量子场论“试题”详解

陈成

渤海书社

Lecture Notes on Physics

量子场论“试题”详解/陈成 著

——凡人看得懂的量子场论（非 985/211 高校适用）

2021 年 4 月第 1 版
2021 年 4 月第 1 次印刷

版权所有，请勿擅自传播
有问题或转载请联系 einstein.newton@163.com 或 841403757@qq.com

前言

量子场论的书很多了，为什么要再写一本？

（1）根深才能叶茂：工欲善其事必先利其器

相对论和量子力学已经很深奥了，量子场论是二者杂糅的结果，还夹杂着“群论”这门新的数学，其难度可想而知。这么复杂的理论，需要比相对论、量子力学更长的学习时间来消化；然而实际情况却是，大部分高校的电动力学和量子力学都分别有 72 学时，但群论和量子场论偏偏只有 54 学时甚至 36 学时！这么短时间能学啥？我们学校群论课只学有限群，场论只学经典场及其正则量子化，并且没有粒子物理这门课！这对于凝聚态足够了，但我要研究粒子物理，粒子物理需要李群李代数、重整化和 QCD 啊。

别说学这些没用，你要参加学术会议与同行交流的，同行们张口“伴随表示”，闭口“CKM 矩阵”，你不学能行吗？别问我学校为什么不多给点学时，说多了都是泪。老师总拿 Weinberg 四条忠告说事，什么“不用等磨好刀再砍柴”之类的。我就不相信，没上过初中，直接从小学跳级到高三的学生经过一年苦练能中状元。世上能有几个天才！

应试教育特点是极强的功利心。老师讲课完全照着高考，不考就不讲。凡事以得分为目的，而非以学生全面发展为目的。研究强子层次，就满足于 $\pi K \eta$，不管夸克构成吗？研究物质性质，就止步于原子层次吗？那你究竟是物理系的还是化学系的？卢瑟福说：科学除了物理都是集邮。张昊：若一个理论只能预言粉笔抛出去落哪，而不能预言杯子抛出去落哪，多可惜。所以要追求基本理论，而非有效理论。罗兰《为纯科学呼吁》：如果我们满足于应用，而不刨根问底，我们就会像中国人那样。他们很早就发明了火药，却不能发展出化学。黑格尔：一个民族要有一群仰望星空的人，他们才有希望。

庄子《逍遥游》有云： 水之积也不厚，其负大舟也无力；风之积也不厚，其负大翼也无力。魏征《谏太宗十思疏》有云：求木之长者，必固其根本；欲流之远者，必浚其泉源；思国之安者，必积其德义。做理论物理不学好数学， 可谓“源不深而望流之远，根不固而求木之长，德不厚而思国之安”；不搞好教学就去搞科研，犹如不会走就想跑，实乃揠苗助长，“伐根以求木茂，塞源而欲流长也”。读书乃输入，写作乃输出。读书破万卷，下笔如有神。肚子里没东西，能发表什么高水平论文？

（2）按点给分：像阅卷一样审核论文

现今专著写的都是看不懂的公式，三天翻不了一页；科普书以概念为主，缺少必要的公式。能否写本介于二者之间的书？姑且叫“公式科普”——科普下某公式怎么来的。

大牛的书最常见词汇是“显而易见”，这句话背后往往省略了几页甚至几十页的推导。套用曹老先生的话来说，真的是“式式看来皆是血，‘显然’‘易证’不寻常”。物理学不是文科那样前后逻辑关系不大，省略一个公式，后面论述就可能完全看不懂。非 211 高校学生基础弱，有问题只能求网友。他们自学之路异常坎坷，特别需要一本足够详细的教材。对于能考上研究生的人，即使不聪明，至少也不笨。但他要重复导师交给他的别人论文中的结果，没半年绝不可能。既然论文已经发表，为什么不写详细点，让后人省点时间？让后人读懂你的论文，对你有害吗？抑或是觉得自己当初就经历了这种折磨，现在终于媳妇熬成婆，想把自己当年受的苦找呗回来？己所不欲，勿施于人！Fermat 不说大定理怎么来的，令数学滞后 350 年！贫道是凡人，受不了这样折磨，也不想让那些和我一样平凡的人受这样的折磨，故使尽浑身解数把那些省略的细节补回来。

我们要像对待高考试卷一样对待量子场论，只写“用能量守恒和动量守恒可得”，却不写出能量与动量守恒表达式，这样的卷给几分？以后要变革论文审核制度，凡只写思想不写过程的论文一律不准发表，必须像中学那样“按点给分”，补全论文推导关键步骤，直到杂志社编辑能完全重复作者论文，才正式接收；错一负号，都必须拿回去改！

（3）天下大事必作于细：要么讲清楚，要么不讲

对非 211 高校学生重要的不是写了多少，而是写清了多少。但显微镜视野就那么大，看清某局部，就要略去其他。总页数一定时，若什么都讲，必什么都讲不清楚。不可能在 300 页书中同时讲清电弱统一、算符乘积、求和规则、碎裂函数、拓扑场论、超对称。如果采用“概论”式，面面俱到，其结果必然“面面俱不到位”。就量子场论而言，若这些都讲清楚，800 页也远不够，把 Peskin 省略细节补全至少得 2000 页。

又要在短时间学完量子场论，又要讲清细节，保证学生听懂，实在不易。为今之计，只有在选材方面下功夫。哪些详哪些略？罗列结论不符合理论物理精神。理论物理学是自然界的数学模型。所以最重要的是如何建模，至于模型如何解，那已经不再是纯理论范畴。所以重点是讲一个模型的由来，而非信手拈来一个模型就讨论其如何应用。本书想让每一个公式出现显得“自然”而不突兀。避免“神来之笔”，让科学不再神秘——飞入寻常百姓家。为说明对称性破缺、Weinberg 转动等灵感由来，我杜撰了一些小故事。

完整的量子场论至少需 120 学时，要想 40 学时讲完，相当于压缩了 3 倍。为找到合理的压缩方式，我们反思中小学的教育。从小学到高中一共 12 年，要想压缩到 4 年完成行不行？也不是绝对不行，但小学 3 年后直接蹦高三绝对不行，因为初中还有很多难点呢！仔细想想小学都干了啥，单是加减乘除就折腾了 5 年，实在是浪费生命。加减乘除这些一年足够了（当然要精心安排），初中三年可压缩到一年，高中压缩到两年。所以要把简单的少讲，复杂的多讲；理论推导必足够详细，应用方面尽可能少。讲重整化，就给出 QED 单圈重整化完整计算过程，一步不落；但电子反常磁矩，氢原子 Lamb 移位等只对某些方向有用，对 Einstein 这种怀有“大理石梦想”、只对大统一感兴趣的人没啥用，完全可不讲。我的原则是：改好一道错题，比做 **10** 道一般题更有意义。

为缩短年轻学者培养周期，裘忠平先生建议少讲正则量子化，将主线换成路径积分。他用正则量子化讲自由场，用路径积分讲相互作用场。既然路径积分是普适的，那能否来个彻底改革，压根不讲一句正则量子化？什么公式在正则量子化里有，在路径积分里没有？是 Dirac 场自旋求和公式，以及电磁场极化求和公式。那么能否绕过正则量子化，又给出求和公式呢？姜志进就是这么讲的：在相对论量子力学中导出求和公式。就是说，根本不必到“量子场论”层次，只到“相对论量子力学”层次就够了。顶多负能解问题解释不了。但如果“搁置争论，拿起笔来做计算”，完全扔掉正则量子化也未可厚非。

为避免将来听报告一头雾水，我将不吝啬地使用群论；但因很多学校的群论课不讲李群，所以需要李群时，另辟专门章节补充李群知识。这将是一本“自圆其说”的教材。如果用到某些数学，那就在讲具体问题前加一节“预备知识”。

写出细节不等于讲出细节。有了这本绝对足够细致的教材，老师只讲主要思想，其余的内容学生自学即可。这样，即使 1000 页的书也能在 36 学时讲完（“大家看，第 xx 页到第 xx 页是公式的证明，请课下自己跟着书推一遍，或先自己推，再与书对照”，这样一句话就能省下很多学时——只要老师不讲的在别处“真的”能找到就行）。

现今学界大概可分成“古龙派”和“金庸派”。“古龙派”是实用主义者，注重结果、速度，高手都横空出世的，没有关于武功的细节描写。“金庸派”是理想主义者，注重过程、内功路数。高手非生而知之，而是读了武功秘籍勤加修炼后成才的。非 211 高校学生常有“场论之难，难于上青天”“天盖高而无阶，怀此恨其谁诉”感慨。希望本书能助他们一臂之力。

写作本书时遇到不少难题，幸有王雯宇、冯峰、秦溱、杜孟林、张成等朋友的解答。在此一并表示深深的感谢。因编者水平有限，错误在所难免，诚盼广大读者批评指正。

目录

第 1 题　单圈 QED 截面（400 分）.....1
第 0 步　考前准备（40 分）.....1
1.0.1　理论家的生命周期.....1
1.0.2　自然单位制.....2
1.0.3　相对论+量子力学.....2
1.0.3.1　相对论.....2
1.0.3.2　量子力学.....10
1.0.3.3　相对论量子力学.....11
第 1 步　构造作用量（50 分）.....16
1.1.1　终极设计——作用量原理.....16
1.1.2　张量场（Bose 型舞台）.....17
1.1.3　旋量场（Fermi 型舞台）.....22
第 2 步　计算散射振幅（240 分）.....33
1.2.1　约化公式.....33
1.2.1.1　标量场约化.....33
1.2.1.2　矢量场约化.....37
1.2.1.3　旋量场约化.....38
1.2.2　关联函数.....40
1.2.2.1　泛函积分.....40
1.2.2.2　路径积分.....44
1.2.2.3　标量场.....48
1.2.2.4　旋量场.....54
1.2.2.5　电磁场.....58
1.2.3　图形规则.....72
1.2.3.1　标量场 Feynman 规则.....72
1.2.3.2　QED 的 Feynman 规则.....75
1.2.3.3　Ward 恒等式.....80
1.2.4　重整化.....88
1.2.4.1　发散.....89
1.2.4.2　分离.....91
1.2.4.3　减除.....111
第 3 步　计算散射截面（70 分）.....115
1.3.1　散射与衰变的概念.....115
1.3.2　例题示范.....121
1.3.2.1　过程图.....122
1.3.2.2　矩阵元.....123
1.3.2.3　模方.....134
1.3.2.4　相空间.....136
1.3.2.5　截面.....137
第 2 题　量子色动力学（300 分）.....139
第 1 步　构造有效 Lagrangian（80 分）.....139
2.1.1　整体和局域对称性.....139

2.1.1.1 Abel 对称性 139
2.1.1.2 非 Abel 对称性 142
2.1.2 规范场的路径积分 146
2.1.2.1 delta 函数的变量代换 146
2.1.2.2 轨道与体积因子 147
2.1.2.3 杨-Mills 的生成泛函 148
2.1.2.4 Faddeev-Popov 行列式 150
2.1.3* BRST 对称性 151
第 2 步 推导 Feynman 规则（100 分） 156
2.2.1 推导 Feynman 规则的出发点 156
2.2.1.1 鞍点近似与树图近似 156
2.2.1.2 正规顶角的生成泛函 158
2.2.1.3 Lagrangian 分析 159
2.2.2 传播子 160
2.2.2.1 胶子传播子 160
2.2.2.2 鬼场传播子 162
2.2.3 顶点 164
2.2.3.1 三胶子顶点 164
2.2.3.2 四胶子顶点 171
2.2.3.3 鬼粒子-胶子顶点 175
第 3 步 重整化（120 分） 176
2.3.1 QCD 单圈计算概述 176
2.3.2 真空极化 179
2.3.2.1 夸克圈 179
2.3.2.2 胶子圈 181
2.3.2.3 鬼圈 186
2.3.2.4 胶子场重整化常数的确定 186
2.3.3 夸克自能 188
2.3.4 顶角修正 190
2.3.4.1 “夸克-胶子顶点”+“夸克-胶子顶点” 190
2.3.4.2 “三胶子顶点”+“夸克-胶子顶点” 191
2.3.5 重整化群 193
2.3.5.1 正规顶角的重整化 193
2.3.5.2 Callan-Symanzik 方程 194
2.3.5.3 beta 函数 194
2.3.6 渐近自由 197
2.3.6.1 正规顶角的量纲 197
2.3.6.2 量纲标度变换群 198
2.3.6.3 重整化群方程的解 199
第 3 题 电弱统一理论（200 分） 201
第 0 步 弱作用的基本特征与过渡理论（20 分） 201
3.0.1 “流”与“荷” 201
3.0.2 V-A 理论与手征对称性 203
3.0.2.1 V-A 理论 203

3.0.2.2 手征对称性 204
3.0.3 中间 Boson 理论 205
第 1 步 构造规范场与 Higgs 场的 Lagrangian（30 分） 206
3.1.1 整体对称性破缺与 Nambu-Goldstone 定理 206
3.1.1.1 实标量场 206
3.1.1.2 复标量场 208
3.1.2 局域对称性破缺与 Higgs 机制 210
3.1.2.1 Abel 情形 210
3.1.2.2 非 Abel 情形 212
第 2 步 构造轻子场的 Lagrangian（70 分） 214
3.2.1 弱超荷 214
3.2.2 规范不变性与原始 Lagrangian 的构造 218
3.2.3 对称性破缺与电磁场的出现 219
3.2.3.1 对称破缺与 Lagrangian 的变化 219
3.2.3.2 Weinberg 转动与电磁场的出现 220
3.2.4 用电磁场 A 重新表述 Lagrangian 224
3.2.4.1 Higgs 部分 225
3.2.4.2 规范场部分 225
3.2.4.3 轻子部分 228
第 3 步 构造夸克场的 Lagrangian（40 分） 231
3.3.1 只含第一代夸克的电弱模型 231
3.3.1.1 原始 Lagrangian 的构造 231
3.3.1.2 对称性破缺 233
3.3.1.3 用 A、Z 改写 Lagrangian 234
3.3.2 GIM 机制 236
3.3.3 CKM 矩阵 237
3.3.3.1 CKM 矩阵的定义 237
3.3.3.2 幺正三角形 238
3.3.3.3 自由度 239
3.3.3.4 CKM 矩阵元的计算 241
第 4 步 导出电弱理论的 Feynman 规则（40 分） 244
3.4.1 顶点 244
3.4.1.1 无对称性亦无导数型 244
3.4.1.2 有对称性但无导数型 246
3.4.1.3 有导数型 248
3.4.2 传播子 249
3.4.2.1 重矢量场传播子 250
3.4.2.2 中微子传播子 251
附录 A 场论符号约定比较 255
附录 B 粒子“周期”表 257

第 1 题　单圈 QED 截面（400 分）

【问题】（满分 400 分，时间 40 天）：论正负电子湮灭产生轻子对儿 $e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-$ 的散射截面，要求：计算到单圈水平。本考试为开卷考试（以论文形式提交），可参考郑汉青《量子场论》（上）10.4 节。**论文中必须给出每一个关键步骤**，如作用量的构造，Feynman 规则的导出，截面公式由来等。**没有过程只有结果不给分，过程中缺少必要步骤酌情扣分**。

第 0 步　考前准备（40 分）

1.0.1　理论家的生命周期

要在短时间内学会一门技艺，就要抓住重点和精髓。在做具体的科研之前，我们常常会走很多弯路。有的人学了一学期量子场论，懂得了很多定理，却还是不能用它做科研。量子场论的核心在哪？从科研的实用角度看，最重要的是可观测量——散射截面和衰变宽度。所以，我计划把这本书围绕它进行展开。

欲知散射截面，需知散射振幅；欲知散射振幅，需知散射矩阵；欲知散射矩阵，须知作用量。

所以，**理论家的生命周期**是：

Step 1，构造作用量（或 Lagrange 量）；

Step 2，推导 Feynman 规则；

Step 3，计算散射振幅。

当然，这是纯理论派的生命周期。理论物理内部细分为“做模型的”和“做模拟的”两派，前者研究“纯理论”，好像数学家或哲学家；后者偏实验，研究“唯象学”，好像计算机专家。

不论构造作用量还是画 Feynman 图，首先要知道哪些过程能发生，哪些不能。基本的依据是粒子间相互作用特点：

相互作用	强	电磁	弱	引力
力程	fm	无穷远	0.01fm	无穷远
强度	10	1/137	10^(-5)	10^(-38)
作用对象	强子（夸克）	带电粒子	轻子、强子	所有粒子
传递者	胶子	光子	W，Z	引力子

由此可知：在原子核外，强弱相互作用可忽略；在强弱电相互作用存在时，引力可忽略。

更细致的判断是：

（1）相加性量子数

普遍严格守恒：能动量，角动量，电荷，轻子数，重子数；

在强电作用中近似守恒：夸克数（奇异数 s，粲数 c，底数 b，顶数 t），同位旋第三分量；

仅在强作用中近似守恒：同位旋。

（2）相乘性量子数

在强电作用中近似守恒：P 宇称、C 宇称、CP 宇称，G 宇称。

Noether 定理：对称导致守恒。其中能动量守恒是时空平移对称的结果，角动量守恒是空间旋转对称的结果，P 宇称守恒是空间反射对称性的结果；其他则为内部对称性的结果。

即使不守恒，其改变量也有一定规则，称为**选择定则**。例如，电磁作用同位旋改变$|\Delta I|=0,1$；

弱作用同位旋改变$|\Delta I|\le 1$，奇异数改变$|\Delta S|=0,1.$

当然，一个更省事的办法是去查 Particle Date Group《Review of Particle Physics》，查到的过程肯定能发生，查不到的过程有可能永远不会发生。

1.0.2 自然单位制

既然量子场论是狭义相对论和量子力学结合的产物，那么计算中必然包含标志狭义相对论的光速 c 和标志量子力学的 Planck 常数 h。相对论和量子论的公式已经很复杂，二者结合的产物的计算量翻了好几倍。所以，如果能令光速和 Planck 常数都等于 1，就能简化很多公式，这便是自然单位制的由来。今后如果你发现两本书相差光速和 Planck 常数，不必惊讶，有了自然单位制，这都不是事。
当 c=1 时，长度和时间的量纲相同，能量和质量的量纲也相同；另外[x,p]=ih，所以作用量（能量乘时间或长度乘动量）的量纲就是 Planck 常数，当 h=1 时，时间便是能量的倒数。
所以在自然单位制下，实际上只有一个基本单位，通常取为能量（电子伏特 eV）。

1.0.3 相对论+量子力学

汉赋、唐诗、宋词、元曲……所谓一代有一代之文学。物理学也是如此，描述不同的世界就用不同的分支：宏观低速（经典力学），宏观高速（狭义相对论），微观低速（量子力学），微观高速（量子场论）。量子场论是狭义相对论与量子力学结合的产物，所以相对论与量子力学的特性都被量子场论继承。
量子场论研究对象是基本粒子，它可以接近或等于光速运动，这就必须使用狭义相对论。相对论要求物理规律与参考系无关，这就要求我们构造在 Lorentz 变换下保持不变的量——Lorentz 标量。此外，我们还希望体系具有时空平移对称性、规范对称性等。
与量子力学相似，量子场论也研究微观世界（只不过量子力学研究微观低速世界，量子场论研究微观高速世界），所以必然要借助量子力学中的“态矢量”“跃迁几率”等概念。真空是量子场的基态，粒子是量子场的激发态。

1.0.3.1 相对论

1.Lorentz 变换

Newton 将 Galileo 的地面运动规律与开普勒的天体运动规律统一为经典力学，取得了巨大的成功。既然 Newton 力学被无数实践检验为真理，难道还值得怀疑吗？

我们都知道静止的电荷产生电场，运动的电荷产生磁场。但静止还是运动是依赖于参考系的。通过变换参考系，电场应该可以变成磁场。经典力学中，参考系之间的变换称为 Galileo 变换。但利用 Galileo 变换，计算出的磁场是错误的。究竟是电磁学错了，还是 Galileo 变换错了？

大家可以思考这样的问题：作用力与反作用力是同时产生、同时变化、同时消失的吗？我挥挥手，月亮就能感受到我对她的召唤吗？太阳光是一瞬间到达地球的吗？也许应该这样

想，太阳就像一颗小石子，掉入平静的水面，激起一圈圈涟漪（引力波就像时空的涟漪）。当水波传到地球时，地球人才能感受到太阳的存在。所以，Newton 定律肯定有问题，只不过我们周围的生活和光速相比太慢了，相互作用的传递速度可以近似认为无穷大。这就是 Newton 力学虽然不准确，但仍然能很好地解释身边物质运动的原因。

Faraday 是第一个质疑**瞬时超距**作用并提出“场”概念的人。Mach 曾系统地批判过经典力学，Einstein 深受其影响。Einstein 认为，电磁学定律经受了无数实验检验，不可能错，只能是“先验的”Galileo 变换需要修正。电磁学中参考系间如何变换呢？

我们知道，生活中要做一件事需要明确它在什么时间什么地点发生。我们可以把时空坐标 (t,x,y,z) 称为一个事件。假设时空中有两个事件 (t_1,x_1,y_1,z_1)，(t_2,x_2,y_2,z_2)，记

$$\Delta x=x_1-x_2,\quad \Delta y=y_1-y_2,\quad \Delta z=z_1-z_2,\quad \Delta t=t_1-t_2$$

它们在空间中的距离可以有等号左边和右边两种表达（Landau《场论》）

$$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}=v\Delta t$$

其中 v 为粒子传播速度。对于电磁作用，传播速度为光速 c，有

$$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}-c\Delta t=0$$

或

$$(\Delta s)^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2-c^2(\Delta t)^2=0$$

称为**类光间隔**。这是一个双曲几何锥面的方程，也称为光锥。我们知道，有质量粒子的速度小于光速，所以

$$(\Delta s)^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2-c^2(\Delta t)^2=v^2(\Delta t)^2-c^2(\Delta t)^2<0$$

称为**类时间隔**（光锥之内）；假设还有一种粒子，其速度超过光速，那么

$$(\Delta s)^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2-c^2(\Delta t)^2=v^2(\Delta t)^2-c^2(\Delta t)^2>0$$

称为**类空间隔**（光锥之外）。

这就是我们的 3+1 维时空的基本性质了。根据个人喜好不同，你可以写出上述表达式的等价形式。比如嫌括号费事，就写成

$$\Delta s^2=\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2-c^2\Delta t^2$$

嫌 c 费事，就写成（自然单位制）

$$\Delta s^2=\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2-\Delta t^2$$

嫌 Δ 不够精确，就用 d：

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2-dt^2$$

嫌负号没法与 Euclid 空间（++++）比较，就写成（伪 Euclid 空间）

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2+d(\mathrm{it})^2$$

当然，还有想让时间项为正的，那就有了

$$ds^2=dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$$

甚至写成

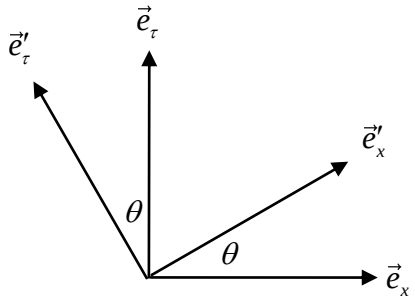
$$-ds^2=-dt^2+dx^2+dy^2+dz^2$$

怎么样？是不是变着变着就变味了？本来好好的$-c^2(\Delta t)^2$变成了dt^2，让人一脸懵。在一种约定（1234，+ + + -，宇宙天体学者常用）下，间隔的平方为负表示类时间隔，到了另一种约定（0123，+ - - -，粒子物理学者常用）下全反了。我们这里目标是宇宙学，所以采用“多正”（正号较多）约定。当然，不管采用哪种约定，时空结构都是双曲几何了，独立的时间与独立的空间不复存在，只有时间与空间纠缠在一起构成的新结构——4 维时空，称为**Minkowski 时空**（流形）。

搞清楚时空的基本结构后，接下来就是写出参考系间的变换了。狭义相对论的基本假定是，物理规律在所有惯性系下都相同（广义相对论要求物理规律在所有参考系相同）。所以，假定两个参考系以恒定速度v相对运动，则两个参考系K,K'中观察到的间隔是相同的：

$$dx^2+dy^2+dz^2+d\tau^2=dx'^2+dy'^2+dz'^2+d\tau'^2$$

因为很多人不熟悉双曲几何，为化成熟悉的形式，这里已经作了虚宗量代换$\tau=\mathrm{i}ct$. 在 4 维空间中，保持距离不变的变换无非是坐标系的平移和旋转。平移就是坐标系原点的移动，我们对这种平庸的情形不感兴趣；真正麻烦的是坐标系旋转。3 维空间中的转动都可以分解为在 xy，yz，zx 这$C_3^2=3$个平面内的转动；4 维空间中的转动可分解为$xy,yz,zx,\tau x,\tau y,\tau z$这$C_4^2=6$个平面内的转动。前三个只是 3 维空间旋转，平淡无奇；最精妙的是后三个，比如τx平面内的转动，这时 y，z 是不变的。



如图为τx平面内基矢量的转动，满足

$$\begin{cases}\vec{e}'_x=\vec{e}_x\cos\theta+\vec{e}_\tau\sin\theta\\ \vec{e}'_\tau=-\vec{e}_x\sin\theta+\vec{e}_\tau\cos\theta\end{cases}$$

根据

$$\begin{aligned}x\vec{e}_x+\tau\vec{e}_\tau&=x'\vec{e}'_x+\tau'\vec{e}'_\tau\\&=x'(\vec{e}_x\cos\theta+\vec{e}_\tau\sin\theta)+\tau'(-\vec{e}_x\sin\theta+\vec{e}_\tau\cos\theta)\\&=(x'\cos\theta-\tau'\sin\theta)\vec{e}_x+(x'\sin\theta+\tau'\cos\theta)\vec{e}_\tau\end{aligned}$$

可得

$$\begin{cases}x=x'\cos\theta-\tau'\sin\theta\\ \tau=x'\sin\theta+\tau'\cos\theta\end{cases}$$

为简便起见，我们讨论 K′系的原点（x′=0）的运动。这时上式简化为

$$\begin{cases} x=-\tau'\sin\theta \\ \tau=\tau'\cos\theta \end{cases}$$

两式相除，得

$$\tan\theta=-\frac{x}{\tau}=\frac{ix}{ct}=i\frac{v}{c}=i\beta$$

于是

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=\gamma,\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\tan^2\theta}}}=\frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}=i\beta\gamma$$

其中 $\beta=\frac{v}{c},\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. 于是

$$\begin{cases} x=x'\cos\theta-\tau'\sin\theta=\gamma(x'-\tau'i\beta) \\ \tau=x'\sin\theta+\tau'\cos\theta=\gamma(x'i\beta+\tau') \end{cases}$$

考虑到 $\tau=\mathrm{i}ct$，就有

$$x=\gamma(x'+vt'),t=\gamma(t'+vx'/c^2)$$

这其实是 Lorentz 逆变换。将第一式反解出 t'，代入第二式消去 t'，解关于 x' 的方程，可得

$$x'=\gamma(x-vt)$$

再代回第一式，得

$$t'=\gamma(t-vx/c^2)$$

此即 **Lorentz 变换**。当 $c\to\infty$ 时，上式简化为

$$x'=x-vt,t'=t$$

此即 **Galileo 变换**。有了坐标变换，求导就可以得到速度变换，加速度变换了。

虽然我们得到了 Lorentz 变换，但这还没完。稍细心的读者不难发现，K′系相对 K 系沿 x 轴平移，其结果竟然与 τx 平面内的转动等价！突然想起尤亦庄学长曾说，平移就是虚的旋转。

因为宗量为虚数，单调升（降）的指数函数 e^x 有了周期性 $e^{i\theta}=e^{i(\theta+2\pi)}$，岂不妙哉！感谢 Euler 的乾坤大挪移公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，架起了实数（地、人）与虚数世界（天、鬼）的（奈何）桥梁，让五绝（东邪 e 西毒 π 南帝 i 北丐 1 中神通 0）联手，让三角函数与双曲函数统一。

2.张量记号

Newton 说，如果我能看得更远，那是因为站在巨人的肩膀上。为了在物理上走得更远，需要站在数学的肩膀上。Einstein 开始时对 Minkowski 的张量方法不屑一顾，直到构建广义相对论时才意识到自己的无知。我们不能重蹈覆辙，为了以后方便，我们补充一些张量知识，然后用张量记号改写 Maxwell 方程。

首先，定义 4 维矢量（已取自然单位制 c=1）

$$x^{\mu}=(x^0,x^1,x^2,x^3)=(t,x,y,z)=(t,\vec{x})$$

$$x_{\mu}=(x_0,x_1,x_2,x_3)=(t,-\vec{x})$$

二者之间关系为

$$x_{\mu}=g_{\mu\nu}x^{\nu},x^{\mu}=g^{\mu\nu}x_{\nu}$$

其中 $g_{\mu\nu}$ 为度规张量，可用来升降指标。通过考察两点间距离，可给出度规的具体形式：

$$\begin{aligned}ds^2&=dt^2-dx^2-dy^2-dz^2=dx^0dx^0-dx^1dx^1-dx^2dx^2-dx^3dx^3\\&=dx_{\mu}dx^{\mu}=g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}=g^{\mu\nu}dx_{\mu}dx_{\nu}\end{aligned}$$

所以

$$(g_{\mu\nu})=\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}=(g^{\mu\nu})$$

$$(g^{\mu\lambda})(g_{\nu\lambda})=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}=(\delta^{\mu}{}_{\nu})$$

其中 $\delta^{\mu}{}_{\nu}=\begin{cases}1, & \mu=\nu\\0, & \mu\neq\nu\end{cases}$ 为 Kronecker 符号。

波波老师说，相对论的精髓就在于“为时空选度规”。现代数学是结构数学，赋予集合以不同的结构，就得到不同的数学分支。例如，赋予加法和数乘，就得到线性空间；赋予内积，就得到 Euclid 空间（实数）或酉空间（复数）；赋予封闭性、结合律、恒元、逆元，就得到群。赋予不同的空间结构，就得到不同的物理学——量子力学：Hillbert 空间；热力学：切空间；狭义相对论：Minkowski 空间；广义相对论：Riemann 空间。具体来说，选择了 $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$，就注定了绝对时间，小球在引力场中运动轨迹为抛物线；选择了 $ds^2=dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$，时间与空间便不再是直积（退相干），而是相互纠缠成为（非平凡的）纤维丛，电荷在静电场中的运动就不再是抛物线，而变成悬链线（Landau《场论》）。这两种度规都是恒定的，实际上还可让时空每点度规各不相同，这个等到广义相对论时再说。注意，在相对论以及涉及相对论的其他理论中，上标不表示乘法，只表示“逆变”指标，下标表示“协变”指标。如果既有上标又有下标，则称为“混合”。通俗（不严格）来说，我们带把多个指标的量称为张量：标量没指标，为 0 阶张量；矢量有 1 个指标，为一阶张量，在 n 维空间有 n 个分量；电磁、引力场都是 4 维空间的二阶张量，带 2 个指标，有 4^2=16 个分量。为简便，涉及张量通常采用 Einstein 求和约定：重复指标表示求和。这导致

$$g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}=\delta^{\mu}{}_{\mu}=\delta^{0}{}_{0}+\delta^{1}{}_{1}+\delta^{2}{}_{2}+\delta^{3}{}_{3}=4$$

注意$(g_{\mu\nu})$表示矩阵，$g_{\mu\nu}$表示矩阵元。但常将$(g_{\mu\nu})$简写为$g_{\mu\nu}$，为免算错，须特别小心！

在这种记号下，Lorentz 变换可写为

$$\begin{cases} x'^0=\gamma(x^0-vx^1) \\ x'^1=\gamma(-vx^0+x^1) \\ x'^2=x^2 \\ x'^3=x^3 \end{cases}$$

用矩阵写出来就是

$$x'^\mu=\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

其中

$$\Lambda^\mu{}_\nu=\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

为 Lorentz 变换张量。

3.Maxwell 方程的张量形式

真空中的 Maxwell 方程为（已取自然单位制）

$$\nabla\cdot\vec{E}=0,\nabla\cdot\vec{B}=0,\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\nabla\times\vec{B}=\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

第一式即

$$\frac{\partial 0}{\partial x^0}+\frac{\partial E^1}{\partial x^1}+\frac{\partial E^2}{\partial x^2}+\frac{\partial E^3}{\partial x^3}=0$$

第四式即

$$-(\frac{\partial E^1}{\partial x^0}\vec{e}_1+\frac{\partial E^2}{\partial x^0}\vec{e}_2+\frac{\partial E^3}{\partial x^0}\vec{e}_3)+\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ B^1 & B^2 & B^3 \end{vmatrix}=0$$

$$=-(\frac{\partial E^1}{\partial x^0}\vec{e}_1+\frac{\partial E^2}{\partial x^0}\vec{e}_2+\frac{\partial E^3}{\partial x^0}\vec{e}_3)+\vec{e}_1(\frac{\partial B^3}{\partial x^2}-\frac{\partial B^2}{\partial x^3})-\vec{e}_2(\frac{\partial B^3}{\partial x^1}-\frac{\partial B^1}{\partial x^3})+\vec{e}_3(\frac{\partial B^2}{\partial x^1}-\frac{\partial B^1}{\partial x^2})$$

$$=\vec{e}_1(-\frac{\partial E^1}{\partial x^0}+0+\frac{\partial B^3}{\partial x^2}-\frac{\partial B^2}{\partial x^3})+\vec{e}_2(-\frac{\partial E^2}{\partial x^0}-\frac{\partial B^3}{\partial x^1}+0+\frac{\partial B^1}{\partial x^3})+\vec{e}_3(-\frac{\partial E^3}{\partial x^0}+\frac{\partial B^2}{\partial x^1}-\frac{\partial B^1}{\partial x^2}+0)$$

定义

$$\partial_\mu=\frac{\partial}{\partial x^\mu}=(\partial_0,\partial_i)=(\frac{\partial}{\partial t},\nabla_i)$$

$$\partial^{\mu}=\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}=(\partial^{0},\partial^{i})=(\partial_{0},-\partial_{i})=(\frac{\partial}{\partial t},-\nabla_{i})$$

$$F^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0 & -E^{1} & -E^{2} & -E^{3}\\ E^{1} & 0 & -B^{3} & B^{2}\\ E^{2} & B^{3} & 0 & -B^{1}\\ E^{3} & -B^{2} & B^{1} & 0\end{pmatrix}$$

则第一式可改写为

$$\frac{\partial 0}{\partial x^{0}}+\frac{\partial E^{1}}{\partial x^{1}}+\frac{\partial E^{2}}{\partial x^{2}}+\frac{\partial E^{3}}{\partial x^{3}}=\partial_{0}F^{10}+\partial_{0}F^{10}+\partial_{1}F^{20}+\partial_{3}F^{30}=\partial_{\mu}F^{\mu 0}=0$$

第四式可改写为

$$\vec{e}_{1}(\partial_{0}F^{01}+\partial_{1}F^{11}+\partial_{2}F^{21}+\partial_{3}F^{31})+\vec{e}_{2}(\partial_{0}F^{02}+\partial_{1}F^{12}+\partial_{2}F^{22}+\partial_{3}F^{32})$$
$$+\vec{e}_{3}(\partial_{0}F^{03}+\partial_{1}F^{13}+\partial_{2}F^{23}+\partial_{3}F^{33})$$
$$=\vec{e}_{1}\partial_{\mu}F^{\mu 1}+\vec{e}_{2}\partial_{\mu}F^{\mu 2}+\vec{e}_{3}\partial_{\mu}F^{\mu 3}=0$$

于是，一、四两式可合写为

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu}=0$$

由

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{e}_{1} & \vec{e}_{2} & \vec{e}_{3}\\ \frac{\partial}{\partial x^{1}} & \frac{\partial}{\partial x^{2}} & \frac{\partial}{\partial x^{3}}\\ A^{1} & A^{2} & A^{3}\end{vmatrix}=\vec{e}_{1}(\frac{\partial A^{3}}{\partial x^{2}}-\frac{\partial A^{2}}{\partial x^{3}})-\vec{e}_{2}(\frac{\partial A^{3}}{\partial x^{1}}-\frac{\partial A^{1}}{\partial x^{3}})+\vec{e}_{3}(\frac{\partial A^{2}}{\partial x^{1}}-\frac{\partial A^{1}}{\partial x^{2}})$$

$$=\vec{e}_{1}B^{1}+\vec{e}_{2}B^{2}+\vec{e}_{3}B^{3}=\vec{e}_{1}F^{32}+\vec{e}_{2}F^{13}+\vec{e}_{3}F^{21}$$

可得

$$F^{ij}=\partial_{j}A^{i}-\partial_{i}A^{j}=\partial^{i}A^{j}-\partial^{j}A^{i}$$

由 $\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ 可得

$$F^{i0}=E^{i}=-\partial_{i}A^{0}-\partial_{0}A^{i}=\partial^{i}A^{0}-\partial^{0}A^{i}$$

所以可定义

$$F^{\mu\nu}=\partial^{\mu}A^{\nu}-\partial^{\nu}A^{\mu}\text{，}\quad F_{\mu\nu}=\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu}$$

该定义满足 Bianchi 恒等式（余扬政《物理学中的几何方法》）：

$$\partial_{\lambda}F_{\mu\nu}+\partial_{\mu}F_{\nu\lambda}+\partial_{\nu}F_{\lambda\mu}$$
$$=(\partial_{\lambda}\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\lambda}\partial_{\nu}A_{\mu})+(\partial_{\mu}\partial_{\nu}A_{\lambda}-\partial_{\mu}\partial_{\lambda}A_{\nu})+(\partial_{\nu}\partial_{\lambda}A_{\mu}-\partial_{\nu}\partial_{\mu}A_{\lambda})$$
$$=(\partial_{\nu}\partial_{\lambda}A_{\mu}-\partial_{\lambda}\partial_{\nu}A_{\mu})+(\partial_{\lambda}\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\mu}\partial_{\lambda}A_{\nu})+(\partial_{\mu}\partial_{\nu}A_{\lambda}-\partial_{\nu}\partial_{\mu}A_{\lambda})$$
$$=0$$

读者可验证，该恒等式正好对应 Maxwell 方程第二、三式。

4.平面波解与极化求和公式

势函数的选取不是唯一的。如果做变换（a 为常数，θ 为标量函数）

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - a\partial_\mu \theta$$

则电磁场张量是不变的：

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = \partial_\mu (A_\nu - a\partial_\nu \theta) - \partial_\nu (A_\mu - a\partial_\mu \theta) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}$$

所以上述变换称为规范变换。QED（量子电动力学）、QCD（量子色动力学）和弱电统一理论都是规范场论。

既然电磁场是规范场，就必须选择一种规范才能确定下来。常用的有 Coulomb 规范和 Lorentz 规范。后者比较美观，本书只讲它：

$$\partial^\mu A_\mu = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A} = 0$$

在此规范下，Maxwell 方程化为

$$0 = \partial_\mu F^{\mu\rho} = \partial_\mu (\partial^\mu A^\rho - \partial^\rho A^\mu) \xrightarrow{\partial_\mu A^\mu = 0} \partial_\mu \partial^\mu A^\rho = \Box A^\rho = 0 \to \Box A_\mu = 0$$

这是一个波动方程，它有平面波解（姜志进《量子场论导论》）：

$$A^{\pm}_\mu(x) = N A_\mu(k) e^{\mp ik\cdot x}$$

其中正负分别表示正频解和负频解，N 为归一化系数。将它代入 Lorentz 规范条件，得

$$\partial^\mu A_\mu = A_\mu(k) \frac{\partial}{\partial x_\mu} e^{\mp ik^\mu x_\mu} = \mp ik^\mu A_\mu(k) e^{\mp ik^\mu x_\mu} = 0$$

于是

$$k^\mu A_\mu(k) = 0$$

因为指标 μ 是对固定坐标系而言的，所以并不能很好地描述具有偏振（极化）的横波。为了更好地描述光的极化性质，最好引入极化坐标系（裘忠平《现代量子场论导引》）：让 x 轴和 y 轴分别表示电场分量和磁场分量（这两个方向表示横向极化），z 轴表示电磁波传播方向（光子运动方向，纵向极化）。为保证 Lorentz 协变性，再引入时间轴 t（标量光子极化）。为方便，可将这 4 个极化矢量取为正交归一的单位矢量：

$$\varepsilon^{(0)}_\mu = (i,0,0,0), \varepsilon^{(1)}_\mu = (0,1,0,0), \varepsilon^{(2)}_\mu = (0,0,1,0), \varepsilon^{(3)}_\mu = (0,0,0,1)$$

即极化矢量 $\varepsilon^{(\lambda)}_\mu$ 为空间一组基（上标 λ 仅标识极化，既非逆变也非协变，不与度规张量作用，加括号是为了将极化指标与通常的张量指标区分）。这组基是完备的：

$$\sum_{\lambda=0}^{3} \varepsilon^{(\lambda)}_\mu \varepsilon^{(\lambda)}_\nu = \varepsilon^{(0)}_0 \varepsilon^{(0)}_0 + \sum_{\lambda=0}^{3} \varepsilon^{(\lambda)}_i \varepsilon^{(\lambda)}_j = -1 + \delta_{ij} = -g_{00} - g_{ij} = -g_{\mu\nu}$$

这就是极化求和公式，在涉及光子外线的 Feynman 图计算中至关重要。由于极化矢量这组基是正交归一完备的，因而任意 4 维势函数可用它展开为

$$A_\mu(k) = A^{\pm(\lambda)}(k) \varepsilon^{(\lambda)}_\mu(k)$$

于是，光子的平面波函数可写为

$$A_\mu^{\pm}(x)=NA^{\pm(\lambda)}(k)\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k)e^{\mp ik\cdot x}$$

注意，只有 $\lambda=1,2$ 时满足 Coulomb 规范 $\nabla\cdot\vec{A}=0\Leftrightarrow\vec{k}\cdot\vec{\varepsilon}=0$，实验上并不能观测到纵向极化和标量极化。

1.0.3.2 量子力学

微观粒子可用**波函数** $\psi(x,t)$ 或**态矢量** $|\psi\rangle$ 描述，满足**态（线性）叠加原理**，波函数的**模方**表示找到粒子的概率。既然是线性叠加，那么两个状态之间就可以通过**线性变换**——（线性）**算符**联系起来。潘逸文学长曾说，系统的奥秘蕴藏在波函数中，要得到它就要用算符作用一下去提取。这一点和经典力学有很大不同：经典力学中态和力学量是统一的，量子力学中态用波函数表示，力学量用算符表示（汪德新《量子力学》）。

我们都知道矢量的性质，就是具有完备性（可以用正交归一的基矢量表示）：

$$|a\rangle=a_1|\vec{i}\rangle+a_2|\vec{j}\rangle+a_3|\vec{k}\rangle$$

如果 $|a\rangle$ 表示颜色，那么 $|\vec{i}\rangle,|\vec{j}\rangle,|\vec{k}\rangle$ 就相当于色空间的一组基（红、绿、蓝），a_1,a_2,a_3 取[0,255]就能调出各种颜色。既然态是矢量，那么就可表示为

$$|\psi\rangle=c_1|\psi_1\rangle+c_2|\psi_2\rangle+\cdots+c_n|\psi_n\rangle$$

其中 $|\psi_1\rangle,|\psi_2\rangle,\cdots,|\psi_n\rangle$ 构成 Hillbert 空间的一组基，即（正交归一）本征态（骰子的六个面），展开系数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 的模方表示处于相应本征态的概率。

下面寻找态矢量的演化方程。方程既然要描述体系随时间变化，就必然含有波函数对时间的一阶导数；但不应含有对时间的二阶导，否则需要两个初始条件（位置及速度），违背了波函数完备描述体系运动状态的假定。

因为其他波都可以看成平面波的线性叠加，我们只要求出平面波就行了。Einstein 认为，光是一种粒子，称为光子，其能量传播是一份一份的，每一份携带能量 $E=hf$（h 为 Planck 常量，f 为光的频率。这个公式虽然奇怪，但被光电效应实验证实）。de Broglie 认为，电子是一种波，称为 de Broglie 波，其波长与光波长计算方法 $\lambda=cT=c/f=ch/E=h/p$ 相同（这个公式虽然奇怪，但被电子的晶体衍射实验证实）。于是，平面波可写为

$$\psi(x,t)=Ae^{i(kx-\omega t)}=Ae^{i(\frac{2\pi}{\lambda}x-\frac{2\pi}{T}t)}=Ae^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}$$

其中 $\hbar=\dfrac{h}{2\pi}$ 为约化 Planck 常量。为简化，这里只考虑一维情况。该平面波对时间的导数为

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{i}{\hbar}E\psi$$

为了凑出一个方程，我们考虑经典力学的能量动量关系 $E = p^2 / 2m$. 观察平面波表达式，要凑出动量平方，应该对空间求二阶导：

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{1}{\hbar^2} p^2 \psi$$

将这两个式子与 $E = p^2 / 2m$ 比较，可知 $E \Leftrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, p \Leftrightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$，故

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

对于三维，即

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi$$

此即 Schrödinger 方程。这是一个按决定论演化的过程（Penrose 将其称为 U 过程）。那么，微观世界的随机性来自哪？还记得测量对于粒子运动的干扰吗？那就是随机性的来源。态的按决定论演化（U 过程）和随机坍缩（R 过程），构成了微观世界新的因果律（张永德《量子力学》）。顺便补充一点：测量过程对过去和未来的影响不同，这造成了量子可逆而经典不可逆（Landau《量子力学（非相对论理论）》）。

1.0.3.3 相对论量子力学

1.Klein-Gordon 方程

我们把 $E \to i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, p \to -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ 的方法称为一次量子化。如果不使用低速世界的 $E = \frac{p^2}{2m}$，

而用高速世界的 $E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$，将得到 Klein-Gordon 方程（为简化，已经取自然单位制 $c = \hbar = 1$）：

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_0^2)\psi = (\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m_0^2)\psi = (\Box^2 + m_0^2)\psi = 0$$

它也有平面波解

$$\psi^{\pm}(x) = e^{\mp ipx}$$

其中正负号分别表示正能解和负能解。在几率守恒的单粒子力学中，负能解是没法解释的，所以它不适合作为单粒子的相对论量子力学方程。但在允许粒子产生湮灭的量子场论中，负能量可以得到完美解释，所以人们就将它解释为场方程。

2.Dirac 方程

定义

$$(E, p_x, p_y, p_z) \to (p^0, p^1, p^2, p^3)$$

$$p^\mu = i\hbar\frac{\partial}{\partial x_\mu} = i\hbar\partial^\mu = (E,\vec{p}), p_\mu = i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu} = i\hbar\partial_\mu = (E,-\vec{p})$$

$$p_0 = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} = i\hbar\partial_0 = p^0, p_i = i\hbar\frac{\partial}{\partial x^i} = -p^i$$

这样，高速世界的 $E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$ 可写成 $p_0 = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}$ （从某种意义上说，旋量是矢量的开方，参见候伯宇《物理学家用微分几何》），则

$$(p_0 - \sqrt{\vec{p}^2 + m_0^2})\psi = 0$$

它带有根号，是个非线性的量。Dirac 假定它可以线性化（Dirac《量子力学原理》）为 $p_0 = \vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m_0$，则

$$(p_0 - \vec{\alpha}\cdot\vec{p} - \beta m_0)\psi = 0$$

为了找出待定系数，给它乘上共轭式 $p_0 + \vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m_0$，并与 Klein-Gordon 方程比较，得

$$\begin{aligned}
&(\sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i)^2 + \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i \beta m_0 + \beta m_0 \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \beta^2 m_0^2 \\
&= \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 p_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1,2,3 \\ i\neq j}} (\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i) p_i p_j + m_0 \sum_{i=1}^3 (\alpha_i\beta + \beta\alpha_i) p_i + \beta^2 m_0^2 \\
&= \sum_{i=1}^3 p_i^2 c^2 + m_0^2 c^2 \xrightarrow{c=1} \sum_{i=1}^3 p_i^2 + m_0^2
\end{aligned}$$

最后一步用了自然单位制。由此可得

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = 1$$

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0$$

或统一写成

$$\{\alpha_\mu, \alpha_\nu\} = \alpha_\mu\alpha_\nu + \alpha_\nu\alpha_\mu = 2\delta_{\mu\nu}, \quad \mu,\nu = 0,1,2,3$$

即 Fermi 子满足**反对易关系**，或说 Cliffod 代数（对易子对应李代数，将对易与反对易关系统一的超对称对应 Grassmann 代数）。

下面试写出展开系数 α, β 的具体形式。如果只有三个反对易关系，那么用 2×2 矩阵就可以：

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

此即 Pauli 矩阵。但现在有 4 个反对易关系，那至少要用 4×4 矩阵（Gamma 矩阵）：

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} I_{2\times2} & 0 \\ 0 & -I_{2\times2} \end{pmatrix}$$

$$\alpha^i=\begin{pmatrix}0&\sigma^i\\\sigma^i&0\end{pmatrix},\quad \gamma^i=\beta\alpha^i=\begin{pmatrix}0&\sigma^i\\-\sigma^i&0\end{pmatrix}$$

于是

$$(p_0-\vec{\alpha}\cdot\vec{p}-\beta m_0)\psi=0\Rightarrow(\gamma^0p_0-\gamma^ip_i-m_0)\psi=0\Rightarrow(\not{p}-m_0)\psi=0$$

此即 **Dirac 方程**。其中用了 Feynman slash 记号 $\not{a}=\gamma^\mu a_\mu$.

什么叫自旋 1/2？电子是生活在 Mobius 带上的。就是转一圈差一负号，转两圈才回到原点。

3.平面波解与自旋求和公式

很多书都是先讲正则量子化，然后在静止系中求平面波解，再 Lorentz 变换到运动系。但这样做就要对 Lorentz 变换有一个深刻的理解，很多作者连群论都扯进去了。我想说的是，Dirac 方程的解很容易求出，根本用不着这么麻烦，既不需要场量子化，也不需要 Lorentz 变换。

左乘 $\not{p}+m$，Dirac 方程 $(\not{p}-m)\psi=0$ 回到 Klein-Gordon 方程：

$$(p^2-m^2)\psi=(-\partial_\mu\partial^\mu-m^2)\psi=(\Box^2+m^2)\psi=0$$

它也有平面波解 $\psi^\pm(x)=e^{\mp ipx}$，为与 Klein-Gordon 方程的解区分，引入旋量 u,v，将解写为

$$\psi^+(x)=e^{-ipx}u(p),\psi^-(x)=e^{+ipx}v(p)$$

代入 Dirac 方程，得

$$(i\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}-m)e^{-ip^\mu x_\mu}u(p)=(-ip^\mu i\gamma_\mu-m)e^{-ip^\mu x_\mu}u(p)=0\Rightarrow(\not{p}-m)u(p)=0$$

在 Dirac 表象下，其矩阵形式为

$$\begin{aligned}(\not{p}-m)\psi^+(x)&=(E_p-\vec{\alpha}\cdot\vec{p}-\beta m)u(p)e^{-ipx}\\&=\left[\begin{pmatrix}E_p&\\&E_p\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}&\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\\\vec{\sigma}\cdot\vec{p}&\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}m&\\&-m\end{pmatrix}\right]N_1\begin{pmatrix}\eta\\\xi\end{pmatrix}e^{-ipx}=0\end{aligned}$$

这是两个方程，我们取其中一个求解：

$$-\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\eta+(E_p+m)\xi=0\Rightarrow\xi=\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p+m}\eta$$

于是有

$$u(p)=N_1\begin{pmatrix}\eta\\\xi\end{pmatrix}=N_1\begin{pmatrix}\eta\\\dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p+m}\eta\end{pmatrix}$$

类似地，对于负能解有

$$(\not{p}+m)v(p)=0$$

$$\begin{pmatrix} -E_p-m & \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -E_p+m \end{pmatrix} N_2 \begin{pmatrix} \varsigma \\ \chi \end{pmatrix} e^{+ipx} = 0 \Rightarrow \varsigma = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p+m}\chi \Rightarrow v(p) = N_2 \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p+m}\chi \\ \chi \end{pmatrix}$$

其中u,v为 4 分量旋量，η,χ为 2 分量旋量，N 为归一化系数。下面来确定它们的具体形式。

（1）η,χ有两种选择

(a)取为$\vec{\sigma}\cdot\vec{p}$的本征态

设$\vec{p}$方向单位矢量$\vec{n}=(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)$，本征方程为（汪德新《量子力学》）：

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\varphi}\sin\theta \\ e^{i\varphi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

解久期方程，得本征值$\lambda=\pm1$，相应本征态为

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ \cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}$$

(b)取为静止系中σ_z的本征态

$$\sigma_z\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

其中(a)比较有用（对于讨论螺旋度问题），(b)比较简单。我们并不打算用它讨论具体实验，只想借助它给出自旋求和公式，所以采用后者。

注意，并不是取$\eta=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \chi=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，这种理解是错误的。真相是：

$$\eta_1=\chi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2=\chi_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

（2）归一化也有两种选择

定义 Dirac 共轭为$\overline{\psi}=\psi^\dagger\gamma^0$，则$\overline{u}=u^\dagger\gamma^0$，$\overline{v}=v^\dagger\gamma^0$.可以用$u^\dagger u$定义归一化，也可以用$\overline{u}u$定义归一化。后者更常见，所以我们用后者。

(a)“归一”门派

利用（钱伯初《量子力学习题精选与剖析》上 6.19 题）：

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{A})(\vec{\sigma}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + i\vec{\sigma}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$$

可得

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2 = \vec{p}^2$$

$$\bar{u}_\lambda u_{\lambda'} = N_1^2 \begin{pmatrix} \eta^+ & \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p+m}\eta^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \\ & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p+m}\eta \end{pmatrix} \delta_{\lambda\lambda'} = N_1^2[1-(\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p+m})^2]\eta^+\eta\delta_{\lambda\lambda'}$$

$$\xrightarrow[(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2=\vec{p}^2]{\eta^+\eta=1} N_1^2[1-\frac{\vec{p}^2}{(E_p+m)^2}]\delta_{\lambda\lambda'} \xrightarrow{E^2-\vec{p}^2=m^2} \frac{N_1^2}{E_p+m}2m\delta_{\lambda\lambda'}$$

取 $\bar{u}_\lambda u_{\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}$，得 $N_1 = \sqrt{\frac{E_p+m}{2m}}$. 其中 $\lambda,\lambda' = 1,2$.

(b)“归 2m（或 2E）”门派

如果取

$$\bar{u}_\lambda u_{\lambda'} = 2m\delta_{\lambda\lambda'}，\ \bar{v}_\lambda v_{\lambda'} = -2m\delta_{\lambda\lambda'}；或 u_\lambda^\dagger u_{\lambda'} = 2E\delta_{\lambda\lambda'}，\ v_\lambda^\dagger v_{\lambda'} = 2E\delta_{\lambda\lambda'}$$

则 $N_1 = N_2 = \sqrt{E_p+m}$. 同理可得正交关系：

$$\bar{u}_\lambda v_{\lambda'} = \bar{v}_\lambda u_{\lambda'} = 0 \text{或} u_\lambda^\dagger v_{\lambda'} = v_\lambda^\dagger u_{\lambda'} = 0$$

（3）投影算符（自旋求和公式）还有两种选择

(a)归一派

$$P_+ = \sum_{\lambda=1,2} u_\lambda \bar{u}_\lambda$$

$$= \frac{E_p+m}{2m}\left[\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p+m}\eta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_1^+ & \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p+m}\eta_1^+ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_2 \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p+m}\eta_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_2^+ & \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p+m}\eta_2^+ \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} I & \\ & -I \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2m}\begin{pmatrix} E_p+m & \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & \frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2}{E_p+m} \end{pmatrix}(\eta_1\eta_1^+ + \eta_2\eta_2^+)\begin{pmatrix} I & \\ & -I \end{pmatrix} \xrightarrow[(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2=E^2-m^2]{\eta_1\eta_1^+ + \eta_2\eta_2^+ = I}$$

$$\frac{1}{2m}\begin{pmatrix} E_p+m & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -E_p+m \end{pmatrix} = \frac{1}{2m}\left[E_p\begin{pmatrix} I & \\ & -I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}\cdot\vec{p} + m\begin{pmatrix} I & \\ & I \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2m}(\gamma^0 p_0 - \gamma^i p_i + m) = \frac{1}{2m}(\not{p}+m)$$

类似地有

$$P_- = -\sum_{\lambda=1,2} v_\lambda \bar{v}_\lambda = \frac{-\not{p}+m}{2m}$$

(b)归 2m 派

$$P_+ = \frac{1}{2m}\sum_{\lambda=1,2} u_\lambda \bar{u}_\lambda = \frac{\not{p}+m}{2m}，\ P_- = -\frac{1}{2m}\sum_{\lambda=1,2} v_\lambda \bar{v}_\lambda = \frac{-\not{p}+m}{2m}$$

两派投影定义不同，归一化不同，但投影后结果相同！两派谁也说服不了谁。如 Planck 所说，不是老一辈接受了新一派思想，而是老一辈死去了，新一派培养的年轻人成长起来。

第 1 步　构造作用量（50 分）

1.1.1　终极设计——作用量原理

Einstein 说过：“我想知道上帝是如何设计这个世界的。对这个或那个现象、这个或那个元素的谱我不感兴趣。我想知道的是他的思想，其他的都只是细节问题。”有人曾经问过我有没有一个公式可以描述整个世界，我的回答就是，可能会有，这个定律很可能就是最小作用量原理。《可怕的对称》生动地说道：整个宇宙的终极设计可以写到一张餐巾纸上，那一行紧凑的公式可以推导出所有物理定律。而那张餐巾纸上写的，其实就是作用量 S 的表达式。终极设计的 S 中一些量为常数，就可以退化成各种各样的特例。在电磁学、热学、相对论、量子力学中，S 也有各自的退化形式。而一旦终极设计的 S 中的所有项我们都弄清楚了，我们也就可以自豪地宣称我们理解宇宙了。

最小作用量原理、对称与守恒可能就是上帝设计世界的原则。最小作用量原理、对称与守恒不同于万有引力定律、Newton 第二定律这类的普通物理定律，他是物理定律的定律，是一切其他普通物理定律的基础。

最小作用量原理是分析力学的灵魂，而分析力学是牛顿力学形式化的结果，可见数学形式的完备化对于理论物理的深远影响。欲穷千里目，更上一层楼。如果理论物理想看得更远，需要站在巨人——“数学”的肩膀上。这就是“数学物理”这门学科的深远意义。

最小作用量原理的数学形式为

$$\delta S = 0$$

我们称 S 为作用量，δ 是变分计算。作用量定义为 $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)dt$（其中 L 是 Lagrange 函数，力学中常用的形式是 L=T-V，即动能减去势能），故

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} (\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q})dt = \int_{t_1}^{t_2} (\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}\delta q)dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} (\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}})\delta q dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q)dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} (\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}})\delta q dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\Big|_{t_1}^{t_2}\end{aligned}$$

第二项是一个全微分，只依赖于两端点的值（可称为“表面项”），等时变分为零。由此可得

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

此即 **Euler- Lagrange 方程**。它相当于 Newton 方程，但多一些东西——广义坐标不一定是位形空间中的坐标，它的含义要更广泛的多。在场论中，作用量为

$$S = \int_{t_1}^{t_2} Ldt = \int_{t_1}^{t_2}\int_V \mathcal{L}(\varphi, \partial_x\varphi, \partial_y\varphi, \partial_z\varphi, \partial_t\varphi)dxdydzdt = \int_\Omega \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi)d^4x$$

故 Euler-Lagrange 方程的形式为

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}$$

1.1.2 张量场（Bose 型舞台）

1.坐标变换

惯性系 S 中 x 点经 Poincare 变换成

$$x'^{\mu}=\Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}+a^{\mu}=(\delta^{\mu}{}_{\nu}+\omega^{\mu}{}_{\nu})x^{\nu}+a^{\mu}=x^{\mu}+\omega^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}+a^{\mu}$$

其中 $\delta^{\mu}{}_{\nu}$ 为 Kronecker 符号，$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ 为有限 Lorentz 变换矩阵，$\omega^{\mu}{}_{\nu}$ 为无穷小 Lorentz 变换矩阵；

a^{μ} 为时空平移变换。于是

$$\delta x^{\mu}=x'^{\mu}-x^{\mu}=\omega^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}+a^{\mu}$$

同理

$$\delta x_{\mu}=x'_{\mu}-x_{\mu}=g_{\mu\rho}(x'^{\rho}-x^{\rho})=g_{\mu\rho}(\omega^{\rho}{}_{\sigma}x^{\sigma}+a^{\rho})=g_{\mu\rho}(\omega^{\rho}{}_{\sigma}x_{\nu}g^{\nu\sigma}+a^{\rho})=\omega_{\mu}{}^{\nu}x_{\nu}+a_{\mu}$$

间隔不变性要求

$$\begin{aligned}x^{\mu}x_{\mu}=x'^{\mu}x'_{\mu}&=(x^{\mu}+\omega^{\mu}{}_{\rho}x^{\rho})(x_{\mu}+\omega_{\mu}{}^{\nu}x_{\nu})=x^{\mu}x_{\mu}+x^{\mu}\omega_{\mu}{}^{\nu}x_{\nu}+\omega^{\mu}{}_{\rho}x^{\rho}x_{\mu}+o(\omega^{2})\\&\approx x^{\mu}x_{\mu}+x^{\mu}\omega_{\mu}{}^{\nu}x_{\nu}+\omega^{\nu}{}_{\mu}x^{\mu}x_{\nu}=x^{\mu}x_{\mu}+(\omega_{\mu}{}^{\nu}+\omega^{\nu}{}_{\mu})x^{\mu}x_{\nu}\end{aligned}$$

于是

$$\omega_{\mu}{}^{\nu}+\omega^{\nu}{}_{\mu}=0$$

这表明 4×4 的 Lorentz 矩阵是反对称张量，16 个矩阵元中只有 6 个独立参数。

2.场的变换

在一给定的惯性系 S 中，点 P 坐标为 x^{μ}，场函数为 $f(x^{\mu})$；在另一参考系 S′中，点 P 坐标

为 x'^{μ}，场函数为 $f'(x'^{\mu})$，它可以在邻域 Taylor 展开为

$$\begin{aligned}f'(x'^{\mu})&=f'(x^{\mu}+\delta x^{\mu})=f'(x^{\mu})+\delta x^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}f'(x^{\mu})+\cdots\\&=f'(x^{\mu})+\delta x^{\mu}\partial_{\mu}f(x^{\mu})+\delta x^{\mu}\partial_{\mu}[f'(x^{\mu})-f(x^{\mu})]+\cdots\\&=f'(x^{\mu})+\delta x^{\mu}\partial_{\mu}f(x^{\mu})+o(\delta x^{2})\approx f'(x^{\mu})+\delta x^{\mu}\partial_{\mu}f(x^{\mu})\end{aligned}$$

定义

$$\delta_{0}f=f'(x^{\mu})-f(x^{\mu})$$

则 Poincare 不变要求

$$\begin{aligned}\delta f&=f'(x'^{\mu})-f(x^{\mu})=0\\&=f'(x^{\mu})-f(x^{\mu})+\delta x^{\mu}\partial_{\mu}f(x^{\mu})=\delta_{0}f+\delta x^{\mu}\partial_{\mu}f\\&=\delta_{0}f+(\omega^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}+a^{\mu})\partial_{\mu}f\end{aligned}$$

（1）场的 Lorentz 变换

对 Lorentz 变换，可取 $a^{\mu}=0$，则

$$\delta f = \delta_0 f + \omega^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu f = 0$$

（a）标量场

标量场不随参考系改变，可定义为满足如下条件的场：

$$\varphi'(x'^\mu) = \varphi(x^\mu)$$

对于这样的场，显然有

$$\delta\varphi = \varphi'(x'^\mu) - \varphi(x^\mu) = 0$$

并且，φ 的标量函数，如 $F(\varphi) = \varphi^n$，根据标量场定义，也满足 Lorentz 不变性：

$$\delta F(\varphi) = [\varphi'(x'^\mu)]^n - [\varphi(x^\mu)]^n = 0$$

（b）标量场的梯度

那么，φ 的导函数 $\partial_\mu\varphi$ 是否满足呢？让我们试试看：

$$\delta(\partial_\mu\varphi) = [\delta,\partial_\mu]\varphi + \partial_\mu\delta\varphi \xrightarrow{\delta\varphi=0} [\delta,\partial_\mu]\varphi \xrightarrow{\delta=\delta_0+\delta x^\nu\partial_\nu} [\delta_0,\partial_\mu]\varphi + [\delta x^\nu\partial_\nu,\partial_\mu]\varphi$$

$$\xrightarrow{[\delta_0,\partial_\mu]=0} [\delta x^\nu\partial_\nu,\partial_\mu]\varphi \xrightarrow{\delta x^\nu=\omega^\nu{}_\rho x^\rho} [\omega^\nu{}_\rho x^\rho\partial_\nu,\partial_\mu]\varphi = \omega^\nu{}_\rho x^\rho\partial_\nu\partial_\mu\varphi - \omega^\nu{}_\rho\partial_\mu(x^\rho\partial_\nu\varphi)$$

$$= \omega^\nu{}_\rho x^\rho\partial_\nu\partial_\mu\varphi - \omega^\nu{}_\rho x^\rho\partial_\mu\partial_\nu\varphi - \omega^\nu{}_\rho\partial_\mu x^\rho\partial_\nu\varphi = -\omega^\nu{}_\rho\partial_\mu x^\rho\partial_\nu\varphi = -\omega^\nu{}_\rho\partial_\mu x^\mu g^\rho_\mu\partial_\nu\varphi$$

$$= -\omega^\nu{}_\mu\partial_\nu\varphi \xrightarrow{\omega^\nu{}_\mu+\omega_\mu{}^\nu=0} \omega_\mu{}^\nu\partial_\nu\varphi$$

其中用到

$$\partial_\mu x^\nu = \partial_\mu x^\mu g^\nu_\mu = g^\nu_\mu$$

我们知道，Lorentz 变换 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 将 4 维矢量 x^ν 变成另一个 4 维矢量 $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$，故这里的 $\partial_\mu\varphi$ 相当于矢量（标量的**梯度**为矢量），称为矢量场（按矢量的变换规律发生变换的场），可记作

$$A_\mu(x) = \partial_\mu\varphi(x)$$

则

$$\delta A_\mu(x) = \omega_\mu{}^\nu A_\nu(x)$$

（c）矢量场的散度

矢量带一个指标，在不同参考系下的形式不同，不能作为作用量中的一项。两个矢量的乘积 $A^\mu A_\mu$ 或 $\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi$ 呢？它的 Lorentz 指标都是**哑标**，应该不随参考系改变。下面我们来证明这件事：

$$\delta(A^\mu A_\mu) = (\delta A^\mu)A_\mu + A^\mu(\delta A_\mu) = \omega^\mu{}_\rho A^\rho A_\mu + A^\mu\omega_\mu{}^\rho A_\rho$$

$$= \omega^\mu{}_\rho A^\rho A_\mu + A^\rho\omega_\mu{}^\rho A_\mu = (\omega^\mu{}_\rho + \omega_\mu{}^\rho)A^\rho A_\mu = 0$$

因为矢量的**散度**为标量，所以我们预测 $\partial_\mu A^\mu$ 或 $\partial_\mu\partial^\mu\varphi$ 也是 Lorentz 标量。这个很容易证明：

$$\delta(\partial_\mu A^\mu)=[\delta,\partial_\mu]A^\mu+\partial_\mu\delta A^\mu \xrightarrow{\delta A^\mu=\omega^\mu{}_\nu A^\nu}[\delta,\partial_\mu]A^\mu+\partial_\mu\omega^\mu{}_\nu A^\nu$$
$$=[\delta_0,\partial_\mu]A^\mu+[\delta x^\nu\partial_\nu,\partial_\mu]A^\mu+\omega^\mu{}_\nu\partial_\mu A^\nu=[\omega^\nu{}_\rho x^\rho\partial_\nu,\partial_\mu]A^\mu+\omega^\mu{}_\nu\partial_\mu A^\nu$$
$$=-\omega^\nu{}_\rho\partial_\mu x^\rho\partial_\nu A^\mu+\omega^\mu{}_\nu\partial_\mu A^\nu=-\omega^\nu{}_\rho g^\rho_\mu\partial_\nu A^\mu+\omega^\mu{}_\nu\partial_\mu A^\nu=-\omega^\nu{}_\mu\partial_\nu A^\mu+\omega^\nu{}_\mu\partial_\nu A^\mu=0$$

（d）矢量场的梯度

标量的梯度$\partial_\mu\varphi$带一个角标，可看作矢量；矢量的散度$\partial_\mu A^\mu$不带自由指标，可看作标量；那么$\partial_\mu A_\nu$呢？矢量的梯度又是啥？在直角坐标中，有

$$\nabla\vec{A}=(\vec{e}_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\vec{e}_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\vec{e}_3\frac{\partial}{\partial x_3})(A_1\vec{e}_1+A_2\vec{e}_2+A_3\vec{e}_3)=\sum_{i,j=1}^{3}T_{ij}$$

其中$T_{ij}=\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\vec{e}_i\vec{e}_j$．我们把两个矢量不作任何运算并排放在一起（既非点积也非叉积）称为并矢，它是最简单的张量！所以，矢量的梯度$\partial_\mu A_\nu$带两个角标，应看作张量，可记作$B_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu$（这是协变张量；如果带几个上标则为逆变张量；七上八下的称为混合张量）。我们预测，张量的双点积$B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$或$\partial_\mu A_\nu(x)\partial^\mu A^\nu(x),\partial_\mu A_\nu(x)\partial^\nu A^\mu(x)$将给出标量。证明方法同上，留给有兴趣的读者。

（2）场的时空平移变换

对时空平移$\delta x^\mu=a^\mu$，可取$\omega^\mu_\nu=0$，则

$$\delta f=\delta_0 f+a^\mu\partial_\mu f=0$$

对于标量场，根据标量场定义，不用算也知道它在时空平移下不变；对于矢量场，有

$$\delta(\partial_\mu\varphi)=[\delta,\partial_\mu]\varphi+\partial_\mu\delta\varphi \xrightarrow[[\delta_0,\partial_\mu]=0]{\delta\varphi=0,\delta=\delta_0+\delta x^\nu\partial_\nu}[\delta x^\nu\partial_\nu,\partial_\mu]\varphi \xrightarrow{\delta x^\nu=a^\nu}[a^\nu\partial_\nu,\partial_\mu]\varphi=0$$

但也不是任意形式都可以，比如$x^\mu\partial_\mu\varphi(x)$就不行：

$$\delta(x^\mu\partial_\mu\varphi)=\delta x^\mu\partial_\mu\varphi+x^\mu\delta(\partial_\mu\varphi)\xrightarrow{\delta(\partial_\mu\varphi)=0}\delta x^\mu\partial_\mu\varphi=a^\mu\partial_\mu\varphi\neq 0$$

上述讨论可总结为下表：

自旋（张量阶数）	Lagrange 量可能形式
0	$\varphi^n(x),\cos\varphi(x),\partial_\mu\partial^\mu\varphi(x),\partial_\mu\varphi(x)\partial^\mu\varphi(x),\cdots$
1	$A_\mu(x)A^\mu(x),\partial_\mu A^\mu(x),\partial_\mu A_\nu(x)\partial^\mu A^\nu(x),\partial_\mu A_\nu(x)\partial^\nu A^\mu(x),\cdots$
2	$B_{\mu\nu}(x)B^{\mu\nu}(x),\partial_\rho B_{\mu\nu}(x)\partial^\rho B^{\mu\nu}(x),\partial_\rho B_{\mu\nu}(x)\partial^\mu B^{\rho\nu}(x),\cdots$

3.几种典型张量场的 Lagrange 量

构造具体某种场的 Lagrange 量的方法是：先用量纲分析决定可能形式（含待定参数）；再用 Euler-Lagrange 方程决定最终形式（待定参数具体取值）。

（1）Klein-Gordon 场（自旋 0）

假设 $\mathcal{L}=T-V=\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi-V(\varphi)$，代入 Euler-Lagrange 方程 $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}=\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}$，得

$$0-\frac{\partial V}{\partial\varphi}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}=\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}=\frac{1}{2}\partial_\mu\frac{\partial(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi)}{\partial(\partial_\mu\varphi)}-0=\partial_\mu\partial^\mu\varphi$$

根据 Klein-Gordon 方程 $(\partial_\mu\partial^\mu+m^2)\varphi=0$，得

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi}=m^2\varphi$$

解此微分方程，再代回最初的假设，可得

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi-\frac{1}{2}m^2\varphi^2$$

（2）Maxwell 场（自旋 1）

矢量场 Lagrange 量的一般形式可假设为（周邦融《量子场论》，§2.7）

$$\mathcal{L}(A^\mu,\partial_\nu A^\mu)=-\frac{1}{2}[a\partial_\mu A^\nu\partial^\mu A_\nu+b\partial_\mu A^\nu\partial_\nu A^\mu+c(\partial_\mu A^\mu)^2+dA_\mu A^\mu]$$

代入 Euler-Lagrange 方程，得

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A^\sigma}=-\frac{1}{2}d\frac{\partial(A_\mu A^\mu)}{\partial A^\sigma}$$

$$=\partial_\rho\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A^\sigma)}=-\frac{1}{2}[a\partial_\rho\frac{\partial(\partial_\mu A^\nu\partial^\mu A_\nu)}{\partial(\partial_\rho A^\sigma)}+b\partial_\rho\frac{\partial(\partial_\mu A^\nu\partial_\nu A^\mu)}{\partial(\partial_\rho A^\sigma)}+c\partial_\rho\frac{\partial(\partial_\mu A^\mu)^2}{\partial(\partial_\rho A^\sigma)}]$$

即

$$d\frac{\partial(A_\mu A^\mu)}{\partial A^\sigma}=d\frac{\partial A_\mu}{\partial A^\sigma}A^\mu+dA_\mu\frac{\partial A^\mu}{\partial A^\sigma}$$

$$=a\partial_\rho[\frac{\partial(\partial_\mu A^\nu)}{\partial(\partial_\rho A^\sigma)}\partial^\mu A_\nu+\partial_\mu A^\nu\frac{\partial(\partial^\mu A_\nu)}{\partial(\partial_\rho A^\sigma)}]+b\partial_\rho[\frac{\partial(\partial_\mu A^\nu)}{\partial(\partial_\rho A^\sigma)}\partial_\nu A^\mu+\partial_\mu A^\nu\frac{\partial(\partial_\nu A^\mu)}{\partial(\partial_\rho A^\sigma)}]$$

$$+2c\partial_\rho\partial_\mu A^\mu\frac{\partial(\partial_\mu A^\mu)}{\partial(\partial_\rho A^\sigma)}$$

因为

$$X_\mu=X_\nu g^\nu_\mu\Rightarrow\frac{X_\mu}{X_\nu}=g^\nu_\mu,\ \ \frac{X_\mu}{X^\nu}=g_{\mu\nu},\frac{X^\mu}{X_\nu}=g^{\mu\nu},\frac{X^\mu}{X^\nu}=g^\mu_\nu$$

即分子指标位置不变（逆变仍是逆变，协变仍是协变），分母指标位置颠倒（上标变下标，下标变上标）。

所以

$$dg_{\mu\sigma}A^{\mu}+dA_{\mu}g^{\mu}_{\sigma}=2dA_{\sigma}$$
$$=a\partial_{\rho}[g^{\rho}_{\mu}g^{\nu}_{\sigma}\partial^{\mu}A_{\nu}+\partial_{\mu}A^{\nu}g^{\rho\mu}g_{\nu\sigma}]+b\partial_{\rho}[g^{\rho}_{\mu}g^{\nu}_{\sigma}\partial_{\nu}A^{\mu}+\partial_{\mu}A^{\nu}g^{\rho}_{\nu}g^{\mu}_{\sigma}]+2c\partial_{\rho}\partial_{\mu}A^{\mu}g^{\rho}_{\mu}g^{\mu}_{\sigma}$$
$$=a\partial_{\rho}[2\partial^{\rho}A_{\sigma}]+b\partial_{\rho}[2\partial_{\sigma}A^{\rho}]+2c\partial_{\sigma}\partial_{\mu}A^{\mu}=2a\partial_{\mu}\partial^{\mu}A_{\sigma}+2(b+c)\partial_{\sigma}\partial_{\mu}A^{\mu}$$

注意到偏导数可对易。正误检查：相同哑指标缩并后，每一项剩下的自由指标上下位置相同。

两边乘以 $g^{\nu\sigma}$，移项化简得

$$a\partial_{\mu}\partial^{\mu}A^{\nu}+(b+c)\partial^{\nu}\partial_{\mu}A^{\mu}-dA^{\nu}=0$$

与 Maxwell 方程 $\partial_{\mu}F^{\mu\nu}=\partial_{\mu}(\partial^{\mu}A^{\nu}-\partial^{\nu}A^{\mu})=\partial_{\mu}\partial^{\mu}A^{\nu}-\partial_{\mu}\partial^{\nu}A^{\mu}=0$ 比较，可得

$$a=1,b+c=-1,d=0$$

于是

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{2}[\partial_{\mu}A^{\nu}\partial^{\mu}A_{\nu}-(c+1)\partial_{\mu}A^{\nu}\partial_{\nu}A^{\mu}+c(\partial_{\mu}A^{\mu})^{2}]$$
$$=-\frac{1}{2}\partial_{\mu}A^{\nu}(\partial^{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A^{\mu})-\frac{c}{2}[(\partial_{\mu}A^{\mu})^{2}-\partial_{\mu}A^{\nu}\partial_{\nu}A^{\mu}]$$
$$=-\frac{1}{2}\partial_{\mu}A^{\nu}g_{\nu\rho}[\partial^{\mu}A^{\rho}-\partial^{\rho}A^{\mu}]-\frac{c}{2}[(\partial_{\mu}A^{\mu})^{2}+A^{\mu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}A^{\nu}-A^{\nu}\partial_{\nu}\partial_{\mu}A^{\mu}-\partial_{\mu}A^{\nu}\partial_{\nu}A^{\mu}]$$
$$=-\frac{1}{2}\partial_{\mu}A_{\rho}F^{\mu\rho}-\frac{c}{2}[\partial_{\mu}A^{\mu}\partial_{\nu}A^{\nu}+A^{\mu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}A^{\nu}-A^{\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}A^{\mu}-\partial_{\mu}A^{\nu}\partial_{\nu}A^{\mu}]$$
$$=-\frac{1}{4}(\partial_{\mu}A_{\rho}F^{\mu\rho}+\partial_{\rho}A_{\mu}F^{\rho\mu})-\frac{c}{2}[\partial_{\mu}(A^{\mu}\partial_{\nu}A^{\nu})-\partial_{\mu}(A^{\nu}\partial_{\nu}A^{\mu})]$$
$$=-\frac{1}{4}(\partial_{\mu}A_{\rho}F^{\mu\rho}-\partial_{\rho}A_{\mu}F^{\mu\rho})-\frac{c}{2}\partial_{\mu}(A^{\mu}\partial_{\nu}A^{\nu}-A^{\nu}\partial_{\nu}A^{\mu})$$
$$=-\frac{1}{4}F_{\mu\rho}F^{\mu\rho}+div\xrightarrow[\rho\to\nu]{div\to 0}-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

最后一步丢弃了对运动方程无影响的 4 维散度项。

讨论：

（a）若系数 d 不等于零，称为 Proca（重矢量）场。传递电磁作用的光子是零质量的，使得电磁作用能传到无穷远。弱作用的媒介子 W 和 Z 很重，使得弱作用限制于原子核尺度内。

（b）构造作用量时，除了物理上要求的 Poincare 不变性，有时还要考虑数学美，规范不变性就是数学美的要求。但是质量项会破坏规范不变性。光子和胶子质量为零，自然而然地满足规范不变性；为了让弱作用满足规范不变性，人们假定规范场（守规矩的乖乖女）本来很清纯——没有质量，与 Higgs 接触后才沾染了浊气（吸入 Goldstone 粒子~PM2.5）——获得质量。这就是 Higgs 机制。物理学允许异想天开，只要想法能被实验证明。LHC（大型强子对撞机）发现了 Higgs，所以 Higgs 被尊为上帝粒子；如果当初没发现，它就是垃圾粒子。这个问题留到后面再谈。

（3）Einstein 场（自旋 2）

一般形式为

$$L=ah^{\mu\nu,\sigma}h_{\mu\nu,\sigma}+bh^{\mu\nu}{}_{,\nu}h^{\sigma}{}_{\mu,\sigma}+ch^{\mu\nu}{}_{,\nu}h^{\sigma}{}_{\sigma,\mu}+dh^{\nu}{}_{\nu,\mu}h_{\sigma}{}^{\sigma,\mu}-\lambda T^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$$

其中

$$A_{\mu,\nu}=\partial_\nu A_\mu, A_\mu{}^{,\nu}=\partial^\nu A_\mu$$

$$a=\frac{1}{2}, b=-1, c=1, d=-\frac{1}{2}, \lambda=\sqrt{8\pi G}, \hbar=c=1$$

证明过程可参考 Feynman 等《Feynman lectures on gravitation》的 3.6 节。

1.1.3 旋量场（Fermi 型舞台）

上一节，我们通过 4 维矢量的 Lorentz 变换构造了张量场的作用量。这一节，我们通过旋量的 Lorentz 变换性质来构造旋量场的作用量。

1.旋量变换的约束方程

假设 S 参考系旋量波函数为$\psi(x^\mu)$，S′系旋量为$\psi'(x'^\mu)$，两个惯性参考系间的变换关系为

$$\psi'(x'^\mu)=L\psi(x^\mu), x'^\mu=\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

变换后的旋量波函数应该仍然满足 Dirac 方程：

$$(i\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x'^\mu}-m)\psi'(x'^\mu)=0$$

所以

$$i\gamma^\mu\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}L\psi(x^\mu)-mL\psi(x^\mu)=0$$

左乘S^{-1}，交换求和指标，得

$$iS^{-1}\gamma^\nu\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}L\psi(x^\mu)-mL\psi(x^\mu)=0$$

为了回到变换前的 Dirac 方程$(i\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}-m)\psi(x^\mu)=0$，必须有

$$L^{-1}\gamma^\nu\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}L=\gamma^\mu \text{ 或 } L\gamma^\mu L^{-1}=\gamma^\nu\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}$$

根据$x'^\mu=\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$，可得$\partial x'^\mu=\Lambda^\mu{}_\nu\partial x^\nu$，所以上式还可写成

$$L\gamma^\mu L^{-1}=(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu\gamma^\nu$$

这就是 Dirac 方程的 Lorentz 协变性对变换矩阵 L 所加的限制。那么 L 的具体形式是什么呢？很多书都是先给出 L 的形式，然后再证明这种形式合理。科研中很多进展确实是猜测出来的，但灵感这种“跳跃式的”非理性思维只有天才具备，我们是凡人，所以先不给出 L 的形式，而是从其他角度更“自然地”推出 L 具有那种“令人费解的”形式，使它来得不那么“突兀”。为了做到这一点，我们需要一点群论知识。

2.Lorentz 群的旋量表示

我们把满足**封闭性**、**结合律**、有**单位元**、有**逆元**素的代数结构称为**群**。如果还满足交换律，则称为 **Abel 群**；如果只满足封闭性和结合律，则称为半群。如果具有加（减）、乘两种运算，

对加法构成 Abel 群，对乘法构成半群，且满足分配律，则称为**环**。如果对于加法和乘法都构成 Abel 群，则称为**域**。通俗的说，群就是加减的集合（或乘除的集合）；环就是加减乘的集合；域就是加减乘除的集合（张贤科《高等代数学》）。

群可以看作对称变换的集合，群的元素就是对称变换。例如，模方绕 z 轴转 90 度后复原。元素数目称为群的**阶**。如果元素数目是有限个，对应有限群；元素数目无穷多，对应连续群（通常称为 **Lie 群**）。宇宙本质是离散的，按理说研究有限群就行了。但是离散的东西不能求导也不能积分，我们也希望能转动任意角，而非只能转 90 度、180 度等特定角，所以 Lie 群才是群论的核心。

那么，转动后各点的坐标如何变化？为了便于理解，要把对称变换的具体形式用矩阵写出来，这种将**抽象的群**用**具体的矩阵**表示出来的方法称为**群的表示**。

如果两个表示矩阵相似，则称为等价表示；如果表示矩阵是（分块）对角的，则称可约表示。群表示论关键就在于找出所有**不等价不可约表示**，它可以作为一组正交完备基，其他表示都能用这组基通过组合来构造。

我们把 n 维实转动记作 O(n)，n 维复转动记作 U(n)，其中 O 表示正交，U 表示**幺正**，都是英文单词首字母。表示矩阵的行列式可以是 1，-1. 如果只考虑行列式为+1（**幺模**）的表示，这种特殊的表示就记作 SO(n)，SU(n)，其中 S 是 special 的简写。

两个 n 维矢量通过 SO(n)【n×n 实矩阵】联系起来，两个 n 维旋量通过 SU(n)【n×n 复矩阵】联系起来。因为一个复数对应两个实数，所以 2 维复空间相当于 4 维实空间，但是我们只能想象 3 维，所以 2 维复转动不能用几何图形画出来，只能用代数方法抽象地讨论。

假设两个 2 维旋量 ξ，ξ' 间相应于 SU(2)群的 2×2 变换矩阵为 U，则

$$\xi'=\begin{pmatrix}\xi_1'\\ \xi_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}=U\xi$$

注意这里讨论的是左手旋量，实际上还有右手旋量 η。为区分，右手旋量的指标都加点：

$$\eta=\begin{pmatrix}\eta_{\cdot 1}\\ \eta_{\cdot 2}\end{pmatrix}$$

根据 U 的幺正幺模性质，有

$$U^{\dagger}=\begin{pmatrix}a^* & b^*\\ c^* & d^*\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}a^* & c^*\\ b^* & d^*\end{pmatrix}=U^{-1}=\frac{U_{ad}}{\det U}\xrightarrow{\det U=1}\begin{pmatrix}d & -c\\ -b & a\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

其中 U_{ad} 表示伴随矩阵。由此可得 $d=a^*,c=-b^*$，$\det U=|a|^2+|b|^2=1$，于是

$$\begin{pmatrix}\xi_1'\\ \xi_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ -b^* & a^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$$

为了求出 a，b 具体值，我们要寻找旋量与矢量之间的关系。这个问题 Ryder，Greiner，朱洪元的书都讨论过，但还是喀兴林《高等量子力学》写的最清楚。既然 U 矩阵有两个复数和一个限制（幺模），所以独立的实参数只有三个。我们不妨将 a，b 写成实数形式：

$$a=me^{i\alpha},b=ne^{i\beta}$$

考虑到 $\det U=|a|^2+|b|^2=1$，可设 $m=\cos\gamma,n=\sin\gamma$，则 U 矩阵及逆矩阵变成

$$U=\begin{pmatrix} e^{i\alpha}\cos\gamma & e^{i\beta}\sin\gamma \\ -e^{-i\beta}\sin\gamma & e^{-i\alpha}\cos\gamma \end{pmatrix},\ U^{-1}=\begin{pmatrix} e^{-i\alpha}\cos\gamma & -e^{i\beta}\sin\gamma \\ e^{-i\beta}\sin\gamma & e^{i\alpha}\cos\gamma \end{pmatrix}$$

为了建立复空间与实空间的联系，定义

$$h=\vec{\sigma}\cdot\vec{r}=\sigma_1 x+\sigma_2 y+\sigma_3 z=\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}x+\begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}y+\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}z=\begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix}$$

其中 σ_i 为 Pauli 矩阵。

根据群表示论，经过相似变换的两个矩阵等价，所以

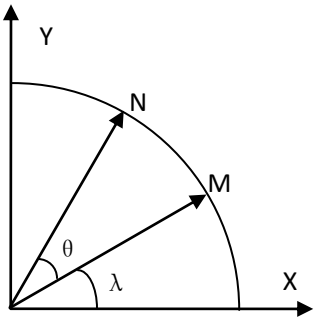
$$h'=\vec{\sigma}\cdot\vec{r}'=\begin{pmatrix} z' & x'-iy' \\ x'+iy' & -z' \end{pmatrix}$$

$$\sim UhU^{-1}=\begin{pmatrix} e^{i\alpha}\cos\gamma & e^{i\beta}\sin\gamma \\ -e^{-i\beta}\sin\gamma & e^{-i\alpha}\cos\gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\alpha}\cos\gamma & -e^{i\beta}\sin\gamma \\ e^{-i\beta}\sin\gamma & e^{i\alpha}\cos\gamma \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} ze^{i\alpha}\cos\gamma+(x+iy)e^{i\beta}\sin\gamma & (x-iy)e^{i\alpha}\cos\gamma-ze^{i\beta}\sin\gamma \\ -ze^{-i\beta}\sin\gamma+(x+iy)e^{-i\alpha}\cos\gamma & -(x-iy)e^{-i\beta}\sin\gamma-ze^{-i\alpha}\cos\gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\alpha}\cos\gamma & -e^{i\beta}\sin\gamma \\ e^{-i\beta}\sin\gamma & e^{i\alpha}\cos\gamma \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} z\cos^2\gamma+(x+iy)e^{i(\beta-\alpha)}\sin\gamma\cos\gamma & -(x+iy)e^{2i\beta}\sin^2\gamma+(x-iy)e^{2i\alpha}\cos^2\gamma \\ -z\sin^2\gamma+(x-iy)e^{i(\alpha-\beta)}\sin\gamma\cos\gamma & -2ze^{i(\alpha+\beta)}\sin\gamma\cos\gamma \\ (x+iy)e^{-2i\alpha}\cos^2\gamma-(x-iy)e^{-2i\beta}\sin^2\gamma & z\sin^2\gamma-(x+iy)e^{i(\beta-\alpha)}\sin\gamma\cos\gamma \\ -2ze^{-i(\alpha+\beta)}\sin\gamma\cos\gamma & -z\cos^2\gamma-(x-iy)e^{i(\alpha-\beta)}\cos\gamma\sin\gamma \end{pmatrix}$$

为求出待定参数 α,β,γ，需要求出经过坐标变换后新坐标 (x',y',z') 与旧坐标 (x,y,z) 之间关系。为简便，考虑三维空间的二维转动：



在右手坐标系下，M 点 (x,y,z) 逆时针转到 N 点 (x',y',z')，满足

$$x=r\cos\lambda,\ y=r\sin\lambda$$

$$\begin{cases} x'=r\cos(\lambda+\theta)=x\cos\theta-y\sin\theta \\ y'=r\sin(\lambda+\theta)=x\sin\theta+y\cos\theta \\ z'=z \end{cases}$$

所以

$$h'=\begin{pmatrix} z' & x'-iy' \\ x'+iy' & -z' \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} z & x\cos\theta-y\sin\theta-i(x\sin\theta+y\cos\theta) \\ x\cos\theta-y\sin\theta+i(x\sin\theta+y\cos\theta) & -z \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} z & (x-iy)e^{-i\theta} \\ (x+iy)e^{i\theta} & -z \end{pmatrix}$$

比较系数，可得

$$z=z\cos^2\gamma+(x+iy)e^{i(\beta-\alpha)}\cos\gamma\sin\gamma+(x-iy)e^{i(\alpha-\beta)}\sin\gamma\cos\gamma-z\sin^2\gamma$$

$$(x-iy)e^{-i\theta}=-(x+iy)e^{2i\beta}\sin^2\gamma+(x-iy)e^{2i\alpha}\cos^2\gamma-2ze^{i(\alpha+\beta)}\sin\gamma\cos\gamma$$

所以

$$\sin\gamma=0,\cos\gamma=1,\alpha=-\frac{\theta}{2}$$

于是

$$U=\begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix}$$

为以后方便，我们**将矩阵形式写成矩阵函数形式**：

$$U=\begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}-\frac{i\theta}{2}\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}(-\frac{i\theta}{2})^2\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}+\frac{1}{3!}(-\frac{i\theta}{2})^3\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}+\cdots$$
$$=1-\frac{i\theta}{2}\sigma_z+\frac{1}{2}(-\frac{i\theta}{2}\sigma_z)^2+\frac{1}{3!}(-\frac{i\theta}{2}\sigma_z)^3+\cdots=\exp(-\frac{i}{2}\sigma_z\theta)$$

注意，我们这里取的右手系。如果取左手系，将差一负号：

$$U=\exp(\frac{i}{2}\sigma_z\theta)$$

另外，上面只讨论了绕 z 轴转动相应的复矩阵，更一般的情况是允许绕任意轴转动。所以，更一般的变换矩阵为

$$U=\exp(-\frac{i}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{\theta})=\exp(-\frac{i}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\theta)$$

当然，这还不是最一般的。因为这也仅包括了转动。在最开始讲 Lorentz 变换时，我们说沿 x 轴以速度 v 平动（通常称为 boost，可译为推动）等价于虚时间轴 $\tau=ict$ 下转动虚数角 $i\phi$.

所以平动和转动可以通过复变量统一起来（一旦双曲函数自变量改为虚数，它就变成有周期性的三角函数了）。所以最一般的变换矩阵为

$$U_R=\exp[\frac{i}{2}\vec{\sigma}\cdot(\vec{\theta}-i\vec{\phi})],U_L=\exp[\frac{i}{2}\vec{\sigma}\cdot(\vec{\theta}+i\vec{\phi})]$$

注意，这里为与 Ryder 比较，这里已经改成左手系。并且，加点表示左手（与通常习惯相反）。其实，大家不必对左和右的定义过于执着，这完全是人为的。绝对的左和绝对的右没有意义，只有相对的才有意义。我可以将交换对称定义成 Bose 子，反对称定义成 Fermi 子，也可以反过来，这完全看第一个发现这件事的作者癖好。不管是 $e^{i\theta}$ 还是 $e^{-i\theta}$ 都不可测，可观测量

——模的平方是一样的。

搞清了 SU(2)，接下来就可以构造两个 Dirac 旋量ψ间的 Lorentz 变换矩阵 L 了。但是注意，Dirac 旋量是 4 维的，而我们前面讨论的 SU(2)变换矩阵 U 是 2×2 的，它只能对 2 维的 Weyl 旋量ξ,η进行变换。所以，接下来的首要工作上将 Weyl 旋量组合成 Dirac 旋量：

$$\psi=\begin{pmatrix}\eta\\ \xi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\phi_R\\ \phi_L\end{pmatrix}$$

于是

$$\psi'=L\psi=\begin{pmatrix}\exp[\frac{i}{2}\vec{\sigma}\cdot(\vec{\theta}-i\vec{\phi})]\phi_R\\ \exp[\frac{i}{2}\vec{\sigma}\cdot(\vec{\theta}+i\vec{\phi})]\phi_L\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}[I_{2\times2}+\frac{i}{2}\vec{\sigma}\cdot(\vec{\theta}-i\vec{\phi})]\phi_R\\ [I_{2\times2}+\frac{i}{2}\vec{\sigma}\cdot(\vec{\theta}+i\vec{\phi})]\phi_L\end{pmatrix}$$

$$=\left[\begin{pmatrix}I_{2\times2}&\\ &I_{2\times2}\end{pmatrix}+\frac{i}{2}\begin{pmatrix}\vec{\sigma}\cdot(\vec{\theta}-i\vec{\phi})&0\\ 0&\vec{\sigma}\cdot(\vec{\theta}+i\vec{\phi})\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\phi_R\\ \phi_L\end{pmatrix}=\left[I_{4\times4}+\frac{i}{2}\Gamma\right]\begin{pmatrix}\phi_R\\ \phi_L\end{pmatrix}$$

其中

$$\Gamma=\begin{pmatrix}\vec{\sigma}\cdot(\vec{\theta}-i\vec{\phi})&0\\ 0&\vec{\sigma}\cdot(\vec{\theta}+i\vec{\phi})\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(\theta_1-i\phi_1)\sigma_1+(\theta_2-i\phi_2)\sigma_2+(\theta_3-i\phi_3)\sigma_3&0\\ 0&(\theta_1-i\phi_1)\sigma_1+(\theta_2-i\phi_2)\sigma_2+(\theta_3-i\phi_3)\sigma_3\end{pmatrix}$$

$$=\theta_1\begin{pmatrix}\sigma_1&\\ &\sigma_1\end{pmatrix}+\theta_2\begin{pmatrix}\sigma_2&\\ &\sigma_2\end{pmatrix}+\theta_3\begin{pmatrix}\sigma_3&\\ &\sigma_3\end{pmatrix}$$

$$+i\phi_1\begin{pmatrix}-\sigma_1&\\ &\sigma_1\end{pmatrix}+i\phi_2\begin{pmatrix}-\sigma_2&\\ &\sigma_2\end{pmatrix}+i\phi_3\begin{pmatrix}-\sigma_3&\\ &\sigma_3\end{pmatrix}$$

利用三阶全反对称张量ε（$\varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312}=1,\varepsilon_{132}=\varepsilon_{213}=\varepsilon_{321}=-1$，其余为零），有

$$\sigma_i\sigma_j=i\sigma_k\varepsilon_{ijk}$$

$$[\sigma_i,\sigma_j]=2i\sigma_k\varepsilon_{ijk}$$

在 Weyl 表象中，Gamma 矩阵定义为

$$\gamma^0=\begin{pmatrix}&I_{2\times2}\\ I_{2\times2}&\end{pmatrix},\gamma^i=\begin{pmatrix}&\sigma_i\\ -\sigma_i&\end{pmatrix}$$

满足

$$[\gamma^0,\gamma^i]=\begin{pmatrix}&I_{2\times2}\\ I_{2\times2}&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&\sigma_i\\ -\sigma_i&\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}&\sigma_i\\ -\sigma_i&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&I_{2\times2}\\ I_{2\times2}&\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-\sigma_i&\\ &\sigma_i\end{pmatrix}$$

$$[\gamma^i,\gamma^j]=\begin{pmatrix}&\sigma_i\\-\sigma_i&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&\sigma_j\\-\sigma_j&\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}&\sigma_j\\-\sigma_j&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&\sigma_i\\-\sigma_i&\end{pmatrix}=-2i\varepsilon_{ijk}\begin{pmatrix}\sigma_k&\\&\sigma_k\end{pmatrix}$$

于是有

$$\begin{aligned}\Gamma&=\theta_1\frac{[\gamma^2,\gamma^3]}{-2i}+\theta_2\frac{[\gamma^3,\gamma^1]}{-2i}+\theta_3\frac{[\gamma^1,\gamma^2]}{-2i}+i\phi_1\frac{[\gamma^0,\gamma^1]}{2}+i\phi_2\frac{[\gamma^0,\gamma^2]}{2}+i\phi_3\frac{[\gamma^0,\gamma^3]}{2}\\&=\phi_1\sigma^{01}+\phi_2\sigma^{02}+\phi_3\sigma^{03}+\theta_1\sigma^{23}+\theta_2\sigma^{31}+\theta_3\sigma^{12}\\&=\frac{1}{2}(\phi_1\sigma^{01}-\phi_1\sigma^{10})+\frac{1}{2}(\phi_2\sigma^{02}-\phi_2\sigma^{20})+\frac{1}{2}(\phi_3\sigma^{03}-\phi_3\sigma^{30})\\&\quad+\frac{1}{2}(\theta_1\sigma^{23}-\theta_1\sigma^{32})+\frac{1}{2}(\theta_2\sigma^{31}-\theta_2\sigma^{13})+\frac{1}{2}(\theta_3\sigma^{12}-\theta_3\sigma^{21})\\&=\frac{1}{2}(-\omega_{01}\sigma^{01}-\omega_{10}\sigma^{10})+\frac{1}{2}(-\omega_{02}\sigma^{02}-\omega_{20}\sigma^{20})+\frac{1}{2}(-\omega_{03}\sigma^{03}-\omega_{30}\sigma^{30})\\&\quad+\frac{1}{2}(-\omega_{23}\sigma^{23}-\omega_{32}\sigma^{32})+\frac{1}{2}(-\omega_{31}\sigma^{31}-\omega_{13}\sigma^{13})+\frac{1}{2}(-\omega_{12}\sigma^{12}-\omega_{21}\sigma^{21})\\&=-\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\end{aligned}$$

其中

$$\sigma^{\mu\nu}=\frac{i}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]$$

$$\omega_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0&-\phi_1&-\phi_2&-\phi_3\\\phi_1&0&-\theta_3&\theta_2\\\phi_2&\theta_3&0&-\theta_1\\\phi_3&-\theta_2&\theta_1&0\end{pmatrix}$$

最终

$$L=I_{4\times4}+\frac{i}{2}\Gamma=I_{4\times4}-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$$

至此，我们终于证明了大牛们认为很“显然”、但令凡人们费解、需要 5 页 A4 纸（加十几页草稿纸）才能说清楚的公式。做到这一点，方可说“古之人，不余欺”。

3.旋量双线性型

知道了旋量间的变换矩阵，就可以构造旋量场的作用量了。先来看最简单的情形。

因为 $\phi_R'=\exp[\frac{i}{2}\vec{\sigma}\cdot(\vec{\theta}-i\vec{\phi})]\phi_R$，$\phi_L'=\exp[\frac{i}{2}\vec{\sigma}\cdot(\vec{\theta}+i\vec{\phi})]\phi_L$，可定义

$$\bar{\psi}\psi=\psi^\dagger\gamma^0\psi=\begin{pmatrix}\phi_R^+&\phi_L^+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&I\\I&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_R\\\phi_L\end{pmatrix}=\phi_L^+\phi_R+\phi_R^+\phi_L$$

其中 $\bar{\psi}=\psi^\dagger\gamma^0$ 为 Dirac 共轭旋量（注意部分†打不出来，用+代替了）。则

$$\bar{\psi}'\psi' = \phi_L^{\dagger\prime}\phi_R' + \phi_R^{\dagger\prime}\phi_L' =$$

$$\phi_L^{\dagger}\exp[-\frac{i\vec{\sigma}}{2}\cdot(\vec{\theta}-i\vec{\phi})]\exp[\frac{i\vec{\sigma}}{2}\cdot(\vec{\theta}-i\vec{\phi})]\phi_R + \phi_R^{\dagger}\exp[-\frac{i\vec{\sigma}}{2}\cdot(\vec{\theta}+i\vec{\phi})]\exp[\frac{i\vec{\sigma}}{2}\cdot(\vec{\theta}+i\vec{\phi})]\phi_L$$

$$= \phi_L^{\dagger}\phi_R + \phi_R^{\dagger}\phi_L = \bar{\psi}\psi$$

所以$\bar{\psi}\psi$在 Lorentz 变换下保持不变。类似地，定义

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -I_{2\times2} & \\ & I_{2\times2} \end{pmatrix}$$

$$\bar{\psi}\gamma^5\psi = \begin{pmatrix} \phi_R^+ & \phi_L^+ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & I \\ I & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I & \\ & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{pmatrix} = -\phi_L^+\phi_R + \phi_R^+\phi_L$$

则在 Lorentz 变换下$\bar{\psi}\gamma^5\psi$保持不变（注意此处γ^5的定义与 Ryder 差一负号）。

那么，$\bar{\psi}\psi$和$\bar{\psi}\gamma^5\psi$是否为标量呢？还要看其在空间反射变换下的性质。前面已经得出，Dirac 方程的 Lorentz 协变性对变换矩阵 L 所加的限制是$L\gamma^\mu L^{-1} = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu\gamma^\nu$，对于空间反射，有$(t,\vec{x}) \to (t,-\vec{x})$，所以

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$$

$$L\gamma^\mu L^{-1} = g_{\mu\nu}\gamma^\nu = \gamma_\mu \Rightarrow L\gamma^\mu = \gamma_\mu L$$

对于$\mu = 0$，有$L\gamma^0 = \gamma_0 L$；对于$\mu = i$，有$L\gamma^i = \gamma_i L = -\gamma^i L$；而与$\gamma^0$对易又与$\gamma^i$反对易的矩阵就是$\gamma^0$，所以

$$L = \gamma^0$$

也就是说，在空间反射变换下，旋量的变化规律为

$$\psi' = \gamma^0\psi$$

于是

$$\bar{\psi}' = \psi^{\dagger\prime}\gamma^0 = (\gamma^0\psi)^+\gamma^0 = (\psi^+\gamma^0)\gamma^0 = \bar{\psi}\gamma^0$$

$$\bar{\psi}'\psi' = (\bar{\psi}\gamma^0)(\gamma^0\psi) = \bar{\psi}\psi$$

$$\bar{\psi}'\gamma^5\psi' = \bar{\psi}\gamma^0\gamma^5\gamma^0\psi = -\bar{\psi}\gamma^5\gamma^0\gamma^0\psi = -\bar{\psi}\gamma^5\psi$$

故$\bar{\psi}\psi$在空间反射下也不变，为标量；$\bar{\psi}\gamma^5\psi$在空间反射下变号，为赝标量。

$\bar{\psi}\psi$ 和 $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ 只是由 $\bar{\psi}$ 和 ψ 组成的双线性型的特例。一般地，在 $\bar{\psi}$ 和 ψ 之间插入任何一个 4×4 矩阵都可以得到一个双线性型。但这样得到的双线性型并不都是独立的。那么，我们究竟能构造多少种双线性型呢？讲到这里，几乎所有场论书都会直接说有 16 种，然后给一个抽象的证明，看着实在头疼，因为 4×4 矩阵比较复杂。为使凡人也能看懂，我们从 2×2 矩阵开始。

如果将 3 维矢量展开，基矢量有 3 个：

$$\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

任意矢量可表示为

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

3 维矢量有 3 个自由度，基矢量有 3 个；任意的 2×2 矩阵有 4 个参数，所以用“基矩阵”展开，基应该有 4 个：

$$M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

但是，3 维矢量不一定都按 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 展开，也可以任意三个正交的矢量展开。类似地，2×2 矩阵可以展开为（钱伯初《量子力学习题精选与剖析》（上）6.14 题）：

$$M=c_0I+c_1\sigma_1+c_2\sigma_2+c_3\sigma_3$$

其中 I 表示单位矩阵。注意，这是一个数学问题，σ_i 未必表示 Pauli 矩阵，只表示线性无关的矩阵。但物理学家对 Pauli 矩阵特别感兴趣，所以我们就来证明，Pauli 矩阵是线性无关的，这样，任意 2×2 矩阵就能用它表示了。

Key1：单位矩阵的迹（对角线元素之和）为 2；Pauli 矩阵是无迹的，即 $tr(\sigma_i)=0$

Key2：Pauli 矩阵的平方为单位矩阵，即 $\sigma_i^2=I$；

Key3：任一 Pauli 矩阵可以用其他两个不同的 Pauli 矩阵来生成，即 $\sigma_i\sigma_j=i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$；

Step1：假定存在不全为零的数 c_0,c_1,c_2,c_3，使得 $c_0I+c_1\sigma_1+c_2\sigma_2+c_3\sigma_3=0$

Step2：取 Step1 的迹，根据 Key1，有 $c_0\mathrm{tr}I=c_0(1+1)=0$，所以 c_0=0

Step3：用 σ_1 左乘 Step1，根据 Key2、Key3，有 $c_0\sigma_1+c_1I+ic_2\sigma_3-ic_3\sigma_2=0$；两边取迹，得 $2c_1=0$；

Step4：同理可证c_2=c_3=0

Step5：综合 Step2、Step3、Step4，知$I,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$线性无关。所以任意$2\times2$矩阵可展开为

$$M=c_0I+c_1\sigma_1+c_2\sigma_2+c_3\sigma_3$$

Step6：取 Step5 的迹，得$\mathrm{tr}M=2c_0$，所以$c_0=\frac{1}{2}\mathrm{tr}M$

Step7：σ_1左乘 Step5 得$\sigma_1M=c_0\sigma_1+c_1I+ic_2\sigma_3-ic_3\sigma_2$；两边取迹得$c_1=\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\sigma_1M)$

Step8：同理可得$c_2=\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\sigma_2M),c_3=\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\sigma_3M)$

以 Pauli 矩阵乘积来构造新的矩阵，最多可以构造出 4 种不同类型；以 Dirac 矩阵乘积来构造新的矩阵，构造出来的形式可化为如下 16 种类型Γ^a（取 Dirac 表象，i，j=1,2,3）：

$$\Gamma^{10}=\begin{pmatrix}I&\\&I\end{pmatrix},\Gamma^4=\gamma^0=\begin{pmatrix}I&\\&-I\end{pmatrix},\Gamma^{1,2,3}=\gamma^i=\begin{pmatrix}&\sigma_i\\-\sigma_i&\end{pmatrix},\Gamma^{11,12,13}=\sigma^{0i}=i\begin{pmatrix}&\sigma_i\\\sigma_i&\end{pmatrix}$$

$$\Gamma^5=\begin{pmatrix}&I\\I&\end{pmatrix},\Gamma^9=\gamma^5\gamma^0=\begin{pmatrix}&-I\\I&\end{pmatrix},\Gamma^{6,7,8}=\gamma^5\gamma^i=\begin{pmatrix}-\sigma_i&\\&\sigma_i\end{pmatrix},\Gamma^{14,15,16}=\sigma^{ij}=\varepsilon_{ijk}\begin{pmatrix}\sigma_k&\\&\sigma_k\end{pmatrix}$$

这 16 个矩阵是否线性无关，能否作为一组基来表示任意4×4矩阵呢？证明与前面完全类似。

Key1：4×4单位矩阵的迹为 4（与2×2矩阵不同）；Γ^a矩阵是无迹的，即$tr(\Gamma^a)=0$

Key2：Γ^a矩阵的平方正比于单位矩阵，即$\Gamma^2=\pm I$；

Key3：任一Γ^a矩阵可以用其他两个不同的Γ^a矩阵来生成，即$\Gamma^a\Gamma^b=k\Gamma^c$，k 可取$\pm1,\pm i$；

Step1：假定存在不全为零的数$c_1,c_2,\cdots,c_{16}$，使得$c_1\Gamma^1+c_2\Gamma^2+\cdots+c_{16}\Gamma^{16}=0$

Step2：取 Step1 的迹，根据 Key1，有$c_{10}\mathrm{tr}I=4c_{10}=0$，所以$c_{10}$=0

Step3：用Γ^1左乘 Step1，根据 Key2、Key3，有$c_1(\Gamma^1)^2+\sum_{n=2}^{16}c_n\Gamma^1\Gamma^n=-c_1I+\sum_{n=2}^{16}c_n\Gamma^m=0$；

两边取迹，得$c_1=0$；

Step4：同理可证c_2=c_3=⋯=$c_{16}=0$

Step5：综合 Step2、Step3、Step4，知这 16 个矩阵Γ^a线性无关，任意4×4矩阵可展开为

$$M=\sum_{a=1}^{16}c_a\Gamma^a$$

展开系数可仿照前面讨论2×2矩阵时的 Step6、Step7、Step8 来求，不再赘述。
于是，旋量双线性型共 16 种，分别为

双线性形式	$\bar{\psi}\psi$	$\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$	$\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi$	$\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi$	$\bar{\psi}\gamma_5\psi$
物理量类型	标量 S	矢量 V	张量 T	轴矢量 A	赝标量 P
个数	1	4	6	4	1

其中标量和赝标量已在前面证明。为了更简洁有力地证明最一般的情况，我们不再使用前面用过的“通过 Weyl 旋量构建 Dirac 旋量”这种方法。我们引用 Greiner 书中给的方法。

Key1：$L^{-1}\gamma^\mu L=\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu$，这个在前面证明过，那时给出的是$L\gamma^\mu L^{-1}=(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu\gamma^\nu$；

Key2：$L^{-1}=\gamma^0L^+\gamma^0$，使得$\bar{\psi}'=\bar{\psi}L^{-1}$

证明：分两步。（1）前文已证$L=\exp(-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu})\approx I-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$，其逆矩阵为

$$L^{-1}=\exp(\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu})\approx I+\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$$

L 的 Hermitian 共轭因$\sigma^{\mu\nu}=\frac{i}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]$而异，需要分类讨论。

(a)$(\sigma^{ij})^\dagger=-\frac{i}{2}[(\gamma^i\gamma^j)^\dagger-(\gamma^j\gamma^i)^\dagger]=-\frac{i}{2}[\gamma^j\gamma^i-\gamma^i\gamma^j]=\sigma^{ij}$，所以

$$L^\dagger=I-\frac{-i}{4}\omega_{ij}(\sigma^{ij})^\dagger=I+\frac{i}{4}\omega_{ij}\sigma^{ij}=L^{-1}$$

注意，此处ω看作常数而非矩阵。又因为$\{\gamma^0,\gamma^i\}=0$（反对易）使得$[\gamma^0,\sigma^{ij}]=0$，所以

$$\gamma^0L^+\gamma^0=\gamma^0I\gamma^0+\frac{i}{4}\omega_{ij}\gamma^0\sigma^{ij}\gamma^0=I+\frac{i}{4}\omega_{ij}\sigma^{ij}(\gamma^0)^2=L^{-1}$$

(b)与上面类似，可得$(\sigma^{0i})^+=-\sigma^{0i}$，$L^\dagger=I-\frac{-i}{4}\omega_{0i}(\sigma^{0i})^+=I-\frac{i}{4}\omega_{0i}\sigma^{0i}=L$；又因为

$$\gamma^0\sigma^{0i}=\frac{i}{2}[\gamma^0\gamma^0\gamma^i-\gamma^0\gamma^i\gamma^0]=\frac{i}{2}[\gamma^i\gamma^0\gamma^0-\gamma^0\gamma^i\gamma^0]=\sigma^{i0}\gamma^0=-\sigma^{0i}\gamma^0$$

于是

$$\gamma^0L^+\gamma^0=\gamma^0(I-\frac{i}{4}\omega_{0i}\sigma^{0i})\gamma^0=I-\frac{i}{4}\omega_{0i}\gamma^0\sigma^{0i}\gamma^0=I+\frac{i}{4}\omega_{0i}\sigma^{0i}(\gamma^0)^2=L^{-1}$$

综合(a)(b)，有$L^{-1}=\gamma^0L^+\gamma^0$

（2）设$\psi'=L\psi$，因为$\bar{\psi}=\psi^\dagger\gamma^0$，$L^{-1}=\gamma^0L^+\gamma^0\Rightarrow L^+\gamma^0=\gamma^0L^{-1}$，所以

$$\bar{\psi}'=\psi'^\dagger\gamma^0=(L\psi)^+\gamma^0=\psi^+L^+\gamma^0=\psi^+\gamma^0L^{-1}=\bar{\psi}L^{-1}$$

Key3：$L\gamma^5=\pm\gamma^5L=\gamma^5L\det\Lambda$，其中对于 Lorentz 变换取正号，对于空间反射取负号。

证明：因为$[\gamma^5,\sigma^{\mu\nu}]=0$，所以对于 Lorentz 变换$L=I-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$，有$L\gamma^5=\gamma^5L$；前文已证，对于空间反射可取$L=\gamma^0$，因为$\gamma^0\gamma^5=-\gamma^5\gamma^0$，从而$L\gamma^5=-\gamma^5L$

根据 Key1~Key3，可得

Case1：$\bar{\psi}'\psi' = (\bar{\psi}L^{-1})(L\psi) = \bar{\psi}\psi$，为标量；

Case2：$\bar{\psi}'\gamma^5\psi' = (\bar{\psi}L^{-1})\gamma^5(L\psi) = \bar{\psi}L^{-1}L\gamma^5 \det\Lambda\psi = \pm\bar{\psi}\gamma^5\psi$，为赝标量；

Case3：$\bar{\psi}'\gamma^\mu\psi' = (\bar{\psi}L^{-1})\gamma^\mu(L\psi) = \bar{\psi}\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu\psi = \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}\gamma^\nu\psi$，为矢量；

Case4：$\bar{\psi}'\gamma^5\gamma^\mu\psi' = \bar{\psi}L^{-1}\gamma^5\gamma^\mu L\psi = -\bar{\psi}L^{-1}\gamma^\mu L\gamma^5 \det\Lambda\psi = \pm\Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\nu\psi$，为轴矢量；

Case5：

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'\sigma^{\mu\nu}\psi' &= (\bar{\psi}L^{-1})\frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)(L\psi) = \frac{i}{2}\bar{\psi}L^{-1}(\gamma^\mu LL^{-1}\gamma^\nu - \gamma^\nu LL^{-1}\gamma^\mu)L\psi \\ &= \frac{i}{2}\bar{\psi}(L^{-1}\gamma^\mu LL^{-1}\gamma^\nu L - L^{-1}\gamma^\nu LL^{-1}\gamma^\mu L)\psi \\ &= \frac{i}{2}\bar{\psi}(\Lambda^\mu{}_\rho\gamma^\rho\Lambda^\nu{}_\tau\gamma^\tau - \Lambda^\nu{}_\tau\gamma^\tau\Lambda^\mu{}_\rho\gamma^\rho)\psi \\ &= \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\tau\bar{\psi}\frac{i}{2}(\gamma^\rho\gamma^\tau - \gamma^\tau\gamma^\rho)\psi = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\tau\bar{\psi}\sigma^{\rho\tau}\psi\end{aligned}$$

根据指标变换规律，可知这是二阶张量。

4.旋量场作用量

一般情况下，旋量场作用量中可能出现 16 种双线性型；但可以根据讨论的问题不同，而适当加以简化。这里我们希望它代入 Euler-Lagrange 方程后给出 Dirac 方程。因为 Dirac 方程只含有一阶导数，且不含 γ^5，所以我们猜测 Lagrange 量的形式为

$$\mathcal{L}(\bar{\psi},\psi,\partial_\mu\bar{\psi},\partial_\mu\psi) = a\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + b\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi + c\bar{\psi}\psi$$

代入 Euler-Lagrange 方程，得

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} = a\gamma^\mu\partial_\mu\psi + c\psi = \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} = b\gamma^\mu\partial_\mu\psi$$

与 Dirac 方程 $i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0$ 比较，得

$$a - b = i, c = -m$$

所以

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= (b+i)\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + b\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi = i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + b(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) \\ &= i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + b\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + div\end{aligned}$$

舍弃变分时可化为全微分、因而对运动方程无影响的 4 维散度项，就得到标准的 Dirac 场 Lagrange 量：

$$\mathcal{L} = i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

至此，我们已经构造出各种类型（标量、矢量、张量、旋量）场的作用量。这一道题已完成三分之一了。接下来，就可以推导 Feynman 规则，为计算散射振幅和散射截面做准备啦！

第 2 步　计算散射振幅（240 分）

前面，我们构造了作用量，这只是万丈高楼的地基。万丈高楼的骨架，是散射振幅。它有多个层次，可以在量子力学范围计算，也可以在量子场论层次计算；它有多种算法，可以用传统的正则量子化（通过算符间收缩）给出（石康杰、周邦融、姜志进），也可以用路径积分（通过泛函微商）给出（Ryder、王正行、裘忠平），还可以通过势散射给出（Greiner's QED、Feynman《量子电动力学讲义》）。

正则方法数学符号简洁，物理图像清晰——场算符与场算符收缩给出内线和顶点，场算符与产生算符收缩给出外线（以石康杰《量子场论与重整化导论》讲的最直观透彻），对于讨论标量场和旋量场量子化效果很好，对于电磁场也勉强可行，因而被大多数教材所用。然而，这种方法不能解决非 Abel 规范场的量子化问题。电磁作用可用正则方法，但强相互作用和弱相互作用却很难。

泛函方法可直接给出内线和顶点，普遍适用于各种相互作用，但计算外线仍借用正则方法，有的只借用产生湮灭算符（Srednicki、李灵峰），有的还得借用正规乘积（Ryder、王正行、裘忠平）。

势散射方法所需学时最少，但比较非主流，此方面著作寥寥无几，很难与其他人比较，可能算错了还不自知。

权衡一下，还是 Srednicki 讲的既现代（适用于各种相互作用）又简明（用最少篇幅又详细明了地导出 S 矩阵约化公式）。我们将按 Srednicki 的结构来讲。

1.2.1　约化公式

要描述微观世界，就必须进行量子化。我们已经讨论了相对论量子力学，但它有负能解、负几率问题，逻辑上是不自洽的。这种不自洽是单粒子的“力学”图像所限造成的。如果允许粒子产生湮灭转化，逻辑上就完备了。有粒子产生湮灭，就进入量子场论范畴了（前面讨论的都是经典场论）。

1.2.1.1　标量场约化

1.平面波解的进一步研究

为了从相对论量子力学进入量子场论，需要对平面波解做进一步研究。前面给出 Klein-Gordon 方程的解为 $\psi^{\pm}(x)=e^{\mp ipx}$，这是两个特解。一般地，我们可以将微分方程的特解进行线性组合，得到通解：

$$\varphi(x)=\int\frac{d^3k}{f(k)}[a(k)e^{-ikx}+b(k)e^{ikx}]$$

注意，加箭头（或用黑体）表示 3 维矢量，白体表示 4 维矢量。特解不一定是指数函数，也可以是三角函数（戴元本《相互作用的规范理论》）：

$$\varphi(x)=\sqrt{\frac{2}{V}}\sum_k[q_1(t)\cos\vec{k}\cdot\vec{x}+q_2(t)\sin\vec{k}\cdot\vec{x}]$$

通过 Euler（乾坤大挪移）公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，可将指数函数化为三角函数。

通解中有待定系数 a，b，归一化因子 f，要确定其形式。对实标量场，复共轭等于自身：

$$\int\frac{d^3k}{f(k)}[a^*(k)e^{ikx}+b^*(k)e^{-ikx}]=\varphi^*(x)=\varphi(x)=\int\frac{d^3k}{f(k)}[a(k)e^{-ikx}+b(k)e^{ikx}]$$

所以 $b(k)=a^*(k)$，于是

$$\varphi(x)=\int\frac{d^3k}{f(k)}[a(k)e^{-ikx}+a^*(k)e^{ikx}]\to\int\frac{d^3k}{f(k)}[a(k)e^{-ikx}+a^+(k)e^{ikx}]$$

因为量子化要求算符为 Hermite 的，我们已将复共轭替换为 Hermite 共轭。

并且，我们要研究的是量子场论是相对论性的，所以 f 的形式应使**积分测度** $d\Omega$ 具有 Lorentz 不变性。Lorentz 协变要求将 3 维量变成 4 维量，因为（Ryder's QFT）

$$\int\delta(k^2-m^2)\theta(k_0)d^4k=\int\delta(k_0^2-\vec{k}^2-m^2)\theta(k_0)d^4k=\int\delta(k_0^2-E^2)\theta(k_0)d^4k$$

$$=\int\frac{[\delta(k_0+E)+\delta(k_0-E)]}{2k_0}\theta(k_0)d^4k=\int\frac{\delta(k_0-E)}{2k_0}d^4k=\int\frac{\delta(k_0-E)}{2k_0}dk_0d^3k=\frac{d^3k}{2E}$$

所以 $\frac{d^3k}{2E}$ 是 Lorentz 不变的，所以 f(k)正比于 E. 于是有

$$\varphi(x)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^32E}[a(k)e^{-ikx}+a^+(k)e^{ikx}]=\int\frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^32E}}[a(k)f_k(x)+a^+(k)f_k^*(x)]$$

其中 $f_k(x)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^32E}}e^{-ikx}$ 为**标量粒子波函数**，前面多出来的 2π 纯属个人喜好，不同书约定可能千差万别。因为度规不同，也可能出现 $a(k)e^{+ikx}+a^+(k)e^{-ikx}$，即正能解与负能解顺序交换。我们也可以将上式反解出来（将 $a(k)$ 用 $\varphi(x)$ 表示）。为此，要对 x 积分：

$$\int e^{-ikx}\varphi(x)d^3x=\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^32E}\int e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}[a(k')e^{-i(\omega t-\vec{k}'\cdot\vec{x})}+a^+(k')e^{i(\omega t-\vec{k}'\cdot\vec{x})}]d^3x$$

$$=\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^32E}\int d^3x[e^{-2i\omega t}a(k')e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}}+a^+(k')e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}]$$

$$=\int\frac{d^3k'}{2E}[e^{-2i\omega t}a(k')\delta(\vec{k}+\vec{k}')+a^+(k')\delta(\vec{k}-\vec{k}')]=\frac{1}{2E}[e^{-2i\omega t}a(-k)+a^+(k)]$$

$$\int e^{-ikx}\partial_0\varphi(x)d^3x=\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^32E}\int e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}[-i\omega a(k')e^{-i(\omega t-\vec{k}'\cdot\vec{x})}+i\omega a^+(k')e^{i(\omega t-\vec{k}'\cdot\vec{x})}]d^3x$$

$$=\frac{-i\omega}{2E}[-e^{-2i\omega t}a(-k)+a^+(k)]\xrightarrow{\hbar=1}\frac{-i}{2}[-e^{-2i\omega t}a(-k)+a^+(k)]$$

联立这两个方程，解得

$$a^+(k)=i\int e^{-ikx}\partial_0\varphi(x)d^3x+E\int e^{-ikx}\varphi(x)d^3x=\int e^{-ikx}[E\varphi(x)+i\partial_0\varphi(x)]d^3x$$
$$=i\int e^{-ikx}\overleftrightarrow{\partial}_0\varphi(x)d^3x$$

其中最后一步利用了**双向导数**

$$f\overleftrightarrow{\partial}g=f(\partial g)-(\partial f)g$$

2.S 矩阵

我们把粒子间相互作用（碰撞及反应）笼统地称为**散射**。散射过程可描述为：粒子（源）在 $t=-\infty$ 时刻入射，发生相互作用后，在 $t=+\infty$ 时刻出射（被探测器接收）。实验上测量的是**入射态** $|in\rangle$（或初态 $|i\rangle$）到**出射态** $|out\rangle$（或终态 $|f\rangle$）的跃迁 **S 矩阵** $\langle out|in\rangle$ 或 $\langle f|i\rangle$，通常称为**散射振幅**。

