量子场论

（平直时空）

LIANGZICHANG LUN PINGZHI SHIKONG

刘 辽 编著

北京师范大学出版社

资助

PINGZHI SHIKONG DE
LIANGZICHANG LUN
Liuliao Bianzhu

责任编辑 陶艺军
封面设计 李 强

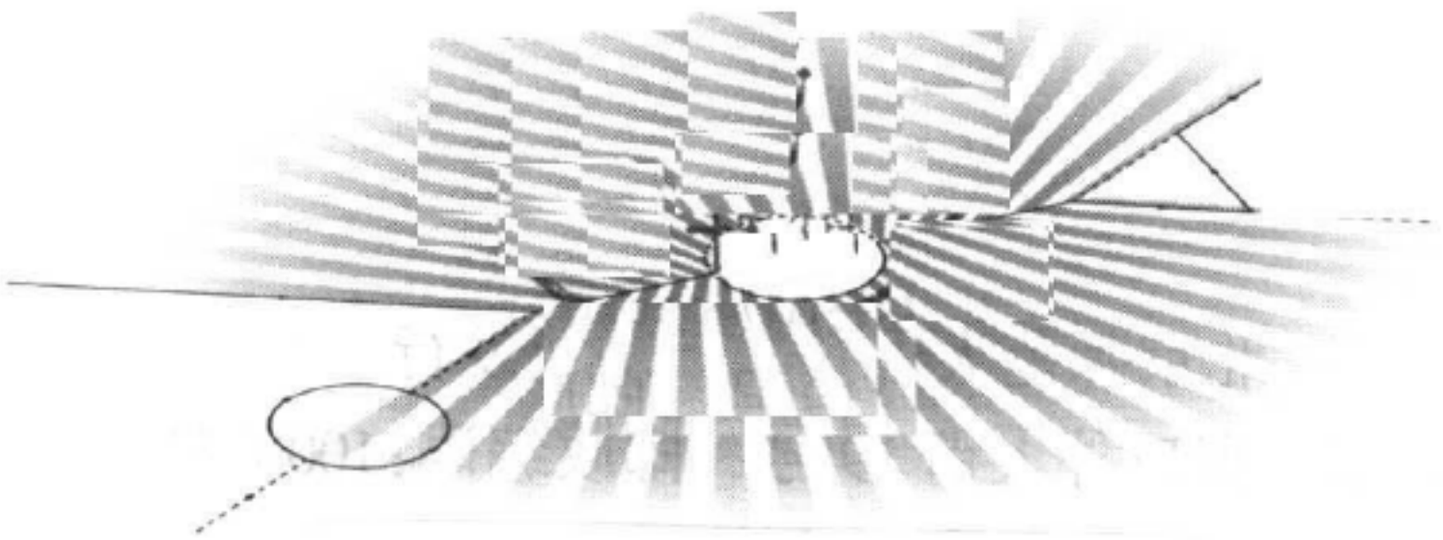
ISBN 7-303-04704-2
9 787303 047048 >

ISBN 7-303-04704-2
G·4143 定价：20.00元

量子场论

（平直时空）

刘 辽 编著



北京师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

量子场论/刘辽编著．－北京：北京师范大学出版社，2003.10
ISBN 7－303－04704－2

Ⅰ.量… Ⅱ.刘… Ⅲ.量子场论-高等学校-教材
Ⅳ.0413.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 69719 号

北京师范大学出版社出版发行
(北京新街口外大街 19 号　邮政编码:100875)
出 版 人:赖德胜
北京东方圣雅印刷有限公司印刷　全国新华书店经销
开本:850mm×1 168mm　1/32　印张:10.125　字数:265 千字
2003 年 10 月第 1 版　2003 年 10 月第 1 次印刷
印数:1～1 000 册　定价:20.00 元

PINGZHI SHIKONG DE LIANGZICHANG LUN

Liuliao Bianzhu


北京师大教材专著出版委员会重点
资助
北京师范大学出版社

序　　言

本书乃编者根据多年来在北京师范大学理论物理研究生班使用的《量子场论（平坦时空）讲义》整理而成. 它的对象是非粒子物理专业而从事理论物理教学和研究的人士，如引力和相对论专业. 本书具有下列特点：

1. 强调场论的洛仑兹协变性，这从编者一开始就从旋量分析出发来建立场方程以及洛仑兹协变量子条件的提出即可见一斑.

2. 对一些重要的散射截面进行了一般教本上少见的详尽数学推导. 对规范场论中的基本概念，对CPT变换，对重整化理论等进行了详细的介绍.

上述特点使得编者相信本书是一本自足的且可作为有志学习量子场论基础知识者的自学参考书.

应提到本书未涉及维数正规化，Zeta 函数正规化以及重正化群方程等一些重要内容，编者将在本书的姊妹篇《量子场论（弯曲时空）》一书中来讲述它们.

最后，编者要对赵峥教授、裴寿镛教授、朱建阳教授和北京师范大学出版社编辑陶艺军先生致以衷心的感谢. 感谢赵峥教授对本书出版所给予的一贯支持与大力协助；感谢裴寿镛教授和朱建阳教授对本书某些章节提出了宝贵的改进意见；感谢本书责任编辑陶艺军先生在本书原稿的审校中进行的细致加工.

编者识

1999 年春

于北京师范大学

目　录

引言……（1）

第1章　数学准备……（3）

§1.1　Lorentz 群简述 ……（3）

§1.2　旋量微分 ……（9）

第2章　经典场论……（12）

§2.1　自由场方程 ……（14）

§2.2　场的相互作用 ……（40）

§2.3　规范场 ……（57）

第3章　场的量子化……（87）

§3.1　变换理论 ……（87）

§3.2　量子条件——二次量子化 ……（96）

§3.3　粒子数表象 ……（111）

§3.4　电磁场的量子化 ……（120）

§3.5　Dirac 场的量子化……（135）

§3.6　量子电动力学基本方程 ……（137）

§3.7　自旋和统计 ……（139）

第4章　*CPT* 变换……（141）

§4.1　空间反射 ……（141）

§4.2　荷共轭宇称 ……（153）

§4.3　时间反演 ……（158）

§4.4　*CPT* 定理（Lüders 定理） ……（161）

第5章　散射矩阵和微扰论……（166）

§5.1　散射矩阵 ……（166）

§5.2　微扰论 ……（168）

§5.3 S矩阵的简化 …… (172)
§5.4 正规积 …… (173)
§5.5 Wick定理（1950） 费曼格林函数 …… (176)
§5.6 Feynman图 …… (194)
§5.7 举例 …… (208)
§5.8 S矩阵元的动量表象 …… (218)
第6章 微扰论的具体应用 …… (225)
§6.1 跃迁几率和散射截面 …… (225)
§6.2 一些常用公式 …… (231)
§6.3 Compton散射 …… (234)
§6.4 正负电子对湮灭 …… (249)
§6.5 μ^+子衰变为正电子、中微子和反中微子，宇称不守恒 …… (255)
第7章 重整化 …… (266)
§7.1 发散困难 …… (266)
§7.2 原始发散圈图 …… (268)
§7.3 重整化理论 …… (279)
§7.4 辐射修正 …… (293)
第8章 路径积分量子化 …… (298)
§8.1 量子力学的路径积分表述 …… (298)
§8.2 路径积分的欧氏表述 …… (302)
§8.3 格林函数的生成泛函 …… (303)
§8.4 量子场论的路径积分表述 …… (305)
附录 Grassmann代数简介 …… (310)
参考文献 …… (315)
编后记 …… (316)

引　　言

光的粒子说和波动说进行了长期的争论，从17 世纪到20 世纪初，才弄清楚光这种物质具有二象性，它既是一种连续的波场而具有波动性，又是一种分立的粒子而具有粒子性（光量子）.

1924 年32 岁的法国青年物理学家de Broglie 向巴黎大学教授会提交了一篇博士学位论文，以求给Bohr 的氢原子轨道角动量量子化条件 $p_\varphi = a \cdot mv = n\hbar$ 一个自然的解释，在文中他假设任何粒子都伴随着一个引导波，波长为 $\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{p}$，并且Bohr 的稳定轨道必须满足驻波条件 $2\pi a = n\lambda$；显然由上述二式即可导出 $p_\varphi = a \cdot mv = n\hbar$. 1926 年Schrödinger 在de Broglie 波的基础上建立了有名的Schrödinger 方程. de Broglie 波的深刻含义是认为一切物质，不论是光，电子、质子，还是其它的粒子都具有二象性，都是连续的波动与分立的粒子，这二种矛盾属性的统一体. 1927 年的电子衍射实验证实了这一猜想. 今天绝大多数物理学家认为，客观存在本身就是连续的波场与分立的粒子这二种矛盾属性的统一体.

如何来描述微观粒子的这种复杂的二象性行为呢？

(1) 20 世纪初到30 年代，建立和发展起来的非相对论和相对论量子力学认为：量子态用态矢来表示，它应满足一定的运动方程；力学量用算符来表示. 把力学量当作算符，应引入量子条件——基本对易关系：

$$[p_j,\ q_j] = \mathrm{i}\hbar\delta_{ij}.$$

式中 q_j，p_i 系一对正则共轭量.

这一手续称作一次量子化.

量子力学对解决经典理论所遇到的困难是很有成就的. 但非相对论量子力学的数学形式不满足 Lorentz 协变性. 因而不能描述高能过程，即使是相对论形式的量子力学，在理论上也存在着负能和负几率困难，在实验上也不能描述高能粒子的消灭和产生过程.

(2)20 世纪40 年代以来又发展起来了狭义相对论形式的量子场论. 或Lorentz 协变量子场论，在这里，量子态用态矢来描写，力学量和波函数都是算符，而且波函数算符（场算符）是最基本的算符. 在平坦的闵可夫斯基时空它们应满足基本的对易关系：

$$[\psi_\alpha(x), \psi_\beta^+(y)]_\pm = T_{\alpha\beta}\Delta(x-y).$$

这一手续称为二次量子化.

量子场论十分成功地描述了微观粒子的电磁相互作用规律. 近几十年来，它在强作用理论和弱电统一理论方面也取得了重大的进展，因此毫无疑问，量子场论已经成为我们了解微观世界的一门必不可少的基础理论. 不仅如此，量子场论还是研究其他理论物理的一个重要工具，近来统计物理，固体物理和其他领域的理论工作者都在各自的研究领域内移植了量子场论的研究方法，取得了重要的研究成果. 可见目前量子场论已经成为各类物理专业研究工作者的一门重要的基础理论课程.

第1章　数学准备

§1.1　Lorentz 群简述

在狭义相对论中通常所指的 Lorentz 变换是指固有 Lorentz 变换 Lp,它含有:

恒等变换,

空间转动,

特殊 Lorentz 洛仑兹变换.

它是不同惯性系的时空坐标间的一种变换关系.

可证这种 Lorentz 变换满足下列条件:

(1) 任二个 Lorentz 变换的积仍是一个 Lorentz 变换;

(2) 满足结合律;

(3) 存在恒等变换;

(4) 任一 Lorentz 变换必有逆,且其逆也是一个 Lorentz 变换.

满足上述条件的变换的集合叫做群. 亦即全部(固有)Lorentz 变换的集合,构成一个群叫固有 Lorentz 群 Lp.

设在 Lorentz 变换

$$x_\mu \to x'_\mu = \alpha_{\mu\nu}x_\nu, \text{或 } x' = \alpha x, (\alpha)\varepsilon Lp \tag{1.1.1}$$

下,某个物理场量 $\psi(x)$ 经受的变换为

$$\psi_\alpha(x) \to \psi'_\alpha(x') = D_{\alpha\beta}\psi_\beta(x) \text{ 或 } \psi' = D\psi, D \equiv D(\alpha), \tag{1.1.2}$$

则场量 $\psi(x)$ 在洛氏变换下变换性质之不同,完全由变换矩阵 D 之不同来定,我们说矩阵 D 是 Lorentz 群的一个表示矩阵,相应的 ψ

是 Lorentz 群的一个表示对象，ψ 和 D 合称 Lorentz 群的一个表示.

显然，Lorentz 群可以有许多不同的表示：标量表示，旋量表示，矢量表示，张量表示，等等.

考虑无穷小 Lorentz 变换：

$$x_\mu \to x'_\mu = \alpha_{\mu\omega} x_\nu = (\delta_{\mu\omega} + \varepsilon_{\mu\omega}) x_\nu, \tag{1.1.3}$$

其中 $\varepsilon_{\mu\omega} = -\varepsilon_{\nu\mu}$，共有 6 个独立参量，3 个尤拉角，3 个速度分量，故 Lorentz 群是含有 6 个参量的连续群(李群).

某个表示(ψ, D) 在变换(1.1.3) 下的变换规律

$$\psi \to \psi'(x') = D\psi(x),$$

$$D(\delta_{\mu\omega} + \varepsilon_{\mu\omega}) = D(\delta_{\mu\omega}) + \left.\frac{\partial D}{\partial \varepsilon_{\mu\omega}}\right|_{\varepsilon_{\mu\omega}=0} \cdot \varepsilon_{\mu\omega} + (0^2)$$

$$\simeq I + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\omega} I_{\mu\omega}. \tag{1.1.4}$$

其中 I 是单位矩阵，$I_{\mu\omega} \equiv 2\left.\frac{\partial D}{\partial \varepsilon_{\mu\omega}}\right|_{\varepsilon_{\mu\omega}=0}$，称 Lorentz 群 Lp 的生成元. 它也是个矩阵，并且是一个常数矩阵.

由此得场量在变换(1.1.3) 下的增量为：

$$\delta\psi(x) = \psi'(x') - \psi(x) = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\omega} I_{\mu\omega}\psi(x) \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{\rho\sigma} I_{\rho\sigma}\psi(x). \tag{1.1.5}$$

由于 $\varepsilon_{\rho\sigma} = -\varepsilon_{\sigma\rho}$，故可令 $I_{\rho\sigma} = -I_{\sigma\rho}$ 即独立的 $I_{\rho\sigma}$ 仅 6 个，$I_{\rho\sigma}$ 是一个常数矩阵，它完全由 Lorentz 群的表示决定，或它完全由场量在 Lorentz 变换下的性质来决定.

可以证明：标量场：$I_{\rho\sigma} = 0$，

一级旋量场：$I_{\rho\sigma} = \frac{1}{4}[\gamma_\rho, \gamma_\sigma]$，

矢量场：$\varphi'_\mu = [\delta_{\mu\omega} + \frac{1}{2}\varepsilon_{\rho\sigma} I_{\rho\sigma,\mu\omega}]\varphi_\nu$，

$$I_{\rho\sigma,\mu\omega} = (\delta_{\rho\mu}\delta_{\sigma\nu} - \delta_{\rho\nu}\delta_{\sigma\mu}).$$

证：对矢量场应成立 $\epsilon_{\mu\nu}=(\frac{1}{2}\epsilon_{\rho\sigma}I_{\rho\sigma})_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\epsilon_{\rho\sigma}(I_{\rho\sigma})_{\mu\nu}$，

故 $\epsilon_{\rho\sigma}I_{\rho\sigma,\mu\nu}=2\epsilon_{\mu\nu}=\epsilon_{\mu\nu}-\epsilon_{\nu\mu}$

$=\epsilon_{\rho\sigma}\delta_{\rho\mu}\delta_{\sigma\nu}-\epsilon_{\rho\sigma}\delta_{\rho\nu}\delta_{\sigma\mu}$

$=\epsilon_{\rho\sigma}(\delta_{\rho\mu}\delta_{\sigma\nu}-\delta_{\rho\nu}\delta_{\sigma\mu})$. 即

$$I_{\rho\sigma,\mu\nu}=\delta_{\rho\mu}\delta_{\sigma\nu}-\delta_{\rho\nu}\delta_{\sigma\mu}.$$

一级旋量场的证明见第二章第三节.

现在考虑 2 维复空间内的变换：

$$\begin{pmatrix}u'_1\\u'_2\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}. \tag{1.1.6}$$

其中 $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，满足么模条件.

$$\det M=ad-bc=1. \tag{1.1.7}$$

则复共轭变换：

$$\begin{pmatrix}u'^*_1\\u'^*_2\end{pmatrix}=M^*\begin{pmatrix}u^*_1\\u^*_2\end{pmatrix}. \tag{1.1.8}$$

其中 $M^*=\begin{pmatrix}a^*&b^*\\c^*&d^*\end{pmatrix}$，也满足么模条件

$$\det M^*=a^*d^*-b^*c^*=1. \tag{1.1.9}$$

M 和 M^* 分别是么模群 $SL(C,2)$.

如此定义的二个列矩阵：

$$\begin{cases}u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix},\\ u^*=\begin{pmatrix}u^*_1\\u^*_2\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}u_{\dot1}\\u_{\dot2}\end{pmatrix},\end{cases} \tag{1.1.10}$$

称为一级旋量，是 $SL(C,2)$ 群的表示对象，M,M^* 为其表示矩阵，此时应注意到，由于 M 和 M^* 的特征标不等，这二个表示是不等价的.

$$\left.\begin{array}{l}(u,M)\text{ 称 }D^{\frac{1}{2}0}\text{ 表示,}\\(u^*,M^*)\text{ 称 }D^{0\frac{1}{2}}\text{ 表示,}\end{array}\right\}\text{互为复共轭.}$$

M 和 M^* 分别构成么模群 $SL(C,2)$，且含有 $(2n^2-2=6)$ 个参量，给定 6 个参量值，就给定了一个具体的 2 维么模变换，而每个 2 维么模变换又对应一个且仅对应一个固有 Lorentz 变换. 反之，每个固有 Lorentz 变换可与仅差一负号的二个 2 维么模变换相对应. 因之，$D^{\frac{1}{2}0}(u,M)$ 与 $D^{0\frac{1}{2}}(u^*,M^*)$ 都是 Lorentz 群的双值表示.

若形式上引入 2 维复空间的度规矩阵

$$(g^{ab})-\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},(g_{ab})=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}. \qquad (1.1.11)$$

其中 $g^{ab}g_{bc}=\delta^a_c, g^{ab}=-g^{ba}, g_{ab}=-g_{ba}$.

并定义

$$u^a\equiv g^{ab}u_b(u^1=u_2,u^2=-u_1).$$

$$u^{*a}\equiv g^{ab}u^*_b(u^{*1}=u^*_2,u^{*2}=-u^*_1), \qquad (1.1.12)$$

或 $$u^{\dot a}\equiv g^{ab}u_{\dot b}(u^{\dot 1}=u_{\dot 2},u^{\dot 2}=-u_{\dot 1}).$$

利用度规矩阵及么模条件可证：

(1) 任两一级旋量的标积，在二维么模变换下为不变量.

即 $$u_av^a=\text{不变量},$$

$$u_{\dot a}v^{\dot a}=\text{不变量}.$$

(2) $u_av^a=-u^av_a$.

(3) 任一旋量的长度为 0，

即 $$u_au^a=0=u_{\dot a}u^{\dot a}.$$

现引入直积矩阵：

$$M^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}=M\otimes M^*=\begin{pmatrix}aM^* & bM^*\\ cM^* & dM^*\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} aa^* & ab^* & ba^* & bb^* \\ ac^* & ad^* & bc^* & bd^* \\ ca^* & cb^* & da^* & db^* \\ cc^* & cd^* & dc^* & dd^* \end{pmatrix}, \tag{1.1.13}$$

及旋量的直积

$$(u_{a\dot{b}}) = \begin{pmatrix} u_{1\dot{1}} \\ u_{1\dot{2}} \\ u_{2\dot{1}} \\ u_{2\dot{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 u_{\dot{1}}^* \\ u_1 u_{\dot{2}}^* \\ u_2 u_{\dot{1}}^* \\ u_2 u_{\dot{2}}^* \end{pmatrix}, (u_{a\dot{b}})^* = u_{b\dot{a}}. \tag{1.1.14}$$

则可证

(1)$u_{a\dot{b}}$ 和 $M^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ 仍是 $SL(C,2)$ 群的一个表示，叫 2 级混合旋量表示，通常以 $D^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ 表之.

利用度规矩阵 g^{ab} 可证：$u_{1\dot{1}} = u^{2\dot{2}}, u_{2\dot{2}} = u^{1\dot{1}}, u_{1\dot{2}} = -u^{2\dot{1}}, u_{2\dot{1}} = -u^{1\dot{2}}$.

例 证 $u^{2\dot{2}} = u_{1\dot{1}}, u^{2\dot{2}} = g^{2a}g^{2b}u_{a\dot{b}} = g^{2a}g^{2b}u_a u_{\dot{b}}^* = u_1 u_{\dot{1}}^* = u_{1\dot{1}}$.

(2)$D^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ 是 Lorentz 群的矢量表示.

证：对$(u_{a\dot{b}})$ 引入么正变换 $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} Tu$.

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}, T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -\mathrm{i} \\ 1 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 1 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \tag{1.1.15}$$

则

$$\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}T\begin{pmatrix}u_{1\dot{1}}\\ u_{1\dot{2}}\\ u_{2\dot{1}}\\ u_{2\dot{2}}\end{pmatrix}. \tag{1.1.16}$$

即
$$\left.\begin{aligned}\psi_1&=\frac{1}{2}(u_{2\dot{1}}+u_{1\dot{2}}),\\ \psi_2&=\frac{1}{2i}(u_{2\dot{1}}-u_{1\dot{2}}),\\ \psi_3&=\frac{1}{2}(u_{1\dot{1}}-u_{2\dot{2}}),\\ \psi_4&=-\frac{1}{2i}(u_{1\dot{1}}+u_{2\dot{2}}),\end{aligned}\right\}\left.\begin{aligned}u_{1\dot{1}}&=\psi_3-i\psi_4,\\ u_{1\dot{2}}&=\psi_1-i\psi_2,\\ u_{2\dot{1}}&=\psi_1+i\psi_2,\\ u_{2\dot{2}}&=-\psi_3-i\psi_4.\end{aligned}\right\} \tag{1.1.17}$$

在变换 $u'=D^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}u$ 下，$\psi'=TD^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}T^{-1}\psi$.

应用公式 $\det(AB)=\det A\det B=\det(BA)$ 及 $\det(A\times B)=[\det(AB)]^{r-1}$，其中 n 系矩阵维数，r 系直积矩阵数.

可进一步证明：$TD^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}T^{-1}$ 正好就是固有 Lorentz 变换矩阵，证明步骤：

(1)$\langle\psi',\psi'\rangle=\langle\psi,\psi\rangle$.

(2)$\det\left(TD^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}T^{-1}\right)=+1$.

(3)$\left(TD^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}T^{-1}\right)_{44}=\frac{1}{2}(|a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2)\geq 1$.（顺时）

(4)ψ_1,ψ_2,ψ_3 是实数量，ψ_4 是虚数量.

故 $D^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ 是 Lorentz 群的矢量表示.

应注意：虽然表示 $D^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}=D^{\frac{1}{2}}\otimes D^{\frac{1}{2}}$，可分解为低维表示的直积，但不能按 Clebsch-Gordan 定理展开为低维表示的直和，即 $D^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ 是 $SL(C,2)$ 或 Lp 的一个不可约表示或 $D^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\neq D^1\oplus D^0$.

不作证明，仅指出：

$D^{0\,0}$ 是 Lorentz 群的标量表示.

$D^{\frac{1}{2}\,0}, D^{0\,\frac{1}{2}}$ 是 Lorentz 群的一级旋量表示.

$D^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}, D^{1\,0}, D^{0\,1}$, 是 Lorentz 群的二级旋量表示或矢量表示.

一般说, $SL(C,2)$ 的全部表示 $D^{JJ'}$ 都是 Lorentz 群 Lp 的表示, 并且都是不可约的.

在纯空间转动变换下, $D^{JJ'} = D^{J} \otimes D^{J'} = \Sigma_{l\oplus} D^{J-l}$.

(l: $-J', -J'+1, \cdots J'$ 若 $J \geqslant J'$).

$D^{JJ'}$ 当 $S = J + J'$ 为整数时叫张量表示, 可描述最大自旋为 S 的玻色子.

$D^{JJ'}$ 当 $S = J + J'$ 为半整数时叫旋量表示, 可描述最大自旋为 S 的费米子.

§1.2 旋量微分

最基本的微分运算是梯度运算, 在闵可夫斯基时空中, 梯度运算是一个矢量算符, 利用 2 级混合旋量 U_{ab} 与矢量 ψ_a 之间的关系

$$u = \sqrt{2}\, T^{-1} \psi$$

可由矢量微分算符 $\partial = (\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4)$ 定义旋量微分算符

$$(\partial_{a\dot{b}}) = (\partial_{1\dot{1}}, \partial_{1\dot{2}}, \partial_{2\dot{1}}, \partial_{2\dot{2}}),$$

即

$$(\partial_{a\dot{b}}) = \sqrt{2}\, T^{-1} \partial.$$

或

$$\left.\begin{aligned}
&\partial_{1\dot{1}} = \partial_3 - \mathrm{i}\partial_4, \quad &&\partial_1 = \frac{1}{2}(\partial_{2\dot{1}} + \partial_{1\dot{2}}),\\
&\partial_{1\dot{2}} = \partial_1 - \mathrm{i}\partial_2, \quad &&\partial_2 = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\partial_{2\dot{1}} - \partial_{1\dot{2}}),\\
&\partial_{2\dot{1}} = \partial_1 + \mathrm{i}\partial_2, \quad &&\partial_3 = \frac{1}{2}(\partial_{1\dot{1}} - \partial_{2\dot{2}}),\\
&\partial_{2\dot{2}} = -\partial_3 - \mathrm{i}\partial_4, \quad &&\partial_4 = -\frac{1}{2\mathrm{i}}(\partial_{1\dot{1}} + \partial_{2\dot{2}}).
\end{aligned}\right\} \tag{1.2.1}$$

现证：

(1) 矢量散度的旋量式

$$\partial_\mu \psi_\mu = -\frac{1}{2}\partial_{a\dot{b}}u^{a\dot{b}}. \tag{1.2.2}$$

展开再利用 $u_{1\dot{2}} = -u^{2\dot{1}}, u_{2\dot{1}} = -u^{1\dot{2}}, u_{2\dot{2}} = u^{1\dot{1}}, u_{1\dot{1}} = u^{2\dot{2}}$ 即可证得.

(2)d'Alembert 算符的旋量式

$$\Box = \partial_\mu\partial_\mu = -\frac{1}{2}\partial_{a\dot{b}}\partial^{a\dot{b}}, \tag{1.2.3}$$

$$\delta_{\dot{b}\dot{c}}\Box = -\frac{1}{2}\partial_{a\dot{b}}\partial^{a\dot{c}}.$$

证：$\partial_{a\dot{b}}\partial^{a\dot{c}} = \partial_{1\dot{b}}\partial^{1\dot{c}} + \partial_{2\dot{b}}\partial^{2\dot{c}} = g^{1a}g^{cd}\partial_{1\dot{b}}\partial_{a\dot{d}} + g^{2a}g^{cd}\partial_{2\dot{b}}\partial_{a\dot{d}}$

$$= g^{cd}(\partial_{1\dot{b}}\partial_{2\dot{d}} - \partial_{2\dot{b}}\partial_{1\dot{d}}) = \begin{cases} 0 & \text{当 } b \neq c,\\ -2\Box & \text{当 } b = c. \end{cases}$$

例 Maxwell 方程的旋量形式

$$\left.\begin{aligned}\Box A_\mu = 0\\ \partial_\mu A_\mu = 0\end{aligned}\right\} \xrightarrow{(A_\mu) = \frac{1}{\sqrt{2}}T(u_{a\dot{b}})} \begin{cases}\partial_{a\dot{b}}\partial^{a\dot{b}}u_{c\dot{d}} = 0,\\ \partial_{a\dot{b}}u^{a\dot{b}} = 0.\end{cases}$$

证：由 $\Box A_\mu = 0$，得 $\partial_{a\dot{b}}\partial^{a\dot{b}}T_{\mu\nu}u_\nu = 0$,

即 $\partial_{a\dot{b}}\partial^{a\dot{b}}(u_{1\dot{2}} + u_{2\dot{1}}) = 0, \partial_{a\dot{b}}\partial^{a\dot{b}}(u_{1\dot{1}} - u_{2\dot{2}}) = 0,$

$$\partial_{a\dot{b}}\partial^{a\dot{b}}(u_{1\dot{2}} - u_{2\dot{1}}) = 0, \partial_{a\dot{b}}\partial^{a\dot{b}}(u_{1\dot{1}} + u_{2\dot{2}}) = 0$$

$$\Rightarrow \partial_{ab}\partial^{\dot{b}}u_{c\dot{d}} = 0.$$

由上可知，旋量微分与张量微分可以互换，虽然 Lorentz 群的张量表示可表为旋量表示的直积，但反之则不可，故最基本最普遍的 Lorentz 协变场方程是旋量形式.

第 2 章　经典场论

在这一章经典场论中，把粒子当作一种连续分布的波场来看待，波场以闵可夫斯基空间 $x_u = (x_1; x_2, x_3, x_4)$，$(x_4 = ict)$ 内的场函数 $\varphi_a(x_\mu)$，$(\alpha = 1, 2, \cdots, n)$ 来表示，粒子的运动方程即场函数 $\varphi_a(x_\mu)$ 所应满足的场方程. 这里仍然采用非相对论量子力学的一些基本概念，认为场函数的统计解释是它惟一的物理意义，一切可测 量的物理量都用厄米算符来表示. 在下一章对场函数进行二次量子化后，经典场论就过渡到量子场论.

基于下述一些普遍性要求，可建立各种波场(粒子) 的经典场方程.

量子场论中最基本的要求是：

(1) 场论要满足 Lorentz 协变性

这意味着，场函数 $\varphi_a(x_\mu)$ 应是 Lp 群的某种表示的表示对象. 场方程在 Lorentz 变换下应形式不变 ——Lorentz 协变性. 对于基本粒子，这种表示应是 Lp 群的某种不可约表示 $D^{jj'}$. 例如，D^{00}(标量 表 示)；$D^{\frac{1}{2}0}$，$D^{0\frac{1}{2}}$(一 级 旋 量 表 示)；$D^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$，$D^{10}$，$D^{01}$(矢 量 表 示)；$D^{11}$(张量表示)；等. 当然 Lp 群的某个不可约表示是否与某种基本粒子相对应，只能由实验来确定.

由场方程的 Lorentz 协变性马上可得到二个推论，即

① 场方程应是一个微分方程，而不能是 4 维时空的微分积分方程. 其理由是，若在场方程中含有 4 维时空积分项，例 $\Box\varphi(x) + \int_\Sigma \varphi(x - x')\rho(x')\mathrm{d}x'^4 = 0$ 应表示某一空间点在某一时刻的物质与 另一空间点在另一时刻的物质有直接相互作用，这是一种违背

狭义相对论的超距作用思想(非局域场论思想). 按狭义相对论,相互作 用只能在同一时空点发生,二个异地事件或异时事件决不能有相互作用. 因而场论是一种局域(Local) 场论.

② 任何自由场函数 $\varphi_\alpha(x_\mu)$ 应满足一个量子约束——Klein-Gordon 条件

$$(\Box - \chi^2)\varphi_\alpha(x) = 0. \tag{2.0.1}$$

理由是,任何自由粒子一定具有确定的能量 E 和动量 $\boldsymbol{p}$,按狭义相对论,二者满足恒等式 —— 经典约束

$$\boldsymbol{p}^2 - \frac{1}{c^2}E^2 = -m_0^2c^2. \text{(}m_0\text{ 为粒子静止质量)} \tag{2.0.2}$$

引入 4 维动量 p_μ,令 $p_\mu = (\boldsymbol{p}, p_4)$, $p_4 = \mathrm{i}E/c$.

则(2.0.2) 式可化为:

$$p_\mu p_\mu = -m_0^2c^2. \tag{2.0.3}$$

如果设 $\varphi_\alpha(x)$ 为自由粒子的能量算符和动量算符公共本征函数,则(2.0.3) 式一次量子化后表示波函数应满足下述偏微分方程或量子约束

$$(p_\mu p_\mu + m_0^2c^2)\varphi_\alpha(x) = 0. \tag{2.0.4}$$

式中 $p_\mu = \dfrac{\hbar}{\mathrm{i}}\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$ 即熟知的能量 - 动量算符,其中动量算符 $p_i = \dfrac{\hbar}{\mathrm{i}}\dfrac{\partial}{\partial x^i}$, $(i = 1,2,3)$,能量算符 $p_4 = -\dfrac{\hbar}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}$(或 $E = \mathrm{i}\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}$).

易知 $\quad p_\mu p_\mu = \hbar^2\left[-\Delta + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial}{\partial t^2}\right] = -\hbar^2\Box.$

故最后由(2.0.4) 式得$(\Box - \dfrac{c^2}{\hbar^2}m_0^2)\varphi_\alpha(x) = 0$ 或

$(\Box - \chi^2)\varphi_\alpha(x) = 0, \chi \equiv \dfrac{c}{\hbar}m_0$. 这就是 Lorentz 协变场论中任意自由场场量 $\varphi_\alpha(x)$ 应满足的必要条件.

(2) 场方程不含高于 2 阶的导数

把 Maxwell 电磁场方程推广到含高阶导数的工作表明,总能

量不能正定，因而假定任何场方程都不含高于2阶的场量的导数（见张宗燧：电动力学和狭义相对论 §6 或 Bopp(1940)，*Podolsky*(1941) 的高阶电动力学）.

(3) 自由场场方程对场量及其导数应是线性的

非线性将表示自由场有自相互作用，把 Maxwell 电磁场方程推广到非线性情况的工作表明，这样的场论完全无法二次量子化，因而必须假定场方程是线性的.（见 Born，*Infeld*(1934) 的非线性电动力学）

(4) 场方程应满足简单性原则

如果在选择场方程时，同时允许有几种不同的可能性时，则可选择最简单的一种. 经验表明，这往往是物理规律要满足某种对称性的结果.

§2.1 自由场方程

由上述四条一般性要求可知，自由场方程的普遍形式为：

$$\hat{\Lambda}\varphi_a(x) = 0. \tag{2.1.1}$$

其中 $\varphi_a(x)$ 应是 Lp 群的某个不可约表示 $D^{jj'}$，它代表最大自旋为 $S = j + j'$ 的基本粒子，因而独立的场量 $\varphi_a(x)$ 应有 $(2S+1)$ 个.

$\hat{\Lambda}$ 应是一个 Lorentz 协变的线性张量微分算符或线性旋量微分算符.

即

$$\hat{\Lambda} = \alpha + \alpha_{(\mu)}\partial_\mu + \alpha_{(\mu_1)}\alpha_{(\mu_2)}\partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}, \tag{2.1.2}$$

或

$$\hat{\Lambda} = \alpha + \alpha_{(ab)}\partial_{a\dot{b}} + \alpha_{(ab)}\alpha_{(cd)}\partial_{a\dot{b}}\partial_{c\dot{d}}.$$

2.1.1. 标量场

$\varphi(x)$ 应是 Lp 群的表示 D^{00}，$S = 0 + 0 = 0$，独立场量有 $(2S+1) = 1$ 个. 即

$$\phi(x') = \varphi(x).$$

故(1.1.2)式中应是一个线性标量算符,惟一的可能只能是:

$$\hat{\Lambda} = \alpha + \alpha_{(\mu)}\alpha_{(\mu)}\partial_\mu\partial_\mu = (\Box - \chi^2),$$

则场方程应为:

$$(\Box - \chi^2)\varphi(x) = 0. \tag{2.1.3}$$

称为 Klein-Gordon 方程(Klein,Gordon 1926).

比较(2.0.1)、(2.1.3)即知 $m_0 = \frac{\hbar}{c}\chi$ 是粒子的静止质量,故 K-G 方程应描述静止质量 $m_0 = \frac{\hbar}{c}\chi$,自旋为 $S = 0$ 的中性粒子(当 $\varphi(x)$ 为实函数)或荷电粒子(当 $\varphi(x)$ 为复函数),例 $\pi^0, \pi^\pm$.

经典 K-G 方程的困难:

(1) 负能态的困难

由 K-G 方程知,对能量算符 $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ 的本征态 $\varphi(x)$,能量本征值

$$(i\hbar\frac{\partial}{\partial t})^2\psi = E^2\psi = (c^2\boldsymbol{p}^2 + m_0^2c^4)\psi. \tag{2.1.4}$$

由此得:

$$E = \pm\sqrt{c^2\boldsymbol{p}^2 + m_0^2c^4}. \tag{2.1.5}$$

式中出现了负能态,正负能级之间存在着间隔 $2m_0c^2$ 的禁区.

我们无法想象一个经典自由粒子可以具有负的总能量和惯性质量,特别是考虑到外界微扰下的量子跃迁中,一个自由粒子将可以 无限制地跃入低能级而放出能量,这将使得物质世界的稳定性成为不可能.

(2) 负几率困难

若把 K-G 方程中的 $\varphi(x)$ 解释为位置空间的几率幅.

由:

$(\Box - m_0^2)\varphi(x) = 0$,右乘以 $\varphi^*(x)$

$(\Box - m_0^2)\varphi^*(x) = 0$,左乘以 $\varphi(x)$ 然后二式相减

得 $\varphi^*(\Box - m_0^2)\varphi - \varphi(\Box - m_0^2)\varphi^* = 0.$

$$\partial_\mu(\varphi^*\partial_\mu\varphi - \varphi\partial_\mu\varphi^*) = 0.$$

或 $\partial_\mu J_\mu = 0.$ (2.1.6)

其中 $J_\mu = -\mathrm{i}\hbar(\varphi^*\partial_\mu\varphi - \varphi\partial_\mu\varphi^*) = (\boldsymbol{J}, \mathrm{i}\rho)$

$= \mathrm{i}\hbar(\varphi\partial_\mu\varphi^* - \varphi^*\partial_\mu\varphi)$ 叫守恒几率流密度.

$\rho = -\mathrm{i}J_4 = \mathrm{i}\frac{\hbar}{c}(\varphi^*\frac{\partial}{\partial t}\varphi - \varphi\frac{\partial}{\partial t}\varphi^*)$ 叫守恒几率密度.

(2.1.6) 叫流的微分守恒律.

对于能量本征态

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x) = E\varphi(x)$$

得

$$\rho = 2\frac{E}{c}\varphi^*\varphi \qquad (2.1.7)$$

故对于负能态粒子,几率密度为负显然是不合理的. 注意,对于实标量场 $J_\mu = 0$ 不存在守恒流.

以后将指出,上述经典 K-G 方程的困难在二次量子化后不复存在. 二次量子化后负能态将与正能反粒子相对应,ρ 从多粒子问题观点代表正粒子与反粒子的荷密度. 并且当 $\varphi(x)$ 为实函数时,K-G 方程描述静止质量不为 0 的中性粒子. 例 π^0 介子. 当 $\varphi(x)$ 为复函数时,K-G 方程描述静止质量不为 0 的荷电粒子($\pi^\pm$ 介子)或奇异粒子($K^0, \overline{K}^0$ 介子).

2.1.2. 矢量场

$\varphi_\mu(x)$ 应是 Lp 群的表示 $D^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}, D^{10}$. 当它描述自旋 $S = 1$ 的粒子时,独立场量应有 $2S + 1 = 3$ 个.

故(2.1.2) 中的 $\hat{\Lambda}$ 应是一个线性标量算符和矢量算符,只能是

$$\begin{cases}\hat{\Lambda}_1 = \alpha + \alpha(\mu)\alpha(\mu)\partial_\mu\partial_\mu, \\ \hat{\Lambda}_2 = \partial_\mu.\end{cases}$$

可以看出描述自旋为 1 的矢量场的自由场方程应为联立方程

$$(\Box - \chi^2)\varphi_\mu(x) = 0, \tag{2.1.8}$$

$$\partial_\mu\varphi_\mu(x) = 0, \text{——Lorentz 条件} \tag{2.1.9}$$

这就是 Proca 方程. (Proca, 1936)

引入 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu\varphi_\nu - \partial_\nu\varphi_\mu = -F_{\nu\mu}, (\mu,\nu = 1,2,3,4)$,

$$\left.\begin{aligned} &\text{由(2.1.8),(2.1.9) 得到} && (2.1.10)\\ &\partial_\mu F_{\mu\nu} = \chi^2\varphi_\nu(x). && (2.1.11)\end{aligned}\right\}$$

可证，在 $\chi \neq 0$ 条件下(2.1.10)、(2.1.11) 与(2.1.8)、(2.1.9) 是等价的.

证：

由(2.1.8) 及(2.1.9) 利用(2.1.10) 可导出(2.1.11) 是显然的.

由(2.1.10) 及(2.1.11) 推导(2.1.8) 和(2.1.9) 可如下进行：

对(2.1.11) 二边微分得 $\partial_\mu\partial F_{\mu\nu} = \chi^2\partial\varphi_\nu$，考虑到 $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$，所以 $\partial_\mu\partial_\nu F_{\mu\nu} = 0$，若 $\chi^2 \neq 0$ 即得 $\partial\varphi_\nu = 0$，以(2.1.10) 代入(2.1.11)，再考虑到 $\partial\varphi_\nu = 0$，即得(2.1.8).

在(2.1.10)、(2.1.11) 或(2.1.8)、(2.1.9) 中令 $x = 0$ 则得熟知的自由 Maxwell 方程组：

$$\Box A_\mu = 0, \tag{2.1.12}$$

$$\partial_\mu A_\mu = 0 \text{——Lorentz 条件(规范).} \tag{2.1.13}$$

或 $$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{2.1.14}$$

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = 0. \tag{2.1.15}$$

应注意，此时由于 $\chi = 0 (m_0 = 0)$ 虽可由(2.1.12) 和(2.1.13) 导出(2.1.14) 和(2.1.15)，但反过来却是不可能的，即得不出 Lorentz 条件，要想把通常形式的 Maxwell 方程(2.1.14) 和(2.1.15) 化为 d'Alembert 方程(2.1.12)，必须附加一个 Lorentz 条件(2.1.13)，在电动力学中，这是完全允许的，因 Maxwell 方程

(2.1.14)、(2.1.15) 在规范变换 $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ 下是规范不变的. 故可对势 A_μ 施加限制. 这叫做规范固定，常用的规范固定有二种，即

(1)Lorentz 规范 $\partial_\mu A_\mu = 0$ 或 $\Box \Lambda = 0$，即函数 Λ 应满足 d'Alembert 方程.

(2) 库仑规范：$\nabla \boldsymbol{A} = 0$(非 Lorentz 协变) 或 $\nabla^2 \Lambda = 0$，即得 Poisson 方程 $\nabla^2 \varphi = 0$. 在无电荷源情况 $\varphi = 0$，Maxwell 方程化为 $\boldsymbol{E} = \frac{-1}{c} \partial \boldsymbol{A} / \partial t, \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$，这是横向辐射场. 故采用库仑规范适于描述无电荷源的横向辐射场，有时称之为辐射规范.

已知在无穷小 Lorentz 变换下，矢量场的生成元为

$$I_{\rho\sigma,\mu\nu} = (\delta_{\rho\mu}\delta_{\sigma\nu} - \delta_{\rho\nu}\delta_{\sigma\mu}).$$

在纯空间转动下

$$I_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, I_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, I_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

令 $S_1 = \frac{1}{\mathrm{i}} I_{23}, S_2 = \frac{1}{\mathrm{i}} I_{31}, S_3 = \frac{1}{\mathrm{i}} I_{12}$，则 $[S_j, S_k] = \mathrm{i}\varepsilon_{jkl} S_l$. 故 S 是自旋角动量，可求得

$$S_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, S_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, S_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

故 $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 2 = 1 \times (1+1)$，

即矢量场的自旋为 1.

故 Proca 方程应描述静止质量不为 0，自旋为 1 的中性粒子(当 $\varphi_\mu(x)$ 是实函数时) 或荷电粒子(当 $\varphi_\mu(x)$ 是复函数时)，例如矢量介子，ρ 介子，ω 介子等等.

Maxwell 方程应描述静止质量为 0，自旋为 1 的中性粒子，如光子. 应指出经典 Proca 方程(2.1.11) 和 Maxwell 方程(2.1.17)

均含有时间的二阶导数项，因之，若把场函数当作态函数也要出现负能态困难，但在二次量子化后，正是 Lorentz 条件(2.1.13) 消除了这一困难.

最后，我们指出 proca 场的旋量形式为

$$\partial_{ab}\varphi^{a}_{b_1} = \mathrm{i}\chi\,\chi_{bb_1}, \tag{2.1.8a}$$

$$\partial^{ab}\chi(\hbar)_{\dot{b}\dot{b}_1} = \mathrm{i}\chi\varphi^{\dot{a}}_{\dot{b}_1}. \tag{2.1.8b}$$

$$\chi(\hbar)_{\dot{b}\dot{b}_1} = \chi(\hbar)_{\dot{b}_1\dot{b}} \text{—— 旋量对称条件.} \tag{2.1.9}$$

其中 $\varphi^{a}_{\dot{b}}$ 和 $\chi_{\dot{b}\dot{b}_1}$ 分别是 $D^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ 和 D^{01} 的表示对象.

不难证明：由(2.1.8a) 和(2.1.9) 可证 $\partial_{a\dot{c}}\varphi^{a\dot{c}} = 0$.

即 $\partial_\mu\varphi_\mu = 0$——Lorentz 条件.

由(2.1.8a) 和(2.1.8b) 可证$(\Box - x^2)\varphi_\mu = 0$——Proca 方程.

特别是 Maxwell 方程的旋量形式为

$$\begin{cases}\partial_{a\dot{b}}\partial^{a\dot{b}}u_{c\dot{d}} = 0, & (2.1.10)\\ \partial_{a\dot{b}}u^{a\dot{b}} = 0. & (2.1.11)\end{cases}$$

3. 旋量场

仅考虑最低级旋量即二维复空间内的一级旋量所构成的旋量场 $\varphi^{\dot{a}}$ 或 $\varphi_a(x)$，它们应分别是 L_p 群的表示 $D^{\frac{1}{2}0}$ 或表示 $D^{0\frac{1}{2}}$ 的表示对象，因为 $S = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$，所以独立分量有$(2S+1) = 2$ 个，有鉴于含 2 阶导数场方程的种种困难，1928 年 Dirac 提出寻求仅含一阶导数的 Lorentz 协变 1 级旋量方程，惟一的可能形式只能是

$$\partial^{a\dot{b}}\varphi_a = \mathrm{i}\chi\varphi^{\dot{b}}, \tag{2.1.12}$$

或 $$\partial_{a\dot{b}}\varphi^{\dot{b}} = \mathrm{i}\chi\varphi_a. \tag{2.1.13}$$

应注意：

(1) 式中虚因子 i 的引入是 Klein-Gordon 条件的要求.

(2) 由(1.1.14) 知(2.1.12) 与(2.1.13) 等价.

(3) 任择其一后，4 个方程、4 个未定函数，一般有解.

在上述方程中场函数及其复共轭同时出现，设 φ_b 和 φ'_b 分别是方程的两个解，以两个解的线性组合 $\alpha\varphi_b + \beta\varphi'_b$ 代入方程的左边：

$$\begin{aligned}\partial^{\dot{a}b}(\alpha^*\varphi_{\dot{b}} + \beta^*\varphi'_{\dot{b}}) &= \alpha^*\partial^{\dot{a}b}\varphi_{\dot{b}} + \beta^*\partial^{\dot{a}b}\varphi'_{\dot{b}} \\ &= \mathrm{i}\chi(\alpha^*\varphi^{\dot{a}} + \beta^*\varphi'^{\dot{a}}) \neq \mathrm{i}\chi(\alpha\varphi^{\dot{a}} + \beta\varphi'^{\dot{a}}),\end{aligned}$$

可见旋量场方程(2.1.12) 和(2.1.13) 不是线性的，违背普遍要求(3)，不难看出其根本原因乃在于场函数及其复共轭同时出现在一个场方程中，解决的办法有二，即

(1) 令 $\chi = 0$ 场方程化为

$$\partial_{\dot{a}b}\varphi^{\dot{a}} = 0 \text{——Weyl 方程.} \tag{2.1.14}$$

(2) 引入另一独立的 1 级旋量 χ_b，把场方程修改为

$$\partial_{\dot{a}b}\varphi^{\dot{a}} = \mathrm{i}\chi\chi_b. \tag{2.1.15}$$

这样就挽救了场方程的线性，但却迫使我们要用二个 1 级旋量去描述同一个旋量场，多了四个待定函数，为了消去多余的自由度，最简单的处理是：

$$\partial^{\dot{a}b}\chi_{\dot{b}} = \mathrm{i}\chi\varphi^{\dot{a}}. \tag{2.1.16}$$

(2.1.15) 和(2.1.16) 的联立就是有名的 Dirac 方程.

现在分别讨论如下：

(1)Weyl 场

$$\partial_{\dot{a}b}\varphi^{\dot{a}} = 0.$$

复共轭形式为 $\partial_{a\dot{b}}\varphi^{\dot{a}} = 0$.

可以证明：Weyl 场方程的等价张量形式为

$$(\sigma_k\partial_k + \mathrm{i}I\partial_4)\varphi = 0.\ (k = 1,2,3) \tag{2.1.17}$$

式中

$$\varphi = \begin{pmatrix}\varphi_1 \\ \varphi_2\end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

σ_k 是 2×2 厄米矩阵叫 Pauli 矩阵.

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\sigma_2=\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&0\end{pmatrix},\sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\tag{2.1.18}$$

满足

$$\sigma_i\sigma_k=\delta_{ik}+\mathrm{i}\varepsilon_{ikl}\sigma_l(i,k,l=1,2,3).\tag{2.1.19}$$

ε_{ikl}——3 维 Levi-Civita 符号.

证:把(2.1.14)展开　$\partial_{1\dot{1}}\varphi^1+\partial_{2\dot{1}}\varphi^2=0.$

$$\partial_{1\dot{2}}\varphi^1+\partial_{2\dot{2}}\varphi^2=0.$$

利用 $\partial_{1\dot{1}}=\partial_3-\mathrm{i}\partial_4,\partial_{1\dot{2}}=\partial_1-\mathrm{i}\partial_2,\partial_{2\dot{1}}=\partial_1+\mathrm{i}\partial_2,\ \partial_{2\dot{2}}=-\partial_3-\mathrm{i}\partial_4$ 的关系改写为张量微分形式

$$\partial_3\varphi^1-\mathrm{i}\partial_4\varphi^1+\partial_1\varphi^2+\mathrm{i}\partial_2\varphi^2=0.$$

$$\partial_1\varphi^1-\mathrm{i}\partial_2\varphi^1-\partial_3\varphi^2-\mathrm{i}\partial_4\varphi^2=0.$$

以 $\varphi^1=\varphi_2,\varphi^2=-\varphi_1$ 代入后可化为

$$\partial_1\varphi_2-\mathrm{i}\partial_2\varphi_2+\partial_3\varphi_1+\mathrm{i}\partial_4\varphi_1=0.$$

$$\partial_1\varphi_1+\mathrm{i}\partial_2\varphi_1-\partial_3\varphi_2+\mathrm{i}\partial_4\varphi_2=0.$$

引入 $\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\end{pmatrix}$,上式可化为矩阵方程形式

$$\left\{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\partial_1+\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&0\end{pmatrix}\partial_2+\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\partial_3+\mathrm{i}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\partial_4\right\}\begin{pmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\end{pmatrix}=0.$$

此即　$(\sigma_k\partial_k+\mathrm{i}\partial_4)\varphi=0.$

可验证(2.1.19)与

$$\sigma_1\sigma_2=\mathrm{i}\sigma_3,\sigma_2\sigma_3=\mathrm{i}\sigma_1,\sigma_3\sigma_1=\mathrm{i}\sigma_2.\tag{2.1.20}$$

和　$$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma_3^2=1\tag{2.1.21}$$

等价.

由(2.1.20)和(2.1.21)式可得

$$\sigma_i\sigma_k+\sigma_k\sigma_i=2\delta_{ik}.\tag{2.1.22}$$

为了寻找 Weyl 方程的物理意义,可用$(\sigma_l\partial_l-\mathrm{i}\partial_4)$左乘(2.1.17)并利用(2.1.19)得:

$$(\sigma_l\partial_l-\mathrm{i}\partial_4)(\sigma_k\partial_k+\mathrm{i}\partial_4)=\sigma_l\sigma_k\partial_l\partial_k+\partial_4^2=$$

$$= (\delta_{lk} + i\varepsilon_{lkm}\sigma_m)\partial_l\partial_k + \partial_4^2.$$

即 $$(\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 + \partial_4^2)\varphi = \Box\varphi = 0. \qquad (2.1.23)$$

与 Klein-Gordon 条件比较即知，

Weyl 方程应描述静止质量为 0，自旋为$\frac{1}{2}$ 的基本粒子，中微子可能正是这一类粒子.

按(2.0.2) 对于这种粒子

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} \Rightarrow p = \frac{E}{c}, \text{以 } E = mc^2$$

代入得 $$p = mc.$$

这表示，上述粒子(中微子) 以光速运动.

Weyl 方程早在 1929 年由 H. Weyl 提出，以后 W. Pauli 发现此方程不符合空间反射不变性，认为不合理. 1957 年，李政道、杨振宁、吴健雄等发现在弱作用中宇称不守恒后，才弄清楚中微子正是由满足 Weyl 方程的二分量理论来描述. 这将留在以后再作介绍.

(2)Dirac 方程

可以证明 Dirac 方程的等价张量形式为

$$(\gamma_\mu\partial_\mu + \chi)\psi = 0(\mu = 1,2,3,4). \qquad (2.1.24)$$

式中

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \chi^{\dot{1}} \\ \chi^{\dot{2}} \end{pmatrix} \text{叫双旋量(bi-Spinor).}$$

γ_μ 是 4×4 厄米矩阵叫 Dirac 矩阵的旋表示.

$$\gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_k \\ i\sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \qquad (2.1.25)$$

满足 $$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}. \qquad (2.1.26)$$

将看到，此表示的特点是 $\gamma_5 \equiv \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ 是对角化的.

证:把(2.1.15)展开

$$\partial_{1\dot{1}}\varphi^1 + \partial_{2\dot{1}}\varphi^2 = \mathrm{i}x\,\chi_{\dot{1}}.$$
$$\partial_{1\dot{2}}\varphi^1 + \partial_{2\dot{2}}\varphi^2 = \mathrm{i}x\,\chi_{\dot{2}}. \qquad (2.1.27)$$

把(2.1.26)展开

$$\partial^{1\dot{1}}\chi_1 + \partial^{1\dot{2}}\chi_{\dot{2}} = \mathrm{i}x\varphi^1.$$
$$\partial^{2\dot{1}}\chi_1 + \partial^{2\dot{2}}\chi_{\dot{2}} = \mathrm{i}x\varphi^2.$$

利用 $\partial_{1\dot{1}} = \partial^{2\dot{2}}, \partial_{2\dot{2}} = \partial^{1\dot{1}}, \partial_{1\dot{2}} = -\partial^{2\dot{1}}, \partial_{2\dot{1}} = -\partial^{1\dot{2}}$,

把上式改写为

$$\partial_{2\dot{2}}\chi_{\dot{1}} - \partial_{2\dot{1}}\chi_{\dot{2}} = \mathrm{i}x\varphi^1,$$
$$-\partial_{1\dot{2}}\chi_{\dot{1}} + \partial_{1\dot{1}}\chi_{\dot{2}} = \mathrm{i}x\varphi^2. \qquad (2.1.28)$$

利用旋微分定义可把(2.1.27)和(2.1.28)化为

$$-\mathrm{i}\partial_1\chi^{\dot{2}} - \partial_2\chi^{\dot{2}} - \mathrm{i}\partial_3\chi^{\dot{1}} - \partial_4\chi^{\dot{1}} + x\varphi_1 = 0.$$
$$-\mathrm{i}\partial_1\chi^{\dot{1}} + \partial_2\chi^{\dot{1}} + \mathrm{i}\partial_3\chi^{\dot{2}} - \partial_4\chi^{\dot{2}} + x\varphi_2 = 0.$$
$$\mathrm{i}\partial_1\varphi_2 + \partial_2\varphi_2 + \mathrm{i}\partial_3\varphi_1 - \partial_4\varphi_1 + x\chi^{\dot{1}} = 0. \qquad (2.1.28a)$$
$$\mathrm{i}\partial_1\varphi_1 - \partial_2\varphi_1 - \mathrm{i}\partial_3\varphi_2 - \partial_4\varphi_2 + x\chi^{\dot{2}} = 0.$$

或

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\partial_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\partial_2 + \right.$$
$$\left. + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}\partial_3 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\partial_4 + \right.$$

$$+\left[\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}x\right]\cdot\begin{pmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\\\chi^1\\\chi^2\end{pmatrix}=0.$$

此即$(\gamma_\mu\partial_\mu+x)\psi(x)=0.$

可验证(2.1.26)与$\gamma_\mu\gamma_\nu=-\gamma_\nu\gamma_\mu$,

$$\gamma_1^2=\gamma_2^2=\gamma_3^2=\gamma_4^2=1 \tag{2.1.29}$$

等价,且$T_r\gamma_\mu=0,\gamma_\mu^\dagger=\gamma_\mu.(\mu=1,2,3,4)$

即所有γ矩阵是无迹的和厄米的.

我们若引入换底变换

$$\Phi=\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi-\chi),X=\frac{1}{\sqrt{2}}(\chi+\varphi).$$

或

$$\begin{pmatrix}\Phi_1\\\Phi_2\\X_1\\X_2\end{pmatrix}=S\begin{pmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\\\chi^1\\\chi^2\end{pmatrix},S=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}I&-I\\I&I\end{pmatrix},S^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}I&I\\-I&I\end{pmatrix},$$

则由Dirac方程可得Dirac矩阵一个重要的常用表示——Dirac表示或标准表示.

因以S左乘Dirac方程(2.1.24)后得$S\gamma_\mu\partial_\mu\psi+\chi S\psi=0$

$$=S\gamma_\mu S^{-1}\partial_\mu S\psi+\chi S\psi=(S\gamma_\mu S^{-1}\partial_\mu+\chi)S\psi=0.$$

新的γ_μ为$\gamma_k=\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}\sigma_K\\\mathrm{i}\sigma_K&0\end{pmatrix},\gamma_4=\begin{pmatrix}I&0\\0&-I\end{pmatrix}.$ (2.1.30)

可直接验证Dirac表示仍满足关系(2.1.26)或(2.1.29).以后如不作声明,我们均采用Dirac矩阵的Dirac表示.

应指出,Dirac矩阵还有一个重要的表示即所谓Majorana表示:

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i}\sigma_2 \\ \mathrm{i}\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i}\sigma_1 \\ \mathrm{i}\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}\sigma_3 \\ -\mathrm{i}\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.1.31}$$

其特点是 γ_4 为纯虚，$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 为实，而 Dirac 方程是一个实方程，可以证明，Majorana 费米子与其反粒子恒等.

为了找寻 Dirac 方程的物理意义，让我们以 $(\gamma_\mu\partial_\mu - \chi)$ 左乘 (2.1.24) 利用(2.1.29) 即得

$$(\Box - \chi^2)\psi = 0.$$

故Dirac方程应描述静止质量不为0自旋为$\frac{1}{2}$的基本粒子，例如轻子$(e^{\pm}, \mu^{\pm}, \tau^{\pm})$，重子$(N, \Sigma, \cdots)$，夸克(quark) 等费米子.

旋量的无穷小表示：

由 Dirac 方程的旋量式已知 Dirac 方程是 Lorentz 协变的，即

在 Lorentz 变换

$$x'_\mu = \alpha_{\mu\omega}x_\nu$$

下应得 $(\gamma_\mu\partial'_\mu + \chi)\psi'(x'_\nu) = 0.$

其中 $\psi'(x'_\mu) = L\psi(x_\mu), L = L(\alpha_{\mu\omega})$. 即所求的表示矩阵，它只是群参量的函数，与时空变量无关.

即 $(\gamma_\mu\partial'_\mu + \chi)L\psi(x_\nu) = 0.$

上式左乘 L^{-1} 后得 $(L^{-1}\gamma_\mu\partial'_\mu L + \chi)\psi(x_\nu) = 0,$

$$(L^{-1}\gamma_\mu L\alpha_{\mu\omega}\partial_\nu + \chi)\psi(x_\nu) = 0.$$

按场方程的 Lorentz 协变性此式应即：$(\gamma_\nu\partial_\nu + \chi)\psi(x) = 0.$

故应成立 $L^{-1}\gamma_\mu L\alpha_{\mu\omega} = \gamma_\mu.$

二边乘以 $\alpha_{\lambda\omega}$ 注意及 $\alpha_{\mu\omega}\alpha_{\lambda\omega} = \delta_{\mu\lambda}$，得

$$L^{-1}\gamma_\mu L = \alpha_{\mu\omega}\gamma_\nu. \tag{2.1.32}$$

在无穷小洛仑兹变换下

$$\alpha_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu}, L = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}I_{\mu\nu} + \cdots = e^{\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}I_{\mu\nu}}$$

$$L^{-1} \fallingdotseq 1 - \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}I_{\mu\nu},$$

$$(1 - \frac{1}{2}\varepsilon_{\rho\nu}I_{\rho\nu})\gamma_\mu(1 + \frac{1}{2}\varepsilon_{\lambda\tau}I_{\lambda\tau}) =$$

$$\fallingdotseq (\delta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu})\gamma_\nu = \gamma_\mu + \varepsilon_{\mu\nu}\gamma_\nu.$$

注意 $\varepsilon_{\mu\nu}$ 是参量，$I_{\rho\nu}, \gamma_\mu$ 是矩阵. 上式为

$$\gamma_\mu + \frac{1}{2}\varepsilon_{\rho\nu}(\gamma_\mu I_{\rho\nu} - I_{\rho\nu}\gamma_\mu) = \gamma_\mu + \frac{1}{2}\varepsilon_{\rho\nu}(\gamma_\nu\delta_{\mu\rho} - \gamma_\rho\delta_{\nu\mu}).$$

或　$\varepsilon_{\rho\nu}[\gamma_\mu, I_{\rho\nu}] = \varepsilon_{\rho\nu}(\gamma_\nu\delta_{\mu\rho} - \gamma_\rho\delta_{\nu\mu})$.

由 $\varepsilon_{\rho\nu}$ 的任意性即得

$$[\gamma_\mu, I_{\rho\nu}] = \gamma_\nu\delta_{\mu\rho} - \gamma_\rho\delta_{\nu\mu}.$$

故 1 级旋量场的生成元为

$$I_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\gamma_\rho\gamma_\sigma = \frac{1}{4}(\gamma_\rho\gamma_\sigma - \gamma_\sigma\gamma_\rho) = \frac{1}{4}[\gamma_\rho, \gamma_\sigma]. \quad (2.1.33)$$

在纯空间转动变换下

$$I_{12} = \frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2 = \frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix}\sigma_3 & 0\\ 0 & \sigma_3\end{pmatrix}, I_{23} = \frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3 = \frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & \sigma_1\end{pmatrix},$$

$$I_{31} = \frac{1}{2}\gamma_3\gamma_1 = \frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix}\sigma_2 & 0\\ 0 & \sigma_2\end{pmatrix}.$$

令 $S_1 = \frac{1}{\mathrm{i}}I_{23}, S_2 = \frac{1}{\mathrm{i}}I_{31}, S_3 = \frac{1}{\mathrm{i}}I_{12}$.

易得　$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = \frac{3}{4}$.

所以　$S = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right)}$，即自旋量子数为 $\frac{1}{2}$.

Lorentz 协变量

求 Dirac 方程的厄米共轭式

$$\partial_\mu^* \Psi^\dagger \cdot \gamma_\mu + \varkappa\psi^\dagger = 0.$$

式中　$\partial_\mu^* = (\nabla, -\partial_4)$

故　$\partial_i\psi^\dagger\gamma_i - \partial_4\psi^\dagger\gamma_4 = -\chi\psi^\dagger$.

上式右乘以$(-\gamma_4)$注意$\gamma_i\gamma_4 = -\gamma_4\gamma_i$,并引入$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma_4$得伴随(adjoint)Dirac 方程

$$\partial_\mu\bar{\psi}\gamma_\mu = \chi\bar{\psi} \text{ 或} \bar{\psi}(\partial_\mu\gamma_\mu - \chi) = 0. \tag{2.1.34}$$

现在求$\bar{\psi}(x)$在 Lorentz 变换下的变换规律.

以　$\partial_\mu = \alpha_{\nu\mu}\partial'_\nu$代入,利用(2.1.32)得

$$\partial'_\nu\bar{\psi}L^{-1}\gamma_\nu L - \chi\bar{\psi} = 0.$$

以L^{-1}右乘上式得

$$\partial'_\nu(\bar{\psi}L^{-1})\gamma_\nu - \chi(\bar{\psi}L^{-1}) = 0. \text{与}$$

$$\partial'_\mu\bar{\psi}'\gamma_\mu - \chi\bar{\psi}' = 0 \qquad \text{比较知}$$

在 Lorentz 变换下$\bar{\psi}$的变换规律为

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)L^{-1}. \tag{2.1.35}$$

现考虑在 Lorentz 变换下,$\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\cdots\gamma_\lambda\psi$的变换性质

$$\begin{aligned}(\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\cdots\gamma_\lambda\psi)' &= \bar{\psi}L^{-1}\gamma_\mu\gamma_\nu\cdots\gamma_\lambda L\psi \\ &= \bar{\psi}L^{-1}\gamma_\mu LL^{-1}\gamma_\nu LL^{-1}\cdots L^{-1}\gamma_\lambda L\psi \\ &= \bar{\psi}\alpha_{\mu\mu'}\gamma_{\mu'}\alpha_{\nu\nu'}\gamma_{\nu'}\cdots\alpha_{\lambda\lambda'}\gamma_{\lambda'}\psi \\ &= \alpha_{\mu\mu'}\alpha_{\nu\nu'}\cdots\alpha_{\lambda\lambda'}\,\bar{\psi}\gamma_{\mu'}\cdots\gamma_{\lambda'}\psi,\end{aligned}$$

故$\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\cdots\gamma_\lambda\psi$是一个 Lorentz 张量.

若令$\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$,(Dirac 表象)　(2.1.36)

显然成立　$\gamma_5^2 = 1, \gamma_5\gamma_\mu + \gamma_\mu\gamma_5 = 0.$　(2.1.36a)

$$\gamma_5\gamma_1 = -\gamma_2\gamma_3\gamma_4,$$

$$\gamma_5\gamma_1\gamma_2 = -\gamma_3\gamma_4.$$

$$\cdots$$

故实际上只能由$\bar{\psi}, \psi, \gamma_\mu$等组成 5 类 Lorentz 双线性协变量,

即

赝标量 $p=\bar{\psi}\gamma_5\psi$，　　标量 $S=\bar{\psi}\psi$，

赝矢量 $A_\mu=\mathrm{i}\,\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi$，矢量 $V_\mu=\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$，

反对称张量　$T_{\mu\nu}=\frac{\mathrm{i}}{2}\bar{\psi}(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu)\psi$.

$p=\bar{\psi}\gamma_5\psi$ 是赝标量的理由是

$$\bar{\psi}\gamma_5\psi=\bar{\psi}\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\psi=\frac{1}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\lambda\psi.$$

$\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}$ 是一个 4 级赝张量，$\psi\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\rho\psi$ 是个 4 级张量，缩并应得赝标量.

$A_\mu=\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi=\frac{1}{3!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\bar{\psi}\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\lambda\psi$，即知 A_μ 是赝矢量. $\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\psi$ 应是一个 2 级张量，但因 $\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\psi=\bar{\psi}\left[\frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu)+\frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu)\right]\psi=\bar{\psi}\frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu)\psi+\bar{\psi}\delta_{\mu\nu}\psi$，后者事实上是一个标量 $\bar{\psi}\psi$，故由 $\gamma_\mu\gamma_\nu$ 实际上只能组成 2 级反对称张量. 注意，由 $\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu$ 组成的协变量与 $\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\psi$ 相同.

构成上述 5 类双线性协变量的矩阵共有 16 个即：

$$I,\gamma_\mu,\Sigma_{\mu\nu}=\frac{1}{2\mathrm{i}}[\gamma_\mu,\gamma_\nu),\mathrm{i}\gamma_5\gamma_\mu,\gamma_5.$$

式中 i 的引入是为了厄米化.

若以 $\Gamma_A(A=1,2,\cdots,16)$ 表示以上任一厄米矩阵，则它具有以下性质：

$$\Gamma_A^2=1,(A=1,2,\cdots,16) \tag{2.1.37a}$$

$$T_r\Gamma_A=0,(A=2,3,\cdots,16) \tag{2.1.37b}$$

$$T_r(\Gamma_A\Gamma_{A'})=4\delta_{AA'},(A,A'=1,2,\cdots,16) \tag{2.1.37c}$$

由 $\sum_{A=1}^{16}C_A\Gamma_A=0$ 可知 $C_A=0.(A=1,2,\cdots,16)$ (2.1.37d)

这表示 16 个 Γ_A 是线性独立的，它们构成一封闭的 Clifford 代数.

提示：在(2.1.37b)的证明中要用到公式

$$T_r(A\cdot B)=T_r(B\cdot A),$$

以 Γ_B 右乘(2.1.40d)，展开后取迹，即可证.

连续性方程

Dirac 方程左乘以$\bar{\psi}$，adjoint 方程右乘以 ψ. 得

$$\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi=-\kappa\bar{\psi}\psi.$$

$$\partial_\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi=\kappa\bar{\psi}\psi.$$

相加后得

$$\partial_\mu J_\mu=\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)=0. \tag{2.1.38}$$

这就是描述 Dirac 场量流守恒的连续性方程，显然流密度 J_μ 是一个 Lorentz 矢量，它的第 4 个分量

$$\rho=\bar{\psi}\gamma_4\psi=\psi^\dagger\gamma_4^2\psi=\psi^\dagger\psi\geqslant 0 \tag{2.1.39}$$

是正定的，故如果把 $\psi^\dagger\psi$ 解释为几率密度，Dirac 场不出现负几率困难，但过渡到二次量子化后，事实上 ρ 与正、反 Dirac 粒子集合的荷密度成正比，后者的正定性并不能保持.

Dirac 方程的 Hamilton 形式

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=H\psi. \tag{2.1.40}$$

$$H=c\hbar\gamma_4\gamma_k\partial_k+\gamma_4 m_0c^2=\mathrm{i}c\gamma_4\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{p}+\gamma_4 m_0c^2$$

$$=c\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{p}+\beta m_0c^2,\text{式中 }\boldsymbol{\alpha}\equiv\mathrm{i}\gamma_4\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\sigma} & 0\end{pmatrix},\beta\equiv\gamma_4.$$

证：Dirac 方程左乘以 γ_4 后得

$$(\gamma_4\gamma_k\partial_k+\partial_4+\frac{c}{\hbar}\gamma_4 m_0)\psi=0.$$

或$(c\hbar\gamma_4\gamma_k\partial_k+c\hbar\partial_4+\gamma_4 m_0c^2)\psi=0.$

注意到：$c\hbar\partial_4=\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial t}=-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}=-H,\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\partial_k=p_k.$

即得 $\mathrm{i}\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\psi=(\mathrm{i}c\gamma_4\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{p}+\gamma_4 m_0c^2)\psi=(c\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{p}+\beta m_0c^2)\psi.$

把(2.1.40)展开，$\mathrm{i}\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\\ c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}$

$$+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}m_0c^2\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}.$$

对能量本征态应成立

$$c\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}\chi+m_0c^2\varphi=E\varphi. \tag{2.1.41}$$

$$c\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}\varphi-m_0c^2\chi=E\chi. \tag{2.1.42}$$

此二方程即(2.1.15)与(2.1.16)的定态 Dirac 方程.

Dirac 场的角动量.

我们证明：

$$\begin{aligned}&[H,\boldsymbol{L}]=c\,\hbar\gamma_4\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{p}\\ &[H;\boldsymbol{\Sigma}]=-2c\gamma_4\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{p}\\ &[H,\boldsymbol{L}+\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\Sigma}]=0\end{aligned} \tag{2.1.43}$$

其中 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}\qquad\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma} & 0\\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}$

证：$[H,L_1]=c\,\hbar\gamma_4(\gamma_2p_3-\gamma_3p_2)$(利用对易关系$[r_i,p_k]=\mathrm{i}\hbar\delta_{ik}$)及$[(A+B),(C+D)]=[A,C]+[A,D]+[B,C]+[B,D]$，

$$[H,L_2]=c\,\hbar\gamma_4(\gamma_3p_1-\gamma_1p_3),$$

$$[H,L_3]=c\,\hbar\gamma_4(\gamma_1p_2-\gamma_2p_1),$$

所以$[H,\boldsymbol{L}]=c\,\hbar\gamma_4\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{p}.$

$$[H,\Sigma_1]=-2\mathrm{i}c\left[\begin{pmatrix}0 & \sigma_3\\ \sigma_3 & 0\end{pmatrix}p_2-p_3\begin{pmatrix}0 & \sigma_2\\ \sigma_2 & 0\end{pmatrix}\right]$$

〔由(2.1.22)(2.1.19)〕

$$=-2\mathrm{i}c\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & +1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & +1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \sigma_3\\ \sigma_3 & 0\end{pmatrix}p_2$$

$$- p_3\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 2c\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i}\sigma_3 \\ \mathrm{i}\sigma_3 & 0 \end{pmatrix} p_3$$

$$- p_3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i}\sigma_2 \\ \mathrm{i}\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 2c\gamma_4(\gamma_3 p_2 - p_3\gamma_2) = -2c\gamma_4(\gamma_2 p_3 - \gamma_3 p_2).$$

类似得 $[H,\Sigma_2] = -2c\gamma_4(\gamma_3 p_1 - \gamma_1 p_3)$,

$[H,\Sigma_3] = -2c\gamma_4(\gamma_1 p_2 - \gamma_2 p_1)$,

故 $[H,\Sigma] = -2c\gamma_4\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{p}$.

$$[c\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{p},\Sigma] = c\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} - c\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma p} \\ \boldsymbol{\sigma p} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & c(\sigma_i\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\sigma_i)p_i \\ c(\sigma_i\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\sigma_i)p_i & 0 \end{pmatrix}.$$

任取 $c(\sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i)p_i$

$$= c(\delta_{ij} + \mathrm{i}\varepsilon_{ijl}\sigma_l - \delta_{ji} - \mathrm{i}\varepsilon_{jil}\sigma_l)p_i$$

$$= c2\mathrm{i}\cdot\varepsilon_{ijl}\sigma_l p_i,$$

取 $j=1$ 即得 $-2\mathrm{i}c\left[\begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}p_3 - p_3\begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}\right]$.

由上可看出 $\left[H,\boldsymbol{L}+\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\Sigma}\right]=0$

故对于定态波函数,$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{L}+\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\Sigma}$ 取定值,J 即场的总角动量,$\boldsymbol{L}$ 即轨道角动量而 $\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\Sigma}$ 即场的自旋角动量.

按角动量理论知 H,J^2,J_Z 构成完备算符集,因而一个自由 Dirac 粒子可处于 H,J^2,J_Z 的公共本征态.

Dirac 场的涡度(Helicity) 和手征性(Chirality)

可证:$[H,\boldsymbol{p}]=0$,

$$[H,\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{p}]=0,[\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}]=0, \qquad (2.1.44)$$

证　　$[H,\boldsymbol{p}]=0,[\Sigma\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}]=0$,是显然的.

$[H,\Sigma p]=[(c\boldsymbol{\alpha p}+\beta m_0c^2),\Sigma\boldsymbol{p}]$,仅须考虑

$$[(\boldsymbol{\alpha p}),(\Sigma\boldsymbol{p})]=2\begin{pmatrix}0 & (\sigma_i\sigma_k-\delta_{ik})p_ip_k\\ (\sigma_i\sigma_k-\delta_{ik})p_ip_k & 0\end{pmatrix}$$

$$=0.$$

因此,算符 $H,\boldsymbol{p},\frac{\hbar}{2}\Sigma\cdot\frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}$!构成一组完备的可对易的算符集合,它们的公共本征函数 $\psi_{E,p,\lambda}(x)$ 可表征一自由 Dirac 粒子的量子态.

不难看出 $\frac{\hbar}{2}\Sigma\cdot\frac{\boldsymbol{p}}{|p|}$ 即 Dirac 粒子自旋角动量在动量方向的投影 $p_H\equiv\Sigma\cdot\frac{\boldsymbol{p}}{|p|}$ 叫投影算符或涡度算符,因 $\left(\frac{\hbar}{2}\Sigma\frac{\boldsymbol{p}}{|p|}\right)^2=\left(\frac{\hbar}{2}\right)^2$,故 $\frac{\hbar}{2}\Sigma\frac{\boldsymbol{p}}{|p|}$ 的本征值 λ 即 $\pm\frac{\hbar}{2}$,或投影算符的本征值为 ±1. 因此一个自由 Dirac 粒子只可能有二个涡度,即一个左旋态,一个右旋态,下面我们指出当 $m=0$ 时,一个自由 Weyl 粒子可能只处于二者之一.

在 Dirac 方程中令 $m=0$ 得:

$$\gamma_\mu\partial_\mu\psi=0. \tag{2.1.45a}$$

不难看出,此时 $(\gamma_5\psi)$ 也是上述方程的解,即

$$\gamma_\mu\partial_\mu(\gamma_5\psi)=0. \tag{2.1.45b}$$

易知,当 $m\neq0$ 时,无此性质.

上二式相加减后分别得涡度相反的二种 Weyl 粒子场方程:

$$\gamma_\mu\partial_\mu\psi_L=0,\psi_L=\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi\equiv p_L\psi. \tag{2.1.45c}$$

$$\gamma_\mu\partial_\mu\psi_R=0,\psi_R=\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi\equiv p_R\psi.$$

显然(2.1.45c)与(2.1.45ab)是等效的,p_L,p_R 叫手征算符,ψ_L,ψ_R 叫手征旋量场,这表示当 $m=0$ 时 Dirac 粒子波函数不仅可以分解为 ψ_L 与 ψ_R 之和,而且它们分别满足场方程,当 $m\neq0$ 时上述分解

虽仍然有效但它们并不分别再满足场方程. 现在来找寻 ψ_L 和 ψ_R 的物理意义.

以 $\gamma_5\gamma_4$ 左乘(2.1.45a)后得:

$\frac{\Sigma \boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}\psi = -\gamma_5\psi$,这是由于$\left(\mathrm{i}\gamma_5\gamma_4\gamma_i p_i - \gamma_5 \frac{E}{c}\right)\psi = 0.$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} p_i - \gamma_5 p\right]\psi = 0. \tag{2.1.45d}$$

$$-\begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} p_i\psi = \gamma_5 p\Psi \text{ 或 } -\frac{\Sigma \cdot \boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}\psi = \gamma_5\psi.$$

故 $\psi_L = \frac{1}{2}\left(1 - \Sigma \cdot \frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}\right)\psi = \frac{1}{2}\left(1 - \Sigma \cdot \frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}\right)(\psi_L + \psi_R) = \psi_L$,

或 $\Sigma \cdot \frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}\psi_L = -1 \cdot \psi_L.$ (2.1.45e)

类似有:$\psi_R = \frac{1}{2}\left(1 + \Sigma \cdot \frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}\right)\psi$ 或 $\Sigma \cdot \frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}\psi_R = +1\psi_R.$

可见 ψ_L 的涡度为 -1(左旋态).

ψ_R 的涡度为 $+1$(右旋态).

上述讨论表明:一个静止质量不为 0 的 Dirac 粒子(轻子,重子等)可以处于左旋态和右旋态的叠加态,而一个静止质量为 0 的 Weyl 粒子却可能只处于左旋态或右旋态. 或具有确定的手征性.

从物理意义上讲,当 $m \neq 0$ 时,粒子速度 $v < c$,故总可找到一个速度为 v_1 的惯性系,令 $v < v_1 < c$,从此惯性系看,粒子的 p 反向,但自旋方向不变,因而涡度改变. 这表示当 $m \neq 0$ 时,左旋态和右旋态不是洛仑兹不变的,只有二者之和才是洛仑兹不变的,但若 $m = 0$,粒子必以光速运动,则按涡度把粒子分为左旋态和右旋态就具有洛仑兹不变性.

一开始我们就提到,一个 0 质量的 Weyl 粒子只需要二分量波函数描述就可以了(二分量理论). 在 Dirac 方程中,令 $m = 0$,得到同一粒子的四分量理论,但此时,方程变为

$$\begin{cases} c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\varphi = E\chi, \\ c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\chi = E\varphi. \end{cases}$$

引入 $\phi = \frac{1}{2}(\varphi+\chi), \chi' = \frac{1}{2}(\varphi-\chi)$ 后得到

$$\begin{cases} c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\phi = E\phi, \\ c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\chi' = E\chi'. \end{cases}$$

因而四分量理论与二分量理论实质上是等价的.

Dirac 方程的平面波解:

如上所述确定自由 Dirac 波函数的完备算符集为 $H, p, \frac{h}{2}\Sigma\frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}$,动量算符的本征态为平面波,本征值可任意,

$$\psi(x) = u\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}p_\mu x_\mu\right\}.$$

代入 $(\gamma_\mu\partial_\mu + x)\psi(x) = 0$ 得 $\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\gamma_\mu p_\mu + \chi\right)\psi(x) = 0.$

(2.1.46)

按 Klein — Gordon 条件,能量算符的本征值

$$E = \pm\sqrt{c^2p^2 + m_0^2c^4}.$$

投影算符 $\frac{\hbar}{2}\Sigma\frac{\boldsymbol{p}}{|p|}$ 的本征值为 $\pm\frac{\hbar}{2}$,或 $\boldsymbol{\sigma p} = \pm p$.

故可对动量一定的 Dirac 粒子的上述公共本征函数 — 平面波,进行如下的分类:

ψ	p	H	$\frac{\hbar}{2}\Sigma\frac{\boldsymbol{p}}{\lvert\boldsymbol{p}\rvert}$
ψ_{I}	$\boldsymbol{p}$	E	$+\hbar/2$
ψ_{II}	$\boldsymbol{p}$	E	$-\hbar/2$
ψ_{III}	$\boldsymbol{p}$	$-E$	$+\hbar/2$

ψ	p	H	$\frac{\hbar}{2}\Sigma\frac{\boldsymbol{p}}{\lvert\boldsymbol{p}\rvert}$
ψ_N	$\boldsymbol{p}$	$-E$	$-\hbar/2$

通解即 $\psi(x)=u(\sigma\rho)\mathrm{e}^{\frac{1}{\hbar}p_\mu x_\mu}=u(\sigma\rho)\mathrm{e}^{\frac{1}{\hbar}(px\mp|E|t)}$.

对于 $\psi_{\mathrm{I},\mathrm{I}}$，指数中取“－”号，对于 $\psi_{\mathrm{II},\mathrm{IV}}$，指数中取“＋”号.

由 Dirac 方程(2.1.41) 得

$$(c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m_0c^2)\cdot u(\sigma\boldsymbol{p})=|E|u(\sigma\cdot\boldsymbol{p}). \qquad (u_{\mathrm{I}},u_{\mathrm{II}})$$

(2.1.47)

$$(c\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{p}+\beta m_0c^2)u(\sigma\boldsymbol{p})=-|E|u(\sigma\boldsymbol{p}). \qquad (u_{\mathrm{II}},u_{\mathrm{IV}})$$

令 $u=A\begin{pmatrix}V\\W\end{pmatrix}$，其中 A 为归一化常数，

则(2.1.47) 化为

$$c\sigma\boldsymbol{p}W+m_0c^2V-EV=0. \qquad (2.1.48)$$

$$c\sigma\boldsymbol{p}V-m_0c^2W-EW=0. \qquad (2.1.49)$$

由(2.1.48) 得

$$V=\frac{c\sigma\boldsymbol{p}}{E-m_0c^2}W.$$

由(2.1.49) 得

$$W=\frac{c\sigma\boldsymbol{p}}{E+m_0c^2}V.$$

可见当 $E>0$ 时，$W=\frac{c\sigma\boldsymbol{p}}{|E|+m_0c^2}V$， (2.1.50)

$E<0$ 时，$V=-\frac{c\sigma\boldsymbol{p}}{|E|+m_0c^2}W$. (2.1.51)

由规一化条件

$$\psi^+\psi=u^*u=A^2(V^*V+W^*W)$$

$$=A^2V^*V\left[1+\frac{c^2(\sigma\boldsymbol{p})^2}{(|E|+m_0c^2)^2}\right]$$

$$= A^2 V^* V\left(1 + \frac{c^2 p^2}{(|E| + m_0 c^2)^2}\right) = 1.$$

若令 $V^* V = 1$，则 $A = \sqrt{\dfrac{|E| + m_0 c^2}{2|E|}}$. (2.1.52)

利用(2.1.46)、(2.1.50)、(2.1.51)、(2.1.52)，可把 ψ_{I}，ψ_{II}，ψ_{III}，ψ_{IV} 的显式写下来：

$$\psi_{\text{I}} = A\begin{pmatrix} V_+ \\ BV_+ \end{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}(px - |E|t)},$$

$$\psi_{\text{II}} = A\begin{pmatrix} V_- \\ -BV_- \end{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}(px - |E|t)},$$

$$\psi_{\text{III}} = A\begin{pmatrix} -BW_+ \\ W_+ \end{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}(px + |E|t)},$$

$$\psi_{\text{IV}} = A\begin{pmatrix} BW_- \\ W_- \end{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}(px + |E|t)}. \quad (2.1.53)$$

其中 $B = \dfrac{cp}{|E| + m_0 c^2}$，$V_\pm$，$W_\pm$ 与 $\sigma p = \pm p$ 相对应，可见动量 p 一定的 Dirac 粒子可处于 4 种不同的运动状态(量子态). 其中 ψ_{I}，ψ_{II} 是正能态，ψ_{III}，ψ_{IV} 是负能态，Dirac 场虽可免除负几率困难，但与 Dirac 本人的预计相反，他的方程也未能免除负能态.

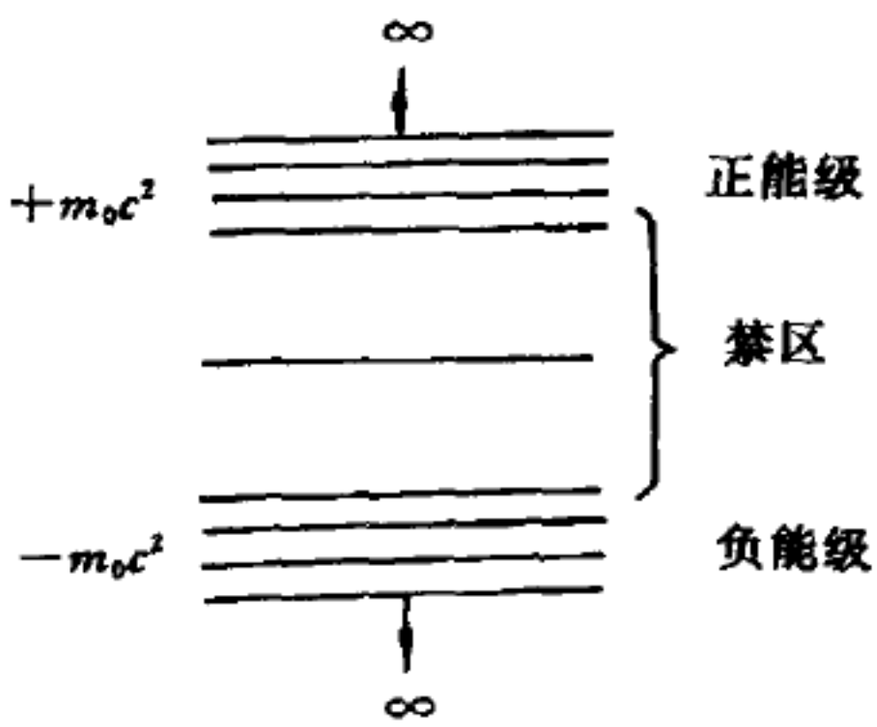
空穴理论和反粒子

Dirac 场像 Klein-Gordon 场一样，并不能免除负能解，在量子论中负能态的出现将使得正能态粒子不稳定和负能粒子可无限地释放能量，1931 年 Dirac 提出有名的空穴(Hole) 理论以克服负能态困难，大意是：

(1) 物理真空是所有的正能级都空着，所有的负能级都被 Dirac 粒子，按 Pauli 排除原理充满，因而处于正能态的 Dirac 粒子不可能跃入负能态，不出现负能跃迁困难.

(2) 填满负能级的 Dirac 粒子海通常不显示物理效应(例不产

生电场，不显示质量等…）特别是，真空中处处 $\mathrm{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\rho = 0, \Delta\varphi = -4\pi G\mu = 0.$



（3）当处于负能级的 Dirac 粒子自外界吸收能量（$h\nu \geqslant 2m_0c^2$）跃入正能级时，物理真空即受到破坏，此时应同时出现一个正能态粒子和一个负能态空穴，下面我们以电子为例，论证负能态空穴等效于一正能态正电子，在上述真空受到破坏前后，按电荷守恒律整个空间应始终成立.

$$\int \rho \mathrm{d}V = 0. \ (\rho \text{—— 电荷密度})$$

当一个电子自负能态跃入正能态而使真空破坏时，在电子所在空间 V_1 应有

$$\int_{V_1} \rho \mathrm{d}V = \int_{V_1} e\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)\mathrm{d}V = e < 0$$

令空穴所在空间为 V_2 应有

$$\int_{V_1+V_2} \rho \mathrm{d}V = \int_{V_1} \rho \mathrm{d}V + \int_{V_2} \rho \mathrm{d}V = 0.$$

$$\Rightarrow \int_{V_2} \rho \mathrm{d}V = -\int_{V_1} \rho \mathrm{d}V = -e > 0.$$

可见由电荷守恒律得出空穴的电荷与电子等值反号，在外电场中空穴的行为与负电子相反叫正电子.

在真空未受到破坏时，质能密度 μ 处处为 0，当一个电子吸收能量子 $h\nu$ 自负能态跃入正能态而使真空破坏时，按质能守恒定律应成立

$$h\nu \geqslant 2m_0c^2 > 0.$$

已知正能态电子的质能为 m_0c^2，显然负能态空穴的质能也应为 m_0c^2. 因此，对于 Dirac 粒子（电子）而言，负能态空穴即一种质

量与电子全同，仅电荷反号的反粒子～所谓正电子. 一般说来，在Dirac真空理论中负能态空穴即正能态的反Dirac粒子. Dirac空穴理论不仅能说明正反粒子对的产生，也能说明正反粒子对的湮灭.

Dirac的空穴理论是一个极富启发性的思想，它告诉我们，真空不空，物理上的真空并不是虚空，那种脱离物质而独立存在的数学上的虚空是不存在的.

1644年法国数学家、哲学家笛卡尔通过哲学思辨得出一个有趣的结论“断言存在一个绝对无物体的虚空，这是反理性的.”(哲学原理，第16条)

几百年后的物理学居然证实了笛卡尔的这一有名预言！

Dirac方程的非相对论近似

由(2.1.42)得 $\chi = \dfrac{c\boldsymbol{\sigma p}}{E + m_0c^2}\varphi$.

以之代入(2.1.41)得

$$c^2(\boldsymbol{\sigma p})^2\varphi = (E^2 - m_0^2c^4)\varphi. \tag{2.1.54}$$

令 $E = m_0c^2 + \varepsilon = m_0c^2(1 + \dfrac{\varepsilon}{m_0c^2})$，$\varepsilon$ 为动能.

在非相对论近似下，$\varepsilon \ll m_0c^2$

故 $E^2 \approx m_0^2c^4 + 2m_0c^2\varepsilon$.

以之代入(2.1.54)得 $\dfrac{1}{2m_0}(\boldsymbol{\sigma p})^2\varphi = \varepsilon\varphi$. (2.1.55)

但 $(\boldsymbol{\sigma p})^2 = p^2 = -\hbar^2\Delta$，故上式即非相对论定态Schrödinger方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta\varphi = \varepsilon\varphi. \tag{2.1.56}$$

在外磁场 $\boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ 作用下的Dirac方程是把 $\boldsymbol{p}$ 代之以 $(\boldsymbol{p} - \dfrac{e}{c}\boldsymbol{A})$，因而

$$(\boldsymbol{\sigma p})^2 \to \left(\boldsymbol{\sigma p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{\sigma A}\right)^2 = \left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 - \frac{e}{c}\boldsymbol{\sigma H}.$$

这里我们采用了公式：

$$(\sigma \cdot a)(\sigma \cdot b) = a \cdot b + \mathrm{i}\sigma \cdot a \times b, a = b = p - \frac{e}{c}A.$$

及 $$\left(p - \frac{e}{c}A\right) \times \left(p - \frac{e}{c}A\right)\varphi = -\mathrm{i}\frac{e\hbar}{c}\{A \times \nabla + \nabla \times A\}\varphi.$$

其中 $$\nabla \times A\varphi = \nabla \times (A\varphi) = (\nabla\varphi) \times A + (\nabla \times A)\varphi.$$

(2.1.56) 化为

$$\left[\frac{1}{2m}\left(p - \frac{e}{c}A\right)^2 - \frac{e\hbar}{2m_0c}\sigma \cdot H\right]\varphi = \varepsilon\varphi. \qquad (2.1.57)$$

这就是有名的 Pauli 方程.

式中 $\mu = \frac{e\hbar}{2m_0c}\sigma$ 叫 Dirac 粒子的内禀磁矩或玻尔磁子. 在外磁场中 μ 的二个本征值为 $\pm \frac{e\hbar}{2m_0c}$ (2.1.58)

$$-\mu \cdot H = -\frac{e\hbar}{2m_0c}\begin{pmatrix} H_z & H_x - \mathrm{i}H_y \\ H_x + \mathrm{i}H_y & -H_z \end{pmatrix}$$ 叫磁能.

(2.1.59)

$$\eta = \frac{\mu}{\frac{\hbar}{2}\sigma} = \frac{e}{m_0c}$$ 叫回转磁比. (2.1.60)

Dirac 方程的应用

理论上我们认为 Dirac 方程适用于所有自旋为 $\frac{1}{2}$ 的自由费米粒子 ——Dirac 粒子，如何通过实验来验证这一理论预言呢?任何实验都要把 Dirac 粒子置于外场中，因而破坏了 Dirac 粒子的自由状态，从而严格说使得这一实验成为不可能，但实际上我们往往把弱场近似下的实验结果(非相对论近似) 用来检验上述理论预言.

对于电子而言：在弱外磁场中测得电子的自旋磁矩为：(1956)

$$\mu_{实} = (1.001\ 167 \pm 0.000\ 005)\mu_B$$

与理论符合得很好，但出现微小的反常磁矩(0.001 167 ±

0.000 005)μ_B.

在弱库仑场中测量 H 原子光谱的精细结构与理论预言符合得很好，但实验发现在 Dirac 理论中应重合的二个能级 $2^2S_{\frac{1}{2}}$，$2^2p_{\frac{1}{2}}$ 有微小差距 $\Delta r = 0.03cm^{-1}$（$2^2S_{\frac{1}{2}}$ 略高）——Lamb 位移，可是进一步的理论探索表明，只要把辐射修正所带来的改正考虑进去，Dirac 理论不仅可以准确地说明上述 H 能级的 Lamb 移动，也能准确地说明电子反常磁矩，因而今天公认在 Dirac 理论上建立起来的量子电动力学含有高度的真实性. 对 μ 子而言按 Dirac 理论 $\mu_\mu = 1.001\ 165\ 4\ \frac{e\hbar}{2m_\mu c}$. 1957 年实测磁矩与理论值仅差 0.7%. 今天公认：μ 子和电子均严格遵守 Dirac 方程，一般把 μ 叫重电子.

对于核子而言：在弱外磁场中测得核子自旋磁矩为

$$\mu_p = 2.78\left(\frac{e\hbar}{2m_N c}\right) = 2.78\mu_N.$$

$$\mu_n = -1.93\left(\frac{e\hbar}{2m_N c}\right) = -1.93\mu_N.$$

与理论值 $\mu_p = \mu_N$ 和 $\mu_N = 0$ 很不一致，这说明核子等不是一个很好的 Dirac 粒子. 原因在于核子含有 π 介子云 $\textcircled{p} \leftrightarrow \overset{+}{\textcircled{n}}\pi^- \quad \textcircled{n} \leftrightarrow \overset{-}{\textcircled{p}}\pi^+$ 这些荷电 π 介子云提供了反常磁矩贡献，在非相对论极限下，在 Dirac 方程中若引入所谓核子的反常磁矩 μ'，仍可利用 Dirac 方程作唯象描述

对于质子 $\mu' = 1.78\ \frac{e\hbar}{2m_N c}$　$\mu_p = \mu' + \frac{e\hbar}{2m_p c}$，

对于中子 $\mu' = -1.93\ \frac{e\hbar}{2m_N c}$　$\mu_N = \mu' + 0.$

§2.2　场的相互作用

自由场（自由粒子）只是一种理想状态，实际上一切场都处于

相互作用中，如何去建立场方程以描述不同场的相互作用，一个行之有效的普遍方案是采用 Hamilton 原理.

2.2.1. 变分法简介

任意函数 $y(x)$ 的微分以 $\mathrm{d}y(x)$ 表示，它的意义是函数形式 $y(x)$ 不变空间点 x 改变 $\mathrm{d}x$ 所引起的函数值 $y(x)$ 的改变量即

$$\mathrm{d}y(x) = y(x+\mathrm{d}x) - y(x) = y(x') - y(x) \tag{2.2.1}$$

任意函数 $y(x)$ 的变分以 $\delta y(x)$ 表示，它的意义是空间点 x 固定不动，函数形式改变所引起的函数值 $y(x)$ 的改变量即

$$\delta y(x) = Y(x) - y(x). \tag{2.2.2}$$

易证：变分有下述重要规律

① 自变量的变分恒为 0，即 $\delta x = 0$.

② 函数的微分和变分可对易即

$$\delta\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta y. \tag{2.2.3}$$

证：

$$\delta\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(Y-y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta y.$$

③ 变分运算与微分运算完全相同.

例 设泛函 $I = I(x_0, y_0, y')$，其中 $y = y(x)$，$y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$x$ 为自变量，则

$$\delta I = I(x, y+\delta y, y'+\delta y') - I(x, y, y') = \frac{\partial I}{\partial y}\delta y + \frac{\partial I}{\partial y'}\delta y'.$$

2.2.2. Hamilton 原理和 Lagrange 方程

在变分原理中波场的场方程，可表述为某一作用量（作用泛函）取极值的必要条件 —— Hamilton 变分原理.

大家知道在几何光学中，我们有一条费马原理或最短光程原理即

$$\delta I = \int_{P_1}^{P_2} n\mathrm{d}s = 0.$$

在经典力学中我们有最小作用量原理

$\delta I = \delta\int_{t_1}^{t_2}(T-U)\mathrm{d}t = \delta\int_{t_1}^{t_2}\mathscr{L}\mathrm{d}t = 0$,(注意:$I$ 或 $\mathscr{L}\mathrm{d}t$ 量纲正好与 h 相同),由最小作用原理可得到 Lagrange 运动方程,它即牛顿运动方程.

我们发现:不论经典力学系统和量子力学系统的运动方程均可表为Hamilton变分原理. Hamilton变分原理深刻的哲学上的意义是什么?这是一个值得探索的自然哲学问题,有人(例如 Maupertuis 等)把此原理与因果律对立起来,认为是目的论是上帝存在的明证. 我们应找出 Hamilton 原理的哲学上的真实意义. 以后由 Nöther 定理可以看到,Hamilton 原理是能量、动量等守恒律的一个前提条件,单承认时空均匀各向同性并不能导致能量、动量、角动量的守恒,必须加上 Hamilton 原理或 Lagrange 运动方程这种守恒才能成立. 这提示我们,Hamilton 变分原理可能与能量守恒等这样一些规律一样是自然界的根本规律.

具体方案如下:

① 选择一适当的泛函 ——Lagrange 量 $\mathscr{L}$,令作用量 I 为

$$I = \int_{\Sigma}\mathscr{L}\left(\varphi^{\beta}(x), \frac{\partial\varphi^{\beta}(x)}{\partial x_{\mu}}\cdots\right)\mathrm{d}\Sigma. \tag{2.2.4}$$

Σ 为四维时空体积.

② 引入边界条件:

在积分域 Σ 内 $\delta\varphi_{\alpha}(x)$ 为任意无穷小量.

在积分域的边界上 $\delta\varphi_{\alpha}(x) = 0$.

③ 在上述条件下令 I 取极值,即

$$\delta I = \delta\int_{\Sigma}\mathscr{L}\mathrm{d}\Sigma = \int_{\Sigma}\delta\mathscr{L}\mathrm{d}\Sigma = 0. \tag{2.2.5}$$

即得场方程,因此关键在于选择一适当的泛函 $\mathscr{L}$,由对场方程的普遍要求及其它考虑,可得选择 $\mathscr{L}$ 的普遍要求为

（Ⅰ）$\mathscr{L}$ 应为 Lorentz 标量函数或赝标量函数：这是由于场方程应为 Lorentz 协变.

（Ⅰa）$\mathscr{L}$ 应不含四维时空积分项 —— 局部场论.

（Ⅱ）$\mathscr{L}$ 应为实函数. 因物质系统一切可观测量应为实数，而它们均由 $\mathscr{L}$ 决定.

（Ⅲ）最多含场量 $\varphi_\alpha(x)$ 的一阶导数，这是因为我们要求场方程的阶不高于 2.

（Ⅳ）对于自由场，应为场量以及一阶导数的双线性型.

例 $a_{\mu\nu}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}$，$a_{\alpha\beta}\varphi_\alpha^*\varphi_\beta$，$a_{\alpha\beta}\varphi_\alpha\dfrac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_\mu}$.

这是为了保证自由场方程的线性.

（Ⅴ）应考虑简单性原则.

由上述普遍性考虑以及今后提到的其它要求可决定波场的 Lagrange 量 $\mathscr{L}(\varphi_\alpha(x),\varphi_\alpha(x),\mu)(\varphi_\alpha(x),_\mu\equiv\dfrac{2\varphi_\alpha(x)}{2x_\mu})$. 现在我们证明由 Hamilton 变分原理可导出 Lagrange 方程即场方程.

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\varphi_\alpha,\mu)}\right)=0\quad\begin{pmatrix}\alpha=1,2,\cdots,n\\ \mu=1,2,3,4\end{pmatrix}.\tag{2.2.6}$$

证 $$\delta I=\int_\Sigma\delta\mathscr{L}\mathrm{d}\Sigma=\int_\Sigma\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\alpha}\delta\varphi\alpha+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{\alpha,\mu}}\delta\varphi_{\alpha,\mu}\right]\mathrm{d}\Sigma=0.$$

但 $$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{\alpha,\mu}}\delta\varphi_{\alpha,\mu}\mathrm{d}\Sigma=\int\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{\alpha,\mu}}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\delta\varphi_\alpha\mathrm{d}\Sigma$$

$$=\int\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{\alpha,\mu}}\delta\varphi_\alpha\mathrm{d}\Sigma_\mu\Big|_{\Sigma\text{边界}}-\int\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dfrac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_\mu}}\right)\delta\varphi_\alpha\mathrm{d}\Sigma$$

$$=-\int\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{\alpha,\mu}}\right)\delta\varphi_\alpha\mathrm{d}\Sigma.$$

故得 $$\delta I=\int_\Sigma\delta\mathscr{L}\mathrm{d}\Sigma=\int_\Sigma\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\alpha}-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\varphi_{\alpha,\mu})}\right)\right]\delta\varphi_\alpha\mathrm{d}\Sigma$$

$$=0.$$

由 $\delta\varphi_\alpha$ 的任意性即得(2.2.6).

可以证明：若令 $\Lambda_\mu = \Lambda_\mu(x_\mu, \varphi_\alpha)$ 为 4 维矢量，

则 $\mathscr{L}^* = \mathscr{L} + \dfrac{\partial \Lambda_\mu}{\partial x_\mu}$ 仍为所求的 Lagrange 函数.

提示：$\delta I = \int \left[\delta \mathscr{L} + \delta \dfrac{\partial \Lambda_\mu}{\partial x_\mu}\right] \mathrm{d}\Sigma = \int \delta \mathscr{L} \mathrm{d}\Sigma + \int \dfrac{\partial}{\partial x_\mu} \delta \Lambda_\mu \mathrm{d}\Sigma$

按高斯定理第二项为 0.

2.2.3. 自由场的变分原理

① 实标量场(例如 π° 介子)

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{1}{2}\chi^2 \varphi^2. \left(\chi \equiv \frac{\dot{c}}{\hbar} m\right) \tag{2.2.7}$$

Lagrange 方程 $(\Box - \chi^2)\varphi = 0.$

② 复标量场(例 $\pi^\pm$ 介子)

$$\mathscr{L} = -\partial_\mu \varphi^* \partial_\mu \varphi - \chi^2 \varphi^* \varphi.$$

Lagrange 方程 $(\Box - \chi^2)\varphi = 0$(对 φ^* 变分). (2.2.8)

$$(\Box - \chi^2)\varphi^* = 0(\text{对 } \varphi \text{ 变分}).$$

③ 实矢量场 — 电磁场(γ 光子)

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \cdot \partial_\mu A_\nu \tag{2.2.9}$$

或
$$\begin{aligned}\mathscr{L}^* &= \mathscr{L} + \frac{1}{2}\partial_\mu (A_\nu \partial_\nu A_\mu - \partial_\nu A_\nu A_\mu) \\ &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

$(\partial_\nu A_\nu = 0$——Lorentz 条件)

Lagrange 方程 $\Box A_\mu = 0$

④ 复矢量场(例 $\rho^\pm$ 介子)

$$\mathscr{L} = -\partial_\mu \varphi_\nu^* \partial_\mu \varphi_\nu - \chi^2 \varphi_\mu^* \varphi_\mu \tag{2.2.11}$$

Lagrange 方程 $(\Box - \chi^2)\varphi_\mu = 0.$(对 φ_μ^* 变分)

$(\Box - \chi^2)\varphi_\mu^* = 0.$(对 φ_μ 变分)

⑤Dirac 场(例电子,μ 子)

$$\mathscr{L} = -\hbar c\,\bar{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu + x)\psi + \hbar c(\partial_\mu\bar{\psi}\gamma_\mu - x\bar{\psi})\psi. \tag{2.2.12}$$

如此选择 $\mathscr{L}$ 是为了满足 $\mathscr{L}^+ = \mathscr{L}$,第一项的厄米共轭

$= -\hbar c\partial_\mu^*\psi^\dagger\gamma_\mu\gamma_4\psi - x\psi^\dagger\gamma_4\psi = \hbar c\partial_\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi - x\psi^\dagger\gamma_4\psi$

$=$ 第二项.

Lagrange 方程

$$(\gamma_\mu\partial_\mu + \chi)\psi = 0. \qquad (\text{对}\bar{\psi}\text{ 变分})$$

$$\partial_\mu\bar{\psi}\gamma_\mu - \chi\bar{\psi} = 0. \qquad (\text{对 }\psi\text{ 变分})$$

应指出,凡拉氏量中含场量的平方项者,变分后,场方程中一定含有静质量,这种项叫质量项.

2.2.4. 相互作用场的变分原理

我们假定任何相互作用场(例 ψ 场与 φ 场)的总拉氏量可写为

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_2 + \mathscr{L}'. \tag{2.2.13}$$

其中 $\mathscr{L}_1$,$\mathscr{L}_2$ 分别为 ψ 场,φ 场的自由拉氏量,$\mathscr{L}'$ 则是一个与 ψ、φ 有关的相互作用拉氏量,$\mathscr{L}'$ 中包含的耦合常数(Coupling Constant)反映相互作用的强度,例如通常用 g,e,G_F,G 分别表示强作用、电磁作用、弱作用和重力作用中的耦合常数,它们之间的比例大致为

$$\frac{g^2}{\hbar c} : \frac{e^2}{\hbar c} : G_F\cdot m_p^2 : G\frac{m_p^2}{\hbar c} = 1 : \frac{1}{137} : 10^{-5} : 10^{-36}.$$

注意:在 $\hbar = c = 1$ 的自然单位系中,$L = T = M^{-1}$,各种耦合常数的量纲为:

$$[e^2] = [g^2] = M^0, [G_F] = [G] = M^{-2}.$$

由前述对 $\mathscr{L}$ 的普遍性要求以及某些附加的特殊要求(空间反射不变性,时间反演不变性,……)几乎可惟一确定相互作用拉氏量的形式,下面我们举几个例子.

