The Quantum Theory of Fields

Volume I Foundations

Steven Weinberg(著)
University of Texas at Austin

张驰(译)*

Cambridge University Press

*此版为二校稿, 如有任何翻译录入错误, 请联系zhangchi_110@163.com

目　　录

符号约定 vii

1 历史介绍 1

1.1 相对论波动力学 2

1.2 量子场论的诞生 10

1.3 无限大的问题 21

参考文献 27

2 相对论量子力学 35

2.1 量子力学 35

2.2 对称性 36

2.3 量子 Lorentz 变换 39

2.4 Poincaré 代数 42

2.5 单粒子态 45

2.6 空间反演和时间反演 54

2.7 投影表示 60

A 对称表示定理 66

B 群算符和同伦类 70

C 反演和简并多重态 73

参考文献 77

3 散射理论 79

3.1 “入”态和“出”态 79

3.2 S-矩阵 83

3.3 S-矩阵的对称性 85

3.4 速率与截面 97

3.5 微扰论 103

3.6 幺正性的影响 107

3.7 分波展开 . . . 110
3.8 共振 . . . 115
参考文献 . . . 120
4 集团分解原理 . . . 123
4.1 玻色子与费米子 . . . 123
4.2 产生和湮灭算符 . . . 125
4.3 集团分解和连通振幅 . . . 129
4.4 相互作用的结构 . . . 132
参考文献 . . . 137
5 量子场与反粒子 . . . 139
5.1 自由场 . . . 139
5.2 因果标量场 . . . 146
5.3 因果矢量场 . . . 150
5.4 Dirac 形式体系 . . . 155
5.5 因果 Dirac 场 . . . 160
5.6 齐次Lorentz群的一般不可约表示 . . . 167
5.7 一般因果场 . . . 170
5.8 CPT 定理 . . . 179
5.9 无质量粒子场 . . . 180
参考文献 . . . 187
6 Feynman 规则 . . . 189
6.1 规则的推导 . . . 189
6.2 传播子的计算 . . . 199
6.3 动量空间规则 . . . 204
6.4 离质量壳 . . . 209
参考文献 . . . 212
7 正则体系 . . . 213
7.1 正则变量 . . . 213
7.2 拉格朗日体系 . . . 217
7.3 整体对称性 . . . 223

7.4 Lorentz 不变性 . . . 229
7.5 过渡到相互作用绘景：例子 . . . 232
7.6 约束与 Dirac 括号 . . . 238
7.7 场重定义与冗余耦合 . . . 242
A 从正则对易子到Dirac括号 . . . 243
参考文献 . . . 247
8 电动力学 . . . 249
8.1 规范不变性 . . . 249
8.2 约束与规范条件 . . . 252
8.3 Coulomb 规范下的量子化 . . . 254
8.4 相互作用绘景中的电动力学 . . . 257
8.5 光子传播子 . . . 259
8.6 旋量电动力学的 Feynman 规则 . . . 261
8.7 Compton 散射 . . . 265
8.8 推广：p-形式规范场 . . . 272
迹 . . . 274
参考文献 . . . 276
9 路径积分方法 . . . 279
9.1 普遍的路径积分公式 . . . 280
9.2 过渡到 S-矩阵 . . . 285
9.3 路径积分公式的拉格朗日版本 . . . 288
9.4 Feynman 规则的路径积分推导 . . . 292
9.5 费米子的路径积分 . . . 295
9.6 量子电动力学的路径积分表述 . . . 307
9.7 各种统计 . . . 310
A 高斯多重积分 . . . 312
参考文献 . . . 315
10 非微扰方法 . . . 317
10.1 对称性 . . . 317
10.2 定极学 . . . 320

10.3 场重整化和质量重整化 . . . 325
10.4 重整化荷与 Ward 恒等式 . . . 330
10.5 规范不变性 . . . 333
10.6 电磁形状因子与磁矩 . . . 337
10.7 Källen-Lehmann表示 . . . 341
10.8 色散关系 . . . 344
参考文献 . . . 350
11 量子电动力学中的单圈辐射修正 . . . 353
11.1 抵消项 . . . 353
11.2 真空极化 . . . 354
11.3 反常磁矩与电荷半径 . . . 362
11.4 电子自能 . . . 369
A 各种积分 . . . 372
参考文献 . . . 373
12 重整化的一般理论 . . . 375
12.1 发散度 . . . 375
12.2 发散的消除 . . . 379
12.3 可重整性是必要的吗? . . . 387
12.4 浮动截断 . . . 392
12.5 偶然对称性 . . . 394
参考文献 . . . 396
13 红外效应 . . . 399
13.1 软光子振幅 . . . 399
13.2 虚软光子 . . . 403
13.3 实软光子; 发散的抵消 . . . 406
13.4 一般的红外发散 . . . 409
13.5 软光子散射 . . . 412
13.6 外场近似 . . . 414
参考文献 . . . 419

14 外场中的束缚态 421
14.1 Dirac 方程 421
14.2 外场中的辐射修正 427
14.3 轻原子中的 Lamb 移动 431
参考文献 444

符号约定

拉丁指标 i, j, k 等一般取遍三维空间坐标指标, 通常取做 $1, 2, 3$.

希腊指标 μ, ν 等一般取遍四维时空坐标指标 $1, 2, 3, 0$, 其中 x^0 是时间坐标.

重复指标一般表示求和, 除非另有说明.

时空度规 $\eta_{\mu\nu}$ 是对角的, 其对角元为 $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1, \eta_{00} = -1$.

达朗贝尔算符定义为 $\Box \equiv \eta^{\mu\nu}\partial^2/\partial x^\mu \partial x^\nu = \nabla^2 - \partial^2/\partial t^2$, 其中 ∇^2 是拉普拉斯算符 $\partial^2/\partial x^i \partial x^i$.

列维-奇维塔张量 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 定义为全反对称量, 并有 $\epsilon^{0123} = +1$.

空间三矢由粗体字母标记.

任意矢量上的"帽子"代表相应的单位矢量: 因此 $\hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$.

任意量上加点代表该量对时间的导数.

狄拉克矩阵 γ_μ 的定义满足 $\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\eta_{\mu\nu}$. 并且 $\gamma_5 = \mathrm{i}\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, $\beta = \mathrm{i}\gamma^0$.

阶跃函数 $\theta(s)$: 当 $s > 0$ 时为 1, $s < 0$ 时为 0.

矩阵或矢量 A 的复共轭、转置、厄米共轭分别记为 A^*, A^{T} 以及 $A^\dagger = A^{*\mathrm{T}}$. 在强调一个算符的矩阵或矢量是非转置时, 我们用星号, 除此之外, 算符 O 的厄米共轭记为 $O^\dagger$. 在方程末尾的 +H.c. 或 c.c. 表示前面几项的厄米共轭或复共轭. Dirac 旋量 u 上加横线定义为 $\bar{u} = u^\dagger\beta$.

除了第一章, 我们取 $\hbar$ 和 c 为单位 1. 这样 $-e$ 是电子的有理化电荷, 精细结构常数是 $\alpha = e^2/4\pi \simeq 1/137$.

引用数据末尾括号中的数字给出了引用数据末尾数字的不确定度, 在没有额外指明的情况下, 实验数据取自'Review of Particle Properties,' *Phys. Rev.* **D50**, 1173 (1994).

第 1 章　历史介绍

沉浸在现代物理之中的我们很难理解哪怕只是几年前物理学家所遇到的困难, 也很难从他们的经验中获益. 与此同时, 历史知识对于我们而言是喜忧参半的, 它妨碍了我们按照逻辑的顺序重构物理理论, 而这种依逻辑顺序的重构向来又是必须的.

在本书中, 我尝试按照逻辑的顺序建立场的量子理论, 强调从狭义相对论和量子力学的物理原理出发的演绎道路. 这种方法必然使我偏离史实发展的真实次序. 例如, 历史上, 量子场论部分衍生于对相对论波动方程的研究, 这包括 Maxwell 方程, Klein-Gordon 方程以及 Dirac 方程. 由于这些原因, 量子场论相关的教程和专著会很自然地先介绍这些波动方程, 并给予它们相当大的篇幅. 然而, 长时间以来, Wigner 将粒子定义为非齐次 Lorentz 群的表示在我看来是一个更好的出发点, 尽管这个工作直到 1939 年才发表, 并且在那以后的很多年里没有很大的影响. 在这本书里, 我们从粒子出发, 然后才是波动方程.

这并不意味着粒子肯定比场更基本. 在 1950 年后的很多年, 大家普遍认为自然的基本定律应该采取量子场论的形式. 在本书中, 我从粒子出发, 并不是因为它们更基本, 而是因为对于我们而言, 粒子能够更确实, 更直接地从相对论和量子力学的原理中导出. 如果发现一些不能用量子场论描述的物理系统, 这将引起轰动; 如果发现不服从量子力学和相对论法则的系统, 那则是一场灾难.

事实上, 稍后便有了反对将量子场论作为基础的观点. 基础理论可能不是场或粒子的理论, 而是一些完全不同的东西, 比如弦. 这种观点认为: 我们引以为傲的量子电动力学和其它量子场论仅仅是“有效场论”, 是更基础理论的低能近似. 我们的场论如此的成功并不是因为它们是基本真理, 而是因为, 将任何相对论性量子理论应用于足够低能的粒子时, 它们看起来都像个场论. 基于此, 如果我们想知道为什么量子场论是这个样子, 就必须从粒子出发.

然而我们不想以完全忘掉过去为代价. 因此本章将呈现出量子场论从早期直到 1949 年的历史, 直到那时, 它才显露出它的现代形式. 在本书的其余部分, 我将会尽力避免在介绍物理时引入历史.

在本章的撰写过程中, 我发现一个问题: 从一开始, 量子场论的历史与量子力学本身的历史就不可避免地纠缠在一起. 因此, 熟悉量子力学历史的读者可能会发现一些早已熟悉的材料, 尤其在第一节, 在这一节我讨论了将狭义相对论和量子力学融合在一起的早期尝试. 遇到这种情况, 我只能建议读者应该跳到那些不太熟悉的部分.

另一方面, 那些没有接触过量子场论的读者会发现本章的部分内容过于简洁以至于无法完全理解. 我请这样的读者不要担心. 本章并不是作为一个自足的量子场论简介而准备的, 也不是本书其余部分的基础. 一些读者甚至可能更适合从下一章开始, 然后再回到历史. 然而, 对于大多数读者, 量子场论的历史应该是量子场论本身一个很好的导论. 应该补充说明一下: 本章并不是作为历史研究的原始工作而准备的. 它是基于那些真正历史学家的书和文章, 以及一些我读过的历史综述和物理原始论文. 它们中的大多数列于本章最后的参考书目和参考文献中. 我建议那些想要更深入了解的读者去参考所列文献.

关于符号的说明. 为了保留过去的一些偏好, 在本章, 我将会写出因子 $\hbar$ 和 c (甚至 h), 但是为了方便与现代物理文献进行比较, 对于电荷, 我将会使用更加现代的有理化静电单位制, 使得精细结构常数 $\alpha \simeq 1/137$ 为 $e^2/4\pi\hbar c$. 以后的章节我将几乎全部使用"自然"单位制, 简单地令 $\hbar = c = 1$.

1.1 相对论波动力学

波动力学开始是以相对论波动力学的面目出现的. 事实上, 正如我们将看到的, 波动力学的建立者, Louis de Broglie (路易 · 德布罗意)和Erwin Schrödinger (埃尔文 · 薛定谔), 从狭义相对论中获得了大量的灵感. 那以后不久, 人们就普遍地认识到, 相对论波动力学无法成为粒子数固定的相对论量子理论. 因此, 尽管相对论波动力学取得了大量成功, 却最终让位于量子场论. 然而, 相对论波动力学作为量子场论形式体系中的重要要素留存下来, 并向场论提出了挑战, 再现了它的成功.

物质粒子可能像光一样用波的形式进行描述, 这是 Louis de Broglie (路易 · 德布罗意)在 1923 年首先提出的[1]. 除了与辐射的相似性, 主要的线索是 Lorentz 不变: 如果粒子可以描述为在位置 $\mathbf{x}$ 和时间 t 处的相位形式为 $2\pi(\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{x} - \nu t)$ 的波, 并且, 如果这个相位是 Lorentz 不变的, 那么矢量 $\boldsymbol{\kappa}$ 和频率 ν 必须像 $\mathbf{x}$ 和 t 那样变换, 因而类似于 $\mathbf{p}$ 和 E. 为此, $\boldsymbol{\kappa}$ 与 ν 必须有和 $\mathbf{p}$ 与 E 相同的速度关系, 因而必须正比于它们, 并保持比例常数不变. 对于光子, 已有 Einstein 关系 $E = h\nu$, 因而, 对于实物粒子, 可以很自然地假定

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{p}/h\,, \qquad\qquad \nu = E/h\,, \tag{1.1.1}$$

正好与光子相同. 这样一来, 波的群速度 $\partial\nu/\partial\boldsymbol{\kappa}$ 就等价于粒子速度, 波包与它们所代表的粒子同步.

通过假定任意闭合轨道是粒子波长 $\lambda = 1/|\boldsymbol{\kappa}|$ 的整数倍, de Broglie 可以导出 Niels Bohr (尼尔森 · 玻尔)和 Arnold Sommerfeld (阿诺德 · 索末菲)的旧量子化条件, 这一条件虽然相当神秘, 但用来解释原子光谱却十分有效. 另外 de Borglie 和 Walter Elsasser (沃尔特 · 埃尔萨瑟)[2]认为, 通过寻找电子在晶体中散射的干涉效应, 就可以检验 de Broglie 的波动理论; 数年后, 这种效应被 Clinton Joseph Davisson (克林顿 · 约瑟夫 · 戴维森)和 Lester H.Germer (莱斯特 · 莱默)[3]发现. 然而, 对于非自由粒子, 例如处在普通 Coulomb 场中的电子, 该如何对 de Broglie 关系(1.1.1)进行修正依旧是不清楚的.

在量子力学的历史中, 波动力学是进一步发展的一个分支, 另一个分支是Werner Heisenberg(沃纳 · 海森堡), Max Born (马克思 · 玻恩), Pascual Jordan (帕斯夸尔 · 约当)和 Wolfgang Pauli(沃尔夫冈 · 泡利)在 1925—1926 年发展起来的矩阵力学[4]. 至少, 矩阵力学的部分灵感是坚持这个理论应该仅包含可观察量, 例如能级, 发射速率和吸收速率. Heisenberg 在他 1925 年的论文里以这样的宣言开头: "本篇论文尝试去建立理论量子力学的基础, 这种基础只建立在原则上可观测的物理量之间的关系上." 尽管现代量子场论已经远离这种想法了, 这种实证主义在量子场论的历史上多次出现, 例如, John Wheeler (约翰 · 惠勒)和 Heisenberg 引入的 S-矩阵(见第 3 章)以及 20 世纪 50 年代色散理论的复兴(见第 10 章). 然而, 在任何程度详述矩阵力学都将使我们远离主题.

众所周知, Erwin Schrödinger (埃文 · 薛定谔)再次发展了波动力学. 在他 1926 年的一系列论文[5]中, 著名的非相对论波动方程第一次出现, 然后被用来重现矩阵力学导出的结果. 在这之

后不久, 在第四篇论文的第六节, 他给出了相对论波动方程. 按照Dirac的说法[6], 历史是完全不同的: Schrödinger首先导出了相对论性方程, 却由于它给出错误的氢原子精细结构而感到沮丧, 数月之后, 他就意识到, 哪怕相对论性方程是错误的, 它的非相对论近似却是很有价值的! 正当Schrödinger准备去发表他的相对论波动方程时, Oskar Klein (奥斯卡·克莱因)[7]和Walter Gordon (沃尔特·戈登)[8]再次独立地发现了这个方程, 由于这个原因, 这个方程通常称为"Klein-Gordon方程".

Schrödinger的相对论波动方程的获得是通过, 首先注意到, 对于处在矢势为 $\mathbf{A}$ 和Coulomb势为 ϕ 的外场中, 质量为 m, 电荷为 e 的"Lorentz电子", 哈密顿量 H 和动量 $\mathbf{p}$ 存在如下关系*

$$0 = (H + e\phi)^2 - c^2(\mathbf{p} + e\mathbf{A}/c)^2 - m^2c^4 \,. \tag{1.1.2}$$

对于由平面波 $\exp\Big\{2\pi\mathrm{i}(\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{x} - \nu t)\Big\}$ 描述的自由粒子, de Broglie关系(1.1.1)可以通过如下的代换获得:

$$\mathbf{p} = h\boldsymbol{\kappa} \to -\mathrm{i}\hbar\boldsymbol{\nabla} \,, \qquad E = h\nu \to \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t} \,, \tag{1.1.3}$$

其中 $\hbar$ 是 $h/2\pi$ 的简写(由Dirac引入). 通过一个完全形式上的类比, Schrödinger猜测, 在外场 $\mathbf{A}, \phi$ 中的电子可以由波函数 $\psi(\mathbf{x}, t)$ 描述, 而这个波函数所满足的方程可以通过在(1.1.2)中做相同的替换获得:

$$0 = \left[\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t} + e\phi\right)^2 - c^2\left(-\mathrm{i}\hbar\boldsymbol{\nabla} + e\frac{\mathbf{A}}{c}\right)^2 - m^2c^4\right]\psi(\mathbf{x}, t) \,. \tag{1.1.4}$$

特别地, 在氢原子的定态中, 我们有 $\mathbf{A} = 0$ 和 $\phi = e/4\pi r$, 并且 ψ 对时间的依赖关系是 $\exp(-\mathrm{i}Et/\hbar)$, 所以(1.1.4)变成[a]

$$0 = \left[\left(E + \frac{e^2}{4\pi r}\right)^2 + c^2\hbar^2\nabla^2 - m^2c^4\right]\psi(\mathbf{x}) \,. \tag{1.1.5}$$

满足合适边界条件的解可以在如下能量值得到[9]

$$E = mc^2\left[1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{2n^4}\left(\frac{n}{\ell + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4}\right) + \cdots\right] \,, \tag{1.1.6}$$

其中 $\alpha \equiv e^2/4\pi\hbar c$ 是"精细结构常数", 约为 $1/137$; n 是正整数, ℓ 是以 $\hbar$ 为单位的轨道角动量, 为一整数, 并满足 $0 \le \ell \le n-1$. α^2 项与氢原子光谱的总体特征非常一致(莱曼系, 巴尔末系等), 并且, 据Dirac所说[6], 正是这种一致性引导Schrödinger最终去发展他的非相对论波动方程. 另一方面, α^4 项所给出的精细结构与Friedrich Paschen (弗里德里希·帕邢)当时已经得到的更精确测量结果却并不一致[10].

比较Arnold Sommerfeld (阿诺德·索末菲)[10a]与Schrödinger的结果是有意义的, Sommerfeld的结果是通过旧量子论获得的:

$$E = mc^2\left[1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{2n^4}\left(\frac{n}{k} - \frac{3}{4}\right) + \cdots\right] \,. \tag{1.1.7}$$

*这是Lorentz不变的, 因为 $\mathbf{A}$ 和 ϕ 与 $c\mathbf{p}$ 和 E 有着相同的Lorentz变换性质. Schrödinger实际上将 H 和 $\mathbf{p}$ 写成了作用量函数的偏导数形式, 但这不会对我们现在的讨论造成任何影响.

[a]原书方程(1.1.5)有笔误. ——译者注

其中 m 是电子质量. 这里的 k 是介于 1 和 n 之间的整数, 在 Sommerfeld 的理论中则是以轨道角动量 $\ell\hbar$ 的形式给定: $k = \ell + 1$. 这给出了与实验吻合的精细结构分裂: 例如, 对于 $n = 2$, 方程(1.1.7)给出了两个能级($k = 1$ 和 $k = 2$), 观测到的分裂为 $\alpha^4 mc^2/32$, 即 4.53×10^{-5} eV. 相反, Schrödinger 的结果(1.1.6)给出的 $n = 2$ 的精细结构分裂是 $\alpha^4 mc^2/12$, 远大于实验值.

Schrödinger 正确地意识到到这个不符的根源正是他对电子自旋的忽略. 碱原子中非平方反比的电场以及弱的外磁场所造成的原子能级分裂(所谓的反常 Zeeman 效应)揭示出, 态的多重性要远超于 Bohr-Sommerfeld 理论所给出的数目; 这导致了 1925 年 George Uhlenbeck (乔治·乌伦贝克)和 Samuel Goudsmit (塞缪尔·古兹密特)[11]提出电子有一个内禀角动量 $\hbar/2$. 并且, Zeeman 分裂[12]的大小使得他们进一步估计出: 电子存在磁矩

$$\mu = \frac{e\hbar}{2mc} . \tag{1.1.8}$$

很显然, 电子自旋应该与它的轨道角动量相耦合, 所以不能指望 Schrödinger 的相对论波动方程给出正确的精细结构分裂.

事实上, 在 1927 年, 数位学者[13]就已经能够证明自旋-轨道耦合能够解释 Schrödinger 的结果(1.1.6)与实验的差异. 这里其实有两个效应: 一个是电子的磁矩(1.1.8)与它在原子的静电场中运动时所感受到的磁场的直接耦合; 另一个是由自旋电子的圆周运动(即使没有磁矩)所引起的相对论 "Thomas 进动"[14]. 这两个效应使得总角动量 $j = \ell + \frac{1}{2}$ 的能级被提高到 Sommerfeld 所给出的(1.1.7)中取 $k = \ell + 1 = j + \frac{1}{2}$ 给出的值, 而 $j = \ell - \frac{1}{2}$ 的能级则降至对应 Sommerfeld 所给出的 $k = \ell = j + \frac{1}{2}$ 的能级. 因此, 能级仅依赖于 n 和 j, 而不另外依赖于 ℓ:

$$E = mc^2 \left[1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{2n^4} \left(\frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) + \cdots \right] . \tag{1.1.9}$$

尽管对于各能级, 轨道角动量值 ℓ 是错误的, 但很巧合地, Sommerfeld 的理论给出了氢原子能级分裂的正确大小($j + \frac{1}{2}$ 像 k 一样取遍从 1 到 n 的所有正整数). 补充一句, 氢原子的精细结构能级的简并度现在给出的预测是, 当 $j = \frac{1}{2}$ 时, 简并度为 2, 当 $j > \frac{1}{2}$ 时, 简并度则是 $2(2j + 1)$(对应于 ℓ 取值 $j \pm \frac{1}{2}$), 这与实验是吻合的.

尽管如此成功, 但这并不是一个从开始就包含电子自旋的彻底的相对论理论. 那样的理论直到 1928 年才被 Paul Dirac (保罗·狄拉克)发现. 然而, 他并不是简单地从做一个电子自旋的相对论理论出发; 相反, 他解决这一问题的方法是提出一个即使在今天看起来依旧十分奇怪的问题, 在他的 1928 年论文[15]的开头, 他问, "自然为什么要为电子选择这个特殊的模型, 而不是满足于点电荷模型." 直到今天, 这个问题就像问为什么细菌只有一个细胞一样: 具有自旋 $\hbar/2$ 是将粒子定义为电子的众多性质之一, 这个性质将电子与现今已知的具有其他自旋的众多粒子区分开来. 然而, 在 1928 年, 大家完全有可能相信所有的物质是由电子以及原子核一些中带正电的类似物质组成. 因此, 本着那个时代的精神, Dirac 问题可以重新表述为: "为什么物质的基本组分必须有自旋 $\hbar/2$?"

对 Dirac 来说, 问题的关键在于几率必须为正这一要求. 当时已经知道[16]非相对论 Schrödinger 方程的几率密度是 $|\psi|^2$, 并且它满足如下形式的连续性方程:

$$\frac{\partial}{\partial t}(|\psi|^2) - \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m} \boldsymbol{\nabla} \cdot (\psi^* \boldsymbol{\nabla} \psi - \psi \boldsymbol{\nabla} \psi^*) = 0$$

所以 $|\psi|^2$ 的空间积分与时间无关. 另一方面, 可以用相对论 Schrödinger 方程的解构造出来的几率密度 ρ 和几率流 $\mathbf{J}$, 并满足守恒律

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} = 0 \,, \tag{1.1.10}$$

它们的形式只能是

$$\rho = N \operatorname{Im} \psi^* \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\mathrm{i}e\phi}{\hbar} \right) \psi \,, \tag{1.1.11}$$

$$\mathbf{J} = Nc^2 \operatorname{Im} \psi^* \left(\boldsymbol{\nabla} + \frac{\mathrm{i}e\mathbf{A}}{\hbar} \right) \psi \,, \tag{1.1.12}$$

其中 N 是一任意常数. 把 ρ 定义成几率密度是不可能的, 因为(不管有没有外场势 ϕ) ρ 没有一个确定的符号. 这里引述 Dirac 关于这个问题的回忆[17]:

> 我记得有一次在哥本哈根, Bohr 问我在研究什么, 我告诉他, 我正在尝试得到一个令人满意的电子的相对论理论, Bohr 说"但是 Klein 和 Gordon 已经得到了啊!" 这个答案起初对我的触动非常大. Bohr 似乎对 Klein 的解非常满意, 但是我因为给出的负几率而对它并不满意. 在这个问题上, 我仍坚持为得到一个只含有正几率的理论而焦虑不已.

根据 George Gamow (乔治·伽莫夫)的回忆,[18] 在 1928 年的一个晚上, 当 Dirac 在凝视剑桥大学圣约翰学院里的一个壁炉时, 他发现了这个问题的答案. 他意识到 Klein-Gordon 方程(或者相对论 Schrödinger 方程)会给出负几率的原因是守恒方程(1.1.10)中的 ρ 包含了波函数对时间的一阶偏导数. 之所以会发生这件事, 是因为波函数满足的微分方程对于时间是二阶的. 于是问题变成了要将现在的波动方程换成另一个对时间是一阶导数的方程, 就像非相对论 Schrödinger 方程那样.

假定电子波函数是一个多分量的量 $\psi_n(x)$, 并满足如下形式的波动方程,

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathscr{H} \psi \,, \tag{1.1.13}$$

其中 $\mathscr{H}$ 是空间导数的某个矩阵函数. 由于方程关于时间导数是线性的, 为了使理论 Lorentz 不变, 我们必须假定方程关于空间导数也是线性的, 这使得 $\mathscr{H}$ 取如下的形式:

$$\mathscr{H} = -\mathrm{i}\hbar c \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \alpha_4 mc^2 \,, \tag{1.1.14}$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和 α_4 是常矩阵. 我们可以从(1.1.13)中导出二阶方程

$$\begin{aligned} -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \mathscr{H}^2 \psi = & -\hbar^2 c^2 \alpha_i \alpha_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} \\ & - \mathrm{i}\hbar mc^3 (\alpha_i \alpha_4 + \alpha_4 \alpha_i) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + m^2 c^4 \alpha_4^2 \psi \end{aligned}$$

(这里采用了求和约定; i 和 j 取遍值 $1, 2, 3$ 或 x, y, z.) 但是这必须与相对论 Schrödinger 方程(1.1.4)的自由场形式一致, 这个形式恰好体现了相对论的能动量关系. 因此, 矩阵 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 α_4 必须满足如下的关系

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij} 1 \,, \tag{1.1.15}$$

$$\alpha_i \alpha_4 + \alpha_4 \alpha_i = 0 \,, \tag{1.1.16}$$

$$\alpha_4^2 = 1 \,, \tag{1.1.17}$$

其中 δ_{ij} 是克罗内克符号($i=j$ 时值为 1 ; $i\neq j$ 时值为 0), 1 是单位阵. Dirac 找到了一组满足这些关系的 4×4 矩阵

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\alpha_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{1.1.18}$$

为了证明这套体系是 Lorentz 不变的, Dirac 给这个方程左乘 α_4, 使它可以表示成如下的形式

$$\left[\hbar c\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + mc^2\right]\psi = 0\,, \tag{1.1.19}$$

其中

$$\boldsymbol{\gamma} \equiv -\mathrm{i}\alpha_4\boldsymbol{\alpha}\,, \qquad \gamma^0 \equiv -\mathrm{i}\alpha_4\,. \tag{1.1.20}$$

(希腊指标 μ,ν 等取遍值 1,2,3,0, 其中 $x^0 = ct$. Dirac 取 $x_4 = \mathrm{i}ct$, 相应地, $\gamma_4 = \alpha_4$.) 矩阵 γ_μ 满足反对易关系

$$\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu) = \eta^{\mu\nu} \equiv \begin{cases} +1 & \mu=\nu=1,2,3 \\ -1 & \mu=\nu=0 \\ 0 & \mu\neq\nu \end{cases}. \tag{1.1.21}$$

Dirac 注意到这些反对易关系是 Lorentz 不变的, 也就是说, 矩阵 $\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu$ 也满足上述的反对易关系, 这里 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 是任意 Lorentz 变换. 由此他指出 $\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu$ 必须通过一个相似变换与 γ^μ 相联系:

$$\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu = S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)\,.$$

这表明: 如果在 Lorentz 变换 $x^\mu \to \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ 下, 波函数发生的是一个矩阵变换 $\psi \to S(\Lambda)\psi$, 那么波动方程就是不变的. (在第 5 章, 这些内容将从一个相当不同的角度进行更加充分的讨论.)

为了研究电子在任意外电磁场下的性质, Dirac 沿用方程(1.1.4)中的“通用手续”, 做代换

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t} \to \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t} + e\phi \qquad -\mathrm{i}\hbar\boldsymbol{\nabla} \to -\mathrm{i}\hbar\boldsymbol{\nabla} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\,. \tag{1.1.22}$$

这样, 波动方程(1.1.13)就会变成如下的形式

$$\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t} + e\phi\right)\psi = (-\mathrm{i}\hbar c\boldsymbol{\nabla} + e\mathbf{A})\cdot\boldsymbol{\alpha}\psi + mc^2\alpha_4\psi\,. \tag{1.1.23}$$

Dirac 利用这个方程证明了, 在中心力场, 角动量守恒采取如下的形式

$$[\mathscr{H}, -\mathrm{i}\hbar\mathbf{r}\times\boldsymbol{\nabla} + \hbar\boldsymbol{\sigma}/2] = 0\,, \tag{1.1.24}$$

其中, $\mathscr{H}$ 是矩阵微分算符(1.1.14), $\boldsymbol{\sigma}$ 是此前由 Pauli 引入的自旋矩阵的 4×4 版[19]

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}\quad. \tag{1.1.25}$$

由于 $\boldsymbol{\sigma}$ 的每个分量的本征值都是 ±1, (1.1.24)中出现的额外项说明电子拥有内禀角动量 $\hbar/2$.

Dirac 又对方程(1.1.23)进行迭代, 得到了一个二阶方程, 这个方程与 Klein-Gordon 方程的差异仅在于右边出现了如下额外的两项,

$$[-e\hbar c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}-\mathrm{i}e\hbar c\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{E}]\,\psi\,. \tag{1.1.26}$$

对于低速运动的电子, 第一项是主要的, 它代表磁矩, 这个磁矩的值与 Goudsmit 和 Uhlenbeck[11]所发现的(1.1.8)相符. 正如 Dirac 看到的, 磁矩再加上这个理论是相对论性的, 确保了这个理论所给出的精细结构分裂(到 α^4mc^2 阶)与 Heisenberg, Jordan 和 Charles G. Darwin (查尔斯·G·达尔文)[13]发现的相符. 稍后不久, Darwin[20]和 Gordon[21]导出了 Dirac 理论中氢原子能级的"精确"公式

$$E=mc^2\left(1+\frac{\alpha^2}{\left\{n-j-\frac{1}{2}+\left[\left(j+\frac{1}{2}\right)^2-\alpha^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^2}\right)^{-1/2}\quad. \tag{1.1.27}$$

这个结果关于 α^2 的级数展开式的前三项与近似结果(1.1.9)一致.

这个理论实现了狄拉克的初衷: 一个几率为正的相对论性形式理论. 由(1.1.13), 我们可以导出连续性方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J}=0 \tag{1.1.28}$$

其中

$$\rho=|\psi|^2\,,\qquad \mathbf{J}=c\psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\psi\,, \tag{1.1.29}$$

这样, 正值 $|\psi|^2$ 可以解释为几率振幅, 总几率 $\int|\psi|^2\,\mathrm{d}^3x$ 是一个常数. 然而, 还有一个困难是 Dirac 没能立刻解决的.

对给定动量 $\mathbf{p}$, 波动方程(1.1.13)给出了四个平面波解

$$\psi\propto\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-Et)\right]\,. \tag{1.1.30}$$

两个是能量 $E=+\sqrt{\mathbf{p}^2c^2+m^2c^4}$ 的解, 对应电子 $J_z=\pm\hbar/2$ 的两个自旋态. 另外两个是 $E=-\sqrt{\mathbf{p}^2c^2+m^2c^4}$ 的解, 没有明显的物理解释. 正如 Dirac 指出的, 相对论 Schrödinger 方程也遇到过这个问题: 对于每一动量 $\mathbf{p}$, 存在两个形如(1.1.30)的解, 一个对应正 E, 另一个对应负 E.

当然, 即使在经典物理中, 相对论关系 $E^2=\mathbf{p}^2c^2+m^2c^4$ 有两个解, $E=\pm\sqrt{\mathbf{p}^2c^2+m^2c^4}$. 然而, 在经典物理中, 我们可以简单地假定物理粒子是那些能量为正 E 的. 这是因为正值解有 $E>mc^2$, 而负值解给出 $E<-mc^2$, 它们之间有一个有限宽的能隙, 并且不存在连续的过程使得粒子能够从正能量到达负能量.

负能量的问题在相对论量子力学中要麻烦得多. 正如 Dirac 在他 1928 年的论文[15]中指出的那样, 电子与辐射的相互作用可以产生跃迁, 在这个跃迁中, 电子从正能态落到负能态, 并通过两个或更多的光子带出能量. 那么为什么物质是稳定的呢?

在 1930 年, Dirac 给出了一个卓越的解决方法[22]. Dirac 的方案基于不相容原理, 在这里简要陈述这个原理的历史.

元素周期表和 X 射线光谱学分类法, 在 1924 年共同揭示出了原子能级的一个电子排布模式[23]: 在由主量子数 n 表征的壳层内, 电子的最大数目 N_n 等于 n 能级中的轨道态数的 2 倍

$$N_n = 2\sum_{\ell=0}^{n-1}(2\ell+1) = 2n^2 = 2, 8, 18, \cdots . \tag{1.1.31}$$

在 1925 年, Wolfgang Pauli (沃尔夫冈 · 泡利)[24]提出, 如果 N_n 是第 n 个壳层内所有可能的态的总数, 并附加一个神秘的“不相容原理”以禁止超过一个的电子占据同一态, 这个模型就可以被解释. 他认为(1.1.31)中奇怪的因子 2 是缘于电子态的“奇怪的, 经典不可描述的二重性”, 正如我们后来所了解到的, 这正是电子的自旋[11]. 不相容原理回答了 Bohr 和 Sommerfeld 的旧原子论中一个一直不清楚的问题: 为什么在重原子里不是所有的电子都掉到了最低能量的壳层里? 随后, 泡利的不相容原理被一些研究者[25]表述为要求多电子系统波函数关于所有电子的坐标, 轨道以及自旋是反对称的. 这个原理被包含在了 Enrico Fermi (恩里克 · 费米)[26]和 Dirac [27]的统计力学中, 并且由于这个原因, 服从不相容原理的粒子被普遍地称为“费米子”, 类似地, 像光子这样的粒子, 它的波函数是对称的并服从 Bose 和 Einstein 的统计, 因而被称为“玻色子”. 不相容原理在金属、白矮星、中子星等理论中扮演了非常基本的角色, 但是对于这些问题的讨论将会使我们太远地偏离主线.

Dirac 的方案是: 之所以带正能的电子不会落入到负能态, 是因为“除了可能会有少量速度较小的态, 所有的负能态已经被占满了.” 这几个空的态, 或者说“空穴”, 处在负能态电子的海洋中, 它们的行为就像带有相反量子数的粒子: 正能量和正电荷. 当时唯一知道的带正电的粒子是质子, 并且正如 Dirac 稍后回忆到的[27a], “当时所有观点都趋向于反对新粒子”, 所以 Dirac 认为他的空穴就是质子; 事实上, 他 1930 年的论文[22]标题正是“电子和质子的理论.”

空穴理论面临着很多立刻就能看出的困难. 其中一个由这种无处不在的负能电子的无限大电荷密度引起的: 它们的电场在哪? Dirac 提议重新解释 Maxwell 方程中的电荷密度, 将其解释为: “与世界正常带电量之差.” 另外一个要解决的问题是观测到的电子质量和质子质量有巨大差异, 并且它们的相互作用也有巨大差异. Dirac 希望电子间的 Coulomb 相互作用将以某种方式解释这些差异, 但是 Hermann Weyl (赫尔曼 · 外尔)[28]证明了空穴理论实际上对正电荷和负电荷完全是对称的. 最后, Dirac [22]预测存在一个电子-质子湮没过程, 在这个过程中, 一个正能量电子遇到了负能电子海中的一个空穴并掉入这个未被占据的能级上, 发射一对 γ 光子. 就其本身而言, 这本不会为空穴理论带来困难, 甚至有些人希望用它来解释当时还不清楚的恒星的能量来源问题. 然而, 不久之后 Julius Robert Oppenheimer (朱利叶斯 · 罗伯特 · 奥本海默)和 Igor Tamm (伊戈尔 · 塔姆)指出,[29] 原子中电子-质子湮灭过程发生的速率会非常快以至于与观测到的普通物质的稳定性不合. 由于这些原因, Dirac 在 1931 年改变了他的想法, 并认定这个空穴并非以质子的形式出现, 而是一种新的正电荷粒子, 这种粒子与电子质量相同[29a].

随着 Carl D. Anderson (卡尔 · D · 安德森)[30]发现正电子, 第二个问题和第三个问题被消除了, 而 Anderson 本人似乎并不知道 Dirac 关于正电子的预测. 1932 年 8 月 2 日, 在一个磁场

为15 kG的Wilson云室里观测到了一条特别的宇宙射线轨迹. 通过观察到的轨迹弯曲的方向, 这预期是一个正电荷粒子, 可是轨迹的范围却至少是质子轨迹范围期望值的十倍大! 轨迹的范围和电离比都和这是一种新粒子的假设相吻合, 这种新粒子与电子的差异仅是电荷的符号, 而这正是Dirac空穴所预期的. (P.M.S. Blackett (P.M.S.布莱克特)更早做出了这件事情, 但是他没有立即发表. Anderson引用了在宇宙射线轨迹出现正电荷轻粒子的证据, 而这些证据正是由Blackett和Giuseppe Occhialini (朱塞佩·奥基亚利尼)获得的.) 因此Dirac的错误仅在于最初在把空穴误认为质子.

对正电子的或多或少的预言, 以及发现Dirac方程在解释电子磁矩和氢原子精细结构上的早期成功, 使得Dirac理论的声望保持了至少六十个年头. 然而, 尽管Dirac理论毫无疑问地会在任何未来物理理论中以某种形式留存下来, 但是有一些严格的原因使得它不满足本身最初的基本原理:

(i) Dirac对Schrödinger相对论波动方程中负几率问题的分析, 似乎是排除了存在任何零自旋粒子的可能性. 然而, 即使是在20世纪20年代, 我们就已经知道存在零自旋粒子——例如, 处在基态的氢原子, 以及氦核. 当然, 你可以说氢原子和α粒子不是基本的, 所以不需要用一个相对论波动方程来描述, 然而, 如何将基本这个概念纳入相对论量子力学的形式体系中, 这在那时(现在依然是)是不清楚的. 现今, 我们知道大量的零自旋粒子——π介子, K介子, 等等——质子与中子并不比它们基本. 我们同样也知道一些自旋1的粒子——$W^{\pm}$和Z^0——它们看起来和电子以及其他粒子一样基本. 更进一步的, 先不管强作用的影响, 对于一个束缚在原子核周围的零自旋负π介子或K介子所组成的"介子原子", 从相对论Klein-Gordon-Schrödinger方程的定态解出发, 我们现在可以计算出它的精细结构! 因此, 我们很难认同如下的说法, 是因为零自旋相对论方程存在基本的错误, 人们才不得已去发展Dirac方程——问题仅仅是电子碰巧有自旋$\hbar/2$, 而不是零.

(ii) 就我们现在所知道的, 对于每一种类的粒子, 都存在一个"反粒子", 它们质量相同, 荷相反. (一些纯中性粒子, 例如光子, 它们的反粒子就是它们本身.) 但是我们该怎样把诸如$\pi^{\pm}$介子或$W^{\pm}$粒子这样的带荷玻色子解释为负能态海洋中的空穴呢? 对于那些按照Bose-Einstein统计规则进行量子化的粒子, 并不存在不相容原理, 因此不管负能态是否被占据, 都没有什么机制阻止正能态粒子掉落到负能态. 而如果这个空穴理论对玻色反粒子并不奏效, 我们又凭什么相信它对费米子就是成立的呢? 在1972年, 我问过Dirac他对这一问题的看法; 他告诉我, 他并不认为诸如π介子或$W^{\pm}$粒子之类的玻色子是"重要的". 在稍后几年的一个讲座[27a]中, Dirac提到: 对于玻色子, "我们不再有一个负能态被填满的真空态的图景", 并说, 在这种情况下, "整个理论变得更复杂". 下一节将会说明量子场论的发展是怎样使反粒子的空穴解释不再必要, 即使不幸的是, 它依旧在很多教科书中苟延残喘. 引用Julian Schwinger (朱利安·施温格)的话[30a], "负能电子的无限海洋这一图景, 最好视为一个历史古董并忘掉它."

(iii) Dirac理论的伟大成功之一是它对电子磁矩的正确预测. 磁矩(1.1.8)相当于角动量为$\hbar/2$的带电点粒子做轨道运动时所期望磁矩值的两倍大, 这在当时是相当震撼的; 直到Dirac理论出现之前, 因子2一直是个迷. 然而, 在Dirac解决这个问题的路线中, 真的没有什么东西明确地引出了磁矩的这个特定值. 在波动方程(1.1.23)我们引入电场和磁场的地方, 我们可以再加上一个带任意系数κ的"Pauli项"[31]

$$\kappa\alpha_4\left[\gamma^\mu,\gamma^\nu\right]\psi F_{\mu\nu} \tag{1.1.32}$$

($F_{\mu\nu}$是通常的电磁场强张量, $F^{12}=B_3$, $F^{01}=E_1$等) 这一项可以通过首先给自由场方程加上一正比于$[\gamma^\mu,\gamma^\nu](\partial^2/\partial x^\mu\partial x^\nu)\psi$的项得到, 而这样的项显然为零, 然后像以前一样做代换(1.1.22),

就可得到Pauli项. 一个更加现代的方法是简单地认为(1.1.32)项与所有已知的不变原理一致, 包括Lorentz不变和规范不变, 因而没有理由说为什么这样的项不应该被包含在场方程中. (见12.3节) 这一项对电子磁矩有一个正比于 κ 的额外贡献, 所以, 除了纯粹为了形式简单的可能需求, 没有理由去期待Dirac理论中的电子磁矩具有任何特定的值.

正如我们将在这本书中看到的, 通过量子场论的发展, 这些问题最终都将被解决(或者至少被理清).

1.2 量子场论的诞生

光子是唯一一个在被发现是粒子之前被当成场的粒子. 因此发展量子场论形式体系的第一个实例十分自然地与辐射相关, 然后才应用到其它粒子和场.

1926年,在矩阵力学的核心文章之一中, Born, Heisenberg和Jordan[32]将他们的新方法应用到自由辐射场中. 为了简化讨论, 他们忽略了电磁波的极化并考虑一维情况, 坐标 x 从0取到 L; 如果要求辐射场 $u(x,t)$ 在端点处为零,那么可以将它代之以端点固定在 $x=0$ 和 $x=L$ 的弦, 它们的行为是相同的. 通过类比弦或全电磁场的情况, 哈密顿量取成如下的形式

$$H=\frac{1}{2}\int_0^L\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+c^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\}\,\mathrm{d}x\,. \tag{1.2.1}$$

为了将这个表达式简化为平方和, 将场 u 展为Fourier分量的和, 这些分量在 $x=0$ 和 $x=L$ 处为零:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}q_k(t)\sin\left(\frac{\omega_k x}{c}\right)\,, \tag{1.2.2}$$

$$\omega_k\equiv k\pi c/L\,, \tag{1.2.3}$$

这使得

$$H=\frac{L}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\dot{q}_k^2(t)+\omega_k^2q_k^2(t)\right\}. \tag{1.2.4}$$

因此弦或场的行为类似于独立谐振子的和, 而这些独立谐振子的频率是 ω_k, 在20年前, Paul Ehrenfest[32a](保罗·埃伦菲斯特)就给出了这个结果.

特别地, 就像粒子的力学中那样, 如果 H 表示成了 p 和 q 的函数, 正则共轭于 $q_k(t)$ 的"动量" $p_k(t)$ 就被这一条件确定了, 那么

$$\dot{q}_k(t)=\frac{\partial}{\partial p_k(t)}H(p(t),q(t))\,.$$

这给出"动量"

$$p_k(t)=\frac{L}{2}\,\dot{q}_k(t) \tag{1.2.5}$$

所以正则对易关系可以写成

$$\Big[\dot{q}_k(t),q_j(t)\Big]=\frac{2}{L}\Big[p_k(t),q_j(t)\Big]=\frac{-2\mathrm{i}\hbar}{L}\,\delta_{kj}\,, \tag{1.2.6}$$

$$\Big[q_k(t),q_j(t)\Big]=0\,. \tag{1.2.7}$$

另外, $q_k(t)$ 随时间的变化由哈密顿运动方程给定

$$\ddot{q}_k(t) = \frac{2}{L}\dot{p}_k(t) = -\frac{2}{L}\frac{\partial H}{\partial q_k(t)} = -\omega_k^2 q_k(t) \ . \tag{1.2.8}$$

通过前面在谐振子上的工作, Born, Heisenberg 和 Jordan 已经知道方程(1.2.6)—(1.2.8)所定义的矩阵的形式. q-矩阵为

$$q_k(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{L\omega_k}}\left[a_k \exp(-\mathrm{i}\omega_k t) + a_k^\dagger \exp(+\mathrm{i}\omega_k t)\right] \tag{1.2.9}$$

其中 a_k 是不含时的矩阵, $a_k^\dagger$ 是它的厄米共轭, 它们满足如下对易关系

$$\left[a_k, a_j^\dagger\right] = \delta_{kj} \ , \tag{1.2.10}$$

$$\left[a_k, a_j\right] = 0 \ . \tag{1.2.11}$$

这些矩阵的行与列由一组正整数 $n_1, n_2, \cdots$ 标记, 每一个整数对应一个简正模. 矩阵元是

$$(a_k)_{n_1', n_2', \cdots, n_1, n_2, \cdots} = \sqrt{n_k}\,\delta_{n_k', n_k - 1} \prod_{j\neq k} \delta_{n_j' n_j} \ , \tag{1.2.12}$$

$$(a_k^\dagger)_{n_1', n_2', \cdots, n_1, n_2, \cdots} = \sqrt{n_k + 1}\,\delta_{n_k', n_k + 1} \prod_{j\neq k} \delta_{n_j' n_j} \ . \tag{1.2.13}$$

对于单个简正模, 这些矩阵可以显式地写出来

$$a = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \end{bmatrix}, \quad a^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \end{bmatrix} .$$

可以直接验证(1.2.12)和(1.2.13)满足对易关系(1.2.10)和(1.2.11).

对于带有整数分量 $n_1, n_2, \cdots$ 的列矢量, 它的物理解释是: 在简正模 k 下有 n_k 个量子的态. 矩阵 a_k 或 $a_k^\dagger$ 作用在这样的列矢量上将分别使 n_k 降低或提升一个单位, 而所有 $\ell \neq k$ 的 n_ℓ 保持不变; 它们因此可以解释为在第 k 个简振模湮灭或产生一个量子的算符. 特别的, 所有 n_k 都等于零的矢量代表真空态; 它被任意 a_k 湮灭.

这一解释可以通过考察哈密顿量进一步证实. 在(1.2.4)中使用(1.2.9)和(1.2.10)给出

$$H = \sum_k \hbar\omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \tfrac{1}{2}\right) \ . \tag{1.2.14}$$

这样, 哈密顿量在 n-表象中就是对角的

$$(H)_{n_1', n_2', \cdots, n_1, n_2, \cdots} = \sum_k \hbar\omega_k \left(n_k + \tfrac{1}{2}\right) \prod_j \delta_{n_j' n_j} \ . \tag{1.2.15}$$

我们看到态的能量就是出现在态中的每个量子能量 $\hbar\omega_k$ 之和, 再加上一个无限大零点能 $E_0 = \frac{1}{2}\sum_k \hbar\omega_k$. 将其应用到辐射场, 这套体系证实了根据每个简正模中的量子数目 n_k 对辐射态进行计数的 Bose 方法.

Born, Heisenberg 和 Jordan 利用这套体系导出黑体辐射中能量涨落的方均根表达式. (为了实现这个目标, 他们实际上仅用了对易关系(1.2.6)—(1.2.7).) 然而, 不久之后, 这个方法就应用到了一个更加急迫的问题上: 自发辐射速率的计算.

为了领会这里的困难, 略微回溯一点历史是必要的. 在矩阵力学第一批文章中的一篇里, Born 和 Jordan[33]实际上做了这样的假定, 当一个原子从态 β 掉落到更低的态 α 上时, 这个原子会像一个位移为

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_{\beta\alpha}\exp(-2\pi\mathrm{i}\nu t) + \mathbf{r}_{\beta\alpha}{}^{*}\exp(2\pi\mathrm{i}\nu t)\,, \tag{1.2.16}$$

的经典带电振子那样发生辐射, 其中

$$h\nu = E_\beta - E_\alpha \tag{1.2.17}$$

而 $\mathbf{r}_{\beta\alpha}$ 是电子位置在 β,α 上的矩阵元. 这种振子的能量是

$$E = \frac{1}{2}m\Big(\dot{\mathbf{r}}^2 + (2\pi\nu)^2\mathbf{r}^2\Big) = 8\pi^2 m\nu^2|\mathbf{r}_{\beta\alpha}|^2\,. \tag{1.2.18}$$

直接的经典计算就可以给出辐射功率, 再除以每个光子的能量 $h\nu$ 就给出了光子发射速率

$$A(\beta\to\alpha) = \frac{16\pi^3 e^2\nu^3}{3hc^3}\,|\mathbf{r}_{\beta\alpha}|^2\,. \tag{1.2.19}$$

然而, 为什么在处理自发辐射的过程中可以用经典偶极子的辐射公式, 这一点依旧是不清楚的.

稍后, Dirac [34]给出了一个尽管不够直接但更可信的推导. 他的方法是考察量子化原子态在经典的振荡电磁场中的行为, 假定电磁场在频率(1.2.17)处单位频率间隔的能量密度为 u, 他可以导出吸收与受激辐射的速率 $uB(\alpha\to\beta)$ 和 $uB(\beta\to\alpha)$ 的公式:

$$B(\alpha\to\beta) = B(\beta\to\alpha) \simeq \frac{2\pi^2 e^2}{3h^2}\,|\mathbf{r}_{\beta\alpha}|^2\,. \tag{1.2.20}$$

(注意表达式的右边关于态 α 和 β 是对称的, 这是因为 $\mathbf{r}_{\alpha\beta}$ 就是 $\mathbf{r}_{\beta\alpha}{}^{*}$.) Einstein[34a]在 1917 年已经证明了, 原子和黑体辐射之间存在热平衡的可能性赋予了自发辐射速率 $A(\beta\to\alpha)$ 与受激辐射或吸收速率 uB 一个关系:

$$A(\beta\to\alpha) = \left(\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\right)B(\beta\to\alpha)\,. \tag{1.2.21}$$

在这个关系中应用(1.2.20)就立刻给出 Born-Jordan 的自发辐射速率结果(1.2.19). 然而, 在推导仅包含单原子过程的公式中却需要通过热力学进行论证, 这一点看起来仍不让人满意.

最终, 在 1927 年, Dirac [35]可以给出自发辐射一个完全量子力学的处理. 矢势 $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$ 像在方程(1.2.2)中那样按简正模展开, 并且它的系数被证明满足类似(1.2.6)的对易关系. 结果是, 自由辐射场的每个态由一组整数 n_k 标记, 每个整数对应一个简正模, 而电磁场相互作用 $e\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A}$ 的矩阵元则采取对简正模求和的形式, 矩阵系数正比于由方程(1.2.10)—(1.2.13)定义的矩阵 a_k 和 $a_k^\dagger$, 这里的关键结果是方程(1.2.13)中的因子 $\sqrt{n_k+1}$; 简正模 k 中的光子数目 n_k 升到 n_k+1 的跃迁几率正比于这个因子的平方, 即 n_k+1. 但在简正模 k 中有 n_k 个光子的辐射场中, 单位频率间隔内的能量密度 u 是

$$u(\nu_k) = \left(\frac{8\pi\nu_k^2}{c^3}\right)n_k \times h\nu_k\,,$$

所以简正模 k 中的自发辐射速率正比于

$$n_k + 1 = \frac{c^3 u(\nu_k)}{8\pi h \nu_k^3} + 1 \,.$$

第一项被解释为受激辐射的贡献, 而第二项则被解释为自发辐射的贡献. 因此, 不借助任何热力学讨论, Dirac 就可以得出如下的结论, 受激辐射的速率 uB 和自发辐射速率 A 的比值由 Einstein 关系给定, 即方程(1.2.21). 利用他关于 B 的早期结果(1.2.20), Dirac 就能重新导出自发辐射速率 A 的 Born-Jordan 公式[33](1.2.19). 不久之后, 利用类似的方法, 对于辐射的散射和原子激发态寿命, Dirac 给出了量子力学处理,[36] V. Weisskopf (维克托·魏斯科普夫)和 Eugene Wigner (尤金·魏格纳)则对谱线型进行了更细致的研究.[36a] Dirac 在他的工作中将电磁势分离成辐射场 $\mathbf{A}$ 和静态 Coulomb 势 A^0, 这个形式不能保证经典电磁学中明显的 Lorentz 不变性和规范不变性. 稍后, 这些结果被 Enrico Fermi (恩里科·费米)[36b]放到了一个更加坚实的基础上. 20 世纪 30 年代的很多物理学家从 Fermi 在 1932 年写的综述中学到了他们的量子电动力学.

对 q 和 p 或 a 和 $a^\dagger$ 使用对易关系也为量子理论的 Lorentz 不变性带来了问题. 在 1928 年, Jordan 和 Pauli[37]就已经能够证明不同时空点的场的对易子实际上是 Lorentz 不变的. (这些对易子将在第 5 章进行计算.) 在这之后, 通过一些精巧的思想实验, Bohr 和 Leon Rosenfeld (利昂·罗森菲尔德)[38]证明了这些对易关系限制了我们对由类时间隔分开的不同时空点上的场进行测量的能力

在成功量子化电磁场之后不久, 这些技巧就被应用到其它场. 起初, 这被看作是“二次量子化”; 被量子化的场是单粒子量子力学中的波函数, 例如电子的 Dirac 波函数. 在这个方向上的第一步看来是 Jordan 在 1927 年迈出的.[39] Jordan 和 Wigner 在 1928 年补充了一个基本要素.[40] 他们发现 Pauli 不相容原理不允许电子在任意简正模 k 上的占有数 n_k (算上自旋和位置变量)取 0 和 1 以外的任何值. 因此, 电子场不能展开为满足对易关系(1.2.10)和(1.2.11)的算符的叠加, 这是因为这些关系要求 n_k 取从 0 到 ∞ 的任意整数值. 他们转而认为电子场应该展为满足如下反对易关系的算符 $a_k, a_k^\dagger$ 的和

$$a_k a_j^\dagger + a_j^\dagger a_k = \delta_{jk} \,, \tag{1.2.22}$$

$$a_k a_j + a_j a_k = 0 \,. \tag{1.2.23}$$

这个关系可以被一组矩阵满足, 这些矩阵由一组整数 $n_1, n_2, \cdots$ 标记, 每一个整数对应一个简正模, 每个整数只能取 0 或 1:

$$(a_k)_{n_1', n_2', \cdots, n_1, n_2, \cdots} = \begin{cases} 1 & n_k' = 0,\ n_k = 1,\ \text{对于 } j \neq k,\ n_j' = n_j \\ 0 & \text{其它情况,} \end{cases} \tag{1.2.24}$$

$$(a_k^\dagger)_{n_1', n_2', \cdots, n_1, n_2, \cdots} = \begin{cases} 1 & n_k' = 0,\ n_k = 1,\ \text{对于 } j \neq k,\ n_j' = n_j \\ 0 & \text{其它情况.} \end{cases} \tag{1.2.25}$$

例如, 对于单个简正模, 我们只有两行两列, 对应于 n' 和 n 取值 0 和 1; 矩阵 a 和 $a^\dagger$ 的形式为

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \,, \qquad a^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \,.$$

读者可以验证(1.2.24)和(1.2.25)确实满足反对易关系(1.2.22)和(1.2.23).

由整数 $n_1, n_2, \cdots$ 表征的列矢量在含义上与玻色子相同, 即在简正模 k 上有 n_k 个量子的态. 当然, 所不同的是, 正像 Pauli 不相容原理要求的那样, 由于每个 n_k 仅能取值 0 和 1, 每个简正模上最多有一个量子. 另外, 如果简正模 k 上已经有一个量子, 那么 a_k 将会湮灭掉这个量子, 否则就给出零; 同样地, 除非简正模 k 上已经有一个量子, $a^\dagger$ 将在简正模 k 上产生一个量子, 如果那里已有量子则给出 0. 在这之后过了很长时间, Fierz (菲尔兹)和 Pauli[40a]证明了, 选择对易关系还是反对易关系由粒子的自旋唯一地决定: 对于像光子那样自旋为整数的粒子必须使用对易子, 而对于像电子那样自旋为半整数的粒子则必须使用反对易子. (在第 5 章将会以一种不同的方式证明它.)

量子场的一般理论是 Heisenberg 和 Pauli 在 1929 年的两篇十分全面的文章中首次提出的.[41] 他们工作的出发点是将正则体系应用到场本身, 而不是场中出现的简正模的系数. Heisenberg 和 Pauli 将拉格朗日量 L 取为对场和场时空导数的一个定域函数的空间积分; 场方程由场变化时作用量 $\int L\,\mathrm{d}t$ 应该是稳定的这一原理确定; 而对易关系通过一个假设决定: 拉格朗日量对任意场量时间导数的变分导数, 其行为类似于共轭于这个场的"动量"(对于费米场,对易关系变成反对易关系). 他们同时将这个普遍的形式体系应用到电磁场和 Dirac 场, 并探讨了各种不变性和守恒律, 其中包括荷守恒, 动量守恒与能量守恒, 以及 Lorentz 不变性和规范不变性.

Heisenberg-Pauli 体系本质上与我们第 7 章中的内容是相同的, 因此我们现在仅限于讨论一个例子, 这个例子在本节后面是有用的. 对于一自由复标量场 $\phi(x)$, 拉格朗日量取为

$$L = \int \mathrm{d}^3x \left[\dot{\phi}^\dagger\dot{\phi} - c^2\left(\boldsymbol{\nabla}\phi\right)^\dagger\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\phi\right) - \left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2\phi^\dagger\phi\right]. \tag{1.2.26}$$

如果我们使 $\phi(x)$ 有一无限小变分 $\delta\phi(x)$, 那么拉格朗日量的变分是

$$\begin{aligned}\delta L = \int \mathrm{d}^3x \Bigg[&\dot{\phi}^\dagger\delta\dot{\phi} + \dot{\phi}\delta\dot{\phi}^\dagger - c^2\boldsymbol{\nabla}\phi^\dagger\cdot\boldsymbol{\nabla}\delta\phi - c^2\boldsymbol{\nabla}\phi\cdot\boldsymbol{\nabla}\delta\phi^\dagger \\ &- \left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2\phi^\dagger\delta\phi - \left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2\phi\delta\phi^\dagger\Bigg].\end{aligned} \tag{1.2.27}$$

在使用最小作用量原理时, 假定了场的变分在时空积分的边界处为零. 因此, 在计算作用量 $\int L\,\mathrm{d}t$ 的变化时, 我们可以直接使用分部积分, 得到

$$\delta\int L\,\mathrm{d}t = c^2\int \mathrm{d}^4x\left[\delta\phi^\dagger\left(\Box - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right)\phi + \delta\phi\left(\Box - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right)\phi^\dagger\right].$$

但是由于上式对任意的 $\delta\phi^\dagger$ 和 $\delta\phi$ 都必须为零, 所以 ϕ 必须满足熟悉的相对论波动方程

$$\left[\Box - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\phi = 0 \tag{1.2.28}$$

以及上式的伴随方程. 场 ϕ 和 $\phi^\dagger$ 的正则共轭"动量"由 L 对 $\dot{\phi}$ 和 $\dot{\phi}^\dagger$ 的变分导数确定, 我们可以从(1.2.27)读出它们

$$\pi \equiv \frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}} = \dot{\phi}^\dagger\,, \tag{1.2.29}$$

$$\pi^\dagger \equiv \frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}^\dagger} = \dot{\phi}\,. \tag{1.2.30}$$

这些场变量满足通常的正则对易关系, 不过克罗内克 δ-符号要换成 δ-函数

$$\left[\pi(\mathbf{x},t),\phi(\mathbf{y},t)\right] = \left[\pi^\dagger(\mathbf{x},t),\phi^\dagger(\mathbf{y},t)\right] = -\mathrm{i}\hbar\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,, \tag{1.2.31}$$

$$\left[\pi(\mathbf{x},t),\phi^\dagger(\mathbf{y},t)\right] = \left[\pi^\dagger(\mathbf{x},t),\phi(\mathbf{y},t)\right] = 0\,, \tag{1.2.32}$$

$$\left[\pi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)\right] = \left[\pi^\dagger(\mathbf{x},t),\pi^\dagger(\mathbf{y},t)\right] = \left[\pi(\mathbf{x},t),\pi^\dagger(\mathbf{y},t)\right] = 0\,, \tag{1.2.33}$$

$$\left[\phi(\mathbf{x},t),\phi(\mathbf{y},t)\right] = \left[\phi^\dagger(\mathbf{x},t),\phi^\dagger(\mathbf{y},t)\right] = \left[\phi(\mathbf{x},t),\phi^\dagger(\mathbf{y},t)\right] = 0\,. \tag{1.2.34}$$

对所有的正则动量与相应场的时间导数的积求“和”, 再减去拉格朗日量(就像粒子力学中那样)就得到这里的哈密顿量:

$$H = \int \mathrm{d}^3x \left[\pi\dot{\phi} + \pi^\dagger\dot{\phi}^\dagger\right] - L \tag{1.2.35}$$

或者, 利用(1.2.26), (1.2.29)和(1.2.30):

$$H = \int \mathrm{d}^3x \left[\pi^\dagger\pi + c^2(\boldsymbol{\nabla}\phi)^\dagger\cdot(\boldsymbol{\nabla}\phi) + \left(\frac{m^2c^4}{\hbar^2}\right)\phi^\dagger\phi\right]\,. \tag{1.2.36}$$

在 Heisenberg 和 Pauli 的文章之后, 量子场论离它最终的战前形式只差最后一个要素: 负能态问题的解答. 我们在上一节看到, 在 1930 年, 就在 Heisenberg-Pauli 的文章发表前后, Dirac 已经提出了, 除了几个可观测的空穴外, 电子负能态是被填满的, 而电子负能态本身无法被观测. 而 1932 年正电子的发现似乎巩固了 Dirac 的想法, 这之后, 他的“空穴理论”被用来计算许多过程的最低阶微扰, 其中包括电子-正电子对的产生和散射.

与此同时, 大量的工作投入到发展带有明显 Lorentz 不变性的形式体系中. 最有影响的工作是 Dirac, Vladimir Fock (弗拉基米尔·福克)和 Boris Podolsky (鲍里斯·波尔多斯基)[42]的“多时(many-time)”体系, 在这个体系中, 态矢由一波函数表示, 这一波函数依赖于所有的, 无论是正能的还是负能的电子的时空和自旋坐标. 在这个形式体系中, 不论是正能电子还是负能电子的总数都是守恒的, 例如, 一个电子-正电子对的产生被描述为负能态电子到正能态的激发, 而电子和正电子的湮灭被描述成相对应的退激发. 多时体系的优点在于它有明显的 Lorentz 不变性, 但它也有很多缺点: 尤其是在光子的处理与电子和正电子的处理上存在着深刻的差异, 光子是用量子化电磁场进行处理的. 不是所有的物理学家觉得这是个缺点; 不像电磁场, 电子场并没有一个经典极限, 所以关于它的物理意义存在疑问. 另外, Dirac[42a]相信场是我们观测粒子的手段, 所以他不期望粒子和场可以以相同的形式描述. 尽管我不知道这在当时是否困扰了所有人, 但多时体系有一个更实际的缺点: 它很难用来描述类似核衰变的过程, 在这类过程中, 电子和反中微子的产生并没有伴随着正电子或中微子的产生. Fermi[43]对 β 衰变中电子能量分布所做的成功计算算得上是量子场论的早期成就之一.

Dirac 空穴理论与电子的量子场理论之间等效的基本思想是由 Fock[43a]以及 Wendell Furry (温德尔·弗里)和 Oppenheimer (奥本海默)[44]在 1933—1934 年提出并证明的重要概念. 为了从一个更现代的观点领会这一思想, 类比于电磁场或 Born-Heisenberg-Jordan 场(1.2.2), 我们尝试建立一个电子场. 由于电子携带电荷, 我们不想将湮灭算符和产生算符混在一起, 因而我们尝试将场写为

$$\psi(x) = \sum_k u_k(\mathbf{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k t}a_k\,, \tag{1.2.37}$$

其中 $u_k(\mathbf{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k t}$ 是 Dirac 方程(1.1.13)正交平面波解的一个完全集(k 现在标记 3-动量, 自旋以及能量的正负号):

$$\mathscr{H} u_k = \hbar\omega_k u_k \,, \tag{1.2.38}$$

$$\mathscr{H} \equiv -\mathrm{i}\hbar c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla} + \alpha_4 mc^2 \,, \tag{1.2.39}$$

$$\int u_k^\dagger u_\ell \,\mathrm{d}^3x = \delta_{k\ell} \,, \tag{1.2.40}$$

a_k 是相应的湮灭算符, 它满足 Jordan-Wigner 反对易关系(1.2.22)—(1.2.23). 根据"二次量子化"的思想或 Heisenberg 和 Pauli[41]的正则量子化手续, 用量子化的场(1.2.37)代替"波函数"计算出 $\mathscr{H}$ 的"期望值", 从而构造出哈密顿量

$$H = \int \mathrm{d}^3x \,\psi^\dagger \mathscr{H}\psi = \sum_k \hbar\omega_k a_k^\dagger a_k \,. \tag{1.2.41}$$

问题显然是这并非一个正定算符——尽管算符 $a_k^\dagger a_k$ 仅取正本征值 1 和 0 (见方程(1.2.24)和(1.2.25)), 但有一半的 ω_k 是负的. 为了克服这个困难, Furry 和 Oppenheimer 重拾了 Dirac 的想法, 将正电子看成是空缺的负能电子[42]; 反对易关系对于产生和湮灭算符是对称的, 所以, 他们将正电子的产生和湮灭算符定义为相应负能电子的湮灭和产生算符

$$b_k^\dagger \equiv a_k \,, \qquad b_k \equiv a_k^\dagger \qquad (\text{对于}\ \omega_k < 0) \tag{1.2.42}$$

其中 b 的指标 k 标记的是动量与自旋都与相应电子模 k 相反的正能正电子模. 那么, Dirac 场(1.2.37)可以重写为

$$\psi(x) = \sum_k{}^{(+)}\, a_k u_k(x) + \sum_k{}^{(-)}\, b_k^\dagger u_k(x) \,, \tag{1.2.43}$$

其中 $(+)$ 和 $(-)$ 分别代表对 k 的求和取遍 $\omega_k > 0$ 的简正模和 $\omega_k < 0$ 的简正模, 并且 $u_k(x) \equiv u_k(\mathbf{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k t}$. 类似地, 利用 b 的反对易关系, 我们将能量算符(1.2.41)重写为

$$H = \sum_k{}^{(+)}\, \hbar\omega_k a_k^\dagger a_k + \sum_k{}^{(-)}\, \hbar|\omega_k| b_k^\dagger b_k + E_0 \,, \tag{1.2.44}$$

其中 E_0 是无限大 c-数

$$E_0 = -\sum_k{}^{(-)}\, \hbar|\omega_k| \,. \tag{1.2.45}$$

为了使这个新定义不仅仅是形式上的改变, 我们还必须将物理真空指定为不包含正能电子或正电子的态 Ψ_0:

$$a_k\Psi_0 = 0 \qquad (\omega_k > 0) \,, \tag{1.2.46}$$

$$b_k\Psi_0 = 0 \qquad (\omega_k < 0) \,. \tag{1.2.47}$$

因此, (1.2.44)所给出的 E_0 正是真空能. 如果我们测量的任意能量都是相对于真空能 E_0 的, 那么物理的能量算符是 $H - E_0$; 并且方程(1.2.44)表明这是一个正定的算符.

1934 年, 零自旋带电粒子的负能态问题也被 Pauli 和 Weisskopf[45]解决了, 他们的文章部分是为了挑战负能态被占满的 Dirac 图景. 这时, 产生湮灭算符满足对易关系而非反对易关

系, 所以像费米子那样自由地转换这些算符的角色是不可能的. 取而代之, 我们必须要返回到 Heisenberg-Pauli 正则体系[41]以确定各个简正模的系数是产生算符还是湮灭算符.

Pauli 和 Weisskopf 在一个空间体积 $V \equiv L^3$ 的正方体内将自由带荷标量场展成了平面波:

$$\phi(\mathbf{x},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} q(\mathbf{k},t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tag{1.2.48}$$

波数须满足周期性边界条件, 即 $j = 1,2,3$ 的 $k_j L/2\pi$ 应该是三个正整数或三个负整数. 类似地, 正则共轭变量(1.2.29)被展为

$$\pi(\mathbf{x},t) \equiv \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} p(\mathbf{k},t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \,. \tag{1.2.49}$$

指数上放进负号是为了使(1.2.29)变成:

$$p(\mathbf{k},t) = \dot{q}^\dagger(\mathbf{k},t) \,. \tag{1.2.50}$$

逆 Fourier 变换给出

$$q(\mathbf{k},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \int \mathrm{d}^3x \, \phi(\mathbf{x},t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \,, \tag{1.2.51}$$

$$p(\mathbf{k},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \int \mathrm{d}^3x \, \pi(\mathbf{x},t) \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \,, \tag{1.2.52}$$

因此, 对于 q 和 p, 正则对易关系(1.2.31)—(1.2.34)给出:

$$\Big[p(\mathbf{k},t), q(\mathbf{l},t)\Big] = \frac{-\mathrm{i}\hbar}{V} \int \mathrm{d}^3x \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}} = -\mathrm{i}\hbar\delta_{\mathbf{kl}} \,, \tag{1.2.53}$$

$$\begin{aligned} \Big[p(\mathbf{k},t), q^\dagger(\mathbf{l},t)\Big] &= \Big[p(\mathbf{k},t), p(\mathbf{l},t)\Big] = \Big[p(\mathbf{k},t), p^\dagger(\mathbf{l},t)\Big] \\ &= \Big[q(\mathbf{k},t), q(\mathbf{l},t)\Big] = \Big[q(\mathbf{k},t), q^\dagger(\mathbf{l},t)\Big] = 0 \end{aligned} \tag{1.2.54}$$

以及通过取上式的厄米共轭得到的对易关系. 通过将(1.2.48)和(1.2.49)代入哈密顿量的表达式(1.2.36), 我们同样可以将这个算符写成用 p 和 q 的形式:

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \Big[p^\dagger(\mathbf{k},t) p(\mathbf{k},t) + \omega_{\mathbf{k}}^2 \, q^\dagger(\mathbf{k},t) q(\mathbf{k},t) \Big] \,, \tag{1.2.55}$$

其中

$$\omega_{\mathbf{k}}^2 \equiv c^2\mathbf{k}^2 + \left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2 \,. \tag{1.2.56}$$

这样, p的时间导数由哈密顿方程给出

$$\dot{p}(\mathbf{k},t) = -\frac{\partial H}{\partial q(\mathbf{k},t)} = -\omega_{\mathbf{k}}^2 \, q^\dagger(\mathbf{k},t) \tag{1.2.57}$$

(同时也给出了它的伴随方程), 根据方程(1.2.50), 这个方程等价于 Klein-Gordon-Schrödinger 波动方程(1.2.28).

我们看到, 正如 Born, Heisenberg 和 Jordan[4]在 1926 年使用的模型中那样, 自由场行为类似于无穷多个耦合谐振子. Pauli 和 Weisskopf 可以构造出满足对易关系(1.2.53)—(1.2.54)以及“运

动方程”(1.2.50)和(1.2.57)的 p 和 q，其方法是引入两类分别对应粒子和反粒子的湮灭产生算符 $a, b, a^\dagger, b^\dagger$:

$$q(\mathbf{k},t) = \mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}}}\left[a(\mathbf{k})\exp(-\mathrm{i}\omega_{\mathbf{k}}t) - b^\dagger(\mathbf{k})\exp(\mathrm{i}\omega_{\mathbf{k}}t)\right], \tag{1.2.58}$$

$$p(\mathbf{k},t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2}}\left[b(\mathbf{k})\exp(-\mathrm{i}\omega_{\mathbf{k}}t) + a^\dagger(\mathbf{k})\exp(+\mathrm{i}\omega_{\mathbf{k}}t)\right] \tag{1.2.59}$$

其中

$$\left[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{l})\right] = \left[b(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{l})\right] = \delta_{\mathbf{kl}}\,, \tag{1.2.60}$$

$$\left[a(\mathbf{k}), a(\mathbf{l})\right] = \left[b(\mathbf{k}), b(\mathbf{l})\right] = 0\,, \tag{1.2.61}$$

$$\begin{aligned}\left[a(\mathbf{k}), b(\mathbf{l})\right] &= \left[a(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{l})\right] = \left[a^\dagger(\mathbf{k}), b(\mathbf{l})\right] \\ &= \left[a^\dagger(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{l})\right] = 0\,.\end{aligned} \tag{1.2.62}$$

可以直接验证这些算符满足所希望的关系(1.2.53), (1.2.54), (1.2.50)和(1.2.57). 场(1.2.48)可以重写为

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x},t) = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}}}\Big[&a(\mathbf{k})\exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \mathrm{i}\omega_{\mathbf{k}}t) \\ &- b^\dagger(-\mathbf{k})\exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + \mathrm{i}\omega_{\mathbf{k}}t)\Big]\end{aligned} \tag{1.2.63}$$

并且哈密顿量(1.2.55)采取如下的形式

$$H = \sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{2}\hbar\omega_{\mathbf{k}}\left[b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k}) + b(\mathbf{k})b^\dagger(\mathbf{k}) + a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k})\right]$$

或者, 利用(1.2.60)-(1.2.62)

$$H = \sum_{\mathbf{k}}\hbar\omega_{\mathbf{k}}\left[b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k}) + a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k})\right] + E_0\,, \tag{1.2.64}$$

其中 E_0 是无限大 c-数

$$E_0 \equiv \sum_{\mathbf{k}}\hbar\omega_{\mathbf{k}}\,. \tag{1.2.65}$$

存在两类不同的算符 a 和 b, 并且它们在哈密顿量中以精确相同的形式出现, 这些表明这是一个包含两种相同质量粒子的理论. 正如 Pauli 和 Weisskopf 所强调的, 这两个变量可以看作是粒子和相应的反粒子, 并且如果它们带荷, 它们会带相反的荷. 因此, 正如我们前面所强调的, 零自旋的玻色子和自旋 1/2 的费米子一样可以有能够区分的反粒子, 而这种反粒子不能等效为负能粒子海中的空穴.

现在, 我们可以通过取对易关系在真空态 Ψ_0 上的期望值来分辨 a 和 b 是湮灭算符还是 $a^\dagger$ 和 $b^\dagger$ 是湮灭算符. 例如, 如果 $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ 是湮灭算符, 那么它作用在真空态上给出0, 所以(1.2.60)的真空期望值将给出

$$-||a(\mathbf{k})\Psi_0||^2 = \left(\Psi_0, \left[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k})\right]\Psi_0\right) = +1 \tag{1.2.66}$$

这与左边必须负定相矛盾. 用这种方法我们可以得出结论: $a_{\mathbf{k}}$ 和 $b_{\mathbf{k}}$ 才是湮灭算符, 因此

$$a(\mathbf{k})\Psi_0 = b(\mathbf{k})\Psi_0 = 0\,. \tag{1.2.67}$$

这与所有对易关系均一致. 因此, 正则体系迫使场(1.2.58)中 $\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t}$ 的系数是产生算符, 一如它在自旋 1/2 的 Furry-Oppenheimer 体系中所扮演的角色.

方程(1.2.64)和(1.2.67)现在告诉我们 E_0 是真空态的能量. 如果我们测量的能量任意都是相对于 E_0 的, 那么, 物理的能量算符就是 $H - E_0$, 并且(1.2.64)又一次证明它是正定的.

那么作为 Dirac 的出发点的负几率问题又该如何处理呢? 正如 Dirac 认识到的, 由 Klein-Gordon-Schrödinger 自由标量方程(1.2.28)的解构成的唯一的几率密度 ρ 满足一个形如(1.1.10)的守恒律, 它必须正比于如下的量

$$\rho = 2\,\mathrm{Im}\left[\phi^\dagger \frac{\partial\phi}{\partial t}\right] \tag{1.2.68}$$

因此它不一定是正定的. 类似地, 在"二次量子化"理论中, ϕ 由方程(1.2.64)给定, ρ 不是一个正定算符. 由于这里 $\phi^\dagger(x)$ 并不与 $\dot\phi(x)$ 对易, 所以我们可以以不止一种的方式写出(1.2.68), 它们之间相差无限大的 c-数; 将其写为如下的形式被证明是方便的

$$\rho = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}\,\phi^\dagger - \frac{\partial\phi^\dagger}{\partial t}\,\phi\right]\,. \tag{1.2.69}$$

这样, 就能轻松地计算出这个算符的空间积分

$$N \equiv \int \rho\,\mathrm{d}^3x = \sum_{\mathbf{k}}\Big(a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) - b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k})\Big) \tag{1.2.70}$$

它显然会有两种符号的本征值.

然而, 从某种意义上讲, 这个出现在自旋 0 量子场论中的问题也出现在自旋 1/2 的量子场论中, Dirac 场的密度算符 $\psi^\dagger\psi$ 确实是正定算符, 但是为了构造物理的密度, 我们应该扣除已填满电子态的贡献. 特别地, 利用平面波分解(1.2.43), 我们可以将总的数算符写为

$$N \equiv \int \mathrm{d}^3x\,\psi^\dagger\psi = \sum_{\mathbf{k}}^{(+)} a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + \sum_{\mathbf{k}}^{(+)} b(\mathbf{k})b^\dagger(\mathbf{k})\,.$$

b 的反对易关系使得我们可以将其重写为

$$N - N_0 = \sum_{\mathbf{k}}^{(+)} a^\dagger_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}} - \sum_{\mathbf{k}}^{(+)} b^\dagger_{\mathbf{k}}b_{\mathbf{k}}\,, \tag{1.2.71}$$

其中 N_0 是无限大常数

$$N_0 = \sum_{\mathbf{k}}^{(-)} 1\,. \tag{1.2.72}$$

根据方程(1.2.46)和方程(1.2.47), N_0 是真空中的粒子数, 所以 Furry 和 Oppenheimer 推断出物理的数算符应该是 $N - N_0$, 并且, 它现在既有负本征值又有正本征值, 和自旋 0 的情况一样.

对于这个问题, 量子场论给出的解答是: 无论是 Furry 和 Oppenheimer 的 ψ 还是 Pauli 和 Weisskopf 的 ϕ, 它们都不是用来定义守恒的正几率密度所需要的几率振幅. 作为替代, 张开物

理 Hilbert 空间的态定义为每个模中包含确定数目的粒子和(或)反粒子的态. 如果 Φ_n 是这种态的正交完全集, 那么测量任意态 Ψ 下的粒子数所得到的是发现系统处在 Φ_n 态的几率, 形如

$$P_n = |(\Phi_n, \Psi)|^2 \,, \tag{1.2.73}$$

其中 (Φ_n, Ψ) 是通常的 Hilbert 空间标量积. 因此, 对任何自旋都不会出现负几率的问题. 波场 ϕ, ψ 等根本不是几率密度, 而是在不同简正模下产生或湮灭粒子的算符. 如果“二次量子化”这个引起误解的表述被永久地放弃, 那将是一件好事.

特别的, 方程(1.2.70)和(1.2.71)的算符 N 和 $N - N_0$ 并不解释成总几率, 而是解释成数算符: 再明确些, 就是粒子数与反粒子数之差. 对于带荷粒子, 荷的守恒迫使荷算符正比于这些数算符, 所以(1.2.70)和(1.2.71)中的减号使得我们立即推断出粒子和反粒子具有相反的荷. 在场论体系中, 相互作用对哈密顿量的贡献项是场变量的三阶, 四阶或者更高阶项, 而不同过程的速率则通过在含时微扰论中使用这些相互作用算符给出. 以上简论中描述的概念框架将是本书绝大多数工作的基础.

尽管有如此明显的优点, 量子场论并没有立即取代空穴理论; 相反, 在一段时期内这两种观点共存, 并且场论思想和空穴理论思想的各种结合被用来计算物理反应速率. 在这个时期, 对于许多过程的截面, 计算精确到了按 e^2 幂次展开的最低阶, 例如, 1929 年, Klein 和 Nishina (仁科)给出了 $e^- + \gamma \to e^- + \gamma$;[46] 1930 年, Dirac 给出了 $e^+ + e^- \to 2\gamma$;[47] 1932 年, Møller (穆勒)给出了 $e^- + e^- \to e^- + e^-$;[48] 1934 年, Bethe (贝特)和 Heitler (海特勒)给出了 $e^- + Z \to e^- + \gamma + Z$ 和 $\gamma + Z \to e^+ + e^- + Z$ (其中 Z 代表重原子的 Coulomb 场);[49] 1936 年 Bhabha (巴巴)给出了 $e^+ + e^- \to e^+ + e^-$.[50] (这些过程的计算规则在第 8 章给出, 并且在那里会给出电子-光子散射过程的详细推导.) 这些最低阶的计算给出了有限的结果, 与实验数据基本吻合.

然而, 对量子场论的不满(无论是否以空穴理论的形式)持续了整个 20 世纪 30 年代. 其中的一个原因是量子电动力学对宇宙射线簇射中带电粒子穿透能力的解释明显是错误的, 这一现象是 Oppenheimer 和 Franklin Carlson (富兰克林·卡尔森)[50a]在 1936 年注意到的. 另一个不满意的原因是新粒子和新相互作用的连续发现, 而这个现象后来发现也与第一个相关. 我们已经提到的有: 电子, 光子, 正电子, 中微子, 当然, 还有氢原子的核——质子. 贯穿 20 世纪 20 年代始终, 大家普遍相信重核是由质子和电子构成的, 但是很难理解像电子这样的轻粒子是如何被禁闭在核内的. 这一图景的又一严重困难是 Ehrenfest 和 Oppenheimer 在 1931 年指出的:[51] 对于普通氮元素的核 N^{14}, 为了使它有原子数 7 和原子量 14, 氮核就必须由 14 个质子和 7 个电子构成, 所以只能是一个费米子, 但是分子光谱表明 N^{14} 是玻色子,[52] 这两个结果相矛盾. 由于在 1932 年发现了中子,[53] 并且随后 Heisenberg 提议[54]核是由质子和中子而非质子和电子组成, 这个问题(以及其他问题)被解决了. 当时便清楚了, 原子核是由一个很强的非电磁的短程力将中子和质子聚在一起而形成的.

在 β-衰变的 Fermi 理论成功之后, 几位学者[54a]推测这个理论中的核力可以解释成是交换电子和中微子产生的. 就在几年后的 1935 年, Hideki Yukawa (汤川秀树)针对核力提出了一个相当不同的量子场理论.[55] 在一个基本的经典计算中, 他发现标量场与核子(质子或中子)的相互作用将产生一个核子-核子势, 而这个势对核间距 r 的依赖是

$$V(r) \propto \frac{1}{r} \exp(-\lambda r) \,, \tag{1.2.74}$$

并非电场产生的 Coulomb 势 $1/r$. 在 Yukawa 的标量场方程中, λ 作为一个参量引入, 并且当这个方程被量子化后, Yukawa 发现它描述的是质量为 $\hbar\lambda/c$ 的粒子. 根据观测到的核内强相互

作用的作用范围, Yukawa 估计出 $\hbar\lambda/c$ 的量级是电子质量的 200 倍. 在 1937 年, Seth Neddermeyer(赛斯·尼德迈尔)和 Anderson 以及 Jabez Curry Street (杰贝兹·柯里·斯特里特)和 Edward Carl Stevenson (爱德华·卡尔·史蒂文森)在云室中发现了这样的"介子",[56] 并且普遍认为这就是 Yukawa 的假想粒子.

介子的发现揭示出宇宙射线簇射中的带电粒子并不全是电子, 因而解决了簇射中困扰 Oppenheimer 和 Carlson 的问题. 然而, 它同时产生了新的困难. Lothar Nordheim (洛塔尔·诺德海姆)[56a]在 1939 年指出, 在高海拔中使得介子大量产生的(Yukawa 理论的要求)强相互作用也会导致介子在大气层中被大量吸收, 但这与它们在低海拔处大量出现的结果相矛盾. 1947 年, Marcello Conversi (马尔塞洛·孔韦尔西), Ettore Pancini (埃托雷·潘西尼)和 Oreste Piccioni (奥雷斯特·皮西奥尼)[57]的一个实验表明, 在低海拔处, 宇宙射线中占主导地位的介子实际上与核子的相互作用非常弱, 因而不能等同为 Yukawa 粒子. 这个谜被一个理论假设[58]解决, 随后又被 Cesare Lattes (凯撒·拉特斯), Occhialini (奥基亚利尼)和 Cecil Powel (塞西尔·鲍威尔)的实验[59]证实——存在两类介子, 它们的质量存在轻微的差异: 重的(现在称为 π 介子或 π 子)参与强相互作用并在核力中扮演 Yukawa 所想象的角色; 轻的(现在称为 μ 介子或 μ 子)仅参与弱作用和电磁作用, 并且在海平面处的宇宙射线中占主导地位, 它产生于 π 介子的衰变. 在同一年, 即 1947 年, 宇宙射线中的新粒子(现在所说的 K 介子和超子)被 George Rochester (乔治·罗切斯特)和 Clifford Butler (克利福德·巴特勒)全部发现.[60] 从 1947 年起直到现在, 新粒子不断被发现, 种类之多令人眩晕, 但是追溯这段历史会使我们脱离主线. 这些发现清楚地表明任何局限于光子, 电子和正电子的概念框架都太过狭窄, 以至于不能作为一个严肃的基本理论的基础. 然而, 一个更大的障碍来自于一个纯理论问题——无限大的问题.

1.3 无限大的问题

量子场论所处理的场 $\psi(x)$ 在时空点 x 消灭或产生粒子. 经典电子论的早期经验提供了一个警示: 点电子将会有无限大的电磁自质量; 对于电荷分布在半径为 a 的球面上的电子, 这个质量是 $e^2/6\pi ac^2$, 因此在 $a \to 0$ 时奇异. 令人失望的是, 这个问题在量子场论的早期就出现了, 并且更加严重, 尽管在这个理论随后的发展中被极大地改善了, 但依旧留存至今.

量子场论中的无限大问题是 Pauli 和 Heisenberg 在他们 1929—1930 年的文章中第一次注意到的.[41] 不久之后, Oppenheimer 在束缚电子的电磁自能计算中证实了无限大的存在,[61] 对于自由电子, 则是 Ivar Waller(伊瓦尔·沃勒)发现电磁自能中的无限大.[62] 他们使用的是普通二阶微扰论, 不过这个微扰论中含有一个由电子和光子组成的中间态: 例如对于氢原子第 n 能级中的电子, 能量 E_n 的位移为

$$\Delta E_n = \sum_{m,\lambda} \int \mathrm{d}^3k \, \frac{|\langle m;\mathbf{k},\lambda|H'|n\rangle|^2}{E_n - E_m - |\mathbf{k}|c} \ , \tag{1.3.1}$$

其中求和与积分取遍所有的中间电子态 m, 光子螺度 λ 和光子动量 $\mathbf{k}$, 而 H' 是哈密顿量中代表辐射与电子相互作用的项. 这个计算所给出的自能是形式发散的; 更进一步; 如果通过扔掉那些光子波数大于 $1/a$ 的中间态来去掉发散, 那么自能行为在 $a \to 0$ 时类似于 $1/a^2$. 这类无限大通常被称为紫外发散, 这是因为引起这些发散的是那些包含波长非常短的粒子的中间态.

这些处理电子的计算所依照的规则是负能态没有被填满的原始 Dirac 理论. 几年后, Weisskopf 在负能态被填满的新空穴理论中复现了电子自质量的计算. 在这种情况下, 二阶微扰论中又

出现了新的项, 以非空穴理论语言, 产生这一项的过程可以描述为: 末态电子先伴随光子和正电子从真空中出现, 而后这个正电子与初始的电子湮灭掉了. 最初, Weisskopf 发现一个关于光子波数截断 $1/a$ 形式为 $1/a^2$ 的依赖关系. 在那时, Carlson 和 Furry (在Pauli的建议下)实现了相同的计算. 在看到 Weisskopf 的结果后, Furry 意识到, 尽管 Weisskopf 引入了他和 Carlson 忽视的静电项, 但 Weisskopf 却在磁性自能的计算中犯了一个新错误. 从 Furry 那里了解到这件事后, Weisskopf 纠正了自己的错误, 然后他发现总质量位移中的 $1/a^2$ 项被抵消了! 然而, 尽管这个无穷大被抵消了, 另一无穷大却留了下来: 在波数截断 $1/a$ 下, 自质量被发现是[63]

$$m_{em} = \frac{3\alpha}{2\pi} m \ln\left(\frac{\hbar}{mca}\right) , \tag{1.3.2}$$

与经典的 $1/a$ 关系或者早期量子的 $1/a^2$ 关系相比, $\ln a$ 关系对于截断的依赖变弱了, 在那时, 这只是稍稍鼓舞了人心, 而在后面重整化理论的发展中, 这一点变得极其重要.

另一类相当不同的无限大是在 1933 年发现的, 这显然是 Dirac 发现的.[64] 他考察了一个静态近均匀外电荷密度 $\varepsilon(\mathbf{x})$ 在真空上的效应, 这里的真空指的是用于填满空穴理论中负能级的电子. $\varepsilon(\mathbf{x})$ 与负能电子的电荷密度之间的 Coulomb 作用会产生“真空极化”, 真空极化的感应电荷密度是

$$\delta\varepsilon = A\varepsilon + B\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \nabla^2\varepsilon + \cdots . \tag{1.3.3}$$

常数 B 是有限的, 量级为 α. 另一方面, A 是对数发散的, 量级为 $\alpha \ln a$, 其中 $1/a$ 是波数截断.

无限大似乎也出现在一个相关的问题上, 即光与光的散射. Hans Euler (汉斯·欧拉), Bernard Kockel (伯纳德·库卡尔)和 Heisenberg[65]在 1938—1939 年证明了, 通过使用 Dirac[66]和 Heisenberg[67]早期所建议的方案, 尽管这些方案有些随意, 这些无穷大可以被消除掉. 他们计算了由虚正负电子对产生的非线性电磁效应的有效拉格朗日密度:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2\right) + \frac{e^4\hbar}{360\pi^2 m_e^2 c^7}\left[\left(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2\right)^2 + 7\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}\right)^2\right] + \cdots , \tag{1.3.4}$$

上式在频率 $\nu \ll m_e c^2/h$ 时成立. 不久之后, Nicholas Kemmer (尼古拉斯·克默尔)和 Weisskopf[68]提出了一个看法: 在这种情况下, 无限大是假的, 不借助任何减除手段就可以导出(1.3.4).

在与无限大的斗争中, 一个亮点是红外发散的成功处理, 这些发散来自于积分区域的低能部分而非高能部分. 在 1937 年, Felix Bloch (费利克斯·布鲁赫)和 Arne Nordsieck[68a](阿恩·诺德西克)证明了, 假如引入一个可以有任意多个低能光子产生的过程, 这些发散就可以抵消掉. 这些将在第 13 章以一个现代的形式讨论.

然而, 在 1939 年, Sidney Michael Dancoff (西德尼·迈克尔·丹科夫)对电子在一个原子的静 Coulomb 场散射做了辐射修正计算[69], 在这个计算中出现了另一类无限大. 这个计算有一个错误(有一项被忽略了), 但晚些时候这个错误才被意识到.[69a]

贯穿 20 世纪 30 年代, 所看到的各种无穷大不仅仅是一些特殊运算中的失败. 相反, 它们似乎预示在更基础的层面上理解相对论量子场论上有一道鸿沟, 上节中提到的宇宙射线更是加深了这一观点.

这种令人不安的悲观情绪的一个表现是: 对其它替代方案的持续探索贯穿了 20 世纪的 30 年代和 40 年代. 正像 Julian Schwinger[69b](朱利安·施温格)后来回忆到, “在那时, 对于参与到这个问题中的大多数物理学家而言, 当务之急不是分析并仔细地应用已知的电子和电磁场耦合的相对

论理论, 而是去改变它." 因此, Heisenberg[70]在 1938 年提出可能存在一个基本长度 L, 它类似于基本作用量 h 和基本速度 c, 而场论被认为仅在尺度远大于 L 时才是成立的, 这使得所有发散积分实际上在 L 或者动量 h/L 处被截断了. 几个更加具体的提议[70a]是赋予场论非定域结构. 一些理论家开始怀疑态矢和量子场的理论体系应该被一个仅基于可观测量的体系所替代, 例如由 John Archibald Wheeler[71](约翰·阿奇博尔德·惠勒)在 1937 年和 Heisenberg[72]在 1943 年引入的 S-矩阵, 它的矩阵元是各种过程的散射振幅. 正如我们将看到的, S-矩阵的概念现在已经变成了现代量子场论中一个至关重要的部分, 并且对于一些理论家来说, 一个纯 S-矩阵理论变成一个理想的典范, 特别是作为强相互作用问题的一个可能的解决方案.[73] 在另一方向上, Wheeler 和 Richard Feynman[74](理查德·费曼)在 1945 年尝试消除电磁场, 而从一种远距离上的相互作用导出电磁相互作用. 他们证明了, 如果不仅仅计入源与检验电荷间的相互作用, 还计入这些电荷与宇宙中其他电荷间的相互作用, 就可以从中获得一个纯推迟(或纯超前)势. 而这个时期对量子力学的最激进的修正也许是 Dirac[75]引入的: 引入负几率态以抵消态求和中的无穷大. Hilbert 空间中的"不定度规"这一观点, 尽管不是以原先提出时的形式, 但也借此在量子场论中繁荣起来.

在 20 世纪 30 年代, 一个更加保守的处理无限大的观点也开始流传开来. 这些无限大完全可能被吸收进一个重定义中, 即对理论参量的"重整化". 例如, 当时已经知道在所有 Lorentz 不变的经典理论中, 电子的电磁自能和自动量所表现的形式必须是电子质量修正; 于是, 这些量中的无限大可以被电子的非电磁"裸"质量中的负无限大抵消掉, 从而留下了有限大的可观测"重整化"质量. 此外, 方程(1.3.3)表明真空极化改变了电子电荷, 从 $e \equiv \int \mathrm{d}^3x\, \varepsilon$ 变为

$$e_{\mathrm{TOTAL}} = \int \mathrm{d}^3x\, (\varepsilon + \delta\varepsilon) = (1 + A)e\,. \tag{1.3.5}$$

如果散射截面这样的可观测量是由 e_{TOTAL} 而非 e 来表达的, 那么真空极化在最低阶就会给出有限的结果. 当时的问题是: 量子场论中的所有无限大是否都可以用这种方式进行处理. 在 1936 年, Weisskopf[76]认为可以做到这点, 并且他在大量例子中证明了已知的无穷大可以通过物理参量的重整化消除掉. 然而, 采用了这个计算技巧后就能说明无穷大总是可以以这种方式消除掉, 这一点是不可能的, 并且 Dancoff 的计算[69]似乎表明这是做不到的.

认为在量子场论中表现为无穷大的任何效应实际上根本不存在, 这是对出现无穷大的另一反应. 尤其是在 1928 年, Dirac 理论已经预言了直到 α 的任意阶, 氢原子的 $2s_{1/2}$-$2p_{1/2}$ 能级都是完全简并的; 所有用量子电动力学计算这两个能级分裂的尝试都遇到了束缚电子的无穷大自能这一问题; 因此, 这种分裂的存在一般都没有被认真对待. Bethe[80]后来回忆到, "在所有现存的理论中, 这个位移都出现了无限大, 因而总是被忽视." 这个看法甚至一直延续到 20 世纪 30 年代的后期, 而当时光谱实验[77]已经开始表明存在一个量级为 1000 MHz 的 $2s_{1/2}$-$2p_{1/2}$ 分裂. 一个值得注意的例外是 Edwin Albrecht Uehling[78](埃德温·阿尔布雷克特·尤林), 他意识到前面提到的真空极化效应将会产生一个 $2s_{1/2}$-$2p_{1/2}$ 分裂; 不幸的是, 正如我们将在第 14 章看到的, 这个效应对分裂的贡献远小于1000 MHz, 并且有一个符号错误.

二战后不久, 弥漫在量子场论周围的阴霾开始消散. 1947 年 6 月 1 日至 4 日, 纽约谢尔特岛(Shelter Island)上召开了题为"量子力学基础"(Foundation of Quantum Mechanics)的会议, 这个会议将 20 世纪 30 年代从事量子场论研究的理论物理学家, 在战争中开始科学生涯的年轻一代理论家, 以及——至关重要的——几个实验物理学家聚集了起来. 讨论的主导者是 Hans Kramers(汉斯·克拉默斯), Oppenheimer 和 Weisskopf. 参与会议中的一个实验物理学家(或更准确地说, 转为实验家的理论家), Willis Lamb (威利斯·兰姆), 描述了一个对氢原子中 $2s_{1/2}$-$2p_{1/2}$ 位

移的决定性测量.[79] 实验炉中的一束氢原子, 它们中大多处在 $2s$ 和 $2p$ 态, 这些原子被射向了一个仅对激发态原子敏感的探测器. 处在 $2p$ 态的原子可以通过单光子发射(Lyman α)快速地衰减到 $1s$ 基态, 而 $2s$ 态要想衰变到基态只能通过双光子发射, 这些原子衰变得非常慢, 所以, 探测器实际上探测到的只是处在亚稳态 $2s$ 态上的原子数目. 原子束会通过一个磁场, 这将在任何自然出现的 $2s_{1/2}$-$2p_{1/2}$ 分裂外再增加一个已知的 Zeeman (塞曼)分裂. 这束原子同时被曝露在一个频率固定在 $\nu \sim 10\,\mathrm{GHz}$ 的微波电磁场中. 在一定磁场强度下, 所观测到的探测器信号是瞬熄的, 这表明: 微波场产生了从亚稳 $2s$ 态到 $2p$ 态的共振跃迁, 然后这些原子再通过快速地发射 Lyman α 光子到达基态. 在这个磁场强度之下, 总的 $2s_{1/2}$-$2p_{1/2}$ 分裂(Zeeman 分裂加内禀分裂)必须恰好是 $h\nu$, 由此我们可以推断出内禀分裂的大小. 最初公布的初始值是 1000 MHz, 而这与早期光谱学的测量结果一致.[77] 这个发现的影响可以总结为 1954 年我在哥本哈根做研究生时那里流行的一句话: “无穷大中包含的信息并不是零!(Just because something is infinite does not mean it is zero!)”

Lamb 位移的发现引起了谢尔特岛上的理论家的强烈兴趣, 他们中的很多人已经开始致力于改进量子电动力学中计算部分的形式体系. Kramers 描述了他在扩展(extended)电子的经典电动力学中进行质量重整化的工作,[79a] 他证明了, 如果将理论重新表述, 使得体系中的质量参量等于实验测量电子质量的值, 那么在半径为零的极限下, 自能发散附带的困难并不会显式地出现. Schwinger 和 Weisskopf (已经听说了关于 Lamb 结果的传闻, 并在去往谢尔特岛的旅途中讨论了这件事)提出: 既然已经知道正电子所包含的中间态能使能级位移中的发散从 $1/a^2$ 降为 $\ln a$, 那么把中间态考虑在内后, 原子能级移动的差最终可能是有限的. (事实上, 在 1946 年, 在 Weisskopf 听闻 Lamb 的实验之前, 他就已经将这个问题布置给了一个研究生 Bruce French (布鲁斯 · 弗伦奇).) 在会议一结束后, Hans Bethe[80](汉斯 · 贝特)在去往斯克内克塔迪(Schenectady)的火车上做了一个非相对论计算, 这个计算依旧没有考虑正电子的中间态的影响, 而是在 $m_e c^2$ 的量级处对虚光子动量做了一个简单的截断, 以此来消除无限大. 他得到了令人振奋的近似值——1040 MHz. 很快, 许多学者[81]给出了用重整化思想来消除无限大且完全相对论性的计算, 与实验精确地一致.

谢尔特岛上另一激动人心的实验结果是 Isidor I. Rabi (伊西多 · 艾萨克 · 拉比)报告的. 在他的实验室中, 对氢和氘的超精细结构的测量[82]给出的电子磁矩要比 Dirac 值 $e\hbar/2mc$ 大一个约为 1.0013 的因子, 并且随后对钠和镓的旋磁比的测量给出了精密值[83]

$$\mu = \frac{e\hbar}{2mc}\left[1.00118 \pm 0.00003\right].$$

得知这些结果后, Gregory Breit(格雷戈里 · 布赖特)提出,[83a] 这些差异源自于对电子磁矩的 α 阶辐射修正. 在谢尔特岛上, Breit 和 Schwinger 都叙述了他们在计算这个修正上的努力. 就在这个会议后不久, Schwinger 成功地完成了对电子反常磁矩的计算[84]

$$\mu = \frac{e\hbar}{2mc}\left[1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right] = \frac{e\hbar}{2mc}\left[1.001162\right]$$

与实验结果完美地一致. 这个结果, 以及 Bethe 关于 Lamb 位移的计算, 至少使物理学家相信了辐射修正的正确性.

这个时期所使用的数学方法展示了五花八门的概念和形式理论, 种类之多令人眼花缭乱. Schwinger[85]发展的方法基于算符方法以及作用量原理, 并且在 1948 年, 他在谢尔特岛会议的后续会议波克诺庄园会议上做了介绍. 另一个更早的 Lorentz 不变的算符形式理论是日本的Sin-Itiro

Tomonaga[86](朝永振一郎)和他的合作者发展出来的, 但是他们的工作事先没有被西方知晓. 在20世纪30 年代, Tomonaga就已经在与Yukawa介子理论中的无穷大搏斗了. 直到1947年, 他和他的小组仍然在学术交流圈之外; 他们是从《新闻周刊》(Newsweek)上的一篇文章知道的Lamb位移.

另一个明显不同的方法是Feynman发明的,[87] 他在波克诺会议上做了简短的介绍. 取代引入量子场算符, Feynman将S-矩阵表示成对$\exp(\mathrm{i}W)$的泛函积分, 其中W是一组Dirac粒子的作用量积分, 而这些Dirac粒子与经典电磁场有相互作用, 积分遍及所有在$t \to \pm\infty$时满足一定初态条件和末态条件的Dirac粒子轨道. 在Feynman的工作中, 一个具有重大实际意义的结果是一组图形规则, 这个规则可以用来计算S-矩阵元, 直至微扰论的任意阶. 不像20世纪20年代和30年代的旧微扰论, 这些Feynman规则自动地将粒子产生过程和反粒子湮灭过程混合在一起, 从而每一步中给出的结果都是Lorentz不变的. 而在Weisskopf的早期电子自能计算中[63]我们就已经看到, 只有在这种赋予粒子和反粒子同等地位的计算中, 无限大的本质才会变得明晰.

最终, 在1949年的两篇文章中, Freeman Dyson[88](弗里曼·戴森)证明了Schwinger和Tomonaga的算符体系也会得出Feynman发现的图形规则. Dyson同时对一般Feynman图中的无限大进行了分析, 并且概述了一个证明: Feynman图中出现的无穷大精确地总是那类可以通过重整化消除掉的无穷大. 从Dyson的分析中得出的一个显著结果是决定量子场论是否"可重整"的判据, 即是否所有的无限大都可以被吸收进有限多个重新定义的质量和耦合常数中. 特别是像Pauli项(1.1.32)这样的相互作用, 它会改变电子磁矩的预测值, 同时也会破坏量子电动力学的可重整性. 随着Dyson 文章的发表, 至少有了一个普遍且系统的形式理论供物理学家轻松地上手使用, 并且为量子场论在物理问题中的后继应用提供了一个通用语言.

在谈论无穷大这个故事时, 我不得不谈谈它让人迷惑的一面. Oppenheimer[61]在1930年就已经发现, 当取两个原子能级位移之差时, 束缚电子自能中的大多数紫外发散都可以被消除掉, 并且Weisskopf[63]在1936年已经发现当引入一个包含正电子的中间态时, 自由电子自能中的大多数发散都可以被消除. 即使在1934年, 人们也会很自然地猜测通过引入正电子中间态并减除掉成对原子态的能量位移, 就可以消除它们相对能量位移中的无穷大.* 对于$2s_{1/2}$-$2p_{1/2}$能级差, 甚至还有一个量级为1000 MHz的实验证据.[77] 那么为什么在1947年之前没有人对这个能量差进行一个数值估计呢?

严格地说, 在1939年有过一次这样的尝试,[88a] 但它关注的是问题的错误部分——质子的荷半径, 它在氢原子能级上仅有一个微弱的效应. 这个计算所给出的结果与早期实验[77]粗略地一致. 而正像Lamb在1939年指出的那样,[88b] 这是一个错误.

在20世纪30年代, 对于中间态包含正电子的Lamb位移, 本可以利用旧的非相对论性微扰论对它做完全相对论性的计算. 只需将所有项保留到一个给定阶, 老式的非相对论微扰论性将给出与Feynman, Schwinger和Tomonaga的明显相对论性的形式理论相同的结果. 事实上, 尽管日本的Tomonoga小组[81]已经使用协变方法解决了这个问题以及其它问题, 在Bethe的工作之后, 美国对Lamb位移的第一个精确计算[81]正是由French, Weisskopf, Norman Kroll(诺曼·克罗尔)和Lamb以这种方式完成的.

当时缺失的一个要素是用重整化方法处理无穷大的信心. 正如我们所看到的, 重整化到20世纪30年代后期才得到广泛讨论. 然而, 在Oppenheimer的竭力主张下,[89] 在30年代大家广泛相信

*事实上, 这个猜测本来是错的. 正如将在14.3节讨论到的, 电子质量的辐射修正对原子能级的影响不仅只是电子静能的位移, 静能位移对于所有原子能级都是一样的, 它还会引起电子动能的改变, 而这个变化对不同能级是不同的.

量子电动力学在能量超过 100 MeV时不再是严格的, 这类问题的解决方法只能在非常大胆的新思想中找到.

在谢尔特岛上发生的几件事改变了这个预期. 一个是有消息宣传, 上一节中讨论的宇宙射线问题被解决了; Robert Marshak(罗伯特·马夏克)提出假设[58], 存在两种质量相近的"介子"; μ 子实际上已经被观测到了, 而 π 介子则负责核力. 更重要的是, Lamb 位移和反常磁矩都有了可靠的实验数据, 这迫使物理学家们去仔细思考辐射修正. 可能同样重要的是, 这个会议将理论家们聚拢在一起, 他们本来各自在以自己方式考虑这个问题, 现在则思考如何用重整化来解决无限大问题. 当革命于 40 年代后期来临时, 年轻的物理学家们反而扮演了保守的角色, 他们避开了前辈们激进的解决方案, 完成了这场革命.

参考书目

☐ S. Aramaki, 'Development of the Renormalization Theory in Quantum Electrodynamics,' *Historia Scientiarum* **36**, 97 (1989); *ibid*. **37**, 91 (1989). [Section 1.3.]

☐ R. T. Beyer 编辑, *Foundations of Nuclear Physics* (Dover Publications, Inc., New York, 1949). [Section 1.2.]

☐ L. Brown, 'Yukawa's Prediction of the Meson,' *Centauros* **25**, 71 (1981). [Section 1.2.]

☐ L. M. Brown and L. Hoddeson 编辑, *The Birth of Particle Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1983). [Sections 1.1, 1.2, 1.3.]

☐ T. Y. Cao and S. S. Schweber, 'The Conceptual Foundations and the Philosophical Aspects of Renormalization Theory,' *Synthèse* **97**, 33 (1993). [Section 1.3.]

☐ P. A. M. Dirac, *The Development of Quantum Theory* (Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1971). [Section 1.1.]

☐ E. Fermi, 'Quantum Theory of Radiation,' *Rev. Mod. Phys.* **4**, 87 (1932). [Sections 1.2 and 1.3.]

☐ G. Gamow, *Thirty Years that Shook Physics* (Doubleday and Co., Garden City, New York, 1966). [Section 1.1.]

☐ M. Jammer, *The Conceptual Development of Quantum Mechanics* (McGraw-Hill Book Co., New York, 1966). [Section 1.1.]

☐ J. Mehra, 'The Golden Age of Theoretical Physics: P. A. M. Dirac's Scientific Work from 1924 to 1933', 收录于*Aspects of Quantum Theory*, A. Salam and E. P. Wigner 编辑, (Cambridge University Press, Cambridge, 1972). [Section 1.1.]

☐ A. I. Miller, *Early Quantum Electrodynamics – A Source Book* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1994). [Sections 1.1, 1.2, 1.3.]

☐ A. Pais, *Inward Bound* (Clarendon Press, Oxford, 1986). [Sections 1.1, 1.2, 1.3.]

□ S. S. Schweber, 'Feynman and the Visualization of Space-Time Processes,' *Rev. Mod. Phys.* **58**, 449 (1986). [Section 1.3.]

□ S. S. Schweber, 'Some Chapters for a History of Quantum Field Theory: 1938–1952,' 收录于*Relativity, Groups, and Topology II*, B. S. De Witt and R. Stora 编辑(North-Holland, Amsterdam, 1984). [Sections 1.1, 1.2, 1.3.]

□ S. S. Schweber, 'A Short History of Shelter Island I,' 收录于*Shelter Island II*, R. Jackiw, S. Weinberg, and E. Witten 编辑(MIT Press, Cambridge, MA, 1985). [Section 1.3.]

□ S. S. Schweber, *QED and the Men Who Made It: Dyson, Feynman, Schwinger, and Tomonaga* (Princeton University Press, Princeton, 1994). [Sections 1.1, 1.2, 1.3.]

□ J. Schwinger 编辑, *Selected Papers in Quantum Electrodynamics* (Dover Publications Inc., New York, 1958). [Sections 1.2 and 1.3.]

□ S.-I. Tomonaga, 收录于*The Physicist's Conception of Nature* (Reidel, Dordrecht, 1973). [Sections 1.2 and 1.3.]

□ S. Weinberg, 'The Search for Unity: Notes for a History of Quantum Field Theory,' *Daedalus*, Fall 1977. [Sections 1.1, 1.2, 1.3.]

□ V. F. Weisskopf, 'Growing Up with Field Theory: The Development of Quantum Electrodynamics in Half a Century,' 1979 Bernard Gregory Lecture at CERN, published in L. Brown and L. Hoddeson, *op. cit.*. [Sections 1.1, 1.2, 1.3.]

□ G. Wentzel, 'Quantum Theory of Fields (Until 1947)' 收录于*Theoretical Physics in the Twentieth Century*, M. Fierz and V. F. Weisskopf 编辑(Interscience Publishers Inc., New York, 1960). [Sections 1.2 and 1.3.]

□ E. Whittaker, *A History of the Theories of Aether and Electricity* (Humanities Press, New York, 1973). [Section 1.1.]

参考文献

[1] L. de Broglie, *Comptes Rendus* **177**, 507, 548, 630 (1923); *Nature* **112**, 540 (1923); Thèse de doctorat (Masson et Cie, Paris, 1924); *Annales de Physique* **3**, 22 (1925) [英语的重印版为*Wave Mechanics*, G. Ludwig 编辑, (Pergamon Press, New York, 1968)];*Phil. Mag.* **47**, 446 (1924).

[2] W. Elsasser, *Naturwiss.* **13**, 711 (1925).

[3] C. J. Davisson and L. H. Germer, *Phys. Rev.* **30**, 705 (1927).

[4] W. Heisenberg, *A. Phys.* **33**, 879 (1925); M. Born and P. Jordan, *Z. f. Phys.* **34**, 858 (1925); P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A109**, 642 (1925); M. Born, W. Heisenberg, and P. Jordan,

Z. f. Phys. **35**, 557 (1926); W. Pauli, *Z. f. Phys.* **36**, 336 (1926). 这些文献被重印于 *Sources of Quantum Mechanics*, B. L. van der Waerden 编辑(Dover Publications, Inc., New York, 1968).

[5] E. Schrödinger, *Ann. Phys.* **79**, 361, 489; **80**, 437; **81**, 109 (1926). 这些论文的英语重印版在 *Wave Mechanics* 中, 不过有部分删节, 文献[1]. 另见 *Collected Papers on Wave Mechanics*, J. F. Schearer and W. M. Deans 译(Blackie and Son, London, 1928).

[6] 例如参看 P. A. M. Dirac, *The Development of Quantum Theory* (Gordon and Breach, New York, 1971). 另见 Dirac 为 Schrödinger 所写的讣告, *Nature* **189**, 355 (1961), 以及他的文章 *Scientific American* **208**, 45 (1963).

[7] O. Klein, *Z. f. Phys.* **37**, 895 (1926). 另见V. Fock, *Z. f. Phys.* **38**, 242 (1926); *ibid,* **39**, 226 (1926).

[8] W. Gordon, *Z. f. Phys.* **40**, 117 (1926).

[9] 计算细节参看 L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edn, (McGraw-Hill, Inc. New York, 1968): Section 51.

[10] F. Paschen, *Ann. Phys.* **50**, 901 (1916). 这些实验实际上是用 He^+ 实现的, 因为它的精细结构分裂比氢原子的大 16 倍,谱线的精细结构是 A. A. Michelson 首次通过干涉方法发现的, *Phil. Mag.* **31**, 338 (1891); *ibid*., **34**, 280 (1892).

[10a] A. Sommerfeld, *Münchner Berichte* 1915, pp. 425, 429; *Ann. Phys.* **51**, 1, 125 (1916). 另见W. Wilson, *Phil. Mag.* **29**, 795 (1915).

[11] G. E. Uhlenbeck and S. Goudsmit, *Naturwiss.* **13**, 953 (1925); *Nature* **117**, 264 (1926). 电子自旋由于其它原因由 A. H. Compton 更早地提出, *J. Frank. Inst.* **192**, 145 (1921).

[12] 单电子原子 Zeeman 分裂的一般公式是 A. Landé 的经验公式, *Z. f. Phys.* **5**, 231 (1921); *ibid*., **7**, 398 (1921); *ibid*., **15**, 189 (1923); *ibid*., **19**, 112 (1923). 当时, 这个公式中出现的额外的非轨道角动量被认为是原子"核心"的角动量; A. Sommerfeld, *Ann. Phys.* **63**, 221 (1920); *ibid*., **70**, 32 (1923). 稍后不久就意识到了额外的角动量, 像文献[11]中说的那样, 是源于电子自旋.

[13] W. Heisenberg and P. Jordan, *Z. f. Phys.* **37**, 263 (1926); C. G. Darwin, *Proc. Roy. Soc.* **A116**, 227 (1927). Darwin 说当时有几位学者几乎同时做出了这个工作, 而 Dirac 只引用了 Darwin 的工作.

[14] L. H. Thomas, *Nature* **117**, 514 (1926). 另见 S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, (Wiley, New York, 1972): Section 5.1.

[15] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A117**, 610 (1928). 该理论在计算 Zeeman 效应、Paschen-Back 效应以及精细结构中多重谱线间的相对强度中的应用可参看 Dirac, *ibid*., **A118**, 351 (1928).

[16] 非相对论量子力学的几率解释, 参看M. Born, *Z. f. Phys.* **37**, 863 (1926); *ibid.*, **38**, 803 (1926) (有删节的英语重印版见*Wave Mechanics*, 文献[1]); G. Wentzel, *Z. f. Phys.* **40**, 590 (1926); W. Heisenberg, *Z. f. Phys.* **43**, 172 (1927). N. Bohr, *Nature* **121**, 580 (1928); Naturwissenchaften **17**, 483 (1929); *Electrons et Photons - Rapports et Discussion du Ve Conseil de Physique Solvay* (Gauthier-Villars, Paris, 1928).

[17] 1969年3月28日, Dirac与J. Mehra的对话, 被Mehra引用在*Aspects of Quantum Theory*, A. Salam and E. P. Wigner编辑(Cambridge University Press, Cambridge, 1972).

[18] G. Gamow, *Thirty Years that Shook Physics*, (Doubleday and Co., Garden City, NY, 1966): p.125.

[19] W. Pauli, *Z. f. Phys.* **37**, 263 (1926); **43**, 601 (1927).

[20] C. G. Darwin, *Proc. Roy. Soc.* **A118**, 654 (1928); *ibid.*, **A120**, 621 (1928).

[21] W. Gordon, *Z. f. Phys.* **48**, 11 (1928).

[22] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A126**, 360 (1930); 另见文献[47].

[23] E. C. Stoner, *Phil. Mag.* **48**, 719 (1924).

[24] W. Pauli, *Z. f. Phys.* **31**, 765 (1925).

[25] W. Heisenberg, *Z. f. Phys.* **38**, 411 (1926); *ibid.*, **39**, 499 (1926); P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A112**, 661 (1926); W. Pauli, *Z. f. Phys.* **41**, 81 (1927); J. C. Slater, *Phys. Rev.* **34**, 1293 (1929).

[26] E. Fermi, *Z. f. Phys.* **36**, 902 (1926); *Rend. Accad. Lincei* **3**, 145 (1926).

[27] P. A. M. Dirac, 文献[25].

[27a] P. A. M. Dirac, 密歇根大学的第一次W. R. Crane讲座, 1978年4月17日, 未发表.

[28] H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics,* H. P. Robertson译自德文第二版(Dover Publications, Inc., New York): Chapter IV, Section 12. 另见P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A133**, 61 (1931).

[29] J. R. Oppenheimer, *Phys. Rev.* **35**, 562 (1930); I. Tamm, *Z. f. Phys.* **62**, 545 (1930).

[29a] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **133**, 60 (1931).

[30] C. D. Anderson, *Science* **76**, 238 (1932); *Phys. Rev.* **43**, 491 (1933). 后一篇文章重印于*Foundations of Nuclear Physics*, R. T. Beyer编辑(Dover Publications, Inc., New York, 1949).

[30a] J. Schwinger, 'A Report on Quantum Electrodynamics,' 收录于*The Physicist's Conception of Nature* (Reidel, Dordrecht, 1973): p.415.

[31] W. Pauli, *Handbuch der Physik* (Julius Springer, Berlin, 1932-1933); *Rev. Mod. Phys.* **13**, 203 (1941).

[32] Born, Heisenberg, and Jordan, 文献[4], Section 3.

[32a] P. Ehrenfest, *Phys. Z.* **7**, 528 (1906).

[33] Born and Jordan, 文献[4]. 可惜这个论文的相关部分没有包含在文献[4]引用的重选集 *Sources of Quantum Mechanics* 中.

[34] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A112**, 661 (1926): Section 5. 一个更容易理解的推导可参看 L. I. Schiff, *Quantum Mechanics,* 3rd edn. (McGraw-Hill Book Company, New York, 1968): Section 44.

[34a] A. Einstein, *Phys. Z.* **18**, 121 (1917); 英文重印版在文献[4] van der Waerden.

[35] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A114**, 243 (1927); 重印于 *Quantum Electrodynamics*, J. Schwinger 编辑(Dover Publications, Inc., New York, 1958).

[36] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A114**, 710 (1927).

[36a] V. F. Weisskopf and E. Wigner, *Z. f. Phys.* **63**, 54 (1930).

[36b] E. Fermi, *Lincei Rend.* **9**, 881 (1929); **12**, 431 (1930); *Rev. Mod. Phys.* **4**, 87 (1932).

[37] P. Jordan and W. Pauli, *Z. f. Phys.* **47**, 151 (1928).

[38] N. Bohr and L. Rosenfeld, *Kon. dansk. vid. Selsk., Mat.-Fys. Medd.* **XII**, No. 8 (1933) (译文见 *Selected Papers of Leon Rosenfeld,* R. S. Cohen and J. Stachel 编辑(Reidel, Dordrecht, 1979)); *Phys. Rev.* **78**, 794 (1950).

[39] P. Jordan, *Z. f. Phys.* **44**, 473 (1927). 另见 P. Jordan and O. Klein, *Z. f. Phys.* **45**, 751 (1929); P. Jordan, *Phys. Zeit.* **30**, 700 (1929).

[40] P. Jordan and E. Wigner, *Z. f. Phys.* **47**, 631 (1928). 这个文章重印于 *Quantum Electrodynamics,* 文献[35].

[40a] M. Fierz, *Helv. Phys. Acta* **12**, (1939); W. Pauli, *Phys. Rev.* **58**, 716 (1940); W. Pauli and F. J. Belinfante, *Physica* **7**, 177 (1940).

[41] W. Heisenberg and W. Pauli, *Z. f. Phys.* **56**, 1 (1929); *ibid*., **59**, 168 (1930).

[42] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A136**, 453 (1932); P. A. M. Dirac, V. A. Fock, and B. Podolsky, *Phys. Zeit. der Sowjetunion* **2**, 468 (1932);P. A. M. Dirac,*Phys. Zeit. der Sowjetunion* **3**, 64 (1933). 后两篇文献重印于 *Quantum Electrodynamics,* 文献[35], pp. 29 and 312. 另见L. Rosenfeld, *Z. f. Phys.* **76**, 729 (1932).

[42a] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* London **A136**, 453 (1932).

[43] E. Fermi, *Z. f. Phys.* **88**, 161 (1934). Fermi 引用了 Pauli 未发表的工作——在 β-衰变中伴随着电子还发射出一个没有观测到的中性粒子. 为了与当时发现不久的中子(neutron)区分, 这个粒子称为中微子(neutrino).

[43a] V. Fock, *C. R. Leningrad* 1933, p. 267.

[44] W. H. Furry and J. R. Oppenheimer, *Phys. Rev.* **45**, 245 (1934). 这篇论文采用了 P. A. M. Dirac, Proc. Camb. *Phil. Soc.* **30**, 150 (1934) 中所发展的密度矩阵体系. 另见 R. E. Peierls, *Proc. Roy. Soc.* **146**, 420 (1934); W. Heisenberg, *Z. f. Phys.* **90**, 209 (1934); L. Rosenfeld, *Z. f. Phys.* **76**, 729 (1932).

[45] W. Pauli and V. Weisskopf, *Helv, Phys. Acta* bf7, 709 (1934), 重印成英语, A. I. Miller翻译, *Early Quantum Electrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1994). 另见W. Pauli, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **6**, 137 (1936).

[46] O. Klein and Y. Nishina, *Z. f. Phys.* **52**, 853 (1929); Y. Nishina, *ibid.,* 869 (1929); 另见 I. Tamn, *Z. f. Phys.* **62**, 545 (1930).

[47] P. A. M. Dirac, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **26**, 361 (1930).

[48] C. Møller, *Ann. d. Phys.* **14**, 531, 568 (1932).

[49] H. Bethe and W. Heitler, *Proc. Roy. Soc.* **A146**, 83 (1934); 另见, G. Racah, *Nuovo Cimento* **11**, No. 7 (1934); *ibid.*, **13**, 69 (1936).

[50] H. J. Bhabha, *Proc. Roy. Soc.* **A154**, 195 (1936).

[50a] J. F. Carlson and J. R. Oppenheimer, *Phys. Rev.* **51**, 220 (1937).

[51] P. Ehrenfest and J. R. Oppenheimer, *Phys. Rev.* **37**, 333 (1931).

[52] W. Heitler and G. Herzberg, *Naturwiss.* **17**, 673 (1929); F. Rasetti, *Z. f. Phys.* **61**, 598 (1930).

[53] J. Chadwick, *Proc. Roy. Soc.* **A136**, 692 (1932). 这篇文章重印于 *The Foundations of Nuclear Physics*, 文献[30].

[54] W. Heisenberg, *Z. f. Phys.* **77**, 1 (1932); 另见 I. Curie-Joliot and F. Joliot, *Compt. Rend.* **194**, 273 (1932).

[54a] 文献参看 L. M. Brown and H. Rechenberg, *Hist. Stud. in Phys. and Bio. Science*, **25**, 1 (1994).

[55] H. Yukawa, *Porc. Phys.-Math. Soc. (Japan)* (3) **17**, 48 (1935). 这篇文章重印于 *The Foundations of Nuclear Physics,* 文献[30].

[56] S. H. Neddermeyer and C. D. Anderson, *Phys. Rev.* **51**, 884 (1937); J. C. Street and E. C. Stevenson, *Phys. Rev.* **52**, 1003 (1937).

[56a] L. Nordheim and N. Webb, *Phys. Rev.* **56**, 494 (1939).

[57] M. Conversi, E. Pancini, and O. Piccioni, *Phys. Rev.* **71**, 209L (1947).

[58] S. Sakata and T. Inoue, *Prog. Theor. Phys.* **1**, 143 (1946); R. E. Marshak and H. A. Bethe, *Phys. Rev.* **77**, 506 (1947).

[59] C. M. G. Lattes, G. P. S. Occhialini, and C. F. Powell, *Nature* **160**, 453, 486 (1947).

[60] G. D. Rochester and C. C. Butler, *Nature* **160**, 855 (1947).

[61] J. R. Oppenheimer, *Phys. Rev.* **35**, 461 (1930).

[62] I. Waller, *Z. f. Phys.* **59**, 168 (1930); *ibid.,* **61**, 721, 837 (1930); *ibid.,* **62**, 673 (1930).

[63] V. F. Weisskopf, *Z. f. Phys.* **89**, 27 (1934), 英译重印于 *Early Quantum Electrodynamics*, 文献[45]; *ibid.*, **90**, 817 (1934). 在这些文献中, 电磁自能的计算只到α的最低阶; Weisskopf证明了在微扰论所有阶中的发散只是对数发散; *Phys. Rev.* **56**, 72 (1939). (最后一篇文章重印于 *Quantum Electrodynamics,* 文献[35]).

[64] P. A. M. Dirac, XVII Conseil Solvay de Physique, p. 203 (1933), 重印于 *Early Quantum Electrodynamics*, 文献[45]. 后来的依赖假定更少的计算, 参看 W. Heisenberg, *Z. f. Phys.* **90**, 209 (1934); *Sachs. Akad. Wiss.* **86**, 317 (1934); R. Serber, *Phys. Rev.* **43**, 49 (1935); E. A. Uehling, *Phys. Rev.* **48**, 55 (1935); W. Pauli and M. Rose, *Phys. Rev.* **49**, 462 (1936). 另见Furry and Oppenheimer, 文献[44]; Peierls, 文献[44]; Weisskopf, 文献[63].

[65] H. Euler and B. Kockel, *Naturwiss.* **23**, 246 (1935); W. Heisenberg and H. Euler, *Z. f. Phys.* **98**, 714 (1936).

[66] P. A. M. Dirac, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **30**, 150 (1934).

[67] W. Heisenberg, *Z. f. Phys.* **90**, 209 (1934).

[68] N. Kemmer and V. F. Weisskopf, *Nature* **137**, 659 (1936).

[68a] F. Bloch and A. Nordsieck, *Phys. Rev.* **52**, 54 (1937). 另见W. Pauli and M. Fierz, *Nuovo Cimento* **15**, 167 (1938), 英译重印于 *Early Quantum Electrodynamics,* 文献[45].

[69] S. M. Dancoff, *Phys. Rev.* **55**, 959 (1939).

[69a] H. W. Lewis, *Phys. Rev.* **73**, 173 (1948); S. Epstein, *Phys. Rev.* **73**, 177 (1948). 另见J. Schwinger, 文献[84]; Z. Koba and S. Tomonaga, *Prog. Theor. Phys.* **3**/3, 290 (1948).

[69b] J. Schwinger, 收录于*The Birth of Particle Physics*, L. Brown and L. Hoddeson编辑 (Cambridge University Press, Cambridge, 1983): p. 336.

[70] W. Heisenberg, *Ann. d. Phys.* **32**, 20 (1938), 英译重印于 *Early Quantum Electrodynamics*, 文献[45].

[70a] G. Wentzel, *Z. f. Phys.* **86**, 479, 635 (1933); *Z. f. Phys.* **87**, 726 (1034); M. Born and L. Infeld, *Proc. Roy. Soc.* **A150**, 141 (1935); W. Pauli, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **6**, 137 (1936).

[71] J. A. Wheeler, *Phys. Rev.* **52**, 1107 (1937).

[72] W. Heisenberg, *Z. f. Phys.* **120**, 513, 673 (1943); *Z. Naturforsch.* **1**, 608 (1946). 另见C. Møller, *Kon. Dansk. Vid. Sels. Mat.-Fys. Medd.* **23**, No. 1 (1945); *ibid.* **23**, No. 19, (1946).

[73] 可参看G. Chew, *The S-Matrix Theory of Strong Interactions* (W. A. Benjamin, Inc. New York, 1961).

[74] J. A. Wheeler and R. P. Feynman, *Rev. Mod. Phys.* **17**, 157 (1945), *ibid.*, **21**, 425 (1949). 更深入的参考文献以及对超距作用在宇宙学中的应用的讨论, 参看S. Weinberg *Gravitation and Cosmology*, (Wiley, 1972): Section 16.3.

[75] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A180**, 1 (1942). 对此的评判参看W. Pauli, *Rev. Mod. Phys.* **15**, 175 (1943). 关于这类经典理论的综述, 以及其它解决无穷大问题的尝试, 参看R. E. Peierls in *Rapports du 8^{m}e Conseil de Physique Solvay 1948* (R. Stoops, Brussels, 1950): p. 241.

[76] V. F. Weisskopf, *Kon. Dan. Vid. Sel., Mat.-fys. Medd.* **XIV**, No. 6 (1936), especially p. 34 and pp. 5–6. 这篇文章重印于 *Quantum Electrodynamics*, 文献[35], 英译重印于 *Early Quantum Electrodynamics,* 文献[45]. 另见W. Pauli and M. Fierz, 文献[68a]; H. A. Kramers, 文献[79a].

[77] S. Pasternack, *Phys. Rev.* **54**, 1113 (1938). 这个建议基于W. V. Houston的实验, *Phys. Rev.* **51**, 446 (1937); R. C. Williams, *Phys. Rev.* **54**, 558 (1938). 与此相反的数据报告, 参看J. W. Drinkwater, O. Richardson, and W. E. Williams, *Proc. Roy. Soc.* **174**, 164 (1940).

[78] E. A. Uehling, 文献[64].

[79] W. E. Lamb, Jr and R. C. Retherford, *Phys. Rev.* **72**, 241 (1947). 这篇文章重印于 *Quantum Electrodynamics*, 文献[35].

[79a] H. A. Kramers, *Nuovo Cimento* **15**, 108 (1938), 英译重印于 *Early Quantum Electrodynamics*, 文献[45]; *Ned. T. Natwink.* **11**, 134 (1944); *Rapports du 8^{m}e Conseil de Physique Solvay 1948* (R. Stoops, Brussels, 1950).

[80] H. A. Bethe, *Phys. Rev.* **72**, 339 (1947). 这篇文章重印于 *Quantum Electrodynamics*, 文献[35].

[81] J. B. French and V. F. Weisskopf, *Phys. Rev.* **75**, 1240 (1949); N. M. Kroll and W. E. Lamb, *ibid.*, **75**, 388 (1949); J. Schwinger, *Phys. Rev.* **75**, 898 (1949); R. P. Feynman, *Rev. Mod. Phys.* **20**, 367 (1948); *Phys. Rev.* **74**, 939, 1430 (1948); **76**, 749, 769 (1949); **80**, 440 (1950); H. Fukuda, Y. Miyamoto, and S. Tomonaga, *Prog. Theor. Phys. Rev. Mod. Phys.* **4**, 47, 121 (1948). Kroll和Lamb的文章重印于 *Quantum Electrodynamics*, 文献[35].

[82] J. E. Nafe, E. B. Nelson, and I. I. Rabi, *Phys. Rev.* **71**, 914 (1947); D. E. Nagel, R. S. Julian, and J. R. Zacharias, *Phys. Rev.* **72**, 973 (1947).

[83] P. Kusch and H. M. Foley, *Phys. Rev.* **72**, 1256 (1947).

[83a] G. Breit, *Phys. Rev.* **71**, 984 (1947). 在文献[84]中, Schwinger给出了对Breit结果的一个修正版本.

[84] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **73**, 416 (1948). 这篇文章重印于 *Quantum Electrodynamics*, 文献[35].

[85] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **74**, 1439 (1948); *ibid.*, **75**, 651 (1949); *ibid.*, **76**, 790 (1949); *ibid.*, **82**, 664, 914 (1951); *ibid.*, **91**, 713 (1953); *Proc. Nat. Acad. Sci.* **37**, 452 (1951). 除了前两篇文章外, 其它文章均重印于 *Quantum Electrodynamics*, 文献[35].

[86] S. Tomonaga, *Prog. Theor. Phys. Rev. Mod. Phys.* **1**, 27 (1946). Z. Koba, T. Tati, and S. Tomonaga, *ibid.*, **2**, 101 (1947); S. Kanesawa and S. Tomonaga, *ibid.*, **3**, 1, 101 (1948); S. Tomonaga, *Phys. Rev.* **74**, 224 (1948); D. Ito, Z. Koba, and S. Tomonaga, *Prog. Theor. Phys.* **3**, 276 (1948); D. Ito, Z. Koba, and S. Tomonaga, *ibid.*, **3**, 290 (1948). 其中第一篇文章和第四篇文章重印于 *Quantum Electrodynamics*, 参考文献[35].

[87] R. P. Feynman, *Rev. Mod. Phys.* **20**, 367 (1948); *Phys. Rev.* **74**, 939, 1430 (1948); *ibid.,* **76**, 749, 769 (1949); *ibid.*, **80**, 440 (1950). 除了第二篇和第三篇外, 其它文章均重印于 *Quantum Electrodynamics*, 文献[35].

[88] F. J. Dyson, *Phys. Rev.* **75**, 486, 1736 (1949). 重印于 *Quantum Electrodynamics*, 文献[35].

[88a] H. Fröhlich, W. Heitler, and B. Kahn, *Proc. Roy. Soc.* **A171**, 269 (1939); *Phys. Rev.* **56**, 961 (1939).

[88b] W. E. Lamb, Jr, *Phys. Rev.* **56**, 384 (1939); *Phys. Rev.* **57**, 458 (1940).

[89] 引用自R. Serber, 收录于*The Birth of Particle Physics*, 文献[69b], p. 270.

第 2 章　相对论量子力学

本书的观点是量子场论是(在一定条件下)协调量子力学和狭义相对论的唯一途径. 因此我们的第一个任务就是研究类似 Lorentz 不变性这样的对称性怎样出现在量子中.

2.1　量子力学

首先, 好消息是: 量子场论基于的量子力学正是 Schrödinger, Heisenberg, Pauli, Born 和其他一些人在 1925—1926 年所建立的量子力学, 而且时至今日这个量子力学依然在原子物理, 分子物理, 核物理和凝聚态物理中使用着. 我们假定读者熟悉量子力学; 本节仅提供一个最简洁的量子力学概述, 这个概述是 Dirac[1]的推广版本.

(i)　物理态由 Hilbert 空间中的射线表示. Hilbert 空间是一种复矢量空间; 即如果 Φ 和 Ψ 是该空间中的矢量(通常称为"态矢"), 那么对任意复数 ξ 和 η, $\xi\Phi+\eta\Psi$ 也是这个空间中的矢量. 它有一个范数*: 对于任意一对矢量, 存在复数(Φ,Ψ), 使得

$$(\Phi,\Psi)=(\Psi,\Phi)^* \ , \tag{2.1.1}$$

$$(\Phi,\xi_1\Psi_1+\xi_2\Psi_2)=\xi_1\,(\Phi,\Psi_1)+\xi_2\,(\Phi,\Psi_2) \ , \tag{2.1.2}$$

$$(\eta_1\Phi_1+\eta_2\Phi_2,\Psi)=\eta_1^*\,(\Phi_1,\Psi)+\eta_2^*\,(\Phi_2,\Psi) \ . \tag{2.1.3}$$

范数 (Ψ,Ψ) 还满足一个正定条件: $(\Psi,\Psi)\geq 0$, 并且仅当 $\Psi=0$ 时为 0. (还有一些技术性的假定使得我们可以对 Hilbert 空间中的矢量取极限.) 射线是一个归一化(即, $(\Psi,\Psi)=1$)的矢量集, 如果 $\Psi'=\xi\Psi$, 则 Ψ 和 Ψ' 属于同一射线, 其中 ξ 是满足 $|\xi|=1$ 的任意复数.

(ii)　可观测量由厄米算符表示, 这些算符是 Hilbert 空间到自身的映射 $\Psi\to A\Psi$, 在如下意义下是线性的

$$A(\xi\Psi+\eta\Phi)=\xi A\Psi+\eta A\Phi \tag{2.1.4}$$

并满足实条件$A^\dagger=A$, 其中对于任意的线性算符 A, 其共轭算符 $A^\dagger$ 定义成

$$(\Phi,A^\dagger\Psi)\equiv(A\Phi,\Psi)=(\Psi,A\Phi)^* \ . \tag{2.1.5}$$

(就作为 Ψ 的函数的 $A\Psi$, 这里还有一些关于它的连续性的技术性假设.) 如果属于射线 $\mathscr{R}$ 的矢量 Ψ 是 A 的本征值为 α 的本征矢,

$$A\Psi=\alpha\Psi \qquad \Psi\text{属于}\mathscr{R}, \tag{2.1.6}$$

那么这个射线表示的态对于算符 A 表示的可观测量有确定值 α: 一个基本定理告诉我们, 对于厄米算符 A, α 是实的, 并且 α 不同的本征矢是正交的.

*我们将经常使用 Dirac 左矢-右矢记号: 取代 (Ψ_1,Ψ_2), 我们可以写成 $\langle 1|2\rangle$.

(iii) 如果系统处在射线 $\mathscr{R}$ 所表示的态中, 并且还做一个实验以检验它是否处在由互相正交的射线 $\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2, \cdots$ 所表示的不同态中(例如, 通过测量一个或多个可观测量), 那么发现它处在 $\mathscr{R}_n$ 所表示的态中概率为

$$P(\mathscr{R} \to \mathscr{R}_n) = |(\Psi, \Psi_n)|^2 \,, \tag{2.1.7}$$

其中 Ψ 和 Ψ_n 分别是属于射线 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{R}_n$ 的任意矢量. (如果两个射线中的态的标量积为零, 则称这对射线是正交的.) 如果态矢 Ψ_n 构成一个完全集, 则另一个基本定理给出归一的总几率:

$$\sum_n P(\mathscr{R} \to \mathscr{R}_n) = 1 \,. \tag{2.1.8}$$

2.2 对称性

按照我们的观点, 一个对称变换就是不改变各种可能实验的结果的变化. 如果观测者 O 看到一个系统处在由射线 $\mathscr{R}$ 或 $\mathscr{R}_1$ 或 $\mathscr{R}_2 \cdots$ 所表示的态中, 那么另一个观测同一系统的等价观测者 O' 会看到这个系统处在不同的态中, 这些态相应地由射线 $\mathscr{R}'$ 或 $\mathscr{R}'_1$ 或 $\mathscr{R}'_2 \cdots$ 表示, 但是这两个观测者必得到相同的几率

$$P(\mathscr{R} \to \mathscr{R}_n) = P(\mathscr{R}' \to \mathscr{R}'_n) \,. \tag{2.2.1}$$

(这仅是射线变换是对称变换的一个必要条件; 进一步的条件将在下一章讨论.) Wigner[2] 在 20 世纪 30 年代早期证明的一个重要定理告诉我们, 对于任意这样的射线变换 $\mathscr{R} \to \mathscr{R}'$, 我们可以定义 Hilbert 空间上的一个算符 U, 使得如果 Ψ 在射线 $\mathscr{R}$ 中, 那么 $U\Psi$ 就在射线 $\mathscr{R}'$ 中, 而这样的 U 要么是幺正且线性的

$$(U\Phi, U\Psi) = (\Phi, \Psi) \,, \tag{2.2.2}$$

$$U(\xi\Phi + \eta\Psi) = \xi U\Phi + \eta U\Psi \tag{2.2.3}$$

要么是反幺正且反线性的

$$(U\Phi, U\Psi) = (\Phi, \Psi)^* \,, \tag{2.2.4}$$

$$U(\xi\Phi + \eta\Psi) = \xi^* U\Phi + \eta^* U\Psi \,. \tag{2.2.5}$$

Wigner 的证明遗漏了一些步骤. 本章的附录 A 会给出一个更加完整的证明.

如前所述, 线性算符 L 的共轭定义为

$$(\Phi, L^\dagger \Psi) \equiv (L\Phi, \Psi) \,. \tag{2.2.6}$$

对于反线性算符, 这个条件是无法满足的, 因为在这种情况下, 方程(2.2.6)的右边对于 Φ 是线性的, 而左边对于 Φ 是反线性的. 作为替代, 反线性算符 A 的共轭定义为

$$(\Phi, A^\dagger \Psi) \equiv (A\Phi, \Psi)^* = (\Psi, A\Phi) \,. \tag{2.2.7}$$

在这个定义下, 幺正或反幺正条件均取以下形式

$$U^\dagger = U^{-1} \,. \tag{2.2.8}$$

总有一个平庸的对称变换 $\mathscr{R} \to \mathscr{R}$ 由单位算符 $U = 1$ 表示. 当然, 这个算符是幺正且线性的. 那么连续性就要求, 如果一个对称性(如旋转变换, 平移变换或 Lorentz 变换)可以通过某些参量(如角度, 距离或速度)的连续改变变成平庸变换, 那么该对称性必须由一个线性幺正算符 U 表示而不是反幺正反线性算符. (反线性反幺正算符表示的对称性在物理中不是那么突出: 它们都牵扯到时间流方向的反转. 见 2.6 节.)

特别地, 一个无限接近平庸变换的对称变换可以用一个无限接近于单位算符的线性幺正算符表示:

$$U = 1 + \mathrm{i}\epsilon t \tag{2.2.9}$$

其中 ϵ 是一个无限小的实参量. 为了使这个算符是幺正且线性的, t 必须是厄米且线性的, 所以它可以作为一个可观测量. 其实, 物理中的大多数(也许是全部)可观测量, 诸如角动量或动量, 都是以这种方式从对称变换中产生的.

一组对称变换具有的一些性质使其可以被定义为*群*. 如果 T_1 是使射线 $\mathscr{R}_n$ 变为 $\mathscr{R}'_n$ 的变换, T_2 是使射线 $\mathscr{R}'_n$ 变为 $\mathscr{R}''_n$ 的变换, 那么进行这两个变换的结果是给出另一对称变换, 我们可以将其记为 T_2T_1, 它使 $\mathscr{R}_n$ 变为 $\mathscr{R}''_n$. 另外, 让射线从 $\mathscr{R}_n$ 变为 $\mathscr{R}'_n$ 的对称变换 T 存在逆, 记为 T^{-1}, 它使射线 $\mathscr{R}'_n$ 变为 $\mathscr{R}_n$, 并且总存在一个单位变换, $T = 1$, 它保持射线不变.

与对称变换对应的幺正或反幺正算符 $U(T)$ 具有体现群结构的性质, 但是却更加复杂, 这是因为不像对称变换本身, 算符 $U(T)$ 作用在 Hilbert 空间中的矢量上, 而不是射线上. 如果 T_1 将 $\mathscr{R}_n$ 变为 $\mathscr{R}'_n$, 那么对于作用在射线 $\mathscr{R}_n$ 中的矢量 Ψ_n 上的 $U(T_1)$, 它在作用完后给出的矢量 $U(T_1)\Psi_n$ 必在射线 $\mathscr{R}'_n$ 内, 而如果 T_2 将这个射线变成 $\mathscr{R}''_n$, 那么它作用在 $U(T_1)\Psi_n$ 所给出的矢量 $U(T_2)U(T_1)\Psi_n$ 必在射线 $\mathscr{R}''_n$ 内. 但是 $U(T_2T_1)\Psi_n$ 也在这个射线内, 所以这些矢量仅能相差一个相位 $\phi_n(T_2, T_1)$

$$U(T_2)U(T_1)\Psi_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_n(T_2,T_1)}U(T_2T_1)\Psi_n\,. \tag{2.2.10}$$

进一步, 除了一个重要的例外, $U(T)$ 的线性(或反线性)性质告诉我们这些相位独立于态 Ψ_n. 证明如下. 考虑任意两个不同的矢量 Ψ_A, Ψ_B, 彼此不成正比. 那么对态 $\Psi_{AB} \equiv \Psi_A + \Psi_B$ 使用方程(2.2.10), 我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{AB}}\,U(T_2T_1)(\Psi_A + \Psi_B) &= U(T_2)U(T_1)(\Psi_A + \Psi_B)\\ &= U(T_2)U(T_1)\Psi_A + U(T_2)U(T_1)\Psi_B\\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_A}\,U(T_2T_1)\Psi_A + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_B}\,U(T_2T_1)\Psi_B\,.\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

任何幺正或反幺正算符都存在逆(它的共轭), 它们的逆同时也是幺正或反幺正的. 对(2.2.11)左乘 $U^{-1}(T_2T_1)$, 我们得到

$$\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\phi_{AB}}(\Psi_A + \Psi_B) = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\phi_A}\Psi_A + \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\phi_B}\Psi_B\,, \tag{2.2.12}$$

正号和负号分别对应于 $U(T_2T_1)$ 是幺正算符和反幺正算符的情况. 由于 Ψ_A 和 Ψ_B 线性独立, 因而只有一种可能

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{AB}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_A} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_B}\,. \tag{2.2.13}$$

正如前面所说的, 方程(2.2.10)中的相位独立于态矢 Ψ_n, 并且这可以写成算符关系

$$U(T_2)U(T_1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(T_2,T_1)}U(T_2T_1)\,. \tag{2.2.14}$$

对 $\phi=0$, 这就是说 $U(T)$ 构成了对称变换群的一个表示. 对于一般相位 $\phi(T_2,T_1)$, 这就是所谓的投影表示, 或者"只差一个相位的(up to a phase)"表示. Lie 群不能通过自身的结构告诉我们物理态矢给出的是普通表示还是投影表示, 但正如我们将看到的, 它可以告诉我们这个群到底有没有内禀投影表示.

在给出方程(2.2.14)的论证中有一个例外, 未必能够制备出一个系统使得它处在 $\Psi_A+\Psi_B$ 表示的态中. 例如, 已然形成共识的是: 不可能制备出一个系统使得它处在由两个总角动量分别是整数的态和半整数的态叠加出的态中. 在这种情况下, 我们称在不同类的态之间存在一个"超选择定则"[3], 并且相位 $\phi(T_2,T_1)$ 可能依赖于算符 $U(T_2)U(T_1)$ 和 $U(T_2T_1)$ 所作用的态的种类. 在 2.7 节, 我们将会进一步讨论这些相位和投影表示. 正如我们在那里所看到的, 任何有投影表示的对称群总能以如下的方式扩张(而不用改变它的物理意义): 它的表示总能定义为 $\phi=0$ 的非投影表示. 直到 2.7 节, 我们都假定已经做了这个扩张, 并在方程(2.2.14)中令 $\phi=0$.

有一类群, 称为*连通 Lie 群*, 在物理中有特殊的重要性. 它们是由有限多个实连续参量描述的变换 $T(\theta)$ 构成的群, 这组实参量可记做 θ^a, 这个群的每个群元通过群内的一条路径与单位元相连. 这个群的乘法规则采取如下的形式

$$T(\bar\theta)T(\theta)=T\Big(f(\bar\theta,\theta)\Big) \tag{2.2.15}$$

其中 $f^a(\bar\theta,\theta)$ 是 $\bar\theta$ 和 θ 的函数. 取单位元的坐标为 $\theta^a=0$, 我们必须有

$$f^a(\theta,0)=f^a(0,\theta)=\theta^a\,. \tag{2.2.16}$$

如前所述, 在物理 Hilbert 空间上, 这类连续群的变换只能由幺正(而不是反幺正)算符 $U(T(\theta))$ 表示. 对于一个 Lie 群, 至少在其单位元的有限邻域内, 这些算符可以用幂级数表示

$$U\Big(T(\theta)\Big)=1+\mathrm{i}\theta^a t_a+\tfrac{1}{2}\theta^b\theta^c t_{bc}+\cdots\,, \tag{2.2.17}$$

其中 $t_a,t_{bc}=t_{cb}$ 等是独立于 θ 的厄米算符. 假定 $U(T(\theta))$ 构成这个变换群的普通(即非投影的)表示, 即,

$$U\Big(T(\bar\theta)\Big)U\Big(T(\theta)\Big)=U\Big(T(f(\bar\theta,\theta))\Big)\,. \tag{2.2.18}$$

让我们看看当它被展为 θ^a 和 $\bar\theta^a$ 的幂级数时, 这个条件变成什么. 根据方程(2.2.16), $f^a(\bar\theta,\theta)$ 到二阶的展开必须取如下的形式

$$f^a(\bar\theta,\theta)=\theta^a+\bar\theta^a+f^a{}_{bc}\bar\theta^b\theta^c+\cdots \tag{2.2.19}$$

其中系数 $f^a{}_{bc}$ 是实数. (出现任何 θ^2 或 $\bar\theta^2$ 的项都将违反方程(2.2.16).) 于是方程(2.2.18)变为

$$\begin{aligned}&\Big[1+\mathrm{i}\bar\theta^a t_a+\tfrac{1}{2}\bar\theta^b\bar\theta^c t_{bc}+\cdots\Big]\times\Big[1+\mathrm{i}\theta^a t_a+\tfrac{1}{2}\theta^b\theta^c t_{bc}+\cdots\Big]\\&\quad=1+\mathrm{i}\Big(\theta^a+\bar\theta^a+f^a{}_{bc}\bar\theta^b\theta^c+\cdots\Big)t_a\\&\qquad+\tfrac{1}{2}(\theta^b+\bar\theta^b+\cdots)\,(\theta^c+\bar\theta^c+\cdots)t_{bc}+\cdots\,.\end{aligned} \tag{2.2.20}$$

$1,\theta,\bar\theta,\theta^2$ 和 $\bar\theta^2$ 的项在方程(2.2.20)两边自动匹配, 但从 $\bar\theta\theta$ 项中, 我们得到一个不平庸的条件

$$t_{bc}=-t_bt_c-\mathrm{i}\,f^a{}_{bc}\,t_a\,. \tag{2.2.21}$$

这说明, 如果给定群的结构, 即给定函数 $f(\bar{\theta},\theta)$ 以及由此得到的二次项系数 $f^a{}_{bc}$, 我们可以从出现在一阶项中的生成元 t_a 计算出 $U(T(\theta))$ 中的二阶项. 然而, 存在一个相容性条件: 算符 t_{bc} 关于 b 和 c 必须是对称的(因为它是 $U(T(\theta))$ 对 θ^b 和 θ^c 的二阶导数), 所以方程(2.2.21)要求

$$[t_b, t_c] = \mathrm{i}\, C^a{}_{bc}\, t_a \ , \tag{2.2.22}$$

其中$C^a{}_{bc}$是一组实常数, 称为结构常数,

$$C^a{}_{bc} \equiv -f^a{}_{bc} + f^a{}_{cb} \, . \tag{2.2.23}$$

这样一组对易关系称为Lie代数. 我们将在 2.7 节证明, 只需要对易关系(2.2.22), 我们就可以确保这一手续会一直进行下去: 假如我们知道了一阶项, 即生成元 t_a, $U(T(\theta))$ 的完整幂级数就可以从无限多个类似方程(2.2.21)的关系中计算出来. 这并不意味着, 如果我们知道 t_a, 那么对于所有的 θ^a, 算符 $U(T(\theta))$ 就一定可以唯一地确定下来, 但是至少在单位元的坐标 $\theta^a = 0$ 的有限邻域内, 它确实意味着 $U(T(\theta))$ 被唯一地确定了: 只要 $\theta, \bar{\theta}$ 和 $f(\bar{\theta},\theta)$ 处在这个邻域内, 且方程(2.2.15)被满足, 这些条件就在这个邻域内确定了 $U(T(\theta))$. 到所有 θ^a 的扩张将在 2.7 节讨论.

这里有一种重要的特殊情况, 我们会反复遇到. 假定函数 $f(\theta,\bar{\theta})$ (或许只对坐标θ^a的一些子集)是简单地相加

$$f^a(\theta,\bar{\theta}) = \theta^a + \bar{\theta}^a \ . \tag{2.2.24}$$

时空中的平移, 或是关于任意固定轴的旋转就是这样的例子. (这两个变化同时发生则不是.) 那么方程(2.2.19)中的系数$f^a{}_{bc}$为零, 结构常数(2.2.23)也随之为零. 于是所有的生成元都对易

$$[t_b, t_c] = 0 \, . \tag{2.2.25}$$

这样的群被称为是阿贝尔的. 在这种情况下, 可以很轻松地对所有θ^a计算出$U(T(\theta))$. 从方程(2.2.18)和(2.2.24), 对于任意整数 N, 我们有

$$U\Big(T(\theta)\Big) = \left[U\left(T\left(\frac{\theta}{N}\right)\right)\right]^N \ .$$

令 $N \to \infty$, 仅保持 $U(T(\theta/N))$中的一阶项, 那么我们就有

$$U\Big(T(\theta)\Big) = \lim_{N\to\infty}\left[1 + \frac{\mathrm{i}}{N}\theta^a t_a\right]^N$$

因而

$$U\Big(T(\theta)\Big) = \exp(\mathrm{i}t_a\theta^a) \, . \tag{2.2.26}$$

2.3 量子 Lorentz 变换

Einstein 的相对性原理陈述了一些特定“惯性”参考系之间的等价性. 它与牛顿力学所服从的伽利略相对性原理的区别在于联系不同惯性系的坐标变换. 如果 x^μ 是一个惯性系的坐标(x^1, x^2, x^3 是空间笛卡尔坐标, $x^0 = t$ 是时间坐标, 光速取为 1), 那么在任何其它的惯性系中, 坐标 x'^μ 必须满足

$$\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x'^\mu \mathrm{d}x'^\nu = \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu \tag{2.3.1}$$

或等价的

$$\eta_{\mu\nu}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}}=\eta_{\rho\sigma}\ . \tag{2.3.2}$$

这里 $\eta_{\mu\nu}$ 是对角矩阵, 矩阵元是

$$\eta_{11}=\eta_{22}=\eta_{33}=+1,\qquad \eta_{00}=-1\ , \tag{2.3.3}$$

这里采用了求和约定: 对方程(2.3.2)中像 μ 和 ν 这样在同一项中出现两次且一次在上一次在下的指标求和. 这些变换有一个特殊性质, 即所有惯性系中的光速都相同(在我们的单位制中, 光速等于1);* 一个光波以满足 $|\mathrm{d}\mathbf{x}/\mathrm{d}t|=1$ 的单位速度传播, 换句话说 $\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu}=\mathrm{d}\mathbf{x}^2-\mathrm{d}t^2=0$, 从中得出 $\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x'^{\mu}\mathrm{d}x'^{\nu}=0$, 因而 $|\mathrm{d}\mathbf{x}'/\mathrm{d}t'|=1$.

任何满足方程(2.3.2)的坐标变换 $x^{\mu}\to x'^{\mu}$ 都是线性的[3a]

$$x'^{\mu}=\Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}+a^{\mu}\ , \tag{2.3.4}$$

其中 a^{μ} 是任意常数, 而 $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ 是常矩阵, 它满足如下条件

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}=\eta_{\rho\sigma}\ . \tag{2.3.5}$$

由于某些目的, 将 Lorentz 变换写成另一种的形式是有用的. 矩阵 $\eta_{\mu\nu}$ 有逆, 记为 $\eta^{\mu\nu}$, 它与 $\eta_{\mu\nu}$ 碰巧有相同的分量: 它是对角的, 且 $\eta^{00}=-1$, $\eta^{11}=\eta^{22}=\eta^{33}=+1$. 在方程(2.3.5)两边乘上 $\eta^{\sigma\tau}\Lambda^{\kappa}{}_{\tau}$, 并适当地插入括号, 我们得到

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}(\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\Lambda^{\kappa}{}_{\tau}\eta^{\sigma\tau})=\Lambda^{\kappa}{}_{\rho}=\eta_{\mu\nu}\eta^{\nu\kappa}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\ .$$

再乘以矩阵 $\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}$ 的逆就给出

$$\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\Lambda^{\kappa}{}_{\tau}\eta^{\sigma\tau}=\eta^{\nu\kappa}\ . \tag{2.3.6}$$

这些变换构成一个群. 如果我们首先做 Lorentz 变换(2.3.4), 然后再做第二个Lorentz变换 $x'^{\mu}\to x''^{\mu}$, 就会得到

$$x''^{\mu}=\bar{\Lambda}^{\mu}{}_{\rho}x'^{\rho}+\bar{a}^{\mu}=\bar{\Lambda}^{\mu}{}_{\rho}(\Lambda^{\rho}{}_{\nu}x^{\nu}+a^{\rho})+\bar{a}^{\mu}$$

那么它的效果就与 $x^{\mu}\to x''^{\mu}$ 的 Lorentz 变换是一样的, 即

$$x''^{\mu}=(\bar{\Lambda}^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\rho}{}_{\nu})x^{\nu}+(\bar{\Lambda}^{\mu}{}_{\rho}a^{\rho}+\bar{a}^{\nu})\ . \tag{2.3.7}$$

(注意到, 如果 $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ 和 $\bar{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu}$ 均满足方程(2.3.5), 那么 $\bar{\Lambda}^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\rho}{}_{\nu}$ 也满足这个方程, 所以这是一个 Lorentz 变换. 这里用到上横线只是为了区分两个 Lorentz 变换.) 因此作用在物理态上的变换 $T(\Lambda,a)$ 满足合成规则

$$T(\bar{\Lambda},\bar{a})T(\Lambda,a)=T(\bar{\Lambda}\Lambda,\bar{\Lambda}a+\bar{a})\ . \tag{2.3.8}$$

取方程(2.3.5)的行列式给出

$$(\mathrm{Det}\,\Lambda)^2=1 \tag{2.3.9}$$

*有一大类坐标变换, 称为*共形变换*, 在这类变换中, $\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x'^{\mu}\mathrm{d}x'^{\nu}$ 一般不等于 $\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu}$ 但正比于它, 并且因此也保持光速不变. 两维的共形变换已经证明在弦论和统计力学中是极为重要的, 但在四维时空中, 这些共形变换与物理的关系依旧是不清楚的.

所以 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 有逆 $(\Lambda^{-1})^\nu{}_\rho$, 从方程(2.3.5)可以看出它有如下形式

$$(\Lambda^{-1})^\rho{}_\nu = \Lambda_\nu{}^\rho \equiv \eta_{\nu\mu}\eta^{\rho\sigma}\Lambda^\mu{}_\sigma \,. \tag{2.3.10}$$

从方程(2.3.8)看到, 变换 $T(\Lambda, a)$ 的逆就是 $T(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$, 并且, 单位变换显然是 $T(1, 0)$.

根据上一节的讨论, 变换 $T(\Lambda, a)$ 在物理 Hilbert 空间中诱导出矢量上的幺正线性变换

$$\Psi \to U(\Lambda, a)\Psi \,.$$

算符 U 满足合成规则

$$U(\bar\Lambda, \bar a)U(\Lambda, a) = U(\bar\Lambda\Lambda, \bar\Lambda a + \bar a) \,. \tag{2.3.11}$$

(正如已经提到的, 为了避免在方程(2.3.11)的右边出现一个相位因子, 扩张 Lorentz 群一般是必要的. 我们将在 2.7 节给出合适的扩张.)

变换 $T(\Lambda, a)$ 构成的整个群称为*非齐次Lorentz群*, 或*Poincaré群*. 它有一些重要的子群. 首先, $a^\mu = 0$ 的变换显然构成一个子群, 它具有

$$T(\bar\Lambda, 0)\, T(\Lambda, 0) = T(\bar\Lambda\Lambda, 0) \,, \tag{2.3.12}$$

这个子群被称为*齐次Lorentz群*. 另外, 我们从方程(2.3.9)可以看出要么 $\mathrm{Det}\,\Lambda = +1$, 要么 $\mathrm{Det}\,\Lambda = -1$; 那些 $\mathrm{Det}\,\Lambda = +1$ 的变换显然构成齐次或非齐次 Lorentz 群的子群. 更近一步, 从方程(2.3.5)和(2.3.6)的 00-分量, 我们得到

$$(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \Lambda^i{}_0\Lambda^i{}_0 = 1 + \Lambda^0{}_i\Lambda^0{}_i \tag{2.3.13}$$

其中 i 对 $1, 2, 3$ 求和. 我们看到要么 $\Lambda^0{}_0 \geq +1$ 要么$\Lambda^0{}_0 \leq -1$. 那些 $\Lambda^0{}_0 \geq +1$ 的变换构成一个子群. 注意到, 如果$\Lambda^\mu{}_\nu$和$\bar\Lambda^\mu{}_\nu$是这样的两个Λ, 那么

$$(\bar\Lambda\Lambda)^0{}_0 = \bar\Lambda^0{}_0\Lambda^0{}_0 + \bar\Lambda^0{}_1\Lambda^1{}_0 + \bar\Lambda^0{}_2\Lambda^2{}_0 + \bar\Lambda^0{}_3\Lambda^3{}_0 \,.$$

但是方程(2.3.13)证明了 3-矢$(\Lambda^1{}_0, \Lambda^2{}_0, \Lambda^3{}_0)$的长度是$\sqrt{(\Lambda^0{}_0)^2 - 1}$, 类似地, 3-矢$(\bar\Lambda^0{}_1, \bar\Lambda^0{}_2, \bar\Lambda^0{}_3)$的长度是$\sqrt{(\bar\Lambda^0{}_0)^2 - 1}$, 所以这两个 3-矢的标量积有上下界

$$|\bar\Lambda^0{}_1\Lambda^1{}_0 + \bar\Lambda^0{}_2\Lambda^2{}_0 + \bar\Lambda^0{}_3\Lambda^3{}_0| \leq \sqrt{(\Lambda^0{}_0)^2 - 1}\sqrt{(\bar\Lambda^0{}_0)^2 - 1} \,, \tag{2.3.14}$$

从而

$$(\bar\Lambda\Lambda)^0{}_0 \geq \bar\Lambda^0{}_0\Lambda^0{}_0 - \sqrt{(\Lambda^0{}_0)^2 - 1}\sqrt{(\bar\Lambda^0{}_0)^2 - 1} \geq 1 \,.$$

Lorentz 变换中 $\mathrm{Det}\,\Lambda = +1$ 且 $\Lambda^0{}_0 \geq +1$ 的子群称为固有正时*Lorentz群*. 由于无法通过参量的连续改变从 $\mathrm{Det}\,\Lambda = +1$ 跳到 $\mathrm{Det}\,\Lambda = -1$, 或从$\Lambda^0{}_0 \geq +1$跳到$\Lambda^0{}_0 \leq -1$, 所以任何通过参量的连续改变从恒等变换得到的 Lorentz 变换, 它的 $\mathrm{Det}\,\Lambda$ 和 $\Lambda^0{}_0$必须与恒等变换同号, 从而一定属于固有正时 Lorentz 群.

任何Lorentz变换要么是固有且正时的, 要么可以写成固有正时 Lorentz 群中的元素与一个离散变换的乘积, 这里的离散变换有$\mathscr{P}$, $\mathscr{T}$ 和 $\mathscr{P}\mathscr{T}$, 其中 $\mathscr{P}$ 是空间反演, 它的非零元素是

$$\mathscr{P}^0{}_0 = 1, \qquad \mathscr{P}^1{}_1 = \mathscr{P}^2{}_2 = \mathscr{P}^3{}_3 = -1 \,, \tag{2.3.15}$$

而 $\mathscr{T}$ 是时间反演矩阵, 它的非零元素是

$$\mathscr{T}^0{}_0 = -1, \qquad \mathscr{T}^1{}_1 = \mathscr{T}^2{}_2 = \mathscr{T}^3{}_3 = 1\,. \tag{2.3.16}$$

因此对整个 Lorentz 群的研究简化为对固有正时子群, 以及对空间反演和时间反演的研究. 我们将在 2.6 节分别考虑空间反演和时间反演. 在此之前, 我们只处理齐次或非齐次固有正时 Lorentz 群.