量子场论假定，粒子从**真空** $|0\rangle$ 产生（**真空看作量子场基态，粒子看作量子场激发态**）：

$$|k\rangle=a^\dagger(k)|0\rangle$$

在这里，前面计算出来的 $a^+(k)=i\int e^{-ikx}\overleftrightarrow{\partial}_0\varphi(x)d^3x$ 被赋予了物理意义，即**产生算符**，使粒子数增加 1 个；而其 Hermite 共轭 $a(k)=-i\int e^{ikx}\overleftrightarrow{\partial}_0\varphi(x)d^3x$ 即**湮灭算符**，即把粒子数减少 1 个。如果没有粒子，被它作用后自然等于零：

$$a(k)|0\rangle=0$$

这些都是从量子力学中借用的概念。不管有多少叛乱（粒子），经过若干次剿灭（湮灭）后都会被平定（变成 0）。

假定有一个（Gauss 型）波包 $f_1(\vec{k})=Ae^{-\frac{(\vec{k}-\vec{k}_1)^2}{4\sigma}}$，可定义一个产生算符（Srednicki's QFT）

$$a_1^\dagger=\int f_1(\vec{k})a^\dagger(\vec{k})d^3k$$

它在坐标空间位于原点附近，在动量空间位于 $\vec{k}_1$ 附近。在自由场情形，它不随时间变化；有相互作用时，它变成 $a_1^\dagger(t)$. 由此，粒子的初态和末态可定义为

$$|i\rangle=\lim_{t\to-\infty}a_1^\dagger(t)|0\rangle=a_1^\dagger(-\infty)|0\rangle$$

$$|f\rangle=\lim_{t\to+\infty}a_{1'}^\dagger(t)|0\rangle=a_{1'}^\dagger(+\infty)|0\rangle$$

并满足归一化条件 $\langle i|i\rangle=\langle f|f\rangle=1$，注意下标 $1'$ 较小，看仔细了，细节决定成败。若初态有 2 粒子，定义 $|i\rangle=\lim_{t\to-\infty}a_1^\dagger(t)a_2^\dagger|0\rangle$ 即可。于是，散射振幅为

$$S_{fi}=\langle f|i\rangle=\langle 0|a_{1'}(+\infty)a_1^\dagger(-\infty)|0\rangle$$

3.约化公式

因为$a_1(-\infty)|0\rangle=0$，如果将$a_{1'}(+\infty)$用$a_{1'}(-\infty)$表示，并利用**时序算符**（有的书中称为编时乘积，就是将算符按时间排序，先发生的右移）将$a_{1'}(-\infty)$移到最右（$-\infty$时刻最先发生，应移到最右）与真空态$|0\rangle$作用而消去，S 矩阵将被简化。

利用前面定义的$a_1^\dagger(t)=\int f_1(\vec{k})a^\dagger(\vec{k})d^3k$，可得

$$
\begin{aligned}
&a_1^\dagger(+\infty)-a_1^\dagger(-\infty)=\int_{-\infty}^{+\infty}dt\partial_0 a_1^\dagger(t)=i\int d^3kf_1(\vec{k})\int\partial_0[e^{-ikx}\overleftrightarrow{\partial}_0\varphi(x)]d^3xdt\\
&=i\int d^3kf_1(\vec{k})\int\partial_0[e^{-ikx}\partial_0\varphi(x)-\partial_0e^{-ikx}\varphi(x)]d^4x\\
&=i\int d^3kf_1(\vec{k})\int d^4x[e^{-ikx}\partial_0^2\varphi(x)+\partial_0e^{-ikx}\partial_0\varphi(x)-\partial_0^2e^{-ikx}\varphi(x)-\partial_0e^{-ikx}\partial_0\varphi(x)]\\
&=i\int d^3kf_1(\vec{k})\int d^4x[e^{-ikx}\partial_0^2\varphi(x)-(-i\omega)^2e^{-ikx}\varphi(x)]\\
&=i\int d^3kf_1(\vec{k})\int d^4x[e^{-ikx}(\partial_0^2+\vec{k}^2+m^2)\varphi(x)]\\
&=i\int d^3kf_1(\vec{k})\int d^4x[e^{-ikx}(\partial_0^2+m^2)\varphi(x)]\\
&-i\int d^3kf_1(\vec{k})\int d^4x\{e^{-ikx}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^32E}[(i\vec{k})^2a(\vec{k})e^{-ikx}+(-i\vec{k})^2a^+(\vec{k})e^{ikx}]\}\\
&=i\int d^3kf_1(\vec{k})\int d^4x[e^{-ikx}(\partial_0^2-\nabla^2+m^2)\varphi(x)]\\
&=i\int d^3kf_1(\vec{k})\int d^4x[e^{-ikx}(\Box+m^2)\varphi(x)]
\end{aligned}
$$

移项，即

$$a_1^\dagger(-\infty)=a_1^\dagger(+\infty)-i\int d^3kf_1(\vec{k})\int d^4x[e^{-ikx}(\Box+m^2)\varphi(x)]$$

取其 Hermite 共轭，并移项，可得

$$a_1(+\infty)=a_1(-\infty)-i\int d^3kf_1(\vec{k})\int d^4x[e^{+ikx}(\Box+m^2)\varphi(x)]$$

因度规不同，i 前面与 Srednicki 差一负号。

代入 S 矩阵，利用时序算符化简，可得

$$
\begin{aligned}
&S_{fi}=\langle f|i\rangle=\langle 0|T[a_{1'}(+\infty)a_1^\dagger(-\infty)]|0\rangle\\
&=\langle 0|T\{a_{1'}(-\infty)-i\int d^3k'f_{1'}(\vec{k}')\int d^4x_1'[e^{+ik'x_1'}(\Box_{1'}+m^2)\varphi(x_1')]\}\\
&\times\{a_1^\dagger(+\infty)-i\int d^3kf_1(\vec{k})\int d^4x_1[e^{-ikx_1}(\Box_1+m^2)\varphi(x_1)]\}|0\rangle\\
&=\langle 0|T[a_{1'}(-\infty)a_1^\dagger(+\infty)]|0\rangle-i\int d^3k'f_{1'}(\vec{k}')\int d^4x_1'[e^{+ik'x_1'}(\Box_{1'}+m^2)\varphi(x_1')]\langle 0|a_1^?(+\infty)|0\rangle\\
&-\langle 0|a_{1'}(-\infty)|0\rangle i\int d^3kf_1(\vec{k})\int d^4x_1[e^{-ikx_1}(\Box_1+m^2)\varphi(x_1)]\\
&+i^2\int d^3k'd^3kf_{1'}(\vec{k}')f_1(\vec{k})\int d^4x_1'd^4x_1\langle 0|T[e^{+ik'x_1'}(\Box_{1'}+m^2)\varphi(x_1')e^{-ikx}(\Box_1+m^2)\varphi(x_1)]|0\rangle\\
&=i^2\int d^3k'd^3kf_{1'}(\vec{k}')f_1(\vec{k})\int d^4x_1'd^4x_1e^{+ik'x_1'}(\Box_{1'}+m^2)\langle 0|T[\varphi(x_1')\varphi(x_1)]|0\rangle(\overleftarrow{\Box}_1+m^2)e^{-ikx_1}
\end{aligned}
$$

现在，波包不再扮演关键角色，我们可取$\sigma\to 0$，从而（Srednicki's QFT）

$$f_1(\vec{k})=\lim_{\sigma\to 0}Ae^{-\frac{(\vec{k}-\vec{k}_1)^2}{4\sigma}}=\delta(\vec{k}-\vec{k}_1)$$

于是

$$S_{fi}=i^2\int d^3k'\delta(\vec{k}'-k_1')\int d^4x_1'd^4x_1e^{+ik'x_1'}(\Box_{1'}+m^2)\langle 0|T[\varphi(x_1')\varphi(x_1)]|0\rangle(\overleftarrow{\Box}_1+m^2)e^{-ik_1x_1}$$
$$=i^2\int d^4x_1'd^4x_1e^{+ik_1'x_1'}(\Box_{1'}+m^2)\langle 0|T[\varphi(x_1')\varphi(x_1)]|0\rangle(\overleftarrow{\Box}_1+m^2)e^{-ik_1x_1}$$

一般地，初态有 n 个粒子，末态有 n′个粒子，有

$$S_{fi}=i^n\int d^4y_1\cdots d^4y_ne^{i(q_1y_1+\cdots+q_ny_n)}(\Box_y+m^2)_1\cdots(\Box_y+m^2)_n$$
$$\times G(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n)(\overleftarrow{\Box}_x+m^2)_1\cdots(\overleftarrow{\Box}_x+m^2)_mi^m\int e^{-i(p_1x_1+\cdots+p_mx_m)}d^4x_1\cdots d^4x_m$$
$$=\prod_{f=1}^{n}\left[\int d^4y_fe^{\mathrm{i}q_fy_f}\mathrm{i}(\Box_y+\mu^2)_f\right]G(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n)\prod_{i=1}^{m}\left[\mathrm{i}(\overleftarrow{\Box}_x+\mu^2)_i\int e^{-\mathrm{i}p_ix_i}d^4x_i\right]$$

此即著名的 **Lehmann-Symanzik-Zimmermann 约化公式**。其中

$$G(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n)=\langle 0|T[\varphi(y_1)\cdots\varphi(y_n)\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)]|0\rangle$$

为**关联函数**（也称为 **Green 函数**）。最后一步为了不致混淆，已将质量 m 用 μ 代替，且表示虚数的 i 已从斜体改为正体。

1.2.1.2 矢量场约化

与标量场相比，矢量场的平面波展开只不过加上一个 Lorentz 指标，再乘上极化矢量：

$$A_\mu(x)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^32E}[a(k)\varepsilon_\mu(k)e^{-ikx}+a^+(k)\varepsilon_\mu^*(k)e^{ikx}]$$

仿照前面在标量场的做法，有

$$\int e^{-ikx}A_\mu(x)d^3x=\frac{1}{2E}[e^{-2i\omega t}a(-k)\varepsilon_\mu(-k)+a^+(k)\varepsilon_\mu^*(k)]$$
$$\int e^{-ikx}\partial_0A_\mu(x)d^3x=\frac{-i}{2}[-e^{-2i\omega t}a(-k)\varepsilon_\mu(-k)+a^+(k)\varepsilon_\mu^*(k)]$$

及

$$a^+(k)\varepsilon_\mu^*(k)=i\int e^{-ikx}\overleftrightarrow{\partial}_0A_\mu(x)d^3x$$

方程两边左乘 $\varepsilon^\mu(k)$，根据光子极化求和公式 $\varepsilon^\mu(k)\varepsilon_\mu^*=-1$，可得（与 Srednicki 差负号）

$$a^+(k)=-i\varepsilon^\mu(k)\int e^{-ikx}\overleftrightarrow{\partial}_0A_\mu(x)d^3x$$

同理，标量场约化公式变为（以初末态都一个粒子为例，可推广到任意个粒子；质量 m=0）

$$S_{fi}=i^2\int d^4x_1'd^4x_1\varepsilon_\nu^*(k_1')e^{+ik_1'x_1'}\Box_{1'}\langle 0|T[A_\nu(x_1')A_\mu(x_1)]|0\rangle\overleftarrow{\Box}_1\varepsilon^\mu(k_1)e^{-ik_1x_1}$$

1.2.1.3 旋量场约化

与标量场相比，矢量场的平面波展开只不过在 e^{-ikx}， e^{ikx} 前分别乘上 u 和 v：

$$\psi(x)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E}[c(k)u(k)e^{-ikx}+d^+(k)v(k)e^{ikx}]$$

为与标量场和矢量场区分，这里已将展开系数从 a，b 换成了 c，d.
仿照前面在标量场的做法，乘以正能解并积分，可得一个方程

$$\int e^{-ikx}\psi(x)d^3x=\frac{1}{2E}[e^{-2i\omega t}c(-k)u(-k)+d^+(k)v(k)]$$

但我们不再求时间导数，而是乘以负能解并积分，来获得第二个方程（Srednicki's QFT）：

$$\int e^{ikx}\psi(x)d^3x=\frac{1}{2E}[c(k)u(k)+e^{2i\omega t}d^+(-k)v(-k)]$$

$\bar{v}\gamma^0$ 左乘第一个方程，由归一化条件 $v_\lambda^\dagger v_{\lambda'}=\bar{v}_\lambda\gamma^0 v_{\lambda'}=2E\delta_{\lambda\lambda'}$， $\bar{v}_s\gamma^0 u_{s'}=0$ 消去 $e^{-2i\omega t}$ 得

$$d^+(k)=\int e^{-ikx}\bar{v}(k)\gamma^0\psi(x)d^3x$$

用 $\bar{u}\gamma^0$ 左乘第二个方程，根据 $u_\lambda^\dagger u_{\lambda'}=\bar{u}_\lambda\gamma^0 u_{\lambda'}=2E\delta_{\lambda\lambda'}$， $\bar{u}_s\gamma^0 v_{s'}=0$，得

$$c(k)=\int e^{ikx}\bar{u}(k)\gamma^0\psi(x)d^3x$$

取 Hermite 共轭，有

$$c^\dagger(k)=\int e^{-ikx}\bar{\psi}(x)\gamma^0 u(k)d^3x$$

类比标量场，可定义 $c_1^\dagger(t)=\int f_1(\vec{k})c^\dagger(\vec{k})d^3k$，于是

$$\begin{aligned}
&c_1^\dagger(+\infty)-c_1^\dagger(-\infty)=\int_{-\infty}^{+\infty}dt\partial_0 c_1^\dagger(t)=\int d^3k f_1(\vec{k})\int\partial_0[\bar{\psi}(x)\gamma^0 e^{-ikx}]u(k)d^3xdt\\
&=\int d^3k f_1(\vec{k})\int[\partial_0\bar{\psi}(x)\gamma^0 e^{-ikx}+\bar{\psi}(x)\gamma^0(-ik^0)e^{-ikx}]u(k)d^4x\\
&=\int d^3k f_1(\vec{k})\int\bar{\psi}(x)[\overleftarrow{\partial}_0\gamma^0-ik^0\gamma^0]u(k)e^{-ikx}d^4x\\
&\xrightarrow{(p-m)u=0}\int d^3k f_1(\vec{k})\int\bar{\psi}(x)[\overleftarrow{\partial}_0\gamma^0-ik_i\gamma^i-im]u(k)e^{-ikx}d^4x\\
&\xrightarrow{p_i=i\partial_i}\int d^3k f_1(\vec{k})\int\bar{\psi}(x)[\overleftarrow{\partial}_0\gamma^0+\partial_i\gamma^i-im]u(k)e^{-ikx}d^4x\\
&\xrightarrow{\text{分部积分}}\int d^3k f_1(\vec{k})\int\bar{\psi}(x)[\overleftarrow{\partial}_0\gamma^0-im]u(k)e^{-ikx}d^4x\\
&+\int d^3k f_1(\vec{k})\int\{\partial_i[\bar{\psi}(x)\gamma^i e^{-ikx}]-\bar{\psi}(x)\overleftarrow{\partial}_i\gamma^i e^{-ikx}\}u(k)d^4x\\
&\xrightarrow{\text{舍弃表面4散度项}}\int d^3k f_1(\vec{k})\int\bar{\psi}(x)[\overleftarrow{\partial}_0\gamma^0-\overleftarrow{\partial}_i\gamma^i-im]u(k)e^{-ikx}d^4x\\
&=-i\int d^3k f_1(\vec{k})\int d^4x[\bar{\psi}(x)(i\overleftarrow{\partial}+m)u(k)e^{-ikx}]
\end{aligned}$$

其 Hermite 共轭为

$$c_1(+\infty)-c_1(-\infty)=i\int d^3kf_1(\vec{k})\int d^4x[e^{ikx}\bar{u}(k)(-i\partial\!\!\!/+m)\psi(x)]$$

同理可得

$$d_1^\dagger(+\infty)-d_1^\dagger(-\infty)=\int_{-\infty}^{+\infty}dt\partial_0 d_1^\dagger(t)=\int d^3kf_1(\vec{k})\int\partial_0[e^{-ikx}\bar{v}(k)\gamma^0\psi(x)]d^3xdt$$
$$=\int d^3kf_1(\vec{k})\int\bar{v}(k)e^{-ikx}[\partial_0\gamma^0+\gamma^0\partial_0]\psi(x)d^4x$$
$$\to\int d^3kf_1(\vec{k})\int\bar{v}(k)e^{-ikx}[im+\gamma^i\overleftarrow{\partial}_i+\gamma^0\partial_0]\psi(x)d^4x$$
$$\to i\int d^3kf_1(\vec{k})\int\bar{v}(k)e^{-ikx}[m-i\partial\!\!\!/]\psi(x)d^4x$$

$$d_1(+\infty)-d_1(-\infty)=-i\int d^3kf_1(\vec{k})\int\bar{\psi}(x)[m+i\overleftarrow{\partial\!\!\!/}]e^{ikx}v(k)d^4x$$

其中利用了 $\bar{v}(p\!\!\!/+m)=\bar{v}(i\overleftarrow{\partial\!\!\!/}+m)=0$. 注意， p^0 为实数，所以 ∂^0 为虚数！

代入 S 矩阵，利用时序算符化简，可得

$$S_{fi}=\langle f|i\rangle=\langle 0|T[c_{1'}(+\infty)c_1^\dagger(-\infty)]|0\rangle$$
$$=\langle 0|T\{c_{1'}(-\infty)+i\int d^3k'f_1(\vec{k'})\int d^4x_1'[e^{ik'x_1'}\bar{u}(k')(-i\partial\!\!\!/_{1'}+m)\psi(x_1')]\}$$
$$\times\{c_1^\dagger(+\infty)+i\int d^3kf_1(\vec{k})\int d^4x_1[\bar{\psi}(x_1)(i\overleftarrow{\partial\!\!\!/}_1+m)u(k)e^{-ikx_1}]\}|0\rangle$$
$$=0+0+0+i^2\int d^3k'd^3k\delta(\vec{k'}-\vec{k_1'})\delta(\vec{k}-\vec{k_1})\int d^4x_1'd^4x_1e^{+ik'x_1'}\bar{u}(k')(-i\partial\!\!\!/_{1'}+m)$$
$$\times\langle 0|T[\psi(x_1')\psi(x_1)]|0\rangle(i\overleftarrow{\partial\!\!\!/}_1+m)u(k_1)e^{-ikx_1}$$
$$=i^2\int d^4x_1'd^4x_1e^{+ik_1'x_1'}\bar{u}(k_1')(-i\partial\!\!\!/_{1'}+m)\langle 0|T[\psi(x_1')\bar{\psi}(x_1)]|0\rangle(i\overleftarrow{\partial\!\!\!/}_1+m)u(k_1)e^{-ik_1x_1}$$
$$=i^2\int d^4x_1'd^4x_1e^{+ik_1'x_1'}\bar{u}(k_1')(i\partial\!\!\!/_{1'}-m)\langle 0|T[\psi(x_1')\bar{\psi}(x_1)]|0\rangle(-i\overleftarrow{\partial\!\!\!/}_1-m)u(k_1)e^{-ik_1x_1}$$

综上所述，设初末态涉及粒子总数为 N=m+n，则 S 矩阵可以统一写成更紧凑的形式：

$$S_{fi}=\prod_{i=1}^{m}\prod_{f=1}^{n}\Big[\int d^4x_id^4y_fF_{q_f}^*(y_f)F_{p_i}(x_i)iK^*(y_f)iK(x_i)\Big]G(x_1,\cdots,x_N)$$

其中 $G(x_1,\cdots,x_N)$为 N 点 Green 关联函数，微分算符 K 和波函数 F 分别为

$$K(x)=\begin{cases}\Box_x+\mu^2, & scalar\\ \Box_x, & massless\ vector\\ i\partial\!\!\!/_x+\mu, & spinor\end{cases}$$

$$F_k(x)=\begin{cases}e^{-ikx}, & scalar\\ \varepsilon(k)e^{-ikx}, & vector\\ u(k)e^{-ikx}, & spinor\end{cases}$$

如果相互作用场不是单纯的标量场或单纯的旋量场，而是多种类型场的耦合，那就把各自的波函数 F 及相应算符 K 乘在一起。比如初态为电子+光子，末态为电子+光子，那么

$$S_{fi}=i^4\int dx_1dx_2dx_1'dx_2'\varepsilon^*e^{ik_1'x_1'}\bar{u}e^{ik_2'x_2'}[-i\partial\!\!\!/_{1'}+m]\Box_{1'}G(x_1,x_2,x_1',x_2')\overleftarrow{\Box}_1[i\overleftarrow{\partial\!\!\!/}_1+m]\varepsilon e^{-ik_1x_1}ue^{-ik_2x_2}$$

这里已将四维积分标记 d^4x 简写为 dx. 接下来主要任务，就是求（Green）关联函数。

1.2.2 关联函数

计算关联函数有两种方法，一是正则量子化（计算各种收缩），二是路径积分量子化（计算各种泛函微商）。如前所述，后者较普适，我们采用后者。

1.2.2.1 泛函积分

为以后讨论方便，我们先准备点数学知识。

1.矢量空间内积

（1）一维 Gauss 积分

【公式 1】$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

证明：

$$(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy = \iint e^{-(x^2+y^2)}dxdy \xrightarrow{x=r\cos\theta, y=r\sin\theta}$$

$$\iint e^{-r^2}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|drd\theta = \iint e^{-r^2}rdrd\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\infty} e^{-r^2}dr^2 = \pi$$

所以

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{a}x)^2}d(\sqrt{a}x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

其中 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ 为 Jacobi 行列式，计算结果要加绝对值。

【公式 2】$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}ax^2+bx}dx = e^{\frac{b^2}{2a}}\sqrt{\frac{2\pi}{a}}$

证明：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}ax^2+bx}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}a(x-\frac{b}{a})^2+\frac{b^2}{2a}}dx = e^{\frac{b^2}{2a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}a(x-\frac{b}{a})^2}d(x-\frac{b}{a}) = e^{\frac{b^2}{2a}}\sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$

（2）n 维 Gauss 积分

以二维为例，结果可推广到 n 维。

【公式 3】设矢量 $r = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，其转置为 $r^T = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$，矩阵 $K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}r^T Kr}dxdy = \frac{2\pi}{\sqrt{\det K}}$$

证明：

a.K 为对角阵，即 $k_{12}=k_{21}=0$

$$r^T Kr = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_{11} & \\ & k_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k_{11}x^2 + k_{22}y^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(k_{11}x^2+k_{22}y^2)}dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}k_{11}x^2}dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}k_{22}y^2}dy = \sqrt{\frac{2\pi}{k_{11}}}\sqrt{\frac{2\pi}{k_{22}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{k_{11}k_{22}-0\cdot 0}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\det K}}$$

b.K 为对称矩阵，即 $k_{12}=k_{21}\neq 0$

$$r^T Kr = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k_{11}x^2 + k_{22}y^2 + 2k_{12}xy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(k_{11}x^2+k_{22}y^2+2k_{12}xy)}dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}[(ax+by)^2+(cx+dy)^2]}dxdy$$

$$\xrightarrow[v=cx+dy]{u=ax+by} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv = \frac{1}{ad-bc}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2}du\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}v^2}dv = \frac{2\pi}{ad-bc}$$

待定系数满足：

$$k_{11}=a^2+c^2, k_{22}=b^2+d^2, k_{12}=ab+cd$$

因为

$$k_{11}k_{22}-{k_{12}}^2 = (a^2+c^2)(b^2+d^2)-(ab+cd)^2 = (ad-bc)^2$$

所以

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(k_{11}x^2+k_{22}y^2+2k_{12}xy)}dxdy = \frac{2\pi}{ad-bc} = \frac{2\pi}{\sqrt{\det K}}$$

注意当 $k_{11}=k_{22}=0, k_{12}\neq 0$ 时不可积，上式不成立。虽负数开方等于虚数，但实数积分怎能是虚数？围道积分只是中间过程为虚数，而非最终结果为虚数。实际上这种情况下进行变量代换出现 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{v^2}dv \xrightarrow{v=iw} i\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-w^2}dw$，难道一个无穷大实数能等于一个模有限的虚数？

c. K 为任意矩阵

设有一线性变换 $q=Sr$，则 $r^T Kr = (S^{-1}q)^T K(S^{-1}q) = q^T[(S^{-1})^T KS^{-1}]q$，因只有 Gauss 型可积，故要求 $(S^{-1})^T KS^{-1}=1$，即 $K=S^T S$，这使得 $K^T=K$，故 K 为对称矩阵才可积。

【公式 4】设 $J=\begin{pmatrix} J_1 & J_2 \end{pmatrix}^T$，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}r^T Kr + J^T r} dxdy = e^{\frac{1}{2}J^T K^{-1} J} \sqrt{\frac{(2\pi)^2}{\det K}}$$

证明：

假设二次型可化为平方和

$$-\frac{1}{2}r^T Kr + J^T r = -\frac{1}{2}(k_{11}x^2 + k_{22}y^2 + 2k_{12}xy) + J_1 x + J_2 y$$

$$= -\frac{1}{2}[(ax+by-f)^2 + (cx+dy-g)^2] + \frac{1}{2}(f^2+g^2) = -\frac{1}{2}(u^2+v^2) + \frac{1}{2}(f^2+g^2)$$

则原积分可积：

$$e^{\frac{1}{2}(f^2+g^2)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = e^{\frac{1}{2}(f^2+g^2)} \frac{1}{ad-bc} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)} dudv = e^{\frac{1}{2}(f^2+g^2)} \frac{2\pi}{\sqrt{\det K}}$$

待定系数满足：

$$k_{11} = a^2 + c^2, k_{22} = b^2 + d^2, k_{12} = ab + cd$$

$$J_1 = af + cg, J_2 = bf + dg$$

只要证明 $J^T K^{-1} J = f^2 + g^2$，则公式得证。

K 的伴随矩阵为

$$K^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} k_{22} & -k_{21} \\ -k_{12} & k_{11} \end{pmatrix}^T \xrightarrow{k_{12}=k_{21}} \begin{pmatrix} k_{22} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_{11} \end{pmatrix}$$

即代数余子式构成的矩阵的转置。故

$$K^{-1} = \frac{K^*}{\det K} = \frac{1}{k_{11}k_{22} - k_{12}^2} \begin{pmatrix} k_{22} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_{11} \end{pmatrix}$$

$$J^T K^{-1} J = \frac{1}{k_{11}k_{22} - k_{12}^2} \begin{pmatrix} J_1 & J_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{22} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{k_{11}k_{22} - k_{12}^2} (J_1 k_{22} J_1 - J_1 k_{12} J_2 - J_2 k_{12} J_1 + J_2 k_{11} J_2)$$

$$= \frac{1}{(ad-bc)^2} [(b^2+d^2)(af+cg)^2 - 2(ab+cd)(af+cg)(bf+dg) + (a^2+c^2)(bf+dg)^2]$$

$$= \frac{1}{(ad-bc)^2} \{ f^2[a^2(b^2+d^2) + b^2(a^2+c^2) - 2ab(ab+cd)]$$

$$+ g^2[c^2(b^2+d^2) + d^2(a^2+c^2) - 2cd(ab+cd)]$$

$$+ 2fg[ac(b^2+d^2) + bd(a^2+c^2) - (ad+bc)(ab+cd)]\}$$

$$= f^2 + g^2$$

为何如此大费周章？就为让大家看清楚，貌似 K 逆左右两个 J 一样，展开后不一样。实际上仅 K 逆对角元左右的 J 一样（$J_1 k_{22} J_1, J_2 k_{11} J_2$），非对角元左右不一样（$-J_1 k_{12} J_2$）。

2.函数空间内积

设 n 维空间矢量为 $x=(x_1,\cdots,x_n)$， $y=(y_1,\cdots,y_n)$，矩阵为 A，则**矢量空间内积**为

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

$$(x,Ax)=\sum_{i,j=1}^{n}x_iA_{ij}x_j$$

例如二维时

$$(x,Ax)=x^TAx=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=x_1A_{11}x_1+x_1A_{12}x_2+x_2A_{21}x_1+x_2A_{22}x_2$$

瞪大眼睛看清楚，展开后 A 左右的变量并不一样（尽管展开前貌似只有一个变量）。

仅当 A 为对角阵，即 $A=diag(a_1,\cdots,a_n)$ 时，A 两边的求和指标才一样：

$$(x,Ax)=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i^2$$

我们可以把矢量空间内积推广到**函数空间内积**（Greiner's 场量子化，Ryder's QFT）：

$$(f,g)=\int f(x)g(x)dx$$

$$(f,Af)=\int f(x)A(x,y)f(y)dxdy$$

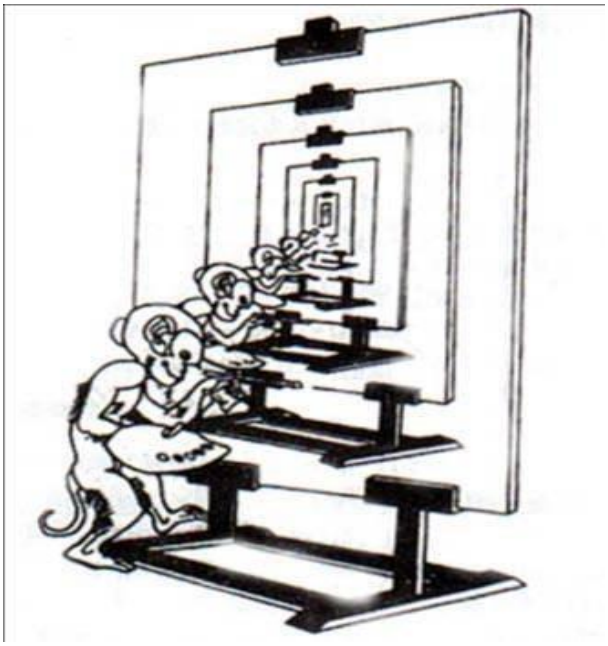
当 A 为 δ 函数（相当于对角阵）时，二重积分简化为一重积分：

$$\int f(x)\delta(x-y)f(y)dxdy=\int f^2(x)dx$$

前面讲的 Gauss 积分都是将矢量内积 $(x,Ax)=\sum_{i,j=1}^{n}x_iA_{ij}x_j$ 放在指数位置上；泛函 Gauss 积分要将函数内积放在指数位置上：

$$\int\exp[(\phi,A\phi)]D\phi=\int\exp[\int\phi(x)A(x,y)\phi(y)dxdy]D\phi$$

普通函数是从数到数的映射，泛函就是将函数映射为数。函数内积本身就是积分，泛函 Gauss 积分却要将这个积分作为被积函数！怎么样？找到泛函积分的感觉了吗？如果还没感觉，就看看猴子想象自己画自己的图：

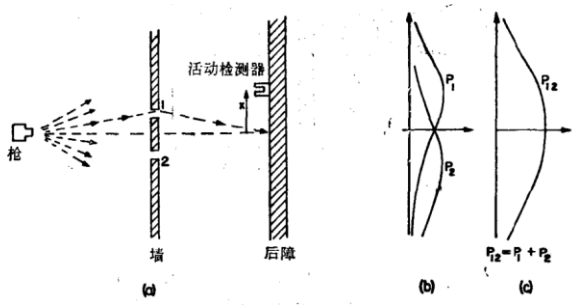


1.2.2.2 路径积分

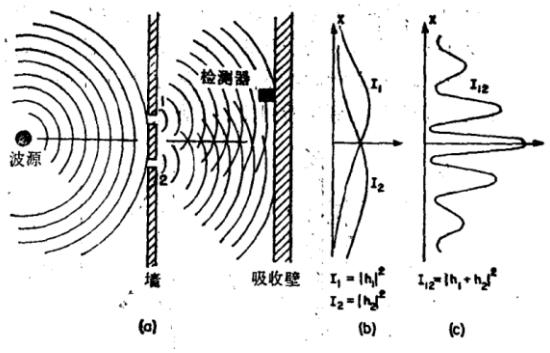
1.电子波双缝干涉

为说明路径积分来历，先讲个鬼故事——**电子波干涉实验**（Feynman《物理学讲义》卷三）。

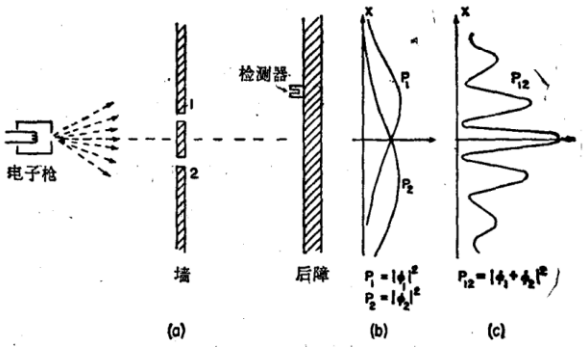
a. 如果用子弹做双缝实验，看到的结果是这样的：



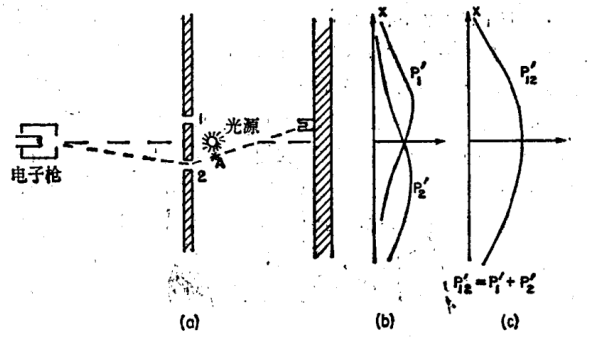
b. 如果用水波做双缝实验，看到的结果是这样的：



c. 如果用电子做双缝实验，看到的结果是这样的：



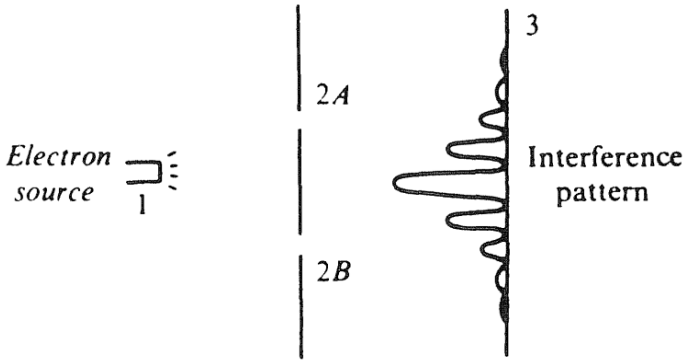
电子怎么和子弹不一样，反倒和水波一样了？你是否觉得电子其实是一种波呢？是的，这种波称为 de Broglie 波。不过，别高兴太早。接下来的实验结果更加离奇：



我们不知电子从哪条缝钻过去的，想开灯抓贼，结果打草惊蛇，电子的表现又和子弹一样了！好恐怖，电子竟然知道我们开了灯，而绕过了我们的追踪，这不闹鬼了么！哈哈，电子有着不可告人的秘密。

所以，Feynman 有句名言：没人真的懂量子力学。电子究竟是从哪条缝过去的？没有人知道。也许是同时从两条缝过去的！既然不知道，那就把所有可能都考虑进去。于是，Feynman 提出“**全历史求和**”方法，也就是路径积分方法。

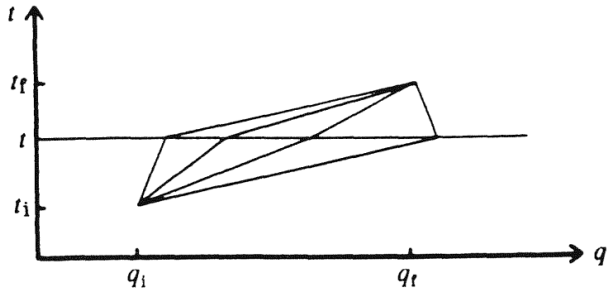
2. Feynman 传播函数



如图，我们将粒子从初态到末态的传播函数记为 K，则电子从 1 到 3 的传播可看成“从 1 到 2A 再从 2A 到 3”与“从 1 到 2B 再从 2B 到 3”两条路径的叠加（Ryder《Quantum Field Theory》）：

$$K(3;1)=K(3;2A)K(2A;1)+K(3;2B)K(2B;1)$$

还记得 **Huygens-Fresnel 原理**吗？波阵面上任一点都可以作为新的波源，发射次级子波。



如图，假设时空中(q_i,t_i)点的初态波函数为$\psi(q_i,t_i)$，Feynman 传播函数（也称为 Feynman 核）为$K(q_ft_f;q_it_i)$，则末态波函数可写为

$$\psi(q_f,t_f)=\int K(q_ft_f;q_it_i)\psi(q_i,t_i)dq_i=\int\psi(q_i,t_i)dq_i\int K(q_ft_f;qt)K(qt;q_it_i)dq$$

利用 Schrödinger 绘景的时间演化算符 U（汪德新《量子力学》），可得

$$K(q_ft_f;q_it_i)=\langle q_f|U(t_f,t_i)|q_i\rangle=\langle q_f|e^{-iH(t_f-t_i)}|q_i\rangle$$
$$\xrightarrow{\delta t=\Delta t/n=(t_f-t_i)/n}\langle q_f|(e^{-iH\delta t})^n|q_i\rangle=\langle q_f|[1-iH\delta t+o(\delta t)^2]^n|q_i\rangle$$

略去高阶无穷小，插入坐标本征态完备集，得（李灵峰《量子场论》）：

$$K(q_ft_f;q_it_i)=\langle q_f|(1-iH\delta t)^n|q_i\rangle=\langle q_f|(1-iH\delta t)^{n-1}\int dq_1|q_1\rangle\langle q_1|(1-iH\delta t)|q_i\rangle$$
$$=\int dq_{n-1}\cdots dq_1\langle q_f|(1-iH\delta t)|q_{n-1}\rangle\langle q_{n-1}|\cdots|q_1\rangle\langle q_1|(1-iH\delta t)|q_i\rangle$$

插入动量本征态完备集，利用（坐标表象）动量本征函数$\langle q|p\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ipq}$（汪德新《量子力学》），及$\langle q|H|p\rangle=H\langle q|p\rangle$（王正行《简明量子场论》），得

$$\langle q_{m+1}|H|q_m\rangle=\int dp_m\langle q_{m+1}|p_m\rangle\langle p_m|H|q_m\rangle=\int\frac{dp_m}{2\pi}e^{ip_m(q_{m+1}-q_m)}H$$

$$K(q_ft_f;q_it_i)=\int dq_{n-1}\cdots dq_1\int\frac{dp_{n-1}}{2\pi}e^{ip_m(q_n-q_{n-1})}(1-iH\delta t)\cdots\int\frac{dp_0}{2\pi}e^{ip_0(q_1-q_0)}(1-iH\delta t)$$
$$=\int dq_{n-1}\cdots dq_1\int\frac{dp_{n-1}}{2\pi}\cdots\frac{dp_0}{2\pi}e^{ip_m(q_n-q_{n-1})}(e^{-iH\delta t})^n$$
$$=\int dq_{n-1}\cdots dq_1\int\frac{dp_{n-1}}{2\pi}\cdots\frac{dp_0}{2\pi}e^{i(p_m\frac{q_n-q_{n-1}}{\Delta t}-H)\Delta t}=\int e^{i\int(p\dot{q}-H)dt}DqDp$$

其中$Dq=dq_{n-1}\cdots dq_1$及$Dp=\frac{dp_{n-1}}{2\pi}\cdots\frac{dp_0}{2\pi}$为积分测度，$\dot{q}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{q_{m+1}-q_m}{\Delta t}$.

取$H=\frac{p^2}{2m}+V(q)$，根据 **Gauss 型积分**公式（王正行，李灵峰）可得：

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}x\cdot K\cdot x+Jx}d^nx=e^{\frac{1}{2}JK^{-1}J}\sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det K}}$$

$$K(q_f t_f;q_i t_i)=\int e^{i\int(p\dot{q}-H)dt}DqDp=\int e^{-i\int V(q)dt}Dq\int e^{\int(-\frac{1}{2}\frac{i}{m}p^2+i\dot{q}p)dt}Dp$$

$$=N\int e^{-i\int V(q)dt}e^{\int[\frac{1}{2}i\dot{q}(\frac{i}{m})^{-1}i\dot{q}]dt}Dq=N\int e^{i\int[\frac{1}{2}m\dot{q}^2-V(q)]dt}Dq=N\int e^{i\int Ldt}Dq=N\int e^{iS}Dq$$

其中 detK 为将 x 的二次型化为 y 的平方时涉及坐标变换的 **Jacobi 行列式**因子，S 为作用量，N 为归一化常数。指数位置上 $p\dot{q}-H\to L$ 如同 Legendre 变换，符合我们预期。

这里面有个令人费解的问题，我们前面导出的一系列 Gauss 型积分，被积函数中都不含积分。如果被积函数里没有 dx 的积分，那么直接套公式便可。但现在积分里套着积分，并且不是通常学过的二重积分，怎么办呢？我们应该从对积分本质的思考中获得启发。既然积分本质是求和，指数函数可化加法为乘法，所以指数位置上的积分 $I=\int f(x)dx$ 可以化为每一个“元积分” $dI=f(x_i)\Delta x_i$ 的指数函数的连乘积（王正行《简明量子场论》）：

$$\exp[\int f(x)dx]=\exp[\lim_{\Delta x\to 0}\sum_i f(x_i)\Delta x_i]=\lim_{\Delta x\to 0}\prod_i\exp[f(x_i)\Delta x_i]$$

$$\int D\xi\exp[-\frac{1}{2}\int\xi^2(x)dx]=\int\prod_x\frac{d\xi_x}{C}\exp[-\frac{1}{2}\sum_x\xi_x^2\Delta x]=\prod_x\int\frac{d\xi_x}{C}\exp[-\frac{1}{2}\xi_x^2\Delta x]$$

$$=\prod_x\frac{1}{C}\sqrt{\frac{2\pi}{\Delta x}}=1$$

其中最后一步是 C 的定义，你也可以让它等于 1 以外的其他常数，看个人喜好吧。

3.外源技巧

在 Lagrange 量中引入**外源**项 J，即 $L\to L+Jq$，则跃迁振幅（传播函数）变为

$$K_J(q_f t_f;q_i t_i)=\langle q_f t_f|q_i t_i\rangle_J=N\int e^{i\int(L+Jq)dt}Dq=N\int e^{i\int Jqdt}e^{i\int Ldt}Dq$$

引入**泛函导数**（Ryder《Quantum Field Theory》，李灵峰《量子场论》）

$$\frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(y)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F[f(x)+\varepsilon\delta(x-y)]-F[f(x)]}{\varepsilon}$$

满足（Peskin《Introduction to Quantum Field Theory》）

$$\frac{\delta}{\delta J(x)}J(y)=\delta(x-y),\frac{\delta}{\delta J(x)}\int J(y)\phi(y)d^4y=\phi(x)$$

则

$$\frac{\delta}{i\delta J(t_1)}K_J(q_f t_f;q_i t_i)\Big|_{J=0}=\left[N\int q(t_1)e^{i\int Jdt}e^{i\int Ldt}Dq\right]_{J=0}=N\int q(t_1)e^{i\int Ldt}Dq$$

$$=\int q(t_1)dq(t_1)\langle q_f t_f|q(t_1)\rangle\langle q(t_1)|q_i t_i\rangle=\langle q_f t_f|q(t_1)|q_i t_i\rangle$$

4.生成泛函与 Green 函数

前面曾谈到，散射振幅即从入射态 $|in\rangle$ 到出射态 $|out\rangle$ 的跃迁振幅 $\langle out|in\rangle$. 理论上，可以用外源 J 代替粒子源与探测器，散射前使粒子从真空中产生，散射后使其消失于真空中。这样，

从任意入射态到任意出射态的跃迁问题，就被简化为从入射基态$|0,-\infty\rangle$到出射基态$|0,\infty\rangle$的跃迁振幅$\langle 0,\infty|0,-\infty\rangle$计算。鉴于该跃迁振幅的重要性，我们给它一个专有符号：

$$Z[J]=\langle 0,\infty|0,-\infty\rangle_J=N\int e^{i\int(L+Jq)dt}Dq$$

这就是**生成泛函**！对生成泛函取泛函导数，得

$$\frac{\delta}{i\delta J(t_1)}Z[J]\Big|_{J=0}=N\int q(t_1)e^{i\int Ldt}Dq=\langle 0|q(t_1)|0\rangle=G(t_1)$$

$$\frac{\delta^n Z[J]}{i^n\delta J(t_1)\cdots\delta J(t_n)}\Big|_{J=0}=N\int q(t_1)\cdots q(t_n)e^{i\int Ldt}Dq=\langle 0|T[q(t_1)\cdots q(t_n)]|0\rangle=G(t_1,\cdots,t_n)$$

刚好是前面讲 S 矩阵约化公式时提到的 Green 函数（n 点关联函数），而 T 为时序算符（将算符按时间排序，先发生的右移，后发生的左移）。在场论中，时间与空间是统一的，所以上式可改写为（与李灵峰《量子场论》差 i 因子）：

$$\frac{\delta^n Z[J]}{i^n\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\Big|_{J=0}=\langle 0|T[\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)]|0\rangle=G(x_1,\cdots,x_n)$$

这种将指数拿来求导的技巧特别像统计物理中的配分函数。在统计物理中，给定了配分函数，就可以算出一切；在量子场论中，给定了生成泛函，就可以导出 Feynman 规则。特别是，配分函数和生成泛函都用 Z 表示！也许是发明生成泛函的物理学家比较怀旧吧。

1.2.2.3 标量场

1.标量场生成泛函

（1）自由场生成泛函

引入外源及小虚数项（为避免奇点），标量场的 Lagrange 量可改写为

$$L=L_0+L_I=L_{KG}+J\phi+\frac{1}{2}i\varepsilon\phi^2+L_I(\phi)=-\frac{1}{2}\phi(\partial^2+m^2-i\varepsilon)\phi+J\phi+L_I(\phi)$$

其中L_I表示相互作用，L_{KG}表示 Klein-Gordon，差 4 散度对运动方程无影响，此处代换$\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi=\partial_\mu(\phi\partial^\mu\phi)-\phi\partial^2\phi\to-\phi\partial^2\phi$.由生成泛函定义得自由场生成泛函：

$$Z_0[J]=N\int e^{i\int L_0d^4x}D\phi=N\int D\phi\exp\{i\int d^4x[-\frac{1}{2}\phi(\partial^2+m^2-i\varepsilon)\phi+J\phi]\}$$

$$=N\int D\phi\exp\{\int d^4x[-\frac{1}{2}\phi i(\partial^2+m^2-i\varepsilon)\phi+iJ\phi]\}$$

如前所述，这里面有个令人费解的问题，我们前面导出的一系列 Gauss 型积分，被积函数中都不含积分。如果被积函数里没有 dx 的积分，那么直接套公式便可。但现在积分里套着积分，怎么办？由上节讨论可见，有对 dx 的积分与没有对 dx 的积分只相差一个常数，所以

$$Z_0[J]=N'\exp\{\frac{1}{2}\int d^4xd^4yiJ[i(\partial^2+m^2-i\varepsilon)]^{-1}iJ\}$$

$$=N'\exp[-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta_F(x,y)J(y)]$$

其实，这个因人而异的常数无关紧要，可以吸收到积分测度中。就像泛函微商，指数位置上有积分也无所谓，求导时会产生δ函数，对δ函数积分后就好像指数位置上没积分一样：

$$\frac{\delta}{\delta J(y)}\exp[\int f(x)J(x)dx]=f(y)\exp[\int f(x)J(x)dx]\Leftrightarrow\frac{\delta}{\delta J}\exp(fJ)=f\exp(fJ)$$

另一个令人费解的问题：为什么生成泛函中指数位置上前面只有对 x 的积分，后面变成了对 x 和 y 的二重积分？在泛函积分一节解释过了，当你彻底搞懂矢量空间内积，才能理解函数空间内积。

（2）相互作用场生成泛函

根据量子场论的中心等式（王正行《简明量子场论》）：

$$N\int F(\phi)e^{i\int L_0d^4x}D\phi=N\int\sum_n f_n\phi^n(y)e^{i\int d^4x[L_{KG}+\frac{1}{2}i\varepsilon\phi^2+J(x)\phi(x)]}D\phi$$

$$=N\int\sum_n f_n\left[\int\delta(x-y)\phi(x)d^4x\right]^n e^{i\int d^4x[L_{KG}+\frac{1}{2}i\varepsilon\phi^2+J(x)\phi(x)]}D\phi$$

$$=\sum_n f_n[\frac{\delta}{i\delta J(y)}]^nN\int e^{i\int d^4x[L_{KG}+\frac{1}{2}i\varepsilon\phi^2+J(x)\phi(x)]}D\phi=F[\frac{\delta}{i\delta J(y)}]Z_0[J]$$

可得

$$Z[J]=N\int e^{i\int L_I(\phi)d^4x}e^{i\int L_0d^4x}D\phi=e^{i\int L_I(\frac{\delta}{i\delta J})d^4x}N\int e^{i\int L_0d^4x}D\phi=e^{i\int L_I(\frac{\delta}{i\delta J})d^4x}Z_0[J]$$

由于$Z_0[J]$是在外源作用下场从真空到真空的跃迁振幅，无外源时应等于 1：

$$Z_0[0]=N'\exp[-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta_F(x,y)J(y)]_{J=0}=N'=1$$

故

$$Z_0[J]=\exp[-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta_F(x,y)J(y)]$$

（3）传播子

Δ_F满足

$$(\partial^2+m^2-i\varepsilon)\Delta_F=-\delta(x-y)$$

对于$L=-\frac{1}{2}\phi(\partial^2+m^2-i\varepsilon)\phi+J\phi$，做变换$\phi\to\phi+\phi_0$（裘忠平《现代量子场论导引》），代入 Euler-Lagrange 方程得

$$(\partial^2+m^2-i\varepsilon)\phi_0(x)=J(x)$$

所以

$$-\int\Delta_FJ(y)dy=\int\frac{\delta(x-y)}{\partial^2+m^2-i\varepsilon}(\partial^2+m^2-i\varepsilon)\phi_0(y)dy=\phi_0(x)$$

Δ_F 表示标量场位于 y 的点源 $\delta(x-y)$ 在 x 产生的场，即场的振幅从 y 到 x 的传播，所以称为 Feynman 传播子。为写出它的具体形式，做 **Fourier 展开**，根据

$$f(x)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}F(k)e^{-ikx}$$

$$\delta(x)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ikx}$$

取 y=0，将微分算符作用于被展开函数，可得（Greiner's QED book 1.9 节）：

$$\Delta_F(x)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\Delta(k)e^{-ikx}$$

$$(\partial^2+m^2-i\varepsilon)\Delta_F(x)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\Delta(k)(\partial^2+m^2-i\varepsilon)e^{-ikx}=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\Delta(k)(-k^2+m^2-i\varepsilon)e^{-ikx}$$

$$=-\delta(x-0)=-\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ikx}$$

所以

$$\Delta(k)(-k^2+m^2-i\varepsilon)=-1\Rightarrow\Delta(k)=\frac{1}{k^2-m^2+i\varepsilon}$$

2.内线：自由场 Green 函数

前面已给出 Green 函数计算方法，就是**生成泛函对外源变分后再将外源赋值为零**。由此可得 n 点 Green 函数计算结果。

（1）一点 Green 函数（细节可参阅 Ryder's QFT）

$$G(x)=\frac{\delta Z_0[J]}{i\delta J(x)}\bigg|_{J=0}=\frac{\delta}{i\delta J(x)}\exp\left[-\frac{i}{2}\int J(x_1)\Delta_F(x_1,x_2)J(x_2)d^4x_1d^4x_2\right]\bigg|_{J=0}$$

$$=-\frac{1}{2}\int[\delta(x-x_1)\Delta_F(x_1,x_2)J(x_2)d^4x_1d^4x_2+J(x_1)\Delta_F(x_1,x_2)\delta(x-x_2)d^4x_1d^4x_2]Z_0[J]\bigg|_{J=0}$$

$$=-\frac{1}{2}\int[\Delta_F(x,x_2)J(x_2)d^4x_2+J(x_1)\Delta_F(x_1,x)d^4x_1]Z_0[J]\bigg|_{J=0}$$

$$=-\int J(x_1)\Delta_F(x,x_1)d^4x_1Z_0[J]\Big|_{J=0}=0$$

（2）两点 Green 函数

$$G(x,y)=\frac{\delta Z_0[J]}{i^2\delta J(x)\delta J(y)}\bigg|_{J=0}=-\frac{\delta}{i\delta J(y)}\int J(x_1)\Delta_F(x,x_1)d^4x_1Z_0[J]\bigg|_{J=0}$$

$$=-\frac{1}{i}\int\delta(x_1-y)\Delta_F(x,x_1)d^4x_1Z_0[J]\bigg|_{J=0}-\frac{\delta Z_0[J]}{i\delta J(y)}\int J(x_1)\Delta_F(x,x_1)d^4x_1\bigg|_{J=0}$$

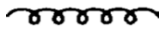
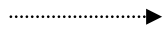
$$=-\frac{1}{i}\Delta_F(x,y)Z_0[J]\bigg|_{J=0}-0=i\Delta_F(x,y)$$

即：**两点自由 Green 函数就相当于 Feynman 传播子**。

（3）Wick 定理

仿照一点、两点 Green 函数的计算过程，可以证明 **Wick 定理：奇数点自由 Green 函数等于零；偶数点自由 Green 函数等于所有可能的两点 Green 函数乘积之和。**

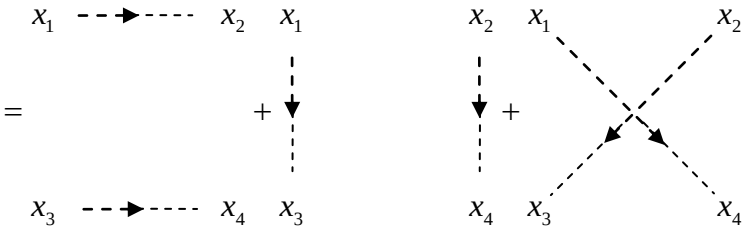
为将数学技巧转化为物理直觉，最好将计算过程用（Feynman）图形表示。两点 Green 函数可以画两个点，之间用一条线连接。但以后会遇到各种粒子场，都用同一种线就无法区分了。我们约定如下表：

标量粒子		短划线
旋量粒子		实线
光子		波浪线
胶子		（弹簧）回旋线
鬼粒子		（圆点）虚线
引力子		双波浪线

这样约定后，自由标量场 Green 函数可表示为：

$$G(x,y)=\overbrace{\phi(x)\phi}(y)=x \;\text{- - -}\!\!\rightarrow\!\text{- - - -}\; y$$

$$G(x_1,x_2,x_3,x_4)=G(x_1,x_2)G(x_3,x_4)+G(x_1,x_3)G(x_2,x_4)+G(x_1,x_4)G(x_2,x_3)$$



其中 $\overbrace{\phi(x)\phi}(y)$ 表示 $\phi(x)$ 与 $\phi(y)$ 的收缩。注意，最后一个图中的两条线应该看作异面直线（**既不相交也不平行**）。由于自由场没有相互作用，所有 Feynman 图都是**不连通**图（李灵峰《量子场论》）。非连通图对于散射振幅和散射截面没有贡献，我们可以通过取对数将其消去（王正行，李灵峰）：

$$W[J]=-i\ln Z[J]$$

对 W[J]取泛函导数就给出连通 Green 函数。

3.顶点：相互作用场 Green 函数

根据前面算出的生成泛函：

$$Z[J]=e^{i\int L_I(\frac{\delta}{i\delta J})d^4x}Z_0[J]$$

$$Z_0[J]=\exp[-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta_F(x,y)J(y)]$$

考虑 4 标量粒子相互作用 $L_I(\phi)=-\frac{\lambda}{4!}\phi^4$，假定耦合常数 λ 很小，则

$$Z[J]=e^{i\int -\frac{\lambda}{4!}(\frac{\delta}{i\delta J})^4d^4z}Z_0[J]=\left[1-i\frac{\lambda}{4!}\int d^4z(\frac{\delta}{i\delta J})^4+\cdots\right]Z_0[J]$$

其中 λ 的 0 阶项是自由场。为免符号重复造成不可预料错误，已将 x 改成 z. 反复利用

$$\frac{\delta}{i\delta J}Z_0[J]=\frac{\delta}{i\delta J(z)}\exp[-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta_F(x,y)J(y)]$$

$$=\frac{-1}{2}\int d^4xd^4y[\delta(x-z)\Delta_F(x,y)J(y)+J(x)\Delta_F(x,y)\delta(y-z)]Z_0[J]$$

$$=-\frac{1}{2}\int[d^4y\Delta_F(z,y)J(y)+d^4xJ(x)\Delta_F(x,z)]Z_0[J]=-\int d^4yJ(y)\Delta_F(y,z)Z_0[J]$$

可得（王正行《简明量子场论》）：

$$(\frac{\delta}{i\delta J})^4Z_0[J]=-(\frac{\delta}{i\delta J(z)})^3\int d^4yJ(y)\Delta_F(y,z)Z_0[J]$$

$$=-(\frac{\delta}{i\delta J(z)})^2\frac{1}{i}\Delta_F(z,z)Z_0[J]+(\frac{\delta}{i\delta J(z)})^2\left[\int d^4yJ(y)\Delta_F(y,z)\right]^2Z_0[J]$$

$$=\frac{1}{i}\Delta_F(z,z)\frac{\delta}{i\delta J(z)}\int d^4yJ(y)\Delta_F(y,z)Z_0[J]$$

$$+\frac{\delta}{i\delta J(z)}\{\frac{1}{i}\Delta_F(z,z)2\int d^4yJ(y)\Delta_F(y,z)Z_0[J]-\left[\int d^4yJ(y)\Delta_F(y,z)\right]^3Z_0[J]\}$$

$$=\frac{3}{i}\Delta_F(z,z)\{\frac{1}{i}\Delta_F(z,z)Z_0[J]-\left[\int d^4yJ(y)\Delta_F(y,z)\right]^2Z_0[J]\}$$

$$-3\left[\int d^4yJ(y)\Delta_F(y,z)\right]^2\frac{1}{i}\Delta_F(z,z)Z_0[J]+\left[\int d^4yJ(y)\Delta_F(y,z)\right]^4Z_0[J]$$

$$=\{-3\Delta_F^2(z,z)+6i\Delta_F(z,z)\left[\int d^4yJ(y)\Delta_F(y,z)\right]^2+\left[\int d^4yJ(y)\Delta_F(y,z)\right]^4\}Z_0[J]$$

将传播子用短划线表示【$\Delta_F(z,z)$将 z 点与 z 点连成一个闭合圈】，外源用⊗表示，可得：

$$Z[J]=N_0\left[1-i\frac{\lambda}{4!}\int d^4z\left(3\ \text{z}\ +6\ J(y_1)\otimes\text{z}\otimes J(y_2)+\begin{matrix}J(y_1)&&J(y_2)\\&\otimes\ \text{z}\ \otimes&\\J(y_3)&&J(y_4)\end{matrix}\right)+\cdots\right]Z_0[J]$$

注意，实点表示两线交叉（连通图）。这正是相互作用特点。没相互作用就不连通，没交点。我们把没外线的图 z 称为真空图（真空到真空跃迁）。真空是量子场的基态，它在海面下翻滚，但不可见（潜水）；量子场处于激发态（表现为粒子）才可见（吐槽）。我们应该让真空图消失。事实上，它确实可以消失，只要我们取 $Z[0]=Z_0[0]=1$，将生成泛函归一化：

$$1=N_0\left[1-i\frac{\lambda}{4!}\int d^4z\left(3\ \text{z}\ \right)+\cdots\right]$$

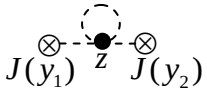
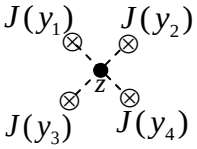
则

$$Z[J]=\frac{\left[1-i\frac{\lambda}{4!}\int d^4z\left(3\quad A\quad +6\quad B\quad +\quad X\quad \right)+\cdots\right]}{\left[1-i\frac{\lambda}{4!}\int d^4z\left(3\quad A\quad \right)+\cdots\right]}Z_0[J]$$

$$\xrightarrow{\lambda\to 0,Taylor展开}\left[1+i\frac{\lambda}{4!}\int d^4z(3A)+\cdots\right]\times\left[1-i\frac{\lambda}{4!}\int d^4z(3A+6B+X)+\cdots\right]Z_0[J]$$

$$=\left[1-i\frac{\lambda}{4!}\int d^4z(3A+6B+X)+i\frac{\lambda}{4!}\int d^4z(3A)+o(\lambda^2)\right]Z_0[J]$$

$$\approx\left[1-i\frac{\lambda}{4!}\int d^4z(6B+X)\right]Z_0[J]$$

为简便，这里已将无 J 真空图  ，JJ 蝌蚪图  ，及 4 张 J 图  分别用 A，B，X 代替。

大家应该记得，外源只是人为引入的数学技巧，为与现实世界比较，最终要赋值为零将其消去。所以，我们还要计算生成泛函的变分，也就是前面定义过的 Green 函数：

$$G(x_1,\cdots,x_n)=\left.\frac{\delta^n Z[J]}{i^n\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\right|_{J=0}$$

从刚才计算可见：对于带源的 Feynman 图，对源求一次泛函微商，就切掉一个源。对无源图，对源的泛函微商等于零。所以求（1 阶微扰）两点 Green 函数时，只考虑 6B 项即可（第 1 项为自由 Green 函数，前面已求出；X 项求 2 次泛函微商后 4 个 J 变成 2 个 J，取 J=0 导致此项消失）。6B 项蝌蚪图求 2 阶导（切 2 刀）后 JJ 没了，⊗ 也就没了，只剩 y_1  y_2（对 z 积分）.

严格算下也不难：

$$G(y_1,y_2)=G_0-\frac{i\lambda}{4!}\int d^4z\left\{\frac{\delta}{i^2\delta J(y_1)\delta J(y_2)}6i\Delta_F(z,z)\left[\int d^4yJ(y)\Delta_F(y,z)\right]^2Z_0[J]\right\}\Bigg|_{J=0}$$

$$=G_0-\frac{i\lambda}{4!}\int d^4z6i\Delta_F(z,z)\frac{\delta}{i\delta J(y_2)}\{2\int d^4yJ(y)\Delta_F(y,z)\frac{1}{i}\Delta_F(y_1,z)Z_0[J]-(\to 0)\}_{J=0}$$

$$=G_0-\frac{i\lambda}{4!}\int d^4z6i\Delta_F(z,z)\{\frac{2}{i}\Delta_F(y_1,z)\frac{1}{i}\Delta_F(y_2,z)Z_0[J]-(\to 0)-(\to 0)\}_{J=0}$$

$$=G_0-\frac{\lambda}{2}\int d^4z\Delta_F(z,z)\Delta_F(y_1,z)\Delta_F(y_2,z)=G_0-\frac{i\lambda}{2}\int d^4zG(z,z)G(y_1,z)G(y_2,z)$$

用图形表示就是：

$$G(y_1,y_2)=y_1\text{------}y_2-\frac{i\lambda}{2}\int d^4z\ \ y_1\text{---}y_2$$

其中 $G_0=i\Delta_F(y_1-y_2)$ 为自由场 Green 函数。这里与 Ryder 及王正行略有不同，Ryder 是把 Feynman 传播子而非 Green 函数表示为 y1------y2，差个 i；王正行隐含了积分号和相乘因子！

1.2.2.4 旋量场

1.Grassmann 数的积分

从前面“相对论量子力学”讨论可见，旋量满足反对易关系，它（的分量）是（**Grassmann**）**反对易数（交换顺序差负号）**。现在要研究旋量场路径积分了，那么反对易数能否像**普通数**那样积分呢？

（1）一维 Grassmann 数

a.代数性质

为与普通数区分，我们用希腊字母来表示它（普通数用英文字母）。反对易关系可表示为

$$\{\theta_i,\theta_j\}=[\theta_i,\theta_j]_+=\theta_i\theta_j+\theta_j\theta_i=0$$

即交换顺序差一负号。注意，它不是矩阵（数组），仍然是数（因为是一维的），只不过不是普通的数，既非实数也非复数。如果将上述反对易关系式中两个数取为相等的，则

$$\theta_i^2=0$$

即它具有“**幂零**”性质！这使得以 Grassmann 数为变量的函数展开式只有有限项：

$$\begin{aligned}f(\theta_1,\theta_2)&=a_0+a_1\theta_1+a_2\theta_2+a_3\theta_1\theta_2+a_4\theta_1^2\theta_2+a_5\theta_1\theta_2^2+\cdots\\&=a_0+a_1\theta_1+a_2\theta_2+a_3\theta_1\theta_2=a_0+a_1\theta_1+a_2\theta_2-a_3\theta_2\theta_1\end{aligned}$$

上式已舍弃平方为零的项。

b.微分性质

因为 Grassmann 数不对易，所以求导要分**左导数**和**右导数**：

$$\frac{\partial^L}{\partial\theta_1}f=\frac{\vec{\partial}}{\partial\theta_1}f=a_1\frac{\vec{\partial}}{\partial\theta_1}\theta_1+a_3\frac{\vec{\partial}}{\partial\theta_1}\theta_1\theta_2=a_1+a_3\theta_2$$

$$\frac{\partial^R}{\partial\theta_1}f=\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta_1}f=a_1\theta_1\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta_1}-a_3\theta_2\theta_1\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta_1}=a_1-a_3\theta_2$$

但如无特别声明，习惯上默认取左导数，不加箭头和 L 标识，以简化公式：

$$\frac{\partial}{\partial\theta_1}f=a_1+a_3\theta_2,\quad\frac{\partial}{\partial\theta_2}f=a_2-a_3\theta_1$$

因为

$$\{\theta_1,\frac{\partial}{\partial\theta_1}\}f=\theta_1\frac{\partial f}{\partial\theta_1}+\frac{\partial}{\partial\theta_1}(\theta_1 f)=\theta_1(a_1+a_3\theta_2)+\frac{\partial}{\partial\theta_1}(a_0\theta_1+a_2\theta_1\theta_2)=f$$

$$\{\frac{\partial}{\partial\theta_1},\frac{\partial}{\partial\theta_2}\}f=\frac{\partial}{\partial\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_2}f+\frac{\partial}{\partial\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_1}f=\frac{\partial}{\partial\theta_1}(a_2-a_3\theta_1)+\frac{\partial}{\partial\theta_2}(a_1+a_3\theta_2)=0$$

所以可得微分算符间的反对易关系：

$$\{\theta_i,\frac{\partial}{\partial\theta_j}\}=\delta_{ij},\quad\{\frac{\partial}{\partial\theta_i},\frac{\partial}{\partial\theta_j}\}=0$$

需要特别注意的是，因为反对易关系，Leibniz 法则 $(uv)'=u'v+uv'$ 也变了：

$$\frac{\partial}{\partial\theta_1}(\theta_1 f)=\frac{\partial}{\partial\theta_1}(a_0\theta_1+a_2\theta_1\theta_2)=a_0+a_2\theta_2$$

$$=a_0+a_1\theta_1+a_2\theta_2+a_3\theta_1\theta_2-\theta_1(a_1+a_3\theta_2)=f-\theta_1\frac{\partial f}{\partial\theta_1}\neq\frac{\partial\theta_1}{\partial\theta_1}f+\theta_1\frac{\partial f}{\partial\theta_1}$$

c.积分性质

因为（Ryder's QFT）

$$(\int d\theta_1)^2=\int d\theta_1\int d\theta_2=\int d\theta_1 d\theta_2=-\int d\theta_2 d\theta_1=-(\int d\theta_1)^2$$

所以

$$\int d\theta=0$$

关于 Grassmann 变量没有其他约束，这允许我们定义

$$\int\theta d\theta=1$$

于是

$$\int d\theta_1 f=\int d\theta_1[a_0+a_1\theta_1+a_2\theta_2+a_3\theta_1\theta_2]$$

$$=a_0\int d\theta_1+a_1\int\theta_1 d\theta_1+(-1)a_2\theta_2\int d\theta_1+(-1)^2a_3\theta_2\int\theta_1 d\theta_1=a_1+a_3\theta_2=\frac{\partial f}{\partial\theta_1}$$

积分与（左）微分结果相同！注意，因为反对易，每交换一次顺序就要多一负号。

假设有 2 个独立的一维 Grassmann 变量 θ 及 $\eta=\bar{\theta}$，满足

$$\int d\theta=\int d\bar{\theta}=0,\quad \int\theta d\theta=\int\bar{\theta}d\bar{\theta}=1$$

因为 $\theta^2=\eta^2=0$，故

$$e^{-\theta\eta}=1-\theta\eta+\frac{1}{2}(-\theta\eta)^2+\cdots=1-\theta\eta$$

如此甚好，不用我们做近似，它自己就把高阶项抹去了！于是

$$\int d\theta d\eta(e^{-\theta\eta})=\int d\theta d\eta-\int d\theta d\eta(\theta\eta)=0+\int d\theta\int[d\eta(\eta)]\theta=1$$

（2）二维 Grassmann 数

二维 Grassmann 变量是一个 2×1（两行一列）或 1×2（一行两列）矩阵，它的每个矩阵元都是一维 Grassmann 数。假定有两个独立的二维 Grassmann 变量

$$\eta=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix},\quad \bar{\eta}=\begin{pmatrix}\bar{\eta}_1\\ \bar{\eta}_2\end{pmatrix}$$

它们不能直接相乘，但若将其中一个转置，就满足矩阵乘法：

$$\bar{\eta}\eta\to\bar{\eta}^T\eta=\begin{pmatrix}\bar{\eta}_1 & \bar{\eta}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}=\bar{\eta}_1\eta_1+\bar{\eta}_2\eta_2$$

$$(\bar{\eta}\eta)^2=(\bar{\eta}_1\eta_1+\bar{\eta}_2\eta_2)(\bar{\eta}_1\eta_1+\bar{\eta}_2\eta_2)=(\bar{\eta}_1\eta_1)^2+\bar{\eta}_1\eta_1\bar{\eta}_2\eta_2+\bar{\eta}_2\eta_2\bar{\eta}_1\eta_1+(\bar{\eta}_2\eta_2)^2$$
$$=0+\bar{\eta}_1\eta_1\bar{\eta}_2\eta_2+(-1)^2\bar{\eta}_1\bar{\eta}_2\eta_2\eta_1+0=\bar{\eta}_1\eta_1\bar{\eta}_2\eta_2+(-1)^4\bar{\eta}_1\eta_1\bar{\eta}_2\eta_2=2\bar{\eta}_1\eta_1\bar{\eta}_2\eta_2$$

需要特别注意的是，我们通常说的 Grassmann 数的平方为零是指一维 Grassmann 数。**二维 Grassmann 变量的平方不等于零，只有它的分量（为一维 Grassmann 数）的平方为零**！上式中，每交换一次多一负号，-1 的 4 次方表示交换 4 次。

$(\bar{\eta}\eta)^3$ 展开式每项都包含一维 Grassmann 数的平方，因而 $(\bar{\eta}\eta)^3=0$；更高次幂也都是 0. 故

$$e^{-\bar{\eta}\eta}=1-(\bar{\eta}_1\eta_1+\bar{\eta}_2\eta_2)+\frac{1}{2}(2\bar{\eta}_1\eta_1\bar{\eta}_2\eta_2)+\frac{1}{3!}\times 0+\cdots=1-(\bar{\eta}_1\eta_1+\bar{\eta}_2\eta_2)+\bar{\eta}_1\eta_1\bar{\eta}_2\eta_2$$

定义 $d\bar{\eta}d\eta=d\bar{\eta}_1d\eta_1d\bar{\eta}_2d\eta_2$，则

$$\int d\bar{\eta}d\eta e^{-\bar{\eta}\eta}=\int d\bar{\eta}_1d\eta_1d\bar{\eta}_2d\eta_2-\int d\bar{\eta}_1d\eta_1d\bar{\eta}_2d\eta_2(\bar{\eta}_1\eta_1+\bar{\eta}_2\eta_2)+\int d\bar{\eta}_1d\eta_1d\bar{\eta}_2d\eta_2(\bar{\eta}_1\eta_1\bar{\eta}_2\eta_2)$$
$$=0-\int d\bar{\eta}_1d\eta_1(\bar{\eta}_1\eta_1)\int d\bar{\eta}_2d\eta_2-\int d\bar{\eta}_1d\eta_1\int d\bar{\eta}_2d\eta_2(\bar{\eta}_2\eta_2)+\int d\bar{\eta}_1d\eta_1(\bar{\eta}_1\eta_1)\int d\bar{\eta}_2d\eta_2(\bar{\eta}_2\eta_2)$$
$$=0-0-0+1=1$$

下面讨论变量代换对积分的影响。再定义

$$\eta=M\alpha=\begin{pmatrix}M_{11}&M_{12}\\M_{21}&M_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix},\quad \bar{\eta}=N\bar{\alpha}=\begin{pmatrix}N_{11}&N_{12}\\N_{21}&N_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\alpha}_1\\\bar{\alpha}_2\end{pmatrix}$$

则

$$\eta_1\eta_2=(M_{11}\alpha_1+M_{12}\alpha_2)(M_{21}\alpha_1+M_{22}\alpha_2)=0+M_{11}M_{22}\alpha_1\alpha_2+M_{12}M_{21}\alpha_2\alpha_1+0$$
$$=(M_{11}M_{22}-M_{12}M_{21})\alpha_1\alpha_2=(\det M)\alpha_1\alpha_2$$

其中 det 表示行列式，运算中已根据 Grassmann 数的反对易关系化简。根据积分规则

$$\int d\alpha_1d\alpha_2(\alpha_1\alpha_2)=1=\int d\eta_1d\eta_2(\eta_1\eta_2)=\int d\eta_1d\eta_2(\det M)\alpha_1\alpha_2$$

应有

$$d\alpha_1d\alpha_2=d\eta_1d\eta_2(\det M)$$

于是

$$1=\int d\bar{\eta}d\eta e^{-\bar{\eta}\eta}=\int d\bar{\eta}_1d\eta_1d\bar{\eta}_2d\eta_2e^{-(N\bar{\alpha})^TM\alpha}=-\frac{1}{\det M}\int d\bar{\eta}_1d\bar{\eta}_2d\alpha_1d\alpha_2e^{-\bar{\alpha}^TN^TM\alpha}$$
$$=-\frac{1}{\det M\det N}\int d\bar{\alpha}_1d\bar{\alpha}_2d\alpha_1d\alpha_2e^{-\bar{\alpha}^TA\alpha}=\frac{1}{\det(MN)}\int d\bar{\alpha}_1d\alpha_1d\bar{\alpha}_2d\alpha_2e^{-\bar{\alpha}^TA\alpha}$$
$$=\frac{1}{\det(N^TM)}\int d\bar{\alpha}d\alpha e^{-\bar{\alpha}^TA\alpha}=\frac{1}{\det A}\int d\bar{\alpha}d\alpha e^{-\bar{\alpha}^TA\alpha}$$

其中已利用行列式性质 $\det M\det N=\det(MN)=\det(N^TM)=\det A$。在不引起混淆时，也可以去掉指数位置上的转置符号，将上式简写为

$$\int d\bar{\alpha}d\alpha e^{-\bar{\alpha}A\alpha}=\det A$$

2.自由 Dirac 场的生成泛函

引入外源后，自由 Dirac 场作用量可写为

$$L_0 = L_{Dirac} + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta = \bar{\psi}S_F^{-1}\psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta$$

仿照标量场，可将自由 Dirac 场生成泛函写为

$$Z_0[\eta,\bar{\eta}] = N\int D\bar{\psi}D\psi \exp[i\int L_0 dx]$$

$$= N\int D\bar{\psi}D\psi \exp\{i\int[\bar{\psi}(x)S_F^{-1}\psi(x) + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x)]dx\}$$

$$\xrightarrow{?} N\int D\bar{\psi}D\psi \exp\{i\int[(\bar{\psi} + \bar{\eta}S_F)S_F^{-1}(\psi + S_F\eta) - \bar{\eta}S_F\eta]dx\}$$

$$= N\exp[i\int(-\bar{\eta}S_F\eta)dx]\int D\bar{\psi}D\psi \exp\{i\int[(\bar{\psi} + \bar{\eta}S_F)S_F^{-1}(\psi + S_F\eta)]dx\}$$

$$= N\exp[i\int(-\bar{\eta}S_F\eta)dx]\int D(\bar{\psi} + \bar{\eta}S_F)D(\psi + S_F\eta)\exp[i\int(\bar{\psi} + \bar{\eta}S_F)S_F^{-1}(\psi + S_F\eta)dx]$$

$$= N\exp[i\int(-\bar{\eta}S_F\eta)dx]\int D\bar{\psi}'D\psi' \exp[i\int\bar{\psi}'S_F^{-1}\psi' dx]$$

$$= N'\exp[i\int(-\bar{\eta}S_F\eta)dx]\det(-iS_F^{-1})$$

$$\xrightarrow{??} N\det(-iS_F^{-1})\exp\{i\int[-\bar{\eta}(x)S_F(x-y)\eta(y)]dxdy\}$$

其中，最后一个等号运用了 $\int d\bar{\alpha}d\alpha e^{-\bar{\alpha}A\alpha} = \det A$. 注意，与前面关于标量场的讨论类似，

指数位置有对 x 的积分时不能直接套用公式，但只比“没有对 x 积分直接套公式”相差一个常数，所以积分常数改成了 N'. 但因为积分常数的约定因人而异，实际上完全可以吸收到积分测度中，这样，忽略 N 与 N' 的差别也无关紧要。所以，我们直接无视指数位置上对 x 的积分，假装它不存在，算出来结果不会有太大不同。

箭头上的问号表示这样算是有问题的。令人费解之处是，开始时引入两个外源，却只对 x 一个变量积分，最终结果却变成对 x 和 y 两个变量积分。这其实是 δ 函数捣的鬼。慈眉善目、诲人不倦（为何现在很多研究生导师指导学生时总是不耐烦？如果学生都自学成才，还跟着你干什么？不要嫌学生的问题太 low，教师的职责就是将学生从 low 变得 high）的汪容先生的书《量子规范理论》解释过捣蛋细节（这里将汪容的离散形式改成了连续形式）：

$$\int[\bar{\psi}(x)S_F^{-1}\psi(x) + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x)]dx$$

$$= \int[\bar{\psi}(x)S_F^{-1}\delta(x-y)\psi(y) + \bar{\eta}(x)\delta(x-y)\psi(y) + \bar{\psi}(x)\delta(x-y)\eta(y)]dxdy$$

$$= \int[\bar{\psi}(x) + \bar{\eta}(x)S_F]S_F^{-1}\delta(x-y)[\psi(y) + S_F\eta(y)]dxdy - \int[\bar{\eta}(x)S_F\delta(x-y)\eta(y)]dxdy$$

$$\equiv \int[\bar{\psi}(x) + \bar{\eta}(x)S_F]S_F^{-1}(x-y)[\psi(y) + S_F\eta(y)]dxdy - \int[\bar{\eta}(x)S_F(x-y)\eta(y)]dxdy$$

这就证明了怎么从对 x 的积分变成对 x 和 y 的积分（严格说，x 和 y 是 4 维的）。

归一化因子的确定：

$$Z_0[\eta = 0, \bar{\eta} = 0] = N\det(-iS_F^{-1}) = 1 \Rightarrow N = i\det S_F$$

于是最终

$$Z_0[\eta,\bar{\eta}] = \exp[-i\int\bar{\eta}(x)S_F(x-y)\eta(y)dxdy]$$

3.自由 Dirac 场的传播子

$$G(x,y)=\frac{\delta^2 Z_0[\eta,\bar{\eta}]}{i^2\delta\eta(x)\delta\bar{\eta}(y)}\Big|_{\eta=\bar{\eta}=0}=\frac{\delta^2}{i^2\delta\eta(x)\delta\bar{\eta}(y)}\exp[-i\int\bar{\eta}(u)S_F(u-v)\eta(v)dudv]\Big|_{\eta=\bar{\eta}=0}$$

$$=\frac{\delta}{i\delta\eta(x)}[-\int S_F(y-v)\eta(v)dv]\exp[-i\int\bar{\eta}(u)S_F(u-v)\eta(v)dudv]\Big|_{\eta=\bar{\eta}=0}$$

$$=[-S_F(y-x)\frac{1}{i}\exp[-i\int\bar{\eta}(u)S_F(u-v)\eta(v)dudv]\Big|_{\eta=\bar{\eta}=0}$$

$$+[-\int S_F(y-v)\eta(v)dv][+\int\bar{\eta}(u)S_F(u-x)du]\exp[-i\int\bar{\eta}(u)S_F(u-v)\eta(v)dudv]\Big|_{\eta=\bar{\eta}=0}$$

$$=iS_F(x-y)$$

要在最后结果中得到 x，y 的函数，求导前就要将被导函数的自变量变成其他的！这和前面构造作用量时用的“指标异化”精神是一致的，可称为“自变量异化”。注意，$\delta/\delta\eta$ 要移过 $\bar{\eta}$ 才能作用于 η，反对易关系将使得交换顺序时多一负号（王正行）!

仿照前面关于标量场的讨论，可求出 $S_F(x-y)$ 的具体表达式。它满足

$$(i\partial\!\!\!/-m+i\varepsilon)S_F(x-y)=\delta^4(x-y)$$

取 y=0，做 **Fourier 展开** $S_F(x)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}S(k)e^{-ikx}$，得

将微分算符作用于被展开函数，可得：

$$(i\partial\!\!\!/-m+i\varepsilon)S_F(x)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}S(k)(i\partial\!\!\!/-m+i\varepsilon)e^{-ikx}=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}S(k)(k\!\!\!/-m+i\varepsilon)e^{-ikx}$$

$$=\delta(x-0)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ikx}$$

$$S(k)(k\!\!\!/-m+i\varepsilon)=1\Rightarrow S(k)=\frac{1}{k\!\!\!/-m+i\varepsilon}$$

总结：不论标量场还是旋量场，**自由场传播子都等于二次型场量之间算符的逆**。

1.2.2.5 电磁场

如前所述，二次型 Lagrange 量中夹在两场量间的算符之逆就是自由场传播子，所以接下来努力方向便是将电磁场 Lagrange 量化成二次型。

1.自由场 Lagrange 量

（1）奇异性

电磁场 Lagrange 量为

$$L_{Maxwell}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}=-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)F^{\mu\nu}=-\frac{1}{4}\partial_\mu A_\nu F^{\mu\nu}+\frac{1}{4}\partial_\nu A_\mu F^{\mu\nu}$$

$$=-\frac{1}{4}\partial_\nu A_\mu F^{\nu\mu}+\frac{1}{4}\partial_\nu A_\mu F^{\mu\nu}=\frac{1}{4}\partial_\nu A_\mu F^{\mu\nu}+\frac{1}{4}\partial_\nu A_\mu F^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\partial_\nu A_\mu F^{\mu\nu}$$

$$=\frac{1}{2}\partial_\nu(A_\mu F^{\mu\nu})-\frac{1}{2}A_\mu\partial_\nu F^{\mu\nu}=(4\text{散度})-\frac{1}{2}A_\mu\partial_\nu(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)$$

$$=-\frac{1}{2}A_\mu\partial_\nu\partial^\mu A^\nu+\frac{1}{2}A_\mu\partial_\nu\partial^\nu A^\mu=-\frac{1}{2}A_\rho\partial_\nu\partial^\rho A^\nu+\frac{1}{2}A_\nu\partial_\rho\partial^\rho A^\nu$$

$$=-\frac{1}{2}g_{\mu\rho}A^\mu\partial_\nu\partial^\rho A^\nu+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}A^\mu\partial_\rho\partial^\rho A^\nu=-\frac{1}{2}A^\mu\partial_\nu\partial_\mu A^\nu+\frac{1}{2}A^\mu g_{\mu\nu}\Box A^\nu$$

$$=\frac{1}{2}A^\mu(g_{\mu\nu}\Box-\partial_\mu\partial_\nu)A^\nu$$

由于场的规范不变性，$A^\mu+\partial^\mu f(x)$ 与 A^μ 描述同一个场，但

$$(g_{\mu\nu}\Box-\partial_\mu\partial_\nu)\partial^\mu f=(\Box\partial_\nu-\Box\partial_\nu)f=0$$

故电磁场有奇异性：逆算符不存在！这是所有规范场的通病。怎么办？

（2）规范固定项（GF）

为构造逆算符，在 Maxwell 场的 Lagrange 量中加上约束条件（Lorentz 规范），使之成为

$$L_0=L_{Maxwell}+L_{GF}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2=\frac{1}{2}A^\mu(g_{\mu\nu}\Box-\partial_\mu\partial_\nu)A^\nu-\frac{\lambda}{2}\partial_\mu A^\mu\partial_\nu A^\nu$$

$$=\frac{1}{2}A^\mu(g_{\mu\nu}\Box-\partial_\mu\partial_\nu)A^\nu+\frac{\lambda}{2}A^\mu\partial_\mu\partial_\nu A^\nu-\frac{\lambda}{2}\partial_\mu(A^\mu\partial_\nu A^\nu)$$

$$=\frac{1}{2}A^\mu[g_{\mu\nu}\Box+(\lambda-1)\partial_\mu\partial_\nu]A^\nu+(4\text{散度})=\frac{1}{2}A^\mu K_{\mu\nu}A^\nu$$

（3）传播子

其中 $K_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}\Box+(\lambda-1)\partial_\mu\partial_\nu$，设其逆算符为 $D_{F\mu\nu}(x-y)$，满足**微分方程**

$$[g^{\mu\rho}\Box+(\lambda-1)\partial^\mu\partial^\rho]D_{F\mu\nu}(x-y)=g_\nu^\rho\delta(x-y)$$

仿照标量场和旋量场做法，取 y=0，对 D 算符进行 Fourier 展开：

$$D_{F\mu\nu}(x)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}D_{\mu\nu}(k)e^{-ikx}$$

将微分算符 K 作用于被展开函数 D(x)，根据上述**微分方程**可得：

$$[g^{\mu\rho}\Box+(\lambda-1)\partial^\mu\partial^\rho]D_{F\mu\nu}(x)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}D_{\mu\nu}(k)[g^{\mu\rho}\Box+(\lambda-1)\partial^\mu\partial^\rho]e^{-ikx}$$

$$=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}D_{\mu\nu}(k)[g^{\mu\rho}(-ik)^2+(\lambda-1)(-ik^\mu)(-ik^\rho)]e^{-ikx}$$

$$=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}D_{\mu\nu}(k)[-g^{\mu\rho}k^2-(\lambda-1)k^\mu k^\rho]e^{-ikx}=g_\nu^\rho\delta(x-0)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}g_\nu^\rho e^{-ikx}$$

所以

$$D_{\mu\nu}(k)=-\frac{g_\nu^\rho}{g^{\mu\rho}k^2+(\lambda-1)k^\mu k^\rho}$$

“分母无指标化”：

（a）$\lambda=1$（Feynman 规范）

上下乘以 $g_{\mu\nu}$，则分母中产生 g_ν^ρ，可消去分子中的 g_ν^ρ，得

$$D_{\mu\nu}(k)=-\frac{g_{\mu\nu}}{k^2}$$

（b）$\lambda\neq1$

这时要将分母“有理化”并不容易。我们在实数时进行分母有理化用的“共轭根式”，以及在复数时进行“分母实数化”用的共轭复数，这里都行不通。不过，我们其实可猜测“有理化”后的大致形式。首先，左边含两个下标 μ,ν，我们猜测右边“分母无指标化”后分子应该只含两个下标 μ,ν；其次，从量纲上看，“无指标化”前是动量的负 2 次方，“无指标化”后应该也是 k 的负 2 次方。所以，我们假定“无指标化”后具有如下形式：

$$D_{\mu\nu}(k)=A\frac{g_{\mu\nu}}{k^2}+B\frac{k_\mu k_\nu}{k^4}=-\frac{g_\nu^\rho}{g^{\mu\rho}k^2+(\lambda-1)k^\mu k^\rho}$$

这个方程可化为

$$\begin{aligned}-g_\nu^\rho k^4&=(Ag_{\mu\nu}k^2+Bk_\mu k_\nu)[g^{\mu\rho}k^2+(\lambda-1)k^\mu k^\rho]\\&=Ag_{\mu\nu}g^{\mu\rho}k^4+A(\lambda-1)g_{\mu\nu}k^\mu k^\rho k^2+Bg^{\mu\rho}k_\mu k_\nu k^2+B(\lambda-1)k_\mu k_\nu k^\mu k^\rho\\&=Ag_\nu^\rho k^4+[A(\lambda-1)+B\lambda]k_\nu k^\rho k^2\end{aligned}$$

两边同类项系数应该相等，所以

$$A=-1$$

$$A(\lambda-1)+B\lambda=0\Rightarrow B=1-\frac{1}{\lambda}$$

于是传播子为

$$D_{\mu\nu}(k)=-\frac{g_{\mu\nu}}{k^2}+(1-\frac{1}{\lambda})\frac{k_\mu k_\nu}{k^4}$$

根据前面在标量场及旋量场获得的经验，不用求生成泛函及泛函微商也知道，Green 函数必为（虚数 i 乘以传播子）：

$$G(x,y)=iD_{F\mu\nu}(x-y)$$

2.QED 的 Lagrange 量

电磁作用要满足规范不变性，所以当它与 Maxwell 场耦合时，要求 Dirac 场 ψ 在规范变换 $D_\mu=\partial_\mu+iqA_\mu$ 下与电磁规范场 A_μ 协同变换，即

$$L_{Dirac}=\bar\psi(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi\to\bar\psi(i\gamma^\mu D_\mu-m)\psi=\bar\psi(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi-q\bar\psi\gamma^\mu\psi A_\mu=L_{Dirac}+L_I$$

所以耦合系统总的 Lagrange 量为

$$L = L_{Maxwell} + L_{GF} + L_{Dirac} + L_I = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$$

3.QED 的生成泛函

自由矢量场与自由标量场都属 Bose 型，生成泛函形如 $\exp[-\frac{i}{2}JK^{-1}J]$，只不过矢量场要加上 Lorentz 指标，变成

$$Z_0[J] = \exp[-\frac{i}{2}\int J^\mu(x)D_{F\mu\nu}(x-y)J^\nu(y)dxdy]$$

自由旋量场因反对易，要对 Grassmann 数积分，生成泛函形如 $\exp[-i\bar{\eta}K^{-1}\eta]$，为

$$Z_0[\eta,\bar{\eta}] = \exp[-i\int \bar{\eta}(x)S_F(x-y)\eta(y)dxdy]$$

在标量场路径积分一节，已得出相互作用的生成泛函就是将 $L_I(\phi) \to L_I(\frac{\delta}{i\delta\phi})$，所以耦合后的生成泛函为

$$\begin{aligned} Z[\eta,\bar{\eta},J] &= N\exp[i\int L_I(\eta,\bar{\eta},J)dz]Z_0[\eta,\bar{\eta}]Z_0[J] \\ &= N\exp[i\int L_I(\frac{\delta}{i\delta\eta},\frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}},\frac{\delta}{i\delta J})dz]Z_0[\eta,\bar{\eta},J] \\ &= N\exp[i\int(-q\frac{\delta}{i\delta\eta}\gamma^\mu\frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}}\frac{\delta}{i\delta J})dz]Z_0 \end{aligned}$$

注意，这里的定义与王正行差一负号，这是因为 $\delta/\delta\eta$ 要移过 $\bar{\eta}$ 才能作用于 η，反对易关系使交换顺序时多一负号。这在旋量场路径积分一节解释过了。

4.QED 的顶点

耦合常数很小时，可对生成泛函做微扰展开

$$Z[\eta,\bar{\eta},J] = N\left[1 + i\int(-q\frac{\delta}{i\delta\eta}\gamma^\mu\frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}}\frac{\delta}{i\delta J})dz + o(q^2)\right]Z_0$$

（1）一阶微扰

$$Z_1[\eta,\bar{\eta},J] = Ni\int dz(-q\frac{\delta}{i\delta\eta}\gamma^\mu\frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}}\frac{\delta}{i\delta J})Z_0$$

$$\frac{\delta}{i\delta\eta}\gamma^{\mu}\frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}}\frac{\delta}{i\delta J}Z_0[\eta,\bar{\eta}]Z_0[J]$$

$$=\frac{\delta}{i\delta\eta}\gamma^{\mu}\frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}}\frac{\delta}{i\delta J^{\mu}(z)}\exp\{-i\int[\bar{\eta}S_F\eta+\frac{1}{2}J^{\rho}(x)D_{F\rho\sigma}(x-y)J^{\sigma}(y)]dxdy\}=$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\delta}{i\delta\eta}\gamma^{\mu}\frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}}\int[\delta(x-z)g_{\mu}^{\rho}D_{F\rho\sigma}(x-y)J^{\sigma}(y)+J^{\rho}(x)D_{F\rho\sigma}(x-y)\delta(y-z)g_{\mu}^{\sigma}]dxdyZ_0$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\delta}{i\delta\eta}\gamma^{\mu}\frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}(z)}\int J^{\rho}(x)[D_{F\mu\rho}(x-z)+D_{F\mu\rho}(z-x)]dxZ_0$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\delta}{i\delta\eta}\gamma^{\mu}\int J^{\rho}(x)[D_{F\mu\rho}(x-z)+D_{F\mu\rho}(z-x)]dx\{-\int\delta(x-z)S_F(x-y)\eta(y)dxdy\}Z_0$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\delta}{i\delta\eta(z)}\gamma^{\mu}\{\int J^{\rho}(x)[D_{F\mu\rho}(x-z)+D_{F\mu\rho}(z-x)]dx\int S_F(z-y)\eta(y)dyZ_0\}$$

$$=\frac{1}{2}\gamma^{\mu}\int J^{\rho}(x)[D_{F\mu\rho}(x-z)+D_{F\mu\rho}(z-x)]dx[\frac{1}{i}\int S_F(z-y)\delta(y-z)dy$$

$$+\int S_F(z-y)(-1)\eta(y)dy\int\bar{\eta}(x)S_F(x-y)(-1)\delta(y-z)dxdy]Z_0$$

$$=\frac{1}{2}\gamma^{\mu}\int J^{\rho}(x)[D_{F\mu\rho}(x-z)+D_{F\mu\rho}(z-x)]dx$$

$$\times[-iS_F(0)+\int S_F(z-y)\eta(y)dy\int\bar{\eta}(x)S_F(x-z)dx]Z_0$$

其中倒数第二步泛函微商算符每移过旋量场一次就多一负号。这个运算太复杂，应设法简化。因为 dx，dy 及积分号终将被 delta 函数消去，可略去（但为了让大家知道省略了积分，将 exp 改为 Exp）；在不引起混淆时，被积函数的自变量也可略去；可能引起混淆时，可将自变量移作下标而省去括号，就能让公式缩短；涉及多重积分时，可将积分测度写在一起，省去过多积分号；泛函微商也可用角标简化（外源放下标，变量转为上标）。如：

$$Z_0\to Exp[-i\bar{\eta}_xS_{xy}\eta_y-\frac{i}{2}J_x^{\rho}D_{\rho\sigma}^{xy}J_y^{\sigma}]$$

$$Z_1=-\frac{1}{2}Niq\gamma^{\mu}\int dz\int J^{\rho}(x)[D_{F\mu\rho}(x-z)+D_{F\mu\rho}(z-x)]dx$$

$$\times[-iS_F(0)+\int S_F(z-y)\eta(y)dy\int\bar{\eta}(x)S_F(x-z)dx]Z_0$$

$$\to-\frac{1}{2}iNq\gamma^{\mu}\int_z J_x^{\rho}[D_{\mu\rho}^{xz}+D_{\mu\rho}^{zx}][-iS_0+S_{zy}\eta_y\bar{\eta}_xS_{xz}]Z_0$$

对生成泛函取泛函微商后令外源为零，即可得相互作用顶点（n 点 Green 函数）：

$$G(u_1,u_2,u_3)=\frac{\delta^3}{i^3\delta\eta(u_3)\delta\bar{\eta}(u_2)\delta J^{\nu}(u_1)}Z_1\Big|_{\eta=\bar{\eta}=J=0}$$

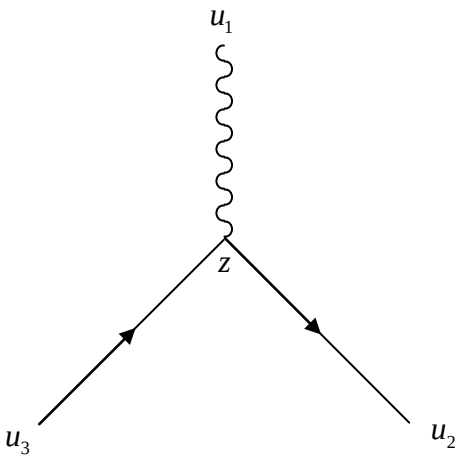
$$=-\frac{1}{2}iNq\gamma^{\mu}\int_z\frac{1}{i^3}\lim_{\eta,\bar{\eta},J\to0}\delta_{\eta}^{u_3}\delta_{\bar{\eta}}^{u_2}\delta_{J\nu}^{u_1}[J_x^{\rho}(D_{\mu\rho}^{xz}+D_{\mu\rho}^{zx})(-iS_0+S_{zy}\eta_y\bar{\eta}_xS_{xz})Z_0]$$

$$=\tfrac{1}{2}Nq\gamma^{\mu}\int_z\lim_{\eta,\bar{\eta},J\to0}\delta_{\eta}^{u_3}\delta_{\bar{\eta}}^{u_2}[(D_{\mu\nu}^{u_1z}+D_{\mu\nu}^{zu_1})(-iS_0+S_{zy}\eta_y\bar{\eta}_xS_{xz})+J\times\cdots]Z_0$$

$$=\tfrac{1}{2}Nq\gamma^{\mu}\int_z\lim_{\eta,\bar{\eta},J\to0}\delta_{\eta}^{u_3}\{[D_{\mu\nu}^{u_1z}+D_{\mu\nu}^{u_1z}][-S_{zy}\eta_yS_{u_2z}+(0)]+(0)\}Z_0$$

$$=-\tfrac{1}{2}Nq\gamma^{\mu}\int_z[D_{\mu\nu}^{u_1z}+D_{\mu\nu}^{u_1z}]S_{zu_3}S_{u_2z}Z_0=-\tfrac{1}{2}Niq\gamma^{\mu}\int_z[iD_{\mu\nu}^{u_1z}iS_{zu_3}iS_{u_2z}+iD_{\mu\nu}^{zu_1}iS_{zu_3}iS_{u_2z}]$$

推导中，我们已将最后代入外源为零后消失的项用省略号或简写记号（略去自变量）代替。求导后代入外源为零消失的项，可只写一带括号的 0，即（0）表示.上述结果可用图形表示：



注意：电子从 x_i 运动到 x_f 为 $iS_F(x_f-x_i)$，与矢量“末减初”法则一致，加箭头以示区分；

对于光子，不论入射还是出射，传播子相同，可不加箭头。

因为正粒子出射可看作反粒子沿反方向入射，所以上图貌似可解释为正负电子湮灭为光子：电子、正电子分别从 u_3、u_2 运动到 z 点，相遇后消失，然后在 z 点产生光子，向 u_1 点运动。然而，实际上这个过程是不可能发生的。设电子、正电子、光子 4 动量分别为 p，q，k，则 4 动量守恒给出

$$p=k\pm q$$

右侧对 q 为电子取正号（正电子取负号）。两边平方，根据质壳条件（动质能三角形），有

$$m^2=p^2=q^2+k^2\pm 2q\cdot k=m^2+0\pm 2q\cdot k$$

不论 q 为电子还是负电子，都有（黄涛《量子场论导论》）

$$q\cdot k=E_k(\sqrt{|\vec{q}|^2+m^2}-|\vec{q}|\cos\theta)=0$$

括号里第一项大于 $|\vec{q}|$，第二项小于 $|\vec{q}|$，所以括号里两项差恒正，故 $E_k=0$，即光子静止！

可是，光子不运动到你眼里，你怎么判定它存在呢？要让该顶角描述真实过程，三个粒子就不能都“在壳”（满足质壳条件），也就是不能都是实粒子，应该存在**虚粒子**（中间过程出现，但初态和末态没有，就像围道积分引入的虚数，最终要消去）。

（2）二阶微扰

从前面给出的生成泛函的指数形式，可得二阶微扰

$$Z_2=N\frac{i^2}{2!}\left[\int(-q\frac{\delta}{i\delta\eta}\gamma^\mu\frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}}\frac{\delta}{i\delta J})dz\right]^2 Z_0$$

$$=-N\frac{q^2}{2}\int(\frac{\delta}{i\delta\eta(z_2)}\gamma^\nu\frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}(z_2)}\frac{\delta}{i\delta J^\nu(z_2)})dz_2\int(\frac{\delta}{i\delta\eta(z_1)}\gamma^\mu\frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}(z_1)}\frac{\delta}{i\delta J^\mu(z_1)})dz_1$$

$$\times\exp\{-i\int[\bar{\eta}(x)S_F(x-y)\eta(y)+\frac{1}{2}J^\rho(x)D_{F\rho\sigma}(x-y)J^\sigma(y)]dxdy\}$$

这个计算非常冗长，我们仍用前面的简化符号进行计算。

$$Z_2 \to -N\frac{q^2}{2}\int dz_2 dz_1 \delta_\eta^{z_2}\gamma^\nu\delta_{\bar\eta}^{z_2}\delta_{J\nu}^{z_2}\delta_\eta^{z_1}\gamma^\mu\delta_{\bar\eta}^{z_1}\delta_{J\mu}^{z_1}Z_0$$

$$\to n_q\int_z \delta_\eta^{z_2}\gamma^\nu\delta_{\bar\eta}^{z_2}\delta_{J\nu}^{z_2}\delta_\eta^{z_1}\gamma^\mu\delta_{\bar\eta}^{z_1}\delta_{J\mu}^{z_1}Exp[-i\bar\eta_x S_{xy}\eta_y - \frac{i}{2}J_x^\rho D_{\rho\sigma}^{xy}J_y^\sigma]$$

$$= n_q\int_z \delta_\eta\gamma\delta_{\bar\eta}\delta_J\delta_\eta\gamma\delta_{\bar\eta}^{z_1}[-\tfrac{i}{2}J_x^\rho(D_{\rho\mu}^{xz_1}+D_{\rho\mu}^{z_1x})]Z_0$$

$$= -\tfrac{i}{2}n_q\int_z \delta_\eta\gamma\delta_{\bar\eta}\delta_J\delta_\eta^{z_1}\gamma^\mu J_x^\rho(D_{\rho\mu}^{xz_1}+D_{\rho\mu}^{z_1x})[-iS_{z_1y}\eta_y]Z_0$$

$$= -\tfrac{1}{2}n_q\int_z \delta_\eta\gamma\delta_{\bar\eta}\delta_{J\nu}^{z_2}\gamma^\mu J_x^\rho(D_{\rho\mu}^{xz_1}+D_{\rho\mu}^{z_1x})[S_{z_1z_1}-S_{z_1y}\eta_y i\bar\eta_x S_{xz_1}]Z_0$$

$$= -\tfrac{1}{2}n_q\int_z \delta_\eta\gamma\delta_{\bar\eta}^{z_2}\gamma^\mu[S_{z_1z_1}-S_{z_1y}\eta_y i\bar\eta_x S_{xz_1}][D_{\nu\mu}^{z_2z_1}+D_{\nu\mu}^{z_1z_2}-\tfrac{i}{2}J_x^{2\rho}(D_{\rho\mu}^{xz_1}+D_{\rho\mu}^{z_1x})(D_{\rho\nu}^{xz_2}+D_{\rho\nu}^{z_2x})]Z_0$$

$$= -\tfrac{1}{2}n_q\int_z \delta_\eta^{z_2}\gamma^\nu\gamma^\mu[D_{\nu\mu}^{z_2z_1}+D_{\nu\mu}^{z_1z_2}-\tfrac{i}{2}J_x^{2\rho}(D_{\rho\mu}^{xz_1}+D_{\rho\mu}^{z_1x})(D_{\rho\nu}^{xz_2}+D_{\rho\nu}^{z_2x})]$$
$$\times[-S_{z_1y}\eta_y iS_{z_2z_1}+(S_{z_1z_1}-S_{z_1y}\eta_y i\bar\eta_x S_{xz_1})(-iS_{z_2y}\eta_y)]Z_0$$

$$= \tfrac{1}{2}n_q i\int_z \gamma^\nu\gamma^\mu[D_{\nu\mu}^{z_2z_1}+D_{\nu\mu}^{z_1z_2}-\tfrac{i}{2}J_x^{2\rho}(D_{\rho\mu}^{xz_1}+D_{\rho\mu}^{z_1x})(D_{\rho\nu}^{xz_2}+D_{\rho\nu}^{z_2x})]$$
$$\times\delta_\eta^{z_2}[S_{z_1y}\eta_y S_{z_2z_1}+S_{z_1z_1}S_{z_2y}\eta_y - S_{z_1y}\eta_y i\bar\eta_x S_{xz_1}S_{z_2y}\eta_y]Z_0$$

$$= \tfrac{1}{2}n_q\int_z \gamma^\nu\gamma^\mu[i(D_{\nu\mu}^{z_2z_1}+D_{\nu\mu}^{z_1z_2})+\tfrac{1}{2}J_x^{2\rho}(D_{\rho\mu}^{xz_1}+D_{\rho\mu}^{z_1x})(D_{\rho\nu}^{xz_2}+D_{\rho\nu}^{z_2x})]$$
$$\times[S_{z_1z_2}S_{z_2z_1}+S_{z_1z_1}S_{z_2z_2}-iS_{xz_1}(S_{z_1z_2}\bar\eta_x S_{z_2y}\eta_y - S_{z_1y}\eta_y\bar\eta_x S_{z_2z_2})$$
$$+(S_{z_1y}\eta_y S_{z_2z_1}+S_{z_1z_1}S_{z_2y}\eta_y - S_{z_1y}\eta_y i\bar\eta_x S_{xz_1}S_{z_2y}\eta_y)(-i\bar\eta_x S_{xz_2})]Z_0$$

$$= \tfrac{1}{2}n_q\int_z \gamma^\nu\gamma^\mu i(D_{\nu\mu}^{z_2z_1}+D_{\nu\mu}^{z_1z_2})(S_{z_1z_2}S_{z_2z_1}+S_{z_1z_1}S_{z_2z_2})Z_0$$
$$+\tfrac{1}{4}n_q\int_z \gamma^\nu\gamma^\mu J_x^{2\rho}(D_{\rho\mu}^{xz_1}+D_{\rho\mu}^{z_1x})(D_{\rho\nu}^{xz_2}+D_{\rho\nu}^{z_2x})(S_{z_1z_2}S_{z_2z_1}+S_{z_1z_1}S_{z_2z_2})Z_0 +$$
$$\tfrac{n_q}{2}\int_z \gamma^\nu\gamma^\mu[D_{\nu\mu}^{z_2z_1}+D_{\nu\mu}^{z_1z_2}]\{S_{xz_1}[S_{z_1z_2}\bar\eta_x S_{z_2y}\eta_y - S_{z_1y}\eta_y\bar\eta_x S_{z_2z_2}]+[S_{z_1y}S_{z_2z_1}+S_{z_1z_1}S_{z_2y}]\eta_y\bar\eta_x S_{xz_2}\}Z_0$$
$$-\tfrac{1}{2}n_q i\int_z \gamma^\nu\gamma^\mu(D_{\nu\mu}^{z_2z_1}+D_{\nu\mu}^{z_1z_2})S_{z_1y}\eta_y\bar\eta_x S_{xz_1}S_{z_2y}\eta_y\bar\eta_x S_{xz_2}Z_0$$
$$-\tfrac{1}{4}n_q i\int_z \gamma^\nu\gamma^\mu J_x^{2\rho}(D_{\rho\mu}^{xz_1}+D_{\rho\mu}^{z_1x})(D_{\rho\nu}^{xz_2}+D_{\rho\nu}^{z_2x})$$
$$\times[S_{xz_1}(S_{z_1z_2}\bar\eta_x S_{z_2y}\eta_y - S_{z_1y}\eta_y\bar\eta_x S_{z_2z_2})+(S_{z_1y}S_{z_2z_1}+S_{z_1z_1}S_{z_2y})\eta_y\bar\eta_x S_{xz_2}]Z_0$$
$$-\tfrac{1}{4}n_q\int_z \gamma^\nu\gamma^\mu J_x^{2\rho}(D_{\rho\mu}^{xz_1}+D_{\rho\mu}^{z_1x})(D_{\rho\nu}^{xz_2}+D_{\rho\nu}^{z_2x})S_{z_1y}\eta_y\bar\eta_x S_{xz_1}S_{z_2y}\eta_y\bar\eta_x S_{xz_2}Z_0$$
$$= Z_2(0)+Z_2(J^2)+Z_2(\eta,\bar\eta)+Z_2(\eta,\bar\eta,\eta,\bar\eta)+Z_2(\eta,\bar\eta,J^2)+Z_2(\eta,\bar\eta,\eta,\bar\eta,J^2)$$

1 阶微扰有 1 顶角，2 阶微扰有 2 个。QED 有 3 外源，1 阶图为 3 线顶角，对应 3 点函数；2 阶图为 2 个 3 线顶角的各种组合，树图对应 4 点函数（Ryder's QFT），有 4 个微商；圈图对应 2 点函数，有 2 个微商。都对 J，还是一个 η 一个 $\bar\eta$？别 YY 了，算下不就知道了。

（A）两个 J

如果对 J 求二阶导，那么 Z2 中 J 数少于 2 的求导为零，J 数多于 2 的求导后令 J=0 还是变成零。所以，非零项只有恰好包含 2 个 J 的项。

$$G_1(u,v) = \lim_{J\to 0}\delta_{J\beta}^\nu\delta_{J\alpha}^u Z_2(J^2)$$
$$= \tfrac{1}{4}n_q\int_z \gamma^\nu\gamma^\mu\lim_{J\to 0}\delta_{J\beta}^\nu\delta_{J\alpha}^u[(J_x^\rho)^2(D_{\rho\mu}^{xz_1}+D_{\rho\mu}^{z_1x})(D_{\rho\nu}^{xz_2}+D_{\rho\nu}^{z_2x})][S_{z_1z_2}S_{z_2z_1}+S_{z_1z_1}S_{z_2z_2}]Z_0$$
$$= \tfrac{1}{4}n_q\int_z \gamma^\nu\gamma^\mu\lim_{J\to 0}\delta_{J\beta}^\nu[2J_x^\rho(D_{\alpha\mu}^{uz_1}+D_{\alpha\mu}^{z_1u})(D_{\rho\nu}^{xz_2}+D_{\rho\nu}^{z_2x})+(0)][S_{z_1z_2}S_{z_2z_1}+S_{z_1z_1}S_{z_2z_2}]Z_0$$
$$= \tfrac{1}{4}n_q\int_z \gamma^\nu\gamma^\mu\lim_{J\to 0}[2(D_{\alpha\mu}^{uz_1}+D_{\alpha\mu}^{z_1u})(D_{\beta\nu}^{vz_2}+D_{\beta\nu}^{z_2v})+(0)+(0)][S_{z_1z_2}S_{z_2z_1}+S_{z_1z_1}S_{z_2z_2}]Z_0$$
$$= \tfrac{1}{2}n_q\int_z \gamma^\nu\gamma^\mu(D_{\alpha\mu}^{uz_1}D_{\beta\nu}^{vz_2}+D_{\alpha\mu}^{uz_1}D_{\beta\nu}^{z_2v}+D_{\alpha\mu}^{z_1u}D_{\beta\nu}^{vz_2}+D_{\alpha\mu}^{z_1u}D_{\beta\nu}^{z_2v})[S_{z_1z_2}S_{z_2z_1}+S_{z_1z_1}S_{z_2z_2}]$$

其中 $D_{\alpha\mu}^{uz_1}D_{\beta\nu}^{z_2v}S_{z_1z_2}S_{z_2z_1}$， $D_{\alpha\mu}^{z_1u}D_{\beta\nu}^{vz_2}S_{z_1z_2}S_{z_2z_1}$ 用图形表示就是



它可以表示**光子自能（真空极化）**。$D_{\alpha\mu}^{uz_1}D_{\beta\nu}^{vz_2}$， $D_{\alpha\mu}^{z_1u}D_{\beta\nu}^{z_2v}$（两个光子对撞）不合理？

$S_{z_1z_1},S_{z_2z_2}$ 项为非连通图，可忽略。

（B）一个 η、一个 $\bar{\eta}$

$$G_2(u,v)=\lim_{\eta\bar{\eta}J\to 0}\frac{\delta}{\delta\eta^v}\frac{\delta}{\delta\eta^u}Z_2(\eta,\bar{\eta})$$

$$=\tfrac{1}{2}n_q\int_z\gamma^\nu\gamma^\mu[D_{\nu\mu}^{z_2z_1}+D_{\nu\mu}^{z_1z_2}]\lim_{\eta\bar{\eta}\to 0}\frac{\delta}{\delta\eta^v}\frac{\delta}{\delta\eta^u}[S_{xz_1}(S_{z_1z_2}\bar{\eta}_xS_{z_2y}\eta_y-S_{z_1y}\eta_y\bar{\eta}_xS_{z_2z_2})$$

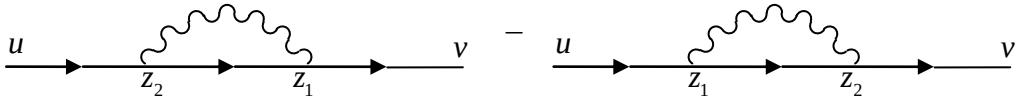
$$+(S_{z_1y}\eta_yS_{z_2z_1}+S_{z_1z_1}S_{z_2y}\eta_y)\bar{\eta}_xS_{xz_2}]Z_0$$

$$=\tfrac{1}{2}n_q\int_z\gamma^\nu\gamma^\mu[D_{\nu\mu}^{z_2z_1}+D_{\nu\mu}^{z_1z_2}]$$

$$\times\lim_{\bar{\eta}\to 0}\frac{\delta}{\delta\eta^v}[S_{xz_1}\bar{\eta}_x(-S_{z_1z_2}S_{z_2u}-S_{z_1u}S_{z_2z_2})+(S_{z_1u}S_{z_2z_1}+S_{z_1z_1}S_{z_2u})\bar{\eta}_xS_{xz_2}+(0)]Z_0$$

$$=\tfrac{1}{2}n_q\int_z\gamma^\nu\gamma^\mu[D_{\nu\mu}^{z_2z_1}+D_{\nu\mu}^{z_1z_2}][-S_{vz_1}S_{z_1z_2}S_{z_2u}-S_{vz_1}S_{z_1u}S_{z_2z_2}+S_{z_1u}S_{z_2z_1}S_{vz_2}+S_{z_1z_1}S_{z_2u}S_{vz_2}]$$

用图形表示（第一、三项），就是



它可以表示**电子自能**。第二、四项为非连通图，可忽略。

（C）2 个 η、2 个 $\bar{\eta}$

如果对 2 个 η、2 个 $\bar{\eta}$ 求导，那么 z_2 中 η（或 $\bar{\eta}$）少于 2 个的项求导等于零，多于 2 个的项求导后代入外源也等于零，所以只需考虑包含 2 个 η、2 个 $\bar{\eta}$ 的项。

$$G_1(u_1,u_2,v_1,v_2)=\lim_{\eta\bar{\eta}J\to 0}\frac{\delta}{\delta\eta^{v_2}}\frac{\delta}{\delta\eta^{v_1}}\frac{\delta}{\delta\eta^{u_2}}\frac{\delta}{\delta\eta^{u_1}}Z_2(\eta,\bar{\eta},\eta,\bar{\eta})$$

$$=-\tfrac{1}{2}n_qi\int_z\gamma^\nu\gamma^\mu[D_{\nu\mu}^{z_2z_1}+D_{\nu\mu}^{z_1z_2}]\lim_{\eta\bar{\eta}J\to 0}\frac{\delta}{\delta\eta^{v_2}}\frac{\delta}{\delta\eta^{v_1}}\frac{\delta}{\delta\eta^{u_2}}\frac{\delta}{\delta\eta^{u_1}}[S_{z_1y}\eta_y\bar{\eta}_xS_{xz_1}S_{z_2y}\eta_y\bar{\eta}_xS_{xz_2}]Z_0$$

$$=-\tfrac{1}{2}n_qi\int_z\gamma^\nu\gamma^\mu[D_{\nu\mu}^{z_2z_1}+D_{\nu\mu}^{z_1z_2}]$$

$$\times\lim_{\eta\bar{\eta}J\to 0}\frac{\delta}{\delta\eta^{v_2}}\frac{\delta}{\delta\eta^{v_1}}\frac{\delta}{\delta\eta^{u_2}}[S_{z_1u_1}\bar{\eta}_xS_{xz_1}S_{z_2y}\eta_y\bar{\eta}_xS_{xz_2}+S_{z_1y}\eta_y\bar{\eta}_xS_{xz_1}S_{z_2u_1}\bar{\eta}_xS_{xz_2}+(0)]Z_0$$

$$=-\tfrac{1}{2}n_qi\int_z\gamma^\nu\gamma^\mu[D_{\nu\mu}^{z_2z_1}+D_{\nu\mu}^{z_1z_2}]\lim_{\eta\bar{\eta}J\to 0}\frac{\delta}{\delta\eta^{v_2}}\frac{\delta}{\delta\eta^{v_1}}[S_{z_1u_1}S_{u_2z_1}S_{z_2y}\eta_y\bar{\eta}_xS_{xz_2}+S_{z_1u_1}\bar{\eta}_xS_{xz_1}S_{z_2y}\eta_yS_{u_2z_2}$$

$$-S_{z_1y}\eta_yS_{u_2z_1}S_{z_2u_1}\bar{\eta}_xS_{xz_2}+S_{z_1y}\eta_y\bar{\eta}_xS_{xz_1}S_{z_2u_1}S_{u_2z_2}+(0)+(0)]Z_0$$

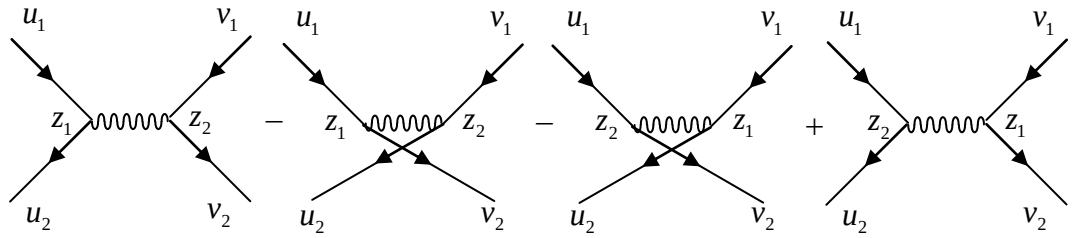
$$=-n_qi\int_z\gamma^\nu\gamma^\mu[D_{\nu\mu}^{z_2z_1}+D_{\nu\mu}^{z_1z_2}]\lim_{\eta\bar{\eta}J\to 0}\frac{\delta}{\delta\eta^{v_2}}[S_{z_1u_1}S_{u_2z_1}S_{z_2v_1}\bar{\eta}_xS_{xz_2}-S_{z_1u_1}\bar{\eta}_xS_{xz_1}S_{z_2v_1}S_{u_2z_2}$$

$$-S_{z_1v_1}S_{u_2z_1}S_{z_2u_1}\bar{\eta}_xS_{xz_2}+S_{z_1v_1}\bar{\eta}_xS_{xz_1}S_{z_2u_1}S_{u_2z_2}+(0)+(0)+(0)]Z_0$$

$$=-n_qi\int_z\gamma^\nu\gamma^\mu[D_{\nu\mu}^{z_2z_1}+D_{\nu\mu}^{z_1z_2}]$$

$$\times[S_{z_1u_1}S_{u_2z_1}S_{z_2v_1}S_{v_2z_2}-S_{z_1u_1}S_{v_2z_1}S_{z_2v_1}S_{u_2z_2}-S_{z_1v_1}S_{u_2z_1}S_{z_2u_1}S_{v_2z_2}+S_{z_1v_1}S_{v_2z_1}S_{z_2u_1}S_{u_2z_2}]$$

用图形表示就是：



这 4 图可描述电子与电子的 **Moller 散射**（时间反演后也可描述电子与正电子的 **Bhabha 散射**）。其中第一个与最后一个等价，中间两个等价，**拓扑不等价**图只有 2 个（周邦融《量子场论》）。

当光子作为内线时，$D_{\nu\mu}^{z_2z_1}$ 与 $D_{\nu\mu}^{z_1z_2}$ 具有对称性，故整体上乘以 2.

