[i\Delta_F(x_1-z)\right] \\ &= -\frac{i}{2}g\left[i\Delta_F(0)\right]\int d^4z\left[i\Delta_F(x_2-z)\right]\left[i\Delta_F(x_1-z)\right]\end{aligned} \tag{34.26}$$

这里已扔掉等于零的项。所以

$$\tau(x_1,x_2)=i\Delta_F(x_1-x_2)-\frac{i}{2}g\left[i\Delta_F(0)\right]\int d^4z\left[i\Delta_F(x_2-z)\right]\left[i\Delta_F(x_1-z)\right]+O(g^2) \tag{34.27}$$

我们将这里的结果也用Feynman图表示，前面我们用Feynman图表示的是$J(x)\neq 0$的情况时的$Z[J]$，对这里的$J=0$的情况，即Green函数。我们重新定义一组针对Green函数Feynman规则。

1.$i\Delta_F(x_1-x_2)$: （图） 内线

2.$i\Delta_F(0)\left[i\Delta_F(x_2-z)\right]\left[i\Delta_F(x_1-z)\right]=\left[i\Delta_F(x_1-z)\right]\left[i\Delta_F(z-z)\right]\left[i\Delta_F(z-x_2)\right]$:

3.顶点$-ig\int d^4z$（图）

4.除以对称因子2（对称因子为2的原因以后讨论）（之所以会有对称因子是因为就ϕ^4理论中顶点中的四条线是全同粒子。因此有交换问题在其它理论中便没有这样的问题）。

这样有：

$$\begin{aligned}\tau(x_1,x_2)&=i\Delta_F(x_1-x_2)+\frac{1}{2}(-ig)\left[i\Delta_F(0)\right]\int d^4z\left[i\Delta_F(x_1-z)\right]\left[i\Delta_F(z-z)\right]\left[i\Delta_F(z-x_2)\right]+O(g^2)\\&=(\text{（图）})+(\text{（图）})+O(g^2)\end{aligned} \tag{34.28}$$

考虑到g^2阶近似的两点Green函数包含了自由传播子（图）和考虑了真空修正的（图）。高阶会有更多的图。

这里的2点Green函数的结果我们是在坐标表示中得到的。下面我们在动量表象中考虑这个问题。利用Fourier变换:

$$\Delta_F(x-y)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-m^2+i\epsilon}e^{-ik(x-y)} \tag{34.29}$$

考虑前面两点Green函数的第二项

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(-ig)\int d^4z\,[i\Delta_F(x_1-z)]\,[i\Delta_F(z-z)]\,[i\Delta_F(z-x_2)] \\
&= -\frac{1}{2}g\Delta_F(0)\int d^4z\Delta_F(x_1-z)\Delta_F(z-x_2) \\
&= -\frac{1}{2}g\Delta_F(0)\int d^4z\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip(x_1-z)}}{p^2-m^2+i\epsilon}\frac{e^{-iq(z-x_2)}}{q^2-m^2+i\epsilon} \\
&= -\frac{1}{2}g\Delta_F(0)\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{d^4q}{(2\pi)^4}d^4z\frac{1}{p^2-m^2+i\epsilon}\frac{1}{q^2-m^2+i\epsilon}e^{-i(px_1-qx_2)}e^{-i(p-q)z} \\
&= -\frac{1}{2}g\frac{\Delta_F(0)}{(2\pi)^4}\int d^4pd^4q\frac{1}{p^2-m^2+i\epsilon}\frac{1}{q^2-m^2+i\epsilon}\delta^4(p-q)e^{-i(px_1-qx_2)} \\
&= -\frac{g}{2}\Delta_F(0)\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{(p^2-m^2+i\epsilon)^2}
\end{aligned}
\tag{34.30}
$$

上述推导中用到了

$$
\int \frac{d^4x}{(2\pi)^4}e^{ikx} = \delta^4(k) \tag{34.31}
$$

这样便可得到2点Green函数为:

$$
\begin{aligned}
\tau(x_1,x_2) = &\ （图）+（图） \\
&= i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{p^2-m^2+i\epsilon} - \frac{g}{2}\Delta_F(0)\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{ip(x_1-x_2)}}{(p^2-m^2+i\epsilon)^2}
\end{aligned}
\tag{34.32}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau(x_1,x_2) &= i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left[\frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{p^2-m^2+i\epsilon} + i\frac{g}{2}\frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{(p^2-m^2+i\epsilon)^2}\Delta_F(0)\right] \\
&= i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{p^2-m^2+i\epsilon}\left[1+\frac{i\frac{g}{2}\Delta_F(0)}{p^2-m^2+i\epsilon}\right]
\end{aligned}
\tag{34.33}
$$

利用$1+\delta \sim \frac{1}{1-\delta}$

$$
\begin{aligned}
\tau(x_1,x_2) &= i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{p^2-m^2+i\epsilon}\frac{1}{1-\frac{i\frac{g}{2}\Delta_F(0)}{p^2-m^2+i\epsilon}} \\
&= i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{p^2-m^2+i\epsilon}\frac{p^2-m^2+i\epsilon}{p^2-m^2+i\epsilon-i\frac{g}{2}\Delta_F(0)} \\
&= i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{p^2-m^2-i\frac{g}{2}\Delta_F(0)+i\epsilon}
\end{aligned}
\tag{34.34}
$$

这里我们只算到了二阶(g^2)，但这个结果却是普遍的。可以看到$\Delta_F(0)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-m^2+i\epsilon}$是二次发散的，也就是说$\Delta_F(0)$是无穷大。我们定义

$$\delta m^2 \equiv i\frac{g}{2}\Delta_F(0) \tag{34.35}$$

$$m_r^2 \equiv m^2+\delta m^2 = m^2+i\frac{g}{2}\Delta_F(0) \tag{34.36}$$

这样便有

$$\tau(x_1,x_2)=i\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{p^2-m_r^2+i\epsilon} \tag{34.37}$$

m_r是重整化质量（renormalizatized mass)。我们认为m_r才是我们通过实验测到真正的物理质量而出现在$\mathcal{L}$氏量中的质量m则是裸质量，裸质量是发散的。而“穿衣”的质量则是有限的。所穿的“衣服”是由于真空涨落而生成的“云”。这种云的生成与相互作用有关。

34.0.3 求泛函导数的一个简化的记法

求泛函导数非常繁琐。这里引入一套简化的记法使这种计算方便一些。这种记法本质上是一种矩阵式的记法，即将$\int dxJ(x)\phi(x)$中的x看作是指标，即$\int dxJ(x)\varphi(x)\sim\sum\limits_i J_i\phi_i = J\phi$。这里的$J\phi$其实就是矩阵。为了更方便些，在$Bose$场情况下，此时场算符对易。我们打扰算符的顺序，也不会造成混乱。简化的记法为：

$$\begin{aligned}\int dx_1J(x_1)\phi(x_1)&\equiv J(1)\phi(x_1)\equiv J\phi\\ \frac{1}{2}\int dx_1dx_2\phi(x_1)K(x_1,x_2)\phi(x_2)&\equiv\frac{1}{2}\phi(1)K(1,2)\phi(2)\equiv\frac{1}{2}K\phi^2\end{aligned} \tag{34.38}$$

泛函的$Taylor$展开可简记为

$$\begin{aligned}F[\phi]&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\int dx_1\ldots dx_mF^{(m)}(x_1\ldots x_m)\phi(x_1)\ldots\phi(x_m)\\&\equiv\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}F^{(m)}(1,2\ldots m)\phi(1)\phi(2)\ldots\phi(m)\\&\equiv\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}F^{(m)}\phi^m\end{aligned} \tag{34.39}$$

利用这种简化表示我们可以将各种泛函及导数表示为：

$$Z[J]=e^{\int dxJ(x)\phi(x)}=e^{J\phi} \tag{34.40}$$

导数则为：

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = \phi(x) e^{\int dx J(x)\phi(x)} \Leftrightarrow \frac{\delta Z[J]}{\delta J} = \phi e^{J\phi} \tag{34.41}$$

对一个解析泛函

$$\begin{aligned} Z[J] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} J^n \tau^{(n)} \\ \frac{\delta Z[J]}{\delta J(y)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 \ldots dx_n J(x_1) \ldots J(x_n) \tau^{(n+1)}(y, x_1 \ldots x_n) \Leftrightarrow \frac{\delta Z[J]}{\delta J} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} J^n \tau^{(n+1)} \end{aligned} \tag{34.42}$$

此外还有简化记号

$$(\Delta_F)_x = \Delta(x - x) \tag{34.43}$$

$$\Delta_F \equiv \Delta(x - y) \tag{34.44}$$

$$(\Delta_F J)_x \equiv \int dy J(y) \Delta_F(x - y) \tag{34.45}$$

这样有：

$$\begin{aligned} &\frac{\delta}{\delta J(x)} e^{\frac{1}{2}\Delta_F J^2} = (\Delta_F J)_x e^{\frac{1}{2}\Delta_F J^2} \\ &\frac{\delta}{\delta J(x)} (\Delta_F J)_x = (\Delta_F)_x = \Delta_F(x - x) = \Delta_F(0) \\ &\frac{\delta}{\delta J(y)} (\Delta_F J)_x = \Delta_F = \Delta_F(x - y) \end{aligned} \tag{34.46}$$

34.0.4 ϕ^4理论的4点$Green$函数

前面讨论了ϕ^4理论的2点$Green$函数。这里讨论4点Green函数（3点$Green$函数是零）

4点$Green$函数公式为：

$$\tau(x_1 x_2 x_3 x_4) = \left(\frac{1}{i}\right)^4 \left.\frac{\delta^4 Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\delta J(x_3)\delta J(x_4)}\right|_{J=0} \tag{34.47}$$

而$Z[J]$为：

$$Z[J] = \left[1 - \frac{ig}{4!} \int d^4 z(\text{（图）})\right] e^{-\frac{i}{2}\int dx dy J(x)\Delta_F(x-y)J(y)} \tag{34.48}$$

注意：这里的图（图）和（图）是$J\neq 0$时的情况，不是$Green$函数的图。这样有

$$第一项=\frac{\delta^4}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\delta J(x_3)\delta J(x_4)}e^{-\frac{i}{2}\int dxdyJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)}\Big|_{J=0} \tag{34.49}$$

利用简化记法，一阶一阶地求导，利用泛函简化记法中公式

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta J}e^{-\frac{i}{2}\Delta_F J^2}&=-i\Delta_F Je^{-\frac{i}{2}\Delta_F J^2}\\
\frac{\delta^2}{\delta J^2}e^{-\frac{i}{2}\Delta_F J^2}&=\frac{\delta}{\delta J}(-i\Delta_F Je^{-\frac{i}{2}\Delta_F J^2})\\
&=\left[-i\Delta_F-i\Delta_F J(-i\Delta_F J)\right]e^{-\frac{i}{2}\Delta_F J^2}\\
&=\left[-i\Delta_F+(-i\Delta_F J)^2\right]e^{-\frac{i}{2}\Delta_F J^2}\\
\frac{\delta^3}{\delta J^3}e^{-\frac{i}{2}\Delta_F J^2}&=\left[3(-i\Delta_F)^2J+(-i\Delta_F J)^3\right]e^{-\frac{i}{2}\Delta_F J^2}\\
\frac{\delta^4}{\delta J^4}e^{-\frac{i}{2}\Delta_F J^2}&=\left[3(-i\Delta_F)^2+6(-i\Delta_F)^3J^2+(-i\Delta_F J)^4\right]e^{-\frac{i}{2}\Delta_F J^2}\\
&=\left[3(i\Delta_F)^2-6(i\Delta_F)^3J^2+(i\Delta_F J)^4\right]e^{-\frac{i}{2}\Delta_F J^2}
\end{aligned} \tag{34.50}$$

这样

$$\begin{aligned}
第一项&=\frac{\delta^4}{\delta J^4}e^{-\frac{i}{2}\Delta_F J^2}\Big|_{J=0}\\
&=\left[3(i\Delta_F)^2-6(i\Delta_F)^3J^2+(i\Delta_F J)^4\right]e^{-\frac{i}{2}\Delta_F J^2}\Big|_{J=0}\\
&=3\left(i\Delta_F\right)^2
\end{aligned} \tag{34.51}$$