2.4 Poincaré 代数

正如在 2.2 节看到的, 任何Lie对称群的大部分信息都包含在单位元附近的群元的性质中. 对非齐次 Lorentz 群, 单位元是 $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$, $a^\mu = 0$, 所以我们想研究的那些变换是

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu\ , \qquad a^\mu = \epsilon^\mu\ , \tag{2.4.1}$$

其中 $\omega^\mu{}_\nu$ 和 ϵ^μ 是无限小量. Lorentz 条件(2.3.5)现在变成

$$\begin{aligned}\eta_{\rho\sigma} &= \eta_{\mu\nu}(\delta^\mu{}_\rho + \omega^\mu{}_\rho)\,(\delta^\nu{}_\sigma + \omega^\nu{}_\sigma)\\ &= \eta_{\sigma\rho} + \omega_{\sigma\rho} + \omega_{\rho\sigma} + O(\omega^2)\ .\end{aligned}$$

我们在这里使用的约定将贯穿本书的始终, 指标可以通过与 $\eta_{\mu\nu}$ 和 $\eta^{\mu\nu}$ 收缩进行升降

$$\begin{aligned}\omega_{\sigma\rho} &\equiv \eta_{\mu\sigma}\omega^\mu{}_\rho\\ \omega^\mu{}_\rho &\equiv \eta^{\mu\sigma}\omega_{\sigma\rho}\,.\end{aligned}$$

在 Lorentz 条件(2.3.5)中仅保留 ω 的一阶项, 我们看到这个条件现在退化成要求 $\omega_{\mu\nu}$ 反对称

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}\ . \tag{2.4.2}$$

四维反对称二阶张量有 $(4\times 3)/2 = 6$ 个独立分量, 再加上 ϵ^μ 的四个分量, 一个非齐次Lorentz变换由 $6+4=10$ 个参量描述.

由于 $U(1,0)$ 将任何射线变到本身, 所以它必须正比于单位算符,* 并可以通过相位选择使它等于单位算符. 因此对于无限小的 Lorentz 变换(2.4.1), $U(1+\omega,\epsilon)$ 必须等于 1 加上 $\omega_{\rho\sigma}$ 和 ϵ_ρ 的线性项. 我们将其写为

$$U\,(1+\omega,\epsilon) = 1 + \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\,\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - \mathrm{i}\epsilon_\rho P^\rho + \cdots\quad . \tag{2.4.3}$$

这里 $J^{\rho\sigma}$ 和 P^ρ 分别是与 ω 和 ϵ 无关的算符, 而省略号代表 ω 和(或) ϵ 的高阶项. 为了使 $U(1+\omega,\epsilon)$ 是幺正的, 算符 $J^{\rho\sigma}$ 和 P^ρ 必须是厄米的

$$J^{\rho\sigma\dagger} = J^{\rho\sigma}\ , \qquad P^{\rho\dagger} = P^\rho\ . \tag{2.4.4}$$

由于 $\omega_{\rho\sigma}$ 是反对称的, 我们可以将它的系数 $J^{\rho\sigma}$ 也取成反对称的

$$J^{\rho\sigma} = -J^{\sigma\rho}\,. \tag{2.4.5}$$

*在有超选择定则的情况下, 比例因子可能依赖于 $U(1,0)$ 作用的态, 而如果没有超选择定则, 这种可能性就被排除了, 其原因与 2.2 节相同, 即没有超选择定则, 对称群的投影表示中的相位不可能依赖于对称操作所作用的态. 在应用超选择定则的地方, 依赖 $U(1,0)$ 作用的区域, 通过相位因子对 $U(1,0)$ 重定义可能是必须的.

我们将会看到, P^1, P^2, P^3是动量算符的分量, J^{23}, J^{31}, J^{12}是角动量算符的分量, 而 P^0 是能量算符, 或者说哈密顿量.**

我们现在检验 $J^{\rho\sigma}$ 和 P^ρ 的 Lorentz 变换性质. 考虑乘积

$$U(\Lambda, a)\, U(1+\omega, \epsilon)\, U^{-1}(\Lambda, a)\,,$$

其中 $\Lambda^\mu{}_\nu$和 a^μ 在这里是新变换的参量, 与 ω 和 ϵ 无关. 根据方程(2.3.11), $U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)U(\Lambda, a)$ 等于 $U(1,0)$, 所以 $U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$ 是 $U(\Lambda, a)$ 的逆. 于是从(2.3.11)可以得到

$$U(\Lambda, a)\, U(1+\omega, \epsilon)\, U^{-1}(\Lambda, a) = U\Big(\Lambda(1+\omega)\Lambda^{-1}, \Lambda\epsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a\Big)\,. \tag{2.4.6}$$

取到 ω 和 ϵ 的第一阶, 我们就有

$$\begin{aligned} U(\Lambda, a)\left[\tfrac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - \epsilon_\rho P^\rho\right] U^{-1}(\Lambda, a) = \tfrac{1}{2}(\Lambda\omega\Lambda^{-1})_{\mu\nu}J^{\mu\nu} \\ - (\Lambda\epsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a)_\mu P^\mu\,. \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

从方程两边 $\omega_{\rho\sigma}$ 和 ϵ_ρ 的系数相等(并利用(2.3.10)), 我们发现

$$U(\Lambda, a) J^{\rho\sigma} U^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma (J^{\mu\nu} - a^\mu P^\nu + a^\nu P^\mu)\,, \tag{2.4.8}$$

$$U(\Lambda, a) P^\rho\, U^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_\mu{}^\rho P^\mu\,. \tag{2.4.9}$$

对于齐次 Lorentz 变换($a^\mu = 0$), 这些变换规则就是告诉我们 $J^{\mu\nu}$ 是张量, P^μ 是矢量. 对于纯平移($\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$), 它告诉我们 P^ρ 是平移不变的, 而 $J^{\rho\sigma}$ 则不是. 特别地, 在一个空间平移下, $J^{\rho\sigma}$的空间-空间分量的变化就是通常的因改变计算角动量的原点而引起的角动量变化.

接下来, 我们将规则(2.4.8)和(2.4.9)应用到无限小变换, 即 $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$ 且 $a^\mu = \epsilon^\mu$ 的变换, 无限小量 $\omega^\mu{}_\nu$ 和 ϵ^μ 与此前的 ω 和 ϵ 无关. 利用方程(2.4.3), 并只保留 $\omega^\mu{}_\nu$ 和 ϵ^μ 的一阶项, 方程(2.4.8)和(2.4.9)现在变成

$$\mathrm{i}\big[\tfrac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - \epsilon_\mu P^\mu, J^{\rho\sigma}\big] = \omega_\mu{}^\rho J^{\mu\sigma} + \omega_\nu{}^\sigma J^{\rho\nu} - \epsilon^\rho P^\sigma + \epsilon^\sigma P^\rho\,, \tag{2.4.10}$$

$$\mathrm{i}\big[\tfrac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - \epsilon_\mu P^\mu, P^\rho\big] = \omega_\mu{}^\rho P^\mu\,. \tag{2.4.11}$$

从方程两边 $\omega_{\mu\nu}$ 和 ϵ_μ 的系数相等, 我们发现对易规则

$$\mathrm{i}\,[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu}J^{\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu}J^{\rho\mu}\,, \tag{2.4.12}$$

$$\mathrm{i}\,[P^\mu, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\mu\rho}P^\sigma - \eta^{\mu\sigma}P^\rho\,, \tag{2.4.13}$$

$$[P^\mu, P^\rho] = 0\,. \tag{2.4.14}$$

这是 Poincaré 群的Lie代数.

在量子力学中, 守恒量, 即与能量算符 $H = P^0$ 对易的量扮演着特殊的角色. 观察方程(2.4.13)和(2.4.14), 可以看出守恒量是动量 3-矢

$$\mathbf{P} = \Big\{P^1, P^2, P^3\Big\} \tag{2.4.15}$$

**我们将会看到, $J^{\mu\nu}$满足的对易关系让我们认定它是角动量生成元. 另一方面, 对易关系使得我们无法区分 P^μ 和 $-P^\mu$, 所以(2.4.3)中 $\epsilon_\rho P^\rho$ 项的符号是一个约定. 我们将在 3.1 节说明(2.4.3)中的选择与哈密顿量 P^0 的通常定义是一致的.

和角动量 3-矢

$$\mathbf{J} = \left\{ J^{23}, J^{31}, J^{12} \right\} \tag{2.4.16}$$

当然, 还有能量 P^0 本身. 剩下的生成元构成所谓的"增速"(boost) 3-矢

$$\mathbf{K} = \left\{ J^{01}, J^{02}, J^{03} \right\} . \tag{2.4.17}$$

它们是不守恒的, 这就是为什么我们不用 $\mathbf{K}$ 的本征值标记物理态的原因. 用三维符号, 对易关系(2.4.12), (2.4.13), (2.4.14)可以写成

$$[J_i, J_j] = \mathrm{i}\,\epsilon_{ijk} J_k \,, \tag{2.4.18}$$

$$[J_i, K_j] = \mathrm{i}\,\epsilon_{ijk} K_k \,, \tag{2.4.19}$$

$$[K_i, K_j] = -\mathrm{i}\,\epsilon_{ijk} J_k \,, \tag{2.4.20}$$

$$[J_i, P_j] = \mathrm{i}\,\epsilon_{ijk} P_k \,, \tag{2.4.21}$$

$$[K_i, P_j] = -\mathrm{i} H\,\delta_{ij} \,, \tag{2.4.22}$$

$$[J_i, H] = [P_i, H] = [H, H] = 0 \,, \tag{2.4.23}$$

$$[K_i, H] = \mathrm{i} P_i \,, \tag{2.4.24}$$

其中i, j, k等取遍 1,2,3, 而ϵ_{ijk}是全反对称量, 并有 $\epsilon_{123} = +1$. 对易关系(2.4.18)被视为角动量算符的对易关系.

纯平移 $T(1, a)$ 构成非齐次 Lorentz 群的一个子群, 它的群乘积规则由(2.3.8)给定

$$T(1, \bar{a}) T(1, a) = T(1, \bar{a} + a) \,. \tag{2.4.25}$$

在(2.2.24)的意义上, 群的乘积规则是加法, 所以通过利用(2.4.3), 并重复导出(2.2.26)的讨论, 我们发现有限平移在物理 Hilbert 空间上可以表示为

$$U(1, a) = \exp(-\mathrm{i} P^\mu a_\mu) \,. \tag{2.4.26}$$

以精确相同的方式, 我们可以证明以 $\boldsymbol{\theta}$ 方向为轴, 角度为 $|\boldsymbol{\theta}|$ 的旋转 $R_{\boldsymbol{\theta}}$ 在物理 Hilbert 空间上表示为

$$U(R_{\boldsymbol{\theta}}, 0) = \exp(\mathrm{i}\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\theta}) \,. \tag{2.4.27}$$

将 Poincaré 代数与牛顿力学的对称群——伽利略群的 Lie 代数进行比较是有益的. 从伽利略群的变换法则出发, 然后利用导出 Poincaré 代数的步骤, 我们就可以导出这个代数. 然而, 既然我们已经有了方程(2.4.18)—(2.4.24), 通过*Inönü-Wigner*收缩[4, 5], 很容易得到作为 Poincaré代数 的低速近似的伽利略代数. 对一个典型质量为 m, 典型速度为 v 的粒子系统, 可以期待动量和角动量算符的量级是$\mathbf{J} \sim 1, \mathbf{P} \sim mv$. 另一方面, 能量算符是 $H = M + W$, 其中总质量是 M, 而非质量能量为 W (动能+势能), 量级是 $M \sim m$, $W \sim mv^2$. 观察方程(2.4.18)—(2.4.24), 可以看出对易关系在 $v \ll 1$ 的极限下在形式上取

$$\begin{aligned}
&[J_i, J_j] = \mathrm{i}\,\epsilon_{ijk}\, J_k \,, \qquad [J_i, K_j] = \mathrm{i}\,\epsilon_{ijk}\, K_k \,, \qquad [K_i, K_j] = 0 \,, \\
&[J_i, P_j] = \mathrm{i}\,\epsilon_{ijk}\, P_k \,, \qquad [K_i, P_j] = \mathrm{i}\, M\,\delta_{ij} \,, \\
&[J_i, W] = [P_i, W] = 0, \qquad [K_i, W] = \mathrm{i}\, P_i \,, \\
&[J_i, M] = [P_i, M] = [K_i, M] = [W, M] = 0,
\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{K}$ 是 $1/v$ 阶的. 注意到, 平移 $\mathbf{x}\to\mathbf{x}+\mathbf{a}$ 与"增速" $\mathbf{x}\to\mathbf{x}+\mathbf{v}t$的乘积本应是变换$\mathbf{x}\to\mathbf{x}+\mathbf{v}t+\mathbf{a}$, 但是, 对于作用在 Hilbert 空间上的算符, 这是不对的:

$$\exp(-\mathrm{i}\mathbf{K}\cdot\mathbf{v})\exp(-\mathrm{i}\mathbf{P}\cdot\mathbf{a})=\exp(\mathrm{i}M\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}/2)\exp(-\mathrm{i}(\mathbf{K}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}))\,.$$

出现相因子 $\exp(\mathrm{i}M\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}/2)$ 表明这是一个投影表示, 它有一个超选择定则禁止不同质量态的叠加. 从这方面看, Poincaré 群的数学结构比伽利略群简单. 然而, 没有什么来阻止我们给伽利略群的 Lie 代数增加一个生成元来形式上地扩张伽利略群, 这个生成元与其它所有生成元对易且它的本征值是不同态的质量. 在这种情况下, 物理态给出了这个扩张对称群的普通表示而非投影表示. 除了在重新解释这个伽利略群时不再需要质量的超选择定则外, 所有的不同都只是符号上的不同.

2.5 单粒子态

我们现在考虑根据单粒子态在非齐次 Lorentz 群下的变换如何对它们进行分类的问题.

能动量 4-矢的分量全部彼此对易, 所以用四动量的本征矢表示物理态矢是自然的. 引入指标 σ 来标记所有其它自由度, 因此我们考虑的态矢 Ψ 满足

$$P^\mu\Psi_{p,\sigma}=p^\mu\Psi_{p,\sigma}\,. \tag{2.5.1}$$

对于一般的态, 例如几个非束缚粒子构成的态, 指标 σ 不但可以是离散的, 也可以是连续的. 作为单粒子态定义的一部分, 我们要求指标 σ 是纯离散的, 并且我们将只考虑这种情况. (然而, 两个或多个粒子的特定束缚态, 如氢原子的最低态, 将被认为是单粒子态. 它不是基本粒子, 但是复合粒子与基本粒子的区别在这里是无所谓的.)

方程(2.5.1)和(2.4.26)告诉我们态 $\Psi_{p,\sigma}$ 在平移下如何变换:

$$U(1,a)\Psi_{p,\sigma}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot a}\Psi_{p,\sigma}\,.$$

我们现在必须考察这些态在齐次 Lorentz 变换下如何变换.

利用(2.4.9), 我们看到量子齐次 Lorentz 变换 $U(\Lambda,0)\equiv U(\Lambda)$ 作用在 $\Psi_{p,\sigma}$ 上的效果是产生一个 4-动量本征值为 Λp 的本征矢

$$\begin{aligned}P^\mu U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}&=U(\Lambda)\Big[U^{-1}(\Lambda)P^\mu U(\Lambda)\Big]\Psi_{p,\sigma}=U(\Lambda)(\Lambda^{-1}{}_\rho{}^\mu P^\rho)\Psi_{p,\sigma}\\&=\Lambda^\mu{}_\rho p^\rho U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}\,.\end{aligned} \tag{2.5.2}$$

因此 $U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}$ 必须是态矢 $\Psi_{\Lambda p,\sigma'}$ 的线性组合:

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}=\sum_{\sigma'}C_{\sigma'\sigma}(\Lambda,p)\Psi_{\Lambda p,\sigma'}\,. \tag{2.5.3}$$

一般而言, 通过对 $\Psi_{p,\sigma}$ 使用合适的线性组合, 有可能选择 σ 指标使得矩阵 $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda,p)$ 是分块对角的; 换句话说, 使得对任何一个 σ, $\Psi_{p,\sigma}$ 自己在任何一个块中就构成非齐次 Lorentz 群的一个表示. 将种类给定的粒子态与非齐次Lorentz群不可约表示的分量等同起来是自然的, 在这个意义上, 不

能以这种方式做进一步的分解.* 现在, 我们的任务是解出系数 $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda,p)$ 在非齐次 Lorentz 群不可约表示中的结构.

出于这个目的, 注意到在 p^μ 的函数中, 在任何固有正时 Lorentz 变换$\Lambda^\mu{}_\nu$下保持不变的只有平方不变量 $p^2\equiv\eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu$, 以及 $p^2\le 0$ 时 p^0 的符号. 因此, 对于 p^2 的每个值, 以及($p^2\le 0$ 时) p^0 的每个符号, 我们可以选择"标准" 4-矢, 记做 k^μ, 并将这类中的任何 p^μ 表示为

$$p^\mu = L^\mu{}_\nu(p)k^\nu\,, \tag{2.5.4}$$

其中 $L^\mu{}_\nu$ 是依赖于 p^μ 的标准 Lorentz 变换, 并且暗含地也依赖于我们对标准 k^μ 的选择. 这样, 我们可以将动量为 p 的态 $\Psi_{p,\sigma}$ 定义为

$$\Psi_{p,\sigma}\equiv N(p)\,U(L(p))\Psi_{k,\sigma}\,, \tag{2.5.5}$$

其中 $N(p)$ 是作为归一化因子的数, 稍后进行选择. 到这里, 我们还没有对 σ 怎样与不同动量相联系做任何说明; 现在方程(2.5.5)补上了这一空隙.

用任意的齐次 Lorentz 变换 $U(\Lambda)$ 作用在(2.5.5)上, 我们发现

$$\begin{aligned} U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} &= N(p)\,U(\Lambda L(p))\Psi_{k,\sigma} \\ &= N(p)\,U(L(\Lambda p))\,U(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p))\,\Psi_{k,\sigma}\,. \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

最后一步的关键是 Lorentz 变换 $L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$, 它使 k 变为 $L(p)k=p$, 然后变到 Λp, 最后再变回到 k, 所以它属于保持 k^μ 不变的 Lorentz 变换 $W^\mu{}_\nu$ 组成的齐次 Lorentz 群的子群:

$$W^\mu{}_\nu k^\nu = k^\mu\,. \tag{2.5.7}$$

这个子群被称为小群.[5] 对于满足方程(2.5.7)的任意 W, 我们有

$$U(W)\Psi_{k,\sigma}=\sum_{\sigma'}D_{\sigma'\sigma}(W)\Psi_{k,\sigma'}\,. \tag{2.5.8}$$

系数 $D(W)$ 给出了小群的一个表示; 即, 对于任意元素 $\bar W$, W, 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma'}D_{\sigma'\sigma}(\bar W W)\Psi_{k,\sigma'} &= U(\bar W W)\Psi_{k,\sigma}=U(\bar W)U(W)\Psi_{k,\sigma} \\ &= U(\bar W)\sum_{\sigma''}D_{\sigma''\sigma}(W)\Psi_{k,\sigma''}=\sum_{\sigma'\sigma''}D_{\sigma''\sigma}(W)D_{\sigma'\sigma''}(\bar W)\Psi_{k,\sigma'} \end{aligned}$$

因而

$$D_{\sigma'\sigma}(\bar W W)=\sum_{\sigma''}D_{\sigma'\sigma''}(\bar W)D_{\sigma''\sigma}(W)\,. \tag{2.5.9}$$

特别的, 我们可以将方程(2.5.8)应用于小群变换

$$W(\Lambda,p)\equiv L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p) \tag{2.5.10}$$

*当然, 不同的粒子种类可以对应于同构的表示, 即, 存在多个矩阵 $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda,p)$, 它们要么相等, 要么通过一个相似变换相互关联. 在某些情况下, 可以方便地将粒子种类定义为一个更大的群的不可约表示, 这个更大的群包含非齐次固有正时Lorentz群作为它的子群; 例如, 正如我们将看到的, 对于相互作用具有空间反演对称性的无质量粒子, 我们通常用包含空间反演的非齐次Lorentz群的不可约表示的全部分量对单个粒子进行分类.

表 2.1 各类4-动量的标准动量和对应的小群. 这里κ是任意的正能量, 例如1 eV. 小群几乎是相当显然的: $SO(3)$是三维中的普通旋转群(剔除了空间反演), 这是因为旋转是唯一使零动量粒子保持静止的固有正时Lorentz变换, 而$SO(2,1)$和$SO(3,1)$分别是$(2+1)$维和$(3+1)$维中的Lorentz群. 群$ISO(2)$是欧几里得几何下的群, 由二维的旋转和平移组成. 它将作为$p^2=0$的小群出现, 我们将在后面对此给出解释.

		标准k^μ	小群
(a)	$p^2=-M^2<0,\ p^0>0$	$(0,0,0,M)$	$SO(3)$
(b)	$p^2=-M^2<0,\ p^0<0$	$(0,0,0,-M)$	$SO(3)$
(c)	$p^2=0,\ p^0>0$	$(0,0,\kappa,\kappa)$	$ISO(2)$
(d)	$p^2=0,\ p^0<0$	$(0,0,\kappa,-\kappa)$	$ISO(2)$
(e)	$p^2=N^2>0$	$(0,0,N,0)$	$SO(2,1)$
(f)	$p^\mu=0$	$(0,0,0,0)$	$SO(3,1)$

那么方程(2.5.6)采取如下形式

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}=N(p)\sum_{\sigma'}D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda,p))\,U(L(\Lambda p))\,\Psi_{k,\sigma'}\ ,$$

或者, 回顾定义(2.5.5):

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}=\left(\frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\right)\sum_{\sigma'}D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda,p))\,\Psi_{\Lambda p,\sigma'}\ . \tag{2.5.11}$$

除了归一化的问题, 在变换规则(2.5.3)中确定系数$C_{\sigma'\sigma}$的问题已经退化成寻找小群表示的问题. 这种从小群表示导出一个群表示的方法, 例如从小群导出非齐次Lorentz群的表示, 称为诱导表示法.[6]

表2.1给出了标准动量k^μ一个方便的选择以及各类4-动量对应的小群.

这六类4-动量中, 只有(a), (c)和(f)有已知的物理态解释. 对于情况(f)——$p^\mu=0$, 不需要多说; 它描述的是真空, 在$U(\Lambda)$下不变. 在后面, 我们只考虑情况(a)和(c), 它们分别对应质量$M>0$和零质量粒子的情况.

是时候停下来谈一谈这些态的归一化. 利用量子力学中通常的正交归一化步骤, 我们可以选择这些用标准动量k^μ标记的态使得它们是正交的, 在这个意义下

$$(\Psi_{k',\sigma'},\Psi_{k,\sigma})=\delta^3(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\delta_{\sigma'\sigma}\ . \tag{2.5.12}$$

(这里出现δ-函数是因为$\Psi_{k,\sigma}$和$\Psi_{k',\sigma'}$是一厄米算符的两个本征态, 而它们的本征值分别是$\mathbf{k}$和$\mathbf{k}'$.) 一个立即就可以看到的结果是, 方程(2.5.8)和(2.5.11)中的小群表示必须是幺正的[**]

$$D^\dagger(W)=D^{-1}(W)\ . \tag{2.5.13}$$

[**]对于$p^2>0$和$p^\mu=0$的情况, 小群$SO(2,1)$和$SO(3,1)$没有非平庸的有限维幺正表示, 因此, 对于任何满足$p^2>0$或$p^\mu=0$的给定动量p^μ, 如果在小群下有变换不平庸的态, 那么这些态的数目必然是无限个.

那么对于任意动量, 态的标量积是什么呢? 利用方程(2.5.5)和(2.5.11)中算符 $U(\Lambda)$ 的幺正性, 对于标量积, 我们发现:

$$\begin{aligned}(\Psi_{p',\sigma'},\Psi_{p,\sigma}) &= N(p)\left(U^{-1}(L(p))\,\Psi_{p',\sigma'},\Psi_{k,\sigma}\right)\\ &= N(p)N^*(p')D\Big(W(L^{-1}(p),p')\Big)^*_{\sigma\sigma'}\delta^3(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\end{aligned}$$

其中 $k'\equiv L^{-1}(p)p'$. 又因为 $k=L^{-1}(p)p$, 所以 δ-函数 $\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$ 正比于 $\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')$. 当 $p'=p$ 时, 这里的小群变换是平庸的, $W(L^{-1}(p),p)=1$, 因而标量积是

$$(\Psi_{p',\sigma'},\Psi_{p,\sigma}) = |N(p)|^2\delta_{\sigma'\sigma}\delta^3(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\,. \tag{2.5.14}$$

剩下要做的是解出联系 $\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$ 与 $\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')$ 的比例因子. 注意到任意标量函数 $f(p)$ 在 4-动量满足 $-p^2=M^2\geq 0$ 以及 $p^0>0$ (即情况 (a) 或 (c))的区域上的Lorentz不变积分可以写为

$$\begin{aligned}&\int \mathrm{d}^4p\,\delta(p^2+M^2)\theta(p^0)f(p)\\ &\quad=\int \mathrm{d}^3\mathbf{p}\,\mathrm{d}p^0\,\delta((p^0)^2-\mathbf{p}^2-M^2)\theta(p^0)f(\mathbf{p},p^0)\\ &\quad=\int \mathrm{d}^3\mathbf{p}\,\frac{f(\mathbf{p},\sqrt{\mathbf{p}^2+M^2})}{2\sqrt{\mathbf{p}^2+M^2}}\end{aligned}$$

($\theta(p^0)$ 是阶跃函数: $x\geq 0$ 时 $\theta(x)=1$, $x<0$ 时 $\theta(x)=0$.) 我们看到, 当在"质量壳" $p^2+M^2=0$ 上积分时, 不变体积元是

$$\mathrm{d}^3\mathbf{p}/\sqrt{\mathbf{p}^2+M^2}. \tag{2.5.15}$$

δ-函数定义为

$$\begin{aligned}F(\mathbf{p}) &= \int F(\mathbf{p}')\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,\mathrm{d}^3\mathbf{p}'\\ &= \int F(\mathbf{p}')\left[\sqrt{\mathbf{p}'^2+M^2}\delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\right]\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}'}{\sqrt{\mathbf{p}'^2+M^2}}\end{aligned}$$

所以我们看到不变 δ-函数是

$$\sqrt{\mathbf{p}'^2+M^2}\delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{p}) = p^0\delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\,. \tag{2.5.16}$$

因为 p' 和 p 通过 Lorentz 变换 $L(p)$ 分别与 k' 和 k 相关, 于是我们有

$$p^0\delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{p}) = k^0\delta^3(\mathbf{k}'-\mathbf{k})$$

因而

$$(\Psi_{p',\sigma'},\Psi_{p,\sigma}) = |N(p)|^2\delta_{\sigma'\sigma}\left(\frac{p^0}{k^0}\right)\delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\,. \tag{2.5.17}$$

归一化因子 $N(p)$ 有时就选成 $N(p)=1$, 但是这样我们会在标量积中保留 p^0/k^0 的踪迹. 我在这里将代之以更加通常的约定

$$N(p) = \sqrt{k^0/p^0} \tag{2.5.18}$$

这样

$$(\Psi_{p',\sigma'},\Psi_{p,\sigma}) = \delta_{\sigma'\sigma}\delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\,. \tag{2.5.19}$$

我们现在来考察物理上感兴趣的两种情况: 质量 $M>0$ 的粒子以及质量为零的粒子.

正定质量

这里的小群是三维旋转群. 它的幺正表示可以分解为$2j+1$维不可约表示[7] $D^{(j)}_{\sigma'\sigma}(R)$的直和, 其中$j=0,\frac{1}{2},1,\cdots$. 这些表示可以通过无限小旋转$R_{ik}=\delta_{ik}+\Theta_{ik}$的标准矩阵进行构造, 其中$\Theta_{ik}=-\Theta_{ki}$是无限小量:

$$D^{(j)}_{\sigma'\sigma}(1+\Theta)=\delta_{\sigma'\sigma}+\frac{\mathrm{i}}{2}\Theta_{ik}(J^{(j)}_{ik})_{\sigma'\sigma}\,, \tag{2.5.20}$$

$$\begin{aligned}(J^{(j)}_{23}\pm\mathrm{i}J^{(j)}_{31})_{\sigma'\sigma}&=(J^{(j)}_{1}\pm\mathrm{i}J^{(j)}_{2})_{\sigma'\sigma}\\&=\delta_{\sigma',\sigma\pm1}\sqrt{(j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)}\,,\end{aligned} \tag{2.5.21}$$

$$(J^{(j)}_{12})_{\sigma'\sigma}=(J^{(j)}_{3})_{\sigma'\sigma}=\sigma\delta_{\sigma'\sigma}\,, \tag{2.5.22}$$

其中σ取遍值$j,j-1,\cdots,-j$. 对于质量$M>0$, 自旋为j的粒子, 方程(2.5.11)现在变成

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}=\sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}}\sum_{\sigma'}D^{(j)}_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda,p))\,\Psi_{\Lambda p,\sigma'}\,, \tag{2.5.23}$$

其中小群群元$W(\Lambda,p)$ (Wigner转动)由方程(2.5.10)给定:

$$W(\Lambda,p)=L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)\,.$$

为了计算这个转动, 我们需要选择一个"标准增速"$L(p)$, 它使4-动量$k^\mu=(0,0,0,M)$变为p^μ. 下面给出一个方便的选择

$$\begin{aligned}L^i{}_k(p)&=\delta_{ik}+(\gamma-1)\hat{p}_i\hat{p}_k\,,\\L^i{}_0(p)&=L^0{}_i(p)=\hat{p}_i\sqrt{\gamma^2-1}\,,\\L^0{}_0(p)&=\gamma\,,\end{aligned} \tag{2.5.24}$$

其中

$$\hat{p}_i\equiv p_i/|\mathbf{p}|\,,\qquad \gamma\equiv\sqrt{\mathbf{p}^2+M^2}/M\,.$$

有一个非常重要的情况是$\Lambda^\mu{}_\nu$是任意的三维旋转$\mathscr{R}$, 此时Wigner旋转$W(\Lambda,p)$对于所有p都与$\mathscr{R}$相同. 为了看到这一点, 注意到增速(2.5.24)可以表示为

$$L(p)=R(\hat{\mathbf{p}})B(|\mathbf{p}|)R^{-1}(\hat{\mathbf{p}})\,,$$

其中$R(\hat{\mathbf{p}})$是一个旋转(后面将用一个标准的方式定义, 见方程(2.5.47)), 它使得第3坐标轴指向$\mathbf{p}$的方向, 而

$$B(|\mathbf{p}|)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\gamma&\sqrt{\gamma^2-1}\\0&0&\sqrt{\gamma^2-1}&\gamma\end{bmatrix}\,.$$

那么对于任意旋转$\mathscr{R}$

$$W(\mathscr{R},p)=R(\mathscr{R}\hat{\mathbf{p}})B^{-1}(|\mathbf{p}|)R^{-1}(\mathscr{R}\hat{\mathbf{p}})\,\mathscr{R}\,R(\hat{\mathbf{p}})B(|\mathbf{p}|)R^{-1}(\hat{\mathbf{p}})\,.$$

但是旋转 $R^{-1}(\mathscr{R}\hat{\mathbf{p}})\mathscr{R}R(\hat{\mathbf{p}})$ 使第3轴转向 $\hat{\mathbf{p}}$ 方向, 然后再转向 $\mathscr{R}\hat{\mathbf{p}}$ 方向, 然后再回到第3轴, 所以, 它一定是绕第 3 轴转动某个 θ 角的旋转

$$R^{-1}(\mathscr{R}\hat{\mathbf{p}})\,\mathscr{R}\,R(\hat{\mathbf{p}}) = R(\theta) \equiv \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

由于 $R(\theta)$ 与 $B(|\mathbf{p}|)$ 对易, 这样就给出

$$W(\mathscr{R},p) = R(\mathscr{R}\hat{\mathbf{p}})B^{-1}(|\mathbf{p}|)R(\theta)B(|\mathbf{p}|)R^{-1}(\hat{\mathbf{p}}) = R(\mathscr{R}\hat{\mathbf{p}})R(\theta)R^{-1}(\hat{\mathbf{p}})$$

因而

$$W(\mathscr{R},p) = \mathscr{R}\,,$$

这正是所要证明的. 因此, 对于一个运动的有质量粒子的态(以及通过扩张所得到的多粒子态), 它在旋转下的变换与非相对论量子力学中相同. 另一条好消息——球谐函数, Clebsch-Gordon 系数等全套工具可以批量地从非相对论量子力学搬到相对论量子力学.

零质量

首先, 我们必须要计算出小群的结构. 考虑一任意的小群群元 $W^{\mu}{}_{\nu}$, 它满足 $W^{\mu}{}_{\nu}k^{\nu} = k^{\mu}$, 其中 $k^{\mu} = (0,0,1,1)$ 是该情况下的标准 4-矢. 这类 Lorentz 变换作用在类时 4-矢 $t^{\mu} = (0,0,0,1)$上给出的 4-矢 Wt, 它的长度以及它与 $Wk = k$ 的标量积必须与 t 的长度以及 t 与 k 的标量积相同:

$$(Wt)^{\mu}(Wt)_{\mu} = t^{\mu}t_{\mu} = -1\,,$$
$$(Wt)^{\mu}k_{\mu} = t^{\mu}k_{\mu} = -1\,.$$

任何满足第二个条件的 4-矢可以写成

$$(Wt)^{\mu} = (\alpha,\beta,\zeta,1+\zeta)$$

那么第一个条件给出如下关系

$$\zeta = (\alpha^2+\beta^2)/2\,. \tag{2.5.25}$$

由此可知, $W^{\mu}{}_{\nu}$ 作用在 t^{ν} 上的效果与如下 Lorentz 变换相同

$$S^{\mu}{}_{\nu}(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha & \alpha \\ 0 & 1 & -\beta & \beta \\ \alpha & \beta & 1-\zeta & \zeta \\ \alpha & \beta & -\zeta & 1+\zeta \end{bmatrix} . \tag{2.5.26}$$

这并不意味着 W 等于 $S(\alpha,\beta)$, 但是它确实意味着 $S^{-1}(\alpha,\beta)W$是一个保类时 4-矢 $(0,0,0,1)$ 不变的 Lorentz 变换, 所以它是一个纯旋转. 另外, 和 $W^{\mu}{}_{\nu}$ 一样, $S^{\mu}{}_{\nu}$ 保类光 4-矢 $(0,0,1,1)$不变, 所以 $S^{-1}(\alpha,\beta)W$ 必然是绕第 3 轴转动某个 θ 角的旋转

$$S^{-1}(\alpha,\beta)W = R(\theta)\,, \tag{2.5.27}$$

其中

$$R^{\mu}{}_{\nu}(\theta) \equiv \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

因此, 小群群元的最普遍形式是

$$W(\theta,\alpha,\beta) = S(\alpha,\beta)R(\theta) . \tag{2.5.28}$$

这是什么群呢? 我们注意到$\theta = 0$或$\alpha = \beta = 0$的变换构成子群:

$$S(\bar{\alpha},\bar{\beta})S(\alpha,\beta) = S(\bar{\alpha}+\alpha,\bar{\beta}+\beta) \tag{2.5.29}$$

$$R(\bar{\theta})R(\theta) = R(\bar{\theta}+\theta) . \tag{2.5.30}$$

这些子群是阿贝尔的——即它们的全部群元彼此对易. 更进一步, $\theta = 0$的子群是不变子群, 也就是说, 这个群中的任何的一个元素将这个子群中的一个元素变换到同一子群中的另一个元素

$$R(\theta)S(\alpha,\beta)R^{-1}(\theta) = S(\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta, -\alpha\sin\theta+\beta\cos\theta) . \tag{2.5.31}$$

通过方程(2.5.29)—(2.5.31), 我们可以计算出任意群元的乘积. 读者会发现, 这些乘法规则是群$ISO(2)$的乘积规则, 由二维中的平移(平移矢量为(α,β))和旋转(旋转角度为θ)构成.

如果一个群没有不变阿贝尔子群, 那么它有一些简单性质, 由于这个原因称它是半单的. 正如我们已经看到的, 小群$ISO(2)$和非齐次Lorentz群一样都不是半单的, 这导致了有趣的复杂性. 首先, 我们来看一下$ISO(2)$的Lie代数. 对于无限小的θ,α,β, 一般群元是

$$W(\theta,\alpha,\beta)^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu} ,$$

$$\omega_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \theta & -\alpha & \alpha \\ -\theta & 0 & -\beta & \beta \\ \alpha & \beta & 0 & 0 \\ -\alpha & -\beta & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

通过(2.4.3), 我们看到相应的Hilbert空间算符是

$$U(W(\theta,\alpha,\beta)) = 1 + \mathrm{i}\alpha A + \mathrm{i}\beta B + \mathrm{i}\theta J_3 , \tag{2.5.32}$$

其中A和B是厄米算符

$$A = -J^{13} + J^{10} = J_2 + K_1 , \tag{2.5.33}$$

$$B = -J^{23} + J^{20} = -J_1 + K_2 , \tag{2.5.34}$$

并且, 像前面一样, $J_3 = J_{12}$. 无论是通过(2.4.18)—(2.4.20), 还是直接由方程(2.5.29)—(2.5.31), 我们看到这些生成元有如下的对易关系

$$[J_3, A] = +\mathrm{i}B , \tag{2.5.35}$$

$$[J_3, B] = -\mathrm{i}A , \tag{2.5.36}$$

$$[A, B] = 0 . \tag{2.5.37}$$

由于A和B是对易的厄米算符, 所以它们(类似于非齐次Lorentz群的动量生成元)可以同时被态$\Psi_{k,a,b}$对角化

$$A\Psi_{k,a,b} = a\Psi_{k,a,b}\,,$$
$$B\Psi_{k,a,b} = b\Psi_{k,a,b}\,.$$

问题是: 如果我们找到A, B的这样一组非零本征值, 那么我们就得到一个完全连续的谱. 通过方程(2.5.31), 我们有

$$U[R(\theta)]\,A\,U^{-1}[R(\theta)] = A\cos\theta - B\sin\theta\,,$$
$$U[R(\theta)]\,B\,U^{-1}[R(\theta)] = A\sin\theta + B\cos\theta\,,$$

因而, 对任意θ,

$$A\Psi^{\theta}_{k,a,b} = (a\cos\theta - b\sin\theta)\Psi^{\theta}_{k,a,b}\,,$$
$$B\Psi^{\theta}_{k,a,b} = (a\sin\theta + b\cos\theta)\Psi^{\theta}_{k,a,b}\,,$$

其中

$$\Psi^{\theta}_{k,a,b} \equiv U^{-1}(R(\theta))\,\Psi_{k,a,b}\,.$$

但是对无质量粒子的观测没有发现任何像θ这样的连续自由度; 为了避免这类连续态, 我们必须要求物理态(现在称为$\Psi_{k,\sigma}$)是A和B的$a = b = 0$的本征矢:

$$A\Psi_{k,\sigma} = B\Psi_{k,\sigma} = 0\,. \tag{2.5.38}$$

那么, 这些态通过剩下的生成元的本征值进行区分

$$J_3\Psi_{k,\sigma} = \sigma\Psi_{k,\sigma}\,. \tag{2.5.39}$$

由于动量$\mathbf{k}$在3-方向上, σ给出角动量在运动方向上的分量, 或者说, 螺旋度.

现在, 我们可以着手计算一般无质量粒子态的Lorentz变换性质. 首先注意到, 通过2.2节的一般讨论, 对有限的α 和β, 方程(2.5.32)推广为

$$U(S(\alpha,\beta)) = \exp(\mathrm{i}\alpha A + \mathrm{i}\beta B) \tag{2.5.40}$$

对有限的θ则推广为

$$U(R(\theta)) = \exp(\mathrm{i}J_3\theta)\,. \tag{2.5.41}$$

小群的任意一个群元W可以写成(2.5.28)的形式, 从而有

$$U(W)\Psi_{k,\sigma} = \exp(\mathrm{i}\alpha A + \mathrm{i}\beta B)\exp(\mathrm{i}\theta J_3)\Psi_{k,\sigma} = \exp(\mathrm{i}\theta\sigma)\Psi_{k,\sigma}$$

因而, 方程(2.5.8)给出

$$D_{\sigma'\sigma}(W) = \exp(\mathrm{i}\theta\sigma)\delta_{\sigma'\sigma}\,,$$

其中θ是通过将W按方程(2.5.28)表达定义的角度. 对于任意螺旋度的无质量粒子, 它们的Lorentz变换规则现在由方程(2.5.11)和(2.5.18)给出

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}}\,\exp(\mathrm{i}\sigma\theta(\Lambda,p))\,\Psi_{\Lambda p,\sigma} \tag{2.5.42}$$

其中 $\theta(\Lambda,p)$ 定义为

$$W(\Lambda,p)\equiv L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)\equiv S(\alpha(\Lambda,p),\beta(\Lambda,p))R(\theta(\Lambda,p))\,. \tag{2.5.43}$$

在 5.9 节, 我们将看到电磁规范不变性来自于小群中被 α 和 β 参数化的那部分.

到目前为止, 我们还没有遇到什么理由阻止无质量粒子的螺旋度 σ 取任意实数. 我们将在 2.7 节看到, 有一些拓扑上的原因使得 σ 与有质量粒子的情况一样只能取整数或半整数.

为了计算给定 Λ 和 p 的小群群元(2.5.43), (并使我们能够在下一节计算时间反演或空间反演在这些态上的作用效果)对于那些将 $k^\mu=(0,0,\kappa,\kappa)$ 变到 p^μ 的标准 Lorentz 变换, 我们需要确定一个约定. 将这个变换选成如下形式将是方便的

$$L(p)=R(\hat{\mathbf{p}})B(|\mathbf{p}|/\kappa) \tag{2.5.44}$$

其中, $B(u)$是沿第3方向上的纯增速:

$$B(u)\equiv\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\left(u^2+1\right)/2u&\left(u^2-1\right)/2u\\0&0&\left(u^2-1\right)/2u&\left(u^2+1\right)/2u\end{bmatrix} \tag{2.5.45}$$

而 $R(\hat{\mathbf{p}})$ 是使第3轴转向单位矢量 $\hat{\mathbf{p}}$ 方向的纯转动. 例如, 假设我们让 $\hat{\mathbf{p}}$ 有极角 θ 和方位角 ϕ:

$$\hat{\mathbf{p}}=(\sin\theta\cos\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\theta)\,. \tag{2.5.46}$$

那么, 我们可以将 $R(\hat{\mathbf{p}})$ 取成, 先绕第2轴转动角度 θ, 这使 $(0,0,1)$ 变为 $(\sin\theta,0,\cos\theta)$, 然后绕第3轴转动角度 ϕ:

$$U(R(\hat{\mathbf{p}}))=\exp(-\mathrm{i}\phi J_3)\exp(-\mathrm{i}\theta J_2)\,, \tag{2.5.47}$$

其中 $0\le\theta\le\pi$, $0\le\phi<2\pi$. (我们给出 $U(R(\hat{\mathbf{p}}))$而不是 $R(\hat{\mathbf{p}})$并指定 ϕ 和 θ 的范围, 是因为 θ 或 ϕ 改变 2π 会给出相同的旋转 $R(\hat{\mathbf{p}})$, 但是对于 $U(R(\hat{\mathbf{p}}))$, 当其作用在一个半整数自旋态上时, θ 或 ϕ 改变 2π 会产生一个符号差异.) 由于(2.5.47)是一个转动, 并使第3轴转到方向(2.5.46), 这类 $R(\hat{\mathbf{p}})$ 的所有其它选择与这个选择至多相差一个绕第3轴的初始旋转, 而这仅相当于重新定义一个单粒子态相位.

注意到螺旋度是 Lorentz 不变的; 螺旋度 σ 给定的无质量粒子在所有惯性系中(除了它的动量)看起来是相同的. 事实上, 我们有道理认为螺旋度不同的无质量粒子是不同种类的粒子. 然而, 我们将在下一节看到, 螺旋度相反的粒子通过空间反演对称性相关联. 因此, 由于电磁力和引力是空间反演对称的, 与电磁现象相联系的螺旋度为 ±1 的无质量粒子都被称为*光子*, 而螺旋度为 ±2 的, 被认为与引力相联系的无质量粒子都被称为*引力子*. 另一方面, 在核 β-衰变中发射出的粒子中可能有螺旋度为 $\pm1/2$ 的无质量粒子, 它们不参与具有空间反演对称性的相互作用(引力除外), 所以这些粒子被赋予了不同的名字: 螺旋度为 $+1/2$ 的粒子称为*中微子*, 螺旋度为 $-1/2$ 的粒子称为*反中微子*.

虽然无质量粒子的螺旋度是 Lorentz 不变的, 但态本身却不是这样. 特别地, 由于方程(2.5.42)中有依赖螺旋度的相因子 $\exp(\mathrm{i}\sigma\theta)$, 螺旋度相反的单粒子态线性叠加形成的态在一个 Lorentz 变换后会变成另一个不同的叠加. 例如, 4-动量为 p 的一般单光子态可以写成

$$\Psi_{p;\alpha}=\alpha_+\Psi_{p,+1}+\alpha_-\Psi_{p,-1}\,,$$

其中

$$|\alpha_+|^2 + |\alpha_-|^2 = 1\,.$$

一般情况下, 这是椭圆偏振的一种情况, 其中 $|\alpha_\pm|$ 非零且不相等. 圆偏振是 α_+ 和 α_- 中有一个为零的极端情况, 而线偏振是相反的极端情况, 它满足 $|\alpha_+| = |\alpha_-|$. α_+ 和 α_- 的总相位没有物理意义, 对线偏振可以调整总相位使得 $\alpha_- = \alpha_+^*$, 但是相对相位仍然是重要的. 事实上, 对于 $\alpha_- = \alpha_+^*$ 的线偏振, α_+ 的相位可以视为偏振面与某个垂直于 $\mathbf{p}$ 的固定参考系之间的夹角. 方程(2.5.42)表明, 在 Lorentz 变换 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 下, 这个角度旋转了 $\theta(\Lambda, p)$. 可以用一种类似的方式定义面偏振引力子, 此时方程(2.5.42)有如下结果: Lorentz 变换 Λ 会将偏振面旋转角度 $2\theta(\Lambda, p)$.

2.6 空间反演和时间反演

我们在 2.3 节看到, 任何齐次 Lorentz 变换要么是固有且正时的(即, $\mathrm{Det}\,\Lambda = +1$ 且 $\Lambda^0{}_0 \geq +1$)要么等于固有正时变换乘以 $\mathscr{P}$ 或 $\mathscr{T}$ 或 $\mathscr{P}\mathscr{T}$, 这里的 $\mathscr{P}$ 和 $\mathscr{T}$ 是空间反演变换和时间反演变换

$$\mathscr{P}^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathscr{T}^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Poincaré 群的基本乘积规则曾被认为是不证自明的

$$U(\bar\Lambda, \bar a)\, U(\Lambda, a) = U(\bar\Lambda\Lambda, \Lambda a + \bar a)$$

哪怕 Λ 和(或) $\bar\Lambda$ 包含 $\mathscr{P}$ 或 $\mathscr{T}$ 或 $\mathscr{P}\mathscr{T}$ 因子. 特别的, 我们相信存在对应 $\mathscr{P}$ 和 $\mathscr{T}$ 本身的算符:

$$\mathsf{P} \equiv U(\mathscr{P}, 0) \qquad \mathsf{T} \equiv U(\mathscr{T}, 0)$$

使得对任意固有正时 Lorentz 变换 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 和平移 a^μ 有

$$\mathsf{P}U(\Lambda, a)\mathsf{P}^{-1} = U(\mathscr{P}\Lambda\mathscr{P}^{-1}, \mathscr{P}a)\,, \tag{2.6.1}$$

$$\mathsf{T}U(\Lambda, a)\mathsf{T}^{-1} = U(\mathscr{T}\Lambda\mathscr{T}^{-1}, \mathscr{T}a)\,. \tag{2.6.2}$$

这些变换规则体现了我们称 $\mathscr{P}$ 或 $\mathscr{T}$ "守恒"时的大部分含义.

1956—1957 年, 人们开始明白,[8] 仅在弱作用(就是那些引起核 β-衰变的作用)效应可以忽略的近似下, 对于 P 这才是正确. 时间反演幸存了一段时间, 但在 1964 年, 出现了一些间接的证据[9]证明 T 的这些性质也只是近似地满足. (见 3.3 节.) 在下文中, 我们先假装满足方程(2.6.1)和(2.6.2)的算符 P 和 T 真地存在, 但要记住这只是一个近似.

我们将方程(2.6.1)和(2.6.2)应用于无限小变换的情况, 即,

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu \qquad a^\mu = \epsilon^\mu$$

其中 $\omega_{\mu\nu}=-\omega_{\nu\mu}$ 和 ϵ_μ 均是无限小量. 利用(2.4.3), 以及方程(2.6.1)和(2.6.2)中 $\omega_{\rho\sigma}$ 和 ϵ_ρ 的系数相等, 我们得到了 Poincaré 生成元的 P 变换性质和 T 变换性质

$$\mathsf{P}\,\mathrm{i}J^{\rho\sigma}\,\mathsf{P}^{-1}=\mathrm{i}\mathscr{P}_\mu{}^\rho\mathscr{P}_\nu{}^\sigma J^{\mu\nu}\,, \tag{2.6.3}$$

$$\mathsf{P}\,\mathrm{i}P^\rho\,\mathsf{P}^{-1}=\mathrm{i}\mathscr{P}_\mu{}^\rho P^\mu\,, \tag{2.6.4}$$

$$\mathsf{T}\,\mathrm{i}J^{\rho\sigma}\,\mathsf{T}^{-1}=\mathrm{i}\mathscr{T}_\mu{}^\rho\mathscr{T}_\nu{}^\sigma J^{\mu\nu}\,, \tag{2.6.5}$$

$$\mathsf{T}\,\mathrm{i}P^\rho\,\mathsf{T}^{-1}=\mathrm{i}\mathscr{T}_\mu{}^\rho P^\mu\,. \tag{2.6.6}$$

除了没有消掉方程两边的 i 因子, 这与方程(2.4.8)和(2.4.9)非常相像, 我们没有消掉 i 因子是因为我们现在还没有决定 P 和 T 是线性且幺正的还是反线性且反幺正的.

做出这个判断很容易. 在方程(2.6.4)中令 $\rho=0$ 给出

$$\mathsf{P}\,\mathrm{i}H\,\mathsf{P}^{-1}=\mathrm{i}H\,,$$

其中 $H\equiv P^0$ 是能量算符. 如果 P 是反线性且反幺正的, 那么它与 i 反对易, 从而 $\mathsf{P}H\mathsf{P}^{-1}=-H$. 但这样一来, 对任意能量 $E>0$ 的态 Ψ, 必存在另一个能量为 $-E<0$ 的态 $\mathsf{P}^{-1}\Psi$. 由于不存在负能态(能量小于真空的态), 所以我们被迫选择另一种可能: P 是线性和幺正的, 并且与 H 对易而非反对易.

另一方面, 在方程(2.6.6)中令 $\rho=0$ 给出

$$\mathsf{T}\,\mathrm{i}H\,\mathsf{T}^{-1}=-\mathrm{i}H\,.$$

如果我们假定 T 是线性且幺正的, 那么我们就能消掉两个 i, 并得到 $\mathsf{T}H\mathsf{T}^{-1}=-H$, 这又是一个灾难性的结果, 对于任何能量为 E 的态 Ψ, 总存在另一态 $\mathsf{T}^{-1}\Psi$, 其能量为 $-E$. 为了避免这个结果, 我们只能得到结论: T 是反线性且反幺正的.

既然我们已经确定 P 是线性而 T 是反线性的, 利用生成元(2.4.15)—(2.4.17), 我们可以方便地将方程(2.6.3)—(2.6.6)重写为三维形式

$$\mathsf{P}\mathbf{J}\mathsf{P}^{-1}=+\mathbf{J}\,, \tag{2.6.7}$$

$$\mathsf{P}\mathbf{K}\mathsf{P}^{-1}=-\mathbf{K}\,, \tag{2.6.8}$$

$$\mathsf{P}\mathbf{P}\mathsf{P}^{-1}=-\mathbf{P}\,, \tag{2.6.9}$$

$$\mathsf{T}\mathbf{J}\mathsf{T}^{-1}=-\mathbf{J}\,, \tag{2.6.10}$$

$$\mathsf{T}\mathbf{K}\mathsf{T}^{-1}=+\mathbf{K}\,, \tag{2.6.11}$$

$$\mathsf{T}\mathbf{P}\mathsf{T}^{-1}=-\mathbf{P}\,, \tag{2.6.12}$$

以及前面证明的,

$$\mathsf{P}H\mathsf{P}^{-1}=\mathsf{T}H\mathsf{T}^{-1}=H\,. \tag{2.6.13}$$

P应该保持$\mathbf{J}$的符号在物理上是合理的, 这是因为仅轨道角动量而言, 它是两个矢量的矢量积 $\mathbf{r}\times\mathbf{p}$, 在空间坐标系的反演下, 它们两个均改变符号. 另一方面, T 使 $\mathbf{J}$ 反号, 这是因为在时间反演下, 观察者将会看到所有物体向相反方向旋转. 另外, 注意到方程(2.6.10)与角动量对易关系 $\mathbf{J}\times\mathbf{J}=\mathrm{i}\mathbf{J}$相容, 这是因为 T 不仅使 $\mathbf{J}$ 反号, 也使 i 反号. 读者可以容易地证明方程(2.6.7)—(2.6.13)与所有的对易关系(2.4.18)—(2.4.24)相容.

现在, 我们来考察 P 和 T 对单粒子态做了什么:

P : $M > 0$

单粒子态$\Psi_{k,\sigma}$定义成 $\mathbf{P}$, H 和 J_3 的本征矢, 本征值分别为 0, M 和 σ. 从方程(2.6.7), (2.6.9)和(2.6.13), 我们看到对于态 $\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma}$, 这也必须成立, 因此(除非简并)这些态仅相差一个相位

$$\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma} = \eta_\sigma \Psi_{k,\sigma}$$

它的相位因子($|\eta| = 1$)可能与自旋相关, 也可能与自旋无关. 为了看到 η_σ 独立于 σ, 我们从(2.5.8), (2.5.20)和(2.5.21)看到

$$(J_1 \pm \mathrm{i}J_2)\Psi_{k,\sigma} = \sqrt{(j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1)}\, \Psi_{k,\sigma\pm1} \ , \tag{2.6.14}$$

其中 j 是粒子自旋. 两边用 P 作用, 我们发现

$$\eta_\sigma = \eta_{\sigma\pm1}$$

所以, η_σ 确实独立于 σ. 我们因此写出

$$\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma} = \eta\Psi_{k,\sigma} \tag{2.6.15}$$

其中 η 是一个相位, 被称为内禀宇称, 仅依赖于 P 所作用的粒子种类.

为了得到有限动量态, 我们必须要使用对应“增速”(2.5.24)的幺正算符 $U(L(p))$:

$$\Psi_{p,\sigma} = \sqrt{M/p^0}\, U(L(p))\, \Psi_{k,\sigma} \ .$$

我们注意到

$$\mathscr{P} L(p) \mathscr{P}^{-1} = L(\mathscr{P}p)$$
$$\mathscr{P}p = \left(-\mathbf{p}, \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}\right)$$

所以, 利用方程(2.6.1)和(2.6.15), 我们有

$$\mathsf{P}\Psi_{p,\sigma} = \sqrt{M/p^0}\, U(L(\mathscr{P}p))\eta\Psi_{k,\sigma}$$

或者, 换种形式

$$\mathsf{P}\Psi_{p,\sigma} = \eta\Psi_{\mathscr{P}p,\sigma} \ . \tag{2.6.16}$$

T : $M > 0$

从方程(2.6.10), (2.6.12)和(2.6.13)中, 我们看到 T 作用在零动量单粒子态 $\Psi_{k,\sigma}$ 的效果是产生一个态, 满足

$$\mathbf{P}(\mathsf{T}\Psi_{k,\sigma}) = 0 \ ,$$
$$H(\mathsf{T}\Psi_{k,\sigma}) = M(\mathsf{T}\Psi_{k,\sigma}) \ ,$$
$$J_3(\mathsf{T}\Psi_{k,\sigma}) = -\sigma(\mathsf{T}\Psi_{k,\sigma}) \ ,$$

因此

$$\mathsf{T}\Psi_{k,\sigma} = \zeta_\sigma \Psi_{k,-\sigma} \,,$$

其中 ζ_σ 是相因子. 用算符 T 作用(2.6.14), 而 T 又与 $\mathbf{J}$ 和 i 反对易, 我们发现

$$(-J_1 \pm \mathrm{i}J_2)\zeta_\sigma \Psi_{k,-\sigma} = \sqrt{(j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1)}\zeta_{\sigma\pm1}\Psi_{k,-\sigma\mp1} \,.$$

再在方程左边使用方程(2.6.14), 我们看到平方根因子消掉了, 于是

$$-\zeta_\sigma = \zeta_{\sigma\pm1} \,.$$

我们将这个解写成 $\zeta_\sigma = \zeta(-)^{j-\sigma}$, 其中 ζ 是另一个相位, 它只依赖粒子的种类:

$$\mathsf{T}\Psi_{k,\sigma} = \zeta(-)^{j-\sigma}\Psi_{k,-\sigma} \,. \tag{2.6.17}$$

然而, 不像"内禀宇称" η, 时间反演相位 ζ 没有物理意义. 这是因为我们可以通过改变相位来重新定义单粒子态

$$\Psi_{k,\sigma} \to \Psi'_{k,\sigma} = \zeta^{1/2}\Psi_{k,\sigma} \,.$$

这样一来, 相位 ζ 在变换规则中就被消除了

$$\mathsf{T}\Psi'_{k,\sigma} = \zeta^{*1/2}\mathsf{T}\Psi_{k,\sigma} = \zeta^{*1/2}\zeta(-)^{j-\sigma}\Psi_{k,-\sigma} = (-)^{j-\sigma}\Psi'_{k,-\sigma} \,.$$

在下文中, 我们将在方程(2.6.17)中保留这个任意相位 ζ, 这样做仅仅是为了留有一个选择相位的余地, 但应记住这个相位不是真正重要的.

为了处理有限动量态, 我们再次使用"增速"(2.5.24). 注意到

$$\mathscr{T}L(p)\mathscr{T}^{-1} = L(\mathscr{P}p) \,,$$

$$\mathscr{P}p = \left(-\mathbf{p}, \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}\right) \,.$$

(这就是说, 在 $L^\mu{}_\nu$ 中, 对于那些带有奇数个时间指标的元素, 和那些带有奇数个空间指标的元素, 改变前者的符号等于改变后者的符号) 利用方程(2.6.2)和(2.5.5), 我们就有

$$\mathsf{T}\Psi_{p,\sigma} = \zeta(-)^{j-\sigma}\Psi_{\mathscr{P}p,-\sigma} \,. \tag{2.6.18}$$

P : $M = 0$

态 $\Psi_{k,\sigma}$ 的定义是 P^μ 和 J_3 本征矢, 本征值分别是 $k^\mu = (0,0,\kappa,\kappa)$ 和 σ, 当宇称算符 P 作用在这个态上时, 它会产生四动量为 $(\mathscr{P}k)^\mu = (0,0,-\kappa,\kappa)$ 而 J_3 等于 σ 的态. 因此, 它使螺旋度(自旋在运动方向上的投影)为 σ 的态变成螺旋度为 $-\sigma$ 的态. 正如前面提到的, 这证明了存在空间反演对称性将会要求任何种类的螺旋度非零的无质量粒子都必须伴随着另一个螺旋度相反的粒子. 由于 P 并不保持标准动量不变, 考察算符 $U(R_2^{-1})\mathsf{P}$ 反而更方便, 这里的 R_2 也是一个能使 k 变为 $\mathscr{P}k$ 的旋转, 可以方便地选成绕第2轴的 180° 旋转

$$U(R_2) = \exp(\mathrm{i}\pi J_2) \,. \tag{2.6.19}$$

由于 $U(R_2^{-1})$ 使 J_3 变号, 我们有

$$U(R_2^{-1})\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma} = \eta_\sigma \Psi_{k,-\sigma} \tag{2.6.20}$$

其中 η_σ 是相因子. 现在, $R_2^{-1}\mathscr{P}$ 与 Lorentz "增速"(2.5.45)对易, 并且 $\mathscr{P}$ 与使第3轴朝向 $\mathbf{p}$ 方向的旋转 $R(\hat{\mathbf{p}})$ 对易, 所以, 通过用 P 作用(2.5.5), 对于一般四动量 p^μ, 我们发现

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\Psi_{p,\sigma} &= \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}}\,U\left(R(\hat{\mathbf{p}})R_2B\left(\frac{|\mathbf{p}|}{\kappa}\right)\right)U(R_2^{-1})\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma}\\ &= \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}}\,\eta_\sigma\,U\left(R(\hat{\mathbf{p}})R_2B\left(\frac{|\mathbf{p}|}{\kappa}\right)\right)\Psi_{k,-\sigma}\,.\end{aligned}$$

注意到 $R(\hat{\mathbf{p}})R_2$ 是使第3轴转向 $-\hat{\mathbf{p}}$ 方向的旋转, 但是 $U(R(\hat{\mathbf{p}})R_2)$ 并不等于 $U(R(-\hat{\mathbf{p}}))$. 根据(2.5.47),

$$U(R(-\hat{\mathbf{p}})) = \exp\Big(-\mathrm{i}(\phi\pm\pi)J_3\Big)\,\exp\Big(-\mathrm{i}(\pi-\theta)J_2\Big)$$

其中, 根据 $0\le\phi<\pi$ 还是 $\pi\le\phi<2\pi$, 分别将方位角选成 $\phi+\pi$ 或 $\phi-\pi$, 使得方位角保持在 0 到 2π 的范围内. 于是

$$\begin{aligned}U^{-1}\Big(R(-\hat{\mathbf{p}})\Big)U\Big(R(\hat{\mathbf{p}})R_2\Big) &= \exp\Big(\mathrm{i}(\pi-\theta)J_2\Big)\\ &\quad\times\exp\Big(\mathrm{i}(\phi\pm\pi)J_3\Big)\exp(-\mathrm{i}\phi J_3)\exp(-\mathrm{i}\theta J_2)\exp(\mathrm{i}\pi J_2)\\ &= \exp\Big(\mathrm{i}(\pi-\theta)J_2\Big)\exp(\pm\mathrm{i}\pi J_3)\exp\Big(\mathrm{i}(\pi-\theta)J_2\Big)\,.\end{aligned}$$

但是绕第3轴的 $\pm180^\circ$ 旋转会改变 J_2 的符号, 所以

$$U\Big(R(\hat{\mathbf{p}})R_2\Big) = U\Big(R(-\hat{\mathbf{p}})\Big)\exp(\pm\mathrm{i}\pi J_3)\,. \tag{2.6.21}$$

另外, $R(-\hat{\mathbf{p}})B(|\mathbf{p}|/\kappa)$ 正是 $\mathscr{P}p=(-\mathbf{p},p^0)$方向上的标准增速 $L(\mathscr{P}p)$. 于是, 我们最终有

$$\mathsf{P}\Psi_{p,\sigma} = \eta_\sigma\exp(\mp\mathrm{i}\pi\sigma)\Psi_{\mathscr{P}p,-\sigma} \tag{2.6.22}$$

其中, 根据 $\mathbf{p}$ 的第二个分量是正还是负, 相位分别是 $-\pi\sigma$ 或 $+\pi\sigma$. 对于半整数自旋的无质量粒子, 宇称算符中符号的古怪改变是由于方程(2.5.47)中用于定义任意动量的无质量粒子态的旋转时所采取的约定. 因为旋转群不是单连通的, 这样的一些不连续性是不可避免的.

T : $M=0$

态对 P^μ 和 J_3 有本征值 $k^\mu=(0,0,\kappa,\kappa)$ 和 σ, 当时间反演算符 T 作用在态 $\Psi_{k,\sigma}$ 上时, 得到的态对 P^μ 和 J_3 有本征值 $(\mathscr{P}k)^\mu=(0,0,-\kappa,\kappa)$ 和 $-\sigma$. 因此, T 不改变螺旋度 $\mathbf{J}\cdot\hat{k}$, 并且也没有说明螺旋度为 σ 的无质量粒子是否要伴随另一个螺旋度为 $-\sigma$ 的粒子. 因为 T 像 P 一样并不保标准四动量 k 不变, 考察生成元 $U(R_2^{-1})\mathsf{T}$ 要方便一些, 这里的 R_2 是旋转(2.6.19), 它也使 k 变为 $\mathscr{P}k$. 这个生成元与 J_3 对易, 所以

$$U(R_2^{-1})\,\mathsf{T}\,\Psi_{k,\sigma} = \zeta_\sigma\Psi_{k,\sigma} \tag{2.6.23}$$

其中 ζ_σ 是另一相位. 由于 $R_2^{-1}\mathscr{T}$ 与"增速"(2.5.45)对易, 并且 $\mathscr{T}$ 与旋转 $R(\hat{p})$ 对易, 用 T 作用在态(2.5.5)上给出

$$\mathsf{T}\Psi_{p,\sigma} = \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}}\,U\left[R(\hat{\mathbf{p}})R_2B\left(\frac{|\mathbf{p}|}{\kappa}\right)\right]\zeta_\sigma\Psi_{k,\sigma}\,. \tag{2.6.24}$$

利用方程(2.6.21), 最终得到

$$\mathsf{T}\Psi_{p,\sigma} = \zeta_\sigma\exp(\pm\mathrm{i}\pi\sigma)\Psi_{\mathscr{P}p,\sigma}\,. \tag{2.6.25}$$

再一次的, 正负号分别对应于 $\mathbf{p}$ 的第2分量是正的还是负的.

* * *

一个有趣的事情是, 时间反演算符的平方 T^2 在有质量和无质量单粒子态上的作用都是非常简单的. 利用方程(2.6.18), 并考虑到 T 是反幺正的, 对于有质量单粒子态, 我们看到:

$$\mathsf{T}^2\Psi_{p,\sigma} = \mathsf{T}\zeta(-)^{j-\sigma}\Psi_{\mathscr{P}p,-\sigma} = \zeta^*(-)^{j-\sigma}\zeta(-)^{j+\sigma}\Psi_{p,\sigma}$$

换句话说

$$\mathsf{T}^2\Psi_{p,\sigma} = (-)^{2j}\Psi_{p,\sigma}\ . \tag{2.6.26}$$

对于无质量粒子我们会得到相同的结果. 如果 $\mathbf{p}$ 的第2分量是正的, 那么 $\mathscr{P}\mathbf{p}$ 的第2分量就是负的, 反之亦然. 所以, 方程(2.6.25)给出

$$\begin{aligned}\mathsf{T}^2\Psi_{p,\sigma} &= \mathsf{T}\zeta_\sigma \exp(\pm i\pi\sigma)\Psi_{\mathscr{P}p,\sigma} = \zeta_\sigma^* \exp(\mp i\pi\sigma)\zeta_\sigma \exp(\mp i\pi\sigma)\Psi_{p,\sigma}\\ &= \exp(\mp 2i\pi\sigma)\Psi_{p,\sigma}\ .\end{aligned}$$

只要 σ 是整数或半整数, 这个结果就可以写成

$$\mathsf{T}^2\Psi_{p,\sigma} = (-)^{2|\sigma|}\Psi_{p,\sigma}\ . \tag{2.6.27}$$

对于无质量粒子的"自旋", 我们通常说的是它的螺旋度的绝对值, 所以方程(2.6.27)与方程(2.6.26)是相同的.

这个结果有一个有趣的推论. 当 T^2 作用在无相互作用粒子系统的任意态 Ψ 上时, 无论这个态有质量还是无质量, 它对于每个粒子都会产生因子 $(-)^{2j}$ 或 $(-)^{2|\sigma|}$. 因此, 如果这个态包含奇数个自旋或螺旋度为半整数的粒子(加上任意个自旋或螺旋度为整数的粒子), 我们会得到一个总的符号改变

$$\mathsf{T}^2\Psi = -\Psi\ . \tag{2.6.28}$$

如果我们现在"打开"各种相互作用, 并假定这些相互作用在时间反演下不变, 即使它们不遵守旋转不变性, 这个结果也仍将成立. (例如, 即使我们的系统处在任意静引力场和静电场中, 这些讨论仍可以使用.) 现在, 假设态 Ψ 是哈密顿量的本征态. 由于 T 与哈密顿量对易, $\mathsf{T}\Psi$ 也是该哈密顿量的本征态. 它们是同一个态吗? 如果是, 那么 $\mathsf{T}\Psi$ 与 Ψ 的差异只能是一个相位

$$\mathsf{T}\Psi = \zeta\Psi\ ,$$

但这样一来

$$\mathsf{T}^2\Psi = \mathsf{T}(\zeta\Psi) = \zeta^*\mathsf{T}\Psi = |\zeta|^2\Psi = \Psi\ ,$$

这与方程(2.6.28)矛盾. 我们看到任何满足方程(2.6.28)的能量本征态都必然会与另一能量相同的本征态简并. 这就是所谓的"Kramers(克拉莫斯)简并性".[10] 当然, 如果系统处在旋转不变的环境下, 这个结论是平庸的, 这是因为在这个系统的任何态, 其总角动量只能是半整数, 因此一定会有 $2j+1 = 2, 4, \cdots$ 个简并态. 一个令人惊奇的结果是, 即使旋转不变性被诸如静电场这样的外场扰动了, 只要这些场在 T 下不变, 至少二重简并性还是会保留下来. 特别的, 如果粒子有电偶极矩或引力偶极矩, 那么在静电场和静引力场中, 它的 $2j+1$ 个自旋态的简并性将被完全消除, 这使得这样的偶极矩被时间反演不变性禁止.

完整起见, 我们还应提及 P 和 T 对质量相同的粒子多重态会有更加复杂的效应. 这种可能性将在本章的附录C进行考察. 不过还没有已知的与物理相关的例子.

2.7 投影表示*

我们现在回到2.2节提到的那个可能性, 对称群可以在物理态上投影表示; 即, 对称群的群元$T,\bar{T}$等在物理态Hilbert 空间上可以被$U(T),U(\bar{T})$等表示, 而这些算符满足合成规则

$$U(T)U(\bar{T})=\exp\Big(\mathrm{i}\phi(T,\bar{T})\Big)U(T,\bar{T})\,, \tag{2.7.1}$$

其中ϕ是实相位. (这里使用的上划线仅是为了区分不同的对称算符.) 方程(2.7.1)中的相位需要满足的基本要求是结合律

$$U(T_3)(U(T_2)U(T_1))=(U(T_3)U(T_2))U(T_1)\,,$$

它在ϕ上给出的相应条件是

$$\phi(T_2,T_1)+\phi(T_3,T_2T_1)=\phi(T_3,T_2)+\phi(T_3T_2,T_1)\,. \tag{2.7.2}$$

显然, 如果相位的形式是

$$\phi(T,\bar{T})=\alpha(T\bar{T})-\alpha(T)-\alpha(\bar{T})\,, \tag{2.7.3}$$

那么它将自动满足方程(2.7.2), 但是, 通过对$U(T)$做替换

$$\tilde{U}(T)\equiv U(T)\exp\Big(\mathrm{i}\alpha(T)\Big)$$

带有这种相位的投影表示就被替换成了普通表示, 对$\tilde{U}$有

$$\tilde{U}(T)\tilde{U}(\bar{T})=\tilde{U}(T\bar{T})\,.$$

满足方程(2.7.2)的函数$\phi(T,\bar{T})$加上仅相差形如(2.7.3)的$\Delta\phi(T,\bar{T})$的函数, 这些函数构成的任意集合被称为"2-闭上链"(two-cocycle). 平庸的闭上链是包含函数$\phi=0$的那个, 因此由形如(2.7.3)的函数构成, 它可以通过重新定义$U(T)$被消除掉. 这里我们感兴趣的是一个对称群是否允许任意的非平庸2-闭上链; 也就是说, 在物理Hilbert空间上是否可以有一个表示是内禀投影的, 在这个意义下, 相位$\phi(T,\bar{T})$无法以这种方式消除掉.

为了回答这个问题, 首先来考察方程(2.7.1)中的相位ϕ对无限小旋转生成元的对易关系的影响. 当$\bar{T}$或T中有一个是单位算符, 相位ϕ显然为零

$$\phi(T,1)=\phi(1,\bar{T})=0\,. \tag{2.7.4}$$

当$\bar{T}$和T很接近单位算符时, 相位一定很小. 用坐标θ^a来参数化群元(就像2.2节), 再加上$T(0)\equiv 1$, 方程(2.7.4)告诉我们$\phi(T(\theta),T(\bar{\theta}))$ 在$\theta=\bar{\theta}=0$附近的展开是必须从$\theta\bar{\theta}$阶项开始:

$$\phi\Big(T(\theta),T(\bar{\theta})\Big)=f_{ab}\theta^a\bar{\theta}^b+\cdots\,, \tag{2.7.5}$$

其中f_{ab}是实常数. 将这个展开式代入方程(2.7.1)的级数展开式, 并重复导出(2.2.22)的步骤, 我们现在有

$$[t_b,t_c]=\mathrm{i}C^a{}_{bc}t_a+\mathrm{i}C_{bc}1\,, \tag{2.7.6}$$

*本节有些脱离本书的发展主线, 可以在第一次阅读时跳过.

其中 C_{bc} 是反对称系数

$$C_{bc} = -f_{bc} + f_{cb} \,. \tag{2.7.7}$$

在对易关系右边出现了正比于单位元的项(所谓的中心荷), 这正是群的投影表示出现相位在 Lie 代数上的效果.

常数 C_{bc} 以及 $C^a{}_{bc}$ 服从一个重要约束, 这一约束来源于 Jacobi 恒等式. 取(2.7.6)与t_d的对易子, 再加上将 b, c, d 换成 c, d, b 和 d, b, c 的表达式, 左边的三个双重对易子的和恒等于零, 所以

$$C^a{}_{bc}C^e{}_{ad} + C^a{}_{cd}C^e{}_{ab} + C^a{}_{db}C^e{}_{ac} = 0 \tag{2.7.8}$$

以及

$$C^a{}_{bc}C_{ad} + C^a{}_{cd}C_{ab} + C^a{}_{db}C_{ac} = 0 \,. \tag{2.7.9}$$

对于 C_{ab}, 方程(2.7.9)有一类显然的非零解:

$$C_{ab} = C^e{}_{ab}\phi_e \,, \tag{2.7.10}$$

其中 ϕ_e 是任意一组实常数. 对这些解, 我们可以通过重新定义生成元从方程(2.7.6)中消除中心荷

$$t_a \to \tilde{t}_a \equiv t_a + \phi_a \,. \tag{2.7.11}$$

这样, 新的生成元就满足没有中心荷的对易关系

$$[\tilde{t}_b, \tilde{t}_c] = \mathrm{i}C^a{}_{bc}\tilde{t}_a \,. \tag{2.7.12}$$

取决于具体情况, 一个给定的Lie代数可能允许方程(2.7.9)有除了方程(2.7.10)以外的其它解, 也可能不允许.

现在, 我们可以陈述决定内禀投影表示是否存在的关键定理. 对于给定群的任意表示 $U(T)$, 如果满足以下两个条件:

(a) 在该表示中, 可以通过重新定义群的生成元(像方程(2.7.11)中那样)消除Lie代数中的所有中心荷.

(b) 群是单连通的, 即任意两个群元可以被群内的一条路径连接, 并且任意两个这样的路径可以连续地变换到彼此. (一个等价的表述是: 开始并结束于同一群元的环路可以连续地收缩到一个点.)

那么我们就可以选择 $U(T)$ 的相位使得方程(2.7.1)中的$\phi = 0$.

本章的附录B会给出这个定理的证明, 同时还给出了对非单连通群的一些评论. 它证明了仅有两种方式(彼此不是不相容的)会有内禀投影表示: 要么是代数的, 这是因为即使在单位元附近, 群也是投影表示的, 要么是拓扑的, 因为这个群不是单连通的, 所以从 1 到 T 然后从 T 到 $\bar{T}$ 的路径不能连续的变形成某个从 1 到 $T\bar{T}$ 的路径. 在后一种情况下, 方程(2.7.1)中的相位 ϕ 依赖于对从原点到达不同群元的标准路径的选择, 这被用来定义对应的 U-算符.

现在, 对非齐次 Lorentz 群这个特殊情况, 依次考察这些可能性.

(A) 代数

有中心荷的情况下, 代替方程(2.4.12)—(2.4.14), 非齐次 Lorentz 群生成元的对易关系是

$$\begin{aligned}\mathrm{i}[J^{\mu\nu},J^{\rho\sigma}] &= \eta^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}-\eta^{\mu\rho}J^{\nu\sigma}-\eta^{\sigma\mu}J^{\rho\nu}\\ &\quad+\eta^{\sigma\nu}J^{\rho\mu}+C^{\rho\sigma,\mu\nu}\,, \qquad (2.7.13)\\ \mathrm{i}[P^{\mu},J^{\rho\sigma}] &= \eta^{\mu\rho}P^{\sigma}-\eta^{\mu\sigma}P^{\rho}+C^{\rho\sigma,\mu}\,, \qquad (2.7.14)\\ \mathrm{i}[J^{\mu\nu},P^{\rho}] &= \eta^{\nu\rho}P^{\mu}-\eta^{\mu\rho}P^{\nu}+C^{\rho,\mu\nu}\,, \qquad (2.7.15)\\ \mathrm{i}[P^{\mu},P^{\rho}] &= C^{\rho,\mu} \qquad (2.7.16)\end{aligned}$$

我们看到, 这些C也满足反对称条件

$$C^{\rho\sigma,\mu\nu}=-C^{\mu\nu,\rho\sigma}\,, \qquad (2.7.17)$$

$$C^{\rho\sigma,\mu}=-C^{\mu,\rho\sigma}\,, \qquad (2.7.18)$$

$$C^{\rho,\mu}=-C^{\mu,\rho}\,. \qquad (2.7.19)$$

我们现在要证明所有这些常数都有额外的代数性质, 这些性质使得可以通过将 $J^{\mu\nu}$ 和 P^{μ} 的定义偏移一个常数项将这些常数消掉. (这相当于重新定义算符 $U(\Lambda,a)$ 的相位.) 为了导出这些性质, 我们应用 Jacobi 等式

$$\Big[J^{\mu\nu},[P^{\rho},P^{\sigma}]\Big]+\Big[P^{\sigma},[J^{\mu\nu},P^{\rho}]\Big]+\Big[P^{\rho},[P^{\sigma},J^{\mu\nu}]\Big]=0\,, \qquad (2.7.20)$$

$$\Big[J^{\lambda\eta},[J^{\mu\nu},P^{\rho}]\Big]+\Big[P^{\rho},[J^{\lambda\eta},J^{\mu\nu}]\Big]+\Big[J^{\mu\nu},[P^{\rho},J^{\lambda\eta}]\Big]=0\,, \qquad (2.7.21)$$

$$\Big[J^{\lambda\eta},[J^{\mu\nu},J^{\rho\sigma}]\Big]+\Big[J^{\rho\sigma},[J^{\lambda\eta},J^{\mu\nu}]\Big]+\Big[J^{\mu\nu},[J^{\rho\sigma},J^{\lambda\eta}]\Big]=0\,. \qquad (2.7.22)$$

(包含三个 P 的 Jacobi 恒等式自动满足, 因而不会给出进一步信息.) 在方程(2.7.20)—(2.7.22)中使用方程(2.7.13)—(2.7.16), 我们得到了 C 上的代数条件

$$0=\eta^{\nu\rho}C^{\mu,\sigma}-\eta^{\mu\rho}C^{\nu,\sigma}-\eta^{\nu\sigma}C^{\mu,\rho}+\eta^{\mu\sigma}C^{\nu,\rho}\,, \qquad (2.7.23)$$

$$\begin{aligned}0 &= \eta^{\nu\rho}C^{\mu,\lambda\eta}-\eta^{\mu\rho}C^{\nu,\lambda\eta}-\eta^{\mu\eta}C^{\rho,\lambda\nu}+\eta^{\lambda\mu}C^{\rho,\eta\nu}\\ &\quad+\eta^{\lambda\nu}C^{\rho,\mu\eta}-\eta^{\eta\nu}C^{\rho,\mu\lambda}+\eta^{\rho\lambda}C^{\eta,\mu\nu}-\eta^{\rho\eta}C^{\lambda,\mu\nu}\,, \qquad (2.7.24)\\ 0 &= \eta^{\nu\rho}C^{\mu\sigma,\lambda\eta}-\eta^{\mu\rho}C^{\nu\sigma,\lambda\eta}-\eta^{\sigma\mu}C^{\rho\nu,\lambda\eta}+\eta^{\sigma\nu}C^{\rho\mu,\lambda\eta}\\ &\quad+\eta^{\eta\mu}C^{\lambda\nu,\rho\sigma}-\eta^{\lambda\mu}C^{\eta\nu,\rho\sigma}-\eta^{\nu\lambda}C^{\mu\eta,\rho\sigma}+\eta^{\nu\eta}C^{\mu\lambda,\rho\sigma}\\ &\quad+\eta^{\sigma\lambda}C^{\rho\eta,\mu\nu}-\eta^{\rho\lambda}C^{\sigma\eta,\mu\nu}-\eta^{\eta\rho}C^{\lambda\sigma,\mu\nu}+\eta^{\eta\sigma}C^{\lambda\rho,\mu\nu}\,. \qquad (2.7.25)\end{aligned}$$

用 $\eta_{\nu\rho}$ 收缩方程(2.7.23)给出

$$C^{\mu,\sigma}=0\,. \qquad (2.7.26)$$

另一方面, 常数 $C^{\mu,\lambda\eta}$ 和 $C^{\rho\sigma,\mu\nu}$ 不一定是零, 但是它们的代数结构非常简单, 这使得我们可以通过分别偏移 P^{μ} 和 $J^{\mu\nu}$ 的定义消掉它们. 用 $\eta_{\nu\rho}$ 收缩方程(2.7.24)给出

$$C^{\mu,\lambda\eta}=\eta^{\mu\eta}C^{\lambda}-\eta^{\mu\lambda}C^{\eta}\,, \qquad (2.7.27)$$

$$C^{\lambda}\equiv\frac{1}{3}\,\eta_{\rho\nu}C^{\rho,\lambda\nu}\,. \qquad (2.7.28)$$

另外, 用 $\eta_{\nu\rho}$ 收缩方程(2.7.25)给出

$$C^{\mu\sigma,\lambda\eta} = \eta^{\eta\mu}C^{\lambda\sigma} - \eta^{\lambda\mu}C^{\eta\sigma} + \eta^{\sigma\lambda}C^{\eta\mu} - \eta^{\eta\sigma}C^{\lambda\mu}\,, \tag{2.7.29}$$

$$C^{\lambda\sigma} \equiv \frac{1}{2}\,\eta_{\nu\rho}C^{\lambda\nu,\sigma\rho}\,. \tag{2.7.30}$$

(这些表达式自动满足方程(2.7.24)和(2.7.25), 所以我们无法从Jacobi恒等式得到进一步信息.) 我们现在看到, 如果这些 C 不为零, 通过定义新的生成元, 它们可以被消除

$$\tilde{P}^{\mu} \equiv P^{\mu} + C^{\mu}\,, \tag{2.7.31}$$

$$\tilde{J}^{\mu\sigma} \equiv J^{\mu\sigma} + C^{\mu\sigma}\,, \tag{2.7.32}$$

这样, 它们的对易关系就是一个普通表示的对易关系

$$\mathrm{i}[\tilde{J}^{\mu\nu}, \tilde{J}^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho}\tilde{J}^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}\tilde{J}^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu}\tilde{J}^{\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu}\tilde{J}^{\rho\mu}\,, \tag{2.7.33}$$

$$\mathrm{i}[\tilde{J}^{\mu\nu}, \tilde{P}^{\rho}] = \eta^{\nu\rho}\tilde{P}^{\mu} - \eta^{\mu\rho}\tilde{P}^{\nu}\,, \tag{2.7.34}$$

$$\mathrm{i}[\tilde{P}^{\mu}, \tilde{P}^{\rho}] = 0\,. \tag{2.7.35}$$

对易关系将总被取成方程(2.7.33)—(2.7.35)的形式, 但是去掉了上面的波浪符号.

顺便地提一下, $J^{\mu\nu}$ 的代数没有中心荷这个性质也可以立即从这类代数的"半单"性推断出来. (半单 Lie 代数是那些没有"不变阿贝尔"子代数的代数, 不变阿贝尔子代数由那些互相对易的生成元组成, 同时这些生成元与其它生成元的对易子也属于这个子代数.) 有一个普适定理[11]: 半单 Lie 代数中的任何中心荷总可以通过生成元的重定义被消掉, 就像方程(2.7.32)中那样. 另一方面, $J^{\mu\nu}$ 和 P^{μ} 张开的全 Poincaré 代数不是半单的(P^{μ} 构成一个不变阿贝尔子代数), 因此我们需要一个专门的讨论来证明它的中心荷也可以用这种方式消除掉. 诚然, 2.4 节讨论的非半单的伽利略代数确实允许一个中心荷, 即质量M.

我们看到非齐次 Lorentz 群满足将内禀投影表示排除在外的第一个条件. 那么第二个呢?

(B) 拓扑

为了研究非齐次 Lorentz 群的拓扑, 将齐次 Lorentz 变换表示成 2×2 复矩阵是非常方便的. 任何一个实 4-矢 V^{μ} 都可以用来构造一个厄米 2×2 矩阵

$$v \equiv V^{\mu}\sigma_{\mu} = \begin{pmatrix} V^0 + V^3 & V^1 - \mathrm{i}V^2 \\ V^1 + \mathrm{i}V^2 & V^0 - V^3 \end{pmatrix}\,, \tag{2.7.36}$$

其中 σ_{μ} 是通常的 Pauli 矩阵并有 $\sigma_0 \equiv 1$. 反过来, 任何 2×2 厄米矩阵都可以写成这种形式, 因此定义了一个实 4-矢 V^{μ}.

厄米性会在如下变换下保留下来

$$v \to \lambda v \lambda^{\dagger} \tag{2.7.37}$$

其中 λ 是任意的 2×2 复矩阵. 更进一步, 4-矢的协变平方是

$$V_{\mu}V^{\mu} = (V^1)^2 + (V^2)^2 + (V^3)^2 - (V^0)^2 = -\operatorname{Det} v \tag{2.7.38}$$

并且只要

$$|\operatorname{Det}\lambda| = 1\,. \tag{2.7.39}$$

变换(2.7.37)就可以保这个行列式不变. 因此每个满足方程(2.7.39)的 2×2 复矩阵定义了一个保方程(2.7.38)不变的 V^μ 的实线性变换, 即齐次 Lorentz 变换 $\Lambda(\lambda)$:

$$\lambda V^\mu \sigma_\mu \lambda^\dagger = (\Lambda^\mu{}_\nu(\lambda) V^\nu)\sigma_\mu \,. \tag{2.7.40}$$

更进一步, 对于两个这样的矩阵 λ 和 $\bar\lambda$, 我们有

$$\begin{aligned}(\lambda\bar\lambda)V^\mu\sigma_\mu(\lambda\bar\lambda)^\dagger &= \lambda(\bar\lambda V^\mu\sigma_\mu\bar\lambda^\dagger)\lambda^\dagger \\ &= \lambda\Lambda^\mu{}_\nu(\bar\lambda)V^\nu\sigma_\mu\lambda^\dagger = \Lambda^\mu{}_\rho(\lambda)\Lambda^\rho{}_\nu(\bar\lambda)V^\nu\sigma_\mu\end{aligned}$$

因此

$$\Lambda(\lambda\bar\lambda) = \Lambda(\lambda)\Lambda(\bar\lambda)\,. \tag{2.7.41}$$

然而, 如果两个 λ 仅相差一个总相位, 那么它们对于方程(2.7.37)中的 v 有相同的效果, 因此对应同一个 Lorentz 变换. 因此, 调整 λ 的相位, 使得

$$\mathrm{Det}\,\lambda = 1\,, \tag{2.7.42}$$

这将方便我们的讨论, 并且它与方程(2.7.41)是一致的. 这个行列式为 1 的 2×2 复矩阵构成一个群, 这个群被称为 $SL(2,C)$. (SL 代表"特殊线性(special linear)", "特殊"是指行列式为 1, 而 C 代表"复数".) 这个群的群元依赖 $4-1=3$ 个复参量, 或者说 6 个实参量, 这与 Lorentz 群的独立参量个数是相同的. 然而, $SL(2,C)$ 并不等于 Lorentz 群; 如果 λ 是 $SL(2,C)$ 中的一个矩阵, 那么 $-\lambda$ 也是, 并且 λ 和 $-\lambda$ 在方程(2.7.37)中给出的 Lorentz 变换相同. 其实, 很容易看到矩阵

$$\lambda(\theta) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}\end{pmatrix}$$

产生的 Lorentz 变换 $\Lambda(\lambda(\theta))$ 是一个绕第 3 轴的旋转, 旋转角度是 θ, 因此 $\lambda=-1$ 产生的是角度为 2π 的旋转. Lorentz群与 $SL(2,C)$ 不相同, 但与[**] $SL(2,C)/Z_2$相同, 这个群由行列式为 1 的2×2复矩阵构成, 并且在这个群中 λ 与 $-\lambda$ 等价.

现在的问题是, Lorentz 群的拓扑是什么? 通过极分解定理,[12] 任何非奇异复矩阵 λ 可以写成如下的形式

$$\lambda = u\,\mathrm{e}^h\,,$$

其中 u 幺正, h 厄米

$$u^\dagger u = 1\,, \qquad\qquad h^\dagger = h\,.$$

因为 $\mathrm{Det}\,u$ 是相因子, 并且 $\mathrm{Det}\exp h = \exp\mathrm{Tr}\,h$ 是正实的, 条件(2.7.42)要求

$$\begin{aligned}&\mathrm{Det}\,u = 1\,,\\ &\mathrm{Tr}\,h = 0\,.\end{aligned}$$

[**] 群 Z_2 仅由元素 $+1$ 和 -1 构成. 一般而言, 当我们写出 G/H, 其中 H 是 G 的不变子群, 我们是指, 在群 G 中, 如果 $g\in G$ 且 $h\in H$, 那么就把 g 和 gh 等同起来. 子群 Z_2 是平庸的不变子群, 这是因为它的元素与 $SL(2,C)$ 的所有元素都对易.

(因子 u 给出了 Lorentz 群的旋转子群; 如果 u 是幺正的, 那么 $\mathrm{Tr}(uvu^\dagger)=\mathrm{Tr}\,v$, 所以 $V^0=\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,v$ 在变换 $\Lambda(u)$ 下不变.) 更进一步, 这个分解是唯一的, 所以 $SL(2,C)$在拓扑上就是全体 u 构成的空间与全体 h 构成的空间的直积(即, 成对点的集合). 任何 2×2 无迹厄米矩阵 h 可以表示为

$$h=\begin{pmatrix} c & a-\mathrm{i}b \\ a+\mathrm{i}b & -c \end{pmatrix}$$

其中除了 a,b,c 是实数之外没有其它约束, 所以全体 h 构成的空间在拓扑上与普通的三维平直空间 R_3 相同. 另一方面, 任何行列式为 1 的 2×2 幺正矩阵可以表示为

$$u=\begin{pmatrix} d+\mathrm{i}e & f+\mathrm{i}g \\ -f+\mathrm{i}g & d-\mathrm{i}e \end{pmatrix}$$

其中 d,e,f,g 服从非线性约束

$$d^2+e^2+f^2+g^2=1\,,$$

所以全体 u 构成的空间 $SU(2)$ 在拓扑上与 S_3 相同, 即四维平直空间中的四维球的三维表面. 因此 $SL(2,C)$ 在拓扑上与直积空间 $R_3\times S_3$ 相同. 它是单连通的: 在 R_3 或 S_3 中, 连接两点的任意曲线可以变换到彼此, 这对于直积空间也同样成立. (除了圆 S_1 以外的所有球面 S_n 都是单连通的.) 然而, 我们感兴趣的不是 $SL(2,C)$ 而是 $SL(2,C)/Z_2$. 等同λ 与 $-\lambda$ 就是等同幺正因子 u 和 $-u$ (因为 e^h 总是正的), 所以 Lorentz 群拥有 $R_3\times S_3/Z_2$ 的拓扑, 其中 S_3/Z_2 是对径点等同后的三维球面. 它不是单连通的; 例如, S_3 上从 u 到 u' 的路径不能连续变换成 u 到 $-u'$ 的路径, 哪怕这两个路径连接的是 S_3/Z_2 上的同一个点. 事实上, S_3/Z_2 是双连通的; 任意两点间的路径根据它们是否包含反演 $u\to-u$ 而被分成两类, 同一类中的路径可以连续变换到彼此. 一个等价表述是双圈可以连续地收缩到一个点, 即从任意元素出发沿相同路径走两次回到它自身的路径可以连续地收缩到一个点. (如附录B所讨论的, 在数学上, 这个结果表述为, S_3/Z_2 的基本群或者说第一同伦群是 Z_2.) 类似地, 非齐次 Lorentz 群与 $R_4\times R_3\times S_3/Z_2$ 有相同的拓扑, 因而也是双连通的.

因为Lorentz 群(齐次或非齐次的)不是单连通的, 它具有内禀投影表示. 然而, 由于从 1 到 Λ 再到 $\Lambda\bar\Lambda$ 再回到 1 的路径走两次构成的双圈能收缩至一个点, 我们必须有

$$\left[U(\Lambda)U(\bar\Lambda)U^{-1}(\Lambda\bar\Lambda)\right]^2=1$$

因此相位 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(\Lambda,\bar\Lambda)}$ 只能是正负号

$$U(\Lambda)U(\bar\Lambda)=\pm U(\Lambda\bar\Lambda)\,. \tag{2.7.43}$$

同样, 对非齐次 Lorentz 群有

$$U(\Lambda,a)U(\bar\Lambda,\bar a)=\pm U(\Lambda\bar\Lambda,\Lambda\bar a+a)\,. \tag{2.7.44}$$

这些“相差一个正负号的表示”对我们而言是熟悉的; 它们就是整数自旋态和半整数自旋态, 对于整数自旋态, 方程(2.7.43)和(2.7.44)中的符号总是 $+1$, 对于半整数自旋态, 根据从 1 到 Λ 再到 $\Lambda\bar\Lambda$ 再回到 1 的路径能否收缩成一个点, 这些符号分别取 $+1$ 或者 -1. 产生这个差异的原因是: 绕第 3 轴角度为 2π 的旋转作用在角动量第 3 分量为 σ 的态上会产生相位 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\sigma}$, 因此对整数自旋态没有影响, 但作用在半整数自旋态上会产生一个符号变化. (这两种情况对应第一同伦群 Z_2 的两

个不可约表示.) 因此, 方程(2.7.43)或方程(2.7.44)附加了一个超选择定则: 我们不能混合整数自旋态和半整数自旋态.

对于有限质量, 对整数或半整数自旋的限制是预先用纯代数方法从熟知的小群生成元的表示中导出的, 这里的小群生成元就是角动量矩阵 $\vec{J}^{(j)}$, 其中 j 是整数或半整数. 另一方面, 对于零质量, 小群在物理单粒子态上的作用就是绕动量方向的旋转, 并且这里没有代数上的原因去限制螺旋度为整数或半整数. 但是, 这里有一个拓扑上的原因: 绕动量方向角度为 4π 的旋转可以连续地变换成完全不旋转, 所以因子 $\exp(4\pi i\sigma)$ 必须是 1, 因此 σ 必须是整数或半整数.

代替采用投影表示并附加超选择定则的做法, 我们也可以扩张 Lorentz 群, 将其取成 $SL(2,C)$ 本身, 而不是像前面一样取成 $SL(2,C)/Z_2$. 通常的旋转不变性禁止了总自旋为整数的态和总自旋为半整数的态之间的跃迁, 所以现在唯一的差异是群是单连通的, 因此它仅有普通表示, 没有投影表示, 这使得我们无法推断出超选择定则. 这并不意味着我们真的可以制备出由整数自旋态和半整数自旋态线性组合而成的物理系统, 只是说明不能用观测到的 Lorentz 不变性证明这样的叠加是不可能的.

类似的论述适用于任何对称群. 如果它的 Lie 代数包含中心荷, 那么我们总能够扩张这个代数, 使其包含与一切生成元都对易的生成元, 并且该生成元的本征值是中心荷, 就像我们在 2.4 节末尾给伽利略群的 Lie 代数加上质量算符. 那么, 这个扩张后的 Lie 代数当然是无中心荷的, 所以单位元附近的那部分群只有普通表示, 并且不需要任何超选择定则. 同样, 即便一个 Lie 群不是单连通的, 它总可以表示成 C/H, 其中 C 是单连通群, 称为 G 的"通用覆盖群", 而 H 是 C 的一个不变子群.[†] 一般而言, 我们也可以将对称群取成 C 而非 G, 这是因为除了 G 暗含了超选择定则而 C 没有以外, 它们的结果没有任何差异. 简言之, 超选择定则的问题有点无关紧要; 有可能制备出也有可能制备不出处在任意叠加态中的物理系统, 但是不能通过参照对称性原理来解答问题, 这是因为无论认为自然的对称群是什么, 总存在另外一个群, 它的结果除了没有超选择定则以外与原先的结果是相同的.

附录A 对称表示定理

这个附录给出 Wigner 基本定理[2]的证明, 即任何对称变换可以表示成物理态 Hilbert 空间上的算符, 这个算符要么是线性且幺正的, 要么是反线性且反幺正的. 针对我们现在的目的, 我们主要依据的对称变换的性质是它们是保跃迁几率不变的射线变换 T, 在这个意义下, 如果 Ψ_1 和 Ψ_2 是属于射线 $\mathscr{R}_1$ 和 $\mathscr{R}_2$ 的态矢, 那么属于变换后射线 $T\mathscr{R}_1$ 和 $T\mathscr{R}_2$ 的态矢 Ψ_1' 和 Ψ_2' 满足

$$|(\Psi_1', \Psi_2')|^2 = |(\Psi_1, \Psi_2)|^2 . \tag{2.A.1}$$

我们同时要求对称变换存在逆变换, 并且这个逆变换以同样的方式保跃迁几率不变.

首先, 考察属于射线 $\mathscr{R}_k$ 的态矢 Ψ_k 的某个正交完全集, 它满足

$$(\Psi_k, \Psi_l) = \delta_{kl} , \tag{2.A.2}$$

并令 Ψ_k' 是属于变换后射线 $T\mathscr{R}_k$ 的某个任意态矢. 由方程(2.A.1), 我们有

$$|(\Psi_k', \Psi_l')|^2 = |(\Psi_k, \Psi_l)|^2 = \delta_{kl} .$$

[†] C/H 的第一同伦群是 H. 我们已经看到齐次 Lorentz 群的覆盖群是 $SL(2,C)$, 三维旋转群的覆盖群是 $SU(2)$. 对于三维, 四维或六维情况, SL 群和 SU 群之间的关系是特殊的; 对于一般维数 d, $SO(d)$ 的覆盖群被赋予了特殊的名称, "$Spin(d)$".

但是 (Ψ'_k, Ψ'_k) 自动为正实量, 因此这要求它的值应该为1, 于是就有

$$(\Psi'_k, \Psi'_l) = \delta_{kl} \,. \tag{2.A.3}$$

容易看到这些变换后的态 Ψ'_k 也构成一个完全集, 若非如此则会存在非零态矢 Ψ', 它与所有的 Ψ'_k 正交, 那么 Ψ' 所属射线的逆变换将由非零态矢 Ψ'' 构成, 它对于所有的 k 有:

$$|(\Psi_k, \Psi'')|^2 = |(\Psi'_k, \Psi')|^2 = 0 \,,$$

因为已假定了 Ψ_k 构成完全集, 所以这是不可能的.

我们现在必须确定态 Ψ'_k 的相位约定. 出于这个目的, 我们挑出 Ψ_k 中的一个, 例如 Ψ_1, 并考虑态矢

$$\Upsilon_k \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[\Psi_1 + \Psi_k] \,, \tag{2.A.4}$$

这个态矢属于某个射线 $\mathscr{S}_k$, 其中 $k \neq 1$. 对于任意态矢 Υ'_k, 如果它属于变换后的射线 $T\mathscr{S}_k$, 那么它可以用态矢 Ψ'_l 展开,

$$\Upsilon'_k = \sum\nolimits_l c_{kl}\Psi'_l \,.$$

从方程(2.A.1)中我们得到

$$|c_{kk}| = |c_{k1}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

并且当 $l \neq k$ 且 $l \neq 1$ 时:

$$c_{kl} = 0 \,.$$

对于任意给定的 k, 通过对两个态矢 Υ'_k 和 Ψ'_k 的相位做合适的选择, 我们显然可以调整两个非零系数 c_{kk} 和 c_{k1} 的相位, 使得两个系数就是 $1/\sqrt{2}$. 从现在起, 以这种方式选出的态矢 Υ'_k 和 Ψ'_k 将被记做 $U\Upsilon_k$ 和 $U\Psi_k$, 正如我们已经看到的,

$$U\frac{1}{\sqrt{2}}[\Psi_k + \Psi_1] = U\Upsilon_k = \frac{1}{\sqrt{2}}[U\Psi_k + U\Psi_1] \,. \tag{2.A.5}$$

然而, 对于一般态矢 Ψ, $U\Psi$ 仍有待定义.

现在考察属于任意射线 $\mathscr{R}$ 的任意态矢 Ψ, 并用 Ψ_k 将其展开:

$$\Psi = \sum_k C_k\Psi_k \,. \tag{2.A.6}$$

类似的, 属于变换后射线 $T\mathscr{R}$ 的任意态矢 Ψ' 可以用正交完全集 $U\Psi_k$ 展开:

$$\Psi' = \sum_k C'_k U\Psi_k \,. \tag{2.A.7}$$

$|(\Psi_k, \Psi)|^2$ 与 $|(U\Psi_k, \Psi')|^2$ 相等告诉我们, 对所有 k (包括 $k = 1$):

$$|C_k|^2 = |C'_k|^2 \,, \tag{2.A.8}$$

而 $|(\Upsilon_k, \Psi)|^2$ 与 $|(U\Upsilon_k, \Psi')|^2$ 相等则告诉我们, 对于所有的 $k \neq 1$:

$$|C_k + C_1|^2 = |C'_k + C'_1|^2 \,. \tag{2.A.9}$$

方程(2.A.9)和(2.A.8)的比给出公式

$$\mathrm{Re}(C_k/C_1) = \mathrm{Re}(C'_k/C'_1) \tag{2.A.10}$$

加上方程(2.A.8), 这又要求

$$\mathrm{Im}(C_k/C_1) = \pm\,\mathrm{Im}(C'_k/C'_1) \tag{2.A.11}$$

因此要么

$$C_k/C_1 = C'_k/C'_1\,, \tag{2.A.12}$$

要么

$$C_k/C_1 = (C'_k/C'_1)^*\,. \tag{2.A.13}$$

更进一步, 我们可以证明对每一个 k 都必须做出相同的选择. (Wigner 的证明中遗漏了这一步.) 为了看到这一点, 假定对某些 k, 我们有 $C_k/C_1 = C'_k/C'_1$, 而对某些 $l \neq k$, 我们则有 $C_l/C_1 = (C'_l/C'_1)^*$. 再假定这两个比值都是复数, 使得它们是不同的. (这附带要求了 $k \neq 1$, $l \neq 1$ 以及 $k \neq l$.) 我们将证明这是不可能的.

定义态矢 $\Phi \equiv \frac{1}{\sqrt{3}}[\Psi_1 + \Psi_k + \Psi_l]$. 由于这个态矢中所有系数的比值是实的, 所以对于属于变换后射线的任意态矢 Φ', 我们必须得到同样的比值:

$$\Phi' = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}[U\Psi_1 + U\Psi_k + U\Psi_l]\,,$$

其中 α 是满足 $|\alpha| = 1$ 的相位因子. 那么, 跃迁几率 $|(\Phi, \Psi)|$ 和 $|(\Phi', \Psi')|$ 相等要求

$$\left|1 + \frac{C'_k}{C'_1} + \frac{C'_l}{C'_1}\right|^2 = \left|1 + \frac{C_k}{C_1} + \frac{C_l}{C_1}\right|^2$$

因而

$$\left|1 + \frac{C_k}{C_1} + \frac{C^*_l}{C^*_1}\right|^2 = \left|1 + \frac{C_k}{C_1} + \frac{C_l}{C_1}\right|^2\,.$$

要使上式成立, 当且仅当

$$\mathrm{Re}\left(\frac{C_k}{C_1}\frac{C^*_l}{C^*_1}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{C_k}{C_1}\frac{C_l}{C_1}\right)$$

或者, 换一种形式,

$$\mathrm{Im}\left(\frac{C_k}{C_1}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{C_l}{C_1}\right) = 0\,.$$

因此, 对任意一对 k, l, 要么 C_k/C_1 是实的, 要么 C_l/C_1 是实的, 这与我们的假定矛盾. 于是我们看到, 当一给定对称变换 T 作用在给定态矢 $\sum_k C_k U_k$ 上时, 对所有 k, 我们要么有方程(2.A.12), 要么有方程(2.A.13).

Wigner 排除了第二种可能性, 即方程(2.A.13), 原因是, 他证明了任何实现这种可能性的对称群都将必须在时间坐标上引入一个负号, 并且在他所给出的证明中, 他仅考虑了类似旋转那样的不影响时间方向的对称性. 在这里, 我们将含有时间反演在内的对称性与其它对称性放在同等基础上进行处理, 所以我们只能认为, 对于每个对称性 T 以及态矢 $\sum_k C_k\Psi_k$, 要么取方程(2.A.12),

要么取(2.A.13). 根据采用的是那一种选择, 我们会将$U\Psi$定义为属于射线$T\mathscr{R}$的态矢Ψ'中的一个, 并且对其相位的选择使得不是$C_1 = C_1'$就是$C_1 = C_1'^*$. 于是, 要么

$$U\left(\sum_k C_k\Psi_k\right) = \sum_k C_k U\Psi_k\ , \tag{2.A.14}$$

要么

$$U\left(\sum_k C_k\Psi_k\right) = \sum_k C_k^* U\Psi_k\ . \tag{2.A.15}$$

仍需证明的是, 对于给定的对称变换, 无论系数C_k取什么值, 我们在方程(2.A.14)和(2.A.15)之间做出的选择都必须是相同的. 假定方程(2.A.14)对态矢$\sum_k A_k\Psi_k$成立, 而方程(2.A.15)对另一态矢$\sum_k B_k\Psi_k$成立. 那么, 跃迁几率不变要求

$$\left|\sum_k B_k^* A_k\right|^2 = \left|\sum_k B_k A_k\right|^2$$

或者等价地

$$\sum_{kl} \mathrm{Im}\,(A_k^* A_l)\,\mathrm{Im}\,(B_k^* B_l) = 0\ . \tag{2.A.16}$$

对于属于不同射线的一对态矢$\sum_k A_k\Psi_k$和$\sum_k B_k\Psi_k$, 我们不能排除方程(2.A.16)被满足的可能性. 然而, 对于任意一对这样的态矢, 且A_k和B_k没有相同的相位(使得方程(2.A.14)和(2.A.15)不相同), 我们总能找到第三个态矢$\sum_k C_k\Psi_k$, 使得*

$$\sum_{kl} \mathrm{Im}\,(C_k^* C_l)\,\mathrm{Im}\,(A_k^* A_l) \neq 0 \tag{2.A.17}$$

并且

$$\sum_{kl} \mathrm{Im}\,(C_k^* C_l)\,\mathrm{Im}\,(B_k^* B_l) \neq 0\ . \tag{2.A.18}$$

正如我们所看到的, 从方程(2.A.17)可以得出, 我们在方程(2.A.14)和(2.A.15)之间的选择对于$\sum_k A_k\Psi_k$和$\sum_k C_k\Psi_k$必须是相同的, 从方程(2.A.18)可以得出, 我们在方程(2.A.14)和(2.A.15)之间的选择对于$\sum_k B_k\Psi_k$和$\sum_k C_k\Psi_k$必须是相同的, 所以, 对于我们的出发点, 态矢$\sum_k A_k\Psi_k$和$\sum_k B_k\Psi_k$, 我们在方程(2.A.14)和(2.A.15)之间的选择必须是相同的. 因此, 我们证明了, 对于给定的对称变换T, 所有的态矢要么满足方程(2.A.14), 要么满足方程(2.A.15).

现在证明我们的命题是很容易的, 即量子力学算符U要么是线性且幺正的, 要么是反线性且反幺正的. 首先, 假定所有态矢$\sum_k C_k\Psi_k$都满足方程(2.A.14). 任意两个态矢Ψ和Φ可以展成

$$\Psi = \sum_k A_k\Psi_k\ , \qquad \Phi = \sum_k B_k\Psi_k$$

*如果对于某个k,l对, $A_k^* A_l$和$B_k^* B_l$都是复的, 那么, 选择C使得C_k和C_l以外的其它C都为零, 并对这两个系数进行选择使得它们有不同的相位. 如果对于某个k,l对, $A_k^* A_l$是复的而$B_k^* B_l$是实的, 那么一定存在某个其它的m,n对(可能m和n中的一个等于k或l, 但不能两个都等于k或l), 使得$B_m^* B_n$是复的. 如果$A_m^* A_n$也是复的, 那么, 除了C_m和C_n, 选择其它的C为零, 并选择这些系数使得它们有不同的相位. 如果$A_m^* A_n$是实的, 那么除了C_k, C_l, C_m和C_n之外, 选择其它的C为零, 并选择这四个系数使它们有不同的相位. 如果$B_k^* B_l$是复的而$A_k^* A_l$是实的, 就以相同的方式处理.

因而, 利用方程(2.A.14),

$$U(\alpha\Psi+\beta\Phi)=U\sum_k(\alpha A_k+\beta B_k)\Psi_k=\sum_k(\alpha A_k+\beta B_k)U\Psi_k$$
$$=\alpha\sum_k A_kU\Psi_k+\beta\sum_k B_kU\Psi_k\,.$$

再次利用方程(2.A.14), 给出

$$U(\alpha\Psi+\beta\Phi)=\alpha U\Psi+\beta U\Phi\,, \tag{2.A.19}$$

所以 U 是线性的. 同样, 利用方程(2.A.2)和(2.A.3), 变换后, 态的标量积是

$$(U\Psi,U\Phi)=\sum_{kl}A_k^*B_l(U\Psi_k,U\Psi_l)=\sum_k A_k^*B_k\,,$$

因此

$$(U\Psi,U\Phi)=(\Psi,\Phi)\,, \tag{2.A.20}$$

所以 U 是幺正的.

对所有态矢, 满足方程(2.A.15)的对称性情况可以用非常类似的方式处理. 读者或许能够在没有帮助的情况下完成这个论证, 但是由于大家可能不熟悉反线性算符, 我们将在这里给出证明细节. 假定所有态矢 $\sum_k C_k\Psi_k$ 满足方程(2.A.15). 任意两个态矢 Ψ 和 Φ 可以像之前那样展开, 因此:

$$U(\alpha\Psi+\beta\Phi)=U\sum_k(\alpha A_k+\beta B_k)\Psi_k$$
$$=\sum_k(\alpha^*A_k^*+\beta^*B_k^*)U\Psi_k=\alpha^*\sum_k A_k^*U\Psi_k+\beta^*\sum_k B_k^*U\Psi_k\,.$$

再次利用方程(2.A.15), 给出

$$U(\alpha\Psi+\beta\Phi)=\alpha^*U\Psi+\beta^*U\Phi\,, \tag{2.A.21}$$

所以 U 是反线性的. 另外, 利用方程(2.A.2)和(2.A.3), 变换后, 态的标量积是

$$(U\Psi,U\Phi)=\sum_{kl}A_kB_l^*(U\Psi_k,U\Psi_l)=\sum_k A_kB_k^*$$

因此

$$(U\Psi,U\Phi)=(\Psi,\Phi)^*\,, \tag{2.A.22}$$

所以 U 是反幺正的.

附录B 群算符和同伦类

在这个附录里, 我们将证明 2.7 节中陈述的定理: 只要 (a) 对群生成元的定义可以使得 Lie 代数中没有中心荷, (b) 群是单连通的, 我们就可以对有限对称变换 T 的算符 $U(T)$ 的相位进行选择, 使得这些算符构成对称群的表示, 而非投影表示. 我们也会论述非连通群将遇到的投影表示, 以及它们与该群同伦类的关系.

为了证明这个定理, 让我们先回忆一下构造对应对称变换的算符的方法. 正如2.2节所描述的, 我们引入了一组用来参数化这些变换的实变量θ^a, 在这种方式下, 变换满足合成规则(2.2.15):

$$T(\bar{\theta})\,T(\theta) = T\Big(f(\bar{\theta},\theta)\Big)\,.$$

我们要构造满足如下相应条件*的算符$U(T(\theta)) \equiv U[\theta]$

$$U[\bar{\theta}]\,U[\theta] = U\Big[f(\bar{\theta},\theta)\Big]\,. \tag{2.B.1}$$

为了做到这一点, 我们在群参数空间中取一个任意的"标准"路径$\Theta^a_\theta(s)$, 这个路径从原点通向各个点θ, 并满足$\Theta^a_\theta(0) = 0$和$\Theta^a_\theta(1) = \theta^a$, 并通过如下微分方程定义沿这样路径的$U_\theta(s)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}U_\theta(s) = \mathrm{i}t_a U_\theta(s) h^a{}_b(\Theta_\theta(s))\,\frac{\mathrm{d}\Theta^b_\theta(s)}{\mathrm{d}s} \tag{2.B.2}$$

它有初始条件

$$U_\theta(0) = 1\,, \tag{2.B.3}$$

其中

$$[h^{-1}]^a{}_b(\theta) \equiv \left[\frac{\partial f^a(\bar{\theta},\theta)}{\partial\bar{\theta}^b}\right]_{\bar{\theta}=0}\,. \tag{2.B.4}$$

我们最终要把算符$U[\theta]$与$U_\theta(1)$等同起来, 但首先我们必须确定$U_\theta(s)$的一些性质.

为了检验合成规则, 考虑两个点θ_1和θ_2, 定义从0到θ_1的路径$\mathscr{P}$, 并由此给出$f(\theta_2,\theta_1)$:

$$\Theta^a_{\mathscr{P}}(s) \equiv \begin{cases} \Theta^a_{\theta_1}(2s) & 0 \le s \le \frac{1}{2}\,, \\ f^a(\Theta_{\theta_2}(2s-1),\theta_1) & \frac{1}{2} \le s \le 1\,. \end{cases} \tag{2.B.5}$$

在第一个路径的末端, 我们有$U_{\mathscr{P}}(\frac{1}{2}) = U_{\theta_1}(1)$. 为了确定沿第二段路径的$U_{\mathscr{P}}(s)$, 我们需要$f^a(\Theta_{\theta_2}(2s-1),\theta_1)$的导数. 为了这个目的, 我们利用基本的结合律:

$$f^a(f(\theta_3,\theta_2),\theta_1) = f^a(\theta_3, f(\theta_2,\theta_1))\,. \tag{2.B.6}$$

在$\theta_3 \to 0$的极限下, 匹配θ_3^c的系数得到:

$$\frac{\partial f^a(\theta_2,\theta_1)}{\partial\theta_2^b} h^c{}_a(f(\theta_2,\theta_1)) = h^c{}_b(\theta_2)\,. \tag{2.B.7}$$

因此$U_{\mathscr{P}}(s)$沿着第二段路径的微分方程(2.B.2)与$U_{\theta_2}(2s-1)$的微分方程相同. 它们满足不同的初始条件, 但$U_{\mathscr{P}}(s)U^{-1}_{\theta_1}(1)$也满足与$U_{\theta_2}(2s-1)$相同的微分方程, 并且有相同的初始条件: 在$s = \frac{1}{2}$处均为1. 我们由此得出, 对$\frac{1}{2} \le s \le 1$,

$$U_{\mathscr{P}}(s)\,U^{-1}_{\theta_1}(s) = U_{\theta_2}(2s-1)$$

并且, 特别地

$$U_{\mathscr{P}}(1) = U_{\theta_2}(1)\,U_{\theta_1}(1)\,. \tag{2.B.8}$$

*这里使用方括号是为了区分作为群参量函数的U算符与表示为群变换本身函数的U算符.

然而, 这并不是说 $U_\theta(1)$ 满足期望的合成法则(2.B.1), 这是因为, 尽管路径 $\Theta_{\mathscr{P}}(s)$ 从 $\theta^a=0$ 到 $\theta^a=f^a(\theta_2,\theta_1)$, 但一般而言, 它与我们选择的直接从 $\theta^a=0$ 到 $\theta^a=f^a(\theta_2,\theta_1)$的"标准"路径 $\Theta_{f(\theta_2,\theta_1)}$ 并不同. 为了能使 $U[\theta]$ 等于 $U_\theta(1)$, 我们需要证明 $U_\theta(1)$与从 0 到 θ 的路径无关.

为此, 考察从 0 到 θ 的路径变分 $\delta\Theta(s)$ 产生的 $U_\theta(s)$ 的变分 δU. 取方程(2.B.2)的变分, 这给出微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\delta U=\mathrm{i}t_a\delta U h^a{}_b(\Theta)\frac{\mathrm{d}\Theta^b}{\mathrm{d}s}+\mathrm{i}t_a U h^a{}_{b,c}(\Theta)\delta\Theta^c\frac{\mathrm{d}\Theta^b}{\mathrm{d}s}+\mathrm{i}t_a U h^a{}_b(\Theta)\frac{\mathrm{d}\delta\Theta^b}{\mathrm{d}s}$$

其中 $h^a{}_{b,c}\equiv\partial h^a{}_b/\partial\Theta^c$. 利用 Lie 对易关系(2.2.22)(没有中心荷), 并稍微整理一下, 这给出

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(U^{-1}\delta U\right)=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\mathrm{i}U^{-1}t_aUh^a{}_b\delta\Theta^b\right)\\&+\mathrm{i}U^{-1}t_aU\delta\Theta^b\frac{\mathrm{d}\Theta^c}{\mathrm{d}s}\left(h^a{}_{c,b}-h^a{}_{b,c}+C^a{}_{ed}h^e{}_bh^d{}_c\right).\end{aligned}\tag{2.B.9}$$

然而, 在结合律条件(2.B.6)中取极限 $\theta_3,\theta_2\to0$, 我们发现对所有的 θ:

$$h(\theta)^a{}_{b,c}=-f^a{}_{de}h(\theta)^d{}_bh(\theta)^e{}_c\,,\tag{2.B.10}$$

其中 $f^a{}_{de}$ 是(2.2.19)定义的系数. b 和 c 的反对称性表明方程(2.B.9)中的最后一项为零

$$h^a{}_{c,b}-h^a{}_{b,c}+C^a{}_{ed}h^e{}_bh^d{}_c=0\,.\tag{2.B.11}$$

因此方程(2.B.9)告诉我们,

$$U^{-1}\delta U-\mathrm{i}U^{-1}t_aUh^a{}_b\delta\Theta^b$$

在路径 $\theta(s)$ 上是常数. 由此可知, 对于端点固定在 $\Theta(0)=0$ 和 $\Theta(1)=\theta$ 的路径, (并且 $U_\theta(0)=1$) $U_\theta(1)$ 在这种路径的任意无限小变分下是稳定的. 但是, 假设 (b) 告诉我们, 从 $\Theta(0)=0$ 到 $\Theta(1)=\theta$ 的路径可以连续地变换到彼此, 所以我们现在可以认为 $U_\theta(1)$ 仅是 θ 的函数, 它与路径无关:

$$U_\theta(1)\equiv U[\theta]\,.\tag{2.B.12}$$

特别的, 因为路径 $\mathscr{P}$ 从 0 到 $f(\theta_2,\theta_1)$, 我们有

$$U_{\mathscr{P}}(1)=U[f(\theta_2,\theta_1)]$$

从而方程(2.B.8)证明了 $U[\theta]$ 满足群的乘法法则(2.B.1), 这正是所要证明的.

既然我们已经建立了一个非投影表示 $U[\theta]$, 剩下要证明的是, 对于有相同表示生成元 t_a 的同一个群, 它的任何投影表示 $\tilde{U}[\theta]$ 与 $U[\theta]$ 仅差一个相位:

$$\tilde{U}[\theta]=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(\theta)}U[\theta]$$

使得 $\tilde{U}[\theta]$ 的乘法法则中的相位 ϕ

$$\tilde{U}[\theta']\tilde{U}[\theta]=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(\theta',\theta)}\tilde{U}[f(\theta',\theta)]$$

可以通过对 $\tilde{U}[\theta]$ 的相位做一个简单变换移除掉. 为了看到这点, 考察算符

$$U[\theta]^{-1}U[\theta']^{-1}\tilde{U}[\theta']\tilde{U}[\theta]=U[f(\theta',\theta)]^{-1}\tilde{U}[f(\theta',\theta)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(\theta',\theta)}\,.$$

因为 $U[\theta]$ 和 $\tilde{U}[\theta]$ 有相同的生成元, 左边对 θ'^a 的导数在 $\theta'=0$ 处为零, 所以

$$0=\frac{\partial}{\partial\theta^b}\Big\{U[\theta]^{-1}\tilde{U}[\theta]\Big\}+\mathrm{i}\phi_b(\theta)U[\theta]^{-1}\tilde{U}[\theta]\,,$$

其中

$$\phi_b(\theta)\equiv h^a{}_b(\theta)\left[\frac{\partial}{\partial\theta'^b}\phi(\theta',\theta)\right]_{\theta'=0}\,.$$

对这个结果做相对 θ^c 的微分, b 和 c 的反对称性立刻给出

$$0=\frac{\partial\phi_b(\theta)}{\partial\theta^c}-\frac{\partial\phi_c(\theta)}{\partial\theta^b}\,.$$

一个熟悉的定理[13]告诉我们, 在单连通空间中, 这要求 ϕ_b 恰好是某个函数 β 的梯度:

$$\phi_b(\theta)=\frac{\partial\beta(\theta)}{\partial\theta^b}\,.$$

因此 $U[\theta]^{-1}\tilde{U}[\theta]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta(\theta)}$ 实际上对于 θ 是常量. 令它等于它在 $\theta=0$ 处的值, 我们看到 $\tilde{U}$ 恰好正比于 U:

$$\tilde{U}[\theta]=U[\theta]\exp(-\mathrm{i}\beta(\theta)+\mathrm{i}\beta(0))$$

这正是前面声明的.

* * *

当 Lie 代数中没有中心荷, 但群不是单连通群时, 群的乘法规则中会出现相位因子, 而上面的分析告诉了我们一些关于相因子本质的信息. 假定从 0 到 θ 再到 $f(\bar{\theta},\theta)$ 的路径 $\mathscr{P}$ 不能变换成我们选择的从 0 到 $f(\bar{\theta},\theta)$ 的标准路径, 或者换句话说, 从 0 到 θ 再到 $f(\bar{\theta},\theta)$ 再回到 0 的圈不能连续地形变至点. 那么 $U^{-1}(f(\theta_2,\theta_1))U(\theta_2)U(\theta_1)$ 可以是相位因子 $\exp(\mathrm{i}\phi(\theta_2,\theta_1))\neq1$, 但是对于所有可以互相变形到彼此的圈, ϕ 是相同的. 对于起始并结束于原点并能够连续变形到给定圈的所有圈, 我们称这些圈的集合为给定圈的**同伦类**;[14] 因此我们看到 $\phi(\theta_2,\theta_1)$ 仅依赖于从 0 到 θ 再到 $f(\bar{\theta},\theta)$ 再回到 0 的圈的同伦类. 同伦类的集合构成群; 圈 $\mathscr{L}_1$ 的同伦类和 $\mathscr{L}_2$ 的同伦类的"乘积"是先沿着 $\mathscr{L}_1$ 绕行再沿着 $\mathscr{L}_2$ 绕行得到的圈的同伦类; 圈 $\mathscr{L}$ 的同伦类的"逆"是反方向绕行 $\mathscr{L}$ 得到圈的同伦类; 而"单位元"是指可以形变至原点的圈的同伦类. 这个群被称为所考察空间的**第一同伦群**或**基本群**. 很容易看出相位因子构成该群的表示: 如果沿着 $\mathscr{L}$ 走一圈给出相位因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$, 沿着 $\bar{\mathscr{L}}$ 走一圈给出相位因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\phi}}$, 那么沿着这两个圈走一圈给出相位因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\phi}}$. 因此, 如果我们知道了一个给定群 $\mathscr{G}$ (没有中心荷)的参量空间的第一同伦群的一维表示, 我们可以标记出群 $\mathscr{G}$ 的所有可能类型的投影表示. 卷 II 中将会更加详细地讨论同伦群.

附录C　反演和简并多重态

通常假定反演 T 和 P 使单粒子态变成同种粒子的另一单粒子态, 这个粒子态或许会带有依赖粒子种类的相位因子. 在 2.6 节, 我们顺带注意到了, 当反演作用在单粒子态的简并多重态上时, 它产生的效果可能会更加复杂, 这种可能性似乎是 Wigner[15]在 1964 年首先提到的. 这个附录将会探讨反演算符的一个推广版本, 用有限矩阵取代反演相位, 但是没有采取 Wigner 做过的一些限制性假定.

让我们从时间反演开始. Wigner 对反演算符的作用做了一些限制, 他假定了反演算符的平方正比于单位算符. 因为 T 是反幺正的, 很容易看出对应 T^2 的比例因子只能是 ±1, 而由超选择定则划分的子空间可能有不同的符号. 在 $2j$ 取奇值或偶值的态构成的空间上, 如果 T^2 的符号与 2.6 节发现的符号 $(-1)^{2j}$ 相反, 那么涉及的物理态对 T 算符构成的表示必然要比迄今为止假定的要复杂. 但是, 如果我们愿意承认这种可能性, 似乎不存在好的理由强制 T^2 满足正比单位算符的条件, 即 Wigner 条件. 将期望寄予扩张 Poincaré 群的结构是无法让人信服的; 对任意反演算符, 唯一有用的定义是算符是精确守恒还是近似守恒, 而这并不是使得 T^2 正比于单位算符的定义.

为了探讨时间反演更普遍的可能性, 假定它在有质量单粒子态上有如下作用

$$\mathsf{T}\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} = (-1)^{j-\sigma}\sum_m \mathscr{T}_{mn}\Psi_{-\mathbf{p},-\sigma,m}\,, \tag{2.C.1}$$

其中 $\mathbf{p}, j$ 和 σ 分别是粒子的动量, 自旋和自旋 z-分量, 而 n, m 用来标记粒子种类简并多重态的不同成员. (因子 $(-1)^{j-\sigma}$ 以及 $\mathbf{p}$ 和 σ 的反号可以用 2.6 节中的方法推断出来.) 由于 T 是反幺正的, 所以 $\mathscr{T}$ 必须是幺正的, 除此之外, 对矩阵 $\mathscr{T}_{mn}$ 是一无所知的.

现在来看看, 如何通过对单粒子态基的合理选择来简化这个变换. 通过幺正变换定义新的态 $\Psi'_{\mathbf{p},\sigma,n} = \sum_m \mathscr{U}_{mn}\Psi_{\mathbf{p},\sigma,m}$, 对这个态, 我们会得到相同的变换(2.C.1), 只是矩阵 $\mathscr{T}_{mn}$ 要变成

$$\mathscr{T}' = \mathscr{U}^{-1}\mathscr{T}\mathscr{U}^*\,. \tag{2.C.2}$$

不同于 T 是幺正的情况, 一般而言, 我们不能通过选择单粒子态的基使得 $\mathscr{T}'$ 对角化. 但是, 我们可以做到分块对角化, 其分块要么是 1×1 的相位, 要么是形式如下的 2×2 矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2} \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi/2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.C.3}$$

其中 ϕ 是各种实相位.

(证明如下. 首先, 注意到方程(2.C.2)给出

$$\mathscr{T}'\mathscr{T}'^* = \mathscr{U}^{-1}\mathscr{T}\mathscr{T}^*\mathscr{U}\,.$$

这是一个幺正变换, 所以, 通过选择 $\mathscr{U}$, 我们可以使幺正矩阵 $\mathscr{T}\mathscr{T}^*$ 对角化. 假定对角化已经完成, 并去掉撇号, 我们有

$$\mathscr{T} = D\mathscr{T}^T\,, \tag{2.C.4}$$

其中 D 是幺正对角矩阵, 设它的对角元是相位 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_n}$. 一个显然的结果是: 除非 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_n}=1$, 否则对角元 $\mathscr{T}_{nn}$ 为零. 更进一步, 如果 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_n}=1$ 但 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_m}\neq1$, 那么方程(2.C.4)告诉我们 $\mathscr{T}_{nm}=\mathscr{T}_{mn}=0$. 通过先列出 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_n}=1$ 的所有行与列, 我们可以将矩阵 $\mathscr{T}$ 写成如下形式

$$\mathscr{T} = \begin{pmatrix} \mathscr{A} & 0 \\ 0 & \mathscr{B} \end{pmatrix}, \tag{2.C.5}$$

其中 $\mathscr{A}$ 是对称且幺正的, 而 $\mathscr{B}$ 的对角元全为零. 因为 $\mathscr{A}$ 是对称的, 它可以表示为一个对称反厄米对阵的指数, 所以, 通过仅作用在 $\mathscr{A}$ 上的变换(2.C.2)就可以使其对角化, $\mathscr{U}$ 的相应子矩阵是实的并且因此是正交的. 因此只需考虑联系 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_n}\neq1$ 的行与列的子矩阵 $\mathscr{B}$. 对于 $n\neq m$, 方程(2.C.4)给

出 $\mathscr{T}_{nm}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_n}\mathscr{T}_{mn}$ 和 $\mathscr{T}_{mn}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_m}\mathscr{T}_{nm}$, 所以 $\mathscr{T}_{nm}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_m}\mathscr{T}_{nm}$ 且 $\mathscr{T}_{mn}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_m}\mathscr{T}_{mn}$. 因此, 除非 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_m}=1$, 否则 $\mathscr{T}_{nm}=\mathscr{T}_{mn}=0$. 如果我们先列出所有相位 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_1}\neq 1$ 的行与列, 再列出所有相位相反的行与列, 再列出其它所有不等于 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\phi_1}$ 且 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2}\neq 1$ 的行与列, 再列出相位相反的行与列, 一直做下去, 矩阵 $\mathscr{B}$ 就变成分块对角形式

$$\mathscr{B}=\begin{pmatrix}\mathscr{B}_1 & 0 & \cdots\\ 0 & \mathscr{B}_2 & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix}, \tag{2.C.6}$$

其中

$$\mathscr{B}_i=\begin{pmatrix}0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_i/2}\mathscr{C}_i\\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi_i/2}\mathscr{C}_i^T & 0\end{pmatrix}. \tag{2.C.7}$$

更进一步, $\mathscr{T}$ 的幺正性以及随之的 $\mathscr{B}$ 的幺正性要求 $\mathscr{C}_i\mathscr{C}_i^\dagger=\mathscr{C}_i^\dagger\mathscr{C}_i=1$, 因此 $\mathscr{C}_i$ 是幺正方阵. 通过作用一个变换(2.C.2), 其中 $\mathscr{U}$ 的分块对角形式与 $\mathscr{T}$ 相同, 且第 i 个分块矩阵形式为

$$\begin{pmatrix}V_i & 0\\ 0 & W_i\end{pmatrix}$$

以及 V_i 和 W_i 幺正, 那么子矩阵 $\mathscr{C}_i$ 服从变换 $\mathscr{C}_i\to V_i^{-1}\mathscr{C}_iW_i^*$, 所以我们显然可以选择变换使得 $\mathscr{C}_i=1$. 这建立了相位为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_i}$ 和 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi_i}$ 的分块中各对单行与单列间的对应. 为了将矩阵 $\mathscr{B}$ 变成(2.C.3)的 2×2 分块的分块对角形式. 现在仅需要重新排行与列, 使得在第 i 个分块内, 我们交替地列出相位分别为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_i}$ 和 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi_i}$ 的行与列.)

注意到, 在 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\neq 1$ 的情况下, 我们无法通过选择态来对角化时间反演算符, 这是非常重要的. 如果有一对态 $\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm}$, T 作用在上面有矩阵(2.C.3), 那么

$$\mathsf{T}\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm}=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\phi/2}(-1)^{j-\sigma}\Psi_{-\mathbf{p},-\sigma,\mp}\,. \tag{2.C.8}$$

那么, 在这些态的线性组合上, 用时间反演算符作用给出

$$\mathsf{T}(c_+\Psi_{\mathbf{p},\sigma,+}+c_-\Psi_{\mathbf{p},\sigma,-})=(-)^{j-\sigma}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2}c_+^*\Psi_{-\mathbf{p},-\sigma,-}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi/2}c_-^*\Psi_{-\mathbf{p},-\sigma,+})\,.$$

为了使得 $c_+\Psi_{\mathbf{p},\sigma,+}+c_-\Psi_{\mathbf{p},\sigma,-}$ 在 T 的作用下只变换相位 λ, 必须有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2}c_+^*=\lambda c_- \qquad\qquad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi/2}c_-^*=\lambda c_+\,.$$

但是, 联合求解这些方程给出 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\phi/2}c_\pm^*=|\lambda|^2c_\pm^*\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\phi/2}$, 除非 $c_+=c_-=0$ 或 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ 是 1, 否则这是不可能的. 因此当 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\neq 1$ 时, 在那些与自旋联系的简并外, 时间反演不变性又在这些态上加上了一个二重简并.

当然, 如果存在一个额外的"内禀"对称算符 S, 使得这些态服从如下的变换

$$\mathsf{S}\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm}=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\phi/2}\Psi_{-\mathbf{p},\sigma,\mp}\,,$$

那么我们可以将时间算符重新定义为 $\mathsf{T}'\equiv\mathsf{S}^{-1}\mathsf{T}$, 并且这个算符并不会把 $\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm}$ 彼此混合在一起. 仅在没有这类内禀对称性存在的情况下, 我们才可以把粒子态的二重简并归因于时间反演.

现在我们回到 T 平方的问题上来. 重复变换(2.C.8)给出

$$\mathsf{T}^2\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm} = (-1)^{2j}\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\phi}\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm}\,. \tag{2.C.9}$$

如果我们像 Wigner 一样假定 T^2 正比于单位算符, 那么我们就必须有 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}$, 由于相位是实的, 所以必须是 $+1$ 或 -1. 选择 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = -1$ 仍将要求单粒子态在与自旋相联系的简并外还有一个二重简并, 在 Wigner 的假定下, 所有的粒子都会显现出这个二重简并. 但是, 没有什么理由阻止我们在方程(2.C.8)中取一般相位 ϕ, 使得它们对某些粒子是零, 对于某些不是. 因此, 已观测到的粒子没有显现出额外的二重简并不排除其它粒子具有这种简并的可能性.

我们还可以考虑宇称算符 P 的更复杂表示的可能性, 即

$$\mathsf{P}\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} = \sum_m \mathscr{P}_{nm}\Psi_{-\mathbf{p},\sigma,m}\,, \tag{2.C.10}$$

其中矩阵 $\mathscr{P}$ 除幺正外没有其它约束. 不像时间反演的情况, 在这里我们总可以通过对态的基的选择使这个矩阵对角化. 但是对基的选择可能并不是简单地采用时间反演中的选择, 所以, 原则上, P 和 T 合起来可能会将强加一个仅有 P 或仅有 T 时没有的额外简并.

我们会在第 5 章提到, 任何量子场论都被期望遵守一个被称为 CPT 的对称性, 它以如下方式作用在单粒子态上

$$\mathsf{CPT}\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} = (-1)^{j-\sigma}\,\Psi_{\mathbf{p},-\sigma,n^c}\,, \tag{2.C.11}$$

其中 n^c 代表粒子 n 的反粒子(或者说"荷共轭"). 在这个变换中不允许出现相位或矩阵(虽然我们总能通过结合 CPT 与一些好的内禀对称性来引入相位或矩阵). 由此得出

$$(\mathsf{CPT})^2\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} = (-1)^{2j}\Psi_{\mathbf{p},-\sigma,n}\,, \tag{2.C.12}$$

Wigner 提出 $(\mathsf{CPT})^2$ 的作用可能会出现符号 $-(-1)^{2j}$, 但这种可能性并不出现在量子场论中.

如果 T 是某类现象中的好对称性, 那么反演 $\mathsf{CP} \equiv (\mathsf{CPT})\mathsf{T}^{-1}$ 也同样如此. 对于那些在 T 变换下以通常方式变换的态

$$\mathsf{T}\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} \propto \Psi_{-\mathbf{p},-\sigma,n}\,, \tag{2.C.13}$$

CP 算符也按通常的方式作用

$$\mathsf{CP}\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} \propto \Psi_{-\mathbf{p},\sigma,n^c}\,. \tag{2.C.14}$$

这样, 算符 $\mathsf{C} \equiv \mathsf{CPP}^{-1}$ 仅是将粒子变为反粒子

$$\mathsf{C}\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} \propto \Psi_{\mathbf{p},\sigma,n^c}\,. \tag{2.C.15}$$

另一方面, 当 T 采用非常规表示(2.C.8)时, 方程(2.C.11)给出

$$\mathsf{CP}\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm} = \mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\phi/2}\Psi_{-\mathbf{p},\sigma,\mp^c}\,. \tag{2.C.16}$$

特别的, 由 $\pm$ 标记的简并性可能与粒子-反粒子简并性相同, 这使得态 $\Psi_\pm$ 的反粒子(由 CPT 定义)就是 $\Psi_\mp$. 在这种情况下, CP 将拥有不交换粒子和反粒子的异常性质. 只要这些粒子被考虑在内, CP 和 T 就是我们通常所说的 P 和 CT. 然而, 这不仅仅是定义的问题; 对于其它粒子, CP 和 T 仍具有它们通常的效果.

在已知的粒子中, 没有一个构成了反演的非常规表示, 所以这些可能性不在这里进一步讨论. 从现在起, 我们将假定所有反演具有 2.6 节中所给出的传统作用方式.

习题

1. 假定观测者 $\mathcal{O}$ 看到一个 W 玻色子(自旋为 1 且质量 $m \neq 0$), 动量为 $\mathbf{p}$, 动量方向为 y-方向且自旋 z-分量为 σ. 第二个观测者 $\mathcal{O}'$ 相对第一个观测者以速度 $\mathbf{v}$ 沿着 z-方向运动. $\mathcal{O}'$ 会怎样描述 W 的这个态?

2. 假定观测者 $\mathcal{O}$ 看到一个光子, 动量为 $\mathbf{p}$, 动量方向是 y-方向且极化矢量在 z-方向, 第二个观测者 $\mathcal{O}'$ 相对第一个观测者以速度 $\mathbf{v}$ 沿着 z-方向运动. $\mathcal{O}'$ 会如何描述这个光子?

3. 直接从群的乘法规则出发(不用我们关于 Lorentz 群的结果), 推导伽利略群生成元的对易关系. 要求包含不能通过重新定义群生成元消除的中心荷的最一般集合.

4. 定义 $W_\mu \equiv \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} J^{\nu\rho} P^\lambda$, 证明算符 $P_\mu P^\mu$ 和 $W_\mu W^\mu$ 与所有 Lorentz 变换算符 $U(\Lambda, a)$ 对易.

5. 考虑两个空间维和一个时间维中的物理, 假定具有“Lorentz”群 $SO(2,1)$ 不变性. 如何描述单个有质量粒子的自旋态? 它们在 Lorentz 变换下会怎样? 在反演 P 和 T 下又会怎样?

6. 像习题 5 那样, 考虑两个空间维和一个时间维中的物理, 假定具有“Lorentz”群 $O(2,1)$ 不变性. 如何描述单个无质量粒子的自旋态? 它们在 Lorentz 变换下会怎样? 在反演 P 和 T 下又会怎样?

参考文献

[1] P. A. M. Dirac, *The principles of Quantum mechanics*, 4th edn (Oxford University Press, Oxford, 1958).

[2] E. P. Wigner, *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren*(Braunschweig, 1931): pp. 251-3(英译, Academic Press, Inc, New York, 1959). 无质量粒子另见 E. P. Wigner, *Theoretical Physics*(International Atomic Energy Agency, Vienna, 1963): p. 64.

[3] G. C. Wick, A. S. Wightman, and E. P. Wigner, *Phys. Rev*. **88**, 101 (1952).

[3a] 可参看 S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972): section 2.1.

[4] E. Inönü and E. P. Wigner, *Nuovo Cimento* **IX**, 705 (1952)

[5] E. P. Wigner, *Ann. Math.* **40**, 149 (1939).

[6] G. W. Mackey, *Ann. Math*. **55**, 101 (1952); **58**, 193 (1953); *Acta. Math*. **99**, 265 (1958); *Induced Representations of Groups and Quantum Mechanics* (Benjamin, New Youk, 1968).

[7] 可参看 A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics,* (Princeton University Press, Princeton, 1957): Chapter 4; M. E. Rose, *Elementary theory of Angular Momentum*

(John Wiley & Sons, New York, 1957): Chapter IV; L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics – Non Relativistic Theory,* 3rd edn. (Pergamon Press, Oxford, 1977): section 58; Wu-Ki Tung, *Group Theory in Physics* (World Scientific, Singapore, 1985); Sections 7.3 and 8.1.

[8] T. D. Lee and C. N. Yang, *Phys. Rev.* **104**, 254 (1956); C. S. Wu *et al., Phys. Rev.* **105**, 1413 (1957); R. Garwin, L. Lederman, and M. Weinrich, *Phys. Rev.* **105**, 1415 (1957); J. I. Friedman and V. L. Telegdi, *Phys. Rev.* **105**, 1681 (1957).

[9] J. H. Christenson, J. W. Cronin, V. L. Fitch, and R. Turlay, *Phys. Rev. Letters*, **13**, 138 (1964).

[10] H. A. Kramres, *Proc. Acad. Sci Amsterdam* **33**, 959 (1930); 另见F. J. Dyson, *J. Math. Phys.* **3**, 140 (1962).

[11] V. Bargmann, *Ann. Math.* **59**, 1 (1954): Theorem 7.1.

[12] 可参看H. W. Turnbull and A. C. Aitken, *An Introduction to the Theory of Canonical Matrices* (Dover Publications, New York, 1961): p. 194.

[13] 可参看H. Flanders, *Differential Forms* (Academic Press, New York, 1963): Section 3.6.

[14] 关于同伦类和同伦群的介绍, 参看J. G. Hocking and G. S. Young, *Topology* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1961): Chapter 4; C. Nash and S. Sen, *Topology and Geometry for Physicists* (Academic Press, London, 1983): Chapter 3 and 5.

[15] E. P. Wigner, in *Group Theoretical Concepts and Methods in Elementary Particle Physics,* F. Gürsey 编辑 (Gordon and Breach, New York, 1964): p. 37.

第 3 章　散射理论

上一章所阐述的相对论量子力学的一般原理, 迄今为止在这里只适用于单个稳定粒子的态. 这样的单粒子态本身并不是非常有趣——只有当两个或多个粒子发生相互作用时才会变得有趣起来. 但是, 实验中一般不会去跟踪粒子相互作用过程中的详尽细节. 相反, 在典范实验中(至少在核物理或基本粒子物理中), 数个粒子从一个宏观距离开始彼此接近, 在一个微观小区域内相互作用, 之后相互作用的产物再一次跑到宏观的距离之外. 碰撞前后的物理态由那些相距很远且彼此不再有相互作用的粒子构成, 所以它们可以被描述成上一章所讨论的单粒子态的直积. 在这样的实验中, 测量到的是, 相距很远且相当于没有相互作用的粒子从初态跃迁到末态的几率分布, 或者说"截面". 这章将概述计算这些几率和截面的形式理论.[1]

3.1　"入"态和"出"态

如果一个态由数个无相互作用的粒子构成, 在非齐次 Lorentz 群的变换下, 这个态可以看作是单粒子态的直积. 为了标记这个单粒子态, 我们使用它们的 4-动量 p^μ, 自旋 z-分量(对于无质量粒子用螺旋度) σ, 并且由于我们可能要处理多种粒子, 还要用额外的离散指标 n 来标记粒子种类, 这个指标包括了对质量, 自旋, 电荷等的描述. 对于这样的态, 一般的变换规则是

$$\begin{aligned} U(\Lambda,a)\Psi_{p_1,\sigma_1,n_1;p_2,\sigma_2,n_2;\cdots} &= \exp\Big(-\mathrm{i}a_\mu((\Lambda p_1)^\mu+(\Lambda p_2)^\mu+\cdots)\Big) \\ &\times\sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0(\Lambda p_2)^0\cdots}{p_1^0p_2^0\cdots}}\sum_{\sigma_1'\sigma_2'\cdots}D^{(j_1)}_{\sigma_1'\sigma_1}\Big(W(\Lambda,p_1)\Big)D^{(j_2)}_{\sigma_2'\sigma_2}\Big(W(\Lambda,p_2)\Big)\cdots \\ &\times\Psi_{\Lambda p_1,\sigma_1',n_1;\Lambda p_2,\sigma_2',n_2;\cdots}\,, \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

其中 $W(\Lambda,p)$ 是 Wigner 旋转(2.5.10), 而 $D^{(j)}_{\sigma'\sigma}(W)$ 是三维旋转群常规的$(2j+1)$-维幺正矩阵表示. (这是针对有质量粒子的; 对于任意无质量粒子, 矩阵 $D^{(j)}_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda,p))$ 要换成 $\delta_{\sigma'\sigma}\exp(\mathrm{i}\sigma\theta(\Lambda,p))$, 其中 θ 是方程(2.5.43)中定义的角度.) 这个态的归一化同方程(2.5.19)一样

$$\begin{aligned} &\Big(\Psi_{p_1',\sigma_1',n_1';p_2',\sigma_2',n_2';\cdots}\,,\ \Psi_{p_1,\sigma_1,n_1;p_2,\sigma_2,n_2;\cdots}\Big) \\ &\quad=\delta^3(\mathbf{p}_1'-\mathbf{p}_1)\delta_{\sigma_1'\sigma_1}\delta_{n_1'n_1}\delta^3(\mathbf{p}_2'-\mathbf{p}_2)\delta_{\sigma_2'\sigma_2}\delta_{n_2'n_2}\cdots \\ &\qquad\pm\text{置换}\,, \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

其中"±置换"项是考虑到粒子种类 $n_1',n_2',\cdots$ 的某个置换可能与 $n_1,n_2,\cdots$ 相同. (在第 4 章将会对此进行更加完整地讨论, 如果这个置换包含半整数自旋粒子的奇次置换, 符号是 -1, 否则是 $+1$. 在本章的内容里, 这些是不重要的.)

我们通常使用一个缩写记法, 用一个希腊字母, 例如 α, 代表整个集合 $p_1,\sigma_1,n_1;p_2,\sigma_2,n_2;\cdots$. 在这种记法下, 方程(3.1.2)简单地写成

$$(\Psi_{\alpha'},\Psi_\alpha)=\delta(\alpha'-\alpha)\,, \tag{3.1.3}$$

其中 $\delta(\alpha'-\alpha)$ 代表出现在方程(3.1.2)右边的 δ-函数与克罗内克 δ-符号乘积的和. 另外, 我们把对态的求和写成

$$\int d\alpha \cdots \equiv \sum_{n_1\sigma_1 n_2\sigma_2\cdots} \int \mathrm{d}^3p_1\, \mathrm{d}^3p_2\, \cdots\,, \tag{3.1.4}$$

它被理解成, 在这样的求和与积分下, 对于那些仅在全同粒子的交换下发生变化的构形, 我们只计入其中的一种. 特别的, 对于像方程(3.1.3)那样归一化的态, 它的完备关系写成

$$\Psi = \int \mathrm{d}\alpha\, \Psi_\alpha(\Psi_a, \Psi)\,. \tag{3.1.5}$$

对于那些由于种种原因而无法参与相互作用的粒子, 变换规则(3.1.1)是唯一的可能. 令 $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$ 以及 $a^\mu = (0,0,0,\tau)$, 这样 $U(\Lambda,a) = \exp(\mathrm{i}H\tau)$, 方程(3.1.1)的另一个要求是 Ψ_α 是能量本征态

$$H\Psi_\alpha = E_\alpha \Psi_\alpha\,, \tag{3.1.6}$$

它的能量等于单粒子能量的和

$$E_\alpha = p_1^0 + p_2^0 + \cdots \tag{3.1.7}$$

这里没有相互作用项, 那样的项将会同时涉及多个粒子.

另一方面, 变换规则(3.1.1)确实适用于时间 $t \to \pm\infty$ 的散射过程. 就像本章开头所解释的, 在典型的散射实验中, 我们开始于时间 $t \to -\infty$时的粒子, 它们相距如此之远以至于还没有相互作用, 而结束于 $t \to +\infty$, 此时粒子间隔得如此之远以至于它们之间没有了相互作用. 我们因而有了两组而非一组按照方程(3.1.1)变换的态: “入”态 ${\Psi_\alpha}^+$ 和“出”态 ${\Psi_\alpha}^-$,* 如果分别在 $t \to -\infty$ 时和 $t \to +\infty$ 时进行观察, 将会发现它们包含指标 α 所描述的粒子.

现在来看一下这个定义是如何构造出来的. 为了保持明显的Lorentz不变性, 在我们这里采用的形式体系中, 态矢不随时间改变——态矢 Ψ 描述了粒子系统的整个时空历史. (这被称为Heisenberg绘景, 以区别于Schrödinger绘景, 在Schrödinger绘景中, 算符是不变的, 而态随时间变化.) 因此, 我们不称 ${\Psi_\alpha}^\pm$ 是某个依赖时间的态矢 $\Psi(t)$ 在 $t \to \mp\infty$ 时的极限.

然而, 在态的定义中隐含的是对观察者所处惯性系的选择; 不同的观测者看到的是等价的态矢, 但不是相同的态矢. 特别的, 假定标准观测者 $\mathcal{O}$ 对他或她的时钟进行设定, 使得 $t=0$ 是碰撞过程中的某个时刻, 而另一个相对第一个观测者静止的观测者 $\mathcal{O}'$ 将他(她)的 $t'=0$ 设置成 $t=\tau$; 即, 两个观测者的时间坐标的关系是 $t' = t-\tau$. 那么, 如果 $\mathcal{O}$ 看到系统处在态 Ψ 中, $\mathcal{O}'$ 将会看到系统处在态 $U(1,-\tau)\Psi = \exp(-\mathrm{i}H\tau)\Psi$中. 因此, 态在发生碰撞(在 $\mathcal{O}$ 所处的基准下)的遥远过去和遥远未来的表现可以分别通过 $\tau \to -\infty$ 和 $\tau \to +\infty$ 的时间平移算符 $\exp(-\mathrm{i}H\tau)$ 得到. 当然, 如果态真的是一个能量本征态, 那么它不可能在时间上被定位——算符 $\exp(-\mathrm{i}H\tau)$ 会产生一个无关紧要的相位因子 $\exp(-\mathrm{i}E_\alpha\tau)$. 因此, 我们必须考察波包, 即叠加态 $\int \mathrm{d}\alpha\, g(\alpha)\Psi_\alpha$, 其中振幅 $g(\alpha)$ 非零且在能量的某个有限范围 ΔE 内光滑. “入”态和“出”态的定义使得叠加态

$$\exp(-\mathrm{i}H\tau)\int \mathrm{d}\alpha\, g(\alpha){\Psi_\alpha}^\pm = \int \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_\alpha\tau} g(\alpha){\Psi_\alpha}^\pm$$

在 $\tau \ll -1/\Delta E$ 或 $\tau \gg +1/\Delta E$ 时分别表现为自由粒子态的对应叠加.

*用“+”和“−”标记“入”态和“出”态看起来有点落伍, 但是它们似乎已经成为传统. 它们源于方程(3.1.16)中的符号.

更具体一点, 假定我们能够将时间平移算符的生成元 H 分为两项, 自由粒子哈密顿量 H_0 和相互作用 V,

$$H = H_0 + V \tag{3.1.8}$$

使得 H_0 的本征态 Φ_α 与完整哈密顿量 H 的本征态 ${\Psi_\alpha}^+$ 和 ${\Psi_\alpha}^-$ 有相同的表现

$$H_0\Phi_\alpha = E_\alpha\Phi_\alpha \ , \tag{3.1.9}$$

$$(\Phi_{\alpha'}, \Phi_\alpha) = \delta(\alpha' - \alpha) \ . \tag{3.1.10}$$

注意, 这里假定了 H_0 的谱与完整哈密顿量 H 的谱相同. 这要求出现在 H_0 中的质量是实际测量到的物理质量, 这个质量不一定与 H 中出现的“裸”质量项相同; 任何这两个质量之间有差异, 这个差异必须被纳入到相互作用 V 中, 而不是 H_0. 此外, H 谱中的任何相关束缚态都应该像一个基本粒子一样被引入到 H_0 中.[**]

“入”态和“出”态现在可以定义成 H 而非 H_0 的本征态

$$H{\Psi_\alpha}^\pm = E_\alpha{\Psi_\alpha}^\pm \ , \tag{3.1.11}$$

它在 $\tau \to -\infty$ 和 $\tau \to +\infty$ 时分别满足条件

$$\int \mathrm{d}\alpha \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_\alpha\tau} g(\alpha){\Psi_\alpha}^\pm \to \int \mathrm{d}\alpha \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_\alpha\tau} g(\alpha)\Phi_\alpha \ . \tag{3.1.12}$$

当 $\tau \to -\infty$ 或 $\tau \to +\infty$ 时, 方程(3.1.12)可以按照要求分别写成:

$$\exp(-\mathrm{i}H\tau) \int \mathrm{d}\alpha \, g(\alpha){\Psi_\alpha}^\pm \to \exp(-\mathrm{i}H_0\tau) \int \mathrm{d}\alpha \, g(\alpha)\Phi_\alpha \ .$$

这有时写成“入”态和“出”态的公式:

$${\Psi_\alpha}^\pm = \Omega(\mp\infty)\Phi_\alpha \ , \tag{3.1.13}$$

其中

$$\Omega(\tau) \equiv \exp(+\mathrm{i}H\tau)\exp(-\mathrm{i}H_0\tau) \ . \tag{3.1.14}$$

然而, 应当记住的是, 对于方程(3.1.13)中的 $\Omega(\mp\infty)$, 仅当它作用在能量本征态的光滑叠加态上时, 它才给出有意义的结果.

从(3.1.12)定义中我们立刻可以看出“入”态和“出”态可以像自由粒子态那样归一化. 为了看到这一点, 注意到方程(3.1.12)的左边是通过幺正算符 $\exp(-\mathrm{i}H\tau)$ 作用在一个不依赖于时间的态上得到的, 所以它的范数独立于时间, 因此等于 $\tau \to \infty$时的范数, 即方程(3.1.12)右边的范数:

$$\begin{aligned} &\int \mathrm{d}\alpha \, \mathrm{d}\beta \ \exp(-\mathrm{i}(E_\alpha - E_\beta)\tau) g(\alpha) g^*(\beta) ({\Psi_\beta}^\pm, {\Psi_\alpha}^\pm) \\ &\quad = \int \mathrm{d}\alpha \, \mathrm{d}\beta \ \exp(-\mathrm{i}(E_\alpha - E_\beta)\tau) g(\alpha) g^*(\beta) (\Phi_\beta, \Phi_\alpha) \ . \end{aligned}$$

[**]换一种做法, 在非相对论问题中, 我们可以在 H_0 中引入结合势. 该方法在“重排碰撞”的应用中, 即某些束缚态出现在初态而不出现在末态, 或是相反的情况, 我们将 H 分成 H_0 和 V 的方式在初态和末态中必须是不同的.

因为假定了这个结果对所有光滑函数 $g(\alpha)$ 成立, 所以标量积必须相等

$$(\Psi_\beta{}^{\pm}, \Psi_\alpha{}^{\pm}) = (\Phi_\beta, \Phi_\alpha) = \delta(\beta - \alpha)\,. \tag{3.1.15}$$

出于一些原因, 得到能量本征值方程(3.1.11)满足条件(3.1.12)的显式解是有用的, 哪怕这种解只是形式的. 为了做到这点, 将方程(3.1.11)写为

$$(E_\alpha - H_0)\Psi_\alpha{}^{\pm} = V\Psi_\alpha{}^{\pm}\,.$$

算符 $E_\alpha - H_0$ 不是可逆的; 它不仅湮灭自由粒子态 Φ_α, 也湮灭具有相同能量的其它自由粒子态 Φ_β, 这样的态是连续的. 因为"入"态和"出"态在 $V \to 0$ 时就变成了 Φ_α, 我们尝试将这个形式解写成 Φ_α加上正比于 V 的项:

$$\Psi_\alpha{}^{\pm} = \Phi_\alpha + (E_\alpha - H_0 \pm \mathrm{i}\epsilon)^{-1} V\Psi_\alpha{}^{\pm}\,, \tag{3.1.16}$$

或者, 按自由粒子态的完全集展开,

$$\Psi_\alpha{}^{\pm} = \Phi_\alpha + \int \mathrm{d}\beta\, \frac{T_{\beta\alpha}{}^{\pm}\Phi_\beta}{E_\alpha - E_\beta \pm \mathrm{i}\epsilon}\,, \tag{3.1.17}$$

$$T_{\beta\alpha}{}^{\pm} \equiv (\Phi_\beta, V\Psi_\alpha{}^{\pm})\,, \tag{3.1.18}$$

其中 ϵ 是无限小的正数, 加入它是为了使 $(E_\alpha - H_0)$ 的倒数有意义. 这些被称作*Lippmann-Schwinger*方程.[1a]. 在下一节末尾, 对于"入"态和"出"态的正交性, 我们会利用方程(3.1.17)给出一个不太严格的证明.

还有待证明的是, 对"入"态和"出"态, 分母分别带有 $+\mathrm{i}\epsilon$ 和 $-\mathrm{i}\epsilon$ 的方程(3.1.17)确实满足条件(3.1.12). 为此, 考虑叠加态

$$\Psi_g{}^{\pm}(t) \equiv \int \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_\alpha t} g(\alpha)\Psi_\alpha{}^{\pm}\,, \tag{3.1.19}$$

$$\Phi_g(t) \equiv \int \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_\alpha t} g(\alpha)\Phi_\alpha\,. \tag{3.1.20}$$

我们想证明, $\Psi_g{}^{+}(t)$ 和 $\Psi_g{}^{-}(t)$ 分别在 $t \to -\infty$ 和 $t \to +\infty$ 时趋于 $\Phi_g(t)$. 在方程(3.1.19)中使用方程(3.1.17)给出

$$\Psi_g{}^{\pm}(t) = \Phi_g(t) + \int \mathrm{d}\alpha \int \mathrm{d}\beta\, \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_\alpha t} g(\alpha) T_{\beta\alpha}{}^{\pm}\Phi_\beta}{E_\alpha - E_\beta \pm \mathrm{i}\epsilon}\,. \tag{3.1.21}$$

我们先不计后果地交换一次积分次序, 并考察积分

$$\mathscr{I}_\beta{}^{\pm} \equiv \int \mathrm{d}\alpha\, \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_\alpha t} g(\alpha) T_{\beta\alpha}{}^{\pm}}{E_\alpha - E_\beta \pm \mathrm{i}\epsilon}\,.$$

当 $t \to -\infty$ 时, 我们可以在上半平面用一个大半圆来闭合能量变量 E_α 的积分围道, 由于有因子 $\exp(-\mathrm{i}E_\alpha t)$, 这个因子在 $t \to -\infty$ 且 $\operatorname{Im} E_\alpha > 0$ 时会指数衰减, 来自半圆的贡献被抹除了. 于是, 通过对被积函数在上半平面的奇点求和就得到了这个积分. 一般而言, 函数 $g(\alpha)$ 和 $T_{\beta\alpha}{}^{\pm}$ 预期在带有限正虚部的一些 E_α 值处有奇点, 但和大半圆一样, 它们的贡献在 $t \to -\infty$ 时被指数压低了. (特别地, $-t$ 必须远大于波包 $g(\alpha)$中的时间不确定度以及碰撞的持续时间, 这二者分别决定了 $g(\alpha)$ 和 $T_{\beta\alpha}{}^{\pm}$ 在复 E_α 平面上的奇点位置.) 现在剩下了 $(E_\alpha - E_\beta \pm \mathrm{i}\epsilon)^{-1}$ 中的奇点, 对于 $\mathscr{I}_\beta{}^{-}$, 奇点在上半平面, 对 $\mathscr{I}_\beta{}^{+}$ 则不是. 于是我们得出 $\mathscr{I}_\beta{}^{+}$ 在 $t \to -\infty$ 时为零. 同样的, 当 $t \to +\infty$ 时, 我们必须取在下半平面闭合的积分围道, 所以 $\mathscr{I}_\beta{}^{-}$在这个极限下为零. 我们得出结论: $\Psi_g{}^{\pm}(t)$ 在 $t \to \mp\infty$ 时趋于 $\Phi_g(t)$. 这与约束条件(3.1.12)一致.

* * *

为了后面的应用, 我们给出方程(3.1.17)中因子 $(E_\alpha - E_\beta \pm \mathrm{i}\epsilon)^{-1}$的一个方便表示. 一般而言, 我们可以将这个因子写成

$$(E \pm \mathrm{i}\epsilon)^{-1} = \frac{\mathscr{P}_\epsilon}{E} \mp \mathrm{i}\pi\delta_\epsilon(E)\,, \tag{3.1.22}$$

其中

$$\frac{\mathscr{P}_\epsilon}{E} \equiv \frac{E}{E^2+\epsilon^2}\,, \tag{3.1.23}$$

$$\delta_\epsilon(E) \equiv \frac{\epsilon}{\pi(E^2+\epsilon^2)}\,. \tag{3.1.24}$$

函数(3.1.23)在 $|E| \gg \epsilon$ 时就是 $1/E$ 而在 $E \to 0$ 时为零, 所以, 当 $\epsilon \to 0$ 时, 它的行为就像"主值函数" $\mathscr{P}/E$, 通过去掉 $E = 0$ 附近的一个无限小区间, 对于 $1/E$ 与E的任何光滑函数乘积, 主值函数使得对这种乘积的积分有意义. 函数(3.1.24)在 $|E| \gg \epsilon$ 时是 ϵ 阶的, 并且在对所有 E 积分后给出1, 所以在 $\epsilon \to 0$ 的极限下, 它的行为就像熟悉的 δ-函数 $\delta(E)$. 有了这个理解, 我们就可以去掉方程(3.1.22)中的指标 ϵ, 简单地写成

$$(E \pm \mathrm{i}\epsilon)^{-1} = \frac{\mathscr{P}}{E} \mp \mathrm{i}\pi\delta(E)\,. \tag{3.1.25}$$

3.2 S-矩阵

实验者一般在 $t \to -\infty$ 时制备一个具有确定粒子内容的态, 然后在 $t \to +\infty$ 时测量这个态变成什么. 如果制备的态在 $t \to -\infty$ 时含有的粒子信息为 α, 那么它是"入"态 ${\Psi_\alpha}^+$, 如果在 $t \to +\infty$ 时发现它所含有的粒子信息是 β, 那么它是"出"态 ${\Psi_\beta}^-$. 因此, 跃迁 $\alpha \to \beta$ 的几率振幅是标量积

$$S_{\beta\alpha} = ({\Psi_\beta}^-, {\Psi_\alpha}^+)\,. \tag{3.2.1}$$

这个复振幅的阵列被称为 S-矩阵.[2] 如果没有相互作用, 那么"入"态和"出"态是相同的, 这样 $S_{\beta\alpha}$ 就是 $\delta(\alpha-\beta)$. 反应 $\alpha \to \beta$ 的速率因此正比于 $|S_{\beta\alpha} - \delta(\alpha-\beta)|^2$. 在 3.4 节, 我们将详细地看到 $S_{\beta\alpha}$ 是如何与测量出的截面和速率相关联的.

应该要强调一下, "入"态和"出"态并不处在不同的 Hilbert 空间中. 它们的差异的仅在于它们是如何被标记的; 即它们出现在 $t \to -\infty$ 还是出现在 $t \to +\infty$. 任何"入"态都可以展开成"出"态的和, 展开系数由 S-矩阵(3.2.1)给出.

因为 $S_{\beta\alpha}$ 是联系两个正交完备集的矩阵, 所以它必须是幺正的. 为了更详细地看到这一点, 对"出"态使用完备关系(3.1.5), 并写出

$$\int \mathrm{d}\beta\; S^*_{\beta\gamma} S_{\beta\alpha} = \int \mathrm{d}\beta\; ({\Psi_\gamma}^+, {\Psi_\beta}^-)({\Psi_\beta}^-, {\Psi_\alpha}^+) = ({\Psi_\gamma}^+, {\Psi_\alpha}^+)\,.$$

利用(3.1.15), 这给出

$$\int \mathrm{d}\beta\; S^*_{\beta\gamma} S_{\beta\alpha} = \delta(\gamma-\alpha) \tag{3.2.2}$$

或者, 简写成 $S^\dagger S = 1$. 以相同的方式, "入"态的完备性给出*

$$\int \mathrm{d}\beta\; S_{\gamma\beta} S^*_{\alpha\beta} = \delta(\gamma-\alpha) \tag{3.2.3}$$

*在本节末尾会给出另一种证明. 注意, 对于无限"矩阵", 幺正条件 $S^\dagger S = 1$ 和 $SS^\dagger = 1$ 不是等价的.