①Dirac 场 - 实赝标量场耦合(例如核子与 π^0 介子的强相互作

用）

(a) 汤川相互作用：$\mathscr{L}' = g\bar{\psi}\psi\varphi$—— 赝标量耦合　(2.2.14)

$$\mathscr{L}' = \mathrm{i}g'\bar{\psi}\gamma_5\psi\varphi\text{—— 标量耦合} \quad (2.2.15)$$

其中“i”因子是为了保证 $\mathscr{L}^+ = .\mathscr{L}$；$g, g'$ 都是耦合常数.

$$\mathscr{L} = -\hbar c\,\bar{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu + \chi_1)\psi - \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial_\mu\varphi - \frac{1}{2}\chi_2^2\varphi^2 + g\,\bar{\psi}\psi\varphi.$$

$$\mathscr{L} = -\hbar c\,\bar{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu + \chi_1)\psi - \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial_\mu\varphi - \frac{1}{2}\chi_2^2\varphi^2 + \mathrm{i}g\,\bar{\psi}\gamma_5\psi\varphi.$$

实验发现，强相互作用应选择标量耦合.

Lagrange 方程

对 φ 变分得 $(\Box - \chi_2^2)\varphi = -g\bar{\psi}\psi$,　(2.2.16)

$$(\Box - \chi_2^2)\varphi = -\mathrm{i}g'\bar{\psi}\gamma_5\psi. \quad (2.2.17)$$

在静态 $(\Box \to \nabla^2)$ 点源 $\begin{cases}\bar{\psi}\psi \to \delta(\boldsymbol{x}) \\ \bar{\psi}\gamma_5\psi \to \mathrm{i}\delta(\boldsymbol{x})\end{cases}$ 情况下，

(2.2.16)，(2.2.17) 化为

$$(\nabla^2 - \chi^2)\varphi = -g\delta(\boldsymbol{x})$$

解即汤川势

$$\varphi = \frac{g}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\chi r}}{r}.$$

故实标量场的源是 $g\bar{\psi}\psi$ 或 $g'\bar{\psi}r_5\psi$，例如，π^0 介子场的源是核子.

对 $\bar{\psi}$ 变分得：$(\gamma_\mu\partial_\mu + \chi_1 - \frac{g}{\hbar c}\varphi)\psi = 0$，或

$$(\dot{\gamma}_\mu\partial_\mu + \chi_1 - \mathrm{i}\frac{g'}{\hbar c}\varphi\gamma_5)\psi = 0.$$

或　$[\gamma_\mu\partial_\mu + (\chi_1 - \frac{g}{\hbar c}\varphi)]\psi = 0.$　(2.2.18)

或　$[\gamma_\mu\partial_\mu + (\chi_1 - \mathrm{i}\frac{g'}{\hbar c}\varphi\gamma_5)]\psi = 0.$　(2.2.19)

$-\frac{g}{\hbar c}\varphi\Psi$ 或 $-\frac{g'}{\hbar c}\varphi\gamma_5\psi$ 可看作 ψ 场与 φ 场的相互作用能 —— 势能.

例如：核子在外加 π^0 介子场中运动具有势能.

(b) 导数耦合 $\mathscr{L}' = \mathrm{i}g\,\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\partial_\mu\varphi.$ (2.2.20)

$\mathscr{L}' = \mathrm{i}g'\,\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi\partial_\mu\varphi.$ (g, g' 耦合常数) (2.2.21)

对 φ 变分得 $(\Box - \chi_2^2)\varphi = g\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi).$ (2.2.22)

或 $(\Box - \chi_2^2)\varphi = g'\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi).$ (2.2.23)

对 ψ 变分得 $[\gamma_\mu(\partial_\mu - \frac{g}{\hbar c}\partial_\mu\varphi) + \chi_1]\psi.$ (2.2.24)

$[\gamma_\mu(\partial_\mu - \frac{g'}{\hbar c}\gamma_5\partial_\mu\varphi) + \chi_1]\psi = 0.$ (2.2.25)

理论上希望，汤川耦合和导数耦合应可描述 Dirac 粒子与标量粒子之间的相互作用. 例如，核子与 π^0 介子之间的强相互作用，但由于这些方程组 (2.2.16)(2.2.18)，(2.2.17)(2.2.19)，(2.2.22)(2.2.24)；(2.2.23)、(2.2.25) 是两个非齐次非线性偏微分方程的联立求解，无法求得精确解. 而近似的微扰法求解又由强相互作用的耦合常数 g, g' 较大，不能收敛，所以强相互作用问题利用上述方案，不能得到满意解决.

从理论上说，由于在今后将讲到的重正化理论中，导数耦合无法重正化，所以以后，不再考虑含导数耦合的相互作用.

②Dirac 场 - 电磁场耦合

$\mathscr{L}' = \mathrm{i}e\,\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\mathrm{A}_\mu.$ (e—— 耦合常数即电荷) (2.2.28)

引入因子 i 是为了使 $\mathscr{L}'$ 厄米化.

注意：上述相互作用是一种标量相互作用，我们没有选取赝标量相互作用，而这是与实验相符的.

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\omega}F_{\mu\omega} - c\hbar\,\bar{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu + \chi)\psi + \mathrm{i}\,e\,\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\mathrm{A}_\mu.$$

对 A_μ 变分得：$\Box\mathrm{A}_\mu = -\mathrm{i}e\,\bar{\psi}\gamma_\mu\psi.$

与宏观电动力学比较即知 4 维流密度为

$\mathrm{J}_\mu = \mathrm{i}\,e\,c\,\bar{\psi}\gamma_\mu\psi.$ (2.2.30)

对$\bar{\psi}$变分得　$[\gamma_\mu(\partial_\mu - \frac{\mathrm{i}e}{c\hbar}\mathrm{A}_\mu) + \chi]\psi = 0.$　　(2.2.31)

对ψ变分或上式取厄米共轭得伴随方程

$$(\partial_\mu + \frac{\mathrm{i}e}{c\hbar}\mathrm{A}_\mu)\bar{\psi}\gamma_\mu - \chi\bar{\psi} = 0. \tag{2.2.32}$$

由(2.2.31)(2.2.32)可看出若在自由 Dirac 方程中

以$(\partial_\mu - \frac{\mathrm{i}e}{c\hbar}\mathrm{A}_\mu)\psi$代替$\partial_\mu\psi$,$(\partial_\mu + \frac{\mathrm{i}e}{c\hbar}\mathrm{A}_\mu)\bar{\psi}$代替$\partial_\mu\bar{\psi}$.

(2.2.33)

则自由 Dirac 方程即变为考虑电磁相互作用的 Dirac 方程,这叫最小电磁相互作用原理,或最小耦合. 在《规范场》一节中,我们还要着重讨论这个问题.

2.2.5. Nöther 定理(1918 年)

物理规律的对称性或协变性,是指在某种广义变换下,(坐标变换或函数变化)规律的形式不变,例如物理规律的洛仑兹协变性和电动力学的规范不变性等.

物理量的守恒是指从某一固定参考系观测,系统的某个物理量遵循连续方程,对孤立系统即得积分守恒量,如能量守恒律、电荷守恒律等.

对称性和守恒律之间的关系由 Nöther 定理给出.

Nöther 定理:

"对任一给定动力学系统而言,任一r个参量的连续对称变换必对应r个守恒量."

证:设有一力学系统,其 Lagrange 函数为

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(\varphi_a\varphi_{a,\mu}). \tag{2.2.34}$$

作用量为:$I = \int_\Sigma \mathscr{L}\mathrm{d}\Sigma$　　(2.2.35)

其中 $\mathrm{d}\Sigma = \mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3\mathrm{d}x^4$.

给定某无穷小连续变换:

$$\left.\begin{aligned} x_\mu \to x'_\mu &= x_\mu + \delta x_\mu. \\ \varphi_a(x) \to \varphi'_a(x') &= \varphi_a(x) + \delta\varphi_a(x). \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.36)$$

则在上述变换下，$\varphi_a(x)$ 的总改变量

$$\begin{aligned} \delta\varphi_a(x) &= \varphi'_a(x') - \varphi_a(x) = [\varphi'_a(x') - \varphi_a(x')] \\ &\quad + [\varphi_a(x') - \varphi_a(x)] = \bar{\delta}\varphi_a + \varphi_{a,\mu}\delta x^\mu. \end{aligned} \qquad (2.2.37)$$

这表示，函数的总改变量 $\delta\varphi_a(x)$ 等于函数的形式变分 $\bar{\delta}\varphi_a(x)$ 加上坐标改变所引起的函数的增量. 应注意，在 $\delta\varphi_a$ 中既包含坐标不变，而由其它原因所引起的函数变化(如规范变换)，也包含坐标改变所引起的函数变化. 如标量场在坐标变换下，总改变量 $\delta\varphi_a(x) = 0$，但 $\delta\varphi_a = -\varphi_{a,\mu}\cdot\delta x_\mu$ 并不为 0. 若在变换(2.2.36)下，场方程形式不变，则(2.2.36)叫系统的无穷小对称变换.

在无穷小对称变化下应有：

$$\begin{aligned} \delta I &= \int \mathscr{L}[\varphi'_a(x'), \varphi'_a(x')_{,\mu}]\mathrm{d}\Sigma' - \int \{[\varphi_a(x), \varphi_a(x)_{,\mu}]\mathrm{d}\Sigma \\ &= 0 \end{aligned} \qquad (2.2.38)$$

因 $\mathrm{d}\Sigma' \equiv \mathrm{D}\left(\frac{x'_1 x'_2 x'_3 x'_4}{x_1 x_2 x_3 x_4}\right)\mathrm{d}\Sigma = \mathrm{D}\left(\frac{x'}{x}\right)\mathrm{d}\Sigma$

$$\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_v} = \delta_{\mu v} + \frac{\partial \delta x_\mu}{\partial x_v},$$

$$\text{故 } \mathrm{D}\left(\frac{x'}{x}\right) = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial \delta x_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial \delta x_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial \delta x_3}{\partial x_1}, & \frac{\partial \delta x_4}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \delta x_1}{\partial x_2}, & 1 + \frac{\partial \delta x_2}{\partial x_2}, & \frac{\partial \delta x_3}{\partial x_2}, & \frac{\partial \delta x_4}{\partial x_2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{vmatrix}$$

$$\text{定义}\ \Delta \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial \delta x_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial \delta x_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial \delta x_3}{\partial x_1}, & \frac{\partial \delta x_4}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \delta x_1}{\partial x_2}, & \frac{\partial \delta x_2}{\partial x_2}, & \frac{\partial \delta x_3}{\partial x_2}, & \frac{\partial \delta x_4}{\partial x_2} \\ \cdots\cdots & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

可证：$\mathrm{D} = 1^n + S_1 1^{n-1} + S_2 1^{n-2} + \cdots + S_{n-1} 1^1 + S_n$

$= 1 + S_1 + S_2 + S_3 + S_4.$

其中 S_k 是 Δ 的所有 k 级主子式的和，所谓 k 级主子式即从原 n 级行列式中划去$(n-k)$ 个行和列的余子式，这些被划掉的行和列均交于对角元素上，例 $S_1 = \frac{\partial \delta x_\mu}{\partial x_\mu}$.

忽略高阶小量时得

$$\mathrm{D} \backsimeq 1 + \frac{\partial \delta x_\mu}{\partial x_\mu}, (\mu = 1,2,3,4)$$

$$\text{故} \quad \mathrm{d}\Sigma' = \left(1 + \frac{\partial \delta x_\mu}{\partial x_\mu}\right)\mathrm{d}\Sigma. \tag{2.2.39}$$

又令：$\delta \mathscr{L} = \mathscr{L}'[\phi'_a(x'), \phi'_a(x'), \mu')]$

$$- \mathscr{L}[\varphi_a(x), \varphi_a(x), \mu],$$

则：$\delta \mathscr{L} = \bar{\delta} \mathscr{L} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu,$

$$\bar{\delta} \mathscr{L} \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_a} \bar{\delta} \varphi_a + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_{a,\mu}} \bar{\delta} \varphi_{a,\mu}. \tag{2.2.40}$$

把(2.2.39)、(2.2.40)，代入(2.2.38)仅保留一阶量得

$\int_\Sigma \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_a} \bar{\delta} \varphi_a + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_{a,\mu}} \bar{\delta} \varphi_{a,\mu} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \mathscr{L} \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu} \right\} \mathrm{d}\Sigma = 0$ 和 $\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_{a,\mu}} \bar{\delta} \varphi_{a,\mu} =$

$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_{a,\mu}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \bar{\delta} \varphi_a = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_{a,\mu}} \bar{\delta} \varphi_a \right) - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_{a,\mu}} \right) \bar{\delta} \varphi_a.$

利用微分“$\frac{\partial}{\partial x_\mu}$”与变分“$\bar{\delta}$”的可对易性及 $\bar{\delta} \varphi_a = \delta \varphi_a - \varphi_{a,\mu} \delta x^\mu$，

得：$\int_\Sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\mathscr{L}\delta x^\mu - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_{a,\mu}}\varphi_{a,\nu}\delta x^\nu + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_{a,\mu}}\delta\varphi_a\right] + \right.$

$\left. + \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_a} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_{a,\mu}}\right)\right](\delta\varphi_a - \varphi_{a,\nu}\delta x^\nu)\right\} \mathrm{d}\Sigma = 0. \qquad (2.2.41)$

利用 Lagrange 方程得：

$$\int_\Sigma \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left\{\left[\mathscr{L}\delta^\mu_\nu - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi a,\mu}\varphi_{a,\nu}\right]\delta x^\nu + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_{a,\mu}}\delta\varphi_a\right\}\mathrm{d}\Sigma = 0. \quad (2.2.42)$$

令 $\left\{\left[\mathscr{L}\delta^\mu_\nu - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_{a,\mu}}\varphi_{a,\nu}\right]\delta x^\nu + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi a,\mu}\delta\varphi_a\right\} = f^\mu.$

Lorentz 矢量， (2.2.43)

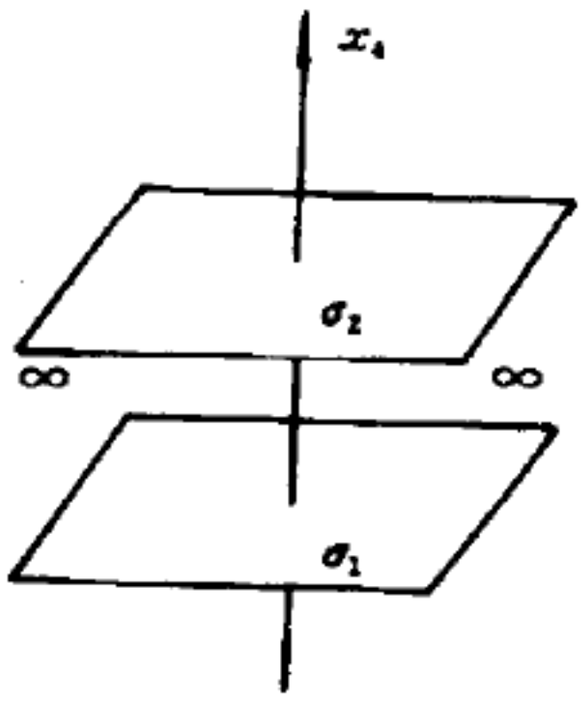
则上式可写为 $\int_\Sigma f_{\mu,\mu}\delta\Sigma = 0.$ (2.2.44)

由积分域的任意性即得

Lorentz 协变微分守恒律

$$f_{\mu,\mu} = 0.$$

在积分(2.2.44)中，取如下图所示积分域.



考虑无穷远条件 利用 Gauss 定理

$$\int_\Sigma f_{\mu,\mu}\,\mathrm{d}\Sigma = \int_v f_\mu \mathrm{d}v_\mu = 0$$

其中 $\mathrm{d}v_\mu = (0,0,0,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3)$，为 4 维时空域 Σ 的 3 维闭合类空超曲面边界 v 上的方向面元.

得 $:\int_{\sigma 1} f_4 \mathrm{d}v_4 + \int_{\sigma 2} f_4 \mathrm{d}v_4 = 0.$

颠倒类空超曲面 σ_1 的正向得

积分守恒量 $F_4 = \int_{\sigma 2} f_4 \mathrm{d}^3\boldsymbol{x} = \int_{\sigma 1} \mathrm{f}_4 \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}$

或 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_4 = 0.$ (2.2.45)

这就最后证明了 Nöther 定理. 注意：Nöther 定理的基本思想是：

系统的 Hamilton 变分原理(Lagrange 方程) + 系统存在一个对称连续变换 ⇒ 系统存在一个守恒量.

2.2.6. Poincare 变换与守恒

Poincaré 变换为 $x'_\mu = a_\mu + \alpha_{\mu\nu}x_\nu$. (10 个参量群)

(2.2.46)

无穷小 Poincaré 变换为

$$a_\mu = \varepsilon_\mu,$$

$$\alpha_{\mu\nu} = \delta\mu\nu + \varepsilon_{\mu\nu}.$$

$$\delta\varphi_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}s_{\mu\nu,ab}\varphi_b. \tag{2.2.48}$$

若场论在 Poincare 变换下形式不变应存在相应的守恒律.

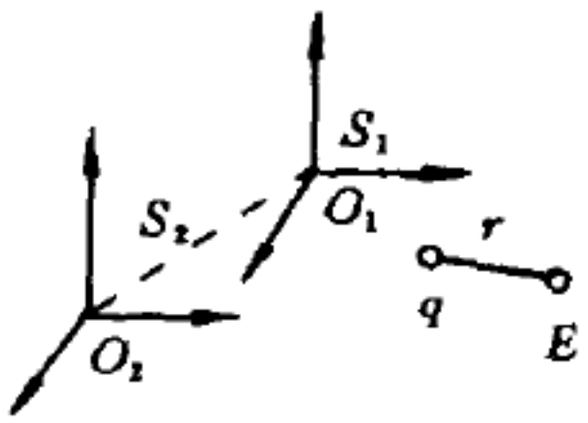
① 能量动量守恒律

设(2.2.47) 为坐标平移,即 $\delta x_\mu = \varepsilon_\mu = \text{Const.}$

则只要假定时间空间是均匀的,任何物理场量 φ 在平移变换下,将有

$$\delta\varphi_a = 0.$$

例 离点电荷距离为 r 处的电场强度 $(\boldsymbol{E})_i = \frac{q}{r^3}(\boldsymbol{r})_i$ 不随坐标系平移而变化,仅随坐标系的转动而变化.



微分守恒量 $f_\mu = [\mathscr{L}\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{a,\mu}}\varphi_{a,\nu}]\varepsilon_\nu.$

(2.2.49)

微分守恒律 $\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu} = 0$ 化为 $\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = 0.$

其中 $T_{\mu\nu} \equiv \mathscr{L}\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{a,\mu}}\varphi_{a,\nu}$ 叫正则能量动量张量.

(2.2.50)

注意:之所以把 $T_{\mu\nu}$ 叫能量动量张量,这是因为与经典分析力学中的结论是一致的,即

$$(T_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} T_{ik} & \frac{\mathrm{i}}{c}S_k \\ \mathrm{i}cP_k & -\omega \end{pmatrix}$$

其中 $T_{ik}(i,k=1,2,3)$ 是应力张量有 $T_{ik}=T_{ki}$，P_k 和 S_k 分别是三动量流密度和三能流密度有 $S_k=P_k\cdot c^2$，$\omega=-T_{44}$ 是能量密度. 故 $T_{\mu\nu}=T_{\nu\mu}$.

积分守恒量

$$P_\mu=\int p_\mu \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}=\frac{1}{\mathrm{i}c}\int t_{4\mu}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}.$$

空间分量

$$P_i=p_i\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}=\frac{1}{\mathrm{i}c}\int T_{4i}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\text{—— 总动量} \tag{2.2.51}$$

时间分量

$$H=-\mathrm{i}c\int p_4\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}=\int\omega\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}=-\int \mathrm{T}_{44}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}$$

$$=\int\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{a,4}}\varphi_{a,4}-\mathscr{L}\right)\mathrm{d}V\text{—— 总能量.} \tag{2.2.52}$$

可见，孤立物质系统的能量(质量) 动量守恒乃物质系统运动方程在时空坐标平移下的不变性的必要条件，或 4 维闵可夫斯基时空的均匀性所致.

两点讨论：

(a) 正则能量动量张量不惟一确定

因为若设 $\chi_{\mu\sigma\tau}=-\chi_{\mu\tau\sigma}$，则

$$T^{*}_{\mu\nu}=T_{\mu\nu}+\frac{\partial\chi_{\mu\sigma\tau}}{\partial x_\tau}\text{ 也满足微分守恒律.} \tag{2.2.53}$$

(b) $\dfrac{\partial \mathrm{T}_{\mu\nu}}{\partial x_\mu}=0$，即 Lagrange 运动方程. (2.2.54)

证：$\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}\mathscr{L}\delta_{\mu\nu}-\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{a,\mu}}\varphi_{a,\nu}\right)=0$，

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_\nu}-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{a,\mu}}\right)\varphi_{a,\nu}-$$

$$-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{a,\mu}}\frac{\partial^2\varphi_a}{\partial x_\mu\partial x_\nu}=0.$$

但 $\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_\nu}=\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_a}\varphi_{a,\nu}+\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{a,\mu}}\dfrac{\partial^2\varphi_a}{\partial x_\mu\partial x_\nu}$，故得

$$\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_a}-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{a,\mu}}\right)\right]\varphi_{a,\nu}=0,$$

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_a}-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{a,\mu}}\right)=0$$

例 复标量场：

$$T_{\mu\omega}=+\partial_\mu\varphi^*\partial_\nu\varphi+\partial_\nu\varphi^*\partial_\mu\varphi-\delta_{\mu\omega}\{\partial_\lambda\varphi^*\partial_\lambda\varphi+\chi^2\varphi^*\varphi\}.$$

(2.2.55)

$$H=-\mathrm{i}c\int\{-\partial_4\varphi^*\partial_4\varphi+\partial_i\varphi^*\partial_i\varphi+\chi^2\varphi^*\varphi\}\mathrm{d}v.$$

(2.2.56)

$$p_i=-\int\frac{1}{c^2}\{\partial_i\varphi^*\partial_t\varphi+\partial_t\varphi^*\partial_i\varphi\}\mathrm{d}v.$$

(2.2.57)

Maxwell 场：

$$T_{\mu\omega}=F_{\mu\lambda}F_{\nu\lambda}+\delta_{\mu\omega}\frac{1}{4}F_{\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma}.\qquad(2.2.58)$$

$$H=-\int(F_{4\lambda}F_{4\lambda}+\frac{1}{4}F_{\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma})\mathrm{d}^3x=\int\frac{1}{8\pi}(E^2+H^2)\mathrm{d}V.$$

(2.2.59)

$$p_i=\frac{1}{\mathrm{i}c}\int[F_{4\lambda}F_{i\lambda}]\mathrm{d}^3\chi=\frac{1}{4\pi}\int\frac{1}{c}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})_i\mathrm{d}V.\qquad(2.2.60)$$

Dirac 场：$T_{\mu\omega}=c\int[\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\nu\psi-\bar{\psi}\overleftarrow{\partial}_\nu\gamma_\mu\psi+\bar{\psi}\gamma_\nu\partial_\mu\psi-\bar{\psi}\overleftarrow{\partial}_\mu\gamma_\nu\psi]$

(2.2.61)

$$H=-c\int\bar{\psi}\gamma_4\partial_4\psi\mathrm{d}V=\int\tilde{\psi}^*(-c\frac{\partial}{\partial x_4})\psi\mathrm{d}V.\qquad(2.2.62)$$

$$\boldsymbol{p}_i=\int\tilde{\psi}^*(-i\frac{\partial}{\partial x_i})\psi\mathrm{d}V.\qquad(2.2.63)$$

② 角动量守恒律

令(2.2.46)为纯时空转动：$x'_\mu = x_\mu + \epsilon_{\mu\nu}x_\nu$.

则(2.2.48)化为 $\delta x_\mu = \epsilon_{\mu\nu}x_\nu$. (2.2.64)

$$\delta\varphi_a = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}s_{\mu\nu,\alpha\beta}\varphi_\beta.$$

微分守恒量：

$$f_\mu = [\mathscr{L}\epsilon_{\mu\nu} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{\alpha,\mu}}\varphi_{\alpha,\nu}]\epsilon_{\nu\tau}x_\tau + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{\alpha,\mu}}\frac{1}{2}\epsilon_{\nu\tau}s_{\nu\tau,\alpha\beta}\varphi_\beta.$$

$$= T_{\mu\nu}\epsilon_{\nu\tau}x_\tau + \frac{1}{2}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{\alpha,\mu}}\epsilon_{\nu\tau}s_{\nu\tau,\alpha\beta}\varphi_\beta.$$

微分守恒律 $\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu} = 0$ 化为

$$\epsilon_{\nu\tau}\frac{\partial}{\partial x_\mu}[T_{\mu\nu}x_\tau + \frac{1}{2}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{\alpha,\mu}}s_{\nu\tau,\alpha\beta}\varphi_\beta = 0.$$

指标轮换

$\tau \to \nu \to \mu \to \tau$ 得

$$\epsilon_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\tau}[T_{\mu\nu}x_\tau - T_{\tau\nu}x_\mu + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{\alpha,\tau}}s_{\mu\nu,\alpha\beta}\varphi_\beta] = 0.$$

由 $\epsilon_{\mu\nu}$ 的任意性得

$$\frac{\partial M_{\mu\nu,\tau}}{\partial x_\tau} = 0.$$

其中 $M_{\mu\nu,\tau} = T_{\tau\mu}x_\nu - T_{\tau\nu}x_\mu + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{\alpha,\tau}}s_{\mu\nu,\alpha\beta}\varphi_\beta$

$$\equiv l_{\mu\nu,\tau} + s_{\mu\nu,\tau} = -M_{\nu\mu,\tau}. \quad (2.2.65)$$

当 $\tau = 4;\mu,\nu = j,k = 1,2,3$ 时，

(2.2.65)即角动量微分守恒律.

积分守恒量为：

$$M_{jk} = \frac{1}{ic}\int M_{jk,4}d^3\boldsymbol{x} = L_{jk} + S_{jk}. \quad (2.2.66)$$

其中，$L_{jk} = \frac{1}{ic}\int(x_kT_{j4} - x_jT_{k4})d^3\boldsymbol{x} = \int l_{jk}\,d^3\boldsymbol{x}$ 叫轨道角动量.

$$S_{ik} = \frac{1}{ic}\int\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{\alpha,4}}s_{jk,\alpha\beta}\varphi_\beta d^3\boldsymbol{x} = \int s_{jk}\,d^3\boldsymbol{x}$$ 叫自旋角动量.

注：对于矢量场 $S_{jk,lm} = \mathrm{i}\hbar(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})$.

对于旋量场 $S_{jk} = \frac{1}{2}\hbar\Sigma_{jk} = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}I_{jk} = \frac{1}{\mathrm{i}}\begin{pmatrix}\sigma_j\sigma_k & 0\\ 0 & \sigma_j\sigma_k\end{pmatrix}$.

可见，孤立系统的总角动量守恒乃物质系统运动方程在纯空间转动下的不变性的必要条件，或三维欧氏空间各向同性所致.

2.2.7. 规范变换不变性和守恒律

考虑复量场 φ_a, φ_a^*.

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(\varphi_a, \varphi_{a,\mu}; \varphi_a^*, \varphi_{a,\mu}^*).$$

对 φ_a, φ_a^* 分别求变分可由

$$\delta I = \int_\Sigma \delta\mathscr{L}\mathrm{d}\Sigma = 0, \text{得}$$

复量场运动方程为

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_a} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{a,\mu}}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_a^*} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{a,\mu}^*}\right) = 0. \tag{2.2.67}$$

Pauli 定义第一类规范变换为相变换，(U_1 群)

$$\varphi_a \to e^{\mathrm{i}\alpha}\varphi_a, (\alpha \text{ 为实数}) \tag{2.2.68}$$

$$\varphi_a^* \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\varphi_a^*.$$

按对 $\mathscr{L}$ 的普遍要求，$\mathscr{L}$ 应为实标量函数，故 φ_a, φ_a^* 应在 $\mathscr{L}$ 中以双线性型出现，因而自然要求：

场方程在 $U(1)$ 规范变换下应形式不变，考虑无穷小相变换

$$\varphi'_a = \varphi_a + \mathrm{i}\alpha\varphi_a, \varphi_a^{*\prime} = \varphi_a^* - \mathrm{i}\alpha\varphi_a^*.$$

显然(2.2.36) 化为

$$\delta x_\mu = 0.$$

$$\delta\varphi_a = \mathrm{i}\alpha\varphi_a.$$

$$\delta\varphi_a^* = -\mathrm{i}\alpha\varphi_a. \tag{2.2.69}$$

按 Nöther 定理

$$f_\mu = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_{a,\mu}} \delta\varphi_a + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi^*_{a,\mu}} \delta\varphi^*_a = \mathrm{i}\alpha \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_{a,\mu}} \varphi_a - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi^*_{a,\mu}} \varphi^*_a \right). \quad (2.2.70)$$

引入 $J_\mu = -f_\mu/\alpha$,

则微分守恒律 $\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu} = 0$ 化为 $\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} = 0$.

由(2.2.70)知对于实量场(厄米场)$J_\mu = 0$,仅对复量场(非厄米场)由相变换下的不变性才能得到一个守恒流 J_μ 以后可以知道此守恒流可表示:

① 电流密度,积分守恒量即电荷(Electric Charge).

② 重荷流密度,积分守恒量即重荷(Baryon Charge).

③ 轻荷流密度,积分守恒量即轻荷(Lepton Charge).

④ 超荷流密度,积分守恒量即超荷(Hyper Charge).

……

对于自由 Dirac 场,不难由(2.2.12)找出 J_μ 即(2.1.38).

复量场 Q 的物理意义有二,既可看做电荷,又可看做正反粒子数之差.

§2.3 规范场

2.3.1. 规范变换与规范场

场论的对称性与某个物理量的守恒密切相关. 对称性分时空对称性和内部对称性,规范场理论是研究内部对称性及其自发破缺的学科. 今天认为,一切相互作用都是规范相互作用,正是在这种思想的基础上才可能建立各种相互作用的统一场论.

已知自由复标量场 $\varphi(x)$ 在整体 $U(1)$ 变换下是不变的,即拉氏量

$$\mathscr{L} = -\partial_\mu \varphi^*(x) \partial_\mu \varphi(x) - x^2 \varphi^*(x) \varphi(x) \quad (2.3.1)$$

在第一类规范变换

$$\varphi(x) \longrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \varphi(x) \qquad (\alpha \text{ 为实数})$$

$$\varphi^*(x) \longrightarrow e^{-i\alpha}\varphi^*(x) \tag{2.3.2}$$

下不变.

局部场论认为 α 没有理由不是时空坐标 x 的函数. 如果要求上述拉氏量在局部 $U(1)$ 变换下

$$\varphi(x) \longrightarrow e^{\pm i\alpha(x)}\varphi(x)$$

$$\varphi^*(x) \longrightarrow e^{\mp i\alpha(x)}\varphi^*(x) \tag{2.3.3}$$

也不变,我们发现:

(1) 必须引入一附加实矢量场 $A_\mu(x)$.

(2) 在局部 $U(1)$ 变换下

$$A_\mu(x) \longrightarrow A_\mu(x) \mp \frac{1}{e}\frac{\partial\alpha(x)}{\partial x_\mu}. \text{(第二类规范变换)} \tag{2.3.4}$$

(3) 以"规范协变微分"$D_\mu\varphi(x)$ 和 $D_\mu\varphi^*(x)$ 取代 $\partial_\mu\varphi(x)$ 和 $\partial_\mu\varphi^*(x)$,这里

$$D_\mu\varphi(x) \equiv (\partial_\mu \pm ieA_\mu(x))\varphi(x). \tag{2.3.5}$$

$$D_\mu\varphi^*(x) \equiv (\partial_\mu \mp ieA_\mu(x))\varphi^*(x). \tag{2.3.6}$$

并定义一个新的 Lagrange 量

$$\mathscr{L} = -D_\mu\varphi^* D_\mu\varphi - \chi^2\varphi^*\varphi. \tag{2.3.7}$$

则(2.3.7) 就满足局部 $U(1)$ 变换下的不变性.

证:应注意,$D_\mu\varphi$ 与 $D_\mu\varphi^*$ 在局部 $U(1)$ 变换下的变换规律分别与 φ 和 φ^* 相同

$$D_\mu\varphi \xrightarrow[U(1)\text{下}]{\text{定域}} e^{i\alpha}D_\mu\varphi.$$

即

$$D_\mu\varphi^* \xrightarrow[U(1)\text{下}]{\text{定域}} e^{-i\alpha}D_\mu\varphi^*.$$

则(2.3.7) 即在局部 $U(1)$ 变换下不变,并且上述新的拉氏量(2.2.7) 正好考虑到了复标量场与电磁场的耦合,即

$$\mathscr{L} = -\partial_\mu\varphi^*\partial_\mu\varphi - x^2\varphi^*\varphi - e^2A_\mu^2\varphi^*\varphi + ieA_\mu(\varphi^*\partial_\mu\varphi - \varphi\partial_\mu\varphi^*)$$

$$= \mathscr{L}_{\varphi}^{(0)} + \mathscr{L}_{\varphi,A}^{(i)} \tag{2.3.8}$$

式中 $\mathscr{L}_{\varphi,A}^{(i)} \equiv -e^2 A_\mu^2 \varphi^* \varphi + eA_\mu J_\mu \simeq eA_\mu J_\mu$(当 e 小时),类似的处理对自由 Dirac 场也成立,我们把 $U(1)$ 称为规范群,$A_\mu(x)$ 称规范势.

(2.3.8) 式中没有包含自由规范场 A_μ 的拉氏量 $\mathscr{L}_A^{(0)}$,它显然在局部 $U(1)$ 变换下应该是不变的,定义规范场强

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{2.3.9}$$

它显然满足上述要求,利用它即可构造出一个局部 $U(1)$ 变换下不变的洛仑兹标量 —— 自由规范场 A_μ 的拉氏量

$$\mathscr{L}_A^0 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \tag{2.3.10}$$

注意,自由规范场 A_μ 的拉氏量 $\mathscr{L}_A^0$ 中不含 A_μ 的平方项,因而 $U(1)$ 规范粒子没有静质量,这一点是由 $\mathscr{L}_A^0$ 的规范不变性所要求的.

最后的总的拉氏量为

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{\varphi}^{(0)} + \mathscr{L}_A^{(0)} + \mathscr{L}_{\varphi,A}^{(i)}. \tag{2.3.11}$$

对于一般的局部么模规范群 G,它的无穷小元素为:

$$G = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_k(x)T^k} \simeq 1 + \mathrm{i}\alpha_k(x)T^k, k = 1,2\cdots N. \tag{2.3.12}$$

其中 T^k 是 G 的生成元,由李代数知应满足

$[T^j, T^k] = \mathrm{i}f_{ijk}T^i, T_r(T^i) = 0$ 及

$$T_r(T^j/_2 . T^k/_2) = \frac{1}{2}\delta^{jk}. \qquad \text{(正交归一化条件)}$$

式中 i,j,k 是群 G 的生成元指标,生成元个数 = 群的维数 = 群参量数 $= N$,f^{ijk} 是群的结构常数,满足 $f^{ijk} = -f^{ikj}$.

例如 $SU_n(A_l)$:$N = n^2 - 1$,它是么模么正变换群,T_k 是无迹的厄密矩阵,其中有 $l = n - 1$ 个可同时对角化,l 叫群的秩.

当场论把规范群 G 作为对称群时,生成元(算符) 就是一个算符或 T^i 的本征值是一个守恒量. 如果用以下方法构造拉氏量则它将在局部 G 变换下不变:

(1) 引入实规范场 $A_\mu^i(x)$,$(i = 1,2,\cdots,N)$

(2) 在局部 G 变换下

$$A^i_\mu(x) \to A^i_\mu(x) - f^{ijk}\alpha^j(x)A^k_\mu(x) - \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha^i(x). \tag{2.3.13}$$

(3) 以“规范协变微分”$D_\mu\varphi(x)$ 和 $D_\mu\varphi^*(x)$ 分别代替 $\partial_\mu\varphi(x)$ 和 $\partial_\mu\varphi(x)^*$.

这里

$$D_\mu\varphi(x) \equiv (\partial_\mu + \mathrm{i}gA^i_\mu(x)T^i)\varphi(x). \tag{2.3.14}$$

$$D_\mu\varphi^*(x) \equiv (\partial_\mu - \mathrm{i}gA^i_\mu(x)T^i)\varphi^*(x). \tag{2.3.15}$$

可看出,$D_\mu\varphi(x)$ 和 $D_\mu\varphi^*(x)$ 在上述局部规范变换下的变换规律分别与 $\varphi(x)$ 和 $\varphi^*(x)$ 相同.

下面我们证明,要求 $D_\mu\varphi$ 在局部规范变换下与 φ 有相同的变换规律将导致(2.3.13).

证:设 $D_\mu\varphi$ 在局部规范变换下与 φ 有相同的规律,即

$$D'_\mu\varphi' \equiv (\partial_\mu + \mathrm{i}gA'^i_\mu T^i)G\varphi = G(\partial_\mu + \mathrm{i}gA^i_\mu T^i)\varphi$$
$$= G(\partial_\mu + \mathrm{i}gA^i_\mu T^i)G^{-1}G\varphi.$$

即 $\partial_\mu(G\varphi) + \mathrm{i}gA'^i_\mu T^i(G\varphi) = G\partial_\mu(G^{-1}G\varphi) + \mathrm{i}gGA^i_\mu T^i(G^{-1}G\varphi)$

$$= G\partial_\mu G^{-1}\cdot(G\varphi) + GG^{-1}\partial_\mu(G\varphi) + \mathrm{i}gGA^i_\mu T^iG^{-1}(G\varphi).$$

或 $$\mathrm{i}gA'^i_\mu T^i = G\partial_\mu G^{-1} + \mathrm{i}gGA^i_\mu T^iG^{-1}.$$

$$A'_\mu = GA_\mu G^{-1} + \frac{1}{\mathrm{i}g}G\partial_\mu G^{-1}(A_\mu \equiv A^i_\mu T^i). \tag{2.3.15'}$$

式中 A_μ 与 A^i_μ 不同,是一个矩阵.

又 $$G(\alpha) = 1 + \mathrm{i}\alpha^i(x)T^i,$$

故 $A'^i_\mu T^i = (1 + \mathrm{i}\alpha^iT^i)A^k_\mu T^k(1 - \mathrm{i}\alpha^jT^j) + \frac{1}{\mathrm{i}g}(1 + \mathrm{i}\alpha^iT^i)\partial_\mu(1 - \mathrm{i}\alpha^jT^j)$

$$= A^k_\mu T^k + \mathrm{i}\alpha^jA_\mu{}^k[T^j,T^k] - \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha^iT^i$$

$$= A^i_\mu T^i - f^{ijk} T^i \alpha^j A^k_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu \alpha^i T^i.$$

这就是(2.3.13).

如此由自由场$\varphi(x)$的拉氏量$\mathscr{L}(\varphi(x),\partial_\mu\varphi(x))$所构造出的拉氏量$\mathscr{L}[\varphi(x),D_\mu\varphi(x)]$就是在局部$G$变换下不变的,它正好包含了$\varphi$场与规范场$A^i_\mu(x)$的耦合项,$A^i_\mu(x)$也称为规范势.

定义　$$F^i_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A^i_\nu(x) - \partial_\nu A^i_\mu(x) - g f^{ijk} A^j_\mu(x) A^k_\nu,$$

(2.3.16)

$$F_{\mu\nu} \equiv F^i_{\mu\nu} T^i$$

为规范场强.

则在规范变换G下

$$F'_{\mu\nu}(x) = G(\alpha) F_{\mu\nu}(x) G^{-1}(\alpha) \tag{2.3.17}$$

$$A'_\mu(x) = G(\alpha)[A_\mu(x) + \frac{1}{\mathrm{i}g}\partial_\mu]G^{-1}(\alpha). \tag{2.3.18}$$

证:　(2.3.18)即(2.3.15′).

为了证明(2.3.17),现先证:

$$F_{\mu\nu} \equiv F^i_{\mu\nu} T^i = D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu$$

由 $F^i_{\mu\nu} T^i = \partial_\mu A_\nu - \partial_\upsilon A_\mu - g f^{ijk} A^J_\mu A^k_\nu T^i$

$$= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \frac{1}{\mathrm{i}} g [T^j, T^k] A^J_\mu A^k_\nu$$

$$= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \frac{1}{\mathrm{i}} g A_\mu A_\nu + \frac{1}{i} g A_\nu A_\mu$$

$$= D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu, (D_\mu \equiv \partial_\mu + \mathrm{i}gA_\mu).$$

又 $F'_{\mu\nu} = D'_\mu A'_\nu - D'_\nu A'_\mu = (\partial_\mu + \mathrm{i}gA'_\mu)A'_\nu - (\partial_\upsilon + \mathrm{i}gA'_\upsilon)A'_\mu$

$$= G[(\partial_\mu + \mathrm{i}gA_\mu)A_\nu - (\partial_\upsilon + \mathrm{i}gA_\nu)A_\mu]G^{-1}$$

$$= G F_{\mu\nu} G^{-1}.$$

2.3.2. Higgs 场和对称性自发破缺

由规范相互作用理论得知,对于$\varphi(x)$,$A^i_\mu(x)$耦合后的总拉氏量为

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}[\varphi(x), D_\mu\varphi(x), A^j_\mu(x)]$$
$$= \mathscr{L}^{(0)}_\varphi + \mathscr{L}^{(0)}_{A^j_\mu} + \mathscr{L}^{(i)}_{\varphi,A} \tag{2.3.19}$$

其中自由规范场 A^j_μ 的拉氏量 $\mathscr{L}^{(0)}_{A^j_\mu}$ 为

$$\mathscr{L}^{(0)}_A = -\frac{1}{4}F^i_{\mu\nu}F^i_{\mu\nu} \tag{2.3.20}$$

这是由于

$$F'_{\mu\nu}F'_{\mu\nu} = GF_{\mu\nu}F_{\mu\nu}G^{-1}.$$

所以 $$-T_r(F'_{\mu\nu}F'_{\mu\nu}) = -T_r(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}).$$

是在局部 $G(n)$ 变换下的不变量.

注意到 $-T_r(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}) = -F^j_{\mu\nu}F^k_{\mu\nu}T_r(T^jT^k) = -\frac{1}{2}F^i_{\mu\nu}F^i_{\mu\nu}$，故 $\mathscr{L}^{(0)}_A$ 是在局部 $SU(n)$ 变换下不变的 Lorentz 标量.

由(2.3.20)知由规范不变性必然得出：自由规范场 A^j_μ 的拉氏量中不出现 A^j_μ 的平方项或质量项，这意味着规范场是无静质量的，无静质量的规范场是长程力场，如重力、电磁力都是无静质量的长程力，但中介规范场并非都是长程力场或者说并非都是无静质量的粒子，如何赋予代表短程力的规范粒子以质量？1964 年 P. W. Higgs 指出如果引入一个对称性自发破缺的标量场——Higgs 场，这个目的就可以达到.

定义　Higgs 场的 Lagrange 量为

$$\mathscr{L}_\varphi = -\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi(x)\partial_\mu\varphi(x) - \frac{\mu^2}{2}\varphi^2(x) - \frac{\lambda}{4}\varphi^4(x)$$
$$\equiv -\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi(x)\partial_\mu\varphi(x) - U(\varphi). \tag{2.3.21}$$

其中　　$\lambda > 0, \mu^2 < 0,$

$$U(\varphi) = \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2(x) + \frac{1}{4}\lambda\varphi^4(x). \tag{2.3.22}$$

$\varphi(x)$ 在内部场空间一般是一个列矩阵，为简单计，下面假设它是一个分量的标量.

与自由的 Klein-Gordon 场方程比较：

$$\mathscr{L}^{(0)}_{\varphi.k-G} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi(x)\partial_\mu\varphi(x) - \frac{\mu^2}{2}\varphi^2(x),$$

其中 $\mu^2 > 0$.

可见 Higgs 场有如下重要性质：

①$\lambda \neq 0$，场有自相互作用；因而是非线性的.

②$\mu^2 < 0$，Higgs 粒子是具有虚质量的快子(tachyon)，这是非物理的.

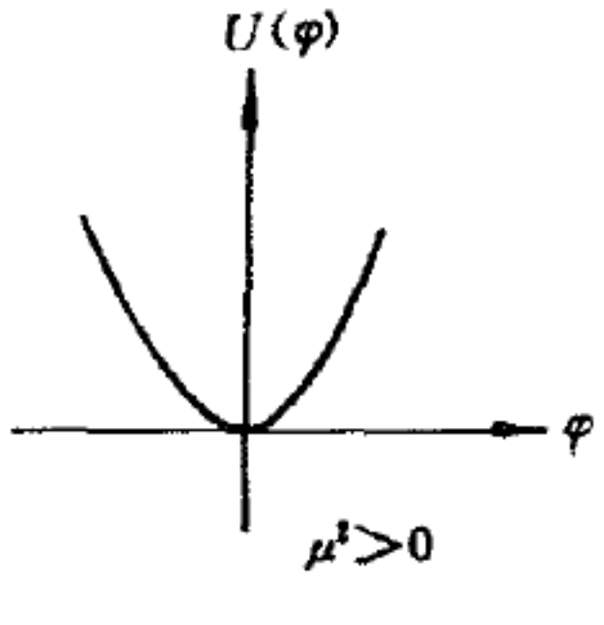
③ 自旋为 0.

④Lagrange 量具有内部对称性：$\varphi(x) \to -\varphi(x)$ 时 $\mathscr{L}_\varphi$ 不变，这表示 $\varphi(x)$ 在场空间具有反射对称性.

求 Higgs 场的基态 —— 真空态.

由 $\frac{dU}{d\varphi} = 0$，得 $\varphi_0 = 0$

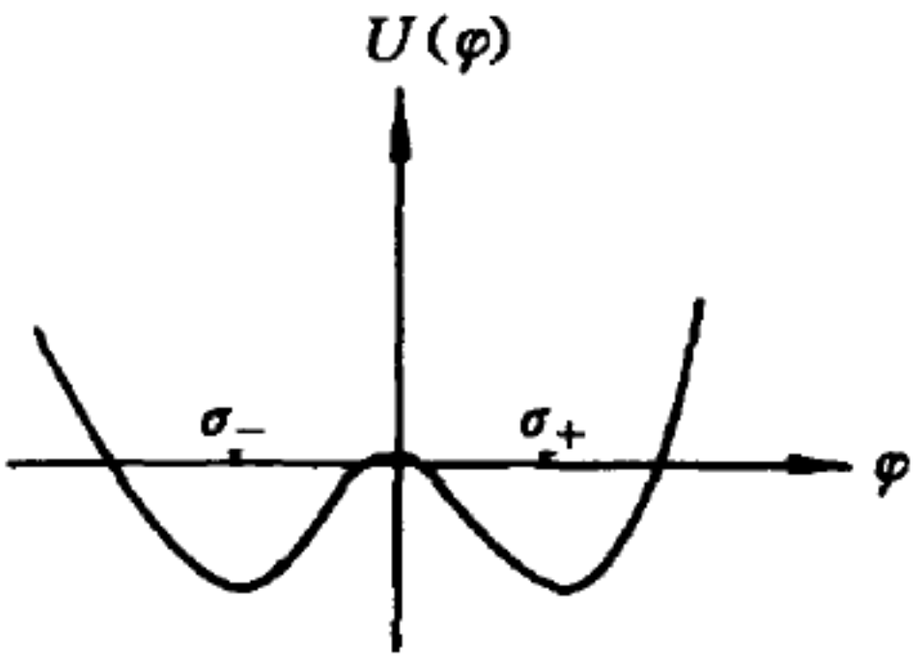
和 $\varphi_0 = \sigma^{(\pm)} \equiv \pm\sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$.



在 $\varphi_0 = 0$ 处：$\left.\frac{d^2U}{d\varphi^2}\right|_{\varphi_0=0} = (\mu^2 + 3\lambda\varphi_0^2)\Big|_{\varphi_0=0}$

$= \mu^2 < 0$，因而极值点是一个不稳定的极大值点.

在 $\varphi_0 = \sigma^\pm$ 处：$\left.\frac{d^2U}{d\varphi^2}\right|_{\varphi_0=\sigma^\pm} = -2\mu^2 > 0$，因而极值点是稳定的极小值点，这表示 $\varphi_0 = \sigma^\pm$ 是两个真空态，如图所示.



Higgs 场的真空态是二重简并的，这就使得真空的场空间反射对称性是破缺的，这种破缺是 Higgs 场自身所固有的，故称之为真空自发破缺.

可见，Higgs 场的内部反射对称性只是表观的. 现对 $\varphi(x)$ 场做

一场空间内的平移

$$\phi(x) = \varphi(x) - \sigma^{(+)},$$

或 $$\varphi(x) = \phi(x) + \sigma^{(+)},$$

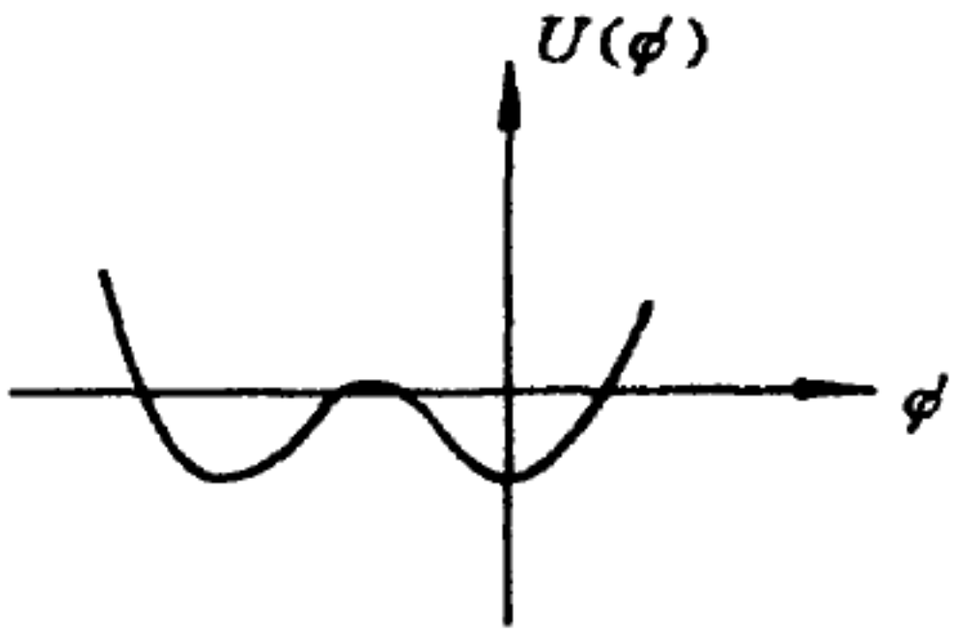
则 $$\mathscr{L}_{\phi}(x) = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial_\mu\phi(x) + \mu^2\phi^2 - \lambda\sigma^{+}\phi^3 - \frac{\lambda}{4}\phi^4,$$

$$U(\phi) = -\mu^2\phi^2 + \lambda_\sigma{}^{+}\phi^3 + \frac{\lambda}{4}\phi^4. \qquad (2.3.23)$$

真空态位于

$$\varphi_0' = 0$$

和 $$\varphi_0' = -2\sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}.$$



可看出：

(1) 真空 $\varphi_0' = 0$ 是具有内部反射对称性的.

(2) $\mathscr{L}\phi$ 是内部反射对称性破缺的.

(3)Higgs 场 $\phi(x)$ 具有实质量 $m = \sqrt{-2\mu^2}$，$\phi(x)$ 成为一个物理的 Higgs 场.

一般地，设 Higgs 场 $\varphi(x)$ 在场空间有 n 个实分量

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix} \qquad (2.3.24)$$

或 $\varphi(x)$ 是 n 维场空间的一个 SO_n 矢量.

则 $$\varphi^{+}\varphi = \widetilde{\varphi}\,\varphi = \sum_{i=1}^{n}\varphi_i^2(x).$$

$$\mathscr{L}_{\varphi} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi^{+}\,\partial_\mu\varphi - \frac{\mu^2}{2}\varphi^{+}\varphi - \frac{\lambda}{4}(\varphi^{+}\varphi)^2. \qquad (2.3.25)$$

$$U(\varphi) = \frac{\mu^2}{2}\varphi^{+}\,\varphi + \frac{\lambda}{4}(\varphi^{+}\varphi)^2, \mu^2 < 0, \lambda > 0.$$

(2.3.26)

它的内部对称群是整体规范群 SO_n.

群 $SO_n = R_n$ 是转动群，群的参数个数 = 群维数 $= \frac{1}{2}n(n-1)$ $= N$，

$$R(\alpha) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_j L_j}, (j = 1,2,\cdots,N). \tag{2.3.27}$$

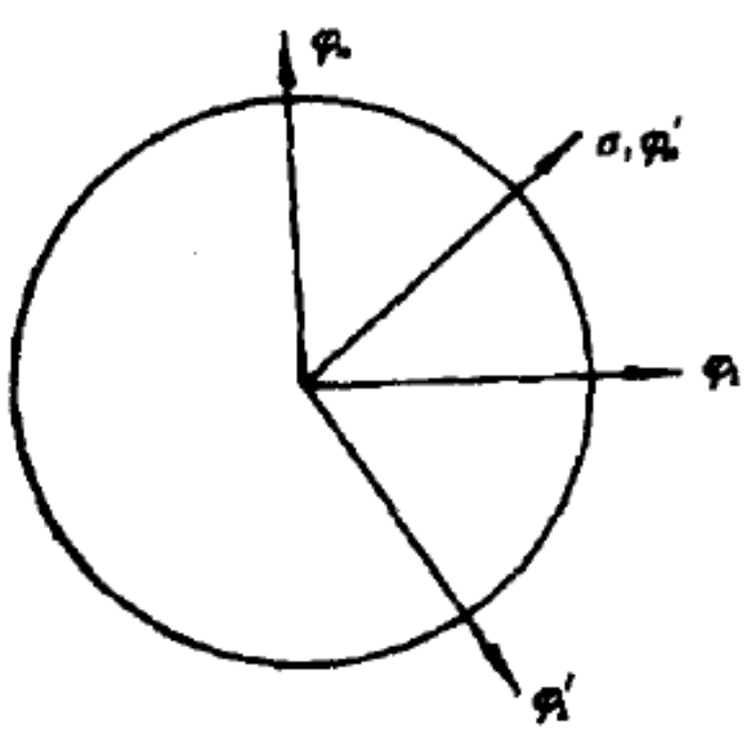
其中 α_j 为群参量，L_j 为生成元(厄米化).

设(2.3.25)的真空态位于

$$\varphi_0 = \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{pmatrix} \text{——} n \text{ 维场空间矢量.} \tag{2.3.28}$$

它位于 n 维场空间内半径为 $\sigma = \sqrt{-\mu^2/\lambda}$ 的 $(n-1)$ 维超球面上，它当然是场空间内 SO_n 对称性自发破缺的.

适当选取场空间的基矢 $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)\}$ 以使某个真空矢量 σ 位于 $\varphi_n(x)$ 轴上



即
$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \sigma \end{pmatrix}.$$

SO_n 可分为二个子集，即

① 保持真空不变的 SO_n 变换：

$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_j L_j}$ $\left[j = 1,2,\cdots,M = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)\right]$.

(对 j 不取和!)

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_j L_j}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \sigma \end{pmatrix} \text{或} L_j \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \sigma \end{pmatrix} = 0. \tag{2.3.29}$$

即它们将保持真空的 SO_n 对称性或保持 σ 的方向不变.

M 个对称生成元 l_j 构成一个子代数,每个 l_j 可表为 $n \times n$ 矩阵.

② 破缺真空的 SO_n 变换:

$$e^{-ia_jk_j}, j = 1,2,\cdots,N - M = n - 1.$$

(对 j 不取和)

$$e^{-ia_jk_j}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ \sigma\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ \sigma\end{pmatrix} \text{或 } k_j\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \vdots\\ \sigma\end{pmatrix} \equiv k_j\sigma \neq 0. \tag{2.3.30}$$

不难看出:$(\sigma^\dagger, k_j\sigma) = 0, \langle (k_i\sigma)^\dagger, (k_j\sigma)\rangle = \delta_{ij}\sigma^2$. (2.3.30a)

即它们将破缺真空的 SO_n 对称性或使得 σ 的方向发生变化,即真空变为另一个真空.

$n - 1 = N - M$ 个破缺生成元 k_j 不构成子代数,仅构成子集,每个 k_j 也可表为 $n \times n$ 矩阵.

Goldstone 定理:

与 $(N - M)$ 个破缺生成元相对应,存在着 $(N - M)$ 个质量为 0 的标量粒子.

此定理将在下面“场的参数化”中证明.

Higgs 场的参数化:为了引入物理的 Higgs 场,我们引入实参数场

$\xi^j(x)(j = 1,2,\cdots,(N - M) = n - 1)$,

$\eta(x)$.

作场量变换

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{n-1}, \varphi_n) \longrightarrow (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-1}, \eta).$$

适当选择 $\xi^j(x)$ 和 $\eta(x)$,总可以将 $\varphi(x)$ 表为

$$\varphi(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi^j(x)k^j/\sigma}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \sigma + \eta(x) \end{pmatrix}(\text{对 } j \text{ 取和}) \qquad (2.3.31)$$

式中 k^j 是 SO_n 中破缺真空的生成元.

我们看,n 个实方程 n 个未知实函数,一定有解.

上述步骤即场量的参数化.

由此可知

$$\varphi^+(x) = (0, \cdots\cdots \sigma + \eta)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\xi^j(x)k^j}{\sigma}},$$

故 $\varphi^+(x)\varphi(x) = (\sigma + \eta)^2$.

$$\partial_\mu\varphi(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi^j(x)k^j/\sigma}\mathrm{i}\partial_\mu\xi^j(x)\frac{k^j}{\sigma}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \sigma + \eta \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi^j(x)k^j/\sigma}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \partial_\mu\eta(x) \end{pmatrix}.$$

$$\partial_\mu\varphi^+(x) = (0\cdots, \sigma + \eta)(-\mathrm{i}\partial_\mu\xi^j(x)k^j/\sigma \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi^j(x)k^j/\sigma} + (\cdots 0, \partial_\mu\eta(x))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi^j(x)k^j/\sigma}.$$

$$\vdots$$

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\eta(x)\partial_\mu\eta(x) - \frac{1}{2}\partial_\mu\xi^j(x)\partial_\mu\xi^j(x) + \mu^2\eta^2(x) - \frac{\lambda}{4}\eta^4 + (\text{含微商耦合的高阶项}).$$

(2.3.32)

式中考虑到了(2.3.30).

Higgs 场的参数化场的性质:

(1) 对于 $\varphi(x)$ 位于 $\varphi_0(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \sigma \end{pmatrix}$ 处的真空处,相应的($\xi^j(x)$, $\eta(x)$) 的真空位于零值处,这种真空是 SO_n 规范对称的.

这是由于

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \sigma \end{pmatrix} = e^{i\xi^j(x)k^j/\sigma} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \sigma + \eta \end{pmatrix}.$$

式中 k^j 是破缺生成元，除非 $\xi^j(x) = 0$，上式不能相同. 但 $\xi^j(x) = 0$ 必有 $\eta(x) = 0$.

(2)$\mathscr{L}_\varphi$ 的 SO_n 规范对称性是破缺的.

(3)$\eta(x)$ 场的质量为 $\sqrt{-2\mu^2}$，是实的，而 $\xi^j(x)$ 场的质量为 0，它们总共有 $n-1 = N-M$ 个，这正是 Goldstone 定理中的零质量 Goldstone 粒子.

2.3.3. Higgs 机制

迄今为止，我们碰到两个困难：

(1) 由于局部规范不变性要求拉氏量中不可能存在规范场 A^j_μ 的二次项，故所有规范粒子都无静质量或所有规范相互作用都是长程力，这与事实不符.

(2)Higgs 场参数化后可以引入物理的 Higgs 场并破缺规范对称性，但却要引入 $(N-M)$ 个破缺生成元的无质量 Goldstone 标量粒子，这也与事实不符.

如何从理论上赋予某些规范粒子以质量，同时消除全部无质量的 Goldstone 粒子(无质量标量粒子)?结合局部规范不变性和对称性自发破缺就可达到上述目的.

设有 n 个实分量的 Higgs 场：

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}.$$

$$\mathscr{L}_\varphi = -\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi^+(x)\partial_\mu\varphi(x) - U(\varphi). \tag{2.3.33}$$

$$U(\varphi) = \frac{1}{2}\mu^2\varphi^+\varphi + \frac{\lambda}{4}(\varphi^+\varphi)^2, \lambda > 0, \mu^2 < 0.$$

要求它在 N 维局部 SO_n 规范变换：

$$G(\alpha) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha^j(x)L^j}, j = 1,2,\cdots N \tag{2.3.34}$$

下形式不变，应引入规范场 $A^j_\mu(x)$，以使 $\mathscr{L}$ 化为：

$$\mathscr{L}_{\varphi,A} = -\frac{1}{2}\varphi^+(x)[\overleftarrow{\partial}_\mu + \mathrm{i}gA^j_\mu(x)L^j][\overrightarrow{\partial}_\mu - \mathrm{i}gA^k_\mu(x)L^k]\varphi(x)$$

$$-U(\varphi) - \frac{1}{4}F^j_{\mu\nu}F^j_{\mu\nu}. \tag{2.3.35}$$

注意，上式中的规范粒子无质量，Higgs 粒子质量为虚，为解决这一困难，我们首先把 Higgs 场参数化：

$$\varphi(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi^j(x)k^j}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ \sigma+\eta(x)\end{pmatrix} \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi^j(x)k^j}(\sigma+\eta(x)). \tag{2.3.36}$$

其次令参数化的 Higgs 场与规范场作一特殊的局部么正规范变换.

$$\varphi(x) \to \varphi'(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi^j(x)k^j}\varphi(x) = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ \sigma+\eta(x)\end{pmatrix} \equiv \sigma+\eta(x). \tag{2.3.37}$$

可见么正规范变换的结果是使新的 $\varphi'(x)$ 场与真空矢量 σ 平行，仅有纵场 $\eta(x)$ 而无横场 $\xi^j(x)$，或说横场被规范掉了.

$$A^j_\mu L^j \longrightarrow A'^j_\mu L^j = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi^j(x)k^j}A^k_\mu L^k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi^i(x)k^i}$$

$$+\frac{1}{\mathrm{i}g}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi^j(x)k^j}\partial_\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi^i(x)k^i}. \tag{2.3.38}$$

注意到

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha^l l^l}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ \sigma+\eta(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ \sigma+\eta(x)\end{pmatrix} \text{或 } l^l\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ \sigma+\eta\end{pmatrix} = 0,\text{(不对 } l \text{ 取和)}.$$

$$e^{-i\alpha^j k^j}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ \sigma+\eta(x)\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ \sigma+\eta(x)\end{pmatrix}\text{或}\,k^j\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ \sigma+\eta\end{pmatrix}\neq 0,\text{(不对}\,j\,\text{取}$$

和).

$$\left\{\begin{aligned}&l=1,2,\cdots\frac{1}{2}(n-1)(n-2)\text{共}M\text{个},\\ &j=1,\cdots\cdots(n-1),\text{共}N-M\text{个}.\end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\varphi,A}=&-\frac{1}{2}(\sigma+\eta(x))^{\dagger}(\overleftarrow{\partial}_\mu+\mathrm{i}gA'^{j}_{\mu}(x)k^j)\\ &(\overrightarrow{\partial}_\mu-\mathrm{i}gA'^{j}_{\mu}(x)k^j)\times(\sigma+\eta(x))-U(\sigma+\eta(x))-\\ &\frac{1}{4}F'^{j}_{\mu\omega}F'^{j}_{\mu\omega}\\ =&-\frac{1}{2}\partial_\mu\eta^{\dagger}\partial_\mu\eta+\mu^2\eta\eta-\frac{1}{4}F'^{j}_{\mu\omega}F'^{j}_{\mu\omega}\\ &-\frac{1}{2}g^2(k^i\sigma,k^j\sigma)A'^{i}_{\mu}A'^{j}_{\mu}-\frac{1}{2}g^2(k^i\eta,k^j(\eta+2\sigma))A'^{i}_{\mu}A'^{j}_{\mu}\\ &+\mathrm{i}gA'^{j}_{\mu}(\sigma^{\dagger}+\eta^{\dagger})k^j\partial_\mu\eta-\mathrm{i}gA'^{j}_{\mu}\partial_\mu\eta^{\dagger}k^j(\sigma+\eta)+\cdots.\end{aligned}\tag{2.3.39}$$

式中,规范粒子的质量矩阵为

$$M^{ij}\equiv\sqrt{g^2(k^i\sigma,k^j\sigma)}=g\sigma\delta^{ij}.$$

这表示规范粒子的质量来自真空自发破缺.

又 η 粒子的质量 M 为

$$\left.\frac{\partial^2U}{\partial\eta\partial\eta}\right|_{\eta=0}=\left.\frac{\partial^2U}{\partial\eta\partial\eta}\right|_{\varphi_0=\sigma}=M^2=-\mu^2>0.$$

$$U(\sigma+\eta)\equiv\frac{\mu^2}{2}(\sigma+\eta)^{+}(\sigma+\eta)+\frac{\lambda}{4}(\sigma+\eta)^4.$$

可见,在这个拉氏量中

(1)$\eta(x)$ 场获得了质量$\sqrt{-2\mu^2}$.

(2) 与破缺生成元 k^j 相关的$(N-M)$ 个规范粒子获得了质量,而$(N-M)$ 个 Goldstone 粒子消失了,习惯上,有时说$(N-$

M) 个规范粒子吃掉了($N-M$) 个 Goldstone 粒子而具有了质量.

(3) 与对称生成元 l' 相对应的 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 个规范粒子未获得质量.

总之,通过 Higgs 机制(即通过 $\varphi(x)$ 场的参数化和选择么正规范)可做到使某些规范粒子获得质量,某些保持无质量,并消除全部 Goldstone 粒子. 这就为在粒子物理学中建立规范场论扫清了道路.

2.4.4. 规范相互作用举例

从规范场观点看来,目前粒子物理学中的基本相互作用都可看作规范相互作用,目前认为物质世界由下述基本粒子组成,即费米子(及其反粒子):

e	ν_e	u	d	—— 第一代
μ	ν_μ	c	s	—— 第二代
τ	ν_τ	t	b	—— 第三代

规范粒子:γ,$W^{\pm}$,Z^0,g;

Higgs 粒子:H.

应注意:

① 基本费米子族中仅中微子 ν 是手征态(左手).

② 夸克(quark) 粒子共有 6 种不同的味(flavour),每种味有 3 种不同的色(color),故夸克可用 q_r^i 表示,其中 $r=1,2,\cdots,6$ 表示味,$i=1,2,3$ 表示色.

③γ 是与 $U(1)$ 群对应的矢量规范场或光子 - 电磁作用,$W^{\pm}$,Z^0 是与 SU_2 群对应的矢量规范场或弱中间玻色子 - 弱相互作用,$g^{\alpha}(\alpha=1,2,\cdots 8)$ 是与 SU_3 群对应的矢量规范场或胶子 - 强相互作用.

1. 轻子弱电统一理论(Weinberg-Salam 理论)

自由轻子 Lagrange 量为

$$\mathscr{L}_l = -\hbar c\,\bar{L}\gamma_\mu\partial_\mu L - \hbar c\,\bar{l}_R\gamma_\mu\partial_\mu l_R.\text{（无轻子质量项）} \tag{2.3.40}$$

其中

$$L \equiv \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix},\quad l_R \text{分别是} SU_2 \text{的二重态和单态.}$$

$$\bar{L} \equiv (\bar{\nu}_L, \bar{l}_L),\quad \bar{l}_R \equiv \psi^+_{l_R}\gamma_4.$$

$$\bar{\nu}_L \equiv \psi^+_{\nu_L}\gamma_4,\quad \bar{l}_L \equiv \psi^+_{l_L}\gamma_4.$$

上述 Lagrange 量在整体 SU_2 规范变换

$$L \longrightarrow L' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_i\tau^i/2}L,\quad \tau^i(i=1,2,3)\text{即 Pauli 矩阵，它们是}SU_2\text{或}R_3\text{的生成元.}$$

$$l_R \longrightarrow l'_R = l_R$$

下是不变的，也是在整体 $U(1)$ 规范变换

$$L \longrightarrow L' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}L$$

$$l_R \longrightarrow l'_R = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}l_R$$

下不变的.

因而 Lagrange 量在 $SU_2 \times U(1)$ 整体规范变换下是不变的.

由于 $U(1)$ 的生成元代表荷(Charge)，此荷显然不能是电荷，这是因为 ν_L 与 l_L 的电荷不同，可是我们发现不同轻子可以有一个共同的弱超荷 Y，并存在关系

$$\frac{Y}{2} = Q - I_3\left(\text{或}\frac{Y}{2} = Q - I_3 - \frac{c}{2}\right) \sim \text{盖尔曼-西岛关系.}$$

其中 I_3 系 SU_2 表象空间表示对象的一个量子数，叫同位旋第三分量. 所以此处 $U(1)$ 的生成元应是超荷 Y—— 弱超荷.

上述关系中，我们规定

$$I_3\begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \\ & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix},\quad I_3 \text{乃同位旋第三分量.}$$

故　$I_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

$$Q\begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \\ & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix}, \text{故 } Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

故　$\frac{Y}{2}\begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix}$.

$$Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

故最后的整体规范群 $G = SU_2 \times U(1)$ 为

$$G(\alpha) = e^{[-i\alpha_i\tau^i/2 - i\alpha Y/2]}. \tag{2.3.41}$$

局部规范变换不变性要求

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{l,g} &= \hbar c\,\bar{L}(\gamma_\mu\partial_\mu - ig\frac{\tau^i}{2}\gamma_\mu A^i_\mu - ig'\gamma_\mu B_\mu)L - \\ &\quad - \hbar c\,\bar{l}_R(\gamma_\mu\partial_\mu - ig'\gamma_\mu B_\mu)l_R \\ &= i\bar{L}\gamma_\mu D_\mu L + i\bar{l}_R\gamma_\mu D'_\mu l_R. \end{aligned} \tag{2.3.42}$$

其中　$D_\mu \equiv \partial_\mu - ig\frac{\tau^i}{2}\cdot A^i_\mu - ig'B_\mu$,

$D'_\mu \equiv \partial_\mu - ig'B_\mu$.

$SU_2 \times U(1)$ 是一个直积群，它有二个不同的耦合常数 g、g'，它们由 Weinberg θ_W 相关联，即

$$\tan\theta_W = g'/g, e = g\sin\theta_W = g'\cos\theta_W = gg'/(g^2 + g'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

$A^i_\mu(i = 1,2,3)$ 和 B_μ 分别是 SU_2 和 $U(1)$ 的规范场，它们都是实量场，不能描述荷电规范场，实际观测到的是上述 4 类规范场的某种混合，即

$$A_\mu = B_\mu\cos\theta_W + A^3_\mu\sin\theta_W,$$

$$W_\mu^{\pm} = \sqrt{2}\,(A_\mu^1 \mp \mathrm{i}A_\mu^2), \tag{2.3.43}$$
$$Z_\mu = B_\mu \sin\theta_W - A_\mu^3 \cos\theta_W.$$

现在有两个问题需要解决,即

① 使 l 轻子具有质量;

② 使3个弱中间玻色子具有质量以符合所观测到的弱作用的短程性.

在①中,我们引入二分量Higgs场 φ 与费米场的汤川耦合,即

$$\mathscr{L}_{l,\varphi} = -G_l(\bar{L}\varphi l_R + \bar{l}_R\bar{\varphi}L)$$
$$= -G_l[(\bar{\nu}_L, \bar{l}_L)\begin{pmatrix}\varphi^+\\ \varphi^0\end{pmatrix} l_R + \bar{l}_R(\bar{\varphi}^+\ \bar{\varphi}^0)\begin{pmatrix}\nu_L\\ l_L\end{pmatrix}]$$
$$= -G_l[\bar{\nu}_L\varphi^+ l_R + \bar{l}_L\varphi^0 l_R + \bar{l}_R\bar{\varphi}^+\nu_L + \bar{l}_R\bar{\varphi}^0 l_L]. \tag{2.3.44}$$

式中 φ^+,φ^0 分别是带正电和不带电的复标量场.

在参数化和么正变换后得

$$\mathscr{L}_{l,\varphi} = -G_l[(\bar{\nu}_L, \bar{l}_L)\begin{pmatrix}0\\ \sigma+\eta\end{pmatrix} l_R + \bar{l}_R(0, \sigma+\eta)\begin{pmatrix}\nu_L\\ l_L\end{pmatrix}]$$
$$= -G_l(\sigma+\eta)(\bar{l}_L l_R + \bar{l}_R l_L) \tag{2.3.45}$$
$$= -G_l(\sigma+\eta)[\frac{1}{2}\bar{l}(1-\gamma_5)\,\frac{1}{2}(1-\gamma_5)l +$$
$$+ (\frac{1}{2}\bar{l}(1+\gamma_5)\,\frac{1}{2}(1+\gamma_5)l]$$
$$= -G_l(\sigma+\eta)\bar{l}l.$$

推导中,我们用上了关系 $\tilde{l}_L = [\frac{1}{2}(1+\gamma_5)l]^+\gamma_4 = \frac{1}{2}l^+(1+\gamma_5)\gamma_4 = \frac{1}{2}\bar{l}(1-\gamma_5)$,

故轻子质量为 $m_l = G_l \cdot \sigma$ 或 $G_l = \dfrac{m_l}{\sigma}$.

可见轻子质量来自真空自发破缺.

由理论分析可得弱耦合常数 $G_F \sim \dfrac{1}{\sigma^2}$,这是由于4费米子顶角与两个轻子规范顶角等效,在低能时有:

$G_F \infty m_{\bar{W}}^{-2} g^2$，和 $m_W \infty g\sigma$，故 $G_F \infty \dfrac{1}{\sigma^2}$，所以弱耦合常数由真空自发破缺决定，注意到

$\dfrac{g^2}{\hbar c}, \dfrac{e^2}{\hbar c}$ 无量纲，$\left[\dfrac{G_{\text{Newton}}}{\hbar c}\right] = M^{-2}, \left[\dfrac{G_F}{\hbar c}\right] = L^2$，

在 $\hbar = c = 1$ 单位制中 $\left[\dfrac{G_{\text{Newton}}}{\hbar c}\right] = \left[\dfrac{G_F}{\hbar c}\right] = M^{-2}$，实验发现

$$G_{\text{Newton}} \sim (10^{19} m_N)^{-2}, G_F \sim (300 m_N)^{-2}.$$

这一类似性导致徐一鹏(A. Zee) 于 1979 年提出诱导重力论. 〔*Phys. Rev. Letters* 42(1979)417. Broken Symmety theory of gravity〕

设 $S = \int \mathrm{d}^4 x \cdot \sqrt{-g}\left(\dfrac{1}{2}\varepsilon\varphi^2 R + \dfrac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - U(\varphi)\right)$，

φ 为 Higgs 场. (2.3.46)

若 $U(\varphi)$ 在 $\varphi = \sigma$ 处取极小，可得

$$G_{\text{Newton}} = \frac{1}{16\pi}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}\varepsilon\sigma^2}\right), \in \leqslant 1, \sigma \sim m_p = 10^{19} m_N.$$

式中 $U(\varphi) = \dfrac{1}{8}\lambda(\varphi^2 - \sigma^2)^2$.

可见牛顿重力常数毋需预先给定而是由真空自发破缺所诱导出来的.

在 ② 中，我们应有 3 个破缺生成元，故应有 4 分量 Higgs 场，$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix}$，其中 φ^+、φ^0 均为复场.

注意到 $\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

应有 $\tau_1\begin{pmatrix}0\\ \sigma\end{pmatrix}\neq 0,\tau_2\begin{pmatrix}0\\ \sigma\end{pmatrix}\neq 0,\tau_3\begin{pmatrix}0\\ \sigma\end{pmatrix}\neq 0$，可见$\begin{pmatrix}0\\ \sigma\end{pmatrix}$对于 SU_2 是破缺的.

$$Q\begin{pmatrix}0\\ \sigma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \sigma\end{pmatrix}=0,Q\equiv\frac{\tau_3+Y}{2}=\frac{Y}{2}+I_3,$$

可见$\begin{pmatrix}0\\ \sigma\end{pmatrix}$对 $U(1)$ 是不破缺的，其中$\begin{pmatrix}0\\ \sigma\end{pmatrix}$是 $\varphi=\begin{pmatrix}\varphi^+\\ \varphi^0\end{pmatrix}$的真空态.

故 Higgs 场把 $SU_2\times U(1)$ 破缺到 $U(1)$，后者的生成元是电荷而非弱超荷.

经过参数化和么正规范变换后，可得

$$\mathscr{L}_{\varphi,g}=\frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial_\mu\eta+\mu^2\eta^2-\lambda\sigma\eta^3-\frac{\lambda}{4}\eta^4-\frac{g^2}{4}(\sigma+\eta)^2W_\mu^+W_\mu^-$$
$$-\frac{g^2+g'^2}{8}(\sigma+\eta)^2Z_\mu Z_\mu \qquad (2.3.47)$$

Higgs 粒子及三个规范粒子的质量分别为

$$m_\eta=\sqrt{-2\mu^2},m_W=\frac{1}{2}g\sigma,m_Z=\frac{1}{2}\sqrt{g^2+g'^2}\cdot\sigma.$$

1983 年相继在实验室中发现了 $W^\pm$ 和 Z^0 的存在且测得：

$M_W\sim 76\text{GeV},M_Z\sim 85\text{GeV}$.

最后的总的 Lagrange 量为

$$L=\mathscr{L}_{l,g}+\mathscr{L}_{l,\Phi}+\mathscr{L}_{\Phi,g}+\mathscr{L}_g. \qquad (2.3.48)$$

式中 $\mathscr{L}_g=-\frac{1}{4}F^i_{\mu\omega}F^i_{\mu\omega}-\frac{1}{4}B_{\mu\omega}B_{\mu\omega}$，$F^i_{\mu\omega}$ 和 $B_{\mu\omega}$ 分别为 A^i_μ 和 B_μ 的规范场强.

2. 强作用

强作用的成功理论是量子色动力学(Q.C.D)，它认为 SU_3 是强作用的对称群而夸克的三色是 SU_3 群的基础表示，自由夸克场的拉氏量为：

$$\mathscr{L}_q=-\hbar c\,\bar{q}(\gamma_\mu\partial_\mu+m)q+H.C$$
$$=-\hbar c\,\bar{q}^i_r(\gamma_\mu\partial_\mu\delta^{ij}_{rs}+M\delta^{ij}_{rs})q^j_s+H.C. \qquad (2.3.49)$$

式中 i、j 是色指标，r、s 是味指标，M 是夸克质量.

上述 Lagrange 量在整体 SU_3 色群变换下是不变的，若要求 Lagrange 量在局部 SU_3 群变换下仍是不变的，即把整体 SU_3 群改为局部 SU_3 群.

$G = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha^j(x)\frac{\lambda^j}{2}}, j = 1,2,\cdots 8, 3\times 3$ 矩阵 λ^j 是 $SU_n(n=3)$ 群的 $(n^2-1)=8$ 个生成元!

应引入 8 个规范场 A_μ^j 和规范协变微分

$$D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i}g_0 A_\mu.$$

$$A_\mu \equiv \frac{1}{2}A_\mu^j\lambda^j, \text{其中 } \alpha \text{ 系色指标.}$$

八个胶子场可看作三个色的八种不同的混合，因而与 Q.E.D 不同，在 Q.C.D 中传递色荷相互作用的中介场也是带有色荷的! 新的 Lagrange 量为

$$\mathscr{L}_q = -\hbar c\bar{q}(\gamma_\mu D_\mu + M)q. \tag{2.3.50}$$

总的经典 Lagrange 量为

$$\mathscr{L}_{q,A_\mu^i} = -\hbar c\,\bar{q}_r^i\left[\gamma_\mu\partial_\mu\delta_{rs}^{ij} + \mathrm{i}g_0\frac{\lambda^k\delta_{rs}^{ij}}{2}\gamma_\mu A_\mu^k + M\delta_{rs}^{ij}\right]q_s^j - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^iF_{\mu\nu}^i. \tag{2.3.51}$$

其中 $F_{\mu\nu}^i \equiv \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + gf^{ijk}A_\mu^jA_\mu^k$,

$$\left[\frac{\lambda^i}{2},\frac{\lambda^j}{2}\right] = \mathrm{i}f^{ijk}\frac{\lambda^k}{2}. \tag{2.3.52}$$

λ^i 是 8 个 3×3 矩阵叫 Gellman 矩阵，它们显然是 Pauli 矩阵的推广.

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \lambda^2 = \begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}&0\\\mathrm{i}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \lambda^3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\lambda^4 = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \lambda^5 = \begin{pmatrix}0&0&-\mathrm{i}\\0&0&0\\\mathrm{i}&0&0\end{pmatrix}, \lambda^6 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \lambda^8 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}. \qquad (2.3.53)$$

按色禁闭假设，在自然界色单态是不能出现的，一切可观测到的态都是无色态，重子是三个夸克组成的无色态，介子是一对正反夸克组成的无色态 …… 等.

3. 大统一理论(GUT)

一个最自然的强 - 弱 - 电磁的统一理论是把直积群 $SU_3 \times SU_2 \times U_1$ 作为规范群的理论，此理论当今已被一系列实验所证实，这就是 粒子物理学中有名的标准模型. 然而在此模型中存在三 个不同的耦合常数. 人们希望真正的大统一是某个单群的规范理论，它只有一个耦合常数，但此一希望仅在发现耦合常数 g 随动量 p 变化后才有实现的可能，由重整化群方程可推得耦合常数 g 与动量 p 的关系一般为：

$$g^2(p^2) = \frac{g^2(p_0^2)}{1 + \frac{11C_2(G) - 4T(R)N_f}{48\pi^2} g^2(p_0^2) \ln \frac{p^2}{p_0^2}}. \qquad (2.3.54)$$

$N_f \sim$ 夸克或轻子的味数.

其中 $\sum_{\alpha,\beta} f^{\alpha\beta\gamma} f^{\alpha\beta\delta} = C_2(G)\delta_{\gamma\delta}$，$T_r(\frac{\lambda^\alpha}{2} \frac{\lambda^\beta}{2}) = T(R)\delta_{\alpha\beta}$，

$C_2(R) = \frac{rT(R)}{d(R)}$，$r$ 是群的维数，$d(R)$ 是群的表示维数.

对于 Q. E. D，

$$G = U(1), C_2(G) = 0, T(R) = 1, (\frac{\lambda}{2} = 1), N_f = 1.$$

$$g^2(p^2)=\frac{g^2(p_0^2)}{1-\frac{1}{12\pi^2}g^2(p_0^2)\ln\frac{p^2}{p_0^2}}. \tag{2.3.55}$$

$\lim_{p^2\to 0} g^2(p^2)=0$—— 红外自由，或电磁耦合常数随动量的增加而增大(当 $p^2<p_0^2$).

对于 Q.C.D，

$$G=SU_3, C_2(G)=3, T(R)=1/2$$

(任一 Gellman 矩阵的平方之迹为 2)

$$g^2(p^2)=\frac{g^2(p_0^2)}{1+\frac{33-2N_f}{48\pi^2}g^2(p_0^2)\ln\frac{p^2}{p_0^2}}. \tag{2.3.56}$$

只要 $N_f\leqslant 16$

$\lim_{p^2\to\infty} g^2(p^2)=0$ —— 紫外自由，或强耦合常数随动量的增加而减小 —— 渐近自由.

对于弱作用，

$$G=SU_2, C_2(G)=2, T(R)=1/2.$$

$$g^2(p^2)=\frac{g^2(p_0^2)}{1+\frac{22-2N_f}{48\pi^2}g^2(p_0^2)\ln\frac{p^2}{p_0^2}}. \tag{2.3.57}$$

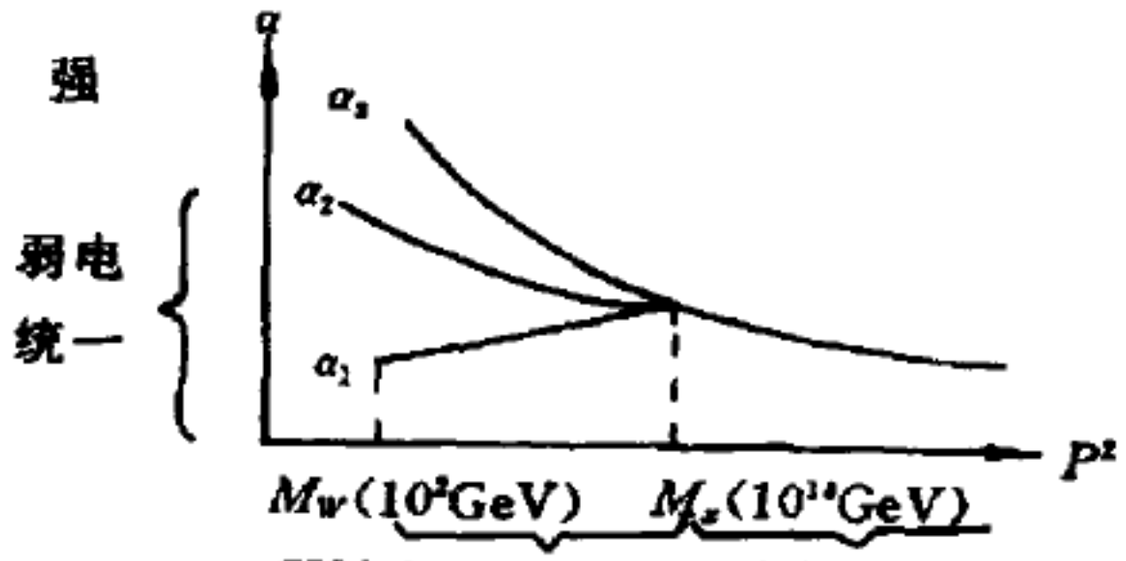
只要 $N_f<11$，

弱耦合常数随动量的增加而减小，—— 渐近自由.

$$\alpha\equiv\frac{g}{4\pi}\begin{cases}\alpha_3\equiv\dfrac{g_3}{4\pi},\\ \alpha_2\equiv\dfrac{g_2}{4\pi}=\dfrac{\alpha_e}{\sin^2\theta_W},\\ \alpha_1\equiv\dfrac{g_1}{4\pi}=\dfrac{5}{3}\dfrac{\alpha_e}{\cos^2\theta_W},\ \alpha_e\equiv\dfrac{e^2}{4\pi}.\end{cases} \tag{2.3.58}$$

在 M_W 处：$\alpha_1=2\alpha_e, \alpha_2=5\alpha_e$.

弱电统一中的规范群是二个单群的直积，它需要二个耦合常数，这不是真正的统一，因此我们希望真正的大统一(GUT) 应能



找到一单群，它把$SU(3)$，$SU(2)$和$U(1)$作为三个子群包含在内，上述子群的秩共有$1+\sum_{n=2}^{3}(n-1)=4$，故此单群的秩应不少于4.

单群$SU(5)$的秩正好是4，故最简单的大统一规范群是$SU(5)$大统一理论(Georgi，Glashou 1974).

已知目前的基本粒子分为三个代，任取一个代

$$e,\nu_e,u,d.$$

考虑它们的色荷和涡度共有15个，即

$$d_L^1,d_L^2,d_L^3\ d_R^1,d_R^2,d_R^3,\text{或}\ d_L^{c^1},d_L^{c^2},d_L^{c^3},d_R^{c^1},d_R^{c^2},d_R^{c^3},$$

$$u_L^1,u_L^2,u_L^3\ u_R^1,u_R^2,u_R^3,\text{或}\ u_L^{c^1},u_L^{c^2},u_L^{c^3},u_R^{c^1},u_R^{c^2},u_R^{c^3},$$

$$e_L^-,e_R^-,\nu_{eL}. \qquad e_L^+,e_R^+,\nu_{eR}^c.$$

其中“c”表示荷共轭.这15个费米子应成为SU_5的表示对象.一般可选$SU(5)$的5重态和10重态作为表示对象.

$$5^*:\quad (\psi_{La})=\begin{pmatrix}d^{c^1}\\ d^{c^2}\\ d^{c^3}\\ e^-\\ -\nu_e\end{pmatrix}_L. \qquad 5:\quad (\psi_{Ra}^c)=\begin{pmatrix}d^1\\ d^2\\ d^3\\ e^+\\ -\bar{\nu}_e\end{pmatrix}_R.$$

10：

$$(\psi_L,a,b)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Bmatrix} 0 & u^{c,3} & -u^{c,2} & -u^1 & -d^1 \\ -u^{c,3} & 0 & u^{c,1} & -u^2 & -d^2 \\ u^{c,2} & -u^{c,1} & 0 & -u^3 & -d^3 \\ u^1 & u^2 & u^3 & 0 & -e^+ \\ d^1 & d^2 & d^3 & e^+ & 0 \end{Bmatrix}_L .$$

自由费米子拉氏量为

$$\mathscr{L}_f=-\hbar c\,\bar{\psi}^f_{R,a}\gamma_\mu\partial_\mu\psi^f_{R,a}-\hbar c\,\bar{\psi}_{L,a,b}\gamma_\mu\partial_\mu\psi_{L,b,a} \tag{2.3.59}$$

它显然是在整体 SU_5 变换下不变的，引入规范场 A^i_μ 及规范协变微分，即可使上述拉氏量在局部 SU_5 变换下不变，即

$$\mathscr{L}_f=-\hbar c\,\bar{\psi}^f_R,a(\gamma_\mu D_\mu\psi^f_R)_a-\hbar c\,\bar{\psi}_{Lab}(\gamma_\mu D_\mu\psi_L)_{ba}.$$

其中

$$\begin{aligned}(D_\mu\psi^f_R)_a&=[\partial_\mu\delta^a_b-\mathrm{i}g_5(A^i_\mu T^i)^a_b](\psi^f_R)_b\\&=[\partial_\mu\delta^a_b-\frac{\mathrm{i}g_5}{\sqrt{2}}(A_\mu)^a_b](\psi^f_R)_b.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(D_\mu\psi_L)_{ab}&=[\partial_\mu\psi_{Lab}-\mathrm{i}g_5(A^i_\mu T^i)_{ae}\psi_{Leb}-\mathrm{i}g_5(A^i_\mu T^i)_{be}\psi_{Lae}]\\&=\partial_\mu\psi_{Lab}-\frac{\mathrm{i}g_5}{\sqrt{2}}(A_\mu)^a_e\psi_{Leb}-\frac{\mathrm{i}g_5}{\sqrt{2}}(A_\mu)^b_e\psi^{ae}_L.\end{aligned}$$

$T^i(i=1,2,\cdots 24)$ 是 SU_5 的 24 个生成元，它们都是 5×5 矩阵.

A^i_μ 是相应的 24 个规范场.

$A_\mu(x)\equiv\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{24}A^i_\mu T^i$. 它是 5×5 矩阵，满足 $\sum_{a=1}^{5}A^a_a=0$，故独立分量仅 24 个，因此 24 个 A^a_b 与 A^i 是等价的.

当 $i=1,2,\cdots 8$，

$$T^i=\begin{pmatrix}\lambda^i/2 & \square\\ \square & \square\end{pmatrix},T^{22}=\begin{pmatrix}\square & \square\\ \square & \tau^1/2\end{pmatrix},T^{23}=\begin{pmatrix}\square & \square\\ \square & \tau^2/2\end{pmatrix}.$$

$$\frac{\tau^3}{2}=\frac{\sqrt{10}}{4}T_{24}-\frac{\sqrt{6}}{4}T_{15},\ -Y=\frac{\sqrt{6}}{4}T_{24}+\frac{5}{2\sqrt{10}}T_{15},$$

$$\text{式中 } Y=\sqrt{\frac{3}{5}}\begin{pmatrix}-1/3 & & & & & 0\\ & -1/3 & & & & \\ & & -1/3 & & & \\ & & & & 1/2 & \\ 0 & & & & & 1/2\end{pmatrix},$$

$$Q=\frac{\tau^3}{2}+Y=\begin{pmatrix}-1/3 & & & & & 0\\ & -1/3 & & & & \\ & & -1/3 & & & \\ & & & & 1 & \\ 0 & & & & & 0\end{pmatrix}.$$

上式表明夸克带有分数电荷.

故上述 12 个生成元即熟知的 SU_3,SU_2 和 $U_y(1)$ 的生成元,另外 12 个生成元是新的.

利用 T^i 的显示式,可得出

$$A=\begin{pmatrix}G^{1\,1}, & G^{1\,2}, & G^{1\,3} & \overline{X}_1 & \overline{Y}_1\\ G^{2\,1}, & G^{2\,2}, & G^{2\,3} & \overline{X}_2 & \overline{Y}_2\\ G^{3\,1}, & G^{3\,2}, & G^{3\,3} & \overline{X}_3 & \overline{Y}_3\\ X_1 & X_2 & X_3 & \dfrac{W^3}{\sqrt{2}}+\dfrac{3B}{\sqrt{30}} & W^+\\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & W^- & \dfrac{-W^3}{\sqrt{2}}+\dfrac{3B}{\sqrt{30}}\end{pmatrix}.$$

式中 $A^{ab}\equiv G^{ab}(a,b=1,2,3)$,对应于 SU_3 群的规范场—胶子,其生成元为 λ^i,共 8 个.

A^{ab} $(a,b=4,5)$,对应于 SU_2 群的规范场 $W^{\pm}$,W^3,其生成元为 $\tau^{\pm}$,τ^3,共 3 个.

B 对应于 $U_y(1)$ 群的规范场,其生成元为 Y,仅 1 个.

$$W^3 = -\frac{3}{2}\frac{A_{15}}{\sqrt{6}} + \frac{5}{2}\frac{A_{24}}{\sqrt{10}}, Z_\mu = -\frac{W^3\mu}{\sqrt{2}} + \frac{3B_\mu}{\sqrt{30}},$$

$$B = -\frac{\sqrt{15}}{2}\left(\frac{A_{15}}{\sqrt{6}} + \frac{A_{24}}{\sqrt{10}}\right).$$

$X^i, \overline{X}^i, Y^i, \overline{Y}^i (i = 1,2,3)$ 是 12 个新的规范场(均为复量).

由上述规范协变微分可得费米场与规范场的相互作用拉氏量.

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^i_{f,g} = {} & g_5 \sum_{i=1}^{8} [\bar{u}\gamma_\mu G^i_\mu \frac{\lambda^i}{2} u + \bar{d}\gamma_\mu G^i_\mu \frac{\lambda^i}{2} d] \\
& + g_5 \sum_{i=1}^{3} [(\bar{u}\,\bar{d})_L \gamma_\mu W^i_\mu \frac{\tau^i}{2}\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L + (\bar{\nu}_e\,\bar{e}^-)_L \gamma_\mu W^i \frac{\tau^i}{2}\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L] \\
& + \sqrt{\frac{3}{5}} g_5 [-\frac{1}{2}(\bar{\nu}_L \gamma_\mu B_\mu \nu_L - \bar{e}_L \gamma_\mu B_\mu e_L + \bar{u}_L \gamma_\mu B_\mu U_L \\
& - \bar{d}_L \gamma_\mu B_\mu d_L) + \frac{2}{3}\bar{u}\gamma_\mu B_\mu u - \frac{1}{3}\bar{d}\gamma_\mu B_\mu d - \bar{e}\gamma_\mu B_\mu e] \\
& + \frac{g_5}{\sqrt{2}} \{\overline{X}^\alpha_\mu [\bar{d}_{R\alpha}\gamma^\mu e^+_R + \bar{d}_{L\alpha}\gamma^\mu e^+_L + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\bar{u}^{C\gamma}_L \gamma^\mu u^\beta_L] \\
& + \overline{Y}^\alpha_\mu [-\bar{d}_{R\alpha}\gamma^\mu \nu^C_R - \bar{u}_{L\alpha}\gamma^\mu e^+_L + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\bar{u}^{C\gamma}_L \gamma^\mu d^\beta_L] + hc\}.
\end{aligned} \tag{2.3.60}$$

第一项:夸克与胶子的色 SU_3 相互作用.

第二项:夸克,轻子与 SU_2 规范场相互作用.

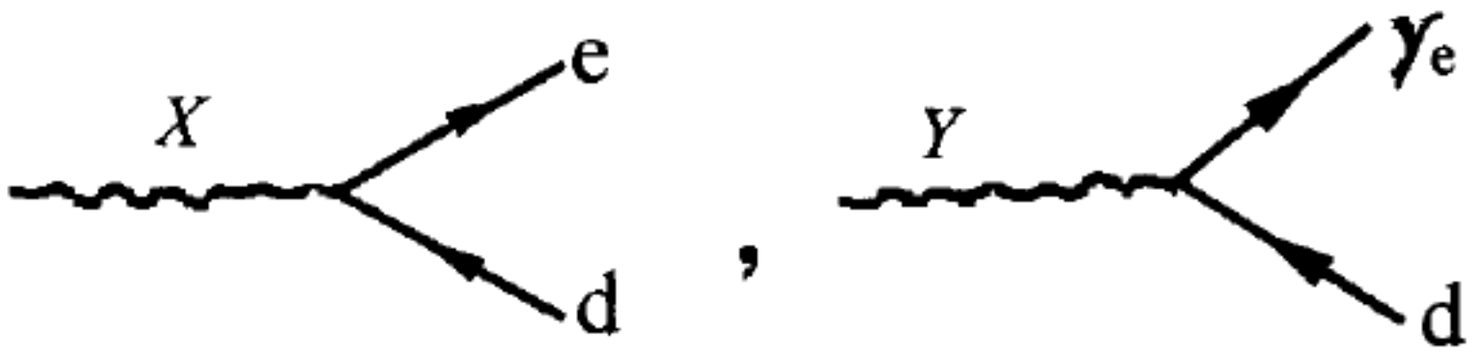
第三项:夸克,轻子与 $U_y(1)$ 规范场相互作用.

第四项:夸克,轻子与 X 规范场相互作用.

第五项:夸克,轻子与 Y 规范场相互作用.

例

夸克与 X,Y 规范场作用衰变为轻子 —— 重子数不守恒.



观测表明：质子寿命 $\tau_p > 10^{30}$ 年，这要求(因为 $\tau \infty \frac{1}{\omega}$，$\omega \infty M_{x,y}^{-2}) M_x, M_y \geqslant 10^{14}\mathrm{GeV}$.

故最后总的 Lagrange 量为 $\mathscr{L} = \mathscr{L}_f^0 + \mathscr{L}_g^0 + \mathscr{L}_{f,g}^i$.

上述 Lagrange 量中，不含费米子和规范粒子的质量项，应引入 Higgs 机制，方案为：

① 引入两个 Higgs 场

$\varphi_b^a (a,b = 1,2,\cdots 5)$，$\sum_{a=1}^{5} \varphi_a^a = 0$，共 24 个分量.

$H^a (a = 1,2,\cdots 5)$，共 5 个分量.

② 取如下的势函数

$$V(\varphi) = -\frac{\mu^2}{2} T_r(\varphi^2) + \frac{1}{4}\lambda_1 [T_r(\varphi^2)]^2 + \frac{1}{2}\lambda_2 T_r(\varphi^4),$$

$$V(H) = -\frac{\mu_0^2}{2} H^+ H + \frac{\lambda}{4}(H^+ H)^2$$

可得出：φ 场的真空态

$$\langle \varphi \rangle_0 = \begin{pmatrix} \sigma & & & & 0 \\ & \sigma & & & \\ & & \sigma & & \\ & & & -\frac{3}{2}\sigma & \\ 0 & & & & -\frac{3}{2}\sigma \end{pmatrix}, \sigma^2 = \frac{2\mu^2}{15\lambda_1 + 7\lambda_2}.$$

H 场的真空态为

$$\langle H \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \sigma_0^2 = \frac{2\mu_0^2}{\lambda}.$$

③ 引入 Higgs 场与 24 个规范场的规范相互作用

$$\mathscr{L}_{A,H,\varphi} = (D^{\mu}\varphi)^{+a}_{b}\cdot(D_{\mu}\varphi)^{b}_{a} + (D^{\mu}H)^{+}_{a}(D_{\mu}H)^{a} - V(\varphi) - V(H). \tag{2.3.61}$$

对 φ 场平移后的规范场 A^{b}_{a} 具有质量项，其质量为

$$M^{b}_{a} = \frac{g_5}{\sqrt{2}}|\sigma_a - \sigma_b|,(a,b = 1,2,\cdots 5)$$

此式当 $a,b = 1,2,3$ 或 $4,5$ 时为 0—— 胶子无质量，

当 a(或 b) $= 1,2,3$，且 b(或 a) $= 4,5$ 时不为 0，且等于

$M^{\alpha}_{r} = \frac{5}{2\sqrt{2}}g_5\sigma,\alpha = 1,2,3,r = 4,5$ 由 $M_x = M_y \simeq 10^{14}\text{GeV}$ 及 $g_5 \simeq 1$，得 $\sigma \simeq 10^{14}\text{GeV}$.

对 H 场平移后的质量项 $\frac{1}{4}g^{2}_{5}\sigma^{2}_{0}(A^{+}_{\mu})^{5}_{a}(A_{\mu})^{a}_{5}$.

当 $a = 1,2,3$， 为 Y 粒子

$a = 4$ 为 W 粒子

$a = 5$ 为 $Z_{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}W^{3}_{\mu} + \frac{3}{\sqrt{30}}B_{\mu}$.

$M_{y,w,z} = \frac{1}{2}g_5\sigma_0 \simeq 10^{2}\text{GeV}$，当 $g_5 \simeq 1$，得 $\sigma_0 \simeq 10^{2}\text{GeV}$，Y 粒子由 H 场的真空自发破缺获得 10^{2}GeV 的质量是对由 φ 场的真空自发破缺获得的 10^{14}GeV 的质量一个小修正，结果

$$M_z > M_x.$$

④ 引入费米子与 Higgs 场的汤川耦合

$$\mathscr{L}_{f,H} = \psi^{T}_{La}\psi^{ab}_{L}H^{\dagger}_{b} + \epsilon_{abcde}\psi^{T^{ab}}_{L}\psi^{cd}_{L}H^{e} + h.c.$$

对 Higgs 场 H 参数化并采用么正规范后得

$$\mathscr{L}_{f,h} = \frac{A}{2}(\sigma_0 + \eta)(-\bar{d}d - \bar{e}^{+}e^{+}) + \sqrt{2}\,B(\sigma_0 + \eta)(-\bar{u}u). \tag{2.3.62}$$

故 $M_d = M_e = A\sigma_0, M_u = Br_0$，$A$、$B$ 系两个待定常数.

估计　$M_q \simeq 1\text{GeV}$.

SU_5GUT 小结：

(1) 由于规范粒子所传递的相互作用的散射幅与其质量成反比而寿命与衰变几率成反比，故由 X,Y 规范粒子的质量可得质子的寿命

$$\tau_p \simeq 10^{31} \text{ 年}. .$$

这表示重子数不严格守恒，然而实验表明 $\tau_p > 10^{32}$ 年，这说明 SU_5 大统一理论遇到了严重的困难.

(2) 在能量标度为 10^{14}GeV 附近将发生 SU_5 对称性自发破缺，出现大统一相变.

(3) 由于重子数在 SU_5GUT 中不严格守恒及 C,CP 对称性破缺，可认为宇宙中重子、反重子的对称性破缺是在大统一自发破缺后才出现的.

第 3 章　场的量子化

§3.1　变换理论

在 Lorentz 协变经典场论中，我们看到，若按通常非相对论量子力学的精神，把场函数当作量子系统的态函数要存在一些困难.

首先，所有观测量都由场函数及其导数的某种组合来表示，而在量子力学中，观测量应是算符，因此场函数也应是算符才可. 可见，不能再把场函数当作态函数看待. 其次，把场函数当作态函数看待常常出现负几率困难.

上述考虑告诉我们，在 Lorentz 变换下，波函数只是一个作用在态函数上的算符. 如何来定义态函数？我们把态函数定义为一组可对易的完备算符集的公共本征函数，这样的本征函数又叫做一个量子态. 例如在 Dirac 自由场理论中；由 $H, P, -\Sigma P/|P|$ 所决定的公共本征态即态函数或量子态.

3.1.1. Dirac 符号

在量子力学中我们引入一个无限维的 Hilbert 空间中的矢量作为态矢并以 Dirac 符号：

$|\psi\rangle$—Ket 矢（选定一组基矢后，$|\psi\rangle$ 应有无穷多个分量）表示. 它的厄米共轭态矢叫 Bra 矢，表示为

$$\langle\psi| \equiv |\psi\rangle^{\dagger}. \tag{3.1.1}$$

任二态矢 $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ 可定义标积 —— 一个复数或叫 Bracket.

$$\langle\psi_2|\psi_1\rangle = \langle\psi_1|\psi_2\rangle^{*}. \tag{3.1.2}$$

显然 $\langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle^{*}$ = 实数. 我们进一步假定 $\langle\psi|\psi\rangle \geq 0$，它叫态

矢 $|\psi\rangle$ 的长度的平方. (3.1.3)

在 Hilbert 空间中，由于$\langle\psi_1|\psi_2\rangle$ 是收敛的，所以态矢的标量积和长度是有定义的.

任一算符 $\hat{\alpha}$ 可作用在 Ket 矢上得另一态矢

$$\hat{\alpha}|\psi\rangle = |\psi'\rangle. \tag{3.1.4}$$

也可作用在 Bra 矢上得另一态矢

$(\hat{\alpha}|\psi\rangle)^\dagger = |\psi\rangle^\dagger \hat{\alpha}^\dagger = \langle\psi|\hat{\alpha}^\dagger = \langle\psi'|$. 故按定义

$$\langle\psi|\alpha = (\alpha^\dagger |\psi\rangle)^\dagger. \tag{3.1.5}$$

若 $\hat{\alpha}|\psi\rangle = \alpha|\psi\rangle$，则$\langle\psi|\hat{\alpha}^+ = \langle\psi|\alpha^*$，对于 $\hat{\alpha}^+ = \hat{\alpha}$，有

$$\langle\psi|\hat{\alpha} = \langle\psi|\alpha,$$

及$\langle\psi_1||(\hat{\alpha}|\psi_2\rangle) = (\langle\psi_1|\hat{\alpha})|\psi_2\rangle$，和$\langle\psi_1|(\hat{\alpha}\hat{\beta}|\psi_2\rangle)$

$= (\langle\psi_1|\hat{\alpha}\hat{\beta}|\psi_2\rangle) = (\langle\psi_1|\hat{\alpha})(\hat{\beta}|\psi_2\rangle)$.

因此，$\langle\psi_1|\hat{\alpha}|\psi_2\rangle$ 是一个复数，这意味着$\langle\psi_1|\hat{\alpha}|\psi_2\rangle$

$= (\langle\psi_2|\hat{\alpha}|\psi_1\rangle)^*$.

$\langle\psi|\hat{\alpha}|\psi\rangle$ 是 $\hat{\alpha}$ 的平均值. (3.1.6)

现在证明 $|\psi_1\rangle\langle\psi_2|$ 是一个线性算符. (3.1.7)

右乘以 $|p\rangle$ 得到 $|\psi_1\rangle\langle\psi_2|p\rangle$.

可看做 $|\psi_1\rangle\langle\psi_2|$ 作用在态矢 $|p\rangle$ 上，把 $|p\rangle$ 变换成某个数$\langle\psi_2|p\rangle$

乘态矢 $|\psi_1\rangle$，$|p\rangle \xrightarrow{|\psi_1\rangle\langle\psi_2|} (\langle\psi_2|p\rangle|\psi_1\rangle$. 显然应有

$$|p_1\rangle + |p_2\rangle \xrightarrow{|\psi_1\rangle\langle\psi_2|} (\langle\psi_2|p_1\rangle + \langle\psi_2|p_2\rangle)|\psi_1\rangle.$$

故 $|\psi_1\rangle\langle\psi_2|$ 是一个线性算符.

左乘以$\langle p|$ 得 $\langle p|\psi_1\rangle\langle\psi_2|$.

可看做 $|\psi_1\rangle\langle\psi_2|$ 作用在态矢$\langle p|$ 上，把$\langle p|$ 变换成某个数$\langle p|\psi_1\rangle$

乘态矢$\langle\psi_2|$，$\langle p| \xrightarrow{|\psi_1\rangle\langle\psi_2|} \langle\psi_2|(\langle p|\psi_1\rangle)$.