在简化记法里，系数3实际上在告诉我们一共有多少种组合。用$\tau_I(x_1,x_2,x_3,x_4)$表示$\tau(x_1,x_2,x_3,x_4)$的第一项，这样

$$\begin{aligned}
\tau_I(x_1,x_2,x_3,x_4)&=\tau_I(1\ 2\ 3\ 4)\\
&=3(i\Delta_F)^2\qquad 恢复\\
&=i\Delta_F(1\ 2)i\Delta_F(3\ 4)+i\Delta_F(1\ 3)i\Delta_F(2\ 4)+i\Delta_F(1\ 4)i\Delta_F(2\ 3)\\
&=i\Delta_F(x_1-x_2)i\Delta_F(x_3-x_4)+i\Delta_F(x_1-x_3)i\Delta_F(x_2-x_4)+i\Delta_F(x_1-x_4)i\Delta_F(x_2-x_3)
\end{aligned}$$

用图表示

$$\begin{aligned}
\tau_I(x_1,x_2,x_3,x_4)=&\ （图）+（图）+（图）\\
=&\ 3（图）
\end{aligned}$$

第一项是没有相互作用的自由粒子传播子。

$$（图）\ =[i\Delta_F(0)]\left[\int d^4xJ\left(x\right)\Delta_F\left(x-z\right)\right]^2$$

$$\begin{aligned}
第二项 &= \frac{\delta^4}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\delta J(x_3)\delta J(x_4)}\left[-\frac{ig}{4!}6\int d^4z\ （图）\ e^{-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)}\right]\Big|_{J=0} \\
&= \frac{\delta^4}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\delta J(x_3)\delta J(x_4)}\left[i\Delta_F(0)\int d^4z\left[\int d^4xJ\left(x\right)\Delta_F\left(x-z\right)\right]^2 e^{-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J}\right. \\
&= -\frac{ig}{4!}6\frac{\delta^4}{\delta J^4}\left[i\Delta_F(0)\int d^4z\left(\Delta_FJ\right)_z^2 e^{-\frac{i}{2}\Delta_FJ^2}\right]\Big|_{J=0} \\
&= -\frac{ig}{4!}6i\Delta_F(0)\int d^4z\frac{\delta^4}{\delta J\left(x\right)^4}\left[\left(\Delta_FJ\right)_z^2 e^{-\frac{i}{2}\Delta_FJ^2}\right]\Big|_{J=0} \\
&= -\frac{ig}{4!}6i\Delta_F(0)\int d^4z\frac{\delta^3}{\delta J\left(x\right)^3}\left[2\left(\Delta_FJ\right)_z\Delta_Fe^{-\frac{i}{2}\Delta_FJ^2}+\left(\Delta_FJ\right)_z^2\left(-i\Delta_FJ\right)_x^2 e^{-\frac{i}{2}\Delta_FJ^2}\right]\Big|_{J=0} \\
&= \{-\frac{ig}{4!}6i\Delta_F(0)\int d^4z\frac{\delta^2}{\delta J\left(x\right)^2}[2\Delta_F\Delta_Fe^{-\frac{i}{2}\Delta_FJ^2}+2\left(\Delta_FJ\right)_z\Delta_F\left(-i\Delta_FJ\right)_x e^{-\frac{i}{2}\Delta_FJ^2} \\
&+2\left(\Delta_FJ\right)_z\Delta_F\left(-i\Delta_FJ\right)_x e^{-\frac{i}{2}\Delta_FJ^2}+\left(\Delta_FJ\right)_z^2\left(-i\Delta_F\right)_x e^{-\frac{i}{2}\Delta_FJ^2} \\
&+\left(\Delta_FJ\right)_z^2\left(-i\Delta_FJ\right)_x\left(-i\Delta_FJ\right)_x e^{-\frac{i}{2}\Delta_FJ^2}]\}\Big|_{J=0} \qquad (34.52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{ig}{4!}6i\Delta_F(0)\int d^4z\frac{\delta}{\delta J\left(x\right)}[2\Delta_F^2\left(-i\Delta_FJ\right)_x e^{-\frac{i}{2}\Delta_FJ^2}+2\Delta_F\Delta_F\left(-i\Delta_FJ\right)_x e^{-\frac{i}{2}\Delta_FJ^2} \\
&+2\left(\Delta_FJ\right)_z\Delta_F(-i\Delta_F)_xe^{-\frac{i}{2}\Delta_FJ^2}+2(\Delta_FJ)_z\Delta_F\left(-i\Delta_FJ\right)_x e^{-\frac{i}{2}\Delta_FJ^2} \\
&+2\Delta_F\Delta_F\left(-i\Delta_FJ\right)_x e^{-\frac{i}{2}\Delta_FJ^2}+2\left(\Delta_FJ\right)_z\Delta_F\left(-i\Delta_F\right)_x e^{-\frac{i}{2}\Delta_FJ^2} \\
&+2\left(\Delta_FJ\right)_z\Delta_F\left(-i\Delta_FJ\right)_x\left(-i\Delta_FJ\right)_x e^{-\frac{i}{2}\Delta_FJ^2} \\
&+2\left(\Delta_FJ\right)_z\Delta_F\left(-i\Delta_F\right)_x e^{-\frac{i}{2}\Delta_FJ^2}+\left(\Delta_FJ\right)_z^2\left(-i\Delta_F\right)_x\left(-i\Delta_FJ\right)_x e^{-\frac{i}{2}\Delta_FJ^2} \\
&+2\left(\Delta_FJ\right)_z\Delta_F\left(-i\Delta_FJ\right)_x^2 e^{-\frac{i}{2}\Delta_FJ^2}+2\left(\Delta_FJ\right)_z^2\left(-i\Delta_FJ\right)_x\left(-i\Delta_F\right)_x e^{-\frac{i}{2}\Delta_FJ^2} \\
&+\left(\Delta_FJ\right)_z^2\left(-i\Delta_FJ\right)_x^2\left(-i\Delta_FJ\right)_x e^{-\frac{i}{2}\Delta_FJ^2}]\Big|_{J=0} \\
&= -\frac{ig}{4!}6i\Delta_F(0)\int d^4z\frac{\delta}{\delta J\left(x\right)}[6\Delta_F^2\left(-i\Delta_FJ\right)_x+6(\Delta_FJ)_z\Delta_F(-i\Delta_F)_x \\
&+6(\Delta_FJ)_z\Delta_F(-i\Delta_FJ)_x^2+3(\Delta_FJ)_z^2(-i\Delta_F)_x^2+(\Delta_FJ)_z^2(-i\Delta_F)_x^3]e^{-\frac{i}{2}\Delta_FJ^2}\Big|_{J=0}
\end{aligned}$$

将$J=0$考虑进去

$$\begin{aligned}
&= -\frac{ig}{4!}6i\Delta_F(0)\int d^4z\left[6\Delta_F^2\left(-i\Delta_F\right)_x + 6\Delta_F\Delta_F\left(-i\Delta_F\right)_x\right] \\
&= -\frac{ig}{4!}6i\Delta_F(0)12\int d^4z\left[\Delta_F^2(-i\Delta_F)_x\right] \\
&= -\frac{ig}{4!}6\times 12i\Delta_F(0)\int d^4z\left[(i\Delta_F)^2\left(i\Delta_F\right)_x\right]
\end{aligned} \tag{34.53}$$

注：这里的$(-i\Delta_F)_x$并不是一个圈，这是因为前面我们将$\frac{\delta^4}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\delta J(x_3)\delta J(x_4)}$简化成$\frac{\delta^4}{\delta J(x)^4}$了，因此这里的$(i\Delta_F)_x$实质上是指$i\Delta_F(x_i-x_j)$，$i$，$j$将遍历所有的组合。恢复到原来的记法

$$= 3(-ig)\left\{\int d^4z i\Delta_F(x_i-z)i\Delta_F(z-z)i\Delta_F(z-x_j)\right\}i\Delta_F(x_k-x_k)\quad i,j,k,\mathcal{L}=1,2,3,4\text{遍历各种组合} \tag{34.54}$$

由前面得到的$Feynman$规则

$$-ig\int d^4z \to \text{（图），（图）} \to i\Delta_F\left(x-y\right) \tag{34.55}$$

有

$$\text{第二项} = 3\text{（图）} \tag{34.56}$$

由前面的推导中可以看出，这个图的对称因子是12。在简化记法中，求导后图前面的因子就是对称因子（symmetry factor）。而在恢复成不简化的写全细节的形式后，则对称因子被代之以相应数目的图。不过由于（图）与（图）的贡献相等。因此只需画出其中一个图就可以了，即每个图（图）出现2次。因此虽对称因子是12个，图只需画6个，再乘以2。

作为演示，我们将前面的简化记法恢复成完全的形式：

$$\begin{aligned}
\text{第二项} &= -\frac{ig}{4!}6\times 12i\Delta_F(0)\int d^4z(i\Delta_F)^2\left(i\Delta_F\right)_x \\
&= \frac{1}{4!}6\times 12(-ig)\int d^4z i\Delta_F i\Delta_F(i\Delta_F)_x
\end{aligned} \tag{34.57}$$

对称因子为12，因此有12项，但由于前面分析的原因各项贡献两两相等。因此只需

写出6项，再乘以2

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4!}6\times 2\times 6(-ig)\int d^4z i\Delta_F i\Delta_F \left(i\Delta_F\right)_x \\
&= \frac{1}{4!}6\times 2(-ig)\int d^4z[i\Delta_F(x_1-z)i\Delta_F(z-x_2)i\Delta_F(x_3-x_4) \\
&+ i\Delta_F(x_1-z)i\Delta_F(z-x_3)i\Delta_F(x_2-x_4) \\
&+ i\Delta_F(x_1-z)i\Delta_F(z-x_4)i\Delta_F(x_2-x_3) \\
&+ i\Delta_F(x_2-z)i\Delta_F(z-x_3)i\Delta_F(x_1-x_4) \\
&+ i\Delta_F(x_2-z)i\Delta_F(z-x_4)i\Delta_F(x_1-x_3) \\
&+ i\Delta_F(x_3-z)i\Delta_F(z-x_4)i\Delta_F(x_1-x_2)] \\
&= \frac{1}{4!}6\times 2\left[\text{（图）}+\text{（图）}+\text{（图）}+\text{（图）}+\text{（图）}+\text{（图）}\right] \\
&= \frac{1}{2}\times 6\left(\text{（图）}\right) \\
&= 3\left(\text{（图）}\right)
\end{aligned}
\tag{34.58}
$$

以上是第二项。

下面我们来计算第三项

$$
\text{（图）} = \left[\int d^4x J\left(x\right)\Delta_F\left(x-z\right)\right]^4 \tag{34.59}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{第三项} &= \frac{\delta^4}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\delta J(x_3)\delta J(x_4)}\left[-\frac{ig}{4!}\int d^4z e^{-\frac{i}{2}\int dxdyJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)}\right]\Bigg|_{J=0} \\
&= \frac{\delta^4}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\delta J(x_3)\delta J(x_4)}\left[-\frac{ig}{4!}\int d^4z\left[\int d^4x J\left(x\right)\Delta_F\left(x-z\right)\right]^4 e^{-\frac{i}{2}\int dxdyJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)}\right]\Bigg|
\end{aligned}
\tag{34.60}
$$

采用简化记法，注意：将$\frac{\delta^4}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\delta J(x_3)\delta J(x_4)}$用$\frac{\delta^4}{\delta J(x)^4}$代替后，恢复时要遍历$x_1,x_2,x_3,x_4$的

所有组合。

$$
\begin{aligned}
\text{第三项} &= \frac{\delta^4}{\delta J(x)^4}\left[-\frac{ig}{4!}\int d^4z\,(\Delta_F J)_z^4\, e^{-\frac{i}{2}\Delta_F J^2}\right]\Big|_{J=0} \\
&= -\frac{ig}{4!}\int d^4z \frac{\delta^4}{\delta J(x)^4}\left[(\Delta_F J)_z^4\, e^{-\frac{i}{2}\Delta_F J^2}\right]\Big|_{J=0} \\
&= -\frac{ig}{4!}\int d^4z \frac{\delta^3}{\delta J(x)^3}\left[4(\Delta_F J)_z^3\,\Delta_F + (\Delta_F J)_z^4(-i\Delta_F)\right] e^{-\frac{i}{2}\Delta_F J^2}\Big|_{J=0} \\
&= -\frac{ig}{4!}\int d^4z \frac{\delta^2}{\delta J^2(x)}\left\{\left[12(\Delta_F J)_z^2\,\Delta_F^2 + 4(\Delta_F J)_z^3\,\Delta_F(-i\Delta_F)\right] e^{-\frac{i}{2}\Delta_F J^2} + [4(\Delta_F J)_z^3\,\Delta_F + (\Delta_F J)_z^4\right. \\
&= -\frac{ig}{4!}\int d^4z \frac{\delta^2}{\delta J^2(x)}\left[12(\Delta_F J)_z^2\,\Delta_F^2 - i8(\Delta_F J)_z^3\,\Delta_F^2 - (\Delta_F J)_z^4\,\Delta_F^2\right] e^{-\frac{i}{2}\Delta_F J^2}\Big|_{J=0} \\
&= -\frac{ig}{4!}\int d^4z \frac{\delta}{\delta J(x)}\left\{[24(\Delta_F J)_z\,\Delta_F^3 - i24(\Delta_F J)_z^2\,\Delta_F^3 - 4(\Delta_F J)_z^3\,\Delta_F^3]e^{-\frac{i}{2}\Delta_F J^2} + \left[12(\Delta_F J)_z^2\,\Delta_F^2 -\right.\right. \\
&= -\frac{ig}{4!}\int d^4z \frac{\delta}{\delta J(x)}\left[24(\Delta_F J)_z\,\Delta_F^3 - i36(\Delta_F J)_z^2\,\Delta_F^3 - 12(\Delta_F J)_z^3\,\Delta_F^3 + i(\Delta_F J)_z^4\,\Delta_F^3\right] e^{-\frac{i}{2}\Delta_F J^2}\Big|_{J=0}
\end{aligned}
\tag{34.61}
$$