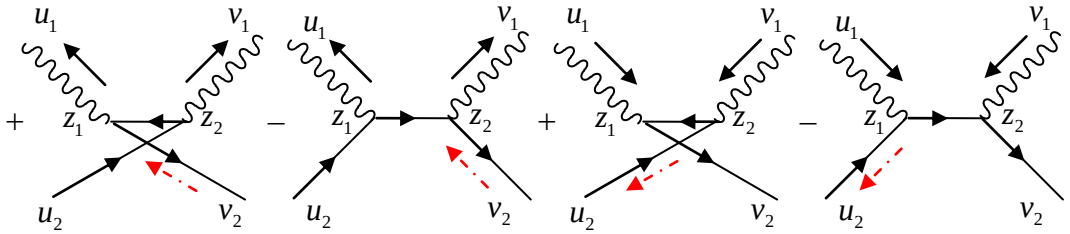
（D）两个 J、一个 η、一个 $\bar{\eta}$

如果对两个 J、一个 η、一个 $\bar{\eta}$ 求导，只需考虑 Z_2 中含两个 J、一个 η、一个 $\bar{\eta}$ 的项。

$$
\begin{aligned}
&G_2(u_1,u_2,v_1,v_2)=\lim_{\eta\bar{\eta}J\to 0}\delta_{\eta}^{v_2}\delta_{J\beta}^{v_1}\delta_{\eta}^{u_2}\delta_{J\alpha}^{u_1}Z_2(\eta,\bar{\eta},J^2)\\
&=-\tfrac{1}{4}n_q i\int_z\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\lim_{\eta\bar{\eta}J\to 0}\delta_{\eta}^{v_2}\delta_{J\beta}^{v_1}\delta_{\eta}^{u_2}\delta_{J\alpha}^{u_1}[(J_x^{\rho})^2(D_{\rho\mu}^{xz_1}+D_{\rho\mu}^{z_1x})(D_{\rho\nu}^{xz_2}+D_{\rho\nu}^{z_2x})]\\
&\times[S_{xz_1}(S_{z_1z_2}\bar{\eta}_xS_{z_2y}\eta_y-S_{z_1y}\eta_y\bar{\eta}_xS_{z_2z_2})+(S_{z_1y}\eta_yS_{z_2z_1}+S_{z_1z_1}S_{z_2y}\eta_y)\bar{\eta}_xS_{xz_2}]Z_0\\
&=-\tfrac{1}{4}n_q i\int_z\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\lim_{\eta\bar{\eta}J\to 0}\delta_{\eta}^{v_2}\delta_{J\beta}^{v_1}\delta_{\eta}^{u_2}[2J_x^{\rho}(D_{\alpha\mu}^{u_1z_1}+D_{\alpha\mu}^{z_1u_1})(D_{\rho\nu}^{xz_2}+D_{\rho\nu}^{z_2x})+(0)]\\
&\times[S_{xz_1}(S_{z_1z_2}\bar{\eta}_xS_{z_2y}\eta_y-S_{z_1y}\eta_y\bar{\eta}_xS_{z_2z_2})+(S_{z_1y}\eta_yS_{z_2z_1}+S_{z_1z_1}S_{z_2y}\eta_y)\bar{\eta}_xS_{xz_2}]Z_0\\
&=-\tfrac{1}{2}n_q i\int_z\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\lim_{\eta\bar{\eta}J\to 0}\delta_{\eta}^{v_2}\delta_{J\beta}^{v_1}[J_x^{\rho}(D_{\alpha\mu}^{u_1z_1}+D_{\alpha\mu}^{z_1u_1})(D_{\rho\nu}^{xz_2}+D_{\rho\nu}^{z_2x})+(0)]\\
&\times[S_{xz_1}(-S_{z_1z_2}\bar{\eta}_xS_{z_2u_2}-S_{z_1u_2}\bar{\eta}_xS_{z_2z_2})+(S_{z_1u_2}S_{z_2z_1}+S_{z_1z_1}S_{z_2u_2})\bar{\eta}_xS_{xz_2}+(0)]Z_0\\
&=-\tfrac{1}{2}n_q i\int_z\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\lim_{\eta\bar{\eta}J\to 0}\delta_{\eta}^{v_2}[(D_{\alpha\mu}^{u_1z_1}+D_{\alpha\mu}^{z_1u_1})(D_{\beta\nu}^{v_1z_2}+D_{\beta\nu}^{z_2v_1})+(0)+(0)]\\
&\times[S_{xz_1}(-S_{z_1z_2}\bar{\eta}_xS_{z_2u_2}-S_{z_1u_2}\bar{\eta}_xS_{z_2z_2})+(S_{z_1u_2}S_{z_2z_1}+S_{z_1z_1}S_{z_2u_2})\bar{\eta}_xS_{xz_2}+(0)]Z_0\\
&=-\tfrac{1}{2}n_q i\int_z\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}(D_{\alpha\mu}^{u_1z_1}+D_{\alpha\mu}^{z_1u_1})(D_{\beta\nu}^{v_1z_2}+D_{\beta\nu}^{z_2v_1})\\
&\times[-S_{v_2z_1}S_{z_1z_2}S_{z_2u_2}-S_{v_2z_1}S_{z_1u_2}S_{z_2z_2}+S_{z_1u_2}S_{z_2z_1}S_{v_2z_2}+S_{z_1z_1}S_{z_2u_2}S_{v_2z_2}]\\
&=\tfrac{1}{2}n_q i\int_z\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}[(D+D)(D+D)(SSS_{z_2z_2}-S_{z_1z_1}SS)\\
&+D_{\alpha\mu}^{u_1z_1}D_{\beta\nu}^{v_1z_2}(S_{v_2z_1}S_{z_1z_2}S_{z_2u_2}-S_{z_1u_2}S_{z_2z_1}S_{v_2z_2})+D_{\alpha\mu}^{z_1u_1}D_{\beta\nu}^{z_2v_1}(S_{v_2z_1}S_{z_1z_2}S_{z_2u_2}-S_{z_1u_2}S_{z_2z_1}S_{v_2z_2})\\
&+D_{\alpha\mu}^{z_1u_1}D_{\beta\nu}^{v_1z_2}(S_{v_2z_1}S_{z_1z_2}S_{z_2u_2}-S_{z_1u_2}S_{z_2z_1}S_{v_2z_2})+D_{\alpha\mu}^{u_1z_1}D_{\beta\nu}^{z_2v_1}(S_{v_2z_1}S_{z_1z_2}S_{z_2u_2}-S_{z_1u_2}S_{z_2z_1}S_{v_2z_2})]
\end{aligned}
$$

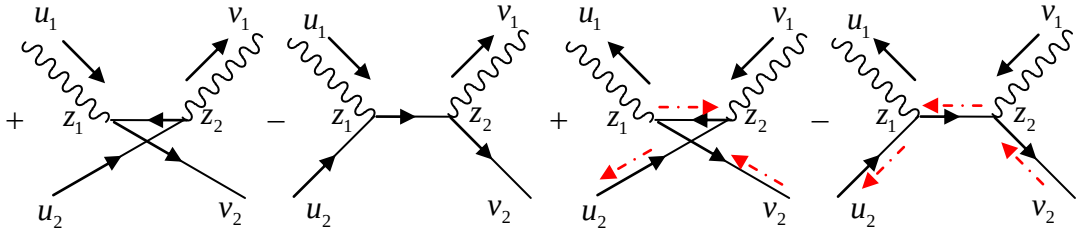
共 16 项，其中含 $S_{z_2z_2},S_{z_1z_1}$ 的 8 项是不连通图，可忽略。其他 8 项的图形表示分别为：

（Da）$D_{\alpha\mu}^{u_1z_1}D_{\beta\nu}^{v_1z_2}$ 与 $D_{\alpha\mu}^{z_1u_1}D_{\beta\nu}^{z_2v_1}$ 项（光子都入射或都出射）



第一、二图表示正负电子湮灭（正电子用红色点划线表示）；第三、四图表示正负电子产生；

（Db） $D^{z_1u_1}_{\alpha\mu}D^{v_1z_2}_{\beta\nu}$ 与 $D^{u_1z_1}_{\alpha\mu}D^{z_2v_1}_{\beta\nu}$ 项（光子一入一出）



前两图为电子 Compton 散射；后两图为正电子 Compton 散射（Greiner《Field Quantization》）。

注：光子作为外线时 $D^{u_1z_1}_{\alpha\mu}$ 与 $D^{z_1u_1}_{\alpha\mu}$ 不对称，一个描述 Compton 散射，另一描述正负电子湮灭！

当然，你还可以计算更多点的关联函数，如 $\lim_{\eta\bar{\eta}J\to 0}\delta^{v_3}_{\eta}\delta^{v_2}_{\bar{\eta}}\delta^{v_1}_{J\beta}\delta^{u_3}_{\eta}\delta^{u_2}_{\bar{\eta}}\delta^{u_1}_{J\alpha}Z_2(\eta,\bar{\eta},\eta,\bar{\eta},J^2)$。

计算表明这个图是非连通图，我们就不浪费笔墨把它写出来了。

（3）三阶微扰

$$Z_3=N\frac{i^3}{3!}[\int(-q\frac{\delta}{i\delta\eta}\gamma^{\mu}\frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}}\frac{\delta}{i\delta J})dz]^3Z_0=-n_3\int_z\delta^{z_3}_{\eta}\gamma^{\rho}\delta^{z_3}_{\bar{\eta}}\delta^{z_3}_{J\rho}\delta^{z_2}_{\eta}\gamma^{\nu}\delta^{z_2}_{\bar{\eta}}\delta^{z_2}_{J\nu}\delta^{z_1}_{\eta}\gamma^{\mu}\delta^{z_1}_{\bar{\eta}}\delta^{z_1}_{J\mu}Z_0$$

$$=n_3\int_z{}^3\gamma\delta^{z_3}_{\eta}\delta^{z_2}_{\eta}\delta^{z_1}_{\eta}\delta^{z_3}_{\bar{\eta}}\delta^{z_2}_{\bar{\eta}}\delta^{z_1}_{\bar{\eta}}\delta^{z_3}_{J\rho}\delta^{z_2}_{J\nu}\delta^{z_1}_{J\mu}Z_0=n_3\int_z{}^3\gamma\delta_{Fermi}\delta_{Bose}Z_0$$

$$\delta_{Bose}Z_0=\delta^{z_3}_{J\rho}\delta^{z_2}_{J\nu}\delta^{z_1}_{J\mu}Z_0=-\tfrac{i}{2}\delta^{z_3}_{J\rho}\delta^{z_2}_{J\nu}[J^{\alpha}_x(D^{xz_1}_{\alpha\mu}+D^{z_1x}_{\alpha\mu})]Z_0$$

$$=-\tfrac{i}{2}\delta^{z_3}_{J\rho}[D^{z_2z_1}_{\nu\mu}+D^{z_1z_2}_{\nu\mu}-\tfrac{i}{2}(D^{xz_1}_{\alpha\mu}+D^{z_1x}_{\alpha\mu})J^{2\alpha}_x(D^{xz_2}_{\alpha\mu}+D^{z_2x}_{\alpha\mu})]Z_0$$

$$=-\tfrac{1}{2}\{(D^{z_3z_1}_{\rho\mu}+D^{z_1z_3}_{\rho\mu})J^{\alpha}_x(D^{xz_2}_{\alpha\mu}+D^{z_2x}_{\alpha\mu})+(D^{xz_1}_{\alpha\mu}+D^{z_1x}_{\alpha\mu})J^{\alpha}_x(D^{z_3z_2}_{\rho\mu}+D^{z_2z_3}_{\rho\mu})$$

$$+[D^{z_2z_1}_{\nu\mu}+D^{z_1z_2}_{\nu\mu}-\tfrac{i}{2}(D^{xz_1}_{\alpha\mu}+D^{z_1x}_{\alpha\mu})J^{2\alpha}_x(D^{xz_2}_{\alpha\mu}+D^{z_2x}_{\alpha\mu})]\tfrac{1}{2}(D^{xz_3}_{\alpha\mu}+D^{z_3x}_{\alpha\mu})J^{\alpha}_x\}Z_0$$

$$\delta_{Fermi}Z_0=\delta^{z_3}_{\eta}\delta^{z_2}_{\eta}\delta^{z_1}_{\eta}\delta^{z_3}_{\bar{\eta}}\delta^{z_2}_{\bar{\eta}}\delta^{z_1}_{\bar{\eta}}Z_0=\delta^{z_3}_{\eta}\delta^{z_2}_{\eta}\delta^{z_1}_{\eta}[-iS_{z_1y}\eta_y][+iS_{z_2y}\eta_y][-iS_{z_3y}\eta_y]Z_0$$

$$=-i\delta^{z_3}_{\eta}\delta^{z_2}_{\eta}[S_{z_1z_1}S_{z_2y}\eta_yS_{z_3y}\eta_y-S_{z_1y}\eta_yS_{z_2z_1}S_{z_3y}\eta_y+S_{z_1y}\eta_yS_{z_2y}\eta_yS_{z_3z_1}-S_{z_1y}\eta_yS_{z_2y}\eta_yS_{z_3y}\eta_yi\bar{\eta}_xS_{xz_1}]Z_0$$

$$=-i\delta^{z_3}_{\eta}[S_{z_1z_1}\cdots-(S_{z_1z_2}S_{z_2z_1}S_{z_3y}\eta_y-S_{z_1y}\eta_yS_{z_2z_1}S_{z_3z_2}+S_{z_1y}\eta_yS_{z_2z_1}S_{z_3y}\eta_yi\bar{\eta}_xS_{xz_2})$$

$$+S_{z_1z_2}S_{z_2y}\eta_yS_{z_3z_1}-S_{z_2z_2}\cdots+S_{z_1y}\eta_yS_{z_2y}\eta_yS_{z_3z_1}i\bar{\eta}_xS_{xz_2}$$

$$-S_{z_1z_2}S_{z_2y}\eta_yS_{z_3y}\eta_yi\bar{\eta}_xS_{xz_1}+S_{z_2z_2}\cdots-S_{z_1y}\eta_yS_{z_2y}\eta_yS_{z_3z_2}i\bar{\eta}_xS_{xz_1}+S_{z_1y}\eta_yS_{z_2y}\eta_yS_{z_3y}\eta_y\bar{\eta}_xS_{xz_1}\bar{\eta}_xS_{xz_2}]Z_0$$

$$\to\tfrac{1}{2}\{[-S_{z_3z_3}\cdots+S_{z_1z_3}S_{z_2z_1}S_{z_3z_2}-S_{z_1z_3}S_{z_2z_1}S_{z_3y}\eta_yi\bar{\eta}_xS_{xz_2}+S_{z_3z_3}\cdots$$

$$+S_{z_1z_2}S_{z_2z_3}S_{z_3z_1}+S_{z_1z_3}S_{z_2y}\eta_yS_{z_3z_1}i\bar{\eta}_xS_{xz_2}-S_{z_1y}\eta_yS_{z_2z_3}S_{z_3z_1}i\bar{\eta}_xS_{xz_2}$$

$$+(-S_{z_1z_2}S_{z_2z_3}S_{z_3y}\eta_y+S_{z_3z_3}\cdots-S_{z_1z_3}S_{z_2y}\eta_yS_{z_3z_2}+S_{z_1y}\eta_yS_{z_2z_3}S_{z_3z_2})i\bar{\eta}_xS_{xz_1}$$

$$-(S_{z_1z_3}S_{z_2y}\eta_yS_{z_3y}\eta_y-S_{z_1y}\eta_yS_{z_2z_3}S_{z_3y}\eta_y+S_{z_3z_3}\cdots)i\bar{\eta}_xS_{xz_1}i\bar{\eta}_xS_{xz_2}]$$

$$+[-(S_{z_1z_2}S_{z_2z_1}S_{z_3y}\eta_y-S_{z_1y}\eta_yS_{z_2z_1}S_{z_3z_2}+S_{z_1y}\eta_yS_{z_2z_1}S_{z_3y}\eta_yi\bar{\eta}_xS_{xz_2})$$

$$+S_{z_1z_2}S_{z_2y}\eta_yS_{z_3z_1}+S_{z_1y}\eta_yS_{z_2y}\eta_yS_{z_3z_1}i\bar{\eta}_xS_{xz_2}-S_{z_1z_2}S_{z_2y}\eta_yS_{z_3y}\eta_yi\bar{\eta}_xS_{xz_1}-S_{z_1y}\eta_yS_{z_2y}\eta_yS_{z_3z_2}i\bar{\eta}_xS_{xz_1}$$

$$-S_{z_1y}\eta_yS_{z_2y}\eta_yS_{z_3y}\eta_yi\bar{\eta}_xS_{xz_1}i\bar{\eta}_xS_{xz_2}]i\bar{\eta}_xS_{xz_3}\}Z_0$$

$$Z_3=Z_3(J)+Z_3(J^3)+Z_3(\eta,\bar{\eta},J)+Z_3(\eta,\bar{\eta},J^3)+Z_3(\eta,\bar{\eta},\eta,\bar{\eta},J)+Z_3(\eta,\bar{\eta},\eta,\bar{\eta},J^3)$$

$$+Z_3(\eta,\bar{\eta},\eta,\bar{\eta},\eta,\bar{\eta},J)+Z_3(\eta,\bar{\eta},\eta,\bar{\eta},\eta,\bar{\eta},J^3)$$

该式共八项。由它可求 1 点函数（第一项），3 点函数（第二三项），5 点函数（第四五项），7 点函数（第六七项），9 点函数（第八项）。有几个外源就求几点函数。例如：

$$G_1(u,v,w)=\lim_{\eta\bar\eta J\to 0}\delta_\eta^w\delta_{\bar\eta}^v\delta_{J\sigma}^u Z_3[\eta^1,\bar\eta^1,J^1]$$

$$=\tfrac{-n_3}{4}\int_z{}^3\gamma\lim_{\eta\bar\eta J\to 0}\delta_\eta^w\delta_{\bar\eta}^v\delta_{J\sigma}^u\{(D_{\rho\mu}^{z_3z_1}+D_{\rho\mu}^{z_1z_3})J_x^\alpha(D_{\alpha\mu}^{xz_2}+D_{\alpha\mu}^{z_2x})+(D_{\alpha\mu}^{xz_1}+D_{\alpha\mu}^{z_1x})J_x^\alpha(D_{\rho\mu}^{z_3z_2}+D_{\rho\mu}^{z_2z_3})$$

$$+[D_{\nu\mu}^{z_2z_1}+D_{\nu\mu}^{z_1z_2}]\tfrac{J_x^\alpha}{2}[D_{\alpha\mu}^{xz_3}+D_{\alpha\mu}^{z_3x}]\}\{[-S_{z_1z_3}S_{z_2z_1}S_{z_3y}\eta_y+S_{z_1z_3}S_{z_2y}\eta_yS_{z_3z_1}-S_{z_1y}\eta_yS_{z_2z_3}S_{z_3z_1}]i\bar\eta_xS_{xz_2}$$

$$+[-S_{z_1z_2}S_{z_2z_3}S_{z_3y}\eta_y-S_{z_1z_3}S_{z_2y}\eta_yS_{z_3z_2}+S_{z_1y}\eta_yS_{z_2z_3}S_{z_3z_2}]i\bar\eta_xS_{xz_1}$$

$$+[-S_{z_1z_2}S_{z_2z_1}S_{z_3y}\eta_y+S_{z_1y}\eta_yS_{z_2z_1}S_{z_3z_2}+S_{z_1z_2}S_{z_2y}\eta_yS_{z_3z_1}]i\bar\eta_xS_{xz_3}\}Z_0$$

$$=-\tfrac{n_3}{4}\int_z{}^3\gamma\lim_{J\to 0}\{(D_{\rho\mu}^{z_3z_1}+D_{\rho\mu}^{z_1z_3})(D_{\sigma\mu}^{uz_2}+D_{\sigma\mu}^{z_2u})+(D_{\sigma\mu}^{uz_1}+D_{\sigma\mu}^{z_1u})(D_{\rho\mu}^{z_3z_2}+D_{\rho\mu}^{z_2z_3})$$

$$+[D_{\nu\mu}^{z_2z_1}+D_{\nu\mu}^{z_1z_2}]\tfrac{1}{2}(D_{\sigma\mu}^{uz_3}+D_{\sigma\mu}^{z_3u})+(0)\}$$

$$\times\lim_{\eta\bar\eta\to 0}\delta_\eta^w[(S_{z_1z_3}S_{z_2z_1}S_{z_3y}\eta_y-S_{z_1z_3}S_{z_2y}\eta_yS_{z_3z_1}+S_{z_1y}\eta_yS_{z_2z_3}S_{z_3z_1})iS_{vz_2}$$

$$+(S_{z_1z_2}S_{z_2z_3}S_{z_3y}\eta_y+S_{z_1z_3}S_{z_2y}\eta_yS_{z_3z_2}-S_{z_1y}\eta_yS_{z_2z_3}S_{z_3z_2})iS_{vz_1}$$

$$+(S_{z_1z_2}S_{z_2z_1}S_{z_3y}\eta_y-S_{z_1y}\eta_yS_{z_2z_1}S_{z_3z_2}-S_{z_1z_2}S_{z_2y}\eta_yS_{z_3z_1})iS_{vz_3}+(0)]Z_0$$

$$=-\tfrac{n_3 i}{4}\int_z{}^3\gamma\{[S_{z_1z_3}S_{z_2z_1}S_{z_3w}+S_{z_1w}S_{z_2z_3}S_{z_3z_1}]S_{vz_2}+[S_{z_1z_2}S_{z_2z_3}S_{z_3w}+S_{z_1z_3}S_{z_2w}S_{z_3z_2}]S_{vz_1}$$

$$-[S_{z_1z_2}S_{z_2w}S_{z_3z_1}+S_{z_1w}S_{z_2z_1}S_{z_3z_2}]S_{vz_3}-S_{z_1z_3}S_{z_3z_1}\cdots-S_{z_2z_3}S_{z_3z_2}\cdots+S_{z_1z_2}S_{z_2z_1}\cdots\}\times$$

$$\{[D_{\rho\mu}^{z_3z_1}+D_{\rho\mu}^{z_1z_3}][D_{\sigma\mu}^{uz_2}+D_{\sigma\mu}^{z_2u}]+[D_{\sigma\mu}^{uz_1}+D_{\sigma\mu}^{z_1u}][D_{\rho\mu}^{z_3z_2}+D_{\rho\mu}^{z_2z_3}]+\tfrac{1}{2}[D_{\nu\mu}^{z_2z_1}+D_{\nu\mu}^{z_1z_2}][D_{\sigma\mu}^{uz_3}+D_{\sigma\mu}^{z_3u}]\}$$

$$\to-\tfrac{n_3 i}{4}\int_z{}^3\gamma\{D^{u\leftrightarrow 1}D^{2\leftrightarrow 3}+D^{u\leftrightarrow 2}D^{3\leftrightarrow 1}+\tfrac{1}{2}D^{u\leftrightarrow 3}D^{1\leftrightarrow 2}\}\times$$

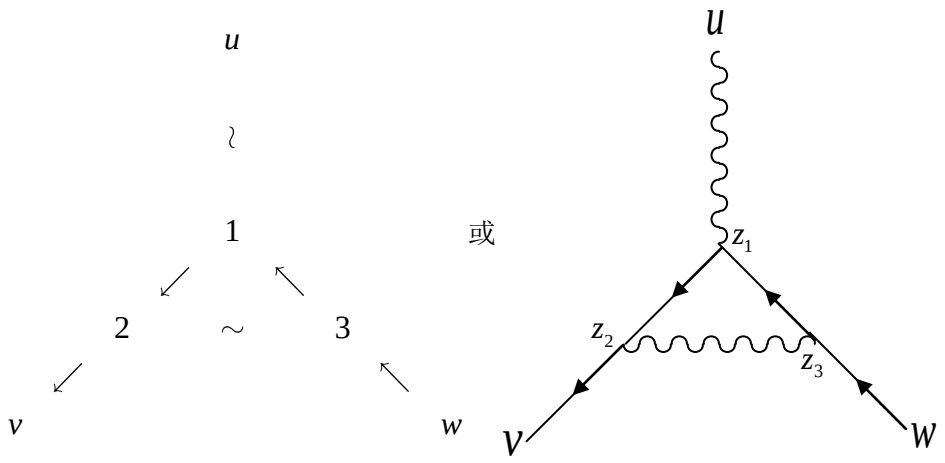
$$[S_{13}S_{21}S_{3w}S_{v2}+S_{1w}S_{23}S_{31}S_{v2}+S_{12}S_{23}S_{3w}S_{v1}+S_{13}S_{2w}S_{32}S_{v1}-S_{12}S_{2w}S_{31}S_{v3}-S_{1w}S_{21}S_{32}S_{v3}]$$

$$\to[\overleftrightarrow{u123}+\overleftrightarrow{u231}+\tfrac{1}{2}\overleftrightarrow{u312}]\times$$

$$[\overleftarrow{v2211}\overleftarrow{33w}+\overleftarrow{v2233}\overleftarrow{11w}+\overleftarrow{v1122}\overleftarrow{33w}+\overleftarrow{v1133}\overleftarrow{22w}-\overleftarrow{v3311}\overleftarrow{22w}-\overleftarrow{v3322}\overleftarrow{11w}]$$

$$\to\overleftarrow{v2211}\overleftarrow{\overrightarrow{u1}_{23}}\overleftarrow{33w}-\overleftarrow{v3311}\overleftarrow{\overrightarrow{u1}_{23}}\overleftarrow{22w}+\overleftarrow{v1122}\overleftarrow{\overrightarrow{u2}_{31}}\overleftarrow{33w}-\overleftarrow{v3322}\overleftarrow{\overrightarrow{u2}_{31}}\overleftarrow{11w}+\tfrac{1}{2}\overleftarrow{v2233}\overleftarrow{\overrightarrow{u3}_{12}}\overleftarrow{11w}+\tfrac{1}{2}\overleftarrow{v1133}\overleftarrow{\overrightarrow{u3}_{12}}\overleftarrow{22w}$$

第一项 $\overleftarrow{v2211}\overleftarrow{\overrightarrow{u1}_{23}}\overleftarrow{33w}$ 用图形表示就是：

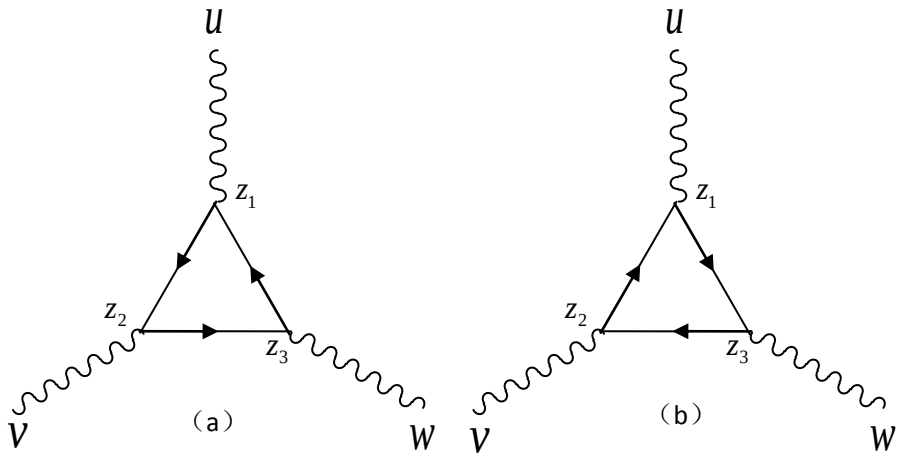


严格说，我们并不能交换 Dirac 传播子 S，因为它含有 Gamma 矩阵，这里只为了简化讨论。从几何上看，3 个顶点可以构造三角图，这就是通常说的**顶角修正**。按理说它也是一个闭合

回路，但实际上比两个顶点构成的圈图复杂多了。
再如，J 的三次方项：

$$G_2(u,v,w)=\lim_{J\to 0}\delta^w_{J\theta}\delta^v_{J\tau}\delta^u_{J\sigma}Z_3[J^3]$$
$$=n_3\int_z{}^3\gamma\lim_{J\to 0}\delta^w_{J\theta}\delta^v_{J\tau}\delta^u_{J\sigma}\{\tfrac{i}{4}(D^{xz_1}_{\alpha\mu}+D^{z_1x}_{\alpha\mu})J^{2\alpha}_x(D^{xz_2}_{\alpha\mu}+D^{z_2x}_{\alpha\mu})\tfrac{1}{2}(D^{xz_3}_{\alpha\mu}+D^{z_3x}_{\alpha\mu})J^{\alpha}_x$$
$$\times\tfrac{1}{2}[-S_{z_3z_3}\cdots+S_{z_1z_3}S_{z_2z_1}S_{z_3z_2}+S_{z_3z_3}\cdots+S_{z_1z_2}S_{z_2z_3}S_{z_3z_1}]\}Z_0$$
$$=\tfrac{i}{16}n_3\int_z{}^3\gamma\lim_{J\to 0}\delta^w_{J\theta}\delta^v_{J\tau}\delta^u_{J\sigma}J^{3\alpha}_x(D^{xz_1}_{\alpha\mu}+D^{z_1x}_{\alpha\mu})(D^{xz_2}_{\alpha\mu}+D^{z_2x}_{\alpha\mu})(D^{xz_3}_{\alpha\mu}+D^{z_3x}_{\alpha\mu})$$
$$[S_{z_1z_3}S_{z_2z_1}S_{z_3z_2}+S_{z_1z_2}S_{z_2z_3}S_{z_3z_1}]Z_0$$
$$=\tfrac{i}{16}n_3\int_z{}^3\gamma[S_{13}S_{21}S_{32}+S_{12}S_{23}S_{31}]$$
$$\lim_{J\to 0}\delta^w_{J\theta}\delta^v_{J\tau}[3J^{2\alpha}_x(D^{uz_1}_{\sigma\mu}+D^{z_1u}_{\sigma\mu})(D^{xz_2}_{\alpha\mu}+D^{z_2x}_{\alpha\mu})(D^{xz_3}_{\alpha\mu}+D^{z_3x}_{\alpha\mu})+(0)]Z_0$$
$$=\tfrac{i}{16}n_3\int_z{}^3\gamma[\overleftarrow{2}\overleftarrow{1}\overleftarrow{1}\overleftarrow{3}\overleftarrow{3}\overleftarrow{2}+\overleftarrow{1}\overleftarrow{2}\overleftarrow{2}\overleftarrow{3}\overleftarrow{3}\overleftarrow{1}]\lim_{J\to 0}\delta^w_{J\theta}\{6J^{\alpha}_x(D^{uz_1}_{\sigma\mu}+D^{z_1u}_{\sigma\mu})(D^{vz_2}_{\tau\mu}+D^{z_2v}_{\tau\mu})(D^{xz_3}_{\alpha\mu}+D^{z_3x}_{\alpha\mu})$$
$$+(0)+(0)\}Z_0$$
$$=\tfrac{3i}{8}n_3\int_z{}^3\gamma[\overleftarrow{2}\overleftarrow{1}\overleftarrow{1}\overleftarrow{3}\overleftarrow{3}\overleftarrow{2}+\overleftarrow{1}\overleftarrow{2}\overleftarrow{2}\overleftarrow{3}\overleftarrow{3}\overleftarrow{1}]\overleftrightarrow{D}^{uz_1}\overleftrightarrow{D}^{vz_2}\overleftrightarrow{D}^{wz_3}$$

用图形表示就是：



但 Furry 说，这两个图正好反号，Ga+Gb 之和等于零。一般地，闭合 Fermi 圈上连着奇数个光子线的 Feynman 图对散射振幅都没贡献——此即 **Furry 定理**。
为证明这个定理，我们需要“**电荷共轭**”的概念，就是将正反粒子互换。Dirac 方程为

$$(i\partial_\mu\gamma^\mu-m)\psi=0$$

这是电子的相对论方程，其中并未显含电荷。QED 除了电子，还需要光子。为描述电磁场的规范不变性，所以将 Dirac 方程改为

$$(iD_\mu\gamma^\mu-m)\psi=[\gamma^\mu(i\partial_\mu-qA_\mu)-m]\psi=0$$

这个方程已显含电荷 q. 电荷共轭就是要将 q 变成-q，所以上述方程被电荷共轭变换$\mathbb{C}$作用后，应改为

$$\mathbb{C}[\gamma^\mu(i\partial_\mu-qA_\mu)-m]\psi=[\gamma^\mu(i\partial_\mu+qA_\mu)-m]\psi_C=0 \qquad (*)$$

注意，Gamma 矩阵与微分算符对易。下面就来寻找使ψ变为$\psi_C=\mathbb{C}\psi$的变换$\mathbb{C}$.

$\mathcal{C}$ 也是一种共轭运算/操作，那么 ψ_C 与复共轭 ψ^*、Hermite 共轭 $\psi^\dagger$、Dirac 共轭 $\bar{\psi}$ 之间有什么关系？用这三种共轭中任意一种都可以给出电荷共轭的矩阵形式，最简单的是用复共轭。不过，在构造旋量场 Lagrange 量时我们说过，复共轭、Hermite 共轭构造的乘积 $\psi^*\psi$、$\psi^\dagger\psi$ 都不是协变的，但乘以 γ^0 定义 Dirac 共轭后，$\bar{\psi}\psi$ 可以保持协变性。保险起见，我们还是求 Dirac 方程的 Dirac 共轭吧（用复共轭也能求出变换矩阵，但鬼知道它什么时候就破坏协变性或者别的我们不希望被破坏的性质呢；我们也不能完全按逻辑胡来，有些推导虽然**符合逻辑但不符合历史**，怎么与别人交流呢）：

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu - qA_\mu) - m]\psi = 0 \xrightarrow{\text{Dirac共轭}} \bar{\psi}[\gamma^\mu(-i\partial_\mu - qA_\mu) - m] = 0 \qquad (**)$$

其中已利用了 $(\gamma^0)^+ = \gamma^0$，$(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$，$\{\gamma^0, \gamma^i\} = 0$.

因为 ψ_C 在方程（*）最右边，$\bar{\psi}$ 在方程（**）最左边，为将 2 个方程比较，应该将（**）方程取转置：

$$[-(\gamma^\mu)^T(i\partial_\mu + qA_\mu) - m]\bar{\psi}^T = 0 \qquad (***)$$

那么，比较（*）和（***），是否可得出 $\psi_C = \bar{\psi}^T$ 呢？当然不是。如果那样，比较两个方程第一项还应满足 $\gamma^\mu = -(\gamma^\mu)^T$，而这仅对于 $\mu = 1,3$ 成立！所以，我们假定 $\bar{\psi}^T$ 经历一次变换 $\hat{C}$ 才变成 ψ_C，满足

$$\begin{cases} \mathcal{C}\psi = \psi_C = \hat{C}\bar{\psi}^T \\ \mathcal{C}[\gamma^\mu\psi] = \gamma^\mu\psi_C = \hat{C}[-(\gamma^\mu)^T\bar{\psi}^T] \end{cases}$$

联立这两个方程，可得

$$\gamma^\mu\hat{C} = -\hat{C}(\gamma^\mu)^T = \begin{cases} \hat{C}\gamma^\mu, & \mu = 1,3 \\ -\hat{C}\gamma^\mu, & \mu = 0,2 \end{cases}$$

即 $\hat{C}$ 与 γ^1, γ^3 对易，而与 γ^0, γ^2 反对易（Greiner's Relativistic Quantum Mechanics）。这样的算符有很多，历史（而非逻辑）的选择是

$$\hat{C} = i\gamma^2\gamma^0$$

最近比较火的流行语是：遇事不决，量子力学；解释不通，平行时空。老师，为啥电流方向是正电荷运动方向？废话，谁叫你比前辈晚生几百年呢！为啥地球有大气层？废话，不这样能孕育你我吗！呵呵，开个玩笑，人择原理虽然坑人，但也无可厚非。

有了“电荷共轭”算符，就可以证明 Furry 定理了。

由 $\gamma^\mu\hat{C} = -\hat{C}(\gamma^\mu)^T$，可得

$$\hat{C}^{-1}\gamma^\mu\hat{C} = -(\gamma^\mu)^T$$

于是（Greiner's QED，黄涛《量子场论导论》）

$$\hat{C}^{-1}S_F(x)\hat{C}=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ikx}\hat{C}^{-1}\frac{1}{\not k-m}\hat{C}=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ikx}\frac{-\not k^T+m}{k^2-m^2}=S_F^T(-x)$$

$$\begin{aligned}
&G_a=n\int(q\gamma^\rho)_{\alpha\beta}(S_{13})_{\beta\gamma}(q\gamma^\nu)_{\gamma\delta}(S_{32})_{\delta\varepsilon}(q\gamma^\mu)_{\varepsilon\lambda}(S_{21})_{\lambda\alpha}\\
&=n\int Tr[q\gamma^\rho S_{13}q\gamma^\nu S_{32}q\gamma^\mu S_{21}]\\
&=n\int Tr[(\hat{C}\hat{C}^{-1})q\gamma^\rho(\hat{C}\hat{C}^{-1})S_{13}(\hat{C}\hat{C}^{-1})q\gamma^\nu(\hat{C}\hat{C}^{-1})S_{32}(\hat{C}\hat{C}^{-1})q\gamma^\mu(\hat{C}\hat{C}^{-1})S_{21}]\\
&=n\int Tr[(\hat{C}^{-1}q\gamma^\rho\hat{C})(\hat{C}^{-1}S_{13}\hat{C})(\hat{C}^{-1}q\gamma^\nu\hat{C})(\hat{C}^{-1}S_{32}\hat{C})(\hat{C}^{-1}q\gamma^\mu\hat{C})(\hat{C}^{-1}S_{21}\hat{C})]\\
&=n\int Tr[(-q\gamma^\rho)^TS_{31}^T(-q\gamma^\nu)^TS_{23}^T(-q\gamma^\mu)^TS_{12}^T]=n\int Tr[S_{12}(-q\gamma^\mu)S_{23}(-q\gamma^\mu)S_{31}(-q\gamma^\mu)]^T\\
&=n\int Tr[(-q\gamma^\mu)S_{12}(-q\gamma^\mu)S_{23}(-q\gamma^\mu)S_{31}]=(-1)^3G_b
\end{aligned}$$

倒数第二步运用了

$$TrA^T=TrA$$

这个不难理解，毕竟求迹只是对角元求和，与非对角元无关。真正难的是，为什么要求迹？下面，我们就来解释这道难题。$\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\lambda$ 是前面运算中一直省略掉的**旋量分量指标**（见 Srednicki's QFT），如 Dirac 旋量有 4 分量，记作 ψ_α； μ,ν,ρ 是**矢量分量指标**，如 A_μ. 矢量可看作旋量的平方，因而 $(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}$ 带两个旋量分量指标 α,β 和一个矢量指标 μ。所有指标按 **Einstein 约定求和**，且当**指标循环时，求和变成求迹**（Greiner 的 QED，《Gauge Theory of Weak interactions》）。对于树图，S 矩阵指标不循环，不必求迹，只是将矩阵元平方后出现循环，需要求迹；对于圈图，即使矩阵元不平方，由于圈的闭合，仍会使指标循环，而必须求迹。思考：刚开始讲 2 维 Grassmann 量时曾指出，由于反对易性，旋量的 3 次及更高次幂等于零。那么是否 $\delta_\eta^{z_3}\delta_\eta^{z_2}\delta_\eta^{z_1}[-iS_{z_1y}\eta_y][+iS_{z_2y}\eta_y][-iS_{z_3y}\eta_y]Z_0$ 都不用算，直接就等于零了？ η 是 4 维 Grassmann 量，几次方后变成零？我们先看下 3 维 Grassmann 量的 n 次乘幂性质。与 2 维类似，设

$$\eta=\begin{pmatrix}\eta_1\\\eta_2\\\eta_3\end{pmatrix},\bar{\eta}=\begin{pmatrix}\bar{\eta}_1\\\bar{\eta}_2\\\bar{\eta}_3\end{pmatrix}$$

则

$$\bar{\eta}^T\eta=\bar{\eta}_1\eta_1+\bar{\eta}_2\eta_2+\bar{\eta}_3\eta_3=\chi_1+\chi_2+\chi_3$$

$$(\bar{\eta}^T\eta)^2=2(\chi_1\chi_2+\chi_2\chi_3+\chi_3\chi_1)$$

$$(\bar{\eta}^T\eta)^3=6\chi_1\chi_2\chi_3$$

$$(\bar{\eta}^T\eta)^4=0$$

同样办法可算 4 维的 Grassmann 量。一般地，d 维 Grassmann 量的 d+1 次方等于零。其排列规律符合杨辉三角，总结如下表：

	1	2	3	4	……	d 维
0	1	1	1	1	……	C_d^0
1	1	2	3	4	……	C_d^1
2	0	1	3	6	……	C_d^2
3	0	0	1	4	……	C_d^3
4	0	0	0	1	……	C_d^4
……	0	0	0	0	……	……
n 次	0	0	0	0	0	C_d^n 项

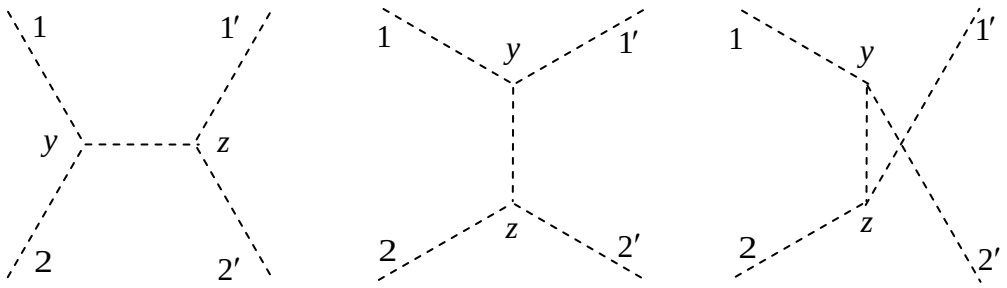
1.2.3 图形规则

前几节已导出部分 Feynman 规则（内线+顶点），这一节，我们要导出全部 Feynman 规则。

1.2.3.1 标量场 Feynman 规则

1. 物理过程、Feynman 图、关联函数

以 $\varphi(x_1)+\varphi(x_2)\to\varphi(x_1')+\varphi(x_2')$ 为例，对于 $L_I=\frac{\lambda}{3!}\varphi^3$，Feynman 图及关联函数为



$$G(x_1,x_2,x_1',x_2')=\langle 0|T[\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_1')\varphi(x_2')]|0\rangle$$
$$=(i\lambda)^2\int G(y-z)dydz[G(y-x_1)G(y-x_2)G(x_1'-z)G(x_2'-z)$$
$$+G(y-x_1)G(z-x_2)G(x_1'-y)G(x_2'-z)+G(y-x_1)G(z-x_2)G(x_1'-z)G(x_2'-y)]$$
$$=(i\lambda)^2 i^5\int \Delta(y-z)dydz[\Delta(y-x_1)\Delta(y-x_2)\Delta(x_1'-z)\Delta(x_2'-z)$$
$$+\Delta(y-x_1)\Delta(z-x_2)\Delta(x_1'-y)\Delta(x_2'-z)+\Delta(y-x_1)\Delta(z-x_2)\Delta(x_1'-z)\Delta(x_2'-y)]$$

其中 λ 为耦合常数。注意这里定义的 Green 函数、Feynman 传播子都与 Srednicki 差一负号。

2. S 矩阵约化与坐标空间 Feynman 规则

关联函数给出的都是中间过程。为计算完整的物理过程，需要将 n 点关联函数（Green 函数）代入 S 矩阵约化公式。前面已求出标量场的约化公式：

$$S_{fi}=\prod_{f=1}^{n}\left[\int d^4y_f e^{\mathrm{i}q_f y_f}\mathrm{i}(\Box_y+\mu^2)_f\right]G(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n)\prod_{i=1}^{m}\left[\mathrm{i}(\overleftarrow{\Box}_x+\mu^2)_i\int e^{-\mathrm{i}p_i x_i}d^4x_i\right]$$

对于 $\varphi(x_1)+\varphi(x_2)\to\varphi(x_1')+\varphi(x_2')$，即

$$\begin{aligned}
&S_{fi}=i^4\int d^4x_1'd^4x_2'e^{\mathrm{i}k_1'x_1'}e^{\mathrm{i}k_2'x_2'}(\Box_{x_1'}+m^2)(\Box_{x_2'}+m^2)(\Box_{x_1}+m^2)(\Box_{x_2}+m^2)G(x_1,x_2,x_1',x_2')\\
&\times\int e^{-\mathrm{i}k_1x_1}e^{-\mathrm{i}k_2x_2}d^4x_1d^4x_2\\
&=i^4\int d^4x_1d^4x_2d^4x_1'd^4x_2'e^{\mathrm{i}(k_1'x_1'+k_2'x_2'-k_1x_1-k_2x_2)}(\Box_{x_1'}+m^2)(\Box_{x_2'}+m^2)(\Box_{x_1}+m^2)(\Box_{x_2}+m^2)\\
&\times(i\lambda)^2i^5\int\Delta(y-z)d^4yd^4z[\Delta(y-x_1)\Delta(y-x_2)\Delta(x_1'-z)\Delta(x_2'-z)\\
&+\Delta(y-x_1)\Delta(z-x_2)\Delta(x_1'-y)\Delta(x_2'-z)+\Delta(y-x_1)\Delta(z-x_2)\Delta(x_1'-z)\Delta(x_2'-y)]\\
&=(i\lambda)^2i\int\Delta(y-z)d^4yd^4z\int d^4x_1d^4x_2d^4x_1'd^4x_2'\\
&\times[e^{\mathrm{i}(k_1'x_1'+k_2'x_2'-k_1x_1-k_2x_2)}\delta^4(y-x_1)\delta^4(y-x_2)\delta^4(x_1'-z)\delta^4(x_2'-z)\\
&+e^{\mathrm{i}(k_1'x_1'+k_2'x_2'-k_1x_1-k_2x_2)}\delta^4(y-x_1)\delta^4(z-x_2)\delta^4(x_1'-y)\delta^4(x_2'-z)\\
&+e^{\mathrm{i}(k_1'x_1'+k_2'x_2'-k_1x_1-k_2x_2)}\delta^4(y-x_1)\delta^4(z-x_2)\delta^4(x_1'-z)\delta^4(x_2'-y)]\\
&=(i\lambda)^2i\int\Delta(y-z)d^4yd^4z[e^{\mathrm{i}(k_1'z+k_2'z-k_1y-k_2y)}+e^{\mathrm{i}(k_1'y+k_2'z-k_1y-k_2z)}+e^{\mathrm{i}(k_1'z+k_2'y-k_1y-k_2z)}]\\
&=\int d^4yd^4z[e^{\mathrm{i}k_1'z}e^{\mathrm{i}k_2'z}\cdot(i\lambda)\cdot i\Delta(y-z)\cdot(i\lambda)\cdot e^{-\mathrm{i}k_1y}e^{-\mathrm{i}k_2y}]\\
&+\int d^4yd^4z[e^{\mathrm{i}k_1'y}e^{\mathrm{i}k_2'z}\cdot(i\lambda)\cdot i\Delta(y-z)\cdot(i\lambda)\cdot e^{-\mathrm{i}k_1y}e^{-\mathrm{i}k_2z}]\\
&+\int d^4yd^4z[e^{\mathrm{i}k_1'z}e^{\mathrm{i}k_2'y}\cdot(i\lambda)\cdot i\Delta(y-z)\cdot(i\lambda)\cdot e^{-\mathrm{i}k_1y}e^{-\mathrm{i}k_2z}]
\end{aligned}$$

与前面 Feynman 图比较，得图形与公式相互转换规则，称 **Feynman 规则**。设顶点 x，x′，有

（1）基本规则（外线、内线、顶点）

外线=波函数：在 x 点以动量 k 入射 $f(x)=e^{-ikx}$，在 x′点以动量 k′出射 $f^*(x')=e^{ik'x'}$

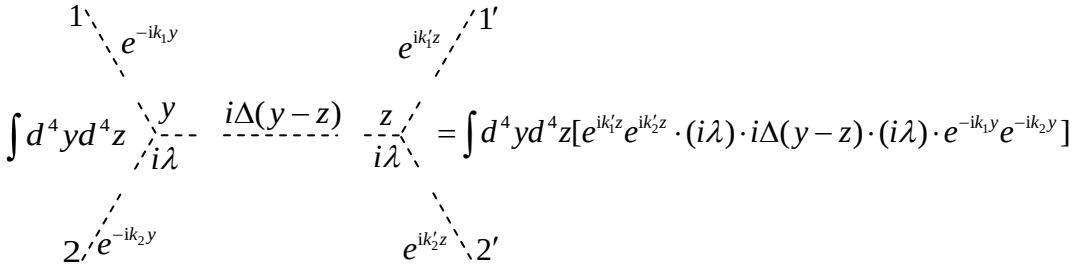
内线：$i\Delta(x-x')$

（每个）顶点：$i\lambda$（如果 $L_I=-\lambda\varphi^3/6$，也可以差一负号，变成 $-i\lambda$）

（2）附加规则（积分、动量守恒因子、对称因子、拓扑权，等等）

对顶点坐标 x，x′积分 $\int d^4xd^4x'$

例如，上述 S 矩阵元第一项为：



注意，同一个图各因子相乘，不同的图相加。

3. Fourier 变换与动量空间 Feynman 规则

如果将坐标空间传播子进行 Fourier 变换到动量空间，根据前面得到的关系

$$\Delta_F(x)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\Delta(k)e^{-ikx}=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-m^2+i\varepsilon}e^{-ikx}$$

S 矩阵元可进一步化简：

$$S_{fi}=(i\lambda)^2 i\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik(y-z)}}{k^2-m^2+i\varepsilon}d^4yd^4z[e^{\mathrm{i}(k_1'z+k_2'z-k_1y-k_2y)}+e^{\mathrm{i}(k_1'y+k_2'z-k_1y-k_2z)}+e^{\mathrm{i}(k_1'z+k_2'y-k_1y-k_2z)}]$$

$$=(i\lambda)^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2-m^2+i\varepsilon}$$

$$\times\int d^4yd^4z[e^{-i(k+k_1+k_2)y}e^{\mathrm{i}(k+k_1'+k_2')z}+e^{-i(k+k_1-k_1')y}e^{\mathrm{i}(k-k_2+k_2')z}+e^{-i(k+k_1-k_2')y}e^{\mathrm{i}(k-k_2+k_1')z}]$$

$$=(i\lambda)^2\int d^4k\frac{i}{k^2-m^2+i\varepsilon}$$

$$\times\int d^4y[e^{-i(k+k_1+k_2)y}\delta^4(k+k_1'+k_2')+e^{-i(k+k_1-k_1')y}\delta^4(k-k_2+k_2')+e^{-i(k+k_1-k_2')y}\delta^4(k-k_2+k_1')]$$

$$=(i\lambda)^2(2\pi)^4\int d^4k\frac{i}{k^2-m^2+i\varepsilon}[\delta^4(k+k_1+k_2)\delta^4(k+k_1'+k_2')$$

$$+\delta^4(k+k_1-k_1')\delta^4(k-k_2+k_2')+\delta^4(k+k_1-k_2')\delta^4(k-k_2+k_1')]$$

$$=(i\lambda)^2(2\pi)^4\int d^4k[\delta^4(k+k_1+k_2)\frac{i\delta^4(k+k_1'+k_2')}{k^2-m^2+i\varepsilon}$$

$$+\delta^4(k+k_1-k_1')\frac{i\delta^4(k-k_2+k_2')}{k^2-m^2+i\varepsilon}+\delta^4(k+k_1-k_2')\frac{i\delta^4(k-k_2+k_1')}{k^2-m^2+i\varepsilon}]$$

$$=(i\lambda)^2(2\pi)^4[\frac{i\delta^4(-k_1-k_2+k_1'+k_2')}{(-k_1-k_2)^2-m^2+i\varepsilon}+\frac{i\delta^4(-k_1+k_1'-k_2+k_2')}{(-k_1+k_1')^2-m^2+i\varepsilon}$$

$$+\frac{i\delta^4(-k_1+k_2'-k_2+k_1')}{(-k_1+k_2')^2-m^2+i\varepsilon}]$$

$$=(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2-k_1'-k_2')\cdot1\cdot i\lambda\cdot\frac{i}{(k_1+k_2)^2-m^2+i\varepsilon}\cdot i\lambda\cdot1$$

$$+(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2-k_1'-k_2')\cdot1\cdot i\lambda\cdot\frac{i}{(k_1-k_1')^2-m^2+i\varepsilon}\cdot i\lambda\cdot1$$

$$+(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2-k_1'-k_2')\cdot1\cdot i\lambda\cdot\frac{i}{(k_1-k_2')^2-m^2+i\varepsilon}\cdot i\lambda\cdot1$$

由此可得动量空间 Feynman 规则：

（1）基本规则（外线、内线、顶点）

外线：1

内线：设虚粒子动量为 k，则相应的动量空间传播子为 $\frac{i}{k^2-m^2+i\varepsilon}$

顶点：$i\lambda$（不同书可能差负号）

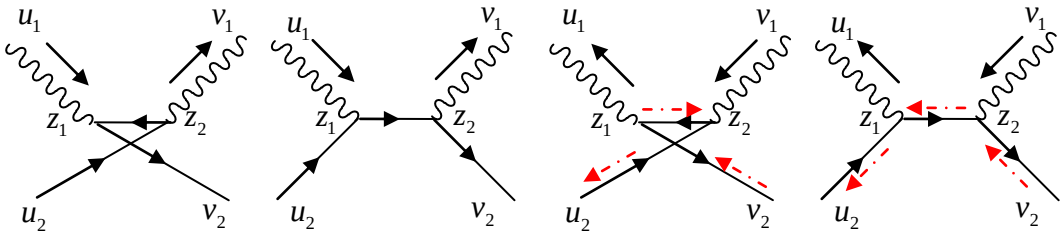
（2）附加规则（积分、动量守恒因子、对称因子、拓扑权，等等）

动量守恒因子：$(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2-k_1'-k_2')$

1.2.3.2 QED 的 Feynman 规则

1. 物理过程、Feynman 图、关联函数

Compton 散射的 Feynman 图和相应的关联函数为



$$G_2(u_1,u_2,v_1,v_2)=\tfrac{1}{2}n_q i\int_z \gamma^\nu\gamma^\mu$$

$$\times[D_{\alpha\mu}^{z_1u_1}D_{\beta\nu}^{v_1z_2}(S_{v_2z_1}S_{z_1z_2}S_{z_2u_2}-S_{z_1u_2}S_{z_2z_1}S_{v_2z_2})+D_{\alpha\mu}^{u_1z_1}D_{\beta\nu}^{z_2v_1}(S_{v_2z_1}S_{z_1z_2}S_{z_2u_2}-S_{z_1u_2}S_{z_2z_1}S_{v_2z_2})]$$

其中 $n_q=-\frac{1}{2}Nq^2$，$\int_z=\int dz_1dz_2$，$S_{xy}=S_F(x-y)$，$D_{\alpha\beta}^{xy}=D_{F\alpha\beta}(x-y)$.

归一化因子取为 N=1，拓扑权因子为 2（周邦融《量子场论》），关联函数为（差 -2 倍？）

$$G_2(u_1,u_2,v_1,v_2)=q^2i\int_z\gamma^\nu\gamma^\mu[D_{\alpha\mu}^{z_1u_1}D_{\beta\nu}^{v_1z_2}(-S_{v_2z_1}S_{z_1z_2}S_{z_2u_2}+S_{z_1u_2}S_{z_2z_1}S_{v_2z_2})$$

2. S 矩阵约化与坐标空间 Feynman 规则

对于初态、末态都是电子+光子情形，S 矩阵约化公式为

$$S_{fi}=i^4\int dx_1dx_2dx_1'dx_2'\varepsilon^*e^{ik_1'x_1'}\bar{u}e^{ik_2'x_2'}[-i\partial_{1'}+m]\Box_{1'}G(x_1,x_2,x_1',x_2')\overleftarrow{\Box}_1[i\overleftarrow{\partial}_1+m]\varepsilon e^{-ik_1x_1}ue^{-ik_2x_2}$$

将关联函数代入，根据（Ryder's QFT）

$$(i\partial-m)S_F(x-y)=\delta(x-y),\quad S_F(x-y)(-i\overleftarrow{\partial}-m)=\delta(x-y)$$

$$\Box D_{F\mu\nu}(x-y)=g_{\mu\nu}\delta(x-y)$$

得

$$S_{fi}=q^2i^5\int dx_1dx_2dx_1'dx_2'\varepsilon_\nu^*(k_1')e^{ik_1'x_1'}\bar{u}(k_2')e^{ik_2'x_2'}\gamma^\nu[-i\partial_{1'}+m]\Box_{1'}$$

$$\times\int_z D_{\alpha\mu}^{z_1x_1}D_{\beta\nu}^{x_1'z_2}(-S_{x_2'z_1}S_{z_1z_2}S_{z_2x_2}+S_{z_1x_2}S_{z_2z_1}S_{x_2'z_2})\overleftarrow{\Box}_1[i\overleftarrow{\partial}_1+m]\gamma^\mu\varepsilon_\mu(k_1)e^{-ik_1x_1}u(k_2)e^{-ik_2x_2}$$

$$=q^2i\int_z\int dx_1dx_2dx_1'dx_2'\varepsilon_\nu^*(k_1')e^{ik_1'x_1'}\bar{u}(k_2')e^{ik_2'x_2'}D_{\alpha\mu}^{z_1x_1}\overleftarrow{\Box}_1\delta(x_1'-z_2)$$

$$\times\gamma^\nu[-\delta(x_2'-z_1)S_{z_1z_2}S_{z_2x_2}+S_{z_1x_2}S_{z_2z_1}\delta(x_2'-z_2)][i\overleftarrow{\partial}_1+m]\gamma^\mu\varepsilon_\mu(k_1)e^{-ik_1x_1}u(k_2)e^{-ik_2x_2}$$

$$=q^2i\int_z\int dx_1dx_2\delta[z_1-x_1]\{-\varepsilon_\nu^*(k_1')e^{ik_1'z_2}\bar{u}(k_2')e^{ik_2'z_1}\gamma^\nu S_{z_1z_2}\delta[z_2-x_2]\gamma^\mu\varepsilon_\mu(k_1)e^{-ik_1x_1}u(k_2)e^{-ik_2x_2}$$

$$+\varepsilon_\nu^*(k_1')e^{ik_1'z_2}\bar{u}(k_2')e^{ik_2'z_2}\gamma^\nu\delta[z_1-x_2]S_{z_2z_1}\gamma^\mu\varepsilon_\mu(k_1)e^{-ik_1x_1}u(k_2)e^{-ik_2x_2}\}$$

$$=q^2i\int_z\{-\varepsilon_\nu^*(k_1')e^{ik_1'z_2}\bar{u}(k_2')e^{ik_2'z_1}\gamma^\nu S_{z_1z_2}\gamma^\mu\varepsilon_\mu(k_1)e^{-ik_1z_1}u(k_2)e^{-ik_2z_2}$$

$$+\varepsilon_\nu^*(k_1')e^{ik_1'z_2}\bar{u}(k_2')e^{ik_2'z_2}\gamma^\nu S_{z_2z_1}\gamma^\mu\varepsilon_\mu(k_1)e^{-ik_1z_1}u(k_2)e^{-ik_2z_1}\}$$

$$=-\int dz_1dz_2\varepsilon_\nu^*(k_1')e^{ik_1'z_2}\cdot\bar{u}(k_2')e^{ik_2'z_1}\cdot iq\gamma^\nu\cdot iS_F(z_1-z_2)\cdot iq\gamma^\mu\cdot\varepsilon_\mu(k_1)e^{-ik_1z_1}\cdot u(k_2)e^{-ik_2z_2}$$

$$+\int dz_1dz_2\varepsilon_\nu^*(k_1')e^{ik_1'z_2}\cdot\bar{u}(k_2')e^{ik_2'z_2}\cdot iq\gamma^\nu\cdot iS_F(z_2-z_1)\cdot iq\gamma^\mu\cdot\varepsilon_\mu(k_1)e^{-ik_1z_1}\cdot u(k_2)e^{-ik_2z_1}$$

所以 Feynman 规则为

（1）基本规则（外线、内线、顶点）

a.外线

光子在 x 点以动量 p 入射 $\varepsilon_\mu(p)e^{-ipx}$，光子在 y 点以动量 q 出射 $\varepsilon_\nu^*(q)e^{iqy}$；

电子在 x 点以动量 p 入射 $u(p)e^{-ipx}$，电子在 y 点以动量 q 出射 $\bar{u}(q)e^{iqy}$；

【正电子在 x 点以动量 p 入射 $\bar{v}(p)e^{ipx}$，电子在 y 点以动量 q 出射 $v(q)e^{-iqy}$ 】

b.内线（顶点坐标分别为 x，y）

光子线 $iD_{F\mu\nu}(x-y)$；电子线 $iS_F(x-y)$

c.顶点：$iq\gamma^\mu$（电子 q=-1）

（2）附加规则（积分、动量守恒因子、对称因子、拓扑权，等等）。

对顶点坐标积分 $\int dz_1 dz_2$

3. Fourier 变换与动量空间 Feynman 规则

如果将坐标空间传播子具体写出来：

$$S_F(x-y)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{\not k-m+i\varepsilon}e^{-ik(x-y)}$$

则可将顶点坐标积掉，使 S 矩阵元进一步简化：

$$S_{fi}=q^2i\int d^4z_1d^4z_2\{-\varepsilon_\nu^*(k_1')e^{ik_1'z_2}\bar{u}(k_2')e^{ik_2'z_1}\gamma^\nu\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik(z_1-z_2)}}{\not k-m+i\varepsilon}\gamma^\mu\varepsilon_\mu(k_1)e^{-ik_1z_1}u(k_2)e^{-ik_2z_2}$$

$$+\varepsilon_\nu^*(k_1')e^{ik_1'z_2}\bar{u}(k_2')e^{ik_2'z_2}\gamma^\nu\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik(z_2-z_1)}}{\not k-m+i\varepsilon}\gamma^\mu\varepsilon_\mu(k_1)e^{-ik_1z_1}u(k_2)e^{-ik_2z_1}\}$$

$$=-q^2i\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\varepsilon_\nu^*(k_1')\bar{u}(k_2')\int d^4z_1d^4z_2\{e^{i(k_1'-k_2+k)z_2}e^{i(k_2'-k_1-k)z_1}\gamma^\nu\frac{1}{\not k-m+i\varepsilon}\gamma^\mu$$

$$+e^{i(k_1'+k_2'-k)z_2}e^{-i(k_1+k_2-k)z_1}\gamma^\nu\frac{1}{\not k-m+i\varepsilon}\gamma^\mu\}\varepsilon_\mu(k_1)u(k_2)$$

$$=-q^2i(2\pi)^4\int d^4k\{\varepsilon_\nu^*(k_1')\bar{u}(k_2')\delta^4(k_1'-k_2+k)\delta(k_2'-k_1-k)\gamma^\nu\frac{1}{\not k-m+i\varepsilon}\gamma^\mu\varepsilon_\mu(k_1)u(k_2)$$

$$+\varepsilon_\nu^*(k_1')\bar{u}(k_2')\delta(k_1'+k_2'-k)\delta(k_1+k_2-k)\gamma^\nu\frac{1}{\not k-m+i\varepsilon}\gamma^\mu\varepsilon_\mu(k_1)u(k_2)\}$$

$$=(2\pi)^4\delta^4(k_1'+k_2'-k_1-k_2)\cdot\varepsilon_\nu^*(k_1')\cdot\bar{u}(k_2')\cdot iq\gamma^\nu\cdot\frac{i}{\not k_2'-\not k_1-m+i\varepsilon}\cdot iq\gamma^\mu\cdot\varepsilon_\mu(k_1)\cdot u(k_2)$$

$$-(2\pi)^4\delta^4(k_1'+k_2'-k_1-k_2)\cdot\varepsilon_\nu^*(k_1')\cdot\bar{u}(k_2')\cdot iq\gamma^\nu\cdot\frac{i}{\not k_1+\not k_2-m+i\varepsilon}\cdot iq\gamma^\mu\cdot\varepsilon_\mu(k_1)\cdot u(k_2)$$

所以动量空间 Feynman 规则为

（1）基本规则（外线、内线、顶点）

a.外线

光子以动量 p 入射 $\varepsilon_\mu(p)$，光子以动量 q 出射 $\varepsilon_\nu^*(q)$；

电子以动量 p 入射 $u(p)$，电子以动量 q 出射 $\bar{u}(q)$；

【正电子以动量 p 入射 $\bar{v}(p)$，电子以动量 q 出射 $v(q)$】

b.内线（虚粒子动量为 k）

光子线 $\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2+i\varepsilon}$；电子线 $\frac{i}{\not{k}-m+i\varepsilon}$

c.顶点：$iq\gamma^\mu$（电子 q=-1）

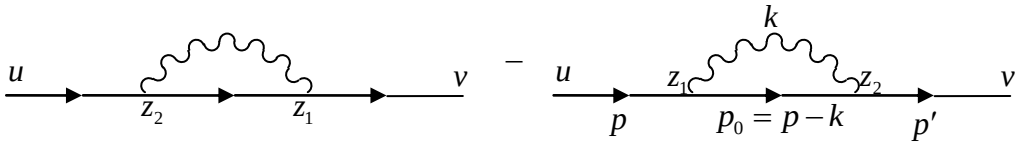
（2）附加规则（积分、动量守恒因子、对称因子、拓扑权，等等）。

动量守恒因子：$(2\pi)^4\delta^4(k_1'+k_2'-k_1-k_2)$

4.圈图 Feynman 规则

（1）电子自能

Feynman 图及关联函数为



$$G_2(u,v)=\tfrac{1}{2}n_q\int_z\gamma^\nu\gamma^\mu[D_{\nu\mu}^{z_2z_1}+D_{\nu\mu}^{z_1z_2}][-S_{vz_1}S_{z_1z_2}S_{z_2u}+S_{z_1u}S_{z_2z_1}S_{vz_2}]$$

其中 $n_q=-\frac{1}{2}Nq^2$，非连通图可略。以其中一图为例，略去归一化因子，代入约化公式得

$$\begin{aligned}
S_{fi}&=i^2q^2\int dx_1dx_1'e^{ip'x_1'}\bar{u}[-i\overleftarrow{\partial}_{1'}+m]G(x_1,x_1')[i\overleftarrow{\partial}_1+m]e^{-ipx_1}u\\
&=-i^2q^2\int dx_1dx_1'\int_z e^{ip'x_1'}\bar{u}\gamma^\nu[-i\overleftarrow{\partial}_{1'}+m]S_{z_1u}D_{\nu\mu}^{z_2z_1}S_{z_2z_1}S_{vz_2}[i\overleftarrow{\partial}_1+m]\gamma^\mu e^{-ipx_1}u\\
&=-i^2q^2\int dx_1dx_1'\int_z e^{ip'x_1'}\bar{u}\gamma^\nu\delta(z_1-x_1)D_{\nu\mu}^{z_2z_1}S_{z_2z_1}\delta(x_1'-z_2)\gamma^\mu e^{-ipx_1}u\\
&=-i^2q^2\int_z e^{ip'z_2}\bar{u}\gamma^\nu D_{\nu\mu}^{z_2z_1}S_{z_2z_1}\gamma^\mu e^{-ipz_1}u\\
&=-i^2q^2\int dz_1dz_2e^{ip'z_2}\bar{u}\gamma^\nu\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{-g_{\mu\nu}}{k^2+i\varepsilon}e^{-ik(z_2-z_1)}\int\frac{d^4p_0}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip_0(z_2-z_1)}}{\not{p}_0-m+i\varepsilon}\gamma^\mu e^{-ipz_1}u\\
&=-i^2q^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{-g_{\mu\nu}}{k^2+i\varepsilon}\int\frac{d^4p_0}{(2\pi)^4}\int dz_1dz_2e^{i(p'-k-p_0)z_2}e^{i(k-p+p_0)z_1}\bar{u}\gamma^\nu\frac{1}{\not{p}_0-m+i\varepsilon}\gamma^\mu u\\
&=-i^2q^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{-g_{\mu\nu}}{k^2+i\varepsilon}\int d^4p_0(2\pi)^4\delta^4(p'-k-p_0)\delta^4(k-p+p_0)\bar{u}\gamma^\nu\frac{1}{\not{p}_0-m+i\varepsilon}\gamma^\mu u\\
&=-(2\pi)^4\delta^4(p'-p)\cdot\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{-g_{\mu\nu}}{k^2+i\varepsilon}\bar{u}\cdot iq\gamma^\nu\cdot\frac{1}{\not{p}-\not{k}-m+i\varepsilon}\cdot iq\gamma^\mu\cdot u\\
&=(2\pi)^4\delta^4(p'-p)\bar{u}(p')\cdot[-i\Sigma^{(2)}(p)]\cdot u(p)
\end{aligned}$$

其中 $\Sigma^{(2)}(p)$ 为**自能算符**，前面的-i 因子是为了与别的书比较而引入的。推导中利用了

$$(i\partial\!\!\!/ - m)S_F(x-y) = \delta(x-y)\,,\quad S_F(x-y)(-i\overleftarrow{\partial\!\!\!/} - m) = \delta(x-y)$$

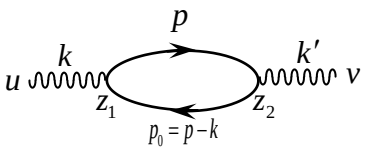
$$D_{F\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{-g_{\mu\nu}}{k^2+i\varepsilon}e^{-ik(x-y)}\,,\quad S_F(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k\!\!\!/ - m + i\varepsilon}e^{-ik(x-y)}$$

推导中尤其注意 Gamma 矩阵安插位置（将圈分解为内线与顶角之积，按顺序相乘就不会错）。树图时动量积分被 delta 函数消掉，圈图则消不掉。所以圈图的矩阵元带有积分，很有可能积不出来。圈图积分是个大问题，涉及预备知识很多，我们留到后面专开一节（重整化）讲。

圈图 Feynman 规则 1：基本规则同树图，附加对动量积分。

（2）光子自能（真空极化）

Feynman 图及关联函数为



$$G_1(u,v) = \tfrac{1}{2}n_q\int_z \gamma^\nu\gamma^\mu(D^{uz_1}_{\alpha\mu}D^{z_2\nu}_{\beta\nu} + D^{z_1u}_{\alpha\mu}D^{\nu z_2}_{\beta\nu})[S_{z_1z_2}S_{z_2z_1}]$$

约化公式为

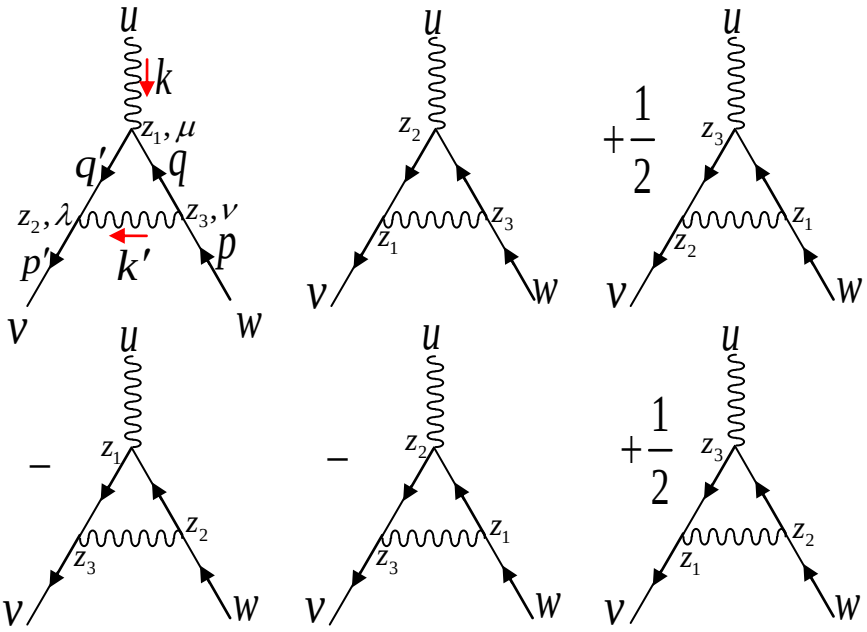
$$\begin{aligned}
S_{fi} &= i^2\int dx_1dx_1'\varepsilon^* e^{ik'x_1'}\Box_{1'}G(x_1,x_1')\overleftarrow{\Box}_1\varepsilon e^{-ikx_1}\\
&= -i^2q^2\int_z\int dx_1dx_1'\varepsilon^{*\beta}e^{ik'x_1'}\Box_{1'}\gamma^\nu D^{z_1u}_{\alpha\mu}D^{\nu z_2}_{\beta\nu}S_{z_1z_2}\gamma^\mu S_{z_2z_1}\overleftarrow{\Box}_1\varepsilon^\alpha e^{-ikx_1}\\
&= -i^2q^2\int_z\int dx_1dx_1'\varepsilon^{*\beta}e^{ik'x_1'}\gamma^\nu g_{\alpha\mu}\delta(z_1-x_1)g_{\beta\nu}\delta(x_1'-z_2)S_{z_1z_2}\gamma^\mu S_{z_2z_1}\varepsilon^\alpha e^{-ikx_1}\\
&= -i^2q^2\int_z\varepsilon^*_\nu e^{ik'z_2}\gamma^\nu S_{z_1z_2}S_{z_2z_1}\gamma^\mu\varepsilon_\mu e^{-ikz_1}\\
&= -i^2q^2\int dz_1dz_2\varepsilon^*_\nu e^{ik'z_2}\gamma^\nu\int\frac{d^4p_0}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip_0(z_1-z_2)}}{p\!\!\!/_0 - m + i\varepsilon}\gamma^\mu\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip(z_2-z_1)}}{p\!\!\!/ - m + i\varepsilon}\varepsilon_\mu e^{-ikz_1}\\
&= -i^2q^2\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4p_0}{(2\pi)^4}\int dz_1dz_2e^{i(k'+p_0-p)z_2}e^{i(p-p_0-k)z_1}\varepsilon^*_\nu\gamma^\nu\frac{1}{p\!\!\!/_0 - m + i\varepsilon}\gamma^\mu\frac{1}{p\!\!\!/ - m + i\varepsilon}\varepsilon_\mu\\
&= -i^2q^2\int d^4p\int d^4p_0\delta^4(k'+p_0-p)\delta^4(p-p_0-k)\varepsilon^*_\nu\gamma^\nu\frac{1}{p\!\!\!/_0 - m + i\varepsilon}\gamma^\mu\frac{1}{p\!\!\!/ - m + i\varepsilon}\varepsilon_\mu\\
&= (2\pi)^4\delta^4(k'-k)\varepsilon^*_\nu\cdot q^2\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}tr\left[\gamma^\nu\frac{1}{p\!\!\!/ - k\!\!\!/ - m + i\varepsilon}\gamma^\mu\frac{1}{p\!\!\!/ - m + i\varepsilon}\right]\cdot\varepsilon_\mu\\
&= (2\pi)^4\delta^4(k'-k)\varepsilon^*_\nu\cdot q^2\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}tr\left[\gamma^\mu\frac{1}{p\!\!\!/ - m + i\varepsilon}\gamma^\nu\frac{1}{p\!\!\!/ - k\!\!\!/ - m + i\varepsilon}\right]\cdot\varepsilon_\mu\\
&= (2\pi)^4\delta^4(k'-k)\varepsilon^{*\nu}(k')\cdot q^2\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}tr\left[\gamma_\mu\frac{p\!\!\!/ + m}{p^2-m^2+i\varepsilon}\gamma_\nu\frac{p\!\!\!/ - k\!\!\!/ + m}{(p-k)^2-m^2+i\varepsilon}\right]\cdot\varepsilon^\mu(k)\\
&= (2\pi)^4\delta^4(k'-k)\varepsilon^{*\nu}(k')\cdot[-i\Pi^{(2)}_{\mu\nu}(k)]\cdot\varepsilon^\mu(k)
\end{aligned}$$

其中 $\Pi^{(2)}_{\mu\nu}(k)$ 为**极化张量**，前面的-i 因子是为了与别的书比较而引入的。注意，当 Fermi 首尾相连时，旋量求和指标出现循环，所以普通的 Einstein 求和变成求迹。

圈图 Feynman 规则 2：基本规则同树图；对闭合 Fermi 子圈，除对动量积分，还需求迹。

（3）顶角修正

Feynman 图为



关联函数为

$$G_1(u,v,w)=-\tfrac{n_3 i}{4}\int_z{}^3\gamma\{[S_{z_1z_3}S_{z_2z_1}S_{z_3w}+S_{z_1w}S_{z_2z_3}S_{z_3z_1}]S_{vz_2}+[S_{z_1z_2}S_{z_2z_3}S_{z_3w}+S_{z_1z_3}S_{z_2w}S_{z_3z_2}]S_{vz_1}$$

$$-[S_{z_1z_2}S_{z_2w}S_{z_3z_1}+S_{z_1w}S_{z_2z_1}S_{z_3z_2}]S_{vz_3}\}\times$$

$$\{[D_{\rho\mu}^{z_3z_1}+D_{\rho\mu}^{z_1z_3}][D_{\sigma\mu}^{uz_2}+D_{\sigma\mu}^{z_2u}]+[D_{\sigma\mu}^{uz_1}+D_{\sigma\mu}^{z_1u}][D_{\rho\mu}^{z_3z_2}+D_{\rho\mu}^{z_2z_3}]+\tfrac{1}{2}[D_{\nu\mu}^{z_2z_1}+D_{\nu\mu}^{z_1z_2}][D_{\sigma\mu}^{uz_3}+D_{\sigma\mu}^{z_3u}]\}$$

$$\to \overleftarrow{v}\overleftarrow{2}\overleftarrow{21}\overrightarrow{u1}_{23}\overleftarrow{133}\overleftarrow{w}-\overleftarrow{v}\overleftarrow{3}\overleftarrow{31}\overrightarrow{u1}_{23}\overleftarrow{122}\overleftarrow{w}+\overleftarrow{v}\overleftarrow{1}\overleftarrow{12}\overrightarrow{u2}_{31}\overleftarrow{233}\overleftarrow{w}-\overleftarrow{v}\overleftarrow{3}\overleftarrow{32}\overrightarrow{u2}_{31}\overleftarrow{211}\overleftarrow{w}+\tfrac{1}{2}\overleftarrow{v}\overleftarrow{2}\overleftarrow{23}\overrightarrow{u3}_{12}\overleftarrow{311}\overleftarrow{w}+\tfrac{1}{2}\overleftarrow{v}\overleftarrow{1}\overleftarrow{13}\overrightarrow{u3}_{12}\overleftarrow{322}\overleftarrow{w}$$

其中 $n_3=N\dfrac{(-q)^3}{3!}=-\dfrac{q^3}{6}N$．这个式子太复杂了，我们不再代入约化公式。因为 Feynman 是通用的（基本规则不变，附加规则加一条对动量积分），我们可把树图推出的外线、内线、顶点规则应用到圈图，由图直接写出矩阵元。为简洁起见，我们只写其中一个图的：

$$S_{fi}=(2\pi)^4\delta(p'-p-k)\bar{u}(p')[-ie\Lambda_\mu^{(2)}(p,p')]u(p)\varepsilon^\mu(k)$$

其中

$$\Lambda_\mu^{(2)}(p,p')=\int\frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\frac{-ig_{\nu\lambda}}{k'^2}[-ie\gamma^\lambda]\frac{i}{\not q'-m}[\gamma_\mu]\frac{i}{\not q-m}[-ie\gamma^\nu]$$

$$=-ie^2\int\frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\frac{1}{k'^2}\gamma_\nu\frac{\not q'+m}{q'^2-m^2}\gamma_\mu\frac{\not q+m}{q^2-m^2}\gamma^\nu$$

$$=-ie^2\int\frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\frac{1}{k'^2}\gamma_\nu\frac{\not p'-\not k'+m}{(p'-k')^2-m^2}\gamma_\mu\frac{\not p-\not k'+m}{(p-k')^2-m^2}\gamma^\nu$$

是去掉外线及四动量守恒因子（还有 iq）后结果，称为**顶角修正函数**。为免混淆，电子电荷 q 已经用-e 代替。

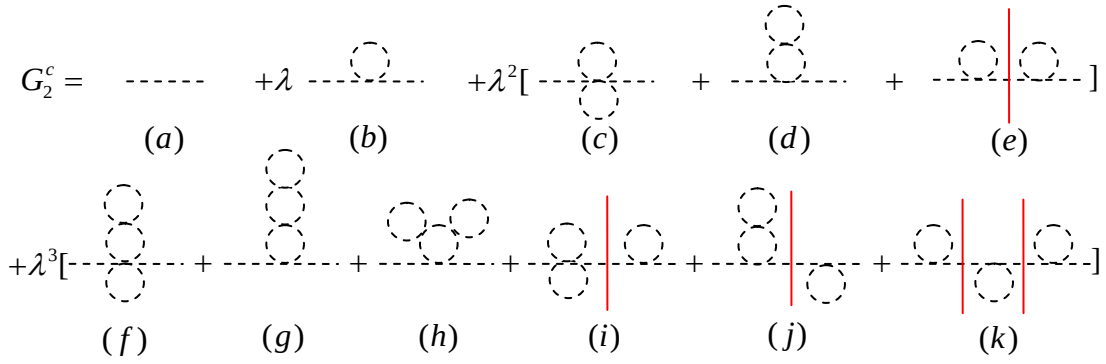
1.2.3.3 Ward 恒等式

至此，我们已导出全部 Feynman 规则。按说，“图形规则”这一节应该结束了。不过，细心的读者应该会发现，我们最多只计算到 3 阶微扰。用同样步骤，计算 4 阶、5 阶乃至更高，原则上也能做到。但真正的问题是，就算计算到 100 阶、1000 阶，也仍然是近似！那么，有没有精确的关系式呢？下面就来探讨这一问题。

1.完全传播子

关联函数包含很多项，每一项对应一幅 Feynman 图。如果某一项对应的 Feynman 图各部分彼此连通则称为连通图，否则为非连通图。非连通图无观测效应，可忽略。连通图中不含外线的称为真空图，可被归一化因子吸收，也可忽略。

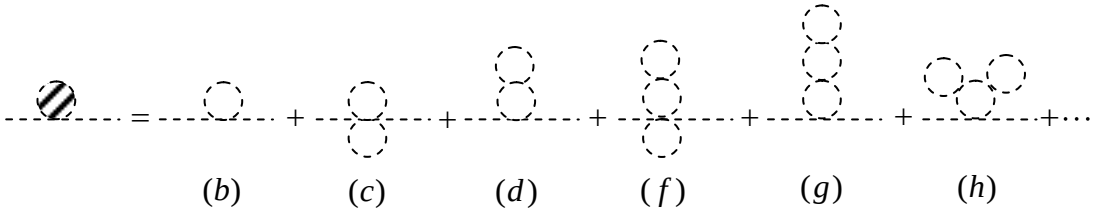
生成泛函是个 e 指数，可以展开成 0 阶、1 阶、2 阶到 m 阶。每一阶都可计算 n 点关联函数，如由 1 阶生成泛函计算 2 点函数、3 点函数、n 点函数，由 2 阶生成泛函也可计算 2 点函数、3 点函数、n 点函数。所以，完整的 2 点函数应该是各阶生成泛函算出的 2 点函数之和。以 $\lambda\varphi^4$ 为例，除去非连通图及真空图，完整的 2 点函数为



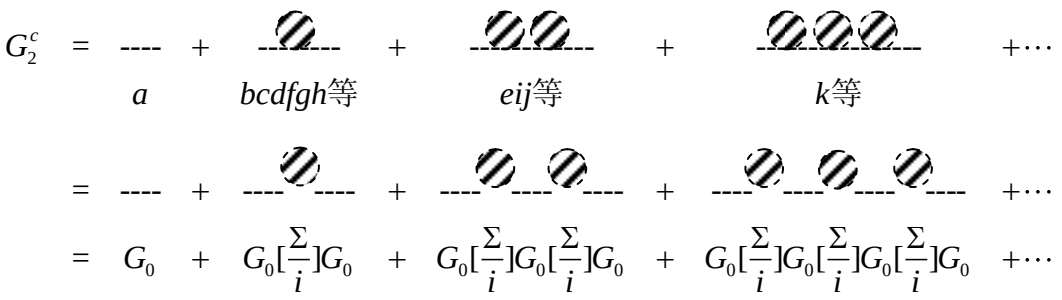
$+o(\lambda^4)$

其中(e)、(i)、(j)、(k)图切一刀会分成两部分，称为**单粒子可约图**（1-particle reducible），简记作 **1PR**；其余一刀不能切开，称为**单粒子不可约图**（1-particle irreducible），简记作 **1PI**.

为了节省空间，我们将两个（或多个）圈连在一起的图中的圈重叠在一起，用阴影表示，即



则上面的图可简单画成



其中Σ称为自能算符（或质量算符），即  ，它是蝌蚪图  截掉两边外腿的结果。

利用了 1/(1+x)的 Taylor 展开，可得

$$G_2^c = G_0 + G_0[\frac{\Sigma}{i}]G_0 + G_0[\frac{\Sigma}{i}]G_0[\frac{\Sigma}{i}]G_0 + G_0[\frac{\Sigma}{i}]G_0[\frac{\Sigma}{i}]G_0[\frac{\Sigma}{i}]G_0 + \cdots$$

$$= G_0\{1 + [-i\Sigma G_0] + [-i\Sigma G_0]^2 + [-i\Sigma G_0]^3 + \cdots\} = \frac{G_0}{1 + i\Sigma G_0} = \frac{1}{G_0^{-1} + i\Sigma}$$

这个公式从标量场导出，但也适用于其他场，只是重叠为阴影前图不一样。对标量场，有

$$G_0 = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} = i\Delta_F$$

$$G_2^c = \frac{1}{\frac{p^2 - m^2 + i\varepsilon}{i} + i\Sigma} = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon - \Sigma} = \frac{i}{p^2 - m_{phy}^2 + i\varepsilon}$$

其中 $m_{phy}^2 = m^2 + \Sigma$ 称为物理质量，而 m 为裸质量。这个概念在重整化一节再做解释。

对于旋量场，有

$$G_0 = \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} = iS_F$$

$$G_2^c = \frac{1}{\frac{\not{p} - m + i\varepsilon}{i} + i\Sigma} = \frac{i}{\not{p} - m - \Sigma + i\varepsilon}$$

2.正规顶角（截去外腿的 Green 函数）

（1）2 点顶角函数

不论何种场，都有

$$[G_2^c]^{-1} = G_0^{-1} + i\Sigma$$

定义 2 点顶角函数

$$\Gamma^{(2)}(p) = i[G_2^c]^{-1}$$

则有

$$\Gamma^{(2)}(p) = iG_0^{-1} - \Sigma = \begin{cases} \Delta_F^{-1} - \Sigma = p^2 - m^2 - \Sigma, & scalar \\ S_F^{-1} - \Sigma = \not{p} - m - \Sigma, & spinor \end{cases}$$

（2）Legendre 变换

为了将 2 点顶角函数推广到 3 点乃至 n 点，我们先在数学上做点准备。

我们把一般的生成泛函记作 Z[J]，只含连通图的生成泛函记作 W[J]，满足 *iW=lnZ*. 前面各节课计算过很多 $\left.\frac{\delta Z[J]}{i\delta J(x)}\right|_{J=0} = \langle 0|\varphi(x)|0\rangle = G(x)$，实际上可去掉赋值及真空期望，直接定义

$$\varphi(x)=\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}$$

则有 **2 点连通 Green 算符**

$$G^J(x,y)=\frac{i\delta^2 W[J]}{i\delta J(x)i\delta J(y)}=\frac{\delta\varphi(x)}{i\delta J(y)}$$

大家有没有想过，生成泛函表达式中含有 J 和 φ，为什么只对 J 求导，不对 φ 求导？你也许会争辩，含 φ 表达式还对 φ 积分，最终只是 J 的函数，当然不能对 φ 求导。这样说有道理，然而并未解决我们的困惑，那就是：是否存在某种与 Z（或 W）相关的量，可以对 φ 求导？这让我们想起了分析力学，那里面动量与对坐标的导数相关，坐标也与对动量的导数相关。分析力学这些关系也适用于热力学，比较如下：

分析力学	谐振子	热力学
$L=L(q,\dot{q})$	$L=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}kx^2$	$L=-F=\int SdT+\int PdV$ 自由能
Legendre 变换 $H(q,p)=p\dot{q}-L$	$E=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}kx^2$ 机械能	$U=\int TdS-\int PdV$ 内能
广义坐标 q	x 位置	V 体积
广义速度 $\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}$	v 速度	$T=\frac{\partial U}{\partial S}$ 温度
广义动量 $p=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}$	mv 动量	$S=-\frac{\partial F}{\partial T}$ 熵
Euler 方程 $\dot{p}=\frac{\partial L}{\partial q}=-\frac{\partial H}{\partial q}$	$F=-kx$ 力	$P=-\frac{\partial F}{\partial V}=-\frac{\partial U}{\partial V}$ 压强

由此看出，只要做 Legendre 变换，就能将广义坐标与广义动量角色互换。若我们将 W 看作“自由能”，让 $L=-W$，$\dot{q}=J$，$p=-\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}=-\varphi(x)$，则可定义

$$\Gamma[\varphi]=W[J]-\int J(x)\varphi(x)dx$$

注意，为了满足泛函微商性质，这里必须加上对 x 的积分。由此定义，可得

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}\to-\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)}=J(x)$$

这相当于 **1 点顶角函数** $\Gamma_\varphi(x)=\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)}$. 求 2 阶导，就是 **2 点顶角函数**：

$$\Gamma_\varphi(x,y)=\frac{\delta^2\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(x)}=-\frac{\delta J(x)}{\delta\varphi(y)}$$

类似地，还可定义 3 点乃至 n 点。

2 点顶角函数与 2 点 Green 算符关系为（王正行《简明量子场论》）

$$\int dz\Gamma_\varphi(z,y)G^J(x,z')=-i\int dz\frac{\delta^2\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(z)}\frac{\delta^2W[J]}{\delta J(z')\delta J(x)}=i\int dz\frac{\delta J(z)}{\delta\varphi(y)}\frac{\delta\varphi(x)}{\delta J(z')}$$

$$=i\int dz\delta(z-z')\delta(x-y)=i\delta(x-y)$$

或

$$\int dy\frac{\delta^2W[J]}{\delta J(v)\delta J(y)}\frac{\delta^2\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(x)}=-\int dy\frac{\delta\varphi(y)}{\delta J(v)}\frac{\delta J(x)}{\delta\varphi(y)}=-\delta(x-v)\qquad(*)$$

由此可推出（Ryder's QFT）

$$\frac{\delta J(x)}{\delta J(v)}=\int dy\frac{\delta\varphi(y)}{\delta J(v)}\frac{\delta J(x)}{\delta\varphi(y)}=\delta(x-v)$$

$$\frac{\delta}{\delta J(v)}=\int dy\frac{\delta\varphi(y)}{\delta J(v)}\frac{\delta}{\delta\varphi(y)}=i\int dyG^J(y,v)\frac{\delta}{\delta\varphi(y)}$$

将（*）式两边对 J(w)变分，得

$$0=\int dz\frac{\delta^2W[J]}{\delta J(w)\delta J(v)\delta J(y)}\frac{\delta^2\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(x)}+\int dy\frac{\delta^2W[J]}{\delta J(v)\delta J(y)}\frac{\delta}{\delta J(w)}\frac{\delta^2\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(x)}$$

$$=\int dy\frac{-i\delta^2W[J]}{i^3\delta J(w)\delta J(v)\delta J(y)}\Gamma_\varphi(x,y)+i\int dyG^J(y,v)\int dz\frac{\delta\varphi(z)}{\delta J(w)}\frac{\delta}{\delta\varphi(z)}\frac{\delta^2\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(x)}$$

$$=-\int dyG^J(y,v,w)\Gamma_\varphi(x,y)+i\int dydzG^J(y,v)iG^J(z,w)\Gamma_\varphi(x,y,z)$$

两边乘以 $G^J(x,u)$，对 x 积分，得

$$\int dxdyG^J(y,v,w)\Gamma_\varphi(x,y)G^J(x,u)=-\int dxdydzG^J(x,u)G^J(y,v)G^J(z,w)\Gamma_\varphi(x,y,z)$$

对于 Bose 场，二阶混合偏导可交换，有

$$-i\int dxdyG^J(y,v,w)\Gamma_\varphi(x,y)G^J(x,u)=-i\int dxdyG^J(y,v,w)i\delta(x-x)\delta(y-u)$$

$$=G^J(y,v,w)=\frac{i\delta^2W[J]}{i^3\delta J(w)\delta J(v)\delta J(y)}=\int dxdydzG^J(x,u)G^J(y,v)G^J(z,w)i\Gamma_\varphi(x,y,z)$$

取 J=0，则 $G^J\to G^c,\Gamma_\varphi(x,y,z)\to\Gamma(x,y,z)$，上式左边为完全的 3 点 Green 函数，右边是三个完全传播子与 $i\Gamma(x,y,z)$ 之积。所以 $i\Gamma(x,y,z)$ 是切去 3 条完全传播子后剩下的部分，称为 **3 点（不可约）正规顶角**。而 $i\Gamma_\varphi$ 可称为 **3 点正规顶角的生成泛函**。

注意，普通函数个别点函数值不影响积分结果，但 delta 函数 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(0)dx=1.$

3. Ward-Takahashi（高桥）恒等式

以上关于完全传播子及正规顶角的讨论虽然从标量场得出，但对其他类型场仍然适用。如果场具有规范不变性，那么还可以推出更丰富的性质，如 Ward-Takahashi（高桥）恒等式，但这种性质为规范场独有，对于其他场不再成立。

QED 的 Lagrange 量和生成泛函分别为

$$L=\bar{\psi}[\gamma^{\mu}(i\partial_{\mu}-eA_{\mu})-m]\psi-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\frac{\lambda}{2}(\partial_{\mu}A^{\mu})^2$$

$$Z[J,\bar{\eta},\eta]=N\int DA^{\mu}D\bar{\psi}D\psi\exp[i\int dx(L+J_{\mu}A^{\mu}+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta)]$$

除了外源项和规范固定项，其他项在无穷小定域规范变换

$$A_{\mu}\to A_{\mu}+\partial_{\mu}\varepsilon,\quad \psi\to\psi-ie\varepsilon\psi,\quad \bar{\psi}\to\bar{\psi}+ie\varepsilon\bar{\psi}$$

下是不变的（王正行《简明量子场论》）。所以

$$\delta Z=N\int DA^{\mu}D\bar{\psi}D\psi i\int dx\delta[-\frac{\lambda}{2}(\partial_{\mu}A^{\mu})^2+J_{\mu}A^{\mu}+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta]\mathrm{e}^{i\int dx(L+J_{\mu}A^{\mu}+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta)}$$

$$=iN\int DA^{\mu}D\bar{\psi}D\psi\int dx\{-\frac{\lambda}{2}[\partial_{\mu}(A^{\mu}+\partial^{\mu}\varepsilon)\partial_{\nu}(A^{\nu}+\partial^{\nu}\varepsilon)-\partial_{\mu}A^{\mu}\partial_{\nu}A^{\nu}]$$

$$+J_{\mu}\partial^{\mu}\varepsilon-\bar{\eta}ie\varepsilon\psi+ie\varepsilon\bar{\psi}\eta\}\mathrm{e}^{i\int dx(L+J\cdot A+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta)}$$

$$=iN\int DA^{\mu}D\bar{\psi}D\psi\int dx\{-\lambda\partial_{\mu}A^{\mu}\partial_{\nu}\partial^{\nu}\varepsilon+o(\varepsilon^2)+J_{\mu}\partial^{\mu}\varepsilon+ie\varepsilon(\bar{\psi}\eta-\bar{\eta}\psi)\}\mathrm{e}^{i\int dx(L+J\cdot A+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta)}$$

$$=iN\int DA^{\mu}D\bar{\psi}D\psi\int dx\{-\lambda\partial_{\nu}(\partial_{\mu}A^{\mu}\partial^{\nu}\varepsilon)+\lambda\partial_{\nu}(\partial_{\mu}A^{\mu})\partial^{\nu}\varepsilon+\partial^{\mu}(J_{\mu}\varepsilon)-\partial^{\mu}J_{\mu}\varepsilon$$

$$+ie\varepsilon(\bar{\psi}\eta-\bar{\eta}\psi)\}\mathrm{e}^{i\int dx(L+J\cdot A+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta)}$$

$$=iN\int DA^{\mu}D\bar{\psi}D\psi\int dx\{\lambda\partial_{\nu}(\partial_{\mu}A^{\mu})\partial^{\nu}\varepsilon-\partial^{\mu}J_{\mu}\varepsilon+ie\varepsilon(\bar{\psi}\eta-\bar{\eta}\psi)\}\mathrm{e}^{i\int dx(L+J\cdot A+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta)}$$

$$=iN\int DA^{\mu}D\bar{\psi}D\psi\int dx\{-\lambda\partial_{\nu}\partial^{\nu}(\partial_{\mu}A^{\mu})\varepsilon-\partial^{\mu}J_{\mu}\varepsilon+ie\varepsilon(\bar{\psi}\eta-\bar{\eta}\psi)\}\mathrm{e}^{i\int dx(L+J\cdot A+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta)}$$

取 $A^{\mu}=\frac{\delta}{i\delta J_{\mu}}$，$\bar{\psi}=\frac{-\delta}{i\delta\eta}$，$\psi=\frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}}$，根据规范不变性要求 $\delta Z=0$，可得

$$-\lambda\partial_{\nu}\partial^{\nu}(\partial_{\mu}\frac{\delta}{i\delta J_{\mu}})-\partial^{\mu}J_{\mu}+ie(\frac{-\delta}{i\delta\eta}\eta-\bar{\eta}\frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}})Z$$

$$=-\lambda\Box(\partial_{\mu}\frac{\delta}{i\delta J_{\mu}})-\partial^{\mu}J_{\mu}+ie(\eta\frac{\delta}{i\delta\eta}-\bar{\eta}\frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}})Z=0$$

注意 $\Box=\partial_{\nu}\partial^{\nu}$，**Grassmann 变量交换次序变号**（王正行《简明量子场论》）。代入 $Z=e^{iW}$，可得 Green 函数生成泛函方程

$$-\lambda\Box\partial_{\mu}\frac{\delta W}{\delta J_{\mu}}-\partial^{\mu}J_{\mu}+ie(\eta\frac{\delta W}{\delta\eta}-\bar{\eta}\frac{\delta W}{\delta\bar{\eta}})=0$$

根据 Legendre 变换

$$\Gamma[A^\mu,\bar\psi,\psi]=W[J_\mu,\bar\eta,\eta]-\int dx(J_\mu A^\mu+\bar\psi\eta+\bar\eta\psi)$$

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu(x)}=-J_\mu(x),\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar\psi(x)}=-\eta(x),\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi(x)}=-\bar\eta(x)$$

$$\frac{\delta W}{\delta J_\mu(x)}=A_\mu(x),\frac{\delta W}{\delta\bar\eta(x)}=\psi(x),\frac{\delta W}{\delta\eta(x)}=\bar\psi(x)$$

Green 函数生成泛函方程变为

$$-\lambda\Box\partial_\mu A^\mu+\partial^\mu\frac{\delta\Gamma}{\delta A^\mu}-ie(\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar\psi}\bar\psi-\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi}\psi)=0$$

或

$$i\lambda\Box\partial_\mu A^\mu(x)-i\partial^\mu\frac{\delta\Gamma}{\delta A^\mu(x)}=e\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar\psi(x)}\bar\psi(x)-e\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi(x)}\psi(x)$$

此即正规顶角生成泛函方程。两边求微商 $\frac{-\delta^2}{\delta\psi(z)\delta\bar\psi(y)}$，得

$$\begin{aligned}
&0-i\partial^\mu\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\psi(z)\delta\bar\psi(y)\delta A^\mu(x)}=-i\partial^\mu\Gamma^\phi_\mu(x,y,z)\\
&=e\frac{-\delta}{\delta\psi(z)}[-\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar\psi(x)}\frac{\delta\bar\psi(x)}{\delta\bar\psi(y)}]-e\frac{-\delta}{\delta\psi(z)}[\frac{\delta}{\delta\bar\psi(y)}\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi(x)}\psi(x)]\\
&=-e\delta(x-y)\frac{-\delta}{\delta\psi(z)}\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar\psi(x)}+e\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar\psi(y)\delta\psi(x)}\frac{\delta\psi(x)}{\delta\psi(z)}\\
&=-e\delta(x-y)\frac{-\delta^2\Gamma}{\delta\psi(z)\delta\bar\psi(x)}+e\frac{-\delta^2\Gamma}{\delta\psi(x)\delta\bar\psi(y)}\delta(x-z)\\
&=-e\delta(x-y)\Gamma^\phi(x,z)+e\Gamma^\phi(y,x)\delta(x-z)\\
&=-e\delta(x-y)\Gamma^\phi(y,z)+e\delta(x-z)\Gamma^\phi(y,z)
\end{aligned}$$

取 $\phi=0$，将相当于外源的“外场”去掉，得到期望值：

$$i\partial^\mu\Gamma_\mu(x,y,z)=e\delta(x-z)\Gamma(y,z)-e\delta(x-y)\Gamma(y,z)$$

这就是坐标表象的 Ward-Takahashi（高桥）恒等式。它表明 3 点正规顶角的偏微商等于两个电子的完全传播子之逆的差（王正行《简明量子场论》）。

通过 Fourier 变换，可导出它在动量空间的形式。类比 $\Delta_F(x-y)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\Delta(k)e^{-ik(x-y)}$，可定义

$$\Gamma(x_1,x_2)=\Gamma(x_1-x_2)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}S_F'^{-1}(p)e^{-ip(x_1-x_2)}$$

其中 S'_F 是完全传播子（裸传播子为 S_F ）。

将坐标表象的 Ward-Takahashi（高桥）恒等式两边乘以 $e^{i(-kx+p'y-pz)}$，对 x，y，z 积分得

$$\int dxdydzi\partial^{\mu}\Gamma_{\mu}(x,y,z)\mathrm{e}^{i(-kx+p'y-pz)}=\int dxdydzk^{\mu}\Gamma_{\mu}(x,y,z)\mathrm{e}^{i(-kx+p'y-pz)}$$
$$=\int dxdydze^{i(-kx+p'y-pz)}e\delta(x-z)\Gamma(y,z)-\int dxdydze^{i(-kx+p'y-pz)}e\delta(x-y)\Gamma(y,z)$$
$$=e\int dxdye^{i(-kx+p'y-px)}\Gamma(y,x)-e\int dxdze^{i(-kx+p'x-pz)}\Gamma(x,z)$$
$$=e\int dxdye^{i(-kx+p'y-px)}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}S_F'^{-1}(q)\mathrm{e}^{-iq(y-x)}-e\int dxdze^{i(-kx+p'x-pz)}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}S_F'^{-1}(q)\mathrm{e}^{-iq(x-z)}$$
$$=e\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}S_F'^{-1}(q)\int dxdye^{i(-k-p+q)x}\mathrm{e}^{i(p'-q)y}-e\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}S_F'^{-1}(q)\int dxdze^{i(-k+p'-q)x}\mathrm{e}^{i(-p+q)z}$$
$$=(2\pi)^4e[\int d^4qS_F'^{-1}(q)\delta^4(p+k-q)\delta^4(q-p')-\int d^4qS_F'^{-1}(q)\delta^4(-k+p'-q)\delta^4(q-p)]$$
$$=(2\pi)^4\delta^4(p'-p-k)e[S_F'^{-1}(p+k)-S_F'^{-1}(p)]$$

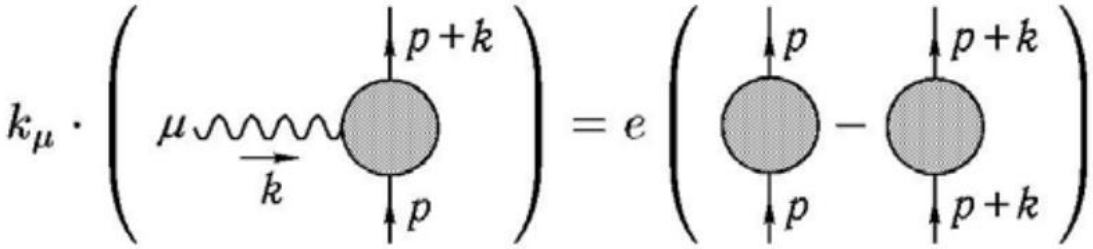
定义

$$\int dxdydzi\Gamma_{\mu}(x;y,z)\mathrm{e}^{i(-kx+p'y-pz)}=-ie(2\pi)^4\delta^4(p'-p-k)\Gamma_{\mu}(k;p',p)$$

则有

$$k^{\mu}\Gamma_{\mu}(k;p+k,p)=S_F'^{-1}(k+p)-S_F'^{-1}(p)$$

这就是（动量空间）**Ward-Takahashi（高桥）恒等式**，它可以用图形表示为（Peskin's QFT）：

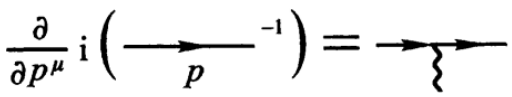


特别地，对于红外光子极限 $k^{\mu}\to 0$，Ward-Takahashi 恒等式简化为

$$\Gamma_{\mu}(0;p,p)=\frac{\partial S_F'^{-1}(p)}{\partial p^{\mu}}$$

这称为 **Ward 恒等式**。

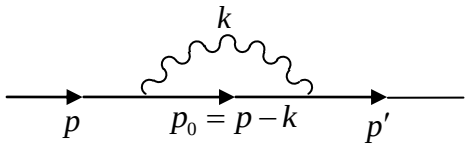
对于树图（周邦融《量子场论》），$S_F'^{-1}=S_F^{-1}=\not{p}-m$，故 $\frac{\partial S_F'^{-1}(p)}{\partial p^{\mu}}=\gamma^{\mu}$. 用图形表示即



对于 1 圈，$[G_2^c]^{-1}=G_0^{-1}+i\Sigma$ 给出 $[S_F']^{-1}=\not{p}-m-\Sigma^{(2)}(p)$，故

$$\frac{\partial S_F'^{-1}(p)}{\partial p^\mu}=\gamma^\mu-\frac{\partial\Sigma^{(2)}(p)}{\partial p^\mu}$$

前面已算出$\Sigma^{(2)}(p)=ie^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{-g_{\mu\nu}}{k^2}\gamma^\nu\cdot\frac{1}{\not p-\not k-m}\gamma^\mu$，其图表示为



对于可逆但不对易的算符 A，B，有恒等式

$$\frac{1}{A}-\frac{1}{B}=A^{-1}-B^{-1}=B^{-1}BA^{-1}-B^{-1}AA^{-1}=B^{-1}(B-A)A^{-1}$$

所以（黄涛《量子场论导论》）

$$\frac{1}{\not p-m}-\frac{1}{\not p+\not q-m}=\frac{1}{\not p+\not q-m}\not q\frac{1}{\not p-m}$$

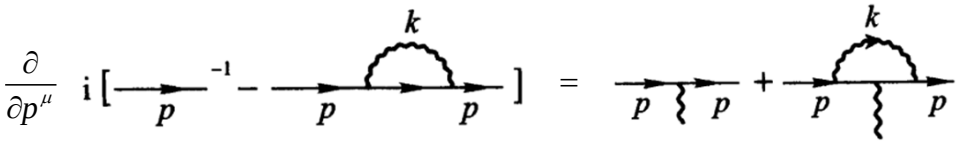
$$\frac{\partial}{\partial p^\mu}\frac{1}{\not p-m}=\lim_{q\to0}\frac{S_F(p+q)-S_F(p)}{q}=\lim_{q\to0}\frac{-\frac{1}{\not p+\not q-m}q^\mu\gamma_\mu\frac{1}{\not p-m}}{q^\mu}=-\frac{1}{\not p-m}\gamma_\mu\frac{1}{\not p-m}$$

$$\frac{\partial\Sigma^{(2)}(p)}{\partial p^\mu}=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4i}\frac{e^2}{k^2}\gamma^\nu\frac{\partial}{\partial p^\mu}\frac{1}{\not p-\not k-m}\gamma_\nu=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4i}\frac{e^2}{k^2}\gamma^\nu\frac{1}{\not p-\not k-m}\gamma_\mu\frac{-1}{\not p-\not k-m}\gamma_\nu$$

用图形表示就是



所以 1 圈级的 Ward 恒等式可表示为（周邦融《量子场论》）



Ward 恒等式表明：对传播子求导，等价于插入光子线。

Ward-Takahashi 恒等式给出 3 点 Green 函数（正规顶角）与 2 点 Green 函数（传播子）间的普遍关系，它允许我们根据实际需要改变 Feynman 图的拓扑结构，因而是极其重要的图论分析工具。更重要的是，它是规范不变性的结果，对于微扰论所有阶都成立！

注意，S 矩阵可分解为

$$S=1+iR=1+(2\pi)^4\delta^4(\sum_f p_f-\sum_i p_i)iM$$

我们通常舍弃恒等变换 1，只考虑反应矩阵 R. 但在 S 矩阵约化公式中代入的 4 点函数本来就是 2 阶微扰，已经舍弃了 0 阶微扰，故这里计算出来的，实际上已自动忽略了恒等变换。

1.2.4 重整化

在开始具体计算前，从整体上有个大致认识是很有必要的。方向比努力更重要。不然，一味人云亦云，走了大半程，却发现遇到了无法解决的困难，多不划算。重整化是量子场论中最难理解也最难计算的部分，更要意在笔先。

微扰论是一个级数展开，包括 0 阶、1 阶、2 阶乃至 n 阶。严格地说，必须算到 n 阶才是绝对精确，但如果算到 7 阶、8 阶还不够精确，人们可能就要放弃它，而去寻找非微扰理论了。从前面 Q E D 的计算可见， 0 阶是自由场，不必去管； 1 阶是相互作用顶角，为中间过程；2 阶是最低阶物理过程，为树图；从 3 阶开始，就出现圈图。圈图包含对动量的积分，当动量趋于无穷时积分是发散的。物理和数学不同，物理要解释现实世界，不允许空想，而现实世界的物理量都必须是有限值。所以，如果计算出无穷大就必须怀疑是否算错了。物理学就是要为自然现象建立数学模型，如果确定计算过程无误，那就要怀疑出发点是否错了，提出新的模型（比如超越 Newton、超越标准模型寻找新物理等等），重新计算。

为驯服无穷大，物理学家发明了重整化——重新定义物理量（如质量、电荷），即重新正名，故称**重正化**或**重整化**（renormalization）。如果把幸福从大众的定义“拥有的多”重新定义为“计较的少”，那么就可以减除掉无穷多的怨恨和烦恼。

一般来说，重整化包括两个基本步骤：第一步是**正规化**（regularization，将积分拆成收敛部分和发散部分），包括格点或动量截断（修改积分限）、Pauli-Villars 正规化（修改被积函数）、维数正规化（修改积分变量）等（黄涛《量子场论导论》，胡耀光《规范场论》）；第二步是**减除**（保留收敛部分，引入抵消项，抵消发散部分），包括质壳重整化或动量减除、BPHZ 迭代递归、最小减除 MS 等（裘忠平《现代量子场论导引》，戴元本《相互作用的规范理论》，Collins《Renormalization》）。现在通用的办法是维数正规化+最小减除，其他方案不适合非 Abel 规范理论，只用于辅助解释重整化的一般概念，而不适用于具体计算。

第一步很容易理解（虽然计算上有难度），真正不可思议的是第二步：凭什么把发散部分扔掉（把垃圾扫到地毯下）？这在“逻辑第一”的数学家看来是无论如何不能接受的。但物理学家的价值观是“实验第一”，只要能符合实验，啥坏事都敢干。关键是扔掉发散部分后，收敛部分刚好与实验相符（如果不论怎么做都不能符合实验，那才是真正的困难）！

那么，重整化是否只是物理学家的独断专横呢？其实，这个匪夷所思的技巧背后隐藏着我们未知的超越常识的深邃数学。你觉得所有自然数的和 1 ＋ 2 ＋ 3 ＋……＝？无穷大？不！这次是数学家玩火自焚：将 z e t a 函数**解析延拓**到整个复平面，使得

$$\zeta(s\to -1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}=1+2+3+\cdots=-\frac{1}{12}$$

数学家认为，这是（素数） p 进制造成的。在普通 1 0 进制下 8 ＋ 5 ＝ 1 3，但在（循环）1 2 格钟算术下 8 ＋ 5 ＝ 1 .

其实，量子场论仅适用于中高能（G e V）物理，对于（超越 T e V 的）高能乃至超高能物理而言，点粒子图像是不合适的（远看是个点，近看可能是个球）。在 P l a n c k 标度，Lorentz 对称性都可能被破坏，怎能期待建立在狭义相对论基础上的量子场论总算出有限结果呢。我们对于高能过程的细节实在是无知啊。

好了，虽然量子场论不够精确，但人类能造出“环日加速器”（刘慈欣《三体》）检验 1 0 维宇宙吗？我们有生之年恐怕也无法知晓高能细节了。从实用角度看，量子场论及其匪夷所思的重整化还是不错的选择。所以，我们这些不可语冰的夏虫还是老老实实接受吧。

1.2.4.1 发散

1.圈图发散

前面讲 Feynman 规则时已提到圈图涉及积分，但那时没有处理。现在专门讨论这些积分。发散都发生在积分上下限。下限动量趋于零时的发散称为**红外发散**，上限趋于无穷时的发散称为**紫外发散**。红外发散来自对物理过分简化【见郑汉青《量子场论》（上）$e^+e^-\to\mu^+\mu^-$ 讨论】，不存在原则困难，我们只需讨论紫外发散。

（1）电子自能

$$\Sigma^{(2)}(p)=ie^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{-g_{\mu\nu}}{k^2}\gamma^\nu\cdot\frac{1}{\not p-\not k-m}\gamma^\mu$$

分子为 k 的 4 次幂，分母为 k 的 3 次幂，分子幂次比分母大 1. 取 4 维球坐标（将在“维数正规化”一节细讲）$d^4k=k^3dkd\Omega$，当 $k\to\infty$ 时，$\int\frac{d^4k}{k^3}=\int dkd\Omega\propto k$ 为线性发散。

（2）光子自能

$$\Pi^{(2)}_{\mu\nu}(k)=ie^2\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}tr\left[\gamma_\mu\frac{\not p+m}{p^2-m^2+i\varepsilon}\gamma_\nu\frac{\not p-\not k+m}{(p-k)^2-m+i\varepsilon}\right]$$

分子 p 幂次比分母幂次大 2，当 $p\to\infty$ 时，$\int\frac{d^4p}{p^2}=\int pdpd\Omega\propto p^2$ 为平方发散。

（3）顶角修正

$$\Lambda^{(2)}_\mu(p,p')=-ie^2\int\frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\frac{1}{k'^2}\gamma_\nu\frac{\not p'-\not k'+m}{(p'-k')^2-m^2}\gamma_\mu\frac{\not p-\not k'+m}{(p-k')^2-m^2}\gamma^\nu$$

分子与分母幂次相同，当 $k'\to\infty$ 时，$\int\frac{d^4k'}{k'^4}=\int\frac{dk'd\Omega}{k'}\propto\ln k'$ 为对数发散。

2.表观发散度与可重整性

我们把积分表达式中分子（包括积分测度）动量幂次与分母动量幂次之差称为**表观发散度**，记作 D. 前面的例子中，电子自能 D=4-3=1，光子自能 D=6-4=2，顶角修正 D=6-6=0. 只要 $D\geq 0$，积分就是发散的；但 D<0 未必收敛。只有当 Feynman 图及其所有子图的 D 都为负，积分才是收敛的，这称为 **Weinberg 定理**（汪容《量子规范理论》）。

为说明可重整性，考虑一个任意 Feynman 图的表观发散度。设该图构成为

因子	圈	Bose 内线	Fermi 内线	Bose 外线	Fermi 外线	顶角	顶角连 Bose 线	顶角连 Fermi 线	顶角含微商
数目	L	I_B	I_F	E_B	E_F	V	V_B	V_F	N 阶

每个圈含有对动量的 d 维积分（可以不等于 4），只对分子幂次贡献 d，所以对表观发散度 D 贡献 d；每条 Bose 内线对传播子的分母幂次贡献 2，所以对 D 贡献-2；每条 Fermi 内线对 D 贡献-1（Gamma 矩阵无贡献）；$i\partial\Leftrightarrow p$，每阶微商对 D 贡献 1. 所以

$$D = dL - 2I_B - I_F + NV$$

观察电子自能、光子自能和顶角修正图，寻找圈数、内线数与顶点数三者关系，可归纳出

$$L = I_B + I_F - V + 1$$

这是动量守恒约束的结果（王正行《简明量子场论》），除 QED，对其他场也成立。另外，顶点数、外线数、内线数三者之间也存在普遍关系

$$V_F V = E_F + 2I_F$$

$$V_B V = E_B + 2I_B$$

其中外线只有一端与顶点相连，故算 1 次；内线两端分别连接顶点，所以算 2 次。联立可得

$$\begin{aligned} D &= d(I_B + I_F - V + 1) - 2I_B - I_F + NV = d + (d-2)I_B + (d-1)I_F + (N-d)V \\ &= d + \frac{d-2}{2}(V_B V - E_B) + \frac{d-1}{2}(V_F V - E_F) + (N-d)V \\ &= d - \frac{d-1}{2}E_F - \frac{d-2}{2}E_B - V(d - \frac{d-1}{2}V_F - \frac{d-2}{2}V_B - N) \\ &\xrightarrow{d=4} 4 - \frac{3}{2}E_F - E_B - V(4 - \frac{3}{2}V_F - V_B - N) = 4 - \frac{3}{2}E_F - E_B - V\delta \end{aligned}$$

注意，顶角所连 Fermi 线应为偶数。

（1）$\delta < 0$

表观发散度 D 随顶点数 V 增加而增加，不可重整（周邦融《量子场论》）。例如 $\lambda\varphi^5$，顶角（可从 Lagrange 量直接读出）为 5 条 Bose 线，没微商，$\delta = 4 - 0 - 5 - 0 = -1$；又如，四 Fermi 子相互作用理论，顶角为 4 条 Fermi 线，没微商，$\delta = 4 - \frac{3}{2}\times 4 - 0 - 0 = -2$；再如，$\pi - N$ 耦合，顶角为 1 条 Bose 线，2 条 Fermi 线，1 阶微商，$\delta = 4 - \frac{3}{2}\times 2 - 1 - 1 = -1$.

（2）$\delta = 0$

例如 $\lambda\varphi^4$ 顶角为 4 条 Bose 线，没微商，$\delta = 4 - 0 - 4 - 0 = 0$；又如，QED 顶角为 1 条 Bose 线，2 条 Fermi 线，没微商，$\delta = 4 - \frac{3}{2}\times 2 - 1 - 0 = 0$.

观察前面的 Feynman 图可见，顶角数等于微扰阶数。表观发散度 D 只决定于外线数，而与顶角数 V 无关，所以定性来说，QED 到 n 阶都是可重整的。特别是外线数前带负号，外线越多越收敛！定量来说，$\delta = 0$ 使得 $D = 4 - \frac{3}{2}E_F - E_B$. 因为 E_F，E_B 都是非负整数，它们前面又是负号，所以 $D \geq 0$ 只有有限个解（王正行《简明量子场论》）

$$(E_B, E_F) = (0,0),(0,2),(1,0),(1,2),(2,0),(3,0),(4,0)$$

也就是发散种类有限（E_F 为奇数的解均不合理，应舍弃）！后面将看到，每种发散都要引入抵消项来将其干掉，如果发散种类无限，就得引入无穷多抵消项，这使得理论不可重整。

任一复杂的 Feynman 图，都是由粒子线及其修正、顶角及其修正构成。如果将修正都去掉，得到的图形（树图）称为**骨架图**（王正行《简明量子场论》）。若一个 Feynman 图与其骨架图形相同，就称为**不可约（或既约）图**，否则为**可约图**。消除了既约图的发散，就消除了所有发散。群论就是要找出所有不等价不可约表示，场论要找出所有（拓扑）不等价不可约图。QED 既约发散图分为如下几类（王正行《简明量子场论》）：

名称	E_B	E_F	D	说明
真空起伏	0	0	4	被归一化吸收
蝌蚪图	1	0	3	不发散
光子自能	2	0	2	平方发散
三光子顶角	3	0	1	Furry 定理推出零
光子-光子散射	4	0	0	规范不变证为零
电子自能	0	2	1	线性发散
顶角修正	1	2	0	对数发散

（3）$\delta > 0$

表观发散度 D 随顶点数 V 增加而减少，超可重整。例如，$\lambda\varphi^3$.

思考：每个顶点出发的线数不超过 4 条？

1.2.4.2 分离

由 $D = dL - 2I_B - I_F + NV$ 可见，在 Feynman 图拓扑结构确定（给定粒子线数、顶角数和圈数）情况下，表观发散度 D 随着时空维数 d 的降低而减小。所以，我们可以对时空进行“降维打击”，这就是“**维数正规化**”的基本思想。扔个“二向箔”，将时空变成 1+1 维后，（Fermi 无质量时）QED 就可以精确求解（郑汉青《量子场论》上）!

1. d 维 Gamma 矩阵

（1）基本考虑

第一，d 维时空是 1 维时间，d-1 维空间。若我们偏好“时间为正、空间为负”度规（粒子物理阵营通常这么干，引力阵营正好相反），则可定义 d 维 Minkowski 度规张量

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = g^{\mu\nu}$$

第二，Gamma 矩阵专为旋量粒子打造，不论多少维时空，反对易关系都应保持

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$$

例如 d=2，Gamma 矩阵可用 Pauli 矩阵中的 2 个构造。因为 $(\sigma^i)^2 = I$，要满足 $(\gamma^i)^2 = -I$，其中 1 个 Gamma 矩阵必为 Pauli 矩阵乘以 i 或-i. γ^0 可选 3 个 Pauli 矩阵之一，γ^1 可选第一次未选的其余 2 个 Pauli 矩阵乘上 i 或-i，所以满足要求的选择总共有 $C_3^1 \times C_2^1 \times 2 = 12$ 种，

这里取为（Radovanovic《Problem Book Quantum Field Theory》）

$$\gamma^0=\sigma^1=\begin{pmatrix}&1\\1&\end{pmatrix},\quad \gamma^1=-i\sigma^2=\begin{pmatrix}&-1\\1&\end{pmatrix}$$

一般地，d 维 Gamma 矩阵有 d 个，都可用基本矩阵生成。d 维 Gamma 矩阵几行几列？

【约定 1】$trI=f(d)$，$f(d)$满足 $f(4)=4$（Ryder、王正行），则 d 维 Gamma 矩阵行列数都是 $f(d)$. 其中 I 为单位矩阵，tr 表示求迹，即对角元之和（表示矩阵的迹称为**特征标**）。

【约定 2】$f(d)=2^{\omega},\omega=d/2$（周邦融《量子场论》）

问题 1：6 维单位矩阵的迹等于 8，怎么可能？时空为奇数维，矩阵行列数不是整数？
问题 2：2 维空间一阶、二阶张量分别有 2、4 分量，用矩阵表示；三阶张量有 8 分量，可用“立体矩阵”（高教社《数学手册》）；立体矩阵的迹怎定义？面对角元还是体对角元之和？
透彻解答这些问题要把群论从头讲一遍。这里只列几要点（马中骐《物理学中的群论》）：

(a)N 个 Gamma 矩阵 Γ_N 成群。群元数称为**阶**，共轭等价(相似变换)构成**类**，矩阵**维**数即行数

(b)设 Sn 是 n 个不同下标 Gamma 矩阵乘积，每种乘积有正负成对 2 个元素，共 $2C_N^n$ 个

(c)所有 Gamma 矩阵可由 Sn 生成，群元总数 $g=2(C_N^0+C_N^1+\cdots+C_N^N)=2^{N+1}$

(d)$\pm S_n$ 构成一类，单位矩阵 I 构成一类，$-I$ 为一类，共 $r=2^N+1$ 类

(e)Burnside 定理：不等价不可约表示维数 d_i 的平方和 $d_1^2+d_2^2+\cdots+d_r^2$ 等于群的阶数 g；

Γ_N 有 1 维恒等表示 2^N 类和 d_N 维自身表示 1 类，$1^2\times 2^N+d_N^2=2^{N+1}\Rightarrow d_N=2^{N/2}$

(f)**N=2** 时 Gamma 矩阵由 **2 个** 2×2 阵生成 8 个 2×2 阵（1 个单位 3 个 Pauli，还有这 4 个的相反数）；**N=4** 时由 **4 个** 4×4 阵生成 32 个 4×4 阵（除前面讲的 16 个还有它们的相反数）
(g)奇数：**N=2m+1 与 N=2m 等价。足以区分行列的任何指标都能标记矩阵，未必用自然数。**

【约定 3】$f(d)=4$ 对任意维成立（郑汉青、黄涛、戴元本、Peskin 等）

因 $f(d)$ 是与积分无关常数，大小有限，积分后取 4 维极限，故每种选择导致一有限重整化，$f(d)$ 选择无关紧要（Greiner’s QCD），可取 $f(d)=d$；不过为了方便，还是取 $f(d)=4$ 吧。

唯一的问题是，$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ 只在 4 维成立，会引起 γ^5 反常。但这个反常可以通过改变“积分变量的 d 维延拓”与“γ^5 挪移”二者顺序而消去（汪容《量子规范理论》）。

（2）定理和推论
证明过程主要参考 Greiner’s QED 及 Radovanovic《Problem Book Quantum Field Theory》。

【推论 1】$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}=d$

$$g_{00}g^{00}+g_{11}g^{11}+\cdots+g_{d-1,d-1}g^{d-1,d-1}+0+\cdots+0=1\cdot1+(-1)(-1)+\cdots+(-1)(-1)$$
$$=g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}=g^{\mu}_{\mu}=\delta^{\mu}_{\mu}=\delta^{0}_{0}+\delta^{1}_{1}+\cdots+\delta^{d-1}_{d-1}=1+1+\cdots+1=d$$

$\mu\nu$ 为 0,1,2 具体数，$g_{00}g^{00},g_{12}g^{12}$ 等于 1；$\mu\nu$ 为抽象指标，$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$ 按 Einstein 约定求和。

【推论 2】$\gamma^{\mu}\gamma_{\mu}=d$

证明：$\gamma^{\mu}\gamma_{\mu}=g_{\mu\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}=g_{\mu\nu}\frac{1}{2}\{\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\}=g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}=d$

【推论 3】$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma_{\mu}=-(d-2)\gamma^{\nu}$

证明：$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma_{\mu}=(2g^{\mu\nu}-\gamma^{\nu}\gamma^{\mu})\gamma_{\mu}=2\gamma^{\nu}-\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\gamma_{\mu}=2\gamma^{\nu}-\gamma^{\nu}d=(2-d)\gamma^{\nu}$

【推论 4】$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma_{\mu}=4g^{\nu\rho}-(4-d)\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}$

【推论 5】$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma_{\mu}=-2\gamma^{\sigma}\gamma^{\rho}\gamma^{\nu}+(4-d)\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}$

推论 4、5 证法与推论 3 相同，就是反复利用 $\{\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\}=2g^{\mu\nu}$ 将最左边的 γ^{μ} 逐渐向右移，直到与最右边的 γ_{μ} 直接接触，收缩为时空维数 d.

【定理 1】循环对称性：$tr(A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n)=tr(A_nA_1A_2\cdots A_{n-1})$

【推论 6】$tr(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu})=f(d)g^{\mu\nu}$

$$2tr(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu})=tr(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu})+tr(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu})=tr(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu})+tr(\gamma^{\nu}\gamma^{\mu})=tr(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}+\gamma^{\nu}\gamma^{\mu})=2g^{\mu\nu}trI$$

【推论 7】$tr(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma})=f(d)(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}-g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}+g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})$ 排列规律 1234-1324+1423

$$tr(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma})=tr[(2g^{\mu\nu}-\gamma^{\nu}\gamma^{\mu})\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}]=2g^{\mu\nu}tr[\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}]-tr[\gamma^{\nu}(2g^{\mu\rho}-\gamma^{\rho}\gamma^{\mu})\gamma^{\sigma}]$$
$$=2g^{\mu\nu}tr[\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}]-2g^{\mu\rho}tr[\gamma^{\nu}\gamma^{\sigma}]+tr[\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}(2g^{\mu\sigma}-\gamma^{\sigma}\gamma^{\mu})]$$
$$=2f(d)(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}-g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}+g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})-tr(\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma^{\mu})$$

据定理 1（迹循环对称性），最后一行最右项与第一行最左边相等，移项消去 2 即推论 7.