显然这也是一个线性变换，故证明了 $|\psi_1\rangle\langle\psi_2|$ 不论对 Bra 矢或对 Ket 矢都是一个线性算符.

算符的本征态以 $|\alpha\rangle$ 表示，即

$$\hat{\alpha}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \tag{3.1.8}$$

或　$\langle\alpha|\hat{\alpha}^{+} = \langle\alpha|\alpha^{*}, \langle\alpha|\hat{\alpha} = \langle\alpha|\alpha.$

某个厄米算符的本征态和本征值满足：

① 厄米算符的本征值必为实数

因为　$\langle\psi|\hat{\alpha}|\psi\rangle^{*} = \alpha^{*}\langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{\alpha}|\psi\rangle = \alpha\langle\psi|\psi\rangle,$

故 $\alpha^{*} = \alpha.$

② 正交归一化条件

$\langle\alpha|\beta\rangle = \delta(\alpha - \beta),$

对于分立谱　$\delta(\alpha - \beta) = \delta_{\alpha\beta}.$ (3.1.9)

对于连续谱　$\delta(\alpha - \beta)$ 即 δ 函数.

证：设 $\hat{\alpha}|\alpha'\rangle = \alpha'|\alpha'\rangle.$

$\hat{\alpha}|\alpha''\rangle = \alpha''|\alpha''\rangle.$

第一式两边取厄米共轭得　$\langle\alpha'|\hat{\alpha} = \langle\alpha'|\alpha',$

右乘 $|\alpha''\rangle$ 得　$\langle\alpha'|\hat{\alpha}|\alpha''\rangle = \alpha'\langle\alpha'|\alpha''\rangle.$

第二式左乘以 $\langle\alpha'|$　得　$\langle\alpha'|\hat{\alpha}|\alpha''\rangle = \alpha''\langle\alpha'|\alpha''\rangle.$

二式相减得　$(\alpha' - \alpha'')\langle\alpha'|\alpha''\rangle = 0.$

若　$\alpha' \neq \alpha''$，必有　$\langle\alpha'|\alpha''\rangle = 0.$

连续谱的归一化条件之证明见 Dirac. Principles of Quantum Mechanics. § 16.

③ 完备性条件

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| = 1 \text{—— 分立谱} \tag{3.1.10}$$

$$\int|\alpha\rangle\langle\alpha|\mathrm{d}\alpha = 1 \text{—— 连续谱.} \tag{3.1.11}$$

这与任一态矢可按某一厄米算符的本征态矢 $|\alpha_i\rangle$ 展开是等价的.

(3.1.10) 式两边右乘(左乘) 以 $|\psi\rangle$($\langle\psi|$) 即得展开式

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{\infty}\langle\alpha_i|\psi\rangle|\alpha_i\rangle, \tag{3.1.12}$$

或　$\langle\psi| = \sum_{i=1}^{\infty}\langle\alpha_i|\langle\psi|\alpha_i\rangle.$

其中$\langle\alpha_i|\psi\rangle$即态矢$|\psi\rangle$在$\langle\alpha_i|$上的投影.

故在Hilbert空间选定一组基矢后,任一态矢即由它在此基上的投影惟一确定.

例 选基矢为$|x\rangle$,它是$\hat{x}$的本征态,本征值即x. 则$\langle x|\psi\rangle \equiv \psi(x)$即通常所谓$x$空间的波函数.

选基矢为$|p\rangle$,可把$|p\rangle$看做$\hat{p}$的本征态,本征值即p. 则$\langle p|\psi\rangle \equiv \psi(p)$即通常所谓$p$空间的波函数.

利用 $\int|p\rangle\langle p|\mathrm{d}p = 1$ 得

$$\langle x| = \int\langle x|p\rangle\langle p|\mathrm{d}p \quad \text{及富氏积分变换:}$$

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle = \int\langle x|p\rangle\langle p|\psi\rangle\mathrm{d}p = \int\langle x|p\rangle\psi(p)\mathrm{d}p.$$

积分号下的$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(\mathrm{i}p_\mu x_\mu/\hbar)$,即富氏变换系数. (见Dirac. Principles of Quantum Mechanics p. 94)

因为 $\langle x|p_\mu|p\rangle = p_\mu\langle x|p\rangle = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\langle x|p\rangle)$,解之即得.

3.1.2. 么正变换

若对Hilbert空间全部态矢进行变换 $U|\alpha\rangle = |\alpha'\rangle$,则所有算符$\alpha$经受一相似变换 $\hat{\alpha}' = U|\hat{\alpha}|U^{-1}$.

设U是么正变换,即$U^+ = U^{-1}$.

定理 由么正变换$|\rangle \to |\rangle' = U|\rangle$,$\hat{\alpha} \to \hat{\alpha}' = U\hat{\alpha}U^{-1}$相联系的二种量子系统的描述(表象)是等价的.

证明 应证① 任一算符的厄米性不变.

因为 $(\hat{\alpha}')^\dagger = (U\hat{\alpha}U^{-1})^\dagger = (U^{-1})^\dagger\,\hat{\alpha}^\dagger\,U^\dagger = U\hat{\alpha}U^{-1} = \hat{\alpha}'$.

② 任一算符的平均值不变. 因为$\langle|\hat{\alpha}'|\rangle = \langle|U^\dagger U\hat{\alpha}U^{-1}U|\rangle = = \langle|\hat{\alpha}|\rangle$. 特别是:算符的本征值不变,归一化条件不变.

③ 一切算符方程不变.

$\hat{\alpha}_1 \cdot \hat{\alpha}_2|\psi\rangle = |\varphi\rangle$,由$U\hat{\alpha}_1U^{-1}U\hat{\alpha}_2U^{-1}U|\psi\rangle = U|\varphi\rangle$得

$$\hat{\alpha}'_1 \cdot \hat{\alpha}'_2 |\psi'\rangle = |\varphi'\rangle.$$

类似有 $(\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2)|\psi\rangle = |\varphi\rangle.$

$$(\hat{\alpha}'_1 + \hat{\alpha}'_2)|\psi'\rangle = |\varphi'\rangle.$$

一般算符函数方程可看作上述情况的某种组合，即知形式不变. 特别是算符之间的对易关系$[\hat{q},\hat{p}] = \mathrm{i}\hbar, [\hat{q},\hat{q}] = [\hat{p},\hat{p}] = 0$应形式不变. 可见由么正变换联系的任何量子力学描述(表象) 都具有完全相同的物理内容，因而是等价的.

3. 1. 3. Schrödinger 绘景

运动方程是描述物理系统(量子力学中即量子系统) 随时间变化的规律. 在 Schrödinger 绘景中，算符与时间无关，系统随时间的变化完全由与时间相关的态矢来描述.

在时间过程 $t_0 \to t$ 中，态矢由 $|\psi(t_0)\rangle_S \to |\psi(t)\rangle_S$ 二者关系由时间演化算符 $T(t,t_0)$ 决定，即：

$$|\psi(t)\rangle_S = T(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle_S. \tag{3.1.14}$$

由在时间变化过程中几率守恒得：

$$\begin{aligned}\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle &= \langle\psi(t_0)|T^\dagger(t,t_0)T(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle \\ &= \langle\psi(t_0)|\psi(t_0)\rangle.\end{aligned}$$

故 $$T^\dagger(t,t_0)T(t,t_0) = 1. \tag{3.1.15}$$

即 T 应是么正算符.

取时间的无穷小增量为 δt.

$$\begin{aligned}t \to t + \delta t, |\psi(t+\delta t)\rangle &= |\psi(t)\rangle + \frac{\partial|\psi(t)\rangle}{\partial t}\delta t \\ &= (1 + \delta t \frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle.\end{aligned}$$

引入$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H$，其中 H 为系统能量算符，上式化为

$$|\psi(t+\delta t)\rangle = (1 - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}H\delta t)|\psi(t)\rangle$$

或 $$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle_S = H|\psi(t)\rangle_S. \tag{3.1.16}$$

左乘以$\langle x|$化为　$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=\hat{H}(x,t)\psi(x,t)$.

这就是有名的 Schrödinger 运动方程. 可普遍证明，只要线性叠加原理成立，量子力学中的运动方程就一定是这种形式(Dirac. 量子力学 §27). 此方程欲作为任何量子系统的动力学方程必须假定 H 是系统总能量或哈密顿量. 这一点是无法从逻辑上证明的，只能是一个假定，从而 Schrödinger 方程只能是一条物理定律仅能通过实验加以验证.

由于态矢 $|\psi(t)\rangle$ 随时间的变化完全由算符 $T(t,t_0)$ 决定，所以 Schrödinger 方程的另一等价表达形式即关于 T 的算符方程.

以 $|\psi(t)\rangle_{\mathrm{S}}=T(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle_{\mathrm{S}}$ 代入(2.1.16)即得算符方程：

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}T(t,t_0)=HT(t,t_0). \tag{3.1.17}$$

由初始条件 $T(t_0t_0)=1$ 得形式解

$$T(t,t_0)=\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H(t-t_0)}. \tag{3.1.18}$$

在 Schrödinger 表象中，力学量与时间无关，但其平均值

$\langle\psi(t)|\hat{\alpha}|\psi(t)\rangle$ 却随时间变化.

3.1.4. Heisenberg 绘景

描述物理系统随时间变化的另一方法是使与时间相依的只是算符，而态矢则不随时间变化，这就是有名的 Heisenberg 绘景，我们证明用一个么正变换可以把S绘景变为H绘景从而二者是完全等价的.

在 S 绘景中：

$$|\psi(t)\rangle_{\mathrm{S}}=T(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle_{\mathrm{S}},$$

$$T(t,t_0)=\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_{\mathrm{S}}\cdot(t-t_0)}.$$

引入么正变换：$T^{-1}(t,t_0)$，

$$|\psi(t)\rangle_{\mathrm{S}}\to|\psi(t_0)\rangle_{\mathrm{H}}=T^{-1}(t,t_0)|\psi(t)\rangle_{\mathrm{S}}=|\psi(t_0)\rangle_{\mathrm{S}}$$

或　$$|\psi(t)\rangle_{\mathrm{S}}=T(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle_{\mathrm{H}}. \tag{3.1.19}$$

故在 H 绘景中，S 绘景中的全部态矢均变回到某一固定的初始时刻 t_0 从而不再随时间变化了. 相应地在 S 绘景中的全部算符 $\hat{\alpha}_S$ 应经受一相似变换而变为 $\hat{\alpha}_H$

$$\hat{\alpha}_H = T^{-1}(t,t_0)\hat{\alpha}_S T(t,t_0). \tag{3.1.20}$$

而与时间显示有关了，自然在 H 绘景中，量子系统的运动方程应是算符(力学量) 随时间的变化规律.

由(3.1.20) 得

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\alpha}_H(t) = i\hbar\frac{\partial T^{-1}}{\partial t}\hat{\alpha}_S T + T^{-1}\hat{\alpha}_S i\hbar\frac{\partial T}{\partial t}.$$

但由(3.1.17) 的厄米共轭式得：

$$-i\hbar\frac{\partial T^{\dagger}}{\partial t} = T^{\dagger}H_S \text{ 或 } i\hbar\frac{\partial T^{-1}}{\partial t} = -T^{-1}H_S.$$

代入上式得：

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\alpha}_H(t) &= -T^{-1}H_S\hat{\alpha}_S T + T^{-1}\hat{\alpha}_S H_S T \\ &= -H_H\hat{\alpha}_H + \hat{\alpha}_H H_H. \end{aligned}$$

即：$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\alpha}_H(t) = [\hat{\alpha}_H, H_H]. \tag{3.1.21}$$

这就是 Heisenberg 运动方程.

Heisenberg 态矢是在某一确定时刻 t_0 的 Schrödinger 态矢，而 Schrödinger 算符则是在某一确定时刻 t_0 的 Heisenberg 算符.

Heisenberg 绘景的优点是在自由场的二次量子化中，我们必须采用 Heisenberg 绘景.

3.1.5. 朝永绘景(相互作用绘景)

不论 S 绘景还是 H 绘景，都不是显示 Lorentz 协变的，1946 年朝永振一郎为了得到显示 Lorentz 协变的运动方程，提出一个新绘景 —— 相互作用绘景.

设系统的哈密顿量 H 可分为自由和相互作用两部分：

$$H = H_0 + H'.$$

在S绘景中

$$H(t_0) = H_0(t_0) + H'(t_0).$$

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle_{\mathrm{S}} = [H_0(t_0) + H'(t_0)]|\psi(t)\rangle_{\mathrm{S}}. \qquad (3.1.22)$$

那么,么正变换

$$|\psi(t)\rangle_{\mathrm{I}} = R^{-1}(t,t_0)|\psi(t)\rangle_{\mathrm{S}}. \qquad (3.1.23)$$

其中 $$R(t,t_0) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_0(t-t_0)}. \qquad (3.1.24)$$

由(3.1.24),(3.1.23)可得

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial R}{\partial t}|\psi\rangle_{\mathrm{I}} + \mathrm{i}\hbar R\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle_{\mathrm{I}} = H_0R|\psi\rangle_{\mathrm{I}} + H'R|\psi\rangle_{\mathrm{I}}.$$

考虑到(3.1.23)得

$$\mathrm{i}\hbar R\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle_{\mathrm{I}} = H'R|\psi(t)\rangle_{\mathrm{I}}.$$

(考虑到 $\exp[-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_0\cdot(t-t_0)]$ 与 H_0 的可对易性).

$$\text{或}\quad \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle_{\mathrm{I}} = H'_{\mathrm{I}}|\psi(t)\rangle_{\mathrm{I}}. \qquad (3.1.25)$$

其中 $H'_{\mathrm{I}} = R^{-1}H'R$.

相应地,所有S绘景中的力学量 $\hat{\alpha}_{\mathrm{S}}$ 均经受相似变换.

$$\hat{\alpha}_{\mathrm{I}}(t) = R^{-1}(t,t_0)\hat{\alpha}_{\mathrm{S}}(t_0)R(t,t_0),$$

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\alpha}_{\mathrm{I}}(t) = [\hat{\alpha}_{\mathrm{I}}, H_{0\mathrm{I}}],\text{注意 } H_{0\mathrm{I}} = H_{0\mathrm{S}}. \qquad (3.1.26)$$

故在朝永绘景中,态矢随时间的变化完全由相互作用(H'_{I})引起.算符(场量)随时间的变化完全和无相互作用的海森堡算符H相同.

因此,朝永绘景可看作S绘景和H绘景的一个中介绘景,它的Lorentz 协变性,我们不准备证明,有兴趣的读者可参看朱洪元著《量子场论》或Schweber,Bethe,de Hoffmann *Mesons and Fields*.

相互作用绘景的优点是在各种场的相互作用中:

(1) 只有采用相互作用绘景才能对场量(波函数)进行二次量

子化.

(2)S 矩阵(散射矩阵) 理论中必须采用相互作用绘景.

3.1.6. 么正变换和守恒量

定理 任意么正变换决定一个厄米算符.

证 若么正变换是不连续变换,应有

$$UU = 1,\text{(这是分立变换的特征)}$$

即 $U = U^{-1}$.

但 $U^{+} = U^{-1}$,

故 $U^{+} = U$.

即不连续么正变换 U 本身一定是厄米算符,它的本征值一定是实数,且为 ± 1,因而是一个可观测量,例如若 U 代表空间反射,则本征值 ± 1 叫态的宇称.

若么正变换是连续变换,我们不能一般证明 U 是厄米算符.但可考虑无穷小么正变换.

$$U = 1 + \mathrm{i}\varepsilon F,$$

$$U^{+} = 1 - \mathrm{i}\varepsilon F^{+}.$$

由 $$U^{+}U = (1 - \mathrm{i}\varepsilon F^{+})(1 + \mathrm{i}\varepsilon F)$$

$$= 1 + \mathrm{i}\varepsilon(F - F^{+}) = 1,$$

得 $F^{+} = F$.

即连续么正变换 U 的生成元一定是厄米算符,因而是可观测量.例如若 U 代表空间转动变换,则它的生成元的本征值叫角动量.

定理 量子力学的每一个么正对称变换必对应一个守恒量.

证 由 $|\psi(t_0)\rangle_{\mathrm{H}} = T^{-1}(t,t_0)|\psi(t)\rangle_{\mathrm{S}}$,

及 $\hat{\alpha}_{\mathrm{H}}(t) = T^{-1}\hat{\alpha}_{\mathrm{S}}T$.

对么正变换 U 而言,$U_{\mathrm{H}}(t) = T^{-1}U_{\mathrm{S}}T$,$T$ 是反映态矢 $|\psi\rangle_{\mathrm{S}}$ 随时间变化的规律,事实上就反映了量子系统的动力学规律.因此若量子力学在么正变换下形式不变,则 T 在么正变换下应是不变算

符. 即

$$T = UTU^{-1} \quad 或 \quad TU = UT.$$

因之，$U_H(t) = T^{-1}TU_S = U_S$　即 U 是一个守恒算符.

当么正变换是分立变换，则因 U 本身为一厄米算符，它便是一种可观测的守恒量. 当么正变换是连续变换，则因 U 的生成元是厄米算符，它也是一个可观测的守恒量.

例　空间反射变换

$$p: x_i \to -x_i$$

$$p\psi(x,y,z,t) = \psi(-x,-y,-z,t).$$

由于 $p^2 = 1$，得 $p = \pm 1$.　　(3.1.27)

若量子系统在空间反射变换下具有对称性，则反射算符 p 为不变算符，其本征值 ± 1 即为量子系统的守恒量，叫宇称. $+1$ 叫偶宇称，-1 叫奇宇称.

§3.2　量子条件 —— 二次量子化

为了对量子系统的行为进行描述，我们采用态矢和厄米算符，它们应满足一定的运动方程和一定的量子条件(对易定则，反对易定则).

在量子力学中，态函数即波函数，如果采用 Heisenberg 绘景，运动方程是按如下的方法得到的.

即把经典 Hamilton 量 H 写成量子 Hamilton 量 H 再建立 Heisenberg 运动方程

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\hat{\alpha}(t) = [\hat{\alpha}, \hat{H}].　　(3.2.1)$$

量子条件是按照如下的方法得到的，任给二力学量 u、v，

存在经典泊松括符：$[u,v] \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial q_\nu}\frac{\partial v}{\partial p_\nu} - \frac{\partial u}{\partial p_\nu}\frac{\partial v}{\partial q_\nu}\right)$.

满足：反对称律　$[u,v] = -[u,v]$.

分配律　$[(u_1+u_2),v]=[u_1,v]+[u_2,v]$.

$$[u_1u_2,v]=[u_1,v]u_2+u_1[u_2,v].$$

$$[u,v_1v_2]=[u,v_1]v_2+v_1[u,v_2].$$

轮换律　$[u,[v,w]]+[v,[w,u]]+[w,[u,v]]=0.$

若要求任二算符 u,v 的量子泊松括符$[u,v]$ 为满足上述规则的一个实数量，由分配律可得出

$$[u_1u_2,v_1v_2]=[u_1,v_1]v_2u_2+v_1[u_1,v_2]u_2+$$
$$+u_1[u_2,v_1]v_2+u_1v_1[u_2,v_2],$$

$$[u_1u_2,v_1v_2]=[u_1,v_1]u_2v_2+u_1[u_2,v_1]v_2+$$
$$+v_1[u_1,v_2]u_2+v_1u_1[u_2,v_2].$$

或　$$\frac{[u_1,v_1]}{u_1v_1-v_1u_1}=\frac{[u_2,v_2]}{u_2v_2-v_2u_2},$$

这表示　$[u,v]\propto(uv-vu)$,

$$(uv-vu)\sim[u,v].$$

即任二算符 u,v 的量子泊松括与该二算符的对易子成正比.

依据实数性要求和对应原理，即得关于任二算符的量子泊松括$[u,v]$ 为

$$(uv-vu)=\mathrm{i}\hbar[u,v].$$

特别对于正则坐标和正则动量

$$[q_r,p_s]=\left[\frac{\partial q_r}{\partial q_l}\frac{\partial p_s}{\partial p_l}-\frac{\partial q_r}{\partial p_l}\frac{\partial p_s}{\partial q_l}\right]=\delta_{rl}\delta_{sl}=\delta_{rs},$$

故得基本的量子条件 —— 所谓正则量子化条件

$$q_rp_s-p_sq_r=\mathrm{i}\hbar\delta_{rs}.$$

$$q_rq_s-q_sq_r=p_rp_s-p_sp_r=0.$$

以后简写为

$$[q_r,p_s]=\mathrm{i}\hbar\delta_{rs}.$$

$$[q_r,q_s]=[p_r,p_s]=0. \qquad (3.2.2)$$

由泊松括的定义及量子条件的提出过程，可知正则量子条件

是同时量子条件.

(3.2.1) 和(3.2.2) 就是量子力学的完整方程组,它可以相当好地反映低能范围内(＜100MeV)的量子过程,但遇到下述困难:

(1) 不能很好描述中能和高能领域内的量子过程,特别是粒子的产生和湮灭现象.

(2) 并非在任何情况下均可得到与经典对应的 Hamilton 量 H.

(3) 在坐标空间内无法建立光子的量子力学,虽然在动量空间这是没有问题的.

在量子场论中,波函数不是态函数,它本身是一个算符,波动方 程是一个算符方程. 所有力学量都通过由波函数的某种双线性组合构成的算符表示,特别是由 Nöther 定理可得到量子系统的 Hamilton 量 H. 让我们采用相互作用绘景:

运动方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}'|\psi(t)\rangle,$$

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\alpha}(t) = [\hat{\alpha},\hat{H}^0].$$

无相互作用时,$\hat{H}' = 0$,即化为 Heisenberg 运动方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\alpha}(t) = [\hat{\alpha},\hat{H}].$$

量子条件:基本量子条件是关于波函数算符的对易或反对易定则,这正是我们要找寻的.

3.2.1. 正则量子化条件

在场论中,如果引入广义坐标和广义动量,即可由(3.2.2) 得到同时量子条件,这就是正则量子化.

令场函数 $\psi_r(t,x)$ 为广义坐标,则与之对应的广义动量为

$$\pi_r(t,x) \equiv \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}_r}. \tag{3.2.3}$$

式中　$\mathscr{L}(\psi_r,\dot{\psi}_r)$ 为场的 Lagrange 密度，

$\mathscr{H}\equiv\pi_r\cdot\dot{\psi}_r-\mathscr{L}$，为场的 Hamilton 密度，

$H=\int\mathscr{H}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}$，为场的 Hamilton 量.

将要多次提到，如(3.2.2)所示的同时对易关系仅对 Bose 场成立，对于 Fermi 场同时对易关系应改为同时反对易关系，即

$$\begin{aligned}&\{\psi_r,\pi_s\}=\mathrm{i}\hbar\delta_{rs},\\&\{\psi_r,\pi_s\}=\{\pi_r,\pi_s\}=0.\end{aligned}\tag{3.2.4}$$

运动方程(3.1.25)与量子条件(3.2.2)或(3.2.4)即构成量子场论中的完整方程组. 由对应原理所得到的场论中的正则量子化的最大优点是简便易行，它的缺点是不具有显示的 Lorentz 协变性，下面我们将指出如何得到显示 Lorentz 协变的量子条件，它与正则量子化是完全自洽的.

3.2.2. 量子条件的普遍形式

量子论中的量子条件是不能证明的. 在通常的正则(canonical)量子化方案中，它们是通过对应原理得到的. 我们不采用对应原理，而通过 Poincare 协变性要求来找出 Poincare 协变量子条件.

所有力学量均可表为场函数及其导数的双线性型

$$\hat{\alpha}(x)=\psi^{+}(x)\Gamma\psi(x).\tag{3.2.5}$$

其中 Γ 是矩阵或微分算符，可作用在 $\psi^{\dagger}(x)$ 上或 $\psi(x)$ 上.

例　Dirac 场的流密度和动量密度分别为

$$J_\mu=\bar{\psi}\gamma_\mu\psi,p_k=\psi^{\dagger}(-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x_k})\psi.$$

电磁场的能密度：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{H}^2&=-F_{i4}^2+F_{kl}^2=-(\partial_iA_4-\partial_4A_i)^2+(\partial_kA_l-\partial_lA_k)^2\\&=-\partial_iA_4\partial_iA_4+\cdots.\end{aligned}$$

因此力学量之间的对易关系或反对易关系可归结为 $\psi_\alpha(x)$，$\psi_\beta^{\dagger}(y)$ 之间的对易或反对易关系

$$[\psi_\alpha(x),\psi_\beta^\dagger(y)]_\mp,[\psi_\alpha(x),\psi_\beta(y)]_\mp,$$

$$[\psi_\alpha^+(x),\psi_\beta^\dagger(y)]_\mp.$$

我们仅考虑自由场场函数算符的对易(反对易)关系,对于相互作用场,采用朝永绘景,也可一并考虑.

首先考虑混合括$[\psi_\alpha(x),\psi_\beta^\dagger(y)]$.

设
$$[\psi_\alpha(x),\psi_\beta^\dagger(y)]=F_{\alpha\beta}(x,y). \tag{3.2.6}$$

根据量子泊松括的性质,可知 $F_{\alpha\beta}(x,y)$ 只是一个数,不是Hilbert 空间的算符.

按 Poincare 协变性要求,知

(1)
$$F_{\alpha\beta}(x,y)=F_{\alpha\beta}(x-y). \tag{3.2.7}$$

这是因为:

$$F_{\alpha\beta}[x,y]=F_{\alpha\beta}\left[\frac{1}{2}\{(x+y)+(x-y)\},\frac{1}{2}\{(x+y)-(x-y)\}\right]$$
$$=f_{\alpha\beta}[(x+y),(x-y)].$$

再由量子条件的移动不变性要求,知 $f_{\alpha\beta}[(x+y),(x-y)]=f_{\alpha\beta}(x-y)$.

(2) 欲量子条件为Lorentz协变,应得出 $F_{\alpha\beta}(x-y)$ 与 $\psi_\alpha^\dagger\psi_\beta$ 有相同的 Lorentz 协变性.

(3) 由场函数应满足 K-G 条件,得

$$(\Box_x-\chi^2)F_{\alpha\beta}(x-y)=0=(\Box_y-x^2)F_{\alpha\beta}(x-y). \tag{3.2.8}$$

(4) 可设 $F_{\alpha\beta}(x)=T_{\alpha\beta}\cdot\Delta(x)$,其中 $T_{\alpha\beta}$ 是作用在函数 $\Delta(x)$ 上的某个 Lorentz 协变算符. (3.2.9)

因为,由(3.2.8)知 $F_{\alpha\beta}(x)$ 应为 K-G 方程的 Lorentz 协变解,进一步假设此 Lorentz 协变解可表为某个 Lorentz 协变算符作用在标量函数解 $\Delta(x)$ 上的结果.

以下分别来决定标量解 $\Delta(x)$ 和 Lorentz 协变算符 $T_{\alpha\beta}$.

(5) 求 $\Delta(x)$.

设标量解为 $F(x)$.

以 $F(x) = \int a(k)\mathrm{e}^{ik_\mu x_\mu}\mathrm{d}^4k$ (3.2.10)

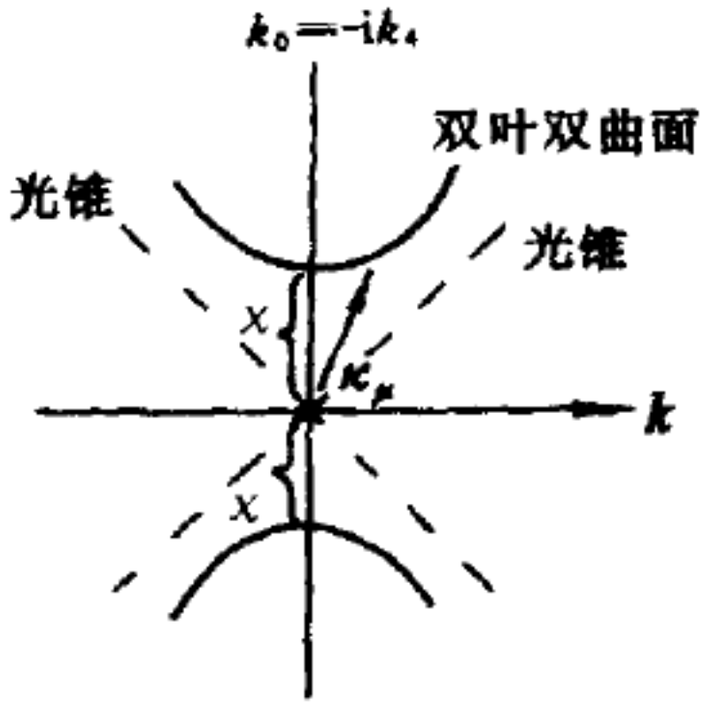
代入$(\Box - \chi_2)F(x) = 0$,得代数方程

$$(k_\mu k_\mu + \chi^2)a(k) = 0.$$

显然仅在能量面 $k_\mu k_\mu + \chi^2 = 0$ 上的富氏系数 $a(k)$ 才可能不为零.

故 $a(k)$ 只能是一个 δ 型奇函数,可设

$$a(k) = c\delta(k_\mu k_\mu + \chi^2). \tag{3.2.11}$$



其中 c 为常数,不难看出,能量面在$(k_0 - \boldsymbol{k})$ 空间为双叶双曲面.

$$k_\mu k_\mu = \boldsymbol{k}^2 - k_0^2 = -\chi^2 \quad 或 \quad k_0 = \pm\sqrt{\boldsymbol{k}^2 + \chi^2}$$

常数 c 一般可有两种不同的取值,即

$$①c = \mathrm{const} = \frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^3}$$

此时得 $F = \Delta'(x) = \dfrac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(k_\mu k_\mu + \chi^2)\mathrm{e}^{ik_\mu x_\mu}\mathrm{d}^4k.$ ——Schwinger Δ' 函数. (3.2.12)

$$②c = \frac{\varepsilon(k)}{(2\pi)^3} = \begin{cases} +1, \text{当 } k_0 = -\mathrm{i}k_4 > 0. \\ -1, \text{当 } k_0 = -\mathrm{i}k_4 < 0. \end{cases}$$

此时得 $F = \Delta(x) = \dfrac{+1}{(2\pi)^3}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon(k)\delta(k_\mu k_\mu + \chi^2)\cdot\mathrm{e}^{ik_\mu x_\mu}\cdot\mathrm{d}^4k$

(3.2.13)

——Schwinger Δ 函数.

注意:$\delta(k_\mu k_\mu + \chi^2) = \delta\left(k_0^2 - \dfrac{\omega_k^2}{c^2}\right) = \dfrac{c}{2\omega_k}\left\{\delta\left(k_0 - \dfrac{\omega_k}{c}\right)\right.$

$$+\delta\left(k_0+\frac{\omega_k}{c}\right)\Big\}.$$

$$\omega_k = c\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\chi^2}$$

所以 $$\Delta^1(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\boldsymbol{k}\mathrm{d}k_0\ \frac{c}{2\omega_k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{kx}-ck_0t)}$$

$$\cdot\left\{\delta\left(k_0-\frac{\omega_k}{c}\right)+\delta\left(K_0+\frac{\omega_k}{c}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\boldsymbol{k}\ \frac{c}{2\omega_k}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{kx}-\omega_k t)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{kx}-\omega_k t)}\right\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\boldsymbol{k}\ \frac{c}{2\omega_k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{kx}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k t}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k t})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\boldsymbol{k}\ \frac{\cos\ \omega_k t}{\omega_k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{kx}}$$ ——3 维表示.

(3.2.14)

$$\Delta(x) = \frac{+\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\boldsymbol{k}\mathrm{d}k_0\ \frac{c\varepsilon(k)}{2\omega_k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{kx}-ck_0t)}$$

$$\cdot\left\{\delta\left(k_0-\frac{\omega_k}{c}\right)+\delta\left(k_0+\frac{\omega_k}{c}\right)\right\}$$

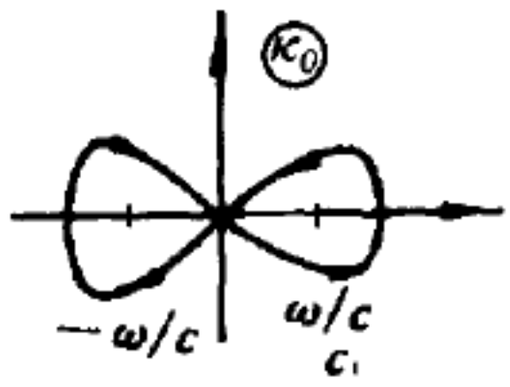
$$= \frac{+\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\boldsymbol{k}\ \frac{c}{2\omega_k}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{kx}-\omega_k t)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{kx}+\omega_k t)}\right\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\boldsymbol{k}\ \frac{c\ \sin\ \omega_k t}{\omega_k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{kx}}$$ ——3 维表示. (3.2.15)

按留数定理 $\Delta^1(x)$ 和 $\Delta(x)$ 可分别改写为在复 k_0 平面内的闭合回路积分:

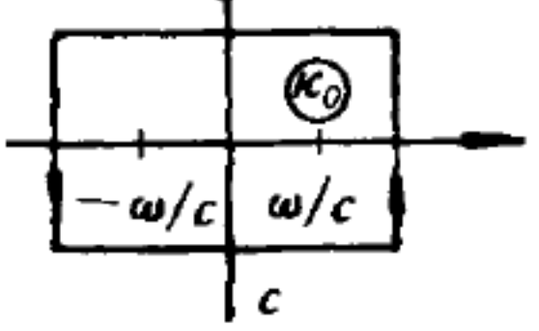
$$\Delta^1(x) = \frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\oint_{c_1},\mathrm{d}^4k\ \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\mu x_\mu}}{-k_0^2+\omega^2/c^2}$$

—— 回路积分表示. (3.2.16)



$$\Delta(x) = \frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\oint_c \mathrm{d}^4k\ \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\mu x_\mu}}{-k_0^2+\omega^2/c^2}$$

—— 回路积分表示. (3.2.17)



式中 $\oint_c \mathrm{d}^4k \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\oint_c \mathrm{d}k_0$.

$$\text{证:}\Delta(x) = \frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}x}\oint_c \mathrm{d}k_0\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ck_0t}}{\omega^2/c^2 - k_0^2}$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}x}2\pi\mathrm{i}\left[-\frac{c\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{2\omega} + \frac{c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{2\omega}\right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}x-\omega t)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}x+\omega t)}\right\}\frac{c}{2\omega}.$$

类似可证(3.2.14).

可利用特殊函数得到 $\Delta^1(x)$ 和 $\Delta(x)$ 的显示式.

J. Schwinger(*Phys. Rev.* 75 No. 4(1949),651) 曾证明

$$\Delta^1(x) = \frac{\chi^2}{4\pi}I_{\mathrm{m}}\left[\frac{H_1^{(1)}(\chi\sqrt{-x_\mu x_\mu}}{\chi\sqrt{-x_\mu x_\mu}}\right]. \tag{3.2.18}$$

$$\Delta(x) = \frac{1}{2\pi}\varepsilon(x)\delta(x_\mu x_\mu) - \frac{\chi^2}{4\pi}\varepsilon(x)\mathrm{Re}\left[\frac{H_1^{(1)}(\chi\sqrt{-x_\mu x_\mu})}{\chi\sqrt{-x_\mu x_\mu}}\right]. \tag{3.2.19}$$

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} +1, \text{若 } t = \dfrac{1}{C}x_0 > 0. \\ -1, \text{若 } t = \dfrac{1}{C}x_0 < 0. \end{cases}$$

式中 $H_1^{(1)}$ 是一级第一类 Hankel 函数.

由 Bateman. 高级超越函数卷 Ⅱ,p. 83 公式(28) 知

$$H_1^{(1)}(Z) = \frac{4}{\mathrm{i}Z}\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}zt}}{\sqrt{(t^2-1)^3}}\mathrm{d}t.$$

当 $Z = \chi\sqrt{-x_\mu x_\mu}$ 为纯虚或 $x_\mu x_\mu = r^2 - x_0^2 > 0$,即类空间隔时,

$H_1^{(1)}$ 为实数,故 $\left[\dfrac{H_1^{(1)}\left(\chi\sqrt{-x_\mu x_\mu}\right)}{\chi\sqrt{-x_\mu x_\mu}}\right]$ 为纯虚.

又可证当 $x_\mu x_\mu < 0$,即类时间隔时,

$$Re\left[\frac{H_1^{(1)}\left(\chi\sqrt{-x_\mu x_\mu}\right)}{\chi\sqrt{-x_\mu x_\mu}}\right]=\frac{J_1\left(\chi\sqrt{-x_\mu x_\mu}\right)}{\chi\sqrt{-x_\mu x_\mu}},$$

$$J_1(Z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+1)!}\left(\frac{Z}{2}\right)^{2k+1}.$$

故最后得

$\Delta^1(x)$ 对类空间隔不为 0；$\Delta(x)$ 对类空间隔为 0.

对类时间隔

$$\Delta(x)=\frac{-\chi^2}{4\pi}\varepsilon(x)\frac{J_1\left(\chi\sqrt{-x_\mu x_\mu}\right)}{\sqrt{-x_\mu x_\mu}}.$$

(6) 狭义相对论要求，对于类空间隔 $x_\mu x_\mu>0$，任二力学量应可同时测准，否则将违背因果律. 故 $[\psi_\alpha(x),\psi_\beta^\dagger(y)]=0$. 显然仅 $[\psi_\alpha(x),\psi_\beta^\dagger(y)]=T_{\alpha\beta}\Delta(x-y)$ 满足此要求，故以后不考虑 Δ^1 函数.

$\Delta(x)$ 的性质：

① 恒为实数，量纲为 L^{-2}.

由 $[J_n(Z)]^*=J_n(Z^*)$ 知，当 Z 为实数时 $J_n(Z)$ 必为实.

(Bateman Ⅱ p. 5(10))

(3.2.15) 采用 C.G.S 制时为

$$\Delta(x)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\boldsymbol{k}\cdot\frac{c\cdot\sin\omega t}{\omega_k}e^{i\boldsymbol{k}x}.$$

故 $\Delta(x)$ 的量纲与 $\frac{d^3\boldsymbol{k}}{\omega_{k/c}}=\frac{d^3\boldsymbol{k}}{k_0}$ 同，但 $\boldsymbol{k}^2-k_0^2=-\left(\frac{c}{\hbar}m_0\right)^2$.

已知 k 与 k_0 的量纲即 $x=\frac{c}{\hbar}m_0$ 的量纲 L^{-1}，

故 $\Delta(x)$ 的量纲即 L^{-2}.

②$\Delta(x)$ 为奇函数.

$\Delta(-x)=-\Delta(x)$ 且 $(\Box-x^2)\Delta=0$.

因为 $\Delta(-x)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}d^3k\frac{-\sin\omega t}{|\omega|}e^{-ikx}$（取 $c=1$）

$$= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty} d^3k\,\frac{\sin\,\omega t}{|\omega|}e^{-ikx}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d^3(-k)\,\frac{\sin\,\omega t}{|\omega|}e^{i(-k\cdot x)}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{+\infty}^{-\infty} d^3k'\,\frac{\sin\,\omega t}{|\omega|}e^{ik'x}(k' = -k)$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty} d^3k\,\frac{\sin\,\omega t}{|\omega|}e^{ikx} = -\Delta(x).$$

③$\Delta(x) = 0$，若 $x_\mu x_\mu > 0$.

④$\left(\frac{\partial\Delta(x)}{\partial t}\right)_{t=0} = \delta(x)$.

因为 $$\left.\frac{\partial\Delta(x)}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d^3k e^{ik\cdot x}\cos\,\omega t\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d^3k e^{ikx}$$

$$= \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3) \equiv \delta(x). \quad (取\ c = 1)$$

(7) 定 $T_{\alpha\beta}$.

按 Lorentz 协变性要求(3.2.9) 知

$T_{\alpha\beta}$ 与 $\psi_\alpha^\dagger\psi_\beta$ 有相同的 Lorentz 协变性.

由场方程 $\Lambda_y\psi(y) = 0$，(Λ_y 代表场的某个微分算符)

及 $\Lambda_x[\psi(x),\psi^\dagger(y)] = [\Lambda_x\psi(x),\psi^+(y)]$

$$= 0 = \Lambda T\Delta(x-y)$$

和$(\Box - \chi^2)\Delta = 0$，知

$$\Lambda T = a(\Box - \chi^2),\ a\ 为某个常数. \qquad (3.2.20)$$

这是算符 $T_{\alpha\beta}$ 应满足的算符方程.

(3.2.8) 式两边取复共轭(对算符即厄米共轭).

$$[\psi_\beta(y),\psi_\alpha^\dagger(x)] = T_{\alpha\beta}^*\Delta(x-y) = T_{\beta\alpha}\Delta(y-x)$$

$$= -T_{\beta\alpha}\Delta(x-y).$$

故，$T^+ = -T$，即 T 应是反厄米算符，算符应含虚数因子 i.

剩下需要决定的是 $T_{\alpha\beta}$ 中可能含有的实数因子，此可按量纲

要求，利用 $c,\hbar$ 等使对易关系两边量纲相等.

在量子场论中，常采用所谓自然单位，即 $\hbar = c = 1$，这意味着 $L = T = M^{-1}$ 或只须采用一个标准钟（或标准尺）就可利用真空中的光速 c 和基本作用量 h 测定距离和质量.

(8) 我们将指出对张量场（玻色子）应采用对易关系；

对旋量场（费米子）应采用反对易关系，否则将导致物理困难.

最后关于纯括的对易关系：

$$[\psi(x),\psi(y)],[\psi^{\dagger}(x),\psi^{\dagger}(y)].$$

由下述两点理由，它们应当等于 0.

① 满足 Poincare 协变性要求的 $[\psi_{\alpha}(x),\psi_{\beta}^{\dagger}(y)]$ 的形式是惟一的. 亦即只存在惟一的不变奇函数 Δ 和惟一的 $T_{\alpha\beta}$.

② 纯括肯定不能等于混合括.

因之只能为 0.

3.2.3. 各种特殊场的量子条件

为了下面的需要我们列出一些量的量纲：

$$L:ML^{-2}T^{-1} = M^{4},$$

$$\Delta(x):L^{-2} = M^{2},$$

$$\varphi_{\alpha}(x)(\text{张量场}):M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}T^{-1} = M^{1},$$

$$\psi_{\alpha}(x)(\text{旋量场}):L^{-2}T^{\frac{1}{2}} = M^{\frac{3}{2}},$$

$$hc:ML^{3}T^{-2} = M^{0},$$

$$h:ML^{2}T^{-1} = M^{0}.$$

(1) 复标量场 φ、φ^{*}

因 φ^{*}、φ 是标量，故 $T_{\alpha\beta} = T$ 是标量算符，

即 $T = a + b\partial_{\mu}\partial_{\mu}$

$$[\varphi(x),\varphi^{\dagger}(y)] = T\Delta(x-y).$$

由量纲考虑，左边量纲为 M^{2}，右边 Δ 的量纲为 M^{2}，故 T 的量

纲应为 M^0，最简单的可能性是令 $b=0, a=\mathrm{i}\hbar c$，即 $T=\mathrm{i}\hbar c$.

这显然是符合对应原理的.

故最后得复标量场的对易定则为

$$\begin{aligned}&[\varphi(x),\varphi^{\dagger}(y)]=\mathrm{i}\hbar c\Delta(x-y),\\&[\varphi(x),\varphi(y)]=[\varphi^{\dagger}(x),\varphi^{\dagger}(y)]=0.\end{aligned}\tag{3.2.21}$$

(2) 实标量场 φ(厄米标量场)

$$[\varphi(x),\varphi(y)]=\mathrm{i}\hbar c\Delta(x-y).\tag{3.2.22}$$

(3) 复矢量场 $\varphi_\mu,\varphi_\mu^{\dagger}$

因 $\varphi_\nu^{\dagger}\varphi_\nu$ 是二级张量，故 $T_{\alpha\beta}=T_{\mu\omega}$ 是二级张量算符，即

$$T_{\mu\omega}=a(g_{\mu\omega}+b\partial_\mu\partial_\nu).$$

其中

$$(g_{\mu\omega})=\begin{pmatrix}1&&&0\\&1&&\\&&1&\\0&&&1\end{pmatrix}=(\delta_{\mu\omega})\text{ 系度规矩阵，即}$$

$$[x_1,x_2,x_3,x_4(\mathrm{i}ct)]\begin{pmatrix}1&&&0\\&1&&\\&&1&\\0&&&1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x_1,\\x_2,\\x_3,\\x_4(\mathrm{i}ct)\end{bmatrix}$$

$$=x_\mu x_\mu=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2.$$

由 Lorentz 条件

$$\partial_\mu\varphi_\mu=0,\left(\partial_\mu=\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right),$$

$$\partial_\mu[\varphi_\mu(x),\varphi_\nu^{\dagger}(y)]=a\partial_\mu[(g_{\mu\omega}+b\partial_\mu\partial_\nu)\Delta(x-y)],$$

$$=[\partial_\mu\varphi_\mu(x),\varphi_\nu^{\dagger}(y)]=0=a(\partial_\nu+b\partial_\nu\Box_x)\Delta(x-y).$$

即 $\partial_\nu[(1+b\Box)\Delta(x-y)]=0=\partial_\nu[(1+bx^2)\Delta(x-y)]$，

或 $(1+b\kappa^2)\Delta(x-y)=\text{const}$，由于 $\Delta(x-y)$ 不可能是常量，

故合理的解只能是 $b=-\frac{1}{\chi^2}$(若 $\chi\neq 0$).

考虑到量纲即知　$a = \mathrm{i}\hbar c$，

故最后复矢量的对易定则为

$$[\varphi_\mu(x), \varphi_\nu^\dagger(y)] = \mathrm{i}\hbar c\left(g_{\mu\nu} - \frac{1}{\chi^2}\partial_\mu\partial_\nu\right)\Delta(x-y), \tag{3.2.23}$$

$$[\varphi_\mu(x), \varphi_\nu(y)] = [\varphi_\mu^\dagger(x), \varphi_\nu^\dagger(y)] = 0.$$

(4) 实矢量场 φ_μ(厄米矢量场)

$$[\varphi_\mu(x), \varphi_\nu(y)] = -\mathrm{i}\hbar c(g_{\mu\nu} - \frac{1}{\chi^2}\partial_\mu\partial_\nu)\Delta(x-y). \tag{3.2.24}$$

(5) 电磁场 A_μ

在采用度规矩阵$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$(正定度规)时

$A_1A_2A_3$ 是厄米算符，但 $A_4 = ic\varphi$ 是反厄米算符.

若采用度规矩阵$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$(不定度规)时，

即$(x_1, x_2, x_3, x_0(ct)\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_0(ct) \end{pmatrix}$

$$= x_\mu x_\mu = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2,$$

$A_1A_2A_3A_0$ 都是厄米算符，似可直接使用实矢量场的对易定则，但由于

① 光子的静止质量 $\varkappa = 0$，应仅保留张量微分算符中第一项，即

$$T_{\mu\nu} = \mathrm{i}\hbar c g_{\mu\nu}.$$

② 由 Lorentz 条件 $\partial_\nu A_\nu = 0$ 及对易关系

$$[A_\mu(x), A_\nu(y)] = +\mathrm{i}\hbar c g_{\mu\nu}\mathrm{D}(x-y)$$

$$(\mathrm{D}(x-y) = \Delta(x-y)|_{x=0})$$

马上得 $\partial_\mu \mathrm{D}(x-y) = 0$

$$\mathrm{D}(x-y) = \text{const}$$

显然理论自相矛盾.

1932 年 E. Fermi 提出，在经典电磁场理论中，并非所有满足 d'Alembert 方程

$$\Box A_\mu = 0$$

的解 A_μ 都能反映客观现象，Lorentz 条件正是从 d'Alembert 方程中的全部解中排除掉非物理解，因而只有满足 Lorentz 条件的解才反映客观现象.

在量子电磁理论中，Lorentz 条件是一个算符方程，它应看做是作用在态矢 $|\rangle$ 上的一个附加条件，它告诉我们所有可能的态矢中只有满足新 Lorentz 条件：

$$\partial_\nu A_\nu|\rangle = 0 \tag{3.2.25}$$

的态矢 $|\rangle$ 才能反映客观情态. 这样就避免了理论上的自相矛盾.

在量子场论中，采用新 Lorentz 条件以后可以得到一系列合理的结果.

总之，在电磁学理论中，Lorentz 规范所起的作用就是排除掉非物理解.

应指出，量子电磁场论中的完备方程组为

$$\begin{aligned}
&\Box A_\mu = 0,\\
&[A_\mu(x), A_\nu(y)] = \mathrm{i}\hbar c g_{\mu\nu}\mathrm{D}(x-y),\\
&g_{\mu\nu} = (+1, +1, +1, -1),\\
&\partial_\nu A_\nu|\rangle = 0.
\end{aligned} \tag{3.2.26}$$

式中 $$D(x)=\Delta(x)\Big|_{x=0}=\frac{+1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}d^3k\cdot\frac{\sin kt}{k}e^{ikx}$$

$$=\frac{+1}{(2\pi)^3}\int\frac{\sin kt}{k}e^{ikr\cos\theta}k^2dk\sin\theta d\theta d\varphi$$

$$=\frac{+1}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty}k\sin kt\,dk\int_0^{\pi}e^{ikr\cos\theta}\sin\theta d\theta.$$

但 $$\int_0^{\pi}e^{ikr\cos\theta}\sin\theta d\theta=-\int_0^{\pi}e^{ikr\cos\theta}d(\cos\theta)$$

$$=-\frac{1}{ikr}e^{ikr\cos\theta}\Big|_0^{\pi}$$

$$=-\frac{1}{ikr}(e^{-ikr}-e^{ikr})$$

$$=\frac{2\sin kr}{kr}.$$

故 $$D(x)=\frac{1}{4\pi^2r}\int_0^{\infty}2\sin kr\sin kx_0dk$$

$$=\frac{1}{4\pi^2r}\int_0^{\infty}[\cos k(r-x_0)-\cos k(r+x_0)]dk$$

$$=\frac{1}{4\pi r}[\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos k(r-x_0)dk-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos k(r+x_0)dk]$$

$$=\frac{1}{4\pi r}[\delta(r-x_0)-\delta(r+x_0)]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\delta(r^2-x_0^2)\varepsilon(x_0).$$

$$\varepsilon(x_0)=\begin{cases}+1, x_0>0,\\ -1, x_0<0.\end{cases}$$

(6)Dirac 场

由于 Dirac 协变量均由 $\bar{\psi},\psi$ 组成，且对于旋量场应采用反对易关系，故量子条件为

$$\{\psi_\alpha(x),\bar{\psi}_\beta(y)\}=T_{\alpha\beta}\Delta(x-y).$$

由(3.2.20)知

$$(\gamma_\mu\partial_\mu+\chi)T=a(\Box-\chi^2)$$

一个显然的解是

$$T = a(\gamma_\mu \partial_\mu - \chi)$$

命$((\gamma_\mu \partial_\mu - \chi)\Delta(x-y) = S(x-y)$, (3.2.27)

则$\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\} = aS_{\alpha\beta}(x-y)$.

注意:$\psi\bar{\psi}$的量纲为$L^{-4}T^1 = M^3$,$S(x-y)$的量纲为$L^{-3} = M^3$.

所以 $a = \mathrm{i}$即可.

最后得 Dirac 场的量子条件为

$$\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\} = \mathrm{i}S_{\alpha\beta}(x-y) = \mathrm{i}((\gamma_\mu \partial_\mu - \chi)_{\alpha\beta}\Delta(x-y), \tag{3.2.28}$$

$$\{\psi_\alpha(x), \psi_\beta(y)\} = \{\bar{\psi}_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\} = 0.$$

§3.3 粒子数表象

在经典场论一节中,我们把微客体作为符合某种波动方程的波 来看待,微客体的二象性要求我们的理论也能反映微客体的粒子性. 下面我们将场量按平面波作富氏展开并利用 §3.2 中的量子条件,即可达到目的.

3.3.1. 波场的富氏分解

把任意场量$\psi(x)$按富氏积分展为平面波的叠加.

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k) \mathrm{e}^{+\mathrm{i}k_\mu x_\mu} \mathrm{d}^4 k.$$

式中 $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}p_\mu x_\mu} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hbar k_\mu x_\mu} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\mu x_\mu}$.

注意:当采用正定的欧几里得度规时,e 指数前取“+”号,当采用不定的 Lorentz 度规时,e 指数前取“−”号.

$$k_0 = \frac{\omega}{c}, p_4 = \hbar k_4 = \mathrm{i}\hbar \mathrm{k}_0 (\mathrm{k}_4 = \mathrm{i}k_0)$$

$$(\mathrm{d}^4 k = \mathrm{d}k_1 \mathrm{d}k_2 \mathrm{d}k_3 \mathrm{d}k_4) \tag{3.3.1}$$

代入 K-G 条件后得

$$(k^2 + \chi^2)\varphi(k) = 0 \quad (\chi = \frac{c}{\hbar} m_0).$$

可见 $\varphi(k)$ 只能是一个 δ 型奇异函数.

令 $\varphi(k) = \mathrm{d}(k)\delta(k^2 + \chi^2)$.

注意：$\delta(k_\mu k_\mu + \chi^2) = \delta(\boldsymbol{k}^2 + \chi^2 - k_0^2) = \delta(\frac{\omega_k^2}{c^2} - k_0^2)$

$$= \frac{c}{2\omega_k}\left\{\delta(k_0 - \frac{\omega_k}{c}) + \delta(k_0 + \frac{\omega_k}{c})\right\},$$

$$\omega_k \equiv c\sqrt{\boldsymbol{k}^2 + \chi^2}.$$

代入(3.3.1)得：

$$\psi(\chi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\boldsymbol{k} \sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\omega_k}} [\mathrm{d}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + \mathrm{d}'(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}.$$

最普遍的情况是对正负能二个支叶取不同的 $\mathrm{d}(k)$ 值.

第二个积分作变换 $\boldsymbol{k} \to -\boldsymbol{k}$ 得

$$-\int_{+\infty}^{-\infty} \mathrm{d}'(-\boldsymbol{k}, k_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}\boldsymbol{k}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}'(-\boldsymbol{k}, \mathrm{k}_0) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k t} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}\boldsymbol{k}.$$

最后得：

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\boldsymbol{k} \sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\omega_k}} \{a(\boldsymbol{k}, t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + b^*(\boldsymbol{k} \cdot t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\}. \tag{3.3.2}$$

式中 $a(\boldsymbol{k}, t) = \mathrm{d}(\boldsymbol{k}, k_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k t} \equiv a(\boldsymbol{k}, 0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k t}$—— 正能解.

$b^*(k, t) = \mathrm{d}'(-k, k_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k t} \equiv b^*(\boldsymbol{k}, 0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k t}$—— 负能解.

这表示，按 K-G 条件，任意波函数 $\psi(x)$ 恒可分解为二个解的线性叠加.

其一是动量为 k，能量为 $+\omega_k$ 的正能解.

其二是动量为 $-k$，能量为 $-\omega_k$ 的负能解.

为了显示场的量子性，我们不考虑如(3.3.1)所示的连续谱，而仅考虑三维空间内周期为 l 的周期场

$$\psi(x_j + l, t) = \psi(x_j, t).$$

由于边界条件，波长应满足

$$\lambda_i = \frac{l}{n_i} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_i} = \frac{2\pi}{l} n_i \Rightarrow k_i = \frac{2\pi}{l} n_i \Rightarrow \mathrm{d}k_i$$

$$= \frac{2\pi}{l} \mathrm{d}n_i \Rightarrow \mathrm{d}^3 k_i = \frac{(2\pi)^3}{l^3} \mathrm{d}^3 n_i, \tag{3.3.3}$$

$$\text{或} \quad \mathrm{d}\boldsymbol{k}_i = \frac{(2\pi)^3}{V} \mathrm{d}N_i, (\mathrm{d}N_i \equiv \mathrm{d}^3 n_i).$$

这表示，在体积 V 和波矢 $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k} + \mathrm{d}\boldsymbol{k})$ 间隔内的波矢数为 $\mathrm{d}N_i$，因之，每个波矢在 k 空间所占元格为

$$\Delta = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}_i}{\mathrm{d}N_i} = \frac{(2\pi)^3}{V} \text{——} k \text{ 空间包含一个波矢的最小相格.}$$

(3.3.4)

此时 $$\int f(\boldsymbol{k}) \mathrm{d}\boldsymbol{k} \to \Sigma f(\boldsymbol{k}_i) \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}_i}{\mathrm{d}N_i} = \Delta \Sigma f(\boldsymbol{k}_i) \tag{3.3.5}$$

故场量的富氏积分展开可改写为场量的富氏级数展开

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\Delta} \sum_{\boldsymbol{k}} \sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\omega_k}} [a(\boldsymbol{k}, t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + b^*(\boldsymbol{k}, t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}]$$

$$\psi^\dagger(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\Delta} \sum_{\boldsymbol{k}} \sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\omega_k}} [a^*(\boldsymbol{k}, t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + b(\boldsymbol{k}, t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}].$$

(3.3.6)

把 Δ 改为 $\sqrt{\Delta}$ 是考虑到在体元 V 内的规一化.

对于实标量场(厄米标量场)

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\Delta} \sum_{\boldsymbol{k}} \sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\omega_k}} (S_k(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + S_k^*(t) e^{-\mathrm{i}kx}).$$

(3.3.7)

复标量场：

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\Delta} \sum_{\boldsymbol{k}} \sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\omega_k}} (p_k(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + q_k^*(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}),$$

$$\varphi^*(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\Delta}\sum_k\sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\omega_k}}(q_k(t)e^{ikx}+p_k^*(t)e^{-ikx}).$$

(3.3.8)

电磁场：

$$A_\mu(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\Delta}\sum_k\sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\omega_k}}(c_k^\mu(t)e^{ikx}+c_k^{\mu^*}(t)e^{-ikx}).$$

$$(\mu=1,2,3,0) \qquad (3.3.9)$$

Dirac 场：

$$\begin{aligned}\psi_a(x)=&\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\Delta}\sum_k\sum_{s=1,2}[a_{ks}(t)u_a(k,s)e^{ikx}\\&+b_{ks}^*(t)v_a(k,s)e^{-ikx}],\\ \bar{\psi}_a(x)=&\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\Delta}\sum_k\sum_{s=1,2}[a_{ks}^*(t)\bar{u}_a(k,s)e^{-ikx}\\&+b_{ks}(t)\bar{v}_a(k,s)e^{+ikx}].\end{aligned} \qquad (3.3.10)$$

其中 $u(k,s)$ 和 $v(k,s)$ 系与 (x,t) 无关的常数 Dirac 双旋量.

$u(k,s)$ 代表动量为 k，能量为正 ω_k，$S=\frac{\Sigma}{2}\frac{p}{|p|}=\pm 1$ 的平面波解.

$v(k,s)$ 代表动量为 $-k$，能量为负 ω_k，$S=\frac{\Sigma}{2}\frac{P}{|P|}=\pm 1$ 的平面波解.

应注意，在所有上述展开中，我们把波函数展为一组可对易完备算符集的公共本征波函数的线性叠加了.

3.3.2. 动量空间的量子条件

如前所述，在量子场论中，场函数是算符，因此在场函数的富氏展开中，富氏系数也应是算符，自然，富氏系数的复共轭现在应改为厄米共轭. 这些富氏系数间的对易关系，可由场函数的对易关系，利用富氏展开求得.

以实标量场为例：

$$[\varphi(x),\varphi(x')] = \frac{1}{(2\pi)^3}\Delta[\sum_k \sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\omega_k}}(S_k e^{-i\omega_k t}\cdot e^{ikx} + S_k^\dagger e^{i\omega_k t}\cdot e^{-ikx}),$$

$$\sum_{k'}\sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\omega_{k'}}}(S_{k'}\cdot e^{-i\omega_{k'}t'}\cdot e^{ik'x'} + S_{k'}^\dagger e^{i\omega_{k'}t'}\cdot e^{-ik'x'})]$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\Delta\sum_{k,k'}\sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\omega_k}}\sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\omega_{k'}}}[e^{-i\omega_k t - i\omega_{k'}t'}\cdot$$
$$\cdot e^{ikx+ik'x'}[S_k,S_{k'}] + e^{-i\omega_k t+i\omega_{k'}t'}\cdot$$
$$\cdot e^{ikx-ik'x'}[S_k,S_{k'}^\dagger] + e^{i\omega_k t-i\omega_{k'}t'}\cdot$$
$$\cdot e^{-ikx+ik'x'}[S_k^\dagger,S_{k'}] + e^{i\omega_k t+i\omega_{k'}t'}\cdot$$
$$\cdot e^{-ikx-ik'x'}[S_k^\dagger,S_{k'}^\dagger]$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\Delta\sum_k\frac{\hbar c^2}{2\omega_k}[e^{-i\omega_k t+i\omega_k t'}\cdot e^{-ikx-ikx'} -$$
$$\cdot e^{+i\omega_k t-i\omega_k t'}\cdot e^{ikx-ikx'}.$$

式中我们选 $\Delta(x) = -\frac{i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}dk\,\frac{c}{2\omega_k}\{e^{i(kx-\omega_k t)} - e^{i(kx+\omega_k t)}\}$.

其中第二项 $= \frac{1}{(2\pi)^3}\Delta\sum_k\frac{\hbar c^2}{2\omega_k}(-1)e^{i\omega_k t-i\omega_k t'}e^{-ikx+ikx'}$.

欲使上式恒等,等式两边同一波矢量的项应分别相等,故得实标量场

$$[S_k,S_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}, \qquad (3.3.11)$$
$$[S_k,S_{k'}] = 0 = [S_k^\dagger, S_k^\dagger]$$

类似可得

复标量场:$[p_k,p_k^\dagger] = [q_k,q_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}$,

$$[p_k,p_{k'}] = 0 = [q_k,q_{k'}], \qquad (3.3.12)$$

电磁场:$[c_k^\mu,c_{k'}^{\nu\dagger}] = g_{\mu\omega}\delta_{kk'}, g_{\mu\omega} = (+1,+1,+1,-1)$

$$\mu,\nu = 1,2,3,0$$

$$[c_k^\mu,c_{k'}^\nu] = [c_k^{\mu\dagger},c_{k'}^{\nu\dagger}] = 0. \qquad (3.3.13)$$

Dirac 场:$\{a_{ks},a_{k's'}^\dagger\} = \{b_{ks},b_{k's'}^\dagger\} = \delta_{kk'}\delta_{ss'}$

$$\{a_{ks}^{\dagger},a_{k's'}^{\dagger}\}=\{b_{ks}^{\dagger},b_{k's'}^{\dagger}\}=0,$$
$$\{a_{ks},a_{k's'}\}=\{b_{ks},b_{k's'}\}=0. \tag{3.3.14}$$

3.3.3. 粒子数算符,产生算符和消灭算符

由第三章公式(3.2.5)知一切可观测量的体密度均可表为

$$A(x)=\psi^{\dagger}(x)\Gamma\psi(x).$$

而按(3.3.6),任意场量$\psi(x)$恒可展开为

$$\left.\begin{aligned}\psi(x)&=\sum_{k}(\alpha(k)\psi_k^{(+)}(x)+\beta^{\dagger}(k)\psi_k^{(-)}(x)),\\ \psi^{\dagger}(x)&=\Sigma(\alpha^{\dagger}(k)\psi_k^{(+)*}(x)+\beta(k)\psi_k^{(-)*}(x)).\end{aligned}\right\} \tag{3.3.15}$$

Γ是作用在本征函数$\psi^{(+)}(x),\psi^{(-)}(x)$上的厄米矩阵或厄米算符.

且注意(3.3.2)

$$\psi_k^{(+)}(x)\sim e^{-i\omega_k t}\cdot e^{+ikx}.$$
$$\psi_k^{(-)}(x)\sim e^{+i\omega_k t}\cdot e^{-ikx}. \tag{3.3.16}$$

积分量为

$$\boldsymbol{A}=\int A(\boldsymbol{x},t)d^3\boldsymbol{x}=\int\psi^{\dagger}(x)\Gamma\psi(x)dV.$$

以(3.3.15)代入上式得

$$\begin{aligned}A&=\sum_{k,k'}\int[(\alpha_k^{\dagger}\psi_k^{(+)*}+\beta_k\psi_k^{(-)*})\Gamma(\alpha_{k'}\psi_k^{(+)}+\beta_{k'}^{\dagger}\psi_{k'}^{(-)})]dV\\&=\sum_{k,k'}\int[(\alpha_k^{\dagger}\alpha_{k'}\psi_k^{(+)*}\Gamma\psi_{k'}^{(+)}+\alpha_k^{\dagger}\beta_{k'}^{\dagger}\psi_k^{(+)*}\Gamma\psi_{k'}^{(-)}\\&\quad+\beta_k\alpha_{k'}\psi_k^{(-)*}\Gamma\psi_{k'}^{(+)}+\beta_k\beta_{k'}^{\dagger}\psi_k^{(-)*}\Gamma\psi_{k'}^{(-)}]dV.\end{aligned}$$

按量子条件,可把上式化为

$$\begin{aligned}A&=\sum_{k,k'}\int a_k^{\dagger}a_{k'}G\psi_k^{(\pm)*}\psi_{k'}^{(\pm)}dV+\sum_{k,k'}\int b_kb_{k'}G'\psi_k^{(\pm)*}\psi_{k'}^{(\mp)}dV\\&\quad+\sum_{k,k'}\int\delta_{kk'}G_{k'}^{(-)}\psi_k^{(-)*}\psi_{k'}^{(-)}dV.\end{aligned} \tag{3.3.17}$$

其中$a_k^{\dagger}a_{k'}G\psi_k^{(\pm)*}\psi_{k'}^{(\pm)}\equiv(\alpha_k^{\dagger}\alpha_{k'}\psi_k^{(+)*}\Gamma\psi_{k'}^{(+)}\pm\beta_k^{\dagger}\beta_{k'}\psi_k^{(-)*}\Gamma\psi_{k'}^{(-)})$

$$=\alpha_k^{\dagger}\alpha_{k'}G_{k'}^{(+)}\psi_k^{(+)*}\psi_{k'}^{(+)}\pm\beta_k^{\dagger}\beta_{k'}G_{k'}^{(-)}\psi_k^{(-)*}\psi_{k'}^{(-)}.$$

（± 号由对易和反对易决定）

$$b_k b_{k'} G' \psi_k^{(\pm)^*} \psi_{k'}^{(\mp)} \equiv (\alpha_k^\dagger \beta_{k'}^\dagger \psi_k^{*(+)} \Gamma \psi_{k'}^{(-)} + \beta_k \alpha_{k'} \psi_k^{*(-)} \Gamma \psi_{k'}^{(+)})$$

$$= \alpha_k^\dagger \beta_{k'}^\dagger G_{k'}^{(-)} \psi_k^{(+)^*} \psi_{k'}^{(-)} + \beta_k \alpha_{k'} G_{k'}^{(+)} \psi_k^{(-)^*} \psi_{k'}^{(+)}.$$

但厄米算符的本征函数 $\psi^{(\pm)}$ 应符合正交归一化条件

$$\int \psi_k^{(\eta)^*} \psi_{k'}^{(\eta')} \mathrm{d}V = \delta_{kk'} \delta_{\eta\eta'}, (\eta, \eta' = \pm)$$

故(3.3.17)化为

$$A = \sum_{k,\lambda} a_{k\lambda}^\dagger a_{k\lambda} G(k\lambda) + \sum_{k,\lambda} G_k^{(-)}(k\lambda)$$

$$= \sum_{k,\lambda} N_{k\lambda} G(k\lambda) + \sum_{k,\lambda} G_k^{(-)}(k\lambda). \tag{3.3.18}$$

式中 $a_k^\dagger a_k G \equiv \alpha_k^\dagger \alpha_k G_k^{(+)} \pm \beta_k^\dagger \beta_k G_k^{(-)}$.

由于 A 是算符，故

$$N_{k\lambda} \equiv a_{k\lambda}^\dagger a_{k\lambda} \tag{3.3.19}$$

也是算符，易知是一个厄米算符，叫粒子数算符，为简单计，我们写作 $N_k = a_k^\dagger a_k$，标符 k 表示一组完备量子数集合.

如果可以证明 N_k 的本征值 N'_k 是非负整数，则观测量 A 的本征值

$$A' = \sum_k N'_k G(k\lambda)$$

是以不同的 k 标志的 N'_k 个粒子的贡献 $N'_k G(k)$ 之和，这就显示了场的粒子性，下面我们证明：

$N_k \equiv a_k^\dagger \cdot a_k$ 的本征值 N'_k 恒为非负实数.

证 设 $N_k|\psi\rangle = a_k^\dagger a_k|\psi\rangle = N'_k|\psi\rangle, |\psi\rangle \neq 0.$

左乘以 $\langle\psi|$ 得

$$\langle\psi|N_k|\psi\rangle = N'_k\langle\psi|\psi\rangle = N'_k$$

但 $\langle\psi|N_k|\psi\rangle = \langle\psi|a_k^\dagger a_k|\psi\rangle = (a_k|\psi\rangle)^\dagger \cdot (a_k|\psi\rangle)$

$$= |a_k|\psi\rangle|^2 \geqslant 0.$$

故 $N'_k \geqslant 0.$

取“=”号是因为，虽 $|\psi\rangle \neq 0$，但不能排除 $a_k|\psi\rangle = 0.$

若 $|\psi\rangle \neq 0, a_k|\psi\rangle \neq 0$，并且 Hilbert 空间取正定度规，则应取“〉”号.

上述论证已表明 N'_k 是一个非负实数.

若量子条件为对易关系 —— 玻色子，

由 $N|\psi\rangle = N'|\psi\rangle$，得 $a_k^\dagger a_k^\dagger a_k|\psi\rangle = a_k^\dagger (a_k a_k^\dagger - 1)|\psi\rangle$

$$= (a_k^\dagger a_k a_k^\dagger - a_k^\dagger)|\psi\rangle, N'a^\dagger|\psi\rangle = (N-1)a^\dagger|\psi\rangle.$$

所以 $N(a_k^\dagger|\psi\rangle) = (N'+1)(a_k^\dagger|\psi\rangle)$.

可见，若 $N|\psi\rangle = N'|\psi\rangle$，

则 $$Na_k^\dagger|\psi\rangle = (N'+1)a_k^\dagger|\psi\rangle. \tag{3.3.20}$$

算符 $a^\dagger$ 的作用是使粒子数算符 N 的本征态 $|\psi\rangle$ 的本征值由 N' 增至 $(N'+1)$，故 $a^\dagger$ 叫产生算符. 类似易知

若 $N|\psi\rangle = N'|\psi\rangle$，

则 $$Na_k|\psi\rangle = (N'-1)a_k|\psi\rangle. \tag{3.3.21}$$

因为 $Na_k|\rangle = a_k^\dagger a_k a_k|\rangle = (a_k a_k^\dagger - 1)a_k|\rangle = a_k N|\rangle - a_k|\rangle$

$$= (N'-1)a_k|\rangle.$$

所以 a_k 叫消灭算符.

由于 N 的本征值为非负，故必存在一个下限.

现在证明 N 的最小本征值为零.

设算符 N 的最小本征值为 $N_0 \neq 0$，相应的本征态为

$$|N_0\rangle \neq 0,$$

则 $N \cdot a_k|N_0\rangle = a_k N|N_0\rangle - a_k|N_0\rangle$

$$= a_k N_0|N_0\rangle - a_k|N_0\rangle$$

$$= (N_0 - 1)(a_k|N_0\rangle).$$

若 $(a_k|N_0\rangle) \neq 0$，则 $(N_0 - 1) \geqslant 0$ 仍是 N 的本征态 $(a|N_0\rangle)$ 的本征值，显然与假设矛盾.

故只能 $a_k|N_0\rangle = 0$，由

$$\langle N_0|N|N_0\rangle = N_0\langle N_0|N_0\rangle = N_0 = \langle N_0|a^+ a|N_0\rangle$$

$$= |a_k|N_0\rangle|^2 = 0,$$

知此时 $N_0 = 0$.

最后得证：粒子数算符 $N = a^\dagger a$ 的最小本征值为零，此时 $a_k|0\rangle = 0$.

即 $N|0\rangle = 0$，

显然 $|1\rangle = a_k^\dagger|0\rangle$.

$$|2\rangle = a_k^\dagger|1\rangle = a_k^\dagger a_k^\dagger|0\rangle.$$

若 $a_k|0\rangle = 0$，对所有 k，λ 等而言，则 $|0\rangle$ 叫真空态，所有粒子数算符的本征矢可构成 Hilbert 空间的一个表示，叫 Fock 表示.

如果 $|\rangle$ 表示一个量子态，即一组可对易完备算符集的公共本征态，则对自旋为整数的粒子(张量场)，一个量子态可含有任意整数个这样的粒子，它们服从玻色 - 爱因斯坦统计，叫玻色子.

若量子条件为反对易关系

$$\{a_k, a_k^\dagger\} = a_k a_k^\dagger + a_k^\dagger a_k = 1$$

$$\{a_k, a_k\} = 2a_k \cdot a_k = 0 \qquad (3.3.22)$$

$$\{a_k^\dagger, a_k^\dagger\} = 2a_k^\dagger a_k^\dagger = 0$$

设 $N_k|\rangle = a_k^\dagger a_k|\rangle = N'_k|\rangle$

上式二边左乘以 N 得

$$N_k^2|\rangle = N' N_k|\rangle = N'^2|\rangle$$

但 $N_k^2 = a^\dagger a_k a_k^\dagger a_k = a_k^\dagger(1 - a_k^\dagger a_k)a_k$

$$= a_k^\dagger a_k - - a_k^\dagger a_k^\dagger a_k a_k = a_k^\dagger a_k = N_k$$

故 $N_k^2|\rangle = N_k|\rangle = N'_k|\rangle = N'^2_k|\rangle$

即 $N'_k = N'^2_k$ 或 $N'_k(1 - N'_k) = 0$

显然可能性仅为 $N'_k = 0, 1$.

如果 $|\rangle$ 表示一个量子态，则对于自旋为半整数的粒子(旋量场)一个量子态中可含有的粒子数不为 0 即为 1—— 泡里排除原理，它们服从费米 - 狄拉克统计，叫费米子.

由于 $N(a^\dagger|0\rangle) = a^\dagger aa^\dagger|0\rangle = (1 - aa^\dagger)a^\dagger|0\rangle$

$$= (a^\dagger|0\rangle. \qquad (3.3.23)$$

显然 $a^\dagger$ 仍是产生算符

$$N(a|1\rangle) = a^\dagger aa|1\rangle = (1 - aa^\dagger)a|1\rangle$$
$$= a|1\rangle - a|1\rangle = 0(a|1\rangle).$$

显然 a 仍是消灭算符.

§3.4 电磁场的量子化

在(3.3.9)中取自然单位系统 $c = \hbar = 1$.

注意，$c_{\mu k}(t) = a_{\mu k}e^{-i\omega_k t} = a_{\mu k}e^{ik_4 x_4}\begin{cases} x_4 = ict, \\ k_4 = i\dfrac{\omega_k}{c} \end{cases}$,

则 $$A_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}(a_{\mu k}e^{ik_\sigma x_\sigma} + \hat{a}_{\mu k}e^{-ik_\sigma x_\sigma})$$
$$= \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}(a_{\nu k}e^{ik_\sigma x_\sigma} + \hat{a}_{\nu k}e^{-ik_\sigma x_\sigma})\delta_{\nu\mu}.$$

式中“ˆ”表示厄米共轭或反厄米共轭.

引入 4 个单位矢量或标架 $e_\lambda(\lambda = 1,2,3,4)$ 令满足

(1) $e_{\lambda\mu} = \delta_{\lambda\mu}$，故 $\begin{cases} e_{\lambda\mu}e_{\lambda\nu} = \delta_{\mu\nu} \\ e_{\lambda\mu}e_{\lambda'\mu} = \delta_{\lambda\lambda'} \end{cases}$

即上述 4 个单位矢量是 4 维正交时空坐标系的基矢.

(2)

$$e_{\lambda\mu}k_\mu = \begin{cases} 0, \lambda = 1,2 & \text{横场} \\ \omega, \lambda = 3 & \text{纵场} \\ i\omega, \lambda = 4 & \text{类时场} \end{cases} \tag{3.4.1}$$

即选取波矢 $\boldsymbol{k}$ 方向为 z 轴的正向，则 e_λ 即为 4 个单位偏振矢量.

上式可改写为按不同偏振的展开式

$$A_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k,\lambda}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}(a_{\nu k}e^{ik_\sigma x_\sigma} + \hat{a}_{\nu k}e^{-ik}\sigma^x\sigma)\cdot e_{\lambda\nu}e_{\lambda\mu}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k,\lambda}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}(c_{k\lambda}e^{ik\sigma^x\sigma} + \hat{c}_{k\lambda}e^{-ik\sigma^x\sigma})\cdot e_{\lambda\mu}. \qquad (3.4.2)$$

式中 $c_{k\lambda} = a_{\nu k}e_{\lambda\nu}, \hat{c}_{k\lambda} = \hat{a}_{\nu k}e_{\lambda\nu}$.

注意:由 $A_\alpha(\alpha = 1,2,3)$ 的实数性和 A_4 的虚数性知,算符 A_α 应为厄米,A_4 应为反厄米,即

$$A_\alpha^+ = A_\alpha \quad A_4^+ = -A_4$$(因为 $A_0 = -iA_4$ 应是厄米,i.e. $A_0^+ = A_0 \Rightarrow A_4^+ = -A_4$)

这就要求二次量子化后:

$$\hat{a}_{\alpha k} = \hat{a}_{\alpha k}^\dagger, \hat{c}_{\alpha k} = \hat{c}_{\alpha k}^\dagger \qquad (\alpha = 1,2,3)$$

$$\hat{a}_{4k} = -\hat{a}_{4k}^\dagger, \hat{c}_{4k} = -\hat{c}_{4k}^\dagger. \qquad (3.4.3)$$

或"^"="+"$(-1)^{\delta_{\mu 4}}$

下面分经典电磁场和量子电磁场两种情况讨论.

3.4.1. 经典电磁场理论

在经典电磁场理论中可引入 Lorentz 条件

$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0$,由(3.4.2)(3.4.1)得

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = \frac{i}{\sqrt{V}}\sum_{k,\lambda}\frac{e_{\lambda\mu}k_\mu}{\sqrt{2\omega_k}}(c_{k\lambda}e^{ik_\sigma x_\sigma} - \hat{c}_{k\lambda}e^{-ik_\sigma x_\sigma})$$

$$= \frac{i}{\sqrt{V}}\sum_k\left[\frac{\omega_k}{\sqrt{2\omega_k}}(c_{k3}e^{ik_\sigma x_\sigma} - \hat{c}_{k3}e^{-ik_\sigma x_\sigma})\right.$$

$$\left. + i\frac{\omega_k}{\sqrt{2\omega_k}}(c_{k4}e^{ik_\sigma x_\sigma} - \hat{c}_{k4}e^{-ik_\sigma x_\sigma})\right]$$

$$= \frac{i}{\sqrt{V}}\sum_k\sqrt{\frac{\omega_k}{2}}\left[(c_{k3} + ic_{k4})e^{ik_\sigma x_\sigma} - (\hat{c}_{k3} + i\hat{c}_{k4})e^{-ik_\sigma x_\sigma}\right]$$

$$= 0,$$

式中 $c_{k\lambda}, \hat{c}_{k\lambda}$ 均当做数量看待，此时“ ^ ”=“ * ”$(-1)^{\delta_{\mu 4}}$.

此式对任意 k 值和任意 x_σ 值均成立，故得Lorentz条件的等效表述为

$$\begin{aligned} c_{k3} + \mathrm{i}c_{k4} &= 0, \\ \hat{c}_{k3} + \mathrm{i}\hat{c}_{k4} &= 0. \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

注意到：$\hat{c}_{k4} = -c_{k4}^{\dagger}$ $\hat{c}_{k3} = c_{k3}^{\dagger}$，上述第二式即

$c_{k3}^{\dagger} - \mathrm{i}c_{k4}^{\dagger} = 0$，正是第一式的厄米共轭，在没有二次量子化的经典电磁场理论中，厄米共轭应表为复共轭.

若引入 $c_{k4} = \mathrm{i}c_{k0}$，则(3.4.4)式化为

$$\begin{aligned} c_{k3} - c_{k0} &= 0, \\ c_{k3}^{\dagger} - c_{k0}^{\dagger} &= 0. \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

第二式正好是第一式的复共轭.

利用 $F_{\mu\nu} \equiv \dfrac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$ 及(3.4.2)易得

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{V}} \sum_{k,\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} &(c_{k\lambda} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\sigma x_\sigma} - \hat{c}_{k\lambda} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_\sigma x_\sigma}) \\ &\times (e_{\lambda\nu} k_\mu - e_{\lambda\mu} k_\nu), (\lambda = 1,2,3,4). \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

我们证明 $\boldsymbol{E} = \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{V}} \sum\limits_{\substack{k \\ \lambda=1,2}} \sqrt{\dfrac{\omega_k}{2}} (c_{k\lambda} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\sigma x_\sigma} - \hat{c}_{k\lambda} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_\sigma x_\sigma}) \boldsymbol{e}_\lambda,$ (3.4.7)

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{V}} \sum_{\substack{k \\ \lambda=1,2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} [\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{e}_\lambda] (\mathrm{e}_{k\lambda} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\sigma x_\sigma} - \hat{c}_{k\lambda} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_\sigma x_\sigma}), \tag{3.4.8}$$

式中 $\boldsymbol{e}_\lambda = (e_{\lambda_1}, e_{\lambda_2}, e_{\lambda_3})$

证明：注意：

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -\mathrm{i}E_x \\ -H_z & 0 & H_x & -\mathrm{i}E_y \\ H_y & -H_x & 0 & -\mathrm{i}E_z \\ \mathrm{i}E_x & \mathrm{i}E_y & \mathrm{i}E_z & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_\alpha = \frac{1}{-\mathrm{i}}F_{\alpha 4} = -\frac{1}{\mathrm{i}}\{\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{V}}\sum_{k\lambda}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}(c_{k\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\sigma x_\sigma} -$$

$$-\hat{c}_{k\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_\sigma x_\sigma})(e_{\lambda 4}k_\alpha - \mathrm{e}_{\lambda\alpha}k_4)\}(\alpha = 1,2,3)$$

$$= \frac{1}{-\mathrm{i}}\{\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{V}}\sum_{k\lambda}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}(c_{k\lambda}e_{\lambda 4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\sigma x_\sigma} - \hat{c}_{k\lambda}e_{\lambda 4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_\sigma x_\sigma})k_\alpha\}$$

$$+\{\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{V}}\sum_{k\lambda}\sqrt{\frac{\omega_k}{2}}\cdot(c_{k\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\sigma x_\sigma} - \hat{c}_{k\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_\sigma x_\sigma})e_{\lambda\alpha}\}$$

$$= \frac{1}{-\mathrm{i}}\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{V}}\sum_{k}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}(c_{k_4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\sigma x_\sigma} - \hat{c}_{k_4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_\sigma x_\sigma})k_\alpha$$

$$+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{V}}\sum_{k\lambda}\sqrt{\frac{\omega_k}{2}}\cdot(c_{k\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\sigma x_\sigma}) - \hat{c}_{\lambda\alpha}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_\sigma x_\sigma})e_{\lambda\alpha}.$$

$$\text{第二项} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{V}}\sum_{k,\lambda=1,2}\sqrt{\frac{\omega_k}{2}}(c_{k\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_\sigma x_\sigma} - \hat{c}_{k\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_\sigma x_\sigma})\cdot e_{\lambda\alpha}$$

$$+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{V}}\sum_{k}\sqrt{\frac{\omega_k}{2}}\cdot(c_{k3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\sigma x_\sigma} - \hat{c}_{k3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_\sigma x_\sigma})e_{3\alpha}.$$

(注意到 $e_{4\alpha} = 0$),$(\alpha = 1,2,3)$

$$\text{第一项} = \frac{1}{-\mathrm{i}}\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{V}}\sum_{k}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}(c_{k4}e^{\mathrm{i}k_\sigma x_\sigma} - \hat{c}_{k4}e^{-\mathrm{i}k_\sigma x_\sigma})\omega_k e_{3\alpha}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k}\sqrt{\frac{\omega_k}{2}}(c_{k4}e^{\mathrm{i}k_\sigma x_\sigma} - \hat{c}_{k4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_\sigma x_\sigma})e_{3\alpha}.$$

(因为 $k_\alpha = \omega\delta_{3\alpha} = \omega e_{3\alpha}$) 由(3.4.4)知第一项与第二项中的第二项相消故得证.

我们证明电磁场的能量 H 和动量 $\boldsymbol{p}$ 分别为

$$H = \sum_{k,\lambda=1,2}\frac{\omega}{2}(c_{k\lambda}\hat{c}_{k\lambda} + \hat{c}_{k\lambda}c_{k\lambda}) \qquad (3.4.9)$$

$$\boldsymbol{p} = \sum_{k,\lambda=1,2}\frac{\boldsymbol{k}}{2}(c_{k\lambda}\hat{c}_{k\lambda} + \hat{c}_{k\lambda}c_{k\lambda}). \qquad (3.4.10)$$

证：$H = -\int T_{44}\mathrm{d}V^{*} = \int\left[\frac{1}{2}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_4}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_4}\right]\mathrm{d}V$ ·

$$\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\substack{k\\ \lambda}}\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\omega}}(c_{k\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} - \hat{c}_{k\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx})k_\mu e_{\lambda\nu},$$

$$\frac{\partial A_\nu}{\partial x_4} = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\substack{k\\ \lambda}}\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\omega}}(c_{k\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} - \hat{c}_{k\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx})k_4 e_{\lambda\nu},$$

$$\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} = \frac{1}{\sqrt{V}}\left[\sum_{\substack{k\\ \lambda}}\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\omega}}(c_{k\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} - \hat{c}_{k\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx})k_\mu e_{\lambda\nu}\right]$$

$$\times\left[\sum_{\substack{k'\\ \lambda'}}\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\omega'}}(c_{k'\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x} - \hat{c}_{k'\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'x}) \cdot\right.$$

$$\left.\cdot\, k'_\mu e_{\lambda'\nu}\right] = \frac{1}{V}\sum_{\substack{k,k'\\ \lambda,\lambda'}}\frac{-1}{\sqrt{2\omega\cdot 2\omega'}}\cdot$$

$$\cdot\,(c_{k\lambda}c_{k'\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+k')x}k_\mu k'_\mu e_{\lambda\nu}e_{\lambda'\nu} -$$

$$- c_{k\lambda}\hat{c}_{k'\lambda'} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-k')x}k_\mu k_\mu' e_{\lambda\nu}e_{\lambda'\nu}$$

$$- \hat{c}_{k\lambda}c_{k'\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-k')x}k_\mu k_\mu' e_{\lambda\nu}e_{\lambda'\nu}$$

$$+ \hat{c}_{k\lambda}\hat{c}_{k'\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k+k')x}k_\mu k_\mu' e_{\lambda\nu}e_{\lambda'\nu})$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{\substack{k,k'\\ \lambda}}\frac{-1}{\sqrt{2\omega 2\omega'}} \times (c_{k\lambda}c_{k'\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+k')x}$$

$$- c_{k\lambda}\hat{c}_{k'\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-k')x} - \hat{c}_{k\lambda}c_{k'\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k'-k)x}$$

$$+ \hat{c}_{k\lambda}\hat{c}_{k'\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k+k')x})k_\mu k_\mu'.$$

$$\frac{\partial A_\nu}{\partial x_4}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_4} = \frac{1}{V}\sum_{kk'}\frac{-1}{\sqrt{2\omega 2\omega'}}(c_{k\lambda}c_{k'\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+k')x}$$

$$- c_{k\lambda}\hat{c}_{k'\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-k')x} - \hat{c}_{k\lambda}c_{k'\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k'-k)x} +$$

$$+ \hat{c}_{k\lambda}\hat{c}_{k'\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k+k')x})k_4 k_4'.$$

$$H = \int\left[\frac{1}{2}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_4}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_4}\right]\mathrm{d}V = \frac{1}{V}\sum_{kk'}\frac{-1}{\sqrt{2\omega 2\omega'}}$$

---

* $T_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\mu}\frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\rho}\frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\rho}$.

$$\cdot \{\frac{1}{2}\mathrm{d}V(c_{k\lambda}c_{k'\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+k')x} - c_{k\lambda}\hat{c}_{k'\lambda}\cdot$$

$$\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-k')x} - \hat{c}_{k\lambda}c_{k'\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k'-k)x} + \hat{c}_{k\lambda}\hat{c}_{k'\lambda}\cdot$$

$$\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k+k')x})k_\mu k'_\mu - \int \mathrm{d}V(c_{k\lambda}c_{k'\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+k')x}$$

$$- c_{k\lambda}\hat{c}_{k'\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-k')x} - \hat{c}_{k\lambda}c_{k'\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k'-k)x} +$$

$$+ \hat{c}_{k\lambda}\hat{c}_{k'\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k+k')x}k_4k'_4\}.$$

$$\frac{1}{2}\int \mathrm{d}V(c_{k\lambda}c_{k'\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+k')x}k_\mu k'_\mu = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}V c_{k\lambda}c_{k'\lambda}$$

$$\times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega+\omega')t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+k')x}(\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}' - \omega\omega').$$

考虑到$\frac{1}{V}\int \mathrm{d}V\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+k')x} = \delta_{-k'k'}$，上式为

$$\frac{1}{2}c_{k\lambda}c_{(-k),\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\omega t}(-\boldsymbol{k}^2 - \omega^2) = -c_{k\lambda}c_{(-k)\lambda}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\omega t}\omega^2.$$

类似的有

$$-\int \mathrm{d}V c_{k\lambda}c_{k'\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+k')x}k_4k'_4 = -c_{k\lambda}c_{(-k)\lambda}$$

$$\times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\omega t}(-\omega^2) = c_{k\lambda}c_{(-k),\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\omega t}\cdot\omega^2.$$

故上述二项相消.

同理，第一个积分的第 4 项与第二个积分的第 4 项相消.

考虑到 $k_\mu k_\mu = 0$，第一个积分的其他二项的贡献为 0，最后得

$$H = \sum_{k,\lambda}\frac{\omega}{2}(c_{k\lambda}\hat{c}_{k\lambda} + \hat{c}_{k\lambda}c_{k\lambda}) = \sum_{\substack{k\\ \lambda=1,2,3}}\frac{\omega}{2}(c_{k\lambda}\hat{c}_{k\lambda}$$

$$+ \hat{c}_{k\lambda}c_{k\lambda}) + (-c_{k_0}c^*_{k_0} - c^*_{k_0}c_{k_0}) = \sum_{\substack{k\\ \lambda=1,2}}\frac{\omega}{2}(c_{k\lambda}$$

$$\cdot \hat{c}_{k\lambda} + \hat{c}_{k\lambda}c_{k\lambda}) + \frac{1}{2}\omega(c_{k_3}\hat{c}_{k_3} + \hat{c}_{k_3}c_{k_3} + c_{k_4}\hat{c}_{k_4}$$

$$+ \hat{c}_{k_4}c_{k_4}) = \sum_{\substack{k\\ \lambda=1,2}}\frac{\omega}{2}(c_{k\lambda}\hat{c}_{k\lambda} + \hat{c}_{k\lambda}c_{k\lambda}).$$

（由 Lorentz 条件(3.4.4)）

注意在经典电磁场理论中“ ^ ”＝“ * ”$(-1)^{\delta_{\mu 4}}$.

由(3.4.7)～(3.4.10)知：

① 在经典电磁场理论中，辐射电磁场能量是非正定的，这一点是与电磁场方程的 Lorentz 协变性相关连的，但由于 Lorentz 条件，在一切可观测量中仅出现横场，而纵场和类时场的贡献正好相互抵消，因而在辐射电磁场中纵场和类时场不显示任何物理效应. 但我们知道纵场和类时场只表现为库仑场的物理效应.

② 可注意在经典电磁场理论中，电磁场真空的能量、动量均为 0，因而真空就意味着虚空. 在下节量子化后情况就不一样了.

3.4.2. 量子电磁场理论

在量子电磁场理论中，我们把 $c_{k\lambda}$ 看做算符.

为此，须引入 $c_{k\lambda}$ 间的对易关系，由对易关系(3.3.13)

$$[c_{\mu k}, c^{\dagger}_{\nu k'}]e_{\mu\lambda}e_{\nu\lambda'} = g_{\mu\alpha}e_{\mu\lambda}e_{\nu\lambda'}\delta_{kk'}$$

$$\Rightarrow [c_{k\lambda}, c^{\dagger}_{k'\lambda'}] = g_{\lambda\lambda'}\cdot\delta_{kk'}\ (e_{\mu\lambda} = \delta_{\mu\lambda}, e_{\nu\lambda'} = \delta_{\nu\lambda'}).$$

易知 $[c_{k\lambda}, c_{k'\lambda'}] = [c^{\dagger}_{k\lambda}, c^{\dagger}_{k'\lambda'}] = 0.$

为简写计，上述对易关系可改写为

$$[c_\lambda, c^{\dagger}_{\lambda'}] = g_{\lambda\lambda'}. \tag{3.4.11}$$

$$[c_\lambda, c_{\lambda'}] = [c^{\dagger}_{\lambda}, c^{\dagger}_{\lambda'}] = 0.$$

当 $\lambda, \lambda' = 1,2,3$　　$c_\lambda c^{\dagger}_{\lambda} - c^{\dagger}_{\lambda}c_\lambda = 1.$

$N_\lambda = c^{\dagger}_{\lambda}c_\lambda$ 为粒子数算符，其本征值为 $0,1,2\cdots$，c_λ 为消灭算符，$c^{\dagger}_{\lambda}$ 为产生算符.

当 $\lambda = 0$，

$[c_0 c^{\dagger}_{0}] = -1 \Rightarrow [c^{\dagger}_{0}, c_0] = 1$，即 $c^{\dagger}_{0}c_0 - c_0 c^{\dagger}_{0} = 1.$

$N_0 = c_0 c^{\dagger}_{0}$ 为粒子数算符，其本征值为 $0,1,2,\cdots$

$c^{\dagger}_{0}$ 为消灭算符，c_0 为产生算符.

已经指出旧 Lorentz 条件与量子条件不相容，应采用 Fermi 提出的新 Lorentz 条件.

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}|\rangle = 0.$$

由(3.4.4)(3.4.5)知新 Lorentz 条件即

$$(c_{k3}-c_{k0})|\rangle=0 \quad 或 \quad (c_3+ic_4)|\rangle=0.$$

$$\langle|(c_k^{\dagger}{}_3-c_k^{\dagger}{}_0)=0 \quad 或 \quad \langle|(\hat{c}_3+i\hat{c}_4)=0. \qquad (3.4.12)$$

最后一式是由(3.4.4)得到的.(3.4.11)可以改写为$[c_\lambda,\hat{c}_\lambda']=g_{\lambda\lambda'}(\lambda=1,2,3,0)$,这表示当采用不定度规时,"^"即"†".

显然上二条件只有一个是独立的,对于能量 H,

$$H=\sum_{\lambda=1,2,3,4}\frac{\omega}{2}(c_\lambda\hat{c}_\lambda+\hat{c}_\lambda c_\lambda)=\sum_{\substack{k\\ \lambda=1,2}}\frac{\omega}{2}(c_\lambda\hat{c}_\lambda+\hat{c}_\lambda c_\lambda)+\sum_k\frac{\omega}{2}[c_3\hat{c}_3+\hat{c}_3c_3+c_4\hat{c}_4+\hat{c}_4c_4]$$

$$\begin{pmatrix}\hat{c}_\alpha=\hat{c}_\alpha^{\dagger} & (\alpha=1,2,3)\\ \hat{c}_4=-c_\alpha^{\dagger}=-(ic_0)^{\dagger}=ic_0^{\dagger}\end{pmatrix}.$$

$$H=\sum_{\substack{k\\ \lambda=1,2}}\frac{\omega}{2}(c_\lambda c_\lambda^{\dagger}+c_\lambda^{\dagger}c_\lambda)+\sum_k\frac{\omega}{2}[2c_3^{\dagger}c_3+1-2c_0c_0^{\dagger}-1]$$

$$=\sum_{\substack{k\\ \lambda=1,2}}\omega(N_\lambda+\frac{1}{2})+\sum_k\omega(N_3-N_0),(c_4=ic_0,\hat{c}_4=ic_0^{\dagger}).$$

因之类时光子对总能量的贡献为负.可见电磁场量子化后,能量的非正定性仍然保持,这显然是不合理的,可看出这一无物理意义的结果,由新 Lorentz 条件可以消除.

因 $2(N_3-N_0)=2[c_3^{\dagger}c_3-c_0c_0^{\dagger}]=[(c_3^{\dagger}-c_0^{\dagger})(c_3+c_0)+(c_3^{\dagger}+c_0^{\dagger})(c_3-c_0)+2.$

$$N_3-N_0=\frac{1}{2}[(c_3^{\dagger}-c_0^{\dagger})(c_3+c_0)+(c_3^{\dagger}+c_0^{\dagger})(c_3-c_0)]+1,$$

考虑到(3.4.12)即知.

故$\langle|H|\rangle=\sum_{\lambda=1,2}^{k}\omega_k(N'_\lambda+\frac{1}{2})=\sum_{\substack{k\\ \lambda=1,2}}h\nu(N'_{k\lambda}+\frac{1}{2}).$

式中 $N'_{k\lambda}$ 系粒子数算符的本征值.

这表明,纵光子和类时光子对总能量的贡献正好反号,因而互

相抵消，结果只有横光子有贡献.

类似有 $\langle|\boldsymbol{p}|\rangle = \sum\limits_{\substack{\lambda=1,2\\ \boldsymbol{k}}} \boldsymbol{k}(N'_\lambda + \frac{1}{2})$. (3.4.13)

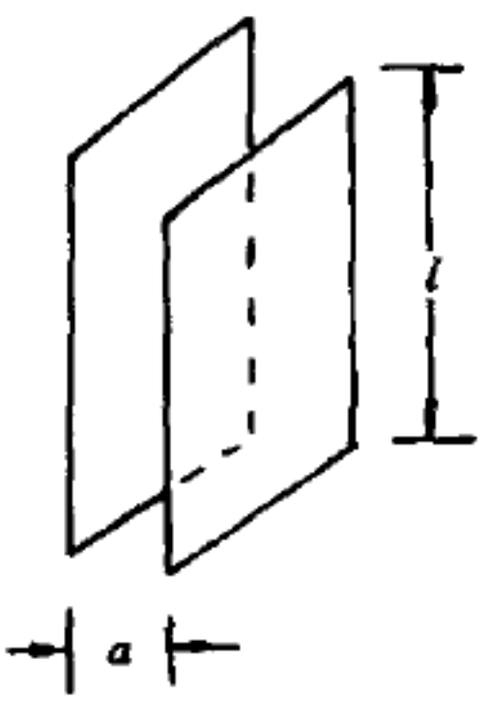
总之：

① 在量子电磁理论中，辐射场能量的非正定性仍然存在，由于 Lorentz 条件纵光子和类时光子在一切可观测量中的贡献正好抵消，故二者的贡献恒为零，这就又保持了量子电磁场能量的正定性. 只有横光子有物理效应，每个横光子对能量和动量的贡献分别为 $h\nu$ 和 $k(|k| = h\nu/c = h/\lambda)$. 但以后将指出当考虑 Dirac 场与电磁场的相互作用时，纵场和类时场的作用与库仑相互作用等效.

② 若定义电磁场真空 $|\rangle_v$ 为没有横光子的状态，则 $N_{k,1}|\rangle_v = N_{k,2}|\rangle_v = 0$，但电磁场真空含有无穷大的零点能量 $\sum\limits_k \frac{1}{2}h\nu$，即在量子电磁场理论中电磁场真空的能量是发散的. 这一结论是与经典电磁理论大不相同的. 通常在涉及到能级跃迁问题中，电磁场真空不作任何贡献，但在今后辐射修正一节中，我们将提到电子与电磁场真空(零点振动)的相互作用所导致的一系列现象(电子质量重整化，电荷重整化等).

③Casimir 效应(1948).

如图有二个中性的平行平板完全导体放置真空中($L \gg a$). 由于边界条件(完全导体上 $E = 0$)，在体积 $L^2 \cdot a$ 内的真空零点振荡应满足条件 $\lambda = \frac{a}{n}$ 或 $k_z = \frac{2\pi n}{a}$，这表示，上述边界条件的存在破坏了真空，设无平行导体时，$L^2 \cdot a$ 内真空能量为 E_V，有平行板导体时，$L^2 \cdot a$ 内的能量为 E_B，那么由于导体的引入使得体积 $L^2 \cdot a$ 内出现了能量改变 $E = E_B - E_V < 0$ 或出现负能量的面密度 $\sigma = \frac{E}{L^2}$ 和面密度力 f，由量纲考



虑知 $\sigma \sim -\frac{\hbar c}{a^3}, f \sim -\frac{\hbar c}{a^4}$，具体计算得出.（详见 Itzykson. Quantum Field Theosy，p. 139 ~ 141）

$$\sigma = -\frac{\pi^2}{720}\frac{\hbar c}{a^3}, f = -\frac{\pi^2}{240}\frac{\hbar c}{a^4}.$$

其中“—”号表示引力.

1958 年 Sparnaay(*Physica*，24(1958)，751) 用实验验证了上述引力的存在.（详见 *Annuals of Physics*，112(1978)751）这是有名的 Casimir 效应，它是真空涨落的一个宏观效应，由这一宏观效应可以得到负能物质，或异常物质(exotic matter).

量子电磁场理论告诉我们，真空不是虚空，它具有丰富的物理内容.

3.4.3. 采用不定度规的量子化

按定义电磁场真空为没有横场光子的状态 $|\rangle v$，我们希望进一步分析这种真空是否含有纵场光子和类时光子.

我们可以把没有横场光子的电磁场真空 $|\rangle v$ 表为

$$|\rangle v = \sum_{N_3 N_0} c(N_3, N_0)|N_3, N_0\rangle. \tag{3.4.14}$$

按新 Lorentz 条件，任何物理状态包含 $|\rangle v$ 在内应满足

$$(c_3 - c_0)|\rangle v = \sum_{N_3 N_0} c(N_3, N_0)(|N_3 - 1), N_0\rangle - |N_3, (N_0 + 1)\rangle) = 0.$$

或 $$\sum_{\substack{N_0=0 \\ N_3=1}} c(N_3 N_0)|(N_3 - 1), N_0\rangle = \sum_{\substack{N_0=0 \\ N_3=0}} c(N_3, N_0)|N_3, (N_0 + 1)\rangle. \tag{3.4.15}$$

按 $|N_3, N_0\rangle$ 整理即等式左边令 $N_3 - 1 \to N_3$，等式右边令 $N_0 + 1 \to N_0$，即得

$$\sum_{N_3=0, N_0=0}^{\infty} C((N_3 + 1), N_0)|N_3, N_0\rangle = \sum_{N_3=0, N_0=1}^{\infty} C(N_3, (N_0 - 1))|N_3, N_0\rangle. \tag{3.4.16}$$

由 $|N_3,N_0\rangle$ 的任意性得:$C(N_3+1,N_0)=C(N_3,N_0-1)$.

(3.4.17)

即凡(N_3-N_0)相同的系数均相等.$N_3-(N_0-1)=N_3+1-N_0$,当 $N_3\geqslant N_0$ 必存在无穷序列.

$$C(N_3+1,0)=C(N_3+2,1)=C(N_3+3,2)=\cdots.$$

其中$C(N_3+1,0)$为首项,由(3.4.16)知仅等式左边有相应的态矢 $|N_3,0\rangle$,等式右边无此项存在$(N_0\geq 1)$.

故 $C(N_3+1,0)=C(N_3+2,1)=\cdots=0$.

即 $C(N_3,N_0)=0$,当 $N_3\geqslant N_0$.

当 $N_0>N_3$,令 $N_0-N_3=n\geqslant 1\Rightarrow N_0=N_3+n$,

由(3.4.17)得出无穷序列

$$\cdots C(N_3+1,N_3+n)=C(N_3,N_3+n-1)=\cdots$$
$$=C(0,n-1).$$

其中$C(0,n-1)$为首项.

由(3.4.16)知等式右边有相应的态矢 $|0,n\rangle$,等式左边亦必有此项存在.

由以上推论只能得出当 $N_0>N_3$,$C(N_3,N_0)$ 不必为零,若 $C(N_3,N_2)=0$,当 $N_0\rangle N_3$,则(3.4.14)中所有$C(N_3,N_0)$均为零,i.e. $|\rangle_V=0$,不存在真空态,这是不对的!故应有 ${}_v\langle|\rangle_v=\sum\limits_{N_3N_0}^{\infty}|C(N_3,N_0)|^2\to\infty$.可见

(1)由于新 Lorentz 条件的限制完全不出现纵、类时二类光子的真空态是不存在的.

(2)真空场态矢 $|\rangle_v$ 无法归一化.

显然这表示电磁场的量子化理论遇到了困难.

1950年,S. Gupta 和 K. Bleuler 指出,对于电磁场若在 Hilbert 空间引入不定度规,则上述困难可以克服.

Hilbert 空间是一个无限维的度量空间.

我们一直假定它的度规是一个正定度规，引入度规算符 η：$\eta^{\dagger}=\eta,\eta^{2}=1$ 使得态矢长度恒不为负，即

$$\langle|\eta|\rangle=\langle|\rangle\geqslant 0.$$

二个态矢的正交归一化为$\langle\lambda|\eta|\lambda'\rangle=\langle\lambda|\lambda'\rangle=\delta_{\lambda\lambda'}$.

力学量平均值是$\langle|\eta\bar{\alpha}||\rangle=\langle|\bar{\alpha}|\rangle$.

我们马上要指出，上述量子电磁场所遇到的困难，可以通过引入不定度规 η 完全消除，即引入不定度规算符 η:$\eta^{\dagger}=\eta,\eta^{2}=1$.

使得态矢长度$\langle|\eta|\rangle\lesseqgtr 0$. (3.4.18)

力学量平均值为$\langle|\eta\alpha|\rangle$，二态矢的正交归一化为

$$\langle\lambda|\eta|\lambda'\rangle=\pm\delta_{\lambda\lambda'}.$$

这表示在 Hilbert 空间，当采用正定度规时，$|\rangle^{\dagger}=\langle|,\langle|^{\dagger}=|\rangle$；当采用不定度规时，$|\rangle\hat{}=\langle|\eta,\langle|\hat{}=\eta|\rangle$.

其中“$\hat{}$”表示采用不定度规的态矢的厄米共轭.

当 Hilbert 空间采用不定度规时，首先应注意，算符 α 的厄米共轭 $\hat{\alpha}$ 与采用正定度规时的厄米共轭 $\alpha^{\dagger}$ 存在下列关系

$$\hat{\alpha}=\eta^{-1}\alpha^{\dagger}\eta. \tag{3.4.19}$$

这是因为若 $\hat{\alpha}=\alpha$，则厄米算符 α 的平均值应是实数.

其次，我们把在 Hilbert 空间采用正定度规时的对易关系$[C_{\lambda},C_{\lambda}^{\dagger}]=g_{\lambda\lambda'}$ 改写为$[C_{\lambda},\hat{C}_{\lambda'}]=g_{\lambda\lambda'}$.

$$(g_{\lambda\lambda'})=\begin{pmatrix}1&&&0\\&1&&\\&&1&\\0&&&-1\end{pmatrix},(\lambda,\lambda'=1,2,3,0). \tag{3.4.20}$$

最后，我们规定不定度规符合条件：

(1)$C_{\lambda}^{\dagger}\eta=\eta C_{\lambda}^{\dagger}$ 或 $[C_{\lambda}^{\dagger},\eta]=0,(\lambda=1,2,3)$. (3.4.21)

即 $C_{\lambda}\eta=\eta C_{\lambda}$ 或 $[C_{\lambda},\eta]=0$.

(2)$C_{0}^{\dagger}\eta=-\eta C_{0}^{\dagger}$ 或 $\{C_{0}^{\dagger},\eta\}=0$.

即 $C_{0}\eta=-\eta C_{0}$ 或 $[C_{0},\eta]=0$.

由于 $\hat{C}_\lambda = \eta^{-1}C_\lambda^\dagger\eta$，这事实上即令 $\hat{C}_\lambda = C_\lambda^\dagger(\lambda = 1,2,3)$，$\hat{C}_0 = -C_0^\dagger$. 这样对易关系(3.4.20)即可化为

$$[C_\lambda, C_\lambda^\dagger] = \delta_{\lambda,\lambda'},(\lambda = 1,2,3,0). \tag{3.4.22}$$

这样，横场、纵场和类时场的量子条件完全统一.