下次求导将$J=0$代入

$$
\begin{aligned}
\text{第三项} &= -\frac{ig}{4!}\int d^4z\left[24\Delta_F^4\right] \\
&= \frac{1}{4!}24(-ig)\int d^4z\,(\Delta_F)^4
\end{aligned}
\tag{34.62}
$$

恢复成完全记法

$$
\text{第三项} = \frac{1}{4!}24(-ig)\int d^4z i\Delta_F(x_1-z)i\Delta_F(x_2-z)i\Delta_F(x_3-z)i\Delta_F(x_4-z) \tag{34.63}
$$

用Feynman图表示

$$
\begin{aligned}
\text{第三项} &= \frac{1}{4!}24\text{（图）} \\
&=
\end{aligned}
\tag{34.64}
$$

这样我们便得到了全部4-点Green函数：

$$
\begin{aligned}
\tau(x_1,x_2,x_3,x_4) &= \\
&=
\end{aligned}
$$

以上这种得到Green函数的方法是一种直接计算的方法，这种计算非常繁琐。它的优点是不会丢图（项）。各种系数自动出现，但我们更常用的办法是先

画Feynman图再按Feynman规则写出表达式。这样做要方便得多。当然，在高阶情况下不小心可能会丢图。

ϕ^4理论的Feynman图基本构件是(插图)

由这些基本构件，对第一级近似（g'）的4-点Green函数，可以构成三种拓扑结构不同的图。

由于每条线所代表的粒子都是全同的，因此不同的图也有不止一种的构成方式，每一种构图的方式都对应表达式中一项的贡献。这样通过数清有多少种构成图的方式我们就可以求得表达式中每个图前的因子——对称因子。

下面逐一讨论每个图的对称因子

在具体讨论之前先讨论普遍的规则，四点Green含糊有四个外点（前面的图中有一个没有外线的图，这是个真空图，它对归一化的Green函数没有贡献。前面已经讨论过归一化的作用就是去掉了真空图的贡献）。ϕ^4理论则提供了一个四线的顶点，因此我们要讨论的是由(插图)

分别构成前面的图共有多少种途径。

（a）将四条外线与顶角相连可以这样做。先将一条外线与顶点上的一条线相连，一共有四种方式;再将剩下三条外线中的一条与顶点剩下的三条线中的一条相连，一共有3中方式；将两条剩下的外线中的一条与剩下的两条顶点线中的一条相连，共有两种方式；将最后一条外线与最后的顶点线相连，方式只有1种。这样得到图的方式共有$4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=4!$种，正是前面计算出的结果。

（b）要得到图。先将一条外线与另一条外线相连，一共有3种方式（$(1,2)$或$(1,3)$或$(1,4)$）得到；将顶点的一条腿与剩下的两条外线中的一条相连，得到，共有4×2种方式；将剩下的三条顶点腿中的一条与最后一条外线相连，得到，共有3种方式；将剩下的两条腿相连，共有1中方式，这样得到总共有$3\cdot 4\cdot 2\cdot 3\cdot 1=12\times 6$种方式，这正是前面计算出图的系数。

（c）构成先将一条外线与其他三条外线中的一条相连共有3种方式，得到；将剩下的两条外线相连，共有一种方式；再将定点中的一条腿与另外三条腿相连共有3种方式；将剩下的两条腿相连共有1种方式，这样共有$3\cdot 1\cdot 3\cdot 1=9$种。这个图在归一化了的Green函数中不出现是因为前面已经分析过归一化的作用就是去掉了这些真空图。

△相连图与不相连图

在得到的图中有些是相连图，有些是不相连图，如。可以看到，不相连图实质上对散射过程没有贡献。两粒子并未相互作用。中的作用只是粒子自作用，因为在考虑散射问题时我们将只考虑相连图的贡献。

△相连图的生成泛函

前面我们看到$Z[J]$是所有Green函数的生成泛函。由$Z[J]$生成的图中包含了大量的不相连图，而我们知道不相连图对散射过程是没有贡献。因此我们关心的是那些相连图（connected diagram），这里我们讨论相连图的生成泛函。

由量子力学的讨论我们知道相连图生成泛函$Z[J]$与全部Green函数的生成泛函$Z[J]$的关系为：

$$Z[J] = e^{iW[J]} \tag{34.65}$$

或

$$W[J] = \frac{1}{i}\ln Z[J] \tag{34.66}$$

下面我们由2−点Green函数和4−点Green函数来说明$W[J]$生成的确定地相连图。

34.0.5 2−点Green函数

对$W[J]$求2阶泛函导数

$$\begin{aligned}\left.\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\right|_{J=0} &= \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\left[\frac{1}{i}\frac{1}{Z}\frac{\delta Z}{\delta J(x_2)}\right] \\ &= \left[i\frac{1}{Z^2}\frac{\delta Z}{\delta J(x_1)}\frac{\delta Z}{\delta J(x_2)} + \frac{1}{i}\frac{1}{Z}\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\right]\Bigg|_{J=0}\end{aligned} \tag{34.67}$$

因为$Z[0]=1$（归一化）

$$\left.\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)}\right|_{J=0} = 0 \tag{34.68}$$

及

$$\left.\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)}\right|_{J=0} = 0 \quad \because Z[J] = \int D\phi e^{i\delta + \int J\phi d^4x} \quad \therefore \left.\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)}\right|_{J=0} \sim \int d^4x J\Big|_{J=0} \tag{34.69}$$

$$\begin{aligned}\therefore \left.\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\right|_{J=0} &= \frac{1}{i}\left.\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\right|_{J=0} \\ &= i\frac{1}{(i)^2}\left.\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\right|_{J=0} \\ &= i\tau(x_1, x_2)\end{aligned} \tag{34.70}$$

$\tau(x_1, x_2)$正是2−点Green函数，当然$\tau(x_1, x_2)$是相连图。

34.0.6 4−点Green函数

对$W[J]$求4阶泛函导数

$$\begin{aligned}\left.\frac{\delta^4 W[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\delta J(x_3)\delta J(x_4)}\right|_{J=0} &= \frac{\delta}{\delta J(x_3)}\frac{\delta}{\delta J(x_4)}\left[i\frac{1}{Z^2}\frac{\delta Z}{\delta J(x_1)}\frac{\delta Z}{\delta J(x_2)}+\frac{1}{i}\frac{1}{Z}\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\right]\Bigg|_{J=0} \\ &= \frac{\delta}{\delta J(x_4)}\left[\begin{array}{r} -2i\frac{1}{Z^3}\frac{\delta Z}{\delta J(x_1)}\frac{\delta Z}{\delta J(x_2)}\frac{\delta Z}{\delta J(x_3)}+i\frac{1}{Z^2}\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1)\delta J(x_3)}\frac{\delta Z}{\delta J(x_2)}+i\frac{1}{Z^2}\frac{\delta Z}{\delta J(x \\ +i\frac{1}{Z^2}\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\frac{\delta Z}{\delta J(x_3)}+\frac{1}{i}\frac{1}{Z}\frac{\delta^3 Z}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\delta J(x_3)}\end{array}\right.\end{aligned} \tag{34.71}$$

下面求导中将直接扔掉$J=0$时的项

$$\begin{aligned}&\left.\frac{\delta^4 W[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\delta J(x_3)\delta J(x_4)}\right|_{J=0} \\ &= \left[i\frac{1}{Z^2}\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1)\delta J(x_3)}\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_2)\delta J(x_4)}+i\frac{1}{Z^2}\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1)\delta J(x_4)}\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_2)\delta J(x_3)}+i\frac{1}{Z^2}\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_3)\delta J(x\right. \\ &= i\left[\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_3)\delta J(x_4)}+\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1)\delta J(x_3)}\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_2)\delta J(x_4)}+\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1)\delta J(x_4)}\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_2)\delta J(x_3)}-\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x}\right. \\ &= i\left[\tau(x_1,x_2)\tau(x_3,x_4)+\tau(x_1,x_3)\tau(x_2,x_4)+\tau(x_1,x_4)\tau(x_2,x_3)-\tau(x_1,x_2,x_3,x_4)\right]\end{aligned} \tag{34.72}$$

前面已经得到过2−点Green函数和4−点Green函数：（精确到g的一阶）

$$\tau(x_1,x_2)= \quad <\phi^4\text{2-点Green函数->} \tag{34.73}$$

$$\tau(x_1,x_2,x_3,x_4)= \quad <\phi^4\text{4-点Green函数->} \tag{34.74}$$

代到前面的结果中

$$\left.\frac{\delta^4 W[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\delta J(x_3)\delta J(x_4)}\right|_{J=0} =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

可见，4-点Green函数中只有相连图　。这就是说$W[J]$是相连图的生成泛函。

△不可约（irreducible）n-点Green函数（不相连图）

前面已经看到全部图的n-点Green函数$\tau(x_1\cdots x_n)$的生成函数是$Z[J]$。而W[J]是不相连图的生成泛函。据此我们定义只包含不相连图的不可约n-点Green函数。

全部图的n-点Green函数为：

$$\tau\left(x_1\cdots x_n\right)=\frac{1}{i^n}\left.\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\right|_{J=0} \tag{34.75}$$

定义不可约的n-点Green函数为：

$$\phi\left(x_1\cdots x_n\right)=\frac{1}{i^n}\left.\frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\right|_{J=0} \tag{34.76}$$

下面看一看τ和ϕ的区别，以4-点Green函数为例：

$$\begin{aligned}\tau\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=&\\ =&\quad <\phi^4\text{4-点Green函数->}\end{aligned} \tag{34.77}$$

而ϕ则为：

$$\phi\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)= \tag{34.78}$$

可见τ和ϕ的区别在于ϕ扔掉了τ中的所有不相连图。（这些不相连图对散射过程没有贡献）或者说$\phi\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)$是扔掉了所有2-点Green函数的$\tau\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)$：（$<\phi^4W[J]->$）

$$i\phi\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=\tau\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)-\tau\left(x_1,x_2\right)\tau\left(x_3,x_4\right)-\tau\left(x_1,x_3\right)\tau\left(x_2,x_4\right)-\tau\left(x_1,x_4\right)\tau\left(x_2,x_3\right) \tag{34.79}$$

其中$\tau\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)$是相连图，$-\tau\left(x_1,x_2\right)\tau\left(x_3,x_4\right)-\tau\left(x_1,x_3\right)\tau\left(x_2,x_4\right)-\tau\left(x_1,x_4\right)\tau\left(x_2,x_3\right)$是不相连图

对2-点Green函数我们有：

$$\tau\left(x_1,x_2\right)=i\phi\left(x_1,x_2\right)\qquad\text{（2-点Green函数都是相连图）} \tag{34.80}$$

这样：

$$\tau\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=i\phi\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)+\sum_p i\phi\left(x_i,xj\right)\phi\left(x_k,x_l\right) \tag{34.81}$$

其中$i,j,k,l=1,2,3,4$，$\sum\limits_p$取遍$1,2,3,4$的所有组合。

普遍地，我们可以写成：（用 表示可约，用 表示不可约）

n-点Green函数

（这是以6-点为例，还可写出更普遍的形式）

例：4-点Green函数

如果只考虑到g的一次方，则

34.0.7 自能函数（全传播子）

前面我们得到的结果都是精确到g的一次项。这里我们考虑精确到所有阶的结果。

由包括所有图的生成泛函$Z[J]$可以得到任意的n-点Green函数（这里我们用$G^{(n)}(x_1\cdots x_n)$代替$\tau(x_1\cdots x_n)$来表示n-点Green函数）

$$G^{(n)}(x_1\cdots x_n)=i\phi(x_1\cdots x_n)=\frac{1}{i^{n-1}}\left.\frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\right|_{J=0} \tag{34.82}$$