【定理 2】奇数个 Gamma 矩阵求迹等于零（证明见 Greiner 及 Radovanovic）。

2. d 维积分

（1）Gamma 函数（主要参考王竹溪《特殊函数概论》）

Gamma 函数定义为 $\Gamma(z)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt$

用分部积分法，可得递推关系

$$\Gamma(z+1)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{z}dt=-\int_0^{\infty}t^{z}de^{-t}=-e^{-t}t^{z}\Big|_{t=0}^{\infty}+z\int_0^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt=z\Gamma(z)$$
$$=z\cdot(z-1)\Gamma(z-1)=\cdots=z(z-1)\cdots1=z!$$

这是从整数得到的，但对于分数也成立。特别的，有

$$0!=\Gamma(1)=\int_0^{\infty}e^{-t}dt=1$$

$$\frac{3}{2}!=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt\xrightarrow{t=x^2}\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

为得到 Gamma 函数的无穷乘积展开，考虑如下极限

$$P_n(z)=\int_0^n(1-\frac{t}{n})^n t^{z-1}dt\xrightarrow{t=n\tau}n^z\int_0^1(1-\tau)^n\tau^{z-1}d\tau=n^z\int_0^1(1-\tau)^n\frac{d\tau^z}{z}$$

$$\xrightarrow{\text{分部积分}}n^z\frac{n}{z}\int_0^1(1-\tau)^{n-1}\tau^z d\tau=\frac{n^n n!}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}\int_0^1\tau^{z+n-1}d\tau=\frac{n^z n!(z-1)!}{(z+n-1)!(z+n)}$$

可得 Gamma 函数的 Euler 无穷乘积展开

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt=\lim_{n\to\infty}P_n(z)=\frac{n^z(n-1)!(z-1)!}{(z+n-1)!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{z}\cdot[\frac{1}{1+z}\frac{2}{2+z}\cdots\frac{n-1}{n-1+z}]\cdot[2^z\frac{3^z}{2^z}\cdots\frac{n^z}{(n-1)^z}]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{z}\prod_{l=1}^{n-1}(1+\frac{z}{l})^{-1}\prod_{m=1}^{n-1}(1+\frac{1}{m})^z$$

$$=\frac{1}{z}\prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{z}{k})^{-1}(1+\frac{1}{k})^z$$

及 Weierstrass 展开

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(z+n-1)!}{(n-1)!(z-1)!}\cdot\frac{1}{n^z}=\lim_{n\to\infty}z\prod_{m=1}^{n-1}(1+\frac{z}{m})\cdot e^{-z\ln n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}z\prod_{m=1}^{n-1}(1+\frac{z}{m})\cdot e^{-z\ln n}\cdot e^{z\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}}\prod_{m=1}^{n}e^{-\frac{z}{m}}=\lim_{n\to\infty}ze^{z[\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}-\ln n]}\prod_{m=1}^{n-1}(1+\frac{z}{m})\cdot\prod_{m=1}^{n}e^{-\frac{z}{m}}$$

$$=ze^{\gamma_E z}\prod_{m=1}^{\infty}(1+\frac{z}{m})e^{-\frac{z}{m}}$$

其中

$$\gamma_E=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n)=0.5772157\cdots$$

为 Euler 常数。这个常数给人眼前一亮的兴奋和惊喜。Riemann 的 zeta 函数除了 s=1 在整个复平面都解析，而这唯一的发散竟然被对数函数消去了，二者相差的还是一个常数！巧不巧？我们无需手算出它的具体值，那个交给计算机就行了（圆周率和自然对数也不是手算出来的）。我们只需要证明这个极限存在即可。为此，构造如下积分和数列

$$u_n=\int_0^1\frac{tdt}{n(n+t)}\xrightarrow{\text{部分分式}}\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}$$

则

$$\gamma_E=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}-\ln m=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}u_n+\sum_{n=1}^{m}\ln\frac{n+1}{n}-\ln m$$

$$=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}u_n-\ln m+[\ln 2+(\ln 3-\ln 2)+\cdots+\ln(m+1)]$$

$$=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}u_n+\ln\frac{m+1}{m}=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}u_n$$

$$0<u_n=\int_0^1\frac{tdt}{n(n+t)}<\int_0^1\frac{tdt}{n^2}=\frac{1}{2n^2}$$

$$0<\gamma_E=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}u_n<\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{6}<1$$

定义ψ函数（注意这是特殊函数，不是波函数）

$$\psi(z)=\frac{d\ln\Gamma(z)}{dz}=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

将 Weierstrass 展开式$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{\gamma_E z}\prod_{m=1}^{\infty}(1+\frac{z}{m})e^{-\frac{z}{m}}$代入，可得

$$-\frac{d\ln\Gamma(z)}{dz}=\frac{d}{dz}\ln[ze^{\gamma_E z}\prod_{m=1}^{\infty}(1+\frac{z}{m})e^{-\frac{z}{m}}]=\frac{1}{z}+\gamma_E+\sum_{m=1}^{\infty}[\frac{1}{1+\frac{z}{m}}\frac{1}{m}-\frac{1}{m}]$$

$$\psi(z)=\frac{d\ln\Gamma(z)}{dz}=-\gamma_E-\frac{1}{z}+\sum_{m=1}^{\infty}[\frac{1}{m}-\frac{1}{z+m}]$$

$$\psi(1)=-\gamma_E-1+(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots=-\gamma_E$$

$$\psi(2)=-\gamma_E-\frac{1}{2}+(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots=-\gamma_E+1$$

$$\psi(3)=-\gamma_E-\frac{1}{3}+(1-\frac{1}{4})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{6})+\cdots=-\gamma_E+1+\frac{1}{2}$$

$$\psi(n)=-\gamma_E+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}，\ \text{n>1}$$

如果你看不懂数列的抽象运算，那就多写几项，找找规律。笨不是问题，笨还懒就没救了。天才用 5 分钟跑完一圈，我用 5 小时总可以跑完一圈吧？

通过 Taylor 展开$f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\Delta x+\frac{1}{2!}f''(x)(\Delta x)^2+\cdots$

可得

$$\Gamma(1+\varepsilon)=\Gamma(1)+\Gamma'(1)\varepsilon+o(\varepsilon^2)=1+\Gamma(1)\psi(1)\varepsilon+o(\varepsilon^2)=1-\varepsilon\gamma_E+o(\varepsilon^2)$$

根据 Gamma 函数递推关系$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$，可得

$$\Gamma(\varepsilon)=\frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}-\gamma_E+o(\varepsilon)$$

根据 Gamma 函数递推关系$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$两边对 z 求导，还可推得

$$\Gamma'(z+1)=\Gamma(z)+z\Gamma'(z)\Rightarrow\frac{\Gamma'(z+1)}{z\Gamma(z)}=\frac{1}{z}+\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\Rightarrow\psi(z+1)=\psi(z)+\frac{1}{z}$$

（2）Beta 函数

主要参考王竹溪《特殊函数概论》。

Beta 函数定义为

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

它与 Gamma 函数关系为

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

它有几种等价形式：

(a)令 x=t/(1+t)，可得

$$B(p,q)=\int_0^\infty\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt$$

再取$t=x^2/m^2$，$p+q=\alpha$，$2p-1=\beta$，可得

$$B(p,q)=2(m^2)^{\alpha-\frac{\beta+1}{2}}\int_0^\infty\frac{x^\beta dx}{(x^2+m^2)^\alpha}$$

(b)令$x=\sin^2\theta$，可得

$$B(p,q)=2\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1}d\theta$$

当 p=(k+1)/2，q=1/2 时，简化为

$$\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^k d\theta=\frac{1}{2}B(\frac{k+1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)}$$

通过分部积分

$$\int_0^{m\pi/2}\sin^k\theta d\theta=-\int_0^{m\pi/2}\sin^{k-1}\theta d\cos\theta=-\sin^{k-1}\theta\cos\theta\Big|_0^{m\pi/2}+(k-1)\int_0^{m\pi/2}\cos^2\theta\sin^{k-2}\theta d\theta$$

$$=0+(k-1)\int_0^{m\pi/2}(1-\sin^2\theta)\sin^{k-2}\theta d\theta$$

可得递推公式（k>1）

$$\int_0^{m\pi/2}\sin^k\theta d\theta=\frac{k-1}{k}\int_0^{m\pi/2}\sin^{k-2}\theta d\theta=\frac{(k-1)(k-3)}{k(k-2)}\int_0^{m\pi/2}\sin^{k-4}\theta d\theta=\cdots$$

$$=\frac{(k-1)(k-3)\cdots(k-2n+1)}{k(k-2)\cdots(k-2n+2)}\int_0^{m\pi/2}\sin^{k-2n}\theta d\theta$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(k-1)!!}{k!!}\dfrac{m\pi}{2}, & k=2n(\mathrm{mod}\,2)\\ \dfrac{(k-1)!!}{k!!}(1-\cos\dfrac{m\pi}{2}), & k=2n+1(\mathrm{mod}\,2)\end{cases}$$

所以

$$\int_0^{\pi}(\sin\theta)^k d\theta=2\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^k d\theta=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)}$$

(c)令 $x=\sin^2\frac{\theta}{2}$，可得

$$B(p,q)=\int_0^{\pi}(\sin\frac{\theta}{2})^{2p-1}(\cos\frac{\theta}{2})^{2q-1}d\theta$$

当 p=q 时，可推得（高教社《数学手册》）

$$B(p,p)=\int_0^{\pi}(\frac{1}{2}\sin\theta)^{2p-1}d\theta=2^{1-2p}\int_0^{\pi}(\sin\theta)^{2p-1}d\theta=2^{1-2p}\int_0^{\pi}(\sin\theta)^{2p-1}(\cos)^{2\cdot\frac{1}{2}-1}d\theta$$

$$=2^{1-2p}\cdot 2\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{2p-1}(\cos)^{2\cdot\frac{1}{2}-1}d\theta=2^{1-2p}B(p,\frac{1}{2})$$

(d)

$$\int_a^b\frac{(t-a)^{p-1}(b-t)^{q-1}}{(t-c)^{p+q}}dt=(b-a)^{p+q-1}(b-c)^{-p}(a-c)^{-q}B(p,q)$$

见高教社《数学手册》。我们不做一般证明，只证物理学感兴趣的 a=0，b=1 情形。这时

$$\frac{1}{(A-B)^{p+q}}\int_0^1\frac{t^{p-1}(1-t)^{q-1}}{(t-c)^{p+q}}dt=\frac{1}{(A-B)^{p+q}}(1-c)^{-p}(-c)^{-q}B(p,q)\xrightarrow{c=-\frac{B}{A-B}}\frac{B(p,q)}{A^pB^q}$$

证明：设 $u=\frac{t(1-c)}{t-c}$，则 $du=\frac{-c(1-c)}{(t-c)^2}dt$，$t=\frac{cu}{u-1+c}$，$\frac{1-t}{t-c}=\frac{u-1}{c}$，于是

$$\int_0^1\frac{t^{p-1}(1-t)^{q-1}}{(t-c)^{p+q}}dt=\int_0^1(\frac{t}{t-c})^{p-1}(\frac{1-t}{t-c})^{q-1}\frac{1}{(t-c)^2}dt=\int_0^1(\frac{u}{1-c})^{p-1}(\frac{u-1}{c})^{q-1}\frac{du}{-c(1-c)}$$

$$=(1-c)^{-p}(-c)^{-q}B(p,q)$$

剩下的证明很简单，口算就能看出来。

（3）Feynman 折叠公式

根据 Beta 函数(d)情形的公式，可反解出

$$\frac{1}{A^pB^q}=\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\int_0^1\frac{t^{p-1}(1-t)^{q-1}}{[(A-B)t+B]^{p+q}}dt=\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\int_0^1dx\int_m^n dy\frac{x^{p-1}y^{q-1}\delta(1-x-y)}{[Ax+By]^{p+q}}$$

此即 Feynman 折叠公式，y 的积分限[m,n]是包含 $\delta(1-x-y)\neq 0$ 的任意值，即 m<1-t<n.

下面讨论它的几种变式。

(a)两分母折叠

p=q=1 时，有

$$\frac{1}{AB}=\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1)\Gamma(1)}\int_0^1\frac{dt}{[(A-B)t+B]^2}=\int_0^1 dx\int_m^n dy\,\frac{\delta(1-x-y)}{[Ax+By]^2}$$

这个公式很简单，不用 Beta 函数也能证明：

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}(\frac{1}{A}-\frac{1}{B})=\frac{1}{B-A}\int_A^B\frac{dz}{z^2}\xrightarrow{z=Ax+B(1-x)}\int_0^1\frac{dx}{[Ax+B(1-x)]^2}$$

(b)三分母折叠

p=2,q=1 时

$$\frac{1}{A^2B}=\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2)\Gamma(1)}\int_0^1\frac{t}{[(A-B)t+B]^3}dt=2\int_0^1 dx\int_m^n dy\,\frac{x\delta(1-x-y)}{[Ax+By]^3}$$

这个公式也很简单，不用 Beta 函数也能证明。将“两分母折叠”公式对 A 求导，得

$$-A^{-2}\frac{1}{B}=\int_0^1 dx\int_m^n dy\delta(1-x-y)\frac{d[Ax+By]^{-2}}{dA}=\int_0^1 dx\int_m^n dy\,\frac{\delta(1-x-y)}{[Ax+By]^3}(-2x)$$

稍稍整理即可证明。这是三分母中两个相同的情形。稍稍变形，可得三分母各异的情形（李灵峰《量子场论》）：

$$\frac{1}{CDE}=\int_0^1 dx\int_m^n dy\,\frac{\delta(1-x-y)}{[Cx+Dy]^2}\frac{1}{E}$$

$$\xrightarrow{A=Cx+Dy,B=E}\int_0^1 dx\int_m^n dy\delta(1-x-y)2\int_0^1 du\int_m^n dv\,\frac{u\delta(1-u-v)}{[(Cx+Dy)u+Ev]^3}$$

$$=\int_0^1 dx\int_m^n dy\delta(1-x-y)2\int_0^1 du\,\frac{u}{[(Cx+Dy)u+E(1-u)]^3}$$

$$\xrightarrow{t=1-u}\int_0^1 dx\int_m^n dy\delta(1-x-y)2\int_0^1 dt\,\frac{1-t}{[Cx(1-t)+Dy(1-t)+Et]^3}$$

$$\xrightarrow{s=x(1-t),r=y(1-t)}2\int_0^1 dt\int_0^{1-t} ds\int_{m'}^{n'} dr\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,r)}\right|\frac{1-t}{[Cs+Dr+Et]^3}\delta(1-\frac{s}{1-t}-\frac{r}{1-t})$$

$$=2\int_0^1 dt\int_0^{1-t} ds\int_{m'}^{n'} dr\,\frac{1}{(1-t)^2}\frac{1-t}{[Cs+Dr+Et]^3}\delta(\frac{1-t-s-r}{1-t})$$

$$=2\int_0^1 dt\int_0^{1-t} ds\int_{m'}^{n'} dr\,\frac{1}{[Cs+Dr+Et]^3}\delta(1-t-s-r)$$

$$=2\int_0^1 dt\int_0^{1-t}\frac{ds}{[Cs+D(1-t-s)+Et]^3}$$

需要特别注意的是，s 的积分限不是[0,1]，而是[0,1-t].

(c)四分母折叠

$$\frac{1}{ABCD}=3!\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y} dz\int_m^n du\,\frac{\delta(1-x-y-z-u)}{[Ax+By+Cz+Du]^2}$$

从等号右边累次积分，很容易得出等号左边的结果（一张 A4 纸就能搞定）。需要特别强调的是，y 和 z 积分上限不是 1，否则无法推得等号左边结果。这也很容易检验，取特殊值，如 A=2，B=3，C=5，D=7 就能发现上限为 1 是错误的。

(d)一般情形（王正行《简明量子场论》）

$$\frac{1}{A_1^{m_1}A_2^{m_2}\cdots A_n^{m_n}}=\frac{\Gamma(\sum_i m_i)}{\prod_i\Gamma(m_i)}\int_0^1 dx_1\int_0^{1-x_1} dx_2\cdots\int_0^{1-\sum_{i=1}^{n-2}x_i} dx_{n-1}\int dx_n\,\frac{\delta(\sum_i x_i-1)\prod_i x_i^{m_i-1}}{[\sum_i A_i x_i]^{m_1+\cdots+m_n}}$$

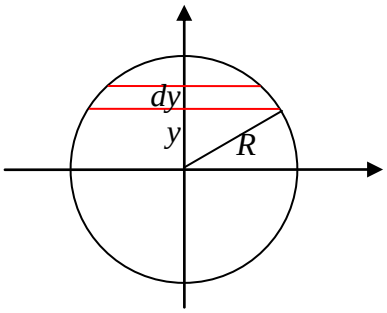
（4）n 维球坐标

(a)四维的想象

在讨论高维前，我们应该对低维有个透彻地认识。我们把低维球看作高维球在低维空间的投影：3 维球投影到平面是圆，所以 2 维球为圆；圆投影到 1 维是线段，所以 1 维球为线段。按这个思路就可推导出 4 维球体积，做法如下：

第一，将球半径记为 R，投影到 1 维即长 2R 的线段，所以 1 维球体积为 2R；

第二，将 2 维球看作一系列长 $2r=2\sqrt{R^2-y^2}$，宽 dy 的窄条：



所以 2 维球体积为

$$V_2=\int_{-R}^{R}2\sqrt{R^2-y^2}dy=\pi R^2$$

第三，将 3 维球看作一系列 2 维球，每个 2 维球的面积 $\pi r^2=\pi(\sqrt{R^2-z^2})^2$，厚度 dz，则

$$V_3=\int_{-R}^{R}\pi(\sqrt{R^2-z^2})^2dz=\frac{4}{3}\pi R^3$$

第四，将 4 维球看作一系列 3 维球，每个 3 维球体积 $\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi(\sqrt{R^2-u^2})^3$，延度 du，则（赵秋月《高维球及其在物理学中的应用》）

$$V_4=\int_{-R}^{R}\frac{4}{3}\pi(\sqrt{R^2-u^2})^3du=\frac{1}{2}\pi^2R^4$$

沿着这个思路用 $V_n=\int_{-R}^{R}V_{n-1}(\sqrt{R^2-x_n^2})dx_n$ “迭代”下去，可推出 5 维乃至 n 维球体积。

(b)体积与表面积的关系——全息原理

在完全抽象化前，我们先给出一个具体的计算。高维空间积分的最简单例子，就是球体积（你可以说是立方体，然而懂得了 n 维立方体对于重整化计算并无太大益处）。

虽然前面得到了高维球体积，可是我们还是不太理解。并且，前面的方法随着维数增加而越来越难积出来。怎样才能让大脑认可高维球的结果？据说要记住一样东西，至少在不同场合出现 16 次。所以，我们应该从不同角度去试探高维客体。Greiner《热力学和统计力学》讲相空间和理想气体的熵时，有个对付高维球的绝妙方法。下面就来论述这个绝妙思想。

总结 2 维和 3 维，可以发现两个恒等式

$$\frac{dV_n}{dR}=S_n,\quad \frac{V_n}{S_n}=\frac{R}{n}$$

V_n 为 n 维球体积（2 维即面积），S_n 为 n 维球表面积（2 维即周长），R 为半径。由两式可得

$$\frac{dV_n}{V_n}=n\frac{dR}{R}\Rightarrow V_n=C_nR^n$$

对 2 维，$C_n=\pi$；对 3 维，$C_n=\frac{4}{3}\pi$.

我们已熟悉 Gauss 积分 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$，推广到 n 重就是

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}dx_1dx_2\cdots dx_n=\pi^{n/2}$$

虽然我们还不知道 n 维球坐标具体形式，但我们已知道 $dV_n=S_ndR$，所以

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}dx_1dx_2\cdots dx_n=\int_0^{\infty}e^{-r^2}S_ndr=\int_0^{\infty}e^{-r^2}\frac{dV_n}{dr}dr=nC_n\int_0^{\infty}e^{-r^2}r^{n-1}dr$$

$$\xrightarrow{t=r^2}\frac{1}{2}nC_n\int_0^{\infty}e^{-t}t^{\frac{n}{2}-1}dt=\frac{n}{2}C_n\Gamma(\frac{n}{2})$$

“通过 Gauss 公式直接积分”与“通过 Gamma 函数计算”这两种方法结果应该相等，所以

$$C_n=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})}\Rightarrow V_n=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})}R^n$$

大家可验证该式求出的结果与“投影法”相同，例如，4 维球体积 $V_4=\frac{\pi^2}{2\Gamma(2)}R^4=\frac{1}{2}\pi^2R^4$.

显然这种方法比“投影法”效率高很多，只需记 Gamma 函数几个具体值，不必再积分。

(c)高维球坐标

即使没有球坐标，依然可以“粗糙地”算出球体积，因为只用考虑积分测度。然而，我们并不总是那么走运。当我们从纯数学走进现实世界时，不只要考虑积分测度，还可能遇到各种复杂的被积函数，这时就必须对高维球有个“精细地”认识，我们要老老实实地把球坐标的具体形式清清楚楚毫不含糊地写出来。其他分支可以把把数学当工具，不加证明直接引用，但理论物理不能，因为你的使命就是揭开宇宙最深层的奥秘。如果只知其然不知其所以然，长此以往就失去了思考能力。机器帮你做了所有事，你还会干什么？会不会越来越笨？所以，让我们假设“n 维球坐标”尚未被发现，我们要做的就是去发现它。

怎样定义 n 维球坐标呢？对于 2 维，可定义 $x=r\cos\varphi,y=r\sin\varphi$；对于 3 维，可定义

$x=r\sin\theta\cos\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\theta$，共同点是，它们的平方和等于半径的平方：

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2=r^2$$

这正好是球的定义。所谓球面，就是到定点的距离等于定长的点的集合。所以，四维球坐标应满足 $x^2+y^2+z^2+u^2=r^2$，可定义为

$$\begin{cases}x=r\sin\psi\sin\theta\sin\varphi\\ y=r\sin\psi\sin\theta\cos\varphi\\ z=r\sin\psi\cos\theta\\ u=r\cos\psi\end{cases}$$

x^2+y^2 将 φ 消去，$x^2+y^2+z^2$ 再将 θ 消去，$x^2+y^2+z^2+u^2$ 再将 ψ 消去。当然，你也可以将 x，y 的顺序换下，甚至将 x，y，z，u 的顺序完全颠倒，都无所谓。我们这样排列，只是为了美观，便于记忆。在此定义下，坐标变换的 **Jacobi 行列式**及积分测度为

$$\frac{\partial(x,y,z,u)}{\partial(r,\varphi,\theta,\psi)}=r^3\sin^2\psi\sin\theta$$

$$dV=r^3\sin^2\psi\sin\theta dr d\psi d\theta d\varphi=r^3 dr d\Omega=dr dS$$

类似地，可将 n 维球坐标定义为（李灵峰《量子场论》）

$$\begin{cases}x_1=r\sin\theta_{n-1}\sin\theta_{n-2}\cdots\sin\theta_3\sin\theta_2\sin\theta_1\\ x_2=r\sin\theta_{n-1}\sin\theta_{n-2}\cdots\sin\theta_3\sin\theta_2\cos\theta_1\\ x_3=r\sin\theta_{n-1}\sin\theta_{n-2}\cdots\sin\theta_3\cos\theta_2\\ \quad\cdots\cdots\\ x_{n-1}=r\sin\theta_{n-1}\sin\theta_{n-2}\\ x_n=r\cos\theta_{n-1}\end{cases}$$

Jacobi 行列式可见 Greiner's QCD. 积分测度为（不同书千差万别，黄涛就与李灵峰顺序相反，王正行将这里 θ_1 设成 φ，θ_2 当成 θ_1，角标整体移动一位）

$$d^n r=r^{n-1}dr d\Omega,\quad d\Omega=\prod_{k=1}^{n-1}\sin^{k-1}\theta_k d\theta_k$$

$$\int d\Omega=\int_0^{\pi}\sin^{n-2}\theta_{n-1}d\theta_{n-1}\cdots\int_0^{\pi}\sin\theta_2 d\theta_2\int_0^{2\pi}d\theta_1$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\cancel{\Gamma(\frac{n-1}{2})}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\cancel{\Gamma(\frac{n-2}{2})}}{\cancel{\Gamma(\frac{n-1}{2})}}\cdots\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\cancel{\Gamma(\frac{3}{2})}}{\cancel{\Gamma(\frac{4}{2})}}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1)}{\cancel{\Gamma(\frac{3}{2})}}2\pi=\frac{[\Gamma(\frac{1}{2})]^{n-2}\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{n}{2})}2\pi=\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

n=3 上式给出 $d^3r=dV=r^2dr d\Omega=r^2dr\sin\theta_2 d\theta_2 d\theta_1$，$\int d\Omega=\frac{2\pi^{3/2}}{\Gamma(\frac{3}{2})}=4\pi$ 是合理的。

（5）d 维动量积分

【公式 1】$I_0(\alpha,n,m^2)=\int\frac{d^np}{(2\pi)^n}\frac{1}{(p^2-m^2)^\alpha}=\frac{(-1)^\alpha i}{(4\pi)^{n/2}}\frac{\Gamma(\alpha-\frac{n}{2})}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{(m^2)^{\alpha-\frac{n}{2}}}$

证明：这是 Minkowski 空间的积分，存在极点。我们可通过 Wick 转动，将时间轴变成虚数（空间轴仍为实数），来消除奇异性。即 0123 的＋－－－度规变成 1234 的＋＋＋－度规，为

$$x=(ct,-x,-y,-z)=(x_0,-\vec{x})\to x_E=(x,y,z,ict)=(\vec{x},ix_0)$$

$$d^4x_E=idx_0d^3x=id^4x,\quad x_E^2=\vec{x}^2-x_0^2=-x^2$$

$$p_E=(\vec{p},-ik_0),d^4p_E=-id^4p,p_E^2=-p^2$$

于是

$$I_0(\alpha,n,m^2)=(-1)^\alpha i\int\frac{d^np_E}{(2\pi)^n}\frac{1}{(p_E^2+m^2)^\alpha}=(-1)^\alpha i\int\frac{p_E^{n-1}dp_Ed\Omega}{(2\pi)^n}\frac{1}{(p_E^2+m^2)^\alpha}$$

$$=\frac{(-1)^\alpha i}{(2\pi)^n}\int d\Omega\int\frac{p_E^{n-1}dp_E}{(p_E^2+m^2)^\alpha}=\frac{(-1)^\alpha i}{(2\pi)^n}\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\frac{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\alpha-\frac{n}{2})}{2\Gamma(\alpha)(m^2)^{\alpha-\frac{n}{2}}}=\frac{(-1)^\alpha i}{(4\pi)^{n/2}}\frac{\Gamma(\alpha-\frac{n}{2})}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{(m^2)^{\alpha-\frac{n}{2}}}$$

其中倒用了前面证过的公式 $\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}=B(p,q)=2(m^2)^{\alpha-\frac{\beta+1}{2}}\int_0^\infty\frac{x^\beta dx}{(x^2+m^2)^\alpha}$.

【公式 2】$I_0(\alpha,n,m^2,q^2)=\int\frac{d^np}{(2\pi)^n}\frac{1}{(p^2+2pq-m^2)^\alpha}=\frac{(-1)^\alpha i}{(4\pi)^{n/2}}\frac{\Gamma(\alpha-\frac{n}{2})}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{(m^2+q^2)^{\alpha-\frac{n}{2}}}$

证明：据积分的平移不变性 $\int F(p+q)d^np=\int F(p)d^np$，公式 1 中令 $p\to k=p+q$，使 $p^2+2pq-m^2=(p+q)^2-(m^2+q^2)=(p+q)^2-M^2=k^2-M^2$，可得

$$I_0(\alpha,n,m^2,q^2)=\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\frac{1}{(k^2-M^2)^\alpha}=\frac{(-1)^\alpha i}{(4\pi)^{n/2}}\frac{\Gamma(\alpha-\frac{n}{2})}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{(M^2)^{\alpha-\frac{n}{2}}}$$

由此可得递推关系

$$I_0(\alpha-1,n,m^2,q^2)=\frac{(-1)^{\alpha-1}i}{(4\pi)^{n/2}}\frac{\Gamma(\alpha-1-\frac{n}{2})}{\Gamma(\alpha-1)}\frac{1}{(M^2)^{\alpha-1-\frac{n}{2}}}$$

$$=-\frac{(-1)^\alpha i}{(4\pi)^{n/2}}\frac{\Gamma(\alpha-\frac{n}{2})/(\alpha-1-\frac{n}{2})}{\Gamma(\alpha)/(\alpha-1)}\frac{M^2}{(M^2)^{\alpha-\frac{n}{2}}}=-M^2\frac{\alpha-1}{\alpha-1-\frac{n}{2}}I_0(\alpha,n,m^2,q^2)$$

【公式 3】$I_\mu(\alpha,n,m^2,q^2)=\int\frac{d^np}{(2\pi)^n}\frac{p_\mu}{(p^2+2pq-m^2)^\alpha}=-q_\mu I_0(\alpha,n,m^2,q^2)$

证明：公式 2 中令 $p\to k=p+q$，则（李灵峰《量子场论》）

$$I_\mu(\alpha,n,m^2,q^2)=\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\frac{k_\mu-q_\mu}{[(k-q)^2+2(k-q)q-m^2]^\alpha}=-q_\mu\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\frac{1}{[k^2-M^2]^\alpha}$$

其中已舍弃了分子中 k 的奇次幂项（奇函数在对称区间积分等于零）。该式除了前面的-q，其余和公式 2 相同。当然，公式 2 对 q 求导也可给出公式 3（王正行《简明量子场论》）。

【公式 4】

$$I_{\mu\nu}(\alpha,n,m^2,q^2)=\int\frac{d^np}{(2\pi)^n}\frac{p_\mu p_\nu}{(p^2+2pq-m^2)^\alpha}=[q_\mu q_\nu-\frac{g_{\mu\nu}}{2}\frac{q^2+m^2}{\alpha-\frac{n}{2}-1}]I_0(\alpha,n,m^2,q^2)$$

证明：

$$I_{\mu\nu}(\alpha,n,m^2,q^2)=\int\frac{d^np}{(2\pi)^n}\frac{p_\mu p_\nu}{(p^2+2pq-m^2)^\alpha}$$

$$\xrightarrow{k=p+q}\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\frac{(k_\mu-q_\mu)(k_\nu-q_\nu)}{[(k-q)^2+2(k-q)q-m^2]^\alpha}$$

$$\xrightarrow{M^2=m^2+q^2}\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\frac{q_\mu q_\nu}{[k^2-M^2]^\alpha}+\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\frac{k_\mu k_\nu}{[k^2-M^2]^\alpha}+0+0$$

$$\xrightarrow{g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}=n}q_\mu q_\nu I_0(\alpha,n,m^2,q^2)+\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\frac{k_\mu k_\nu}{[k^2-M^2]^\alpha}\frac{g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}}{n}$$

$$=q_\mu q_\nu I_0(\alpha,n,m^2,q^2)+\frac{g_{\mu\nu}}{n}\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\frac{k^2}{[k^2-M^2]^\alpha}$$

$$=q_\mu q_\nu I_0(\alpha,n,m^2,q^2)+\frac{g_{\mu\nu}}{n}\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\frac{k^2-M^2}{[k^2-M^2]^\alpha}+\frac{g_{\mu\nu}}{n}\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\frac{M^2}{[k^2-M^2]^\alpha}$$

$$=q_\mu q_\nu I_0(\alpha,n,m^2,q^2)+\frac{g_{\mu\nu}}{n}I_0(\alpha-1,n,m^2,q^2)+\frac{g_{\mu\nu}}{n}M^2I_0(\alpha,n,m^2,q^2)$$

根据公式 2 推得的递推关系

$$I_0(\alpha-1,n,m^2,q^2)=-M^2\frac{\alpha-1}{\alpha-1-\frac{n}{2}}I_0(\alpha,n,m^2,q^2)$$

可得

$$I_{\mu\nu}(\alpha,n,m^2,q^2)=(q_\mu q_\nu+\frac{g_{\mu\nu}}{n}M^2)I_0(\alpha,n,m^2,q^2)-M^2\frac{g_{\mu\nu}}{n}\frac{\alpha-1}{\alpha-1-\frac{n}{2}}I_0(\alpha,n,m^2,q^2)$$

$$=[q_\mu q_\nu+M^2\frac{g_{\mu\nu}}{n}(1-\frac{\alpha-1}{\alpha-1-\frac{n}{2}})]I_0(\alpha,n,m^2,q^2)=[q_\mu q_\nu-\frac{g_{\mu\nu}}{2}\frac{M^2}{\alpha-\frac{n}{2}-1}]I_0(\alpha,n,m^2,q^2)$$

$$I_{\mu\nu}(\alpha,n,m^2)=\int\frac{d^np}{(2\pi)^n}\frac{p_\mu p_\nu}{(p^2-m^2)^\alpha}=\frac{g_{\mu\nu}}{2}\frac{-m^2}{\alpha-\frac{n}{2}-1}I_0(\alpha-1,n,m^2)$$

$$=\frac{g_{\mu\nu}}{2(\alpha-1)}I_0(\alpha-1,n,m^2)=\frac{(-1)^{\alpha-1}i}{(4\pi)^{n/2}}\frac{g_{\mu\nu}}{2\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha-1-\frac{n}{2})}{(m^2)^{\alpha-1-n/2}}$$

这些与王正行同，与 Ryder 不同。因 $(-1)^{\alpha-\frac{n}{2}}=(-1)^{\frac{n}{2}-\alpha}$，$(-1)^{\alpha-1}=(-1)^{\alpha+1}$，与 Ryder 等价。

3.量纲分析

在 d 维时空，作用量 $S=\int \mathcal{L} d^n x$ 量纲也是 1，所以 Lagrange 密度量纲为 $[\mathcal{L}]=L^{-n}=P^n$，

其中 L 为长度，P 为动量。由于 $\partial_\mu=\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$ 量纲为 1/L，故

对 Maxwell 场，$[\mathcal{L}]=[(\partial A)^2]=L^{-2}[A]^2=L^{-n}\Rightarrow[A]=L^{1-n/2}$；

对 Dirac 场，$[\mathcal{L}]=[\psi\partial\psi]=L^{-1}[\psi]^2=L^{-n}\Rightarrow[A]=L^{(1-n)/2}$；

对 QED，$[\mathcal{L}]=[q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu]=[q][\psi]^2[A_\mu]=[q]L^{1-n}L^{1-n/2}=L^{-n}\Rightarrow[q]=L^{-2+n/2}=P^{2-n/2}$

在 4 维[q]=1；一般地，可设

$$q=\mu^{2-\frac{n}{2}}e$$

其中 μ 为任一质量参数。这样，电荷 e 就是与维数无关的纯数。

4.QED 维数正规化

（1）电子自能发散的分离

将 4 维动量积分推广到 d 维，$e\to\mu^{2-\frac{d}{2}}e$，故

$$\Sigma^{(2)}(p)=ie^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{-g_{\mu\nu}}{k^2}\gamma^\nu\frac{1}{\not p-\not k-m}\gamma^\mu\to i\mu^{4-d}e^2\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{-g_{\mu\nu}}{k^2}\gamma^\nu\frac{1}{\not p-\not k-m}\gamma^\mu$$

$$\xrightarrow{\text{分母“有理”化}}i\mu^{4-d}e^2\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{-1}{k^2}\frac{\gamma_\mu(\not p-\not k+m)\gamma^\mu}{(p-k)^2-m^2}$$

$$\xrightarrow[\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\mu=-(d-2)\gamma^\nu]{\gamma_\mu\gamma^\mu=d}i\mu^{4-d}e^2\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{k^2}\frac{(d-2)(\not p-\not k)-md}{(p-k)^2-m^2}$$

$$\xrightarrow{k\to k+p}i\mu^{4-d}e^2\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{(k+p)^2}\frac{-(d-2)\not k-md}{k^2-m^2}$$

$$\xrightarrow[A=(k+p)^2,B=k^2-m^2]{\text{Feynman折叠公式}}i\mu^{4-d}e^2\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\int_0^1dx\frac{-(d-2)\not k-md}{[(k+p)^2x+(k^2-m^2)(1-x)]^2}$$

$$\xrightarrow{(p^2+m^2)x-m^2=-M^2}i\mu^{4-d}e^2\int_0^1dx\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{-(d-2)\not k-md}{[k^2+2k\cdot px-M^2]^2}$$

$$\xrightarrow[I_\mu=-q_\mu I_0]{q=px}i\mu^{4-d}e^2\int_0^1dx[(d-2)\not px-md]\frac{(-1)^2i}{(4\pi)^{d/2}}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)}\frac{1}{(M^2+p^2x^2)^{2-d/2}}$$

$$=\frac{\mu^{4-d}e^2}{(4\pi)^{d/2}}\Gamma(2-\tfrac{d}{2})\int_0^1dx\frac{-(d-2)\not px+md}{[p^2x^2-(p^2+m^2)x+m^2]^{2-d/2}}$$

$$=\frac{\mu^{4-d}e^2}{(4\pi)^{d/2}}\Gamma(2-\tfrac{d}{2})\int_0^1dx\frac{-(d-2)\not px+md}{[(1-x)(m^2-p^2x)]^{2-d/2}}$$

令 $d=4-\varepsilon$，$\alpha=\dfrac{e^2}{4\pi}$，据 $\Gamma(\dfrac{\varepsilon}{2})=\dfrac{2}{\varepsilon}-\gamma_E+o(\varepsilon)$，$a^x=e^{x\ln a}=1+x\ln a+o(x^2)$，可得

$$\Sigma^{(2)}(p)=\frac{e^2}{(4\pi)^2}\Gamma(\frac{\varepsilon}{2})\int_0^1 dx\frac{(\varepsilon-2)\not{p}x+m(4-\varepsilon)}{[(1-x)(m^2-p^2x)]^{\varepsilon/2}}(4\pi\mu^2)^{\varepsilon/2}$$

$$=\frac{\alpha}{4\pi}[\frac{2}{\varepsilon}-\gamma_E+\cdots]\int_0^1 dx[(4m-2\not{p}x)+\varepsilon(\not{p}x-m)][1-\frac{\varepsilon}{2}\ln\frac{(1-x)(m^2-p^2x)}{4\pi\mu^2}+\cdots]$$

$$=\frac{\alpha}{4\pi}[\frac{2}{\varepsilon}-\gamma_E]\int_0^1 dx[(4m-2\not{p}x)+\varepsilon(\not{p}x-m)]$$

$$-\frac{\alpha}{4\pi}[\frac{2}{\varepsilon}-\gamma_E+\cdots]\int_0^1 dx[\frac{\varepsilon}{2}(4m-2\not{p}x)+\frac{\varepsilon^2}{2}(\not{p}x-m)]\ln\frac{(1-x)(m^2-p^2x)}{4\pi\mu^2}+\cdots$$

$$=\frac{\alpha}{4\pi}[\frac{2}{\varepsilon}-\gamma_E]\int_0^1 dx(4m-2\not{p}x)+\frac{\alpha}{4\pi}\int_0^1 dx[\frac{2}{\varepsilon}\varepsilon(\not{p}x-m)+o(\varepsilon)]$$

$$-\frac{\alpha}{4\pi}\int_0^1 dx[\frac{2}{\varepsilon}\frac{\varepsilon}{2}(4m-2\not{p}x)+o(\varepsilon)]\ln\frac{(1-x)(m^2-p^2x)}{4\pi\mu^2}$$

$$\xrightarrow{\text{略去}o(\varepsilon)}\frac{\alpha}{4\pi}[\frac{2}{\varepsilon}-\gamma_E]\int_0^1 dx(4m-2\not{p}x)+2\frac{\alpha}{4\pi}\int_0^1 dx(\not{p}x-m)$$

$$-\frac{\alpha}{4\pi}\int_0^1 dx(4m-2\not{p}x)\ln\frac{(1-x)(m^2-p^2x)}{4\pi\mu^2}$$

$$=\frac{\alpha}{4\pi}[\frac{2}{\varepsilon}-\gamma_E]\int_0^1 dx(4m-2\not{p}x)+\frac{\alpha}{4\pi}(\not{p}-2m)$$

$$+\frac{\alpha}{4\pi}\int_0^1 dx(2\not{p}x-4m)\{\ln(1-\frac{p^2}{m^2}x)+\ln(1-x)+\ln\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\}$$

$$=\frac{\alpha}{4\pi}\{[\frac{2}{\varepsilon}-\gamma_E-\ln\frac{m^2}{4\pi\mu^2}]\int_0^1 dx(4m-2\not{p}x)+(\not{p}-2m)+\int_0^1 dx(2\not{p}x-4m)\ln(1-x)\}$$

$$+\frac{\alpha}{4\pi}\int_0^1 dx(2\not{p}x-4m)\ln(1-\frac{p^2}{m^2}x)\xrightarrow{\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(1-x)dx}$$

$$\frac{\alpha}{4\pi}\{[\frac{2}{\varepsilon}-\gamma_E-\ln\frac{m^2}{4\pi\mu^2}-\frac{1}{2}](4m-\not{p})+\frac{\not{p}}{2}+\int_0^1 dx[2\not{p}(1-x)-4m]\ln x\}$$

$$+\frac{\alpha}{4\pi}\int_0^1 dx(2\not{p}x-4m)\ln(1-\frac{p^2}{m^2}x)$$

利用分部积分可知

$$\int\ln x dx=x\ln x-x,\quad\int\ln(ax+b)dx=\frac{ax+b}{a}\ln(ax+b)-x$$

$$\int x\ln x dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4},\quad\int x\ln(ax+b)dx=\frac{a^2x^2-b^2}{2a^2}\ln(ax+b)-\frac{ax^2-2bx}{4a}$$

$$\int_0^1 dx(cx+d)\ln(ax+1)=\frac{c}{2}[(1-\frac{1}{a^2})\ln(a+1)-\frac{a-2}{2a}]+d[(1+\frac{1}{a})\ln(a+1)-1]$$

取特殊值（如 a=3,c=5,d=7）用 Mathematica 可验证该公式正确。于是

$$\Sigma^{(2)}(p)=\frac{\alpha}{4\pi}\{[\frac{2}{\varepsilon}-\gamma_E-\ln\frac{m^2}{4\pi\mu^2}-\frac{1}{2}](4m-\not p)+\frac{\not p}{2}+\int_0^1 dx[2\not p-4m-2\not p x]\ln x\}$$

$$+\frac{\alpha}{4\pi}\int_0^1 dx(2\not p x-4m)\ln(1-\frac{p^2}{m^2}x)$$

$$=\frac{\alpha}{4\pi}\{[\frac{2}{\varepsilon}-\gamma_E-\ln\frac{m^2}{4\pi\mu^2}-\frac{1}{2}](4m-\not p)+\frac{\not p}{2}+(4m-2\not p+\frac{\not p}{2})\}$$

$$+\frac{\alpha}{4\pi}\{\not p[(1-\frac{m^4}{p^4})\ln(1-\frac{p^2}{m^2})-\frac{1}{2}-\frac{m^2}{p^2}]-4m[(1-\frac{m^2}{p^2})\ln(1-\frac{p^2}{m^2})-1]\}$$

$$=\frac{\alpha}{4\pi}\{[\frac{2}{\varepsilon}-\gamma_E-\ln\frac{m^2}{4\pi\mu^2}+\frac{1}{2}-\ln(1-\frac{p^2}{m^2})][4m-\not p]$$

$$+[4m-\frac{m^2}{p^2}\not p][\frac{m^2}{p^2}\ln(1-\frac{p^2}{m^2})+1]-\frac{\not p}{2}\}$$

$$=\frac{\alpha}{4\pi}\{[\frac{2}{\varepsilon}-\gamma_E+\frac{1}{2}-\ln\frac{m^2-p^2}{4\pi\mu^2}][4m-\not p]+[4m-\frac{m^2}{p^2}\not p][\frac{m^2}{p^2}\ln(1-\frac{p^2}{m^2})+1]-\frac{\not p}{2}\}$$

可见，当$\varepsilon\to 0$，只有含$1/\varepsilon$的项发散，其余项是有限的。这就将发散项成功分离出来。

我们不必大惊小怪，《高等数学》课讲反常积分时，也是先参数化，再取极限。

（2）光子自能发散的分离

将维数从 4 延拓到 d 后，光子自能积分变为

$$\Pi^{(2)}_{\mu\nu}(k)\xrightarrow{4\text{ 维}\to d\text{ 维}}i\mu^{4-d}e^2\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}tr\left[\gamma_\mu\frac{\not p+m}{p^2-m^2}\gamma_\nu\frac{\not p-\not k+m}{(p-k)^2-m^2}\right]$$

其中分子为

$$tr[\gamma_\mu(\not p+m)\gamma_\nu(\not p-\not k+m)]\xrightarrow{\text{奇数个Gamma矩阵迹为零}}tr[\gamma_\mu\not p\gamma_\nu(\not p-\not k)+m^2\gamma_\mu\gamma_\nu]$$

$$\xrightarrow[tr[1234]=f(d)[1234-1324+1423]]{tr[\gamma_\mu\gamma_\nu]=f(d)g_{\mu\nu}}f(d)[(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}-g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}+g_{\mu\sigma}g_{\rho\nu})p^\rho(p-k)^\sigma+m^2g_{\mu\nu}]$$

$$=f(d)[p_\mu(p_\nu-k_\nu)-g_{\mu\nu}p\cdot(p-k)+p_\nu(p_\mu-k_\mu)+m^2g_{\mu\nu}]$$

$$=f(d)[2p_\mu p_\nu-p_\mu k_\nu-p_\nu k_\mu+g_{\mu\nu}(m^2-p^2+pk)]$$

如果分母为 p 的偶函数，则分子中 p 的奇次幂可舍弃。用 Feynman 参数化可将分母折叠为

$$\frac{1}{(p^2-m^2)[(p-k)^2-m^2]}=\int_0^1\frac{dx}{\{[(p-k)^2-m^2]x+(p^2-m^2)(1-x)\}^2}$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{[p^2-2pkx+k^2x-m^2]^2}\xrightarrow{k^2x(1-x)-m^2=-M^2}\int_0^1\frac{dx}{[(p-kx)^2-M^2]^2}$$

做变换$p\to p+kx$，就可消去分母交叉项；而分子成为

$$2p_\mu p_\nu-p_\mu k_\nu-p_\nu k_\mu+g_{\mu\nu}(m^2-p^2+p\cdot k)$$

$$\to 2(p+kx)_\mu(p+kx)_\nu-(p+kx)_\mu k_\nu-(p+kx)_\nu k_\mu+g_{\mu\nu}[m^2-(p+kx)^2+(p+kx)\cdot k]$$

$$\xrightarrow{\text{舍弃k奇次幂}}2p_\mu p_\nu+2k_\mu k_\nu x^2-2k_\mu k_\nu x+g_{\mu\nu}[m^2-p^2-k^2x^2+k^2x]$$

$$=2p_\mu p_\nu-g_{\mu\nu}p^2+g_{\mu\nu}[m^2+k^2x(1-x)]-2k_\mu k_\nu x(1-x)$$

于是

$$\Pi^{(2)}_{\mu\nu}(k)$$

$$=i\mu^{4-d}e^2f(d)\int_0^1dx\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{2p_\mu p_\nu-g_{\mu\nu}p^2+g_{\mu\nu}[m^2+k^2x(1-x)]-2k_\mu k_\nu x(1-x)}{[p^2-M^2]^2}$$

$$\xrightarrow[g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}=d]{p^2=g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu}i\mu^{4-d}e^2f(d)\int_0^1dx\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{(2-d)p_\mu p_\nu}{[p^2-M^2]^2}$$

$$+i\mu^{4-d}e^2f(d)\int_0^1dx\{g_{\mu\nu}[m^2+k^2x(1-x)]-2k_\mu k_\nu x(1-x)\}\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{1}{[p^2-M^2]^2}$$

$$=i\mu^{4-d}e^2f(d)\int_0^1dx(2-d)\frac{(-1)^{2-1}i}{(4\pi)^{d/2}}\frac{g_{\mu\nu}}{2\Gamma(2)}\frac{\Gamma(2-1-\frac{d}{2})}{(M^2)^{2-1-d/2}}$$

$$+i\mu^{4-d}e^2f(d)\int_0^1dx\{g_{\mu\nu}[m^2+k^2x(1-x)]-2k_\mu k_\nu x(1-x)\}\frac{(-1)^2i}{(4\pi)^{d/2}}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)(M^2)^{2-d/2}}$$

$$\xrightarrow{(1-\frac{d}{2})\Gamma(1-\frac{d}{2})=\Gamma(2-\frac{d}{2})}-\frac{\mu^{4-d}e^2f(d)}{(4\pi)^{d/2}}\Gamma(2-\tfrac{d}{2})\int_0^1dx\{\frac{-g_{\mu\nu}M^2}{(M^2)^{2-d/2}}$$

$$+\frac{g_{\mu\nu}[m^2+k^2x(1-x)]-2k_\mu k_\nu x(1-x)}{(M^2)^{2-d/2}}\}\xrightarrow{M^2=m^2-k^2x(1-x)}$$

$$-\frac{\mu^{4-d}e^2f(d)}{(4\pi)^{d/2}}\Gamma(2-\tfrac{d}{2})\int_0^1dx\frac{g_{\mu\nu}[2k^2x(1-x)]-2k_\mu k_\nu x(1-x)}{[m^2-k^2x(1-x)]^{2-d/2}}$$

$$=\frac{e^2f(d)}{(4\pi)^2}\Gamma(2-\tfrac{d}{2})2(k_\mu k_\nu-k^2g_{\mu\nu})\int_0^1dx[\frac{m^2-k^2x(1-x)}{4\pi\mu^2}]^{-2+d/2}x(1-x)$$

令 $d=4-\varepsilon$，$\alpha=\dfrac{e^2}{4\pi}$，$\Gamma(\dfrac{\varepsilon}{2})\approx\dfrac{2}{\varepsilon}-\gamma_E$，$a^x=e^{x\ln a}\approx1+x\ln a$，$f(d)\to f(4)=4$ 得

$$\Pi^{(2)}_{\mu\nu}(k)=\frac{4\alpha}{4\pi}\Gamma(\frac{\varepsilon}{2})2(k_\mu k_\nu-k^2g_{\mu\nu})\int_0^1dx[\frac{m^2-k^2x(1-x)}{4\pi\mu^2}]^{-\varepsilon/2}x(1-x)$$

$$\xrightarrow{o(\varepsilon)\to0}\frac{\alpha}{\pi}(k_\mu k_\nu-k^2g_{\mu\nu})\int_0^1dx(\frac{2}{\varepsilon}-\gamma_E)[1-\frac{\varepsilon}{2}\ln\frac{m^2-k^2x(1-x)}{4\pi\mu^2}]2x(1-x)$$

$$\xrightarrow{o(\varepsilon)\to0}\frac{\alpha}{\pi}(k_\mu k_\nu-k^2g_{\mu\nu})\int_0^1dx[\frac{2}{\varepsilon}-\gamma_E-\ln\frac{m^2-k^2x(1-x)}{4\pi\mu^2}]2x(1-x)$$

$$=\frac{\alpha}{\pi}(k_\mu k_\nu-k^2g_{\mu\nu})\int_0^1dx\{\frac{2}{\varepsilon}-\gamma_E-\ln\frac{m^2}{4\pi\mu^2}-\ln[1-\frac{k^2}{m^2}x(1-x)]\}2x(1-x)$$

$$=\frac{\alpha}{\pi}(k_\mu k_\nu-k^2g_{\mu\nu})[\frac{2}{\varepsilon}-\gamma_E-\ln\frac{m^2}{4\pi\mu^2}]\int_0^12x(1-x)dx$$

$$-\frac{\alpha}{\pi}(k_\mu k_\nu-k^2g_{\mu\nu})\int_0^1dx\ln[1-\frac{k^2}{m^2}x(1-x)]2x(1-x)$$

$$=\frac{\alpha}{3\pi}(k_\mu k_\nu-k^2g_{\mu\nu})\{[\frac{2}{\varepsilon}-\gamma_E-\ln\frac{m^2}{4\pi\mu^2}]-6\int_0^1dx\ln[1-\frac{k^2}{m^2}x(1-x)]x(1-x)\}$$

第二项 I_2 是幂函数与对数函数乘积的积分，按照“反对幂三指”顺序，可通过分部积分将

对数的积分化成有理函数的积分：

$$I_2=\int_0^1 dx(6x^2-6x)\ln(ax^2-ax+1)=\int_0^1 d(2x^3-3x^2)\ln(ax^2-ax+1)$$

$$=(2x^3-3x^2)\ln(ax^2-ax+1)\Big|_0^1-\int_0^1(2x^3-3x^2)\frac{2ax-a}{ax^2-ax+1}dx=\int_0^1\frac{-4x^4+8x^3-3x^2}{x^2-x+a^{-1}}dx$$

这是一个假分式，可通过多项式除法（或综合除法、辗转相除法）将其化为真分式：

$$\begin{array}{r|l}
 & -4x^2 \quad +4x \quad +(4a^{-1}+1) \\
\hline
x^2-x+a^{-1} & -4x^4+8x^3 \quad -3x^2 \\
 & \underline{-4x^4+4x^3 \quad -4a^{-1}x^2} \\
 & 4x^3+(4a^{-1}-3)x^2 \\
 & \underline{4x^3 \quad -4x^2 \quad +4a^{-1}x} \\
 & (4a^{-1}+1)x^2 \quad -4a^{-1}x \\
 & \underline{(4a^{-1}+1)x^2-(4a^{-1}+1)x+(4a^{-2}+a^{-1})} \\
 & x-(4a^{-2}+a^{-1})
\end{array}$$

$$I_2=\int_0^1(-4x^2+4x+4a^{-1}+1)dx+\int_0^1\frac{x-a^{-1}-4a^{-2}}{x^2-x+a^{-1}}dx$$

$$=-\frac{4}{3}+2+4a^{-1}+1+\int_0^1\frac{x-a^{-1}-4a^{-2}}{x^2-x+a^{-1}}dx\xrightarrow{x=t+\frac{1}{2}}\frac{5}{3}+4a^{-1}+\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{t+2^{-1}-a^{-1}-4a^{-2}}{t^2-(\sqrt{4^{-1}-a^{-1}})^2}dt$$

$$\xrightarrow{b=\sqrt{4^{-1}-a^{-1}}}\frac{5}{3}+4a^{-1}+\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{t}{t^2-b^2}dt+(2^{-1}-a^{-1}-4a^{-2})\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{t^2-b^2}dt$$

$$=\frac{5}{3}+4a^{-1}+\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{t^2-b^2}d(t^2-b^2)+(2^{-1}-a^{-1}-4a^{-2})\frac{1}{2b}[\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{t-b}dt-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{t+b}dt]$$

$$=\frac{5}{3}+4a^{-1}+\frac{1}{2}\ln(t^2-b^2)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}+(2^{-1}-a^{-1}-4a^{-2})\frac{1}{2b}\ln\frac{t-b}{t+b}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{5}{3}+4a^{-1}+(2^{-1}-a^{-1}-4a^{-2})\frac{1}{b}\ln\left|\frac{\frac{1}{2}-b}{\frac{1}{2}+b}\right|=\frac{5}{3}+4a^{-1}+(2^{-1}-a^{-1}-4a^{-2})\frac{1}{b}\ln\frac{(\frac{1}{2}-b)^2}{\frac{1}{4}-b^2}$$

$$\xrightarrow[b=\sqrt{4^{-1}-a^{-1}}]{a=k^2/m^2}\frac{5}{3}+4\frac{m^2}{k^2}+(\frac{1}{2}-\frac{m^2}{k^2}-4\frac{m^4}{k^4})\frac{1}{b}\ln\frac{(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{m^2}{k^2}})^2}{m^2/k^2}$$

$$=\frac{5}{3}+\frac{4m^2}{k^2}+(1-\frac{2m^2}{k^2}-\frac{8m^4}{k^4})\frac{1}{b}\ln\frac{k-\sqrt{k^2-4m^2}}{2m}$$

这里对数为复函数。若 K<2m，实表示为反正切（西安交大《复变函数》，Greiner's QED P291）。

$$\Pi^{(2)}_{\mu\nu}(k)=$$

$$\frac{\alpha}{3\pi}[k_\mu k_\nu-k^2g_{\mu\nu}][\frac{2}{\varepsilon}-\gamma_E-\ln\frac{m^2}{4\pi\mu^2}+\frac{5}{3}+\frac{4m^2}{k^2}+(1-\frac{2m^2}{k^2}-\frac{8m^4}{k^4})\frac{1}{b}\ln\frac{k-\sqrt{k^2-4m^2}}{2m}]$$

当$\varepsilon\to 0$，只有含$1/\varepsilon$的项发散，其余项是有限的。这就将发散项成功分离出来。

（3）顶角函数发散的分离

$$\Lambda_\mu^{(2)}(p,p')\xrightarrow{4\to d}-i(\mu^{2-\frac{d}{2}}e)^2\int\frac{d^dk'}{(2\pi)^d}\frac{1}{k'^2}\gamma_\nu\frac{\not p'-\not k'+m}{(p'-k')^2-m^2}\gamma_\mu\frac{\not p-\not k'+m}{(p-k')^2-m^2}\gamma^\nu$$

据前面经验，应将分母化成被积变量完全平方，再平移变换消去交叉项。三分母折叠公式为

$$\frac{1}{CEO}=\frac{1}{EOC}=\int_0^1\int_0^{1-t}\frac{2dtds}{[Es+O(1-t-s)+Ct]^3}\xrightarrow[s=y]{t=x}\int_0^1\int_0^{1-x}\frac{2dxdy}{[Cx+Ey+O(1-x-y)]^3}$$

注意分子含矩阵不对易，分母为纯数可随意调换顺序。

$$\frac{1}{k'^2[(p'-k')^2-m^2][(p-k')^2-m^2]}\xrightarrow{C=(p-k')^2-m^2,E=(p'-k')^2-m^2,O=k'^2}$$

$$2\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\frac{1}{\{[(p-k')^2-m^2]x+[(p'-k')^2-m^2]y+k'^2(1-x-y)\}^3}$$

$$=2\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\frac{1}{\{k'^2-2(px+p'y)k'+p^2x+p'^2y-m^2(x+y)\}^3}$$

$$=2\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\frac{1}{\{(k'-px-p'y)^2-[(px+p'y)^2-p^2x-p'^2y+m^2(x+y)]\}^3}$$

$$=2\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\frac{1}{\{(k'-px-p'y)^2-M^2(x,y)\}^3}$$

所以，我们应做变换$k'\to k=k'+px+p'y$，使分母成为被积变量的偶函数。这样，就可舍弃分子中所有 k 奇次项（注意分子应先变换再舍弃，不能不做变换直接舍弃奇次项）：

$$G_\mu=\gamma_\nu(\not p'-\not k'+m)\gamma_\mu(\not p-\not k'+m)\gamma^\nu$$

$$\xrightarrow{k=k'+px+p'y}\gamma_\nu(\not p'-\not k-\not px-\not p'y+m)\gamma_\mu(\not p-\not k-\not px-\not p'y+m)\gamma^\nu$$

$$\xrightarrow{\text{舍弃}k\text{奇次项}}\gamma_\nu\not k\gamma_\mu\not k\gamma^\nu+\gamma_\nu(\not p'-\not px-\not p'y+m)\gamma_\mu(\not p-\not px-\not p'y+m)\gamma^\nu$$

$$P_\mu(p,p',x,y)=\gamma_\nu(\not p'-\not px-\not p'y+m)\gamma_\mu(\not p-\not px-\not p'y+m)\gamma^\nu$$

$$=[\gamma_\nu(\not p'-\not px-\not p'y)\gamma_\mu(\not p-\not px-\not p'y)\gamma^\nu]_{5\gamma}$$

$$+[\gamma_\nu(\not p'-\not px-\not p'y)\gamma_\mu m\gamma^\nu+\gamma_\nu m\gamma_\mu(\not p-\not px-\not p'y)\gamma^\nu]_{4\gamma}+[\gamma_\nu m\gamma_\mu m\gamma^\nu]_{3\gamma}$$

$$=\{[p'(1-y)-px]^\rho\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\mu\gamma_\sigma\gamma^\nu[p(1-x)-p'y]^\sigma\}_{5\gamma}$$

$$+m[(p'-px-p'y)^\rho\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\mu\gamma^\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\sigma\gamma^\nu(p-px-p'y)^\sigma]_{4\gamma}+m^2[-(d-2)\gamma_\mu]_{3\gamma}$$

$$=\{[p'(1-y)-px]^\rho[-2\gamma_\sigma\gamma_\mu\gamma_\rho+(4-d)\gamma_\rho\gamma_\mu\gamma_\sigma][p(1-x)-p'y]^\sigma\}_{5\gamma}-(d-2)m^2\gamma_\mu$$

$$+m\{(p'-px-p'y)^\rho[4g_{\rho\mu}-(4-d)\gamma_\rho\gamma_\mu]+[4g_{\mu\sigma}-(4-d)\gamma_\mu\gamma_\sigma](p-px-p'y)^\sigma\}_{4\gamma}$$

$$\xrightarrow{d=4}-2[p'(1-y)-px]^\rho\gamma_\sigma\gamma_\mu\gamma_\rho[p(1-x)-p'y]^\sigma$$

$$+4m[(p'-px-p'y)^\rho g_{\rho\mu}+g_{\mu\sigma}(p-px-p'y)^\sigma]-2m^2\gamma_\mu$$

$$=2[p(1-x)-p'y]\gamma_\mu[px-p'(1-y)]+4m[p_\mu(1-2x)+p'_\mu(1-2y)]-2m^2\gamma_\mu$$

$$=2[\not p(1-x)\gamma_\mu\not px+\not p'y\gamma_\mu\not p'(1-y)-\not p(1-x)\gamma_\mu\not p'(1-y)-\not p'y\gamma_\mu\not px]$$

$$+4m[p_\mu(1-2x)+p'_\mu(1-2y)]-2m^2\gamma_\mu$$

$$K_\mu(k)=\gamma_\nu \not{k}\gamma_\mu \not{k}\gamma^\nu=\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\mu\gamma_\sigma\gamma^\nu k^\rho k^\sigma=[-2\gamma_\sigma\gamma_\mu\gamma_\rho+(4-d)\gamma_\rho\gamma_\mu\gamma_\sigma]k^\rho k^\sigma$$
$$=-2\not{k}\gamma_\mu\not{k}+(4-d)\not{k}\gamma_\mu\not{k}=(2-d)\not{k}\gamma_\mu\not{k}=(2-d)k^\tau(2g_{\tau\mu}-\gamma_\mu\gamma_\tau)\not{k}$$
$$=(2-d)(2k_\mu\not{k}-\gamma_\mu\not{k}\not{k})=(d-2)(\gamma_\mu k^2-2k_\mu\not{k})$$

注意，$P_\mu(p,p',x,y)$ 中不含动量积分变量 k，不引起紫外发散，因而可在积分前取 d=4；

$K_\mu(k)$ 含积分变量 k，不能在积分前取 d=4，维数正规化就是专门针对 k 的发散研发的。这一点很容易看出来：

$$\Lambda_\mu^{(2)}(p,p')=-i\mu^{4-d}e^2\int\frac{d^dk'}{(2\pi)^d}\frac{\gamma_\nu(\not{p}'-\not{k}'+m)\gamma_\mu(\not{p}-\not{k}'+m)\gamma^\nu}{k'^2[(p'-k')^2-m^2][(p-k')^2-m^2]}$$
$$=-2i\mu^{4-d}e^2\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\left[\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{P_\mu(p,p',x,y)}{[k^2-M^2(x,y)]^3}+\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{K_\mu(k)}{[k^2-M^2(x,y)]^3}\right]$$
$$=\Lambda_{P\mu}^{(2)}(p,p')+\Lambda_{K\mu}^{(2)}(p,p')$$

当 d=4 时，$P_\mu(p,p',x,y)$ 项分子比分母幂次小 2 而不发散；$K_\mu(k)$ 项分子与分母幂次都是 6 为对数发散（用 4 维球坐标就可看出 $\int\frac{k^2}{k^6}d^4k=\int\frac{k^2}{k^6}k^3dkd\Omega=\int\frac{dk}{k}d\Omega\xrightarrow{k\to\infty}\infty$）。

具体写出来，即

$$\Lambda_{P\mu}^{(2)}(p,p')=-2i\mu^{4-d}e^2\int_0^1dx\int_0^{1-x}dyP_\mu(p,p',x,y)\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{[k^2-M^2(x,y)]^3}$$
$$=-2i\mu^{4-d}e^2\int_0^1dx\int_0^{1-x}dyP_\mu(p,p',x,y)\frac{(-1)^3i}{(4\pi)^{d/2}}\frac{\Gamma(3-\frac{d}{2})}{\Gamma(3)[M^2(x,y)]^{3-d/2}}$$
$$\xrightarrow{d=4}\frac{-2e^2}{(4\pi)^2\Gamma(3)}\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\frac{P_\mu(p,p',x,y)}{M^2(x,y)}=-\frac{\alpha}{4\pi}\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\frac{P_\mu(p,p',x,y)}{M^2(x,y)}$$

$$\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{K_\mu(k)}{[k^2-M^2(x,y)]^3}=(d-2)\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{\gamma_\mu k^2-2k_\mu\not{k}}{[k^2-M^2(x,y)]^3}$$
$$=(d-2)\left[\gamma_\mu g^{\xi\eta}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{k_\xi k_\eta}{[k^2-M^2(x,y)]^3}-2\gamma^\omega\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{k_\mu k_\omega}{[k^2-M^2(x,y)]^3}\right]$$
$$=(d-2)[\gamma_\mu g^{\xi\eta}g_{\xi\eta}-2\gamma^\omega g_{\mu\omega}]\frac{(-1)^{3-1}i}{(4\pi)^{d/2}}\frac{\Gamma(3-1-\frac{d}{2})}{2\Gamma(3)[M^2(x,y)]^{3-1-d/2}}=\frac{i\gamma_\mu}{(4\pi)^{d/2}}\frac{(d-2)^2\Gamma(2-\frac{d}{2})}{4[M^2(x,y)]^{2-d/2}}$$

$$\Lambda_{K\mu}^{(2)}(p,p')=-2i\mu^{4-d}e^2\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{K_\mu(k)}{[k^2-M^2(x,y)]^3}$$
$$=-2i\mu^{4-d}e^2\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\frac{i\gamma_\mu}{(4\pi)^{d/2}}\frac{(d-2)^2\Gamma(2-\frac{d}{2})}{4[M^2(x,y)]^{2-d/2}}$$
$$=\frac{e^2\gamma_\mu}{2(4\pi)^2}\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy(d-2)^2\Gamma(2-\tfrac{d}{2})[\frac{4\pi\mu^2}{M^2(x,y)}]^{2-\frac{d}{2}}$$

令 $d=4-\varepsilon$，$\alpha=\frac{e^2}{4\pi}$，$\Gamma(\frac{\varepsilon}{2})\approx\frac{2}{\varepsilon}-\gamma_E$，$a^x=e^{x\ln a}\approx1+x\ln a$，$f(d)\to f(4)=4$ 得

$$\Lambda_{K\mu}^{(2)}(p,p')=\frac{\alpha\gamma_\mu}{4\pi}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\,\frac{1}{2}(2-\varepsilon)^2\Gamma(\frac{\varepsilon}{2})[\frac{M^2(x,y)}{4\pi\mu^2}]^{-\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$\approx\frac{\alpha\gamma_\mu}{4\pi}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\,\frac{1}{2}(4-4\varepsilon)[\frac{2}{\varepsilon}-\gamma_E][1-\frac{\varepsilon}{2}\ln\frac{M^2(x,y)}{4\pi\mu^2}]$$

$$\approx\frac{\alpha\gamma_\mu}{4\pi}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy[\frac{2}{\varepsilon}-\gamma_E-2][2-\varepsilon\ln\frac{M^2(x,y)}{4\pi\mu^2}]$$

$$\approx\frac{\alpha\gamma_\mu}{4\pi}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy2[\frac{2}{\varepsilon}-\gamma_E-2]-\frac{\alpha\gamma_\mu}{4\pi}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy[\frac{2}{\varepsilon}\varepsilon\ln\frac{M^2(x,y)}{4\pi\mu^2}]$$

$$=\frac{\alpha\gamma_\mu}{4\pi}[\frac{2}{\varepsilon}-\gamma_E-2]-\frac{\alpha\gamma_\mu}{4\pi}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy[2\ln M^2(x,y)-2\ln 4\pi\mu^2]$$

$$=\frac{\alpha\gamma_\mu}{4\pi}[\frac{2}{\varepsilon}-\gamma_E-2+\ln 4\pi\mu^2-2\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\ln M^2(x,y)]$$

如果不求迹，散射振幅中的 Gamma 矩阵是消不掉的，但计算散射截面时需将振幅平方，Gamma 矩阵就被消去了。因为顶角修正只是散射振幅的一部分，将来计算散射截面时还要乘上其他因子，所以这里算出积分结果也不能直接代入将来的完整振幅公式。我们已掌握圈图计算方法技巧（“渔”），这里就不再算积分的最终结果（“鱼”）了（主要是前辈没给出顶角修正的维数正规化最终结果，不知算的对否。但他们讨论红外发散时给出了，用的是 Pauli-Villars 正规化，我们将在 1.3.2 节用 Pauli-Villars 正规化给出顶角修正的最终结果）。

1.2.4.3 减除

1.抵消项

QED 的 Lagrange 量为

$$L=\bar\psi i\partial\psi-m\bar\psi\psi-e\bar\psi\gamma_\mu\psi A^\mu-\frac{1}{4}(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)^2-\frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2$$

正规化计算表明，该 Lagrange 量算出的高阶微扰存在发散项

$$\frac{\alpha}{2\pi\varepsilon}(4m-p)\,,\quad\frac{2\alpha}{3\pi\varepsilon}(k_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}k^2)\,,\quad\frac{\alpha\gamma_\mu}{2\pi\varepsilon}$$

这说明，该 Lagrange 量只适用于最低阶微扰（为低能有效理论），忽略了高阶效应。重整化就是要想法要引入能把这三个发散项抵消的 Lagrange 量：

$$L_Z=L+\delta L$$

$$=[1+\delta Z_2]\bar\psi i\partial\psi-[m+\delta m]\bar\psi\psi-[e+\delta e]\bar\psi\gamma_\mu\psi A^\mu-\frac{1+\delta Z_3}{4}[\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu]^2-\frac{\lambda}{2}[\partial\cdot A]^2$$

$$=Z_2\bar\psi i\partial\psi-Z_m m\bar\psi\psi-Z_1 e\bar\psi\gamma_\mu\psi A^\mu-\frac{1}{4}Z_3(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)^2-\frac{\lambda}{2}(\partial\cdot A)^2$$

其中 $Z_m m=m+\delta m$，$Z_1 e=e+\delta e$，$Z_2=1+\delta Z_2$，$Z_3=1+\delta Z_3$

这种能消去高阶发散的项 δL，称为**抵消项**。而待定常数 Z_m,Z_1,Z_2,Z_3 称为**重整化常数**。

对于关心基本理论的理想主义者，可重整性是一个理论正确的基本要求；对于关心有效理论

的实用主义者，是否可重整并不重要。张昊老师说，如果 Newton 定律只能预言粉笔扔出去落哪里，而不能预言杯子扔出去落哪里，那将是多么糟糕。所以，我们应努力寻求基本理论。

2.裸量

做变换 $\psi_B = Z_2^{1/2}\psi$， $A_B^\mu = Z_3^{1/2}A^\mu$， $m_B = Z_m Z_2^{-1} m$， $e_B = Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2} e$， $\lambda_B = Z_3^{-1}\lambda$，则

$$L_Z = Z_2\bar{\psi} i\partial\!\!\!/\psi - Z_m m\bar{\psi}\psi - Z_1 e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu - \frac{1}{4}Z_3(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)^2 - \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2$$

$$\to Z_2\frac{\bar{\psi}_B}{Z_2^{1/2}} i\partial\!\!\!/\frac{\psi_B}{Z_2^{1/2}} - Z_m\frac{m_B}{Z_m Z_2^{-1}}\frac{\bar{\psi}_B}{Z_2^{1/2}}\frac{\psi_B}{Z_2^{1/2}} - Z_1\frac{e_B}{Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2}}\frac{\bar{\psi}_B}{Z_2^{1/2}}\gamma_\mu\frac{\psi_B}{Z_2^{1/2}}\frac{A_B^\mu}{Z_3^{1/2}}$$

$$-\frac{1}{4}Z_3(\partial^\mu\frac{A_B^\nu}{Z_3^{1/2}} - \partial^\nu\frac{A_B^\mu}{Z_3^{1/2}})^2 - \frac{\lambda_B}{2Z_3^{-1}}(\partial_\mu\frac{A_B^\mu}{Z_3^{1/2}})^2$$

$$= \bar{\psi}_B i\partial\!\!\!/\psi_B - m_B\bar{\psi}_B\psi_B - e_B\bar{\psi}_B\gamma_\mu\psi_B A_B^\mu - \frac{1}{4}(\partial^\mu A_B^\nu - \partial^\nu A_B^\mu)^2 - \frac{\lambda_B}{2}(\partial_\mu A_B^\mu)^2 = L_B$$

这和本节开始时写的 Lagrange 量结构完全一致，只不过加上了角标 B（表示 bare，裸的）。所以，引入抵消项的效果，相当于旋量场 ψ 和矢量场 A 的重新归一化及质量 m 和电荷 e 的重新定义. 这些裸量与实验不符，因而是非物理的。但经过重整化后，成为实验上观测到的物理量。在 Ward 恒等式一节，我们说最低阶微扰 Green 函数为 $G_0 = \dfrac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} = i\Delta_F$，

考虑圈修正后的为 $G_2^c = \dfrac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon - \Sigma} = \dfrac{i}{p^2 - m_{phy}^2 + i\varepsilon}$，那时我们称 $m_{phy}^2 = m^2 + \Sigma$ 为物理质量，m 为裸质量而未解释，现在其物理意义明了了。

3.重整化常数的确定

明白了重整化的基本思路后，接下来就是确定引入抵消项时引入的待定常数，看看该常数为多少时可以消去发散项。

与（裸）Lagrange 量 $L = \bar{\psi} i\partial\!\!\!/\psi - m\bar{\psi}\psi - e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu - \dfrac{1}{4}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)^2 - \dfrac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2$ 相比，

抵消项 $\delta L = \delta Z_2\bar{\psi} i\partial\!\!\!/\psi - \delta m\bar{\psi}\psi - \delta e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu - \dfrac{1}{4}\delta Z_3[\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu]^2$ 相应各项只是各项系数发生变化，从一个常数变成另一个常数。

（1）顶角修正发散的消除

既然（裸）Lagrange 量给出相互作用顶角为 $-ie\gamma_\mu$，是将相互作用项 $-e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu$ 中场量（通过泛函微商）去掉，再乘以 i 的结果（裘忠平《现代量子场论导引》）。抵消项将 e 变成 δe，所以抵消项的顶点规则就是

 $= -i\delta e\gamma_\mu$

抵消项的作用就是使得正规顶角为有限值，所以满足如下方程：

$$-ie\Lambda_\mu = -ie[\Lambda_\mu^{(tree)} + \Lambda_\mu^{(1-loop)} + \Lambda_\mu^{(2-loop)} + \cdots] - ie\Lambda_\mu^{(counter-term)} = finite$$

因是逐级抵消，抵消项随微扰阶数而不同。对于单圈，有

$$-ie\gamma_\mu - ie\Lambda_\mu^{(1-loop)} - i\delta e\gamma_\mu = -ie\gamma_\mu - ie[\frac{\alpha\gamma_\mu}{2\pi\varepsilon} + \Lambda_F^{(2)}] - i\delta e\gamma_\mu = finite$$

其中 $\Lambda_F^{(2)}$ 为一圈顶角修正计算中不发散的项。这个方程的解为

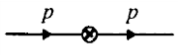
$$\delta e = -\frac{\alpha}{2\pi\varepsilon}e$$

相应重整化常数为

$$Z_1 = 1 + \frac{\delta e}{e} = 1 - \frac{\alpha}{2\pi\varepsilon}$$

（2）电子自能发散的消除

从顶角发散的减除可知，抵消项的规则是将 Lagrange 量 $\delta Z_2\bar{\psi}i\partial\psi - \delta m\bar{\psi}\psi$ 中场量通过泛函微商去掉再乘以 i，所以电子二线顶点的 Feynman 规则为



$$= i(\delta Z_2 i\partial - \delta m)$$

与顶角修正 Feynman 规则将 $e \to \delta e$ 不同，这里不能将 $m \to \delta m$，应为 $m \to -\delta m$，因为裸 Lagrange 量中 $\bar{\psi}i\partial\psi - m\bar{\psi}\psi$ 的身份是自由场，而抵消项中 $\delta Z_2\bar{\psi}i\partial\psi - \delta m\bar{\psi}\psi$ 的身份为一种新的相互作用。引入抵消项后，电子二线顶角成为有限的，满足方程

$$-i\Sigma = -iS_F^{-1} - i\Sigma^{(1-loop)} - i\Sigma^{(counter-term)} = finite$$

$$= -i(\not{p} - m) - i[\frac{\alpha}{2\pi\varepsilon}(4m - \not{p}) + \Sigma_F^{(2)}] + i(\delta Z_2\not{p} - \delta m)$$

其中 $\Sigma_F^{(2)}$ 为一圈电子自能计算中不发散的项。该方程的解为

$$\delta m = -\frac{2\alpha}{\pi\varepsilon}m, \quad \delta Z_2 = -\frac{\alpha}{2\pi\varepsilon}$$

相应重整化常数为

$$Z_m = 1 - \frac{2\alpha}{\pi\varepsilon}, \quad Z_2 = 1 - \frac{\alpha}{2\pi\varepsilon}$$

【解法二】如果大家对 $m \to -\delta m$ 而不是 $m \to \delta m$ 感到费解，还可以利用 Ward 恒等式一节导出的完全传播子关系式

$$\Gamma^{(2)}(p) = iG_0^{-1} - \Sigma = \begin{cases} \Delta_F^{-1} - \Sigma = p^2 - m^2 - \Sigma, & scalar \\ S_F^{-1} - \Sigma = \not{p} - m - \Sigma, & spinor \end{cases}$$

求解。这次我们让抵消项 $[1 + \delta Z_2]\bar{\psi}i\partial\psi - [m + \delta m]\bar{\psi}\psi$ 扮演修正的自由场（不再表示新的相互作用），则传播子变换为（Ryder's QFT）

$$S_F = \frac{1}{\not{p} - m} \to \frac{1}{(1 + \delta Z_2)\not{p} - (m + \delta m)}$$

可重整性要求给出的方程为

$$\Gamma^{(2)}(p)=iG_0^{-1}-\Sigma=(1+\delta Z_2)\not{p}-(m+\delta m)-[\frac{\alpha}{2\pi\varepsilon}(4m-\not{p})+\Sigma_F^{(2)}]=\ finite$$

采用最小减除方案，也就是抵消项只抵消极点项，故

$$\delta Z_2\not{p}-\delta m-\frac{\alpha}{2\pi\varepsilon}(4m-\not{p})=0$$

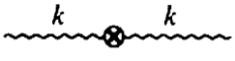
方程的解仍为$\delta m=-\frac{2\alpha}{\pi\varepsilon}m$， $\delta Z_2=-\frac{\alpha}{2\pi\varepsilon}$，重整化常数不变。

（3）光子自能发散的消除

讲“自由电磁场传播子”时，我们得到

$$-\frac{1}{4}[\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu]^2\to\frac{1}{2}A^\mu[g_{\mu\nu}\Box-\partial_\mu\partial_\nu]A^\nu=-\frac{1}{2}A^\mu[g_{\mu\nu}k^2-k_\mu k_\nu]A^\nu$$

所以$-\frac{1}{4}[\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu]^2$项的 Feynman 规则为$-\frac{1}{2}A^\mu[g_{\mu\nu}k^2-k_\mu k_\nu]A^\nu$通过泛函微商去掉场量再乘以 i：



$$=-i\delta Z_3(g^{\mu\nu}k^2-k^\mu k^\nu)$$

1/2 因子哪去了？被泛函微商消去了！A^2 导数为 2A.

可重整方程为

$$i\Pi_{\mu\nu}=-iD_{\mu\nu}^{-1}+i\Pi_{\mu\nu}^{(2)}-i\delta Z_3(g_{\mu\nu}k^2-k_\mu k_\nu)=\ finite$$

$$=-iD_{\mu\nu}^{-1}+i[\frac{2\alpha}{3\pi\varepsilon}(k_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}k^2)+\Pi_F^{(2)}]-i\delta Z_3(g_{\mu\nu}k^2-k_\mu k_\nu)$$

注意这里不能取 Feynman 规范（Ryder’s QFT）。最小减除要求

$$i\frac{2\alpha}{3\pi\varepsilon}(k_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}k^2)-i\delta Z_3(g_{\mu\nu}k^2-k_\mu k_\nu)=0$$

该方程解为

$$\delta Z_3=-\frac{2\alpha}{3\pi\varepsilon}$$

相应重整化常数为

$$Z_3=1-\frac{2\alpha}{3\pi\varepsilon}$$

4.重整化哲学诠释

马克思把由工人劳动创造、而被资本家无偿占有的称为剩余价值。剩余价值的大小等于在商品售价中扣除生产成本及工人工资后余下的利润。那些剩余价值，就相当于抵消项。没考虑到抵消项时，工资比工作的价值少很多。

窃钩者诛窃国者侯，小资本家只窃取工人剩余价值，美国总统还窃取那些资本家的剩余价值。若美国老板活不到 60 岁，他们养老金就成了总统的囊中之物。美国老板一定要锻炼好身体。

重整化告诉我们，质量、电荷可以重新定义，旋量与矢量波函数可以重新归一。所有的难题都是定义问题。你可以修改定义来获得任何想要的结果，不仅可以让 8+5=1（12 格钟算术），让所有自然数的和能等于-1/12 也是可以的（素数 p 进制）。

如将“幸福”定义为“拥有的多”，天下将有多少人活在阴影中；如将幸福定义为“计较的少”，世界将变得多么和谐。其实，我们何必在意钱多钱少。官大官小，没完没了。人比人得死，货比货得扔，何必和人比较？雨天可以卖伞，晴天可以卖盐，祸兮福之所倚。快乐也是一天，悲伤也是一天，既然如此，何必闷闷不乐呢？不妨吟啸且徐行，一蓑烟雨任平生。

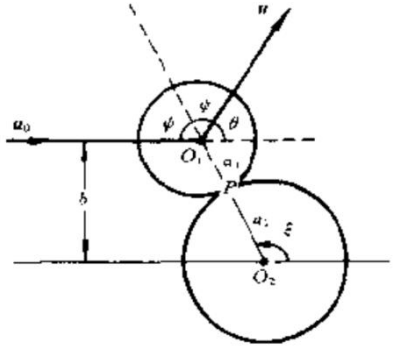
第 3 步　计算散射截面（70 分）

1.3.1　散射与衰变的概念

散射截面并非量子场论独有，我们先回顾下经典与量子力学的散射截面，再讨论场论。

1.经典力学（CM）

（1）二维平面碰撞



如图为两个刚盘（赵凯华. 新概念物理教程. 力学），大盘半径a_1，初态静止；小盘半径a_2，以速度u_0撞向大盘，运动方向与大盘盘心距离为 b（b=0 为对心碰撞，故 b 为偏离靶心距离，称为瞄准距离），碰后速度为 u，方向与初速夹角θ；碰撞是完全弹性的，入射角与反射角都是ψ，入射方向与盘心连线的夹角$\xi=\theta+\psi=\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}$；于是

$$b=(a_1+a_2)\sin\xi=a\sin(\theta+\psi)=a\cos\frac{\theta}{2}$$

如果瞄准距离 b 改变一微小量 db，则散射角也会随之变化。一般地，有

$$db=-\frac{a}{2}\sin\frac{\theta}{2}d\theta$$

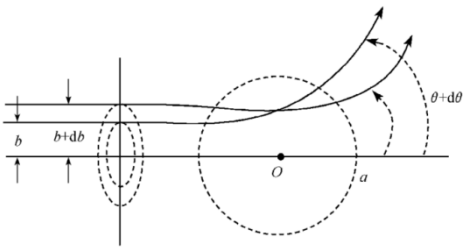
单位时间通过单位长度的粒子中，总粒子数 j（粒子数密度），被散射粒子数为 dn=jdb，故被散射的概率为
dn/j=db；被散射到单位角度的概率为

$$\frac{dn}{jd\theta}=\frac{db}{d\theta}=-\frac{a}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

它具有长度的量纲，可称为“散射截线”。在三维，它将具有面积的量纲（平面角变成立体角），成为“散射截面”。

（2）三维空间碰撞

如图[3]，中心场力程为 A（或半径 a 的刚球），瞄准距离为 b~b+db 粒子（撞到刚球上改变方向）在势场中散射到$\theta\sim\theta+d\theta$.



设入射粒子流密度为 j（单位时间通过单位面积的粒子数），则单位时间通过环形面积的粒子数为 $dn = j \cdot 2\pi b db$，散射到 $\theta \to \theta + d\theta$ 范围的粒子数为

$$dn' = j \cdot \sigma(\theta) d\Omega = j \cdot \sigma(\theta) 2\pi \sin\theta d\theta$$

由粒子数守恒可得

$$2\pi b db = \sigma(\theta) 2\pi \sin\theta d\theta$$

单位时间通过单位面积粒子中被散射粒子数 dn，总粒子数 j（粒子数密度），被散射概率为

$$d\sigma = \frac{dn}{j}$$

它具有面积的量纲，称为微分散射截面。被散射到单位立体角中的概率为

$$\sigma(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b db}{\sin\theta d\theta}$$

总散射截面为

$$\sigma_t = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sigma(\theta) \sin\theta d\theta = 2\pi \int_0^{a} b db = \pi a^2$$

2.量子力学（QM）

当入射粒子能量较低时，碰前是什么粒子，碰后还是什么粒子，粒子数是守恒的，只不过碰撞前后各个粒子的能量、动量变了。这时不必考虑相对论效应。

（1）三种绘景

(a)薛定谔绘景

$$H_S = H_{0S} + H'_S$$

通常将角标 S 省略。其中 H_0 不显含时间，H' 看成微扰。

$$\left|\psi_S(t)\right\rangle = U_S(t,t_0)\left|\psi_S(t_0)\right\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H_S(t-t_0)}\left|\psi_S(t_0)\right\rangle$$

(b)相互作用绘景

相互作用绘景与薛定谔绘景的变换关系为（汪德新. 量子力学. 第三版.）

$$\left|\psi_I(t)\right\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}H_{S0}t}\left|\psi_S(t)\right\rangle,\quad F_I(t) = e^{\frac{i}{\hbar}H_{S0}t} F_S e^{-\frac{i}{\hbar}H_{S0}t}$$

（2）含时微扰论

(a)本征态展开

在薛定谔绘景，将 H 的本征函数 $\left|\psi(x,t)\right\rangle$ 按 H_0 的本征函数 $\left|\psi_k^0(x)\right\rangle$ 展开为（汪德新）

$$\left|\psi(x,t)\right\rangle=\sum_k c_k(t)\left|\psi_k^0(x)\right\rangle$$

利用时间演化算符，将薛定谔绘景转换为相互作用绘景，有

$$c_k(t)=\left\langle\psi_k^0(x)\middle|\psi(x,t)\right\rangle=\left\langle\psi_k^0(x)\middle|e^{-\frac{i}{\hbar}H_{0S}t}\middle|\psi_I(t)\right\rangle=e^{-\frac{i}{\hbar}E_k^0t}\left\langle\psi_k^0(x)\middle|\psi_I(t)\right\rangle=a_k(t)e^{-\frac{i}{\hbar}E_k^0t}$$

$$\left|\psi(x,t)\right\rangle=\sum_k a_k(t)e^{-\frac{i}{\hbar}E_k^0t}\left|\psi_k^0(x)\right\rangle=\sum_k a_k(t)\left|\psi_k^0(x,t)\right\rangle$$

(b)概率幅

$$a_m(t)=a_m^{(0)}(t)+a_m^{(1)}(t)=\delta_{mn}-\frac{i}{\hbar}\int_0^t H'_{mn}e^{\frac{i}{\hbar}(E_m-E_n)t'}dt'$$

$$H'_{mn}=\int d^3x\left\langle\psi_m^0\middle|H'\middle|\psi_n^0\right\rangle$$

也有的书用 S 矩阵和 T 矩阵表示，如张永德《高等量子力学》【S 矩阵相当于量子力学中的 $a_m(t)$，R 矩阵相当于量子力学中的 H'_{mn} 】。如果积分上下限变成无穷，则

$$\int e^{\frac{i}{\hbar}(E_m^0-E_n^0)t}dt=2\pi\hbar\delta(E_m^0-E_n^0)$$

(c)跃迁概率

$$W_{n\to m}=\left|a_m(t)\right|^2$$

(d)跃迁速率

$$\omega_{n\to m}=\frac{dW_{n\to m}}{dt}=\frac{2\pi}{\hbar}\left|H'_{mn}\right|^2\delta(E_m^0-E_n^0)$$

(e)概率密度（费米黄金规则）

$$\omega=\int\omega_{n\to m}\rho(E_m^0)dE_m^0=\frac{2\pi}{\hbar}\rho(E_m^0)\left|H'_{mn}\right|^2\Leftrightarrow\frac{2\pi}{\hbar}\rho(E_m^0)\left|T_{fi}\right|^2$$

（3）弹性散射

(a)微分散射截面

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\omega}{j}=\frac{\omega}{v/V}$$

其中入射粒子流密度 j=v/V（王正行），v 为速度，V 为体积。

(b)分波法与玻恩近似

要计算散射截面，必须给出具体的波函数。实际情况很复杂，要进行各种近似处理才能算出。低能散射常用分波法【但与经典物理计算结果不同：以刚球为例，经典力学总截面为 πa^2，相当于投影面积；量子力学为 $4\pi a^2$，相当于表面积（障碍物尺寸 a 小于入射波波长，发生衍射），见汪德新量子力学】；对于高能散射（当然量子力学要满足粒子数守恒，如果有粒子产生湮灭，应采用量子场论），常用玻恩近似。这个问题已经讨论得很清楚了，不再赘述。

3.量子场论（QFT）

当入射粒子能量较高时，碰撞前后粒子数一般不守恒，有粒子产生湮灭。这时必须使用相对论。然而作为粒子理论的相对论量子力学是不自洽的，必须引入场的概念，使用量子场论（张永德. 高等量子力学. 下）。那么，相对论散射与非相对论散射符号表述上有何不同？相对论将空间和时间统一为 4 维时空，所有物理量都改成了 Lorentz 协变的形式；采用自然单位制.

（1）散射矩阵与不变振幅

(a)时间演化算符

为简便，以下省略相互作用绘景角标 I. 设 $H = H_0 + H'$，由

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(t) = H'(t)\psi(t)，\ U(t,t_0)\psi(t_0) = \psi(t)$$

可得

$$i\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0) = H'U(t,t_0)$$

初始条件$U(t_0,t_0)=1$. 该微分方程可化为积分方程（周邦融. 量子场论.）

$$U(t,t_0) = 1 - i\int_{t_0}^{t} dt_1 H'(t_1)U(t_1,t_0)$$

设 $H'(t) = \int d^3x\mathcal{H}'(x)$，依次迭代，可得

$$U(t,t_0) = T\exp\left[-i\int_{t_0}^{t} d^4x\mathcal{H}'(x)\right]$$

此处 T 为时序算符。

(b)散射矩阵

$$\begin{aligned} S = U(\infty,-\infty) &= T\exp\left[-i\int_{t_0}^{t} d^4x\mathcal{H}'(x)\right] \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1\cdots\int_{-\infty}^{\infty} d^4x_n T[\mathcal{H}'(x_1)\cdots\mathcal{H}'(x_n)] \end{aligned}$$

此处 S 为散射算符【S 矩阵相当于量子力学中的$a_k(t)$】。各书中，此式基本一致，不再赘述。

(c)反应矩阵

对一阶微扰

$$S = 1 - i\int_{-\infty}^{\infty} d^4x\mathcal{H}'(x) = 1 + iR$$

此处 R 为反应算符（见周邦融；Fayyazuddin《A Modern Introduction to Particle Physics》3ed；Quang H K《Elementary Particles and Their Interactions》；Ryder、Peskin 用 T 表示 R），$R_{fi} = -\langle f|\mathcal{H}'|i\rangle$ 为反应矩阵（Fayyazuddin；注意与习惯的 iT 矩阵定义差 $-i(2\pi)^4\delta(p_f - p_i)$），【R 矩阵相当于量子力学中的$H'_{mn}$】。

(d)不变振幅

定义

$$\langle p_1' p_2' \cdots p_n' | iR | p_1 p_2 \rangle = (2\pi)^4 \delta^4 (\sum_{i=1}^{n} p_i' - p_1 - p_2) i M_{fi}$$

其中 M 为 Lorentz 不变振幅（Srednicki 用 T，Fayyazuddin 用 F 表示 M）。

（2）跃迁

(a)本征态展开

我们以标量场为例进行计算。场量可用动量本征态展开为（Ryder，Quang H K）

$$|\phi\rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E} \phi(p) | p \rangle = \int \tilde{d} p \phi(p) | p \rangle$$

波浪线是为协变的要求（周邦融，Ryder 用 p_0 或 p^0 表示 E，王正行用 ω 表示）。则入射态为

$$|i\rangle = |\phi_1\rangle |\phi_2\rangle = \int \tilde{d} p_1 \tilde{d} p_2 \phi(p_1) \phi(p_2) | p_1 p_2 \rangle$$

而出射态为（Ryder）

$$| f \rangle = | p_1' p_2' \cdots p_n' \rangle$$

注意，根据量子力学的经验，出射态无需展开。于是，反应矩阵可写为

$$R_{fi} = \langle f | R | i \rangle = \int \tilde{d} p_1 \tilde{d} p_2 \phi(p_1) \phi(p_2) \langle p_1' p_2' \cdots p' | R | p_1 p_2 \rangle$$

$$= (2\pi)^4 \int \tilde{d} p_1 \tilde{d} p_2 \phi(p_1) \phi(p_2) \delta^4 (\sum_{i=1}^{n} p_i' - p_1 - p_2) M_{fi}$$

(b)跃迁概率

据量子力学经验，跃迁概率应是反应矩阵模方（Ryder；非 S 矩阵平方；周邦融用 ω_{fi} 或 Ω_{fi} ）：

$$W_{fi} = |R_{fi}|^2 =$$

$$(2\pi)^4 \int \tilde{d} k_1 \tilde{d} k_2 \phi^*(k_1) \phi^*(k_2) \tilde{d} p_1 \tilde{d} p_2 \phi(p_1) \phi(p_2) (2\pi)^4 \delta^4(0) \delta^4 (\sum_{i=1}^{n} p_i' - p_1 - p_2) |M_{fi}|^2$$

(c)时空体积

因为 $p_1 + p_2 = q_1 + q_2$，有

$$(2\pi)^4 \delta^4(0) = \int d^4 x e^{i(p_1 + p_2 - q_1 - q_2)x} = VT$$

(d) Fourier 变换

根据 Fourier 逆变换（Ryder）

$$\int \tilde{d} p \phi(p) e^{ipx} = \psi(x)$$

于是

$$W_{fi} = |R_{fi}|^2 = (2\pi)^4 \int d^4 x |\psi_1(x)|^2 |\psi_2(x)|^2 \delta^4 (\sum_{i=1}^{n} p_i' - p_1 - p_2) |M_{fi}|^2$$

(e)末态相空间

此式对于初末态为分立本征值时成立，然而我们选的平面波态有连续的动量本征值，所以还必须乘以末态粒子相空间的态数（周邦融），于是

$$W=\left|R_{fi}\right|^2\prod_{f=1}^{n}\frac{d^3p'_f}{(2\pi)^3 2E'_f}=\int d^4x\left|\psi_1(x)\right|^2\left|\psi_2(x)\right|^2\left|M_{fi}\right|^2 d\Phi_n$$

郑汉青中用 P 表示 W. 其中

$$d\Phi_n=\prod_{f=1}^{n}\frac{d^3p'_f}{(2\pi)^3 2E'_f}(2\pi)^4\delta^4(\sum_{i=1}^{n}p'_i-p_1-p_2)$$

为末态相空间积分（Quang H K 粒子 3 始编号，郑汉青、Peskin 用 $d\Pi_n$，肖振军少 $(2\pi)^4$）

(f)单位时空跃迁率

单位时空的跃迁率为

$$P=\frac{dW}{dVdt}=\left|\psi_1(x)\right|^2\left|\psi_2(x)\right|^2\left|M_{fi}\right|^2 d\Phi_n$$

（3）散射截面

(a)粒子数密度

设 $\psi(x)=e^{-ipx}=e^{-i(Et-\vec{p}\cdot\vec{x})}$，类似量子力学的做法（为了协变性，定义略有不同），可得

$$j_\mu=i\psi^*\overleftrightarrow{\partial}_\mu\psi=i(\psi^*\partial_\mu\psi-\psi\overleftrightarrow{\partial}_\mu\psi^*)$$

可得粒子数密度（Ryder，Quang H K）

$$\rho=j_0=2E\left|\psi(x)\right|^2$$

其“密度”概念可从归一化条件看出（周邦融）：

$$\left\langle p\middle| p\right\rangle=(2\pi)^3\delta^3(p-p)2E=2E\int d^3x=2EV$$

(b)微分散射截面

微分散射截面为

$$d\sigma=\frac{P}{j\rho_2}=\frac{P}{v_{12}\rho_1\rho_2}=\frac{\left|M\right|^2 d\Phi_n}{2E_1 2E_2 v_{12}}=\frac{\left|M\right|^2}{4F}d\Phi_n$$

其中 v_{12} 为 1 相对 2 粒子的速度（周邦融；郑汉青；Quang H K ；Peskin；Fayyazuddin 用 p/E 表示速度），$j=v\rho$ 可类比电流密度 $j=nev$（n 为电子数密度）。因归一化定义不同，粒子数密度计算千差万别。王正行认为，数密度就是体积的倒数 1/V.这样，从跃迁概率（郑汉青）

$W=\frac{d\sigma\cdot v_{12}T}{V}$ 也可得微分截面 $d\sigma=\frac{WV}{v_{12}T}=\frac{W}{VT}\frac{V^2}{v_{12}}=P\frac{1}{v_{12}\frac{1}{V}\frac{1}{V}}=P\frac{1}{v_{12}\rho_1\rho_2}$，注意此处 VT 相应于前面的 dVdt.

(c)流因子

$$F = E_1 E_2 v_{12} = |\vec{p}_1| m_2 = \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} = \left|\vec{k}_1\right|_{CM} \sqrt{s}$$

为流因子（Quang H K；Ryder 用 B 表示 F），角标 CM 表示质心系（Srednicki，或动量中心系）。

(d)归一化系数

另一方面，多数书将归一化系数的一部分吸收到不变振幅 M 中（Greiner QED），也有的书将归一化系数单独写出来（周邦融，Fayyazuddin.）：

$$N = \left[\frac{1}{\sqrt{V}}\right]^{n+m} \quad N_0 = \left[\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\right]^{n+m} \left(\prod_r \sqrt{\frac{m_r}{E_r}}\right)\left(\prod_s \sqrt{\frac{1}{2E_s}}\right)$$

其中 m 和 n 分别为初态和末态粒子数，s 和 r 分别为玻色子和费米子数【根据平面波态归一化（周邦融），应区分费米子质量，有质量费米子对相空间计数影响与玻色子不同，无质量费米子则相同】，$V = L^3$ 是取周期性边界条件和箱归一化的结果。

(e)全同粒子

考虑到全同粒子（a 个），散射截面还需乘以对称因子 $S = \prod_a \frac{1}{l_a!}$（Quang H K；周邦融、郑汉青用 m；Srednicki 用 n；Greiner QED 用 g 表示 l）.

（4）衰变宽度（衰变率）

对于衰变问题，只需将流因子改一改即可（Quang H K；Peskin）

$$d\Gamma = \frac{P}{\rho} = \frac{|M|^2}{2E} d\Phi_n = \frac{|M|^2}{2m} d\Phi_n$$

$$d\Phi_n = \prod_{f=1}^{n} \frac{d^3 p'_f}{(2\pi)^3 2E'_f} (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_{i=1}^{n} p'_i - p_1 - p_2\right)$$

此处没有 2 粒子，只剩 $\rho_1 = \rho$，而 ρ_2 消失；取初态粒子静止系，v_{12} 也消失，$E_1 = E = m$，其中 m 为初态粒子不变质量。

衰变宽度的倒数即为粒子寿命。

1.3.2 例题示范

前面几课，我们从 Lagrange 量计算生成泛函，对生成泛函求泛函导数得出关联函数，然后将关联函数用 Feynman 图表示。这是在学习阶段走的路。实际工作时，路径有所不同：先根据所讨论的物理过程画出拓扑不等价的 Feynman 图，再根据 Feynman 规则写出散射振幅，最后将散射振幅平方、对相空间积分，算出散射截面。也就是说，只要 Feynman 规则已经事先导出，那么以后就不必再重复“构造 Lagrange 量”“计算 Green 函数”这些中间过程了。具体说来，因为 QED 的 Feynman 规则已经导出，以后再计算 QED 过程（不论 Compton 散射、正负电子湮灭，抑或其他），只要画图，从图中读出矩阵元，然后将矩阵元平方即可。

当然，如果计算超出 QED 的过程，比如手征微扰论，其 Feynman 规则尚不清楚，那么应该先构造手征 Lagrange 量，推导手征 Feynman 规则；拿到 Feynman 规则后，再将 Lagrange 量和推导 Feynman 规则的中间过程都忘掉，直接从物理过程出发画图，读出 S 矩阵元，计算振幅和截面。

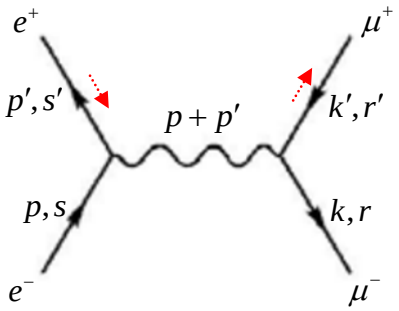
现在，让我们忘掉 Lagrange 量，忘掉关联函数，忘掉 S 矩阵约化，只记得 Feynman 规则，直接讨论 QED 过程。

回到最初那道题：论正负电子湮灭产生轻子对儿 $e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-$ 散射截面，到单圈水平。

其骨架图（树图）是最简单的，因为只有一个道，其他一般有 s、t、u 三个道（即使 $e^+ + e^- \to e^+ + e^-$ 也有交叉道）。

1.3.2.1 过程图

我们只计算树图和末态粒子顶角修正，主要参考郑汉青《量子场论》上册。
树图（骨架图）为

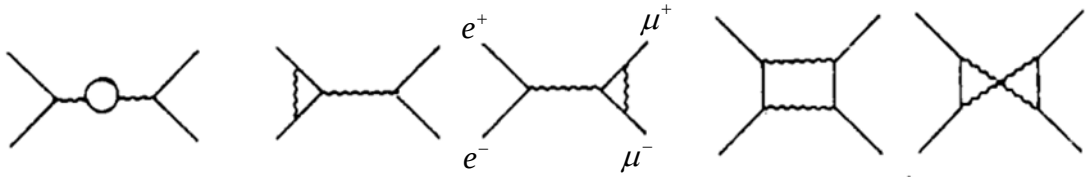


相应于树图的矩阵元为

$$iM_0 = \bar{u}(\vec{k}, r)(-ie\gamma^\nu)v(\vec{k}', r')\frac{-ig_{\mu\nu}}{(p+p')^2}\bar{v}(\vec{p}', s')(-ie\gamma^\mu)u(\vec{p}, s)$$

$$\xrightarrow{s_{12}=(p+p')^2} i\frac{e^2}{s_{12}}\bar{u}(\vec{k}, r)\gamma^\mu v(\vec{k}', r')\bar{v}(\vec{p}', s')\gamma_\mu u(\vec{p}, s)$$

单圈辐射修正图为（Kinoshita's QED）



相应于单圈图中末态顶角修正图(c)的矩阵元为

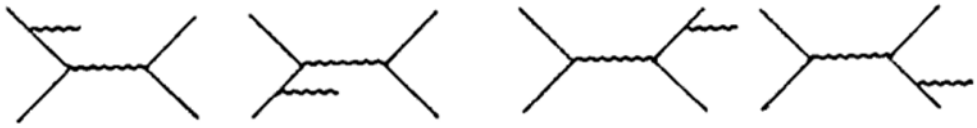
$$iM_{vertex} = i\frac{e^2}{q^2}\bar{u}(\vec{k})\Gamma^\mu v(\vec{k}')\bar{v}(\vec{p}')\gamma_\mu u(\vec{p}) = i\frac{e^2}{q^2}\bar{u}(\vec{k})[\gamma^\mu + \delta\Gamma^\mu]v(\vec{k}')\bar{v}(\vec{p}')\gamma_\mu u(\vec{p})$$

其中 $q = k - k'$. 这里与王正行差一负号。需要特别注意的是：

$$iM_\Gamma = i\frac{e^2}{q^2}\bar{u}(\vec{k})[\delta\Gamma^\mu]v(\vec{k}')\bar{v}(\vec{p}')\gamma_\mu u(\vec{p}) \neq i\frac{e^2}{q^2}\bar{u}(\vec{k})[\Gamma^\mu]v(\vec{k}')\bar{v}(\vec{p}')\gamma_\mu u(\vec{p})$$

郑汉青的书这个地方将二者混为一谈，不适合初学者看。

外线粒子因在壳条件，其圈修正（此处为轻子自能）可忽略（Greiner's QED）。虽然虚修正可忽略，但可以考虑实修正（发射可见光子）：



但这 4 图非 $e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-$，而是 $e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^- + \gamma$ 及 $e^+ + e^- + \gamma \to \mu^+ + \mu^-$.

1.3.2.2 矩阵元

$$M = M_{tree} + M_{1-loop} + \cdots \to M_0 + (M_\Gamma + \cdots)_{1-loop} + \cdots$$

1.振幅表达式

树图已很清楚了，圈图的顶角函数尚未明了。为写出它的具体形式，先证明 **Gordon 恒等式**：

$$\bar{u}(\vec{p}')\gamma^\mu u(\vec{p}) = \bar{u}(\vec{p}')[\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}]u(\vec{p})$$

证明：由 Dirac 方程 $(\not{p} - m)u(p) = 0$，可推出

$$\gamma^\mu m u(p) = \gamma^\mu[\gamma^\nu p_\nu u(p)] = \frac{1}{2}[\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu]p_\nu u(p)$$

$$= \frac{1}{2}[2g^{\mu\nu} - 2i\sigma^{\mu\nu}]p_\nu u(p) = [p^\mu - i\sigma^{\mu\nu}p_\nu]u(p)$$

同理，$\bar{u}(p')(\not{p}' - m) = 0$ 推出

$$\bar{u}(p')m\gamma^\mu = \bar{u}(p')[p'^\mu + i\sigma^{\mu\nu}p'_\nu]$$

第一式左乘 $\bar{u}$，加上第二式右乘 u，得

$$2m\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p')[(p'^\mu + p^\mu) + i\sigma^{\mu\nu}(p'_\nu - p_\nu)]u(p)$$

令动量转移为 $p' - p = q$，两边除以 2m 即为 Gordon 恒等式。证毕。

将 Gordon 恒等式移项可见，$p' + p$ 等于树图顶点 γ^μ 与 $p' - p$ 的叠加。单圈顶角也是 p', p 的函数，所以顶角函数可写为树图顶点 γ^μ 与 $p' - p$ 的组合：

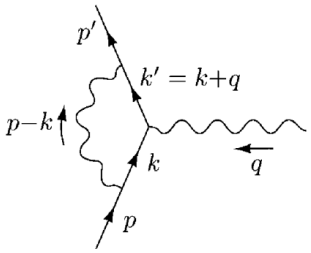
$$\Gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}F_2(q^2)$$

组合系数中的 $F_1(q^2), F_2(q^2)$ 可称为**形状因子**。树图顶角为 1 个点，没有形状，不应该是 q

的函数，所以第二项应该消失，第一项为常数。
利用 Gordon 恒等式导出的用形状因子表达的顶角函数，可将圈图振幅具体化为

$$iM_\Gamma = i\frac{e^2}{q^2}\bar{u}(\vec{k})[\gamma^\mu F_1(q^2) - \gamma^\mu + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}F_2(q^2)]v(\vec{k}')\bar{v}(\vec{p}')\gamma_\mu u(\vec{p})$$

2.顶角函数化简
由此式可见，关键在与顶角函数的计算。这个前面讨论过了，但用的是维数正规化方法。这里既有紫外发散又有红外发散，我们可以用维数正规化，但为与其他人比较，我们采用 Pauli-Villars 正规化处理紫外发散，并通过给光子一个小质量来处理红外发散。顶角函数如图：



根据 Feynman 规则，可写出一圈顶角（Peskin's QFT）：

$$\bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu(p,p')u(p) = \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{-ig_{\nu\rho}}{(k-p)^2}\bar{u}(p')(-ie\gamma^\nu)\frac{i(\not{k}'+m)}{k'^2-m^2}\gamma^\mu\frac{i(\not{k}+m)}{k^2-m^2}(-ie\gamma^\rho)u(p)$$

$$= -ie^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\bar{u}(p')[\gamma^\nu(\not{k}'+m)\gamma^\mu(\not{k}+m)\gamma_\nu]u(p)}{(k-p)^2(k'^2-m^2)(k^2-m^2)}$$

（1）分母与分子的处理（引入 xyz）
分母可用 Feynman 参数折叠为

$$\frac{1}{(k-p)^2(k'^2-m^2)(k^2-m^2)} = \int dxdydz\delta(x+y+z-1)\frac{2}{D^3}$$

$$\begin{aligned}
&D = (k-p)^2z + (k'^2-m^2)y + (k^2-m^2)x \\
&\xrightarrow{k'=k+q} k^2z + p^2z - 2pkz + (k+q)^2y + k^2x - m^2(x+y) \\
&= k^2(x+y+z) + 2k(qy-pz) + q^2y + p^2z - m^2(x+y) \\
&\xrightarrow{x+y+z=1} (k+qy-pz)^2 - (qy-pz)^2 + q^2y + p^2z - m^2(x+y) \\
&\xrightarrow{l=k+qy-pz} l^2 + 2pqyz + q^2(y-y^2) + p^2(z-z^2) - m^2(x+y) \\
&= l^2 + [(p+q)^2 - p^2 - q^2]yz + q^2(y-y^2) + p^2(z-z^2) - m^2(x+y) \\
&\xrightarrow{p^2=m^2=p'^2=(p+q)^2} l^2 + q^2(y-y^2-yz) + m^2(z-z^2-x-y) \\
&\xrightarrow{x+y+z=1} l^2 + q^2[y-y^2-y(1-x-y)] + m^2(z-z^2+z-1) \\
&= l^2 + q^2xy - m^2(1-z)^2 = l^2 - \Delta
\end{aligned}$$

其中 $l = k + yq - zp$， $\Delta = -xyq^2 + (1-z)^2m^2$

分子看似简单，实则复杂。我们分两步算。
(a)Gamma 矩阵的处理
根据维数正规化一节证过的 d 维 Gamma 矩阵公式

$$\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_\nu=-(d-2)\gamma^\mu,\quad \gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\nu=4g^{\rho\sigma}-(4-d)\gamma^\rho\gamma^\sigma$$

$$\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma_\nu=-2\gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\rho+(4-d)\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\sigma$$

取 d=4，得

$$N^\mu=\gamma^\nu(\not k'+m)\gamma^\mu(\not k+m)\gamma_\nu=\gamma^\nu\not k'\gamma^\mu\not k\gamma_\nu+m[\gamma^\nu\not k'\gamma^\mu\gamma_\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu\not k\gamma_\nu]+m^2\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_\nu$$
$$=-2\gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\rho k'_\rho k_\sigma+4m(g^{\rho\mu}k'_\rho+g^{\mu\sigma}k_\sigma)-2m^2\gamma^\mu=-2[\not k\gamma^\mu\not k'-2m(k+k')^\mu+m^2\gamma^\mu]$$

分子要遗传分母的特征，分母做了 $l=k+yq-zp$ 变换，所以

$$N^\mu\xrightarrow[k'=k+q]{k=l-yq+zp}-2\{[\not l-y\not q+z\not p]\gamma^\mu[\not l-y\not q+z\not p+\not q]-2m[2(l-yq+zp)+q]^\mu+m^2\gamma^\mu\}$$
$$\xrightarrow{l\text{奇次幂积分=0}}-2\{\not l\gamma^\mu\not l+[-y\not q+z\not p]\gamma^\mu[\not q-y\not q+z\not p]-2m[q-2yq+2zp]^\mu+m^2\gamma^\mu\}$$
$$=-2\{-\frac{1}{2}l^2\gamma^\mu+[-y\not q+z\not p]\gamma^\mu[\not q-y\not q+z\not p]-2m[q^\mu-2yq^\mu+2zp^\mu]+m^2\gamma^\mu\}$$

其中利用了 $\not l\gamma^\mu\not l=l_\rho\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\sigma l_\sigma=\frac{1}{4}g_{\rho\sigma}g^{\rho\sigma}l_\rho\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\sigma l_\sigma=\frac{1}{4}l^\sigma l_\sigma\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma_\rho=-\frac{1}{2}l^2\gamma^\mu$

特别注意：这里的度规张量不能任意选取，如果选择 $g_{\rho\mu}g^{\rho\mu}$ 将得出错误结果！

(b)旋量的处理

这一步的计算特别繁琐易错，所以先要明确目标：

$$\bar u(p')N^\mu u(p)=A\gamma^\mu+B(p'^\mu+p^\mu)+Cq^\mu$$

根据 Dirac 方程有 $\not p u(p)=mu(p)$，$\bar u(p')\not p'=\bar u(p')m$，可代入 $q=p'-p$ 化简：

$$\bar u(p')[-y(\not p'-\not p)+z\not p]\gamma^\mu[(1-y)(\not p'-\not p)+z\not p]u(p)$$
$$\xrightarrow{Dirac\text{方程}}\bar u(p')[-y(m-\not p)+z\not p]\gamma^\mu[(1-y)(\not p'-m)+zm]u(p)$$
$$\xrightarrow{x+y+z=1}\bar u(p')[(1-x)\not p-my]\gamma^\mu[(1-y)\not p'-mx]u(p)$$
$$=\bar u(p')[(1-x)(1-y)\not p\gamma^\mu\not p'+m^2xy\gamma^\mu-mx(1-x)\not p\gamma^\mu-my(1-y)\gamma^\mu\not p']u(p)$$
$$\xrightarrow{2\gamma,3\gamma\text{置换}}\bar u(p')\{(1-x)(1-y)(2g^{\mu\sigma}\gamma^\rho-2g^{\rho\sigma}\gamma^\mu+2g^{\rho\mu}\gamma^\sigma-\gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\rho)p_\rho p'_\sigma$$
$$+m^2xy\gamma^\mu-mx(1-x)(2p^\mu-\gamma^\mu\not p)-my(1-y)(2p'^\mu-\not p'\gamma^\mu)\}u(p)$$
$$\xrightarrow{Dirac\text{方程}}\bar u(p')\{(1-x)(1-y)[2m(p'^\mu+p^\mu)+(q^2-3m^2)\gamma^\mu]$$
$$+m^2xy\gamma^\mu-mx(1-x)(2p^\mu-\gamma^\mu m)-my(1-y)(2p'^\mu-m\gamma^\mu)\}u(p)$$
$$=\bar u(p')\{(1-x)(1-y)q^2\gamma^\mu+m^2\gamma^\mu[xy+x(1-x)+y(1-y)-3(1-x)(1-y)]$$
$$+2mp^\mu[(1-x)(1-y)-x(1-x)]+2mp'^\mu[(1-x)(1-y)-y(1-y)]\}u(p)$$
$$\xrightarrow[3(1-x)(1-y)\text{拆成3个再因式分解}]{x+y+z=1}\bar u(p')\{(1-x)(1-y)q^2\gamma^\mu-m^2\gamma^\mu[(1-x)+(1-y)+1]z$$
$$+2mp^\mu(1-x)z+2mp'^\mu(1-y)z\}u(p)$$
$$=\bar u(p')\{(1-x)(1-y)q^2\gamma^\mu-m^2\gamma^\mu z(z+2)+2mp^\mu z(1-x)+2mp'^\mu z(1-y)\}u(p)$$

其中标红的部分是要特别小心的，推导它的过程利用了 $\not p\gamma^\mu=2p^\mu-\gamma^\mu\not p$ 及

$$\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\sigma=\gamma^\rho(2g^{\mu\sigma}-\gamma^\sigma\gamma^\mu)=2g^{\mu\sigma}\gamma^\rho-\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu=2g^{\mu\sigma}\gamma^\rho-(2g^{\rho\sigma}-\gamma^\sigma\gamma^\rho)\gamma^\mu$$
$$=2g^{\mu\sigma}\gamma^\rho-2g^{\rho\sigma}\gamma^\mu+\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\mu=2g^{\mu\sigma}\gamma^\rho-2g^{\rho\sigma}\gamma^\mu+2g^{\rho\mu}\gamma^\sigma-\gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\rho$$

$$\bar u(p')\not p\gamma^\mu\not p' u(p)=\bar u(p')(2g^{\mu\sigma}\gamma^\rho-2g^{\rho\sigma}\gamma^\mu+2g^{\rho\mu}\gamma^\sigma-\gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\rho)p_\rho p'_\sigma u(p)$$
$$\xrightarrow{Dirac方程}\bar u(p')(2p'^\mu m-2p\cdot p'\gamma^\mu+2p^\mu m-m^2\gamma^\mu)u(p)$$
$$=\bar u(p')\{2m(p'^\mu+p^\mu)+[(p'-p)^2-p'^2-p^2]\gamma^\mu-m^2\gamma^\mu\}u(p)$$
$$\xrightarrow[p'^2=m^2=p^2]{q=p'-p}\bar u(p')[2m(p'^\mu+p^\mu)+(q^2-3m^2)\gamma^\mu]u(p)$$

所以（别忘了我们的目标$\bar u(p')N^\mu u(p)=A\gamma^\mu+B(p'^\mu+p^\mu)+Cq^\mu$）

$$\bar u(p')N^\mu u(p)=-2\bar u(p')\{-\frac{1}{2}l^2\gamma^\mu+[(1-x)(1-y)q^2\gamma^\mu-m^2\gamma^\mu z(z+2)$$
$$+2mp^\mu z(1-x)+2mp'^\mu z(1-y)]-2m[q^\mu-2yq^\mu+2zp^\mu]+m^2\gamma^\mu\}u(p)$$
$$=-2\bar u(p')\{\gamma^\mu[-\frac{1}{2}l^2+(1-x)(1-y)q^2+m^2(1-2z-z^2)]$$
$$+p'^\mu m[2z(1-y)-2(1-2y)]+p^\mu m[2z(1-x)+2(1-2y)-4z]\}u(p)$$
$$=-2\bar u(p')\{\gamma^\mu[-\frac{1}{2}l^2+(1-x)(1-y)q^2+m^2(1-2z-z^2)]$$
$$+(p'^\mu+p^\mu)mz(z-1)+q^\mu m(z-2)(x-y)\}u(p)$$

其中最后一步的证明技巧性很强（式式看来皆是血，“显然”“易证”不寻常）：

$$p'[2z(1-y)-2(1-2y)]+p[2z(1-x)+2(1-2y)-4z]$$
$$=p'[-2yz+2z+4y-2]+p[-2xz-2z-4y+2]$$
$$=p'[2y^2+2xy-2x]+p[2x^2+2xy-2y]$$
$$=p'[2y(x+y)-(x+y+x-y)]+p[2x(x+y)-(x+y-x+y)]=$$
$$p'[(x+y-x+y)(x+y)-(x+y+x-y)]+p[(x+y+x-y)(x+y)-(x+y-x+y)]$$
$$=p'[(x+y)(x+y)-(x+y)-(x-y)-(x-y)(x+y)]$$
$$+p[(x+y)(x+y)-(x+y)+(x-y)+(x-y)(x+y)]$$
$$=p'[(x+y)(x+y-1)-(x-y)(x+y+1)]+p[(x+y)(x+y-1)+(x-y)(x+y+1)]$$
$$=p'[z(z-1)+(z-2)(x-y)]+p[z(z-1)-(z-2)(x-y)]$$
$$=(p'+p)z(z-1)+(p'-p)(z-2)(x-y)$$

根据 Ward 恒等式，$q^\mu\delta\Gamma_\mu=0$，所以正比于q^μ的项消失。再根据本节开始时证过的 Gordon 恒等式，得

$$\frac{\bar uN^\mu u}{-2}\xrightarrow{Ward}\bar u\{\gamma^\mu[-\tfrac{1}{2}l^2+(1-x)(1-y)q^2+m^2(1-2z-z^2)]+(p'^\mu+p^\mu)mz(z-1)\}u$$
$$\xrightarrow{Gordon}\bar u\{\gamma^\mu[-\tfrac{1}{2}l^2+(1-x)(1-y)q^2+m^2(1-2z-z^2)]+[\gamma^\mu-\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}]2m^2z(z-1)\}u$$
$$=\bar u\{\gamma^\mu[-\tfrac{1}{2}l^2+(1-x)(1-y)q^2+m^2(1-4z+z^2)]+\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}2m^2z(1-z)\}u$$

于是

$$\bar{u}(p')\delta\Gamma^{\mu}(p,p')u(p)=2ie^2\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\int dxdydz\delta(x+y+z-1)\frac{2}{(l^2-\Delta)^3}$$

$$\times\bar{u}(p')\{\gamma^{\mu}[-\frac{1}{2}l^2+(1-x)(1-y)q^2+(1-4z+z^2)m^2]+\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_{\nu}}{2m}[2m^2z(1-z)]\}u(p)$$

（2）对动量的积分

(a)分子不含 l 的项

根据维数正规化一节导出的公式，有

$$\int\frac{d^nl}{(2\pi)^n}\frac{1}{(l^2-\Delta)^m}=\frac{(-1)^mi}{(4\pi)^{n/2}}\frac{\Gamma(m-\frac{n}{2})}{\Gamma(m)}\frac{1}{\Delta^{m-n/2}}\xrightarrow[m=3]{n=4}\frac{(-1)^3i}{(4\pi)^2}\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(3)}\frac{1}{\Delta}=\frac{i}{(4\pi)^2}\frac{-1}{2\Delta}$$

(b)分子为 l 平方项

你也可使用维数正规化公式，但当 m=3 时存在奇异性（分母为零）。为与 Peskin 比较，这里不用维数正规化，而用 Pauli-Villars 正规化：引入一个大质量 Λ 参数，将光子传播子修改为

$$\frac{1}{(k-p)^2+i\varepsilon}\to\frac{1}{(k-p)^2+i\varepsilon}-\frac{1}{(k-p)^2-\Lambda^2+i\varepsilon}$$

做这种变换后，分子不变，分母需做如下修改（Peskin's QFT）：

$$\Delta=-xyq^2+(1-z)^2m^2\to\Delta_{\Lambda}=\Delta+z\Lambda^2$$

因为 $(k-p)^2$ 在 Feynman 折叠时与 z 相乘，所以 Λ^2 与 z 相乘而不是与 xy 相乘。严格讲，这种修改也影响分子中不含 l 的项，但最终取 $\Lambda\to\infty$ 极限时影响被消除，所以不必考虑。

可以用围道积分，但做 Wick 转动更简单。注意，虽然物理上是对动量积分，但数学上是对坐标积分，故积分测度变为 $d^4l\to id^4l_E$（l 看成坐标）而非 $d^4l\to -id^4l_E$（l 看成动量）。

根据前面讲过的 n 维球坐标，有

$$\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{l^2}{(l^2-\Delta)^3}\xrightarrow{Wick}\int\frac{id^4l_E}{(2\pi)^4}\frac{-l_E^2}{(-l_E^2-\Delta)^3}\xrightarrow{4维球坐标}\frac{i}{(2\pi)^4}\int\frac{l_E^2\cdot l_E^3dl_Ed\Omega}{(l_E^2+\Delta)^3}$$

$$=\frac{i}{(2\pi)^4}\int_0^{\infty}\frac{l_E^5dl_E}{(l_E^2+\Delta)^3}\int_0^{\pi}\sin^2\psi d\psi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{2\pi^2i}{(2\pi)^4}\int_0^{\infty}\frac{l_E^5dl_E}{(l_E^2+\Delta)^3}$$

$$\xrightarrow{x=l_E^2}\frac{\pi^2i}{(2\pi)^4}\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{(x+\Delta)^3}\xrightarrow{t=x+\Delta}\frac{i}{(4\pi)^2}\int_{\Delta}^{\infty}\frac{(t-\Delta)^2dt}{t^3}$$

$$=\frac{i}{(4\pi)^2}[\int_{\Delta}^{\infty}\frac{dt}{t}-2\Delta\int_{\Delta}^{\infty}\frac{dt}{t^2}+\Delta^2\int_{\Delta}^{\infty}\frac{dt}{t^3}]=\frac{i}{(4\pi)^2}[\ln t+\frac{2\Delta}{t}-\frac{\Delta^2}{2t^2}]_{\Delta}^{\infty}$$

代入上下限发现积分发散。但 Pauli-Villars 正规化修改了被积函数，从而

$$\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}[\frac{l^2}{(l^2-\Delta)^3}-\frac{l^2}{(l^2-\Delta_{\Lambda})^3}]=\frac{i}{(4\pi)^2}\{[\ln t+\frac{2\Delta}{t}-\frac{\Delta^2}{2t^2}]_{\Delta}^{\infty}-[\ln t+\frac{2\Delta}{t}-\frac{\Delta^2}{2t^2}]_{\Delta_{\Lambda}}^{\infty}\}$$

$$=\frac{i}{(4\pi)^2}\ln\frac{\Delta_{\Lambda}}{\Delta}=\frac{i}{(4\pi)^2}\ln\frac{\Delta+z\Lambda^2}{\Delta}\xrightarrow{\Delta\ll\Lambda}\frac{i}{(4\pi)^2}\ln\frac{z\Lambda^2}{\Delta}$$

一圈顶角修正为

$$\bar{u}(p')\delta\Gamma^{\mu}(p,p')u(p)=2ie^2\frac{i}{(4\pi)^2}\int 2dxdydz\delta(x+y+z-1)\times\bar{u}(p')\{\gamma^{\mu}[-\frac{1}{2}\ln\frac{z\Lambda^2}{\Delta}$$

$$+\frac{-1}{2\Delta}(1-x)(1-y)q^2+(1-4z+z^2)m^2]+\frac{-1}{2\Delta}\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_{\nu}}{2m}[2m^2z(1-z)]\}u(p)$$

$$\xrightarrow{\alpha=\frac{e^2}{4\pi}}\frac{\alpha}{2\pi}\int dxdydz\delta(x+y+z-1)$$

$$\times\bar{u}(p')\{\gamma^{\mu}[\ln\frac{z\Lambda^2}{\Delta}+\frac{(1-x)(1-y)q^2+(1-4z+z^2)m^2}{\Delta}]+\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_{\nu}}{2m}\frac{2m^2z(1-z)}{\Delta}\}u(p)$$

3.抵消项与形状因子计算（对 xyz 的积分）

回忆下前面讲的顶角函数按形状因子 F1，F2 展开：

$$\Gamma^{\mu}(p',p)=\gamma^{\mu}F_1(q^2)+\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_{\nu}}{2m}F_2(q^2)$$

F2 的积分将给出反常磁矩，这不是我们重点。我们目标是完整的单圈计算。在高能极限下，F2 可忽略（郑汉青《量子场论》上），我们只讨论这种情形。

（1）抵消项

低能极限下，F1 应与树图一致，可写为（Peskin's QFT）：

$$F_1(q^2)=1+[\delta F_1(q^2)-\delta F_1(0)]=1+f(q^2)+\delta_1$$

其中

$$f(q^2)=\delta F_1(q^2)$$

$$=\frac{\alpha}{2\pi}\int dxdydz\delta(x+y+z-1)[\ln\frac{z\Lambda^2}{\Delta}+\frac{(1-x)(1-y)q^2+(1-4z+z^2)m^2}{\Delta}]\xrightarrow{m=0}$$

$$\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy[\ln\frac{(1-x-y)\Lambda^2}{-xyq^2+(1-x-y)m_{\gamma}^2}+\frac{(1-x)(1-y)q^2}{-xyq^2+(1-x-y)m_{\gamma}^2}]=\frac{\alpha}{2\pi}[I_1+I_2]$$

$$\delta_1=-\delta F_1(q^2=0,m=0)=-\frac{\alpha}{2\pi}\frac{1}{2}\ln\frac{\Lambda^2}{m_{\gamma}^2}$$

为重整化的抵消项。抵消项形式因人而异，这只是选择了不同的重整化方案而已，不必纠结。

（2）对 xy 的积分

郑汉青写的过于简单，难以求证，Schwartz《Quantum Field Theory and Standard Model》给出了部分细节。

(a)普通对数函数的积分

$$I_1=\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\ln\frac{(1-x-y)\Lambda^2}{-xyq^2+(1-x-y)m_{\gamma}^2}$$

$$\xrightarrow{b=m_{\gamma}^2/q^2}\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\ln\frac{\Lambda^2}{-q^2}+\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\ln\frac{1-x-y}{xy-b(1-x-y)}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{\Lambda^2}{-q^2}+\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\ln(1-x-y)-\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\ln[(x+b)y-b(1-x)]$$

其中

$$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\ln(1-x-y)=-\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\ln(1-x-y)d(1-x-y)$$

$$=-\int_0^1 dx[(1-x-y)\ln(1-x-y)-(1-x-y)]_{y=0}^{1-x}$$

$$=\int_0^1 dx[(1-x)\ln(1-x)-(1-x)]\xrightarrow{t=1-x}\int_0^1[t\ln t-t]dt=[\frac{t^2}{2}\ln t-\frac{t^2}{4}-\frac{t^2}{2}]_{t=0}^1=-\frac{3}{4}$$

而

$$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\ln[(x+b)y-b(1-x)]$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\ln[y-\frac{b(1-x)}{x+b}]+\int_0^1\ln(x+b)dx\int_0^{1-x}dy$$

$$=\int_0^1 dx\{[y-\frac{b(1-x)}{x+b}]\ln[y-\frac{b(1-x)}{x+b}]-[y-\frac{b(1-x)}{x+b}]\}_{y=0}^{1-x}+\int_0^1 dx(1-x)\ln(x+b)$$

$$=\int_0^1 dx\{[1-x-\frac{b(1-x)}{x+b}]\ln\frac{(1-x)x}{x+b}-[1-x-\frac{b(1-x)}{x+b}]+\frac{b(1-x)}{x+b}\ln[\frac{b(x-1)}{x+b}]-\frac{b(1-x)}{x+b}\}$$

$$+\int_0^1 dx(1-x)\ln(x+b)$$

$$=\int_0^1 dx\{(1-x)\ln\frac{(1-x)x}{x+b}-(1-x)\}+\int_0^1 dx(1-x)\ln(x+b)+o(b)$$

$$\approx\int_0^1 dx\{(1-x)[\ln x+\ln(1-x)]-(1-x)\}\xrightarrow{t=1-x}\int_0^1 dt\{t[\ln t+\ln(1-t)]-t\}$$

$$=\int_0^1 t\ln tdt+\int_0^1(1-u)\ln udu-\int_0^1 tdt=\int_0^1(\ln t-t)dt=(t\ln t-t-\frac{1}{2}t^2)_{t=0}^1=-\frac{3}{2}$$

综上，有

$$I_1\approx\frac{1}{2}\ln\frac{\Lambda^2}{-q^2}-\frac{3}{4}-(-\frac{3}{2})=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln\frac{\Lambda^2}{-q^2}$$

因 b<<1，已略去 b 的高阶项。注意，这种近似不是无条件的，一般来说，要等积分完全算完后再近似（就像先求导后赋值的道理一样）。之所以能在积分过程中舍弃某些项，是因为

$$\int\frac{dx}{x+b}\to\ln(x+b)\text{，}$$

$$\int\ln xdx\to x\ln x-x\text{，}$$

$$\int x\ln xdx\to\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}$$

这些项的定积分结果是有限的（要么没 b，要么 b 出现在分子上），再乘以 b 这个无穷小后极限为零。唯一困难是 $\int\frac{\ln xdx}{x+b}$ 在 b→0 时发散，但用 Mathematica 代入具体 b 值检验，

$b\int\frac{\ln xdx}{x+b}$ 在 b→0 时消失，说明 $\int\frac{\ln xdx}{x+b}$ 趋于无穷的速度比 b→0 的速度慢（这符合我们的预期，对数增长没有直线增长快嘛）。

(b)双对数函数

$$I_2=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\frac{(1-x)(1-y)q^2}{-xyq^2+(1-x-y)m_\gamma^2}\xrightarrow{c=-m_\gamma^2/(q^2+i\varepsilon)}-\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\frac{(1-x)(1-y)}{xy+c(1-x-y)}$$

这个积分看起来是有理函数积分，比 I1 的对数函数积分简单；但实际上特别难，积分后出现**双对数**（Sudakov double logarithm 或 Dilogarithm）。积分不可貌相哦！I1 中也出现双对数，但前面还要乘以 b 这个无穷小，所以能扔掉；I2 中的双对数项前面是个 b 的二次三项式，常数项（b 的零次项）非零，所以不能将双对数项扔掉！

在 Mathematica 中输入

I2=Integrate[(1-x)(1-y)/(-x*y-(1-x-y)mq),{x,0,1},{y,0,1-x},Assumptions-> Im[mq]>0]

Series[I2,{mq,0,0}, Assumptions-> Im[mq]>0]

可得

(-15-2 π ^{2}-12 Log[mq]-3 Log[mq]^2)/6+o[mq]^1

与 Schwartz 的书一致。其中级数展开是最关键的一步【感谢张成、杜孟林、王宇飞、冯峰、段慧慧等朋友的帮助】。

科学的精神是“刨根问底”，如果想知道这个结果怎么算出来的，那就要补充点数学知识。

$$I_2=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\frac{(1-x)(1-y)q^2}{-xyq^2+(1-x-y)m_\gamma^2}\xrightarrow{c=-m_\gamma^2/(q^2+i\varepsilon)}-\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\frac{(1-x)(1-y)}{xy+c(1-x-y)}$$

$$=\int_0^1\frac{x-1}{x-c}dx\int_0^{1-x}dy\frac{1-y}{y+\frac{c(1-x)}{x-c}}=\int_0^1\frac{x-1}{x-c}dx\int_0^{1-x}dy[\frac{1+\frac{c(1-x)}{x-c}}{y+\frac{c(1-x)}{x-c}}-1]$$

$$=\int_0^1 dx\frac{x-1}{x-c}[1+\frac{c(1-x)}{x-c}]\ln[y+\frac{c(1-x)}{x-c}]_{y=0}^{1-x}+\int_0^1\frac{(x-1)^2}{x-c}dx$$

$$=\int_0^1\frac{(x-1)^2}{x-c}dx+(1-c)\int_0^1 dx\frac{x(x-1)}{(x-c)^2}\ln\frac{x}{c}\xrightarrow{\text{多项式除法或综合除法}}$$

$$\int_0^1[x+c-2+\frac{c(c-2)+1}{x-c}]dx+(1-c)\int_0^1 dx[1+\frac{2c-1}{x-c}+\frac{c(c-1)}{(x-c)^2}]\ln\frac{x}{c}$$

$$=[\frac{x^2}{2}+(c-2)x+(c-1)^2\ln(x-c)]_0^1$$

$$+(1-c)(x\ln\frac{x}{c}-x)_0^1+(1-c)(2c-1)\int_0^1\frac{\ln\frac{x}{c}}{x-c}dx-c(c-1)^2\int_0^1\frac{\ln\frac{x}{c}}{(x-c)^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}-2+\ln\frac{1-c}{-c}+\ln\frac{1}{c}-1+o(c)+(1-c)(2c-1)I_{c1}+c(c-1)^2I_{c2}$$

其中

$$I_{c2}=-\int_0^1\frac{\ln\frac{x}{c}}{(x-c)^2}dx=\int_0^1\ln\frac{x}{c}d\frac{1}{x-c}=[\frac{1}{x-c}\ln\frac{x}{c}]_0^1-\int_0^1\frac{dx}{x(x-c)}$$

$$=\frac{\ln\frac{x}{c}}{x-c}\Big|_0^1-\frac{1}{c}\int_0^1[\frac{dx}{x-c}-\frac{dx}{x}]=(\frac{\ln\frac{x}{c}}{x-c}\Big|_0^1+\frac{\ln x}{c}\Big|_0^1)-\frac{1}{c}\ln(x-c)\Big|_0^1$$

$$=[\frac{\ln c}{c-x}+\frac{x\ln x}{c(x-c)}]_0^1-\frac{1}{c}\ln\frac{1-c}{-c}=\frac{\ln c}{c(c-1)}-\frac{1}{c}\ln\frac{1-c}{-c}$$

所以

$$I_2=-\frac{5}{2}+\ln\frac{1-c}{-c}+\ln\frac{1}{c}+o(c)+(1-c)(2c-1)I_{c1}+c(c-1)^2[\frac{\ln c}{c(c-1)}-\frac{1}{c}\ln\frac{1-c}{-c}]$$
$$=-\frac{5}{2}+\ln\frac{1-c}{-c}-\ln c+o(c)+(1-c)(2c-1)I_{c1}-\ln c-\ln\frac{1-c}{-c}$$
$$=-\frac{5}{2}-2\ln c+(1-c)(2c-1)I_{c1}+o(c)$$

这些都是 trivial 的，难点在于 $I_{c1}=\int_0^1\frac{\ln\frac{x}{c}}{x-c}dx$ 的计算，它不能通过换元与分部积分解决，而需要更加高明的技巧。刘连寿《理论物理基础教程》附录 V 给出了类似问题的一种思路（**Bose 分布的积分**），只是那里的例子比较简单（等价于 lnx/(1-x)从 0 到 1 积分）：

$$I_0=\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}dx\xrightarrow{u=-\ln x}\int_\infty^0\frac{ue^{-u}}{1-e^{-u}}du=-\int_0^\infty udu\sum_{k=1}^\infty e^{-ku}=-\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^2}\int_0^\infty ye^{-y}dy$$
$$=-\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^2}[-e^{-y}(1+y)]_0^\infty=-\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^2}=-\zeta(2)=-\frac{\pi^2}{6}$$

最后一步用到了 **zeta 函数** $\zeta(n)=\sum_{k=1}^\infty k^{-n}$ 在正整数的取值，加藤和也《数论 I-Fermat 的梦想和类域论》给出了 $\zeta(2)$ 的证明，其中使用了**正弦函数的无穷乘积展开**（正弦函数无穷乘积展开的证明见陈纪修《数学分析》下例 9.5.7）。我们也可以将 lnx 展开为幂级数再逐项积分，但要讨论收敛域，较复杂。

现在是 lnx/(1-x)从 0 到 a 积分，积分结果不是数，而是特殊函数：

$$I_{c1}=\int_0^1\frac{\ln\frac{x}{c}}{x-c}dx\xrightarrow{t=x/c}-\int_0^{1/c}\frac{\ln t}{1-t}dt\xrightarrow{u=-\ln t}-\int_\infty^{\ln c}\frac{ue^{-u}}{1-e^{-u}}du=\int_{\ln c}^\infty udu\sum_{k=1}^\infty e^{-ku}$$
$$\xrightarrow{y=ku}\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^2}\int_{k\ln c}^\infty ye^{-y}dy=\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^2}[-e^{-y}(1+y)]_{k\ln c}^\infty=\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^2}e^{-k\ln c}(1+k\ln c)$$
$$=\sum_{k=1}^\infty\frac{c^{-k}}{k^2}+\ln c\sum_{k=1}^\infty\frac{c^{-k}}{k}=\text{polylog}[2,\frac{1}{c}]-\ln c\ln(1-\frac{1}{c})$$

其中

$$\text{polylog}[n,z]=Li_n(z)=\sum_{k=1}^\infty\frac{z^k}{k^n}$$

为**多对数函数**（Mathematica 中用 PolyLog 表示）。其名字来源如下：

$Li_0(x)=\int_0^x\frac{1}{(1-t)^2}dt=\frac{x}{1-x}$ 【变上限积分】

$Li_1(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x)=\sum_{k=1}^\infty\frac{x^k}{k}$ 【ln(1-x)的幂级数展开】

$Li_2(x)=-\int_0^x\frac{\ln(1-t)}{t}dt=\int_0^x\frac{1}{t}\sum_{k=1}^\infty\frac{t^k}{k}dt=\int_0^x\sum_{k=1}^\infty\frac{t^{k-1}}{k}dt=[\sum_{k=1}^\infty\frac{t^k}{k^2}]_0^x=\sum_{k=1}^\infty\frac{x^k}{k^2}$ 【**逐项积分**】

$$Li_{n+1}(x)=\int_0^x \frac{Li_n(t)}{t}dt$$

注意这里的定义与 Abramowitz《Handbook of Mathematical function》定义的 Dilogarithm

$$f(x)=\int_1^x \frac{\ln u}{1-u}du$$

不同但等价【做变换 u=1-t 可发现 $Li_2(x)=f(1-x)$】。另外不要与**对数积分** $Li(x)=\int_0^x \frac{dt}{\ln t}$ 混淆。

定义 **Eta 函数**

$$\eta(n)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k^{-n}$$

它与 zeta 函数关系为（加藤和也《数论 I-Fermat 的梦想和类域论》习题解答 3.2）

$$(1-2^{1-s})\zeta(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^s}=1-\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}-\frac{1}{4^s}+\cdots=\eta(s)$$

常用的具体值：

Bose 分布：

$$Li_2(1)=-\int_0^1\frac{\ln(1-u)}{u}du\xrightarrow{t=1-u}-\int_0^1\frac{\ln t}{1-t}dt\xrightarrow{t=e^{-x}}\int_0^{\infty}\frac{x}{e^x-1}dx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$$

Fermi 分布：

$$-Li_2(-1)=\int_0^{-1}\frac{\ln(1-u)}{u}du\xrightarrow{t=-u}\int_0^1\frac{\ln(1+t)}{t}dt\xrightarrow{\text{分部}}[\ln t\ln(1+t)]_0^1-\int_0^1\frac{\ln t}{1+t}dt$$

$$=-\int_0^1\frac{\ln t}{1+t}dt\xrightarrow{t=e^{-x}}\int_0^{\infty}\frac{x}{e^x+1}dx=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}=\eta(2)=(1-2^{1-2})\zeta(2)=\frac{\pi^2}{12}$$

为了将多对数函数展开，我们需要它的递推关系。由双对数函数的积分表示

$$Li_2(z)=-\int_0^z\frac{\ln(1-t)}{t}dt$$

两边求导，得（Lewin《Polylogarithms and associated functions》）：

$$\frac{d}{dz}Li_2(z)=-\frac{\ln(1-z)}{z}$$

令 $z=-\frac{1}{y}$，则

$$\frac{dy}{dz}\frac{d}{dy}Li_2(-\frac{1}{y})=y\ln(1+\frac{1}{y})\Rightarrow\frac{d}{dy}Li_2(-\frac{1}{y})=\frac{dz}{dy}y\ln\frac{1+y}{y}=\frac{1}{y}[\ln(1+y)-\ln y]$$

两边做不定积分，得

$$Li_2(-\frac{1}{y})=\int\frac{\ln(1+y)}{y}dx-\int\frac{\ln y}{y}dy=-Li_2(-y)-\frac{1}{2}\ln^2 y+C$$

取 x=1 可得

$$C = Li_2(-1) + Li_2(-1) + 0 = -\frac{\pi^2}{6}$$

所以

$$Li_2(-\frac{1}{y}) + Li_2(-y) = -\frac{1}{2}\ln^2 y - \frac{\pi^2}{6}$$

取 x=-y，得

$$Li_2(\frac{1}{x}) + Li_2(x) = -\frac{1}{2}\ln^2(-x) - \frac{\pi^2}{6} = -\frac{1}{2}[\ln x + i\pi]^2 - \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2}\ln^2 x - i\pi \ln x$$

双对数函数图像为（Lewin《Polylogarithms and associated functions》）

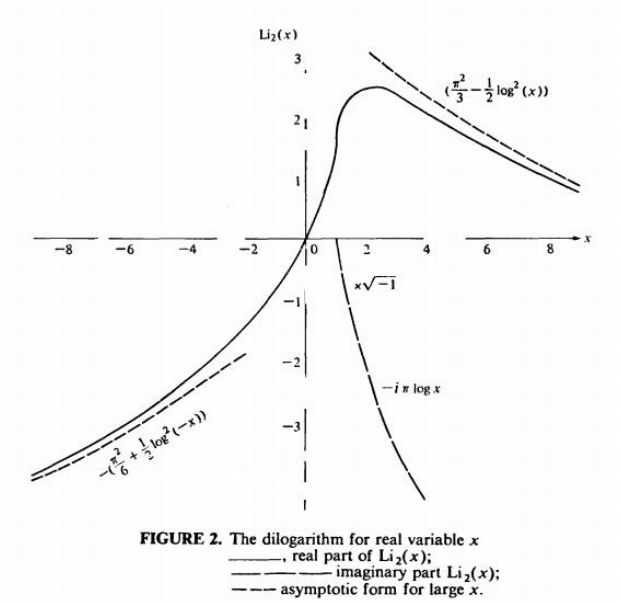


FIGURE 2. The dilogarithm for real variable x
———, real part of $\mathrm{Li}_2(x)$;
— — — — imaginary part $\mathrm{Li}_2(x)$;
— — asymptotic form for large x.