当 $\lambda = 1,2,3,0$ 时不难看出 $C_\lambda, C_\lambda^\dagger$ 和 $C_\lambda^\dagger C_\lambda = N_\lambda$ 分别是消灭算符、产生算符和粒子数算符，可以看出：

(1) 新 Lorentz 条件应改为

$$\langle|\eta(C_3 - C_0)|\rangle = 0. \tag{3.4.23}$$

只须假定成立

$$(C_3 - C_0)|\rangle = 0$$

即得满足，故新 Lorentz 条件无变化.

(2) 由于(3.4.23)，在引进不定度规后，纵光子和类时光子对于总能量和总动量仍不作贡献(由(3.4.22)及(3.4.12)即知).

最后讨论：

(3) 引入不定度规后的电磁场真空问题.

不难看出 $\eta N_\lambda = N_\lambda\eta,(\lambda = 1,2,3,0)$. (3.4.24)

而 $N_\lambda(\lambda = 1,2,3,0)$ 组成一可对易完备算符集.

按 Dirac. 量子力学，p. 78 定理二：

任一线性算符与一可对易完备算符集中每个算符皆可对易时，此线性算符必可表为该算符集的函数.

因之当 N_λ 在其自表象中对角化时，η 也对角化，可把 η 的任意对角元素表述为

$\langle N_1,N_2,N_3,N_0|\eta|N_1,N_2,N_3,N_0\rangle = \eta_{N_1}\cdot\eta_{N_2}\cdot\eta_{N_3}\cdot\eta_{N_0}$，形式上写成 4 个因子之积，每个因子由 η_{N_λ} 决定.

由
$$\begin{aligned}\langle N_\lambda + 1|\eta|N_\lambda + 1\rangle &= \langle N_\lambda|C_\lambda\eta|N_\lambda + 1\rangle = \langle N_\lambda|\eta C_\lambda|N_\lambda + 1\rangle \\ &= \langle N_\lambda|\eta|N_\lambda\rangle \qquad (\lambda = 1,2,3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle N_0 + 1|\eta|N_0 + 1\rangle &= \langle N_0|C_0\eta|N_0 + 1\rangle = -\langle N_0|\eta C_0|N_0 + 1\rangle \\ &= -\langle N_0|\eta|N_0\rangle.\end{aligned}$$

得 $$\eta_{N_\lambda+1}=\eta_{N_\lambda},(\lambda=1,2,3). \tag{3.4.25}$$

$$\eta_{N_0+1}=-\eta_{N_0}$$

由 $\eta^2=1$ 知 η 的矩阵元可取为

$$\langle N_1N_2N_3N_0\,|\eta|N'_1N'_2N'_3N'_0\rangle=(-1)^{N_0}\delta_{N_1N'_1}\cdot\delta_{N_2N'_2}\cdot\delta_{N_3N'_3}\delta_{N_0N'_0}. \tag{3.4.26}$$

在上式中我们选取了 $\eta_{N_\lambda}=1$，当 $N_\lambda=0,\lambda=1,2,3,0$，

即 $\langle N_\lambda|\eta|N'_\lambda\rangle=\delta_{N_\lambda N'_\lambda},(\lambda=1,2,3)$，

$$\langle N_0|\eta|N'_0\rangle=(-1)^{N_0}\delta_{N_0N'_0}.$$

可见类时光子的存在有可能破坏态矢长度的正定性，这就是取名为不定度规的理由.

因此需要进一步弄清楚：

引入不定度规后的电磁场真空内纵横二类光子的分布情况.

设无横光子存在时的电磁场真空为

$$|\rangle_V=V|\rangle_0=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}a_{n,m}|N_3=n,N_0=m\rangle$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}a_{n,m}C_3^{\dagger n}C_0^{\dagger m}|\rangle 0,$$ 其中 $|\rangle_0$，指四类光子均不存在的电磁场真空.

则由 $$C_3V|\rangle 0=\sum_{\substack{n=0\\m=0}}^{\infty}(a_{n,m}C_3C_3^{\dagger n}C_0^{\dagger m}|\rangle_0$$

$$=[C_3,V]|\rangle_0=\left[\frac{\partial C_3}{\partial C_3}\frac{\partial V}{\partial C_3^\dagger}-\frac{\partial C_3}{\partial C_3^\dagger}\frac{\partial V}{\partial C_3}\right]\Big|\rangle_0$$

$$=\frac{\partial V}{\partial C_3^\dagger}\Big|\rangle_0$$

$$=\sum_{\substack{n=1\\m=0}}a_{n,m}nC_3^{\dagger(n-1)}C_0^{\dagger m}\Big|\rangle_0.$$

类似有：$C_0V|\rangle_0=\frac{\partial V}{\partial C_0^\dagger}|\rangle_0$.

知 Lorentz 条件化为

$$(C_3 - C_0)|\rangle_v = (\frac{\partial V}{\partial C_3^\dagger} - \frac{\partial V}{\partial C_0^\dagger})|\rangle_0 = 0,$$

或 $\sum\limits_{\substack{n=1\\m=0}}^{\infty}[na_{n,m}C_3^{\dagger(n-1)}C_0^{\dagger m} - \sum\limits_{\substack{n=0\\m=1}}^{\infty} ma_{n,m}C_3^{\dagger n}\cdot C_0^{\dagger(m-1)}]|\rangle_0 = 0.$

第一项令 $n-1\to n$，第二项令 $m-1\to m$，且上述恒等式对任意粒子数态矢均成立，即得

$$(n+1)a_{n+1,m} = (m+1)a_{n,m+1}, (n,m = 0,1,2,\cdots).$$

令 $m+1\to m$ 得 $a_{n,m} = \frac{n+1}{m}a_{n+1,m-1}$，$a_{n+1,m-1} =$

$= \frac{n+2}{m-1}a_{n+2,m-2}$，$\cdots$ 应得 $a_{n,m} = \frac{(n+m)!}{n!m!}a_{n+m,0}$.

$$V = \sum_{\substack{n=0\\m=0}} \frac{(n+m)!}{n!m!}a_{n+m,0}\cdot C_3^{\dagger n}C_0^{+m} \underset{(n+m-n)}{=}$$

$$\sum_{\substack{n=0\\m=0}} \frac{n!}{(n-m)!m!}a_{n,0}C_3^{\dagger(n-m)}C_0^{\dagger m} = \sum_{n=0} a_{n,0}(C_3^\dagger + C_0^\dagger)^n.$$

推导上式时，第一步作了代换 $n\to n-m$，第二步运用了二项式展开定理(Pierce 表 p. 88No. 745).

故 $|\rangle_V = V|\rangle_0 = \sum\limits_{n=0} a_{n,0}(C_3^\dagger + C_0^\dagger)^n|\rangle_0$

$$_v\langle|\eta|\rangle_v = {}_0\langle|\sum_n a_{n,0}^*(C_3 + C_0)^n\eta\sum_m a_{m,0}(C_3^\dagger + C_0^\dagger)^m|\rangle_0$$

$$= {}_0\langle|\eta\sum_n a_{n,0}^*(C_3 - C_0)^n\sum_m a_{m,0}(C_3^\dagger + C_0^\dagger)^m|\rangle_0$$

$$= {}_0\langle|\eta\sum_{n,m} a_{n,0}^*a_{m,0}(C_3 - C_0)^n(C_3^\dagger + C_0^\dagger)^m|\rangle_0.$$

考虑到 $(C_3 - C_0)(C_3^\dagger + C_0^\dagger) = (C_3^\dagger + C_0^\dagger)(C_3 - C_0)$ 及 Lorentz 条件 $(C_3 - C_0)|\rangle_0 = 0$，得 $n,m\neq 0$ 的项全为 0. 而当 $n = m = 0$ 时，则有 $_v\langle|\eta|\rangle_v = a_{0,0}^*a_{0,0} = {}_0\langle|\eta|\rangle_0 = 1$.

可见引入不定度规和 Lorentz 条件后：

(1) 存在完全不出现纵、类时二类光子的真空态.

(2) 真空场态矢可归一化，虽然真空场的能量是发散的.

(3) 态矢的长度仍然可以是正定的.

(因为任何态矢可以表为 $|\rangle = |N_1', N_2', N_3 = N_0 = 0\rangle$)

§3.5 Dirac 场的量子化

把(3.3.10)改写为 $\psi(x) = \sum_\rho [a_\rho \psi_\rho^{(+)} + b_\rho^\dagger \psi_\rho^{(-)}]$,

$$\bar{\psi}(x) = \sum_\rho [a_\rho^\dagger \overline{\psi_\rho^{(+)}} + b_\rho \overline{\psi_\rho^{(-)}}]. \quad (3.5.1)$$

其中 $\psi_\rho^{(+)} \equiv u(\boldsymbol{p}, S)e^{ipx}$—— 正能解.

$\psi^{(-)} \equiv v(\boldsymbol{p}, S)e^{-ipx}$—— 负能解.

ρ 代表不同 p 和 $S = \frac{\Sigma}{2} \frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}$.

把(3.3.14)改写为

$$\{a_\rho, a_{\rho'}^\dagger\} = \{b_\rho, b_{\rho'}^\dagger\} = \delta_{\rho\rho'}, \quad (3.5.2)$$

$$\{a_\rho, a_{\rho'}\} = \{b_\rho, b_{\rho'}\} = \{a_\rho^\dagger, a_{\rho'}^\dagger\} = \{b_\rho^\dagger, b_{\rho'}^\dagger\} = 0.$$

则显然 $N_\rho^{(+)} = a_\rho^\dagger a_\rho$ 是以 $\psi_\rho^{(+)}$ 为代表的粒子数算符.

$N_\rho^{(-)} = b_\rho^\dagger b_\rho$ 是以 $\psi_\rho^{(-)}$ 为代表的粒子数算符.

其中 a_ρ, b_ρ 分别是二类粒子的消灭算符.

$a_\rho^\dagger, b_\rho^\dagger$ 分别是二类粒子的产生算符.

且 $N_\rho^{(+)}$ 和 $N_\rho^{(-)}$ 的本征值只能为 0 和 1.

可证:

$$H = \sum_\rho \omega_\rho (N_\rho^{(+)} + N_\rho^{(-)} - 1), \quad (3.5.3)$$

$$\boldsymbol{p} = \sum_\rho \boldsymbol{p} (N_\rho^{(+)} + N_\rho^{(-)} - 1), \quad (3.5.4)$$

$$Q = \sum_\rho e (N_\rho^{(+)} - N_\rho^{(-)} + 1). \quad (3.5.5)$$

证:仅证明(3.5.3).

$$H = i\int \bar{\psi}\gamma_4 \frac{\partial \psi}{\partial t} dV = i\int \psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t} dV$$

$$= i\int dV \sum_\rho (a_\rho^\dagger \psi^{(+)\dagger}(x) + b_\rho \psi^{(-)\dagger}(x))$$

$$\sum_{\rho'} (-i\omega_{\rho'} a_{\rho'} \psi_{\rho'}^{(+)} + i\omega_{\rho'} b_{\rho'}^\dagger \psi_{\rho'}^{(-)})$$

$$= \sum_{\rho}\omega_{\rho}(a_{\rho}^{\dagger}a_{\rho} - b_{\rho}b_{\rho}^{\dagger}) = \sum_{\rho}\omega_{\rho}(a_{\rho}^{\dagger}a_{\rho} + b_{\rho}^{\dagger}b_{\rho} - 1)$$

$$= \Sigma\omega_{\rho}(N_{\rho}^{(+)} + N_{\rho}^{(-)} - 1).$$

注意，在推导上式中，我们采用了：

(1)$\psi^{(+)}$，$\psi^{(-)}$ 的正交规一化条件；

(2) 反对易关系(3.5.2).

讨论：

(1) 由(3.5.3) 知 Dirac 场能量的非正定性，在量子场论中依然存在，这是由于真空场有无穷大的负能，物理上这只能归之于真空 Dirac 粒子的贡献，但实测能量总是总能量 H 与真空场能量 E_0 之差，即

$$H - E_0 = E = \sum_{\rho}\omega_{\rho}(N_{\rho}^{(+)} + N_{\rho}^{(-)}). \tag{3.5.6}$$

这是正定的，与观测事实完全符合. 但应注意，这种正定性正是由于 我们采用了反对易关系来量子化的结果，如果采用对易关系从推导过程可看出，可观测能量将是非正定的，因此对旋量场之所以必须采用反对易关系来量子化，其理由是：

① 保证半整数自旋粒子服从泡里排除原理或费米统计.

② 保证可观测能量的正定性.

(2) 由(3.5.3)(3.5.5) 知，以 $\psi_{\rho}^{(+)}$，$\psi_{\rho}^{(-)}$ 标志的两种粒子静质量，自旋相同，能量均为为正，但荷反号.

如果把 $\psi_{\rho}^{(+)}$ 粒子叫 Dirac 粒子，则 $\psi_{\rho}^{(-)}$ 粒子叫反 Dirac 粒子，因之，量子 Dirac 场理论预言应同时存在正反二类粒子.

(3)Dirac 真空含有无穷大的负能和无穷大的电荷，因之，量子 Dirac 场和经典 Dirac 场一样，认为真空不是虚空，而有着丰富的内容，以后将谈到，在电磁场作用下，Dirac 真空将显示所谓真空极化现 象，由此所导致的一系列物理效应通过十分精确的微波技术可观测到. 这说明量子电动力学含有高度的真理性.

§3.6　量子电动力学基本方程

采用相互作用绘景后，考虑 Dirac 场与电磁场相互作用时的量子电动力学基本方程为

$$\text{场方程}\quad \begin{cases} (\gamma_\mu \dfrac{\partial}{\partial x_\mu} + x)\psi(x) = 0, \\ \Box A_\mu = 0. \end{cases} \tag{3.6.1}$$

$$\text{态方程}\quad \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}|\rangle = H_I'|\rangle. \tag{3.6.2}$$

量子条件$[A_\mu(x), A_\nu(x')] = -\mathrm{i}\delta_{\mu\nu}D(x-x')$,

$$\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')\} = +\mathrm{i}S_{\alpha\beta}D(x-x'),$$

$$[A_\mu(x), \psi(x')] = 0. \tag{3.6.3}$$

注意：上述(3.6.1)～(3.6.3)中所有场量均采用相互作用表象，场方程(3.6.1)和量子条件(3.6.3)在形式上与自由场方程同，可立刻写下它们的形式解来，因此关键在于求解态方程，即令在 H_I' 已知的情况下，严格解一般是求不出的，在相互作用不强时，可用微扰法近似求解.

有下述几个问题应提到.

3.6.1. 关于不定度规问题

引入不定度规后

$$H_I' = -J_\mu A_\mu = -\mathrm{i}e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu$$

仍是厄米算符，这是因为：(注意：仅对电磁场引入不定度规，Dirac 场仍是正定度规)

$$J_i = \mathrm{i}e\psi^\dagger\gamma_4\gamma_i\psi = J_i^\dagger \text{ —— 厄米.}$$

$$J_4 = \mathrm{i}e\psi^\dagger\gamma_4\gamma_4\psi = -J_4^\dagger \text{ —— 反厄米.}$$

而 A_4 为反厄米(因为 $\hat{A}_4 = \mathrm{i}\hat{A}_0 = \mathrm{i}\eta^{-1}A_0^\dagger\eta = \mathrm{i}\eta^{-1}A_0\eta$

$$= -\mathrm{i}A_0 = -A_4).$$

故 $$\frac{\partial}{\partial t}\langle\,|\,\rangle_I = -\,\mathrm{i}_I\langle\,|\,(H_I' - \hat{H}_I')\,|\,\rangle_I = 0.$$

3.6.2. 关于 Lorentz 条件问题

在相互作用表象中的 Lorentz 条件为

$$_I\langle\,|\,\eta\,\frac{\partial A_\mu^I}{\partial x_\mu}\,|\,\rangle_I = 0.$$

由于$[H_I, \frac{\partial A_\mu^I}{\partial x_\mu}] \neq 0$ 或 $[\int \mathrm{d}V J_\mu A_\mu (C_3 - C_0)] \neq 0$,

故任何 H 的本征态都不可能满足 Lorentz 条件.

(胡宁. 场的量子理论, p. 85(1214))

可以证明,一个理论上自洽(既不与态方程矛盾,又不自相矛盾)的 Lorentz 条件应扩充为(朱洪元. 量子场论, § 7.4)

$$_I\langle\,|\,\eta[\frac{\partial A_\mu^I}{\partial x_\mu} - \int_\sigma \mathrm{d}\sigma_\mu(x)\mathrm{D}(x - x')J_\mu(x')]\,|\,\rangle_I = 0. \tag{3.6.4}$$

式中 $\mathrm{D}(x - x')$ 即 $\Delta(x - x')|_{\chi=0}$, σ 为某个类空超曲面. 因此,量子电动力学的完整方程组即场方程(3.6.1)、态方程(3.6.2)、量子条件(3.6.3) 和 Lorentz 条件(3.6.4).

3.6.3. 关于纵场和类时场的物理意义

在辐射电磁场(自由电磁场) 中纵场和类时场不显示任何物理意义,在自由场的量子化方案中可以完全消去,但当有电荷存在或考虑到电荷与电磁场的相互作用时,它们就不仅不能消除,并且有确切的物理意义.

可以证明,此时态方程可化为(胡宁. 场的量子论, § 12)

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial t}|\,\varnothing\rangle &= (-\int \mathrm{d}V J_\mu A_\mu^{(T)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\chi}\int \mathrm{d}V J_\mu A_\mu^{(L)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi})\,|\,\varnothing\rangle \\ = -\int \mathrm{d}V J_\mu A^{(T)}\,|\,\varnothing\rangle &+ \frac{1}{2}\iint_{t'=t} J_0(x)J_0(x')\,\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V\mathrm{d}V'\,|\,\varnothing\rangle.\end{aligned} \tag{3.6.5}$$

其中 $A_\mu^{(L)}$ 包含纵场和类时场，$\chi = \int \mathrm{d}V J_0(x) B(x)$.

$B(\chi)$ 中包含纵场和类时场的产生、消灭算符.

$|\varnothing\rangle$ 代表包含横光子和电子，正电子的态矢.

$A_\mu^{(T)}$—— 电磁场的横场部分.

可见，有电荷存在时，纵场和类时场的效应即电荷间的库仑场.

3.6.4. 在相互作用中的粒子图像问题

在相互作用中总能量算符

$$H = H_e + H_r + H'$$

引入量子条件(3.6.3)后，自由场能量算符 H_e, H_r 都可表为粒子数算符的函数，但由于 H' 至少是三线性型，一般不能表示为粒子数算符的函数，这表示粒子概念，仅在相互作用可忽略不计时才成立.

§3.7 自旋和统计

W. Pauli 曾证明，在 Lorentz 协变经典场论中，张量场的总几率是非正定的；旋量场的总能量是非正定的. 在场的二次量子化中，我们对张量场采用对易关系，对旋量场采用反对易关系，上述困难能够得到满意的解决.

若对张量场采用反对易关系，将破坏微观因果律(Bogoliubov-Shirkov. 量子场论，1976 年版 p. 84)，例如可证若对标量场采用反对易关系进行二次量子化可得 $\{\varphi(x_1), \varphi(x_2)\} = \mathrm{i}\hbar c \Delta^1(x_1 - x_2)$，两个以类空间隔相联系的场量不能同时测准. 若采用对易关系对 Dirac 场进行二次量子化，可得 $[\varphi(x_1), \psi(x_2)] = \mathrm{i}(\gamma_\mu \partial_\mu - x) \cdot \Delta^1(x_1 - x_2)$ 这表明有超光速扰动存在，显然违背微观因果律. 虽然对张量场采用对易关系，二次量子化仍不能克服总几率的不定性，但二次量子化后场函数不再是态函数，不再具有几

率解释，因之流密度只能解释为两种性质不同(可能是电荷、重荷、超荷等)的荷流密度，这当然是合理的.

对旋量场采用反对易关系进行二次量子化正可克服负能困难，若改用对易关系将无法免除负能困难.

对自旋为整数的张量场采用对易关系的结果是一个量子态中可容纳任意多个粒子，这种粒子服从 Bose-Einstein 统计，叫玻色子.

对自旋为半整数的旋量场采用反对易关系的结果，一个量子态中最多可容纳一个粒子，这种粒子服从 Fermi-Dirac 统计，叫费米子.

第 4 章　*CPT* 变换

在 Lorentz 协变场论中，我们认为基本粒子波函数是 Lp 群的不可约表示 $D^{jj'}$，这意味着波函数应是自旋的本征函数. 现在我们进一步假定波函数是广义 Lorentz 群 L 群($L = Lp \otimes P \otimes T$) 的表示，其中 P 代表空间反射变换，T 代表时间反演变换，这意味着波函数不仅是自旋算符也是反射算符 P 和反演算符 T 的本征函数.

§4.1　空间反射

引入纯空间反射变换

$$x_i \to x_i' = -x_i, (i = 1,2,3)$$
$$t \to t' = t. \tag{4.1.1}$$

变换矩阵

$$\alpha = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & +1 \end{pmatrix}$$ 的行列式 $|\alpha| = -1$.

设在(4.1.1) 下，态矢变为

$$|\rangle \to |\rangle' = P|\rangle. \tag{4.1.2}$$

波函数 $\varphi(x,t) \to \varphi'(x',t') = \varphi'(-x,t) = \xi T\varphi(x,t)$ 或 $\varphi_a'(-x,t) = \xi T_{ab}\varphi_b(x,t)$，$(T_{ab})$ 是一个 C 数矩阵，满足 $\xi^2 T^2 = 1$，令 $\xi^2 = 1$，则 $T^2 = 1$.

$$\varphi'(x,t) = \xi T\varphi(-x,t). \tag{4.1.3}$$

式中 $\xi = \pm 1$ 即波函数 $\varphi(x,t)$ 的空间宇称，二次量子化后场量应

在 Hilbert 空间作相似变换，由(4.1.3) 知

$$p\varphi(x,t)p^{-1} = \varphi'(x,t) = \xi T\varphi(-x,t). \tag{4.1.4}$$

注意：Hilbert 空间的相似变换并非时空坐标变换，它只能使场量的函数形式发生变化或引起形式变分，对于

赝标量场　$\xi = -1$，标量场 $\xi = +1$.

赝矢量场　$\xi = +1$，矢量场 $\xi = -1$.

赝张量场　$\xi = -1$，张量场 $\xi = +1$.

4.1.1. 单粒子的宇称本征态

我们假设单粒子的波函数是宇称本征函数，但单粒子态矢是否是宇称本征态？我们寻求单粒子的宇称本征态.

设单粒子态矢是动量本征态 $|\boldsymbol{K}\rangle = a_k^\dagger|\rangle_0$.

首先把波函数按平面波作富氏展开

$$\varphi(x,t) = \sqrt{\frac{1}{V}}\sum_k \sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\omega_k}}(a_k(t)e^{ikx} + b_k^\dagger(t)e^{-ikx}).$$

代入(4.1.4) 后得

$$\sqrt{\frac{1}{V}}\Sigma\sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\omega_k}}(pa_k(t)p^{-1}e^{ikx} + pb_k^\dagger(t)p^{-1}e^{-ikx})$$

$$= \sqrt{\frac{1}{V}}\sum_k\sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\omega_k}}(\xi Ta_k(t)e^{-ikx} + \xi Tb_k^\dagger(t)e^{ikx}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{V}}\sum_k\sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\omega_k}}(\xi Ta_{-k}(t)e^{+ikx} + \xi Tb_{-k}^\dagger(t)e^{-ikx}.$$

在推导最后一式时，我们进行了变换 $\boldsymbol{k} \to -\boldsymbol{k}$，并注意，$p$ 算符仅作用在算符上. 比较上二式得

$$\begin{aligned} &pa_kp^{-1} = \xi Ta_{-k}, pa_k^\dagger p^{-1} = \xi a_{-k}^\dagger T^\dagger. \\ &pb_kp^{-1} = \xi b_{-k}T^\dagger, pb_k^\dagger p^{-1} = \xi Tb_{-k}^\dagger. \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

可见：$Ta = aT^\dagger, a^\dagger T^\dagger = Ta^\dagger$.

这就是在一般情况下动量本征波函数的消灭算符和产生算符在空间反射变换下的变换规律，现考虑单粒子的动量本征态矢

$|\boldsymbol{k}\rangle = a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}|\rangle_0$，则

$p|\boldsymbol{k}\rangle = pa_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}|\rangle_0 = pa_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}p^{-1}p|\rangle_0$ 取 $p|\rangle_0 = |\rangle_0$. 考虑到(4.1.5)得 $p|\boldsymbol{k}\rangle = \xi T a_{-\boldsymbol{k}}^{\dagger}|\rangle_0 = \xi T|-\boldsymbol{K}\rangle \neq \xi T|\boldsymbol{K}\rangle$.

可见(1)单粒子的动量本征态并非宇称本征态或单粒子的宇称和动量是不可同时测准的.

(2)空间反射算符 p 把动量为 K 的粒子变为 $-\boldsymbol{K}$ 的粒子. 这表示 K 是一个矢量. 一个例外是当 $K=0$，$|K\rangle = |-K\rangle$，即对于一个静止粒子单粒子态矢就是宇称本征态，可见宇称和自旋一样是粒子内部运动的反映，是粒子的内禀性质.

设单粒子态矢是角动量本征态：

首先把波函数按球面波作富氏展开

$$\varphi(x,t) = \sum_{k,l,m,s,} [a_{klms}(t)Z_l(kr)\mathrm{Y}_l^m(\theta,\varphi)\sigma(s) + b_{klms}^{\dagger}(t)Z_l^*(kr)\mathrm{Y}_l^{m*}(\theta,\varphi)\sigma^*(s)].$$

式中我们忽略了归一化因子，且 $\mathrm{Y}_l^m(\theta,\varphi) \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}p_l^m(\cos\theta)$，$a_{klms}(t)$ 系能量为 $E = \hbar c\sqrt{k^2+\kappa}$，轨道角动量为 $\sqrt{L(L+1)}\hbar$，角动量投影为 $m\hbar$ 和自旋为 $\sqrt{s(s+1)}\hbar$ 的单粒子的消灭算符，$\sigma(s)$ 为自旋波函数.

采用球极坐标后，反射变换(4.1.1)化为

$$r \to r' = r, \theta \to \theta' = \pi - \theta, \varphi \to \varphi' = \varphi + \pi$$

此时，$\mathrm{Y}_l^m \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\pi}(-1)^m(-1)^l\mathrm{Y}_l^m$

$= (-1)^l\mathrm{Y}_l^m$——Y_l^m 的交换对称性.

由(4.1.4)，

$$p\varphi p^{-1} = \sum_{klms}(pa_{klms}p^{-1}Z_L\mathrm{Y}_L^m\sigma(s) + pb_{klms}^{\dagger}p^{-1}Z_L^*\mathrm{Y}_L^{m*}\sigma^*(s))$$

$$= \xi T\sum_{klms}(-1)^l \times (a_{klms}Z_L\mathrm{Y}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{m}}\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{s}) + \mathrm{b}_{\mathrm{klms}}^{\dagger}Z_L^*\mathrm{Y}_L^{m*}\sigma^*(s)).$$

比较上式等式两边得

$$pa_{klms}p^{-1} = \xi T(-1)^l a_{klms},$$

$$pa_{klms}^{\dagger}p^{-1} = \xi(-1)^l a_{klms}^{\dagger}T^{\dagger},$$

$$pb_{klms}p^{-1}=\xi(-1)^{l}b_{klms}T^{\dagger},$$
$$pb^{\dagger}_{klms}p^{-1}=\xi(-1)^{l}Tb^{\dagger}_{klms}, \tag{4.1.6}$$
或 $a^{\dagger}T^{\dagger}=Ta^{\dagger},Ta=aT^{\dagger}.$

这就是角动量本征波函数的消灭算符和产生算符在空间反射变换下的变换规律.

现考虑单粒子的能量角动量本征态矢 $|klms\rangle=a^{\dagger}_{klms}|\rangle_0$,则

$$p|klms\rangle=pa^{\dagger}_{klms}p^{-1}p|\rangle_0=\xi T(-1)^{l}|klms\rangle. \tag{4.1.7}$$

可见:① 单粒子轨道角动量本征态也是一个宇称本征态,态的宇称为

$$\xi=\xi(-1)^{l}.$$

或单粒子的宇称和轨道角动量(轨道角动量的大小,不含方向)是同时可测准量.

② 空间反射算符 p 不改变粒子的角动量 L,这表示角动量 L 是一个赝矢量.

③ 易看出在空间反射算符 p 作用下粒子涡度应异号.

4.1.2. 多粒子系统的宇称

设 n 个不同类型粒子组成的多粒子系统采用质心坐标系有

$$|KLMS\rangle=a^{\dagger}_{(1)}a^{\dagger}_{(2)}\cdots a^{\dagger}_{(n)}|\rangle_0,a^{\dagger}_{(i)}\equiv a^{\dagger}_{k_il_im_is_i}$$

则

$$\begin{aligned}p|KLMS\rangle&=pa^{\dagger}_{(1)}p^{-1}pa^{\dagger}_{(2)}p^{-1}\cdots pa^{\dagger}_{(n)}p^{-1}p|\rangle_0\\&=\xi_1T_1(-1)^{l_1}a^{\dagger}_{(1)}\xi_2T_2(-1)^{l_2}a^{\dagger}_{(2)}\cdots\\&\quad\xi_nT_n(-1)^{l_n}a^{\dagger}_{(n)}|\rangle_0\\&=\xi_1\xi_2\cdots\xi_n\prod_{i=1}^{n}T_i(-1)^{l_1+l_2+\cdots+l_n}|KLMS\rangle\\&=\xi_1\xi_2\cdots\xi_n(-1)^{L}\prod_{i=1}^{n}T_i|KLMS\rangle.\end{aligned}$$

式中 $L\equiv l_1+l_2+\cdots+l_n.$

可见多粒子系统态矢的宇称为

$$\rho=\xi_1\cdot\xi_2\cdots\xi_n(-1)^{L}. \tag{4.1.8}$$

如果多粒子系统内的相互作用在空间反射变换下是不变的，那么多粒子系统的宇称(4.1.8)就是一个守恒量.

应指出，一般地，多粒系统并不能处于轨道角动量的本征态，而只能处于总角动量的本征态，但只要相互作用具有空间反射不变性，宇称仍然是一个守恒量.

4.1.3. 费米粒子的宇称

在广义 Lorentz 变换下　$x'_\mu = \alpha_{\mu\nu}x_\nu$.

Dirac 场为 $\psi'(x') = L\psi(x)$.

由于 $\psi(x)$ 是旋量场，L 应有双值表示，彼此互差一个负号，若 Dirac 方程在空间反射变换下形式不变 L 应满足关系

$$L^{-1}\gamma_\mu L = \alpha_{\mu\nu}\gamma_\nu, \tag{4.1.9}$$

对于空间反射　$\alpha = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & +1 \end{pmatrix}$　(4.1.9) 化为

$$\begin{cases} \gamma_4 = L^{-1}\gamma_4 L \\ -\gamma_i = L^{-1}\gamma_i L \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} L\gamma_4 = \gamma_4 L, \\ L\gamma_i = -\gamma_i L, \end{cases} \text{解之得}$$

$$L = \xi\gamma_4. \tag{4.1.10}$$

故 $\psi'(x') = \psi'(-x,t) = L\psi(x,t) = \xi\gamma_4\psi(x,t)$ 或，

$$p\psi(x,t)p^{-1} = \psi'(x,t)\xi\gamma_4\psi(-x,t),$$

$$p\bar{\psi}(x,t)p^{-1} = \xi\bar{\psi}(-x,t)\gamma_4.$$

二次空间反射相当于 Lp 群中的恒等变换(单位群元素)，而由 Lp 的旋量表示的双值性知，与恒等变换对应有 $L^2 = \pm 1$ 两个旋表示，即

$$L^2 = \pm 1 = \xi^2\gamma_4^2 = \xi^2 \quad \text{或} \quad \xi = \pm 1, \pm \mathrm{i}.$$

这似乎表示，Dirac 粒子有 4 种不同的内禀宇称，但实际情况不是这样.

例　若某一 Dirac 粒子的 $\xi = +1$，即在空间反射下

$$\psi'(x',t) = \psi'(-x,t) = +\gamma_4\psi(x,t).$$

今反射后继之以 2π 转动应仍是同一个空间反射，但 R_3 群的单位元素(2π 转动) 有 ± 1 两个旋表示，即除上述变换外尚有

$$\psi'(x',t) = \psi'(-x,t) = -\gamma_4\psi(x,t).$$

这当然表示同一个 Dirac 粒子的内禀宇称，可差一个负号即 $\rho = \xi\gamma_4, \xi = \pm 1$ 并不确定，但如果在反应中出现两个不同的 Dirac 粒子，则由宇称守恒律可能决定两个不同的 Dirac 粒子的相对宇称.

例　反应 $a + f_1 \to a + f_2$，其中 f_1, f_2 均为两个不同的费米子按宇称守恒律应有

$$\xi_a\xi_{f_1}(-1)^{L_1} = \xi_a\xi_{f_2}(-1)^{L_2} \quad \text{或}$$

$$\frac{\xi_{f_1}}{\xi_{f_2}} = (-1)^{l_2-l_1}.$$

由此可决定两个不同费米子的相对宇称.

习惯上，我们取质子 p、中子 n 和超子 Λ 的宇称为 $+1$，

$$\xi_p = \xi_n = \xi_\Lambda = +1. \tag{4.1.11}$$

由此可以从实验决定其他费米子的相对宇称，应指出，1950 年杨振宁等曾提出假设：

所有轻子的宇称为虚值 $\pm i$，所有重子的宇称为实值 ± 1，但以后发现，此假设将导致矛盾，因之一般认为自然界中存在的费米子的宇称非全为虚即全为实，习惯上均取实值 $\xi = \pm 1$.

4.1.4. 玻色子的宇称

对张量场，Lp 有单值表示，故玻色子均具有确定的内禀宇称.

① 光子的宇称

光子波函数 A_μ 在空间反射下，有

$$pA_\mu(x,t)p^{-1} = A'_\mu(x,t) = \begin{cases} -A_i(-x,t), \\ A_4(-x,t). \end{cases} \tag{4.1.12}$$

此式可改写成 $pA_\mu(x,t)p^{-1}=\xi T_{\mu\nu}A_\nu(-x,t)$.

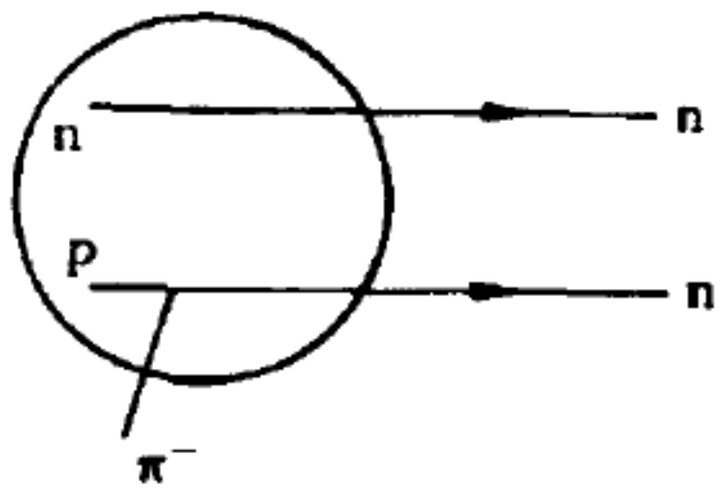
其中 $T_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}(-1)^{\delta_{\mu 4}}$,故 $\xi=-1$,即光子的宇称为(-1).

②π 介子宇称

考虑反应 $\pi^-+d\rightarrow 2n$,此反应含两个过程.

首先 π^- 被 d 俘获形成基态(1s) 氘介原子,这是一种电磁作用,然后 π^- 与 d 核发生强作用,变为两个中子.

示意图为:



初态:$s=0+1=1$

$L=0$

$J=L+s=1$

末态:由总角动量守恒应得下列可能性即

J	s	L	
1	0	1	$^1p_1$
1	1	0	$^3s_1$
1	1	1	$^3p_1$
1	1	2	$^3D_1$

设 $2n$ 系统的波函数为

$\psi(1,2)=Y_L^m\cdot\sigma(s)$

把空间坐标原点取在 $2n$ 系统的质心,那么空间反射相当于空间坐标不动,而交换两个中子的位置,这就需要考虑 $2n$ 系统的交换对称性,按泡利原理,$2n$ 系统的波函数应该是反对称的.

自旋波函数 $\sigma(s)$:

	$\sigma(s=1)$—— 对称	$\sigma(s=0)$—— 反对称
$m_s=1$ 0 -1	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow+\downarrow\uparrow)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow-\downarrow\uparrow)$

轨道波函数 Y_L^m 当 L 为奇数，Y_L^m 为反对称.

当 L 为偶数，Y_L^m 为对称.

由 Pauli 原理知，仅 $^3p_1$ 态是容许的，由电磁作用和强作用中多粒系统宇称守恒律得：

$$\xi_\pi\xi_n\xi_p=\xi_n\xi_n(-1)^L=\xi_n\xi_n(-1) \tag{4.1.13}$$

或　$\xi_{\pi^-}=-1$(由(4.1.11)).

故 π^- 是赝标量粒子，在反射算符 p 作用下

$$p\varphi(x,t)p^{-1}=-\varphi(-x,t).$$

由于 π^+、π^- 在场论中用同一个复标量场 φ 来表示，故 π^+ 的宇称也应为 -1.

考虑 π^0 的电磁衰变　$\pi^0\to\gamma+\gamma$.

在质心系中由于 π^0 的自旋为 0，故双光子系统的波函数或衰变幅应是一个标量，命 ε_1 和 ε_2 分别表示两个光子的极化波函数，则由 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 仅能构造两个标量，即

$$\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2\neq 0,$$

$$\boldsymbol{K}_1\cdot\varepsilon_1\times\varepsilon_2\neq 0.$$

其中 K 代表质心系中任一光子的动量.

前者表示，两个光子极化互相平行.

后者表示，两个光子极化互相垂直.

实验发现，两个光子极化是互相垂直的，在空间反射变换下，后一波幅要变号，这说明双光子系统波函数的宇称为负，若宇称在 π^0 的电磁衰变中守恒，马上可决定 π^0 的宇称为负，即

$$\xi_{\pi^0} = -1,$$

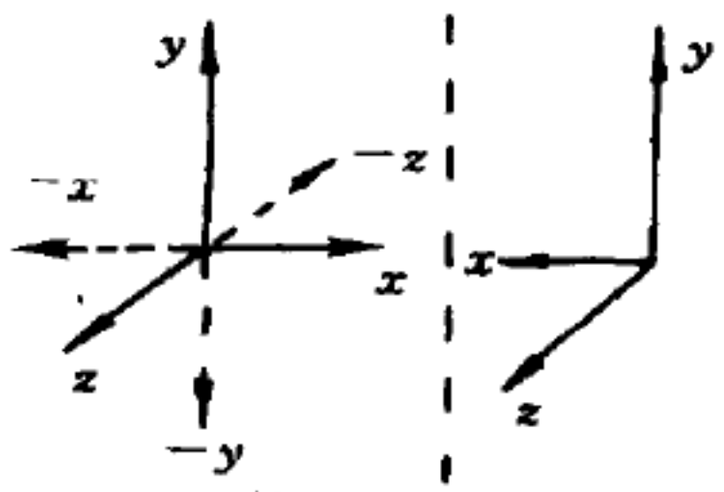
或 π^0 也是赝标量粒子.

总之,π 介子的宇称 P 为(-1),自旋 $J=0$,可合写为 $J^P = 0^{-1}$,应采用赝标量波函数描述.

4.1.5. 空间反射不变性和宇称守恒

对空间反射变换

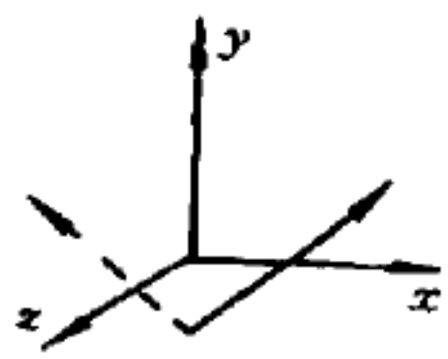
$$\begin{cases} x \to -x \\ y \to -y \\ z \to -z \end{cases} \text{或} \begin{cases} x \to -x \\ y \to y \\ z \to z \end{cases} \quad (4.1.14)$$



镜像反射

可有两种等价的看法:

① 空间不动,右手坐标系变为左手坐标系,或 ② 坐标不变,空间作镜像反射.



因此一个物体形态或一条物理规律的空间反射不变性表示:

(1) 它们用左手或右手坐标系去描述是完全等效的,亦即它们具有左右对称性,或镜像对称性.

(2) 如果一个物体形态或一条物理规律在自然界存在,那么它们的镜像在自然界也存在.

先谈谈经典物理学的空间反射不变性.

牛顿力学:

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v}).$$

在(4.1.14)下,$\boldsymbol{F} \to -\boldsymbol{F}, \boldsymbol{v} \to -\boldsymbol{v}, m \to m, t \to t,$

故:$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v})$ 是反射不变的.

电动力学:

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} = 0, \nabla \times \boldsymbol{B} = 0,$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}, \nabla \cdot \boldsymbol{D} = 4\pi\rho,$$

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + \frac{q}{c}\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}.$$

在(4.1.14)下,$\boldsymbol{B},\boldsymbol{H},\nabla \times \boldsymbol{E}$ 是赝矢量,$\nabla,\boldsymbol{J},\boldsymbol{E},\boldsymbol{D},\boldsymbol{V},\boldsymbol{F},\nabla \times \boldsymbol{H},\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}$ 是矢量,ρ,t 是标量.

故电动力学是反射不变的.

重力场方程

$$G_{\mu\nu} = -\chi T_{\mu\nu}.$$

由于 $G_{\mu\nu},T_{\mu\nu}$ 是二级张量,显然具有空间反射不变性. 总之,经典物理具有空间反射不变性,但却不存在相应的守恒量.

其次谈谈量子物理学的空间反射不变性.

自由场方程

Klein-Gordon 场:

场方程:$(\Box - \chi^2)\varphi = 0$ 或 $\mathscr{L} = -\partial_\mu\varphi\partial_\mu\varphi^\dagger - \chi^2\varphi^\dagger\varphi$. (4.1.15)

量子条件:$[\varphi(x_i,x_4),\varphi^\dagger(y_i,y_4)] = i\hbar c\Delta(x_i - y_i,x_4 - y_4)$. (4.1.16)

由 $\Box,\chi^2$ 是标量,不论 φ 是标量或赝标量(4.1.15)的反射不变性是显然的.

考虑到:

$$P\varphi(x_i,x_4)P^{-1} = \varphi'(x_i,x_4) = \xi\varphi(-x_i,x_4)$$

$$\Delta \xrightarrow{P} \Delta(-(x_i - y_i),x_4 - y_4),$$

即得:(4.1.16)反射后化为

$$[\varphi(-x_i,x_4),\varphi^+(-y_i,y_4)] = i\hbar\Delta(-(x_i - y_i),x_4 - y_4).$$

这是反射不变的.

Proca 场:

$$\begin{cases}(\Box^2 - \chi^2)\varphi_\mu = 0 \quad \text{或} \quad \mathscr{L} = -\partial_\mu\varphi_\mu^\dagger\partial\varphi_\nu - \chi^2\varphi_\mu^*\varphi_\mu, \\ \dfrac{\partial}{\partial x_\mu}\varphi_\mu = 0. \end{cases} \tag{4.1.17}$$

$$[\varphi_\mu(x), \varphi_\nu^\dagger(y)] = i\hbar c\left(g_{\mu\nu} - \frac{1}{\chi^2}\partial_\mu\partial_\nu\right)\Delta(x-y). \tag{4.1.18}$$

显然是反射不变的，这表示量子电磁场是反射不变的.

Dirac 场：

$$\mathscr{L} = -\hbar c\bar{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu + \chi)\psi + \text{厄米共轭}, \tag{4.1.19}$$

$$\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} = is(x-y). \tag{4.1.20}$$

考虑到：$P\psi(x_i, x_4)P^{-1} = \xi\gamma_4\psi(-\boldsymbol{x}, x_4)$，

$$P\bar{\psi}(x_i, x_4)P^{-1} = \bar{\psi}(-\boldsymbol{x}, x_4)\xi\gamma_4.$$

得到 $P\mathscr{L}P^{-1} = -\hbar c P\bar{\psi}P^{-1}(+\gamma_i\partial_i + \gamma_4\partial_4 + \chi)P\psi P^{-1}$

$$= -\hbar c\,\bar{\psi}(-x_i, x_4)\xi\gamma_4[+\gamma_4\partial_4 - \gamma_i(-\partial_i) + \chi] \times \xi\gamma_4\psi(-x_i, x_4)$$

$$= -\hbar c\,\bar{\psi}(-x_i, x_4)[\gamma_4\partial_4 + \gamma_i(-\partial_i) + \chi] \times \psi(-x_i, x_4).$$

即(4.1.19)是反射不变的，类似可知(4.1.20).

Weyl 场：

以零质量 Weyl 场方程 $\gamma_\mu\partial_\mu\psi_L = 0$ 或 $\gamma_\mu\partial_\mu(1+\gamma_5)\psi = 0$ 为例，空间反射后场方程化为方程 $\gamma_\mu\partial_\mu(1+\gamma_5)P\psi P^{-1} = \gamma_\mu\partial_\mu(1+\gamma_5)\xi \times \gamma_4\psi(-x, t) = 0.$

即 $(\gamma_i\partial_i + \gamma_4\partial_4)(1+\gamma_5)\xi\gamma_4\psi(-x, t) = \xi\gamma_4[\gamma_i(-\partial_i) + \gamma_4\partial_4](1-\gamma_5)\psi(-x, t) = 0.$

或 $[\gamma_i(-\partial_i) + \gamma_4\partial_4]\psi_R(-x, t) = 0$，这已经是反 Weyl 粒子的场方程了.

以后将谈到，利用自由 Weyl 场不具有空间反射不变性可以说明 β 衰变中宇称不守恒. Weyl 场方程、弱相互作用不具有左右对

称性，说明左右对称性在弱作用中是破缺的. 事实上生命体内部的左右对称性也是破缺的，例如人体内含有右旋葡萄糖而左旋葡萄糖是有毒的，人体内的氨基酸也是具有一定的手征性的，所以可以说只有左右对称性的破缺才能使得生命存在.

总之，量子化自由场除 Weyl 场外都是空间反射不变的，按广义 Nöther 定理应存在相应的守恒量 —— 宇称，但应强调指出，除了有经典对应的电磁场的空间反射不变性是可以证明的外，其他场的空间反射不变性只是我们的一种要求，这种要求对 K-G 场和 Dirac 场是可以满足的，但对 Weyl 场则不能满足.

这里我们仅讨论相互作用场(拉氏量的相互作用部分) 中的电磁相互作用(有光子参与的相互作用).

Dirac 场 — 电磁场耦合(标量耦合)：

$$\mathscr{L} = \mathrm{i}e\,\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu. \tag{4.1.21}$$

当$\bar{\psi},\psi$ 相对宇称相同时，耦合反射不变，宇称守恒.

当$\bar{\psi},\psi$ 相对宇称不同时，耦合非反射不变，宇称不守恒. 实验发现，Dirac 场与电磁场应是标量耦合，即宇称守恒.

复标量场 — 电磁场耦合：

$$\mathscr{L} = \frac{\mathrm{i}e}{\hbar c}\partial_\mu\varphi^* \cdot \varphi \cdot A_\mu + \text{厄米共轭} - \frac{e^2}{\hbar^2 c^2}\varphi^*\varphi A_\mu A_\mu. \tag{4.1.22}$$

当 φ 为标量或赝标量，上述耦合为标量耦合，即宇称守恒，实验发现：$\pi^0 \to 2\gamma$ 是宇称守恒的.

强相互作用：

Dirac 场与实标量场耦合.

$\mathscr{L} = G\,\bar{\psi}\psi\varphi$— 标量耦合，反射不变，宇称守恒. (4.1.23)

$\mathscr{L} = G\,\bar{\psi}\gamma_5\psi\varphi$— 赝标量耦合，非反射不变，宇称不守恒.

Dirac 场与实赝标量场耦合. (4.1.24)

$\mathscr{L} = G\,\bar{\psi}\psi\varphi$— 赝标量耦合，宇称不守恒. (4.1.25)

$\mathscr{L} = G\bar{\psi}\gamma_5\psi\varphi$— 标量耦合，宇称守恒. (4.1.26)

实验发现：

强作用中宇称是守恒的，因此只能取(4.1.23)和(4.1.26)中的相互作用拉氏量.

弱相互作用：

在中子的β衰变中 $\mathrm{n} \to \mathrm{p} + \mathrm{e} + \bar{\nu}_e$.

μ子的β衰变中 $\mu^{\pm} \to \mathrm{e}^{\pm} + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$.

出现4个费米子的直接相互作用，理论和实验指出，上述一类相互作用的相互作用拉氏量为

$$L' = G_\omega \bar{\psi}_a \gamma_\mu (1 + \gamma_5)\psi_b \, \bar{\psi}_c \gamma_\mu (1 + \gamma_5)\psi_d + hc. \quad (4.1.27)$$

其中 $G_\omega \sim 2 \times 10^{-49} \mathrm{erg} \cdot \mathrm{cm}^3$

这就是有名的普适费米V-A型相互作用，上述相互作用L'可分解为二部分之和，即：

$$L' = L'_V + L'_A,$$

$$L'_V = \bar{\psi}_a \gamma_\mu \psi_b \, \bar{\psi}_c \gamma_\mu \psi_d + \bar{\psi}_a \gamma_\mu \gamma_5 \psi_b \, \bar{\psi}_c \gamma_\mu \gamma_5 \psi_d,$$

$$L'_A = \bar{\psi}_a \gamma_\mu \gamma_5 \psi_b \, \bar{\psi}_c \gamma_\mu \psi_d + \bar{\psi}_a \gamma_\mu \psi_b \, \bar{\psi}_c \gamma_\mu \gamma_5 \psi_d.$$

其中，L'_V显然是空间反射不变的，L'_A不是空间反射不变的，可见弱相互作用中宇称不守恒.

这里我们用到了4分量中微子理论，β衰变中的宇称不守恒是由于普适费米V-A相互作用不具有空间反射不变性. 这正是通常的处理.

1957年杨振宁、李政道首先提出在弱相互作用中宇称可能不守恒的猜想后，同年吴健雄等人用实验验证了这一预言，这个问题我们留在第6章再作详细讨论.

§4.2 荷共轭宇称

经验告诉我们，自然界的规律存在另一种内禀对称性，即在电

荷反号变换 $e \to -e$ 后一切规律形式不变.

例如以自由 Dirac 方程为例：　　$(\gamma_\mu \partial_\mu + \varkappa)\psi = 0$.

波函数不仅描述自由电子也描述了自由正电子(反电子) 的量子行为. 按最小电磁作用原理或规范原理,Dirac 场与电磁场的相互作用场方程为

$$\left[\gamma_\mu\left(\partial_\mu - \frac{\mathrm{i}e}{\hbar c}A_\mu\right) + \varkappa\right]\psi = 0. \tag{4.2.1}$$

如果 ψ 描述电子($e < 0$),则描述正电子的方程应为

$$\left[\gamma_\mu\left(\partial_\mu + \frac{\mathrm{i}e}{\hbar c}A_\mu\right) + \varkappa\right]\psi_c = 0. \tag{4.2.2}$$

我们来寻找 ψ_c 与 ψ 的关系显示式.

已知　$\left(\partial_\mu + \frac{\mathrm{i}e}{\hbar c}A_\mu\right)\bar{\psi}\gamma_\mu - \varkappa\bar{\psi} = 0.$

转置后得　$\gamma_\mu^T\left(\partial_\mu + \frac{\mathrm{i}e}{\hbar c}A_\mu\right)\bar{\psi}^T - \varkappa\bar{\psi}^T = 0,$

$$\left[\gamma_\mu^T\left(\partial_\mu + \frac{\mathrm{i}e}{\hbar c}A_\mu\right) - \varkappa\right]\bar{\psi}^T = 0.$$

上式左乘以荷共轭矩阵 $C \equiv \gamma_2\gamma_4$,注意到 $\gamma_\mu C = -C\gamma_\mu^T$,上式即化为

$$\left[\gamma_\mu\left(\partial_\mu + \frac{\mathrm{i}e}{\hbar c}A_\mu\right) + \varkappa\right]C\bar{\psi}^T = 0. \tag{4.2.3}$$

比较(4.2.2)、(4.2.3) 即得

$$\psi_c = C\bar{\psi}^T. \tag{4.2.4}$$

可见荷共轭粒子或反粒子的波函数及其所应满足的波方程可由粒子波函数及其波方程作变换

$$e \to -e$$

$$\psi(x) \to C\bar{\psi}^T(x),$$

$$\bar{\psi}(x) \to -\bar{\psi}^T(x)C^{-1} = \psi^T C,$$

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x)　　\text{得到.}$$

可以证明对复标量场,相应的变换为

$$\varphi(x) \to \varphi^*(x),$$

$$\varphi^*(x) \to \varphi(x).$$

一个等效的变换是

$$\left.\begin{aligned} &\psi \to C\bar{\psi}^T, \\ &A_\mu \to -A_\mu, \\ &\varphi \to \varphi^*, \\ &e \to e. \end{aligned}\right\} \tag{4.2.5}$$

这叫做荷共轭变换，它是我们要求场方程具有荷共轭变换不变性的一个自然结果.

二次量子化后波函数变为算符，荷共轭变换应看作 Hilbert 空间的变换，由于量子场论在此变换下不变，故变换一定是么正变换，以 $\mathscr{C}$ 表示此变换，连续二次 $\mathscr{C}$ 变换应为恒等变换，故

$$\left.\begin{aligned} &\mathscr{C}\cdot\mathscr{C}=1, \mathscr{C}=\mathscr{C}^{-1}\Rightarrow \\ &\mathscr{C}^+=\mathscr{C}^{-1}\Rightarrow \end{aligned}\right\} \mathscr{C}^+=\mathscr{C}.$$

即 $\mathscr{C}$ 是厄米算符

在此变换下

$$\begin{aligned} &\psi \to \psi_c = C\bar{\psi}^T = \mathscr{C}\psi\mathscr{C}^{-1}, \\ &\bar{\psi} \to \bar{\psi}_c = -\psi^T C^{-1} = \mathscr{C}\bar{\psi}\mathscr{C}^{-1}, \\ &A_\mu \to A_\mu^c = -A_\mu = \mathscr{C}A_\mu\mathscr{C}^{-1}, \\ &\varphi \to \varphi_c = \varphi^* = \mathscr{C}\varphi\mathscr{C}^{-1}, \\ &\varphi^* \to \varphi_c^* = \varphi = \mathscr{C}\varphi^*\mathscr{C}^{-1}. \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

注意，当把经典守恒流二次量子化时，为了消除顺序不定性，应对经典玻色场进行对称化，对经典费米场进行反对称化，可证，这样得到的流和内禀荷在荷共轭变换下一定反号，故荷共轭变换又称正反粒子变换，例：$J_\mu = \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ 反对称化后化为 $J_\mu = -\frac{\mathrm{i}}{2}[\bar{\psi}\gamma_\mu\psi - (\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^T] = \frac{\mathrm{i}}{2}(\bar{\psi}_\alpha\gamma^\mu_{\alpha\beta}\psi_\beta - \psi_\beta\gamma^\mu_{\alpha\beta}\bar{\psi}_\alpha)$，在 $\mathscr{C}$ 变换下，

$$\begin{aligned} J_\mu &\to \frac{\mathrm{i}}{2}(-\psi_\sigma C^{-1}_{\sigma\alpha}\gamma^\mu_{\alpha\beta}C_{\beta\rho}\bar{\psi}_\rho + C_{\beta\rho}\bar{\psi}_\rho\gamma^\mu_{\alpha\beta}\psi_\sigma C^{-1}_{\sigma\alpha}) \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2}(\psi_\sigma\gamma^\mu_{\rho\sigma}\bar{\psi}_\rho - \bar{\psi}_\rho\gamma^\mu_{\rho\sigma}\psi_\sigma) = -J_\mu. \end{aligned}$$

(推导中用了 $\gamma_\mu C = -C\gamma_\mu^T$ 和 $-\gamma_\mu^T = C^{-1}\gamma_\mu C$).

不难看出，对于玻色子场，在空间反射变换下，设 $\varphi \to \xi\varphi$，则 $\varphi_C \to \xi\varphi_C$，即正反玻色子具有完全相同的空间宇称，对于费米子，在空间反射变换下 $\psi \to \xi\gamma_4\psi$，由于 $\psi_C = C\bar{\psi}^T = C\gamma_4\psi^*$，故在空间反射变换下，$\psi_c \to C\gamma_4\xi^*\gamma_4\psi^* = -\xi^*\gamma_4(C\gamma_4\psi^*) = -\xi^*\gamma_4\psi_C$ 即对于实宇称言，正反费米子宇称相反，对于虚宇称正反费米子的宇称相同，容易证明，一对正反费米子的总空间宇称为 $\xi = (-1)^{L+1}$. 不难看出，荷共轭算符作用在消灭算符和产生算符上的结果是

电磁场：
$$\mathscr{C}C_k\mathscr{C}^{-1} = -C_k.$$
$$\mathscr{C}C_k^\dagger\mathscr{C}^{-1} = -C_k^\dagger. \tag{4.2.7}$$
或
$$\{\mathscr{C}, C_k\} = 0.$$

实标量场：
$$\mathscr{C}S_k\mathscr{C}^{-1} = S_k.$$
$$\mathscr{C}S_k^\dagger\mathscr{C}^{-1} = S_k^\dagger \text{ 或} \{\mathscr{C}, S_k\} = 0. \tag{4.2.8}$$

复标量场：
$$\mathscr{C}p_k\mathscr{C}^{-1^*} = q_k.$$
$$\mathscr{C}q_k^\dagger\mathscr{C}^{-1} = p_k^\dagger.$$

取厄米共轭得
$$\mathscr{C}p^\dagger\mathscr{C}^{-1} = q_k^\dagger. \tag{4.2.9}$$
$$\mathscr{C}q_k\mathscr{C}^{-1} = p_k.$$

Dirac 场：
$$\begin{aligned}
&\mathscr{C}a_{ks}\mathscr{C}^{-1} = b_{ks},\\
&\mathscr{C}b_{ks}^\dagger\mathscr{C}^{-1} = a_{ks}^\dagger,\\
&\mathscr{C}a_{ks}^\dagger\mathscr{C}^{-1} = b_{ks}^\dagger,\\
&\mathscr{C}b_{ks}\mathscr{C}^{-1} = a_{ks}.
\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

可见：荷共轭变换交换粒子与反粒子的荷而不改变其能量、动量、角动量以及涡度或手征性.

应特别指出，对 $m \neq 0$ 的 Dirac 粒子，C 变换后即得反 Dirac 粒子；

对 $m = 0$ 的 Weyl 粒子，CP 变换后才是反 Weyl 粒子；

因此严格地说，C，CP 变换才叫正反粒子变换.

我们来找寻 $\mathscr{C}$ 的本征态和本征值.

令 $\mathscr{C}|\rangle = \eta|\rangle$，$\eta$ 叫荷宇称.

我们约定真空态 $|0\rangle$ 的 $\eta = +1$

即：$\mathscr{C}|0> = |0\rangle$.

那么对于 n 个光子系统

$$|N\rangle = (C^{\dagger})^n|0\rangle.$$

应有 $$\mathscr{C}|N\rangle = \mathscr{C}C^{\dagger}\,\mathscr{C}^{-1}\mathscr{C}C^{\dagger}\,C^{-1}\cdots C^{\dagger}\,\mathscr{C}^{-1}\mathscr{C}|0\rangle$$

$$= (-C^{\dagger})(-C^{\dagger})\cdots(-C^{\dagger})|0\rangle.$$

故 $$\eta = (-1)^n. \tag{4.2.11}$$

即偶数光子态的 $\eta = +1$，奇数光子态的 $\eta = -1$.

我们不作证明，仅指出对于一个费米子 - 反费米子系统

$$\eta = (-1)^{L+s} \tag{4.2.12}$$

对于一个 π^+ -π^- 系统

$$\eta = (-1)^L \tag{4.2.13}$$

其中 L、S 分别指系统的总轨道量子数和总自旋量子数，按广义 Nöther 定理，如果系统在荷共轭变换下不变，系统的荷宇称 η 应是一个守恒量，应指出，任意带荷粒子系统，除非总荷为零，否则不可能是 $\mathscr{C}$ 的本征态.

因此，除了实矢量场、实标量场存在关于 $\mathscr{C}$ 的单粒子本征态外，复场均不可能存在关于 $\mathscr{C}$ 的单粒子本征态.

如果自然界具有严格的 C 和 CP 对称性，自然界中的物质和反物质就是严格对称的，事实上这种对称性是破缺的，而正是这种破缺才使得目前的宇宙得以存在.

§4.3　时间反演

定义时间反演为：

$$\begin{aligned} &x_i \to x_i, \\ &x_4 \to -x_4. \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

则可以证明经典力学和经典电动力学满足时间反演不变性. 牛顿方程

$$F = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2}.$$

显然在变换(4.3.1)下是时间反演不变的，这表示一个遵守牛顿运动方程的物体的运动状态在时间反演后(把电影倒过来播放!)仍是一个遵守牛顿运动方程的物体的运动状态.

对于经典电磁学，

$$\begin{aligned} &\Box A_\mu = J_\mu \quad \text{或} \Box A_i = J_i, \Box A_4 = J_4 = \mathrm{i}\rho, \\ &\partial_\mu A_\mu = 0. \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

在(4.3.1)变换后，

$$\Box \to \Box, \partial_i \to \partial_i, \partial_4 \to -\partial_4.$$

$$A_i(x,t) \to A'_i(\boldsymbol{x}',t') = A'_i(\boldsymbol{x},-t) = -A_i(\boldsymbol{x},t).$$

(因 $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \to -\boldsymbol{B}$)

$$J_i(\boldsymbol{x},t) \to J'_i(\boldsymbol{x}',t') = J'_i(\boldsymbol{x},-t) = -J_i(\boldsymbol{x},t).$$

$$J_4(\boldsymbol{x},t) \to J'_4(\boldsymbol{x},-t) = J_4(\boldsymbol{x},t).$$

$$A_4(\boldsymbol{x},t) \to A'_4(\boldsymbol{x},-t) = A_4(\boldsymbol{x},t).$$

(因 $A_4 = i\varphi, \nabla\varphi = \boldsymbol{E}$)

故知(4.3.2)满足时间反演不变性.

在量子场论中，场方程在时间反演后分别变为

$$(\Box - \chi^2)\varphi(\boldsymbol{x},t) = 0 \Rightarrow (\Box' - \chi^2)\varphi'(\boldsymbol{x}',t')$$

$$= (\Box - \chi^2)\varphi(\boldsymbol{x}, -t)$$
$$= \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial(-t)^2} - \chi^2\right)\varphi(\boldsymbol{x}, -t) = 0. \tag{4.3.3}$$

$$\Box A_\mu(\boldsymbol{x},t) = 0 \Rightarrow \Box A'_\mu(\boldsymbol{x}, -t)$$
$$= \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial(-t)^2}\right)A'_\mu(x, -t) = 0. \tag{4.3.4}$$

$$(\gamma_\mu\partial_\mu + \chi)\psi(\boldsymbol{x},t) = 0 \Rightarrow [\gamma_i\partial_i + \gamma_4(-\partial_4) + x]\psi'(\boldsymbol{x}, -t) = 0. \tag{4.3.5}$$

$$\left[\gamma_\mu\left(\partial_\mu - \frac{ie}{\hbar c}A_\mu(\boldsymbol{x},t)\right) + \chi\right]\psi(\boldsymbol{x},t) = 0 \Rightarrow$$

$$\left[\gamma_i\left(\partial_i - \frac{ie}{\hbar c}A'_i(x, -t)\right)\right] + \gamma_4\left(-\partial_4 + \frac{ie}{\hbar c}A'_4(x, -t)\right) + \chi\Big]$$
$$\times \psi'(\boldsymbol{x}, -t) = 0. \tag{4.3.6}$$

这些场方程均具有时间反演不变性，二次量子化后，我们希望找到一个么正算符$\mathscr{T}^+ = \mathscr{T}^{-1}$使得，例如Klein-Gordon方程在相似变换$\mathscr{T}(\Box - x^2)\varphi(x,t)\mathscr{T}^{-1} = 0$后

变为(4.3.3)仍是K-G方程

$$(\mathscr{T}\Box\mathscr{T}^{-1} - \mathscr{T}\chi^2\mathscr{T}^{-1})\mathscr{T}\varphi(x,t)\mathscr{T}^{-1} = 0.$$

与(4.3.3)式比较即知

$$\mathscr{T}\Box\mathscr{T}^{-1} = \Box,$$
$$\mathscr{T}\chi^2\mathscr{T} = \chi^2.$$

若要求(4.3.3)仍是K-G方程，应有$\mathscr{T}\varphi(\boldsymbol{x},t)\mathscr{T}^{-1} = \eta\varphi(\boldsymbol{x}, -t)$

$\eta = \pm 1$，η叫时间宇称.

类似　$\mathscr{T}(\gamma_\mu\partial_\mu + \chi)\psi(x)\mathscr{T}^{-1} = 0$，

或　$(\mathscr{T}\gamma_i\mathscr{T}^{-1}\mathscr{T}\partial_i\mathscr{T}^{-1} + \mathscr{T}\gamma_4\mathscr{T}^{-1}\mathscr{T}\partial_4\mathscr{T}^{-1} + \mathscr{T}\chi\mathscr{T}^{-1})$
$\mathscr{T}\psi(x,t)\mathscr{T}^{-1} = 0.$

此式与(4.3.5)式比较可令

$$\mathscr{T}\gamma_4\mathscr{T}^{-1}=\gamma_4,\mathscr{T}\partial_4\mathscr{T}^{-1}=-\partial_4.$$

满足上述条件的运算可归结为对任意复数 C

$$\mathscr{T}C\mathscr{T}^{-1}=C^*. \tag{4.3.8}$$

因之 $\mathscr{T}\gamma_i\mathscr{T}^{-1}=\gamma_i^*=\gamma_i^T$,(因为 $\gamma_\mu^{*T}=\gamma_\mu$)

$$\mathscr{T}\partial_i\mathscr{T}^{-1}=\partial_i,$$

$$\mathscr{T}\chi\mathscr{T}^{-1}=\chi. \tag{4.3.9}$$

故时间反演后的场方程化为

$$(\gamma_i^T\partial_i-\gamma_4\partial_4+\chi)\mathscr{T}\psi(\boldsymbol{x},t)\mathscr{T}^{-1}=0,$$

或 $$(\gamma_i^T\partial_i-\gamma_4^T\partial_4+\chi)\mathscr{T}\psi(\boldsymbol{x},t)\mathscr{T}^{-1}=0.$$

欲此式仍可化为 Dirac 方程

令 $$\mathscr{T}\psi(\boldsymbol{x},t)\mathscr{T}^{-1}=\eta T^{-1}\psi(\boldsymbol{x},-t).$$

(因为 $\psi(\boldsymbol{x},t)\to\psi'(\boldsymbol{x}',t')=\psi'(\boldsymbol{x},-t)=\eta T^{-1}\psi(\boldsymbol{x},t)$

所以 $\psi'(\boldsymbol{x},t)=\eta T^{-1}\psi(\boldsymbol{x},-t)$)

并要求 $$\gamma_\mu^T T^{-1}=T^{-1}\gamma_\mu \tag{4.3.10}$$

则 $$(\gamma_i^T\partial_i-\gamma_4^T\partial_4+\chi)T^{-1}\psi(\boldsymbol{x},-t)=0.$$

化为 $$T^{-1}(\gamma_i\partial_i-\gamma_4\partial_4+\chi)\psi(\boldsymbol{x},-t)=0.$$

这正好就是 Dirac 方程.

可见 $$\mathscr{T}\psi(\boldsymbol{x},t)\mathscr{T}^{-1}=\eta T^{-1}\psi(\boldsymbol{x},-t), \tag{4.3.11}$$

或 $$\psi'(\boldsymbol{x},-t)=\eta T^{-1}\psi(\boldsymbol{x},t).$$

满足(4.3.10)的矩阵 T 可求得为

$$T=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix},T^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix},$$

或 $$T=\gamma_5C=\gamma_5\gamma_2\gamma_4.(\text{因 }C=\gamma_2\gamma_4) \tag{4.3.12}$$

小结一下,欲时间反演是量子场论中的一个对称变换,场量在时间反演变换下的变换性质应为:

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{T}\varphi(\boldsymbol{x},t)\mathscr{T}^{-1}=\eta\varphi(\boldsymbol{x},-t),\\
&\mathscr{T}\varphi^{*}(\boldsymbol{x},t)\mathscr{T}^{-1}=\eta\varphi^{*}(\boldsymbol{x},-t),\\
&\mathscr{T}A_{\mu}(\boldsymbol{x},t)\mathscr{T}^{-1}=\eta A_{\mu}(\boldsymbol{x},-t),\\
&\mathscr{T}\psi(\boldsymbol{x},t)\mathscr{T}^{-1}=\eta T^{-1}\psi(\boldsymbol{x},-t),\\
&\mathscr{T}\bar{\psi}(\boldsymbol{x},t)\mathscr{T}^{-1}=\eta\bar{\psi}(\boldsymbol{x},-t)T,\\
&\mathscr{T}C\mathscr{T}^{-1}=C^{*}.\qquad\qquad(C\text{ 是任何一个数})
\end{aligned}
\tag{4.3.13}
$$

可以验证，在上述时间反演变换下，所有量子条件(对易和反对易关系) 均保持不变.

由 (4.3.13) 知，时间反演虽是一个么正变换，但不是一个线性变换，通常叫反线性变换(anti-linear)，因之就是一个么正 - 反线性算符或简称反么正算符(anti-unitary).

最后应指出，由于 $\mathscr{T}$ 的反线性性质，不可能存在 $\mathscr{T}$ 算符的本征态，因设有

$$\mathscr{T}|\rangle=\tau|\rangle,$$

则
$$
\begin{aligned}
\mathscr{T}(\alpha|\rangle)&=\mathscr{T}\alpha\mathscr{T}^{-1}\mathscr{T}|\rangle=\alpha^{*}\tau|\rangle\\
&=\tau(\alpha^{*}|\rangle)\neq\tau(\alpha|\rangle).
\end{aligned}
$$

亦即 $\alpha|\rangle$ 不再是本征值为 τ 的 $\mathscr{T}$ 的本征态，但在 Hilbert 空间 $\alpha|\rangle$ 与 $|\rangle$ 代表同一个态矢，它们应都是 $\mathscr{T}$ 的本征值为 τ 的本征态，这样我们就得到了一个矛盾，这说明 $\mathscr{T}$ 算符不能具有本征态，当然 也不具有本征值，显然场方程的时间反演不变性不导致存在一个守恒量.

§4.4 *CPT* 定理(Lüders 定理)

定理：设有一个局部场论，它满足：

① 固有 Lorentz 协变性；

②Lagrange 量是厄米量；

③ 满足自旋和统计的关系.

则变换 $\theta = CPT$(或 PCT、TPC) 是场论的一个对称变换.

注意到:

$$\mathscr{T}\psi(x)\mathscr{T}^{-1} = \eta_T T^{-1}\psi(\boldsymbol{x}, -t),$$

$$P\mathscr{T}\psi(x)\mathscr{T}^{-1}P^{-1} = \eta_T\eta_P T^{-1}\gamma_4\psi(-\boldsymbol{x}, -t)$$

$$= \eta_T\eta_P T^{-1}\gamma_4\psi(-x).$$

$$CP\mathscr{T}\psi(x)\mathscr{T}^{-1}P^{-1}C^{-1} = \eta_T\eta_P\eta_C T^{-1}\gamma_4 C\,\bar{\psi}^T(-x)$$

$$\eta T^{-1}\gamma_4 C\,\bar{\psi}^T(-x). \quad (\eta \equiv \eta_T\eta_P\eta_C)$$

$$T^{-1}\gamma_4 C = \gamma_4^{-1}\gamma_2^{-1}\gamma_5^{-1}\gamma_4\gamma_2\gamma_4 = -\gamma_4^{-1}\gamma_2^{-1}\gamma_5^{-1}\gamma_2$$

$$= -\gamma_4\gamma_2\gamma_5\gamma_2 = \gamma_4\gamma_5.$$

所以 $\theta\psi(x)\theta^{-1} = \eta\gamma_4\gamma_5\,\bar{\psi}^T(-x) = -\eta\gamma_5\psi^*(-x).$

(4.4.1)

类似可得 $\theta\varphi(x)\theta^{-1} = \varphi^*(-x).$ (4.4.2)

$$\theta A_\mu(x)\theta^{-1} = -A_\mu^*(-x). \quad (4.4.3)$$

将(4.4.1)、(4.4.2)、(4.4.3) 代入 Lagrange 函数中即可在一般情况下证明(从略).

$$\theta\mathscr{L}(x)\theta^{-1} = \mathscr{L}^\dagger(-x). \quad (4.4.4)$$

Lüders 定理的重要意义是:

①CPT 对称性与 Lorentz 协变性一样是目前局部场论的一个必要条件.

② 如果自然界存在某个量子态 $|\rangle$,把这个态中的粒子和反粒子交换,并把它们作空间反射和时间反演,新的态 $|\rangle_{CPT}$ 也服从相同的 Lorentz 协变的物理规律.

③ 由 CPT 定理可以推出粒子和反粒子具有严格相等的质量寿命和磁矩.

④ 如果在某种相互作用中,C,P,T 之一的对称性破缺,那么至少还有另一个对称性也要破缺,现在我们来讨论 C,P,T 的对称性的破缺.

(1)C 对称性与 P 对称性的破缺.

在β衰变中 P 对称性破缺，按 CPT 定理必有 CT 对称性破缺，但已知在β衰变中 CP 守恒，故由 CPT 定理，T 对称性应保持，因而在β衰变中 C 对称性必破缺，总之在β衰变中，T、CP、CPT 对称性保持，P、C、CT、PT 对称性破缺.

(2)CP 对称性或 T 对称性的破缺.

在 K^0 介子的 $\pi^{\pm}$ 衰变中发现有长寿命 $K_L^0(\tau = 5.2 \times 10^{-8}s)$ 及短寿命 $K_S^0(\tau = 0.9 \times 10^{-10}s)$ 两种，研究表明 K_L^0 与 K_S^0 分别可看做 K^0 介子与 $\overline{K}^0$ 介子的两个线性独立的混合态，即

$$\varphi_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi + \varphi^*), \varphi_S = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi - \varphi^*). \tag{4.4.5}$$

已知在 C 变换下：

$$\varphi \to \varphi^*, \qquad \varphi^* \to \varphi.$$

故 $$\varphi_L \to \varphi_L, \qquad \varphi_S \to -\varphi_S.$$

在 P 变换下：

$$\varphi \to -\varphi, \qquad \varphi^* \to -\varphi^*.$$

故 $$\varphi_L \to -\varphi_L, \qquad \varphi_S \to -\varphi_S.$$

在 CP 变换下：

$$\varphi_L \to -\varphi_L, \varphi_S \to \varphi_S,$$

即 $$CP\varphi_L P^{-1}C^{-1} = -\varphi_L \to \eta_c\eta_p = -1. \tag{4.4.6}$$

$$CP\varphi_S P^{-1}C^{-1} = \varphi_S \to \eta_c\eta_p = +1.$$

对于 $(\pi^+\ \pi^-)$ 系统

$$\eta_p(\pi^+\ \pi^-) = (-1)^2(-1)^L = (-1)^L,$$

$$\eta_c(\pi^+\ \pi^-) = (-1)^L.$$

故 $$\eta_c\eta_p = (-1)^{2L} = +1.$$

可见若承认在 $K_{L,S}^0$ 衰变中 CP 守恒，只能出现下述衰变

$$K_S^0 \to \pi^+ + \pi^-,$$

而下述衰变是禁戒的

$$K_L^0 \to \pi^+ + \pi^-.$$

1964 年 Christensen 等发现存在衰变

$$K_L^0 \to \pi^+ + \pi^-.$$

显然这是 CP 不守恒的，按 CPT 定理，也是违反 T 反演不变性的，但观测表明

$$\frac{\mathrm{Amp}(K_L^0 \to \pi^+ \pi^-)}{\mathrm{Amp}(K_S^0 \to \pi^+ \pi^-)} = (2.3 \pm 0.3) \times 10^{-3}. \quad (4.4.7)$$

因之这一违反 T 反演不变性或 CP 不守恒的衰变幅仅为通常的弱衰变幅的 1/1000，或前者的衰变几率仅为后者的百万分之一，有时把这种 CP 不守恒的衰变叫超弱衰变(Superweak).

(3) 对称性破缺和可观测性.

李政道指出，对称性意味着存在某种不可观测量，对称性破缺意味着存在某种可观测量. 在如上所述的弱过程和超弱过程中 P 对称性、C 对称性和 T 对称性的破缺就意味着空间的左右，粒子的正反(或电荷的正负)与时间的正逆不再是不可区分和不可观测的了，在没有发现 P，C，CP 对称性破缺之前，空间的左右，电荷的正负，时间的正逆(在统计热力学不起作用的那些单元过程中)只是一种约定，我们的文明世界可以建立这种统一的约定，同样另一个球外文明世界也可建立他们自己统一的约定，但仅能通过信号联系的这两个文明世界的上述约定只有根据令 C，P，CP 对称性破缺的物理过程才能有一个共同的绝对的标准，否则进一步的联系是不可能的或十分危险的. 最后，列表表出 C，P，T 和 CPT 对称性在各种物理过程中的破缺情况.

	P	C	$T(CP)$	CPT
强作用	√	√	√	√
电磁作用	√	√	√	√
弱作用	×	×	√	√
超弱作用	×	×	×	√

“×”表示对称性破缺，“√”表示对称性成立.

最后谈谈 C,CP 对称性破缺与重子反重子的不对称性. 观测表明，在宇宙的可观测范围内没有反重子，只有重子. Sakharov 于 1967 年提出，大爆炸宇宙极早期，物质和反物质是对称的，以后随着宇宙的演化，产生了 C,CP 对称性破缺，其中一个必要条件是：存在 C,CP 破缺的过程以使粒子和反粒子不对称，设有过程使初态粒子 a 转化为末态粒子 b，转化几率幅为 $S(a\to b)$，它的 C,CP 对称过程为 $\overline{S}(\bar{a}\to\bar{b})$，$C,CP$ 破缺意味着

$$S(a\to b)\neq\overline{S}(\bar{a}\to\bar{b}).$$

这就有可能说明当前宇宙物质与反物质的不对称性.

第 5 章　散射矩阵和微扰论

§5.1　散射矩阵

各种场或粒子间的相互作用由相互作用汉密尔顿 H_i 描述，采用相互作用绘景时，任一力学量的运动方程和自由场的 Heisenberg 运动方程是一样的，由无相互作用时的汉密尔顿 H^0 决定，而态矢的运动方程则仅由 H_i 决定，因此对场或粒子的相互作用的进一步研究应讨论态矢的运动方程.

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle = H_i(t,t_0)|t\rangle.$$

其中
$$H_i = \int\left[\frac{\partial\mathscr{L}_i}{\partial\varphi_a,4},\varphi_a,4-\mathscr{L}_i\right]\mathrm{d}^3\boldsymbol{X}. \tag{5.1.1}$$

引入态矢的时间演化算符 $U(t,t_0)$：

$$|t\rangle = U(t,t_0)|t_0\rangle. \tag{5.1.2}$$

$U(t,t_0)$ 所应满足的算符方程为

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0) = H_i(t,t_0)U(t,t_0). \tag{5.1.3}$$

其中 $U(t,t_0)$ 应满足初始条件

$$U(t_0,t_0) = 1. \tag{5.1.4}$$

在无穷小时间间隔中，(5.1.3) 化为

$$\begin{aligned}&U(t_0+\delta t,t_0)-U(t_0,t_0)\\ =&-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(H_i(t_0)+\delta H)\left(U(t_0,t_0)+\frac{\partial U}{\partial t}\delta t\right)\delta t\\ =&-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(H_i(t_0)+\delta H)U(t_0,t_0)\delta t\end{aligned}$$

$$\rightarrow U(t_0+\delta t,t_0)=1-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_I(t_0)\cdot\delta t. \tag{5.1.5}$$

易知(5.1.5)与(5.1.1)是等价的,因此也可以把(5.1.5)看做量子场论中的基本动力学方程.

今证明,时间演化算符$U(t,t_0)$是么正算符

$$U^{\dagger}U=UU^{\dagger}=I. \tag{5.1.6}$$

证:一般可把$|t\rangle$展为一组可对易完备算符集的公共本征态$|\Psi_i\rangle$的叠加态

$$|t\rangle=\Sigma C_i|\Psi_i\rangle.$$

其中$|\Psi_i\rangle$是正交规一化本征态.

故按总几率为1,应得$\langle t|t\rangle=\Sigma C_i^{\dagger}C_i=1$,

i.e $\langle t|t\rangle=\langle t_0|U^{\dagger}U|t_0\rangle=\langle t_0|t_0\rangle=1$,

或 $U^{\dagger}(t,t_0)U(t,t_0)=1.$ (5.1.7)

对于无限维Hilbert空间内的算符由$U^{\dagger}U=1$,不一定有$U^{\dagger}=U^{-1}$或$UU^{\dagger}=1$,这是由于目前我们并不知U的逆是否存在,但由算符$U(t,t_0)$的群论性质

$$U(t,t_0)U(t_0,t_1)=U(t,t_1),$$

得 $$U(t_1,t_0)U(t_0,t_1)=U(t_1t_1)=1.$$

这表示$U(t,t_0)$的逆存在并等于$U(t_0,t)$. 以$U^{-1}(t,t_0)$右乘(5.1.7)后得,$U^{\dagger}(t,t_0)=U^{-1}(t,t_0)$,

即 $$U^{\dagger}(t,t_0)U^{\dagger}(t,t_0)=1. \tag{5.1.8}$$

因之,态矢可规一化,或几率守恒的充要条件是$U(tt_0)$应为么正算符.

场或粒子之间的相互作用,实际是一个碰撞过程,我们也正是通过不同粒子之间的碰撞去变革原子,原子核和基本粒子来研究它们的规律,在实验中,我们并不需要知道态矢在整个时间过程中的行为,测量的只是离开碰撞区前、后的行为,由于测量时刻和碰撞时刻之间的时间间隔远大于碰撞进行的时间间隔,所以实际上

可以认为测量所反映的态矢是在 $t = \pm\infty$ 时的渐近行为，它们实际上可看做自由态.

(5.1.2) 式取 $t \to +\infty, t_0 \to -\infty$，得

$$|\rangle\text{in} \xrightarrow[(t \to -\infty)]{\text{碰撞区}} |\rangle\text{out} \quad (t \to +\infty)$$

$$|(t \to +\infty)\rangle = U(\infty, -\infty)|t_0 \to -\infty\rangle$$

或
$$|\rangle\text{out} = S|\rangle\text{in}. \tag{5.1.9}$$

式中 $S \equiv U(\infty, -\infty)$ 叫碰撞矩阵或散射矩阵，

$|\rangle\text{in} \equiv |-\infty\rangle$ 是碰撞前的初态或入射态，

$|\rangle\text{out} \equiv |\infty\rangle$ 是碰撞后的末态或出射态.

在实验中，通常初态 $|\rangle$in 是一组可对易完备算符集的某个公共本征态 $|i\rangle$.

由 $\sum_i |i\rangle\langle i| = 1$，得

$$\sum_i (\langle i|\rangle\text{out})|i\rangle = |\rangle\text{out} = S|i\rangle.$$

可见，S 矩阵是把某一确定初态变为在某种特定相互作用下的一切可能的本征态的叠加态.

$$|\rangle\text{out} = \Sigma C_i|i\rangle, C_i \equiv \langle i|\rangle\text{out},$$

末态处于某个特殊本征态 $|f\rangle$ 的几率振幅，即

$$C_f = \langle f|\rangle\text{out} = \langle f|S|i\rangle. \tag{5.1.10}$$

从 $|i\rangle$ 到 $|f\rangle$ 的跃迁几率为

$$|C_f|^2 = |\langle f|S|i\rangle|^2.$$

以后将提到这个跃迁几率不是实测量.

§5.2 微扰论

考虑下式 $U(t', t) = U(t', t_{n-1})U(t_{n-1}, t_{n-2})\cdots$

$$U(t_2, t_1)U(t_1, t). \tag{5.2.1}$$

令所有时间间隔(t_{m+1},t_m)为无穷小量，由(5.1.5)知，有

$$U(t_{m+1},t_m)\simeq 1-(\mathrm{i}/\hbar)H_i(t_m)\Delta t_m.$$

(5.2.1)化为

$$U(t',t)\simeq\prod_{m=0}^{n-1}\left(1-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_i(t_m)\Delta t_m\right).(t_0\equiv t)\qquad(5.1.2)$$

上式右方各因子的时间顺序是右早、左晚，即

$$t'>t_{n-1}>t_{n-2}\cdots>t_2>t_1>t_0=t.$$

展开后，取$\hbar=1$得

$$U(t',t)\simeq 1-\mathrm{i}\sum_{m=0}^{n-1}H_i(t_m)\Delta t_m+(-i)^2\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{m'=0}^{m-1}.$$

$$H_i(t_m)\Delta t_m H_i(t_{m'})\Delta t_{m'}+\cdots$$

$$=1-\mathrm{i}\int_t^{t'}H_i(t_n)\mathrm{d}t_n+(-i)^2\int_t^{t'}H_i(t_n)\mathrm{d}t_n$$

$$\times\int_t^{t_n}H_i(t_{n-1})\cdot\mathrm{d}t_{n-1}+\cdots.$$

故最后得 $U(t',t)=\sum_{n=0}^{\infty}U^{(n)}(t',t).$

其中 $U^{(0)}(t',t)=1.$

$$U^{(n)}(t',t)=(-\mathrm{i})^n\int_t^{t'}\mathrm{d}t_n\int_t^{t_n}\mathrm{d}t_{n-1}\cdots$$

$$\times\int_t^{t_2}\mathrm{d}t_1H_i(t_n)H_i(t_{n-1})\cdots H_i(t_1).\qquad(5.2.3)$$

由积分上限知被积函数因子满足时序

$$t_n>t_{n-1}>\cdots>t_2>t_1.$$

定义算符积U、V、$W\cdots$的时序积(chronological product)为

$$T(U\cdot V\cdot W\cdots)\equiv\delta_P U'\cdot V'\cdot W'\cdot\cdots.\qquad(5.2.4)$$

其中积$U'\cdot V'\cdot W'\cdots$是积$U\cdot V\cdot W\cdots$按时间先后(早、晚)由右向左排列而成，在把积$U\cdot V\cdot W\cdots$换排成时序积时应注意：

(1)若费米算符的交换次数为P次，则

$$\delta_P = \begin{cases} +1 = (-1)^P, \text{当 } P \text{ 是偶数.} \\ -1 = (-1)^P, \text{当 } P \text{ 是奇数.} \end{cases}$$

(2) 交换算符顺序时,所有对易子和反对易子均当做 0 考虑,显然(5.2.3)式可改写为

$$U^{(n)}(t',t) = (-\mathrm{i})^n \int_t^{t'} \mathrm{d}t_n \int_t^{t_n} \mathrm{d}t_{n-1} \cdots \times \int_t^{t_2} \mathrm{d}t_1 T[H_i(t_n)H_i(t_{n-1})\cdots H_i(t_1)].$$

考虑积分

$$(-\mathrm{i})^n \int_t^{t'} \mathrm{d}t_n \int_t^{t'} \mathrm{d}t_{n-1} \cdots \int_t^{t'} \mathrm{d}t_1 T[H_i(t_n)H_i(t_{n-1})\cdots H_i(t_1)].$$

此积分与 $U^n(t',t)$ 不同之点在于所有积分上界都换成了 t',可以用数学归纳法严格证明(Progr. Theor. Phys. 5(1950))

$$U^{(n)}(t',t) = \frac{(-\mathrm{i})^n}{n!} \int_t^{t'} \mathrm{d}t_n \int_t^{t'} \mathrm{d}t_{n-1} \cdots \int_t^{t'} \mathrm{d}t_1 T[H_i(t_n)H_i(t_{n-1})\cdots H_i(t_1)]. \quad (5.2.5)$$

以 $U^{(2)}(t',t) = (-\mathrm{i})^2 \int_t^{t'} \mathrm{d}t_2 \int_t^{t_2} \mathrm{d}t_1 T[H_i(t_2)H_i(t_1)]$ 为例对换 t_1, t_2 其值不变,得

$$U^{(2)}(t',t) = (-\mathrm{i})^2 \int_t^{t'} \mathrm{d}t_1 \int_t^{t_1} \mathrm{d}t_2, T[H_i(t_1)H_i(t_2)] = (-\mathrm{i})^2 \int_t^{t'} \mathrm{d}t_1 \int_t^{t_1} \mathrm{d}t_2 T[H_i(t_2)H_i(t_1)].$$

上式中我们考虑到了 $T[H_i(t_1)H_i(t_2)] = T[H_i(t_2)H_i(t_1)]$,但

$$\int_t^{t'} \mathrm{d}t_1 \int_t^{t_1} \mathrm{d}t_2 = \int_t^{t'} \mathrm{d}t_1 \int_t^{t'} \mathrm{d}t_2 \theta(t_1 - t_2) = \int_t^{t'} \mathrm{d}t_2 \int_t^{t'} \mathrm{d}t_1 \theta(t_1 - t_2) = \int_t^{t'} \mathrm{d}t_2 \int_{t_2}^{t'} \mathrm{d}t_1.$$

式中 $\theta(t_1 - t_2) = 1$,当 $t_1 \geqslant t_2$;$\theta(t_1 - t_2) = 0$,当 $t_1 < t_2$.

故 $U^{(2)}(t',t) = (-\mathrm{i})^2 \int_t^{t'} \mathrm{d}t_2 \int_t^{t_2} \mathrm{d}t_1 T[(H_i(t_2)H_i(t_1)]$

$$= (-\mathrm{i})^2\int_t^{t'}\mathrm{d}t_2\int_{t_2}^{t'}\mathrm{d}t_1 T[H_i(t_2)H_i(t_1)].$$

或
$$U^{(2)}(t',t) = \frac{(-\mathrm{i})^2}{2}\int_t^{t'}\mathrm{d}t_2\int_t^{t_2}\mathrm{d}t_1 T[H_i(t_2)H_i(t_1)]$$
$$+ \frac{(-\mathrm{i})^2}{2}\int_t^{t'}\mathrm{d}t_2\int_{t_2}^{t'}\mathrm{d}t_1 T[H_i(t_2)H_i(t_1)]$$
$$= \frac{(-\mathrm{i})^2}{2}\int_t^{t'}\mathrm{d}t_2\left\{\left(\int_t^{t_2}\mathrm{d}t_1 + \int_{t_2}^{t'}\mathrm{d}t_1\right)T[H_i(t_2)\cdot H_i(t_1)]\right.$$
$$= \frac{(-\mathrm{i})^2}{2!}\int_t^{t'}\mathrm{d}t_2\int_t^{t'}\mathrm{d}t_1 T[H_i(t_2)H_i(t_1)].$$

考虑到

$$H_i(t) = \int \mathscr{H}_i(x_n)\mathrm{d}^3\boldsymbol{x},$$

可把(5.2.5) 改写作

$$U^{(n)}(t',t) = \frac{(-\mathrm{i})^n}{n!}\int_t^{t'}\mathrm{d}^4x_n\int_t^{t'}\mathrm{d}^4x_{n-1}\cdots$$
$$\int_t^{t'}\mathrm{d}^4x_1 T[\mathscr{H}_i(x_n)\mathscr{H}_i(x_{n-1})\cdots\mathscr{H}_i(x_1)].$$

令 $t = -\infty, t' = +\infty$ 即可.

S 矩阵的无穷级数展开式:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)}, S^{(0)} = 1, \tag{5.2.6}$$

$$S^{(n)} = \frac{(-\mathrm{i})^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4x_n\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4x_{n-1}\cdots$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4x_1 T[\mathscr{H}_i(x_n)\mathscr{H}_i(x_{n-1})\cdots\mathscr{H}_i(x_1)].$$

它显然是一个 Lorentz 不变量.

欲上述展开有意义,必须要求级数(5.2.6) 是收敛的,这归结为相互作用 H_i 或偶合常数的强弱,当相互作用不强时(弱作用,电磁作用等) 有可能取头几项就得到良好的近似,这就是量子场论中的协变微扰论. 应注意,任何相互作用均可用 S 矩阵来描绘,而 S 矩阵之所以可写成(5.2.6) 的形式是由于

(1) 态矢应满足动力学方程(5.1.1)；

(2) 假定微扰展开是收敛的.

§5.3 S 矩阵的简化

由 $H_i = \int \left[\frac{\partial \mathscr{L}_i}{\partial \varphi_{a,4}} \varphi_{a,4} - \mathscr{L}_i\right] \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}$ 知，对于非导数耦合，

$$H_i = -\int \mathscr{L}_i \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}, \text{或 } \mathscr{H}_i = -\mathscr{L}_i.$$

其中 $\mathscr{L}_i$ 是在相互作用绘景中的相互作用 Lagrange 量. 例如对于 Dirac 场 - 电磁场耦合

$$\mathscr{H}_i = -\mathscr{L}_i = -\mathrm{i}e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu = -\mathrm{i}e\bar{\psi}\hat{A}\psi, (\hat{A} \equiv \gamma_\mu A_\mu).$$

一般说 $\mathscr{H}_i$ 都是场量的三线性组合，而每个场量又是一些产生算符和消灭算符之和，因此把 $\mathscr{H}_i$ 按消灭算符和产生算符展开，就可看做一些含有不同粒子的产生算符和消灭算符之积的和，与此相应 $S^{(n)}$ 也可展开为许多项之和，每一项都是一些不同粒子的产生算符与消灭算符之积，它所反映的物理事实是消灭一些粒子和产生一些粒子，亦即反映了不同粒子之间的相互转化现象.

如果 $t = -\infty$ 时的初态 $|\mathrm{i}\rangle$ 可表为

$|\rangle\mathrm{in} = |\mathrm{i}\rangle = a^\dagger b^\dagger c^\dagger \cdots d^\dagger |0\rangle$，那么经过相互作用后的末态 $|\rangle\mathrm{out}$ 可表为

$$|\rangle\mathrm{out} = Sab^\dagger c^\dagger \cdots d^\dagger |0\rangle.$$

其中处于某一确定末态

$|f\rangle = e^\dagger f^\dagger \cdots g^\dagger |0\rangle$ 的几率幅为

$$\langle f|S|\mathrm{i}\rangle = <0|g\cdots feSa^\dagger b^\dagger \cdots d^\dagger |0\rangle. \tag{5.3.1}$$

几率为 $(\langle f|S|\mathrm{i}\rangle)^2 = (\langle 0|g\cdots eSa^\dagger b^\dagger c^\dagger \cdots d^\dagger |0\rangle)^2$.

应注意，并非 S 中每一项都对(5.3.1)式有贡献，只有那些一方面具有消灭算符 $a, b, c, \cdots, d$，另一方面又具有产生算符 $e^\dagger, f^\dagger, \cdots, q^\dagger$ 作为因子的项才有可能对(5.3.1)式做出贡献. 为了计算方

便，我们把S矩阵的每一项中所有代表粒子消灭的算符排在右边，所有代表粒子产生的算符排在左边，为此必须利用算符之间量子条件(对易或反对易关系)，如此排列后，即可看出S矩阵中哪些项对(5.3.1)有贡献，哪些项无贡献，因而使各种散射过程的处理大大简化.

§5.4 正规积

为了达到上节所提到的简化，1950年Wick引入算符积的正规积(Normal Product)概念，即

$$N(UVW\cdots Z)=\delta_p U'V'W'\cdots Z' = :UVW\cdots Z:$$

其中算符积$U'V'W'\cdots Z'$是把等式左边的算符积$UVW\cdots Z$中某种粒子的消灭算符移至同类粒子的产生算符的右侧. 在移动过程中应注意：

(1) 如果需要把费米算符交换偶数次，则$\delta_p=1$，如果需要把费米算符交换奇数次，则$\delta_p=-1$.

(2) 交换算符顺序时，所有对易子和反对易子均当做0看待，显然正规积满足分配律

$$N[UV(W_1+W_2)\cdots Z]=N(UVW_1\cdots Z)+N(UVW_2\cdots Z].$$

由(3.3.10)知任意场量$\psi(x)$可分解为$\psi(x)=U+\overline{V}$.

其中U和$\overline{U}$分别含有U粒子的消灭算符和产生算符，V和$\overline{V}$分别含有V粒子的消灭算符和产生算符.(显然，U，V是$\psi(x)$的正能解，$\overline{U}$，$\overline{V}$是$\psi(x)$的负能解.)

对于费米场(旋量场)：

$$N(\bar{\psi}(y)\psi(x)+N(\psi(x)\bar{\psi}(y))=0. \tag{5.4.1}$$

证：$N(\psi(x)\bar{\psi}(y)=N(U(x)\overline{U}(y))+N(U(x)V(y))+$

$$N(\overline{V}(x)\overline{U}(y))+N(\overline{V}(x)V(y))$$

$$=-\overline{U}(y)U(x)+U(x)V(y)+$$

$$+\overline{V}(x)\overline{U}(y)+\overline{V}(x)V(y).$$ 类似地

$$N(\overline{\psi}(y)\psi(x)=\overline{U}(y)U(x)+V(y)U(x)+\overline{U}(y)\overline{V}(x)$$
$$-\overline{V}(x)V(y).$$

相加后即证.

对于玻色场(张量场):

$$N(\varphi^{\dagger}(y)\varphi(x))-N(\varphi(x)\varphi^{\dagger}(y))=0. \tag{5.4.2}$$

对费米场有

$$N(\psi(x)\psi(y))=\psi(x)\psi(y),$$
$$N(\overline{\psi}(x)\overline{\psi}(y))=\overline{\psi}(x)\overline{\psi}(y). \tag{5.4.3}$$

我们证明:Dirac 场与电磁场之间的相互作用 Hamilton 密度可表为

$$\mathscr{H}_i=-ieN(\overline{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu).$$

证:在荷共轭一节中已指出正确的 $\mathscr{H}_i$ 应为反对称化的 J_μ 与 A_μ 组成,即

$$\mathscr{H}_i=-\frac{ie}{2}(\overline{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu-\psi^T\gamma_\mu{}^T\overline{\psi}^T)A_\mu$$
$$=-\frac{ie}{2}(\overline{\psi}\gamma_\mu\psi-\psi^T\gamma_\mu^T\overline{\psi}^T)A_\mu=-J_\mu A_\mu. \tag{5.4.4}$$

由于光子的产生算符与消灭算符和 Dirac 粒子的产生算符与消灭算符在正规积中可任意编排,

欲证:$\mathscr{H}_i=-ieN(\overline{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu)$,

仅须证 $J_\mu=ieN(\overline{\psi}\gamma_\mu\psi)$ 即可. (5.4.5)

证:$J_\mu=\frac{ie}{2}\{\overline{\psi}\gamma_\mu\psi-\psi^T\gamma_\mu^T\overline{\psi}^T\}$.

注意到:$(\overline{\psi}\gamma_\mu\psi)^T=(\psi^T\gamma_\mu^T\overline{\psi}^T)=\psi_\beta^T(\gamma_\mu^T)_{\beta\alpha}\overline{\psi}_\alpha^T=\psi_\beta^T(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\overline{\psi}_\alpha^T$,

则 $J_\mu=i\frac{e}{2}(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\{[(V+\overline{U})]_\alpha[\overline{V}+U]_\beta-[\overline{V}+U]_\beta[V+\overline{U}]_\alpha\}$

$$=\frac{ie}{2}(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\{V_\alpha\overline{V}_\beta+V_\alpha U_\beta+\overline{U}_\alpha\overline{V}_\beta+\overline{U}_\alpha U_\beta-\overline{V}_\beta V_\alpha$$
$$-U_\beta V_\alpha-\overline{V}_\beta\overline{U}_\alpha-U_\beta\overline{U}_\alpha\}$$

$$= \frac{ie}{2}(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\{2N(\bar{\psi}_\alpha\psi_\beta) + \{V_\alpha \bar{V}_\beta\} - \{U_\beta \bar{U}_\alpha\}\}.$$

由 $\psi(x) = \Sigma[a\psi^{(+)} + b^\dagger \psi^{(-)}] = U + \bar{V}$,

$\bar{\psi}(x) = \Sigma[a^\dagger \overline{\psi^{(+)}} + b\,\overline{\psi^{(-)}}] = \bar{U} + V$,得

$$\{V_\alpha, \bar{V}_\beta\} = \{\Sigma b\,\overline{\psi_\alpha^{(-)}}, \Sigma b^\dagger \psi_\beta^{(-)}\}$$

$$= \sum_{P,\lambda} \overline{\psi_{\alpha,\lambda}^{(-)}}(+P)\psi_{\beta,\lambda}^{(-)}(+P).$$

类似：$\{U_\beta, \bar{U}_\alpha\} = \sum_{P,\lambda} \overline{\psi_{\alpha,\lambda}^{(+)}}(P)\psi_{\beta,\lambda}^{(+)}(P)$,

故

$$(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\{V_\alpha, \bar{V}_\beta\} = \sum_\lambda \overline{\psi_\lambda^{(-)}}\gamma_\mu\psi_\lambda^{(-)},$$

$$(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\{U_\beta, \bar{U}_\alpha\} = \sum_\lambda \overline{\psi_\lambda^{(+)}}\gamma_\mu\psi_\lambda^{(+)}.$$

考虑到 $\psi^{(+)}$ 与 $\psi^{(-)}$ 分别为粒子与反粒子的波函数，

由(4.2.6)

$$\overline{\psi_\lambda^{(-)}} = -\psi_\lambda^{(+)T}C^{-1}, \psi_\lambda^{(-)} = C\,\overline{\psi_\lambda^{(+)T}},$$

故 $\sum_\lambda \overline{\psi_\lambda^{(-)}}\gamma_\mu\psi_\lambda^{(-)} = -\sum_\lambda \psi_\lambda^{(+)T}C^{-1}\gamma_\mu C\,\overline{\psi_\lambda^{(+)T}}$,

$$= -\sum_\lambda \psi_\lambda^{(+)T}(-\gamma_\mu{}^T)\,\overline{\psi_\lambda^{(+)T}},$$

$$= \sum_\lambda (\overline{\psi_\lambda^{(+)}}\gamma_\mu\psi_\lambda^{(+)})^T = \sum_\lambda \overline{\psi^{(+)}}\gamma_\mu\psi_\lambda^{(+)}.$$

这就证明了(5.4.5).

我们证明：

Dirac 场与膺标量场之间的相互作用 Hamilton 密度可表为

$$\mathscr{H}_i = iGN(\bar{\psi}\gamma_5\psi\varphi). \tag{5.4.6}$$

证明：只须证明：$\bar{\psi}\gamma_5\psi = N(\bar{\psi}\gamma_5\psi)$ 即可.

仿前可证

$$\bar{\psi}\gamma_5\psi = N(\bar{\psi}\gamma_5\psi) + (\gamma_5)_{\alpha\beta}\{v_\alpha, \bar{v}_\beta\}$$

$$= N(\bar{\psi}\gamma_5\psi) + \sum_\lambda \overline{\psi_\lambda^{(-)}}\gamma_5\psi_\lambda^{(-)}.$$

但 $\overline{\psi^{(-)}}\gamma_5\psi^{(-)} = A^2(-B\omega_+^*, \omega_+^*)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

$$\times\begin{pmatrix} -\beta\omega^{+} \\ \omega^{+} \end{pmatrix} = A^{2}(-B\omega_{+}^{*}, -\omega_{+}^{*})\begin{pmatrix} -\omega^{+} \\ -B\omega^{+} \end{pmatrix} = 0.$$

故 $\bar{\psi}\gamma_5\psi = N(\bar{\psi}\gamma_5\psi)$.

§5.5 Wick 定理(1950) 费曼格林函数

为了简化 S 矩阵,应把(5.2.6)中的时序积改为正规积.

为此,定义二算符 U、V 的收缩(contraction)为

$$\overset{\cdot}{U}\overset{\cdot}{V} = T(UV) - N(UV). \tag{5.5.1}$$

则任二算符的时序积就可化为正规积了.

(1) Dirac 场量的收缩

纯积的收缩

$$\overset{\cdot}{\psi}(x)\overset{\cdot}{\psi}(y) = \overset{\cdot}{\bar{\psi}}(x)\overset{\cdot}{\bar{\psi}}(y) = 0. \tag{5.5.2}$$

混积的收缩

$$\overset{\cdot}{\psi_a}(x)\overset{\cdot}{\bar{\psi}_\beta}(y) = -\overset{\cdot}{\bar{\psi}_\beta}(y)\overset{\cdot}{\psi_a}(x) \equiv -S_{fa\beta}(x-y). \tag{5.5.3}$$

证明:$T(\psi(x)\psi(y)) = \begin{cases} \psi(x)\psi(y), x_0 > y_0 \\ -\psi(y)\psi(x), y_0 > x_0 \end{cases}$

$= \psi(x)\psi(y)$.

故恒有 $T(\psi(x)\psi(y)) = \psi(x)\psi(y)$,

类似恒有 $T(\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(y)) = \bar{\psi}(x)\bar{\psi}(y)$.

由(5.4.3)即知纯积的收缩恒为 0,这意味着两个 Dirac 场量的纯积的时序积可直接改写为正规积.对于混积,当 $x_0 > y_0$,

$$\psi(x) = U + V, \bar{\psi}(x) = \bar{U} + \bar{V}.$$

所以 $\overset{\cdot}{\psi_a}(x)\overset{\cdot}{\bar{\psi}_\beta}(y) = \{U_a(x), \bar{U}_\beta(y)\}, (x_0 > y_0)$.

可类似地证明:$\overset{\cdot}{\psi_a}(x)\overset{\cdot}{\bar{\psi}_\beta}(y) = -\{V_\beta(y), \bar{V}_a(x)\}$,当 $y_0 > x_0$.

定义 $\overset{\cdot}{\psi_a}(x)\overset{\cdot}{\bar{\psi}_\beta}(y) = -S_{fa\beta}(x-y)$,

则:$S_f(x-y) = -\{U(x), \bar{U}(y)\}$,当 $x_0 > y_0$.

$$S_f(x-y)=\{V(y),\overline{V}(x)\},\text{当}:y_0>x_0.\quad(5.5.4)$$

类似可证：

$$\overline{\psi}_\alpha^{\cdot}(x)\,\psi_\beta^{\cdot}(y)=-\psi_\beta^{\cdot}(y)\,\overline{\psi}_\alpha^{\cdot}(x)=S_{f,\beta\alpha}(y-x).$$

可见混积的收缩是一个函数.

(2) 电磁场量的收缩

定义　$$A_\mu^{\cdot}(x)\,A_\nu^{\cdot}(y)=\delta_{\mu\nu}D_f(x-y).\quad(5.5.5)$$

命　$$A_\mu(x)=\omega_\mu(x)+\omega_\mu^{+}(x).$$

$\omega_\mu(x)$ 中含光子的消灭算符.

$\omega_\mu^{+}(x)$ 中含光子的产生算符.

$$T(A(x)A(y))=\begin{cases}A(x)A(y)=\omega(x)\omega(y)+\omega(x)\omega^{\dagger}(y)\\ \qquad\qquad+\omega^{\dagger}(x)\omega(y)+\omega^{\dagger}(x)\omega^{\dagger}(y),\\ \qquad\qquad(x_0>y_0).\\ A(y)A(x)=\omega(y)\omega(x)+\omega(y)\omega^{\dagger}(x)\\ \qquad\qquad+\omega^{\dagger}(y)\omega(x)+\omega^{\dagger}(y)\omega^{\dagger}(x),\\ \qquad\qquad(y_0>x_0).\end{cases}$$

$$N(A(x)A(y))=\omega(x)\omega(y)+\omega^{\dagger}(y)\omega(x)+\omega^{\dagger}(x)\omega(y)+\omega^{\dagger}(x)\omega^{\dagger}(y).$$

则　$$\delta_{\mu\nu}D_f(x-y)=[\omega_\mu(x),\omega_\nu^{\dagger}(y)],(x_0>y_0).\quad(5.5.6)$$

$$\delta_{\mu\nu}D_f(x-y)-[\omega_\nu(y),\omega_\mu^{+}(x)],(y_0>x_0).$$

(3)K-G 场量的收缩

定义　$$\psi^{\cdot}(x)\,\psi^{\cdot}(y)=\Delta_f(x-y).\quad(5.5.7)$$

设：　$$\psi(x)=Z(x)+Z^{\dagger}(x)).$$

$Z(x)$ 中含标量粒子的消灭算符.