或者, 换一种形式, $SS^\dagger = 1$.

取代处理 S-矩阵, 更加方便的是处理一个算符 S, 这个算符定义成它在自由粒子态之间的矩阵元等于 S-矩阵的相应矩阵元:

$$(\Phi_\beta, S\Phi_\alpha) \equiv S_{\beta\alpha} \,. \tag{3.2.4}$$

"入"态和"出"态的表达式(3.1.13)虽然非常形式化, 但是它是显式表达式, 它给出了 S-算符的一个公式:

$$S = \Omega(\infty)^\dagger \Omega(-\infty) = U(+\infty, -\infty) \,, \tag{3.2.5}$$

其中

$$U(\tau, \tau_0) \equiv \Omega(\tau)^\dagger \Omega(\tau_0) = \exp(\mathrm{i}H_0\tau) \exp(-\mathrm{i}H(\tau - \tau_0)) \exp(-\mathrm{i}H_0\tau_0) \,. \tag{3.2.6}$$

在下一节, 我们将用这个公式检验 S-矩阵的 Lorentz 不变性, 并在 3.5 节用它导出含时微扰论中的 S-矩阵公式.

上一节的方法可以用来推导 S-矩阵的另一个有用的公式. 让我们回到"入"态 Ψ^+ 的方程(3.1.21), 不过这次取 $t \to +\infty$. 现在, 我们必须取在下半 E_α 平面闭合的积分围道, 尽管 $T_{\beta\alpha}{}^\pm$ 和 $g(\alpha)$ 中的奇点像前面一样在 $t \to +\infty$ 时无贡献, 但是我们现在还是要计入来自奇异因子 $(E_\alpha - E_\beta + \mathrm{i}\epsilon)^{-1}$ 的贡献. 围道从 $E_\alpha = -\infty$ 跑到 $E_\alpha = +\infty$, 然后通过下半平面的大半圆再回到 $E_\alpha = -\infty$, 所以它以顺时针方向绕奇点一圈. 利用留数方法, 对 E_α 的积分就是被积函数在 $E_\alpha = E_\beta - \mathrm{i}\epsilon$ 的值再乘以因子 $-2\mathrm{i}\pi$. 这就是说, 在 $\epsilon \to 0+$ 的极限下, (3.1.21)中对 α 的积分在 $t \to +\infty$ 时有如下渐近性质

$$\mathscr{I}_\beta{}^+ \to -2\mathrm{i}\pi \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_\beta t} \int \mathrm{d}\alpha \, \delta(E_\alpha - E_\beta) g(\alpha) T_{\beta\alpha}{}^+$$

因而, 当 $t \to +\infty$ 时,

$$\Psi_g{}^+(t) \to \int \mathrm{d}\beta \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_\beta t} \Phi_\beta \Big[g(\beta) - 2\mathrm{i}\pi \int \mathrm{d}\alpha \, \delta(E_\alpha - E_\beta) g(\alpha) T_{\beta\alpha}{}^+ \Big] \,.$$

但是, 将(3.1.19)给出的 $\Psi_g{}^+$ 按"出"态的完全集展开给出

$$\Psi_g{}^+(t) = \int \mathrm{d}\alpha \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_\alpha t} g(\alpha) \int \mathrm{d}\beta \, \Psi_\beta{}^- \, S_{\beta\alpha} \,.$$

由于 $S_{\beta\alpha}$ 包含因子 $\delta(E_\beta - E_\alpha)$, 这可以重新表示为

$$\Psi_g{}^+(t) = \int \mathrm{d}\beta \, \Psi_\beta{}^- \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_\beta t} \int \mathrm{d}\alpha \, g(\alpha) S_{\beta\alpha}$$

并且, 利用"出"态的定义性质(3.1.12), 它在 $t \to +\infty$ 时有渐近性质

$$\Psi_g{}^+(t) \to \int \mathrm{d}\beta \, \Phi_\beta \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_\beta t} \int \mathrm{d}\alpha \, g(\alpha) S_{\beta\alpha} \,.$$

用上式与我们之前的结果进行比较, 我们发现

$$\int \mathrm{d}\alpha \, g(\alpha) S_{\beta\alpha} = g(\beta) - 2\mathrm{i}\pi \int \mathrm{d}\alpha \, \delta(E_\alpha - E_\beta) g(\alpha) T_{\beta\alpha}{}^+$$

换句话说

$$S_{\beta\alpha} = \delta(\beta - \alpha) - 2\mathrm{i}\pi \delta(E_\alpha - E_\beta) T_{\beta\alpha}{}^+ \,. \tag{3.2.7}$$

这给出了 S-矩阵的一个简单近似: 对于较弱的相互作用 V, 我们可以忽略(3.1.18)中“入”态与自由粒子态之间的差异, 在这种情况下, 方程(3.2.7)给出

$$S_{\beta\alpha} \simeq \delta(\beta-\alpha) - 2\mathrm{i}\pi\delta(E_\alpha - E_\beta)(\Phi_\beta, V\Phi_\alpha)\,. \tag{3.2.8}$$

这被称为*Born*近似.[3] 我们会在 3.5 节讨论它的高阶项.

* * *

利用“入”态和“出”态的 Lippmann-Schwinger 方程(3.1.16), 无须处理 $t \to \mp\infty$ 的极限, 我们就可以给出这些态的正交性, S-矩阵的幺正性以及方程(3.2.7)的一个证明[4]. 首先, 对矩阵元 $(\Psi_\beta{}^{\pm}, V\Psi_\alpha{}^{\pm})$ 的左边和右边分别使用方程(3.1.16), 两次结果相等, 我们发现

$$\begin{aligned}&(\Psi_\beta{}^{\pm}, V\Phi_\alpha) + (\Psi_\beta{}^{\pm}, V(E_\alpha - H_0 \pm \mathrm{i}\epsilon)^{-1}V\Psi_\alpha{}^{\pm})\\ &\quad = (\Phi_\beta, V\Psi_\alpha{}^{\pm}) + (\Psi_\beta{}^{\pm}, V(E_\beta - H_0 \mp \mathrm{i}\epsilon)^{-1}V\Psi_\alpha{}^{\pm})\,.\end{aligned}$$

对中间态的完全集 Φ_γ 求和, 这给出方程:

$$\begin{aligned}T_{\alpha\beta}{}^{\pm\star} - T_{\beta\alpha}{}^{\pm} = &-\int \mathrm{d}\gamma\, T_{\gamma\beta}{}^{\pm\star}T_{\gamma\alpha}{}^{\pm}\\ &\times\left([E_\alpha - E_\gamma \pm \mathrm{i}\epsilon]^{-1} - [E_\beta - E_\gamma \mp \mathrm{i}\epsilon]^{-1}\right).\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

为了证明“入”态和“出”态的正交性, 用 $E_\alpha - E_\beta \pm 2\mathrm{i}\epsilon$ 除方程(3.2.9). 这给出

$$\begin{aligned}&\left(\frac{T_{\alpha\beta}{}^{\pm}}{E_\beta - E_\alpha \pm 2\mathrm{i}\epsilon}\right)^{\star} + \frac{T_{\beta\alpha}{}^{\pm}}{E_\alpha - E_\beta \pm 2\mathrm{i}\epsilon}\\ &\qquad = -\int \mathrm{d}\gamma \left(\frac{T_{\gamma\beta}{}^{\pm}}{E_\beta - E_\gamma \pm \mathrm{i}\epsilon}\right)^{\star}\frac{T_{\gamma\alpha}{}^{\pm}}{E_\alpha - E_\gamma \pm \mathrm{i}\epsilon}\,.\end{aligned}$$

左边分母中的 2ϵ 可以换成 ϵ, 这是因为它们唯一重要的性质是正的无限小量. 这样我们就看到 $\delta(\beta-\alpha) + T_{\beta\alpha}{}^{\pm}/(E_\beta - E_\alpha \pm \mathrm{i}\epsilon)$ 是幺正的. 结合(3.1.17), 这正好表明 $\Psi_\alpha{}^{\pm}$ 构成态矢的两个正交集. 用 $\delta(E_\beta - E_\alpha)$ 而不是 $(E_\alpha - E_\beta \pm 2\mathrm{i}\epsilon)^{-1}$ 乘以(3.2.9), 就可以用类似的方式证明 S-矩阵的幺正性.

3.3 S-矩阵的对称性

本节中, 我们将考察 S-矩阵在各种对称性下不变的含义, 以及哈密顿量需要满足什么条件来确保这些不变性.

*Lorentz*不变性

对任意固有正时 Lorentz 变换 $x \to \Lambda x + a$, 我们可以定义一个幺正算符 $U(\Lambda, a)$, 通过像在方程(3.1.1)中那样指定它作用在“入”态还是“出”态上, 我们以此来定义它. 当我们称一个理论 Lorentz 不变时, 我们的意思是同一个算符 $U(\Lambda, a)$ 以(3.1.1)中的方式作用在“入”态和“出”态上. 由于算符 $U(\Lambda, a)$ 幺正, 我们可以写下

$$S_{\beta\alpha} = \left(\Psi_\beta{}^{-}, \Psi_\alpha{}^{+}\right) = \left(U(\Lambda, a)\Psi_\beta{}^{-}, U(\Lambda, a)\Psi_\alpha{}^{+}\right)$$

所以, 利用(3.1.1), 我们就获得了 S-矩阵的Lorentz不变性(实际上是协变性): 对于任意 Lorentz 变换 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 以及平移 a^μ,

$$\begin{aligned}
&S_{p_1',\sigma_1',n_1';p_2',\sigma_2',n_2';\cdots\,,\,p_1,\sigma_1,n_1;p_2,\sigma_2,n_2;\cdots} \\
&= \exp\Big(\mathrm{i}a_\mu\Lambda^\mu{}_\nu(p_1'^\nu + p_2'^\nu + \cdots - p_1^\nu - p_2^\nu - \cdots)\Big) \\
&\quad\times\sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0(\Lambda p_2)^0\cdots(\Lambda p_1')^0(\Lambda p_2')^0\cdots}{p_1^0p_2^0\cdots\quad p_1'^0p_2'^0\cdots}} \\
&\quad\times\sum_{\bar\sigma_1\bar\sigma_2\cdots} D^{(j_1)}_{\bar\sigma_1\sigma_1}\Big(W(\Lambda,p_1)\Big)D^{(j_2)}_{\bar\sigma_2\sigma_2}\Big(W(\Lambda,p_2)\Big)\cdots \\
&\quad\times\sum_{\bar\sigma_1'\bar\sigma_2'\cdots} D^{(j_1')*}_{\bar\sigma_1'\sigma_1'}\Big(W(\Lambda,p_1')\Big)D^{(j_2')*}_{\bar\sigma_2'\sigma_2'}\Big(W(\Lambda,p_2')\Big)\cdots \\
&\quad\times S_{\Lambda p_1',\bar\sigma_1',n_1';\Lambda p_2',\bar\sigma_2',n_2';\cdots\,,\,\Lambda p_1,\bar\sigma_1,n_1;\Lambda p_2,\bar\sigma_2,n_2;\cdots}\,. \qquad (3.3.1)
\end{aligned}$$

(这里的撇号用来区分初粒子和末粒子; 上横线用来区分求和变量.) 特别的, 因为左边与 a^μ 无关, 所以右边也必须与 a^μ 无关, 因此, 除非 4-动量守恒, 否则 S-矩阵为零. 因此, 我们可以将 S 矩阵中表示粒子间真实相互作用的那部分表示成:

$$S_{\beta\alpha} - \delta(\beta-\alpha) = -2\pi\mathrm{i}\,M_{\beta\alpha}\delta^4(p_\beta - p_\alpha)\,. \qquad (3.3.2)$$

(然而, 正如我们将在下一章看到的, 振幅 $M_{\beta\alpha}$ 本身中所含有的项会有更进一步的 δ-函数因子.)

方程(3.3.1)应当看作是我们对 S-矩阵的 Lorentz 不变性的定义, 而不是一个定理, 这是因为, 仅对于一些经过特殊选择的哈密顿量, 才会存在能够以(3.3.1)的方式作用在“入”态和“出”态上的幺正算符. 我们需要给出为了确保 S-矩阵的Lorentz不变性而加在哈密顿量上的条件. 为此, 采用方程(3.2.4)定义的算符 S 是方便的:

$$S_{\beta\alpha} = (\Phi_\beta, S\Phi_\alpha)\,.$$

我们已经在第 2 章定义了自由粒子态 Φ_α, 它们构成了非齐次 Lorentz 群的一个表示, 所以我们总能定义幺正算符 $U_0(\Lambda,a)$, 使得它诱导出自由粒子态上的变换(3.1.1):

$$\begin{aligned}
U_0(\Lambda,a)\Phi_{p_1,\sigma_1,n_1;p_2,\sigma_2,n_2;\cdots} &= \exp\Big(-\mathrm{i}a_\mu\Lambda^\mu{}_\nu(p_1^\nu + p_2^\nu + \cdots)\Big) \\
&\times\sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0(\Lambda p_2)^0\cdots}{p_1^0p_2^0\cdots}}\sum_{\sigma_1'\sigma_2'\cdots} D^{(j_1)}_{\sigma_1'\sigma_1}\Big(W(\Lambda,p_1)\Big)D^{(j_2)}_{\sigma_2'\sigma_2}\Big(W(\Lambda,p_2)\Big)\cdots \\
&\times\Phi_{\Lambda p_1,\sigma_1',n_1;\Lambda p_2,\sigma_2'n_2;\cdots}\,.
\end{aligned}$$

因此, 如果这个幺正算符与 S-算符对易, 方程(3.3.1)就是成立的:

$$U_0(\Lambda,a)^{-1}\,S\,U_0(\Lambda,a) = S\,.$$

这个条件也可以用无限小 Lorentz 变换的形式表达. 就像 2.4 节中那样, 将会存在一组厄米算符, 动量 $\mathbf{P}_0$, 角动量 $\mathbf{J}_0$, 以及增速算符 $\mathbf{K}_0$, 再加上 H_0, 当这些算符作用在自由粒子态上时, 它们就生成了非齐次 Lorentz 变换的无限小版本. 方程(3.3.1)等价于说 S-矩阵在这类变换下不受影响, 换句话说, S-算符与这些生成元对易:

$$[H_0,S] = [\mathbf{P}_0,S] = [\mathbf{J}_0,S] = [\mathbf{K}_0,S] = 0\,. \qquad (3.3.3)$$

因为算符 $H_0, \mathbf{P}_0, \mathbf{J}_0$ 和 $\mathbf{K}_0$ 生成了 Φ_α 上的无限小非齐次Lorentz变换, 它们自动满足对易关系(2.4.18)—(2.4.24):

$$[J_0^i, J_0^j] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk} J_0^k \,, \tag{3.3.4}$$
$$[J_0^i, K_0^j] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk} K_0^k \,, \tag{3.3.5}$$
$$[K_0^i, K_0^j] = -\mathrm{i}\epsilon_{ijk} J_0^k \,, \tag{3.3.6}$$
$$[J_0^i, P_0^j] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk} P_0^k \,, \tag{3.3.7}$$
$$[K_0^i, P_0^j] = -\mathrm{i}H_0\delta_{ij} \,, \tag{3.3.8}$$
$$[J_0^i, H_0] = [P_0^i, H_0] = [P_0^i, P_0^j] = 0 \,, \tag{3.3.9}$$
$$[K_0^i, H_0] = -\mathrm{i}P_0^i \,, \tag{3.3.10}$$

其中 i, j, k 等取遍值 $1, 2, 3$, ϵ_{ijk} 是全反对称量, 并有 $\epsilon_{123} = +1$.

以相同的方式, 我们可以定义一组"精确生成元", 算符 $\mathbf{P}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ 以及全哈密顿量 H, 它们一起生成了某个态上的变换(3.1.1), 例如"入"态. (正如已经提及的, 尽管并非显而易见, 但同样的算符作用在"出"态生成了相同的变换.) 群结构告诉我们, 这些精确生成元满足相同的对易关系:

$$[J^i, J^j] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk} J^k \,, \tag{3.3.11}$$
$$[J^i, K^j] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk} K^k \,, \tag{3.3.12}$$
$$[K^i, K^j] = -\mathrm{i}\epsilon_{ijk} J^k \,, \tag{3.3.13}$$
$$[J^i, P^j] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk} P^k \,, \tag{3.3.14}$$
$$[K^i, P^j] = -\mathrm{i}H\delta_{ij} \,, \tag{3.3.15}$$
$$[J^i, H] = [P^i, H] = [P^i, P^j] = 0 \,, \tag{3.3.16}$$
$$[K^i, H] = -\mathrm{i}P^i \,. \tag{3.3.17}$$

在几乎所有已知的场论中, 相互作用的效应是通过在哈密顿量加上相互作用项 V 引入, 与此同时保持动量和角动量不变:

$$H = H_0 + V \,, \qquad \mathbf{P} = \mathbf{P}_0 \,, \qquad \mathbf{J} = \mathbf{J}_0 \,. \tag{3.3.18}$$

(唯一已知的例外是存在拓扑扭挠(twisted)场的理论, 例如有磁单极的理论, 在这些理论中, 态的角动量会依赖相互作用.) 方程(3.3.18)意味着, 对易关系(3.3.11), (3.3.14)和(3.3.16)成立的前提是相互作用与自由粒子的动量算符和角动量算符都对易

$$[V, \mathbf{P}_0] = [V, \mathbf{J}_0] = 0 \,. \tag{3.3.19}$$

很容易从Lippmann-Schwinger 方程(3.1.16), 或者等价地从(3.1.13)看出, 作用在"入"态(和"出"态)上且生成平移和旋转的算符就是 $\mathbf{P}_0$ 和 $\mathbf{J}_0$. 我们也很容易看到 $\mathbf{P}_0$ 和 $\mathbf{J}_0$ 与方程(3.2.6)定义的算符 $U(t, t_0)$ 对易, 所以它们与 S-算符 $U(\infty, -\infty)$ 对易. 更进一步, 我们也已经知道 S-算符与 H_0 对易的原因是(3.2.7)中的两项均有能量守恒 δ-函数. 这样, 只需证明增速生成元 $\mathbf{K}_0$ 与 S-算符对易即可.

另一方面, 不可能让增速生成元 $\mathbf{K}$ 等于对应的自由粒子的增速生成元 $\mathbf{K}_0$, 这是因为如果那样的话, 方程(3.3.15)和(3.3.8)将给出 $H = H_0$, 这在有相互作用时显然是不正确的. 因此, 当我们

给 H_0 加上相互作用 V 时, 也必须要在增速生成元上加一个修正 $\mathbf{W}$:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{W} \,. \tag{3.3.20}$$

在剩下的对易关系中, 我们集中考虑方程(3.3.17), 现在可以把它写成如下形式

$$[\mathbf{K}_0, V] = -[\mathbf{W}, H] \,. \tag{3.3.21}$$

仅有条件(3.3.21)是没有意义的, 因为对任意的 V, 通过将 $\mathbf{W}$ 在 H-本征矢 Ψ_α 和 Ψ_β 之间的矩阵元给定为 $-(\Psi_\beta, [\mathbf{K}_0, V]\Psi_\alpha)/(E_\beta - E_\alpha)$, 我们总可以这样来定义它. 记住, 一个理论的 Lorentz 不变性的关键不是应该存在一组满足方程(3.3.11)—(3.3.17)的精确生成元, 而是这些算符应该以相同的方式作用在"入"态和"出"态上; 仅仅找到满足方程(3.3.21)的算符 $\mathbf{K}$ 是不够的. 然而, 如果我们要求 W 的矩阵元应该是能量的光滑函数, 并且没有形如 $(E_\beta - E_\alpha)^{-1}$ 的奇点, 方程(3.3.21)确实就变得重要了. 现在我们将证明, 方程(3.3.21), 连同 $\mathbf{W}$ 的一个合适的光滑条件, 确实暗示着剩下的 Lorentz 不变条件 $[\mathbf{K}_0, S] = 0$.

为了证明这一点, 考察 K_0 与算符 $U(t, t_0)$ 的对易子, 其中算符 $U(t, t_0)$ 由方程(3.2.6)定义, 且 t 和 t_0 有限. 利用方程(3.3.10)以及 $\mathbf{P}_0$ 和 H_0 对易, 我们得出:

$$[\mathbf{K}_0, \exp(\mathrm{i}H_0 t)] = t\mathbf{P}_0 \exp(\mathrm{i}H_0 t)$$

而方程(3.3.21)(与方程(3.3.17)等价)给出

$$[\mathbf{K}, \exp(\mathrm{i}Ht)] = t\mathbf{P} \exp(\mathrm{i}Ht) = t\mathbf{P}_0 \exp(\mathrm{i}Ht) \,.$$

这样, $\mathbf{K}_0$ 与 U 的对易子中的动量算符就被消掉了, 并且我们发现:

$$[\mathbf{K}_0, U(\tau, \tau_0)] = -\mathbf{W}(\tau)U(\tau, \tau_0) + U(\tau, \tau_0)\mathbf{W}(\tau_0) \,, \tag{3.3.22}$$

其中

$$\mathbf{W}(t) \equiv \exp(\mathrm{i}H_0 t)\mathbf{W} \exp(-\mathrm{i}H_0 t) \,. \tag{3.3.23}$$

如果 $\mathbf{W}$ 在 H_0-本征态之间的矩阵元是能量的函数且足够光滑, 那么在 $t \to \pm\infty$ 时, $\mathbf{W}(t)$ 在能量本征态的光滑叠加态上的矩阵元为零, 所以方程(3.3.22)实际上给出:

$$0 = [\mathbf{K}_0, U(\infty, -\infty)] = [\mathbf{K}_0, S] \,, \tag{3.3.24}$$

这正是所要证明的. 这是一个重要结果: $\mathbf{W}$ 矩阵元上的光滑条件确保了 $\mathbf{W}(t)$ 在 $t \to \infty$ 时为零, 再加上方程(3.3.21), 这二者给出 S-矩阵 Lorentz 不变性的充分条件. 光滑条件是一个自然条件, 因为它很像 V 的矩阵元使得 $V(t)$ 在 $t \to \pm\infty$ 时为零所需要满足的条件, 而这也正是认可 S-矩阵这个概念所需要的.

我们也能利用 $\tau = 0$ 和 $\tau_0 = \mp\infty$ 的方程(3.3.22)来证明

$$\mathbf{K}\Omega(\mp\infty) = \Omega(\mp\infty)\mathbf{K}_0 \,, \tag{3.3.25}$$

其中 $\Omega(\mp\infty)$ 是根据(3.1.13)定义的算符, 它将自由粒子态 Φ_α 变为相应的"入"态或"出"态 ${\Psi_\alpha}^{\pm}$. 另外, 从方程(3.3.18)和(3.3.19)可以很容易得出, 上述结果对动量和角动量同样是正确的:

$$\mathbf{P}\Omega(\mp\infty) = \Omega(\mp\infty)\mathbf{P}_0 \,, \tag{3.3.26}$$

$$\mathbf{J}\Omega(\mp\infty) = \Omega(\mp\infty)\mathbf{J}_0 \,. \tag{3.3.27}$$

最后, 因为所有的 Φ_α 和 ${\Psi_\alpha}^{\pm}$ 分别是 H_0 和 H 的本征态, 且它们有相同的本征值 E_α, 我们有

$$H\Omega(\mp\infty) = \Omega(\mp\infty)H_0\,. \tag{3.3.28}$$

方程(3.3.25)—(3.3.28)证明了, 在我们的假设下, "入"态和"出"态在非齐次 Lorentz 变换下的变换确实就像自由粒子态. 另外, 因为都是相似变换, 我们现在可以看到精确生成元 $\mathbf{K},\mathbf{P},\mathbf{J},H$ 满足的对易关系与 $\mathbf{K}_0,\mathbf{P}_0,\mathbf{J}_0,H_0$ 相同. 这就是在证明 S-矩阵的 Lorentz 不变性时, 其它包含 $\mathbf{K}$ 的对易关系(3.3.12), (3.3.13)和(3.3.15)无关紧要的原因.

内部对称性

存在数个对称性, 例如核物理中质子和中子交换下的对称性, 或者粒子和反粒子之间的"荷共轭"对称性, 这些对称性与 Lorentz 不变性没有直接关系, 并且在所有惯性系中都相同. 这样的对称变换 T 以幺正算符 $U(T)$ 的形式作用在物理态的 Hilbert 空间上, 而这个算符引入的线性变换作用在标记粒子种类的指标上

$$\begin{aligned} U(T)\Psi_{p_1\sigma_1 n_1;p_2\sigma_2 n_2;\cdots} = \sum_{\bar{n}_1\bar{n}_2\cdots} &\mathscr{D}_{\bar{n}_1 n_1}(T)\mathscr{D}_{\bar{n}_2 n_2}(T)\cdots \\ &\times \Psi_{p_1\sigma_1\bar{n}_1;p_2\sigma_2\bar{n}_2;\cdots}\,. \end{aligned} \tag{3.3.29}$$

依照第2章中的普遍讨论, $U(T)$ 必须满足群的乘法规则

$$U(\bar{T})U(T) = U(\bar{T}T)\ , \tag{3.3.30}$$

其中 $\bar{T}T$ 是先进行变换 T 再进行某个其它的变换 $\bar{T}$ 得到的变换. 用 $U(\bar{T})$ 作用方程(3.3.29), 我们看到矩阵 $\mathscr{D}$ 满足相同的规则

$$\mathscr{D}(\bar{T})\mathscr{D}(T) = \mathscr{D}(\bar{T}T)\,. \tag{3.3.31}$$

另外, 用 $U(T)$ 作用两个不同的"入"态或两个不同的"出"态, 然后取这些态的内积, 并使用归一化条件(3.1.2), 我们看到 $\mathscr{D}(T)$ 必须是幺正的

$$\mathscr{D}^\dagger(T) = \mathscr{D}^{-1}(T)\,. \tag{3.3.32}$$

最后, 用 $U(T)$ 作用一个"出"态和一个"入"态, 然后取这两个态的内积, 这样可以证明 $\mathscr{D}$ 与 S-矩阵对易, 也就是说

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{N}_1\bar{N}_2\cdots}\sum_{\bar{N}'_1\bar{N}'_2\cdots} &\mathscr{D}^*_{\bar{N}'_1 n'_1}(T)\mathscr{D}^*_{\bar{N}'_2 n'_2}(T)\cdots\ \mathscr{D}_{\bar{N}_1 n_1}(T)\mathscr{D}_{\bar{N}_2 n_2}(T)\cdots \\ &\times S_{p'_1\sigma'_1\bar{N}'_1;p'_2\sigma'_2\bar{N}'_2;\cdots\,,\,p_1\sigma_1\bar{N}_1;p_2\sigma_2\bar{N}_2;\cdots} \\ &= S_{p'_1\sigma'_1 n'_1;p'_2\sigma'_2 n'_2;\cdots\,,\,p_1\sigma_1 n_1;p_2\sigma_2 n_2;\cdots}\,. \end{aligned} \tag{3.3.33}$$

如前所述, 这是当我们说一个理论在内部对称性 T 下不变的定义, 为了导出方程(3.3.33), 我们仍然需要证明在"入"态和"出"态上引起变换(3.3.29)的是**同一个**幺正算符 $U(T)$. 如果存在"非微扰"算符 $U_0(T)$, 它在自由粒子态上诱导出这些变换,

$$U_0(T)\Phi_{p_1\sigma_1 n_1;p_2\sigma_2 n_2;\cdots} = \sum_{\bar{N}_1\bar{N}_2\cdots}\mathscr{D}_{\bar{N}_1 n_1}(T)\mathscr{D}_{\bar{N}_2 n_2}(T)\cdots\Phi_{p_1\sigma_1\bar{N}_1;p_2\sigma_2\bar{N}_2;\cdots} \tag{3.3.34}$$

且该算符与哈密顿量的自由粒子部分和相互作用部分均对易

$$U_0^{-1}(T)H_0U_0(T) = H_0\,, \tag{3.3.35}$$

$$U_0^{-1}(T)VU_0(T) = V\,. \tag{3.3.36}$$

那么它就是我们所说的那种情况. 无论是从 Lippmann-Schwinger 方程(3.1.17)还是从(3.1.13), 我们看到算符 $U_0(T)$ 会在“入”态和“出”态上诱导出变换(3.3.29), 就像它在自由粒子态上的作用, 这使得我们可以通过把 $U(T)$ 取成 $U_0(T)$ 来导出方程(3.3.29).

物理上非常重要的一个特殊情况是单参数 Lie 群, 其中 T 是单参数 θ 的函数, 并有

$$T(\bar\theta)T(\theta) = T(\bar\theta+\theta)\,. \tag{3.3.37}$$

就像在 2.2 节中给出的, 在这种情况下, 相应的 Hilbert 空间算符必须取如下形式

$$U(T(\theta)) = \exp(\mathrm{i}Q\theta)\,, \tag{3.3.38}$$

其中 Q 是厄米算符. 同样地, 矩阵 $\mathscr{D}(T)$ 必须取

$$\mathscr{D}_{n'n}(T(\theta)) = \delta_{n'n}\exp(\mathrm{i}q_n\theta)\,, \tag{3.3.39}$$

其中 q_n 是一组与粒子种类相关的实数. 由方程(3.3.33)很容易看出 q 守恒: 除非

$$q_{n_1'} + q_{n_2'} + \cdots = q_{n_1} + q_{n_2} + \cdots\,, \tag{3.3.40}$$

否则 $S_{\beta\alpha}$ 为零. 这类守恒律的经典例子是电荷守恒. 另外, 在所有已知的过程中, 重子数守恒(重子数即重子的数目, 诸如质子, 中子和超子, 减去它们反粒子的数目), 轻子数守恒(轻子数即轻子的数目, 诸如电子, μ 子, τ 子和中微子, 减去它们反粒子的数目), 但我们将在卷 II 看到, 这些守恒律被认为仅是非常好的近似. 同样类型的还有一些守恒律已经确定只是近似, 例如被称为奇异数的守恒量, 引入它是为了解释 Rochester 和 Butler[5]于 1947 年在宇宙射线中发现的一类寿命相对长的粒子. 例如, 现在被称为*K^+ 和 K^0 的介子, 它们被赋予奇异数 $+1$, 超子 $\Lambda^0, \Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-$ 被赋予奇异数 -1, 而更熟悉的质子, 中子和 π 介子(或称 π 子), 它们的奇异数取 0. 强相互作用中的奇异数守恒解释了为什么奇异粒子总是伴随着另一个奇异粒子产生, 就像反应 $\pi^+ + n \to K^+ + \Lambda^0$, 而奇异粒子衰变成非奇异粒子的反应, 例如 $\Lambda^0 \to p + \pi^-$ 和 $K^+ \to \pi^+ + \pi^0$, 这些反应的速率比较慢, 这则说明奇异数不守恒的相互作用非常弱.

“非阿贝尔”对称性, 即生成元互相不对易的对称性, 它一个经典例子是同位旋对称性, 它是在 1937 年基于一个实验提出的,[6] 这个实验表明强质子-质子力与质子和中子之间的力非常相似.[7] 数学上, 这个群是 $SU(2)$, 类似于三维旋转群的覆盖群; 它的生成元记做 t_i, 其中 $i = 1, 2, 3$, 并满足类似(2.4.18)的对易关系:

$$[t_i, t_j] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk}t_k\,.$$

就像旋转不变性要求简并自旋多重态一样, 在同位旋对称性得到遵循的范围内, 它要求粒子构成简并多重态, 这些态用整数或半整数 T 标记, 它有 $2T+1$ 个分量, 这些分量用 t_3 的取值加以区分. 核子 p 和 n 被纳入到 $T = \frac{1}{2}$ 的简并多重态中, 且 $t_3 = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$; π 介子 π^+, π^0 和 π^- 被纳入到 $T = 1$ 的

*上标表示电荷, 单位是电子荷的绝对值. “超子”是奇异数非零且重子数为 1 的粒子.

简并多重态中, 且有 $t_3 = +1, 0, 1$; 超子 Λ^0 是 $T = 0$ 的态, 且有 $t_3 = 0$. 这些例子表明, 电荷 Q, 同位旋的第 3 分量 t_3, 超子数 B, 以及奇异数 S, 它们之间具有关系:

$$Q = t_3 + (B + S)/2 \,.$$

这个关系最初是从观测得到的选择定则中推断出来的, 但是Gell-Mann(盖尔曼)和Ne'eman(内埃曼)在 1960 年提出了一种解释,[8] 他们认为这是同位旋 $\vec{T}$ 和"超荷" $Y \equiv B + S$ 被嵌入在一个更大 Lie 代数中的结果, 这个 Lie 代数是更大的非阿贝尔内部对称性的 Lie 代数, 这个对称性被严重破坏了, 而它所基于的对称群是非阿贝尔群 $SU(3)$. 我们将在卷 II 看到, 现在, 以强相互作用的现代理论——量子色动力学的观点来看, 同位旋和 $SU(3)$ 对称性均被认为是最轻的两个或三个夸克质量很小的偶然结果.

在推导旋转不变性所产生的结果时, 我们发明了一套方法, 借助同样的方法, 对于强相互作用粒子之间的反应, 我们可以得到同位旋对称性产生的影响. 特别的, 对两体反应 $A + B \to C + D$, 方程(3.3.33)要求 S-矩阵可以写成如下形式(除了同位旋以外, 所有指标都被省略了)

$$S_{t_{C3}t_{D3},t_{A3}t_{B3}} = \sum_{T,t_3} C_{T_C T_D}(Tt_3; t_{C3}t_{D3}) C_{T_A T_B}(Tt_3; t_{A_3}t_{B3}) S_T \ ,$$

其中 $C_{j_1 j_2}(j\sigma, \sigma_1\sigma_2)$ 是通常的 Clebsch-Gordan 系数,[9] 它表示用自旋为 j_1 和 j_2 而自旋第 3 分量分别为 σ_1 和 σ_2 的态合成自旋为 j 且第 3 分量为 σ 的态时的系数; S_T 是"约化" S-矩阵, 它依赖 T 以及所有未写出的动量变量和自旋变量, 但不依赖同位旋第 3 分量 $t_{A3}, t_{B3}, t_{C3}, t_{D3}$. 当然, 就像同位旋不变性的其它所有效应一样, 这仅是个近似, 这是因为电磁(以及其它)相互作用并不遵守这个对称性, 例如属于同一同位旋多重态的不同成员, 像 p 和 n, 它们的电荷不同且有轻微的质量差异.

宇称

在变换 $x \to -x$ 的对称性确实有效的范围内, 必存在幺正算符 P, 使得"入"态和"出"态在这个幺正算符下均按照单粒子态的直积变换:

$$\mathsf{P}\Psi^{\pm}_{p_1\sigma_1 n_1;\, p_2\sigma_2 n_2;\cdots} = \eta_{n_1}\eta_{n_2}\cdots\Psi^{\pm}_{\mathscr{P}p_1\sigma_1 n_1;\mathscr{P}p_2\sigma_2 n_2;\cdots} \tag{3.3.41}$$

其中 η_n 是种类为 n 的粒子的内禀宇称, 而 $\mathscr{P}$ 反转了 p^μ 的空间分量. (这是针对有质量粒子的; 对于无质量粒子的修正是显然的.) 那么, S-矩阵的宇称守恒条件就是:

$$\begin{aligned} S_{p'_1\sigma'_1 n'_1;\, p'_2\sigma'_2 n'_2;\cdots,\, p_1\sigma_1 n_1;\, p_2\sigma_2 n_2;\cdots} &= \eta^*_{n'_1}\eta^*_{n'_2}\cdots\eta_{n_1}\eta_{n_2}\cdots \\ &\times S_{\mathscr{P}p'_1\sigma'_1 n'_1;\mathscr{P}p'_2\sigma'_2 n'_2;\cdots\,,\,\mathscr{P}p_1\sigma_1 n_1;\mathscr{P}p_2\sigma_2 n_2;\cdots} \,. \end{aligned} \tag{3.3.42}$$

和内部对称性一样, 将以这种方式作用在自由粒子态上的算符定义为 P_0, 如果 P_0 与 V 和 H_0 对易, 那么就存在满足方程(3.3.41)的算符 P.

相位 η_n 可以从动力学模型或者实验中推断出来, 但是这二者都不能唯一地确定这些 η. 这是因为我们总可以通过将宇称算符 P 与任意守恒的内部对称算符结合来重新定义它. 例如, 如果 P 守恒, 那么

$$\mathsf{P}' \equiv \mathsf{P}\exp(\mathrm{i}\alpha B + \mathrm{i}\beta L + \mathrm{i}\gamma Q) \,,$$

也守恒, 其中 B, L 和 Q 分别是重子数, 轻子数和电荷, 而 α, β 和 γ 是任意实相位; 因此, P 和 P' 都可以被称为宇称算符. 中子, 质子和电子在 B, L 和 Q 的组合上有着不同的取值, 所以, 通过合理地

选择相位 α,β 和 γ, 我们可以将全部三种粒子的内禀宇称定义为 $+1$. 然而, 一旦我们做出了这个选择, 其它粒子, 诸如带电的 π 子(可以通过 $n\to p+\pi^-$ 的跃迁产生), 它们的内禀宇称就不再是任意的. 另外, 类似中性 π^0 这种不带守恒量子数的粒子, 它们的内禀宇称总是有意义的.

以上的讨论帮助我们阐明了内禀宇称是否必须要取值 ±1 这个问题. 声称空间反演 P 有群乘法法则 $\mathsf{P}^2=1$ 很容易; 但是, 守恒的宇称算符可能不是这个宇称算符, 而是与它相差某种相位变换的算符. 在任何情况下, 无论是否 $\mathsf{P}^2=1$, 算符 P^2 的性质就像一个内部对称变换:

$$\mathsf{P}^2\Psi^{\pm}_{p_1\sigma_1n_1;p_2\sigma_2n_2;\cdots}=\eta^2_{n_1}\eta^2_{n_2}\cdots\Psi^{\pm}_{\mathscr{P}p_1\sigma_1n_1;\mathscr{P}p_2\sigma_2n_2;\cdots}\,.$$

如果这个内部对称性是相位变换的连续对称群的一部分, 例如 α,β,γ 为任意值的相位 $\exp(\mathrm{i}\alpha B+\mathrm{i}\beta L+\mathrm{i}\gamma Q)$ 的乘法群, 那么它的平方根的倒数也必须是这个群的群元, 记其为 I_P, 它有 $I_P^2P^2=1$ 以及 $[I_P,P]=0$. (例如, 如果 $\mathsf{P}^2=\exp(\mathrm{i}\alpha B+\cdots)$, 那么取 $I_P=\exp(-\frac{1}{2}\mathrm{i}\alpha B+\cdots)$.) 这样, 我们就可以定义新的宇称算符 $\mathsf{P}'\equiv\mathsf{P}I_P$, 它满足 $\mathsf{P}'^2=1$. 在 P 守恒的范围内, 它也是守恒的, 所以没有什么理由不把这个算符称作宇称算符, 在这种情况下, 内禀宇称只能取值 ±1.

只有一种理论, 不一定总能够通过定义宇称使得所有内禀宇称的值为 ±1, 在这种理论中, 有一些离散的内部对称性, 它们不属于任何相位变换的连续对称群.[10] 例如, 角动量守恒的结果之一是, 所有半整数自旋的粒子总数 F 的变换只能是偶数, 从而内部对称算符 $(-1)^F$ 守恒. 对于所有已知的半整数自旋粒子, 它们重子数与轻子数之和 $B+L$ 是奇数, 所以就我们目前所知, $(-1)^F=(-1)^{B+L}$. 如果这是正确的, 那么 $(-1)^F$ 就是连续对称群的一部分, 该群由 α 为任意实数的算符 $\exp(\mathrm{i}\alpha(B+L))$ 构成, 它有平方根倒数 $\exp(-\mathrm{i}\alpha(B+L)/2)$. 在这种情况下, 如果 $\mathsf{P}^2=(-1)^F$, 那么对 P 可以重定义使得所有的内禀宇称是 ±1. 然而, 如果发现一个粒子, 它的自旋是半整数但 $B+L$ 是偶数(例如所谓的 Majorana 中微子, 它的 $j=\frac{1}{2}$ 且 $B+L=0$), 那么就有可能存在 $\mathsf{P}^2=(-1)^F$, 但不能通过重定义宇称算符本身使得本征值为 ±1. 当然, 在这种情况下, 我们有 $\mathsf{P}^4=1$, 这使得所有粒子的内禀宇称为 ±1 或(像 Majorana 中微子那样) $\pm\mathrm{i}$.

从方程(3.3.42)中得出, 如果末态中的内禀宇称之积等于初态的内禀宇称之积, 或者只相差一个负号, 那么 S-矩阵将分别是全部 3-动量的偶函数或奇函数. 例如, 在 1951 年观测到,[11] 在反应 $\pi^-+d\to n+n$ 中, π^-d 原子的 $\ell=0$ 基态上的 π 介子可以被氘核吸收. (在相对论物理中可以用非相对论物理中的方式使用轨道角动量量子数 ℓ, 我们会在 3.7 节进行讨论的.) 初态具有总角动量 $j=1$ (π 介子和氘核分别有自旋 0 和 1), 所以末态的总角动量必须有 $\ell=1$, 并且中子的总自旋 $s=1$. (角动量守恒还允许其它可能性: $\ell=1,s=0$; $\ell=0,s=1$ 和 $\ell=2,s=1$, 这些可能性被末态必须关于两个中子反对称这一要求所禁戒.) 由于末态有 $\ell=1$, 矩阵元在3-动量方向的反转下为奇, 所以我们可以得出这样的结论, 在这个反应中, 粒子内禀宇称必须有如下关系:

$$\eta_d\eta_{\pi^-}=-\eta_n^2\,.$$

已知氘核是质子和中子的轨道角动量为偶(主要是 $\ell=0$)的束缚态, 并且, 正如我们所看到的, 我们可以让中子和质子有相同的宇称, 所以 $\eta_d=\eta_n^2$, 于是我们有 $\eta_{\pi^-}=-1$; 即, 负 π 介子是赝标量粒子. π^+ 和 π^0 也被发现有负宇称, 这正是从这三个粒子间的对称性(同位旋不变性)所预期的.

π 介子的负宇称带来了一些引人注目的结果. 能够衰变成三个 π 介子的零自旋粒子必须有内禀宇称 $\eta_\pi^3=-1$, 这是因为, 在衰变粒子的静止Lorentz参考系中, 旋转不变性只允许矩阵元是三个 π 介子动量的标量积的函数, 所有这些标量积在全部动量的反转下为偶. (因为 $\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2+\mathbf{p}_3=0$, 由三个 π 介子动量构成的三重标量积 $\mathbf{p}_1\cdot(\mathbf{p}_2\times\mathbf{p}_3)$ 为零.) 基于同样的原因, 衰变成两个 π 介子的

零自旋粒子必须具有内禀宇称 $\eta_\pi^2 = +1$. 特别的, 在20世纪40年代后期发现的奇异粒子中, 似乎存在两个不同的零自旋粒子(从它们衰变产物的角分布中推断出来的): 一个是 τ 子, 通过衰变成三个 π 子被识别出来, 因而被赋予宇称 -1, 而另一个是 θ 子, 通过衰变成两个 π 介子被识别出来, 因而被赋予宇称 $+1$. 这其中的问题是, 随着对 τ 和 θ 进行更细致的研究, 越发地认为它们具有相同的质量和寿命. 在尝试了很多解决方案之后, Lee(李政道)和Yang(杨振宁)最终在1956年斩断了戈尔狄俄斯之结, 提出 τ 和 θ 是同一种粒子, (现在被称为 $K^\pm$ 粒子) 并且宇称在导致它衰变的弱作用中根本不是守恒的.[12]

我们会在本章下一节更详细地看到的, 物理过程 $\alpha \to \beta\,(\alpha \neq \beta)$的速率正比于 $|S_{\beta\alpha}|^2$, 比例因子在所有的3-动量的反转下不变. 只要态 α 和 β 包含的每种粒子的数目是确定的, 方程(3.3.42)中的相因子就对 $|S_{\beta\alpha}|^2$ 没有影响, 所以方程(3.3.42)意味着 $\alpha \to \beta$ 的速率在所有3-动量方向的反转下不变. 而我们已经看到, 对 K 介子衰变到两个 π 介子还是三个 π 介子, 这是旋转不变性的平庸结果, 但在更加复杂过程中, 这确实是一个不平庸的约束. 例如, 按照李政道和杨振宁在理论上的建议, Wu(吴健雄)与美国国家标准局的一个组测量了极化钴源的 β 衰变 $\mathrm{Co}^{60} \to \mathrm{Ni}^{60} + e^- + \bar{\nu}$ 中末态电子的角分布.[13] (在这个实验中没有尝试测量反中微子或镍荷的角动量.) 他们发现电子发射的优先方向与衰变核的自旋方向相反, 如果衰变速率在所有3-动量的反转下不变, 这显然是不可能的. 在正 μ 子(它在产生过程 $\pi^+ \to \mu^+ + \nu$ 中被极化)衰变到一个正电子, 中微子和一个反中微子的过程中发现了相似的结果. 沿着这条道路, 宇称在导致这些衰变的弱相互作用中不守恒变得明确起来. 然而, 基于将在12.5节中讨论的一些原因, 在强作用和电磁作用中, 宇称是守恒的, 因此它在理论物理中继续扮演着重要的角色.

时间反演

我们在2.6节看到, 时间反演算符 T 作用在单粒子态 $\Psi_{p,\sigma,n}$ 上将给出自旋和动量反转的态 $\Psi_{\mathscr{P}p,-\sigma,n}$ 以及相因子 $\zeta_n(-1)^{j-\sigma}$. 像往常一样, 多粒子态按照单粒子态的直积变换, 与以往不同的是, 由于这是时间反演变换, 我们预期"入"态和"出"态会交换:

$$\mathsf{T}\Psi^{\pm}_{p_1\sigma_1 n_1;p_2\sigma_2 n_2;\cdots} = \zeta_{n_1}\,(-1)^{j_1-\sigma_1}\,\zeta_{n_2}\,(-1)^{j_2-\sigma_2}\cdots\Psi^{\mp}_{\mathscr{P}p_1-\sigma_1 n_1;\mathscr{P}p_2-\sigma_2 n_2;\cdots}\,. \tag{3.3.43}$$

(再重申一次, 这是针对有质量粒子的, 对无质量粒子的修正是显然的.) 将这个假设缩写成如下方式将是方便的

$$\mathsf{T}\Psi^{\pm}_{\alpha} = \Psi^{\mp}_{\mathscr{T}\alpha}\,, \tag{3.3.44}$$

其中 $\mathscr{T}$ 表示对3-动量和自旋符号反号并乘以方程(3.3.43)中给出的相因子. 因为 T 是反幺正的, 我们有

$$(\Psi^-_\beta, \Psi^+_\alpha) = (\mathsf{T}\Psi^+_\alpha, \mathsf{T}\Psi^-_\beta)\,, \tag{3.3.45}$$

所以 S-矩阵在时间反演下不变的条件是

$$S_{\beta,\alpha} = S_{\mathscr{T}\alpha,\mathscr{T}\beta} \tag{3.3.46}$$

或者再详细些

$$\begin{aligned} &S_{p_1'\sigma_1'n_1';p_2'\sigma_2'n_2';\cdots,\,p_1\sigma_1 n_1;p_2\sigma_2 n_2;\cdots} \\ &= \zeta_{n_1'}\,(-1)^{j_1'-\sigma_1'}\,\zeta_{n_2'}(-1)^{j_2'-\sigma_2'}\cdots\zeta^*_{n_1}(-1)^{j_1-\sigma_1}\zeta^*_{n_2}(-1)^{j_2-\sigma_2}\cdots \\ &\quad\times S_{\mathscr{P}p_1-\sigma_1 n_1;\mathscr{P}p_2-\sigma_2 n_2;\cdots,\,\mathscr{P}p_1'-\sigma_1'n_1';\mathscr{P}p_2'-\sigma_2'n_2';\cdots}\,. \end{aligned} \tag{3.3.47}$$

注意到除了动量和自旋的反转外, 初态和末态的角色调换了, 这正是包含时间反演的对称性所期望的.

只要算符 T_0 在自由粒子态上诱导的时间反演变换

$$\mathsf{T}_0\Phi_\alpha \equiv \Phi_{\mathscr{T}\alpha} \tag{3.3.48}$$

不仅与自由粒子哈密顿量对易(这是自动的), 而且与相互作用对易:

$$\mathsf{T}_0^{-1} H_0 \mathsf{T}_0 = H_0 \,, \tag{3.3.49}$$

$$\mathsf{T}_0^{-1} V \mathsf{T}_0 = V \,, \tag{3.3.50}$$

S-矩阵就满足这个变换规则. 在这种情况下, 我们可以取 $\mathsf{T} = \mathsf{T}_0$, 并用(3.1.13)或(3.1.16) 证明时间反演算符的作用确实像方程(3.3.44)中所说的那样. 例如, 用算符 T 作用 Lippmann-Schwinger 方程(3.1.16), 并利用方程(3.3.48)—(3.3.50), 我们有

$$\mathsf{T}\Psi_\alpha^\pm = \Phi_{\mathscr{T}\alpha} + [E_\alpha - H_0 \mp \mathrm{i}\epsilon]^{-1} V \mathsf{T}\Psi_\alpha^\pm \,,$$

其中 $\pm\mathrm{i}\epsilon$ 的符号颠倒了是因为 T 是反幺正的. 这正是 $\Psi_{\mathscr{T}\alpha}^\mp$ 的 Lippmann-Schwinger 方程, 因此这验证了方程(3.3.44). 类似地, 因为 T 反幺正, 它改变了 $\Omega(t)$ 的指数中 i 的符号, 使得

$$\mathsf{T}\Omega(-\infty)\Phi_\alpha = \Omega(\infty)\Phi_{\mathscr{T}\alpha} \,,$$

这又一次给出了方程(3.3.44).

与宇称守恒的情况相反, 时间反演不变条件(3.3.46)一般不会告诉我们过程 $\alpha \to \beta$ 的速率与过程 $\mathscr{T}\alpha \to \mathscr{T}\beta$ 相同. 然而, 当 S-矩阵取如下形式,

$$S_{\beta\alpha} = S^{(0)}_{\beta\alpha} + S^{(1)}_{\beta\alpha} \,, \tag{3.3.51}$$

其中 $S^{(1)}$ 很小, 而 $S^{(0)}$ 对于某些感兴趣的特定过程的矩阵元碰巧为零, 会有类似的情况存在, 虽然 $S^{(0)}$ 在一般情况下有比 $S^{(1)}$ 大得多的矩阵元. (例如, 这个过程可能是核 β 衰变, $N \to N' + e^- + \bar{\nu}$, 其中 $S^{(0)}$ 是核的强作用和电磁作用单独产生的 S-矩阵, 而 $S^{(1)}$ 是弱作用对 S-矩阵的修正. 3.5 节将展示, 在这类情况下, "畸变波 Born 近似"是如何导出形如(3.3.51)的 S-矩阵的. 在某些情况下, $S^{(0)}$ 就是单位算符.) 取到 $S^{(1)}$ 的一阶, S-算符的幺正条件是

$$1 = S^\dagger S = S^{(0)\dagger} S^{(0)} + S^{(0)\dagger} S^{(1)} + S^{(1)\dagger} S^{(0)} \,.$$

利用零阶关系 $S^{(0)\dagger} S^{(0)} = 1$, 这给出了 $S^{(1)}$ 的一个实条件(reality condition):

$$S^{(1)} = -S^{(0)} S^{(1)\dagger} S^{(0)} \,. \tag{3.3.52}$$

如果 $S^{(1)}$ 和 $S^{(0)}$ 都满足时间反演条件(3.3.46), 那么这可以写成如下的形式

$$S^{(1)}_{\beta\alpha} = -\int \mathrm{d}\gamma \int \mathrm{d}\gamma'\, S^{(0)}_{\beta\gamma'} S^{(1)*}_{\mathscr{T}\gamma'\mathscr{T}\gamma} S^{(0)}_{\gamma\alpha} \,. \tag{3.3.53}$$

因为 $S^{(0)}$ 是幺正的, 所以如果对末态和初态关于 $S^{(0)}$ 的完全集 $\mathscr{I}$ 和 $\mathscr{F}$ 求和, 那么过程 $\alpha \to \beta$ 的速率与过程 $\mathscr{T}\alpha \to \mathscr{T}\beta$ 的速率是相同的. (这里的"完全"是指当 $S^{(0)}_{\alpha'\alpha}$ 非零时, 若 α 或 α' 处在 $\mathscr{I}$ 中,

则这两个态均在$\mathscr{I}$中, 对$\mathscr{F}$类似.) 在最简单的情况下, 我们有分别仅由一个态构成的"完全"集$\mathscr{I}$和$\mathscr{F}$; 即, 初态和末态分别是$S^{(0)}$的本征值为$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\delta_\alpha}$和$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\delta_\beta}$的本征矢. ($\delta_\alpha$和$\delta_\beta$是所谓的"相移"; 因为$S^{(0)}$幺正, 所以它们是实的.) 在这种情况下, 方程(3.3.53)简单地变成:

$$S^{(1)}_{\beta\alpha} = -\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(\delta_\alpha+\delta_\beta)} S^{(1)*}_{\mathscr{T}\beta\mathscr{T}\alpha}\,, \tag{3.3.54}$$

并且, 显然过程$\alpha\to\beta$的S-矩阵的绝对值与过程$\mathscr{T}\alpha\to\mathscr{T}\beta$的相同. 这样的一个例子是核$\beta$衰变(取了近似: 忽略末态中电子和核之间相对较弱的电磁相互作用), 因为初态和末态都是强相互作用S-矩阵($\delta_\alpha=\delta_\beta=0$)的本征态. 因此, 如果时间反演不变性是被遵守的, 那么如果我们反转所有粒子的动量和自旋z-分量σ, β衰变的微分速率应该是不变的. 这个预测与1956年发现宇称不守恒的实验[13, 14]并不矛盾; 例如, 时间反演不变与衰变$\mathrm{Co}^{60}\to\mathrm{Ni}^{60}+e^-+\bar\nu$中电子优先以$\mathrm{Co}^{60}$自旋的反方向发射的观察结果相容. 我们会在下文中看到, 违反时间反演不变性的间接证据在1964年显现出来, 但时间反演不变在弱相互作用, 强相互作用和电磁作用中依旧是一个有用的近似对称性.

在某些情况下, 我们可以取$\mathscr{T}\alpha=\alpha$和$\mathscr{T}\beta=\beta$的态为基, 这样方程(3.3.54)变成

$$S^{(1)}_{\beta\alpha} = -\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(\delta_\alpha+\delta_\beta)} S^{(1)*}_{\beta\alpha}\,, \tag{3.3.55}$$

这就是说$\mathrm{i}S^{(1)}_{\beta\alpha}$的相位为$\delta_\alpha+\delta_\beta$整除$\pi$后的余数. 这被称为*Watson*定理.[15] 在不同末态发生干涉的过程中可以测量出方程(3.3.54)或(3.3.55)中的相位. 例如, 在自旋1/2的超子Λ到一个核子和一个π介子的衰变中, 末态的轨道角动量仅能为$\ell=0$或$\ell=1$; π介子相对Λ自旋的角分布包含了这些态的干涉, 因此根据Watson定理, 这个角分布依赖于它们的相移差$\delta_s-\delta_p$.

PT

尽管1957年宇称破坏的实验并没有否认时间反演不变性, 但它们确实立刻表明PT不守恒. 如果守恒, 基于与T相同的理由, 它必须是反幺正算子, 所以在类似核β衰变的过程中, 它的效应将取类似于方程(3.3.54)的形式:

$$S^{(1)}_{\beta\alpha} = -\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(\delta_\alpha+\delta_\beta)} S^{(1)*}_{\mathscr{P}\mathscr{T}\beta\mathscr{P}\mathscr{T}\alpha}\,,$$

其中$\mathscr{P}\mathscr{T}$反转所有自旋z-分量的符号, 但不再反转所有的动量. 忽略末态的Coulomb相互作用, 那么, 它将得出这样的结果: 对于衰变$\mathrm{Co}^{60}\to\mathrm{Ni}^{60}+e^-+\bar\nu$中发射的电子, Co^{60}自旋方向和反方向都不是它的优先方向, 这与观测到的结果矛盾.

C, CP和CPT

前面提到过, 有一种称为荷共轭的内部对称变换, 它交换粒子和反粒子. 形式上地, 这要求存在幺正算符C, 它在多粒子态上的作用是:

$$\mathsf{C}\Psi^{\pm}_{p_1\sigma_1 n_1;\,p_2\sigma_2 n_2;\cdots} = \xi_{n_1}\xi_{n_2}\cdots\Psi^{\pm}_{p_1\sigma_1 n_1^c;\,p_2\sigma_2 n_2^c;\cdots}\,, \tag{3.3.56}$$

其中n^c是种类n粒子的反粒子, ξ_n仍然是一个相位. 如果这对"入"态和"出"态都成立, 那么S-矩阵满足如下的不变性条件

$$\begin{aligned} &S_{p_1'\sigma_1' n_1';\,p_2'\sigma_2' n_2';\cdots,\,p_1\sigma_1 n_1;\,p_2\sigma_2 n_2;\cdots} \\ &= \xi^*_{n_1'}\xi^*_{n_2'}\cdots\xi_{n_1}\xi_{n_2}\cdots S_{p_1'\sigma_1' n_1^{c\prime};\,p_2'\sigma_2' n_2^{c\prime};\cdots,\,p_1\sigma_1 n_1^c;\,p_2\sigma_2 n_2^c;\cdots}\,. \end{aligned} \tag{3.3.57}$$

同其它内部对称性一样, 如果算符 C_0 被定义为以方程(3.3.56)中的方式作用在自由粒子态上, 并且它与相互作用 V 以及 H_0 都对易, 那么 S-矩阵将满足这个条件; 在这种情况下, 我们取 $\mathsf{C}=\mathsf{C}_0$.

相位 ξ_n 称为荷共轭宇称. 同普通宇称 η_n 一样, 因为对任意一个定义成满足方程(3.3.56)的算符 C, 我们都能通过在 C 上乘以任意内部对称相位变换, 例如 $\exp(\mathrm{i}\alpha B+\mathrm{i}\beta L+\mathrm{i}\gamma Q)$, 找到另一个 ξ_n 不同的荷共轭算符, 所以 ξ_n 一般不是唯一定义的; 能够单独测量荷共轭宇称的粒子只有那些完全中性的粒子, 例如光子和中性 π 介子, 它们不携带守恒量子数并且反粒子是它们自身. 在仅包含完全中性粒子的反应中, 方程(3.3.57)告诉我们初态和末态中的荷共轭宇称之积必须相等; 例如, 我们将看到, 量子电动力学要求光子具有荷共轭宇称 $\eta_\gamma=-1$, 所以观测到的中性 π 介子衰变 $\pi^0\to 2\gamma$ 将会要求 $\eta_{\pi^0}=+1$; 由此得出过程 $\pi^0\to 3\gamma$ 是被禁止的, 而事实也正是如此. 对于这两个粒子, 荷共轭宇称是实的, 只能是 $+1$ 或 -1. 同普通宇称一样, 如果所有内部相位变换对称性是相位变换连续群中的一员, 就会是这种情况, 这是因为我们可以通过乘 C^2 的平方根倒数来重定义 C, 结果是新的 C 将满足 $\mathsf{C}^2=1$.

对于一般反应, 方程(3.3.57)要求某一过程的速率等于该过程中的粒子被相应的反粒子替换后的速率. 这与 1957 年关于宇称不守恒的实验不是直接矛盾的(在这之后很长的一段时间内, 人们都没有能力研究反钴的 β 衰变), 但是这些实验表明, 在Lee和Yang[12]将宇称不守恒考虑在内后得到的修正弱相互作用理论内, C 是不守恒的. (我们将在后面看到, 观测到 TP 守恒被破坏就暗示着, 不仅限于Lee和Yang所考虑的特定理论, 在任何弱相互作用的场论中, C 守恒都被破坏了.) 现今我们知道了, 尽管 C 和 P 在强作用和电磁作用中都是守恒的, 但是在 β 衰变以及 π 介子和 μ 子衰变这种弱相互作用引起的过程中, C 和 P 是不守恒的.

尽管关于宇称不守恒的早期实验表明 C 和 P 在弱作用中不守恒, 但它们的乘积 CP 普遍守恒的可能性依旧存在. 在一段时间内, 人们一直期待(尽管没有绝对的信心) CP 终将被证实是普遍守恒的. 这在中性 K 介子的性质有一个特别重要的结果. 在 1954 年, Gell-Mann 和 Pais[16]就指出, 因为 K^0 介子的反粒子不是它自身(K^0 携带一个非零的近似守恒的量, 即奇异数)具有确定衰变率的粒子不是 K^0 或 $\overline{K}^0$, 而是线性组合 $K^0\pm\overline{K}^0$. 这最初是用 C 守恒解释的, 但是 C 在弱作用中不守恒, 基于 CP 守恒可以给出相同的论证. 如果我们随意定义 CP 算符, K^0 以及 $\overline{K^0}$ 态中的相位, 使得

$$\mathsf{CP}\Psi_{K^0}=\Psi_{\overline{K}^0}$$

并且

$$\mathsf{CP}\Psi_{\overline{K}^0}=\Psi_{K^0}$$

那么我们就可以定义自荷共轭的单粒子态

$$\Psi_{K_1^0}\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}[\Psi_{K^0}+\Psi_{\overline{K}^0}]$$

以及

$$\Psi_{K_2^0}\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}[\Psi_{K^0}-\Psi_{\overline{K}^0}]\ ,$$

它们分别具有 CP 本征值 $+1$ 和 -1. 这些粒子的能够允许的最快衰变模式是衰变成 2-π 介子态, 但是 CP 守恒只允许[**] K_1 这样衰变, 不允许 K_2 这样衰变. 只能期望 K_2^0 以更慢的模式衰变, 衰变

[**] 中性 K 介子自旋为零, 所以 2-π 介子末态有 $\ell=0$, 因而 $\mathsf{P}=+1$. 更进一步, 因为 π^0 有 $\mathsf{C}=+1$, 所以对两个 π^0 有 $\mathsf{C}=+1$, 由于 C 交换了 π^+ 介子和 π^- 介子, 所以对于 $\ell=0$ 的 π^+-π^- 态也有 $\mathsf{C}=+1$.

成 3 个 π 介子或者 1 个 π 介子, 1 个 μ 子或电子以及 1 个中微子. 然而, Fitch 和 Cronin 在 1964 年发现, 长寿命的中性 K 介子确实有一个很小的概率能够衰变到两个 π 介子.[17] 结论是: 尽管 CP 比单独的 C 或 P 看起来更接近守恒, 但它在弱作用中不是精确守恒的.

我们将在第5章看到, 有很好的理由相信, 尽管 C 和 CP 都不是严格守恒的, 但是, 至少在所有量子场论中, CPT 在所有相互作用中都是精确守恒的. 给出了粒子和反粒子之间一个精确对应的正是 CPT, 特别是 CPT 与哈密顿量的对易告诉我们稳定的粒子和反粒子具有精确相同的质量. 因为 CPT 反幺正, 它将任意过程的 S-矩阵, 与所有自旋 3-分量反转且粒子被替换为反粒子的逆过程的 S-矩阵联系起来. 然而, 如果 S-矩阵可以分成 $S^{(1)}$ 和 $S^{(0)}$, 其中 $S^{(1)}$ 是产生给定的反应的弱项, 而 $S^{(0)}$ 作用在初态和末态上的强项, 我们可以采用前面研究 T 不变含义的讨论证明: 只要对关于 $S^{(0)}$ 完备的初态和末态求和, 那么对于任意过程, 它的速率与粒子被替换为反粒子且自旋 3-动量反转的同一过程的速率相等. 特别是, 尽管粒子衰变成 $S^{(0)}_{\beta_1\beta_2} \neq 0$ 的一对末态 β_1, β_2 的那部分速率, 与反粒子衰变成相对应的末态 $\mathscr{CPT}\beta_1$ 和 $\mathscr{CPT}\beta_2$ 的速率不相等, 我们将在 3.5 节看到, (不取任何近似), 任意粒子的总衰变速率与反粒子的总衰变速率仍是相等的.

现在我们可以理解了, 1957 年的宇称不守恒实验在弱相互作用现有理论中为什么可以被当作 C 和 P 守恒被严重破坏的证据, 但却不能作为 CP 不守恒的证据. 这些理论是场论, 因而自动有 CPT 守恒. 既然实验证明了在核 β 衰变中 PT 而非 T 被严重破坏了, 与这些实验一致并且 CPT 守恒的任何理论必须同时兼有 C 不守恒而非 CP 不守恒.

类似地, 在 1964 年观测到弱相互作用中 CP 的微小破坏, 加上所有相互作用在 CPT 下都不变的假定, 我们可以立刻推断出 T 在弱相互作用中也不是精确守恒的. 通过对 K^0-$\overline{K}^0$ 系统更加详细的研究, 这一点已经被证明了,[18] 但是, 迄今为止, 仍然没有找到时间反演不变性失效的其他直接证据.

3.4 速率与截面

S-矩阵 $S_{\beta\alpha}$ 是跃迁 $\alpha \to \beta$ 的几率振幅, 但是这与实验中测量的跃迁速率和截面有什么关系呢? 尤其是, (3.3.2)表明 $S_{\beta\alpha}$ 中含有一个确保能量和动量守恒的因子 $\delta^4(p_\beta - p_\alpha)$, 那么我们该如何理解跃迁几率 $|S_{\beta\alpha}|^2$ 中的因子 $[\delta^4(p_\beta - p_\alpha)]^2$ 呢? 解决这些问题的正确方法是研究实验究竟是如何进行的, 用波包表示在碰撞前远离彼此的定域粒子, 然后跟踪这些多粒子叠加态的时间历史. 在下文中, 鉴于(就我所知)在物理中没有什么有趣的开放性问题取决于对这些问题的正确理解, 我们将给出主要结果一个快速而简单的推导, 实际上这更像一个助记法而非推导.

我们认为我们的整个物理系统被封装在具有宏观体积 V 的大箱子内. 例如, 我们可以取这个箱子为一个立方体, 但相对的两个面上的点等价, 这样, 空间波函数的单值性要求动量是量子化的

$$\mathbf{p} = \frac{2\pi}{L}(n_1, n_2, n_3)\,, \tag{3.4.1}$$

其中 n_i 是整数, $L^3 = V$. 那么所有三维 δ-函数变成

$$\delta^3_V(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3}\int_V \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}} = \frac{V}{(2\pi)^3}\delta_{\mathbf{p}',\mathbf{p}}\,, \tag{3.4.2}$$

其中 $\delta_{\mathbf{p}',\mathbf{p}}$ 是通常的克罗内克 δ-符号, 下标相等时为 1, 否则为 0. 因此, 归一化条件(3.1.2)意味着, 我们在箱中用到的态具有标量积, 它不仅仅是克罗内克 δ 的乘积之和, 还包含因子 $[V/(2\pi)^3]^N$, 其

中 N 是态中的粒子数. 为了计算跃迁几率, 我们应该使用范数为 1 的态, 所以我们引入在箱中近似归一的态

$$\Psi_\alpha^{\mathrm{Box}} \equiv \Big[(2\pi)^3/V\Big]^{N_\alpha/2}\Psi_\alpha \tag{3.4.3}$$

它的范数是

$$\Big(\Psi_\beta^{\mathrm{Box}}, \Psi_\alpha^{\mathrm{Box}}\Big) = \delta_{\beta\alpha} \tag{3.4.4}$$

其中 $\delta_{\beta\alpha}$ 是克罗内克 δ 的积, 每个对应 3-动量, 自旋以及种类指标, 再加上粒子置换后的项. 相应地, S-矩阵可以写为

$$S_{\beta\alpha} = \Big[V/(2\pi)^3\Big]^{(N_\beta+N_\alpha)/2} S_{\beta\alpha}^{\mathrm{Box}}\,, \tag{3.4.5}$$

其中 $S_{\beta\alpha}^{\mathrm{Box}}$ 利用态(3.4.3)计算.

当然, 如果我们让粒子永远处在盒子中, 那么每一种可能的跃迁将会一次又一次地发生. 为了计算出一个有意义的跃迁几率, 我们还得把我们的系统放进一个"时间盒子"中. 我们假定相互作用仅在时间段 T 内起作用. 一个马上就能得到的结果是能量守恒 δ-函数要被替换成

$$\delta_T(E_\alpha - E_\beta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2} \exp\Big(\mathrm{i}(E_\alpha - E_\beta)t\Big)\,\mathrm{d}t\,. \tag{3.4.6}$$

对于一个多粒子系统, 如果在相互作用加入前处在态 α, 在相互作用退出后处在态 β, 那么几率为

$$P(\alpha\to\beta) = \Big|S_{\beta\alpha}^{\mathrm{Box}}\Big|^2 = \Big[(2\pi)^3/V\Big]^{(N_\alpha+N_\beta)}|S_{\beta\alpha}|^2\,. \tag{3.4.7}$$

这是跃迁到特定的箱中态 β 的几率. 对于 $\mathbf{p}$ 附近体积为 $\mathrm{d}^3\mathbf{p}$ 的动量空间, 使得动量(3.4.1)处在这个空间中的三元整数组 n_1, n_2, n_3 的数目是 $V\,\mathrm{d}^3\mathbf{p}/(2\pi)^3$, 所以在体积为 $\mathrm{d}^3\mathbf{p}$ 的动量空间中, 箱中单粒子态的数目是 $V\,\mathrm{d}^3\mathbf{p}/(2\pi)^3$. 我们将末态间隔 $\mathrm{d}\beta$ 定义为每个末态粒子 $\mathrm{d}^3\mathbf{p}$ 的乘积, 所以这个范围内态的总数是

$$\mathrm{d}\mathscr{N}_\beta = \Big[V/(2\pi)^3\Big]^{N_\beta}\,\mathrm{d}\beta\,. \tag{3.4.8}$$

因此, 系统处于末态的 $\mathrm{d}\beta$ 范围内的总几率是

$$\mathrm{d}P(\alpha\to\beta) = P(\alpha\to\beta)\mathrm{d}\mathscr{N}_\beta = \Big[(2\pi)^3/V\Big]^{N_\alpha}|S_{\beta\alpha}|^2\,\mathrm{d}\beta\,. \tag{3.4.9}$$

贯穿本节, 我们关注的末态 β 不仅与初态 α 不同(即使只是微小差异), 还要满足更加严格的条件, 即, 态 β 中任何一部分粒子(而不是整个态本身)与态 α 中对应的那部分粒子都不具有精确相同的 4-动量. (利用下一章引入的语言, 这就是说我们仅考察 S-矩阵的连通部分.) 对于这样的态, 我们可以定义不依赖 δ-函数的矩阵元 $M_{\beta\alpha}$:

$$S_{\beta\alpha} \equiv -2\mathrm{i}\pi\delta_V^3(\mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\alpha)\delta_T(E_\beta - E_\alpha)M_{\beta\alpha}\,. \tag{3.4.10}$$

对于 $\beta\neq\alpha$ 的 $|S_{\beta\alpha}|^2$, 引入箱使得我们可以将其中的 δ-函数的平方解释成

$$\begin{aligned}
\Big[\delta_V^3(\mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\alpha)\Big]^2 &= \delta_V^3(\mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\alpha)\delta_V^3(0) = \delta_V^3(\mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\alpha)V/(2\pi)^3\,,\\
\Big[\delta_T(E_\beta - E_\alpha)\Big]^2 &= \delta_T(E_\beta - E_\alpha)\delta_T(0) = \delta_T(E_\beta - E_\alpha)T/2\pi\,,
\end{aligned}$$

所以, 方程(3.4.9)给出了微分跃迁几率

$$\begin{aligned}\mathrm{d}P(\alpha\to\beta) = (2\pi)^2\Big[(2\pi)^3/V\Big]^{N_\alpha-1}(T/2\pi)|M_{\beta\alpha}|^2\\ \times\delta_V^3(\mathbf{p}_\beta-\mathbf{p}_\alpha)\delta_T(E_\beta-E_\alpha)\mathrm{d}\beta\,.\end{aligned}$$

如果我们令 V 和 T 非常大, 这里的 δ-函数乘积就可以解释为通常的 4 维 δ-函数 $\delta^4(p_\beta-p_\alpha)$. 在这个极限下, 跃迁几率正比于相互作用起作用的时间 T, 而系数可以解释为微分跃迁速率:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Gamma(\alpha\to\beta) &\equiv \mathrm{d}P(\alpha\to\beta)/T\\ &= (2\pi)^{3N_\alpha-2}V^{1-N_\alpha}|M_{\beta\alpha}|^2\delta^4(p_\beta-p_\alpha)\mathrm{d}\beta\,,\end{aligned}\tag{3.4.11}$$

现在有

$$S_{\beta\alpha}\equiv -2\pi\mathrm{i}\delta^4(p_\beta-p_\alpha)M_{\beta\alpha}\,.\tag{3.4.12}$$

这是将对 S-矩阵元的计算解释成对真实实验的预测的最主要公式. 在本节后面, 我们将回到对因子 $\delta^4(p_\alpha-p_\beta)\mathrm{d}\beta$ 的解释上.

有两种特别重要的情况:

$N_\alpha=1$:

这时方程(3.4.11)中的体积 V 消掉了, 这给出了单粒子态 α 衰变到一般的多粒子态 β 的跃迁几率

$$\mathrm{d}\Gamma(\alpha\to\beta) = 2\pi|M_{\beta\alpha}|^2\delta^4(p_\alpha-p_\beta)\mathrm{d}\beta\,.\tag{3.4.13}$$

当然, 仅当相互作用起作用的时间段 T 远小于粒子 α 的平均寿命 τ_α 时, 上式才是有意义的, 所以我们不能在 $\delta_T(E_\beta-E_\alpha)$ 中取 $T\to\infty$ 的极限. 在这个 δ-函数中有一个无法移除的展宽 $\Delta E\simeq 1/T\gtrsim 1/\tau_\alpha$, 所以仅当总衰变速率 $1/\tau_\alpha$ 远小于过程中的任何一个特征能量时, 方程(3.4.13)才是有效的.

$N_\alpha=2$:

这时速率(3.4.11)正比于 $1/V$, 换句话说, 正比于任一粒子在另一粒子所在位置处的密度. 实验者一般不报告单位密度的跃迁速率, 而是每*单位流的速率*, 也被称为*截面*. 任一粒子在另一粒子所在位置的流定义为单位密度 $1/V$ 与相对速度 u_α 的乘积:

$$\Phi_\alpha = u_\alpha/V\,.\tag{3.4.14}$$

(u_α 的一般定义在下文中给出; 目前我们且暂时满足于这样的定义: 如果其中一个粒子静止, 那么 u_α 就定义为另一个粒子的速度.) 因此微分截面是

$$\mathrm{d}\sigma(\alpha\to\beta)\equiv\mathrm{d}\Gamma(\alpha\to\beta)/\Phi_\alpha = (2\pi)^4u_\alpha^{-1}|M_{\beta\alpha}|^2\delta^4(p_\alpha-p_\beta)\mathrm{d}\beta\,.\tag{3.4.15}$$

即使 $N_\alpha=1$ 和 $N_\alpha=2$ 的情况是最重要的, 但 $N_\alpha\geq 3$ 的跃迁速率原则上也都是可测的, 并且其中一些在化学, 天体物理学等学科中还非常重要. (例如, 太阳中的一个主要放能反应是两个质子和一个电子转化成一个氘和一个中微子.) 3.6 节将给出初态粒子数 N_α 任意的主跃迁速率公式(3.4.11)的一个应用.

接下来, 我们着手解决速率与截面的Lorentz变换性质的问题, 这将帮助我们给出方程(3.4.15)中相对速度 u_α 的更普遍定义. 对于 S-矩阵的Lorentz变换规则(3.3.1), 由于动量相

关矩阵与每个粒子自旋都有关系. 因此变得复杂. 为了避免这种复杂性, (将方程(3.4.12)中的 Lorentz 不变 δ-函数提出之后), 考察(3.3.1)的绝对值平方, 并对所有的自旋求和. 那么矩阵 $D^{(j)}_{\bar{\sigma}\sigma}(W)$ (或者它们在零质量情况下的相应矩阵)的幺正性表明, 除了(3.3.1)中的能量因子, 和是 Lorentz 不变的. 即, 如下的量

$$\sum_{\text{spins}} |M_{\beta\alpha}|^2 \prod_{\beta} E \prod_{\alpha} E \equiv R_{\beta\alpha} \tag{3.4.16}$$

是态 α 和 β 中粒子 4-动量的标量函数. ($\prod_\alpha E$ 和 $\prod_\beta E$ 是指态 α 和 β 中所有粒子的单粒子能量 $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ 的乘积.)

我们现在可以将自旋求和的单粒子衰变速率(3.4.13)写成

$$\sum_{\text{spins}} \mathrm{d}\Gamma(\alpha \to \beta) = 2\pi E_\alpha^{-1} R_{\beta\alpha} \delta^4(p_\beta - p_\alpha) \mathrm{d}\beta / \prod_\beta E \,.$$

可以辨认出因子 $\mathrm{d}\beta/\prod_\beta E$ 是 Lorentz 不变的动量空间体积元(2.5.15)的乘积, 所以它是 Lorentz 不变的. $R_{\beta\alpha}$ 和 $\delta^4(p_\beta - p_\alpha)$ 也是如此, 这样只剩下非 Lorentz 不变的因子 $1/E_\alpha$, 其中 E_α 是单个初态粒子的能量. 那么我们的结论是: 衰变速率与 $1/E_\alpha$ 的 Lorentz 变换性质相同. 显然, 这就是狭义相对论中通常的钟慢效应——粒子越快, 衰变越慢.

类似地, 对于自旋求和的截面, 我们的结果(3.4.15)可以写为

$$\sum_{\text{spins}} \mathrm{d}\sigma(\alpha \to \beta) = (2\pi)^4 u_\alpha^{-1} E_1^{-1} E_2^{-1} R_{\beta\alpha} \delta^4(p_\alpha - p_\beta) \mathrm{d}\beta / \prod_\beta E \,,$$

其中 E_1 和 E_2 是初态 α 中的两个粒子的能量. (当对自旋求和时)将截面定义为 4-动量的 Lorentz 不变函数是方便的. 因子 $R_{\beta\alpha}$, $\delta^4(p_\beta - p_\alpha)$ 和 $\mathrm{d}\beta/\prod_\beta E$ 已经是 Lorentz 不变的, 这意味着我们对任意惯性系定义的相对速度 u_α 必须使 $u_\alpha E_1 E_2$ 是个标量. 早先我们也提到, 在其中一个粒子(记为粒子 1)是静止的 Lorentz 参考系中, u_α 是另一粒子的速度. 这唯一地确定了 u_α 在一般 Lorentz 参考系中的值*

$$u_\alpha = \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} \Big/ E_1 E_2 \tag{3.4.17}$$

其中 p_1, p_2 和 m_1, m_2 是初态 α 中的两个粒子的 4-动量和质量.

一个意外收获是, 我们注意到, 在总 3-动量为零的"质心"参考系中, 我们有

$$p_1 = (\mathbf{p}, E_1) \,, \qquad p_2 = (-\mathbf{p}, E_2) \,,$$

这时方程(3.4.17)给出

$$u_\alpha = \frac{|\mathbf{p}|(E_1 + E_2)}{E_1 E_2} = \left| \frac{\mathbf{p}_1}{E_1} - \frac{\mathbf{p}_2}{E_2} \right| \,, \tag{3.4.18}$$

这正是我们对一个相对速度的预期. 然而, 在这个参考系下 u_α 不是真实的物理速度; 尤其是, 方程(3.4.18)表明, 对于极端相对论性粒子, 它的值可以取到 2 那么大.

---

*从方程(3.4.17)可以看出 $E_1 E_2 u_\alpha$ 显然是个标量. 另外, 当粒子 1 静止时, 我们有 $\mathbf{p}_1 = 0, E_1 = m_1$, 所以 $p_1 \cdot p_2 = -m_1 E_2$, 因而方程(3.4.17)给出

$$u_\alpha = \sqrt{E_2^2 - m_2^2}/E_2 = |\mathbf{p}_2|/E_2 \,,$$

这正是粒子2的速率.

我们现在来解释所谓的相空间因子 $\delta^4(p_\beta - p_\alpha)\mathrm{d}\beta$, 它出现在跃迁速率的普遍公式(3.4.11)中, 也出现在衰变速率和截面(3.4.13)和(3.4.15)中. 这里, 我们针对"质心" Lorentz 参考系的情况进行讨论, 在这个参考系中初态的总 3-动量为零

$$\mathbf{p}_\alpha = 0\,. \tag{3.4.19}$$

(对于 $N_\alpha = 1$, 这就是衰变粒子静止的情况.) 如果末态由动量为 $\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2, \cdots$ 的粒子组成, 那么

$$\delta^4(p_\beta - p_\alpha)\mathrm{d}\beta = \delta^3(\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 + \cdots)\delta(E'_1 + E'_2 + \cdots - E)\mathrm{d}^3\mathbf{p}'_1\mathrm{d}^3\mathbf{p}'_2\cdots\,, \tag{3.4.20}$$

其中 $E \equiv E_\alpha$ 是初态的总能量. $\mathbf{p}'_k$ 积分中的任何一个, 例如对 $\mathbf{p}'_1$ 的积分, 通过扔掉动量 δ-函数

$$\delta^4(p_\beta - p_\alpha)\mathrm{d}\beta \to \delta(E'_1 + E'_2 + \cdots - E)\mathrm{d}^3\mathbf{p}'_2\cdots \tag{3.4.21}$$

并对任何出现的 $\mathbf{p}'_1$(例如 E'_1 中的)进行如下的替换

$$\mathbf{p}'_1 = -\mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}'_3 - \cdots\,, \tag{3.4.22}$$

就能做掉 $\mathbf{p}'_1$的积分. 类似地, 我们可以利用剩下的 δ-函数做出其余的任何一个积分.

在最简单的情况中, 末态只有两个粒子. 这时(3.4.21)给出

$$\delta^4(p_\beta - p_\alpha)\mathrm{d}\beta \to \delta(E'_1 + E'_2 - E)\mathrm{d}^3\mathbf{p}'_2\,.$$

更详细些就是

$$\delta^4(p_\beta - p_\alpha)\mathrm{d}\beta \to \delta\Big(\sqrt{|\mathbf{p}'_1|^2 + {m'_1}^2} + \sqrt{|\mathbf{p}'_1|^2 + {m'_2}^2} - E\Big)|\mathbf{p}'_1|^2\mathrm{d}|\mathbf{p}'_1|\mathrm{d}\Omega\,, \tag{3.4.23}$$

其中

$$\mathbf{p}'_2 = -\mathbf{p}'_1$$

以及 $\mathrm{d}\Omega \equiv \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ 是 $\mathbf{p}'_1$ 的微分立体角. 通过利用如下标准公式可以对其进行简化

$$\delta(f(x)) = \delta(x - x_0)/|f'(x_0)|\,,$$

其中 $f(x)$ 是在 $x = x_0$ 处有一个单零点的任意实函数. 在我们的情况下, 方程(3.4.23)中 δ-函数的变量 $E'_1 + E'_2 - E$ 的唯一零点是 $|\mathbf{p}'_1| = k'$, 其中

$$k' = \sqrt{(E^2 - {m'_1}^2 - {m'_2}^2)^2 - 4{m'_1}^2{m'_2}^2}\Big/2E\,, \tag{3.4.24}$$

$$E'_1 = \sqrt{k'^2 + {m'_1}^2} = \frac{E^2 - {m'_2}^2 + {m'_1}^2}{2E}\,, \tag{3.4.25}$$

$$E'_2 = \sqrt{k'^2 + {m'_2}^2} = \frac{E^2 - {m'_1}^2 + {m'_2}^2}{2E}\,, \tag{3.4.26}$$

导数是

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}|\mathbf{p}'_1|}\left(\sqrt{|\mathbf{p}'_1|^2 + {m'_1}^2} + \sqrt{|\mathbf{p}'_1|^2 + {m'_2}^2} - E\right)\right]_{|\mathbf{p}'_1| = k'}\\ &\quad = \frac{k'}{E'_1} + \frac{k'}{E'_2} = \frac{k'E}{E'_1E'_2}\,.\end{aligned} \tag{3.4.27}$$

因此, 通过除掉(3.4.27), 我们可以扔掉方程(3.4.23)中的 δ-函数和微分 $\mathrm{d}|\mathbf{p}_1'|$,

$$\delta^4(p_\beta - p_\alpha)\mathrm{d}\beta \to \frac{k' E_1' E_2'}{E}\mathrm{d}\Omega \,, \tag{3.4.28}$$

其中 k', E_1', E_2' 由方程(3.4.24)—(3.4.26)给出. 特别地, 动量为零且能量为 E 的单粒子态衰变成两个粒子的微分速率(3.4.13)是

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma(\alpha \to \beta)}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{2\pi k' E_1' E_2'}{E}|M_{\beta\alpha}|^2 \tag{3.4.29}$$

而两体散射过程 $1\,2 \to 1'\,2'$ 的微分截面由方程(3.4.15)给出

$$\frac{\mathrm{d}\sigma(\alpha \to \beta)}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{(2\pi)^4 k' E_1' E_2'}{E u_\alpha}\,|M_{\beta\alpha}|^2 = \frac{(2\pi)^4 k' E_1' E_2' E_1 E_2}{E^2 k}\,|M_{\beta\alpha}|^2 \,, \tag{3.4.30}$$

其中 $k \equiv |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$.

上面 $N_\beta = 2$ 的情况特别简单, 但对于 $N_\beta = 3$, 有一个非常好的结果也值得说一下. 当 $N_\beta = 3$ 时, 方程(3.4.21)给出

$$\begin{aligned}\delta^4(p_\beta - p_\alpha)\mathrm{d}\beta \to\ & \mathrm{d}^3\mathbf{p}_2'\,\mathrm{d}^3\mathbf{p}_3' \\ & \times \delta\left(\sqrt{(\mathbf{p}_2' + \mathbf{p}_3')^2 + m_1'^2} + \sqrt{\mathbf{p}_2'^2 + m_2'^2} + \sqrt{\mathbf{p}_3'^2 + m_3'^2} - E\right) .\end{aligned}$$

我们将动量空间体积元写为

$$\mathrm{d}^3\mathbf{p}_2'\,\mathrm{d}^3\mathbf{p}_3' = |\mathbf{p}_2'|^2\,\mathrm{d}|\mathbf{p}_2'|\,|\mathbf{p}_3'|^2\,\mathrm{d}|\mathbf{p}_3'|\,\mathrm{d}\Omega_3\,\mathrm{d}\phi_{23}\,\mathrm{d}\cos\theta_{23} \,,$$

其中 $\mathrm{d}\Omega_3$ 是 $\mathbf{p}_3'$ 的立体角微元, θ_{23} 和 ϕ_{23} 是 $\mathbf{p}_2'$ 相对 $\mathbf{p}_3'$ 方向的极角和方位角. 由 $\mathbf{p}_2'$ 和 $\mathbf{p}_3'$ 张成的平面, 它的方向由 ϕ_{23} 和 $\mathbf{p}_3'$ 的方向确定, 而剩下的角度 θ_{23} 由能量守恒条件确定

$$\begin{aligned}\sqrt{\mathbf{p}_2'^2 + 2|\mathbf{p}_2'|\,|\mathbf{p}_3'|\cos\theta_{23} + |\mathbf{p}_3'|^2 + m_1'^2} + \sqrt{|\mathbf{p}_2'|^2 + m_2'^2} & \\ + \sqrt{|\mathbf{p}_3'|^2 + m_3'^2} = E.& \end{aligned}$$

δ-函数中的变量对 $\cos\theta_{23}$ 的导数是

$$\frac{\partial E_1'}{\partial\cos\theta_{23}} = \frac{|\mathbf{p}_2'|\,|\mathbf{p}_3'|}{E_1'} \,,$$

所以, 对 $\cos\theta_{23}$ 的积分可以通过扔掉 δ-函数并除以这个导数做出来

$$\delta^4(p_\beta - p_\alpha)\mathrm{d}\beta \to |\mathbf{p}_2'|\,\mathrm{d}|\mathbf{p}_2'|\,|\mathbf{p}_3'|\,\mathrm{d}|\mathbf{p}_3'|\,E_1'\,\mathrm{d}\Omega_3\,\mathrm{d}\phi_{23} \,.$$

将动量替换为能量, 最终变成

$$\delta^4(p_\beta - p_\alpha)\mathrm{d}\beta \to E_1'\,E_2'\,E_3'\,\mathrm{d}E_2'\mathrm{d}E_3'\,\mathrm{d}\Omega_3\,\mathrm{d}\phi_{23} \,. \tag{3.4.31}$$

但是, 回忆通过对 $|M_{\beta\alpha}|^2$ 做自旋求和并乘以能量之积得到的量(3.4.16), 它是 4-动量的标量函数. 如果我们对这个标量取近似, 视其为一个常量, 那么方程(3.4.31)告诉我们, 对于确定的初态, 事件点在 E_2', E_3'-平面上的分布是均匀的. 因此, 在这张图中, 任何对事件均匀分布的偏离都为衰变过程提供了有用的线索, 这其中包含可能的离心势垒或共振中间态. Dalitz(达利兹)在 1953 年用它来分析衰变 $K^+ \to \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$, 因此这被称为 Dalitz 图.[19]

3.5 微扰论

历史上, 计算S-矩阵最有力的技术是微扰论, 即按照哈密顿量$H = H_0 + V$中相互作用项V的幂级数展开. 方程(3.2.7)和(3.1.18)给出的S-矩阵是

$$S_{\beta\alpha} = \delta(\beta - \alpha) - 2\mathrm{i}\pi\delta(E_\beta - E_\alpha)T_{\beta\alpha}{}^{+}$$
$$T_{\beta\alpha}{}^{+} = (\Phi_\beta, V\Psi_\alpha{}^{+}) ,$$

其中$\Psi_\alpha{}^{+}$满足Lippmann-Schwinger方程(3.1.17):

$$\Psi_\alpha{}^{+} = \Phi_\alpha + \int \mathrm{d}\gamma \, \frac{T_{\gamma\alpha}{}^{+}\Phi_\gamma}{E_\alpha - E_\gamma + \mathrm{i}\epsilon} .$$

用V作用这个方程, 并和Φ_β做标量积, 这给出了T^{+}的积分方程

$$T_{\beta\alpha}{}^{+} = V_{\beta\alpha} + \int \mathrm{d}\gamma \, \frac{V_{\beta\gamma}T_{\gamma\alpha}{}^{+}}{E_\alpha - E_\gamma + \mathrm{i}\epsilon} , \tag{3.5.1}$$

其中

$$V_{\beta\alpha} \equiv (\Phi_\beta, V\Phi_\alpha) . \tag{3.5.2}$$

反复迭代方程(3.5.1)就得到了$T_{\beta\alpha}{}^{+}$的微扰级数

$$T_{\beta\alpha}{}^{+} = V_{\beta\alpha} + \int \mathrm{d}\gamma \, \frac{V_{\beta\gamma}V_{\gamma\alpha}}{E_\alpha - E_\gamma + \mathrm{i}\epsilon} + \int \mathrm{d}\gamma\mathrm{d}\gamma' \, \frac{V_{\beta\gamma}V_{\gamma\gamma'}V_{\gamma'\alpha}}{(E_\alpha - E_\gamma + \mathrm{i}\epsilon)(E_\alpha - E_{\gamma'} + \mathrm{i}\epsilon)} + \cdots . \tag{3.5.3}$$

在20世纪30年代, 这种基于方程(3.5.3)的计算S-矩阵的主要方法, 现在被称为*旧式微扰论*. 它明显的缺点是分母上的能量掩盖了S-矩阵潜在的Lorentz不变性. 然而, 在阐明不同中间态产生的S-矩阵的奇异性方面, 它仍然有一些用处. 在本书的大多数部分, 我们将依赖于方程(3.5.3)的一个改写版, 这个改写版被称为*含时微扰论*, 它具有使Lorentz不变性更加显然的优点, 但却多多少少掩盖了各个中间态的贡献.

导出编时微扰展开的最简单方法是利用方程(3.2.5), 它给出的S-算符是:

$$S = U(\infty, -\infty) ,$$

其中

$$U(\tau, \tau_0) \equiv \exp(\mathrm{i}H_0\tau)\exp(-\mathrm{i}H(\tau - \tau_0))\exp(-\mathrm{i}H_0\tau_0) .$$

对这个公式的$U(\tau, \tau_0)$做相对τ的微分, 这给出微分方程

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}U(\tau, \tau_0) = V(\tau)U(\tau, \tau_0) , \tag{3.5.4}$$

其中

$$V(t) \equiv \exp(\mathrm{i}H_0t)V\exp(-\mathrm{i}H_0t) . \tag{3.5.5}$$

(以这种方式依赖于时间的算符被称作定义在*相互作用绘景*中, 这是为了将这种依赖时间的方式与量子力学中的Heisenberg绘景区分开, 在Heisenberg绘景中, 要求算符依赖时间的方式

是 $O_H(t) = \exp(\mathrm{i}Ht)O_H \exp(-\mathrm{i}Ht)$.) 方程(3.5.4)和初值条件 $U(\tau_0, \tau_0) = 1$ 显然被如下积分方程的解所满足

$$U(\tau, \tau_0) = 1 - \mathrm{i}\int_{\tau_0}^{\tau} \mathrm{d}t\, V(t)U(\tau, \tau_0)\,. \tag{3.5.6}$$

通过迭代这个积分方程, 我们得到了 $U(\tau, \tau_0)$ 按照 V 的幂次展开的表达式

$$\begin{aligned} U(\tau, \tau_0) = 1 &- \mathrm{i}\int_{\tau_0}^{\tau} \mathrm{d}t_1\, V(t_1) + (-\mathrm{i})^2 \int_{\tau_0}^{\tau} \mathrm{d}t_1 \int_{\tau_0}^{t_1} \mathrm{d}t_2\, V(t_1)\, V(t_2) \\ &+ (-\mathrm{i})^3 \int_{\tau_0}^{\tau} \mathrm{d}t_1 \int_{\tau_0}^{t_1} \mathrm{d}t_2 \int_{\tau_0}^{t_2} \mathrm{d}t_3\, V(t_1)\, V(t_2)\, V(t_3) + \cdots\,. \end{aligned} \tag{3.5.7}$$

令 $\tau = \infty$ 以及 $\tau_0 = -\infty$ 就给出了 S-算符的微扰展开:

$$\begin{aligned} S = 1 &- \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t_1\, V(t_1) + (-\mathrm{i})^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t_1 \int_{-\infty}^{t_1} \mathrm{d}t_2\, V(t_1)\, V(t_2) \\ &+ (-\mathrm{i})^3 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t_1 \int_{-\infty}^{t_1} \mathrm{d}t_2 \int_{-\infty}^{t_2} \mathrm{d}t_3\, V(t_1)\, V(t_2)\, V(t_3) + \cdots\,. \end{aligned} \tag{3.5.8}$$

这也可以从旧式微扰展开(3.5.3)中直接导出, 方法是使用方程(3.5.3)中能量因子的 Fourier 表示:

$$(E_\alpha - E_\gamma + \mathrm{i}\epsilon)^{-1} = -\mathrm{i}\int_0^{\infty} \mathrm{d}\tau\, \exp(\mathrm{i}(E_\alpha - E_\gamma)\tau) \tag{3.5.9}$$

注意, 这类积分是通过在被积函数中插入收敛因子 $\mathrm{e}^{-\epsilon\tau}$ 计算出来的, 其中 $\epsilon \to 0_+$.

有一种重写方程(3.5.8)的方法, 这种方法被证明在进行明显 Lorentz 不变的计算中非常有效. 定义算符的**编时乘积**, 对于任何依赖时间的算符, 它的编时乘积定义为按以下方式排列的因子的乘积: 使有最晚时间变量的因子处在最左边, 仅次于最后时间的算符紧接着最左边的算符, 这样一直做下去. 例如

$$\begin{aligned} T\{V(t)\} &= V(t)\,, \\ T\{V(t_1)V(t_2)\} &= \theta(t_1 - t_2)V(t_1)V(t_2) + \theta(t_2 - t_1)V(t_2)V(t_1)\,, \end{aligned}$$

等等, 其中 $\theta(\tau)$ 是阶跃函数, $\tau > 0$ 时等于 $+1$, $\tau < 0$ 时等于 0. n 个 V 的编时乘积等于对全部 $n!$ 种 V 置换的求和, 其中的每一个都给出相同的对所有 $t_1 \cdots t_n$ 的积分, 所以方程(3.5.8)可以写为

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i})^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \cdots \mathrm{d}t_n\, T\Big\{V(t_1) \cdots V(t_n)\Big\}\,. \tag{3.5.10}$$

这有时被称作*Dyson级数*.[20] 如果不同时刻的 $V(t)$ 彼此都对易, 可以进行对这个级数求和; 结果是

$$S = \exp\left(-\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, V(t)\right)\,.$$

当然, 通常不是这种情况; 一般而言, (3.5.10)甚至都不收敛, 它充其量是 V 中出现的任何耦合常数的渐近展开式. 然而, 在一般情况下, 方程(3.5.10)有时写成

$$S = T\exp\left(-\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, V(t)\right)\,,$$

这里的T表明这个表达式是对指数的级数展开式中每一项进行编时后计算的.

我们现在可以轻而易举地找到一大类使得S-矩阵明显Lorentz不变的理论. 由于S-矩阵的矩阵元就是S-算符在自由粒子态Φ_α, Φ_β等等之间的矩阵元, 我们希望S-算符与在这些自由粒子态上给出Lorentz变换的算符$U_0(\Lambda, a)$对易. 等价地, S-算符必须与$U_0(\Lambda, a)$的生成元$H_0, \mathbf{P}_0, \mathbf{J}_0, \mathbf{K}_0$对易. 为了满足这个要求, 试设$V(t)$是标量$\mathscr{H}(\mathbf{x}, t)$的三维空间积分

$$V(t) = \int \mathrm{d}^3x\, \mathscr{H}(\mathbf{x}, t) \tag{3.5.11}$$

$\mathscr{H}(x)$是标量是指

$$U_0(\Lambda, a)\mathscr{H}(x)U_0^{-1}(\Lambda, a) = \mathscr{H}(\Lambda x + a)\,. \tag{3.5.12}$$

(通过在无限小变换下让a^0的系数相等, 可以看出$\mathscr{H}(x)$对时间的依赖与方程(3.5.5)一致.) 于是S可以写成四维积分的和

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i})^n}{n!} \int \mathrm{d}^4x_1 \cdots \mathrm{d}^4x_n\, T\Big\{\mathscr{H}(x_1)\cdots\mathscr{H}(x_n)\Big\}\,. \tag{3.5.13}$$

现在除了算符乘积的编时外, 剩下的一切都是明显Lorentz不变的.

现在, 仅当$x_1 - x_2$类空时, 即仅当$(x_1 - x_2)^2 > 0$时, 两个时空点x_1, x_2的编时才是Lorentz不变的, 所以当(尽管不是仅当)类空间隔上和类光间隔*上的$\mathscr{H}(x)$全部对易时:

$$\big[\mathscr{H}(x), \mathscr{H}(x')\big] = 0 \qquad \text{当} \qquad (x - x')^2 \geq 0\,, \tag{3.5.14}$$

方程(3.5.13)中的编时不会引入特殊的Lorentz参考系, 我们可以利用3.3节的结果给出一个形式化的非微扰证明, 证明满足方程(3.5.12)和(3.5.14)的相互作用(3.5.11)确实给出一个有着正确Lorentz变换性质的S-矩阵. 对于无限小的增速变换, 方程(3.5.12)给出

$$-\mathrm{i}[\mathbf{K}_0, \mathscr{H}(\mathbf{x}, t)] = t\boldsymbol{\nabla}\mathscr{H}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{x}\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{H}(\mathbf{x}, t)\,, \tag{3.5.15}$$

所以积掉$\mathbf{x}$并令$t = 0$给出

$$[\mathbf{K}_0, V] = \left[\mathbf{K}_0, \int \mathrm{d}^3x\, \mathscr{H}(\mathbf{x}, 0)\right] = [H_0, \mathbf{W}]\,, \tag{3.5.16}$$

其中

$$\mathbf{W} \equiv -\int \mathrm{d}^3x\, \mathbf{x}\, \mathscr{H}(\mathbf{x}, 0)\,. \tag{3.5.17}$$

如果(通常就是这种情况)$\mathscr{H}(\mathbf{x}, 0)$在$H_0$本征态之间的矩阵元是能量本征值的光滑函数, 那么$V$也是这样, 为了使散射理论有效, 这是必须的, $\mathbf{W}$同样如此, 而这是在证明Lorentz不变性所必需的. 要使Lorentz不变的另一条件得到满足, 即对易关系(3.3.21)成立, 当且仅当

$$0 = [\mathbf{W}, V] = \int \mathrm{d}^3x \int \mathrm{d}^3y\, \mathbf{x}\, [\mathscr{H}(\mathbf{x}, 0), \mathscr{H}(\mathbf{y}, 0)]\,. \tag{3.5.18}$$

这个条件源于"因果律"条件(3.5.14), 但它为S-矩阵的Lorentz不变性提供了一个稍弱的充分条件.

这类理论不是唯一的Lorentz不变的理论, 但与最普遍的Lorentz不变理论也没有太大不同. 尤其是, 总有类似于(3.5.14)这样的对易关系要被满足. 对于编时总是伽利略不变的非相对论性系统, 这个条件没有对应的版本, 正是这个条件使得*Lorentz*不变性与量子力学的结合受到那么多的限制.

*我们在这里将加在x和x'上的条件写成$(x - x')^2 \geq 0$而不是$(x - x')^2 > 0$是因为, 我们将在第6章看到, Lorentz不变性会被$x = x'$处麻烦的奇异性影响.

* * *

至此, 本节所描述的方法在相互作用算符 V 足够小时才是有效的. 也有这种近似的修正版本, 称为畸变波*Born*近似, 它在相互作用包含两项时有效

$$V = V_{\mathrm{s}} + V_{\mathrm{w}} \tag{3.5.19}$$

其中 V_{w} 弱而 V_{s} 强. 如果 V_{s} 是全部的相互作用, 我们可以定义 $\Psi_{\mathrm{s}\alpha}{}^{\pm}$为“入”态和“出”态

$$\Psi_{\mathrm{s}\alpha}{}^{\pm} = \Phi_\alpha + (E_\alpha - H_0 \pm \mathrm{i}\epsilon)^{-1} V_{\mathrm{s}} \Psi_{\mathrm{s}\alpha}{}^{\pm} \,. \tag{3.5.20}$$

这样, 我们就可以将(3.1.16)写成

$$\begin{aligned} T_{\beta\alpha}{}^{+} &= (\Phi_\beta, V\Psi_\alpha{}^{+}) \\ &= \left(\left[\Psi_{\mathrm{s}\beta}{}^{-} - (E_\beta - H_0 - \mathrm{i}\epsilon)^{-1} V_{\mathrm{s}} \Psi_{\mathrm{s}\beta}{}^{-}\right], (V_{\mathrm{s}} + V_{\mathrm{w}})\Psi_\alpha{}^{+}\right) \\ &= (\Psi_{\mathrm{s}\beta}{}^{-}, V_{\mathrm{w}}\Psi_\alpha{}^{+}) \\ &\quad + \left(\Psi_{\mathrm{s}\beta}{}^{-}, \left[V_{\mathrm{s}} - V_{\mathrm{s}}(E_\beta - H_0 + \mathrm{i}\epsilon)^{-1}(V_{\mathrm{s}} + V_{\mathrm{w}})\right]\Psi_\alpha{}^{+}\right) \end{aligned}$$

于是

$$T_{\beta\alpha}{}^{+} = (\Psi_{\mathrm{s}\beta}{}^{-}, V_{\mathrm{w}}\Psi_\alpha{}^{+}) + (\Psi_{\mathrm{s}\beta}{}^{-}, V_{\mathrm{s}}\Phi_\alpha) \,. \tag{3.5.21}$$

右边的第二项正是 $T_{\beta\alpha}{}^{+}$ 在仅有强的作用时的形式

$$T_{\mathrm{s}\,\beta\alpha}{}^{+} \equiv (\Phi_\beta, V_{\mathrm{s}}\Psi_{\mathrm{s}\alpha}{}^{+}) = (\Psi_{\mathrm{s}\beta}{}^{-}, V_{\mathrm{s}}\Phi_\alpha) \,. \tag{3.5.22}$$

(要证明方程(3.5.22), 在导出方程(3.5.21)的推导中扔掉所有的 V_{w} 即可.) 方程(3.5.21)在它第二项为零时最有用: 此时过程 $\alpha \to \beta$ 不能由强的作用单独产生. (例如, 在核 β 衰变中, 虽然我们不能忽略作用在核的初态和末态上强核力, 但我们需要弱核力将中子转变成质子.) 对于这样的过程, 矩阵元(3.5.22)为零, 所以方程(3.5.21)变成

$$T_{\beta\alpha}{}^{+} = (\Psi_{\mathrm{s}\beta}{}^{-}, V_{\mathrm{w}}\Psi_\alpha{}^{+}) \,. \tag{3.5.23}$$

迄今为止, 全部的处理都是精确的. 然而, 当 V_{w} 非常弱以至于我们可以忽略它对方程(3.5.23)中的 $\Psi_\alpha{}^{+}$ 态的影响时, 使得我们可以将 $\Psi_\alpha{}^{+}$ 替换为仅考虑了强作用 V_{s} 的 $\Psi_{\mathrm{s}\alpha}{}^{+}$, 只有这时, 这样重写 T-矩阵才是有价值的. 在这个近似下, 方程(3.5.23)变成

$$T_{\beta\alpha}{}^{+} \simeq (\Psi_{\mathrm{s}\beta}{}^{-}, V_{\mathrm{w}}\Psi_{\mathrm{s}\alpha}{}^{+}) \,. \tag{3.5.24}$$

这个结果到 V_{w} 的第一阶有效, 但是它对 V_{s} 的所有阶都有效. 这个近似在物理中无处不在; 例如, 核 β 或 γ 衰变的 S-矩阵元是利用方程(3.5.24)计算的, 其中 V_s 是核的强相互作用, V_{w} 要么是核的弱相互作用, 要么是电磁作用, 而 $\Psi_{\mathrm{s}\beta}{}^{-}$ 和 $\Psi_{\mathrm{s}\alpha}{}^{+}$分别是是核的末态和初态.

3.6 幺正性的影响

S-矩阵的幺正性强加了一个有趣且有用的条件, 这个条件将任意多粒子态 α 中的向前散射振幅 $M_{\alpha\alpha}$ 与该态中总反应速率联系起来. 回忆, 在一般情况下, 态 β 和态 α 可以相同也可以不相同, 这时 S-矩阵可以写成(3.3.2)那样:

$$S_{\beta\alpha} = \delta(\beta-\alpha) - 2\pi\mathrm{i}\delta^4(p_\beta - p_\alpha)M_{\beta\alpha}\,.$$

于是幺正性条件给出

$$\begin{aligned}\delta(\gamma-\alpha) = \int \mathrm{d}\beta\, S^*_{\beta\gamma}S_{\beta\alpha} &= \delta(\gamma-\alpha) - 2\pi\mathrm{i}\delta^4(p_\gamma-p_\alpha)M_{\gamma\alpha}\\ &\quad + 2\pi\mathrm{i}\delta^4(p_\gamma-p_\alpha)M^*_{\alpha\gamma} + 4\pi^2\int \mathrm{d}\beta\,\delta^4(p_\beta-p_\gamma)\delta^4(p_\beta-p_\alpha)M^*_{\beta\gamma}M_{\beta\alpha}\,.\end{aligned}$$

抵消掉 $\delta(\gamma-\alpha)$ 项并消去因子 $2\pi\delta^4(p_\gamma-p_\alpha)$, 我们发现, 对 $p_\gamma = p_\alpha$

$$0 = -\mathrm{i}M_{\gamma\alpha} + \mathrm{i}M^*_{\alpha\gamma} + 2\pi\int \mathrm{d}\beta\,\delta^4(p_\beta-p_\alpha)M^*_{\beta\gamma}M_{\beta\alpha}\,. \tag{3.6.1}$$

这在 $\alpha=\gamma$ 的特殊情况下最有用, 这时它写成

$$\mathrm{Im}\,M_{\alpha\alpha} = -\pi\int \mathrm{d}\beta\,\delta^4(p_\beta-p_\alpha)|M_{\beta\alpha}|^2\,. \tag{3.6.2}$$

利用方程(3.4.11), 它可以表示为一个处在体积 V 内的初态 α 能够产生的所有反应的总速率公式

$$\begin{aligned}\Gamma_\alpha &\equiv \int \mathrm{d}\beta\,\frac{\mathrm{d}\Gamma(\alpha\to\beta)}{\mathrm{d}\beta}\\ &= (2\pi)^{3N_\alpha-2}V^{1-N_\alpha}\int \mathrm{d}\beta\,\delta^4(p_\beta-p_\alpha)|M_{\beta\alpha}|^2\\ &= -\frac{1}{\pi}(2\pi)^{3N_\alpha-2}V^{1-N_\alpha}\,\mathrm{Im}\,M_{\alpha\alpha}\,.\end{aligned} \tag{3.6.3}$$

特别地, 当 α 是二粒子态时, 这可以写为

$$\mathrm{Im}\,M_{\alpha\alpha} = -u_\alpha\sigma_\alpha/16\pi^3\,, \tag{3.6.4}$$

其中 u_α 是态 α 中的相对速度(3.4.17), σ_α 是该态中的总截面, 由(3.4.15)给出

$$\sigma_\alpha \equiv \int \mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\sigma(\alpha\to\beta)/\mathrm{d}\beta = (2\pi)^4u_\alpha^{-1}\int \mathrm{d}\beta\,|M_{\beta\alpha}|^2\delta^4(p_\beta-p_\alpha)\,. \tag{3.6.5}$$

这个结果通常写成另一种稍微不同的形式, 即散射振幅 $f(\alpha\to\beta)$. 方程(3.4.30)表明, 对质心系中的两体散射, 微分截面是

$$\frac{\mathrm{d}\sigma(\alpha\to\beta)}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{(2\pi)^4k'E'_1E'_2E_1E_2}{kE^2}\,|M_{\beta\alpha}|^2\,, \tag{3.6.6}$$

其中 k' 和 k 是末态和初态中动量的大小. 因此, 我们将散射振幅定义为*

$$f(\alpha\to\beta) \equiv -\frac{4\pi^2}{E}\sqrt{\frac{k'E'_1E'_2E_1E_2}{k}}\,M_{\beta\alpha}\,, \tag{3.6.7}$$

* f 的相位是一个约定, 这个约定源于不含时 Schrödinger 方程的解, f 的波动力学解释[21]是这个解中的出射波的系数. 这里所采用的 f 的归一化对于非弹性散射有点非常规; 通常 f 的定义会使得末速度和初速度的比值出现在微分截面的公式中.

这使得微分截面就是

$$\frac{\mathrm{d}\sigma(\alpha\to\beta)}{\mathrm{d}\Omega}=|f(\alpha\to\beta)|^2\,. \tag{3.6.8}$$

尤其对于弹性两体散射, 我们有

$$f(\alpha\to\beta)\equiv-\frac{4\pi^2E_1E_2}{E}\,M_{\beta\alpha}\,. \tag{3.6.9}$$

利用相对速率 u_α 的公式(3.4.18), 幺正性给出的(3.6.3)现在变成

$$\operatorname{Im}f(\alpha\to\alpha)=\frac{k}{4\pi}\sigma_\alpha\,. \tag{3.6.10}$$

幺正性条件(3.6.3)的这种形式被称为*光学定理*.[22]

光学定理一个漂亮的结果是告诉我们高能散射模式的很多信息. 可以预期散射振幅 f 是角度的光滑函数, 所以必存在某个立体角 $\Delta\Omega$ 使得这个立体角内的 $|f|^2$ 与向前方向的值接近相同(例如, 差异在2倍以内), 那么总截面会有界

$$\sigma_\alpha\geq\int|f|^2\,\mathrm{d}\Omega\geq\frac{1}{2}\,|f(\alpha\to\alpha)|^2\Delta\Omega\geq\frac{1}{2}|\operatorname{Im}f(\alpha\to\alpha)|^2\Delta\Omega\,.$$

这样, 利用方程(3.6.10)就给出 $\Delta\Omega$ 的一个上界

$$\Delta\Omega\leq32\pi^2\Big/k^2\sigma_\alpha\,. \tag{3.6.11}$$

我们会在下一节看到, 在高能情况下, 总截面通常预期会接近一个常数或者增长得非常缓慢, 所以方程(3.6.11)证明了, 对于在向前方向上使得微分截面近似为常数的立体角, 在 $k\to\infty$ 时, 它至少以 $1/k^2$ 的速度减小. 这个在高能下处在向前方向上不断变窄的峰被称为*衍射峰*.

现在回到反应包含任意数目粒子的一般情况, 利用方程(3.6.2)结合 CPT 不变性, 我们可以讨论粒子和反粒子的总反应速率之间的一些关系. 由于 CPT 是反幺正的, 它的守恒一般不会给出 $\alpha\to\beta$ 的过程与粒子替换为反粒子的相同过程之间的简单关系. 反而, 它提供了一个过程与包含反粒子的*逆过程*之间的关系: 利用我们从时间反演不变性推出(3.3.46)的方法, 我们可以证明 CPT 不变要求 S-矩阵满足如下的条件

$$S_{\beta,\alpha}=S_{\mathscr{CPT}\alpha,\mathscr{CPT}\beta}\,, \tag{3.6.12}$$

其中 $\mathscr{CPT}$ 表明我们必须反转所有的自旋 z-分量, 将所有的粒子变为相应的反粒子, 并给矩阵元中初态的粒子乘上各种相位因子, 末态的粒子乘上相位因子的复共轭. 由于 CPT 不变性还要求粒子与相应的反粒子具有相同的质量, 相同的关系对 $S_{\beta\alpha}$ 中 $\delta^4(p_\alpha-p_\beta)$ 的系数也成立:

$$M_{\beta,\alpha}=M_{\mathscr{CPT}\alpha,\mathscr{CPT}\beta}\,. \tag{3.6.13}$$

特别地, 当初态与末态相同时, 相位因子全部抵消, 方程(3.6.13)变成

$$\begin{aligned}&M_{p_1\sigma_1n_1;\,p_2\sigma_2n_2;\cdots\,,\,p_1\sigma_1n_1;\,p_2\sigma_2n_2;\cdots}\\&\quad=M_{p_1\,-\sigma_1\,n_1^c;\,p_2\,-\sigma_2\,n_2^c;\cdots\,,\,p_1\,-\sigma_1\,n_1^c;\,p_2\,-\sigma_2\,n_2^c;\cdots}\,,\end{aligned} \tag{3.6.14}$$

其中 n 上的上标 c 代表 n 的反粒子. 那么, 推广后的光学定理告诉我们, 初态为某一组粒子的总反应速率与初态为相应的自旋反向的反粒子的总反应率相同:

$$\Gamma_{p_1\sigma_1 n_1; p_2\sigma_2 n_2;\cdots} = \Gamma_{p_1\,-\sigma_1\,n_1^c; p_2\,-\sigma_2\,n_2^c;\cdots} \,. \tag{3.6.15}$$

特别地, 将其应用于单粒子态, 我们看到任何粒子的衰变速率都等于自旋反向的反粒子的衰变速率. 旋转不变性不允许粒子的衰变率依赖于衰变粒子的自旋 z-分量, 所以, 普遍结果(3.6.15)的一个特殊情况是不稳定粒子的寿命与它们的反粒子的寿命精确相同.

* * *

从幺正条件 $S^\dagger S = 1$ 导出结果(3.6.2)的方法也使得我们可以从另一幺正关系 $SS^\dagger = 1$ 导出如下的结果

$$\mathrm{Im}\, M_{\alpha\alpha} = -\pi \int \mathrm{d}\beta\, \delta^4(p_\beta - p_\alpha)|M_{\alpha\beta}|^2 \,. \tag{3.6.16}$$

结合方程(3.6.2), 可以给出倒易率

$$\int \mathrm{d}\beta\, \delta^4(p_\beta - p_\alpha)|M_{\beta\alpha}|^2 = \int \mathrm{d}\beta\, \delta^4(p_\beta - p_\alpha)|M_{\alpha\beta}|^2 \,, \tag{3.6.17}$$

也就是说

$$\int \mathrm{d}\beta\, c_\alpha \frac{\mathrm{d}\Gamma(\alpha\to\beta)}{\mathrm{d}\beta} = \int \mathrm{d}\beta\, c_\beta \frac{\mathrm{d}\Gamma(\beta\to\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} \,, \tag{3.6.18}$$

其中 $c_\alpha \equiv [V/(2\pi)^3]^{N_\alpha}$. 这个结果可以用来导出动理学中的一些最重要结果.[23] 如果 $P_\alpha \mathrm{d}\alpha$ 是发现系统处在多粒子态 Φ_α 空间体积 $\mathrm{d}\alpha$ 中的几率, 那么, 由于跃迁到所有其它的态上导致的 P_α 的衰减速率是 $P_\alpha \int \mathrm{d}\beta\, \mathrm{d}\Gamma(\alpha\to\beta)/\mathrm{d}\beta$, 而由于所有其它态跃迁到 α 态而导致的增长速率是 $\int \mathrm{d}\beta\, P_\beta \mathrm{d}\Gamma(\beta\to\alpha)/\mathrm{d}\alpha$; 所以, P_α 的变化率是

$$\frac{\mathrm{d}P_\alpha}{\mathrm{d}t} = \int \mathrm{d}\beta\, P_\beta \frac{\mathrm{d}\Gamma(\beta\to\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} - P_\alpha \int \mathrm{d}\beta\, \frac{\mathrm{d}\Gamma(\alpha\to\beta)}{\mathrm{d}\beta} \,. \tag{3.6.19}$$

由此可以立即得出 $\int P_\alpha \mathrm{d}\alpha$ 与时间无关. (交换一下方程(3.6.19)中第二项积分中的积分变量的指标即可.) 另一方面, 熵 $(-\int \mathrm{d}\alpha\, P_\alpha \ln(P_\alpha/c_\alpha))$ 的变化率是

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \mathrm{d}\alpha\, P_\alpha \ln(P_\alpha/c_\alpha) = -\int \mathrm{d}\alpha \int \mathrm{d}\beta \left(\ln(P_\alpha/c_\alpha) + 1\right) \times \left[P_\beta \frac{\mathrm{d}\Gamma(\beta\to\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} - P_\alpha \frac{\mathrm{d}\Gamma(\alpha\to\beta)}{\mathrm{d}\beta}\right] .$$

交换第二项中积分变量的指标, 可以将其写为

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \mathrm{d}\alpha\, P_\alpha \ln(P_\alpha/c_\alpha) = \int \mathrm{d}\alpha \int \mathrm{d}\beta\, P_\beta \ln\left(\frac{P_\beta c_\alpha}{P_\alpha c_\beta}\right) \frac{\mathrm{d}\Gamma(\beta\to\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} \,.$$

现在, 对于任意正量 x 和 y, 函数 $y\ln(y/x)$ 满足如下不等式**

$$y \ln\left(\frac{y}{x}\right) \geq y - x \,.$$

** 当 $x \to y$ 时, 左边和右边的差接近正量 $(x-y)^2/2y$, 并相对 x 有一导数, 这个导数对于所有的 $x > y$ 和 $y < x$ 分别是正定和负定的.

熵的变化率因而满足约束

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \mathrm{d}\alpha\, P_\alpha \ln(P_\alpha/c_\alpha) \geq \int \mathrm{d}\alpha \int \mathrm{d}\beta \left[\frac{P_\beta}{c_\beta} - \frac{P_\alpha}{c_\alpha}\right] c_\beta \frac{\mathrm{d}\Gamma(\beta\to\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}$$

或者交换第二项中的积分变量

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \mathrm{d}\alpha\, P_\alpha \ln(P_\alpha/c_\alpha) \geq \int \mathrm{d}\alpha \int \mathrm{d}\beta \frac{P_\beta}{c_\beta}\left[c_\beta \frac{\mathrm{d}\Gamma(\beta\to\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} - c_\alpha \frac{\mathrm{d}\Gamma(\alpha\to\beta)}{\mathrm{d}\beta}\right] .$$

但是(交换 α 和 β 的)幺正关系(3.6.18)告诉我们, 不等式右边对 α 的积分为零, 所以我们可以得出结论, 熵总是增长的:

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \mathrm{d}\alpha\, P_\alpha \ln(P_\alpha/c_\alpha) \geq 0 \tag{3.6.20}$$

这就是“Boltzmann H-定理”. 在统计力学教科书中, 推导这个定理要么利用 Born 近似, 即 $|M_{\beta\alpha}|^2$ 关于 α 和 β 对称, 从而使 $c_\beta \mathrm{d}\Gamma(\beta\to\alpha)/\mathrm{d}\alpha = c_\alpha \mathrm{d}\Gamma(\alpha\to\beta)/\mathrm{d}\beta$, 要么通过假定时间反演不变, 这样如果我们交换 α 和 β 并反转所有的动量和自旋, $|M_{\beta\alpha}|^2$ 是不变的. 当然, Born 近似和时间反演不变性都不是精确的, 所以这个处理的好处是幺正性(3.6.18)是我们导出 H-定理唯一需要的.

当几率 P_α 变成仅是守恒量(诸如总能量, 荷等)的函数与因子 c_α 之积时, 熵的增长停止了. 在这种情况下, 守恒率要求, 除非 $P_\alpha/c_\alpha = P_\beta/c_\beta$, 否则 $\mathrm{d}\Gamma(\beta\to\alpha)/\mathrm{d}\alpha$ 为零, 所以我们可以将方程(3.6.19)中第一项的 P_β 替换为 $P_\alpha c_\beta/c_\alpha$. 再一次利用方程(3.6.18)则证明了 P_α 在这种情况下与时间无关. 这里又一次地, 我们需要的只是幺正关系(3.6.18), 而不是 Born 近似或时间反演不变.

3.7 分波展开*

用自由粒子态的基处理 S-矩阵通常是方便的, 这时, 除了总动量和能量以外, 所有变量都是离散的. 可能出现这种情况是因为, 在具有确定总动量 $\mathbf{p}$ 以及总能量 E 的 n-粒子态中, 动量 $\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n$ 的分量张成了 $(3n-4)$-维的紧致空间; 例如, 对于在 $\mathbf{p}=0$ 的质心系中 $n=2$ 个粒子, 这个空间是二维球面. 这种紧致空间上的任何函数都可展成一个广义“分波”的级数, 例如, 球谐函数, 这个函数一般用来表示二维球面上的函数. 因此, 对于这些除了连续变量 $\mathbf{p}$ 和 E 以外的变量都是分立的 n-粒子态, 我们可以定义一组基: 在这组基下, 我们将自由粒子态记为 $\Phi_{E\,\mathbf{p}\,N}$, 其中指标 N 包含所有自旋指标, 粒子种类指标以及所有用来标记广义分波的指标. 取这些态归一是方便的, 即它们的标积为:

$$\left(\Phi_{E'\,\mathbf{p}'\,N'}, \Phi_{E\,\mathbf{p}\,N}\right) = \delta(E'-E)\delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\delta_{N',N} . \tag{3.7.1}$$

那么在这种形式的基下, S-算符有如下矩阵元

$$\left(\Phi_{E'\,\mathbf{p}'\,N'}, S\Phi_{E\,\mathbf{p}\,N}\right) = \delta(E'-E)\delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{p})S_{N',N}(E,\mathbf{p}) , \tag{3.7.2}$$

其中 $S_{N',N}$ 是幺正矩阵. 类似地, T-算符的自由粒子矩阵元 $(\Phi_\beta, T\Phi_\alpha)$ 定义为方程(3.1.18)定义的量 $T_{\beta\alpha}{}^+$, 在我们的新基下(依照方程(3.4.12))它可以表示为

$$\left(\Phi_{E'\,\mathbf{p}'\,N'}, T\Phi_{E\,\mathbf{p}\,N}\right) = \delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{p})M_{N',N}(E,\mathbf{p}) \tag{3.7.3}$$

*本节或多或少在本书发展主线之外, 可以在第一次阅读时跳过.

并且, (3.2.7)现在是一个普通的矩阵方程:

$$S_{N',N}(E,\mathbf{p}) = \delta_{N',N} - 2\mathrm{i}\pi M_{N',N}(E,\mathbf{p})\,. \tag{3.7.4}$$

在下一节, 我们将采用这个普遍公式; 目前, 我们将集中于初态只包含两个粒子的反应.

例如, 考察由两个非全同粒子构成的态, 两个粒子的种类分别为n_1, n_2, 拥有非零的质量M_1, M_2, 并具有任意自旋s_1, s_2. 在这种情况下, 态可以用它们的总动量$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$, 能量$E$, 种类指标$n_1, n_2$, 自旋$z$-分量$\sigma_1, \sigma_2$以及一对整数$\ell, m$标记(其中$|m| \le \ell$), 其中$\ell$和$m$用来标明态与方向的关系, 例如态与$\mathbf{p}_1$方向的关系. 或者, 通过Clebsch-Gordan系数,[9] 我们可以将两个自旋结合成一个z-分量为μ的总自旋, 然后再一次利用Clebsch-Gordan系数, 将这个自旋与3-分量为m的轨道角动量ℓ结合, 组成3-分量为σ的总角动量j, 由此我们可以构成一个便利的离散基. 这给出了态的一组基$\Phi_{E\,\mathbf{p}\,j\,\sigma\,\ell\,s\,n}$(其中$n$是用来标记两个粒子种类$n_1, n_2$的"道指标"), 这组基由它们与具有确定的独立动量以及自旋3-分量的态的标积定义:

$$\begin{aligned}(\Phi_{\mathbf{p}_1\,\sigma_1\,\mathbf{p}_2\,\sigma_2\,n'}\,,\,\Phi_{E\,\mathbf{p}\,j\,\sigma\,\ell\,s\,n}) &\equiv (|\mathbf{p}_1|E_1E_2/E)^{-1/2}\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\\ &\times \delta\left(E - \sqrt{\mathbf{p}_1^2+M_1^2} - \sqrt{\mathbf{p}_2^2+M_2^2}\right)\delta_{n',n}\\ &\times \sum_{m,\mu} C_{s_1s_2}(s,\mu;\sigma_1,\sigma_2)\,C_{\ell s}(j,\sigma;m,\mu)Y_\ell^m(\hat{\mathbf{p}}_1)\,.\end{aligned} \tag{3.7.5}$$

其中Y_ℓ^m是通常的球谐函数.[24] 插入因子$(|\mathbf{p}_1|E_1E_2/E)^{-1/2}$是为了使得这些态在质心系中正确地归一化:

$$(\Phi_{E'\,\mathbf{p}'\,j'\,\sigma'\,\ell'\,s'\,n'}\,,\,\Phi_{E\,0\,j\,\sigma\,\ell\,s\,n}) = \delta^3(\mathbf{p}')\delta(E'-E)\delta_{j',j}\delta_{\sigma',\sigma}\delta_{\ell',\ell}\delta_{s',s}\delta_{n',n}\,. \tag{3.7.6}$$

对于全同粒子, 为了避免二次计数, 我们仅对2-粒子动量空间的一半区域进行积分, 所以这时标量积(3.7.6)中应该出现额外的因子$\sqrt{2}$.

在质心系中, 对于任何动量守恒且旋转不变的算符O, 它的矩阵元必须采取如下形式:

$$(\Phi_{E'\,\mathbf{p}'\,j'\,\sigma'\,\ell'\,s'\,n'}\,,\,O\,\Phi_{E\,0\,j\,\sigma\,\ell\,s\,n}) = \delta^3(\mathbf{p}')O^j_{\ell'\,s'\,n',\,\ell\,s\,n}(E)\delta_{jj'}\delta_{\sigma\sigma'}\,. \tag{3.7.7}$$

(关于j和σ对角是因为O与$\mathbf{J}^2$和J_3对易, 进一步地, $\delta_{\sigma\sigma'}$的系数与σ'无关是因为O与$J_1 \pm \mathrm{i}J_2$对易. 这是更普遍的Wigner-Eckart定理[25]中的一个特殊情况.) 将这一结果应用于算符M, 它的矩阵元是$M_{\beta\alpha}$, 由此得出质心系中的散射振幅(3.6.7)取如下形式

$$\begin{aligned}&f(\mathbf{k}\,\sigma_1, -\mathbf{k}\,\sigma_2, n \to \mathbf{k}'\,\sigma_1', -\mathbf{k}'\,\sigma_2', n')\\ &\equiv -4\pi^2\sqrt{\frac{k'E_1'E_2'E_1E_2}{E^2k}}M_{\mathbf{k}'\,\sigma_1'\,-\mathbf{k}'\,\sigma_2'\,n',\,\mathbf{k}\,\sigma_1\,-\mathbf{k}\,\sigma_2\,n}\\ &= -\frac{4\pi^2}{k}\sum_{j\sigma\ell'm's'\mu'\ell ms\mu} C_{s_1s_2}(s,\mu;\sigma_1,\sigma_2)C_{\ell s}(j,\sigma;m,\mu)\\ &\quad\times C_{s_1's_2'}(s',\mu';\sigma_1',\sigma_2')C_{\ell's'}(j,\sigma;m',\mu')\\ &\quad\times Y_{\ell'}^{m'}(\hat{\mathbf{k}}')Y_\ell^{m*}(\hat{\mathbf{k}})M^j_{\ell'\,s'\,n',\,\ell\,s\,n}(E)\,.\end{aligned} \tag{3.7.8}$$

微分散射截面是$|f|^2$. 我们取初动量$\mathbf{k}$的方向为3-方向, 在这种情况下

$$Y_\ell^m(\hat{\mathbf{k}}) = \delta_{m0}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\,. \tag{3.7.9}$$

计算 $|f|^2$ 对末动量 $\mathbf{k}'$ 的方向的积分, 对末态自旋 3-分量求和并对初态自旋 3-分量取平均, 我们就得到了从 n 道跃迁到 n' 道的总截面[**]:

$$\sigma(n\to n';E)=\frac{\pi}{k^2(2s_1+1)(2s_2+1)}\sum_{j\,\ell\,s\,\ell'\,s'}(2j+1)\\ \times\left|\delta_{\ell'\ell}\delta_{s's}\delta_{n'n}-S^j_{\ell's'n',\ell sn}(E)\right|^2\ . \tag{3.7.10}$$

计算(3.7.10)对所有两体道的求和, 这给出了所有弹性或非弹性两体反应的总截面:

$$\sum_{n'}\sigma(n\to n';E)=\frac{\pi}{k^2(2s_1+1)(2s_2+1)}\sum_{j\,\ell\,s}(2j+1)\\ \times\Big[(1-S^j(E))^\dagger(1-S^j(E))\Big]_{\ell\,s\,n,\ell\,s\,n}\ . \tag{3.7.11}$$

可以做个比较, 方程(3.7.8), (3.7.9), (3.7.4)和 Clebsch-Gordon 求和规则[**]给出的自旋平均的向前散射振幅是

$$f(n;E)=\frac{\mathrm{i}}{2k(2s_1+1)(2s_2+1)}\sum_{j\,\ell\,s}(2j+1)[1-S^j_{\ell sn,\ell sn}]$$

这样, 光学定理(3.6.10)给出的总截面就是

$$\sigma_{\text{total}}(n;E)=\frac{2\pi}{k^2(2s_1+1)(2s_2+1)}\sum_{j\,\ell\,s}(2j+1)\,\mathrm{Re}[1-S^j(E)]_{\ell sn,\ell sn}\ . \tag{3.7.12}$$

如果在能量为 E 时从 n 道只能到达两体道, 那么矩阵 $S^j(E)$ (或者至少是某个包含道 n 的子矩阵)是幺正的, 因此

$$\Big[(1-S^j(E))^\dagger(1-S^j(E))\Big]_{\ell\,s\,n,\ell\,s\,n}=2\,\mathrm{Re}[1-S^j(E)]_{\ell sn,\ell sn}\ , \tag{3.7.13}$$

所以(3.7.12)和(3.7.11)相等. 另一方面, 如果包含三个或多个粒子的道是打开的, 那么, (3.7.12)与(3.7.11)之差就给出了产生额外粒子的总截面:

$$\sigma_{\text{production}}(n;E)=\frac{\pi}{k^2(2s_1+1)(2s_2+1)}\sum_{j\,\ell\,s}(2j+1)\\ \times\Big[1-S^j(E)^\dagger S^j(E)\Big]_{\ell\,s\,n,\ell\,s\,n}\ , \tag{3.7.14}$$

并且必须是正的.

[**]为了导出这个结果, 我们利用了 Clebsch-Gordan 系数的标准求和规则[9]: 首先

$$\sum_{\sigma_1,\sigma_2}C_{s_1,s_2}(s,\mu;\sigma_1,\sigma_2)C_{s_1,s_2}(\bar s,\bar\mu;\sigma_1,\sigma_2)=\delta_{s\bar s}\delta_{\mu\bar\mu}$$

带撇号的与此相同; 接着

$$\sum_{m\tilde\sigma}C_{\ell\,s}(j,\sigma;m,\tilde\sigma)C_{\ell\,s}(\bar j,\bar\sigma;m,\tilde\sigma)=\delta_{j\bar j}\delta_{\sigma\bar\sigma}$$

最终

$$\sum_{\sigma\mu}C_{\ell\,s}(j,\sigma;0,\mu)C_{\bar\ell\,s}(j,\sigma;0,\mu)=\frac{2j+1}{2\ell+1}\delta_{\bar\ell\ell}\ .$$

当S-矩阵与过程相关的部分是对角矩阵时, 分波展开是非常有用的. 例如下面的这种情况, 如果初道n仅包含两个无自旋粒子, 并且在这个能量下没有其它的道是打开的, 就像$\pi^+ - \pi^+$或$\pi^+ - \pi^0$在能量低于产生额外π介子(假定忽略弱作用和电磁作用)阈值时的散射. 对于一对无自旋的粒子, 我们有$j = \ell$, 并且角动量守恒使S-矩阵对角化. 在某些包含有自旋粒子的过程中, S-矩阵也有可能是对角化的; 例如在π介子-核子散射中, 我们可以有$j = \ell + \frac{1}{2}$或$j = \ell - \frac{1}{2}$, 但是对于给定的j, 这两个态具有相反的宇称, 所以它们不能通过非零的S-矩阵元相连. 在任何情况下, 如果对于某些n和E, S-矩阵只在N'是两体态j, ℓ, s, n时不为零, 那么幺正性会要求

$$S^j_{\ell' s' n', \ell s n}(E) = \exp[2\mathrm{i}\delta_{j\ell s n}(E)]\delta_{\ell'\ell}\delta_{s's}\delta_{n'n}\,, \tag{3.7.15}$$

其中$\delta_{j\ell sn}(E)$是实相位, 通常称为相移. 这个公式也经常应用于S-矩阵的两体部分是对角化的但包含三个或多个粒子的道同时打开的情况; 在这种情况下, 为了确保(3.7.14)为正, 相移必须有一个正虚部. 对于实相移, 弹性总截面由方程(3.7.10)或方程(3.7.12)给出:

$$\begin{aligned}\sigma(n \to n; E) &= \sigma_{\text{total}}(n; E)\\ &= \frac{4\pi}{k^2(2s_1+1)(2s_2+1)}\sum_{j\,\ell\,s}(2j+1)\sin^2\delta_{j\ell sn}(E)\,.\end{aligned} \tag{3.7.16}$$

在非相对论量子力学中, 这个熟悉的结果通常是通过研究粒子在势中的坐标空间波函数得到的. 这里所给出的推导, 既给出了弹性散射的分波展开在相对论速度下也适用的证明, 也强调了它不依赖于特别的动力学前提, 而只是依赖幺正性和不变性原理.

对于多个道都打开的问题, 若这些道构成某个内部对称群的几个不可约表示, 引入相移也经常是有用的. 这类内部对称性的一个经典例子是同位旋对称性, 对于这种对称性, 道指标n包含对两个粒子的同位旋T_1, T_2以及同位旋3-分量t_1, t_2的描述; 道n中的态可以表示为不可约表示T的第t个分量的线性组合, 系数由熟悉的Clebsch-Gordan系数$C_{T_1T_2}(T, t; t_1, t_2)$给出. 假定对于感兴趣的道和能量, S-矩阵对于ℓ, s和j, T, t是对角的. 那么, 幺正性和同位旋对称性允许我们将S-矩阵写成

$$S^j_{\ell'\,s'\,T'\,t',\ell\,s\,T\,t} = \exp[2\mathrm{i}\delta_{j\,\ell\,s\,T}(E)]\delta_{\ell'\ell}\delta_{s's}\delta_{T'T}\delta_{t't}\,, \tag{3.7.17}$$

其中$\delta_{j\,\ell\,s\,T}(E)$是实相位, 根据Wigner-Eckart定理, 它与t无关. 分波截面可以再一次地从方程(3.7.10)得出, 而总截面由方程(3.7.12)给出

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{total}}(t_1, t_2; E) = &\frac{4\pi}{k^2(2s_1+1)(2s_2+1)}\\ &\times\sum_{j\ell sTt}(2j+1)C_{T_1,T_2}(T, t; t_1, t_2)^2\sin^2\delta_{j\,\ell\,s\,T}(E)\end{aligned} \tag{3.7.18}$$

例如, 在π-π散射中, 相移是$\delta_{\ell\ell 0T}(E)$, 它对于偶数的ℓ有$T = 0$或$T = 2$, 对于奇数的ℓ则有$T = 1$, 而对于π介子-核子散射, 相移是$\delta_{j\,j\pm\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,T}$, 其中$T = \frac{1}{2}$或$T = \frac{3}{2}$.

通过一些几乎与任何动力学假设无关的解析性考察, 我们可以得到对散射振幅和相移的阈值性质的一些深入理解. 除非存在动量空间产生奇异性的特殊情况, 我们可以预期, 在$k = 0$或$k' = 0$或(对于弹性散射)$k = k' = 0$附近, 矩阵元$M_{\mathbf{k}'\,\sigma_1'\,-\mathbf{k}'\,\sigma_2'\,n',\,\mathbf{k}\,\sigma_1\,-\mathbf{k}\,\sigma_2\,n}$是3-动量$\mathbf{k}$和$\mathbf{k}'$的解析函数[†]. 现在着手处理$M$的分波展开(3.7.8), 我们注意到$k^\ell Y_\ell^m(\hat{\mathbf{k}})$是3-矢$\mathbf{k}$的简单多项式函数, 所以,

[†]例如, 在Born近似(3.2.8)下, M正比于相互作用的坐标空间矩阵元的Fourier变换, 因此, 只要这些矩阵元在距离很大时快速衰减, 它在零动量处就是解析的. 主要的例外是包含长程力的散射, 例如Coulomb力.

为了使$M_{\mathbf{k}'\,\sigma_1'\,-\mathbf{k}'\,\sigma_2'\,n',\mathbf{k}\,\sigma_1\,-\mathbf{k}\,\sigma_2\,n}$在$k=0$或$k'=0$附近关于3-动量$\mathbf{k}$和$\mathbf{k}'$解析, 在$k$和(或)$k'$趋于零时, 系数$M^j_{\ell'\,s'\,n',\ell\,s\,n}$, 或等价地, $\delta_{\ell'\ell}\delta_{s's}\delta_{n'n}-S^j_{\ell's'n',\ell sn}$, 必须趋于$k^{\ell+\frac{1}{2}}k'^{\ell+\frac{1}{2}}$. 因此对于小的$k$和(或)$k'$, 只有初态和(或)末态中最低阶的分波对散射振幅有明显的贡献. 我们有三种可能的情况:

放热反应

这时, k'在$k\to 0$时趋于一个有限值, 并且$\delta_{\ell'\ell}\delta_{s's}\delta_{n'n}-S^j_{\ell's'n',\ell sn}$在这个极限下趋于$k^{\ell+\frac{1}{2}}$. 截面(3.7.11)在这种情况下趋于$k^{2\ell-1}$, 其中$\ell$在这里是能引发这个反应的最低轨道角动量. 在最通常的情况下, $\ell=0$, 所以反应截面趋于$1/k$. (例如, 复杂核对慢中子的吸收, 或是去除Coulomb力的高阶效应后的正负电子对湮灭成低能光子.) 反应速率等于截面乘以流, 而流又趋于k, 所以放热反应的速率在$k\to 0$时像一个常数. 然而, 当粒子束穿过给定厚度的靶物质时, 决定吸收几率的是截面而不是反应速率, 在类似硼这样的吸收物质中, 因子$1/k$使得吸收几率对于慢中子非常高.

吸热反应

在k达到一个有限的阈值前, 这种反应一直都是被禁止的, 这里这个阈值是$k'=0$. 仅在这个阈值以上, $\delta_{\ell'\ell}\delta_{s's}\delta_{n'n}-S^j_{\ell's'n',\ell sn}$趋于$(k')^{\ell'+\frac{1}{2}}$. 截面(3.7.11)在这种情况下趋于$(k')^{2\ell'+1}$, ℓ'在这里是在阈值处能产生的最低轨道角动量. 在最通常的情况下, $\ell'=0$, 所以反应截面在阈值之上就像k'一样增大, 因而类似于$\sqrt{E-E_{\text{threshold}}}$. (例如, 奇异粒子的伴随产生, 或是光子散射中正负电子对的产生.)

弹性反应

这时$k=k'$, 所以k和k'一起趋于零. (当$n'=n$时, 或者组成n'的粒子与组成n的粒子处在相同的同位旋多重态时, 便是这种情况.) 在弹性散射中, $\ell=\ell'=0$的分波总是出现, 所以在$k\to 0$的极限下, 散射振幅(3.7.8)变成一个常数:

$$\begin{aligned} &f(\mathbf{k},\sigma_1,-\mathbf{k},\sigma_2,n\to\mathbf{k}',\sigma_1',-\mathbf{k}',\sigma_2',n') \quad\to\\ &\sum_{s\sigma}C_{s_1s_2}(s,\sigma;\sigma_1,\sigma_2)C_{s_1's_2'}(s,\sigma;\sigma_1',\sigma_2')a_s(n\to n')\,, \end{aligned}\tag{3.7.19}$$

其中a是常数, 称为**散射长度**, 由$k=k'\to 0$时的如下极限定义

$$S^s_{0sn',0sn}\to\delta_{n',n}+2\mathrm{i}ka_s(n-n')\,.\tag{3.7.20}$$

计算$4\pi|f|^2$对末态自旋的求和以及对初态自旋的平均, 这给出跃迁$n\to n'$在$k=k'=0$时的总截面:

$$\sigma(n\to n';k=0)=\frac{4\pi}{(2s_1+1)(2s_2+1)}\sum_s(2s+1)a_s^2(n\to n')\,.\tag{3.7.21}$$

应用这一公式的一个经典例子是中子-质子散射, 这里有两个散射长度, 且自旋单态长度a_0远大于自旋三重态的长度a_1.

分波展开也可用来对散射的高能行为做一些粗略的猜测. 随着波长的减小, 我们可以预期散射或多或少地可以用经典理论描述: 一个动量为k, 轨道角动量为ℓ的粒子, 它的碰撞参量是ℓ/k,

因此, 如果 $\ell \le kR$, 那么粒子将会打到一个半径为 R 的圆盘中. 这可以被解释成关于 S-矩阵元的表达:

$$S^{j}_{\ell\, s\, n,\ell\, s\, n} \to \begin{cases} 0 & \ell \ll kR_n \\ 1 & \ell \gg kR_n \end{cases} , \tag{3.7.22}$$

其中 R_n 是道 n 的某种相互作用的半径. 对于给定的 $\ell \gg s$, j 的 $2s+1$ 个值都足够接近 ℓ, 这使得可以做近似 $2j+1 \simeq 2\ell+1$, 所以方程(3.7.12)中对 j 和 s 的求和仅给出阶因子

$$\sum_{j\, s}(2j+1) = (2\ell+1)\sum_{s}(2s+1) = (2\ell+1)(2s_1+1)(2s_2+1)\,.$$

那么, 当 $k \gg 1/R_n$ 时, 总截面由方程(3.7.12)给定为

$$\sigma_{\text{total}}(n;E) \to \frac{2\pi}{k^2}\sum_{\ell \le kR_n}(2\ell+1) \to 2\pi R_n^2\,. \tag{3.7.23}$$

以精确相同的方式, 方程(3.7.10)给出了弹性散射截面

$$\sigma(n \to n;E) \to \pi R_n^2\,. \tag{3.7.24}$$

方程(3.7.23)与(3.7.24)之差给出非弹性截面 πR_n^2, 这正是我们对粒子与半径为R_n的不透圆盘预期的碰撞截面. (略微意外的是弹性散射截面 πR_n^2 可以归于对盘的衍射.) 另一方面, 如果我们在方程(3.7.22)外又假定, 仅当碰撞参量 ℓ/k 处在 $\ell/k = R_n$ 周围一个宽度为 $\Delta_n \ll R_n$ 的狭窄范围内时, $S^{j}_{\ell\, s\, n,\ell\, s\, n}$才是复的, 那么, 利用不等式 $|\mathrm{Im}(1 - S^{j}_{\ell\, s\, n,\ell\, s\, n})| \le 2$, 同样的分析会给出对向前散射振幅实部的限制

$$|\mathrm{Re}\, f(n;E)| \le 2kR_n\Delta_n \ll |\mathrm{Im}\, f(n;E)|\,. \tag{3.7.25}$$

向前散射振幅的实部在高能时很小已被实验证实.

到现在我们还没有说过相互作用半径 R_n 本身是否依赖能量. 做一个非常粗略的猜测, 我们可以取 R_n 对能量的依赖使得汤川(Yukawa)势(1.2.74)中的因子 $\exp(-\mu r)$ 正比于 E 的某个幂次不定的幂函数, 在这种情况下, 当 $E \to \infty$时, R_n 趋于 $\log E$, 截面则趋于 $(\log E)^2$. 碰巧的是, 基于一些非常普遍的假设, 已经严格证明了总截面在 $E \to \infty$ 时不能比 $(\log E)^2$ 增长得更快,[26] 并且事实上已经观测到质子-质子总截面在高能下的增长类似于$(\log E)^2$, 所以高能散射的这个粗略描述似乎确实与现实世界有一些对应.

3.8 共振*

经常发生的一种情况是参与多粒子碰撞的粒子会形成由单个不稳定粒子 R 组成的中间态, 这个中间态最终会衰变成末态中观测到的粒子. 如果 R 的总衰变速率小, 截面在中间态R的能量处会呈现出一个迅速的变化(通常是一个峰), 这称为*共振*.

我们将会看到, 共振附近的截面性质几乎是由幺正条件单独决定的, 这是一件好事, 数个相当不同的机制能产生近似稳定的态:

*本节或多或少的处在本书的发展主线之外, 可以在第一次阅读时略过.

(a) 最简单的可能性是哈密顿量能够分成两项, “强”哈密顿量 $H_0 + V_s$和弱的微扰 V_w, 粒子 R是强哈密顿量的一个本征态, 而微扰项使得 R可以衰变成各种态, 其中包括我们碰撞过程的初末态 α, β. 例如, 有一个中性粒子 Z^0, 它有 $j = 1$且质量为 91 GeV, 在没有电弱相互作用时, 它是稳定的. 这些相互作用使得 Z^0可以衰变成正负电子对, 正负 μ子对等, 但其总衰变速率远小于 Z^0的质量. 1989 年, 在欧洲核子中心和斯坦福直线加速器中心进行的 $e^+ + e^- \to Z^0 \to e^+ + e^-$, $e^+ + e^- \to Z^0 \to \mu^+ + \mu^-$等反应中, Z^0粒子是作为正负电子对碰撞中的共振态[**]被发现的.

(b) 在一些情况下, 一个粒子的寿命长是因为存在势垒, 这几乎阻止了粒子组分的逃逸. 典型的例子是核 α衰变: 原子核可能非常倾向于发射一个 α粒子(He^4核), 但是 α粒子与核之间的强静电斥力在子核周围形成了势垒区域, 从经典理论来看, α粒子禁止进入这个区域. 于是衰变只能通过量子力学的隧穿效应进行, 而这个衰变速率是指数减小的. 在 α粒子与子核的散射中, 这种不稳定态表现为一个共振. 例如, Be^8核的最低能态不稳定, 它会衰变成两个 α粒子, 因此它在 He^4-He^4散射中作为一个共振被看到. (除了 Coulomb 势垒以外, 还存在离心势垒, 它帮助延长高自旋的 α-, β-和 γ-不稳核的寿命.)

(c) 在没有任何势垒或弱作用的情况下, 复杂系统可能由于统计原因变成近不稳的. 例如, 对于重荷的激发态, 可能只当它经由统计涨落将大部分能量集中在一个中子上时, 它才能发生衰变. 这样, 在中子与子核的散射中, 这个态将会表现为一个共振.

这些产生长寿命态的机制差别如此之大, 幸而共振的大多数性质与产生共振的动力学机制无关而只是依赖幺正性.

首先, 对于共振附近的一个反应, 我们来考察它的矩阵元与能量之间的关系. “入”态波包 $\int \mathrm{d}\alpha\, g(\alpha)\Psi_\alpha{}^+ \exp(-\mathrm{i}E_\alpha t)$ 对时间的依赖性由(3.1.19)给出

$$\int \mathrm{d}\alpha\, g(\alpha)\Psi_\alpha{}^+ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_\alpha t} = \int \mathrm{d}\alpha\, g(\alpha)\Phi_\alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_\alpha t} + \int \mathrm{d}\beta\, \Phi_\beta \int \mathrm{d}\alpha\, \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_\alpha t}\, g(\alpha)\, T_{\beta\alpha}{}^+}{E_\alpha - E_\beta + \mathrm{i}\epsilon}\,.$$

我们在 3.1 节中提到过, $T_{\beta\alpha}{}^+$在下半复 E_α 平面中的极点对第二项有贡献, 这个贡献在 $t \to \infty$时指数衰减. 特别地, $E_\alpha = E_R - \mathrm{i}\Gamma/2$ 处的极点在振幅中产生的项行为类似于$\exp(-\mathrm{i}E_R t - \Gamma t/2)$, 所以它对应几率像 $\exp(-\Gamma t)$ 那样衰减的态. 于是我们可以得出这样的结论: 对于能量为 E_R且有一个较慢的衰变速率 Γ 的长寿命态, 它在散射振幅中贡献的项的变化情况是

$$T_{\beta\alpha}{}^+ \sim (E_\alpha - E_R + \mathrm{i}\Gamma/2)^{-1} + \text{常数}\,. \tag{3.8.1}$$

更进一步, 采用上一节所讨论的正交离散多粒子态 $\Phi_{\mathbf{p}\,E\,N}$ 作为基将会方便我们的讨论; $\mathbf{p}$ 和 E 是总动量和总能量, N 是只取离散值(尽管有无限多个)的指标. 在这个基下, S-矩阵可以写成

$$S_{\mathbf{p}'\,E'\,N',\,\mathbf{p}\,E\,N} = \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\delta(E' - E)S_{N'N}(\mathbf{p}, E)\,. \tag{3.8.2}$$

[**]顺便说一下, 这个例子表明了共振态仅需要衰变得相对慢. Z^0 的寿命是 2.6×10^{-25} 秒, 这不足以使 Z^0 以接近光速的速度穿过一个原子核. 重要的是, 这个衰变速率比 Z^0 波函数在它的静止系下的振荡速率 $\hbar/M_Z$ 小36 倍.

在共振附近, 我们预期质心系振幅 $S(0,E)\equiv\mathscr{S}(E)$ 有如下形式

$$\mathscr{S}_{N'N}(E)\equiv S_{N'N}(0,E)=\mathscr{S}_{0N'N}+\frac{\mathscr{R}_{N'N}}{E-E_R+\mathrm{i}\Gamma/2}\,, \tag{3.8.3}$$

其中, 至少在能量的相对较小范围 $|E-E_R|\lesssim\Gamma$ 内, $\mathscr{S}_0$ 和 $\mathscr{R}$ 近似是个常数.

在这个基下, S-矩阵的幺正性是一普通的矩阵方程

$$\mathscr{S}(E)^\dagger\mathscr{S}(E)=1\,. \tag{3.8.4}$$

将其应用于方程(3.8.3), 这告诉我们非共振背景的 S-矩阵是幺正的

$$\mathscr{S}_0^\dagger\mathscr{S}_0=1\,, \tag{3.8.5}$$

以及剩下部分的矩阵 $\mathscr{R}$ 满足如下两个条件

$$\mathscr{S}_0^\dagger\mathscr{R}-\mathscr{R}^\dagger\mathscr{S}_0=0\,, \tag{3.8.6}$$

$$-\frac{\mathrm{i}}{2}\Gamma\mathscr{S}_0^\dagger\mathscr{R}+\frac{\mathrm{i}}{2}\Gamma\mathscr{R}^\dagger\mathscr{S}_0+\mathscr{R}^\dagger\mathscr{R}=0\,. \tag{3.8.7}$$

通过令

$$\mathscr{R}\equiv-\mathrm{i}\Gamma\mathscr{A}\mathscr{S}_0\,, \tag{3.8.8}$$

这些条件可以写成更加明显的形式. 这样, 矩阵 $\mathscr{A}$ 上的幺正条件就是

$$\mathscr{A}^\dagger=\mathscr{A}\,,\qquad \mathscr{A}^2=\mathscr{A}\,. \tag{3.8.9}$$

任何这样的厄米幂等矩阵被称为投影矩阵. 这样的矩阵总可以表示成正交矢量 $u^{(r)}$ 的并矢的和:

$$\mathscr{A}_{N'N}=\sum_r u^{(r)}_{N'}\,u^{(r)*}_{N}\,,\quad \sum_N u^{(r)*}_N\,u^{(s)}_N=\delta_{rs}\,. \tag{3.8.10}$$

于是, S-矩阵的离散部分就是

$$\mathscr{S}_{N'N}(E)=\sum_{N''}\left[\delta_{N'N''}-\mathrm{i}\frac{\Gamma}{E-E_R+\mathrm{i}\Gamma/2}\sum_r u^{(r)}_{N'}\,u^{(r)*}_{N''}\right]\mathscr{S}_{0N''N}\,. \tag{3.8.11}$$

在对 r 的求和中, 每一项都可以认为是源于不同的共振态, 所有这些态对于 E_R 和 Γ 有相同的值.

这对速率和截面产生了什么影响呢? 简单起见, 我们忽略非共振背景散射, 令 $\mathscr{S}_{0N'N}$ 等于 $\delta_{N'N}$; 稍后我们会回到更普遍的情况. 那么, 对于上节所描述的两体分立质心态, 方程(3.8.11)变成:

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_{j'\sigma'\ell's'n',j\sigma\ell sn}(E)&=\delta_{j'j}\delta_{\sigma'\sigma}\delta_{\ell'\ell}\delta_{s's}\delta_{n'n}\\&\quad-\mathrm{i}\frac{\Gamma}{E-E_R+\mathrm{i}\Gamma/2}\sum_r u^{(r)}_{j'\sigma'\ell's'n'}\,u^{(r)*}_{j\sigma\ell sn}\,.\end{aligned} \tag{3.8.12}$$

在所有情况下, 指标 r 都将包含给出共振态总角动量 z-分量的指标 σ_R; 对于总角动量为 j_R 的共振态, σ_R 取 $2j_R+1$ 个值. 如果没有其它简并, 那么 r 仅标记 σ_R 的值, 并且

$$u^{(\sigma_R)}_{j\sigma\ell sn}=\delta_{j_R,j}\delta_{\sigma_R,\sigma}u_{\ell sn}\,, \tag{3.8.13}$$

其中 $u_{\ell sn}$ 是一组(由于 Wigner-Eckart 定理)与 σ 无关的复振幅. 方程(3.8.12)现在给出了方程(3.7.7)定义的振幅 S^j

$$S^j_{\ell' s' n', \ell s n}(E) = \delta_{\ell',\ell}\delta_{s's}\delta_{n'n} - \mathrm{i}\delta_{j,j_R}\frac{\Gamma}{E - E_R + \mathrm{i}\Gamma/2} u_{\ell' s' n'}\, u^*_{\ell s n}\,. \tag{3.8.14}$$

另外, 方程(3.8.10)现在变为

$$\sum_{\ell s n} |u_{\ell s n}|^2 + \cdots = 1 \tag{3.8.15}$$

其中省略号表示任何包含三个或多个粒子的态的正贡献. 我们将会看到, $|u_{\ell sn}|^2$可以解释为共振态衰变到各种允许的两体态的分支比.

方程(3.7.12)现在给出了道 n 中所有反应的总截面:

$$\sigma_{\text{total}}(n; E) = \frac{\pi(2j_R + 1)}{k^2(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \frac{\Gamma\Gamma_n}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4}\,, \tag{3.8.16}$$

其中

$$\Gamma_n \equiv \Gamma \sum_{\ell s} |u_{\ell s n}|^2\,. \tag{3.8.17}$$

这是著名的 Breit-Wigner 单能级公式的一个版本.[27] 我们也能用这些公式计算从初态两体道 n 到末态两体道 n' 的共振散射的截面. 在方程(3.7.10)中使用方程(3.8.14)给出

$$\sigma(n \to n'; E) = \frac{\pi(2j_R + 1)}{k^2(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \frac{\Gamma_n\Gamma_{n'}}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4}\,. \tag{3.8.18}$$

这证明了共振态衰变到任意末态两体道 n' 的几率正比于 $\Gamma_{n'}$. 根据方程(3.8.15), Γ_n 的和(包括三个及三个以上粒子末态的贡献)恰好等于总衰变速率 Γ, 所以我们可以得出结论: Γ_n 就是共振态衰变到道 n 的速率.

我们从方程(3.8.16)和(3.8.18)中看到, 特征共振峰在 E_R 处, 宽度(半峰值处的宽度)等于衰变速率 Γ. (单个 Γ_n 通常称为分宽度.) 由于 $\Gamma_n \le \Gamma$, 共振峰处的总截面粗略地说以波长平方为上界, 即$(2\pi/k)^2$. 这个规则, 即单个共振处的截面粗略地以波长平方为上界, 即使在经典物理中也是适用的(其中能量守恒起到了这里幺正性的作用), 例如声波与海中泡沫的共振作用, 或者引力波与引力波天线的共振作用. (在后一种情况中, 任何实验室量级的质量通过引力波辐射损失能量的振荡分支比很小, 所以即使在共振峰处, 截面也远小于波长平方.[28])

顺便提一下, 通常发生的情况是, 共振是探测到了, 但能量测量不足以精细到确定它的宽度. 在这种情况下, 实验上测量的是截面沿共振峰的积分. 对于总截面(3.8.16), 这是

$$\int \sigma_{\text{total}}(n; E)\,\mathrm{d}E = \frac{2\pi^2(2j_R + 1)\Gamma_n}{k_R^2(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)}\,. \tag{3.8.19}$$

这样的实验只能揭示出共振态衰变到初态粒子的分宽度, 而不是总宽度或分支比.

当自旋 z-分量给定的共振态构成与某个对称群相关的多重态时, 也可使用这个体系. 例如, 在同位旋对称性被遵守的前提下, 对于总同位旋为 T_R 的共振, 指标 r 所标记的共振态不仅包含对角动量 z-分量 σ_R 的标记, 还包含对同位旋 3-分量 t_R 的标记, 后者的取值为 $-T_R, -T_R + 1, \cdots T_R$. 在这种情况下, 上面对总截面和分截面的结果没有变化, 这是因为每个两体道 n 具有两个粒子同

位旋 z-分量的确定值t_1, t_2, 因而只能与 t_R 值为 $t_1 + t_2$ 的共振态耦合. 这里的分宽度 Γ_n 只通过因子 $C_{T_1,T_2}(T_R, t_R; t_1, t_2)^2$ 与 t_1, t_2 相关.

共振的出现由共振附近相移的特征行为体现. 回到一般公式(3.8.11)(但仍令 $\mathscr{S}_0 = 1$), 我们从方程(3.8.10)中看到, 对每个单独的共振态 r, 存在 $\mathscr{S}_{N'N}(E)$ 的本征矢 $u_N^{(r)}$, 其本征值为

$$\exp(2\mathrm{i}\delta^{(r)}(E)) = 1 - \mathrm{i}\frac{\Gamma}{E - E_R + \mathrm{i}\Gamma/2}$$

或者换个形式,

$$\tan\delta^{(r)}(E) = -\frac{\Gamma/2}{E - E_R}\,. \tag{3.8.20}$$

我们看到, 穿过以共振能量为中心, 量级为 Γ 的能量范围后, "本征相位" $\delta^{(r)}(E)$ 从共振之下的值 $\nu\pi$ (ν 是整数)跃变到共振之上的值$(\nu+1)\pi$. 然而, 为了应用这个结果对反应速率进行讨论, 我们还需要知道本征矢 $u_N^{(r)}$, 一般而言, 它的分量包含任意多个动量, 自旋和种类各不相同的粒子.

当处在某个特定道 N 中的粒子被(通常是守恒率)禁止跃迁到所有其它道时, 这些结果会在这类特殊情况下变得特别有用. 在这个假定下, 不难将非共振背景散射矩阵 $\mathscr{S}_0$ 纳入到一般结果(3.8.11)中. 对于某些特殊的 N, 为了使 $\mathscr{S}_{N'N}$ 对所有的 $N' \neq N$ 为零, $\mathscr{S}_{0N'N}$ 也必须是这样, 并且对于任何满足 $u_N^{(r)} \neq 0$ 的r, $u_{N'}^{(r)}$ 也是如此. 那么, 幺正性(3.8.5)要求对于这个 N 有

$$\mathscr{S}_{0N'N} = \exp(2\mathrm{i}\delta_{0N})\delta_{N'N}$$

而方程(3.8.10)要求

$$u_N^{(r)*}\, u_N^{(s)} = \delta_{rs}\,,$$

这使得方程(3.8.11)中只有一项 r 使 $u_N^r \neq 0$. 在这种情况下, 方程(3.8.11)给出

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_{N'N}(E) &= \delta_{N'N}\left[1 - \frac{\mathrm{i}\Gamma}{E - E_R + \mathrm{i}\Gamma/2}\right]\exp(2\mathrm{i}\delta_{0N}) \\ &\equiv \delta_{N'N}\exp(2\mathrm{i}\delta_N(E))\end{aligned}$$

以及总相移

$$\delta_N(E) = \delta_{0N} - \arctan\left(\frac{\Gamma/2}{E - E_R}\right)\,. \tag{3.8.21}$$

我们看到, 穿过以共振能量 E_R 为中心, 量级为 Γ 的能量范围后, 相移 $\delta_N(E)$ 从共振之下的值 δ_{0N} 跳到共振之上的值 $\delta_{0N} + \pi$. 例如, 我们在上一节看到, 在各种两体反应中, 诸如 π-π 和 π-核子在能量低于产生额外 π 子的阈值时的散射, 这些假定是满足的, 而 N 包含了总角动量和轨道角动量 j, ℓ (对于 π-π 散射, $j = \ell$), 总角动量的 z-分量 σ, 以及总的同位旋 T 和它的 3-分量 t. Wigner-Eckart 定理仅允许相移依赖于 j, ℓ 和 T, 而不能依赖于 t 或 σ. 在这些道中有一些著名的共振: π-π 散射中, 在 770 MeV 处有一共振, 称为 ρ, 它有 $j = \ell = 1, T = 1$ 以及 $\Gamma = 150$ MeV; π-核子散射中, 在 1232 MeV处有一共振, 称为 Δ, 它有 $j = \frac{3}{2}, \ell = 1, T = \frac{3}{2}$, Γ 的取值范围是 110 至 120 MeV.

对方程(3.7.12)或方程(3.7.18)的观测表明, 当共振相移穿过 $\pi/2$ (或 $\pi/2$ 的奇数倍)时, 总截面到达一个峰值. 非共振相移一般相当小, 所以正如我们之前所看到的, 当相移 δ_ℓ 穿过 $\pi/2$ 时, σ_{total} 在能量接近 E_R 的地方会显示出一个尖锐的峰. 然而, 有时非共振背景相移 δ_{0N} 接近 $\pi/2$, 在这种情况下, 当相移在 E_R 的附近穿过 π 时, 截面会显示出一个迅速的跌落, 这是由共振振幅与非共振背景振幅之间的相消干涉造成的. 这种跌落首次由 Ramsauer (冉绍耳)和 Townsend (汤森德)[29]在 1922 年观测到, 他们在电子在惰性气体原子上的散射中看到了这种现象.