可见，当 x 趋于无穷时有渐近线，这是做小量展开的依据。相应于我们要讨论的问题，就是

$$\frac{1}{c} = x \to \infty, c = \frac{1}{x} \to 0$$

$$I_{c1} = \mathrm{polylog}[2, \frac{1}{c}] - \ln c \ln(1 - \frac{1}{c}) = Li_2(\frac{1}{c}) + \ln\frac{1}{c}[\ln\frac{1}{c} + i\pi + \ln(1-c)]$$

$$= \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2}\ln^2\frac{1}{c} - i\pi\ln\frac{1}{c} - Li_2(c) + \ln^2\frac{1}{c} + i\pi\ln\frac{1}{c} + \ln\frac{1}{c}\ln(1-c)$$

$$= \frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{2}\ln^2\frac{1}{c} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c^k}{k^2} - \ln\frac{1}{c}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c^k}{k}$$

$$I_2 = -\frac{5}{2} - 2\ln c + (1-c)(2c-1)[\frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{2}\ln^2\frac{1}{c} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c^k}{k^2} - \ln\frac{1}{c}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c^k}{k}] + o(c)$$

$$= -\frac{5}{2} - 2\ln c - \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2}\ln^2 c + o(c)$$

注意 $\ln\frac{1}{c} = -\ln c, \ln^2\frac{1}{c} = \ln^2 c$.

4.单圈振幅的最终结果

将各项结果加在一起，根据 $\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\frac{m_\gamma^2}{-q^2+i\varepsilon}=i\pi+\ln\frac{m_\gamma^2}{q^2}$（Schwartz's QFT&SM），得

$$
\begin{aligned}
&f(q^2)+\delta_1=\frac{\alpha}{2\pi}[I_1+I_2]-\frac{\alpha}{2\pi}\frac{1}{2}\ln\frac{\Lambda^2}{m_\gamma^2}\\
&=\frac{\alpha}{2\pi}[(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln\frac{\Lambda^2}{-q^2})+(-\frac{5}{2}-2\ln c-\frac{\pi^2}{3}-\frac{1}{2}\ln^2 c)]-\frac{\alpha}{2\pi}\frac{1}{2}\ln\frac{\Lambda^2}{m_\gamma^2}\\
&\xrightarrow{c\to -m_\gamma^2/q^2}\frac{\alpha}{2\pi}[-\frac{7}{4}-\frac{3}{2}\ln\frac{m_\gamma^2}{-q^2}-\frac{\pi^2}{3}-\frac{1}{2}\ln^2\frac{m_\gamma^2}{-q^2}]\\
&=\frac{\alpha}{4\pi}[-\frac{7}{2}-3(i\pi+\ln\frac{m_\gamma^2}{q^2})-\frac{2\pi^2}{3}-(i\pi+\ln\frac{m_\gamma^2}{q^2})^2]\\
&=\frac{\alpha}{4\pi}[-\frac{7}{2}-3\pi i-(3+2\pi i)\ln\frac{m_\gamma^2}{q^2}+\frac{\pi^2}{3}-\ln^2\frac{m_\gamma^2}{q^2}]
\end{aligned}
$$

与 Schwartz 及郑汉青结果一致。此即形状因子 F1 最终结果（已扣除树图的贡献）。按理说还要算 F2，但高能极限下 F2=0，就不算了。将形状因子代入振幅表达式，得单圈振幅为

$$iM_\Gamma\xrightarrow{F_2\to 0}i\frac{e^2}{q^2}\bar{u}(\vec{k})\gamma^\mu[0+f(q^2)+\delta_1]v(\vec{k}')\bar{v}(\vec{p}')\gamma_\mu u(\vec{p})=[f(q^2)+\delta_1]iM_0$$

1.3.2.3 模方

同一 Feynman 图不同因子要相乘，不同 Feynman 图间要相加。考虑圈修正后矩阵元平方为

$$|M|^2\to|M_0+M_\Gamma|^2=|M_0|^2+|M_\Gamma|^2+2\,\mathrm{Re}[M_0M_\Gamma]$$

其中树图包含 2 个顶点，振幅包含 2 个 $-ie\gamma$，为 $o(\alpha)=o(e^2)$ 阶；单圈图包含 4 个顶点，振幅包含 4 个 $-ie\gamma$，为 $o(\alpha^2)=o(e^4)$ 阶。于是，$|M_0|^2$ 为 $o(\alpha^2)=o(e^4)$ 阶，$|M_\Gamma|^2$ 为 $o(\alpha^4)=o(e^8)$ 阶，$|M_0M_\Gamma|$ 为 $o(\alpha^3)=o(e^6)$ 阶。这里证明郑汉青的结果，算到 $o(\alpha^3)=o(e^6)$ 阶。这样，就不必算 $|M_\Gamma|^2$ 了，算出 $|M_0|^2$ 及 $|M_0M_\Gamma|$ 即可。

1.树图

振幅中有 $\bar{u}(\vec{p}')\gamma^\mu v(\vec{p})$，计算模方关键在处理此结构。$u$ 为 4 行 1 列矢量，$\bar{u}$ 为 1 行 4 列，Gamma 矩阵 4 行 4 列，三者乘积为数，其 Hermite 共轭等于复共轭，因此（郑汉青《量子场论》上）：

$$[\bar{u}(\vec{p}')\gamma^\mu v(\vec{p})]^*=[u^+(\vec{p}')\gamma^0\gamma^\mu v(\vec{p})]^+=v^+(\vec{p})\gamma^{\mu+}\gamma^0u(\vec{p}')=v^+(\vec{p})\gamma^0\gamma^\mu u(\vec{p}')=\bar{v}(\vec{p})\gamma^\mu u(\vec{p}')$$

为防止 Hermite 共轭的剑号†显示乱码，此处已用+代替。据这一洞察，树图矩阵元共轭为

$$-iM_0{}^* = (iM_0)^+ = [i\frac{e^2}{s_{12}}\bar{u}(\vec{k},r)\gamma^\mu v(\vec{k}',r')\bar{v}(\vec{p}',s')\gamma_\mu u(\vec{p},s)]^*$$

$$= -i\frac{e^2}{s_{12}}\bar{v}(\vec{k}',r')\gamma^\mu u(\vec{k},r)\bar{u}(\vec{p},s)\gamma_\mu v(\vec{p}',s')$$

于是

$$\frac{1}{4}\sum_{spin}|M_0|^2 = \frac{1}{4}\sum_{spin}(M_0)^+ M_0$$

$$= \frac{e^4}{4s_{12}^2}\sum_{spin}\{[\bar{v}(\vec{k}',r')\gamma^\nu u(\vec{k},r)\bar{u}(\vec{p},s)\gamma_\nu v(\vec{p}',s')][\bar{u}(\vec{k},r)\gamma^\mu v(\vec{k}',r')\bar{v}(\vec{p}',s')\gamma_\mu u(\vec{p},s)]\}$$

$$= \frac{e^4}{4s_{12}^2}\sum_{r,r'}tr[\bar{v}(\vec{k}',r')\gamma^\nu u(\vec{k},r)\bar{u}(\vec{k},r)\gamma^\mu v(\vec{k}',r')]\sum_{s,s'}tr[\bar{v}(\vec{p}',s')\gamma_\mu u(\vec{p},s)\bar{u}(\vec{p},s)\gamma_\nu v(\vec{p}',s')]$$

注意，张量指标重复时约定求和，旋量指标重复时约定求迹。

根据自旋求和公式 $\sum_s u(\vec{p},s)\bar{u}(\vec{p},s) = \not{p} + m$ 及 $\sum_s v(\vec{p},s)\bar{v}(\vec{p},s) = \not{p} - m$，忽略电子质量（保留 mu 子质量），得

$$\frac{1}{4}\sum_{spin}|M_0|^2$$

$$= \frac{e^4}{4s_{12}^2}\sum_{r,r'}tr[\gamma^\nu u(\vec{k},r)\bar{u}(\vec{k},r)\gamma^\mu v(\vec{k}',r')\bar{v}(\vec{k}',r')]\sum_{s,s'}tr[\gamma_\mu u(\vec{p},s)\bar{u}(\vec{p},s)\gamma_\nu v(\vec{p}',s')\bar{v}(\vec{p}',s')]$$

$$= \frac{e^4}{4s_{12}^2}tr[\gamma^\nu(\not{k}+m)\gamma^\mu(\not{k}'-m)]tr[\gamma_\mu(\not{p}+0)\gamma_\nu(\not{p}'-0)]$$

$$\xrightarrow{\text{奇数个}\gamma\text{迹为0}} \frac{e^4}{4s_{12}^2}tr[\gamma^\nu\not{k}\gamma^\mu\not{k}' - m^2\gamma^\nu\gamma^\mu]tr[\gamma_\mu\not{p}\gamma_\nu\not{p}'] \xrightarrow[tr[\gamma_{\alpha\beta}]=4g_{\alpha\beta}]{tr[\gamma1234]=4g(1234-1324+1423)}$$

$$\frac{4e^4}{s_{12}^2}[k_\xi k'_\eta(g^{\nu\xi}g^{\mu\eta} - g^{\nu\mu}g^{\xi\eta} + g^{\nu\eta}g^{\xi\mu}) - m^2 g^{\nu\mu}][p^\rho p'^\sigma(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} + g_{\mu\sigma}g_{\rho\nu})]$$

$$= \frac{4e^4}{s_{12}^2}[(k^\nu k'^\mu - k\cdot k' g^{\nu\mu} + k^\mu k'^\nu) - m^2 g^{\nu\mu}][(p_\mu p'_\nu - p\cdot p' g_{\mu\nu} + p_\nu p'_\mu)]$$

$$= \frac{4e^4}{s_{12}^2}[(k^\nu k'^\mu + k^\mu k'^\nu) - (k\cdot k' + m^2)g^{\nu\mu}][(p_\mu p'_\nu + p_\nu p'_\mu) - p\cdot p' g_{\mu\nu}]$$

$$= \frac{4e^4}{s_{12}^2}[(k^\nu k'^\mu + k^\mu k'^\nu)(p_\mu p'_\nu + p_\nu p'_\mu) - (k^\nu k'^\mu + k^\mu k'^\nu)p\cdot p' g_{\mu\nu}$$

$$-(k\cdot k' + m^2)g^{\nu\mu}(p_\mu p'_\nu + p_\nu p'_\mu) + (k\cdot k' + m^2)p\cdot p' g^{\nu\mu}g_{\mu\nu}] \xrightarrow{g^{\nu\mu}g_{\mu\nu}=4}$$

$$\frac{4e^4}{s_{12}^2}[2(p\cdot k)(p'\cdot k') + 2(p\cdot k')(p'\cdot k) - 4(k\cdot k')(p\cdot p') - 2m^2 p\cdot p' + 4(k\cdot k' + m^2)p\cdot p']$$

$$= \frac{8e^4}{s_{12}^2}[(p\cdot k)(p'\cdot k') + (p\cdot k')(p'\cdot k) + m^2 p\cdot p']$$

取质心系，设初态电子沿 z 轴正向运动，末态粒子在 x-z 平面运动，各粒子动量为（郑汉青《量子场论》上）：

$$p^\mu=(E,\vec{p})=(E,0,0,E)\text{，或 }p_\mu=(E,-\vec{p})=(E,0,0,-E)$$

$$p'^\mu=(E,\vec{p}')=(E,0,0,-E)$$

$$k^\mu=(E,\vec{k})=(E,k\sin\theta,0,k\cos\theta)\text{，}\quad k'^\mu=(E,\vec{k}')=(E,-k\sin\theta,0,-k\cos\theta)$$

于是

$$p\cdot p'=p^\mu p'_\mu=2E^2$$

$$\frac{1}{4}\sum_{spin}|M_0|^2=\frac{8e^4}{(p+p')^4}[(p\cdot k)(p'\cdot k')+(p\cdot k')(p'\cdot k)+m^2(p\cdot p')]$$

$$=\frac{8e^4}{16E^4}[(E^2-Ek\cos\theta)^2+(E^2+Ek\cos\theta)^2+2E^2m^2]=\frac{e^4}{E^4}[E^4+E^2k^2\cos^2\theta+E^2m^2]$$

$$=e^4[1+\frac{k^2}{E^2}\cos^2\theta+\frac{m^2}{E^2}]\xrightarrow{k^2=E^2-m^2}e^4[(1+\frac{m^2}{E^2})+(1-\frac{m^2}{E^2})\cos^2\theta]$$

2.单圈

前面说了，计算到$o(\alpha^3)=o(e^6)$阶不必算$|M_\Gamma|^2$了，算出$|M_0|^2$及$|M_0M_\Gamma|$即可。

根据前面算出的$iM_\Gamma=[f(q^2)+\delta_1]iM_0$，有

$$\frac{1}{4}\sum_{spins}\{M_\Gamma^\dagger M_0+M_0^\dagger M_\Gamma\}=2\,\mathrm{Re}[f(q^2)+\delta_1]\frac{1}{4}\sum_{spins}|M_0|^2$$

1.3.2.4 相空间

相空间定义并不统一，目前至少有三种定义：

$$R_n=\int\delta^4(\sum_i p_i-\sum_f p_f)\prod_{f=1}^n\frac{d^3\vec{p}_f}{2E_f}$$

$$d\Pi_n=(2\pi)^4\delta^4(\sum_i p_i-\sum_f p_f)\prod_{f=1}^n\frac{d^3\vec{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f}$$

$$d\Phi_n=\delta^4(\sum_i p_i-\sum_f p_f)\prod_{f=1}^n\frac{d^3\vec{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f}$$

做理论的通常把2π因子吸收到相空间中，这样使得振幅与宽度的表达式更简洁；但目前粒子物理领域的权威——PDG 采用最后一种定义。这里为与郑汉青比较，采用第二种定义。需要特别注意的是，1.3.1 节给出的$d\Phi$与这里的$d\Pi$一致，但与 PDG 上的$d\Phi$不一致。这一点是非常令人沮丧的，我们必须格外小心才不至于犯错。

相空间的定义与散射或衰变无关，只决定于末态粒子数。不论散射还是衰变，只要末态有两个粒子，相空间都是

$$\Pi_2=\int d\Pi_2=(2\pi)^4\int\delta^4(P-p_1-p_2)\frac{d^3\vec{p}_1d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^32E_1(2\pi)^32E_2}$$

$$=\frac{1}{4(2\pi)^2}\int\frac{d^3\vec{p}_1d^3\vec{p}_2}{E_1E_2}\delta^3(P-p_1-p_2)\delta(E_0-E_1-E_2)=\frac{1}{4(2\pi)^2}\int\frac{d^3\vec{p}_1}{E_1E_2}\delta(E_0-E_1-E_2)$$

$$=\frac{1}{4(2\pi)^2}\int\frac{d^3\vec{p}_1dE_0}{E_1E_2dE_0}\delta(E_0-E_1-E_2)=\frac{1}{4(2\pi)^2}\int\frac{d^3\vec{p}_1}{E_1E_2dE_0}=\frac{1}{4(2\pi)^2}\int\frac{|\vec{p}_1|^2d|\vec{p}_1|d\Omega}{E_1E_2dE_0}$$

区别只在于，如果是散射，$P=p_a+p_b$；如果是衰变，$P=p_0$.

在 1+2 粒子质心系，$|\vec{p}_1|=|\vec{p}_2|=|\vec{p}|$，$dE_0=dE_1+dE_2$；$E^2=|\vec{p}|^2+m^2$ 微分给出（肖振军《粒子物理学导论》）

$$|\vec{p}_1|d|\vec{p}_1|=E_1dE_1$$

$$\frac{dE_0}{d|\vec{p}_1|}=\frac{dE_1}{d|\vec{p}_1|}+\frac{dE_2}{d|\vec{p}_2|}=\frac{|\vec{p}_1|}{E_1}+\frac{|\vec{p}_2|}{E_2}=\frac{|\vec{p}|E_0}{E_1E_2}$$

故

$$R_2=(2\pi)^6\Phi_2=(2\pi)^2\Pi_2=\frac{1}{4}\int\frac{|\vec{p}_1|^2d|\vec{p}_1|d\Omega}{E_1E_2dE_0}=\frac{1}{4}\int\frac{|\vec{p}_1|^2d\Omega}{|\vec{p}_1|E_0}=\frac{|\vec{p}_1|}{4\sqrt{s}}\int d\Omega$$

其中 $s=(E_1+E_2)^2$ 为质心系总能量的平方。为简化，此处已省去表示质心系的星号。

1.3.2.5 截面

1．树图

质心系能量 $E_0=E+E=2E$，mu 子动量大小 $|\vec{p}_1|=\sqrt{E^2-m^2}$；流因子为

$$F=E_1E_2|\vec{v}_1-\vec{v}_2|=E^2|2\vec{v}_1|=2E^2\frac{|\vec{p}|}{m_{动}}\xrightarrow{\text{自然单位}}2E^2\frac{|\vec{p}|}{m_{动}c^2}\xrightarrow[\text{忽略电子静质量}]{|\vec{p}|=\sqrt{E^2-m_{静}^2}}2E^2$$

故微分截面为

$$d\sigma=\frac{1}{4F}\cdot\overline{|M|^2}\cdot d\Pi_n=\frac{1}{8E^2}\cdot\frac{1}{4}\sum_{spin}|M|^2\cdot\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{|\vec{p}_1|}{8E}d\Omega$$

$$=\frac{\sqrt{E^2-m^2}}{64E^3(2\pi)^2}e^4[(1+\frac{m^2}{E^2})+(1-\frac{m^2}{E^2})\cos^2\theta]2\pi d\cos\theta$$

$$\xrightarrow{\alpha=\frac{e^2}{4\pi}}\frac{2\pi\alpha^2\sqrt{E^2-m^2}}{16E^3}[(1+\frac{m^2}{E^2})+(1-\frac{m^2}{E^2})\cos^2\theta]d\cos\theta$$

注意这里已将$(2\pi)^4$吸收到相空间定义中。此即非极化（微分）截面。实际上还可计算极化截面，见郑汉青《量子场论》上。

在高能极限下，mu 子质量也可忽略，有

$$\sigma_0=\frac{2\pi\alpha^2\sqrt{E^2}}{16E^3}\int_{-1}^{1}[1+\cos^2\theta]d\cos\theta\xrightarrow{x=\cos\theta}\frac{2\pi\alpha^2}{16E^2}[x+\frac{1}{3}x^3]\Big|_{-1}^{1}=\frac{2\pi\alpha^2}{16E^2}\frac{8}{3}\to\frac{4\pi\alpha^2}{3q^2}$$

其中$q=p_1+p_2\xrightarrow{m=0}2E$.

2.单圈

根据前面算出的

$$f(q^2)+\delta_1=\frac{\alpha}{4\pi}[-\frac{7}{2}-3\pi i-(3+2\pi i)\ln\frac{m_\gamma^2}{q^2}+\frac{\pi^2}{3}-\ln^2\frac{m_\gamma^2}{q^2}]$$

$$\frac{1}{4}\sum_{spins}\{M_\Gamma^\dagger M_0+M_0^\dagger M_\Gamma\}=2\,\mathrm{Re}[f(q^2)+\delta_1]\frac{1}{4}\sum_{spins}|M_0|^2$$

$$|M_0+M_\Gamma|^2=|M_0|^2+|M_\Gamma|^2+2\,\mathrm{Re}[M_0M_\Gamma]\xrightarrow{o(e^6)}|M_0|^2+2\,\mathrm{Re}[M_0M_\Gamma]$$

代入截面公式，得

$$\sigma=\int\frac{\overline{|M|^2}}{4F}d\Pi_2=\int\frac{d\Pi_2}{4F}[\frac{1}{4}\sum_{spins}|M_0|^2+\frac{1}{4}\sum_{spins}(M_\Gamma^\dagger M_0+M_0^\dagger M_\Gamma)+o(e^6)]$$

$$\approx\sigma_0+2\,\mathrm{Re}[f(q^2)+\delta_1]\sigma_0=[1+\frac{e^2}{8\pi^2}(\frac{\pi^2}{3}-\frac{7}{2}-3\ln\frac{m_\gamma^2}{q^2}-\ln^2\frac{m_\gamma^2}{q^2})]\sigma_0=\sigma_0+\sigma_V$$

这就是虚修正的最终结果（注意二体相空间积分只与立体角有关，而无动量依赖，所以圈图散射截面只是树图截面的常数倍，对于 n 体相空间就不是直接乘以常数倍这么简单的了）。

这个结果在$m_\gamma\to0$时存在（红外发散）。该发散可通过实修正（加入$e^+e^-\to\mu^+\mu^-\gamma$过程的贡献）消除（见 Schwartz 及郑汉青的场论书）。既然已经有了单圈截面的完整计算方法和过程，实修正就不再讨论了。

高中平时上课要从“Lorentz 力提供向心力”推导磁场中带电粒子运动的半径和周期，考试时直接将半径和周期公式拿来用，不再推导过程。当然，考试不推导，平时必须推导，不然无法形成物理思维。只知其然不知所以然，那是工科不是理科。工作时微积分可用 Mathematica，但《高等数学》课上还是要学各种积分技巧，不能只讲概念；《数学物理方法》还是要讲幂级数解法，而不能跳过求解过程直接给出方程的解。否则你就是“半道上捡了个孝帽进灵棚——哭半天不知谁死了”。“距洞百余步，有碑仆道，其文漫灭，独其为文犹可识，曰‘花山’。今言‘华’如‘华实’之‘华’者，盖音谬也……余于仆碑，又以悲夫古书之不存，后世之谬其传而莫能名者，何可胜道也哉！此所以学者不可以不深思而慎取之也。”不要盲目相信前辈结果，Einstein 和 Hawking 不也曾想错算错过么。哈佛终身教授不也捏造心肌干细胞数据吗？不要盲目相信影响因子、被引数量，谎言重复一千遍，就能变成真理吗？

第 2 题　量子色动力学（300 分）

【问题】(满分 300 分，时间 30 天)：写出 QCD 有效 Lagrangian，导出 QCD 的 Feynman 规则，分析 QCD 的单圈重整化和渐近自由性质。
要求：开卷考试，以小论文形式提交。论文中必须有详细步骤。只有结论没有过程不给分，缺少必要步骤酌情扣分。

第 1 步　构造有效 Lagrangian（80 分）

我们在第 1 题第 0 步 1.0.1 节说过，理论家的生命周期是“构造作用量→计算散射振幅→计算散射截面”。我们已讨论了 Klein-Gordon 场、Dirac 场、Maxwell 场的作用量。接下来，我们来构造杨-Mills 场的作用量，这是 QCD、电弱统一理论的基石。
构造任何场的作用量都从对称性分析开始。构造 Klein-Gordon 场、Dirac 场的作用量时，我们着重分析了 Poincare 对称性，即时空平移+Lorentz 变换。杨-Mills 场和 Maxwell 场都是规范场，除了要满足时空对称性，还要受到内部空间对称性的限制，包括整体对称性和局域对称性。

2.1.1　整体和局域对称性

所谓整体对称性，是指时空各点都作同样的变换（胡瑶光《规范场论》），变换参数与时空坐标无关的对称性变换（周邦融《量子场论》）。例如重子数守恒、轻子数守恒等（李灵峰《量子场论》）。局域对称性指时空各点作各自不同的变换，即变换参数随时空逐点变化，为任意时空点的函数，如此变换后 Lagrangian 仍是不变的。即使时空各点的变化千差万别，对称性仍能保持，那么显然（局域对称性）是（整体）对称性的扩大。
众所周知，物体的长度不因直尺上零刻线的选择而不同，你完全可以让物体边缘对准直尺上 1cm 处，只要测量结果减去 1cm 就是了。直尺的刻度是一种对长度的规范。选择不同的零刻线，相当于选择不同的长度规范。类似地，机械能守恒不因势能零点的选择而不同。选择不同的势能零点，就相当于选择不同的能量规范。除了长度规范、能量规范，还有质量规范、动量规范、角动量规范，等等。将全同粒子统计规范零点移动 1/2，就将 Boson 变 Fermion（参见尤亦庄邮件）。所有这些，都可以叫作“规范变换”。不过，具体到某一领域中，可能只涉及到其中一两种规范变换。

2.1.1.1　Abel 对称性

我们在量子力学中曾学过，波函数乘以一个常数因子，即作变换 $\psi \to e^{i\theta}\psi$ 不影响物理（可观测量）。这种指数变换相当于改变谐振子（场论相当于无穷多谐振子）的相位零点，因而属于规范变换。若 θ 为常数，它就是整体规范变换。在此变换下，Dirac 场的 Lagrangian（密度）是不变的：

$$\mathcal{L}_0=\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi\to\mathcal{L}_0'=\bar{\psi}e^{-i\theta}(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)e^{i\theta}\psi=\mathcal{L}_0$$

但是，若 θ 与时空坐标有关，即 $\psi\to e^{i\theta(x)}\psi$，则 $\partial_\mu(e^{i\theta(x)}\psi)\neq e^{i\theta(x)}\partial_\mu\psi$，从而

$$\mathcal{L}_0'=\bar{\psi}(i\gamma^\mu e^{-i\theta(x)}\partial_\mu e^{i\theta(x)}-m)\psi=\bar{\psi}[i\gamma^\mu i\partial_\mu\theta(x)-m]\psi\neq\mathcal{L}_0$$

Lagrangian 不再是规范不变的。人们设想，宇宙是和谐的，物理系统不因规范不同而改变（胡瑶光《规范场论》）。那么，怎么补救呢？

既然规范对称性的破坏是导数项引起的，不含导数的项依然保持不变（李灵峰《量子场论》），那么只要修改下导数的定义，使宇宙“和谐”即可。

记得在广义相对论中，曲线坐标下矢量的普通导数并非二阶张量，但我们可以修改导数定义（引入协变导数），使矢量的（协变）导数成为张量（余扬政《物理学中的几何方法》）。对于直角坐标，基矢量 $\vec{e}_i$ 为常量，$\vec{v}=v^i\vec{e}_i\Rightarrow d\vec{v}=dv^i\vec{e}_i$；对于曲线坐标，基矢量 $\vec{r}_i$ 是变量，求导时非零：

$$\vec{v}=v^i\vec{r}_i\Rightarrow d\vec{v}=dv^i\vec{r}_i+v^j\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial u^k}du^k=(dv^i+\Gamma^i_{jk}v^jdu^k)\vec{r}_i=(\frac{\partial v^i}{\partial u^k}+\Gamma^i_{jk}v^j)du^k\vec{r}_i$$

其中 $\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial u^k}\equiv\Gamma^i_{jk}\vec{r}_i$，$\Gamma^i_{jk}$ 为 Christoffel 符号，亦称为“联络”。由于联络项的存在，dv 并非张量。怎么办？舍得舍得，有舍才有得。当 Galileo 变换与 Maxwell 理论矛盾时，Einstein 放弃了 Galileo 变换；我们不想放弃张量，那么只好放弃导数了：

定义协变导数

$$v^i_{;k}\equiv\nabla_kv^i\equiv\partial_kv^i+\Gamma^i_{jk}v^j=v^i_{,k}+\Gamma^i_{jk}v^j$$

则

$$d\vec{v}=\nabla_kv^idu^k\vec{r}_i=Dv^i\vec{r}_i$$

你瞧，“联络”项没了，世界又“和谐”了（注意此处 D 对应余扬政书上 δ）。其中

$$v^i_{,k}\equiv\partial_kv^i\equiv\frac{\partial v^i}{\partial u^k}$$

为普通导数。注意，逗号表示普通导数，分号表示协变导数。

由于 v_iv^i 是标量，因而不随参考系变化，有 $D(v_iv^i)=d(v_iv^i)$，即

$$(Dv_i)v^i=(dv_i)v^i+v_idv^i-v_iDv^i=(dv_i)v^i+v_idv^i-v_i[dv^i+\Gamma^i_{lm}v^ldu^m]$$
$$\xrightarrow{i\to k}(dv_i)v^i-v_k\Gamma^k_{lm}v^ldu^m\xrightarrow{l\to i,m\to j}(dv_i-\Gamma^k_{ij}v_kdu^j)v^i$$

所以

$$Dv_i=dv_i-\Gamma^k_{ij}v_kdu^j$$

注意，与逆变矢量的协变微分 Dv^i 相比，协变矢量的协变微分 Dv_i 第二项（联络项）为负。

下面，我们仿照广义相对论中的做法，定义量子场论中的协变导数。

首先，我们注意到电动力学中的场强 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}, E=-\nabla\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ 在规范变换

$$\phi\to\phi-\frac{\partial\alpha}{\partial t}, \vec{A}\to\vec{A}+\nabla\alpha$$

下不变（李灵峰《量子场论》）。或更一般地，$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$ 在 $A_\mu\to A_\mu-\frac{1}{e}\partial_\mu\theta$ 下不变（姜志进《量子场论导论》）。

其次，虽然 $\mathcal{L}_0=\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi$ 在 $\psi\to e^{i\theta(x)}\psi$ 下改变，但

$$\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_I=\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi-e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$$

在 $\psi\to e^{i\theta(x)}\psi$， $A_\mu\to A_\mu-\frac{1}{e}\partial_\mu\theta$ 下不变：

$$\mathcal{L}_0'+\mathcal{L}_I'=\bar{\psi}e^{-i\theta(x)}i\gamma^\mu[(\partial_\mu e^{i\theta(x)})\psi+e^{i\theta(x)}\partial_\mu\psi]-\bar{\psi}m\psi-e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi[A_\mu-\frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x)]$$
$$=\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi-e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu=\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_I$$

所以，若定义协变导数 $D_\mu=\partial_\mu+ieA_\mu$，则 $\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_I=\bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu-m)\psi$ 是规范不变的。这里的 A_μ 有点像 Γ_{ij}^k，所以也称为（电磁）联络。

几点 Comments：

（1）由于引入了新的场 A_μ，我们也要构造它的 Lagrangian. 因 $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$ 规范不变，所以总的 Lagrangian 就是在 $\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_I=\bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu-m)\psi$ 基础上加上一项：

$$\mathcal{L}_{QED}=\bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu-m)\psi-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

其中 1/4 因子是习惯上的约定。

（2）Lagrangian 中有 Dirac 场的质量项，但没有电磁场的质量项。因为电磁场是规范场，规范场的质量项破坏规范不变性。这个问题在 QED 中不是问题，因为光子没有质量。但如果传递某种相互作用的媒介粒子有质量（比如传递弱作用的 W 和 Z），那就需要其他机制来保护规范不变性了（我们后面将要讲到的 Higgs 机制）。

（3）有的书将规范变换定义为 $\psi\to e^{-i\theta(x)}\psi$，协变导数定义为 $D_\mu=\partial_\mu-ieA_\mu$，大家要引起注意。因为符号约定不统一，将不同书上的公式混在一起用可能引起错误！所以切莫断章取义。不过大家也不必像秦始皇一样纠结于文字、度量衡的统一。尤其自媒体时代，每人都有自己的习惯。实际上，三权分立反而利于百家争鸣，文化创新。一个人对传统观念越是根深蒂固，就越难有新发现。在外星人的“超实数系”数学中，$x\not\leq y$ 可推出 $x\geq y$，但 $x\geq y$

不能反推出 $x \not\leq y$（Knuth《研究之美》）。我们应该记住的只有一丝不苟的逻辑推理，这才是“本”。至于用什么约定（电流方向，左右旋，粒子谁正谁反，度规是 1234 还是 0123 等），推出什么结论，那都是“末”。我们不必因为结论不同而惴惴不安。

2.1.1.2 非 Abel 对称性

上一节我们讨论了单参数的局域规范变换，它形成 U(1)群，对应 Abel 规范场。现在，我们把上面的结果推广到 SU(n)群，它有 n^2-1 个参数，为非 Abel 群，对应非 Abel 规范场。

首先，我们把 Dirac 场 $\psi(x)$ 推广为 n 个 Dirac 场的多重态，记为

$$\Psi(x)=\begin{pmatrix}\psi_1(x)\\ \psi_2(x)\\ \vdots\\ \psi_n(x)\end{pmatrix}$$

相应地，Lagrangian 为 $\mathcal{L}_0=\bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu-M)\Psi$，规范变换为

$$\Psi\to\Psi'(x)=\exp[iT_a\theta^a(x)]\Psi(x)$$

其中 T_a 为 SU(n)群的 $N=n^2-1$ 个生成元（可参考陈申见《粒子物理学》，通俗地说就是由无穷小变换通过指数映射生成整个 Lie 群）。对于 SU(2)，生成元为 $T_a=\frac{1}{2}\sigma_a$，σ_a 为 Pauli 矩阵，可用于 W+，W-，Z；对于 SU(3)，生成元为 $T_a=\frac{1}{2}\lambda_a$，λ_a 为 Gell-Mann 矩阵（可用于 8 个胶子）：

$$\lambda_1=\begin{pmatrix}&1&\\1&&\\&&\end{pmatrix},\lambda_2=\begin{pmatrix}&-i&\\i&&\\&&\end{pmatrix},\lambda_3=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&\end{pmatrix},$$

$$\lambda_4=\begin{pmatrix}&&1\\&&\\1&&\end{pmatrix},\lambda_5=\begin{pmatrix}&&-i\\&&\\i&&\end{pmatrix},$$

$$\lambda_6=\begin{pmatrix}&&\\&&1\\&1&\end{pmatrix},\lambda_7=\begin{pmatrix}&&\\&&-i\\&i&\end{pmatrix},\lambda_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{pmatrix}$$

其中未写出的都是 0. 可见，它们就是简单地将 Pauli 矩阵拆成三维的。

生成元 T_a 满足如下性质：

（1）Lie 代数（徐建军《物理学中的群论基础》）

$$[T_a, T_b] = if_{ab}^{c} T_c$$

其中 f_{ab}^{c} 为结构常数，场论中常简写作 f_{abc} 或 f^{abc}，a,b,c=1,2,⋯,N. 由此式可见，结构常数中交换两个临近指标差一负号，即 $f_{ab}^{c} = -f_{ba}^{c}$. 对 SU(2)，$f_{abc} = \varepsilon_{abc}$（三阶全反对称张量）；对 SU(3)，由 Lie 代数（对易关系），可得（证明见 Greiner《量子力学：对称性》）：

$$f_{123} = 1,\ f_{147} = -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} = \frac{1}{2},\ f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

（2）Jacobi 恒等式

$$[T_a,[T_b,T_c]] + [T_b,[T_c,T_a]] + [T_c,[T_a,T_b]] = 0$$

代入 $[T_a, T_b] = if_{ab}^{c} T_c$，可得

$$[T_a,[T_b,T_c]] + [T_b,[T_c,T_a]] + [T_c,[T_a,T_b]] = [T_a, if_{bc}^{l} T_l] + [T_b, if_{ca}^{l} T_l] + [T_c, if_{ab}^{l} T_l]$$
$$= if_{bc}^{l} if_{al}^{m} + if_{ca}^{l} if_{bl}^{m} + if_{ab}^{l} if_{cl}^{m} = f_{bc}^{l} f_{la}^{m} + f_{ca}^{l} f_{lb}^{m} + f_{ab}^{l} f_{lc}^{m} = 0$$

或

$$f_{bc\square} f_{\square a\triangle} + f_{ca\square} f_{\square b\triangle} + f_{ab\square} f_{\square c\triangle} = 0$$

此式也称为 Jacobi 恒等式（将在证明 BRST 时派上用场）。其中□为哑标，△为自由指标，此二者位置固定；其余指标 abc 满足轮换对称性。为区分，不妨将原始的 Jacobi 恒等式称为生成元的 Jacobi 恒等式，或 Jacobi 恒等式一；将导出的推论称为结构常数的 Jacobi 恒等式，或 Jacobi 恒等式二。

（3）正交性

$$\mathrm{Tr}[T_a T_b] = \frac{1}{2}\delta_{ab}$$

（4）完备性（Greiner《量子力学：对称性》）

$$\sum_a (T_a)_{il} (T_a)_{jk} = \frac{1}{2}\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{2n}\delta_{il}\delta_{jk}$$

由完备关系可得

$$\sum_a (T_a)_{ij} (T_a)_{jk} = C_F \delta_{ik},\quad f_{acd} f_{bcd} = C_A \delta_{ab}$$

其中 $C_F = \dfrac{n^2 - 1}{2n}$，$C_A = n$ 也称为 Casimir 常数（王正行《简明量子场论》）。这两个常数在 QCD 单圈重整化中将派上用场。

完备关系的一般证明见 Greiner《量子力学：对称性》，这里只以 SU(3)为例做简单说明：

$$\sum_a (T_a)_{ij}(T_a)_{jk} = \frac{\lambda_1}{2}\frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2}{2}\frac{\lambda_2}{2} + \cdots + \frac{\lambda_8}{2}\frac{\lambda_8}{2} = \frac{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}{4} + \frac{\lambda_4^2+\lambda_5^2}{4} + \frac{\lambda_6^2+\lambda_7^2}{4} + \frac{\lambda_8^2}{4}$$

$$= \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix} + \frac{2}{4}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{4}\begin{pmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} + \frac{\frac{1}{3}}{4}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5+\frac{1}{3} & & \\ & 5+\frac{1}{3} & \\ & & 4+\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{4}{3}diag\{1,1,1\} \Rightarrow C_F = \frac{4}{3}$$

$$f_{acd}f_{bcd} \xrightarrow{a=b=1} f_{123}f_{123} + f_{132}f_{132} + f_{147}f_{147} + f_{174}f_{174} + f_{156}f_{156} + f_{165}f_{165} = 3$$
$$\Rightarrow C_A = 3$$

下面，我们类比 U(1)规范场，寻找满足 SU(n)规范不变的 Lagrangian. 假定

（1）从 U(1)到 SU(n)，幺正变换从$U = \exp[i\theta(x)]$推广为$U = \exp[iT_a\theta^a(x)]$

（2）规范场受到群参数影响，从 A_μ 推广为 $A_\mu = A_\mu^a T_a$，从 $F_{\mu\nu}$ 推广为 $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T_a$

（3）协变导数从 $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ 变成 $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a T_a$

我们就在这三条假定下，推出非 Abel 情形下 A_μ 的变换规则，规范场强 $F_{\mu\nu}$ 的形式，以及 Lagrangian（注意，不同书上在 e 指数位置上及协变导数第二项的正负号可能不同，但无关紧要）。

首先，从旋量场的规范变换推导规范场的规范变换。

$\partial_\mu\Psi$ 在$U = \exp[iT_a\theta^a(x)]$变换下不是规范不变的，协变导数 D_μ 要满足规范不变性（裘忠平《现代量子场论导引》、李灵峰《量子场论》）：

$$(D_\mu\Psi)' \equiv D_\mu'\Psi' = U(D_\mu\Psi)$$

即

$$(\partial_\mu - igA_\mu')(U\Psi) = U(\partial_\mu - igA_\mu)\Psi$$
$$\Rightarrow (\partial_\mu U)\Psi + \cancel{U\partial_\mu\Psi} - igA_\mu'U\Psi = \cancel{U\partial_\mu\Psi} - igUA_\mu\Psi$$
$$\Rightarrow A_\mu'U = UA_\mu + \frac{1}{ig}(\partial_\mu U) \Rightarrow A_\mu' = UA_\mu U^{-1} + \frac{1}{ig}(\partial_\mu U)U^{-1}$$

注意 Ta 为矩阵，U 与 A 不对易。对于无穷小变换（$\theta(x) \ll 1$），有$U \approx 1 + iT_a\theta^a(x)$. 代入上式，得

$$A_\mu^{a\prime}T_a=[1+iT_b\theta^b(x)]A_\mu^aT_a[1-iT_c\theta^c(x)]+\frac{1}{ig}\{\partial_\mu[1+iT_a\theta^a(x)]\}[1-iT_d\theta^d(x)]$$

$$=A_\mu^aT_a+iT_b\theta^bA_\mu^aT_a-A_\mu^aT_aiT_c\theta^c+\frac{1}{g}T_a\partial_\mu\theta^a+o(\theta^2)$$

$$\xrightarrow{\theta^cT_c=\theta^bT_b}A_\mu^aT_a+iA_\mu^a\theta^b(T_bT_a-T_aT_b)+\frac{1}{g}T_a\partial_\mu\theta^a=A_\mu^aT_a+A_\mu^a\theta^bf_{abc}T_c+\frac{1}{g}T_a\partial_\mu\theta^a$$

$$\xrightarrow{a\leftrightarrow c}A_\mu^aT_a+A_\mu^c\theta^bf_{cba}T_a+\frac{1}{g}T_a\partial_\mu\theta^a\xrightarrow{f_{cba}=-f_{abc}}(A_\mu^a-f_{abc}\theta^bA_\mu^c+\frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a)T_a$$

所以

$$A_\mu^{a\prime}=A_\mu^a-f_{abc}\theta^bA_\mu^c+\frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a=A_\mu^a-f_{acb}A_\mu^b\theta^c+\frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a=A_\mu^a+f_{abc}A_\mu^b\theta^c+\frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a$$

其次，构造规范场强张量。

在 QED 情形，有

$$[D_\mu,D_\nu]\phi=[\partial_\mu+ieA_\mu,\partial_\nu+ieA_\nu]\phi$$

$$=(\partial_\mu+ieA_\mu)[(\partial_\nu+ieA_\nu)\phi]-(\partial_\nu+ieA_\nu)[(\partial_\mu+ieA_\mu)\phi]$$

$$=\partial_\mu(\partial_\nu\phi+ieA_\nu\phi)+ieA_\mu(\partial_\nu\phi+ieA_\nu\phi)-\partial_\nu(\partial_\mu\phi+ieA_\mu\phi)-ieA_\nu(\partial_\mu\phi+ieA_\mu\phi)$$

$$=(\cancel{\partial_\mu\partial_\nu\phi}+ie\partial_\mu A_\nu\phi+\cancel{ieA_\nu\partial_\mu\phi})+(\cancel{ieA_\mu\partial_\nu\phi}+\cancel{ieA_\mu ieA_\nu\phi})$$

$$-(\cancel{\partial_\nu\partial_\mu\phi}+ie\partial_\nu A_\mu\phi+\cancel{ieA_\mu\partial_\nu\phi})-(\cancel{ieA_\nu\partial_\mu\phi}+\cancel{ieA_\nu ieA_\mu\phi})$$

$$=ie(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)\phi\Rightarrow[D_\mu,D_\nu]=ieF_{\mu\nu}$$

注意 ϕ 的引入是必须的，否则某些项无法消掉。

对于非 Abel 情形，只需将 QED 情形的 e 换成-g， A_μ 换成 $A_\mu^aT_a$， A_ν 换成 $A_\nu^bT_b$，立即有

$$[D_\mu,D_\nu]\phi=[\partial_\mu-igA_\mu^aT_a,\partial_\nu-igA_\nu^bT_b]\phi$$

$$=(\cancel{\partial_\mu\partial_\nu\phi}-ig\partial_\mu A_\nu^bT_b\phi-\cancel{igA_\nu^bT_b\partial_\mu\phi})+(\cancel{-igA_\mu^aT_a\partial_\nu\phi}+igA_\mu^aT_aigA_\nu^bT_b\phi)$$

$$-(\cancel{\partial_\nu\partial_\mu\phi}-ig\partial_\nu A_\mu^aT_a\phi-\cancel{igA_\mu^aT_a\partial_\nu\phi})-(\cancel{-igA_\nu^bT_b\partial_\mu\phi}+igA_\nu^bT_bigA_\mu^aT_a\phi)$$

$$=-ig(\partial_\mu A_\nu^bT_b-\partial_\nu A_\mu^aT_a)\phi+(ig)^2A_\mu^aA_\nu^b(T_aT_b-T_bT_a)\phi$$

$$=-ig(\partial_\mu A_\nu^c-\partial_\nu A_\mu^c)T_c\phi+(ig)^2A_\mu^aA_\nu^bif_{abc}T_c\phi$$

$$\Rightarrow[D_\mu,D_\nu]=-ig[\partial_\mu A_\nu^c-\partial_\nu A_\mu^c+gf_{abc}A_\mu^aA_\nu^b]T_c=-igF_{\mu\nu}^cT_c$$

其中规范场强定义为（不同书可能差负号）

$$F_{\mu\nu}^c\equiv\partial_\mu A_\nu^c-\partial_\nu A_\mu^c+gf_{abc}A_\mu^aA_\nu^b$$

再次，构造 Lagrangian.

仿照 $\mathcal{L}_{QED}=\bar\psi(i\gamma^\mu D_\mu-m)\psi-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$，可构造

$$\mathcal{L}_{YM}=\bar{\Psi}(i\gamma^{\mu}D_{\mu}-m)\Psi-\frac{1}{4}F^{a}_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}$$

当然，这并非杨-Mills 场的有效 Lagrangian，所以 Lagrangian 的构造并未结束。QED 需要规范固定项，杨-Mills 场 Lagrangian 不仅需要规范固定项，还需要鬼场（下一节要讲的 Faddeev-Popov 项）。

2.1.2 规范场的路径积分

首先，让我们回忆下电磁场量子化的困难。电磁场可用正则量子化，包括 Coulomb 规范和 Lorentz 规范。前者破坏了协变性；后者保持了协变性，却增加了非物理自由度。对于非 Abel 规范场，正则量子化因非线性（自作用）而更难实现。虽然能通过光锥规范实现正则量子化（黄涛《量子色动力学引论》），但其破坏协变性，至今尚未发现保持协变性的非 Abel 规范场正则量子化方法。但是，不论何种场（标量场、旋量场、Abel 规范场、非 Abel 规范场），路径积分都是可行的，且都能保持协变性。所以，我们要大力推广路径积分。

2.1.2.1 delta 函数的变量代换

由 $y=f(x),dy=\frac{df}{dx}dx$，可得（李灵峰《量子场论》、陈申见《粒子物理学》）

$$I_1=\int dx\delta[f(x)]=\int\frac{dy}{|df/dx|}\delta(y)=\left.\frac{1}{|df/dx|}\right|_{f(x)=0}$$

注意，由于δ 函数为 ，变量代换时应加上绝对值（Srednicki《Quantum Field Theory》）。

对于二元函数 $y_i=f_i(x_1,x_2)$， $dy_1dy_2=\frac{\partial(y_1,y_2)}{\partial(x_1,x_2)}dx_1dx_2=J_2dx_1dx_2$，于是

$$I_2=\int dx_1dx_2\delta[f_1(x_1,x_2)]\delta[f_2(x_1,x_2)]=\int\frac{dy_1dy_2}{|J_2|}\delta(y_1)\delta(y_2)=\left.\frac{1}{|J_2|}\right|_{f_i=0}$$

其中 $J_2=\frac{\partial(y_1,y_2)}{\partial(x_1,x_2)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\end{vmatrix}$ 为 Jacobi 行列式。一般地，有

$$I_n=\int dx_1\cdots dx_n\delta[f_1(x_1,\cdots,x_n)]\cdots\delta[f_n(x_1,\cdots,x_n)]=\left.\frac{1}{|J_n|}\right|_{f_i=0}$$

其中 $J_n=\frac{\partial(y_1,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}$.

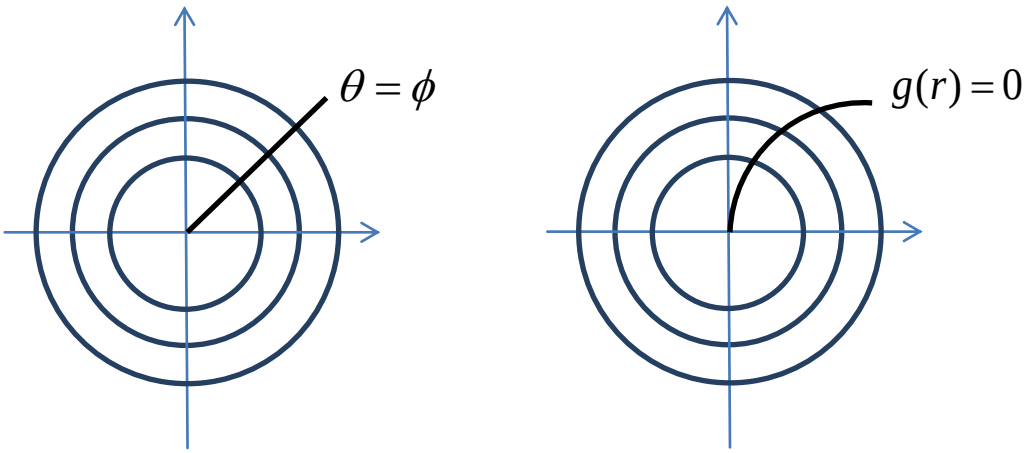
2.1.2.2 轨道与体积因子

所有规范变换的集合构成规范变换群，如 U(1),SU(2),SU(3)等。群元素 g（例如，幺正变换 $U=\exp[iT_a\theta^a(x)]$）将对象 $X=\{x,y,\cdots\}$ 的 x 变成 y（例如 $A_\mu\to A_\mu'$），则 x 等价于 y，记作 $x\sim y$. 所有与 x 等价的点的集合，称为轨道（韩其智《群论》）。至于群元本身，由于重排定理（$g\in G,g'\in G$ 则 $g\cdot g'\in G$），（紧致）群上的（左或右）不变积分使得积分测度具有左（右移）不变性（徐建军《物理学中的群论基础》、黄涛《量子色动力学引论》）：

$$[dg]=[d(gg')]=[d(g'g)]$$

下面，我们先通过一个二重积分来说明分解体积因子的概念，然后考虑更加复杂的规范理论的情况。如图，考虑如下二重积分（李灵峰《量子场论》、Ryder《Quantum Field Theory》）：

$$W=\int dxdye^{iS(x,y)}=\int e^{iS(r,\theta)}rdrd\theta$$



假设 $S(r,\theta)$ 在旋转变换下是不变的，即 $S(r,\theta)$ 在由旋转生成的圆轨道上是一个常量，因而积分 W 正比于轨道长度。如果只想对不等价的 $S(r,\theta)$ 的贡献求和，只需除去体积因子，也就是对极角的积分 $\int d\theta=2\pi$. 为了推广到更普遍情形，我们用一个更复杂的程序完成它。将恒等式 $1=\int d\phi\delta(\theta-\phi)$ 插入 W 中，得

$$W=\int d\phi\int rdrd\theta e^{iS(r,\theta)}\delta(\theta-\phi)=\int d\phi W_\phi$$

其中 $W_\phi=\int rdrd\theta e^{iS(r,\theta)}\delta(\theta-\phi)$ 只是沿某个特定角度 ϕ 的积分。由旋转不变性，可知 $W_\phi=W_{\phi'}$，即 W_ϕ 不依赖于 ϕ. 因此，$W=W_\phi\int d\phi=2\pi W_\phi$. 这就分离出体积因子。

其实，我们还可施加更复杂约束，如 $g(\vec{r})=0$，只要它与轨道只相交一次（如图）。假定

$$1=\int d\phi[\Delta_g(\vec{r})]\delta[g(\vec{r})]$$

由于$\Delta_g(\vec{r})$依赖于θ但不依赖于ϕ，可以拿到积分号外：

$$1=\Delta_g(\vec{r})\int d\phi\delta[g(\vec{r})]\Rightarrow\Delta_g(\vec{r})^{-1}=\int d\phi\delta[g(\vec{r})]=\left|\frac{\partial g(\vec{r})}{\partial\theta}\right|_{g(\vec{r})=0}\Rightarrow\Delta_g(\vec{r})=\left|\frac{\partial g(\vec{r})}{\partial\theta}\right|_{g(\vec{r})=0}$$

将此插入 W，得

$$W=\int rdrd\theta e^{iS(r,\theta)}\int d\phi\Delta_g(\vec{r})\delta[g(\vec{r})]=2\pi W_\phi$$

其中$W_\phi=\int rdrd\theta e^{iS(r,\theta)}\left|\frac{\partial g(\vec{r})}{\partial\theta}\right|_{g(\vec{r})=0}\delta[g(\vec{r})]$

可见，施加约束$g(\vec{r})=0$时，还要用$\Delta_g(\vec{r})$补偿$\delta[g(\vec{r})]$的出现（李灵峰《量子场论》）。

2.1.2.3 杨-Mills 的生成泛函

仿照标量场作用量$S[\varphi]$及其生成泛函$\int[d\varphi]e^{iS[\varphi]}$，可写出规范场的生成泛函

$$Z[J^\mu]=\int[dA^\mu]\exp[i\int d^4x(\mathcal{L}+J^\mu A_\mu)]$$

$$Z[0]=\int[dA^\mu]\exp[i\int d^4x\mathcal{L}]$$

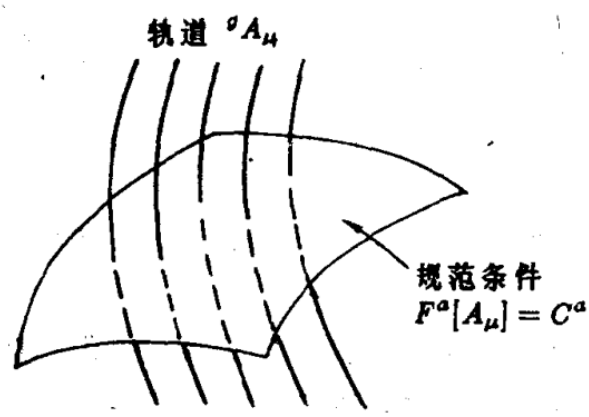
其中$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}$.

规范理论中，$U=\exp[iT_a\theta^a(x)]$就相当于前例中的旋转变换，而规范变换

$${}^\theta A^a_\mu\equiv A^a_\mu{}'=A^a_\mu+f_{abc}A^b_\mu\theta^c+\frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a$$

就相当于前例中的圆轨道，$f(A^{a\theta}_\mu)=0$所确定的超曲面就相当于前例中的$g(\vec{r})=0$. 注意${}^\theta A^a_\mu$（或${}^g A^a_\mu$，$A^{\theta a}_\mu$）是不同作者的习惯约定。

我们要求，超曲面与每一轨道只相交一次（方程有唯一解），如图（裘忠平《现代量子场论导引》、周邦融《规范场论》）：



这样，积分时只包含互不等价的A_μ，属于同一规范等价类的A_μ在积分中只出现一次。

仿照前例，在生成泛函中插入（注意裘忠平图上画的C^a在此改成了B_a）

$$1=\int[dg]\delta[f(A_\mu^a)-B_a(x)]\Delta_f[A_\mu]$$

可得

$$Z[0]=\int[dA^\mu][dg]\Delta_f[A_\mu]\delta[f(A_\mu^a)-B_a(x)]\exp[iS]$$

由于被积函数与群空间不变测度$[dg]=\prod_a d\theta^a$无关，可以交换积分次序，分离出泛函积分$\int[dg]$，故 Z[0]正比于群空间体积（裘忠平《现代量子场论导引》）。当积分区域无穷大时，泛函积分是发散的（黄涛《量子色动力学引论》）。但我们可以约定$\int[dg]=1$，而将生成泛函重新定义为

$$Z[0]=\int[dA^\mu]\Delta_f[A_\mu]\delta[f(A_\mu^a)-B_a(x)]\exp[iS]$$

或者$Z[0]=N\int[dA^\mu]\Delta_f[A_\mu]\delta[f(A_\mu^a)-B_a(x)]\exp[iS]$.

规范固定项：

在 QED 中曾引入规范固定项$-\frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2$. 类似地，可在 QCD 中引入规范固定项。

由于B_a与$\Delta_f[A_\mu]$无关（裘忠平《现代量子场论导引》），$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$，故

$\int[dB_a]\exp[-\frac{i}{2\alpha}\int d^4xB_a^2(x)]$为常数（李灵峰《量子场论》）。于是，可在上述 Z[0]上乘以权重函数$\exp[-\frac{i}{2\alpha}B_a^2]$，生成泛函变成

$$Z[J]=N\int[dA][dB_a]\Delta_f[A_\mu]\delta[f(A_\mu^a)-B_a(x)]\exp\{i\int d^4x[\mathcal{L}+J^\mu A_\mu-\frac{1}{2\alpha}B_a^2(x)]\}$$
$$=N\int[dA]\Delta_f[A_\mu]\exp\{i\int d^4x[\mathcal{L}+J^\mu A_\mu-\frac{1}{2\alpha}f^2(A_\mu^a)]\}$$

2.1.2.4 Faddeev-Popov 行列式

由$1=\int[dg]\delta[f(A_\mu^a)-B_a(x)]\Delta_f[A_\mu]$，可得

$$\Delta_f[A_\mu]^{-1}=\int[dg]\delta[f(A_\mu^a)-B_a(x)]=\left.\frac{1}{|\det M_f|}\right|_{f(A_\mu^a)=0}\Rightarrow\Delta_f[A_\mu]=\left|\det M_f\right|_{f(A_\mu^a)=0}$$

其中$[M_f(x,y)]_{ab}=\frac{\partial f[A_\mu^{a\prime}]}{\partial\theta_b(y)}$. 下面，我们给出 M_f 的计算方法。

【方法一】（李灵峰《量子场论》）

对于 Lorentz 规范，取 $f(A_\mu^a)=\partial^\mu A_\mu^a$. 代入 $A_\mu^{a\prime}=A_\mu^a+f_{abc}A_\mu^b\theta^c+\frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a$，得

$$f(A_\mu^{a\prime})=\partial^\mu[A_\mu^a+f_{abc}A_\mu^b\theta^c(x)+\frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a(x)]=\partial^\mu A_\mu^a+\frac{1}{g}\partial^\mu[\partial_\mu\theta^a(x)+gf_{abc}A_\mu^b\theta^c(x)]$$
$$=\partial^\mu A_\mu^a+\frac{1}{g}\partial^\mu[\partial_\mu\theta^b(x)\delta_{ab}+gf_{acb}A_\mu^c\theta^b(x)]=\partial^\mu A_\mu^a+\frac{1}{g}\partial^\mu\{[\delta_{ab}\partial_\mu-gf_{abc}A_\mu^c]\theta^b(x)\}$$
$$=\partial^\mu A_\mu^a+\int d^4y[M_f(x,y)]_{ab}\theta^b(y)$$

$$[M_f(x,y)]_{ab}=\frac{1}{g}[\delta_{ab}\partial^\mu\partial_\mu-gf_{abc}(\partial^\mu A_\mu^c+A_\mu^c\partial^\mu)]\delta^4(x-y)$$

其中用灰色表示的项 $A_\mu^c\partial^\mu$ 理论上应该有，但实际上对最终的计算结果无影响，所以很多书都略去了。

【方法二】（裘忠平《现代量子场论导引》）

$$\delta A_\mu^a=A_\mu^{a\prime}-A_\mu^a=f_{abc}A_\mu^b\theta^c(x)+\frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a(x)\equiv\frac{1}{g}D_\mu^{ab}\theta^b(x)$$

$$g\frac{\delta f(A_\mu^{a\prime})}{\delta\theta^b(x)}=g\frac{\partial^\mu(\delta A_\mu^a)}{\delta\theta^b(x)}=\partial^\mu D_\mu^{ab}\delta^4(x-y)\equiv M_{ab}(x,y)\delta^4(x-y)$$

注意这两种方法对 g 因子及 δ 函数的不同处理。实际上，可先给出 M_f 的一般表达式（黄涛《量子色动力学引论》），再代入 Lorentz 规范，那么两种方法就统一了。注意，黄涛的定义与裘忠平略有不同：

$$\partial^\mu D_\mu^{ab} = \delta_{ab}\partial^\mu\partial_\mu - gf_{abc}\partial^\mu A_\mu^c$$

我们曾在 1.2.2.4 节证明 $\det A = \int D\bar{\alpha}D\alpha e^{-\bar{\alpha}A\alpha}$，所以（“†”显示不正常，用“+”代替）

$$\det M_f = \int [dC_a^+][dC_b]\exp[-i\int d^4xd^4yC_a^+(x)M_f^{ab}(x,y)C_b(y)]$$

其中 C_a^+, C_b 为 Faddeev-Popov 假定的 Grassmann 数。于是，生成泛函为

$$Z[J] = N\int [dA][dC_a^+][dC_b]\exp\{i\int d^4x[\mathcal{L} + J^\mu A_\mu - \frac{1}{2\alpha}f^2(A_\mu^a) - C_a^+M_f^{ab}C_b]\}$$

代入 $f(A_\mu^a) = \partial^\mu A_\mu^a$，并加入旋量场 $\bar{\psi},\psi$ 及外源，完整的生成泛函可写为（黄涛《量子色动力学引论》）

$$Z[J,\eta,\bar{\eta},\xi,\xi^*]$$
$$= \int [dA][d\bar{\psi}][d\psi][dC^*][dC]\exp\{i\int d^4x[\mathcal{L}_{eff} + A_\mu J^\mu + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + C^*\xi + \xi^*C]\}$$

其中 $J^\mu,\eta,\bar{\eta},\xi,\xi^*$ 分别为 $A_\mu,\bar{\psi},\psi,C^*,C$ 的外源；$\mathcal{L}_{eff}$ 为有效 Lagrangian，其形式为

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_{YM} - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 - C_a^+M_f^{ab}C_b$$

其中 $\mathcal{L}_{YM} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$.

注意到

$$\int d^4xd^4yC_a^+(x)M_f^{ab}(x,y)C_b(y) \sim \int d^4xC_a^*(x)[\delta_{ab}\partial^\mu\partial_\mu - gf_{abc}\partial^\mu A_\mu^c]C_b(x)$$
$$= \int d^4x[C_a^*(x)]\partial^\mu[D_\mu^{ab}C_b(x)] \xrightarrow{\text{integrate by part}} -\int d^4x[\partial^\mu C_a^*(x)][D_\mu^{ab}C_b(x)]$$

有效 Lagrangian 可改写为

$$\mathcal{L}_{eff} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 + (\partial^\mu C_a^*)D_\mu^{ab}C_b$$

其中 1/g 因子已吸收到归一化常数中，†改用*，分部积分产生的表面项已舍去。

2.1.3* BRST 对称性

QED 中，为消除奇异性（夹在 Lagrangian 二次型场量间的算符没有逆，从而无法计算传播子），我们必须引入规范固定项。但规范固定项并非规范不变的。QCD 中，我们不仅引入了规范固定项 $-\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu^a)^2$，还引入了鬼项 $(\partial^\mu C_a^*)(\delta^{ab}\partial_\mu - gf_{abc}A_\mu^c)C_b$，这两项在规范变换

$$A_\mu^a \to A_\mu^{a\prime} = A_\mu^a + f_{abc}A_\mu^b\theta^c + \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a$$

下都不是不变的。我们构造 Lagrangian 的出发点就是规范不变性，结果绕来绕去却构造了一个不满足规范不变性的 Lagrangian，这不是很讽刺吗？

想想规范场论的开端吧。普通导数破坏规范不变性，我们就将其改造成协变导数。我们将在电弱统一理论中看到，质量项破坏规范不变性，我们就引入 Higgs 机制来改造质量项。反正，为了保护规范不变性，我们是啥破事都能干得出来。现在，规范固定项和鬼项又破坏规范不变性了，看来它是欠修理了。怎么修理？在 Lagrangian 中再加几项来恢复规范不变性？那我们辛辛苦苦构造的 Lagrangian 又不能用了，多闹心。所以，我们想既不改变 Lagrangian，又恢复规范不变性。世上有这等好事么？

郭德纲说，让你丫（电视）总让我戒烟，我干脆把电视戒了！让你丫（规范不变性）总被破坏，我干脆把规范不变性戒了？这地球离了杨振宁（的规范不变原理）还不转了？

你当然可以驳论，但不能只破不立。你还有更好的办法统一四种力吗？所以规范不变性暂时还不能戒。可是吸烟有害健康啊，怎么办？

其实有一种折中的办法，吸电子烟。Lagrangian 在原来的规范变换下改变，并不等于在所有规范变换下都改变吧？也许有一种对健康无害（不破坏规范原理）又能过瘾（不改变有效 Lagrangian 形式）的烟（某种新的规范变换）呢？

上帝是仁慈的。世上还真有这样的规范变换，这就是 BRST 变换。很多书都是先写出这样的变换再证明。不过，为了大家能在科学上有所建树，我们让时光倒流，假设我们生在 BRST 等人之前，找找能令有效 Lagrangian 保持不变的“广义”规范变换形式。从方法论上讲我们应从简单到复杂，所以先讨论 Abel 规范场情形。

（1）Abel 情形

此时 $f_{abc}=0$， $D_\mu^{ab}=\delta_{ab}\partial_\mu - gf_{abc}A_\mu^c \to \delta_{ab}\partial_\mu$. 在规范变换 $A_\mu^a \to A_\mu^{a\prime} = A_\mu^a + \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a$ 下，

$\mathcal{L}_{GF}+\mathcal{L}_{FP} = -\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 + (\partial^\mu C_1^a)\partial_\mu C_2^a$ 变为

$$\mathcal{L}_{GF}{}' + \mathcal{L}_{FP}{}' = -\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu^a + \frac{1}{g}\partial^\mu\partial_\mu\theta^a)^2 + (\partial^\mu C_1^a)\partial_\mu C_2^a$$

$$= -\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 - \frac{1}{2\alpha}\frac{1}{g^2}(\Box\theta^a)^2 - \frac{1}{\alpha g}\partial^\mu A_\mu^a\Box\theta^a - C_1^a\Box C_2^a$$

其中 $\Box \equiv \partial^\mu\partial_\mu$（不同书度规不同，可能差负号）；因 C*和 C 为不同的场，这里已将它们用 C1，C2 表示；最后一项利用了分部积分（略去表面项）。

由上式可见，只要将第二项 $(\Box\theta^a)^2$ 消去，且将最后两项合并为 $-C_1^{a\prime}\Box C_2^{a\prime}$，就恢复了规范不变性。

什么东西平方等于零？Grassmann 数！所以，θ^a 正比于某个 Grassmann 数。既然鬼场 C_1^a, C_2^a 本身就是 Grassmann 数，那不妨设 $\theta^a = \varepsilon C_2^a \propto C_2^a$，这样第三项和第四项后半部分就统一

了。不过，这样并不会使$(\Box\theta^a)^2$出现$(C_2^a)^2$，只会出现ε^2，为消去第二项，ε也应该是Grassmann数。如此假定后，Lagrangian变为

$$\mathcal{L}_{GF}{}' + \mathcal{L}_{FP}{}' = -\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 - (\frac{\varepsilon}{\alpha g}\partial^\mu A_\mu^a + C_1^a)\Box C_2^a$$

原来的规范变换不能使Lagrangian不变，我们不能只引入ε，还要引入新的变换：不仅规范场A要变，鬼场也要参与变换。从上式可见，若鬼场作如下变换

$$C_1^a \to C_1^{a\prime} = C_1^a - \frac{\varepsilon}{\alpha g}\partial^\mu A_\mu^a \text{或} \delta C_1^a = C_1^{a\prime} - C_1^a = -\frac{\varepsilon}{\alpha g}\partial^\mu A_\mu^a$$

而$C_2^a \to C_2^{a\prime} = C_2^a$，则

$$\mathcal{L}_{GF}{}' + \mathcal{L}_{FP}{}' = -\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu^{a\prime})^2 - C_1^{a\prime}\Box C_2^{a\prime}$$

$$= -\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 - \frac{1}{2\alpha}\frac{1}{g^2}[\Box(\varepsilon C_2^a)]^2 - \frac{1}{\alpha g}\partial^\mu A_\mu^a \Box(\varepsilon C_2^a) - (C_1^a - \frac{\varepsilon}{\alpha g}\partial^\mu A_\mu^a)\Box C_2^a$$

$$= -\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 - C_1^a \Box C_2^a = \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP}$$

（2）非Abel情形

从Abel情形可见，只要令$\theta^a = \varepsilon C_2^a$，且$\begin{cases} A_\mu^a \to A_\mu^{a\prime} = A_\mu^a + \frac{\varepsilon}{g}\partial_\mu C_2^a \\ C_1^a \to C_1^{a\prime} = C_1^a - \frac{\varepsilon}{\alpha g}\partial^\mu A_\mu^a \end{cases}$，Lagrangian就是规范不变的。现在，我们尝试加上含f_{abc}的非Abel项。因$\theta^a = \varepsilon C_2^a$及$C_1^a$的变换只影响规范固定项和鬼项，所以只要讨论

$$\mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP} = -\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 + (\partial^\mu C_1^a)D_\mu^{ab}C_2^b = -\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 - C_1^a\partial^\mu[(\delta_{ab}\partial_\mu - g f_{abc}A_\mu^c)C_2^b]$$

在$\begin{cases} A_\mu^a \to A_\mu^{a\prime} = A_\mu^a + \frac{1}{g}\partial_\mu(\varepsilon C_2^a) + f_{abc}A_\mu^b(\varepsilon C_2^c) \\ C_1^a \to C_1^{a\prime} = C_1^a - \frac{\varepsilon}{\alpha g}\partial^\mu A_\mu^a \end{cases}$下的变换。假定变换后多出来的项被$C_2^b$的变换消去，就能使Lagrangian恢复规范不变性。利用$\varepsilon^2 = 0$，假定$C_2^b \to C_2^{b\prime} = C_2^b + \varepsilon X^b$，这样可让变换后项数不至于爆炸。

$$\mathcal{L}_{GF}{}' + \mathcal{L}_{FP}{}' = -\frac{1}{2\alpha}[\partial^\mu A^a_\mu + \frac{\varepsilon}{g}\partial^\nu(\partial_\nu C^a_2 + g f_{abc} A^b_\nu C^c_2)]^2$$

$$-(C^a_1 - \frac{\varepsilon}{\alpha g}\partial^\mu A^a_\mu)\partial^\sigma\{[\delta_{ab}\partial_\sigma - g f_{abc}(A^c_\sigma + \frac{\varepsilon}{g}\partial_\sigma C^c_2 + \varepsilon f_{cde} A^d_\sigma C^e_2)](C^b_2 + \varepsilon X^b)\}$$

$$= \frac{-1}{2\alpha}[\partial^\mu A^a_\mu]^2 - \frac{\varepsilon}{\alpha g}\partial^\mu A^a_\mu(\partial_\nu C^a_2 + g f_{abc} A^b_\nu C^c_2) - (C^a_1 - \frac{\varepsilon}{\alpha g}\partial^\mu A^a_\mu)\partial^\sigma[(\delta_{ab}\partial_\sigma - g f_{abc} A^c_\sigma)C^b_2]$$

$$+C^a_1\partial^\sigma[\varepsilon f_{abc}(\partial_\sigma C^c_2 + g f_{cde} A^d_\sigma C^e_2)C^b_2] - C^a_1\partial^\sigma[(\delta_{ab}\partial_\sigma - g f_{abc} A^c_\sigma)\varepsilon X^b]$$

$$= -\frac{1}{2\alpha}[\partial^\mu A^a_\mu]^2 - C^a_1\partial^\sigma[(\delta_{ab}\partial_\sigma - g f_{abc} A^c_\sigma)C^b_2]$$

$$-\frac{\varepsilon}{\alpha g}\partial^\mu A^a_\mu(\cancel{\partial_\nu C^a_2} + \cancel{g f_{abc} A^b_\nu C^c_2}) + \frac{\varepsilon}{\alpha g}\partial^\mu A^a_\mu\partial^\sigma[\cancel{\delta_{ab}\partial_\sigma C^b_2} - \cancel{g f_{abc} A^c_\sigma C^b_2}]$$

$$+\varepsilon C^a_1\partial^\sigma[f_{abc}(\partial_\sigma C^c_2 + g f_{cde} A^d_\sigma C^e_2)C^b_2 - (\delta_{ab}\partial_\sigma - g f_{abc} A^c_\sigma)X^b]$$

其中已扔掉 $\varepsilon^2 = 0$ 的项。第一行为规范变换前的 Lagrangian，第二行交换指标后抵消掉。要保证规范不变性，第三行应为零：

$$f_{abc}(\partial_\sigma C^c_2 + g f_{cde} A^d_\sigma C^e_2)C^b_2 - (\delta_{ab}\partial_\sigma - g f_{abc} A^c_\sigma)X^b$$
$$= f_{abc}(\partial_\sigma C^c_2)C^b_2 - \delta_{ab}\partial_\sigma X^b + g f_{abc}(f_{cde} A^d_\sigma C^e_2 C^b_2 + A^c_\sigma X^b) = 0$$

由此可猜想，X^b 应正比于 $f_{b\bigcirc\triangle}C^\bigcirc_2 C^\triangle_2$，不妨设 $X^b = k f_{bmn} C^m_2 C^n_2$. 我们先设想 X^b 满足一个较强的条件：不仅 $f_{abc}(\partial_\sigma C^c_2)C^b_2 - \delta_{ab}\partial_\sigma X^b = 0$，而且 $g f_{abc}(f_{cde} A^d_\sigma C^e_2 C^b_2 + A^c_\sigma X^b) = 0$，这样要解的方程简单点（如果这两个小方程不能同时满足，再考虑原来那一个大方程）。
代入第一个方程，得

$$0 = f_{abc}(\partial_\sigma C^c_2)C^b_2 - \delta_{ab} k f_{bmn}\partial_\sigma(C^m_2 C^n_2) = f_{abc}(\partial_\sigma C^c_2)C^b_2 - k f_{amn}(\partial_\sigma C^m_2)C^n_2 - k f_{amn} C^m_2\partial_\sigma C^n_2$$
$$= f_{abc}(\partial_\sigma C^c_2)C^b_2 - k f_{amn}(\partial_\sigma C^m_2)C^n_2 + k f_{amn}(\partial_\sigma C^n_2)C^m_2$$
$$= f_{abc}(\partial_\sigma C^c_2)C^b_2 - k f_{amn}(\partial_\sigma C^m_2)C^n_2 + k f_{anm}(\partial_\sigma C^m_2)C^n_2$$
$$= f_{abc}(\partial_\sigma C^c_2)C^b_2 - 2k f_{amn}(\partial_\sigma C^m_2)C^n_2 = f_{abc}(\partial_\sigma C^c_2)C^b_2 - 2k f_{anm}(\partial_\sigma C^n_2)C^m_2$$
$$= f_{abc}(\partial_\sigma C^c_2)C^b_2 + 2k f_{amn}(\partial_\sigma C^n_2)C^m_2$$

所以 $k = -\frac{1}{2}$， $X^b = -\frac{1}{2} f_{bmn} C^m_2 C^n_2$. 现在，我们来验证这个解是否满足第二个方程。

$$f_{abc}(f_{cde} A^d_\sigma C^e_2 C^b_2 - \frac{1}{2} A^c_\sigma f_{bmn} C^m_2 C^n_2) = f_{abc} f_{cde} A^d_\sigma C^e_2 C^b_2 - \frac{1}{2} f_{abc} f_{bde} A^c_\sigma C^d_2 C^e_2$$
$$\xrightarrow[\text{第二项}b\leftrightarrow c]{\text{第一项}b\leftrightarrow d} f_{adc} f_{cbe} A^b_\sigma C^e_2 C^d_2 - \frac{1}{2} f_{acb} f_{cde} A^b_\sigma C^d_2 C^e_2$$
$$\xrightarrow[\text{第二项}f_{acb}\to -f_{abc}]{\text{第一项}d\leftrightarrow e} (f_{aec} f_{cbd} + \frac{1}{2} f_{abc} f_{cde}) A^b_\sigma C^d_2 C^e_2$$

由 Jacobi 恒等式 $f_{12\square} f_{\square 3\triangle} + f_{23\square} f_{\square 1\triangle} + f_{31\square} f_{\square 2\triangle} = 0$，上式可化为

$$\xrightarrow{a=1,b=2,d=3}[f_{aec}f_{cbd}+\frac{1}{2}(-f_{bdc}f_{cae}-f_{dac}f_{cbe})]A_\sigma^b C_2^d C_2^e$$

$$\xrightarrow[\text{第三项}f_{dac}\to -f_{adc}]{\text{第二项}f_{bdc}f_{cae}\to f_{aec}f_{cbd}}[f_{aec}f_{cbd}-\frac{1}{2}f_{aec}f_{cbd}+\frac{1}{2}f_{adc}f_{cbe}]A_\sigma^b C_2^d C_2^e$$

$$=\frac{1}{2}[f_{aec}f_{cbd}C_2^d C_2^e+f_{adc}f_{cbe}C_2^d C_2^e]A_\sigma^b \xrightarrow{\text{第二项}d\leftrightarrow e}\frac{1}{2}f_{aec}f_{cbd}[C_2^d C_2^e+C_2^e C_2^d]A_\sigma^b$$

而 Fermion 场反对易使 $C_2^d C_2^e+C_2^e C_2^d=0$，所以上式等于零，第二个小方程也成立。于是，在“广义”规范变换（即 BRST 变换）下，Lagrangian 是不变的！

【讨论】

（1）增量法与变分法等价

除了本书介绍的增量法，即 $\Delta(\mathcal{L}_{GF}+\mathcal{L}_{FP})=\mathcal{L}_{GF}{}'+\mathcal{L}_{FP}{}'-(\mathcal{L}_{GF}+\mathcal{L}_{FP})=0$，其他书用的都是变分法来证明 BRST 不变性。增量法过程冗长，但容易理解。下面来说明两种方法的关系。为简单，设 $\mathcal{L}=abc$，变分法是说，若 $\mathcal{L}=abc$ 规范不变，则

$$\delta\mathcal{L}=(\delta a)bc+a(\delta b)c+ab(\delta c)=0$$

下面由增量法证明变分法。

$$\Delta\mathcal{L}=\Delta(abc)=a'b'c'-abc=(a+\delta a)(b+\delta b)(c+\delta c)-abc$$
$$=(a+\delta a)[bc+b\delta c+(\delta b)c+(\delta b)\delta c]-abc=$$
$$abc+ab\delta c+a(\delta b)c+a(\delta b)\delta c+[(\delta a)bc+(\delta a)b\delta c+(\delta a)(\delta b)c+(\delta a)(\delta b)\delta c]-abc$$
$$=(\delta a)bc+a(\delta b)c+ab(\delta c)+o(\delta^2)=\delta\mathcal{L}+o(\delta^2)$$

可见，略去高阶无穷小后，增量与变分等价。变分法对于无穷小规范变换适用。

（2）BRST 变换可表示为矩阵

BRST 变换是对易的 Boson 场与反对易的 Fermion 场的混合变换。将 Boson、Fermion 互换的变换称为超对称变换，故 BRST 变换像是某种超对称变换（曹昌祺《量子非阿贝尔规范场论》）。有趣的是，这两类场的变换可分离：

第一次将 $C_2,C_1\to C_2',C_1'$，但 A 不变（忽略指标变化，只看函数形式——未引入新场，原场代数微分关系不变）；第二次变换将 $A\to A'$，但 C_2',C_1' 不变。

$$\begin{pmatrix}A_\mu^{a'}\\C_2^{a'}\\C_1^{a'}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta_\mu^\nu\delta_{ab} & \frac{\varepsilon}{g}(\delta_{ab}\partial_\mu-f_{abd}A_\mu^d) & 0\\ 0 & \delta_{ab}+\frac{\varepsilon}{2}f_{abd}C_2^d & 0\\ -\frac{\varepsilon}{\alpha g}\delta_{ab}\partial^\nu & 0 & \delta_{ab}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_\nu^b\\C_2^b\\C_1^b\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\delta_\mu^\sigma\delta_{ac} & \frac{\varepsilon}{g}(\delta_{ac}\partial_\mu-f_{cbd}A_\mu^d) & 0\\ 0 & \delta_{ac} & 0\\ 0 & 0 & \delta_{ac}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_\sigma^\nu\delta_{bc} & 0 & 0\\ 0 & \delta_{bc}+\frac{\varepsilon}{2}f_{cbd}C_2^d & 0\\ -\frac{\varepsilon}{\alpha g}\delta_{bc}\partial^\nu & 0 & \delta_{bc}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_\nu^b\\C_2^b\\C_1^b\end{pmatrix}$$

注意矩阵表示不唯一，例如，裘忠平《现代量子场论导引》就将第一行前两个元素部分调换（描红色的项挪到第一行第一列，注意 A 要变成 C2）。

（3）BRST 运算的幂零性

$$\delta C_2^a = -\frac{\varepsilon}{2} f_{abc} C_2^b C_2^c$$

$$\Rightarrow \delta^2 C_2^a = \delta(\delta C_2^a) = -\frac{\varepsilon}{2} f_{abc}[(\delta C_2^b) C_2^c + C_2^b \delta C_2^c]$$

$$= -\frac{\varepsilon}{2} f_{abc}[(-\frac{\varepsilon}{2} f_{bmn} C_2^m C_2^n) C_2^c + C_2^b (-\frac{\varepsilon}{2} f_{cmn} C_2^m C_2^n)] \propto \varepsilon^2 = 0$$

类似地，有 $\delta^2 A_\mu^a = \delta^2 C_2^a = \delta^2 C_1^a = \delta^2 \psi = \delta^2 \bar{\psi} = 0$

这点很像弦论中的 BRST 量子化中讲的 BRST 算符 Q，它是体系的守恒荷，也是幂零的。
（4）类似于 QED 的 Ward 恒等式，QCD 有 ST 恒等式，对证明可重整性很重要。不过，QCD 可重整性证明极为繁琐，作为入门教材，就不介绍了。
至此，Lagrangian 的问题讨论完毕。接下来，就可以放心地推导 Feynman 规则了。

第 2 步　推导 Feynman 规则（100 分）

Feynman 规则是图形与公式间对应法则。Feynman 规则是连接理论物理（作用量、守恒流等）与实验物理（散射截面、衰变宽度等）的桥梁。下面，我们来推导 QCD 的 Feynman 规则。

2.2.1　推导 Feynman 规则的出发点

Feynman 规则有多种导出方式。比较传统的方式有：
（1）根据 Wick 定理，找出所有收缩方式，详见石康杰《量子场论与重整化导论》；
（2）根据 LSZ 约化公式，用泛函微商求 Green 函数，详见王正行《简明量子场论》。
其中前者属于正则量子化，后者属于路径积分量子化。这两种方式都都比较费时，尤其对于复杂的相互作用（比如非 Abel 规范场）更是如此。那么，能否绕过 Wick 定理和 LSZ 约化呢？其实，约化公式不是用来导出外线、内线、顶点这些因子的，而是对应一个完整的物理过程，如果我们“先验地”认为 Feynman 图像积木一样可拆分重组，就可以不用约化公式。于是，还有两种“不正规但实用”的捷径：一是从有效作用量出发，直接作泛函微商（胡瑶光《规范场论》）；二是从 Lagrangian 直接读取传播子和顶点（裘忠平《现代量子场论导引》）。裘忠平的方式跳跃性太大，我们准备在 QCD 中用“有效作用量泛函微商法”，等到电弱统一理论再用“Lagrangian 直接读取法”。我们从标量场出发，所得结果也适用于其他场。

2.2.1.1　鞍点近似与树图近似

自由场的生成泛函很容易计算，相互作用场的生成泛函只能做微扰近似。如 QED 所见，一阶近似给出顶角，二阶近似给出树图过程，三阶近似给出单圈图。微扰展开可以按耦合常数展开也可以按圈数展开，按圈数展开相当于按 $\hbar$ 幂次展开（戴元本《相互作用的规范理论》）。如果我们先验地假定 Feynman 图可拆分重组，树图、圈图都是由顶点、传播子拼成，那么完全可以只计算最低阶微扰。
标量场 Green 函数的生成泛函为

$$Z[J]=\int[d\phi]\exp\{iS[\phi]+i\int d^4xJ(x)\phi(x)\}$$

场ϕ是时空坐标 x 的函数，作用量 S 是场ϕ的函数，所以作用量是函数的函数，称为泛函。

类比

$$f(x)=f(x_0+\Delta x_0)=f(x_0)+\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}(x-x_0)+\frac{1}{2}\left.\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^2+\cdots$$

将作用量在某个确定的函数$\phi_0(x)$邻域做 Taylor 展开（胡瑶光《规范场论》），得

$$S[\phi]=S[\phi_0]+\int d^4x\frac{\delta S[\phi_0]}{\delta\phi_0(x)}[\phi(x)-\phi_0(x)]$$
$$+\frac{1}{2}\int d^4xd^4y\frac{\delta^2S[\phi_0]}{\delta\phi_0(x)\delta\phi_0(y)}[\phi(x)-\phi_0(x)][\phi(y)-\phi_0(y)]+\cdots$$

注意变分时对ϕ_0进行，而非对ϕ进行。这在普通函数是难以理解的（普通函数是先求导再代入具体值，而不能先赋值再求导），但对泛函却可以。

于是，标量场 Green 函数的生成泛函变成

$$Z[J]=\int[d\phi]\exp\{iS[\phi_0]+i\int d^4x\left[J(x)\phi(x)+\frac{\delta S[\phi_0]}{\delta\phi_0(x)}[\phi(x)-\phi_0(x)]\right]$$
$$+\frac{i}{2}\int d^4xd^4y\frac{\delta^2S[\phi_0]}{\delta\phi_0(x)\delta\phi_0(y)}[\phi(x)-\phi_0(x)][\phi(y)-\phi_0(y)]+\cdots\}$$
$$=\exp\{iS[\phi_0]+i\int d^4xJ(x)\phi_0(x)\}\int[d\phi]\exp\{i\int d^4x[\frac{\delta S[\phi_0]}{\delta\phi_0(x)}+J(x)][\phi(x)-\phi_0(x)]$$
$$+\frac{i}{2}\int d^4xd^4y\frac{\delta^2S[\phi_0]}{\delta\phi_0(x)\delta\phi_0(y)}[\phi(x)-\phi_0(x)][\phi(y)-\phi_0(y)]+\cdots\}$$

其中路径积分对ϕ进行，与ϕ_0无关，已将$S[\phi_0]$及$J(x)\phi_0(x)$提到积分号外。

设$\phi_0(x)$使作用量取极小（故称$\phi_0(x)$为鞍点），则按照最小作用量原理，将给出经典近似。

$\phi=\phi_0$称为树图近似。由于作用量出现在 e 指数上，像个相位，故鞍点近似也称为稳定位相法（裘忠平《现代量子场论导引》）。

取树图近似后，$\int[d\phi]$可丢掉，Green 函数的生成泛函近似为

$$Z[J]=\exp\{iS[\phi_0]+i\int d^4xJ(x)\phi_0(x)\}$$

根据$Z=e^{iW}$，连通 Green 函数的生成泛函 W[J]为

$$W[J]=S[\phi_0]+\int d^4xJ(x)\phi_0(x)]$$

注意，有的书将 Green 函数生成泛函定义为 W，而将连通 Green 函数的生成泛函定义为 Z，与这里的定义正好颠倒！

2.2.1.2 正规顶角的生成泛函

通过 Legendre 变换 $H=p\dot{q}-L$，可将广义坐标与广义动量角色互换。我们在 Ward 恒等式一节讲过，将 W 看作自由能，则 Lagrangian 为 $\mathcal{L}=-W$；将 J 看作广义速度，则 $-\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}=-\phi(x)$ 相当于广义动量。于是，按 Legendre 变换，可定义

$$\Gamma[\phi]=W[J]-\int d^4xJ(x)\phi(x)$$

这便是正规顶角的生成泛函。在树图近似下，有 $\Gamma[\phi_0]=W[J]-\int d^4xJ(x)\phi_0(x)$. 与树图近似下的连通 Green 函数生成泛函 $W[J]=S[\phi_0]+\int d^4xJ(x)\phi_0(x)]$ 联立，可得 $\Gamma[\phi_0]=S[\phi_0]$，所以树图近似下正规顶角的生成泛函等于经典作用量。

Feynman 规则包括外线、内线和顶点。因正规顶角的生成泛函的泛函微商给出正规顶角（胡瑶光《规范场论》）：

$$\Gamma^n(x_1,\cdots,x_n)\equiv\left.\frac{\delta^n\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x_1)\cdots\delta\phi(x_n)}\right|_{\phi=0}$$

所以，顶点的 Feynman 规则可由正规顶角的生成泛函（亦即作用量）的泛函微商获得。至于传播子的 Feynman 规则，由 $\Gamma[\phi]=W[J]-\int d^4yJ(y)\phi(y)$ 得

$$\Gamma(x)=\left.\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)}\right|_{\phi=0}=\left[\int d^4y\frac{\delta W[J]}{\delta J(y)}\frac{\delta J(y)}{\delta\phi(x)}-\int d^4y\frac{\delta J(y)}{\delta\phi(x)}\phi(y)-\int d^4yJ(y)\frac{\delta\phi(y)}{\delta\phi(x)}\right]_{\phi=0}$$

$$=\left[\int d^4y\phi(y)\frac{\delta J(y)}{\delta\phi(x)}-\int d^4y\frac{\delta J(y)}{\delta\phi(x)}\phi(y)-\int d^4yJ(y)\delta^4(y-x)\right]_{\phi=0}$$

$$=-\int d^4yJ(y)\delta^4(y-x)=-J(x)$$

将上式对 J(y)微商，考虑到 $\frac{\delta W[J]}{\delta J(z)}=\phi(z)$，得

$$\int d^4z\left.\frac{\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta\phi(z)\delta\phi(x)}\right|_{\phi=0}\frac{\delta\phi(z)}{\delta J(y)}=\int d^4z\Gamma(x,z)\frac{\delta^2W(J)}{\delta J(z)\delta J(y)}$$

$$=-\frac{\delta J(x)}{\delta J(y)}=-\delta^4(x-y)$$

由两点 Green 函数定义 $G(z,y)=\frac{\delta^2W(J)}{i^2\delta J(z)\delta J(y)}$，可得

$$\int d^4z\Gamma(x,z)G(z,y)=\delta^4(x-y)$$

可见，两点正规顶角与两点 Green 函数互逆。两点 Green 函数相当于传播子，所以，传播子也可以由作用量对场量做泛函微商得到。至于外线，其严格计算需要 Wick 定理或 LSZ 约化公式，但不论 QED、QCD 还是电弱理论，外线都一样，所以在 QED 中求一次就够了。于是，推导 QCD 的 Feynman 规则时，只要由作用量做泛函微商就足够了。

2.2.1.3 Lagrangian 分析

既然 Feynman 规则归结为作用量的微商，作用量等于 Lagrangian 的积分，我们就应该认真剖析下 Lagrangian. 为接下来计算方便，我们将其分解为

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{eff}=\bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu-m)\Psi-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}-\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A^a_\mu)^2+(\partial^\mu C^*_a)D^{ab}_\mu C_b\\
&=-\frac{1}{4}(\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu+gf_{abc}A^b_\mu A^c_\nu)(\partial^\mu A^{a\nu}-\partial^\nu A^{a\mu}+gf_{ab'c'}A^{b'\mu}A^{c'\nu})-\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A^a_\mu)^2\\
&+\bar{\Psi}[i\gamma^\mu(\partial_\mu-igA^a_\mu T_a)-m]\Psi+(\partial^\mu C^*_a)(\delta^{ab}\partial_\mu-gf_{abc}A^c_\mu)C_b\\
&=\mathcal{L}^0_{eff}+\mathcal{L}^{Int}_{eff}=\mathcal{L}^0_G+\mathcal{L}^0_F+\mathcal{L}^0_{FP}+\mathcal{L}^{Int}_{G3}+\mathcal{L}^{Int}_{G4}+\mathcal{L}^{Int}_F+\mathcal{L}^{Int}_{FP}
\end{aligned}$$

其中

$$\mathcal{L}^0_G=-\frac{1}{4}(\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu)(\partial^\mu A^{a\nu}-\partial^\nu A^{a\mu})-\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A^a_\mu)^2$$

$$\mathcal{L}^0_F=\bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\Psi$$

$$\mathcal{L}^0_{FP}=(\partial^\mu C^*_a)\partial_\mu C_a$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}^{Int}_{G3}=-\frac{1}{4}(\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu)gf_{ab'c'}A^{b'\mu}A^{c'\nu}-\frac{1}{4}gf_{abc}A^b_\mu A^c_\nu(\partial^\mu A^{a\nu}-\partial^\nu A^{a\mu})\\
&=-\frac{1}{2}gf_{abc}(\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu)A^{b\mu}A^{c\nu}\xrightarrow{\mu\leftrightarrow\nu}-\frac{1}{2}g(f_{abc}\partial_\mu A^a_\nu A^{b\mu}A^{c\nu}-f_{abc}\partial_\mu A^a_\nu A^{b\nu}A^{c\mu})\\
&\xrightarrow{b\leftrightarrow c}-\frac{1}{2}g\partial_\mu A^a_\nu(f_{abc}A^{b\mu}A^{c\nu}-f_{acb}A^{c\nu}A^{b\mu})\xrightarrow{f_{acb}=-f_{abc}}-gf_{abc}\partial_\mu A^a_\nu A^{b\mu}A^{c\nu}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^{Int}_{G4}=-\frac{1}{4}g^2f_{abc}f_{ab'c'}A^b_\mu A^c_\nu A^{b'\mu}A^{c'\nu}$$

$$\mathcal{L}^{Int}_F=g\bar{\Psi}\gamma^\mu A^a_\mu T_a\Psi$$

$$\mathcal{L}^{Int}_{FP}=-gf_{abc}(\partial^\mu C^*_a)A^c_\mu C_b$$

注意 $\mathcal{L}^{Int}_F=g\bar{\Psi}\gamma^\mu A^a_\mu T_a\Psi$ 中 γ^μ 与 T_a 顺序，Peskin、Ryder、Schwartz、Srednicki、Coleman、金广浩、裘忠平、戴元本、周邦融、王正行都是 γ^μ 在前；Greiner、李灵峰、黄涛、郑汉青

是γ^μ在后。那么，γ^μ与T_a谁在前是对的？还是谁在前都对，只是习惯问题？

首先，我们应注意到γ^μ是 4*4 矩阵，T_a可能是 2*2 矩阵（对 SU(2)群），也可能是 3*3 矩阵（对 SU(3)群），γ^μ与T_a行列数不同，按矩阵普通乘法无法相乘，还谈什么对易不对易呢？

其次，旋量Ψ也不是 4*1 的，因为是多重态。对于 SU(2)二重态，Ψ为 8*1 矩阵；对于 SU(3)三重态，Ψ为 12*1 矩阵。

但γ^μ与T_a、Ψ毕竟是乘在一起的，所以一定是矩阵的某种乘法。什么乘法不受行列数限制呢？直积！所以，对 SU(n)对称的 Lagrangian，应解释为

$$\mathcal{L}_F^{Int} = g\bar{\Psi}_{1\times 4n}(\gamma^\mu \otimes T_a)_{4n\times 4n}\Psi_{4n\times 1}A_\mu^a$$

那么，直积可对易吗？换序后也不等，但只相差一个幺正变换。量子力学中，这相当于表象变换，而选择不同的表象是不影响物理（可观测量）的。

2.2.2 传播子

传播子来自$\mathcal{L}_{eff}^0$，其中

$\mathcal{L}_G^0 = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu^a)^2$将给出胶子传播子；

$\mathcal{L}_F^0 = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi$将给出夸克传播子；

$\mathcal{L}_{FP}^0 = (\partial^\mu C_a^*)\partial_\mu C_a$将给出鬼场传播子；

2.2.2.1 胶子传播子

我们在 QED 中发现，$\int d\phi \exp[-\frac{1}{2}\phi K\phi + J\phi] = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det K}}\exp[-\frac{1}{2}JK^{-1}J]$，且$K^{-1}$的结果恰好具有传播子的意义：

$$W_0[J] = \int [dA]\exp\{i\int d^4x[\frac{1}{2}A_\mu^a(x)K_{ab}^{\mu\nu}A_\nu^b(y) + J_\mu^a A^{a\mu}]\}$$

$$= \exp\{-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y A_\mu^a(x)G_{ab}^{\mu\nu}(x-y)A_\nu^b(y)\}$$

所以计算传播子就是要找 Lagrangian 二次型中场量所夹算符之逆（王正行《简明量子场论》）。我们在 QED 中已导出

$$\mathcal{L}_{Maxwell} + \mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 = \frac{1}{2}A^\mu[g_{\mu\nu}\Box - (1-\lambda)\partial_\mu\partial_\nu]A^\nu = \frac{1}{2}A^\mu K_{\mu\nu}A^\nu$$

所以，对于 QCD 有

$$\mathcal{L}_G^0 = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu^a)^2$$
$$= \frac{1}{2}A_\mu^a[g^{\mu\nu}\Box - (1-\frac{1}{\alpha})\partial^\mu\partial^\nu]\delta_{ab}A_\nu^b = \frac{1}{2}A_\mu^a K_{ab}^{\mu\nu}A_\nu^b$$

与 QED 相比，只是多了 δ_{ab}，所以传播子肯定是 $\frac{-i\delta_{ab}}{k^2+i\varepsilon}[g_{\mu\nu}-(1-\alpha)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}]$（注意规范固定项中 λ 在分子上，α 在分母上）。

不过，为了打一个坚实的基础，这里介绍一种与 QED 不同的方法——投影算子法（Coleman《Lectures on Quantum Field Theory》、裘忠平《现代量子场论导引》）。

当然，这里的不同指的是解方程的方法，而要求解的方程都是

$$K_{ac}^{\mu\rho}G_{\mu\nu}^{ab}(x,y) = \delta_\nu^\rho\delta_c^b\delta^4(x-y)$$

根据 Fourier 变换 $G_{\mu\nu}^{ab}(x,y) = \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik(x-y)}G_{\mu\nu}^{ab}(k)$ 及 $\delta^4(x-y) = \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik(x-y)}$，上述方程在动量空间形式为

$$K_{ac}^{P\mu\rho}G_{\mu\nu}^{ab}(k) = \delta_\nu^\rho\delta_c^b$$

其中 $K_{ac}^{P\mu\rho}$ 为 $K_{ac}^{\mu\rho} = [g^{\mu\rho}\Box - (1-\frac{1}{\alpha})\partial^\mu\partial^\rho]\delta_{a\,c}$ 在动量空间形式（将微分算符作用于 $e^{-ik(x-y)}$ 的结果）：

$$K_{ac}^{P\mu\rho} = [g^{\mu\rho}(-ik)^2 - (1-\frac{1}{\alpha})(-ik^\mu)(-ik^\rho)]\delta_{a\,c} = [-g^{\mu\rho}k^2 + (1-\frac{1}{\alpha})k^\mu k^\rho]\delta_{a\,c}$$

定义横向投影算子 $P_{\mu\nu}^T = g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$ 和纵向投影算子 $P_{\mu\nu}^L = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$，满足

$$P^{T\mu\rho}P_{\mu\nu}^L = P^{L\mu\rho}P_{\mu\nu}^T = 0 \text{（正交）}$$

$$P_{\mu\nu}^T + P_{\mu\nu}^L = g_{\mu\nu} \text{（归一）}$$

$$P^{T\mu\rho}P_{\mu\nu}^T = P^{T\rho}{}_\nu,\quad P^{L\mu\rho}P_{\mu\nu}^L = P^{L\rho}{}_\nu \text{（单幂）}$$

如此定义后，$K_{ac}^{P\mu\rho}$ 可分解为

$$K_{a\,c}^{P\mu\rho} = [-g^{\mu\rho}k^2 + (1-\frac{1}{\alpha})k^\mu k^\rho]\delta_{a\,c} = -k^2[g^{\mu\rho} - (1-\frac{1}{\alpha})\frac{k^\mu k^\rho}{k^2}]\delta_{a\,c}$$
$$= -k^2[g^{\mu\rho} - \frac{k^\mu k^\rho}{k^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{k^\mu k^\rho}{k^2}]\delta_{a\,c} = (c_1P^T + c_2P^L)^{\mu\rho}\delta_{a\,c}$$

其中 $c_1=-k^2, c_2=-k^2/\alpha$.

设 $G^{ab}_{\mu\nu}(k)=(c_3P^T+c_4P^L)_{\mu\nu}\delta^{ab}$，代入方程 $K^{P\mu\rho}_{ac}G^{ab}_{\mu\nu}(k)=\delta^\rho_\nu\delta^b_c$，得

$$(P^T+P^L)^\rho_\nu\delta^b_c=\delta^\rho_\nu\delta^b_c=(c_1P^T+c_2P^L)^{\mu\rho}\delta_{ac}(c_3P^T+c_4P^L)_{\mu\nu}\delta^{ab}$$
$$=(c_1c_3P^T+c_2c_4P^L)^\rho_\nu\delta^b_c$$

所以 $c_1c_3=c_2c_4=1$，于是 $c_3=c_1^{-1}=-\frac{1}{k^2}, c_4=c_2^{-1}=-\frac{\alpha}{k^2}$. 最终

$$G^{ab}_{\mu\nu}(k)=(-\frac{1}{k^2}P^T-\frac{\alpha}{k^2}P^L)_{\mu\nu}\delta^{ab}=[-\frac{1}{k^2}(g_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2})-\frac{\alpha}{k^2}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}]\delta^{ab}$$
$$=-\frac{\delta^{ab}}{k^2}[(g_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2})+\alpha\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}]=-\frac{\delta^{ab}}{k^2}[g_{\mu\nu}-(1-\alpha)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}]$$

注意此时传播子应该是 $iG^{ab}_{\mu\nu}(k)$ 而非 $G^{ab}_{\mu\nu}(k)$

其实，也可以认为 $K^{\mu\rho}_{ac}F^{ab}_{\mu\nu}(x,y)=i\delta^\rho_\nu\delta^b_c\delta^4(x-y)$（等号右边多 i），那么求出

$$F^{ab}_{\mu\nu}(k)=-\frac{i\delta^{ab}}{k^2}[g_{\mu\nu}-(1-\alpha)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}]$$

当然，还可用待定系数法，见李灵峰《量子场论》，类似我们在 QED 中讲的“分母无指标化”；或作用量泛函微商法，见胡瑶光《规范场论》。

2.2.2.2 鬼场传播子

鬼场传播子也可以仿照胶子传播子那样，寻找 Lagrangian 二次型中场量所夹算符之逆。不过，为打下坚实基础，我们应多学几种方法，技多不压身嘛。

上一节我们讲到，两点正规顶角与两点 Green 函数互逆（胡瑶光《规范场论》），而正规顶角的生成泛函等于作用量，两点 Green 函数相当于传播子，所以计算传播子，应先求出作用量的（两次）泛函微商，再求逆。鬼场作用量为

$$S_{gh}=\int d^4x(\partial^\mu C^*_a)(\delta^{ab}\partial_\mu-gf_{abc}A^c_\mu)C_b=-\int d^4xC^*_a[\partial^\mu\partial_\mu C_a-gf_{abc}\partial^\mu(A^c_\mu C_b)]$$
$$=-\int d^4xC^*_a(x)\Box C_a(x)+gf_{abc}\int d^4xC^*_a(x)\partial^\mu[A^c_\mu(x)C_b(x)]$$

两点正规顶角为

$$\Gamma^{\beta\gamma}(y,z)=\left.\frac{\delta^2 S_{gh}}{\delta C_\beta(y)\delta C_\gamma^*(z)}\right|_{A=C=C^*=0}$$

$$=-\int d^4x\left.\frac{\delta^2[C_a^*(x)\Box C_a(x)]}{\delta C_\beta(y)\delta C_\gamma^*(z)}\right|_{A=C=C^*=0}+gf_{abc}\int d^4xC_a^*(x)\partial^\mu\left.\frac{\delta^2[A_\mu^c(x)C_b(x)]}{\delta C_\beta(y)\delta C_\gamma^*(z)}\right|_{A=C=C^*=0}$$

$$=-\int d^4x\delta_a^\gamma\delta^4(x-z)\Box\left.\frac{\delta C_a(x)}{\delta C_\beta(y)}\right|_{A=C=C^*=0}+0=-\int d^4x\delta_a^\gamma\delta^4(x-z)\Box\delta_a^\beta\delta^4(x-y)$$

$$=\delta^{\beta\gamma}\Box\delta^4(y-z)$$

注意先替换掉$\delta^4(x-z)$与先替换掉$\delta^4(x-y)$结果不同，但是代入方程

$$\int d^4z\Gamma^{\beta\gamma}(y,z)G_{\alpha\beta}(x,y)=\delta_\alpha^\gamma\delta^4(x-z)$$

后都变成

$$\delta^{\beta\gamma}\Box G_{\alpha\beta}(x,z)=\delta_\alpha^\gamma\delta^4(x-z)$$

再代入$G_{\alpha\beta}(x,z)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik(x-z)}G_{\alpha\beta}(k)$，可得

$$\delta^{\beta\gamma}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik(x-z)}(-ik)^2G_{\alpha\beta}(k)=\delta_\alpha^\gamma\delta^4(x-z)=\delta^{\beta\gamma}\delta_{\alpha\beta}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik(x-z)}$$

由此可得鬼场传播子（为免 k=0 时分母无意义，已加上了小虚部）

$$iG_{\alpha\beta}(k)=\frac{-i\delta_{\alpha\beta}}{k^2+i\varepsilon}$$

为何与 Peskin、Schwartz 差负号？鬼场线有方向，以区分鬼粒子和反鬼粒子（郑汉青《量子场论》下）。反向传播差负号。

因 Fermion 场反对易，先对 C 微商与先对 C*微商差负号。

为免歧义，我们约定

（1）$\frac{\delta^2F}{\delta\phi_1\delta\phi_2}=\frac{\delta}{\delta\phi_1}(\frac{\delta F}{\delta\phi_2})$，即先对分母中后面的场微分，再对前面的场微分；

（2）对于旋量场，带共轭的场放在后面，先微分：$\frac{\delta^2S}{\delta\eta\delta\bar{\eta}}=\frac{\delta}{\delta\eta}(\frac{\delta S}{\delta\bar{\eta}})$

（3）旋量场反对易导致$\frac{\delta}{\delta\eta}$跨过$\bar{\eta}$作用于$\eta$时多一负号。

夸克传播子很简单，我们不再展开，只用类比法给出：

$\mathcal{L}_F^0=\bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\Psi$与 QED 看起来并无二致，所以可认为夸克传播子与电子传播子相同，

都是$\frac{i}{\not p-m+i\varepsilon}$，如黄涛《量子色动力学引论》。不过，有的书也给它加上色指标 ab，写成

$\frac{i\delta_{ab}}{\not p-m+i\varepsilon}$，如裘忠平《现代量子场论导引》。甚至，还可以加上夸克味道 AB 和旋量矩阵

指标$\alpha\beta$，写成$(\frac{i}{\not p-m+i\varepsilon})_{\beta\alpha}\delta_{ba}\delta_{BA}$，如金广浩《Elementary Particles And Their Interactions ——Concepts and Phenomena》.