$Z^{+}(x)$ 中含标量粒子的产生算符.

则　$$\Delta_f(x-y)=[Z(x),Z^{\dagger}(y)],(x_0>y_0),$$

$$\Delta_f(x-y)=[Z(y),Z^{\dagger}(x)],(y_0>x_0).\quad(5.5.8)$$

(4) 不同的 Lorentz 协变场量之间的收缩全为 0

例　$A^{\cdot}(x)\bar{\psi}^{\cdot}(y)=0.$

$$\varphi^{\cdot}(x)\psi^{\cdot}(y)=0. \tag{5.5.9}$$

……

(5) 费曼格林函数和费曼传播量 $\Delta_f(x)$, $S_f(x)$, $D_f(x)$ 的表示在 S 矩阵中出现的 Lorentz 不变的奇异性函数有 $\Delta_f(x)$, $S_f(x)$ 和 $D_f(x)$. 在 Lorentz 协变对易关系中，曾介绍过 Lorentz 不变奇异函数 $\Delta(x)$, $\Delta^{(1)}(x)$, $S(x)$ 和 $D(x)$，本节的目的在求出前者的表示，并给出它们与后者的关系.

我们证明：①$\Delta_f(x)$, $S_f(x)$ 和 $D_f(x)$ 的表式为：

$$\Delta_f(x_2-x_1)=\varphi^{\cdot}(x_2)\varphi^{\cdot}(x_1)=\langle 0|T\varphi(x_2)\varphi(x_1)|0\rangle$$

$$=\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int_{C_f}\mathrm{d}^4k\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x_2-x_1)}}{k^2+m^2}. \tag{5.5.10}$$

$$\mathrm{D}_f(x_2-x_1)\delta_{\mu\nu}=A^{\cdot}{}_{\mu}(x_2)\,A^{\cdot}{}_{\nu}(x_1)=\langle 0|TA_{\mu}(x_2)A_{\nu}(x_1)|0\rangle$$

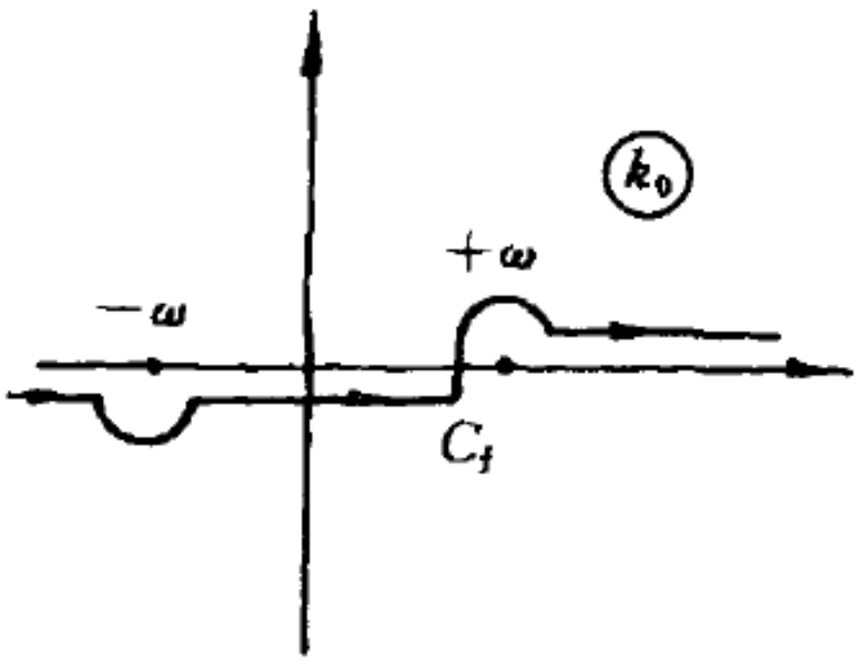
$$=\delta_{\mu\nu}\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int_{C_f}\mathrm{d}^4k\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x_2-x_1)}}{k^2}. \tag{5.5.11}$$

$$\mathrm{S}_f(x_2-x_1)=-\psi^{\cdot}(x_2)\bar{\psi}^{\cdot}(x_1)=\langle 0|T\psi(x_2)\bar{\psi}(x_1)|0\rangle$$

$$=\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int_{C_f}\mathrm{d}^4p\,\frac{\mathrm{i}\hat{p}-m}{p^2+m^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p(x_2-x_1)}. \tag{5.5.12}$$

式中：$\int_{C_f}\mathrm{d}^4k\equiv\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\!\!\int\!\!\int\mathrm{d}^3k\int_{C_f}\mathrm{d}k_0.$

$\int_{C_f}\mathrm{d}k_0$ 或 $\int_{C_f}\mathrm{d}p_0$ 的积分线路见图.



②$\Delta_f(x)=-\mathrm{i}\theta(x)\Delta(x)+$

$+\Delta^{(1)}(x)$, (5.5.13)

$\mathrm{D}_f(x)=-\mathrm{i}\theta(x)\mathrm{D}(x)+$

$+\mathrm{D}^{(1)}(x)$, (5.5.14)

$$S_f(x) = (\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m)\Delta_f(x). \tag{5.5.15}$$

证:以实标量场为例,证明(5.5.10)式

由 $\varphi(x) = Z(x) + Z^\dagger(x) = \varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x)$,

$$\Delta_f(x_2 - x_1) = [\varphi^{(+)}(x_2), \varphi^{(-)}(x_1)], t_2 > t_1,$$

$$\Delta_f(x_2 - x_1) = [\varphi^{(+)}(x_1), \varphi^{(-)}(x_2)], t_1 > t_2,$$

$$\varphi^{(+)}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \sqrt{\frac{1}{2\omega}} S_k e^{ikx}, (\text{取 } h = c = 1),$$

得
$$\Delta_f(x_2 - x_1) = \begin{cases} \frac{1}{V} \sum_{k,k'} \frac{1}{2\sqrt{\omega\omega'}} [S_k, S_{k'}^\dagger] e^{ikx_2 - ik'x_1}, (t_2 > t_1). \\ \frac{1}{V} \sum_{k,k'} \frac{1}{2\sqrt{\omega\omega'}} [S_k, S_{k'}^\dagger] e^{ikx_1 - ik'x_2}, (t_1 > t_2). \end{cases}$$

利用对易关系:$[S_k, S_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}$,即得

$$\Delta_f(x) = \begin{cases} \frac{1}{V} \sum_k \frac{1}{2\omega} e^{ikx}, \quad (x_0 > 0); \\ \frac{1}{V} \sum_k \frac{1}{2\omega} e^{-ikx}, \quad (x_0 < 0); \end{cases} \qquad \omega \equiv \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}.$$

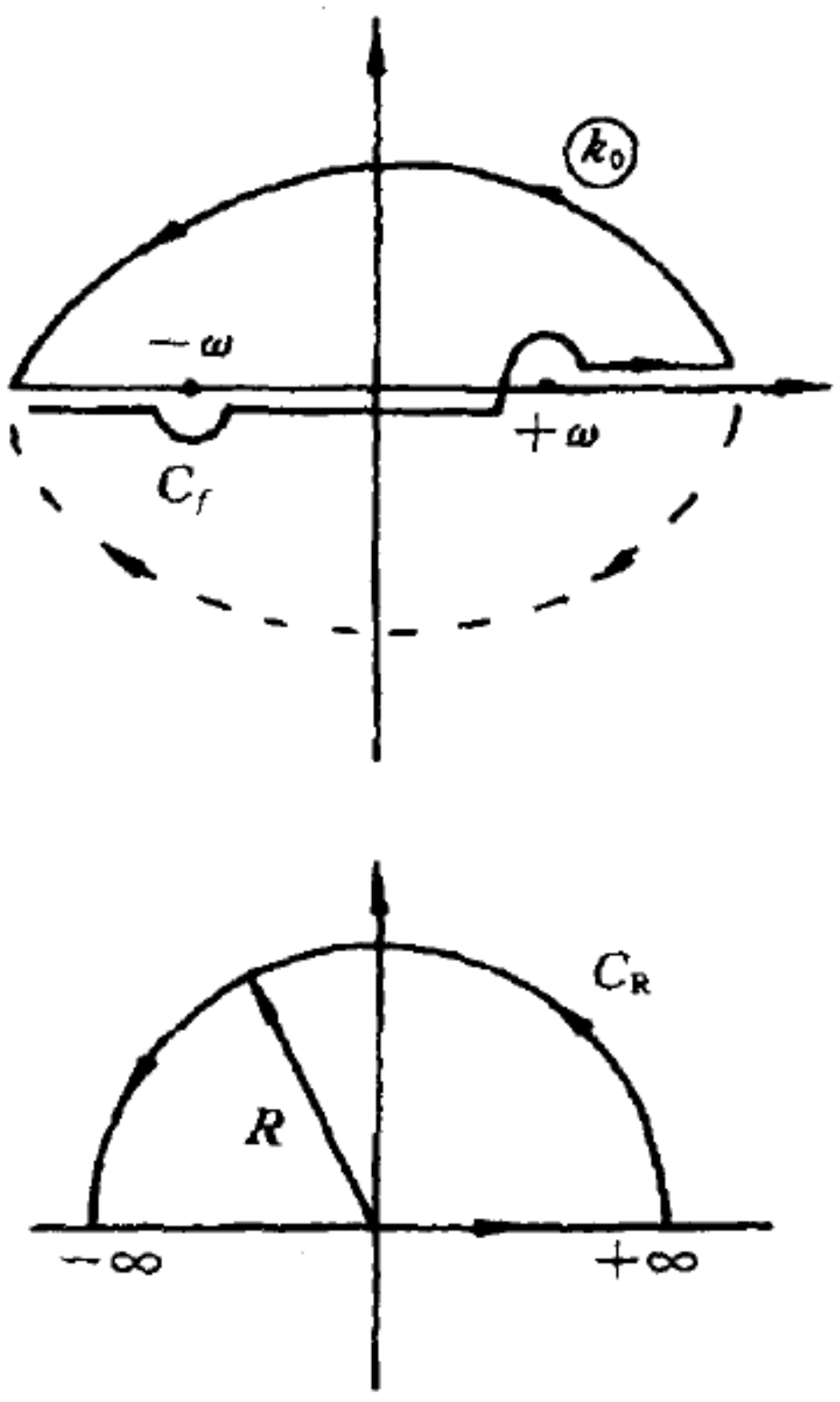
利用 $\Delta \sum_k f(k) = \int f(k) d^3\boldsymbol{k}$,得 $\quad (\Delta \equiv \frac{(2\pi)^3}{V})$.

$$\Delta_f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\boldsymbol{k} \quad \frac{e^{i(\boldsymbol{kx} - k_0 x_0)}}{2\omega}, (x_0 > 0). \\ \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\boldsymbol{k} \quad \frac{e^{-i(\boldsymbol{kx} - k_0 x_0)}}{2\omega}, (x_0 < 0). \end{cases} \tag{5.5.16}$$

现证(5.5.16)可合并写为下述积分:

$$\Delta_f(x) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int_{C_f} d^4k \frac{e^{ikx}}{k^2 + m^2} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_f} d^4k \frac{-i}{k^2 + m^2} e^{ikx}$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_f} d^4k \Delta_f(k) e^{ikx}, \Delta_f(k) \equiv \frac{-i}{k^2 + m^2}. \tag{5.5.17}$$

其中 $k^2+m^2=\boldsymbol{k}^2-k_0^2+m^2=\omega^2-k_0^2$. $\Delta_f(k)$ 叫动量空间的费曼(Feynman) 传播量. $k_0=\pm\omega$ 为上述被积函数的两个极点.



为证(5.5.17) 式,应用约当辅助定理.

设在上半(下半) 复平面内和实轴上当 $R\to\infty$ 时,$F(Z)\to 0$,且 $\alpha>0(\alpha<0)$,则在上半(下半) 圆周上. $\int_{C_R}F(Z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha Z}\mathrm{d}Z\xrightarrow{R\to\infty}0$.

当 $x_0<0$,

$$\begin{aligned}\Delta_f(x)&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega x_0}}{2\omega}\\&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega|x_0|}}{2\omega}.\end{aligned}\tag{5.5.18}$$

当 $x_0>0$,

$$\Delta_f(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x_0}}{2\omega}$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega|x_0|}}{2\omega}. \qquad (5.5.19)$$

现利用约当辅助定理证：

$$\frac{1}{2\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega|x_0|} = \frac{1}{(2\pi)\mathrm{i}}\int_{c_f}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0x_0}}{k^2+m^2}\mathrm{d}k_0. \qquad (5.5.20)$$

当 $x_0<0$ 积分应取上半复 k_0 平面闭合回路. 按留数定理：

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c_f}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0x_0}}{\omega^2-k_0{}^2}\mathrm{d}k_0 = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c_f}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0(-x_0)}}{\omega^2-k_0{}^2}\mathrm{d}k_0$$

（上半平面）

$$= 2\pi\mathrm{i}R\cdot\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x_0}}{-2(-\omega)} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega|x_0|}}{2(\omega)}.$$

当 $x_0>0$

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c_f}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0^2x_0}}{\omega^2-k_0^2}\mathrm{d}k_0 = \frac{-1}{2\pi\mathrm{i}}2\pi\mathrm{i}R = \frac{-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x_0}}{-2(\omega)}$$

（下半平面）

$$= \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega|x_0|}}{2(\omega)}.$$

把(5.5.20)分别代入(5.5.18)和(5.5.19)即可证(5.5.17).

证(5.5.12)

由(5.5.4)知当 $t_2>t_1$，

$$S_f(x_2-x_1) = -\{U(x_2),\bar{U}(x_1)\}$$

$$= \frac{-1}{(2\pi)^3}\{(\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\sum_{s=1,2}a_{ps}\psi_{ps}^{(+)}(x_2)),(\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}'\sum_{s'=1,2}a^+{}_{p's'}\overline{\psi_{ps'}^{(+)}}(x_1))\}$$

$$= \frac{-1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}'\sum_{s,s'=1,2}[\{a_{ps},a^+_{p's'}\}\psi_{ps}^{(+)}(x_2)\otimes\overline{\psi_{p's'}^{(+)}}(x_1)]$$

$$= \frac{-1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}'\sum_{s,s'=1,2}[\delta_{ss'},\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\psi_{ps}^{(+)}(x_2)\otimes\overline{\psi_{ps'}^{(+)}}(x_1)]$$

$$= \frac{-1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\sum_{s=1,2}\psi_{ps}^{(+)}(x_2)\otimes\overline{\psi_{ps}^{(+)}}(x_1)$$

再考虑到

$$\sum_{s=1,2}\psi_{ps}^{(+)}(x_2)\otimes\overline{\psi_{ps}^{(+)}}(x_1)$$
$$=\sum_{s=1,2}U_{ps}\otimes\overline{U}_{ps}e^{ip(x_2-x_1)}$$
$$=\frac{-i\hat{p}+m}{2E}e^{ip(x_2-x_1)}.$$

(参见本书公式(6.2.11))

故上式$=\frac{-1}{(2\pi)^3}\int dp\,\frac{-i\hat{p}+m}{2E}e^{ip(x_2-x_1)}$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int dp\,\frac{+i\hat{p}-m}{2E}e^{ip(x_2-x_1)}.$$

即 $S_f(x_2-x_1)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int dp\,\frac{i\hat{p}-m}{2E}e^{ip(x_2-x_1)}(t_2>t_1).$

类似 $S_f(x_2-x_1)=\frac{-1}{(2\pi)^3}\int dp\,\frac{-i\hat{p}-m}{2E}e^{-ip(x_2-x_1)}(t_1>t_2).$

上二式可合并写成在复 $p_0=E$ 平面内沿 C_f 回路的积分

$$S_f(x_2-x_1)=\frac{-i}{(2\pi)^4}\int_{C_f}d^4p\,\frac{i\hat{p}-m}{p^2+m^2}e^{ip(x_2-x_1)}$$
$$=(\gamma_\mu\partial_\mu-m)\frac{-i}{(2\pi)^4}\int_{C_f}d^4p\,\frac{e^{ip(x_2-x_1)}}{p^2+m^2}$$
$$=(\gamma_\mu\partial_\mu-m)\Delta_f(x_2-x_1)$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C_f}d^4p\,\frac{\hat{p}+im}{\hat{p}^2-(im)^2}e^{ip(x_2-x_1)}$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C_f}d^4p\,\frac{1}{\hat{p}-im}e^{ip(x_2-x_1)}$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C_f}d^4pS_f(p)e^{ip(x_2-x_1)}.$$

式中 $p^2+m^2=p^2+m^2-p_0^2=E^2-p_0^2$.

$S_f(P)$ 叫动量空间的费曼传播量.

证:当 $t_2>t_1$ 回路在下半复 P_0 平面 $(P_4=ip_0)$,

$$S_f(x)=\frac{-i}{(2\pi)^4}\int dpe^{ipx}\int_{C_f}dp_0\,\frac{i\gamma\cdot p-\gamma_4 p_0-m}{E^2-p_0^2}e^{-ip_0t}(t>0)$$

$$= \frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}x}\left[-2\pi\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{i}\boldsymbol{\gamma}\ \boldsymbol{p}-\gamma_4\ E-m}{-2E}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}\right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\,\frac{\mathrm{i}\hat{p}-m}{2E}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}.$$

当 $t_1 > t_2$ 或 $t < 0$ 回路在上半复 P_0 平面.

$$S_f(x) = \frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}x}\int_{C_f}\mathrm{d}p_0\,\frac{\mathrm{i}\boldsymbol{\gamma}\ \boldsymbol{p}-\gamma_4\ p_0-m}{E^2-p_0^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_0t}$$

$$= \frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}x}\left[2\pi\mathrm{i}\,\frac{+\mathrm{i}\boldsymbol{\gamma}\ \boldsymbol{p}+\gamma_4\ E-m}{2E}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}\right]$$

$$= \frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}x}\left[2\pi\mathrm{i}\,\frac{-\mathrm{i}\boldsymbol{\gamma}\ \boldsymbol{p}+\gamma_4\ E-m}{2E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}Et}\right]$$

$$= \frac{-1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\,\frac{-\mathrm{i}\hat{\boldsymbol{p}}-m}{2E}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}.$$

对复标量场:

设:$\varphi^{(+)}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}a_k e^{\mathrm{i}kx}$,

$$\varphi^{(-)}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}b_k^+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx},$$

$$\varphi^{\dagger(-)}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\alpha_k^+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx},$$

$$\varphi^{\dagger(+)}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}b_k\mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx}.$$

则 $\varphi(x) = \varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x), \varphi^\dagger = \varphi^{\dagger(-)}(x) + \varphi^{\dagger(+)}(x).$

当 $t_2 > t_1$,

$$\langle 0|T\varphi(x_2)\varphi^\dagger(x_1)|0\rangle = \langle 0|\varphi(x_2)\varphi^\dagger(x_1)|0\rangle$$

$$= \langle 0|(\varphi^{(+)}(x_2) + \varphi^{(-)}(x_2))(\varphi^{\dagger(+)}(x_1) + \varphi^{\dagger(-)}(x_1)|0\rangle$$

$$= \langle 0|(\varphi^{(+)}(x_2)\varphi^{\dagger(-)}(x_1)|0\rangle$$

$$= \langle 0|[(\varphi^{(+)}(x_2), \varphi^{\dagger(-)}(x_1)]|0\rangle$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{k,k'}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k 2\omega_{k'}}}e^{ikx}2^{-ik'x}1\langle 0|[a_k, a_{k'}^{\dagger}]|0\rangle$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{k}\frac{1}{2\omega_k}e^{ik(x_2-x_1)}.$$

利用$\frac{(2\pi)^3}{V}\sum_k f(k) = \int f(k)d^3k$，得：

当 $t_2 > t_1$，

$$\langle 0|T\varphi(x_2)\varphi^{\dagger}(x_1)|0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\boldsymbol{k}\,\frac{e^{ik(x_2-x_1)}}{2\omega}$$

$$\equiv i\Delta^{(+)}(x_2 - x_1) = \langle 0|\varphi^{(+)}(x_2)\varphi^{\dagger(-)}(x_1)|0\rangle$$

$$= \langle 0|[\varphi^{(+)}(x_2), \varphi^{\dagger(-)}(x_1)]|0\rangle.$$

类似当 $t_1 > t_2$，

$$\langle 0|T\varphi(x_2)\varphi^{\dagger}(x_1)|0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\boldsymbol{k}\,\frac{e^{-ik(x_2-x_1)}}{2\omega}$$

$$= -i\Delta^{(-)}(x_2 - x_1) = \langle 0|\varphi^{\dagger(+)}(x_1)\varphi^{(-)}(x_2)|0\rangle$$

$$= \langle 0|[\varphi^{\dagger(+)}(x_1), \varphi^{(-)}(x_2)]|0\rangle.$$

故 $$\langle 0|T\varphi(x_2)\varphi^{\dagger}(x_1)|0\rangle = \frac{-i}{(2\pi)^4}\int_{C_f} d^4\boldsymbol{k}\,\frac{e^{ikx}}{k^2 + m^2}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C_f} d^4x\,\frac{-i}{k^2 + m^2}e^{ikx} = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C_f} d^4k\Delta_f(k)e^{ikx}$$

$$= \Delta_f(x_2 - x_1) = \theta(x_2 - x_1)i\Delta^{(+)}(x_2 - x_1)$$

$$- \theta(x_1 - x_2)i\Delta^{(-)}(x_2 - x_1).$$

完全类似可证：

对于 Maxwell 场

$$\langle 0|TA_\mu(x_2)A_\nu(x_1)|0\rangle = \delta_{\mu\nu}D_f(x_2 - x_1)$$

$$= \delta_{\mu\nu}\frac{-i}{(2\pi)^4}\int_{C_f} d^4k\,\frac{e^{ikx}}{k^2}$$

$$= \delta_{\mu\nu}\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C_f} D_f(k)e^{ikx}d^4k.$$

对于 Dirac 场，设$\psi(x) = \psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x)$，

$$\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}^{(-)}(x) + \bar{\psi}^{(+)}(x).$$

则当 $t_2 > t_1$：

$$\langle 0|T\psi_\alpha(x_2)\bar{\psi}_\beta(x_1)|0\rangle = \langle 0|\{\psi_\alpha{}^{(+)}(x_2), \bar{\psi}_\beta{}^{(-)}(x_1)\}|0\rangle$$
$$\equiv \mathrm{i}S_{\alpha\beta}^{(+)}(x_2 - x_1) = \mathrm{i}(\gamma_\mu\partial_\mu - m)_{\alpha\beta}\Delta^{(+)}(x_2 - x_1).$$

当 $t_1 > t_2$：

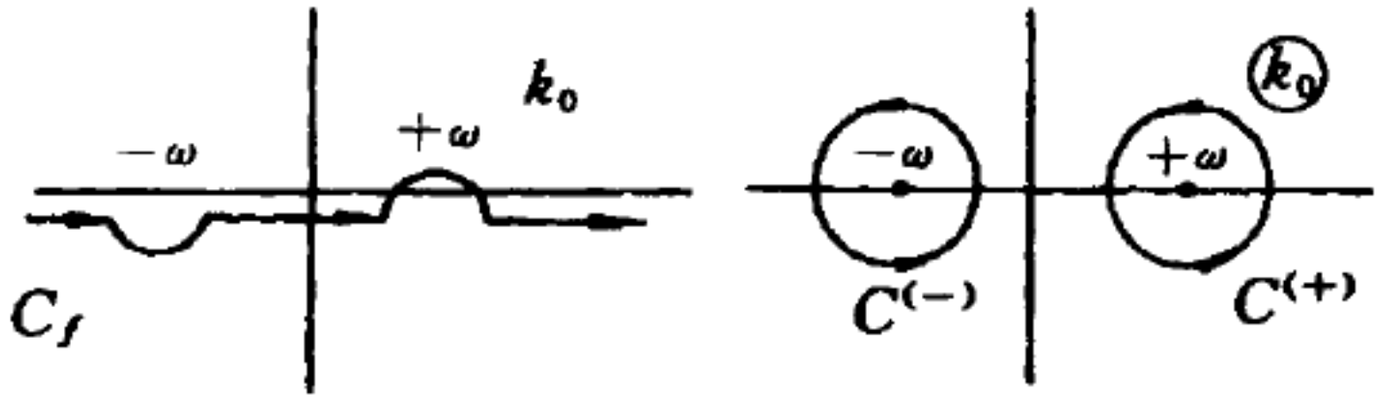
$$\langle 0|T\psi_\alpha(x_2)\psi_\beta(x_1)|0\rangle = < 0|\{\bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x_2), \bar{\psi}_\beta^{(-)}(x_1)\}|0\rangle$$
$$= -\mathrm{i}S_{\alpha\beta}^{(-)}(x_2 - x_1) = \mathrm{i}(\not{\partial}_\mu\partial_\mu - m)_{\alpha\beta}\Delta^{(-)}(x_2 - x_1).$$

故：$\langle 0|T\psi_\alpha(x_2)\bar{\psi}_\beta(x_1)|0\rangle = S_{f,\alpha\beta}(x_2 - x_1)$

$$= \theta(t_2 - t_1)\mathrm{i}S_{\alpha\beta}^{(+)}(x_2 - x_1) - \theta(t_1 - t_2)\mathrm{i}S_{\alpha\beta}^{(-)}(x_2 - x_1).$$

上述各种场量的时序积的真空期待值分别叫做费曼传播量或因果格林函数，$\Delta_f(k)$，$\mathrm{D}_f(k)$，$S_f(k)$，即它们在动量空间的表述.

小结一下各奇异函数的回路积分表述：



费曼(因果)格林函数：

$$\Delta_f(x) = \frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int_{C_f}\mathrm{d}^4k\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{k^2 + m^2},$$

$$\Delta^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{c^{(+)}}d^4k\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{k^2 + m^2},$$

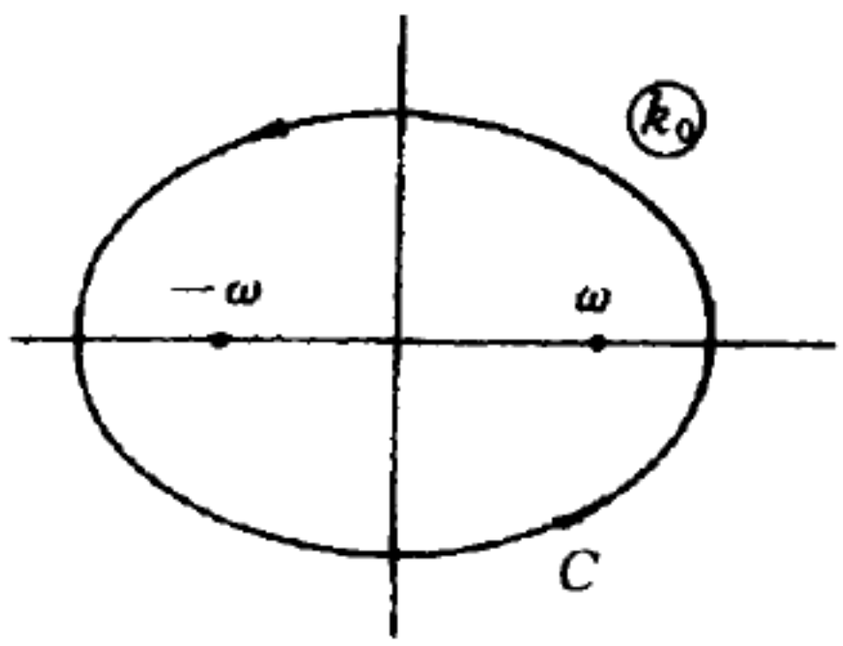
$$\Delta^{(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{c^{(-)}}\mathrm{d}^4k\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{k^2 + m^2},$$

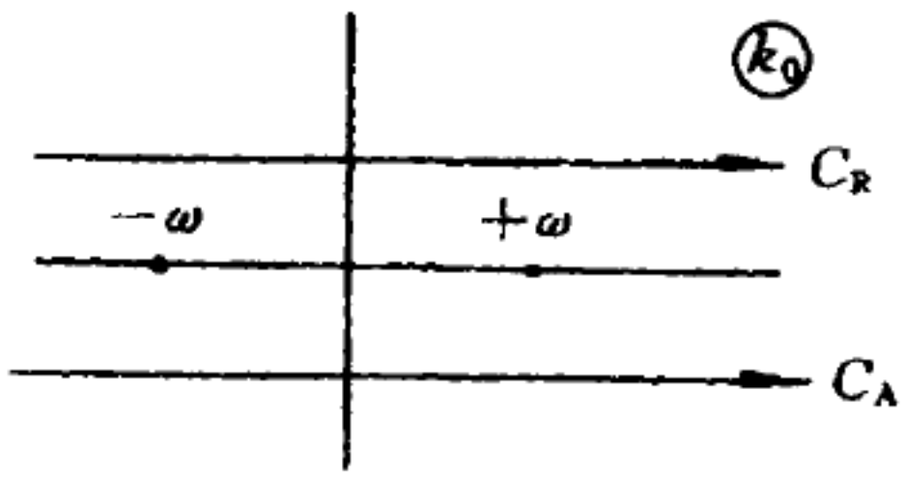
$$\Delta(x) = \Delta^{(+)}(x) + \Delta^{(-)}(x)$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int_c\mathrm{d}^4k\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{k^2 + m^2}.$$

推迟格林函数：

$$\Delta_R(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{c_R}\mathrm{d}^4k\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{k^2+m^2}=\begin{cases}-\Delta(x),(t>0).\\0,\qquad\quad(t<0).\end{cases}$$

在未来光锥外为 0，仅在未来光锥内不为 0.



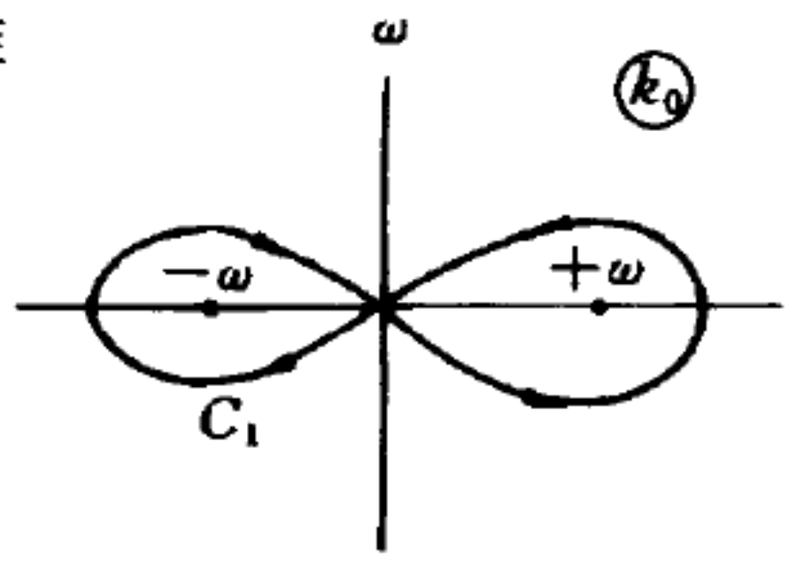


超前格林函数：

$$\Delta_A(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{c_A}\mathrm{d}^4k\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{k^2+m^2}\begin{cases}0,\qquad\quad(t>0).\\\Delta(x),(t<0).\end{cases}$$

在过去光锥外为 0，仅在过去光锥内不为 0：

$$\Delta^{(1)}(x)=\mathrm{i}\Delta^{(+)}(x)-\mathrm{i}\Delta^{(-)}(x)$$
$$=\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int_{C_1}\mathrm{d}^4k\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{k^2+m^2}.$$



现证(5.5.13).

$$\text{等式右边}=-\mathrm{i}\frac{x_0}{|x_0|}\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\,\frac{1}{2\omega}\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega x_0)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+\omega x_0)}\}+\frac{1}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\,\frac{1}{2\omega}\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega x_0)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+\omega x_0)}\}.$$

当 $x_0>0$，上式化为

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega x_0)}}{2\omega}=\Delta_f(x).$$

当 $x_0<0$，上式化为

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+\omega x_0)}}{2\omega} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega x_0)}}{2\omega}$$
$$= \Delta_f(x).$$

(5.5.13) 和(5.5.14) 的成立是显然的.

最后,可以证明:所有有限回路的不变奇异函数.

$$\begin{cases}\Delta,\Delta^{(1)},\Delta^{(+)},\Delta^{(-)}\\ \mathrm{D},\mathrm{D}^{(+)},\mathrm{D}^{(-)}\\ \mathrm{S},\mathrm{S}^{(+)},\mathrm{S}^{(-)}\end{cases}\text{均满足相应的齐次方程}\begin{cases}(\Box-\chi^2)\Delta(x)=0,\\ \Box\mathrm{D}=0,\\ (\gamma_\mu\partial_\mu+\chi)S=0.\end{cases}\tag{5.5.21}$$

所有无限回路积分的不变奇异函数 $\Delta_f,\Delta_R,\Delta_A;\mathrm{D}_f;\mathrm{D}_R,\mathrm{D}_A;S_f,S_R,S_A$ 等均满足以 $\mathrm{i}\delta^4(x)$ 为源的非齐次场方程

$$\begin{aligned}&(\Box-\chi^2)\Delta_{f,R,A}(x)=\mathrm{i}\delta^4(x),\\ &\Box\mathrm{D}_{f,R,A}=\mathrm{i}\delta^4(x),\\ &(\gamma_\mu\partial_\mu+\chi)S_{f,R,A}=\mathrm{i}\delta^4(x).\end{aligned}\tag{5.5.22}$$

因之,$\Delta_f(x)$,$\mathrm{D}_f(x)$ 和 $S_f(x)$ 分别叫作 K-G 方程,d'Alembert 方程和 Dirac 方程的费曼格林函数.

欧几里德场论中的费曼格林函数:

若在明氏时空中的费曼格林函数,例

$$\Delta_f(\boldsymbol{x},t)=\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\int_{C_f}\mathrm{d}k_0\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}-\mathrm{i}k_0t}}{\boldsymbol{k}^2+m^2-k_0^2}$$

中做下述变换,即

Ⅰ)把积分路径 C_f 改变为沿虚 k_0 轴,

Ⅱ)引入 $k=+\mathrm{i}k_0,\tau=+\mathrm{i}t(t=-\mathrm{i}\tau)$ 或对时间轴 t 沿顺时针方向转 90°(Wick 转动) 则得:

$$\Delta_E(\boldsymbol{x},\tau)=\frac{-1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\int_{-\infty i}^{+\infty i}\mathrm{d}k\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}+\mathrm{i}k\tau}}{\boldsymbol{k}^2+m^2+k^2}.$$

它正好是 4 维欧氏空间内的费曼传播量,可证明它满足:

$$(\Box_E-m^2)\Delta_E(\boldsymbol{x},t)=-\delta^4(x),(x=(\boldsymbol{x},\tau).$$

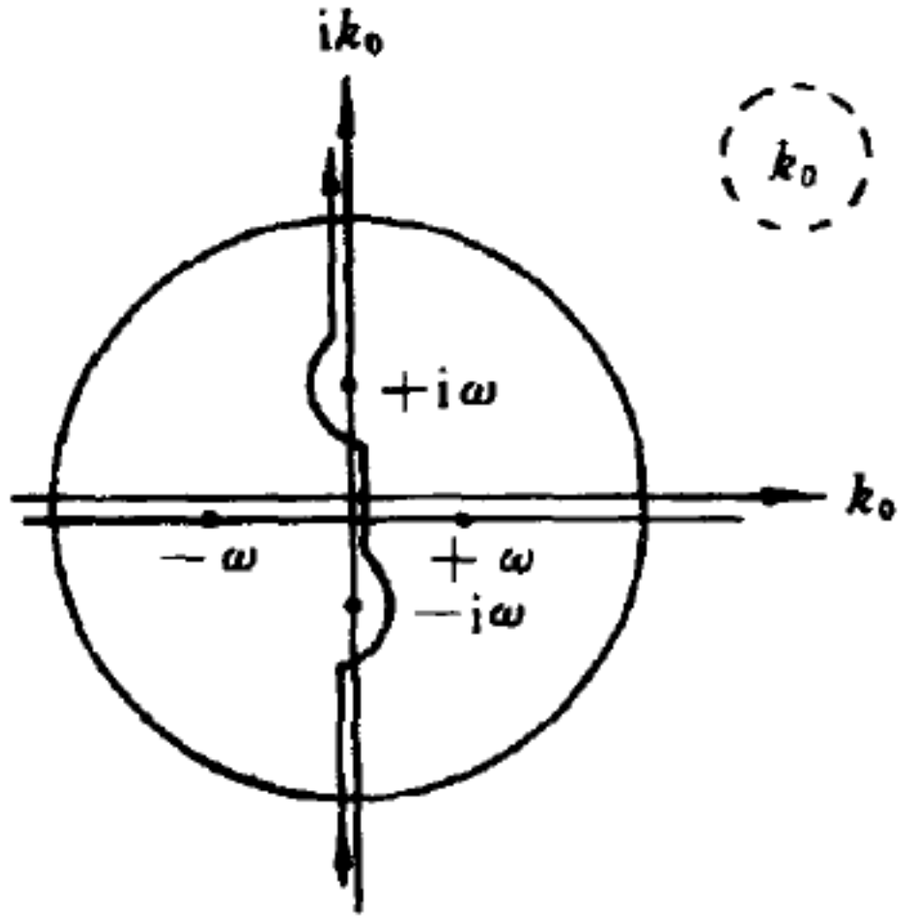
注意到 $\Delta_E(\boldsymbol{x},\tau)$ 在虚 k 轴上有极点 $\pm\mathrm{i}\omega$,因之当 $\tau>0$ 时,

$$\frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty i}^{+\infty i} dk\ \frac{e^{ik\tau}}{k^2-(i\omega)^2} = \frac{e^{-\omega\tau}}{2\omega}.$$

(可延拓到右半复 k_0 平面)

$\tau < 0$ 时:

$$\frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty i}^{+\infty i} dk\ \frac{e^{ik\tau}}{k^2-(i\omega)^2} = \frac{e^{\omega\tau}}{2\omega}.$$ (可延拓到左半复 k_0 平面)



可见

$$\Delta_E(x,\tau=+it)=\Delta_f(x,t),$$

即把时间轴作 Wick 转动求得欧氏空间中的费曼格林函数,再把时间轴作逆 Wick 转动即可得到所求的费曼格林函数. 引入虚时或欧氏化的格林函数在统计热力学中有重要应用.

温度格林函数:

以上所述的费曼格林函数可表为算符时序积的真空平均值,真空是一切物质场的最低能态 —— 基态. 我们知道,当系统处于绝对 0 度时系统才处于基态,因之上述格林函数也叫做零温格林函数.

当系统处于非 0 温度 T 时,系统可以一定几率 P_i 处于 Hamilton 算符 H,和粒子数算符 N 的某个公共本征态 $|\psi_i\rangle$,则温度 T 时,系统的某个力学量 A 的平均值应表为

$$\langle A\rangle_T = \Sigma P_i\langle\psi_i|\hat{A}|\psi_i\rangle \text{—— 系综平均.} \qquad (5.5.23)$$

我们研究系统 i 与大热库接触,且粒子数可变的情况 —— 巨正则系综,则

$$P_i=\frac{e^{-(E_i-\mu N_i)/kT}}{Z}, Z=\sum_i e^{-\frac{E_i-\mu N_i}{kT}}=e^{-\beta\Omega} \text{—— 巨正则配分函数.} \qquad (5.5.24)$$

引入密度算符

$$\hat{\rho} = e^{\frac{1}{kT}(\Omega+\mu\hat{N}-\hat{H})} = \sum_i P_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| ,$$

则 $P_i = \rho_{ii} = \langle\psi_i|\hat{\rho}|\psi_i\rangle$，显然 $\rho_{ij} = \langle\psi_i|\hat{\rho}|\psi_j\rangle = \delta_{ij}\rho_i$，归一化条件为

$$\sum_i \langle\psi_i|\hat{\rho}|\psi_i\rangle = T_\gamma \cdot \hat{\rho} = I.$$

故 $$T_\gamma\rho = \langle\psi|\sum_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\psi\rangle = \sum_i C_i^2 = 1, T_\gamma\rho^2 = \sum_i C_i^4 < 1$$

$$\langle A\rangle_T = \sum_i \langle\psi_i|\hat{\rho}|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\hat{A}|\psi_i\rangle = T_\gamma(\hat{\rho}\hat{A}). \qquad (5.5.25)$$

这是由于

$$T_\gamma(\hat{\rho}\hat{A}) = \sum_i \langle\psi_i|\hat{\rho}\hat{A}|\psi_i\rangle = \sum_{ij}\langle\psi_i|\hat{\rho}|\psi_j\rangle\langle\psi_j|\hat{A}|\psi_i\rangle$$
$$= \sum_{ij}\rho_i\delta_{ij}\langle\psi_j|\hat{A}|\psi_i\rangle = \sum_i \rho_i\langle\psi_i|\hat{A}|\psi_i\rangle.$$

若在 0 温格林函数中以系综平均取代真空平均，则我们可定义温度格林函数. 例如二点温度格林函数

$$_f\langle|T\varphi(x_2)\varphi(x_1)|\rangle_T = \sum_i P_i\langle\psi_i|T\varphi(x_2)\varphi(x_1)|\psi_i\rangle$$
$$= \sum_i P_i G_i = T_\gamma(\hat{\rho}\varphi(x_2)\varphi(x_1)). \qquad (5.5.26)$$

我们指出温度格林函数一个极重要的性质是：

它是虚时以周期为 $\beta = \frac{1}{kT}$ 的周期函数 —— 松原函数，

$$G_T(\boldsymbol{x},\tau) = e^{\mu\beta}(-1)^{2S}G_T(\boldsymbol{x},\tau+\mathrm{i}\beta), \tau \text{ 是虚时.} \qquad (5.5.27)$$

其中 μ 是化学势，S 是所考虑粒子自旋.

在静态和稳态重力场中当存在未来事件视界时，我们可以证明

$$G_f(\boldsymbol{x},\tau) = G_f(\boldsymbol{x},\tau+\mathrm{i}\frac{2\pi}{\kappa}). \qquad (5.5.28)$$

令 $\frac{2\pi}{\kappa} = \frac{1}{kT}$ 得 $T = \frac{\kappa}{2\pi k}$ —— Hawking 辐射的温度，式中 κ 是视界表面处的重力加速度.

上述两个格林函数的类似性，强烈地提示我们，存在事件视界的静态和稳态重力场中可以把虚时的 0 温度格林函数看做温度格

林函数或可认为在一稳态(静态)时空的未来事件视界外存在平衡热辐射,其温度 $T = \kappa/2\pi k$,这表明霍金的量子蒸发有几何上的根源,量子论、热力学与几何学(广义相对论)存在着内在的联系.

(6) 正规积和内部算符的收缩

定义　两相邻算符的收缩:

$$N(UV^{\cdot}W^{\cdot}X\cdots Z) \equiv V^{\cdot}W^{\cdot}N(UX\cdots Z) \tag{5.5.29}$$

两不相邻算符的收缩:

$$\begin{aligned} N(UV^{\cdot}WX\cdots YZ^{\cdot}) &= \delta_p N(UV^{\cdot}Z^{\cdot}WX\cdots Y) \\ &= \delta_p(V^{\cdot}Z^{\cdot})N(UWX\cdots Y). \end{aligned} \tag{5.5.30}$$

$$\begin{aligned} &N(U^{\cdot}V^{\cdot\cdot}RS^{\cdot\cdot}W^{\cdot\cdot\cdot}\cdots X^{\cdot}Y\cdots K^{\cdot\cdot\cdot}Z) \\ &= \delta_p N(U^{\cdot}X^{\cdot}V^{\cdot\cdot}S^{\cdot\cdot}RW^{\cdot\cdot\cdot}K^{\cdot\cdot\cdot}YZ) \\ &\equiv \delta_p(U^{\cdot}X^{\cdot})(V^{\cdot\cdot}S^{\cdot\cdot})(W^{\cdot\cdot\cdot}K^{\cdot\cdot\cdot})N(RY\cdots Z). \end{aligned} \tag{5.5.31}$$

在上述定义中,若把各对不相邻的收缩算符调到相邻时,需要把费米算符交换偶数次,则 $\delta_p = 1$,交换奇数次,则 $\delta_p = -1$.

(7) 引理

设 $N(UV\cdots XY)$ 为一正规积,Z 为一算符,其时刻比正规积中任一算符的时刻为早,则有

$$\begin{aligned} N(UV\cdots XY)Z = {} & N(UV\cdots XY^{\cdot}Z^{\cdot}) + N(UV\cdots X^{\cdot}YZ^{\cdot}) + \cdots + \\ & + N(UV^{\cdot}\cdots XYZ^{\cdot}) + N(U^{\cdot}V\cdots XYZ^{\cdot}) + \\ & + N(UV\cdots XYZ). \end{aligned} \tag{5.5.32}$$

证:设 Z 为消灭算符,则任一收缩

$$X^{\cdot}Z^{\cdot} = T(XZ) - N(XZ) = XZ - XZ = 0,$$

故(5.5.32)化为 $N(UV\cdots XY)Z = N(UV\cdots XYZ)$.

由于 Z 是消灭算符,此式显然成立,故仅需证当 Z 为产生算符时,上式成立.

设 X 为 $UV\cdots XY$ 中任一产生算符,则对无收缩项.

$$N(UV\cdots XY)Z = \delta_p X N(UV\cdots Y)Z,$$

$$N(UV\cdots XYZ) = \delta_p XN(UV\cdots YZ).$$

而对有收缩项

$$N(UV\cdots X^{\cdot}YZ^{\cdot}) = \delta_p X^{\cdot}Z^{\cdot}N(UV\cdots Y).$$

但 $X^{\cdot}Z^{\cdot} = T(XZ) - N(XZ) = XZ - XZ = 0$，故凡含产生算符和 Z 的收缩的正规积全为 0，不为 0 的正规积可写为，例如

$$N(UV^{\cdot}\cdots XYZ^{\cdot}) = \delta_p XN(UV^{\cdot}\cdots YZ^{\cdot}),$$

可见，(5.5.32) 式中每项的左端都出现公因子，可左乘以该公因子之逆而消去，故可设 $UV\cdots XY$ 全为消灭算符.

现用数学归纳法来证明：

当 Z 为产生算符，$UV\cdots XY$ 全为消灭算符，且 Z 的时刻早于 $UV\cdots XY$ 中任一算符的时刻，(5.5.32) 式应成立；当 $N(UV\cdots XY)$ 仅含一个因子时，(5.5.32) 化为 $N(Y)Z = N(Y^{\cdot}Z^{\cdot}) + N(YZ) = Y^{\cdot}Z^{\cdot} + N(YZ) = T(YZ) = YZ$，此时显然成立. 设当 $N(UV\cdots XY)$ 含 n 个因子时，(5.5.32) 式成立，今证含 $(n+1)$ 个因子时也成立.

(5.5.32) 式中每项左乘以消灭算符 R，且 R 的时刻晚于 Z，应有：

$$\begin{aligned} R\cdot N(UV\cdots XY)Z = {} & RN(UV\cdots XY^{\cdot}Z^{\cdot}) + \cdots + \\ & RN(U^{\cdot}V\cdots XYZ^{\cdot}) + \\ & RN(UV\cdots XYZ). \end{aligned}$$

因 $(UV\cdots XY)$ 全为消灭算符，除右边最后一项外，其他项都可把 R 移入正规积符号内任何位置，例如，移入最左端位置，而得到 $(n+1)$ 个因子情况. 对于右边最后一项

$$RN(UV\cdots XYZ)\delta_p RZUV\cdots XY.$$

但 $RZ = T(RZ) = R^{\cdot}Z^{\cdot} + N(RZ) = R^{\cdot}Z^{\cdot} + \delta_q ZR$，其中 δ_q 是交换 RZ 顺序出现的因子. 因此，

$$\begin{aligned} RN(UV\cdots XYZ) &= \delta_p R^{\cdot}Z^{\cdot}UV\cdots XY + \delta_p\delta_q ZRUV\cdots XY \\ &= N(R^{\cdot}UV\cdots XYZ^{\cdot}) + N(RUV\cdots XYZ). \end{aligned}$$

这就最后证明了当正规积为$(n+1)$个因子时,(5.5.32)式成立.

下式显然也成立,即在(5.5.32)中各项相同位置加入若干个收缩.

$$N(UVR^{\cdot\cdot}\cdots Q^{\cdot\cdot}XY)Z = N(UVR^{\cdot\cdot}\cdots Q^{\cdot\cdot}XY^{\cdot}Z^{\cdot}) + N(UVR^{\cdot\cdot}\cdots\cdots Q^{\cdot\cdot}X^{\cdot}YZ^{\cdot}) + N(UV^{\cdot}R^{\cdot\cdot}\cdots Q^{\cdot\cdot}XYZ^{\cdot}) + N(U^{\cdot}VR^{\cdot\cdot}\cdots\cdots Q^{\cdot\cdot}XYZ^{\cdot}) + N(UVR^{\cdot\cdot}\cdots Q^{\cdot\cdot}XYZ). \tag{5.3.33}$$

(8)Wick 定理一

纯时序积可按下式改写为一系列正规积之和

$$\begin{aligned} T(UV\cdots XYZ) = {} & N(UV\cdots XYZ) + N(U^{\cdot}V^{\cdot}W\cdots XYZ) \\ & + + N(U^{\cdot}VW^{\cdot} + \cdots + XYZ) + \cdots \\ & + N(UVW\cdots XY^{\cdot}Z^{\cdot} + \\ & N(U^{\cdot}V^{\cdot\cdot}W^{\cdots}\cdots X^{\cdots}Y^{\cdot\cdot}Z^{\cdot}). \end{aligned} \tag{5.5.34}$$

等式右边应包含所有可能的收缩算符对之和.

证:应用数学归纳法:

当(5.5.34)式仅含两个因子时,即

$$T(UV) = N(UV) + U^{\cdot}V^{\cdot}$$

显然成立,设(5.5.34)在含n个因子时成立,以R右乘(5.5.34)式各项,其中R的时刻比U、V、$\cdots X$,Y,Z均早,就有:

$$\begin{aligned} T(UVW\cdots XYZR) = {} & N(UVW\cdots XYZ)R + N(U^{\cdot}V^{\cdot}WX\cdots YZ)R + N(U^{\cdot}VW^{\cdot} \\ & \cdots XYZ)R + \cdots + N(UVW\cdots \\ & XY^{\cdot}Z^{\cdot})R + \cdots + N(U^{\cdot}V^{\cdot\cdot}W^{\cdots} \\ & \cdots X^{\cdots}Y^{\cdot\cdot}Z^{\cdot})R. \end{aligned}$$

应用引理(5.5.32)和(5.5.33),即可知(5.5.34)在$(n+1)$个因子时也成立.注意,在$(n+1)$个因子情况下,总可以通过交换算符使第$n+1$个算符的时刻为最早.这时可消去每项可能出现

的公因子 δ_p，因而在一般情况下(5.5.34)式仍然成立. 实际上，在 S 矩阵中出现的不是纯时序积，而是时序积和正规积的混合积. 以 Dirac 场与电磁场的相互作用为例：

$$T\{N(\bar{\psi}(x_n)\hat{A}(x_n)\psi(x_n)\cdots N\bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)\psi(x_1)\}.$$

(9)Wick 定理二

如何把上述混合积改写成正规积之和，需用到 Wick 定理二.

仍可利用公式(5.5.34)把一个混合积展开为正规积之和，但需略去所有同一个正规积内部各个因子的收缩所产生的项.

证：任取一混合积

$$T(UVN(WXY)\cdots Z). \tag{5.5.35}$$

为简单计，可假设每个算符不是单纯的产生算符，就是消灭算符. 应注意到，同一个正规积内部所有算符的时刻相同，且

$$N(WXY) = \delta_p W'X'Y',$$

故(5.5.35)化为

$$\delta_p T(UVWXY\cdots Z).$$

因而可按定理一展开，但同一正规积内部任二算符的收缩例如 $W^{\cdot}X^{\cdot}$ 应等于 0. 这是由于：

当 W、X 同为消灭或产生算符：

$$W^{\cdot}X^{\cdot} = T(WX) - N(WX) = WX - WX = 0.$$

当 W 为产生，X 为消灭：

$$W^{\cdot}X^{\cdot} = T(WX) - N(WX) = WX - WX = 0.$$

W 为消灭，X 为产生算符是不可能的，故得证.

例 $T[N(\bar{\psi}(x_2)\hat{A}(x_2)\psi(x_2)N(\bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)\psi(x_1))]$

$$= N[\bar{\psi}(x_2)\hat{A}(x_2)\psi(x_2)\bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)\psi(x_1)]$$

$$+ N[\bar{\psi}\hat{A}^{\cdot}\psi\bar{\psi}\hat{A}^{\cdot}\psi] + N(\bar{\psi}\hat{A}\psi^{\cdot}\bar{\psi}^{\cdot}\hat{A}\psi) + N(\bar{\psi}^{\cdot}\hat{A}\psi\bar{\psi}A\psi^{\cdot})$$

$$+ N(\bar{\psi}\hat{A}\cdot\psi\cdots\bar{\psi}\cdots\hat{A}\cdot\psi) + N(\bar{\psi}\cdots\hat{A}\cdot\psi\bar{\psi}\hat{A}\cdot\psi\cdots)$$

$$+ N(\bar{\psi}\cdots\hat{A}\psi\cdot\bar{\psi}\cdot\hat{A}\psi\cdots) + N(\bar{\psi}\cdot\hat{A}\cdots\psi\cdots\bar{\psi}\cdots\hat{A}\cdots\psi\cdot).$$

(注意狄拉克场量的纯积的收缩为 0) 共 8 项.

§ 5.6 Feynman 图

S 矩阵的被积函数是一些算符的 T-N 混合积. 按 Wick 定理二,此 T-N 混合积恒可展开为一些算符的正规积之和,我们来考虑任一正规积:

任一正规积包含三个元素,即

(1) 时空坐标 $x_1, x_2, \cdots x_n$,

(2) 算符:即自由算符,

(3) 收缩:即算符的收缩或费曼传播量.

1949 年 R. P. Feynman 指出,采用下述规则,任一正规积均可用图形表示出来:

5.6.1. Feynman 图规则

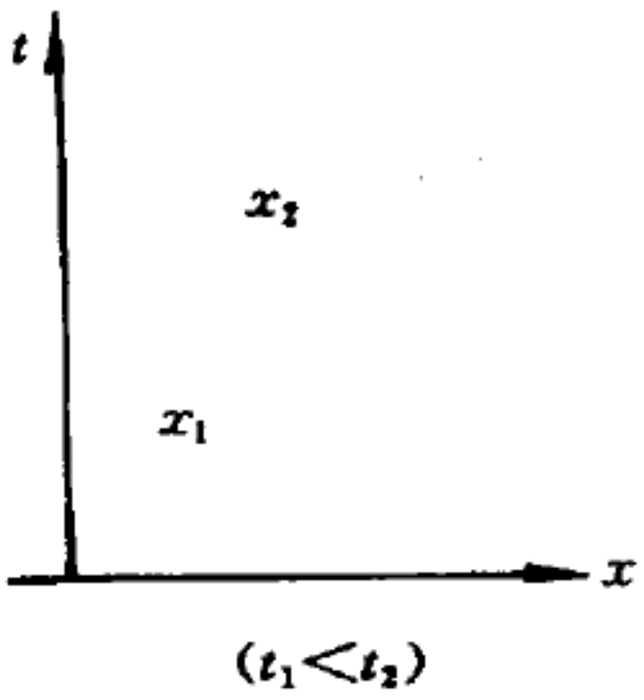
(i) 不同时空坐标以时空图上不同点表示,这种时空点,叫顶角(Vertex).

(ii) 算符一律用线表示,自由算符用半线段 •—— 表示. 线之一端即相应的时空点,这种线叫做外部线,其中外部费米线以带箭头的实线表示:

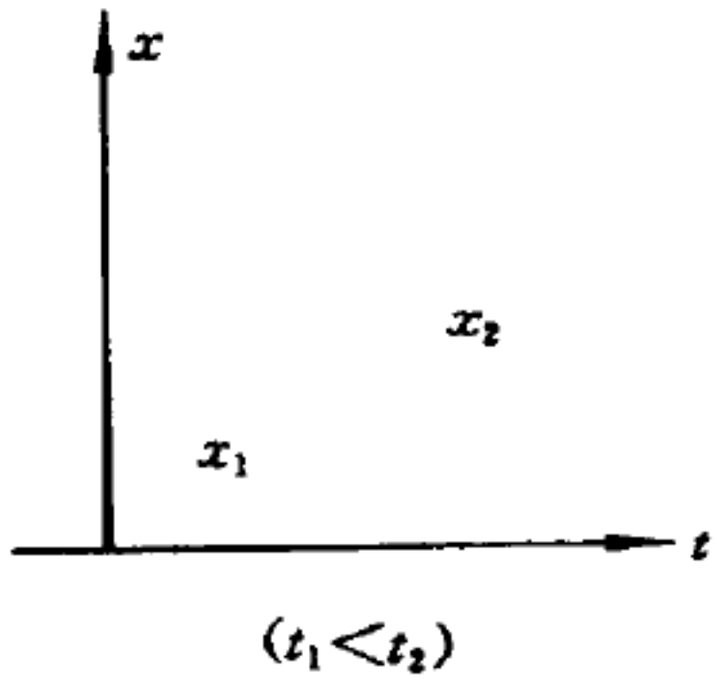
例:

$\psi(x)$: ——→•　　箭头指向顶角.

$\bar{\psi}(x)$: •$\overset{\bar{\psi}(x)}{\underset{x}{\longrightarrow}}$　　箭头从顶角向外.



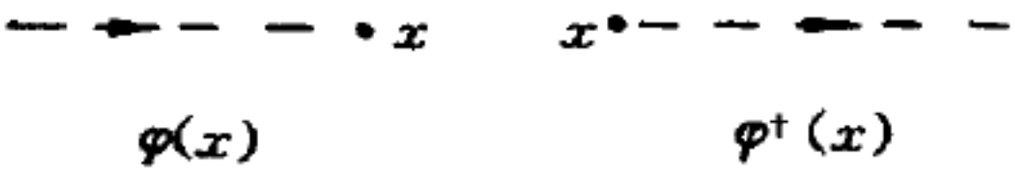
$(t_1<t_2)$



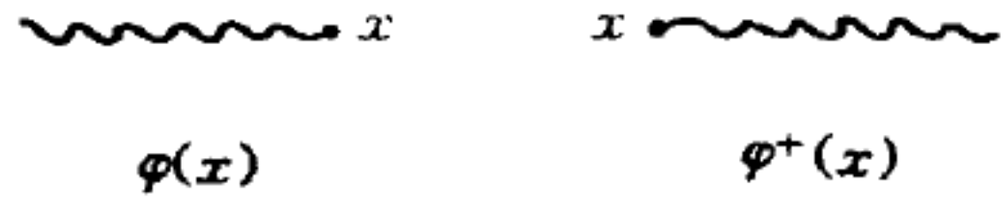
$(t_1<t_2)$

外部玻色线以无箭头的或带箭头的虚线或波线来表示：

$\psi(x)$ $\psi^{\dagger}(x)$：

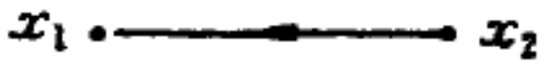


$\varphi(x)$ $\varphi^{\dagger}(x)$



$\varphi(x)$ $\varphi^{+}(x)$

(iii) 收缩或 Feynman 传播量以线段来表示，线段的两端为相应的时空点，此种线叫内部线，其中内部费米线以带箭头实线表示：



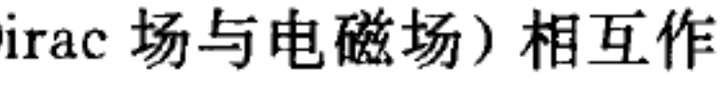
$\psi^{\cdot}(x_1)\bar{\psi}^{\cdot}(x_2)$：

$\bar{\psi}^{\cdot}(x_1)\psi^{\cdot}(x_2)$：



内部玻色线以无箭头的或带箭头虚线或波线表示：

$\psi^{\cdot}(x_1)\psi^{\cdot}(x_2)$ x_1 x_2



以轻子 - 光子(Dirac 场与电磁场) 相互作用为例：

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}S^{(n)},$$

$$S^{(0)}=1,$$

$$S^{(n)}=\frac{(-e)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4x_n\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4x_1T\{N(\bar{\psi}(x_n)\times$$

$$\times \hat{A}(x_n)\psi(x_n))\cdots N(\bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)\psi(x_1))\}.$$

由于精细结构常数 $\alpha = \dfrac{e^2}{c\hbar} \simeq \dfrac{1}{137}$，因此对轻子 - 光子相互作用采用微扰论，仅需要选取头几项，即可获得较满意的结果.

$S^{(1)}$：仅含有一个正规积.

$$T\{N(\bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)\psi(x_1)\} = N\{\bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)\psi(x_1)\}.$$

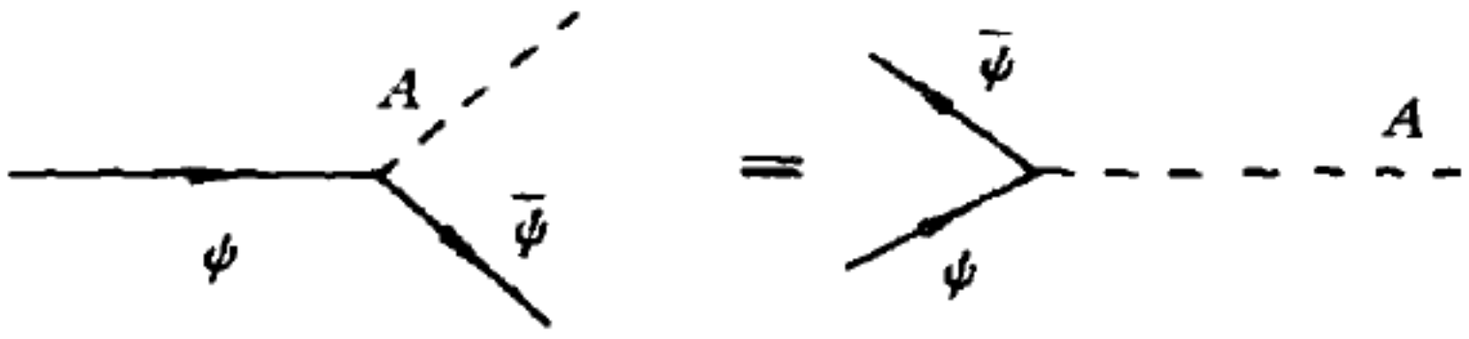


图 (5.6.1)

由图可知，顶角至少是三根线的交点，其中一根光子线，两根轻子线，后者必定是一根轻子线的箭头指向顶角，另一根反向.

$S^{(2)}$：可分解为八个正规积.

$$N(\bar{\psi}(x_2)\hat{A}(x_2)\psi(x_2)\ \bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)\psi(x_1).$$

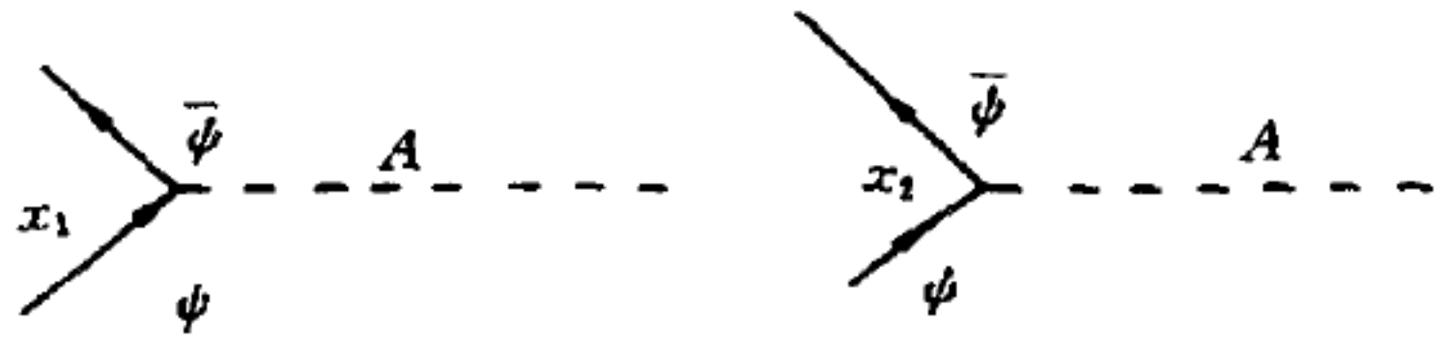


图 (5.6.2)

$$N[\bar{\psi}(x_2)\hat{A}^{\cdot}(x_2)\psi(x_2)\ \bar{\psi}(x_1)\hat{A}^{\cdot}(x_1)\psi(x_1)].$$

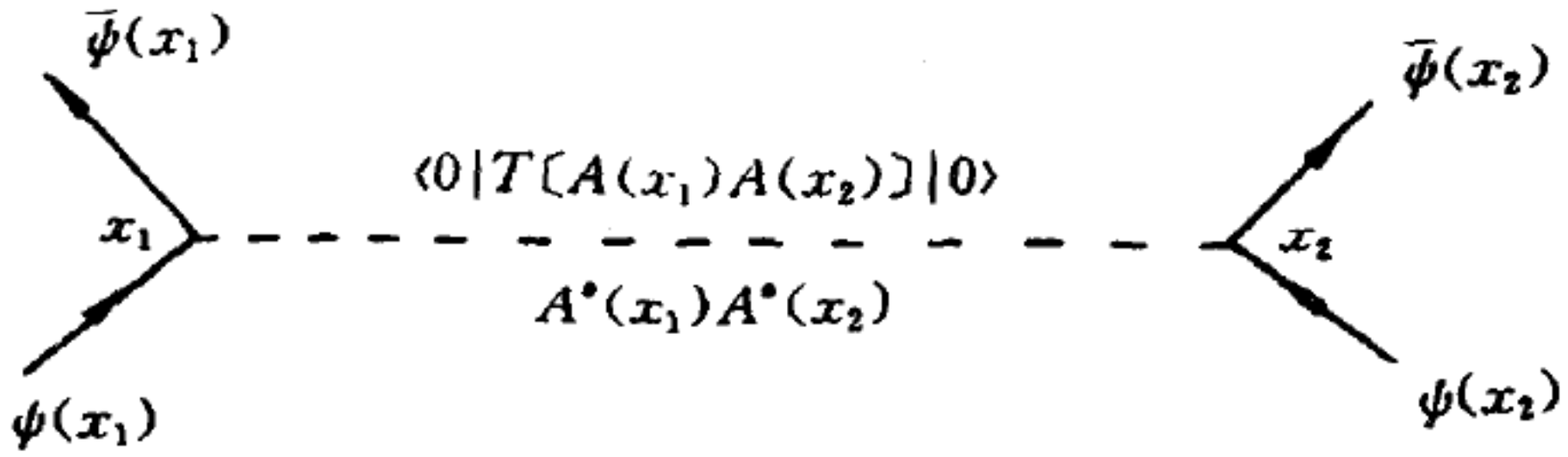


图 (5.6.3)

$$N(\bar{\psi}(x_2)\hat{A}(x_2)\psi^{\cdot}(x_2)\,\bar{\psi}^{\cdot}(x_1)\hat{A}(x_1)\psi(x_1)).$$

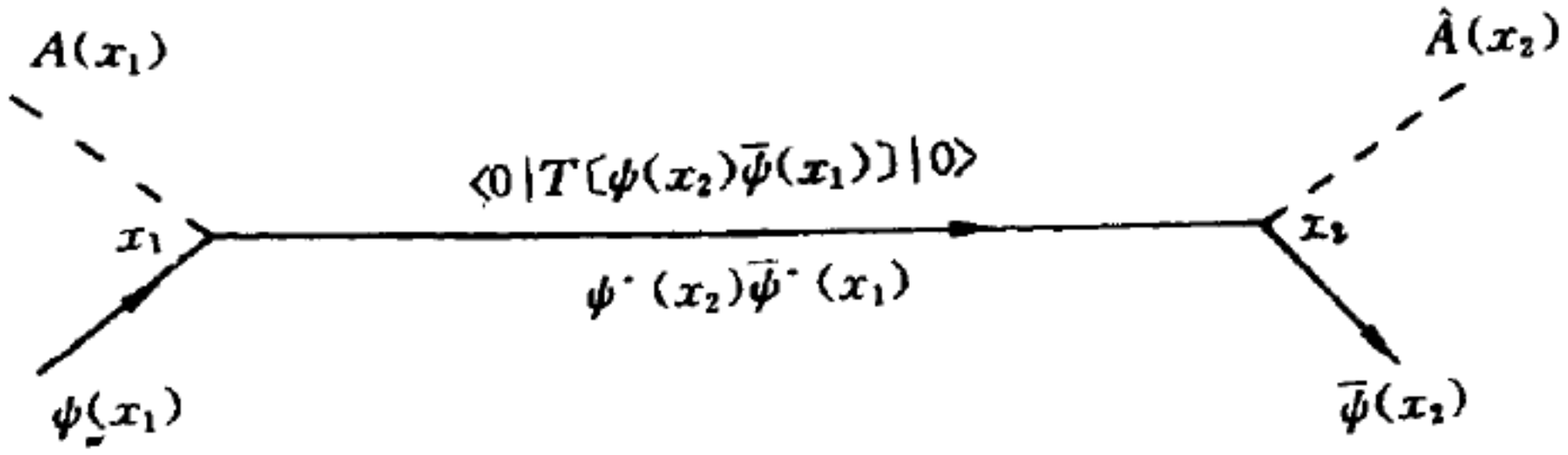


图 (5.6.4)

$$N(\bar{\psi}^{\cdot}(x_2)\hat{A}(x_2)\psi(x_2)\,\bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)\psi^{\cdot}(x_1)).$$

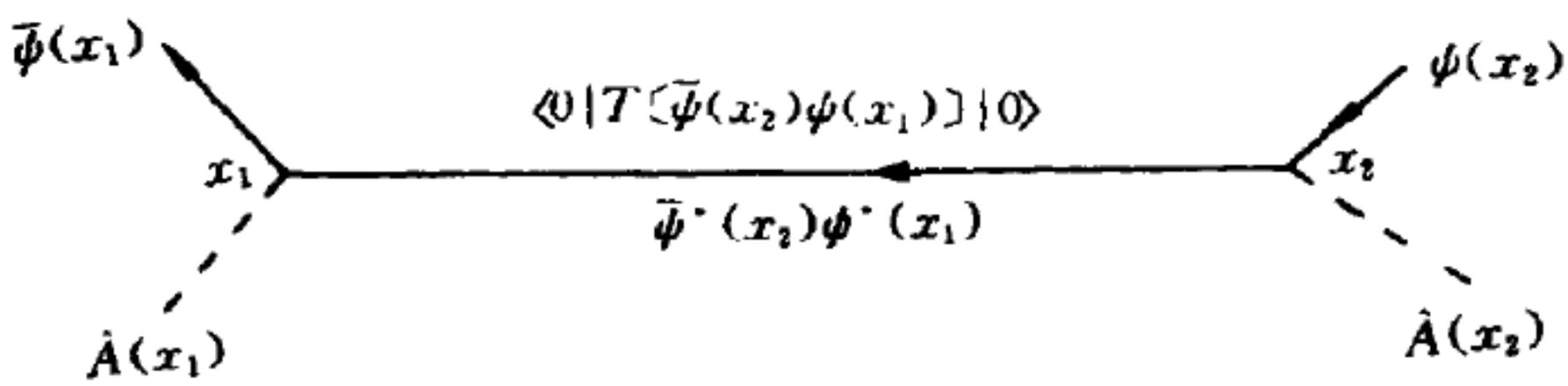
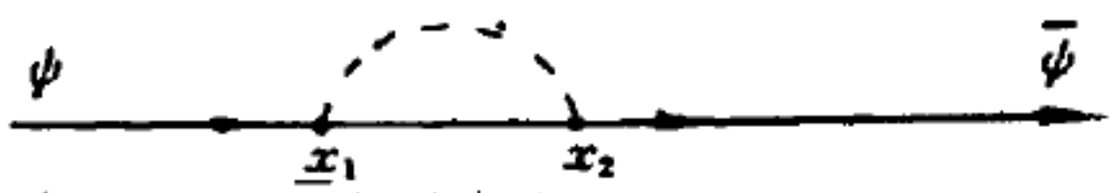


图 (5.6.5)

$$N(\bar{\psi}(x_2)\hat{A}^{\cdot}(x_2)\psi^{\cdot\cdot}(x_2)\,\bar{\psi}^{\cdot\cdot}(x_1)\hat{A}^{\cdot}(x_1)\psi(x_1)).$$

$$\hat{A}^{\cdot}A^{\cdot} = \langle 0|T\hat{A}(x_2)\hat{A}(x_1)|0\rangle.$$

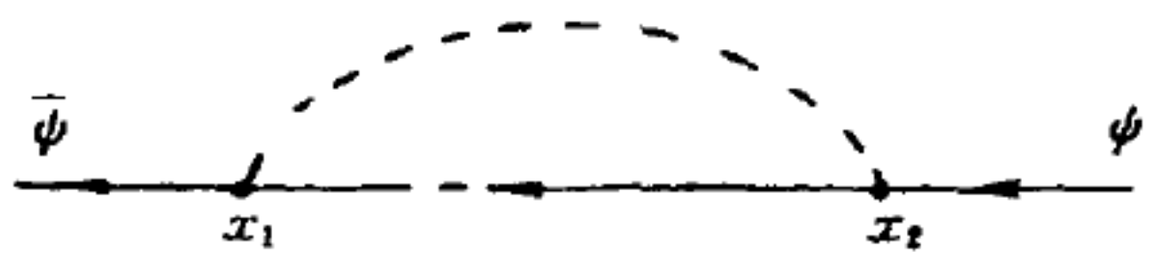


$$\psi^{\cdot}\bar{\psi}^{\cdot} = \langle 0|T\psi(x_2)\,\bar{\psi}(x_1)|0\rangle.$$

图 (5.6.6)

$$N(\bar{\psi}^{\cdot\cdot}(x_2)\hat{A}^{\cdot}(x_2)\psi(x_2)\,\bar{\psi}(x_1)\hat{A}^{\cdot}(x_1)\psi^{\cdot\cdot}(x_1)).$$

$$A^{\cdot}\,A^{\cdot} = \langle 0|TA(x_2)A(x_1)|0\rangle.$$

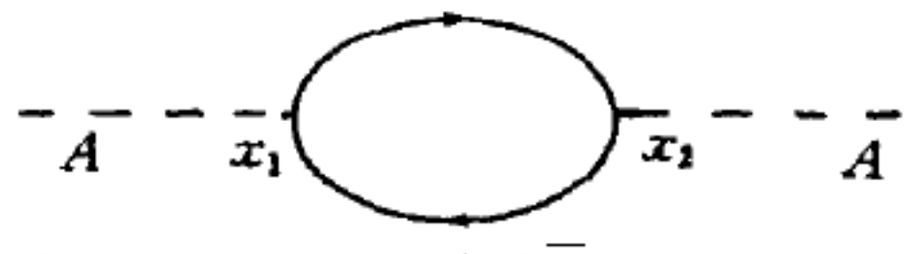


$$\bar{\psi}^{\cdot}\,\psi^{\cdot} = \langle 0|T\,\bar{\psi}(x_2)\psi(x_1)|0\rangle$$

图 (5.6.7)

$$N(\bar{\psi}^{\cdot\cdot}(x_2)\hat{A}(x_2)\psi^{\cdot}(x_2)\,\bar{\psi}^{\cdot}(x_1)\hat{A}(x_1)\psi^{\cdot\cdot}(x_1)).$$

$$\bar{\psi}^{\cdot}(x_1)\psi^{\cdot}(x_2) = \langle 0|T\,\bar{\psi}(x_1)\psi(x_2)|0\rangle.$$

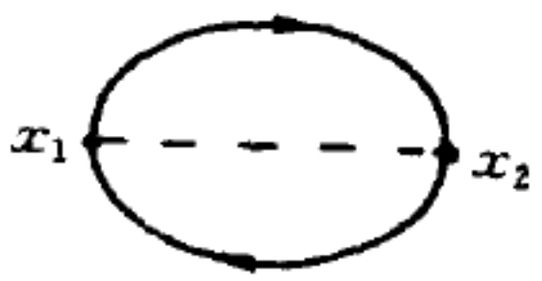


$$\bar{\psi}^{\cdot\cdot}(x_2)\psi^{\cdot\cdot}(x_1) = \langle 0|T\,\bar{\psi}(x_2)\psi(x_1)|0\rangle.$$

图 (5.6.8)

$$N(\psi^{\cdot\cdot\cdot}(x_2)\hat{A}^{\cdot\cdot}(x_2)\psi^{\cdot}(x_2)\,\bar{\psi}^{\cdot}(x_1)\hat{A}^{\cdot\cdot}(x_1)\psi^{\cdot\cdot\cdot}(x_1)).$$

$$\bar{\psi}^{\cdot\cdot\cdot}(x_2)\psi^{\cdot\cdot\cdot}(x_1) = \langle 0|T'(\bar{\psi}(x_2)\psi(x_1))|0\rangle.$$



$$A^{\cdot\cdot}A^{\cdot\cdot} = \langle 0|TA(x_1)A(x_2)|0\rangle. \quad (5.6.9)$$

$$\psi^{\cdot}(x_2)\,\bar{\psi}^{\cdot}(x_1) = \langle 0|T\psi(x_2)\,\bar{\psi}(x_1)|0\rangle.$$

图 (5.6.9)

注意：

(i) 由作图规则知，只要保持 x_1, x_2 的时序，任一 Feynman 图经过拓扑变换后仍与原图全同.

(ii)Feynman 图(5.6.4) 与(5.6.5)，(5.6.6) 与(5.6.7) 经过费米线上箭头倒向或交换 x_1, x_2 的位置后，彼此可以是拓扑全同的.

我们马上一般地证明：

若任二 Feynman 图适当排列 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 的位置后是拓扑全同的，则与它们相对应的正规积对 S 矩阵的贡献完全相同.

证：若二正规积(Feynman 图) 之间的区别仅在于 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 的排列不同，在同一个 N 积内，可适当调换不同时刻 H_i 的位置（例：（5.6.5）中 $\underbrace{N(\bar{\psi}^{\cdot}(x_2)\hat{A}(x_2)\psi(x_2)}_{H(x_2)}\ \underbrace{\bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)\psi^{\cdot}(x_1)}_{H(x_1)} =$ $N(\bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)\psi^{\cdot}(x_1)\ \bar{\psi}^{\cdot}(x_2)\hat{A}(x_2)\psi(x_2))$. 因此积分号下，此二正规积仅两个积分变数不同. 变换积分变数后，即知它们对 S 矩阵的贡献完全相同.

(iii)

例 已知 $S^{(3)}$ 包含如下六项：

$$N\{\bar{\psi}(x_3)\hat{A}(x_3)\psi^{\cdot}(x_3)\,\bar{\psi}^{\cdot}(x_2)\hat{A}^{\cdot\cdot}(x_2)\psi(x_2)\,\bar{\psi}(x_1)\hat{A}^{\cdot\cdot}(x_1)\psi(x_1)\} \tag{5.6.10}$$

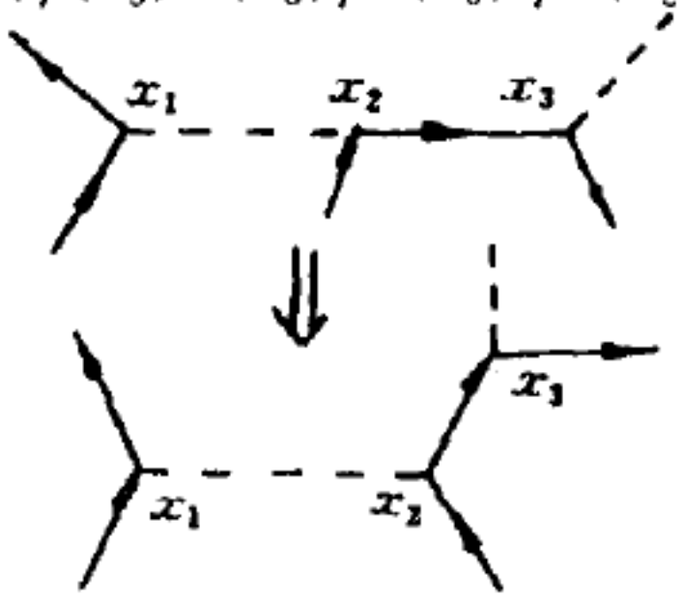


图 (5.6.10)

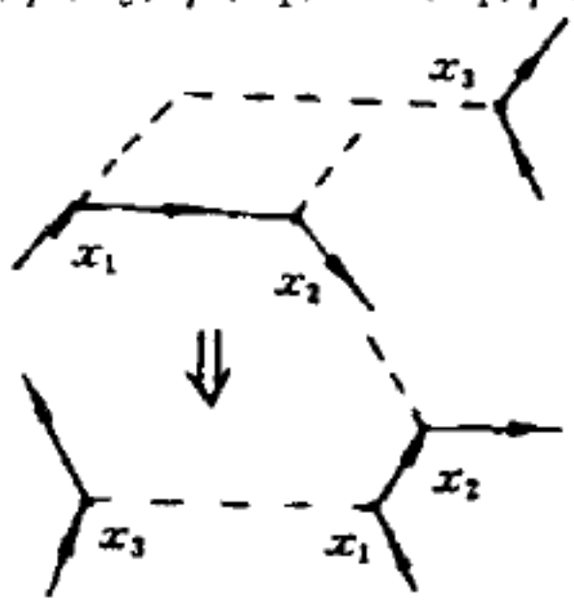


图 (5.6.11)

$$N\{\bar{\psi}(x_3)\hat{A}^{\cdot\cdot}(x_3)\psi(x_3)\,\bar{\psi}(x_2)\hat{A}(x_2)\,\bar{\psi}^{\cdot}(x_2)\,\bar{\psi}^{\cdot}(x_1)\hat{A}^{\cdot\cdot}(x_1)\psi(x_1)\} \tag{5.6.11}$$

$$N\{\bar{\psi}^{\cdot}(x_3)\hat{A}^{\cdot\cdot}(x_3)\psi(x_3)\,\bar{\psi}(x_2)\hat{A}^{\cdot\cdot}(x_2)\psi(x_2)\,\bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)\psi^{\cdot}(x_1)\} \tag{5.6.12}$$

图 (5.6.12)

图 (5.6.13)

$$N\left(\bar{\psi}(x_3)\hat{A}(x_3)\psi^{\cdot}(x_3)\,\bar{\psi}(x_2)\hat{A}^{\cdot\cdot}(x_2)\,\bar{\psi}(x_2)\,\bar{\psi}^{\cdot}(x_1)\hat{A}^{\cdot\cdot}(x_1)\times\right.$$
$$\left.\times\,\psi(x_1)\right) \tag{5.6.13}$$

$$N\left(\bar{\psi}(x_3)\hat{A}^{\cdot\cdot}(x_3)\psi(x_3)\,\bar{\psi}^{\cdot}(x_2)\hat{A}^{\cdot\cdot}(x_2)\psi(x_2)\,\bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)\times\right.$$
$$\left.\times\,\psi^{\cdot}(x_1)\right) \tag{5.6.14}$$

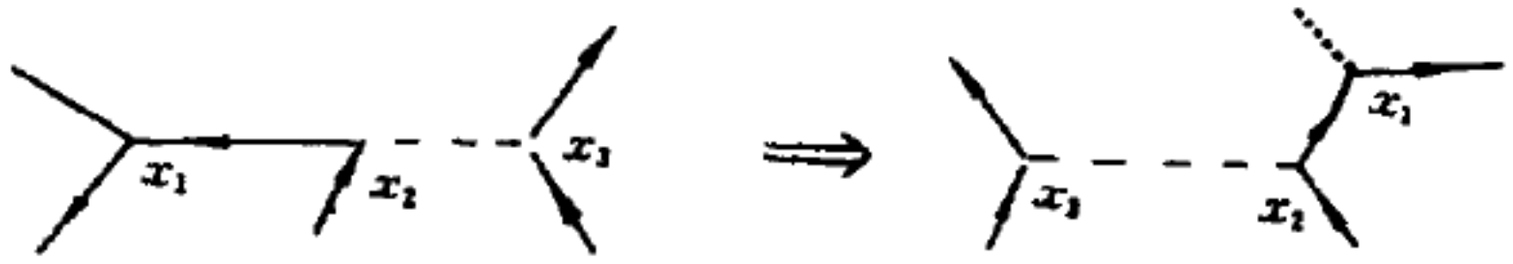


图 (5.6.14)

$$N\left(\bar{\psi}^{\cdot}(x_3)\hat{A}^{\cdot\cdot}(x_3)\psi(x_3)\,\bar{\psi}(x_2)\hat{A}(x_2)\psi^{\cdot}(x_2)\,\bar{\psi}(x_1)\times\right.$$
$$\left.\times\,\hat{A}^{\cdot\cdot}(x_1)\psi(x_1)\right)$$

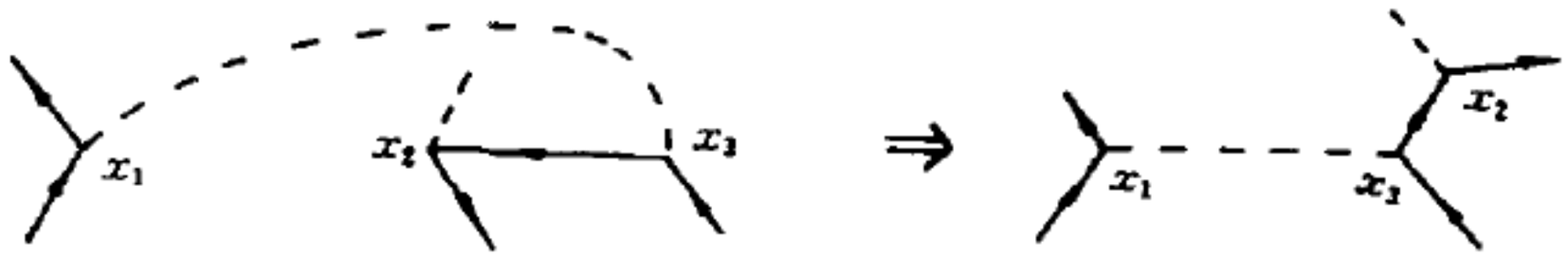


图 (5.6.15)

由于上述 6 个 Feynman 图都可由图(5.6.10) 变换 x_1, x_2, x_3 的位置而得到. 因而对 S 矩阵的贡献完全相同,此六项正规积之和对 S 矩阵的贡献等于(5.6.10) 式一项贡献的 $6 = 3!$倍.

$S^{(3)}$ 中 2 个正规积

$$N\left(\bar{\psi}^{\cdot\cdot\cdot}(x_3)\hat{A}(x_3)\psi^{\cdot}(x_3)\,\bar{\psi}^{\cdot}(x_2)\hat{A}(x_2)\psi^{\cdot\cdot}(x_2)\,\bar{\psi}^{\cdot\cdot}(x_1)\hat{A}(x_1)\psi^{\cdot\cdot\cdot}(x_1)\right). \tag{5.6.16}$$

$$N\left(\bar{\psi}^{\cdot\cdot\cdot}(x_3)\hat{A}(x_3)\psi^{\cdot}(x_3)\,\bar{\psi}^{\cdot\cdot}(x_2)\hat{A}(x_2)\psi^{\cdot\cdot\cdot}(x_2)\,\bar{\psi}^{\cdot}(x_1)\times\right.$$
$$\left.\times\,\hat{A}(x_1)\psi^{\cdot\cdot}(x_1)\right). \tag{5.6.17}$$

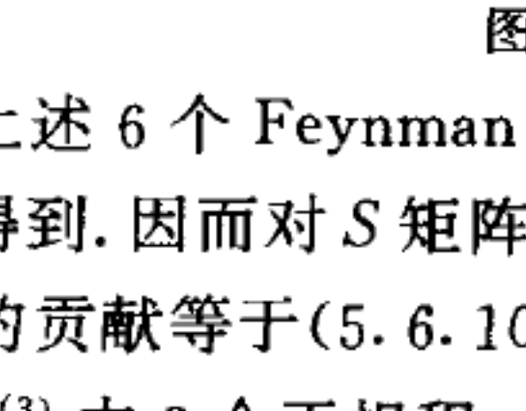


图 (5.6.16)

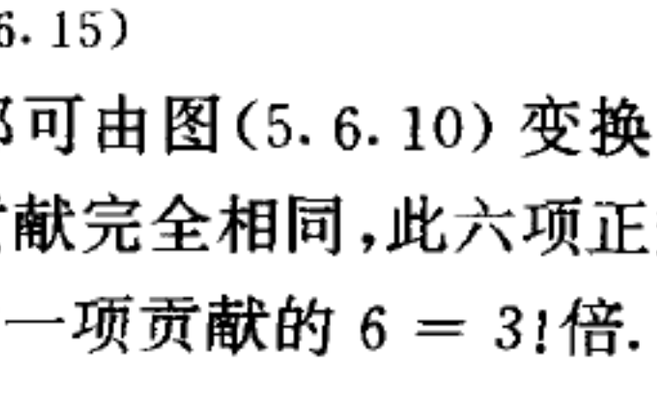


图 (5.6.17)

上述两个Feynman图在交换x_1, x_3后，显然是拓扑全同的. 因而它们对S矩阵的贡献完全相同. 事实上，3根不同的光子线在三个不同的顶角共有3!种排列，它们对$S^{(3)}$的贡献完全相同，总之，$S^{(3)}$中所有正规积的贡献都可看作某些正规积的3!贡献之和，这样$S^{(3)}$中的系数$\frac{1}{3!}$可以最后消掉.

5.6.2. Feynman图的物理意义

如前所述：任何Feynman图由两种元素组成，即点和线.

点表示局部相互作用发生的时刻和地点，叫顶角.

线表示场量算符，它由消灭算符和产生算符组成，分外线和内线，对于外线(自由算符)：

$\psi(x) = a\psi^{(+)} + b^{\dagger}\psi^{(-)}$ ⟶ x，在x点消灭一个费米子或在x点产生一个反费米子.

$\bar{\psi}(x) = a^{\dagger}\bar{\psi}^{(-)} + b\bar{\psi}^{(+)}x$ ⟵ ，在x点消灭一个反费米子或在x点产生一个费米子.

$A(x)$：在x点消灭或产生一个光子.

故由外线反映的过程是入射粒子或出射粒子的实过程，参与的粒子是自由的实粒子，其特点是满足Klein-Gordon条件或在质壳上，即$p^2 = -m^2$.

对于内线(收缩算符或Feynman传播量)：粒子或反粒子在某个较早的时刻从真空产生，随后在某个较晚的时刻消灭于真空. 这是一个观测不到的反映相互作用的虚过程. 参与虚过程的粒子叫虚粒子. 虚粒子不是自由粒子，以后将指出，不满足Klein-Gordon条件或不在质壳上，$p^2 \neq -m$.

仍以电子-光子相互作用为例：

S矩阵所反映的相互作用过程是电子与光子间一切可能发生的相互作用过程的叠加.

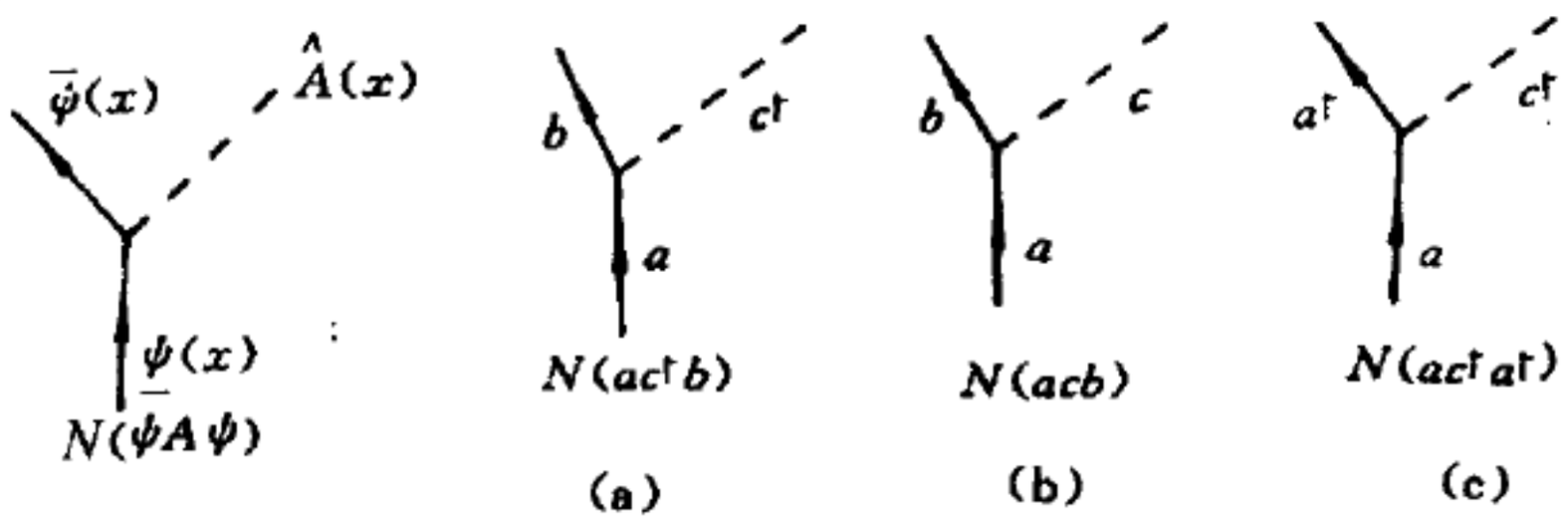
零级过程：$S^{(0)} = 1$所反映的是无相互作用的过程.

一级过程 $S^{(1)}$：

按 Feynman 图规则：

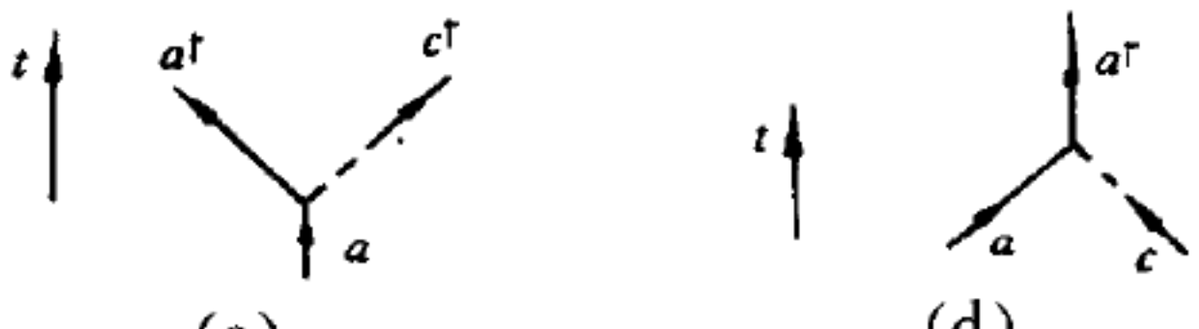
$S^{(1)}:N(\bar{\psi}(x)\hat{A}(x)\ \psi(x)) = N[(a^{\dagger}\bar{\psi}^{(-)} + b\ \bar{\psi}^{(+)})(c\hat{A}^{(+)} + c^{\dagger}\ \hat{A}^{(-)})(a\psi^{(+)} + b^{\dagger}\ \psi^{(-)})]$

共 8 项：

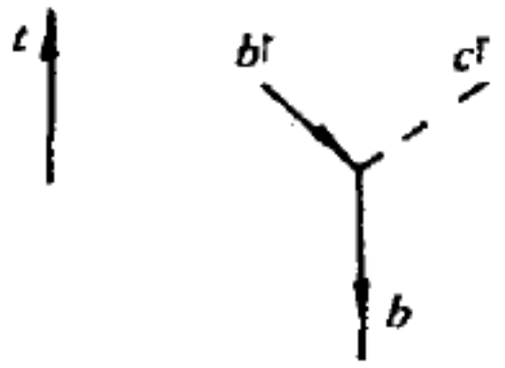


按 Feynman 图的物理意义，欲某一正规积的 Feynman 图代表一确定的物理过程应适当选取时轴方向，以使在同一顶角处，消灭在前，产生在后.

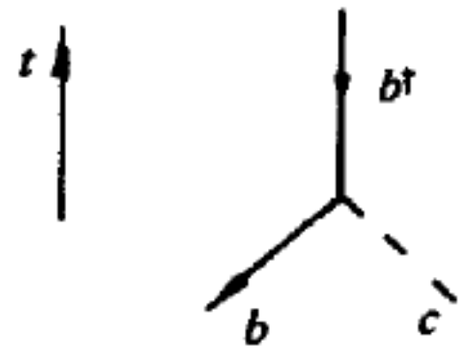
(1)(c)，(d) 图表示入射电子在 x 处放出或吸入一个光子后成为出射电子.



(2)(e),(f) 图表示入射正电子在 x 处放出或吸收一个光子后成为出射正电子.

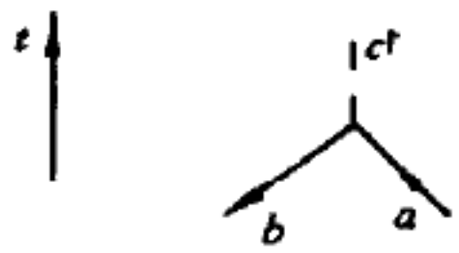


(e)

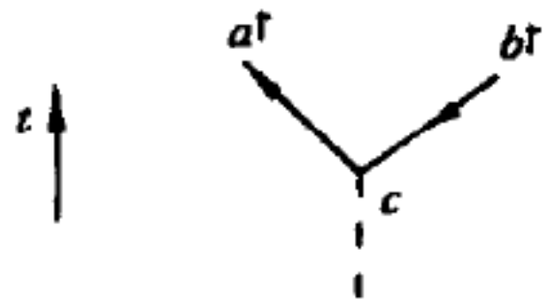


(f)

(3)(a) 图表示正负电子对湮灭成为一个出射光子.



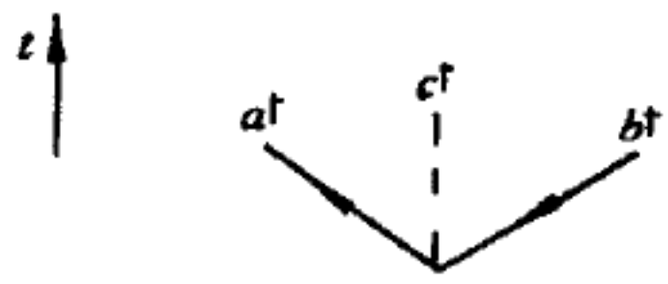
(a)



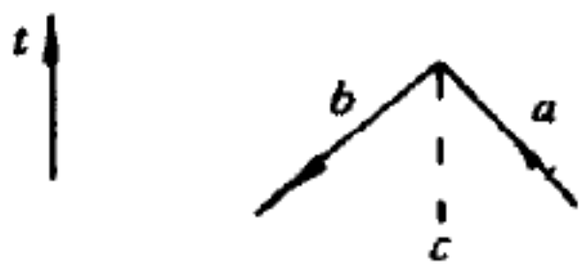
(h)

(4)(h) 图表示一个光子转化为正负电子对.

(5)(g) 图表示在 x 点无中生有,出现了正负电子对和光子.



(g)



(b)

(6)(b) 图表示在 x 点有化为无,光子和正负电子对消失了.

结论:(1) 当费米线的箭头顺着时轴时:$\psi(x)$ 代表费米子的消灭,$\bar{\psi}(x)$ 代表费米子的产生.

(2) 当费米线的箭头逆着时轴时:$\psi(x)$ 代表反费米子的产生,$\bar{\psi}(x)$ 代表反费米子的消灭.

(3) 顺着时轴前进的反费米子可看作逆着时轴前进的费米子.

若取时轴向下，那么当正电子顺着时轴前进时，正电子可视为电子逆着时轴进行. 这一点从运动方程也可看出. 在外场作用下，经典电子运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}^2x_\nu}{\mathrm{d}t^2}=e\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}t}F_{\mu\nu}.$$

e 变号的运动方程相当于 e 不变号固有时变号的运动方程.

我们马上指出：对自由电子而言，上述(1)、(2) 两个过程实际上不可能存在.

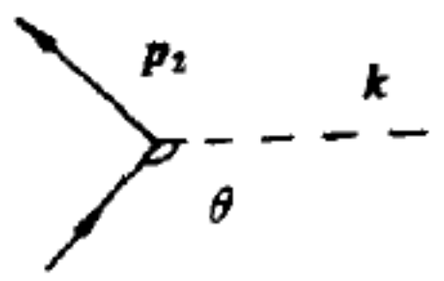
按照能量动量守恒定律应成立：

$$p_1 \pm k = p_2 \Rightarrow p_1^2 \pm 2pk + k^2 = p_2^2.$$

但按质壳条件 $p_1^2 = p_2^2 = -m_e^2, k^2 = 0$，故应有：

$$(p_1)_\mu k_\mu = \boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{k} - \omega\sqrt{\boldsymbol{p}_1^2 + m_e^2} = 0$$

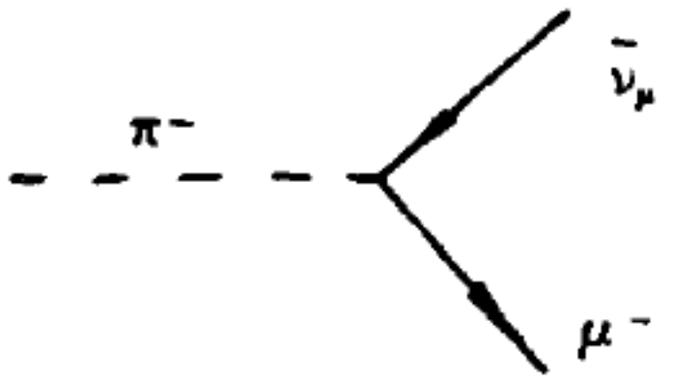
$$\Rightarrow -(\boldsymbol{p}_1^2\sin^2\theta) = m_e^2 \text{—— 矛盾.}$$



同样(3)、(4) 过程也不可能：在正负电子对的质心系中，正负电子对的总动量为 0，按动量守恒定律，显然不可能. (5)、(6) 违背物质不生不灭定律，显然不可能.

故正负电子与光子的相互作用过程，最低级只能是二级过程.

但需指出，一级过程虽然不能反映自由正负电子与光子的相互作用，但可用来反映 π 介子的直接弱相互作用衰变. 例如：

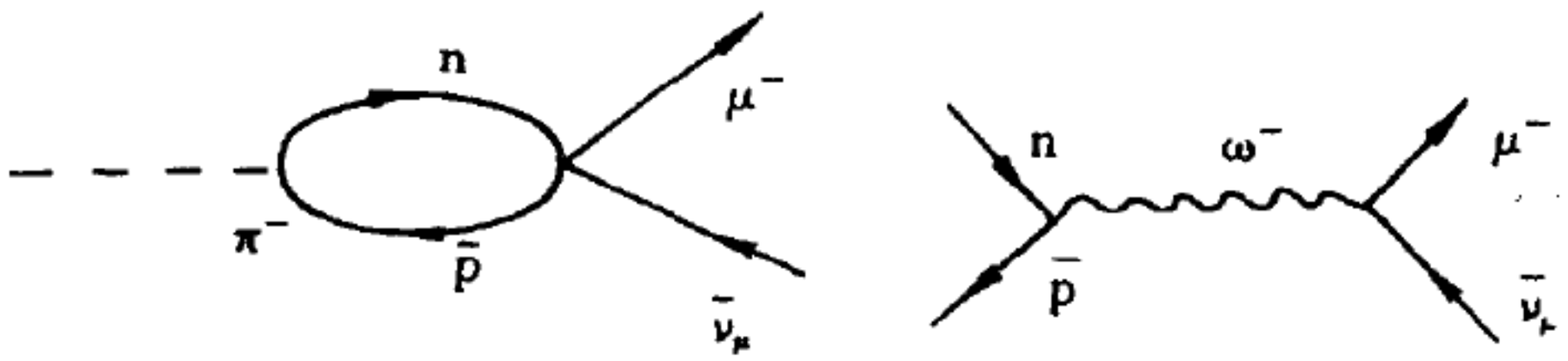


$$\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu.$$

$$H_i = GN(\mu\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\nu_\mu\pi).$$

上述过程的二级过程，即直接强相互作用 $\pi^- \to \bar{\mathrm{p}} + \mathrm{n}$ 和直接费米弱相互作用 $\bar{\mathrm{p}} + \mathrm{n} \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ 的合成，后者可以认为是通过中间玻色子 W^- 来实现的弱相互作用.

二级过程：图(5.6.2)：在 x_1, x_2 二时空点分别发生如 $S^{(1)}$ 所示的散射过程.



图(5.6.3)：两个入射电子(正电子)通过交换虚光子相互散射 ——Möller 散射. 一个入射电子和一个入射正电子通过交换虚光子相互散射 ——Bhabha 散射. 入射正负电子对湮灭成虚光子，随后又转化为正负电子对，上述三个反应道互为交叉道(crossing). 图(5.6.4) 一个入射电子(正电子) 在 x_1,(x_2) 点吸收一个入射光子变为虚电子，随即在 x_2,(x_1) 点又转化为一个电子(正电子) 和光子 —— 电子和光子的相互散射过程或称为 Compton 散射.

一个入射电子先(x_1) 后(x_2) 分别放出或吸收一个光子.

一个电子和一个正电子湮灭为两个光子.

两个光子转化为正负电子对.

上述 4 个反应道互为交叉道.

图(5.6.5) 反映的过程与图(5.6.4) 相同，注意只需交换 x_1, x_2 位置，即知图(5.6.4) 和图(5.6.5) 拓扑全同.

图(5.6.6) 反映入射电子在 x_1 处发出一个虚光子，自己成为一个虚电子随后在 x_2 处虚电子吸收虚光子成为出射电子，这是一个电子的自相互作用过程或电子与电磁场真空的相互作用，叫电子自能图. 显然，它也可反映正电子的自相互作用，也可叫正电子自能图.

图(5.6.7) 反映：入射正电子在 x_1 处发出一虚光子，自己成为一个虚正电子，随后在 x_2 处虚正电子吸收虚光子成为出射正电子. 这是一个正电子的自相互作用过程，或正电子与电磁场真空的相互作用，叫正电子自能图. 同一个图也可叫电子自能图.

注意：只需交换 x_1, x_1 位置，即知图(5.6.6)和图(5.6.7)是拓扑全同的.

图(5.6.8)反映：入射光子转化为虚正、负电子对，随后又复合为出射光子. 这是一个光子的自相互作用过程，或光子与 Dirac 真空场的相互作用，叫光子自能图.

电子自能图和光子自能图都叫单圈图.

图(5.6.9)反映：没有任何入射粒子的真空态在 x_1 处出现虚正负电子对和虚光子，随后在 x_2 处又回复到没有任何出射粒子的真空态 —— 真空涨落现象，这是量子场论所揭示出的一种特有的真空涨落现象.

可小结一下，上述 Feynman 图中的一些物理概念：

(i) 如果粒子是顺时轴前进，顺时轴前进的反粒子可等效地认为是逆时轴前进的粒子.

(ii) 凡交换 $x_1x_2\cdots x_n$ 位置后拓扑全同的 Feynman 图，可反映同一过程，因而以后可不考虑 $x_1x_2\cdots x_n$ 的时序.

(iii) 基本粒子之间的相互作用可分为

直接相互作用：不需传递相互作用的中介场；

间接相互作用：需要虚粒子作为传递相互作用的中介场.

(iv) 虚粒子概念：前已提到，在碰撞区，粒子概念是不能成立的，但为了方便，有时在碰撞区，我们引入虚粒子概念.

“虚”的意义是：(a) 不能用粒子探测器探测到；

(b) 不服从质壳关系式 $p^2 = -m^2$.