由前面计算的结果知ϕ^4理论中精确到g的一次方的全部图的4-点Green函数为：

$$G^{(4)}(x_1\cdots x_4)= \qquad （见<\phi^4W[J]->页） \tag{34.83}$$

而只包括相连图的Green函数为（$<\phi^4W[J]->$）

$$G_c^{(4)}(x_1\cdots x_4)=i\phi(x_1\cdots x_4)= \tag{34.84}$$

在这里我们将图分成相连图和不相连图两种。全Green函数$G^{(n)}(x_1\cdots x_n)$可由相连图的Green函数组成。下面我们对相连图进行更进一步的分类。引入单粒子不可约[1-particle irreducible(1PI)]图的概念。

考虑ϕ^4理论的全部相连的两点Green函数，这里我们将不写出每个图的对称因子。事实上一个自然的方法是将对称因子吸收到各个图的Feynman规则中。这样在画Feynman图时便不必在图中带着对称因子了。比如图的Feynman规则中就要加上$\frac{1}{2}$对称因子。所有阶的相连2-点Green函数为：

$$G_c^{(2)}(x,y)=$$
$$\equiv$$

可见全部的相连图的2-点Green函数实质上就是一个考虑了各阶修正的传播子，被称为完全的（complate）或穿衣（缀饰的dressed）传播子。表示成：

$$G_c^{(2)}(x,y)=$$

下面我们仔细分析这些图

首先，所有的这些图都有两条“腿”，这两条腿是外线。它们对所有的图都是这样的。它们的存在并不能使这些图得以区分（或说进一步分类），因此我们定义“截腿的图”（truncated graph）：

在这些图中可以看到，它们仍可以被分成两类图，一类图在切断一条内线后就被分成两个图。如

另一类图则做不到这点。切断一条内线不能得到两个图。我们将前一类图称为单粒子可约图（1-particle reducible graph），后一类图称为单粒子不可约图（1-particle irreducible graph），简记1PI。

这两类图对自能都有贡献，它们会修正传播子中的质量，将原来的“裸质量”换成“物理质量”。

单粒子可约图可以由单粒子不可约图直接得到。

下面我们先考虑单粒子不可约图，将所有的单粒子不可约图的和（它们并不是全部自能）

$$\frac{1}{i}\sum(p)=$$

称作正规自能（proper self-energy）

我们并不能真的求出这个和来，但如果我们假设这些正规自能是求出了的，则可以通过对全部可约图求和得到全部的自能。

下面求全传播子（2-点Green函数）

前面已经分析过，单粒子可约图可以由单粒子不可约图组合得到。假设我们已经得到了正规自能$\frac{1}{i}\sum(p)$则，全传播子可以表示成所有单粒子可约图的和。而单粒子可约图则是由单粒子不可约图组合成的。

在动量空间中，裸传播子为：

$$G_0(p)=\frac{i}{p^2-m^2}$$

这样在动量空间中全传播子为：

$$\begin{aligned}
G_c^{(2)}(p)=&\\
&=G_0(p)+G_0(p)(\frac{1}{i}\sum(p))G_0(p)+G_0(p)(\frac{1}{i}\sum(p))G_0(p)(\frac{1}{i}\sum(p))G_0(p)+\cdots\\
&=G_0\left(1+\frac{1}{i}\sum G_0+\left(\frac{1}{i}\sum\right)G_0\left(\frac{1}{i}\sum\right)G_0\right)\\
&=G_0\frac{1}{1-\left(\frac{1}{i}\sum\right)G_0}\\
&=\frac{1}{G_0^{-1}-\frac{1}{i}\sum}\\
&=\frac{1}{\frac{1}{i}\left(p^2-m^2\right)-\frac{1}{i}\sum(p)}\\
&=\frac{i}{p^2-m^2-\sum(p)}
\end{aligned}\tag{34.85}$$

结果中m是裸质量，我们定义物理质量

$$m_{phys}^2 = m^2 + \sum(p) \tag{34.86}$$

则传播子为：

$$G_c^{(2)}(p) = \frac{i}{p^2 - m_{phys}^2} \tag{34.87}$$

这个结果包含了所有的微扰项。裸质量m是无穷大的，正规自能也是无穷大的，但它们的和（或说差）则是有限的。这里我们定义为$\sum(p)$自能函数，它体现了传播子自能的贡献。

△传播子$G_c^{(2)}(p)$与裸传播子$G_0^{(2)}(p)$的关系：

$G_c^{(2)}(p)$与$G_0^{(2)}(p)$的关系可以很直接地得到

取 $G_c^{(2)}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 - \sum(p)}$的逆有

$$G_c^{(2)}(p)^{-1} = \frac{p^2 - m^2}{i} - \frac{1}{i}\sum(p)$$

而我们知道裸传播子的逆为：（$G_0(p) = \frac{i}{p^2 - m^2}$）

$$G_0^{-1}(p) = \frac{p^2 - m^2}{i}$$

$$\therefore G_c^{(2)}(p)^{-1} = G_0^{-1}(p) - \frac{1}{i}\sum(p)$$

可见全传播子的逆由两部分组成：裸传播子的逆和单粒子不可约图（1PI）的贡献$\sum(p)$由此可以看出单粒子不可约图的重要性。

34.0.8 顶角函数

前面我们定义了自能函数$\sum(p)$，它与全传播子（2-点Green函数）的关系为：

$$G_c^{(2)}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 - \sum(p)} \tag{34.88}$$

这样我们有（注：这个过程本质量在求逆）

$$G_c^{(2)}(p)\left[p^2 - m^2 - \sum(p)\right] = i \tag{34.89}$$

由此我们定义2-点顶角函数：

$$\Gamma^{(2)}(p) \equiv p^2 - m^2 - \sum(p) \tag{34.90}$$

这样有：

$$G_c^{(2)}(p)\Gamma^{(2)}(p) = i \tag{34.91}$$

对比前面关于$G_c^{(2)}(p)$逆的讨论，可以看出$\Gamma^{(2)}(p)$本质量是$G_c^{(2)}(p)$的逆（再乘上$\frac{1}{i}$）。它包括了裸传播子的逆和自能函数（正规自能）

这个结论是在2-点Green函数情况下得到的。下面考虑更普遍的顶角函数。

我们将顶角函数$\Gamma[\phi]$定义为相连图的生成泛函$W[J]$的Legendre变换：

$$W[J] = \Gamma[\phi] + \int d^4x J(x)\,\phi(x) \tag{34.92}$$

这里的$\Gamma[\phi]$便是顶角函数

$$\Gamma[\phi] = W[J] - \int d^4x J(x)\,\phi(x) \tag{34.93}$$

这样有

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \phi(x) \tag{34.94}$$

$$\frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x)} = -J(x) \tag{34.95}$$

下面由式计算2-点Green函数。不可约的2-点Green函数为：

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \left(\frac{1}{i}\right)^2 \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x)\,\delta J(y)} \\ &= \left(\frac{1}{i}\right)^2 \frac{\delta}{\delta J(y)} \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \\ &= \left(\frac{1}{i}\right)^2 \frac{\delta}{\delta J(y)} \phi(x) \\ &= -\frac{\delta \phi(x)}{\delta J(y)} \end{aligned} \tag{34.96}$$

即

$$G(x,y) = -\frac{\delta \phi(x)}{\delta J(y)} \tag{34.97}$$

与$G(x,y)$对应地我们定义另一个函数

$$\begin{aligned} \Gamma(x,y) &= \frac{\delta^2 \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x)\,\delta \phi(y)} \\ &= -\frac{\delta J(x)}{\delta \phi(y)} \end{aligned} \tag{34.98}$$

即

$$\Gamma(x,y)=-\frac{\delta J(x)}{\delta\phi(y)} \tag{34.99}$$

很明显$G(x,y)$和$\Gamma(x,y)$是互逆的。这一点可以直接验证

$$\begin{aligned}\int d^4zG(x,z)\Gamma(z,y)&=-\int d^4z\frac{\delta^2W[J]}{\delta J(x)\delta J(z)}\frac{\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta\phi(z)\delta\phi(y)}\\&=\int d^4z\frac{\delta\phi(x)}{\delta J(z)}\frac{\delta J(z)}{\delta\phi(y)}\\&=\frac{\delta\phi(x)}{\delta\phi(y)}\\&=\delta^4(x,y)\end{aligned} \tag{34.100}$$

即

$$\int d^4zG(x,z)\Gamma(z,y)=\delta^4(x,y) \tag{34.101}$$

这里得到的是两点函数$\Gamma(x,y)$,可以看出$\Gamma[\phi]$是顶角泛函$\Gamma^{(n)}(p)$的生成函数。就求$W[J]$是$G_c^{(n)}(p)$的生成泛函一样。

下面考虑三点顶角函数的生成泛函

由式可以看出

$$-\int d^4z\frac{\delta^2W[J]}{\delta J(x)\delta J(z)}\frac{\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta\phi(z)\delta\phi(z')}=\delta^4(x,z')\qquad(\text{将前面的}y\text{变成了}z') \tag{34.102}$$

对这个方程再求一次导数（这样做并不奇怪，因为显然要生成3点函数就需要求到三阶函数），即求

$$\frac{\delta}{\delta J(x'')}$$

还可以变换一下：

$$\frac{\delta}{\delta J(x'')}=\int d^4z''\frac{\delta\phi(z'')}{\delta J(x'')}\frac{\delta}{\delta\phi(z'')}=-\int d^4z''G(x'',z'')\frac{\delta}{\delta\phi(z'')}$$

将$\frac{\delta}{\delta J(x'')}$作用在式两边

$$\frac{\delta}{\delta J(x'')}\left[\int d^4z\frac{\delta^2W[J]}{\delta J(x)\delta J(z)}\frac{\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta\phi(z)\delta\phi(z')}\right]=0 \tag{34.103}$$

$$\int d^4z\frac{\delta^3W[J]}{\delta J(x'')\delta J(x)\delta J(z)}\frac{\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta\phi(z)\delta\phi(z')}+\int d^4z\frac{\delta^2W[J]}{\delta J(x)\delta J(z)}\frac{\delta}{\delta J(x'')}\frac{\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta\phi(z)\delta\phi(z')}=0 \tag{34.104}$$

其中$\frac{\delta}{\delta J(x'')}=-\int d^4z''G\left(x'',z''\right)\frac{\delta}{\delta\phi(z'')}$

$$\int d^4z\frac{\delta^3W[J]}{\delta J\left(x''\right)\delta J\left(x\right)\delta J\left(z\right)}\frac{\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta\phi\left(z\right)\delta\phi\left(z'\right)}-\int d^4zd^4z''\frac{\delta^2W[J]}{\delta J\left(x\right)\delta J\left(z\right)}G\left(x'',z''\right)\frac{\delta^3\Gamma[\phi]}{\delta\phi\left(z\right)\delta\phi\left(z'\right)\delta\phi\left(z''\right)}=0 \tag{34.105}$$

其中$\frac{\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta\phi(z)\delta\phi(z')}=\Gamma\left(z,z'\right)\frac{\delta^2W[J]}{\delta J(x)\delta J(z)}=-G\left(x,z\right)$

$$\int d^4z\frac{\delta^3W[J]}{\delta J\left(x''\right)\delta J\left(x\right)\delta J\left(z\right)}\Gamma\left(z,z'\right)+\int d^4zd^4z''G\left(x,z\right)G\left(x'',z''\right)\frac{\delta^3\Gamma[\phi]}{\delta\phi\left(z\right)\delta\phi\left(z'\right)\delta\phi\left(z''\right)}=0 \tag{34.106}$$

两边同乘$G\left(x',z'\right)$，再对z'积分，即求$\int d^4z'$

$$\int d^4z\frac{\delta^3W[J]}{\delta J\left(x''\right)\delta J\left(x\right)\delta J\left(z\right)}\int d^4z'G\left(x',z'\right)\Gamma\left(z,z'\right)+\int d^4zd^4z'd^4z''G\left(x,z\right)G\left(x',z'\right)G\left(x'',z''\right)\frac{\delta^3\Gamma[}{\delta\phi\left(z\right)\delta\phi\left(z\right.} \tag{34.107}$$

其中$\int d^4z'G\left(x',z'\right)\Gamma\left(z,z'\right)=\delta\left(x'-z\right)$

$$\frac{\delta^3W[J]}{\delta J\left(x''\right)\delta J\left(x\right)\delta J\left(x'\right)}=-\int d^4zd^4z'd^4z''G\left(x,z\right)G\left(x',z'\right)G\left(x'',z''\right)\frac{\delta^3\Gamma[\phi]}{\delta\phi\left(z\right)\delta\phi\left(z'\right)\delta\phi\left(z''\right)} \tag{34.108}$$