2.2.3 顶点

顶点来自$\mathcal{L}_{eff}^{Int}$，其中

$\mathcal{L}_{G3}^{Int}=-gf_{abc}\partial_\mu A_\nu^a A^{b\mu}A^{c\nu}$将给出三胶子顶点；

$\mathcal{L}_{G4}^{Int}=-\frac{1}{4}g^2 f_{abc}f_{ab'c'}A_\mu^b A_\nu^c A^{b'\mu}A^{c'\nu}$将给出四胶子顶点；

$\mathcal{L}_{F}^{Int}=g\bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu^a T_a\Psi$将给出夸克-胶子顶点；

$\mathcal{L}_{FP}^{Int}=-gf_{abc}(\partial^\mu C_a^*)A_\mu^c C_b$将给出鬼场-胶子顶点。

2.2.3.1 三胶子顶点

裘忠平讲的糙，Greiner 稍细，胡瑶光讲最清楚。我们以胡瑶光为底本，稍加修改使更完美。

由$\mathcal{L}_{G3}^{Int}=-gf_{abc}\partial_\mu A_\nu^a A^{b\mu}A^{c\nu}=gf_{abc}\partial_\rho A_\sigma^a A^{b\sigma}A^{c\rho}$，可得

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{\alpha\beta\gamma}(x,y,z)=\left.\frac{\delta^3\int d^4t\mathcal{L}_{G3}^{Int}}{\delta A_\alpha^\mu(x)\delta A_\beta^\nu(y)\delta A_\gamma^\lambda(z)}\right|_{A=0}=gf_{abc}\int d^4t\left.\frac{\delta^3[\partial_\rho A_\sigma^a(t)A^{b\sigma}(t)A^{c\rho}(t)]}{\delta A_\alpha^\mu(x)\delta A_\beta^\nu(y)\delta A_\gamma^\lambda(z)}\right|_{A=0}$$

其中（注意$\frac{X_\mu}{X_\nu}=\delta_\mu^\nu$，即分子指标位置不变，分母指标上下颠倒）

$$\frac{\delta^3[\partial_\rho A^a_\sigma(t)A^{b\sigma}(t)A^{c\rho}(t)]}{\delta A^\mu_\alpha(x)\delta A^\nu_\beta(y)\delta A^\lambda_\gamma(z)}$$

$$=\frac{\delta^2}{\delta A^\mu_\alpha\delta A^\nu_\beta(y)}[\partial_{\rho z}\delta^{a\gamma}\delta_{\sigma\lambda}A^{b\sigma}A^{c\rho}+\partial_\rho A^a_\sigma\delta^{b\gamma}\delta^\sigma_\lambda A^{c\rho}+\partial_\rho A^a_\sigma A^{b\sigma}\delta^{c\gamma}\delta^\rho_\lambda]\delta^4(t-z)$$

$$=\frac{\delta}{\delta A^\mu_\alpha(x)}[\partial_{\rho z}\delta^{a\gamma}\delta_{\sigma\lambda}(\delta^{b\beta}\delta^\sigma_\nu A^{c\rho}+A^{b\sigma}\delta^{c\beta}\delta^\rho_\nu)+\delta^{b\gamma}\delta^\sigma_\lambda(\partial_{\rho y}\delta^{a\beta}\delta_{\sigma\nu}A^{c\rho}+\partial_\rho A^a_\sigma\delta^{c\beta}\delta^\rho_\nu)$$

$$+(\partial_{\rho y}\delta^{a\beta}\delta_{\sigma\nu}A^{b\sigma}+\partial_\rho A^a_\sigma\delta^{b\beta}\delta^\sigma_\nu)\delta^{c\gamma}\delta^\rho_\lambda]\delta^4(t-z)\delta^4(t-y)$$

$$=[\partial_{\rho z}\delta^{a\gamma}\delta_{\sigma\lambda}(\delta^{b\beta}\delta^\sigma_\nu\delta^{c\alpha}\delta^\rho_\mu+\delta^{b\alpha}\delta^\sigma_\mu\delta^{c\beta}\delta^\rho_\nu)+\delta^{b\gamma}\delta^\sigma_\lambda(\partial_{\rho y}\delta^{a\beta}\delta_{\sigma\nu}\delta^{c\alpha}\delta^\rho_\mu+\partial_{\rho x}\delta^{a\alpha}\delta_{\sigma\mu}\delta^{c\beta}\delta^\rho_\nu)$$

$$+(\partial_{\rho y}\delta^{a\beta}\delta_{\sigma\nu}\delta^{b\alpha}\delta^\sigma_\mu+\partial_{\rho x}\delta^{a\alpha}\delta_{\sigma\mu}\delta^{b\beta}\delta^\sigma_\nu)\delta^{c\gamma}\delta^\rho_\lambda]\delta^4(t-x)\delta^4(t-y)\delta^4(t-z)$$

$$=[\delta^{a\gamma}(\delta^{b\beta}\delta^{c\alpha}\delta_{\nu\lambda}\partial_{\mu z}+\delta^{b\alpha}\delta^{c\beta}\delta_{\mu\lambda}\partial_{\nu z})+\delta^{b\gamma}(\delta^{a\beta}\delta^{c\alpha}\delta_{\lambda\nu}\partial_{\mu y}+\delta^{a\alpha}\delta^{c\beta}\delta_{\lambda\mu}\partial_{\nu x})$$

$$+(\delta^{a\beta}\delta^{b\alpha}\delta_{\mu\nu}\partial_{\lambda y}+\delta^{a\alpha}\delta^{b\beta}\delta_{\mu\nu}\partial_{\lambda x})\delta^{c\gamma}]\delta^4(t-x)\delta^4(t-y)\delta^4(t-z)$$

故

$$\Gamma^{\alpha\beta\gamma}_{\mu\nu\lambda}(x,y,z)$$

$$=gf_{abc}\int d^4t[\delta^{a\gamma}(\delta^{b\beta}\delta^{c\alpha}\delta_{\nu\lambda}\partial_{\mu z}+\delta^{b\alpha}\delta^{c\beta}\delta_{\mu\lambda}\partial_{\nu z})+\delta^{b\gamma}(\delta^{a\beta}\delta^{c\alpha}\delta_{\lambda\nu}\partial_{\mu y}+\delta^{a\alpha}\delta^{c\beta}\delta_{\lambda\mu}\partial_{\nu x})$$

$$+(\delta^{a\beta}\delta^{b\alpha}\delta_{\mu\nu}\partial_{\lambda y}+\delta^{a\alpha}\delta^{b\beta}\delta_{\mu\nu}\partial_{\lambda x})\delta^{c\gamma}]\delta^4(t-x)\delta^4(t-y)\delta^4(t-z)$$

$$=g\int d^4t[\,f_{cba}\delta^{c\gamma}(\delta^{b\beta}\delta^{a\alpha}\delta_{\nu\lambda}\partial_{\mu z}+\delta^{b\alpha}\delta^{a\beta}\delta_{\mu\lambda}\partial_{\nu z})+f_{acb}\delta^{c\gamma}(\delta^{a\beta}\delta^{b\alpha}\delta_{\lambda\nu}\partial_{\mu y}+\delta^{a\alpha}\delta^{b\beta}\delta_{\lambda\mu}\partial_{\nu x})$$

$$+(\,f_{bac}\delta^{b\beta}\delta^{a\alpha}\delta_{\mu\nu}\partial_{\lambda y}+f_{abc}\delta^{a\alpha}\delta^{b\beta}\delta_{\mu\nu}\partial_{\lambda x})\delta^{c\gamma}]\delta^4(t-x)\delta^4(t-y)\delta^4(t-z)$$

$$=g\int d^4t[\delta^{c\gamma}(\,f_{cba}\delta^{b\beta}\delta^{a\alpha}\delta_{\nu\lambda}\partial_{\mu z}+f_{cab}\delta^{a\alpha}\delta^{b\beta}\delta_{\mu\lambda}\partial_{\nu z})$$

$$+\delta^{c\gamma}(\,f_{bca}\delta^{b\beta}\delta^{a\alpha}\delta_{\lambda\nu}\partial_{\mu y}+f_{acb}\delta^{a\alpha}\delta^{b\beta}\delta_{\lambda\mu}\partial_{\nu x})$$

$$+(-f_{abc}\delta_{\mu\nu}\partial_{\lambda y}+f_{abc}\delta_{\mu\nu}\partial_{\lambda x})\delta^{a\alpha}\delta^{b\beta}\delta^{c\gamma}]\delta^4(t-x)\delta^4(t-y)\delta^4(t-z)$$

$$=g\delta^{a\alpha}\delta^{b\beta}\delta^{c\gamma}\int d^4t[(-f_{abc}\delta_{\nu\lambda}\partial_{\mu z}+f_{abc}\delta_{\mu\lambda}\partial_{\nu z})+(\,f_{abc}\delta_{\lambda\nu}\partial_{\mu y}-f_{abc}\delta_{\lambda\mu}\partial_{\nu x})$$

$$+(-f_{abc}\delta_{\mu\nu}\partial_{\lambda y}+f_{abc}\delta_{\mu\nu}\partial_{\lambda x})]\delta^4(t-x)\delta^4(t-y)\delta^4(t-z)$$

$$=gf^{\alpha\beta\gamma}\int d^4t[\delta_{\mu\lambda}\partial_{\nu z}-\delta_{\nu\lambda}\partial_{\mu z}+\delta_{\lambda\nu}\partial_{\mu y}-\delta_{\lambda\mu}\partial_{\nu x}+\delta_{\mu\nu}\partial_{\lambda x}-\delta_{\mu\nu}\partial_{\lambda y}]\delta^4(t,x)\delta^4(t,y)\delta^4(t,z)$$

$$=gf^{\alpha\beta\gamma}\int d^4t[\delta_{\mu\nu}(\partial_{\lambda x}-\partial_{\lambda y})+\delta_{\nu\lambda}(\partial_{\mu y}-\partial_{\mu z})+\delta_{\lambda\mu}(\partial_{\nu z}-\partial_{\nu x})]\delta^4(t-x)\delta^4(t-y)\delta^4(t-z)$$

代入 $\delta^4(t-x)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip(t-x)},\delta^4(t-y)=\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}e^{-iq(t-x)},\delta^4(t-z)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik(t-x)}$：

$$\Gamma^{\alpha\beta\gamma}_{\mu\nu\lambda}(x,y,z)=gf^{\alpha\beta\gamma}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\int d^4t[$$

$$\delta_{\mu\nu}(\partial_x-\partial_y)_\lambda+\delta_{\nu\lambda}(\partial_y-\partial_z)_\mu+\delta_{\lambda\mu}(\partial_z-\partial_x)_\nu]e^{-ip(t-x)}e^{-iq(t-x)}e^{-ik(t-x)}$$

$$=\int\frac{d^4pd^4qd^4k}{(2\pi)^{12}}e^{i(px+qy+kz)}igf^{\alpha\beta\gamma}[\delta_{\mu\nu}(p-q)_\lambda+\delta_{\nu\lambda}(q-k)_\mu+\delta_{\lambda\mu}(k-p)_\nu]\int d^4te^{-i(p+q+k)t}$$

$$=\int\frac{d^4pd^4qd^4k}{(2\pi)^{12}}e^{i(px+qy+kz)}(2\pi)^4\delta^4(p+q+k)$$

$$\times igf^{\alpha\beta\gamma}[\delta_{\mu\nu}(p-q)_\lambda+\delta_{\nu\lambda}(q-k)_\mu+\delta_{\lambda\mu}(k-p)_\nu]$$

设 $\Gamma^{\alpha\beta\gamma}_{\mu\nu\lambda}(x,y,z)\equiv\int\frac{d^4pd^4qd^4k}{(2\pi)^{12}}e^{+i(px+qy+kz)}(2\pi)^4\delta^4(p+q+k)\Gamma^{\alpha\beta\gamma}_{\mu\nu\lambda}(p,q,k)$

则 $i\Gamma^{\alpha\beta\gamma}_{\mu\nu\lambda}(p,q,k)=-gf^{\alpha\beta\gamma}[\delta_{\mu\nu}(p-q)_\lambda+\delta_{\nu\lambda}(q-k)_\mu+\delta_{\lambda\mu}(k-p)_\nu]$

为什么差一负号？如果约定（与裘忠平一致）

$$\Gamma^{\alpha\beta\gamma}_{\mu\nu\lambda}(x,y,z)\equiv\int\frac{d^4pd^4qd^4k}{(2\pi)^{12}}e^{-i(px+qy+kz)}(2\pi)^4\delta^4(p+q+k)\Gamma^{\alpha\beta\gamma}_{\mu\nu\lambda}(p,q,k)$$

$$\delta^4(t-x)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{+ip(t-x)}=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip(x-t)}=\delta^4(x-t)$$

则 $i\Gamma^{\alpha\beta\gamma}_{\mu\nu\lambda}(p,q,k)=+gf^{\alpha\beta\gamma}[\delta_{\mu\nu}(p-q)_\lambda+\delta_{\nu\lambda}(q-k)_\mu+\delta_{\lambda\mu}(k-p)_\nu]$

---------- 【讨论】 ----------

设有效拉式量 $L(t)=A(t)\partial_tB(t)$，求动量空间顶角函数。∂_t 表示对四维坐标 t 求偏导。

【解法一（胡耀光《规范场论》）】先求坐标空间的顶角函数，再对顶角函数做 Fourier 变换

$$\Gamma(x,y)\xrightarrow{(1)}\frac{\delta^2\int d^4tA(t)\partial_tB(t)}{\delta A(x)\delta B(y)}=\frac{\delta\int d^4tA(t)\partial_y\delta^4(y-t)}{\delta A(x)}=\int d^4t\delta^4(x-t)\partial_y\delta^4(y-t)$$

$$=\int d^4t\int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}e^{-ik_1(x-t)}\partial_y\int\frac{d^4k_2}{(2\pi)^4}e^{-ik_2(y-t)}=\int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4k_2}{(2\pi)^4}e^{-i(k_1x+k_2y)}\int d^4te^{it(k_1+k_2)}(-ik_2)$$

记

$$\Gamma(x,y)\xrightarrow{(2)}\int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4k_2}{(2\pi)^4}e^{-i(k_1x+k_2y)}\Gamma(k_1,k_2)\qquad(2)$$

则 $\Gamma(k_1,k_2)=\int d^4te^{it(k_1+k_2)}(-ik_2)=(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2)(-ik_2)$

若不将 ∂_t 换成 ∂_y，则求出结果差一负号。

由于 Dirac 函数是偶函数，似乎也能这么做：

$$\Gamma(x,y)=\int d^4t\delta^4(x-t)\partial_t\delta^4(y-t)$$

$$=\int d^4t\int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}e^{ik_1(x-t)}\partial_t\int\frac{d^4k_2}{(2\pi)^4}e^{ik_2(y-t)}=\int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4k_2}{(2\pi)^4}e^{i(k_1x+k_2y)}\int d^4te^{-it(k_1+k_2)}(-ik_2)$$

记

$$\Gamma(x,y)=\int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4k_2}{(2\pi)^4}e^{i(k_1x+k_2y)}\Gamma'(k_1,k_2)\qquad(2')$$

则

$$\Gamma(k_1,k_2)=\int d^4te^{-it(k_1+k_2)}(-ik_2)=(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2)(-ik_2)$$

【解法二（Greiner QCD）】先对场量做 Fourier 变换，写出动量空间作用量，再计算顶角函数

$$A(t)=\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}e^{-ip_1t}A(p_1),B(t)=\int\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}e^{-ip_2t}B(p_2)$$

$$\Gamma(k_1,k_2)\xrightarrow{(3)}(2\pi)^8\frac{\delta^2\int d^4tA(t)\partial_tB(t)}{\delta A(k_1)\delta B(k_2)}$$

$$=\frac{\delta^2\int d^4t\int d^4p_1e^{-ip_1t}A(p_1)\int d^4p_2e^{-ip_2t}B(p_2)(-ip_2)}{\delta A(k_1)\delta B(k_2)}$$

$$\xrightarrow{(4)}\frac{\delta^2\int d^4p_1d^4p_2A(p_1)B(p_2)(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2)(-ip_2)}{\delta A(k_1)\delta B(k_2)}$$

$$=\frac{\delta\int d^4p_1A(p_1)(2\pi)^4\delta^4(p_1+k_2)(-ik_2)}{\delta A(k_1)}=(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2)(-ik_2)$$

【问题】

1.解法二为何要乘上$(2\pi)^8$，才能给出正确结果？

孟林兄：**Fourier 变换的2π因子可放在正变换中，也可放在逆变换中，这完全是人为的**：

$$\begin{cases}\text{正：}F(\vec{p})=\int d^3\vec{x}e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{x})}f(\vec{x})\\ \text{逆：}f(\vec{x})=\int\frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x})}F(\vec{p})\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\text{正：}F(\vec{p})=\int\frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}}e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{x})}f(\vec{x})\\ \text{逆：}f(\vec{x})=\int\frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}}e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x})}F(\vec{p})\end{cases}$$

四维 Fourier 变换的2π因子也可以随便放（只要前后定义一致即可）。

2.由 $A(x)=\int\frac{d^4q_1}{(2\pi)^4}e^{-iq_1x}A(q_1),B(y)=\int\frac{d^4q_2}{(2\pi)^4}e^{-iq_2y}B(q_2)$

$$\frac{\delta A(x)}{\delta A(k_1')}\frac{\delta B(y)}{\delta B(k_2')}=\int\frac{d^4q_1}{(2\pi)^4}e^{-iq_1x}\frac{\delta A(q_1)}{\delta A(k_1')}\int\frac{d^4q_2}{(2\pi)^4}e^{-iq_2y}\frac{\delta B(q_2)}{\delta B(k_2')}=\frac{1}{(2\pi)^8}e^{-i(k_1'x+k_2'y)}$$

而 $A(k_1')=\int d^4x'e^{ik_1'x'}A(x'),B(k_2')=\int d^4y'e^{ik_2'y'}B(y')$

$$\frac{\delta A(k_1')}{\delta A(x)}\frac{\delta B(k_2')}{\delta B(y)}=\int d^4x' e^{ik_1'x'}\frac{\delta A(x')}{\delta A(x)}\int d^4y' e^{ik_2'y'}\frac{\delta B(y')}{\delta B(y)}=e^{+i(k_1'x+k_2'y)}$$

所以$\frac{\delta A(k_1')}{\delta A(x)}\frac{\delta B(k_2')}{\delta B(y)}$并非$\frac{\delta A(x)}{\delta A(k_1')}\frac{\delta B(y)}{\delta B(k_2')}$的倒数？

张成兄：**对普通变量的求导链式法则不能简单推广为对泛函的求导链式法则。对泛函的求导插入中间宗量 A(k')时，必须对中间宗量的自变量 k'积分**（Peskin QFT 11.5~11.6 节）：

$$\int d^4k_1'\frac{\delta A(x)}{\delta A(k_1')}\frac{\delta A(k_1')}{\delta A(x'')}=\int d^4k_1'\int\frac{d^4q_1}{(2\pi)^4}e^{-iq_1x}\frac{\delta A(q_1)}{\delta A(k_1')}\int d^4x' e^{ik_1'x'}\frac{\delta A(x')}{\delta A(x'')}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k_1'd^4q_1d^4x' e^{i(k_1'x'-q_1x)}\delta^4(q_1-k_1')\delta^4(x'-x'')$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k_1'd^4x' e^{ik_1'(x'-x)}\delta^4(x'-x'')=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k_1' e^{ik_1'(x''-x)}=\delta^4(x''-x)\xrightarrow{x''=x}1$$

$$\frac{\delta A(x)}{\delta A(x'')}=\int d^4k_1'\frac{\delta A(x)}{\delta A(k_1')}\frac{\delta A(k_1')}{\delta A(x'')}\neq\frac{\delta A(x)}{\delta A(k_1')}\frac{\delta A(k_1')}{\delta A(x'')}$$

3.如何从胡耀光书中的公式(1)(2)，推演出 Greiner 书中的公式(4)？

$$\Gamma(k_1,k_2)=\int d^4xd^4y\Gamma(x,y)e^{+i(k_1x+k_2y)}=\int d^4xd^4y\frac{\delta^2\int d^4tA(t)\partial_tB(t)}{\delta A(x)\delta B(y)}e^{i(k_1x+k_2y)}$$

$$\xrightarrow{(5)}\int d^4xd^4y\frac{\delta^2\int d^4t\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}e^{-ip_1t}A(p_1)\partial_t\int\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}e^{-ip_2t}B(p_2)}{\delta A(k_1')\delta B(k_2')}\frac{\delta A(k_1')}{\delta A(x)}\frac{\delta B(k_2')}{\delta B(y)}e^{i(k_1x+k_2y)}$$

$$\xrightarrow{(6)}\int d^4xd^4y\frac{\delta^2\int d^4p_1d^4p_2A(p_1)B(p_2)(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2)(-ip_2)}{\delta A(k_1')\delta B(k_2')}e^{i(k_1x+k_2y)}\frac{e^{i(k_1'x+k_2'y)}}{(2\pi)^8}$$

$$\xrightarrow{(7)}\frac{1}{(2\pi)^8}\int d^4xd^4y e^{ix(k_1+k_1')}e^{iy(k_2'+k_2')}(2\pi)^4\delta^4(k_1'+k_2')(-ik_2')$$

$$\xrightarrow{(8)}\delta^4(k_1+k_1')\delta^4(k_2+k_2')(2\pi)^4\delta^4(k_1'+k_2')(-ik_2')$$

(5)(6)(7)(8)哪一步错了？

张成兄：除了要对中间宗量的自变量积分，还要将 **Fourier 变换的指数上变号**：

三维 Fourier 变换为$F(\vec{p})=\int d^3\vec{x}e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}f(\vec{x})$，逆变换为$f(\vec{x})=\int\frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}e^{+i\vec{p}\cdot\vec{x}}F(\vec{p})$；推广到四维，若要场量变换空间部分正负与三维一致（注意 0123 度规空间部分为负），场量按**习惯约定**的 Fourier 正变换$\phi(p)=\int d^4xe^{+ipx}\phi(x)$，则顶角函数按**反常约定**的 Fourier 逆变换：

$$\Gamma(x)=\frac{\delta F}{\delta\phi(x)}=\int d^4k\frac{\delta F}{\delta\phi(p)}\frac{\delta\phi(p)}{\delta\phi(x)}=\int d^4x\frac{\delta F}{\delta\phi(p)}e^{+ipx}\neq\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\Gamma(p)e^{-ipx}$$

就与裘忠平对不上。为$\Gamma(x)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\Gamma(p)e^{-ipx}$成立，应定义$\phi(p)=\int\frac{d^4x}{(2\pi)^4}e^{-ipx}\phi(x)$，

即场量变换空间部分正负与三维相反（按 0123 度规则相反，按 1234 度规则相同）。

若正变换不按习惯约定$A(k_1)=\int d^4x'e^{+ik_1x'}A(x'),B(k_2)=\int d^4y'e^{+ik_2y'}B(y')$，而按如下反常

约定$A(k_1)=\int\frac{d^4x'}{(2\pi)^4}e^{-ik_1x'}A(x'),B(k_2)=\int\frac{d^4y'}{(2\pi)^4}e^{-ik_2y'}B(y')$，则逆变换

$$\Gamma(x,y)=\frac{\delta^2S_{eff}}{\delta A(x)\delta B(y)}=\int d^4k_1d^4k_2\frac{\delta^2S_{eff}}{\delta A(k_1)\delta B(k_2)}\frac{\delta A(k_1)}{\delta A(x)}\frac{\delta B(k_2)}{\delta B(y)}$$

$$=\int d^4k_1d^4k_2\frac{\delta^2S_{eff}}{\delta A(k_1)\delta B(k_2)}\frac{e^{-i(k_1x+k_2y)}}{(2\pi)^8}=\int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4k_2}{(2\pi)^4}\Gamma(k_1,k_2)e^{-i(k_1x+k_2y)}$$

就与裘忠平一致。

同样的，场量逆变换不按习惯约定$A(x)=\int\frac{d^4q_1}{(2\pi)^4}e^{-iq_1x}A(q_1),B(y)=\int\frac{d^4q_2}{(2\pi)^4}e^{-iq_2y}B(q_2)$，

而按反常约定$A(x)=\int d^4q_1e^{+iq_1x}A(q_1),B(y)=\int d^4q_2e^{+iq_2y}B(q_2)$，则顶角函数按习惯约定

进行正变换，且无$(2\pi)^8$因子，与 Greiner 一致：

$$\frac{\delta^2S_{eff}}{\delta A(k_1)\delta B(k_2)}=\int d^4xd^4y\frac{\delta^2S_{eff}}{\delta A(x)\delta B(y)}\frac{\delta A(x)}{\delta A(k_1)}\frac{\delta B(y)}{\delta A(k_2)}=\int d^4xd^4y\Gamma(x,y)e^{+i(k_1x+k_2y)}$$

$$=\Gamma(k_1,k_2)$$

所以，要从胡瑶光推出 Greiner，应该这样做：

$$\Gamma(k_1,k_2)=\int d^4xd^4y\Gamma(x,y)e^{+i(k_1x+k_2y)}=\int d^4xd^4y\frac{\delta^2\int d^4tA(t)\partial_tB(t)}{\delta A(x)\delta B(y)}e^{i(k_1x+k_2y)}$$

$$=\int d^4k_1'd^4k_2'\int d^4xd^4y\frac{\delta^2\int d^4tA(t)\partial_tB(t)}{\delta A(k_1')\delta B(k_2')}\frac{\delta A(k_1')}{\delta A(x)}\frac{\delta B(k_2')}{\delta B(y)}e^{i(k_1x+k_2y)}$$

$$=\int d^4k_1'd^4k_2'\int d^4xd^4y\frac{\delta^2\int d^4t\int d^4p_1e^{+ip_1t}A(p_1)\partial_t\int d^4p_2e^{+ip_2t}B(p_2)}{\delta A(k_1')\delta B(k_2')}\frac{e^{-i(k_1'x+k_2'y)}}{(2\pi)^8}e^{i(k_1x+k_2y)}$$

$$=\int d^4k_1'd^4k_2'\int\frac{d^4xd^4y}{(2\pi)^8}e^{-ix(k_1'-k_1)+iy(k_2'-k_2)}\frac{\delta^2\int d^4p_1d^4p_2A(p_1)B(p_2)(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2)(ip_2)}{\delta A(k_1')\delta B(k_2')}$$

$$=\int d^4k_1'd^4k_2'\delta^4(k_1'-k_1)\delta^4(k_2'-k_2)(2\pi)^4\delta^4(k_1'+k_2')(ik_2')$$

$$=(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2)(ik_2)$$

与解法一中不将∂_t换成∂_y一致。

当然，若场量按习惯约定 $A(x)=\int\frac{d^4q_1}{(2\pi)^4}e^{-iq_1x}A(q_1),B(y)=\int\frac{d^4q_2}{(2\pi)^4}e^{-iq_2y}B(q_2)$ 进行变换，

顶角函数将按反常约定 $\Gamma(k_1,k_2)=\int d^4xd^4y\Gamma(x,y)e^{-i(k_1x+k_2y)}$ 进行变换：

$$\Gamma(k_1,k_2)=\int d^4xd^4y\Gamma(x,y)e^{-i(k_1x+k_2y)}=\int d^4xd^4y\frac{\delta^2\int d^4tA(t)\partial_tB(t)}{\delta A(x)\delta B(y)}e^{-i(k_1x+k_2y)}$$

$$=\int d^4k_1'd^4k_2'\int d^4xd^4y\frac{\delta^2\int d^4tA(t)\partial_tB(t)}{\delta A(k_1')\delta B(k_2')}\frac{\delta A(k_1')}{\delta A(x)}\frac{\delta B(k_2')}{\delta B(y)}e^{-i(k_1x+k_2y)}$$

$$=\int d^4k_1'd^4k_2'\int d^4xd^4y\frac{\delta^2\int d^4t\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}e^{-ip_1t}A(p_1)\partial_t\int\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}e^{-ip_2t}B(p_2)}{\delta A(k_1')\delta B(k_2')}e^{i(k_1'x+k_2'y)}e^{-i(k_1x+k_2y)}$$

$$=\int d^4k_1'd^4k_2'\int\frac{d^4xd^4y}{(2\pi)^8}e^{ix(k_1'-k_1)+iy(k_2'-k_2)}\frac{\delta^2\int d^4p_1d^4p_2A(p_1)B(p_2)(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2)(-ip_2)}{\delta A(k_1')\delta B(k_2')}$$

$$=\int d^4k_1'd^4k_2'\delta^4(k_1'-k_1)\delta^4(k_2'-k_2)(2\pi)^4\delta^4(k_1'+k_2')(-ik_2')$$

$$=(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2)(-ik_2)$$

---------- 【总结】 ----------

（1）正变换对坐标积分得动量，逆变换对动量积分得坐标。

（2）一到三维正变换 e 指数为负，逆变换 e 指数为正。引入第四维后，e 指数正负约定与度规有关。若约定推广到四维时，空间部分符号与三维一致，那么：1234 度规空间部分为正，四维正变换 e 指数与三维相同仍为负；0123 度规空间部分为负，四维正变换 e 指数与三维相反（但时间部分为正，与一维 Fourier 变换相同）。若 0123 度规下四维正变换 e 指数与三维相同，不妨叫做“违规”正变换，或“似负”正变换。若 0123 度规下四维逆变换 e 指数与三维相同，不妨叫做“违规”逆变换，或“似正”逆变换。

（3）一到三维 2pi 因子经常放在逆变换中（习惯约定），或者开方后平均分配到正逆变换中（平权约定）。这是习惯，若 2pi 放到正变换中就是反常约定了。

（4）如果我们想使用链式法则沟通坐标空间和动量空间，就不能强求场量的 Fourier 与顶角函数的 Fourier 都符合标准的 Fourier 变换定义。要求场量的 Fourier 变换符合标准的 Fourier 变换，那么顶角函数的 Fourier 变换就应该将 e 指数上变号。或者说，若场量符合习惯 Fourier 变换，则顶角函数应按反常逆变换处理（差 2pi 因子）。如果将 2pi 平均分配到 Fourier 正、逆变换中，则场量与顶角函数按照完全相反的方式变换（其一为正变换，则另一为逆变换）。

平权逆变换（0123 度规）：

$$A(x_1)=\int\frac{d^4q_1}{(2\pi)^2}e^{-iq_1x_1}A(q_1),B(x_2)=\int\frac{d^4q_2}{(2\pi)^2}e^{-iq_2x_2}B(q_2)$$

平权正变换（0123 度规）：

$$A(k_1')=\int\frac{d^4x_1'}{(2\pi)^2}e^{ik_1'x_1'}A(x_1'),B(k_2')=\int\frac{d^4x_2'}{(2\pi)^2}e^{ik_2'x_2'}B(x_2')$$

平权“违规”（或“似正”）逆变换（0123 度规）：

$$\Gamma(x_1,x_2)=\frac{\delta S_{eff}[A(t),B(t)]}{\delta A(x_1)\delta B(x_2)}=\int d^4k_1d^4k_2\frac{\delta S_{eff}[A(p_1),B(p_2)]}{\delta A(k_1)\delta B(k_2)}\frac{\delta A(k_1)}{\delta A(x_1)}\frac{\delta B(k_2)}{\delta B(x_2)}$$

$$=\int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^2}\frac{d^4k_2}{(2\pi)^2}\frac{\delta S_{eff}[A(p_1),B(p_2)]}{\delta A(k_1)\delta B(k_2)}e^{i(k_1x_1+k_2x_2)}=\int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^2}\frac{d^4k_2}{(2\pi)^2}\Gamma(k_1,k_2)e^{i(k_1x_1+k_2x_2)}$$

平权“违规”（或“似负”）正变换（0123 度规）：

$$\Gamma(k_1,k_2)=\frac{\delta S_{eff}[A(p_1),B(p_2)]}{\delta A(k_1)\delta B(k_2)}=\int d^4x_1d^4x_2\frac{\delta S_{eff}[A(t),B(t)]}{\delta A(x_1)\delta B(x_2)}\frac{\delta A(x_1)}{\delta A(k_1)}\frac{\delta B(x_2)}{\delta B(k_2)}$$

$$=\int\frac{d^4x_1}{(2\pi)^2}\frac{d^4x_2}{(2\pi)^2}\frac{\delta S_{eff}[A(t),B(t)]}{\delta A(x_1)\delta B(x_2)}e^{-i(k_1x_1+k_2x_2)}=\int\frac{d^4x_1}{(2\pi)^2}\frac{d^4x_2}{(2\pi)^2}\Gamma(x_1,x_2)e^{-i(k_1x_1+k_2x_2)}$$

4.改变积分次序，积分结果可能为零？

如果上面的讨论中没有 A 场，只有含时空导数的 B 场（顶角函数通常涉及三个及以上的场，但只有一、两个场也是有意义的。实际上，两点函数为传播子，一点函数为外源，见裘忠平《现代量子场论导引》），则 $\Gamma(k_2)=(2\pi)^4\delta^4(k_2)(-ik_2)$

如果 k_2 不等于零，则 Dirac 函数为零，于是顶角函数为零；如果 k_2 等于零，虽然 Dirac 函数不为零，但顶角函数还是零！

Peskin QFT 11.5~11.6 节：

$$\tilde{D}^{-1}(p^2)=\int d^4x\,e^{ip\cdot(x-y)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi\delta\phi}(x,y)=0$$

意味着无质量标量粒子。这与 Goldstone 定理有关！

2.2.3.2 四胶子顶点

$\mathcal{L}_{G4}^{Int}=-\frac{1}{4}g^2f_{abc}f_{ab'c'}A_\mu^bA_\nu^cA^{b'\mu}A^{c'\nu}=-\frac{1}{4}g^2f_{emn}f_{est}g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau}A_\mu^mA_\nu^nA_\sigma^sA_\tau^t$ 仿照三胶子顶点，有

$$\Gamma^{abcd}_{\alpha\beta\gamma\delta}(x,y,z,t)=-\frac{1}{4}g^2f_{emn}f_{est}g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau}\int d^4u\frac{\delta^4[A_\mu^m(u)A_\nu^n(u)A_\sigma^s(u)A_\tau^t(u)]}{\delta A_a^\alpha(x)\delta A_b^\beta(y)\delta A_c^\gamma(z)\delta A_d^\delta(t)}$$

$$=-\frac{1}{4}g^2f_{emn}f_{est}g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau}\int d^4ug^{am}g_{\alpha\mu}g^{bn}g_{\beta\nu}g^{cs}g_{\gamma\sigma}g^{dt}g_{\delta\tau}\delta_{xu}\delta_{yu}\delta_{zu}\delta_{tu}+\cdots$$

其中 $\delta_{xu}=\delta^4(x-u)$，其余三个定义类似，省略号表示的项为 $a\alpha,b\beta,c\gamma,d\delta$ 位置不动，而 $m\mu,n\nu,s\sigma,t\tau$ 全排列（共 4!=24 项）。项数太多，就要发明简记符号，以便于讨论。约定

$$g^{am}g_{\alpha\mu}g^{bn}g_{\beta\nu}g^{cs}g_{\gamma\sigma}g^{dt}g_{\delta\tau}\equiv\begin{matrix}\frac{m}{\mu}&\frac{n}{\nu}&\frac{s}{\sigma}&\frac{t}{\tau}\\\frac{\alpha}{a}&\frac{\beta}{b}&\frac{\gamma}{c}&\frac{\delta}{d}\end{matrix}$$

$$\frac{\delta^4[A_\mu^m A_\nu^n A_\sigma^s A_\tau^t]}{\delta A_a^\alpha \delta A_b^\beta \delta A_c^\gamma \delta A_d^\delta}$$

$$=\frac{1}{\frac{\alpha}{a}}\frac{2}{\frac{\beta}{b}}\frac{3}{\frac{\gamma}{c}}\frac{4}{\frac{\delta}{d}}+\frac{1}{\frac{\alpha}{a}}\frac{2}{\frac{\beta}{b}}\frac{4}{\frac{\gamma}{c}}\frac{3}{\frac{\delta}{d}}+\frac{1}{\frac{\alpha}{a}}\frac{3}{\frac{\beta}{b}}\frac{2}{\frac{\gamma}{c}}\frac{4}{\frac{\delta}{d}}+\frac{1}{\frac{\alpha}{a}}\frac{3}{\frac{\beta}{b}}\frac{4}{\frac{\gamma}{c}}\frac{2}{\frac{\delta}{d}}+\frac{1}{\frac{\alpha}{a}}\frac{4}{\frac{\beta}{b}}\frac{2}{\frac{\gamma}{c}}\frac{3}{\frac{\delta}{d}}+\frac{1}{\frac{\alpha}{a}}\frac{4}{\frac{\beta}{b}}\frac{3}{\frac{\gamma}{c}}\frac{2}{\frac{\delta}{d}}$$
$$+\frac{2}{\frac{\alpha}{a}}\frac{1}{\frac{\beta}{b}}\frac{3}{\frac{\gamma}{c}}\frac{4}{\frac{\delta}{d}}+\frac{2}{\frac{\alpha}{a}}\frac{1}{\frac{\beta}{b}}\frac{4}{\frac{\gamma}{c}}\frac{3}{\frac{\delta}{d}}+\frac{2}{\frac{\alpha}{a}}\frac{3}{\frac{\beta}{b}}\frac{1}{\frac{\gamma}{c}}\frac{4}{\frac{\delta}{d}}+\frac{2}{\frac{\alpha}{a}}\frac{3}{\frac{\beta}{b}}\frac{4}{\frac{\gamma}{c}}\frac{1}{\frac{\delta}{d}}+\frac{2}{\frac{\alpha}{a}}\frac{4}{\frac{\beta}{b}}\frac{1}{\frac{\gamma}{c}}\frac{3}{\frac{\delta}{d}}+\frac{2}{\frac{\alpha}{a}}\frac{4}{\frac{\beta}{b}}\frac{3}{\frac{\gamma}{c}}\frac{1}{\frac{\delta}{d}}$$
$$+\frac{3}{\frac{\alpha}{a}}\frac{1}{\frac{\beta}{b}}\frac{2}{\frac{\gamma}{c}}\frac{4}{\frac{\delta}{d}}+\frac{3}{\frac{\alpha}{a}}\frac{1}{\frac{\beta}{b}}\frac{4}{\frac{\gamma}{c}}\frac{2}{\frac{\delta}{d}}+\frac{3}{\frac{\alpha}{a}}\frac{2}{\frac{\beta}{b}}\frac{1}{\frac{\gamma}{c}}\frac{4}{\frac{\delta}{d}}+\frac{3}{\frac{\alpha}{a}}\frac{2}{\frac{\beta}{b}}\frac{4}{\frac{\gamma}{c}}\frac{1}{\frac{\delta}{d}}+\frac{3}{\frac{\alpha}{a}}\frac{4}{\frac{\beta}{b}}\frac{1}{\frac{\gamma}{c}}\frac{2}{\frac{\delta}{d}}+\frac{3}{\frac{\alpha}{a}}\frac{4}{\frac{\beta}{b}}\frac{2}{\frac{\gamma}{c}}\frac{1}{\frac{\delta}{d}}$$
$$+\frac{4}{\frac{\alpha}{a}}\frac{1}{\frac{\beta}{b}}\frac{2}{\frac{\gamma}{c}}\frac{3}{\frac{\delta}{d}}+\frac{4}{\frac{\alpha}{a}}\frac{1}{\frac{\beta}{b}}\frac{3}{\frac{\gamma}{c}}\frac{2}{\frac{\delta}{d}}+\frac{4}{\frac{\alpha}{a}}\frac{2}{\frac{\beta}{b}}\frac{1}{\frac{\gamma}{c}}\frac{3}{\frac{\delta}{d}}+\frac{4}{\frac{\alpha}{a}}\frac{2}{\frac{\beta}{b}}\frac{3}{\frac{\gamma}{c}}\frac{1}{\frac{\delta}{d}}+\frac{4}{\frac{\alpha}{a}}\frac{3}{\frac{\beta}{b}}\frac{1}{\frac{\gamma}{c}}\frac{2}{\frac{\delta}{d}}+\frac{4}{\frac{\alpha}{a}}\frac{3}{\frac{\beta}{b}}\frac{2}{\frac{\gamma}{c}}\frac{1}{\frac{\delta}{d}}$$

其中 $\frac{m}{\mu}=1,\frac{n}{\nu}=2,\frac{s}{\sigma}=3,\frac{t}{\tau}=4$，即分母不动，分子全排（按字典排序：从小到大）。

因为 Lagrangian 中，$g^{\mu\sigma}$ 要将 A_μ^m, A_σ^s 求和（1、3 一组），$g^{\nu\tau}$ 将 A_ν^n, A_τ^t 求和（2、4 一组），

所以，上式按 $(\alpha\beta,\gamma\delta),(\alpha\gamma,\beta\delta),(\alpha\delta,\beta\gamma)$ 重新分组为

$$g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau}\frac{\delta^4[A_\mu^m A_\nu^n A_\sigma^s A_\tau^t]}{\delta A_a^\alpha \delta A_b^\beta \delta A_c^\gamma \delta A_d^\delta}$$
$$=\left(\frac{13}{\frac{\alpha}{a}\frac{\beta}{b}}\frac{24}{\frac{\gamma}{c}\frac{\delta}{d}}+\frac{13}{\frac{\alpha}{a}\frac{\beta}{b}}\frac{42}{\frac{\gamma}{c}\frac{\delta}{d}}+\frac{24}{\frac{\alpha}{a}\frac{\beta}{b}}\frac{13}{\frac{\gamma}{c}\frac{\delta}{d}}+\frac{24}{\frac{\alpha}{a}\frac{\beta}{b}}\frac{31}{\frac{\gamma}{c}\frac{\delta}{d}}+\frac{31}{\frac{\alpha}{a}\frac{\beta}{b}}\frac{24}{\frac{\gamma}{c}\frac{\delta}{d}}+\frac{31}{\frac{\alpha}{a}\frac{\beta}{b}}\frac{42}{\frac{\gamma}{c}\frac{\delta}{d}}+\frac{42}{\frac{\alpha}{a}\frac{\beta}{b}}\frac{13}{\frac{\gamma}{c}\frac{\delta}{d}}+\frac{42}{\frac{\alpha}{a}\frac{\beta}{b}}\frac{31}{\frac{\gamma}{c}\frac{\delta}{d}}\right)_{\alpha\beta,\gamma\delta}+$$
$$\left(\frac{1}{\frac{\alpha}{a}}\frac{2}{\frac{\beta}{b}}\frac{3}{\frac{\gamma}{c}}\frac{4}{\frac{\delta}{d}}+\frac{1}{\frac{\alpha}{a}}\frac{4}{\frac{\beta}{b}}\frac{3}{\frac{\gamma}{c}}\frac{2}{\frac{\delta}{d}}+\frac{2}{\frac{\alpha}{a}}\frac{1}{\frac{\beta}{b}}\frac{4}{\frac{\gamma}{c}}\frac{3}{\frac{\delta}{d}}+\frac{2}{\frac{\alpha}{a}}\frac{3}{\frac{\beta}{b}}\frac{4}{\frac{\gamma}{c}}\frac{1}{\frac{\delta}{d}}+\frac{3}{\frac{\alpha}{a}}\frac{2}{\frac{\beta}{b}}\frac{1}{\frac{\gamma}{c}}\frac{4}{\frac{\delta}{d}}+\frac{3}{\frac{\alpha}{a}}\frac{4}{\frac{\beta}{b}}\frac{1}{\frac{\gamma}{c}}\frac{2}{\frac{\delta}{d}}+\frac{4}{\frac{\alpha}{a}}\frac{1}{\frac{\beta}{b}}\frac{2}{\frac{\gamma}{c}}\frac{3}{\frac{\delta}{d}}+\frac{4}{\frac{\alpha}{a}}\frac{3}{\frac{\beta}{b}}\frac{2}{\frac{\gamma}{c}}\frac{1}{\frac{\delta}{d}}\right)_{gg}$$
$$+\left(\frac{1}{\frac{\alpha}{a}}\frac{24}{\frac{\beta}{b}\frac{\gamma}{c}}\frac{3}{\frac{\delta}{d}}+\frac{1}{\frac{\alpha}{a}}\frac{42}{\frac{\beta}{b}\frac{\gamma}{c}}\frac{3}{\frac{\delta}{d}}+\frac{2}{\frac{\alpha}{a}}\frac{13}{\frac{\beta}{b}\frac{\gamma}{c}}\frac{4}{\frac{\delta}{d}}+\frac{2}{\frac{\alpha}{a}}\frac{31}{\frac{\beta}{b}\frac{\gamma}{c}}\frac{4}{\frac{\delta}{d}}+\frac{3}{\frac{\alpha}{a}}\frac{24}{\frac{\beta}{b}\frac{\gamma}{c}}\frac{1}{\frac{\delta}{d}}+\frac{3}{\frac{\alpha}{a}}\frac{42}{\frac{\beta}{b}\frac{\gamma}{c}}\frac{1}{\frac{\delta}{d}}+\frac{4}{\frac{\alpha}{a}}\frac{13}{\frac{\beta}{b}\frac{\gamma}{c}}\frac{2}{\frac{\delta}{d}}+\frac{4}{\frac{\alpha}{a}}\frac{31}{\frac{\beta}{b}\frac{\gamma}{c}}\frac{2}{\frac{\delta}{d}}\right)_{\alpha\delta,\beta\gamma}$$

第一大组 $\Gamma(\alpha\beta,\gamma\delta)$：

$$(13,24)=f_{emn}f_{est}\frac{13}{\frac{\alpha}{a}\frac{\beta}{b}}\frac{24}{\frac{\gamma}{c}\frac{\delta}{d}}=f_{emn}f_{est}g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau}\frac{\frac{m}{\mu}}{\frac{\alpha}{a}}\frac{\frac{s}{\sigma}}{\frac{\beta}{b}}\frac{\frac{n}{\nu}}{\frac{\gamma}{c}}\frac{\frac{t}{\tau}}{\frac{\delta}{d}}$$
$$=f_{emn}f_{est}g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau}g^{am}g_{\alpha\mu}g^{bs}g_{\beta\sigma}g^{cn}g_{\gamma\nu}g^{dt}g_{\delta\tau}$$
$$=f_{emn}f_{est}g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}g^{am}g^{bs}g^{cn}g^{dt}=g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}f_{eac}f_{ebd}$$
$$(24,13)=f_{emn}f_{est}\frac{24}{\frac{\alpha}{a}\frac{\beta}{b}}\frac{13}{\frac{\gamma}{c}\frac{\delta}{d}}=f_{emn}f_{est}g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau}\frac{\frac{n}{\nu}}{\frac{\alpha}{a}}\frac{\frac{t}{\tau}}{\frac{\beta}{b}}\frac{\frac{m}{\mu}}{\frac{\gamma}{c}}\frac{\frac{s}{\sigma}}{\frac{\delta}{d}}$$
$$=f_{emn}f_{est}g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau}g^{an}g_{\alpha\nu}g^{bt}g_{\beta\tau}g^{cm}g_{\gamma\mu}g^{ds}g_{\delta\sigma}$$
$$=f_{emn}f_{est}g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}g^{an}g^{bt}g^{cm}g^{ds}=g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}f_{eca}f_{edb}$$

$$(31,42)=f_{emn}f_{est}\frac{31}{\alpha\ \beta}\frac{42}{\gamma\ \delta}=f_{emn}f_{est}\left[\frac{13}{a\ b}\frac{24}{c\ d}\right]_{\substack{m\leftrightarrow s\\ n\leftrightarrow t}}=f_{emn}f_{est}g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}g^{as}g^{bm}g^{ct}g^{dn}$$

$$=g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}f_{ebd}f_{eac}$$

$$(13,42)=f_{emn}f_{est}\frac{13}{\alpha\ \beta}\frac{42}{\gamma\ \delta}=f_{emn}f_{est}\left[\frac{13}{a\ b}\frac{24}{c\ d}\right]_{\substack{n\leftrightarrow t\\ \nu\leftrightarrow\tau}}=f_{emn}f_{est}g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}g^{am}g^{bs}g^{ct}g^{dn}$$

$$=g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}f_{ead}f_{ebc}$$

因为 $\mu\nu\sigma\tau$ 求和时被消去，所以也可以省略不写，只写 mnst 如何交换即可。

(13,24)=(24,13)表明，将 13 视为一组，24 视为一组，组与组间整体交换值不变； $(13,24)\neq(13,42)$表明，某组内元素交换一次，值改变；(13,24)=(31,42)表明，两组内元素各交换一次，值不变。大家还可以举更多例子。这些都验证了我们的猜测。所以，我们将这一大组 $(\alpha\beta,\gamma\delta)$ 的 8 项分成两个小组，每组 4 项：

$$\begin{pmatrix}(13,24) & (24,13)\\ (31,42) & (42,31)\end{pmatrix}=g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}f_{eac}f_{ebd}\ ,\ \begin{pmatrix}(13,42) & (42,13)\\ (31,24) & (24,31)\end{pmatrix}=g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}f_{ead}f_{ebc}$$

于是 $\Gamma(\alpha\beta,\gamma\delta)=4g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}(f_{eac}f_{ebd}+f_{ead}f_{ebc})$

第三大组 $(\alpha\delta,\beta\gamma)$：

$$(1,24,3)=f_{emn}f_{est}\frac{1}{\alpha\ \ a}\frac{24}{\beta\ \gamma\ b\ c}\frac{3}{\delta\ \ d}=f_{emn}f_{est}g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau}\frac{m}{\alpha\ \ a}\frac{n}{\mu\ \ \nu}\frac{t}{\beta\ \ b}\frac{s}{\tau\ \ \sigma}\frac{}{\gamma\ \ c}\frac{}{\delta\ \ d}$$

$$=f_{emn}f_{est}g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau}g^{am}g_{\alpha\mu}g^{bn}g_{\beta\nu}g^{ct}g_{\gamma\tau}g^{ds}g_{\delta\sigma}$$

$$=f_{emn}f_{est}g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}g^{am}g^{bn}g^{ct}g^{ds}=f_{eab}f_{edc}g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}=-g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}f_{eab}f_{ecd}$$

$$(1,42,3)=f_{emn}f_{est}\frac{1}{\alpha\ \ a}\frac{42}{\beta\ \gamma\ b\ c}\frac{3}{\delta\ \ d}=f_{emn}f_{est}\left[\frac{1}{a}\frac{24}{b\ c}\frac{3}{d}\right]_{n\leftrightarrow t}=f_{emn}f_{est}g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}g^{am}g^{bt}g^{cn}g^{ds}$$

$$=f_{eac}f_{edb}g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}=-g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}f_{eac}f_{ebd}$$

$$(2,13,4)=f_{emn}f_{est}\frac{2}{\alpha\ \ a}\frac{13}{\beta\ \gamma\ b\ c}\frac{4}{\delta\ \ d}=f_{emn}f_{est}\left[\frac{1}{a}\frac{24}{b\ c}\frac{3}{d}\right]_{\substack{m\leftrightarrow n\\ s\leftrightarrow t}}=f_{emn}f_{est}g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}g^{an}g^{bm}g^{cs}g^{dt}$$

$$=f_{eba}f_{ecd}g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}=-g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}f_{eab}f_{ecd}=(1,24,3)$$

$$(2,31,4)=f_{emn}f_{est}\frac{2}{\alpha\ \ a}\frac{31}{\beta\ \gamma\ b\ c}\frac{4}{\delta\ \ d}=f_{emn}f_{est}\left[\frac{2}{a}\frac{13}{b\ c}\frac{4}{d}\right]_{m\leftrightarrow s}=f_{emn}f_{est}g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}g^{an}g^{bs}g^{cm}g^{dt}$$

$$=f_{eca}f_{ebd}g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}=-g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}f_{eac}f_{ebd}=(1,42,3)$$

组间整体交换值不变：(2,13,4)=(1,24,3)=-(ab,cd)=(13,24)=(24,13)

组内交换一次值不同：(1,42,3)=(13,42)=-(ac,bd)≠(1,24,3)=(13,24)

每组内各交换一次值不变：(2,31,4)=-(ac,bd)=(24,31)=(13,42)=(42,13)

我们将这一大组$(\alpha\delta,\beta\gamma)$的 8 项分成两个小组，每组 4 项：

$$\begin{pmatrix}(1,24,3) & (2,13,4)\\ (3,42,1) & (4,31,2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(13,24) & (24,13)\\ (31,42) & (42,31)\end{pmatrix}=-g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}f_{eab}f_{ecd}$$

$$\begin{pmatrix}(1,42,3) & (4,13,2)\\ (3,24,1) & (2,31,4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(13,42) & (42,13)\\ (31,24) & (24,31)\end{pmatrix}=-g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}f_{eac}f_{ebd}$$

于是$\Gamma(\alpha\delta,\beta\gamma)=-4g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}(f_{eab}f_{ecd}+f_{eac}f_{ebd})$

第二大组$(\alpha\gamma,\beta\delta)$：

$$(1,2,3,4)=f_{emn}f_{est}\frac{1}{\alpha}\frac{2}{\beta}\frac{3}{\gamma}\frac{4}{\delta}=f_{emn}f_{est}g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau}\frac{m}{\mu}\frac{n}{\nu}\frac{s}{\sigma}\frac{t}{\tau}=$$

$$f_{emn}f_{est}g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau}g^{am}g_{\alpha\mu}g^{bn}g_{\beta\nu}g^{cs}g_{\gamma\sigma}g^{dt}g_{\delta\tau}=f_{emn}f_{est}g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}g^{am}g^{bn}g^{cs}g^{dt}=g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}f_{eab}f_{ecd}$$

$$(1,4,3,2)=f_{emn}f_{est}\frac{1}{\alpha}\frac{4}{\beta}\frac{3}{\gamma}\frac{2}{\delta}=f_{emn}f_{est}\left[\frac{1}{\alpha}\frac{2}{\beta}\frac{3}{\gamma}\frac{4}{\delta}\right]_{n\leftrightarrow t}=f_{emn}f_{est}g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}g^{am}g^{bt}g^{cs}g^{dn}$$

$$=g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}f_{ead}f_{ecb}=-g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}f_{ead}f_{ebc}$$

$$(2,1,4,3)=f_{emn}f_{est}\frac{2}{\alpha}\frac{1}{\beta}\frac{4}{\gamma}\frac{3}{\delta}=f_{emn}f_{est}\left[\frac{1}{\alpha}\frac{2}{\beta}\frac{3}{\gamma}\frac{4}{\delta}\right]_{\substack{m\leftrightarrow n\\ s\leftrightarrow t}}$$

$$=f_{emn}f_{est}g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}g^{an}g^{bm}g^{ct}g^{ds}=g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}f_{eba}f_{edc}=g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}f_{eab}f_{ecd}$$

$$(2,3,4,1)=f_{emn}f_{est}\frac{2}{\alpha}\frac{3}{\beta}\frac{4}{\gamma}\frac{1}{\delta}=f_{emn}f_{est}\left[\frac{2}{\alpha}\frac{1}{\beta}\frac{4}{\gamma}\frac{3}{\delta}\right]_{m\leftrightarrow s}$$

$$=f_{emn}f_{est}g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}g^{an}g^{bs}g^{ct}g^{dm}=g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}f_{eda}f_{ebc}=-g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}f_{ead}f_{ebc}$$

交换一次值不同：(1,4,3,2)=-(ad,bc)≠(1,2,3,4)，(2,3,4,1)≠(2,1,4,3)；

交换两次值不变：(2,1,4,3)=(1,2,3,4)= (ab,cd)，(2,3,4,1) =(1,4,3,2)=-(ad,bc)

我们将这一大组$(\alpha\gamma,\beta\delta)$的 8 项分成两个小组，每组 4 项：

$$\begin{pmatrix}(1,2,3,4) & (2,1,4,3)\\ (3,4,1,2) & (4,3,2,1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(13,24) & (24,13)\\ (31,42) & (42,31)\end{pmatrix}=g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}f_{eab}f_{ecd}$$

$$\begin{pmatrix}(1,4,3,2) & (4,1,2,3)\\ (3,2,1,4) & (2,3,4,1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(13,42) & (42,13)\\ (31,24) & (24,31)\end{pmatrix}=-g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}f_{ead}f_{ebc}$$

于是$\Gamma(\alpha\gamma,\beta\delta)=4g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}(f_{eab}f_{ecd}-f_{ead}f_{ebc})$

于是，顶角函数为

$$i\Gamma^{abcd}_{\alpha\beta\gamma\delta}(x,y,z,t)=-\frac{ig^2}{4}\int d^4u\delta_{xu}\delta_{yu}\delta_{zu}\delta_{tu}[\Gamma(\alpha\beta,\gamma\delta)+\Gamma(\alpha\gamma,\beta\delta)+\Gamma(\alpha\delta,\beta\gamma)]$$
$$=-ig^2[g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}(f_{eac}f_{ebd}+f_{ead}f_{ebc})+g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}(f_{eab}f_{ecd}-f_{ead}f_{ebc})$$
$$-g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}(f_{eab}f_{ecd}+f_{eac}f_{ebd})]$$
$$=-ig^2[f_{eab}f_{ecd}(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}-g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma})+f_{eac}f_{ebd}(g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}-g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma})$$
$$+f_{ead}f_{ebc}(g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}-g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta})]$$

或

$$\Gamma(x,y,z,t)=\int d^4u\delta_{xu}\delta_{yu}\delta_{zu}\delta_{tu}\Gamma(p,q,r,k)$$
$$=\int d^4u\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{d^4r}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-i[p(x-u)+q(y-u)+r(z-u)+k(t-u)]}\Gamma(p,q,r,k)$$
$$=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{d^4r}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-i[px+qy+rz+kt]}\int d^4ue^{iu[p+q+r+k]}\Gamma(p,q,r,k)$$
$$=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{d^4r}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-i[px+qy+rz+kt]}(2\pi)^4\delta^4(p+q+r+k)\Gamma(p,q,r,k)$$

$$i\Gamma(p,q,r,k)=$$
$$-ig^2[f_{eab}f_{ecd}(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}-g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma})+f_{eac}f_{ebd}(g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}-g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma})+f_{ead}f_{ebc}(g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}-g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta})]$$

2.2.3.3 鬼粒子-胶子顶点

由 $\mathcal{L}^{Int}_{FP}=-gf_{abc}(\partial^\mu C^*_a)A^c_\mu C_b$，偏导给出 $-ip^\mu$，其余被泛函微商掉，所以

$$i\Gamma(p)=-igf_{abc}(-ip^\mu)=-gf_{abc}p^\mu\ ?$$

【讨论】

（1）按 $\mathcal{L}^{Int}_{FP}=gf_{abc}(\partial^\mu C^*_a)A^b_\mu C_c$，则 $i\Gamma(p)=igf_{abc}(-ip^\mu)=gf_{abc}p^\mu$，差负号，哪个对？

哪个都可以。但要注意前后约定一致，若对三胶子顶点约定

$$\Gamma(x,y,z)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-i(px+qy+kz)}(2\pi)^4\delta^4(p+q+k)\Gamma(p,q,k)$$

且 $\delta^4(x-t)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip(x-t)}$ 对 x 求导而非对 t 求导（为了给出 $-ip^\mu$ 而非 $+ip^\mu$），

此处就不能约定

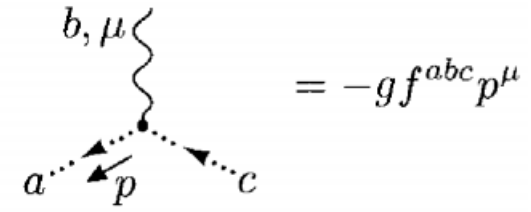
$$\Gamma(x,y,z)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{+i(px+qy+kz)}(2\pi)^4\delta^4(p+q+k)\Gamma(p,q,k)$$

及 $\delta^4(t-x)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip(t-x)}$ 对 t 求导。

δ 函数是偶函数，所以求出正或负，数学上都合理。但注意物理意义不同：$\delta(x-y)$ 表示从 y 向 x 传播，$\delta(y-x)$ 表示从 x 向 y 传播（王正行《简明量子场论》）。所以，看物理过程，产生谁，湮灭谁。Boson 场方向无影响，Fermion 场反向运动多一负号。

若约定指向顶点表示湮灭，给出 $-ip^\mu$；离开顶点表示产生，给出 $+ip^\mu$，则有

$$i\mathcal{L}_{FP}^{Int}=igf_{abc}(\partial^\mu C_a^*)A_\mu^b C_c \Rightarrow$$



$$=-gf^{abc}p^\mu$$

注意，为与图对应，先要将 A 场的指标换成 b，带偏导（给出动量 p）的 C*场指标换成 a；并且，别忘了 Lagrangian 要乘以 i.

（2）C_a^* 中的共轭对微商有影响吗？没有。C_a^* 与 C_a 是不同的、独立的两种场，所以此 Feynman 图无对称性因子。虽然速度是坐标的导数，但理论力学中坐标与速度是独立的变量。泛函微商时，分子的 C_a^* 只与分母的 C_a^* 作用，dagger 的作用抵消。

夸克-胶子顶点很简单，我们不再展开，只用类比法给出：

$\mathcal{L}_{Dirac}=-e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$ 给出 $i\Gamma_{QED}=-ie\gamma^\mu$，故 $\mathcal{L}_F^{Int}=g\bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu^a T_a\Psi$ 给出 $i\Gamma_{QCD}=ig\gamma^\mu T_a$

第 3 步　重整化（120 分）

完成了量子化，接下来便是重整化了。实用主义者相信“有效理论”，是否可重整无关紧要；理想主义者追求“基本理论”，可重整性至关重要。目前除了引力不可重整，QED、QCD 还有后面要讲的电弱统一理论都是可重整的，大家就放心地用吧。

2.3.1　QCD 单圈计算概述

QED 中，光子间无相互作用，且不必引入鬼场，单圈图只有电子自能，光子自能（真空极化），顶角修正各一个。QCD 中，胶子间有自作用，且不得不引入鬼场，单圈图有很多（图 1）：

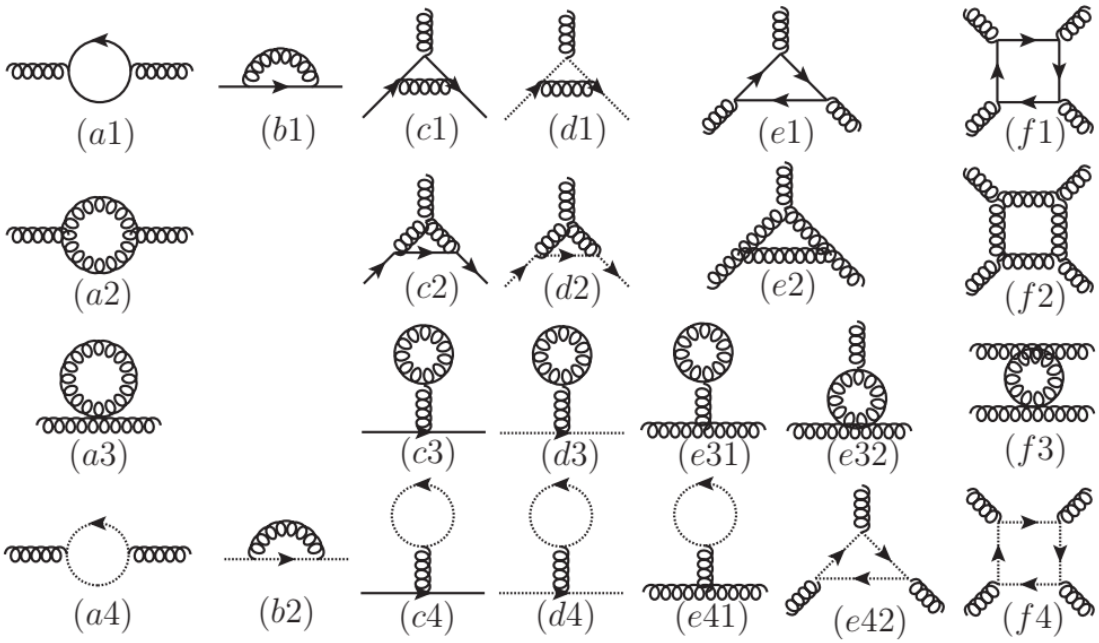


图 1　QCD 所有可能的单圈图（周邦融《规范场论》）

其中第一列为真空极化，第二列为夸克自能、鬼自能；第三列为夸克-胶子顶角修正；第四列为鬼-胶子顶角修正；第五列为三胶子顶角修正；第六列为四胶子顶角修正。注意夸克为实线，鬼为虚线。第四行第四列有鬼。多数书只讨论(a1~a4,b1,b2,c1,c2).

将树图和基本单圈图组合在一起，就得到具体物理过程的单圈修正（图 2 和图 3）：

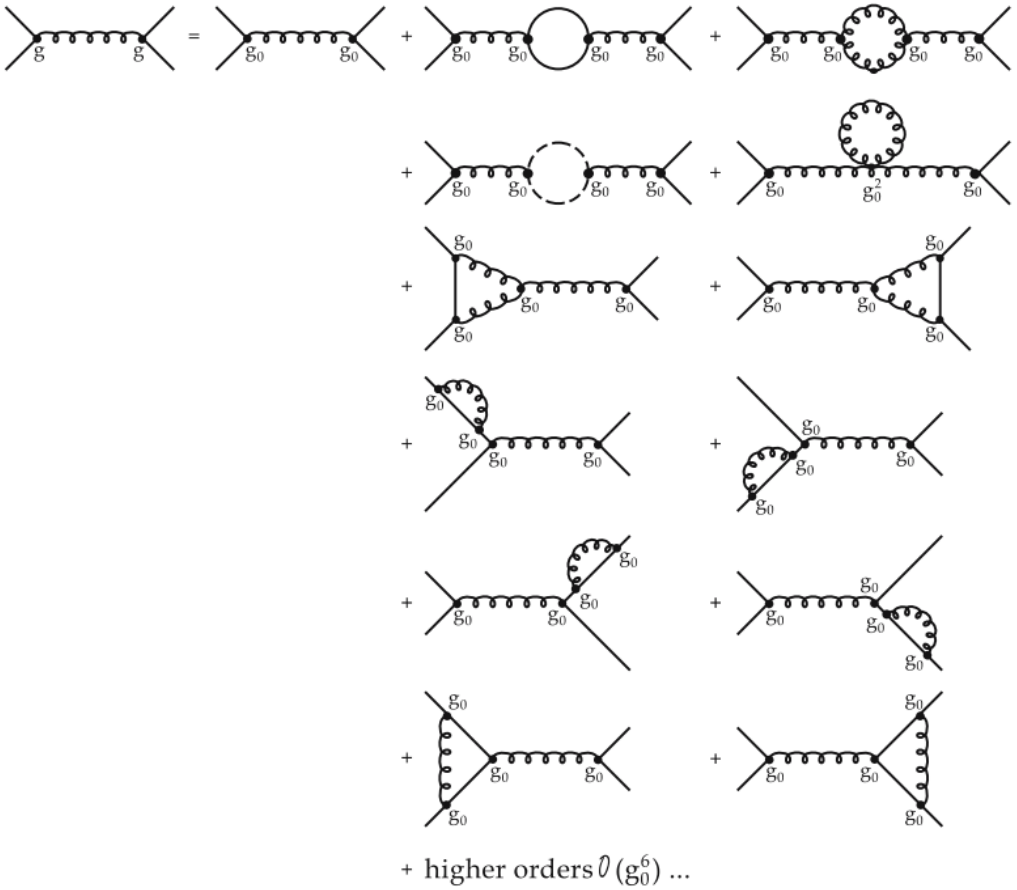


图 2　夸克-夸克散射的单圈修正（Greiner《Quantum Chromodynamics》）

$e^+e^- \to \gamma \to q\bar{q}$ 过程可进行的 QCD 单圈修正非常有限。胶子既不与正负电子作用，也不与光子作用，所以树图(a)的左边不用修，中间也不用修，只能修右边，其最低阶修正为：

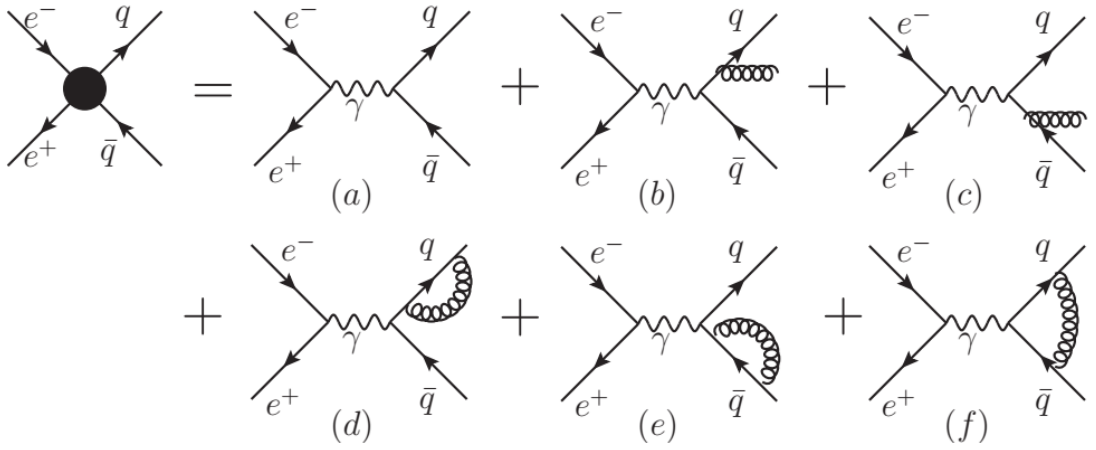


图 3　$e^+e^- \to \gamma \to q\bar{q}$ 的 QCD 最低阶修正（黄涛《量子色动力学引论》）

在正式进入圈图计算前，还有一个问题需要澄清，即重整化常数与抵消项。很多书将其与某个具体圈图杂糅在一起，可能让不熟悉重整化常数的人产生“丈二的和尚摸不到头脑”的感觉，所以最好先大致复习下 QED 的重整化。引入抵消项后，Lagrangian 变化为

$$\mathcal{L}(\phi) + \delta\mathcal{L}(\phi) = \mathcal{L}'(Z\phi) = \mathcal{L}(\phi_B)$$

其中 $\mathcal{L}(\phi)$ 为原始 Lagrangian，$\delta\mathcal{L}(\phi)$ 为抵消项；$\mathcal{L}(\phi), \mathcal{L}'(\phi)$ 自变量都是 ϕ，只是 $\mathcal{L}'$ 中含有重整化常数 Z；$\mathcal{L}(\phi), \mathcal{L}(\phi_B)$ 函数形式相同，只是自变量 ϕ 变成裸量 ϕ_B（注意不同书符号约定不一致）。奇怪的是，原始 Lagrangian 发散，裸量不可观测，但用裸量重新表达的 Lagrangian 却符合观测（不再发散）。QCD 原始的有效 Lagrangian 为

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A^a_\mu)^2 + \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi - \bar{C}_a \Box C_a$$
$$-gf_{abc}(\partial_\mu A^a_\nu)A^{b\mu}A^{c\nu} - \frac{1}{4}g^2 f_{eab}f_{ecd}A^a_\mu A^b_\nu A^{c\mu}A^{d\nu} + g\bar{\Psi}\gamma^\mu A^a_\mu T_a \Psi + gf_{abc}(\partial^\mu \bar{C}^a)A^b_\mu C^c$$

引入抵消项后成为

$$\mathcal{L}_{eff}(A, \bar{\Psi}, \Psi, \bar{C}, C) + \delta\mathcal{L}(A, \bar{\Psi}, \Psi, \bar{C}, C) = \mathcal{L}_{eff}(A_B, \bar{\Psi}_B, \Psi_B, \bar{C}_B, C_B) =$$
$$-\frac{1}{4}Z_3(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A^a_\mu)^2 + Z_2\bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu)\Psi - Z_m\bar{\Psi}m\Psi$$
$$-Z_{3c}\bar{C}_a\Box C_a - g_R Z_{A3}f_{abc}(\partial_\mu A^a_\nu)A^{b\mu}A^{c\nu} - \frac{1}{4}g_R^2 Z_{A4}f_{eab}f_{ecd}A^a_\mu A^b_\nu A^{c\mu}A^{d\nu}$$
$$+g_R Z_1\bar{\Psi}\gamma^\mu A^a_\mu T_a\Psi + g_R Z_{1c}f_{abc}(\partial^\mu\bar{C}^a)A^b_\mu C^c$$

其中 $Z_3 = 1+\delta Z_3, Z_2 = 1+\delta Z_2, Z_m = 1+\delta Z_m, Z_1 = 1+\delta Z_1$ 与 QED 一致，

$Z_{3c} = 1+\delta Z_{3c}, Z_{A3} = 1+\delta Z_{A3}, Z_{A4} = 1+\delta Z_{A4}, Z_{1c} = 1+\delta Z_{1c}$ 是 QCD 新加的。

注意，规范不变性使得规范固定项不需要抵消项，但如果用裸量改写，规范固定参数仍有相应的裸量（裘忠平《现代量子场论导引》7.7 节关于 QED 的讨论）。

至此，我们对 QCD 单圈修正有了一个整体的把握。所谓“意在笔先”，事先了解定性的概念，如同在航海中找到灯塔，不容易在具体计算细节中迷失。方向比努力更重要。

虽然 QCD 单圈图有很多（24 个），但多数书只讨论其中 6 个或 7 个。作为入门教材，这里仅介绍多数书都介绍的比较典型的 6 个图（区别在于本书补充了其他书省略的计算细节），如图 5 所示。

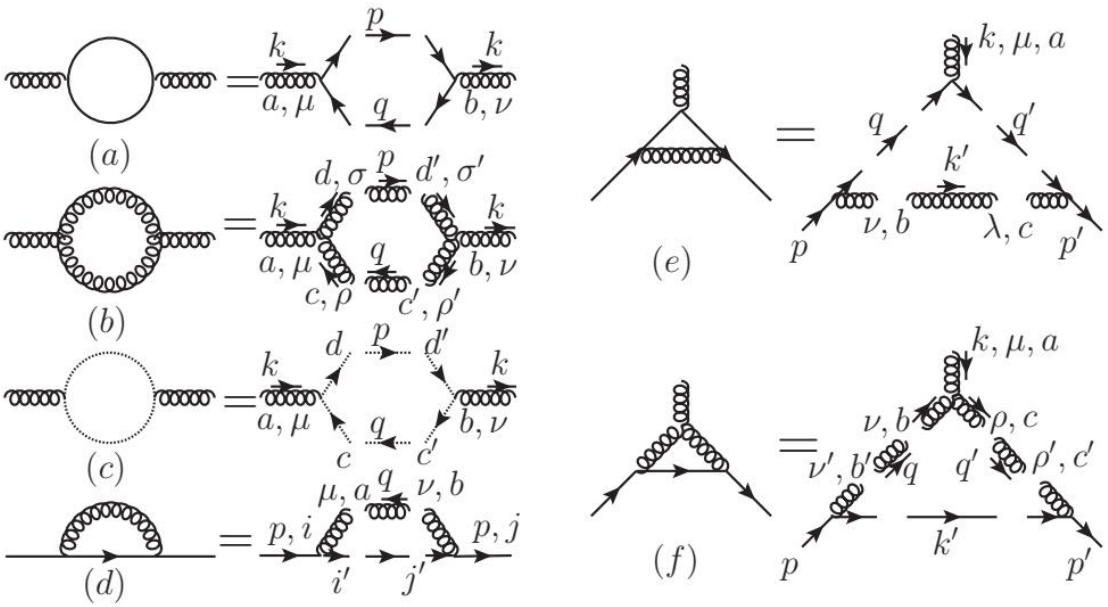


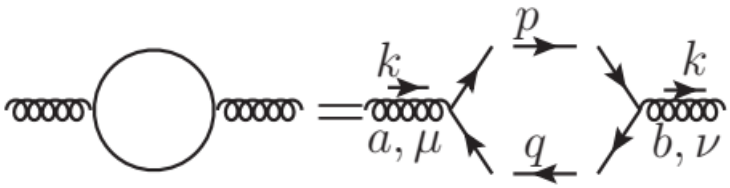
图 5　QCD 基本单圈图及其解释

其中(a)(b)(c)为胶子自能（真空极化），(d)为夸克自能，(e)(f)为夸克-胶子顶角修正。QED 只有(a)(d)(e)三个（光子无自作用亦无鬼项），(b)(c)(f)是 QCD 新加的（胶子有自作用还有鬼项）。

2.3.2　真空极化

即图 5 中(a)(b)(c)三图。

2.3.2.1　夸克圈



$$i\Pi_F^{ab\mu\nu}=-\int\frac{d^nq}{(2\pi)^n}\mathrm{Tr}[ig'\gamma^\mu T_a\cdot\frac{i}{\not p-m}\cdot ig'\gamma^\nu T_b\cdot\frac{i}{\not q-m}]$$

仿照 QED，积分对 $n=4-\varepsilon$ 维进行，$g'=\mu^{\varepsilon/2}g$，对 Fermion 圈除求迹 Tr 还要加负号。注意图中各因子首尾相连形成一圈，严格讲表达式不应写成一行，而应是平面上一个圈。将它

“压扁”成一行时，注意迹循环下与图形对应，指标不可随意换顺序。
一个 Feynman 图总是等于 $i\mathcal{M}$，我们给这个图乘以(-i)，使之变成

$$\Pi_F^{ab\mu\nu}(k)=\mathrm{Tr}[T_aT_b]g^2i\mu^{4-d}\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{\mathrm{Tr}[\gamma^\mu(\not p-m)\gamma^\nu(\not p-\not k-m)]}{(p^2-m^2)[(p-k)^2-m^2]}$$

为与 QED 比较，这里将 n 维改成了 d 维，积分变量 q 改为 p（注意动量守恒 p=q+k）. 因 SU(3) 生成元 Ta,Tb 与 gamma 矩阵是直积（而非普通乘积），所以将它们提到积分外（见本书 2.2.1.3 节 Lagrangian 分析）。与 QED 类似，分母用 Feynman 参数化折叠，分子求迹，进行维数正规化。对动量的积分给出一个 i，保证 $\Pi_F^{ab\mu\nu}$ 为实数。这样，与 QED 唯一不同在于 $e^2\to g^2\mathrm{Tr}[T_aT_b]=g^2T_F\delta_{ab}=g^2\delta_{ab}/2$，所以可直接引用 QED 结果（见本书 1.2.4.2 节）：

$$\Pi_{QED}^{\mu\nu}=e^2\frac{2f(d)}{(4\pi)^2}\Gamma(\frac{\varepsilon}{2})(k^\mu k^\nu-k^2g^{\mu\nu})\int_0^1dxx(1-x)[\frac{4\pi\mu^2}{m^2-k^2x(1-x)}]^{\varepsilon/2}$$

$$\Rightarrow\Pi_F^{\mu\nu ab}=T_F\delta_{ab}g^2\frac{2f(d)}{(4\pi)^2}\Gamma(\frac{\varepsilon}{2})(k^\mu k^\nu-k^2g^{\mu\nu})\int_0^1dxx(1-x)[\frac{4\pi\mu^2}{m^2-k^2x(1-x)}]^{\varepsilon/2}$$

为了与别的书比较，此处没有引用积分的最终结果，而是引用了中间一步。接下来有两种算法，一是先对 x 积分再展开 ε（见 Greiner’s QCD），二是先展开再积分。这里采用后者。

利用 $\Gamma(\frac{\varepsilon}{2})=\frac{2}{\varepsilon}-\gamma_E, a^x\approx1+x\ln a, \lim_{d\to4}f(d)=$ 及 Schwartz《Quantum Field Theory and Standard Model》定义的 $\tilde\mu^2=4\pi\mu^2e^{-\gamma_E}$，展开至 ε 零次项，得

$$\Pi_F^{\mu\nu ab}=-T_F\delta_{ab}\frac{g^2}{2\pi^2}(k^2g^{\mu\nu}-k^\mu k^\nu)\int_0^1dxx(1-x)[\frac{2}{\varepsilon}-\gamma_E+\ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2-k^2x(1-x)}+o(\varepsilon)]$$

$$\approx-T_F\delta_{ab}\frac{g^2}{2\pi^2}(k^2g^{\mu\nu}-k^\mu k^\nu)\int_0^1dxx(1-x)[\frac{2}{\varepsilon}+\ln\frac{\tilde\mu^2}{m^2-k^2x(1-x)}]$$

这样就与 Schwartz 一致。记

$$I=\int_0^1dxx(1-x)\ln\frac{1}{m^2-k^2x(1-x)}=\frac{1}{6}\int_0^1dx(6x^2-6x)[\ln m^2+\ln(1-\frac{k^2}{m^2}x+\frac{k^2}{m^2}x^2)]$$

$$=-\frac{1}{6}\ln m^2+\frac{1}{6}\int_0^1dx(6x^2-6x)\ln(1-ax+ax^2)$$

1.2.4.2 节给出

$$\int_0^1dx(6x^2-6x)\ln(1-ax+ax^2)=\frac{5}{3}+\frac{4}{a}+(\frac{1}{2}-\frac{1}{a}-\frac{4}{a^2})\frac{1}{b}\ln\left|\frac{\frac12-b}{\frac12+b}\right|,\quad b=\sqrt{\tfrac14-\tfrac1a}$$

注意，Schwartz 讨论的是 $Q^2=-k^2\gg m^2$ 过程，所以 $b=\sqrt{\frac14-\frac1a}=\sqrt{\frac14+\left|\frac{m^2}{k^2}\right|}>\frac12$，$\ln\frac{\left|\frac12-b\right|}{\left|\frac12+b\right|}$ 去绝对值后为 $\ln\frac{b-\frac12}{b+\frac12}$。所以

$$I=-\frac{1}{6}\ln m^2+\frac{1}{6}[\frac{5}{3}+\frac{4m^2}{k^2}+(\frac{1}{2}-\frac{m^2}{k^2}-\frac{4m^4}{k^4})\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{m^2}{k^2}}}\ln\frac{\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{m^2}{k^2}}-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{m^2}{k^2}}+\frac{1}{2}}]$$

我们想讨论此式在 m 趋于零的极限。由极限的四则运算性质，可将部分项的极限优先求出。不发散的项可直接代入极限值；线性发散、平方发散等比对数发散快，相遇时对数发散可扔掉。记 $\varepsilon=-\frac{m^2}{k^2}>0$，则

$$\lim_{m\to0}I=\frac{1}{6}(\frac{5}{3}+\frac{4\cdot0}{k^2})+\frac{1}{6}\lim_{m\to0}[(\frac{1}{2}-\frac{m^2}{k^2}-\frac{4m^4}{k^4})\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-0}}\ln\frac{\frac{1}{4}-\frac{m^2}{k^2}-(\frac{1}{2})^2}{(\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{m^2}{k^2}}+\frac{1}{2})^2}-\ln m^2]$$

$$=\frac{1}{6}\frac{5}{3}+\frac{1}{6}\lim_{m,\varepsilon\to0}[\ln\frac{-\frac{m^2}{k^2}}{(\sqrt{\frac{1}{4}-0}+\frac{1}{2})^2}+\frac{2\ln\varepsilon\ \nearrow}{1/\varepsilon\ \uparrow}-\frac{8\ln\varepsilon\ \nearrow}{1/\varepsilon^2\ \uparrow\uparrow}-\ln m^2]$$

$$=\frac{1}{6}\frac{5}{3}+\frac{1}{6}\lim_{m,\varepsilon\to0}\{\ln(-\frac{m^2}{k^2})-\ln m^2\}=\frac{1}{6}\frac{5}{3}+\frac{1}{6}\ln\frac{1}{-k^2}$$

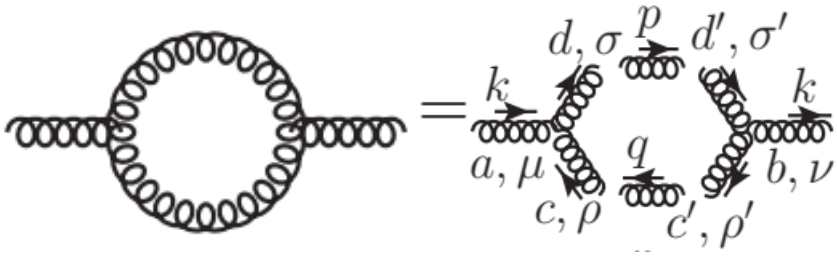
其中 $\nearrow$ 表示对数发散，$\uparrow$ 表示线性发散，$\uparrow\uparrow$ 表示平方发散。或者用 $\sqrt{1+\varepsilon x}\approx1+\varepsilon x/2$ 简化 $\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{m^2}{k^2}}-\frac{1}{2}$ 为等价无穷小。最终

$$\Pi_F^{\mu\nu ab}=-T_F\delta_{ab}\frac{g^2}{2\pi^2}(k^2g^{\mu\nu}-k^\mu k^\nu)\{I+\int_0^1dxx(1-x)[\frac{2}{\varepsilon}+\ln\tilde{\mu}^2]\}$$

$$=-T_F\delta_{ab}\frac{g^2}{2\pi^2}(k^2g^{\mu\nu}-k^\mu k^\nu)\frac{1}{6}\{\frac{5}{3}+\ln\frac{1}{-k^2}+\frac{2}{\varepsilon}+\ln\tilde{\mu}^2\}$$

$$=-T_F\delta_{ab}\frac{g^2}{16\pi^2}(k^2g^{\mu\nu}-k^\mu k^\nu)\frac{4}{3}[\frac{5}{3}+\ln\frac{\tilde{\mu}^2}{Q^2}+\frac{2}{\varepsilon}]$$

2.3.2.2 胶子圈



$$i\Pi_3^{ab\mu\nu}=\frac{1}{2}\int\frac{d^dq}{(2\pi)^d}g'f_{acd}[g^{\mu\rho}(k-q)^\sigma+g^{\rho\sigma}(q+p)^\mu+g^{\sigma\mu}(-p-k)^\rho]\cdot\frac{-i\delta_{dd'}g_{\sigma\sigma'}}{p^2}$$

$$\times g'f_{bc'd'}[g^{\nu\rho'}(-k+q)^{\sigma'}+g^{\rho'\sigma'}(-q-p)^\nu+g^{\sigma'\nu}(p+k)^{\rho'}]\cdot\frac{-i\delta_{cc'}g_{\rho\rho'}}{q^2}$$

$$=\frac{1}{2}\mu^\varepsilon g^2f_{acd}f_{bcd}\int\frac{d^dq}{(2\pi)^d}\frac{N^{\mu\nu}}{q^2(k+q)^2}$$

其中 1/2 对称因子是因为胶子是自己的反粒子（Schwartz《Quantum Field Theory and Standard Model》），$(2\pi)^4\delta^4(k+q-p)$ 包含在 S 矩阵中，但不包含在不变振幅 $\mathcal{M}$ 中。为简化，已取 Feynman 规范（$\alpha=1$ 或 $\xi=1$）。代入动量守恒 p=q+k，有

$$
\begin{aligned}
&N^{\mu\nu}=[g^{\mu\rho}(k-q)^{\sigma}+g^{\rho\sigma}(2q+k)^{\mu}-g^{\sigma\mu}(2k+q)^{\rho}]\\
&\times[g^{\nu}_{\rho}(k-q)_{\sigma}+g_{\rho\sigma}(2q+k)^{\nu}-g^{\nu}_{\sigma}(2k+q)_{\rho}]\\
&=g^{\mu\nu}(k-q)^2+(k-q)^{\mu}(2q+k)^{\nu}-(2k+q)^{\mu}(k-q)^{\nu}\\
&+(2q+k)^{\mu}(k-q)^{\nu}+g^{\rho\sigma}g_{\rho\sigma}(2q+k)^{\mu}(2q+k)^{\nu}-(2q+k)^{\mu}(2q+k)^{\nu}\\
&-(k-q)^{\mu}(2k+q)^{\nu}-(2k+q)^{\mu}(2q+k)^{\nu}+g^{\mu\nu}(2k+q)^2\\
&=g^{\mu\nu}(5k^2+2kq+2q^2)-(k-q)^{\mu}(k-q)^{\nu}-(2k+q)^{\mu}(2k+q)^{\nu}\\
&+(d-1)(2q+k)^{\mu}(2q+k)^{\nu}\\
&=g^{\mu\nu}(5k^2+2kq+2q^2)+k^{\mu}k^{\nu}(d-6)+q^{\mu}q^{\nu}(4d-6)+(q^{\mu}k^{\nu}+q^{\nu}k^{\mu})(2d-3)
\end{aligned}
$$

与裘忠平 $\bar{\alpha}=0$ 时一致，d=4 时与 Greiner 一致。

----------数学加油站----------

我们可以套用 QED 中推出的公式完成 d 维动量积分。不过，多花点时间去尝试新的积分方法也是值得的。这里，我们先由 QED 推出的公式证明裘忠平书上新的积分公式，再完成胶子圈的计算。在 QED 中，我们推出

$$
I_0(\alpha,n,m^2)=\int\frac{d^np}{(2\pi)^n}\frac{1}{(p^2-m^2)^{\alpha}}=\frac{(-1)^{\alpha}i}{(4\pi)^{n/2}}\frac{\Gamma(\alpha-n/2)}{\Gamma(\alpha)(m^2)^{\alpha-n/2}}
$$

现在，我们来证明裘忠平书上的公式。

（1） $$I_0'=\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{(k^2)^a}{(k^2-R^2)^b}=\frac{(-1)^{a-b}i}{(4\pi)^{d/2}}\frac{\Gamma(a+d/2)}{\Gamma(d/2)\Gamma(b)}\frac{\Gamma(b-a-d/2)}{(R^2)^{b-a-d/2}}$$

证明：由 Wick 转动给出 $d^4p_E=-id^4p, p_E^2=-p^2$，可得 Euclid 空间积分：

$$
\begin{aligned}
&I_0'=\int\frac{id^dk_E}{(2\pi)^d}\frac{(-k_E^2)^a}{(-k_E^2-R^2)^b}=\frac{(-1)^{a-b}i}{(2\pi)^d}\int d\Omega\int\frac{k_E^{d-1+2a}dk_E}{(k_E^2+R^2)^b}\\
&=\frac{(-1)^{a-b}i}{(2\pi)^d}\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\frac{1}{2(R^2)^{\alpha-\frac{\beta+1}{2}}}
\end{aligned}
$$

其中已倒用 QED 中证明过的 $\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}=B(p,q)=2(R^2)^{\alpha-\frac{\beta+1}{2}}\int_0^{\infty}\frac{x^{\beta}dx}{(x^2+R^2)^{\alpha}}$，故

$$
\alpha=b,\beta=d-1+2a\Rightarrow p=\tfrac{\beta+1}{2}=a+\tfrac{d}{2},q=\alpha-p=b-a-\tfrac{d}{2}
$$

$$
I_0'=\frac{(-1)^{a-b}i}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(\frac{d}{2})}\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\frac{1}{(R^2)^{\alpha-\frac{\beta+1}{2}}}=\frac{(-1)^{a-b}i}{(4\pi)^{d/2}}\frac{\Gamma(a+d/2)}{\Gamma(d/2)\Gamma(b)}\frac{\Gamma(b-a-d/2)}{(R^2)^{b-a-d/2}}
$$

这就证明了裘忠平(7.6.18)式。接下来，我们由(7.6.18)证明(8.3.14).

（2） $I_0'' = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2)^n [(q+k)^2]^m} = \frac{(-1)^{m+n} i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(m+n-d/2)}{\Gamma(m)\Gamma(n)[-k^2]^{m+n-d/2}} B(\frac{d}{2}-n, \frac{d}{2}-m)$

由 QED 证的 $\frac{1}{A^\alpha B^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{[Ax+B(1-x)]^{\alpha+\beta}}$ （与 B 函数中 Gamma 位置颠倒）

$$I_0'' = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2)^n [(q+k)^2]^m}$$

$$= \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_0^1 dx x^{m-1}(1-x)^{n-1} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{[(q+k)^2 x + q^2(1-x)]^{m+n}}$$

$$\xrightarrow[R^2=k^2x(x-1)]{q'=q+kx} \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_0^1 dx x^{m-1}(1-x)^{n-1} \int \frac{d^d q'}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q'^2-R^2)^{m+n}}$$

$$\xrightarrow{(7.6.18)} \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_0^1 dx x^{m-1}(1-x)^{n-1} \frac{(-1)^{-m-n} i}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(d/2)} \frac{\Gamma(d/2)\Gamma(m+n-d/2)}{\Gamma(m+n)[k^2 x(x-1)]^{m+n-d/2}}$$

$$= \frac{(-1)^{m+n} i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(m+n-d/2)}{\Gamma(m)\Gamma(n)[-k^2]^{m+n-d/2}} \int_0^1 dx \frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{[x(1-x)]^{m+n-d/2}}$$

$$= \frac{(-1)^{m+n} i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(m+n-d/2)}{\Gamma(m)\Gamma(n)[-k^2]^{m+n-d/2}} B(\frac{d}{2}-n, \frac{d}{2}-m)$$

此即裘忠平(8.3.14a). 最后一步利用了 $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$.

（3）

$$I_\mu'' = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q_\mu}{(q^2)^n [(q+k)^2]^m}$$

$$\xrightarrow[R^2=k^2x(x-1)]{q'=q+kx} \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_0^1 dx x^{m-1}(1-x)^{n-1} \int \frac{d^d q'}{(2\pi)^d} \frac{q'_\mu - k_\mu x}{(q'^2-R^2)^{m+n}}$$

$$= -k_\mu \frac{(-1)^{m+n} i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(m+n-d/2)}{\Gamma(m)\Gamma(n)[-k^2]^{m+n-d/2}} \int_0^1 dx \frac{x^m (1-x)^{n-1}}{[x(1-x)]^{m+n-d/2}}$$

$$= -k_\mu \frac{(-1)^{m+n} i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(m+n-d/2)}{\Gamma(m)\Gamma(n)[-k^2]^{m+n-d/2}} B(\frac{d}{2}-n+1, \frac{d}{2}-m)$$

此即裘忠平(8.3.14b).其中 q′的奇次项积分为零，已略去。

（4）

$$I_{\mu\nu}'' = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q_\mu q_\nu}{(q^2)^n [(q+k)^2]^m}$$

$$\xrightarrow[R^2=k^2x(x-1)]{q'=q+kx} \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_0^1 dx x^{m-1}(1-x)^{n-1} \int \frac{d^d q'}{(2\pi)^d} \frac{(q'_\mu - k_\mu x)(q'_\nu - k_\nu x)}{(q'^2-R^2)^{m+n}}$$

$$\xrightarrow{g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}=d} \frac{g_{\mu\nu}}{d} \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_0^1 dx x^{m-1}(1-x)^{n-1} \int \frac{d^d q'}{(2\pi)^d} \frac{q'^2}{(q'^2-R^2)^{m+n}}$$

$$+k_\mu k_\nu \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_0^1 dx x^{m+1}(1-x)^{n-1} \int \frac{d^d q'}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q'^2-R^2)^{m+n}}$$

$$\xrightarrow{(7.6.18)}\frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)}\frac{(-1)^{-m-n}i}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(m+n)}[\frac{g_{\mu\nu}}{d}\frac{-\Gamma(1+\frac{d}{2})\Gamma(m+n-1-\frac{d}{2})}{[-k^2]^{m+n-1-d/2}}$$

$$\times\int_0^1 dx\frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{[x(1-x)]^{m+n-1-d/2}}+k_\mu k_\nu\frac{\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(m+n-\frac{d}{2})}{[-k^2]^{m+n-d/2}}B(\frac{d}{2}-n+2,\frac{d}{2}-m)]$$

$$=\frac{(-1)^{m+n}i}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(\frac{d}{2})}\frac{1}{\Gamma(m)\Gamma(n)[-k^2]^{m+n-d/2}}[\frac{g_{\mu\nu}}{d}k^2\Gamma(1+\tfrac{d}{2})\Gamma(m+n-1-\tfrac{d}{2})B(\frac{d}{2}-n+1,\frac{d}{2}-m+1)$$

$$+k_\mu k_\nu\Gamma(\tfrac{d}{2})\Gamma(m+n-\tfrac{d}{2})B(\frac{d}{2}-n+2,\frac{d}{2}-m)]$$

取 d=4，并利用 Gamma 函数性质 $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)=z!$，可得

$$I_{\mu\nu}''=\frac{(-1)^{m+n}i}{(4\pi)^{d/2}}\frac{1}{\Gamma(m)\Gamma(n)[-k^2]^{m+n-d/2}}[k_\mu k_\nu\Gamma(m+n-\tfrac{d}{2})B(\frac{d}{2}-n+2,\frac{d}{2}-m)$$

$$+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}k^2\Gamma(m+n-1-\tfrac{d}{2})B(\frac{d}{2}-n+1,\frac{d}{2}-m+1)]$$

$$=\frac{(-1)^{m+n}i}{(4\pi)^{d/2}}\frac{\Gamma(m+n-\frac{d}{2})}{\Gamma(m)\Gamma(n)[-k^2]^{m+n-d/2}}[k_\mu k_\nu B(\frac{d}{2}-n+2,\frac{d}{2}-m)$$

$$+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}k^2\frac{1}{m+n-1-\frac{d}{2}}B(\frac{d}{2}-n+1,\frac{d}{2}-m+1)]$$

此即裘忠平(8.3.14c).

数学问题解决了，下面回到物理问题。利用 $q^2=g^{\rho\sigma}q_\rho q_\sigma, 2kq=g^{\rho\sigma}(q_\rho k_\sigma+q_\sigma k_\rho)$（注意若替换为 $g^{\mu\nu}q^2=dq^\mu q^\nu, g^{\mu\nu}2kq=d(q^\mu q^\nu+q^\nu q^\mu)$，则无法与 Schwartz 对上），得

$$i\Pi_3^{ab\mu\nu}=\frac{1}{2}\mu^\varepsilon g^2 f_{acd}f_{bcd}\{(4d-6)\int\frac{d^dq}{(2\pi)^d}\frac{q^\mu q^\nu}{q^2(k+q)^2}+2g^{\mu\nu}\int\frac{d^dq}{(2\pi)^d}\frac{g^{\rho\sigma}q_\rho q_\sigma}{q^2(k+q)^2}$$

$$+(2d-3)\int\frac{d^dq}{(2\pi)^d}\frac{q^\mu k^\nu+q^\nu k^\mu}{q^2(k+q)^2}+g^{\mu\nu}\int\frac{d^dq}{(2\pi)^d}\frac{g^{\rho\sigma}(q_\rho k_\sigma+q_\sigma k_\rho)}{q^2(k+q)^2}$$

$$+[(d-6)k^\mu k^\nu+5k^2g^{\mu\nu}]\int\frac{d^dq}{(2\pi)^d}\frac{1}{q^2(k+q)^2}\}$$

代入前面刚推出的积分公式，取 m=n=1，有

$$i\Pi_3^{ab\mu\nu}=\{(4d-6)[k^\mu k^\nu\Gamma(2-\tfrac{d}{2})B(\frac{d}{2}+1,\frac{d}{2}-1)+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}k^2\Gamma(1-\tfrac{d}{2})B(\frac{d}{2},\frac{d}{2})]$$

$$+2g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}[k_\rho k_\sigma\Gamma(2-\tfrac{d}{2})B(\frac{d}{2}+1,\frac{d}{2}-1)+\frac{1}{2}g_{\rho\sigma}k^2\Gamma(1-\tfrac{d}{2})B(\frac{d}{2},\frac{d}{2})]$$

$$-2[(2d-3)k^\mu k^\nu+g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}k_\rho k_\sigma]\Gamma(2-\tfrac{d}{2})B(\frac{d}{2},\frac{d}{2}-1)$$

$$+[(d-6)k^\mu k^\nu+5k^2g^{\mu\nu}]\Gamma(2-\tfrac{d}{2})B(\frac{d}{2}-1,\frac{d}{2}-1)\}\frac{\frac{1}{2}i\mu^\varepsilon g^2 f_{acd}f_{bcd}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}(-k^2)^{2-\frac{d}{2}}}$$

再利用 $g^{\rho\sigma}g_{\rho\sigma}=d$，得

$$i\Pi_3^{ab\mu\nu}=\frac{\frac{1}{2}i\mu^{\varepsilon}g^2f_{acd}f_{bcd}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}(-k^2)^{2-\frac{d}{2}}}\{\Gamma(1-\tfrac{d}{2})B(\frac{d}{2},\frac{d}{2})\frac{1}{2}g^{\mu\nu}k^2[(4d-6)+2d]$$

$$+\Gamma(2-\tfrac{d}{2})k^{\mu}k^{\nu}[(4d-6)B(\frac{d}{2}+1,\frac{d}{2}-1)-2(2d-3)B(\frac{d}{2},\frac{d}{2}-1)+(d-6)B(\frac{d}{2}-1,\frac{d}{2}-1)]$$

$$+\Gamma(2-\tfrac{d}{2})g^{\mu\nu}k^2[2B(\frac{d}{2}+1,\frac{d}{2}-1)-2B(\frac{d}{2},\frac{d}{2}-1)+5B(\frac{d}{2}-1,\frac{d}{2}-1)]\}$$

为与 Schwartz 对照，记 $\Delta=x(x-1)k^2$，则由 B 函数性质，有

$$I_1=-\int_0^1dx\frac{\Delta}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}}=\frac{k^2}{(-k^2)^{2-\frac{d}{2}}}\int_0^1dxx^{\frac{d}{2}-1}(1-x)^{\frac{d}{2}-1}=\frac{k^2}{(-k^2)^{2-\frac{d}{2}}}B(\frac{d}{2},\frac{d}{2})$$

$$I_2=-\int_0^1dx\frac{(-2x^2+2x-5)}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}}$$

$$=\frac{1}{(-k^2)^{2-\frac{d}{2}}}\{2\int_0^1dx\frac{x^2}{[x(1-x)]^{2-\frac{d}{2}}}-2\int_0^1dx\frac{x}{[x(1-x)]^{2-\frac{d}{2}}}+5\int_0^1dx\frac{1}{[x(1-x)]^{2-\frac{d}{2}}}\}=$$

$$=\frac{1}{(-k^2)^{2-\frac{d}{2}}}[2B(\frac{d}{2}+1,\frac{d}{2}-1)-2B(\frac{d}{2},\frac{d}{2}-1)+5B(\frac{d}{2}-1,\frac{d}{2}-1)]$$

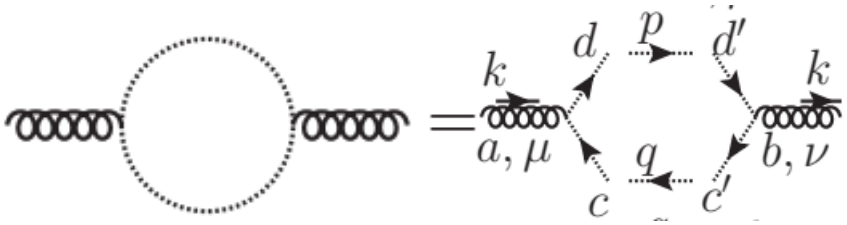
$$I_3=-\int_0^1dx\frac{6(x^2-x+1)-d(1-2x)^2}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}}=\frac{1}{(-k^2)^{2-\frac{d}{2}}}\times$$

$$\{(4d-6)\int_0^1dx\frac{x^2}{[x(1-x)]^{2-\frac{d}{2}}}-(4d-6)\int_0^1dx\frac{x}{[x(1-x)]^{2-\frac{d}{2}}}+(d-6)\int_0^1dx\frac{1}{[x(1-x)]^{2-\frac{d}{2}}}\}$$

$$=\frac{1}{(-k^2)^{2-\frac{d}{2}}}[(4d-6)B(\frac{d}{2}+1,\frac{d}{2}-1)-(4d-6)B(\frac{d}{2},\frac{d}{2}-1)+(d-6)B(\frac{d}{2}-1,\frac{d}{2}-1)]$$

这三个积分 I1,I2,I3 之和与 Schwartz 一致。接下来可将 B 函数用 Gamma 函数表示，然后令 $d=4-\varepsilon$ 并对 ε 展开，求出 $\Pi_3^{ab\mu\nu}$ 最终表达式，Greiner 就这么做的。不过这个结果不满足横向规范条件，还破坏 S 矩阵幺正性，对应非物理态（郑汉青《量子场论》下）。解决方案是加入鬼场，使其与胶子场非物理自由度贡献相消。所以，我们先不算 $\Pi_3^{ab\mu\nu}$，先算鬼场吧。

2.3.2.3 鬼圈



$$i\Pi_{gh}^{\mu\nu ab}=-\int\frac{d^dq}{(2\pi)^d}[-g'f_{dac}(k+q)^\mu\cdot\frac{-i\delta_{dd'}}{(k+q)^2}\cdot[-g'f_{c'b'd'}q^\nu]\cdot\frac{-i\delta_{cc'}}{q^2}$$

$$=-g^2\mu^\varepsilon f_{acd}f_{bcd}\int\frac{d^dq}{(2\pi)^d}\frac{k^\mu q^\nu+q^\mu q^\nu}{(k+q)^2q^2}=-g^2\mu^\varepsilon f_{acd}f_{bcd}[k^\mu I''^\nu+I''^{\mu\nu}]$$

$$=-g^2\mu^\varepsilon f_{acd}f_{bcd}\frac{i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}(-k^2)^{2-\frac{d}{2}}}\{-k^\nu k^\mu\Gamma(2-\tfrac{d}{2})B(\frac{d}{2},\frac{d}{2}-1)$$

$$+k^\mu k^\nu\Gamma(2-\tfrac{d}{2})B(\frac{d}{2}+1,\frac{d}{2}-1)+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}k^2\Gamma(1-\tfrac{d}{2})B(\frac{d}{2},\frac{d}{2})\}=$$

$$\frac{-ig^2\mu^\varepsilon f_{acd}f_{bcd}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}(-k^2)^{2-\frac{d}{2}}}\{\frac{g^{\mu\nu}k^2}{2}\Gamma(1-\tfrac{d}{2})B(\tfrac{d}{2},\tfrac{d}{2})+k^\mu k^\nu\Gamma(2-\tfrac{d}{2})[B(\tfrac{d}{2}+1,\tfrac{d}{2}-1)-B(\tfrac{d}{2},\tfrac{d}{2}-1)]\}$$

其中第一步最前面的负号来自鬼场反对易性（Schwartz《Quantum Field Theory and Standard Model》）。记

$$I_4=-\int_0^1dx\frac{x^1(1-x)^1}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}}=\frac{1}{(-k^2)^{2-\frac{d}{2}}}B(\frac{d}{2},\frac{d}{2})$$

$$=-[\int_0^1dx\frac{x}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}}-\int_0^1dx\frac{x^2}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}}]=\frac{-1}{(-k^2)^{2-\frac{d}{2}}}[B(\frac{d}{2}+1,\frac{d}{2}-1)-B(\frac{d}{2},\frac{d}{2}-1)]$$

与上小节算出的 I1 加在一起就与 Schwartz 一致。

2.3.2.4 胶子场重整化常数的确定

$$\Pi_3^{ab\mu\nu}+\Pi_{gh}^{\mu\nu ab}=\frac{\mu^\varepsilon g^2f_{acd}f_{bcd}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}(-k^2)^{2-\frac{d}{2}}}\{\Gamma(1-\tfrac{d}{2})\frac{1}{2}g^{\mu\nu}k^2B(\frac{d}{2},\frac{d}{2})[\frac{6d-6}{2}-1]$$

$$+\Gamma(2-\tfrac{d}{2})k^\mu k^\nu[(\tfrac{4d-6}{2}-1)B(\tfrac{d}{2}+1,\tfrac{d}{2}-1)+(1-\tfrac{4d-6}{2})B(\tfrac{d}{2},\tfrac{d}{2}-1)+\tfrac{d-6}{2}B(\tfrac{d}{2}-1,\tfrac{d}{2}-1)]$$

$$+\Gamma(2-\tfrac{d}{2})g^{\mu\nu}k^2[+B(\frac{d}{2}+1,\frac{d}{2}-1)-B(\frac{d}{2},\frac{d}{2}-1)+\frac{5}{2}B(\frac{d}{2}-1,\frac{d}{2}-1)]\}$$

利用 $B(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$，$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)=z!$ 及上小节由 I_4 推出的

$$B(\frac{d}{2}+1,\frac{d}{2}-1)-B(\frac{d}{2},\frac{d}{2}-1)=-B(\frac{d}{2},\frac{d}{2})$$

可得

$$B(\frac{d}{2},\frac{d}{2})=\frac{\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(d)}=\frac{(\frac{d}{2}-1)^2[\Gamma(\frac{d}{2}-1)]^2}{(d-1)(d-2)\Gamma(d-2)}=\frac{(\frac{d}{2}-1)^2}{(d-1)(d-2)}B(\frac{d}{2}-1,\frac{d}{2}-1)$$
$$=\frac{d-2}{4(d-1)}B(\frac{d}{2}-1,\frac{d}{2}-1)$$

$$\Pi_3^{ab\mu\nu}+\Pi_{gh}^{\mu\nu ab}=\frac{\mu^\varepsilon g^2 f_{acd}f_{bcd}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}(-k^2)^{2-\frac{d}{2}}}\Gamma(2-\tfrac{d}{2})\{\frac{1}{1-\frac{d}{2}}\frac{3d-4}{2}g^{\mu\nu}k^2B(\frac{d}{2},\frac{d}{2})$$
$$+g^{\mu\nu}k^2[\tfrac{5}{2}B(\tfrac{d}{2}-1,\tfrac{d}{2}-1)-B(\tfrac{d}{2},\tfrac{d}{2})]+k^\mu k^\nu[\tfrac{d-6}{2}B(\tfrac{d}{2}-1,\tfrac{d}{2}-1)-(2d-4)B(\tfrac{d}{2},\tfrac{d}{2})]\}$$
$$=\frac{\mu^\varepsilon g^2 f_{acd}f_{bcd}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}(-k^2)^{2-\frac{d}{2}}}\Gamma(2-\tfrac{d}{2})B(\tfrac{d}{2}-1,\tfrac{d}{2}-1)\{\frac{3d-4}{2-d}g^{\mu\nu}k^2\frac{d-2}{4(d-1)}$$
$$+g^{\mu\nu}k^2[\tfrac{5}{2}-\frac{d-2}{4(d-1)}]+k^\mu k^\nu[\tfrac{d-6}{2}-(2d-4)\frac{d-2}{4(d-1)}]\}$$
$$=\frac{\mu^\varepsilon g^2 f_{acd}f_{bcd}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}(-k^2)^{2-\frac{d}{2}}}\Gamma(2-\tfrac{d}{2})B(\tfrac{d}{2}-1,\tfrac{d}{2}-1)\frac{1}{4(d-1)}\{g^{\mu\nu}k^2[\tfrac{5}{2}4(d-1)-d+2-3d+4]$$
$$+k^\mu k^\nu[\tfrac{d-6}{2}4(d-1)-(2d-4)(d-2)]\}$$
$$=\frac{\mu^\varepsilon g^2 f_{acd}f_{bcd}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}(-k^2)^{2-\frac{d}{2}}}\Gamma(2-\tfrac{d}{2})B(\tfrac{d}{2}-1,\tfrac{d}{2}-1)\frac{1}{4(d-1)}\{g^{\mu\nu}k^2[6d-4]+k^\mu k^\nu[-6d+4]\}$$
$$=\frac{\mu^\varepsilon g^2 f_{acd}f_{bcd}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}(-k^2)^{2-\frac{d}{2}}}\Gamma(2-\tfrac{d}{2})\frac{\Gamma(\frac{d}{2}-1)\Gamma(\frac{d}{2}-1)}{\Gamma(d-2)}\frac{3d-2}{2(d-1)}[g^{\mu\nu}k^2-k^\mu k^\nu]$$

代入 $d=4-\varepsilon$，$\Gamma(\frac{\varepsilon}{2})=\frac{2}{\varepsilon}-\gamma_E$（不发散的项可直接代入 d=4）及 2.1.1.2 节推出的

$f_{acd}f_{bcd}=C_A\delta_{ab}=N\delta_{ab}$，得

$$\Pi_3^{ab\mu\nu}+\Pi_{gh}^{\mu\nu ab}=\frac{(\mu^{\frac{\varepsilon}{2}})^2 g^2 f_{acd}f_{bcd}}{(4\pi)^2(4\pi)^{-\frac{\varepsilon}{2}}(-k^2)^{\frac{\varepsilon}{2}}}\Gamma(\tfrac{\varepsilon}{2})\frac{\Gamma(1)\Gamma(1)}{\Gamma(2)}\frac{12-2}{6}[g^{\mu\nu}k^2-k^\mu k^\nu]$$
$$=\frac{g^2}{16\pi^2}C_A\delta_{ab}(\frac{4\pi\mu^2}{-k^2})^{\varepsilon/2}(\frac{2}{\varepsilon}-\gamma_E)\frac{5}{3}[g^{\mu\nu}k^2-k^\mu k^\nu]$$
$$=\frac{g^2}{16\pi^2}C_A\delta_{ab}[g^{\mu\nu}k^2-k^\mu k^\nu]\frac{5}{3}(\frac{2}{\varepsilon}-\gamma_E)(1+\frac{\varepsilon}{2}\ln\frac{4\pi\mu^2}{-k^2})$$
$$=\frac{g^2}{16\pi^2}C_A\delta_{ab}[g^{\mu\nu}k^2-k^\mu k^\nu]\frac{5}{3}(\frac{2}{\varepsilon}+\ln\frac{\tilde{\mu}^2}{Q^2})$$

$$\Pi_F^{\mu\nu ab}+\Pi_3^{ab\mu\nu}+\Pi_{gh}^{\mu\nu ab}$$
$$=\frac{g^2}{16\pi^2}[g^{\mu\nu}k^2-k^\mu k^\nu]\delta_{ab}[C_A\frac{5}{3}(\frac{2}{\varepsilon}+\ln\frac{\tilde{\mu}^2}{Q^2})-T_F\frac{4}{3}(\frac{2}{\varepsilon}+\frac{5}{3}+\ln\frac{\tilde{\mu}^2}{Q^2})]$$

我们在 QED 中讲过，抵消项 Feynman 规则是从抵消项 Lagrangian 获得，为将场量微商掉再乘以 i：

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)^2=-\frac{1}{2}A^\mu[g_{\mu\nu}k^2-k_\mu k_\nu]A^\nu\Rightarrow -i\delta Z_3[g_{\mu\nu}k^2-k_\mu k_\nu]$$

可重整方程为

$$i\Pi_{\mu\nu}=-iD^{-1}_{\mu\nu}+i\Pi^{(2)}_{\mu\nu}-i\delta Z_3[g_{\mu\nu}k^2-k_\mu k_\nu]=\ finite$$

假定按最小减除方案（只减除极点项），得出δZ_3.

对于 QCD，抵消项 Feynman 规则只要加上δ_{ab}（Peskin《An introduction to Quantum Field Theory》），重整化方程为

$$i\Pi^{ab\mu\nu}_{pole}-i\delta Z_3[g^{\mu\nu}k^2-k^\mu k^\nu]\delta^{ab}=0$$

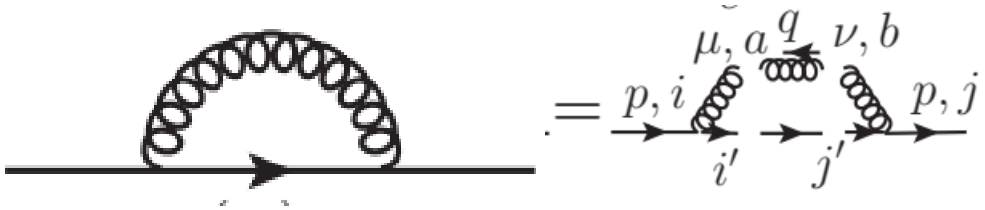
其中 pole 表示极点项（只含有$\frac{1}{\varepsilon}$的项），故

$$\delta Z_3=\frac{g^2}{16\pi^2}[\frac{5}{3}C_A-\frac{4}{3}T_F]\frac{2}{\varepsilon}$$

$$Z_3=1+\delta Z_3=1+\frac{g^2}{16\pi^2\varepsilon}[\frac{10}{3}C_A-\frac{8}{3}T_F]$$

2.3.3 夸克自能

即图 5 中(d)图。



$$i\Sigma^{ij}(p)=\int\frac{d^dq}{(2\pi)^4}ig'\gamma^\mu(T_a)_{ii'}\cdot\frac{i\delta_{i'j'}}{\not p+\not q-m}\cdot ig'\gamma^\nu(T_b)_{jj'}\cdot\frac{-i\delta_{ab}g_{\mu\nu}}{q^2}$$

根据本书 2.1.1.2 节讲的 SU(n)群完备关系（或 Schwartz《Quantum Field Theory and Standard Model》），有

$$(T_a)_{ii'}(T_b)_{jj'}\delta_{i'j'}\delta_{ab}=\sum_a(T_aT^a)_{ij}=C_F\delta_{ij}=\frac{n^2-1}{2n}\delta_{ij}\xrightarrow{n=3}\frac{4}{3}\delta_{ij}$$

于是$i\Sigma^{ij}(p)=-C_F\delta_{ij}g^2\mu^\varepsilon\int\frac{d^dq}{(2\pi)^4}\frac{\gamma^\mu(\not p+\not q+m)\gamma_\mu}{[(p+q)^2-m^2]q^2}$

这个积分在 QED 中已算过。做变换$e^2\to C_F\delta_{ij}g^2$，$k\to -q$，则$-i\Sigma^{(2)}\to i\Sigma^{ij}(p)$. 注意

$d^4q \to d^4k$ 而非 $d^4q \to -d^4k$；取 $m=0$ 将只能算出 δZ_2 而无法求 δZ_m.