但从它所起的两点重要作用看，即

(a) 保证在顶角处的能量动量电荷等严格守恒；

(b) 传递粒子之间的相互作用(传递能量、动量、电荷等).

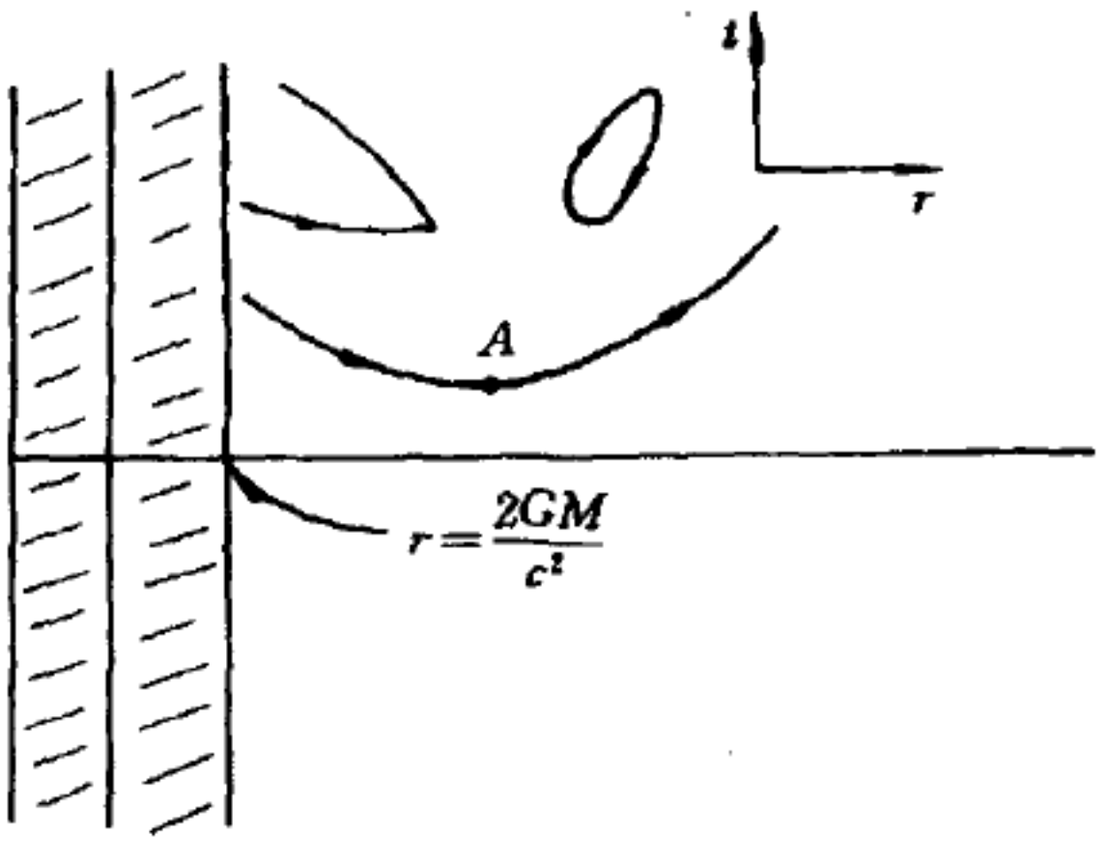
虚粒子又不是虚的.

(v) 真空概念：

量子场论认为，真空是各种量子场系统的能量最低状态或基态. 处于这种基态的各种场不断有虚粒子产生消灭，形成所谓真空涨落或圈图. 前面提到，正负电子场可与电磁场真空发生相互作用(图 5.6.6)，光子场可与正负电子场真空(Dirac 真空) 发生相互作用(图 5.6.5)，可见量子真空场是一个客观的物质场，它与一般物质之间的相互作用(Lamb 移动，电子的反常磁矩等) 已由精确实验证实了.

可见真空并非虚空.

最后我们来谈到重力场与真空场之间的相互作用所导致一个有趣的黑洞蒸发现象.



在史瓦希黑洞视界附近的重力场作用下，正、反虚粒子对可实化为实粒子.

例如在黑洞外 A 处的虚正反粒子对，黑洞视界将使正、反虚粒子对实化为实正、反粒子对. 设其中反粒子被黑洞吸入落入负能轨道，而粒子逸向无穷远处，此现象可等效地看做一个虚正粒子穿过黑洞的位垒，逆时间运动至 A 点被强重力场散射而实化变成一个顺着时间前进的实正粒子逸向无穷远处. 从外界观测者看来，就认为有粒子或反粒子从黑洞蒸发出来了. 据估算一颗质量等于太阳的黑洞需 10^{66} 年蒸发掉，一颗重量为 10 亿吨的黑洞则需 $10^{10} \sim 10^{11}$ 年蒸发掉. 随着物质的逸散，黑洞位垒变薄，蒸发猛烈进行，最后，可导致黑洞大爆炸，其释放能量可相当于 1000 万颗百

万吨级的氢弹.

§5.7 举例

由上述讨论可知,S 矩阵反映一切可能的相互作用过程. 因此在讨论某一特定的具体物理过程时,应从许多可能的过程(正规积)中挑选出所需的过程(正规积)来. 下面举例可说明如何挑选.

5.7.1. Compton 散射(电子 - 光子散射)

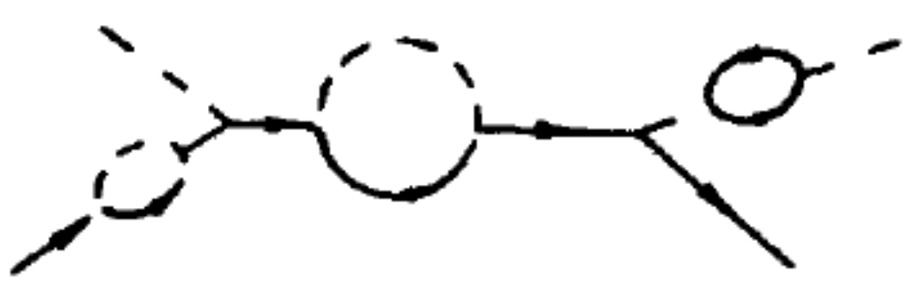
$$e_i + \gamma_i \to e_f + \gamma_f.$$

入射态:(初态):$|\rangle i = a^\dagger_{\rho i}\, c^\dagger_{\eta i}|\rangle 0.$

出射态(末态):$|\rangle f = a^\dagger_{\rho f}\, c^\dagger_{\eta f}|\rangle 0.$

散射几率辐:$\langle f|S|\rangle i = \underset{0}{\langle}|\ c_{\eta f} a_{\rho f} S a^\dagger_{\rho i}\, c^\dagger_{\eta i}|\rangle.$

故 S 的正规积中,只有包含消灭算符 $a_{\rho i}$, $c_{\eta i}$ 和产生算符 $a^\dagger_{\rho f} c^\dagger_{\rho f}$ 作为因子的散射几率幅才有贡献,最低阶过程只能是 $S^{(2)}$ 中图(5.6.4)、(5.6.5)所反映的正规积,高阶过程则除了上述四个因子外,尚可包含一些算符的收缩(各种内部线及圈图),最低阶几率幅为



$$2! \cdot \frac{(-e)^2}{2!}\int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_2 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1$$

$$\underset{0}{\langle}|\ c_{\eta f} a_{\rho f}\, N[\bar{\psi}(x_2)\hat{A}(x_2)\psi(x_2)\,\bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)\psi(x_1)]$$

$$a^\dagger_{\rho i}\, c^\dagger_{\eta i}|\rangle 0. \tag{5.7.1}$$

但 $\psi(x_1) = U + \bar{V}$ 中仅 $U = a_{\rho i}\psi^{(+)}_{\rho i}$ 对几率幅有贡献,

$\bar{\psi}(x_2) = \bar{U} + V$ 中仅 $\bar{U} = a^\dagger_{\rho f}\,\bar{\psi}^{(-)}_{\rho f}(x_2)$ 对几率幅有贡献

$$\hat{A}(x_1) = A_\mu(x_1)\gamma_\mu = \frac{\hat{e}_i}{\sqrt{2\omega_i}} c_{\eta i} e^{ik_i x_1} + \frac{\hat{e}_f}{\sqrt{2\omega_f}} \times c^+_{\eta f} e^{-ik_f x_1}.$$

$$\hat{A}(x_2) = A_\mu(x_2)\gamma_\mu = \frac{\hat{e}_i}{\sqrt{2\omega_i}} c_{\eta i} e^{ik_i x_2} + \frac{\hat{e}_f}{\sqrt{2\omega_f}} c^+_{\eta f} e^{-ik_f x_2}.$$

其中 $\hat{e}_i \equiv e_{i\mu}\gamma_\mu$,

故

$$N[\bar{\psi}\hat{A}\psi \cdot \bar{\psi} \cdot \hat{A}\psi]$$

$$= \{[\bar{\psi}^{(-)}_{\rho_f}(\chi_2) \frac{\hat{e}_f}{\sqrt{2\omega_f}} e^{-i\kappa_f x_2} \psi \cdot (x_2) \bar{\psi} \cdot (x_1)$$

$$\frac{\hat{e}_i}{\sqrt{2w_i}} e^{i\kappa_i x_1} \psi^{(+)}_{\rho_i}(x_1)] N(a^\dagger_{\rho_f} c^\dagger_{\eta f} c_{\eta i} a_{\rho_i}) +$$

$$+ [\bar{\psi}^{(-)}_{\rho_f}(x_2) \frac{\hat{e}_i}{\sqrt{2w_i}} e^{i\kappa_i x_2} \psi \cdot (x_2) \bar{\psi} \cdot (x_1) \frac{\hat{e}_f}{\sqrt{2\omega_f}} e^{-i\kappa_f x_1} \psi^{(+)}_{\rho i}(x_1)]$$

$$N(a^\dagger_{\rho_f} c_{\eta i} c^\dagger_{\eta f} a_{\rho_i})\} + \cdots.$$

最后的 Compton 散射几率振幅为

$$\langle_f |S^{(2)}|_i\rangle = e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \bar{\psi}^{(-)}_{\rho_f}(x_2) \frac{\hat{e}_f}{\sqrt{2\omega_f}} e^{-i\kappa_f x_2}(-1) S_f(x_2 - x_1) \times$$

$$\times \frac{\hat{e}_i}{\sqrt{2\omega_i}} e^{i\kappa_i x_1} \psi^{(+)}_{\rho_i}(x_1) + e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_2 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \bar{\psi}^{(-)}_{\rho_f}(x_2)$$

$$\frac{\hat{e}_i}{\sqrt{2\omega_i}} e^{i\kappa_i x_2}(-1) S_f(x_2 - x_1) \times \frac{\hat{e}_f}{\sqrt{2\omega_f}} e^{-i\kappa_f x_1} \psi^{(+)}_{\rho i}(x_1). \qquad (5.7.2)$$

注意:Compton 散射几率振幅包含两项,它们的 Feynman 图不是拓扑全同的. 以后可知,仅此两项之和才是观测量.

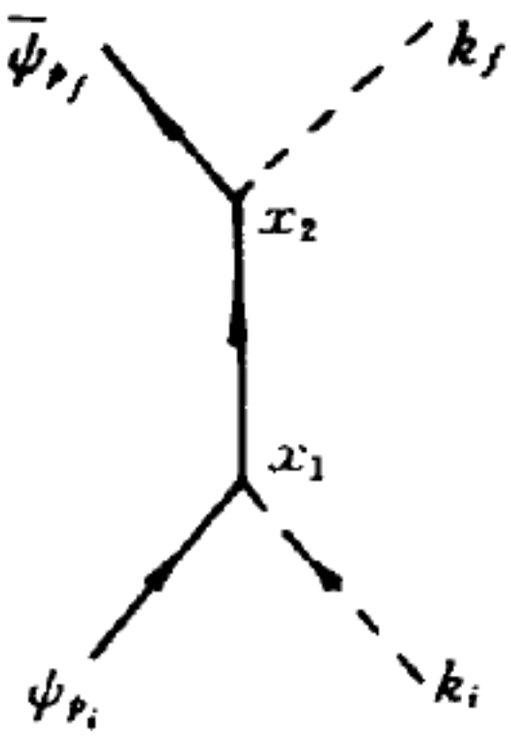


图 (5.7.3)

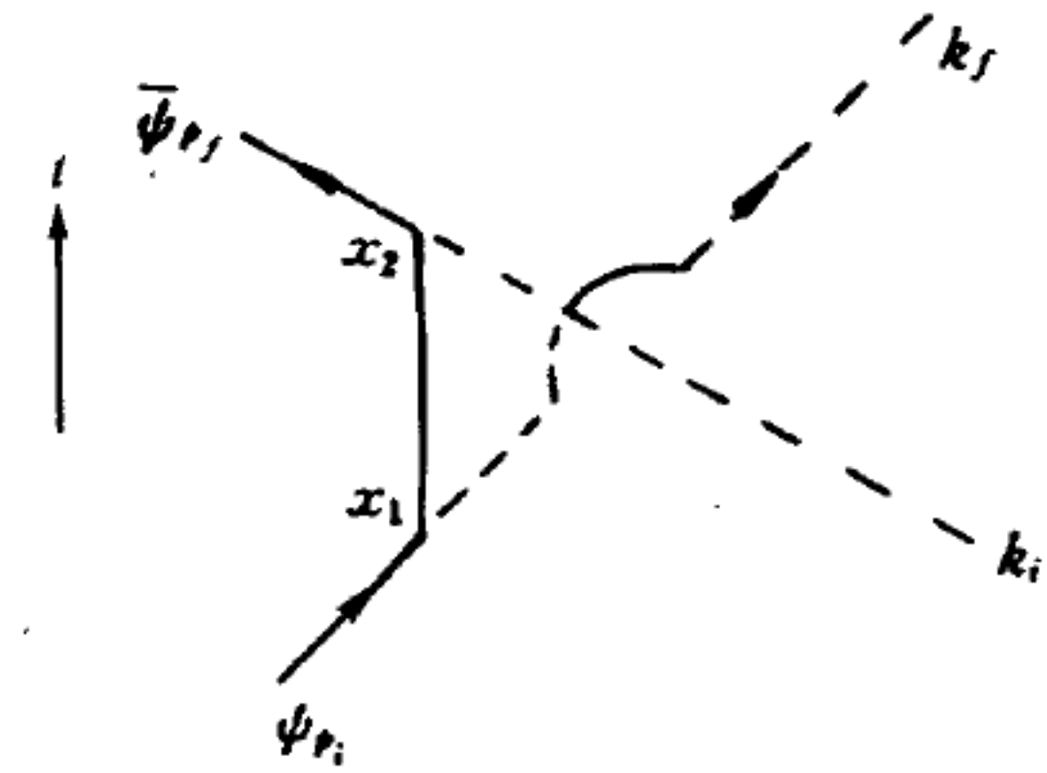


图 (5.7.4)

注意:Feynman 图(5.7.3)、(5.7.4) 可反映正、负电子对的湮灭(上图中时轴向右!) 此反应道是前者的交叉道.

在正、负电子对湮灭反应中:

$$|\rangle_i = a_i^\dagger b_i^\dagger |\rangle 0,$$

$$|\rangle_f = c_{1f}^\dagger c_{2f}^\dagger |\rangle 0.$$

故 S 的正规积中,只包含 $a_i, b_i, c_{1f}^\dagger, c_{2f}^\dagger$ 作为因子的才对散射几率幅有贡献,最低阶几率幅仍为(5.7.1).但

$$\psi(x_1) = a_i \psi_i^{(+)}(x_1).$$

$$\bar{\psi}(x_2) = b_i \bar{\psi}_i^{(+)}(x_2).$$

$$\hat{A}(x_1) = \frac{\hat{e}_{1f}}{\sqrt{2\omega_{1f}}} c_{1f}^\dagger e^{-i\kappa_{1f} x_1} + \frac{\hat{e}_{2f}}{\sqrt{2\omega_{2f}}} c_{2f}^\dagger e^{-i\kappa_{2f} x_1}.$$

$$\hat{A}(x_2) = \frac{\hat{e}_{1f}}{\sqrt{2\omega_{1f}}} c_{1f}^\dagger e^{-i\kappa_{1f} x_2} + \frac{\hat{e}_{2f}}{\sqrt{2\omega_{2f}}} c_{2f}^\dagger e^{-i\kappa_{2f} x_2}.$$

最后可得正、负电子对湮灭几率振幅为

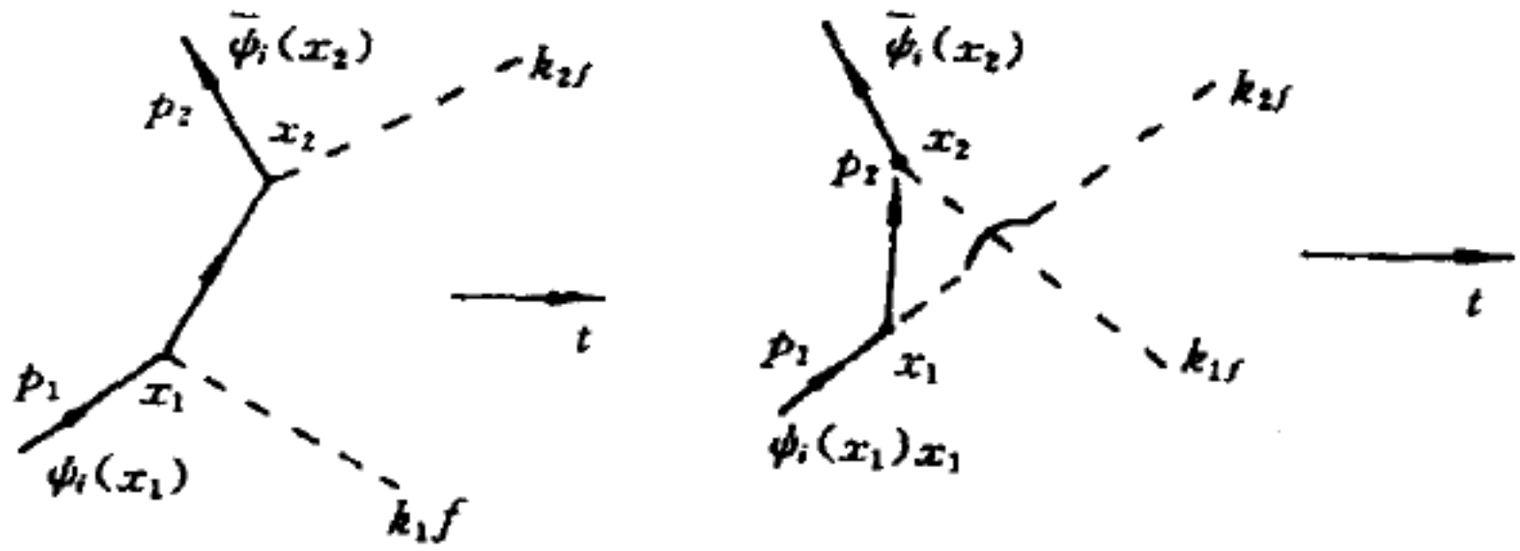
$$\langle_f |S^{(2)}|\rangle_i = e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 [\bar{\psi}_i^{(+)}(x_2) \frac{\hat{e}_{1f}}{\sqrt{2\omega_{1f}}} \times$$

$$\times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\kappa_{1f}x_2}(-1)S_f(x_2-x_1)\frac{\hat{e}_{2f}}{\sqrt{2\omega_{2f}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\kappa_{2f}x_1}\psi_i^{(+)}(x_1)+$$

$$+\bar{\psi}_i^{(+)}(x_2)\frac{\hat{e}_{2f}}{\sqrt{2\omega_{2f}}}e^{-i\kappa_{2f}x_2}(-1)S_f(x_2-x_1)\times$$

$$\times\frac{e_{1f}}{\sqrt{2\omega_{1f}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\kappa_{1f}x_1}\psi_i^{(+)}(x_1)].$$



此二项的Feynman图如上. 由于Compton散射的交叉道即正负电子对湮灭，可以看出，若在后一几率幅中进行交换 $\bar{\psi}_i^{(+)}\to\bar{\psi}_f^{(-)}$，$k_1\to -k_i$ 或 $\mathrm{p}_2\to -\mathrm{p}_2$，$k_1\to -k_i$ 即得到前者，反之亦然，这种关系叫交叉对称性.

5.7.2. Möller 散射(电子 - 电子散射)

$$\mathrm{e}_1+\mathrm{e}_2\to\mathrm{e}_3+\mathrm{e}_4.$$

入射态：$|\rangle_i=a_2^\dagger a_1^\dagger|\rangle 0$，出射态：$|\rangle_f=a_4^\dagger a_3^\dagger|\rangle 0$.

散射几率幅 $\langle_f|S|\rangle_i=\langle_0|a_3a_4Sa_2^\dagger a_1^\dagger|\rangle_0$. (5.7.5)

最低阶贡献只能是Feynman图(5.6.3)相应的正规积是

$$N(\bar{\psi}(x_2)\hat{A}\cdot(x_2)\psi(x_2)\bar{\psi}(x_1)\hat{A}\cdot(x_1)\psi(x_1))=$$

$$=A_\mu(x_2)A_\nu(x_1)N(\psi(x_2)\gamma_\mu\psi(x_2)\psi(x_1)\gamma_\nu\psi(x_1)).$$

但
$$\bar{\psi}(x_2)=a_3^\dagger\bar{\psi}_3^{(-)}(x_2)+a_4^\dagger\bar{\psi}_4^{(-)}(x_2),$$

$$\psi(x_2)=a_1\psi_1^{(+)}(x_2)+a_2\psi_2^{(+)}(x_2),$$

$$\bar{\psi}(x_1)=a_3^\dagger\bar{\psi}_3^{(-)}(x_1)+a_4^\dagger\bar{\psi}_4^{(-)}(x_1),$$

$$\psi(x_1)=a_1\psi_1^{(+)}(x_1)+a_2\psi_2^{(+)}(x_1).$$

故 $N(\bar{\psi}\hat{A}\cdot\psi\bar{\psi}\hat{A}\cdot\psi) = A_\mu^{\cdot}(x_2)A_\nu^{\cdot}(x_1)N[a_4^\dagger a_2 a_3^\dagger a_1\bar{\psi}_4^{(-)}(x_2)\times$
$\times\gamma_\mu\psi_2^{(+)}(x_2)\bar{\psi}_3^{(-)}(x_1)\gamma_\nu\psi_1^{(+)}(x_1) + a_4^\dagger a_1 a_3^\dagger a_2\bar{\psi}_4^{(-)}(x_2)\times$
$\times\gamma_\mu\psi_1^{(+)}(x_2)\bar{\psi}_3^{(-)}(x_1)\gamma_\nu\psi_2^{(+)}(x_1) + a_3^\dagger a_2 a_4^\dagger a_1\bar{\psi}_3^{(-)}(x_2)\gamma_\mu\psi_2^{(+)}(x_2)\times$
$\times\bar{\psi}_4^{(-)}(x_1)\gamma_\nu\psi_1^{(+)}(x_1) + a_3^\dagger a_1 a_4^\dagger a_2\bar{\psi}_3^{(-)}(x_2)\gamma_\mu\psi_1^{(+)}(x_3)\bar{\psi}_4^{(-)}(x_1)\times$
$\times\gamma_\nu\psi_2^{(+)}(x_1) + \cdots]$,(共 16 项).

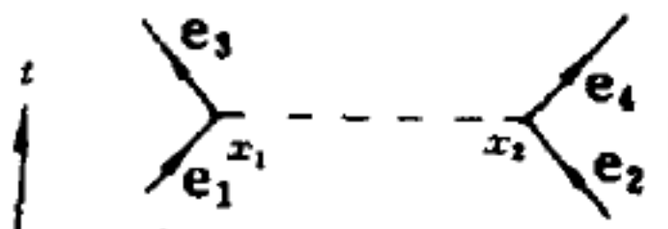
最后的 Möller 散射几率幅为

$$\langle_f|S^{(2)}|\rangle_i = \frac{e^2}{2!}\int_{-\infty}^{\infty}d^4x_2\int_{-\infty}^{\infty}d^4x_1\langle_0|a_3a_4N(\psi\hat{A}\cdot\psi\psi\hat{A}\cdot\psi)\times$$
$$\times a_2^\dagger a_1^\dagger|\rangle_0.$$

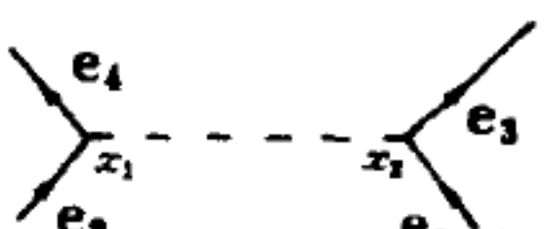
其中:$\langle_0|a_3a_4N(\bar{\psi}\hat{A}\cdot\psi\bar{\psi}\hat{A}\cdot\psi)a_2^\dagger a_1^\dagger|\rangle_0 = A_\mu^{\cdot}(x_2)A_\nu^{\cdot}(x_1)[\bar{\psi}_4^{(-)}(x_2)\times$
$\times\gamma_\mu\psi_2^{(+)}(x_2)\bar{\psi}_3^{(-)}(x_1)\gamma_\nu\psi_1^{(+)}(x_1) - \bar{\psi}_4^{(-)}(x_2)\gamma_\mu\psi_1^{(+)}(x_2)\times$
$\times\bar{\psi}_3^{(-)}(x_1)\gamma_\nu\psi_2^{(+)}(x_1) - \bar{\psi}_3^{(-)}(x_2)\gamma_\mu\psi_2^{(+)}(x_2)\bar{\psi}_4^{(-)}(x_1)\gamma_\nu\bar{\psi}_1^{(+)}(x_1)$
$+\bar{\psi}_3^{(-)}(x_2)\gamma_\mu\psi_1^{(+)}(x_2)\bar{\psi}_4^{(-)}(x_1)\gamma_\nu\psi_2^{(+)}(x_1)]$. (5.7.6)

在推导上式时,须把算符足码按 4.3.1.2 顺序重排,并考虑到费米算符之间的换位因子 δ_p 即可求得 16 项中仅上述 4 项不为 0.

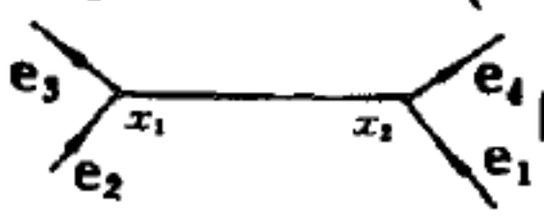
这样,虽然二阶过程 $S^{(2)}$ 对 Möller 散射的贡献只有一个正规积一个相应的 Feynman 图(5.6.3). 但由于外部线的位置的交换对称性,Feynman 图(5.6.3) 实际上反映了下述 4 种物理过程:



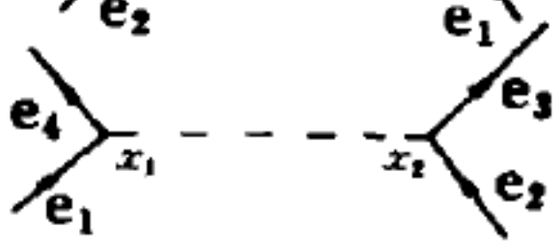
图(5.7.7)



图(5.7.8)



图(5.7.9)



图(5.7.10)

其中(5.7.6) 中第 1、4 两项分别与图(5.7.7)、(5.7.8) 对应,第 2、3 两项分别与图(5.7.9)、(5.7.10) 对应. 不难看出交换 x_1, x_2 后图(5.7.7) 与图(5.7.8) 是拓扑全同的,图(5.7.9) 与图(5.7.10) 是拓扑全同的.

因而，(5.7.6) 式中的 4 项的贡献等于头 2 项贡献的 2!倍. 这样，积分号前因子$\frac{1}{2!}$ 正好可以消去.

最后 Möller 散射几率振幅可写为

$$\begin{aligned}\langle_f|S^{(2)}|\rangle_i = e^2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4x_2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4x_1[\bar{\psi}_4^{(-)}(x_2)\gamma_\mu\psi_2^{(+)}(x_2)\times\\ \times D_f(x_2-x_1)\bar{\psi}_3^{(+)}(x_1)\gamma_\mu\psi_1^{(+)}(x_1)-\bar{\psi}_4^{(-)}(x_2)\times\\ \times\gamma_\mu\psi_1^{(+)}(x_2)D_f(x_2-x_1)\bar{\psi}_3^{(-)}(x_1)\gamma_\mu\psi_2^{(+)}(x_1)]\end{aligned}\tag{5.7.11}$$

可见，即使在 $S^{(2)}$ 的微扰展开中只有一个正规积对 Möller 散射有贡献，但由于外部线的排列不同，最后因子$\frac{1}{2!}$ 仍可消去.

应注意到(5.7.7) 与(5.7.9) 两个 Feynman 图在交换外部费米线 e_1, e_2 后全同，这导致它们对 $S^{(2)}$ 矩阵的贡献差一个负号.

5.7.3. 光子 - 光子散射

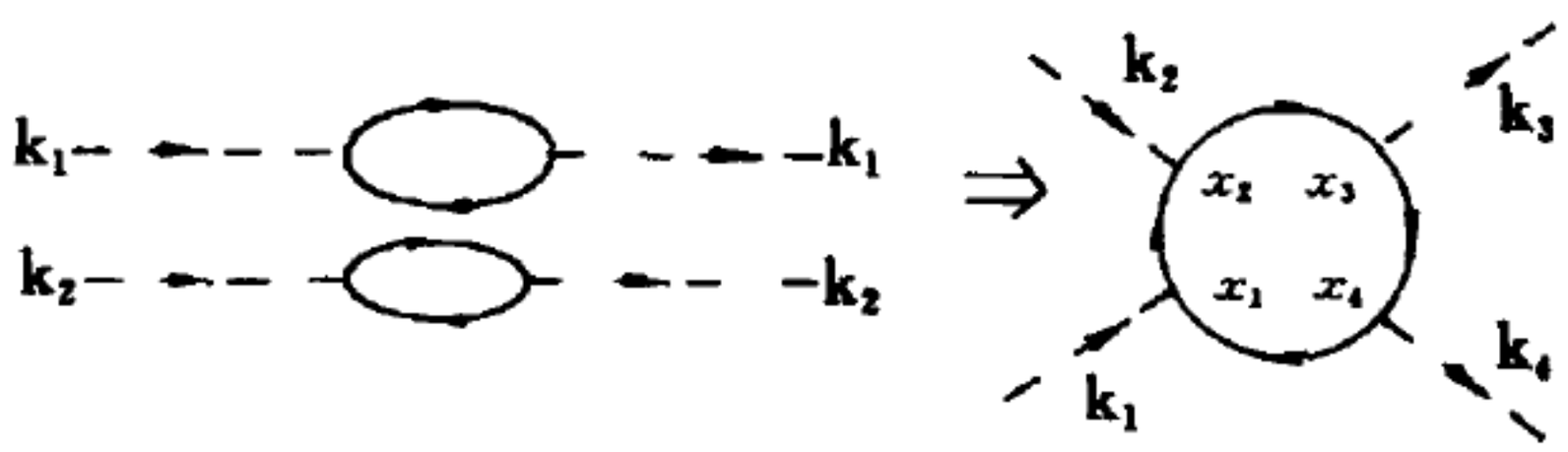
入射态 $|\rangle_i = C_1^\dagger C_2^\dagger|\rangle_0$，出射态：$\langle_f| = C_3^\dagger C_4^\dagger|\rangle_0$，散射几率幅 $\langle_f|S|\rangle_i = \langle|C_4C_3C_1^\dagger C_2^\dagger|\rangle_0$.

按目前的线性电磁场理论，光子与光子应无直接相互作用.



即：$H_i = 0$ 故 $S = S^{(0)} = 1$.

但光子与 Dirac 真空有相互作用，因此可以期望光子以 Dirac 真空为中介场可以发生间接相互作用.



这表明考虑到 Dirac 真空的作用，电磁场方程应是非线性的.

研究结果$\mathscr{L}=\mathscr{L}_0+\mathscr{L}_1$,其中$\mathscr{L}_0=-\frac{1}{4}F_{\mu\omega}F^{\mu\omega}$为线性部分,$\mathscr{L}=a(F_{\mu\omega}F_{\mu\omega})^2+bF_{\mu\omega}F_{\nu\rho}F_{\rho\lambda}F_{\lambda\mu}+\cdots$为非线性部分. 显然最低阶过程为$S^{(4)}$.

$$
\begin{aligned}
S^{(4)}=&4!\frac{e^4}{4!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4x_4\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4x_1N(\bar{\psi}^{\cdots}(x_4)\hat{A}(x_4)\psi^{\cdot}(x_4)\times\\
&\times\bar{\psi}^{\cdot}(x_3)\cdot\hat{A}(x_3)\psi^{\cdot}(x_3)\bar{\psi}^{\cdot}(x_2)\hat{A}(x_2)\psi^{\cdots}(x_2)\bar{\psi}^{\cdots}(x_1)]\times\\
&\times\hat{A}(x_1)\psi^{\cdots}(x_1)]\\
=&e^4\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4x_4\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4x_1N[A_\mu(x_4)A_\nu(x_3)A_\lambda(x_2)\times\\
&\times\hat{A}_\sigma(x_1)\cdot\bar{\psi}_\alpha^{\cdots}(x_4)(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\psi_\beta^{\cdot}(x_4)\bar{\psi}_\gamma^{\cdot}(x_3)\times\\
&\times(\gamma_\nu)_{\gamma\delta}\psi_\delta^{\cdot}(x_3)\times\bar{\psi}_\sigma^{\cdot}(x_2)(\gamma_\lambda)_{\sigma\theta}\psi_\theta^{\cdots}(x_2)\bar{\psi}_\varepsilon^{\cdots}(x_1)\times\\
&\times(\gamma_\sigma)_{\varepsilon\rho}\psi_\rho^{\cdots}(x_1)]\\
=&-e^4\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4x_4\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4x_1N[A_\mu(x_4)A_\nu(x_3)A_\lambda(x_2)\times\\
&A_\sigma(x_1)]\times(\nu_\mu)_{\alpha\beta}[-S_{f,\beta\gamma}(x_4-x_3)](\gamma_\nu)_{\gamma\delta}\times\\
&(-S_{f,\delta\sigma}(x_3-x_2))](\gamma_\lambda)_{\sigma\theta}\times(-1)S_{f,\theta\varepsilon}(x_2-x_1)(\gamma_\sigma)_{\varepsilon\rho}\\
&(-1)S_{f,\rho\alpha}(x_1-x_4)\\
=&-e^4\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4x_4\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4x_1N[A_\mu(x_4)A_\nu(x_3)A_\lambda(x_2)\times\\
&\times A_\sigma(x_1)]\times T_r[\gamma_\mu(-1)S_f(x_4-x_3)\gamma_\nu(-1)S_f(x_3-x_2)\\
&\times\gamma_\lambda(-1)S_f(x_2-x_1)\times\gamma_\sigma(-1)S_f(x_1-x_4)].
\end{aligned}
\tag{5.7.12}
$$

可见,一个内部电子线圈图相当于S矩阵元中出现一个因子

$$
-T_r[\prod_{i=1}^{n}(-1)^n\gamma_{\mu i}S_{fi}]=-T_r[(-1)^n\gamma_\mu S_f\gamma_\nu S_f\gamma_\lambda S_\lambda\gamma_\sigma S_f]
$$

由于消灭的光子$\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2$和产生的光子$\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4$在$x_1\cdots x_4$共有4!种不同排列,故(5.7.12)中正规积事实上是4!项贡献之和,结果是正规积前的因子$\frac{1}{4!}$可以完全消去.

可以指出:光子 - 光子散射的次一个高阶过程是 $S^{(6)}$.

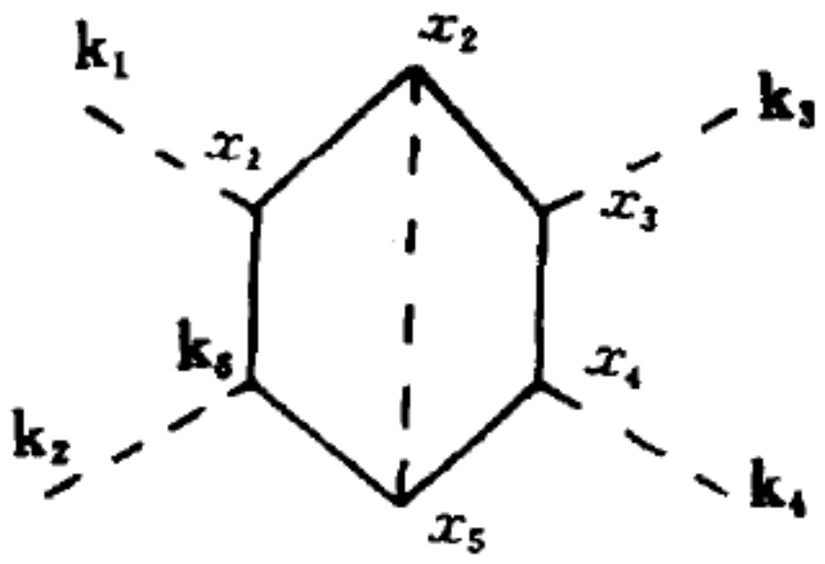


图 (5.7.13)

这里共有 6 根光子线,其中 4 根作为外线,2 根连成一根内线,共有 6!个不同的 Feynman 图对 $S^{(6)}$ 有完全相同的贡献,这是由于固定 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6 的排列后,6 根光子线有 6!种不同排列,而所有这 6!种不同光子线的排列可看作光子线固定而 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6 作 6!种不同排列,它们对 $S^{(6)}$ 的贡献完全相同,因此 6!这个因子与 $S^{(6)}$ 中因子 $\frac{1}{6!}$ 恰恰可以消除,在一般情况下,$S^{(n)}$ 中因子 $\frac{1}{n!}$ 均可按类似考虑消除掉.

应注意:在光子 - 光子的散射中,如果外部光子线数目为奇数,那么根据在电磁相互作用中荷宇称 $\eta_c=(-1)^N$ 守恒即可知此种 Feynman 图对散射振幅的贡献必为 0,这就是 Furry 定理.

5.7.4. 真空涨落过程

图(5.6.9) 就是最低阶的真空涨落过程,与此过程相应的正规积只有一个,交换 x_1,x_2 的位置得不出新的正规积,此类 Feynman 图没有外线,因而不能通过交换外线的位置得到新的 Feynman 图,结果是反映真空涨落过程的几率振幅的因子 $\frac{1}{n!}$ 是无法消除的. 图(5.6.9) 的几率幅为

$$\langle|S^{(2)}|\rangle=\frac{(-e)^2}{2!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4x_2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4x_1\times$$
$$\times N[\bar{\psi}^{\cdot\cdot}(x_2)\hat{A}^{\cdot\cdot}(x_2)\psi^{\cdot}(x_2)\bar{\psi}^{\cdot}(x_1)\hat{A}^{\cdot\cdot}(x_1)\psi^{\cdot\cdot}(x_1)]$$

$$= \frac{(-e)^2}{2!}\int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \times (\not{\gamma}_\mu)_{\alpha\beta}(-1) \times$$

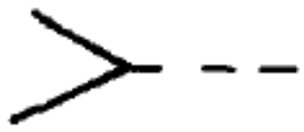
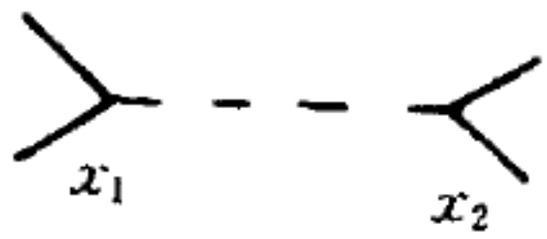
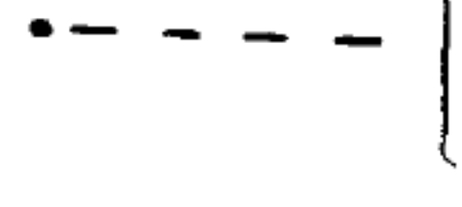
$$\times \cdot S_{f,\beta\delta}(x_2 - x_1)(\not{\gamma}_\nu)_{\delta\delta}(-1)S_{f,\delta\alpha}(x_1 - x_2)\delta_{\mu\nu}D_f(x_1 - x_2)$$

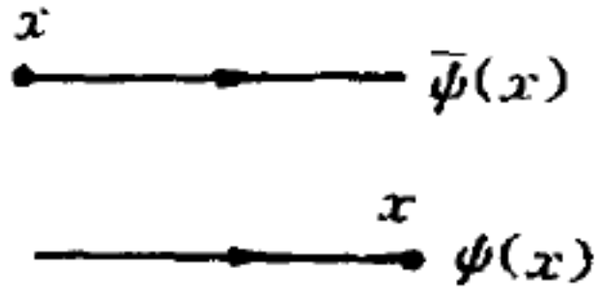
$$= \frac{(-e)^2}{2!}\int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_2 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 T_\delta \left[\prod_{i=1}^{2}(-1)^2 \not{\gamma}_{\mu i} S_{f,i}\right] D_f. \tag{5.7.14}$$

式中迹即 $T_\gamma[(-1)^2 \not{\gamma}_\mu S_f \not{\gamma}_\nu S_f]\delta_{\mu\nu}D_f$.

可以小结一下，如何根据具体的物理过程作出相应的最低阶 Feynman 图，然后写下最低阶的散射几率幅来. 仍以轻子 - 光子散射为例.

$H_i = -ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu$.

Feynman 图	S 矩阵因子
n 个顶角	$(-e)^n\left\{\begin{matrix}+\infty\\-\infty\end{matrix}d^4x_n \cdots\cdots \left\{\begin{matrix}+\infty\\-\infty\end{matrix}d^4x_1\right.\right.$
顶角 	$\{(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}$
内部光子线 	$\delta_{\mu\nu}D_f(x_1 - x_2) = \sum_{\lambda=1,2,3,4} e_{\mu\lambda}e_{\nu\lambda}D_f(x_1 - x_2)$.
内部费米线 	$(-1)S_{f,\alpha\beta}(x_2 - x_1)$，$x_2$ 处和 x_1 处的 γ 矩阵元分别为 $(\gamma_\mu)\sigma\alpha$ 和 $(\gamma_\nu)_{\beta\delta}$
外部光子线 	$A_\mu(x) = \frac{e_{\mu\lambda}}{\sqrt{2\omega}}e^{\pm ikx}$ $(\lambda = 1.2)$ e_μ 与顶角处 $\not{\gamma}_\mu$ 配合，± 号与消灭光子和产生光子相对应

外部费米线 

外线总数即入射和出射粒子总数

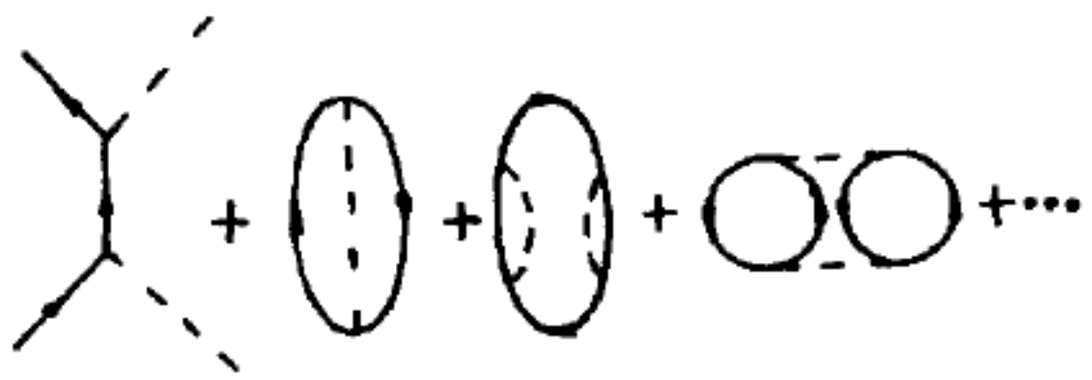
闭合费米线圈图  $(-1)^{n+1}T_r\left(\prod_{i=1}^{n}\gamma_{\mu_i}S_{f_i}\right)$

应注意:按物理过程作出所有可能的不拓扑全同的 Feynman 图,每个 Feynman 图按上述规则,从末态(出射态)到初态(入射态),对此物理过程贡献 S 矩阵元中一项,每项前的正负号由 $\delta_p = \pm 1$ 定.若两个 Feynman 图仅外部玻色线排列不同,则 $\delta_p = +1$.例(5.7.3)(5.7.4),若二个 Feynman 图仅外部费米线之排列不同,则 $\delta_p = -1$,例(5.7.7)(5.7.9).

注意:

(1) 除真空涨落过程外,$S^{(n)}$ 中的数字因子$\frac{1}{n!}$ 恒可消去.这归因于 n 个顶角共有 $n!$种不同排列,每种排列对 $S^{(n)}$ 的贡献相同.

(2) 所有真空涨落的总和只是改变散射几率幅的周相,因而对跃迁几率毫无影响,在以后计算中可忽略不计.



例 二级Compton散射可伴随各级真空涨落,因之计及所有真空涨落后的二级 Compton 散射的总几率幅为 $\langle f|S_C^{(2)}|i\rangle\langle 0|S_V|0\rangle = e^{i\theta}\times\langle f|S_C^{(2)}|i\rangle$,这表明所有不连通的真空

涨落图仅改变散射幅的相角，对散射几率及散射截面没有影响，故在今后的几率和截面计算中可忽略不计.

证：所有真空涨落的 S_v 矩阵可表为



它的作用是把初态真空(入射真空)变为末态真空(出射真空).

故应有 $S_v|\rangle_0 = C|\rangle_0$ 或 $\langle_0|S_v^\dagger S_v|\rangle_0 = {}_0\langle|C^*C|\rangle_0 = 1.$

(5.7.15)

故 $C^*C = 1$，　　即 $C = e^{i\theta}$.

在以上的论证中，我们用到了 S_v 的么正性条件.

§5.8 S 矩阵元的动量表象

利用公式(5.5.10) ～ (5.5.12) 及

$\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x e^{ipx} = \delta^4(p), \psi_p(x) = U_p e^{ipx}$ (U_p 是 Dirac 双旋量)

可把 S 矩阵元从位置表象变换到动量表象.

例如：最低阶 Compton 散射矩阵元：

$$\langle_f|S^{(2)}|\rangle_i = e^2\int d^4p\,\overline{U}_{p_f}\frac{\hat{e}_f}{\sqrt{2\omega_f}}\frac{-i}{\sqrt{(2\pi)^4}}\frac{i\hat{p}-m}{p^2+m^2}\frac{\hat{e}i}{\sqrt{2\omega_i}}\times$$

$$U_{p_i}(2\pi)^8\delta^4(p_i+k_i-p)\times\delta^4(p-p_f-k_f)+$$

$$+e^2\int d^4p\,\overline{U}_{p_f}\frac{\hat{e}_i}{\sqrt{2\omega_i}}\frac{-i}{(2\pi)^4}\frac{i\hat{p}-m}{p^2+m^2}\frac{\hat{e}_f}{\sqrt{2\omega_f}}U_{p_i}(2\pi)^8\times$$

$$\times\delta^4(p_i-k_f-p)\delta^4(p+k_i-p_f)$$

$$=-ie^2(2\pi)^4\delta^4(p_i+k_i-p_f-k_f)\frac{1}{2\sqrt{\omega_i\omega_f}}\times$$

$$\times\left\{\overline{U}_{pf}\hat{e}_f\frac{i(\hat{p}_i+\hat{k}_i)-m}{(p_i+k_i)^2+m^2}\hat{e}_iU_{pi}+\right.$$

$$+\overline{U}_{\rho f}\cdot\hat{e}_i\frac{\mathrm{i}(\hat{p}_i-\hat{k}_f)-m}{(p_i-k_f)^2+m^2}\hat{e}_f U_{\rho_i}\Big\} \tag{5.8.1}$$

证：仅考虑(5.7.2)中第一项

$$e^2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4x_2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4x_1\,\overline{U}_{\rho f}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_f\cdot x_2)}\frac{\hat{e}_f}{\sqrt{2\omega_f}}$$

$$\cdot\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_f\cdot x_2}(-1)\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int_{C_f}\mathrm{d}^4p\,\frac{\hat{i}p-m}{p^2+m^2}\times$$

$$\times\,e^{\mathrm{i}p(x_2-x_1)}\frac{\hat{e}_i}{\sqrt{2\omega_i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i\cdot x_1}U_{\rho i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_i\cdot x_1}$$

$$=-e^2\int d^4p\,\overline{U}_{\rho f}\frac{\hat{e}_f}{\sqrt{2\omega_f}}\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}\hat{p}-m}{p^2+m^2}\frac{\hat{e}_i}{\sqrt{2\omega_i}}U_{\rho i}\times$$

$$\times\left[\int\mathrm{d}^4x_2\mathrm{e}^{i(p-p_f-k_f)\cdot x_2}\times\int\mathrm{d}^4x_1\mathrm{e}^{i(p_i+k_i-p)x_1}\right]$$

$$=-e^2\overline{U}_f\frac{\hat{e}_f}{\sqrt{2\omega_f}}\frac{1}{\hat{p}-\mathrm{i}m}\frac{\hat{e}_i}{\sqrt{2\omega_i}}U_i(2\pi)^4\delta^4(p_i+k_i-p_f-k_f).$$

推导中用到了$\int_{c_f}\mathrm{d}p_0\frac{\mathrm{i}\hat{p}-m}{p^2+m^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}p_0\,\frac{\mathrm{i}\hat{p}-m}{p^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon}$，及

$$-\mathrm{i}\frac{i\hat{p}-m}{p^2+m^2}=\frac{1}{\hat{p}-\mathrm{i}m}.$$

类似可证明第二项.

需注意：(1)S矩阵元中含对内部线的4动量$p_\mu(\mu=1,2,3,4)$的积分，积分对p_μ的4个分量完全独立，这表明4个分量p_μ间不存在质壳关系$p_\mu p^\mu=-m^2$. 这正是虚粒子的特点. (2) 在动量表象中的矩阵元不再含时空坐标. (3) 奇异的δ^4函数的出现保证了过程前后总能量、总动量的严格守恒.

对于每个 Feynman 图，可按下列规则写出与之对应的 S 矩阵元.

Feynmam 图　　动量空间中 S 矩阵元

顶角 

$-e(2\pi)^4\gamma_\mu\delta^4(\Sigma p)\{H_i=-\mathrm{i}eN(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu)\}$

$g(2\pi)^4\gamma_5\delta^4(\Sigma p)\{H_i=+\mathrm{i}gN(\bar{\psi}\gamma_5\psi\varphi)\}$.

内部费米子线 ——→—— $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4pS_f(p)$

$$S_f(p)=\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}\hat{p}-m}{p^2+m^2}=\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{\hat{p}-\mathrm{i}m}.$$

内部光子线 •— — — — • $\int\mathrm{d}^4k\delta_{\mu\omega}D_f(k),\mathrm{D}_f(k)=\frac{-\mathrm{i}\quad 1}{(2\pi)^4k^2}$.

内部介子线  $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4p\Delta_f(p),\Delta_{\mathrm{f}}\equiv\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\frac{1}{p^2+m^2}$.

外部费米线 

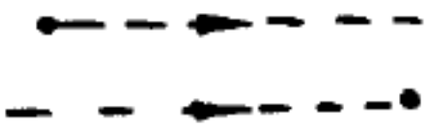
费米子产生　　$\overline{U}_\rho$

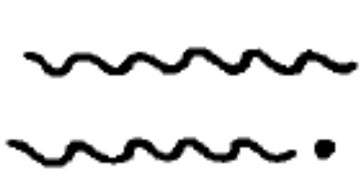
反费米子消灭　　V_ρ

外部费米线 

费米子消灭　　U_ρ

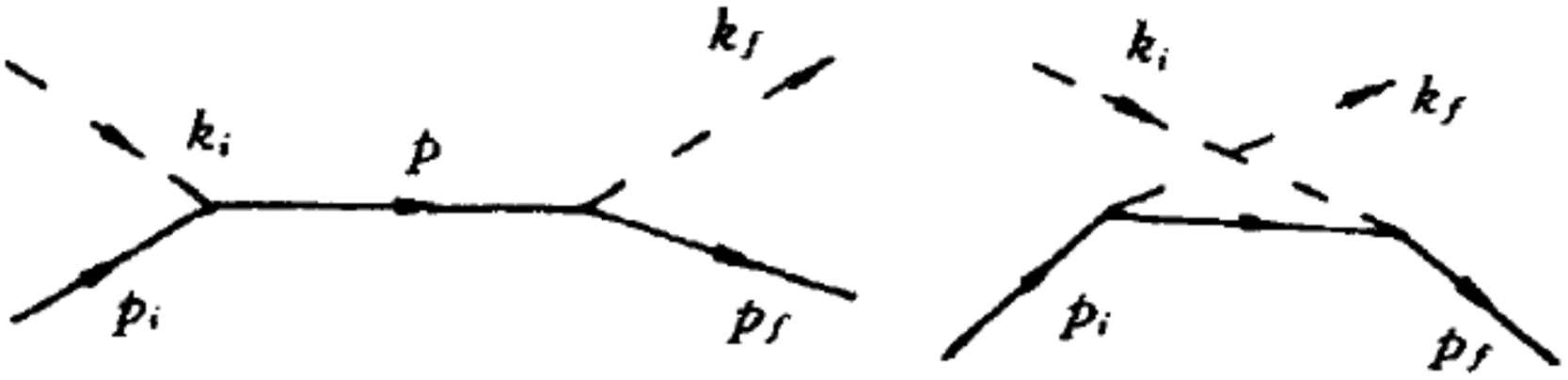
反费米子产生　　$\overline{V}_\rho$

外部光子线 　　$\frac{e_{\omega\lambda}}{\sqrt{2\omega}}(\lambda=1,2)\mu$ 与顶角处 γ_μ 配合

外部介子线 　　$\frac{1}{\sqrt{2\omega}}$

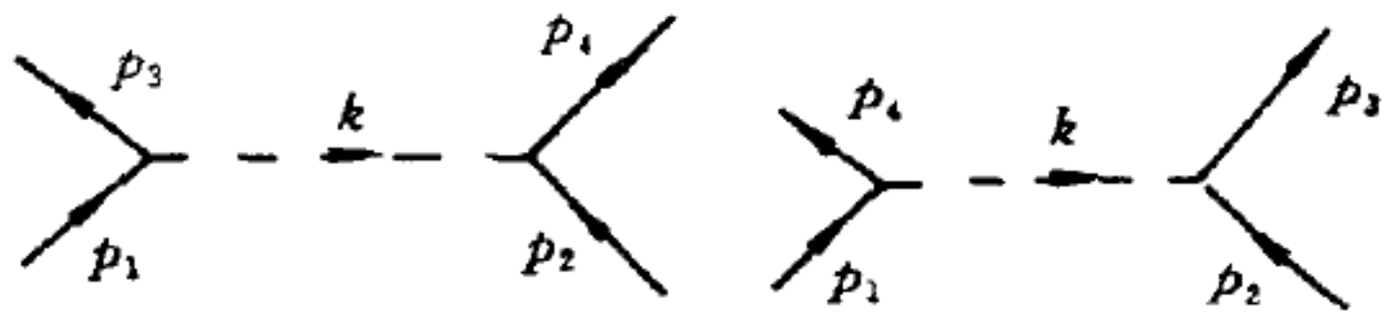
闭合费米线　　$(-1)^{n+1}T_s\left(\prod_{i=1}^{n}\gamma_{\mu i}S_f,i\right)$.

马上由(5.8.1)画出在动量空间中 Compton 散射 Feynman 图：



(5.8.2)

例：Möller 散射



(5.8.3)

如前所述，最低阶 Möller 散射过程由两个不拓扑全同的 Feynman 图贡献，按上述规则可立即写下在 p 空间的 $S^{(2)}$ 矩阵元：

$$\langle_f|S^{(2)}|\rangle_i = e^2\int \mathrm{d}^4k\,\overline{U}_{p4}\gamma_\mu U_{p1}\delta_{\mu\omega}\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\times$$

$$\frac{1}{k^2}\overline{U}_{p3}\gamma_\nu U_{p2}\times(2\pi)^8\delta(p_1-p_4-k)\delta(p_3-k-p_2)$$

$$-e^2\int \mathrm{d}^4k\,\overline{U}_{p_3}\gamma_\mu U_{p_1}\delta_{\mu\omega}\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\frac{1}{k_2}\overline{U}_{p4}\gamma_\nu U_{p_2}$$

$$(2\pi)^8\times\delta(p_1-p_3-k)\delta(p_4-k-p_2).$$

对 k 积分后即得

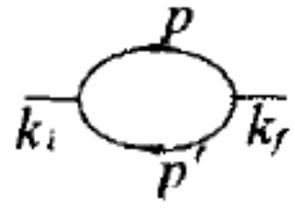
$$\langle_f|S^{(2)}|\rangle_i = -\mathrm{i}e^2(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4)$$

$$\left\{\overline{U}_{p_4}\gamma_\mu U_{p_1}\frac{1}{(p_1-p_4)^2}\overline{U}_{p_3}\gamma_\mu U_{p_2}-\right.$$

$$\left.-\overline{U}_{p_3}\gamma_\mu U_{p_1}\frac{1}{(p_1-p_3)^2}\overline{U}_{p_4}\gamma_\mu U_{p_2}\right\}.$$

(5.8.4)

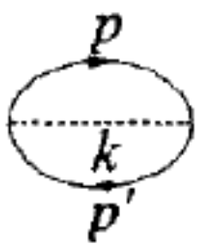
光子自能图：



$$\langle_f|S^{(2)}|\rangle_i = -e^2\int d^4p\int d^4p' \frac{e_{\mu\lambda}}{\sqrt{2\omega_f}} T_r[\gamma_\mu \frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{i\hat{p}-m}{p^2+m^2}\gamma_\nu \frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{i\hat{p}'-m}{p'^2+m^2}] \times \frac{e_{\nu\lambda'}}{\sqrt{2\omega_i}} (2\pi)^4\delta(p-p'-k_f)(2\pi)^4\delta(k_i+p'-p)$$

$$= -e^2\int d^4p \frac{e_{\mu\lambda}}{\sqrt{2\omega_f}} T_r[\gamma_\mu \frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{i\hat{p}-m}{p^2+m^2}\gamma_\nu \frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{i(\hat{p}-\hat{k}_i)-m}{(p-k_i)^2+m^2}] \frac{e_{\nu\lambda}'}{\sqrt{2\omega_i}} \times \delta(k_i-k'_f)(2\pi)^8.$$

真空涨落：



$$_f\langle 0|S^{(2)}|0\rangle_i = \frac{-e^2}{2!}\int d^4k\int d^4p\int d^4p' \delta_{\mu\omega} D_f(k) T_r[\gamma_\mu S_f(p) \times \gamma_\omega S_f(p')](2\pi)^4\delta(p+k-p')(2\pi)^4\delta(p'-p-k)$$

$$= \frac{-e^2}{2!}\int d^4p\int d^4p' \frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p'-p)^2} T_r[\gamma_\mu \frac{(-i)}{(2\pi)^4} \frac{i\hat{p}-m}{p^2+m^2}\gamma_\nu \frac{-i}{(2\pi)^4} \times \frac{i\hat{p}'-m}{p^2+m^2}]\delta(0).$$

这些结果都是发散的.

小结一下，如何由 Feynman 图得出在 p 表象中的矩阵元.

(i) 去掉 x 表象中 Feynman 图的顶角处的时空坐标即得 p 表象中的 Feynman 图.

(ii) 每个 p 表象中的 Feynman 图按规则即给出 S 矩阵元的一项，按物理过程，画出所有可能拓扑不全同的 Feynman 图即得对 S 矩阵元有贡献的所有项.

每项前的符号由 $\delta_p = \pm 1$ 定.

当两个不同的 Feynman 图为交换外部玻色线而得到，则 $\delta_p = +1$，例如(5.8.1).

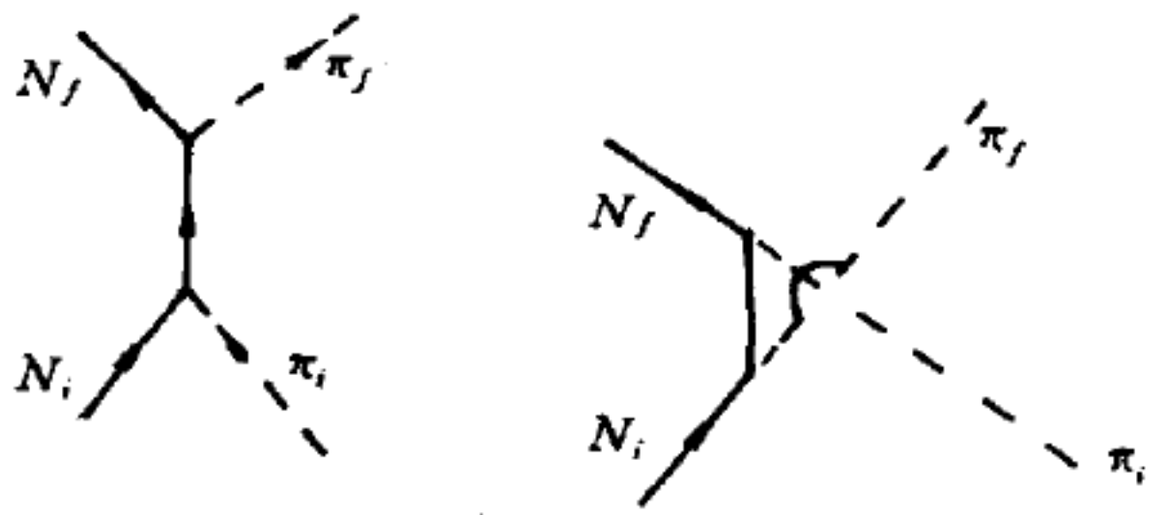
当两个不同的 Feynman 图为交换外部费米线而得到 $\delta_p = -1$，例(3.8.4).

(iii) 比较同一物理过程在 x 表象和 p 表象中的 S 矩阵元可知，后者被积函数简单，且实验中入射态和出射态一般是动量本征态，故以后仅采用动量表象.

例 1 核子 $-\pi$ 介子散射 —— 强相互作用.

$H_i = +\mathrm{i}gN(\bar{\psi}\gamma_5\psi\varphi)$ —— 标量耦合

Feynman 图



按照上述规则，仿照 Compton 散射，即可马上写下最低级过程的 $S^{(2)}$ 矩阵元.

$$\langle_f|S^{(2)}|\rangle_i = g^2\int \mathrm{d}^4p\left\{\bar{U}_f\gamma_5\frac{1}{\sqrt{2\omega_f}}\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}p-m}{p^2+m^2}\frac{1}{\sqrt{2\omega_i}}\gamma_5U_i\times\right.$$

$$\times(2\pi)^8\delta^4(p-k_f-p_f)\delta^4(p-k_i-p_i)+$$

$$+\bar{U}_f\gamma_5\frac{1}{\sqrt{2\omega_i}}\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}p-m}{p^2+m^2}\frac{1}{\sqrt{2\omega_f}}U_i\cdot(2\pi)^8\delta^4(p_i-p-k_f)$$

$$\left.\times\delta^4(p+k_i-p_f)\right\}$$

$$\langle_f|S^{(2)}|\rangle_i = g^2(2\pi)^4\delta^4(p_i+k_i-p_f-k_f)\frac{1}{2\sqrt{\omega_i\omega_f}}$$

$$\left\{\bar{U}_{pf}\gamma_5\frac{\mathrm{i}(p_i+k_i)-m}{(p_i+k_i)^2+m^2}\gamma_5U_i+\bar{U}_{pf}\gamma_5\frac{\mathrm{i}(p_i-k_f)-m}{(p_i-k_f)^2+m^2}\gamma_5U_{pi}\right\}.$$

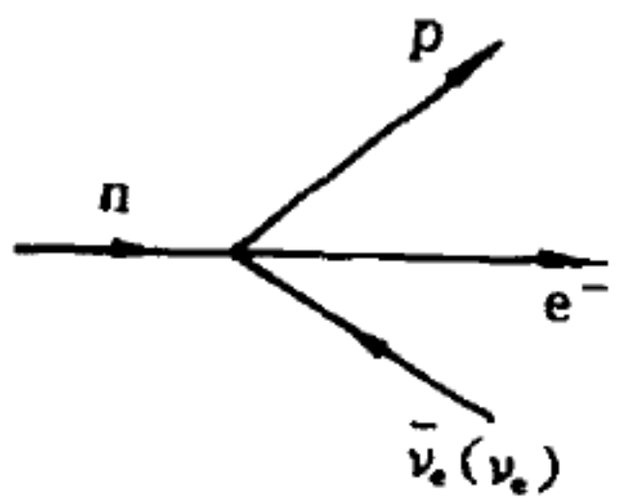
(5.8.5)

把理论结果与实验比较，发现仅在非相对论近似下，上述膺标量耦合才比较合理. 因此严格说来，虽然理论可重整化，但运用协变微扰论不能有效地处理中、高能强相互作用.

例 2 中子的衰变 $\mathrm{n} \to p + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_e$.

$H_i = GN[(\bar{\psi}_p \gamma_\mu (1+\gamma_5)\psi_n)(\bar{\psi}_e \gamma_\mu (1+\gamma_5)\psi_\nu)]$—— 普适费米弱相互作用.

Feynman 图



$$\langle_f |S^{(1)}| \rangle_i = -\mathrm{i}G(2\pi)^4\delta^4(p_n - p_p - p_e - p_\nu)(\bar{U}_p\gamma_\mu (1+\gamma_5)U_n) \times \bar{U}_e\gamma_\mu(1+\gamma_5)V_\nu. \tag{5.8.6}$$

$$\begin{aligned}
\text{证：} \langle_f |S^{(1)}| \rangle_i &= \langle_f | -\mathrm{i}G\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^4x T[N(\bar{\psi}_P\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_n \times \\
&\times \bar{\psi}_e\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_\nu)]|\rangle_i = \langle_0 |a_P a_e a_{\bar{\nu}}[-iG \times \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^4x a_P^\dagger \bar{U}_P \mathrm{e}^{-\mathrm{i}P_P x}\gamma_\mu(1+\gamma_5)a_n U_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}P_n x} a_e^\dagger \bar{U}_e \times \\
&\times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_e x}\gamma_\mu \times (1+\gamma_5)a_\nu V_\nu \mathrm{e}^{\mathrm{i}P_\nu x} a_n^\dagger |\rangle_0 \\
&= -\mathrm{i}G(2\pi)^4\delta^4(p_n - p_p - p_e + p_\nu)(\bar{U}_P\gamma_\mu \\
&(1+\gamma_5)U_n) \times (\bar{U}_e\gamma_\mu(1+\gamma_5)V_\nu) .
\end{aligned} \tag{5.8.7}$$

实验发现，运用协变微扰论可以很好地处理上述最低阶的一级过程，但所有圈图发散都是不可重整的.

第 6 章　微扰论的具体应用

§6.1　跃迁几率和散射截面

粒子物理学的主要任务是研究粒子之间相互作用力的性质，实验上就是通过散射或碰撞以测定截面，在低能情况(非相对论)可从理论上找出截面与势函数的关系，从而知道作用力的性质；在高能情况(相对论)，可由 S 矩阵来确定相互作用拉氏量. 本节就是要找出实测量 —— 截面与理论量 —— 散射幅之间的关系.

由初态 $|\rangle_i$ 到末态 $|\rangle_f$ 的跃迁几率为

$$P = |\underset{f}{\langle}|S|\underset{i}{\rangle}|^2 = |S_{fi}|^2.$$

若入射粒子和出射粒子均系自由粒子，则在动量表象中跃迁几率幅：

$$S_{fi} = M_{fi}\delta(\underset{i}{\Sigma}P_i - \underset{f}{\Sigma}P_f). \tag{6.1.1}$$

故跃迁几率：

$$\begin{aligned} P &= |M_{fi}|^2\delta(\underset{i}{\Sigma}P_i - \underset{f}{\Sigma}P_f)\cdot\delta(\underset{i}{\Sigma}P_i - \underset{f}{\Sigma}P_f) \\ &= |M_{fi}|^2\left[\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{i(\underset{i}{\Sigma}P_i - \underset{f}{\Sigma}P_f)x}d^4x \times \delta^4(\underset{i}{\Sigma}P_i - \underset{f}{\Sigma}P_f)\right. \\ &= |M_{fi}|^2\left[\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x\right]\delta(\underset{i}{\Sigma}P_i - \underset{f}{\Sigma}P_f) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4}|M_{fi}|^2T\cdot V\Big|_{\substack{T\to\infty\\V\to\infty}}\delta(\Sigma P_i - \Sigma P_f). \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

跃迁几率 P 代表从过去无穷大到未来无穷大时间间隔内，在整个空间的跃迁几率. 事实上，这是一个无意义的量，有意义的应该是：

$$\omega = \frac{P}{TV} = \frac{1}{(2\pi)^4}|M_{fi}|^2\delta(\sum_i p_i - \sum_f p_f). \tag{6.1.3}$$

由于式中出现 δ 函数，上式仍是一个无意义的发散量. 跃迁几率 ω 代表从确定初态 $|\rangle_i$ 到确定末态 $|\rangle_f$ 在单位时空体积内的跃迁几率. 然而，所谓确定末态 $|f\rangle$ 并非一个可测量，可测量的末态是落在某个相空间间隔内. 末态不是一个，而是一个分布.

已知在 x 空间体元 V 内和 P_f 空间体元 $\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_f$ 内，某一个末态粒子所含量子态数 $\mathrm{d}n_f$ 为

$$\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_f = \hbar^3\frac{(2\pi)^3}{V}\mathrm{d}n_f. \tag{6.1.4}$$

故单位体积($V = 1$) 内，某一个末态粒子在动量空间元 $\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_f$ 内的态数为：

$$\mathrm{d}n_f = \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_f}{\hbar^3(2\pi)^3} = \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_f}{h^3}. \tag{6.1.5}$$

当取 $h = 1$ 时，$\hbar = 2\pi$.

$$\mathrm{d}n_f = \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_f}{(2\pi)^3} \tag{6.1.6}$$

因此，从一确定初态经散射后落入所有不同末态粒子的所有可能末态量子态 $\Pi_f\mathrm{d}n_f = \Pi_f\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_f}{(2\pi)^3}$ 时，在单位时空体元内的微分跃迁几率为：

$$\mathrm{d}\omega \equiv \frac{1}{(2\pi)^4}|M_{fi}|^2\delta(\sum_i P_i - \sum_f P_f)\Pi_f\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_f}{(2\pi)^3}. \tag{6.1.7}$$

注意：$\delta(\sum_i P_i - \sum_f P_f) = \delta(\sum_i \boldsymbol{P}_i - \sum_f \boldsymbol{P}_f)\delta(\sum_i E_i - \sum_f E_f)$.

为了消除 δ 函数，可从末态粒子中选一个，对其动量积分，得

$$\mathrm{d}\omega = \frac{1}{(2\pi)^7}|M_{fi}|^2\delta(\Sigma E_i - \Sigma E_f)\pi_f\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_f}{(2\pi)^3}.$$

对另一末态粒子引入：

$$\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_f}{(2\pi)^3} = \frac{1}{(2\pi)^3}|\boldsymbol{p}_f|^2\mathrm{d}p_f\mathrm{d}\Omega$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}|\boldsymbol{p}_f|^2 \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_f}{\mathrm{d}E}\mathrm{d}E\mathrm{d}\Omega$$
$$= \rho_{Ef}\mathrm{d}E\mathrm{d}\Omega.$$

其中，$\rho_{Ef} \equiv \frac{1}{(2\pi)^3}|\boldsymbol{p}_f|^2 \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_f}{\mathrm{d}E}$. (6.1.6)

$\mathrm{d}\Omega$ 是所考虑末态粒子出现的立体角元；E 是散射前(后)所有粒子的总能量；$\rho_{Ef}\mathrm{d}E\mathrm{d}\Omega$ 代表某一个末态粒子在 $\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_f$ 中的态数，而 ρ_{Ef} 是单位能量间隔和单位立体角内所考虑末态粒子的态密度. 对 $\mathrm{d}E$ 积分为：

$$\mathrm{d}\omega = \frac{1}{(2\pi)^7}|M_{fi}|^2\rho_{Ef}\mathrm{d}\Omega\prod_{f'}\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_{f'}}{(2\pi)^3}. \quad (6.1.9)$$

这就是从某一个确定初态跃迁到 $\mathrm{d}\Omega\prod_{f'}\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_{f'}}{(2\pi)^3}$ 范围内的微分跃迁几率. 其中所考虑的末态粒子在立体角元 $\mathrm{d}\Omega$ 内出现，且它的态密度为 ρ_E，(6.1.9)式中已最后消除了 δ 函数，因此在数学上，它是一个有意义的量.

若末态粒子仅 2 个，上式化为：

$$\mathrm{d}\omega = \frac{1}{(2\pi)^7}|M_{fi}|^2\rho_E\mathrm{d}\Omega \quad (6.1.10)$$

它表示：从一确定初态跃迁到两个粒子的末态的微分跃迁几率，其中某一个特定末态粒子的态密度为 ρ_E，且在立体角元 $\mathrm{d}\Omega$ 内出现.

$$\omega = \int\mathrm{d}\omega = \int\frac{1}{(2\pi)^7}|M_{fi}|^2\rho_E\mathrm{d}\Omega \quad (6.1.11)$$

表示从一确定的初态沿某个反应道跃迁到两个末态粒子的所有可能末态，在单位时空体积内的总几率.

但 $\mathrm{d}\omega$ 和 ω 都不是实测量，实测量是如下所定义的微分截面和总截面.

设有相互散射的两类初态粒子的密度分别为 n_1, n_2，相对速度为 v，在忽略多重散射情况下，在单位时间，单位体积内相互散射的入射粒子数目为 $(n_1 \cdot n_2 \cdot v)$. 其中，$n_2 v$ 是入射粒子流密度 I_0，n_1

是靶粒子数密度.

由 $\omega \propto n_1 n_2 . v$

定义：$\sigma \equiv \frac{\omega}{n_1 n_2 v}$. (6.1.12)

$$\mathrm{d}\sigma \equiv \frac{\mathrm{d}\omega}{n_1 n_2 v}. \tag{6.1.13}$$

则 σ,$\mathrm{d}\sigma$ 分别代表单位时间单位体积内二体散射中，单位入射流在一个靶粒子上的总散射几率和微分散射几率. 由于下述两点理由，σ 和 $\mathrm{d}\sigma$ 分别叫做散射总截面和微分截面.

即(1)σ 和 $\mathrm{d}\sigma$ 的量纲为 L^2.

$$[\sigma] = \frac{T^{-1}L^{-3}}{L^{-3}L^{-3}T^{-1}L} = L^2.$$

(2) 设一个粒子为靶粒子，另一个为入射粒子，当从实验室坐标系经 Lorentz 变换变到一个运动速度平行于运动粒子速度 v 的惯性系时，σ、$\mathrm{d}\sigma$ 为 不变量. 因而可把 σ、$\mathrm{d}\sigma$ 看成一个垂直于 v 的靶面积 $L_\perp^2$.

由量纲分析可知：

$$[\sigma] = \frac{L_\perp^{-2} L_\parallel^{-1}}{L_\perp^{-2} L_\parallel^{-1} L_\perp^{-2} L_\parallel^{-1} L_\parallel} = L_\perp^2,$$

这是一个 Lorentz 不变量.

故 σ,$\mathrm{d}\sigma$ 对上述 Lorentz 变换为不变量.

注意：这是一个与靶粒子密度(n)、入射粒子流密度(nv) 无关，而仅由相互作用性质决定的量.

由于入射粒子是动量算符和 Hamilton 算符的本征态，其波函数为单色平面波，以 Compton 散射为例：

$$\psi(x) = aU\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}, A(x) = c\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}.$$

利用电荷密度算符，$\rho = e\bar{\psi}\gamma_4\psi$，电磁场能密度算符

$$\mathscr{H} = -T_{44} = \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu \partial_\mu A_\nu) - \partial_4 A_\nu \partial_4 A_\nu$$

$$\langle N' | \mathscr{H} | N' \rangle = \omega_{k\lambda}(N'_{k\lambda} + \frac{1}{2}).$$

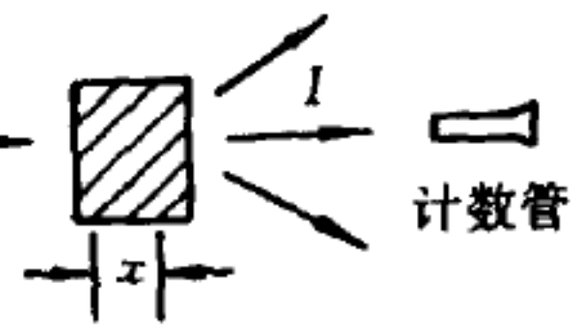
得电荷密度　$\rho = \underset{0}{\langle} | ae\bar{\psi}\gamma_4\psi\alpha^\dagger | \underset{0}{\rangle} = e.$

电磁场能密度 $\mathscr{H} = \underset{0}{\langle} | C\mathscr{H}C^\dagger | \underset{0}{\rangle} = \omega = h\nu.$

故 $n_e = 1, n_\gamma = 1$ 得　$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{(2\pi)^7} |M_{fi}|^2 \rho_E \frac{\mathrm{d}\Omega}{v}$

我们简单地谈谈截面的测量.

总截面的测量利用束流减弱实验. 设入射粒子流强度为 I_0, 在靶物质中由于散射, 散射束流强度 I 将逐渐减弱.



由 $\mathrm{d}I \propto I$, $\mathrm{d}I \propto -\mathrm{d}x$ 及 $\mathrm{d}I \propto n$ 得:

$\mathrm{d}I = -\sigma_T \cdot n \cdot I\mathrm{d}x$ 或 $\frac{\mathrm{d}I}{I} = -n\sigma_T\mathrm{d}x$. 积分后得:

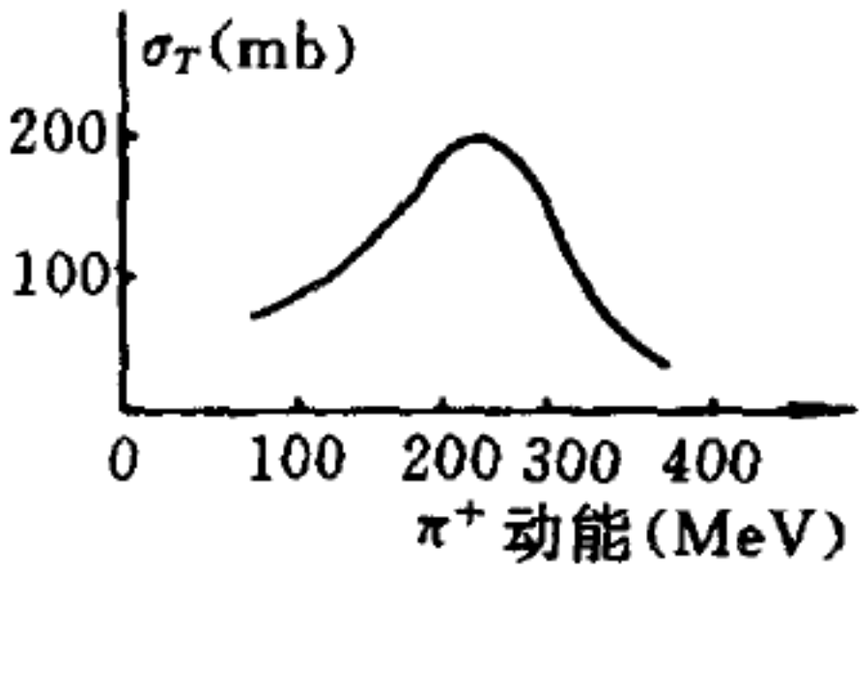
$$I = I_0 \mathrm{e}^{-n\sigma_T x}. \tag{6.1.14}$$

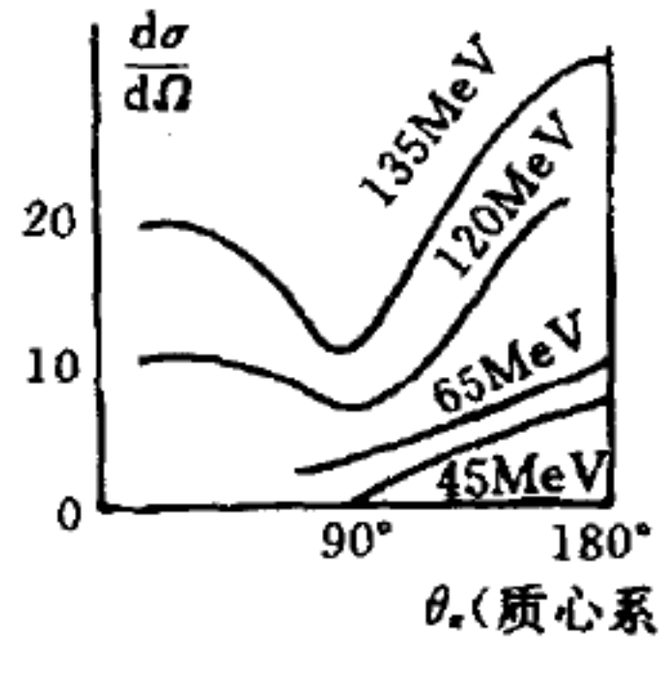
n 系靶物质散射中心密度, σ_T 即为总截面.

例　$\pi^+ - p$ 散射总截面(袁家镏)

σ 的单位是 $1\mathrm{b} = 1\mathrm{bar}n = 10^{-24}\mathrm{cm}^2$.

微分截面 $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$ 的测量可采用计数或照相法在不同散射角测量.





例　$\pi^+ - p$ 微分截面(袁家镏).

若初态仅包含一个不稳定粒子, 设 ω_i 表示该不稳定粒子沿第

i 道衰变时，单位时间衰变几率.

例如 $\pi^{\pm}$ 有两个衰变道：$\mu^{\pm}+\nu_{\mu}$，$e^{\pm}+\nu_{e}$，

则 $\omega=\sum_i \omega_i$ 表示该不稳定粒子单位时间总衰变率.

定义：不稳定粒子的寿命 τ 为：$\tau\equiv\frac{1}{\omega}$. 按 τ 的数量级可把衰变分为弱衰变、电磁衰变和强衰变.

弱衰变：$\tau\geqslant 10^{-10}$s.

例 $\pi^{\pm}$ 有两个衰变道：$\mu^{\pm}+\nu_{\mu}$，$e^{\pm}+\nu_{e}$，$\tau_{\pi\pm}\sim 2.6\times 10^{-8}$s.

$\mu^{-}\rightarrow e^{+}+\tilde{\nu}_{e}+\nu_{\mu},\tau_{\mu}\sim 2.2\times 10^{-6}$s.

$\Lambda\ (1115)\longrightarrow p+e^{-}+\nu_{e},\tau_{\Lambda}\sim 10^{-10}$s.

$n\rightarrow p+e^{-}+\nu_{e},\tau_{n}=0.92\times 10^{3}$s.

电磁衰变：$10^{-10}\text{s}\gg\tau\gg 10^{-23}\text{s}$.

例 π^{0} 有两个衰变道：$\gamma+\gamma$，$\gamma+e^{+}+e^{-}$，$\tau_{\pi^0}\sim 0.8\times 10^{-16}$s.

$\Sigma^{0}\rightarrow\Lambda+\gamma,\tau_{\Sigma^0}\sim(5.8\pm 1.3)\times 10^{-20}$s.

$J/\psi(3100)\rightarrow e^{+}+e^{-},\tau\sim 9\times 10^{-21}$s

弱衰变和电磁衰变粒子的寿命 τ 可由云室或汽泡室中粒子的速度和径迹长度测得.

强衰变：$\tau\sim 10^{-23}$s，一般不能由衰变粒子的径迹测量，按测不准关系 $\Delta t\cdot\Delta E\sim h$.

即 $\tau\cdot\Gamma\sim h$ 或 $\Gamma\sim\frac{h}{\tau}$.

$$\tau \sim \frac{h}{\Gamma} = \frac{6 \times 10^{-22}(\text{MeV} \cdot \text{s})}{\Gamma(\text{MeV})}.$$

Γ 即衰变粒子的能谱宽度或质量不准量，可利用 missing mass spectrometer 测得.

例 $\omega(1670), J^p = 3^-, \omega \to p^+ + \pi, \Gamma \sim 160 \pm 15\text{MeV}.$

$\omega(3030), J^p = ?, N \to N + \pi, \Gamma \sim 400\text{MeV}.$

$\tau \sim 1.5 \times 10^{-24}\text{s}.$

§6.2 一些常用公式

1. 设 $\mu、\nu、\rho、\sigma$ 表示不同的脚标：

则有 $T_r\gamma_\mu = 0,$ (6.2.1)

$$T_r\gamma_\mu\gamma_\nu = 0, \tag{6.2.2}$$

$$T_r\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho = 0, \tag{6.2.3}$$

$$T_r\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma = 0. \tag{6.2.4}$$

以上结果可推广为：

奇数个 γ 矩阵之积的迹一定为 0.

偶数个 γ 矩阵之积的迹当其中某一种矩阵是奇数个时，其迹也为 0.

证：由 $\gamma_\mu = \gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\lambda = -\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\lambda$ 及 $T_r(AB) = T_r(BA)$ 知(6.2.1)成立，仿之易证(6.2.2) ～ (6.2.4).

注意到 $\gamma_\mu^2 = 1$，即知，奇数 γ 矩阵之积的迹一定可化为(6.2.1) ～ (6.2.4) 中任一情况，结果一定是 0.

总数是偶数个 γ 矩阵情况，当某一种 γ 矩阵为奇数个，则亦可化为(6.2.1) ～ (6.2.4) 的情况，结果也一定是 0.

2. 设 $\hat{A} = A_\mu\gamma_\mu,$ (6.2.5)

则 $\{\hat{A}, \hat{B}\} = 2(A_\mu B_\mu)I,$

$$\hat{A}\hat{A} = A_\mu A_\mu \cdot I. \tag{6.2.6}$$

证：$\{\hat{A},\hat{B}\} = A_\mu\gamma_\mu B_\nu\gamma_\nu + B_\nu\gamma_\nu A_\mu\gamma_\mu$

$= A_\mu B_\nu(\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu)$

$= 2A_\mu B_\nu\delta_{\mu\omega}$

$= 2(A_\mu B_\mu)$

3. $\gamma_\mu\gamma_\mu = 4 \cdot I.$ (6.2.7)

$\gamma_\mu\hat{A}\gamma_\mu = -2\hat{A}.$ (6.2.8)

$\gamma_\mu\hat{A}\hat{B}\gamma_\mu = 4(A_\mu B_\mu)\cdot I.$ (6.2.9)

$\gamma_\mu\hat{A}\hat{B}\hat{C}\gamma_\mu = -2\hat{C}\hat{B}\hat{A}.$ (6.2.10)

证：(6.2.7) 是显然成立的.

(6.2.8)：

$\gamma_\mu\hat{A}\gamma_\mu = \gamma_\mu A_\nu\gamma_\nu\gamma_\mu = A_\nu(-\gamma_\nu\gamma_\mu + 2\delta_{\mu\omega})\gamma_\mu$

$= -4\hat{A} + 2\hat{A} = -2\hat{A}.$

(6.2.9)：

$\gamma_\mu\hat{A}\hat{B}\gamma_\mu = (-\hat{A}\gamma_\mu + 2A_\mu)(-\gamma_\mu\hat{B} + 2B_\mu)$

$= 4\hat{A}\hat{B} + 4A_\mu B_\mu - 2\hat{A}\hat{B} - 2\hat{A}\hat{B}$

$= 4A_\mu B_\mu.$

(6.2.10)：

$\gamma_\mu\hat{A}\hat{B}\hat{C}\gamma_\mu = (-\hat{A}\gamma_\mu + 2A_\mu)\hat{B}(-\gamma_\mu\hat{C} + 2C_\mu)$

$= 4(A_\mu C_\mu)\hat{B} - 2\hat{B}\hat{A}\hat{C} - 2\hat{A}\hat{C}\hat{B} - 2\hat{A}\hat{B}\hat{C}$

$= 2\hat{B}\hat{C}\hat{A} - 4(C_\mu B_\mu)\hat{A} = -2\hat{C}\hat{B}\hat{A}.$

4. $\sum_{\gamma=1,2} U_{P\gamma}(\alpha)\overline{U}_{P\gamma}(\beta) = \frac{-\mathrm{i}\hat{P} + m}{2E})\ \alpha\beta.$ (6.2.11)

$\sum_{\gamma=3,4} U_{-P\gamma}(\alpha)\overline{U}_{-P\gamma}(\beta) = \frac{-\mathrm{i}\hat{p} - m}{2E})\ \alpha\beta.$ (6.2.12)

证：自由 Dirac 方程的一个量子态可为 $H, \boldsymbol{p}$

$\Sigma\frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|} = \Sigma\boldsymbol{e}$ 的公共本征函数 $\psi(x) = U_{p\gamma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}.$

γ 即 $\Sigma\boldsymbol{e}$ 的本征值 $\gamma = \pm 1.$

显然应成立 $\Sigma\boldsymbol{e}U_{P\gamma} = \gamma U_{P\gamma}.$ (6.2.13)

但 $\Sigma e = \begin{pmatrix} \sigma\, e & 0 \\ 0 & \sigma\, e \end{pmatrix}$

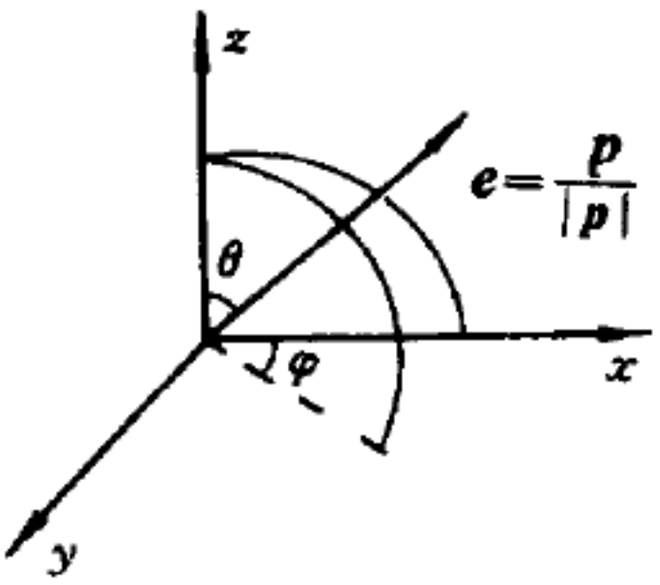
$$\sigma\, e = \sigma_x e_x + \sigma_y e_y + \sigma_z e_z$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cos\varphi \cdot \sin\theta + \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \sin\varphi\sin\theta$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cos\theta$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \cos\varphi\sin\theta - \mathrm{i}\sin\varphi\sin\theta) \\ \cos\varphi\sin\theta + \mathrm{i}\sin\varphi\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \\ \sin\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$



令 $U_{P\cdot\gamma} = A\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix}$，　　$A = \sqrt{\dfrac{|E| + m_0}{2|E|}}$，即(2.1.54)中的归一化常数，故本征值方程(6.2.13)化为

$$\begin{bmatrix} \cos\theta, & \sin\theta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} & 0 & 0 \\ \sin\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, & -\cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta, & \sin\theta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \\ 0 & 0 & \sin\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, & -\cos\theta \end{bmatrix} A\begin{pmatrix} V \\ \\ W \end{pmatrix} = \pm A\begin{pmatrix} V \\ \\ W \end{pmatrix}.$$

(6.2.14)

解上述方程即得

$$V_+ = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\theta}{2} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}} \\ \sin\dfrac{\theta}{2} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}, \qquad V_- = \begin{pmatrix} -\sin\dfrac{\theta}{2} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}} \\ \cos\dfrac{\theta}{2} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}.$$

$W_\pm = \pm BV_\pm$，式中 $\pm$ 号与 $\Sigma\cdot e = \pm 1$ 相配合，$B \equiv \dfrac{p}{|E| + m_0}$.

求得 $U_{p\gamma} = A\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix}$ 的显示式后即可求得

$\sum\limits_{\gamma=1,2} U_{p\gamma}(\alpha)U_{p\gamma}(\beta)$ 的矩阵元.

可验算上述矩阵元即$\left(\frac{-\mathrm{i}\hat{p}+m}{2E}\right)_{\alpha\beta}$

$$-\mathrm{i}\hat{p}=\begin{bmatrix} E & 0 & -p_3 & -(p_1-\mathrm{i}p_2) \\ 0 & E & -(p_1-\mathrm{i}p_2) & -p_3 \\ p_3 & (p_1+\mathrm{i}p_2) & -E & 0 \\ (p_1+\mathrm{i}p_2) & -p_3 & 0 & -E \end{bmatrix}$$

可得 $\sum\limits_{\gamma=1,2} U_{p\gamma}(1)\overline{U}_{p\gamma}(1)=\frac{E+m}{2E}.$

$$\sum_{\gamma-1,2} U_{p\gamma}(1)\overline{U}_{p\gamma}(2)=0.$$

$$\sum_{\gamma=1,2} U_{p\gamma}(1)\overline{U}_{p\gamma}(3)=\frac{-p_3}{2E}.$$

$$\vdots$$

§6.3 Compton 散射

设入射光子速度 $c=1$，电子为靶粒子，则在实验室坐标系中散射光子微分截面：

$$\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{(2\pi)^7}|M_{fi}|^2\rho_E\frac{\mathrm{d}\Omega}{C}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^7}|M_{fi}|^2\rho_E\mathrm{d}\Omega. \tag{6.3.1}$$

以 p、k 分别代表电子、光子的 4 动量，

则动量守恒：$\boldsymbol{P}=0,\boldsymbol{K}=\boldsymbol{P}_f+\boldsymbol{K}_f.$

能量守恒：$m+\omega_i=E_f+\omega_f.\ (h\cdot\nu=2\pi\nu=\omega.\ \boldsymbol{P}_f^2-E_f^2=-m^2).$

(6.3.2)

首先由此可以求出 $\rho_E=\frac{E_f\omega_f^3}{m\omega_i}\frac{1}{(2\pi)^3}.$ (6.3.3)

因为　末态光子密度

$$\rho_E=\frac{1}{(2\pi)^3}\omega_f^2\frac{\mathrm{d}\omega_f}{\mathrm{d}E},$$

$$E = E_f + \omega_f = \sqrt{(m^2 + \boldsymbol{p}_f^2)} + \omega_f$$

$$= \sqrt{(m^2 + (\boldsymbol{k}_i - \boldsymbol{k}_f)^2)} + \omega_f$$

$$= [m^2 + \omega_i^2 + \omega_f^2 - 2\omega_i \cdot \omega_f \cos\theta]^{1/2} + \omega_f,$$

所以
$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\omega_f} = \frac{1}{2}\frac{2\omega_f - 2\omega_i\cos\theta}{E_f} + 1$$

$$= \frac{E_f + \omega_f - \omega_i\cos\theta}{E_f}$$

$$= \frac{E - \omega_i\cos\theta}{E_f}. \tag{6.3.4}$$

$$\rho_E = \frac{1}{(2\pi)^3}\omega_f{}^2\frac{\mathrm{d}\omega_f}{\mathrm{dE}} = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{E_f\omega_f^2}{E - \omega_i\cos\theta}.$$

又 $E^2 + \omega_f{}^2 - 2\omega_f E = m^2 + \omega_i{}^2 + \omega_f{}^2 - 2\omega_i\omega_f\cos\theta,$

或 $E^2 - m^2 - \omega_i{}^2 = 2\omega_f(E - \omega_i\cos\theta),$

但是由(6.3.2)知 $E^2 - m^2 - \omega_i{}^2 = 2m\omega_i$,(因 $E = m + \omega_i$)

故 $E - \omega_i \cdot \cos\theta = m\frac{\omega_i}{\omega_f}.$ (6.3.5)

代入(6.3.4)即得(6.3.3).

其次计算 $|M_{fi}|^2$.

由(6.1.1)和(5.8.1)知最低阶表式为

$$M_{fi} = \frac{-\mathrm{i}e^2(2\pi)^4}{2\sqrt{\omega_i\omega_f}}\overline{U}_f(\boldsymbol{p}_f) \times$$

$$\times \{\hat{e}_f\frac{\mathrm{i}(\hat{p}_i + \hat{k}_i) - m}{(p_i + k_i)^2 + m^2}\hat{e}_i + \hat{e}_i \times \frac{\mathrm{i}(\hat{p}_i - \hat{k}_f) - m}{(p_i - k_f)^2 + m^2}\hat{e}_f\}U_i(\boldsymbol{p}_i). \tag{6.3.6}$$

由 $p_i{}^2 = p_f{}^2 = -m^2, k_i{}^2 = k_f^2 = 0$,并假设初态电子静止

有 $(p_i + k_i)^2 + m^2 = 2p_ik_i = -2m\omega_i.$ (6.3.7)

$(p_i - k_f)^2 + m^2 = -2p_ik_f = 2m\omega_f.$ (6.3.8)

$$(\hat{p}_i + \hat{k}_i)\hat{e}_i = (p_{i,\mu}\gamma_\mu + k_{i,\nu}\gamma_\nu)e_{i,\lambda},\gamma_\lambda$$

$$= p_{i,\mu}e_{i,\lambda}\gamma_\mu\gamma_\lambda + k_{i,\nu}e_{i,\lambda}\gamma_\nu\gamma_\lambda.$$

$$(\hat{p}_i - \hat{k}_f)\hat{e}_f = (p_{i,\mu}\gamma_\mu - k_{f,\nu}\gamma_\nu)e_{f,\lambda}\gamma_\lambda$$
$$= p_{i,\mu}e_{f,\lambda}\gamma_\mu\gamma_\lambda - k_{f,\nu}e_{f,\lambda}\gamma_\nu\gamma_\lambda.$$

注意到 $\gamma_\mu\gamma_\nu = 2\delta_{\mu\nu} - \gamma_\nu\gamma_\mu$ 得：

$$(\hat{p}_i + \hat{k}_i)\hat{e}_i = p_{i,\mu}e_{i,\lambda}(2\delta_{\mu\lambda}) - \hat{e}_i\hat{p}_i + k_{i,\nu}e_{i,\lambda}(2\delta_{\nu\lambda}) - \hat{e}_i\hat{k}_i.$$

$$(\hat{p}_i - \hat{k}_f)\hat{e}_f = p_{i,\mu}e_{f,\lambda}(2\delta_{\mu\lambda}) - \hat{e}_f\hat{p}_i - k_{f,\nu}e_{f,\lambda}(2\delta_{\nu\lambda}) + \hat{e}_f\hat{k}_f.$$

考虑到 $e_{i,\mu}k_{i,\mu} = e_{f,\nu}k_{f,\nu} = 0$，上二式等式右边第三项均为 0.

又 $p_{i,\mu}e_{i,\mu} = \mathrm{i}me_{i,4}$；$p_{i,\mu}e_{f,\mu} = \mathrm{i}me_{f,4}$.

下面我们证明恒可通过规范变换使 $e_{i,4} = 0 = e_{f,4}$.

设 $A_\mu(x) = e_\mu \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$，由 Lorentz 条件应有 $k_\mu e_\mu = 0$. 引入规范变换 $A_\mu' = A_\mu + \partial_\mu\Lambda$，为使规范变换与 Lorentz 条件并存，应有 $\Box\Lambda = 0$，取 $\Lambda = \mathrm{i}\varepsilon\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$，则 $A_\mu' = e_\mu'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$.

$$e'_\mu = e_\mu - \varepsilon k_\mu.$$

选取坐标轴使 $\boldsymbol{k}$ 沿 x^3 方向传播.

即令 $k_1 = k_2 = 0, k_3 = k_4/\mathrm{i} = k > 0.$

则 $k_\mu e_\mu = k_3e_3 + k_4e_4 = 0 \Rightarrow e_3 = e_4/\mathrm{i}.$

故 $e'_1 = e_1, e'_2 = e_2, e'_3 = e_3 - \varepsilon k, e'_4 = e_4 - \mathrm{i}\varepsilon k.$

令 $\varepsilon \equiv \dfrac{e_3}{k} = \dfrac{e_4}{\mathrm{i}k}$ 即得在新的规范下

$$e'_1 = e_1, e'_2 = e_2, e'_3 = 0, e'_4 = 0.$$

最后得：$(\hat{p}_i + \hat{k}_i)\hat{e}_i = -\hat{e}_i(\hat{p}_i + \hat{k}_i).$ (6.3.9)

$$(\hat{p}_i - \hat{k}_f)\hat{e}_f = -\hat{e}_f(\hat{p}_i - \hat{k}_f).$$ (6.3.10)

上二式表明 $\{\hat{e}_i, \hat{p}_i\} = -\{\hat{e}_i, \hat{k}_i\} = \{\hat{e}_f, \hat{p}_i\} = \{\hat{e}_f, \hat{k}_f\} = 0.$

(6.3.10)

以(6.3.7) ～ (6.3.10) 代入(6.3.6) 得

$$M_{fi} = \frac{-\mathrm{i}e^2(2\pi)^4}{4m(\omega_i\omega_f)^{3/2}}\bar{U}_f(\boldsymbol{p}_f)\{\omega_f\hat{e}_f\hat{e}_i[\mathrm{i}(\hat{p}_i + \hat{k}_i) + m]$$
$$- \omega_i\hat{e}_i\hat{e}_f[\mathrm{i}(\hat{p}_i - \hat{k}_f) + m]\}U_i(\boldsymbol{p}_i).$$

利用 $(\mathrm{i}\hat{p}_i + m)U_i(\boldsymbol{p}_i) = 0,$

得 $$M_{fi}=\frac{-e^2(2\pi)^4}{4m(\omega_i\omega_f)^{3/2}}\overline{U}_f(\boldsymbol{p}_f)RU_i(\boldsymbol{p}_i). \tag{6.3.11}$$

$$R=\omega_f\hat{e}_f\hat{k}_i\hat{e}_i+\omega_i\hat{e}_i\hat{k}_f\hat{e}_f.$$

以(6.3.11)、(6.3.3)代入(6.3.1)得

$$\mathrm{d}\sigma=\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2\frac{E_f}{4m^3\omega_i^4}|\overline{U}_fRU_i|^2\mathrm{d}\Omega. \tag{6.3.12}$$

意义:一确定初态〔光子$(\boldsymbol{k}_i,\boldsymbol{e}_i)$ 电子(m,S_i)〕经散射后跃入一确定末态〔光子$(\boldsymbol{k}_f,\boldsymbol{e}_f)$,在 $\mathrm{d}\Omega$ 内,电子$(\boldsymbol{p}_f,S_f)$〕的微分截面.

这里入射光子和出射光子都是极化光子,靶电子和反冲电子都是极化电子,因而(6.3.12)表示极化微分截面.

在实验中若测定了入射和出射光子的极化方向,但初态电子处于未极化态,经相互作用后末态电子,处于极化本征态但不予测量,则测定结果应对初态电子求平均,对末态电子求和,所得平均散射微分截面(光子极化微分截面)为

$$\mathrm{d}\sigma=\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2\frac{E_f}{8m^3\omega_i^4}\sum_{S_iS_f}|\overline{U}_fRU_i|^2\mathrm{d}\Omega. \tag{6.3.13}$$

现在计算 $\sum\limits_{S_iS_f}|\overline{U}_fRU_i|^2$.

$$\begin{aligned}\sum_{S_iS_f}|\overline{U}_fRU_i|^2&=T_r\cdot\sum_{S_iS_f}|\overline{U}_fRU_i|^2\\&=T_r\sum_{S_iS_f}U_i^{\dagger}R^{\dagger}\gamma_4U_f\overline{U}_fRU_i\\&=T_r\sum_{S_iS_f}\overline{U}_i\gamma_4R^{\dagger}\gamma_4U_f\overline{U}_fRU_i\\&=T_r\sum_{S_iS_f}U_i\overline{U}_i\gamma_4R^{\dagger}\gamma_4U_f\overline{U}_fR\\&=T_r(\sum_{S_i}U_i\overline{U}_i)\gamma_4R^{\dagger}\gamma_4(\sum_{S_f}U_f\overline{U}_f)R\\&=T_r\left(\frac{-i\hat{p}_i+m}{2E_i}\gamma_4R^{\dagger}\gamma_4\frac{-i\hat{p}_f+m}{2E_f}R\right)\\&=\frac{1}{4E_iE_f}T_r[(i\hat{p}_i-m)\gamma_4R^{\dagger}\gamma_4(i\hat{p}_f-m)R]\\&=\frac{1}{4mE_f}T_r[(i\hat{p}_i-m)\gamma_4R^{\dagger}\gamma_4(i\hat{p}_f-m)R]\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4mE_f} T_r[(\hat{p}_i + \mathrm{i}m)\gamma_4 R^\dagger \gamma_4 (\hat{p}_f + \mathrm{i}m) R].$$

注意式中 R 与初态电子和末态电子的极化无关!

令 $\overline{R} = -\gamma_4 R^\dagger \gamma_4$,得

$$\sum_{s_i s_f} |U_f R U_i|^2 = \frac{1}{4mE_f} T_r[(\hat{p}_i + \mathrm{i}m)\overline{R}(\hat{p}_f + \mathrm{i}m) R]$$

$$= \frac{1}{4mE_f} A. \tag{6.3.14}$$

其中 $A = T_r(\hat{p}_i + \mathrm{i}m)\overline{R}(\hat{p}_f + \mathrm{i}m) R.$

故 $$\mathrm{d}\sigma = \left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2m\omega_i}\right)^4 A \mathrm{d}\Omega. \tag{6.3.15}$$

现计算 A 值:

以 $\hat{p}_f = \hat{p}_i + \hat{k}_i - \hat{k}_f$ 代入(6.3.14)

得 $$A = T_r(\hat{p}_i + \mathrm{i}m)\overline{R}(\hat{p}_i + \hat{k}_i - \hat{k}_f + \mathrm{i}m) R$$

$$= T_r(\hat{p}_i \overline{R} \hat{p}_i R - m^2 \overline{R} R + \hat{p}_i \overline{R} \hat{k}_i R - \hat{p}_i \overline{R} \hat{k}_f R)$$

$$+ \mathrm{i}m T_r(\hat{p}_i \overline{R} R + \overline{R} \hat{p}_i R + \overline{R} \hat{k}_i R - \overline{R} \hat{k}_f R).$$

上式中第二个迹中各项仅含奇数个 γ 矩阵因子,故它们的迹等于 0.