由此可以看出在场论中$W[J]$和$\Gamma[\phi]$的关系。（从数学上讲$W[J]$和$\Gamma[\phi]$是Legendre变换的关系）式在左边是相连图的3-点函数。（见<$\phi^4W[J]->$）即

$$\frac{\delta^3W[J]}{\delta J\left(x\right)\delta J\left(x'\right)\delta J\left(x''\right)}= \tag{34.109}$$

式右边的$\frac{\delta^3W[J]}{\delta J(x)\delta J(y)\delta J(z)}$是单粒子不可约（1PI）3-点顶角函数，而$G\left(x,y\right)$则是传播子（2-点Green函数）于是，右边用图表示就是

$$-\int d^4zd^4z'd^4z''G\left(x,y\right)G\left(x',z'\right)G\left(x'',z''\right)\frac{\delta^3\Gamma[\phi]}{\delta\phi\left(z\right)\delta\phi\left(z'\right)\delta\phi(z')}= \tag{34.110}$$

其中 是单粒子不可约（1PI）3-点顶角函数

是全传播子

这样便有

这个关系方程深刻，但$W[J]$和$\Gamma[\phi]$间存在某种关系并不奇怪，因为$W[J]$和$\Gamma[\phi]$是Legendre变换的关系。这样的关系本质上也是关系的体现。

我们知道Legendre变换对新老变量和新老函数是对称的（见《理论力学》讲义），因此我们也可以得到一套$W[J]$和$\Gamma[\phi]$交换位置的关系。

在式两边也同乘$\Gamma(x,y)\Gamma(x',y')\Gamma(x'',y'')$并做积分$\int d^4xd^{4x'}d^4x''$在利用式，可得：

$$\frac{\delta^3\Gamma[\phi]}{\delta\phi(y)\delta\phi(y')\delta\phi(y'')}=-\int dxdx'dx''\Gamma(x,y)\Gamma\left(x',y'\right)\Gamma\left(x'',y''\right)\frac{\delta^3W[J]}{\delta J(x)\delta J(x')\delta J(x'')}$$

用图表示就是：

以上是三-点函数的情况。显然再求一次导数就可以得到4-点函数的情况。

由三-点函数的结果可以看出，这两个图是完全对称的，只需将Γ换成W，W换成Γ就可以得到另一个图。4-点函数我们有：

其中右边第一个图是一个单粒子不可约图（1PI），而其他三个则不是1PI。

这里和可分别代表Γ或W，从而得到两套对称的结果。

34.0.9 Legendre变换

普遍地讲，当我们用一组坐标代替了另一组坐标的时候，我们就施行了一次坐标变换，但是一般地讲，坐标变换很可能会使我们丢失信息。比如，如果我们的函数是$f=f(x,y)$，则变换$\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$或$\begin{cases}x=z\\y=z\end{cases}$便会使我们丢失许多$f(x,y)$的信息，或者说由$f'=f'(0,1)$或$f'=f'(z)$中我们不能重构出$f(x,y)$来，而另一些变换如$\begin{cases}x=ax'+by'\\y=cx'+dy'\end{cases}\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)$，则不会丢失信息。此时由得到的新函数$f'=f'(x',y')$中可以重构出原函数$f(x,y)$来。这个例子其实就是普通的线性变换。

在实际问题中我们更关注不丢失信息的变换。考虑这样一个问题（以单变量为例），函数$f=f(x)$

$$f=f(x) \qquad (（1）)$$

通过坐标变换

$$u=\frac{df}{dx} \qquad (（2）)$$

怎样才能不丢失信息。

这里的坐标变换不是我们熟悉是那类变换，新坐标是通过一个导数得到的（我们知道求导过程本身一般会丢失信息）。我们来设想一下，如果由（2）式给的变换关系直接得到x与u的关系，再代回到$f(x)$中，假设这个关系是$x=x(u)$，这样得到的函数便是$f(x(u))$，我们的问题是由$f(x(u))$能否重构出$f(x)$来。这个问题的关

键是变换$u=\frac{df}{dx}$的逆变换是否唯一。显然由$u=\frac{df}{dx}$解出x需要通过积分。而积分将差一个积分常数。（这是因为$\frac{df}{dx}=\frac{d(f+count)}{dx}$）这样，（如图），如果$f=f(x)$的函数图象是

而由于由$u=\frac{df}{dx}$反解x时差一常数，重构后的函数不唯一确定（如图）

因此由$f(x(u))$作为变换后的函数肯定要损失信息，怎样构造新函数才能不损失信息呢？由图中可以看出$\frac{df}{dx}$只是斜率，只给斜率是不能唯一定出函数的。要唯一确定函数还要给出截距，如图

如图，要唯一确定f，要知道每一点的斜率$k(x)=\frac{df}{dx}$外，还要知道该点（x）切线在x轴上的斜率$g(x)$（$g(x)$是f上x点切线在x轴上的截距）

斜率为k截距为g的切线方程为

$$f=kx+g$$

其中斜率$k(x)=\frac{df}{dx}=u$

或

$$f=ux+g$$

这样有：

$$g=f-ux \qquad ((\Delta))$$

显然对不同的点x，函数$f=f(x)$都可由新函数g来构造（如图）

(Δ)式就是一个变量的Legendre变换

多变量的情况是自然的推广

这个结果扩广到泛函情况就是

$$\Gamma[J]=W[J]-\int J\phi \qquad \text{其中}\phi=\frac{\delta W[J]}{\delta J} \tag{34.111}$$

△热力学及统计力学中的Legendre变换

在热力学中，一个重要的特征量是系统的内能

$$U=U(S,V) \tag{34.112}$$

它是熵S和体积V的函数。但是熵是一个广延量（extensive quantity），是很难测量的。我们希望换一个容易测量的量来处理。这时便可以应用Legendre变换，这

里我们要将熵S换成另一个变量而视体积V为参数，在变换中不变。按照Legendre变换的方式我们取新变量为：

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V \tag{34.113}$$

其中，T为温度的原因是$dU = TdS - pdV$而$dU = \frac{\partial U}{\partial S}dS - \frac{\partial U}{\partial V}dV$

我们知道在热力学中这样定义的变量T其实就是温度，温度是一个非常容易测量的强度量（intensive quantity）。按照Legendre变换代替内能U我们得到的新函数（当然包含了内能U的全部信息）为：

$$F = U - TS \tag{34.114}$$

这里$F(T, V)$是系统的自由能。

第三十五章　顶角修正(待补充)

顶角

$$\Gamma^{\mu}=\gamma^{\mu}+\delta\Gamma^{\mu} \tag{35.1}$$

$$\begin{aligned}\delta\Gamma^{\mu}(p^{'},p)&=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{-ig_{\nu\rho}}{(k-p)^2+i\epsilon}\bar{u}(p^{'})(-ie\gamma^{\nu})\frac{i(k^{'}+m)}{k^{'2}-m^2+i\epsilon}\gamma^{\nu}\frac{i(k+m)}{k^2-m^2+i\epsilon}(-ie\gamma^{\rho})u(p)\\&=-ie^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\bar{u}(p^{'})\gamma^{\nu}(k^{'}+m)\gamma^{\mu}(k+m)\gamma_{\nu}u(p)}{[(k-p)^2+i\epsilon][k^{'2}-m^2+i\epsilon][k^2-m^2+i\epsilon]}\end{aligned} \tag{35.2}$$

其中

$$\gamma^{\nu}(k^{'}+m)\gamma^{\mu}(k+m)\gamma_{\nu}=\gamma^{\nu}k^{'}\gamma^{\mu}k\gamma_{\nu}+m\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}k\gamma_{\nu}+m\gamma^{\nu}k^{'}\gamma^{\mu}\gamma_{\nu}+m^2\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\gamma_{\nu} \tag{35.3}$$

以及

$$\begin{aligned}\gamma^{\lambda}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma_{\lambda}&=-2\gamma^{\rho}\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\\\gamma^{\lambda}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma_{\lambda}&=4g^{\mu\nu}\\\gamma^{\lambda}\gamma^{\mu}\gamma_{\lambda}&=-2\gamma^{\mu}\\&=-2[k\gamma^{\mu}k^{'}-2mk^{\mu}-2mk^{'\mu}+m^2\gamma^{\mu}]\\&=-2[k\gamma^{\mu}k^{'}+m^2\gamma^{\mu}-2m(k^{\mu}+k^{'\mu})]\end{aligned} \tag{35.4}$$

$$\delta\Gamma^{\mu}(p^{'},p)=2ie^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\bar{u}(p^{'})[k\gamma^{\mu}k^{'}+m^2\gamma^{\mu}-2m(k^{\mu}+k^{'\mu})]u(p)}{[(k-p)^2+i\epsilon][k^{'2}-m^2+i\epsilon][k^2-m^2+i\epsilon]} \tag{35.5}$$

先处理分母，应用公式：

$$\begin{aligned}\frac{1}{A_1A_2\cdots A_n}&=\int_0^1dx_1\cdots dx_n\delta(\sum x_i-1)\frac{(n-1)!}{[x_1A_1+x_2A_2+\cdots+x_nA_n]}\\&=\int_0^1dx_1\cdots dx_n\delta(\sum x_i-1)\frac{(n-1)!}{D^n},\end{aligned}$$

其中：$D = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n$。

$$\begin{aligned}\frac{1}{[(k-p)^2+i\epsilon][k'^2-m^2+i\epsilon][k^2-m^2+i\epsilon]} &= \int dxdydz\delta(x+y+z-1)\frac{(3-1)!}{D^3} \\ &= \int dxdydz\delta(x+y+z-1)\frac{2}{D^3} \quad (35.6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D &\equiv z[(k-p)^2+i\epsilon]+y[k'^2-m^2+i\epsilon]+x[k^2-m^2+i\epsilon] \\ &= z(k-p)^2+y(k'^2-m^2)+x(k^2-m^2)+(z+y+x)i\epsilon\delta - \text{函数}\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}k' &= k+q\overset{\|}{1} \\ &= z(k^2-2k\cdot p+p^2)+y(k^2+2k\cdot q+q^2-m^2)+x(k^2-m^2)+i\epsilon \\ &= (z+y+x)k^2+2k\cdot(-zp+yq)+zp^2+yq^2-ym^2-xm^2+i\epsilon \\ &\overset{\|}{1}\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}&\delta(x+y+z-1) \\ &= k^2+2k\cdot(yq-zp)+yq^2+zp^2-(x+y)m^2+i\epsilon \\ &\because x+y+z=1 \therefore x+y=1-z \\ &= k^2+2k\cdot(yq-zp)+yq^2+zp^2-(1-z)m^2+i\epsilon\end{aligned}$$

$$= k^2 + 2k \cdot (yq - zp) + (yq - zp)^2 - (yq - zp)^2 + yq^2 + zp^2 - (1 - z)m^2 + i\epsilon$$

$$= (k + yq - zp)^2 - y^2q^2 + 2yzqp - z^2p^2 + yq^2 + zp^2 - (1 - z)m^2 + i\epsilon$$

令$\ell \equiv k + yq - zp$动量项

$$= \ell^2 - y^2q^2 + 2yzqp - z^2p^2 + yq^2 + zp^2 - (1 - z)m^2 + i\epsilon$$

$$\because p^{'} = p + qp^{'2} = p^2 = m^2$$

$$\therefore (p + q)^2 = p^2 + 2p \cdot q + q^2$$

$$= m^2 + 2p \cdot q + q^2 = m^2$$

$$\therefore 2p \cdot q + q^2 = 0$$

$$q^2 = -2p \cdot q$$

$$= \ell^2 - [y^2q^2 - 2yzqp + z^2p^2 - yq^2 - zp^2 + (1 - z)m^2] + i\epsilon$$

$$= \ell^2 - [y(y - 1)q^2 - 2yzqp + z(z - 1)p^2 + (1 - z)m^2] + i\epsilon, p^2 = m^2$$

$$= \ell^2 - [-y(1 - y)q^2 - 2yzqp - z(1 - z)p^2 + (1 - z)m^2] + i\epsilon$$

$$= \ell^2 - [-y(1 - y)q^2 - 2yzqp - z(1 - z)p^2 + (1 - z)m^2] + i\epsilon$$

$$= \ell^2 - [-y(1 - y)q^2 - 2yzqp + (1 - z)m^2] + i\epsilon$$

$$= \ell^2 - [-y(1 - y)q^2 + yzq^2 + (1 - z)m^2] + i\epsilon$$

$$= \ell^2 - [-y(1 - y - z)q^2 + (1 - z)m^2] + i\epsilon$$

$$= \ell^2 - [-xyq^2 + (1 - z)m^2] + i\epsilon$$

令 $\triangle \equiv -xyq^2 + (1 - z)m^2$质量项只有$q, m$

$$= \ell^2 - \triangle + i\epsilon$$

$$\therefore D = \ell^2 - \triangle + i\epsilon \therefore \triangle > 0$$

由于$q^2 < 0 \therefore \triangle > 0$。因此$\triangle$项可看作是一个有效的质量项。

下面处理分子：

$$\bar{u}(p^{'})[k\gamma^{\mu}k^{'}+m^2\gamma^{\mu}-2m(k^{\mu}+k^{'\mu})]u(p)$$
$$=\bar{u}(p^{'})\{(\ell-yq+zp)\gamma^{\mu}(\ell-yq+zp+q)+m^2\gamma^{\mu}-2m[2(\ell^{\mu}-yq^{\mu}+zp^{\mu})+q^{\mu}]\}u(p)$$
$$kk^{'}=k+qk+k^{'}=2k+q$$