QED 中：

$$\Sigma^{(2)}(p)=\frac{\mu^{4-d}e^2}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\Gamma(2-\frac{d}{2})\int_0^1 dx\frac{-(d-2)\not{p}x+md}{[(1-x)(m^2-p^2x)]^{2-\frac{d}{2}}}$$

在求 $d\to 4$ 的极限时，可将分子 $-(d-2)\not{p}x+md$ 直接代入 d=4，这时对应 Schwartz 结果（的相反数）：

$$\Sigma^{(2)}(p)\to(-1)\frac{2\mu^{\varepsilon}e^2}{(4\pi)^{2-\frac{\varepsilon}{2}}}\Gamma(\frac{\varepsilon}{2})\int_0^1 dx\frac{2m-x\not{p}}{[(1-x)(m^2-p^2x)]^{\frac{\varepsilon}{2}}}$$

$$=-\frac{2e^2}{(4\pi)^2}(\frac{2}{\varepsilon}-\gamma_E)\int_0^1 dx(2m-x\not{p})[\frac{4\pi\mu^2}{(1-x)(m^2-p^2x)}]^{\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$=-\frac{2\alpha}{4\pi}\int_0^1 dx(2m-x\not{p})(\frac{2}{\varepsilon}-\gamma_E)[1+\frac{\varepsilon}{2}\ln\frac{4\pi\mu^2}{(1-x)(m^2-p^2x)}]$$

$$=-\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dx(2m-x\not{p})[\frac{2}{\varepsilon}-\gamma_E+\ln\frac{4\pi\mu^2}{(1-x)(m^2-p^2x)}]$$

$$=-\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dx(2m-x\not{p})[\frac{2}{\varepsilon}+\ln\frac{\tilde{\mu}^2}{(1-x)(m^2-p^2x)}]$$

非发散项 $-(d-2)\not{p}x+md$，$\mu^{4-d},(4\pi)^{\frac{d}{2}},[(1-x)(m^2-p^2x)]^{2-\frac{d}{2}}$ 是否直接代入 d=4 对应不同的减除方案。我们关心的是极点项，亦即 $\Gamma(2-\frac{d}{2})$，所以只计算

$$\Sigma^{ij}_{pole}(p)=-\Sigma^{(2)}_{pole}C_F\delta_{ij}g^2/e^2$$

$$=-C_F\delta_{ij}\frac{g^2}{e^2}\left[\frac{\mu^{4-d}e^2}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_0^1 dx\frac{-(d-2)\not{p}x+md}{[(1-x)(m^2-p^2x)]^{2-\frac{d}{2}}}\right]_{d=4}\Gamma(2-\frac{d}{2})_{pole}$$

$$=-C_F\delta_{ij}\frac{g^2}{e^2}\left[\frac{e^2}{(4\pi)^2}\int_0^1 dx(4m-2\not{p}x)\right][\frac{2}{\varepsilon}+o(\varepsilon^0)]$$

$$=-C_F\delta_{ij}\frac{g^2}{16\pi^2}\frac{2}{\varepsilon}(4m-\not{p})$$

仿照 QED，从 Lagrangian 抵消项 $\delta\mathcal{L}\sim\bar{\psi}(\delta Z_2\not{p}-\delta Z_m m)\psi$ 可知重整化条件为

$$0=i\Sigma^{ij}_{pole}+i\delta_{ij}(\delta Z_2\not{p}-m\delta Z_m)=-iC_F\delta_{ij}\frac{g^2}{16\pi^2}\frac{2}{\varepsilon}(4m-\not{p})+i\delta_{ij}(\delta Z_2\not{p}-m\delta Z_m)$$

即 $\delta Z_2\not{p}-m\delta Z_m=C_F\frac{g^2}{16\pi^2}\frac{2}{\varepsilon}(4m-\not{p})$. 解得

$$\delta Z_2 = -\frac{g^2 C_F}{16\pi^2}\frac{2}{\varepsilon}, \quad \delta Z_m = -\frac{g^2 C_F}{16\pi^2}\frac{8}{\varepsilon}$$

$$Z_2 = 1+\delta Z_2 = 1-\frac{g^2 C_F}{8\pi^2\varepsilon}, \quad Z_m = 1+\delta Z_m = 1-\frac{g^2 C_F}{2\pi^2\varepsilon}$$

这里 $\mathcal{L}+\delta\mathcal{L} \sim \bar{\psi}(Z_2 \not{p} - Z_m m)\psi$. 若按 Schwartz 定义 $\mathcal{L}+\delta\mathcal{L}' \sim Z_2'\bar{\psi}(\not{p} - Z_m' m)\psi$ ，则

$$1-\frac{g^2 C_F}{2\pi^2\varepsilon} = Z_m = Z_2' Z_m' = Z_2(1+\delta_m) = (1-\frac{g^2 C_F}{8\pi^2\varepsilon})(1+\delta_m) = 1-\frac{g^2 C_F}{8\pi^2\varepsilon}+\delta_m+\cdots$$

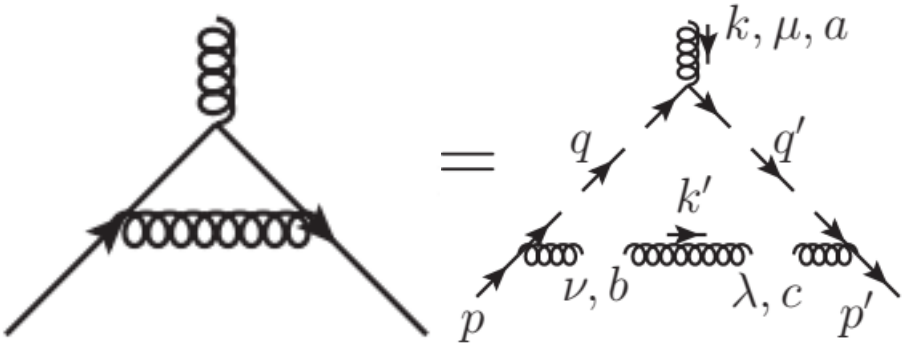
其中省略号表示两个 ε 相乘产生的高阶项，舍弃后可得

$$\delta_m = \frac{g^2 C_F}{8\pi^2\varepsilon} - \frac{g^2 C_F}{2\pi^2\varepsilon} = -\frac{3g^2 C_F}{8\pi^2\varepsilon}$$

2.3.4 顶角修正

即图 5 中(e)(f)图。

2.3.4.1 “夸克-胶子顶点”+“夸克-胶子顶点”



$$i\Lambda_1^{a\mu}(p,p') = \int \frac{d^d k'}{(2\pi)^d} ig'\gamma^\nu T_b \frac{i}{\not{q}-m} ig'\gamma^\mu T_a \frac{i}{\not{q}'-m} ig'\gamma^\lambda T_c \frac{-ig_{\nu\lambda}\delta^{bc}}{k'^2}$$

$$= T_b T_a T_c \delta^{bc} ig' \Lambda_{QED}^{\mu}(e \to -g)$$

其中（Schwartz《Quantum Field Theory and Standard Model》）

$$T_b T_a T_c \delta^{bc} = T_b T_a T^b = T_a T_b T^b - [T_a, T_b]T^b = T_a C_F - i f_{abc} T^c T^b$$

$$= T_a C_F - \frac{1}{2} i(f_{abc} T^c T^b + f_{acb} T^b T^c) = T_a C_F - \frac{i}{2} f_{acb}[T^b, T^c] = T_a C_F + \frac{i}{2} f_{abc} i f_{bcd} T^d$$

$$= T_a C_F - \frac{1}{2} f_{abc} f_{dbc} T^d = T_a C_F - \frac{1}{2} C_A \delta_{ad} T^d = (C_F - \frac{1}{2} C_A) T_a$$

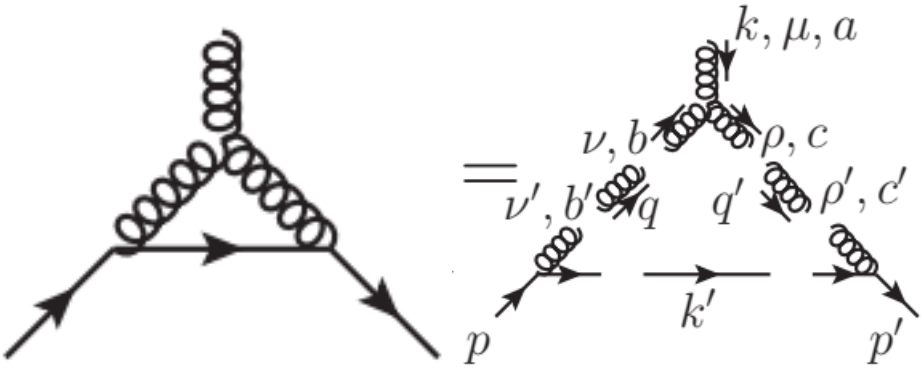
$$i\Lambda^{\mu}_{QED}=e^2\mu^{\varepsilon}\int\frac{d^dk'}{(2\pi)^d}\frac{\gamma^{\nu}(\not q-m)\gamma^{\mu}(\not q'-m)\gamma_{\nu}}{(q^2-m^2)(q'^2-m^2)k'^2}=i\Lambda^{\mu}_{p}+i\Lambda^{\mu}_{k}$$

根据本书 1.2.4.2 节的讨论，Λ^{μ}_{p} 不发散，Λ^{μ}_{k} 为对数发散，极点项来自 Λ^{μ}_{k} 第一项，为

$$\Lambda^{QED}_{pole}=\frac{\alpha\gamma^{\mu}}{4\pi}\frac{2}{\varepsilon}=\frac{e^2}{16\pi^2}\frac{2}{\varepsilon}\gamma^{\mu}$$

$$i\Lambda^{a\mu}_{1}(p,p')=T_bT_aT_c\delta^{bc}ig'\Lambda^{\mu}_{QED}(e\to -g)\Rightarrow i\Lambda^{a\mu}_{1pole}=ig(C_F-\frac{1}{2}C_A)T_a\frac{g^2}{16\pi^2}\frac{2}{\varepsilon}\gamma^{\mu}$$

2.3.4.2 “三胶子顶点”+“夸克-胶子顶点”



$$i\Lambda^{a\mu}_{2}=\int\frac{d^dk'}{(2\pi)^d}g'f^{abc}[g^{\mu\nu}(k-q)^{\rho}+g^{\nu\rho}(q+q')^{\mu}+g^{\rho\mu}(-q'-k)^{\nu}]$$

$$\cdot\frac{-ig_{\rho\rho'}\delta^{c'}_{c}}{q'^2}\cdot ig'\gamma^{\rho'}T_{c'}\cdot\frac{i}{\not k'-m}\cdot ig'\gamma^{\nu'}T_{b'}\cdot\frac{-ig_{\nu\nu'}\delta^{b'}_{b}}{q^2}$$

$$=ig'^3f^{abc}T_cT_b\int\frac{d^dk'}{(2\pi)^d}\frac{\gamma_{\rho}(\not k'+m)\gamma_{\nu}}{q'^2(k'^2-m^2)q^2}[g^{\mu\nu}(k-q)^{\rho}+g^{\nu\rho}(q+q')^{\mu}+g^{\rho\mu}(-q'-k)^{\nu}]$$

代入动量守恒 $k=p'-p,q=p-k',q'=p'-k'$，化为 p,p',k' 的函数，得

$$i\Lambda^{a\mu}_{2}=ig'^3f^{abc}T_cT_b\int\frac{d^dk'}{(2\pi)^d}\frac{\gamma_{\rho}(\not k'+m)\gamma_{\nu}}{(p'-k')^2(k'^2-m^2)(p-k')^2}$$

$$\times[g^{\mu\nu}(p'-2p+k')^{\rho}+g^{\nu\rho}(p+p'-2k')^{\mu}+g^{\rho\mu}(p-2p'+k')^{\nu}]$$

k' 的线性项积分为零，不含 k' 的项积分值有限（d=4 时分子比分母动量幂次低），在最小减除方案可略去，仅需考虑 k' 的二次项（王正行《简明量子场论》），分子简化为

$$\gamma_{\rho}\not k'\gamma_{\nu}[g^{\mu\nu}k'^{\rho}-2g^{\nu\rho}k'^{\mu}+g^{\rho\mu}k'^{\nu}]=\not k'\not k'\gamma^{\mu}-2\gamma^{\nu}\not k'\gamma_{\nu}k'^{\mu}+\gamma^{\mu}\not k'\not k'=2k'^2\gamma^{\mu}+2(d-2)\not k'k'^{\mu}$$

利用 Feynman 参数化将分母折叠，得

$$I^{\mu}=\int\frac{d^{d}k'}{(2\pi)^{d}}\frac{2k'^{2}\gamma^{\mu}+2(d-2)\not{k}'k'^{\mu}}{(k'^{2}-m^{2})(p'-k')^{2}(p-k')^{2}}$$

$$=\int\frac{d^{d}k'}{(2\pi)^{d}}2\int_{0}^{1}dx\int_{0}^{1-x}dy\frac{2k'^{2}\gamma^{\mu}+2(d-2)\not{k}'k'^{\mu}}{[(k'^{2}-m^{2})(1-x-y)+(p'-k')^{2}x+(p-k')^{2}y]^{3}}$$

$$=2\int_{0}^{1}dx\int_{0}^{1-x}dy\int\frac{d^{d}k'}{(2\pi)^{d}}\frac{2g^{\rho\sigma}k'_{\rho}k'_{\sigma}\gamma^{\mu}+2(d-2)\gamma_{\nu}k'^{\mu}k'^{\nu}}{[k'^{2}-2p'k'x-2pk'y+p'^{2}x+p^{2}y-m^{2}(1-x-y)]^{3}}$$

对积分变量做平移$k'=k+p'x+py$，使分母化成完全平方，并令

$$M^{2}=-m^{2}(1-x-y)+p'^{2}x+p^{2}y-(p'x+py)^{2}$$

分子中只保留 k 的二次项，利用本书 1.2.4.2 节推出的公式

$$I_{\mu\nu}(\alpha,n,m^{2})=\int\frac{d^{n}p}{(2\pi)^{n}}\frac{p_{\mu}p_{\nu}}{(p^{2}-m^{2})^{\alpha}}=\frac{(-1)^{\alpha-1}i}{(4\pi)^{n/2}}\frac{g_{\mu\nu}}{2\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha-1-\frac{n}{2})}{(m^{2})^{\alpha-1-\frac{n}{2}}}$$

可得

$$I^{\mu}\to2\int_{0}^{1}dx\int_{0}^{1-x}dy\int\frac{d^{d}k}{(2\pi)^{d}}\frac{2g^{\rho\sigma}k_{\rho}k_{\sigma}\gamma^{\mu}+2(d-2)\gamma_{\nu}k^{\mu}k^{\nu}}{[k^{2}-m^{2}(1-x-y)+p'^{2}x+p^{2}y-(p'x+py)^{2}]^{3}}$$

$$=2\int_{0}^{1}dx\int_{0}^{1-x}dy\frac{(-1)^{3-1}i}{(4\pi)^{d/2}}\frac{\Gamma(3-1-\frac{d}{2})}{2\Gamma(3)(M^{2})^{3-1-\frac{d}{2}}}[2g^{\rho\sigma}g_{\rho\sigma}\gamma^{\mu}+2(d-2)\gamma_{\nu}g^{\mu\nu}]$$

$$\xrightarrow{d=4-\varepsilon}2\int_{0}^{1}dx\int_{0}^{1-x}dy\frac{i}{(4\pi)^{2}}\frac{\Gamma(\frac{\varepsilon}{2})}{2\times2(M^{2})^{3-1-\frac{4}{2}}}\gamma^{\mu}[4d-4]_{d=4}$$

$$=\frac{6i}{(4\pi)^{2}}\int_{0}^{1}(1-x)dx(\frac{2}{\varepsilon}-\gamma_{E})\gamma^{\mu}\approx\frac{6i}{16\pi^{2}}\frac{1}{\varepsilon}\gamma^{\mu}$$

于是

$$\Lambda_{2}^{a\mu}=f^{abc}T_{c}T_{b}g^{3}I^{\mu}=-\frac{1}{2}f^{abc}[T_{b},T_{c}]g^{3}I^{\mu}=-\frac{1}{2}f^{abc}if_{bcd}T^{d}g^{3}I^{\mu}=-\frac{i}{2}C_{A}\delta_{d}^{a}T^{d}g^{3}I^{\mu}$$

$$=-\frac{i}{2}C_{A}T^{a}g^{3}I^{\mu}$$

$$\Lambda_{2\,pole}^{a\mu}=-\frac{i}{2}C_{A}T^{a}g^{3}\frac{6i}{16\pi^{2}}\frac{1}{\varepsilon}\gamma^{\mu}=\frac{3g^{3}C_{A}}{16\pi^{2}\varepsilon}T^{a}\gamma^{\mu}$$

从$\mathcal{L}=g\bar{\psi}\gamma^{\mu}T_{a}A_{\mu}^{a}\psi$可得抵消项 Feynman 规则为$ig\gamma^{\mu}T_{a}\delta Z_{1}$；由重整化条件

$$0=i\Lambda_{1\,pole}^{a\mu}+i\Lambda_{2\,pole}^{a\mu}+ig\gamma^{\mu}T_{a}\delta Z_{1}$$

$$=ig(C_{F}-\frac{1}{2}C_{A})T_{a}\frac{2g^{2}}{16\pi^{2}\varepsilon}\gamma^{\mu}+i\frac{3g^{3}C_{A}}{16\pi^{2}\varepsilon}T^{a}\gamma^{\mu}+ig\gamma^{\mu}T_{a}\delta Z_{1}$$

解得

$$\delta Z_{1}=-\frac{g^{2}}{16\pi^{2}\varepsilon}[3C_{A}+2(C_{F}-\frac{1}{2}C_{A})]=-\frac{g^{2}}{8\pi^{2}\varepsilon}[C_{F}+C_{A}]$$

$$Z_1 = 1 + \delta Z_1 = 1 - \frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon}[C_F + C_A]$$

对 SU(3)群：$C_F = \frac{4}{3}, C_A = 3 \Rightarrow Z_1 = 1 - \frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon}\frac{13}{3}$.

2.3.5 重整化群

最小减除下 $Z_1 = 1 - \frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon}[C_F + C_A]$， $Z_2 = 1 - \frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon}C_F$， $Z_3 = 1 + \frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon}[\frac{5}{3}C_A - \frac{4}{3}T_F]$，看起来重整化常数似乎与重整化标度 μ 无关。但是，若不采用最小减除方案，则重整化常数 Z 中将含有 $\ln(4\pi), \ln\mu^2, \gamma_E$ 等。一般 Z 是 μ 的函数。QED 中， $m_B = Z_m Z_2^{-1} m$，

$e_B = Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-\frac{1}{2}} e$， $\lambda_B = Z_3^{-1}\lambda$，所以 m, e, λ 也是 μ 的函数。

重整化方案或减除点的选择有一定的任意性，然而物理结果应该与重整化方案的选择无关（李灵峰《量子场论》）。那么，不同的重整化方案之间什么关系？这就是本节要回答的问题。

设想重整化点的变换为 $\mu \to \mu' = e^t \mu \approx t\mu$ 或 $\delta\mu = \mu' - \mu = t\mu$，其中 t 为实数。此变换满足封闭性 $e^{t_1}e^{t_2} = e^{t_1+t_2} = e^{t_3}$，结合律 $e^{t_1}(e^{t_2}e^{t_3}) = (e^{t_1}e^{t_2})e^{t_3}$，且有恒元 e^0，逆元 e^{-t}，故 e^t 构成群，称为重整化点变换群（胡瑶光《规范场论》）。

2.3.5.1 正规顶角的重整化

由于 Lagrangian 中每种场的自由部分都是二次型（王正行《简明量子场论》），所以为使 $\phi^2 \to Z\phi^2$，应做变换 $\phi \to Z^{\frac{1}{2}}\phi$. QED 中，我们定义裸量与重整化量关系为 $\psi_B = Z_2^{\frac{1}{2}}\psi$，

$A_B^\mu = Z_3^{\frac{1}{2}} A^\mu$； QCD 中，除了 ψ_B, A_B^μ， 还可定义裸鬼 $C_B^a = Z_{3c}^{\frac{1}{2}} C^a$.

Green 函数是场量之积的真空期待值（胡瑶光《规范场论》），它与重整化的 Green 函数之间关系为

$$G_B^{(n)}(p_i, g_B) = Z^{\frac{n}{2}} G_R^{(n)}(p_i, \mu, g)$$

而正规顶角之间关系为

$$\Gamma_B^{(n)}(p_i, g_B) = Z^{-\frac{n}{2}} \Gamma_R^{(n)}(p_i, \mu, g)$$

注意 Green 函数按 $Z^{\frac{n}{2}}$ 变换，而正规顶角按 $Z^{-\frac{n}{2}}$ 变换。这让我们想起推导 QCD 的 Feynman 规则时遇到的问题：若场量按 Fourier 正变换，则顶角函数按 Fourier 逆变换；反之，若场量按 Fourier 逆变换，则顶角函数按 Fourier 正变换。

2.3.5.2 Callan-Symanzik 方程

虽然重整化常数 Z 为重整化点 μ 的函数，质量 m、耦合常数 e 和 g 乃至 $\Gamma_R^{(n)}$ 都是 μ 的函数，

但 $Z^{-\frac{n}{2}}$ 与 $\Gamma_R^{(n)}$ 相乘所得的 $\Gamma_B^{(n)}$ 却与 μ 无关，即 $\Gamma_B^{(n)}$ 在重整化变换 $\mu \to \mu' = e^t \mu$ 下是不变的。

于是，方程 $\Gamma_B^{(n)}(p_i, g_B) = Z^{-\frac{n}{2}} \Gamma_R^{(n)}(p_i, \mu, g)$ 对 μ 的导数给出

$$0 = \frac{d\Gamma_B^{(n)}}{d\mu} = -\frac{n}{2} Z^{-\frac{n}{2}-1} \frac{\partial Z}{\partial \mu} \Gamma_R^{(n)} + Z^{-\frac{n}{2}} \frac{d\Gamma_R^{(n)}}{d\mu} = -\frac{n}{2} Z^{-\frac{n}{2}} \frac{\partial \ln Z}{\partial \mu} \Gamma_R^{(n)} + Z^{-\frac{n}{2}} (\frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{\partial g}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial g}) \Gamma_R^{(n)}$$

所以

$$(\frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{\partial g}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial g} - \frac{n}{2} \frac{\partial \ln Z}{\partial \mu}) \Gamma_R^{(n)} = 0$$

定义

$$\beta = \mu \frac{\partial g}{\partial \mu}, \quad \gamma = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial \ln Z}{\partial \mu} = \mu \frac{\partial \ln Z^{1/2}}{\partial \mu}$$

并在方程两边乘以 μ，得

$$(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial g} - n\gamma) \Gamma_R^{(n)} = 0$$

此即 Callan-Symanzik 重整化群方程。

以上只讨论了最简单的情况。实际上，还可以加入 Fermion 场，则 $Z^{-\frac{n}{2}} \to Z_2^{-\frac{n_F}{2}} Z_3^{-\frac{n_B}{2}}$，耦合常数可取 g=e，还可加入质量 m，规范固定项 λ 等等，重整化群方程就变成

$$(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_e \frac{\partial}{\partial e} + \beta_m \frac{\partial}{\partial m} + \beta_\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} - n_B \gamma_B - n_F \gamma_F) \Gamma_R^{(n)} = 0$$

其中

$$\beta_e = \mu \frac{\partial e}{\partial \mu}, \quad \beta_m = \mu \frac{\partial m}{\partial \mu}, \quad \beta_\lambda = \mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu}, \quad \gamma_B = \mu \frac{\partial \ln Z_3^{1/2}}{\partial \mu}, \quad \gamma_F = \mu \frac{\partial \ln Z_2^{1/2}}{\partial \mu}$$

注意不同书符号约定差异。王正行、裘忠平将 $\mu \frac{\partial m}{\partial \mu}$ 定义成 $m\gamma_m$，李灵峰将耦合常数定义为 λ.

2.3.5.3 beta 函数

注意与 B(p,q)函数区分，那是积分函数。这里 β 函数带有偏导数，属于微分函数。

（1）QED 的 β 函数

已知 $e_B = Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-\frac{1}{2}} e = Z_e e$. 在 d 维 $g \to \mu^{\frac{\varepsilon}{2}} g = g_B$，有 $e = \mu^{-\frac{\varepsilon}{2}} Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{\frac{1}{2}} e_B = \mu^{-\frac{\varepsilon}{2}} Z_e^{-1} e_B$

$$\beta_e = \mu \frac{\partial e}{\partial \mu} = \mu[-\frac{\varepsilon}{2}\mu^{-\frac{\varepsilon}{2}-1} Z_e^{-1} - \mu^{-\frac{\varepsilon}{2}} Z_e^{-2} \frac{\partial Z_e}{\partial \mu}]e_B = -\frac{\varepsilon}{2} e - \mu e \frac{\partial \ln Z_e}{\partial \mu}$$

准确到单圈有 $Z_1 = Z_2 = 1 - \frac{\alpha}{2\pi\varepsilon}$，$Z_3 = 1 - \frac{2\alpha}{3\pi\varepsilon}$. 利用近似 $(1+x)^a \approx 1 + ax$，$\ln(1+x) \approx x$（Greiner 及胡瑶光），可得

$$Z_e = Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-\frac{1}{2}} = Z_3^{-\frac{1}{2}} = (1 - \frac{2\alpha}{3\pi\varepsilon})^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{2\alpha}{3\pi\varepsilon}$$

$$\ln Z_e \approx \ln(1 + \frac{1}{2}\frac{2\alpha}{3\pi\varepsilon}) \approx \frac{1}{2}\frac{2\alpha}{3\pi\varepsilon} = \frac{e^2}{12\pi^2\varepsilon}$$

我们先将耦合常数用 μ 表示，求导后再换回来（裘忠平）：

$$\beta_e = -\frac{\varepsilon}{2} e - \mu e \frac{\partial}{\partial \mu}(\frac{e^2}{12\pi^2\varepsilon}) = -\frac{\varepsilon}{2} e - \mu e \frac{1}{12\pi^2\varepsilon} \frac{\partial (e_B^2 Z_e^{-2} \mu^{-\varepsilon})}{\partial \mu}$$

$$= -\frac{\varepsilon}{2} e - \mu e \frac{-\varepsilon}{12\pi^2\varepsilon} e_B^2 Z_e^{-2} \mu^{-\varepsilon-1} = -\frac{\varepsilon}{2} e + e \frac{e_B^2 Z_e^{-2} \mu^{-\varepsilon}}{12\pi^2} = -\frac{\varepsilon}{2} e + \frac{e^3}{12\pi^2}$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \to 0} \frac{e^3}{12\pi^2}$$

$\beta_e > 0$，即耦合常数 e 随 μ 增大而增大，看起来 QED 应该无渐近自由（渐近自由是随动量增大而减小，μ 是重整化标度，此处渐近自由尚不明确，更明确的分析见下节）。

思考：ε 为无穷小，其倒数为无穷大，$(1+x)^a \approx 1 + ax$ 成立条件是 x 为无穷小（而非无穷大），为什么 $(1 - \frac{2\alpha}{3\pi\varepsilon})^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{2\alpha}{3\pi\varepsilon}$ 能成立？另外 $\frac{1}{\varepsilon}$ 为无穷大，两个 $\frac{1}{\varepsilon}$ 相乘为高阶无穷大，高阶无穷大竟被舍弃了！这种小把戏看起来有些耍流氓，不过，既然 $1+2+3+4+\cdots = -\frac{1}{12}$ 都能行，这样做似乎也无可厚非。

（2）QCD 的 β 函数

将 QED 中的 e 换成 g，可得

$$g = \mu^{-\frac{\varepsilon}{2}} Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{\frac{1}{2}} g_B = \mu^{-\frac{\varepsilon}{2}} Z_g^{-1} g_B$$

$$\beta_g = \mu \frac{\partial g}{\partial \mu} = -\frac{\varepsilon}{2} g - \mu g \frac{\partial \ln Z_g}{\partial \mu}$$

只不过此时

$$Z_1=1-\frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon}(C_F+C_A)，\ Z_2=1-\frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon}C_F，\ Z_3=1+\frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon}(\frac{5}{3}C_A-\frac{4}{3}n_fT_F)$$

$$Z_g=Z_1Z_2^{-1}Z_3^{-\frac{1}{2}}=Z_3^{-\frac{1}{2}}=[1-\frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon}(C_F+C_A)][1-\frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon}C_F]^{-1}[1+\frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon}(\frac{5}{3}C_A-\frac{4}{3}n_fT_F)]^{-\frac{1}{2}}$$

$$=[1-\frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon}(C_F+C_A)][1+\frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon}C_F][1-\frac{1}{2}\frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon}(\frac{5}{3}C_A-\frac{4}{3}n_fT_F)]$$

$$=1-\frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon}(C_F+C_A)+\frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon}C_F-\frac{1}{2}\frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon}(\frac{5}{3}C_A-\frac{4}{3}n_fT_F)$$

$$=1-\frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon}[C_A+\frac{5}{6}C_A-\frac{2}{3}n_fT_F)]$$

$$\ln Z_g\approx\ln[1-\frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon}(\frac{11}{6}C_A-\frac{2}{3}n_fT_F)]\approx-\frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon}(\frac{11}{6}C_A-\frac{2}{3}n_fT_F)$$

我们先将耦合常数用 μ 表示，求导后再换回来（裘忠平）：

$$\beta_g=-\frac{\varepsilon}{2}g-\mu g\frac{\partial\ln Z_g}{\partial\mu}=-\frac{\varepsilon}{2}g-\mu g\frac{\partial}{\partial\mu}[-\frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon}(\frac{11}{6}C_A-\frac{2}{3}n_fT_F)]$$

$$=-\frac{\varepsilon}{2}g-\mu g[-\frac{g_B^2}{8\pi^2\varepsilon}(\frac{11}{6}C_A-\frac{2}{3}n_fT_F)]\frac{\partial(Z_g^{-2}\mu^{-\varepsilon})}{\partial\mu}$$

$$=-\frac{\varepsilon}{2}g-\mu g[-\frac{g_B^2}{8\pi^2\varepsilon}(\frac{11}{6}C_A-\frac{2}{3}n_fT_F)]Z_g^{-2}(-\varepsilon)\mu^{-\varepsilon-1}$$

$$=-\frac{\varepsilon}{2}g-g[\frac{g_B^2}{8\pi^2}(\frac{11}{6}C_A-\frac{2}{3}n_fT_F)]Z_g^{-2}\mu^{-\varepsilon}=-\frac{\varepsilon}{2}g-g[\frac{g^2}{8\pi^2}(\frac{11}{6}C_A-\frac{2}{3}n_fT_F)]$$

$$\xrightarrow{\varepsilon\to0}-\frac{g^3}{8\pi^2}(\frac{11}{6}C_A-\frac{2}{3}n_fT_F)\xrightarrow[T_F=1/2]{C_A=3}-\frac{g^3}{16\pi^2}(11-\frac{2}{3}n_f)=-\frac{g^3}{8\pi^2}\frac{33-2n_f}{6}$$

可见，只要 $n_f\le16$，则 $\beta_g=\mu\frac{\partial g}{\partial\mu}<0$，耦合常数 g 随 μ 增大而减小，可以预期，这样的理论将具有渐近自由。实际上，n_f 依赖于动量转移。$Q>m_\tau$，则 $n_f=6$（王正行《简明量子场论》）。

（3）重整化群方程的解

定义 $\beta_0=11-\frac{2}{3}n_f$，$\alpha_s=\frac{g^2}{4\pi}$，则 $\beta_g=\mu\frac{\partial g}{\partial\mu}=-\frac{g^3}{16\pi^2}(11-\frac{2}{3}n_f)$ 化为

$$\mu\frac{\partial g}{\partial\mu}=-\frac{\beta_0\alpha_s^2}{g}\Rightarrow\frac{1}{2}\mu\frac{\partial g^2}{\partial\mu}=-\beta_0\alpha_s^2\Rightarrow\mu\frac{\partial\alpha_s}{\partial\mu}=-\beta_0\frac{\alpha_s^2}{2\pi}$$

分离变量，得

$$-\frac{d\alpha_s}{\alpha_s^2}=\frac{\beta_0}{2\pi}\frac{d\mu}{\mu}\Rightarrow\frac{1}{\alpha_s}+C_1=\frac{\beta_0}{2\pi}\ln\mu+C_2\Rightarrow\frac{1}{\alpha_s}-\frac{1}{\alpha_s(\Lambda)}=\frac{\beta_0}{4\pi}\ln\mu^2-\frac{\beta_0}{4\pi}\ln\Lambda^2$$

其中 Λ 为具有动量量纲的参数。解出 α_s，得

$$\alpha_s=\frac{\alpha_s(\Lambda)}{1+\alpha_s(\Lambda)\frac{\beta_0}{4\pi}\ln\frac{\mu^2}{\Lambda^2}}\approx\frac{4\pi}{\beta_0\ln\frac{\mu^2}{\Lambda^2}}$$

可见，α_s 随 μ 增大而减小。

2.3.6 渐近自由

上节我们看到了渐近自由影子（g 随重整化标度 μ 增大而减小），似乎冥冥之中注定要渐近自由。现在，我们把这幅画描清晰些：如 g 随动量 p 增大而减小，那就是真正的渐近自由了！

2.3.6.1 正规顶角的量纲

QED 中，我们曾讨论过：在 d 维，作用量量纲为 $[P]^0=1$，Lagrangian 密度量纲 $[L]^{-d}=[P]^d$；矢量场量纲 $[P]^{\frac{d}{2}-1}$，旋量场量纲 $[P]^{\frac{d-1}{2}}$；设 $q=\mu^{2-\frac{d}{2}}e$ 后，e 为纯数，μ 具有动量量纲。

回到现在，正规顶角的生成泛函的树图近似为作用量，故正规顶角生成泛函量纲为 $[P]^0=1$（有的书说成量纲为 0，其实并非量纲等于 0，而是等于动量的 0 次幂）。

由于 $\frac{\delta A(x)}{\delta A(x')}=\delta^d(x-x')=\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}e^{-ip(x-x')}$（裘忠平《现代量子场论导引》），e 指数无量纲，所以 δ 函数具有动量（d 次幂）量纲！做一次泛函微商，动量量纲幂次增加 d；每个胶子场量纲 $[P]^{\frac{d}{2}-1}$，每个夸克场量纲 $[P]^{\frac{d-1}{2}}$，所以 $\frac{\delta\Gamma[A(x)]}{\delta A(x')}$ 量纲为 $[P]^{0+d-(\frac{d}{2}-1)}$，$\frac{\delta\Gamma[\psi(x)]}{\delta\psi(x')}$ 量纲为 $[P]^{0+d-\frac{d-1}{2}}$，于是正规顶角

$$\Gamma(x_1,\mathrm{L}\ ,x_n)=\frac{\delta^n\Gamma[A,\psi]}{\delta A(x_1)\mathrm{L}\ \delta A(x_{n_B})\delta\psi(x_{n_B+1})\mathrm{L}\ \delta\psi(x_n)}$$

量纲为 $[P]^{0+nd-n_B(\frac{d}{2}-1)-n_F\frac{d-1}{2}}=[P]^{d_n(x)}$（胡瑶光《规范场论》）．再由 $\Gamma(x)$ 与 $\Gamma(p)$ 的 Fourier 变换关系

$$(2\pi)^d\delta^d(p_1+\mathrm{L}\ +p_n)\Gamma^n(p_1,\mathrm{L}\ ,p_n)=\int d^dx_1\mathrm{L}\ d^dx_n\Gamma^n(x_1,\mathrm{L}\ ,x_n)e^{ip_ix_i}$$

可知$[L]^d[\Gamma^n(p)]=[L]^{nd}[\Gamma^n(x)]$，所以

$$[\Gamma^n(p)]=[L]^{nd-d}[\Gamma^n(x)]=[P]^{d-nd}[P]^{d_n(x)}=[P]^{d_n(p)}$$

$$d_\Gamma=d_n(p)=d_n(x)+d-nd=[nd-n_B(\frac{d}{2}-1)-n_F\frac{d-1}{2}]+d-nd$$
$$=d-n_B(\frac{d}{2}-1)-n_F\frac{d-1}{2}$$

重整化常数无量纲，所以不论$\Gamma_R^{(n)}$还是$\Gamma_B^{(n)}$，量纲都是（动量的）d_Γ（次幂）。d_Γ也称为正则量纲（王正行《简明量子场论》）。

2.3.6.2 量纲标度变换群

我们把所有具有质量量纲[m]的量，都做同样的变换$[m]\to[m']=e^{t'}[m]$，t'为实参数，这样的变换也构成群，称为量纲标度变换群（胡瑶光《规范场论》）。在此变换下，无量纲量（如g）是不变的，有质量量纲的量（如p，μ）都作同样的变换

$$p\to p'=e^{t'}p,\quad \mu\to\mu'=e^{t'}\mu$$

此处$e^{t'}$相当于王正行《简明量子场论》的ζ或裘忠平《现代量子场论导引》的s. $\Gamma_R^n(p,\mu,g)$作为p，μ，g的函数，变换为

$$\Gamma_R^n(p,\mu,g)\to\Gamma_R^n(e^{t'}p,e^{t'}\mu,g)$$

因$\Gamma_R^n(p,\mu,g)$量纲d_Γ，可设为p，μ的d_Γ次齐次函数（裘忠平《现代量子场论导引》）：

$$\Gamma_R^n(p,\mu,g)=F(g)(p^{d_\Gamma}+p^{d_\Gamma-1}\mu+\mathrm{L}+\mu^{d_\Gamma})$$

F(g)无量纲，这样定义的$\Gamma_R^n(p,\mu,g)$量纲仍为d_Γ. 记$e^{t'}=\zeta$，则在量纲标度变换群下，齐次函数$\Gamma_R^n(p,\mu,g)$的变换为

$$\Gamma_R^n(\zeta p,\zeta\mu,g)=F(g)[(\zeta p)^{d_\Gamma}+(\zeta p)^{d_\Gamma-1}(\zeta\mu)+\mathrm{L}+(\zeta\mu)^{d_\Gamma}]$$
$$=\zeta^{d_\Gamma}F(g)[p^{d_\Gamma}+p^{d_\Gamma-1}\mu+\mathrm{L}+\mu^{d_\Gamma}]=\zeta^{d_\Gamma}\Gamma_R^n(p,\mu,g)$$

若只对动量p做量纲标度变换，而假定μ不变，则

$$\Gamma_R^n(\zeta p,\mu,g)=F(g)[(\zeta p)^{d_\Gamma}+(\zeta p)^{d_\Gamma-1}\mu+\mathrm{L}+\mu^{d_\Gamma}]$$
$$=\zeta^{d_\Gamma}F(g)[p^{d_\Gamma}+p^{d_\Gamma-1}\zeta^{-1}\mu+\mathrm{L}+(\zeta^{-1}\mu)^{d_\Gamma}]=\zeta^{d_\Gamma}\Gamma_R^n(p,\zeta^{-1}\mu,g)$$

$F_\zeta=\Gamma_R^n(\zeta p,\mu,g)=F(g)[(\zeta p)^{d_\Gamma}+(\zeta p)^{d_\Gamma-1}\mu+\mathrm{L}+\mu^{d_\Gamma}]$表明$\Gamma_R^n(\zeta p,\mu,g)$为$\zeta p,\mu$的

齐次函数。记 $f_g = F(g)$，先将此齐次函数对 ζ 求导并乘以 ζ，再将此齐次函数对 μ 求导并乘以 μ，然后将两次运算所得方程相加，得

$$\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\Gamma_R^n(\zeta p,\mu,g)+\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\Gamma_R^n(\zeta p,\mu,g)= f_g\times$$
$$\{[d_\Gamma(\zeta p)^{d_\Gamma}+(d_\Gamma-1)(\zeta p)^{d_\Gamma-1}\mu+(d_\Gamma-2)(\zeta p)^{d_\Gamma-2}\mu^2+\cdots+\zeta p\mu^{d_\Gamma-1}\quad+0\quad]$$
$$+[0\quad+(\zeta p)^{d_\Gamma-1}\mu\quad+(\zeta p)^{d_\Gamma-2}2\mu^2\quad+\cdots+\zeta p(d_\Gamma-1)\mu^{d_\Gamma-1}+d_\Gamma\mu^{d_\Gamma}]\}$$
$$= f_g d_\Gamma[(\zeta p)^{d_\Gamma}+(\zeta p)^{d_\Gamma-1}\mu+(\zeta p)^{d_\Gamma-2}\mu^2+\cdots+\zeta p\mu^{d_\Gamma-1}+\mu^{d_\Gamma}]=d_\Gamma\Gamma_R^n(\zeta p,\mu,g)$$

即

$$(\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}+\mu\frac{\partial}{\partial\mu}-d_\Gamma)\Gamma_R^n(\zeta p,\mu,g)=0$$

与原始的重整化群方程 $(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta\frac{\partial}{\partial g}-n\gamma)\Gamma_R^{(n)}(p_i,\mu,g)=0$ 联立（注意 $p_i=\zeta p$），消去 $\mu\frac{\partial}{\partial\mu}$，得

$$(d_\Gamma-\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}+\beta\frac{\partial}{\partial g}-n\gamma)\Gamma_R^n(\zeta p,\mu,g)=0$$

无互作用不需重整，重整化群系数 $\beta=\gamma=0$，上式简化为 $(d_\Gamma-\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta})\Gamma_R^n(\zeta p,\mu,g)=0$，此式不含重整化标度 μ，只有单纯的正则量纲效应。因相互作用，才使标度行为偏离正则量纲，故 β,γ 贡献了反常量纲（王正行《简明量子场论》）。

2.3.6.3 重整化群方程的解

记 $\Gamma_R^n[\zeta p,\mu,g]=f(\zeta)\Gamma_R^n[p,\mu,g(\zeta)]$，则

$$\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\Gamma_R^n[\zeta p,\mu,g]=[\zeta\frac{df}{d\zeta}+\zeta f(\zeta)\frac{\partial g}{\partial\zeta}\frac{\partial}{\partial g}]\Gamma_R^n[p,\mu,g(\zeta)]$$
$$=[\zeta\frac{df}{d\zeta}+\zeta f(\zeta)\frac{\partial g}{\partial\zeta}\frac{\partial}{\partial g}]\frac{\Gamma_R^n[\zeta p,\mu,g]}{f(\zeta)}$$

所以

$$[\frac{\zeta}{f}\frac{df}{d\zeta}+\zeta\frac{\partial g}{\partial\zeta}\frac{\partial}{\partial g}-\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}]\Gamma_R^n[\zeta p,\mu,g]=0$$

与前面推出的 $(d_\Gamma-\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}+\beta_g\frac{\partial}{\partial g}-n\gamma)\Gamma_R^n(\zeta p,\mu,g)=0$ 比较，得

$$\frac{\zeta}{f}\frac{df}{d\zeta}+\zeta\frac{\partial g}{\partial\zeta}\frac{\partial}{\partial g}=d_\Gamma+\beta_g\frac{\partial}{\partial g}-n\gamma$$

所以 $\beta_g=\zeta\frac{\partial g}{\partial\zeta}$，$\frac{\zeta}{f}\frac{df}{d\zeta}=d_\Gamma-n\gamma$

初始条件为 $g(\zeta=1)=g$，$f(\zeta=1)=1$

（1）f 的形式解

$$\frac{\zeta}{f}\frac{df}{d\zeta}=d_\Gamma-n\gamma\Rightarrow\frac{df}{f}=(d_\Gamma-n\gamma)\frac{d\zeta}{\zeta}\Rightarrow\ln f=d_\Gamma\int_1^\zeta\frac{d\zeta}{\zeta}-\int_1^\zeta d\zeta\frac{n\gamma(\zeta)}{\zeta}+C$$

代入初始条件 $f(\zeta=1)=1$ 得 $\ln 1=d_\Gamma\int_1^1 Xd\zeta-\int_1^1 Yd\zeta+C=C\Rightarrow C=0$

$$f=\exp[d_\Gamma\int_1^\zeta\frac{d\zeta}{\zeta}-\int_1^\zeta d\zeta\frac{n\gamma(\zeta)}{\zeta}]=\exp[d_\Gamma\ln\zeta]\exp[-\int_1^\zeta d\zeta\frac{n\gamma(\zeta)}{\zeta}]$$

$$=\zeta^{d_\Gamma}\exp[-\int_1^\zeta d\zeta\frac{n\gamma(\zeta)}{\zeta}]$$

（2）g 的解

设 $b=\frac{\beta_0}{16\pi^2}$，则 β 函数化为

$$\zeta\frac{\partial g(\zeta)}{\partial\zeta}=\beta_g=\mu\frac{\partial g}{\partial\mu}=-\frac{g^3}{16\pi^2}(11-\frac{2}{3}n_f)=-\frac{g^3}{16\pi^2}\beta_0=-bg^3(\zeta)$$

分离变量，得：$-\frac{dg(\zeta)}{g^3(\zeta)}=b\frac{d\zeta}{\zeta}\Rightarrow\frac{1}{g^2(\zeta)}+C=2b\ln\zeta$

代入初始条件 $g(\zeta=1)=g$ 得 $C=-\frac{1}{g^2}$，所以 $\frac{1}{g^2(\zeta)}=\frac{1}{g^2}+2b\ln\zeta$

$b=\frac{\beta_0}{16\pi^2}>0$，$g(\zeta)$ 随 ζ 增大而减小。从 $p\to\zeta p$ 可知 ζ 是动量放大倍数，$\zeta\to\infty$ 意味着动量被放大无数倍，根据不确定关系，距离缩短到无穷小，这就是“渐近”，而此时耦合常数 $g(\zeta)\to 0$，退耦说明不参与相互作用，也就是“自由”。这就清清楚楚明明白白真真切切地证明了渐近自由。思考：若将引力理论看作规范理论，它也是非 Abel 规范理论。那么，它有渐近自由吗？

第 3 题　电弱统一理论（200 分）

【问题】（满分 200 分，时间 20 天）：构建电弱理论的 Lagrangian，导出相应的 Feynman 规则；分析三代夸克混合，并计算 CKM 矩阵元。
要求：开卷考试，以小论文形式提交。论文中必须有详细步骤。只有结论没有过程不给分，缺少必要步骤酌情扣分。

第 0 步　弱作用的基本特征与过渡理论（20 分）

描述弱相互作用的理论有 4-Fermion 理论、V-A 理论、中间 Boson 理论、GSW 理论等。对于实用主义者来说，由于 W、Z 很重，V-A 理论对于唯象学足够有效。但对于理想主义者来说，他们更看重的不是与实验数据吻合，而是理论的逻辑上的完美无瑕。他们希望能有一种万有理论，统一解释所有自然现象。这一宏大蓝图自 Newton、Maxwell、Einstein 就开始描绘，但至今尚未完成。不过，进展还是很大的。目前，不仅天上的运动和地上的运动得到统一，电和磁得到统一，低速世界和高速世界得到统一，而且，弱作用与电磁作用也已经统一，这就是本章要讲的电弱统一理论。不过，要看得更远，需要站在巨人的肩膀上。为了一步步完成统一，首先要了解弱作用的基本特征，吸取前辈们思想中精华的部分。

3.0.1　“流”与“荷”

不论哪一种弱作用理论，都会涉及一些在 QED、QCD 中很少用到的概念，如“手征”（左手、右手）、“流”（矢量流、轴矢量流、强子流、轻子流、弱流、带电流、中性流）、“荷”（超荷、弱超荷）等。这些概念早在刚学 QFT 就有了，只不过那时没强调，现在复习下，以便顺利理解弱作用。
“流”的概念在生活中很常见：水流、气流、车流、人流……，我们在中学专门学过电流（电荷的运动），这些都是某种物体的运动。到了大学，又有了能量流、动量流、概率流，这就从具体物质的运动抽象成某个物理量随时间的变化。那么，场论中的 XX 流是什么在运动或随时间变化呢？
场论中的“流”是从 Noether 定理来的，即系统的某种对称性必然导致相应的守恒量：时间平移对称→能量守恒；空间平移对称→动量守恒；空间旋转对称→角动量守恒；空间反射对称→宇称守恒……每一对称变换构成群，特别是，对于连续群（Lie 群），有限大的变换可由无穷小变换通过指数映射生成，如 $\psi(x-a,y,z)=e^{-iap_x}\psi(x-a,y,z)$，取 $\psi(x)=x^2$，$p_x=-i\dfrac{\partial}{\partial x}$，则此式给出 $(x-a)^2=e^{-a\frac{\partial}{\partial x}}x^2$，在 a 无穷小时即

$$x^2-2ax+o(a^2)=(1-a\frac{\partial}{\partial x})x^2$$

我们称这样的无穷小变换算符（动量 p_x）为（空间平移变换群的）生成元（更详细解释见

陈申见《粒子物理学》)。类似地，能量 E 为时间平移变换群的生成元，角动量 J 为三维转动群 SO(3)的生成元，电荷 Q 为 U(1)相位变换群的生成元，$\frac{\sigma_i}{2}$ 为 SU(2)群生成元，$\frac{\lambda_i}{2}$ 为 SU(3)群生成元（σ_i 为 Pauli 矩阵，λ_i 为 Gell-Mann 矩阵)。

若 $\mathcal{L}=\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi)$ 具有某种对称性（例如对于参数 ω_a)，则

$$0=\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\omega_a}=\frac{\delta\phi}{\delta\omega_a}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}+\frac{\delta(\partial_\mu\phi)}{\delta\omega_a}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\frac{\delta\phi}{\delta\omega_a}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu\frac{\delta\phi}{\delta\omega_a}$$

$$=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\frac{\delta\phi}{\delta\omega_a}-[\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}]\frac{\delta\phi}{\delta\omega_a}+\partial_\mu[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\frac{\delta\phi}{\delta\omega_a}]\xrightarrow{Euler-Lagrange方程}\partial_\mu[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\frac{\delta\phi}{\delta\omega_a}]$$

于是可定义 Noether 守恒流（Schwartz《Quantum Field Theory and the Standard Model》）

$$j_a^\mu=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\frac{\delta\phi}{\delta\omega_a}$$

注意守恒流的定义不唯一，有的书差负号，有的书没 $\delta\omega_a$，还有求出两项、三项之和的。若认为 $\mathcal{L}=\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi,x^\mu)$，则重复上述推导还会求出 $\partial_\mu\mathcal{L}\frac{\delta x^\mu}{\delta\omega_a}$ 项，守恒流中应加上 $\mathcal{L}\frac{\delta x^\mu}{\delta\omega_a}$

（金广浩《Elementary Particles and their Interactions：Concepts and Phenomena》)：

$$j_a^\mu\equiv\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\frac{\delta\phi}{\delta\omega_a}+\mathcal{L}\frac{\delta x^\mu}{\delta\omega_a}$$

设 $\delta\phi\equiv\phi'(x)-\phi(x)=\phi'(x')-\phi(x')$．假定在坐标平移 $x^\mu\to x'^\mu=x^\mu-a^\mu$（或 $\delta x^\mu=x'^\mu-x^\mu=-a^\mu$）下，场 ϕ 具有不变性：

$$0=\Delta\phi=\phi'(x')-\phi(x)=[\phi'(x')-\phi(x')]+[\phi(x')-\phi(x)]=\delta\phi+(\partial_\mu\phi)\delta x^\mu$$

则 $\delta\phi=-(\partial_\mu\phi)\delta x^\mu=a^\mu(\partial_\mu\phi)$

对于 $\delta\omega_a=a^\nu$，有

$$j_\nu^\mu=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\frac{a^\mu(\partial_\mu\phi)}{a^\nu}+\mathcal{L}\frac{-a^\mu}{a^\nu}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\nu\phi-\mathcal{L}\delta_\nu^\mu\equiv T_\nu^\mu$$

此即能量-动量张量。

由守恒流还可定义守恒荷（守恒流的时间分量对空间坐标的积分）

$$Q_a\equiv\int j_a^0d^3x$$

虽然 Noether 流定义不唯一，但能动张量 T_ν^μ 及守恒荷 Q_a 定义惊人地一致。

下面举个具体例子，以帮助大家理解。Dirac 场 Lagrangian 为 $\mathcal{L}_0=\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi$，设旋量场变化为 $\psi\to\psi'=e^{-iQg\omega}\psi\approx(1-iQg\omega)\psi$ 或 $\delta\psi=\psi'-\psi=-iQg\omega\psi$，其中 g 为耦合常数，Q 为电子数算符（电子 g=e，Q=-1）。若取 $\omega_a=g\omega$，则

$$j^\mu=\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu\psi)}\frac{\delta\psi}{\delta(g\omega)}=\bar{\psi}i\gamma^\mu(-iQ\psi)=Q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi=-\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

相互作用 Lagrangian 用守恒流改写为

$$\mathcal{L}_{Int}=-Qe\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi=-ej^\mu A_\mu$$

因场变换 e 指数正负约定不同，Lagrangian 相互作用项 Q 正负约定不同，甚至基本电荷 e 的正负约定不同，不同书上电磁流及用电磁流表述的 Lagrangian 常差负号。此处从金广浩约定。

3.0.2 V-A 理论与手征对称性

上节讲述了弱作用基本特征，所有弱作用理论都会涉及。本节 3.0.2 和下节 3.0.3 讲述弱作用过渡理论（低能有效理论）。弱作用的基本理论从 3.1 节开始。

3.0.2.1 V-A 理论

1930 年，Pauli 建议在中子 β 衰变中引入中微子来补救动量守恒：

$$n\to p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$$

仿照前面讲的电磁流 $Q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$，1934 年，Fermi 猜测弱衰变过程存在两个流，一是强子流 $\bar{\psi}_p\gamma_\mu\psi_n$，另一是轻子流 $\bar{\psi}_e\gamma^\mu\psi_{\bar{\nu}_e}$，相互作用 Lagrangian 是这两个流的乘积：

$$\mathcal{L}=\frac{G_F}{\sqrt{2}}(\bar{\psi}_p\gamma_\mu\psi_n)(\bar{\psi}_e\gamma^\mu\psi_{\bar{\nu}_e})+h.c.$$

其中 G_F 为普适 Fermi 常数，h.c.表示 Hermite 共轭。该模型对于 $\Delta J=0$（初末态核子自旋相同）的衰变很成功。后来，Gamow-Teller 加上了作用项

$$\mathcal{L}_{GT}=-\frac{G_F}{\sqrt{2}}(\bar{\psi}_p\gamma_\mu\gamma_5\psi_n)(\bar{\psi}_e\gamma^\mu\gamma_5\psi_{\bar{\nu}_e})+h.c.$$

来探讨 $\Delta J=1$ 的 β 衰变（李灵峰《量子场论》）。这两类过程都是宇称守恒的。

50 年代，实验发现 θ,τ 这“两种”粒子（实际上是同种粒子，即 K 介子）有相同的质量、电荷、自旋和衰变宽度，却有两种相反宇称。杨振宁和李政道因假设“弱作用宇称未必守恒”

被吴健雄的实验证实而获 Nobel 奖。我们在《普通物理》课上曾学过极矢量（力、速度）和轴矢量（力矩、角速度），在空间反射下前者变号，后者不变（赵凯华《新概念物理教程》）。既然弱作用宇称一般不守恒，那么很自然想到，弱作用应该是关于矢量 V-轴矢量 A 的理论。

我们在 QED“双线性协变量”一节讲过，$\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ 为矢量，$\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi$ 为轴矢量，所以

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\mu^\dagger J^\mu + h.c.,\quad J^\mu = J_l^\mu + J_h^\mu$$

其中 $J_l^\mu = \bar{\psi}_{\bar{\nu}_e}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_e + (e \to \mu)$ 为轻子流，

$J_h^\mu = g_0\bar{\psi}_p\gamma^\mu(1-\alpha\gamma_5)\psi_n + g_1\bar{\psi}_p\gamma^\mu(1-\alpha\gamma_5)\psi_\Lambda$ 为强子流。

注意此处有效 Lagrangian 与 Fayyazuddin 一致，与李灵峰差负号。

用夸克解释，强子流为 $\bar{u}\gamma^\mu(1-\gamma_5)d_\theta$，其中 $d_\theta = d\cos\theta_C + s\sin\theta_C$，$\theta_C$ 为 Cabibbo 角，

满足 $\tan\theta_C = \frac{g_1}{g_0}$.

3.0.2.2 手征对称性

定义（手征）投影算符（不同书符号约定不同，此处与金广浩一致，与胡瑶光左右颠倒）

$$P_L = \frac{1-\gamma_5}{2}, P_R = \frac{1+\gamma_5}{2}$$

满足 $P_L P_R = P_R P_L = 0$（正交），$P_L P_L = P_L, P_R P_R = P_R$（单幂），$P_L + P_R = 1$（完备）。

定义手征旋量场

$$\psi_L = P_L\psi, \psi_R = P_R\psi$$

因 $\gamma_5\psi_L = \gamma_5\frac{1-\gamma_5}{2}\psi = \frac{\gamma_5-1}{2}\psi = -\psi_L$，$\gamma_5\psi_R = \gamma_5\frac{1+\gamma_5}{2}\psi = \frac{\gamma_5+1}{2}\psi = \psi_R$，故 ψ_L, ψ_R 为

γ_5 的本征值为-1，+1 的本征态。

“流”可用左手旋量场表示为

$$J_\mu = \bar{\nu}\gamma_\mu(1-\gamma_5)l = 2\nu^\dagger\gamma_0\gamma_\mu\frac{1-\gamma_5}{2}l = 2\nu^\dagger\gamma_0\gamma_\mu\frac{1-\gamma_5}{2}\frac{1-\gamma_5}{2}l = 2\nu^\dagger\frac{1-\gamma_5}{2}\gamma_0\gamma_\mu\frac{1-\gamma_5}{2}l$$

$$= 2(\frac{1-\gamma_5}{2}\nu)^\dagger\gamma_0\gamma_\mu\frac{1-\gamma_5}{2}l = 2\nu_L{}^\dagger\gamma_0\gamma_\mu\nu_L = 2\bar{\nu}_L\gamma_\mu\nu_L = 2J_{L\mu}$$

上帝是个左撇子！弱作用低能有效理论及电弱统一理论都认为中微子只有左手，没右手！

3.0.3 中间 Boson 理论

Fermi 理论与 V-A 理论的 Lagrangian 都是两个流的乘积，为什么非要是两个流乘积呢？我们构造 Klein-Gordon 场、Dirac 场、Maxwell 场、Einstein 场 Lagrangian 都是用对称性分析，而非流流相乘。并且，QED 通过交换光子 γ，QCD 通过交换胶子 g 发生作用。那么，弱作用是否也是交换某种中间媒介子 W（Weak 简称），其 Lagrangian 能否由对称性构造呢？仿照电磁作用 $\mathcal{L}_0=\bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi$，$\mathcal{L}_{Int}=-eJ^\mu A_\mu$，我们设想弱作用满足类似形式

$$\mathcal{L}_0=\bar{\psi}_L i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L+\bar{\psi}_R i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R,\quad \mathcal{L}_{Int}=gJ^\mu W_\mu+h.c.$$

光子无质量，电磁力可传到无穷远；弱力局限原子核内，所以弱作用媒介子必然很笨重！弱作用既然能让不带电的中子变成带电的质子，那么媒介子 W 也一定带电。但带电可正可负，那么至少有两种 W 媒介子（W+和 W-），所以 QED 的 U(1)群太小了，起码也得 SU(2).

类似 QED 的 U(1)不变：$\psi\to\psi'=e^{ig\omega}\psi,\ j^\mu=-\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$，可假设弱作用具有 SU(2)对称性：

$$\psi_L\to\psi_L'=e^{-ig\omega_i T_i}\psi_L\approx(1-ig\omega_i\frac{\sigma_i}{2})\psi_L,\psi_R\to\psi_R'=\psi_R$$

$$j_i^\mu=\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu\psi_L)}\frac{\delta\psi_L}{\delta(g\omega_i)}=\bar{\psi}_L i\gamma^\mu\frac{-ig\omega_i\frac{\sigma_i}{2}}{g\omega_i}=\bar{\psi}_L\gamma^\mu\frac{\sigma_i}{2}\psi_L=\psi_L^+\gamma^0\gamma^\mu\frac{\sigma_i}{2}\psi_L$$

其中 σ_i 为 Pauli 矩阵，Hermite 剑号已用+代替。相应于弱流，可定义弱荷

$$Q_i=\int j_i^0(x)d^3x=\int d^3x\psi_L{}^+\gamma^\mu\frac{\sigma_i}{2}\psi_L$$

$$Q_1=\frac{1}{2}\int d^3x\begin{pmatrix}\nu_{eL}^+ & e_L^+\end{pmatrix}_{1\times8}[(\gamma^0)^2{}_{4\times4}\otimes(\sigma_1)_{2\times2}]\begin{pmatrix}\nu_{eL}\\ e_L\end{pmatrix}_{8\times1}$$

$$=\frac{1}{2}\int d^3x\begin{pmatrix}\nu_{eL}^+ & e_L^+\end{pmatrix}\begin{bmatrix}&I_{4\times4}\\ I_{4\times4}&\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\nu_{eL}\\ e_L\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\int d^3x(\nu_{eL}^+e_L+e_L^+\nu_{eL})$$

$$Q_2=\frac{1}{2}\int d^3x\begin{pmatrix}\nu_{eL}^+ & e_L^+\end{pmatrix}_{1\times8}[(\gamma^0)^2{}_{4\times4}\otimes(\sigma_2)_{2\times2}]\begin{pmatrix}\nu_{eL}\\ e_L\end{pmatrix}_{8\times1}=-\frac{i}{2}\int d^3x(\nu_{eL}^+e_L-e_L^+\nu_{eL})$$

$$Q_3=\frac{1}{2}\int d^3x\begin{pmatrix}\nu_{eL}^+ & e_L^+\end{pmatrix}_{1\times8}[(\gamma^0)^2{}_{4\times4}\otimes(\sigma_3)_{2\times2}]\begin{pmatrix}\nu_{eL}\\ e_L\end{pmatrix}_{8\times1}=\frac{1}{2}\int d^3x(\nu_{eL}^+\nu_{eL}-e_L^+e_L)$$

其中⊗表示矩阵直积。这三个守恒荷称为弱同位旋，常用 T_1,T_2,T_3 表示，但注意与 SU(2)规范变换中 $e^{-ig\omega_i T_i}$ 的 T_i 区分。

虽然这理论看起来更“自然”，且与 V-A 理论相比对幺正性有改进，但仍不可重整，高能区

存在严重问题而失去意义，故只能作为低能有效理论，而不符合“基本理论”的审美要求。后面我们将会讲到，这里 SU(2)三个生成元对应的 W1,W2,W3 中前两个可组合出带电的 W^+,W^-，但 W3 并非中性的 Z^0，所以只能解释带电流过程，而不能解释中性流过程（所谓带电流就是中间交换带电粒子，中性流就是中间交换中性粒子；中间交换粒子的量子数，如 C、P 宇称决定它到底是矢量流还是轴矢量流）。

第 1 步　构造规范场与 Higgs 场的 Lagrangian（30 分）

了解弱作用基本特征和前辈们的经验教训后，我们就可以着手建立弱作用的基本理论——GSW 电弱统一理论了。按 QED、QCD 的经验，首先要既适用于低能、又适用于高能的放之四海而皆准的弱作用 Lagrangian. 不过，我们还有一个重大的理论问题需解决，那就是规范场的质量问题。

局域规范理论涉及的规范场没有质量，这对于光子、引力子都没问题。但弱作用为短程力，媒介子必须有很大的质量（裘忠平《现代量子场论导引》）。你可以认为“本轮+均轮”的地心说正确，但日心说的“椭圆”不是更简单吗？你可以认为弱作用不是规范相互作用，但你还有更好的办法统一几种自然力吗？如果认为弱作用是规范作用，那么就要找到让规范粒子获得质量的机制。

怎样找到这样的机制呢？他山之石，可以攻玉。在一个月黑风高的夜晚，Nambu 看着鬼片想着鬼场，不知不觉睡着了。梦中，他仿佛看到一个个美女均匀地向各个方向走动，但当他仔细欣赏时，突然发现她们没有影子——“鬼呀！”他大喊道，随便抄起一瓶液态氮泼向她们。女鬼们瞬间调转，整齐地朝他这一个方向进攻。为什么液态氮能让她们对称性破缺？他突然想到，液态氮温度很低，描述铁磁的 Hamilton 是各向同性的，但临界温度以下的磁铁却稳定地处于自旋定向的状态。既然激怒女鬼会使她们对称性破缺，那么“激怒”真空呢？我们说，真空是量子场的基态，粒子是场的激发态。（有质量）粒子作为激发态，它所造成的不对称（破坏规范不变性），也许只是来自真空的不对称，而不一定是 Lagrangian 不对称（包含破坏规范不变性的质量项）造成的。于是问题就变成，能否从规范不变的 Lagrangian 出发，得到不对称的真空（王正行《简明量子场论》）？答案是肯定的，这就是本节要讲的 Nambu-Goldstone 定理和 Higgs 机制。

一般地，我们把原理层面（例如 Lagrangian 规范不变性）的对称性破坏称为对称性明显破缺，而将具体层面（例如真空）的对称性破坏称为对称性自发破缺。

3.1.1　整体对称性破缺与 Nambu-Goldstone 定理

认识要从简单到复杂。本节先来讨论整体对称性破缺，下节再讨论局域对称性破缺。

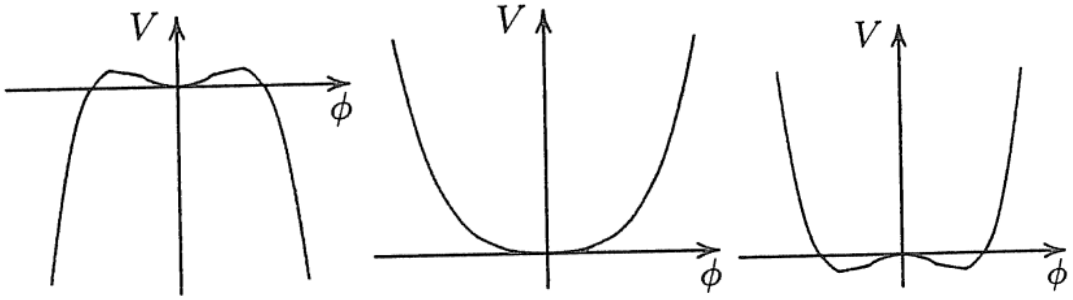
3.1.1.1　实标量场

考虑 $\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-V(\phi)$，$V(\phi)=\frac{1}{2}m^2\phi^2+\frac{\lambda}{4}\phi^4$

注意不同书符号约定不同，此处与胡瑶光、戴元本、周邦融一致，Srednicki 的 $\partial_\mu\phi$ 项为负，

李灵峰、郑汉青的$m^2\phi^2$项系数为正，金广浩ϕ^4项分母为 4!=24. 众口难调，你不能让所有人满意，只能尽量与多数人约定一致。

令$\frac{dV}{d\phi}=m^2\phi+\lambda\phi^3=0,\frac{d^2V}{d\phi^2}=m^2+3\lambda\phi^2=0$（胡瑶光《规范场论》），可得驻点$\phi_0=\pm\sqrt{-\frac{m^2}{\lambda}}$，拐点$\phi_{00}=\pm\sqrt{-\frac{m^2}{3\lambda}}$，则$V(\phi)$的图像为（金广浩《Elementary Particles And Their Interactions：Concepts and Phenomena》）



左图：$\lambda<0,m^2>0$；中图：$\lambda>0,m^2>0$；右图：$\lambda>0,m^2<0$

注意二阶导为正，曲线向下凹；二阶导为负，曲线向上凸。对稳定点，可定义ϕ场的真空期待值$\langle\phi\rangle=v=\sqrt{-\frac{m^2}{\lambda}}$. 当$\phi\to-\phi$时，Lagrangian 唯一，却对应两个真空，所以对称性破缺了。这两个真空不连通，这是离散对称性的破缺。

将ϕ在$\langle\phi\rangle=v=\sqrt{-\frac{m^2}{\lambda}}$附近展开为$\phi=\phi'+v$或$\phi'=\phi-v$，满足$\langle\phi\rangle=v$但$\langle\phi'\rangle=0$，Lagrangian 变为

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu(\phi'+v)\partial^\mu(\phi'+v)-\frac{1}{2}m^2(\phi'+v)^2-\frac{\lambda}{4}(\phi'+v)^4$$
$$=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi'\partial^\mu\phi'-\frac{1}{2}m^2(\phi'^2+2\phi'v+v^2)-\frac{\lambda}{4}(\phi'^4+4\phi'^3v+6\phi'^2v^2+4\phi'v^3+v^4)$$
$$=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi'\partial^\mu\phi'-\frac{1}{2}(m^2+3\lambda v^2)\phi'^2-(m^2+\lambda v^2)\phi'v-\lambda\phi'^3v-\frac{\lambda}{4}\phi'^4+\mathcal{L}(v)$$

其中$\mathcal{L}(v)$只含 v 不含ϕ'，为表观 Lagrangian（曹昌祺），不影响积分，可舍。代入$v=\sqrt{-\frac{m^2}{\lambda}}$，上式化为

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi'\partial^\mu\phi'+m^2\phi'^2-\lambda\phi'^3v-\frac{\lambda}{4}\phi'^4=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi'\partial^\mu\phi'-\frac{1}{2}(-2m^2)\phi'^2-\lambda v\phi'^3-\frac{\lambda}{4}\phi'^4$$

质量项来自场的平方项（前面为常数），所以由此产生了ϕ'的质量项$-\frac{1}{2}(\sqrt{-2m^2})^2\phi'^2$，$\phi'$场质量为$\sqrt{-2m^2}$．注意此处$m^2<0$.

3.1.1.2 复标量场

只有一个实标量场时，不产生无质量粒子；但有 2 个及以上标量场时，将产生无质量粒子（曹昌祺、李灵峰）。

考虑两个实标量场ϕ_1,ϕ_2，Lagrangian 为

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1+\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2-V(\phi_1^2+\phi_2^2)，\ V(\phi_1^2+\phi_2^2)=\frac{1}{2}m^2(\phi_1^2+\phi_2^2)+\frac{\lambda}{4}(\phi_1^2+\phi_2^2)^2$$

注意λ项存在自作用，为非线性耦合，$V(\phi_1,\phi_2)\neq V(\phi_1)+V(\phi_2)$.

设$\phi=\frac{\phi_1+i\phi_2}{\sqrt{2}}$，$\phi^\dagger=\frac{\phi_1-i\phi_2}{\sqrt{2}}$或$\phi_1=\frac{\phi+\phi^\dagger}{\sqrt{2}}$，$\phi_2=\frac{\phi-\phi^\dagger}{i\sqrt{2}}$，$\mathrm{Re}\,\phi=\frac{\phi_1}{\sqrt{2}},\mathrm{Im}\,\phi=\frac{\phi_2}{\sqrt{2}}$

则$\phi_1^2+\phi_2^2=\frac{1}{2}[(\phi+\phi^+)^2-(\phi-\phi^+)^2]=2\phi^+\phi$，

$$\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1+\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2=\frac{1}{2}\partial_\mu(\phi+\phi^\dagger)\partial^\mu(\phi+\phi^\dagger)-\frac{1}{2}\partial_\mu(\phi-\phi^\dagger)\partial^\mu(\phi-\phi^\dagger)=2\partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi$$

$\mathcal{L}=\partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi-m^2\phi^+\phi-\lambda(\phi^+\phi)^2$ 与王正行、裘忠平一致。

由实标量场例子可见，为使势能$V(\phi)$有底（而非无底洞），λ必须为正。$V(\phi)$无底的标量场论不能有稳定基态，因而物理上不可接受（戴元本《相互作用的规范理论》）。

由$V(\phi_1^2+\phi_2^2)=\frac{1}{2}m^2(\phi_1^2+\phi_2^2)+\frac{\lambda}{4}(\phi_1^2+\phi_2^2)^2$，可得二元函数极值：

$$\frac{\partial V}{\partial\phi_1}=m^2\phi_1+\lambda(\phi_1^2+\phi_2^2)\phi_1=0$$

$$\frac{\partial V}{\partial\phi_2}=m^2\phi_2+\lambda(\phi_1^2+\phi_2^2)\phi_2=0$$

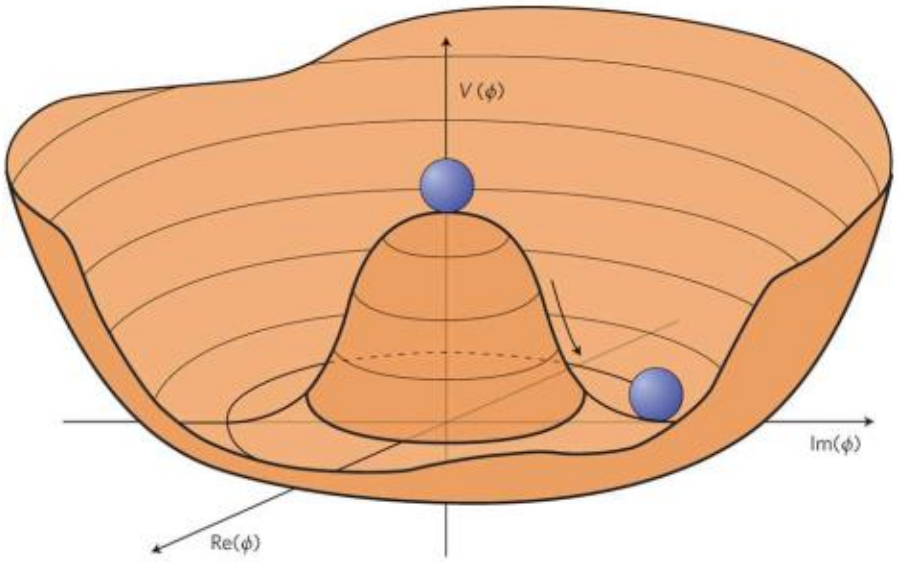
两式相加得

$$m^2+\lambda(\phi_1^2+\phi_2^2)=0\Rightarrow\phi_1^2+\phi_2^2=-\frac{m^2}{\lambda}$$

或

$$(\mathrm{Re}\,\phi)^2+(\mathrm{Im}\,\phi)^2=-\frac{m^2}{2\lambda}$$

这是实平面上半径 $v_0=\sqrt{-\frac{m^2}{\lambda}}$ 或复平面上半径 $a=\sqrt{-\frac{m^2}{2\lambda}}$ 的圆。圆上有无穷多个点，说明此时有无穷多个真空。$V(\phi)$ 的三维图像为（王雯宇《超对称粒子物理导论》）：



在整体规范变换 $\phi\to\phi'=e^{i\Lambda}\phi$ 下，$\mathcal{L}=\partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi-m^2\phi^+\phi-\lambda(\phi^+\phi)^2$ 不变，但从某个真空 v_i 变成另一个真空 v_j，相当于从圆上某点转到另一点，例如转 90 度，从

$$(v_1=v_0,v_2=0,V=V_{\min})\to(v_1=0,v_2=v_0,V=V_{\min})$$

Λ 可连续取值，因而对应连续对称性破缺。

仿照一个实标量场情形，下面讨论两个实标量场分别做变换 $\phi_1'=\phi_1-v_1,\phi_2'=\phi_2-v_2$. 选择如下真空：

$$\langle\phi_1\rangle=v_1=v_0,\langle\phi_2\rangle=v_2=0\Rightarrow\langle\phi_1'\rangle=\langle\phi_2'\rangle=0$$

由 $\phi=\frac{\phi_1+i\phi_2}{\sqrt{2}}$，得 $\phi'=\frac{\phi_1'+i\phi_2'}{\sqrt{2}}=\frac{\phi_1-v_1+i(\phi_2-0)}{\sqrt{2}}=\frac{\phi_1+i\phi_2}{\sqrt{2}}-\frac{v_0}{\sqrt{2}}=\phi-a$，所以这相当于复标量场 Lagrangian 在平移变换 $\phi'=\phi-a$ 下的性质。不过为了看清楚，我们还是用两个实标量场代替复标量场。在平移变换 $\phi_1'=\phi_1-v_0,\phi_2'=\phi_2$ 下，Lagrangian 变为

$$\mathcal{L}\to\frac{1}{2}\partial_\mu(\phi_1'+v_0)\partial^\mu(\phi_1'+v_0)+\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_2'\partial^\mu\phi_2'-\frac{1}{2}m^2[(\phi_1'+v_0)^2+\phi_2'^2]-\frac{\lambda}{4}[(\phi_1'+v_0)^2+\phi_2'^2]^2$$
$$=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1'\partial^\mu\phi_1'+\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_2'\partial^\mu\phi_2'-\frac{1}{2}m^2[(\phi_1'^2+\phi_2'^2)+v_0^2+2v_0\phi_1']-\frac{\lambda}{4}[(\phi_1'^2+\phi_2'^2)+v_0^2+2v_0\phi_1']^2$$
$$=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1'\partial^\mu\phi_1'+\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_2'\partial^\mu\phi_2'-\frac{1}{2}(m^2+\lambda v_0^2)[\phi_1'^2+\phi_2'^2]-(m^2+\lambda v_0^2)v_0\phi_1'$$
$$-\lambda v_0\phi_1'[\phi_1'^2+\phi_2'^2]-\lambda v_0^2\phi_1'^2-\frac{\lambda}{4}[\phi_1'^2+\phi_2'^2]^2-\frac{1}{2}m^2v_0^2-\frac{\lambda}{4}v_0^4$$

代入 $v_0=\sqrt{-\frac{m^2}{\lambda}}$，上式简化为

$$\mathcal{L}\to\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1'\partial^\mu\phi_1'+\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_2'\partial^\mu\phi_2'-\lambda v_0^2\phi_1'^2-\lambda v_0\phi_1'[\phi_1'^2+\phi_2'^2]-\frac{\lambda}{4}[\phi_1'^2+\phi_2'^2]^2+\mathcal{L}(v_0)$$

注意到 $v_0^2=2a^2$ 则与裘忠平一致（除去常数项 $\mathcal{L}(v_0)$）。由此式可见，仅 ϕ_1' 场有质量项 $-\lambda v_0^2\phi_1'^2=-\frac{1}{2}(v_0\sqrt{2\lambda})^2\phi_1'^2=-\frac{1}{2}(2a\sqrt{\lambda})^2\phi_1'^2$，质量为 $2a\sqrt{\lambda}$（对应 Higgs 粒子）；ϕ_2' 场无质量项，或说质量项为零，ϕ_2' 对应零质量粒子（Goldstone 粒子）。

一般地，整体连续对称性自发破缺必然导致零质量粒子的出现，此即 Goldstone 定理。

3.1.2 局域对称性破缺与 Higgs 机制

Again，从简单到复杂，先 Abel，再非 Abel.

3.1.2.1 Abel 情形

$\mathcal{L}=\partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi-m^2\phi^+\phi-\lambda(\phi^+\phi)^2$ 在整体规范变换 $\phi\to\phi'=e^{i\Lambda}\phi$ 下是不变的，因为 Λ 与 x 无关，求导时为常数。但此 Lagrangian 在局域规范变换 $\phi\to\phi'=e^{i\Lambda(x)}\phi$ 下改变。为了保证 Lagrangian 规范不变，要引入协变导数 $D_\mu=\partial_\mu+ieA_\mu$，$D_\mu^\dagger=\partial_\mu-ieA_\mu$，Lagrangian 变为

$$\mathcal{L}=D_\mu\phi^\dagger D^{\dagger\mu}\phi-m^2\phi^+\phi-\lambda(\phi^+\phi)^2-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

我们仍然可做分解 $\phi=\frac{\phi_1+i\phi_2}{\sqrt{2}}$，$\phi^\dagger=\frac{\phi_1-i\phi_2}{\sqrt{2}}$，Lagrangian 第一项变为

$$D_\mu\phi^\dagger D^{\dagger\mu}\phi=\frac{1}{2}(\partial_\mu+ieA_\mu)(\phi_1-i\phi_2)(\partial^\mu-ieA^\mu)(\phi_1+i\phi_2)$$
$$=\tfrac{1}{2}[(\partial_\mu+ieA_\mu)\phi_1-i(\partial_\mu+ieA_\mu)\phi_2][(\partial^\mu-ieA^\mu)\phi_1+i(\partial^\mu-ieA^\mu)\phi_2]$$
$$=\tfrac{1}{2}[(\partial_\mu+ieA_\mu)\phi_1(\partial^\mu-ieA^\mu)\phi_1+i(\partial_\mu+ieA_\mu)\phi_1(\partial^\mu-ieA^\mu)\phi_2$$
$$-i(\partial_\mu+ieA_\mu)\phi_2(\partial^\mu-ieA^\mu)\phi_1+(\partial_\mu+ieA_\mu)\phi_2(\partial^\mu-ieA^\mu)\phi_2]$$
$$=\tfrac{1}{2}[(\partial_\mu\phi_1+ieA_\mu\phi_1)(\partial^\mu\phi_1-ieA^\mu\phi_1)+(\partial_\mu\phi_2+ieA_\mu\phi_2)(\partial^\mu\phi_2-ieA^\mu\phi_2)$$
$$+e(\partial_\mu\phi_1A^\mu\phi_2-A_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_2-\partial_\mu\phi_2A^\mu\phi_1+A_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_1)]$$
$$=\tfrac{1}{2}[\partial_\mu\phi_1(\partial^\mu\phi_1-ieA^\mu\phi_1)+ieA_\mu\phi_1(\partial^\mu\phi_1-ieA^\mu\phi_1)$$
$$+\partial_\mu\phi_2(\partial^\mu\phi_2-ieA^\mu\phi_2)+ieA_\mu\phi_2(\partial^\mu\phi_2-ieA^\mu\phi_2)+2e(-A_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_2+A_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_1)]$$
$$=\tfrac{1}{2}[\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1+\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2+e^2A_\mu A^\mu(\phi_1^2+\phi_2^2)]+e(A_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_1-A_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_2)$$

Lagrangian 第一项变为

$$\mathcal{L}=\tfrac{1}{2}[\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1+\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2+e^2A_\mu A^\mu(\phi_1^2+\phi_2^2)]+e(A_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_1-A_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_2)$$
$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-V(\phi_1^2+\phi_2^2)$$

$V(\phi_1^2+\phi_2^2)$ 与 3.1.1 节定义相同。与复标量场类似，$\lambda>0,m^2<0$ 时出现对称性自发破缺，ϕ 的真空期待值为

$$\langle\phi\rangle=a=\sqrt{-\frac{m^2}{2\lambda}}=\frac{v_0}{\sqrt{2}}$$

选择真空 $\langle\phi_1\rangle=v_0,\langle\phi_2\rangle=0$.在平移变换 $\phi_1'=\phi_1-v_0,\phi_2'=\phi_2$ 下，Lagrangian 变为

$$\mathcal{L}\to-\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\tfrac{1}{2}\{\partial_\mu(\phi_1'+v_0)\partial^\mu(\phi_1'+v_0)+\partial_\mu\phi_2'\partial^\mu\phi_2'+e^2A_\mu A^\mu[(\phi_1'+v_0)^2+\phi_2'^2]\}$$
$$+eA_\mu[\phi_2'\partial^\mu(\phi_1'+v_0)-(\phi_1'+v_0)\partial^\mu\phi_2']-\lambda v_0^2\phi_1'^2-\lambda v_0\phi_1'[\phi_1'^2+\phi_2'^2]-\tfrac{\lambda}{4}[\phi_1'^2+\phi_2'^2]^2+\mathcal{L}(v_0)$$
$$=-\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\tfrac{1}{2}[\partial_\mu\phi_1'\partial^\mu\phi_1'+\partial_\mu\phi_2'\partial^\mu\phi_2']+\tfrac{1}{2}e^2v_0^2A_\mu A^\mu+\tfrac{1}{2}e^2A_\mu A^\mu[\phi_1'^2+\phi_2'^2]$$
$$+e^2A_\mu A^\mu v_0\phi_1'-eA_\mu v_0\partial^\mu\phi_2'+eA_\mu[\phi_2'\partial^\mu\phi_1'-\phi_1'\partial^\mu\phi_2']$$
$$-\lambda v_0^2\phi_1'^2-\lambda v_0\phi_1'[\phi_1'^2+\phi_2'^2]-\tfrac{\lambda}{4}[\phi_1'^2+\phi_2'^2]^2+\mathcal{L}(v_0)$$

绿色的项表示与 3.1.1 节整体对称变换结果相同，可直接引用。红色的项为质量项，灰色的项同 3.1.1 节。

可见，通过选择真空 $\langle\phi_1\rangle=v_0,\langle\phi_2\rangle=0$，$\phi_2$ 场质量项消失了，规范场出现了质量项 $\tfrac{1}{2}e^2v_0^2A_\mu A^\mu$. 通俗地说，这表示规范场通过“吃掉”$\phi_2$ 场的量子（Goldstone 粒子）而获得了质量！这便是 Higgs 机制，其中 ϕ_1 场就是 Higgs 场，其质量项为 $-\lambda v_0^2\phi_1'^2$，质量为 $2a\sqrt{\lambda}$（与 3.1.1 节相同）。

上述 Lagrangian 有点不完美：存在混合项 $-eA_\mu v_0\partial^\mu\phi_2'+eA_\mu[\phi_2'\partial^\mu\phi_1'-\phi_1'\partial^\mu\phi_2']$. 但是，这些

混合项可通过规范变换消除：

$$\phi'+a\to\phi''+a=e^{i\Lambda(x)}(\phi'+a),\quad A'_\mu\to A_\mu=A_\mu+\frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda(x)$$

为简单，考虑无穷小变换 $e^{i\Lambda(x)}\approx 1+i\Lambda(x)$. 将 $\phi'=\frac{\phi'_1+i\phi'_2}{\sqrt{2}},\phi''=\frac{\phi''_1+i\phi''_2}{\sqrt{2}}$ 代入第一式，得

$$\frac{\phi''_1+i\phi''_2}{\sqrt{2}}+a=[1+i\Lambda(x)](\frac{\phi'_1+i\phi'_2}{\sqrt{2}}+a)\Rightarrow\frac{\phi''_1+i\phi''_2}{\sqrt{2}}=\frac{\phi'_1+i\phi'_2}{\sqrt{2}}+i\Lambda\frac{\phi'_1+i\phi'_2}{\sqrt{2}}+i\Lambda a$$

另实部、虚部分别相等，得

$$\phi''_1=\phi'_1-\Lambda\phi'_2,\quad \phi''_2=\phi'_2+\Lambda(\phi'_1+a)$$

选择 Λ 使 $\phi''_2=0$，则虚部的方程变为 $\phi'_2=-\Lambda(\phi'_1+a)$；代入实部的方程，得

$$\phi''_1=\phi'_1-\Lambda\phi'_2=\phi'_1-\Lambda[-\Lambda(\phi'_1+a)]=\phi'_1+o(\Lambda^2)\approx\phi'_1$$

可见，选择无穷小变换好处是可消去高阶项。将 $\phi''_1\approx\phi'_1$ 代入虚部方程，注意 $\phi''_2=0$，得

$$\phi'_2=-\Lambda(\phi'_1+a)\approx-\Lambda(\phi''_1+a)$$

可见，经“虚部方程→实部方程→虚部方程”这么来回折腾后，很多项都被无穷小折腾没了，最终的变换形式超级简单：

$$\phi'_1=\phi''_1,\quad \phi'_2=-\Lambda(\phi''_1+a)=0+o(\Lambda),\quad A_\mu=A'_\mu-\frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda(x)=A'_\mu+o(\Lambda)$$

在此变换下，Lagrangian 变为

$$\mathcal{L}\to-\tfrac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu}+\tfrac{1}{2}[\partial_\mu\phi''_1\partial^\mu\phi''_1]+\tfrac{1}{2}e^2v_0^2A'_\mu A'^\mu+\tfrac{1}{2}e^2A'_\mu A'^\mu\phi''^2_1+e^2A'_\mu A'^\mu v_0\phi''_1$$
$$-\lambda v_0^2\phi''^2_1-\lambda v_0\phi''^3_1-\tfrac{\lambda}{4}\phi''^4_1+\mathcal{L}(v_0)+o(\Lambda)$$

因为 $\phi'_2=-\Lambda(\phi''_1+a)$ 中含有无穷小量 Λ，所以 Lagrangian 中所有含 ϕ'_2 的项都等于零，真是太好了！这样，就消去了混合项 $-eA_\mu v_0\partial^\mu\phi'_2+eA_\mu[\phi'_2\partial^\mu\phi'_1-\phi'_1\partial^\mu\phi'_2]$.

3.1.2.2 非 Abel 情形

其实，不论 Abel 还是非 Abel，规范变换都可分为整体规范变换和局域规范变换。只不过为节约篇幅，我们没有展开讨论 Abel 整体对称破缺，而只讨论了 Abel 局域对称破缺。

（1）非 Abel 整体对称破缺

Lagrangian 仍可写为 $\mathcal{L}=\partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi-m^2\phi^+\phi-\lambda(\phi^+\phi)^2$，它在整体 SU(2) 变换 $\phi\to\phi'=\exp[T_a\ \phi$ 下是不变的。

极值点方程为$\frac{\partial V}{\partial \phi}=\frac{\partial}{\partial \phi}[m^2\phi^+\phi+\lambda(\phi^+\phi)^2]=(m^2+2\lambda\phi^+\phi)\phi^+=0\Rightarrow m^2+2\lambda\phi^+\phi=0$，且

$\lambda>0, m^2<0$ 时有稳定解$\phi^+\phi=-\frac{m^2}{2\lambda}=a^2$

与整体 U(1)变换$\phi\to\phi'=\exp[i\Lambda]\phi$相比，这些似乎完全一样，其实不然。对于 Abel 情形，

$\phi=\frac{\phi_1+i\phi_2}{\sqrt{2}}$，$\phi_1,\phi_2$为实标量场，$\phi^+\phi=\frac{1}{2}(\phi_1^2+\phi_2^2)=a^2$为圆；选择一个真空态

$\langle\phi_1\rangle=v_0=\sqrt{2}a$，$\langle\phi_2\rangle=0$，就失去一个方向的对称性，产生一个 Goldstone 粒子。

但对于非 Abel 情形：

$$\phi=\frac{\chi_4+i\chi_k\sigma^k}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\chi_4\begin{pmatrix}1&\\&1\end{pmatrix}+i\chi_1\begin{pmatrix}&1\\1&\end{pmatrix}+i\chi_2\begin{pmatrix}&-i\\i&\end{pmatrix}+i\chi_3\begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\chi_4+i\chi_3&\chi_2+i\chi_1\\-\chi_2+i\chi_1&\chi_4-i\chi_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\chi_2+i\chi_1\\\chi_4-i\chi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\phi_1\\\phi_2\end{pmatrix}$$

即$\phi_1=\frac{\chi_2+i\chi_1}{\sqrt{2}},\phi_2=\frac{\chi_4-i\chi_3}{\sqrt{2}}$均为复标量场。

$$\phi^+\phi=\begin{pmatrix}\phi_1^+&\phi_2^+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\\phi_2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\chi_2-i\chi_1&\chi_4+i\chi_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi_2+i\chi_1\\\chi_4-i\chi_3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}(\chi_1^2+\chi_2^2+\chi_3^2+\chi_4^2)=a^2$$

这不再是圆，而是超球面（王正行《简明量子场论》）！选择一个真空态$\langle\chi_4\rangle=v_0=\sqrt{2}a$，

$\langle\chi_1\rangle=\langle\chi_2\rangle=\langle\chi_3\rangle=0$，就失去 3 个方向的对称性，这将产生 3 个 Goldstone 粒子！

当然，具体怎么产生，那还是要做平移变换$\phi\to\phi'+a$，即

$$\phi=\frac{\chi_4+i\chi_k\sigma^k}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\frac{\chi_4'+i\chi_k'\sigma^k+\sqrt{2}a}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

或$\phi-a=\frac{\chi_4'+i\chi_k'\sigma^k}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\chi_2'+i\chi_1'\\\chi_4'-i\chi_3'\end{pmatrix}$.

然后将平移变换代入 Lagrangian，看有无质量项（场的二次项$\phi^2,A_\mu A^\mu$等）产生与消失，来判定谁有质量，谁无质量。其实不用算也能猜到。根据前几节讨论，哪个场平移变换前真空期望值非零，相应场变换后就有质量；哪个场变换前真空期望值为零，相应场变换后无质量——或说具有零质量。选择$\langle\chi_4\rangle=v_0=\sqrt{2}a$，$\langle\chi_1\rangle=\langle\chi_2\rangle=\langle\chi_3\rangle=0$，那么肯定$\chi_4'$有平方项（对应 Higgs 粒子质量项），而$\chi_1',\chi_2',\chi_3'$无平方项（对应零质量 Goldstone 粒子质量项）。

（2）非 Abel 局域对称破缺

与 Abel 局域对称破缺完全类似，此处不再展开，感兴趣可参考裘忠平《现代量子场论导引》。这里只做一小结：

第一，有质量项相当于有质量，没质量项相当于零质量。通过变换使 a 的质量项产生，b 的质量项消失，就说 b 吃掉了 a. 这种通过平移变换来转移质量项的把戏，就称为 Higgs 机制。

第二，单独一个实标量场不产生 Goldstone 粒子；复标量场或两个及以上实标量场整体对称破缺产生 Goldstone 粒子，但没人吃它；局域对称破缺因为引入了规范场，Goldstone 粒子就被规范场吃掉，规范场因此获得质量。

第三，两个复标量场（或四个实标量场）产生一个 Higgs，三个 Goldstone；SU(2)规范场有三个生成元，吃掉三个 Goldstone，还剩一个 Higgs，所以 Higgs 是规范场吃掉 Goldstone 后的剩余效应。Higgs 机制颇像马克思剩余价值学说。复标量场就像工人，规范场就像资本家，Higgs 就像工资。工人创造的价值大部分都被资本家通过“平移变换”拿走了。

第 2 步　构造轻子场的 Lagrangian（70 分）

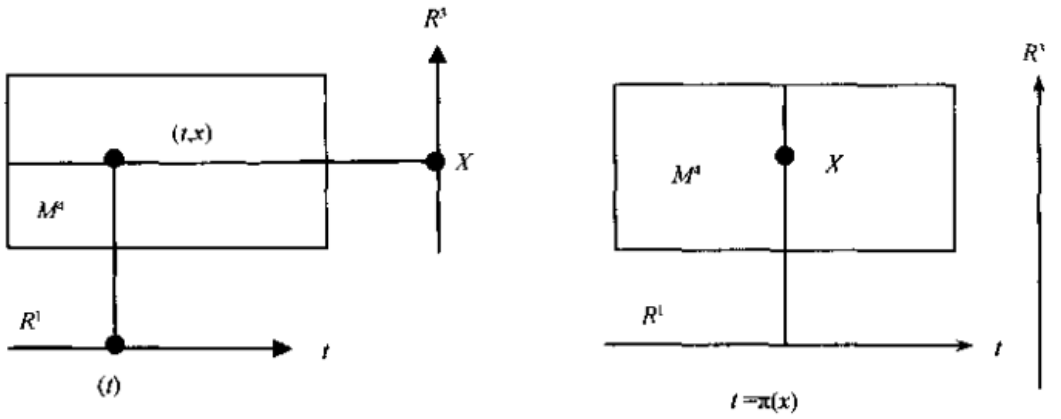
规范场的质量问题解决了，接下来就好办了。下面，我们仿照 QED、QCD 做法，构造规范不变的弱作用 Lagrangian. 为了不把事情搞得过于复杂，我们先不考虑夸克，只构造轻子的 Lagrangian.

3.2.1　弱超荷

根据 3.0.3 节分析，SU(2)群不能令人满意地描述所有弱作用过程，中间 Boson 理论仍然只是低能有效理论。那么，同时也适用于高能过程的弱作用的基本理论在哪里呢？

我们在《普通物理》课程学过，电流在它周围产生磁场。但是，电流是电荷的运动，而物体静止还是运动取决于参考系，在一个参考系看到了磁场，到了另一参考系可能只有电场。Einstein 还是个小毛孩的时候就想，如果我能追上光子，我就能看到停滞不前的电磁场。长大后，他知道从一个参考系到另一参考系的变换是 Galileo 变换，就把它用于电磁场。但他发现电磁场不符合 Galileo 变换。根据矛盾律，两个自相矛盾的理论不能同真，其中必有一假。那么是 Galileo 错了还是 Maxwell 错了？Einstein 认为，电磁学有坚实的实验基础，不可能错；Galileo 变换只是先验的假设。于是问题变成，电磁场的参考系变换应该是什么形式？当时有个物理学家叫 Lorentz，他提出过 Lorentz 收缩理论。Einstein 计算后发现，这个 Lorentz 变换刚好是他要找的正确的电磁场满足的参考系变换。

与 Galileo 变换的时间与空间相互独立不同，Lorentz 变换将时间和空间联系起来。Einstein 的老师 Minkowski 建议将时间和空间这两种东西统一为一种，叫做时空。时空统一之前的 Newton 流形（流形就是流变的形状，也可认为是某种空间。空间未必是三维空间，也可以是色空间、味空间、自旋空间、同位旋空间等等）只适用于低速世界，时空统一之后的 Minkowski 流形却同时适用于低速和高速世界（见 Penrose《通向实在之路》、桂起权《规范场论的哲学探究》）：



左图：Aristotle 时空为时间与空间直积；

右图：Galileo 时空是时间为底空间，空间为纤维的纤维丛

我们也许能从上面的例子得到启发。Lie 群既是群又是微分流形。SU(2)群流形只适用于低能，也许它和谁交织在一起所得的流形就能描述高能弱作用了呢？

Newton 统一了天体的运动和地面物体的运动，Maxwell 统一了电和磁，Einstein 统一了低速世界和高速世界。Kaluza-Klein 试图在 5 维统一引力和电磁力但不成功。但是，Glashow，Salam 和 Weinberg 成功统一了电磁力和弱力！下面，我们就看看这两种力怎么搅乎到一块的。

虽然 SU(2)描述弱作用有缺陷，但弱作用与电磁作用有很多相似之处，似乎二者可以统一。要同时描述两种作用，那么规范群必定比 SU(2)大。规范群可以是某个单群，但 SU(3)太大了，生成元有 8 个，你能找出 8 种胶子，但能找出 8 种电磁+弱作用媒介子吗？想想就头大啊。

其实，扩大群的最简单方法是将两个群直积。既然 U(1)能完美描述电磁作用，SU(2)能描述一部分弱作用，那么将两个群直积后所得 $SU(2)\otimes U(1)$ 应该能同时描述两种作用吧。但这里有个问题需解决：电荷 Q 是 $U(1)_Q$ 的守恒荷，弱同位旋 T_1,T_2,T_3 是 $SU(2)_L$ 的守恒荷，但 Q 并非 $SU(2)_L\otimes U(1)_Q$ 的守恒荷，因为 Q 与 T_1,T_2 不对易。下面，我们就来证明这一点。

3.0.3 节，我们得到

$$T_1=Q_1=\frac{1}{2}\int d^3x(\nu_{eL}^+e_L+e_L^+\nu_{eL})\,,\quad T_2=Q_2=-\frac{i}{2}\int d^3x(\nu_{eL}^+e_L-e_L^+\nu_{eL})$$

$$T_3=Q_3=\frac{1}{2}\int d^3x(\nu_{eL}^+\nu_{eL}-e_L^+e_L)$$

$$T_+=T_1+iT_2=\int d^3x\nu_{eL}^+e_L\,,\quad T_-=T_1-iT_2=\int d^3xe_L^+\nu_{eL}$$

从 3.0.1 节电磁流的定义可得守恒荷

$$Q=\int j^0d^3x=-\int d^3x\bar{\psi}\gamma^0\psi=-\int d^3x\psi^+\psi=-\int d^3x\psi^+(P_L+P_R)\psi=-\int d^3x\psi^+(P_L^2+P_R^2)\psi$$

$$=-\int d^3x\psi^+P_LP_L\psi-\int d^3x\psi^+P_RP_R\psi=-\int d^3x(P_L\psi^+)(P_L\psi)-\int d^3x(P_R\psi^+)(P_R\psi)$$

$$=-\int d^3x(e_L^+e_L+e_R^+e_R)$$

其中已记 $e_L=P_L\psi,e_R=P_R\psi$.

根据 Fermi 场反对易关系

$$\{\psi_i^+(x),\psi_j(x')\}=\delta_{ij}\delta^3(x-x')\,,\quad \{\psi_i(x),\psi_j(x')\}=\{\psi_i^+(x),\psi_j^+(x')\}=0$$

可得生成元对易关系（胡瑶光《规范场论》、程大培《Gauge Theory Of Elementary Particle Physics》）

$$[T_+,T_-]=[\int d^3x\nu_{eL}^+(x)e_L(x),\int d^3x'e_L^+(x')\nu_{eL}(x')]$$
$$=\int d^3x\int d^3x'[\nu_{eL}^+(x)e_L(x)e_L^+(x')\nu_{eL}(x')-e_L^+(x')\nu_{eL}(x')\nu_{eL}^+(x)e_L(x)]$$
$$=\int d^3x\int d^3x'[\nu_{eL}^+(x)\{e_L^+(x'),e_L(x)\}\nu_{eL}(x')-e_L^+(x')\{\nu_{eL}^+(x),\nu_{eL}(x')\}e_L(x)]$$
$$-\int d^3x\int d^3x'[\nu_{eL}^+(x)e_L^+(x')e_L(x)\nu_{eL}(x')+e_L^+(x')\nu_{eL}^+(x)\nu_{eL}(x')e_L(x)]$$
$$=\int d^3x\int d^3x'[\nu_{eL}^+(x)\nu_{eL}(x')-e_L^+(x')e_L(x)]\delta^3(x-x')$$
$$-\int d^3x\int d^3x'[\cancel{\nu_{eL}^+(x)e_L^+(x')e_L(x)\nu_{eL}(x')}+\cancel{\nu_{eL}^+(x)e_L^+(x')e_L(x)\nu_{eL}(x')}]$$
$$=\int d^3x[\nu_{eL}^+(x)\nu_{eL}(x)-e_L^+(x)e_L(x)]=2T_3$$

注意反对易来自全同 Fermion 波函数交换反对称，电子与中微子属于完全不同粒子，可分辨，它们的场之间对易（张成兄 Comments）。

同理可得

$$[Q,T_3]=[-\int d^3x(e_L^+e_L+e_R^+e_R),\tfrac{1}{2}\int d^3x'(\nu_{eL}^+\nu_{eL}-e_L^+e_L)]=\tfrac{1}{2}\int d^3x\int d^3x'[e_L^+e_L,e_L^+e_L]=0$$

$$[Q,T_1]=[-\int d^3x(e_L^+e_L+e_R^+e_R),\tfrac{1}{2}\int d^3x'(\nu_{eL}^+e_L+e_L^+\nu_{eL})]$$
$$=-\tfrac{1}{2}\int d^3x\int d^3x'[e_L^+(x)e_L(x),\nu_{eL}^+(x')e_L(x')+e_L^+(x')\nu_{eL}(x')]$$
$$=-\tfrac{1}{2}\int d^3x\int d^3x'[e_L^+(x)e_L(x)\nu_{eL}^+(x')e_L(x')-\nu_{eL}^+(x')e_L(x')e_L^+(x)e_L(x)]$$
$$-\tfrac{1}{2}\int d^3x\int d^3x'[e_L^+(x)e_L(x)e_L^+(x')\nu_{eL}(x')-e_L^+(x')\nu_{eL}(x')e_L^+(x)e_L(x)]$$
$$=-\tfrac{1}{2}\int d^3x\int d^3x'\nu_{eL}^+(x')[e_L^+(x)e_L(x)e_L(x')-e_L(x')e_L^+(x)e_L(x)]$$
$$-\tfrac{1}{2}\int d^3x\int d^3x'\nu_{eL}(x')[e_L^+(x)e_L(x)e_L^+(x')-e_L^+(x')e_L^+(x)e_L(x)]$$
$$=-\tfrac{1}{2}\int d^3x\int d^3x'\nu_{eL}^+(x')[\cancel{-e_L^+(x)e_L(x')e_L(x)}-\{e_L^+(x),e_L(x')\}e_L(x)+\cancel{e_L^+(x)e_L(x')e_L(x)}]$$
$$-\tfrac{1}{2}\int d^3x\int d^3x'\nu_{eL}(x')[e_L^+(x)\{e_L^+(x'),e_L(x)\}-\cancel{e_L^+(x)e_L^+(x')e_L(x)}+\cancel{e_L^+(x)e_L^+(x')e_L(x)}]$$
$$=\tfrac{1}{2}\int d^3x\int d^3x'\nu_{eL}^+(x')\delta^3(x-x')e_L(x)-\tfrac{1}{2}\int d^3x\int d^3x'\nu_{eL}(x')e_L^+(x)\delta^3(x-x')$$
$$=\tfrac{1}{2}\int d^3x[\nu_{eL}^+(x)e_L(x)-\nu_{eL}(x)e_L^+(x)]=\tfrac{1}{2}\int d^3x[\nu_{eL}^+(x)e_L(x)-e_L^+(x)\nu_{eL}(x)]$$
$$=iT_2=i\varepsilon_{312}T_2=[T_3,T_1]$$

所以 $[Q,T_1]=[T_3,T_1]\Rightarrow[Q-T_3,T_1]=0$

由此，可定义 $Y=\alpha(Q-T_3)$，它与 $SU(2)\otimes U(1)$ 所有生成元都对易。

1953~1956 年，西岛、Gell-Mann 发现，属于同一组同位旋多重态的强子，其电荷 Q，同位旋第三分量 I3，重子数 B，奇异数 S 之间有如下经验公式

$$Q = I_3 + \frac{B+S}{2} = I_3 + \frac{Y}{2}$$

此即 Gell-Mann-西岛关系，其中 Y=B+S 称为超荷。若 $\alpha = 2$，则此处定义的 Y 与 Gell-Mann-西岛关系“一致”，为区分，此处的 Y 称为弱超荷。

对于 $\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + \bar{\psi}_R i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R$ 及 U(1)变换 $\psi \to \psi' = e^{-ig\omega F_0}\psi \approx \psi - ig\omega F_0 \psi$，守恒流及守恒荷为

$$j_F^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_L)} \frac{\delta \psi_L}{\delta(g\omega)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_R)} \frac{\delta \psi_R}{\delta(g\omega)} = \bar{\psi}_L \gamma^\mu F_0 \psi_L + \bar{\psi}_R \gamma^\mu F_0 \psi_R$$

$$F = \int j_F^0 d^3x = \int d^3x(\bar{\psi}_L \gamma^0 F_0 \psi_L + \bar{\psi}_R \gamma^0 F_0 \psi_R) = \int d^3x(\psi_L^+ F_0 \psi_L + \psi_R^+ F_0 \psi_R)$$

而从 $Q = -\int d^3x(e_L^+ e_L + e_R^+ e_R)$，$T_3 = \frac{1}{2}\int d^3x(\nu_{eL}^+ \nu_{eL} - e_L^+ e_L)$ 及 $Y = 2(Q - T_3)$ 可得

$$Y = -2\int d^3x(e_L^+ e_L + e_R^+ e_R) - \int d^3x(\nu_{eL}^+ \nu_{eL} - e_L^+ e_L) = -\int d^3x(\nu_{eL}^+ \nu_{eL} + e_L^+ e_L) - 2\int d^3x e_R^+ e_R$$
$$= -\int d^3x \psi_L^+ \psi_L - 2\int d^3x \psi_R^+ \psi_R = Y_L \int d^3x \psi_L^+ \psi_L + Y_R \int d^3x \psi_R^+ \psi_R$$

与守恒荷比较，令 Y=F，F_0=1，则 Y_L=-1，Y_R=-2.

为便于以后分析，设 $\psi_L = L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix}, \psi_R = l_R$（左手二重态、右手单态），则

$$\frac{Y_L}{2} = (Q - T_3)_L = \begin{pmatrix} Q_\nu \\ Q_{eL} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} T_{3\nu} \\ T_{3eL} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{Y_R}{2} = (Q - T_3)_R = Q_{eR} - T_{3eR} = -1 - 0 = -1$$

注意二重态时 T_3 对应 Pauli 矩阵 σ_3，单态时 T=T3=0（胡瑶光《规范场论》）.

根据上述分析，可定义弱超流

$$j_Y^\mu = Y_L \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L + Y_R \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R$$

与 $Q = T_3 + \frac{Y}{2}$ 对应，电磁流可表示为 $j_{em}^\mu = j_3^\mu + \frac{1}{2} j_Y^\mu$

由此可知，如果选取 $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$（而非 $SU(2)_L \otimes U(1)_Q$），并假定规范变换为

$$\psi \to \psi' = U\psi, \quad U = U_2(\omega)U_1(\omega) = \exp[-ig\omega_i \frac{\sigma_i}{2}]\exp[-ig'\omega \frac{Y}{2}]$$

就有可能实现电弱统一！此处 Y/2 的 1/2 因子是为了与 $Q = T_3 + \frac{Y}{2}$ 取 $T_3 = \frac{\sigma_3}{2}$ 时一致。

3.2.2 规范不变性与原始 Lagrangian 的构造

接下来，我们试着写出电弱统一的 Lagrangian. 为简单，暂不考虑夸克场，且只考虑第一代轻子。照此目标，Lagrangian 应当有轻子场和规范场；又由于规范不变性要求不能有质量项，Lagrangian 还要包含 Higgs（复标量）场。Lagrangian 可写为（金广浩《Elementary Particles And Their Interactions：Concepts and Phenomena》）

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_G+\mathcal{L}_H+\mathcal{L}_l+\mathcal{L}_{lH}$$

其中

（1）$\mathcal{L}_G=-\frac{1}{4}W^i_{\mu\nu}W_i^{\mu\nu}-\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$ 为 $SU(2)_L\otimes U(1)_Y$ 规范场 Lagrangian：

为满足 SU(2)，取 $W^i_{\mu\nu}=\partial_\mu A^i_\nu-\partial_\nu A^i_\mu-g\varepsilon_{ijk}A^j_\mu A^k_\nu$ 为弱同位旋场强张量（类似胶子场）；为满足 U(1)，取 $B_{\mu\nu}=\partial_\mu B_\nu-\partial_\nu B_\mu$ 为弱超荷场强张量（类似电磁场，但不是）。

（2）$\mathcal{L}_H=(D_\mu\phi)^\dagger D^\mu\phi-m^2\phi^+\phi-\lambda(\phi^+\phi)^2$ 为 Higgs 场 Lagrangian：

为满足 U(1)，协变导数应为 $D_{1\mu}=\partial_\mu+ig'B_\mu\frac{Y_H}{2}$；为满足 SU(2)，协变导数应为 $D_{2\mu}=\partial_\mu+ig\vec{A}_\mu\frac{\vec{\sigma}_i}{2}$；为了 $SU(2)_L\otimes U(1)_Y$，协变导数为 $D_\mu=\partial_\mu+igA^i_\mu\frac{\sigma_i}{2}+ig'B_\mu\frac{Y_H}{2}$

为使 SU(2)的 3 个生成元破缺，复标量场的实分量总数不能少于 4. 为此，取 $\phi=\begin{pmatrix}\varphi_+\\ \varphi_0\end{pmatrix}$，其中 φ_+ 为带电复标量场，φ_0 为中性复标量场（胡瑶光《规范场论》）。根据 $\frac{Y}{2}=Q-T_3$，得

$$\frac{Y_H}{2}=(Q-T_3)_H=\begin{pmatrix}Q_{\varphi+}\\ Q_{\varphi0}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}T_{3\varphi+}\\ T_{3\varphi0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

由此可见 $Y_H=1$. 注意二重态对应的 T3 与前面算过的 Y_L 一致，都是 1/2,-1/2.

（3）$\mathcal{L}_l=\bar{\psi}_L i\gamma^\mu D^L_\mu\psi_L+\bar{\psi}_R i\gamma^\mu D^R_\mu\psi_R$ 为轻子场 Lagrangian：

其中 $D^L_\mu=\partial_\mu+igA^i_\mu\frac{\sigma_i}{2}+ig'B_\mu\frac{Y_L}{2}$，$D^R_\mu=\partial_\mu+ig'B_\mu\frac{Y_R}{2}$

（4）$\mathcal{L}_{lH}=-C_e[\bar{\psi}_R(\phi^\dagger\psi_L)+(\bar{\psi}_L\phi)\psi_R]$ 为轻子场与 Higgs 场的 Yukawa 耦合 Lagrangian：

Yukawa1935 年提出核子间通过交换 π 介子发生相互作用（王正行《简明量子场论》），其

Lagrangian 形如 $\mathcal{L}_Y \sim -\bar{\psi}\psi\phi$（Peskin《An introduction to Quantum Field Theory》），所以电弱统一理论中两个旋量场与一个标量场直接相乘这种耦合也称为 Yukawa 耦合。此处只是将 π 介子换成 Higgs 粒子。耦合常数 C_e 将在下一小节确定。

3.2.3 对称性破缺与电磁场的出现

在 $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ 对称下，只有弱同位旋场与弱超荷场，没有电磁场。要产生电磁场，对称性必须破缺，即 $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \to U(1)_Q$. 破缺后只有电磁对称性。这是任何一个新理论必须的检验：低能极限与原有理论一致，如 Lorentz 变换在远小于光速的近似下回到 Galileo 变换；广义相对论在引力场很弱时过渡到万有引力定律。

3.2.3.1 对称破缺与 Lagrangian 的变化

如 3.1 节所述，SU(2) 要求 Higgs 复标量场 $\phi^\dagger\phi = -\frac{m^2}{2\lambda} = \frac{v_0^2}{2} = a^2$. 选取真空态 $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ v_0\end{pmatrix} = \vec{v}$，则

$T_3|\phi\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ v_0\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{v_0}{\sqrt{2}} \neq 0$，$Y_H|\phi\rangle = \begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ v_0\end{pmatrix} = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \neq 0$，但

$Q|\phi\rangle = (T_3 + \frac{Y_H}{2})|\phi\rangle = 0$，所以对称破缺后保留下一种 U(1)对称性，其生成元为 Q（胡瑶光《规范场论》）。这就解释了为什么破缺后只赋予 W+,W-质量，而电磁场是对称破缺后幸存的无质量规范场（郑汉青《量子场论》）。因为别人都吃了 Goldstone 粒子，电磁场却“食无求饱、居无求安”，废寝忘食。你们这些弱作用快递员只传递到原子核范围就敷衍了事，我却因担心相互作用不能传到无穷远而惴惴不安，两脚踏翻尘世路，一肩担尽古今愁。先天下之忧而忧，后天下之食而食。马克思：如果我们选择了最能为人类谋福利的事业，那么重担就不能把我们压倒，因为这是为全世界而献身……我们的事业将是默默地，但永恒发挥作用地传递下去。

在 3.1 节，我们对整体做平移变换 $\phi = \phi' + a$，对局域做幺正变换 $\phi'' + a = e^{i\Lambda}(\phi' + a)$，联在一起就是 $\phi = e^{-i\Lambda}(\phi'' + a)$；本小节我们可做类似变换（金广浩《Elementary Particles And Their Interactions：Concepts and Phenomena》）

$$\phi=\exp[\frac{i}{|\vec{v}|}\sum_i\xi^iT_i]\begin{pmatrix}0\\ \phi''+a\end{pmatrix}$$

其中$\phi''=\frac{H}{\sqrt{2}}$，指数上的常数因子$|\vec{v}|$是为了保证$\xi$与$\phi$有相同量纲（曹昌祺《量子非阿贝尔规范场论》）。不同书 e 指数上可能差负号，这只是习惯问题、历史问题，而非物理问题。

设$S=\exp[-\frac{i}{|\vec{v}|}\sum_i\xi^iT_i]$，在此幺正变换下，各场的变换为（金广浩《Elementary Particles And Their Interactions：Concepts and Phenomena》）

$$\phi'=S\phi=SS^{-1}\vec{v}(v_0\to v_0+H)=\exp[-\frac{i}{|\vec{v}|}\sum_i\xi^iT_i]\exp[\frac{i}{|\vec{v}|}\sum_i\xi^iT_i]\begin{pmatrix}0\\ \phi''+a\end{pmatrix}=\frac{v_0+H}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$\psi_L'=S\psi_L$，$\psi_R'=\psi_R$

$B_\mu'=B_\mu$，$A_\mu'^i=SA_\mu^iS^\dagger+\frac{i}{g}(\partial_\mu S)S^\dagger$（与 2.1 节 i 处差负号）

经此变换后，Lagrangian 中$\phi\to\frac{v_0+H}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，其余场量换成带撇的（郑汉青《量子场论》）。为书写方便，可将所有撇去掉，将那些去撇后的场量理解为幺正变换后的场即可（胡瑶光《规范场论》）。这样，$\mathcal{L}_G$与$\mathcal{L}_l$不变，Lagrangian 形式只$\mathcal{L}_H$和$\mathcal{L}_{lH}$改变一小部分：

$$\mathcal{L}_H=(D_\mu\phi)^\dagger D^\mu\phi-m^2\phi^+\phi-\lambda(\phi^+\phi)^2\to(D_\mu\phi')^+D^\mu\phi'-m^2\phi'^+\phi'-\lambda(\phi'^+\phi')^2$$

$$\mathcal{L}_{lH}=-C_e[\bar{\psi}_R(\phi^\dagger\psi_L)+(\bar{\psi}_L\phi)\psi_R]\to-C_e[\bar{\psi}_R(\phi'^\dagger\psi_L)+(\bar{\psi}_L\phi')\psi_R]$$

其中$\phi'=\frac{v_0+H}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

最大的好消息是，$\phi=\exp[\frac{i}{|\vec{v}|}\sum_i\xi^iT_i]\begin{pmatrix}0\\ \phi''+a\end{pmatrix}$的 e 指数被自己的逆变换$\exp[-\frac{i}{|\vec{v}|}\sum_i\xi^iT_i]$消去了，所以$S=\exp[-\frac{i}{|\vec{v}|}\sum_i\xi^iT_i]$纯粹是个唬人的摆设（纸老虎），后面求 Feynman 规则的所有计算都与S的具体形式无关。

3.2.3.2 Weinberg 转动与电磁场的出现

前面说了，$U(1)_Y$并不对应电磁场，要等对称破缺后才会出现电磁场。现在，选取真空态

$|\phi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\v_0\end{pmatrix}=\vec{v}$ 后，对称性破缺了，原 Lagrangian 中 $\phi\to\frac{v_0+H}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，我们就是要在新的 Lagrangian 中“凑”出电磁场来。

注意到 $\phi'^{\dagger}=\frac{v_0+H}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}$，$\sigma_2^{\dagger}=\begin{pmatrix}&-i\\i&\end{pmatrix}^{\dagger}=\begin{pmatrix}&-i\\i&\end{pmatrix}=\sigma_2$，$Y_H=1$，有

$$\mathcal{L}_H\to(D_\mu\phi')^{+}D^\mu\phi'-m^2\phi'^{+}\phi'-\lambda(\phi'^{+}\phi')^2$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}(\partial_\mu-igA_\mu^i\frac{\sigma_i}{2}-ig'B_\mu\frac{1}{2})\frac{v_0+H}{\sqrt{2}}(\partial^\mu+igA^{j\mu}\frac{\sigma_j}{2}+ig'B^\mu\frac{1}{2})\frac{v_0+H}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$-m^2(\frac{v_0+H}{\sqrt{2}})^2\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}-\lambda(\frac{v_0+H}{\sqrt{2}})^4[\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}]^2$$

$$=\frac{1}{2}[\partial_\mu H-ig'B_\mu\frac{v_0+H}{2}][\partial^\mu H+ig'B^\mu\frac{v_0+H}{2}]+g^2(\frac{v_0+H}{\sqrt{2}})^2\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}A_\mu^i\frac{\sigma_i}{2}A^{j\mu}\frac{\sigma_j}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}(\partial_\mu-ig'B_\mu\frac{1}{2})\frac{v_0+H}{\sqrt{2}}igA^{j\mu}\frac{\sigma_j}{2}\frac{v_0+H}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}(-igA_\mu^i\frac{\sigma_i}{2})\frac{v_0+H}{\sqrt{2}}(\partial^\mu+ig'B^\mu\frac{1}{2})\frac{v_0+H}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}m^2(v_0+H)^2-\frac{\lambda}{4}(v_0+H)^4$$

$$=\frac{1}{2}(\partial_\mu H)\partial^\mu H+\frac{1}{8}g'^2B_\mu B^\mu(v_0+H)^2+\frac{1}{8}g^2(v_0+H)^2\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_\mu^3 & A_\mu^1-iA_\mu^2\\A_\mu^1+iA_\mu^2 & -A_\mu^3\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$+\frac{1}{4}ig(v_0+H)\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}[(\cancel{\partial_\mu H}-ig'B_\mu\frac{v_0+H}{2})A^{j\mu}\sigma_j-A_\mu^i\sigma_i(\cancel{\partial^\mu H}+ig'B^\mu\frac{v_0+H}{2})]\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}m^2(v_0^2+H^2+2v_0H)-\frac{\lambda}{4}(v_0^4+4v_0^3H+6v_0^2H^2+4v_0H^3+H^4)$$

$$=\frac{1}{2}(\partial_\mu H)\partial^\mu H+\frac{1}{8}g'^2B_\mu B^\mu(v_0+H)^2+\frac{1}{8}g^2(v_0+H)^2\begin{pmatrix}A_\mu^1+iA_\mu^2 & -A_\mu^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^{1\mu}-iA^{2\mu}\\-A^{3\mu}\end{pmatrix}$$

$$+\frac{1}{4}gg'B^\mu(v_0+H)^2\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_\mu^3 & A_\mu^1-iA_\mu^2\\A_\mu^1+iA_\mu^2 & -A_\mu^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}(m^2+3\lambda v_0^2)H^2-(m^2+\lambda v_0^2)v_0H-\lambda v_0H^3-\frac{\lambda}{4}H^4-\frac{1}{4}v_0^2(2m^2+\lambda v_0^2)$$

$$\xrightarrow{\lambda v_0^2=-m^2}\frac{1}{2}(\partial_\mu H)\partial^\mu H+\frac{1}{8}g'^2B_\mu B^\mu(v_0+H)^2+\frac{1}{8}g^2(v_0+H)^2[(A_\mu^1)^2+(A_\mu^2)^2+(A_\mu^3)^2]$$

$$-\frac{1}{4}(v_0+H)^2gg'B^\mu A_\mu^3+m^2H^2-\lambda v_0H^3-\frac{\lambda}{4}H^4-\frac{1}{4}m^2v_0^2$$

$$=\frac{1}{2}(\partial_\mu H)\partial^\mu H+m^2H^2-\lambda v_0H^3-\frac{\lambda}{4}H^4-\frac{1}{4}m^2v_0^2$$

$$+\frac{1}{8}(v_0+H)^2g^2(A_\mu^1+iA_\mu^2)(A^{1\mu}-iA^{2\mu})+\frac{1}{8}(v_0+H)^2(gA_\mu^3-g'B_\mu)^2$$

由此式可见，A_μ^i, B_μ 都是实场，只能描述中性粒子（胡瑶光《规范场论》）。所以，应引入复场

$$W_\mu^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 - iA_\mu^2), W_\mu^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 + iA_\mu^2)$$

另外，该式存在交叉项 $B^\mu A_\mu^3$，若引入

$$Z_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}(gA_\mu^3 - g'B_\mu)$$

则可消除：

$$\mathcal{L}_H = \frac{1}{2}(\partial_\mu H)\partial^\mu H + m^2 H^2 - \lambda v_0 H^3 - \frac{\lambda}{4}H^4 - \frac{1}{4}m^2 v_0^2$$
$$+\frac{1}{4}(v_0 + H)^2 g^2 W_\mu^- W_+^\mu + \frac{1}{8}(v_0 + H)^2 (g^2 + g'^2) Z_\mu Z^\mu$$
$$= \frac{1}{2}(\partial_\mu H)\partial^\mu H - \frac{1}{2}\sqrt{-2m^2}^2 H^2 + (\frac{1}{2}gv_0)^2 W_\mu^- W_+^\mu + \frac{1}{2}[\frac{1}{2}v_0(g^2 + g'^2)]^2 Z_\mu Z^\mu + \cdots$$

这表明

$$m_H = \sqrt{-2m^2}, m_W = \frac{1}{2}gv_0, m_Z = \frac{1}{2}v_0(g^2 + g'^2)$$

注意 Z 有对称性，所以化为 $\frac{1}{2}m_Z^2 Z^2$ 形式抽取 m_Z；W+，W-之间无对称性，故化为 $m_W^2 W_+ W_-$ 形式抽取质量 m_W，无 1/2 因子；H 场在 $\lambda > 0, m^2 < 0$ 才有稳定真空，故根号下是 $\sqrt{-2m^2}$，而不能是 $\sqrt{2m^2}$.

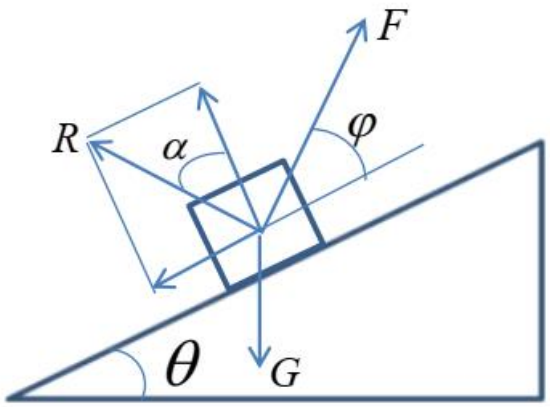
上述 Lagrangian 出现了 4 个有质量粒子，其中一个 Higgs 粒子，2 个带电 W 粒子，1 个中性 Z 粒子。那么，电磁场在哪呢？为啥没有它的质量项呢？没有就对了，电磁场本来就没质量嘛。其实不是没有，而是等于零，即质量项 $A_\mu A^\mu$ 系数为零~~

当然，在 Lagrangian 中平白无故地加上这么一项没啥意义，我们要寻找一个恰当的 A_μ 定义，使 $A_\mu A^\mu$ 项系数恰好为零！Weinberg 认为，A_μ^1, A_μ^2 凑在一起生了个龙凤胎 $W_\mu^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 - iA_\mu^2), W_\mu^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 + iA_\mu^2)$，这让结婚后只生了一个 $Z_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}(gA_\mu^3 - g'B_\mu)$ 的 A_μ^3, B_μ 夫妇分外眼红，基于对称美，他们想给 Z 找个伴

$Z'_\mu=\frac{1}{\sqrt{g^2+g'^2}}(gA_\mu^3+g'B_\mu)$．伴儿好找，问题是，$Z'_\mu$有什么物理意义呢？它是不是我们上穷碧落下黄泉，众里寻他千百度的电磁场A_μ呢？反正$A_\mu A^\mu$系数为零，A_μ怎么定义似乎都行。比如，某个 2b 青年，非要定义成$Z''_\mu=\frac{1}{\sqrt{g^2+g'^2}}(gA_\mu^3+2g'B_\mu)$．那你就算吧，算到满面灰尘烟火色，双鬓向人无再青。你要是选择地心说，那就本轮+均轮大圈套小圈、一圈圈套吧，只要自己别转晕乎了就行。

如果选择“对称”的定义，不仅看着美，而且算着简单，多好。

其实，Z 和 A 的定义可以再对称、再简单些。看着又是 gg′又是根号的，多复杂。怎么简化呢？话说有一天，Weinberg 去爬山。那天下着小雨，路有点滑。他看到两个人骑着车在斜坡上行驶，骑山地车那个人的车轮只滚不滑，骑普通车那个人的车轮连向前滚再向后滑。这究竟为啥呢？仔细观察发现，山地车外胎有很多深陷的凹纹，普通车则没有。Weinberg 立即想到前几天辅导过一个高一孩子一道力学题：



如图，摩擦因数$\mu=\frac{\sqrt{3}}{3}$，斜面$\theta=45^\circ$，问：（1）物体能否静止在斜面上？（2）若不能，今施加一斜向上的力使物体向上运动，则为φ多大时，F 最小？

解：（1）$\mu=\frac{\sqrt{3}}{3}=\tan\alpha<\tan 45^0$，摩擦角小于斜面倾角，故不能静止。

（2）物体上滑时有向下的摩擦。设摩擦力与支持力合成全反力 R，恰好平衡时有

$$\begin{cases}F\cos\varphi-R\sin\alpha=G\sin\theta\\F\sin\varphi+R\cos\alpha=G\cos\theta\end{cases}\Rightarrow F=\frac{G\sin(\theta+\alpha)}{\cos(\varphi-\alpha)},R=\frac{G\cos(\theta+\varphi)}{\cos(\varphi-\alpha)}$$

设$G_{\parallel}=G\cos\theta,G_{\perp}=G\sin\theta$，当$\varphi=\alpha$时有

$$\begin{cases} R = G\cos(\alpha+\theta) = G_\perp\cos\alpha - G_\parallel\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}(G_\perp - \mu G_\parallel) \\ F_{\min} = G\sin(\alpha+\theta) = G_\perp\sin\alpha + G_\parallel\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}(\mu G_\perp + G_\parallel) \end{cases}$$

是不是和 $Z_\mu = \dfrac{1}{\sqrt{g^2+g'^2}}(gA_\mu^3 - g'B_\mu)$，$Z'_\mu = \dfrac{1}{\sqrt{g^2+g'^2}}(gA_\mu^3 + g'B_\mu)$ 很像？耦合常数 g' 就像斜面摩擦系数 μ（物块与斜面耦合，呵呵），中性 Z 就像全反力 R，电磁场 A 就像主动力 F，A_μ^3 就像 $G_\perp$，B_μ 就像 $G_\parallel$. 所以，可以定义

$$\begin{cases} Z_\mu = A_\mu^3\cos\theta_W - B_\mu\sin\theta_W = \dfrac{1}{\sqrt{g^2+g'^2}}(gA_\mu^3 - g'B_\mu) \\ A_\mu = A_\mu^3\sin\theta_W + B_\mu\cos\theta_W = \dfrac{1}{\sqrt{g^2+g'^2}}(g'A_\mu^3 + gB_\mu) \neq \dfrac{1}{\sqrt{g^2+g'^2}}(gA_\mu^3 + g'B_\mu) = Z'_\mu \end{cases}$$

注意为与最小主动力 $F_{\min}$ “一致”，我们没有把 Z'_μ 定义为电磁场，而是将 g, g' 位置互换了。

Weinberg 角 θ_W 就像某种摩擦角 α：

$$c_W \equiv \cos\theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}},\quad s_W \equiv \sin\theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2+g'^2}},\quad t_W \equiv \tan\theta_W = \frac{g'}{g} \Leftrightarrow \tan\alpha = \mu$$

注意不要将 Weinberg 角与 Cabibbo 角混淆。Cabibbo 角是对二代夸克而言的。对轻子，或第一代夸克，仅有 Weinberg 角而无 Cabibbo 角。数值上，$\sin\theta_C \approx 0.23 \approx \sin^2\theta_W$.