习题

1. 考虑一个相互作用可分离的理论; 即相互作用满足

$$(\Phi_\beta, V\Phi_\alpha) = g\, u_\beta\, u_\alpha^* \,,$$

其中 g 是实的耦合常数, u_α 是一组满足

$$\sum_\alpha |u_\alpha|^2 = 1$$

的复量. 利用 Lippmann-Schwinger 方程(3.1.16)得到“入”态, “出”态和 S-矩阵的显式解.

2. 假设在总能量为 150 GeV的 e^+-e^- 散射中发现了一个自旋 1 的共振, 并且弹性 e^+-e^- 散射在共振峰处(质心系中, 对初态自旋求平均, 对末态自旋求和)的截面等于 $10^{-34}\,\mathrm{cm}^2$. 共振态 R 以 $R \to e^- + e^+$ 的方式衰变的分支比是什么? e^+-e^- 散射在共振峰处的总截面是什么? (解答这两个问题时可忽略非共振背景散射.)

3. 在实验室参考系下写出两体散射的微分截面, 其中初态两个粒子中的一个是静止的. 用运动学变量和矩阵元 $M_{\beta\alpha}$ 来表示这个微分截面. (直接推导这个结果, 不要使用本章推导出的微分截面在质心系中的结果.)

4. 直接从旧式微扰论中的展开(3.5.3)推导出微扰展开(3.5.8).

5. 通过 Lippmann-Schwinger 方程的一个修正版

$$\Psi_\alpha{}^0 = \Phi_\alpha + \frac{\mathscr{P}}{E_\alpha - H_0} V\Psi_\alpha{}^0 \,,$$

我们可以定义“驻波”态 $\Psi_\alpha{}^0$. 证明矩阵 $K_{\beta\alpha} \equiv \pi\delta(E_\beta - E_\alpha)(\Phi_\beta, V\Psi_\alpha{}^0)$是厄米的. 怎样用 K-矩阵表示 S-矩阵?

6. 用具有确定的总角动量, 自旋以及同位旋的态的相移表示弹性 π^+-质子和 π^--质子散射的微分截面.

7. 证明方程(3.7.5)定义的态 $\Phi_{E\,\mathbf{p}\,j\,\sigma\,s\,n}$ 的归一化可以正确地给出标量积(3.7.6).

参考文献

[1] 更多的细节参看 M. L. Goldberger and K. M. Watson, *Collision Theory* (John Wiley & Sons, New York, 1964); R. G. Newton, *Scattering theory of Waves and Particles*, 2nd edn (Springer-Verlag, New York, 1982).

[1a] B. Lippmann and J. Schwinger, *Phys. Rev.* **79**, 469 (1950).

[2] J. A. Wheeler, *Phys. Rev.* **52**, 1107 (1937); W. Heisenberg, *Z. Phys.* **120**, 513, 673 (1943).

[3] M. Born, *Z. Phys.* **37**, 863 (1926); **38**, 803 (1926).

[4] C. Møller, *Kgl. Danske Videnskab. Mat. Fys. Medd.* **23**, No. 1 (1945); **22**, No. 19 (1946).

[5] G. D. Rochester and C. C. Butler, *Nature* **160**, 855 (1947). 历史回顾参看 G. D. Rochester, *Pions to Quarks – Particle Physics in the 1950s* L. M. Brown, M. Dresden, and L. Hoddeson 编辑(Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1989).

[6] G. Breit, E. U. Condon, and R. S. Present, *Phys. Rev.* **50**, 825 (1936); B. Cassen and E. U. Condon, *Phys. Rev.* **50**, 846 (1936); G. Breit and E. Feenberg, *Phys. Rev.* **50**, 850 (1936).

[7] M. A. Tuve, N. Heydenberg, and L. R. Hafstad, *Phys. Rev.* **50**, 806 (1936).

[8] M. Gell-Mann, Cal. Tech. Synchotron Laboratory Report CTSL-20 (1961); *Phys. Rev.* **125**, 1067 (1962); Y. Ne'eman, *Nucl. Phy.* **26**, 222 (1961).

[9] 可参看 A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics* (Princeton University Press, Princeton, 1957): Chapter 3 (其中 $C_{j_1j_2}(jm;m_1m_2)$ 被记为 $(j_1j_2jm|j_1m_1j_2m_2)$); M. E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum* (John Wiley & Sons, New York, 1957): Chapter III (其中 $C_{j_1j_2}(jm;m_1m_2)$ 被记为 $C(j_1j_2j;m_1m_2m)$).

[10] G. Feinberg and S. Weinberg, *Nuovo Cimento* Serie X, **14**, 571 (1959).

[11] W. Chinowsky and J. Steinberger, *Phys. Rev.* **95**, 1561 (1954); 另见B. Ferretti, *Report of an International Conference on Fundamental Particles and Low Temperatures, Cambridge. 1946* (The Physical Society, London, 1947).

[12] T. D. Lee and C. N. Yang, *Phys. Rev.* **104**, 254 (1956).

[13] C. S. Wu *et al.*, *Phys. Rev.* **105**, 1413 (1957).

[14] R. Garwin, L. Lederman, and M. Weinrich, *Phys. Rev.* **105**, 1415 (1957); J. I. Friedman and V. L. Telegdi, *Phys. Rev.* **105**, 1681 (1957).

[15] K. M. Waston, *Phys. Rev.* **88**, 1163 (1952).

[16] M. Gell-Mann and A. Pais, *Phys. Rev.* **97**, 1387 (1955); 另见A. Pais and O. Piccioni, *Phys. Rev.* **100**, 1487 (1955).

[17] J. H. Christenson, J. W. Cronin, V. L. Fitch, and R. Turlay, *Phys. Rev. Letters* **13**, 138 (1964).

[18] K. R. Schubert *et al., Phys. Lett.* **31B**, 662 (1970). 这篇文献在不假设 CPT 不变的情况下分析中性 K 介子的数据, 并发现 CPT 守恒而 T 破坏的 CP-破坏振幅部分的实部与虚部距零有 5 个标准差, 而 T 守恒却 CPT 破坏的部分距零在一个标准偏差以内.

[19] R. H. Dalitz, *Phil. Mag.* **44**, 1068 (1953); 另见 E. Fabri, *Nuovo Cimento* **11**, 479 (1954).

[20] F. J. Dyson, *Phys. Rev.* **75**, 486, 1736 (1953).

[21] 可参看 L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 1st edn (McGraw-Hill, New York, 1949):Section 19.

[22] 这首先是在经典电动力学中证明的. 可参看 H. A. Kramers, *Atti Congr. Intern. Fisici, Como, 1927*; 重印于 H. A. Kramers, *Collected Scientific Papers* (North-Holland, Amsterdam, 1956). 量子力学中的证明参看 E. Feenberg, *Phys. Rev.* **40**, 40 (1932); N. Bohr, R. E. Peierls, and G. Placzek, *Nature* **144**, 200 (1939).

[23] 这个讨论的一个普遍的版本, 在杨振宁(C. N. Yang)和杨振平(C. P. Yang) 20 世纪 60 年代后期一个未发表的工作中给出. 另见 A. Aharony, *Modern Developments in Thermodynamics* (Wiley, New York, 1973)：pp. 95-114, 以及那里的参考文献.

[24] 可参看 A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, (Princeton University Press, Princeton, 1957): Chapter 2; M. E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum* (John Wiley & Sons, New York, 1957): Appendix III; L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum mechanics - Non Relativistic Theory,* 3rd edn (Pergamon Press, Oxford, 1977): Section 28.

[25] E. P. Wigner, *Gruppentheorie* (Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1931); C. Eckart, *Rev. Mod. Phys.* **2**, 305 (1930).

[26] M. Froissart, *Phys. Rev.* **123**, 1053 (1961).

[27] G. Breit and E. P. Wigner, *Phys. Rev.* **49**, 519 (1936).

[28] 可参看 S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972): Section 10.7.

[29] R. Kollath, *Phys. Zeit.* **31**, 985 (1931).

第 4 章　集团分解原理

直到现在, 我们还没有对哈密顿量算符 H 的详细结构进行过深入的讨论. 这个算符可以通过给出它在两个粒子数任意的态之间的所有矩阵元来定义. 等价地, 正如我们在这里所要展示的, 任何这样的算符也可以表示为某些产生或湮灭单粒子的算符的函数. 我们在第 1 章看到, 这种产生湮灭算符是在量子力学早期对电磁场和其它场进行正则量子化时首次遇到的. 对于那些能够产生或湮灭有质量粒子以及光子的理论, 它们提供了一个自然的形式体系, 这样的理论始于 20 世纪 30 年代早期 Fermi 的 β-衰变理论.

然而, 用产生和湮灭算符构建哈密顿量有更深层次的原因, 这个原因已经超出量子化像电磁场这样已然存在的场的需要, 并与粒子是否真的会被产生或消灭无关. 这一形式体系的巨大优势是, 如果我们将哈密顿量表达成产生和湮灭算符乘积的和, 并有恰当且不奇异的系数, 那么 S-矩阵会自动满足一个关键的物理要求, 集团分解原理,[1] 即相距甚远的实验产生的结果不相关. 事实上, 正是由于这个原因, 产生和湮灭算符的形式体系才被广泛应用在非相对论量子统计力学中, 那里的粒子数一般是固定的. 在相对论量子理论中, 集团分解原理在使场论成为必需的过程中扮演了关键角色. 曾有过很多不用定域场论形式化一个相对论不变理论的尝试, 对于两体散射, 确实可能构建出一个非场论的理论却依旧得到 Lorentz 不变的 S-矩阵,[2] 但是这样的努力总在粒子数超过两个时陷入困境: 要么 3-粒子的 S-矩阵不是 Lorentz 不变的, 要么就违背了集团分解原理.

在本章中, 我们将首先讨论包含任意个玻色子和费米子的态的基, 然后定义产生湮灭算符, 最后展示它们是怎样帮助构建哈密顿量, 使得这个哈密顿量给出的 S-矩阵满足集团分解条件.

4.1　玻色子与费米子

物理态的 Hilbert 空间由包含 $0, 1, 2, \cdots$ 个自由粒子的态张成. 它们可以是自由粒子态, "入"态, 或"出"态; 明确起见, 我们在这里处理自由粒子态 $\Phi_{\mathbf{p}_1\,\sigma_1\,n_1,\mathbf{p}_2\,\sigma_2\,n_2,\cdots}$, 但是我们的所有结果同样适用于"入"态或"出"态. 像以往一样, σ 标记自旋 z-分量(对于无质量粒子则是螺旋度), n 标记粒子种类.

我们现在必须对第 3 章中忽略的一个问题做深入研究; 这些态的对称性. 就目前我们所知道的, 所有的粒子不是*玻色子*就是*费米子*, 二者的差异是: 态在两个全同玻色子的交换下不变, 而在两个全同费米子的交换下要变一个符号. 即

$$\Phi_{\cdots\,\mathbf{p}\,\sigma\,n\,\cdots\,\mathbf{p}'\,\sigma'\,n\,\cdots} = \pm\,\Phi_{\cdots\,\mathbf{p}'\,\sigma'\,n\,\cdots\,\mathbf{p}\,\sigma\,n\,\cdots}\,, \tag{4.1.1}$$

其中, 如果 n 是玻色子则取正号, 如果 n 是费米子则取负号, 省略号代表该态中可能出现的其它粒子. (等价地, 这可以表述为加在"波函数"上的条件, 波函数即这些多粒子基矢在物理上允许的态矢中的系数.) 这两种情况通常指代为玻色或费米"统计". 我们在下一章将会看到, 整数自旋或半整数自旋的粒子只能分别对应玻色统计和费米统计, 但在本章中我们并不需要知道这件事. 本节

中, 我们将给出一个所有粒子都必须是玻色子或费米子的不严格论证, 然后给出多玻色子态或多费米子态的归一化条件.

首先注意到, 如果分别具有动量和自旋 $\mathbf{p},\sigma$ 和 $\mathbf{p}',\sigma'$ 的两个粒子属于同一种类 n, 那么态矢 $\Phi_{\cdots\,\mathbf{p}\,\sigma\,n\cdots\,\mathbf{p}'\,\sigma'\,n\cdots}$ 与 $\Phi_{\cdots\,\mathbf{p}'\,\sigma'\,n\cdots\,\mathbf{p}\,\sigma\,n\cdots}$ 代表同一物理态; 如果不是这种情况, 那么粒子可以通过它们在态矢中被标记的顺序被区分开来, 此时第一个列出的态矢与第二个不是全同的. 既然两个态矢在物理上是不可区分的, 它们必属于同一射线, 因此

$$\Phi_{\cdots\,\mathbf{p}\,\sigma\,n\cdots\,\mathbf{p}'\,\sigma'\,n\cdots}=\alpha_n\,\Phi_{\cdots\,\mathbf{p}'\,\sigma'\,n\cdots\,\mathbf{p}\,\sigma\,n\cdots}\,, \tag{4.1.2}$$

其中 α_n 是绝对值为 1 的复数. 我们可以认为这是所谓全同粒子的部分定义.

问题的关键是确定相因子 α_n 由什么决定. 如果它仅依赖种类指标 n, 那么我们几乎已经完成了这个任务. 在方程(4.1.2)中再一次交换两个粒子, 我们发现

$$\Phi_{\cdots\,\mathbf{p}\,\sigma\,n\cdots\,\mathbf{p}'\,\sigma'\,n\cdots}=\alpha_n^2\,\Phi_{\cdots\,\mathbf{p}\,\sigma\,n\cdots\,\mathbf{p}'\,\sigma'\,n\cdots}$$

这使得$\alpha_n^2=1$, 表明方程(4.1.1)正是仅有的两种可能性.

α_n 还能依赖什么呢? 它可能依赖态中其它粒子的数目与种类(由方程(4.1.1)和(4.1.2)中的省略号标记), 但是这会导致一个令人不安的结果, 地球上的态矢在粒子交换下的对称性可能依赖于出现在宇宙别处的粒子. 集团分解原理就是要排除这类情况, 我们会在本章后面对此进行讨论. 相位 α_n 不能与参与交换的粒子的自旋有任何不平庸的关系, 这是因为, 如果这样, 那么这些依赖自旋的相位因子将构成旋转群的一个表示, 而三维旋转群的非平庸表示没有一个是一维表示——即, 相位因子. 不难想到相位 α_n 可能会依赖要交换的两个粒子的动量, 但是 Lorentz 不变性要求 α_n 只能依赖于标量 $p_1^\mu p_{2\mu}$; 这是在交换粒子 1 和 2 下的对称性, 因而这类依赖性不会影响我们关于 $\alpha_n^2=1$ 的论证.

以上论证的逻辑破绽是(尽管我们的符号约定掩盖了这个事实), 态 $\Phi_{\mathbf{p}_1\,\sigma_1\,n,\mathbf{p}_2\,\sigma_2\,n,\cdots}$ 可能会携带依赖动量空间路径的相位因子, 这条路径将粒子的动量值变为 $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2$,等. 在这种情况下, 交换两个粒子两次也可能使态变化一个相位, 使得 $\alpha_n^2\neq 1$. 我们将在 9.7 节看到, 这在二维空间中是可能的, 但三维及维数更高的空间则不存在这种可能性.

交换不同种类的粒子会怎样呢? 如果我们愿意, 我们可以避免这个问题, 在最初标记态矢时, 先列出所有光子的动量和螺旋度, 然后再列出所有电子的动量和自旋 z-分量, 一直做下去直到列出所有基本粒子类型, 通过这一方法我们就可以避免这一问题. 或者, 我们可以允许粒子指标以任何次序出现, 并定义粒子指标顺序任意的态矢等于粒子指标以某种标准顺序排列的态矢乘以相因子, 这个相因子对要交换的两个不同种类粒子的依赖关系是什么都行. 为了处理类似同位旋对称性这样涉及不同种类粒子的对称性, 采取如下推广方程(4.1.1)的约定是方便的: 在任何情况下, 无论粒子的种类是否相同, 态矢取为, 在任意玻色子之间或者在任意玻色子与任意费米子之间的交换下对称, 而在任意两个费米子之间的交换下反对称.*

这些态的归一化必须与这些对称性条件一致. 为了节省篇幅, 我们将用一个指标 q 标记单粒子的所有量子数: 它的动量 $\mathbf{p}$, 自旋 z-分量(或者无质量粒子的螺旋度) σ, 以及种类 n. 因此, N-粒子

*事实上, 由于相同的原因, 在种类相同但螺旋度或者自旋 z-分量不同的粒子的交换下, 态矢的对称性或反对称性是一个纯粹的约定, 这是因为从开始我们就可以约定, 将螺旋度为 1 的光子的动量排在第一位, 接着是所有螺旋度为 -1 的光子的动量, 接着是所有自旋 z-分量为 $+\frac{1}{2}$ 的电子的动量, 以此类推. 我们约定: 态矢在自旋 z-分量或螺旋度不同的全同玻色子或费米子的交换下分别是对称或反对称的, 这样做是为了方便使用旋转不变性.

态就被记为 $\Phi_{q_1\cdots q_N}$(对于真空态 Φ_0, $N=0$.) 对于 $N=0$ 以及 $N=1$, 对称性的问题不会出现: 这时我们有

$$(\Phi_0,\Phi_0)=1 \tag{4.1.3}$$

和

$$\left(\Phi_{q'},\Phi_q\right)=\delta(q'-q)\,, \tag{4.1.4}$$

其中 $\delta(q'-q)$ 是粒子量子数的所有 δ-函数与克罗内克 δ-符号的乘积,

$$\delta(q'-q)\equiv\delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\delta_{\sigma'\sigma}\delta_{n'n}\,. \tag{4.1.5}$$

另一方面, 对于 $N=2$, 态 $\Phi_{q_1'q_2'}$ 与 $\Phi_{q_2'q_1'}$ 在物理上是相同的, 所以在这里我们必须取

$$\left(\Phi_{q_1'q_2'},\Phi_{q_1q_2}\right)=\delta(q_1'-q_1)\delta(q_2'-q_2)\pm\delta(q_2'-q_1)\delta(q_1'-q_2) \tag{4.1.6}$$

符号$\pm$在两个粒子都是费米子时取 $-$ 号, 其它情况取 $+$ 号. 这显然与上面陈述的态的对称性一致. 更普遍地,

$$\left(\Phi_{q_1'q_2'\cdots q_M'},\Phi_{q_1q_2\cdots q_N}\right)=\delta_{NM}\sum_{\mathscr{P}}\delta_{\mathscr{P}}\prod_i\delta(q_i-q'_{\mathscr{P}i})\,. \tag{4.1.7}$$

这里的求和对整数 $1,2,\cdots,N$ 的所有置换 $\mathscr{P}$ 求和. (例如, 在方程(4.1.6)中的第一项, $\mathscr{P}$是恒等操作, $\mathscr{P}1=1,\mathscr{P}2=2$, 而在第二项, $\mathscr{P}1=2,\mathscr{P}2=1$.) 另外, $\delta_{\mathscr{P}}$ 是符号因子, 如果 $\mathscr{P}$ 包含费米子的奇置换(奇数次的费米子交换), 那么$\delta_{\mathscr{P}}$ 等于 -1, 否则等于 $+1$. 很容易看到, 在 q_i 的交换下, 或者在 q_j' 的交换下, 方程(4.1.7)有着所需的对称性和反对称性.

4.2 产生和湮灭算符

产生和湮灭算符可以通过它们在上节讨论的归一化多粒子态上的作用效果来定义. 产生算符 $a^\dagger(q)$ (或者更详细些, $a^\dagger(\mathbf{p},\sigma,n)$)被定义成在态中粒子队列前面增加一个量子数为 q 的粒子

$$a^\dagger(q)\Phi_{q_1q_2\cdots q_N}\equiv\Phi_{qq_1q_2\cdots q_N}\,. \tag{4.2.1}$$

特别地, 将 N 个产生算符作用在真空态上就可以获得 N-粒子态

$$a^\dagger(q_1)a^\dagger(q_2)\cdots a^\dagger(q_N)\Phi_0=\Phi_{q_1\cdots q_N}\,. \tag{4.2.2}$$

习惯称这个算符为 $a^\dagger(q)$; 它的共轭, 记为 $a(q)$, 可以从方程(4.1.7)中计算出来. 正如我们现在所要展示的, $a(q)$从它所作用的态中移除一个粒子, 因而被称为湮灭算符. 特别地, 当粒子 $q\,q_1\cdots q_N$ 全是玻色子或全是费米子时, 我们有

$$a(q)\Phi_{q_1q_2\cdots q_N}=\sum_{r=1}^{N}(\pm)^{r+1}\delta(q-q_r)\Phi_{q_1\cdots q_{r-1}q_{r+1}\cdots q_N}\,, \tag{4.2.3}$$

其中, 对玻色子和费米子分别取 $+1$ 和 -1. (下面是证明. 我们希望计算 $a(q)\Phi_{q_1q_2\cdots q_N}$ 与任意态 $\Phi_{q_1'\cdots q_M'}$ 的标量积. 利用方程(4.2.1), 这个标量积是

$$\left(\Phi_{q_1'\cdots q_M'},a(q)\Phi_{q_1\cdots q_N}\right)\equiv\left(a^\dagger(q)\Phi_{q_1'\cdots q_M'},\Phi_{q_1\cdots q_N}\right)=\left(\Phi_{qq_1'\cdots q_M'},\Phi_{q_1\cdots q_N}\right)\,.$$

我们现在使用方程(4.1.7). 对 $1,2,\cdots,N$ 的置换 $\mathscr{P}$ 的求和可以写为对置换到第一个位置上的整数 r 的求和, 即 $\mathscr{P}r=1$, 和对剩余整数 $1,\cdots,r-1,r+1,\cdots,N$ 到 $1,\cdots,N-1$ 的映射 $\bar{\mathscr{P}}$ 求和. 更进一步, 符号因子是

$$\delta_{\mathscr{P}}=(\pm)^{r-1}\delta_{\bar{\mathscr{P}}}$$

其中, 对于玻色子和费米子分别是正号和负号. 因此, 使用方程(4.1.7)两次,

$$\begin{aligned}\left(\Phi_{q_1'\cdots q_M'},a(q)\Phi_{q_1\cdots q_N}\right)&=\delta_{N,M+1}\\&\times\sum_{r=1}^{N}\sum_{\bar{\mathscr{P}}}(\pm)^{r-1}\delta_{\bar{\mathscr{P}}}\delta(q-q_r)\prod_{i=1}^{M}\delta(q_i'-q_{\mathscr{P}i})\\&=\delta_{N,M+1}\sum_{r=1}^{N}(\pm)^{r-1}\delta(q-q_r)\left(\Phi_{q_1'\cdots q_M'},\Phi_{q_1\cdots q_{r-1}q_{r+1}\cdots q_N}\right).\end{aligned}$$

因此方程(4.2.3)两边对任意态 $\Phi_{q_1'\cdots q_M'}$ 的矩阵元相同, 因而相等, 这正是所要证明的.) 作为方程(4.2.3)的一种特殊情况, 我们注意到无论玻色子还是费米子, $a(q)$ 均湮灭真空

$$a(q)\Phi_0=0\,. \tag{4.2.4}$$

正如这里所定义的, 产生算符和湮灭算符满足一个重要的对易或反对易关系. 用算符 $a(q')$ 作用方程(4.2.1), 并利用方程(4.2.3), 这给出

$$\begin{aligned}a(q')a^\dagger(q)\Phi_{q_1\cdots q_N}&=\delta(q'-q)\Phi_{q_1\cdots q_N}\\&\quad+\sum_{r=1}^{N}(\pm)^{r+2}\delta(q'-q_r)\Phi_{qq_1\cdots q_{r-1}q_{r+1}\cdots q_N}\,.\end{aligned}$$

(因为 q_r 处在 $\Phi_{qq_1\cdots q_N}$ 中的第 $r+1$ 个位置, 所以第二项中的符号是 $(\pm)^{r+2}$.) 另一方面, 用算符 $a^\dagger(q)$ 作用方程(4.2.3)给出

$$a^\dagger(q)a(q')\Phi_{q_1\cdots q_N}=\sum_{r=1}^{N}(\pm)^{r+1}\delta(q'-q_r)\Phi_{qq_1\cdots q_{r-1}q_{r+1}\cdots q_N}\,.$$

相减或相加, 于是我们有

$$\left[a(q')a^\dagger(q)\mp a^\dagger(q)a(q')\right]\Phi_{q_1\cdots q_N}=\delta(q'-q)\Phi_{q_1\cdots q_N}\,.$$

由于这个结果对所有态 $\Phi_{q_1\cdots q_N}$ 均成立(并且很容易看到对于既包含玻色子又包含费米子的态也成立), 因而暗示着算符关系

$$a(q')a^\dagger(q)\mp a^\dagger(q)a(q')=\delta(q'-q)\,. \tag{4.2.5}$$

另外, 方程(4.2.2)立即给出

$$a^\dagger(q')a^\dagger(q)\mp a^\dagger(q)a^\dagger(q')=0 \tag{4.2.6}$$

以及

$$a(q')a(q)\mp a(q)a(q')=0\,. \tag{4.2.7}$$

像通常一样, 上面的符号和下面的符号分别应用于玻色子和费米子. 根据上一节所讨论的约定. 对于两个不同种类的粒子, 如果其中一个粒子是玻色子, 那么产生算符和(或)湮灭算符对易, 如果两个都是费米子, 则反对易.

以上的讨论也可以按照相反的顺序来讲(在大多数教科书中通常是这样的). 就是说, 我们可以从对易或反对易关系——方程(4.2.5)—(4.2.7)出发, 从某些给定场论的正则量子化开始推导. 那么, 多粒子态由方程(4.2.2)定义, 并且它们的标量积——方程(4.1.7)由对易或反对易关系导出. 事实上, 正如第 1 章所讨论的, 这样的处理更接近历史发展的脉络. 我们在这里不沿着历史的途径是因为我们想摆脱对预设场论的依赖, 而更希望理解场论为什么是它们现在所呈现的形式.

我们现在要证明本章开头引述的基本定理: *任何算符 $\mathcal{O}$ 都可以表示为产生和湮灭算符乘积的和*

$$\begin{aligned}\mathcal{O} = \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{M=0}^{\infty}\int \mathrm{d}q'_1\cdots\mathrm{d}q'_N\,\mathrm{d}q_1\cdots\mathrm{d}q_M \\ \times a^\dagger(q'_1)\cdots a^\dagger(q'_N)a(q_M)\cdots a(q_1) \\ \times C_{NM}(q'_1\cdots q'_N q_1\cdots q_M)\,.\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

就是说, 我们希望证明, 通过选择系数 C_{NM}, 我们可以赋予这个表达式的矩阵元以任意想要的值. 我们通过数学归纳法证明它. 首先, 很平庸地, 无论 $N>0$ 和(或) $M>0$ 的 C_{NM} 值是多少, 通过正确选择 C_{00}, 我们可以给 $(\Phi_0,\mathcal{O}\Phi_0)$ 任何所需的值. 仅从方程(4.2.4), 我们就可以看到方程(4.2.8)具有真空期望值

$$(\Phi_0,\mathcal{O}\Phi_0)=C_{00}\,.$$

现在假定, 对 $N<L, M\le K$ 或 $N\le L, M<K$, 同样的结果对 $\mathcal{O}$ 在所有 N-粒子态和 M-粒子态之间的矩阵元也成立; 即, 通过对相应系数 C_{NM} 的恰当选择, 这些矩阵元已被赋予了一些希望的值. 为了看到同样的结果对 $\mathcal{O}$ 在任何 L-粒子态和 K-粒子态之间的矩阵元同样成立, 利用方程(4.2.8)计算

$$\begin{aligned}\left(\Phi_{q'_1\cdots q'_L},\mathcal{O}\Phi_{q_1\cdots q_K}\right) = L!K!C_{LK}(q'_1\cdots q'_L q_1\cdots q_K) \\ +\text{包含 } C_{NM} \text{ 的项, 其中 } N<L, M\le K \text{ 或 } N\le L, M<K\,,\end{aligned}$$

无论给了 $N<L, M\le K$ 或 $N\le L, M<K$ 的 C_{NM} 什么值, 显然可以通过选择 C_{LK} 赋予这个矩阵元任何所需的值.

当然, 一个算符不需要一定以(4.2.8)中的形式表示, 即所有的产生算符处在所有湮灭算符的左边. (这通常称为算符的"正规"编序.) 然而, 如果对于某些算符, 这个表达式以某种其它的方式排列产生和湮灭算符, 通过反复应用对易或反对易关系, 用方程(4.2.5)的 δ-函数挑出新的项, 我们总可以将产生算符移至湮灭算符的左边.

例如, 考察任何形式的加性算符 F (像动量, 荷等), 其有

$$F\Phi_{q_1\cdots q_N}=(f(q_1)+\cdots f(q_N))\Phi_{q_1\cdots q_N}\,. \tag{4.2.9}$$

这样的算符可以写成方程(4.2.8)中那样, 但仅用到 $N=M=1$ 的项:

$$F=\int \mathrm{d}q\, a^\dagger(q)a(q)f(q)\,. \tag{4.2.10}$$

特别地, 自由粒子哈密顿量总是

$$H_0 = \int \mathrm{d}q\, a^\dagger(q) a(q) E(q) \tag{4.2.11}$$

其中 $E(q)$ 是单粒子能量

$$E(\mathbf{p}, \sigma, n) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_n^2}\,.$$

对于各种对称性, 我们会需要产生算符和湮灭算符的变换性质. 首先, 考察非齐次固有正时 Lorentz 变换. 回忆, N-粒子态具有如下的 Lorentz 变换性质

$$\begin{aligned} U_0(\Lambda,\alpha)\Phi_{\mathbf{p}_1\sigma_1 n_1, \mathbf{p}_2\sigma_2 n_2, \cdots} = {} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Lambda p_1)\cdot\alpha}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Lambda p_2)\cdot\alpha} \cdots \\ & \sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0 (\Lambda p_2)^0 \cdots}{p_1^0 p_2^0 \cdots}} \\ & \times \sum_{\bar\sigma_1 \bar\sigma_2} D^{(j_1)}_{\bar\sigma_1\sigma_1}\Big(W(\Lambda, p_1)\Big) D^{(j_2)}_{\bar\sigma_2\sigma_2}\Big(W(\Lambda, p_2)\Big) \cdots \\ & \Phi_{\mathbf{p}_{1\Lambda}\bar\sigma_1 n_1, \mathbf{p}_{2\Lambda}\bar\sigma_2 n_2, \cdots}\,. \end{aligned}$$

这里的 $\mathbf{p}_\Lambda$ 是 Λp 的 3-矢部分, $D^{(j)}_{\bar\sigma\sigma}(R)$ 是 2.5 节用到的三维旋转群自旋-j 幺正表示, 而 $W(\Lambda, p)$ 是特定旋转

$$W(\Lambda, p) \equiv L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)\,,$$

其中 $L(p)$ 是使质量为 m 的粒子从静止变换到 4-动量 p^μ 的标准"增速". (当然, m 和 j 依赖粒子种类指标 n. 这里的讨论针对的都是 $m \neq 0$ 的情况; 下一章我们将回到无质量粒子的情况.) 现在, 这些态可以像方程(4.2.2)中那样表示

$$\Phi_{\mathbf{p}_1\sigma_1 n_1, \mathbf{p}_2\sigma_2 n_2, \cdots} = a^\dagger(\mathbf{p}_1\sigma_1 n_1) a^\dagger(\mathbf{p}_2\sigma_2 n_2) \cdots \Phi_0\,,$$

其中 Φ_0 是 Lorentz 不变的真空态

$$U_0(\Lambda, a)\Phi_0 = \Phi_0\,.$$

为了使态(4.2.2)做正确的变换, 产生算符需要如下充要的变换规则

$$\begin{aligned} U_0(\Lambda,\alpha) a^\dagger(\mathbf{p}\sigma n) U_0^{-1}(\Lambda,\alpha) = {} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Lambda p)\cdot\alpha}\sqrt{(\Lambda p)^0/p^0} \\ & \times \sum_{\bar\sigma} D^{(j)}_{\bar\sigma\sigma}\Big(W(\Lambda, p)\Big) a^\dagger(\mathbf{p}_\Lambda\, \bar\sigma\, n)\,. \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

按照同样的方式, 对于那些在自由粒子态上诱导出荷共轭变换, 空间反演变换以及时间反演变换的算符 C, P 和 T,* 这些算符在产生算符上引起的变换是:

$$\mathsf{C} a^\dagger(\mathbf{p}\,\sigma\, n)\mathsf{C}^{-1} = \xi_n\, a^\dagger(\mathbf{p}\,\sigma\, n^c)\,, \tag{4.2.13}$$

$$\mathsf{P} a^\dagger(\mathbf{p}\,\sigma\, n)\mathsf{P}^{-1} = \eta_n\, a^\dagger(-\mathbf{p}\,\sigma\, n)\,, \tag{4.2.14}$$

*我们省略了这些算符的下标"0", 这是因为在所有 C, P 和(或) T 守恒的实际情况中, 在"入"态和"出"态上诱导出这些变换的算符与那些通过它们在自由态上的作用定义的算符相同. 对于连续的 Lorentz 变换则不是这样, 因而有必要区分算符 $U(\Lambda, a)$ 和 $U_0(\Lambda, a)$.

$$\mathsf{T}a^\dagger(\mathbf{p}\,\sigma\,n)\mathsf{T}^{-1}=\zeta_n(-1)^{j-\sigma}\,a^\dagger(-\mathbf{p}\,-\sigma\,n)\,. \tag{4.2.15}$$

正如上一节所提及的, 尽管我们所处理的算符产生和湮灭的是自由态中的粒子, 但整个形式体系可以应用于“入”态和“出”态, 在这种情况下, 我们将引入算符 $a_{\rm in}$ 与 $a_{\rm out}$, 它们以相同的方式通过它们在这些态上的作用定义. 这些算符满足类似方程(4.2.12)的Lorentz变换规则, 但要用真正的Lorentz变换算符 $U(\Lambda,a)$ 替代自由粒子算符 $U_0(\Lambda,a)$.

4.3 集团分解和连通振幅

空间距离充分远的实验结果互不相关, 这是物理(诚然, 也是所有科学)的基本原理之一. 在费米实验室(Fermilab)测量的各种碰撞的几率不应与欧洲核子中心(CERN)在该时刻所做的实验相关. 如果这个原理不成立, 那么在不知道宇宙所有详情的情况下, 我们无法对任何实验做出预测.

在 S-矩阵理论中, 集团分解原理表述为: 如果在 $\mathscr{N}$ 个相距甚远的实验室中研究多粒子过程 $\alpha_1\to\beta_1,\alpha_2\to\beta_2,\cdots,\alpha_{\mathscr{N}}\to\beta_{\mathscr{N}}$, 那么整个过程的 S-矩阵元会因子化. 即, 如果对于所有的 $i\neq j$, 态 α_i 和 β_i 中的所有粒子与态 α_j 和 β_j 中的所有粒子都相距甚远, 那么[*]

$$S_{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{\mathscr{N}},\,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{\mathscr{N}}}\to S_{\beta_1\alpha_1}\,S_{\beta_2\alpha_2}\cdots S_{\beta_{\mathscr{N}}\alpha_{\mathscr{N}}}\,. \tag{4.3.1}$$

S-矩阵元的这个因子化将保证相应跃迁几率的因子化, 相应的结果就是实验结果彼此不相关.

用一个组合学上的技巧可以使我们以更明显的形式重写方程(4.3.1). 假定我们定义 S-矩阵的连通部分, $S^{\rm C}_{\beta\alpha}$, 为如下形式[**]

$$S_{\beta\alpha}=\sum_{\rm PART}(\pm)S^{\rm C}_{\beta_1\alpha_1}S^{\rm C}_{\beta_2\alpha_2}\cdots\,. \tag{4.3.2}$$

这里的求和是对将态 α 中的粒子分割进不同集团 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots$ 的不同方式求和, 同样也要对将态 β 中的粒子分割进不同集团 $\beta_1,\beta_2,\cdots$ 的不同方式求和, 在求和中, 不计入集团内部粒子的重排以及整个集团的置换. $+$ 号和 $-$ 号分别由重排 $\alpha\to\alpha_1\alpha_2\cdots$ 和 $\beta\to\beta_1\beta_2\cdots$ 中包含偶数次还是奇数次的费米子交换决定. 这里用“连通”这个术语是因为 $S^{\rm C}_{\beta\alpha}$ 的图形表示, 这样的图在微扰论中代表不同的贡献, 这将在下一节讨论.

这是一个递推定义. 对于每个 α 和 β, 方程(4.3.2)右边的求和由一项 $S^{\rm C}_{\beta\alpha}$ 加上对两个或多个 $S^{\rm C}$-矩阵元乘积的求和 Σ' 组成, 其中每个 α_j 态和 β_j 态中的粒子总数要少于态 α 和 β 中的粒子数

$$S_{\beta\alpha}=S^{\rm C}_{\beta\alpha}+\sum_{\rm PART}{}'\,(\pm)\,S^{\rm C}_{\beta_1\alpha_1}S^{\rm C}_{\beta_2\alpha_2}\cdots\,.$$

[*]我们在这里回到了第3章所使用的符号约定; 希腊字母 α 或 β 代表粒子的集合, 这其中包括对每一粒子的动量, 自旋以及种类的指定. 另外, $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{\mathscr{N}}$ 是将态 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{\mathscr{N}}$ 中所有粒子合在一起形成的态, 对于 $\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{\mathscr{N}}$ 同样如此.

[**]在经典统计力学中, Ursell(尤舍尔), Mayer(梅耶)和一些作者, 在量子统计力学中李政道, 杨振宁和一些作者[3]已经使用过这个分解. 它也被Goldstone(戈德斯通)[4]和Hugenholte(胡根霍兹)[5]用来计算多体基态的能量. 在所有这些应用中, 分离出Green函数, 配分函数, 预解式等的连通部分是为了使研究对象对体积的依赖是简单的. 这显然也是我们的目的, 这是因为, 我们将会看到, S-矩阵连通部分的关键性质是它们正比于一个动量守恒 δ-函数, 而在箱中, 这个 δ-函数会变成克罗内克 δ-符号乘以箱体积. 集团分解也是噪声理论[6]中的标准方法, 将几个随机变量的关联函数分解成它的“累积量”; 如果随机变量接受了 N (N 非常大)个独立涨落的贡献, 那么每个累积量正比于 N.

假定已经对求和中的 S^{C}-矩阵元做了选择, 使得方程(4.3.2)对总粒子数少于 N 的态 β,α 成立. 那么以这种方式, 无论发现求和 Σ' 中的 S-矩阵元取什么值, 我们总能选择剩余项 $S^{\mathrm{C}}_{\beta\alpha}$, 使得方程(4.3.2)对总粒子数为 N 的态 α,β 成立.† 因此方程(4.3.2)本身不包含任何信息; 它仅是 S^{C} 的定义.

如果态 α 和 β 均由一个单粒子构成, 将它们的量子数记为 q 和 q', 那么方程(4.3.2)右边仅有一项, 即 $S^{\mathrm{C}}_{\beta\alpha}$ 本身, 所以对于单粒子态

$$S^{\mathrm{C}}_{q'q} \equiv S_{q'q} = \delta(q'-q)\,. \tag{4.3.3}$$

(除了可能的简并, $S_{q'q}$ 正比 $\delta(q'-q)$ 是因为守恒律. 方程(4.3.3)中没有比例因子是因为对“入”态和“出”态的相对相位做了合适的选择.) 我们在这里假定单粒子态是稳定的, 这使得单粒子态无法跃迁到任何其它态, 例如真空.

对于 2-粒子态之间的跃迁, 方程(4.3.2)变为

$$S_{q_1'q_2',q_1q_2} = S^{\mathrm{C}}_{q_1'q_2',q_1q_2} + \delta(q_1'-q_1)\delta(q_2'-q_2) \pm \delta(q_1'-q_2)\delta(q_2'-q_1)\,. \tag{4.3.4}$$

(这里我们使用了方程(4.3.3).) 如果两个粒子都是费米子, 符号 $\pm$ 取负号, 否则取正号. 我们看出两个 δ-函数项加起来就是范数(4.1.6), 所以这里的 $S^{\mathrm{C}}_{\beta\alpha}$ 就是 $(S-1)_{\beta\alpha}$. 但是一般情况会更加复杂.

对于 3-粒子态和 4-粒子态之间的跃迁, 方程(4.3.2)变为

$$\begin{aligned} S_{q_1'q_2'q_3',q_1q_2q_3} &= S^{\mathrm{C}}_{q_1'q_2'q_3',q_1q_2q_3} \\ &+ \delta(q_1'-q_1)S^{\mathrm{C}}_{q_2'q_3',q_2q_3} \pm \text{置换} \\ &+ \delta(q_1'-q_1)\delta(q_2'-q_2)\delta(q_3'-q_3) \pm \text{置换} \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

以及

$$\begin{aligned} S_{q_1'q_2'q_3'q_4',q_1q_2q_3q_4} &= S^{\mathrm{C}}_{q_1'q_2'q_3'q_4',q_1q_2q_3q_4} \\ &+ S^{\mathrm{C}}_{q_1'q_2',q_1q_2}S^{\mathrm{C}}_{q_3'q_4',q_3q_4} \pm \text{置换} \\ &+ \delta(q_1'-q_1)S^{\mathrm{C}}_{q_2'q_3'q_4',q_2q_3q_4} \pm \text{置换} \\ &+ \delta(q_1'-q_1)\delta(q_2'-q_2)S^{\mathrm{C}}_{q_3'q_4',q_3q_4} \pm \text{置换} \\ &+ \delta(q_1'-q_1)\delta(q_2'-q_2)\delta(q_3'-q_3)\delta(q_4'-q_4) \pm \text{置换}\,. \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

(将所有置换考虑在内, 方程(4.3.5)中总共有 $1+9+6=16$ 项, 方程(4.3.6)中总共有 $1+18+16+72+24=131$ 项. 如果我们没有假定单粒子态稳定, 会有更多的项.) 正如前面所解释的, $S^{\mathrm{C}}_{\beta\alpha}$ 的定义是递归的: 对于 2-粒子态, 我们用方程(4.3.4)定义 $S^{\mathrm{C}}_{\beta\alpha}$, 然后, 当我们定义 3-粒子态的 $S^{\mathrm{C}}_{\beta\alpha}$ 时, 我们在方程(4.3.5)中用到了这个定义, 然后在方程(4.3.6)中用这两个定义以获得 4-粒子态的 $S^{\mathrm{C}}_{\beta\alpha}$ 的定义, 以此类推.

†在这里需要提及一个技巧. 要使这个论证成立, 我们需要忽略如下的可能性: 对方程(4.3.2)中的一个或多个连通 S-矩阵元, 态 α_j 和 β_j 中均无粒子. 因此, 我们必须将连通真空-真空元 $S^{\mathrm{C}}_{0,0}$ 定义成零. 我们对真空-真空 S-矩阵 $S_{0,0}$ 不使用方程(4.3.2), 在没有随时间变化的外场的情况下, 定义它为 1, 即 $S_{0,0}=1$. 在卷 II 中, 我们将详细讨论有外场时的真空-真空振幅.

定义 S-矩阵连通部分的关键点在于, 集团分解原理等价于要求当态 β 和(或) α 中有一个或多个粒子在空间上远离其它粒子时,[‡] $S^{\mathrm{C}}_{\beta\alpha}$ 必须为零. 为了看到这点, 假定态 β 和 α 中的粒子被分入了数个集团 $\beta_1,\beta_2,\cdots$ 和 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots$, 并且对于 $i\neq j$, 集合 $\alpha_i+\beta_i$ 中的所有粒子与集合 $\alpha_j+\beta_j$ 中的所有粒子相距甚远. 这样的话, 如果态 β' 或 α' 中有任何粒子远离其它粒子都会导致 $S^{\mathrm{C}}_{\beta'\alpha'}$ 为零, 那么, 当态中有粒子处在不同集团时, $S^{\mathrm{C}}_{\beta'\alpha'}$ 为零, 所以定义(4.3.2)给出

$$S_{\beta\alpha}\to\sum\nolimits^{(1)}(\pm)S^{\mathrm{C}}_{\beta_{11}\alpha_{11}}S^{\mathrm{C}}_{\beta_{12}\alpha_{12}}\cdots\times\sum\nolimits^{(2)}(\pm)S^{\mathrm{C}}_{\beta_{21}\alpha_{21}}S^{\mathrm{C}}_{\beta_{22}\alpha_{22}}\cdots\times\cdots\,, \tag{4.3.7}$$

其中 $\Sigma^{(j)}$ 是对将集团 β_j 和 α_j 分解成子集团 $\beta_{j1},\beta_{j2},\cdots$ 和 $\alpha_{j1},\alpha_{j2},\cdots$ 的不同方法求和. 但是回到方程(4.3.2), 这正是期望中的因子化性质(4.3.1).

例如, 假定在 4-粒子反应 $1234\to1'2'3'4'$ 中, 我们让粒子 $1,2,1',2'$ 远离 $3,4,3',4'$. 那么如果 β 和(或) α 中有任意粒子远离其它粒子时, $S^{\mathrm{C}}_{\beta\alpha}$ 为零, 方程(4.3.6)中能留下来的项(以一种更加简略的记法)是

$$\begin{aligned}S_{1'2'3'4',1234}\to{}& S^{\mathrm{C}}_{1'2',12}S^{\mathrm{C}}_{3'4',34}\\&+(\delta_{1'1}\delta_{2'2}\pm\delta_{1'2}\delta_{2'1})S^{\mathrm{C}}_{3'4',34}\\&+(\delta_{3'3}\delta_{4'4}\pm\delta_{3'4}\delta_{4'3})S^{\mathrm{C}}_{1'2',12}\\&+(\delta_{1'1}\delta_{2'2}\pm\delta_{1'2}\delta_{2'1})(\delta_{3'3}\delta_{4'4}\pm\delta_{3'4}\delta_{4'3})\,.\end{aligned}$$

与方程(4.3.4)的比较表明这正是所要求的因子化条件(4.3.1)

$$S_{1'2'3'4',1234}\to S_{1'2',12}S_{3'4',34}\,.$$

我们已经在坐标空间中表述了集团分解原理: 如果态 β 或 α 中有任何粒子远离其它粒子, 则 $S^{\mathrm{C}}_{\beta\alpha}$ 为零. 在动量空间重新表述将会便于我们后面的讨论. 坐标空间矩阵元被定义成一个 Fourier 变换

$$\begin{aligned}S^{\mathrm{C}}_{\mathbf{x}'_1\mathbf{x}'_2\cdots,\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\cdots}\equiv{}&\int\mathrm{d}^3\mathbf{p}'_1\mathrm{d}^3\mathbf{p}'_2\cdots\mathrm{d}^3\mathbf{p}_1\mathrm{d}^3\mathbf{p}_2\cdots\;S^{\mathrm{C}}_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2\cdots,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots}\\&\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}'_1\cdot\mathbf{x}'_1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}'_2\cdot\mathbf{x}'_2}\cdots\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{x}_1}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}_2\cdot\mathbf{x}_2}\cdots\,.\end{aligned} \tag{4.3.8}$$

(我们在这里暂时扔掉紧随在动量指标或坐标指标之后的自旋指标和粒子种类指标.) 如果 $|S^{\mathrm{C}}_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2\cdots,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots}|$ 的性质足够好(具体些, 如果它是 Lebesgue (勒贝格)可积的), 那么根据 Riemann-Lebesgue 定理,[7] 当空间坐标的任意组合趋于无限大时, 积分(4.3.8)会趋于零. 目前, 这显然是一个过强的要求. 平移不变性告诉我们, 同 S-矩阵本身一样, S-矩阵的连通部分可以只依赖于坐标矢量之差, 因此, 如果所有的 x_i 和 x'_j 在一起变化的同时保持它们的差不变, S- 矩阵的连通部分就不会变. 这要求 S^{C} 在动量基下的矩阵元同 S 一样必须正比于保证动量守恒的 3-维 δ-函数(而这使得 $|S^{\mathrm{C}}_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2\cdots,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots}|$ 不是 Lebesgue 可积的)和散射理论要求的能量守恒 δ-函数. 就是说我们可以给出

$$\begin{aligned}S^{\mathrm{C}}_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2\cdots,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots}={}&\delta^3(\mathbf{p}'_1+\mathbf{p}'_2+\cdots-\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2-\cdots)\\&\times\delta(E'_1+E'_2+\cdots-E_1-E_2-\cdots)C_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2\cdots,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots}\,.\end{aligned} \tag{4.3.9}$$

[‡]为了给出“远”的含义, 我们将不得不对 S^{C} 做 Fourier 变换, 这使得每个 3-动量指标 $\mathbf{p}$ 被空间坐标 3-矢 $\mathbf{x}$ 替代.

这是没有问题的: 集团分解原理仅要求方程(4.3.8)在某些 $\mathbf{x}_i$ 和(或) $\mathbf{x}'_i$ 之差变得很大时为零. 然而, 如果方程(4.3.9)中的 C 本身包含额外的 3-动量线性组合的 δ-函数, 那么这个原理就不会被满足. 例如, 假定 C 中有一 δ-函数要求对于粒子的某些子集, $\mathbf{p}'_i$ 和 $-\mathbf{p}_j$ 之和为零. 那么, 如果该子集中的粒子(保持彼此之间的距离不变)一起运动, 以至于该子集中所有的 $\mathbf{x}'_i$ 和 $\mathbf{x}_j$ 远离所有其它的 $\mathbf{x}'_k$ 和 $\mathbf{x}_\ell$, 方程(4.3.8)会保持不变, 这与集团分解原理相矛盾. 粗略地讲, 集团分解原理就是说: *与 S-矩阵本身不同, S-矩阵的连通部分仅包含一个动量守恒 δ-函数.*

为了说得稍微精确些, 我们可以说方程(4.3.9)中的系数函数 $C_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2\cdots,\,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots}$ 是其动量指标的光滑函数. 但是, 有多光滑? 最直接的做法就是要求 $C_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2\cdots,\,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots}$ 在动量 $\mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}'_2 = \cdots = \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = \cdots = 0$ 处对所有动量解析. 当 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{x}'$ 中的一个与其它 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{x}'$ 相距极远时, 这个要求确保了 $S^{\mathrm{C}}_{\mathbf{x}'_1\mathbf{x}'_2\cdots,\,\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\cdots}$ 以指数衰减的速度趋于零. 然而, S^{C} 的指数衰减不是集团分解原理的本质部分, 事实上, 在所有理论中都没有遇到解析性的要求. 特别值得注意的是, 当理论含有无质量粒子时, S^{C} 可以在某些 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{p}'$ 值处有极点. 例如, 我们将在第 10 章看到, 如果在 $1 \to 3$ 的跃迁中发射一个无质量粒子, 而在 $2 \to 4$ 的跃迁中吸收它, 那么 $S^{\mathrm{C}}_{34,12}$ 将有一个正比于 $1/(p_1 - p_3)^2$ 的项. 在 Fourier 变换后, 这样的极点在 $S^{\mathrm{C}}_{\mathbf{x}'_1\mathbf{x}'_2\cdots,\,\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\cdots}$ 中产生的项仅以坐标差的负幂次衰减.[1] 这里没有必要如此严格地在集团分解原理的公式化中排除这种情况. 因此 S^{C} 上的"光滑"条件应该理解为: 在某些 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{p}'$ 值处允许有各种极点以及分支割线, 但不允许有 δ-函数那么强的奇异性.

4.4 相互作用的结构

我们现在问, 什么样的哈密顿量会产生满足集团分解原理的 S-矩阵? 这里正是产生和湮灭算符的形式体系的用武之地. 答案包含在如下的定理中, S-矩阵满足集团分解原理的条件(并且据我所知, 这是唯一条件)是哈密顿量可以表示成方程(4.2.8)中那样:

$$\begin{aligned} H = \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{M=0}^{\infty}\int \mathrm{d}q'_1\cdots\mathrm{d}q'_N\,\mathrm{d}q_1\cdots\mathrm{d}q_M \\ \times a^\dagger(q'_1)\cdots a^\dagger(q'_N)a(q_M)\cdots a(q_1) \\ \times h_{NM}(q'_1\cdots q'_N\,,\,q_1\cdots q_M) \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

其中系数函数 h_{NM} 只包含一个 3-动量守恒 δ-函数(这里回到更加清晰的记法)

$$\begin{aligned} h_{NM}(\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1\cdots\mathbf{p}'_N\sigma'_Nn'_N\,,\,\mathbf{p}_1\sigma_1n_1\cdots\mathbf{p}_M\sigma_Mn_M) \\ = \delta^3(\mathbf{p}'_1+\cdots+\mathbf{p}'_N-\mathbf{p}_1-\cdots-\mathbf{p}_M) \\ \times \tilde{h}_{NM}(\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1\cdots\mathbf{p}'_N\sigma'_Nn'_N\,,\,\mathbf{p}_1\sigma_1n_1\cdots\mathbf{p}_M\sigma_Mn_M)\,, \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

其中 $\tilde{h}_{NM}$ 不包含 δ-函数因子. 注意到, 方程(4.4.1)本身并没有说明什么——我们在 4.2 节看到任何算符都可以写成这样的形式. 仅当方程(4.4.1)与 h_{NM} 只包含方程(4.4.2)中所示的单个 δ-函数的要求相结合, 才能保证 S-矩阵满足集团分解原理.

在我们于第 6 章发展了Feynman图体系后, 该定理在微扰论中的适用性将变得显然. 容易被说服的读者或许倾向于跳过本章的剩余部分, 直接跳到第 5 章去考虑这个定理的各种结果. 然而, 这个证明有一些启发性特征, 并有助于阐明在什么样的意义下, 下章的场论是必然的.

为了证明这个定理, 我们采用微扰论的含时形式. (含时微扰论的优势之一是使暗含于集团分解原理之中的组合数学变得显然; 如果 E 是单粒子能量之和, 那么 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}$ 就是各个能量的函数的乘

积, 而 $[E-E_\alpha+\mathrm{i}\epsilon]^{-1}$ 则不是.) S-矩阵由方程(3.5.10)给出*

$$S_{\beta\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n\Big(\Phi_\beta,T\Big\{V(t_1)\cdots V(t_n)\Big\}\Phi_\alpha\Big)\,, \tag{4.4.3}$$

其中哈密顿量被分成了自由部分 H_0 与相互作用部分 V, 且

$$V(t)\equiv\exp(\mathrm{i}H_0t)V\exp(-\mathrm{i}H_0t)\,. \tag{4.4.4}$$

现在, 态 Φ_α 和 Φ_β 可以像方程(4.2.2)中那样用产生算符的乘积作用在真空态 Φ_0 上来表示, 而 $V(t)$ 本身是产生和湮灭算符乘积的和, 所以求和(4.4.3)中的每一项都可以写为产生与湮灭算符乘积的真空期望值的和. 利用对易或反对易关系, 我们可以将每一湮灭算符依次移至所有产生算符的右边. 对于每个跃过一个产生算符的湮灭算符, 我们有两项, 这两项是将方程(4.2.5)写成如下形式得到的

$$a(q')a^\dagger(q)=\pm a^\dagger(q)a(q')+\delta(q'-q)\,.$$

其它产生算符跃过第一项中的湮灭算符还会生成更多的项. 但是方程(4.2.4)证明了一直移到右边的所有湮灭算符作用到 Φ_0 上得到零, 所以最后剩下的都是 δ-函数. 按照这种方式, 产生和湮灭算符乘积的真空期望值由不同项的和给出, 每一项等于 δ-函数与来自对易子或反对易子的符号 $\pm$ 的乘积. 由此得出方程(4.4.3)中的每一项可以表达为一些项的求和, 求和中的每一项等于 δ-函数与对易子或反对易子贡献的符号 $\pm$ 以及任何 $V(t)$ 贡献的因子的乘积, 然后对所有时间积分, 并对 δ-函数变量中的动量, 自旋和粒子种类积分并求和.

以这种方式生成的每一项可以用一个图来表示. (这还不是全部的 Feynman 图体系, 因为我们还没准备将数值量与图的成分联系起来; 我们在这里仅将图用作追踪 3-动量 δ-函数的方法.) 画 n 个点, 称为顶点, 每个顶点对应一个 $V(t)$ 算符. 将 $V(t)$ 算符中的湮灭算符移至初态 Φ_α 中的产生算符的右边会产生 δ-函数, 对于每个这样的 δ-函数, 由图中画一条由底部进来到相应顶点的入线. 将末态 Φ_β 的共轭中的湮灭算符移至其中一个 $V(t)$ 算符中的产生算符的右边会产生 δ-函数, 对于每个这样的 δ-函数, 由相应顶点向上画一条出线. 将其中一个 $V(t)$ 算符中的湮灭算符移至其它 $V(t)$ 中的产生算符右边会产生 δ-函数, 对于每个这样的 δ-函数, 用线连接两个相应顶点. 最后, 将末态 Φ_β 的共轭中的湮灭算符移至初态 Φ_α 中的产生算符的右边会产生 δ-函数, 对于每个这样的 δ-函数, 从底部到顶部穿过图画一条线. 与这些线相联系的每一个 δ-函数保证该线所代表的那对产生和湮灭算符的动量变量相等. 另外, 每个顶点至少会贡献一个 δ-函数, 保证顶点处的动量守恒.

这样的图可以是连通的(每个点通过一组线与所有其它点相连), 而如果是不连通的, 它可以分解成几个连通分支. 一个连通分支中的顶点所关联的 $V(t)$ 算符实际上与任意其它连通分支中顶点所关联的 $V(t)$ 对易, 这是因为对于这样的图, 我们无法引入如下的项: 一个顶点中的湮灭算符湮灭掉了其它顶点中的产生算符产生的粒子——如果我们这样做了, 那么这两个顶点应处在同一个连通分支中. 因此, 方程(4.4.3)中的矩阵元可以表示为对来自每个连通分支贡献之积的求和:

$$\begin{aligned}&\Big(\Phi_\beta,T\Big\{V(t_1)\cdots V(t_n)\Big\}\Phi_\alpha\Big)\\&\quad=\sum_{\text{clusterings}}(\pm)\prod_{j=1}^{\nu}\Big(\Phi_{\beta_j},T\Big\{V(t_{j_1})\cdots V(t_{j_{n_j}})\Big\}\Phi_{\alpha_j}\Big)_{\mathrm{C}}\,.\end{aligned} \tag{4.4.5}$$

*我们现在采取约定, 对于 $n=0$, 方程(4.4.3)中的编时乘积取成单位算符, 所以求和中 $n=0$ 的项在 $S_{\beta\alpha}$ 中仅产生 $\delta(\beta-\alpha)$.

这里是对将入粒子, 出粒子以及 $V(t)$ 算符分成 ν 个集团的所有方式求和(包含对 ν 从 1 到 n 的求和), 其中 n_j 个算符 $V(t_{j_1})\cdots V(t_{j_{n_j}})$, 初粒子的子集 α_j, 以及末粒子的子集 β_j 全部在第 j 个集团中. 当然, 这意味着

$$n = n_1 + \cdots + n_\nu \,,$$

另外, 集合 α 是子集 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_\nu$ 中所有粒子的并集, 对末态亦是如此. 方程(4.4.5)中的某些集团也许根本不包含任何粒子, 即, $n_j = 0$; 对这些因子, 除非 β_j 和 α_j 全是单粒子态(在这种情况下它就是一个 δ-函数 $\delta(\alpha_j - \beta_j)$), 否则我们必须要将方程(4.4.5)中的矩阵元取为零, 这是因为不包含顶点的唯一连通图由一条从底部到顶部穿过图的线组成. 最重要的是, 方程(4.4.5)中的下标 C 意味着我们排除了所有与不连通图对应的贡献, 也就是那些任意 $V(t)$ 算符或任意初末粒子与所有其它部分不通过一系列的粒子产生和湮灭相连时的贡献.

现在, 在求和(4.4.3)中使用方程(4.4.5). 每个时间变量从 $-\infty$ 积到 $+\infty$, 从而不论每个集团分到了 $t_1, \cdots, t_n$ 中的哪几个都不会影响结果. 因此对集团的求和产生因子 $n!/n_1!n_2!\cdots n_\nu!$, 它等于将 n 个顶点分成 ν 个集团, 每个集团又分别包含 $n_1, n_2, \cdots$ 个顶点的不同方法的数量:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_n \ \left(\Phi_\beta, T\left\{V(t_1)\cdots V(t_n)\right\}\Phi_\alpha\right) \\
&= \sum_{\text{PART}} (\pm) \sum_{\substack{n_1 \cdots n_\nu \\ n_1+\cdots+n_\nu = n}} \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_\nu!} \prod_{j=1}^{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t_{j_1} \cdots \mathrm{d}t_{j_{n_j}} \\
&\quad \times \left(\Phi_{\beta_j}, T\left\{V(t_{j_1})\cdots V(t_{j_{n_j}})\right\}\Phi_{\alpha_j}\right)_{\mathrm{C}} \,.
\end{aligned}$$

这里的第一个求和是对将初态和末态中的粒子分到集团 $\alpha_1 \cdots \alpha_\nu$ 与集团 $\beta_1 \cdots \beta_\nu$ (包含对集团数目 ν 的求和)的总方法数求和. 这里的因子 $n!$ 与方程(4.4.3)中的 $1/n!$ 相抵消, 并且(4.4.5)的微扰级数中的因子 $(-\mathrm{i})^n$ 可以写为乘积 $(-\mathrm{i})^{n_1}\cdots(-\mathrm{i})^{n_\nu}$, 所以取代先对 n 求和再分别对满足约束 $n_1 + \cdots + n_\nu = n$ 的 $n_1, \cdots, n_\nu$ 求和, 我们可以简单地对每一 $n_1, \cdots, n_\nu$ 独立地求和. 这最终给出

$$\begin{aligned}
S_{\beta\alpha} = \sum_{\text{PART}} (\pm) \prod_{j=1}^{\nu} \sum_{n_j=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i})^{n_j}}{n_j!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_{j_1} \cdots dt_{j_{n_j}} \\
\times \left(\Phi_{\beta_j}, T\left\{V(t_{j_1})\cdots V(t_{j_{n_j}})\right\}\Phi_{\alpha_j}\right)_{\mathrm{C}} \,.
\end{aligned}$$

将其与连通矩阵元 $S^{\mathrm{C}}_{\beta\alpha}$ 的定义(4.3.2)进行比较, 我们看到这些矩阵元恰好由这里乘积中的因子给出

$$S^{\mathrm{C}}_{\beta\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i})^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_n \ \left(\Phi_\beta, T\left\{V(t_1)\cdots V(t_n)\right\}\Phi_\alpha\right)_{\mathrm{C}} \,. \tag{4.4.6}$$

(由于 t 和 n 现在仅仅是积分变量和求和变量, 所以扔掉了它们的下标 j.) 我们看到 $S^{\mathrm{C}}_{\beta\alpha}$ 通过一个非常简单的方法算出: $S^{\mathrm{C}}_{\beta\alpha}$ 是对连通 S-矩阵的所有贡献求和, 也就是说我们扔掉了所有下述这样的项, 在这些项中有任意初末粒子或算符 $V(t)$ 与所有其它部分不通过一系列的粒子产生和湮灭相连. 这验证了 S^{C} 的形容词“连通”.

正如我们所看到的, 动量在每个顶点处守恒并沿着每条线守恒, 所以 S-矩阵的连通部分单独动量守恒: $S^{\mathrm{C}}_{\beta\alpha}$ 包含一个因子 $\delta^3(\mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\alpha)$. 我们想要证明的是 $S^{\mathrm{C}}_{\beta\alpha}$ 不再包含其它 δ-函数.

我们现在假定: 将哈密顿量写成用产生和湮灭算符表示的展开式(4.4.1)时, 它的系数部分 h_{NM} 正比于一个确保动量守恒的 3-维 δ-函数. 对于自由粒子哈密顿量 H_0, 这是自动成立的, 所以, 它对相互作用 V 也单独成立. 回到我们所采用的矩阵元的图形表示, 这意味着每个顶点贡献一个 3-维 δ-函数. (矩阵元 $V_{\gamma\delta}$ 中的其它 δ-函数保证不在相应顶点产生或湮灭的粒子的动量不变) 现在, 这些 δ-函数中的大多数用来决定中间态粒子的动量. 剩下的没有被这样的 δ-函数确定的动量是那些在内线圈中循环的动量. (任何如果剪断就会使图不连通的线, 它们携带的动量由动量守恒确定, 由进入或离开该图的线的动量的某种线性组合给出, 如果一个图有 L 条可以同时剪断却不破坏连通性的线, 那么我们说它有 L 个独立的圈, 这样就有 L 个不被动量守恒固定的动量.) 如果一个图有 V 个顶点, I 条内线以及 L 个圈, 那么就有 V 个 δ-函数, 其中 $I-L$ 个用来确定内动量, 剩下的 $V-I+L$ 个 δ-函数联系入射和出射粒子. 但是一个著名的拓扑学等式**告诉我们, 对于任何由 C 个连通分支构成的图, 它的顶点, 内线以及圈的数量有如下关系

$$V-I+L=C\,. \tag{4.4.7}$$

因此, 对于 $S^{\mathrm{C}}_{\beta\alpha}$ 这样的连通矩阵元, 它来自 $C=1$ 的图, 我们仅发现一个 3-维 δ-函数 $\delta^3(\mathbf{p}_\beta-\mathbf{p}_\alpha)$, 这正是所要证明的.

上述讨论中并不重要的是时间变量的积分是从 $-\infty$ 到 $+\infty$. 因此用精确相同的讨论可以证明, 如果哈密顿量中的系数 h_{NM} 只包含一个 δ-函数, 那么 $U(t,t_0)$ 可以分解成几个连通的部分, 每部分包含一个动量守恒 δ-函数因子. 另一方面, S-矩阵的连通部分也包含一个能量守恒 δ-函数, 并且, 当我们在第 6 章接触 Feynman 图后, 我们将看到 $S^{\mathrm{C}}_{\beta\alpha}$ 只包含一个能量守恒 δ-函数, $\delta(E_\beta-E_\alpha)$, 而 $U(t,t_0)$ 根本不包含能量守恒 δ-函数.

应该强调的是, 要求方程(4.4.1)中的 h_{NM} 只有一个 3-动量守恒 δ-函数因子这一点绝不平庸, 且有深刻含义. 例如, 假定 V 在 2-粒子态之间有非零矩阵元. 那么, 方程(4.4.1)必然包含 $N=M=2$ 的项, 且系数

$$v_{2,2}(\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2)=V_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2,\,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}\,. \tag{4.4.8}$$

(在这里我们暂时扔掉了自旋和粒子种类指标.) 但这样一来, 相互作用在 3-粒子态之间的矩阵元就变成

$$\begin{aligned}V_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2\mathbf{p}'_3,\,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3}&=v_{3,3}(\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2\mathbf{p}'_3,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3)\\&\quad+v_{2,2}(\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2)\delta^3(\mathbf{p}'_3-\mathbf{p}_3)\pm\text{置换}.\end{aligned} \tag{4.4.9}$$

正如本章开始提到的, 通过选择 $v_{2,2}$ 使得两体 S-矩阵 Lorentz 不变, 并调整哈密顿量的剩余部分使得在包含 3 个及以上粒子的态中没有散射, 我们或许可以得到一个非场论的相对论量子理论. 这样, 我们将不得不让 $v_{3,3}$ 与方程(4.4.9)中的其它项相抵消

$$v_{3,3}(\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2\mathbf{p}'_3,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3)=-v_{2,2}(\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2)\delta^3(\mathbf{p}'_3-\mathbf{p}_3)\mp\text{置换}. \tag{4.4.10}$$

然而, 这意味着 $v_{3,3}$ 中的每一项包含两个 δ-函数因子(回忆, $v_{2,2}(\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2)$ 含有因子 $\delta^3(\mathbf{p}'_1+\mathbf{p}'_2-\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)$)而这将违背集团分解原理. 因此, 在满足集团分解原理的理论中, 如果存在两个粒子的散射过程, 那么三个及其以上粒子的散射过程是不可避免的.

** 只由一个顶点组成的图有 $V=1$, $L=0$ 以及 $C=1$. 如果我们增加 $V-1$ 个顶点以及恰好足够保持图连通的内线, 我们就有 $I=V-1$, $L=0$ 以及 $C=1$. 任何加入(在不增加新顶点的情况下)该图的内线会产生相同数目的圈, 所以 $I=V+L-1$ 且 $C=1$. 如果一个非连通图有 C 个这样的连通分支, 每个连通分支中的 I, V 和 L 之和将会满足 $\sum I=\sum V+\sum L-C$.

* * *

对于满足集团分解原理的量子理论, 当我们着手解决其中的三体问题时, 方程(4.4.9)中的 $v_{3,3}$ 项没有带来什么特别的麻烦, 但是其它项中额外的 δ-函数使得直接求解 Lippmann-Schwinger 方程变得困难. 困难在于, 哪怕在我们分离出总的动量守恒 δ-函数之后, 这些 δ-函数使得方程的核 $[E_\alpha - E_\beta + \mathrm{i}\epsilon]^{-1}V_{\beta\alpha}$ 不是平方可积的. 结果是, 它不能近似为一个有限矩阵, 那怕是一个秩很大的矩阵. 为了解决包含三个或三个以上粒子的问题, 有必要将 Lippmann-Schwinger 方程替换为一个右边为连通的方程. 人们已经为三个及三个以上粒子的散射建立了这样的方程,[8, 9] 并且在非相对论散射问题中它们可以被迭代求解, 但是, 它们在相对论理论中的有效性还没有被证明, 所以在这里不做详细讨论.

然而, 将 Lippmann-Schwinger 方程按这种方式重塑在另一方面是有用的. 迄今为止, 我们在本节中的讨论都依赖微扰论. 我不知道本节主要定理的任何非微扰论证明, 但是现已证明,[9] 假定哈密顿量满足每个系数函数 h_{NM} 各包含一个动量守恒 δ-函数的条件, 这些重新表述的非微扰动力学方程, 与要求 $U^{\mathrm{C}}(t,t_0)$ (从而 S^{C})应该也只包含一个动量守恒 δ-函数相容, 而这正是集团分解原理所要求的.

习题

1. 定义 S-矩阵和它连通部分的生成泛函:

$$\begin{aligned} F[v] \equiv 1 + \sum_{N=1}^{\infty}\sum_{M=1}^{\infty}\frac{1}{N!M!}\int & v^*(q_1')\cdots v^*(q_N')v(q_1)\cdots v(q_M) \\ & \times S_{q_1'\cdots q_N', q_1\cdots q_M}\,\mathrm{d}q_1'\cdots\mathrm{d}q_N'\,\mathrm{d}q_1\cdots\mathrm{d}q_M \\ F^{\mathrm{C}}[v] \equiv \sum_{N=1}^{\infty}\sum_{M=1}^{\infty}\frac{1}{N!M!}\int & v^*(q_1')\cdots v^*(q_N')v(q_1)\cdots v(q_M) \\ & \times S^{\mathrm{C}}_{q_1'\cdots q_N', q_1\cdots q_M}\,\mathrm{d}q_1'\cdots\mathrm{d}q_N'\,\mathrm{d}q_1\cdots\mathrm{d}q_M\,. \end{aligned}$$

推导出 $F[v]$ 和 $F^{\mathrm{C}}[v]$ 之间的关系. (可以只考虑纯玻色情况.)

2. 考虑相互作用

$$\begin{aligned} V = g\int & \mathrm{d}^3\mathbf{p}_1\,\mathrm{d}^3\mathbf{p}_2\,\mathrm{d}^3\mathbf{p}_3\,\mathrm{d}^3\mathbf{p}_4\,\delta^3(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_4) \\ & \times a^\dagger(\mathbf{p}_1)\,a^\dagger(\mathbf{p}_2)\,a(\mathbf{p}_3)\,a(\mathbf{p}_4)\,, \end{aligned}$$

其中 g 是实常数, $a(\mathbf{p})$ 是质量 $M>0$ 的无自旋玻色子的湮灭算符. 利用微扰论计算这些粒子在质心系中散射的 S-矩阵元, 并计算至 g 阶. 相应的微分截面又是什么?

3. 相干态 Φ_λ 被定义成湮灭算符 $a(q)$ 本征值为 $\lambda(q)$ 的本征态. 试用多粒子态 $\Phi_{q_1q_2\cdots q_N}$ 的叠加构造这个态.

参考文献

[1] 集团分解原理似乎首先是由E. H. Wichmann和J. H. Crichton在量子场论中明确陈述的, *Phys. Rev.* **132**, 2788 (1963).

[2] 可参看B. Bakamijian and L. H. Thomas, *Phys. Rev.* **92**, 1300 (1953).

[3] 相关参考文献见T. D. Lee and C. N. Yang, *Phys. Rev.* **133**, 1165 (1959).

[4] J. Goldstone *Proc. Roy. Soc. Londan* **A239**, 267 (1957)

[5] N. M. Hugenholtz, *Physica* **23**, 481 (1957).

[6] 可参看R. Kubo, *J. Math. Phys.* **4**, 174 (1963).

[7] E. C. Titchmarch, *Introduction to the theory of Fourier Intergrals* (Oxford University Press, Oxford, 1937): Section 1.8

[8] L. D. Faddeev. *Zh. Ekxper. i Teor. Fiz.* **39**. 1459 (1961)(英译: *Soviet Phys — JETP* **12**, 1014 (1961)); *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **138**, 565 (1961) and **145**, 30 (1962) (英译*Soviet Physics — Doklady* **6**, 384 (1961) and **7**, 600 (1963)).

[9] S. Weinberg, *Phys. Rev.* **133**, B232 (1964).

第 5 章　量子场与反粒子

现在我们已经有了引入量子场所需的所有动机.[1] 在建立它的过程中, 我们将遇到一些将相对论与量子力学结合起来后得到的最不寻常且最通用的结果: 自旋与统计间的联系, 反粒子的存在, 以及粒子与反粒子之间的各种关系, 其中包括著名的 CPT 定理.

5.1　自由场

我们在第 3 章中看到, 只要相互作用可以写为

$$V(t) = \int \mathrm{d}^3x\, \mathscr{H}(\mathbf{x}, t)\,, \tag{5.1.1}$$

S-矩阵将是 Lorentz 不变的, 其中 $\mathscr{H}$ 是标量, 也就是说

$$U_0(\Lambda, a)\mathscr{H}(x)U_0^{-1}(\Lambda, a) = \mathscr{H}(\Lambda x + a)\,, \tag{5.1.2}$$

并且它满足额外的条件:

$$\big[\mathscr{H}(x), \mathscr{H}(x')\big] = 0 \qquad \text{当} \quad (x - x')^2 \geq 0\,. \tag{5.1.3}$$

我们将会看到, 存在更普遍的可能性, 但是它们中的任何一个都与这里给出的相差不大. (是否将这里的 Λ 限制为固有正时 Lorentz 变换, 抑或是可以包含空间反演, 我们暂且将这留作一个开放的问题.) 为了同时满足集团分解原理, 我们打算由产生和湮灭算符来构造 $\mathscr{H}(x)$, 但是这里我们将面临一个问题: 方程(4.2.12)表明, 在 Lorentz 变换下, 每个这样的算符都将乘上一个矩阵, 而这个矩阵依赖于算符所携带的动量. 我们怎样才能将这样的算符结合在一起构成一个标量? 答案是用场——湮灭场 $\psi_\ell^+(x)$ 与产生场 $\psi_\ell^-(x)$ 来构造 $\mathscr{H}(x)$:

$$\psi_\ell^+(x) = \sum_{\sigma n} \int \mathrm{d}^3p\, u_\ell(x; \mathbf{p}, \sigma, n) a(\mathbf{p}, \sigma, n)\,, \tag{5.1.4}$$

$$\psi_\ell^-(x) = \sum_{\sigma n} \int \mathrm{d}^3p\, v_\ell(x; \mathbf{p}, \sigma, n) a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n)\,. \tag{5.1.5}$$

对它们的系数* $u_\ell(x; \mathbf{p}, \sigma, n)$ 和 $v_\ell(x; \mathbf{p}, \sigma, n)$ 已经进行了选择, 使得每个场在 Lorentz 变换下乘上的是不依赖位置的矩阵:

$$U_0(\Lambda, a)\psi_\ell^+(x)U_0^{-1}(\Lambda, a) = \sum_{\bar\ell} D_{\ell\bar\ell}(\Lambda^{-1})\psi_{\bar\ell}^+(\Lambda x + a)\,, \tag{5.1.6}$$

$$U_0(\Lambda, a)\psi_\ell^-(x)U_0^{-1}(\Lambda, a) = \sum_{\bar\ell} D_{\ell\bar\ell}(\Lambda^{-1})\psi_{\bar\ell}^-(\Lambda x + a)\,. \tag{5.1.7}$$

*提示: 指标 n 和 σ 分别取遍所有不同的粒子种类与自旋 z-分量.

(原则上, 对于湮灭场和产生场, 我们可以有不同的变换矩阵 $D^{\pm}$, 但是我们将看到, 我们总可以选择场使得这些矩阵相同.) 通过进行第二次 Lorentz 变换 $\bar{\Lambda}$, 我们发现

$$D(\Lambda^{-1})D(\bar{\Lambda}^{-1}) = D((\bar{\Lambda}\Lambda)^{-1}) \,,$$

所以取 $\Lambda_1 = (\Lambda)^{-1}$ 以及 $\Lambda_2 = (\bar{\Lambda})^{-1}$, 我们看到 D-矩阵构成了齐次 Lorentz 群的一个表示:

$$D(\Lambda_1)D(\Lambda_2) = D(\Lambda_1\Lambda_2) \,. \tag{5.1.8}$$

存在很多这样的表示, 包括标量表示 $D(\Lambda) = 1$, 矢量表示 $D(\Lambda)^{\mu}{}_{\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}$, 以及许许多多张量表示和旋量表示. 这些特殊的表示是不可约的, 也就是说, 不可能通过选择基使得所有 $D(\Lambda)$ 约化成相同形式的由两个或多个分块组成的分块对角矩阵, 不过目前我们不要求 $D(\Lambda)$ 是不可约的; 一般而言, 它是一个分块对角矩阵, 每个分块中是任意行列的不可约表示. 就是说, 这里的指标 ℓ 内部有两个指标, 一个取遍不同分块中所描述的粒子类型和不可约表示, 另外一个取遍单个不可约表示分量. 稍后我们将把这些场分成不可约场, 其中每个场仅描述一种粒子(和它的反粒子), 并且它在 Lorentz 群下进行的是不可约变换.

一旦我们知道了如何构造满足Lorentz变换规则(5.1.6)和(5.1.7)的场, 我们就能够将相互作用密度构造为

$$\begin{aligned}\mathscr{H}(x) = \sum_{NM}\sum_{\ell'_1\cdots\ell'_N}\sum_{\ell_1\cdots\ell_M} & g_{\ell'_1\cdots\ell'_N,\ell_1\cdots\ell_M} \\ & \times\ \psi^{-}_{\ell'_1}(x)\cdots\psi^{-}_{\ell'_N}(x)\,\psi^{+}_{\ell_1}(x)\cdots\psi^{+}_{\ell_M}(x)\end{aligned} \tag{5.1.9}$$

如果常系数 $g_{\ell'_1\cdots\ell'_N,\ell_1\cdots\ell_M}$ 被选成是 Lorentz 协变的, 那么这个相互作用密度在方程(5.1.2)的意义下就是一个标量, 也就是说, 对所有的 Λ, 常系数满足:

$$\begin{aligned}\sum_{\ell'_1\cdots\ell'_N}\sum_{\ell_1\cdots\ell_M} & D_{\ell'_1\bar{\ell}'_1}(\Lambda^{-1})\cdots D_{\ell'_N\bar{\ell}'_N}(\Lambda^{-1})D_{\ell_1\bar{\ell}_1}(\Lambda^{-1})\cdots D_{\ell_M\bar{\ell}_M}(\Lambda^{-1}) \\ & \times g_{\ell'_1\cdots\ell'_N,\ell_1\cdots\ell_M} = g_{\bar{\ell}'_1\cdots\bar{\ell}'_N,\bar{\ell}_1\cdots\bar{\ell}_M} \,.\end{aligned} \tag{5.1.10}$$

(注意到这里没有包含导数, 这是因为我们仅仅将这些场分量的导数视作场分量的另一种类型.) 寻找满足方程(5.1.10)的系数 $g_{\ell'_1\cdots\ell'_N,\ell_1\cdots\ell_M}$ 的任务, 原则上, 与利用 Clebsch-Gordon 系数将 3-维旋转群的各种表示耦合在一起以构成旋转标量没有什么不同. 稍后, 我们就能将产生场和湮灭场结合起来使得该密度还会在类空间隔上与自身对易.

现在, 我们应该怎样取系数函数 $u_\ell(x;\mathbf{p},\sigma,n)$ 和 $v_\ell(x;\mathbf{p},\sigma,n)$ 呢? 方程(4.2.12)及其共轭给出了产生和湮灭算符的变换规则[**]

$$\begin{aligned}U_0(\Lambda,b)a(\mathbf{p},\sigma,n)U_0^{-1}(\Lambda,b) = & \exp\Big(\mathrm{i}(\Lambda p)\cdot b\Big)\sqrt{(\Lambda p)^0/p^0} \\ & \times \sum_{\bar{\sigma}} D^{(j_n)}_{\sigma\bar{\sigma}}\Big(W^{-1}(\Lambda,p)\Big)a(\mathbf{p}_\Lambda,\bar{\sigma},n) \,,\end{aligned} \tag{5.1.11}$$

$$\begin{aligned}U_0(\Lambda,b)a^{\dagger}(\mathbf{p},\sigma,n)U_0^{-1}(\Lambda,b) = & \exp\Big(-\mathrm{i}(\Lambda p)\cdot b\Big)\sqrt{(\Lambda p)^0/p^0} \\ & \times \sum_{\bar{\sigma}} D^{(j_n)*}_{\sigma\bar{\sigma}}\Big(W^{-1}(\Lambda,p)\Big)a^{\dagger}(\mathbf{p}_\Lambda,\bar{\sigma},n)\end{aligned} \tag{5.1.12}$$

[**]这是针对有质量粒子的. 零质量的情况将在 5.9 节讨论.

其中 j_n 是第 n 种粒子的自旋, 而 $\mathbf{p}_\Lambda$ 是 Λp 的 3-矢部分. (我们使用了旋转矩阵 $D^{(j_n)}_{\sigma\bar\sigma}$ 的幺正性以便方程(5.1.11)和(5.1.12)变成现在的形式.) 另外, 我们在 2.5 节中看到, 体积元 d^3p/p^0 是 Lorentz 不变量, 所以我们可以将方程(5.1.4)和(5.1.5)中的 d^3p 替换为 $\mathrm{d}^3(\Lambda p)p^0/(\Lambda p)^0$, 将这些放在一起, 我们发现

$$\begin{aligned} U_0(\Lambda,b)\psi^+_\ell(x)U_0^{-1}(\Lambda,b) = \sum_{\sigma\bar\sigma n}\int \mathrm{d}^3(\Lambda p)\, u_\ell(x;\mathbf{p},\sigma,n) \\ \times\ \exp\Big(\mathrm{i}(\Lambda p)\cdot b\Big) D^{(j_n)}_{\sigma\bar\sigma}\Big(W^{-1}(\Lambda,p)\Big)\sqrt{p^0/(\Lambda p)^0}\, a(\mathbf{p}_\Lambda,\bar\sigma,n) \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} U_0(\Lambda,b)\psi^-_\ell(x)U_0^{-1}(\Lambda,b) = \sum_{\sigma\bar\sigma n}\int \mathrm{d}^3(\Lambda p)\, v_\ell(x;\mathbf{p},\sigma,n) \\ \times\ \exp\Big(-\mathrm{i}(\Lambda p)\cdot b\Big) D^{(j_n)*}_{\sigma\bar\sigma}\Big(W^{-1}(\Lambda,p)\Big)\sqrt{p^0/(\Lambda p)^0}\, a^\dagger(\mathbf{p}_\Lambda,\bar\sigma,n)\,. \end{aligned}$$

我们看到, 为了使场满足 Lorentz 变换规则(5.1.6)和(5.1.7), 需要如下充要条件成立

$$\begin{aligned} \sum_{\bar\ell} D_{\ell\bar\ell}(\Lambda^{-1})u_{\bar\ell}(\Lambda x+b;\mathbf{p}_\Lambda,\sigma,n) = \sqrt{p^0\Big/(\Lambda p)^0} \\ \times \sum_{\bar\sigma} D^{(j_n)}_{\sigma\bar\sigma}\Big(W^{-1}(\Lambda,p)\Big)\exp\Big(+\mathrm{i}(\Lambda p)\cdot b\Big)u_\ell(x;\mathbf{p},\bar\sigma,n) \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} \sum_{\bar\ell} D_{\ell\bar\ell}(\Lambda^{-1})v_{\bar\ell}(\Lambda x+b;\mathbf{p}_\Lambda,\sigma,n) = \sqrt{p^0\Big/(\Lambda p)^0} \\ \times \sum_{\bar\sigma} D^{(j_n)*}_{\sigma\bar\sigma}\Big(W^{-1}(\Lambda,p)\Big)\exp\Big(-\mathrm{i}(\Lambda p)\cdot b\Big)v_\ell(x;\mathbf{p},\bar\sigma,n) \end{aligned}$$

或者更方便的

$$\begin{aligned} \sum_{\bar\sigma} u_{\bar\ell}(\Lambda x+b;\mathbf{p}_\Lambda,\bar\sigma,n)D^{(j_n)}_{\bar\sigma\sigma}\Big(W(\Lambda,p)\Big) = \sqrt{p^0\Big/(\Lambda p)^0} \\ \times \sum_{\ell} D_{\bar\ell\ell}(\Lambda)\exp\Big(\mathrm{i}(\Lambda p)\cdot b\Big)u_\ell(x;\mathbf{p},\sigma,n) \end{aligned} \tag{5.1.13}$$

以及

$$\begin{aligned} \sum_{\bar\sigma} v_{\bar\ell}(\Lambda x+b;\mathbf{p}_\Lambda,\bar\sigma,n)D^{(j_n)*}_{\bar\sigma\sigma}\Big(W(\Lambda,p)\Big) = \sqrt{p^0\Big/(\Lambda p)^0} \\ \times \sum_{\ell} D_{\bar\ell\ell}(\Lambda)\exp\Big(-\mathrm{i}(\Lambda p)\cdot b\Big)v_\ell(x;\mathbf{p},\sigma,n)\,. \end{aligned} \tag{5.1.14}$$

有一些基本要求使得我们可以用有限个自由参量计算出系数函数 u_ℓ 和 v_ℓ.

我们将在三个步骤中应用方程(5.1.13)和(5.1.14), 依次考察三种不同类型的固有正时 Lorentz 变换:

平移

首先来考察 $\Lambda = 1$ 且 b 任意的方程(5.1.13)和(5.1.14). 我们立刻就发现 $u_\ell(x;\mathbf{p},\sigma,n)$ 和 $v_\ell(x;\mathbf{p},\sigma,n)$ 必须采取如下的形式

$$u_\ell(x;\mathbf{p},\sigma,n) = (2\pi)^{-3/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}u_\ell(\mathbf{p},\sigma,n)\,, \tag{5.1.15}$$

$$v_\ell(x;\mathbf{p},\sigma,n) = (2\pi)^{-3/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}v_\ell(\mathbf{p},\sigma,n)\,, \tag{5.1.16}$$

所以场是 Fourier 变换:

$$\psi^+_\ell(x) = \sum_{\sigma,n}(2\pi)^{-3/2}\int \mathrm{d}^3p\, u_\ell(\mathbf{p},\sigma,n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}a(\mathbf{p},\sigma,n)\,, \tag{5.1.17}$$

和

$$\psi^-_\ell(x) = \sum_{\sigma,n}(2\pi)^{-3/2}\int \mathrm{d}^3p\, v_\ell(\mathbf{p},\sigma,n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}a^\dagger(\mathbf{p},\sigma,n)\,. \tag{5.1.18}$$

(因子 $(2\pi)^{-3/2}$ 也可以被吸收进 u_ℓ 和 v_ℓ 的定义中, 但是习惯上是在这些 Fourier 积分中将它们显式地写出来.) 利用方程(5.1.15)和(5.1.16), 我们发现, 当且仅当对于任意的齐次 Lorentz 变换 Λ 有

$$\sum_{\bar\sigma} u_{\bar\ell}(\mathbf{p}_\Lambda,\bar\sigma,n)D^{(j_n)}_{\sigma\bar\sigma}\Big(W(\Lambda,p)\Big) = \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}}\sum_\ell D_{\bar\ell\ell}(\Lambda)u_\ell(\mathbf{p},\sigma,n) \tag{5.1.19}$$

和

$$\sum_{\bar\sigma} v_{\bar\ell}(\mathbf{p}_\Lambda,\bar\sigma,n)D^{(j_n)*}_{\sigma\bar\sigma}\Big(W(\Lambda,p)\Big) = \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}}\sum_\ell D_{\bar\ell\ell}(\Lambda)v_\ell(\mathbf{p},\sigma,n)\,, \tag{5.1.20}$$

方程(5.1.13)和(5.1.14)才是被满足的.

增速

接下来, 在方程(5.1.19)和(5.1.20)中取 $\mathbf{p} = 0$, 并令 Λ 为使质量为 m 的粒子从静止到某个 4-动量 q^μ 的标准增速 $L(q)$. 于是 $L(p) = 1$, 并且

$$W(\Lambda,p) \equiv L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p) = L^{-1}(q)L(q) = 1\,.$$

因此, 在这种特殊情况下, 方程(5.1.19)和(5.1.20)给出

$$u_{\bar\ell}(\mathbf{q},\sigma,n) = (m/q^0)^{1/2}\sum_\ell D_{\bar\ell\ell}(L(q))\,u_\ell(0,\sigma,n) \tag{5.1.21}$$

和

$$v_{\bar\ell}(\mathbf{q},\sigma,n) = (m/q^0)^{1/2}\sum_\ell D_{\bar\ell\ell}(L(q))\,v_\ell(0,\sigma,n)\,. \tag{5.1.22}$$

换句话说, 如果我们知道了零动量的 $u_\ell(0,\sigma,n)$ 和 $v_\ell(0,\sigma,n)$, 那么对于给定的齐次 Lorentz 群表示 $D(\Lambda)$, 我们就知道所有 $\mathbf{p}$ 的函数 $u_\ell(\mathbf{p},\sigma,n)$ 和 $v_\ell(\mathbf{p},\sigma,n)$. (对于齐次 Lorentz 群的任意表示, 矩阵 $D_{\bar\ell\ell}(L(q))$ 的显式表达式将在 5.7 节给出.)

旋转

接下来, 取 $\mathbf{p}=0$, 但这次令 Λ 为 $\mathbf{p}_\Lambda=0$ 的 Lorentz 变换; 即取 Λ 为旋转 R. 这时显然有 $W(\Lambda,p)=R$, 因而方程(5.1.19)和(5.1.20)变成

$$\sum_{\bar\sigma} u_{\bar\ell}(0,\bar\sigma,n)\,D^{(j_n)}_{\bar\sigma\sigma}(R)=\sum_{\ell} D_{\bar\ell\ell}(R)u_\ell(0,\sigma,n) \tag{5.1.23}$$

和

$$\sum_{\bar\sigma} v_{\bar\ell}(0,\bar\sigma,n)\,D^{(j_n)*}_{\bar\sigma\sigma}(R)=\sum_{\ell} D_{\bar\ell\ell}(R)v_\ell(0,\sigma,n)\,, \tag{5.1.24}$$

或者等价地

$$\sum_{\bar\sigma} u_{\bar\ell}(0,\bar\sigma,n)\mathbf{J}^{(j_n)}_{\bar\sigma\sigma}=\sum_{\ell} \boldsymbol{\mathscr{J}}_{\bar\ell\ell}u_\ell(0,\sigma,n) \tag{5.1.25}$$

和

$$\sum_{\bar\sigma} v_{\bar\ell}(0,\bar\sigma,n)\mathbf{J}^{(j_n)*}_{\bar\sigma\sigma}=-\sum_{\ell} \boldsymbol{\mathscr{J}}_{\bar\ell\ell}v_\ell(0,\sigma,n)\,, \tag{5.1.26}$$

其中 $\mathbf{J}^{(j)}$ 和 $\boldsymbol{\mathscr{J}}$ 分别是表示 $D^{(j)}(R)$ 和 $D(R)$ 中的角动量矩阵. 当限制 Λ 为旋转 R 时, 齐次 Lorentz 群的任意表示 $D(\Lambda)$ 显然会给出旋转群表示; 方程(5.1.25)和(5.1.26)告诉我们, 如果场 $\psi^\pm_\ell(x)$ 所描述的是某个自旋为 j 的粒子, 那么表示 $D(R)$ 的不可约分量中必须包含自旋-j 表示 $D^{(j)}(R)$, 而系数 $u_\ell(0,\sigma,n)$ 和 $v_\ell(0,\sigma,n)$ 就描述了旋转群的自旋-j 表示如何出现在 $D(R)$ 中. 我们在 5.6 节将看到, 任意给定的旋转群不可约表示在固有正时 Lorentz 群的每个不可约表示中至多出现一次, 这使得如果场 $\psi^+_\ell(x)$ 和 $\psi^-_\ell(x)$ 进行不可约变换, 那么除了一个总标度外, 它们是唯一的. 更一般地讲, 湮灭场或产生场中自由参量的数目(包括它们的总标度)等于场中不可约表示的数目.

可以直接证明由方程(5.1.21)和(5.1.22)给出的系数函数 $u_\ell(\mathbf{p},\sigma,n)$ 和 $v_\ell(\mathbf{p},\sigma,n)$, 以及满足方程(5.1.23)和(5.1.24)的 $u_\ell(0,\sigma,n)$ 和 $v_\ell(0,\sigma,n)$, 将自动满足更普遍的要求(5.1.19)和(5.1.20). 这留给读者作为一个练习.

我们现在回到集团分解原理. 在方程(5.1.9)中插入方程(5.1.17)和(5.1.18)并对 $\mathbf{x}$ 积分, 相互作用哈密顿量是

$$\begin{aligned}V=\sum_{NM}\int \mathrm{d}^3\mathbf{p}'_1\cdots\mathrm{d}^3\mathbf{p}'_N\,\mathrm{d}^3\mathbf{p}_1\cdots\mathrm{d}^3\mathbf{p}_M\sum_{\sigma'_1\cdots\sigma'_N}\sum_{\sigma_1\cdots\sigma_M}\sum_{n'_1\cdots n'_N}\sum_{n_1\cdots n_M}\\ \times a^\dagger(\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1)\cdots a^\dagger(\mathbf{p}'_N\sigma'_Nn'_N)a(\mathbf{p}_M\sigma_Mn_M)\cdots a(\mathbf{p}_1\sigma_1n_1)\\ \times \mathscr{V}_{NM}(\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1\cdots\mathbf{p}'_N\sigma'_Nn'_N\,,\,\mathbf{p}_1\sigma_1n_1\cdots\mathbf{p}_M\sigma_Mn_M)\end{aligned} \tag{5.1.27}$$

系数函数是

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_{NM}(\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1\cdots,\mathbf{p}_1\sigma_1n_1\cdots)=\delta^3(\mathbf{p}'_1+\cdots-\mathbf{p}_1-\cdots)\\ \times\tilde{\mathscr{V}}_{NM}(\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1\cdots,\mathbf{p}_1\sigma_1n_1\cdots)\,,\end{aligned} \tag{5.1.28}$$

其中

$$\begin{aligned}\tilde{\mathscr{V}}_{NM}(\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1\cdots\mathbf{p}'_N\sigma'_Nn'_N,\mathbf{p}_1\sigma_1n_1\cdots\mathbf{p}_M\sigma_Mn_M)=(2\pi)^{3-3N/2-3M/2}\\ \times\sum_{\ell'_1\cdots\ell'_N}\sum_{\ell_1\cdots\ell_M}g_{\ell'_1\cdots\ell'_N,\ell_1\cdots\ell_M}v_{\ell'_1}(\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1)\cdots v_{\ell'_N}(\mathbf{p}'_N\sigma'_Nn'_N)\\ \times u_{\ell_1}(\mathbf{p}_1\sigma_1n_1)\cdots u_{\ell_M}(\mathbf{p}_M\sigma_Mn_M)\,.\end{aligned} \tag{5.1.29}$$

相互作用的形式明显保证了生成的 S-矩阵满足集团分解原理: $\mathscr{V}_{NM}$ 有一个 δ-函数, 而系数 $\tilde{\mathscr{V}}_{NM}$ (至少对于有限多个的场类型)在零粒子动量时最多具有分支点奇异性. 事实上, 我们可以反过来讨论这个问题; 任何算符可以写成(5.1.27)中那样, 而集团分解原理要求系数 $\mathscr{V}_{NM}$ 像方程(5.1.28)那样写成一个动量守恒 δ-函数与光滑函数的乘积. 任何充分光滑的函数(但不是包含额外 δ-函数的函数)都可以表达成方程(5.1.29)中那样.† 因而, 集团分解原理加上 *Lorentz* 不变性使得很自然地应该用湮灭场和产生场构造相互作用密度.

如果我们所需要的只是构造满足集团分解原理的标量相互作用密度, 那么我们可以以任意多项式(5.1.9)的形式结合产生算符和湮灭算符, 其中耦合系数 $g_{\ell'_1\cdots\ell'_N,\ell_1\cdots\ell_M}$ 仅满足不变性条件(5.1.10)(以及一个合适的实条件). 然而, 为了使 S-矩阵是 Lorentz 不变的, 相互作用密度还要满足对易条件(5.1.3). 产生场和湮灭场的任意函数并不满足这一条件, 这是因为

$$[\psi^+_\ell(x),\psi^-_{\bar\ell}(y)]_\mp=(2\pi)^{-3}\sum_{\sigma\,n}\int \mathrm{d}^3p\,u_\ell(\mathbf{p},\sigma,n)v_{\bar\ell}(\mathbf{p},\sigma,n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)} \tag{5.1.30}$$

(如果场分量 $\psi^+_\ell(x)$ 和 $\psi^-_{\bar\ell}(y)$ 产生和湮灭的粒子是玻色子或费米子, 那么符号 $\mp$ 相应地表示对易子和反对易子,) 一般而言, 即使 $x-y$ 是类空的, 上式也不为零. 显然, 仅用产生场和湮灭场来构造相互作用密度是不可能避免这一问题的, 因为这样相互作用不可能厄米. 解决这一困难的唯一方法就是以线性组合的方式结合湮灭场和产生场:

$$\psi_\ell(x)\equiv\kappa_\ell\psi^+_\ell(x)+\lambda_\ell\psi^-_\ell(x)\,, \tag{5.1.31}$$

其中, 场中的常数 κ 和 λ 以及任何其它的任意常数都调整成: 对于类空的 $x-y$, 有

$$[\psi_\ell(x),\psi_{\ell'}(y)]_\mp=[\psi_\ell(x),\psi^\dagger_{\ell'}(y)]_\mp=0\,. \tag{5.1.32}$$

我们将在本章随后的各节中看到对各种不可约变换场如何做到这点. (通过在方程(5.1.31)中引入显式常数 κ 和 λ, 我们可以以任何形式, 只要它看起来方便, 去选择产生场和湮灭场的总标度.) 如果哈密顿量密度 $\mathscr{H}(x)$ 是由这样的场及它们的共轭构造的, 并且产生和湮灭费米子的场分量是偶数个, 那么它将满足对易关系(5.1.3).

条件(5.1.32)通常也称为因果律条件, 这是因为, 如果 $x-y$ 是类空的, 没有信号能从 x 到达 y, 这使得在点 x 处对 ψ_ℓ 的测量不应该被在点 y 处对 $\psi_{\ell'}$ 或 $\psi^\dagger_{\ell'}$ 的测量所影响. 这种因果律的考察对电磁场看上去是合理的, 它的任何一个分量在给定时空点都可以被测量, 就像 Bohr 和 Rosenfeld 在他们的经典论文中展示的那样.[2] 然而, 这里我们将要处理的场, 像电子的Dirac场, 看起来在任何意义下似乎都不是可测的. 这里采取的观点是, 方程(5.1.32)是 S-矩阵的 Lorentz 不变性所需要的, 对可测性或因果性没有做任何辅助假定.

在构造满足(5.1.32)的场(5.1.31)时有一个障碍. 这些场产生和湮灭的粒子携带一个或多个不为零的守恒量子数, 例如电荷. 例如, 如果种类 n 的粒子对于电荷 Q 的值为 $q(n)$, 那么

$$\begin{aligned}[Q,a(\mathbf{p},\sigma,n)]&=-q(n)a(\mathbf{p},\sigma,n)\,,\\ [Q,a^\dagger(\mathbf{p},\sigma,n)]&=+q(n)a^\dagger(\mathbf{p},\sigma,n)\,.\end{aligned}$$

†对于一般函数, 指标 ℓ 和 ℓ' 可能取遍整个无穷区间, 这里将 ℓ 和 ℓ' 限制在有限范围内的原因与可重整原理相关, 这将在第 12 章讨论.

为了使 $\mathscr{H}(x)$ 与电荷算符 Q (或者其它某个对称生成元)对易, 构造的场必须与 Q 有如下的简单对易关系:

$$[Q, \psi_\ell(x)] = -q_\ell \psi_\ell(x) \tag{5.1.33}$$

这样, 我们就可以用场 $\psi_{\ell_1}\psi_{\ell_2}\cdots$ 及其共轭 $\psi^\dagger_{m_1}\psi^\dagger_{m_2}\cdots$ 乘积的和来构造 $\mathscr{H}(x)$, 并使得

$$q_{\ell_1} + q_{\ell_2} + \cdots - q_{m_1} - q_{m_2} - \cdots = 0\,,$$

$\mathscr{H}(x)$ 也随之与 Q 对易. 现在, 当且仅当被场 $\psi^+_\ell(x)$ 消灭的所有种类 n 的粒子均携带相同电荷 $q(n) = q_\ell$, 方程(5.1.33)对湮灭场的特定分量 $\psi^+_\ell(x)$ 才是满足的, 并且, 当且仅当场 $\psi^-_\ell(x)$ 产生的所有种类 $\bar{n}$ 的粒子携带电荷均为 $q(\bar{n}) = -q_\ell$, 方程(5.1.33)对产生场的特定分量 $\psi^-_\ell(x)$ 才是满足的. 我们看到, 为了使这样的理论对类似电荷这样的量子数守恒, 对这种量子数有非零值的粒子种类必须成对: 如果湮灭场的一个特定分量湮灭一个种类为 n 的粒子, 那么产生场的相同分量必产生一个种类为 $\bar{n}$ 的粒子, 这个粒子称为 n 的*反粒子*, 它们所有守恒量子数的值均相反. *这就是存在反粒子的原因*.

如果表示 $D(\Lambda)$ 不是不可约的, 那么对这些场可以取如下的基: $D(\Lambda)$ 在这个基下沿主对角线分解成块, 使得属于不同分块的场在 Lorentz 变换下不能相互转换. 同时, Lorentz 变换不影响粒子种类. 因此, 取代考虑一个大的场, 其中包含许多不可约分量以及许多类粒子, 从现在起, 我们将集中考虑这样的场: 它仅湮灭一种粒子(扔掉指标 n)且只产生相应的反粒子, 并且在 Lorentz 群下进行不可约变换(以上所讨论的可以包含也可以不包含空间反演). 在这个理解下, 一般而言, 我们将必须考虑很多这样的场, 其中一些或许是由其它场的导数构成的. 在后面的各节中, 我们将确定系数函数 $u_\ell(\mathbf{p},\sigma)$ 和 $v_\ell(\mathbf{p},\sigma)$, 并确定常数 κ 与 λ 的比值, 并对属于 Lorentz 群的最简单不可约表示的场, 即属于标量表示, 矢量表示, 以及 Dirac 旋量表示的场, 我们将先导出这些场的粒子与反粒子性质之间的关系. 在这之后, 我们将对一个完整且普遍的不可约表示重复这个分析。

关于场方程的一些评述. 观察方程(5.1.31), (5.1.17)和(5.1.18), 它们表明, 一个有确定质量 m 的场, 它的所有分量都满足 Klein-Gordon 方程:

$$(\Box - m^2)\psi_\ell(x) = 0\,. \tag{5.1.34}$$

一些场同时还满足其它方程, 这取决于场分量是否多于独立粒子态. 传统上, 量子场论一般从场方程或者是导出它们的拉格朗日量出发, 然后利用它们来导出场的单粒子湮灭算符和产生算符表达式. 这里所使用的方法, 是从粒子出发, 并根据 Lorentz 不变性的要求导出场, 其中场方程几乎是偶然地作为该构造的副产品产生.

* * *

在这里必须提及一个技巧。根据 4.4 节中证明的定理, 保证理论满足集团分解原理的条件是: 相互作用可以表示成产生和湮灭算符乘积的和, 其中所有的产生算符处在所有湮灭算符的左边, 并且系数只包含一个动量守恒 δ-函数. 由于这个原因, 我们应将相互作用写成"正规编序"的形式

$$V = \int \mathrm{d}^3x :\mathscr{F}(\psi(x), \psi^\dagger(x)):\tag{5.1.35}$$

冒号表示括在其中的表达式被改写成了(略掉非零的对易子或反对易子, 但要包含置换费米算符产生的负号)所有的产生算符处在所有湮灭算符的左边的形式. 利用场的对易或反对易关系, 任何这

类场的正规编序函数也可以写为带有c-数系数的场的普通乘积之和. 以这种方式重写 $:\mathscr{F}:$ 会使得: 尽管是正规编序, 但如果它由满足方程(5.1.32)的场构成, 并且其中任意费米场分量的数量为偶数个, 那么当 $x-y$ 类空时, $:\mathscr{F}(\psi(x),\psi^\dagger(x)):$ 将显然与 $:\mathscr{F}(\psi(y),\psi^\dagger(y)):$ 对易.

5.2 因果标量场

我们首先考察单分量湮灭场 $\phi^+(x)$ 与单分量产生场 $\phi^-(x)$, 它们按照Lorentz 群的最简单表示——标量表示——进行变换, 这时有 $D(\Lambda)=1$. 只考虑旋转, 这正是旋转群的标量表示, 此时 $\mathscr{J}=0$, 所以方程(5.1.25)和(5.1.26)除 $j=0$ 外没有其它解, 在这种情况下, σ 和 $\bar\sigma$ 只能取零值. 因此标量场仅能描述零自旋的粒子. 再假定场仅描述一种粒子, 没有可以区分出来的反粒子(这样就可以扔掉种类指标 n, 自旋指标 σ 和场指标 ℓ), $u_\ell(0\sigma n)$ 与 $v_\ell(0\sigma n)$ 在这里仅是常数 $u(0)$ 和 $v(0)$. 调整湮灭场和产生场的总尺度使得这些常数均取为 $(2m)^{-1/2}$, 这将方便我们的讨论. 这样方程(5.1.21)和(5.1.22)就给出

$$u(\mathbf{p})=(2p^0)^{-1/2} \tag{5.2.1}$$

和

$$v(\mathbf{p})=(2p^0)^{-1/2}\,. \tag{5.2.2}$$

那么在标量情况下, 场(5.1.17)和(5.1.18)是

$$\phi^+(x)=\int \mathrm{d}^3p\,(2\pi)^{-3/2}(2p^0)^{-1/2}a(\mathbf{p})\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} \tag{5.2.3}$$

和

$$\phi^-(x)=\int \mathrm{d}^3p\,(2\pi)^{-3/2}(2p^0)^{-1/2}a^\dagger(\mathbf{p})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}=\phi^{+\dagger}(x)\,. \tag{5.2.4}$$

由 $\phi^+(x)$ 和 $\phi^-(x)$ 的多项式构成的哈密顿密度 $\mathscr{H}(x)$ 自动满足要求(5.1.9), 即按照一个标量变换. 仍待考察的是它是否满足 S-矩阵 Lorentz 不变性的另一条件, 即对于类空间隔 $x-y$, $\mathscr{H}(x)$ 与 $\mathscr{H}(y)$ 对易. 如果 $\mathscr{H}(x)$ 仅是 $\phi^+(x)$ 的多项式, 将不存在什么问题. 所有的湮灭算符对易或反对易, 所以对所有 x 和 y, 取决于这个粒子是玻色子还是费米子, $\phi^+(x)$ 与 $\phi^+(y)$ 分别对易或反对易:

$$[\phi^+(x),\phi^+(y)]_\mp=0\,. \tag{5.2.5}$$

因此, 对所有 x 和 y, 由 $\phi^+(x)$ 的多项式构成的任意哈密顿密度 $\mathscr{H}(x)$ (或者, 对费米子, 任何这样的偶次多项式)将与 $\mathscr{H}(y)$ 对易. 当然, 问题是, 为了保证厄米, $\mathscr{H}(x)$ 必须包含 $\phi^{+\dagger}(x)=\phi^-(x)$ 与 $\phi^+(x)$, 而对于一般的类空间隔, $\phi^+(x)$ 与 $\phi^-(y)$ 不对易或不反对易. 利用对易关系(玻色子)或反对易关系(费米子)(4.2.5), 我们有

$$[\phi^+(x),\phi^-(y)]_\mp=\int\frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3p'}{(2\pi)^3(2p^0\cdot 2p'^0)^{1/2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'\cdot y}\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,,$$

它会坍缩成一个积分

$$[\phi^+(x),\phi^-(y)]_\mp=\Delta_+(x-y)\,, \tag{5.2.6}$$

其中 Δ_+ 是标准函数

$$\Delta_+(x)\equiv\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{2p^0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\,. \tag{5.2.7}$$

它是明显Lorentz不变的, 因此对于类空的x, 它仅依赖不变平方$x^2>0$. 因此, 对于类空的x, 通过选择坐标系

$$x^0=0\,,\qquad |\mathbf{x}|=\sqrt{x^2}\,,$$

我们可以算出$\Delta_+(x)$. 这样方程(5.2.7)就给出

$$\begin{aligned}\Delta_+(x)&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{2\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\\&=\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\frac{p^2\mathrm{d}p}{2\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}}\,\frac{\sin(p\sqrt{x^2})}{p\sqrt{x^2}}\,.\end{aligned}$$

将积分变量变为$u\equiv p/m$, 这变成

$$\Delta_+(x)=\frac{m}{4\pi^2\sqrt{x^2}}\int_0^\infty\frac{u\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+1}}\,\sin(m\sqrt{x^2}u)\tag{5.2.8}$$

或者写成标准Hankel函数,

$$\Delta_+(x)=\frac{m}{4\pi^2\sqrt{x^2}}\,K_1\Big(m\sqrt{x^2}\Big)\,.\tag{5.2.9}$$

它不为零, 我们该如何处理呢? 注意到, 即使$\Delta_+(x)$不为零, 当$x^2>0$时, 它是x^μ的偶函数. 代替只用$\phi^+(x)$, 我们尝试以如下线性组合构造$\mathscr{H}(x)$

$$\phi(x)\equiv\kappa\phi^+(x)+\lambda\phi^-(x)\,.$$

利用方程(5.2.6), 那么对于类空的$x-y$, 我们有

$$\begin{aligned}[\phi(x),\phi^\dagger(y)]_\mp&=|\kappa|^2[\phi^+(x),\phi^-(y)]_\mp+|\lambda|^2[\phi^-(x),\phi^+(y)]_\mp\\&=(|\kappa|^2\mp|\lambda|^2)\Delta_+(x-y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\phi(x),\phi(y)]_\mp&=\kappa\lambda([\phi^+(x),\phi^-(y)]_\mp+[\phi^-(x),\phi^+(y)]_\mp)\\&=\kappa\lambda(1\mp1)\Delta_+(x-y)\,.\end{aligned}$$

当且仅当粒子是玻色子(即, 取上面的符号)且κ和λ大小相等

$$|\kappa|=|\lambda|\,,$$

这两个式子才为零. 重新定义态的相位, 使得$a(\mathbf{p})\to\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}a(\mathbf{p})$, $a^\dagger(\mathbf{p})\to\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}a^\dagger(\mathbf{p})$, 这样, $\kappa\to\kappa\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, $\lambda\to\lambda\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$, 我们可以改变$\kappa$和$\lambda$的相对相位. 令$\alpha=\frac{1}{2}\operatorname{Arg}(\lambda/\kappa)$, 以这种方式, 我们可以使$\kappa$和$\lambda$在相位上相等, 从而使得$\kappa$与$\lambda$相等.

重新定义$\phi(x)$以吸收总因子$\kappa=\lambda$, 我们就有

$$\phi(x)=\phi^+(x)+\phi^{+\dagger}(x)=\phi^\dagger(x)\,.\tag{5.2.10}$$

如果相互作用密度$\mathscr{H}(x)$由自伴标量场$\phi(x)$的正规编序多项式构成, 那么在类空间隔$x-y$上, $\mathscr{H}(x)$与$\mathscr{H}(y)$对易.

即便对方程(5.2.10)中相对相位的选择是个约定问题, 一旦采用了某个约定, 无论该粒子的标量场出现在相互作用哈密顿量密度中的什么地方, 都必须一直使用下去. 例如, 假定相互作用密度不仅包括场(5.2.10), 也包含同一粒子的另一标量场

$$\tilde{\phi}(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\phi^{+}(x) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\phi^{+\dagger}(x)$$

其中 α 是一任意相位. 同 ϕ 一样, 在 $x-y$ 类空时, $\tilde{\phi}(x)$ 与 $\tilde{\phi}(y)$ 对易, 在这个意义上, $\tilde{\phi}$ 是因果的, 但 $\tilde{\phi}(x)$ 与 $\phi(y)$ 在类空间隔上不对易, 因此这两个场不能同时出现在同一个理论中.

如果 $\phi(x)$ 所产生或湮灭的粒子携带电荷这样的守恒量子数, 那么, 当且仅当 $\mathscr{H}(x)$ 的每一项包含相同数目的 $a(\mathbf{p})$ 算符和 $a(\mathbf{p})^{\dagger}$ 算符时, $\mathscr{H}(x)$ 才会对该量子数守恒. 但是, 如果 $\mathscr{H}(x)$ 由 $\phi(x) = \phi^{+}(x) + \phi^{+\dagger}(x)$ 的多项式构成, 这是不可能的. 换一种方式来说, 为了使 $\mathscr{H}(x)$ 与电荷 Q (或其它某个对称生成元)对易, 构成 $\mathscr{H}(x)$ 的场与 Q 必须要有简单的对易关系. 对于 $\phi^{+}(x)$ 与它的伴, 这是正确的, 其中

$$\begin{aligned}[Q, \phi^{+}(x)]_{-} &= -q\phi^{+}(x)\,,\\ [Q, \phi^{+\dagger}(x)]_{-} &= +q\phi^{+\dagger}(x)\,,\end{aligned}$$

但是对自伴场(5.2.10)却不是这样.

为了解决这个问题, 我们必须假定存在两个无自旋玻色子, 它们具有相同的质量 m, 但电荷分别为 $+q$ 和 $-q$. 用 $\phi^{+}(x)$ 与 $\phi^{+\mathrm{c}}(x)$ 表示这两个粒子的湮灭场, 于是有*

$$\begin{aligned}[Q, \phi^{+}(x)]_{-} &= -q\phi^{+}(x)\,,\\ [Q, \phi^{+\mathrm{c}}(x)]_{-} &= +q\phi^{+\mathrm{c}}(x)\,.\end{aligned}$$

将 $\phi(x)$ 定义为线性组合

$$\phi(x) = \kappa\phi^{+}(x) + \lambda\phi^{+\mathrm{c}\dagger}(x)\,,$$

它与 Q 的对易关系显然与只有 $\phi^{+}(x)$ 时的对易关系相同

$$[Q, \phi(x)]_{-} = -q\phi(x)\,.$$

那么在类空间隔上, $\phi(x)$ 与其伴随场的对易子或反对易子为

$$\begin{aligned}[\phi(x), \phi^{\dagger}(y)]_{\mp} &= |\kappa|^2[\phi^{+}(x), \phi^{+\dagger}(y)] + |\lambda|^2[\phi^{+\mathrm{c}\dagger}(x), \phi^{+\mathrm{c}}(y)]_{\mp}\\ &= (|\kappa|^2 \mp |\lambda|^2)\Delta_{+}(x-y)\,,\end{aligned}$$

而 $\phi(x)$ 和 $\phi(y)$ 对所有的 x 和 y 都自动对易或反对易, 这是因为 ϕ^{+} 和 $\phi^{+\mathrm{c}\dagger}(x)$ 湮灭和产生的是不同粒子. 导出这个结果时, 我们默认粒子和反粒子具有相同的质量, 从而使得对易子或反对易子包含相同的函数 $\Delta_{+}(x-y)$. 费米统计在这里又一次被排除掉, 这是因为除非 $\kappa = \lambda = 0$, 否则 $\phi(x)$ 在类空间隔上不可能与 $\phi^{\dagger}(y)$ 反对易, 而这时场为零. 所以无自旋粒子必须是玻色子.

对玻色统计, 为了使复的 $\phi(x)$ 与 $\phi^{\dagger}(y)$ 在类空间隔上对易, 充要条件是 $|\kappa|^2 = |\lambda|^2$ 以及粒子和反粒子具有相同的质量. 通过重定义这两个粒子态的相对相位, 我们可以再一次赋予 κ 和 λ 以相同的相位, 在这种情况下 $\kappa = \lambda$. 这个共同的相位因子可以再一次通过重定义场 ϕ 消除掉, 使得

$$\phi(x) = \phi^{+}(x) + \phi^{\mathrm{c}+\dagger}(x)$$

*指标“c”代表“荷共轭”. 应该记住, 不携带守恒量子数的粒子可以是它自己的反粒子, 即 $a^{\mathrm{c}}(\mathbf{p}) = a(\mathbf{p})$, 也可以不是.

或者更细致些

$$\phi(x)=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^{3/2}(2p^0)^{1/2}}\left[a(\mathbf{p})\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}+a^{\mathrm{c}\dagger}(\mathbf{p})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\right]\,. \tag{5.2.11}$$

这本质上是唯一的因果标量场. 这个公式既可用于反粒子是其自身的纯中性无自旋粒子(在这种情况下, 取 $a^{\mathrm{c}}(\mathbf{p})=a(\mathbf{p})$), 也可用于反粒子不是自身的粒子(这时 $a^{\mathrm{c}}(\mathbf{p})\neq a(\mathbf{p})$).

为了将来的使用, 我们注意到这里复标量场与其伴随场的对易子为

$$[\phi(x),\phi^\dagger(y)]=\Delta(x-y)\,, \tag{5.2.12}$$

其中

$$\Delta(x-y)\equiv\Delta_+(x-y)-\Delta_+(y-x)=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{2p^0(2\pi)^3}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}]\,. \tag{5.2.13}$$

现在, 我们来考察各种反演对称性在这个场上的效应. 首先, 从 4.2 节的结果, 我们可以很容易地看到空间反演算符在产生算符和湮灭算符上的效应是:**

$$\mathsf{P}a(\mathbf{p})\mathsf{P}^{-1}=\eta^*a(-\mathbf{p})\,, \tag{5.2.14}$$

$$\mathsf{P}a^{\mathrm{c}\dagger}(\mathbf{p})\mathsf{P}^{-1}=\eta^{\mathrm{c}}a^{\mathrm{c}\dagger}(-\mathbf{p})\,, \tag{5.2.15}$$

其中 η 和 η^{c} 分别是粒子和反粒子的内禀宇称. 将这些结果用于湮灭场(5.2.3)和产生场(5.2.4)的荷共轭, 并将积分变量 $\mathbf{p}$ 变为 $-\mathbf{p}$, 我们看到

$$\mathsf{P}\phi^+(x)\mathsf{P}^{-1}=\eta^*\phi^+(\mathscr{P}x) \tag{5.2.16}$$

$$\mathsf{P}\phi^{+\mathrm{c}\dagger}(x)\mathsf{P}^{-1}=\eta^{\mathrm{c}}\phi^{+\mathrm{c}\dagger}(\mathscr{P}x)\,, \tag{5.2.17}$$

其中, 和前面一样, $\mathscr{P}x=(-\mathbf{x},x^0)$. 我们看到, 一般而言, 用空间反演算符作用标量场 $\phi(x)=\phi^+(x)+\phi^{+\mathrm{c}\dagger}(x)$ 将会给出另一个场 $\phi_P=\eta^*\phi^++\eta^{\mathrm{c}}\phi^{+\mathrm{c}\dagger}$. 两个场分别是因果的, 但如果 ϕ 与 $\phi_P^\dagger$ 出现在同一相互作用中, 因为它们在类空间隔上一般不对易, 那么我们就有麻烦了. 确保 Lorentz 不变性, 宇称守恒和相互作用的厄米性的唯一方法是: 要求 ϕ_P 正比于 ϕ, 因而

$$\eta^{\mathrm{c}}=\eta^*\,. \tag{5.2.18}$$

这就是说, 包含无自旋粒子和它反粒子的态的内禀宇称 $\eta\eta^{\mathrm{c}}$ 为偶. 我们现在就有

$$\mathsf{P}\phi(x)\mathsf{P}^{-1}=\eta^*\phi(\mathscr{P}x)\,. \tag{5.2.19}$$

当无自旋粒子的反粒子是其自身时, $\eta^{\mathrm{c}}=\eta$, 这些结果同样成立, 并且暗示了这种粒子的内禀宇称是实的: $\eta=\pm1$.

荷共轭可以用大致相同的方法处理. 由 4.2 节的结果, 我们有

$$\mathsf{C}a(\mathbf{p})\mathsf{C}^{-1}=\xi^*a^{\mathrm{c}}(\mathbf{p})\,, \tag{5.2.20}$$

$$\mathsf{C}a^{\mathrm{c}\dagger}(\mathbf{p})\mathsf{C}^{-1}=\xi^{\mathrm{c}}a^\dagger(\mathbf{p})\,, \tag{5.2.21}$$

** 我们省略了反演算符 $\mathsf{P},\mathsf{C},\mathsf{T}$ 的下标 0, 这是因为, 实际上在这些反演是好对称性的所有情况中, 在“入”态和“出”态上诱导出反演变换的算符和在自由粒子态上的相同.

其中 ξ 和 ξ^{c} 是荷共轭算符在单粒子态上作用附带的相位. 由此得出

$$\mathsf{C}\phi^{+}(x)\mathsf{C}^{-1}=\xi^{*}\phi^{+\mathrm{c}}(x)\,, \tag{5.2.22}$$

$$\mathsf{C}\phi^{+\mathrm{c}\dagger}(x)\mathsf{C}^{-1}=\xi^{\mathrm{c}}\phi^{+\dagger}(x)\,. \tag{5.2.23}$$

为了使 $\mathsf{C}\phi(x)\mathsf{C}^{-1}$ 正比于场 $\phi^{\dagger}(x)$, 这样它们在类空间隔上对易, 显然必须使

$$\xi^{\mathrm{c}}=\xi^{*}\,. \tag{5.2.24}$$

和通常的宇称一样, 对于由无自旋粒子及其反粒子构成的态, 态的内禀荷共轭宇称 $\xi\xi^{\mathrm{c}}$ 为偶. 我们现在就有

$$\mathsf{C}\phi(x)\mathsf{C}^{-1}=\xi^{*}\phi^{\dagger}(x)\,. \tag{5.2.25}$$

这些结果同样适用于反粒子为其自身的情况, 这时 $\xi^{\mathrm{c}}=\xi$. 在这种情况下, 像普通宇称一样, 荷共轭宇称一定是实的, $\xi=\pm1$.

最后, 我们考虑时间反演. 我们从 4.2 节得到

$$\mathsf{T}a(\mathbf{p})\mathsf{T}^{-1}=\zeta^{*}a(-\mathbf{p})\,, \tag{5.2.26}$$

$$\mathsf{T}a^{\mathrm{c}\dagger}(\mathbf{p})\mathsf{T}^{-1}=\zeta^{\mathrm{c}}a^{\mathrm{c}\dagger}(-\mathbf{p})\,. \tag{5.2.27}$$

回忆起 T 是反幺正的, 并再次将积分变量 $\mathbf{p}$ 变为 $-\mathbf{p}$, 我们发现

$$\mathsf{T}\phi^{+}(x)\mathsf{T}^{-1}=\zeta^{*}\phi^{+}(-\mathscr{P}x) \tag{5.2.28}$$

$$\mathsf{T}\phi^{+\mathrm{c}\dagger}(x)\mathsf{T}^{-1}=\zeta^{\mathrm{c}}\phi^{+\mathrm{c}\dagger}(-\mathscr{P}x)\,. \tag{5.2.29}$$

为了使 $\mathsf{T}\phi(x)\mathsf{T}^{-1}$ 与时间反演点 $-\mathscr{P}x$ 处的场 ϕ 有直接关系, 我们必须有

$$\zeta^{\mathrm{c}}=\zeta^{*} \tag{5.2.30}$$

以及随之的

$$\mathsf{T}\phi(x)\mathsf{T}^{-1}=\zeta^{*}\phi(-\mathscr{P}x)\,. \tag{5.2.31}$$

5.3 因果矢量场

现在我们着手处理下一个最简单的场, 它按照 4-矢变换, 是齐次 Lorentz 群最简单的非平庸表示. 现实中存在着有质量粒子 $W^{\pm}$ 和 Z^{0}, 它们在低能下由这种场描述并且它们在现代基本粒子物理中扮演日趋重要的角色, 所以这个例子不仅仅局限于教学. (另外, 尽管我们在这里仅考虑有质量的粒子, 但是建立量子电动力学的方法之一是, 在质量非常小的极限下, 用有质量矢量场描述光子.) 我们暂且将假定该场只描述一种粒子(扔掉种类指标 n); 然后我们将考虑场既描述粒子又描述不同于它的反粒子的可能性.

在 Lorentz 群的 4-矢表示中, 表示矩阵 $D(\Lambda)$ 的行与列由 4-分量指标 μ,ν 等标记, 有

$$D(\Lambda)^{\mu}{}_{\nu}=\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,. \tag{5.3.1}$$

矢量场的湮灭部分和产生部分写为:

$$\phi^{+\mu}(x)=\sum_{\sigma}(2\pi)^{-3/2}\int \mathrm{d}^3p\, u^{\mu}(\mathbf{p},\sigma)\, a(\mathbf{p},\sigma)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\,, \tag{5.3.2}$$

$$\phi^{-\mu}(x)=\sum_{\sigma}(2\pi)^{-3/2}\int \mathrm{d}^3p\, v^{\mu}(\mathbf{p},\sigma)\, a^{\dagger}(\mathbf{p},\sigma)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\,. \tag{5.3.3}$$

任意动量的系数函数 $u^{\mu}(\mathbf{p},\sigma)$ 和 $v^{\mu}(\mathbf{p},\sigma)$ 基于它们的零动量形式由方程(5.1.21)和(5.1.22)给定, 在这里写为

$$u^{\mu}(\mathbf{p},\sigma)=(m/p^0)^{1/2}L(p)^{\mu}{}_{\nu}u^{\nu}(0,\sigma)\,, \tag{5.3.4}$$

$$v^{\mu}(\mathbf{p},\sigma)=(m/p^0)^{1/2}L(p)^{\mu}{}_{\nu}v^{\nu}(0,\sigma)\,. \tag{5.3.5}$$

(我们对时空指标 μ,ν 等使用了通常的求和约定.) 另外, 零动量处的系数函数服从条件(5.1.25)和(5.1.26):

$$\sum_{\bar\sigma}u^{\mu}(0,\bar\sigma)\mathbf{J}^{(j)}_{\bar\sigma\sigma}=\mathscr{J}^{\mu}{}_{\nu}u^{\nu}(0,\sigma) \tag{5.3.6}$$

和

$$-\sum_{\bar\sigma}v^{\mu}(0,\bar\sigma)\mathbf{J}^{(j)*}_{\bar\sigma\sigma}=\mathscr{J}^{\mu}{}_{\nu}v^{\nu}(0,\sigma)\,. \tag{5.3.7}$$

4-矢表示中的转动生成元 $\mathscr{J}^{\mu}{}_{\nu}$ 由方程(5.3.1)给出

$$(\mathscr{J}_k)^0{}_0=(\mathscr{J}_k)^0{}_i=(\mathscr{J}_k)^i{}_0=0\,, \tag{5.3.8}$$

$$(\mathscr{J}_k)^i{}_j=-\mathrm{i}\epsilon_{ijk}\,, \tag{5.3.9}$$

其中 i,j,k 在这里取遍 $1,2,3$. 特别地, 我们注意到 $\mathscr{J}^2$ 有如下的形式

$$(\mathscr{J}^2)^0{}_0=(\mathscr{J}^2)^0{}_i=(\mathscr{J}^2)^i{}_0=0\,, \tag{5.3.10}$$

$$(\mathscr{J}^2)^i{}_j=2\delta^i{}_j\,. \tag{5.3.11}$$

于是由方程(5.3.6)和(5.3.7)得出

$$\sum_{\bar\sigma}u^0(0,\bar\sigma)(\mathbf{J}^{(j)})^2_{\bar\sigma\sigma}=0\,, \tag{5.3.12}$$

$$\sum_{\bar\sigma}u^i(0,\bar\sigma)(\mathbf{J}^{(j)})^2_{\bar\sigma\sigma}=2u^i(0,\sigma) \tag{5.3.13}$$

和

$$\sum_{\bar\sigma}v^0(0,\bar\sigma)(\mathbf{J}^{(j)*})^2_{\bar\sigma\sigma}=0\,, \tag{5.3.14}$$

$$\sum_{\bar\sigma}v^i(0,\bar\sigma)(\mathbf{J}^{(j)*})^2_{\bar\sigma\sigma}=2v^i(0,\sigma)\,. \tag{5.3.15}$$

另外, 我们回忆起熟悉的结果 $(\mathbf{J}^{(j)})^2_{\bar\sigma\sigma}=j(j+1)\delta_{\bar\sigma\sigma}$. 我们从方程(5.3.12)—(5.3.15)看到, 对于矢量场描述的粒子, 其自旋只有两种可能性: 要么 $j=0$, 这时在 $\mathbf{p}=0$ 处只有 u^0 和 v^0 是非零的, 要么 $j=1$(使得 $j(j+1)=2$), 这时在 $\mathbf{p}=0$ 处只有空间分量 u^i 和 v^i 是非零的. 我们来更仔细地研究一下这两种可能性.

自旋 0

通过对场归一化的合适选择, 我们可以令 $u^\mu(0)$ 和 $v^\mu(0)$ 仅存的非零分量有如下约定值

$$u^0(0) = \mathrm{i}(m/2)^{1/2}$$
$$v^0(0) = -\mathrm{i}(m/2)^{1/2}\,.$$

(指标 σ 在这里只能取零, 因而被扔掉了.) 那么对于一般动量, 方程(5.3.4)和(5.3.5)给出

$$u^\mu(\mathbf{p}) = \mathrm{i}p^\mu(2p^0)^{-1/2} \tag{5.3.16}$$

以及

$$v^\mu(\mathbf{p}) = -\mathrm{i}p^\mu(2p^0)^{-1/2}\,. \tag{5.3.17}$$

这里的矢量湮灭场和产生场只不过是上一节中对无自旋粒子定义的标量湮灭场和产生场 $\phi^\pm(x)$ 的导数:

$$\phi^{+\mu}(x) = \partial^\mu\phi^+(x) \qquad \phi^{-\mu}(x) = \partial^\mu\phi^-(x)\,. \tag{5.3.18}$$

显然无自旋粒子的因果矢量场也只是因果标量场的导数:

$$\phi^\mu(x) = \phi^{+\mu}(x) + \phi^{-\mu}(x) = \partial^\mu\phi(x)\,. \tag{5.3.19}$$

因此我们不需要进一步探索这种情况.

自旋 1

由方程(5.3.6)和(5.3.7), 我们立即看到 $\sigma = 0$ 的矢量 $u^i(0,0)$ 和 $v^i(0,0)$ 处在 3-方向上. 选择合适的场归一化可以使这些矢量有如下值

$$u^\mu(0,0) = v^\mu(0,0) = (2m)^{-1/2}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\,, \tag{5.3.20}$$

其中 4-矢分量始终以 $1,2,3,0$ 的顺序排列. 为了找到其它分量, 我们用方程(5.3.6), (5.3.7)和(5.3.9)计算上升下降算符 $J_1^{(1)} \pm \mathrm{i}J_2^{(1)}$ 在 u 和 v 上的作用. 这给出:

$$u^\mu(0,+1) = -v^\mu(0,-1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(2m)^{-1/2}\begin{bmatrix}1\\+\mathrm{i}\\0\\0\end{bmatrix}\,, \tag{5.3.21}$$

$$u^\mu(0,-1) = -v^\mu(0,+1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2m)^{-1/2}\begin{bmatrix}1\\-\mathrm{i}\\0\\0\end{bmatrix}\,. \tag{5.3.22}$$

现在使用方程(5.3.4)和(5.3.5)给出

$$u^{\mu}(\mathbf{p},\sigma)=v^{\mu *}(\mathbf{p},\sigma)=(2p^{0})^{-1/2}e^{\mu}(\mathbf{p},\sigma) \tag{5.3.23}$$

其中

$$e^{\mu}(\mathbf{p},\sigma)\equiv L^{\mu}{}_{\nu}(\mathbf{p})e^{\nu}(0,\sigma) \tag{5.3.24}$$

并有

$$e^{\mu}(0,0)=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\quad e^{\mu}(0,+1)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\+\mathrm{i}\\0\\0\end{bmatrix},\quad e^{\mu}(0,-1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-\mathrm{i}\\0\\0\end{bmatrix}. \tag{5.3.25}$$

湮灭场(5.3.2)和产生场(5.3.3)在这里是

$$\phi^{+\mu}(x)=\phi^{-\mu\dagger}(x)=(2\pi)^{-3/2}\sum_{\sigma}\int\frac{\mathrm{d}^{3}p}{\sqrt{2p^{0}}}\,e^{\mu}(\mathbf{p},\sigma)\,a(\mathbf{p},\sigma)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\,. \tag{5.3.26}$$

场 $\phi^{+\mu}(x)$ 和 $\phi^{+\nu}(y)$ 显然对于所有 x 和 y 对易(或反对易), 但是 $\phi^{+\mu}(x)$ 和 $\phi^{-\nu}(y)$ 却不是这样. 它们的对易子(对于玻色子)或反对易子(对于费米子)是

$$[\phi^{+\mu}(x),\phi^{-\nu}(y)]_{\mp}=\int\frac{\mathrm{d}^{3}p}{(2\pi)^{3}2p^{0}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}\,\Pi^{\mu\nu}(\mathbf{p}) \tag{5.3.27}$$

其中

$$\Pi^{\mu\nu}(\mathbf{p})\equiv\sum_{\sigma}e^{\mu}(\mathbf{p},\sigma)e^{\nu *}(\mathbf{p},\sigma)\,. \tag{5.3.28}$$

利用方程(5.3.25)可以直接计算出 $\Pi^{\mu\nu}(0)$ 是与时间方向垂直的空间上的投影矩阵, 方程(5.3.24)随之证明了 $\Pi^{\mu\nu}(\mathbf{p})$ 是与 4-矢 p^{μ} 方向垂直的空间上的矩阵:

$$\Pi^{\mu\nu}(\mathbf{p})=\eta^{\mu\nu}+p^{\mu}p^{\nu}/m^{2}\,. \tag{5.3.29}$$

那么, 利用上节定义的 Δ_{+} 函数, 对易子(或反对易子)(5.3.27)可以写为

$$[\phi^{+\mu}(x),\phi^{-\nu}(y)]_{\mp}=\left[\eta^{\mu\nu}-\frac{\partial^{\mu}\partial^{\nu}}{m^{2}}\right]\Delta_{+}(x-y)\,. \tag{5.3.30}$$

对于我们当前的目的, 这个表达式的关键是, 它对类空的 $x-y$ 不为零且关于 $x-y$ 是偶函数. 因此, 我们可以重复上一节寻求构造因果场的思路: 构造湮灭场和产生场的一个线性组合

$$v^{\mu}(x)\equiv\kappa\phi^{+\mu}(x)+\lambda\phi^{-\mu}(x)$$

它对类空的 $x-y$ 有,

$$[v^{\mu}(x),v^{\nu}(y)]_{\mp}=\kappa\lambda[1\mp 1]\left[\eta^{\mu\nu}-\frac{\partial^{\mu}\partial^{\nu}}{m^{2}}\right]\Delta_{+}(x-y)$$

以及

$$[v^{\mu}(x),v^{\nu\dagger}(y)]_{\mp}=(|\kappa|^{2}\mp|\lambda|^{2})\left[\eta^{\mu\nu}-\frac{\partial^{\mu}\partial^{\nu}}{m^{2}}\right]\Delta_{+}(x-y)\,.$$

为了使二者对于类空的 $x-y$ 都为零, 充要条件是自旋 1 的粒子是玻色子且 $|\kappa|=|\lambda|$. 通过对单粒子态相位的合适选择, 我们可以给 κ 和 λ 赋予相同的相位, 使得 $\kappa=\lambda$, 通过重新定义场的总归一化因子, 我们可以扔掉共同的因子 κ. 在做完这些之后, 我们发现自旋 1 的有质量粒子的矢量场是

$$v^{\mu}(x)=\phi^{+\mu}(x)+\phi^{+\mu\dagger}(x)\,. \tag{5.3.31}$$

我们注意到它是实的:

$$v^{\mu}(x)=v^{\mu\dagger}(x)\,. \tag{5.3.32}$$

然而, 如果粒子携带非零的守恒量子数 Q, 那么我们无法用这种场构造出 Q 守恒的相互作用. 我们反而要假定存在另一玻色子, 它与原先的玻色子具有相同的质量和自旋, 但携带相反的 Q 值, 并将因果场构造为

$$v^{\mu}(x)=\phi^{+\mu}(x)+\phi^{+\mathrm{c}\mu\dagger}(x) \tag{5.3.33}$$

或者更详细一些

$$\begin{aligned} v^{\mu}(x)=(2\pi)^{-3/2}\sum_{\sigma}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{\sqrt{2p^0}} \\ \times\left[e^{\mu}(\mathbf{p},\sigma)a(\mathbf{p},\sigma)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}+e^{\mu *}(\mathbf{p},\sigma)a^{\mathrm{c}\dagger}(\mathbf{p},\sigma)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\right], \end{aligned} \tag{5.3.34}$$

其中上标“c”表示算符产生的反粒子与 $\phi^{+\mu}(x)$ 湮灭的粒子荷共轭. 这仍然是一个因果场, 但不再是实的. 通过令 $a^{\mathrm{c}}(\mathbf{p})=a(\mathbf{p})$, 我们同样能将该公式用于纯中性的自旋 1 粒子, 这种粒子的反粒子是其自身. 在这两种情况下, 矢量场与其伴的对易子是

$$[v^{\mu}(x),v^{\nu\dagger}(y)]=\left[\eta^{\mu\nu}-\frac{\partial^{\mu}\partial^{\nu}}{m^2}\right]\Delta(x-y)\,, \tag{5.3.35}$$

其中 $\Delta(x-y)$ 是函数(5.2.13).

对有质量的自旋 1 粒子, 我们构造的实场和复场都满足有趣的场方程. 首先, 因为方程(5.3.26)中指数上的 p^{μ} 满足 $p^2=-m^2$, 所以场满足 Klein-Gordon 方程:

$$(\Box-m^2)v^{\mu}(x)=0\,, \tag{5.3.36}$$

这与标量场相同. 另外, 因为方程(5.3.24)显示出

$$e^{\mu}(\mathbf{p},\sigma)\,p_{\mu}=0\,, \tag{5.3.37}$$

我们现在有另一方程

$$\partial_{\mu}v^{\mu}(x)=0\,. \tag{5.3.38}$$

在质量很小的极限下, 方程(5.3.36)和(5.3.38)正是电动力学 4-矢势在所谓 Lorentz 规范下的方程.

然而, 我们无法通过让质量趋于零从有质量自旋 1 粒子的任何理论中获得电动力学. 这一点可以通过考察相互作用密度 $\mathscr{H}=J_{\mu}v^{\mu}$ 产生自旋 1 粒子的速率看出来, 其中 J_{μ} 是任意 4-矢流. 对矩阵元取平方并对自旋 1 粒子的自旋 z-分量求和, 这给出的速率正比于

$$\sum_{\sigma}|\langle J_{\mu}\rangle e^{\mu}(p,\sigma)^*|^2=\langle J_{\mu}\rangle\langle J_{\nu}\rangle^*\Pi^{\mu\nu}(\mathbf{p})\,,$$

其中 $\mathbf{p}$ 是出射自旋 1 粒子的动量, 而 $\langle J_\mu\rangle$ 是流(例如在 $x=0$ 处)在所有其它粒子的初态和末态之间的矩阵元. $\Pi^{\mu\nu}(\mathbf{p})$ 中的 $p^\mu p^\nu/m^2$, 一般而言, 会在 $m\to 0$ 时引起发射速率爆炸. 避免这一灾难的唯一方法是令 $\langle J_\mu\rangle p^\mu$ 为零, 这在坐标空间就是要求: 流 J^μ 必须是守恒的, 也就是说 $\partial_\mu J^\mu=0$. 事实也的确如此, 对流守恒的要求可以通过对态的简单计数看到. 一个有质量自旋 1 粒子有三个自旋态, 可以取成螺旋度为 $+1,0,-1$ 的态, 而任何无质量自旋 1 粒子, 例如光子, 只能有螺旋度 $+1$ 和 -1: 流守恒条件正好确保了自旋 1 粒子的零螺旋度态在零质量极限下不被发射.

同上节讨论的标量场一样, 反演可以以大致相同的方式处理. 为了计算空间反演的效应, 我们需要 $e^\mu(\mathbf{p},\sigma)$ 的公式. 利用 $L^\mu{}_\nu(-\mathbf{p})=\mathscr{P}^\mu{}_\rho L^\rho{}_\tau(\mathbf{p})\mathscr{P}^\tau{}_\nu$ 以及方程(5.3.24), 我们有

$$e^\mu(-\mathbf{p},\sigma)=-\mathscr{P}^\mu{}_\nu e^\nu(\mathbf{p},\sigma)\,. \tag{5.3.39}$$

另外, 为了计算时间反演的效应, 我们需要 $(-1)^{1+\sigma}e^{\mu*}(-\mathbf{p},-\sigma)$ 的公式. 利用 $(-1)^{1+\sigma}e^{\mu*}(0,-\sigma)=-e^\mu(0,\sigma)$ 以及前面 $L^\mu{}_\nu(-\mathbf{p})$ 的公式, 我们发现

$$(-1)^{1+\sigma}e^{\mu*}(-\mathbf{p},-\sigma)=\mathscr{P}^\mu{}_\nu\, e^\nu(\mathbf{p},\sigma)\,. \tag{5.3.40}$$

利用这些结果以及 4.2 节给出的产生湮灭算符的变换性质, 我们可以直接解出产生场和湮灭场的反演性质. 我们再一次发现, 为了使变换后的因果场在类空间隔上对易, 必须要求自旋 1 粒子和其反粒子的内禀空间反演相位, 荷共轭相位和时间反演相位有如下关系

$$\eta^{\mathrm{c}}=\eta^*\,, \tag{5.3.41}$$

$$\xi^{\mathrm{c}}=\xi^*\,, \tag{5.3.42}$$

$$\zeta^{\mathrm{c}}=\zeta^*\,. \tag{5.3.43}$$

(特别地, 如果自旋 1 粒子的反粒子是其本身, 则所有相位必须是实的.) 满足了这些相位条件, 我们的因果矢量场(5.3.34)就有反演变换性质

$$\mathsf{P}v^\mu(x)\mathsf{P}^{-1}=-\eta^*\mathscr{P}^\mu{}_\nu v^\nu(\mathscr{P}x)\,, \tag{5.3.44}$$

$$\mathsf{C}v^\mu(x)\mathsf{C}^{-1}=\xi^* v^{\mu\dagger}(x)\,, \tag{5.3.45}$$

$$\mathsf{T}v^\mu(x)\mathsf{T}^{-1}=\zeta^*\mathscr{P}^\mu{}_\nu v^\nu(-\mathscr{P}x)\,. \tag{5.3.46}$$

特别地, 方程(5.3.44)中的负号意味着, 对于按照极矢量变换的矢量场, 矩阵 $\mathscr{P}^\mu{}_\nu$ 没有额外的相位或正负号, 因而描述的是内禀宇称 $\eta=-1$ 的自旋 1 粒子.

5.4 Dirac 形式体系

在齐次 Lorentz 群的所有表示中, 有一个表示在物理中扮演了特殊的角色. 正如我们在 1.1 节中看到的, 这个表示被 Dirac 引入到电子的理论中,[3] 但是像通常一样, 数学家在这之前就已经知道它了,[4] 这是因为它为任意维旋转群或 Lorentz 群(实际上是它们的覆盖群——见 2.7 节)的两大类表示中的一类提供了基. 从我们在这里所遵循的观点看, 齐次 Lorentz 群的表示决定了按照该群变换的量子场的结构和性质, 所以, 按照它首次出现在数学中的方式, 而不是按照 Dirac 引入的方式, 来描述 Dirac 形式体系对于我们来说更加自然.

对于齐次 Lorentz 群的一个表示, 我们通常是指一组满足群乘积法则的矩阵 $D(\Lambda)$

$$D(\bar{\Lambda})D(\Lambda) = D(\bar{\Lambda}\Lambda)\,.$$

就像处理幺正算符 $U(\Lambda)$ 那样, 我们可以通过考察无限小情形来研究这些矩阵的性质,

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}\,, \tag{5.4.1}$$

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}\,, \tag{5.4.2}$$

这时

$$D(\Lambda) = 1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}\,\mathscr{J}^{\mu\nu} \tag{5.4.3}$$

其中 $\mathscr{J}^{\mu\nu} = -\,\mathscr{J}^{\nu\mu}$ 是一组满足对易关系(2.4.12)的矩阵:

$$\mathrm{i}[\mathscr{J}^{\mu\nu}, \mathscr{J}^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho}\,\mathscr{J}^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}\,\mathscr{J}^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu}\,\mathscr{J}^{\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu}\,\mathscr{J}^{\rho\mu}\,. \tag{5.4.4}$$

为了找到这样一组矩阵, 假定我们先构造出了满足如下反对易关系的矩阵 γ^{μ}

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2\eta^{\mu\nu} \tag{5.4.5}$$

并试定义

$$\mathscr{J}^{\mu\nu} = -\frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]\,, \tag{5.4.6}$$

利用方程(5.4.5)不难证明

$$[\mathscr{J}^{\mu\nu}, \gamma^{\rho}] = -\mathrm{i}\gamma^{\mu}\eta^{\nu\rho} + \mathrm{i}\gamma^{\nu}\eta^{\mu\rho} \tag{5.4.7}$$

由此我们不难看出方程(5.4.6)确实满足期望的对易关系(5.4.4). 我们进一步假定矩阵 γ_{μ} 是**不可约的**; 即, 不存在在所有这些矩阵下不变的真子空间. 否则, 我们可以选择更小的一组场分量, 它像方程(5.4.3)和(5.4.6)中那样变换, 并有一组不可约的 γ_{μ}.

任何一组满足类似方程(5.4.5)(或者它的欧几里得类比, 也就是将 $\eta_{\mu\nu}$ 替换成克罗内克 δ-符号)的关系的矩阵, 被称为 *Clifford* (克利福德)代数. 齐次 Lorentz 群(或者, 更精确些, 它的覆盖群)的这个特殊表示的数学重要性源于如下事实(见 5.6 节): Lorentz 群最一般的不可约表示要么是张量, 要么是按照方程(5.4.3)和(5.4.6)变换的旋量, 要么是一个张量和一个旋量的直积.

对易关系(5.4.7)可以被总结为: γ^{ρ} 是**矢量**, 也就是说方程(5.4.3)满足

$$D(\Lambda)\gamma^{\rho}D^{-1}(\Lambda) = \Lambda_{\sigma}{}^{\rho}\gamma^{\sigma}\,. \tag{5.4.8}$$

在同样的意义下, 单位矩阵就是**标量**

$$D(\Lambda)\mathbf{1}D^{-1}(\Lambda) = \mathbf{1} \tag{5.4.9}$$

而方程(5.4.4)表明 $\mathscr{J}^{\rho\sigma}$ 是**反对称张量**

$$D(\Lambda)\,\mathscr{J}^{\rho\sigma}D^{-1}(\Lambda) = \Lambda_{\mu}{}^{\rho}\Lambda_{\nu}{}^{\sigma}\,\mathscr{J}^{\mu\nu}\,. \tag{5.4.10}$$

用矩阵 γ^{μ} 可以构造出其它全反对称张量

$$\mathscr{A}^{\rho\sigma\tau} \equiv \gamma^{[\rho}\gamma^{\sigma}\gamma^{\tau]}\,, \tag{5.4.11}$$

$$\mathscr{P}^{\rho\sigma\tau\eta} = \gamma^{[\rho}\gamma^{\sigma}\gamma^{\tau}\gamma^{\eta]} \,. \tag{5.4.12}$$

这里的中括号是标准记法, 表明我们对括号内指标的所有置换求和, 而对求和中偶置换和奇置换要分别加上正号和负号. 例如, 方程(5.4.11)是下式的简单记法

$$\begin{aligned}\mathscr{A}^{\rho\sigma\tau} \equiv{}& \gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma^{\tau} - \gamma^{\rho}\gamma^{\tau}\gamma^{\sigma} - \gamma^{\sigma}\gamma^{\rho}\gamma^{\tau} \\ &+ \gamma^{\tau}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma} + \gamma^{\sigma}\gamma^{\tau}\gamma^{\rho} - \gamma^{\tau}\gamma^{\sigma}\gamma^{\rho} \,.\end{aligned}$$

通过重复使用方程(5.4.5), 我们可以将 γ 的任何乘积写成 γ 的反对称乘积乘以度规张量乘积的和, 所以对于用 Dirac 矩阵构造出的任何矩阵集合, 全反对称张量构成了一个完全基.

这个形式体系自动包含了一个宇称变换, 通常取为

$$\beta \equiv \mathrm{i}\gamma^{0} \,. \tag{5.4.13}$$

作用在 Dirac 矩阵上给出

$$\beta\gamma^{i}\beta^{-1} = -\gamma^{i} \,, \qquad \beta\gamma^{0}\beta^{-1} = +\gamma^{0} \,. \tag{5.4.14}$$

(我们这里的指标使 μ 取遍值 $0, 1, 2, \cdots$.) 作用在 γ 矩阵的任意乘积上, 取决于乘积中带空间指标的 γ 是偶数个还是奇数个, 相同的相似变换仅产生正号或负号. 特别地,

$$\beta\,\mathscr{J}^{ij}\beta^{-1} = \mathscr{J}^{ij} \,, \tag{5.4.15}$$

$$\beta\,\mathscr{J}^{i0}\beta^{-1} = -\mathscr{J}^{i0} \,. \tag{5.4.16}$$

迄今为止, 本节中的一切结果适用于任何时空维数以及任意"度规" $\eta_{\mu\nu}$. 然而, 四维时空有一特征, 即全反对称张量的指标不能超过 4 个, 所以张量序列 $\mathbf{1}, \gamma^{\rho}, \mathscr{J}^{\rho\sigma}, \mathscr{A}^{\rho\sigma\tau}, \cdots$ 终结于张量(5.4.12). 进一步, 这些张量在 Lorentz 变换和(或)宇称变换下的变换并不相同, 所以它们是完全线性独立的.* 这些张量的线性独立分量的数目是: $\mathbf{1}$ 有 1 个, γ^{ρ} 有 4 个, $\mathscr{J}^{\rho\sigma}$ 有 6 个, $\mathscr{A}^{\rho\sigma\tau}$ 有 4 个, $\mathscr{P}^{\mu\nu\rho\sigma}$ 有1个, 总共是 16 个独立分量. (普遍规则是, 对于d-维中带有 n 个指标的全反对称张量, 其独立分量的数目等于二项式系数 $d!/n!(d-n)!$) 独立的 $\nu\times\nu$ 矩阵最多有 ν^2 个, 所以它们必须至少有 $\sqrt{16} = 4$ 行和 4 列. 维数最小的 Dirac 矩阵必须是不可约的; 如果可约, 在这些矩阵下不变的子空间将构成维数更低的表示. 因此我们将 γ 矩阵取为 4×4 矩阵.

(更普遍地, 若时空维数是任意偶数 d, 那么可以建立有 $0, 1, \cdots, d$ 个指标的反对称张量, 它们包含的独立分量个数总共为

$$\sum_{n=0}^{d} \frac{d!}{n!(d-n)!} = 2^{d} \,,$$

所以 γ-矩阵至少必须有 $2^{d/2}$ 个行和列. 在奇数维空间或时空中, n 秩和 $d-n$ 秩的全反对称张量通过如下条件线性相关**

$$\gamma^{[\mu_1}\gamma^{\mu_2}\cdots\gamma^{\mu_r]} \propto \epsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_d}\gamma_{[\mu_{r+1}}\gamma_{\mu_{r+2}}\cdots\gamma_{\mu_d]} \,,$$

*换一种看法, 也可以通过它们构成正交基来证明它们是线性独立的, 其中两个矩阵的标量积定义为它们乘积的迹. 注意, 这些矩阵没有一个为零, 这是因为这些张量的每个分量正比于不同 γ-矩阵的乘积, 并且这种乘积的平方等于正的或负的相应的平方的乘积, 因而等于 ± 1.

**这一约束并不妨碍在奇数维时空中 Lorentz 群对 Dirac 表示引入空间反演, 这是因为, 这里的张量 $\epsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_d}$ 在空间坐标的反演下为偶. 如果我们不关心空间反演, 通过附加上述将 r 个与 $d-r$ 个 Dirac 矩阵的反对称化积关联起来的条件, 我们也能在偶数维时空中构造出固有正时 Lorentz 群的 $2^{(d-1)/2}$-维不可约表示. 方程(5.4.19)和(5.4.20)中的子矩阵会在下面提供一个例子.

其中 $r = 0, 1, 2, \cdots, d-1$, $\epsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_d}$ 全反对称, 左边在 $r = 0$ 时取为单位矩阵. 在这些条件下, 仅有 2^{d-1} 个独立张量, 这要求 γ-矩阵的最低维数为 $2^{(d-1)/2}$.)

现在回到 4 维时空, 我们将选择一组显式的 4×4 的 γ-矩阵. 一个非常方便的选择是

$$\gamma^0 = -\mathrm{i}\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\gamma} = -\mathrm{i}\begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{bmatrix}, \tag{5.4.17}$$

其中 $\mathbf{1}$ 是 2×2 单位矩阵, 而 $\boldsymbol{\sigma}$ 的分量是通常的 Pauli 矩阵

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5.4.18}$$

(σ_i 就是三维中的 2×2 的 γ-矩阵.) 可以证明,[5] 任何其它一组不可约的 γ-矩阵与此只相差一个相似变换. 从方程(5.4.17)中, 我们可以简单地计算出 Lorentz 群生成元(5.4.6):

$$\mathscr{J}^{ij} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\begin{bmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{bmatrix} \tag{5.4.19}$$

$$\mathscr{J}^{i0} = +\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{bmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{bmatrix}. \tag{5.4.20}$$

(其中, ϵ_{ijk} 是三维中的全反对称张量, $\epsilon_{123} \equiv +1$.) 我们注意到它们是分块对角的, 所以 Dirac 矩阵固有正时 Lorentz 群提供了一个可约表示, 即两个不可约表示的直和, 这两个表示分别有 $\mathscr{J}^{ij} = \pm\mathrm{i}\epsilon_{ijk}\mathscr{J}^{k0}$.

将全反对称张量(5.4.11)和(5.4.12)写成一种更简单的形式将更加方便. 矩阵(5.4.12)是全反对称矩阵, 因而正比于赝张量 $\epsilon^{\rho\sigma\tau\eta}$, 这个赝张量被定义为一个全反对称量, 有 $\epsilon^{0123} = +1$. 令 ρ, σ, τ, η 分别等于 $0, 1, 2, 3$, 我们看到

$$\mathscr{P}^{\rho\sigma\tau\eta} = 4!\,\mathrm{i}\,\epsilon^{\rho\sigma\tau\eta}\gamma_5\,, \tag{5.4.21}$$

其中

$$\gamma_5 \equiv -\mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\,. \tag{5.4.22}$$

矩阵 γ_5 是赝标量, 也就是说

$$[\mathscr{J}^{\rho\sigma}, \gamma_5] = 0\,, \tag{5.4.23}$$

$$\beta\gamma_5\beta^{-1} = -\gamma_5\,. \tag{5.4.24}$$

类似地, $\mathscr{A}^{\rho\sigma\tau}$ 必须正比于 $\epsilon^{\rho\sigma\tau\eta}$ 与某个矩阵 $\mathscr{A}_\eta$ 的收缩, 令 ρ, σ, τ 依次等于 $0, 1, 2$ 或 $0, 1, 3$ 或 $0, 2, 3$ 或 $1, 2, 3$, 我们发现

$$\mathscr{A}^{\rho\sigma\tau} = 3!\,\mathrm{i}\,\epsilon^{\rho\sigma\tau\eta}\gamma_5\gamma_\eta\,. \tag{5.4.25}$$

因此, 16 个独立的 4×4 矩阵可以取为标量 $\mathbf{1}$, 矢量 γ^ρ, 反对称张量 $\mathscr{J}^{\rho\sigma}$, "轴"矢量 $\gamma_5\gamma_\eta$ 以及赝标量 γ_5. 很容易看到矩阵 γ_5 的平方等于 $\mathbf{1}$

$$\gamma_5{}^2 = \mathbf{1} \tag{5.4.26}$$

并与所有 γ^μ 反对易

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0\,. \tag{5.4.27}$$

记成 γ_5 是非常恰当的, 因为反对易关系(5.4.26)和(5.4.27), 再加上方程(5.4.5), 它们合在一起表明了 $\gamma^0,\gamma^1,\gamma^2,\gamma^3,\gamma_5$ 给出了五维时空中的 Clifford 代数. 对于 γ-矩阵的特定 4×4 表示(5.4.17), 矩阵 γ_5 是

$$\gamma_5=\begin{bmatrix}\mathbf{1}&0\\0&-\mathbf{1}\end{bmatrix}. \tag{5.4.28}$$

这个表示是方便的, 因为它将 $\mathscr{J}^{\rho\sigma}$ 和 γ_5 简化成了分块对角形式. 我们将会看到, 这使它在 $v\to c$ 的极端相对论极限下处理粒子时非常有用. (但这不是 1.1 节中 Dirac 最初引入的表示, 这是因为 Dirac 关注的是原子中的电子, 那里 $v\ll c$, 而在这种情况下, 将 γ^0 而非 γ_5 取成对角形式将更加方便.)

我们这里构造的齐次 Lorentz 群的表示不是幺正的, 这是因为生成元 $\mathscr{J}^{\rho\sigma}$ 无法全部表示成厄米矩阵. 特别地, 在表示(5.4.17)中, $\mathscr{J}^{ij}$ 是厄米的, 但 $\mathscr{J}^{i0}$ 是反厄米的. 通过引入方程(5.4.13)中的矩阵 $\beta\equiv i\gamma^0$, 这种实条件可以非常方便地写成明显 Lorentz 不变的形式, β 在表示(5.4.17)中的形式为

$$\beta=\begin{bmatrix}0&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&0\end{bmatrix}. \tag{5.4.29}$$

观察方程(5.4.17), 它给出

$$\beta\gamma^{\mu\dagger}\beta=-\gamma^\mu \tag{5.4.30}$$

从而有

$$\beta\,\mathscr{J}^{\rho\sigma\dagger}\beta=\mathscr{J}^{\rho\sigma}. \tag{5.4.31}$$

因此, 尽管不幺正, 但矩阵 $D(\Lambda)$ 满足赝幺正关系

$$\beta\,D(\Lambda)^\dagger\,\beta=D(\Lambda)^{-1}. \tag{5.4.32}$$

另外, γ_5 厄米且与 β 反对易, 所以

$$\beta\gamma_5^\dagger\beta=-\gamma_5 \tag{5.4.33}$$

由此得出

$$\beta(\gamma_5\gamma_\mu)^\dagger\beta=-\gamma_5\gamma_\mu. \tag{5.4.34}$$

Dirac 矩阵及其相关矩阵还有重要的对称性质. 观察方程(5.4.17)和(5.4.18), 可以看出 γ_μ 对 $\mu=0,2$ 对称, 对 $\mu=1,3$ 反对称, 所以

$$\gamma_\mu^{\mathrm{T}}=-\mathscr{C}\gamma_\mu\mathscr{C}^{-1}, \tag{5.4.35}$$

其中 T 表示转置, 并且

$$\mathscr{C}\equiv\gamma_2\beta=-\mathrm{i}\begin{bmatrix}\sigma_2&0\\0&-\sigma_2\end{bmatrix}. \tag{5.4.36}$$

由此立即得出

$$\mathscr{J}_{\mu\nu}^{\mathrm{T}}=-\mathscr{C}\,\mathscr{J}_{\mu\nu}\mathscr{C}^{-1}, \tag{5.4.37}$$

$$\gamma_5^{\mathrm{T}}=+\mathscr{C}\gamma_5\mathscr{C}^{-1}, \tag{5.4.38}$$

$$(\gamma_5\gamma_\mu)^{\mathrm{T}}=+\mathscr{C}\gamma_5\gamma_\mu\mathscr{C}^{-1}. \tag{5.4.39}$$

我们在下一节考察不同流的荷共轭性质时, 这些符号将会体现出它们的重要性. 当然, 我们可以结合转置和共轭以获得 Dirac 矩阵及相关矩阵的复共轭:

$$\gamma_\mu^* = \beta\mathscr{C}\gamma_\mu\mathscr{C}^{-1}\beta\,, \tag{5.4.40}$$

$$\mathscr{J}_{\mu\nu}^* = -\beta\mathscr{C}\,\mathscr{J}_{\mu\nu}\mathscr{C}^{-1}\beta\,, \tag{5.4.41}$$

$$\gamma_5^* = -\beta\mathscr{C}\gamma_5\mathscr{C}^{-1}\beta\,, \tag{5.4.42}$$

$$(\gamma_5\gamma_\mu)^* = -\beta\mathscr{C}\gamma_5\gamma_\mu\mathscr{C}^{-1}\beta\,. \tag{5.4.43}$$

5.5 因果 Dirac 场

对于现在要构造的粒子湮灭场和反粒子产生场, 我们希望它们在 Lorentz 群下按照上节讨论的 Dirac 表示进行变换. 一般而言, 它们取方程(5.1.17)和(5.1.18)所给的形式:

$$\psi_\ell^+(x) = (2\pi)^{-3/2}\sum_\sigma\int \mathrm{d}^3p\, u_\ell(\mathbf{p},\sigma)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}a(\mathbf{p},\sigma) \tag{5.5.1}$$

和

$$\psi_\ell^{-\mathrm{c}}(x) = (2\pi)^{-3/2}\sum_\sigma\int \mathrm{d}^3p\, v_\ell(\mathbf{p},\sigma)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}a^{\mathrm{c}\dagger}(\mathbf{p},\sigma)\,. \tag{5.5.2}$$

在这里省略了粒子种类指标. 为了计算这些式子中的系数函数 $u_\ell(\mathbf{p},\sigma)$ 和 $v_\ell(\mathbf{p},\sigma)$, 我们必须先利用方程(5.1.25)和(5.1.26)找到动量为零时的 u_ℓ 和 v_ℓ, 然后利用方程(5.1.21)和(5.1.22)计算出任意动量时的 u_ℓ 和 v_ℓ, 在这两种情况中, $D_{\bar\ell\ell}(\Lambda)$ 都是上节讨论的齐次 Lorentz 群的 4×4 Dirac 表示。

利用方程(5.4.19), 零动量条件(5.1.25)和(5.1.26)为*

$$\sum_{\bar\sigma} u_{\bar m\pm}(0,\bar\sigma)\mathbf{J}^{(j)}_{\bar\sigma\sigma} = \sum_m \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_{\bar m m}u_{m\pm}(0,\sigma)$$

和

$$-\sum_{\bar\sigma} v_{\bar m\pm}(0,\bar\sigma)\mathbf{J}^{(j)*}_{\bar\sigma\sigma} = \sum_m \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_{\bar m m}v_{m\pm}(0,\sigma)\,.$$

换句话说, 如果我们把 $u_{m\pm}(0,\sigma)$ 和 $v_{m\pm}(0,\sigma)$ 看成是矩阵 $U_\pm$ 和 $V_\pm$ 的 m,σ 元, 那么我们就有如下矩阵表示

$$U_\pm\mathbf{J}^{(j)} = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}U_\pm \tag{5.5.3}$$

和

$$-V_\pm\mathbf{J}^{(j)*} = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}V_\pm\,. \tag{5.5.4}$$

现在, $(2j+1)$-维表示矩阵 $\mathbf{J}^{(j)}$ 和 $-\mathbf{J}^{(j)*}$ 以及 2×2 矩阵 $\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$ 都提供了旋转群 Lie 代数的不可约表示. 群论中有一个称为 Schur 引理[6]的一般定理, 它告诉我们, 当一个矩阵像 $U_\pm$ 或 $V_\pm$ 这样方程(5.5.3)和(5.5.4)中的方式联系两个表示, 那么这个矩阵要么为零(这里对这种可能性

*我们在这里扔掉了种类指标 n, 并将 4-分量指标 ℓ 替换成一对指标, 一个是 2 值指标 m, 用来标记方程(5.4.19)和(5.4.20)中的子矩阵的行与列; 另一个指标取值 $\pm$, 用来标记方程(5.4.19)和(5.4.20)中的超矩阵的行与列.