最终要对$d\ell$积分，这样便会用到关系：

$$\int\frac{d^4\ell}{(2\pi)^4}\frac{\ell^{\mu}}{D^3}=0，D是\ell的偶函数$$
$$\int\frac{d^4\ell}{(2\pi)^4}\frac{\ell^{\mu}\ell^{v}}{D^3}=\int\frac{d^4\ell}{(2\pi)^4}\frac{\frac{1}{4}g^{\mu\nu}\ell^2}{D^3}(两边同乘g_{\mu\nu}，则很容易检证)$$
$$=\bar{u}(p^{'})\{(\ell-yq+zp)\gamma^{\mu}(\ell+(1-y)q+zp)+m^2\gamma^{\mu}-2m[2\ell^{\mu}+(1-2y)q^{\mu}+2zp^{\mu})+q^{\mu}]\}u(p$$
$$=\bar{u}(p^{'})\{\ell\gamma^{\mu}\ell+(-yq+zp)\gamma^{\mu}[(1-y)q+zp]+m^2\gamma^{\mu}-2m[(1-2y)q^{\mu}+2zp^{\mu}]\}u(p)$$

其中：$\ell\gamma^{\mu}\ell=\gamma^{\alpha}\gamma^{\mu}\gamma^{\beta}\ell_{\alpha}\ell_{\beta}$
$$=\gamma^{\alpha}(2g^{\mu\beta}-\gamma^{\beta}\gamma^{\mu})\ell_{\alpha}\ell_{\beta}$$
$$=2\ell\ell^{\mu}-\ell\ell\gamma^{\mu}$$
$$=2\ell^{\nu}\ell^{\mu}\gamma_{\nu}-\ell^2\gamma^{\mu}$$
对ℓ积后 $\rightarrow 2\frac{1}{4}g^{\nu\mu}\ell^2\gamma_{\nu}-\ell^2\gamma^{\mu}$
$$=\frac{1}{2}\ell^2\gamma^{\mu}-\ell^2\gamma^{\mu}$$
$$=-\frac{1}{2}\ell^2\gamma^{\mu}$$

另一种推导：$\ell\gamma^{\mu}\ell=\gamma^{\alpha}\gamma^{\mu}\gamma^{\beta}\ell_{\alpha}\ell_{\beta}$
$$\rightarrow\gamma^{\alpha}\gamma^{\mu}\gamma^{\beta}\frac{1}{4}g_{\alpha\beta}\ell^2$$
$$=\gamma^{\alpha}\gamma^{\mu}\gamma_{\alpha}\frac{1}{4}\ell^2$$
$$=-2\gamma^{\mu}\frac{1}{4}\ell^2$$
$$=-\frac{1}{2}\ell^2\gamma^{\mu}$$

$\rightarrow\bar{u}(p^{'})[-\frac{1}{2}\ell^2\gamma^{\mu}+(-yq+zp)\gamma^{\mu}((1-y)q+zp)+m^2\gamma^{\mu}-2m((1-2y)q^{\mu}+2zp^{\mu})]u(p)$

其中：$\bar{u}(p^{'})[(-yq+zp)\gamma^{\mu}((1-y)q+zp)]u(p)$
$$=\bar{u}(p^{'})[-yq\gamma^{\mu}(1-y)q+zp\gamma^{\mu}(1-y)q-yq\gamma^{\mu}zp+zp\gamma^{\mu}zp]u(p)$$
$$=\bar{u}(p^{'})[-y(1-y)q\gamma^{\mu}q+z(1-y)p\gamma^{\mu}q-yzq\gamma^{\mu}p+z^2p\gamma^{\mu}p]u(p)$$

$$
\begin{aligned}
pu(p) &= mu(p) \\
\bar{u}(p^{'})p^{'} &= \bar{u}(p^{'})mq = p^{'} - p \\
&\therefore \bar{u}(p^{'})qu(p) = \bar{u}(p^{'})(p^{'} - p)u(p) \\
&= \bar{u}(p^{'})(m - m)u(p) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

于是其中：$\bar{u}(p^{'})q\gamma^{\mu}qu(p) = \bar{u}(p^{'})q(2q^{\mu} - q\gamma^{\mu})u(p)$

$$
\begin{aligned}
&= 2q^{\mu}\bar{u}(p^{'})qu(p) - q^2\bar{u}(p^{'})\gamma^{\mu}u(p) \\
&= -q^2\bar{u}(p^{'})\gamma^{\mu}u(p)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{u}(p^{'})p\gamma^{\mu}pu(p) &= m\bar{u}(p^{'})q\gamma^{\mu}u(p) \\
&= m\bar{u}(p^{'})(2p^{\mu} - \gamma^{\mu}p)u(p) \\
&= 2mp^{\mu}\bar{u}(p^{'})u(p) - m^2\bar{u}(p^{'})\gamma^{\mu}u(p)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{u}(p^{'})q\gamma^{\mu}pu(p) &= \bar{u}(p^{'})(p^{'} - p)\gamma^{\mu}pu(p) \\
&= \bar{u}(p^{'})p^{'}\gamma^{\mu}pu(p) - \bar{u}(p^{'})p\gamma^{\mu}pu(p) \\
&= m^2\bar{u}(p^{'})\gamma^{\mu}u(p) - 2mp^{\mu}\bar{u}(p^{'})u(p) + m^2\bar{u}(p^{'})\gamma^{\mu}u(p) \\
&= -2mp^{\mu}\bar{u}(p^{'})u(p) + 2m^2\bar{u}(p^{'})\gamma^{\mu}u(p)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{u}(p^{'})p\gamma^{\mu}qu(p) &= \bar{u}(p^{'})(p^{'} - q)\gamma^{\mu}qu(p) \\
&= \bar{u}(p^{'})p^{'}\gamma^{\mu}qu(p) - \bar{u}(p^{'})q\gamma^{\mu}qu(p) \\
&= m\bar{u}(p^{'})\gamma^{\mu}qu(p) + q^2\bar{u}(p^{'})\gamma^{\mu}u(p) \\
&= m\bar{u}(p^{'})\gamma^{\mu}(p^{'} - p)u(p) + q^2\bar{u}(p^{'})\gamma^{\mu}u(p) \\
&= m\bar{u}(p^{'})\gamma^{\mu}p^{'}u(p) - m^2\bar{u}(p^{'})\gamma^{\mu}u(p) + q^2\bar{u}(p^{'})\gamma^{\mu}u(p) \\
&= 2mp^{'\mu}\bar{u}(p^{'})u(p) - m^2\bar{u}(p^{'})\gamma^{\mu}u(p) + (q^2 - m^2)\bar{u}(p^{'})\gamma^{\mu}u(p) \\
&= 2mp^{'\mu}\bar{u}(p^{'})u(p) + (q^2 - m^2)\bar{u}(p^{'})\gamma^{\mu}u(p)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \bar{u}\left(p^{'}\right)\left[\begin{array}{c} -y\left(1-y\right)\left(-q^2\gamma^u\right)+z\left(1-y\right)\left(2mp^{'u}+\left(q^2-2m^2\right)\gamma^u\right) \\ -yz\left(-2mp^u+2m^2\gamma^u\right)+z^2\left(2mp^u-m^2\gamma^u\right)\end{array}\right]u\left(p\right) \\
&= \bar{u}\left(p^{'}\right)\left[\begin{array}{c} y\left(1-y\right)q^2\gamma^u+z\left(1-y\right)2mp^{'u}+z\left(1-y\right)\left(q^2-2m^2\right)\gamma^u \\ +yz2mp^u-2m^2yz\gamma^u+2mz^2p^u-m^2z^2\gamma^u\end{array}\right]u\left(p\right) \\
&= \bar{u}\left(p^{'}\right)\left\{\begin{array}{c} \left[y\left(1-y\right)q^2+z\left(1-y\right)\left(q^2-2m^2\right)-2m^2yz-m^2z^2\right]\gamma^u \\ +\left[z\left(1-y\right)2mp^{'u}+yz2mp^u+2mz^2p^u\right]\end{array}\right\}u\left(p\right) \\
&= \bar{u}\left(p^{'}\right)\left\{\begin{array}{c} \left[y\left(1-y\right)q^2+z\left(1-y\right)q^2-2\dot{m}^2z\left(1-y\right)-2m^2yz-m^2z^2\right]\gamma^u \\ +\left[2mzp^{'u}-2myzp^{'u}+2myzp^u+2mz^2p^u\right]\end{array}\right\}u\left(p\right) \\
&= \bar{u}\left(p^{'}\right)\left\{\begin{array}{c} \left[\left(y+z\right)\left(1-y\right)q^2-2m^2z+2m^2yz-2m^2yz-m^2z^2\right]\gamma^u \\ +\left[2mzp^{'u}+2mz^2p^u+2myz\left(p^u-p^{'u}\right)\right]\end{array}\right\}u\left(p\right) \\
&= \bar{u}\left(p^{'}\right)\left\{\left[\left(1-x\right)\left(1-y\right)q^2-m^2z\left(z+2\right)\right]\gamma^u+\left[2mzp^{'u}+2mz^2p^u+2myz\left(p^u-p^{'u}\right)\right]\right\}u\left(p\right) \\
&= \bar{u}\left(p^{'}\right)\left\{\left[\begin{array}{c} -\frac{1}{2}l^2\gamma^u+\left[\left(1-x\right)\left(1-y\right)q^2-m^2z\left(z+2\right)\right]\gamma^u+\left[2mzp^{'u}+2mz^2p^u+2myz\left(p^u-p^{'u}\right)\right] \\ +m^2\gamma^u-2m\left(1-2y\right)q^u-4mzp^u\end{array}\right]\right\} \\
&= \bar{u}\left(p^{'}\right)\left\{\left[\begin{array}{c} \left[-\frac{1}{2}l^2+\left(1-x\right)\left(1-y\right)q^2-m^2z\left(z+2\right)+m^2\right]\gamma^u+\left[2mz^2+2myz-4mz\right]p^u \\ +\left(2mz-2myz\right)p^{'u}-2m\left(1-2y\right)q^u\end{array}\right]\right\}u\left(p\right)
\end{aligned}
$$

顶角-7

$$
\begin{aligned}
&= \bar{u}\left(p^{'}\right)\left\{\left[\begin{array}{c} \gamma^u\left[-\frac{1}{2}l^2+\left(1-x\right)\left(1-y\right)q^2+\left(1-2z-z^2\right)m^2\right]+2mz\left[z+y-2\right]p^u \\ +2mz\left(1-y\right)p^{'u}-2m\left(1-2y\right)q^u\end{array}\right]\right\}u\left(p\right) \\
&= \bar{u}\left(p^{'}\right)\left\{\left[\begin{array}{c} \gamma^u\left[-\frac{1}{2}l^2+\left(1-x\right)\left(1-y\right)q^2+\left(1-2z-z^2\right)m^2\right]+2mz\left[z+y-2\right]p^u \\ +2mz\left(1-y\right)\left(p^u+q^u\right)-2m\left(1-2y\right)q^u\end{array}\right]\right\}u\left(p\right)
\end{aligned}
$$

$p^{'}=p+q$

其中

$$\begin{aligned}
&2mz\left[z+y-2\right]p^u+2mz\left(1-y\right)\left(p^u+q^u\right)-2m\left(1-2y\right)q^u\\
&=2mz\left[z+y-2\right]p^u+2mz\left(1-y\right)p^u+2mz\left(1-y\right)q^u-2m\left(1-2y\right)q^u\\
&=2mz\left(z-1\right)p^u+2mz\left(1-y\right)q^u-2m\left(1-2y\right)q^u
\end{aligned}$$