为以后方便，我们将 v_0, λ 等都用质量表示出来：

$$v_0 = \frac{2m_W}{g}, \lambda = -\frac{m^2}{v_0^2} = \frac{m_H^2}{2v_0^2} = \frac{g^2 m_H^2}{8m_W^2}, m_W = c_W m_Z$$

3.2.4 用电磁场 A 重新表述 Lagrangian

对称破缺前，A_μ^i, B_μ 并非（低能）实验中观测到的场，无物理意义。对称破缺后，就有了有物理意义的场 $W^\pm, Z^0, A_\mu$. 为了导出 Feynman 规则，需要将 Lagrangian 用 $W^\pm, Z^0, A_\mu$ 重新表示出来。

3.2.4.1 Higgs 部分

由 $m_H=\sqrt{-2m^2}, m_Z=\frac{1}{2}v_0(g^2+g'^2)$， $v_0=\frac{2m_W}{g}, \lambda=\frac{g^2m_H^2}{8m_W^2}, m_W=c_W m_Z$， 得

$$\mathcal{L}_H=\frac{1}{2}(\partial_\mu H)\partial^\mu H+m^2H^2-\lambda v_0H^3-\frac{\lambda}{4}H^4-\frac{1}{4}m^2v_0^2$$
$$+\frac{1}{4}(v_0+H)^2g^2W_\mu^-W_+^\mu+\frac{1}{8}(v_0+H)^2(g^2+g'^2)Z_\mu Z^\mu$$
$$=\frac{1}{2}(\partial_\mu H)\partial^\mu H-\frac{1}{2}m_H^2H^2-\frac{gm_H^2}{4m_W}H^3-\frac{g^2m_H^2}{32m_W^2}H^4-\frac{1}{4}m^2v_0^2$$
$$+\frac{1}{4}(H+\frac{2m_W}{g})^2g^2W_\mu^-W_+^\mu+\frac{1}{8}(H+\frac{2m_W}{g})^2(\frac{gm_Z}{m_W})^2Z_\mu Z^\mu$$
$$=\mathcal{L}_H^0+\mathcal{L}_H^I+\mathcal{L}(v_0)$$

其中 $\mathcal{L}(v_0)=-\frac{1}{4}m^2v_0^2$ 为常数项;

$$\mathcal{L}_H^0=\frac{1}{2}(\partial_\mu H\partial^\mu H-m_H^2H^2)+m_W^2W_\mu^-W_+^\mu+\frac{1}{2}m_Z^2Z_\mu Z^\mu$$

$$\mathcal{L}_H^I=-\frac{gm_H^2}{4m_W}H^3-\frac{g^2m_H^2}{32m_W^2}H^4+\frac{g^2}{4}(H^2+\frac{4m_W}{g}H)W_\mu^-W_+^\mu+\frac{g^2}{8c_W^2}(H^2+\frac{4m_W}{g}H)Z_\mu Z^\mu$$
$$=-\frac{1}{3!}\frac{3gm_H^2}{2m_W}H^3-\frac{1}{4!}\frac{3g^2m_H^2}{4m_W^2}H^4+[gm_WH+\frac{1}{4}g^2H^2]W_\mu^-W_+^\mu$$
$$+\frac{1}{2}\frac{gm_Z}{c_W}[H+\frac{g}{4c_Wm_Z}H^2]Z_\mu Z^\mu$$

3.2.4.2 规范场部分

由 $\begin{cases}W_\mu^+=\frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1-iA_\mu^2)\\ W_\mu^-=\frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1+iA_\mu^2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_\mu^1=\frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^++W_\mu^-)\\ A_\mu^2=\frac{i}{\sqrt{2}}(W_\mu^+-W_\mu^-)\end{cases}$

及 $\begin{cases}Z_\mu=A_\mu^3\cos\theta_W-B_\mu\sin\theta_W\\ A_\mu=A_\mu^3\sin\theta_W+B_\mu\cos\theta_W\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}A_\mu^3\\ B_\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_W & s_W\\ -s_W & c_W\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Z_\mu\\ A_\mu\end{pmatrix}$

$W_{\mu\nu}^i=\partial_\mu A_\nu^i-\partial_\nu A_\mu^i-g\varepsilon_{ijk}A_\mu^jA_\nu^k$， $B_{\mu\nu}=\partial_\mu B_\nu-\partial_\nu B_\mu$

得

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}W^i_{\mu\nu}W_i^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$$

$$= -\frac{1}{4}(\partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu - g\varepsilon_{ijk}A^j_\mu A^k_\nu)(\partial^\mu A_i^\nu - \partial^\nu A_i^\mu - g\varepsilon_{ilm}A_l^\mu A_m^\nu)$$

$$-\frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)(\partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu)$$

$$= \mathcal{L}_G^0 + \mathcal{L}_G^1 + \mathcal{L}_G^2$$

注意到 $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu F^{\mu\nu} - \partial_\nu A_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu F^{\mu\nu} + \partial_\nu A_\mu F^{\nu\mu} = 2\partial_\mu A_\nu F^{\mu\nu}$，有

$$\mathcal{L}_G^0 = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu)(\partial^\mu A_i^\nu - \partial^\nu A_i^\mu) - \frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)(\partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu)$$

$$= -\frac{1}{2}[\partial_\mu A^1_\nu(\partial^\mu A_1^\nu - \partial^\nu A_1^\mu) + \partial_\mu A^2_\nu(\partial^\mu A_2^\nu - \partial^\nu A_2^\mu)]$$

$$-\frac{1}{2}[\partial_\mu A^3_\nu(\partial^\mu A_3^\nu - \partial^\nu A_3^\mu) + \partial_\mu B_\nu(\partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu)]$$

$$= -\frac{1}{2}\partial_\mu\begin{pmatrix}A^1_\nu & A^2_\nu\end{pmatrix}\begin{vmatrix}g^{\mu\rho} & g^{\mu\sigma}\\ g^{\nu\rho} & g^{\nu\sigma}\end{vmatrix}\partial_\rho\begin{pmatrix}A^1_\sigma\\ A^2_\sigma\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\partial_\mu\begin{pmatrix}A^3_\nu & B_\nu\end{pmatrix}\begin{vmatrix}g^{\mu\rho} & g^{\mu\sigma}\\ g^{\nu\rho} & g^{\nu\sigma}\end{vmatrix}\partial_\rho\begin{pmatrix}A^3_\sigma\\ B_\sigma\end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{vmatrix}g^{\mu\rho} & g^{\mu\sigma}\\ g^{\nu\rho} & g^{\nu\sigma}\end{vmatrix}\partial_\mu\begin{pmatrix}W^-_\nu & W^+_\nu\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}^\dagger\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}\partial_\rho\begin{pmatrix}W^+_\sigma\\ W^-_\sigma\end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}g^{\mu\rho} & g^{\mu\sigma}\\ g^{\nu\rho} & g^{\nu\sigma}\end{vmatrix}\partial_\mu\begin{pmatrix}Z_\nu & A_\nu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_W & s_W\\ -s_W & c_W\end{pmatrix}^\dagger\begin{pmatrix}c_W & s_W\\ -s_W & c_W\end{pmatrix}\partial_\rho\begin{pmatrix}Z_\sigma\\ A_\sigma\end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{vmatrix}g^{\mu\rho} & g^{\mu\sigma}\\ g^{\nu\rho} & g^{\nu\sigma}\end{vmatrix}\left[\partial_\mu\begin{pmatrix}W^-_\nu & W^+_\nu\end{pmatrix}\partial_\rho\begin{pmatrix}W^+_\sigma\\ W^-_\sigma\end{pmatrix} + \partial_\mu\begin{pmatrix}Z_\nu & A_\nu\end{pmatrix}\partial_\rho\begin{pmatrix}Z_\sigma\\ A_\sigma\end{pmatrix}\right]$$

$$= -\tfrac{1}{2}(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\nu\rho}g^{\mu\sigma})(\partial_\mu W^-_\nu\partial_\rho W^+_\sigma + \partial_\mu W^+_\nu\partial_\rho W^-_\sigma + \partial_\mu Z_\nu\partial_\rho Z_\sigma + \partial_\mu A_\nu\partial_\rho A_\sigma)$$

$$= -\tfrac{1}{2}[\partial_\mu W^-_\nu(\partial^\mu W_+^\nu - \partial^\nu W_+^\mu) + \partial_\mu W^+_\nu(\partial^\mu W_-^\nu - \partial^\nu W_-^\mu)$$

$$+\partial_\mu Z_\nu(\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) + \partial_\mu A_\nu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)]$$

$$= -\tfrac{1}{2}[\partial_\mu W^-_\nu\partial^\mu W_+^\nu - \partial_\nu W^-_\mu\partial^\mu W_+^\nu + \partial_\mu W^+_\nu\partial^\mu W_-^\nu - \partial_\mu W^+_\nu\partial^\nu W_-^\mu + \partial_\mu Z_\nu Z^{\mu\nu} + \partial_\mu A_\nu F^{\mu\nu}]$$

$$= -\tfrac{1}{2}[\partial_\mu W^+_\nu(\partial^\mu W_-^\nu - \partial^\nu W_-^\mu) + \partial_\mu W^+_\nu(\partial^\mu W_-^\nu - \partial^\nu W_-^\mu) + \tfrac{1}{2}(\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu)Z^{\mu\nu} + \partial_\mu A_\nu F^{\mu\nu}]$$

$$= -\tfrac{1}{2}[2\partial_\mu W^+_\nu W_-^{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} + \partial_\mu A_\nu F^{\mu\nu}] = -\tfrac{1}{2}W^+_{\mu\nu}W_-^{\mu\nu} - \tfrac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} - \tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

其中 $W^+_{\mu\nu} = \partial_\mu W^+_\nu - \partial_\nu W^+_\mu, W_-^{\mu\nu} = \partial_\mu W^-_\nu - \partial_\nu W^-_\mu$，$Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu$

$$\mathcal{L}_G^1 = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i)(-g\varepsilon_{ilm}A_l^\mu A_m^\nu) - \frac{1}{4}(-g\varepsilon_{ijk}A_\mu^j A_\nu^k)(\partial^\mu A_i^\nu - \partial^\nu A_i^\mu)$$

$$= \frac{1}{2}g\varepsilon_{ijk}(\partial^\mu A_i^\nu - \partial^\nu A_i^\mu)A_\mu^j A_\nu^k \xrightarrow{\mu\leftrightarrow\nu} \frac{1}{2}g(\varepsilon_{ijk}\partial^\mu A_i^\nu A_\mu^j A_\nu^k - \varepsilon_{ijk}\partial^\mu A_i^\nu A_\nu^j A_\mu^k)$$

$$\xrightarrow{j\leftrightarrow k} \frac{1}{2}g\partial^\mu A_i^\nu(\varepsilon_{ijk}A_\mu^j A_\nu^k - \varepsilon_{ikj}A_\nu^k A_\mu^j) \xrightarrow{\varepsilon_{ikj}=-\varepsilon_{ijk}} g\varepsilon_{ijk}\partial^\mu A_i^\nu A_\mu^j A_\nu^k$$

$$= g\partial^\mu A_1^\nu(A_\mu^2 A_\nu^3 - A_\mu^3 A_\nu^2) + g\partial^\mu A_2^\nu(A_\mu^3 A_\nu^1 - A_\mu^1 A_\nu^3) + g\partial^\mu A_3^\nu(A_\mu^1 A_\nu^2 - A_\mu^2 A_\nu^1)$$

$$= g\begin{vmatrix}\partial^\mu A_1^\nu & \partial^\mu A_2^\nu & \partial^\mu A_3^\nu \\ A_\mu^1 & A_\mu^2 & A_\mu^3 \\ A_\nu^1 & A_\nu^2 & A_\nu^3\end{vmatrix} = \frac{ig}{2}\begin{vmatrix}\partial^\mu W_+^\nu + \partial^\mu W_-^\nu & \partial^\mu W_+^\nu - \partial^\mu W_-^\nu & c_W\partial^\mu Z^\nu + s_W\partial^\mu A^\nu \\ W_\mu^+ + W_\mu^- & W_\mu^+ - W_\mu^- & c_W Z_\mu + s_W A_\mu \\ W_\nu^+ + W_\nu^- & W_\nu^+ - W_\nu^- & c_W Z_\nu + s_W A_\nu\end{vmatrix}$$

$$= \frac{ig}{2}\partial^\mu W_+^\nu\left(\begin{vmatrix}W_\mu^+ - W_\mu^- & c_W Z_\mu + s_W A_\mu \\ W_\nu^+ - W_\nu^- & c_W Z_\nu + s_W A_\nu\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}W_\mu^+ + W_\mu^- & c_W Z_\mu + s_W A_\mu \\ W_\nu^+ + W_\nu^- & c_W Z_\nu + s_W A_\nu\end{vmatrix}\right)$$

$$+ \frac{ig}{2}\partial^\mu W_-^\nu\left(\begin{vmatrix}W_\mu^+ - W_\mu^- & c_W Z_\mu + s_W A_\mu \\ W_\nu^+ - W_\nu^- & c_W Z_\nu + s_W A_\nu\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}W_\mu^+ + W_\mu^- & c_W Z_\mu + s_W A_\mu \\ W_\nu^+ + W_\nu^- & c_W Z_\nu + s_W A_\nu\end{vmatrix}\right)$$

$$+ \frac{ig}{2}(c_W\partial^\mu Z^\nu + s_W\partial^\mu A^\nu)\begin{vmatrix}W_\mu^+ + W_\mu^- & W_\mu^+ - W_\mu^- \\ W_\nu^+ + W_\nu^- & W_\nu^+ - W_\nu^-\end{vmatrix}$$

$$= \frac{ig}{2}\partial^\mu W_+^\nu\begin{vmatrix}-2W_\mu^- & c_W Z_\mu + s_W A_\mu \\ -2W_\nu^- & c_W Z_\nu + s_W A_\nu\end{vmatrix} + \frac{ig}{2}\partial^\mu W_-^\nu\begin{vmatrix}2W_\mu^+ & c_W Z_\mu + s_W A_\mu \\ 2W_\nu^+ & c_W Z_\nu + s_W A_\nu\end{vmatrix}$$

$$+ \frac{ig}{2}(c_W\partial^\mu Z^\nu + s_W\partial^\mu A^\nu)2\begin{vmatrix}W_\mu^+ & -W_\mu^- \\ W_\nu^+ & -W_\nu^-\end{vmatrix}$$

$$= -ig\partial^\mu W_+^\nu[W_\mu^-(c_W Z_\nu + s_W A_\nu) - W_\nu^-(c_W Z_\mu + s_W A_\mu)]$$

$$+ig\partial^\mu W_-^\nu[W_\mu^+(c_W Z_\nu + s_W A_\nu) - W_\nu^+(c_W Z_\mu + s_W A_\mu)]$$

$$-ig(c_W\partial^\mu Z^\nu + s_W\partial^\mu A^\nu)(W_\mu^+ W_\nu^- - W_\nu^+ W_\mu^-)$$

$$\xrightarrow{\mu\leftrightarrow\nu} -ig[\partial^\mu W_+^\nu W_\mu^-(c_W Z_\nu + s_W A_\nu) - \partial^\nu W_+^\mu W_\mu^-(c_W Z_\nu + s_W A_\nu)]$$

$$+ig[\partial^\mu W_-^\nu W_\mu^+(c_W Z_\nu + s_W A_\nu) - \partial^\nu W_-^\mu W_\mu^+(c_W Z_\nu + s_W A_\nu)]$$

$$-ig[W_\mu^+ W_\nu^-(c_W\partial^\mu Z^\nu + s_W\partial^\mu A^\nu) - W_\mu^+ W_\nu^-(c_W\partial^\nu Z^\mu + s_W\partial^\nu A^\mu)]$$

$$= -ig[\partial^\mu W_+^\nu - \partial^\nu W_+^\mu]W_\mu^-(c_W Z_\nu + s_W A_\nu) + ig[\partial^\mu W_-^\nu - \partial^\nu W_-^\mu]W_\mu^+(c_W Z_\nu + s_W A_\nu)$$

$$-igW_\mu^+ W_\nu^-[c_W(\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) + s_W(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)]$$

$$= ig(c_W Z_\nu + s_W A_\nu)[W_-^{\mu\nu}W_\mu^+ - W_+^{\mu\nu}W_\mu^-] - igW_\mu^+ W_\nu^-[c_W Z^{\mu\nu} + s_W A^{\mu\nu}]$$

$$= igs_W[W_-^{\mu\nu}W_\mu^+ A_\nu - W_+^{\mu\nu}W_\mu^- A_\nu - W_\mu^+ W_\nu^- A^{\mu\nu}] + igc_W[W_-^{\mu\nu}W_\mu^+ Z_\nu - W_+^{\mu\nu}W_\mu^- Z_\nu - W_\mu^+ W_\nu^- Z^{\mu\nu}]$$

$$= igs_W[W_-^{\mu\nu}W_\mu^+ A_\nu - W_+^{\mu\nu}W_\mu^- A_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ A^{\mu\nu}] + igc_W[W_-^{\mu\nu}W_\mu^+ Z_\nu - W_+^{\mu\nu}W_\mu^- Z_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ Z^{\mu\nu}]$$

其中利用了

$$\begin{vmatrix}a & e \\ b & f\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}c & e \\ d & f\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a+c & e \\ b+d & f\end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix}a+c & 2e \\ b+d & 2f\end{vmatrix}$$

利用

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}=\begin{vmatrix}\delta_{jl} & \delta_{jm}\\ \delta_{kl} & \delta_{km}\end{vmatrix}$$

$$A_\mu^j A_j^\nu = A_\mu^1 A_1^\nu + A_\mu^2 A_2^\nu + A_\mu^3 A_3^\nu$$

$$=\frac{1}{2}(W_\mu^+ + W_\mu^-)(W_+^\nu + W_-^\nu)-\frac{1}{2}(W_\mu^+ - W_\mu^-)(W_+^\nu - W_-^\nu)+(c_W Z_\mu + s_W A_\mu)(c_W Z^\nu + s_W A^\nu)$$

$$=W_\mu^+ W_-^\nu + W_\mu^- W_+^\nu + (c_W Z_\mu + s_W A_\mu)(c_W Z^\nu + s_W A^\nu)$$

有

$$\mathcal{L}_G^2 = -\tfrac{1}{4}(g\varepsilon_{ijk}A_\mu^j A_\nu^k)(g\varepsilon_{ilm}A_l^\mu A_m^\nu) = -\tfrac{1}{4}g^2(\delta_{jl}\delta_{km}-\delta_{kl}\delta_{jm})A_\mu^j A_\nu^k A_l^\mu A_m^\nu$$

$$=-\tfrac{1}{4}g^2[(A_\mu^j A_j^\mu)(A_\nu^k A_k^\nu)-(A_\mu^j A_j^\nu)(A_\nu^k A_k^\mu)]$$

$$=-\tfrac{1}{4}g^2\{[W_\mu^+ W_-^\mu + W_\mu^- W_+^\mu + (c_W Z_\mu + s_W A_\mu)(c_W Z^\mu + s_W A^\mu)]^2$$

$$-[W_\mu^+ W_-^\nu + W_\mu^- W_+^\nu + (c_W Z_\mu + s_W A_\mu)(c_W Z^\nu + s_W A^\nu)]$$

$$[W_\nu^+ W_-^\mu + W_\nu^- W_+^\mu + (c_W Z_\nu + s_W A_\nu)(c_W Z^\mu + s_W A^\mu)]\}$$

$$=-\tfrac{1}{4}g^2\{[2W^+\cdot W_- + (c_W Z_\mu + s_W A_\mu)^2]^2 - [W_\mu^+ W_-^\nu + W_\mu^- W_+^\nu][W_\nu^+ W_-^\mu + W_\nu^- W_+^\mu]$$

$$-(c_W Z_\mu + s_W A_\mu)^2(c_W Z_\nu + s_W A_\nu)^2 - 2[W_\mu^+ W_-^\nu + W_\mu^- W_+^\nu](c_W Z_\nu + s_W A_\nu)(c_W Z^\mu + s_W A^\mu)\}$$

$$=-\tfrac{1}{4}g^2\{[2W^+\cdot W_-]^2 + 4W^+\cdot W_-(c_W Z_\mu + s_W A_\mu)^2 - 2[W^+\cdot W_-]^2 - 2[W^+\cdot W_+][W^-\cdot W_-]$$

$$-4[W_+\cdot(c_W Z + s_W A)][W^-\cdot(c_W Z + s_W A)]\}$$

$$=-\tfrac{1}{4}g^2\{2[W^+\cdot W_-]^2 - 2[W^+\cdot W_+][W^-\cdot W_-] + 4W^+\cdot W_-(c_W^2 Z^2 + s_W^2 A^2 + 2c_W s_W Z\cdot A)$$

$$-4c_W^2 W_+\cdot Z(W^-\cdot Z) - 4s_W^2 W_+\cdot A(W^-\cdot A) - 4c_W s_W[W_+\cdot Z(W^-\cdot A) + W_+\cdot A(W^-\cdot Z)]\}$$

$$=\mathcal{L}_{W^2A^2}+\mathcal{L}_{W^2Z^2}+\mathcal{L}_{W^2ZA}+\mathcal{L}_{W^4}$$

其中 $\mathcal{L}_{W^2A^2}=-g^2 s_W^2[W^+\cdot W_- A^2 - W_+\cdot A(W^-\cdot A)]$

$$\mathcal{L}_{W^2Z^2}=-g^2 c_W^2[W^+\cdot W_- Z^2 - W_+\cdot Z(W^-\cdot Z)]$$

$$\mathcal{L}_{W^2ZA}=-g^2 c_W s_W[2W^+\cdot W_-(Z\cdot A) - W_+\cdot Z(W^-\cdot A) - W_+\cdot A(W^-\cdot Z)]$$

$$\mathcal{L}_{W^4}=-\tfrac{1}{2}g^2\{[W^+\cdot W_-]^2 - [W^+\cdot W_+][W^-\cdot W_-]\}$$

注意 $X\cdot Y\equiv X_\mu Y^\mu, X^2\equiv X_\mu X^\mu$.

3.2.4.3 轻子部分

（1）Yukawa 耦合 Lagrangian

由 $\psi_L = L = \begin{pmatrix}\nu_L\\ l_L\end{pmatrix}, \psi_R = l_R$， $\phi' = \frac{v_0+H}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$， $\phi'^\dagger = \frac{v_0+H}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}$，得

$$\bar{\psi}_L\phi' = \psi_L^+\gamma^0\phi' = \begin{pmatrix} \nu_{eL}^+ & e_L^+ \end{pmatrix} \otimes \gamma^0\phi' = \begin{pmatrix} \bar{\nu}_{eL} & \bar{e}_L \end{pmatrix}\phi' = \begin{pmatrix} \bar{\nu}_{eL} & \bar{e}_L \end{pmatrix}\frac{v_0+H}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{v_0+H}{\sqrt{2}}\bar{e}_L$$

$$\phi'^{\dagger}\psi_L = \frac{v_0+H}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} = \frac{v_0+H}{\sqrt{2}}e_L$$

所以

$$\mathcal{L}_{lH} = -C_e[\bar{\psi}_R(\phi'^{\dagger}\psi_L) + (\bar{\psi}_L\phi')\psi_R] = -C_e[\bar{e}_R(\frac{v_0+H}{\sqrt{2}}e_L) + (\frac{v_0+H}{\sqrt{2}}\bar{e}_L)e_R]$$

$$= -C_e\frac{v_0+H}{\sqrt{2}}[\bar{e}_R e_L + \bar{e}_L e_R] = -\frac{C_e}{\sqrt{2}}(v_0+H)[e_R^+\gamma^0 e_L + e_L^+\gamma^0 e_R]$$

$$= -\frac{C_e}{\sqrt{2}}(v_0+H)[e^+P_R\gamma^0P_L e + e^+P_L\gamma^0P_R e] = -\frac{C_e}{\sqrt{2}}(v_0+H)[e^+\gamma^0P_L^2 e + e^+\gamma^0P_R^2P_R e]$$

$$= -\frac{C_e}{\sqrt{2}}(v_0+H)[\bar{e}(P_L^2+P_R^2)e] = -\frac{C_e}{\sqrt{2}}(v_0+H)\bar{e}e = -m_e\bar{e}e - \frac{C_e}{\sqrt{2}}H\bar{e}e$$

其中 P_L, P_R 为(手征)投影算符(见 3.0.2 节),电子波函数已简写为 $e \equiv \psi_e, e_L \equiv \psi_{eL}, e_R \equiv \psi_{eR}$，中微子波函数简写为 $\nu_{eL} \equiv \psi_{\nu eL}$； $\bar{e}e$ 为电子场二次项，对应质量项 $-m_e\bar{e}e$，相应质量为 $m_e = \frac{C_e}{\sqrt{2}}v_0$，代入 $v_0 = \frac{2m_W}{g}$ （见 3.2.3 节），可得 Yukawa 耦合常数

$$C_e = \frac{\sqrt{2}m_e}{v_0} = \frac{gm_e}{\sqrt{2}m_W}$$

Lagrangian 为

$$\mathcal{L}_{lH} = -m_e\bar{\psi}_e\psi_e - \frac{gm_e}{2m_W}H\bar{\psi}_e\psi_e$$

（2）纯轻子场 Lagrangian

由 $Y_L = -1, Y_R = -2$，得

$$\mathcal{L}_l = \bar{\psi}_L i\gamma^\mu D_\mu^L\psi_L + \bar{\psi}_R i\gamma^\mu D_\mu^R\psi_R$$

$$= \bar{\psi}_L i\gamma^\mu(\partial_\mu + igA_\mu^i\frac{\sigma_i}{2} + ig'B_\mu\frac{Y_L}{2})\psi_L + \bar{\psi}_R i\gamma^\mu(\partial_\mu + ig'B_\mu\frac{Y_R}{2})\psi_R$$

$$= \bar{\psi}_L i\gamma^\mu[\partial_\mu + \frac{ig}{2}\begin{pmatrix} & A_\mu^1 - iA_\mu^2 \\ A_\mu^1 + iA_\mu^2 & \end{pmatrix} + \frac{ig}{2}\begin{pmatrix} A_\mu^3 & \\ & -A_\mu^3 \end{pmatrix} - \frac{ig'}{2}B_\mu]\psi_L$$

$$+\bar{e}_R i\gamma^\mu\partial_\mu e_R + g'\bar{e}_R\gamma^\mu e_R B_\mu$$

$$= \mathcal{L}_l^{kin} + \mathcal{L}_l^{cc} + \mathcal{L}_l^{nc}$$

其中轻子运动学部分的 Lagrangian 为

$$\mathcal{L}_l^{kin}=\bar{\psi}_L i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L+\bar{e}_R i\gamma^\mu\partial_\mu e_R=\begin{pmatrix}\bar{\nu}_{eL} & \bar{e}_L\end{pmatrix}i\gamma^\mu\partial_\mu\begin{pmatrix}\nu_{eL}\\ e_L\end{pmatrix}+\bar{e}_R i\gamma^\mu\partial_\mu e_R$$

$$=\bar{\nu}_{eL}i\gamma^\mu\partial_\mu\nu_{eL}+\bar{e}_L i\gamma^\mu\partial_\mu e_L+\bar{e}_R i\gamma^\mu\partial_\mu e_R=\bar{\nu}_{eL}i\gamma^\mu\partial_\mu\nu_{eL}+e_L^+\gamma^0 i\gamma^\mu\partial_\mu e_L+e_R^+\gamma^0 i\gamma^\mu\partial_\mu e_R$$

$$=\bar{\nu}_{eL}i\gamma^\mu\partial_\mu\nu_{eL}+\psi_e^+P_L\gamma^0 i\gamma^\mu\partial_\mu P_L\psi_e+\psi_e^+P_R\gamma^0 i\gamma^\mu\partial_\mu P_R\psi_e$$

$$=\bar{\nu}_{eL}i\gamma^\mu\partial_\mu\nu_{eL}+\psi_e^+\gamma^0 i\gamma^\mu(P_L^2+P_R^2)\partial_\mu\psi_e=\bar{\nu}_{eL}i\gamma^\mu\partial_\mu\nu_{eL}+\bar{\psi}_e i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_e$$

带电轻子流 Lagrangian 为

$$\mathcal{L}_l^{cc}=\bar{\psi}_L i\gamma^\mu\frac{ig}{2}\begin{pmatrix}&A_\mu^1-iA_\mu^2\\ A_\mu^1+iA_\mu^2&\end{pmatrix}\psi_L=-\frac{g}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_L\gamma^\mu\begin{pmatrix}&W_\mu^+\\ W_\mu^-&\end{pmatrix}\psi_L$$

$$=-\frac{g}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\bar{\nu}_{eL} & \bar{e}_L\end{pmatrix}\gamma^\mu\begin{pmatrix}&W_\mu^+\\ W_\mu^-&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_{eL}\\ e_L\end{pmatrix}=-\frac{g}{\sqrt{2}}(\bar{\nu}_{eL}\gamma^\mu W_\mu^+ e_L+\bar{e}_L\gamma^\mu W_\mu^-\nu_{eL})$$

$$=-\frac{g}{\sqrt{2}}(J_l^{\dagger\mu}W_\mu^++J_l^\mu W_\mu^-)$$

带电轻子流为

$$J_l^{\dagger\mu}=\bar{\nu}_{eL}\gamma^\mu e_L=\nu_{eL}^+\gamma^0\gamma^\mu e_L=\psi_{\nu_e}^+P_L\gamma^0\gamma^\mu P_L\psi_e=\psi_{\nu_e}^+\gamma^0\gamma^\mu P_L^2\psi_e=\tfrac{1}{2}\bar{\psi}_{\nu_e}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_e$$

$$J_l^\mu=\bar{e}_L\gamma^\mu\nu_{eL}=\tfrac{1}{2}\bar{\psi}_e\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_{\nu_e}$$

为免与反中微子 $\bar{\nu}_e$ 混淆，此处已将中微子波函数的 Dirac 共轭写成完整形式 $\bar{\psi}_{\nu_e}$.

利用 $A_\mu^3=s_W A_\mu+c_W Z_\mu, B_\mu=c_W A_\mu-s_W Z_\mu, t_W=g'/g$，中性轻子流 Lagrangian 可写为

$$\mathcal{L}_l^{nc}=\bar{\psi}_L i\gamma^\mu[\frac{ig}{2}\begin{pmatrix}A_\mu^3&\\ &-A_\mu^3\end{pmatrix}-\frac{ig'}{2}B_\mu]\psi_L+g'\bar{e}_R\gamma^\mu e_R B_\mu$$

$$=-\frac{g}{2}\begin{pmatrix}\bar{\nu}_{eL} & \bar{e}_L\end{pmatrix}\gamma^\mu\begin{pmatrix}A_\mu^3&\\ &-A_\mu^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_{eL}\\ e_L\end{pmatrix}+\frac{g'}{2}B_\mu[\bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L+2\bar{e}_R\gamma^\mu e_R]$$

$$=-\frac{g}{2}(\bar{\nu}_{eL}\gamma^\mu\nu_{eL}-\bar{e}_L\gamma^\mu e_L)A_\mu^3+\frac{g'}{2}[\bar{\nu}_{eL}\gamma^\mu\nu_{eL}+\bar{e}_L\gamma^\mu e_L+2\bar{e}_R\gamma^\mu e_R]B_\mu$$

$$=-\frac{g}{2}(\bar{\nu}_{eL}\gamma^\mu\nu_{eL}-\bar{e}_L\gamma^\mu e_L)(s_W A_\mu+c_W Z_\mu)$$

$$+\frac{g}{2}t_W[\bar{\nu}_{eL}\gamma^\mu\nu_{eL}+\bar{e}_L\gamma^\mu e_L+2\bar{e}_R\gamma^\mu e_R](c_W A_\mu-s_W Z_\mu)$$

$$=\frac{g}{2}s_W A_\mu[-(\cancel{\bar{\nu}_{eL}\gamma^\mu\nu_{eL}}-\bar{e}_L\gamma^\mu e_L)+\cancel{\bar{\nu}_{eL}\gamma^\mu\nu_{eL}}+\bar{e}_L\gamma^\mu e_L+2\bar{e}_R\gamma^\mu e_R]$$

$$-\frac{g}{2c_W}Z_\mu[c_W^2(\bar{\nu}_{eL}\gamma^\mu\nu_{eL}-\bar{e}_L\gamma^\mu e_L)+s_W^2(\bar{\nu}_{eL}\gamma^\mu\nu_{eL}+\bar{e}_L\gamma^\mu e_L+2\bar{e}_R\gamma^\mu e_R)]$$

$$=gs_W A_\mu[\bar{e}_L\gamma^\mu e_L+\bar{e}_R\gamma^\mu e_R]-\frac{g}{2c_W}Z_\mu[\bar{\nu}_{eL}\gamma^\mu\nu_{eL}-(c_W^2-s_W^2)\bar{e}_L\gamma^\mu e_L+2s_W^2\bar{e}_R\gamma^\mu e_R]$$

$$=\mathcal{L}_{lA}+\mathcal{L}_{lZ}$$

与 QED 的 $\mathcal{L}_{QED}^{\text{int}}=-e\bar{\psi}_e\gamma^\mu\psi_eA_\mu=-e[\bar{e}_L\gamma^\mu e_L+\bar{e}_R\gamma^\mu e_R]A_\mu=-ej_{em}^\mu A_\mu$ 比较，可知 $gs_W=e$，电磁流 $j_{em}^\mu=-\bar{\psi}_e\gamma^\mu\psi_e=-(\bar{e}_L\gamma^\mu e_L+\bar{e}_R\gamma^\mu e_R)$，第一项成为 $\mathcal{L}_{lA}=\mathcal{L}_{QED}^{\text{int}}=-ej_{em}^\mu A_\mu$；第二项变成

$$\mathcal{L}_{lZ}=-\frac{g}{2c_W}Z_\mu[\bar{\nu}_{eL}\gamma^\mu\nu_{eL}-(c_W^2-s_W^2)\bar{e}_L\gamma^\mu e_L+2s_W^2\bar{e}_R\gamma^\mu e_R]$$

$$=-\frac{g}{2c_W}Z_\mu[\psi_{\nu_e}^+P_L\gamma^0\gamma^\mu P_L\psi_{\nu_e}-(c_W^2-s_W^2)\psi_e^+P_L\gamma^0\gamma^\mu P_L\psi_e+2s_W^2\psi_e^+P_R\gamma^0\gamma^\mu P_R\psi_e]$$

$$=-\frac{g}{2c_W}Z_\mu[\psi_{\nu_e}^+\gamma^0\gamma^\mu P_L^2\psi_{\nu_e}-(c_W^2-s_W^2)\psi_e^+\gamma^0\gamma^\mu P_L^2\psi_e+2s_W^2\psi_e^+\gamma^0\gamma^\mu P_R^2\psi_e]$$

$$=-\frac{g}{2c_W}Z_\mu[\bar{\psi}_{\nu_e}\gamma^\mu P_L\psi_{\nu_e}-(c_W^2-s_W^2)\bar{\psi}_e\gamma^\mu P_L\psi_e+2s_W^2\bar{\psi}_e\gamma^\mu P_R\psi_e]$$

$$=-\frac{g}{2c_W}Z_\mu[\bar{\psi}_{\nu_e}\gamma^\mu\frac{1-\gamma_5}{2}\psi_{\nu_e}-(c_W^2-s_W^2)\bar{\psi}_e\gamma^\mu\frac{1-\gamma_5}{2}\psi_e+2s_W^2\bar{\psi}_e\gamma^\mu\frac{1+\gamma_5}{2}\psi_e]$$

$$=-\frac{g}{4c_W}Z_\mu[\bar{\psi}_{\nu_e}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_{\nu_e}+(3s_W^2-c_W^2)\bar{\psi}_e\gamma^\mu\psi_e+\bar{\psi}_e\gamma^\mu\gamma_5\psi_e]$$

$$=-\frac{g}{4c_W}Z_\mu[\bar{\psi}_{\nu_e}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_{\nu_e}+\bar{\psi}_e\gamma^\mu(4s_W^2-1+\gamma_5)\psi_e]$$

$$=-\frac{g}{2c_W}Z_\mu[\bar{\psi}_{\nu_e}\gamma^\mu\frac{1-\gamma_5}{2}\psi_{\nu_e}+\bar{\psi}_e\gamma^\mu(g_V^l-g_A^l\gamma_5)\psi_e]$$

其中 $g_V^l=2s_W^2-\frac{1}{2},g_A^l=-\frac{1}{2}.$

第 3 步　构造夸克场的 Lagrangian（40 分）

上一节构造的 Lagrangian 只含轻子和规范场，Higgs 场，没有夸克场，不符合物理事实。这一节，我们尝试在 Lagrangian 中加入夸克。

3.3.1　只含第一代夸克的电弱模型

从方法论上讲，我们应该从简单到复杂。所以，先只考虑第一代夸克。

3.3.1.1　原始 Lagrangian 的构造

虽然夸克带色，轻子无色，但弱作用不好“色”（对色不敏感，见金广浩《Elementary Particles And Their Interactions：Concepts and Phenomena》）。这样，夸克与轻子的不同仅在于：
第一，电荷不同。中微子不带电，电子带一个单位负电。但夸克带有分数电荷，上夸克 u 带电 $\frac{2}{3}$，下夸克带电 $-\frac{1}{3}$，所以 uud 表示质子，udd 表示中子。

第二，质量不同。标准模型认为中微子无质量，所以波函数选择左手二重态、右手单态 $\psi_L = L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix}, \psi_R = l_R$（只有右手电子，没有右手中微子），真空态选择 $|\phi\rangle = \frac{v_0 + H}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 已经足够，对称破缺只使电子获得质量即可。但 u、d 夸克都有质量，所以 $\psi_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \psi_R = u_R, d_R$（不仅有右手 d 夸克，还有右手 u 夸克）；$|\phi\rangle = \frac{v_0 + H}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 只能让 d 获得质量，为让 u 获得质量，还要 $|\phi^C\rangle = \frac{v_0 + H}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$（胡瑶光《规范场论》）。类比轻子 $\mathcal{L}_l = \bar{\psi}_L i\gamma^\mu D_\mu^L \psi_L + \bar{\psi}_R i\gamma^\mu D_\mu^R \psi_R$，$\mathcal{L}_{lH} = -C_e[\bar{\psi}_R(\phi^\dagger \psi_L) + (\bar{\psi}_L \phi)\psi_R]$，可将夸克的 Lagrangian 构造为（金广浩《Elementary Particles And Their Interactions：Concepts and Phenomena》）

$$\mathcal{L}_q = \bar{\psi}_L i\gamma^\mu D_\mu^L \psi_L + \bar{u}_R i\gamma^\mu D_\mu^{uR} u_R + \bar{d}_R i\gamma^\mu D_\mu^{dR} d_R$$

$$\mathcal{L}_{qH} = -C_u[\bar{u}_R(\phi^{C\dagger}\psi_L) + (\bar{\psi}_L \phi^C)u_R] - C_d[\bar{d}_R(\phi^\dagger \psi_L) + (\bar{\psi}_L \phi)d_R]$$

其中 $D_\mu^L = \partial_\mu + igA_\mu^i \frac{\sigma_i}{2} + ig'B_\mu \frac{Y_L}{2}$，$D_\mu^{uR} = \partial_\mu + ig'B_\mu \frac{Y_R^u}{2}$，$D_\mu^{dR} = \partial_\mu + ig'B_\mu \frac{Y_R^d}{2}$

Heisenberg 最初约定核子同位旋为 $I = \frac{1}{2}$，同位旋第三分量 $I_3 = \frac{1}{2}$ 表示质子，$I_3 = -\frac{1}{2}$ 表示中子（陈申见《粒子物理学》）。根据质子的夸克构成 uud，中子 udd，可规定 u 的同位旋及同位旋第三分量为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$，d 的同位旋及同位旋第三分量为 $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$（注意同位旋为相加性量子数，但应按矢量相加理解，所以同位旋本身不能直接相加，“$\frac{1}{2}$”+“$\frac{1}{2}$”=“$\frac{1}{2}$”也是允许的，只要前两个矢量夹角为 120 度，其第三分量可直接相加）。

u_R, d_R 不出现在唯象弱作用中，因而自然地假定它们是 SU(2)单态（胡瑶光《规范场论》）。在 3.2 节中，我们假定右手单态的同位旋第三分量为零。既然 u_R, d_R 也是单态，那么其同位旋第三分量应该也是零。于是，夸克的同位旋第三分量可表示为（金广浩《Elementary Particles And Their Interactions：Concepts and Phenomena》）

$$T_3^{u_L} = \frac{1}{2}, T_3^{d_L} = -\frac{1}{2}, \quad T_3^{u_R} = T_3^{d_R} = 0$$

根据 $Y = 2(Q - T_3)$ 可得夸克的弱超荷：

$$Y_L = 2(Q - T_3)_L = 2\begin{pmatrix} Q_L^u \\ Q_L^d \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} T_3^{u_L} \\ T_3^{d_L} \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$Y_R^u = 2(Q_R^u - T_3^{u_R}) = 2(\frac{2}{3} - 0) = \frac{4}{3}$， $Y_R^d = 2(Q_R^d - T_3^{d_R}) = 2(-\frac{1}{3} - 0) = -\frac{2}{3}$

3.3.1.2 对称性破缺

类似 3.2 节做法，选取幺正变换（金广浩《Elementary Particles And Their Interactions：Concepts and Phenomena》）

$$\phi \to S\phi = \frac{v_0 + H}{\sqrt{2}}\chi\ ,\quad \chi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\phi^C \to S\phi^C = \frac{v_0 + H}{\sqrt{2}}\chi^C\ ,\quad \chi^C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

此变换的效果是将 Lagrangian 中 $\phi \to \frac{v_0 + H}{\sqrt{2}}\chi$，$\phi^C \to \frac{v_0 + H}{\sqrt{2}}\chi^C$，其余场都加上一撇（为简化，将撇省略），所以 $\mathcal{L}_q$ 不变，$\mathcal{L}_{qH}$ 变为

$$\mathcal{L}_{qH} \to -C_u[\bar{u}_R(\phi'^{C\dagger}\psi_L) + (\bar{\psi}_L\phi'^C)u_R] - C_d[\bar{d}_R(\phi'^{\dagger}\psi_L) + (\bar{\psi}_L\phi')d_R]$$

$$= -C_u\frac{v_0 + H}{\sqrt{2}}[\bar{u}_R(\chi^{C\dagger}\psi_L) + (\bar{\psi}_L\chi^C)u_R] - C_d\frac{v_0 + H}{\sqrt{2}}[\bar{d}_R(\chi^{\dagger}\psi_L) + (\bar{\psi}_L\chi)d_R]$$

$$= \tfrac{v_0+H}{-\sqrt{2}}\{C_u[\bar{u}_R\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_L \\ d_L\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\bar{u}_L & \bar{d}_L\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}u_R] + C_d[\bar{d}_R\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_L \\ d_L\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\bar{u}_L & \bar{d}_L\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix}d_R]\}$$

$$= -\frac{v_0 + H}{\sqrt{2}}\{C_u[\bar{u}_R u_L + \bar{u}_L u_R] + C_d[\bar{d}_R d_L + \bar{d}_L d_R]\}$$

$$= -\frac{v_0 + H}{\sqrt{2}}\{C_u[u^+P_R\gamma^0P_L u + u^+P_L\gamma^0P_R u] + C_d[d^+P_R\gamma^0P_L d + d^+P_L\gamma^0P_R d]\}$$

$$= -\frac{v_0 + H}{\sqrt{2}}\{C_u[u^+\gamma^0P_L^2 u + u^+\gamma^0P_R^2 u] + C_d[d^+\gamma^0P_L^2 d + d^+\gamma^0P_R^2 d]\}$$

$$= -\frac{v_0 + H}{\sqrt{2}}\{C_u[\bar{u}(P_L^2 + P_R^2)u] + C_d[\bar{d}(P_L^2 + P_R^2)d]\} = -\frac{v_0 + H}{\sqrt{2}}[C_u\bar{u}u + C_d\bar{d}d]$$

$$= -[\frac{C_u v_0}{\sqrt{2}}\bar{u}u + \frac{C_d v_0}{\sqrt{2}}\bar{d}d] - \frac{1}{\sqrt{2}}[C_u\bar{u}uH + C_d\bar{d}dH]$$

质量项为场的平方项，即 $\bar{u}u, \bar{d}d$（但不含 H），质量为

$$m_u = \frac{C_u v_0}{\sqrt{2}}, m_d = \frac{C_d v_0}{\sqrt{2}}$$

代入 $v_0 = \frac{2m_W}{g}$，可得 Yukawa 耦合常数

$$C_u = \frac{gm_u}{\sqrt{2}m_W}, C_d = \frac{gm_d}{\sqrt{2}m_W}$$

所以

$$\mathcal{L}_{qH} = -[m_u\bar{u}u + m_d\bar{d}d] - [\frac{gm_u}{2m_W}\bar{u}uH + \frac{gm_d}{2m_W}\bar{d}dH]$$

3.3.1.3 用 A、Z 改写 Lagrangian

对称破缺 $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \to U(1)_Q$ 后，场变化为 $A_\mu^i, B_\mu \to W_\mu^\pm, Z_\mu, A_\mu$，Lagrangian 变为

$$\mathcal{L}_q =$$

$$\bar{\psi}_L i\gamma^\mu(\partial_\mu + igA_\mu^i\frac{\sigma_i}{2} + ig'B_\mu\frac{Y_L}{2})\psi_L + \bar{u}_R i\gamma^\mu(\partial_\mu + ig'B_\mu\frac{Y_R^u}{2})u_R + \bar{d}_R i\gamma^\mu(\partial_\mu + ig'B_\mu\frac{Y_R^d}{2})d_R$$

$$= \bar{\psi}_L i\gamma^\mu(\partial_\mu + igA_\mu^i\frac{\sigma_i}{2} + ig'B_\mu\frac{1}{6})\psi_L + \bar{u}_R i\gamma^\mu(\partial_\mu + ig'B_\mu\frac{2}{3})u_R + \bar{d}_R i\gamma^\mu(\partial_\mu + ig'B_\mu\frac{-1}{3})d_R$$

$$= \mathcal{L}_q^{\,0} + \mathcal{L}_q^{cc} + \mathcal{L}_q^{nc}$$

其中

$$\mathcal{L}_q^{\,0} = \bar{\psi}_L i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L + \bar{u}_R i\gamma^\mu\partial_\mu u_R + \bar{d}_R i\gamma^\mu\partial_\mu d_R$$

$$= \begin{pmatrix}\bar{u}_L & \bar{d}_L\end{pmatrix} i\gamma^\mu\partial_\mu\begin{pmatrix}u_L\\ d_L\end{pmatrix} + u^+P_R\gamma^0 i\gamma^\mu\partial_\mu P_R u + d^+P_R\gamma^0 i\gamma^\mu\partial_\mu P_R d$$

$$= \bar{u}_L i\gamma^\mu\partial_\mu u_L + \bar{d}_L i\gamma^\mu\partial_\mu d_L + u^+\gamma^0 i\gamma^\mu P_R^2\partial_\mu u + d^+\gamma^0 i\gamma^\mu P_R^2\partial_\mu d$$

$$= u^+P_L\gamma^0 i\gamma^\mu\partial_\mu P_L u + d^+P_L\gamma^0 i\gamma^\mu\partial_\mu P_L d + \bar{u}i\gamma^\mu P_R\partial_\mu u + \bar{d}i\gamma^\mu P_R\partial_\mu d$$

$$= \bar{u}i\gamma^\mu P_L\partial_\mu u + \bar{d}i\gamma^\mu P_L\partial_\mu d + \bar{u}i\gamma^\mu P_R\partial_\mu u + \bar{d}i\gamma^\mu P_R\partial_\mu d$$

$$= \bar{u}i\gamma^\mu(P_L + P_R)\partial_\mu u + \bar{d}i\gamma^\mu(P_L + P_R)\partial_\mu d = \bar{u}i\gamma^\mu\partial_\mu u + \bar{d}i\gamma^\mu\partial_\mu d$$

$$\mathcal{L}_q^{cc} = \bar{\psi}_L i\gamma^\mu\frac{ig}{2}(A_\mu^1\sigma_1 + A_\mu^2\sigma_2)\psi_L = -\frac{g}{2}\begin{pmatrix}\bar{u}_L & \bar{d}_L\end{pmatrix}\gamma^\mu\begin{pmatrix}& A_\mu^1 - iA_\mu^2\\ A_\mu^1 + iA_\mu^2 &\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_L\\ d_L\end{pmatrix}$$

$$= -\frac{g}{2}\begin{pmatrix}\bar{u}_L & \bar{d}_L\end{pmatrix}\gamma^\mu\sqrt{2}\begin{pmatrix}& W_\mu^+\\ W_\mu^- &\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_L\\ d_L\end{pmatrix} = -\frac{g}{\sqrt{2}}(\bar{u}_L\gamma^\mu W_\mu^+ d_L + \bar{d}_L\gamma^\mu W_\mu^- u_L)$$

$$= -\frac{g}{\sqrt{2}}(J^{\dagger\mu}W_\mu^+ + J^\mu W_\mu^-)$$

注意此处对 $\sqrt{2}$ 因子的处理与 Peskin 不同。

$$\mathcal{L}_q^{nc}=\bar{\psi}_L i\gamma^\mu(\frac{ig}{2}A_\mu^3\sigma_3+ig'B_\mu\frac{1}{6})\psi_L+\bar{u}_R i\gamma^\mu(ig'B_\mu\frac{2}{3})u_R+\bar{d}_R i\gamma^\mu(ig'B_\mu\frac{-1}{3})d_R$$

$$=-\begin{pmatrix}\bar{u}_L & \bar{d}_L\end{pmatrix}\gamma^\mu\left[\frac{g}{2}\begin{pmatrix}A_\mu^3 & \\ & -A_\mu^3\end{pmatrix}+\frac{g'}{6}B_\mu\right]\begin{pmatrix}u_L\\ d_L\end{pmatrix}-\frac{2}{3}g'B_\mu\bar{u}_R\gamma^\mu u_R+\frac{1}{3}g'B_\mu\bar{d}_R\gamma^\mu d_R$$

$$=-\frac{g}{2}A_\mu^3(\bar{u}_L\gamma^\mu u_L-\bar{d}_L\gamma^\mu d_L)-\frac{g'}{6}B_\mu[\bar{u}_L\gamma^\mu u_L+\bar{d}_L\gamma^\mu d_L+4\bar{u}_R\gamma^\mu u_R-2\bar{d}_R\gamma^\mu d_R]$$

$$=-\frac{g}{2}(s_W A_\mu+c_W Z_\mu)(\bar{u}_L\gamma^\mu u_L-\bar{d}_L\gamma^\mu d_L)$$

$$-\frac{gt_W}{6}(c_W A_\mu-s_W Z_\mu)[\bar{u}_L\gamma^\mu u_L+\bar{d}_L\gamma^\mu d_L+4\bar{u}_R\gamma^\mu u_R-2\bar{d}_R\gamma^\mu d_R]$$

$$=-gs_W A_\mu[\frac{1}{2}(\bar{u}_L\gamma^\mu u_L-\bar{d}_L\gamma^\mu d_L)+\frac{1}{6}(\bar{u}_L\gamma^\mu u_L+\bar{d}_L\gamma^\mu d_L+4\bar{u}_R\gamma^\mu u_R-2\bar{d}_R\gamma^\mu d_R)]$$

$$-\frac{g}{c_W}Z_\mu[\frac{1}{2}c_W^2(\bar{u}_L\gamma^\mu u_L-\bar{d}_L\gamma^\mu d_L)-\frac{1}{6}s_W^2(\bar{u}_L\gamma^\mu u_L+\bar{d}_L\gamma^\mu d_L+4\bar{u}_R\gamma^\mu u_R-2\bar{d}_R\gamma^\mu d_R)]$$

$$\xrightarrow{e=gs_W}-ej_{em}^\mu A_\mu-\frac{g}{c_W}j_Z^\mu Z_\mu$$

利用

$$\bar{X}_L\gamma^\mu X_L=X^+P_L\gamma^0\gamma^\mu P_L X=X^+\gamma^0\gamma^\mu P_L^2 X=\bar{X}\gamma^\mu P_L X$$

$$\bar{X}_R\gamma^\mu X_R=X^+P_R\gamma^0\gamma^\mu P_R X=\bar{X}\gamma^\mu P_R X$$

可得电磁流

$$j_{em}^\mu=\frac{1}{2}(\bar{u}_L\gamma^\mu u_L-\bar{d}_L\gamma^\mu d_L)+\frac{1}{6}(\bar{u}_L\gamma^\mu u_L+\bar{d}_L\gamma^\mu d_L+4\bar{u}_R\gamma^\mu u_R-2\bar{d}_R\gamma^\mu d_R)$$

$$=\frac{1}{6}[4\bar{u}_L\gamma^\mu u_L-2\bar{d}_L\gamma^\mu d_L+4\bar{u}_R\gamma^\mu u_R-2\bar{d}_R\gamma^\mu d_R]$$

$$=\frac{1}{3}[2\bar{u}\gamma^\mu P_L u-\bar{d}\gamma^\mu P_L d+2\bar{u}\gamma^\mu P_R u-\bar{d}\gamma^\mu P_R d]$$

$$=\frac{1}{3}[2\bar{u}\gamma^\mu(P_L+P_R)u-\bar{d}\gamma^\mu(P_L+P_R)d]=\frac{2}{3}\bar{u}\gamma^\mu u-\frac{1}{3}\bar{d}\gamma^\mu d$$

及中性 Z 流

$$j_Z^\mu=\frac{1}{2}c_W^2(\bar{u}_L\gamma^\mu u_L-\bar{d}_L\gamma^\mu d_L)-\frac{1}{6}s_W^2(\bar{u}_L\gamma^\mu u_L+\bar{d}_L\gamma^\mu d_L+4\bar{u}_R\gamma^\mu u_R-2\bar{d}_R\gamma^\mu d_R)$$

$$=\frac{1}{6}[(3c_W^2-s_W^2)\bar{u}_L\gamma^\mu u_L-(3c_W^2+s_W^2)\bar{d}_L\gamma^\mu d_L-4s_W^2\bar{u}_R\gamma^\mu u_R+2s_W^2\bar{d}_R\gamma^\mu d_R]$$

$$=\frac{1}{6}[(3c_W^2-s_W^2)\bar{u}\gamma^\mu P_L u-(3c_W^2+s_W^2)\bar{d}\gamma^\mu P_L d-4s_W^2\bar{u}\gamma^\mu P_R u+2s_W^2\bar{d}\gamma^\mu P_R d]$$

$$=\frac{1}{6}\{\bar{u}\gamma^\mu[(3c_W^2-s_W^2)P_L-4s_W^2P_R]u+\bar{d}\gamma^\mu[-(3c_W^2+s_W^2)P_L+2s_W^2P_R]d\}$$

$$=\frac{1}{2}[\bar{u}\gamma^\mu(g_V^u-g_A^u\gamma_5)u+\bar{d}\gamma^\mu(g_V^d-g_A^d\gamma_5)d]$$

$$g_V^u - g_A^u\gamma_5 = \tfrac{1}{3}[(3c_W^2 - s_W^2)\tfrac{1-\gamma_5}{2} - 4s_W^2\tfrac{1+\gamma_5}{2}] = \tfrac{1}{6}[3c_W^2 - s_W^2 - 4s_W^2] - \tfrac{1}{6}[3c_W^2 - s_W^2 + 4s_W^2]\gamma_5$$
$$= \tfrac{1}{6}[3 - 4s_W^2 - 4s_W^2] - \tfrac{1}{6}[3 - s_W^2 + s_W^2]\gamma_5 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{4}{3}s_W^2 - \tfrac{1}{2}\gamma_5$$

$$g_V^d - g_A^d\gamma_5 = \tfrac{1}{3}[-(3c_W^2 + s_W^2)\tfrac{1-\gamma_5}{2} + 2s_W^2\tfrac{1+\gamma_5}{2}] = \tfrac{1}{6}[-3c_W^2 - s_W^2 + 2s_W^2] + \tfrac{1}{6}[3c_W^2 + s_W^2 + 2s_W^2]\gamma_5$$
$$= \tfrac{1}{6}[-3 + 2s_W^2 + 2s_W^2] + \tfrac{1}{2}\gamma_5 = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3}s_W^2 - (-\tfrac{1}{2})\gamma_5$$

至此，标准模型中第一代 Fermion 的 Lagrangian 展开完毕，其实已经可以写出 Feynman 规则了。不过，Feynman 规则是通向实验的桥梁，我们准备把它当成“应用”。那么，“理论”上还有什么未解之谜呢？有的，那就是多代夸克混合问题。

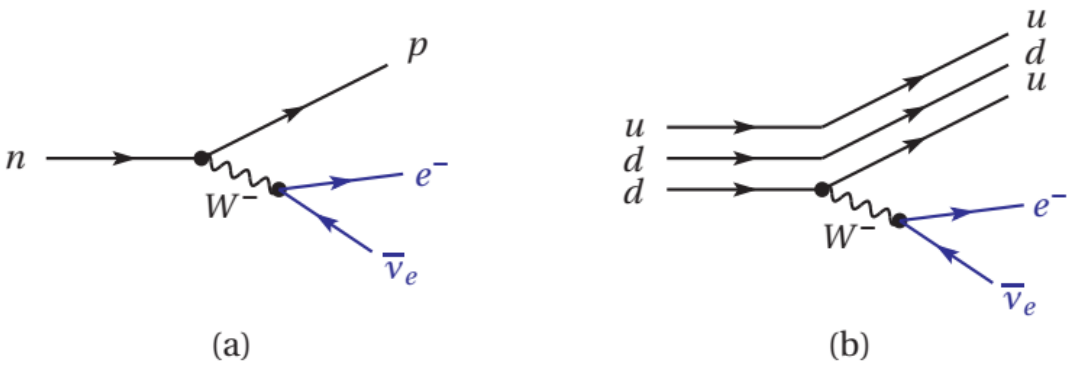
3.3.2 GIM 机制

3.0.2 节讲到 Cabibbo 混合 $d_\theta = d\cos\theta_C + s\sin\theta_C$. 故加入 s 夸克后，中性 Z 流的变化为

$$j_Z^\mu = \tfrac{1}{2}[\bar{u}\gamma^\mu(g_V^u - g_A^u\gamma_5)u + \bar{d}\gamma^\mu(g_V^d - g_A^d\gamma_5)d]$$
$$\to \tfrac{1}{2}[\bar{u}\gamma^\mu(g_V^u - g_A^u\gamma_5)u + \bar{d}_\theta\gamma^\mu(g_V^d - g_A^d\gamma_5)d_\theta]$$
$$= \tfrac{1}{2}[\bar{u}\gamma^\mu(g_V^u - g_A^u\gamma_5)u + (\bar{d}\cos\theta_C + \bar{s}\sin\theta_C)\gamma^\mu(g_V^d - g_A^d\gamma_5)(d\cos\theta_C + s\sin\theta_C)]$$
$$= \tfrac{1}{2}\{\bar{u}\gamma^\mu(g_V^u - g_A^u\gamma_5)u + \cos^2\theta_C\bar{d}\gamma^\mu(g_V^d - g_A^d\gamma_5)d + \sin^2\theta_C\bar{s}\gamma^\mu(g_V^d - g_A^d\gamma_5)s$$
$$+\sin\theta_C\cos\theta_C[\bar{d}\gamma^\mu(g_V^d - g_A^d\gamma_5)s + \bar{s}\gamma^\mu(g_V^d - g_A^d\gamma_5)d]\}$$

其中包含了 $\bar{d}\gamma^\mu(g_V^d - g_A^d\gamma_5)s, \bar{s}\gamma^\mu(g_V^d - g_A^d\gamma_5)d$ 这样的项。

我们说，$\bar{\psi}_{\bar{\nu}}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_e$ 为轻子流，$g\bar{\psi}_p\gamma^\mu(1-\alpha\gamma_5)\psi_n$ 为强子流，β 衰变在夸克层次可解释为 $d \to u$（陈申见《粒子物理学》）：



由于 K^- 为 $\bar{u}s$，π^- 为 $\bar{u}d$，所以 $\bar{d}\gamma^\mu(g_V^d - g_A^d\gamma_5)s$ 意味着 $s \to d$ 类过程，如 $K^- \to \pi^-e^+e^-$ 应该能发生。该过程前后总电荷不变，奇异数从 S=-1 变成 S=0，为奇异数改变的中性流过程。但是实验上没有观察到这样的过程。怎么回事呢？是不是理论错了？

遇到这样的问题，我们不必惊慌，反而应该窃喜。因为每次发现解释不通的新现象，都可能带来理论上的突破。因为天王星轨道偏离了万有引力的预言，人类发现了**海王星**；因为 β 衰变对动量守恒的偏离，人类发现了**中微子**；因为水星近日点的进动，人类发现了广义相对论；因为 $\tau - \theta$ 疑难，人类发现了宇称不守恒。总之，只要还有问题，物理学就不会终结。

那么，为啥奇异数改变的中性流过程受到禁戒呢？怎样的魔术能把 j_Z^μ 中 $s \to d$ 项变没呢？质量项破坏规范不变性，我们就先扔掉它，再用 Higgs 机制产生它！这启发我们，应在 Lagrangian 中将 $\bar{d}\gamma^\mu(g_V^d - g_A^d\gamma_5)s + \bar{s}\gamma^\mu(g_V^d - g_A^d\gamma_5)d$ 改写成

$$\bar{d}\gamma^\mu(g_V^d - g_A^d\gamma_5)d + \bar{s}\gamma^\mu(g_V^d - g_A^d\gamma_5)s + \boxed{?}$$

形式，即先保证奇异数守恒，再将剩下的 bug 扔到黑盒子 $\boxed{?}$. 那么，黑盒子里有什么呢？是不是对应某种未知的“海王星”或“中微子”呢？啊，我们就认为它是一种未知的新夸克吧。1970 年，Glashow、Iliopoulos、Maiani 将其命名为 charm（粲夸克），将 j_Z^μ 改成

$$j_Z^\mu = \tfrac{1}{2}[\bar{u}\gamma^\mu(g_V^u - g_A^u\gamma_5)u + \bar{d}\gamma^\mu(g_V^d - g_A^d\gamma_5)d + \bar{c}\gamma^\mu(g_V^u - g_A^u\gamma_5)c + \bar{s}\gamma^\mu(g_V^d - g_A^d\gamma_5)s]$$

将 Cabibbo 转动 $d_\theta = d\cos\theta_C + s\sin\theta_C$ 推广为

$$\begin{pmatrix} d_\theta \\ s_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{c}_C & \mathrm{s}_C \\ -\mathrm{s}_C & \mathrm{c}_C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}$$

此即 GIM 机制。其中 $s_C = \sin\theta_C, c_C = \cos\theta_C$.

3.3.3 CKM 矩阵

1974 年，丁肇中、Richter 等发现 J/ψ 粒子，证实 charm 夸克存在（J/ψ 为餐偶素 $c\bar{c}$）。

1977 年，人类又发现 Υ 粒子，表明 bottom（底）夸克的存在。根据对称性 $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ? \\ b \end{pmatrix}$，人们推测存在 top（顶）夸克，这在 1995 年得到实验证实。至此，六味地黄丸（u、d、s、c、b、t）凑齐！那么，加入第三代夸克后，电弱理论如何修改呢？

3.3.3.1 CKM 矩阵的定义

既然不存在味道改变的中性流过程，那么味道混合（“串味”）应该到带电流中去找。

从 $\mathcal{L}_q^{cc} = -\frac{g}{\sqrt{2}}(\bar{u}_L\gamma^\mu W_\mu^+ d_L + \bar{d}_L\gamma^\mu W_\mu^- u_L) = -\frac{g}{\sqrt{2}}(J^{+\mu}W_\mu^+ + J^\mu W_\mu^-)$，可知

$$J^{+\mu} = \bar{u}_L\gamma^\mu d_L = \bar{u}\gamma^\mu P_L d = \tfrac{1}{2}\bar{u}\gamma^\mu(1-\gamma_5)d \xrightarrow{d_\theta = d\cos\theta_C + s\sin\theta_C} \tfrac{1}{2}\bar{u}\gamma^\mu(1-\gamma_5)d_\theta$$

根据对称性 $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$，加入第二代后的带电流为（裘忠平《现代量子场论导引》）

$$J^{+\mu}=\bar{u}_L\gamma^\mu d_{L\theta}+\bar{c}_L\gamma^\mu s_{L\theta}=\sum_j \bar{u}_L^j\gamma^\mu d_{L\theta}^j=\begin{pmatrix}\bar{u}_L & \bar{c}_L\end{pmatrix}\gamma^\mu V_C\begin{pmatrix}d_L\\ s_L\end{pmatrix}$$

其中

$$V_C=U_{u_j}^+U_{d_j}=\begin{pmatrix}c_C & s_C\\ -s_C & c_C\end{pmatrix}$$

而 j 为三代夸克的“代空间”指标（郑汉青《量子场论》下）。类似地，加入第三代夸克后，带电流变为

$$J^{+\mu}=\bar{u}_L\gamma^\mu d_{L\theta}+\bar{c}_L\gamma^\mu s_{L\theta}+\bar{t}_L\gamma^\mu b_{L\theta}=\sum_j \bar{u}_L^j\gamma^\mu d_{L\theta}^j=\begin{pmatrix}\bar{u}_L & \bar{c}_L & \bar{t}_L\end{pmatrix}\gamma^\mu V_{CKM}\begin{pmatrix}d_L\\ s_L\\ b_L\end{pmatrix}$$

$$V_{CKM}=U_{u_i}^+U_{d_i}=\begin{pmatrix}V_{ud} & V_{us} & V_{ub}\\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb}\\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb}\end{pmatrix}$$

这便是 CKM 矩阵的由来。注意下标u_j并非 u 夸克，而是“类 u 夸克”，还包括了 c、t 夸克。

u、c、t 既是质量本征态，又是弱作用本征态；d、s、b 只是质量本征态，而弱作用 d′、s′、b′本征态是质量本征态的线性组合（胡瑶光《规范场论》）

$$\begin{pmatrix}d'\\ s'\\ b'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}V_{ud} & V_{us} & V_{ub}\\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb}\\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d\\ s\\ b\end{pmatrix}$$

接下来，我们分析下此矩阵的性质，并计算出它的具体形式。

3.3.3.2 幺正三角形

CKM 矩阵是幺正的，即

$$\sum_i V_{ij}V_{ik}^*=\delta_{jk}$$

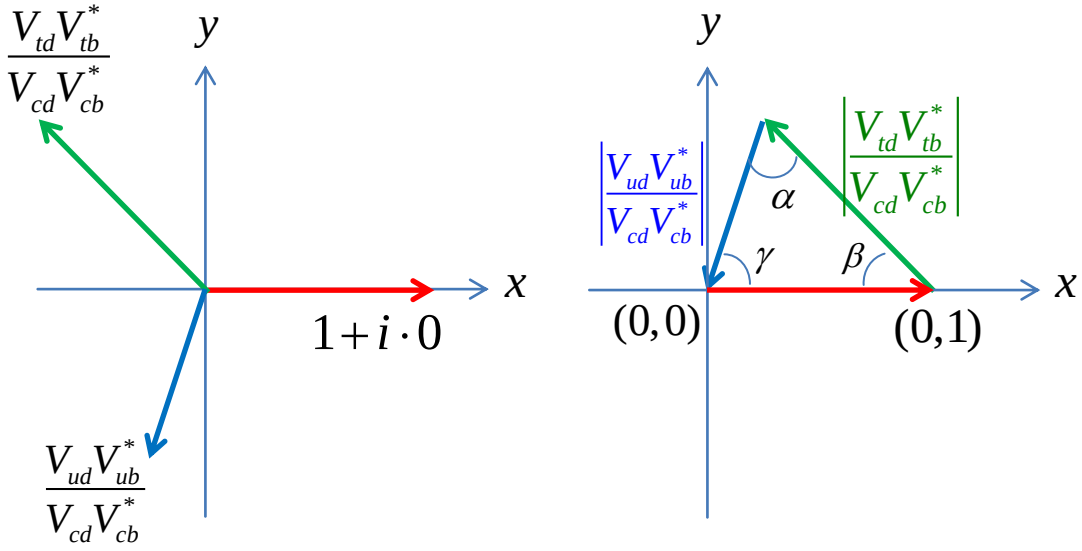
例如，取 j=d，k=b，有

$$V_{ud}V_{ub}^*+V_{cd}V_{cb}^*+V_{td}V_{tb}^*=0$$

除以$V_{cd}V_{cb}^*$，得

$$\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*}+1+\frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{cd}V_{cb}^*}=0$$

我们知道，一个复数可表示一个矢量，三个复数之和为零意味着三个矢量的“合力”为零。根据高一学的力的合成与分解，这三个“力”平移后能首尾相接构成封闭三角形。所以，我们可将此 CKM 矩阵元关系式在复平面上表示出来（Schwartz《Quantum Field Theory and the Standard Model》、张昊《Standard Model Note》pdf），其边长为复数的模：



左图：正交关系；右图：幺正三角形

3.3.3.3 自由度

一般来说，$N\times N$ 矩阵有 N^2 个复元素（或 $2N^2$ 个实元素）。但因 CKM 矩阵为幺正的，所以只有 N^2 个实元素（Fayyazuddin《A modern introduction to particle physics》）。但这 N^2 个元素并非独立的。从带电流 Lagrangian 中的 $\bar{u}_L^j\gamma^\mu d_{L\theta}^j$ 可见，每一代 j 有两种场 $\bar{u}_L^j, d_{L\theta}^j$，N 代夸克就有 2N 种场。这些场可做幺正变换 $u_L^j\to e^{i\alpha_j}u_L^j, d_{L\theta}^j\to e^{i\beta_j}d_{L\theta}^j$，因为 e 指数上 α_j,β_j 的选择不影响物理测量，我们可将这些相因子统一成一个 $e^{i\delta}$．这样，参数就减少了 2N-1 个，还剩下 $N^2-(2N-1)$ 个独立参数。对 N=2，只有 $2^2-(2\times 2-1)=1$ 个独立参数，那就是 Cabibbo 角；对 N=3，有 $3^2-(2\times 3-1)=4$ 个自由度，具体的物理意义留到下一小节再说。以上的讨论比较抽象，智商不到 250 也许看不懂。为让凡人看得清清楚楚明明白白真真切切，我们把矩阵及幺正变换的影响具体写出来。不失一般性，设 CKM 矩阵形如

$$V_{CKM}=\begin{pmatrix} e^{i\theta_{ud}} & e^{i\theta_{us}} & e^{i\theta_{ub}} \\ e^{i\theta_{cd}} & e^{i\theta_{cs}} & e^{i\theta_{cb}} \\ e^{i\theta_{td}} & e^{i\theta_{ts}} & e^{i\theta_{tb}} \end{pmatrix}$$

则在幺正变换 $u_L^j \to e^{i\alpha_j}u_L^j, d_{L\theta}^j \to e^{i\beta_j}d_{L\theta}^j$ 后，带电流变化为

$$J^{+\mu} \to \begin{pmatrix} \overline{u}_L e^{-i\theta_u} & \overline{c}_L e^{-i\theta_c} & \overline{t}_L e^{-i\theta_t} \end{pmatrix}\gamma^\mu \begin{pmatrix} e^{i\theta_{ud}} & e^{i\theta_{us}} & e^{i\theta_{ub}} \\ e^{i\theta_{cd}} & e^{i\theta_{cs}} & e^{i\theta_{cb}} \\ e^{i\theta_{td}} & e^{i\theta_{ts}} & e^{i\theta_{tb}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_L e^{i\theta_d} \\ s_L e^{i\theta_s} \\ b_L e^{i\theta_b} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \overline{u}_L & \overline{c}_L & \overline{t}_L \end{pmatrix}\gamma^\mu \begin{pmatrix} e^{i\theta_{11}} & e^{i\theta_{12}} & e^{i\theta_{13}} \\ e^{i\theta_{21}} & e^{i\theta_{22}} & e^{i\theta_{23}} \\ e^{i\theta_{31}} & e^{i\theta_{32}} & e^{i\theta_{33}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix}$$

其中

$$\theta_{11}=\theta_{ud}-\theta_u+\theta_d, \theta_{12}=\theta_{us}-\theta_u+\theta_s, \theta_{13}=\theta_{ub}-\theta_u+\theta_b$$
$$\theta_{21}=\theta_{cd}-\theta_c+\theta_d, \theta_{22}=\theta_{cs}-\theta_c+\theta_s, \theta_{23}=\theta_{cb}-\theta_c+\theta_b$$
$$\theta_{31}=\theta_{td}-\theta_t+\theta_d, \theta_{32}=\theta_{ts}-\theta_t+\theta_s, \theta_{33}=\theta_{tb}-\theta_t+\theta_b$$

我们要寻找未知函数 $\theta_u,\theta_c,\theta_t,\theta_d,\theta_s,\theta_b$ 的形式，来消去 $\theta_{ud},\theta_{us},\cdots,\theta_{tb}$，决定 $\theta_{11},\theta_{12},\cdots,\theta_{33}$ 中独立的参数有几个。既然未知数 $\theta_u,\theta_c,\theta_t,\theta_d,\theta_s,\theta_b$ 有 6 个，方程有 9 个，所以 3 个方程是多余的。用第二行的方程消去第三行，第一行不变，原方程组化为

$$\theta_{11}=\theta_{ud}-\theta_u+\theta_d,$$
$$\theta_{12}=\theta_{us}-\theta_u+\theta_s,$$
$$\theta_{13}=\theta_{ub}-\theta_u+\theta_b$$
$$\theta_{21}-\theta_{31}=\theta_{cd}-\theta_{td}-\theta_c+\theta_t,$$
$$\theta_{22}-\theta_{32}=\theta_{cs}-\theta_{ts}-\theta_c+\theta_t,$$
$$\theta_{23}-\theta_{33}=\theta_{cb}-\theta_{tb}-\theta_c+\theta_t$$

这 6 个方程可写为

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta_u \\ \theta_d \\ \theta_c \\ \theta_s \\ \theta_t \\ \theta_b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \theta_{11}-\theta_{ud} \\ \theta_{12}-\theta_{us} \\ \theta_{13}-\theta_{ub} \\ \theta_{21}-\theta_{31}-\theta_{cd}+\theta_{td} \\ \theta_{22}-\theta_{32}-\theta_{cs}+\theta_{ts} \\ \theta_{23}-\theta_{33}-\theta_{cb}+\theta_{tb} \end{pmatrix}$$

我们将它简记为 $A\theta = B$．对 A 施行初等行变换，可化为行阶梯型：

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&0&0&0&0\\-1&0&0&1&0&0\\-1&0&0&0&0&1\\0&0&-1&0&1&0\\0&0&-1&0&1&0\\0&0&-1&0&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_5-r_4\\r_6-r_4]{r_2-r_1\\r_3-r_1}\begin{pmatrix}-1&1&0&0&0&0\\0&-1&0&1&0&0\\0&-1&0&0&0&1\\0&0&-1&0&1&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}-1&1&0&0&0&0\\0&-1&0&1&0&0\\0&0&0&-1&0&1\\0&0&-1&0&1&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}-1&1&0&0&0&0\\&-1&0&1&0&0\\&&-1&0&1&0\\&&&-1&0&1\\&&&&&0\\&&&&&0\end{pmatrix}$$

由此可见，A 的秩 $R_A=4$，可见独立参数确实是 4 个。

3.3.3.4 CKM 矩阵元的计算

既然 CKM 矩阵只有 4 个独立参数，那么可以假定为

$$V_{CKM}=\begin{pmatrix}c_1&s_1c_3&s_1s_3\\-s_1c_2&V_{cs}&V_{cb}\\-s_1s_2&V_{ts}&V_{tb}\end{pmatrix}$$

其中 $c_1=\cos\theta_1, s_2=\sin\theta_2$，其余与此类似。蓝色部分与 GIM 机制矩阵 $\begin{pmatrix}c_C&s_C\\-s_C&c_C\end{pmatrix}$ 类似。

第一行第一列包含了 3 个实数角 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$；因自由度为 4，所以红色部分除 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ 外只含一个独立参数，可记作 δ（对应相因子 $e^{i\delta}$）。

下面，我们由正交关系 $\sum_i V_{ij}V_{ik}^*=\delta_{jk}$ 导出红色四个矩阵元（张昊《Standard Model Note》）：

第一，对 1、2 行求和 $V_{1j}^*V_{2j}=0$ 给出

$$c_1(-s_1c_2)+s_1c_3V_{cs}+s_1s_3V_{cb}=0\Rightarrow V_{cb}=\frac{c_1c_2-c_3V_{cs}}{s_3}$$

第二，对 1、2 列求和 $V_{j1}^*V_{j2}=0$ 给出

$$c_1s_1c_3+(-s_1c_2)V_{cs}+(-s_1s_2)V_{ts}=0\Rightarrow V_{ts}=\frac{c_1c_3-c_2V_{cs}}{s_2}$$

第三，对 1、3 行求和$V_{1j}^{*}V_{3j}=0$给出

$$c_1(-s_1s_2)+s_1c_3V_{ts}+s_1s_3V_{tb}=0$$

$$\Rightarrow V_{tb}=\frac{c_1s_2-c_3V_{ts}}{s_3}=\frac{c_1s_2-c_3\dfrac{c_1c_3-c_2V_{cs}}{s_2}}{s_3}=\frac{c_1s_2^2-c_1c_3^2+c_2c_3V_{cs}}{s_2s_3}$$

对 1、3 列求和$V_{j1}^{*}V_{j3}=0$是多余的方程，因要保留一自由参数δ，故只需 3 个约束方程。

至此，CKM 矩阵简化为

$$V_{CKM}=\begin{pmatrix} c_1 & s_1c_3 & s_1s_3 \\ -s_1c_2 & V_{cs} & \dfrac{c_1c_2-c_3V_{cs}}{s_3} \\ -s_1s_2 & \dfrac{c_1c_3-c_2V_{cs}}{s_2} & \dfrac{c_1s_2^2-c_1c_3^2+c_2c_3V_{cs}}{s_2s_3} \end{pmatrix}$$

其中只含有一个未知参数V_{cs}，下面来确定它的形式。设$V_{cs}=x+iy$，由幺正性可得（张昊《Standard Model Note》）

$$V_{CKM}^{\dagger}V_{CKM}=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

我们就关注这 3 个 1 中的中间那个红色的 1，它的来头是 CKM 第二列复共轭与第二列相乘：

$$1=\begin{pmatrix} s_1c_3 & V_{cs}^{*} & \dfrac{c_1c_3-c_2V_{cs}^{*}}{s_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1c_3 \\ V_{cs} \\ \dfrac{c_1c_3-c_2V_{cs}}{s_2} \end{pmatrix}=(s_1c_3)^2+|V_{cs}|^2+\frac{(c_1c_3-c_2V_{cs}^{*})(c_1c_3-c_2V_{cs})}{s_2^2}$$

$$=s_1^2c_3^2+x^2+y^2+\frac{1}{s_2^2}[(c_1c_3-c_2x)^2+c_2^2y^2]$$

于是

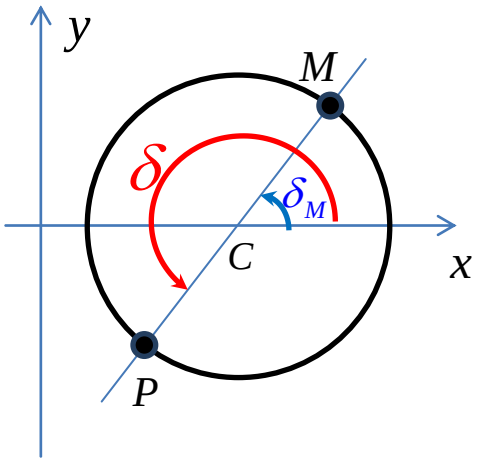
$$s_2^2=s_2^2s_1^2c_3^2+s_2^2(x^2+y^2)+(c_1c_3-c_2x)^2+c_2^2y^2$$

$$=s_2^2s_1^2c_3^2+(s_2^2+c_2^2)(x^2+y^2)+c_1^2c_3^2-2c_1c_2c_3x$$

移项可得完全平方式

$$(x-c_1c_2c_3)^2+y^2=s_2^2-s_2^2s_1^2c_3^2-c_1^2c_3^2+c_1^2c_2^2c_3^2=s_2^2(1-s_1^2c_3^2)-c_1^2c_3^2s_2^2=s_2^2(1-c_3^2)=s_2^2s_3^2$$

这是圆心为$C(c_1c_2c_3,0)$，半径为s_2s_3的圆（张昊《Standard Model Note》）：



圆上一点 M（或 P）坐标为

$$V_{cs}=c_1c_2c_3+s_2s_3e^{i\delta_M}\quad（或V_{cs}=c_1c_2c_3-s_2s_3e^{i\delta}）$$

所以

$$V_{cb}=\frac{c_1c_2-c_3(c_1c_2c_3-s_2s_3e^{i\delta})}{s_3}=\frac{c_1c_2(1-c_3^2)}{s_3}+\frac{c_3s_2s_3e^{i\delta}}{s_3}=c_1c_2s_3+s_2c_3e^{i\delta}$$

$$V_{ts}=\frac{c_1c_3-c_2(c_1c_2c_3-s_2s_3e^{i\delta})}{s_2}=\frac{c_1c_3(1-c_2^2)}{s_2}+\frac{c_2s_2s_3e^{i\delta}}{s_2}=c_1s_2c_3+c_2s_3e^{i\delta}$$

$$V_{tb}=\frac{c_1s_2^2-c_1c_3^2+c_2c_3(c_1c_2c_3-s_2s_3e^{i\delta})}{s_2s_3}=\frac{c_1s_2^2+c_1c_3^2(-1+c_2^2)}{s_2s_3}-\frac{c_2c_3s_2s_3e^{i\delta}}{s_2s_3}$$

$$=\frac{c_1s_2^2(1-c_3^2)}{s_2s_3}-c_2c_3e^{i\delta}=c_1s_2s_3-c_2c_3e^{i\delta}$$

$$V_{CKM}=\begin{pmatrix}c_1 & s_1c_3 & s_1s_3\\ -s_1c_2 & c_1c_2c_3-s_2s_3e^{i\delta} & c_1c_2s_3+s_2c_3e^{i\delta}\\ -s_1s_2 & c_1s_2c_3+c_2s_3e^{i\delta} & c_1s_2s_3-c_2c_3e^{i\delta}\end{pmatrix}$$

此形式与 Srednicki《Quantum Field Theory》一致，转置后与张昊《Standard Model Note》一致；胡瑶光《规范场论》编号 2 和 3 与张昊颠倒。

【补充】CKM 矩阵的其他形式

CKM 矩阵的形式不唯一。下面导出另外一种常见形式。

上小节导出的矩阵元中，除 θ_1 对应 Cabibbo 角外，其他角的物理意义不够明确。一般地，N 维空间可选取 $\frac{N(N-1)}{2}$ 个 Euler 角（金广浩《Elementary Particles And Their Interactions: Concepts and Phenomena》）。于是 CKM 矩阵的 4 个独立参数可选为 3 个 Euler 角加 1 个相位。这样，物理意义就明确了：绕 z 轴转 $\theta_{12}=\theta_C$，绕 y 轴转 θ_{13}，绕 x 轴转 θ_{23}（Schwartz《Quantum

Field Theory and the Standard Model》)：

$$V_{CKM}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & c_{23} & s_{23}\\ & -s_{23} & c_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{13} & & s_{13}e^{-i\delta}\\ & 1 & \\ -s_{13}e^{i\delta} & & c_{13}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{12} & s_{12} & \\ -s_{12} & c_{12} & \\ & & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta}\\ -s_{12}c_{23}-c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23}-s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13}\\ s_{12}s_{23}-c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23}-s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13}\end{pmatrix}$$

其中相角 δ 和本节最初介绍的幺正三角形可用来研究 CP 破坏。注意，这样的定义的转动与三维转动群 SO(3)相近，但不完全一致。

在 $\theta_{13}=\theta_{23}=0$ 极限下， $s_{13}=s_{23}=0, c_{13}=c_{23}=1$，CKM 矩阵简化为 GIM 机制矩阵：

$$V_{CKM}=\begin{pmatrix}c_{12} & s_{12} & \\ -s_{12} & c_{12} & \\ & & 1\end{pmatrix}$$

至此，纯理论构造完毕。接下来，最重要的就是导出 Feynman 规则，它是通向实验物理（截面、宽度）的桥梁。

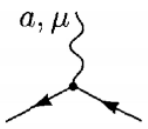
第 4 步　导出电弱理论的 Feynman 规则（40 分）

在 QED 中，我们用最完整的方式——LSZ 约化公式导出 Feynman 规则；到了 QCD 中，我们不再使用约化公式，而是从有效作用量的泛函微商来导出传播子、顶点，再像“积木”一样将各因子拼接起来（约化公式允许我们“先验地”拆分重组）。现在，我们对于 Feynman 规则已经有了充足的训练，我们干脆连泛函微商也省了——使用类比法直接从 Lagrangian“猜”出 Feynman 规则。完整的 Feynman 规则还包括鬼场、圈图，此处只导出金广浩书上的。

3.4.1　顶点

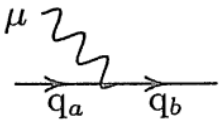
3.4.1.1　无对称性亦无导数型

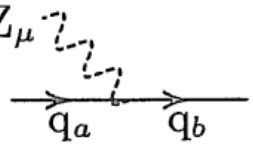
QED：$\mathcal{L}=Qe\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu}\Rightarrow$  $=iQe\gamma^{\mu}$（对电子，Q=-1）

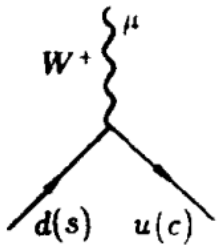
QCD：$\mathcal{L}=g\bar{\psi}\gamma^{\mu}A_{\mu}^{a}T_{a}\psi\Rightarrow$  $=ig\gamma^{\mu}T_{a}$

总结：对于不含导数也无图形对称性的 Lagrangian，顶点等于把场量干掉后再乘以 i.

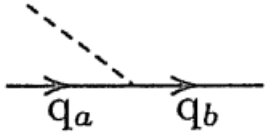
模仿（举一反三）：

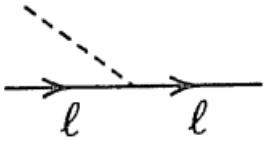
$$\mathcal{L}=-e(\frac{2}{3}\bar{u}\gamma^{\mu}u-\frac{1}{3}\bar{d}\gamma^{\mu}d)A_{\mu}\Rightarrow$$  $$=-iQ_a e\gamma^{\mu}\delta_{ab}$$（$Q_u=\frac{2}{3},Q_d=-\frac{1}{3}$）

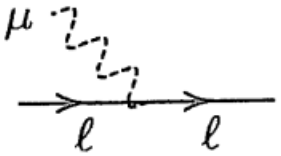
$$\mathcal{L}=-\frac{g}{2c_W}\begin{bmatrix}\bar{u}\gamma^{\mu}(g_V^u-g_A^u\gamma_5)u\\+\bar{d}\gamma^{\mu}(g_V^d-g_A^d\gamma_5)d\end{bmatrix}Z_{\mu}\Rightarrow$$  $$=-\frac{ig}{2c_W}\gamma^{\mu}(g_V^a-g_A^a\gamma_5)\delta_{ab}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{L}&=-\frac{g}{\sqrt{2}}(\bar{u}_L\gamma^{\mu}W_{\mu}^{+}d_L+\cdots)\\\rightarrow&-\frac{g}{\sqrt{2}}(\bar{u}\gamma^{\mu}W_{\mu}^{+}P_L d_{\theta}+\cdots)\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$  $$=-\frac{ig}{\sqrt{2}}\gamma^{\mu}P_L\cos\theta_C+\cdots$$

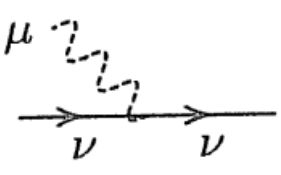
其中 $P_L=\frac{1-\gamma_5}{2}$， $\bar{X}_L\gamma^{\mu}Y_L=\bar{X}\gamma^{\mu}P_L Y$， $d_{\theta}=d\cos\theta_C+s\sin\theta_C$．此处仅举一例，更多的类似顶点见裘忠平《现代量子场论导引》。

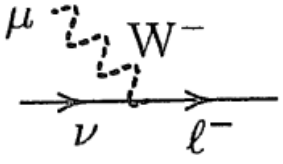
$$\mathcal{L}=-\frac{g}{2m_W}[m_u\bar{u}uH+m_d\bar{d}dH+\cdots]\Rightarrow$$  $$=-i\frac{gm_{q_a}}{2m_W}\delta_{ab}$$

$$\mathcal{L}=-\frac{gm_e}{2m_W}\bar{e}eH\Rightarrow$$  $$=-i\frac{gm_l}{2m_W}$$

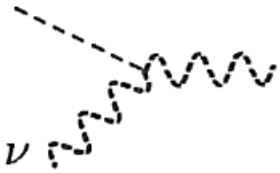
$$\left.\begin{aligned}\mathcal{L}&=-\frac{g}{4c_W}\bar{e}\gamma^{\mu}(4s_W^2-1+\gamma_5)eZ_{\mu}\\&=-\frac{g}{2c_W}\bar{e}\gamma^{\mu}(g_V^l-g_A^l\gamma_5)eZ_{\mu}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$  $$=-\frac{ig}{2c_W}\gamma^{\mu}(g_V^l-g_A^l\gamma_5)$$

其中 $g_V^l=-\frac{1}{2}+2s_W^2, g_A^l=-\frac{1}{2}$（金广浩《Elementary Particles And Their Interactions：Concepts and Phenomena》）．

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{L}&=-\frac{g}{2c_W}\bar{\psi}_{\nu L}\gamma^{\mu}\psi_{\nu L}Z_{\mu}\\&=-\frac{g}{2c_W}\bar{\psi}_{\nu}\gamma^{\mu}P_L\psi_{\nu}Z_{\mu}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$  $$=-\frac{ig}{2c_W}\gamma^{\mu}P_L$$

$$\mathcal{L}=-\frac{g}{\sqrt{2}}\bar{e}\gamma^{\mu}P_L\nu W_{\mu}^{-}+\cdots\Rightarrow$$  $$=-i\frac{g}{\sqrt{2}}\gamma^{\mu}P_L$$

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{L} &= gm_W H W_\mu^- W_+^\mu \\ &= gm_W g_{\mu\nu} W_+^\mu W_-^\nu H\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$



$$= igm_W g_{\mu\nu}$$

W+，W-是不同的场，它们之间无对称性。不过，我们可从这个例子学到一个重要技巧：将原本具有指标对称性的$W_+^\mu W_\mu^-$异化成$W_+^\mu W_-^\nu$，将指标对称性由度规承担。

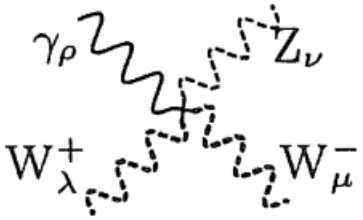
由

$$\mathcal{L}_{W^2ZA} = -g^2 c_W s_W [2W^+ \cdot W_- (Z \cdot A) - W_+ \cdot Z(W^- \cdot A) - W_+ \cdot A(W^- \cdot Z)]$$

$$= egc_W [W_+ \cdot Z(W^- \cdot A) + W_+ \cdot A(W^- \cdot Z) - 2W^+ \cdot W_- (Z \cdot A)]$$

$$= egc_W W_+^\lambda W_-^\mu Z^\nu A^\rho [g_{\lambda\nu} g_{\mu\rho} + g_{\lambda\rho} g_{\mu\nu} - 2g_{\lambda\mu} g_{\nu\rho}]$$

可得



$$= iegc_W [g_{\lambda\nu} g_{\mu\rho} + g_{\lambda\rho} g_{\mu\nu} - 2g_{\lambda\mu} g_{\nu\rho}]$$

这个看起来挺像 4 胶子顶点的顶点，其实除了指标对称外，规范场之间无任何对称性！我们不把这类图归入“对称型”顶点，因为泛函微商后并不产生对称因子（比如 2 倍、4 倍）。

3.4.1.2 有对称性但无导数型

温故：$\mathcal{L} = -\frac{\lambda}{4!}\phi^4 \Rightarrow$

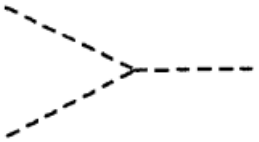


$$= -i\lambda$$

总结：有 n 个相同的场，求 n 阶泛函微商消去 n 的阶乘。

知新：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{3!}\frac{3gm_H^2}{2m_W} H^3 \Rightarrow$$



$$= -i\frac{3gm_H^2}{2m_W}$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4!}\frac{3g^2 m_H^2}{4m_W^2} H^4 \Rightarrow$$



$$= -i\frac{3g^2 m_H^2}{4m_W^2}$$

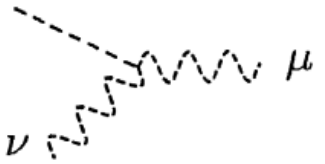
$$\left.\begin{aligned}\mathcal{L}&=\frac{1}{4}g^2H^2W_+^\mu W_\mu^-\\&=\frac{1}{2}g^2(\frac{1}{2}H^2)W_+^\mu W_-^\nu g_{\mu\nu}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$



$$=i\frac{1}{2}g^2g_{\mu\nu}$$

注意此处只有 H 的对称性，H^2 导数给出 2 倍，使 1/4 变成 1/2；W+，W-是不同的场，它们之间无对称性。类似上小节 HWW 处理，将 $W_+^\mu W_\mu^-$ 异化成 $W_+^\mu W_-^\nu$，指标对称性由度规承担。

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{L}&=\frac{gm_Z}{2c_W}Z_\mu Z^\mu H\\&=g\frac{m_Z}{c_W}(\frac{1}{2}Z^\mu Z^\nu)g_{\mu\nu}H\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$



$$=ig\frac{m_Z}{c_W}g_{\mu\nu}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{L}&=\frac{1}{8}\frac{g^2}{c_W^2}H^2Z_\mu Z^\mu\\&=\frac{g^2}{2c_W^2}(\frac{1}{2}H^2)(\frac{1}{2}Z^\mu Z^\nu)g_{\mu\nu}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$



$$=i\frac{g^2}{2c_W^2}g_{\mu\nu}$$

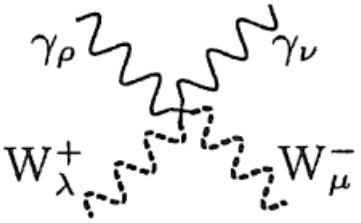
由

$$\mathcal{L}_{W^2A^2}=-g^2s_W^2[W^+\cdot W_-A^2-W_+\cdot A(W^-\cdot A)]=e^2[W_+\cdot A(W^-\cdot A)-W^+\cdot W_-A^2]$$

$$=e^2W_+^\lambda W_-^\mu[\frac{A^\nu g_{\lambda\nu}A^\rho g_{\mu\rho}+A^\rho g_{\lambda\rho}A^\nu g_{\mu\nu}}{2}-g_{\lambda\mu}A^\nu A^\rho g_{\nu\rho}]$$

$$=e^2W_+^\lambda W_-^\mu(\frac{1}{2}A^\nu A^\rho)[g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho}+g_{\lambda\rho}g_{\mu\nu}-2g_{\lambda\mu}g_{\nu\rho}]$$

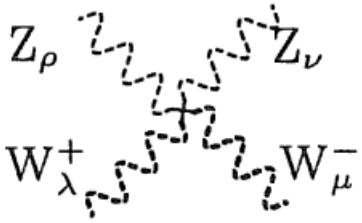
得



$$=ie^2[g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho}+g_{\lambda\rho}g_{\mu\nu}-2g_{\lambda\mu}g_{\nu\rho}]$$

注意此图只有 A 的对称性（给出 2 倍），而无 W 的对称性。

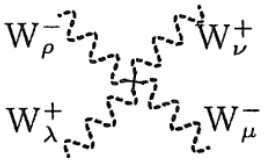
$\mathcal{L}_{W^2Z^2}=-g^2c_W^2[W^+\cdot W_-Z^2-W_+\cdot Z(W^-\cdot Z)]=\mathcal{L}_{W^2A^2}\Big|_{e^2\to g^2c_W^2}$，其他不变，故 Feynman 规则为



$$=ig^2c_W^2[g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho}+g_{\lambda\rho}g_{\mu\nu}-2g_{\lambda\mu}g_{\nu\rho}]$$

$$\mathcal{L}_{W^4}=-\tfrac{1}{2}g^2\{[W^+\cdot W_-][W^+\cdot W_-]-[W^+\cdot W_+][W^-\cdot W_-]\}$$

$$=-\tfrac{1}{2}g^2W_+^{\lambda}W_-^{\mu}W_+^{\nu}W_-^{\rho}[\frac{g_{\lambda\mu}g_{\nu\rho}+g_{\lambda\rho}g_{\mu\nu}}{2}-g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho}]$$



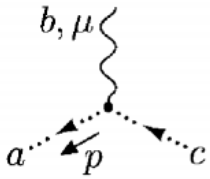
$$=-ig^2[g_{\lambda\mu}g_{\nu\rho}+g_{\lambda\rho}g_{\mu\nu}-2g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho}]$$

注意此 W^4 图的 Lorentz 结构与 W^2A^2、W^2Z^2 的 Lorentz 结构 $g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho}+g_{\lambda\rho}g_{\mu\nu}-2g_{\lambda\mu}g_{\nu\rho}$ 貌似相同，实则不同。W^2A^2、W^2Z^2 的“-2”项对应 $W_+\cdot W_-$，而 W^4 的“-2”项对应 $W_+\cdot W_+$. 昨晚梦见指标在列车上 “换座”，一家人要坐在一起。参与点乘的场之间是近亲，相应指标要“坐”在同一个度规上。例如，$W^-\cdot W_-$ 要求 W_-^{μ} 与 W_-^{ρ} 坐到一个 $g_{\square\square}$ 上，成为 $g_{\mu\rho}$.

W+与 W+对称（给出 2 倍），W-与 W-对称（给出 2 倍），但 W+与 W-不对称，总的对称因子为 4. 若 4 个 W 完全相同，对称因子就不是 4，而是 24.

3.4.1.3 有导数型

温故：$\mathcal{L}=gf_{abc}(\partial^{\mu}\bar{C}^a)A_{\mu}^bC^c\Rightarrow$



$$=-gf_{abc}p^{\mu}$$

总结：含有导数，除了干掉场量、乘以 i，还要附加动量因子。可约定指向顶点动量为 p 时给出 $-ip^{\mu}$，离开顶点动量为 p 时给出 ip^{μ}（有的书约定的正负号与此相反）；再与 $i\mathcal{L}$ 的 i 相乘后给出负号。

$$\mathcal{L}=igs_W[W_{\mu}^-W_{\nu}^+A^{\mu\nu}+W_{\mu}^+A_{\nu}W_-^{\mu\nu}-W_{\mu}^-A_{\nu}W_+^{\mu\nu}]$$

$$=ie[W_-^{\mu}W_+^{\nu}(\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu})+W_+^{\mu}A^{\nu}(\partial_{\mu}W_{\nu}^--\partial_{\nu}W_{\mu}^-)-W_-^{\mu}A^{\nu}(\partial_{\mu}W_{\nu}^+-\partial_{\nu}W_{\mu}^+)]$$

$$=ie[W_+^{\alpha}W_-^{\beta}(\partial_{\beta}A_{\alpha}-\partial_{\alpha}A_{\beta})+W_+^{\alpha}A^{\gamma}(\partial_{\alpha}W_{\gamma}^--\partial_{\gamma}W_{\alpha}^-)-W_-^{\beta}A^{\gamma}(\partial_{\beta}W_{\gamma}^+-\partial_{\gamma}W_{\beta}^+)]$$

$$=ie\{W_+^{\alpha}W_-^{\beta}[\partial_{\beta}g_{\alpha\gamma}-\partial_{\alpha}g_{\beta\gamma}]A^{\gamma}+W_+^{\alpha}A^{\gamma}[\partial_{\alpha}g_{\beta\gamma}-\partial_{\gamma}g_{\alpha\beta}]W_-^{\beta}-W_-^{\beta}A^{\gamma}[\partial_{\beta}g_{\alpha\gamma}-\partial_{\gamma}g_{\alpha\beta}]W_+^{\alpha}\}$$

其中有些指标“睡”上铺不舒服，我们已经给它“换座”。在动量空间，有

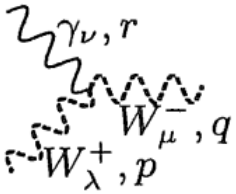
$$i\mathcal{L}_p=i^2e\{W_+^{\alpha}W_-^{\beta}[(-ik_{\beta})g_{\alpha\gamma}-(-ik_{\alpha})g_{\beta\gamma}]A^{\gamma}+W_+^{\alpha}A^{\gamma}[(-iq_{\alpha})g_{\beta\gamma}-(-iq_{\gamma})g_{\alpha\beta}]W_-^{\beta}$$

$$-W_-^{\beta}A^{\gamma}[(-ip_{\beta})g_{\alpha\gamma}-(-ip_{\gamma})g_{\alpha\beta}]W_+^{\alpha}\}$$

$$=ieW_+^{\alpha}W_-^{\beta}A^{\gamma}\{[k_{\beta}g_{\alpha\gamma}-k_{\alpha}g_{\beta\gamma}]+[q_{\alpha}g_{\beta\gamma}-q_{\gamma}g_{\alpha\beta}]-[p_{\beta}g_{\alpha\gamma}-p_{\gamma}g_{\alpha\beta}]\}$$

$$=ie[g_{\alpha\beta}(p-q)_{\gamma}+g_{\beta\gamma}(q-k)_{\alpha}+g_{\gamma\alpha}(k-p)_{\beta}]W_+^{\alpha}W_-^{\beta}A^{\gamma}$$

为搭乘金广浩的车，令乘客 W+，W-，A 将车票改签成 $\alpha \to \lambda, \beta \to \mu, \gamma \to \nu, k \to r$，得

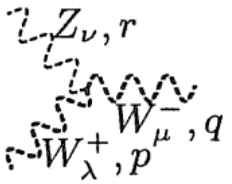


$$= ie[g_{\lambda\mu}(p-q)_\nu + g_{\mu\nu}(q-r)_\lambda + g_{\nu\lambda}(r-p)_\mu]$$

注意动量都指向顶点。与金广浩整体差负号。

$\mathcal{L} = igc_W[W_-^{\mu\nu}W_\mu^+ Z_\nu - W_+^{\mu\nu}W_\mu^- Z_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ Z^{\mu\nu}]$ 与上图完全类似，只要 $A \to Z, e \to gc_W$.

$Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu$



$$= igc_W[g_{\lambda\mu}(p-q)_\nu + g_{\mu\nu}(q-r)_\lambda + g_{\nu\lambda}(r-p)_\mu]$$

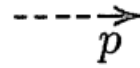
与金广浩整体差负号。

Comments：

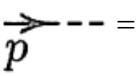
（1）该表达式酷似三胶子顶点，但其实求法差别甚大。三胶子顶点要考虑结构常数对称性，但 W+，W-应视作不同粒子，此图几乎毫无对称性可言（虽有指标对称，但不产生对称因子，如 2 倍、4 倍等）。

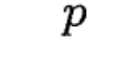
（2）求导正负问题与 Fourier 变换的定义有关（见 2.2.3 节讨论）。单个图求出正或负似乎都对，但当将不同因子（如顶点 X 与传播子 Y）像“积木”一样拼在一起时，就可能不对了。这样说来，LSZ 约化公式还是有必要记住的，以免在拼图时因各部分约定不一致而出错。

3.4.2 传播子

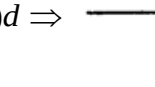
类比 $\lambda\phi^4$：$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2) \Rightarrow$  $= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$

可得 Higgs 场传播子

$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu H\partial^\mu H - m_H^2 H^2) \Rightarrow$  $= \frac{i}{p^2 - m_H^2 + i\varepsilon}$

类比 QED：$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \Rightarrow$  $= \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon}$

可得夸克传播子

$\mathcal{L} = \bar{u}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_u)u + \bar{d}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_d)d \Rightarrow$  $= \frac{i}{\not{p} - m_q + i\varepsilon}$

下面，重点讲下不能通过类比得到的传播子。

3.4.2.1 重矢量场传播子

从 $\mathcal{L}_G^0=-\frac{1}{2}W_{\mu\nu}^+W_-^{\mu\nu}-\frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu}-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$，$W_{\mu\nu}^+=\partial_\mu W_\nu^+-\partial_\nu W_\mu^+, W_-^{\mu\nu}=\partial_\mu W_\nu^--\partial_\nu W_\mu^-$

$Z_{\mu\nu}=\partial_\mu Z_\nu-\partial_\nu Z_\mu$ 以及 $\mathcal{L}_H=\frac{1}{2}\partial_\mu H\,\partial^\mu H-\frac{1}{2}\sqrt{-2m^2}^2H^2+m_W^2W_\mu^-W_+^\mu+\frac{1}{2}m_Z^2Z_\mu Z^\mu+\cdots$

来出发。仿照 QED 做法（请复习 1.2.2.5 节），将 Lagrangian 写成 $\frac{1}{2}X^\mu K_{\mu\nu}Y^\nu$ 形式：

$$\mathcal{L}_Z^0=-\tfrac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu}+\frac{1}{2}m_Z^2Z_\mu Z^\mu=\frac{1}{2}Z^\mu(g_{\mu\nu}\Box-\partial_\mu\partial_\nu)Z^\nu+\frac{1}{2}m_Z^2Z_\mu Z^\mu$$
$$=\frac{1}{2}Z^\mu[g_{\mu\nu}(\Box+m_Z^2)-\partial_\mu\partial_\nu]Z^\nu=\frac{1}{2}Z^\mu K_{\mu\nu}Z^\nu$$

代入 $K^{\mu\rho}D_{\mu\nu}(x-y)=g_\nu^\rho\delta^4(x-y)$，得

$$[g^{\mu\rho}(\Box+m_Z^2)-\partial^\mu\partial^\rho]\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}e^{-iqx}D_{\mu\nu}(q)=g_\nu^\rho\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}e^{-iqx}$$

所以

$$[g^{\mu\rho}(m_Z^2-q^2)+q^\mu q^\rho]D_{\mu\nu}(q)=g_\nu^\rho$$

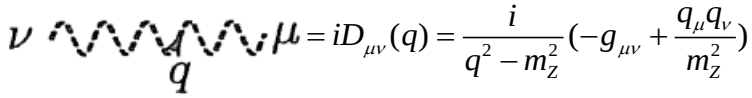
设 $D_{\mu\nu}(q)=Ag_{\mu\nu}+Bq_\mu q_\nu$，代入上式得

$$A(m_Z^2-q^2)g_\nu^\rho+[A+B(m_Z^2-q^2)+Bq^2]q^\rho q_\nu=g_\nu^\rho$$

于是 $A(m_Z^2-q^2)=1, A+B(m_Z^2-q^2)+Bq^2=0$，解出待定系数 A，B，得

$$D_{\mu\nu}(q)=\frac{1}{m_Z^2-q^2}(g_{\mu\nu}-\frac{1}{m_Z^2}q_\mu q_\nu)$$

所以传播子为



$$=iD_{\mu\nu}(q)=\frac{i}{q^2-m_Z^2}(-g_{\mu\nu}+\frac{q_\mu q_\nu}{m_Z^2})$$

$$\mathcal{L}_W^0=-\tfrac{1}{2}W_{\mu\nu}^+W_-^{\mu\nu}+m_W^2W_\mu^-W_+^\mu=-\tfrac{1}{2}W_{\mu\nu}^-W_+^{\mu\nu}+m_W^2W_\mu^-W_+^\mu$$
$$=-\tfrac{1}{2}(\partial_\mu W_\nu^--\partial_\nu W_\mu^-)W_+^{\mu\nu}+m_W^2W_\mu^-W_+^\mu=-\tfrac{1}{2}(\partial_\mu W_\nu^-W_+^{\mu\nu}-\partial_\mu W_\nu^-W_+^{\nu\mu})+m_W^2W_\mu^-W_+^\mu$$
$$=-\tfrac{1}{2}\partial_\mu W_\nu^-(W_+^{\mu\nu}+W_+^{\mu\nu})+m_W^2W_\mu^-W_+^\mu=-\partial_\mu W_\nu^-W_+^{\mu\nu}+m_W^2W_\mu^-W_+^\mu$$
$$=-\partial_\mu(W_\nu^-W_+^{\mu\nu})+W_\nu^-\partial_\mu W_+^{\mu\nu}+m_W^2W_\mu^-W_+^\mu=W_-^\rho(\Box g_{\rho\sigma}-\partial_\rho\partial_\sigma)W_+^\sigma+m_W^2W_-^\rho W_+^\sigma g_{\rho\sigma}$$
$$=W_-^\rho[g_{\rho\sigma}(\Box+m_W^2)-\partial_\rho\partial_\sigma]W_+^\sigma$$

与 Z 场相比，此处少了 1/2 因子，那么传播子是否变成 2 倍呢？非也。Z 的二次型中两个 Z

相同，求导时给出 2 倍；W 的二次型中 W+与 W-视作不同粒子，求导时没有对称性，也就没有对称因子 2. 所以 W 的传播子形式与 Z 相同（只是将 Z 的质量换成 W 的质量）。

3.4.2.2 中微子传播子

电弱统一理论中，中微子的自由 Lagrangian 为（此处仅列出第一代中微子）

$$L=\bar{\nu}_L i\gamma^\mu\partial_\mu\nu_L=\nu_L^\dagger\gamma^0 i\gamma^\mu\partial_\mu\nu_L=\nu^\dagger P_L\gamma^0 i\gamma^\mu\partial_\mu P_L\nu=\bar{\nu}P_R i\gamma^\mu P_L\partial_\mu\nu=\bar{\nu}i\gamma^\mu P_L\partial_\mu\nu=\bar{\nu}K_x\nu$$

其中 $K_x=i\gamma^\mu P_L\partial_\mu=K_m i\partial_\mu$ 为夹在二次型场量 $\bar{\nu},\nu$ 之间的（坐标空间）算符。

根据以往经验，计算传播子 F 需解方程 $KF(x-y)=i\delta^4(x-y)$

代入 $F(x)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ipx}F(p)$，$\delta^4(x)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ipx}$，则相当于求解 $K_m i(-ip_\mu)F(p)=i$

定义 $K_p\equiv K_m p_\mu$，则 $i=K_pF(p)=\gamma^\mu P_L p_\mu F(P)=\not{p}P_L F(P)$

传播子 F 为（动量空间）K 算符 K_p 的逆算符（再乘以 i）：$F(p)=i(\not{p}P_L)^{-1}=iP_L^{-1}\frac{1}{\not{p}}$

【问题】

（1）手征算符的逆是什么？$\frac{1}{P_L}=\frac{P_L}{P_L^{\,2}}=\frac{P_L}{P_L}=1$ 不对，$\frac{1}{P_L}=\frac{P_R}{P_LP_R}=\frac{P_R}{0}=\infty$ 更错。

（2）若手征算符不可逆（反常），那么中微子的传播子怎么计算？

（3）若 A，B 可逆但不对易，那么 $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$ 和 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ 哪个正确？

（4）设 $K_p=aP_R+bP_L$，$F(p)=cP_R+dP_L$，则有

$$i(P_L+P_R)=i\equiv K_pF(p)=(aP_R+bP_L)(cP_R+dP_L)=acP_R+bdP_L$$

故 $c=a^{-1}i,d=b^{-1}i$. 因 K 中只有左手部分，无右手部分，a=0，故 c 不存在，故 F 不存在。

（5）给动量加上小虚部行不行呢？或说，加上质量项，使 Lagrangian 成为

$$L=\bar{\nu}_L i\gamma^\mu\partial_\mu\nu_L-m\bar{\nu}_L\nu_L=\bar{\nu}(P_R i\gamma^\mu P_L\partial_\mu-m)\nu=\bar{\nu}K_x\nu$$

于是 $K_p=P_R i\gamma^\mu P_L(-ip_\mu)-m=\not{p}P_L-(P_L+P_R)m=(\not{p}-m)P_L-mP_R$

此时 $a=-m,b=\not{p}-m\Rightarrow c=-\frac{i}{m},d=\frac{i}{\not{p}-m}\Rightarrow F(p)=-\frac{i}{m}P_R+\frac{i}{\not{p}-m}P_L$

虽求出来了，但与所有书不同。若加入右手中微子，则中微子传播子与电子相同。许多书都只给出轻子传播子而不分电子和中微子，但标准模型无右手中微子，这超越了标准模型？

【解答】

首先要分清哪些是基本公式（定义），哪些是导出公式（推论）。当导出公式不适用时，要回归定义。手征算符确实不可逆。一般来说 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}\neq A^{-1}B^{-1}$.

Dirac 场传播子定义为（Srednicki《Quantum Field Theory》）

$$S_{\alpha\beta}(x-y)=\langle 0|T\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)|0\rangle$$

其中 T 为时序算符，满足

$$T\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)=\theta(x^0-y^0)\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)+\theta(y^0-x^0)\bar{\psi}_\beta(y)\psi_\alpha(x)$$

$$\theta(x^0-y^0)=\begin{cases}1, & x^0>y^0\\ 0, & x^0<y^0\end{cases}$$

我们可以选择积分围道，使 $\theta(y^0-x^0)$ 项不出现（Peskin《An introduction to Quantum Field Theory》）。于是传播子简化为

$$S_{\alpha\beta}(x-y)=\langle 0|\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)|0\rangle$$

设

$$\psi(x)=\sum_s\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_p}}[a_s(\vec{p})u_s(\vec{p})e^{-ipx}+b_s(\vec{p})v_s(\vec{p})e^{ipx}]$$

$$\bar{\psi}(y)=\sum_{s'}\int\frac{d^3p'}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{p'}}}[a_{s'}^\dagger(\vec{p}')\bar{u}_{s'}(\vec{p}')e^{ip'y}+b_{s'}^\dagger(\vec{p}')\bar{v}_{s'}(\vec{p}')e^{-ip'y}]$$

满足

$$a_s|0\rangle=b_s^\dagger|0\rangle=0,\quad \langle 0|a_s^\dagger=\langle 0|b_s=0$$

$$\{a_s(\vec{p}),a_{s'}^\dagger(\vec{p}')\}=(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\delta_{ss'}$$

则

$$S_{\alpha\beta}(x-y)=\langle 0|\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)|0\rangle$$

$$=\sum_{s,s'}\int\frac{d^3p'}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{p'}}}\frac{d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_p}}$$

$$\times[u_{\alpha s}(\vec{p})\bar{u}_{\beta s'}(\vec{p}')e^{-ipx}e^{ip'y}\langle 0|a_s(\vec{p})a_{s'}^\dagger(\vec{p}')|0\rangle+u_{\alpha s}(\vec{p})\bar{v}_{\beta s'}(\vec{p}')e^{-ipx}e^{-ip'y}\langle 0|a_s(\vec{p})b_{s'}^\dagger(\vec{p}')|0\rangle$$

$$+v_{\alpha s}(\vec{p})\bar{u}_{\beta s'}(\vec{p}')e^{ipx}e^{ip'y}\langle 0|b_s(\vec{p})a_{s'}^\dagger(\vec{p}')|0\rangle+v_{\alpha s}(\vec{p})\bar{v}_{\beta s'}(\vec{p}')e^{ipx}e^{-ip'y}\langle 0|b_s(\vec{p})b_{s'}^\dagger(\vec{p}')|0\rangle]$$

$$=\sum_{s,s'}\int\frac{d^3pd^3p'}{(2\pi)^6 2\sqrt{E_pE_{p'}}}u_{\alpha s}(\vec{p})\bar{u}_{\beta s'}(\vec{p}')e^{-ipx}e^{ip'y}(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\delta_{ss'}$$

$$=\sum_s\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}u_{\alpha s}(\vec{p})\bar{u}_{\beta s}(\vec{p})e^{-ip(x-y)}=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}e^{-ip(x-y)}(\not{p}+m)_{\alpha\beta}$$

根据（注意上半平面为 $2\pi i$，下半平面为 $-2\pi i$）

$$\int dp^0 \frac{e^{-ip(x-y)}}{(p^0)^2-\vec{p}^2-m^2+i\varepsilon}=(-2\pi i)\frac{e^{-ip(x-y)}}{2p^0}\Big|_{p^0=E_p}$$

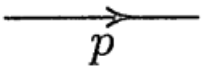
可得

$$S_{\alpha\beta}(x-y)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\int dp^0\frac{1}{-2\pi i}\frac{e^{-ip(x-y)}}{(p^0)^2-\vec{p}^2-m^2+i\varepsilon}(\not{p}+m)_{\alpha\beta}$$

$$=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\int\frac{dp^0}{2\pi}e^{-ip(x-y)}\frac{i(\not{p}+m)_{\alpha\beta}}{p^2-m^2+i\varepsilon}=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip(x-y)}\frac{i(\not{p}+m)_{\alpha\beta}}{p^2-m^2+i\varepsilon}$$

$$=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip(x-y)}S_{\alpha\beta}(p)$$

所以电子传播子为



$$=S_{\alpha\beta}(p)=\frac{i(\not{p}+m)_{\alpha\beta}}{p^2-m^2+i\varepsilon}$$

Comments：

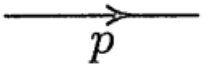
（1）秦溱：对于中微子，有

$$F^{ab}(x-y)=\langle 0|\psi^a_{\nu L}(x)\bar{\psi}^b_{\nu L}(y)|0\rangle=\langle 0|P^{ac}_L\psi_{\nu c}(x)[P^{bd}_L\psi_{\nu d}(y)]^\dagger\gamma^0|0\rangle$$

$$=P^{ac}_L\langle 0|\psi_{\nu c}(x)[\psi_{\nu d}(y)]^\dagger P^{db}_L\gamma^0|0\rangle=P^{ac}_L\langle 0|\psi_{\nu c}(x)\bar{\psi}_{\nu d}(y)|0\rangle P^{db}_R$$

$$=P^{ac}_L[\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip(x-y)}\frac{i(\not{p}+m)_{cd}}{p^2-m^2+i\varepsilon}]P^{db}_R=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip(x-y)}F^{ab}(p)$$

所以中微子传播子为



$$=F^{ab}(p)=P^{ac}_L\frac{i(\not{p}+m)_{cd}}{p^2-m^2+i\varepsilon}P^{db}_R$$

此形式与金广浩一致，与裘忠平差负号。

（2）冯峰：对于带手征算符的问题，可先不将手征波函数展开为普通波函数，先写出传播子，再加上手征算符。

（3）张成：若将$\psi_L,\bar{\psi}_L$看成独立的场，则 Green 函数方程与普通 Fermion 相同，此时手征算符作用可省略；若将$\psi,\bar{\psi}$看成独立的场，则应加上手征算符，就是将普通传播子的 L 分量取出来，才能当中微子用。中微子传播子就是 Fermion 场传播子，只不过计算散射振幅时投影算符会要求只有左手中微子参与作用。

（4）王雯宇：用二分量旋量推导 Feynman 规则，可方便地推广到超对称，见 Dreiner《Two-component spinor techniques and Feynman rules for quantum field theory and supersymmetry》，arXiv：0812.1594v3（2009）.

附录 A 场论符号约定比较

作者	度规 Levi-Civita	γ^0， γ^i γ_5	Dirac 方程 $\sum u\bar{u}, \sum v\bar{v}$ （自旋和）	$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}$ 极化和	传播子
FeynCalc	$g_\mu^\mu = 4$ $\varepsilon^{0123} = 1$	ε	$(\not{p} - m)u$ $\not{p} \pm m$	$2g^{\mu\nu}$ $-g^{\mu\nu}$	$\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2}$
Greiner 程大培 黄涛 郑汉青	$+---$ $\varepsilon^{0123} = 1$	Dirac	同上	同上	同上
王正行	Minkowski Euclid	Dirac/Weyl	同上	$2g^{\mu\nu}$ g_ν^μ	同上
Peskin	$+---$ $\varepsilon^{0123} = 1$	Weyl $\frac{-i}{4!}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma$	同上	$2g^{\mu\nu}$ $-g^{\mu\nu}$	同上
radovanovic Bjorken 周邦融 肖振军 A.Zee	$+---$ $\varepsilon^{0123} = 1$	D/W/Majorana Dirac / ε	$(\not{p} - m)u$ $\frac{\not{p} \pm m}{2m}$	$2g^{\mu\nu}$	同上
Itzykson	$+---$	D，D/-W，W Dirac	同上	$\varepsilon^2 = -1$	同上
Ryder	$+---$ $\varepsilon^{0123} = 1$	Dirac/Weyl -Weyl	同上	$2g^{\mu\nu}$ $-g^{\mu\nu}$	同上
Ramond	$+---$	Weyl，-Weyl		$2g^{\mu\nu}$	Minkowski Euclid
Landau	$+---$ $\varepsilon^{0123} = 1$	Dirac/Weyl -Dirac/Weyl	$(\not{p} - m)u$	$2g^{\mu\nu}$ $-g^{\mu\nu}$	$\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2}$
Feynman	$---+$	Dirac i*Dirac	同上	$2\delta^{\mu\nu}$	同上

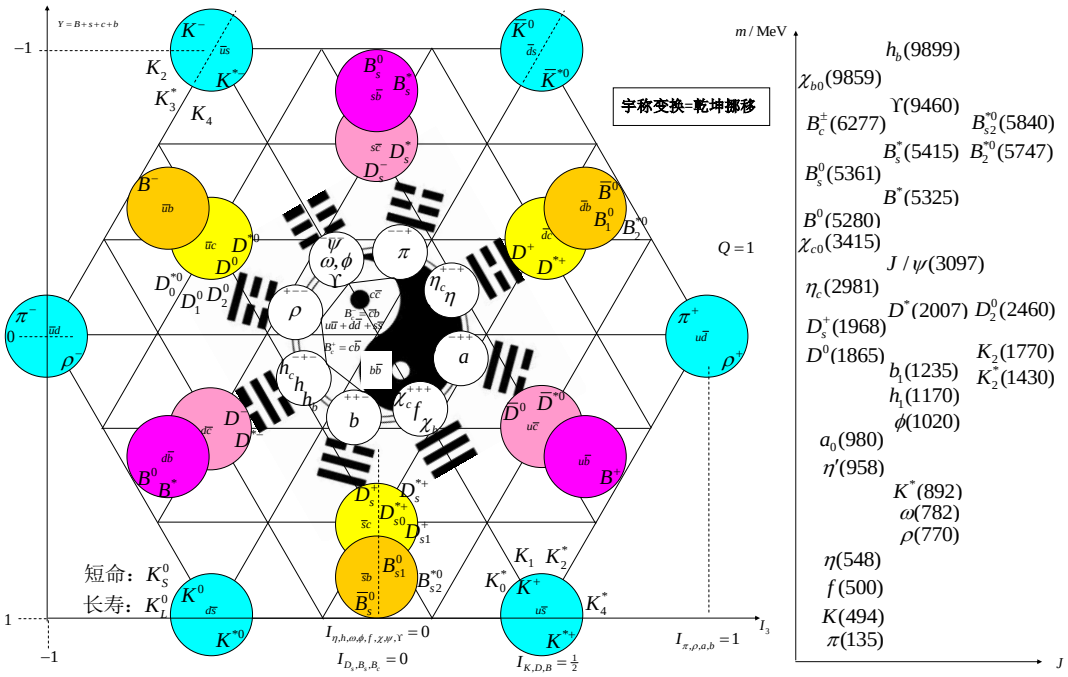
杜东生			$(\not{p}-m)u$ $\frac{\not{p}\pm m}{2m}$		$\frac{i}{\not{p}-m}$
Fayyazuddin	$+---$ $\varepsilon^{0123}=-1$	Dirac/Weyl Dirac/Weyl / ε	同上	$2g^{\mu\nu}$ $-g^{\mu\nu}$	同上
金广浩	$+---$ $\varepsilon^{0123}=-1$	Dirac $-\varepsilon$	$(\not{p}-m)u$ $\not{p}+m$	$2g^{\mu\nu}$ $\delta_{\mu\nu}$	同上
Srednicki	$-+++$ $\varepsilon^{0123}=1$	Weyl Weyl / ε	$(\not{p}+m)u$ $-\not{p}\pm m$	$-2g^{\mu\nu}$ $g^{\mu\nu}$	$\frac{i(\not{p}-m)}{p^2+m^2}$
Weinberg	$-+++$ $\varepsilon^{0123}=1$	-i*Weyl -Weyl	$(i\not{p}+m)u$ $\frac{-i\not{p}\pm m}{2p^0}$	$2\eta^{\mu\nu}$ $\eta^{\mu\nu}$	$\frac{-i(-i\not{p}+m)}{p^2+m^2}$
李政道	$+++-$	γ_4，γ $-\rho_1$	$(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\psi$ $\frac{\not{p}\pm m}{2p^0}$	$2\delta_{\mu\nu}$	
Marshak	$+++-$ $\varepsilon_{1234}=1$	γ_4，γ $\frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma$	$(i\not{p}+m)u$	1,2：$\delta_{\mu\nu}$	
Lurie	$+++-$	D，-i*D/W，-i*W -Dirac/-Weyl	$(\not{p}-im)u$ $\frac{\not{p}\pm m}{2im}$	$2\delta_{\mu\nu}$ $\delta^{\alpha\beta}$	$\frac{-1}{\not{p}-im}$
章乃森	$p^2=-m^2$				

注：$\rho_1=\begin{pmatrix} & I\\ I & \end{pmatrix}$，$\rho_2=\begin{pmatrix} & -iI\\ iI & \end{pmatrix}$，$\gamma_4=\beta=\rho_3$，$\alpha=\rho_1\Sigma$，$\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma & \\ & \sigma\end{pmatrix}$，$\gamma=-i\beta\alpha=\rho_2\Sigma$，

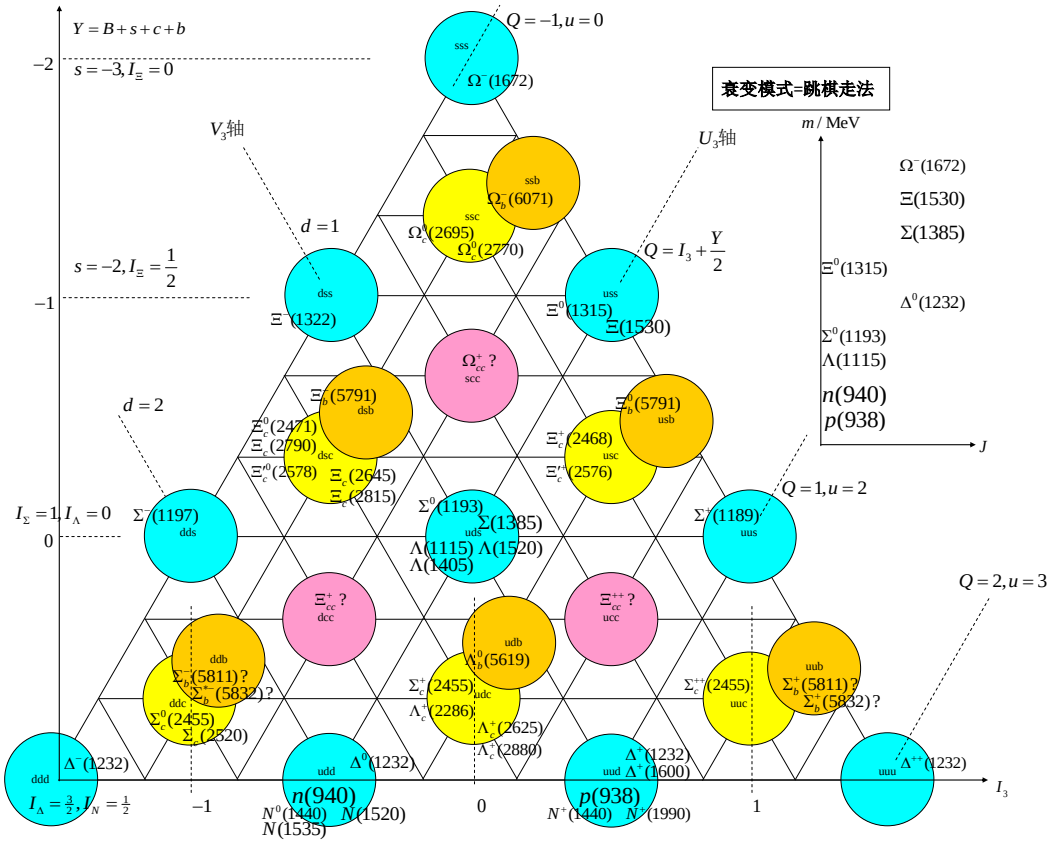
$\varepsilon=\frac{-i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$

附录 B 粒子“周期”表

1.介子表



2.重子表



小技巧：A3 绘图后选中画布复制，选择性粘贴为增强型图元文件到 A4 文档，可解决大图插入到小文档时清晰度降低问题。