不感兴趣)要么是非奇异的方阵. 因此, Dirac场仅能描述自旋$j = \frac{1}{2}$的粒子(使得$2j+1 = 2$), 并且矩阵$\mathbf{J}^{(1/2)}$和$-\mathbf{J}^{(1/2)*}$与$\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$只相差一个相似变换. 事实上, 在旋转生成元的标准表示(2.5.21)和(2.5.22)中, 我们有$\mathbf{J}^{(1/2)} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$和$-\mathbf{J}^{(1/2)*} = \frac{1}{2}\sigma_2\boldsymbol{\sigma}\sigma_2$. 由此得出$U_\pm$和$V_\pm\sigma_2$必须与$\boldsymbol{\sigma}$对易, 因而正比于单位矩阵:

$$u_{m\pm}(0,\sigma) = c_\pm\delta_{m\sigma}\,, \qquad v_{m\pm}(0,\sigma) = -\mathrm{i}d_\pm(\sigma_2)_{m\sigma}\,. \tag{5.5.5}$$

换句话说

$$u(0,\tfrac{1}{2}) = \begin{bmatrix} c_+ \\ 0 \\ c_- \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad u(0,-\tfrac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 0 \\ c_+ \\ 0 \\ c_- \end{bmatrix},$$

$$v(0,\tfrac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 0 \\ d_+ \\ 0 \\ d_- \end{bmatrix}, \qquad v(0,-\tfrac{1}{2}) = -\begin{bmatrix} d_+ \\ 0 \\ d_- \\ 0 \end{bmatrix}$$

而有限动量的旋量是

$$u(\mathbf{p},\sigma) = \sqrt{m/p^0}D\Big(L(p)\Big)u(0,\sigma)\,, \tag{5.5.6}$$

$$v(\mathbf{p},\sigma) = \sqrt{m/p^0}D\Big(L(p)\Big)v(0,\sigma)\,. \tag{5.5.7}$$

还需要讨论的只剩下常数$c_\pm$和$d_\pm$. 一般而言, 它们有很大的任意性——只要我们愿意, 我们甚至可以将c_-和d_-或c_+和d_+取为零, 这将使Dirac场只有两个非零分量. 能够告诉我们$c_\pm$或$d_\pm$的相对值的唯一物理原理是宇称守恒. 我们回忆一下, 在空间反演下, 粒子湮灭算符和反粒子产生算符经历了变换:

$$\mathsf{P}a(\mathbf{p},\sigma)\mathsf{P}^{-1} = \eta^* a(-\mathbf{p},\sigma) \tag{5.5.8}$$

$$\mathsf{P}a^{\mathrm{c}\dagger}(\mathbf{p},\sigma)\mathsf{P}^{-1} = \eta^{\mathrm{c}} a^{\mathrm{c}\dagger}(-\mathbf{p},\sigma) \tag{5.5.9}$$

因而

$$\mathsf{P}\psi^+_\ell(x)\mathsf{P}^{-1} = \eta^*(2\pi)^{-3/2}\sum_\sigma\int \mathrm{d}^3p\, u_\ell(-\mathbf{p},\sigma)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot\mathscr{P}x}a(\mathbf{p},\sigma)\,, \tag{5.5.10}$$

$$\mathsf{P}\psi^{-\mathrm{c}}_\ell(x)\mathsf{P}^{-1} = \eta^{\mathrm{c}}(2\pi)^{-3/2}\sum_\sigma\int \mathrm{d}^3p\, v_\ell(-\mathbf{p},\sigma)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot\mathscr{P}x}a^{\mathrm{c}\dagger}(\mathbf{p},\sigma)\,. \tag{5.5.11}$$

另外, 方程(5.4.16), (5.1.21)和(5.1.22)给出

$$u(-\mathbf{p},\sigma) = \sqrt{m/p^0}\beta D(L(\mathbf{p}))\beta u(0,\sigma) \tag{5.5.12}$$

$$v(-\mathbf{p},\sigma) = \sqrt{m/p^0}\beta D(L(\mathbf{p}))\beta v(0,\sigma)\,. \tag{5.5.13}$$

(由于$\beta^2 = 1$, 我们不再区分β和β^{-1}.) 为了使点x处的场在宇称变换后正比于点$\mathscr{P}x$处的场, 必须使$\beta u(0,\sigma)$和$\beta v(0,\sigma)$分别正比于$u(0,\sigma)$和$v(0,\sigma)$:

$$\beta u(0,\sigma) = b_u u(0,\sigma)\,, \qquad \beta v(0,\sigma) = b_v v(0,\sigma)\,, \tag{5.5.14}$$

其中 b_u 和 b_v 是符号因子, $b_u^2 = b_v^2 = 1$. 在这种情况下, 场具有简单的空间反演性质:

$$\mathsf{P}\psi^{+}(x)\mathsf{P}^{-1} = \eta^{*} b_u \beta \psi^{+}(\mathscr{P}x)\,, \tag{5.5.15}$$

$$\mathsf{P}\psi^{-\mathrm{c}}(x)\mathsf{P}^{-1} = \eta^{\mathrm{c}} b_v \beta \psi^{-\mathrm{c}}(\mathscr{P}x)\,. \tag{5.5.16}$$

通过调整场的整体标度, 我们可以选择零动量处的系数函数使其具有如下形式:

$$u(0,\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\b_u\\0\end{bmatrix}, \qquad u(0,-\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\b_u\end{bmatrix}, \tag{5.5.17}$$

$$v(0,\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\b_v\end{bmatrix}, \qquad v(0,-\tfrac{1}{2}) = \frac{-1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\b_v\\0\end{bmatrix}. \tag{5.5.18}$$

现在, 我们尝试把湮灭场和产生场放进一个线性组合

$$\psi(x) = \kappa\psi^{+}(x) + \lambda\psi^{-\mathrm{c}}(x) \tag{5.5.19}$$

并使它与自身和伴随场在类空间隔上对易或反对易. 直接计算给出

$$[\psi_\ell(x), \psi^{\dagger}_{\bar\ell}(y)]_{\mp} = (2\pi)^{-3}\int \mathrm{d}^3p\,[|\kappa|^2 N_{\ell\bar\ell}(\mathbf{p})\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)} \mp |\lambda|^2 M_{\ell\bar\ell}(\mathbf{p})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}]\,, \tag{5.5.20}$$

其中

$$N_{\ell\bar\ell}(\mathbf{p}) \equiv \sum_\sigma u_\ell(\mathbf{p},\sigma)u^{*}_{\bar\ell}(\mathbf{p},\sigma)\,, \tag{5.5.21}$$

$$M_{\ell\bar\ell}(\mathbf{p}) \equiv \sum_\sigma v_\ell(\mathbf{p},\sigma)v^{*}_{\bar\ell}(\mathbf{p},\sigma)\,. \tag{5.5.22}$$

利用本征值条件(5.5.14)或者通过显式表达的(5.5.17)和(5.5.18), 我们发现动量为零时:

$$N(0) = \frac{1+b_u\beta}{2}\,, \qquad M(0) = \frac{1+b_v\beta}{2}\,. \tag{5.5.23}$$

于是从方程(5.5.6)和(5.5.7)中我们就得到

$$N(\mathbf{p}) = \frac{m}{2p^0}D\Big(L(p)\Big)[1+b_u\beta]D^{\dagger}\Big(L(p)\Big)\,, \tag{5.5.24}$$

$$M(\mathbf{p}) = \frac{m}{2p^0}D\Big(L(p)\Big)[1+b_v\beta]D^{\dagger}\Big(L(p)\Big)\,. \tag{5.5.25}$$

赝幺正条件(5.4.32)给出

$$D\Big(L(p)\Big)\beta D^{\dagger}\Big(L(p)\Big) = \beta$$

以及

$$D\Big(L(p)\Big)D^{\dagger}\Big(L(p)\Big) = D\Big(L(p)\Big)\beta D^{-1}\Big(L(p)\Big)\beta\,.$$

再注意到$\beta = \mathrm{i}\gamma^0$, 于是利用Lorentz变换规则(5.4.8), 我们有

$$D\Big(L(p)\Big)\beta D^{-1}\Big(L(p)\Big) = \mathrm{i}L_\mu{}^0(p)\gamma^\mu = -\mathrm{i}p_\mu\gamma^\mu/m\,. \tag{5.5.26}$$

将这个也加进来, 我们发现**

$$N(\mathbf{p}) = \frac{1}{2p^0}[-\mathrm{i}p^\mu\gamma_\mu + b_u m]\beta\,, \tag{5.5.27}$$

$$M(\mathbf{p}) = \frac{1}{2p^0}[-\mathrm{i}p^\mu\gamma_\mu + b_v m]\beta\,. \tag{5.5.28}$$

应用到方程(5.5.20), 最终给出

$$\begin{aligned}[\psi_\ell(x), \psi^\dagger_{\bar\ell}(y)]_\mp = \big(&|\kappa|^2[-\gamma^\mu\partial_\mu + b_u m]\beta\Delta_+(x-y)\\ &\mp|\lambda|^2[-\gamma^\mu\partial_\mu + b_v m]\beta\Delta_+(y-x)\big)_{\ell\bar\ell}\,,\end{aligned} \tag{5.5.29}$$

其中Δ_+是5.2节引入的函数

$$\Delta_+(x) \equiv \int \frac{\mathrm{d}^3p}{2p^0(2\pi)^3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\,.$$

我们在5.2节看到, 对于类空的$x-y$, $\Delta_+(x-y)$是$x-y$的偶函数, 这显然意味着它的一阶导数是$x-y$的奇函数. 因此, 为了使对易子或反对易子中的导数项和非导数项在类空间隔上都为零, 必须有如下充分必要条件

$$|\kappa|^2 = \mp|\lambda|^2 \tag{5.5.30}$$

和

$$|\kappa|^2 b_u = \pm|\lambda|^2 b_v\,. \tag{5.5.31}$$

显然, 仅当我们选择下面的符号, $\mp = +$, 方程(5.5.30)才可能成立; 这就是说, *Dirac场描述的粒子一定是费米子*. 那么必须有$|\kappa|^2 = |\lambda|^2$以及$b_u = -b_v$. 同标量场一样, 我们可以重新定义产生湮灭算符的相对相位以使比值κ/λ为正实数, 在这种情况下$\kappa = \lambda$, 并且通过调整场ψ的总标度与相位, 我们可以取

$$\kappa = \lambda = 1\,. \tag{5.5.32}$$

最后, 如果我们愿意, 我们可将ψ替换为$\gamma_5\psi$, 这改变了b_u和b_v的符号, 所以我们总可以取

$$b_u = -b_v = +1\,. \tag{5.5.33}$$

为了将来的应用, 我们在这里将Dirac场重写为

$$\psi_\ell(x) = (2\pi)^{-3/2}\sum_\sigma \int \mathrm{d}^3p\,[u_\ell(\mathbf{p},\sigma)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}a(\mathbf{p},\sigma) + v_\ell(\mathbf{p},\sigma)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}a^{\mathrm{c}\dagger}(\mathbf{p},\sigma)] \tag{5.5.34}$$

零动量处的系数函数是

$$u(0,\tfrac12) = \frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}\,,\qquad u(0,-\tfrac12) = \frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}\,, \tag{5.5.35}$$

** 有时会在Dirac旋量中引入一个额外因子$\sqrt{p^0/m}$, 从而使得自旋求和(5.5.27)和(5.5.28)分母中的p^0被换成m. 这里所采用的归一化的优点是它可以光滑地过渡到$m=0$的情况.

$$v(0,\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad v(0,-\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{5.5.36}$$

自旋和是

$$N(\mathbf{p}) = \frac{1}{2p^0}[-\mathrm{i}p^\mu\gamma_\mu + m]\beta\,, \tag{5.5.37}$$

$$M(\mathbf{p}) = \frac{1}{2p^0}[-\mathrm{i}p^\mu\gamma_\mu - m]\beta\,, \tag{5.5.38}$$

所以, 反对易子由方程(5.5.20)给定为

$$[\psi_\ell(x), \psi^\dagger_{\bar{\ell}}(y)]_+ = \{[-\gamma^\mu\partial_\mu + m]\beta\}_{\ell\bar{\ell}}\,\Delta(x-y)\,. \tag{5.5.39}$$

现在我们回到场 $\psi(x)$ 在空间反演后必须正比于 $\psi(\mathscr{P}x)$ 这个要求. 要使之成为可能, 方程(5.5.15)和(5.5.16)中的相位必须相等, 因此粒子以及它们反粒子的内禀宇称必须有如下关系

$$\eta^{\mathrm{c}} = -\eta^*\,. \tag{5.5.40}$$

即, 由自旋 $\frac{1}{2}$ 的粒子及其反粒子构成的态, 其内禀宇称 $\eta\eta^{\mathrm{c}}$ 为奇. 正是由于这个原因, 像 ρ^0 和 J/ψ 这样的负宇称介子才能被解释成夸克-反夸克对的 s-波束缚态. 方程(5.5.15)和(5.5.16)现在给出的因果 Dirac 场在空间反演下的变换是

$$\mathsf{P}\psi(x)\mathsf{P}^{-1} = \eta^*\beta\psi(\mathscr{P}x)\,. \tag{5.5.41}$$

在继续讨论其它反演之前, 比较适合在这里先说明一下, 方程(5.5.14), (5.5.33)和(5.5.26)表明 $u(\mathbf{p},\sigma)$ 和 $v(\mathbf{p},\sigma)$ 是 $-\mathrm{i}p^\mu\gamma_\mu/m$ 的本征矢, 本征值分别为 $+1$ 和 -1:

$$(\mathrm{i}p^\mu\gamma_\mu + m)u(\mathbf{p},\sigma) = 0\,, \qquad (-\mathrm{i}p^\mu\gamma_\mu + m)v(\mathbf{p},\sigma) = 0\,. \tag{5.5.42}$$

由此可知场(5.5.34)满足微分方程

$$(\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi(x) = 0\,. \tag{5.5.43}$$

这正是著名的自由自旋 $\frac{1}{2}$ 粒子的 Dirac 方程. 根据这里采用的观点, 自由粒子的 Dirac 方程就是将固有正时 Lorentz 群的两个不可约表示结合起来构造成场的一种 Lorentz 不变记法, 只不过它在空间反演下也作简单变换.

为了得到 Dirac 场的荷共轭性质与时间反演性质, 我们需要系数函数 u 和 v 的复共轭表达式. 这些函数在零动量处是实的, 但为了获得有限动量的系数函数, 我们必须乘上复矩阵 $D(L(p))$. 从方程(5.4.41)中, 我们看到对于一般的实 $\omega_{\mu\nu}$:

$$[\exp(\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\mathscr{J}^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu})]^* = \beta\mathscr{C}\exp(\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\mathscr{J}^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu})\mathscr{C}^{-1}\beta$$

并且, 特别地

$$D(L(p))^* = \beta\mathscr{C}D(L(p))\mathscr{C}^{-1}\beta\,.$$

我们同时注意到 $\mathscr{C}^{-1}\beta u(0,\sigma)=-v(0,\sigma)$ 以及 $\mathscr{C}^{-1}\beta v(0,\sigma)=-u(0,\sigma)$, 所以

$$u^*(\mathbf{p},\sigma)=-\beta\mathscr{C}v(\mathbf{p},\sigma)\,, \tag{5.5.44}$$

$$v^*(\mathbf{p},\sigma)=-\beta\mathscr{C}u(\mathbf{p},\sigma)\,. \tag{5.5.45}$$

为了使场与通过荷共轭变换得到的场在类空间隔上对易, 粒子和反粒子的荷共轭宇称再次要求有如下关系

$$\xi^{\mathrm{c}}=\xi^*\,. \tag{5.5.46}$$

在这种情况下, 场的变换为

$$\mathsf{C}\psi(x)\mathsf{C}^{-1}=-\xi^*\beta\mathscr{C}\psi^*(x)\,. \tag{5.5.47}$$

(我们把右边的厄米伴随场写为 ψ^* 而非 $\psi^\dagger$, 是为了强调它依旧是个列向量而非行向量.)

尽管我们对粒子和它们的反粒子做了区分, 但是我们并没有排除它们是同一种粒子的可能性. 这种反粒子是其自身的自旋 $\frac{1}{2}$ 粒子称为*Majorana*费米子. 基于导出方程(5.5.47)的推理, 可以得出这种粒子的 Dirac 场必须满足实条件

$$\psi(x)=-\beta\mathscr{C}\psi^*(x)\,. \tag{5.5.48}$$

对 Majorana 费米子, 内禀空间反演宇称必须是虚的, $\eta=\pm\mathrm{i}$, 而荷共轭宇称必须是实的, $\xi=\pm1$.

对于由一个粒子和它的反粒子构成的态, 它的内禀荷共轭相位对于费米子和玻色子有重要的区别. 这种态可以写成

$$\Phi\equiv\sum_{\sigma,\sigma'}\int\mathrm{d}^3p\int\mathrm{d}^3p'\,\chi(\mathbf{p},\sigma;\mathbf{p}',\sigma')a^\dagger(\mathbf{p},\sigma)\,a^{\mathrm{c}\dagger}(\mathbf{p}',\sigma')\Phi_0\,,$$

其中 Φ_0 是真空态. 在荷共轭下, 这个态变换成

$$\mathsf{C}\Phi=\xi\xi^{\mathrm{c}}\sum_{\sigma,\sigma'}\int\mathrm{d}^3p\int\mathrm{d}^3p'\,\chi(\mathbf{p},\sigma;\mathbf{p}',\sigma')a^{\mathrm{c}\dagger}(\mathbf{p},\sigma)\,a^\dagger(\mathbf{p}',\sigma')\Phi_0\,.$$

交换积分变量和求和变量, 并利用产生算符的反对易关系以及方程(5.5.46), 我们可以将其重新写为

$$\mathsf{C}\Phi=-\sum_{\sigma,\sigma'}\int\mathrm{d}^3p\int\mathrm{d}^3p'\,\chi(\mathbf{p}',\sigma;\mathbf{p},\sigma)a^\dagger(\mathbf{p},\sigma)\,a^{\mathrm{c}\dagger}(\mathbf{p}',\sigma')\Phi_0\,.$$

即, *由 Dirac 场描述的粒子与其反粒子构成的态, 其内禀荷共轭宇称为奇*, 也就是说, 如果态的波函数 χ 在粒子及其反粒子的动量及自旋的交换下为偶或奇, 那么作用在该态上的荷共轭算符分别给出符号 -1 或 $+1$. 这里的经典例子是电子偶素, 它是一个电子和一个正电子构成的束缚态. 最低的两个态是一对总自旋分别为 $s=0$ 和 $s=1$ 的近简并 s-波态, 分别被称为仲电子偶素和正电子偶素. 这两个态的波函数在动量的交换下为偶, 在自旋z-分量的交换下分别为奇或偶, 所以仲电子偶素和正电子偶素分别有 $\mathsf{C}=+1$和 $\mathsf{C}=-1$. 电子偶素的衰变模式明确地证实了这些值: 仲电子偶素快速衰变成一对光子(每一个光子有 $\mathsf{C}=-1$), 而正电子偶素只能以慢得多的速率衰变成三个或者更多的光子. 同样地, 在高能电子-正电子经由单光子中间态的湮灭中单个 ρ^0 和 ω^0 作为一个共振产生, 所以它们必须有 $\mathsf{C}=-1$, 这与将它们解释成轨道角动量为零而总夸克自旋为 1 的夸克-反夸克束缚态是一致的.

现在我们来处理时间反演. 回忆方程(4.2.15)给出的粒子湮灭算符和反粒子产生算符的变换性质:

$$\mathsf{T}a(\mathbf{p},\sigma)\mathsf{T}^{-1}=\zeta^{*}(-1)^{\frac{1}{2}-\sigma}a(-\mathbf{p},-\sigma)\,, \tag{5.5.49}$$

$$\mathsf{T}a^{\mathrm{c}\dagger}(\mathbf{p},\sigma)\mathsf{T}^{-1}=\zeta^{\mathrm{c}}(-1)^{\frac{1}{2}-\sigma}a^{\mathrm{c}\dagger}(-\mathbf{p},-\sigma)\,. \tag{5.5.50}$$

因此, 场的时间反演给出

$$\begin{aligned}\mathsf{T}\psi_{\ell}(x)\mathsf{T}^{-1}=(2\pi)^{-3/2}\sum_{\sigma}\int \mathrm{d}^{3}p\,(-1)^{\frac{1}{2}-\sigma}\\ \times\left[\zeta^{*}u_{\ell}^{*}(\mathbf{p},\sigma)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}a(-\mathbf{p},-\sigma)+\zeta^{\mathrm{c}}v_{\ell}^{*}(\mathbf{p},\sigma)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}a^{\mathrm{c}\dagger}(-\mathbf{p},-\sigma)\right].\end{aligned}$$

为了将其变回 ψ 的形式, 我们将积分变量和求和变量重新定义为 $-\mathbf{p}$ 和 $-\sigma$, 所以我们需要得到将 $u_{\ell}^{*}(-\mathbf{p},-\sigma)$ 和 $v_{\ell}^{*}(-\mathbf{p},-\sigma)$ 分别写成 $u_{\ell}(\mathbf{p},\sigma)$ 和 $v_{\ell}(\mathbf{p},\sigma)$ 的表达式. 出于这个目的, 利用 $\mathscr{J}^{i0}$ 与 β 反对易而与 γ_5 对易, 以及前面 $D(L(p))^{*}$ 的结果, 我们可以写出

$$D^{*}(L(-\mathbf{p}))=\gamma_5\beta D^{*}(L(\mathbf{p}))\beta\gamma_5=\gamma_5\mathscr{C}D(L(\mathbf{p}))\mathscr{C}^{-1}\gamma_5\,.$$

另外, 方程(5.4.36), 以及(5.5.35)和(5.5.36)给出

$$\gamma_5\mathscr{C}^{-1}u(0,-\sigma)=(-1)^{\frac{1}{2}-\sigma}u(0,\sigma)\,,$$

$$\gamma_5\mathscr{C}^{-1}v(0,-\sigma)=(-1)^{\frac{1}{2}-\sigma}v(0,\sigma)\,,$$

因而

$$(-1)^{\frac{1}{2}-\sigma}u^{*}(-\mathbf{p},-\sigma)=-\gamma_5\mathscr{C}u(\mathbf{p},\sigma)\,, \tag{5.5.51}$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}-\sigma}v^{*}(-\mathbf{p},-\sigma)=-\gamma_5\mathscr{C}v(\mathbf{p},\sigma)\,. \tag{5.5.52}$$

于是我们看到, 为了使 Dirac 场在时间反演后正比于在时间反演点的自身(从而使两者在类空间隔上反对易), 内禀时间反演相位必须有如下的关系

$$\zeta^{\mathrm{c}}=\zeta^{*} \tag{5.5.53}$$

而在这种情况下

$$\mathsf{T}\psi(x)\mathsf{T}^{-1}=-\zeta^{*}\gamma_5\mathscr{C}\psi(-\mathscr{P}x)\,. \tag{5.5.54}$$

现在我们来考察如何用 Dirac 场和它们的伴随场构造标量相互作用密度. 此前已经提到过, Dirac 表示是不幺正的, 所以 $\psi^{\dagger}\psi$ 不是标量. 为了解决这个问题, 一种方便的做法是定义一种新的伴随场:

$$\bar{\psi}\equiv\psi^{\dagger}\beta\,. \tag{5.5.55}$$

利用赝幺正条件(5.4.32), 我们看到与 $\bar{\psi}$ 构成的费米子双线性型有如下 Lorentz 变换性质

$$U_0(\Lambda)[\bar{\psi}(x)M\psi(x)]U_0^{-1}(\Lambda)=\bar{\psi}(\Lambda x)D(\Lambda)\,M\,D^{-1}(\Lambda)\psi(\Lambda x)\,. \tag{5.5.56}$$

此外, 在空间反演下

$$\mathsf{P}[\bar{\psi}(x)M\psi(x)]\mathsf{P}^{-1}=\bar{\psi}(\mathscr{P}x)\beta M\beta\psi(\mathscr{P}x)\,. \tag{5.5.57}$$

取矩阵 M 分别为 $\mathbf{1}, \gamma^\mu, \mathscr{J}^{\mu\nu}, \gamma_5\gamma^\mu$ 和 γ_5, 产生的双线性型 $\bar\psi M\psi$ 分别按照标量, 矢量, 张量, 轴矢量和赝标量变换. ("轴"和"赝"代表它们与普通矢量和标量的空间反演性质相反: 赝标量宇称为负, 而轴矢量的空间部分和时间部分的宇称分别为正和负.) 当双线性型中的两个费米子场代表两种不同的粒子时, 除了空间反演会产生一个内禀宇称的比, 这些结果同样成立。

例如, β-衰变的原始Fermi理论中包含一个正比于 $\bar\psi_p\gamma^\mu\psi_n\bar\psi_e\gamma_\mu\psi_\nu$ 的相互作用密度. 稍后大家意识到, Lorentz不变且宇称守恒的非导数β-衰变相互作用, 它的最普遍形式为几个乘积的线性组合, 这几个乘积通过分别将 γ_μ 替换成五个协变 4×4 矩阵 $\mathbf{1}, \gamma^\mu, \mathscr{J}^{\mu\nu}, \gamma_5\gamma^\mu$ 和 γ_5 获得. (我们在第2章讨论过, 我们定义的空间反演算符会使质子, 中子和电子都有宇称 $+1$. 如果中微子是无质量的, 如有必要, 通过将中微子场替换为 $\gamma_5\psi_\nu$, 它的宇称也可以被定义为 $+1$.) 当李政道和杨振宁[7]在1956年对宇称守恒产生怀疑时, 他们罗列了可能的非导数相互作用, 其中包括了正比于 $\bar\psi_pM\psi_n\bar\psi_eM\psi_\nu$ 和 $\bar\psi_pM\psi_n\bar\psi_eM\gamma_5\psi_\nu$ 的十项, 其中的 M 取遍矩阵 $\mathbf{1}, \gamma^\mu, \mathscr{J}^{\mu\nu}, \gamma_5\gamma^\mu$ 和 γ_5.

研究这些双线性型的荷共轭性质同样是有益的. 利用方程(5.5.47)和(5.4.35)—(5.4.39), 我们有

$$\begin{aligned}\mathsf{C}(\bar\psi M\psi)\mathsf{C}^{-1} &= (\beta\mathscr{C}\psi)^{\mathrm{T}}\beta M(\beta\mathscr{C}\psi^*) = -(\beta\mathscr{C}\psi^*)^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}\mathscr{C}\psi\\ &= \bar\psi\mathscr{C}^{-1}M^{\mathrm{T}}\mathscr{C}\psi = \pm\bar\psi M\psi\end{aligned} \tag{5.5.58}$$

最后一个表达式中的符号对矩阵 $\mathbf{1}, \gamma_5\gamma^\mu, \gamma_5$ 是正号, 对 γ^μ 和 $\mathscr{J}^{\mu\nu}$ 则是负号. (第一行中的负号源于Fermi统计. 我们忽略了c-数反对易子.) 因此, 若 $\bar\psi M\psi$ 是标量, 赝标量或轴矢量, 与流 $\bar\psi M\psi$ 相互作用的玻色场必须有 $\mathsf{C}=+1$, 若 $\bar\psi M\psi$ 是矢量和反对易张量, 则必须有 $\mathsf{C}=-1$. 这是证明 π^0 (它与赝标量或轴矢量核子流耦合)具有 $\mathsf{C}=+1$ 而光子具有 $\mathsf{C}=-1$ 的一个途径.

5.6 齐次Lorentz群的一般不可约表示*

我们现在将矢量场和Dirac场的特殊情况推广到场在齐次Lorentz群下按照一般不可约表示变换的情况. 所有场可以用这些不可约场的直和来构造.

固有正时Lorentz群的一般表示(或更恰当些, 它的无限小部分)由一组矩阵 $\mathscr{J}_{\mu\nu}$ 给出, 这组矩阵满足群生成元的对易关系(5.4.4)

$$[\mathscr{J}_{\mu\nu}, \mathscr{J}_{\rho\sigma}] = \mathrm{i}\left(\mathscr{J}_{\rho\nu}\eta_{\sigma\mu} + \mathscr{J}_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} - \mathscr{J}_{\sigma\nu}\eta_{\rho\mu} - \mathscr{J}_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}\right), \tag{5.6.1}$$

(当然, $\mathscr{J}_{\mu\nu} = -\mathscr{J}_{\nu\mu}$, 并且 $\mathscr{J}_{\mu\nu}$ 的指标像通常一样通过与 $\eta^{\mu\nu}$ 或 $\eta_{\mu\nu}$ 收缩进行升降.) 为了看到如何构造这样的矩阵, 首先将 $\mathscr{J}_{\mu\nu}$ 的6个独立分量分成两个3-矢: 角动量矩阵

$$\mathscr{J}_1 = \mathscr{J}_{23}, \qquad \mathscr{J}_2 = \mathscr{J}_{31}, \qquad \mathscr{J}_3 = \mathscr{J}_{12} \tag{5.6.2}$$

和增速

$$\mathscr{K}_1 = \mathscr{J}_{10}, \qquad \mathscr{K}_2 = \mathscr{J}_{20}, \qquad \mathscr{K}_3 = \mathscr{J}_{30}. \tag{5.6.3}$$

于是方程(5.6.1)变成

$$[\mathscr{J}_i, \mathscr{J}_j] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk}\mathscr{J}_k, \tag{5.6.4}$$

*本节或多或少地处在本书的发展主线之外, 可以在第一次阅读时跳过.

$$[\mathscr{J}_i, \mathscr{K}_j] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk}\mathscr{K}_k \,, \tag{5.6.5}$$

$$[\mathscr{K}_i, \mathscr{K}_j] = -\mathrm{i}\epsilon_{ijk}\mathscr{J}_k \,, \tag{5.6.6}$$

其中 i,j,k 取遍值 $1,2,3$, ϵ_{ijk} 是 $\epsilon_{123} = +1$ 的全反对称张量. 方程(5.6.4)说明了矩阵 $\mathscr{J}$ 生成了 Lorentz 群的旋转子群的一个表示, 而方程(5.6.5)则表示 $\mathscr{K}$ 是一个 3-矢. 方程(5.6.6)右边的负号源于 $\eta_{00} = -1$, 它在下文中扮演了一个关键角色.

用两个退耦的自旋 3-矢代替矩阵 $\mathscr{J}$ 和 $\mathscr{K}$ 是非常方便的, 它们写为

$$\mathscr{A} \equiv \frac{1}{2}(\mathscr{J} + \mathrm{i}\mathscr{K}) \,, \tag{5.6.7}$$

$$\mathscr{B} \equiv \frac{1}{2}(\mathscr{J} - \mathrm{i}\mathscr{K}) \,. \tag{5.6.8}$$

很容易看到对易关系(5.6.4)—(5.6.6)等价于

$$[\mathscr{A}_i, \mathscr{A}_j] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk}\mathscr{A}_k \,, \tag{5.6.9}$$

$$[\mathscr{B}_i, \mathscr{B}_j] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk}\mathscr{B}_k \,, \tag{5.6.10}$$

$$[\mathscr{A}_i, \mathscr{B}_j] = 0 \,, \tag{5.6.11}$$

寻找满足方程(5.6.9)—(5.6.11)的矩阵与寻找表示一对非耦合粒子自旋的矩阵, 这二者的方法是相同的——直和. 就是说我们用一对整数和(或)半整数 a,b 标记这些矩阵的行与列, a,b 取遍如下的值

$$a = -A, -A+1, \cdots, +A \,, \tag{5.6.12}$$

$$b = -B, -B+1, \cdots, +B \tag{5.6.13}$$

并令[**]

$$(\mathscr{A})_{a'b',ab} = \delta_{b'b}\,\mathbf{J}^{(A)}_{a'a} \,, \tag{5.6.14}$$

$$(\mathscr{B})_{a'b',ab} = \delta_{a'a}\,\mathbf{J}^{(B)}_{b'b} \,, \tag{5.6.15}$$

其中 $\mathbf{J}^{(A)}$ 和 $\mathbf{J}^{(B)}$ 是自旋 A 和 B 的标准自旋矩阵:

$$\left(\mathbf{J}^{(A)}_3\right)_{a'a} = a\delta_{a'a} \,, \tag{5.6.16}$$

$$\left(\mathbf{J}^{(A)}_1 \pm \mathrm{i}\mathbf{J}^{(A)}_2\right)_{a'a} = \delta_{a',a\pm1}\sqrt{(A \mp a)(A \pm a + 1)} \,, \tag{5.6.17}$$

$\mathbf{J}^{(B)}$ 同理. 这个表示用正整数和(或)半整数 A 和 B 标记. 我们看到 (A,B) 表示的维数为 $(2A+1)(2B+1)$.

齐次 Lorentz 群的有限维表示不是幺正的, 这是因为 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 是厄米的, 这样 $\mathscr{J}$ 是厄米的, 但 $\mathscr{K}$ 是反厄密的. 这是由于方程(5.6.7)和(5.6.8)中的 i, 这个 i 是(5.6.6)中的负号所要求的, 因而起源是齐次 Lorentz 群不同于 4-维旋转群 $SO(4)$, 它不是紧群, 相反它是被称为 $SO(3,1)$ 的非紧群.

[**]还有另一套形式体系,[8] 鉴于旋转群的自旋 j 表示可以写为 $2j$ 个自旋 $1/2$ 表示的对称化直积——即, 有 $2j$ 个二值指标的对称 $SU(2)$ 张量. 我们可以用 $2A$ 个二值 $(1/2,0)$ 指标和 $2B$ 个二值 $(0,1/2)$ 指标写出属于表示 (A,B) 的场, 后者会加点以便与前者区分.

只有紧群才能有有限维幺正表示(除了表示中的非紧部分是平庸的单位表示的情况). 采用非幺正表示是没有问题的, 因为我们现在考察的不是波函数而是场, 因而不需要正定的Lorentz不变范数.

相比之下, 旋转群有幺正表示, 其生成元可以表示成厄米矩阵

$$\mathscr{J} = \mathscr{A} + \mathscr{B} \,, \tag{5.6.18}$$

通过一般的矢量加法规则, 我们可以看到, 对于按照齐次Lorentz群的(A,B)表示变换的场, 它的分量在旋转下类似于自旋j的物体, 其中

$$j = A+B, A+B-1, \cdots, |A-B| \,.$$

这使我们可以将(A,B)表示与可能更加熟悉的张量和旋量等同起来. 例如, $(0,0)$场显然是标量, 它只有一个$j=0$分量. $(\frac{1}{2},0)$或$(0,\frac{1}{2})$场只能有$j=+\frac{1}{2}$; 它们是Dirac旋量的上面两个分量(即$\gamma_5=+1$)和下面两个分量($\gamma_5=-1$). $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$场有$j=1$的分量和$j=0$的分量, 分别对应4-矢$v^\mu$的空间部分$\mathbf{v}$和时间分量$v^0$. 更普遍地, (A,A)场包含的项仅有整数自旋$2A, 2A-1, \cdots, 0$, 并对应一个$2A$秩的无迹对称张量. (注意, 对于四维中的$2A$秩对称张量, 它的独立分量的数目是

$$\frac{4\cdot 5\cdots(4+2A-1)}{(2A)!} = \frac{(3+2A)!}{6(2A)!}$$

而无迹条件将其减少至

$$\frac{(3+2A)!}{6(2A)!} - \frac{(1+2A)!}{6(2A-2)!} = (2A+1)^2 \,,$$

这正是我们对(A,A)场所预期的.) 另外一个例子: $(1,0)$场或$(0,1)$场只能有$j=1$, 对应一个反对称张量$F^{\mu\nu}$, $F^{\mu\nu}$对$(1,0)$场和$(0,1)$场分别满足进一步的不可约"对偶"条件

$$F^{\mu\nu} = \pm\frac{\mathrm{i}}{2}\,\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\,F_{\lambda\rho} \,.$$

当然, 只有在四维中, 反对称二指标张量$F^{\mu\nu}$才能被分成这样的"自对偶"部分和"反自对偶"部分.

一般的N秩张量按照N个$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$4-矢表示的直积变换. 因此它能被分解成(通过合适的对称化, 反对称化以及取迹)不可约项(A,B), 其中$A=N/2, N/2-1, \cdots$且$B=N/2, N/2-1, \cdots$. 以这种方式, 我们可以构造$A+B$是整数的任何不可约表示(A,B). 对于$A+B$是半奇数的自旋表示, 可以类似地用这些张量表示和Dirac表示$(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2})$的直积构造. 例如, 取矢量$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$表示与Dirac $(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2})$表示的直积, 这给出一个旋量-矢量$\psi^\mu$, 它按照如下可约表示变换

$$(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\otimes[(\tfrac{1}{2},0)\oplus(0,\tfrac{1}{2})] = (\tfrac{1}{2},1)\oplus(\tfrac{1}{2},0)\oplus(1,\tfrac{1}{2})\oplus(0,\tfrac{1}{2}) \,.$$

$\gamma_\mu\psi^\mu$按照普通的$(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2})$Dirac场变换, 所以通过要求$\gamma_\mu\psi^\mu=0$, 我们可以分离出$(\frac{1}{2},1)\oplus(1,\frac{1}{2})$表示.[†] 这就是*Rarita-Schwinger*场.[9]

至此, 我们在本节中只考虑了固有正时Lorentz群的表示. 若Lorentz群包含空间反演, 那么它的任何表示中必存在一个矩阵β, 这个矩阵反转带有奇数个空间指标的张量的符号, 特别地

$$\beta\mathscr{J}\beta^{-1} = +\mathscr{J} \,, \qquad \beta\mathscr{K}\beta^{-1} = -\mathscr{K} \,. \tag{5.6.19}$$

[†]根据方程(5.6.18), 这种场在普通旋转下按照两个$j=3/2$分量与两个$j=\frac{1}{2}$分量的直和变换. 通过附加Dirac方程$[\gamma^\nu\partial_\nu+m]\psi^\mu=0$, 重复加倍被消除, 而剩下的$j=\frac{1}{2}$分量被$\gamma_\mu\psi^\mu=0$(原书误植为$\partial_\mu\psi^\mu=0$)的要求消除. 在这些条件下, 场描述一个自旋$j=3/2$的粒子.

表示成矩阵(5.6.7)和(5.6.8), 上式是

$$\beta\mathscr{A}\beta^{-1}=\mathscr{B}\,,\qquad \beta\mathscr{B}\beta^{-1}=\mathscr{A}\,. \tag{5.6.20}$$

因此, 除非 $A=B$, 否则固有正时齐次Lorentz群的不可约(A,B)表示不提供包含空间反演的Lorentz群的表示. 而我们已经看到, 这些(A,A)表示是标量, 矢量和对称无迹张量. 若 $A\neq B$, 包含空间反演的Lorentz群的不可约表示是直和$(A,B)\oplus(B,A)$, 维数是$2(2A+1)(2B+1)$. 这些表示中的一个就是5.4节讨论的$(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2})$ Dirac表示. 4×4矩阵(5.4.29)提供了该表示的β-矩阵. 另一较熟悉的例子是$(1,0)\oplus(0,1)$表示, 正如我们所看到的, 它是包含自对偶部分和反自对偶部分的二秩反对称张量.

5.7 一般因果场*

我们现在接着构造按照上节所描述的一般不可约(A,B)表示变换的场. 指标 ℓ 在这里被替换为一对指标 a,b, 取遍范围为(5.6.12)和(5.6.13), 于是场现在写成

$$\begin{aligned}\psi_{ab}(x)=(2\pi)^{-3/2}\sum_{\sigma}\int \mathrm{d}^3p\,\Big[&\kappa\,a(\mathbf{p},\sigma)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}u_{ab}(\mathbf{p},\sigma)\\&+\lambda\,a^{\mathrm{c}\dagger}(\mathbf{p},\sigma)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}v_{ab}(\mathbf{p},\sigma)\Big]\end{aligned} \tag{5.7.1}$$

其中 κ 和 λ 是任意常数. 我们在这里保留反粒子是其自身的可能性, 在这种情况下 $a^{\mathrm{c}}(\mathbf{p},\sigma)=a(\mathbf{p},\sigma)$.

我们第一个任务还是寻找零动量系数函数 $u_{ab}(0,\sigma)$ 和 $v_{ab}(0,\sigma)$. 加在 $u(0,\sigma)$ 和 $v(0,\sigma)$ 上的基本条件(5.1.25)—(5.1.26)在这里是

$$\sum_{\bar\sigma}u_{\bar a\bar b}(0,\bar\sigma)\mathbf{J}^{(j)}_{\bar\sigma\sigma}=\sum_{a,b}\mathscr{J}_{\bar a\bar b,ab}u_{ab}(0,\sigma)\,,$$

$$-\sum_{\bar\sigma}v_{\bar a\bar b}(0,\bar\sigma)\mathbf{J}^{(j)*}_{\bar\sigma\sigma}=\sum_{a,b}\mathscr{J}_{\bar a\bar b,ab}v_{ab}(0,\sigma)\,,$$

或者利用方程(5.6.14)—(5.6.15)

$$\sum_{\bar\sigma}u_{\bar a\bar b}(0,\bar\sigma)\mathbf{J}^{(j)}_{\bar\sigma\sigma}=\sum_{a}\mathbf{J}^{(A)}_{\bar a a}u_{a\bar b}(0,\sigma)+\sum_{b}\mathbf{J}^{(B)}_{\bar b b}u_{\bar a b}(0,\sigma)\,, \tag{5.7.2}$$

$$-\sum_{\bar\sigma}v_{\bar a\bar b}(0,\bar\sigma)\mathbf{J}^{(j)*}_{\bar\sigma\sigma}=\sum_{a}\mathbf{J}^{(A)}_{\bar a a}v_{a\bar b}(0,\sigma)+\sum_{b}\mathbf{J}^{(B)}_{\bar b b}v_{\bar a b}(0,\sigma)\,. \tag{5.7.3}$$

但是方程(5.7.2)是Clebsch-Gordon系数 $C_{AB}(j\sigma;ab)$ 的定义条件! 这些系数由如下的要求定义: 如果态 Ψ_{ab} 在无限小旋转下的变换为

$$\delta\Psi_{ab}=\mathrm{i}\sum_{\bar a}\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{J}^{(A)}_{\bar a a}\Psi_{\bar a b}+\mathrm{i}\sum_{\bar b}\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{J}^{(B)}_{\bar b b}\Psi_{a\bar b}$$

则在相同旋转下, 态

$$\Psi^{j}{}_{\sigma}\equiv\sum_{ab}C_{AB}(j\sigma;ab)\Psi_{ab}$$

*本节或多或少地处在本书的发展主线之外, 可以在第一次阅读时跳过.

的变换为

$$\delta\Psi^{j}{}_{\sigma} = \mathrm{i}\sum_{\bar{\sigma}} \boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{J}^{(j)}_{\bar{\sigma}\sigma}\Psi^{j}{}_{\bar{\sigma}}\,.$$

对方程(5.7.2)的观测表明系数$u_{ab}(0,\sigma)$满足这个要求, 因而, 除了一个可能的比例因子外, $u_{ab}(0,\sigma)$就是$C_{AB}(j\sigma;ab)$. 通常会选择这个常数使得

$$u_{ab}(0,\sigma) = (2m)^{-1/2}C_{AB}(j\sigma;ab)\,. \tag{5.7.4}$$

这个结果是唯一的, 这是因为齐次Lorentz群的每个不可约(A,B)表示最多包含一个旋转群的自旋j表示. 类似地, 对方程(5.6.16)—(5.6.17)的观察表明角动量矩阵的复共轭是

$$-\mathbf{J}^{(j)*}_{\sigma\,\sigma'} = (-1)^{\sigma-\sigma'}\mathbf{J}^{(j)}_{-\sigma,-\sigma'}\,. \tag{5.7.5}$$

因此, 如果我们将方程(5.7.3)按照$(-1)^{j-\sigma}v_{ab}(\mathbf{p},-\sigma)$的形式写出来, 它的形式就与方程(5.7.2)相同. 对常数因子进行合适的调整后, $v(0,\sigma)$的唯一解是

$$v_{ab}(0,\sigma) = (-1)^{j+\sigma}u_{ab}(0,-\sigma)\,. \tag{5.7.6}$$

我们现在必须进行一个增速变换以计算有限动量的系数函数. 对固定方向$\hat{\mathbf{p}}\equiv\mathbf{p}/|\mathbf{p}|$, 我们可以将增速(2.5.24)写成参量$\theta$的函数, θ的定义是

$$\cosh\theta = \sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}/m\,,\qquad \sinh\theta = |\mathbf{p}|/m \tag{5.7.7}$$

我们用$L^{\mu}{}_{\nu}(\theta)$取代$L^{\mu}{}_{\nu}(p)$, 其中

$$\begin{aligned} L^{i}{}_{k}(\theta) &= \delta_{ik} + (\cosh\theta-1)\hat{p}_i\hat{p}_k\,,\\ L^{i}{}_{0}(\theta) &= L^{0}_{i}(p) = \hat{p}_i\sinh\theta\,,\\ L^{0}{}_{0}(\theta) &= \cosh\theta\,. \end{aligned} \tag{5.7.8}$$

这种参量化的优点是

$$L(\bar{\theta})L(\theta) = L(\bar{\theta}+\theta)\,. \tag{5.7.9}$$

对无限小的θ, 我们有$[L(\theta)]^{\mu}{}_{\nu}\to\delta^{\mu}{}_{\nu}+\omega^{\mu}{}_{\nu}$, 其中$\omega^{i}{}_{0} = \omega^{0}{}_{i} = \hat{p}_i\theta$且$\omega^{i}{}_{j} = \omega^{0}{}_{0} = 0$. 依照从方程(2.2.24)导出方程(2.2.26)的方法, 得出

$$D\Big(L(p)\Big) = \exp(-\mathrm{i}\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathscr{K}\theta)\,. \tag{5.7.10}$$

这是齐次Lorentz群的任意表示;对于不可约(A,B)表示, 方程(5.6.7)和(5.6.8)给出

$$\mathrm{i}\mathscr{K} = \mathscr{A}-\mathscr{B} \tag{5.7.11}$$

因为$\mathscr{A}$和$\mathscr{B}$是对易矩阵

$$D\Big(L(p)\Big) = \exp(-\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathscr{A}\theta)\exp(+\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathscr{B}\theta) \tag{5.7.12}$$

更详细一点, 利用方程(5.6.14)和(5.6.15)

$$D\Big(L(p)\Big)_{a'b',ab} = \Big(\exp(-\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}^{(A)}\theta)\Big)_{a'a}\Big(\exp(+\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}^{(B)}\theta)\Big)_{b'b}\,. \tag{5.7.13}$$

于是, 方程(5.7.4)和(5.7.6)给出了有限动量的系数函数

$$u_{ab}(\mathbf{p},\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2p^0}}\sum_{a'b'}\Big(\exp(-\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}^{(A)}\theta)\Big)_{aa'}\Big(\exp(+\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}^{(B)}\theta)\Big)_{bb'}\times C_{AB}(j\sigma;a'b') \tag{5.7.14}$$

以及

$$v_{ab}(\mathbf{p},\sigma)=(-1)^{j+\sigma}u_{ab}(\mathbf{p},-\sigma)\,. \tag{5.7.15}$$

这些结果显式地给出了变换类型为(A,B)的场, 所以, 除了对常数因子κ和λ的选择外, 这类场(5.1.31)是唯一的.

在这个形式体系下构造 Lorentz 标量相互作用密度是很容易的. 齐次 Lorentz 群的(A,B)表示就是$(A,0)$表示和$(0,B)$表示的直积, 所以一般的 Lorentz 变换规则(5.1.6)和(5.1.7)在这里就是

$$U_0(\Lambda)\psi_{ab}(x)U_0^{-1}(\Lambda)=\sum_{a'b'}D^{A0}_{a,a'}(\Lambda^{-1})D^{0B}_{b,b'}(\Lambda^{-1})\psi_{a'b'}(\Lambda x)\,. \tag{5.7.16}$$

更进一步, 方程(5.6.14)和(5.6.15)表明$(A,0)$表示和$(0,B)$表示的矩阵生成元恰好分别是自旋 A 和自旋 B 的自旋矩阵. 因此我们可以构造如下形式的标量

$$\sum_{a_1a_2\cdots a_n}\sum_{b_1b_2\cdots b_n}g_{a_1a_2\cdots a_n;b_1b_2\cdots b_n}\psi^{(1)}_{a_1b_1}(x)\,\psi^{(2)}_{a_2b_2}(x)\cdots\psi^{(n)}_{a_nb_n}(x) \tag{5.7.17}$$

其中$g_{a_1a_2\cdots a_n;b_1b_2\cdots b_n}$是将自旋$A_1,A_2,\cdots A_n$ 耦合成标量的系数与将自旋$B_1,B_2,\cdots B_n$耦合成标量的系数的乘积. (尽管我们没有明显地考虑包含导数的相互作用, 但以这种方式, 我们将获得包含 n 个场的最一般相互作用, 这是因为(A,B)场的导数总能分解成没有导数的其它类型的场.) 例如, 由三个变换类型$(A_1,B_1),(A_2,B_2),(A_3,B_3)$场的乘积构成的最一般的 Lorentz 标量是

$$g\sum_{a_1a_2a_3}\sum_{b_1b_2b_3}\begin{pmatrix}A_1&A_2&A_3\\a_1&a_2&a_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1&B_2&B_3\\b_1&b_2&b_3\end{pmatrix}\psi^{(1)}_{a_1b_1}\psi^{(2)}_{a_2b_2}\psi^{(3)}_{a_3b_3} \tag{5.7.18}$$

其中 g 是自由参量. 这是最一般的 3-场相互作用. ((5.7.18)中的括号代表 Wigner "3-j"符号:[10]

$$\begin{pmatrix}j_1&j_2&j_3\\m_1&m_2&m_3\end{pmatrix}\equiv\sum_{m_3'}C_{j_1j_2}(j_3m_3',m_1m_2)C_{j_3j_3}(00,m_3'm_3)$$

它描述了如何耦合三个自旋以构造一个旋转不变标量.)

对于 Lorentz 不变的 S-矩阵, 相互作用密度$\mathscr{H}(x)$只是像(5.7.18)这样的标量是不够的; 还必须要求$\mathscr{H}(x)$与$\mathscr{H}(y)$在类空间隔$x-y$上对易. 为了看到这个条件如何满足, 考虑同种粒子的两个场的对易子或反对易子, 其中一个是(A,B)类场ψ, 另一个是$(\tilde{A},\tilde{B})$类场$\tilde{\psi}$的伴随场$\tilde{\psi}^\dagger$. 我们发现

$$\Big[\psi_{ab}(x),\tilde{\psi}^\dagger_{\tilde{a}\tilde{b}}(y)\Big]_\mp=(2\pi)^{-3}\int\mathrm{d}^3p\,(2p^0)^{-1}\pi_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p})\times\Big[\kappa\tilde{\kappa}^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}\mp\lambda\tilde{\lambda}^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}\Big]\,, \tag{5.7.19}$$

其中 $\pi(\mathbf{p})$ 是自旋和

$$(2p^0)^{-1}\pi_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) \equiv \sum_\sigma u_{ab}(\mathbf{p},\sigma)\tilde{u}^*_{\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p},\sigma) = \sum_\sigma v_{ab}(\mathbf{p},\sigma)\tilde{v}^*_{\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p},\sigma) \tag{5.7.20}$$

并且, 像往常一样, 上面和下面的符号分别对应玻色子和费米子. (我们这里允许场 $\tilde{\psi}$ 中的系数 $\tilde{\kappa}$ 和 $\tilde{\lambda}$ 不同.) 更详细些

$$\begin{aligned}\pi_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) = \sum_{a'b'}\sum_{\tilde{a}'\tilde{b}'}\sum_\sigma & C_{AB}\Big(j\sigma;a'b'\Big)\, C_{\tilde{A}\tilde{B}}\Big(j\sigma;\tilde{a}'\tilde{b}'\Big) \\ & \times \Big(\exp\Big(-\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}^{(A)}\theta\Big)\Big)_{aa'}\Big(\exp\Big(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}^{(B)}\theta\Big)\Big)_{bb'} \\ & \times \Big(\exp\Big(-\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}^{(A)}\theta\Big)\Big)^*_{\tilde{a}\tilde{a}'}\Big(\exp\Big(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}^{(B)}\theta\Big)\Big)^*_{\tilde{b}\tilde{b}'}\,.\end{aligned} \tag{5.7.21}$$

函数 $\pi(\mathbf{p})$ 已经被显式地算出了.[11] 引起我们关注的结果是, 它是 $\mathbf{p}$ 和 p^0 的多项式函数 P 在质量壳上的值:

$$\pi_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) = P_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}\Big(\mathbf{p},\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}\Big) \tag{5.7.22}$$

并且根据 $2A+2\tilde{B}$ 是偶数还是奇数, P 分别是偶函数和奇函数

$$P(-\mathbf{p},-p^0) = (-)^{2A+2\tilde{B}}\,P(\mathbf{p},p^0)\,. \tag{5.7.23}$$

我们在这里仅对 $\mathbf{p}$ 的一个特定方向给一个验证. 将 $\mathbf{p}$ 取在 3-方向上, (5.7.21)给出

$$\pi_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) = \sum_\sigma C_{AB}(j\sigma;ab)\, C_{\tilde{A}\tilde{B}}(j\sigma;\tilde{a}\tilde{b})\exp\Big([-a+b-\tilde{a}+\tilde{b}]\theta\Big)$$

除非 $\sigma = a+b$ 且 $\sigma = \tilde{a}+\tilde{b}$, 否则 Clebsch-Gordon 系数为零, 所以我们可以做替换

$$-a+b-\tilde{a}+\tilde{b} = -2a+\sigma+2\tilde{b}-\sigma = 2\tilde{b}-2a\,.$$

我们可以将 $\exp(\pm\theta)$ 写成 $(p^0\pm p^3)/m$, 所以这里

$$\begin{aligned}\pi_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) = \sum_\sigma & C_{AB}(j\sigma;ab)C_{\tilde{A}\tilde{B}}(j\sigma;\tilde{a}\tilde{b}) \\ & \times\begin{cases}\Big[(p^0+p^3)/m\Big]^{2\tilde{b}-2a} & (\tilde{b}\geq a) \\ \Big[(p^0-p^3)/m\Big]^{2a-2\tilde{b}} & (a\geq\tilde{b})\end{cases}\end{aligned}$$

其中 $p^0 \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$, 我们看到 $\pi(\mathbf{p})$ 确实能写成多项式 $P(\mathbf{p},p^0)$ 的质量壳值. 另外, $2\tilde{b}-2a$ 等于 $2\tilde{B}+2A$ 减去一个偶数, 所以该多项式满足反射条件(5.7.23).

$\mathbf{p}$ 和 $\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$ 的任何多项式都可写成对 $\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$ 线性的形式(用 $\mathbf{p}$ 表示 $\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$ 的偶次幂), 所以 $\pi(\mathbf{p})$ 可以写成

$$\pi_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) = P_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) + 2\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}Q_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p})\,, \tag{5.7.24}$$

其中的 P 和 Q 现在只是 $\mathbf{p}$ 的多项式, 并有

$$P(-\mathbf{p}) = (-)^{2A+2\tilde{B}}P(\mathbf{p}) \tag{5.7.25}$$

$$Q(-\mathbf{p}) = -(-)^{2A+2\tilde{B}}Q(\mathbf{p})\,. \tag{5.7.26}$$

对于类空的 $x-y$, 我们可以采用 $x^0=y^0$ 的 Lorentz 参考系, 并将方程(5.7.19)写成[b]

$$[\psi_{ab}(x),\tilde{\psi}^{\dagger}_{\tilde{a}\tilde{b}}(y)]_{\mp}=[\kappa\tilde{\kappa}^{*}\mp(-)^{2A+2\tilde{B}}\lambda\tilde{\lambda}^{*}]P_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(-\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla})\Delta_{+}(\mathbf{x}-\mathbf{y},0)$$
$$+[\kappa\tilde{\kappa}^{*}\pm(-)^{2A+2\tilde{B}}\lambda\tilde{\lambda}^{*}]Q_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(-\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla})\delta^{3}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,.$$

为使其在 $\mathbf{x}\neq\mathbf{y}$ 时为零, 必须有

$$\kappa\tilde{\kappa}^{*}=\pm(-)^{2A+2\tilde{B}}\lambda\tilde{\lambda}^{*}\,. \tag{5.7.27}$$

现在我们考察 ψ 和 $\tilde{\psi}$ 相同的特殊情况, 此时有 $A=\tilde{A}$ 和 $B=\tilde{B}$. (这种对易子或反对易子不可避免地出现在 $[\mathscr{H}(x),\mathscr{H}(y)]$ 中, 这是因为哈密顿量的厄米性要求, 如果 $\mathscr{H}(x)$ 包含 ψ, 那么它也得包含 $\psi^{\dagger}$.) 在这种情况下, 方程(5.7.27)给出

$$|\kappa|^{2}=\pm(-)^{2A+2B}|\lambda|^{2}\,.$$

当且仅当

$$\pm(-1)^{2A+2B}=+1 \tag{5.7.28}$$

以及

$$|\kappa|^{2}=|\lambda|^{2}\,, \tag{5.7.29}$$

这才是可能的. 显然, $2A+2B$ 与 $2j$ 相差的是一个偶数, 所以方程(5.7.28)说明我们的粒子是玻色子还是费米子取决于 $2j$ 是偶还是奇. 这是自旋与统计之间的普遍关系,[12] 我们已经看到了它的几个特殊情况——标量场, 矢量场和 Dirac 场所描述的粒子.

现在回到一般情况, 即场 ψ 和 $\tilde{\psi}$ 可以不相同. 利用方程(5.7.27), 两边同时除以 $|\tilde{\kappa}|^{2}=|\tilde{\lambda}|^{2}$, 我们有

$$\frac{\kappa}{\tilde{\kappa}}=(-1)^{2B+2\tilde{B}}\,\frac{\lambda}{\tilde{\lambda}}\,.$$

由此得出, 对于任意场

$$\lambda=(-)^{2B}c\,\kappa\,, \tag{5.7.30}$$

其中 c 是对给定粒子的所有场都相同的因子. 进一步, 方程(5.7.29)表明 c 就是一个相位, $|c|=1$. 因此通过对算符 $a(\mathbf{p},\sigma)$ 和 $a^{\mathrm{c}\dagger}(\mathbf{p},\sigma)$ 的相对相位的重新定义, 我们可以使 $c=1$, 从而 $\lambda=(-)^{2B}\kappa$, 这可以消掉所有场的 c. 同样, 通过对场的整体标度的重新定义, 对每一种类型的场, 因子 κ 都可以被消掉. 对于给定粒子的 (A,B) 场, 我们通过所有这些重定义得出一个式子, 除了一个总标度外, 这个式子是唯一的

$$\psi_{ab}(x)=(2\pi)^{-3/2}\sum_{\sigma}\int\mathrm{d}^{3}p\,\Big[u_{ab}(\mathbf{p},\sigma)a(\mathbf{p},\sigma)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}$$
$$+(-)^{2B}v_{ab}(\mathbf{p},\sigma)a^{\mathrm{c}\dagger}(\mathbf{p},\sigma)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\Big]\,. \tag{5.7.31}$$

给定粒子的不同场并不真地表示它们在物理上有可区分的可能. 例如, 可以有 $j=0$ 的场是那些 (A,A) 类的(因为三角不等式 $|A-B|\leq j\leq A+B$, 所以这里要求 $A=B$). 从 $(0,0)$ 标量场 ϕ 出发, 我们能够轻松地用 $2A$ 阶导数构造这些 (A,A) 场

$$\{\partial_{\mu_1}\cdots\partial_{\mu_{2A}}\}\phi\,, \tag{5.7.32}$$

[b]原书下式有笔误. ——译者注

其中 {} 在这里代表无迹部分; 例如

$$\{\partial_\mu\partial_\nu\} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\,\Box\,.$$

(回忆按照$(N/2,N/2)$表示变换的N秩无迹对称张量.) 但是对于自旋为j的给定粒子, 方程(5.7.31)代表唯一的因果(A,B)场, 所以$j=0$的(A,A)场(5.7.31)只能是标量场的$2A$阶导数(5.7.32)的线性组合.

更普遍地, 对于自旋j的给定粒子, 它的任意场(A,B)可以表示为作用在$(j,0)$类场[13] $\varphi_\sigma(x)$上的$2B$秩微分算符(或者作用在$(0,j)$类场上的$2A$秩微分算符). 为了看到这点, 考察场

$$\{\partial_{\mu_1}\cdots\partial_{\mu_{2B}}\}\,\varphi_\sigma\,. \tag{5.7.33}$$

它按照表示(B,B)与表示$(j,0)$的直积变换, 因此通过通常的矢量加法规则, 它可以分解成全部按照不可约表示(A,B)变换的场, 其中$|j-B|\le A\le j+B$, 或等价地$|A-B|\le j\le A+B$. 既然方程(5.7.31)代表自旋j的给定粒子的唯一(A,B)类场, 它只能**通过导数(5.7.33)得到.

现在考察这些场在反演下的性质, 先从空间反演开始. 利用4.2节的结果, 粒子湮灭算符和反粒子产生算符的空间反演性质是:

$$\mathsf{P}a(\mathbf{p},\sigma)\mathsf{P}^{-1} = \eta^* a(-\mathbf{p},\sigma)\,, \tag{5.7.34}$$

$$\mathsf{P}a^{\mathrm{c}\dagger}(\mathbf{p},\sigma)\mathsf{P}^{-1} = \eta^{\mathrm{c}} a^{\mathrm{c}\dagger}(-\mathbf{p},\sigma)\,, \tag{5.7.35}$$

其中η和η^{c}分别是粒子和反粒子的内禀宇称. 因此, 一般因果(A,B)场(5.7.31)在宇称算符P下变换成

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\psi^{AB}_{ab}(x)\mathsf{P}^{-1} = (2\pi)^{-3/2}\sum_\sigma\int \mathrm{d}^3p\,\Big[&\eta^* a(-\mathbf{p},\sigma)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\,u^{AB}_{ab}(\mathbf{p},\sigma)\\ &+\eta^{\mathrm{c}}(-)^{2B}a^{\mathrm{c}\dagger}(-\mathbf{p},\sigma)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\,v^{AB}_{ab}(\mathbf{p},\sigma)\Big]\,.\end{aligned} \tag{5.7.36}$$

我们希望将积分变量$\mathbf{p}$变成$-\mathbf{p}$, 为此, 我们需要计算$u_{ab}(-\mathbf{p},\sigma)$和$v_{ab}(-\mathbf{p},\sigma)$. 为了做到这点, 我们仅需回头看一下(5.7.14)和(5.7.15), 并利用 Clebsch-Gordon 系数的对称性质[14]

$$C_{AB}(j\sigma;ab) = (-)^{A+B-j}C_{BA}(j\sigma;ba)\,. \tag{5.7.37}$$

这给出

$$u^{AB}_{ab}(-\mathbf{p},\sigma) = (-)^{A+B-j}\,u^{BA}_{ba}(\mathbf{p},\sigma)\,, \tag{5.7.38}$$

$$v^{AB}_{ab}(-\mathbf{p},\sigma) = (-)^{A+B-j}\,v^{BA}_{ba}(\mathbf{p},\sigma)\,, \tag{5.7.39}$$

所以

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\psi^{AB}_{ab}(x)\mathsf{P}^{-1} = (2\pi)^{-3/2}\sum_\sigma\int \mathrm{d}^3p\,(-1)^{A+B-j}\\ \times\Big[\eta^* a(\mathbf{p},\sigma)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot\mathscr{P}x}u^{BA}_{ba}(\mathbf{p},\sigma)+\eta^{\mathrm{c}}(-)^{2B}a^{\mathrm{c}\dagger}(\mathbf{p},\sigma)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot\mathscr{P}x}v^{BA}_{ba}(\mathbf{p},\sigma)\Big]\,,\end{aligned} \tag{5.7.40}$$

**这个讨论中唯一可能的缺陷是, 以这种方式得到的一些(A,B)场可能实际上为零. 但是在这种情况下, $(j,0)$场φ_σ将满足场方程$\sum_\sigma M_\sigma(\partial/\partial x)\varphi_\sigma(x)=0$, 因而对于每个$\bar\sigma$, $\sum_\sigma M_\sigma(\mathrm{i}p)u_\sigma(\mathbf{p},\bar\sigma)=0$. 对于$(j,\sigma)$表示, Clebsch-Gordon 系数$C_{j0}(j\bar\sigma;\sigma 0)$就是克罗内克符号$\delta_{\bar\sigma\sigma}$, 所以这将要求$\sum_\sigma M_\sigma(\mathrm{i}p)D_{\sigma\sigma'}(L(p))=0$, 又因为$D(\Lambda)$有逆$D(\Lambda^{-1})$, 所以除非所有$M_\sigma(\mathrm{i}p)$为零, 否则这不可能. $(j,0)$场$\varphi_\sigma(x)$因此不会满足 Klein-Gordon 方程$(\Box-m^2)\varphi_\sigma(x)=0$以外的任何场方程, 因而从(5.7.33)得到的$(A,B)$场不会为零.

其中, 像以前一样, $\mathscr{P}x=(-\mathbf{x},x^0)$. 除了湮灭项和产生项的系数与方程(5.7.31)中要求的系数不同, 这就是 $\mathscr{P}x$ 处的因果场 ψ^{BA}_{ba}. 但是这些系数必须与方程(5.7.31)中的系数仅相差一个总的常数因子, 这是因为除了标度以外, 方程(5.7.31)对于每一类因果场都是唯一的. 因此方程(5.7.40)中两项系数的比值必须与方程(5.7.31)中的相同(但由于这是一个(B,A)场, 所以B被替换为A):

$$\eta^{\mathrm{c}}(-)^{2B}/\eta^*=(-)^{2A}\,. \tag{5.7.41}$$

但是$(A-B)$与自旋 j 仅相差一个整数, 于是给出

$$\eta^{\mathrm{c}}=\eta^*(-)^{2j}\,. \tag{5.7.42}$$

我们在 5.2 节, 5.3 节和 5.5 节分别看到 $j=0$, $j=1$ 和 $j=\frac{1}{2}$ 这几个特殊情况的结果. 我们现在看到这一结果是普遍的; 粒子-反粒子对的内禀宇称 $\eta^{\mathrm{c}}\eta$ 对玻色子是 $+1$, 对费米子是 -1. 在方程(5.7.40)中使用方程(5.7.42), 空间反演的最终结果就是

$$\mathsf{P}\psi^{AB}_{ab}(x)\mathsf{P}^{-1}=\eta^*(-)^{A+B-j}\psi^{BA}_{ba}(-\mathbf{x},x^0)\,. \tag{5.7.43}$$

我们来看一下这些是如何应用于 Dirac 场的. 对于 Dirac 场的上$(\frac{1}{2},0)$分量和下$(0,\frac{1}{2})$分量, 符号 $(-1)^{A+B-j}$ 就是 $+1$, 所以宇称算符就是将 $\mathbf{x}$ 变成 $-\mathbf{x}$; 调换上下分量; 并用 η^* 乘以场. Dirac 场的上分量和下分量的交换是由(5.5.41)中的矩阵 β 完成的.

现在来考察荷共轭. 它在粒子湮灭算符和反粒子产生算符上的作用效果是

$$\mathsf{C}a(\mathbf{p},\sigma)\mathsf{C}^{-1}=\xi^*a^{\mathrm{c}}(\mathbf{p},\sigma)\,, \tag{5.7.44}$$

$$\mathsf{C}a^{\mathrm{c}\dagger}(\mathbf{p},\sigma)\mathsf{C}^{-1}=\xi^{\mathrm{c}}a^{\dagger}(\mathbf{p},\sigma)\,, \tag{5.7.45}$$

其中 ξ 和 ξ^{c} 分别是粒子和反粒子的荷共轭宇称. 将这个变换应用于场(5.7.31), 我们发现

$$\begin{aligned}\mathsf{C}\psi^{AB}_{ab}(x)\mathsf{C}^{-1}=(2\pi)^{-3/2}\sum_{\sigma}\int \mathrm{d}^3p\,u^{AB}_{ab}(\mathbf{p},\sigma)\\ \times\left[\xi^*a^{\mathrm{c}}(\mathbf{p},\sigma)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}+\xi^{\mathrm{c}}(-)^{2B}a^{\dagger}(\mathbf{p},-\sigma)(-)^{j-\sigma}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\right].\end{aligned} \tag{5.7.46}$$

将(A,B)场的这个荷共轭公式与同一粒子的(B,A)场的伴随场比较一下是有意义的:

$$\begin{aligned}\psi^{BA\dagger}_{ba}(x)=(2\pi)^{-3/2}\sum_{\sigma}\int \mathrm{d}^3p\,u^{BA*}_{ba}(\mathbf{p},\sigma)\\ \times\left[(-1)^{2A}(-1)^{j-\sigma}a^{\mathrm{c}}(\mathbf{p},-\sigma)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}+a^{\dagger}(\mathbf{p},\sigma)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\right].\end{aligned} \tag{5.7.47}$$

为了计算 u^*, 我们利用以前的结果

$$\mathbf{J}^{(j)*}=-\mathscr{C}\mathbf{J}^{(j)}\mathscr{C}^{-1}\,,\qquad\qquad \mathscr{C}_{\bar{\sigma}\sigma}\propto(-1)^{j-\sigma}\delta_{\bar{\sigma},-\sigma}\,.$$

方程(5.7.14)中的 Clebsch-Gordon 系数是实的, 所以

$$\begin{aligned}u^{BA}_{ba}(\mathbf{p},\sigma)^*=\frac{1}{\sqrt{2p^0}}\sum_{a'b'}\Big(\exp(-\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}^{(A)}\theta)\Big)_{-a,-a'}\Big(\exp(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}^{(B)}\theta)\Big)_{-b,-b'}\\ \times(-)^{a'-a}(-)^{b'-b}C_{BA}(j\sigma;b'a')\,.\end{aligned}$$

利用 Clebsch-Gordon 系数的反射性质[14]

$$C_{BA}(j,-\sigma;-b',-a') = C_{AB}(j\sigma;a'b') \tag{5.7.48}$$

再加上除非 $a'+b'=\sigma$, 否则这些系数为零的性质, 得出

$$u^{BA}_{-b,-a}(\mathbf{p},-\sigma)^* = (-)^{a+b-\sigma}\, u^{AB}_{ab}(\mathbf{p},\sigma)\,. \tag{5.7.49}$$

那么场的伴随场(5.7.47)是(做替换 $a\to -a, b\to -b, \sigma\to -\sigma$)

$$\begin{aligned}\psi^{BA\dagger}_{-b,-a}(x) = (2\pi)^{-3/2}\sum_\sigma \int \mathrm{d}^3p\,(-)^{a+b-\sigma}u^{AB}_{ab}(\mathbf{p},\sigma)\\ \times\left[(-)^{2A}(-)^{j+\sigma}a^{\mathrm{c}}(\mathbf{p},\sigma)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}+a^\dagger(\mathbf{p},\sigma)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\right].\end{aligned}$$

利用符号关系 $(-)^{-2A-j}=(-)^{2B+j}$, 这是

$$\begin{aligned}(-)^{-2A-a-b-j}\,\psi^{BA\dagger}_{-b,-a}(x) = (2\pi)^{-3/2}\sum_\sigma\int \mathrm{d}^3p\,u^{AB}_{ab}(\mathbf{p},\sigma)\\ \times\left[a^{\mathrm{c}}(\mathbf{p},\sigma)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}+(-)^{j-\sigma+2B}a^\dagger(\mathbf{p},-\sigma)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\right].\end{aligned} \tag{5.7.50}$$

为了使 $\mathsf{C}\psi^{AB}_{ab}(x)\mathsf{C}^{-1}$ 与所有普通场在类空间隔上对易或反对易, 它必须正比于 $\psi^{BA\dagger}_{-b,-a}(x)$, 这是因为它是变换类$(B,A)$的唯一因果场的伴随场. 将方程(5.7.50)与方程(5.7.46)比较, 我们看到只有荷共轭宇称满足关系

$$\xi^* = \xi^{\mathrm{c}} \tag{5.7.51}$$

这才是可能的, 在这种情况下

$$\mathsf{C}\psi^{AB}_{ab}(x)\mathsf{C}^{-1} = \xi^*(-)^{-2A-a-b-j}\,\psi^{BA\dagger}_{-b,-a}(x)\,. \tag{5.7.52}$$

我们在 5.2 节, 5.3 节和 5.5 节已经遇到了关系(5.7.51)在自旋 0, 自旋 1 和自旋 $\frac{1}{2}$ 下的情况, 并在 5.5 节看到了它在电子-正电子和夸克-反夸克态上的意义.

特别地, 对于反粒子是其本身的粒子, 方程(5.7.52)在左边没有任何荷共轭算符或右边没有相位 ξ^* 时也是满足的:

$$\psi^{AB}_{ab}(x) = (-)^{-2A-a-b-j}\,\psi^{BA\dagger}_{-b,-a}(x)\,. \tag{5.7.53}$$

在 5.5 节中, 对 Majorana 自旋 $\frac{1}{2}$ 粒子, 我们已经看到这类实条件的一个例子.

最后我们来看时间反演. 作用在粒子湮灭算符和反粒子产生算符上, 这给出

$$\mathsf{T}a(\mathbf{p},\sigma)\mathsf{T}^{-1} = \zeta^*(-1)^{j-\sigma}a(-\mathbf{p},-\sigma)\,, \tag{5.7.54}$$

$$\mathsf{T}a^{\mathrm{c}\dagger}(\mathbf{p},\sigma)\mathsf{T}^{-1} = \zeta^{\mathrm{c}}(-1)^{j-\sigma}a^{\mathrm{c}\dagger}(-\mathbf{p},-\sigma)\,, \tag{5.7.55}$$

因此不可约场(5.7.31)有变换性质

$$\begin{aligned}\mathsf{T}\psi^{AB}_{ab}(x)\mathsf{T}^{-1} = (2\pi)^{-3/2}\sum_\sigma\int \mathrm{d}^3p\,u^{AB*}_{ab}(\mathbf{p},\sigma)(-1)^{j-\sigma}\\ \times\left[\zeta^*a(-\mathbf{p},-\sigma)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+\zeta^{\mathrm{c}}(-1)^{2B}a^{\mathrm{c}\dagger}(-\mathbf{p},-\sigma)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right].\end{aligned} \tag{5.7.56}$$

为了计算系数函数的复共轭, 我们利用方程(5.7.14)和标准公式[14]

$$C_{AB}(j,\sigma;a,b) = (-)^{A+B-j} C_{AB}(j,-\sigma;-a,-b) \tag{5.7.57}$$

发现:

$$u^{AB*}_{ab}(-\mathbf{p},-\sigma) = (-)^{a+b+\sigma+A+B-j} u^{AB}_{-a,-b}(\mathbf{p},\sigma)\,. \tag{5.7.58}$$

将方程(5.7.56)中的积分变量和求和变量变为 $-\mathbf{p}$ 和 $-\sigma$, 我们发现为了使(A,B)场在时间反演变换后正比于另一(A,B)场, 必须有

$$\zeta^{\mathrm{c}} = \zeta^*\,, \tag{5.7.59}$$

在这种情况下

$$\mathsf{T}\psi^{AB}_{ab}(x)\mathsf{T}^{-1} = (-)^{a+b+A+B-2j}\zeta^*\,\psi^{AB}_{-a,-b}(\mathbf{x},-x^0)\,. \tag{5.7.60}$$

* * *

应该提一下, 在自旋 $j \geq 3/2$ 粒子的场论中, 会时不时地出现各种困难.[15] 一般地, 在存在 c-数外场的情况下研究高自旋场的传播时会遇到这些问题. 取决于不同的具体理论, 这些问题包括非因果性, 不相容性, 非物理质量态, 以及幺正性破坏. 我在这里不讨论这些问题的细节, 因为在我看来, 它们似乎与本章所描述的计算方案无关, 理由如下:

(1) 场 $\psi_{ab}(x)$ 是用物质粒子的产生算符和湮灭算符直接构造的, 所以不可能有不相容性或非物理质量态的问题. 它们是自由场, 但是通过在相互作用绘景下将它们纳入相互作用哈密顿量密度中, 我们可以用微扰论计算出自动满足集团分解原理的 S-矩阵元. 只要相互作用哈密顿量是厄米的, 在幺正性上就不会存在困难. 只要我们在哈密顿密度中加入合适的定域不协变项, Lorentz 不变性在微扰论中是会被保证的; 尽管缺乏一个严格的证明, 但没有理由怀疑这总是可能的. 因此, 高自旋的任何问题仅在我们尝试超出微扰论时才会出现.

(2) 我们会在 13.6 节讨论, 在有 c-数背景场时(这时, 高自旋的所有问题都会出现), 场方程的解确实超出了微扰论, 因为其结果涉及对微扰展开中一个无限子集的求和. 即使对于非常弱的外场, 这个部分和也可以存在, 只要场的变化足够缓慢, 使得小的能量分母抵消场的微弱. 然而, 以这种方式得到的结果依赖于高自旋粒子与外场相互作用的全部细节: 不仅是粒子的多极矩, 还包括外场中可能的非线性相互作用项. 只是当高自旋粒子与外场的相互作用被假定得非常简单, 才会遇到上述高自旋所遇到的问题.[15] 没有人证明这些问题对任意的相互作用依然存在, 并且, 我们会在第 12 章看到, 可以预期高自旋粒子有对称性所允许的所有可能类型的相互作用.

(3) 事实上, 有一个很好的理由相信, 如果与外场的相互作用足够复杂, 伴随高自旋的问题会消失. 首先, 高自旋粒子的存在是毋庸置疑的, 包括各种稳定核子和强子共振态. 如果高自旋情况存在任何问题, 它可能仅是针对“点”粒子的, 即, 它与外场的相互作用特别简单. 应当记住的是: 简单性的要求依赖于我们选择的用以表示高自旋粒子的场. 回顾一下, 我们知道, 对于一个给定的粒子, 它的任何自由场类型都可以用一个导数算子作用在任意一个其它场类型上来表示, 所以在相互作用绘景中, 任何与外场的相互作用都可以用任何我们想要的场类型来表示, 然而, 在一种场类型下形式简单的相互作用在另一场类型下形式可能非常复杂. 所以简单性的要求似乎没有任何实质性的内容.

(4) 另外, 高维“Kaluza-Klein”理论和弦论均为自旋 2 的有质量带电粒子与电磁背景场相互作用的相容理论提供了例子.[16] (我们发现理论的相容性依赖于真实外场满足场方程这一假定, 这一点在

早期工作中通常被忽视了.) 在相互作用绘景中再次表述这个工作, 自旋 2 粒子被$(1,1)$自由场表示, 但正如前面提到的, 只要(A,B)类场包含旋转群的 $j=2$ 表示, 在相互作用绘景中, 相互作用就可以用任何这样的(A,B)场重新表示.

5.8 CPT 定理

我们已经看到, 想要将相对论与量子力学结合起来就要求存在反粒子. 不仅每个粒子必须都有反粒子(纯中性粒子的反粒子是其本身); 并且粒子性质和反粒子性质之间还存在一个精确关系, 这个关系可以总结为如下表述: 选择合适的反演相位后, 所有反演的乘积 CPT 是守恒的. 这就是著名的 CPT 定理.*

作为证明的第一步, 我们先算出 CPT 乘积在各种类型的自由场上的作用结果. 对标量场, 矢量场和 Dirac 场, 5.2 节, 5.3 节和 5.5 节的结果给出

$$\mathsf{CPT}\,\phi(x)\,[\mathsf{CPT}]^{-1}=\zeta^*\xi^*\eta^*\phi^\dagger(-x)\,, \tag{5.8.1}$$

$$\mathsf{CPT}\,\phi_\mu(x)\,[\mathsf{CPT}]^{-1}=-\zeta^*\xi^*\eta^*\phi^\dagger_\mu(-x)\,, \tag{5.8.2}$$

$$\mathsf{CPT}\,\psi(x)\,[\mathsf{CPT}]^{-1}=-\zeta^*\xi^*\eta^*\gamma_5\psi^*(-x)\,. \tag{5.8.3}$$

(当然, 相位ζ,ξ,η依赖于每个场所描述的粒子种类.) 我们将选择相位, 使得对于所有粒子有

$$\zeta\,\xi\,\eta=1\,. \tag{5.8.4}$$

那么, 对于任意一组标量场, 矢量场以及它们的导数组成的任意张量 $\phi_{\mu_1\ldots\mu_n}$, 它的变换是

$$\mathsf{CPT}\,\phi_{\mu_1\ldots\mu_n}(x)\,[\mathsf{CPT}]^{-1}=(-)^n\phi^\dagger_{\mu_1\ldots\mu_n}(-x)\,. \tag{5.8.5}$$

(由于 CPT 是反幺正的, 这些张量中的任何复系数会变换成它的复共轭.) 容易看到, 对于 Dirac 场的双线性型组合构成的张量, 这个变换规则同样适用. 将方程(5.8.3)应用到这样的双线性型上给出

$$\begin{aligned}\mathsf{CPT}[\bar\psi_1(x)M\psi_2(x)][\mathsf{CPT}]^{-1}&=\psi_1^{\mathrm{T}}(-x)\gamma_5\beta M^*\gamma_5\psi_2^*(-x)\\&=[\bar\psi_1(-x)\gamma_5M\gamma_5\psi_2(-x)]^\dagger\,.\end{aligned} \tag{5.8.6}$$

(β和γ_5反对易产生的负号与费米算符反对易产生的负号抵消了.) 如果这个双线性型是 n 秩张量, 那么 M 是 n 模 2 个 Dirac 矩阵的乘积, 所以 $\gamma_5M\gamma_5=(-1)^nM$, 因而这个双线性型满足方程(5.8.5).

厄米的标量相互作用密度 $\mathscr{H}(x)$ 一定是由时空指标总数为偶数的张量构成, 因此

$$\mathsf{CPT}\,\mathscr{H}(x)\,[\mathsf{CPT}]^{-1}=\mathscr{H}(-x). \tag{5.8.7}$$

*这个定理的原始证明是 Lüders 和 Pauli 给出的.[17] 在公理化场论中被严格地证明了,[18] 证明方法是使用交换性假定, 将理论的 Lorentz 不变性扩张到复 Lorentz 群, 然后利用复 Lorentz 变换来证明场乘积的真空期望值的反演性质, 然后再利用这个反演性质推出存在一个反幺正算符, 这个算符诱导出场上的 CPT 变换.

更一般地(而且也更简单些), 我们可以看到, 对于构成厄米标量的场 $\psi^{AB}_{ab}(x)$, 如果它属于齐次 Lorentz 群的一个或多个一般不可约表示, 那么把前面章节中这些场在反演下的结果放在一起, 我们发现

$$\mathsf{CPT}\,\psi^{AB}_{ab}(x)\,[\mathsf{CPT}]^{-1} = (-1)^{2B}\psi^{AB\dagger}_{ab}(-x)\,. \tag{5.8.8}$$

(对于 Dirac 场, 因子 $(-1)^{2B}$ 由方程(5.8.3)中的矩阵 γ_5 提供.) 为了将乘积 $\psi^{A_1B_1}_{a_1b_1}(x)\psi^{A_2B_2}_{a_2b_2}(x)\cdots$ 合成标量 $\mathscr{H}(x)$, 必须要求 $A_1+A_2+\cdots$ 和 $B_1+B_2+\cdots$ 都是整数, 所以 $(-1)^{2B_1+2B_2+\cdots}=1$, 因而厄米标量 $\mathscr{H}(x)$ 会自动满足方程(5.8.7).

从方程(5.8.7)可以立刻得出 CPT 与相互作用 $V\equiv\int \mathrm{d}^3x\,\mathscr{H}(\vec{x},0)$ 对易:

$$\mathsf{CPT}\,V\,[\mathsf{CPT}]^{-1} = V\,. \tag{5.8.9}$$

同样, 在所有理论中, CPT 与自由粒子哈密顿量 H_0 对易. 因此算符 CPT 在这里通过它在自由粒子算符上的作用来定义, 以 3.3 节所描述的方式作用在“入”态和“出”态上. 我们在 3.3 节和 3.6 节中已经讨论了这个对称性原理的物理结果.

5.9 无质量粒子场

至此, 我们只处理了有质量粒子的场. 对于其中的一些场, 诸如 5.2 节和 5.5 节中讨论的标量场和 Dirac 场, 在过渡到无质量极限时没有出现特别的问题. 另一方面, 我们在 5.3 节看到, 对于自旋 1 粒子, 在取矢量场的无质量极限时出现了一个困难: 至少有一个极化矢量在这个极限下变得无限大. 事实上, 我们将在本节看到, 对于自旋 $j\geq 1$ 的无质量物理粒子, 它的产生算符和湮灭算符不能构造出在有限质量情况下构造的全部不可约(A,B)场. 场类型的这个特别的局限性会自然地导致规范不变性的引入.

就像我们对有质量粒子做的那样, 对于一般的无质量粒子, 我们尝试用动量为 $\mathbf{p}$ 螺旋度为 σ 的粒子湮灭算符 $a(\mathbf{p},\sigma)$ 与相对应的反粒子产生算符 $a^{\mathrm{c}\dagger}(\mathbf{p},\sigma)$ 的线性组合来构造它的自由场:*

$$\begin{aligned}\psi_\ell(x) = (2\pi)^{-3/2}\int \mathrm{d}^3p\sum_\sigma\Big[&\kappa\,a(\mathbf{p},\sigma)u_\ell(\mathbf{p},\sigma)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\\ &+\lambda\,a^{\mathrm{c}\dagger}(\mathbf{p},\sigma)v_\ell(\mathbf{p},\sigma)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\Big]\end{aligned} \tag{5.9.1}$$

现在其中的 $p^0\equiv|\mathbf{p}|$. 产生算符就像方程(2.5.42)中的单粒子态那样变换

$$U(\Lambda)a^\dagger(\mathbf{p},\sigma)U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}}\,\exp\Big(\mathrm{i}\sigma\theta(p,\Lambda)\Big)a^\dagger(\mathbf{p}_\Lambda,\sigma)\,, \tag{5.9.2}$$

$$U(\Lambda)a^{\mathrm{c}\dagger}(\mathbf{p},\sigma)U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}}\,\exp\Big(\mathrm{i}\sigma\theta(p,\Lambda)\Big)a^{\mathrm{c}\dagger}(\mathbf{p}_\Lambda,\sigma)\,, \tag{5.9.3}$$

因而

$$U(\Lambda)a(\mathbf{p},\sigma)U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}}\,\exp\Big(-\mathrm{i}\sigma\theta(p,\Lambda)\Big)a(\mathbf{p}_\Lambda,\sigma)\,, \tag{5.9.4}$$

*我们在这里仅处理单个种类的粒子, 并扔掉种类指标 n. 另外, κ 和 λ 是由因果性要求以及系数函数 u_ℓ 和 v_ℓ 的某些出于方便考虑的归一化的选择决定的常数.

其中 $p_\Lambda \equiv \Lambda p$, θ 是方程(2.5.43)定义的角度. 因此, 如果我们希望场按照齐次 Lorentz 群的某个表示 $D(\Lambda)$ 变换

$$U(\Lambda)\psi_\ell(x)U^{-1}(\Lambda) = \sum_{\bar\ell} D_{\ell\bar\ell}(\Lambda^{-1})\psi_{\bar\ell}(\Lambda x)\,, \tag{5.9.5}$$

那么我们必须让系数函数 u 和 v 满足关系

$$u_{\bar\ell}(\mathbf{p}_\Lambda,\sigma)\ \exp\Big(\mathrm{i}\sigma\theta(p,\Lambda)\Big) = \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}}\sum_\ell D_{\bar\ell\ell}(\Lambda)u_\ell(\mathbf{p},\sigma)\,, \tag{5.9.6}$$

$$v_{\bar\ell}(\mathbf{p}_\Lambda,\sigma)\ \exp\Big(-\mathrm{i}\sigma\theta(p,\Lambda)\Big) = \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}}\sum_\ell D_{\bar\ell\ell}(\Lambda)v_\ell(\mathbf{p},\sigma) \tag{5.9.7}$$

而不是方程(5.1.19)和(5.1.20). (再次, $p_\Lambda \equiv \Lambda p$.) 同有质量粒子的情况一样, 通过令

$$u_{\bar\ell}(\mathbf{p},\sigma) = \sqrt{\frac{|\mathbf{k}|}{p^0}}\sum_\ell D_{\bar\ell\ell}(\mathscr{L}(p))u_\ell(\mathbf{k},\sigma)\,, \tag{5.9.8}$$

$$v_{\bar\ell}(\mathbf{p},\sigma) = \sqrt{\frac{|\mathbf{k}|}{p^0}}\sum_\ell D_{\bar\ell\ell}(\mathscr{L}(p))v_\ell(\mathbf{k},\sigma) \tag{5.9.9}$$

(而不是方程(5.1.21)和(5.1.22)), 我们就可以满足这些要求, 其中 $\mathbf{k}$ 是标准动量, 例如$(0,0,k)$, 而 $\mathscr{L}(p)$ 是将无质量粒子的动量从 $\mathbf{k}$ 变为 $\mathbf{p}$ 的标准 Lorentz 变换. 同样, 取代方程(5.1.23)和(5.1.24), 标准动量的系数函数必须满足

$$u_{\bar\ell}(\mathbf{k},\sigma)\ \exp\Big(\mathrm{i}\sigma\theta(k,W)\Big) = \sum_\ell D_{\bar\ell\ell}(W)u_\ell(\mathbf{k},\sigma) \tag{5.9.10}$$

$$v_{\bar\ell}(\mathbf{k},\sigma)\ \exp\Big(-\mathrm{i}\sigma\theta(k,W)\Big) = \sum_\ell D_{\bar\ell\ell}(W)v_\ell(\mathbf{k},\sigma) \tag{5.9.11}$$

其中 $W^\mu{}_\nu$ 是 4-动量 $k=(\mathbf{k},|\mathbf{k}|)$的"小群"群元, 即, 保持 4-动量不变的任意 Lorentz 变换.

通过分别考察方程(2.5.28)中的两类小群群元, 我们可以看出方程(5.9.10)和(5.9.11)的含义. 对于绕 z-轴角度为 θ 的旋转 $R(\theta)$, 它由方程(2.5.27)给出

$$R^\mu{}_\nu(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

我们从方程(5.9.10)和(5.9.11)中发现

$$u_{\bar\ell}(\mathbf{k},\sigma)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma\theta} = \sum_\ell D_{\bar\ell\ell}\Big(R(\theta)\Big)u_\ell(\mathbf{k},\sigma) \tag{5.9.12}$$

$$v_{\bar\ell}(\mathbf{k},\sigma)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma\theta} = \sum_\ell D_{\bar\ell\ell}\Big(R(\theta)\Big)v_\ell(\mathbf{k},\sigma)\,. \tag{5.9.13}$$

对于 x-y 平面中旋转和增速的组合 $S(\alpha,\beta)$, 由方程(2.5.26)给出,

$$S^{\mu}{}_{\nu}(\alpha,\beta)=\begin{bmatrix}1&0&-\alpha&\alpha\\0&1&-\beta&\beta\\\alpha&\beta&1-\gamma&\gamma\\\alpha&\beta&-\gamma&1+\gamma\end{bmatrix},$$

$$\gamma\equiv(\alpha^2+\beta^2)/2\,,$$

方程(5.9.10)和(5.9.11)给出

$$u_{\bar{\ell}}(\mathbf{k},\sigma)=\sum_{\ell}D_{\bar{\ell}\ell}\Big(S(\alpha,\beta)\Big)u_{\ell}(\mathbf{k},\sigma)\,, \tag{5.9.14}$$

$$v_{\bar{\ell}}(\mathbf{k},\sigma)=\sum_{\ell}D_{\bar{\ell}\ell}\Big(S(\alpha,\beta)\Big)v_{\ell}(\mathbf{k},\sigma)\,. \tag{5.9.15}$$

方程(5.9.12)—(5.9.15)是决定标准动量 $\mathbf{k}$ 处系数函数 u 和 v 的条件; 方程(5.9.8)和(5.9.9)则给出任意动量处的系数函数. v 的方程与 u 的方程互为复共轭, 所以在对常数 κ 和 λ 进行恰当的调整后, 我们可以对系数函数归一化, 使得

$$v_{\ell}(\mathbf{p},\sigma)=u_{\ell}(\mathbf{p},\sigma)^*\,. \tag{5.9.16}$$

问题是, 对于齐次 Lorentz 群的一般表示, 即使那些表示在 $m\neq0$ 的情况下能够构造出螺旋度给定的粒子的场, 我们都找不到满足方程(5.9.14)的 u_{ℓ}.

为了看出哪里出了问题, 我们先尝试构造螺旋度为 ±1 的无质量粒子的 4-矢$[(\frac{1}{2},\frac{1}{2})]$场. 在 4-矢表示中, 我们有

$$D^{\mu}{}_{\nu}(\Lambda)=\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,.$$

在这里将系数函数 u_{μ} 写成"极化矢量" e_{μ} 将是方便的:

$$u_{\mu}(\mathbf{p},\sigma)\equiv(2p^0)^{-1/2}\,e_{\mu}(\mathbf{p},\sigma)\,, \tag{5.9.17}$$

从而方程(5.9.8)给出

$$e^{\mu}(\mathbf{p},\sigma)=\mathscr{L}(\mathbf{p})^{\mu}{}_{\nu}\,e^{\nu}(\mathbf{k},\sigma)\,. \tag{5.9.18}$$

另外, 方程(5.9.12)和(5.9.14)在这里变成

$$e^{\mu}(\mathbf{k},\sigma)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma\theta}=R(\theta)^{\mu}{}_{\nu}\,e^{\nu}(\mathbf{k},\sigma)\,, \tag{5.9.19}$$

$$e^{\mu}(\mathbf{k},\sigma)=S(\alpha,\beta)^{\mu}{}_{\nu}\,e^{\nu}(\mathbf{k},\sigma)\,. \tag{5.9.20}$$

方程(5.9.19)要求(可以相差一个被吸收进系数 κ 和 λ 的常数),

$$e^{\mu}(\mathbf{k},\pm1)=(1,\pm\mathrm{i},0,0)/\sqrt{2}\,. \tag{5.9.21}$$

但是方程(5.9.20)同时会要求 $\alpha\pm\mathrm{i}\beta=0$, 对于一般的实 α,β, 这是不可能的. 因此, 我们无法满足基本要求(5.9.14)或(5.9.10); 取而代之, 我们这里有

$$\begin{aligned}D^{\mu}{}_{\nu}\Big(W(\theta,\alpha,\beta)\Big)e^{\nu}(\mathbf{k},\pm1)&=S^{\mu}{}_{\lambda}(\alpha,\beta)R^{\lambda}{}_{\nu}(\theta)e^{\nu}(\mathbf{k},\pm1)\\&=\exp(\pm\mathrm{i}\theta)\left\{e^{\mu}(\mathbf{k},\pm1)+\frac{(\alpha\pm\mathrm{i}\beta)}{\sqrt{2}|\mathbf{k}|}k^{\mu}\right\}\,.\end{aligned} \tag{5.9.22}$$

由此我们得到结论, 4-矢场无法用螺旋度 ±1 的零质量粒子的产生算符和湮灭算符构造.

我们暂时先假装没看到这个困难, 继续往前走, 用方程(5.9.18)和(5.9.21)定义任意动量的极化矢量, 并取这个场为

$$a_\mu(x) = \int \mathrm{d}^3p\,(2\pi)^{-3/2}(2p^0)^{-1/2} \times \sum_{\sigma=\pm1}\left[e_\mu(\mathbf{p},\sigma)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}a(\mathbf{p},\sigma) + e_\mu(\mathbf{p},\sigma)^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}a^{\mathrm{c}\dagger}(\mathbf{p},\sigma)\right]. \tag{5.9.23}$$

我们稍后将回来继续考虑这样的场是怎样成为物理理论中的一个要素.

场(5.9.23)当然满足

$$\Box a^\mu(x) = 0\,. \tag{5.9.24}$$

场的其它性质源于极化矢量的性质. (后面处理量子电动力学时, 我们会需要极化矢量的这些性质.) 注意, 使无质量粒子动量由 $\mathbf{k}$ 变为 $\mathbf{p}$ 的 Lorentz 变换 $\mathscr{L}(p)$ 可以写成沿 z-轴的"增速" $\mathscr{B}(|\mathbf{p}|)$ 加上标准旋转 $R(\hat{\mathbf{p}})$, 这个增速变换使粒子能量从 $|\mathbf{k}|$ 变为 $|\mathbf{p}|$, 旋转使 z-轴转向 $\mathbf{p}$ 方向. 既然 $e^\nu(\mathbf{k},\pm1)$ 是只有 x 分量和 y 分量的纯空间矢量, 沿 z-轴的增速不会影响它, 所以

$$e^\mu(\mathbf{p},\pm1) = R(\hat{\mathbf{p}})^\mu{}_\nu\, e^\nu(\mathbf{k},\pm1)\,. \tag{5.9.25}$$

特别地, $e^0(\mathbf{k},\pm1)=0$ 且 $\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}(\mathbf{k},\pm1)=0$, 所以

$$e^0(\mathbf{p},\pm1) = 0 \tag{5.9.26}$$

以及

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}(\mathbf{p},\pm1) = 0\,. \tag{5.9.27}$$

由此得出

$$a^0(x) = 0 \tag{5.9.28}$$

和

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}(x) = 0\,. \tag{5.9.29}$$

我们将会在第 9 章看到, 这些是电动力学的真空矢势在所谓 Coulomb 规范或辐射规范下满足的条件.

a^0 在所有 Lorentz 参考系下为零, 这一事实明确地指出 a^μ 不可能是一个 4-矢. 相反, 方程(5.9.22)证明了, 对于一般动量 $\mathbf{p}$ 和一般 Lorentz 变换 Λ, 取代方程(5.9.6), 我们有

$$e^\mu(\mathbf{p}_\Lambda,\pm1)\exp(\pm\mathrm{i}\theta(\mathbf{p},\Lambda)) = D^\mu{}_\nu(\Lambda)e^\nu(\mathbf{p},\pm1) + p^\mu\Omega_\pm(\mathbf{p},\Lambda)\,, \tag{5.9.30}$$

这使得在一般的 Lorentz 变换下

$$U(\Lambda)a_\mu(x)U^{-1}(\Lambda) = \Lambda^\nu{}_\mu a_\nu(\Lambda x) + \partial_\mu\Omega(x,\Lambda)\,, \tag{5.9.31}$$

其中 $\Omega(x,\Lambda)$ 是产生算符和湮灭算符的线性组合, 我们这里并不关心它的精确形式. 我们会在第 8 章中更清楚地看到, 如果 $a^\mu(x)$ 的耦合不仅形式上是 Lorentz 不变的(即, 在形式 Lorentz 变换 $a^\mu \to \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu$ 下不变), 而且在"规范"变换 $a_\mu \to a_\mu + \partial_\mu\Omega$ 下不变, 那么我们可以将 $a^\mu(x)$ 这样的

场用作 Lorentz 不变物理理论中的一个元素. 这一点是通过将 a_μ 的耦合取为 $a_\mu j^\mu$ 的形式实现的, 其中 j^μ 是满足 $\partial_\mu j^\mu = 0$ 的 4-矢流.

对于螺旋度为 ± 1 的无质量粒子, 尽管不存在普通的 4-矢场, 但完全可以为这种粒子构造一个反对称张量场. 由方程(5.9.22)以及 k^μ 在小群下不变, 我们立刻看出

$$\begin{aligned} &D^\mu{}_\rho\Big(W(\theta,\alpha,\beta)\Big)D^\nu{}_\sigma\Big(W(\theta,\alpha,\beta)\Big)\Big(k^\rho e^\sigma(\mathbf{k},\pm1)-k^\sigma e^\rho(\mathbf{k},\pm1)\Big)\\ &\quad=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta}\Big(k^\mu e^\nu(\mathbf{k},\pm1)-k^\nu e^\mu(\mathbf{k},\pm1)\Big)\,. \end{aligned} \tag{5.9.32}$$

这表明, 对于齐次 Lorentz 群的反对称张量表示, 满足方程(5.9.6)的系数函数是(选择合适的归一化)

$$u^{\mu\nu}(\mathbf{p},\pm1)=\mathrm{i}(2\pi)^{-3/2}(2p^0)^{-3/2}\left[p^\mu e^\nu(\mathbf{p},\pm1)-p^\nu e^\mu(\mathbf{p},\pm1)\right], \tag{5.9.33}$$

其中 $e^\mu(\mathbf{p},\pm1)$ 由方程(5.9.25)给出. 结合方程(5.9.23), 对于螺旋度为 ±1 的无质量粒子, 这个结果给出了它的一般反对称张量场

$$f_{\mu\nu}=\partial_\mu a_\nu-\partial_\nu a_\mu\,. \tag{5.9.34}$$

注意, 即使 a^μ 不是 4-矢, 这也是一个张量, 这是因为方程(5.9.31)中额外的项在方程(5.9.34)中被抵消了. 同时注意到, 方程(5.9.34), (5.9.24), (5.9.28)和(5.9.29)表明 $f^{\mu\nu}$ 满足真空 Maxwell 方程组:

$$\partial_\mu f^{\mu\nu}=0\,, \tag{5.9.35}$$

$$\epsilon^{\rho\sigma\mu\nu}\partial_\sigma f_{\mu\nu}=0\,. \tag{5.9.36}$$

为了计算张量场的对易关系, 我们需要对双线性积 $e^\mu e^{\nu*}$ 的螺旋度求和. 显式表达式(5.9.21)给出

$$\sum_{\sigma=\pm1}e^i(\mathbf{k},\sigma)e^j(\mathbf{k},\sigma)^*=\delta_{ij}-\frac{k^ik^j}{|\mathbf{k}|^2}$$

因而, 利用方程(5.9.25)

$$\sum_{\sigma=\pm1}e^i(\mathbf{p},\sigma)e^j(\mathbf{p},\sigma)^*=\delta_{ij}-\frac{p^ip^j}{|\mathbf{p}|^2}\,. \tag{5.9.37}$$

那么直接的计算就给出

$$\begin{aligned} [f_{\mu\nu}(x),f_{\rho\sigma}(y)^\dagger]&=(2\pi)^{-3}\left[-\eta_{\mu\rho}\partial_\nu\partial_\sigma+\eta_{\nu\rho}\partial_\mu\partial_\sigma+\eta_{\mu\sigma}\partial_\nu\partial_\rho-\eta_{\nu\sigma}\partial_\mu\partial_\rho\right]\\ &\quad\times\int\mathrm{d}^3p\,(2p^0)^{-1}\left[|\kappa|^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}-|\lambda|^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}\right]. \end{aligned} \tag{5.9.38}$$

显然, 当且仅当

$$|\kappa|^2=|\lambda|^2 \tag{5.9.39}$$

这个对易子在 $x^0=y^0$ 处才为零, 在这种情况下, 因为 $f_{\mu\nu}$ 是张量, 对易子对于所有的类空间隔都为零. 方程(5.9.39)也暗示了 a^μ 的等时对易子为零, 并且我们会在第 8 章看到, 这足以产生一个 Lorentz 不变 S- 矩阵. 产生算符和湮灭算符的相对相位可以调整, 使得 $\kappa=\lambda$; 这样一来, 如果粒子是它们本身的荷共轭, 这个场就厄米, 光子就是这样的情况.

在构造自旋 1 无质量粒子的理论时, 为什么我们要使用 $a^\mu(x)$ 这样的场, 而不是满足于 $f^{\mu\nu}$ 这样具有简单 Lorentz 变换性质的场? 方程(5.9.34)中出现导数意味着, 对于能量和动量比较小的无

质量粒子, 与矢量场 a_μ 构造的相互作用密度相比, 仅由 $f_{\mu\nu}$ 和它的导数构造的相互作用密度会有更快趋于零的矩阵元. 这种理论中的相互作用在长程时会快速衰减, 而这个衰减要比平常的平方反比律快得多. 这样的构造是完全可能的, 但是对于自旋 1 的无质量粒子, 使用矢量场的规范不变理论代表了一类更普遍的理论, 这其中包括那些在自然中真实存在的理论.

相同的讨论同样适用于引力子, 即螺旋度为 ±2 的无质量粒子. 从这种粒子的产生算符和湮灭算符出发, 我们可以构造出一个张量 $R_{\mu\nu\rho\sigma}$, 它的代数性质与 Riemann-Christoffel 曲率张量相同: 在 μ,ν 和 ρ,σ 之间分别反对称, 而在这两对之间对称. 为了纳入通常的平方反比引力相互作用, 我们需要引入按照对称张量变换的场 $h_{\mu\nu}$, 它可以确定到只差一个规范变换, 而与这个规范变换相联系的就是广义相对论中的广义坐标变换. 因此, 为了使得为螺旋度 ±2 的无质量粒子构造的理论能够包含长程相互作用, 它必须有类似广义协变的对称性. 就像电磁规范不变的情况, 通过用守恒"流" $\theta^{\mu\nu}$ 与场耦合可以实现它, 不过这个"流"现在有两个时空指标, 并满足 $\partial_\mu\theta^{\mu\nu}=0$. 这类守恒张量只能是能动量张量和可能的全导数项, 而全导数项并不影响生成的力的长程行为.** 与自旋 $j\geq3$ 的无质量粒子的场耦合的守恒张量, 它的时空指标不能少于三个, 但除了全导数外并不存在这样的张量, 所以*高自旋无质量粒子无法产生长程力*.

* * *

我们在构造螺旋度 ±1 的 4-矢场或螺旋度 ±2 的对称张量场时所遇到的问题, 只是一种更一般极限的特殊情况. 为了看清这点, 对属于齐次 Lorentz 群任意表示的无质量粒子, 我们来考察如何构造它的场. 我们在 5.6 节看到, 齐次 Lorentz 群的任何表示 $D(\Lambda)$ 都可以分解成 $(2A+1)(2B+1)$-维表示 (A,B), 对于这样的表示, 齐次 Lorentz 群的生成元表示成

$$
\begin{aligned}
(\mathscr{J}_{ij})_{a'b',ab} &= \epsilon_{ijk}\Big[(J_k^{(A)})_{a'a}\delta_{b'b}+(J_k^{(B)})_{b'b}\delta_{a'a}\Big]\,,\\
(\mathscr{J}_{k0})_{a'b',ab} &= -\mathrm{i}\Big[(J_k^{(A)})_{a'a}\delta_{b'b}-(J_k^{(B)})_{b'b}\delta_{a'a}\Big]\,,
\end{aligned}
$$

其中 $\mathbf{J}^{(j)}$ 是自旋 j 的角动量矩阵. 当 θ 无限小时, $D(R(\theta))=1+\mathrm{i}\mathscr{J}_{12}\theta$, 所以方程(5.9.12)和(5.9.13)给出

$$
\sigma u_{ab}(\mathbf{k},\sigma)=(a+b)u_{ab}(\mathbf{k},\sigma)\,,
$$

$$
-\sigma v_{ab}(\mathbf{k},\sigma)=(a+b)v_{ab}(\mathbf{k},\sigma)\,,
$$

因此, $u_{ab}(\mathbf{k},\sigma)$ 和 $v_{ab}(\mathbf{k},\sigma)$ 分别仅在 $\sigma=a+b$ 和 $\sigma=-a-b$ 时不为零. 另外, 在方程(5.9.14)中令 θ 无限小, 这给出

$$
\begin{aligned}
0&=(\mathscr{J}_{31}+\mathscr{J}_{01})_{ab,a'b'}\,u_{a'b'}(\mathbf{k},\sigma)\\
&=(J_2^{(A)}+\mathrm{i}J_1^{(A)})_{aa'}u_{a'b}(\mathbf{k},\sigma)+(J_2^{(B)}-\mathrm{i}J_1^{(B)})_{bb'}u_{ab'}(\mathbf{k},\sigma)\,,\\
0&=(\mathscr{J}_{32}+\mathscr{J}_{02})_{ab,a'b'}\,u_{a'b'}(\mathbf{k},\sigma)\\
&=(-J_1^{(A)}+\mathrm{i}J_2^{(A)})_{aa'}u_{a'b}(\mathbf{k},\sigma)+(-J_1^{(B)}-\mathrm{i}J_2^{(B)})_{bb'}u_{ab'}(\mathbf{k},\sigma)\,,
\end{aligned}
$$

** 如果 $\theta^{\mu_1\cdots\mu_N}$ 是满足 $\partial_{\mu_1}\theta^{\mu_1\cdots\mu_N}=0$ 的张量流, 那么 $\int\mathrm{d}^3x\,\theta^{0\mu_2\cdots\mu_N}$ 就是按照 $N-1$ 秩张量变换的守恒量. 这样的守恒量只能是各种连续对称性附带的标量"荷", 以及能动量 4-矢. 任何其它 4-矢或高秩任意张量的守恒会禁止向前碰撞以外的所有碰撞.

或者更简洁的

$$\left(J_1^{(A)} - \mathrm{i}J_2^{(A)}\right)_{aa'} u_{a'b}(\mathbf{k},\sigma) = 0\,,$$
$$\left(J_1^{(B)} + \mathrm{i}J_2^{(B)}\right)_{bb'} u_{ab'}(\mathbf{k},\sigma) = 0\,.$$

这要求, 仅当

$$a = -A\,, \qquad b = +B\,, \tag{5.9.40}$$

$u_{ab}(\mathbf{k},\sigma)$ 才不为零, 并且这对 $v_{ab}(\mathbf{k},\sigma)$ 显然也是正确的. 综合以上结果, 我们看到一个 (A,B) 类场仅能从螺旋度为 σ 的无质量粒子的湮灭算符和螺旋度为 $-\sigma$ 的反粒子的产生算符构造出来, 其中

$$\sigma = B - A\,. \tag{5.9.41}$$

例如, 对于无质量粒子的 Dirac 场, 它的$(\frac{1}{2},0)$部分和$(0,\frac{1}{2})$部分只能分别湮灭螺旋度为 $-\frac{1}{2}$ 和螺旋度为 $+\frac{1}{2}$ 的粒子, 分别产生螺旋度为 $+\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}$ 的反粒子. 在中微子的"二分量"理论中, 仅存在$(\frac{1}{2},0)$场和它的伴随场, 所以在这个理论中, 中微子的螺旋度为 $-\frac{1}{2}$ 而反中微子的螺旋度为 $+\frac{1}{2}$.

利用 5.7 节中的方法, 对于自旋 j (即螺旋度 $\mp j$)的无质量粒子, 可以证明, 如果方程(5.9.1)中产生项和湮灭项的系数满足方程(5.9.39), 那么$(j,0)$场与$(0,j)$场在类空间隔上彼此对易且与它们的伴随场对易. 这样, 就可以对产生算符和湮灭算符的相对相位进行调整, 使得这些系数相等. 容易看出自旋 j 无质量粒子的$(A,A+j)$类场或$(B+j,B)$类场正好分别是$(0,j)$类场的$2A$ 阶导数或$(j,0)$类场的 $2B$ 阶导数, 所以这里不需要另外考虑那些更普遍的场.

现在我们就能明白为什么不可能为螺旋度 ±1 的无质量粒子构造矢量场. 按照$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$表示变换的矢量场, 根据方程(5.9.41), 它只能描述零螺旋度. (构造零螺旋度的矢量场当然是可能的——取无质量标量场 ϕ 的导数 $\partial_\mu\phi$ 即可.) 螺旋度为 ±1的最简单无质量矢量场具有 Lorentz 变换类$(1,0)\oplus(0,1)$; 即, 它是反对称张量 $f_{\mu\nu}$. 类似地, 螺旋度为 ±2 的最简单协变无质量场具有 Lorentz 变换类$(2,0)\oplus(0,2)$: 它是一个四秩张量, 同 Riemann-Christoffel 曲率张量一样, 它在每对指标之内反对称而在两对指标之间对称.

在经过显然的修正后, 前面章节给出的 $\mathsf{P},\mathsf{C},\mathsf{T}$ 讨论可以移植到无质量的情况.

习题

1. 证明, 如果零动量系数函数满足条件(5.1.23)和(5.1.24), 则任意动量的系数函数(5.1.21)和(5.1.22)满足确定条件(5.1.19)和(5.1.20).

2. 考虑自由场 $\psi_\ell^\mu(x)$, 它湮灭和产生一个自旋 $\frac{3}{2}$ 的电荷自共轭粒子, 粒子质量 $m\neq0$. 说明如何计算系数函数 $u_\ell^\mu(\mathbf{p},\sigma)$, 它乘在场的湮灭算符 $a(\mathbf{p},\sigma)$ 上, 使场在 Lorentz 变换下像一个带有额外 4-矢指标 μ 的 Dirac 场 ψ_ℓ 那样变换. 这个场满足的场方程、代数条件和实条件分别是什么? 计算矩阵 $P^{\mu\nu}(p)$, 它定义(对于 $p^2=-m^2$)为

$$\sum_\sigma u_\ell^\mu(\mathbf{p},\sigma)u_m^{\nu*}(\mathbf{p},\sigma) \equiv (2p^0)^{-1}\,P_{\ell m}^{\mu\nu}(p)\,.$$

这个场的对易关系是什么? 它在 $\mathsf{P},\mathsf{C},\mathsf{T}$ 反演下如何变换?

3. 考虑满足$h^{\mu\nu}(x) = h^{\nu\mu}(x)$以及$h^{\mu}{}_{\mu} = 0$的自由场$h^{\mu\nu}(x)$, 它湮灭和产生的是自旋为2且质量$m \neq 0$的粒子. 说明如何计算系数函数$u^{\mu\nu}(\mathbf{p},\sigma)$, 它乘在场的湮灭算符$a(\mathbf{p},\sigma)$上, 使场在Lorentz变换下像张量那样变换. 这个场满足的场方程是什么? 计算函数$P^{\mu\nu,\kappa\lambda}(p)$, 它定义为

$$\sum_{\sigma} u^{\mu\nu}(\mathbf{p},\sigma)u^{\kappa\lambda *}(\mathbf{p},\sigma) \equiv (2p^0)^{-1}\, P^{\mu\nu,\kappa\lambda}(p)\,.$$

这个场的对易关系是什么? 这个场在$\mathsf{P},\mathsf{C},\mathsf{T}$反演下如何变换?

4. 证明, 自旋j的无质量粒子的$(A, A+j)$场或$(B+j, B)$场分别是$(0,j)$场的$2A$阶导数或$(j,0)$场的$2B$阶导数.

5. 对螺旋度为$\pm j$的无质量粒子, 计算$(j,0)+(0,j)$场在$\mathsf{P},\mathsf{C},\mathsf{T}$反演下的变换性质.

6. 考虑按照齐次Lorentz群的$(j,0)+(0,j)$表示变换的一般Dirac场. 列出可以用ψ和$\psi^\dagger$的分量的乘积构造出的张量. 检验你的结果与我们得到的$j=\frac{1}{2}$的结果是否一致.

7. 考虑一个一般的场ψ_{ab}, 它描述自旋为j且质量$m \neq 0$的粒子, 按照齐次Lorentz群的(A,B)表示变换. 假设它有如下形式的相互作用哈密顿量

$$V = \int \mathrm{d}^3x\, [\psi_{ab}(x)J^{ab}(x) + J^{ab\dagger}(x)\psi^{\dagger}_{ab}(x)]\,,$$

其中J^{ab}是c-数外流. 当这些粒子的能量$E \gg m$且拥有确定的螺旋度时, 发射这些粒子的矩阵元的渐近行为是什么? (对于不同的a,b, 假定流的Fourier变换在量级上相同, 并且对E的依赖性不强.)

参考文献

[1] 本章所采用的观点出现在一系列的论文中: S. Weinberg, *Phys. Rev.* **133**, B1318 (1964); **134**, B882 (1964); **138**, B988 (1965); **181**, 1893, (1969). 类似的方法也可以在E. Wichmann未发表的讲义中找到.

[2] N. Bohr and L. Rosenfeld, *Kgl. Danske Vidensk. Selskab Mat.-Fys. Medd.,* No. 12 (1933)(英译在 *Selected Papers of Leon Rosenfeld,* R. S. Cohen and J. Stachel编辑(Reidel, Dordrecht, 1979)); *Phys. Rev.* **78**, 794 (1950).

[3] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* (London) **A117**, 610 (1928).

[4] E. Cartan, *Bull. Soc. Math. France* **41**, 53 (1913).

[5] 可参看J. M. Jauch and F. Rohrlich, *The Theory of Photons and Electrons* (Addison-Wesley, Cambridge, MA 1955): Appendix A2; H. Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics* (Benjamin-Cummings, Reading, MA, 1982): pp. 15, 198. 原始文献是I. Schur, *Sitz. Preuss. Akad.*, p. 406 (1905).

[6] 可参看H. Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics* (Benjamin/Cummings, Reading, MA, 1982):pp. 15, 198. 原始文献是I. Schur, *Sitz. Preuss. Akad.*, p. 406(1905).

[7] T. D. Lee and C. N. Yang, *Phys. Rev.* **104**, 254 (1956).

[8] 可参看B. L. van der Waerden, *Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik* (Spinger Verlag, Berlin, 1932); G. Ya. Lyubarski, *The Applications of Group Theory in Physics*, S. Dedijer译 (Pergamon Press, New York, 1960).

[9] W. Rarita and J. Schwinger, *Phys. Rev.* **60**, 61 (1941).

[10] 可参看A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics,* (Princeton University Press, Princeton, 1957): Chapter 3.

[11] S. Weinberg, *Phys. Rev.* **181**, 1893 (1969), Section V.

[12] M. Fierz, *Helv. Phys. Acta* **12**, 3 (1939); W. Pauli, *Phys. Rev.* **58**, 716 (1940). 公理化场论中的非微扰证明出自 G. Lüders and B. Zumino, *Phys. Rev.* **110**, 1450 (1958) and N. Burgoyne, *Nuovo Cimento* **8**, 807 (1958). 另见R. F. Streater and A. S. Wightman, *PCT, Spin & Statistics, and All That* (Benjamin, New York, 1968).

[13] $(j,0)+(0,j)$表示下的场由H. Joos, *Fortschr. Phys.* **10**, 65 (1962); S. Weinberg, *Phys. Rev.* **133**, B1318 (1964) 引入.

[14] A. R. Edmonds, 文献[10], or M. E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum* (John Wilety & Sons, New York, 1957): Chapter III.

[15] G. Velo and D. Zwanziger, *Phys. Rev.* **186**. 1337 (1969); **188**, 2218 (1969); A. S. Wightma, in *Proceedings of the Fifth Coral Gables Conference on Symmetry Principles at High Energy*, T. Gudehus, G. Kaiser, and A. Perlmutter编辑 (Gordon and Breach, New York, 1969); B. Schroer, R. Seiler, and J. A. Swieca, *Phys. Rev.* D **2**, 2927 (1970); 以及其中引用的其它文献.

[16] C. R. Nappi and L. Witten, *Phys. Rev.* D **40**, 1095 (1989); P. C. Argyres and C. R. Nappi, *Phys. Lett.* **B224**, 89 (1989). 由Kaluza-Klein理论中导出外场中$j=3/2$粒子的一个相容性理论参看S. D. Rindani and M. Sivakumar, *J. Phys. G: Nucl. Phys.* **12** 1335 (1986); *J. Phys. C: Particles & Fields* **49**, 601 (1991).

[17] G. Lüders. *Dansk. Vid. Selskab, Mat.-Fys. Medd.* **28**, 5 (1954); *Ann. Phys.* **2**, 1 (1957); W. Pauli, *Nuovo Cimento* **6**, 204 (1957). 当Lüders首次考察各种反演之间如何相互关联时, P守恒被认为是理所当然的, 所以他的定理陈述为C不变等价于T不变.

[18] R. Jost, *Helv. Phys. Acta* **30**, 409 (1957); F. J. Dysons, *Phys. Rev.* **110**, 579 (1958). 另见Streater and Wightman, 文献[12].

第 6 章　Feynman 规则

在前几章中, 在构造哈密顿量密度时使用协变自由场的目的是使 S-矩阵满足 Lorentz 不变性和集团分解原理. 以这种方式构造哈密顿量密度, 那么我们用来计算 S-矩阵的不同微扰论就不会产生差异; 在相互作用密度的每一阶, 所得结果都自动满足这些不变性要求和集团分解条件. 然而, 如果计算时使用的微扰论版本使得 S-矩阵的 Lorentz 不变性与集团分解特性在计算中的每一步都是显然的, 那么这个微扰论就有明显实用上的优点. 20 世纪 30 年代所采用的微扰论并不是这样, 我们在 3.5 节开头描述过它, 那个微扰论现在被称为"旧式微扰论". Feynman, Schwinger 和 Tomonaga 在 20 世纪 40 年代后期的巨大成就就是发展出了计算 S-矩阵的微扰技术, 在这个微扰计算中, Lorentz 不变性和集团分解性自始至终都是显而易见的. 这一章将概述 Feynman 发展的图形计算技巧, 这个技术是 Feynman 在1948年的 Poconos(波科诺庄园)会议上首次描述的. Feynman 导出这些规则部分是通过他发展的路径积分方法, 这将是第 9 章的主题. 在本章, 我们将采用 Dyson[1] 在 1949 年提出的方法, 在量子场论中这个方法直到 20 世纪 70 年代几乎是所有微扰论分析的基础, 并仍然为 Feynman 规则的引入提供了一个特别显然的方式.

6.1　规则的推导

我们的出发点是由 Dyson 级数(3.5.10)与自由粒子态的表达式(4.2.2)合起来得到的 S-矩阵公式:

$$\begin{aligned} &S_{\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1;\,\mathbf{p}'_2\sigma'_2n'_2;\cdots\,,\,\mathbf{p}_1\sigma_1n_1;\,\mathbf{p}_2\sigma_2n_2;\cdots} \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i})^N}{N!} \int \mathrm{d}^4x_1 \cdots \mathrm{d}^4x_N \Big(\Phi_0, \cdots a(\mathbf{p}'_2\sigma'_2n'_2) a(\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1) \\ &\quad \times T\Big\{ \mathscr{H}(x_1) \cdots \mathscr{H}(x_N) \Big\} a^\dagger(\mathbf{p}_1\sigma_1n_1) a^\dagger(\mathbf{p}_2\sigma_2n_2) \cdots \Phi_0 \Big) \,. \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

提醒一下: $\mathbf{p}$, σ 和 n 分别标记粒子的动量, 自旋与种类; 其中加撇的是末态粒子的指标; Φ_0 是自由粒子真空态; a 和 $a^\dagger$ 是湮灭算符和产生算符; T 代表编时, 它是指将 $\mathscr{H}(x)$ 按照变量 x^0 递减的顺序从左到右依次排列; $\mathscr{H}(x)$ 是相互作用哈密顿密度, 取成场和伴随场的多项式

$$\mathscr{H}(x) = \sum_i g_i \mathscr{H}_i(x) \,, \tag{6.1.2}$$

每一项 $\mathscr{H}_i$ 是确定数目的每类场与其伴随场的乘积. 对于种类 n 的粒子, 如果它的场在齐次 Lorentz 群(包含或者不包含空间反演)的一个特定表示下进行变换, 那么这个场就是

$$\begin{aligned} \psi_\ell(x) = \sum_\sigma (2\pi)^{-3/2} \int \mathrm{d}^3p \Big[&u_\ell(\mathbf{p},\sigma,n)\, a(\mathbf{p},\sigma,n)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} \\ &+ v_\ell(\mathbf{p},\sigma,n)\, a^\dagger(\mathbf{p},\sigma,n^{\mathrm{c}})\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} \Big] \,. \end{aligned} \tag{6.1.3}$$

这里的 n^{c} 是指种类 n 的反粒子, 而 $\exp(\pm \mathrm{i}p\cdot x)$在 $p^0=\sqrt{\mathbf{p}^2+m_n^2}$ 处取值. 系数函数 u_ℓ 和 v_ℓ 依赖于场的 Lorentz 变换性质以及场描述的粒子的自旋; 我们在第 5 章计算过它们. (例如, 在标量场中, u_ℓ 对于能量为 E 的粒子就是$(2E)^{-1/2}$, 而在 Dirac 场中, u_ℓ 和 v_ℓ 是 5.5 节中引入的归一化 Dirac 旋量.) 指标 ℓ 在这里标记粒子类型和场变换所遵循的 Lorentz 群表示, 以及表示中的分量指标. 不需要另外处理包含场的导数的相互作用; 在我们的观点看来, 场(6.1.3)的导数就是另外一个(6.1.3)描述的场, 只不过 u_ℓ 和 v_ℓ 不同. 这里, 对随意地被称为"粒子"的那些粒子, 诸如电子, 质子等, 以及随意地被称为"反粒子"的那些粒子, 诸如正电子和反质子, 我们要做一下区分. 湮灭粒子并产生反粒子的场算符称为"场"; 它们的伴随算符, 湮灭反粒子并产生正粒子, 被称为"伴随场"(field adjoints). 当然, 像光子和 π^0 这样的粒子, 反粒子是其本身; 对于这些粒子, 伴随场正比于场.

我们接着把方程(6.1.1)中的所有湮灭算符挪到右边, 为此我们反复利用对易或反对易关系:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{p}\,\sigma\,n)a^\dagger(\mathbf{p}'\sigma'n') &= \pm a^\dagger(\mathbf{p}'\sigma'n')a(\mathbf{p}\,\sigma\,n) \\ &\quad + \delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\delta_{\sigma'\sigma}\delta_{n'n} \qquad (6.1.4)\\ a(\mathbf{p}\,\sigma\,n)a(\mathbf{p}'\sigma'n') &= \pm a(\mathbf{p}'\sigma'n')a(\mathbf{p}\,\sigma\,n) \qquad (6.1.5)\\ a^\dagger(\mathbf{p}\,\sigma\,n)a^\dagger(\mathbf{p}'\sigma'n') &= \pm a^\dagger(\mathbf{p}'\sigma'n')a^\dagger(\mathbf{p}\,\sigma\,n) \qquad (6.1.6)\end{aligned}$$

(对于反粒子也同样如此), 右边的符号 $\pm$ 在粒子 n 和 n' 都是费米子时取 $-$ 号, 如果其中有一个是玻色子或者都是玻色子则取 $+$ 号. 无论何时, 只要一个湮灭算符出现在最右边(或者一个产生算符出现在最左边), 这一项对方程(6.1.1)的贡献就为零, 这是因为这些算符湮灭真空态:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{p}\,\sigma\,n)\,\Phi_0 &= 0\,, \qquad (6.1.7)\\ \Phi_0^\dagger\, a^\dagger(\mathbf{p}\,\sigma\,n) &= 0\,. \qquad (6.1.8)\end{aligned}$$

对方程(6.1.1)的其余贡献来自于方程(6.1.4)右边的 δ-函数项, 这时初末态或相互作用哈密顿量密度中的每个产生算符和湮灭算符以这种方式与其它湮灭算符或产生算符配对.

按照这种方式, 多项式 $\mathscr{H}(\psi(x),\psi^\dagger(x))$ 中每一项 $\mathscr{H}_i$ 一种给定排序对方程(6.1.1)的贡献, 要通过对产生算符和湮灭算符的所有配对方式求和来给出,[2] 求和的每一项是对数个因子乘积的积分, 这些因子如下:

(a) 量子数为 $\mathbf{p}',\sigma',n'$ 的末态粒子与 $\mathscr{H}_i(x)$ 中的伴随场 $\psi_\ell^\dagger(x)$ 配对产生因子

$$\Big[a(\mathbf{p}'\sigma'n'),\psi_\ell^\dagger(x)\Big]_\mp = (2\pi)^{-3/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'\cdot x}u_\ell^*(\mathbf{p}'\sigma'n')\,. \qquad (6.1.9)$$

(b) 量子数为 $\mathbf{p}',\sigma',n'^{\mathrm{c}}$ 的末态反粒子与 $\mathscr{H}_i(x)$ 中的场 $\psi_\ell(x)$ 配对产生因子

$$\Big[a(\mathbf{p}'\sigma'n'^{\mathrm{c}}),\psi_\ell(x)\Big]_\mp = (2\pi)^{-3/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'\cdot x}v_\ell(\mathbf{p}'\sigma'n')\,. \qquad (6.1.10)$$

(c) 量子数为 $\mathbf{p},\sigma,n$ 的初态粒子与 $\mathscr{H}_i(x)$ 中的场 $\psi_\ell(x)$ 配对产生因子

$$\Big[\psi_\ell(x),a^\dagger(\mathbf{p}\,\sigma\,n)\Big]_\mp = (2\pi)^{-3/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}u_\ell(\mathbf{p}\,\sigma\,n)\,. \qquad (6.1.11)$$

(d) 量子数为 $\mathbf{p},\sigma,n^{\mathrm{c}}$ 的初态反粒子与 $\mathscr{H}_i(x)$ 中的伴随场 $\psi_\ell^\dagger(x)$ 配对产生因子

$$\Big[\psi_\ell^\dagger(x),a^\dagger(\mathbf{p}\,\sigma\,n^{\mathrm{c}})\Big]_\mp = (2\pi)^{-3/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}v_\ell^*(\mathbf{p}\,\sigma\,n)\,. \qquad (6.1.12)$$

(e) 量子数为 $\mathbf{p}', \sigma', n'$ 的末态粒子(或反粒子)与量子数为 $\mathbf{p}, \sigma, n$ 的初态粒子(或反粒子)配对产生因子

$$\Big[a(\mathbf{p}'\sigma'n'), a^\dagger(\mathbf{p}\,\sigma\,n)\Big]_\mp = \delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\delta_{\sigma'\sigma}\delta_{n'n}\,. \tag{6.1.13}$$

(f) $\mathscr{H}_i(x)$ 中的场 $\psi_\ell(x)$ 与 $\mathscr{H}_j(y)$ 中的伴随场 $\psi_m^\dagger(y)$ 配对产生因子*

$$\begin{aligned}&\theta(x-y)\Big[\psi_\ell^+(x), \psi_m^{+\dagger}(y)\Big]_\mp \pm \theta(y-x)\Big[\psi_m^{-\dagger}(y), \psi_\ell^-(x)\Big]_\mp \\ &\qquad \equiv -\mathrm{i}\,\Delta_{\ell m}(x,y)\,,\end{aligned} \tag{6.1.14}$$

其中 ψ^+ 和 ψ^- 分别是 ψ 中湮灭粒子和产生反粒子的项:

$$\psi_\ell^+(x) = (2\pi)^{-3/2}\int \mathrm{d}^3p \sum_\sigma u_\ell(\mathbf{p}\,\sigma\,n)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\,a(\mathbf{p}\,\sigma\,n)\,, \tag{6.1.15}$$

$$\psi_\ell^-(x) = (2\pi)^{-3/2}\int \mathrm{d}^3p \sum_\sigma v_\ell(\mathbf{p}\,\sigma\,n)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\,a^\dagger(\mathbf{p}\,\sigma\,n^{\mathrm{c}})\,. \tag{6.1.16}$$

$\theta(x-y)$ 是阶跃函数, 在 $x^0 > y^0$ 时等于 1 而在 $x^0 < y^0$ 时等于 0. 方程(6.1.14)中会出现阶跃函数是因为方程(6.1.1)中有编时乘积; 只有开始时方程(6.1.1)中的 $\mathscr{H}(x)$ 处在 $\mathscr{H}(y)$ 的左边, 即 $x^0 > y^0$, 我们才会遇到 $\mathscr{H}(x)$ 中的湮灭场 $\psi^+(x)$ 与 $\mathscr{H}(y)$ 中的产生场 $\psi^{+\dagger}(y)$ 配对; 类似地, 仅当开始时方程(6.1.1)中的 $\mathscr{H}(y)$ 处在 $\mathscr{H}(x)$ 的左边, 即 $y^0 > x^0$, 我们才会遇到 $\mathscr{H}(y)$ 中的湮灭场 $\psi^{-\dagger}(y)$ 与 $\mathscr{H}(x)$ 中的产生场 $\psi^-(x)$ 的配对. ((6.1.14)第二项中的 $\pm$ 符号后面会解释.) (6.1.14)被称为*传播子*; 我们将在下一节进行计算.

将这些因子乘起来, 乘上后面讨论的数值因子, 然后对 $x_1\cdots x_N$ 积分, 并对所有的配对求和, 再对各类相互作用的数目求和, 我们就可获得 S-矩阵. 在补充所有细节之前, 我们先来刻画一个图形体系以跟踪所有这些配对, 这将会方便我们的讨论.

计算 S-矩阵的规则可以非常方便地用*Feynman*图来表示. (参看图6.1.) 图由点和线构成, 点称为*顶点*, 每个顶点代表一个 $\mathscr{H}_i(x)$, 而每条线代表一个湮灭算符和一个产生算符的配对. 更具体些:

(a) 表示一个末态粒子与某个 $\mathscr{H}(x)$ 中的一个伴随场配对的线, 从代表 $\mathscr{H}(x)$ 的顶点出发, 向上离开图, 携带一个指向上方的箭头.

(b) 表示一个末态反粒子与某个 $\mathscr{H}(x)$ 中的一个场配对的线, 也从代表 $\mathscr{H}(x)$ 的顶点出发, 向上离开图, 但携带一个指向下方的箭头. (对于 γ 和 π^0 这样的粒子, 由于它们是自己的反粒子, 箭头全部略掉.)

(c) 表示一个初态粒子与某个 $\mathscr{H}(x)$ 中的一个场配对的线, 从下方进入图, 终止于代表 $\mathscr{H}(x)$ 的顶点, 携带一个指向上方的箭头.

(d) 表示一个初态反粒子与某个 $\mathscr{H}(x)$ 中的一个场配对的线, 也从下方进入图, 终止于代表 $\mathscr{H}(x)$ 的顶点, 但携带一个指向下方的箭头.

(e) 表示一个末态粒子或反粒子与一个初态粒子或反粒子配对的线, 从下至上穿过图, 不碰任何顶点, 对于粒子和反粒子, 箭头分别指向上方或下方.

*如果相互作用 $\mathscr{H}(x)$ 被写成正规乘积的形式, 就像方程(5.1.35)中那样,(此处原书误植为(5.1.33)——译者注.) 那么在同一相互作用中不存在场与伴随场的配对. 若非如此, 我们就需要用某类正规化给 $\Delta_{\ell m}(0)$ 赋予意义.

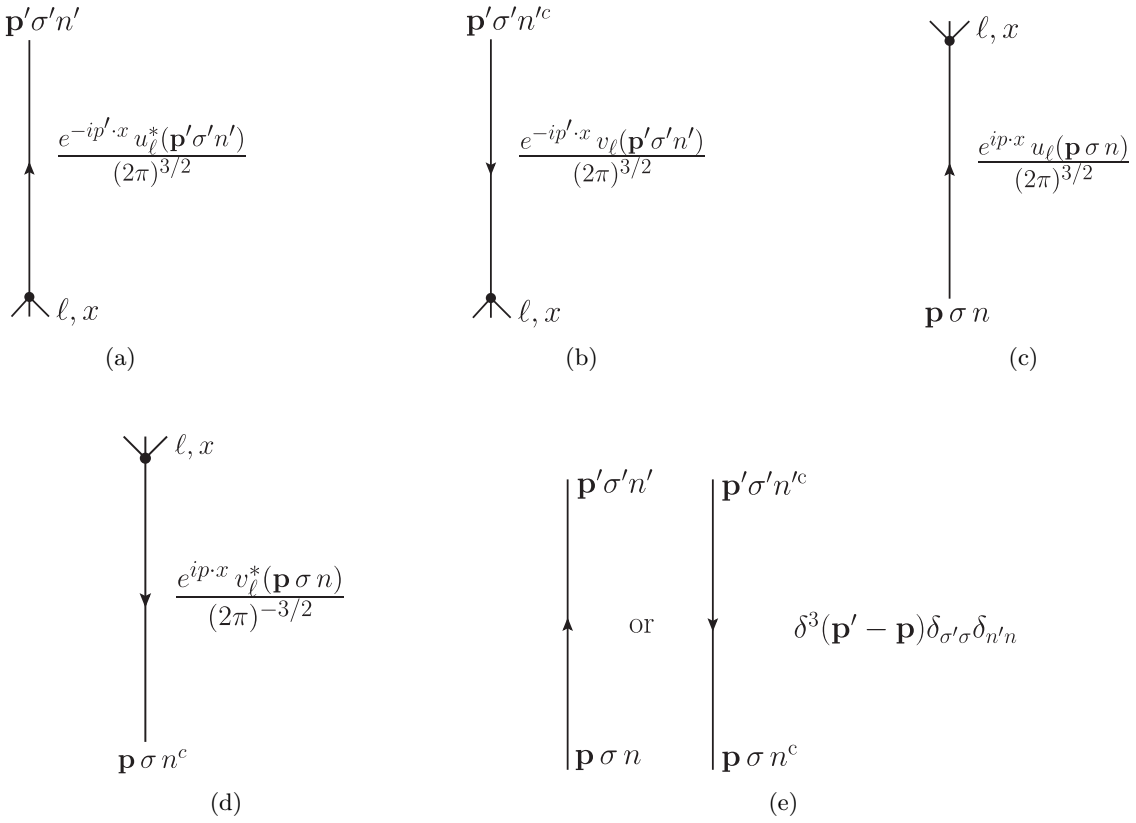


图 6.1 在坐标空间计算 S-矩阵时产生的算符配对的图形表示. 对于 Feynman 图的每一条线, 右边的表达式是一因子, 这一因子要被包含进 S-矩阵的坐标空间积分中.

(f) 表示 $\mathscr{H}(x)$ 中的一个场与 $\mathscr{H}(y)$ 中的一个伴随场配对的线, 连接代表 $\mathscr{H}(x)$ 的顶点与代表 $\mathscr{H}(y)$ 的顶点, 携带一个由 y 指向 x 的箭头.

注意, 箭头的指向总是和粒子的运动方向相同, 与反粒子的运动方向相反. (正如上面提到的, 对于光子这样反粒子是其本身的粒子, 箭头应该被略掉.) 规则(f)中指定的箭头方向与这一约定是一致的, 这是因为 $\mathscr{H}_j(y)$ 中的伴随场要么产生一个被 $\mathscr{H}_i(x)$ 中的场湮灭的粒子, 要么湮灭一个由 $\mathscr{H}_i(x)$ 中的场产生的反粒子. 又注意到, 因为 $\mathscr{H}_i(x)$ 中的每个场或伴随场一定会与某些量配对, 所以, 对于与方程(6.1.2)中的 $\mathscr{H}_i(x)$ 项对应的第 i 类顶点, 与该顶点相连的线正好等于 $\mathscr{H}_i(x)$ 中场和伴随场因子的总数. 这些线中, 箭头指向顶点或离开顶点的数目分别等于相应相互作用项中场的数目或伴随场的数目.

在给定过程中, 为了计算方程(6.1.2)中每一相互作用项 $\mathscr{H}_i(x)$ 的给定阶 N_i 对 S-矩阵的贡献, 我们要执行以下的步骤:

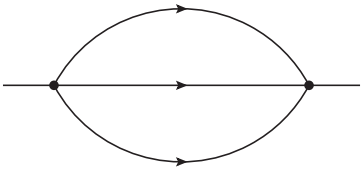


图 6.2 S-矩阵中要求额外组合因子的图的例子. 如果一个相互作用包含某个场因子三次(除此之外还可以包含场), 我们通常在相互作用哈密顿密度中引入因子 $1/3!$, 这样在对这些场与它们在其它相互作用中的伴随场配对的各种方式求和而产生的因子就会被这个因子抵消掉. 但在这个图中, 存在两个这样的 $1/3!$ 因子, 但不同配对方式仅有 $3!$ 种, 所以多出了额外的因子 $1/3!$.

(i) 画出包含 N_i 个 i 类顶点的所有 Feynman 图, 对于初态中每个粒子或反粒子, 它们的线从下方进入图, 对于末态中的每个粒子或反粒子, 它们的线从上方离开图, 再加上任意条连接顶点的内线, 从而按照要求赋予每个顶点恰当数目的连线. 这些线携带前面所描述的箭头, 每个箭头可以指向下也可以指向上. 每个顶点用相互作用类型 i 和时空坐标 x^μ 标记. 每条内线和外线在它与顶点相连的末端用场类型 ℓ 标记(对应在该顶点产生或湮灭粒子和反粒子的场 $\psi_\ell(x)$ 或 $\psi_\ell^\dagger(x)$), 并用初态或末态粒子(或反粒子)的量子数 $\mathbf{p},\sigma,n$ 或 $\mathbf{p}',\sigma',n'$ 标记每个进入或离开图的外线.

(ii) 对于每个 i 类顶点, 计入因子 $-\mathrm{i}$ (来自方程(6.1.1)中的 $(-\mathrm{i})^N$)和因子 g_i ($\mathscr{H}_i(x)$ 中乘在场乘积上的耦合常数). 对于每条从上方离开图的线, 根据箭头指向上方还是下方, 分别引入因子(6.1.9)或(6.1.10). 对于每条从下方进入图的线, 依旧根据箭头方向, 分别引入因子(6.1.11)或(6.1.12). 对于每条直接穿过图的线, 引入因子(6.1.13). 对于每条连接两个顶点的内线, 引入因子(6.1.14).

(iii) 对所有这些因子的乘积做关于每个顶点坐标 $x_1,x_2,\cdots$ 的积分.

(iv) 将以这种方式从每个 Feynman 图得到的结果加起来. 将每一相互作用类型中每一阶的贡献加起来, 直到我们力所能及的那一阶, 我们就获得了 S-矩阵的完全微扰级数.

注意到, 我们没有在这些规则中引入方程(6.1.1)中的因子 $1/N!$, 这是因为方程(6.1.1)中的编时乘积是对 $x_1,x_2,\cdots,x_N$ 的 $N!$ 个置换求和, 每个置换对最终结果给出相同的贡献. 换一种方式, N 个顶点的 Feynman 图是 $N!$ 个相互等价的图中的一个, 这些等价图相差的仅是顶点上标记的置换, 而这产生了一个因子 $N!$, 抵消了方程(6.1.1)中的 $1/N!$. (这一规则存在例外, 我们会在后面讨论.) 由于这个原因, 从现在起, 如果一组 Feynman 图中的差别只是重新标记顶点, 我们只计入其中一个图.

在某些情况下, 在单个 Feynman 图的贡献中要计入一些额外的组合因子或符号:

(v) 假定相互作用 $\mathscr{H}_i(x)$ (在其它场和伴随场之外)包含 M 个相同的场. 假定这些场中的每一个与另一个不同的相互作用(对每个都不同)的伴随场配对, 或者与初末态中的伴随场配对. 这些伴随场中的第一个可以与 $\mathscr{H}_i(x)$中的 M 个全同场中的任何一个进行配对; 第二个可以与剩下的 $M-1$ 个全同场中的任何一个进行配对, 以此类推, 这产生了额外的因子 $M!$. 为了补偿这点, 重新定义耦合常数 g_i, 使得任何包含 M 个全同场(或伴随场)的 $\mathscr{H}_i(x)$ 都出现显式因子 $1/M!$, 这将是方便的. 例如, 对标量场 $\phi(x)$ 是 M 阶的相互作用将写成 $g\phi^M/M!$. (更普遍地, 当相互作用包含对同一对称多重态的 M 个场因子的乘积的求和, 或由于种种原因, 耦合系数在 M 个玻色场或费米场的置换下对称或全反对称时, 通常也写上显式因子$1/M!$.)

然而, 这样抵消 $M!$ 因子不总是完全的. 例如, 考虑这样一个 Feynman 图, 其中相互作用 $\mathscr{H}_i(x)$ 中的 M 个全同场与单个其它的相互作用 $\mathscr{H}_j(y)$ 中相应的 M 个伴随场进行配对. (参看

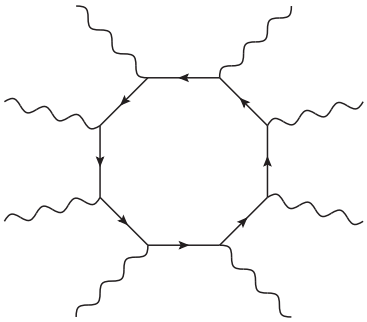


图 6.3 真空-真空振幅的一个八阶图, 其中粒子仅与外场相互作用. 在这个图中, 波浪线表示外场. 有 7! 个这样的图, 不同的图相差顶点的重新标记, 而顶点标记只是沿着环旋转的那些图没有被计成不同的图. 因而来自Dyson公式(6.1.1)的因子 1/8! 在这里没有被全部抵消, 留下了额外的因子1/8.

图6.2.) 那么按照上面的分析, 我们发现仅有 $M!$ 个不同的配对(因为我们所谓的第一个, 第二个, ····· 伴随场在这里没有差别), 仅抵消了两个不同的相互作用中的一个 $M!$ 因子. 在这种情况下, 我们不得不在这类 Feynman 图的贡献中"手动"放上一个额外的因子 $1/M!$.

当顶点的某些置换对 Feynman 图没有影响时, 就会产生另外的组合因子. 此前我们注意到, 如果 $N!$ 个图之间相差的仅是 N 个顶点的重新标记, 那么级数(6.1.1)中的因子 $1/N!$ 通常被 $N!$ 个图的求和抵消. 然而, 在重新标记顶点不产生新图的情况下, 这个抵消是不完全的. 如果理论存在二次相互作用 $\mathscr{H}(x) = \psi^\dagger_\ell M_{\ell\ell'}\psi_{\ell'}$, 其中的 M 可能依赖于外场, 那么在我们计算真空到真空 S-矩阵元时, 这种情况通常都会发生. (这类真空涨落图的物理意义将在卷 II 进行详细的讨论.) $\mathscr{H}$ 的 N 阶 Feynman 图是有 N 个角的环. (参看图6.3.) 沿着环将每个顶点的指标依次移到下个顶点的置换产生同一图, 所以这里只有$(N-1)!$个不同的图. 因此这样的图会伴随因子

$$\frac{(N-1)!}{N!} = \frac{1}{N}\ . \tag{6.1.17}$$

(vi) 在包含费米场的理论中, 利用方程(6.1.4)—(6.1.6)把湮灭算符移至右边以及把产生算符移至左边, 这个操作会给各种配对的贡献中带来负号. 具体地说, 在(6.1.1)中将所有配对算符调整成彼此相邻的置换中(湮灭算符在与其配对的产生算符的左边), 只要包含奇数次费米算符的交换, 我们就会得到一个负号. (这是因为, 为了计算某一配对的贡献, 我们可以首先置换方程(6.1.1)中的所有算符, 使得每个湮灭算符都在与其配对的产生算符的左边, 忽视所有未配对算符的对易子和反对易子, 然后将每个配对算符的乘积替换成它们的对易子和反对易子.) 一个可以立即看出的结果是, 对于费米传播子, 方程(6.1.14)中两项的相对符号中会产生一个负号. 无论哪种置换将 $\mathscr{H}(x)$ 中一个场的湮灭部分 $\psi^+(x)$ 放在 $\mathscr{H}(y)$ 中某个伴随场的产生部分 $\psi^{+\dagger}(y)$ 的左边, 那么, 将伴随场的湮灭部分 $\psi^{-\dagger}(y)$ 放在场的产生部分 $\psi^-(x)$ 的左边, 这个置换会包含一次额外的费米算符交换, 在费米子的情况下, 这样就在方程(6.1.14)中的第二项产生负号.

另外, 在整个 Feynman 图的贡献中也可能会出现负号. 作为一个例子, 我们来考察如下的理论, 费米子唯一的相互作用取如下形式

$$\mathscr{H}(x) = \sum_{\ell mk} g_{\ell mk}\psi^\dagger_\ell(x)\psi_m(x)\phi_k(x)\ , \tag{6.1.18}$$

其中 $g_{\ell mk}$ 是一般常数, $\psi_\ell(x)$ 是一组复费米场, 而 $\phi_m(x)$ 是一组实玻色场(不一定是标量场). (不仅是量子电动力学, 在包含弱相互作用, 电磁相互作用以及强相互作用的整个"标准模型"中, 所有的



图 6.4 这是含有相互作用(6.1.18)的理论中费米子-费米子散射的二阶连通图. 在这里, 直线代表费米子; 虚线是中性玻色子. 这两个图的贡献之间存在一个符号差异, 这源于第二幅图表示的配对中有一次额外的费米算符交换.

费米子相互作用都可以写成这种形式.) 我们首先处理费米子-费米子散射, $1\,2 \to 1'\,2'$, 至 $\mathscr{H}$ 的第二阶. 在方程(6.1.1)的二阶项中, 费米算符以这样的顺序出现(这里有明显的缩写)

$$a(2')a(1')\psi^\dagger(x)\psi(x)\psi^\dagger(y)\psi(y)a^\dagger(1)a^\dagger(2)\,. \tag{6.1.19}$$

到这一阶有两个连通图, 对应配对

$$[a(2')\psi^\dagger(x)]\,[a(1')\psi^\dagger(y)]\,[\psi(y)a^\dagger(1)]\,[\psi(x)a^\dagger(2)] \tag{6.1.20}$$

和

$$[a(1')\psi^\dagger(x)]\,[a(2')\psi^\dagger(y)]\,[\psi(y)a^\dagger(1)]\,[\psi(x)a^\dagger(2)]\,. \tag{6.1.21}$$

(参看图6.4.) 为了从(6.1.19)得到(6.1.20), 费米算符要作偶数次置换. (例如, 将 $\psi(x)$ 右移三个算符, 然后将 $a(1')$ 右移一个算符.) 因此, 配对(6.1.20)的贡献中没有额外的负号. 这个结果本身不是那么重要; S-矩阵的总符号在跃迁几率中并不重要, 并且在所有情况下都依赖于对初末态的符号约定. 重要的是配对(6.1.20)和(6.1.21)的贡献具有相反的符号, 这可以很容易地看出: 这两个配对之间的唯一差异是交换了两个费米算符 $a(1')$ 和 $a(2')$. 实际上, 这个相对的负号正是 Fermi 统计要求的: 它使得散射振幅在粒子 $1'$ 和 $2'$ (或 1 和 2)的交换下反对称.

然而, 即使在微扰论的最低阶, 也不能认为所有的符号因子都以这种简单的方式与末态或初态的反对称性相联系. 我们举例证明这一点, 考虑费米子-反费米子散射, $1\,2^{\rm c} \to 1'\,2'^{\rm c}$, 对于同一相互作用(6.1.18), 精确到二阶. 费米算符在方程(6.1.1)的二阶项中以如下顺序出现:

$$a(2'^{\rm c})a(1')\psi^\dagger(x)\psi(x)\psi^\dagger(y)\psi(y)a^\dagger(1)a^\dagger(2^{\rm c})\,. \tag{6.1.22}$$

在这里, 这一阶也有两个 Feynman 图, 分别对应于配对

$$[a(2'^{\rm c})\psi(x)]\,[a(1')\psi^\dagger(x)]\,[\psi(y)a^\dagger(1)]\,[\psi^\dagger(y)a^\dagger(2^{\rm c})] \tag{6.1.23}$$

和

$$[a(2'^{\rm c})\psi(x)]\,[a(1')\psi^\dagger(y)]\,[\psi(y)a^\dagger(1)]\,[\psi^\dagger(x)a^\dagger(2^{\rm c})]\,. \tag{6.1.24}$$

(参看图6.5.) 为了从(6.1.22)到(6.1.23), 我们需要费米算符进行偶数次置换(例如, 将 $\psi(x)$ 左移两个算符, 将 $\psi^\dagger(y)$ 右移两个算符) 所以在配对(6.1.23)的贡献中没有额外的负号. 另一方面, 为

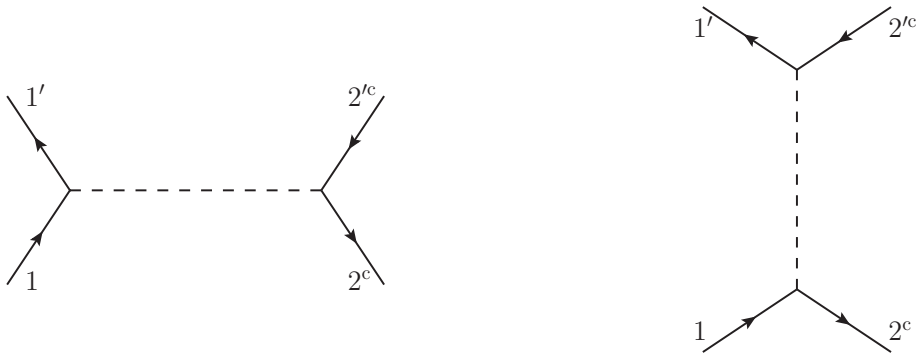


图 6.5 包含相互作用(6.1.18)的理论中费米子-反费米子散射的二阶连通图. 在这里, 取决于箭头方向, 直线分别代表费米子或反费米子; 虚线是中性玻色子. 这两个图的贡献之间存在一个符号差异, 源于第二个图所表示的配对中有一次额外的费米算符交换.

了从(6.1.22)到(6.1.24), 我们需要费米算符进行奇数次置换(先进行实现(6.1.23)的步骤, 再加上 $\psi^\dagger(x)$ 和 $\psi^\dagger(y)$ 的交换) 所以这个配对的贡献会伴随一个额外的负号.**

当我们考察高阶贡献时会遇到额外的符号. 对于这里考察的理论类型, 费米子的相互作用全部形如(6.1.18), 在一般的 Feynman 图中, 费米线要么穿过图, 在这个过程与玻色场有任意数目的相互作用并形成一串费米线, 如图6.6所示, 要么构成费米圈, 如图6.7所示. 给任意过程的 Feynman 图加上一个有 M 个角的费米圈, 考察这个费米圈的效应. 这个费米圈对应费米算符的配对

$$[\psi(x_1)\bar\psi(x_2)]\,[\psi(x_2)\bar\psi(x_3)]\cdots[\psi(x_M)\bar\psi(x_1)]\,. \tag{6.1.25}$$

另一方面, 这些算符在方程(6.1.1)中以如下的次序出现

$$\bar\psi(x_1)\psi(x_1)\bar\psi(x_2)\psi(x_2)\cdots\bar\psi(x_M)\psi(x_M)\,. \tag{6.1.26}$$

为了从(6.1.26)到(6.1.25), 我们需要对费米算符做奇次置换(将 $\bar\psi(x_1)$ 右移 $2M-1$ 个算符), 所以对于每个这样的费米圈, 它的贡献会伴随一个负号.

这些规则给出了全部的 S-矩阵, 其中包括了不同集团的粒子在相距极远的各个时空区域各自进行相互作用的贡献. 我们在第 4 章讨论过, 为了在计算 S-矩阵时排除掉这部分, 我们只计入连通 Feynman 图. 特别地, 这样也排除了只是穿过图而没有发生相互作用的线, 这些线会产生因子(6.1.13).

为了使 Feynman 规则完全清晰, 我们将在两个不同的理论中计算粒子散射对 S-矩阵的低阶贡献.

理论I

考察费米子与自荷共轭玻色子的理论, 相互作用为(6.1.18). 费米子-玻色子散射的最低阶连通

**实际上, 这个符号并非完全与 Fermi 统计的要求无关. 同一个场能湮灭一个粒子并产生一个反粒子, 所以, 如果一个过程的初态粒子或反粒子是另一个过程的末态反粒子或粒子, 那么它们之间存在一个关系, 称为“交叉对称性”(crossing symmetry). 特别地, 过程 $1\,2^{\rm c}\to 1'\,2'^{\rm c}$ 的振幅与“交叉”过程 $1\,2'\to 1'\,2$ 的振幅相关; 两个配对(6.1.23)和(6.1.24)恰好对应这一过程的两个图, 它们相差的是 1 和 2′ (或 1′ 和 2)的交换, 所以, 散射振幅在初态(或末态)粒子的交换下的反对称性会自然地要求这两个配对的相对贡献间差一个负号. 然而, 交叉对称性不是一个普通的对称性(它涉及运动学变量的一个解析延拓), 并且对于一般的过程很难在任意精度上使用它.

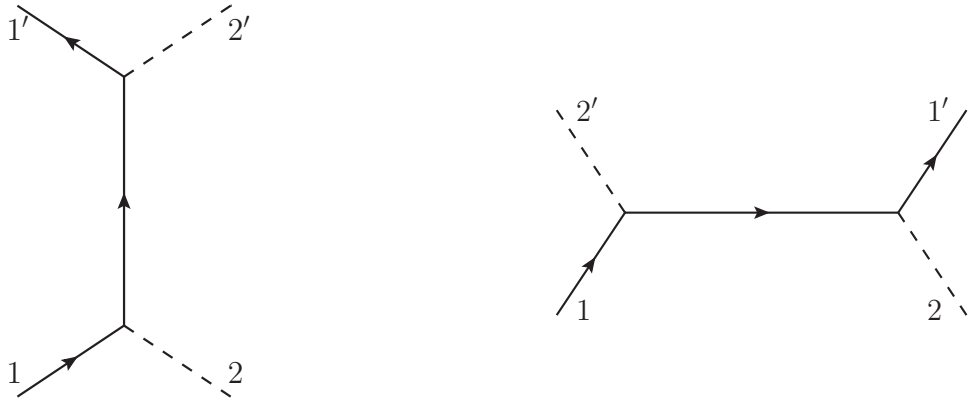


图 6.6 包含相互作用(6.1.18)的理论中, 费米子-玻色子散射的二阶连通图. 直线是费米子, 虚线是中性玻色子.

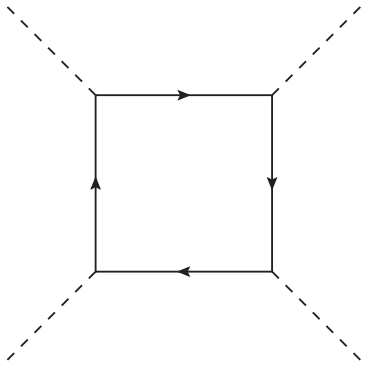


图 6.7 包含相互作用(6.1.18)的理论中, 玻色子-玻色子散射的最低阶连通图. 由于配对费米场的置换, 这样的费米圈图产生一个额外的负号.

图如6.6所示. 按照图6.1中描述的规则, 相对应的 S-矩阵元是

$$
\begin{aligned}
&S_{\mathbf{p}_1'\sigma_1'n_1'\,\mathbf{p}_2'\sigma_2'n_2'\,,\,\mathbf{p}_1\sigma_1 n_1\,\mathbf{p}_2\sigma_2 n_2} = \\
&(2\pi)^{-6} \sum_{k'l'm'\,klm} (-\mathrm{i})^2 g_{l'm'k'}\, g_{mlk}\, u^*_{l'}(\mathbf{p}_1'\,\sigma_1'\,n_1')\, u_l(\mathbf{p}_1\,\sigma_1\,n_1) \\
&\times \int \mathrm{d}^4x \int \mathrm{d}^4y \left(-\mathrm{i}\Delta_{m'm}(y-x)\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1'\cdot y} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1\cdot x} \\
&\times \Big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2'\cdot y} u^*_{k'}(\mathbf{p}_2'\,\sigma_2'\,n_2') \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_2\cdot x}\, u_k(\mathbf{p}_2\,\sigma_2\,n_2) \\
&+ \ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2'\cdot x} u^*_{k}(\mathbf{p}_2'\,\sigma_2'\,n_2') \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_2\cdot y}\, u_{k'}(\mathbf{p}_2\,\sigma_2\,n_2)\Big] \,.
\end{aligned}
\tag{6.1.27}
$$

(这里的指标 1 和 2 分别指代费米子和玻色子.) 费米子-费米子散射也有两个二阶图, 如图6.4所示.

它们给出了 S-矩阵元

$$
\begin{aligned}
&S_{\mathbf{p}_1'\sigma_1'n_1'\,\mathbf{p}_2'\sigma_2'n_2'\,,\,\mathbf{p}_1\sigma_1 n_1\,\mathbf{p}_2\sigma_2 n_2} = (2\pi)^{-6}\sum_{k'l'm'klm}(-\mathrm{i})^2 g_{m'mk'}\,g_{l'lk}\\
&\times u^*_{m'}(\mathbf{p}_2'\,\sigma_2'\,n_2')u^*_{l'}(\mathbf{p}_1'\,\sigma_1'\,n_1')\,u_m(\mathbf{p}_2\,\sigma_2\,n_2)u_l(\mathbf{p}_1\,\sigma_1\,n_1)\\
&\times\int \mathrm{d}^4x\int \mathrm{d}^4y\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2'\cdot x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1'\cdot y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_2\cdot x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1\cdot y}(-\mathrm{i})\Delta_{k'k}(x-y)\\
&-[1'\rightleftharpoons 2'] \qquad (6.1.28)
\end{aligned}
$$

这里的最后一项代表减去在前一项中交换粒子 $1'$ 和 $2'$ (或等价地交换 1 和 2)得到的一项. 在这一理论中, 没有玻色子-玻色子散射的二阶图; 最低阶的图是四阶, 例如图6.7. 在我们计算传播子并过渡到动量空间之后, 我们会在 6.3 节给出更多像方程(6.1.27)和(6.1.28)这样具体的公式.

在上面的例子中, 相互作用(6.1.18)中的三个场互不相同. 对于三个场都相同的三线性相互作用, 或者至少是三个场以一种对称的方式进入的三线性相互作用, 考察下面的例子是有益的。

理论II

现在, 取相互作用密度是一组实玻色场 $\phi_\ell(x)$ 的三线性积的和.

$$
\mathscr{H}(x) = \frac{1}{3!}\sum_{\ell mn} g_{\ell mn}\phi_\ell(x)\phi_m(x)\phi_n(x) \qquad (6.1.29)
$$

其中 $g_{\ell mn}$ 是实的全对称耦合系数. 假定我们要到这个相互作用的第二阶考察散射过程 $1\,2\to 1'\,2'$. 两个顶点中的每一个都要与四条外线中的两个相连. (唯一的其它可能性是, 一条外线与一个顶点相连, 另外三条与另一顶点相连, 但是已经与三条外线相连的顶点没有剩余的线与其它顶点相连, 所以这是非连通图的贡献.) 每个顶点还剩下的那条线恰好连接两个顶点. 这样的图有 3 个, 它们的区别是: 与线 1 连接同一顶点的是线 2, 线 $1'$ 还是线 $2'$. (参看图6.8.) 通过上面的规则, 这三个图对 S-矩阵的贡献是

$$
\begin{aligned}
&S_{\mathbf{p}_1'\sigma_1'n_1'\,\mathbf{p}_2'\sigma_2'n_2'\,,\,\mathbf{p}_1\sigma_1 n_1\,\mathbf{p}_2\sigma_2 n_2}\\
&=(-\mathrm{i})^2(2\pi)^{-6}\sum_{\ell\ell'\ell''mm'm''} g_{\ell\ell'\ell''}\,g_{mm'm''}\int \mathrm{d}^4x\int \mathrm{d}^4y\left(-\mathrm{i}\Delta_{\ell''m''}(x,y)\right)\\
&\quad\times\Big[u^*_\ell(\mathbf{p}_1'\,\sigma_1'\,n_1')\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1'\cdot x}\,u^*_{\ell'}(\mathbf{p}_2'\,\sigma_2'\,n_2')\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2'\cdot x}\\
&\qquad\qquad\times u_m(\mathbf{p}_1\,\sigma_1\,n_1)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1\cdot y}\,u_{m'}(\mathbf{p}_2\,\sigma_2\,n_2)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_2\cdot y}\\
&\quad+\ u^*_{\ell'}(\mathbf{p}_1'\,\sigma_1'\,n_1')\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1'\cdot x}\,u_\ell(\mathbf{p}_1\,\sigma_1\,n_1)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1\cdot x}\\
&\qquad\qquad\times u^*_{m'}(\mathbf{p}_2'\,\sigma_2'\,n_2')\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2'\cdot y}\,u_m(\mathbf{p}_2\,\sigma_2\,n_2)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_2\cdot y}\\
&\quad+\ u^*_{\ell'}(\mathbf{p}_2'\,\sigma_2'\,n_2')\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2'\cdot x}\,u_\ell(\mathbf{p}_1\,\sigma_1\,n_1)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1\cdot x}\\
&\qquad\qquad\times u^*_{m'}(\mathbf{p}_1'\,\sigma_1'\,n_1')\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1'\cdot y}\,u_m(\mathbf{p}_2\,\sigma_2\,n_2)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_2\cdot y}\Big]\,. \qquad (6.1.30)
\end{aligned}
$$

更特殊些, 如果在这个理论中的玻色子是单一种类的无自旋粒子, 那么我们可以将相互作用(6.1.29)写成

$$
\mathscr{H} = g\phi^3/3! \qquad (6.1.31)
$$

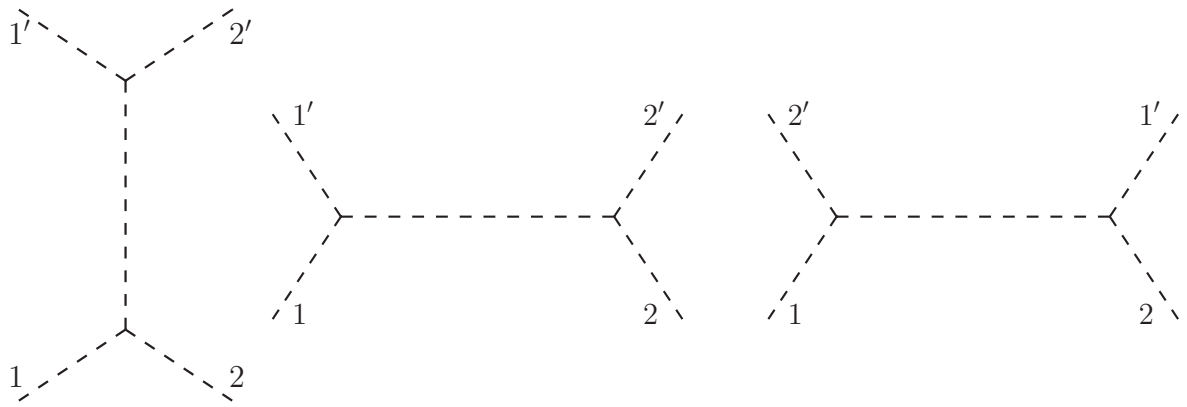


图 6.8 包含有相互作用(6.1.29)的理论中, 玻色子-玻色子散射的二阶连通图.