因为$p^{'}+p=p+q+p=2p+q$

$$\begin{aligned}
&=mz\left(z-1\right)2p^u+mz\left(z-1\right)q^u-mz\left(z-1\right)q^u+2mz\left(1-y\right)q^u-2m\left(1-2y\right)q^u\\
&=mz\left(z-1\right)\left(2p^u+q^u\right)-m\left[z\left(z-1\right)-2\left(1-y\right)z+2\left(1-2y\right)\right]q^u\\
&=mz\left(z-1\right)\left(p^{'u}+p^u\right)+q^um\left[-z^2+z+2z\left(1-y\right)-2\left(1-2y\right)\right]\\
&=mz\left(z-1\right)\left(p^{'u}+p^u\right)+q^um\left[-z^2+z-2yz+2z-2\left(1-2y\right)\right]\\
&=mz\left(z-1\right)\left(p^{'u}+p^u\right)+q^um\left[-z^2+z\left(1-2y\right)+2z-2\left(1-2y\right)\right]\\
&=mz\left(z-1\right)\left(p^{'u}+p^u\right)+q^um\left[-z\left(z-2\right)+\left(z-2\right)\left(1-2y\right)\right]\\
&=mz\left(z-1\right)\left(p^{'u}+p^u\right)+q^um\left[\left(z-2\right)\left(1-2y-z\right)\right]\\
&=mz\left(z-1\right)\left(p^{'u}+p^u\right)+q^um\left(z-2\right)\left(1-y-z-y\right)
\end{aligned}$$

其中$1-y-z=x$

$$\begin{aligned}
&=mz\left(z-1\right)\left(p^{'u}+p^u\right)+q^um\left(z-2\right)\left(x-y\right)\\
&=\bar{u}\left(p^{'}\right)\left\{\begin{array}{c}\gamma^u\left[-\frac{1}{2}l^2+\left(1-x\right)\left(1-y\right)q^2+\left(1-2z-z^2\right)m^2\right]+\left(p^{'u}+p^u\right)mz\left(z-1\right)\\+q^um\left(z-2\right)\left(x-y\right)\end{array}\right\}u\left(p\right)
\end{aligned}$$

顶角-8

将已得到的分子、分母代回$\delta\Gamma^{\mu}$的表达式：$dk\rightarrow dl$

$$\delta\Gamma^{\mu}(p^{'},p)=2ie^2\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\int_0^1dxdydz\delta(x+y+z-1)\frac{2}{D^3}\bar{u}\left(p^{'}\right)\left[\begin{array}{l}\gamma^u(-\frac{1}{2}l^2+\left(1-x\right)\left(1-y\right)q^2+\left(1-2z-\right.\\+\left(p^{'u}+p^u\right)mz\left(z-1\right)+q^um\left(z-2\right)\end{array}\right.$$

其中，我们知$\int_0^1dxdy(x-y)=0$

$\therefore q^u$项为零

再由gozdon恒等式

$$\bar{u}\left(p^{'}\right)\gamma^{u}u\left(p\right)=\bar{u}\left(p^{'}\right)[\frac{p^{'u}+p^{u}}{2m}+\frac{i\sigma^{\mu\gamma}q^{\nu}}{2m}]u\left(p\right)$$
$$\bar{u}\left(p^{'}\right)\left(p^{'u}+p^{u}\right)u\left(p\right)=\bar{u}\left(p^{'}\right)[\gamma^{u}-\frac{i\sigma^{\mu\gamma}q^{\nu}}{2m}]u\left(p\right)\cdot 2m$$

$$\delta\Gamma^{\mu}(p^{'},p)=2ie^{2}\int\frac{d^{4}l}{(2\pi)^{4}}\int_{0}^{1}dxdydz\delta(x+y+z-1)\frac{2}{D^{3}}\bar{u}\left(p^{'}\right)\left\{\begin{array}{r}\gamma^{u}\left[-\frac{1}{2}l^{2}+(1-x)\left(1-y\right)q^{2}+\left(1-2z-\right.\right.\\ +\frac{i\sigma^{\mu\gamma}q^{\nu}}{2m}2m^{2}z(1-z\end{array}\right.$$
$$=2ie^{2}\int\frac{d^{4}l}{(2\pi)^{4}}\int_{0}^{1}dxdydz\delta(x+y+z-1)\frac{2}{D^{3}}\bar{u}\left(p^{'}\right)\left\{\begin{array}{r}\gamma^{u}\left[-\frac{1}{2}l^{2}+(1-x)\left(1-y\right)q^{2}+\left(1-4z+\right.\right.\\ +\frac{i\sigma^{\mu\gamma}q^{\nu}}{2m}2m^{2}z(1-z)\end{array}\right.$$

顶角-9

前面的计算是在闵氏空间中进行的，度归不是正交的。下面通过Wick旋转变换到欧式空间：

Wick旋转:

$$l^{0}\equiv il_{E}$$
$$\vec{l}\equiv\vec{l_{E}}$$
$$\therefore d^{4}l=id^{4}l_{E}$$

我们所考虑的积分分母部分形如

$$\frac{1}{D^{m}}=\frac{1}{(l^{2}-\triangle)^{m}}$$

这里先考虑积分：$l^{2}=l^{0^{2}}-\left|\vec{l}\right|^{2}=-l_{E}^{2}-\left|l_{E}\right|^{2}=-l_{E}^{2}$

$$\int\frac{d^{4}l}{(2\pi)^{4}}\frac{1}{(l^{2}-\triangle)^{m}}=i\int\frac{d^{4}l}{(2\pi)^{4}}\frac{1}{\left(-l_{E}^{2}-\triangle\right)^{m}}=\frac{i\left(-1\right)^{m}}{(2\pi)^{4}}\int d^{4}l_{E}\frac{1}{\left(l_{E}^{2}+\triangle\right)^{m}}=\frac{i\left(-1\right)^{m}}{(2\pi)^{4}}\int_{0}^{\infty}dl_{E}\frac{l_{E}^{3}}{\left(l_{E}^{2}+\triangle\right)^{m}}$$

四维空间球坐标

$$x=(r\sin\omega\sin\theta\cos\phi,r\sin\omega\sin\theta\sin\phi,r\sin\omega\cos\theta,r\cos\omega)$$
$$d^{4}x=r^{3}\sin^{3}\omega\sin\theta d\phi d\theta d\omega dr$$

由此可直接算出：

$$\int d\Omega_{4}=2\pi^{2}$$

顶角-10

下面处理积分：

$$\begin{aligned}\int_0^\infty dl_E \frac{l_E^3}{\left(l_E^2+\triangle\right)^m} &= \frac{1}{2}\int_0^\infty dl_E \frac{l_E^2}{\left(l_E^2+\triangle\right)^m} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\left(l_E^2+\triangle\right)^{-m+2}}{-m+2} - \frac{\triangle\left(l_E^2+\triangle\right)^{-m+1}}{-m+1}\right]\Bigg|_0^\infty \quad (m\neq -1,-2) \\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{\triangle^{-m+2}}{-m+2} - \frac{\triangle^{-m+2}}{-m+1}\right] \\ &= -\frac{\triangle^{-m+2}}{2}\left[\frac{1}{-m+2} - \frac{1}{-m+1}\right] \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\triangle^{m-2}}\frac{m-1-m+2}{(m-1)(m-2)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\triangle^{m-2}}\frac{1}{(m-1)(m-2)}\end{aligned}$$

这样可计算出：

$$\begin{aligned}\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{1}{(l^2-\triangle)^m} &= \frac{i(-1)^m}{(2\pi)^4}\cdot 2\pi^2\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\triangle^{m-2}}\frac{1}{(m-1)(m-2)} \\ &= \frac{i(-1)^m}{(4\pi)^4}\frac{1}{(m-1)(m-2)}\frac{1}{\triangle^{m-2}}\end{aligned}$$

下面还需计算积分：

$$\begin{aligned}\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{1}{(l^2-\triangle)^m} &= -i\int \frac{d^4l_E}{(2\pi)^4}\frac{l_E^2}{\left(-l_E^2-\triangle\right)^m} \\ &= -\frac{i(-1)^m}{(2\pi)^4}\int d^4l_E \frac{l_E^2}{\left(l_E^2+\triangle\right)^m} \\ &= \frac{i(-1)^{m-1}}{(2\pi)^4}\int d\Omega_4\int_0^\infty dl_E\frac{l_E^5}{\left(l_E^2+\triangle\right)^m} \\ &= \frac{i(-1)^{m-1}}{(2\pi)^4}\int d\Omega_4\frac{1}{2}\int_0^\infty dl_E^2\frac{l_E^4}{\left(l_E^2+\triangle\right)^m} \\ &= \frac{i(-1)^{m-1}}{(2\pi)^4}\cdot 2\pi^2\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{\left(l_E^2+\triangle\right)^{-m+3}}{-m+3} - 2\triangle\frac{\left(l_E^2+\triangle\right)^{-m+2}}{-m+2} + \triangle^2\frac{\left(l_E^2+\triangle\right)^{-m+1}}{-m+1}\right]\Bigg| \\ &= \frac{i(-1)^{m-1}}{(4\pi)^2}\left[\frac{1}{m-3}\frac{1}{\triangle^{m-3}} - 2\frac{1}{m-2}\frac{1}{\triangle^{m-3}} + \frac{1}{m-1}\frac{1}{\triangle^{m-3}}\right] \\ &= \frac{i(-1)^{m-1}}{(4\pi)^2}\left[\frac{1}{m-3} - \frac{2}{m-2} + \frac{1}{m-1}\right]\frac{1}{\triangle^{m-3}} \\ &= \frac{i(-1)^{m-1}}{(4\pi)^2}\frac{2}{(m-1)(m-2)(m-3)}\frac{1}{\triangle^{m-3}}\end{aligned}$$

此项在$m=3$时发散，不能做Wick转动。我们要在做这个积分时取一个本质上是截断的处理。

将光子传播子取成：

$$\frac{1}{(k-p)^2+i\in}\to\frac{1}{(k-p)^2+i\in}-\frac{1}{(k-p)^2-\wedge^2+i\in}\wedge\to\infty$$

这相当于取一个非常重的光子的传播子。（这种截断是协变的，如果在积分限上取截断则影响协变性）

由⟨顶角-2⟩页可知，修正光子传播子后，$\triangle$的形式变为：

$$\triangle=-xyq^2+(1-z)^2m^2$$
$$\triangle_\wedge=-xyq^2+(1-z)^2m^2+z\wedge^2$$

顶角-12

显然，在将光子传播子变为类似的两项后。整个积分就划为两项。一项与以前一样，另一项则以$\triangle_\wedge$取代$\triangle$，其他部分均一样。这样发散的那部分积分就变成这样的两项：

$$\begin{aligned}
\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\left(\frac{l^2}{(l^2-\triangle)^3}-\frac{l^2}{(l^2-\triangle_\wedge)^3}\right)&=-i\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\left(\frac{l_E^2}{\left(-l_E^2-\triangle\right)^3}-\frac{l_E^2}{\left(-l_E^2-\triangle_\wedge\right)^3}\right)\\
&=\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4l\left(\frac{l_E^2}{\left(l_E^2+\triangle\right)^3}-\frac{l_E^2}{\left(l_E^2+\triangle_\wedge\right)^3}\right)\\
&=\frac{i}{(2\pi)^4}\int d\Omega_4\int_0^\infty dl_E\left(\frac{l_E^5}{\left(l_E^2+\triangle\right)^3}-\frac{l_E^5}{\left(l_E^2+\triangle_\wedge\right)^3}\right)\\
&=\frac{i}{(2\pi)^2}\cdot2\cdot\frac{1}{2}\int_0^\infty dl_E\left(\frac{l_E^4}{\left(l_E^2+\triangle\right)^3}-\frac{l_E^4}{\left(l_E^2+\triangle_\wedge\right)^3}\right)\\
&=\frac{i}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dl_E\left(\frac{l_E^4}{\left(l_E^2+\triangle\right)^3}-\frac{l_E^4}{\left(l_E^2+\triangle_\wedge\right)^3}\right)\\
&=\frac{i}{(2\pi)^2}\left[\ln\left(l_E^2+\triangle\right)+\frac{2\triangle}{l_E^2+\triangle}-\frac{\triangle^2}{2\left(+\triangle\right)^2}-\ln\left(l_E^2+\triangle_\wedge\right)-\frac{2\triangle_\wedge}{l_E^2+\triangle_\wedge}-\right.\\
&\because\lim_{l_E^2\to\infty}\left[\ln\left(l_E^2+\triangle\right)-\ln\left(l_E^2+\triangle_\wedge\right)\right]=0\\
&=\frac{-i}{(4\pi)^2}\ln\frac{\triangle}{\triangle_\wedge}\\
&=\frac{i}{(4\pi)^2}\ln\frac{\triangle_\wedge}{\triangle}
\end{aligned}$$