因而得 $$A = A_1 + A_2 + A_3. \tag{6.3.16}$$

其中 $$A_1 = T_r(\hat{p}_i \overline{R} \hat{p}_i R - m^2 \overline{R} R,$$

$$A_2 = T_r(\hat{p}_i \overline{R} \hat{k}_i R),$$

$$A_3 = -T_r(\hat{p}_i \overline{R} \hat{k}_f R).$$

(1) 计算 A_1.

$$A_1 = T_r(\hat{p}_i \overline{R} \hat{p}_i R + \hat{p}_i \hat{p}_i \overline{R} R) = T_r(\hat{p}_i \{\overline{R}, \hat{p}_i\} R). \tag{6.3.17}$$

现证明:

$$\overline{R} = -\gamma_4 R^+ \gamma_4 = \omega_f \hat{e}_i \hat{k}_i \hat{e}_f + \omega_i \hat{e}_f \hat{k}_f \hat{e}_i. \tag{6.3.18}$$

证:$\overline{R} = -\gamma_4[(\omega_f e_{f,\mu} k_{i,\nu} e_{i,\lambda} + \omega_i e_{i,\mu} k_{f,\nu} e_{f,\lambda}) \times \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda] + \gamma_4$

$$= -\gamma_4[(\omega_f e_{f,\mu} k^*_{i,\nu} e_{i,\lambda} + \omega_i e_{i,\mu} k^*_{f,\nu} e_{f,\lambda}) \times \gamma_\lambda \gamma_\nu \gamma_\mu]\gamma_4 \text{(因为 } e_{i,4} = e_{f,4} = 0)$$

$$= \frac{1}{m^2}(\omega_f \hat{p}_i \hat{e}_i \hat{k}^*_i \hat{e}_f \hat{p}_i + \omega_i \hat{p}_i \hat{e}_f \hat{k}^*_f \hat{e}_i \hat{p}_i).$$

故(6.3.18)即

$$\omega_f \hat{p}_i \hat{e}_i \hat{k}^*_i \hat{e}_f \hat{p}_i + \omega_i \hat{p}_i \hat{e}_f \hat{k}^*_f \hat{e}_i \hat{p}_i$$
$$= -\omega_f \hat{p}_i \hat{p}_i \hat{e}_i \hat{k}_i \hat{e}_f - \omega_i \hat{p}_i \hat{p}_i \hat{e}_f \hat{k}_f \hat{e}_i$$
$$= \omega_f \hat{p}_i \hat{e}_i \hat{p}_i \hat{k}_i \hat{e}_f + \omega_i \hat{p}_i \hat{e}_f \hat{p}_i \hat{k}_f \hat{e}_i.$$

即 $\omega_f \hat{e}_i \hat{k}^*_i \hat{e}_f \hat{p}_i + \omega_i \hat{e}_f \hat{k}^*_f \hat{e}_i \hat{p}_i = \omega_f \hat{e}_i \hat{p}_i \hat{k}_i \hat{e}_f + \omega_i \hat{e}_f \hat{p}_i \hat{k}_f \hat{e}_i$,

或 $\omega_f \hat{e}_i (\hat{p}_i \hat{k}_i + \hat{k}^*_i \hat{p}_i) \hat{e}_f + \omega_i \hat{e}_f (\hat{p}_i \hat{k}_f + \hat{k}^*_f \hat{p}_i) \hat{e}_i = 0.$

考虑到 $\hat{p}_i \hat{k}_i = p_{i,\mu} k_{i,\nu} \gamma_\mu \gamma_\nu = p_{i,4} k_{i,\nu} \gamma_4 \gamma_\nu$

$$= im[k_{i,\alpha} \gamma_4 \gamma_\alpha + k_{i,4} \gamma_4 \gamma_4]$$
$$= im[k_{i,\alpha} \gamma_4 \gamma_\alpha + i\omega_i], (\alpha = 1,2,3). \quad (6.3.19)$$

类似 $\hat{k}^*_i \hat{p}_i = im[k_{i,\alpha} \gamma_\alpha \gamma_4 - i\omega_i]. \quad (6.3.20)$

$$\hat{p}_i \hat{k}_f = im[k_{f,\alpha} \gamma_4 \gamma_\alpha + i\omega_f]. \quad (6.3.21)$$

$$\hat{k}^*_f \hat{p}_i = im[k_{f,\alpha} \gamma_\alpha \gamma_4 - i\omega_f]. \quad (6.3.22)$$

即知 $\hat{p}_i \hat{k}_i + \hat{k}^*_i \hat{p}_i = 0 = \hat{p}_i \hat{k}_f + \hat{k}^*_f \hat{p}_i.$

故得证(6.3.18)成立.

现求

$$\{\hat{p}_i, \overline{R}\} = \omega_f(\hat{p}_i \hat{e}_i \hat{k}_i \hat{e}_f + \hat{e}_i \hat{k}_i \hat{e}_f \hat{p}_i) + \omega_i(\hat{p}_i \hat{e}_f \hat{k}_f \hat{e}_i + \hat{e}_f \hat{k}_f \hat{e}_i \hat{p}_i)$$
$$= -\omega_f(\hat{e}_i \hat{p}_i \hat{k}_i \hat{e}_f + \hat{e}_i \hat{k}_i \hat{p}_i \hat{e}_f) - \omega_i(\hat{e}_f \hat{p}_i \hat{k}_f \hat{e}_i + \hat{e}_f \hat{k}_f \hat{p}_i \hat{e}_i)$$
$$= -\omega_f \hat{e}_i \{\hat{p}_i, \hat{k}_i\} \hat{e}_f - \omega_i \hat{e}_f \{\hat{p}_i, \hat{k}_f\} \hat{e}_i$$
$$= 2m\omega_i \omega_f \hat{e}_i \hat{e}_f + 2m\omega_i \omega_f (\hat{e}_f \hat{e}_i).$$

$$= 2m\omega_i \omega_f \{\hat{e}_i \hat{e}_f\} = 4m\omega_i \omega_f (e_i e_f) \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

(6.3.23)

又　$\{\hat{p}_i, R\} = \{\hat{p}_i, \overline{R}\}$,　(6.3.24)

故　$T_r\hat{p}_i R = \frac{1}{2}T_r(\hat{p}_i R + R\hat{p}_i) = \frac{1}{2}T_r\{\hat{p}_i, R\}$

$= 8m\omega_i\omega_f(e_i e_f)$.　(6.3.25)

最后得：

$$A_1 = T_r(\hat{p}_i\{\hat{p}_i, \overline{R}\}R) = 4m\omega_i\omega_f(e_i e_f)T_r(\hat{p}_i R)$$
$$= 32m^2\omega_i^2\omega_f^2(e_i e_f)^2. \quad (6.3.26)$$

(2) 计算 A_2.

$$T_r(\hat{p}_i\overline{R}\hat{k}_i R) = T_r\hat{p}_i(\omega_f\hat{e}_i\hat{k}_i\hat{e}_f + \omega_i\hat{e}_f\hat{k}_f\hat{e}_i)\hat{k}_i \times$$
$$\times (\omega_f\hat{e}_f\hat{k}_i\hat{e}_i + \omega_i\hat{e}_i\hat{k}_f\hat{e}_f)$$
$$= T_r(\omega_f^2\hat{p}_i\hat{e}_i\hat{k}_i\hat{e}_f\hat{k}_i\hat{e}_f\hat{k}_i\hat{e}_i +$$
$$+ \omega_i^2\hat{p}_i\hat{e}_f\hat{k}_f\hat{e}_i\hat{k}_i\hat{e}_i\hat{k}_f\hat{e}_f +$$
$$+ \omega_i\omega_f\hat{p}_i\hat{e}_i\hat{k}_i\hat{e}_f\hat{k}_i\hat{e}_i\hat{k}_f\hat{e}_f +$$
$$+ \omega_i\omega_f\hat{p}_i\hat{e}_f\hat{k}_f\hat{e}_i\hat{k}_i\hat{e}_f\hat{k}_i\hat{e}_i).$$
(6.3.27)

$$T_r(\omega_i^2\hat{p}_i\hat{e}_f\hat{k}_f\hat{e}_i\hat{k}_i\hat{e}_i\hat{k}_f\hat{e}_f) = \omega_i^2 T_r(\hat{p}_i\hat{e}_f\hat{e}_f\hat{k}_f\hat{e}_i\hat{e}_i\hat{k}_i\hat{k}_f)$$
$$= \omega_i^2 T_r(\hat{p}_i\hat{k}_f\hat{k}_i\hat{k}_f)$$
$$= \omega_i^2 p_{i,\mu}k_{f,\nu}k_{i,\rho}k_{f,\lambda} \times$$
$$\times T_r(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\lambda)$$
$$= 4\omega_i^2[(p_i k_f)(k_i k_f) +$$
$$+ (p_i k_i)(k_f k_f) +$$
$$+ (p_i k_f)(k_i k_f)]$$
$$= 8\omega_i^2(p_i k_f)(k_i k_f)$$
$$= -\ 8m\omega_i^2\omega_f(k_i k_f).$$
(6.3.28)

$$T_r(\omega_f^2\hat{p}_i\hat{e}_i\hat{k}_i\hat{e}_f\hat{k}_i\hat{e}_f\hat{k}_i\hat{e}_i) = -\ \omega_f^2 T_r(\hat{p}_i\hat{k}_i\hat{e}_f\hat{k}_i\hat{e}_f\hat{k}_i)$$
$$= -\ \omega_f^2 T_r[\hat{p}_i(2k_i e_f) - \hat{e}_f\hat{k}_i] \times$$

$$\times \hat{k}_i\hat{e}_f\hat{k}_i$$

$$= -2\omega_f^2(k_ie_f)T_r(\hat{p}_i\hat{k}_i\hat{e}_f\hat{k}_i)$$

〔因为 $\hat{k}_i\hat{k}_i = (k_ik_i) = 0$〕

$$= -2\omega_f^2(k_ie_f)2(p_ik_i) \times$$

$$\times (e_fk_i)T_r\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1\end{pmatrix}$$

$$= -16\omega_f^2(k_ie_f)^2(p_ik_i)$$

$$= 16m\omega_i\omega_f^2(k_ie_f)^2. \qquad (6.3.29)$$

$$T_r(\omega_i\omega_f\hat{p}_i\hat{e}_i\hat{k}_i\hat{e}_f\hat{k}_i\hat{e}_i\hat{k}_f\hat{e}_f) = 2\omega_i\omega_fT_r(\hat{p}_i\hat{e}_i\hat{k}_i \cdot$$

$$(e_fk_i)\hat{e}_i\hat{k}_f\hat{e}_f)$$

$$= 2\omega_i\omega_f(e_fk_i)T_r(\hat{p}_i\hat{e}_i\hat{k}_i\hat{e}_i\hat{k}_f\hat{e}_f)$$

$$= -2\omega_i\omega_f(e_fk_i)T_r(\hat{p}_i\hat{k}_i\hat{k}_f\hat{e}_f)$$

$$= 2\omega_i\omega_f(e_fk_i)T_r[\hat{p}_i(2(e_fk_i) - e_fk_i)k_f]$$

$$= 4\omega_i\omega_f(e_fk_i)^2\,T_r(\hat{p}_i\hat{k}_f) - 2\omega_i\omega_f(e_fk_i) \times$$

$$\times T_r(\hat{p}_i\hat{e}_f\hat{k}_i\hat{k}_f)$$

$$= 16\omega_i\omega_f(e_fk_i)^2(p_ik_f) - 2\omega_i\omega_f(e_fk_i)$$

$$[(p_ie_f)(k_ik_f)T_r\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1\end{pmatrix}$$

$$+ (p_ik_f)(k_ie_f)T_r\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1\end{pmatrix}$$

〔考虑了$(e_fk_f) = 0$〕

$= 8\omega_i\omega_f(k_ie_f)^2(p_ik_f)$ 〔考虑了$(p_ie_f) = 0$〕

$$= -\ 8m\omega_i\omega_f^2(k_ie_f)^2. \qquad (6.3.30)$$

$$T_r(\omega_i\omega_f\hat{p}_i\hat{e}_f\hat{k}_f\hat{e}_i\hat{k}_i\hat{e}_f\hat{k}_i\hat{e}_i)$$

$$= \omega_i\omega_f T_r(\hat{p}_i\hat{e}_f\hat{k}_f\hat{e}_i\hat{k}_i[2(e_fk_i) - \hat{k}_i\hat{e}_f]\hat{e}_i)$$

$$= -\ 2\omega_i\omega_f(e_fk_i)T_r(\hat{p}_i\hat{e}_f\hat{k}_f\hat{k}_i)$$

$$= 2\omega_i\omega_f(e_fk_i)T_r(\hat{p}_i\hat{k}_f\hat{e}_f\hat{k}_i)$$

$$= 2\omega_i\omega_f(e_fk_i)[(p_ik_f)(e_fk_i)T_r\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1\end{pmatrix}]$$

（因为$(e_fk_f) = (p_ie_f) = 0$）

$$= 8\omega_i\omega_f(k_ie_f)^2(p_ik_f) \qquad (6.3.31)$$

$$= -\ 8m\omega_i\omega_f^2(k_ie_f)^2.$$

由(6.3.28) ～ (6.3.31) 最后得

$$A_2 = -\ 8m\omega_i^2\omega_f(k_ik_f) + 16m\omega_i\omega_f^2(k_ie_f)^2$$

$$-\ 8m\omega_i\omega_f^2(k_ie_f)^2 - 8m\omega_i\omega_f^2(k_ie_f)^2$$

$$= -\ 8m\omega_i^2\omega_f(k_ik_f). \qquad (6.3.32)$$

(3) 计算 A_3.

由(6.3.16)(6.3.18)(6.3.11) 可看出

$$-\ A_2 \xrightleftharpoons[e_i \rightleftharpoons e_f]{k_i \rightleftharpoons k_f} A_3.$$

故 $\quad A_3 = 8m\omega_f^2\omega_i(k_ik_f). \qquad (6.3.33)$

由(6.3.26)、(6.8.32)、(6.3.33) 得

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 32m^2\omega_i^2\omega_f^2(e_ie_f)^2 - 8m\omega_i^2\omega_f(k_ik_f)$$

$$+ 8m\omega_i\omega_f^2(k_ik_f)$$

$$= 8m\omega_i\omega_f[4m\omega_i\omega_f(e_ie_f)^2$$

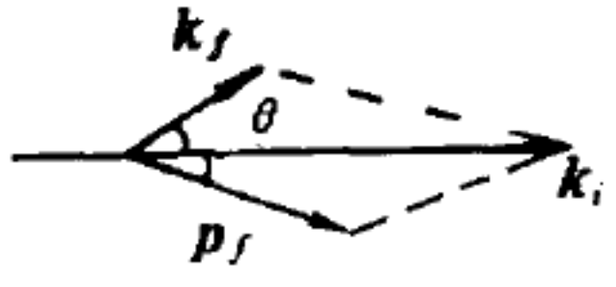
$$+ (\omega_f - \omega_i)(k_ik_f)]. \qquad (6.3.34)$$

但由(6.3.5)

$$E - \omega_i\cos\theta = m\frac{\omega_i}{\omega_f}, \cos\theta = \frac{E\omega_f - m\omega_i}{\omega_i\omega_f}.$$

故 $\cos\theta - 1 = \dfrac{m(\omega_f - \omega_i)}{\omega_i\omega_f}$.

（因　$E = m + \omega_i$）



又：

$$(k_ik_f) = (\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{k}_f) - \omega_i\omega_f = \omega_i\omega_f\cos\theta - \omega_i\omega_f$$
$$= \omega_i\omega_f(\cos\theta - 1), \qquad (6.3.34)$$

所以　$(k_ik_f) = m(\omega_f - \omega_i)$，代入(6.3.34)

最后得

$$A = 8m^2\omega_i^2\omega_f^2\left[4(e_ie_f)^2 + \frac{\omega_f}{\omega_i} + \frac{\omega_i}{\omega_f} - 2\right]. \qquad (6.3.35)$$

上式代入(6.3.15)即得.

考虑光子的极化而不考虑电子的极化时的 Compton 散射截面 —— 光子极化微分截面.

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{r_0^2}{4}\frac{\omega_f^2}{\omega_i^2}\left[4\cos^2\varphi + \frac{\omega_f}{\omega_i} + \frac{\omega_i}{\omega_f} - 2\right]\mathrm{d}\Omega. \qquad (6.3.36)$$

其中　$(e_ie_f)^2 = \cos^2\varphi$，$\varphi$ 即初态与末态光子极化方向夹角.

$r_0 = \dfrac{e^2}{4\pi m} = \dfrac{\alpha}{m}$ 即电子经典半径，α 即精细结构常数.

若初态光子未经测量而处于两种极化混合态，末态光子经相互作用后处于极化本征态，但不测量后者的极化，则应对初态光子的 极化求平均对末态光子的极化求和，而得出不考虑光子极化和电子极化时的平均微分截面（非极化截面）.

$$\mathrm{d}\bar{\sigma} = \frac{1}{2}\sum_{e_i,e_f}\mathrm{d}\sigma.$$

可以证明上述手续即在(6.3.35)中，令

$$(e_ie_f)^2 \to \frac{1}{2}(1 + \cos^2\theta), \qquad (6.3.37)$$

且不含 e_ie_f 的项均乘以 2.

因而得出：

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{2}\frac{\omega_f^2}{\omega_i^2}(\cos^2\theta + \frac{\omega_f}{\omega_i} + \frac{\omega_i}{\omega_f} - 1)d\Omega. \qquad (6.3.38)$$

(6.3.37) 的推导：

偏振矢量 $\boldsymbol{e}^{(1)}(\boldsymbol{k}),\boldsymbol{e}^{(2)}(\boldsymbol{k}),\boldsymbol{e}^{(3)}(\boldsymbol{k}) = \frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}$ 组成了 3 维空间正交归一化基矢，故应成立.

$$\sum_j e_r^{(j)} e_s^{(j)} = \delta_{rs}. \ (j = 1,2,3, r,s = 1,2,3,4)$$

$$\text{i. e. } \boldsymbol{e}_r^{(1)}(\boldsymbol{k})e_s^{(1)}(\boldsymbol{k}) + \boldsymbol{e}_r^{(2)}(\boldsymbol{k})e_s^{(2)}(\boldsymbol{k}) + \frac{\boldsymbol{k}_r\boldsymbol{k}_s}{|\boldsymbol{k}|^2} = \delta_{rs}.$$

或 $$\sum_{j=1,2} e_r^{(j)} e_s^{(j)} = \delta_{rs} - \frac{\boldsymbol{k}_r\boldsymbol{k}_s}{|\boldsymbol{k}|^2}.$$

$$\frac{1}{2}\sum_{j,f}(e_i e_f)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,f,r,s}(e_r^{(i)}e_r^{(f)})(e_s^{(i)}e_s^{(f)}),$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,r,s}(e_r^{(i)}e_s^{(i)})\sum_{f,r,s}(e_r^{(f)}e_s^{(f)})$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{r,s}(\delta_{rs} - \frac{\boldsymbol{k}_{i,r}\boldsymbol{k}_{i,s}}{|\boldsymbol{k}_i|^2}) - (\delta_{rs} - \frac{\boldsymbol{k}_{f,r}\boldsymbol{k}_{f,s}}{|\boldsymbol{k}_f|^2})$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{r,s}(\delta_{rs} - \delta_{rs}\frac{\boldsymbol{k}_{i,r}\boldsymbol{k}_{i,s}}{|\boldsymbol{k}_i|^2}) -$$

$$- \delta_{rs}\frac{\boldsymbol{k}_{fr}\boldsymbol{k}_{f,s}}{|\boldsymbol{k}_f|^2}) + \frac{\boldsymbol{k}_{i,r}\boldsymbol{k}_{f,r}\boldsymbol{k}_{i,s}\boldsymbol{k}_{f,s}}{|\boldsymbol{k}_i|^2|\boldsymbol{k}_f|^2}]$$

$$= \frac{1}{2}(3 - 1 - 1 + \cos^2\theta)$$

$$= \frac{1}{2}(1 + \cos^2\theta).$$

$$d\bar{\sigma} = \frac{1}{2}\sum_{e_i e_f}\sum d\sigma = \frac{r_0^2}{4}(\frac{\omega_f}{\omega_i})^2 \cdot [4 \cdot \frac{1}{2}\sum_{e_i e_f}(e_i e_f)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{e_i e_f}\frac{\omega_f}{\omega_i} + \frac{1}{2}\sum_{e_i e_f}\frac{\omega_i}{\omega_f} - \frac{1}{2}\sum_{e_i e_f} 2]d\Omega$$

$$= \frac{r_0^2}{2}(\frac{\omega_f}{\omega_i})^2[\cos^2\theta + \frac{\omega_f}{\omega_i} + \frac{\omega_i}{\omega_f} - 1]d\Omega.$$

Compton 散射最早由 A. H. Compton 和吴有训于 1922 ～ 1923 年进行了系统的实验研究. 微分截面公式(6.3.36) 和(6.3.38) 由

O. Klein, Nishina(仁科芳雄)(1929) 和 I. Tam(1930) 导出.

讨论:

(1) 散射光的偏振:考虑光子极化微分截面(6.3.36),由动量守恒知:$\boldsymbol{k}_i, \boldsymbol{k}_f, \boldsymbol{p}_f$ 三线共面.

设 $\boldsymbol{e}_i$ 与 $\boldsymbol{k}_i$ 决定的振动面为$(\boldsymbol{k}_i, \boldsymbol{e}_i)$,$\boldsymbol{e}_f$ 与 $\boldsymbol{k}_f$ 决定的振动面为$(\boldsymbol{k}_f, \boldsymbol{e}_f)$,把$\boldsymbol{e}_f$分解为垂直$(\boldsymbol{k}_i, \boldsymbol{e}_i)$面的$\boldsymbol{e}_{f,\perp}$和在$(\boldsymbol{k}_i, \boldsymbol{e}_i)$面内的$\boldsymbol{e}_{f,/\!/}$.

当 $\boldsymbol{e}_f \perp \boldsymbol{e}_i$ 时,$\cos\varphi = 0$,$\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$ 最小.

可见:若入射光是偏振光,散射光将是部分偏振光,$\boldsymbol{e}_{f\perp}$ 成分较小.

(2) 高能和低能渐近:

由(6.3.5) 得:

$$m + \omega_i(1 - \cos\theta) = m\frac{\omega_i}{\omega_f},$$

$$\text{或}\quad \omega_f = \frac{\omega_i}{1 + \dfrac{\omega_i}{m}(1 - \cos\theta)}. \tag{6.3.39}$$

上式代入(6.3.38) 得

无极化光子的微分散射截面

$$\mathrm{d}\bar{\sigma} = \frac{r_0^2}{2}\frac{1 + \cos^2\theta}{\left[1 + \dfrac{\omega_i}{m}(1 - \cos\theta)\right]^2}\left[1 + \right.$$

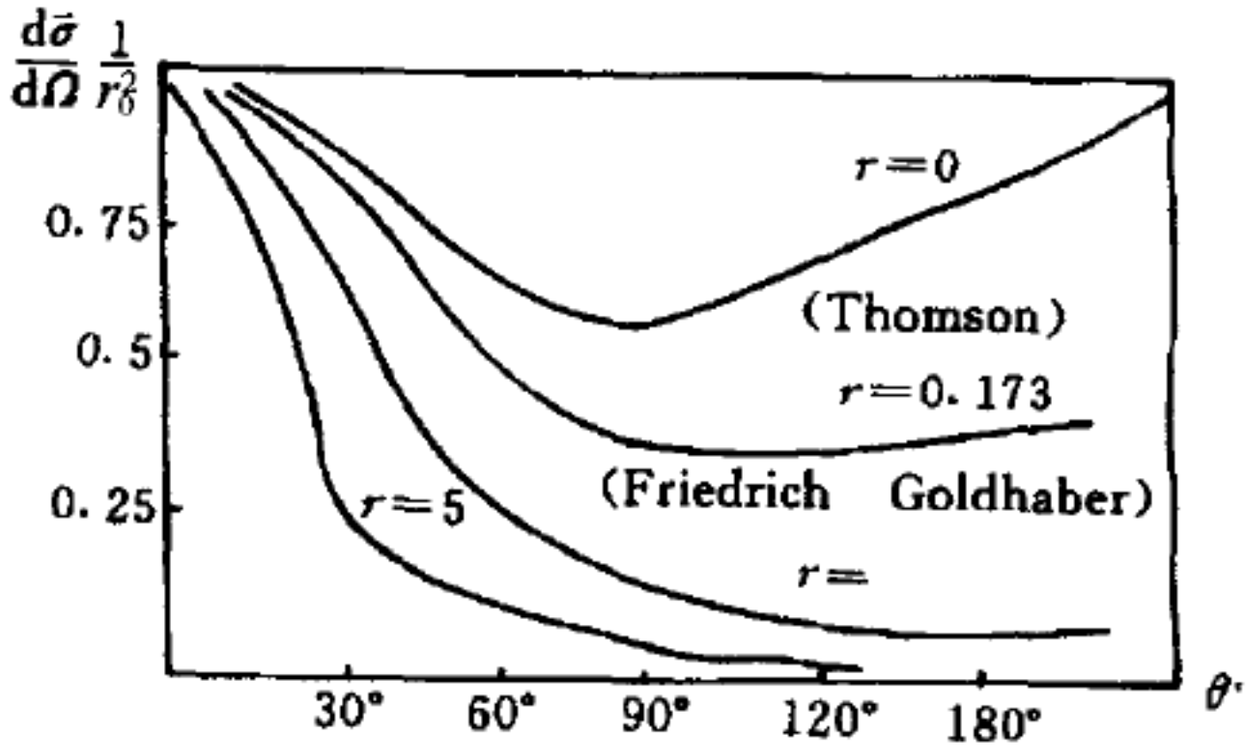
$$\left. + \frac{\left(\dfrac{\omega_i}{m}\right)^2(1 - \cos\theta)^2}{(1 + \cos^2\theta)\left[1 + \dfrac{\omega_i}{m}(1 - \cos\theta)\right]}\right]\mathrm{d}\Omega. \tag{6.3.40}$$

理论与实验的比较见散射光子角分布图,图中 $r \equiv \dfrac{\omega_i}{m}$.

① 低能渐近情况(非相对论近似)

$$\omega_i \ll m.$$

(6.3.40) 化为经典 Thomson 散射公式.



散射光子角分布

微分截面 $\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} \sim \frac{r_0^2}{2}(1+\cos^2\theta)$. (6.3.41)

总截面 $\bar{\sigma} = \int d\bar{\sigma} = \frac{r_0^2}{2}\int(1+\cos^2\theta)\sin\theta d\theta d\varphi$

$$= \frac{8\pi}{3}r_0^2 \equiv \sigma_0 \sim 6.6 \times 10^{-25}\text{cm}^2.$$

可见：

在非相对论近似下，非极化散射光子的角分布和总截面与入射光子能量无关，电子可看做经典有效半径为 $\sqrt{\frac{8\pi}{3}}r_0$ 的靶.

这与实验是符合的.

由图可知：当散射角 θ 一定时，λ 大或 ω 小的（$r = \frac{\omega}{m}$ 小时）微分截面大.

当入射光波长一定时（r 一定），小角散射截面大，大角散射截面小.

② 高能渐近情况（极端相对论近似）

$\omega_i \gg m$.

由(6.3.40)得

微分截面：当 $\theta \ll \sqrt{\frac{m}{\omega_i}}$，$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} = r_0^2$—— 小角散射. (6.3.42)

$$\theta \gg \sqrt{\frac{m}{\omega_i}}, \frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{r_0^2}{2}\frac{m}{\omega_i}\frac{1}{1-\cos\theta} \longrightarrow \text{大角散射.}$$

(6.3.43)

因为 $\mathrm{d}\bar{\sigma} = \frac{r_0^2}{2}\frac{1+\cos^2\theta}{r^2(\frac{1}{r}+1-\cos\theta)^2}[1 +$

$$+ \frac{r(1-\cos\theta)^2}{(1+\cos^2\theta)(\frac{1}{r}+1-\cos\theta)}$$

$$\approx \frac{r_0^2}{2}\frac{1+\cos\theta}{r^2(1-\cos\theta)^2}[1 + \frac{r(1-\cos\theta)^2}{(1+\cos^2\theta)(1-\cos\theta)}]$$

$$\approx \frac{r_0^2}{2}\frac{1+\cos^2\theta}{r^2(1-\cos\theta)^2}\frac{r(1-\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}.$$

(当 $1-\cos\theta \approx \frac{\theta^2}{2} \gg \frac{1}{r}$).

总截面 $\bar{\sigma} = \frac{3}{8}\sigma_0\frac{m}{\omega_i}(\ln\frac{2\omega_i}{m} + \frac{1}{2})$. (6.3.44)

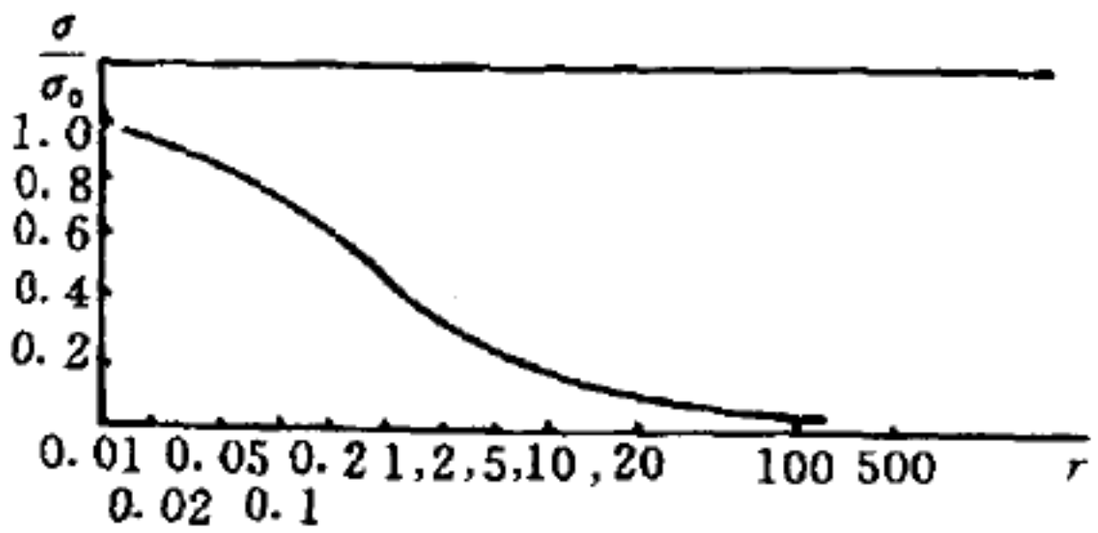
可见,在极端相对论情况:

小角散射时,角分布与入射光子能量无关;

大角散射时,角分布与入射光子能量成反比;

总截面近似地与入射光子能量成反比.

后三点说明,为什么高能光子(γ 射线)的穿透本领大.



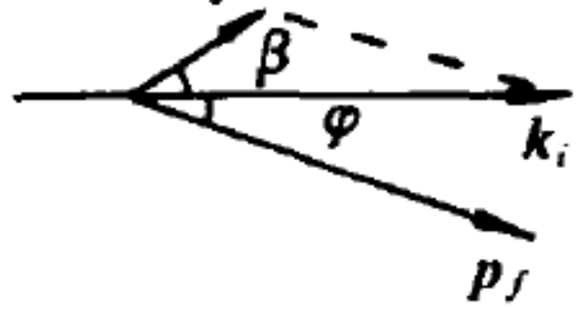
总截面曲线 $\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} = \frac{3}{4}\{\frac{1+r}{r^3}[\frac{2r(1+r)}{1+2r} - \ln(1+2r)]$

$$+\frac{1}{2r}\ln(1+2r)-\frac{1+3r^2}{(1+2r)^2}\}.$$

1930 年赵忠尧在总截面曲线的实验验证中做过工作.

(3) 反冲电子角分布：

由能量守恒、动量守恒可得：



① 反冲电子动能：

$$E_f - m = \frac{\omega_i^2(1-\cos\theta)}{m+\omega_i(1-\cos\theta)}. \tag{6.3.44}$$

可见，反冲电子动能由 $\theta=0$ 时的 0 值到 $\theta=\pi$ 时的最大值

$$\frac{2\omega_i^2}{m+2\omega_i.}$$

② 反冲电子散射角 β 与散射光子散射角 θ 之间的关系：

$$\cos\beta=(1+r)\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2+r(r+2)(1-\cos\theta)}} \tag{6.3.45}$$

可见：当 $\theta=0$ 时，$\beta=\pi/2$，

$\theta=\pi$ 时，$\beta=0$.

把上述 $\cos\beta$ 值代入(6.3.40) 得

③ 反冲电子角分布公式：

$$d\sigma=4r_0^2\frac{(1+r)^2\cos\beta}{(1+2r+r^2\sin^2\beta)^2}\{1+$$
$$+\frac{2r^2\cos^4\beta}{(1+2r+r^2\sin^2\beta)[1+r(r+2)\sin^2\beta]}-$$
$$-\frac{2(1+r)^2\sin^2\beta\cos^2\beta}{[1+r^2(r+2)\sin^2\beta]^2}\}d\Omega_\beta. \tag{6.3.46}$$

在高能渐近情况下，$r\gg1$

当小角散射时，$\beta^2\ll1/r$

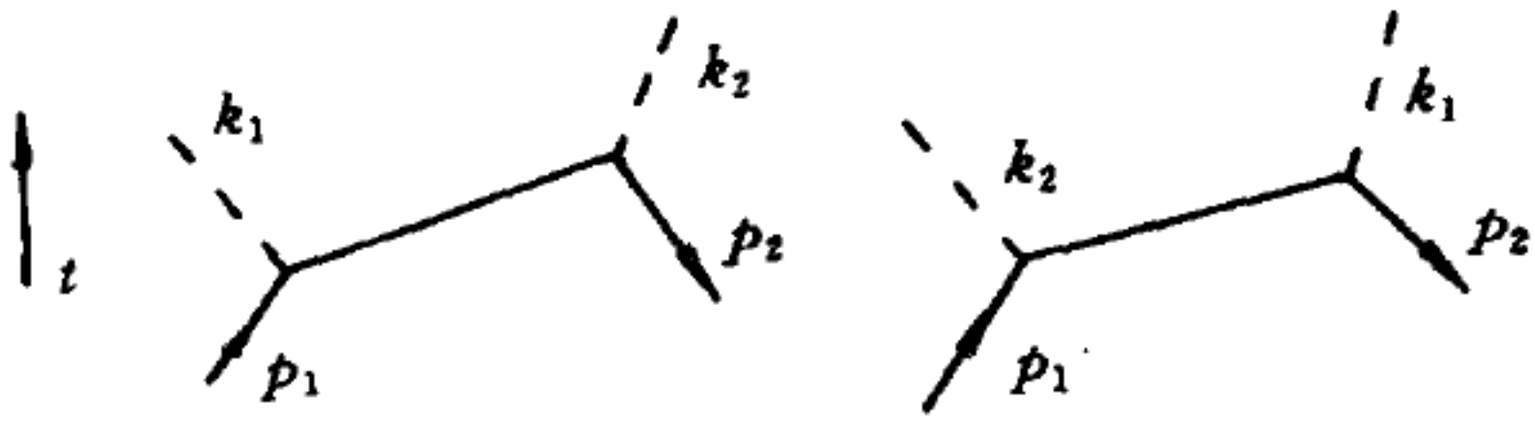
$$d\sigma=\frac{rr_0^2d\Omega_\beta}{r^2\beta^2+1}. \tag{6.3.47}$$

当大角散射时，$\sin^2\beta\gg1/r$，

$$d\sigma = \frac{4r_0^2}{r^2}\frac{\cos\beta d\Omega_\beta}{\sin^4\beta}. \tag{6.3.48}$$

§6.4 正负电子对湮灭

正负电子对湮灭的 Feyman 图为



图中 p_1, p_2 分别代表入射电子和正电子的四动量.

初态：$|\rangle_i = a_1^\dagger a_2^\dagger |\rangle 0.$

末态：$|\rangle_f = c_1^\dagger c_2^\dagger |\rangle 0.$

最低阶散射矩阵元为

$$\langle_f |s^{(2)}| \rangle_i = M_{fi}\delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2). \tag{6.4.1}$$

$$M_{fi} = V_s(p_2)\{\hat{e}_2 \frac{i(\hat{p}_1 - \hat{k}_1) - m}{(p_1 - k_1)^2 + m^2}\hat{e}_1 + \hat{e}_1 \times$$
$$\times \frac{i(\hat{p}_1 - k_2) - m}{(p_1 - k_2)^2 + m^2}\hat{e}_2\}U_r(p_1)\frac{ie^2(2\pi)^4}{2\sqrt{\omega_1\omega_2}}.$$

我们注意：在 Feyman 图中反粒子可看做逆时轴前进的正粒子，因此 $V_s(p_2) = \bar{U}_s(-p_2)$，上式改写为

$$M_{fi} = \bar{U}_s(-p_2)\{\hat{e}_2 \frac{i(\hat{p}_1 - \hat{k}_1) - m}{(p_1 - k_1)^2 + m^2}\hat{e}_1 + \hat{e}_1 \times$$
$$\times \frac{i(\hat{p}_1 - \hat{k}_2) - m}{(p_1 - k_2)^2 + m^2}\hat{e}_2\}U_r(p_1)\frac{ie^2(2\pi)^4}{2\sqrt{\omega_1\omega_2}}. \tag{6.4.2}$$

做变换 $-k_1 \to k_1$，$-p_2 \to p_2$ 即化为 * Compton 散射中的 M_{fi}，这

---

* 这事实上即把原来向上的时轴改为向右了.

正是 S 矩阵的交叉对称性的反映. 利用交叉对称性可以从一个道的散射幅得到所有其他交叉道的散射幅.

设靶电子静止不动且采用适当规范,仿 §6.3 可证.

$$\{\hat{e}_1,\hat{p}_1\}=\{\hat{e}_1,\hat{k}_1\}=\{\hat{e}_2,\hat{p}_1\}=\{\hat{e}_2,\hat{k}_2\}=0.$$

注意到 $p_1^2=p_2^2=-m^2, k_1^2=k_2^2=0, (\mathrm{i}\hat{p}_1+m)U_r(p_1)=0$,

即可把(6.4.2) 化为

$$M_{fi}=\frac{e^2(2\pi)^4}{2m(\omega_1\omega_2)^{3/2}}\overline{U}_s(-p_2)RU_r(p_1). \tag{6.4.4}$$

$$R=\omega_2\hat{e}_2\hat{k}_1\hat{e}_1+\omega_1\hat{e}_1\hat{k}_2\hat{e}_2.$$

若不测定两个初态粒子(正、负电子) 的极化,应对之求平均,故得非极化正负电子对湮灭微分截面.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\sigma&=\frac{1}{(2\pi)^7}\frac{1}{2^2}\sum_{r,S}|M_{fi}|^2\rho_E\frac{\mathrm{d}\Omega}{v}\\&=\frac{1}{(2\pi)^7}\frac{1}{4v}\frac{e^4(2\pi)^8}{16m^2(\omega_1\omega_2)^3}\sum_{r,S}|\overline{U}_S(-p_2)R|\times\\&\times|U_r(p_1)|^2\rho_E\mathrm{d}\Omega=\left\{\frac{e^4}{16\pi^2m^2}\right\}\frac{(2\pi)^3}{16}\frac{1}{v(\omega_1\omega_2)^3}\\&\sum_{r,S}|\overline{U}_S(-p_2)RU_r(p_1)|^2\rho_E\mathrm{d}\Omega.\\&=\frac{r_0^2(2\pi)^3\rho_E\mathrm{d}\Omega}{16v\omega_1^3\omega_2^3}\sum_{r,S}|\overline{U}_S(-p_2)RU_r(p_1)|^2\\&\left(r_0=\frac{e^2}{4\pi m}\right).\end{aligned} \tag{6.4.5}$$

式中 v 即正电子入射速度.

由 $|\boldsymbol{p}_2|=\dfrac{m}{\sqrt{1-v^2}}v=E_2\cdot v$ 知 $v=\dfrac{|\boldsymbol{p}_2|}{E_2}$. (6.4.6)

计算:一个散射光子 k_1 的态密度 ρ_E:

由动量守恒律:$\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2$,

能量守恒律:$E=m+E_2=\omega_1+\omega_2$,知

$E=\omega_1+|\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{k}_1|$

$=\omega_1+\sqrt{\{E_2^2-m^2+\omega_1^2-2|p_2|\omega_1\cos\theta\}}$. 故

$$dE = d\omega_1 + \frac{1}{2}\frac{2\omega_1 d\omega_1 - 2|\boldsymbol{p}_2| d\omega_1 \cos\theta}{E - \omega_1}.$$

(因 $|\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{k}_1| = |\boldsymbol{k}_2| = \omega_2, E - \omega_1 = \omega_1$)

$$= \frac{E d\omega_1 - \omega_1 d\omega_1 + \omega_1 d\omega_1 - |\boldsymbol{p}_2| d\omega_1 \cos\theta}{\omega_2}$$

$$= d\omega_1 \frac{E - |\boldsymbol{p}_2|\cos\theta}{\omega_2}. \tag{6.4.7}$$

按定义：$\frac{d^3\boldsymbol{k}_1}{(2\pi)^3} = \rho_E dE d\Omega = \frac{1}{(2\pi)^3}\omega_1^2 d\omega_1 d\Omega.$

所以 $$\rho_E = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{d\omega_1}{dE}\omega_1^2 = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{\omega_1^2\omega_2}{E - |\boldsymbol{p}_2|\cos\theta}. \tag{6.4.8}$$

由于 $\omega_2 = E - \omega_1 = |\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{k}_1|$,

所以 $E^2 + \omega_1^2 - 2E\omega_1 = |\boldsymbol{p}_2|^2 + \omega_1^2 - 2|\boldsymbol{p}_2|\omega_1\cos\theta.$

又 $$E^2 = (E_1 + E_2)^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2$$

$$= 2m^2 + |\boldsymbol{p}_2|^2 + 2mE_2 = 2mE + |\boldsymbol{p}_2|^2,$$

故 $mE = \omega_1(E - |\boldsymbol{p}_2|\cos\theta)$，代入(6.4.8)最后得

$$\rho_E = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{\omega_1^2\omega_2}{E - |\boldsymbol{p}_2|\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{\omega_1^3\omega_2}{mE}. \tag{6.4.9}$$

计算：$$\sum_{r,S}|\overline{U}_S(-\boldsymbol{p}_2)RU_r(\boldsymbol{p}_1)|^2$$

$$\sum_{r,S}|\overline{U}_S(-\boldsymbol{p}_2)RU_r(\boldsymbol{p}_1)|^2$$

$$= T_r\sum_{r,S}U_r^{\dagger}(\boldsymbol{p}_1)R^{\dagger}\gamma_4 U_S(-\boldsymbol{p}_2)\overline{U}_S(-\boldsymbol{p}_2)RU_r(\boldsymbol{p}_1)$$

$$= T_r\sum_{r,S}U_r(\boldsymbol{p}_1)\overline{U}_r(\boldsymbol{p}_1)\gamma_4 R^{\dagger}\gamma_4 U_S(-\boldsymbol{p}_2)\overline{U}_S(-\boldsymbol{p}_2)R$$

$$= T_r(\sum_r U_r(\boldsymbol{p}_1)\overline{U}_r(\boldsymbol{p}_1)\gamma_4 R^{\dagger}\gamma_4(\sum_S U_S(-\boldsymbol{p}_2)\overline{U}_S(-\boldsymbol{p}_2))R.$$

由 (6.2.11)、(6.2.12)，$\sum_r U_r(\boldsymbol{p}_1)\overline{U}_r(\boldsymbol{p}_1) = \frac{-i\hat{p}_1 + m}{2E_1}$,

$\sum_S U_S(-\boldsymbol{p}_2)\overline{U}_S(-\boldsymbol{p}_2) = \frac{-i\hat{p}_2 - m}{2E_2}$，得

$$\sum_{r,S}\left|\overline{U}_S(-\boldsymbol{p}_2)RU_r(\boldsymbol{p}_1)\right|^2=\frac{1}{2mE_2}T_r(\hat{p}_1+\mathrm{i}m)\overline{R}(\hat{p}_2-\mathrm{i}m)R.$$

$$(\overline{R}\equiv-\gamma_4R^{\dagger}\gamma_4) \tag{6.4.10}$$

以 $\hat{p}_2=\hat{k}_1+\hat{k}_2-\hat{p}_1$ 代入后得

$$T_r(\hat{p}_1+\mathrm{i}m)\overline{R}(\hat{k}_1+\hat{k}_2-\hat{p}_1-\mathrm{i}m)R=-A_1+A_2-A_3. \tag{6.4.11}$$

其中：$A_1=T_r(\hat{p}_1\overline{R}\hat{p}_1R-m^2\overline{R}R)$

$$=32m^2\omega_1^2\omega_2^2(e_1e_2)^2.$$

$$A_2=T_r(\hat{p}_1\overline{R}\hat{k}_1R)=-8m\omega_1^2\omega_2(k_1k_2).$$

$$A_3=-T_r(\hat{p}_1\overline{R}\hat{k}_2R)=8m\omega_1\omega_2^2(k_1k_2).$$

把(6.4.11)式代入(6.4.10)得

$$\sum_{r,S}\left|U_S(-\boldsymbol{p}_2)RU_r(\boldsymbol{p}_1)\right|^2$$

$$=-\frac{2\omega_1\omega_2}{E_2}[4m\omega_1\omega_2(e_1e_2)^2+E(k_1k_2)]. \tag{6.4.12}$$

把(6.4.9)、(6.4.12)代入(6.4.5)，并注意(6.2.34)，$(k_1k_2)=\omega_1\omega_2(\cos\theta-1)$，最后得非极化正负电子对湮灭为一对光子，其中，极化为e_1的光子在$\mathrm{d}\Omega$内出现，另一个光子的极化为e_2的微分截面为

$$\mathrm{d}\sigma=\frac{\gamma_0^2}{8}\frac{\omega_1^2\mathrm{d}\Omega}{mE|\boldsymbol{p}_2|}\{E(1-\cos\theta)-4m\cos^2\varphi\}. \tag{6.4.13}$$

其中φ为$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$间的夹角.θ是两个末态光子动量$\boldsymbol{k}_1$和$\boldsymbol{k}_2$间的夹角.可见，当θ一定时非极化正负电子对湮灭的极化方向互相垂直的两个光子的几率最大，1950年吴健雄实验证实了此现象.

若不测量光子的极化方向，则应对末态光子的极化求和，可证，其结果是以$(1+\cos^2\theta)$代替$(e_1e_2)^2$，并对不含e_1e_2的项乘以4*，故得非极化正负电子对湮灭为一对非极化光子，其中一个光

---

* 参见(4.3.37)，这里两个光子均是末态，那里一个是初态，求平均时多了一个1/2，故前结果乘2即得现在的结果.

子 k_1 在 $d\Omega$ 内出现的平均微分截面为:(Dirac 1930)

$$d\sigma = \frac{\gamma_0^2}{2}\frac{\omega_1^2 d\Omega}{mE|\boldsymbol{p}_2|}\{E(1-\cos\theta) - m(1+\cos^2\theta)\}.$$

(6.4.14)

可以求出:非极化正负电子对湮灭为非极化光子的总截面为

$$\sigma = \frac{\pi\gamma_0^2}{\gamma^2-1}\left\{\frac{1+4\gamma+\gamma^2}{1+\gamma}\mathrm{Ln}(\gamma+\sqrt{\gamma^2-1})\frac{3+\gamma}{1+\gamma}\sqrt{\gamma^2-1}\right\}$$
$$= \frac{\pi\gamma_0^2}{\gamma+1}\left\{\frac{\gamma^2+4\gamma+1}{\gamma^2-1}\mathrm{Ln}(\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}) - \frac{\gamma+3}{\sqrt{\gamma^2-1}}\right\}.$$

(6.4.15)

式中:$\gamma \equiv E_2/m = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}}$.

证:注意 $E = m + \dfrac{m}{\sqrt{1-v^2}} = m(1+\gamma), v = \dfrac{\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma}$,

$$E_2 = m\gamma, \frac{E_2 v}{m} = \sqrt{\gamma^2-1}.$$

$$|\boldsymbol{p}_2| = E_2 v = m\sqrt{\gamma^2-1}.$$

$$\omega_1 = \frac{mE}{E - |\boldsymbol{p}_2|\cos\theta} = \frac{m^2(1+\gamma)}{m(1+\gamma) - m\sqrt{\gamma^2-1}\cos\theta}$$
$$= \frac{m(1+\gamma)}{1+\gamma-\sqrt{\gamma^2-1}\cos\theta}.$$

代入(6.4.14)式对 $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ 积分即得.

讨论:总截面公式(6.4.15).

在极端相对论情况下 $\dfrac{v}{c} \sim 1, \gamma \to \infty$,由(6.4.15)第二式得

$$\sigma \to \frac{\pi r_0^2 m}{E_2}\left(\ln\frac{2E_2}{m} - 1\right). \qquad (6.4.16)$$

在非相对论情况下,$\dfrac{v}{c} \ll 1$,由(6.4.15)第一式

$$\gamma \to 1 + \frac{1}{2}v^2, (\gamma^2-1) \to v^2,$$

$$\ln(\gamma+\sqrt{\gamma^2-1})\sim\ln(1+v)\sim v.$$

得 $\sigma\to\frac{\pi r_0^2}{v}\sim\frac{1}{v}$ 定律. (6.4.17)

当 $v\to 0$ 时 σ 变为无限大,但有物理意义的是一个正电子以慢速 $v\to 0$ 射入负电子密度为 ρ_e 的物质中每秒钟的湮灭几率

$$\omega=\sigma\cdot v\cdot\rho_e=\pi r_0^2\rho_e. \tag{6.4.18}$$

这是一个与正电子速度无关的量.因此正电子虽是一个稳定粒子,但由于正负电子对湮灭现象,可定义一个慢正电子在某种物质中的平均寿命为

$$\tau=\frac{1}{\omega}=\frac{1}{\pi r_0^2\rho_e}. \tag{6.4.19}$$

在铅中慢正电子的寿命 $\tau\sim 10^{-10}$s.

最后应提及正负电子对通过库仑力可组成束缚态(Positronium),基态是轨道角动量 $L=0$ 的 S 态,分为:

单态 S^0(仲氫),正负电子对自旋反向平行,寿命 $\tau\sim\frac{1}{8}10^{-9}$s.

三重态 S^1(正氫),正负电子对自旋同向平行,寿命 $\tau\sim\frac{1}{7}10^{-6}$s.

由于在电磁相互作用中荷宇称守恒,仲氫(S^0)的荷宇称 $\eta=(-1)^{L+S}=(-1)^{0+0}=+1$,故仅能湮灭成为两个光子($\eta=(-1)^N=(-1)^2=1$),正氫($S^1$)的荷宇称 $\eta=(-1)^{L+S}=(-1)^{0+1}=-1$,故仅能湮灭成为三个光子($\eta=(-1)^N=(-1)^3=-1$).

单态与三重态的能级差距约为 9×10^{-4}eV.

上述理论预言(杨振宁(1950)等人)与实验结果(Deutsch(1951)等)符合良好.

详见阿希泽尔.量子电动力学 §39.

Berestetskii etc. Relativistic Quantum Theory §84. 1971

§6.5 μ^+ 子衰变为正电子、中微子和反中微子，宇称不守恒

$$\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu. \tag{6.5.1}$$

首先我们谈谈存在两种性质不同的中微子 ν_e 和 ν_μ 问题. 由核的 β 衰变可得到与电子伴生的中微子 ν_e：

$$ {}_Z\mathrm{X}^A \to {}_{Z+1}\mathrm{Y}^A + e^- + \bar{\nu}_e.$$

利用上述 $\bar{\nu}_e$ 可得到下述反应

$$\bar{\nu}_e + p \to n + e^+. \tag{6.5.2}$$

另一方面由 π 介子的弱衰变可得到与 μ 伴生的微子 ν_μ.

$$\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu. \tag{6.5.3}$$

利用上述 $\bar{\nu}_\mu$ 可得到下述反应：

$$\bar{\nu}_\mu + p \to n + \mu^+.$$

如果 $\bar{\nu}_\mu$ 与 $\bar{\nu}_e$ 无差别，应期望得到下列反应：

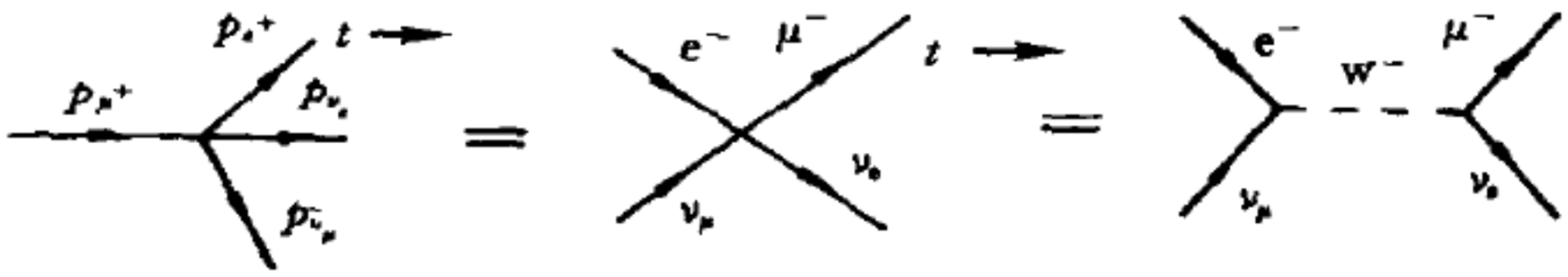
$$\bar{\nu}_\mu + p \to n + e^+. \tag{6.5.4}$$

$$\bar{\nu}_e + p \to n + \mu^+. \tag{6.5.5}$$

1962 年 Danby 等人首次实验得出反应(6.5.4)，而(6.5.5)不出现，以后的多次实验发现反应(6.5.2) 比反应(6.5.5) 的截面大两 个数量级，以后一些别的实验事实肯定了确实存在两类性质不同的中微子 $\bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu$，1975 年确认发现了重轻子 $\tau(1900)$，可以期望，也可能存在第三类中微子 ν_τ.

虽然 ν_e 和 ν_μ 有上述差别，但今天我们认为它们都由 $\frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)\psi$(其中 ψ 是双旋量) 来描述，其中“+”“—”号分别对应左旋中微子和右旋反中微子，这就是中微子的四分量理论.

弱衰变(6.5.1) 的最低阶 Feynman 图为



这是四个费米子的直接相互作用.1958 年 Feynman 和 Gell-Mann 提出普适费米弱相互作用理论.

此理论的要点是:

(1) 任何四个费米子发生直接弱作用,$\mathscr{H}$ 的形式是普适的:

$$\mathscr{H}_i = \frac{G}{2}[\bar{A}\gamma_\rho(1+\gamma_5)B][\bar{C}\gamma_\rho(1+\gamma_5)D] + hc. \tag{6.5.6}$$

(2) 弱耦合常数 G 是普适的,这与电磁耦合常数 e 是普适的完全一样.

(3) 这种弱作用是一种混合的矢量-赝矢量作用(V-A 作用).这一点从含有 $(\gamma_\rho + \gamma_\rho\gamma_5)$ 即可看出.显然 $\mathscr{H}_i$ 不具有空间反射不变性,因而普适费米 V-A 型弱相互作用是宇称不守恒的.

与(5.8.6) 类似可求出

$$\langle_f|S^{(1)}|\rangle_i = \delta^4(p_{\mu+} - p_{e+} - p_{\nu e} - p_{\bar{\nu}\mu})M_{fi}.$$

$$M_{fi} = -\mathrm{i}(2\pi)^4 \frac{G}{\sqrt{2}}\bar{U}_{\mu^-s}(p_{\mu^-})\gamma_\rho(1+\gamma_5)U_{\nu_\mu}(p_\nu)\bar{U}_{\nu e}(p_\nu)\times$$
$$\times\gamma_\rho(1+\gamma_5)U_{e^-r}(p_e) \tag{6.5.8}$$

式中 S,r 分别表示 μ 子和电子的极化($S,r=1,2$).至于两类中微子 $\bar{U}_{\nu e}$ 和 $U_{\nu\mu}$ 均是四分量,故也应有两种极化方向.但由于手征算符 $\frac{1}{2}(1\pm\gamma_5)$ 的存在使得中微子只有左旋,反中微子只有右旋.若不测量 μ^+ 和 e^+ 的极化,则应在计算微分几率时对 μ^+ 的极化求平均值,对 e^+ 的极化求和.

对末态粒子 ν_e 的动量和 $\bar{\nu}_\mu$ 的 dE 求积分后

$$d\omega = \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^7}\sum_{(r,S)}|M_{fi}|^2\rho_E d\Omega_{\bar{\nu}}\frac{d^3\boldsymbol{p}_e}{(2\pi)^3}$$

$$= \frac{G^2}{4(2\pi)^2}F\cdot\rho_E d\Omega_{\bar{\nu}}d^3\boldsymbol{p}_e. \tag{6.5.9}$$

式中 ρ_E 表示 $\bar{\nu}_\mu$ 的态密度，$d^3\boldsymbol{p}_e$ 是 e^+ 在动量空间的体元.

$$F = \sum_{r,S}|(\bar{U}_{\mu_S}(-p_\mu)\gamma\rho(1+\gamma_5)U_{\nu_\mu}(-p_\nu))(\bar{U}_{\nu_e}(p_\nu)\gamma\rho(1+\gamma_5)U_{e^-\gamma}(-p_e))|^2$$

$$= \sum_{r,S}(\bar{U}_{e^-\gamma}(-p_e)\gamma_4(1+\gamma_5)\gamma_\sigma\gamma_4 U_{\nu_e}(p_\gamma))$$

$$\cdot(\bar{U}_{\nu_\mu}(-p_\nu)\gamma_4(1+\gamma_5)\gamma_\sigma\gamma_4 U_{\mu^-S}(-p_\mu)$$

$$\cdot(\bar{U}_{\mu^-S})(p_\mu)\gamma_p(1+\gamma_5)U_{\nu_\mu}(-p_\nu)$$

$$\cdot(\bar{U}_{\nu_e}(p_\nu)\gamma_p(1+\gamma_5)U_{e^-\gamma}(-p_e))$$

$$= \sum_{r,S}[(\bar{U}_{e^-\gamma})_{i_1}(\gamma_4)_{i_1j_1}(1+\gamma_5)_{j_1k_1}(\gamma_\sigma)_{k_1l_1}$$

$$\cdot(\gamma_4)_{l_1m_1}(U_{\nu_e})_{m_1}][(\bar{U}_{\nu_\mu})_{i_2}$$

$$\cdot(\gamma_4)_{i_2j_2}(1+\gamma_5)_{j_2k_2}(\gamma_\sigma)_{k_2l_2}$$

$$\cdot(\gamma_4)_{l_2m_2}(U_{\mu_S})_{m_2}][(U_{\mu_S})_{i3}$$

$$\cdot(\gamma_\rho)_{i_3j_3}(1+\gamma_5)_{j_3k_3}(U_{\nu_\mu})_{k_3}]$$

$$\cdot[(\bar{U}_{\nu_e})_{i_4}(\gamma_\rho)_{i_4j_4}(1+\gamma_5)_{j_4k_4}$$

$$\cdot(U_{e^-\gamma})_{k4}]$$

$$= \sum_{r,S}(U_{e^-\gamma})_{k4}(\bar{U}_{e^-\gamma})_{i_1}(\gamma_4)_{i_1j_1}(1+\gamma_5)_{j_1k_1}$$

$$\cdot(\gamma_\sigma)_{k_1l_1}(\gamma_4)_{l_1m_1}(U_{\nu_e})_{m_1}(\bar{U}_{\nu_e})_{i_4}$$

$$\cdot(\gamma_\rho)_{i_4j_4}(1+\gamma_5)_{j_4k_4}(U_{\nu_\mu})_{k3}(U_{\gamma_\mu})_{i_2}$$

$$\cdot(\gamma_4)_{i_2j_2}(1+\gamma_5)_{j_2k_2}(\gamma_\sigma)_{k_2l_2}(\gamma_4)_{l_2m_2}$$

$$\cdot(U_{\mu_S})_{m2}(\bar{U}_{\mu_S})_{i3}(\gamma_\rho)_{i_3j_3}\cdot(1+\gamma_5)_{j_3k_3}$$

$$= T_r\left\{\frac{-i\hat{p}_e - m_e}{2E_e}\gamma_4(1+\gamma_5)\gamma_\sigma\gamma_4\frac{-i\hat{p}_{\nu e}}{2E_{\nu e}}\gamma\rho\right.$$

$$\left.\cdot(1+\gamma_5)\right\}T_r\left\{\frac{-i\hat{p}_{\nu\mu}}{2E_{\nu\mu}}\gamma_4(1+\gamma_5)\gamma_\sigma\gamma_4\right.$$

$$\cdot \frac{-\mathrm{i}\hat{p}_\mu - m_\mu}{2E_\mu}\gamma_\rho(1+\gamma_5)\}$$

$$= \frac{1}{16E_\mu E_e \omega_{\nu e}\omega_{\nu\mu}} T_r\{-\mathrm{i}\hat{p}_{\nu_\mu}\gamma_4(1+\gamma_5)\gamma_\sigma\gamma_4$$
$$\cdot(-\mathrm{i}\hat{p}_\mu - m_\mu)\gamma_\rho(1+\gamma_5)\}T_r\{(-\mathrm{i}\hat{p}_e - m_e)$$
$$\cdot\gamma_4(1+\gamma_5)\gamma_\sigma\gamma_4(-\mathrm{i}\hat{p}_{\nu_e})\gamma_\rho(1+\gamma_5)\}.$$

注意到：$\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ 及含奇数个因子的 γ 矩阵因子的积的迹等于 0，即知上式展开后含 m_μ, m_e 的项无贡献，故有：

$$F = \frac{1}{16E_\mu E_e \omega_{\nu e}\omega_{\nu\mu}} T_r\{\hat{p}_{\nu\mu}\gamma_4(1+\gamma_5)\gamma_\sigma\gamma_4\hat{p}_\mu\gamma_\rho \cdot$$
$$\cdot(1+\gamma_5)\}T_r\{\hat{p}_e\gamma_4(1+\gamma_5)\gamma_\sigma\gamma_4 \cdot$$
$$\cdot\hat{p}_{\nu_e}\gamma_\rho(1+\gamma_5)\}. \qquad (6.5.10)$$

由于：

$$[\gamma_5, \gamma_\mu] = 0, (\mu = 1、2、3、4),$$
$$(1+\gamma_5)^2 = 2(1+\gamma_5),$$

$$\text{得 } F = \frac{1}{4E_\mu E_e \omega_{\nu_e}\omega_{\nu\mu}} T_r\{\hat{p}_{\nu\mu}\gamma_4\gamma_\sigma\gamma_4\hat{p}_\mu\gamma_\rho(1+\gamma_5)\}$$
$$\cdot T_r\{\hat{p}_e\gamma_4\gamma_\sigma\gamma_4\hat{p}_{\nu_e}\gamma_\rho(1+\gamma_5)\}$$
$$= \frac{A\cdot B}{4E_\mu E_e \omega_{\nu_e}\omega_{\nu_\mu}}. (\gamma_4、\gamma_\sigma \text{ 对换了位置}) \qquad (6.5.11)$$

其中：$A = T_r(\hat{p}_{\nu_\mu}\gamma_\sigma\hat{p}_\mu\nu_\rho(1+\gamma_5))$.

$$B = T_r(\hat{p}_e\gamma_\sigma\hat{p}_{\mu e}\gamma_\rho(1+\gamma_5)).$$

计算 $A\cdot B$：

$$T_r(\hat{p}_{\nu\mu}\gamma_\sigma\hat{p}_\mu\gamma_\rho) = (p_{\nu\mu})_\sigma(p_\mu)_\beta T_r(\gamma_\alpha\gamma_\sigma\gamma_\beta\gamma_\rho)$$
$$= (p_{\nu\mu})_\alpha(p_\mu)_\beta 4\{\delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\rho} - \delta_{\alpha\beta}\delta_{\sigma\rho} + \delta_{\alpha\rho}\delta_{\sigma\beta})$$
$$= 4((p_{\nu\mu})_\sigma(p_\mu)_\rho + (p_{\nu\mu})_\rho(p_\mu)_\rho -$$
$$-(p_{\nu\mu})_\alpha(p_\mu)_\alpha\delta_{\sigma\rho}). \qquad (6.5.12)$$

$$T_r(\hat{p}_{\nu\mu}\gamma_\sigma\hat{p}_\mu\gamma_\rho\gamma_5) = (p_{\nu\mu})_\alpha(p_\mu)_\beta T_r(\gamma_\alpha\gamma_\sigma\gamma_\beta\gamma_\rho\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4).$$

注意上式中，当 $\alpha、\sigma、\beta、\rho$ 中有 4 个，3 个，2 个指标相同时，迹均

为 0，故仅 4 个指标全不相同时才有贡献，考虑到正负号，马上知

$$T_r(\hat{p}_{\nu\mu}\gamma_\sigma\hat{p}_\mu\gamma_\rho\gamma_5) = (p_{\nu\mu})_\alpha(p_\mu)_\beta 4\delta_{\alpha\sigma\beta\rho} = 4\Delta A. \quad (6.5.13)$$

式中 $\delta_{\alpha\sigma\beta\rho}$ 即 Levi-Civita 符号，$\Delta A \equiv (p_{\nu\mu})_\alpha(p_\mu)_\beta \times \delta_{\alpha\sigma\beta\rho}$，最后得

$$A = 4\{(p_{\nu\mu})_\sigma(p_\mu)_\rho + (p_{\nu\mu})_\rho(p_\mu)_\sigma - \\ - (p_{\nu\mu})_\alpha(p_\mu)_\alpha\delta_{\sigma\rho} + \Delta A\}. \quad (6.5.14)$$

对上式作变换

$$\hat{p}_{\nu\mu} \to \hat{p}_e, \hat{p}_\mu \to \hat{p}_{\nu e},$$

即得：

$$B = 4\{(p_e)_\sigma(p_{\nu e})_\rho + (p_e)_\rho(p_{\nu e})_\sigma - \\ - (p_e)_\alpha(p_{\nu e})_\alpha\delta_{\sigma\rho} + \Delta B\}.$$

$$\Delta B \equiv (p_e)_\alpha(p_{\nu e})_\beta\delta_{\alpha\sigma\beta\rho}. \quad (6.5.15)$$

计算 $A \cdot B$：

$$A \cdot B = 16\{(p_{\nu\mu})_\sigma(p_\mu)_\rho + (p_{\nu\mu})_\rho(p_\mu)_\sigma - \\ - (p_{\nu\mu}p_\mu)\delta_{\rho\sigma} + \Delta A\} \times \{(p_e)_\sigma(p_{\nu e})_\rho + \\ + (p_e)_\rho(p_{\nu e})_\sigma - (p_e p_{\nu e})\delta_{\rho\sigma} + \Delta B\}.$$

显然：

$$(p_{\nu\mu}p_\mu)\delta_{\rho\sigma}\Delta B = 0 = (p_e p_{\nu e})\delta_{\rho\sigma}\Delta A.$$

现证明如下类型的所有交叉项，例

$$\Delta A(p_e)_\sigma(p_{\nu e})_\rho = 0,$$

$$\Delta A\,(p_e)_\sigma(p_{\nu e})_\rho = (p_{\nu\mu})_\alpha(p_\mu)_\beta(p_e)_\sigma(p_{\nu e})_\rho \times \\ \times \delta_{\alpha\sigma\beta\rho} = (p_{\nu\mu})_\alpha(p_e)_\sigma(p_\mu)_\beta(p_{\nu e})_\rho \times$$

$$\times \delta_{\alpha\sigma\beta\rho} = \begin{vmatrix} p_{\nu\mu 1} & p_{\nu\mu 2} & p_{\nu\mu 3} & p_{\nu\mu 4} \\ p_{e1} & p_{e2} & p_{e3} & p_{e4} \\ p_{\mu 1} & p_{\mu 2} & p_{\mu 3} & p_{\mu 4} \\ p_{\nu e1} & p_{\nu e2} & p_{\nu e3} & p_{\nu e4} \end{vmatrix}.$$

考虑到能量、动量守恒律

$$p_\mu - p_e - p_{\nu\mu} - p_{\nu\mu} = 0,$$

马上看出上述行列式为 0. 类似可证所有交叉项为 0.

$$\text{故}\quad A\cdot B = 16\{2(p_{\nu\mu}p_e)(p_\mu p_{\nu e}) + 2(p_e p_\mu)\cdot \cdot(p_{\nu\mu}p_{\nu e}) - 4(p_e p_{\nu e})(p_{\nu\mu}p_\mu) + + (p_e p_{\nu e})(p_{\nu\mu}p_\mu)\delta_{\rho\sigma}\delta_{\rho\sigma} + \Delta A\Delta B\}$$

$$= 16\{2(p_{\nu\mu}p_e)(p_\mu p_{\nu e}) + 2(p_e p_\mu)(p_{\nu\mu}p_{\nu e}) + \Delta A\Delta B\}.$$

$$\text{又}\ \Delta A\Delta B = \delta_{\alpha\sigma\beta\rho}\delta_{\gamma\sigma\lambda\rho}(p_{\nu\mu})_\alpha(p_\mu)_\beta(p_e)_\gamma(p_{\nu e})_\lambda$$

$$= (2\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\lambda} - 2\delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\gamma})(p_{\nu\mu})_\alpha(p_\mu)_\beta(p_e)_\gamma(p_{\nu e})_\lambda$$

$$= 2(p_{\nu\mu}p_e)(p_\mu p_{\nu e}) - 2(p_{\nu\mu}p_{\nu e})(p_\mu p_e).$$

最后得:

$$A\cdot B = 16\times 4(p_{\nu\mu}p_e)(p_\mu p_{\nu e}). \tag{6.5.16}$$

或:$$F = 16\frac{(p_{\nu e}p_e)(p_\mu p_{\nu e})}{E_\mu E_e \omega_{\nu e}\omega_{\nu\mu}}. \tag{6.5.17}$$

计算反中微子 $\bar{\nu}_\mu$ 的态密度 ρ_E:

由 $\dfrac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_{\bar{\nu}}}{(2\pi)^3} = \rho_E \mathrm{d}E\mathrm{d}\Omega_{\bar{\nu}} = \dfrac{1}{(2\pi)^3}\omega^2_{\bar{\nu}_\mu}\mathrm{d}\omega_{\bar{\nu}_\mu}\mathrm{d}\Omega_{\bar{\nu}}$,得

$$\rho_E = \frac{\mathrm{d}\omega_{\nu\mu}}{\mathrm{d}E}\omega^2_{\nu\mu}\frac{1}{(2\pi)^3}. \tag{6.5.18}$$

设:μ^+ 子静止不动,由动量守恒,得

$$\boldsymbol{p}_e + \boldsymbol{p}_{\bar{\nu}_\mu} + \boldsymbol{p}_{\nu e} = 0,$$

能量守恒律得

$$E = m_\mu = E_e + \omega_{\bar{\nu}_\mu} + \omega_{\bar{\nu}e}$$

$$\text{故}\quad E = E_e + \omega_{\bar{\nu}_\mu} + |\boldsymbol{p}_{\nu e}| = E_e + \omega_{\bar{\nu}_\mu} + \sqrt{|\boldsymbol{p}_e|^2 + \omega^2_{\bar{\nu}\mu} + 2p_e\boldsymbol{p}_{\bar{\nu}_\mu}}$$

$$= E_e + \omega_{\bar{\nu}_\mu} + \sqrt{(|\boldsymbol{p}|^2 + \omega^2_{\nu\mu} + 2\boldsymbol{p}_e\cdot\frac{\boldsymbol{p}_{\bar{\nu}_\mu}}{\omega_{\bar{\nu}_\mu}})}.$$

$$\mathrm{d}E = \mathrm{d}\omega_{\bar{\nu}_\mu} + \frac{1}{2}\frac{2\omega_{\bar{\nu}_\mu}\mathrm{d}\omega^2_{\nu\mu} + 2\mathrm{d}\omega_{\bar{\nu}_\mu}\boldsymbol{p}_e\boldsymbol{p}_{\bar{\nu}_\mu}/\omega_{\bar{\nu}_\mu}}{\omega_{\nu e}}\left(\frac{\boldsymbol{p}_{\bar{\nu}_\mu}}{\omega_{\bar{\nu}_\mu}}\text{方向不变}\right)$$

$$= \mathrm{d}\omega_{\bar{\nu}_\mu} + \frac{1}{\omega_{\nu e}}(\omega_{\bar{\nu}_\mu}\mathrm{d}\omega_{\bar{\nu}_\mu} + \frac{\boldsymbol{p}_e\boldsymbol{p}_{\bar{\nu}_\mu}}{\omega_{\bar{\nu}_\mu}}\mathrm{d}\omega_{\bar{\nu}_\mu}$$

$$= \frac{d\omega_{\bar{\nu}_\mu}}{\omega_{\nu_e}\omega_{\bar{\nu}_\mu}}(\omega_{\nu_e}\omega_{\bar{\nu}_\mu} + \omega_{\nu_\mu}^2 + \boldsymbol{p}_e\boldsymbol{p}_{\bar{\nu}_\mu}).$$

代入(6.5.18)即得

$$\rho_E = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{\omega_{\nu_e}\omega_{\nu_\mu}^3}{\{\omega_{\bar{\nu}_\mu}(\omega_{\nu_e} + \omega_{\bar{\nu}_\mu}) + \boldsymbol{p}_e\cdot\boldsymbol{p}_{\bar{\nu}_\mu}}. \tag{6.5.19}$$

又 $\omega_{\nu_e} = m_\mu - E_e - \omega_{\bar{\nu}_\mu} = |\boldsymbol{p}_{\nu_e}| = \sqrt{\boldsymbol{p}_e^2 + \omega_{\nu_\mu}^2 + 2\boldsymbol{p}_e\boldsymbol{p}_{\bar{\nu}_\mu}}$.

即：$m_\mu^2 + E_e^2 + \omega_{\nu_\mu}^2 - 2m_\mu E_e - 2m_\mu\omega_{\bar{\nu}_\mu} + 2E_e\omega_{\bar{\nu}_\mu}$

$$= \boldsymbol{p}_e^2 + \omega_{\nu_\mu}^2 + 2\boldsymbol{p}_e\boldsymbol{p}_{\bar{\nu}_\mu}. \tag{6.5.20}$$

在 μ^+ 的实际衰变中，按能量守恒律绝大部分衰变能量106MeV 由正电子带走，与正电子动能相比较，正电子的静止质量(0.5MeV) 可忽略不计，因而近似成立

$$\boldsymbol{p}_e^2 = E_e^2.$$

故(6.5.20) 可简化为

$$m_\mu(m_\mu - 2E_e) = 2\{\omega_{\bar{\nu}_\mu}(m_\mu - E_e) + \boldsymbol{p}_e\boldsymbol{p}_{\bar{\nu}_\mu}\}. \tag{6.5.21}$$

或 $\boldsymbol{p}_e\boldsymbol{p}_{\bar{\nu}_\mu} = \frac{1}{2}\{m_\mu(m_\mu - 2E_e) - 2\omega_{\bar{\nu}_\mu}(m_\mu - E_2)\}$.

代入(6.5.20)，并考虑到能量守恒律

$$E_e + \omega_{\nu_e} + \omega_{\nu_\mu} - m_\mu = 0.$$

最后得：$\rho_E = \frac{2\omega_{\nu_e}\omega_{\nu_\mu}^3}{m_\mu(m_\mu - 2E_e)}\frac{1}{(2\pi)^3}$. (6.5.22)

把(6.5.22)、(6.5.17)代入(6.5.9)即得不考虑 μ^+ 和 e^+ 的极化时，正电子的动量在 $d^3\boldsymbol{p}_e$ 范围内，反中微子 $\bar{\nu}_\mu$ 在 $d\Omega_\nu$ 内的微分衰变几率

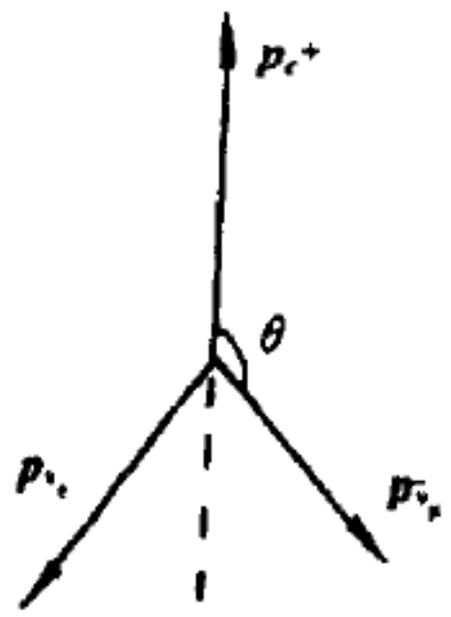
$$d\omega = \frac{G^2}{4\pi^5}\frac{(\omega_{\bar{\nu}_\mu}\cdot E_e - \boldsymbol{p}_e\boldsymbol{p}_{\bar{\nu}_\mu})\omega_{\nu_e}\omega_{\nu_\mu}^2}{m_\mu E_e(m_\mu - 2E_e)}d\Omega_{\bar{\nu}_\mu}d^3\boldsymbol{p}_e. \tag{6.5.23}$$

为求得 μ^+ 的总衰变几率或寿命，应对 $\Omega\,\bar{\nu}_\mu$、$\boldsymbol{p}_e$ 积分：

$$\omega = \frac{G^2}{4\pi^5}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}_e \frac{1}{m_\mu E_e(m_\mu - 2E_e)}\int \mathrm{d}\Omega_{\bar{\nu}_\mu}(\omega_{\bar{\nu}_\mu}E_e - \boldsymbol{p}_e \cdot \boldsymbol{p}_{\bar{\nu}_\mu})\omega_{\nu_e}\,\omega^2_{\bar{\nu}_\mu}.$$

(6.5.23′)

首先，对中微子$\bar{\nu}_\mu$的变量积分. 如图，选$\boldsymbol{p}_e$作极轴



$$\mathrm{d}\Omega_{\bar{\nu}_\mu} = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = -\,\mathrm{d}\cos\theta\,\mathrm{d}\varphi.$$

所以 $$\int \mathrm{d}\Omega_{\bar{\nu}_\mu}(\omega_{\bar{\nu}_\mu}E_e - \boldsymbol{p}_e\boldsymbol{p}_{\bar{\nu}_\mu})\omega_{\nu_e}\,\omega^2_{\bar{\nu}_\mu}$$

$$= -\,2\pi\int \mathrm{d}\cos\theta(\omega_{\bar{\nu}_\mu}E_e - \boldsymbol{p}_e\,\boldsymbol{p}_{\bar{\nu}_\mu})\omega_{\nu_e}\,\omega_{\bar{\nu}_\mu}.$$

(6.5.24)

注意，上述积分是在E_e，$\boldsymbol{p}_e$固定条件下对$\cos\theta$积分的. 由(6.5.21)得

$$2\{\omega_{\bar{\nu}_\mu} - (m_\mu - E_e) + E_e\omega_{\bar{\nu}_\mu}\cos\theta\} = m_\mu(m_\mu - 2E_e).$$

(6.5.21′)

故在m_μ、E_e、$\boldsymbol{p}_e$不变的条件下，$\omega_{\bar{\nu}_\mu}$是$\cos\theta$的函数，故应有

$$(m_\mu - E_e)\mathrm{d}\omega_{\bar{\nu}_\mu} + E_e\cos\theta\mathrm{d}\omega_{\bar{\nu}_\mu} + E_e\omega_{\bar{\nu}_\mu}\mathrm{d}\cos\theta = 0,$$

$$(m_\mu - E_e + \frac{\boldsymbol{p}_e \cdot \boldsymbol{p}_{\bar{\nu}_\mu}}{\omega_{\bar{\nu}_\mu}}\mathrm{d}\omega_{\bar{\nu}_\mu} + E_e\omega_{\bar{\nu}_\mu}\mathrm{d}\cos\theta = 0,$$

或 $$\mathrm{d}\cos\theta = -\,\frac{1}{E_e\omega_{\bar{\nu}_\mu}}\left(m_\mu - E_e + \frac{\boldsymbol{p}_e\,\boldsymbol{p}_{\bar{\nu}_\mu}}{\omega_{\bar{\nu}_\mu}}\right)\mathrm{d}\omega_{\bar{\nu}_\mu}.$$

将此结果代入(6.5.24)，得

$$\int \mathrm{d}\Omega_{\bar{\nu}_\mu}(\omega_{\bar{\nu}_\mu} \cdot E_e - \boldsymbol{p}_e\boldsymbol{p}_{\bar{\nu}_\mu})\omega_{\nu_e}\omega^2_{\bar{\nu}_\mu}$$

$$= 2\pi\int \frac{\mathrm{d}\omega_{\bar{\nu}_\mu}}{E_e}(m_\mu - E_e + \frac{\boldsymbol{p}_e\boldsymbol{p}_{\bar{\nu}_\mu}}{\omega_{\bar{\nu}_\mu}})$$

$$\cdot(\omega_{\bar{\nu}_\mu}E_e - \boldsymbol{p}_e\boldsymbol{p}_{\bar{\nu}_\mu})\omega_{\nu_e}\omega_{\bar{\nu}_\mu}. \qquad (6.5.25)$$

又，由(6.5.21)知

$$\omega_{\bar{\nu}_\mu}E_e - \boldsymbol{p}_e\boldsymbol{p}_{\bar{\nu}_\mu} = m_\mu(\omega_{\bar{\nu}_\mu} + E_e - \frac{m_\mu}{2}),$$

$$m_\mu - E_e + \frac{\boldsymbol{p}_e \boldsymbol{p}_{\bar{\nu}\mu}}{\omega_{\bar{\nu}\mu}} = \frac{m_\mu}{2\omega_{\bar{\nu}\mu}}(m_\mu - 2E_e).$$

将此二式代入(6.5.25)即可把(6.5.23)变为

$$\omega = \frac{G^2}{4\pi^4}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_e \frac{m_\mu}{E_e^2}\int \mathrm{d}\omega_{\bar{\nu}\mu}(\omega_{\bar{\nu}\mu} + E_e - \frac{m_\mu}{2})\omega_{\nu e}$$

$$= \frac{G^2}{4\pi^4}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_e \frac{m_\mu}{E_e^2}\int \mathrm{d}\omega_{\bar{\nu}\mu}(\omega_{\bar{\nu}\mu} + E_e - \frac{m_\mu}{2})$$

$$\cdot (m_\mu - E_e - \omega_{\bar{\nu}\mu}).$$

(因为 $m_\mu = E_e + \omega_{\nu e} + \omega_{\bar{\nu}\mu}$)

由(6.5.21)得

$$\omega_{\bar{\nu}\mu} = \frac{1}{2}\frac{m_\mu^2 - 2m_\mu E_e}{m_\mu - E_e + E_e\cos\theta}.$$

$$\begin{cases} \text{当 } \theta = 0 \text{ 时}, (\omega_{\bar{\nu}\mu})_{\min} = \frac{1}{2}m_\mu - E_e. \\ \text{当 } \theta = \pi \text{ 时}, (\omega_{\bar{\nu}\mu})_{\max} = \frac{1}{2}m_\mu. \end{cases}$$

故$\int \mathrm{d}\omega_{\bar{\nu}\mu}(\omega_{\bar{\nu}\mu} + E_e - \frac{m_\mu}{2})(m_\mu - E_e - \omega_{\bar{\nu}\mu})$

$$= \left[\left(\frac{3}{4}m_\mu - E_e\right)\omega_{\bar{\nu}\mu}^2 - (m_\mu - E_e)(\frac{m_\mu}{2} - E_e)\omega_{\bar{\nu}\mu} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3}\omega_{\bar{\nu}\mu}^3 \right]_{(\omega_{\bar{\nu}\mu})\min}^{(\omega_{\bar{\nu}\mu})\max}$$

$$\omega = \frac{G^2}{4\pi^4}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_e m_\mu(\frac{1}{4}m_\mu - \frac{1}{3}E_e)$$

$$= \frac{G^2}{4\pi^4}\int E_e^2 \mathrm{d}E_e \mathrm{d}\Omega_e m_\mu(\frac{1}{4}m_\mu - \frac{1}{3}E_e)$$

$$= \frac{G^2}{\pi^3}\int_0^{m_\mu/2} m_\mu \mathrm{d}E_e(\frac{1}{4}m_\mu E_e^2 - \frac{1}{3}E_e^3)(\text{对 } \mathrm{d}\Omega_e \text{ 积分得 } 4\pi)$$

$$= \frac{G^2 m_\mu^5}{19\ 2\pi^3}. \qquad (6.5.26)$$

$$\tau_\mu = \frac{1}{\omega}.$$

利用实验测$\frac{1}{\omega}=\tau_\mu=(2.200\pm0.002)\times10^{-6}$s.

$$m_\mu=105.653\pm0.002\text{MeV}.$$

可算出弱耦合常数

$$G=(1.431\pm0.001)\times10^{-49}\text{erg}\cdot\text{cm}^3$$
$$=(3.037\pm0.003)\times10^{-12}\text{(自然单位制)}.$$

此值与其它方法算得的值符合良好. 由(6.5.26)易得出非极化μ^+粒子的β衰变微分几率为：

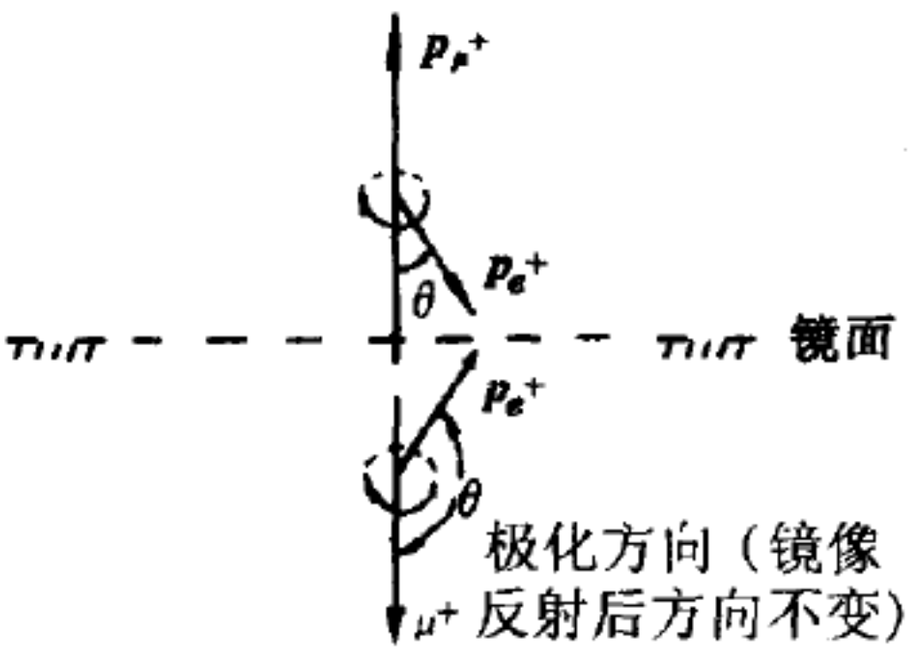
$$\frac{d\omega}{d\Omega_e}=\frac{G^2m_\mu^2}{48\pi^4}(3-\frac{4E_e}{m_\mu})E_e^2dE_e. \qquad (6.5.27)$$

可见，非极化μ^+粒子的衰变电子的角分布是各向等性的. 如果μ^+是极化的，仿照上述计算可以求出衰变电子的角分布公式为

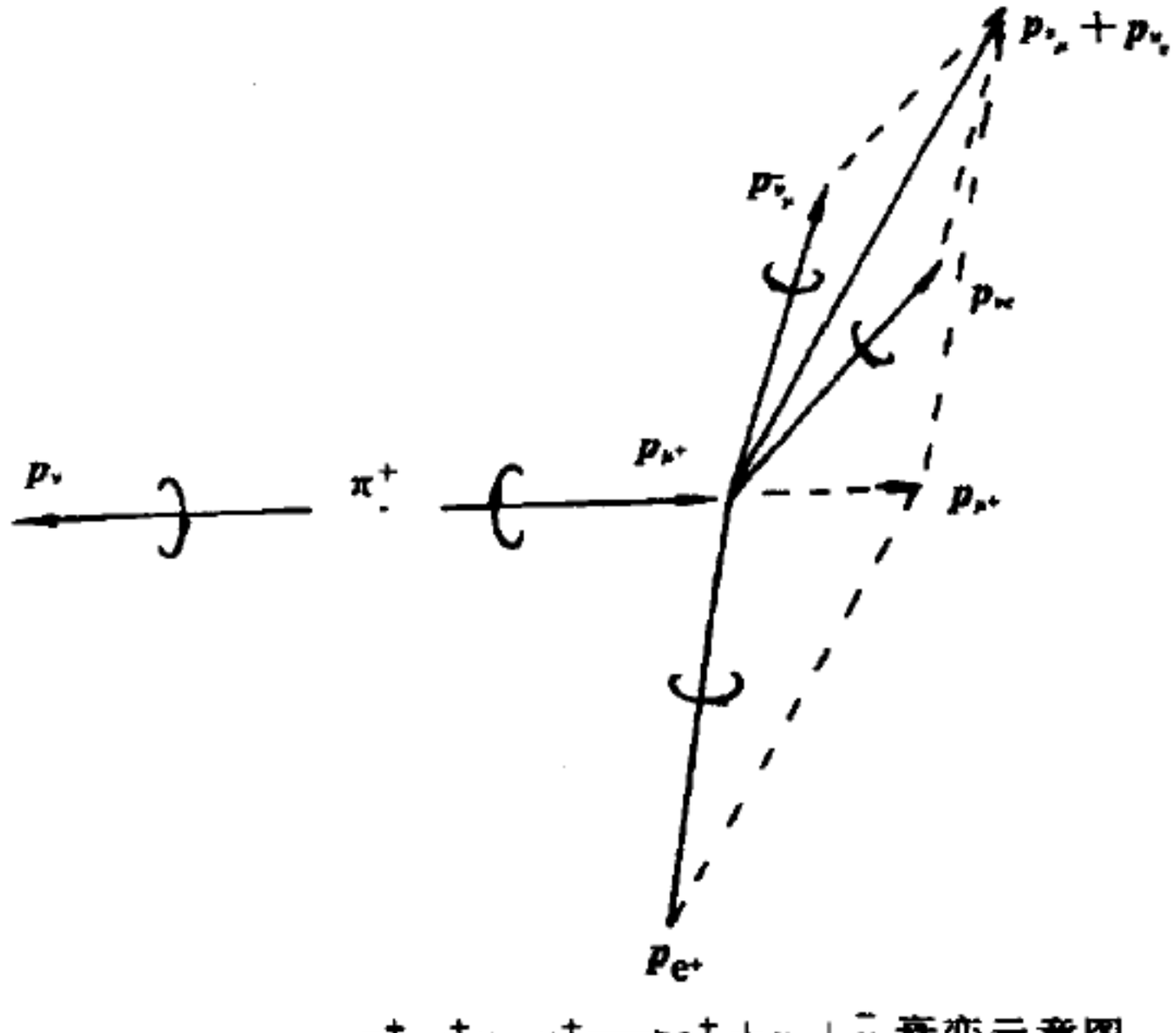
(G. Kallen. Elementary Particle Physics　§14.5)

$$\frac{d\omega}{d\Omega_e}=\frac{G^2m_\mu^2}{48\pi^4}[3-\frac{4E_e}{m_\mu}+(1-\frac{4E_e}{m_\mu})\cos\theta]E_e^2dE_e. \qquad (6.5.28)$$

式中θ是衰变电子动量的方向与μ^+极化方向之间的夹角，可见衰变电子的角分布相对于μ^+的极化方向是各向异性的. 由于极化矢量是个膺矢量，在镜像反射后方向不变，而动量矢量是矢量，在镜像反射后变号，上述公式不具有空间反射不变性. 因之在上述弱衰变过程中宇称不守恒. 在静止的$\pi^+\to\mu^+ + \nu_\mu$的衰变中，两个衰变粒子的总角动量和总动量均为0，由于ν_μ是左旋的，μ^+也应是左旋的，在吴健雄用Co^{60}的β衰变首次实验证实在弱衰变中宇称不守恒数天后，Garwin、Friedman等人也用μ^+的β衰变证实了在弱衰变中的宇称不守恒. 实验发现衰变正电子出现前后不对称性，在μ^+运动方向的后方或与μ^+极化矢量同方向的正电子较多，这与分布公式(6.5.28)的预言是一



致的.



$\pi^\pm\ \mu^+\nu_\mu, \mu^+ \longrightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$衰变示意图

第7章　重整化

§7.1　发散困难

在理论物理的某些计算中，常会得出无穷大的结果，这就是所谓发散困难.

例如，经典物理中存在下述发散困难：

在经典电子论中，企图建立有限大小的电子模型碰到一系列严重困难（例如内聚力问题，难以对电子的内部运动进行满意描述等（详见张宗遂. 电动力学与狭义相对论，§56），因此目前在经典和量子论中只好把电子当做一个点，电子的自能（电磁相互作用自能）按电荷作为均匀球面分布或均匀球体分布分别是$\frac{1}{2}\frac{e^2}{r}$和$\frac{3}{5}\frac{e^2}{r}$，显然在点模型情况下，它们都是发散的.

在绝对黑体辐射的经典理论中也存在发散困难，在空腔的平衡辐射中，在体积V和波数间隔$(k, k+\mathrm{d}k)$内的振动数

$$\mathrm{d}n_k = \frac{V}{(2\pi)^3}\mathrm{d}^3k = \frac{V}{(2\pi)^3}k^2\mathrm{d}k\mathrm{d}\Omega.$$

对$\mathrm{d}\Omega$积分后可得单位体积内的振动数

$$\mathrm{d}n_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\mathrm{d}\nu.$$

式中考虑到了电磁波的两个偏振方向.

在$(\nu, \nu+\mathrm{d}\nu)$间隔内的辐射能密度为

$$\rho_\nu\mathrm{d}\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\mathrm{d}\nu\,\bar{\epsilon}_\nu. \tag{7.1.1}$$

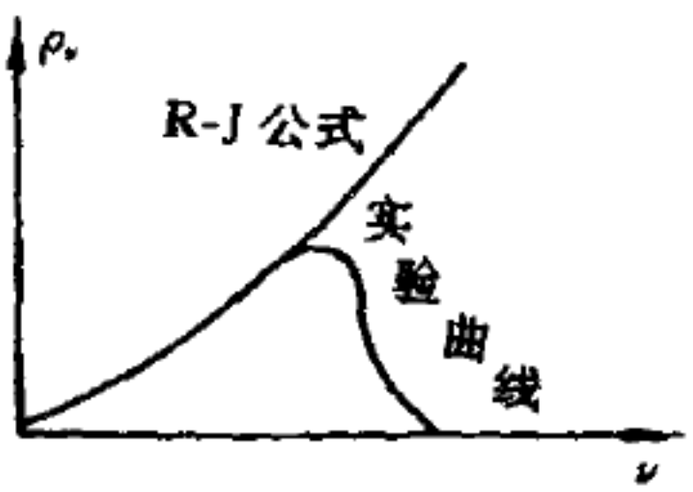
按经典力学能量按自由度均分定律，对一维谐振子

$$\bar{\varepsilon}_\nu = kT.$$

代入(7.1.1)即得黑体辐射的谐密度——Rayleigh-Jeans 公式：

$$\rho_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}kT. \tag{7.1.2}$$

理论与实验比较即知上述公式存在紫外发散困难，这就是 20 世纪初期经典物理学所遇到的有名的发散困难.



然而根据 J. A. Wheeler 的看法：物理学所碰到的最大危机却是广义相对论中的奇点困难，在弗里德曼宇宙论中，若 Hubble 常数 $H > 0$ 和强能量条件 $\rho + 3p \geqslant 0$ 在宇宙以往的演化中始终成立，则必存在一个时刻 t_0，使得尺度因子 $a(t_0) = 0$，这时 Robertson-Walker 度规：

$$\mathrm{d}S^2 = \mathrm{d}t^2 - a^2(t)\left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2} + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)\right]. \tag{7.1.3}$$

在 t_0 时刻将出现曲率奇异性，它意味着：在 t_0 时刻，时空曲率 $R = 6a^{-1}[\ddot{a} + a^{-1}(\dot{a}^2 + k)]$ 和物质密度 $\rho_{t_0} = \frac{3[a^2(t_0) + k]}{8\pi G a^2(t_0)}$ 均为无穷大.

众所周知，经典黑体辐射的紫外发散困难的解决导致了量子论的诞生，然而电子自能的发散困难与点模型有关，无论是经典理论 和量子理论均未得到真正的解决. 至于广义相对论中的奇点困难 至今仍是一个吸引大家研究的重大课题，它说明经典广义相对论在 t_0 时失效，它的解决可能需要量子引力理论的建立.

在量子电动力学中，发散困难更为严重，上一章的具体计算表明，各种量子电动力学过程的最低阶树图近似是有限的，并与实验结果符合良好，但所有较高阶的圈图计算又多是发散的. 因此有必要 弄清楚，这种高阶发散困难在目前的量子电动力学理论方案中

是否可以避免. 经过 40 年代末期许多人的研究，弄清楚了量子电动力学中的所有圈图发散都可以通过引入电荷和质量的重整化 (Renormalization) 而加以消除.

电子的可观测质量 m 可看做由不可观测的电子固有质量 m_0 和不可观测的电子电磁质量 δm 的和 $m = m_0 + \delta m$，在点模型中，虽然 $\delta m = \infty$，但必须认为 $m_0 + \delta m$ 仍然是有限值，这种把计算中的某种发散项吸收到不可观测的部分质量中去的处理方法叫质量重整化.

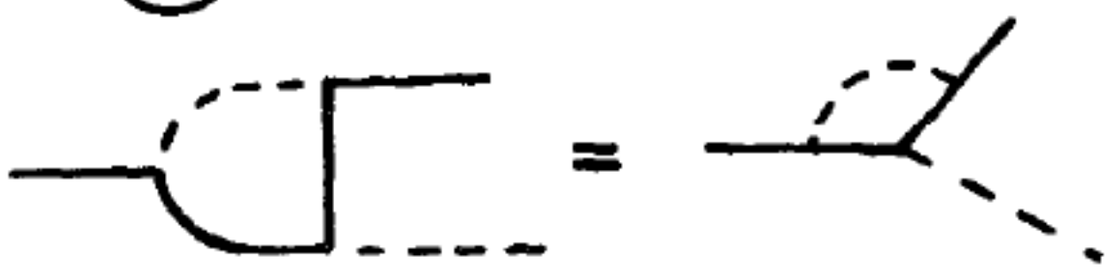
同样，电子的可观测电荷 e 可看做不可观测的电子固有电荷 e_0 和电子所引起 Dirac 真空场发生极化而产生的不可观测的附加电荷 δe 之和：$e = e_0 + \delta e$，可把计算中的某类发散项吸收到 δe 中去，并使 $e = e_0 + \delta e$ 仍为观测到的有限值，这种处理方法叫电荷重整化. 我们将指出，只要在量子电动力学中引入质量和电荷的重整化，一切圈图发散就可以消除了.

§7.2 原始发散圈图

将在 §7.3 证明：导致量子电动力学计算结果发散的原始发散图形只有三种圈图，即：

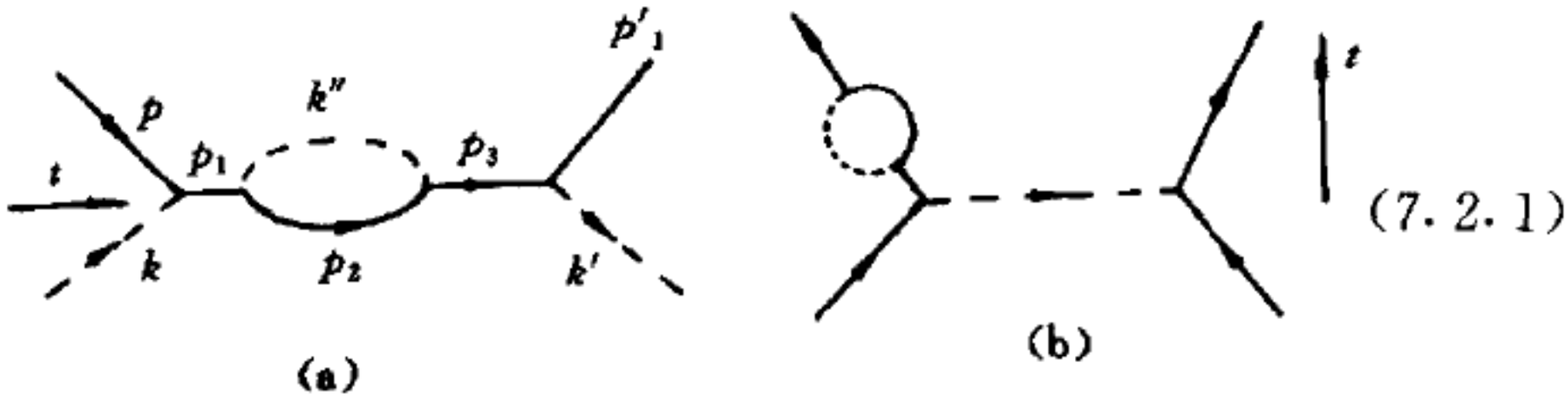
电子自能图：

光子自能图：

顶角辐射图：

电子自能图反映电子与电磁场真空的相互作用；光子自能图反映光子与 Dirac 真空的相互作用，由于电磁场引起真空中出现电荷和电流的分布，故光子自能图又叫真空极化图. 顶角辐射图反映顶角附近电子放出和吸收虚光子的过程，任何一个 Feyman 图如果含有上述原始发散圈图，相应的 S 矩阵元就是发散的.

例：



图(7.2.1a)、(7.2.2a)、(7.2.3a) 表示 Compton 散射的三种不同的 4 阶过程. 图(7.2.1b)、(7.2.2b)、(7.2.3b) 表示 Möller 散射的三种不同的 4 阶过程，下面我们证明：这些过程都是发散的.

7.2.1. 电子自能图

按 Feynman 规则可写下(7.2.1a) 的 S 矩阵元为：

$$\langle f|S^{(4)}|\mathrm{i}\rangle = e^4\int \mathrm{d}^4p_3\mathrm{d}^4p_2\mathrm{d}^4p_1\mathrm{d}^4k''(2\pi)^4 \cdot \delta(p'+k'-p_3)(2\pi)^4\delta(p_1-k''-p_2)$$

$$\cdot (2\pi)^4\delta(k''+p_2-p_3)(2\pi)^4$$

$$\cdot \delta(p+k-p_1)\bar{U}_{p'}\gamma_\mu \frac{e_\mu'}{\sqrt{2\omega}} \cdot \frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}$$

$$\cdot \frac{\mathrm{i}\hat{p}_3-m}{p_3^2+m^2}\gamma_\nu \frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}\hat{p}_2-m}{p_2^2+m^2}$$

$$\cdot \delta_{\nu\lambda}\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\frac{1}{k''^2}\nu_\lambda \frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}$$

$$\cdot \frac{\mathrm{i}\hat{p}_1-m}{p_1^2+m^2}\frac{e_\rho}{\sqrt{2\omega}}\gamma_\rho U_p$$

$$= e^2(2\pi)^8\delta(p+k-p'-k')\frac{1}{2\sqrt{\omega'\omega}}$$

$$\cdot \bar{U}_{p'}\gamma_\mu e'_\mu \frac{-\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}(\hat{p}'+\hat{k}')-m}{(2\pi)^4(p'+k')^2+m^2}\times$$

$$\Sigma(p_1)\frac{-\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}(\hat{p}+\hat{k})-m}{(2\pi)^4(p+k)^2+m^2}e_\nu\gamma_\nu U_p. \qquad (7.2.4)$$

式中 $\Sigma(p_1)=e^2(2\pi)^8\int_{c_f}\mathrm{d}^4k''\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\frac{1}{k''^2}\gamma_\lambda\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}$

$$\times\frac{\mathrm{i}(\hat{p}_1-\hat{k}'')-m}{(p_1-k'')^2+m^2}\gamma_\lambda,(p_1=p+k). \qquad (7.2.5)$$

因之在 4 级近似下的电子 Feyman 传播量 $S_f(p)$ 应修改为

$$S'_f(p)=S_f(p)+S_f(p)\Sigma(p)S_f(p).$$

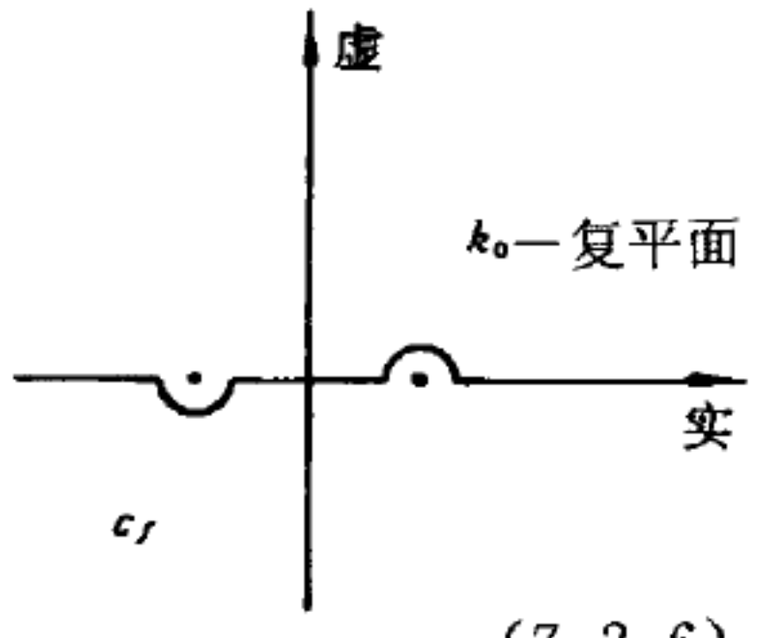
由于 $S_f(p)$ 是一个 Lorentz 标量，故 $\Sigma(p)$ 也是一个 Lorentz 标量.

与 $\langle f|S^{(2)}|\mathrm{i}\rangle$ 比较，电子自能部分对 S 矩阵元的贡献表现为多了一个标量因子 $\Sigma(p)$，我们已经知道，$\langle f|S^{(2)}|\mathrm{i}\rangle$ 是收敛的，现在我们要指出：Σ 是发散的，因之 $\langle f|S^{(4)}|\mathrm{i}\rangle$ 也是发散的.

如右图所示，Σ 中对 k_0 的积分路径可从 c_f 移到虚轴，积分结果不变(因为 k_0 复平面 Ⅰ、Ⅱ 二象限内无奇点)，这相当于在 Σ 式中作变换：$k_0\to \mathrm{i}k$. 因之 k^2 变为 $k^2=k_0^2+k_1^2+k_2^2+k_3^2$，这就是 k 空间的欧氏化.

可引入 4 维 k 空间的球坐标：

$$\left.\begin{aligned} k_0 &= k\cos\phi, \\ k_3 &= k\sin\phi\cos\theta, \\ k_2 &= k\sin\phi\sin\theta\,\sin\varphi, \\ k_1 &= k\sin\phi\sin\theta\,\cos\varphi \end{aligned}\right\}$$



后，$\mathrm{d}^4k = \mathrm{d}k_0\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2\mathrm{d}k_3$

$$= k^3\mathrm{d}k\mathrm{d}\varphi\sin\theta\mathrm{d}\theta\sin^2\phi\mathrm{d}\phi. \qquad (7.2.6)$$

由(7.2.6)易看出当 k 甚大时，Σ 可视作 $\int \mathrm{d}^4k\,\frac{1}{k^3}$ 和 $\int \mathrm{d}^4k\,\frac{1}{k^4}$ 二项之和. 前者线性发散，后者对数发散. 总的说来 Σ 是线性发散的.

由 $(p-k)^2 = (\hat{p}-\hat{k})^2, p^2 = \hat{p}^2, k^2 = \hat{k}^2$ 可把(7.2.5)改写成：

$$\Sigma(\hat{p}) = -e^2\int \mathrm{d}^4k\gamma_\mu \frac{\mathrm{i}(\hat{p}-\hat{k})-m}{(\hat{p}-k\hat{k})^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon}\gamma_\mu \frac{1}{\hat{k}^2-\mathrm{i}\epsilon}. \qquad (7.2.7)$$

命(7.2.7)中被积函数为 $F(\hat{k},\hat{p})$，可在 $\hat{p} = \mathrm{i}m$ 点或质壳附近按 $\hat{p}$ 作 Tayler 展开：

$$F(\hat{p},\hat{k}) = F(\mathrm{i}m,\hat{k}) + (\hat{p}-\mathrm{i}m)\left\{\frac{\partial}{\partial\hat{p}}F(\hat{p},\hat{k})\right\}_{\hat{p}=\mathrm{i}m} + (\hat{p}-\mathrm{i}m)^2F_1(\hat{p},\hat{k}). \qquad (7.2.8)$$

引入：

$$\left.\begin{aligned} J_0 &\equiv -e^2\int \mathrm{d}^4kF(\mathrm{i}m,k), \\ J_1 &\equiv \mathrm{i}e^2\int \mathrm{d}^4k\left\{\frac{\partial}{\partial\hat{p}}F(\hat{p},\hat{k})\right\}_{\hat{p}=\mathrm{i}m}, \\ \Sigma_c &= +e^2\int \mathrm{d}^4kF_1(\hat{p},\hat{k}). \end{aligned}\right\} \qquad (7.2.9)$$

可把(7.2.7)写成

$$\Sigma(\hat{p}) = J_0 + (\mathrm{i}\hat{p}+m)J_1 + (\mathrm{i}\hat{p}+m)^2\Sigma_c(\hat{p}). \qquad (7.2.10)$$

可看出：

(1)J_0 是线性发散的.