于是标量-标量散射的 S-矩阵元(6.1.30)变成

$$
\begin{aligned}
&S_{\mathbf{p}_1'\,\mathbf{p}_2'\,,\,\mathbf{p}_1\,\mathbf{p}_2} = \\
&\frac{\mathrm{i}g^2}{(2\pi)^6\sqrt{16E_1'E_2'E_1E_2}}\int \mathrm{d}^4x \int \mathrm{d}^4y\, \Delta_F(x-y) \\
&\quad\times\Big[\exp(-\mathrm{i}(p_1'+p_2')\cdot x)\exp(\mathrm{i}(p_1+p_2)\cdot y) \\
&\qquad+\exp(\mathrm{i}(p_1-p_1')\cdot x)\exp(\mathrm{i}(p_2-p_2')\cdot y) \\
&\qquad+\exp(\mathrm{i}(p_1-p_2')\cdot x)\exp(\mathrm{i}(p_2-p_1')\cdot y)\Big]\,,
\end{aligned}
$$

其中 $\Delta_F(x-y)$ 是标量场传播子, 将在下一节计算. 这里不存在 $\mathscr{H}(x)$ 的三阶项或其它奇数阶项.

6.2 传播子的计算

我们现在计算传播子(6.1.14), 传播子是 Feynman 规则中的一个重要元素, 它来源于场 $\psi_\ell(x)$ 与伴随场 $\psi_m^\dagger(y)$ 的配对. 将方程(6.1.15)与(6.1.16)代入方程(6.1.14), 并利用湮灭算符与产生算符的对易或反对易关系, 我们立即有

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{i}\Delta_{\ell m}(x-y) &= \theta(x-y)(2\pi)^{-3}\int \mathrm{d}^3p \sum_\sigma u_\ell(\mathbf{p}\,\sigma\,n)u_m^*(\mathbf{p}\,\sigma\,n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)} \\
&\pm\theta(y-x)(2\pi)^{-3}\int \mathrm{d}^3p \sum_\sigma v_m^*(\mathbf{p}\,\sigma\,n)v_\ell(\mathbf{p}\,\sigma\,n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(y-x)}\,. \qquad (6.2.1)
\end{aligned}
$$

在第 5 章计算对易子和反对易子的过程中, 我们证明了

$$
\sum_\sigma u_\ell(\mathbf{p}\,\sigma\,n)u_m^*(\mathbf{p}\,\sigma\,n) = \left(2\sqrt{\mathbf{p}^2+m_n^2}\right)^{-1} P_{\ell m}\left(\mathbf{p},\sqrt{\mathbf{p}^2+m_n^2}\right), \qquad (6.2.2)
$$

$$
\sum_\sigma v_\ell(\mathbf{p}\,\sigma\,n)v_m^*(\mathbf{p}\,\sigma\,n) = \pm\left(2\sqrt{\mathbf{p}^2+m_n^2}\right)^{-1} P_{\ell m}\left(-\mathbf{p},-\sqrt{\mathbf{p}^2+m_n^2}\right), \qquad (6.2.3)
$$

其中 $P_{\ell m}(\mathbf{p},\omega)$ 是 $\mathbf{p}$ 和 ω 的多项式. (这里与方程(6.2.1)一样, 正号和负号分别指代玻色场和费米场.) 例如, 如果 $\psi_\ell(x)$ 和 $\psi_m(y)$ 是自旋 0 粒子的标量场 $\phi(x)$ 和 $\phi(y)$, 那么我们就有

$$
P(p) = 1\,. \qquad (6.2.4)
$$

如果 $\psi_\ell(x)$ 和 $\psi_m(y)$ 是自旋 $\frac{1}{2}$ 粒子的 Dirac 场, 那么

$$P_{\ell m}(p) = \Big[(-\mathrm{i}\gamma_\mu p^\mu + m)\beta\Big]_{\ell m} , \tag{6.2.5}$$

其中这里的 ℓ 和 m 是 4-值 Dirac 指标. (这里出现矩阵 β 是因为我们考虑的是 $\psi_\ell(x)$ 与 $\psi^\dagger_m(y)$ 的配对, 在 $\psi(x)$ 与 $\bar\psi(y) \equiv \psi^\dagger(y)\beta$ 的配对中, β 就不会出现.) 如果 $\psi_\ell(x)$ 和 $\psi_m(y)$ 是自旋 1 粒子的矢量场 $V_\mu(x)$ 和 $V_\nu(y)$, 那么

$$P_{\mu\nu}(p) = \eta_{\mu\nu} + m^{-2} p_\mu p_\nu \, . \tag{6.2.6}$$

更普遍地, 如果 $\psi_\ell(x)$ 和 $\psi_m(y)$ 是自旋 j 粒子的场 $\psi_{ab}(x)$ 和 $\psi_{\tilde a\tilde b}(y)$ 的分量, 其中这两个场分别属于齐次 Lorentz 群的不可约(A,B)表示和$(\tilde A,\tilde B)$表示, 那么

$$\begin{aligned} P_{ab,\tilde a\tilde b}(p) = \sum_{a'b'}\sum_{\tilde a'\tilde b'}\sum_{\sigma} & C_{AB}(j\sigma, a'b') C_{\tilde A\tilde B}(j\sigma, \tilde a'\tilde b') \\ & \times \Big[\exp(-\theta\hat p\cdot \mathbf{J}^{(A)})\Big]_{aa'} \Big[\exp(+\theta\hat p\cdot \mathbf{J}^{(B)})\Big]_{bb'} \\ & \times \Big[\exp(-\theta\hat p\cdot \mathbf{J}^{(\tilde A)})\Big]_{\tilde a\tilde a'} \Big[\exp(+\theta\hat p\cdot \mathbf{J}^{(\tilde B)})\Big]_{\tilde b\tilde b'} , \end{aligned} \tag{6.2.7}$$

其中 $\sinh\theta = |\mathbf{p}|/m$, 而 $a, b, \tilde a, \tilde b$ 以单位步长分别从 $-A$ 取到 $+A$, 从 $-B$ 到 $+B$, 从 $-\tilde A$ 到 $+\tilde A$ 以及从 $-\tilde B$ 到 $+\tilde B$, 对指标 $a', b', \tilde a'$ 和 $\tilde b'$ 也同样如此.

将方程(6.2.2)和(6.2.3)代入方程(6.2.1)得出

$$\begin{aligned} -\mathrm{i}\Delta_{\ell m}(x,y) = {} & \theta(x-y) P_{\ell m}\left(-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\Delta_+(x-y) \\ & + \theta(y-x) P_{\ell m}\left(-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\Delta_+(y-x) , \end{aligned} \tag{6.2.8}$$

其中 $\Delta_+(x)$ 是第 5 章引入的函数

$$\Delta_+(x) \equiv (2\pi)^{-3}\int \mathrm{d}^3p\,(2p^0)^{-1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} \tag{6.2.9}$$

其中 p^0 取为 $+\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$.

为了更进一步, 我们必须讨论一下如何扩张多项式 $P(p)$ 的定义. 方程(6.2.2)和(6.2.3)仅对“质量壳上”的 4-动量, 即 $p^0 = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$, 定义了多项式$P(p)$. 由于任意幂次的 $(p^0)^{2\nu}$ 或 $(p^0)^{2\nu+1}$ 总可以分别写成 $(\mathbf{p}^2+m^2)^\nu$ 或 $p^0(\mathbf{p}^2+m^2)^\nu$, 所以这类 4-动量的任意多项式函数总可以写成 p^0 的线性函数. 因此我们可以通过如下条件定义多项式 $P^{(L)}(q)$

$$\begin{aligned} & P^{(L)}(p) = P(p) \qquad \Big(\text{对于} p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}\Big) , \\ & P^{(L)}(q) = P^{(0)}(\mathbf{q}) + q^0 P^{(1)}(\mathbf{q}) \qquad (\text{对于一般的} q^\mu) , \end{aligned} \tag{6.2.10}$$

其中 $P^{(0,1)}$ 是仅依赖于 $\mathbf{q}$ 的多项式. 现在我们可以利用

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\theta(x^0-y^0) = -\frac{\partial}{\partial x^0}\theta(y^0-x^0) = \delta(x^0-y^0) \tag{6.2.11}$$

($\theta(x)$ 在 $x^0=0$ 处有一个单位跃阶, 而在其它地方是常数)将方程(6.2.8)中的导数算符移至 θ 函数的左边

$$\Delta_{\ell m}(x,y)=P_{\ell m}^{(L)}\left(-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\Delta_F(x-y)\\ +\delta(x^0-y^0)P_{\ell m}^{(1)}(-\mathrm{i}\nabla)\Big[\Delta_+(x-y)-\Delta_+(y-x)\Big]\,, \tag{6.2.12}$$

其中 Δ_F 是"Feynman 传播子"

$$-\mathrm{i}\Delta_F(x)\equiv\theta(x)\Delta_+(x)+\theta(-x)\Delta_+(-x)\,. \tag{6.2.13}$$

然而, 当 $x^0=0$ 时, 由于方程(6.2.9)中的变换 $\mathbf{x}\to-\mathbf{x}$ 可以被积分变量的变换 $\mathbf{p}\to-\mathbf{p}$ 补偿, 函数 $\Delta_+(x)$ 是 $\mathbf{x}$ 的偶函数. 所以我们可以扔掉方程(6.2.12)中的第二项, 写成

$$\Delta_{\ell m}(x,y)=P_{\ell m}^{(L)}\left(-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\Delta_F(x-y)\,. \tag{6.2.14}$$

将 Feynman 传播子表示成 Fourier 积分将是特别有用的. 方程(6.2.13)中的阶跃函数具有 Fourier 表示*

$$\theta(t)=\frac{-1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-\mathrm{i}st)}{s+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{d}s\,. \tag{6.2.15}$$

可以将它与 $\Delta_+(x)$ 的 Fourier 积分(6.2.9)相结合. 我们在方程(6.2.13)的第一项中引入新的积分变量 $\mathbf{q}\equiv\mathbf{p}$ 和 $q^0=p^0+s$, 这给出

$$-\mathrm{i}\Delta_F(x)=-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\mathrm{d}^3q\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q^0\,\frac{\exp(\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}-\mathrm{i}q^0x^0)}{(2\pi)^3 2\sqrt{\mathbf{q}^2+m^2}}\\ \times\left[\left(q^0-\sqrt{\mathbf{q}^2+m^2}+\mathrm{i}\epsilon\right)^{-1}+\left(-q^0-\sqrt{\mathbf{q}^2+m^2}+\mathrm{i}\epsilon\right)^{-1}\right].$$

合并分母并采取4-维记法, 我们有

$$\Delta_F(x)=(2\pi)^{-4}\int\mathrm{d}^4q\,\frac{\exp(\mathrm{i}q\cdot x)}{q^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon}\,, \tag{6.2.16}$$

其中 $q^2\equiv\mathbf{q}^2-(q^0)^2$. (由于 ϵ 的唯一重要之处是它是一个正无穷小量, 我们将分母中的 $2\epsilon\sqrt{\mathbf{q}^2+m^2}$ 换成了 ϵ.) 这顺带告诉我们 Δ_F 是 Klein-Gordon 微分算符的 Green 函数, 即

$$(\Box-m^2)\Delta_F(x)=-\delta^4(x) \tag{6.2.17}$$

其边界条件由分母中的 $-\mathrm{i}\epsilon$ 确定: 如方程(6.2.13)所示, $\Delta_F(x)$ 在 $x^0\to+\infty$ 或 $x^0\to-\infty$ 时分别只包含正频项或负频项, 即 $\exp(-\mathrm{i}x^0\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2})$ 或 $\exp(+\mathrm{i}x^0\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2})$.

现在将方程(6.2.16)代入方程(6.2.14), 这给出的传播子是

$$\Delta_{\ell m}(x,y)=(2\pi)^{-4}\int\mathrm{d}^4q\,\frac{P_{\ell m}^{(L)}(q)\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot(x-y)}}{q^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon}\,. \tag{6.2.18}$$

*为了证明这点, 注意到, 如果 $t>0$, 那么积分围道可以通过下半平面的一个大半圆按顺时针方向闭合, 所以积分结果来自极点 $s=-\mathrm{i}\epsilon$处的贡献, 值为 $-2\pi\mathrm{i}$. 如果 $t<0$, 那么积分围道可以通过上半平面的一个大半圆按逆时针方向闭合, 这个区域内被积函数是解析的, 积分结果为零.

这个表达式有一个明显的问题. 当 p 在质量壳 $p^2 = -m^2$ 上时, 多项式 $P(p)$ 是 Lorentz 协变的, 但是在方程(6.2.18)中, 我们要对所有的 q^μ 积分, 并没有限制在质量壳上. 对于一般的 q^μ, 多项式 $P^{(L)}(q)$ 定义为 q^0 的线性多项式, 除非这个多项式对每个空间分量 q^i 也是线性的, 否则这个多项式显然没有 Lorentz 协变性. 作为替代, 我们总能对一般的 4-动量 q^μ 定义多项式 $P(p)$ 的扩张, 我们简称为 $P(q)$, 使得 $P(q)$ 对一般的 q^μ 是 Lorentz 协变的, 满足

$$P_{\ell m}(\Lambda q) = D_{\ell\ell'}(\Lambda) D^*_{mm'}(\Lambda) P_{\ell' m'}(q) \,,$$

其中 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 是一般 Lorentz 变换, 而 $D(\Lambda)$ 是 Lorentz 群的一个合适表示. 例如, 对于标量场, Dirac 场和 4-矢量场, 这些协变扩张显然是通过将方程(6.2.4), (6.2.5)和(6.2.6)中的 p^μ 替换为一般的 4-动量 q^μ 实现的. 对于标量场和 Dirac 场, 它们已经是 q^0 的线性函数, 所以 $P^{(L)}(q)$ 和 $P(q)$ 之间没有差异:

$$P^{(L)}_{\ell m}(q) = P_{\ell m}(q) \qquad (\text{标量场, Dirac场}). \tag{6.2.19}$$

另一方面, 对自旋 1 粒子的矢量场, 协变多项式 $P_{\mu\nu}(q) \equiv \eta_{\mu\nu} + m^{-2} q_\mu q_\nu$ 的 00 分量是 q^0 的二次, 所以这时存在一个差异:

$$\begin{aligned} P^{(L)}_{\mu\nu}(q) &= \eta_{\mu\nu} + m^{-2}\Big[q_\mu q_\nu - \delta^0_\mu \delta^0_\nu (q_0^2 - \mathbf{q}^2 - m^2)\Big] \\ &= P_{\mu\nu}(q) + m^{-2}(q^2 + m^2)\delta^0_\mu \delta^0_\nu \,. \end{aligned} \tag{6.2.20}$$

(这里额外的项通过两个条件确定, 一个是它必须抵消 $P_{00}(q)$ 中的 $(q_0)^2$ 项, 另一个是当 q^μ 在质量壳上时, 它必须为零.) 将其代入方程(6.2.18), 这给出的矢量场传播子是

$$\Delta_{\mu\nu}(x,y) = (2\pi)^{-4} \int \mathrm{d}^4 q \, \frac{P_{\mu\nu}(q) \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot(x-y)}}{q^2 + m^2 - \mathrm{i}\epsilon} + m^{-2}\delta^4(x-y)\delta^0_\mu \delta^0_\nu \,. \tag{6.2.21}$$

第一项是明显协变的, 而第二项, 尽管不协变, 却是定域的, 所以, 通过给哈密顿密度加上一个定域的非协变项, 我们可以消掉它. 特别地, 如果 $V_\mu(x)$ 通过 $\mathscr{H}(x)$ 中的 $V_\mu(x) J^\mu(x)$ 与其它场进行相互作用, 那么方程(6.2.21)中第二项的效果是产生有效相互作用

$$-\mathrm{i}\mathscr{H}_{eff}(x) = \tfrac{1}{2}\Big[-\mathrm{i}J^\mu(x)\Big]\Big[-\mathrm{i}J^\nu(x)\Big]\Big[-\mathrm{i}m^{-2}\delta^0_\mu\delta^0_\nu\Big] \,.$$

(因子 $-\mathrm{i}$ 就是伴随顶点和传播子的那个因子. 需要因子 $\frac{1}{2}$ 是因为将其它场与 $\mathscr{H}_{eff}(x)$ 配对时存在两种方法, 这两种方法相差的只是 J^μ 和 J^ν 的交换.) 因此, 通过给 $\mathscr{H}(x)$ 加入非协变项

$$\mathscr{H}_{NC}(x) = -\mathscr{H}_{eff}(x) = \frac{1}{2m^2}\Big[J^0(x)\Big]^2 \,, \tag{6.2.22}$$

方程(6.2.21)中非协变的第二项的影响就可以被抵消掉. 矢量场的等时对易子在零间隔处有一奇异性, 正是这个奇异性要求我们采用更加广泛的一类相互作用而不是限于一个标量密度. S-矩阵在这一理论中的 Lorentz 不变性的非微扰证明将在下一章给出.

不应该认为这是仅与自旋 $j \geq 1$ 相关的现象. 例如, 考虑与自旋 $j = 0$ 的粒子关联的矢量场, 它等于(第 5 章讨论过的)标量场的导数 $\partial_\lambda \phi(x)$. 对于这个场与标量 $\phi^\dagger(y)$ 的配对, 多项式 $P(p)$ 在壳时是

$$P_\lambda(p) = \mathrm{i}p_\lambda \,, \tag{6.2.23}$$

而 $\partial_\lambda\phi(x)$ 与 $\partial_\eta\phi^\dagger(y)$ 的配对给出多项式

$$P_{\lambda,\eta}(p) = p_\lambda p_\eta \,. \tag{6.2.24}$$

对于一般的离壳 4-动量 q^μ, 再一次将方程(6.2.23)和(6.2.24)中的 p^μ 换成 q^μ 就可获得协变多项式. 方程(6.2.23)表明 $P_\lambda(q)$ 已经是 q_0 的线性函数, 因此 $P_\lambda(q)$ 和 $P^{(L)}_\lambda(q)$ 之间没有差异. 然而, 对于方程(6.2.24), 确实存在一个差异:

$$\begin{aligned} P^{(L)}_{\lambda,\eta}(q) &= q_\lambda q_\eta - (q_0^2 - \mathbf{q}^2 - m^2)\delta^0_\lambda\delta^0_\eta \\ &= P_{\lambda,\eta}(q) + (q^2+m^2)\delta^0_\lambda\delta^0_\eta \,, \end{aligned} \tag{6.2.25}$$

所以这里传播子是

$$\Delta_{\lambda,\eta}(x,y) = (2\pi)^{-4}\int \mathrm{d}^4q\, \frac{q_\lambda q_\eta \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}}{q^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon} + \delta^0_\lambda\delta^0_\eta\delta^4(x-y) \,. \tag{6.2.26}$$

像上面一样, 通过给相互作用加上非协变项

$$\mathscr{H}_{NC}(x) = \tfrac{1}{2}\Big[J^0(x)\Big]^2 \,, \tag{6.2.27}$$

第二项的非协变影响就可以被移除, 这里的 $J^\mu(x)$ 是 $\mathscr{H}(x)$ 协变部分中与 $\partial_\mu\phi(x)$ 乘在一起的流.

应该清楚(至少对有质量粒子), 通过这种给哈密顿量密度加入非协变定域项的方法, 我们总可以抵消传播子中非协变部分的影响. 这是因为, 当 q^μ 在质量壳上时, 传播子中的分子 $P^{(L)}_{\ell m}(q)$ 必须等于协变多项式 $P_{\ell m}(q)$, 所以 $P^{(L)}_{\ell m}(q)$ 与 $P_{\ell m}(q)$ 之差必须包含因子 q^2+m^2. 在这个差值对方程(6.2.18)的贡献中, 这个因子抵消了分母 $(q^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon)$, 所以方程(6.2.18)总等于协变项加上正比于 δ-函数 $\delta^4(x-y)$ 或其导数的项. 通过给相互作用加上一个与场或场导数耦合的流的二次项, 后一项的效应可以被消掉. 下文中将默认这样的项已被包含在相互作用中, 这样我们将在传播子(6.2.18)中使用协变多项式 $P_{\ell m}(q)$, 而不再标记指标"L".

看起来这似乎只是一个临时应对的手段. 幸运的是, 在下一章所讨论的正则体系中, 哈密度量密度中会自动出现一个非协变项, 这个非协变项正是抵消传播子的非协变项所需要的. 事实上, 这正是引入正则体系的一部分动机.

* * *

在结束本节之前, 说一下传播子通常出现在文献中的其它定义是有益的, 这些定义等价于方程(6.2.1). 首先, 对方程(6.1.14)取真空期望值, 这给出

$$\begin{aligned} -\mathrm{i}\Delta_{\ell m}(x,y) = {}& \theta(x-y)\left\langle\Big[\psi^+_\ell(x),\psi^{+\dagger}_m(y)\Big]_\mp\right\rangle_0 \\ & \pm\theta(y-x)\left\langle\Big[\psi^{-\dagger}_m(y),\psi^-_\ell(x)\Big]_\mp\right\rangle_0 \,. \end{aligned} \tag{6.2.28}$$

(这里的 $\langle AB\cdots\rangle_0$ 表示真空期望值 $(\Phi_0, AB\cdots\Phi_0)$.) 因为 $\psi^+_\ell(x)$ 和 $\psi^{-\dagger}_m(y)$ 都湮灭真空, 所以方程(6.2.28)中的每个对易子或反对易子只有一项对传播子有贡献:

$$-\mathrm{i}\Delta_{\ell m}(x,y) = \theta(x-y)\langle\psi^+_\ell(x)\psi^{+\dagger}_m(y)\rangle_0 \pm \theta(y-x)\langle\psi^{-\dagger}_m(y)\psi^-_\ell(x)\rangle_0 \,. \tag{6.2.29}$$

此外, $\psi^{-\dagger}$ 和 ψ^{+} 湮灭右边的真空态, 而 ψ^{-} 和 $\psi^{+\dagger}$ 湮灭左边的真空态, 所以无论 ψ^{+} 和 ψ^{-} 处在方程何处, 它们都可以被替换成完整的场 $\psi=\psi^{+}+\psi^{-}$:

$$-\mathrm{i}\Delta_{\ell m}(x,y)=\theta(x-y)\langle\psi_{\ell}(x)\psi_{m}^{\dagger}(y)\rangle_{0}\pm\theta(y-x)\langle\psi_{m}^{\dagger}(y)\psi_{\ell}(x)\rangle_{0}\,. \tag{6.2.30}$$

这通常写做

$$-\mathrm{i}\Delta_{\ell m}(x,y)=\langle T\{\psi_{\ell}(x)\psi_{m}^{\dagger}(y)\}\rangle_{0}\,, \tag{6.2.31}$$

其中 T 是编时乘积, 现在它的定义扩展[**]至所有场, 对任何费米算符的奇次置换, 它的定义要加一个负号.

6.3 动量空间规则

在 6.1 节中介绍的 Feynman 规则具体说明了如何计算一个给定的 N 阶图对 S-矩阵的贡献, 这个贡献是对 N 个时空坐标的积分, 被积函数是与时空相关的因子的乘积. 对于一个末态粒子(或反粒子)线, 如果它携带动量 p'^{μ}, 从时空坐标为 x^{μ} 的顶点离开图, 我们就会得到一个正比于 $\exp(-\mathrm{i}p'\cdot x)$ 的因子, 对于初态粒子线, 如果它携带动量 p^{μ}, 然后进入时空坐标为 x^{μ} 的顶点, 我们就会得到一个正比于 $\exp(+\mathrm{i}p\cdot x)$ 的因子. 我们在 6.2 节中看到, 如果一个内线从 y 跑到 x, 那么与这个内线相关的因子就可以表示成对离壳 4-动量 q^{μ}的积分, 这个积分是被积函数正比于 $\exp(\mathrm{i}q\cdot(x-y))$ 的 Fourier 积分. 我们可以将 q^{μ} 看作是沿着内线, 以箭头的方向, 从 y 流向 x 的 4-动量. 因此, 对每个顶点的时空坐标的积分仅产生因子

$$(2\pi)^{4}\delta^{4}\left(\sum p+\sum q-\sum p'-\sum q'\right)\,, \tag{6.3.1}$$

其中 $\sum p'$ 和 $\sum p$ 分别代表所有离开顶点的末态粒子的总 4-动量和所有进入顶点的初态粒子的总 4-动量; 而 $\sum q'$ 和 $\sum q$ 分别代表箭头离开顶点和箭头进入顶点的内线带有的总 4-动量. 当然, 取代对 x^{μ} 积分, 我们现在必须对每一内线的 Fourier 变量 q^{μ} 积分.

这些讨论可以被整理成一组新的 Feynman 规则(参看图6.9), 在这组 Feynman 规则下, 对 S-矩阵的贡献是对动量变量的积分:

(i) 和 6.1 节中讲的一样, 画出所需阶的所有 Feynman 图. 然而, 取代用时空坐标来标记每个顶点, 现在用一个离壳的 4-动量标记每个内线, 这个动量通常被视作沿箭头的方向流动(对于没有箭头的中性粒子线, 则可以是两个方向中的任一个方向).

(ii) 对于每个 i 类顶点, 计入因子

$$-\mathrm{i}(2\pi)^{4}g_{i}\,\delta^{4}\left(\sum p+\sum q-\sum p'-\sum q'\right) \tag{6.3.2}$$

其中动量求和的意义与(6.3.1)中的求和相同. 这个 δ-函数确保了 4-动量在图中的每个顶点上守恒. 对每个从上方离开图的外线, 根据箭头指向上方还是指向下方, 分别计入因子 $(2\pi)^{-3/2}u_{\ell}^{*}(\mathbf{p}'\sigma'n')$ 或 $(2\pi)^{-3/2}v_{\ell}(\mathbf{p}'\sigma'n')$. 对每个从下方进入图的外线, 根据箭头指向上方还是指向下方, 分别计入因子$(2\pi)^{-3/2}u_{\ell}(\mathbf{p}\,\sigma\,n)$ 或 $(2\pi)^{-3/2}v_{\ell}^{*}(\mathbf{p}\,\sigma\,n)$. 对于每个内线, 如

[**]这与此前我们在第 3 章中对哈密顿量密度定义的编时乘积是不一致的, 这是因为哈密顿量密度仅能包含偶数个费米场因子.

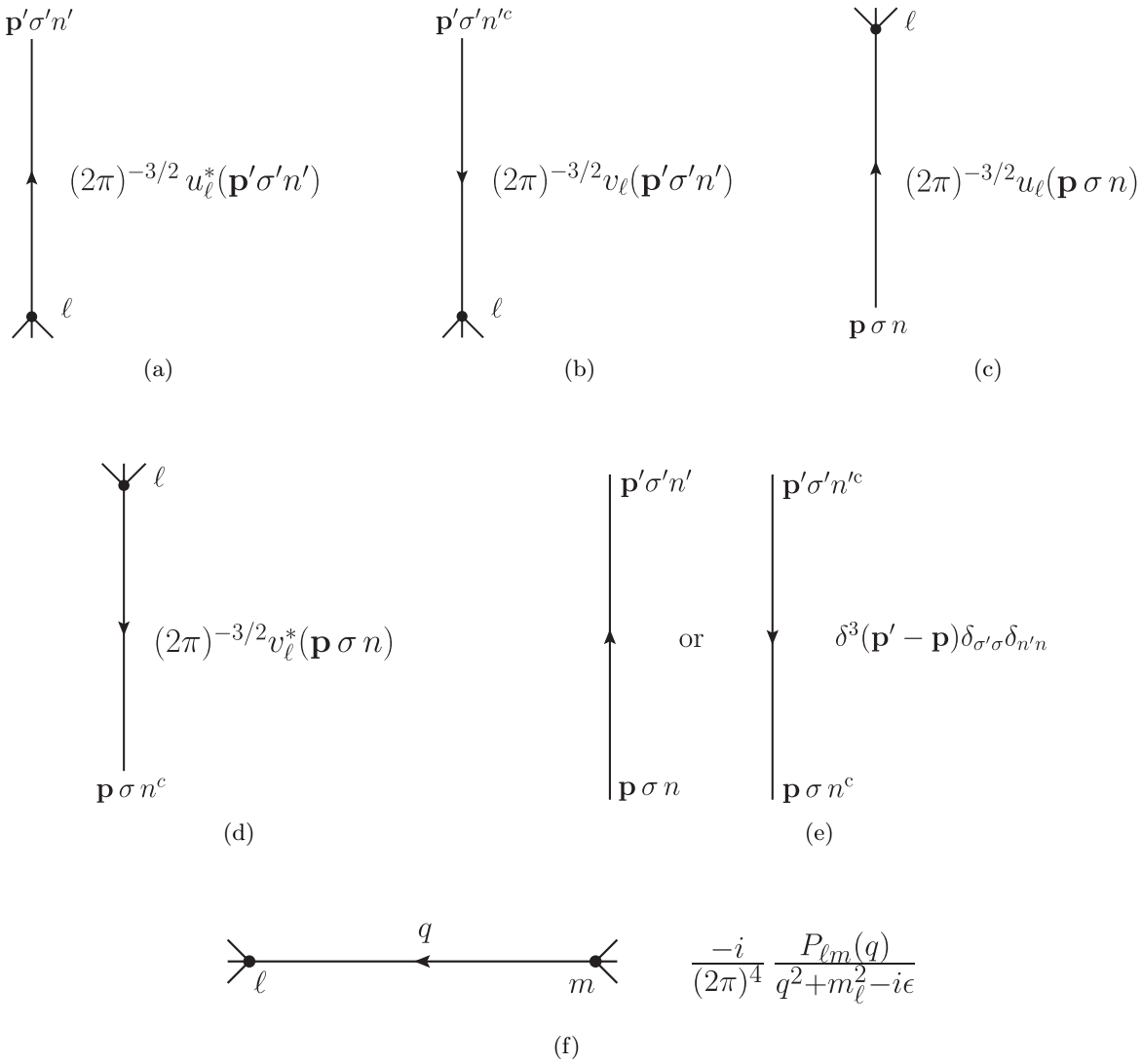


图 6.9 在动量空间计算 S-矩阵时产生的算符配对的图形表示. 对于 Feynman 图的每一条线, 右边的表达式是必须被包含进 S-矩阵的动量空间积分中的因子.

果它的端点分别被标记为 ℓ 和 m, 箭头由 m 指向 ℓ, 且携带动量指标 q^μ, 那么其计入的因子是 $-\mathrm{i}\Delta_{\ell m}(x)$ 的被积函数中 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}$ 的系数:

$$-\,\mathrm{i}(2\pi)^{-4}P_{\ell m}(q)\Big/(q^2+m_\ell^2-\mathrm{i}\epsilon)\,. \tag{6.3.3}$$

提醒: 对 4-动量为 q 的标量或反标量, u 和 v 就是 $(2q^0)^{-1/2}$, 而多项式 $P(q)$ 是 1. 对于 4-动量为 p, 质量为 M 的旋量, u 和 v 是 5.5 节中描述的归一化 Dirac 旋量, 多项式 $P(p)$ 是矩阵 $(-\mathrm{i}\gamma_\mu p^\mu+M)\beta$.

(iii) 对于所有的这些因子的乘积, 对内线所携带的 4-动量积分, 并对所有场指标 ℓ, m 等求和.

(iv) 将所有以这种方式从每个 Feynman 图得到的结果加起来.

和 6.1 节第(v)部分和第(vi)部分中所讲的相同, 我们可能还需要计入额外的组合因子以及费米算符带来的符号. 在本节末尾会给出这样的例子.

对每个内线, 我们有一个 4-动量积分变量, 但它们中的很多个被顶点附带的 δ-函数消掉了. 由于能量和动量分别对一个 Feynman 图的每个连通部分都守恒, 如果一个 Feynman 图有 C 个连通部分, 那么最后会剩下 C 个 δ-函数. 因此, 在有 I 个内线和 V 个顶点的图中, 没有被 δ-函数确定的独立 4-动量的数目是 $I-[V-C]$. 这显然也是独立圈的个数 L:

$$L = I - V + C\,, \tag{6.3.4}$$

L 的定义是剪断它却不会使图变成非连通图的内线的最大数目, 这是因为只有这样的内线才能被赋予独立的 4-动量. 我们可以认为独立动量变量描述的是在每个圈内循环流动的动量. 特别地, 树图中没有圈; 对于这样的图, 在将 δ-函数考虑进去后不会有动量空间积分剩下来.

例如, 对于相互作用为(6.1.18)的理论, 在动量空间 Feynman 规则下, 费米子-玻色子散射的 S-矩阵(6.1.27)是

$$\begin{aligned}
&S_{\mathbf{p}_1'\sigma_1'n_1'\,\mathbf{p}_2'\sigma_2'n_2'\,,\,\mathbf{p}_1\sigma_1 n_1\,\mathbf{p}_2\sigma_2 n_2} = \\
&\quad\sum_{k'l'm'klm} (-\mathrm{i})^2(2\pi)^8 g_{l'm'k'}\,g_{mlk}\,u^*_{l'}(\mathbf{p}_1'\,\sigma_1'\,n_1')u_l(\mathbf{p}_1\,\sigma_1\,n_1) \\
&\times\int \mathrm{d}^4q\,\left(-\mathrm{i}(2\pi)^{-4}\frac{P_{m'm}(q)}{q^2+m_m^2-\mathrm{i}\epsilon}\right) \\
&\times(2\pi)^{-6}\Big[u^*_{k'}(\mathbf{p}_2'\,\sigma_2'\,n_2')u_k(\mathbf{p}_2\,\sigma_2\,n_2)\delta^4(p_1+p_2-q)\delta^4(q-p_{1'}-p_{2'}) \\
&\quad + u^*_k(\mathbf{p}_2'\,\sigma_2'\,n_2')u_{k'}(\mathbf{p}_2\,\sigma_2\,n_2)\delta^4(p_2-p_{1'}+q)\delta^4(p_1-p_{2'}-q)\Big]\,,
\end{aligned}$$

这里的指标 1 和 2 分别代表费米子和玻色子. 动量空间积分在这里是平庸的, 这个积分给出

$$\begin{aligned}
&S_{\mathbf{p}_1'\sigma_1'n_1'\,\mathbf{p}_2'\sigma_2'n_2'\,,\,\mathbf{p}_1\sigma_1 n_1\,\mathbf{p}_2\sigma_2 n_2} = \mathrm{i}(2\pi)^{-2}\delta^4(p_1+p_2-p_1'-p_2') \\
&\quad\times\sum_{k'l'm'klm} g_{l'm'k'}\,g_{mlk}\,u^*_{l'}(\mathbf{p}_1'\,\sigma_1'\,n_1')\,u_l(\mathbf{p}_1\,\sigma_1\,n_1) \\
&\times\left[\frac{P_{m'm}(p_1+p_2)}{(p_1+p_2)^2+m_m^2-\mathrm{i}\epsilon}\,u^*_{k'}(\mathbf{p}_2'\,\sigma_2'\,n_2')u_k(\mathbf{p}_2\,\sigma_2\,n_2)\right. \\
&\quad\left.+\frac{P_{m'm}(p_{2'}-p_1)}{(p_{2'}-p_1)^2+m_m^2-\mathrm{i}\epsilon}\,u^*_k(\mathbf{p}_2'\,\sigma_2'\,n_2')u_{k'}(\mathbf{p}_2\,\sigma_2\,n_2)\right]\,.
\end{aligned} \tag{6.3.5}$$

以同样的方式, 同一理论中的费米子-费米子散射的 S-矩阵元是

$$\begin{aligned}
&S_{\mathbf{p}_1'\sigma_1'n_1'\,\mathbf{p}_2'\sigma_2'n_2'\,,\,\mathbf{p}_1\sigma_1 n_1\,\mathbf{p}_2\sigma_2 n_2} = \mathrm{i}(2\pi)^{-2}\delta^4(p_1+p_2-p_1'-p_2') \\
&\times\sum_{k'l'm'klm} g_{m'mk'}\,g_{l'lk}\frac{P_{k'k}(p_{1'}-p_1)}{(p_{1'}-p_1)^2+m_k^2-\mathrm{i}\epsilon} \\
&\times u^*_{m'}(\mathbf{p}_2'\,\sigma_2'\,n_2')\,u^*_{l'}(\mathbf{p}_1'\,\sigma_1'\,n_1')\,u_m(\mathbf{p}_2\,\sigma_2\,n_2)\,u_l(\mathbf{p}_1\,\sigma_1\,n_1) \\
&-[1'\rightleftharpoons 2']\,.
\end{aligned} \tag{6.3.6}$$

这些例子表明我们需要一个更紧凑的记法. 我们可以定义费米子-玻色子耦合矩阵

$$[\Gamma_k]_{lm} \equiv g_{lmk}\,. \tag{6.3.7}$$

在矩阵记号下, 费米子-玻色子散射的矩阵元(6.3.5)和费米子-费米子散射的矩阵元(6.3.6)可以重新写为

$$
\begin{aligned}
&S_{\mathbf{p}_1'\sigma_1'n_1'\,\mathbf{p}_2'\sigma_2'n_2',\,\mathbf{p}_1\sigma_1n_1\,\mathbf{p}_2\sigma_2n_2} = \mathrm{i}(2\pi)^{-2}\delta^4(p_1+p_2-p_1'-p_2') \\
&\times\sum_{k'k}\Bigg[\left(u^\dagger(\mathbf{p}_1'\,\sigma_1'\,n_1')\Gamma_{k'}\frac{P(p_1+p_2)}{(p_1+p_2)^2+M^2-\mathrm{i}\epsilon}\Gamma_k u(\mathbf{p}_1\,\sigma_1\,n_1)\right) \\
&\qquad\times u_{k'}^*(\mathbf{p}_2'\,\sigma_2'\,n_2')u_k(\mathbf{p}_2\,\sigma_2\,n_2) \\
&\quad+\left(u^\dagger(\mathbf{p}_1'\,\sigma_1'\,n_1')\Gamma_{k'}\frac{P(p_1-p_2')}{(p_1-p_2')^2+M^2-\mathrm{i}\epsilon}\Gamma_k u(\mathbf{p}_1\,\sigma_1\,n_1)\right) \\
&\qquad\times u_k^*(\mathbf{p}_2'\,\sigma_2'\,n_2')u_{k'}(\mathbf{p}_2\,\sigma_2\,n_2)\Bigg]
\end{aligned}
\tag{6.3.8}
$$

和

$$
\begin{aligned}
&S_{\mathbf{p}_1'\sigma_1'n_1'\,\mathbf{p}_2'\sigma_2'n_2',\,\mathbf{p}_1\sigma_1n_1\,\mathbf{p}_2\sigma_2n_2} = \mathrm{i}(2\pi)^{-2}\delta^4(p_1+p_2-p_1'-p_2') \\
&\quad\times\sum_{k'k}\frac{P_{k'k}(p_{1'}-p_1)}{(p_{1'}-p_1)^2+m_k^2-\mathrm{i}\epsilon} \\
&\quad\times\left(u^\dagger(\mathbf{p}_2'\,\sigma_2'\,n_2')\Gamma_{k'}u(\mathbf{p}_2\,\sigma_2\,n_2)\right)\left(u^\dagger(\mathbf{p}_1'\,\sigma_1'\,n_1')\Gamma_k u(\mathbf{p}_1\,\sigma_1\,n_1)\right) \\
&\quad-[1'\rightleftharpoons 2']\,,
\end{aligned}
\tag{6.3.9}
$$

其中, M^2 和 m^2 分别是方程(6.3.8)和(6.3.9)中的费米子和玻色子的对角质量矩阵. 矩阵记法下的一般规则是, 沿着箭头指示的相反方向, 依次写下系数函数, 耦合矩阵和传播子. 在同样的记法下, 同一理论中的玻色子-玻色子散射的 S-矩阵元是单圈图的求和, 如图6.7所示:

$$
\begin{aligned}
&S_{\mathbf{p}_1'\sigma_1'n_1'\,\mathbf{p}_2'\sigma_2'n_2',\,\mathbf{p}_1\sigma_1n_1\,\mathbf{p}_2\sigma_2n_2} = -(2\pi)^{-6}\delta^4(p_1+p_2-p_1'-p_2') \\
&\times\sum_{k_1k_2k_1'k_2'}u_{k_1'}^*(\mathbf{p}_1'\,\sigma_1'\,n_1')u_{k_2'}^*(\mathbf{p}_2'\,\sigma_2'\,n_2')u_{k_1}(\mathbf{p}_1\,\sigma_1\,n_1)u_{k_2}(\mathbf{p}_2\,\sigma_2\,n_2) \\
&\times\int\mathrm{d}^4q\ \mathrm{Tr}\left\{\Gamma_{k_2'}\frac{P(q)}{q^2+M^2-\mathrm{i}\epsilon}\Gamma_{k_1'}\frac{P(q+p_1')}{(q+p_1')^2+M^2-\mathrm{i}\epsilon}\right. \\
&\qquad\left.\times\Gamma_{k_1}\frac{P(q+p_1'-p_1)}{(q+p_1'-p_1)^2+M^2-\mathrm{i}\epsilon}\Gamma_{k_2}\frac{P(q-p_2')}{(q-p_2')^2+M^2-\mathrm{i}\epsilon}\right\} \\
&+\cdots\,,
\end{aligned}
\tag{6.3.10}
$$

其中最后一行的省略号表示的是置换玻色子 $1',2',2$ 得到的项. 右式开头的负号是费米圈带来的额外负号. 注意, 在消掉 δ-函数后, 这里只有一个动量空间积分, 这正是一个单圈图所需要的. 我们会在第 11 章看到如何处理这类动量空间积分.

为了更具体些, 考虑这样一个理论, 其中质量为 M 的 Dirac 旋量场 $\psi(x)$ 与质量为 m 的赝标量场 $\phi(x)$ 通过相互作用 $-\mathrm{i}g\phi\bar{\psi}\gamma_5\psi$ 进行作用. (插入的因子 $-\mathrm{i}$ 是为了使相互作用在耦合常数 g 为实数时是厄米的.) 回忆, 对于标量, 多项式 $P(q)$ 就是 1, 而对旋量则是 $[-\mathrm{i}\gamma_\mu q^\mu+M]\beta$. 另外, 对能量为 E 的标量场, u 是 $(2E)^{-1/2}$, 而对旋量场, u 是 5.5 节中讨论的通常的归一化 Dirac 旋量. 对于费

米子-玻色子散射, 费米子-费米子散射和玻色子-玻色子散射, 方程(6.3.8), (6.3.9)和(6.3.10)给出最低阶连通 S-矩阵元:

$$
\begin{aligned}
S_{\mathbf{p}_1'\sigma_1'\,\mathbf{p}_2'\,,\,\mathbf{p}_1\sigma_1\,\mathbf{p}_2} &= -\mathrm{i}(2\pi)^{-2} g^2 (4E_2'E_2)^{-1/2} \delta^4(p_1+p_2-p_1'-p_2') \\
&\quad \times \left[\left(\bar{u}(\mathbf{p}_1'\,\sigma_1')\,\gamma_5\,\frac{-\mathrm{i}\gamma_\mu (p_1+p_2)^\mu + M}{(p_1+p_2)^2+M^2-\mathrm{i}\epsilon}\,\gamma_5\,u(\mathbf{p}_1\,\sigma_1) \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\bar{u}(\mathbf{p}_1'\,\sigma_1')\,\gamma_5\,\frac{-\mathrm{i}\gamma_\mu (p_1-p_2')^\mu + M}{(p_1-p_2')^2+M^2-\mathrm{i}\epsilon}\,\gamma_5\,u(\mathbf{p}_1\,\sigma_1) \right) \right], \\
S_{\mathbf{p}_1'\sigma_1'\,\mathbf{p}_2'\sigma_2'\,,\,\mathbf{p}_1\sigma_1\,\mathbf{p}_2\sigma_2} &= -\mathrm{i}(2\pi)^{-2} g^2 \delta^4(p_1+p_2-p_1'-p_2') \\
&\quad \times \left(\bar{u}(\mathbf{p}_2'\,\sigma_2')\,\gamma_5\,u(\mathbf{p}_2\,\sigma_2) \right) \left(\bar{u}(\mathbf{p}_1'\,\sigma_1')\,\gamma_5\,u(\mathbf{p}_1\,\sigma_1) \right) \\
&\quad \times \frac{1}{(p_{1'}-p_1)^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon} \\
&\quad - [1' \rightleftharpoons 2'] \,, \\
S_{\mathbf{p}_1'\mathbf{p}_2'\,,\,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2} &= -(2\pi)^{-6}\, g^4\, (16E_1E_2E_1'E_2')^{-1/2}\, \delta^4(p_1+p_2-p_1'-p_2') \\
&\quad \times \int \mathrm{d}^4 q\ \mathrm{Tr} \left\{ \gamma_5\,\frac{-\mathrm{i}\gamma_\mu q^\mu + M}{q^2+M^2-\mathrm{i}\epsilon}\,\gamma_5\,\frac{-\mathrm{i}\gamma_\mu (q+p_1')^\mu + M}{(q+p_1')^2+M^2-\mathrm{i}\epsilon} \right. \\
&\quad \left. \times \gamma_5\,\frac{-\mathrm{i}\gamma_\mu (q+p_1'-p_1)^\mu + M}{(q+p_1'-p_1)^2+M^2-\mathrm{i}\epsilon}\,\gamma_5\,\frac{-\mathrm{i}\gamma_\mu (q-p_2')^\mu + M}{(q-p_2')^2+M^2-\mathrm{i}\epsilon} \right\} + \cdots \,,
\end{aligned}
$$

其中, 最后一个式子中的省略号代表对粒子 $2, 1', 2'$ 的置换求和. 费米传播子分子中的因子 β 已经用来将 $u^\dagger$ 换成 $\bar{u}$.

* * *

另一些有用的拓扑结果给出了线的一些守恒律. 我们暂且可以认为所有的内线和外线在顶点处产生, 而在内线中成对消失, 或者在外线离开图时消失. (这与线携带箭头的指向无关.) 于是产生的线与消失的线相等给出

$$
2I + E = \sum_i n_i V_i \,, \tag{6.3.11}
$$

其中 I 是内线的数目, E 是外线的数目, V_i 是第 i 类顶点的数目, 而 n_i 是与该顶点相连的线的数目. (这对每一类场分别成立.) 特别的, 如果所有的相互作用包含的场数目相同, 即 $n_i = n$, 那么就有

$$
2I + E = nV \,, \tag{6.3.12}
$$

其中 V 是所有顶点的总数. 在这种情况下, 我们可以从方程(6.3.4)和(6.3.11)中消去 I, 并看到, 对于一个连通图(即 $C=1$), 顶点数是

$$
V = \frac{2L + E - 2}{n-2} \,. \tag{6.3.13}
$$

例如, 对于三线性相互作用, $L = 0, 1, 2\cdots$ 的散射过程($E=4$)的图有 $V = 2, 4, 6\cdots$ 个顶点. 一般而言, 按耦合常数幂次的展开是圈数逐渐增加的展开.

6.4 离质量壳

在任意 S-矩阵元的 Feynman 图中, 所有外线都是"在质量壳"的; 即, 质量为 m 的粒子的外线所带的 4-动量满足约束 $p_\mu p^\mu = -m^2$. 考察那些"离质量壳"的 Feynman 图经常也是重要的, 对于这样的图, 它的外线能量像内线所携带的能量一样是自由量, 与任何 3-动量无关. 一方面, 它们作为更大 Feynman 图的部分而出现; 例如, 在一个图的内线上插入的圈可以认为是有两个外线的 Feynman 图, 只不过这两个外线都是离壳的.

当然, 一旦我们计算出了一个给定 Feynman 图的离壳贡献后, 通过回到质壳上, 我们可以很容易地计算出与之相联系的 S-矩阵元: 令沿着线流入图的 4-动量 p^μ 对初态粒子取 $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$, 对末态中的粒子取 $p^0 = -\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$, 并对初态粒子或反粒子计入合适的外线因子 $(2\pi)^{-3/2}u_\ell$ 或 $(2\pi)^{-3/2}v_\ell^*$, 对末态粒子或反粒子计入因子 $(2\pi)^{-3/2}u_\ell^*$ 或 $(2\pi)^{-3/2}v_\ell$. 事实上, 我们在第 9 章接触路径积分方法后, 我们会发现最方便的做法是先导出所有外线离壳的图的 Feynman 规则, 然后通过令外线所带的动量逼近适合它们的质量壳来得到 S-矩阵元.

离壳的 Feynman 图只是更广的一类 Feynman 规则中的一种特殊情况, 这种推广的 Feynman 图考虑了各种可能的外场效应. 假定我们向哈密顿量中加入外场 $\epsilon_a(x)$ 项之和, 这使得 S-矩阵的Dyson级数(3.5.10)中使用的相互作用 $V(t)$ 被换成了

$$V_\epsilon(t) = V(t) + \sum_a \int \mathrm{d}^3x\, \epsilon_a(\mathbf{x},t)\, o_a(\mathbf{x},t)\,. \tag{6.4.1}$$

"流" $o_a(t)$ 对时间的依赖关系正是通常的相互作用绘景中对时间的依赖关系:

$$o_a(t) = \exp(\mathrm{i}H_0 t)\, o_a(0)\, \exp(-\mathrm{i}H_0 t)\,, \tag{6.4.2}$$

但除此之外它是个相当任意的算符. 这样一来, 对于任意给定的跃迁 $\alpha \to \beta$, 它的 S-矩阵就变成了 c-数函数 $\epsilon_a(t)$ 的泛函 $S_{\beta\alpha}[\epsilon]$. 计算这个泛函的 Feynman 规则是通常 Feynman 规则的一个显然推广. 除了从 $V(t)$ 得到的普通顶点外, 我们必须引入额外的顶点: 如果 $o_a(x)$ 是 n_a 个场因子的乘积, 那么位置指标为 x 的任何 o_a 顶点都必须有 n_a 条相应类型的外线与其相连, 它对位置空间 Feynman 规则的贡献等于 $-\mathrm{i}\epsilon_a(x)$ 乘以任何出现在 $o_a(x)$ 中的数值因子. 由此得出, $S_{\beta\alpha}[\epsilon]$ 对 $\epsilon_a(x), \epsilon_b(y)\cdots$ 在 $\epsilon \to 0$ 处的 r 阶变分导数由具有 r 个额外顶点的位置空间 Feynman 图给出, 这些顶点分别与 $n_a, n_b\cdots$ 条内线相连, 但不连接外线. 这些顶点携带不进行积分的位置指标 $x, y\cdots$; 每个这样的顶点的贡献等于 $-\mathrm{i}$ 乘以出现在与其关联的流 o_a 中的所有数值因子.

特别地, 在这些流都是单个场因子的情况下, 即,

$$V_\epsilon(t) = V(t) + \sum_\ell \int \mathrm{d}^3x\, \epsilon_\ell(\mathbf{x},t)\psi_\ell(\mathbf{x},t)\,,$$

$S_{\beta\alpha}[\epsilon]$ 对 $\epsilon_\ell(x), \epsilon_m(y)\cdots$ 的 r 阶变分导数在 $\epsilon = 0$处由含有 r 个额外顶点的位置空间图给出, 这些顶点带有时空指标 $x, y\cdots$, 并且每个只与一条 $\ell, m\cdots$ 类的粒子内线相连. 这些可以看作是离壳的外线, 不同的是, 它们对 S-矩阵元的贡献不是 $(2\pi)^{-3/2}u_\ell(\mathbf{p},\sigma)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}$ 或 $(2\pi)^{-3/2}u_\ell^*(\mathbf{p},\sigma)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}$ 这样的系数函数而是一个传播子加上一个来自线末端顶点的因子 $-\mathrm{i}$. 从变分导数

$$\left[\frac{\delta^r S_{\beta\alpha}[\epsilon]}{\delta\epsilon_\ell(x)\,\delta\epsilon_m(y)\cdots}\right]_{\epsilon=0}$$

的每条离壳线中移除传播子, 再做一个适当的 Fourier 变换, 乘上适当的系数函数 u_ℓ, u_ℓ^*等, 再乘上因子$(-\mathrm{i})^r$, 我们就得到了一个动量空间的 Feynman 图, 在这个图中, 态 α 和 β 中的粒子处在质量壳上, 此外还有 r 条 $\ell, m\cdots$类的外线, 它们携带动量 $p, p'\cdots$.

在很多问题中, 意识到存在如下关系都是非常有用的, 对于任何离壳振幅, 所有微扰论图的贡献之和与 Heisenberg 绘景中相应算符编时乘积在全哈密顿量本征态之间的矩阵元有一个关系. 这一关系由一个定理给出,[3] 它的陈述是, 到微扰论的所有阶*

$$\left[\frac{\delta^r S_{\beta\alpha}[\epsilon]}{\delta\epsilon_a(x)\,\delta\epsilon_b(y)\cdots}\right]_{\epsilon=0} = \left(\Psi_\beta{}^-, T\Big\{-\mathrm{i}O_\alpha(x), -\mathrm{i}O_b(y)\cdots\Big\}\Psi_\alpha{}^+\right), \tag{6.4.3}$$

其中 $O_a(x)$ 等是 $o_a(x)$ 在 Heisenberg 绘景中的对应

$$O_a(\mathbf{x},t) = \exp(\mathrm{i}Ht)\, o_a(\mathbf{x},0)\, \exp(-\mathrm{i}Ht) = \Omega(t)\, o_a(\mathbf{x},t)\, \Omega^{-1}(t), \tag{6.4.4}$$

$$\Omega(t) \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0 t}, \tag{6.4.5}$$

而 $\Psi_\beta{}^+$ 和 $\Psi_\beta{}^-$ 分别是全哈密顿量 H 的"入"本征态和"出"本征态.

证明如下. 由方程(3.5.10), 我们立即看出方程(6.4.3)的左边是

$$\begin{aligned}\left[\frac{\delta^r S[\epsilon]}{\delta\epsilon_{a_1}(x_1)\cdots\delta\epsilon_{a_r}(x_r)}\right]_{\epsilon=0} &= \sum_{N=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^{N+r}}{N!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau_1\cdots\mathrm{d}\tau_N \\ &\times\left(\Phi_\beta,\, T\Big\{V(\tau_1)\cdots V(\tau_N)o_{a_1}(x_1)\cdots o_{a_r}(x_r)\Big\}\Phi_\alpha\right).\end{aligned} \tag{6.4.6}$$

明确起见, 假定 $x_1^0 \geqslant x_2^0 \geqslant \cdots \geqslant x_r^0$. 那么我们可以将所有大于 x_1^0 的 τ 记为 $\tau_{01}\cdots\tau_{0N_0}$; 将处在 x_1^0 与 x_2^0 之间的所有 τ 记为 $\tau_{11}\cdots\tau_{1N_1}$, 依次做下去; 最后将所有小于 x_r^0 的 τ 记为 $\tau_{r1}\cdots\tau_{rN_r}$. 这样方程(6.4.6)就变成:

$$\begin{aligned}\left[\frac{\delta^r S[\epsilon]}{\delta\epsilon_{a_1}(x_1)\cdots\delta\epsilon_{a_r}(x_r)}\right]_{\epsilon=0} &= \sum_{N=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^{N+r}}{N!}\sum_{N_0N_1\cdots N_r}\frac{N!\delta_{N,N_0+N_1+\cdots+N_r}}{N_0!N_1!\cdots N_r!} \\ &\times\int_{x_1^0}^{\infty}\mathrm{d}\tau_{01}\cdots\mathrm{d}\tau_{0N_0}\int_{x_2^0}^{x_1^0}\mathrm{d}\tau_{11}\cdots\mathrm{d}\tau_{1N_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_r^0}\mathrm{d}\tau_{r1}\cdots\mathrm{d}\tau_{rN_r} \\ &\times\left(\Phi_\beta,\, T\Big\{V(\tau_{01})\cdots V(\tau_{0N_0})\Big\}\, o_{a_1}(x_1)\, T\Big\{V(\tau_{11})\cdots V(\tau_{1N_1})\Big\}\, o_{a_2}(x_2)\cdots\right. \\ &\left.\times\cdots o_{a_r}(x_r)\, T\Big\{V(\tau_{r1})\cdots V(\tau_{rN_r})\Big\}\Phi_\alpha\right).\end{aligned}$$

因子 $N!/N_0!N_1!\cdots N_r!$ 是将 N 个 τ 分到 $r+1$ 个子集而每个子集又分别包含 $N_0, N_1, \cdots N_r$ 个 τ 的途径的数目. 取代对服从约束条件 $N_0+N_1+\cdots N_r = N$的 $N_0, N_1, \cdots N_r$ 求和, 继而再对 N 求和, 我们可以对 $N_0, N_1, \cdots N_r$ 独立地求和, 令出现在 $(-\mathrm{i})^N$ 中的 N 等于 $N_0+N_1+\cdots+N_r$. 这样

$$\begin{aligned}\left[\frac{\delta^r S[\epsilon]}{\delta\epsilon_{a_1}(x_1)\cdots\delta\epsilon_{a_r}(x_r)}\right]_{\epsilon=0} &= (-\mathrm{i})^r\left(\Phi_\beta,\, U(\infty,x_1^0)\, o_{a_1}(x_1)\right. \\ &\left.\times U(x_1^0,x_2^0)\, o_{a_2}(x_2)\, U(x_2^0,x_3^0)\cdots o_{a_r}(x_r)\, U(x_r^0,-\infty)\Phi_\alpha\right),\end{aligned} \tag{6.4.7}$$

*对单个 O 算符, 这是 Schwinger 作用量原理的一个版本.[4]

其中

$$U(t',t)=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^N}{N!}\int_t^{t'}\mathrm{d}\tau_1\cdots\mathrm{d}\tau_N\,T\Big\{V(\tau_1)\cdots V(\tau_N)\Big\}\,. \tag{6.4.8}$$

算符 $U(t',t)$ 满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}U(t',t)=-\mathrm{i}V(t')U(t',t) \tag{6.4.9}$$

显然有初始条件

$$U(t,t)=1\,. \tag{6.4.10}$$

它有解

$$U(t',t)=\exp(\mathrm{i}H_0t')\exp(-\mathrm{i}H(t'-t))\exp(-\mathrm{i}H_0t)=\Omega^{-1}(t')\Omega(t) \tag{6.4.11}$$

其中的 Ω 由方程(6.4.5)给定. 将方程(6.4.11)代入方程(6.4.7), 并利用方程(6.4.4), 我们有

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\delta S[\epsilon]}{\delta\epsilon_{a_1}(x_1)\cdots\delta\epsilon_{a_r}(x_r)}\right]_{\epsilon=0}\\&=(-\mathrm{i})^r\Big(\Omega(\infty)\Phi_\beta,\,O_{a_1}(x_1)\cdots O_{a_r}(x_r)\Omega(-\infty)\Phi_\alpha\Big)\,.\end{aligned} \tag{6.4.12}$$

在这个结果的推导中, 我们假定了 $x_1^0\geq x_2^0\geq\cdots\geq x_r^0$, 所以我们可以也将右边算符的乘积换成编时乘积:

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\delta S[\epsilon]}{\delta\epsilon_{a_1}(x_1)\cdots\delta\epsilon_{a_r}(x_r)}\right]_{\epsilon=0}\\&=(-\mathrm{i})^r\Big(\Omega(\infty)\Phi_\beta,\,T\Big\{O_{a_1}(x_1)\cdots O_{a_r}(x_r)\Big\}\Omega(-\infty)\Phi_\alpha\Big)\,.\end{aligned} \tag{6.4.13}$$

但是, 现在两边对 a 和 x 是全对称的(对费米子则是全反对称的), 所以这个关系对时间 $x_1^0\cdots x_r^0$ 的任意顺序都成立. 另外, 我们在 3.1 节看到(就方程(3.1.12)的意义而言)

$$\Psi_\beta{}^{\pm}=\Omega(\mp\infty)\Phi_\beta\,. \tag{6.4.14}$$

因此方程(6.4.13)正是期望的结果(6.4.3).

习题

1. 考虑一个实标量场 ϕ 的理论, 相互作用(在相互作用绘景中)是 $V=g\int\mathrm{d}^3x\,\phi(x)^3/3!$. 计算标量-标量散射的连通 S-矩阵元到 g 的二阶, 做掉所有积分. 利用这个结果计算标量-标量散射在质心系下的微分截面.

2. 考虑如下的理论, 它包含玻色子 B 的中性标量场 $\phi(x)$ 和费米子 F 的复 Dirac 场 $\psi(x)$, 相互作用(在相互作用绘景中)是 $V=\mathrm{i}g\int\mathrm{d}^3x\,\bar\psi(x)\gamma_5\psi(x)\phi(x)$. 画出所有 g^2 阶的连通 Feynman 图, 并计算过程 $F^{\mathrm{c}}+B\to F^{\mathrm{c}}+B$, $F+F^{\mathrm{c}}\to F+F^{\mathrm{c}}$ 和 $F^{\mathrm{c}}+F\to B+B$ 的 S-矩阵元(其中 F^{c} 是 F 的反粒子). 做掉所有积分.

3. 考虑一个实标量场 $\phi(x)$ 的理论, 相互作用为 $V = g\int \mathrm{d}^3x\ \phi(x)^4/4!$. 计算标量-标量散射的 g 阶 S-矩阵, 并用这一结果计算微分散射截面. 计算标量-标量散射 S-矩阵的 g^2 阶修正项, 将这个结果表示成单个 4-动量的积分, 并把所有 x 积分都做掉.

4. 在 Feynman 图中, Dirac 场的导数 $\partial_\mu\psi_\ell(x)$ 与伴随场 $\psi^\dagger_m(y)$ 收缩给出的贡献是什么?

5. 利用 6.4 节的定理, 就习题 1 中的理论, 计算 Heisenberg 绘景算符的真空期望值 $(\Psi_0, \Phi(x)\Psi_0)$ 和 $(\Psi_0, T\{\Phi(x), \Phi(y)\}\Psi_0)$ 分别直到 g 阶和 g^2 阶的表达式.

参考文献

[1] F. J. Dyson, *Phys. Rev.* **75**, 486, 1736 (1949).

[2] 这一结果的正式表述为 *Wick* 定理; 参看 G. C. Wick, *Phys.Rev.* **80**, 268 (1950).

[3] 我不知道谁首先证明了这个定理. 在 1950 年代早期就有一些理论学者知道它, 包括 M. Gell-Mann 和 F. E. Low.

[4] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **82**, 914 (1951).

第 7 章　正则体系

自 20 世纪 20 年代后期量子场论在 Born, Dirac, Fermi, Herisenberg, Jordan 和 Pauli 等人的论文中诞生伊始, 它在历史上的发展就与正则形式体系联系在一起, 这个联系是如此的紧密, 使得现今对这个课题的任何处理都理所应当地从一个拉格朗日量出发, 然后加入正则量子化规则. 大多数量子场论书采用这种方法. 然而历史上的先例并非是采纳这个形式体系的一个具有说服力的理由. 如果我们发现了一个量子场论, 它能导出物理上令人满意的 S-矩阵, 但是这个量子场论却无法通过拉格朗日量的正则量子化导出, 这是否会使我们感到困扰呢?

从某种意义上讲, 这个问题是没有意义的, 这是因为, 我们会在 7.1 节看到: 所有最熟悉的量子场理论都可以构成正则系统, 并且它们可以轻松地变成一个拉格朗日的形式. 然而, 没有证据表明任何可信的量子场论都可以通过这种方式建立起来. 并且, 哪怕能够这样, 它本身也无法解释为什么在构造各种量子场论时我们应该优先采用拉格朗日体系作为出发点.

拉格朗日体系的关键是, 它使得满足 Lorentz 不变性以及其它对称性变得很容易: 如果一个经典理论拥有 Lorentz 不变的拉格朗日密度, 那么对这个理论的正则量子化将会给出一个 Lorentz 不变的量子理论. 这就是说, 我们在这里将看到: 这样的理论允许构造出合适的量子力学算符, 这些算符满足 Poincaré 代数中的对易关系, 因此给出了 Lorentz 不变的 S-矩阵.

这并不是那么平庸. 我们在上一章中看到, 在有导数耦合的理论或自旋 $j \geq 1$ 的理论中, 将相互作用哈密顿量取为对标量相互作用密度的空间积分是不够的; 为了抵消传播子中的非协变项, 我们还要给相互作用密度中添加非标量项. 而拉格朗日量密度为标量的正则体系将自动给出这些额外项. 后面, 当我们在卷 II 讨论非阿贝尔规范理论时, 这些额外的便利就成了必需的; 在这类理论中, 不从 Lorentz 不变且规范不变的拉格朗日密度出发而试图直接猜出哈密顿量的形式, 这几乎是没有希望的.

7.1　正则变量

我们将在本节证明, 迄今为止我们所建立的各种量子场论满足对易关系以及正则体系的哈密顿版运动方程. 计算 S-矩阵(无论是通过算符方法还是路径积分方法)所需要的正是哈密顿体系, 但是选出一个哈密顿量, 使得它给出 Lorentz 不变的 S-矩阵, 这并非总那么简单. 为了平衡本章, 我们将采用拉格朗日版的正则体系作为我们的出发点, 并由它导出物理上令人满意的哈密顿量. 本节的目的是确定各种场理论中的正则场以及它们的共轭, 告诉我们如何在拉格朗日量中分离出自由场部分, 并附带消除我们对正则形式是否确实适用于真实物理理论的疑虑.

我们首先来证明第 5 章中构造的自由场将自动给出量子算符 $q^n(\mathbf{x},t)$ 与其正则共轭算符 $p_n(\mathbf{x},t)$ 的系统, 它们满足熟悉的正则对易或反对易关系:

$$[q^n(\mathbf{x},t), p_{\bar{n}}(\mathbf{y},t)]_{\mp} = \mathrm{i}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\delta^n_{\bar{n}}\,, \tag{7.1.1}$$

$$[q^n(\mathbf{x},t), q^{\bar{n}}(\mathbf{y},t)]_{\mp} = 0\,, \tag{7.1.2}$$

$$[p_n(\mathbf{x},t),p_{\bar{n}}(\mathbf{y},t)]_{\mp}=0\,, \tag{7.1.3}$$

其中下标 $\mp$ 表示: 如果两个算符产生和湮灭的粒子中有一个是玻色子, 则是对易子; 如果两个都是费米子, 则是反对易子. 例如, 对零自旋的自荷共轭粒子, 5.2 节中构造的实标量场 $\phi(\mathbf{x})$ 满足对易关系

$$[\phi(x),\phi(y)]_-=\Delta(x-y)\,,$$

其中 Δ 是函数

$$\Delta(x)\equiv\int\frac{\mathrm{d}^3k}{2k^0(2\pi)^3}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}]\,,$$

并有 $k^0\equiv\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}$. 我们注意到

$$\Delta(\mathbf{x},0)=0\,,\qquad\dot{\Delta}(\mathbf{x},0)=-\mathrm{i}\delta^3(\mathbf{x})\,.$$

(加点代表对时间 x^0 求导.) 那么, 很容易看到场与它的时间导数 $\dot{\phi}$ 服从等时对易关系:

$$[\phi(\mathbf{x},t),\dot{\phi}(\mathbf{y},t)]_-=\mathrm{i}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,, \tag{7.1.4}$$

$$[\phi(\mathbf{x},t),\phi(\mathbf{y},t)]_-=0\,, \tag{7.1.5}$$

$$[\dot{\phi}(\mathbf{x},t),\dot{\phi}(\mathbf{y},t)]_-=0\,. \tag{7.1.6}$$

因而我们可以定义满足正则对易关系(7.1.1)—(7.1.3)的正则变量

$$q(\mathbf{x},t)\equiv\phi(\mathbf{x},t)\,,\qquad p(\mathbf{x},t)\equiv\dot{\phi}(\mathbf{x},t)\,. \tag{7.1.7}$$

对反粒子不是自身的零自旋粒子的复标量场, 对易关系是

$$[\phi(x),\phi^\dagger(y)]_-=\Delta(x-y)\,,\qquad[\phi(x),\phi(y)]_-=0\,.$$

我们因此可以将自由粒子正则变量定义为复算符

$$q(\mathbf{x},t)\equiv\phi(\mathbf{x},t)\,, \tag{7.1.8}$$

$$p(\mathbf{x},t)=\dot{\phi}^\dagger(\mathbf{x},t)\,. \tag{7.1.9}$$

等价地, 将 ϕ 写为 $\phi\equiv(\phi_1+\mathrm{i}\phi_2)/\sqrt{2}$, 则 $k=1,2$ 的 ϕ_k 是厄米的, 我们有正则变量

$$q^k(\mathbf{x},t)=\phi_k(\mathbf{x},t)\,, \tag{7.1.10}$$

$$p_k(\mathbf{x},t)=\dot{\phi}_k(\mathbf{x},t)\,, \tag{7.1.11}$$

并且它们满足对易关系(7.1.1)—(7.1.3).

对于自旋 1 粒子的实矢量场, 5.3 节给出了它的对易关系

$$[v^\mu(x),v^\nu(y)]_-=\left[\eta^{\mu\nu}-\frac{\partial^\mu\partial^\nu}{m^2}\right]\Delta(x-y)\,.$$

(我们对矢量场使用 v^μ 而不是 V^μ 是因为我们想把大写字母用在 Heisenberg 绘景的场中.) 这里的自由粒子正则变量可以取为

$$q^i(\mathbf{x},t)=v^i(\mathbf{x},t)\,, \tag{7.1.12}$$

$$p_i(\mathbf{x},t)=\dot{v}^i(\mathbf{x},t)+\frac{\partial v^0(\mathbf{x},t)}{\partial x^i}\,, \tag{7.1.13}$$

其中 $i=1,2,3$. 读者可以验证(7.1.12)与(7.1.13)满足对易关系(7.1.1)—(7.1.3). 场方程(5.3.36)与(5.3.38), 再结合方程(7.1.13)使得我们可以把 v^0 表示成其它变量

$$v^0 = m^{-2}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{p}\,, \tag{7.1.14}$$

所以 v^0 不能被当做 q. 这些结果到复矢量场的延伸与复标量场的处理方法相同.

对于非 Majorana 的自旋 $\frac{1}{2}$ 粒子的 Dirac 场, 5.5 节表明它的反对易子是

$$[\psi_n(x),\psi^\dagger_{\bar{n}}(y)]_+ = \Big[(-\gamma^\mu\partial_\mu+m)\beta\Big]_{n,\bar{n}}\Delta(x-y)$$

以及

$$[\psi_n(x),\psi_{\bar{n}}(y)]_+ = 0\,.$$

因为 ψ_n 和 $\psi^\dagger_n$ 的反对易子在等时情况下不为零, 这里将它们取为独立的正则变量将是不自洽的. 通常转而定义

$$q^n(x) \equiv \psi_n(x)\,, \tag{7.1.15}$$

$$p_n(x) \equiv \mathrm{i}\psi^\dagger_n(x)\,. \tag{7.1.16}$$

这样就很容易看到(7.1.15)和(7.1.16)满足正则反对易关系(7.1.1)—(7.1.3).

任何算符系统, 如果它满足类似(7.1.1)—(7.1.3)的对易关系或反对易关系, 那么我们就可以定义量子力学泛函导数: 对与 $q^n(\mathbf{x},t)$ 和 $p_n(\mathbf{x},t)$ 的任意玻色型泛函 $F[q(t),p(t)]$, 其中 q 和 p 处在给定时刻 t, 我们可以定义*

$$\frac{\delta F[q(t),p(t)]}{\delta q^n(\mathbf{x},t)} \equiv \mathrm{i}\Big[p_n(\mathbf{x},t),F[q(t),p(t)]\Big]\,, \tag{7.1.17}$$

$$\frac{\delta F[q(t),p(t)]}{\delta p_n(\mathbf{x},t)} \equiv \mathrm{i}\Big[F[q(t),p(t)],q^n(\mathbf{x},t)\Big]\,. \tag{7.1.18}$$

这样定义的动机是源于如下的事实, 如果 $F[q(t),p(t)]$ 写成所有 q 处在所有 p 的左边的形式, 那么(7.1.17)和(7.1.18)恰好分别是对 q^n 的左导数和对 p_n 的右导数. 这就是说, 对 q 和 p 的任意 c-数**变分 δq 和 δp, 我们有

$$\delta F[q(t),p(t)] = \int \mathrm{d}^3x\sum_n\left(\delta q^n(\mathbf{x},t)\frac{\delta F[q(t),p(t)]}{\delta q^n(\mathbf{x},t)} + \frac{\delta F[q(t),p(t)]}{\delta p_n(\mathbf{x},t)}\delta p_n(\mathbf{x},t)\right).$$

对于更普遍的泛函, 我们需要定义(7.1.17)和(7.1.18)来确定可能出现的各种符号与等时对易子.

---

*我们在这里使用一个符号约定并在此之后一直使用; 如果 $f(x,y)$ 是两类变量的函数, 其中每类变量统称为 x 和 y, 那么 $F[f(y)]$ 代表的泛函依赖于函数 $f(x,y)$ 在 y 固定时对于所有 x 的值. 玻色型泛函是指每一项中只包含偶数个费米场.

**其中, 当 q^n 和 p_n 分别是玻色变量或费米变量时, δq^n 和 δp_n 分别被理解成与所有费米算符对易和反对易, 而与所有玻色算符都对易.

特别地, H_0 是自由粒子态上的时间平移生成元, 意思是:

$$q^n(\mathbf{x},t) = \exp(\mathrm{i}H_0 t) q^n(\mathbf{x},0) \exp(-\mathrm{i}H_0 t)\,, \tag{7.1.19}$$

$$p_n(\mathbf{x},t) = \exp(\mathrm{i}H_0 t) p_n(\mathbf{x},0) \exp(-\mathrm{i}H_0 t)\,, \tag{7.1.20}$$

所以自由粒子算符随时间的变化满足

$$\dot{q}^n(\mathbf{x},t) = \mathrm{i}[H_0, q^n(\mathbf{x},t)] = \frac{\delta H_0}{\delta p_n(\mathbf{x},t)}\,, \tag{7.1.21}$$

$$\dot{p}_n(\mathbf{x},t) = -\mathrm{i}[p_n(\mathbf{x},t), H_0] = -\frac{\delta H_0}{\delta q^n(\mathbf{x},t)}\,. \tag{7.1.22}$$

可以认出这些正是哈密顿体系中熟悉的动力学方程.

自由粒子哈密顿量总是下面的形式

$$H_0 = \sum_{n,\sigma} \int \mathrm{d}^3k\, a^\dagger(\mathbf{k},\sigma,n)\, a(\mathbf{k},\sigma,n) \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_n^2}\,. \tag{7.1.23}$$

H_0 可以用时刻 t 的 q 和 p 来重新表示. 例如, 对于一个实标量场, 很容易看到方程(7.1.23)与泛函

$$H_0 = \int \mathrm{d}^3x \left[\tfrac{1}{2}p^2 + \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla} q)^2 + \tfrac{1}{2}m^2 q^2\right] \tag{7.1.24}$$

相差一个常数项. 更精确些, 利用(7.1.7)以及标量场 ϕ 的 Fourier 表示, 方程(7.1.24)变成:

$$\begin{aligned} H_0 &= \tfrac{1}{2}\int \mathrm{d}^3k\, k^0 \left[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k})\right]_+ \\ &= \int \mathrm{d}^3k\, k^0 \left(a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + \tfrac{1}{2}\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k})\right)\,. \end{aligned} \tag{7.1.25}$$

除了无限大的常数项, 这与方程(7.1.23)是相同的. 这样的常数项只影响零点能, 在没有引力的情况下, 这一项没有物理上的意义.[†] 对于其它场, 我们将在 7.5 节给出 H_0 以 q 和 p 为变量的显式泛函表达式.

在量子场论教科书中, 通常是将方程(7.1.25)作为方程(7.1.24)的导出结果, 而方程(7.1.24)又是由拉格朗日量密度导出的. 在我看来, 这样做是一个退步, 因为方程(7.1.25)必须成立; 如果某个假定的自由粒子拉格朗日量(可以相差一个常数项)不能给出方程(7.1.25), 我们必须认为这是个错误的拉格朗日量. 相反, 我们应该问什么样的自由场拉格朗日量能给出无自旋粒子的方程(7.1.25), 或者更普遍地, 给出自由粒子哈密顿量(7.1.23). 这个问题可以通过哈密顿量到拉格朗日量的 Legendre 变换来回答; 自由场拉格朗日量为

$$L_0[q(t), \dot{q}(t)] = \sum_n \int \mathrm{d}^3x\, p_n(\mathbf{x},t)\, \dot{q}^n(\mathbf{x},t) - H_0\,, \tag{7.1.26}$$

这里, 所有的 p_n 要被替换成它用 q^n 和 $\dot{q}^n$ 表示的表达式(以及我们将看到的一些可能的辅助场). 例如, 从哈密顿量(7.1.24)和(7.1.7)我们可以导出标量场的自由场拉格朗日量:

$$\begin{aligned} L_0 &= \int \mathrm{d}^3x \left[p\dot{q} - \tfrac{1}{2}p^2 - \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla} q)^2 - \tfrac{1}{2}m^2 q^2\right] \\ &= \int \mathrm{d}^3x \left[-\tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \tfrac{1}{2}m^2\phi^2\right]\,. \end{aligned} \tag{7.1.27}$$

[†]然而, 该项中的变化源于场的边界条件的变化, 比如, 如果我们不在无限大空间而在平行板间的有限大空间中进行量子化, 这是有物理意义且曾经被测量到.[1]

不管我们认为标量场的完整拉格朗日量会是什么, 这一项都必须分离出来并作为微扰论的零阶项. 对本节描述的其它正则系统都可以做一个类似的练习, 但从现在起, 我们将满足于猜出自由场拉格朗日量的形式, 然后确认它会给出正确的自由粒子哈密顿量.

我们已经看到各种自由场理论可以用正则项表达. 那么证明对于相互作用场也同样如此只需简单的一步. 我们可以在所谓的"Heisenberg绘景"中引入正则变量, 它们定义为

$$Q^n(\mathbf{x},t) \equiv \exp(\mathrm{i}Ht)q^n(\mathbf{x},0)\exp(-\mathrm{i}Ht)\,, \tag{7.1.28}$$

$$P_n(\mathbf{x},t) \equiv \exp(\mathrm{i}Ht)p_n(\mathbf{x},0)\exp(-\mathrm{i}Ht)\,, \tag{7.1.29}$$

其中 H 是全哈密顿量. 由于这是与 H 对易的相似变换, 全哈密顿量作为Heisenberg 绘景中算符的泛函与它作为 q 和 p 的泛函是一样的:

$$H[Q,P] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\,H[q,p]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} = H[q,p]\,.$$

另外, 由于方程(7.1.28)—(7.1.29)定义了一个相似变换, Heisenberg 绘景中的算符仍旧满足对易关系或反对易关系:

$$[Q^n(\mathbf{x},t), P_{\bar{n}}(\mathbf{y},t)]_{\mp} = \mathrm{i}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\delta^n_{\bar{n}}\,, \tag{7.1.30}$$

$$[Q^n(\mathbf{x},t), Q^{\bar{n}}(\mathbf{y},t)]_{\mp} = 0\,, \tag{7.1.31}$$

$$[P_n(\mathbf{x},t), P_{\bar{n}}(\mathbf{y},t)]_{\mp} = 0\,. \tag{7.1.32}$$

然而, 它们现在对时间的依赖为

$$\dot{Q}^n(\mathbf{x},t) = \mathrm{i}[H, Q^n(\mathbf{x},t)] = \frac{\delta H}{\delta P_n(\mathbf{x},t)}\,, \tag{7.1.33}$$

$$\dot{P}_n(\mathbf{x},t) = -\mathrm{i}[P_n(\mathbf{x},t), H] = -\frac{\delta H}{\delta Q^n(\mathbf{x},t)}\,. \tag{7.1.34}$$

例如, 我们可以将实标量场的哈密顿量取为自由粒子项(7.1.24)加上对标量相互作用密度 $\mathscr{H}$ 的积分, 这样用 Heisenberg 绘景下的变量表示就有

$$H = \int \mathrm{d}^3x \left[\tfrac{1}{2}P^2 + \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}Q)^2 + \tfrac{1}{2}m^2Q^2 + \mathscr{H}(Q)\right]. \tag{7.1.35}$$

在这种情况下, 给出 Q 的正则共轭变量的公式与自由场的情况相同:

$$P = \dot{Q}\,. \tag{7.1.36}$$

然而, 正如我们将看到的, 正则共轭变量 $P_n(x)$ 与场变量以及它们的时间导数之间的关系, 一般而言, 与自由粒子算符不同, 但必须要从方程(7.1.33)和(7.1.34)中推出.

7.2 拉格朗日体系

在看到各种真实的理论可以被纳入正则体系之后, 我们现在必须要面对的问题是如何选择哈密顿量. 我们将在下一节中看到, 确保 Lorentz 不变性以及其它对称性的最简单方法是选择一个合适的拉格朗日量并从它导出哈密顿量. 这样做基本是不失一般性的; 给定一个真实的哈密顿量, 通

过逆用这里将要描述的从拉格朗日量导出哈密顿量的过程, 我们一般可以重构出可以导出给定哈密顿量的拉格朗日量. (方程(7.1.26)的推导给出了这种重构的一个例子.) 然而, 尽管我们能从哈密顿量导出拉格朗日量或从拉格朗日量导出哈密顿量, 在探讨物理上令人满意的理论时, 通过穷举可能的拉格朗日量而非哈密顿量要更容易一些.

一般而言, 拉格朗日量是一组同属一类的场 $\Psi^\ell(\mathbf{x},t)$ 和其时间导数 $\dot\Psi^\ell(\mathbf{x},t)$ 的泛函*$L[\Psi(t),\dot\Psi(t)]$. 共轭场 $\Pi_\ell(\mathbf{x},t)$ 定义为变分导数**

$$\Pi_\ell(\mathbf{x},t)\equiv\frac{\delta L[\Psi(t),\dot\Psi(t)]}{\delta\dot\Psi^\ell(\mathbf{x},t)}\,, \tag{7.2.1}$$

运动方程是

$$\dot\Pi_\ell(\mathbf{x},t)=\frac{\delta L[\Psi(t),\dot\Psi(t)]}{\delta\Psi^\ell(\mathbf{x},t)}\,. \tag{7.2.2}$$

这些场方程可以重新用变分原理表述, 这个表述是非常有用的. 我们在整个时空上定义 $\Psi^\ell(x)$ 的一个泛函, 称为**作用量**

$$I[\Psi]\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\,L[\Psi(t),\dot\Psi(t)]\,. \tag{7.2.3}$$

在 $\Psi(x)$ 的任意变分下, $I[\Psi]$ 的变化是

$$\delta I[\Psi]=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\int\mathrm{d}^3x\left[\frac{\delta L}{\delta\Psi^\ell(x)}\delta\Psi^\ell(x)+\frac{\delta L}{\delta\dot\Psi^\ell(x)}\delta\dot\Psi^\ell(x)\right]\,.$$

假定 $\delta\Psi^\ell(x)$ 在 $t\to\pm\infty$ 时为零, 我们可以分部积分, 并将上式写成

$$\delta I[\Psi]=\int\mathrm{d}^4x\left[\frac{\delta L}{\delta\Psi^\ell(x)}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\delta L}{\delta\dot\Psi^\ell(x)}\right]\delta\Psi^\ell(x)\,. \tag{7.2.4}$$

我们看到, 当且仅当场满足场方程(7.2.2)时, 作用量对于在 $t\to\pm\infty$ 时为零的所有变分 $\delta\Psi^\ell$ 才是驻定的.

因为场方程由泛函 $I[\Psi]$ 决定, 因此在尝试构造Lorentz不变理论时会自然地取 $I[\Psi]$ 为一个标量泛函. 特别地, 既然 $I[\Psi]$ 是 $L[\Psi(t),\dot\Psi(t)]$ 的时间积分, 我们猜测 L 本身应该是对一个普通标量函数的空间积分, 而这个函数的变量是 $\Psi(x)$ 和 $\partial\Psi(x)/\partial x^\mu$, 这个函数被称为**拉格朗日密度** $\mathscr{L}$:

$$L[\Psi(t),\dot\Psi(t)]=\int\mathrm{d}^3x\,\mathscr{L}\big(\Psi(\mathbf{x},t),\boldsymbol{\nabla}\Psi(\mathbf{x},t),\dot\Psi(\mathbf{x},t)\big)\,, \tag{7.2.5}$$

这使得作用量是

$$I[\Psi]=\int\mathrm{d}^4x\,\mathscr{L}\Big(\Psi(x),\partial\Psi(x)/\partial x^\mu\Big)\,. \tag{7.2.6}$$

当前基本粒子理论中所有的场理论都采用这种形式的拉格朗日量.

*回忆, 在我们所使用的泛函记号中, 类似 L 这种明显写出变量 t 的泛函被理解成依赖于场 $\Psi^\ell(\mathbf{x},t)$ 和 $\dot\Psi^\ell(\mathbf{x},t)$, 其中没有明显写出的变量 ℓ 和 $\mathbf{x}$ 在明显写出的变量 t 的固定值处取遍它们的所有值. 我们用大写字母 Ψ 和 Π 是为了表示它们是相互作用场而不是自由场

**由于 Ψ 和 $\dot\Psi$ 一般不满足简单的对易或反对易关系, 我们无法像上一节那样定义对 Q 和 P 的泛函导数, 给这里遇到的泛函导数做一个简单定义. 转而, 我们就指定变分导数是它们是 c-数变量时的变分导数, 而负号及等时对易子或反对易子会在需要时补充进来以便公式在量子力学时成立. 就我所知, 这些细节不会影响重要的问题.

让 $\Psi^\ell(x)$ 变分 $\delta\Psi^\ell(x)$, 并分部积分, 我们得到 L 的变分:

$$\begin{aligned}\delta L &= \int \mathrm{d}^3x \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Psi^\ell}\delta\Psi^\ell + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\boldsymbol{\nabla}\Psi^\ell)}\boldsymbol{\nabla}\delta\Psi^\ell + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\Psi}^\ell}\delta\dot{\Psi}^\ell\right] \\ &= \int \mathrm{d}^3x \left[\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Psi^\ell} - \boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\boldsymbol{\nabla}\Psi^\ell)}\right)\delta\Psi^\ell + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\Psi}^\ell}\delta\dot{\Psi}^\ell\right],\end{aligned}$$

所以(略去其中明显的变量)

$$\frac{\delta L}{\delta \Psi^\ell} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Psi^\ell} - \boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\boldsymbol{\nabla}\Psi^\ell)}, \tag{7.2.7}$$

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{\Psi}^\ell} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\Psi}^\ell}. \tag{7.2.8}$$

于是场方程(7.2.2)为

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial\Psi^\ell/\partial x^\mu)} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Psi^\ell}. \tag{7.2.9}$$

这被称为*Euler-Lagrange*方程. 正如预期的那样, 如果 $\mathscr{L}$ 是标量, 那么这些方程就是 Lorentz 不变的.

除了 Lorentz 不变外, 作用量 I 还被要求是实的. 这是因为我们希望有多少个场就有多少个场方程. 通过将任意复场分成它们的实部和虚部, 我们总可以认为 I 是若干个, 例如N个, 实场的泛函. 如果 I 是复的且有着独立的实部和虚部, 那么 I 的实部和虚部是驻定的这个条件(Euler-Lagrange方程)对于 N 个场会给出 $2N$ 个场方程, 除了一些特殊情况外, 方程数目太多以至于无法同时满足. 我们将在下一节看到, 作用量是实的还确保了各种对称变换的生成元是厄米算符.

尽管拉格朗日体系使得构造满足 Lorentz 不变性以及其它对称性的理论变得简单, 但为了计算 S-矩阵, 我们仍需要相互作用哈密顿量的一个公式. 一般而言, 哈密顿量由 *Legendre* 变换给出

$$H = \sum_\ell \int \mathrm{d}^3x\, \Pi_\ell(\mathbf{x},t)\dot{\Psi}^\ell(\mathbf{x},t) - L[\Psi(t),\dot{\Psi}(t)]. \tag{7.2.10}$$

尽管方程(7.2.1)一般不能使 $\dot{\Psi}^\ell$ 唯一地表示成 Ψ^ℓ 和 Π_ℓ, 但很容易看到, 对于任何满足方程(7.2.1)的 $\dot{\Psi}^\ell$, 方程(7.2.10)对它的变分导数为零, 所以方程(7.2.10)一般只是 Ψ^ℓ 和 Π_ℓ 的泛函. 它对这些变量的变分导数是

$$\begin{aligned}\left.\frac{\delta H}{\delta\Psi^\ell(\mathbf{x},t)}\right|_\Pi &= \int \mathrm{d}^3y \sum_{\ell'}\Pi_{\ell'}(\mathbf{y},t)\left.\frac{\delta\dot{\Psi}^{\ell'}(\mathbf{y},t)}{\delta\Psi^\ell(\mathbf{x},t)}\right|_\Pi - \left.\frac{\delta L}{\delta\Psi^\ell(\mathbf{x},t)}\right|_{\dot{\Psi}} \\ &\quad - \int \mathrm{d}^3y \sum_{\ell'}\left.\frac{\delta L}{\delta\dot{\Psi}^{\ell'}(\mathbf{y},t)}\right|_\Psi \left.\frac{\delta\dot{\Psi}^{\ell'}(\mathbf{y},t)}{\delta\Psi^\ell(\mathbf{x},t)}\right|_\Pi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\delta H}{\delta\Pi_\ell(\mathbf{x},t)}\right|_\Psi &= \dot{\Psi}^\ell(\mathbf{x},t) + \int \mathrm{d}^3y \sum_{\ell'}\Pi_{\ell'}(\mathbf{y},t)\left.\frac{\delta\dot{\Psi}^{\ell'}(\mathbf{y},t)}{\delta\Pi^\ell(\mathbf{x},t)}\right|_\Psi \\ &\quad - \int \mathrm{d}^3y \sum_{\ell'}\left.\frac{\delta L}{\delta\dot{\Psi}^{\ell'}(\mathbf{y},t)}\right|_\Psi \left.\frac{\delta\dot{\Psi}^{\ell'}(\mathbf{y},t)}{\delta\Pi^\ell(\mathbf{x},t)}\right|_\Psi,\end{aligned}$$

其中下标代表在这些变分导数中保持不变的量. 利用 Π_ℓ 的定义方程(7.2.1), 它们化简为

$$\left.\frac{\delta H}{\delta\Psi^\ell(\mathbf{x},t)}\right|_\Pi = -\left.\frac{\delta L}{\delta\Psi^\ell(\mathbf{x},t)}\right|_{\dot{\Psi}}, \tag{7.2.11}$$

和

$$\left.\frac{\delta H}{\delta \Pi_\ell(\mathbf{x},t)}\right|_\Psi = \dot{\Psi}^\ell(\mathbf{x},t)\,. \tag{7.2.12}$$

于是运动方程(7.2.2)等价于

$$\left.\frac{\delta H}{\delta \Psi^\ell(\mathbf{x},t)}\right|_\Pi = -\dot{\Pi}_\ell(\mathbf{x},t)\,. \tag{7.2.13}$$

现在, 我们应该尝试去做的一件很自然的事是: 将一般场变量 Ψ^ℓ 及其共轭 Π_ℓ 与上一节中的正则变量 Q^n 和 P_n 等同起来, 并赋予它们相同的正则对易关系(7.1.30)—(7.1.32), 这使得方程(7.2.12)与(7.2.13)与哈密顿运动方程(7.1.33)和(7.1.34)一致. 无导数耦合的实标量场 Φ 就是这样的一个简单例子. 考虑拉格朗日量密度[†]

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - \frac{m^2}{2}\Phi^2 - \mathscr{H}(\Phi)\,, \tag{7.2.14}$$

它可以通过在上一节中得到的自由场拉格朗日密度上附加 Φ 的一个实函数 $-\mathscr{H}(\Phi)$ 得到. Euler-Lagrange方程在这里是

$$(\Box - m^2)\Phi = \mathscr{H}'(\Phi)\,. \tag{7.2.15}$$

从这个拉格朗日量密度, 我们计算出 Φ 的正则共轭:

$$\Pi = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\Phi}} = \dot{\Phi}\,, \tag{7.2.16}$$

如果我们将 Φ 和 Π 视为正则变量 Q 和 P, 这与方程(7.1.36)相同. 哈密顿量现在由方程(7.2.10)给出[‡]

$$\begin{aligned} H &= \int \mathrm{d}^3x\,(\Pi\dot{\Phi} - \mathscr{L}) \\ &= \int \mathrm{d}^3x\left[\tfrac{1}{2}\Pi^2 + \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\Phi)^2 + \tfrac{1}{2}m^2\Phi^2 + \mathscr{H}(\Phi)\right], \end{aligned} \tag{7.2.17}$$

可以看出它就是哈密顿量(7.1.35). 这个小练习不应该被视为哈密顿量的另一种推导, 而应该将它作为拉格朗日量(7.2.14)可以作为一个可能的标量场理论的一个验证.

事情不总是那么简单. 在上一节我们就看到, 存在这样的场变量, 它们不是正则场变量 Q^n 也没有正则共轭, 例如矢量场的时间分量或Dirac场的厄米共轭; 但Lorentz不变性仍要求它们必须出现在矢量场和Dirac场的拉格朗日量中.

从拉格朗日体系的观点来看, 类似矢量场的时间分量或Dirac场的厄米共轭这样的场变量, 它们的特殊性源于如下的事实, 尽管它们出现在拉格朗日量中, 但是它们的时间导数却没有. 我们把时间导数没有出现在拉格朗日量中的场变量 Ψ^ℓ 记为 C^r; 其余的独立场变量是正则变量 Q^n. Q^n 具有正则共轭

$$P_n(\mathbf{x},t) = \frac{\delta L[Q(t),\dot{Q}(t),C(t)]}{\delta\dot{Q}^n(\mathbf{x},t)}\,, \tag{7.2.18}$$

[†]我们没有在 $-\frac{1}{2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi$ 中计入一个任意常数因子, 这是因为, 对于任何这种常数, 如果它是正的, 它就能被吸收进 Φ 的归一化中. 如果常数是负的, 我们将会看到这会导致一个没有下界的哈密顿量. 常数 m 被称为裸质量. 满足可重整原理的最一般拉格朗日量(将在第 12 章讨论)就是这种形式, 其中 $\mathscr{H}(\Phi)$ 是 Φ 的四次多项式.

[‡]为了能将 H 解释成能量, 它应该有下界. 前两项正定表明我们对方程(7.2.14)第一项符号的猜测是正确的. 剩下的条件就是 $\frac{1}{2}m^2\Phi^2 + \mathscr{H}(\Phi)$ 作为 Φ 的函数必须有下界.

并满足对易关系(7.1.30)—(7.1.32), 但 C^r 没有正则共轭. 由于 $\delta L/\delta\dot{C}^r = 0$, 哈密顿量(7.2.10)一般是

$$H = \sum_n \int \mathrm{d}^3x\, P_n\dot{Q}^n - L[Q(t), \dot{Q}(t), C(t)]\,, \tag{7.2.19}$$

但在我们将 C^r 与 $\dot{Q}^\ell$ 表示成 Q 和 P 之前, 这还没有什么用. C^r 的运动方程仅包含场与它们的一阶时间导数

$$0 = \frac{\delta L[Q(t), \dot{Q}(t), C(t)]}{\delta C^r(\mathbf{x}, t)}\,. \tag{7.2.20}$$

在本章所要讨论的简单情况下, 由这些方程联立方程(7.2.18)可以解出用 Q 和 P 表示的 C^r 与 $\dot{Q}^\ell$. 7.6 节将演示在这种情况下怎样避免真地去解 C^r 与 $\dot{Q}^\ell$. 在类似电动力学这样的规范理论中, 必须采用其它方法: 要么选择一个特定规范, 就像第 8 章中要做的那样, 要么采用卷II中要讨论的更加现代的协变方法.

一旦我们导出了作为 Q 和 P 的泛函的哈密顿量, 注意这里的 Q 和 P 处在 Heisenberg 绘景中, 为了应用微扰论, 我们必须过渡到相互作用绘景. 哈密顿量是不含时的, 所以它可以用 $t = 0$ 时的 P_n 和 Q^n 表示, 它等于相互作用绘景中 $t = 0$ 处的对应算符 p_n 和 q^n. 那么以这种方式导出的哈密顿量可以用相互作用绘景中的 q 和 p 表示, 并分成两个部分, 合适的自由粒子项 H_0 和相互作用 V. 最后, 利用时间依赖方程(7.1.21)和(7.1.22)以及对易或反对易关系(7.1.1)—(7.1.3), 将 $V(t)$ 中的 q 和 p 表示成湮灭算符和产生算符的线性组合.

我们将在 7.5 节给出这种处理的一些例子; 目前, 我们只给出最简单类型的一个例子, 哈密顿量为(7.2.17)的标量场. 我们将 H 分成自由粒子项与相互作用

$$H = H_0 + V \tag{7.2.21}$$

$$H_0 = \int \mathrm{d}^3x \left[\tfrac{1}{2}\Pi^2 + \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\Phi)^2 + \tfrac{1}{2}m^2\Phi^2\right] \tag{7.2.22}$$

$$V = \int \mathrm{d}^3x\, \mathscr{H}(\Phi)\,. \tag{7.2.23}$$

这里 Φ 和 Π 取在同一时刻 t, 并且 H 不含 t, 但 H_0 和 V 通常不是这样.

我们现在过渡到相互作用表示, 在方程(7.2.22)和(7.2.23)中取 $t = 0$, 我们可以将 Φ 和 Π 简单地替换成相互作用绘景中的变量 ϕ 和 π, 这是因为方程(7.1.28)和(7.1.29)定义了它们在那个时刻相等. 为了在相互作用绘景中计算相互作用 $V(t)$, 我们使用相似变换(3.5.5)

$$\begin{aligned} V(t) &= \exp(\mathrm{i}H_0t)\, V\, \exp(-\mathrm{i}H_0t) \\ &= \int \mathrm{d}^3x\, \mathscr{H}\Big(\phi(\mathbf{x}, t)\Big)\,. \end{aligned} \tag{7.2.24}$$

同一变换作用在 H_0 上保持它不变:

$$\begin{aligned} H_0 &= \exp(\mathrm{i}H_0t)\, H_0\, \exp(-iH_0t) \\ &= \int \mathrm{d}^3x \left[\tfrac{1}{2}\pi^2(\mathbf{x}, t) + \tfrac{1}{2}\Big(\boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{x}, t)\Big)^2 + \tfrac{1}{2}m^2\phi^2\right]. \end{aligned} \tag{7.2.25}$$

π 和 $\dot{\phi}$ 之间的关系由方程(7.1.21)确定

$$\dot{\phi}(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta H_0}{\delta\pi(\mathbf{x}, t)} = \pi(\mathbf{x}, t)\,. \tag{7.2.26}$$

(这恰好与方程(7.2.16)中的关系是相同的, 但是我们将会看到, 一般而言是不能期望总会有这个关系的.) 另外, ϕ 的运动方程由方程(7.1.22)确定

$$\dot{\pi}(\mathbf{x},t) = -\frac{\delta H_0}{\delta\phi(\mathbf{x},t)} = +\nabla^2\phi(\mathbf{x},t) - m^2\phi(\mathbf{x},t)\,, \tag{7.2.27}$$

它与方程(7.2.26)联立就给出了场方程

$$(\Box - m^2)\phi(x) = 0\,. \tag{7.2.28}$$

实的通解可以表示成

$$\phi(x) = (2\pi)^{-3/2}\int \mathrm{d}^3p\,(2p^0)^{-1/2}\Big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}a(\mathbf{p}) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}a^\dagger(\mathbf{p})\Big] \tag{7.2.29}$$

其中 $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$, $a(\mathbf{p})$ 是 $\mathbf{p}$ 的算符函数, 形式未知. 这样方程(7.2.26)就给出了正则共轭

$$\pi(x) = -\mathrm{i}(2\pi)^{-3/2}\int \mathrm{d}^3p\,(p^0/2)^{1/2}\Big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}a(\mathbf{p}) - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}a^\dagger(\mathbf{p})\Big]\,. \tag{7.2.30}$$

为了得到期望中的对易关系,

$$\Big[\phi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)\Big]_- = \mathrm{i}\,\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,, \tag{7.2.31}$$

$$\Big[\phi(\mathbf{x},t),\phi(\mathbf{y},t)\Big]_- = 0\,, \tag{7.2.32}$$

$$\Big[\pi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)\Big]_- = 0\,, \tag{7.2.33}$$

我们必须要求 a 满足熟悉的对易关系

$$\Big[a(\mathbf{p}),a^\dagger(\mathbf{p}')\Big] = \delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,, \tag{7.2.34}$$

$$\Big[a(\mathbf{p}),a(\mathbf{p}')\Big] = 0\,. \tag{7.2.35}$$

另外, 在上一节我们已经证明了, 除去一个无关紧要的常数外, 在方程(7.2.25)中使用这些展开将会给出通常的自由粒子哈密顿量公式(4.2.11). 正如前面说过的, 这些结果甚至不该视为方程(7.2.29), (7.2.34)和(7.2.35)的另一种推导(这一结果在第 5 章以完全不同的理由得到), 而应该视为方程(7.2.14)的前两项可以作为实标量场的正确的自由粒子拉格朗日量的验证. 我们现在可以继续用微扰论计算 S-矩阵, 取(7.2.24)为 $V(t)$, 而场 $\phi(x)$ 则由方程(7.2.29)给定.

这里所阐明的步骤将会用到 7.5 节中的例子上, 那些例子更加复杂也更加有趣.

* * *

在考察物理理论的各种可能的拉格朗日量密度时, 通常会使用分部积分, 这样就将仅相差一个全导数 $\partial_\mu\mathscr{F}^\mu$ 的拉格朗日密度看作是等价的. 显然这样的全导数项对作用量无贡献并且不影响场方程. 同样显然的是, 拉格朗日密度中的空间导数项 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\mathscr{F}}$ 对拉格朗日量无贡献, 因此不影响由拉格朗日量定义的量子理论.[¶]这里不太显然且不太重要的是: 拉格朗日密度中的时间导数 $\partial_0\mathscr{F}^0$ 也不影响理论的量子结构. 为了看到这点, 在拉格朗日量上增加上一个更一般的项

$$\Delta L(t) = \int \mathrm{d}^3x\, D_{n,\mathbf{x}}[Q(t)]\,\dot{Q}^n(\mathbf{x},t)\,, \tag{7.2.36}$$

[¶]这是在通常假设的场在无限处为零的前提下成立的. 当我们允许拓扑不同的场时, 这些结果不一定适用, 这些将在卷II中进行讨论.

其中 D 是给定时刻的 Q 的泛函, D 对 n 和 $\mathbf{x}$ 的依赖关系任意, 我们来考察加上这种项后的影响. 这将导致作为 $Q(t)$ 和 $\dot{Q}(t)$ 的泛函的共轭变量 $P(t)$ 会有如下大小的改变

$$\Delta P_n(\mathbf{x},t)=\frac{\delta\Delta L(t)}{\delta\dot{Q}^n(\mathbf{x},t)}=D_{n,\mathbf{x}}[Q(t)]\,. \tag{7.2.37}$$

由此可知, 当哈密顿量表示成 $Q(t)$ 和 $\dot{Q}(t)$ 的泛函时, 它没有变化:

$$\int \mathrm{d}^3x\,\Delta P_n(\mathbf{x},t)\dot{Q}^n(\mathbf{x},t)-\Delta L(t)=0\,. \tag{7.2.38}$$

因此, 把哈密顿量表示成旧正则变量 Q^n 和 P_n 的泛函, 它也没有变化. 然而, 当哈密顿量表示成新正则变量 Q^n 和 $P_n+\Delta P_n$ 泛函时与表示成 Q^n 和 P_n 的泛函时, 这两个泛函不是同一个, 并且在由新拉格朗日量 $\mathscr{L}+\Delta\mathscr{L}$ 描述的理论中, 满足正则对易关系的是新正则变量 Q^n 和 $P_n+\Delta P_n$ 而非 Q^n 和 P_n. Q_n 彼此之间的对易关系以及 Q^n 与 P_m 的对易关系由通常的正则关系给定, 但 P_n 彼此之间的对易关系现在是:

$$\begin{aligned}[P_n(\mathbf{x},t),P_m(\mathbf{y},t)]=&[P_n(\mathbf{x},t)+\Delta P_n(\mathbf{x},t),P_m(\mathbf{y},t)+\Delta P_m(\mathbf{y},t)]\\&-[\Delta P_n(\mathbf{x},t),P_m(\mathbf{y},t)+\Delta P_m(\mathbf{y},t)]\\&-[P_n(\mathbf{x},t)+\Delta P_n(\mathbf{x},t),\Delta P_m(\mathbf{y},t)]\\&+[\Delta P_n(\mathbf{x},t),\Delta P_m(\mathbf{y},t)]\\=&-\mathrm{i}\frac{\delta D_{n,\mathbf{x}}[Q(t)]}{\delta Q^m(\mathbf{y},t)}+\mathrm{i}\frac{\delta D_{m,\mathbf{y}}[Q(t)]}{\delta Q^n(\mathbf{x},t)}\,.\end{aligned} \tag{7.2.39}$$

一般而言, 这并不为零, 但是如果拉格朗日量中加上的项是时间的全导数

$$\Delta L=\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}=\int\mathrm{d}^3x\,\frac{\delta G[Q(t)]}{\delta Q^n(\mathbf{x},t)}\dot{Q}^n(\mathbf{x},t)\,, \tag{7.2.40}$$

那么方程(7.2.36)中的 D 就是如下的特定形式

$$D_{n,\mathbf{x}}[Q]=\frac{\delta G[Q(t)]}{\delta Q^n(\mathbf{x},t)}\,. \tag{7.2.41}$$

在这种情况下, 对易子(7.2.39)为零, 所以变量 Q^n 和 P_n 满足通常的对易关系. 我们已经看到, 如果拉格朗日量中发生的是形如(7.2.36)的变化, 那么哈密顿量表示成 Q^n 和 P_n 的泛函的形式就不会发生变化, 并且, 正如我们所证明的, 既然这些变量的对易关系没有改变, 那么在拉格朗日量加上的项(7.2.36)对理论的量子结构就没有影响. 因此, 无论是在量子场论和经典场论中, 彼此之间通过分部积分得到的不同拉格朗日量都可以认为是等价的.

7.3 整体对称性

我们现在来研究拉格朗日体系的一个关键点, 它为对称性原理的量子力学实现提供了一个自然框架. 这是因为拉格朗日体系中的动力学方程采用一种变分原理的形式, 即驻定作用量原理. 考虑场的如下无穷小变换

$$\Psi^\ell(x)\to\Psi^\ell(x)+\mathrm{i}\epsilon\mathscr{F}^\ell(x) \tag{7.3.1}$$

使得作用量(7.2.3)在这个变换下不变:

$$0 = \delta I = \mathrm{i}\epsilon \int \mathrm{d}^4x \, \frac{\delta I[\Psi]}{\delta \Psi^\ell(x)} \mathscr{F}^\ell(x). \tag{7.3.2}$$

(其中 ϵ 是一个常数, 这种对称性被称为整体对称性. 一般而言, $\mathscr{F}^\ell$ 依赖场及其场在 x 处的导数.) 显然, 如果场满足动力学方程, 那么对于场的所有无穷小变分, 方程(7.3.2)自动满足; 这里的无限小对称变换指的是不满足动力学方程却仍使作用量不变的无穷小变换. 如果我们现在考虑同一变换但其中的 ϵ 现在是时空位置的任意函数

$$\Psi^\ell(x) \to \Psi^\ell(x) + \mathrm{i}\epsilon(x)\mathscr{F}^\ell(x)\,, \tag{7.3.3}$$

这时, 作用量的变分一般不为零, 它必须取如下的形式

$$\delta I = -\int \mathrm{d}^4x \, J^\mu(x) \frac{\partial \epsilon(x)}{\partial x^\mu} \tag{7.3.4}$$

才能使作用量在 $\epsilon(x)$ 是一个常数时为零. 如果我们现在令 $I[\Psi]$ 中的场满足场方程, 那么对于那些大时空距离下为零的场变分, I 是驻定的, 其中包括形如(7.3.3)的变分, 所以在这种情况下, (7.3.4)应该为零. 做分部积分, 我们看到 $J^\mu(x)$ 必须满足守恒律:

$$0 = \frac{\partial J^\mu(x)}{\partial x^\mu}\,. \tag{7.3.5}$$

由此立即得出

$$0 = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\,, \tag{7.3.6}$$

其中

$$F \equiv \int \mathrm{d}^3x \, J^0\,. \tag{7.3.7}$$

对于每个独立的无限小对称变换, 存在一个这样的守恒流 J^μ 和一个运动常数 F. 这体现了正则体系的一个普遍特征, 这个特征通常被称为 Noether (诺特)定理: 对称性意味着守恒律.

很多对称变换不仅使作用量不变也使拉格朗日量不变. 尽管普遍的 Lorentz 变换并不是这样, 但是像空间的平移和旋转, 同位旋变换以及其它内部对称变换确实是这样的情况, 当拉格朗日量不变时, 我们可以走得更远, 并写出守恒量 F 的显式表达式. 考察 $\epsilon(x)$ 依赖于 t 但不依赖 $\mathbf{x}$ 的场变分(7.3.3), 在这种情况下, 作用量的变分是

$$\begin{aligned}\delta I = \mathrm{i}\int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3x \, \Bigg[& \frac{\delta L[\Psi(t), \dot\Psi(t)]}{\delta \Psi^\ell(\mathbf{x},t)} \epsilon(t)\mathscr{F}^\ell(\mathbf{x},t) \\ & + \frac{\delta L[\Psi(t), \dot\Psi(t)]}{\delta \dot\Psi^\ell(\mathbf{x},t)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\epsilon(t)\mathscr{F}^\ell(\mathbf{x},t)\Big)\Bigg]\,.\end{aligned} \tag{7.3.8}$$

当 ϵ 是常数时, 我们要求拉格朗日量在该对称变换下不变, 这个要求给出

$$0 = \int \mathrm{d}^3x \left[\frac{\delta L[\Psi(t), \dot\Psi(t)]}{\delta \Psi^\ell(\mathbf{x},t)} \mathscr{F}^\ell(\mathbf{x},t) + \frac{\delta L[\Psi(t), \dot\Psi(t)]}{\delta \dot\Psi^\ell(\mathbf{x},t)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{F}^\ell(\mathbf{x},t)\right]\,, \tag{7.3.9}$$

所以对于一般场(无论是否满足场方程), 作用量变分是

$$\delta I = \mathrm{i}\int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3x \, \frac{\delta L[\Psi(t),\dot{\Psi}(t)]}{\delta\dot{\Psi}^\ell(\mathbf{x},t)}\dot{\epsilon}(t)\mathscr{F}^\ell(\mathbf{x},t)\,. \tag{7.3.10}$$

与方程(7.3.4)比较给出

$$F = -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x \frac{\delta L[\Psi(t),\dot{\Psi}(t)]}{\delta\dot{\Psi}^\ell(\mathbf{x},t)}\mathscr{F}^\ell(\mathbf{x},t)\,. \tag{7.3.11}$$

利用对称性条件(7.3.9), 读者可以很容易地验证, 对于任何满足动力学方程(7.2.2)的场, F 确实是不依赖时间的.

其它对称变换, 例如同位旋变换, 它们不仅保持作用量和拉格朗日量不变, 而且保持拉格朗日密度不变. 在这种情况下, 我们可以再进一步, 得到流 $J^\mu(x)$ 的显式表达式. 像方程(7.2.6)那样, 将作用量写为拉格朗日量密度的积分, 当 $\epsilon(x)$ 是一般的无限小参量时, 它在变换(7.3.3)下的变分是

$$\begin{aligned}\delta I[\Psi] = \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x \Bigg[&\frac{\partial\mathscr{L}(\Psi(x),\partial_\mu\Psi(x))}{\partial\Psi^\ell(x)}\mathscr{F}^\ell(x)\epsilon(x)\\ &+\frac{\partial\mathscr{L}(\Psi(x),\partial_\mu\Psi(x))}{\partial(\partial_\mu\Psi^\ell(x))}\partial_\mu\Big(\mathscr{F}^\ell(x)\epsilon(x)\Big)\Bigg]\,.\end{aligned} \tag{7.3.12}$$

我们要求拉格朗日密度在 ϵ 是常数时不变, 这会要求

$$0 = \frac{\partial\mathscr{L}(\Psi(x),\partial_\mu\Psi(x))}{\partial\Psi^\ell(x)}\mathscr{F}^\ell(x) + \frac{\partial\mathscr{L}(\Psi(x),\partial_\mu\Psi(x))}{\partial(\partial_\mu\Psi^\ell(x))}\partial_\mu\mathscr{F}^\ell(x)\,, \tag{7.3.13}$$

所以对任意场, 作用量的变分是

$$\delta I[\Psi] = \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x \, \frac{\partial\mathscr{L}(\Psi(x),\partial_\mu\Psi(x))}{\partial(\partial_\mu\Psi^\ell(x))}\mathscr{F}^\ell(x)\partial_\mu\epsilon(x)\,. \tag{7.3.14}$$

与方程(7.3.4)比较给出

$$J^\mu = -\mathrm{i}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial\Psi^\ell/\partial x^\mu)}\mathscr{F}^\ell\,. \tag{7.3.15}$$

利用对称性条件(7.3.13), 很容易看到, 当场满足 Euler-Lagrange 方程(7.2.9)时, $\partial_\mu J^\mu$为零. 又注意到对流(7.3.15)的时间分量的积分就是前面导出的值(7.3.11).

到目前为止, 我们提到的所有结果同样适用于经典的和量子的场理论. 想要看到守恒量 F 的量子性质, 最容易的方法是考察拉格朗日量(并不必须是拉格朗日密度)的如下对称性: 将正则场 $Q^n(\mathbf{x},t)$ (就是那些时间导数出现在拉格朗日量中的 Ψ^ℓ)变换成同一时刻依赖 $\mathbf{x}$ 和其自身的泛函的对称变换. 对这样的变换, 我们有

$$\mathscr{F}^n(\mathbf{x},t) = \mathscr{F}^n[Q(t);\mathbf{x}]\,. \tag{7.3.16}$$

正如我们将要看到的, 无限小空间平移与旋转以及所有的无限小内部对称变换, 它们的形式都是(7.3.1)和(7.3.16), 其中 $\mathscr{F}^n$ 是 Q^m 的线性泛函, 但是我们在这里不需要假定对称性是线性的. 对于所有这样的对称性, 算符 F 不仅守恒, 并且在量子力学中充当该对称性的生成元.

为了看到这点, 首先注意到, 当 Ψ^ℓ 是正则场 Q^n 时, 泛函导数 $\delta L/\delta\dot\Psi^\ell$ 等于正则共轭 P_n, 而当 Ψ^ℓ 是辅助场 C^r 时, 这个泛函导数为零; 因此我们可以将方程(7.3.11)重新表述为

$$F=-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\, P_n(\mathbf{x},t)\mathscr{F}^n(\mathbf{x},t)=-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\, P_n(\mathbf{x},t)\mathscr{F}^n[Q(t);\mathbf{x}]\,. \tag{7.3.17}$$

为了计算某一时刻 t 时 F 与正则场 $Q^m(\mathbf{x},t)$ 的对易子(不是反对易子), 我们可以借助方程(7.3.6)计算 t 时刻作为 Q 和 P 的泛函的 F, 然后利用等时对易关系(7.1.30)—(7.1.32)得到*

$$[F,Q^n(\mathbf{x},t)]_-=-\mathscr{F}^n(\mathbf{x},t)\,. \tag{7.3.18}$$

这就是说 F 是形式为方程(7.3.16)的变换的生成元. 方程(7.3.17)加上正则对易法则又给出

$$[F,P_n(\mathbf{x},t)]_-=\int \mathrm{d}^3y\, P_m(\mathbf{y},t)\frac{\delta\mathscr{F}^n(Q(t);\mathbf{y})}{\delta Q^n(\mathbf{x},t)}\,. \tag{7.3.19}$$

当 F^m 线性时, 方程(7.3.19)告诉我们 P_n 逆步(contragrediently)变换到 Q^n.

作为第一个例子, 考察时空平移的对称变换:

$$\Psi^\ell(x)\to\Psi^\ell(x+\epsilon)=\Psi^\ell(x)+\epsilon^\mu\partial_\mu\Psi^\ell(x)\,. \tag{7.3.20}$$

这是(7.3.1)的形式, 其中 ϵ^μ 是 4 个独立参量, 而 4 个相应的变换函数是

$$\mathscr{F}^\ell_\mu=-\mathrm{i}\partial_\mu\Psi^\ell\,. \tag{7.3.21}$$

结果是我们有了 4 个独立的守恒流, 它们通常合在一起写进能动量张量 $T^\mu{}_\nu$ 中:

$$\partial_\mu T^\mu{}_\nu=0 \tag{7.3.22}$$

由此, 对平移"流"的时间分量做空间积分, 我们就导出了不含时的量(不要与正则共轭场变量 $P_n(\mathbf{x},t)$ 混淆):

$$P_\nu=\int \mathrm{d}^3x\, T^0{}_\nu\,, \tag{7.3.23}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_\nu=0\,. \tag{7.3.24}$$

拉格朗日量在空间平移下不变, 所以依照上面的一般结果, 我们可以推断处 P_ν 的空间分量取如下的形式

$$\mathbf{P}\equiv-\int \mathrm{d}^3x\, P_n(\mathbf{x},t)\boldsymbol{\nabla}Q^n(\mathbf{x},t)\,. \tag{7.3.25}$$

利用等时对易关系(7.1.30)—(7.1.32), 我们同时得到了该算符与正则场及其共轭的对易子:

$$[\mathbf{P},Q^n(\mathbf{x},t)]_-=\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla}Q^n(\mathbf{x},t)\,, \tag{7.3.26}$$

$$[\mathbf{P},P_n(\mathbf{x},t)]_-=\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla}P_n(\mathbf{x},t)\,. \tag{7.3.27}$$

由此可知, 对 Q 和 P 的任何函数 $\mathscr{G}$, 只要它不显含 $\mathbf{x}$, 我们就有

$$\Big[\mathbf{P},\mathscr{G}(x)\Big]=\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla}\mathscr{G}(x)\,. \tag{7.3.28}$$

*我们在这里假定了, 对玻色或费米的 Q^n, 变分 $\mathscr{F}^n$ 也分别是玻色或费米的. 唯一的例外是被称为超对称的一些对称性, 这种情况中 F 是费米的, 并且如果 Q^n 也是费米的, 那么(7.3.18)是反对易子.

这些结果表明算符 $\mathbf{P}$ 确实是空间平移的生成元.

相反, 拉格朗日量 $L(t)$ 在时间平移下并不保持不变. 然而, 我们已经知道了时间平移的生成元; 它就是哈密顿量 $P^0 \equiv H$, 而我们知道, 对于 Heisenberg 绘景算符的任何函数 $\mathscr{G}$, 它满足对易关系

$$[H, \mathscr{G}(\mathbf{x}, t)] = -\mathrm{i}\dot{\mathscr{G}}(\mathbf{x}, t) \,. \tag{7.3.29}$$

如果我们进一步假定拉格朗日量是某个拉格朗日密度的积分, 那么我们就可以得到能动量张量 $T^{\mu}{}_{\nu}$ 的显式表达式. 然而, 拉格朗日密度 $\mathscr{L}(x)$ 在时空平移下不是不变的, 所以我们在这里无法使用方程(7.3.15). 取代拉格朗日密度, 注意到在时空平移

$$\Psi^{\ell}(x) \to \Psi^{\ell}(x + \epsilon(x)) = \Psi^{\ell}(x) + \epsilon^{\mu}(x)\partial_{\mu}\Psi^{\ell}(x) \tag{7.3.30}$$

下, 作用量的变化为

$$\delta I[\Psi] = \int \mathrm{d}^4x \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Psi^{\ell}} \epsilon^{\mu} \partial_{\mu} \Psi^{\ell} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_{\nu}\Psi^{\ell})} \partial_{\nu}[\epsilon^{\mu}\partial_{\mu}\Psi^{\ell}] \right) \,. \tag{7.3.31}$$

Euler-Lagrange 方程(7.2.9)表明正比于 ϵ 的项加起来是 $\epsilon^{\mu}\partial_{\mu}\mathscr{L}$, 所以

$$\delta I[\Psi] = \int \mathrm{d}^4x \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^{\mu}} \epsilon^{\mu} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_{\nu}\Psi^{\ell})} \partial_{\mu}\Psi^{\ell} \partial_{\nu}\epsilon^{\mu} \right) \,. \tag{7.3.32}$$

做分部积分, 我们看到它变为方程(7.3.4)的形式

$$\delta I = -\int \mathrm{d}^4x \, T^{\nu}{}_{\mu} \partial_{\nu} \epsilon^{\mu} \tag{7.3.33}$$

其中的“流”是

$$T^{\nu}{}_{\mu} = \delta^{\nu}_{\mu} \mathscr{L} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_{\nu}\Psi^{\ell})} \partial_{\mu}\Psi^{\ell} \,. \tag{7.3.34}$$

作为一个检验, 我们看到, 方程(7.3.23)的空间分量与我们前面得到的 $\mathbf{P}$ 的表达式(7.3.25)相同, 而对 $\mu = 0$, 方程(7.3.23)给出了通常的哈密顿量表达式:

$$H \equiv -P_0 = \int \mathrm{d}^3x \left[\sum_n P_n \dot{Q}^n - \mathscr{L} \right] \,. \tag{7.3.35}$$

(提醒: 通过提升方程(7.3.34)中的第二个指标而得到的张量 $T^{\mu\nu}$, 一般而言, 不是对称的, 因而不能用在广义相对论场方程的右边. 用作引力场源的正确能动量张量是下一节将要引入的对称张量 $\Theta^{\mu\nu}$.)

在很多理论中, 存在一个或多个对称性原理, 它们宣称, 在正则场的一组不依赖坐标的线性变换

$$Q^n(x) \to Q^n(x) + \mathrm{i}\epsilon^a (t_a)^n{}_m Q^m(x) \tag{7.3.36}$$

与任意辅助场 C^r 的一组合适的变换

$$C^r(x) \to C^r(x) + \mathrm{i}\epsilon^a (\tau_a)^r{}_s C^s(x) \,, \tag{7.3.37}$$

下, 作用量是不变的. 这里的 t_a 和 τ_a 是厄米矩阵, 这些厄米矩阵构成了该对称群 Lie 代数的某些表示, 并且我们这里对重复的群指标 $a, b,$ 等进行求和. (例如, 电动力学中就有这样的对称性, 其中唯

一的矩阵 $t^n{}_m$ 是对角的, 每个场所携带的电荷在主对角上.) 对任何这样的对称性, 我们可以推测出存在另一组守恒流 J_a^μ:

$$\partial_\mu J_a^\mu = 0\,, \tag{7.3.38}$$

它的时间分量是一组不含时算符 T^a 的密度

$$T_a = \int \mathrm{d}^3x\; J_a^0\,. \tag{7.3.39}$$

如果拉格朗日量与作用量在变换(7.3.36)下不变, 方程(7.3.11)就提供了 T_a 的一个显式表达式:

$$T_a = -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\; P_n(\mathbf{x},t)(t_a)^n{}_m Q^m(\mathbf{x},t) \tag{7.3.40}$$

等时对易关系在这里给出

$$\Big[T_a, Q^n(x)\Big] = -(t_a)^n{}_m Q^m(x)\,, \tag{7.3.41}$$

$$\Big[T_a, P_n(x)\Big] = +(t_a)^m{}_n P_m(x)\,. \tag{7.3.42}$$

(当 t_a 是对角矩阵时, 这告诉我们, Q^n 和 P_n 所携带的 T^a 值分别减少和增多了, 而减少和增多的量就是 t_a 的第 n 个对角元.) 利用这些结果, 我们可以计算出 T_a 与其它生成元 T_b 的对易子:

$$[T_a, T_b]_- = \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x \left[-P_m\,(t_a)^m{}_n (t_b)^n{}_k Q^k + P_n\,(t_b)^n{}_k (t_a)^k{}_m Q^m\right]\,. \tag{7.3.43}$$

因此, 如果矩阵 t_a 构成的 Lie 代数具有结构常数 $f_{ab}{}^c$,

$$[t_a, t_b]_- = \mathrm{i} f_{ab}{}^c\, t_c\,, \tag{7.3.44}$$

那么量子算符 T_a 也是这样:

$$[T_a, T_b]_- = \mathrm{i} f_{ab}{}^c\, T_c\,. \tag{7.3.45}$$

这证实了(7.3.40)已被正确地归一化, 具有成为对称群生成元的资格.

拉格朗日量是拉格朗日密度的积分, 如果拉格朗日量密度在(7.3.36)和(7.3.37)下不变, 我们可以再进一步, 利用方程(7.3.15)给出与这些整体对称性相关的流的显式表达式:

$$J_a^\mu \equiv -\mathrm{i}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial Q^n/\partial x^\mu)}(t_a)^n{}_m Q^m - \mathrm{i}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial C^r/\partial x^\mu)}(\tau_a)^r{}_s C^s\,. \tag{7.3.46}$$

举例说明一下, 假定我们有两个质量相等的实标量场, 拉格朗日密度为

$$\mathscr{L} = -\tfrac{1}{2}\partial_\mu\Phi_1\partial^\mu\Phi_1 - \tfrac{1}{2}m^2\Phi_1^2 - \tfrac{1}{2}\partial_\mu\Phi_2\partial^\mu\Phi_2 - \tfrac{1}{2}m^2\Phi_2^2 - \mathscr{H}(\Phi_1^2+\Phi_2^2)\,. \tag{7.3.47}$$

在类似(7.3.36)的线性变换下:

$$\delta\Phi_1 = -\epsilon\Phi_2\,, \qquad \delta\Phi_2 = +\epsilon\Phi_1\,,$$

它是不变的, 所以存在一个守恒流(7.3.46):

$$J^\mu = \Phi_2\partial^\mu\Phi_1 - \Phi_1\partial^\mu\Phi_2.$$

流的显式表达式(7.3.46)可以用来导出其它有用的对易关系. 特别地, 因为拉格朗日密度不含辅助场的时间导数, 我们有

$$J_a^0 = -\mathrm{i}P_n(t_a)^n{}_m Q^m \,. \tag{7.3.48}$$

那么, 我们不仅可以导出一般场与对称性生成元 T_a 的等时对易子, 还能导出它与密度 J_a^0 的等时对易子:

$$[J_a^0(\mathbf{x},t), Q^n(\mathbf{y},t)] = -\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,(t_a)^n{}_m Q^m(\mathbf{x},t)\,, \tag{7.3.49}$$

$$[J_a^0(\mathbf{x},t), P_m(\mathbf{y},t)] = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,(t_a)^n{}_m P_n(\mathbf{x},t)\,. \tag{7.3.50}$$

如果辅助场被构造成了 P 和 Q 的定域函数, 并且它们按照生成元为 τ_a 的对称性代数的一个表示进行变换, 那么还有

$$[J_a^0(\mathbf{x},t), C^r(\mathbf{y},t)] = -\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,(\tau_a)^r{}_s C^s(\mathbf{x},t)\,. \tag{7.3.51}$$

我们经常将方程(7.3.49)与(7.3.51)概括在一个对易关系中

$$[J_a^0(\mathbf{x},t), \Psi^\ell(\mathbf{y},t)] = -\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,(t_a)^\ell{}_{\ell'}\Psi^{\ell'}(\mathbf{x},t)\,. \tag{7.3.52}$$

在第 10 章, 对于那些包含流 J^μ 的矩阵元, 我们将利用类似(7.3.49)—(7.3.51)的对易关系导出一个被称为 Ward 恒等式的关系.

7.4 Lorentz 不变性

我们现在将证明拉格朗日密度的 Lorentz 不变性隐含了 S-矩阵的 Lorentz 不变性. 考虑一个无限小 Lorentz 变换

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu\,, \tag{7.4.1}$$

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}\,. \tag{7.4.2}$$

根据上一节的分析, 作用量在这类变换下不变立刻告诉我们存在一组守恒"流" $\mathscr{M}^{\rho\mu\nu}$:

$$\partial_\rho \mathscr{M}^{\rho\mu\nu} = 0\,, \tag{7.4.3}$$

$$\mathscr{M}^{\rho\mu\nu} = -\mathscr{M}^{\rho\nu\mu}, \tag{7.4.4}$$

$\omega_{\mu\nu}$ 的每个独立分量对应一个流. 对这些"流"的时间分量的积分给出了一组不依赖时间的张量:

$$J^{\mu\nu} \equiv \int \mathrm{d}^3x\, \mathscr{M}^{0\mu\nu}\,, \tag{7.4.5}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J^{\mu\nu} = 0\,. \tag{7.4.6}$$

我们将证明 $J^{\mu\nu}$ 是齐次 Lorentz 群的生成元.

我们希望得到张量 $\mathscr{M}^{\rho\mu\nu}$ 的显式表达式, 但是 Lorentz 变换是作用在坐标上的, 因而它无法保持拉格朗日密度不变, 所以我们不能直接使用上一节的结果. 然而, 平移不变性允许我们将 Lorentz 不变性表示为拉格朗日密度在场和场导数的一组变换下的对称性. 场会经历矩阵变换

$$\delta\Psi^\ell = \frac{\mathrm{i}}{2}\omega^{\mu\nu}(\mathscr{J}_{\mu\nu})^\ell{}_m\Psi^m\,, \tag{7.4.7}$$

其中 $\mathscr{J}_{\mu\nu}$ 是一组满足齐次 Lorentz 群代数的矩阵

$$[\mathscr{J}_{\mu\nu}, \mathscr{J}_{\rho\sigma}] = \mathrm{i}\mathscr{J}_{\rho\nu}\eta_{\mu\sigma} - \mathrm{i}\mathscr{J}_{\sigma\nu}\eta_{\mu\rho} - \mathrm{i}\mathscr{J}_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho} + \mathrm{i}\mathscr{J}_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}\,. \tag{7.4.8}$$

例如, 对于一个标量场 ϕ, 我们有 $\delta\phi = 0$, 所以 $\mathscr{J}_{\mu\nu} = 0$, 而对于一个 (A, B) 型的不可约场, 我们有

$$\mathscr{J}_{ij} = \epsilon_{ijk}(\mathscr{A}_k + \mathscr{B}_k)\,, \qquad \mathscr{J}_{k0} = -\mathrm{i}(\mathscr{A}_k - \mathscr{B}_k)\,,$$

其中 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 分别是自旋 A 和 B 的自旋矩阵. 特别地, 我们注意到, 对于协变矢量场有 $\delta V_\kappa = \omega_\kappa{}^\lambda V_\lambda$, 于是有

$$(\mathscr{J}_{\rho\sigma})_\kappa{}^\lambda = -\mathrm{i}\eta_{\rho\kappa}\delta_\sigma{}^\lambda + \mathrm{i}\eta_{\sigma\kappa}\delta_\rho{}^\lambda\,.$$

像方程(7.4.7)中那样变换的场, 它的导数就像另外一个这样的场进行变换, 但是会有一个额外的矢量指标

$$\delta(\partial_\kappa\Psi_\ell) = \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\omega^{\mu\nu}(\mathscr{J}_{\mu\nu})_\ell{}^m\partial_\kappa\Psi_m + \omega_\kappa{}^\lambda\partial_\lambda\Psi_\ell\,. \tag{7.4.9}$$

假定拉格朗日密度在方程(7.4.7)和(7.4.9)的联合变换下不变, 于是

$$\begin{aligned} 0 = {} & \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Psi^\ell}\frac{\mathrm{i}}{2}\omega^{\mu\nu}(\mathscr{J}_{\mu\nu})^\ell{}_m\Psi^m + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\kappa\Psi^\ell)}\frac{\mathrm{i}}{2}\omega^{\mu\nu}(\mathscr{J}_{\mu\nu})^\ell{}_m\partial_\kappa\Psi^m \\ & + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\kappa\Psi^\ell)}\omega_\kappa{}^\lambda\partial_\lambda\Psi^\ell\,. \end{aligned}$$

令 $\omega^{\mu\nu}$ 的系数为零给出

$$\begin{aligned} 0 = {} & \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Psi^\ell}(\mathscr{J}_{\mu\nu})^\ell{}_m\Psi^m + \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\kappa\Psi^\ell)}(\mathscr{J}_{\mu\nu})^\ell{}_m\partial_\kappa\Psi^m \\ & + \frac{1}{2}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\kappa\Psi^\ell)}(\eta_{\kappa\mu}\partial_\nu - \eta_{\kappa\nu}\partial_\mu)\Psi^\ell\,. \end{aligned}$$

利用 Euler-Lagrange 方程(7.2.9), 以及能动量张量 $T_{\mu\nu}$ 的表达式(7.3.34), 我们可以将其写为

$$0 = \partial_\kappa\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\kappa\Psi^\ell)}(\mathscr{J}_{\mu\nu})^\ell{}_m\Psi^m\right] - \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu})\,. \tag{7.4.10}$$

这立刻启发了一个新的能动量张量定义, 称为贝林凡特(*Belinfante*)张量:[2]

$$\begin{aligned} \Theta^{\mu\nu} = {} & T^{\mu\nu} - \frac{\mathrm{i}}{2}\partial_\kappa\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\kappa\Psi^\ell)}(\mathscr{J}^{\mu\nu})^\ell{}_m\Psi^m\right. \\ & \left. - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi^\ell)}(\mathscr{J}^{\kappa\nu})^\ell{}_m\Psi^m - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu\Psi^\ell)}(\mathscr{J}^{\kappa\mu})^\ell{}_m\Psi^m\right]. \end{aligned} \tag{7.4.11}$$

方括号中的量对 μ 和 κ 明显是反对称的, 所以 $\Theta^{\mu\nu}$ 满足的守恒律与 $T^{\mu\nu}$ 相同,

$$\partial_\mu\Theta^{\mu\nu} = 0\,. \tag{7.4.12}$$

出于同一原因, 当我们在方程(7.4.11)中令 $\mu = 0$ 时, 指标 κ 只取遍空间分量, 所以当我们对全空间积分时, 这里的导数项就被扔掉了

$$\int\Theta^{0\nu}\,\mathrm{d}^3x = \int T^{0\nu}\,\mathrm{d}^3x = P^\nu\,, \tag{7.4.13}$$

其中 $P^0 \equiv H$. 因此, $\Theta^{\mu\nu}$ 可以被认为是能动量张量, 就像 $T^{\mu\nu}$ 那样. 然而方程(7.4.10)告诉我们, 不同于 $T^{\mu\nu}$, Belinfante 张量 $\Theta^{\mu\nu}$ 不仅是守恒的而且是对称的:

$$\Theta^{\mu\nu} = \Theta^{\nu\mu} \,. \tag{7.4.14}$$

作为引力场源的是 $\Theta^{\mu\nu}$ 而不是 $T^{\mu\nu}$.[3] 由于 $\Theta^{\mu\nu}$ 的对称性, 我们可以再构造一个守恒的张量密度:

$$\mathscr{M}^{\lambda\mu\nu} \equiv x^\mu \Theta^{\lambda\nu} - x^\nu \Theta^{\lambda\mu} \,. \tag{7.4.15}$$

它在

$$\partial_\lambda \mathscr{M}^{\lambda\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} - \Theta^{\nu\mu} = 0 \tag{7.4.16}$$

的意义上是守恒的. 因此Lorentz 不变性允许我们再定义一个不含时的张量

$$J^{\mu\nu} = \int \mathscr{M}^{0\mu\nu} \, \mathrm{d}^3x = \int \mathrm{d}^3x \, (x^\mu \Theta^{0\nu} - x^\nu \Theta^{0\mu}) \,. \tag{7.4.17}$$

旋转生成元 $J_k = \epsilon_{ijk} J^{ij}/2$ 不仅与时间无关, 也不显含时间, 所以它与哈密顿量对易

$$[H, \mathbf{J}] = 0 \,. \tag{7.4.18}$$

另外, 对函数 $\Theta^{0\nu}$ 使用方程(7.3.28), 我们有

$$\begin{aligned} [P_j, J_i] = \frac{1}{2}\epsilon_{i\ell k}[P_j, J^{\ell k}] &= \frac{\mathrm{i}}{2}\,\epsilon_{i\ell k} \int \mathrm{d}^3x \left(x^\ell \frac{\partial}{\partial x^j}\Theta^{0k} - x^k \frac{\partial}{\partial x^j}\Theta^{0\ell} \right) \\ &= -\mathrm{i}\,\epsilon_{ijk} \int \mathrm{d}^3x \, \Theta^{0k} \end{aligned}$$

因而

$$[P_j, J_i] = -\mathrm{i}\,\epsilon_{ijk}\, P_k \,. \tag{7.4.19}$$

另一方面, "增速"生成元 $K_k \equiv J^{k0}$, 尽管它与时间无关, 但显含时间坐标

$$K_k = \int \mathrm{d}^3x \, (x^k \Theta^{00} - x^0 \Theta^{0k}) \,,$$

或者更明显地

$$\mathbf{K} = -t\mathbf{P} + \int \mathrm{d}^3x \, \mathbf{x}\, \Theta^{00}(\mathbf{x}, t) \,. \tag{7.4.20}$$

既然这是一个常数, 我们有 $0 = \dot{\mathbf{K}} = -\mathbf{P} + \mathrm{i}[H, \mathbf{K}]$, 所以

$$[H, \mathbf{K}] = -\mathrm{i}\,\mathbf{P} \,. \tag{7.4.21}$$

另外, 再次使用方程(7.3.28)给出

$$[P_j, K_k] = \mathrm{i} \int \mathrm{d}^3x \, x^k \, \frac{\partial}{\partial x^j}\Theta^{00} = -\mathrm{i}\delta_{jk} \int \mathrm{d}^3x \, \Theta^{00}$$

因此

$$[P_j, K_k] = -\mathrm{i}\,\delta_{jk}\, H \,. \tag{7.4.22}$$

对任何合理的拉格朗日密度, 在 3.3 节的意义下, 算符(7.4.20)是"光滑"的, 即在 $t \to \pm\infty$ 时, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0 t} \int \mathrm{d}^3x \, \mathbf{x}\, \Theta^{00}(\mathbf{x}, 0) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0 t}$ 中的相互作用项为零.* (注意, 为了能够引入"入"态和"出"态以及 S-矩阵, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0 t} \int \mathrm{d}^3x \, \mathbf{x}\, \Theta^{00}(\mathbf{x}, 0) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0 t}$ 中的相互作用项在 $t \to \pm\infty$ 时必须为零.) 有了光滑性假定和对易关系(7.4.21), 我们可以重复 3.3 节的论证, 并得到结论: S-矩阵是 Lorentz 不变的.

*当我们称某个相互作用绘景算符在 $t \to \pm\infty$ 时为零, 我们是指这个算符在能量本征态的光滑叠加态之间的矩阵元在该极限下为零.

* * *

在 3.3 节中, 我们用同样的论证来证明 Lorentz 群中余下的对易关系, 即 $J^{\mu\nu}$ 间的对易关系, 具有正确的形式. 这也可直接给出旋转生成元的对易子, 它在这里的形式为

$$J^{ij} = \int \mathrm{d}^3x \, \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\Psi}^\ell} \left(-x^i \partial_j \Psi^\ell + x^j \partial_i \Psi^\ell - \mathrm{i} (\mathscr{J}^{ij})^\ell{}_m \Psi^m \right) . \tag{7.4.23}$$

既然拉格朗日密度不依赖辅助场的时间导数, 并且旋转生成元不会混合正则场和辅助场, 这也可以写成仅对正则场的求和:

$$J^{ij} = \int \mathrm{d}^3x \, P_n \left(-x^i \partial_j Q^n + x^j \partial_i Q^n - \mathrm{i} (\mathscr{J}^{ij})^n{}_{n'} Q^{n'} \right) . \tag{7.4.24}$$

那么从正则对易关系就立即得出

$$[J^{ij}, Q^n(x)]_- = -\mathrm{i}(-x_i \partial_j + x_j \partial_i) Q^n(x) - (\mathscr{J}^{ij})^n{}_{n'} Q^{n'}(x) , \tag{7.4.25}$$

$$[J^{ij}, P_n(x)]_- = \mathrm{i}(-x_i \partial_j + x_j \partial_i) P^n(x) + (\mathscr{J}^{ij})^{n'}{}_n P_{n'}(x) . \tag{7.4.26}$$

这些结果可以用来导出通常的 J^{ij} 之间的对易关系以及 J^{ij} 与其它生成元的对易关系.[**] 如果不存在辅助场, 那么同样的论证可以用于“增速”生成元以补完 P^μ 和 $J^{\mu\nu}$ 满足非齐次 Lorentz 群对易关系的证明. 然而, “增速”矩阵 $\mathscr{J}^{i0}$ 一般会混合正则场和辅助场(例如矢量场的 V^i 分量和 V^0 分量), 所以对 J^{i0} 彼此间的对易关系的直接证明必须依具体情况而定. 幸运的是, 3.3 节中所给出的 S-矩阵的 Lorentz 不变性的证明不需要这些.

7.5 过渡到相互作用绘景: 例子

在 7.2 节末尾, 我们展示了如何用一个简单标量场论的拉格朗日量导出它在相互作用绘景中包含的相互作用与自由场的结构. 我们现在将转向更加复杂且更有启发性的例子.

标量场, 导数耦合

先考虑一个中性标量场, 但现在包含导数耦合. 取拉格朗日量为

$$\mathscr{L} = -\tfrac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \tfrac{1}{2} m^2 \Phi^2 - J^\mu \partial_\mu \Phi - \mathscr{H}(\Phi) , \tag{7.5.1}$$

其中, J^μ 要么是 c-数的外流(与前面介绍的流 J^μ 无关), 要么是 Φ 以外的各种场的泛函(在这种情况下, 那些包含其它场的项需要加到(7.5.1)中.) 现在, Φ 的正则共轭是

$$\Pi = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\Phi}} = \dot{\Phi} - J^0 \tag{7.5.2}$$

而哈密顿量是

$$\begin{aligned} H &= \int \mathrm{d}^3x \, [\Pi \dot{\Phi} - \mathscr{L}] \\ &= \int \mathrm{d}^3x \, \Big[\Pi(\Pi + J^0) + \tfrac{1}{2} (\boldsymbol{\nabla} \Phi)^2 - \tfrac{1}{2} (\Pi + J^0)^2 \\ &\quad + \tfrac{1}{2} m^2 \Phi^2 + \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\nabla} \Phi + J^0 (\Pi + J^0) + \mathscr{H}(\Phi) \Big] . \end{aligned}$$

[**] 另外, 因为 J^{ij} 与 H 和 $P_n \dot{Q}^n$ 对易, 所以它与 L 对易. 因此 J^{ij} 与辅助场的对易子必须与 L 的旋转不变性相容.

整理这些项, 我们可以将其写为

$$H = H_0 + V \,, \tag{7.5.3}$$

$$H_0 = \int \mathrm{d}^3x \left[\tfrac{1}{2}\Pi^2 + \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\Phi)^2 + \tfrac{1}{2}m^2\Phi^2\right], \tag{7.5.4}$$

$$V = \int \mathrm{d}^3x \left[\Pi J^0 + \mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\nabla}\Phi + \tfrac{1}{2}(J^0)^2 + \mathscr{H}(\Phi)\right]. \tag{7.5.5}$$

正如 7.2 节所阐明的, 我们可以通过将 Π 和 Φ 替换为 π 和 ϕ 过渡到相互作用绘景(尽管我们不打算挑明这件事, 但对流 J^μ 中的任意场也同样如此):

$$H_0 = \int \mathrm{d}^3x \left[\tfrac{1}{2}\pi^2(\mathbf{x},t) + \tfrac{1}{2}\Big(\boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{x},t)\Big)^2 + \tfrac{1}{2}m^2\phi^2(\mathbf{x},t)\right], \tag{7.5.6}$$

$$V(t) = \int \mathrm{d}^3x \left[\pi(\mathbf{x},t)J^0(\mathbf{x},t) + J(\mathbf{x},t)\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{x},t) + \tfrac{1}{2}\Big[J^0(\mathbf{x},t)\Big]^2 + \mathscr{H}(\phi(\mathbf{x},t))\right]. \tag{7.5.7}$$

自由粒子哈密顿量正好与方程(7.2.25)相同, 并像 7.2 节中那样给出方程(7.2.26)—(7.2.35). 事实上, 无论总哈密顿量是什么样, 我们都必须将(7.5.6)取成我们必须要分离出的部分, 并称其为自由粒子部分, 这是因为, 正如我们所看到的, 在将标量场展成满足对易关系(7.2.34)和(7.2.35)的产生湮灭算符时, 正是这种形式的自由哈密顿量, 才使得标量场有了正确的展开(7.2.29), 而其余部分则被称为相互作用. 最后一步是将相互作用哈密顿量中的 π 替换成它在相互作用绘景中的值 $\dot\phi$ (不是它在 Heisenberg 绘景中的值 $\dot\phi - J^0$):

$$V(t) = \int \mathrm{d}^3x \left[J^\mu(\mathbf{x},t)\partial_\mu\phi(\mathbf{x},t) + \tfrac{1}{2}\Big[J^0(\mathbf{x},t)\Big]^2 + \mathscr{H}(\phi(\mathbf{x},t))\right]. \tag{7.5.8}$$

方程(7.5.8)中额外的非协变项和我们在 6.2 节中所看到的一样, 它正是抵消 $\partial\phi$ 传播子中的非协变项所需要的.

矢量场, 自旋1

对于自旋1粒子的矢量场 V_μ, 正则量子化会得到相似的结果. 我们在这里以开放的心态, 写出一种极为普遍的拉格朗日密度

$$\mathscr{L} = -\tfrac{1}{2}\alpha\,\partial_\mu V_\nu\partial^\mu V^\nu - \tfrac{1}{2}\beta\,\partial_\mu V_\nu\partial^\nu V^\mu - \tfrac{1}{2}m^2\,V_\mu V^\mu + J_\mu V^\mu \,, \tag{7.5.9}$$

其中, α, β 和 m^2 现在而言是任意常数, J_μ 要么是一个 c-数外流, 要么是一个除 V^μ 之外的场相关的算符, 在后一种情况下, 包含这些场的额外项要加到 $\mathscr{L}$ 上. V_μ 的 Euler-Lagrange 场方程是

$$-\alpha\Box V_\nu - \beta\partial_\nu(\partial_\mu V^\mu) + m^2 V_\nu = J_\nu \,.$$

取散度给出

$$-(\alpha+\beta)\Box\partial_\lambda V^\lambda + m^2\partial_\lambda V^\lambda = \partial_\lambda J^\lambda \,. \tag{7.5.10}$$

这是质量为 $m^2/(\alpha+\beta)$, 源为 $\partial_\lambda J^\lambda/(\alpha+\beta)$ 的一般标量场的方程. 我们希望描述的理论只包含自旋 1 粒子不包含自旋 0 粒子, 所以为了避免 $\partial_\lambda V^\lambda$ 作为一个独立传播的标量场出现, 我们取 $\alpha=-\beta$, 在这种情况下, $\partial_\lambda V^\lambda$ 可以用一个外流或者其它场表示, 例如 $\partial_\lambda J^\lambda/m^2$. 常数 α 可以被吸收到 V_μ 的定义中, 所以我们可以取 $\alpha=-\beta=1$, 因而

$$\mathscr{L}=-\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\tfrac{1}{2}m^2V_\mu V^\mu+J_\mu V^\mu \tag{7.5.11}$$

其中

$$F_{\mu\nu}\equiv\partial_\mu V_\nu-\partial_\nu V_\mu\,. \tag{7.5.12}$$

拉格朗日量相对矢量场时间导数的导数是

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{V}_\mu}=-F^{0\mu}\,. \tag{7.5.13}$$

在 μ 是一个空间指标 i 时, 这是非零的, 所以 V^i 是正则场, 共轭为

$$\Pi^i=F^{i0}=\dot{V}^i+\partial_i V^0 \tag{7.5.14}$$

另一方面 $F^{00}=0$, 所以 $\dot{V}^0$ 不出现在拉格朗日量中, 因此 V^0 是一个辅助场. 这并不会带来严重的困难: $\partial\mathscr{L}/\partial\dot{V}^0$ 为零意味着 V^0 的场方程不包含二阶时间导数, 因而可以作为一个消除场变量的约束. 特别地, $\nu=0$ 的 Euler-Lagrange 方程是

$$\partial_i F^{i0}=m^2V^0-J^0 \tag{7.5.15}$$

或利用方程(7.5.14)写成

$$V^0=\frac{1}{m^2}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Pi}+J^0). \tag{7.5.16}$$

现在我们来计算这个理论的哈密顿量 $H=\int\mathrm{d}^3x\,(\boldsymbol{\Pi}\cdot\dot{\mathbf{V}}-\mathscr{L})$. 方程(7.5.14)使得我们可以用 $\boldsymbol{\Pi}$ 和 J^0 表示 $\dot{\mathbf{V}}$:

$$\dot{\mathbf{V}}=-\boldsymbol{\nabla}V^0+\boldsymbol{\Pi}=\boldsymbol{\Pi}-\frac{1}{m^2}\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Pi}+J^0)\,,$$

所以

$$\begin{aligned}H=\int\mathrm{d}^3x\,\Big[&\boldsymbol{\Pi}^2+m^{-2}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Pi})(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Pi}+J^0)\\&-\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\Pi}^2+\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{V})^2+\tfrac{1}{2}m^2\mathbf{V}^2\\&-\tfrac{1}{2}m^{-2}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Pi}+J^0)^2-\mathbf{J}\cdot\mathbf{V}+m^{-2}J^0(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Pi}+J^0)\Big]\,.\end{aligned}$$

再一次地, 我们将其分成自由粒子项 H_0 和相互作用 V:

$$H=H_0+V\,, \tag{7.5.17}$$

并通过将 Heisenberg 绘景下的 $\mathbf{V}$ 和 $\boldsymbol{\Pi}$ 替换成它们在相互作用绘景中的对应 $\mathbf{v}$ 和 $\boldsymbol{\pi}$ 过渡到相互作用绘景(并且, 虽然没有显式地表示出来, 对出现在 J^μ 中的任何场及其共轭也做同样处理):

$$H_0=\int\mathrm{d}^3x\,\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}^2+\frac{1}{2m^2}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\pi})^2+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v})^2+\frac{m^2}{2}\mathbf{v}^2\right]\,, \tag{7.5.18}$$

$$V=\int\mathrm{d}^3x\,\left[-\mathbf{J}\cdot\mathbf{v}+m^{-2}J^0\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\pi}+\frac{1}{2m^2}(J^0)^2\right]\,. \tag{7.5.19}$$

于是 $\boldsymbol{\pi}$ 和 $\mathbf{v}$ 之间的关系是

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\delta H_0(\mathbf{v},\boldsymbol{\pi})}{\delta \boldsymbol{\pi}} = \boldsymbol{\pi} - m^{-2}\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\pi}) \tag{7.5.20}$$

而“场方程”是

$$\dot{\boldsymbol{\pi}} = -\frac{\delta H_0(\mathbf{v},\boldsymbol{\pi})}{\delta \mathbf{v}} = +\nabla^2\mathbf{v} - \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}) - m^2\mathbf{v}\,. \tag{7.5.21}$$

由于 V^0 不是一个独立场变量, 它无法通过一个相似变换与任何相互作用绘景对象 v^0 相关. 转而, 我们可以引入一个量

$$v^0 \equiv m^{-2}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\pi}\,. \tag{7.5.22}$$

这样方程(7.5.20)就允许我们将 $\boldsymbol{\pi}$ 写成

$$\boldsymbol{\pi} = \dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\nabla} v^0\,. \tag{7.5.23}$$

将其代入方程(7.5.22)和(7.5.21)就给出了如下形式的场方程

$$\begin{aligned}
&\nabla^2 v^0 + \boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\mathbf{v}} - m^2 v^0 = 0\,,\\
&\nabla^2\mathbf{v} - \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}) - \ddot{\mathbf{v}} - \boldsymbol{\nabla}\dot{v}^0 - m^2\mathbf{v} = 0\,.
\end{aligned}$$

这些可以合并成协变形式

$$\Box v^\mu - \partial^\mu\partial_\nu v^\nu - m^2 v^\mu = 0\,. \tag{7.5.24}$$

取散度给出

$$\partial_\mu v^\mu = 0 \tag{7.5.25}$$

因而

$$(\Box - m^2)v^\mu = 0\,. \tag{7.5.26}$$

满足方程(7.5.25)和(7.5.26)的实矢量场可以表示成一个 Fourier 变换

$$\begin{aligned}
v^\mu(x) = (2\pi)^{-3/2}\sum_\sigma \int \mathrm{d}^3p\,(2p^0)^{-1/2}\Big\{&e^\mu(\mathbf{p},\sigma)a(\mathbf{p},\sigma)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\\
&+ e^{\mu *}(\mathbf{p},\sigma)a^\dagger(\mathbf{p},\sigma)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\Big\}\,,
\end{aligned} \tag{7.5.27}$$

其中 $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$; $\sigma = +1, 0, -1$ 的 $e^\mu(\mathbf{p},\sigma)$ 是三个独立的矢量, 满足

$$p_\mu e^\mu(\mathbf{p},\sigma) = 0 \tag{7.5.28}$$

且已归一化成

$$\sum_\sigma e^\mu(\mathbf{p},\sigma)e^{\nu *}(\mathbf{p},\sigma) = \eta^{\mu\nu} + p^\mu p^\nu/m^2\,; \tag{7.5.29}$$

而 $a(\mathbf{p},\sigma)$ 是算符系数. 利用方程(7.5.23), (7.5.27)和(7.5.29)可以计算出 $\mathbf{v}$ 和 $\boldsymbol{\pi}$ 满足正确的对易关系

$$\begin{aligned}
&\Big[v^i(\mathbf{x},t), \pi^j(\mathbf{y},t)\Big] = \mathrm{i}\,\delta_{ij}\,\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,,\\
&\Big[v^i(\mathbf{x},t), v^j(\mathbf{y},t)\Big] = \Big[\pi^i(\mathbf{x},t), \pi^j(\mathbf{y},t)\Big] = 0\,,
\end{aligned} \tag{7.5.30}$$

其中假定了 $a(\mathbf{p},\sigma)$ 和 $a^\dagger(\mathbf{p},\sigma)$ 满足对易关系

$$\left[a(\mathbf{p},\sigma),a^\dagger(\mathbf{p}',\sigma')\right]=\delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\delta_{\sigma'\sigma}\,, \tag{7.5.31}$$

$$\left[a(\mathbf{p},\sigma),a(\mathbf{p}',\sigma')\right]=0\,. \tag{7.5.32}$$

我们已经知道了自旋 1 粒子的矢量场必须取成(7.5.27)的形式, 所以我们对这些结果的推导可以用来证明方程(7.5.18)确实给出了正确的有质量自旋 1 粒子的自由粒子哈密顿量. 也很容易验证方程(7.5.18)可以写成(相差一个常数项)自由粒子能量的标准形式, 形如 $\sum_\sigma\int \mathrm{d}^3p\,p^0\,a^\dagger(\mathbf{p},\sigma)a(\mathbf{p},\sigma)$. 最后, 在方程(7.5.19)中使用方程(7.5.22)给出相互作用绘景中的相互作用

$$V(t)=\int \mathrm{d}^3x\left[-J_\mu v^\mu+\frac{1}{2m^2}(J^0)^2\right]\,. \tag{7.5.33}$$

方程(7.5.33)中额外的非协变项, 就像我们在第 6 章中所看到的, 正是抵消矢量场传播子中的非协变项所需要的.

Dirac 场, 自旋1/2

对于自旋 1/2 粒子的 Dirac 场, 我们尝试取拉格朗日量为

$$\mathscr{L}=-\bar\Psi(\gamma^\mu\partial_\mu+m)\Psi-\mathscr{H}(\bar\Psi,\Psi) \tag{7.5.34}$$

其中 $\mathscr{H}$ 是 $\bar\Psi$ 和 Ψ 的实函数. $\mathscr{L}$ 不是实的, 但是作用量是, 这是因为

$$\bar\Psi\gamma^\mu\partial_\mu\Psi-(\bar\Psi\gamma^\mu\partial_\mu\Psi)^\dagger=\bar\Psi\gamma^\mu\partial_\mu\Psi+(\partial_\mu\bar\Psi)\gamma^\mu\Psi=\partial_\mu(\bar\Psi\gamma^\mu\Psi)\,.$$

因此, 通过要求作用量对 $\bar\Psi$ 的变分驻定而得到的场方程, 与通过要求作用量对 Ψ 的变分驻定而得到的场方程, 二者互为伴随方程, 如果我们希望避免过多的场方程, 这正是所需要的. Ψ 的正则共轭是

$$\Pi=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot\Psi}=-\bar\Psi\gamma^0\,, \tag{7.5.35}$$

所以我们不应该把 $\bar\Psi$ 看做是 Ψ 那样的场, 而是正比于 Ψ 的正则共轭的场. 哈密顿量是

$$H=\int \mathrm{d}^3x\,[\Pi\dot\Psi-\mathscr{L}]=\int \mathrm{d}^3x\left[\Pi\gamma^0[\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla}+m]\Psi+\mathscr{H}\right]\,.$$

我们将其写为

$$H=H_0+V\,, \tag{7.5.36}$$

其中

$$H_0=\int \mathrm{d}^3x\,\Pi\gamma^0[\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla}+m]\Psi\,, \tag{7.5.37}$$

$$V=\int \mathrm{d}^3x\,\mathscr{H}(\bar\Psi,\Psi)\,. \tag{7.5.38}$$

我们现在过渡到相互作用绘景. 由于方程(7.5.35)不涉及时间, 相似变换(7.1.28)和(7.1.29)立即给出

$$\pi=-\bar\psi\gamma^0\,. \tag{7.5.39}$$

同样, 在方程(7.5.37)和(7.5.38)中将 Ψ 和 Π 替换成 ψ 和 π 就可以计算出 H_0 和 $V(t)$. 这给出运动方程

$$\dot{\psi} = \frac{\delta H_0}{\delta \pi} = \gamma^0(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} + m)\psi \tag{7.5.40}$$

或者更简洁的

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi = 0\,. \tag{7.5.41}$$

(另一运动方程, $\dot{\pi} = -\delta H_0/\delta\psi$, 给出就是该方程的伴方程.) 任何满足方程(7.5.41)的场都可以写成一个 Fourier 变换

$$\psi(x) = (2\pi)^{-3/2}\int \mathrm{d}^3 p \sum_\sigma \Big\{ u(\mathbf{p},\sigma)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\, a(\mathbf{p},\sigma) + v(\mathbf{p},\sigma)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\, b^\dagger(\mathbf{p},\sigma)\Big\}\,, \tag{7.5.42}$$

其中 $p^0 \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$; $a(\mathbf{p},\sigma)$ 和 $b^\dagger(\mathbf{p},\sigma)$ 是算符系数; 而 $u(\mathbf{p},\pm\frac{1}{2})$ 是方程

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu p_\mu + m)u(\mathbf{p},\sigma) = 0 \tag{7.5.43}$$

的两个独立解, 对于 $v(\mathbf{p},\pm\frac{1}{2})$ 类似有

$$(-\mathrm{i}\gamma^\mu p_\mu + m)v(\mathbf{p},\sigma) = 0\,, \tag{7.5.44}$$

它们归一化成*

$$\sum_\sigma u(\mathbf{p},\sigma)\bar{u}(\mathbf{p},\sigma) = \frac{(-\mathrm{i}\gamma^\mu p_\mu + m)}{2p^0}\,, \tag{7.5.45}$$

$$\sum_\sigma v(\mathbf{p},\sigma)\bar{v}(\mathbf{p},\sigma) = -\frac{(\mathrm{i}\gamma^\mu p_\mu + m)}{2p^0}\,. \tag{7.5.46}$$

为了得到希望的反对易子

$$\begin{aligned}\Big[\psi_\alpha(\mathbf{x},t),\bar{\psi}_\beta(\mathbf{y},t)\Big]_+ &= \Big[\psi_\alpha(\mathbf{x},t),\pi_\gamma(\mathbf{y},t)\Big]_+(\gamma^0)_{\gamma\beta}\\ &= \mathrm{i}\,(\gamma^0)_{\alpha\beta}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,,\end{aligned} \tag{7.5.47}$$

$$\Big[\psi_\alpha(\mathbf{x},t),\psi_\beta(\mathbf{y},t)\Big]_+ = 0\,, \tag{7.5.48}$$

我们必须取如下的反对易关系

$$\Big[a(\mathbf{p},\sigma),a^\dagger(\mathbf{p}',\sigma')\Big]_+ = \Big[b(\mathbf{p},\sigma),b^\dagger(\mathbf{p}',\sigma')\Big]_+ = \delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\delta_{\sigma'\sigma}, \tag{7.5.49}$$

$$\begin{aligned}\Big[a(\mathbf{p},\sigma),a(\mathbf{p}',\sigma')\Big]_+ &= \Big[b(\mathbf{p},\sigma),b(\mathbf{p}',\sigma')\Big]_+ =\\ \Big[a(\mathbf{p},\sigma),b(\mathbf{p}',\sigma')\Big]_+ &= \Big[a(\mathbf{p},\sigma),b^\dagger(\mathbf{p}',\sigma')\Big]_+ = 0\,,\end{aligned} \tag{7.5.50}$$

以及它们的共轭. 这些与我们第 5 章得到的结果是一致的, 从而证明了(7.5.37)是正确的自旋 $\frac{1}{2}$ 的自由粒子哈密顿量. 写成 a 和 b 的形式, 这个哈密顿量是

$$H_0 = \sum_\sigma \int \mathrm{d}^3 p\, p^0 \Big(a^\dagger(\mathbf{p},\sigma)a(\mathbf{p},\sigma) - b(\mathbf{p},\sigma)b^\dagger(\mathbf{p},\sigma)\Big)\,. \tag{7.5.51}$$

---

*矩阵 $\mathrm{i}\gamma^\mu p_\mu$ 有本征值 $\pm m$, 所以 $\Sigma u\bar{u}$ 和 $\Sigma v\bar{v}$ 必须分别正比于投影矩阵 $(-\mathrm{i}\gamma^\mu p_\mu + m)/2m$ 和 $(\mathrm{i}\gamma^\mu p_\mu + m)/2m$. 通过将比例因子吸收进 u 和 v 的定义, 我们可以将其调整到只相差一个符号. 整体的符号由正定性决定: $\mathrm{Tr}\,\Sigma u\bar{u}\beta = \Sigma u^\dagger u$ 和 $\mathrm{Tr}\,\Sigma v\bar{v}\beta = \Sigma v^\dagger v$ 必须是正的.

我们可以将其重新写成一个形式更加常见的哈密顿量, 它要加上另一个无限大 c-数**

$$H_0 = \sum_\sigma \int \mathrm{d}^3\mathbf{p}\, p^0 \Big[a^\dagger(\mathbf{p},\sigma)a(\mathbf{p},\sigma) + b^\dagger(\mathbf{p},\sigma)b(\mathbf{p},\sigma) - \delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p})\Big] . \tag{7.5.52}$$

因为 c-数只影响所测量的所有能量的能量零点, 所以仅当我们担心引力现象时, 方程(7.5.52)中的 c-数项才是重要的; 否则, 我们就可以像处理标量场那样在这里把它扔掉. 在这种理解下, H_0 是正定算符, 同玻色子的情况一样.

7.6 约束与 Dirac 括号

从拉格朗日量导出哈密顿量的主要障碍是出现了约束. 对这一问题的标准分析是 Dirac [5]给出的, 我们在这里将沿用他的术语. 对本章所讨论的简单理论, 很容易辨认出非约束的正则场, Dirac 的分析不是真正必需的. 我们在这里将用有质量的实矢量场理论做一个说明, 在下一章回到 Dirac 的方法上来, 那里它才是真正有用的.