其他的$\frac{1}{(l^2-\triangle)^3}$项，为上$\wedge$后是$\wedge^{-2}$的量级，可忽略。

这样我们就得到：

$$\delta\Gamma^{\mu}(p^{'},p)=\int_0^1 dxdydz\delta(x+y+z-1)\cdot 2\bar{u}\left(p^{'}\right)\left\{\begin{array}{r}\gamma^u(-\frac{1}{2})\frac{i}{(4\pi)^2}\ln\frac{\triangle_\wedge}{\triangle}+\frac{-i}{(4\pi)^2}\frac{1}{2}\frac{1}{\triangle}[(1-x)(1-\\ +\frac{-i}{(4\pi)^2}\frac{1}{2}\frac{1}{\triangle}\frac{i\sigma^{\mu\gamma}q^{\nu}}{2m}2m^2z(\end{array}\right.$$

$$\text{其中}\triangle_\wedge=-xyq^2+(1-z)^2m^2+z\wedge^2\sim\because\wedge\to\infty$$

$$=2ie^2\frac{-i}{(4\pi)^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\int_0^1 dxdydz\delta(x+y+z-1)\bar{u}\left(p^{'}\right)\left\{\begin{array}{r}\gamma^u\ln\frac{z\wedge^2}{\triangle}+\frac{1}{\triangle}[(1-x)(1-y\\ +\frac{i\sigma^{\mu\gamma}q^{\nu}}{2m}[\frac{1}{\triangle}2m\end{array}\right.$$

$$\text{其中}2ie^2\frac{-i}{(4\pi)^2}\frac{1}{2}\cdot 2=\frac{2e^2}{16\pi^2}==\frac{\alpha}{2\pi}\alpha\equiv\frac{e^2}{4\pi}$$

$$=\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dxdydz\delta(x+y+z-1)\bar{u}\left(p^{'}\right)\left\{\begin{array}{r}\gamma^u\ln\frac{z\wedge^2}{\triangle}+\frac{1}{\triangle}[(1-x)(1-y)q^2+\left(1-4z\right.\\ +\frac{i\sigma^{\mu\gamma}q^{\nu}}{2m}[\frac{1}{\triangle}2m^2z(1-z)]\end{array}\right.$$

以上是Pauli-Villars正规化

顶角-14

普遍地我们可以将顶点Γ^{μ}写成

$$F_1(q^2)\Gamma^{\mu}=F_1(q^2)\gamma^u+F_2(q^2)\frac{i\sigma^{\mu\gamma}q^{\nu}}{2m}$$

这显然要求$F_1(q^2=0)=1$

$$\text{又}\because\Gamma^{\mu}\equiv\gamma^u+\delta\Gamma^{\mu}$$

$\therefore$要求$q^2=0$时，$\delta\Gamma^{\mu}$中γ^u的系数为零。

而γ^u的系数在$q^2=0$时为$\int_0^1 dxdydz\left(\ln\frac{z\wedge^2}{\triangle}+\frac{1}{\triangle}\left(1-4z+z^2\right)m^2\right)$是发散的，不为零。重整化所做的就是将这个无穷大在$\Gamma^{\mu}$中减去。减去这项是与实验对比的结果。

（实验要求$F_1(q^2=0)=1$）

就是说重整化要求将

$\delta F_1(q^2)\overset{\text{替换成}}{\to}\delta F_1(q^2)-\delta F_1(q^2=0)$

（注$F_1(q^2)=1+\delta F_1(q^2)$）

而$\delta F_1(q^2=0)=\ln\frac{z\wedge^2}{\triangle_{q^2=0}}+\frac{1}{\triangle_{q^2=0}}\left(1-4z+z^2\right)m^2$

$$\therefore F_1(q^2) = 1 + \delta F_1(q^2) - \delta F_1(q^2 = 0)$$

$$= 1 + \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dxdydz\delta(x+y+z-1)\left\{\ln\frac{z\wedge^2}{\triangle} + \frac{1}{\triangle}[(1-x)(1-y)q^2 + \left(1-4z+z^2\right)m^2\right\} - \left[\ln\frac{}{\triangle_{q^2=0}} +$$

$$\because \triangle = -xyq^2 + (1-z)^2m^2$$

$$= 1 + \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dxdydz\delta(x+y+z-1)\left[\ln\frac{z\wedge^2}{(1-z)^2m^2 - xyq^2} + \frac{\left(1-4z+z^2\right)m^2 + (1-x)(1-y)q^2}{(1-z)^2m^2 - xyq^2 + \mu^2 z} - \ln\right.$$

注意这里在$(k-p)^2$上加一个小μ质量$(k-p)^2 - \mu^2$，即给光子加一个小质量以去掉红外发散。

$$= 1 + \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dxdydz\delta(x+y+z-1)\left[\ln\frac{m^2(1-z)^2}{(1-z)^2m^2 - xyq^2} + \frac{\left(1-4z+z^2\right)m^2 + (1-x)(1-y)q^2}{(1-z)^2m^2 - xyq^2 + \mu^2 z} - \frac{(1}{(1-\right.$$

$$F_2(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dxdydz\delta(x+y+z-1)\left[\frac{2m^2z(1-z)}{(1-z)^2m^2 - xyq^2}\right] + 0(\alpha)$$

在F_2中没有紫外和红外发散。

$$\therefore F_2(q^2=0) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dxdydz\delta(x+y+z-1)\frac{2m^2z(1-z)}{(1-z)^2m^2}$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dydz\frac{2z}{1-z}$$

$$= \frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 dz\int_0^{1-z} dy\frac{z}{1-z}$$

$$= \frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 dz(1-z)\frac{z}{1-z}$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi}$$

第三十六章　路径积分部分零散资料（待整理）

36.1　一个发散的振荡积分

在路径积分处理中，我们的核心任务是要计算生成泛函，它是形如

$$\int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]} = \int \mathcal{D}\phi e^{-\int d^4x \frac{1}{2}\phi\left(\partial^2+m^2\right)\phi}$$

的泛函积分，其中作用量为

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \left[\frac{1}{2}\left(\partial\phi\right)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2\right] \\ &= -\int d^4x \frac{1}{2}\phi\left(\partial^2+m^2\right)\phi \end{aligned}$$

（将作用量$\int d^4x \left[\frac{1}{2}\left(\partial\phi\right)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2\right]$改写为$-\int d^4x \frac{1}{2}\phi\left(\partial^2+m^2\right)\phi$扔掉了表面项）。这是一个振荡积分。

有生成泛函我们可以直接计算出编时乘积，形如

$$\int \mathcal{D}\phi\phi\cdots\phi e^{iS[\phi]} \tag{36.1}$$

的积分。在比喻意义上讲这相当于对ϕ^n作Fourier变换。而我们知道能够做Fourier变换的只有绝对可积函数。ϕ^n显然不行。

这就是说，在路径积分中我们要处理的积分是发散的。我们有两种方式处理这个发散积分。

1. 在指数上加上一个实部，这样Fourier型的积分就变成了Laplace型的积分。积分便收敛了。

2. 做Wick旋转，将积分解析延拓。将闵氏空间中的积分变到欧式空间。

下面分别简述一下这两种处理。

36.1.1 在指数上加上一个实部：路径积分和Green函数

为了使积分(36.1)不发散，比喻性地说你，相当于要对ϕ^n作指数型积分变换，那么最直接的方式就是将Fourier变换改成Laplace变换：

$$\int dx e^{ipx} f(x) \longrightarrow \int dx e^{i(p+iq)x} f(x) = \int dx e^{ipx-qx} f(x)$$

这就是说$\mathcal{F}$-变换变成$\mathcal{L}$-变换就是在变换核e^{ipx}上乘上一个指数衰减因子e^{-qx}。或者说在指数ipx上加一个$-qx$项。

类比到路径积分中要使积分(36.1)可积。也可以通过加上这样一个因子的方式做到：

$$e^{iS} \longrightarrow e^{iS-\epsilon\int d^4x\frac{1}{2}\phi^2}$$

这样积分(36.1)变成了

$$\int \mathcal{D}\phi\phi\cdots\phi e^{iS-\epsilon\int d^4x\frac{1}{2}\phi^2}$$

下面我们来看看对自由标量场来说这个改变意味着什么。

指数上：

$$\begin{aligned}
&iS-\epsilon\int d^4x\frac{1}{2}\phi^2\\
&=i\left(S+i\epsilon\int d^4x\frac{1}{2}\phi^2\right)\\
&=i\left(-\int d^4x\frac{1}{2}\phi\left(\partial^2+m^2\right)\phi+\int d^4x\frac{1}{2}\phi i\epsilon\phi\right)\\
&=i\left(-\int d^4x\frac{1}{2}\phi\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right)\phi\right)
\end{aligned}$$

也就是说

$$m^2 \longrightarrow m^2-i\epsilon$$

相当于加了一个虚质量。引入这个虚质量后。K-G方程变成

$$\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right)\phi(x)=0$$

有源的情况为

$$\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right)\phi(x)=j(x)$$

求它的Green函数。

Green函数服从的电源方程为

$$\left(\partial^2+m^2-i\epsilon\right)G(x-y)=-\delta^4(x-y) \tag{36.2}$$

为解这个方程做积分变换

$$G(x-y)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik(x-y)}G(k) \tag{36.3}$$

代回(36.2)有

$$\left(k^2-m^2-i\epsilon\right)G(k)=1$$

于是

$$G(k)=\frac{1}{k^2-m^2+i\epsilon}$$

这里差一个“–”号。通过变换(36.3)，可以得到$G(x-y)$：

$$\begin{aligned}G(x-y)=&\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik(x-y)}\frac{1}{k^2-m^2+i\epsilon}\\&\left(=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\left\{\int\frac{dk^0}{2\pi}\frac{1}{2k^0}\frac{e^{-ik^0\cdot\left(x^0-y^0\right)}}{k^0-\omega_k+i\epsilon}+\int\frac{dk^0}{2\pi}\frac{1}{2k^0}\frac{e^{-ik^0\cdot\left(x^0-y^0\right)}}{k^0+\omega_k-i\epsilon}\right\}\right)\\&=\Delta_F(x-y)\end{aligned}$$

这时积分路径上没有奇点。这个积分可以积出来。就是Feynman传播子。

瞧，当我们试图使路径积分收敛的时候。我们自动得到了Feynman传播子。回忆正则量子化方案中为了算出Green函数，由于积分路径上有奇点（E轴），积分没有定义。于是便有各种可能的路径选择。不同的路径给出不同的积分结果。最后得到一个Lorentz不变的函数族，Feynman传播子只是其中一个。从路径积分的观点。我们很容易看出Feynman的选择的意义。

36.1.2 欧氏场论：Wick旋转

利用Wick旋转

$$\begin{aligned}x_0&\to-ix_E\\d^4x&\to-id^4x_E\\\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi&=-\partial^E_\mu\phi\partial^E_\mu\phi\end{aligned}$$

这样积分变为

$$\int\mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]}=\int\mathcal{D}\phi e^{-\int d^4x_E\frac{1}{2}\left(\partial^E_\mu\phi\partial^E_\mu\phi+\frac{1}{2}m^2\phi^2\right)}$$

这个积分显然是不发散的。不过这样处理是不是与闵氏的处理完全等价，并不是一件显然的事。

我们以后会专门讨论欧氏场论的问题。

36.1.3 Wick定理

场算符的编时乘积的真空期待值就是Green函数。普遍地我们考虑多点Green函数

$$\langle 0|\, T\phi\left(x_1\right)\phi\left(x_2\right)\cdots\phi\left(x_{2n}\right)|0\rangle$$

可以证明

$$\langle 0|\, T\phi\left(x_1\right)\phi\left(x_2\right)\cdots\phi\left(x_{2n}\right)|0\rangle = \frac{1}{i^n}\sum_{k|}\Delta\left(x_{i_1}-x_{i_2}\right)\cdots\Delta\left(x_{i_{2n-1}}-x_{i_{2n}}\right)$$

这个结果就是Wick定理（对比在正则场论中的情况）

特例：

$$\langle 0|\, T\phi\left(x_1\right)\phi\left(x_2\right)\phi\left(x_3\right)\phi\left(x_4\right)|0\rangle = \frac{1}{i^2}\left[\Delta\left(x_1-x_2\right)\Delta\left(x_3-x_4\right)+\Delta\left(x_1-x_3\right)\Delta\left(x_2-x_4\right)+\Delta\left(x_1-x_4\right)\Delta\left(\right.\right.$$