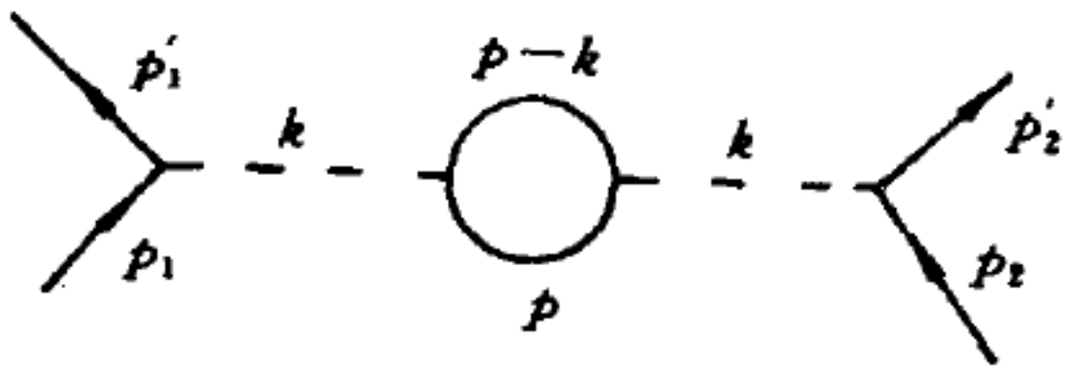
J_1 是对数发散的，Σ_c 是收敛的(因为分母的阶减分子的阶等于或大于 2)，故对于自由电子，(7.2.10) 第三项等于 0，因而 $\Sigma(\hat{p})$

$$= J_0 + (\mathrm{i}\hat{p} + m)J_1. \tag{7.2.10'}$$

(2)J_0 和 J_1 是 Lorentz 标量.

7.2.2. 光子自能图

以 Möller 散射为例，包含光子自能部分的最低阶过程是如下的 Feynman 图：



可以求出：$\langle f|S^{(4)}|\mathrm{i}\rangle = -e^2\delta(p_1 + p_2 - p_1' - p_2')$

$$\bar{U}_{\rho'}(p_2')\gamma_\mu U_\rho(p_2)\frac{1}{(p_2 - p_2')^2}\pi_{\mu\omega}\frac{1}{(p_1 - p_1')^2}\cdot$$

$$\bar{U}_{S'}(p_1')\gamma_\nu U_S(p_1).$$

式中：$\pi_{\mu\omega} \equiv e^2\int \mathrm{d}^4 p T_r\left[\gamma_\mu \frac{\mathrm{i}\hat{p} - m}{p^2 + m^2}\gamma_\nu \frac{\mathrm{i}(\hat{p} - \hat{k}) - m}{(p-k)^2 + m^2}\right]$. (7.2.11)

因之在 4 级近似下，光子的 Feynman 传播量 $D_{f,\mu\omega}(k)$ 应修改为 $D'_{f\mu\omega} = D_{f,\mu\omega} + D_{f\mu\lambda}\pi_{\lambda\sigma}D_{f\sigma\nu}$. 由 $D_{f,\mu\omega}$ 是一个 Lorentz 张量，$\pi_{\mu\omega}$ 也是一个 Lorentz 张量，与 $\langle f|S^{(2)}|\mathrm{i}\rangle$ 比较，光子自能部分，对 S 矩阵元的贡献表现为多了一个张量因子 $\pi_{\mu\omega}(k)$. 已知 $\langle f|S^{(2)}|\mathrm{i}\rangle$ 是收敛的，我们马上指出，由于 $\pi_{\mu\omega}$ 是发散的，$\langle f|S^{(4)}|\mathrm{i}\rangle$ 也是发散的.

由(7.2.6) 和(7.2.11) 知，当 $p \to \infty$ 时，

$$\pi_{\mu\omega} \sim \int \mathrm{d}^4 p \frac{1}{p^2}$$ 是二次发散的.

因之，$\langle_f|S^{(4)}|\rangle_i$ 也是发散的.

导致圈图近似发散的光子自能项或 Feynman 图可以有两种不同的物理解释，即：

其一，一个电子放出一个虚光子 k，这个虚光子与 Dirac 真空场发生相互作用，转化为虚正负电子对，然后又湮灭成一个虚光子去影响另一个电子的运动.

其二，电荷和电流产生一个外电磁场(非量子化的经典场)k，(k 不在质壳上，$k^2 \neq 0$)，在此外电磁场的作用下，Dirac 真空发生极化，产生真空极化电荷和电流，后者又产生一个新的电磁场去影响别的电荷的运动. 习惯上两种情况都叫作真空极化效应.

我们求真空极化电流：

按第一种解释，可把 Möller 散射(7.2.11) 改写为：

$$\langle_f|S^{(4)}|\rangle_i = e^2(2\pi)^8\int d^4k\bar{U}_r(p_2')\gamma_\mu U_r(p_2)D_f(k)$$
$$\pi_{\mu\omega}(k)D_f(k)\bar{U}_{S'}(p_1')\gamma_\nu U_S(p_1)$$
$$\delta(p_1 - k - p_1')\delta(p_2 + k - p_2'). \qquad (7.2.12)$$

故：$\langle_f|S^{(2)} + S^{(4)}|\rangle_i = e^2(2\pi)^3\int d^4k\bar{U}_r(p_2')\gamma_\mu U_r(p_2) \times$
$$\times D^2_{f,\mu\omega}(k)\bar{U}_{S'}(p_1')\gamma_\nu U_S(p_1) \times$$
$$\times \delta(p_1 - k_1 - p_1')\delta(p_2 + k - p_2'). \qquad (7.2.13)$$

其中二次近似的光子传播量为：

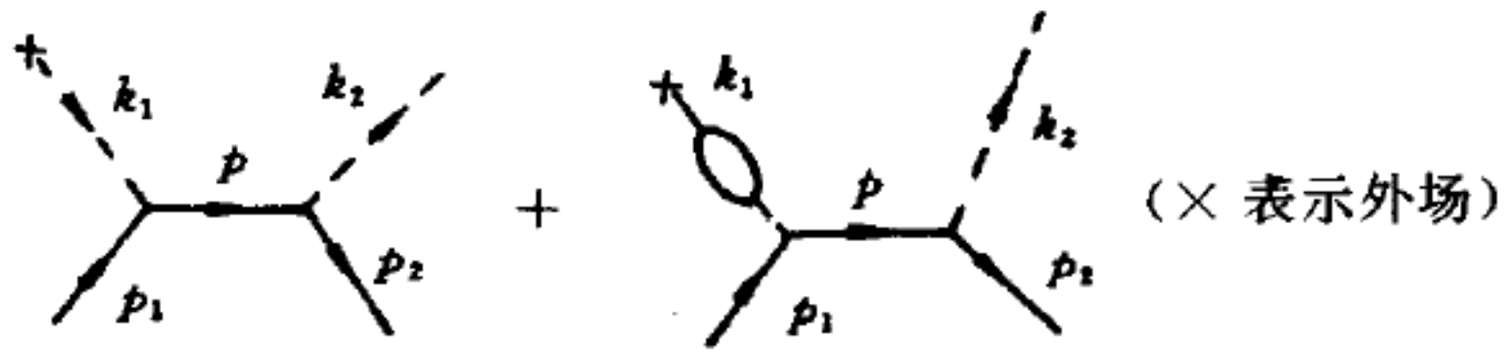
$$D^{(2)}_{f\mu\omega}(k) = \delta_{\mu\omega}D_f(k) + D_f(k)\pi_{\mu\omega}(k)D_f(k) \qquad (7.2.14)$$
$$= D_f(k)(\delta_{\mu\omega} + \pi_{\mu\omega}(k)D_f(k)) \text{—— 二次传播量.}$$

可见，按第一种解释，内部光子线的自能部分对 S 矩阵的贡献是把代表内部光子线的一次传播量 $\delta_{\mu\omega}D_f(k)$ 修改为二次传播量.

$$D^{(2)}_{f\mu\omega}(k) = \delta_{\mu\omega}D_f(k) + D_f(k)\pi_{\mu\omega}(k)D_f(k).$$

按第二种解释，可以考虑如下的韧致辐射：

入射电子 p_1 在外场 k_1 作用下发生加速，放出光子 k_2，若考虑到真空极化效应，则：



（× 表示外场）

$$\langle_f |S^{(2)} + S^{(4)}| \rangle_i = e^2(2\pi)^8\delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2)$$

$$[\bar{U}_S(p_2)\frac{e_2}{\sqrt{2\omega}}S_f(p_1 - k_1)a_\mu(k_1) \times$$

$$\times \gamma_\mu U_S(p_1) + \bar{U}_S(p_2)\frac{\hat{e}_2}{\sqrt{2\omega}}S_f(p_1 - k_1) \times$$

$$\times a_\mu(k_1)\pi_{\mu\omega}(k_1)\mathrm{D}_f(k_1)\gamma_\nu U_S(p_1)]$$

$$= e^2(2\pi)^8\delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2)\bar{U}_S(p_2) \times$$

$$\times \frac{\hat{e}_2}{\sqrt{2\omega}}S_f(p_1 - k_1)a_\nu^{(2)}\gamma_\nu U_S(k_1).$$

其中，$a_\nu^{(2)}(k_1) = a_\mu\delta_{\mu\omega} + a_\mu\pi_{\mu\omega}D_f = a_\nu(k_1) + \delta a_\nu(k_1)$，

$$\delta a_\nu(k_1) = -\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\frac{1}{k_1^2}a_\mu(k_1)\pi_{\mu\omega}(k_1). \qquad (7.2.15)$$

可见，按第二种解释，外场的真空极化效应对 S 矩阵的影响是把代表外场的 a_μ 修改为 $a_\mu^{(2)} = a_\mu + \delta a_\mu$，其中 $\delta\alpha_\mu$ 即由真空极化效应所产生的一个附加电磁场.

由于在 X 表象中，

$$J_\mu(x) = -\Box A_\mu(x).$$

对 $A_\mu(x)$，$J_\mu(x)$ 作富氏展开：$A_\mu(x) = \int a_\mu(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}^4k$，$J_\mu(x) = \int J_\mu(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}^4k$ 即知应成立：

$$J_\mu(k) = k^2 a_\mu(k).$$

这就是在 k 表象中的电流 4 密度与电场 4 矢势之间的关系，对于真空极化的附加电场 $\delta a_\mu(k)$ 与真空极化电流 $\delta j_\mu(k)$ 应成立类似关系：

$$\delta j_\mu(k) = k^2 \cdot \delta a_\mu(k) = -\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\pi_{\mu\omega}(k)a_\upsilon(k). \quad (7.2.16)$$

由 $U(1)$ 规范不变性可推得在动量表象中真空极化电流所应遵守的电荷守恒率 $k_\mu\delta j_\mu(k) = 0$(k 空间的电荷守恒律)

或：$k_\mu\pi_{\mu\omega}(k)a_\nu(k) = 0.$

此式对任意外场 $a_\nu(k)$ 均应成立，故得：

$$k_\mu\pi_{\mu\omega}(k) = 0. \quad (7.2.17)$$

由于：(Ⅰ)$\pi_{\mu\omega}(k)$ 是一个 Lorentz 二级张量，

(Ⅱ)$\pi_{\mu\omega}(k)$ 仅是 k_μ 的函数.

故：$\pi_{\mu\omega}(k)$ 的最普遍形式只能是：

$$\pi_{\mu\omega}(k) = k_\mu k_\nu C(k^2) + \delta_{\mu\omega}D(k^2).$$

由(7.2.17)马上得：$k^2C(k^2) + D(k^2) = 0.$

(注意：外电磁场 k 不在质壳上，即 $k^2 \neq 0$)

或 $\pi_{\mu\omega} = (k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\omega}k^2)C(k^2).$ (7.2.18)

设(7.2.11)中被积函数为 $F_{\mu\omega}(k,p)$，积分后，满足要求(7.2.18)的惟一可能性是

$$F_{\mu\omega}(k,p) = (k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\omega}k^2)F(k^2p). \quad (7.2.19)$$

以(7.2.19)代入(7.2.18)即得：$C(k^2) = \int \mathrm{d}^4pF(k^2p).$ (7.2.20)

由(7.2.11)知，当 k,p 均甚大时，$F_{\mu\omega}(k,p)$ 近似是 k,p 的二元齐次函数，即：

$$F_{\mu\omega}(\alpha k,\alpha p) \approx \alpha^n F_{\mu\omega}(k,p), n = -2.$$

或：$\alpha^2(k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\omega}k^2)F(\alpha^2k^2,\alpha p)$

$$= \alpha^n(k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\omega}k^2)F(k^2,p).$$

或：$F[(\alpha k)^2,\alpha p] = \alpha^{n-2}F(k^2,p).$ (7.2.21)

这表示，当 k,p 均甚大时，$F(k^2,p)$ 仍是 k,p 的二元齐次函数，但比 $F_{\mu\omega}(k,p)$ 低 2 阶，但如前所述，当 $p \to \infty$ 时，$F_{\mu\omega}(k,p) \to p^{-2}$，故 $F(k^2,p) \to p^{-4}$，显然由(7.2.20)知，$C(k^2)$ 是对数发散.

把 $F(k^2,p)$ 按 k^2 作 Taylor 展开得：

$$F(k^2,p) = F(0,p) + k^2F'(k^2,p)|_{k^2=0} + \cdots$$
$$= F(0,p) + F_1(k^2,p).$$

其中 $F_1(k^2,p)$ 代表各阶导数之和，由于当 $p \to \infty$ 时 $F_1(k^2p)$ 最少以 p^{-5} 趋于 0，这是因为：

$$F_1(k^2,p) = k^2 \frac{\partial}{\partial k^2}F(k^2,p) \to k^2 \frac{\partial}{\partial k^2} \frac{1}{(k^2+p)^4}$$
$$= k^2(-4) \frac{1}{(k^2+p)^5} \frac{\partial}{\partial k^2}(k^2+p)$$
$$= (-4) \frac{k^2}{(k^2+p)^5}.$$

故 $\int d^4pF_1(k^2,p)$ 应收敛.

(7.2.20) 可改写成：

$$C(k^2) = C_0 + \int d^4pF_1(k^2,p) = C_0 + \frac{1}{k^2}\pi_c(k^2). \tag{7.2.22}$$

其中，$C_0 \equiv \int d^4pF(0,p)$ 显然也是对数发散的.

$\pi_C(k^2) \doteq k^2\int d^4pF_1(k^2,p)$ 是收敛的.

最后结果是：二次光子传播量中的四级贡献可写为：

$$\pi_{\mu\nu}(k) = (k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu}k^2)C_0 + (k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu}k^2) \times$$
$$\times \frac{1}{k^2}\pi_C(k^2). \tag{7.2.23}$$

其中第一项是对数发散，第二项是一个有限值. 以后将证明发散积分代表电荷的改变，收敛积分代表可观测效应.

发散部分为：

$$\langle_f |S^{(4)}| \rangle_i|_{\text{div}} = e^2(2\pi)^8\delta(p_1+p_2-p'_1-p'_2)\,\overline{U}_\gamma(p'_2) \cdot$$
$$\cdot \gamma_\mu U_\gamma(p_2)D_f(p_2-p'_2)(k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu}k^2) \cdot$$
$$\cdot C_0D_f(p_1-p'_1)\overline{U}_S(p'_1)\gamma_\nu U_S(p_1)$$
$$= -e^2(2\pi)^8\delta(p_1+p_2-p'_1-p'_2) \cdot$$

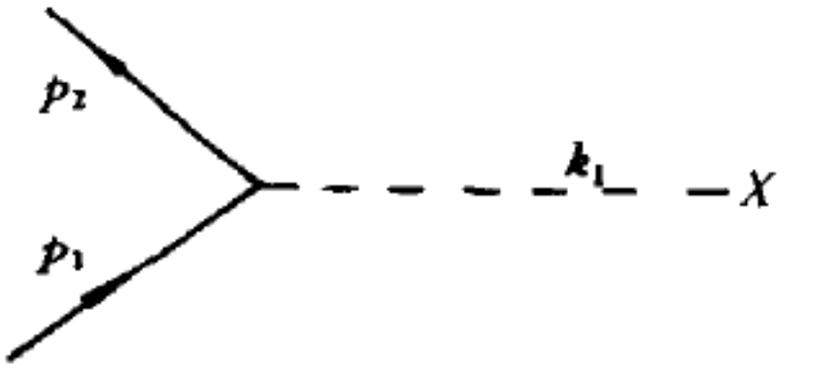
$$\overline{U}_\gamma(p'_2)\gamma_\mu U_\gamma(p_2)\cdot D_f(p_2-p'_2)k^2\cdot$$
$$\cdot C_0 D_f(p_1-p'_1)\overline{U}_S(p'_1)\gamma_\mu U_S(p_1). \tag{7.2.23}$$

式中考虑到了电荷守恒律

$$\overline{U}_\gamma(p'_2)\gamma_\mu U_\gamma(p_2)k_\mu=0,(j_\mu k_\mu=0).$$

7.2.3. 顶角辐射图

包含顶角部分的 Feynman 图可以反映一个电子为一个外电磁场所散射的一阶过程：

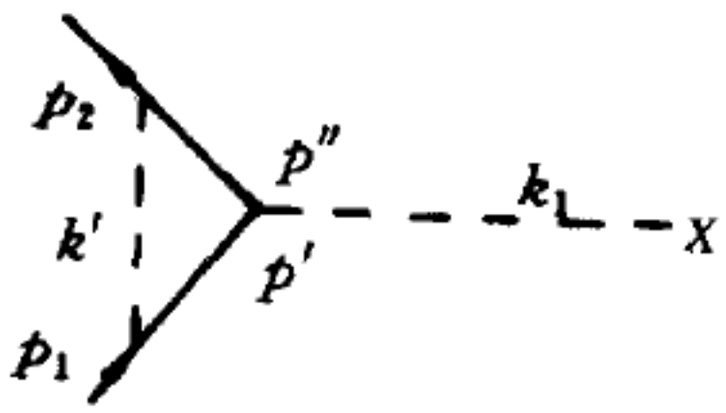


(7.2.24)

$$\langle_f|S^{(1)}|\rangle_i=(-e)(2\pi)^4\delta(p_1-p_2-k_1)\,\overline{U}_2(p_2)\gamma_\mu U_1(p_1)\times$$
$$\times a_\mu(k_1).$$

式中 $a_\mu(k)=\int a_\mu(x)e^{-ikx}d^4x$ 代表一个不量子化的经典外场，它的特点是 k 不在质壳上，$k^2\neq 0$.

电子为外电磁场散射的下一个近似为三阶过程：



$$\langle_f|S^{(3)}|\rangle_i=(-e)^3(2\pi)^{12}\int d^4k'\,d^4p'\,d^4p''\overline{U}_2(p_2)\gamma_\nu\times$$
$$\times D_f(k')S_f(p'')\gamma_\mu S_f(p')\gamma_\nu U_1(p_1)a_\mu(k_1)\times$$
$$\times\delta^4(p_1-p'-k')\delta^4(p'+k_1-p'')\times$$
$$\times\delta^4(k'+p''-p_2)$$
$$=(-e)(2\pi)^4\delta(p_2-p_1-k_1)\overline{U}_2(p_2)\ \Lambda_\mu(p_1p_2)\times$$

$$\times U_1(p_1)a_\mu(k_1). \tag{7.2.25}$$

其中：$\Lambda_\mu(p_1p_2) = \dfrac{ie^2}{(2\pi)^4}\int \dfrac{d^4k'}{k'^2}\gamma_\nu \dfrac{i(\hat{p}_2 - \hat{k}') - m}{(p_2 - k')^2 + m^2} \times$

$$\times \gamma_\mu \frac{i(\hat{p}_1 - \hat{k}') - m}{(p_1 - k')^2 + m^2}\gamma_\nu$$

$$= (e^2)(2\pi)^8\int d^4k' D_f(k')\gamma_\nu S_f(p_2 - k') \times$$

$$\times \gamma_\mu S_f(p_1 - k')\gamma_\nu. \tag{7.2.26}$$

比较(7.2.24)和(7.2.25)即知，考虑顶角辐射修正后，

$$\langle f|[S^{(1)} + S^{(3)}]|i\rangle = (-e)(2\pi)^4\delta(p_2 - p_1 - k_1)\bar{U}_2(p_2)$$

$$\times \Gamma_\mu(p_1p_2)U_1(p_1)a_\mu(k_1).$$

其中，$\Gamma_\mu(p_1p_2) = \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p_1, p_2)$ (7.2.27)

叫顶角函数的二次近似，$\bar{U}\Gamma_\mu U$ 显然是一个 Lorentz 协变矢量.

由(7.2.26)易看出，$\Lambda_\mu(p_1p_2)$ 是对数发散的，若以 $F_\mu(\hat{p}_1, \hat{p}_2, k')$ 代表 Λ_μ 中的被积函数，由 $p_2 = p_1 - k_1$ 可把此函数改写为：

$$F_\mu(\hat{p}_1, \hat{k}_1, \hat{k}').$$

按 $\hat{p}_1, \hat{k}_1$ 作 Taylor 展开得：

$$F_\mu(\hat{p}_1, \hat{k}_1, \hat{k}') = F_\mu(im, 0, \hat{k}') + F_{1\mu}(\hat{p}_1, \hat{k}_1, \hat{k}').$$

故 $\Lambda_\mu(\hat{p}_1\hat{k}_1) = \Lambda_\mu(im, 0) + e^2(2\pi)^8\int d^4k' F_{1\mu}(\hat{p}_1, \hat{k}_1, \hat{k}').$

(7.2.28)

其中，$\Lambda_\mu(im, 0) = \dfrac{ie^2}{(2\pi)^4}\int \dfrac{d^4k'}{\hat{k}'^2}\gamma_\nu \dfrac{-i\hat{k}' - 2m}{(im - k')^2 + m^2} \times$

$$\times \gamma_\mu \frac{-i\hat{k}' - 2m}{(im - k')^2 + m^2}\gamma_\nu \equiv \gamma_\mu \Lambda.$$

可见：$\Lambda_\mu(im, 0)$ 或 Λ 与 $\Lambda_\mu(p_1k_1)$ 一样是对数发散的，$\Lambda_\mu(\hat{p}_1\hat{k}_1) - \Lambda_\mu(im, 0) = e^2(2\pi)^8\int d^4k' F_{1\mu}(\hat{p}_1\hat{k}_1\hat{k}') \equiv \Lambda_{\mu C}(p_1k_1)$ 是收敛的，即 $\Lambda_\mu(\hat{p}_1\hat{p}_2) = \gamma_\mu \Lambda + \Lambda_{\mu C}(\hat{p}_1\hat{p}_2)$.

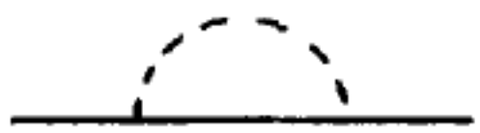
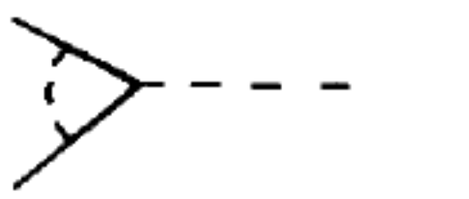
故 $\langle_f|S^{(3)}|\rangle_i$ 的发散部分为：$-e(2\pi)^4\delta(p_2 - p_1 - k_1) \times$

$$\overline{U}_2(p_2)\gamma_\mu \wedge U_1(p_1)a_\mu(k_1). \tag{7.2.29}$$

以后将指出：发散部分代表电荷的变化，收敛部分代表可观测效应.

小结：

在量子电动力学中，引起发散的最低阶原始发散圈图有三种，对这三种发散圈图的分析表明：发散积分可作协变分解，将证明它们最后可归结为质量与电荷的重正化，见下表：

最低阶原始发散图	发散部分	协变分解的发散部分	δm	δe
	$\Sigma(\hat{p})$ 标量	J_0（线性发散） J_1（对数发散）	√	√
	$\pi_{\mu\nu}(\hat{k})$ 张量	C_0（对数发散）		√
	$\wedge_\mu(\hat{p}_1\hat{p}_2)$ 矢量	$\wedge$（对数发散）		√

以后将证明：由电子自能图和顶角辐射图所引起的电荷改变恰好互相抵消，因此使得电荷发生改变的惟一原因是真空极化，这与我们前面的分析正好一致.

§7.3 重整化理论

(P. T. Matheus, A. Salam 1954)

一个严格的重整化理论应包含三部分，即：

① 证明最低阶原始发散图是有限个.

② 如何用协变方式把计算结果中的发散部分和收敛部

分区分开.

③ 证明最后区分开的发散部分只代表“不可观测”的耦合常数(质量、电荷等)的改变,并给出消除这些发散的步骤.

对于量子电动力学可以证明(§7.3.4)原始发散图形只有如§7.2所述的三种.在§7.2中我们已经用协变方式把计算结果中的发散部分和收敛部分区分开来.这一节中,我们引入重整化常数,利用抵消项来消除发散.

7.3.1. 裸粒子和物理粒子

通过学习量子场论我们知道,任何粒子都有自相互作用,电子和光子的自相互作用分别用电子自能图和光子自能图来反映.这种有自相互作用的粒子叫物理粒子,没有自相互作用的假想粒子叫裸粒子.重整化理论认为,发散之所以出现,在于人们没有把裸粒子和物理粒子区分开来.在量子场论的 Lagrange 方程中,在微扰论中,我们实质上是把物理粒子当做了裸粒子,公式中所出现的质量 m_0、电荷 e_0(或耦合常数),场算符 A_B、ψ_B、φ_B,态矢 $|\rangle_B = a_B^\dagger c_B^\dagger |\rangle_0$ 都是属于裸粒子的.对于物理粒子,我们假设由于自相互作用,使得它的质量 m,电荷 e,场算符 A_μ,$\bar{\psi}$,ψ,φ,态矢 $|\rangle = a^\dagger c^\dagger |\rangle_0$ 等与裸粒子的相应量存在下列关系:

$$m = m_0 + \delta m, \tag{7.3.1}$$

$$\psi = Z_2^{-\frac{1}{2}}\psi_B, A_\mu = Z_3^{-\frac{1}{2}}A_{B,\mu}, \varphi = Z_3^{-\frac{1}{2}}\varphi_B,$$

Z_2, Z_3 叫重整化常数. (7.3.2)

则重新归一化条件要求成立下式:

$$\int \psi^* \psi \mathrm{d}^3x = 1, \text{而不再是} \int \psi_B^* \psi_B \mathrm{d}^3x = 1.$$

显然,物理粒子的 Feynman 传播量 $\Delta_f^{(R)}(k)$,$D_{f,\mu\omega}^{(R)}(k)$,$S_f^{(R)}(p)$ 与裸粒子的 Feynman 传播量之间存在关系:

$$\Delta_f(k) = Z_3\Delta_f^{(R)}(k),$$
$$D_{f,\mu\omega}(k) = Z_3 D_{f,\mu\omega}^{(R)}(k), \tag{7.3.3}$$
$$S_f(p) = Z_2 S_f^{(R)}(k).$$

可见，考虑粒子的自作用，马上导致两个结果，即：

① 粒子的质量发生改变.

② 粒子的波函数应重新归一化.

考虑顶角辐射后的相互作用，拉氏量应写成：

$$L_i = \mathrm{i}e_0\,\bar{\psi}_B\Gamma_\mu\psi_B A_{B\mu}.$$

利用(7.3.2)把上式改写为：

$$L_i = \mathrm{i}e_0 Z_2 Z_3^{\frac{1}{2}}\,\bar{\psi}\Gamma_\mu\psi A_\mu.$$

如果定义重整化后的顶角函数

$$\Gamma_\mu^{(R)} \equiv Z_1\Gamma_\mu, \tag{7.3.4}$$

则：

$$L_i = \mathrm{i}e_0 Z_1^{-1}Z_2 Z_3^{\frac{1}{2}}\,\bar{\psi}\Gamma_\mu^{(R)}\psi A_\mu.$$

欲保持 L_i 在重整化后的不变性，应认为重整化后的电荷 e 或物理粒子的电荷 e 为：

$$e = e_0 Z_1^{-1}Z_2 Z_3^{\frac{1}{2}}. \tag{7.3.5}$$

这样，我们在引入重整化常数 Z_1, Z_2, Z_3 后，就在属于裸粒子的 $m_0, e_0, \psi_B, A_{B\mu}, \varphi_B$Feynman 传播量、顶角函数，与属于物理粒子的 $m, e, \psi, A_\mu, \varphi$,Feynman 传播量、顶角函数之间建立了关系：(7.3.1),(7.3.2),(7.3.3),(7.3.4),(7.3.5).

由于电子自能图、光子自能图和顶角辐射图也有高阶过程，因此 δm 和重整化常数 Z_1, Z_2, Z_3 等也是按耦合常数 e 展开的级数，通常按实际需要，只需取最低阶值即可.

7.3.2. 利用抵消项消除发散

电子 - 光子系统的总 Lagrange 量为：

$$
\begin{aligned}
L &= L_B^{(e)} + L_B^{(\gamma)} + L_B^{(i)}, \\
L_B^{(e)} &= -\bar{\psi}_B(\gamma_\mu \partial_\mu + m_0)\psi_B, \\
L_B^{(\gamma)} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\omega}^{(B)} F_{\mu\omega}^{(B)}, \\
L_B^{(i)} &= \mathrm{i} e_0 \bar{\psi}_B \gamma_\mu \psi_B A_{B\mu}.
\end{aligned}
\tag{7.3.6}
$$

其中 $\psi_B, A_{B\mu}$ 系未重新归一化的裸粒子的场算符，m_0 和 e_0 系不可测量的裸粒子的固有质量和固有电荷(耦合常数)，我们利用变换(7.3.1)、(7.3.2)、(7.3.4)、(7.3.5) 代入物理粒子的相应量后，可把 L 写成：

$$
\begin{aligned}
L &= L(e) + L(\gamma) + L(i), \\
L(e) &= -\bar{\psi}(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi, \qquad (7.3.7) \\
L(\gamma) &= -\frac{1}{4} F_{\mu\omega} F_{\mu\omega}, \qquad (7.3.8) \\
L(i) &= \mathrm{i} e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A_\mu + (Z_3 - 1) L(\gamma) + (Z_2 - 1) L(e) + \\
&\quad + (Z_1 - 1)\mathrm{i} e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A_\mu + \delta m Z_2 \bar{\psi}\psi.
\end{aligned}
\tag{7.3.9}
$$

这里 $L(e), L(\gamma)$ 形式上与 $L_B(e), L_B(\gamma)$ 一样，应合理地被当作物理粒子的自由场拉氏量，其中 m 系电子质量的测量值. $L^{(i)}$ 比 $L_B^{(i)}$ 复杂得多，应逐项分析它们的含义.

第一项：$\mathrm{i} e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A_\mu$ 与 $L_B^{(i)}$ 相同，不过这里场算符和电荷都是属于物理粒子的. 按照熟知的方法，由此项所描述的电子 - 光子各项相互作用过程的 Feynman 图，可立即画出.

第二项：$(Z_3 - 1)L(\gamma)$ 表示一个自由的物理光子的自作用，可以用 $2C_0 \equiv (Z_3 - 1)$ 表示自作用耦合常数.

第三项：$(Z_2 - 1)L(e)$ 表示一个自由的物理电子的自作用，可以用 $J_1 \equiv (Z_2 - 1)$ 表示自作用耦合常数.

第四项：$ie(Z_1 - 1)\bar{\psi}\gamma_\mu \psi A_\mu$ 表示对电子 - 光子相互作用的一个修正量，它对耦合常数的修正可以用 $e(Z_1 - 1) = -e\Lambda$ 表示.

第五项：$+\delta m Z_2\bar{\psi}\psi$ 表示对于一个自由物理粒子的质量项的一个修正量，它对质量的修正可以用 $\delta m Z_2 = J_0$ 表示.

总之，最后可把相互作用拉氏量改写为：

$$L(i) = \mathrm{i}e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu + 2C_0 L(\gamma) + J_1 L(e) - \mathrm{i}e\wedge\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu + J_0\bar{\psi}\psi. \tag{7.3.10}$$

式中重整化常数 Z_3, Z_2, Z_1 和 δm 已分别由新重整化常数 $C_0, J_1, \wedge$ 和 J_0 所取代.

新的相互作用项将在 S 矩阵元中出现新的顶角，可列表如下：

新顶角	在动量表象中 S 矩阵元中新因子
$p \xrightarrow{-J_0} p'$	$-J_0(2\pi)^4\delta(p-p')$,
$p \xrightarrow{-J_1(i\hat{p}+m)} p'$	$-J_1(2\pi)^4\delta(p-p')(\mathrm{i}\hat{p}+m)$
$k \xrightarrow{c_0(k^2\sigma_{\mu\nu}-k_\mu k_\nu)} k'$	$+C_0(2\pi)^4\delta(k-k')(k^2\delta\mu_2 - k_\mu k_2)$
p', p, $e\Lambda\gamma_\mu$, k	$e\wedge(2\pi)^4\gamma_\mu\delta(p-p'-k)$

(7.3.11)

证：$S^{(1)} = -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\mathscr{H}_i(x) = \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4\kappa\mathscr{L}(x)$.

当 $\mathscr{L}(x) = J_1 L(e) = -J_1\bar{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu + m)\psi = -J_1\bar{U}(P)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}$

$$\times(\gamma_\mu\partial_\mu + m)U(p')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'x}$$

$$= -J_1\bar{U}(p)(\mathrm{i}\hat{p}' + m)U(p')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-p')x}.$$

所以 $S^{(1)} = -\mathrm{i}(2\pi)^4 J_1\bar{U}(p)(\mathrm{i}\hat{p}+m)U(p')\delta(p-p')$.

故新顶角贡献一个因子 $\quad -\mathrm{i}(2\pi)^4 J_1(\mathrm{i}\hat{p}+m)$.

当 $\mathscr{L}(x) = 2C_0 L(\gamma) = -\frac{1}{2}C_0 F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}C_0\left(\frac{\partial A\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A\mu}{\partial x_\nu}\right)\times$

$$\times\left(\frac{\partial A_v}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\nu}{\partial x_v}\right)=-C_0\left(\frac{\partial A_v}{\partial x_\mu}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right)$$

$$=-C_0 e^{+i(k_\lambda-k'_\lambda)x_\lambda}\left[A_\mu(k)A_\mu(k')k_\nu k'_\nu\right.$$

$$\left.-A_\mu(k)A_\nu(k')k_\nu k'_\mu\right].$$

所以 $S^{(1)}=iC_0(2\pi)^4A_\mu(k)(k^2\delta_{\mu\nu}-k_\mu k_\nu)A_\nu(k')\delta(k-k')$.

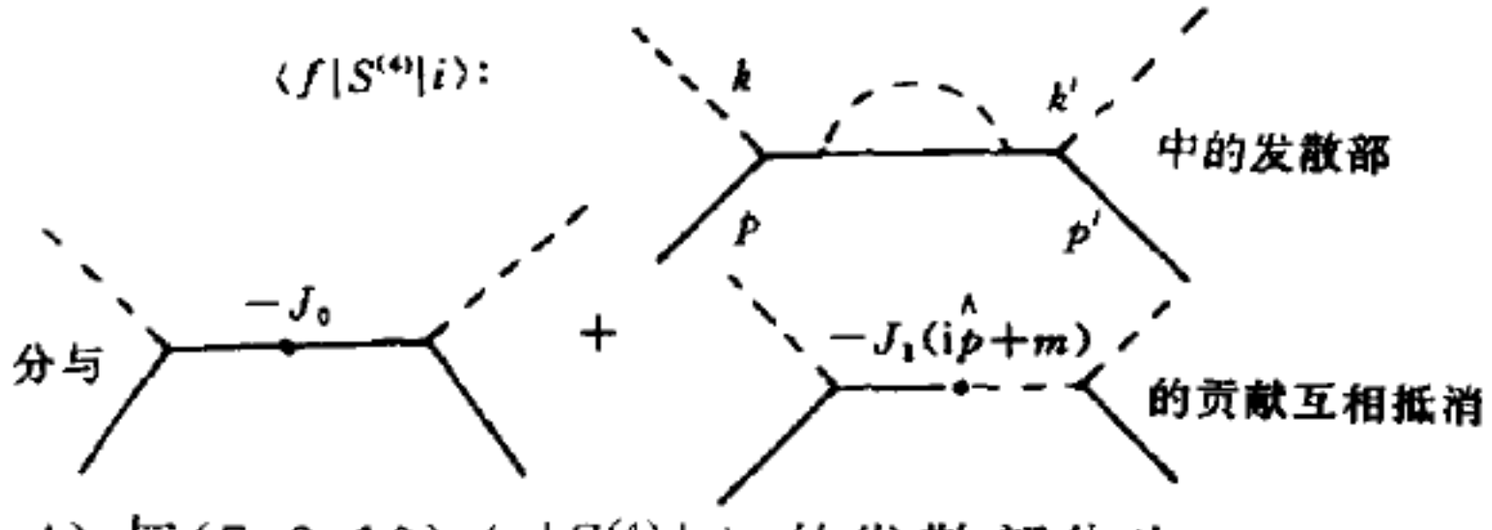
故新顶角贡献一个因子 $i(2\pi)^4C_0(k^2\delta_{\mu\nu}-k_\mu k_\nu)$.

类似,可证其他情况.

我们现在来证明,如果令如上定义的重整化常数 J_0,J_1,C_0 和 Λ 即 §7.3.2 中原始发散图形中出现的相应的发散积分,那么所有发散积分正好与上述顶角的贡献互相抵消,因此,(7.3.9) 或 (7.3.10) 中第二、三、四、五诸项叫做抵消项. 既然采用重整化后的质量、电荷和波函数时,保留抵消项恰可消除发散,那么,略去全部抵消项的同时也略去全部发散项就是合理的了.

这时只剩下一些高阶近似中的收敛项,它们将对低阶计算带来微小的修正 —— 辐射修正.

证:对于 Compton 散射:



按(7.2.4) 与(7.2.10) $\langle_f|S^{(4)}|\ \rangle_i$ 的发散部分为:

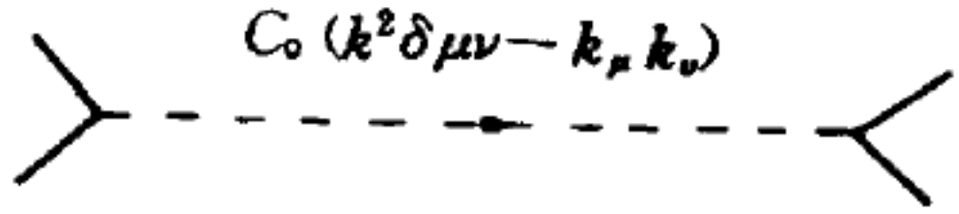
$$-e^2(2\pi)^4\delta(p+k-p'-k')\frac{1}{\sqrt{2\omega\omega'}}\overline{U}_\gamma(P')\hat{e}'\times$$

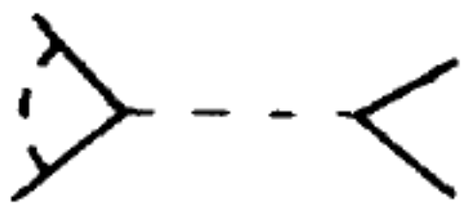
$$\times\frac{i(\hat{p}'+\hat{k}')-m}{(p'+k')^2+m^2}\left[J_0+(i\hat{p}+m)J_1\right]\times$$

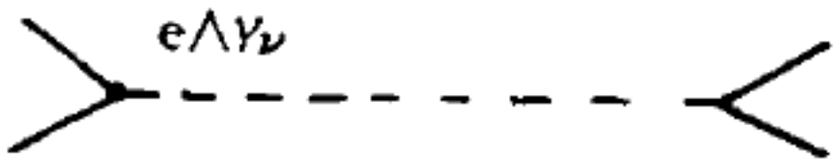
$$\times\frac{i(\hat{p}+\hat{k})-m}{(p+k)^2+m^2}\hat{e}U_\gamma(p). \qquad (7.3.12)$$

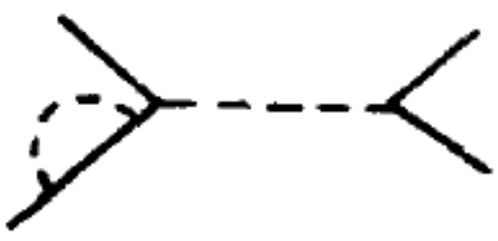
但抵消部分正好与上式差一个负号，故二者抵消.

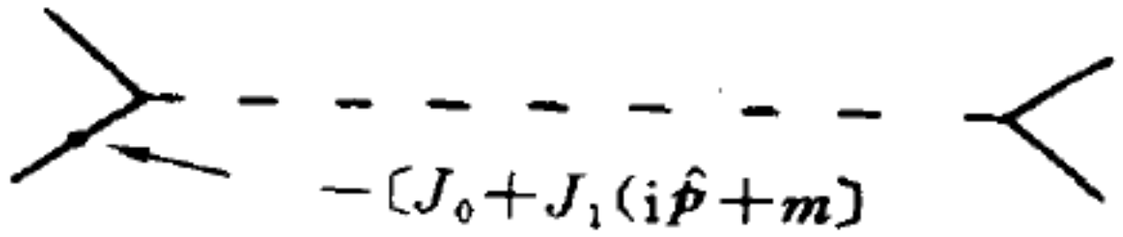
类似易知，对于 Möller 散射 

中的发散部分(7.2.23′) 与 

互相抵消.  中的发散部分(7.2.29) 与



互相抵消. 

中的发散部分(7.2.10) 

互相抵消.

7.3.3. Ward 恒等式(1950)

我们利用电动力学的局部$U(1)$规范不变性来证明，在顶角函数Γ_μ与Feynman传播量S'_f之间的一个重要关系——Ward恒等式

$$\Gamma_\mu(p,p) = + \frac{\partial}{\partial P_\mu} S'^{-1}_f(p), \qquad (7.3.13)$$

或
$$\Lambda_\mu(p,p) = - \frac{\partial}{\partial p_\mu}\Sigma(p). \qquad (7.3.14)$$

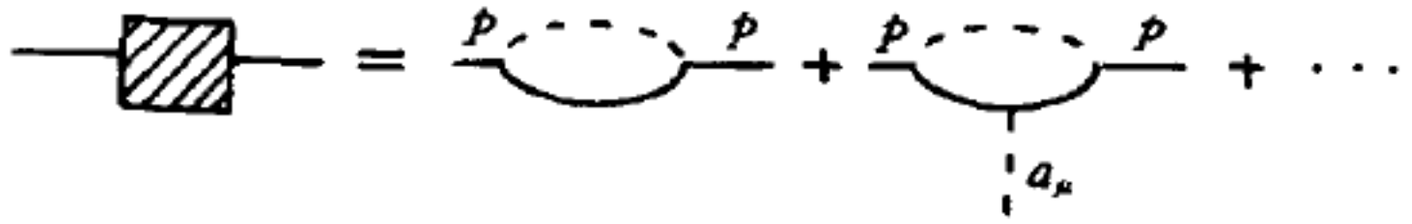
它是场论的对称性施加在 Feynman 传播量(格林函数)上的一个约束条件.

证：在电子自能图中引入0动量的外电磁场a_μ，则电子自能项

$\Sigma(p)$ 应变为 $\Sigma_a(p)$，把 $\Sigma_a(p)$ 按 $a_\mu(p)$ 作幂级数展开

$$\Sigma_a(p) = \Sigma(p) + e_0 a_\mu \Lambda_\mu(p_1 p) + \cdots. \qquad (7.3.15)$$

相应的 Feynman 图为



但由电动力学的局部 $U_{(1)}$ 规范不变性知

$$\Sigma_a(p) = \Sigma(p - e_0 a) = \Sigma(p) - e_0 a_\mu \frac{\partial \Sigma_a(p)}{\partial p_\mu}\bigg|_{a=0}. \qquad (7.3.16)$$

比较(7.3.15)和(7.3.16)即得(7.3.14).

考虑到：$\Gamma_\mu(p,p) = \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p,p)$

$$S'_f(p) = S_f(p)[1 + \Sigma(p)S_f(p)]$$

$$= \frac{S_f(p)}{1 - \Sigma(p)S_f(p)}$$

$$= \frac{S_f(p)}{[S_f^{-1}(p) - \Sigma(p)]S_f(p)}$$

$$= \frac{1}{+\not{p} - im - \Sigma(p)}.$$

故：$\frac{\partial}{\partial p_\mu} S'^{-1}_f(p) = \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p,)$ 就是(7.3.13).

1957 年 Takahashi 把 Ward 恒等式推广到动量转移不为 0 的情况得：

$$(p'_\mu - p_\mu)\Gamma_\mu(p',p) = S'^{-1}_f(p') - S'^{-1}_f(p). \qquad (7.3.17)$$

此式即通常所谓的 Ward-Takahashi 恒等式.

在 Q.E.D 中，Ward 恒等式的一个重要推论是：

$$Z_1 = Z_2, \qquad (7.3.18)$$

这是由于，把(7.3.13)中的顶角函数 Γ_μ 和 Feynman 传播量 S'_f 改为重整化的 $\Gamma_\mu^{(R)}$ 和 $S_f^{(R)}$ 后应有：

$$Z_1^{-1}\Gamma_\mu^{(R)} = Z_2^{-1}\frac{\partial}{\partial p_\mu} S'^{(R)-1}_f$$

此式在最低阶近似应成立，此时：

$$\Gamma_{\mu}^{(R)} = \gamma_{\mu}, \frac{\partial}{\partial p_{\mu}}\left(\frac{+1}{\hat{p} - im}\right)^{-1} = \gamma_{\mu}.$$

故(7.3.18)得证.

由(7.3.18)马上看出：

$$e = Z_3^2 e_0. \tag{7.3.19}$$

即顶角的重整化效应与费米波函数的重整化效应正好抵消，亦即，电荷的改变仅决定于真空极化效应. 这一重要结果是与电磁相互作用耦合常数 e 的普适性有关的.

总之，如果把 Q.E.D 中的原始发散积分 C_0, J_1, Λ 和 J_0 归之于不可观测的重整化常数 Z_3, Z_2, Z_1 和 δm，则重整化后的新顶角正好可消除 Q.E.D 三个原始的发散圈图或整个 Q.E.D 中的圈图发散. 由(7.3.19)和(7.3.18)知发散最终只归之为电荷与质量的重整化.

7.3.4. Feynman 图的发散与场论的可重整化问题

在本节讨论一般场论的可重整化问题.

任给一个 Feynman 图 G，它有 n 个顶角，I 条内线，E 条外线，其中

$I = F_i + B_i, F_i, B_i$ 分别代表内费米线和内玻色线数目.

$E = F_e + B_e, F_e, B_e$ 分别代表外费米线和外玻色线数目.

定义 Feynman 图的 Feynman 积分为

$$F_G = \int \prod_{i=1}^{I} \frac{p(p_i)}{p_i^2 + m_i^2} \mathrm{d}^4 p_i \prod_{j=1}^{n} \delta_j^4(\Sigma p). \tag{7.3.20}$$

式中 $p(p_i)$ 系第 i 条内线的传播量因子中关于 4 动量 p_i 的多项式，令其最高幂为 r_i，则旋量场 $r = 1$，标量场 $r = 0$，0 质量矢量场 $r = 0$，质量不为 0 的矢量场 $r = 2$.

下面分析 Feynman 积分(7.3.20)的发散问题.

由于 n 个顶角含有 n 个 $\delta^4(\Sigma p)$，除了其中一个保证总 4 动量守恒外，其它 $(n-1)$ 个将把 Feynman 积分的独立变量降为

$$4I - 4(n-1) = 4(I-n+1) \text{ 个.}$$

这是一个在 $4(I-n+1)$ 维动量空间的重积分，采用球极坐标并进行 Wick 转动后，重积分的体元为：

$$p^{4(I-n+1)}\frac{\mathrm{d}p}{p}\mathrm{d}\Omega. \tag{7.3.21}$$

式中，p 是 $4(I-n+1)$ 维动量空间的矢径长度.

当 p_i 均甚大时，每根内线(传播量) 贡献一个因子：$p_i^{r_i-2}$，I 根内线共贡献一个因子，$\prod_{i=1}^{I} p_i^{(r_i-2)} = p_{i=1}^{\sum^{I}(r_i-2)}$. (7.3.22)

故，Feynman 积分在 p 甚大时，$\mathrm{d}p/p$ 前的因子为

$$p^{[4(I-n+1)+\sum_{i=1}^{I}(r_i-2)]}$$

$$= p^{[\sum_{i=1}^{I}(r_i+2)-4(n-1)]} \equiv p^D.$$

式中：$D \equiv \sum_{i=1}^{I}(r_i+2) - 4(n-1)]$ (7.3.24)

叫表观发散度. 则

当 $D \geqslant 0$ 时，对 p 积分是表观发散的.

当 $D < 0$ 时，对 p 积分是表观收敛的.

马上应指出，如果再考虑 Feynman 积分的其它对称性，那么即便 $D \geqslant 0$ 积分也可能是收敛的.

例如：



$D = (1+2) - 4(3-1) = 1 > 0$. 但由于 Furry 定理可知，这个 Feynman 积分是收敛的，这是荷共轭变换下的不变性 (C- 对称性) 或荷宇称守恒的结果.

$D = (1+2) - 4(4-1) = 0$，但可由相互作用的规范不变性知这个 Feynman 积分也是收敛的.

注意到在三线性相互作用中$\frac{1}{2}(n - Be) = B_i$或$n = 2B_i + B_e$，

$$2n = 2F_i + F_e \text{或} n = F_i + \frac{1}{2}F_e,$$

$\sum_{i=1}^{I}(r_i + 2) = 2B_i + 3F_i$(设对费米线和玻色线$r_i$分别为1和0)即得：

$$D = 2B_i + 3F_i - 4(n - 1) = 4 - (\frac{3}{2}F_e + B_e).$$

(7.3.25)

上式D仅与外线有关而与顶角n无关，可见$D < 0$的积分也不一定收敛，这是由于在外线不变时可以插入一些发散的圈图.

我们当然希望对Feynman图作出一些限制以使表观发散度$D \geqslant 0$成为Feynman积分发散的一个必要条件. 为此，我们仅讨论所谓原始发散图G，亦即由$D \geqslant 0$可决定全部原始发散图.

设有一发散图G，任截断其一根内线以作为两根外线后所成的新Feynman图如果不再发散，则Feynman图G叫原始发散图.

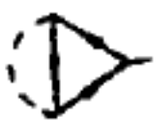
对于电磁作用和N-π强作用，由$D = 4 - (B_e + \frac{3}{2}F_e) = 4 - (E + \frac{1}{2}F_e) \geqslant 0$得：

$$4 \geqslant E + \frac{1}{2}F_e, \qquad (7.3.26)$$

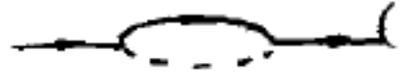
$$\text{或} E \leqslant 4 - \frac{1}{2}F_e.$$

可见原始发散图的外线数目只能是$E = 0,1,2,3,4$.

$E = 0$是真空涨落  但不是原始发散图.

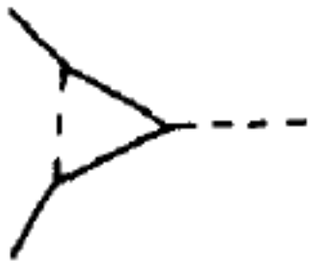
$E = 1$的图形是  ——由Furry定理知它等于0，这也不是原始发散图.

因之，剩下的可能性只能是 $E = 2,3,4$.

$E = 2$  $(D = 1)$ 费米子的自能图.

 $(D = 2)$ 玻色子的自能图.

$E = 3$  $(D = 1)$ 由 Furry 定理知此图贡献为 0.

 $(D = 0)$ 顶角辐射图.

$E = 4$ 只可能全部外线都是玻色线，否则(7.3.26)不能满足. 故惟一的 Feynman 图是：



$(D = 0)$ 光子 - 光子散射图.

由规范不变性知贡献是不发散的.

总之，在 Q.E.D 中原始发散图正好就是我们在 §7.2 中开始提到过的三种，对原始发散图而言，$D \geqslant 0$ 是发散的必要条件.

在一般场论中，我们应从(7.3.24)出发进行讨论.

定义顶角指数(Vertex Index)ω_i 为

$$\omega_i = \frac{1}{2}\sum_{j(i)}(r_j + 2) - 4. \tag{7.3.27}$$

式中 i 表示第 i 个顶角，$\sum_{j(i)}$ 表示对交于第 i 个顶角处的所有内线取和.

则 $$D = \sum_{i=1}^{I}(r_i + 2) - 4(n-1) = \sum_{i=1}^{n}\omega_i + 4. \tag{7.3.28}$$

设 $\omega_i^{\max}$ 为顶角 i 处全部线均为内线时的顶角指数，应成立

$$\omega_i = \omega_i^{\max} - \frac{1}{2}\sum_{j(i)}(r_j + 2), D = \sum_{i=1}^{n}\omega_i^{\max} + 4 - \frac{1}{2}\sum_{n,j}(\gamma_j + 2). \tag{7.3.29}$$

上式中最后一项对 Feynman 图的全部外线求和.

当所有 $\omega_i^{\max} \leqslant 0$,这时,满足 $D \geqslant 0$ 表现发散度 D 不超过 4,且外线数和顶角数均为有限个,这就对原始发散图的外线数目和顶角数目或原始发散图的数目提出了限制,我们只需引入有限个重整化常数或有限个抵消项就可消去所有原始发散图的发散,这种场论就是可重整的.

当相互作用使得有些 $\omega_i > 0$ 或 $\omega_i^{\max} > 0$,在保持 $D \geqslant 0$ 条件下,可增加顶角数以使得(7.3.29)式右边第一、第三两项任意大,即表现发散度 D 没有上界,原始发散图外线数目和顶角数目或原始发散图数目不受限制. 事实上只要增加顶角数 n,可使 D 大于任意给定的数,这表示原始发散图有无穷多个. 为了消除这些发散,必须引入无穷多个重整化常数或无穷多个抵消项,这事实上是做不到的. 这种场论是不可重整化的.

在更普遍的理论中,顶角指数 ω_i 应定义为

$$\omega_i = \frac{1}{2}\sum_{j(I)}(r_j + 2) + d_i - 4, \tag{7.3.30}$$

故

$$D = \frac{1}{2}\sum_{n,j}(r_j + 2) + \sum_{n} d_j - 4n + 4. \tag{7.3.31}$$

$$\omega_i^{\max} = \frac{3}{2}F_i + B_i + d_i - 4. \tag{7.3.32}$$

其中 F_i, B_i 分别代表第 i 个顶角处的费米线数和玻色线数.

注意作用量 $I_i = \int \mathrm{d}^4x \cdot g_i \cdot \mathscr{L}_i$ 的量纲为

$$[I_i] = [\mathrm{d}^4x] \cdot [g_i] \cdot [\mathscr{L}_i]. \tag{7.3.33}$$

在自然单位制 $c = \hbar = 1$ 中,$L = T = M^{-1}$.

若以 M 为量纲,对(7.3.33)式两边取对数应有

$$0 = -4 + d\,g_i + F_i\frac{3}{2} + B_i + d_i. \tag{7.3.34}$$

式中 d_i 是第 i 个顶角处相互作用 Lagrange 量中出现的场量的求导次数或量纲.

dg_i 是第 i 个顶角处耦合常数的量纲.

F_i, B_i 是第 i 个顶角处的费米线和玻色线数目.

由(7.3.34)和(7.3.32)得

$$dg_i = -\omega_i^{\max}. \tag{7.3.35}$$

可见 $dg_i \geqslant 0$,可重整,

$dg_i < 0$,不可重整.

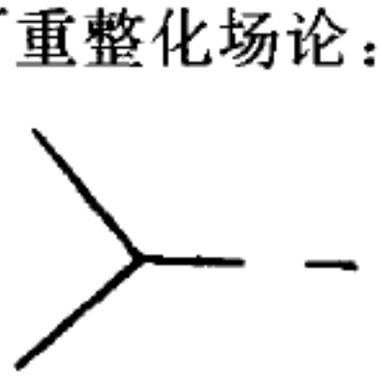
由(7.3.30)可见:

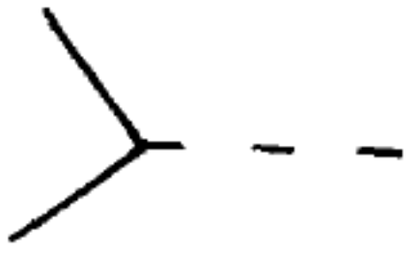
(1) 导数耦合增大了 ω_i 值,因而有可能破坏场论的可重整性.

(2) 减少内费米线,增加内玻色线可降低 ω_i 值,从而有可能使得场论变为可重整化.

(3) 耦合常数量纲为负的相互作用是不可重整的.

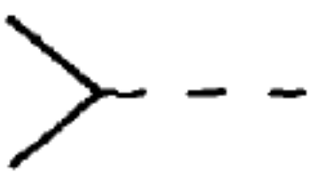
例 可重整化场论:

Q. E. D  $\omega_i^{\max} = 0$, $(L_i = ie\,\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu)$

Q. C. D  $\omega_i^{\max} = 0$, $(L_i = ig\,\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu)$

ψ^4 场论  $\omega_i^{\max} = 0$, $(L_i = i\lambda\varphi^4)$

不可重整化场论:

N-π 导数耦合 

$$\omega_i^{\max} = 1 > 0,$$

$$(L_i = \mathrm{i}g\,\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi\partial_\mu\varphi)$$

4 费米子直接作用(弱作用) 

$$\omega_i^{\max} = 2 > 0,$$

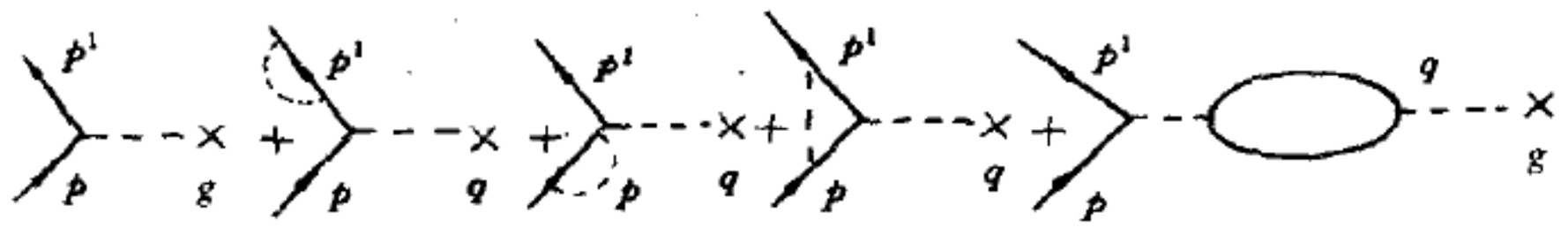
$$(L_i = \frac{1}{\sqrt{2}}G\bar{\psi}_1\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_2 \times \bar{\psi}_3\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_4 + h\cdot c)$$

若认为弱作用由中间玻色子传递的，那么顶角图就化为 >－－－－－，场论就是可重整化的了，可以证明所有规范场论都是可重整的.

§7.4 辐射修正

如上所述，在引入电荷和质量的重整化后，Q.E.D 的各阶紫外发散均可消除，留下来的是一些微小的辐射修正项，它们将引起一些微小的可观测效应，在 Q.E.D 中有两个最重要的辐射修正效应，即电子反常磁矩和氢原子能级的 Lamb 移动，实验和理论惊人的一致说明了包含重整化理论在内的 Q.E.D 具有高度的正确性.

现考虑电子在外电磁场作用下的散射，在三级近似下的 Feynman 图为



当采用电荷和质量的重整化，则在小 q 近似下($\mathrm{i}p + m \approx 0$)上述 4 个三级 Feynman 图中仅最后两个带来微小的辐射修正.

已知顶角图和真空极化图的辐射修正是在一级 Feynman 图中分别作下述代换，即

$$\gamma_\mu \to \gamma_\mu + \Lambda_{\mu c}(p, p'),$$

和 $a_\mu \to a_\mu + \delta a_\mu$,

其中 $\delta a_\nu(q) = -\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\frac{1}{q^2}a_\mu(q)\pi_{\mu\omega}(q)$,

$$\pi_{\mu\omega}(q) = (q_\mu q_\nu - \delta_{\mu\omega}q^2)C_0 + (q_\mu q_\nu - \delta_{\mu\omega}q^2)\cdot\frac{1}{q^2}\pi_c.$$

重整化后上式中仅留下辐射修正项

$$(q_\mu q_\nu - \delta_{\mu\omega}q^2)\frac{1}{q^2}\pi_c(q).$$

可直接算出 $\pi_c(q^2) = \frac{\mathrm{i}e^2}{4\pi^2}\frac{1}{15}\frac{q^4}{m^2}$. (7.4.1)

故真空极化效应的辐射修正是把 $a_\mu(q)$ 修改为

$$(1 - \frac{e^2}{(4\pi^2)^3}\frac{1}{15}\frac{q^2}{m^2})a_\mu(q). \tag{7.4.2}$$

又经过计算可求得当 q 小时

$$\Lambda_{\mu c}(q) = \frac{e^2}{8\pi^2}[-\frac{1}{2m}\Sigma_{\mu\omega}q_\nu + \gamma_\mu\frac{2q^2}{3m^2}(\log\frac{m}{\delta} - \frac{3}{8})]. \tag{7.4.3}$$

式中 $\Sigma_{\mu\omega} = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)$,即电子自旋张量.

δ 乃顶角图中虚光子的静质量,由(7.4.3)知当 $\delta \to 0$ 时,$\Lambda_{\mu c}(q)$ 是发散的,这叫 Q.E.D 中的红外发散. 1937 年 Bloch 等人指出,在散射过程中,电子也会发射低能实光子(软光子),故散射幅中应包含低能实光子与低能虚光子的贡献之和,计算表明它们对散射幅的贡献恰好抵消.

略去 q^3 及高阶项后,由(7.4.2)及(7.4.3)得

$$\gamma_\mu + \Lambda'_{\mu c}(q) = \gamma_\mu\frac{e^2}{8\pi^2}[-\frac{1}{2m}\Sigma_{\mu\omega}q_\nu\gamma_\mu\frac{2q^2}{3m^2}\times \\ \times(\log\frac{m}{\delta} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5})]. \tag{7.4.4}$$

在一级散射中，可把 $e\gamma_\mu a_\mu$ 看做一个势能因子，现在在二级近似下的势能因子应为

$$U + \delta U = e(\gamma_\mu + \Lambda'_{\mu\kappa}(q))a_\mu(q).$$

亦即二级辐射修正为使势能项多一个附加值

$$\delta U = \frac{e^3}{8\pi^2}\left[-\frac{1}{2m}\Sigma_{\mu\nu}q_\nu + \gamma_\mu\frac{2q^2}{3m^2}\left(\log\frac{m}{\delta} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5}\right)\right]\cdot \cdot a_\mu(q). \tag{7.4.5}$$

引入 $\delta U = ie\gamma_4\delta\varphi(q)$ 可算得(阿希叶泽尔：量子电动力学，§ 50)

$$e\delta\varphi(x) = -\frac{e^3}{(4\pi)^2 m}(\beta\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{H} - i\beta\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{E}) + \frac{e^3}{(4\pi)^2}\cdot\frac{4}{3m^2}\times \times\left(\log\frac{m}{\delta} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5}\right)(\Box\varphi - \boldsymbol{\alpha}\Box\boldsymbol{A}). \tag{7.4.6}$$

其中 $e\delta\varphi(x)$ 即有效附加势能，$\beta \equiv \gamma_4$，$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\sigma}$ 即 Pauli 矩阵，我们将从(7.4.6)式出发讨论电子的反常磁矩和氢原子的 Lamb 移动.

7.4.1. 电子的反常磁矩

设电子处于一静磁场中，电子的附加磁能(7.4.6)变为

$$e\delta\varphi(x) = -\frac{e^3}{(4\pi)^2 m}\beta\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{H}. \tag{7.4.7}$$

已知一个荷电 Dirac 粒子在经典场论中的磁能为

$$U_m = -\mu_0\beta\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{H}, \mu_0 = \frac{e}{2m}\left(=\frac{eh}{2mc}\right). \tag{7.4.8}$$

比较(7.4.7)、(7.4.8)即知在二级近似下，辐射修正引起了一个附加磁矩

$$\delta\mu = \frac{e^2}{8\pi^2}\mu_0 = \frac{\alpha}{2\pi}\mu_0\left(=\frac{1}{2\pi}\frac{e^2}{4\pi hc}\mu_0\right). \tag{7.4.9}$$

因此计及二级近似的辐射修正后的电子磁矩为

$$\mu = \mu_0(1 + \frac{\alpha}{2\pi}). \tag{7.4.10}$$

理论值(Schwinger 1948)

$$\Delta\mu = 0.001\ 161\ 4\mu.$$

实测值(Franken 1956)

$$\Delta\mu = (0.001\ 165 \pm 0.000\ 011)\mu.$$

两者相比较,知道它们是符合得很好的.

7.4.2. 氢原子能级的 Lamb 移动

按 Dirac 相对论电子方程可算得 H 原子能级 $2S_{\frac{1}{2}}$ 和 $2p_{\frac{1}{2}}$ 应是重合的,1947 年 Lamb 和 Retherford 的实测发现二者并不重合而有差距 ——Lamb 移动.

$$\Delta E = E(S) - E(p) = (1057.8 \pm 0.1)\text{Mc/s}.$$

最早从相对论场论来解释上述 Lamb 移动的是 Feynman(1948),在(7.4.6) 中令 $\boldsymbol{H} = 0$ 得电子的有效附加势能为

$$e\delta\varphi = \alpha\frac{e}{4\pi}\{\frac{4}{3m^2}(\log\frac{m}{\delta} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5})\Box\varphi + \frac{1}{m}\mathrm{i}\beta\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{E}\}. \tag{7.4.11}$$

经过复杂的运算可得 H 原子能级 E_n 的移动 δE_n 为

$$\delta E_n = \frac{e^2}{(4\pi)^2}e\{\frac{4}{3m^2}(\log\frac{m}{\varepsilon_0} - \frac{3}{8} + \frac{5}{6} - \frac{1}{5})\langle\psi_n|\Delta\varphi|\psi_n\rangle + \\ + \frac{\mathrm{i}}{m}\langle\psi_n|\beta\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{E}|\psi_n\rangle\}. \tag{7.4.12}$$

式中 ε_0 为

$$\log\varepsilon_0 = \frac{\sum\limits_m |V_{nm}|^2(E_m - E_n)\log|E_m - E_n|}{\sum\limits_m |V_{nm}|^2(E_m - E_n)}.$$

其中:$U \equiv \frac{1}{\mathrm{i}m}\nabla$,乃电子的速度算符.

$V_{nm} = -\frac{e}{\sqrt{2\omega}}(\boldsymbol{e}\boldsymbol{v})_{nm}$,$\boldsymbol{e}$ 为光子极化矢量.

由(7.4.12) 可算得 H 原子的能级移动

$$\Delta E(S) = 1\ 039.25\text{Mc/s},$$

$$\Delta E(p) = -\ 12.89\text{Mc/s},$$

故 $\Delta E = 1\ 052.14\text{Mc/s}.$

实验与理论的差值为 6Mc/s，如果考虑到 $S^{(5)}$ 级效应，质子的有限质量以及一些其他相对论效应则

$\Delta E = 1057.9 \pm 0.2\text{Mc/s}$ 与实验完全符合.

7.4.3. 库仑定律的辐射修正

一个静止电子产生外电场 a_μ，不考虑真空极化时，

$$a_\mu = a_\mu\delta_{\mu 4} = a_4 = \frac{e}{r}, a_4(k) = 4\pi e/k^2,$$

Feynman 图为 × -----

当考虑真空极化时，$a_\mu + \delta a_\mu = a_4 + \delta a_4$，在单圈近似下，

Feynman 图为 × ----- + × -----○-----

$$\delta a_4(k) = -\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2}a_\mu(k)(k_\mu k_4 - \delta_{\mu 4}k^2)\frac{1}{k^2}\pi_c(k^2)$$

$$= -\frac{4\pi e}{(k^2)^2}\left(\frac{4\pi}{k^2}\right).$$

可近似算出：

$$r \gg \frac{1}{m}, a_4(r) + \delta a_4(r) = \frac{e}{r}\left[1 + \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}}\frac{\mathrm{e}^{-2mr}}{(mr)^{3/2}}\right].$$

$$r \ll \frac{1}{m}, a_4(r) + \delta a_4(r) = \frac{e}{r}\left[1 + \frac{2\alpha}{3\pi}\left(\log\frac{1}{mr} - c - \frac{5}{6}\right)\right].$$

式中 $c \equiv 0.577 \sim$ Euler 常数.

第 8 章　路径积分量子化

迄今为止，我们仅对一种阿贝尔规范场 —— 电磁场进行过正则量子化，量子化过程中由于要引入规范固定(Lorentz 规范，库仑规范)，量子化处理变得颇为复杂. 把正则量子化直接应用到非阿贝尔规范场或重力场时，人们发现问题更为复杂(违反理论的么正性). 1948 年 R. P. Feynman 提出的一种新的路径积分量子化方案为规范场的量子化(包括重力场在内) 带来很大的方便.

§8.1　量子力学的路径积分表述

设量子系统的总 Hamilton 量为 $H(p,q)$，则系统的 Schrödinger 方程为

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle_S = \hat{H}(\hat{p}\cdot\hat{q})|\psi(t)\rangle_S. \tag{8.1.1}$$

或在位置空间表象中

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t) = \hat{H}(\hat{p},\hat{q})\psi(t). \tag{8.1.2}$$

引入时间演化算符 $\hat{T}(t,t_0)$ 后，得(8.1.2) 的形式解为：

$$\psi(t) = \hat{T}(t,t_0)\psi(t_0). \tag{8.1.3}$$

(8.1.4)

其中 $\hat{T} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{\hbar}\hat{H}\cdot(t-t_0)}$.

现在计算时间演化算符 $\hat{T}$ 在坐标表示 $|q\rangle$ 中的矩阵元.

$$\begin{aligned}\langle q''|\hat{T}(t'',t')|q'\rangle &= \langle q''|\exp\{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}\cdot(t''-t')\}|q'\rangle \\ &= \langle q''|\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}\cdot t''},\mathrm{e}^{+\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}\cdot t'}|q'\rangle = \langle q'',t''|q',t'\rangle. \end{aligned}\tag{8.1.5}$$

可见这一矩阵元即以态矢 $|q,t\rangle$ 表示的量子系统从态 $|q',t'\rangle$ 到态 $|q'',t''\rangle$ 的跃迁几率幅.

引入完备性条件:$\int |q,t\rangle\langle qt|\mathrm{d}q = 1$.(对任意 t 值)

并把 t' 到 t'' 分成$(n+1)$个等时小间隔 $\tau \equiv \dfrac{t''-t'}{n}$.

$$t'' > t_n > t_{n-1}\cdots > t_2 > t_1 > t' = t.$$

则由(8.1.5)得

$$\langle q'',t''|q',t'\rangle = \int \mathrm{d}q,\cdots \mathrm{d}q_n \langle q'',t''|q_n t_n\rangle\langle q_n t_n|q_{n-1}t_{n-1}\rangle \cdots\langle q_{n-1}t_{n-1}|\cdots|q_1 t_1\rangle\langle q_1 t_1|q',t'\rangle. \tag{8.1.6}$$

注意到

$$\begin{aligned}\langle q_{i+1},t_{i+1}|q_i,t_i\rangle &= \langle q_{i+1}|\exp(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}\cdot\tau)|q_i\rangle\\ &= \langle q_{i+1}|(1-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}\cdot\tau)|q_i\rangle\\ &= \delta(q_{i+1}-q_i) - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\tau\langle q_{i+1}|\hat{H}|q_i\rangle\\ &= \int_{\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\exp[\mathrm{i}p(q_{i+1}-q_i)] - \mathrm{i}\,\frac{\tau}{\hbar}\langle q_{i+1}|\hat{H}|q_i\rangle.\end{aligned} \tag{8.1.7}$$

利用非量子力学中 $\hat{H}$ 的显示式

$$\hat{H}(p,q) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(q). \tag{8.1.8}$$

可算出(8.1.7)中第二项为

$$\langle q_{i+1}|(\frac{\hat{p}^2}{2m}+V(q))|q_i\rangle = \langle q_{i+1}|\frac{\hat{p}^2}{2m}|q_i\rangle + \langle q_{i+1}|V(q)|q_i\rangle. \tag{8.1.9}$$

上式等式右边第二项为

$$V(q_i)\delta(q_{i+1}-q_i) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\exp[\mathrm{i}p(q_{i+1}-q_i)]V(q_i). \tag{8.1.10}$$

第一项为

$$\langle q_{i+1}|\frac{\hat{p}^2}{2m}|q_i\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dp'dp\langle q_{i+1}|p'\rangle\langle p'|\frac{\hat{p}^2}{2m}\times$$
$$\times |p\rangle\langle p|q_i\rangle$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp'dp}{2\pi}\exp[i(p'q_{i+1}-pq_i)]\times$$
$$\times\frac{p^2}{2m}\delta(p'-p)$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi}\exp[ip(q_{i+1}-q_i)]\frac{p^2}{2m}. \tag{8.1.11}$$

注意在(8.1.11)式的推导中我们用上了关系

$$\langle q|p\rangle = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\exp(ip\cdot q), \tag{8.1.12}$$

和$\langle p'|\frac{\hat{p}^2}{2m}|p\rangle\frac{p^2}{2m}\langle p'|p\rangle = \frac{p^2}{2m}\delta(p-p')$. (8.1.13)

故

$$\langle q_{i+1}|\hat{H}|q_i\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi}\exp[ip(q_{i+1}-q_i)]H(p,q_i). \tag{8.1.14}$$

把(8.1.14)代入(8.1.7)中后得到

$$\langle q_{i+1}t_{i+1}|q_i,t_i\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_i}{2\pi}\exp(i[p_i(q_{i+1}-q_i)-\tau H(p_iq_i)]). \tag{8.1.15}$$

把(8.1.15)代入(8.1.6)后,取极限$n\to\infty$或$\tau\to 0$得

$$\langle q'',t''|q',t'\rangle = \lim_{\substack{n\to\infty\\ or\,\tau\to 0}}\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{i=1}^{n}dq_i\prod_{i=1}^{n+1}\frac{dp_i}{2\pi}\times$$
$$\times\exp\left(i\sum_{i=1}^{n+1}[P_i(q_{i+1}-q_i)-\tau H(p_iq_i)]\right)$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}DqDp\exp\left(i\int_{t'}^{t''}dt[p\dot{q}-H(p,q)]\right). \tag{8.1.16}$$

其中 $Dq \equiv \lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}q_i$,

$Dp \equiv \lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n+1} \mathrm{d}p_i/2\pi$,

$\lim_{n\to\infty}\left[\prod_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}q_i\mathrm{d}p_i}{2\pi}\right] = \prod_{t} \frac{\mathrm{d}q(t)\mathrm{d}p(t)}{2\pi}$ 代表对所有 t 值的 Liouville 测度的无穷乘积.

注意到(8.1.16)式中的 $q(t)$ 和 $p(t)$ 均是时间 t 的函数,当 t 取 t' 和 t'' 时,它们代表相空间 (p,q) 内的起点 $(p(t'),q(t'))$ 和终点 $(p(t''),q(t''))$. 而一般地,当 t 从 t' 变到 t'' 时,相点 $(p(t),q(t))$ 在相空间内划一路径(path),此路径以 $(p(t'),q(t'))$,$(p(t''),q(t''))$ 为其两个端点,(8.1.16)的积分是对相空间内所有路径的取和,它实质是一个泛函积分,故(8.1.16)即量子力学中跃迁几率幅的路径积分表述.

我们不证明,仅指出由(8.1.16)可反推出 Schrödinger 方程(8.1.2),因此量子力学的路径积分表述和 Schrödinger 方程是完全等价的.

若 H 取(8.1.8)的形式,则(8.1.15)和(8.1.16)中对 p 的积分可由如下的高斯积分公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}p_i}{2\pi}\exp\left[\mathrm{i}\left(p_iq_i - \frac{\tau}{2m}p_i^2\right)\right] = \left(\frac{m}{2\pi\mathrm{i}\tau}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\mathrm{i}\tau\frac{m}{2}q_i^2\right) \tag{8.1.17}$$

求出,这样(8.1.16)可最后化为

$$\begin{aligned}\langle q'',t''|q',t'\rangle &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{2\pi\mathrm{i}\tau}\right)^{\frac{1}{2}}\int\prod_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}q_i}{(2\pi\mathrm{i}\tau/m)^{\frac{1}{2}}}\cdot \\ &\quad\cdot\exp\left(\mathrm{i}\sum_{i=1}^{n+1}\tau\left[\frac{m}{2}\left(\frac{q_{i+1}-q_i}{\tau}\right)^2 - V(q_i)\right]\right) \\ &= N\int D[q]\exp\left[\mathrm{i}\int_{t'}^{t''}\mathrm{d}tL(q,\dot{q})\right] \\ &= N\int D[q]\exp(\mathrm{i}S). \end{aligned} \tag{8.1.18}$$

式中 $S=\int_{t'}^{t''}\mathrm{d}tL(q,\dot{q})$ 为系统的作用量.

(8.1.18) 就是路径积分的 Feynman 公式,式中的路径是坐标空间的路径 $q(t)$. 这些路径的起点均为 $q(t)$,终点均为 $q(t'')$.

(8.1.18) 式右边积分中的被积函数均为经典量,而左边的跃迁幅则纯粹是一个量子力学的几率幅. 利用常见的数学分析方法就可以由经典量得到量子力学中的量,这正是路径积分量子化的优点所在.

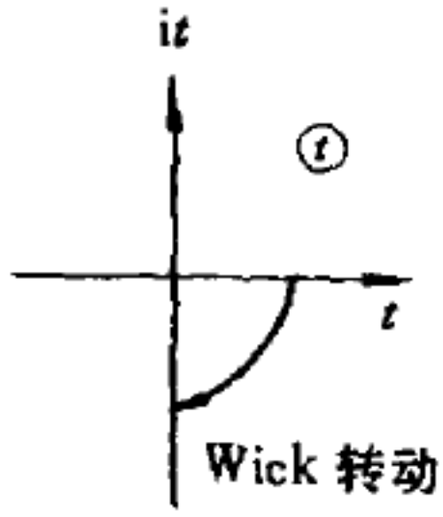
§8.2 路径积分的欧氏表述

由于物理系统的作用量是实数,所以被积函数 $\exp(\mathrm{i}S)$ 是一个振荡函数,积分并无意义,为了让积分有意义,我们引入实时的延拓或 Wick 转动.

$x_0=t\to-\mathrm{i}\tau$,这时

$$S=\int\mathrm{d}t\cdot L=-\mathrm{i}\int\mathrm{d}\tau L'$$

$$\equiv\mathrm{i}\int\mathrm{d}\tau(-L')\equiv\mathrm{i}S_E. \tag{8.2.1}$$



复平面内的 Wich 转动

式中 $S_E=\int\mathrm{d}\tau(-L')=\int\mathrm{d}\tau L_E.$

$$L_E=-L'=-L(-\mathrm{i}\tau).$$

这样 Feynman 积分的 Lorentz 形式(实时) 就变为 Feynman 积分的欧几里得形式

$$\langle q'',\tau'',|q',\tau'\rangle=N\int D[q]\exp(-S_E). \tag{8.2.2}$$

1979 年 Schon 和丘成桐证明:对于任一渐近欧氏正定且标量曲率为 0 的度规,欧氏作用量一定是正定的.

若 S_E 为正定,则路径积分是有意义的,若 S_E 为非正定,或 S_E

无下界，则沿实欧氏“路径”积分时，积分将不收敛，解决的办法是在相空间引入“复中间路径”，这就使得

$$S = S^{(R)} + \mathrm{i}S^{(I)},$$

或 $-S_E = \mathrm{i}S^{(R)} - S^{(I)}$.

适当选择“复中间路径”总可以使积分(8.2.2)是收敛的.

可以证明如果在欧氏空间能够定义一个良好的路径积分(8.2.2)，则通过虚时间到实时间的解析延拓 $\tau \to it$，即可获得在实时间上的合理的 Lorentz 场论. 在 Lorentz 路径积分中，经典路径是具有稳定相位的那条路径，在欧几里得路径积分中，它是令欧氏作用量取最小值，因而对积分有最大贡献的因子，故在半经典近似或稳相近似中(8.2.2)可写为

$$\langle q'', t'' | q', t' \rangle \sim \mathrm{e}^{-S_{E,\mathrm{classical}}}. \tag{8.2.3}$$

§8.3 格林函数的生成泛函

现讨论算符的时序积 $T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\cdots\hat{q}(t_n)]$ 在任二量子态 $|q', t'\rangle$ 和 $|q'', t''\rangle$ 之间的矩阵元

$$\langle q'', t'' | T[q(t_1)q(t_2)\cdots q(t_n)] | q', t' \rangle.$$

我们证明

$$\langle q'', t'' | T[\hat{q}(t_1)\cdot\hat{q}(t_2)\cdots\hat{q}(t_n)] | q', t' \rangle$$

$$= \int D[q] q(t_1)q(t_2)\cdots q(t_n)\exp\left[\mathrm{i}\int_{t'}^{t''} \mathrm{d}t L(t)\right]. \tag{8.3.1}$$

证：当仅有一个算符时，例

$$\langle q'', t'' | \hat{q}(t_0) | q', t' \rangle, t' < t_0 < t''.$$

与 §8.1 类似，把 $(t'' - t')$ 分成 $(n+1)$ 等份，并把 t_0 作为一个分点.

可得：

$$\langle q''t'' | q(t_0) | q't' \rangle = \int \mathrm{d}q_1 \mathrm{d}q_2 \cdots \mathrm{d}q_0 \cdots \mathrm{d}q_n \langle q''t'' | q_n t_n \rangle$$

$$\cdots\langle q_i t_i|\hat{q}(t_0)\times$$
$$\times\ |q_0,t_0\rangle\cdots\langle q_1 t_1|q',t'\rangle.$$

由于 $\hat{q}(t_0)|q_0 t_0\rangle = q_0|q_0 t_0\rangle$，其中 $q_0\equiv q(t_0)$，即得

$$\langle q''t''|\hat{q}(t_0)|q't'\rangle = \int dq_1 dq_2\cdots dq_0\cdots dq_n q(t_0)$$
$$\langle q''t''|q_n t_n\rangle\cdots\langle q_i t_i|q_0 t_0\rangle$$
$$\cdots\langle q_1 t_1|q't'\rangle$$
$$= \int D[q]q(t_0)\exp[i\int_{t'}^{t''}dtL(t)(\text{取极限后}).$$

上述证明可推广到任意多个算符的时序积.

(8.1.18) 与(8.3.1) 之间存在如下的重要关系，即

$$\langle q''t''|T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\cdots\hat{q}(t_n)]|q't'\rangle$$
$$= \frac{1}{i^n}\frac{\delta^n\langle q'',t''|q',t'\rangle^J}{\delta J(t_n)\cdots\delta J(t_2)\delta J(t_1)}\bigg|_{J=0.} \tag{8.3.2}$$

其中 $\langle q'',t''|q',t'\rangle^J = \int D[q]\exp\{i\int_{t'}^{t''}dt[L(t)+J(t)q(t)]\}.$

$J(t)$ 叫外源. (8.3.3)

注意到 $\dfrac{\delta J(t)}{\delta J(t_0)} = \delta(t-t_0)$，即可由(8.3.3) 证明(8.3.2).

如果(8.3.2)式中的初态、末态分别为 $|0,\text{in}\rangle$，$|0,\text{out}\rangle$，则(8.3.2) 变为

$$\frac{1}{i^n}\frac{\delta^n\langle 0,\text{out}|0,\text{in}\rangle^J}{\delta J(t_n)\cdots\delta J(t_2)\delta J(t_1)}\bigg|_{J=0} = \langle 0,\text{out}|T[\hat{q}(t_1)\cdots\hat{q}(t_n)]|0,\text{in}\rangle.$$

或 $$\frac{1}{i^n}\frac{\delta^n Z(J)}{\delta J(t_n)\cdots\delta J(t_1)}\bigg|_{J=0} = G_n(t_1,t_2,\cdots,t_n). \tag{8.3.4}$$

式中

$$Z(J)\equiv\langle 0,\text{out}|0,\text{in}\rangle^J \equiv N\int D[q]\exp\{i\int_{t'}^{t''}dt$$
$$[L(t)+J(t)q(t)]\}.$$

叫 n 点格林函数的生成泛函. (8.3.5)

(8.3.4) 中的格林函数既包含所有连通的格林函数，也包含

不连通的格林函数，而场论中我们感兴趣的却是 n 点连通格林函数. 我们不证明，仅指出，n 点连通格林函数 $G_n^C(t_1,\cdots,t_n)$ 由下式给出：

$$G_n^{(C)} = \frac{1}{i^n}\frac{\delta^n \ln Z}{\delta J(t_n)\cdots\cdots\delta J(t_1)}\bigg|_{J=0}. \tag{8.3.6}$$

§8.4 量子场论的路径积分表述

可以把(8.1.18)、(8.3.1)、(8.3.2)、(8.3.3)、(8.3.4) 等公式推广到场论中去.

8.4.1. 标量场的路径积分表述

作替换

$$q(t) \to \varphi(t),$$

$$D[q] \to D(\varphi).$$

则所有上述公式都可直接推广到标量场去，例(8.1.18) 变为

$$\langle \varphi''(x') | \varphi'(x') \rangle = N\int D[\varphi]\exp(iS), \quad (8.4.1)$$

$$S = \int_{x'}^{x''} d^4x L(\varphi,\dot{\varphi}).$$

如果标量场的路径积分量子化的确与协变量子化等价，我们应期望可由路径积分表达推得标量场的场方程和量子条件，的确这一点是可以证明的，详见杨炳麟. 量子场论导引(上册)，p. 31 ～ p. 39.

8.4.2. 费米场的路径积分表述

Dirac 场的协变量子化条件为

$$\{\psi_\alpha(x),\bar{\psi}_\beta(y)\} = i\hbar S_{\alpha\beta}(x-y),$$

$$\{\psi_\alpha(x),\psi_\beta(y)\} = \{\bar{\psi}_\alpha(x),\bar{\psi}_\beta(y)\} = 0.$$

上述量子条件在经典极限 $\hbar \to 0$ 时，场量 $\psi_\alpha,\bar{\psi}_\alpha$ 也并非普通的函数，而是一种服从所谓Grassmann代数的反对易的 C 数，因此把

路径积分推广到费米场，我们必须定义反对易C数的泛函积分，我们不作证明，仅指出，对于 Dirac 场，一个合理的生成泛函为

$$Z(\xi,\bar{\xi}) = N\int D[\psi]D(\bar{\psi})\exp\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x[L(x) + \bar{\xi}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\xi(x)]\}. \tag{8.4.2}$$

其中ξ为反对易外源.

可以证明二点格林函数为

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \langle 0|T[\bar{\psi}(y)\psi(x)]|0\rangle \\ &= -\frac{\delta^2 Z(\xi,\bar{\xi})}{\delta\xi(y)\delta\bar{\xi}(x)}\bigg|\xi = \bar{\xi} = 0 \\ &= \mathrm{i}S_F(x-y). \end{aligned} \tag{8.4.3}$$

8.4.3. 规范场的路径积分

规范场是一种玻色场，因此规范场的路径积分似乎可以直接从标量场的路径积分得到，例如，可能以为电磁场的生成泛函可表为

$$Z(J^\mu) = N\int D[A^\mu]\exp\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x[L + J^\mu A_\mu]\}. \tag{8.4.4}$$

式中 $L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$

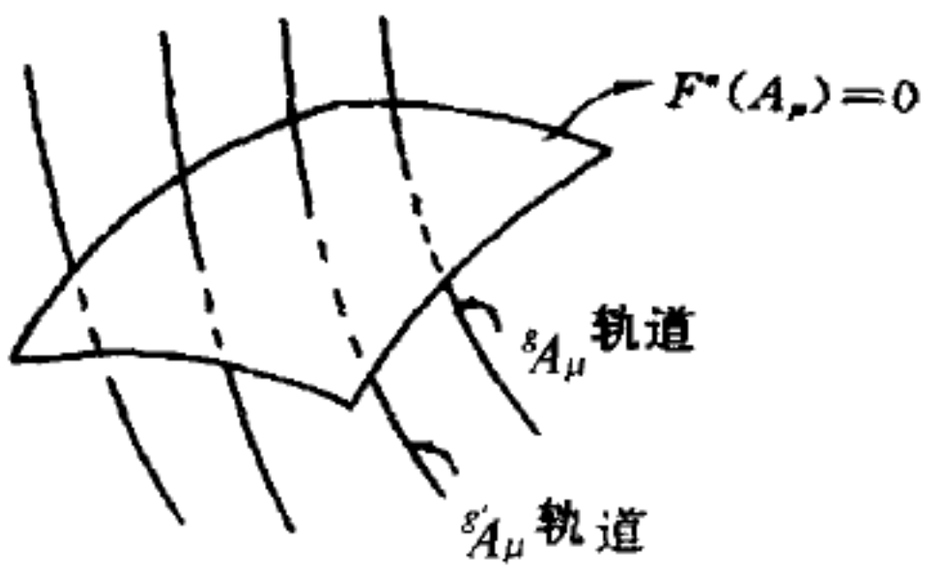
J^μ为矢量外源.

可是如果考虑到规范势A_μ的规范不定性

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\kappa(x). \tag{8.4.5}$$

则路径积分(8.4.4)其实是一个无意义的发散量. 理由是(8.4.4)是对包含由(8.4.5)变换所联系的全部$A_\mu(x)$积分的，由于(8.4.4)中的拉氏量是规范不变的，积分中由变换(8.4.5)所联系的场空间内的点在场空间划出一条轨道. 沿任一轨道积分时拉氏量是常数，积分贡献为该轨道体积，全部无穷多的轨道体积将贡献一个无穷大的“体积”，这显然使得(8.4.4)是发散的. 为了得到有

限的生成泛函，我们必须引入规范固定，亦即需要把规范约束条件引入到泛函积分中来，这种有约束的路径积分最早由 Fadeev 和 Popov(1967) 提出. 他们提出，函数空间的积分应限制在由规范固定条件



$$F^a(A_\mu^a) = 0 \tag{8.4.6}$$

$\alpha = 1,2,\cdots,N$ 共 n^2-1 个(SU_n 规范群).

所确定的场空间的超曲面上，假设每根轨道只与超曲面相交一次，把函数空间上的积分限制在超曲面上就可消去“轨道体积”对积分发散的影响. 为此，Fadeev 与 Popov 在路径积分中引入一个新的因子

$$\Delta_F[A_\mu]\int D[g]\prod_{a,x}\delta(F^a({}^gA_\mu)) = 1. \tag{8.4.7}$$

这样(8.4.4) 就可改写为

$$Z_F(0) = N\int D[A_\mu]\,\Delta_F[A_\mu]\int D[g]\prod_{a,x}\delta\,(F^a({}^gA_\mu))$$

$$\exp(\mathrm{i}\int L\mathrm{d}^4x). \tag{8.4.8}$$

式中 g 代表规范群的群元素，$\Delta_F[A_\mu]$ 由(8.4.7) 定义.

注意到 $L, D[A_\mu]$ 和 $\Delta_F[A_\mu]$ 是规范不变的(证明可见任一本规范场量子论专著)，对群空间的积分与对场空间的积分可分离开来，可把前者吸收到归一化因子中去，然后再加上外源项，即最后得

$$Z(J_\mu) = N\int D[A_\mu]\Delta_F[A_\mu]\prod_{a,x}\delta[F^a(A_\mu)]$$

$$\exp(\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(L + J^\mu A_\mu)). \tag{8.4.9}$$

为了从生成泛函(8.4.9)导出格林函数，有必要把上式中两个因子 $\Delta_F(A_\mu)$ 和 $\delta(F^a(A_\mu))$ 写成指数形式，以得到一个有效拉氏量 L_{eff}. 我们不作证明，仅指出，最后的结果是

$$Z(J_\mu) = N\int D[A_\mu]D[\eta]D[\bar{\eta}]\exp(\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(L + L_{GF} + F_{FPG} + J_\mu A_\mu)). \tag{8.4.10}$$

式中 $L_{GF} = -\frac{1}{2\alpha}F^2[A]$ 叫规范固定项. (8.4.11)

$F[A]$ 决定于规范的选择，α 叫规范参数，$\alpha = 1$ 叫费曼规范.

$\alpha = 0$ 叫朗道规范($i, e, \partial^\mu A_\mu = 0$).

$L_{FPG} = -\bar{\eta}^d M^{d\beta}\eta^\beta$ 叫 F-P 鬼项. (8.4.12)

$\bar{\eta}, \eta$ 乃遵守费米-狄拉克统计的标量场(鬼场)，它们只是一种没有物理意义的数学辅助工具.

M 是群空间的有限维矩阵，时空内的无限维矩阵，

它的矩阵元可表为

$$M_F^{\alpha\beta}(x, y) \equiv \frac{\delta F^\alpha[{}^g A_\mu(x)]}{\delta\mu^\beta(y)}. \tag{8.4.13}$$

在无穷小规范变换下，

$$A_\mu^a(x) \to A_\mu^{a'}(x) = A_\mu^a(x) + f^{\alpha\beta\gamma}\mu^\beta(x)A_\mu^\gamma(x) + \frac{1}{g}\partial_\mu u^a(x). \tag{8.4.14}$$

对于电磁场，采用 Lorentz 规范时：

$$F = \partial_\mu A^\mu.$$

$$\delta A^\mu = \frac{1}{e}\partial_\mu u(x).$$

$$\delta F = \partial_\mu \delta A^\mu = -\frac{1}{e}\Box u(x).$$

由(8.4.12)得

$$M = e\frac{\delta F}{\delta u} = -\Box. \tag{8.4.15}$$

此式与 A_μ 无关，在路径积分(8.4.10)中对 L_{FPG} 的积分可从关于 A_μ 的泛函积分中提出来并入归一化常数中去，结果，我们得到电磁场的生成泛函为

$$Z(J_\mu) = N\int D[A_\mu]\exp(\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(L + L_{GF} + J_\mu A^\mu)). \tag{8.4.16}$$

对于 SU_2 规范场，采用 Landau 规范时：

$$F = \partial_\mu A^\mu_a.$$

$$\delta A^a_\mu = f^{\alpha\beta\gamma}u^\beta A^\gamma_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu u^a.$$

$$\delta F^\alpha = \partial_\mu \delta A^\alpha_\mu = f^{\alpha\beta\gamma}[(\partial^\mu u^\beta)A^\gamma_\mu + u^\beta \partial^\mu A^\gamma_\mu] - \frac{1}{g}\Box u^\partial.$$

由(8.4.13)得

$$M^{\alpha\beta}(x,x) = g\frac{\delta F^\alpha}{\delta u^\beta} = gf^{\alpha\beta\gamma}(\partial^\mu A^\gamma_\mu + A^\gamma_\mu\partial_\mu) - \delta^{\alpha\beta}\Box. \tag{8.4.17}$$

$$Z_F(J,\xi,\bar{\xi}) = N\int \mathrm{D}[A^a_\mu]D[\eta]D[\bar{\eta}]\exp(\mathrm{i}S_{eff} + \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x \times [J^a_\mu A^{a\mu} + \bar{\xi}_a\eta_a + \bar{\eta}_a\xi_a]). \tag{8.4.18}$$

$$S_{eff} = S + S_{GF} + S_{FPG}.$$

$$S_{FPG} = \int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\,\bar{\eta}_a(x)M^{\alpha\beta}_F(xy)\eta_\beta(y).$$

$$S_{GF} = -\frac{1}{2\alpha}\int \mathrm{d}^4x(F^a(A^a_\mu))^2.$$

外源 ξ 和 $\bar{\xi}$ 乃相应于鬼场 η 和 $\bar{\eta}$ 所引入的 Grassmann 代数的元素.

附录　Grassmann 代数简介

n 维 Grassmann 代数的元素 $C_i(i=1,2,\cdots,n)$ 遵从反对易关系

$$\{C_i,C_j\}=0, \tag{A-1}$$

特别有

$$C_j^2=0. \tag{A-2}$$

这导致任一函数 $f(C_i,\cdots,C_n)$ 仅含有有限多项，例如

$$\begin{cases} f(C)=\alpha_0+\alpha_1C_1, \\ f(C_1,C_2)=\alpha_0+\alpha_1C_1+\alpha_2C_2+\alpha_{12}C_1C_2, \\ f(C_1,C_2,C_3)=\alpha_0+\alpha_1C_1+\alpha_2C_2+\alpha_3C_3+\alpha_{12}C_1C_2 \\ \qquad\qquad +\alpha_{13}C_1C_3+\alpha_{23}C_2C_3+\alpha_{123}C_1C_2C_3, \\ \cdots\cdots \end{cases} \tag{A-3}$$

对 Grassmann 元素的微分要求满足

$$\frac{\partial}{\partial C_1}(C_1C_2)=\delta_{i1}C_2-\delta_{i2}C_1, \tag{A-4}$$

因此，通过对 $f(C_i)$ 的作用可验证：

$$\{\frac{\partial}{\partial C_i},C_j\}=\delta_{ij}, \tag{A-5}$$

$$\{\frac{\partial}{\partial C_i},\frac{\partial}{\partial C_j}\}=0. \tag{A-6}$$

(A-6) 表示

$$\left(\frac{\partial}{\partial C_i}\right)^2=0.$$

这意味着微分没有逆运算，因而 Grassmann 元素的积分需要重新定义. 一个适当的定义方法是要求积分对函数的作用与微分相同，这样，对于一维情形，$f(C)=a+bC$，由于 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}C}=b$，我们也

要求

$$\int \mathrm{d}C f(C) = b.$$

这意味着要求：

$$\int \mathrm{d}C = 0, \quad \int \mathrm{d}C \cdot C = 1, \tag{A-7}$$

推广到 n 维情形，则要求

$$\int \mathrm{d}C_i = 0, \quad \int \mathrm{d}C_i C_j = \delta_{ij}. \tag{A-8}$$

现设 η 和 η 是独立的 Grassmann 数，按积分规则(A-8) 可得

$$\int \mathrm{d}\eta = \int \mathrm{d}\,\bar{\eta} = 0, \quad \int \mathrm{d}\eta \cdot \eta = \int \mathrm{d}\,\bar{\eta} \cdot \bar{\eta} = 1. \tag{A-9}$$

由于 $\eta^2 = \bar{\eta}^2 = 0$，有

$$\mathrm{e}^{-\bar{\eta}\eta} = 1 - \bar{\eta}\eta, \tag{A-10}$$

因此

$$\int \mathrm{d}\,\bar{\eta}\mathrm{d}\eta \mathrm{e}^{-\bar{\eta}\eta} = \int \mathrm{d}\,\bar{\eta}\mathrm{d}\eta - \int \mathrm{d}\,\bar{\eta}\mathrm{d}\eta \cdot \bar{\eta}\eta = \int \mathrm{d}\,\bar{\eta}\mathrm{d}\eta\eta\,\bar{\eta} = 1. \tag{A-11}$$

进一步考虑 η 的二维情形，设

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \qquad \bar{\eta} = (\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2),$$

$$\bar{\eta}\eta = \bar{\eta}_1\eta_1 + \bar{\eta}_2\eta_2,$$

$$(\bar{\eta}\eta)^2 = (\bar{\eta}_1\eta_1 + \bar{\eta}_2\eta_2)(\bar{\eta}_1\eta_1 + \bar{\eta}_2\eta_2),$$

$$= \bar{\eta}_1\eta_1\,\bar{\eta}_2\eta_2 + \bar{\eta}_2\eta_2\,\bar{\eta}_1\eta_1 = 2\,\bar{\eta}_1\eta_1\,\bar{\eta}_2\eta_2,$$

$$(\bar{\eta}\eta)^n = 0, \quad n \geqslant 3,$$

所以，

$$\mathrm{e}^{-\bar{\eta}\eta} = 1 - (\bar{\eta}_1\eta_1 + \bar{\eta}_2\eta_2) + \bar{\eta}_1\eta_1\,\bar{\eta}_2\eta_2.$$

应用积分规则(A-9)，有

$$\int \mathrm{d}\,\bar{\eta}\mathrm{d}\eta \mathrm{e}^{-\bar{\eta}\eta} = \int \mathrm{d}\,\bar{\eta}_1\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\,\bar{\eta}_2\mathrm{d}\eta_2\,\bar{\eta}_1\eta_1\,\bar{\eta}_2\eta_2 = 1. \tag{A-12}$$

这与一维时的(A-11)结果相同,一般地,这个结果对更高维数的η都成立.

现在作变量变换,令

$$\bar{\eta} = \bar{\alpha}M, \quad \eta = N\alpha. \tag{A-13}$$

其中,M、N是2×2矩阵,α和$\bar{\alpha}$是新的独立的二维Grassmann元素,我们有

$$\begin{aligned}\bar{\eta}_1\,\bar{\eta}_2 &= (\bar{\alpha}_1 M_{11} + \bar{\alpha}_2 M_{21})\cdot(\bar{\alpha}_1 M_{12} + \bar{\alpha}_2 M_{22})\\ &= \bar{\alpha}_1\,\bar{\alpha}_2(M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21})\\ &= \bar{\alpha}_1\,\bar{\alpha}_2 \det M.\end{aligned} \tag{A-14}$$

于是在变换(A-13)下,应有

$$\int \mathrm{d}\,\bar{\eta}_1 d\,\bar{\eta}_2\,\bar{\eta}_1\,\bar{\eta}_2 = \int J(M)\mathrm{d}\,\bar{\alpha}_1\mathrm{d}\,\bar{\alpha}_2\,\bar{\alpha}_1\,\bar{\alpha}_2 \det M. \tag{A-15}$$

其中$J(M)$为变换的雅可比式,为保证积分规则(A-8)成立,即

$$\int \mathrm{d}\,\bar{\eta}_1\mathrm{d}\,\bar{\eta}_2\,\bar{\eta}_1\,\bar{\eta}_2 = \int \mathrm{d}\,\bar{\alpha}_1\mathrm{d}\,\bar{\alpha}_2\,\bar{\alpha}_1\,\bar{\alpha}_2 = 1.$$

必须要求

$$J(M) = (\det M)^{-1}. \tag{A-16}$$

注意,这是与通常的变换雅可比$J(M) = \det M$不同的.类似地,有

$$\mathrm{d}\eta_1\mathrm{d}\eta_2 = (\det N)^{-1}\mathrm{d}\alpha_1\mathrm{d}\alpha_2, \tag{A-17}$$

这样,在变换(A-13)下(A-12)变为

$$(\det MN)^{-1}\int \mathrm{d}\bar{\alpha}\mathrm{d}\alpha \mathrm{e}^{-\bar{\alpha}MN\alpha} = 1, \tag{A-18}$$

记$MN = A$,这给出

$$\int \mathrm{d}\,\bar{\alpha}\mathrm{d}\alpha \mathrm{e}^{-\bar{\alpha}A\alpha} = \det A. \tag{A-19}$$

这个公式对更高维数都是成立的.

对上述Dirac场,我们把Grassmann代数推广到无限维,其元素用$C(x)$表示,它们满足

$$\begin{cases} \{C(x),C(y)\} = 0, \\ \{\dfrac{\partial}{\partial C(x)} \cdot C(y)\} = \delta(x-y), \{\dfrac{\partial}{(\partial C(x)} \dfrac{\partial}{\partial C(y)}\} = 0, \\ \int \mathrm{d}C(x) = 0, \quad \int \mathrm{d}C(y) \cdot C(x) = \delta(x-y). \end{cases} \tag{A-20}$$

公式(A-19)推广到无限维后成为泛函积分形式：

$$\int D\,\bar{\alpha} D\alpha \mathrm{e}^{-\bar{\alpha}A\alpha} = \det A. \tag{A-21}$$

现在，我们可以用类似于上节标量场的处理方式来表示 Dirac 场的有源真空 - 真空跃迁振幅 $Z[J]$. 由于我们是把 $\psi(x)$ 和$\bar{\psi}(x)$当做独立场量来处理的，故相应地我们需引进两个独立外源$\bar{\eta}(x)$和 $\eta(x)$，且泛函积分要对 $D\bar{\psi}$ 和 $D\psi$ 进行，于是，Dirac 场的 $Z[J]$为：

$$\begin{aligned} Z[\eta,\bar{\eta}] = N\int D\,\bar{\psi} D\psi \exp(\mathrm{i}\int \mathrm{d}x[\mathscr{L}(\psi,\bar{\psi}) + \bar{\eta}(x)\psi(x) \\ + \bar{\psi}(x)\eta(x) + \frac{\mathrm{i}}{2}\epsilon\,\bar{\psi}(x)\psi(x)]) \end{aligned} \tag{A-22}$$

注意，外源 $\eta(x)$，$\bar{\eta}(x)$ 也是 Grassmann 代数的元素.

对自由 Dirac 场，其拉氏量密度：

$$\mathscr{L}_0 = \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma_\mu \partial_\mu - m)\psi,$$

引进记号

$$S_F^{-1}(x) = \mathrm{i}\gamma_\mu \partial_\mu - m + \mathrm{i}\epsilon. \tag{A-23}$$

容易验证它的逆 $S_v(x)$ 是存在的，可由下式表示：

$$S_F(x) = (\mathrm{i}\gamma_\mu \partial_\mu + m - \mathrm{i}\epsilon)\Delta_F(x). \tag{A-24}$$

其中 $\Delta_F(x)$ 是 Feynman 传播子，事实上，我们有

$$\begin{aligned} S_F^{-1}S_F &= (\mathrm{i}\gamma_\mu \partial_\mu - m + \mathrm{i}\epsilon)(\mathrm{i}\gamma_\mu \partial_\mu + m - \mathrm{i}\epsilon)\Delta_F(x) \\ &= (\Box - m^2 + \mathrm{i}\epsilon')\Delta_F(x) = \delta^4(x). \end{aligned}$$

其中 $\epsilon' = 2m\epsilon$.

把自由 Dirac 场的 $\mathscr{L}_0$ 代入(A-22),利用式(A-23),我们有

$$Z[\eta,\bar{\eta}]$$

$$= N\int D\bar{\psi}D\psi\exp\left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}x(\bar{\psi}S_F^{-1}\psi + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x))\right].$$

(A-25)

〔详见裘忠平.现代量子场论导引,§ 5.4〕

参 考 书 目

朱洪元. 量子场论. 北京:科学出版社,1961.

胡宁. 场的量子论. 北京:科学出版社,1964.

A. И 阿希泽尔,B. Б. 别列斯捷茨基著,于敏等译. 量子电动力学. 北京:科学出版社,1964.

胡瑶光. 规范场论. 上海:华东师范大学出版社,1984.

裘忠平. 现代量子场论导引. 武汉:华中师范大学出版社,1991.

杨炳麟. 量子场论导引. 北京:科学出版社,1988.

P. Roman. The Theory of Elementary Particles. North-Holland Pub. Co. ,1961.

G. Kallen. Elementary Particle Physics. Addison-Wesley Pub. Company, Inc. ,1964.

C. Itzykson, Jean-Bernard Zuber. Quantum Field Theory. Mc Graw Hill Inc. ,1980.

P. A. M. Dirac. The Principles of Quantum Mechanics. Oxford Univecsity Press,1947.

N. N. Bogoliulov, D. V. Shirkov. Quantum Field. The Benjamin/Cummings Pub. Comp. Inc. ,1983.

T. D. Lee. Particle Physics and Introduction to Field Theory. Harwood Academic Pub. GMBH,1981.

编　后　记

余一生坎坷，牢狱牛棚，险遭灭顶，而竟能苟生，实不幸中之大幸。

往昔余好贝多芬之《命运》*，每引贝氏名言“Ich will dem Schicksal in den Rachen greifen…”**做座右铭，以度困顿。然余实非一“职业斗士”，“反右”“文革”中，睹人世之险恶，叹一已之无能，常萌遁世之想，然桃源何处！苦海无边，多年来余仅能从书本中觅得一片绿树浓荫***，略舒身心之劳累屈辱，伴余度过人生苦逆。学习中偶有所得，则乐而忘忧，竟不知身之处逆境也。历数十载寒窗，终得徜徉于微观、宇观世界，以享上与造物者游，下与无始终外死生者为友，岂非苦中之一乐耶?!

余今老矣，但愿余于困顿中从绿树浓荫下拾得之真言实理或有助于年轻学子焉。

刘　辽

---

* 贝多芬第五交响曲，又名《命运》。

** 贝多芬于 30 岁时致 Wegeler 信（德文）“Ich will dem Schicksal in den Rachen greifen，Ganz niederbeugen soll es mich gwiss nicht”（我将扼住命运的咽喉，要想使我完全屈服，做不到！）

*** 莎士比亚有诗曰：Under the greenwood tree
Who loves to lie with me
And turn his merry note
Unto the sweet bird's throat
Come hither，come hither，come hither!
Here shall he see
No enemy
But winter and rough weather
先父刘朴教授于上世纪 20 年代曾将此诗用古文译为：
“绿树浓荫下
谁与共依眠…”