初级约束(*primary constraints*)要么是强加在系统上的(如我们在下一章为电磁场选择规范), 要么源于拉格朗日量自身的结构. 后一类的一个例子是, 考察有质量矢量场 V^μ 与流 J_μ 进行相互作用的拉格朗日量(7.5.11):

$$\mathscr{L} = -\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}m^2V_\mu V^\mu + J_\mu V^\mu \tag{7.6.1}$$

其中

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu . \tag{7.6.2}$$

假定我们尝试在同一基上处理 V^μ 的全部 4 个分量. 那么我们应该定义共轭

$$\Pi^\mu \equiv \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_0 V_\mu)} = -F^{0\mu} . \tag{7.6.3}$$

我们立即找到初级约束:

$$\Pi_0 = 0 . \tag{7.6.4}$$

更普遍地, 只要无法从方程 $\Pi_\ell = \delta L/\delta\partial_0\Psi^\ell$ 中解出以 Π_ℓ 和 Ψ^ℓ 表示的所有 $\partial_0\Psi^\ell$(至少是定域地), 我们就会遇到初级约束. 当且仅当矩阵 $\delta^2 L/\delta(\partial_0\Psi^\ell)\delta(\partial_0\Psi^m)$ 的行列式为零时, 这样的情况就会出现. 这种拉格朗日量被称为*非正规的*(*irreglar*).

接下来, 有*次级约束*(*secondary constraints*), 它源于初级约束要与运动方程相自洽的要求. 对于有质量矢量场, 这正是 V^0 的 Euler-Lagrange 方程(7.5.16):

$$\partial_i\Pi_i = m^2V^0 - J^0 . \tag{7.6.5}$$

在这里我们止步于次级约束, 但在其它理论中还会遇到进一步的约束, 这些约束源于次级约束要与场方程相自洽的要求, 以此类推. 初级, 次级等约束之间的区别是不重要的; 我们在这里一起处理它们.

**注意 c-数项的负号. 一种尚属猜测的被称为*超对称*[4]的对称性联系了玻色场和费米场的数目, 从而使得 H_0 中的 c-数全部抵消.

在某个类型的约束之间存在更为重要的另一种区别. 对于有质量矢量场, 我们发现的约束是被称为**第二类约束**的一种约束, 对这类约束, 存在针对对易关系的通用方法. 为了解释第一类约束与第二类约束之间的区别, 并介绍处理第二类约束的方法, 先回顾一下经典力学中 Poisson 括号的定义对我们是有帮助的.

考虑依赖一组变量 $\Psi^a(t)$ 及其时间导数 $\dot{\Psi}^a(t)$ 的任意拉格朗日量 $L(\Psi,\dot{\Psi})$. (量子场论的拉格朗日量是一种特殊情况, 其指标 a 取遍所有的 $\ell,\mathbf{x}$ 对.) 通过

$$\Pi_a \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\Psi}^a}\,, \tag{7.6.6}$$

我们可以定义所有这些变量的正则共轭. Π 和 Ψ 一般不是独立变量, 但却可以通过各种约束方程关联, 这些约束中既包括初级也包括次级约束. Poisson 括号定义为

$$[A,B]_{\mathrm{P}} \equiv \frac{\partial A}{\partial \Psi^a}\frac{\partial B}{\partial \Pi_a} - \frac{\partial B}{\partial \Psi^a}\frac{\partial A}{\partial \Pi_a} \tag{7.6.7}$$

这里, 在计算对 Ψ^a 和 Π_a 的导数时忽略了约束. 特别地, 我们总有 $[\Psi^a,\Pi_b]_{\mathrm{P}}=\delta^a_b$. (这里及后面的所有场都取在同一时刻, 并扔掉了所有的时间变量.) 这些括号的代数性质与对易子相同:

$$[A,B]_{\mathrm{P}} = -[B,A]_{\mathrm{P}}\,, \tag{7.6.8}$$

$$[A,BC]_{\mathrm{P}} = [A,B]_{\mathrm{P}}C + B[A,C]_{\mathrm{P}}\,, \tag{7.6.9}$$

其中包括 Jacobi 恒等式

$$[A,[B,C]_{\mathrm{P}}]_{\mathrm{P}} + [B,[C,A]_{\mathrm{P}}]_{\mathrm{P}} + [C,[A,B]_{\mathrm{P}}]_{\mathrm{P}} = 0\,. \tag{7.6.10}$$

如果我们可以使用通常的对易关系 $[\Psi^a,\Pi_b]=\mathrm{i}\delta^a_b$, $[\Psi^a,\Psi^b]=[\Pi_a,\Pi_b]=0$, 那么对于 Ψ 和 Π 的任意两个函数, 它们的对易子将是 $[A,B]=\mathrm{i}[A,B]_{\mathrm{P}}$. 但是约束并不总是允许我们能够做到这点.

一般而言, 约束可以表示成 $\chi_N=0$ 的形式, 其中 χ_N 是 Ψ 和 Π 的一组函数. 由于我们把次级约束连同初级约束一并纳入进来, 所有约束的集合与运动方程 $\dot{A}=[A,H]_{\mathrm{P}}$ 必须自洽, 因此, 当约束方程 $\chi_N=0$ 被满足时,

$$[\chi_N,H]_{\mathrm{P}} = 0\,. \tag{7.6.11}$$

当我们(在计算出 Poisson 括号之后)附加约束时, 如果它与所有其它约束的 Poisson 括号为零, 我们称它为**第一类约束**. 在下一章电磁场的量子化中, 我们将看到这类约束的一个简单例子, 这里面的第一类约束源于作用量的对称性, 电磁规范不变性. 事实上, 第一类约束 $\chi_N=0$ 的集合总是与一个对称群相联系, 在该群下, 任意量 A 经过了一个无限小变换

$$\delta_N A \equiv \sum_N \epsilon_N\,[\chi_N,A]_{\mathrm{P}}\,. \tag{7.6.12}$$

(它们在场论中是定域变换, 这是因为指标 N 会包含时空坐标.) 方程(7.6.11)表明这个变换保持哈密顿量不变, 并且对第一类约束, 这个变换也遵守所有其它约束. 这样的第一类约束可以通过选取规范消除.

在所有第一类约束通过选取规范被消除后, 剩下的约束方程 $\chi_N=0$ 使得这些约束彼此之间的 Poisson 括号的线性组合 $\sum_N u_N[\chi_N,\chi_M]$ 不为零. 由此可知剩余约束的 Poisson 括号构成的矩阵是非奇异的:

$$\mathrm{Det}\,C \neq 0\,, \tag{7.6.13}$$

其中

$$C_{NM} \equiv [\chi_N, \chi_M]_{\mathrm{P}} \,. \tag{7.6.14}$$

这类约束被称为*第二类约束*. 注意, 第二类约束的个数总是偶数, 这是因为奇数维反对称矩阵的行列式始终为零.

正如我们所看到的, 在有质量矢量场的情况下, 约束是

$$\chi_{1\mathbf{x}} = \chi_{2\mathbf{x}} = 0 \,, \tag{7.6.15}$$

其中

$$\chi_{1\mathbf{x}} = \Pi_0(\mathbf{x}) \,, \qquad \chi_{2\mathbf{x}} = \partial_i \Pi_i(\mathbf{x}) - m^2 V^0(\mathbf{x}) - J^0(\mathbf{x}) \,. \tag{7.6.16}$$

这些约束的 Poisson 括号是

$$C_{1\mathbf{x},2\mathbf{y}} = -C_{2\mathbf{y},1\mathbf{x}} = [\chi_{1\mathbf{x}}, \chi_{2\mathbf{y}}]_{\mathrm{P}} = m^2 \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{7.6.17}$$

并且, 显然有,

$$C_{1\mathbf{x},1\mathbf{y}} = C_{2\mathbf{x},2\mathbf{y}} = 0 \,. \tag{7.6.18}$$

这个"矩阵"显然是不奇异的, 所以约束(7.6.15)是第二类约束.

Dirac 提出, 当所有约束都是第二类约束时, 对易关系将由

$$[A, B] = \mathrm{i}[A, B]_{\mathrm{D}} \,, \tag{7.6.19}$$

给出, 其中 $[A, B]_{\mathrm{D}}$ 是 Poisson 括号的推广, 被称为 *Dirac 括号*:

$$[A, B]_{\mathrm{D}} \equiv [A, B]_{\mathrm{P}} - [A, \chi_N]_{\mathrm{P}} \, (C^{-1})^{NM} \, [\chi_M, B]_{\mathrm{P}} \,. \tag{7.6.20}$$

(这里的 N 和 M 是包含空间位置的混合指标, 它的取值类似于矢量场例子中的 $1, \mathbf{x}$ 和 $2, \mathbf{x}$.) 他注意到 Dirac 括号同 Poisson 括号一样, 满足与对易子相同的代数关系

$$[A, B]_{\mathrm{D}} = -[B, A]_{\mathrm{D}} \,, \tag{7.6.21}$$

$$[A, BC]_{\mathrm{D}} = [A, B]_{\mathrm{D}} C + B[A, C]_{\mathrm{D}} \,, \tag{7.6.22}$$

$$[A, [B, C]_{\mathrm{D}}]_{\mathrm{D}} + [B, [C, A]_{\mathrm{D}}]_{\mathrm{D}} + [C, [A, B]_{\mathrm{D}}]_{\mathrm{D}} = 0 \,, \tag{7.6.23}$$

以及关系

$$[\chi_N, B]_{\mathrm{D}} = 0 \tag{7.6.24}$$

这使得对易关系(7.6.19)与约束 $\chi_N = 0$ 自洽. 另外, 只要方程 $\chi'_N = 0$ 与 $\chi_N = 0$ 定义了相同的相空间子流形, 那么将 χ_N 换成任意函数 χ'_N 都不会改变 Dirac 括号. 但是所有这些良好的性质并没有证明对易子确实以 Dirac 括号的形式由方程(7.6.19)给出.

Maskawa (益川)和 Nakajima (中岛)[6]证明了一个强有力定理, 如果说它没有完全解决这个问题, 但它也启发了这个问题的解决方法, 他们证明了, 对任何一组服从第二类约束的正则变

量 Ψ^a 和 Π_a, 总可以通过一个正则变换*构造两组变量 $Q^n, \mathscr{Q}^r$ 以及它们各自的共轭 $P_n, \mathscr{P}_r$, 使得约束变成 $\mathscr{Q}^r = \mathscr{P}_r = 0$. 利用这些坐标计算Poisson括号, 并将约束函数重新定义为 $\chi_{1r} = \mathscr{Q}^r$, $\chi_{2r} = \mathscr{P}_r$, 我们有

$$C_{1r,2s} = [\mathscr{Q}^r, \mathscr{P}_s]_{\mathrm{P}} = \delta^r_s \,,$$

$$C_{1r,1s} = [\mathscr{Q}^r, \mathscr{Q}^s]_{\mathrm{P}} = 0 \,, \qquad C_{2r,2s} = [\mathscr{P}_r, \mathscr{P}_s]_{\mathrm{P}} = 0 \,,$$

并且对于任意函数 A, B

$$[A, \chi_{1r}]_{\mathrm{P}} = -\frac{\partial A}{\partial \mathscr{P}_r} \,, \qquad [A, \chi_{2r}]_{\mathrm{P}} = \frac{\partial A}{\partial \mathscr{Q}^r} \,,$$

这个 C-矩阵具有逆 $C^{-1} = -C$, 所以Dirac括号(7.6.20)在这里是

$$\begin{aligned} [A, B]_{\mathrm{D}} &= [A, B]_{\mathrm{P}} + [A, \chi_{1r}]_{\mathrm{P}} [\chi_{2r}, B]_{\mathrm{P}} - [A, \chi_{2r}]_{\mathrm{P}} [\chi_{1r}, B]_{\mathrm{P}} \\ &= [A, B]_{\mathrm{P}} - \frac{\partial A}{\partial \mathscr{Q}^r} \frac{\partial B}{\partial \mathscr{P}_r} + \frac{\partial B}{\partial \mathscr{Q}^r} \frac{\partial A}{\partial \mathscr{P}_r} \\ &= \frac{\partial A}{\partial Q^n} \frac{\partial B}{\partial P_n} - \frac{\partial B}{\partial Q^n} \frac{\partial A}{\partial P_n} \,. \end{aligned} \tag{7.6.25}$$

换句话说, *Dirac括号等于用约化的非约束正则变量集合 Q^n, P_n 计算出的 Poisson括号*. 如果我们假定这些非约束变量满足正则对易关系, 那么一般算符 A, B 的对易子就由方程(7.6.19)以Dirac括号的形式给出.**

我们现在回到有质量矢量场的情况, 来看一下它是如何通过Dirac括号量子化的. 这是一种很容易用非约束变量† V_i 和 Π_i 表示约束变量 V^0 和 Π_0 的情况; 我们有 $\Pi_0 = 0$, 而 V^0 由方程(7.6.5)给出. 由方程(7.6.17)和(7.6.18), 我们看到 C_{NM} 在这里有逆

$$(C^{-1})^{1\mathbf{x},2\mathbf{y}} = -(C^{-1})^{2\mathbf{y},1\mathbf{x}} = -m^{-2}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \,, \tag{7.6.26}$$

$$(C^{-1})^{1\mathbf{x},1\mathbf{y}} = (C^{-1})^{2\mathbf{x},2\mathbf{y}} = 0 \,. \tag{7.6.27}$$

因此Dirac的处理(7.6.19), (7.6.20)给出了等时对易子

$$\begin{aligned} [A, B] &= \mathrm{i}[A, B]_{\mathrm{P}} \\ &\quad + \mathrm{i}m^{-2} \int \mathrm{d}^3 z \left([A, \Pi_0(\mathbf{z})]_{\mathrm{P}} \left[\partial_i \Pi_i(\mathbf{z}) - m^2 V^0(\mathbf{z}) - J^0(\mathbf{z}), B \right]_{\mathrm{P}} - A \leftrightarrow B \right) . \end{aligned} \tag{7.6.28}$$

---

*回想一下, 我们说的正则变换是指从一组相空间坐标 Ψ^a, Π_a 到另一组相空间坐标 $\tilde{\Psi}^a, \tilde{\Pi}_a$ 的变换, 它使得 $[\tilde{\Psi}^a, \tilde{\Pi}_b]_{\mathrm{P}} = \delta^a_b$ 且 $[\tilde{\Psi}^a, \tilde{\Psi}^b]_{\mathrm{P}} = [\tilde{\Pi}_a, \tilde{\Pi}_b] = 0$, 其中的Poisson括号是用 Ψ^a 和 Π_a 计算出来. 由此可知, 无论是用 Ψ^a 和 Π_a 计算, 还是用 $\tilde{\Psi}^a$ 和 $\tilde{\Pi}_a$ 计算, 任意函数 A, B 的Poisson括号都是相同的. 由此还可以知道, 如果 Ψ^a 和 Π_a 满足哈密顿运动方程, 那么 $\tilde{\Psi}^a$ 和 $\tilde{\Pi}_a$ 也满足同一运动方程. 正则变换会改变拉格朗日量, 但变化的只是一个时间导数, 而这是不影响作用量的.

**我们是否应该采用Maskawa-Nakajima所构造的正则变换给出的非约束正则变量 Q^n, P_n 的正则对易关系, 这依旧是个有待解决的问题. 根本上, 对这种对易关系的检验就是要检验它们与第5章所导出的自由场对易关系是否自洽, 但是为了使用这个检验, 我们需要知道 Q^n 和 P_n 是什么. 在本章的附录中, 我们会展示两大类理论, 在这些理论中, 我们可以辨认出一组非约束的 Q 和 P, 使得Dirac对易关系(7.6.19)可以从 Q 和 P 通常的正则对易关系中得出. 我们也将证明, 在这些情况下, 由非约束的 Ψ 和 Π 定义的哈密顿量也可以写成用约束变量表示的形式.

†这是本章附录A部分中所讨论的理论的一种特殊情况.

根据定义, 我们有

$$[V^\mu(\mathbf{x}),\Pi_\nu(\mathbf{y})]_{\rm P}=\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\delta^\mu_\nu\,,\qquad [V^\mu(\mathbf{x}),V^\nu(\mathbf{y})]_{\rm P}=[\Pi_\mu(\mathbf{x}),\Pi_\nu(\mathbf{y})]_{\rm P}=0\,. \tag{7.6.29}$$

因此

$$\begin{aligned}
&[V^i(\mathbf{x}),V^j(\mathbf{y})]=[V^0(\mathbf{x}),V^0(\mathbf{y})]=0\,,\\
&[V^i(\mathbf{x}),V^0(\mathbf{y})]=-\mathrm{i}m^{-2}\partial_i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,,\\
&[V^i(\mathbf{x}),\Pi_j(\mathbf{y})]=\mathrm{i}\delta^i_j\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,,\\
&[V^0(\mathbf{x}),\Pi_j(\mathbf{y})]=[V^\mu(\mathbf{x}),\Pi_0(\mathbf{y})]=0\,,\\
&[\Pi^\mu(\mathbf{x}),\Pi^\nu(\mathbf{y})]=0\,.
\end{aligned} \tag{7.6.30}$$

如果我们假定非约束变量满足通常的正则对易关系 $[V^i(\mathbf{x}),\Pi_j(\mathbf{y})]=\mathrm{i}\delta^i_j\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ 和 $[V^i(\mathbf{x}),V^j(\mathbf{y})]=[\Pi_i(\mathbf{x}),\Pi_j(\mathbf{y})]=0$, 然后利用约束计算包含 Π_0 和 V^0 的对易子, 我们会发现这二者确实相同.

7.7 场的重定义与冗余耦合*

无论作用量是什么, 质量和 S-矩阵元这样的可观测量可能与其中的一些耦合参量无关, 这样的耦合参量称作冗余参量. 这是因为这些参量的变化可以通过简单地重新定义场变量消除掉. 对场的连续重定义, 例如无限小定域变换 $\Psi^\ell(x)\to\Psi^\ell(x)+\epsilon F^\ell(\Psi(x),\partial_\mu\Psi(x),\cdots)$, 显然不影响该理论中的任何可观测量,** 尽管它将理所应当地改变场的矩阵元自身的值.

我们如何辨别一个理论中参量的某个变化能否通过场的重新定义消除呢? 连续的定域场重定义会使得作用量发生如下形式的改变

$$\delta I[\Psi]=\epsilon\sum_\ell\int\mathrm{d}^4x\,\frac{\delta I[\Psi]}{\delta\Psi^\ell(x)}\,F^\ell(\Psi(x),\partial\Psi(x),\cdots)\,. \tag{7.7.1}$$

所以耦合参量 g_i 的任意变化 δg_i, 它们在作用量中引起的形如

$$\sum_i\frac{\partial I}{\partial g_i}\delta g_i=-\epsilon\sum_\ell\int\mathrm{d}^4x\,\frac{\delta I[\Psi]}{\delta\Psi^\ell(x)}\,F^\ell(\Psi(x),\partial\Psi(x),\cdots)\,, \tag{7.7.2}$$

的变化可以通过场重定义抵消

$$\Psi^\ell(x)\to\Psi^\ell(x)+\epsilon F^\ell(\Psi(x),\partial_\mu\Psi(x),\cdots)\,,$$

因而对任何可观测量没有影响. 换句话说, 当我们改变一个参量时, 如果作用量的改变在我们使用场方程 $\delta I/\delta\Psi^\ell=0$ 后为零, 那么这个耦合常数就是冗余的.

例如, 假定我们将标量场理论的拉格朗日密度写成如下形式

$$\mathscr{L}=-\tfrac{1}{2}Z(\partial^\mu\Phi\,\partial_\mu\Phi+m^2\Phi^2)-\tfrac{1}{24}gZ^2\Phi^4\,.$$

* 本节或多或少的处在本书的发展主线之外，可以在第一次阅读时略过。

** 例如, 10.2 节中的定理证明了, 只要乘上正确的场重整化常数, 我们就可以从任意算符(如果这些算符在真空与参与反应的粒子的单粒子态之间的矩阵元不为零)的编时乘积的真空期望值中获得 S-矩阵元.

常数 Z 是冗余耦合, 这是因为

$$\frac{\partial I}{\partial Z} = \tfrac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\ \Phi(\Box\Phi - m^2\Phi - \tfrac{1}{6}gZ\Phi^3)\,,$$

当我们使用场方程时

$$\Box\Phi - m^2\Phi = \tfrac{1}{6}gZ\Phi^3\,,$$

它等于零. 另一方面, 裸质量 m 和耦合常数 g 以及 m 和 g 的函数都不是冗余的.

在这个例子中, 为了抵消 Z 带来的改变, 需要的场重定义是一个尺度的重新标度, 其中 F 正比于 Φ. (由于这个原因, Z 被称为场重整化常数.) 这是保证该作用量的一般形式不变的最一般场变换. 但是对于 12.3 节和 12.4 节考虑的更普遍的作用量, 那里的作用量包含任意个场和场导数, 我们将不得不既要考虑非线性场重定义也要考虑线性场重定义, 并且那个理论的参量中有一个无限大的子集将是冗余的.

附录　从正则对易子到Dirac括号

本附录中我们将证明, 在两类理论中, 将对易子以Dirac括号乘 i 的形式给出的公式是从一个约化变量集的通常的正则对易关系得到的.

A

假定(像在有质量矢量场 V^μ 的情况中那样), 在拉格朗日量 L 中出现的量子变量 Ψ^a 和 Π_a 可以被分成两类:* 一组独立的正则变量 Q^n (类似 $V^i(\mathbf{x})$)以及独立的正则共轭 $P_n = \partial L/\partial\dot{Q}^n$; 以及另一组 $\mathscr{Q}^r(\mathbf{x})$ (类似 V^0), 后者的时间导数不出现在拉格朗日量中. 初级约束是条件 $\chi_{1r} = 0$, 其中

$$\chi_{1r} = \mathscr{P}_r \tag{7.A.1}$$

是共轭于 $\mathscr{Q}^r$ 的变量. 次级约束从 $\mathscr{Q}^r$ 的运动方程 $0 = \partial L/\partial\mathscr{Q}^r$ 得出; 我们假定这些约束是"可解的"——即, 它们可以写成 $\chi_{2r} = 0$ 的形式, 其中 χ_{2r} 形如

$$\chi_{2r} = \mathscr{Q}^r - f^r(Q,P)\,. \tag{7.A.2}$$

(方程(7.6.5)提供了一个例子, 在那里独立的 P (这里是 Π_i)和 Q 给出了 V^0 .) 我们假定独立的 Q 和 P 满足通常的正则对易规则

$$[Q^n, P_m] = \mathrm{i}\delta^n_m\,, \qquad [Q^n, Q^m] = [P_n, P_m] = 0\,. \tag{7.A.3}$$

约束 $\chi_{2r} = 0$ 给出包含 $\mathscr{Q}$ 的对易子:

$$[\mathscr{Q}^r, Q^n] = -\mathrm{i}\frac{\partial f^r}{\partial P_n}\,, \qquad [\mathscr{Q}^r, P_n] = \mathrm{i}\frac{\partial f^r}{\partial Q^n}\,, \tag{7.A.4}$$

$$[\mathscr{Q}^r, \mathscr{Q}^s] = \mathrm{i}\Gamma^{rs}\,, \tag{7.A.5}$$

*我们再次使用一个紧凑的记法. 其中, 类似 a, n 和 r 的指标包含空间坐标 $\mathbf{x}$ 和离散指标. 重复指标代表进行求和和积分. 所有的量子变量被理解成是在同一时刻取值, 通常的时间变量都被扔掉了. $\mathscr{Q}^r$ 与 7.2 节所引入的 C^r 相同.

其中 Γ^{rs} 是 Poisson 括号

$$\Gamma^{rs} \equiv [f^r, f^s]_{\mathrm{P}} \,, \tag{7.A.6}$$

并且, 显而易见地, 所有包含 $\mathscr{P}_r$ 的对易子为零:

$$[\mathscr{P}_r, Q^n] = [\mathscr{P}_r, P_n] = [\mathscr{P}_r, \mathscr{Q}^s] = [\mathscr{P}_r, \mathscr{P}_s] = 0 \,. \tag{7.A.7}$$

现在我们来将这些对易子与 Dirac 括号进行比较. 约束函数的 Poisson 括号是

$$C_{1r,1s} \equiv [\chi_{1r}, \chi_{1s}]_{\mathrm{P}} = 0 \,, \tag{7.A.8}$$

$$C_{1r,2s} \equiv -C_{2s,1r} \equiv [\chi_{1r}, \chi_{2s}]_{\mathrm{P}} = -\delta^r_s \,, \tag{7.A.9}$$

$$C_{2r,2s} \equiv [\chi_{2r}, \chi_{2s}]_{\mathrm{P}} = [f^r(Q,P), f^s(Q,P)]_{\mathrm{P}} \equiv \Gamma^{rs} \,. \tag{7.A.10}$$

(在有质量矢量场的例子中, Γ^{rs} 为零, 但是这里的讨论在 Γ^{rs} 不为零时同样适用.) 容易看到 C-矩阵有逆

$$\begin{aligned} &(C^{-1})^{1r,1s} = \Gamma^{rs} \,, \qquad (C^{-1})^{2r,2s} = 0 \,, \\ &(C^{-1})^{1r,2s} = -(C^{-1})^{2s,1r} = \delta^r_s \,. \end{aligned} \tag{7.A.11}$$

另外, 任意函数 A 与约束函数的 Poisson 括号是

$$[A, \chi_{1r}]_{\mathrm{P}} = \frac{\partial A}{\partial \mathscr{Q}^r} \,, \qquad [A, \chi_{2r}]_{\mathrm{P}} = -\frac{\partial A}{\partial \mathscr{P}_r} - [A, f^r(Q,P)]_{\mathrm{P}} \,.$$

因此 Dirac 括号是

$$\begin{aligned} [A,B]_{\mathrm{D}} = [A,B]_{\mathrm{P}} &- \frac{\partial A}{\partial \mathscr{Q}^r}\frac{\partial B}{\partial \mathscr{P}_r} + \frac{\partial B}{\partial \mathscr{Q}^r}\frac{\partial A}{\partial \mathscr{P}_r} \\ &+ \frac{\partial A}{\partial \mathscr{Q}^r}\,\Gamma^{rs}\,\frac{\partial B}{\partial \mathscr{Q}^s} - \frac{\partial A}{\partial \mathscr{Q}^r}\,[B, f^r]_{\mathrm{P}} + [A, f^r]_{\mathrm{P}}\,\frac{\partial B}{\partial \mathscr{Q}^r} \,. \end{aligned} \tag{7.A.12}$$

现在, 如果 A 和 B 都只是独立正则变量 Q^n 和 P_n 的函数, 那么 $\partial A/\partial \mathscr{Q}^r = \partial B/\partial \mathscr{Q}^r = 0$, 所以 Dirac 括号等于 Poisson 括号. 特别地,

$$[Q^n, P_m]_{\mathrm{D}} = \delta^n_m \,, \qquad [Q^n, Q^m]_{\mathrm{D}} = [P_n, P_m]_{\mathrm{D}} = 0 \,. \tag{7.A.13}$$

当 A 是 $\mathscr{Q}^r$ 而 B 是 Q 和 P 的函数时, 方程(7.A.12)右边仅第五项有贡献. 特别地

$$[\mathscr{Q}^r, Q^n]_{\mathrm{D}} = -\frac{\partial f^r}{\partial P_n} \,, \qquad [\mathscr{Q}^r, P_n]_{\mathrm{D}} = +\frac{\partial f^r}{\partial Q^n} \,. \tag{7.A.14}$$

当 A 和 B 都是 $\mathscr{Q}$ 时, 我们仅有第四项

$$[\mathscr{Q}^r, \mathscr{Q}^s]_{\mathrm{D}} = \Gamma^{rs} \,. \tag{7.A.15}$$

最后, 当 A 是 $\mathscr{P}_r$ 而 B 任意时, 我们仅有第一项和第三项, 它们相互抵消:

$$[\mathscr{P}_r, B]_{\mathrm{D}} = [\mathscr{P}_r, B]_{\mathrm{P}} + \frac{\partial B}{\partial \mathscr{Q}^r} = 0 \,. \tag{7.A.16}$$

比较方程(7.A.13)—(7.A.16)与方程(7.A.3)—(7.A.7), 这表明在任何情况下, 对易子等于 Dirac 括号乘以 i. 这是我们唯一期待的, 这是因为, 正如 7.6 节所评述的, 所有包含约束函数的 Dirac 括号为零, 所以, 包含 $\mathscr{Q}^r$ 和(或) $\mathscr{P}_s$ 的 Dirac 括号是通过利用约束方程将 $\mathscr{Q}^r$ 和(或) $\mathscr{P}_s$ 用独立的 Q 和 P 表示而给出的.

B

接下来考虑这样的情况, 其中的约束取为加在 Ψ^a 上的条件 $\chi_{1r}(\Psi)=0$, 以及数量相同的加在 Π_a 上的独立的条件 $\chi_{2r}(\Pi)=0$, 前者可以通过将其表示成更小的一组非约束变量 Q^n 的形式解出, 后者可以通过将 Π_a 表示成更小的一组非约束 P_n 的形式解出. (我们将在下一章看到一个例子, 其中加在 Ψ^a 上的约束是用来消除第一类约束的规范固定条件, 而加在 Π_a 上的约束是第二类约束, 它源于第一类约束要与场方程一致的要求.) 我们假定非约束变量满足通常的正则对易关系 $[Q^n,P_m]=\mathrm{i}\delta^n_m$, $[Q^n,Q^m]=[P_n,P_m]=0$. 受约束的动量与不受约束的动量的关系为

$$P_n=\frac{\partial L}{\partial\dot{Q}^n}=\frac{\partial L}{\partial\dot{\Psi}^b}\frac{\partial\Psi^b}{\partial Q^n}=\Pi_b\frac{\partial\Psi^b}{\partial Q^n}\,. \tag{7.A.17}$$

由此得出

$$[\Psi^a,\Pi_b]\frac{\partial\Psi^b}{\partial Q^n}=[\Psi^a,P_n]=\mathrm{i}\frac{\partial\Psi^a}{\partial Q^n}$$

或者, 换种形式,

$$\{[\Psi^a,\Pi_b]-\mathrm{i}\delta^a_b\}\frac{\partial\Psi^b}{\partial Q^n}=0\,. \tag{7.A.18}$$

现在, 对于所有的 Q, $\Psi^a=\Psi^a(Q)$ 满足约束 $\chi_{1r}(\Psi)=0$, 所以

$$\frac{\partial\chi_{1r}}{\partial\Psi^b}\frac{\partial\Psi^b}{\partial Q^n}=0\,. \tag{7.A.19}$$

进一步, 矢量 $(V_r)_b\equiv\partial\chi_{1r}/\partial\Psi^b$ 构成了正交于所有矢量 $(U_n)^b\equiv\partial\Psi^b/\partial Q^n$ 的一个完全集, 这是因为, 如果存在某个其它矢量 V_b, 它对所有的 n 有 $V_b(U_n)^b=0$, 那么将会有加在 Ψ^a 上的额外约束. 因此方程(7.A.18)意味着

$$[\Psi^a,\Pi_b]=\mathrm{i}\delta^a_b+\mathrm{i}c^a_r\frac{\partial\chi_{1r}}{\partial\Psi^b} \tag{7.A.20}$$

其中 c^a_r 是未知常数. 为了确定这些常数, 我们利用其它约束, 即 $\chi_{2r}(\Pi)=0$. 由此得出

$$0=[\Psi^a,\chi_{2r}(\Pi)]=\mathrm{i}[\Psi^a,\Pi_b]\frac{\partial\chi_{2r}(\Pi)}{\partial\Pi_b}\,.$$

利用方程(7.A.20), 我们就有

$$\frac{\partial\chi_{2r}(\Pi)}{\partial\Pi_a}=-c^a_s\frac{\partial\chi_{1s}(\Psi)}{\partial\Psi^b}\frac{\partial\chi_{2r}(\Pi)}{\partial\Pi_b}\,. \tag{7.A.21}$$

我们可以看出与 c^a_s 相乘的因子就是 Poisson 括号

$$\frac{\partial\chi_{1s}(\Psi)}{\partial\Psi^b}\frac{\partial\chi_{2r}(\Pi)}{\partial\Pi_b}=[\chi_{1s},\chi_{2r}]_{\mathrm{P}}\equiv C_{1s,2r}\,.$$

另外, 由于 χ_{1s} 只依赖于 Ψ 而 χ_{2r} 只依赖于 Π, 在约束的 Poisson 括号中只有它们不为零, 所以

$$C_{1r,1s}=C_{2r,2s}=0\,.$$

因此方程(7.A.21)可以写成

$$\frac{\partial\chi_N}{\partial\Pi_a}=-c^a_s\,C_{1s,N} \tag{7.A.22}$$

其中 N 取遍所有约束函数. 对于第二类约束, 它具有唯一解

$$c_s^a = -\frac{\partial \chi_N}{\partial \Pi_a}(C^{-1})^{N,1s} = -\frac{\partial \chi_{2r}}{\partial \Pi_a}(C^{-1})^{2r,1s} . \tag{7.A.23}$$

在方程(7.A.20)中使用上式给出

$$[\Psi^a, \Pi_b] = \mathrm{i}\left[\delta_b^a - \frac{\partial \chi_{2r}}{\partial \Pi_a}(C^{-1})^{2r,1s}\frac{\partial \chi_{1s}}{\partial \Psi^b}\right] . \tag{7.A.24}$$

Ψ^a 和 Π_b 与约束函数的 Poisson 括号是

$$\begin{aligned} [\Psi^a, \chi_{1r}]_{\mathrm{P}} &= 0 , \qquad [\Psi^a, \chi_{2r}]_{\mathrm{P}} = \frac{\partial \chi_{2r}}{\partial \Pi_a} , \\ [\chi_{1r}, \Pi_b]_{\mathrm{P}} &= \frac{\partial \chi_{1r}}{\partial \Psi^b} , \qquad [\chi_{2r}, \Pi_b]_{\mathrm{P}} = 0 , \end{aligned} \tag{7.A.25}$$

所以方程(7.A.24)右边括号中的量是 Dirac 括号

$$[\Psi^a, \Pi_b] = \mathrm{i}[\Psi^a, \Pi_b]_{\mathrm{D}} , \tag{7.A.26}$$

这正是所要证明的. 另外, 容易看到, 由于 C^{-1} 没有 11 分量或 22 分量, 其余的 Dirac 括号是

$$[\Psi^a, \Psi^b]_{\mathrm{D}} = [\Pi_a, \Pi_b]_{\mathrm{D}} = 0 , \tag{7.A.27}$$

所以, 非常直接地有

$$[\Psi^a, \Psi^b] = \mathrm{i}[\Psi^a, \Psi^b]_{\mathrm{D}} , \qquad [\Pi_a, \Pi_b] = \mathrm{i}[\Pi_a, \Pi_b]_{\mathrm{D}} . \tag{7.A.28}$$

* * *

除了对易规则, 我们还需要哈密顿量的一个显式表达式. 通常的正则体系告诉我们取

$$H = P_n\dot{Q}^n - L , \tag{7.A.29}$$

求和取遍独立的正则变量. 在附录所考虑的两类理论中, 哈密顿量可以用约束变量的形式写成

$$H = \Pi_a\dot{\Psi}^a - L . \tag{7.A.30}$$

对于 A 类理论, 这是平庸的; 对 a 的求和取遍了所有的 $\Psi^n = Q^n$ 和 $\Pi_n = P_n$ 是独立正则变量的 n 值, 以及所有 $\Pi_r = \mathscr{P}_r = 0$ 的 r 值. 对于 B 类理论, 我们注意到方程(7.A.17)给出

$$P_n\dot{Q}^n = \Pi_b\frac{\partial \Psi^b}{\partial Q^n}\dot{Q}^n = \Pi_b\dot{\Psi}^b$$

它又一次给出了方程(7.A.30).

习题

1. 考虑一组实标量场 Φ^n 的理论, 拉格朗日密度是 $\mathscr{L}=-\frac{1}{2}\sum_{m\,n}\partial_\mu\Phi^n\partial^\mu\Phi^m f_{nm}(\Phi)$, 其中 $f_{nm}(\Phi)$ 是场的任意非奇异实矩阵函数. (这被称为非线性 σ-模型.) 对这个理论做正则量子化. 在相互作用绘景中推导出相互作用 $V[\phi(t),\dot{\phi}(t)]$.

2. 考虑一组实标量场 Φ^n 和 Dirac 场 Ψ^i 的理论, 拉格朗日密度是 $\mathscr{L}=\mathscr{L}_0+\mathscr{L}_1$, 其中 $\mathscr{L}_0$ 是通常的自由场拉格朗日密度, $\mathscr{L}_1$ 是包含 Φ^n 和 Ψ^i 但不包含场导数的相互作用项. 推导出对称能动量张量 $\Theta^{\mu\nu}$ 的显式表达式.

3. 对习题 2 所描述的理论, 假设拉格朗日密度在整体无限小对称变换 $\delta\Phi^n=\mathrm{i}\epsilon\sum_m t^n{}_m\Phi^m$ 和 $\delta\Psi^i=\mathrm{i}\epsilon\sum_j\tau^i{}_j\Psi^j$ 下不变. 推导出与这个对称性对应的守恒流的显式表达式.

4. 考虑复标量场 Φ 和实矢量场 V^μ 的理论, 拉格朗日密度是

$$\mathscr{L}=-(D_\mu\Phi)^\dagger D^\mu\phi-\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\tfrac{1}{2}m^2V_\mu V^\mu-\mathscr{H}(\Phi^\dagger\Phi)\,,$$

其中 $D_\mu\equiv\partial_\mu-\mathrm{i}gV_\mu$, $F_{\mu\nu}\equiv\partial_\mu V_\nu-\partial_\nu V_\mu$, 而 $\mathscr{H}$ 是任意函数. 对这个理论做正则量子化. 在相互作用绘景中推导出相互作用.

5. 对习题 4 中的理论, 推导出对称能动量张量 $\Theta^{\mu\nu}$ 的显式表达式, 并推导出与对称性 $\delta\Phi=\mathrm{i}\epsilon\Phi$, $\delta V^\mu=0$ 对应的守恒流的显式表达式.

6. 证明 Dirac 括号满足 Jacobi 恒等式(7.6.23).

7. 证明, Dirac 括号与如何选择刻画相空间的给定子流形的约束函数 χ_N 无关.

参考文献

[1] H. B. G. Casimir, *Proc. K. Ned. Akad. Wet.* **51**, 635 (1948); M. J. Spaarnay, *Nature* **180**, 334 (1957).

[2] F. Belinfante, *Physica* **6**, 887 (1939); 另见L. Rosenfeld, *Mémoires de l'Academie Roy. Belgique* **6**, 30 (1930).

[3] 可参看 S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972): Chapter 12.

[4] 可参看 J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity* (Princeton Univercity Press, Princeton 1983) 以及那里引用的原始文献.

[5] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics* (Yeshiva University, New York, 1964). 另见 P. A. M. Dirac, *Can. J. Math.* **2**, 129 (1950); *Proc. Roy. Soc. London*, ser. A, **246**, 326 (1958); P. G. Bergmann, *Helv. Phys. Acta Suppl.* IV, 79 (1956).

[6] T. Maskawa and H. Nakajima, *Prog. Theor. Phys.* **56**, 1295 (1976). 我很感谢 J. Feinberg 让我注意到了这个文献.

第 8 章　电动力学

引入量子电动力学的最初方式是理所当然地接受 Maxwell 的经典电磁理论, 并量子化它. 读者可能不会惊讶于本书选择了一条不同的道路. 首先, 从建立有自旋无质量粒子的量子理论时遇到的特殊困难中, 我们推断出规范不变原理的必要性, 然后, 再从规范不变原理推导出电动力学的主要特征. 在此之后, 我们将按照一个更加常规的现代方法, 在这个方法中, 规范不变性将被作为出发点, 并用它推断出存在描述单位自旋无质量粒子的矢势.

现在谈论这两个顺序中的哪一个对应着自然界本身的逻辑顺序还为时尚早. 大多数的理论家倾向于取规范对称性作为出发点, 但是在现代弦理论中[1], 走的是另一条道路; 首先注意到弦的简正模中有一个零质量的单位自旋态, 然后从此推断出描述这类粒子的有效场论的规范不变性. 总而言之, 我们将会看到, 从两种方法都可以推导出 Maxwell 理论的量子版本, 这一直是一个成功量子场论的经典范例.

8.1　规范不变性

在构造螺旋度为 ± 1 的无质量粒子的协变自由场时遇到了一些问题, 我们从回顾这些问题开始. 我们在 5.9 节看到, 对这类粒子而言, 构造一个反对称张量自由场 $f_{\mu\nu}(x)$ 是没有困难的. 这个场可以通过熟悉的关系

$$f_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu a_\nu(x) - \partial_\nu a_\mu(x) \tag{8.1.1}$$

表示成 4-势 $a_\mu(x)$ 的形式, 而 $a_\mu(x)$ 由方程(5.9.23)给定. 然而, 方程(5.9.31)表明, 仅在相差一个规范变换的意义下, $a_\mu(x)$ 是按照一个 4-矢变换的

$$U_0(\Lambda) a_\mu(x) U_0^{-1}(\Lambda) = \Lambda_\mu{}^\nu a_\nu(\Lambda x) + \partial_\mu \Omega(x, \Lambda)\,. \tag{8.1.2}$$

事实上, 对螺旋度为 ± 1 的情况, 无法用产生湮灭算符的线性组合构造出真正的 4-矢. 这是理解有质量矢量场的传播子

$$\Delta_{\mu\nu}(x, y) = (2\pi)^{-4} \int \mathrm{d}^4 q\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot(x-y)}\, \frac{\eta_{\mu\nu} + q_\mu q_\nu / m^2}{q^2 + m^2 - \mathrm{i}\epsilon}$$

在 $m = 0$ 处出现奇点的一个途径, 它妨碍了我们通过取 $m \to 0$ 的极限, 从自旋 1 有质量粒子的理论来得到螺旋度 ± 1 的无质量粒子的理论.

通过要求所有相互作用只包含* $F^{\mu\nu}(x) \equiv \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$ 以及它的导数, 而不包含 $A_\mu(x)$, 我们可以避免这些问题, 但这不是最一般的可能性, 也不是自然中的真实情况. 取代不让 $A_\mu(x)$ 出现在作用量中, 我们转而要求作用量的物质部分 I_M 和它与辐射的相互作用部分(至少在物质场满足场方程时)在一般规范变换下

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \epsilon(x) \tag{8.1.3}$$

*因为电磁势矢量以及场强张量是相互作用场, 我们现在用 A_μ 和 $F_{\mu\nu}$ 表示电磁势矢量以及场强张量.

不变, 从而使得方程(8.1.2)中的额外项没有效果. 物质作用量在变换(8.1.3)下的变化可以写成

$$\delta I_M = \int \mathrm{d}^4x \, \frac{\delta I_M}{\delta A_\mu(x)} \partial_\mu \epsilon(x) \, . \tag{8.1.4}$$

因此, I_M 的 Lorentz 不变性要求

$$\partial_\mu \frac{\delta I_M}{\delta A_\mu(x)} = 0 \, . \tag{8.1.5}$$

如果 I_M 除了物质场以外只包含 $F_{\mu\nu}(x)$ 和它的导数, 这平庸地成立. 在这种情况下

$$\frac{\delta I_M}{\delta A_\mu(x)} = 2\partial_\nu \frac{\delta I_M}{\delta F_{\mu\nu}(x)} \, .$$

但如果 I_M 包含 $A_\mu(x)$ 本身, 那么方程(8.1.5)就是附加在理论上的一个不平庸约束.

现在, 什么样的一类理论能提供一个与场 $A^\mu(x)$ 耦合的守恒流呢? 我们在 7.3 节曾看到, 作用量的无限小内部对称性暗示存在守恒流. 特别地, 如果变换[**]

$$\delta \Psi^\ell(x) = \mathrm{i}\epsilon(x) \, q_\ell \Psi^\ell(x) \tag{8.1.6}$$

在 ϵ 为常数时保持作用量不变, 那么对于一般的无限小函数 $\epsilon(x)$, 物质作用量的变换一定取如下形式

$$\delta I_M = -\int \mathrm{d}^4x \, J^\mu(x) \partial_\mu \epsilon(x) \, . \tag{8.1.7}$$

当物质场满足它们的场方程时, 物质场的作用量对 Ψ^ℓ 的任何变分都是稳定的, 于是在这种情况下, (8.1.7)必须为零, 所以

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0 \, . \tag{8.1.8}$$

特别地, 我们在 7.3 节看到, 如果 I_M 是 Ψ^ℓ 和 $\partial_\mu \Psi^\ell$ 的某个函数 $\mathscr{L}_M$ 的积分, 那么守恒流由下式给出[†]

$$J^\mu = -\mathrm{i} \sum_\ell \frac{\partial \mathscr{L}_M}{\partial(\partial_\mu \Psi^\ell)} q_\ell \Psi^\ell \, ,$$

并且这生成了变换(8.1.6), 也就是说

$$[Q, \Psi^\ell(x)] = -q_\ell \Psi^\ell(x) \, , \tag{8.1.9}$$

其中 Q 是与时间无关的荷算符

$$Q = \int \mathrm{d}^3x \, J^0 \, . \tag{8.1.10}$$

因此, 通过用矢量场 A_μ 和守恒流 J^μ 耦合, 我们可以构造出一个 Lorentz 不变的理论, 这意味着取 $\delta I_M / \delta A_\mu(x)$ 正比于 $J^\mu(x)$. 任何比例常数可以被吸收进荷 q_ℓ 的整体标度的定义中, 所以我们可以就令这些量相等:

$$\frac{\delta I_M}{\delta A_\mu(x)} = J^\mu(x) \, . \tag{8.1.11}$$

[**]因为现在所取的场变换矩阵是对角的, 在这里对场指标的求和使用求和约定是不方便的, 所以在方程(8.1.6)中没有对 ℓ 进行求和.

[†]这里的 Ψ^ℓ 理解成取遍 A_μ 以外所有独立的场. 我们用大写的 Ψ 表示它们是 Heisenberg 绘景的场, 它对时间的依赖包含相互作用的影响. 当然, 这个 Ψ^ℓ 不要与态矢或波函数混淆.

电荷守恒只允许我们用某个电荷的值确定所有电荷的值, 通常取电子电荷, 记为$-e$. 方程(8.1.11)给出的正是e值的确切含义.‡

要求(8.1.11)可以重新表述为一个不变性原理:[1a] 物质作用量在如下联合变换下不变

$$\delta A_\mu(x) = \partial_\mu \epsilon(x)\,, \tag{8.1.12}$$

$$\delta \Psi_\ell(x) = \mathrm{i}\epsilon(x) q_\ell \Psi_\ell(x)\,. \tag{8.1.13}$$

这类$\epsilon(x)$为任意函数的对称性被称为定域对称性, 或者第二类规范不变性. 而在ϵ为常数的变换下的对称性被称为整体对称性, 或者第一类规范对称性. 现在已经知道了几个精确的定域对称性, 但唯一的一个纯粹的整体对称性却好像是由其它原理偶然地给了出来. (见12.5节.)

我们还没有讨论过光子本身的作用量. 作为一个猜测, 我们将它取为有质量矢量场的形式, 但令$m = 0$:

$$I_\gamma = -\tfrac{1}{4}\int \mathrm{d}^4x\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,. \tag{8.1.14}$$

这与经典电动力学中所采用的作用量相同, 但是真正的理由是(在相差一个常数的意义下)它是唯一的不含高阶导数且是$F_{\mu\nu}$二次型的规范不变泛函. 另外, 我们将会在下一节看到, 它给出了一个自洽的量子理论. 如果作用量中含有任何高阶导数项和(或)$F_{\mu\nu}$的高阶项, 它们可以被归入所谓的物质作用量. 利用方程(8.1.11)和(8.1.14), 电磁场的场方程现在变成

$$0 = \frac{\delta}{\delta A_\nu}[I_\gamma + I_M] = \partial_\mu F^{\mu\nu} + J^\nu\,. \tag{8.1.15}$$

可以看出, 它们就是通常带有流J^ν的非齐次Maxwell方程. 还存在另一组齐次Maxwell方程

$$0 = \partial_\mu F_{\nu\epsilon} + \partial_\epsilon F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\epsilon\mu}\,, \tag{8.1.16}$$

它可以从定义$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$直接导出.

在上面的讨论中, 我们从存在无质量自旋1粒子出发, 然后推断出了物质作用量在定域变换(8.1.12)和(8.1.13)下不变. 像往常那样, 也可以从相反的方向来推导. 就是说, 从一个整体内部对称性出发

$$\delta \Psi^\ell(x) = \mathrm{i}\epsilon q_\ell \Psi^\ell(x) \tag{8.1.17}$$

后面要知道的就是为了将整体对称性提升为定域对称性

$$\delta \Psi^\ell(x) = \mathrm{i}\epsilon(x) q_\ell \Psi^\ell(x)\,, \tag{8.1.18}$$

我们必须要做什么. 如果拉格朗日密度$\mathscr{L}$只依赖于场$\Psi^\ell(x)$而不依赖它们的导数, 那么ϵ是不是常数就没有差别; ϵ为常数有不变性就意味着ϵ是时空位置的函数时也有不变性. 但是所有真实的拉格朗日量都包含场导数, 并且这里有这样一个问题, 场导数的变换与场本身的变换并不相同:

$$\delta\partial_\mu \Psi^\ell(x) = \mathrm{i}\epsilon(x) q_\ell \partial_\mu \Psi^\ell(x) + \mathrm{i} q_\ell \Psi^\ell(x)\partial_\mu \epsilon(x)\,. \tag{8.1.19}$$

为了抵消这里的第二项, 我们"创造"出一个矢量场$A_\mu(x)$, 要求它的变换规则是

$$\delta A_\mu(x) = \partial_\mu \epsilon(x) \tag{8.1.20}$$

‡当然, 仅在我们定义了如何归一化$A_\mu(x)$后, 方程(8.1.11)才能确定e的定义. 电磁场归一化的问题将在10.4节进行讨论.

并要求拉格朗日密度对 $\partial_\mu\Psi^\ell$ 和 A_μ 的依赖只能是如下的组合

$$D_\mu\Psi^\ell \equiv \partial_\mu\Psi^\ell - \mathrm{i}q_\ell A_\mu\Psi^\ell\,, \tag{8.1.21}$$

它的变换与 Ψ^ℓ 的变换类似

$$\delta D_\mu\Psi^\ell(x) = \mathrm{i}\epsilon(x)q_\ell D_\mu\Psi^\ell(x)\,. \tag{8.1.22}$$

一个只用 Ψ^ℓ 和 $D_\mu\Psi^\ell$ 构造出的物质拉格朗日密度 $\mathscr{L}_M(\Psi, D\Psi)$, 如果它在 ϵ 为常数的变换(8.1.18), (8.1.20)下不变, 那么当 $\epsilon(x)$ 为任意函数时, 它也是不变的. 对于这类形式的拉格朗日量, 我们有

$$\frac{\delta I_M}{\delta A_\mu} = \sum_\ell \frac{\partial\mathscr{L}_M}{\partial D_\mu\Psi^\ell}(-\mathrm{i}q_\ell\Psi^\ell) = -\mathrm{i}\sum_\ell \frac{\partial\mathscr{L}_M}{\partial\,\partial_\mu\Psi^\ell}q_\ell\Psi^\ell\,,$$

这与方程(8.1.11)是相同的. (我们也可以让 $\mathscr{L}_M$ 含有 $F_{\mu\nu}$ 和它的导数.) 从这个观点来看, A_μ 所描述的粒子是无质量粒子是规范不变性的结果而不是假定: 拉格朗日密度中如果出现 $-\frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu$, 那么这一项将破坏规范对称性.

8.2 约束与规范条件

如果我们像上一章对有质量粒子的各种理论所做的那样来量子化电动力学, 这个理论的几个性质会妨碍我们做到这一点. 像往常一样, 我们可以将电磁矢势的正则共轭定义为

$$\Pi^\mu \equiv \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)}\,. \tag{8.2.1}$$

通常的量子化规则会给出

$$[A_\mu(\mathbf{x},t), \Pi^\nu(\mathbf{y},t)] = \mathrm{i}\delta_\mu^\nu\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,.$$

但在这里这是不可能的, 因为 A_μ 和 Π^ν 要服从数个约束.

第一个约束产生的原因是拉格朗日密度中不含[*] A_0 的时间导数, 因此

$$\Pi^0(x) = 0\,. \tag{8.2.2}$$

因为这个约束是从拉格朗日量的结构直接得出的, 它被称为*初级约束*. 这里还有*次级约束*, 它来自于服从初级约束的量要满足的场方程:[**]

$$\partial_i\Pi^i = -\partial_i\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial F_{i0}} = -\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_0} = -J^0\,, \tag{8.2.3}$$

由于 $F_{00}=0$, 所以时间导数项被扔掉了. 尽管物质拉格朗日量一般会依赖于 A^0, 但电荷密度只依赖于正则物质场[†] Q^n 和它们的正则共轭 P_n:

$$J^0 = -\mathrm{i}\sum_\ell \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_0\Psi^\ell)}q_\ell\Psi^\ell = -\mathrm{i}\sum_n P_n q_n Q^n\,. \tag{8.2.4}$$

[*] 对于 $\mathscr{L}_\gamma = -F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/4$, 我们有 $\partial\mathscr{L}_\gamma/\partial(\partial_0 A_\mu) = -F^{0\mu}$, 因为 $F^{\mu\nu}$ 是反对称的, 所以它在 $\mu=0$ 时为零. 对于只包含 Ψ^ℓ 和 $D_\mu\Psi^\ell$ 的物质拉格朗日量 $\mathscr{L}_M$, (8.1.21) 的处理告诉我们 $\mathscr{L}_M$ 不依赖任何 A^ν 的任何导数. 即使物质作用量也依赖 $F_{\mu\nu}$, $\partial\mathscr{L}_M/\partial(\partial_\nu A_\mu)$ 对 μ 和 ν 也将是反对称的, 因此在 $\mu=\nu=0$ 时为零.

[**] 像通常那样, i, j 等取遍值 $1, 2, 3$.

[†] 由于字母不够用了, 我在这里不得不采用与上一章不同的记法. 符号 Q^n 和 P_n 现在分别留给正则物质场以及它们的正则共轭, 正则电磁场和它的正则共轭是 A_i 和 Π_i.

因此方程(8.2.3)是正则变量之间的泛函关系. 方程(8.2.2)和(8.2.3)都与通常的假定$[A_\mu(\mathbf{x},t),\Pi^\nu(\mathbf{y},t)]$ $=\mathrm{i}\delta_\mu^\nu\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ 和 $[Q^n(\mathbf{x},t),\Pi^\nu(\mathbf{y},t)]=[P_n(\mathbf{x},t),\Pi^\nu(\mathbf{y},t)]=0$ 不一致.

在有质量矢量场的理论中, 我们遇到过类似的问题. 在那里, 我们发现了处理它的两个等价方式: 一种是通过Dirac括号的方法, 一种更直接些, 仅把 A_i 和 Π^i 处理为正则变量, 解类似(8.2.3)的方程, 用这些变量表示 A^0. 显然这里我们不能使用Dirac括号; 约束函数 χ 在这里是 Π^0 和 $\partial_i\Pi_i+J^0$ (与 $\partial_i\Pi_i-m^2A^0+J^0$ 相比)以及那些Poisson括号显然为零的量. 在Dirac的术语中, 约束(8.2.2)和(8.2.3)是*第一类约束*. 我们无法将 A^0 作为动力学变量然后通过用其它变量解出它的方式来消除它. 方程(8.2.3)仅是个初始条件, 而并不是给出所有时刻的A^0; 如果方程(8.2.3)在某一时刻成立, 那么它在所有时刻都成立, 这是因为(利用其它 A^i 场的场方程)我们有

$$\begin{aligned}\partial_0\left[\partial_i\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial F_{i0}}-J^0\right]&=-\partial_i\partial_0\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial F_{0i}}-\partial_0J^0\\&=+\partial_i\partial_j\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial F_{ji}}-\partial_iJ_i-\partial_0J^0\end{aligned}$$

然后流守恒条件给出

$$\partial_0\left[\partial_i\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial F_{i0}}-J^0\right]=0\,. \tag{8.2.5}$$

并不意外的是, 即便只有三个场方程, 但我们仍有 A^μ 的4个分量, 这是因为这个理论拥有一个定域对称性, 这使得在原则上不可能从场在某一时刻的值或变化率推断出它们在其它任意时刻的值. 给定场方程的任意解 $A_\mu(\mathbf{x},t)$, 我们总能找到另一解 $A_\mu(\mathbf{x},t)+\partial_\mu\epsilon(\mathbf{x},t)$, 这个解在 $t=0$ 时与原解有相同的值和时间导数(通过选择 ϵ 使它的一阶导数和二阶导数在该处为零), 但在后来的时间里, 它与 $A_\mu(\mathbf{x},t)$ 不同.

由于 $A_\mu(\mathbf{x},t)$ 这个部分的任意性, 对 A_μ (或者, 在有限质量时, 对 $\mathbf{A}$)无法直接使用正则量子化手续. 在解决这一困难的数个方法中, 有两个是特别有用的. 一个是现代的Lorentz不变的BRST-量子化方法, 这将在卷II中进行讨论. 这里讲的是另一个方法, 它利用理论的规范不变性"选择一个规范". 就是说, 我们做一个有限的规范变换

$$A_\mu(x)\to A_\mu(x)+\partial_\mu\lambda(x)\,,\qquad \Psi_\ell(x)\to\exp\Big(\mathrm{i}q_\ell\lambda(x)\Big)\Psi_\ell(x)$$

在 $A_\mu(x)$ 上加上一个条件, 使得我们可以使用正则量子化方法. 下面是几个在各种应用中使用的规范:[‡,c]

Lorenz (或 Landau)规范:	$\partial_\mu A^\mu=0$
Coulomb 规范:	$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}=0$
瞬时规范:	$A^0=0$
轴规范:	$A^3=0$
幺正规范:	Φ 为实

正则量子化步骤在轴规范或Coulomb规范下最容易处理, 但是Coulomb规范显然是显式旋转不变的, 而轴向规范却不是, 所以我们在这里采用Coulomb规范.[2]

[‡]这里的 Φ 是任何 $q\neq0$ 的复标量场; 当规范对称性被 Φ 的非零真空期望值自发破缺时, 就使用这个规范条件.

[c]原书此处的Lorenz规范误植为Lorentz规范, 前者是丹麦物理学家Ludvig Lorenz (路德维希·洛伦茨), 后者是荷兰物理学家Hendrik Lorentz (亨德里克·洛伦兹). ——译者注

为了验证这是可能的, 注意到, 如果 A^μ 不满足 Coulomb 规范条件, 那么只要我们选择 λ 使得 $\nabla^2\lambda = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}$, 规范变换后的场 $A^\mu + \partial^\mu\lambda$ 就会满足这个条件. 从现在起, 我们假定已经做了这个变换, 使得

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = 0\,. \tag{8.2.6}$$

从现在起, 只考虑物质的拉格朗日量 $\mathscr{L}_M$ 可以依赖物质场, 物质场的时间导数以及 A^μ, 但不依赖 A^μ 的导数的理论, 这将方便我们的讨论. (标量场和 Dirac 场电动力学的标准理论就有这种类型的拉格朗日量.) 那么拉格朗日量中唯一依赖 $F_{\mu\nu}$ 的项是动能项 $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, 并且约束方程(8.2.3)变成

$$-\partial_i F^{i0} = J^0\,. \tag{8.2.7}$$

加上 Coulomb 规范条件(8.2.6), 这给出

$$-\nabla^2 A^0 = J^0\,, \tag{8.2.8}$$

解这个方程, 给出

$$A^0(\mathbf{x},t) = \int \mathrm{d}^3y\,\frac{J^0(\mathbf{y},t)}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\,. \tag{8.2.9}$$

剩余的自由度是 A^i, 其中 $i=1,2,3$, 它们服从规范条件 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}=0$.

正如前面所提到的, 电荷密度只依赖正则物质场 Q^n 与它们的正则共轭 P_n, 所以方程(8.2.9)表示了辅助场 A^0 的一个显式解.

8.3 Coulomb 规范下的量子化

在 Coulomb 规范下正则量子化电动力学还存在一个障碍. 即使在我们用方程(8.2.9)从正则变量中消除 A^0 (和 Π_0)后, 我们仍然无法对 A^i 和 Π_i 使用通常的正则对易关系, 这是因为在这些变量上还存在两个约束.* 其中一个是 Coulomb 规范条件

$$\chi_{1\mathbf{x}} \equiv \partial_i A^i(\mathbf{x}) = 0\,. \tag{8.3.1}$$

另一个是次级约束方程(8.2.3), 它要求

$$\chi_{2\mathbf{x}} \equiv \partial_i \Pi^i(\mathbf{x}) + J^0(\mathbf{x}) = 0\,. \tag{8.3.2}$$

这两个约束均与通常的对易关系 $[A_i(\mathbf{x}),\Pi_j(\mathbf{y})] = \mathrm{i}\delta_{ij}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$不相容, 这是因为无论是 $\partial/\partial x^i$ 还是 $\partial/\partial y^i$, 它们作用在通常的对易关系的右边都不给出零.

这些约束属于第二类约束, 对于这样的约束, 对对易关系有一个通用的处理, 这个处理在 7.6 节讨论过. 注意到约束函数有 Poisson 括号

$$\begin{aligned} C_{1\mathbf{x},2\mathbf{y}} &= -C_{2\mathbf{y},1\mathbf{x}} \equiv [\chi_{1\mathbf{x}},\chi_{2\mathbf{y}}]_{\mathrm{P}} = -\nabla^2\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,,\\ C_{1\mathbf{x},1\mathbf{y}} &\equiv [\chi_{1\mathbf{x}},\chi_{1\mathbf{y}}]_{\mathrm{P}} = 0\,,\\ C_{2\mathbf{x},2\mathbf{y}} &\equiv [\chi_{2\mathbf{x}},\chi_{2\mathbf{y}}]_{\mathrm{P}} = 0\,, \end{aligned} \tag{8.3.3}$$

*本节中, i,j 等取遍值 $1,2,3$. 我们继续将所有算符都取在同一时刻, 并略去时间变量.

这里对任意函数 U 和 V 有,

$$[U,V]_{\mathrm{P}} \equiv \int \mathrm{d}^3x \left[\frac{\delta U}{\delta A^i(\mathbf{x})}\frac{\delta V}{\delta \Pi_i(\mathbf{x})} - \frac{\delta V}{\delta A^i(\mathbf{x})}\frac{\delta U}{\delta \Pi_i(\mathbf{x})}\right] .$$

"矩阵" C_{NM} 是非奇异的, 由此认出它们是第二类约束. 另外, 场变量 A^i 可以用独立的正则变量表示, 例如, 可以取 $Q_{1\mathbf{x}} = A^1(\mathbf{x})$, $Q_{2\mathbf{x}} = A^2(\mathbf{x})$, 而 A^3 由方程(8.3.1)的解给定:

$$A^3(x) = -\int^{x^3} \mathrm{d}s\, [\partial_1 A^1(x^1,x^2,s) + \partial_2 A^2(x^1,x^2,s)] .$$

利用方程(8.3.2), A^i 的正则共轭 Π_i 同样可以用 $Q_{1\mathbf{x}}$ 和 $Q_{2\mathbf{x}}$ 的正则共轭 $P_{1\mathbf{x}}$ 和 $P_{2\mathbf{x}}$ 表示. 在这种情况下, 上一章附录的 B 部分告诉我们, 如果独立变量 $Q_{1\mathbf{x}}$, $Q_{2\mathbf{x}}$, $P_{1\mathbf{x}}$ 和 $P_{2\mathbf{x}}$ 满足通常的对易关系, 那么受约束的变量与它们正则共轭的对易子由相应的 Dirac 括号(7.6.20)(除一个因子 i 外)给出. 这一处理有一个巨大的优势, 它使我们不必使用将非独立变量表示成独立变量的显式表达式.

为了计算 Dirac 括号, 我们注意到矩阵 C 有逆

$$\begin{aligned}
&(C^{-1})_{1\mathbf{x},2\mathbf{y}} = -(C^{-1})_{2\mathbf{y},1\mathbf{x}} = -\int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{\mathbf{k}^2} = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} ,\\
&(C^{-1})_{1\mathbf{x},1\mathbf{y}} = (C^{-1})_{2\mathbf{x},2\mathbf{y}} = 0 .
\end{aligned} \tag{8.3.4}$$

另外, A^i 和 Π_i 与约束函数之间非零的 Poisson 括号是

$$[A^i(\mathbf{x}), \chi_{2\mathbf{y}}]_{\mathrm{P}} = -\frac{\partial}{\partial x^i}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

以及

$$[\Pi_i(x), \chi_{1\mathbf{y}}]_{\mathrm{P}} = +\frac{\partial}{\partial x^i}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) .$$

因此, 根据方程(7.6.19)与(7.6.20), 等时对易子是

$$\begin{aligned}
&\Big[A^i(\mathbf{x}), \Pi_j(\mathbf{y})\Big] = \mathrm{i}\delta^i_j\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \mathrm{i}\frac{\partial^2}{\partial x^j\partial x^i}\left(\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\right) ,\\
&\Big[A^i(\mathbf{x}), A^j(\mathbf{y})\Big] = [\Pi_i(\mathbf{x}), \Pi_j(\mathbf{y})] = 0 .
\end{aligned} \tag{8.3.5}$$

注意到, 就像 Dirac 括号的一般性质所保证的那样, 它们与 Coulomb 规范条件(8.3.1)和(8.3.2)是一致的.

现在的问题是, $\boldsymbol{\Pi}$ 在电动力学中是什么呢? 在上节所讨论的那类理论中, 拉格朗日量中只有动能项 $-\frac{1}{4}\int \mathrm{d}^3x\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ 依赖 $\dot{\mathbf{A}}$, 不考虑约束 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = 0$ 而对拉格朗日量做对 $\dot{\mathbf{A}}$ 的变分, 这给出

$$\Pi_j = \frac{\delta L}{\delta \dot{A}^j(\mathbf{x})} = \dot{A}^j(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial x^j}A^0(\mathbf{x}) . \tag{8.3.6}$$

但由于 $\mathbf{A}$ 被条件 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = 0$ 所约束, 对 $\dot{\mathbf{A}}$ 的变分导数并没有真地被合理定义. 如果在 $\dot{\mathbf{A}}$ 的变分 $\delta\dot{\mathbf{A}}$ 下, L 的变分是 $\delta L = \int \mathrm{d}^3x\, \mathscr{P}\cdot\delta\dot{\mathbf{A}}$, 那么, 由于 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\delta\dot{\mathbf{A}} = 0$, 对任意标量函数 $\mathscr{F}(\mathbf{x})$, 我们又有 $\delta L = \int \mathrm{d}^3x\, [\mathscr{P} + \boldsymbol{\nabla}\mathscr{F}]\cdot\delta\dot{\mathbf{A}}$. 因此, 通过观察拉格朗日量我们能知道的是, $\boldsymbol{\Pi}$ 等于 $\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\nabla}A^0(\mathbf{x})$ 再加上某个标量的梯度. 这种不确定性被条件(8.3.2)消除了, 这个条件要求 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Pi} = -J^0 = \nabla^2A^0$. 由于 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\mathbf{A}} = 0$, 我们得出结论, 方程(8.3.6)确实给出了 Π^i 的正确表达式.

尽管对易关系(8.3.5)相当简单, 但我们必须面对 $\mathbf{\Pi}$ 与物质场以及它们的正则共轭不对易所带来的复杂性. 如果 F 是这些物质自由度的任意泛函, 那么它与 $\mathbf{A}$ 的 Dirac 括号为零, 但它与 $\mathbf{\Pi}$ 的 Dirac 括号是

$$\begin{aligned}
[F, \mathbf{\Pi}(\mathbf{z})]_{\mathrm{D}} &= -\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, [F, \chi_{2\mathbf{x}}]_{\mathrm{P}}\, \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\, [\chi_{1\mathbf{y}}, \mathbf{\Pi}(\mathbf{z})]_{\mathrm{P}} \\
&= -\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3y\, [F, J^0(\mathbf{x})]_{\mathrm{P}}\, \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\, \boldsymbol{\nabla}\delta^3(\mathbf{y}-\mathbf{z}) \\
&= -\int \mathrm{d}^3y\, [F, A^0(\mathbf{y})]_{\mathrm{P}}\, \boldsymbol{\nabla}\delta^3(\mathbf{y}-\mathbf{z}) \\
&= [F, \boldsymbol{\nabla}A^0(\mathbf{z})]_{\mathrm{P}} = [F, \boldsymbol{\nabla}A^0(\mathbf{z})]_{\mathrm{D}}\,.
\end{aligned}$$

为了在过渡到相互作用绘景时更容易, 代替用 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{\Pi}$ 表示哈密顿量, 我们用 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{\Pi}_\perp$ 表示哈密顿量, 其中 $\mathbf{\Pi}_\perp$ 是 $\mathbf{\Pi}$ 的无散部分:

$$\mathbf{\Pi}_\perp \equiv \mathbf{\Pi} - \boldsymbol{\nabla}A^0 = \dot{\mathbf{A}}\,, \tag{8.3.7}$$

对 $\mathbf{\Pi}_\perp$, $[F, \mathbf{\Pi}_\perp(\mathbf{z})]$为零. 通过利用 $\mathbf{\Pi}_\perp(\mathbf{x})$ 与 $\mathbf{\Pi}(\mathbf{y})-\mathbf{\Pi}_\perp(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\nabla}A^0(\mathbf{y})$ 对易以及 $\partial_i A^0(\mathbf{x})$ 与 $\partial_j A^0(\mathbf{y})$ 对易的性质, 我们很容易看到 $\mathbf{\Pi}_\perp(\mathbf{x})$ 满足与 $\mathbf{\Pi}(\mathbf{x})$ 相同的对易关系(8.3.5), 以及简单约束

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{\Pi}_\perp = 0\,. \tag{8.3.8}$$

现在我们需要构造一个哈密顿量. 根据第 7 章附录的一般结果, 在使用哈密顿量与拉格朗日量之间通常的关系时, 我们可以使用约束变量 A 和 $\mathbf{\Pi}_\perp$, 而不是一上来就用非约束变量 Q 和 P 显式地写出哈密顿量. 在电动力学中, 这给出

$$H = \int \mathrm{d}^3x \left[\Pi_{\perp i}\dot{A}^i + P_n\dot{Q}^n - \mathscr{L}\right], \tag{8.3.9}$$

其中, 正如前面所提到的, Q^n 和 P_n 被理解成物质正则场和它们的共轭. (由于 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = 0$, 我们可以在方程(8.3.9)中用 $\mathbf{\Pi}_\perp$ 替代 $\mathbf{\Pi}$.)

具体些, 考虑一个拉格朗日密度为

$$\mathscr{L} = -\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + J_\mu A^\mu + \mathscr{L}_{\mathrm{matter}}\,, \tag{8.3.10}$$

的理论, 其中 J_μ 是不包含 A^μ 的流, 而 $\mathscr{L}_{\mathrm{matter}}$ 是 J^μ 中其它所有场的拉格朗日量, 这个拉格朗日量中不含电磁相互作用, 物质场的电磁作用则由方程(8.3.10)中的 $J_\mu A^\mu$项显式地给出. (自旋 $\frac{1}{2}$ 粒子的电动力学具有这种形式的拉格朗日量, 无自旋粒子的电动力学反而更加复杂.) 将所有的 $\dot{\mathbf{A}}$ 替换成 $\mathbf{\Pi}_\perp$, 这给出了哈密顿量(8.3.9)的如下形式

$$H = \int \mathrm{d}^3x \left[\mathbf{\Pi}_\perp^2 + \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})^2 - \tfrac{1}{2}(\mathbf{\Pi}_\perp + \boldsymbol{\nabla}A^0)^2 - \mathbf{J}\cdot\mathbf{A} + J^0A^0\right] + H_{\mathrm{M}}\,,$$

其中 H_{M} 是去掉电磁相互作用后的物质场哈密顿量,

$$H_M \equiv \int \mathrm{d}^3x\, (P_n\dot{Q}^n - \mathscr{L}_{\mathrm{matter}})\,.$$

利用 A^0 的解(8.2.9), 有

$$H = \int \mathrm{d}^3x \left[\tfrac{1}{2}\mathbf{\Pi}_\perp^2 + \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})^2 - \mathbf{J}\cdot\mathbf{A} + \tfrac{1}{2}J^0A^0\right] + H_{\mathrm{M}}\,. \tag{8.3.11}$$

$\frac{1}{2}J^0A^0$ 这一项可能看起来有些奇怪, 但这不过就是熟悉的 Coulomb 能

$$\begin{aligned} V_{\text{Coul}} &= \tfrac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\, J^0A^0 \\ &= \tfrac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x \int \mathrm{d}^3y\, \frac{J^0(\mathbf{x})J^0(\mathbf{y})}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\,. \end{aligned} \tag{8.3.12}$$

利用对易关系(8.3.5), 读者可以证明, $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{\Pi}$ 的任意算符函数 F 的变化率, 理所当然地, 由 $\mathrm{i}\dot{F} = [F, H]$ 给出.

8.4 相互作用绘景中的电动力学

我们现在将哈密顿量(8.3.11)分成自由粒子项 H_0 和相互作用 V

$$H = H_0 + V\,, \tag{8.4.1}$$

$$H_0 = \int \mathrm{d}^3x \left[\frac{1}{2}\mathbf{\Pi}_\perp^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})^2\right] + H_{\text{matter},0}\,, \tag{8.4.2}$$

$$V = -\int \mathrm{d}^3x\, \mathbf{J}\cdot\mathbf{A} + V_{\text{Coul}} + V_{\text{matter}}\,, \tag{8.4.3}$$

其中 $H_{\text{matter},0}$ 和 V_{matter} 分别是 H_{matter} 中的自由粒子项和相互作用项, 而 V_{Coul} 是 Coulomb 相互作用(8.3.12). 总哈密顿量(8.4.1)是不含时的, 所以方程(8.4.2)和(8.4.3)可以在任何我们想要的时刻计算(只需要都在同一时刻计算), 尤其是 $t = 0$. 就像在第 7 章中那样, 过渡到相互作用绘景要通过相似变换

$$\begin{aligned} V(t) &= \exp(\mathrm{i}H_0t)\, V[\mathbf{A}, \mathbf{\Pi}_\perp, Q, P]_{t=0} \exp(-\mathrm{i}H_0t) \\ &= V[\mathbf{a}(t), \boldsymbol{\pi}(t), q(t), p(t)]\,, \end{aligned} \tag{8.4.4}$$

其中 P 在这里代表物质场 Q 的正则共轭, 而相互作用绘景中的任意算符 $o(\mathbf{x}, t)$ 与它在 Heisenberg 绘景中 $t = 0$ 时的算符 $O(\mathbf{x}, 0)$ 的关系为

$$o(\mathbf{x}, t) = \exp(\mathrm{i}H_0t)\, O(\mathbf{x}, 0)\, \exp(-\mathrm{i}H_0t)\,, \tag{8.4.5}$$

使得

$$\mathrm{i}\,\dot{o}(\mathbf{x}, t) = [o(\mathbf{x}, t), H_0]\,. \tag{8.4.6}$$

(我们扔掉了 $\boldsymbol{\pi}(x)$ 的下标 $\perp$.) 既然方程(8.4.5)是相似变换, 等时对易关系与 Heisenberg 绘景中的对易关系是相同的:

$$\Big[a^i(\mathbf{x}, t), \pi^j(\mathbf{y}, t)\Big] = \mathrm{i}\left[\delta_{ij}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\right]\,, \tag{8.4.7}$$

$$\Big[a^i(\mathbf{x}, t), a^j(\mathbf{y}, t)\Big] = 0\,, \tag{8.4.8}$$

$$\Big[\pi^i(\mathbf{x}, t), \pi^j(\mathbf{y}, t)\Big] = 0\,, \tag{8.4.9}$$

对于物质场以及它们的共轭同样如此. 由于相同的原因, 约束(8.2.6)和(8.3.8)仍然适用

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a} = 0\,, \tag{8.4.10}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\pi} = 0\,. \tag{8.4.11}$$

为了建立 $\boldsymbol{\pi}$ 与 $\dot{\mathbf{a}}$ 之间的关系, 我们必须利用方程(8.4.6)计算出 $\dot{\mathbf{a}}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\dot{a}_i(\mathbf{x},t) &= [a_i(\mathbf{x},t), H_0] \\ &= \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3y \left[\delta_{ij}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\right]\pi_j(\mathbf{y},t)\,.\end{aligned}$$

我们可以将第二项中的 $\partial/\partial x^j$ 换成 $-\partial/\partial y^j$, 分部积分, 并利用方程(8.4.11), 得到

$$\dot{\mathbf{a}} = \boldsymbol{\pi} \tag{8.4.12}$$

这和 Heisenberg 绘景中的结果相同. 场方程用同样的方法确定

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\dot{\pi}_i(\mathbf{x},t) &= [\pi_i(\mathbf{x},t), H_0] \\ &= -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3y \left[\delta_{ij}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\right] \\ &\quad \times (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}(\mathbf{y},t))_j\,,\end{aligned}$$

这(利用方程(8.4.10)和(8.4.12))恰好给出通常的波动方程

$$\Box\,\mathbf{a} = 0\,. \tag{8.4.13}$$

由于 A^0 不是独立的 Heisenberg 绘景场变量, 而是物质场和它们正则共轭的泛函(8.2.9), 并且这个泛函在零电荷极限下为零, 我们在相互作用绘景中不引入任何对应的算符 a^0, 而是取

$$a^0 = 0\,. \tag{8.4.14}$$

方程(8.4.10), (8.4.13)和(8.4.14)的最一般实解可以写成

$$a^\mu(x) = (2\pi)^{-3/2}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{\sqrt{2p^0}}\sum_\sigma \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}e^\mu(\mathbf{p},\sigma)\,a(\mathbf{p},\sigma) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}e^{\mu *}(\mathbf{p},\sigma)\,a^\dagger(\mathbf{p},\sigma)\right]\,, \tag{8.4.15}$$

其中 $p^0 \equiv |\mathbf{p}|$; $e^\mu(\mathbf{p},\sigma)$ 是任意两个独立的"极化矢量", 满足

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}(\mathbf{p},\sigma) = 0\,, \tag{8.4.16}$$

$$e^0(\mathbf{p},\sigma) = 0\,, \tag{8.4.17}$$

而 $a(\mathbf{p},\sigma)$ 是一对算符系数, 其中 σ 是一个二值指标. 通过调整 $a(\mathbf{p},\sigma)$ 的归一化, 我们可以对 $e^\mu(\mathbf{p},\sigma)$ 做归一化, 使得完备关系为

$$\sum_\sigma e^i(\mathbf{p},\sigma)e^j(\mathbf{p},\sigma)^* = \delta_{ij} - p_ip_j/|\mathbf{p}|^2\,. \tag{8.4.18}$$

例如, 我们可以将 $e^\mu(\mathbf{p},\sigma)$ 取成我们在 5.9 节遇到的极化矢量:

$$e^\mu(\mathbf{p},\pm1) = R(\hat{\mathbf{p}})\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\ \pm\mathrm{i}/\sqrt{2}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\,, \tag{8.4.19}$$

其中 $R(\hat{\mathbf{p}})$ 是将 3-轴转到 $\mathbf{p}$ 方向的标准转动. 利用方程(8.4.18)和(8.4.12), 我们可以很容易地看到, 当(且实际上仅当)方程(8.4.15)中的算符系数满足

$$\Big[a(\mathbf{p},\sigma), a^\dagger(\mathbf{p}',\sigma')\Big] = \delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,\delta_{\sigma\sigma'}\,, \tag{8.4.20}$$

$$\Big[a(\mathbf{p},\sigma), a(\mathbf{p}',\sigma')\Big] = 0\,, \tag{8.4.21}$$

对易关系(8.4.7)—(8.4.9)才会被满足. 就像以前对有质量粒子所提及的, 这个结果与其被看做是方程(8.4.20)和(8.4.21)的另一种推导, 不如被看做是方程(8.4.2)给出了螺旋度 ±1 的无质量粒子的正确哈密顿量的一个证明. 本着同样的精神, 也可以在方程(8.4.2)中用方程(8.4.12)和(8.4.15)计算自由光子哈密顿量

$$\begin{aligned} H_0 &= \int \mathrm{d}^3p \sum_\sigma \tfrac{1}{2}p^0\Big[a(\mathbf{p},\sigma), a^\dagger(\mathbf{p},\sigma)\Big]_+ \\ &= \int \mathrm{d}^3p \sum_\sigma p^0\Big(a^\dagger(\mathbf{p},\sigma)a(\mathbf{p},\sigma) + \tfrac{1}{2}\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p})\Big) \end{aligned} \tag{8.4.22}$$

(除了一个不重要的无限大 c-数项外)这正是我们所预期的.

最后, 我们记下相互作用绘景中的相互作用(8.4.4)

$$V(t) = -\int \mathrm{d}^3x\, j_\mu(\mathbf{x},t)\, a^\mu(\mathbf{x},t) + V_{\mathrm{Coul}}(t) + V_{\mathrm{matter}}(t)\,, \tag{8.4.23}$$

其中, 用 Heisenberg 绘景中的流 J 表示,

$$j_\mu(\mathbf{x},t) \equiv \exp(\mathrm{i}H_0t)\, J_\mu(\mathbf{x},0)\exp(-\mathrm{i}H_0t)\,, \tag{8.4.24}$$

而 $V_{\mathrm{Coul}}(t)$ 是 Coulomb 项

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{Coul}}(t) &= \exp(\mathrm{i}H_0t)V_{\mathrm{Coul}}\exp(-\mathrm{i}H_0t) \\ &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\frac{j^0(\mathbf{x},t)j^0(\mathbf{y},t)}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \end{aligned} \tag{8.4.25}$$

$V_{\mathrm{matter}}(t)$ 是相互作用绘景中物质场相互作用的非电磁部分:

$$V_{\mathrm{matter}}(t) = \exp(\mathrm{i}H_0t)\, V_{\mathrm{matter}}\exp(-\mathrm{i}H_0t)\,. \tag{8.4.26}$$

在方程(8.4.23)中我们写的是 $j_\mu a^\mu$ 而不是 $\mathbf{j}\cdot\mathbf{a}$, 这是因为 a^μ 已经被定义为 $a^0 = 0$, 因而它们是等价的.

8.5 光子传播子

第 6 章中描述的一般 Feynman 规则告诉我们, Feynman 图中的光子内线对 S-矩阵中相应的项贡献一个因子, 由传播子给定:

$$-\mathrm{i}\Delta_{\mu\nu}(x-y) \equiv \big(\Phi_{\mathrm{VAC}}, T\{a_\mu(x)\,, a_\nu(y)\}\,\Phi_{\mathrm{VAC}}\big)\,, \tag{8.5.1}$$

其中 T 像往常一样表示编时乘积. 代入电磁势的表达式(8.4.15)给出

$$-\mathrm{i}\Delta_{\mu\nu}(x-y)=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2|\mathbf{p}|}P_{\mu\nu}(\mathbf{p})\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}\theta(x-y)+\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(y-x)}\theta(y-x)\right], \tag{8.5.2}$$

其中

$$P_{\mu\nu}(\mathbf{p})\equiv\sum_{\sigma=\pm1}e_\mu(\mathbf{p},\sigma)\,e_\nu(\mathbf{p},\sigma)^* \tag{8.5.3}$$

并且指数中的 p^μ 中满足 $p^0=|\mathbf{p}|$. 从方程(8.4.18)和(8.4.17)中回忆起

$$\begin{aligned}P_{ij}(\mathbf{p})&=\delta_{ij}-\frac{p^ip^j}{|\mathbf{p}|^2}\,,\\ P_{0i}(\mathbf{p})&=P_{i0}(\mathbf{p})=P_{00}(\mathbf{p})=0\,.\end{aligned} \tag{8.5.4}$$

正如我们在第 6 章中看到的, 方程(8.5.2)中的 θ-函数可以表示成对离壳 4-动量 q^μ 的独立时间变量 q^0 的积分, 这使得方程(8.5.2)可以重新写为

$$\Delta_{\mu\nu}(x-y)=(2\pi)^{-4}\int\mathrm{d}^4q\,\frac{P_{\mu\nu}(\mathbf{q})}{q^2-\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot(x-y)}\,. \tag{8.5.5}$$

因此, 在动量空间中使用 Feynman 规则时, 一个携带 4-动量 q, 连接两个由场 a^μ 和 a^ν 产生和湮灭光子的顶点的内光子线, 它的贡献是

$$\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\frac{P_{\mu\nu}(\mathbf{q})}{q^2-\mathrm{i}\epsilon}\,. \tag{8.5.6}$$

将方程(8.5.4)重新写作

$$P_{\mu\nu}(\mathbf{q})=\eta_{\mu\nu}+\frac{q^0q_\mu n_\nu+q^0q_\nu n_\mu-q_\mu q_\nu+q^2n_\mu n_\nu}{|\mathbf{q}|^2} \tag{8.5.7}$$

将是非常有用的(尽管明显不合常理), 其中 $n^\mu\equiv(0,0,0,1)$ 是固定的类时矢量, q^2 像往常一样等于 $\mathbf{q}^2-(q^0)^2$, 但 q^0 在这里是完全任意的. 我们将选择方程(8.5.7)中的 q^0, 使其由 4-动量守恒给定: 它等于流入和流出产生光子线的顶点的物质 p^0 之差. 这样一来, 正比于 q_μ 和(或) q_ν 的项对 S-矩阵没有贡献, 这是因为因子 q_μ 和 q_ν 的作用类似于导数 ∂_μ 和 ∂_ν, 而与光子场 a_μ 和 a_ν 耦合的流 j^μ 和 j^ν 满足守恒条件 $\partial_\mu j^\mu=0$.* 正比于 $n_\mu n_\nu$ 的项包含因子 q^2, 它抵消了传播子分母中的 q^2, 它产生的项与作用量中

$$-\mathrm{i}\frac{1}{2}\int\mathrm{d}^4x\int d^4y\,[-\mathrm{i}j^0(x)][-\mathrm{i}j^0(y)]\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int\frac{\mathrm{d}^4q}{|\mathbf{q}|^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot(x-y)}$$

所产生的项相同. 这里对 q^0 的积分给出了一个时间的 δ-函数, 因此这等价于对相互作用哈密顿量 $V(t)$ 的一个修正, 形式为

$$-\frac{1}{2}\int\mathrm{d}^3x\int\mathrm{d}^3y\,\frac{j^0(\mathbf{x},t)\,j^0(\mathbf{y},t)}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\,.$$

这恰好抵消了 Coulomb 相互作用(8.4.25). 我们的结论是, 光子传播子可以有效地取成协变量

$$\Delta^{\mathrm{eff}}_{\mu\nu}(x-y)=(2\pi)^{-4}\int\mathrm{d}^4q\,\frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2-\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot(x-y)} \tag{8.5.8}$$

*这里所给出的论证只比随便敷衍强一点点. 这一结果已经通过一个细致的 Feynman 图分析被证明了,[3] 但是处理这一问题的最简单方法是路径积分方法, 我们将在 9.6 节讨论.

Coulomb 相互作用从现在起被扔掉了. 我们看到, 表面上被瞬时 Coulomb 相互作用破坏的 Lorentz 不变性又被另一表面上对 Lorentz 不变性的破坏抵消了, 就像 5.9 节提到的, 场 $a^\mu(x)$ 不是 4-矢, 因而有一不协变的传播子. 从操作的角度看, 重点是, 在动量空间的 Feynman 规则中, 内光子线的贡献可以简单地给定为

$$\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\,\frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2-\mathrm{i}\epsilon} \tag{8.5.9}$$

而 Coulomb 相互作用被扔掉了.

8.6 旋量电动力学的 Feynman 规则

我们现在可以讲量子电动力学中计算 S-矩阵的Feynman规则了. 明确起见, 我们将考虑电荷 $q=-e$ 且质量为 m 的一种自旋 $\frac{1}{2}$ 粒子的电动力学. 我们将称这些费米子为电子, 同样的处理对 μ 子以及其它这样的粒子也都是适用的. 这个理论最简单的规范不变且 Lorentz-不变的拉格朗日量是*

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\bar{\Psi}\left(\gamma^\mu[\partial_\mu+\mathrm{i}\,e\,A_\mu]+m\right)\Psi\,. \tag{8.6.1}$$

那么电子流 4-矢就是

$$J^\mu=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_\mu}=-\mathrm{i}\,e\,\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\,. \tag{8.6.2}$$

相互作用绘景中的相互作用(8.4.23)在这里是

$$V(t)=+\mathrm{i}\,e\int \mathrm{d}^3x\,(\bar{\psi}(\mathbf{x},t)\gamma^\mu\psi(\mathbf{x},t))\,a_\mu(\mathbf{x},t)+V_{\mathrm{Coul}}(t)\,. \tag{8.6.3}$$

(这里没有 V_{matter}.) 正如我们看到过的, Coulomb 项 $V_{\mathrm{Coul}}(t)$ 仅被用来抵消光子传播子中非协变且在时间上定域的那部分.

依照 6.3 节的普遍结果, 我们可以将该理论 S-矩阵连通部分在动量空间中的 Feynman 规则表述如下:

(**i**) 对给定数目的顶点画出所有的 Feynman 图. 这些图由带箭头的电子线和不带箭头的光子线构成, 这些线相交在顶点, 在每个顶点上有一条入电子线, 一条出电子线以及一条光子线. 对于初态和末态中的每个粒子, 分别有一条从下方进入图的外线或从上方离开图的外线; 电子由箭头指向上方的流入或流出图的外线表示, 正电子则由箭头指向下方的流入或流出图的外线表示. 除此之外, 每个顶点要连上一些内线, 以恰好满足每个顶点对连线数目的要求. 每条内线被一个指向确定的沿着线流动的离壳 4-动量标记(对电子线, 习惯上将流动的方向取为箭头的方向.) 每条外线被初末态中的电子或光子动量以及自旋 z-分量或螺旋度标记.

(**ii**) 将图的各部分与如下因子相关联:

顶点

对于每个顶点, 在箭头进入该顶点的电子线上标记一个 4-分量的 Dirac 指标 α, 在箭头离开该顶点的电子线上标记 Dirac 指标 β, 而在光子线上标记时空指标 μ. 对于每个这样的顶点, 引入因子

$$(2\pi)^4\,e\,(\gamma^\mu)_{\beta\alpha}\delta^4(k-k'+q)\,, \tag{8.6.4}$$

其中 k 和 k' 是进入和离开顶点的电子 4-动量, 而 q 是进入顶点的光子 4-动量(或者减去离开顶点的光子动量).

*在第 12 章, 我们将讨论更加复杂的项被排除在这个拉格朗日密度之外的原因.

外线:

用初态或末态中粒子的 3-动量 $\mathbf{p}$ 和自旋 z-分量或螺旋度 σ 来标记每条外线. 对于末态中的每条电子线, 若它离开的顶点在这条线上带有的 Dirac 指标是 β, 引入因子[**]

$$\frac{\bar{u}_\beta(\mathbf{p},\sigma)}{(2\pi)^{3/2}}\,. \tag{8.6.5}$$

对于末态中的每条正电子线, 若它进入的顶点在这条线上带有的 Dirac 指标是 α, 引入因子

$$\frac{v_\alpha(\mathbf{p},\sigma)}{(2\pi)^{3/2}}\,. \tag{8.6.6}$$

对于初态中的每条电子线, 若它进入的顶点在这条线上带有的 Dirac 指标是 α, 引入因子

$$\frac{u_\alpha(\mathbf{p},\sigma)}{(2\pi)^{3/2}}\,. \tag{8.6.7}$$

对于初态中的每条正电子线, 若它离开的顶点在这条线上带有的 Dirac 指标是 β, 引入因子

$$\frac{\bar{v}_\beta(\mathbf{p},\sigma)}{(2\pi)^{3/2}}\,. \tag{8.6.8}$$

u 和 v 是 5.5 节中讨论过的 4-分量旋量. 对于末态中的每条光子线, 若与它相连的顶点在这条线上带有的时空指标是 μ, 引入因子

$$\frac{e^*_\mu(\mathbf{p},\sigma)}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p^0}}\,. \tag{8.6.9}$$

对于初态中的每条光子线, 若与它相连的顶点在这条线上带有的时空指标是 μ, 引入因子

$$\frac{e_\mu(\mathbf{p},\sigma)}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p^0}}\,. \tag{8.6.10}$$

e_μ 是上一节所描述的光子极化 4-矢.

内线:

对于每条内电子线, 如果它所携带的 4-动量为 k, 且从带有 Dirac 指标 β 的顶点离开, 而后进入带有 Dirac 指标 α 的顶点, 引入因子

$$\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\,\frac{[-\mathrm{i}\not{k}+m]_{\alpha\beta}}{k^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon}\,. \tag{8.6.11}$$

(我们在这里采用了非常方便的"Dirac 斜横"记号; 对 4-矢 v^μ, $\not{v}$ 代表 $\gamma_\mu v^\mu$.) 对于每条光子内线, 若它携带的 4-动量是 q, 且与它相连的两个顶点分别带有时空指标 μ 和 ν, 引入因子

$$\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\,\frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2-\mathrm{i}\epsilon}\,. \tag{8.6.12}$$

(**iii**) 对于所有这些因子的乘积, 对内线动量进行积分并对所有 Dirac 指标和时空指标进行求和.
(**iv**) 将以这种方法得到每个Feynman图结果相加.

[**]矩阵 β 已经从(8.6.4)中的相互作用中抽取出来了, 这使得这里出现的是 $\bar{u}$ 和 $\bar{v}$ 而不是 $u^\dagger$ 和 $v^\dagger$.

然后, 就像 6.1 节中第(v)和(vi)两部分中所描述的, 可能还要引入额外的组合因子以及费米子带来的符号.

计算 Feynman 图的难度随着内线和顶点数目的增多而急剧上升, 所以重要的是对什么样的数值因子倾向于抑止更复杂图的贡献有所了解. 我们将估计一下这些数值因子, 不仅包括与顶点相关联的电荷因子 e, 而且还包括来自顶点, 传播子以及动量空间积分的因子 2 和 π.

考虑有 V 个顶点, I 条内线, E 条外线和 L 个圈的连通 Feynman 图. 这些量不是独立的, 而是服从于在 6.3 节中用到过的关系:

$$L = I - V + 1\,, \qquad 2I + E = 3V\,.$$

每个顶点会有一个因子 $e(2\pi)^4$, 每个内线会有一个因子 $(2\pi)^{-4}$, 而每个圈会有一个 4-维动量空间积分. 4-维欧氏空间中的体积元用径向参量 κ 表示是 $\pi^2\kappa^2\mathrm{d}\kappa^2$, 所以每个圈贡献一个因子 π^2. 因此该图将包含因子

$$(2\pi)^{4V} e^V (2\pi)^{-4I} \pi^{2L} = (2\pi)^4 e^{E-2} \left(\frac{e^2}{16\pi^2}\right)^L .$$

对于给定的过程, 外线数目 E 是固定的, 所以我们看到, 对于每个额外的圈, 压低 Feynman 图的展开参量是

$$\frac{e^2}{16\pi^2} = \frac{\alpha}{4\pi} = 5.81 \times 10^{-4}\,.$$

幸运的是, 这个压低因子足够小, 通常最多只需计入几个圈的 Feynman 图就能得到很好的精度.

* * *

我们还得再讨论一下真实实验中的光子自旋态和电子自旋态. 在真实实验中, 初态和末态中并不是每个粒子都有确定的螺旋度或自旋 z-分量. 考虑到这点对光子尤为重要, 实际上通常用横向偏振态或椭圆偏振态而不是螺旋度来刻画光子. 正如我们在上一节所看到的, 对于螺旋度为 ±1 的光子, 极化矢量为

$$e(\mathbf{p}, \pm1) = R(\hat{\mathbf{p}}) \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \pm\mathrm{i}/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ,$$

其中 $R(\hat{\mathbf{p}})$ 是将 z-方向转到 $\mathbf{p}$ 方向的标准旋转. 它们不是唯一可能的光子态; 一般而言, 一个光子态可以是螺旋度态 $\Psi_{\mathbf{p},\pm1}$ 的线性组合

$$\alpha_+ \Psi_{\mathbf{p},+1} + \alpha_- \Psi_{\mathbf{p},-1} \tag{8.6.13}$$

通过

$$|\alpha_+|^2 + |\alpha_-|^2 = 1\,, \tag{8.6.14}$$

恰当地归一化. 为了计算吸收或发射这样一个光子的 S-矩阵元, 我们只需把 Feynman 规则中的 $e_\mu(\mathbf{p}, \pm1)$ 替换为

$$e_\mu(\mathbf{p}) = \alpha_+\, e_\mu(\mathbf{p}, +1) + \alpha_-\, e_\mu(\mathbf{p}, -1)\,. \tag{8.6.15}$$

对确定的螺旋度, 极化矢量满足归一化条件

$$e^*_\mu(\mathbf{p}, \lambda')\, e^\mu(\mathbf{p}, \lambda) = \delta_{\lambda'\lambda} \tag{8.6.16}$$

因此, 一般而言

$$e^*_\mu(\mathbf{p})\, e^\mu(\mathbf{p}) = 1\,. \tag{8.6.17}$$

有两种极端的情况, 一种是圆偏振, 它有 $\alpha_- = 0$ 或 $\alpha_+ = 0$; 另一种是线偏振, 它有 $|\alpha_+| = |\alpha_-| = 1/\sqrt{2}$. 对于线偏振, 通过调整态(8.6.13)的总相位, 我们可以让 α_+ 和 α_- 互为复共轭, 这使得它们可以表示成

$$\alpha_\pm = \exp(\mp \mathrm{i}\phi)\Big/\sqrt{2}\,. \tag{8.6.18}$$

于是在 Feynman 规则中, 我们应该采用极化矢量

$$e_\mu(\mathbf{p}) = R(\hat{\mathbf{p}}) \begin{bmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{8.6.19}$$

这就是说, ϕ 是光子极化在垂直于 $\mathbf{p}$ 的平面中的方位角. 注意到光子极化矢量在这里是实的, 这仅对线偏振是可能的. 在极端情况圆偏振和线偏振之间的是椭圆偏振态, 对于椭圆偏振态, $|\alpha_+|$ 和 $|\alpha_-|$ 都不为零且不相等.

更普遍地, 初态光子可能是按自旋态的统计混合制备的. 在最一般的情况下, 一个初态光子可以有任意多个可能的极化矢量 $e^{(r)}_\mu(\mathbf{p})$, 每个极化矢量带有几率 P_r. 那么在一个给定过程中吸收这样一个光子, 它的速率将取如下形式

$$\Gamma = \sum_r P_r\, |e^{(r)}_\mu(\mathbf{p}) M^\mu|^2 = M^{\mu *} M^\nu\, \rho_{\nu\mu}\,, \tag{8.6.20}$$

其中 ρ 是密度矩阵

$$\rho_{\nu\mu} \equiv \sum_r P_r\, e^{(r)}_\nu(\mathbf{p})\, e^{(r)*}_\mu(\mathbf{p})\,. \tag{8.6.21}$$

既然 ρ 显然是一个单位迹(由于 $\sum_r P_r = 1$)的厄米正定矩阵, 且有 $\rho_{\nu 0} = \rho_{0\mu} = 0$ 以及 $\rho_{\nu\mu} p^\nu = \rho_{\nu\mu} p^\mu = 0$, 它可以写成

$$\rho_{\nu\mu} = \sum_{s=1,2} \lambda_s\, e_\nu(\mathbf{p}; s)\, e^*_\mu(\mathbf{p}; s)\,, \tag{8.6.22}$$

其中 $e_\mu(\mathbf{p}; s)$ 是 ρ 的两个正交本征矢, 且有

$$e_0(\mathbf{p}; s) = e_\mu(\mathbf{p}; s) p^\mu = 0 \tag{8.6.23}$$

而 λ_s 是相应的本征值, 具有

$$\lambda_s \geq 0\,, \qquad \sum_{s=1,2} \lambda_s = 1\,.$$

于是我们可以将这个光子吸收过程的速率写为

$$\Gamma = \sum_{s=1,2} \lambda_s |e_\nu(\mathbf{p}; s) M^\nu|^2.$$

因此初光子态的任何统计混合总是等价于只有两个几率为 λ_s 的正交极化 $e_\nu(\mathbf{p}; s)$.

特别地, 如果我们对初态光子极化一无所知, 那么极化矢量 $e_\nu(\mathbf{p};s)$ 的两个几率 λ_s 相等, 从而 $\lambda_1=\lambda_2=\frac{1}{2}$, 且密度矩阵(以及随之的吸收速率)是对初态极化的平均

$$\rho_{ij}=\tfrac{1}{2}\sum_{s=1,2}e_i(\mathbf{p};s)\,e_j^*(\mathbf{p};s)=\tfrac{1}{2}\,(\delta_{ij}-\hat{p}_i\hat{p}_j)\ . \tag{8.6.24}$$

幸运的是, 这个结果并不依赖于我们要取平均的那对特定的极化矢量 $e_i(\mathbf{p};s)$; 对于非极化光子, 我们可以对吸收速率在任意一对正交极化矢量上取平均. 类似地, 如果我们不试图测量末态中光子的极化, 那么速率可以通过对任意一对正交末态光子极化矢量求和计算出来.

同样的讨论也适用于电子和正电子; 如果(通常的情况也是这样)我们不试图制备某些自旋态比其它自旋态有更大几率出现的电子或正电子, 那么速率要通过对任意两个正交自旋初态, 例如那些自旋 z-分量 $\sigma=\pm\frac{1}{2}$ 的态, 取平均计算出来; 如果我们不试图测量电子或正电子的自旋末态, 那么我们必须对速率的任意两个正交自旋末态求和, 例如那些自旋 z-分量 $\sigma=\pm\frac{1}{2}$ 的态. 这样的求和可以利用关系(5.5.37)和(5.5.38)计算:

$$\sum_\sigma u_\alpha(\mathbf{p},\sigma)\bar{u}_\beta(\mathbf{p},\sigma)=\left(\frac{-\mathrm{i}\not{p}+m}{2p^0}\right)_{\alpha\beta}\ , \tag{8.6.25}$$

$$\sum_\sigma v_\alpha(\mathbf{p},\sigma)\bar{v}_\beta(\mathbf{p},\sigma)=\left(\frac{-\mathrm{i}\not{p}-m}{2p^0}\right)_{\alpha\beta}\ , \tag{8.6.26}$$

其中 $p^0=\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$. 例如, 如果初态包含一个动量为 $\mathbf{p}$ 且自旋 z-分量为 σ 的电子, 和一个动量为 $\mathbf{p}'$ 且自旋 z-分量为 σ' 的正电子, 那么该过程的 S-矩阵元将取 $(\bar{v}_\alpha(\mathbf{p}',\sigma')\,\mathscr{M}_{\alpha\beta}\,u_\beta(\mathbf{p},\sigma))$ 的形式. 因此, 如果电子自旋和正电子的自旋都没有被观测, 那么速率将正比于

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{4}\sum_{\sigma',\sigma}|(\bar{v}_\alpha(\mathbf{p}',\sigma')\,\mathscr{M}_{\alpha\beta}\,u_\beta(\mathbf{p},\sigma))|^2\\&\quad=\tfrac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\left\{\beta\,\mathscr{M}^\dagger\,\beta\left(\frac{-\mathrm{i}\not{p}'-m}{2p'^0}\right)\mathscr{M}\left(\frac{-\mathrm{i}\not{p}+m}{2p^0}\right)\right\}\ .\end{aligned}$$

本章附录会讲计算这种迹的技巧.

8.7 Compton 散射

作为本章所描述方法的一个例子, 我们将在这里考虑光子在电子(或其它自旋 $\frac{1}{2}$ 且电荷为 $-e$ 的粒子)上的散射, 考虑到 e 的最低阶. 我们将初态和末态光子的动量和极化矢量记为 k^μ, e^μ 和 k'^μ, e'^μ, 其中 $k^0=|\mathbf{k}|$ 且 $k'^0=|\mathbf{k}'|$. 另外, 初态和末态电子动量和自旋 z-分量分别记为 p^μ,σ 和 p'^μ,σ', 其中 $p^0=\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$, $p'^0=\sqrt{\mathbf{p}'^2+m^2}$, m 是电子质量. 这种过程的最低

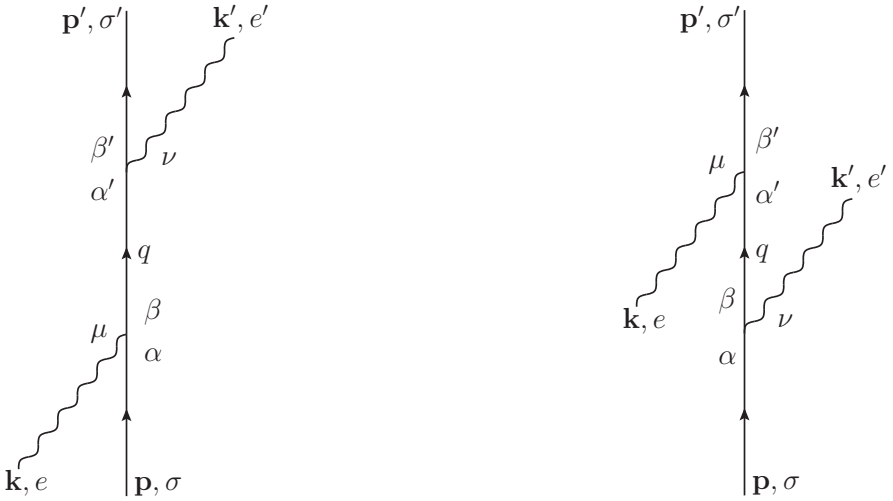


图 8.1 Compton散射的两个最低阶Feynman图. 直线是电子; 波浪线是光子.

阶 Feynman 图如图8.1所示. 利用上一节所给的规则, 相应的 S-矩阵元是

$$
\begin{aligned}
&S(\mathbf{p},\sigma\ +\ \mathbf{k},e\to\mathbf{p}',\sigma'\ +\ \mathbf{k}',e')=\\
&\quad\frac{\bar{u}(\mathbf{p}',\sigma')_{\beta'}}{(2\pi)^{3/2}}\frac{e'^{*}_{\nu}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2k'^{0}}}\frac{u(\mathbf{p},\sigma)_{\alpha}}{(2\pi)^{3/2}}\frac{e_{\mu}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2k^{0}}}\\
&\quad\times\int \mathrm{d}^4q\left[\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\right]\left[\frac{-\mathrm{i}\not{q}+m}{q^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon}\right]_{\alpha'\beta}\\
&\quad\times\Big\{\Big[e(2\pi)^4\gamma^{\nu}_{\beta'\alpha'}\delta^4(q-p'-k')\Big]\Big[e(2\pi)^4\gamma^{\mu}_{\beta\alpha}\delta^4(q-p-k)\Big]\\
&\quad+\Big[e(2\pi)^4\gamma^{\mu}_{\beta'\alpha'}\delta^4(q+k-p')\Big]\Big[e(2\pi)^4\gamma^{\nu}_{\beta\alpha}\delta^4(q+k'-p)\Big]\Big\}\,.
\end{aligned}
\tag{8.7.1}
$$

进行(平庸的) q-积分, 合并因子 i 和 2π, 并以矩阵记法重写这个结果, 我们有更简单的

$$
\begin{aligned}
S=\frac{-\mathrm{i}e^2\delta^4(p'+k'-p-k)}{(2\pi)^2\sqrt{2k'^{0}\cdot 2k^{0}}}\bar{u}(\mathbf{p}',\sigma')\Bigg[\not{e}'^{*}\left(\frac{-\mathrm{i}(\not{p}+\not{k})+m}{(p+k)^2+m^2}\right)\not{e}\\
+\not{e}\left(\frac{-\mathrm{i}(\not{p}-\not{k}')+m}{(p-k')^2+m^2}\right)\not{e}'^{*}\Bigg]u(\mathbf{p},\sigma)\,.
\end{aligned}
\tag{8.7.2}
$$

(这里 $\not{e}^*$ 表示的是 $e^*_\mu\gamma^\mu$, 不是 $(\not{e})^*$. 另外, 由于这里分母不会为零, 我们扔掉了 $-\mathrm{i}\epsilon$.) 因为 $p^2=-m^2$ 并且 $k^2=k'^2=0$, 分母可以被化简成

$$
(p+k)^2+m^2=2p\cdot k\,,
\tag{8.7.3}
$$

$$
(p-k')^2+m^2=-2p\cdot k'\,.
\tag{8.7.4}
$$

另外, "Feynman 振幅" M 一般是由方程(3.3.2)定义的, (由于假定发生了某个散射)在这里写成

$$
S=-2\pi\mathrm{i}\delta^4(p'+k'-p-k)M\,,
\tag{8.7.5}
$$

所以

$$M=\frac{e^2}{4(2\pi)^3\sqrt{k^0k'^0}}\bar{u}(\mathbf{p}',\sigma')\Big\{\not{\epsilon}'^*\Big[-\mathrm{i}(\not{p}+\not{k})+m\Big]\not{\epsilon}\Big/p\cdot k \\ -\not{\epsilon}\Big[-\mathrm{i}(\not{p}-\not{k}')+m\Big]\not{\epsilon}'^*\Big/p\cdot k'\Big\}u(\mathbf{p},\sigma)\,. \tag{8.7.6}$$

微分截面通过方程(3.4.15)用 M 来表示, 在这里形如

$$\mathrm{d}\sigma=(2\pi)^4u^{-1}|M|^2\delta^4(p'+k'-p-k)\mathrm{d}^3p'\,\mathrm{d}^3k'\,. \tag{8.7.7}$$

因为这里有一个粒子是无质量的, 初速度的方程(3.4.17)给出

$$u=|p\cdot k|\Big/p^0k^0\,. \tag{8.7.8}$$

更进一步, 采用特定的坐标系会更加方便. 既然电子在原子中的运动是非相对论性的, 对高能(X 射线或 γ 射线)光子-电子散射实验来说, 实验室参考系通常是(尽管不总是这样)初态电子可以取为静止的参考系. 我们将在这里采用这个参考系, 这使得

$$\mathbf{p}=0\,,\qquad p^0=m\,. \tag{8.7.9}$$

于是速度(8.7.8)就是

$$u=1\,. \tag{8.7.10}$$

为了减少书写, 我们把光子能量记为

$$\omega=k^0=|\mathbf{k}|=-p\cdot k\Big/m\,, \tag{8.7.11}$$

$$\omega'=k'^0=|\mathbf{k}'|=-p\cdot k'\Big/m\,. \tag{8.7.12}$$

方程(8.7.7)中的 3-动量 δ-函数正好抵掉了微分 d^3p', 这使得 $\mathbf{p}'=\mathbf{k}-\mathbf{k}'$. 这样就剩下了能量 δ-函数

$$\delta(p'^0+k'^0-p^0-k^0)=\delta\left(\sqrt{(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2+m^2}+\omega'-m-\omega\right)\,. \tag{8.7.13}$$

由此可以确定 ω' 满足

$$\sqrt{\omega^2-2\omega\omega'\cos\theta+\omega'^2+m^2}=\omega+m-\omega'\,,$$

其中 θ 是 $\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{k}'$ 之间的夹角. 对两边平方并消掉 ω'^2 项, 这给出*

$$\omega'=\omega\,\frac{m}{m+\omega(1-\cos\theta)}\equiv\omega_c(\theta)\,. \tag{8.7.14}$$

*等价地, 在波长上有一个增长

$$\frac{1}{\omega'}-\frac{1}{\omega}=\frac{1-\cos\theta}{m}\,.$$

这个公式在 X 射线在电子上的散射中由 A. H. Compton 在 1922-1923 年期间证明, 它在验证 Einstein 于 1905 年提出的光量子假说中起了关键作用, 在 Compton 实验不久之后, 光量子就被称为光子.

能量 δ-函数(8.7.13)可以写为

$$\begin{aligned}\delta(p'^0+k'^0-p^0-k^0) &= \frac{\delta(\omega'-\omega_c(\theta))}{|\partial[\sqrt{\omega^2-2\omega\omega'\cos\theta+\omega'^2+m^2}+\omega']/\partial\omega'|}\\ &= \frac{\delta(\omega'-\omega_c(\theta))}{|(\omega'-\omega\cos\theta)/p'^0+1|}\\ &= \frac{p'^0\omega'}{m\omega}\delta(\omega'-\omega_c(\theta))\,. \end{aligned} \tag{8.7.15}$$

另外, 微分 d^3k' 可以写成

$$\mathrm{d}^3k' = \omega'^2\mathrm{d}\omega'\mathrm{d}\Omega\,, \tag{8.7.16}$$

其中 $\mathrm{d}\Omega$ 是末态光子的散射立体角. 方程(8.7.15)中的末态 δ-函数只消掉了方程(8.7.16)中的微分 $\mathrm{d}\omega'$, 留给我们微分散射截面

$$\mathrm{d}\sigma = (2\pi)^4|M|^2\frac{p'^0\omega'^3}{m\omega}\mathrm{d}\Omega \tag{8.7.17}$$

其中 $p'^0 = m+\omega-\omega'$, 而 ω' 由方程(8.7.14)给定.

通常我们不测量初态和末态电子的自旋 z-分量. 在这种情况下, 我们必须对 σ' 求和并对 σ 取平均, 换句话说, 取对 σ 和 σ' 求和的一半:

$$\mathrm{d}\bar{\sigma}(\mathbf{p}+\mathbf{k},e\to\mathbf{p}'+\mathbf{k}',e') \equiv \tfrac{1}{2}\sum_{\sigma',\sigma}\mathrm{d}\sigma(\mathbf{p},\sigma+\mathbf{k},e\to\mathbf{p}',\sigma'+\mathbf{k}',e')\,. \tag{8.7.18}$$

为了计算它, 我们利用标准公式

$$\sum_{\sigma}u_\alpha(\mathbf{p},\sigma)\bar{u}_\beta(\mathbf{p},\sigma) = \frac{(-\mathrm{i}\not{p}+m)_{\alpha\beta}}{2p^0} \tag{8.7.19}$$

对 σ' 的求和也同样如此. 由此得出, 对任意一个 4×4 矩阵 A

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma,\sigma'}\left|\bar{u}(\mathbf{p}',\sigma')Au(\mathbf{p},\sigma)\right|^2 &= \sum_{\sigma,\sigma'}(\bar{u}(\mathbf{p}',\sigma')Au(\mathbf{p},\sigma))(\bar{u}(\mathbf{p},\sigma)\beta A^\dagger\beta u(\mathbf{p}',\sigma'))\\ &= \sum_{\sigma,\sigma'}A_{\beta\alpha}u_\alpha(\mathbf{p},\sigma)\bar{u}_\gamma(\mathbf{p},\sigma)(\beta A^\dagger\beta)_{\gamma\delta}u_\delta(\mathbf{p}',\sigma')\bar{u}_\beta(\mathbf{p}',\sigma')\\ &= \mathrm{Tr}\left\{A\left(\frac{-\mathrm{i}\not{p}+m}{2p^0}\right)\beta A^\dagger\beta\left(\frac{-\mathrm{i}\not{p}'+m}{2p'^0}\right)\right\}\,. \end{aligned} \tag{8.7.20}$$

想到 $\beta\gamma_\mu^\dagger\beta = -\gamma_\mu$, 方程(8.7.6)现在给出

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma,\sigma'}|M|^2 &= \frac{e^4}{64(2\pi)^6\omega\omega'p^0p'^0}\\ &\times\mathrm{Tr}\left[\left\{\not{\epsilon}'^*\frac{[-\mathrm{i}(\not{p}+\not{k})+m]}{p\cdot k}\not{\epsilon}-\not{\epsilon}\frac{[-\mathrm{i}(\not{p}-\not{k}')+m]}{p\cdot k'}\not{\epsilon}'^*\right\}(-\mathrm{i}\not{p}+m)\right.\\ &\left.\times\left\{\not{\epsilon}^*\frac{[-\mathrm{i}(\not{p}+\not{k})+m]}{p\cdot k}\not{\epsilon}'-\not{\epsilon}'\frac{[-\mathrm{i}(\not{p}-\not{k}')+m]}{p\cdot k'}\not{\epsilon}^*\right\}(-\mathrm{i}\not{p}'+m)\right]\,. \end{aligned} \tag{8.7.21}$$

(再提醒一下 $\not{e}^*$ 表示 $e^*_\mu\gamma^\mu$, 而不是 $(e_\mu\gamma^\mu)^*$, 对 $\not{e}'^*$ 也同样如此.) 我们在下述"规范"下处理, 这个规范要求

$$e\cdot p = e^*\cdot p = e'\cdot p = e'^*\cdot p = 0 \tag{8.7.22}$$

例如实验室系中的 Coulomb 规范, 其中 $e^0 = e'^0 = 0$ 且 $\mathbf{p} = 0$. 这意味着

$$\begin{aligned}[-\mathrm{i}\not{p}+m]\not{e}\,[-\mathrm{i}\not{p}+m] &= \not{e}[\mathrm{i}\not{p}+m][-\mathrm{i}\not{p}+m]\\ &= \not{e}[\not{p}^2+m^2] = \not{e}(p_\mu p^\mu + m^2) = 0\end{aligned}$$

对 $\not{e}'^*$, $\not{e}'$ 和 $\not{e}^*$ 也同样如此. 因而方程(8.7.21)可以写成如下非常简化的形式

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma,\sigma'}|M|^2 = \frac{-e^4}{64(2\pi)^6\omega\omega' p^0 p'^0}\,\mathrm{Tr}\left[\left\{\frac{\not{e}'^*\not{k}\not{e}}{p\cdot k}+\frac{\not{e}\not{k}'\not{e}'^*}{p\cdot k'}\right\}(-\mathrm{i}\not{p}+m)\right.\\ \left.\times\left\{\frac{\not{e}^*\not{k}\not{e}'}{p\cdot k}+\frac{\not{e}'\not{k}'\not{e}^*}{p\cdot k'}\right\}(-\mathrm{i}\not{p}'+m)\right].\end{aligned} \tag{8.7.23}$$

奇数个 γ-矩阵乘积的迹为零, 所以上式分解成 m 的零阶项和二阶项:

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma,\sigma'}|M|^2 = \frac{e^4}{64(2\pi)^6\omega\omega' p^0 p'^0}\left(\frac{T_1}{(p\cdot k)^2}+\frac{T_2}{(p\cdot k)(p\cdot k')}+\frac{T_3}{(p\cdot k)(p\cdot k')}\right.\\ \left.+\frac{T_4}{(p\cdot k')^2}-\frac{m^2 t_1}{(p\cdot k)^2}-\frac{m^2 t_2}{(p\cdot k)(p\cdot k')}-\frac{m^2 t_3}{(p\cdot k)(p\cdot k')}-\frac{m^2 t_4}{(p\cdot k')^2}\right)\end{aligned} \tag{8.7.24}$$

其中

$$T_1 = \mathrm{Tr}\left\{\not{e}'^*\not{k}\not{e}\not{p}\not{e}^*\not{k}\not{e}'\not{p}'\right\}, \tag{8.7.25}$$

$$T_2 = \mathrm{Tr}\left\{\not{e}'^*\not{k}\not{e}\not{p}\not{e}'\not{k}'\not{e}^*\not{p}'\right\}, \tag{8.7.26}$$

$$T_3 = \mathrm{Tr}\left\{\not{e}\not{k}'\not{e}'^*\not{p}\not{e}^*\not{k}\not{e}'\not{p}'\right\}, \tag{8.7.27}$$

$$T_4 = \mathrm{Tr}\left\{\not{e}\not{k}'\not{e}'^*\not{p}\not{e}'\not{k}'\not{e}^*\not{p}'\right\}, \tag{8.7.28}$$

$$t_1 = \mathrm{Tr}\left\{\not{e}'^*\not{k}\not{e}\not{e}^*\not{k}\not{e}'\right\}, \tag{8.7.29}$$

$$t_2 = \mathrm{Tr}\left\{\not{e}'^*\not{k}\not{e}\not{e}'\not{k}'\not{e}^*\right\}, \tag{8.7.30}$$

$$t_3 = \mathrm{Tr}\left\{\not{e}\not{k}'\not{e}'^*\not{e}^*\not{k}\not{e}'\right\}, \tag{8.7.31}$$

$$t_4 = \mathrm{Tr}\left\{\not{e}\not{k}'\not{e}'^*\not{e}'\not{k}'\not{e}^*\right\}. \tag{8.7.32}$$

本章的附录将演示如何计算任意迹 $\mathrm{Tr}\{\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}\cdots\}$, 将其表示成 4-矢 $a, b, c, d, \cdots$ 标量积的乘积之和. 一般而言, 类似 t_k 或 T_k 这种 6 个或 8 个 γ-矩阵乘积的迹将分别是 15 项或 105 项的和, 幸运的是, 这里的大多数标量积为零; 除了方程(8.7.22), 我们还有 $k\cdot k = k'\cdot k' = 0$. (进一步地, $e\cdot e^* = e'\cdot e'^* = 1$.) 为了进一步简化计算, 我们只处理线偏振的情况, 其中 e^μ 和 e'^μ 是实的. 扔掉方程(8.7.25)—(8.7.32)中的星号, 我们有

$$T_1 = \mathrm{Tr}\left\{\not{e}'\not{k}\not{e}\not{p}\not{e}\not{k}\not{e}'\not{p}'\right\}.$$

因为 $e^\mu p_\mu = 0$ 且 $e^\mu e_\mu = 1$, 我们有

$$\not{e}\not{p}\not{e} = -\not{p}\not{e}\not{e} = -\not{p}$$

所以

$$T_1 = -\operatorname{Tr}\left\{\not{e}'\not{k}\not{p}\not{k}\not{e}'\not{p}'\right\}.$$

另外, $k^\mu k_\mu = 0$, 所以

$$\not{k}\not{p}\not{k} = -\not{k}\not{k}\not{p} + 2\not{k}p\cdot k = 2\not{k}p\cdot k$$

因此

$$T_1 = -2p\cdot k\ \operatorname{Tr}\left\{\not{e}'\not{k}\not{e}'\not{p}'\right\}.$$

利用方程(8.A.6), 有

$$T_1 = -8p\cdot k\,[2e'\cdot k\, e'\cdot p' - k\cdot p'].$$

作如下代换将是方便的

$$\begin{aligned} e'\cdot p' &= e'\cdot[p+k-k'] = e'\cdot k \\ k\cdot p' &= -\tfrac{1}{2}(p'-k)^2 - \tfrac{1}{2}m^2 = -\tfrac{1}{2}(p-k')^2 - \tfrac{1}{2}m^2 = p\cdot k' \end{aligned}$$

所以

$$T_1 = -16\,p\cdot k(e'\cdot k)^2 + 8\,p\cdot k\,p\cdot k'. \tag{8.7.33}$$

一个类似的(尽管更冗长些)计算给出

$$\begin{aligned} T_2 = T_3 &= -8(e\cdot k')^2(p\cdot k) + 16(e\cdot e')^2 p\cdot k'\,p\cdot k + 8(e\cdot e')^2 k\cdot k'\,m^2 \\ &\quad - 8(e\cdot e')m^2(k\cdot e')(k'\cdot e) + 8(e'\cdot k)^2 p\cdot k' \\ &\quad - 4(k\cdot p)^2 + 4(k\cdot k')(p\cdot p') - 4(k\cdot p')(p\cdot k') \end{aligned} \tag{8.7.34}$$

$$T_4 = 16p\cdot k'(e\cdot k')^2 + 8(p\cdot k)(p\cdot k'), \tag{8.7.35}$$

$$t_1 = t_4 = 0, \tag{8.7.36}$$

$$t_2 = t_3 = -8\,e\cdot e'\,k\cdot e'\,k'\cdot e + 8(k\cdot k')(e\cdot e')^2 - 4(k\cdot k'). \tag{8.7.37}$$

在方程(8.7.24)中合并所有这些项给出

$$\sum_{\sigma,\sigma'}|M|^2 = \frac{e^4}{64(2\pi)^6\omega\omega' p^0 p'^0}\left[\frac{8(k\cdot k')^2}{(k\cdot p)(k'\cdot p)} + 32(e\cdot e')^2\right]. \tag{8.7.38}$$

所有这些适用于任何 Lorentz 参考系. 在实验室参考系下, 我们有了特定的结果

$$\begin{aligned} k\cdot k' &= \omega\omega'(\cos\theta - 1) = m\omega\omega'\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'}\right), \\ p\cdot k &= -m\omega, \qquad p\cdot k' = -m\omega'. \end{aligned}$$

联立方程(8.7.38)与方程(8.7.17), 实验室参考系截面为

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\sum_{\sigma',\sigma}\mathrm{d}\sigma(\mathbf{p},\sigma\ +\ \mathbf{k},e\to\mathbf{p}',\sigma'\ +\ \mathbf{k}',e') &= \frac{e^4\omega'^2\mathrm{d}\Omega}{64\pi^2 m^2\omega^2} \\ &\quad\times\left[\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - 2 + 4(e\cdot e')^2\right]. \end{aligned} \tag{8.7.39}$$

这正是Ò. Klein (奥斯卡·克莱因)和 Y. Nishina (仁科芳雄) [4]在 1929 年(用旧式微扰论)导出的著名公式.

就像 8.6 节所讨论的, 如果入射光子(像通常那样)不是按某一特定的极化制备, 那么我们必须对 $\mathbf{e}$ 的两个彼此垂直的值取平均. 这个平均给出

$$\tfrac{1}{2}\sum_{e} e_i e_j = \tfrac{1}{2}(\delta_{ij} - \hat{\mathbf{k}}_i\hat{\mathbf{k}}_j)$$

那么微分截面是

$$\tfrac{1}{4}\sum_{e,\sigma,\sigma'} \mathrm{d}\sigma(\mathbf{p},\sigma\ +\ \mathbf{k}, e \to \mathbf{p}',\sigma'\ +\ \mathbf{k}', e') = \frac{e^4\omega'^2\mathrm{d}\Omega}{64\pi^2 m^2\omega^2}\left[\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - 2(\hat{\mathbf{k}}\cdot e')^2\right] . \tag{8.7.40}$$

我们看到散射光子极化的优势方向与入射方向以及末态光子方向垂直, 即垂直于散射平面. 这是一个著名的结果, 解释了包括食双星的光偏振在内的一类问题.**

在那些不测量末态光子极化的实验中, 为了计算截面, 我们必须做方程(8.7.40)对 e' 的求和, 利用

$$\sum_{e'} e'_i e'_j = \delta_{ij} - \hat{\mathbf{k}}'_i\hat{\mathbf{k}}'_j$$

这给出

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{4}\sum_{e,e',\sigma,\sigma'} \mathrm{d}\sigma(\mathbf{p},\sigma\ +\ \mathbf{k}, e \to \mathbf{p}',\sigma'\ +\ \mathbf{k}', e')\\ &\qquad = \frac{e^4\omega'^2\mathrm{d}\Omega}{32\pi^2 m^2\omega^2}\left[\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - 1 + \cos^2\theta\right] ,\end{aligned} \tag{8.7.41}$$

其中 θ 是 $\hat{\mathbf{k}}$ 和 $\hat{\mathbf{k}}'$ 之间的夹角. 在非相对论情况下, $\omega \ll m$, 方程(8.7.41)给出

$$\tfrac{1}{4}\sum_{e,e',\sigma,\sigma'} \mathrm{d}\sigma = \frac{e^4\mathrm{d}\Omega}{32\pi^2 m^2}(1+\cos^2\theta) . \tag{8.7.42}$$

立体角积分是

$$\int [1+\cos^2\theta]\mathrm{d}\Omega = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}[1+\cos^2\theta]\ \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{16\pi}{3} ,$$

给出了 $\omega \ll m$ 的总截面:

$$\sigma_{\mathrm{T}} = \frac{e^4}{6\pi m^2} . \tag{8.7.43}$$

这通常写成 $\sigma_{\mathrm{T}} = 8\pi r_0^2/3$, 其中的 $r_0 = e^2/4\pi m = 2.818\times10^{-13}\,\mathrm{cm}$, 它被称为*经典电子半径*. 表达式(8.7.43)被称为*Thomson截面*, 以电子发现者 J. J. Thomsom (约瑟夫·约翰·汤姆逊)的名字命名. 方程(8.7.42)和(8.7.43)的原始推导利用了经典力学和经典电动力学, 通过计算光在平面波电磁场中的非相对论点电荷上的再辐射(reradiation)得到.

** 从一颗星发出的光, 在被另一颗处在同一条视线上的较冷恒星外层大气中的电子所散射时, 光是偏振的. 这个偏振通常是探测不到的, 这是因为当天文学家把来自恒星盘所有部分的光加在一起时, 它们抵消了. 在食双星中, 当较冷恒星只挡住了较热恒星某一侧的光时, 这个偏振被观测到了.

8.8 推广: p-形式规范场*

电磁学的反对称场强张量是物理和数学中一类有特殊重要性的张量的一种特殊情况. p-形式是 p 阶反对称协变张量. 通过 p-形式 $t_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p}$ 可以构造 $(p+1)$-形式 $\mathrm{d}t$, 它被称为外导数,** 方法是求导然后对所有指标做反对称化:

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}t)_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{p+1}} &\equiv \partial_{[\mu_1} t_{\mu_2\mu_3\cdots\mu_{p+1}]} \\ &\equiv \partial_{\mu_1} t_{\mu_2\mu_3\cdots\mu_{p+1}} - \partial_{\mu_2} t_{\mu_1\mu_3\cdots\mu_{p+1}} + \cdots + (-1)^p \partial_{\mu_{p+1}} t_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p}\end{aligned} \tag{8.8.1}$$

其中方括号表示对括号中的所有指标反对称化. 由于求导可交换顺序, 再求一次外导数等于零

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}t) = 0\,. \tag{8.8.2}$$

外导数为零的 p-形式被称为闭的, 而本身就是外导数的 p-形式被称为恰当的. 从方程(8.8.2)可知, 任意恰当 p-形式都是闭的; Poincaré的一个著名定理[6]说, 如果一个区域可以光滑地收缩成一个点, 那么这个区域中的任何闭 p-形式都是恰当的.† 例如, 齐次 Maxwell 方程(8.1.16)告诉我们电磁场强 2-形式 $F_{\mu\nu}$ 是闭的; 那么 Poincaré 定理表明它也是恰当的, 从而使得它可以写成一个外导数, 即, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. 再次利用方程(8.8.2), 我们看到, 如果 A_μ 的变化是一个外导数, 即一个规范变换 $\delta A_\mu = \partial_\mu \Omega$, 2-形式 $F_{\mu\nu}$ 是不变的.

在 p-形式与外导数的体系下, 我们可以很自然地去考虑用 p-形式规范场‡ $A_{\mu_1\cdots\mu_p}$ 来描述无质量粒子的可能性, 它在如下规范变换下不变

$$\delta A = \mathrm{d}\Omega \tag{8.8.3}$$

或者更详细些

$$\delta A_{\mu_1\cdots\mu_p} = \partial_{[\mu_1}\Omega_{\mu_2\cdots\mu_p]}\,,$$

其中 $\Omega_{\mu_1\cdots\mu_{p-1}}$ 是任意的 $(p-1)$-形式. 从这样的 p-形式规范场, 我们可以构建规范不变场强张量

$$F = \mathrm{d}A \tag{8.8.4}$$

或者更细致些

$$F_{\mu_1\cdots\mu_{p+1}} = \partial_{[\mu_1} A_{\mu_2\cdots\mu_{p+1}]}\,. \tag{8.8.5}$$

(或者, 我们也可以从 $(p+1)$-形式 F 出发, 从假定条件 $\mathrm{d}F = 0$ 推断出存在满足 $F = \mathrm{d}A$ 的 p-形式 A.) 通过类比电动力学, 我们可以预期 A 的拉格朗日密度取如下形式

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2(p+1)} F_{\mu_1\cdots\mu_{p+1}} F^{\mu_1\cdots\mu_{p+1}} + J^{\mu_1\cdots\mu_p} A_{\mu_1\cdots\mu_p}\,, \tag{8.8.6}$$

---

*本节有些脱离本书的发展主线, 可以在第一次阅读时跳过.

**外导数与p-形式在广义相对论中扮演了特殊的角色, 部分原因是因为一个张量的外导数尽管是用普通导数而非协变导数计算出来的, 但是它像张量那样变换.[5]

†在多连通空间中, 闭形式并不一定是恰当的; 尽管将一个闭 p-形式局部地写成一个外导数是可能的, 但一般不能在全空间光滑地做到这点. 闭 p-形式的集合, 在模掉恰当 p-形式后, 构成了该空间所谓的 p 阶 de Rham (德拉姆)上同调群. 空间的 de Rham 上同调群与它的拓扑之间存在一个深刻的联系,[6] 我们将在卷II进一步讨论.

‡我们称 $A_{\mu_1\cdots\mu_p}$ 为一个 p-形式并不严格, 这是由于要求 $F = \mathrm{d}A$ 是张量, 只需要求 A 在相差一个规范变换的意义是张量. 事实上, 我们在 4 维时空中已经看到, 不可能用螺旋度 ±1 的无质量物质粒子的产生和湮灭算符构造出一个 4-矢场, 所以, 根据方程(8.1.2), 我们不得不处理一个可以与一个 4-矢仅相差一个规范变换的 $A^\mu(x)$.

其中 J 是反对称张量流(要么是 c-数, 要么是 A 以外的场的函数), 为了使作用量规范不变, 它必须满足守恒条件

$$\partial_{\mu_1} J^{\mu_1\cdots\mu_p} = 0\,. \tag{8.8.7}$$

于是 Euler-Lagrange 方程是

$$\partial_\mu F^{\mu\mu_1\cdots\mu_p} = -J^{\mu_1\cdots\mu_p}\,. \tag{8.8.8}$$

这些 p-形式规范场在时空维数大于 4 的理论中扮演了重要角色. 例如, 在 26 维时空中的最简单弦论中, 在低能处存在由 2-形式规范场 $A_{\mu\nu}$ 表示的弦简正模. 但在 4 维时空中, p-形式不提供新的可能性.

为了看到这点, 首先注意到, D 维时空中不存在指标个数大于 D 的反对称张量, 所以一般而言, 我们必须取 $p+1 \le D$. 类似任何其它 $p+1 \le D$ 的 $(p+1)$-形式, 场强 F 可以用对偶 $(D-p-1)$-形式 $\mathscr{F}$ 表示

$$F^{\mu_1\cdots\mu_{p+1}} = \epsilon^{\mu_1\cdots\mu_D}\mathscr{F}_{\mu_{p+2}\cdots\mu_D}\,. \tag{8.8.9}$$

同样, p-形式流 J 可以用对偶 $(D-p)$-形式流 $\mathscr{J}$ 表示

$$J^{\mu_1\cdots\mu_p} = \epsilon^{\mu_1\cdots\mu_D}\mathscr{J}_{\mu_{p+1}\cdots\mu_D}\,. \tag{8.8.10}$$

于是场方程(8.8.8)和守恒条件(8.8.7)可简写为

$$\mathrm{d}\mathscr{F} = \mathscr{J}\,, \qquad \mathrm{d}\mathscr{J} = 0\,. \tag{8.8.11}$$

由于对偶流 $\mathscr{J}$ 是闭的, 它可以用 $(D-p-1)$-形式 $\mathscr{S}$ 表示成

$$\mathscr{J} = \mathrm{d}\mathscr{S}\,. \tag{8.8.12}$$

方程(8.8.11)和(8.8.12)告诉我们 $\mathscr{F}$ 与 $\mathscr{S}$ 的差是闭的, 因此按照 Poincaré 定理, 它可以写成

$$\mathscr{F} = \mathscr{S} + \mathrm{d}\phi\,, \tag{8.8.13}$$

其中 ϕ 是一个 $(D-p-2)$-形式. 对于 $p = D-1$ 的情况, 存在一个例外, 此时 $\mathscr{F}$ 与 $\mathscr{S}$ 是 0-形式,也就是标量, 条件 $\mathrm{d}\mathscr{F} = \mathrm{d}\mathscr{S}$ 告诉我们 $\mathscr{F}$ 与 $\mathscr{S}$ 仅相差一个常数. 在这种情况下, 规范场根本不描述任何自由度. 因而我们可以只限于 $p \le D-2$ 的情况.

对于 $p \le D-2$, 齐次"Maxwell"方程 $\mathrm{d}F = 0$ 变成

$$\partial_{\mu_1}\mathscr{F}^{\mu_1\cdots\mu_{D-p-1}} = 0\,, \tag{8.8.14}$$

它与方程(8.8.13)一起给出 ϕ 的场方程:

$$\partial_{\mu_1}(\mathrm{d}\phi)^{\mu_1\cdots\mu_{D-p-1}} = -\partial_{\mu_1}\mathscr{S}^{\mu_1\cdots\mu_{D-p-1}}\,. \tag{8.8.15}$$

这在一组新的规范变换 $\phi \to \phi + \mathrm{d}\omega$ 下是不变的, 除了 $D-p-2=0$ 的情况, 这时, 使 F 不变的规范变换是 $\phi \to \phi + c$, 其中 c 是任意常数. *我们看到, 在 D 维时空中, p-形式规范场 A 的理论等价于 $D-p-2$-形式规范场 ϕ 的理论.*

我们现在可以理解为什么 p-形式规范场在 4 维时空中不提供新的可能性. 正如我们所看到的, 我们仅需要考察 $p \le D-2$ 的情况, 或者说 $p = 0, 1$ 或 2 的情况. 0-形式规范场是一标量 S, 对

于这一情况, 方程(8.8.5)变为 $F_\mu = \partial_\mu S$, 并且场方程(8.8.8)简化为 $\Box S = -J$. 规范不变性在这里是在 $S \to S + c$ 的偏移下不变, 其中 c 是一常数. 这正是仅有导数相互作用的无质量标量场理论. 1-形式规范场是与一守恒 4-矢流耦合的 4-矢 $A^\mu(x)$, 就和电动力学中一样. 最后按照上面所引的普遍结果, 4 维时空中的一个 2-形式规范场等价于一个 0-形式规范场, 而它, 正如我们所看到的, 等价于一个导数耦合的无质量标量场.

附录 迹

对于那些包含自旋 $\frac{1}{2}$ 粒子的过程, 在计算它们的 S-矩阵元和跃迁几率时, 我们经常会遇到 Dirac γ-矩阵乘积的迹. 因此给出所有这类计算中所要使用的迹的公式将是很有用的.

对于偶数个γ-矩阵的乘积, 迹为

$$\mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_{2N}}\} = 4\sum_{\text{pairings}}\delta_P\prod_{\text{pairs}}\eta_{\text{paired }\mu\text{ s}}\,. \tag{8.A.1}$$

这里的求和是对指标 $\mu_1, \cdots \mu_{2N}$ 的所有不同配对(pairing)方式求和. 一个配对可以视为整数 $1, 2, \cdots, 2N$ 到某个排序 $P1$, $P2, \cdots P\cdot(2N)$ 的置换, 其中, μ_{P1} 与 μ_{P2} 配对, μ_{P3} 与 μ_{P4} 配对, 以此类推. 置换对或置换一个对中的 μ 给出相同的配对, 所以不同配对的个数是

$$(2N)!/N!2^N = (2N-1)(2N-3)\cdots 1 \equiv (2N-1)!!\,. \tag{8.A.2}$$

通过要求

$$P1 < P2,\ P3 < P4, \cdots,\ P\cdot(2N-1) < P\cdot(2N) \tag{8.A.3}$$

以及

$$P1 < P3 < P5 < \cdots, \tag{8.A.4}$$

我们可以避免对等价的配对求和. 在这一约定下, 配对中包含的指标置换是偶置换还是奇置换决定了因子 δ_P 是 $+1$ 还是 -1. 方程(8.A.1)中的乘积是对所有 N 个配对求积, 第 n 个配对贡献因子 $\eta_{\mu_{P\cdot(2n-1)}\mu_{P\cdot(2n)}}$. 例如, (将 μ_1, μ_2, μ_3, $\mu_4, \cdots$ 写成 $\mu, \nu, \rho, \sigma, \cdots$), 对于 $N = 1, 2$ 和 3, 我们有*

$$\mathrm{Tr}\{\gamma_\mu\gamma_\nu\} = 4\,\eta_{\mu\nu}\,, \tag{8.A.5}$$

$$\mathrm{Tr}\{\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\} = 4\Big[\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} - \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}\Big]\,, \tag{8.A.6}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\{\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\kappa\gamma_\eta\} = 4\Big[&\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}\eta_{\kappa\eta} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\kappa}\eta_{\sigma\eta} + \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\eta}\eta_{\sigma\kappa}\\ &- \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}\eta_{\kappa\eta} + \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\kappa}\eta_{\sigma\eta} - \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\eta}\eta_{\sigma\kappa} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}\eta_{\kappa\eta} - \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\kappa}\eta_{\rho\eta}\\ &+ \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\eta}\eta_{\rho\kappa} - \eta_{\mu\kappa}\eta_{\nu\rho}\eta_{\sigma\eta} + \eta_{\mu\kappa}\eta_{\nu\sigma}\eta_{\rho\eta} - \eta_{\mu\kappa}\eta_{\nu\eta}\eta_{\rho\sigma} + \eta_{\mu\eta}\eta_{\nu\rho}\eta_{\sigma\kappa}\\ &- \eta_{\mu\eta}\eta_{\nu\sigma}\eta_{\rho\kappa} + \eta_{\mu\eta}\eta_{\nu\kappa}\eta_{\rho\sigma}\Big]\,.\end{aligned} \tag{8.A.7}$$

对于奇数个γ-矩阵, 结果要简单得多

$$\mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_{2N+1}}\} = 0\,. \tag{8.A.8}$$

*有新的计算机程序可用于计算大量 Dirac 矩阵乘积的迹.[7]

(8.A.1)的证明是通过数学归纳法. 首先注意到

$$\mathrm{Tr}\{\gamma_\mu\gamma_\nu\} = -\,\mathrm{Tr}\{\gamma_\nu\gamma_\mu\} + 2\,\mathrm{Tr}\{\eta_{\mu\nu}\,1\} = -\,\mathrm{Tr}\{\gamma_\mu\gamma_\nu\} + 8\eta_{\mu\nu}\,,$$

所以 $\mathrm{Tr}\{\gamma_\mu\gamma_\nu\} = 4\eta_{\mu\nu}$, 与方程(8.A.1)一致. 接下来假定方程(8.A.1)对 $N \le M-1$ 是正确的, 于是我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\} &= 2\eta_{\mu_1\mu_2}\,\mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_3}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\} - \mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_3}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\} \\
&= 2\eta_{\mu_1\mu_2}\,\mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_3}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\} - 2\eta_{\mu_1\mu_3}\,\mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_4}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\} \\
&\quad + \mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_4}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\} \\
&= 2\eta_{\mu_1\mu_2}\,\mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_3}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\} - 2\eta_{\mu_1\mu_3}\,\mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_4}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\} \\
&\quad + 2\eta_{\mu_1\mu_4}\,\mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\gamma_{\mu_5}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\} - \cdots \\
&\quad + 2\eta_{\mu_1\mu_{2M}}\,\mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_{2M-1}}\} - \mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\gamma_{\mu_1}\}\,.
\end{aligned}$$

所有对易子的迹为零, 所以这里减去的最后一项与左边是相同的, 因而

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\} = \eta_{\mu_1\mu_2}\,\mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_3}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\} \\
&- \eta_{\mu_1\mu_3}\,\mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_4}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\} + \eta_{\mu_1\mu_4}\,\mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\gamma_{\mu_5}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\} \\
&- \cdots + \eta_{\mu_1\mu_{2M}}\,\mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_{2M-1}}\}\,.
\end{aligned} \tag{8.A.9}$$

如果我们假定方程(8.A.1)正确地给出任意 $2N-2$ 个 Dirac 矩阵的乘积的迹, 那么方程(8.A.9)表明方程(8.A.1)也正确地给出任意 $2N$ 个 Dirac 矩阵的乘积的迹.

看出奇数个 Dirac 矩阵的迹为零的最简单方式是, 注意到, $-\gamma_\mu$ 通过一个相似变换 $-\gamma_\mu = \gamma_5\gamma_\mu(\gamma_5)^{-1}$ 与 γ_μ 相联系. 迹是不受这样的相似变换影响的, 所以奇数个 Dirac 矩阵的迹等于负的自己, 因此等于零.

有时会遇到另一类迹, 形如

$$\mathrm{Tr}\{\gamma_5\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n}\}\,.$$

与前面不含 γ_5 的迹的情况中的理由相同, 对奇数的 n, 这个迹为零. 这个迹对 $n=0$ 和 $n=2$ 也为零:

$$\mathrm{Tr}\{\gamma_5\} = 0 \tag{8.A.10}$$

$$\mathrm{Tr}\{\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\} = 0\,. \tag{8.A.11}$$

(为了看出这点, 只需回忆起 $\gamma_5 \equiv \mathrm{i}\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ 即可, 注意到在 $\mathrm{Tr}\{\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\}$ 或 $\mathrm{Tr}\{\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_\mu\gamma_\nu\}$ 中没有一种指标配对的方式使得每对中的时空指标相等.) 对 $n=4$, 在 $\mathrm{Tr}\{\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\}$ 中有可能对指标进行配对使得每对中的时空指标相等, 但仅限于 μ,ν,ρ,σ 是 $0,1,2,3$ 的某个置换的情况. 更进一步, 由于带有不同指标的 γ-矩阵反对易, 这个迹在 μ,ν,ρ,σ 的置换下为奇. 因此迹 $\mathrm{Tr}\{\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\}$ 一定正比于全反对称张量 $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$. 通过令 μ,ν,ρ,σ 取 $0,1,2,3$ 并利用 $\epsilon_{0123} = -1$, 我们可以求出这个比例常数. 用这种方法, 我们发现

$$\mathrm{Tr}\{\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\} = 4\mathrm{i}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,. \tag{8.A.12}$$

利用上面证明方程(8.A.1)的方法, 我们可以计算出 γ_5 与 6 个, 8 个或更多的 γ-矩阵的乘积的迹.

习题

1. 计算过程 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 的微分和总散射截面至 e 的最低阶. 这里假设没有测量电子和 μ 子的自旋. 采用电子和 μ 子电动力学所给出的最简单的拉格朗日量.

2. 对带电标量场 Φ 和它与电磁场相互作用的理论进行正则量子化, 拉格朗日密度为:

$$\mathscr{L} = -(D_\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi) - m^2\Phi^\dagger\Phi - \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2 - \tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \,,$$

其中

$$D_\mu\Phi \equiv \partial_\mu\Phi - \mathrm{i}qA_\mu\Phi \,, \qquad F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \,.$$

采用 Coulomb 规范. 用场 A, Φ, $\Phi^\dagger$ 和它们的正则共轭表示哈密顿量. 在相互作用绘景中计算相互作用 $V(t)$, 将其表示成相互作用绘景场和它们的导数.

3. 利用习题 2 的结果, 对光子在有质量带电标量粒子上的散射, 计算微分截面和总截面至 e 的最低阶.

4. 对于与电磁场相互作用的有质量矢量场, 写出它的规范不变拉格朗日量.

5. 对于电子-电子散射, 假定不测量初态和末态自旋, 计算微分截面至 e 的最低阶.

参考文献

[1] 可参看 M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten, *Superstring Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987): Section 2.2.

[1a] V. Fock, *Z. f. Phys.* **39**, 226 (1927); H. Weyl, *Z. Phys.* **56**, 330 (1929). "规范不变"项是通过与更早的 H. Weyl 对尺度不变性猜测类比推断出来的, 收录于*Raum, Zeit, Materie,* 3rd ed. (Springer-Verlag, Berlin, 1920). 另见 F. London, *Z. f. Phys.* **42**, 375 (1927). 杨振宁在城市学院(City College)的讲话中回忆了这段历史(未发表).

[2] 基于与这里差不多的理由, Schwinger 大力提倡在电动力学中采用 Coulomb 规范: 我们不该引入螺旋度为 ±1 以外的光子. 参看 J. Schwinger, *Phys. Rev.* **78**, 1439 (1948); **127**, 324 (1962); *Nuovo Cimento* **30**, 278 (1963).

[3] R. P. Feynman, *Phys. Rev.* **101**, 769 (1949): Section 8.

[4] O. Klein and Y. Nishina, *Z. f. Phys*. **52**, 853 (1929); Y. Nishina, *ibid*., 869 (1929); 另见 I. Tamm, *Z. f. Phys.* **62**, 545 (1930).

[5] 可参看 S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972): Section 4.11.

[6] 关于p-形式的几何与拓扑的一个易懂的一般介绍参看H. Flanders, *Differential Forms* (Academic Press, New York, 1963).

[7] T. West, *Comput. Phys. Commun*. **77**, 286 (1993).

第 9 章　路径积分方法

在第 7 章和第 8 章, 我们用正则量子化算符体系来推导各种理论的 Feynman 规则. 在很多情况下, 例如有导数耦合的标量场或者质量为零或非零的矢量场, 这个步骤尽管直接却很难处理. 相互作用哈密顿量会包含一个协变项和一个非协变项, 前者等于负的拉格朗日量中的相互作用项, 而后者用以抵消传播子中的非协变项. 在电动力学的情况中, 这个非协变项(Coulomb 能)尽管在时间上是定域, 但不是空间定域的. 最后的结果仍然相当简单: Feynman 规则正是那些我们应该通过协变的传播子以及用负拉格朗日量中的相互作用项计算顶点贡献所得到的. 得到这些结果时的繁琐, 对第 7 和第 8 章中所考虑的理论来说已经够糟了, 对更加复杂的理论, 像卷 II 中将要讨论的非阿贝尔规范理论以及广义相对论, 这种繁琐将是无法接受的. 我们将更希望有这样的计算方法: 它可以直接从拉格朗日量得到最终的 Lorentz 协变的 Feynman 规则.

幸运地是, 这样的方法确实存在. 它是由量子力学的路径积分方法给出的. 它首次出现在 Feynman 的普林斯顿大学博士论文[1]中, 更准确的说是非相对论量子力学那部分中, 作为一种直接基于拉格朗日量而非哈密顿量的方法. 在这方面, 这个方法受到了 Dirac [2]早期工作的启发. 路径积分方法(连同来自灵感的猜测)在稍后 Feynman 推导他的图形规则中起了部分作用[3]. 然而, 尽管 Feynman 图在 20 世纪 50 年代就得到广泛应用, 大多数物理学家(包括我自己)倾向于用 Schwinger 和 Tomonaga 的算符方法导出它们, Dyson 在 1949 年证明这一方法所导出的图形规则与 Feynman 用他自己的方法导出的规则相同.

路径积分于 20 世纪 60 年代末期复兴, 当时 Faddeev (法捷耶夫)和 Popov (波波夫)[4]以及 De Witt (德怀特)[5]阐明了怎样将其应用于非阿贝尔规范理论和广义相对论. 对大多数理论家来说, 转折点出现在 1971 年, 当时 't Hooft (特 • 霍夫特)[6]利用路径积分方法, 在一个使相互作用的高能行为变得明显的规范下, 导出了自发破缺规范理论(将在卷 II 讨论)的 Feynman 规则, 特别地, 这囊括了弱作用和电磁作用理论. 不久之后, 如我们将在卷 II 讨论的, 我们发现路径积分方法让我们可以计入那些在零耦合常数处有本性奇点的 S-矩阵贡献, 这样的贡献是不可能在任何有限阶微扰论中被发现. 自此以后, 这里所描述的路径积分方法就成了所有使用量子场论的物理学家不可或缺的工具.

这时候读者可能会产生疑问, 既然路径积分方法这么方便, 那么我们为什么还要劳神费力地在第 7 章介绍正则体系. 事实上, Feynman 起初似乎认为他的路径积分方法是普通的量子力学正则形式的一个替代品. 从正则形式体系出发有两个理由. 一个是原理上的: 尽管路径积分体系给我们提供了明显 Lorentz 不变的图形规则, 但它并没有说清为什么以这种方式计算的 S-矩阵是幺正的. 就我所知, 证明路径积分体系给出的 S-矩阵幺正的唯一方法是, 用它重构出幺正性非常显然的正则体系. 这里有这样的麻烦; 采用正则方法, 幺正性明显但 Lorentz 不变性不显然, 采用路径积分方法, Lorentz 不变性明显但幺正性远没有那么显然. 既然这里是从正则方法导出的路径积分方法, 我们又知道两种方法给出相同的 S-矩阵, 所以 S-矩阵必须既是 Lorentz 不变的又是幺正的.

先引入正则体系的第二个原因更加实际: 存在这样的重要理论, 在这些理论中, Feynman 路径积分方法的最简单版本, 即从拉格朗日量中直接抽取传播子和相互作用顶点, 是错的. 一个例子是

非线性 σ-模型, 它的拉格朗日量密度是 $\mathscr{L} = -\frac{1}{2} g_{k\ell}(\phi)\partial_\mu \phi^k \partial^\mu \phi^\ell$. 在这类理论中, 采用直接从拉格朗日密度导出的朴素的 Feynman 规则给出的 S-矩阵不仅是错的甚至是不幺正的, 并且还依赖于我们定义标量场的方式.[7] 本章中, 我们将从正则体系推导出路径积分体系, 我们将从这种方式看到: 什么样的额外顶点需要被补充进 Feynman 路径积分方法的最简版本中.

9.1 普遍的路径积分公式

我们从一个一般的量子力学系统出发, 它的厄米算符"坐标" Q_a 以及共轭"动量" P_b 满足正则对易关系*:

$$[Q_a, P_b] = \mathrm{i}\,\delta_{ab}\,, \tag{9.1.1}$$

$$[Q_a, Q_b] = [P_a, P_b] = 0\,. \tag{9.1.2}$$

(在本节以及接下来的三节, 我们只考虑玻色算符, 它满足对易关系而不是反对易关系. 在 9.5 节, 我们的结果将被推广到包含费米算符的情况.) 在一个场论中, 指标 a 由空间位置 $\mathbf{x}$ 和一个离散的 Lorentz 指标以及种类指标 m 构成, 我们按照惯例写成

$$Q_{\mathbf{x},m} \equiv Q_m(\mathbf{x})\,, \tag{9.1.3}$$

$$P_{\mathbf{x},m} \equiv P_m(\mathbf{x})\,. \tag{9.1.4}$$

另外, 方程(9.1.1)中的克罗内克 δ-符号在场论中理解成

$$\delta_{\mathbf{x},m\,;\mathbf{y},n} \equiv \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\delta_{mn}\,. \tag{9.1.5}$$

然而, 目前采用方程(9.1.1)和(9.1.2)中的较紧凑记法更方便. 这些是"Schrödinger-绘景"算符, 取在了固定时刻(例如, $t = 0$). Heisenberg 绘景中的含时算符稍后考虑.

既然 Q_a 全部对易, 我们可以找到一个本征值为 q_a 的共同本征态:

$$Q_a|q\rangle = q_a\,|q\rangle\,. \tag{9.1.6}$$

(我们在这里用小写的 q 和 p 标记本征值而不像第 7 章中那样用来标记相互作用绘景中的算符, 但由于我们在本章不用相互作用绘景, 因而不会产生混淆.) 本征矢可以取成正交的,

$$\langle q'|q\rangle = \prod_a \delta(q'_a - q_a) \equiv \delta(q'-q)\,, \tag{9.1.7}$$

使完备关系变为

$$1 = \int \prod_a \mathrm{d}q_a\,|q\rangle\,\langle q|\,. \tag{9.1.8}$$

类似地, 我们可以找到 P_a 的一组完备正交基:

$$P_a|p\rangle = p_a|p\rangle\,, \tag{9.1.9}$$

$$\langle p'|p\rangle = \prod_a \delta(p'_a - p_a) \equiv \delta(p'-p)\,, \tag{9.1.10}$$

$$1 = \int \prod_a \mathrm{d}p_a\,|p\rangle\,\langle p|\,. \tag{9.1.11}$$

*我们在这里默认假定所有第一类约束通过选择规范被消除了, 而剩下的所有第二类约束通过将约束自由度表示成非约束的 Q_a 和 P_a 被"解出"了, 就像 7.6 节中那样. Faddeev 阐述了路径积分方法在约束系统中的直接应用.[8]

和往常一样, 由方程(9.1.1)可知这两组完备的本征态具有标积[**]

$$\langle q|p\rangle = \prod_a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(\mathrm{i}q_a p_a)\,. \tag{9.1.12}$$

在 Heisenberg 绘景中, Q 算符和 P 算符以下面的方式依赖于时间

$$Q_a(t) \equiv \exp(\mathrm{i}Ht)\, Q_a\, \exp(-\mathrm{i}Ht)\,, \tag{9.1.13}$$

$$P_a(t) \equiv \exp(\mathrm{i}Ht)\, P_a\, \exp(-\mathrm{i}Ht)\,, \tag{9.1.14}$$

其中 H 是总哈密顿量. 这些算符有本征态 $|q;t\rangle$ 和 $|p;t\rangle$

$$Q_a|q;t\rangle = q_a|q;t\rangle\,, \tag{9.1.15}$$

$$P_a|p;t\rangle = p_a|p;t\rangle\,, \tag{9.1.16}$$

它们以如下方式给定

$$|q;t\rangle = \exp(\mathrm{i}Ht)|q\rangle\,, \tag{9.1.17}$$

$$|p;t\rangle = \exp(\mathrm{i}Ht)|p\rangle\,. \tag{9.1.18}$$

(注意 $|q;t\rangle$ 是 $Q_a(t)$ 的本征值为 q_a 的本征态, 而不是态 $|q\rangle$ 演化时间 t 后的态. 这是为什么它对时间的依赖由因子 $\exp(\mathrm{i}Ht)$ 而非 $\exp(-\mathrm{i}Ht)$ 给出.) 这些态显然满足完备性和正交性条件

$$\langle q';t|q;t\rangle = \delta(q'-q)\,, \tag{9.1.19}$$

$$\langle p';t|p;t\rangle = \delta(p'-p)\,, \tag{9.1.20}$$

$$\int \prod_a \mathrm{d}q_a\, |q;t\rangle\, \langle q;t| = 1\,, \tag{9.1.21}$$

$$\int \prod_a \mathrm{d}p_a\, |p;t\rangle\, \langle p;t| = 1\,, \tag{9.1.22}$$

以及另外的

$$\langle q;t|p;t\rangle = \prod_a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(\mathrm{i}q_a p_a)\,. \tag{9.1.23}$$

如果, 通过在时刻 t 处的测量, 我们发现我们的系统处在确定的态 $|q;t\rangle$ 上, 那么在时刻 t' 测量给出态 $|q';t'\rangle$ 的几率振幅就是标量积 $\langle q';t'|q;t\rangle$. 我们核心的动力学问题就是计算这个标量积.

当 t' 和 t 无限接近时, 例如 $t'=\tau+\mathrm{d}\tau$ 而 $t=\tau$, 这很简单. 利用方程(9.1.17), 我们有

$$\langle q';\tau+\mathrm{d}\tau|q;\tau\rangle = \langle q';\tau|\exp(-\mathrm{i}H\,\mathrm{d}\tau)|q;\tau\rangle\,. \tag{9.1.24}$$

哈密顿量作为函数 $H(Q,P)$ 给出, 但既然(9.1.13)和(9.1.14)是相似变换, 并且 H 与它自身对易, 它可以等价地写成 $Q(t)$ 和 $P(t)$ 的同一个函数

$$H \equiv H(Q,P) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} H(Q,P) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} = H\Big(Q(t),P(t)\Big)\,. \tag{9.1.25}$$

[**]这个证明依循的路线与点粒子的量子力学相同. 由方程(9.1.1), 我们看到 P_b 以 $-\mathrm{i}\partial/\partial q_b$ 的方式作用在 q-基中的波函数上. 于是方程(9.1.12)的右边视为 P 的一个本征态在该基下的波函数. 因子 $\prod 1/\sqrt{2\pi}$ 由归一化要求, 方程(9.1.10), 所确定.

通过利用对易关系(9.1.1)和(9.1.2)交换 Q 和 P 的次序, 这一函数可以被写成各种不同的形式, 不同的形式中有着不同的常系数. 采用这样一种标准形式将是方便的: 所有的 Q 都处在所有 P 的左边. 例如, 给定哈密顿量中形如 $P_aQ_bP_c$ 的一项, 我们将其重新写为 $P_aQ_bP_c = Q_bP_aP_c - \mathrm{i}\delta_{ab}P_c$. 在这个约定下, 方程(9.1.24)中哈密顿量中的 $Q_a(t)$ 可以用它们的本征值 q'_a 代替[†]. 为了处理 $P(t)$, 我们用方程(9.1.23)在 P-本征态 $|p;\tau\rangle$ 下展开 $|p;\tau\rangle$, 发现

$$\begin{aligned}\langle q';\tau+\mathrm{d}\tau|q;\tau\rangle &= \int\prod_a \mathrm{d}p_a\,\langle q';\tau|\exp\Big(-\mathrm{i}H(Q(\tau),P(\tau))\mathrm{d}\tau\Big)|p;\tau\rangle \\ &\quad\times\langle p;\tau|q;\tau\rangle \\ &= \int\prod_a\frac{\mathrm{d}p_a}{2\pi}\,\exp\Big[-\mathrm{i}H(q',p)\mathrm{d}\tau+\mathrm{i}\sum_a(q'_a-q_a)p_a\Big]\,,\end{aligned}\tag{9.1.26}$$

其中每个 p_a 从 $-\infty$ 积分到 $+\infty$.

现在让我们回到更普遍的有限时间间隔的情况. 为了计算 $t<t'$ 的 $\langle q';t'|q;t\rangle$, 我们将从 t 到 t' 的时间间隔分割成段 t, τ_1, τ_2, $\cdots\tau_N$, t', 其中

$$\tau_{k+1}-\tau_k = \mathrm{d}\tau = (t'-t)/(N+1)\tag{9.1.27}$$

并对每个时刻 τ_k 的态 $|q;\tau_k\rangle$ 的完全集求和:

$$\langle q';t'|q;t\rangle = \int\mathrm{d}q_1\cdots\mathrm{d}q_N\,\langle q';t'|q_N;\tau_N\rangle\,\langle q_N;\tau_N|q_{N-1};\tau_{N-1}\rangle\cdots\langle q_1;\tau_1|q;t\rangle\tag{9.1.28}$$

代入方程(9.1.26), 这变成

$$\begin{aligned}\langle q';t'|q;t\rangle &= \int\Big[\prod_{k=1}^{N}\prod_a\mathrm{d}q_{k,a}\Big]\Big[\prod_{k=0}^{N}\prod_a\mathrm{d}p_{k,a}/2\pi\Big] \\ &\times\exp\Big[\mathrm{i}\sum_{k=1}^{N+1}\Big\{\sum_a(q_{k,a}-q_{k-1,a})p_{k-1,a}-H(q_k,p_{k-1})\mathrm{d}\tau\Big\}\Big]\,,\end{aligned}\tag{9.1.29}$$

其中

$$q_0\equiv q\,,\qquad q_{N+1}\equiv q'\,.\tag{9.1.30}$$

我们的结果, 方程(9.1.29), 可以变成更加简洁的形式. 定义光滑插值函数, $q(\tau)$ 和 $p(\tau)$, 使得

$$q_a(\tau_k)\equiv q_{k,a}\,,\qquad p_a(\tau_k)\equiv p_{k,a}\,.\tag{9.1.31}$$

在 $\mathrm{d}\tau\to 0$ (即, $N\to\infty$)的极限下, 方程(9.1.29)中指数的幅角就变成了对 τ 的积分

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{N+1}\Big\{\sum_a(q_{k,a}-q_{k-1,a})p_{k-1,a}-H(q_k,p_{k-1})\mathrm{d}\tau\Big\} \\ &=\sum_{k=1}^{N+1}\Big\{\sum_a\dot{q}_a(\tau_k)p_a(\tau_k)-H\Big(q(\tau_k),p(\tau_k)\Big)\Big\}\,\mathrm{d}\tau+O(\mathrm{d}\tau^2) \\ &\to\int_t^{t'}\Big\{\sum_a\dot{q}_a(\tau)p_a(\tau)-H\Big(q(\tau),p(\tau)\Big)\Big\}\mathrm{d}\tau\,.\end{aligned}\tag{9.1.32}$$

[†]这是唯一的可能, 因为对无限小的 $\mathrm{d}\tau$, $\exp(-\mathrm{i}H\,\mathrm{d}\tau)$ 对 H 是线性的.

进一步, 我们可以定义对函数 $q(\tau),p(\tau)$ 的积分

$$\int\prod_{\tau,a}\mathrm{d}q_a(\tau)\prod_{\tau,b}\frac{\mathrm{d}p_b(\tau)}{2\pi}\cdots\equiv\lim_{\mathrm{d}\tau\to0}\int\prod_{k,a}\mathrm{d}q_{k,a}\prod_{k,b}\frac{\mathrm{d}p_{k,b}}{2\pi}\cdots\,. \tag{9.1.33}$$

于是方程(9.1.29)就变成了一个有约束的路径积分

$$\begin{aligned}\langle q';t'|q;t\rangle=&\int\limits_{\substack{q_a(t)=q_a\\q_a(t')=q'_a}}\prod_{\tau,a}\mathrm{d}q_a(\tau)\prod_{\tau,b}\frac{\mathrm{d}p_b(\tau)}{2\pi}\\&\times\exp\left[\mathrm{i}\int_t^{t'}\mathrm{d}\tau\left\{\sum_a\dot{q}_a(\tau)p_a(\tau)-H\Big(q(\tau),p(\tau)\Big)\right\}\right].\end{aligned} \tag{9.1.34}$$

这称为路径积分, 这是因为我们对所有从 $\tau=t$ 的 q 到 $\tau=t'$ 的 q' 的路径 $q(\tau)$ 进行积分, 同样地还对所有的 $p(\tau)$ 积分. 以这种方式写矩阵元的巨大优点是, 就像在 9.3 节所要讲的, 路径积分按 H 中的耦合常数展开的幂级数很容易计算.

路径积分体系不仅允许我们计算像 $\langle q';t'|q;t\rangle$ 这样的跃迁几率振幅, 还允许我们计算一般算符 $\mathcal{O}(P(t),Q(t))$ 的编时乘积在态 $\langle q';t'|$ 和 $|q;t\,\rangle$ 间的矩阵元. 将这些算符定义成(不同于 H)所有的 P 处在左边而所有的 Q 处在右边将是方便的. 这样, 通过将任意这样的算符 $\mathcal{O}(P(\tau),Q(\tau))$ 插入方程(9.1.26), 我们就有

$$\begin{aligned}&\langle q';\tau+\mathrm{d}\tau|\mathcal{O}\Big(P(\tau),Q(\tau)\Big)|q;\tau\rangle=\int\prod_a\mathrm{d}p_a\\&\quad\times\langle q';\tau|\exp\Big(-\mathrm{i}H\Big(Q(\tau),P(\tau)\Big)\mathrm{d}\tau\Big)\,|p;\tau\rangle\langle p;\tau|\mathcal{O}\Big(P(\tau),Q(\tau)\Big)|q;\tau\rangle\\&=\int\prod_a\frac{\mathrm{d}p_a}{2\pi}\exp\left[-\mathrm{i}H(q',p)\mathrm{d}\tau+\mathrm{i}\sum_a(q'_a-q_a)p_a\right]\mathcal{O}(p,q)\,.\end{aligned} \tag{9.1.35}$$

为了计算 $t_A>t_B>\cdots$ 的算符乘积 $\mathcal{O}_A\Big(P(t_A),Q(t_A)\Big)\mathcal{O}_B\Big(P(t_B),Q(t_B)\Big)$ 的矩阵元, 我们可以在方程(9.1.28)中的合适的态之间插入 $\mathcal{O}$-算符, 并应用方程(9.1.35). 例如, 如果时刻 t_A 落在 τ_k 和 τ_{k+1} 之间, 那么在 $\langle q_{k+1};\tau_{k+1}|$ 和 $|q_k;\tau_k\rangle$ 之间插入 $\mathcal{O}_A\Big(P(t_A),Q(t_A)\Big)$. 注意, 在方程(9.1.28)中对态的每个相继的求和都是在下一个时间, 所以由于我们假定了 $t_A>t_B>\cdots$, 这是唯一的可能性. 依循与前面相同的步骤, 现在我们可以得到普遍的路径积分公式

$$\begin{aligned}&\langle q',t'|\mathcal{O}_A\Big(P(t_A),Q(t_A)\Big)\mathcal{O}_B\Big(P(t_B),Q(t_B)\Big)\cdots|q,t\rangle\\&=\int\limits_{\substack{q_a(t)=q_a\\q_a(t')=q'_a}}\prod_{\tau,a}\mathrm{d}q_a(\tau)\prod_{\tau,b}\frac{\mathrm{d}p_b(\tau)}{2\pi}\,\mathcal{O}_A\Big(p(t_A),q(t_A)\Big)\mathcal{O}_B\Big(p(t_B),q(t_B)\Big)\cdots\\&\qquad\times\exp\left[\mathrm{i}\int_t^{t'}\mathrm{d}\tau\left\{\sum_a\dot{q}_a(\tau)p_a(\tau)-H\Big(q(\tau),p(\tau)\Big)\right\}\right].\end{aligned} \tag{9.1.36}$$

这个结果只有在时间按照

$$t'>t_A>t_B>\cdots t\,. \tag{9.1.37}$$

排序之后才是正确的. 然而, 方程(9.1.36)的右边并没有什么指定了时间变量的次序. 因此, 如果给我们的是类似方程(9.1.36)右边的路径积分, 其中 $t_A, t_B, \cdots$ 以任意次序排列(都处在 t 和 t' 之间, 其中 $t < t'$), 那么这个路径积分将等于像方程(9.1.36)左边那样的矩阵元, 但是其中的算符(从左到右)以时间减少的次序排列. 也就是说, 对以任意次序排列的 $t_A, t_B, \cdots$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\langle q', t'|T\Big\{\mathcal{O}_A\Big(P(t_A), Q(t_A)\Big), \mathcal{O}_B\Big(P(t_B), Q(t_B)\Big), \cdots\Big\}|q, t\rangle \\
&= \int\limits_{\substack{q_a(t)=q_a \\ q_a(t')=q'_a}} \prod_{\tau,a} \mathrm{d}q_a(\tau) \prod_{\tau,b} \frac{\mathrm{d}p_b(\tau)}{2\pi}\, \mathcal{O}_A\Big(p(t_A), q(t_A)\Big)\mathcal{O}_B\Big(p(t_B), q(t_B)\Big)\cdots \\
&\qquad \times \exp\left[\mathrm{i}\int_t^{t'} \mathrm{d}\tau \left\{\sum_a \dot{q}_a(\tau)p_a(\tau) - H\Big(q(\tau), p(\tau)\Big)\right\}\right], \qquad (9.1.38)
\end{aligned}$$

其中 T 代表通常的编时乘积.

或许应该强调一下, 方程(9.1.38)中的 c-数函数 $q_a(\tau), p_a(\tau)$ 仅是积分变量, 尤其是它们没有被要求服从经典哈密顿动力学的运动方程

$$\dot{q}_a(\tau) - \frac{\partial H(q(\tau), p(\tau))}{\partial p_a(\tau)} = 0\,, \qquad (9.1.39)$$

$$\dot{p}_a(\tau) + \frac{\partial H(q(\tau), p(\tau))}{\partial q_a(\tau)} = 0\,. \qquad (9.1.40)$$

(由于这个原因, 方程(9.1.38)中的哈密顿量 $H(q(\tau), p(\tau))$ 对于 τ 并不是常数.) 然而, 在一种极限意义下, 路径积分确实反映了这些运动方程. 假定方程(9.1.38)中的一个函数, 例如 $\mathcal{O}_A\Big(p(t_A), q(t_A)\Big)$, 恰巧是方程(9.1.39)或方程(9.1.40)的左边. 我们注意到(对 $t < t_A < t'$)

$$\begin{aligned}
\left(\dot{q}_a(t_A) - \frac{\partial H(q(t_A), p(t_A))}{\partial p_a(t_A)}\right) \exp\Big(\mathrm{i}I[q,p]\Big) &= -\mathrm{i}\frac{\delta}{\delta p_a(t_A)} \exp\Big(\mathrm{i}I[q,p]\Big)\,, \\
\left(\dot{p}_a(t_A) + \frac{\partial H(q(t_A), p(t_A))}{\partial q_a(t_A)}\right) \exp\Big(\mathrm{i}I[q,p]\Big) &= \mathrm{i}\frac{\delta}{\delta q_a(t_A)} \exp\Big(\mathrm{i}I[q,p]\Big)\,,
\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{i}I$ 是方程(9.1.38)中指数的幅角:

$$I[q,p] \equiv \int_t^{t'} \mathrm{d}\tau \left\{\sum_a \dot{q}_a(\tau)p_a(\tau) - H\Big(q(\tau), p(\tau)\Big)\right\}.$$

只要 t_A 不碰到 t 或 t', 对 $q_a(t_A)$ 和 $p_a(t_A)$ 的积分就是不受约束的, 因而在对积分收敛性做了合理的假定后, 这些变分导数的积分必须为零. 因此, 如果 $\mathcal{O}_A(p,q)$ 被取成是运动方程(9.1.39)或(9.1.40)的左边, 那么路径积分(9.1.38)为零.

仅当积分变量 $q_a(t_A), p_a(t_A)$ 独立于出现在方程(9.1.38)中任何其它函数 $\mathcal{O}_B$, $\mathcal{O}_C$ 等中的任何变量 $q_a(t_B)$, $p_a(t_B)$ 等时, 且仅当我们禁止 t_A 逼近 t_B, t_C 等, 以及 t 或 t' 时, 这个简单规则才是适用的. 当 t_A 逼近, 例如 t_B 时, 这个路径积分将会包含一个正比于 $\delta(t_A - t_B)$ 或它的导数的非零项. 这些 δ-函数与算符体系中编时乘积定义中隐含的阶跃函数的时间导数是相同的.

在计算路径积分(9.1.34)和(9.1.38)时, 我们仅需要知道经典哈密顿量, 即 c-数函数 $H(q,p)$. 如果我们通过路径积分定义一个理论, 那么就会自然地产生一个问题: 在众多可能的量子力学哈密顿量 $H(Q,P)$ (彼此相差 Q 和 P 的次序)中, 哪一个控制这个路径积分所对应的量子理论? 我们的

推导已经给出了一个答案: 量子哈密顿量将被取成所有的 Q 在左边, 而所有的 P 在右边. 但是给这个做法赋予太多的含义将是一个错误. 对于出现在类似(9.1.34)或(9.1.38)中的路径积分中的测度 $\prod \mathrm{d}q_a(\tau)\ \prod \mathrm{d}p_b(\tau)$, 有许许多多的解释方法. 我们的处理方式, 即把所有的 Q 放在所有 P 的左边, 仅当测度依据方程(9.1.31)—(9.1.33)来解释时才是合适的. 其它测度将给出算符次序的其它方案. 这不是一个急迫的问题, 因为哈密顿量中算符次序的不同方案仅对应常数的不同选择, 这些常数是作为哈密顿量中各项系数出现的, 而在我们给出这些理论的普遍公式描述时, 这些常数总要留作任意参量.

很难将方程(9.1.38)中给出的一般路径积分用于数值计算或作为严格定理的基础. 为此, 用路径积分计算欧几里得空间中的振幅更好一些, 这时 t 被一个虚量 $-\mathrm{i}x_4$ 所替换, 并且方程(9.1.38)中指数的幅角是一个负的实量. 以这种方式, 取代了在从一个路径到另一路径的被积函数中产生快速振荡的锯齿状路径, 所有的锯齿路径都被指数地抑制掉了. 尽管我们不会在这里研究它, 量子场论可以从欧几里得时空中的 Feynman 振幅入手进而建立起来.[8a] 在一些貌似可信的假定下, 闵可夫斯基时空的 Feynman 振幅有可能从与之对应的欧几里得振幅重构出来.[8b] 但是如果我们仅打算用路径积分计算微扰论中的 Feynman 振幅, 我们也可以坚持路径积分的闵可夫斯基空间的形式.

9.2 过渡到 S-矩阵

正如前面提到的, 通过让指标 a 取遍空间中的点 $\mathbf{x}$ 以及自旋和种类指标 m, 并分别将 $Q_a(t)$ 和 $P_a(t)$ 替换成 $Q_m(\mathbf{x},t)$ 和 $P_m(\mathbf{x},t)$, 我们可以很容易地将 9.1 节中的一般量子力学结果转变成适合量子场论的记法. 这样, 方程(9.1.38)变成*

$$\begin{aligned}
&\langle q',t'|\,T\{\mathcal{O}_A[P(t_A),Q(t_A)],\mathcal{O}_B[P(t_B),Q(t_B)],\cdots\}|q,t\rangle \\
&\quad=\int\limits_{\substack{q_m(\mathbf{x},t)=q_m(\mathbf{x})\\ q_m(\mathbf{x},t')=q'_m(\mathbf{x})}}\ \prod_{\tau,\mathbf{x},m}\mathrm{d}q_m(\mathbf{x},\tau)\prod_{\tau,\mathbf{x},m}\frac{\mathrm{d}p_m(\mathbf{x},\tau)}{2\pi} \\
&\quad\times\mathcal{O}_A\Big[p(t_A),q(t_A)\Big]\,\mathcal{O}_B\Big[p(t_B),q(t_B)\Big]\cdots \\
&\quad\times\exp\left[\mathrm{i}\int_t^{t'}\mathrm{d}\tau\left\{\int\mathrm{d}^3x\sum_m\dot{q}_m(\mathbf{x},\tau)p_m(\mathbf{x},\tau)-H\Big[q(\tau),p(\tau)\Big]\right\}\right]. \qquad (9.2.1)
\end{aligned}$$

然而在场论中, 方程(9.2.1)不完全是我们想要的. 实验中测量的并不是量子场 Q 的本征态 $\langle q',t'|$ 和 $|q,t\rangle$ 之间的跃迁几率振幅, 而是测量 S-矩阵元, 即分别处在 $t\to-\infty$ 或 $t\to+\infty$ 时, 包含确定数目的各种类型的粒子态之间的跃迁几率振幅. 这些态被称为"入"态和"出"态, $|\alpha,\mathrm{in}\rangle$ 和 $|\beta,\mathrm{out}\rangle$, 其中 α 和 β 代表用各种粒子的动量, 自旋 z-分量(或螺旋度)以及种类所表征的粒子集合. 为了计算编时乘积(可能是空的)在这些态之间的矩阵元, 我们需要在方程(9.2.1)上的任意固定时刻 t 和 t' 乘上"波函数" $\langle\beta,\mathrm{out}|q',t'\rangle$ 和 $\langle q,t|\alpha,\mathrm{in}\rangle$, 方便起见, 这里的 t 和 t' 分别取 $-\infty$ 和 $+\infty$, 然后对这些波函数的"变量" $q_m(\mathbf{x})$ 和 $q'_m(\mathbf{x})$ 积分. 但是, 取代用如下条件约束对 $q_m(\mathbf{x},\tau)$ 的路径积分

$$q_m(\mathbf{x},+\infty)=q'_m(\mathbf{x})\,,\qquad q_m(\mathbf{x},-\infty)=q_m(\mathbf{x})\,, \qquad (9.2.2)$$

*我们现在把 H 和 $\mathcal{O}$ 所带的括号写成方括号, 这是提醒我们 $H[q(t),p(t)]$ 和 $\mathcal{O}[p(t),q(t)]$ 是在固定时刻 t 的 $q_m(\mathbf{x},t)$ 和 $p_m(\mathbf{x},t)$ 的泛函.

然后再对 $q'_m(\mathbf{x})$ 和 $q_m(\mathbf{x})$ 积分, 我们也可以对 $q_m(\mathbf{x},\tau)$ (以及 $p_m(\mathbf{x},\tau)$)做没有约束的积分, 并令波函数的变量等于方程(9.2.2)给出的值:

$$\begin{aligned}
&\langle\beta,\text{out}|\,T\Big\{\mathcal{O}_A\Big[P(t_A),Q(t_A)\Big],\mathcal{O}_B\Big[P(t_B),Q(t_B)\Big],\cdots\Big\}\,|\alpha,\text{in}\rangle \\
&\quad=\int\prod_{\tau,\mathbf{x},m}\mathrm{d}q_m(\mathbf{x},\tau)\prod_{\tau,\mathbf{x},m}(\mathrm{d}p_m(\mathbf{x},\tau)/2\pi) \\
&\qquad\times\mathcal{O}_A\Big[p(t_A),q(t_A)\Big]\,\mathcal{O}_B\Big[p(t_B),q(t_B)\Big]\cdots \\
&\qquad\times\exp\left[\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau\left\{\int\mathrm{d}^3x\sum_m\dot{q}_m(\mathbf{x},\tau)p_m(\mathbf{x},\tau)-H\Big[q(\tau),p(\tau)\Big]\right\}\right] \\
&\qquad\times\langle\beta,\text{out}|q(+\infty);+\infty\rangle\,\langle q(-\infty);-\infty|\alpha,\text{in}\rangle\,.
\end{aligned}\tag{9.2.3}$$

附带说一下, 这个结果立刻给出[**]方程(6.4.3), 这是我们反复使用的一个定理, 它将离壳 Feynman 图之和与 Heisenberg 绘景算符在精确能量本征态之间的矩阵元关联起来.

现在必须要考虑如何计算作为最后一对因子出现在方程(9.2.3)中的波函数. 我们现在考虑最简单但最重要的情况, 真空. (我们在 6.4 节看到, S-矩阵元可以很容易地从编时乘积的真空期望值中计算出来.) 我们像往常一样假定, 在 $t\to\pm\infty$ 时, 计算矩阵元可以认为没有相互作用. "入"真空和"出"真空因而可以通过以下条件定义

$$\begin{aligned}
&a_{\text{in}}(\mathbf{p},\sigma,n)|\text{VAC, in}\rangle=0\,,\\
&a_{\text{out}}(\mathbf{p},\sigma,n)|\text{VAC, out}\rangle=0\,,
\end{aligned}\tag{9.2.4}$$

其中 a_{in} 和 a_{out} 分别是算符 $Q_m(\mathbf{x},t)$ 在 $t\to\infty$和 $t\to+\infty$ 时的平面波展开中, 作为 $\exp(\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-\mathrm{i}Et)$ 的系数出现的算符. 例如, 对于中性无自旋粒子的实标量场, 我们实际上有

$$\Phi(\mathbf{x},t)\xrightarrow{t\to\mp\infty}(2\pi)^{-3/2}\int\mathrm{d}^3p\,(2E)^{-1/2}\Big[a_{\substack{\text{in}\\\text{out}}}(\mathbf{p})\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}+\text{H.c.}\Big]\,,\tag{9.2.5}$$

$$\begin{aligned}
&\Pi(\mathbf{x},t)\xrightarrow{t\to\mp\infty}\dot{\Phi}(\mathbf{x},t)\\
&\xrightarrow{t\to\mp\infty}-\mathrm{i}(2\pi)^{-3/2}\int\mathrm{d}^3p\,(E/2)^{1/2}\Big[a_{\substack{\text{in}\\\text{out}}}(\mathbf{p})\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}-\text{H.c.}\Big]
\end{aligned}\tag{9.2.6}$$

其中 $p^0\equiv E\equiv\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$, 并且我们在这里用传统的 Φ 和 Π 而不是 Q 和 P 来表示标量场, 并扔掉

[**] 只需要注意, 对于哈密顿量 $H[P(t),Q(t)]+\sum_A\int\mathrm{d}^3x\,\epsilon_A(\mathbf{x},t)\mathcal{O}_A(\mathbf{x},t)$, S-矩阵由方程(9.2.3)给定为

$$\begin{aligned}
\langle\beta,\text{out}|\alpha,\text{in}\rangle_\epsilon&=\int\prod_{\tau,\mathbf{x},m}\mathrm{d}q_m(\mathbf{x},\tau)\prod_{\tau,x,m}(\mathrm{d}p_m(\mathbf{x},\tau)/2\pi)\\
&\times\exp\left[\mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\tau\left\{\int\mathrm{d}^3x\,\dot{q}_m(\mathbf{x},\tau)p_m(\mathbf{x},\tau)-H\Big[q(\tau),p(\tau)\Big]\right.\right.\\
&\left.\left.-\sum_A\int\mathrm{d}^3x\,\epsilon_A(\mathbf{x},\tau)O_A(\mathbf{x},\tau)\right\}\right]\\
&\times\langle\beta,\text{out}|q(+\infty);+\infty\rangle\,\langle q(-\infty);-\infty|\alpha,\text{in}\rangle\,.
\end{aligned}$$

方程(6.4.3)的左边是该表达式对 ϵ_a,ϵ_b 等在 $\epsilon=0$ 处的导数, 它给出了方程(9.2.3)的右边, 再利用方程(9.2.3)就立刻给出方程(6.4.3)的右边.

了不必需的指标 m,σ,n. 做逆 Fourier 变换并对得到的表达式做线性组合, 我们有

$$a_{\substack{\text{in}\\\text{out}}}(\mathbf{p}) = \lim_{t\to\mp\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}Et}}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \times\left[\sqrt{\frac{E}{2}}\Phi(\mathbf{x},t)+\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2E}}\Pi(\mathbf{x},t)\right]. \tag{9.2.7}$$

正如 9.1 节中提到的, "动量" $\Pi(\mathbf{x},t)$ 作为变分导数 $-\mathrm{i}\delta/\delta\phi(\mathbf{x},t)$ 作用在 ϕ-基下的波函数上, 所以在这个基下, 条件(9.2.4)变成

$$0=\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\left[\frac{\delta}{\delta\phi(x)}+E(\mathbf{p})\phi(\mathbf{x})\right]\left\langle\phi(t\to\mp\infty);\mp\infty\middle|\mathrm{VAC},{}_{\text{out}}^{\text{in}}\right\rangle. \tag{9.2.8}$$

这个类常微分方程有一个著名的高斯解, 所以我们在这里尝试一下高斯拟设:

$$\left\langle\phi(t\to\mp\infty);\mp\infty\middle|\mathrm{VAC},{}_{\text{out}}^{\text{in}}\right\rangle=\mathscr{N}\ \exp\left(-\tfrac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y})\phi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{y})\right), \tag{9.2.9}$$

其中核 $\mathscr{E}$ 以及常数 $\mathscr{N}$ 待定. 将它代入方程(9.2.8), 我们看到, 如果对所有的 ϕ

$$0=\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\left[\int \mathrm{d}^3y\,\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y})\phi(\mathbf{y})-E(\mathbf{p})\phi(\mathbf{x})\right] \tag{9.2.10}$$

或者换种形式, 如果

$$\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y})=E(\mathbf{p})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}}, \tag{9.2.11}$$

那么真空波函数的泛函微分方程将被满足. 通过逆 Fourier 变换, 可以很容易找到这个解

$$\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y})=(2\pi)^{-3}\int \mathrm{d}^3p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}E(\mathbf{p}). \tag{9.2.12}$$

(回忆 $E(\mathbf{p})\equiv\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$). 这实际上是核 $\mathscr{E}$ 最有用的表示, 我们顺便注意到, 对 $\mathbf{x}\neq\mathbf{y}$, $\mathscr{E}$ 也可以写成负一阶 Hankel 函数的形式

$$\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\frac{m}{2\pi^2r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}K_{-1}(mr)\right), \tag{9.2.13}$$

其中 $r\equiv|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$. 方程(9.2.9)中的常数 $\mathscr{N}$ 可以从真空态的归一化条件中形式地获得, 但我们不会用到这个结果.

根据方程(9.2.9), 在标量场理论中计算真空期望值时, 方程(9.2.3)中后两个因子的乘积是

$$\begin{aligned}&\langle\mathrm{VAC},\mathrm{out}|\phi(\infty);+\infty\rangle\,\langle\phi(-\infty);-\infty|\mathrm{VAC},\mathrm{in}\rangle\\&=|\mathscr{N}|^2\ \exp\left(-\tfrac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y})\left[\phi(\mathbf{x},+\infty)\phi(\mathbf{y},+\infty)\right.\right.\\&\qquad\left.\left.+\phi(\mathbf{x},-\infty)\phi(\mathbf{y},-\infty)\right]\right)\\&=|\mathscr{N}|^2\ \exp\left(-\tfrac{1}{2}\epsilon\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau\,\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\tau)\phi(\mathbf{y},\tau)\mathrm{e}^{-\epsilon|\tau|}\right),\end{aligned} \tag{9.2.14}$$

其中 ϵ 是正的无限小. 为了获得最终的表达式, 我们使用了任意适度光滑函数 $f(\tau)$ 的如下性质,

$$f(+\infty)+f(-\infty)=\lim_{\epsilon\to 0_+}\epsilon\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau\, f(\tau)\,\mathrm{e}^{-\epsilon|\tau|}\,. \tag{9.2.15}$$

现在将方程(9.2.14)代入(9.2.3)给出

$$\begin{aligned}
&\Big\langle \mathrm{VAC},\mathrm{out}\Big|\, T\Big\{\mathcal{O}_A\Big[\Pi(t_A),\Phi(t_A)\Big],\mathcal{O}_B\Big[\Pi(t_B),\Phi(t_B)\Big],\cdots\Big\}\Big|\mathrm{VAC},\mathrm{in}\Big\rangle\\
&=|\mathscr{N}|^2\int\prod_{\tau,\mathbf{x}}\mathrm{d}\phi(\mathbf{x},\tau)\prod_{\tau,\mathbf{x}}(\mathrm{d}\pi(\mathbf{x},\tau)/2\pi)\;\mathcal{O}_A\Big[\pi(t_A),\phi(t_A)\Big]\\
&\quad\times\mathcal{O}_B\Big[\pi(t_B),\phi(t_B)\Big]\cdots\exp\Big[\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau\,\Big\{\int\mathrm{d}^3x\,\dot{\phi}(\mathbf{x},\tau)\,\pi(\mathbf{x},\tau)\\
&\quad-H\Big[\phi(\tau),\pi(\tau)\Big]+\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\epsilon\int\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{e}^{-\epsilon|\tau|}\phi(\mathbf{x},\tau)\phi(\mathbf{y},\tau)\Big\}\Big]\,.
\end{aligned}\tag{9.2.16}$$

我们将在 9.4 节看到, 方程(9.2.16)中指数幅角的最后一项的全部作用是: 为动量空间中的标量场传播子 $[p^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon]^{-1}$ 的分母提供 $-\mathrm{i}\epsilon$. 我们将不会深入讨论一般的有自旋场相应细节, 而只是简单地给出一般描述

$$\begin{aligned}
&\Big\langle \mathrm{VAC},\mathrm{out}\Big|\, T\Big\{\mathcal{O}_A\Big[P_A(t_A),Q_A(t_A)\Big],\mathcal{O}_B\Big[P(t_B),Q(t_B)\Big],\cdots\Big\}\Big|\mathrm{VAC},\mathrm{in}\Big\rangle\\
&=|\mathscr{N}|^2\int\Big[\prod_{\tau,\mathbf{x},m}\mathrm{d}q_m(\mathbf{x},\tau)\Big]\Big[\prod_{\tau,\mathbf{x},m}\frac{\mathrm{d}p_m(\mathbf{x},\tau)}{2\pi}\Big]\;\mathcal{O}_A\Big[p(t_A),q(t_A)\Big]\\
&\quad\times\mathcal{O}_B\Big[p(t_B),q(t_B)\Big]\cdots\exp\Big[\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau\,\Big\{\int\mathrm{d}^3x\,\sum_m\dot{q}_m(\mathbf{x},\tau)p_m(\mathbf{x},\tau)\\
&\quad-H\Big[q(\tau),p(\tau)\Big]+\mathrm{i}\epsilon\text{ 项}\Big\}\Big]\,.
\end{aligned}\tag{9.2.17}$$

其中“$\mathrm{i}\epsilon$ 项”的作用只是在所有传播子的分母中加上正确的 $-\mathrm{i}\epsilon$.

这里很适合提一下: 方程(9.2.17)中的不依赖场的因子是不重要的, 例如常数 $|\mathscr{N}|^2$. 这是因为这样的因子对矩阵元 $\langle\mathrm{VAC},\mathrm{out}|\mathrm{VAC},\mathrm{in}\rangle$ 也有贡献. 在计算编时乘积(或 S-矩阵)的真空期待值的连通部分时, 通过除掉 $\langle\mathrm{VAC},\mathrm{out}|\mathrm{VAC},\mathrm{in}\rangle$, 我们消除了连通真空涨落子图的贡献, 并且, 真空期待值中的任何常数因子在这个比值中也被消掉了.

通过在方程(9.2.3)中插入合适的“波泛函”, 我们可以继续下去并计算多粒子态间的矩阵元. 通过将诸如(9.2.7)的湮灭算符的共轭算符作用在真空态上, 我们就可以计算出它们; 在谐振子中, 可以证明那些波泛函是场中的厄米多项式乘以真空态的高斯函数. 这里不需要将它们全部解出来, 这是因为, 就像 6.4 节中讨论过的, 真空期望值(9.2.17)是我们在计算 S-矩阵元时所需要的全部.

9.3 路径积分公式的拉格朗日版本

方程(9.1.38)或(9.2.17)中指数上的被积函数看起来像是与这个哈密顿量 H 对应的拉格朗日量 L. 这一表面上的形式有些误导, 这是因为这里的“动量” $p_a(t)$ 或 $p_n(\mathbf{x},t)$ 是独立变量, 还没有与 $q_a(t)$ 或 $q_n(\mathbf{x},t)$ 或它们的导数关联起来. 然而, 有很大且很重要的一类理论, 在这类理论中, 对“动量”的积分可以通过将其替换成正则形式体系所给定的值来完成, 在这种情况下, 路径积分中指数上的被积函数确实是拉格朗日量.

这类理论是哈密顿量是“动量”的二次型的理论——用场论的语言表达就是

$$H[Q,P] = \tfrac{1}{2}\sum_{nm}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\; A_{\mathbf{x}n,\mathbf{y}m}[Q]\,P_n(\mathbf{x})\,P_m(\mathbf{y}) + \sum_n \int \mathrm{d}^3x\; B_{\mathbf{x}n}[Q]\,P_n(\mathbf{x}) + C[Q] \tag{9.3.1}$$

其中“矩阵” A 是一个对称且非奇异的实矩阵. 这样, 方程(9.2.17)中指数中的幅角就是 p 的二次型:

$$\begin{aligned}&\int \mathrm{d}\tau \left\{ \int \mathrm{d}^3x \sum_n p_n(\mathbf{x},\tau)\dot{q}_n(\mathbf{x},\tau) - H\Big[q(\tau),p(\tau)\Big]\right\}\\ &= -\tfrac{1}{2}\sum_{nm}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\tau'\;\mathscr{A}_{\tau\mathbf{x}n,\tau'\mathbf{y}m}[q]\,p_n(\mathbf{x},\tau)\,p_m(\mathbf{y},\tau')\\ &\quad -\sum_n \int \mathrm{d}^3x \int \mathrm{d}\tau\;\mathscr{B}_{\tau\mathbf{x}n}[q]\,p_n(\mathbf{x},\tau) - \mathscr{C}[q]\,,\end{aligned} \tag{9.3.2}$$

其中

$$\mathscr{A}_{\tau\mathbf{x}n,\tau'\mathbf{y}m}[q] \equiv A_{\mathbf{x}n,\mathbf{y}m}[q(\tau)]\delta(\tau-\tau')\,, \tag{9.3.3}$$

$$\mathscr{B}_{\tau\mathbf{x}n}[q] \equiv B_{\mathbf{x}n}[q(\tau)] - \dot{q}_n(\mathbf{x},\tau)\,, \tag{9.3.4}$$

$$\mathscr{C}[q] \equiv \textstyle\int \mathrm{d}\tau\, C[q(\tau)]\,. \tag{9.3.5}$$

现在, 像(9.3.2)这样的二次型表达式, 对它的指数进行积分的结果一般会正比于将幅角的稳相点代入计算出的指数值. 对于只有有限个实变量 ξ_s 的情况, 这个公式是

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\left(\prod_s \mathrm{d}\xi_s\right)\exp\left\{-\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\sum_{sr}\mathscr{A}_{sr}\xi_s\xi_r - \mathrm{i}\sum_s \mathscr{B}_s\xi_s - \mathrm{i}\mathscr{C}\right\}\\ &= (\mathrm{Det}[\mathrm{i}\mathscr{A}/2\pi])^{-1/2}\exp\left\{-\mathrm{i}\tfrac{1}{2}\sum_{sr}\mathscr{A}_{sr}\bar{\xi}_s\bar{\xi}_r - \mathrm{i}\sum_s \mathscr{B}_s\bar{\xi}_s - \mathrm{i}\mathscr{C}\right\},\end{aligned} \tag{9.3.6}$$

其中 $\bar{\xi}$ 是稳相点

$$\bar{\xi}_s = -\sum_r (\mathscr{A}^{-1})_{sr}\mathscr{B}_r\,. \tag{9.3.7}$$

(该公式的证明参看本章附录.) 因此, 只要方程(9.2.17)中的$\mathcal{O}_A$, $\mathcal{O}_B$等独立于 p, 对于这种哈密顿量, 通过将这些变量取在指数幅角中二次型表达式的稳相点, 我们就可以计算出方程(9.2.17)中对 p 的路径积分. 但是这个二次型的变分导数是

$$\begin{aligned}&\frac{\delta}{\delta p_n(\mathbf{x},\tau)}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau\left\{\int \mathrm{d}^3x\;\dot{q}_n(\mathbf{x},\tau)p_n(\mathbf{x},\tau) - H\Big[q(\tau),p(\tau)\Big] + \mathrm{i}\epsilon\text{ 项}\right\}\\ &= \dot{q}_n(\mathbf{x},\tau) - \frac{\delta}{\delta p_n(\mathbf{x},\tau)}H\Big[q(\tau),p(\tau)\Big]\,.\end{aligned}$$

($\mathrm{i}\epsilon$ 项只依赖 q.) 因此使其为零的稳相“点” $\bar{p}_n(\mathbf{x},t)$ 由正则公式

$$\dot{q}(\mathbf{x},\tau) = \left[\frac{\delta H\Big[q(\tau),p(\tau)\Big]}{\delta p_n(\mathbf{x},\tau)}\right]_{p=\bar{p}} \tag{9.3.8}$$

给出. 若令 $p_n(\mathbf{x},t)$ 等于这个值, 方程(9.2.17)中的指数幅角就是普通的拉格朗日量

$$L\Big[q(\tau),\dot{q}(\tau)\Big] \equiv \int \mathrm{d}^3x \left(\sum_n \dot{q}_n(\mathbf{x},\tau)\bar{p}_n(\mathbf{x},\tau) - H\Big[q(\tau),\bar{p}(\tau)\Big]\right) \tag{9.3.9}$$

并且, 我们可以将方程(9.2.17)写为

$$\begin{aligned}
&\Big\langle \mathrm{VAC},\mathrm{out}\Big| T\Big\{\mathcal{O}_A\Big[Q(t_A)\Big],\mathcal{O}_B\Big[Q(t_B)\Big],\cdots\Big\}\Big|\mathrm{VAC},\mathrm{in}\Big\rangle \\
&= |\mathcal{N}|^2 \int \prod_{\tau,\mathbf{x},n} \mathrm{d}q_n(\mathbf{x},\tau)\,\Big(\mathrm{Det}\Big[2\mathrm{i}\pi\mathscr{A}[q]\Big]\Big)^{-1/2} \\
&\quad\times \mathcal{O}_A\Big[q(t_A)\Big]\mathcal{O}_B\Big[q(t_B)\Big]\cdots \\
&\quad\times \exp\left[\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau\left\{L\Big[q(\tau),\dot{q}(\tau)\Big] + \mathrm{i}\epsilon\,\text{项}\right\}\right].
\end{aligned} \tag{9.3.10}$$

(我们合并了 p_n 积分中的因子 $1/2\pi$ 和来自方程(9.3.6)中的行列式.) 这正是希望的路径积分公式的拉格朗日形式.

在推导方程(9.3.10)时, 假定算符 $\mathcal{O}_A$, $\mathcal{O}_B,\cdots$ 独立于正则"动量"是必要的. 这并不像看上去那样特殊. 例如, 对标量场论, Φ 的正则共轭是 $\Pi=\dot{\Phi}$, 如果算符的编时乘积中的一个算符是 $\dot{\Phi}(t)$, 可能得到这个编时乘积的矩阵元的一种方式是: 将那个算符分别替换为 $\Phi(t+\mathrm{d}\tau)$ 和 $\Phi(t)$, 然后取矩阵元的差, 再除以 $\mathrm{d}\tau$, 最后令 $\mathrm{d}\tau\to 0$. 等价地, 只要 t 不等于方程(9.3.10)中任何其它算符的时间变量, 我们就能简单地做方程(9.3.10)对 t 的微分.

方程(9.3.10)中还剩下的复杂问题是 $\mathscr{A}[q]$ 的行列式. 如果 $\mathscr{A}[q]$ 不依赖于场, 那么就不存在问题; 我们已经注意到整体的常数对真空期望值的连通部分没有贡献, 在那里我们除掉了正比于同一常数因子的真空-真空振幅. 例如, 对于一组实标量场 Φ_n, 如果它们彼此间存在非导数耦合并(或)与外部流 J_n 存在导数耦合, 那么就将是这样的情况. 这里的拉格朗日量密度是

$$\mathscr{L} = -\sum_n\Big[\tfrac{1}{2}\partial_\lambda\Phi_n\partial^\lambda\Phi_n + J_n{}^\lambda\partial_\lambda\Phi_n\Big] - V(\Phi)\,.$$

对于 7.5 节的结果, 从一个导数耦合的标量到几个导数耦合的标量有一个明显的推广, 这个推广表明这个拉格朗日量隐含了哈密顿量

$$\begin{aligned}
H = \int \mathrm{d}^3x \sum_n\Big[&\tfrac{1}{2}\Pi_n^2 + \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\Phi_n)^2 \\
&+ \mathbf{J}_n\cdot\boldsymbol{\nabla}\Phi_n + J_n{}^0\Pi_n + \tfrac{1}{2}(J_n{}^0)^2\Big] + \int \mathrm{d}^3x\,V(\Phi)\,.
\end{aligned}$$

(这里的 Φ_n 被取成实标量, 但复标量也可以通过分成实部和虚部而被纳入进来.) 一般而言, 存在一个 Π_n 的线性非平庸项, 但二次项的系数是常数, 恰是单位"矩阵":

$$\mathscr{A}_{xn,x'n'} = \delta^4(x-x')\delta_{nn'}\,.$$

方程(9.3.10)中的因子 $\Big(\mathrm{Det}\Big[2\mathrm{i}\pi\mathscr{A}[q]\Big]\Big)^{-1/2}$ 在这里是一个与场无关的常数, 因而没有影响.

然而, 问题不总是那么简单. 作为第二个例子, 我们考虑所谓的非线性 σ-模型, 它的拉格朗日量密度是

$$\mathscr{L} = -\tfrac{1}{2}\sum_{nm}\partial_\lambda\Phi_n\partial^\lambda\Phi_m\Big[\delta_{nm}+U_{nm}(\Phi)\Big] - V(\Phi)\,.$$

直接计算给出如下哈密顿量

$$H=\int \mathrm{d}^3x\left[\tfrac{1}{2}\Pi_n\Big(1+U(\Phi)\Big)^{-1}_{nm}\Pi_m+\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\Phi_n\cdot\boldsymbol{\nabla}\Phi_m\Big(1+U(\Phi)\Big)_{nm}+V(\Phi)\right].$$

这里的 $\mathscr{A}$ 是依赖场的量

$$\mathscr{A}_{nx,my}=\Big[1+U(\Phi(x))\Big]^{-1}_{nm}\delta^4(x-y)\,.$$

在这类情况下, 利用关系 $\operatorname{Det}\mathscr{A}=\exp\operatorname{Tr}\ln\mathscr{A}$, 这个行列式可以重新表述为对有效拉格朗日量的贡献. 通过把连续的时空位置替换成分立的格点, 其中每个格点被时空体积为小量 Ω 的独立区域所包围, 我们可以把 $\mathscr{A}_{nx,my}$ 中的 δ-函数理解成 $\delta^4(x-y)=\Omega^{-1}\delta_{x,y}$, 从而使

$$(\ln\mathscr{A})_{nx,my}=\delta_{x,y}\Big[-\ln(1+U(\Phi(x)))-1\cdot\ln\Omega\Big]_{nm}$$

其中矩阵的对数现在由它的幂级数展开定义

$$\ln(1+U)=U-\frac{U^2}{2}+\frac{U^3}{3}-\cdots\,.$$

为了计算这个迹, 我们注意到 $\sum_x\cdots=\Omega^{-1}\int d^4x\cdots$. 于是这里的行列式因子是

$$\operatorname{Det}\mathscr{A}\propto\exp\left[-\Omega^{-1}\int\mathrm{d}^4x\ \operatorname{tr}\ln\Big[1+U(\Phi(x))\Big]\right],$$

其中“tr”被理解为普通矩阵意义下的迹. 比例常数(源于 $-\ln\Omega$ 项)是与场无关的, 因此现在对它不感兴趣. 我们可以认为这个行列式提供了对有效拉格朗日量密度的一个修正

$$\Delta\mathscr{L}=-\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\,\Omega^{-1}\operatorname{tr}\ln\Big[1+U(\Phi(x))\Big]\,.$$

因子 Ω^{-1} 可以写成一个紫外发散积分

$$\Omega^{-1}=\delta^4(x-x)=(2\pi)^{-4}\int\mathrm{d}^4p\cdot 1\,.$$

不过对于这个理论, 通过在标量场时间导数的传播子中计入等时对易项,[7] $\Delta\mathscr{L}$ 给 Feynman 图贡献的额外项也可以在正则形式体系下导出，但是这里我们不演示如何得到这一结论. 忽略这个修正将导致 S-矩阵对标量场定义方式有伪依赖性, 同时也与拉格朗日量在标量场变换下的任何对称性不相容.

即便路径积分公式(9.3.10)中的因子 $(\operatorname{Det}\mathscr{A})^{-1/2}$ 是与场无关的, 这个公式中的拉格朗日量也可能不是我们开始时的拉格朗日量. 作为例子, 我们考虑一组实矢量场的理论, 它的拉格朗日密度为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}=-\sum_n\Big[&\tfrac{1}{4}\big(\partial_\mu A_{n\lambda}-\partial_\lambda A_{n\mu}\big)\big(\partial^\mu A_n{}^\lambda-\partial^\lambda A_n{}^\mu\big)\\&+\tfrac{1}{2}m_n^2A_{n\lambda}A_n{}^\lambda+J_n{}^\lambda A_{n\lambda}\Big]\,,\end{aligned}$$

其中流 $J_n{}^\mu$ 要么是外部产生的 c-数量, 要么依赖于其它场(在这种情况下, 描述这些场的项要加进拉格朗日量里). 对 7.5 节结果做一个简单的推广, 我们看到哈密顿量是

$$\begin{aligned}H=\int\mathrm{d}^3x\sum_n\Big[&\frac{1}{2}\boldsymbol{\Pi}_n^2+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}_n)^2+\frac{1}{2}m_n^2\mathbf{A}_n^2\\&+\frac{1}{2m_n^2}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Pi}_n)^2+\mathbf{J}_n\cdot\mathbf{A}_n-\frac{1}{m_n^2}J_n^0\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Pi}_n+\frac{1}{2m_n^2}(J_n^0)^2\Big]\end{aligned}$$

这里仍要理解成必须加上一些其它的项, 这些项包含 $J_n{}^\mu$ 中的所有场. 这里的二次项系数要比我们第一个例子中的二次项系数复杂些:

$$\mathscr{A}_{nix,mjy} = \delta_{nm}\left[\delta_{ij}\delta^4(x-y) - \frac{1}{2m_n^2}\nabla_i\nabla_j\delta^4(x-y)\right],$$

但是它不依赖场, 从而使因子 $(\mathrm{Det}\,\mathscr{A})^{-1/2}$ 不产生影响. 另一方面, 拉格朗日量(9.3.9)在这里不是我们由此出发的那个拉格朗日量; 它完全以 $\mathbf{A}$ 及其时空导数的形式表示, 而不依赖于任何时间分量 A^0. 由于这个原因, 方程(9.3.10)的 Lorentz 不变性是很不明显的.

为了补救这点, 我们可以重新引入辅助场. 假定我们给哈密顿量加上一项

$$\Delta H = -\tfrac{1}{2}\sum_n m_n^2 \int \mathrm{d}^3x \left[A_n^0 - m_n^{-2}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Pi}_n + m_n^{-2}J_n^0\right]^2$$

并对 A_n^0 以及 $\mathbf{A}_n$ 和 $\boldsymbol{\Pi}_n$ 积分. 由于 ΔH 是 A^0 的二次型(且 A^0 的二阶项系数不依赖场), 它的稳相值为零, 这样只能引入一个不依赖场的整体因子. 然而, 假定我们在积掉 A_n^0 之前积掉 $\boldsymbol{\Pi}_n$. 路径积分(9.2.17)中的哈密顿量在这里就被替换成

$$\begin{aligned} H + \Delta H = \int \mathrm{d}^3x \sum_n \Big[&\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\Pi}_n^2 + \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}_n)^2 + \tfrac{1}{2}m_n^2{\mathbf{A}_n}^2 \\ &- \tfrac{1}{2}m_n^2(A_n^0)^2 + \mathbf{J}_n\cdot\mathbf{A}_n - J_n^0A_n^0 + A_n^0\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Pi}_n\Big]. \end{aligned}$$

这依然是 $\boldsymbol{\Pi}_n$ 的二次型, 其中二次项系数不依赖场(并且更简单些), 所以对 $\boldsymbol{\Pi}_n$ 的积分可以通过将 $\boldsymbol{\Pi}_n$ 替换成它在泛函 $\sum_n\int \mathrm{d}^3x\,\boldsymbol{\Pi}_n\cdot\dot{\mathbf{A}}_n - H - \Delta H$ 的稳相点值完成:

$$\boldsymbol{\Pi}_n = \dot{\mathbf{A}}_n + \boldsymbol{\nabla}A_n^0\,.$$

当以这种方式消掉 $\boldsymbol{\Pi}_n$ 后, $\sum_n\int \mathrm{d}^3x\,\boldsymbol{\Pi}_n\cdot\dot{\mathbf{A}}_n - H - \Delta H$ 正是我们作为出发点的 Lorentz 不变拉格朗日量.

为了兼顾到可能要引入像 A_n^0 这种辅助场的需求, 从现在起, 我们将写出用场 ψ_ℓ 消掉正则共轭后的路径积分公式, 这里 ψ_ℓ 包含正则场 q_n 和辅助场 c_r:

$$\begin{aligned} &\Big\langle \mathrm{VAC,out}\Big| T\left\{\mathcal{O}_A\Big[\Psi_A(t_A)\Big], \mathcal{O}_B\Big[\Psi_B(t_B)\Big], \cdots\right\}\Big|\mathrm{VAC,in}\Big\rangle \\ &\propto \int \prod_{\tau,\mathbf{x},n} \mathrm{d}\psi_n(\mathbf{x},\tau)\,\mathcal{O}_A\Big[\psi(t_A)\Big]\,\mathcal{O}_B\Big[\psi(t_B)\Big]\cdots \\ &\times \exp\left[\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau\left\{L\Big[\psi(\tau),\dot\psi(\tau)\Big] + \mathrm{i}\epsilon\text{ 项}\right\}\right], \end{aligned} \tag{9.3.11}$$

现在, 它被理解成: L 将包含可能与场相关的因子 $(\mathrm{Det}\,\mathscr{A})^{-1/2}$ 产生的任何项.

9.4 Feynman 规则的路径积分推导

我们现在可以用路径积分体系来推导一大类理论中的 Feynman 规则了. 在这里, 我们将关注场算符(及其伴算符)编时乘积的真空期望值,

$$M_{\ell_A\ell_B\cdots}(x_Ax_B\cdots) = \frac{\langle \mathrm{VAC,out}|\,T\{\Psi_{\ell_A}(x_A),\Psi_{\ell_B}(x_B)\cdots\}\,|\mathrm{VAC,in}\rangle}{\langle \mathrm{VAC,out}|\mathrm{VAC,in}\rangle} \tag{9.4.1}$$

通过剥离出与每个场相关联的终端传播子, 将它们替换成相应自由场中乘在产生算符或湮灭算符上的系数函数, 并对这些系数函数的指标求和, 我们可以从中获得 S-矩阵元(见 6.4 节).

对于哈密顿量是 Π 的二次型这种较简单的理论, 方程(9.3.11)给出

$$M_{\ell_A\ell_B\cdots}(x_Ax_B\cdots)=\frac{\displaystyle\int\Big[\prod_{x,\ell}\mathrm{d}\psi_\ell(x)\Big]\,\psi_{\ell_A}(x_A)\,\psi_{\ell_B}(x_B)\cdots\mathrm{e}^{\mathrm{i}I[\psi]}}{\displaystyle\int\prod_{x,\ell}\mathrm{d}\psi_\ell(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}I[\psi]}}\,, \tag{9.4.2}$$

其中 $I[\psi]$ 是作用量

$$I[\psi]=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau\,\Big\{L\Big[\psi(\tau),\dot\psi(\tau)\Big]+\mathrm{i}\epsilon\text{ 项}\Big\} \tag{9.4.3}$$

此时 L 包含方程(9.3.10)中依赖于场的行列式中可以出现的所有项.

我们现在假定, 拉格朗日量是拉格朗日量密度的积分, 拉格朗日量密度由一个不含相互作用的二次型项 $\mathscr{L}_0$ 加上一个拉格朗日相互作用密度 $\mathscr{L}_1$ 构成:

$$\begin{aligned}L\Big[\psi(\tau),\dot\psi(\tau)\Big]=\int\mathrm{d}^3x\,\Big[&\mathscr{L}_0\Big(\psi(\vec x,\tau),\partial_\mu\psi(\vec x,\tau)\Big)\\&+\mathscr{L}_1\Big(\psi(\vec x,\tau),\partial_\mu\psi(\vec x,\tau)\Big)\Big]\,.\end{aligned} \tag{9.4.4}$$

即, 作用量(9.4.3)是

$$I[\psi]=I_0[\psi]+I_1[\psi]\,, \tag{9.4.5}$$

$$I_0[\psi]=\int\mathrm{d}^4x\,\mathscr{L}_0\Big(\psi(x),\partial_\mu\psi(x)\Big)+\mathrm{i}\epsilon\text{ 项}, \tag{9.4.6}$$

$$I_1[\psi]=\int\mathrm{d}^4x\,\mathscr{L}_1\Big(\psi(x),\partial_\mu\psi(x)\Big)\,. \tag{9.4.7}$$

既然 $\mathscr{L}_0$ 和"$\mathrm{i}\epsilon$ 项"是场的二次型, 我们总可以将 I_0 写成一般的二次型形式

$$I_0[\psi]=-\tfrac12\int\mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4x'\,\sum_{\ell,\ell'}\mathscr{D}_{\ell x,\ell'x'}\,\psi_\ell(x)\,\psi_{\ell'}(x')\,. \tag{9.4.8}$$

例如, 对于一个质量为 m 的实标量场, 未微扰拉格朗日量是

$$\mathscr{L}_0=-\tfrac12\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-\tfrac12m^2\phi^2 \tag{9.4.9}$$

而 I_0 中的 $\mathrm{i}\epsilon$ 项由方程(9.2.16)给定为

$$\tfrac12\mathrm{i}\epsilon\int\mathrm{d}t\int\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3x'\,\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{x}')\,\phi(\mathbf{x},t)\phi(\mathbf{x}',t) \tag{9.4.10}$$

所以这里

$$\mathscr{D}_{x,x'}=\frac{\partial}{\partial x^\mu}\,\frac{\partial}{\partial x'_\mu}\,\delta^4(x-x')+m^2\,\delta^4(x-x')-\mathrm{i}\epsilon\mathscr{E}(\mathbf{x},\mathbf{x}')\delta(t-t')\,. \tag{9.4.11}$$

(由于 $\mathrm{i}\epsilon$ 项中的 $\mathrm{e}^{-\epsilon|\tau|}$ 因子产生的是高阶 ϵ 修正, 我们现在扔掉它.) 为了处理相互作用, 我们将指数展成 I_1 的幂级数,

$$\exp(\mathrm{i}I[\psi])=\exp(\mathrm{i}I_0[\psi])\sum_{N=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^N}{N!}\Big(I_1[\psi]\Big)^N \tag{9.4.12}$$

然后将 I_1 展成场的幂级数. 我们在方程(9.4.2)的分子和分母中所遇到的一般积分形式如下

$$\mathscr{I}_{\ell_1\ell_2\cdots}(x_1x_2\cdots)\equiv\int\left(\prod_{\ell,x}\mathrm{d}\psi_\ell(x)\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}I_0[\psi]}\,\psi_{\ell_1}(x_1)\,\psi_{\ell_2}(x_2)\cdots\,, \tag{9.4.13}$$

其中 $\psi_{\ell_1}(x_1)$, $\psi_{\ell_2}(x_2)$ 等场因子来自于 $I_1[\psi]$ 和(或)本来出现在方程(9.4.2)分子中的 $\psi_{\ell_A}(x_A)$ 等场因子. 当 $I_0[\psi]$ 的形式是(9.4.8)时, 积分(9.4.13)与本章附录所计算的积分就是同一形式, 只不过离散指标 s 被替换成一对指标 ℓ,x. 因而我们可以使用方程(9.A.12)和(9.A.15), 它在这里给出

$$\mathscr{I}_{\ell_1\ell_2\cdots}(x_1x_2\cdots)=\left[\mathrm{Det}\left(\frac{\mathrm{i}\mathscr{D}}{2\pi}\right)\right]^{-1/2}\sum_{\substack{\text{pairings of}\\ \text{fields}}}\prod_{\text{pairs}}\left[-\mathrm{i}\mathscr{D}^{-1}\right]_{\text{paired fields}}. \tag{9.4.14}$$

这恰好相当于在协变形式下计算方程(9.4.2)分子的坐标空间 Feynman 规则: 按照相互作用 I_1 展开, 然后对 I_1 中的所有场彼此之间以及与 $\psi_{\ell_A}(x_A)$ 等场的所有配对方式求和, 其中每个配对的贡献由 $I_1[\psi]$ 中场系数乘积的时空积分和"传播子" $-\mathrm{i}\Delta$ 的乘积给出, 其中

$$\Delta_{\ell_1\ell_2}(x_1,x_2)=(\mathscr{D}^{-1})_{\ell_1x_1,\ell_2x_2}\,. \tag{9.4.15}$$

(方程(9.4.14)中的因子 $[\mathrm{Det}(\mathrm{i}\mathscr{D}/2\pi)]^{-1/2}$ 实际上代表了包含任意数量的单圈且不与任何其它线相连的图的贡献, 但是无论怎样, 这个因子都会在比值(9.4.2)中抵消.)

接下来计算传播子(9.4.15). 我们将方程(9.4.15)理解成一个积分方程

$$\sum_{\ell_2}\int\mathrm{d}^4x_2\;\mathscr{D}_{\ell_1x_1,\ell_2x_2}\Delta_{\ell_2\ell_3}(x_2,x_3)=\delta^4(x_1-x_3)\delta_{\ell_1\ell_3}\,. \tag{9.4.16}$$

在没有外场时, 平移不变性要求 $\mathscr{D}$ 必须只是 x_1-x_2 的函数, 它可以写成一个 Fourier 积分

$$\mathscr{D}_{\ell_1x_1,\ell_2x_2}\equiv(2\pi)^{-4}\int\mathrm{d}^4p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x_1-x_2)}\,\mathscr{D}_{\ell_1\ell_2}(p)\,. \tag{9.4.17}$$

那么方程(9.4.16)的解是

$$\Delta_{\ell_1\ell_2}(x_1,x_2)=(2\pi)^{-4}\int\mathrm{d}^4p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x_1-x_2)}\,\mathscr{D}^{-1}_{\ell_1\ell_2}(p)\,, \tag{9.4.18}$$

其中 $\mathscr{D}^{-1}$ 就是矩阵 $\mathscr{D}$ 在一般意义下的逆. 正如我们将看到的, $\mathrm{i}\epsilon$ 项的作用是使这里的逆对所有实值的 p 都是合理定义的. 由此我们将计算传播子的问题简化成计算一个有限矩阵的逆.

首先考察一个有质量标量场, 它的核 $\mathscr{D}$ 取(9.4.11)的形式. 我们可以将其写成一个 Fourier 积分

$$\mathscr{D}_{x,y}=(2\pi)^{-4}\int\mathrm{d}^4p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}\Big(p^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon E(\mathbf{p})\Big)\,,$$

所以传播子是

$$\Delta(x,y)=(2\pi)^{-4}\int\mathrm{d}^4p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}\Big(p^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon E(\mathbf{p})\Big)^{-1}\,.$$

可以看出这与算符方法得到的标量传播子是精确相同的. (由于 ϵ 和 $\epsilon E(\mathbf{p})$ 都是正的无限小量, 它们之间的差别是无关紧要的.)

第二个例子, 考虑一个有质量的实矢量场. 未微扰拉格朗日量是

$$\mathscr{L}_0 = -\tfrac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - \tfrac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu \,.$$

我们可以再次将 $I_0[\psi]$ 写成(9.4.8)的形式, 它的核是

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_{\rho x,\sigma y} &= \left[\eta_{\rho\sigma}\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial y_\mu} - \frac{\partial^2}{\partial x^\sigma \partial y^\rho} + m^2\eta_{\rho\sigma}\right]\delta^4(x-y) + \mathrm{i}\epsilon \text{ 项} \\ &= (2\pi)^{-4}\int \mathrm{d}^4p\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}\Big[\eta_{\rho\sigma}p^2 - p_\rho p_\sigma + m^2\eta_{\rho\sigma} + \mathrm{i}\epsilon \text{ 项}\Big] \,.\end{aligned}$$

我们并不费心在这里证明它, 但是"$+\mathrm{i}\epsilon$ 项"在这里采取简单形式 $-\mathrm{i}\epsilon E(\mathbf{p})\eta_{\rho\sigma}$. 那么矢量场传播子通过简单地对被积函数中的 4×4 矩阵取逆得到

$$\Delta_{\rho\sigma}(x,y) = (2\pi)^{-4}\int \frac{\mathrm{d}^4p\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{p^2 + m^2 - \mathrm{i}\epsilon E(\mathbf{p})}\left[\eta_{\rho\sigma} + \frac{p_\rho p_\sigma}{m^2}\right] .$$

(分子中正比于 ϵ 的项被扔掉了. 分母中的 ϵ 项在定义如何在质壳 $p^2 = -m^2$ 附近处理被积函数时是重要的.) 这与用算符方法导出的传播子是相同的, 只是正比于 $\delta(x^0 - y^0)$ 的非协变项没有出现. 以前这些非协变项是用来抵消相互作用哈密顿量中的非协变项, 但是现在 Feynman 规则中的顶点贡献是通过观察协变拉格朗日量直接获得的, 这种抵消不再需要了.

有导数耦合的理论是同样简单的. 场导数 $\partial_\mu\psi_\ell(x)$ 与任意其它场 $\psi_m(y)$ (或许它本身, 一个场导数)的配对产生的因子是

$$\begin{aligned}\langle \partial_\mu\psi_\ell(x)\,\psi_m(y)\rangle &= \frac{\displaystyle\int\left[\prod_{x,\ell}\mathrm{d}\psi_\ell(x)\right]\partial_\mu\psi_\ell(x)\,\psi_m(y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}I[\psi]}}{\displaystyle\int\left[\prod_{x,\ell}\mathrm{d}\psi_\ell(x)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}I[\psi]}} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\mu}\langle\psi_\ell(x)\,\psi_m(y)\rangle \,. \qquad (9.4.19)\end{aligned}$$

这样的传播子没有非协变部分. 例如, 对于一个实标量场, $\partial_\mu\phi$ 与 $\partial_\nu\phi$ 的配对给出的动量空间传播子是 $k_\mu k_\nu/(k^2 + m^2 - \mathrm{i}\epsilon)$. 另外, 正如我们在上一节看到的, 标量场理论中如果有与其它场的导数耦合, 那么顶点可以直接从拉格朗日量中读出, 并且分别是协变的.

9.5 费米子的路径积分

我们现在着手来研究如何将路径积分体系扩展至既包含费米子又包含玻色子的理论. 通过类比玻色情况, 以能够给出"正确" Feynman 规则为基准, 我们可以很容易地以纯形式的方式做这件事. 然而, 我们在这里将直接从量子力学原理导出费米的路径积分体系, 就像我们对玻色子做的那样.[9]

像前面一样, 我们将从一般的量子力学系统出发, "坐标"为 Q_a 和正则共轭"动量"为 P_a, 不过现在它们满足反对易而不是对易关系:

$$\Big\{Q_a, P_b\Big\} = \mathrm{i}\,\delta_{ab} \,, \qquad (9.5.1)$$

$$\Big\{Q_a, Q_b\Big\} = \Big\{P_a, P_b\Big\} = 0 \,. \qquad (9.5.2)$$

(它们是 Schrödinger -绘景算符, 换句话说, 是时间 $t=0$ 时的 Heisenberg -绘景算符.) 稍后我们将会把离散指标 a 替换成空间指标 $\mathbf{x}$ 和场指标 m.

我们首先希望为 Q 和 P 所作用的态构造一组完备基. 注意到对于任意给定的 a, 我们有

$$Q_a^2 = P_a^2 = 0\,. \tag{9.5.3}$$

由此得出, 总存在被所有的 Q_a 湮灭的"右矢"态 $|0\rangle$,

$$Q_a|0\rangle = 0\,, \tag{9.5.4}$$

以及被所有的 P_a (从右边)湮灭的"左矢"态 $\langle 0|$,

$$\langle 0|P_a = 0\,. \tag{9.5.5}$$

例如, 我们可以取

$$|0\rangle \propto \left(\prod_a Q_a\right)|f\rangle\,, \qquad \langle 0| \propto \langle g|\left(\prod_a P_a\right),$$

其中 $|f\rangle$ 和 $\langle g|$ 是使得这些表达式不为零的任意右矢和左矢. (除非算符 $\prod_a Q_a$ 和 $\prod_a P_a$ 为零, 否则它们对于所有的 $|f\rangle$ 和 $\langle g|$ 不能为零, 而我们已经假定了不是这样的情况.) 这些态通过方程(9.5.3)满足方程(9.5.4)和(9.5.5). 它们一般不是唯一的, 这是因为可能存在其它玻色自由度以区分各种可能的 $|0\rangle$ 和 $\langle 0|$, 但简单起见, 我们在这里将只考虑这样的情况: 唯一的自由度是那些由费米算符 Q_a 和 P_a 描述的自由度, 并假定满足方程(9.5.4)和(9.5.5)的态除了相差常数因子外是唯一的, 我们对这个因子进行选择使得

$$\langle 0|0\rangle = 1\,. \tag{9.5.6}$$

(注意, 如果我们定义了 $\langle 0|$ 是 Q_a 本征值为零的左本征态, 就不能采用这个归一化约定, 这是因为此时 $\langle 0|\{Q_a, P_a\}|0\rangle$ 将为零, 结合方程(9.5.1), 这意味着 $\langle 0|0\rangle = 0$.)

正如我们在 7.5 节中看到的, 在 Dirac 理论中, Q_a 不是厄米的, 而是有一个伴 $-\mathrm{i}P_a$, 在这种情况下, $\langle 0|$ 可以简单地视为 $|0\rangle$ 的伴. 然而, 存在一些费米算符(例如卷 II 要引入的"鬼"场)使得 P_a 与 Q_a 的伴无关. 在下文中, 我们不需要假定 Q_a 或 P_a 的伴之间, 亦或 $|0\rangle$ 和 $\langle 0|$ 之间存在任何关系.

系统态的完备基由 $|0\rangle$ 以及任意个不同的P作用在 $|0\rangle$ 上的态(关于指标 $a, b\cdots$ 反对称)

$$|a, b, \cdots\rangle \equiv P_a\, P_b \cdots |0\rangle \tag{9.5.7}$$

给出. 即, P 与 Q 的任意算符函数作用在这些态上的结果可以写成同一组态的线性组合. 特别地, 如果指标 a 不是 $|b, c, \cdots\rangle$ 中的任何一个指标, 那么

$$Q_a|b, c, \cdots\rangle = 0\,, \tag{9.5.8}$$

$$P_a|b, c, \cdots\rangle = |a, b, c, \cdots\rangle\,. \tag{9.5.9}$$

另一方面, 如果 a 是序列 $b, c, \cdots$ 中的一个指标, 我们总可以重写这个态(或许要改变它的符号), 使得 a 是这些指标的第一个, 在这种情况下, 我们有

$$Q_a|a, b, c, \cdots\rangle = \mathrm{i}\,|b, c, \cdots\rangle\,, \tag{9.5.10}$$

$$P_a|a, b, c, \cdots\rangle = 0\,. \tag{9.5.11}$$

类似地, 我们可以定义一组完备对偶基, 由 $\langle 0|$ 以及态(也是关于指标反对称的)

$$\langle a, b, \cdots | \equiv \langle 0| \cdots (-\mathrm{i}Q_b)(-\mathrm{i}Q_a) \tag{9.5.12}$$

组成. 利用方程(9.5.4)—(9.5.6)以及反对易关系(9.5.1), 我们看到这些态的标量积取值

$$\begin{aligned}\langle c, d, \cdots | \, a, b, \cdots \rangle &= \langle 0| \cdots (-\mathrm{i}Q_d)(-\mathrm{i}Q_c)\, P_a P_b \cdots |0\rangle \\ &= \begin{cases} 0 & \text{如果 } \{c, d, \cdots\} \neq \{a, b, \cdots\} \\ 1 & \text{如果 } c = a,\ d = b,\ \text{等等,} \end{cases}\end{aligned} \tag{9.5.13}$$

其中 $\{\cdots\}$ 在这里表示括号内的这组指标不考虑顺序.

在推导 Feynman 规则时, 我们希望能够将类似(9.5.7)这样的对中间态求和改写成对 Q_a 或 P_a 本征态的积分. 然而, 这些算符是不可能有通常意义下的(除零以外)本征值的. 假定我们尝试找到一个态 $|q\rangle$, (对于所有的 a)满足

$$Q_a|q\rangle = q_a|q\rangle\,. \tag{9.5.14}$$

由方程(9.5.2), 我们看到

$$q_a q_b + q_b q_a = 0 \tag{9.5.15}$$

这对于普通数是不可能的. 然而, 并没有什么阻止我们引入“变量”(称为 *Grassmann* (格拉斯曼)变量) q_a 的代数, 只要我们所关注的是物理 Hilbert 空间, 它的作用就和 c-数一样, 但它仍然满足反对易关系(9.5.15). 我们进一步要求

$$\{q_a, q_b'\} = \{q_a, Q_b\} = \{q_a, P_b\} = 0\,, \tag{9.5.16}$$

其中 q 和 q' 代表这些变量的任意两个“值”. 我们现在构造满足方程(9.5.14)的本征态 $|q\rangle$:

$$|q\rangle = \exp\left(-\mathrm{i}\sum_a P_a q_a\right)|0\rangle \tag{9.5.17}$$

其中指数像通常那样通过它的幂级数展开定义. (为了证明方程(9.5.14), 利用所有 $P_a q_a$ 彼此对易以及自身平方为零的性质, 这使得

$$\begin{aligned}[Q_a - q_a]\,|q\rangle &= [Q_a - q_a]\,\exp(-\mathrm{i}P_a q_a)\,\exp\left(-\mathrm{i}\sum_{b\neq a} P_b q_b\right)|0\rangle \\ &= [Q_a - q_a]\,[1 - \mathrm{i}P_a q_a]\,\exp\left(-\mathrm{i}\sum_{b\neq a} P_b q_b\right)|0\rangle \\ &= [-\mathrm{i}\{Q_a, P_a\}q_a - q_a]\,\exp\left(-\mathrm{i}\sum_{b\neq a} P_b q_b\right)|0\rangle = 0\,,\end{aligned}$$

正是方程(9.5.14)所要求的.) 我们也可以定义左本征态 $\langle q|$ (不是 $|q\rangle$ 的伴)为

$$\langle q| \equiv \langle 0|\left(\prod_a Q_a\right)\exp\left(-\mathrm{i}\sum_a q_a P_a\right) = \langle 0|\left(\prod_a Q_a\right)\exp\left(+\mathrm{i}\sum_a P_a q_a\right), \tag{9.5.18}$$

其中 $\prod_a$ 是由我们所指定作为标准顺序下的乘积. 沿用对方程(9.5.14)的讨论, 我们看到

$$\langle q|Q_a = \langle q|q_a \,. \tag{9.5.19}$$

这些本征态有标量积

$$\begin{aligned}\langle q'|q\rangle &= \langle 0|\left(\prod_a Q_a\right)\exp\left(\mathrm{i}\sum_b P_b(q'_b - q_b)\right)|0\rangle \\ &= \langle 0|\left(\prod_a Q_a\right)\left(\prod_b (1+\mathrm{i}P_b(q'_b - q_b))\right)|0\rangle \,.\end{aligned}$$

将每一 Q_a (从最右端开始)移至右边产生因子 $\mathrm{i}^2(q'_a - q_a)$, 我们可以将其从左边移出标量积, 从而

$$\langle q'|q\rangle = \prod_a (q_a - q'_a) \,. \tag{9.5.20}$$

我们将看到方程(9.5.20)在对 q 的积分中扮演了 δ-函数的角色.

以同样的方式, 我们可以构造 P_a 的右本征态和左本征态:

$$P_a|p\rangle = p_a|p\rangle \,, \tag{9.5.21}$$

$$\langle p|P_a = \langle p|p_a \,, \tag{9.5.22}$$

其中 p_a 是类似于 q_a 的反对易 c-数(为了方便一般将它取为与 q_a 以及所有的费米算符反对易, 并且它们彼此之间也反对易), 且有

$$|p\rangle = \exp\left(-\mathrm{i}\sum_a Q_a p_a\right)\left(\prod_b P_b\right)|0\rangle \,, \tag{9.5.23}$$

$$\langle p| = \langle 0|\exp\left(-\mathrm{i}\sum_a p_a Q_a\right) \tag{9.5.24}$$

标量积是(现在是通过将 P 移至左边得到)

$$\langle p'|p\rangle = \prod_a (p'_a - p_a) \,. \tag{9.5.25}$$

这两类本征态彼此之间的标量积是

$$\begin{aligned}\langle q|p\rangle &= \langle q|\exp\left(-\mathrm{i}\sum_a Q_a p_a\right)\left(\prod_a P_a\right)|0\rangle \\ &= \left(\prod_a \exp(-\mathrm{i}q_a p_a)\right)\langle q|\left(\prod_a P_a\right)|0\rangle \\ &= \left(\prod_a \exp(-\mathrm{i}q_a p_a)\right)\langle 0|\left(\prod_a Q_a\right)\left(\prod_a P_a\right)|0\rangle\end{aligned}$$

因此

$$\langle q|p\rangle = \chi_N \exp\left(-\mathrm{i}\sum_a q_a p_a\right) = \chi_N \exp\left(\mathrm{i}\sum_a p_a q_a\right) , \tag{9.5.26}$$

其中 χ_N 是只与 Q_a 算符的个数 N 有关的相位:

$$\chi_N \equiv \langle 0| \left(\prod_a Q_a\right) \left(\prod_a P_a\right) |0\rangle = \mathrm{i}^N (-1)^{N(N-1)/2} .$$

我们也发现了更为简单的

$$\langle p|q\rangle = \prod_a \exp(-\mathrm{i} p_a q_a) . \tag{9.5.27}$$

很容易看到态 $|q\rangle$ 在某种意义上是完备基.($|p\rangle$ 也是如此.) 从定义(9.5.17), 我们看到在这个一般的基下, 态 $|a,b,\cdots\rangle$ 恰好是(可以相差一个相位) $|q\rangle$ 展成 q 的乘积之和中乘积 $q_a q_b \cdots$ 的系数. 因此, 我们可以将任意态 $|f\rangle$ 写成如下的形式

$$|f\rangle = f_0 |q\rangle_0 + \sum_a f_a |q\rangle_a + \sum_{a\neq b} f_{ab} |q\rangle_{ab} + \cdots ,$$

其中 f 是数系数, 而 $|q\rangle$ 的下标 $a,b,\cdots$ 代表 $q_a q_b \cdots$ 在 $|q\rangle$ 中的系数.

在对态的求和中, 引入一类对费米变量的积分将是非常方便的, 这类积分被称为 *Berezin* (别列津)积分,[10] 它被设计成将这种反对易 c-数乘积的系数挑选出来. 对于任意一组这样的变量 ξ_n (要么 p 要么 q 要么两者都有), 最一般的函数 $f(\xi)$ (要么是一个 c-数要么是类似 $|q\rangle$ 的态矢)可以写成

$$f(\xi) = \left(\prod_n \xi_n\right) c + \xi \text{ 因子较少的项} \tag{9.5.28}$$

而对 ξ 的积分简单地定义成

$$\int \left(\widetilde{\prod_n} \mathrm{d}\xi_n\right) f(\xi) \equiv c \tag{9.5.29}$$

其中方程(9.5.29)中的波浪号代表我们使用了一个方便的约定, 即将微分的次序与方程(9.5.28)中积分变量乘积的次序相反. 既然这个乘积在任意两个 ξ 的交换下是反对称的, 积分在任意两个 $\mathrm{d}\xi$ 的交换下也是反对称的, 所以这些“微分”实际上是反对易的

$$\mathrm{d}\xi_n \mathrm{d}\xi_m + \mathrm{d}\xi_m \mathrm{d}\xi_n = 0 . \tag{9.5.30}$$

另外, 系数 c 自身可能依赖于不进行积分但与参与积分的 ξ 反对易的 c-数变量, 在这一情况下, 在积分之前, 很重要的一件事是将所有的 ξ 移至 c 的左边以标准化 c 的定义, 这也是我们在方程(9.5.28)中所做的.

例如, 对于一对反对易 c-数 ξ_1 与 ξ_2, 由于 ξ_1 和 ξ_2 的平方以及所有高次幂为零, 所以它们的最一般函数形如

$$f(\xi_1,\xi_2) = \xi_1\xi_2\, c_{12} + \xi_1\, c_1 + \xi_2\, c_2 + d .$$

这个函数有如下的积分

$$\int \mathrm{d}\xi_1\, f(\xi_1,\xi_2) = \xi_2\, c_{12} + c_1 , \qquad \int \mathrm{d}\xi_2\, f(\xi_1,\xi_2) = -\xi_1\, c_{12} + c_2 ,$$

$$\int \mathrm{d}\xi_2\, \mathrm{d}\xi_1\, f(\xi_1,\xi_2) = c_{12} .$$

注意到多重积分与重复积分是相同的:

$$\int \mathrm{d}\xi_2\,\mathrm{d}\xi_1\, f(\xi_1,\xi_2) = \int \mathrm{d}\xi_2 \left[\int \mathrm{d}\xi_1\, f(\xi_1,\xi_2)\right],$$

这个结果可以轻松地推广至对任意个费米变量的积分. (为了得到这一结果而不带来额外的符号因子, 我们取方程(9.5.29)中微分乘积的次序为方程(9.5.28)中变量乘积的逆序.) 实际上, 我们可以先定义对单个反对易 c- 数 ξ_1 的积分, 然后以通常的方式通过迭代定义多重积分. 反对易 c-数的最一般函数对每个反对易 c-数都是线性的:

$$f(\xi_1,\xi_2,\cdots) = b(\xi_2\cdots) + \xi_1 c(\xi_2\cdots)$$

(因为$\xi_1^2 = 0$), 并且它对 ξ_1 的积分定义成

$$\int \mathrm{d}\xi_1\, f(\xi_1,\xi_2,\cdots) = c(\xi_2,\cdots)\,.$$

重复这一过程给出的多重积分与方程(9.5.28)和(9.5.29)所定义的相同.

这个积分定义也具有一些普通实变量(从 $-\infty$ 到 $+\infty$)的多重积分的性质, 但存在重要差异.

显然, Berezin 积分是线性的, 也就是说

$$\int \left(\prod_n{}^{\sim} \mathrm{d}\xi_n\right) \Big[f(\xi)+g(\xi)\Big] = \int \left(\prod_n{}^{\sim} \mathrm{d}\xi_n\right) f(\xi) + \int \left(\prod_n{}^{\sim} \mathrm{d}\xi_n\right) g(\xi) \tag{9.5.31}$$

以及

$$\int \left(\prod_n{}^{\sim} \mathrm{d}\xi_n\right) \Big[f(\xi)a(\xi')\Big] = \left[\int \left(\prod_n{}^{\sim} \mathrm{d}\xi_n\right) f(\xi)\right] a(\xi')\,, \tag{9.5.32}$$

其中 $a(\xi')$ 是我们没有对其积分的反对易 c-数 ξ'_m的任意函数(包含一个常数). 然而, 左乘的线性性质不是那么明显. 如果我们对 ν 个变量积分, 由于假定了 ξ'_m 与所有的 ξ_n 反对易, 我们有

$$a\Big((-)^\nu \xi'\Big)\left(\prod_n \xi_n\right) = \left(\prod_n \xi_n\right) a(\xi')$$

从而

$$\int \left(\prod_n \mathrm{d}\xi_n\right) \Big[a\Big((-)^\nu\xi'\Big) f(\xi)\Big] = a(\xi') \int \left(\prod_n \mathrm{d}\xi_n\right) f(\xi)\,. \tag{9.5.33}$$

因而取微分 $\mathrm{d}\xi_n$ 与所有的反对易变量(包括 ξ_n)反对易是非常方便的(尽管不是严格必须的):

$$(\mathrm{d}\xi_n)\xi'_m + \xi'_m(\mathrm{d}\xi_n) = 0 \tag{9.5.34}$$

在这一情况下, 方程(9.5.33)变得更简单

$$\int a(\xi')\left(\prod_n \mathrm{d}\xi_n\right) f(\xi) = a(\xi') \int \left(\prod_n \mathrm{d}\xi_n\right) f(\xi)\,. \tag{9.5.35}$$

与普通积分的另一个相似点是, 对于任意一个独立于 ξ 的反对易 c-数 ξ',

$$\int \left(\prod_n \mathrm{d}\xi_n\right) f(\xi+\xi') = \int \left(\prod_n \mathrm{d}\xi_n\right) f(\xi)\,, \tag{9.5.36}$$

这是因为将ξ改变一个常数仅对f中个数小于ξ-变量总数的项有影响.

另一方面, 考虑如下的变量代换

$$\xi_n \to \xi'_n = \sum_m \mathscr{S}_{nm}\xi_m \,, \tag{9.5.37}$$

其中$\mathscr{S}$是普通数的任意非奇异矩阵. 新变量的积是

$$\prod_n \xi'_n = \sum_{m_1 m_2 \cdots} \Big(\prod_n \mathscr{S}_{nm_n}\xi_{m_n}\Big) \,.$$

但这里的$\prod_n \xi_{m_n}$恰与乘积(以原始的顺序)$\prod_n \xi_n$是相同的, 唯一不同的是一个符号因子$\epsilon[m]$, 它由置换$n \to m_n$是原始顺序的偶置换还是奇置换来决定是$+1$还是-1:

$$\prod_n \xi'_n = \left[\sum_{m_1 m_2 \cdots} \Big(\prod_n \mathscr{S}_{nm_n}\Big)\epsilon[m]\right] \prod_n \xi_n = (\mathrm{Det}\,\mathscr{S}) \prod_n \xi_n \,.$$

无论将ξ_n取成什么顺序, 只要将ξ'_n取成相同的顺序, 这就是成立的. 由此可知$\prod_n \xi'_n$在任意函数$f(\xi)$中的系数恰是$(\mathrm{Det}\,\mathscr{S})^{-1}$乘以$\prod_n \xi_n$的系数, 我们将这一结论表示成

$$\int \Big(\widetilde{\prod_n} \mathrm{d}\xi'_n\Big) f = (\mathrm{Det}\,\mathscr{S})^{-1} \int \Big(\widetilde{\prod_n} \mathrm{d}\xi_n\Big) f \,. \tag{9.5.38}$$

除了$(\mathrm{Det}\,\mathscr{S})$的幂次是$-1$而非$+1$, 这就是通常的积分变量代换规则. 稍后, 在推导含有费米子理论的Feynman规则时, 我们将采用方程(9.5.38)以及线性性质(9.5.31), (9.5.32)和(9.5.35)来计算在这一推导中遇到的积分.

我们现在可以利用这个积分定义将完备性条件写成对本征值积分的公式. 正如前面已经提及的, 任何态$|f\rangle$都可以用一系列态$|0\rangle$, $|a\rangle$, $|a,b\rangle$等展开, 并且这些态是(可以相差一个相位)乘积1, q_a, $q_a q_b$等在Q-本征态$|q\rangle$中的系数. 根据这里的积分定义, 通过对$|q\rangle$与所有a不等于$b,c,d,\cdots$的q_a的乘积积分, 我们可以挑出态$|q\rangle$中任意乘积$q_b q_c q_d \cdots$的系数. 因此, 通过将函数$f(q)$选成这种q乘积的合适的和, 我们可以将任意态$|f\rangle$写成一个积分:

$$|f\rangle = \int \Big(\widetilde{\prod_a} \mathrm{d}q_a\Big) |q\rangle f(q) = \int |q\rangle \Big(\widetilde{\prod_a} \mathrm{d}q_a\Big) f(q) \,. \tag{9.5.39}$$

(我们可以将$|q\rangle$移至微分的左边而不带来任何符号上的变化, 这是因为方程(9.5.17)中用来定义$|q\rangle$的指数仅包含偶数个费米变量.) 为了找到给定态矢$|f\rangle$的函数$f(q)$, 取方程(9.5.39)与某些左矢$\langle q'|$(其中q'是任意固定的Q-本征值)的标量积. 根据方程(9.5.35)和(9.5.20), 这等于

$$\langle q'|f\rangle = \int \Big(\prod_a (q_a - q'_a)\Big) \Big(\widetilde{\prod_b} \mathrm{d}q_b\Big) f(q) \,.$$

将每个因子$(q_a - q'_a)$经过每个微分$\mathrm{d}q_b$移至右边会产生符号因子$(-)^{N^2} = (-)^N$, 其中的N现在是变量q_a的总数, 所以

$$\langle q'|f\rangle = (-)^N \int \Big(\widetilde{\prod_b} \mathrm{d}q_b\Big) \Big(\prod_a (q_a - q'_a)\Big) f(q) \,.$$

我们可以将 $f(q)$ 重写为 $f(q'+(q-q'))$ 并按照 $q-q'$ 的幂次展开. 所有高于最低阶的项在与乘积 $\prod(q_a-q'_a)$ 相乘后为零, 所以

$$\left(\prod_a (q_a-q'_a)\right) f(q) = \left(\prod_a (q_a-q'_a)\right) f(q')\,, \tag{9.5.40}$$

这部分地验证了我们关于方程(9.5.20)在对 q 的积分中扮演了 δ-函数角色的说法. 利用方程(9.5.32), 我们现在有

$$\langle q'|f\rangle = (-)^N \left[\int \left(\widetilde{\prod_b} \mathrm{d}q_b\right)\left(\prod_a (q_a-q'_a)\right) f(q')\right].$$

积分中正比于 $\prod q_a$ 的项的系数是 $f(q')$, 所以根据我们的积分定义有 $\langle q'|f\rangle = (-)^N f(q')$. 将其代回方程(9.5.39)就给出我们的完备性关系

$$|f\rangle = (-)^N \int |q\rangle \left(\widetilde{\prod_b} \mathrm{d}q_b\right) \langle q|f\rangle\,,$$

或者作为一个算符方程

$$1 = \int |q\rangle \left(\widetilde{\prod_a} -\mathrm{d}q_a\right) \langle q|\,. \tag{9.5.41}$$

以精确相同的方式，我们还可以证明

$$1 = \int |p\rangle \left(\widetilde{\prod_a} \mathrm{d}p_a\right) \langle p|\,. \tag{9.5.42}$$

我们现在可以计算跃迁矩阵元了. 像往常一样, 我们定义依赖时间的算符

$$Q_a(t) \equiv \exp(\mathrm{i}Ht) Q_a \exp(-\mathrm{i}Ht) \tag{9.5.43}$$

$$P_a(t) \equiv \exp(\mathrm{i}Ht) P_a \exp(-\mathrm{i}Ht) \tag{9.5.44}$$

以及它们的右本征态和左本征态

$$|q;t\rangle \equiv \exp(\mathrm{i}Ht)|q\rangle\,, \qquad |p;t\rangle \equiv \exp(\mathrm{i}Ht)|p\rangle\,, \tag{9.5.45}$$

$$\langle q;t| \equiv \langle q|\exp(-\mathrm{i}Ht)\,, \qquad \langle p;t| \equiv \langle p|\exp(-\mathrm{i}Ht)\,. \tag{9.5.46}$$

于是时间相差无穷小的 q-本征态之间的标量积是

$$\langle q';\tau+\mathrm{d}\tau|q;\tau\rangle = \langle q'|\exp(-\mathrm{i}H\mathrm{d}\tau)|q\rangle\,.$$

现在将方程(9.5.42)插入到算符 $\exp(-\mathrm{i}H\mathrm{d}\tau)$ 的左边. 在这里将哈密顿算符 $H(P,Q)$ 定义成所有的 P 处在所有 Q 的左边将是方便的, 这使得(对无限小的 $\mathrm{d}\tau$)

$$\langle p|\exp\Big(-\mathrm{i}H(P,Q)\mathrm{d}\tau\Big)|q\rangle = \langle p|q\rangle \exp\Big(-\mathrm{i}H(p,q)\mathrm{d}\tau\Big)\,.$$

(我们可以将 c-数 $H(p,q)$ 移至矩阵元的任意一边, 因为已假定哈密顿量中的每一项中都包含偶数个费米算符, 这不会引起任何符号改变.) 这给出

$$\begin{aligned}\langle q';\tau+\mathrm{d}\tau|q;\tau\rangle &= \int\langle q'|p\rangle\left(\prod_a{}^{\sim}\,\mathrm{d}p_a\right)\langle p|\exp(-\mathrm{i}H\mathrm{d}\tau)|q\rangle\\ &= \int\langle q'|p\rangle\left(\prod_a{}^{\sim}\,\mathrm{d}p_a\right)\langle p|q\rangle\,\exp\Big(-\mathrm{i}H(p,q)\mathrm{d}\tau\Big)\,.\end{aligned}$$

利用方程(9.5.26)和(9.5.27), 并注意到乘积 p_aq_a 和 $p_aq'_a$ 与所有的反对易 c-数对易, 我们发现

$$\langle q';\tau+\mathrm{d}\tau|q;\tau\rangle = \int\left(\prod_a{}^{\sim}\,\mathrm{i}\,\mathrm{d}p_a\right)\exp\left[\mathrm{i}\sum_a p_a(q'_a-q_a)-\mathrm{i}H(p,q)\mathrm{d}\tau\right]. \tag{9.5.47}$$

剩余的推导依循的路线与 9.1 节相同. 为了计算算符乘积的矩阵元 $\langle q';t'|\,\mathcal{O}_A(P(t_A),Q(t_A))\,\mathcal{O}_B(P(t_B),Q(t_B))\cdots|q;t\rangle$ (其中 $t'>t_A>t_B>\cdots>t$), 将 t 到 t' 的时间间隔分成大量非常小的时间步长; 在每个时间点插入完备关系(9.5.41); 利用方程(9.5.47)计算由此给出的矩阵元(在合适的地方插入 $\mathcal{O}_A,\mathcal{O}_B$ 等); 将所有微分移至左边(这不会带来符号变化, 因为在每一步中我们都有相同数目的 $\mathrm{d}p$ 和 $\mathrm{d}q$); 然后引入函数 $q_a(t)$ 和 $p_a(t)$, 将它们插入每个区间中的 q_a 和 p_a 之间. 由此我们发现

$$\begin{aligned}&\langle q';t'|\,T\Big\{\mathcal{O}_A\Big(P(t_A),Q(t_A)\Big),\,\mathcal{O}_B\Big(P(t_B),Q(t_B)\Big),\cdots\Big\}\,|q;t\rangle\\ &\quad=(-\mathrm{i})^N\chi_N\int\limits_{q_a(t)=q_a,q_a(t')=q'_a}\left(\prod_{a\tau}{}^{\sim}\,\mathrm{d}q_a(\tau)\mathrm{d}p_a(\tau)\right)\\ &\quad\times\mathcal{O}_A\Big(p(t_A),q(t_A)\Big)\,\mathcal{O}_B\Big(p(t_B),q(t_B)\Big)\cdots\\ &\quad\times\exp\left[\mathrm{i}\int_t^{t'}\mathrm{d}\tau\left\{\sum_a p_a(\tau)\dot{q}_a(\tau)-H\Big(p(\tau),q(\tau)\Big)\right\}\right].\end{aligned}\tag{9.5.48}$$

如果时间是原来假定的顺序 $t_A>t_B>\cdots$, 那么符号 T 在这里就代表普通乘积. 然而, 右边关于 $\mathcal{O}_A,\mathcal{O}_B,\cdots$ 是全对称的(除了反对易 c-数的交换带来的负号), 所以, 在这里假定 T 被解释成编时乘积之后, 如果算符的时间编序包含奇数次费米算符的置换时带一个整体的负号, 那么这个公式对(t 和 t' 之间的)一般时间都成立.

直到现在, 我们还保留着总的相位因子 $(-\mathrm{i})^N\chi_N$. 但实际上这些相位仅对真空-真空跃迁振幅有贡献, 因而对我们是不重要的.

过渡到量子场论依照的仍是 9.2 节中刻画玻色场的同一路线. 算符编时乘积的真空期望值由类似方程(9.2.17)的公式给出:

$$\begin{aligned}&\Big\langle\mathrm{VAC},\mathrm{out}\Big|\,T\Big\{\mathcal{O}_A\Big[P(t_A),Q(t_A)\Big],\,\mathcal{O}_B\Big[P(t_B),Q(t_B)\Big],\cdots\Big\}\,\Big|\mathrm{VAC},\mathrm{in}\Big\rangle\\ &\propto\int\left[\prod_{\tau,\mathbf{x},m}\mathrm{d}q_m(\mathbf{x},\tau)\right]\left[\prod_{\tau,\mathbf{x},m}\mathrm{d}p_m(\mathbf{x},\tau)\right]\mathcal{O}_A\Big[p(t_A),q(t_A)\Big]\\ &\times\mathcal{O}_B\Big[p(t_B),q(t_B)\Big]\cdots\exp\left[\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau\left\{\int\mathrm{d}^3x\,\sum_m p_m(\mathbf{x},\tau)\,\dot{q}_m(\mathbf{x},\tau)\right.\right.\\ &\qquad\left.\left.-H\Big[q(\tau),p(\tau)\Big]+\mathrm{i}\epsilon\text{ 项}\right\}\right]\end{aligned}\tag{9.5.49}$$

其中比例常数对于所有算符 $\mathcal{O}_A, \mathcal{O}_B$ 等都是相同的, 而“$\mathrm{i}\epsilon$ 项”仍旧源于真空波函数. 像往常一样, 我们将每个像 a 这样的离散指标替换成空间位置 $\mathbf{x}$ 和场指标 m. 我们同样扔掉了微分乘积上的波浪号, 这是因为它只影响路径积分中的常数相位.

费米情况和玻色情况的一个主要差异是我们这里并不希望在积掉 q 之前积掉 p. 事实上, 在电弱作用的标准模型中(以及其它理论, 例如更早的 β-衰变的 Fermi 理论), 正则共轭 p_m 是与 $\dot{q}_m$ 无关的辅助场, 并且拉格朗日量对 $\dot{q}_m$ 是线性的, 从而方程(9.5.49)中的量 $\int \mathrm{d}^3x \sum_m p_m\dot{q}_m - H$ 代表的正是拉格朗日量 L. 对于携带非零量子数的费米场(像量子电动力学中的电子场) 它的哈密顿量中的每一项一般包含相同数量的 p (正比于 $q^\dagger$)和 q. 特别地, 哈密顿量中的自由粒子项 H_0 关于 p 和 q 是双线性的, 从而

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau\left\{\int\mathrm{d}^3x\sum_m p_m(\mathbf{x},\tau)\dot{q}_m(\mathbf{x},\tau)-H_0\Big[q(\tau),p(\tau)\Big]+\mathrm{i}\epsilon\text{ 项}\right\}\\&=-\sum_{nm}\int\mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathscr{D}_{mx,ny}\,p_m(x)\,q_n(y)\end{aligned}\tag{9.5.50}$$

其中 $\mathscr{D}$ 为某个数值“矩阵”. 相互作用哈密顿量 $V\equiv H-H_0$ 是相同数量的费米型 q 与 p 的乘积(系数可以依赖于玻色场)之和, 所以当我们将方程(9.5.49)展成 V 的幂级数时, 我们会遇到如下形式的费米积分

$$\begin{aligned}&\mathscr{I}_{n_1m_1n_2m_2\cdots n_Nm_N}(x_1,y_1,x_2,y_2,\cdots,x_N,y_N)\equiv\int\left[\prod_{\tau,\mathbf{x},m}\mathrm{d}q_m(\mathbf{x},\tau)\right]\\&\times\left[\prod_{\tau,\mathbf{x},m}\mathrm{d}p_m(\mathbf{x},\tau)\right]q_{m_1}(x_1)\,p_{n_1}(y_1)\,q_{m_2}(x_2)\,p_{n_2}(y_2)\cdots q_{m_N}(x_N)\,p_{n_N}(y_N)\\&\times\exp\left(-\mathrm{i}\sum_{mn}\int\mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathscr{D}_{mx,ny}\,p_m(x)\,q_n(y)\right)\end{aligned}\tag{9.5.51}$$

的和, 求和中每个这样的项都对应 Feynman 图中一组可能的顶点, 其中每个顶点所贡献的系数由 i 乘以相互作用中对应项中场乘积的系数给出.

为了计算这类积分, 首先考察所有这些积分的一个生成函数:

$$\begin{aligned}\mathscr{I}(f,g)\equiv\int\left[\prod_{\mathbf{x},\tau,m}\mathrm{d}q_m(\mathbf{x},\tau)\,\mathrm{d}p_m(\mathbf{x},\tau)\right]&\\\times\exp\left(-\mathrm{i}\sum_{mn}\int\mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathscr{D}_{mx,ny}\,p_m(x)\,q_n(y)\right.&\\\left.-\mathrm{i}\sum_m\int\mathrm{d}^4x\,p_m(x)\,f_m(y)-\mathrm{i}\sum_n\int\mathrm{d}^4y\,g_n(y)\,q_n(y)\right),&\end{aligned}\tag{9.5.52}$$

其中 $f_m(x)$ 和 $g_n(y)$ 是任意反对易 c-数函数. 我们平移到新的积分变量

$$\begin{aligned}p'_m(x)&=p_m(x)+\sum_n\int\mathrm{d}^4y\,g_n(y)\,(\mathscr{D}^{-1})_{ny,mx}\,,\\q'_n(y)&=q_n(y)+\sum_m\int\mathrm{d}^4x\,(\mathscr{D}^{-1})_{ny,mx}\,f_m(x)\,.\end{aligned}$$

利用平移不变性条件(9.5.36), 我们发现

$$\begin{aligned}\mathscr{I}(f,g) = \exp\Bigg(\mathrm{i}\sum_{mn}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,(\mathscr{D}^{-1})_{ny,mx}\,g_n(y)\,f_m(x)\Bigg)\\ \times\int\Bigg[\prod_{\mathbf{x},\tau,m}\mathrm{d}q'_m(\mathbf{x},\tau)\,\mathrm{d}p'_m(\mathbf{x},\tau)\Bigg]\\ \times\exp\Bigg(-\mathrm{i}\sum_{mn}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathscr{D}_{mx,ny}\,p'_m(x)\,q'_n(y)\Bigg)\,.\end{aligned}\tag{9.5.53}$$

这个积分是一个常数(即, 不依赖于函数 f 和 g), 利用方程(9.5.38)可以证明它正比于 Det $\mathscr{D}$. 对于我们更重要的是第一个因子. 将这个因子展成 gf 的幂级数, 并将其与方程(9.5.52)的直接展开比较, 我们看到

$$\begin{aligned}&\mathscr{I}_{n_1m_1n_2m_2\cdots n_Nm_N}(x_1,y_1,x_2,y_2,\cdots,x_N,y_N)\\ &\propto\sum_{\text{pairings}}\delta_{\text{pairing}}\prod_{\text{pairs}}\Big(-\mathrm{i}\mathscr{D}^{-1}\Big)_{\text{paired }mx,ny}\end{aligned}\tag{9.5.54}$$

其中的比例常数不依赖 x,y,m 或 n 且与这些变量的数目无关. 这个求和是对 p 和 q 的所有不同配对方式求和, 如果不同的配对方式相差的仅是配对的次序, 那么这种配对方式不计算在内. 换句话说, 我们对 p 或 q 的 $N!$ 个置换求和. 当置换为偶时, 符号因子 δ_{pairing} 是 $+1$, 如果为奇则是 -1.

这个符号因子与配对求和恰与我们以前在推导 Feynman 规则时所遇到的一样, 其中对配对的求和对应于对 Feynman 图中连接顶点的方式求和, 而因子 $(\mathscr{D}^{-1})_{mx,ny}$ 扮演了将 $q_m(x)$ 与 $p_n(y)$ 配对的传播子的角色. 在自旋 $\frac{1}{2}$ 的 Dirac 体系中, 自由粒子的作用量是

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau\left\{\int\mathrm{d}^3x\,\sum_m p_m(\mathbf{x},\tau)\dot{q}_m(\mathbf{x},\tau)-H_0\Big[q(\tau),p(\tau)\Big]\right\}\\ &=-\int\mathrm{d}^4x\,\bar{\psi}(x)\left[\gamma^\mu\partial_\mu+m\right]\psi(x)\,,\end{aligned}\tag{9.5.55}$$

其中, 按照通常的记法, 这里的正则变量是

$$q_m(x)=\psi_m(x)\,,\qquad p_m(x)=-[\bar{\psi}(x)\gamma^0]_m=\mathrm{i}\psi^\dagger_m(x)\tag{9.5.56}$$

其中 m 是 4-值Dirac指标. 与方程(9.5.50)比较, 我们发现这里的

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_{mx,ny}&=\left[\gamma^0\left(\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}+m-\mathrm{i}\epsilon\right)\right]_{mn}\delta^4(x-y)\\ &=\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\Big(\gamma^0[\mathrm{i}\gamma^\mu k_\mu+m-\mathrm{i}\epsilon]\Big)_{mn}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot(x-y)}\,.\end{aligned}\tag{9.5.57}$$

(尽管我们没有在这里详细地解出它, 但是这里 $\mathrm{i}\epsilon$ 项产生的方式以与 9.2 节中的标量场相同.) 于是传播子是

$$(\mathscr{D}^{-1})_{mx,ny}=\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\Big([\mathrm{i}\gamma^\mu k_\mu+m-\mathrm{i}\epsilon]^{-1}[-\gamma^0]\Big)_{mn}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot(x-y)}\,,\tag{9.5.58}$$

和我们在算符体系中所得到一样. 产生额外因子 $-\mathrm{i}\gamma^0$ 是因为该传播子是 $T\{\psi_m(x),-[\bar{\psi}(y)\gamma^0]_n\}$ 的真空期望值, 而不是 $T\{\psi_m(x),\bar{\psi}_n(y)\}$.

作为一个用路径积分方法比用算符方法更容易求解的例子, 我们来计算一个只与外场相互作用的 Dirac 场的真空-真空振幅对场的依赖. 取拉格朗日量为

$$\mathscr{L} = -\bar{\psi}[\gamma^\mu \partial_\mu + m + \Gamma]\psi \,, \tag{9.5.59}$$

其中 $\Gamma(x)$ 是体现费米子与外场相互作用的 x-相关的矩阵. 根据方程(9.5.49), 在有外场存在时, 真空滞留振幅是

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{VAC}, \mathrm{out} | \mathrm{VAC}, \mathrm{in} \rangle_\Gamma \propto & \int \left[\prod_{\tau, \mathbf{x}, m} \mathrm{d}q_m(\mathbf{x}, \tau) \right] \left[\prod_{\tau, \mathbf{x}, m} \mathrm{d}p_m(\mathbf{x}, \tau) \right] \\ & \times \exp\left\{ -\mathrm{i} \int \mathrm{d}^4 x \, p^{\mathrm{T}} \gamma^0 [\gamma^\mu \partial_\mu + m + \Gamma - \mathrm{i}\epsilon] \, q \right\} \end{aligned} \tag{9.5.60}$$

其中比例常数与 $\Gamma(x)$ 无关. 我们将上式写成

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{VAC}, \mathrm{out} | \mathrm{VAC}, \mathrm{in} \rangle_\Gamma \propto & \int \left[\prod_{\tau, \mathbf{x}, m} \mathrm{d}q_m(\mathbf{x}, \tau) \right] \left[\prod_{\tau, \mathbf{x}, m} \mathrm{d}p_m(\mathbf{x}, \tau) \right] \\ & \times \exp\left\{ -\mathrm{i} \sum_{mn} \int \mathrm{d}^4 x \, \mathrm{d}^4 y \, p_m(x) \, q_n(y) \, \mathscr{K}[\Gamma]_{mx,ny} \right\} , \end{aligned} \tag{9.5.61}$$

其中

$$\mathscr{K}[\Gamma]_{mx,ny} = \left(\gamma^0 \left[\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + m + \Gamma(x) - \mathrm{i}\epsilon \right] \right)_{mn} \delta^4(x - y) \,. \tag{9.5.62}$$

为了计算它, 我们将积分变量 $q_n(x)$ 变为

$$q'_m(x) \equiv \sum_n \int \mathrm{d}^4 y \, \mathscr{K}[\Gamma]_{mx,ny} \, q_n(y) \,. \tag{9.5.63}$$

现在, 剩下的积分与 Γ 无关, 所以真空滞留振幅的所有依赖关系都包含于因在方程(9.5.38)中改变变量产生的行列式中:

$$\langle \mathrm{VAC}, \mathrm{out} | \mathrm{VAC}, \mathrm{in} \rangle_\Gamma \propto \mathrm{Det}\, \mathscr{K}[\Gamma] \,. \tag{9.5.64}$$

为了再现微扰论的结果, 我们先写出

$$\mathscr{K}[\Gamma] \equiv \mathscr{D} + \mathscr{G}[\Gamma] \,, \tag{9.5.65}$$

$$\mathscr{G}[\Gamma]_{mx,ny} = \left(\gamma^0 \Gamma(x) \right)_{mn} \delta^4(x - y) \,, \tag{9.5.66}$$

并展成 $\mathscr{G}[\Gamma]$ 的幂级数. 于是方程(9.5.64)给出

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{VAC}, \mathrm{out} | \mathrm{VAC}, \mathrm{in} \rangle_\Gamma & \propto \mathrm{Det}\Big(\mathscr{D}[1 + \mathscr{D}^{-1} \mathscr{G}[\Gamma]] \Big) \\ & = [\mathrm{Det}\, \mathscr{D}] \, \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \, \mathrm{Tr}\, (\mathscr{D}^{-1} \mathscr{G}[\Gamma])^n \right) . \end{aligned} \tag{9.5.67}$$

这正是我们希望从 Feynman 规则中得到的: 该理论中来自内线和顶点的贡献是 $-\mathrm{i}\mathscr{D}^{-1}$ 和 $-\mathrm{i}\mathscr{G}[\Gamma]$; n 个 $-\mathscr{D}^{-1}\mathscr{G}[\Gamma]$ 因子乘积的迹因而对应于由 n 条内线连接起来的有 n 个顶点的圈; $1/n$是伴随这种圈的通常的组合学因子(见 6.1 节); 符号因子是 $(-1)^{n+1}$ 而不是 $(-1)^n$ 是因为费米圈会有一个

额外的负号; 对 n 的求和出现在指数中是因为真空振幅振幅中有包括了任意多个圈的图的贡献. 从 Feynman 规则导出 Γ-无关因子 $\mathrm{Det}\,\mathscr{D}$ 并不那么容易; 它代表了任意个不携带顶点的费米圈的贡献.

更重要的是, 一个类似方程(9.5.64)的公式允许我们通过拓扑定理导出像 $\mathscr{K}[\Gamma]$ 这样的核的本征值信息, 从而导出非微扰结果. 这将在卷 II 进行进一步的探索.

9.6 量子电动力学的路径积分表述

在应用到无质量自旋 1 粒子的规范理论时, 诸如量子电动力学, 量子场论的路径积分方法显示出了它的优势. 上一章中在推导量子电动力学的 Feynman 规则时包含了相当多左支右绌的补救, 例如论证光子传播子 $\Delta^{\mu\nu}(q)$ 中正比于 q^μ 或 q^ν 的项可以被扔掉, 以及纯类时项将恰好可以抵消哈密顿量中的 Coulomb 项, 从而使有效光子传播子可以被取作 $\eta^{\mu\nu}/q^2$. 用第 8 章的方法论证这一结果的合理性将使我们陷入到对 Feynman 图的复杂分析中. 但是正如我们所要看到的, 路径积分方法会给出所需要的光子传播子形式, 却甚至不需要考察 Feynman 图的细节.

在第 8 章, 我们发现在 Coulomb 规范下, 光子与带电粒子相互作用的哈密顿量取如下的形式

$$H[\mathbf{A},\mathbf{\Pi}_\perp,\cdots]=H_{\mathrm{M}}+\int \mathrm{d}^3x\,\Big[\tfrac{1}{2}\mathbf{\Pi}_\perp^2+\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})^2-\mathbf{A}\cdot\mathbf{J}\Big]+V_{\mathrm{Coul}}\,. \tag{9.6.1}$$

这里的 $\mathbf{A}$ 是矢势, 服从 Coulomb 规范条件

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}=0\,, \tag{9.6.2}$$

而 $\mathbf{\Pi}_\perp$ 是它的正则共轭的无散部分, 满足相同约束

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{\Pi}_\perp=0\,. \tag{9.6.3}$$

另外, H_{M} 是物质哈密顿量而 V_{Coul} 是 Coulomb 能

$$V_{\mathrm{Coul}}(t)=\tfrac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y\;J^0(\mathbf{x},t)J^0(\mathbf{y},t)\Big/4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\,. \tag{9.6.4}$$

就像所有其它哈密顿系统, 我们可以将编时乘积的真空期望值作为一个路径积分来计算*

$$\begin{aligned}\langle T\{\mathcal{O}_A\mathcal{O}_B\cdots\}\rangle_{\mathrm{VAC}}&=\int\Big[\prod_{x,i}\mathrm{d}a_i(x)\prod_{x,i}\mathrm{d}\pi_i(x)\prod_{x,\ell}\mathrm{d}\psi_\ell(x)\Big]\mathcal{O}_A\mathcal{O}_B\cdots\\&\times\exp\Big\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\,\Big[\boldsymbol{\pi}\cdot\dot{\mathbf{a}}-\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\pi}^2-\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a})^2+\mathbf{a}\cdot\mathbf{J}+\mathscr{L}_{\mathrm{M}}\Big]-\mathrm{i}\int\mathrm{d}t\,V_{\mathrm{Coul}}\Big\}\\&\times\Big[\prod_x\delta\Big(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}(x)\Big)\Big]\Big[\prod_x\delta\Big(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\pi}(x)\Big)\Big]\,,\end{aligned} \tag{9.6.5}$$

其中 $\psi_\ell(x)$ 是一般的物质场. 在将(9.6.5)写成物质的拉格朗日密度形式时, 我们假定了 H_{M} 是定域的并且要么对物质 π 是线性的(就像旋量电动力学中那样)要么是不依赖场的系数的二

*注意到 $\boldsymbol{\pi}(x)$ 是量子算符 $\mathbf{\Pi}_\perp$ 的内插 c-数场, 它们彼此的对易关系以及与 $\mathbf{A}$ 的对易关系与 $\mathbf{\Pi}$ 的那些对易关系相同, 但不像 $\mathbf{\Pi}$, 它与所有正则物质变量对易.

次型(就像标量电动力学中那样). 我们已经在方程(9.6.5)中插入了 δ-函数[**]以确保其满足约束(9.6.2)和(9.6.3).

方程(9.6.5)中的指数幅角显然是 $\boldsymbol{\pi}$ 中独立分量(例如 π_1 和 π_2)的二次型, 其中 $\boldsymbol{\pi}$ 的二阶项系数不依赖场. 因此, 依照方程(9.A.9), 通过令 $\boldsymbol{\pi}$ 等于指数幅角的稳相点就能完成对 $\boldsymbol{\pi}$ 的积分(可以相差一个常数因子), 即令 $\boldsymbol{\pi}=\dot{\mathbf{a}}$:

$$\begin{aligned}\langle T\{\mathcal{O}_A\mathcal{O}_B\cdots\}\rangle_{\mathrm{VAC}} &= \int\left[\prod_{x,i}\mathrm{d}a_i(x)\prod_{x,\ell}\mathrm{d}\psi_\ell(x)\right]\\ &\times\mathcal{O}_A\mathcal{O}_B\cdots\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\left[\frac{1}{2}\dot{\mathbf{a}}^2-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a})^2+\mathbf{a}\cdot\mathbf{j}+\mathscr{L}_{\mathrm{M}}\right]\right.\\ &\left.-\mathrm{i}\int\mathrm{d}t\,V_{\mathrm{Coul}}+\mathrm{i}\epsilon\text{ 项}\right\}\left[\prod_x\delta(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}(x))\right].\end{aligned}\tag{9.6.6}$$

为了显现出这个结果满足协变性, 我们采用一个技巧. 引入新的积分变量 $a^0(x)$, 并将作用量中的 Coulomb 项 $-\int\mathrm{d}t\,V_{\mathrm{Coul}}$ 换成

$$\int\mathrm{d}^4x\left[-a^0(x)j^0(x)+\frac{1}{2}\Big(\boldsymbol{\nabla}a^0(x)\Big)^2\right].\tag{9.6.7}$$

既然(9.6.7)是 a^0 的二次型, 通过令 $a^0(x)$ 等于(9.6.7)的稳相点, 也就是

$$-j^0(x)-\nabla^2a^0(x)=0$$

的解, 或者换种形式

$$a^0(\mathbf{x},t)=\int\mathrm{d}^3y\,\frac{j^0(\mathbf{y},t)}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|},\tag{9.6.8}$$

我们就能做掉对 a^0 的积分(可以差一个常数因子). 将其应用在方程(9.6.7)中恰好给出 Coulomb 作用 $-\int\mathrm{d}t\,V_{\mathrm{Coul}}$. 因此我们可以将方程(9.6.6)中的指数幅角重新写为

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\dot{\mathbf{a}}^2-\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a})^2+\mathbf{a}\cdot\mathbf{j}+\mathscr{L}_{\mathrm{M}}-a^0j^0+\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}a^0)^2\\ &=-\tfrac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu}+a_\mu j^\mu+\mathscr{L}_{\mathrm{M}}+\text{全导数}\end{aligned}$$

其中 $f_{\mu\nu}=\partial_\mu a_\nu-\partial_\nu a_\mu$, 并对 a^0, $\mathbf{a}$ 以及物质场积分. 这样, 路径积分(9.6.6)现在就变成

$$\begin{aligned}\langle T\{\mathcal{O}_A\mathcal{O}_B\cdots\}\rangle_{\mathrm{VAC}} &\propto\int\left[\prod_{x,\mu}\mathrm{d}a_\mu(x)\right]\left[\prod_{x,\ell}\mathrm{d}\psi_\ell(x)\right]\\ &\times\mathcal{O}_A\mathcal{O}_B\cdots\exp\Big(\mathrm{i}I[a,\psi]\Big)\prod_x\delta\Big(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}(x)\Big),\end{aligned}\tag{9.6.9}$$

[**]这不是严格精确的. 例如, 如果我们取正则变量 a_1, a_2 和 π_1, π_2, 而 a_3 和 π_3 则被视为由方程(9.6.2)和(9.6.3)给定的这些变量的泛函, 这样我们应该插入如下的 δ-函数

$$\prod_x\delta\Big(a_3(x)+\partial_3^{-1}\Big(\partial_1a_1(x)+\partial_2a_2(x)\Big)\Big)\,\delta\Big(\pi_3(x)+\partial_3^{-1}\Big(\partial_1\pi_1(x)+\partial_2\pi_2(x)\Big)\Big).$$

然而, 这与方程(9.6.5)中的δ-函数仅差一个因子$\mathrm{Det}\,\partial_3^2$, 这个因子尽管是无限大的, 但却是不依赖场的, 因而在类似方程(9.4.1)中的比值中消掉了.

其中 I 是原始作用量

$$I[a,\psi]=\int \mathrm{d}^4x\left[-\tfrac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu}+a_\mu j^\mu+\mathscr{L}_{\mathrm{M}}\right]+\mathrm{i}\epsilon\text{ 项}\,. \tag{9.6.10}$$

现在, 除了最后确保Coulomb规范条件的 δ-函数乘积, 所有的量都是明显Lorentz-不变且规范不变的.† 为了更进一步, 我们将用一个简化版的技巧[4, 5], 这个技巧将在卷II中被用来处理更加困难的非阿贝尔规范理论. 简单起见, 我们在这里处理的是算符 $\mathcal{O}_A[A,\Psi]$, $\mathcal{O}_B[A,\Psi],\cdots$ 以及作用量 $I[a,\psi]$ 和测度 $\left[\prod \mathrm{d}a\right]\left[\prod \mathrm{d}\psi\right]$ 均规范不变的情况.

首先, 将方程(9.6.9)中的所有场积分变量 $a_\mu(x)$ 和 $\psi(x)$ 替换成新变量

$$a_{\mu\Lambda}(x)\equiv a_\mu(x)+\partial_\mu\Lambda(x)\,, \tag{9.6.11}$$

$$\psi_{\ell\Lambda}(x)\equiv \exp\Big(\mathrm{i}\,q_\ell\Lambda(x)\Big)\psi_\ell(x) \tag{9.6.12}$$

其中 $\Lambda(x)$ 为任意的有限量. 这一步在数学上是平庸的, 就像把积分 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 写成 $\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\,\mathrm{d}y$, 并不需要用到理论是规范不变的假定. 接下来, 利用规范不变性将作用量, 测度以及 $\mathcal{O}$-函数中的 $a_{\mu\Lambda}(x)$ 和 $\psi_{\ell\Lambda}(x)$ 分别替换成原始场 $a_\mu(x)$ 和 $\psi_\ell(x)$. 于是方程(9.6.9)变成

$$\begin{aligned}&\Big\langle T\Big\{\mathcal{O}_A[A,\Psi],\,\mathcal{O}_B[A,\Psi],\cdots\Big\}\Big\rangle_{\mathrm{VAC}}\\&\quad\propto\int\left[\prod_{x,\mu}\mathrm{d}a_\mu(x)\right]\left[\prod_{x,\ell}\mathrm{d}\psi_\ell(x)\right]\mathcal{O}_A[a,\psi]\mathcal{O}_B[a,\psi]\cdots\\&\qquad\times\exp\Big(\mathrm{i}I[a,\psi]\Big)\prod_x\delta\Big(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}(x)+\nabla^2\Lambda(x)\Big)\,.\end{aligned} \tag{9.6.13}$$

现在, 函数 $\Lambda(x)$ 是随机选择的, 所以, 尽管它出现在式子中, 方程(9.6.13)的右边不能依赖这一函数. 我们将利用这一性质将路径积分改写成更加方便的形式. 给方程(9.6.13)乘以泛函

$$B[\Lambda,a]=\exp\left(-\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\alpha\int\mathrm{d}^4x\,\Big(\partial_0a^0-\nabla^2\Lambda\Big)^2\right) \tag{9.6.14}$$

(其中 α 是一任意常数), 并对 $\Lambda(x)$ 积分. 通过平移积分变量 $\Lambda(x)$, 并注意到(9.6.13)实际上与 Λ 无关, 我们看到这实际上就相当于给方程(9.6.13)乘上不依赖场的常数

$$\int\left[\prod_x\mathrm{d}\Lambda(x)\right]\exp\left(-\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\alpha\int\mathrm{d}^4x\,\Big(\nabla^2\Lambda\Big)^2\right). \tag{9.6.15}$$

这一因子在真空期望值的连通部分被抵消了, 因而没有物理效应. 但是方程(9.6.13)仅在我们积掉 $a^\mu(x)$ 和 $\psi(x)$ 之后才是 Λ-无关的. 我们也可以在积掉 $a^\mu(x)$ 和 $\psi(x)$ 之前积掉 $\Lambda(x)$, 在这种情况下, 方程(9.6.13)中的因子 $\prod_x\delta\big(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}(x)+\nabla^2\Lambda\big)$ 被替换成

$$\begin{aligned}&\int\left[\prod_x\mathrm{d}\Lambda(x)\right]\exp\left(-\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\alpha\int\mathrm{d}^4x\,\Big(\partial_0a^0-\nabla^2\Lambda\Big)^2\right)\prod_x\delta\Big(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}(x)+\nabla^2\Lambda\Big)\\&\qquad\propto\exp\left(-\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\alpha\int\mathrm{d}^4x\,(\partial_\mu a^\mu)^2\right),\end{aligned} \tag{9.6.16}$$

†注意现在 $a^0(x)$ 不等于值(9.6.8), 而是一个独立的积分变量. 我们不先对 $a^0(x)$ 积分, 这样做将回到方程(9.6.6), 而是和 $\mathbf{a}(x)$ 一起处理.

其中“$\propto$”还是意味着比例常数是不依赖场的因子. 扔掉常数因子, 方程(9.6.9)现在就变成

$$\langle T\{\mathcal{O}_A\mathcal{O}_B\cdots\}\rangle_{\text{VAC}} \propto \int\left[\prod_{x,\mu}\mathrm{d}a_\mu(x)\right]\left[\prod_{x,\ell}\mathrm{d}\psi_\ell(x)\right]\mathcal{O}_A\mathcal{O}_B\cdots\exp(\mathrm{i}I_{\text{eff}}[a,\psi])\,, \tag{9.6.17}$$

其中

$$I_{\text{eff}}[a,\psi] = I[a,\psi] - \tfrac{1}{2}\alpha\int(\partial_\mu a^\mu)^2\,\mathrm{d}^4x\,. \tag{9.6.18}$$

现在这个结果是明显 Lorentz-不变的.

我们将(9.6.18)中的新项视为对作用量非微扰部分的贡献, 它的光子部分现在变成

$$\begin{aligned} I_0[a] &= \int\mathrm{d}^4x\left[-\tfrac{1}{4}(\partial_\mu a_\nu-\partial_\nu a_\mu)(\partial^\mu a^\nu-\partial^\nu a^\mu) - \tfrac{1}{2}\alpha(\partial_\mu a^\mu)^2 + \mathrm{i}\epsilon\text{ 项}\right] \\ &= -\tfrac{1}{2}\int\mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,a^\mu(x)\,a^\nu(y)\,D_{\mu x,\nu y}\,, \end{aligned} \tag{9.6.19}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_{\mu x,\nu y} &= \left[\eta_{\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial x^\rho\partial y_\rho} - (1-\alpha)\frac{\partial^2}{\partial x^\mu\partial y^\nu}\right]\delta^4(x-y) + \mathrm{i}\epsilon\text{ 项} \\ &= (2\pi)^{-4}\int\mathrm{d}^4q\left[\eta_{\mu\nu}q^2 - (1-\alpha)q_\mu q_\nu - \mathrm{i}\epsilon\eta_{\mu\nu}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot(x-y)}\,. \end{aligned} \tag{9.6.20}$$

那么, 对方程(9.6.20)的被积函数中 4×4 矩阵取逆就能立即得到光子传播子

$$\Delta_{\mu x,\nu y} = (2\pi)^{-4}\int\mathrm{d}^4q\left[\frac{\eta^{\mu\nu}}{q^2-\mathrm{i}\epsilon} + \frac{(1-\alpha)}{\alpha}\frac{q^\mu q^\nu}{(q^2-\mathrm{i}\epsilon)^2}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot(x-y)}\,. \tag{9.6.21}$$

我们可以按照看起来最方便的形式来自由地选择 α. 两个通常的选择是 $\alpha=1$, 它给出了 *Feynman* 规范下的传播子:

$$\Delta^{\text{Feynman}}_{\mu x,\nu y} = (2\pi)^{-4}\int\mathrm{d}^4q\left[\frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2-\mathrm{i}\epsilon}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot(x-y)} \tag{9.6.22}$$

或者 $\alpha=\infty$, 在这种情况下, 因子(9.6.14)起到的作用和 δ-函数一样, 从而得到 *Landau* 规范下的传播子(通常也叫作 *Lorentz* 规范):

$$\Delta^{\text{Landau}}_{\mu x,\nu y} = (2\pi)^{-4}\int\mathrm{d}^4q\left[\frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2-\mathrm{i}\epsilon} - \frac{q^\mu q^\nu}{(q^2-\mathrm{i}\epsilon)^2}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot(x-y)}\,. \tag{9.6.23}$$

采用这类明显 Lorentz 不变的相互作用和传播子会使实际计算变得方便很多.

9.7 各种统计*

我们现在可以着手处理第 4 章提出的问题: 当我们交换全同粒子时, 态矢有哪些可能的改变?

为此, 我们将考察散射过程中初态或末态的制备. 假定通过某种缓慢变化的外场, 其中一个态中的一组不可分辨粒子从动量为 $\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2$ 等的标准构形变成动量为 $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2$ 等的特定构形,

*本节或多或少的处在本书的发展主线之外, 可以在第一次阅读时跳过.

在这个过程中保持粒子相距足够远以保证应用非相对论量子力学是合理的. (我们不在这里明显写出自旋指标; 它们应该被理解成伴随着动量指标.) 为了计算这个过程的振幅, 我们可以采用路径积分方法,[**] 把9.1节中的q和p取为粒子位置与动量, 而不是场和它们的正则共轭. 无论粒子是玻色子还是费米子亦或是别的什么东西, 它们总是满足正则对易关系而不是反对易关系, 所以目前我们还没有把自己局限在某种特定的统计中. 路径积分公式(9.1.34)将振幅$\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \cdots \rangle_{\mathrm{D}}$作为对路径的积分给出, 在这个积分中一个粒子的动量从$\mathbf{k}_1$连续变化到$\mathbf{p}_1$, 另一全同粒子的动量从$\mathbf{k}_2$连续变化到$\mathbf{p}_2$, 以此类推. 下标"D"表示我们所计算的振幅针对的是可分辨(distinguishable)粒子. 特别地, 这一振幅在$\mathbf{p}$和$\mathbf{k}$的同时置换下是对称的, 但是在$\mathbf{p}$或$\mathbf{k}$的分别置换下没有特定的对称性. 但是如果粒子真是不可分辨的, 那么存在其它拓扑上不同的路径, 但最终会产生同一末态构形. 对于维度$d \geq 3$的空间, 唯一的这类路径[†]是那些将$\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \cdots$变成$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots$的非平庸置换$\mathscr{P}$给出的路径. 因此真正的振幅应该写成

$$\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \cdots \rangle = \sum_{\mathscr{P}} C_{\mathscr{P}} \langle \mathbf{p}_{\mathscr{P}1}, \mathbf{p}_{\mathscr{P}2}, \cdots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \cdots \rangle_{\mathrm{D}} \,, \tag{9.7.1}$$

求和遍历态中N个不可分辨粒子的所有$N!$个置换, 而$C_{\mathscr{P}}$是一组复常数. 这些振幅必须满足不可分辨粒子的合成规则:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \cdots \rangle = \frac{1}{N!} \int \mathrm{d}^3 q_1 \, \mathrm{d}^3 q_2 \cdots \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots | \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \cdots \rangle \\ \times \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \cdots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \cdots \rangle \,. \end{aligned} \tag{9.7.2}$$

利用方程(9.7.1), 这就是要求

$$\begin{aligned} \sum_{\mathscr{P}} C_{\mathscr{P}} \, \langle \mathbf{p}_{\mathscr{P}1}, \mathbf{p}_{\mathscr{P}2}, \cdots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \cdots \rangle_{\mathrm{D}} = \frac{1}{N!} \sum_{\mathscr{P}', \mathscr{P}''} C_{\mathscr{P}'} \, C_{\mathscr{P}''} \int \mathrm{d}^3 q_1 \, \mathrm{d}^3 q_2 \cdots \\ \times \langle \mathbf{p}_{\mathscr{P}'1}, \mathbf{p}_{\mathscr{P}'2}, \cdots | \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \cdots \rangle_{\mathrm{D}} \, \langle \mathbf{q}_{\mathscr{P}''1}, \mathbf{q}_{\mathscr{P}''2}, \cdots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \cdots \rangle_{\mathrm{D}} \end{aligned}$$

对右边第一个振幅中的初态和末态作置换$\mathscr{P}''$, 给出

$$\begin{aligned} \sum_{\mathscr{P}} C_{\mathscr{P}} \, \langle \mathbf{p}_{\mathscr{P}1}, \mathbf{p}_{\mathscr{P}2}, \cdots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \cdots \rangle_{\mathrm{D}} = \frac{1}{N!} \sum_{\mathscr{P}', \mathscr{P}''} C_{\mathscr{P}'} \, C_{\mathscr{P}''} \int \mathrm{d}^3 q_1 \, \mathrm{d}^3 q_2 \cdots \\ \times \langle \mathbf{p}_{\mathscr{P}''\mathscr{P}'1}, \mathbf{p}_{\mathscr{P}''\mathscr{P}'2}, \cdots | \mathbf{q}_{\mathscr{P}''1}, \mathbf{q}_{\mathscr{P}''2}, \cdots \rangle_{\mathrm{D}} \, \langle \mathbf{q}_{\mathscr{P}''1}, \mathbf{q}_{\mathscr{P}''2}, \cdots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \cdots \rangle_{\mathrm{D}} \end{aligned}$$

但是振幅$\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \cdots \rangle_{\mathrm{D}}$满足可分辨粒子的构造规则

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \cdots \rangle_{\mathrm{D}} = \int \mathrm{d}^3 q_1 \, \mathrm{d}^3 q_2 \cdots \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots | \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \cdots \rangle_{\mathrm{D}} \\ \times \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \cdots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \cdots \rangle_{\mathrm{D}} \,, \end{aligned} \tag{9.7.3}$$

[**] 在这里我将依循 Laidlaw (莱德劳)和 C. Dewitt 的讨论,[11] 不同的是他们将路径积分方法应用于整个散射过程, 而不仅限于初态或末态的制备. 在一个相对论性理论中, 粒子产生或湮灭的可能性使得必须将路径积分方法应用于场而不是粒子轨道. 对于我们而言, 这不是问题, 因为我们将这样的计算限制在了充分早或充分晚的时期, 这时参与散射过程的粒子彼此相距极远.

[†] 这被形式地表述为: $d \geq 3$的空间中, 构形空间的第一同伦群是置换群.[12] N个不可分辨粒子的"构形空间"意味着N个d-矢的空间, 排除掉彼此重合(或者处在一个任意的极限距离内)的d-矢, 并将仅相差一个矢量置换的构形等价起来.

所以, 要使得物理振幅的合成规则能写成

$$\sum_{\mathscr{P}} C_{\mathscr{P}} \langle \mathbf{p}_{\mathscr{P}1}, \mathbf{p}_{\mathscr{P}2}, \cdots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \cdots \rangle_{\mathrm{D}} = \frac{1}{N!} \sum_{\mathscr{P}', \mathscr{P}''} C_{\mathscr{P}'} C_{\mathscr{P}''} \times \langle \mathbf{p}_{\mathscr{P}''\mathscr{P}'1}, \mathbf{p}_{\mathscr{P}''\mathscr{P}'2}, \cdots | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \cdots \rangle_{\mathrm{D}} ,$$

当且仅当

$$C_{\mathscr{P}'\mathscr{P}''} = C_{\mathscr{P}'} C_{\mathscr{P}''} . \tag{9.7.4}$$

就是说, 系数 $C_{\mathscr{P}}$ 必须构成置换群的一维表示. 但是置换群仅有两个这样的表示: 一个是恒等表示, 对于所有的置换 $C_{\mathscr{P}} = +1$, 而另一个是交错表示, 由 $\mathscr{P}$ 是偶置换还是奇置换决定 $C_{\mathscr{P}} = +1$ 还是 $C_{\mathscr{P}} = -1$. 这两种可能性分别对应玻色统计和费米统计.‡

这一讨论的漂亮之处在于它使得为什么二维空间是个例外变得清楚. 在二维空间中, 存在着丰富得多的拓扑不等价的路径种类.¶ 例如, 一个粒子绕另一粒子转确定圈数的路径不能变形成没有绕圈的路径. 结果是, 在二维空间, 有可能存在*任意子*,[15] 任意子有着比费米统计或玻色统计[8a]更普遍的置换性质.

附录A 高斯多重积分

我们首先希望对有限个实变量 ξ_r 计算指数上是 ξ 的一般二次函数的多重积分

$$\mathscr{I} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \prod_r \mathrm{d}\xi_r \, \exp\Big\{ -Q(\xi) \Big\} , \tag{9.A.1}$$

$$Q(\xi) = \tfrac{1}{2} \sum_{rs} K_{rs} \xi_r \xi_s + \sum_r L_r \xi_r + M , \tag{9.A.2}$$

其中 K_{rs}, L_r 和 M 是任意常数, 这里只要求矩阵 K 是对称且非奇异的. 为此, 我们从 K_{rs}, L_r 和 M 都是实的且 K_{rs} 正定这一情况开始考虑. 一般结果可以通过解析延拓得到.

任何实对称矩阵都可以被一个正交矩阵对角化. 因此存在一个矩阵 $\mathscr{S}$, 具有逆 $\mathscr{S}^{\mathrm{T}} = \mathscr{S}^{-1}$, 使得

$$\Big(\mathscr{S}^{\mathrm{T}} K \mathscr{S} \Big)_{rs} = \delta_{rs} \kappa_r . \tag{9.A.3}$$

因为假定 K 是正定且非奇异的, 所以本征值 κ_r 正定. 我们可以利用矩阵 $\mathscr{S}$ 做一个变量变换:

$$\xi_r = \sum_s \mathscr{S}_{rs} \xi'_s . \tag{9.A.4}$$

这一变换的雅克比行列式 $|\mathrm{Det}\, \mathscr{S}|$ 是 1, 所以多重积分(9.A.1)现在由普通积分的乘积给定:

$$\begin{aligned} \mathscr{I} &= \mathrm{e}^{-M} \prod_r \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi' \, \exp\left\{ -\frac{\kappa_r}{2} \xi'^2 - (\mathscr{S}^{\mathrm{T}} L)_r \xi' \right\} \\ &= \mathrm{e}^{-M} \prod_r \sqrt{\frac{2\pi}{\kappa_r}} \exp\left\{ \frac{1}{2\kappa_r} (\mathscr{S}^{\mathrm{T}} L)_r^2 \right\} . \end{aligned} \tag{9.A.5}$$

‡在文献中有大量关于玻色或费米之外其它可能的统计的讨论, 通常在标签仲(parastatistics)统计下. 已经证明 $d \geq 3$ 的空间中的仲统计理论等价于所有粒子都是普通的费米子或玻色子但携带额外量子数的理论, 从而使波函数在动量和自旋的置换下有着不寻常的性质.

¶这被表述为, 二维空间中, 构形空间的第一同伦群不是置换群, 而是一个更大的群, 称为*辫子群*.[14]

而方程(9.A.3)的行列式和逆是

$$\mathrm{Det}\,K=\prod_r \kappa_r\,,\qquad K^{-1}_{rs}=\sum_\ell \mathscr{S}_{r\ell}\mathscr{S}_{s\ell}\kappa_\ell^{-1}\,,$$

所以方程(9.A.5)可以写成

$$\mathscr{I}=\left(\mathrm{Det}\left(\frac{K}{2\pi}\right)\right)^{-1/2}\exp\left\{\tfrac{1}{2}\sum_{rs}L_rL_sK^{-1}_{rs}-M\right\}. \tag{9.A.6}$$

方程(9.A.1)定义了 K_{rs}, L_r 和 M 的一个函数, 对于 K_{rs} 为实且正定这一使得积分收敛的区域, 该函数在收敛面周围的有限区域中对 K_{rs} 是解析的, 并且对这样的 K_{rs}, 它对任意的 L_r 和 M 都是解析的. 既然对实的 K_{rs}, L_r 和 M 以及正定的 K_{rs}, (9.A.6)等于(9.A.1), 方程(9.A.6)就给出了方程(9.A.1)到整个复平面的解析延拓, 其中包含一个平方根所要求的分支割线. 平方根的符号由这一解析延拓所确定. 在场论中, 除了由“$\mathrm{i}\epsilon$”项所带来的小实部, K_{rs} 实际上是虚的.

用函数(9.A.2)的稳相点来表示方程(9.A.6)是有用的:

$$\bar{\xi}_r=-\textstyle\sum_s K^{-1}_{rs}\,L_s\,, \tag{9.A.7}$$

$$\partial Q(\xi)/\partial\xi_r=0\quad\text{在}\ \xi=\bar{\xi}\,, \tag{9.A.8}$$

这样

$$\mathscr{I}=\left(\mathrm{Det}\left(\frac{K}{2\pi}\right)\right)^{-1/2}\exp\Big\{-Q(\bar{\xi})\Big\}\,. \tag{9.A.9}$$

要记住的结果是: 通过令积分变量等于指数幅角的驻定点, 高斯积分可以被确定到只差一个行列式因子.

接下来, 我们希望用这一结果计算积分

$$I_{r_1\cdots r_{2N}}\equiv\int\left(\prod_r \mathrm{d}\xi_r\right)\xi_{r_1}\xi_{r_2}\cdots\xi_{r_{2N}}\exp\left\{-\tfrac{1}{2}\sum_{rs}K_{rs}\xi_r\xi_s\right\}. \tag{9.A.10}$$

(这类积分中被积函数中包含奇数个ξ-因子的积分显然为零.) 从方程(9.A.1)中 $\exp\big(-\sum_r L_r\xi_r\big)$ 的级数展开, 我们有求和规则

$$\begin{aligned}
&\sum_{N=0}^{\infty}\sum_{r_1r_2\cdots r_{2N}}\frac{1}{(2N!)}I_{r_1r_2\cdots r_{2N}}L_{r_1}L_{r_2}\cdots L_{r_{2N}}\\
&\quad=\int\left(\prod_r \mathrm{d}\xi_r\right)\exp\left\{-\sum_r L_r\xi_r-\frac{1}{2}\sum_{rs}K_{rs}\xi_r\xi_s\right\}\\
&\quad=\left[\mathrm{Det}\left(\frac{K}{2\pi}\right)\right]^{-1/2}\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{rs}L_rL_sK^{-1}_{rs}\right\}\\
&\quad=\left[\mathrm{Det}\left(\frac{K}{2\pi}\right)\right]^{-1/2}\sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!2^N}\left(\sum_{rs}L_rL_sK^{-1}_{rs}\right)^N.
\end{aligned} \tag{9.A.11}$$

比较 $L_{r_1}L_{r_2}\cdots L_{r_{2N}}$ 在两边的系数, 我们看到 $I_{r_1r_2\cdots r_{2N}}$ 必须正比于 K^{-1} 的矩阵元的乘积之和, 对称性要求它采取如下形式

$$I_{r_1r_2\cdots r_{2N}}=c_N\sum_{\substack{\text{pairings}\\ \text{of}\ r_1\cdots r_{2N}}}\prod_{\text{pairs}}(K^{-1})_{\text{paired indices}}\,. \tag{9.A.12}$$

这里的求和是对指标 $r_1 \cdots r_{2N}$ 的所有配对方式求和, 如果两个配对方式的差别仅仅是配对的次序或是配对中指标的次序, 那么这两种配对方式就被认为是相同的. 为了计算常数因子 c_N, 我们注意到在方程(9.A.12)中, 配对求和中项的数目 ν_N 等于指标置换的个数 $(2N)!$ 除以置换每对指标的个数 $N!$ 以及指标对内置换的个数 2^N

$$\nu_N = \frac{(2N)!}{N!2^N} \,. \tag{9.A.13}$$

因此方程(9.A.12)给出

$$\sum_{r_1 r_2 \cdots r_{2N}} L_{r_1} L_{r_2} \cdots L_{r_{2N}} I_{r_1 r_2 \cdots r_{2N}} = \nu_N c_N \left(\sum_{rs} L_r L_s K^{-1}_{rs} \right)^N \tag{9.A.14}$$

将其与方程(9.A.11)比较表明因子 $(2N)!$ 和 $(N!2^N)$ 被 ν_N 抵消, 给我们留下

$$c_N = \left[\mathrm{Det}\left(\frac{K}{2\pi} \right) \right]^{-1/2} . \tag{9.A.15}$$

例如,

$$I_{r_1 r_2} = I_0 (K^{-1})_{r_1 r_2} \,, \tag{9.A.16}$$

$$\begin{aligned} I_{r_1 r_2 r_3 r_4} = I_0 \Big[& (K^{-1})_{r_1 r_2} (K^{-1})_{r_3 r_4} \\ & + (K^{-1})_{r_1 r_3} (K^{-1})_{r_2 r_4} + (K^{-1})_{r_1 r_4} (K^{-1})_{r_2 r_3} \Big] \,, \end{aligned} \tag{9.A.17}$$

以此类推, 其中 I_0 是没有指标的积分

$$\begin{aligned} I_0 &\equiv \int \left(\prod_r \mathrm{d}\xi_r \right) \exp\left\{ -\tfrac{1}{2} \sum_{rs} K_{rs} \xi_r \xi_s \right\} \\ &= \left[\mathrm{Det}\left(\frac{K}{2\pi} \right) \right]^{-1/2} . \end{aligned} \tag{9.A.18}$$

习题

1. 考虑一质量为 m 的非相对论性粒子, 它在势 $V(x) = m\omega^2 x^2/2$ 中沿 x-轴运动. 利用路径积分方法求出该粒子在 t_1 时刻处在 x_1, 而在 t 时刻处在 x 和 $x + \mathrm{d}x$ 之间的概率.

2. 对于由质量 $m \neq 0$ 的单个无自旋粒子构成的态, 求出它在场空间中的波函数. 利用这个结果推导吸收或发射这种粒子的 Feynman 规则.

3. 在质量 $m \neq 0$ 的中性矢量场的理论中, 求出真空在场空间中的波函数. 利用这个结果推导 $\mathrm{i}\epsilon$ 项在这个场的传播子中的形式.

4. 自旋 3/2 的自由 Rarita-Schwinger 场 ψ^μ 的拉格朗日密度是

$$\mathscr{L} = -\bar{\psi}^\mu (\gamma^\nu \partial_\nu + m) \psi_\mu - \tfrac{1}{3} \bar{\psi}^\mu (\gamma_\mu \partial_\nu + \gamma_\nu \partial_\mu) \psi^\nu + \tfrac{1}{3} \bar{\psi}^\mu \gamma_\mu (\gamma^\sigma \partial_\sigma - m) \gamma^\nu \psi_\nu \,.$$

用路径积分方法求出这个场的传播子.

参考文献

[1] R. P. Feynman, *The Principle of Least Action in Quantum Mechanics* (Princeton University, 1942; University Microfilms Publication No. 2948, Ann Arbor). 另见R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals* (McGraw-Hill, New York, 1965). 普遍的可以参看J. Glimm and A. Jaffe, *Quantum Physics-A Functional Integral Point of View*, 2nd edn (Springer-Verlag, New York, 1987).

[2] P. A. M. Dirac, *Phys. Zeits. Sowjetunion* **3**, 62 (1933).

[3] R. P. Feynman, *Rev. Mod. Phys.* **20**, 367 (1948); *Phys. Rev.* **74**, 939, 1430 (1948); **76**, 749, 769 (1949); **80**, 440 (1950).

[4] L. D. Faddeev and V. N. Popov, *Phys. Lett*. **B25**, 29 (1967). 另见R. P. Feynman, *Acta Phys. Pol.* **24**, 697 (1963); S. Mandelstam, *Phys. Rev.* **175**, 1580, 1604 (1968).

[5] B. De Witt, *Phys. Rev. Lett.* **12**, 742 (1964).

[6] G. 't Hooft, *Nucl. Phys.* **B35**, 167 (1971).

[7] I. S. Gerstein, R. Jackiw, B. W. Lee, and S. Weinberg, *Phys. Rev.* **D3**, 2486 (1971).

[8] L. D. Faddeev, *Teor. Mat. Fizika*, **1**, 3 (1969); 英译 *Theor. Math. Phys.* **1**, 1 (1970).

[8a] J. Schwinger, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **44**, 956 (1958).

[8b] K. Osterwalder and R. Schrader, *Phys. Rev. Lett.* **29**, 1423 (1972); *Commun. Math. Phys.* **31**, 83 (1973); *Commun. Math. Phys.* **42**, 281 (1975). Osterwalder-Schrader公理要求光滑、欧几里得协变, "反射阳性(reflection positivity)," 置换对称性, 以及集团分解.

[9] 与J. Polchinski的讨论极大地启发了本节的内容.

[10] F. A. Berezin, *The Method of Second Quantization* (Academic Press, New York, 1966).

[11] M. G. G. Laidlaw and C. M. De Witt, *Phys. Rev.* D **3**, 1375 (1970).

[12] J. M. Leinaas and J. Myrheim, *Nuovo Cimento* **37 B**, 1 (1977).

[13] Y. Ohnuki and S. Kamefuchi, *Phys. Rev.* **170**, 1279 (1968); *Ann. Phys.* **57**, 337 (1969); K. Drühl, R. Haag, and J. E. Roberts, *Commun. Math. Phys.* **18**, 204 (1970).

[14] 辫子群由E. Artin引入. 参看 *The Collected Papers of E. Artin*, S. Lang and J. E. Tate编辑(Addison-Wesley, Reading, MA, 1965).

[15] F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 957 (1982); K. Fredenhagen, M. R. Gaberdiel, and S. M. Rüger, Cambridge preprint DAMTP-94-90 (1994). 另见J. M. Leinass and J. Myrheim, 文献[12].

第 10 章　非微扰方法

我们现在开始研究物理过程中的高阶贡献, 这些贡献对应包含一个或多个圈的 Feynman 图. 在这个研究中, 如果有一个方法可以推导出适用于微扰论所有阶(并且在某些情况下超出微扰论)的结果, 那将是非常有用的. 为此, 本章中, 我们将在 Heisenberg 绘景中探讨相互作用场的场方程和对易关系. 联系 Heisenberg 绘景与微扰论 Feynman 图之间的关键是 6.4 节中证明的定理: 在有对应 $o_a(x)$, $o_b(y)$ 等算符的额外顶点插入的过程 $\alpha \to \beta$ 中, 所有 Feynman 图之和由相应的 Heisenberg 绘景算符的编时乘积的矩阵元给出:

$$\Big(\Psi_\beta{}^-, T\Big\{-\mathrm{i}O_a(x),\, -\mathrm{i}O_b(y)\cdots\Big\}\Psi_\alpha{}^+\Big)\,.$$

作为一个特殊情况, 当 $O_a(x), O_b(y)$ 等算符是基本粒子场时, 与这一矩阵元对应的所有 Feynman 图中, 在壳的入线对应态 α, 在壳的出线对应态 β, 离壳的线(包括传播子)对应算符 $O_a(x)$, $O_b(y)$等. 以这种方式得到一些非微扰结果后, 我们就可以着手处理辐射修正的微扰计算了.

10.1　对称性

前面引用的定理的一个显然但重要的应用是将对称性原理的应用从 S-矩阵元扩展至部分 Feynman 图, 前者所有外线的 4-动量都在质量壳上, 后者中有一些或者所有外线是离壳的.

例如, 考虑时空平移对称性. 这一对称性意味着存在厄米 4-矢算符 P^μ, 它有如下性质: 对于场算符和其正则共轭的任意定域函数 $O(x)$,

$$\Big[P_\mu, O(x)\Big] = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x^\mu}O(x)\,. \tag{10.1.1}$$

(见方程(7.3.28)与(7.3.29).) 另外, 态 α 和 β 通常被选为 4-动量的本征态:

$$P^\mu\Psi_\alpha{}^+ = p_\alpha^\mu\Psi_\alpha{}^+\,, \qquad P^\mu\Psi_\beta{}^- = p_\beta^\mu\Psi_\beta{}^-\,. \tag{10.1.2}$$

由此得出, 对于场和(或)场导数的任何一组定域函数 $O_a(x)$, $O_b(x)$ 等,

$$\begin{aligned}
&(p_{\beta\mu} - p_{\alpha\mu})\left(\Psi_\beta{}^-\,, T\Big\{O_a(x_1), O_b(x_2), \cdots\Big\}\Psi_\alpha{}^+\right)\\
&\quad = \left(\Psi_\beta{}^-, \Big[P_\mu, T\Big\{O_a(x_1), O_b(x_2), \cdots\Big\}\Big]\,\Psi_\alpha{}^+\right)\\
&= \mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial x_1^\mu} + \frac{\partial}{\partial x_2^\mu} + \cdots\right)\left(\Psi_\beta{}^-, T\Big\{O_a(x_1), O_b(x_2), \cdots\Big\}\Psi_\alpha{}^+\right)\,.
\end{aligned} \tag{10.1.3}$$

它有如下的解

$$\begin{aligned}
&\left(\Psi_\beta{}^-,\, T\Big\{O_a(x_1), O_b(x_2), \cdots\Big\}\Psi_\alpha{}^+\right)\\
&= \exp\Big(\mathrm{i}(p_\alpha - p_\beta)\cdot x\Big)F_{ab\ldots}(x_1 - x_2, \cdots)\,,
\end{aligned} \tag{10.1.4}$$

其中 x 是时空坐标的任意一种加权和

$$x^\mu = c_1 x_1^\mu + c_2 x_2^\mu + \cdots , \qquad c_1 + c_2 + \cdots = 1 \tag{10.1.5}$$

而 F 只依赖于 x 之间的差. (特别地, 真空期望值仅依赖于坐标差.) 通过分别对 x^μ 和坐标差积分, 我们可以对方程(10.1.4)做 Fourier 变换, 结果是

$$\begin{aligned} &\int \mathrm{d}^4x_1\, \mathrm{d}^4x_2 \cdots \Big(\Psi_\beta{}^-,\, T\Big\{O_a(x_1), O_b(x_2), \cdots\Big\}\Psi_\alpha{}^+\Big) \\ &\times \exp(-\mathrm{i}k_1\cdot x_1 - \mathrm{i}k_2\cdot x_2 - \cdots) \propto \delta^4(p_\alpha - p_\beta - k_1 - k_2 - \cdots) . \end{aligned} \tag{10.1.6}$$

我们在 6.4 节看到, 编时乘积的矩阵元是将通常的坐标空间 Feynman 规则应用在所有图之和上而得到的, 其中入粒子对应 α 中的粒子, 出粒子对应 β 中的粒子, 而外线就终结在 $x_1, x_2, \cdots$ 处的顶点上. 相应地, Fourier 变换(10.1.6)通过对同一个 Feynman 图之和施加动量空间 Feynman 规则获得的, 其中离壳的外线携带 4-动量 $k_1, k_2, \cdots$ 进入图. 那么方程(10.1.6)正是表明了 Feynman 图之和保持 4-动量守恒. 这一结果在微扰论中是显然的, 这是因为在微扰论中 4-动量在每个顶点都守恒, 所以不通过微扰论也看到同样的结果是不奇怪的.

通过进一步的努力, 我们可以使用 Heisenberg 绘景的场以及“入”态和“出”态的 Lorentz 变换性质证明: 对给定的一组在壳线和离壳线, 带有这些线的所有图之和与最低阶项满足相同的 Lorentz 变换条件.

类似的讨论也适用于内部量子数的守恒, 例如电荷. 我们在 7.3 节证明过, 消灭一个电荷 q_a (或产生一个电荷 $-q_a$)的场或其它算符 $O_a(x)$ 将满足

$$[Q, O_a(x)] = -q_a O_a(x) ,$$

这在 Heisenberg-绘景和相互作用绘景中是类似的. 另外, 如果自由粒子态 α 和 β 带有电荷 q_α 和 q_β, 那么相应的“入”态和“出”态也是如此. 于是我们有

$$\begin{aligned} &(q_\beta - q_\alpha)\Big(\Psi_\beta{}^-,\, T\Big\{O_a(x), O_b(y), \cdots\Big\}\Psi_\alpha{}^+\Big) \\ &\quad = \Big(\Psi_\beta{}^-,\, \Big[Q, T\Big\{O_a(x), O_b(y), \cdots\Big\}\Big]\,\Psi_\alpha{}^+\Big) \\ &\quad = -(q_a + q_b + \cdots)\Big(\Psi_\beta{}^-, T\Big\{O_a(x), O_b(y), \cdots\Big\}\Psi_\alpha{}^+\Big) . \end{aligned}$$

因此除非电荷守恒

$$q_\beta = q_\alpha - q_a - q_b - \cdots , \tag{10.1.7}$$

否则振幅$\Big(\Psi_\beta{}^-, T\Big\{O_a(x), O_b(y), \cdots\Big\}\Psi_\alpha{}^+\Big)$为零.

一个不太平庸的例子由荷共轭不变性的对称性给出. 正如我们在第 5 章所看到的, 存在交换电子算符和正电子算符的算符 C

$$\begin{aligned} \mathsf{C}\, a(\mathbf{p},\sigma,e^-)\mathsf{C}^{-1} &= \xi^*\, a(\mathbf{p},\sigma,e^+) , \\ \mathsf{C}\, a(\mathbf{p},\sigma,e^+)\mathsf{C}^{-1} &= \xi\, a(\mathbf{p},\sigma,e^-) , \end{aligned}$$

其中 ξ 是相位因子. 对自由电子场 $\psi(x)$, 它给出

$$\mathsf{C}\psi(x)\mathsf{C}^{-1} = -\xi^*\beta\mathscr{C}\psi(x)^* ,$$



图 10.1 光子被电磁场散射的最低阶图. 这里直线代表虚电子; 波浪线代表实光子和虚光子; 而双线代表像原子核那样的重粒子, 它们在这里充当电磁场的源. 正如电荷共轭不变性所要求的, 这两个图的贡献抵消.

其中 $\beta\mathscr{C}$ 是 4×4 矩阵, 它(对于我们采用的 γ_5 为对角矩阵的 Dirac 矩阵表示而言)形如

$$\beta\mathscr{C}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}.$$

应用到旋量电动力学中的自由粒子电流, 给出

$$\mathsf{C}(\bar\psi\gamma^\mu\psi)\mathsf{C}^{-1}=-\bar\psi\mathscr{C}\gamma^{\mu\mathrm{T}}\mathscr{C}\psi=-\bar\psi\gamma^\mu\psi\,.$$

如果要使 C 在电动力学中仍然保持守恒, 那么它也必须被定义成与自由光子场反对易

$$\mathsf{C}(a^\mu)\mathsf{C}^{-1}=-a^\mu\,.$$

在类似电动力学的理论中, 即 C 与相互作用以及 H_0 对易的理论, 它也与 Heisenberg 绘景与相互作用绘景之间的相似变换 $\Omega(t)$ 对易, 因而它与相互作用场的电流反对易

$$\mathsf{C}(\bar\Psi\gamma^\mu\Psi)\mathsf{C}^{-1}=-\bar\Psi\gamma^\mu\Psi \tag{10.1.8}$$

也与 Heisenberg 绘景中的电磁场反对易

$$\mathsf{C}(A^\mu)\mathsf{C}^{-1}=-A^\mu\,. \tag{10.1.9}$$

于是由此得出, 任何奇数个电磁流和(或)电磁场的编时乘积的真空期望值为零. 因此具有奇数个(在壳或离壳)光子外线且没有其它外线的所有 Feynman 图之和为零.

这一结果称为 *Furry* (*法雷*)定理.[1] 它可以用微扰论的方式证明, 只需注意到由 ℓ 个电子圈组成的图, 其中每个电子圈连接 n_ℓ 个光子线, 这个图的所有内光子线的数目 I 与外光子线的数目 E 通过类似方程(6.3.11)的关系相联系:

$$2I+E=\sum_\ell n_\ell\,.$$

因此, 如果 E 为奇数, 那么至少有一个圈要与奇数个光子线相连. 对于所有这样的圈, 如果两个图中圈的电子流箭头方向相反, 那么它们就会抵消. 因此相比平移不变性或 Lorentz 不变性, Furry 定理是对称性原理给出的一个不那么平庸的结果; 它对于单个图是不正确的, 而对于某类图的和是正确的. 图 10.1 展示了 Furry 定理在历史上最重要的一个应用, 它被用来证明光子在外电磁场上的散射没有外场的第一阶(或任何奇数阶)的贡献.

10.2 定极学

在本章所描述的非微扰方法中, 一个最重要的应用就是将 Feynman 振幅的极点结构解释成外线所携带动量的函数. 一个物理过程的 S-矩阵经常能够很好地近似成一个单极点的贡献. 另外, 对该极点结构的理解将在后面帮助我们处理粒子传播子的辐射修正.

考察动量空间振幅

$$\int \mathrm{d}^4x_1 \cdots \mathrm{d}^4x_n \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_1\cdot x_1} \cdots \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_n\cdot x_n} \left\langle T\Big\{A_1(x_1)\cdots A_n(x_n)\Big\}\right\rangle_0 \equiv G(q_1\cdots q_n)\,. \tag{10.2.1}$$

这些 A 是任意 Lorentz 型 Heisenberg 绘景中的算符, 而 $\langle\cdots\rangle_0$ 表示在真正真空 $\Psi_0{}^+ = \Psi_0{}^- \equiv \Psi_0$ 中的期望值. 就像 6.4 节中所讨论的, 如果 $A_1,\cdots A_n$ 是出现在拉格朗日量中的普通场, 那么(10.2.1)就是用普通 Feynman 规则计算出的各项的和, 其中 Feynman 图的所有外线对应场 $A_1,\cdots A_n$ 并携带离壳 4-动量 $q_1\cdots q_n$ 进入图. 然而, 我们并不会仅限于这种情况; A_i 还可以是场或场导数的任意定域函数.

取外线的各种子集所携带的总 4-动量的不变平方, 我们感兴趣的是 G 在这些不变平方的特定值处的极点. 更明确些, 我们考虑 G 是 q^2 的函数的情况, 其中

$$q \equiv q_1 + \cdots + q_r = -q_{r+1} - \cdots - q_n \tag{10.2.2}$$

其中 $1 \le r \le n-1$. 我们将证明 G 在 $q^2 = -m^2$ 处有极点, 其中 m 是某个单粒子态的质量, 这个单粒子态与态 $A_1^\dagger\cdots A_r^\dagger\Psi_0$ 和态 $A_{r+1}\cdots A_n\Psi_0$ 的矩阵元不为零, 并且该极点的留数是

$$G \to \frac{-2\mathrm{i}\sqrt{\mathbf{q}^2+m^2}}{q^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon}(2\pi)^7\delta^4(q_1+\cdots+q_n) \times \sum_\sigma M_{0|\mathbf{q},\sigma}(q_2\cdots q_r)M_{\mathbf{q},\sigma|0}(q_{r+2}\cdots q_n) \tag{10.2.3}$$

其中 M 的定义是*

$$\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_r\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_1\cdot x_1}\cdots\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_r\cdot x_r}\left(\Psi_0, T\Big\{A_1(x_1)\cdots A_r(x_r)\Big\}\Psi_{\mathbf{p},\sigma}\right) = (2\pi)^4\,\delta^4(q_1+\cdots+q_r-p)M_{0|\mathbf{p},\sigma}(q_2\cdots q_r)\,, \tag{10.2.4}$$

$$\int \mathrm{d}^4x_{r+1}\cdots\mathrm{d}^4x_n\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_{r+1}\cdot x_{r+1}}\cdots\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_n\cdot x_n} \times\left(\Psi_{\mathbf{p},\sigma}, T\Big\{A_{r+1}(x_{r+1})\cdots A_n(x_n)\Big\}\Psi_0\right) = (2\pi)^4\delta^4(q_{r+1}+\cdots+q_n+p)M_{\mathbf{p},\sigma|0}(q_{r+2}\cdots q_n) \tag{10.2.5}$$

(其中 $p^0 \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$), 求和是对质量为 m 的粒子的所有自旋(或其它)态求和.

*回忆, 在没有随时间变化的外场时, "入"单粒子态和"出"单粒子态之间没有区别, 从而 $\Psi_{\mathbf{p},\sigma}{}^+ = \Psi_{\mathbf{p},\sigma}{}^- = \Psi_{\mathbf{p},\sigma}$.

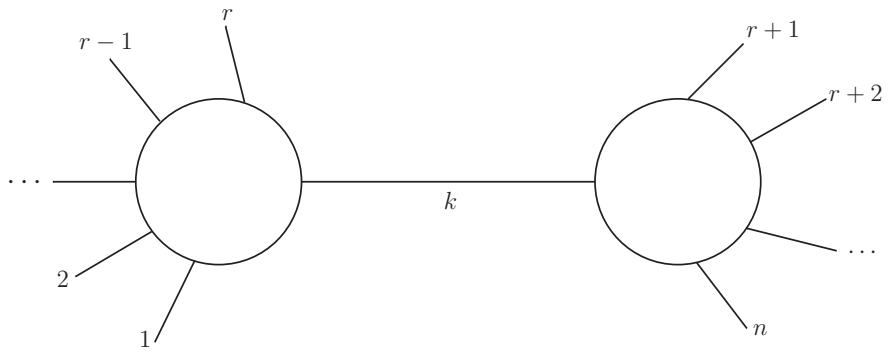


图 10.2 极点结构为(10.2.6)的 Feynman 图. 这里携带动量 k 的线代表相应的场出现在拉格朗日量中的基本粒子.

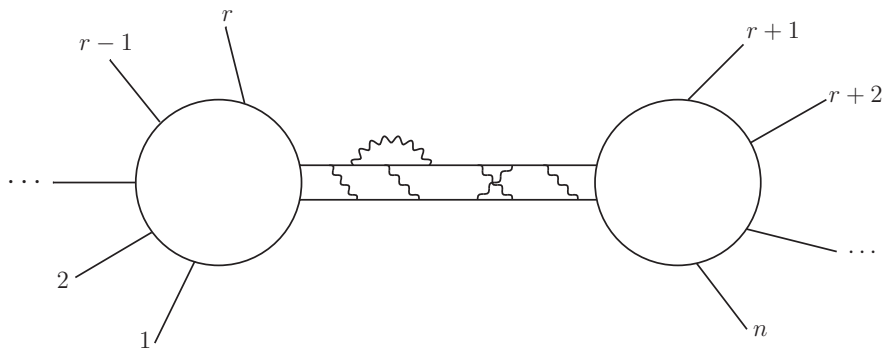


图 10.3 一类 Feynman 图中的一个, 这类 Feynman 图之和具有极点结构(10.2.6), 这里的极点源于复合粒子, 即两个基本粒子的束缚态. 直线表示基本粒子, 它们通过交换波浪线所代表的粒子进行相互作用.

在进行证明之前, 如果我们将(10.2.3)写成稍微冗长的形式

$$
\begin{aligned}
G(q_1 \cdots q_n) \to & \sum_{\sigma} \int \mathrm{d}^4 k \\
& \times \left[(2\pi)^4 \, \delta^4(q_1 + \cdots + q_r - k) \, (2\pi)^{3/2} \left(2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \right)^{1/2} M_{0|\mathbf{k},\sigma}(q_2 \cdots q_r) \right] \\
& \times \left[\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4} \, \frac{1}{k^2 + m^2 - \mathrm{i}\epsilon} \right] \\
& \times \Bigg[(2\pi)^4 \, \delta^4(k + q_{r+1} + \cdots + q_n) \, (2\pi)^{3/2} \\
& \qquad \times \left(2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \right)^{1/2} M_{\mathbf{p},\sigma|0}(q_{r+2} \cdots q_n) \Bigg] \, ,
\end{aligned}
\tag{10.2.6}
$$

这对我们阐明它的意义将是有帮助的. 这正是我们对质量为 m 的粒子内线连接前 r 个外线和后 $n-r$ 个外线的 Feynman 图所预期的.[**] 然而, 质量为 m 的粒子并不非得对应出现在该理论拉

[**] 参看图10.2. 因子 $(2\pi)^{3/2}\left[2\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}\right]^{1/2}$ 正好用来移除 $M_{0|\mathbf{k},\sigma}$ 和 $M_{\mathbf{k},\sigma|0}$ 中质量为 m 的外线所附带的运动学因子. 另外, 对这两个矩阵元中系数函数因子乘积中的 σ 求和给出了图 10.2 中内线对应的传播子的分子.

格朗日量中的场. 场在拉格朗日量中出现的是所谓的基本粒子, 而即使这个粒子是基本粒子形成的束缚态, 方程(10.2.3)和(10.2.6)也是成立的. 在这种情况下, 极点不是从类似图 10.2 这样的单个 Feynman 图中产生, 而是从无限个图的求和中产生的, 图10.3中展示的就是这种求和中的一个图. 这是本章的方法首次引导我们得到了无法从微扰论的每一阶性质中导出的结果.

现在开始证明. 方程(10.2.1)中的时间 $x_1^0 \cdots x_n^0$ 有 $n!$ 种可能的排序, 在这 $n!$ 种可能的排序中, 前 r 个 x_i^0 均大于后 $n-r$ 个的情况共有 $n!/r!(n-r)!$ 种可能的排序. 将方程(10.2.1)中这部分积分的贡献分离出来, 我们有

$$\begin{aligned} G(q_1 \cdots q_n) = & \int \mathrm{d}^4 x_1 \cdots \mathrm{d}^4 x_n \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_1 \cdot x_1} \cdots \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_n \cdot x_n} \\ & \times \theta\Big(\min[x_1^0 \cdots x_r^0] - \max[x_{r+1}^0 \cdots x_n^0]\Big) \\ & \times \Big(\Psi_0, T\Big\{A_1(x_1) \cdots A_r(x_r)\Big\} T\Big\{A_{r+1}(x_{r+1}) \cdots A_n(x_n)\Big\}\Psi_0\Big) \\ & + \mathrm{OT}\,, \end{aligned} \tag{10.2.7}$$

其中 “OT”(other term)代表其它时间排序给出的其它各项. 我们可以通过在编时乘积之间插入中间态的完备集来计算这里的矩阵元. 在这些中间态中, 有些有可能是确定种类的质量为 m 的单粒子态 $\Psi_{\mathbf{p},\sigma}$. 进一步分离出这些单粒子中间态的贡献, 我们有

$$\begin{aligned} & G(q_1 \cdots q_n) = \int \mathrm{d}^4 x_1 \cdots \mathrm{d}^4 x_n \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_1 \cdot x_1} \cdots \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_n \cdot x_n} \\ & \theta\Big(\min[x_1^0 \cdots x_r^0] - \max[x_{r+1}^0 \cdots x_n^0]\Big) \sum_\sigma \int \mathrm{d}^3 p \\ & \Big(\Psi_0, T\Big\{A_1(x_1) \cdots A_r(x_r)\Big\}\Psi_{\mathbf{p},\sigma}\Big) \Big(\Psi_{\mathbf{p},\sigma}, T\Big\{A_{r+1}(x_{r+1}) \cdots A_n(x_n)\Big\}\Psi_0\Big) \\ & \qquad + \mathrm{OT}\,, \end{aligned} \tag{10.2.8}$$

现在“OT”代表的其它项不仅来自于其它时间排序, 还来自于其它的中间态. 方便起见, 平移一下积分变量使得

$$\begin{aligned} & x_i = x_1 + y_i\,, \qquad && i = 2, 3, \cdots r\,, \\ & x_i = x_{r+1} + y_i\,, \qquad && i = r+2, \cdots n\,, \end{aligned}$$

然后利用上一节的结果写出

$$\begin{aligned} & \Big(\Psi_0, T\Big\{A_1(x_1) \cdots A_r(x_r)\Big\}\Psi_{\mathbf{p},\sigma}\Big) \\ & \quad = \mathrm{e}^{\mathrm{i}p \cdot x_1} \Big(\Psi_0, T\Big\{A_1(0) A_2(y_2) \cdots A_r(y_r)\Big\}\Psi_{\mathbf{p},\sigma}\Big)\,, \end{aligned} \tag{10.2.9}$$

$$\begin{aligned} & \Big(\Psi_{\mathbf{p},\sigma}, T\Big\{A_{r+1}(x_{r+1}) \cdots A_n(x_n)\Big\}\Psi_0\Big) \\ & \quad = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p \cdot x_{r+1}} \Big(\Psi_{\mathbf{p},\sigma}, T\Big\{A_{r+1}(0) \cdots A_n(y_n)\Big\}\Psi_0\Big)\,. \end{aligned} \tag{10.2.10}$$

另外, θ-函数中的变量会变成

$$\begin{aligned} & \min[x_1^0 \cdots x_r^0] - \max[x_{r+1}^0 \cdots x_n^0] \\ & \quad = x_1^0 - x_{r+1}^0 + \min[0\; y_2^0 \cdots y_r^0] - \max[0\; y_{r+1}^0 \cdots y_n^0]\,. \end{aligned}$$

同时代入阶跃函数的 Fourier 表示(6.2.15)

$$\theta(\tau) = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}}{\omega + \mathrm{i}\epsilon} \,.$$

对 x_1 和 x_{r+1} 的积分恰好给出 δ-函数

$$\begin{aligned} G(q_1 \cdots q_n) = & \int \mathrm{d}^4 y_2 \cdots \mathrm{d}^4 y_r \, \mathrm{d}^4 y_{r+2} \cdots \mathrm{d}^4 y_n \\ & \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_2 \cdot y_2} \cdots \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_r \cdot y_r} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_{r+2} \cdot y_{r+2}} \cdots \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_n \cdot y_n} \\ & \times -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega + \mathrm{i}\epsilon} \exp\Big(-\mathrm{i}\omega \Big[\min[0\, y_2^0 \cdots y_r^0] - \max[0\, y_{r+1}^0 \cdots y_n^0]\Big]\Big) \\ & \times \sum_\sigma \int \mathrm{d}^3 p \, \Big(\Psi_0,\, T\Big\{A_1(0) \cdots A_r(y_r)\Big\} \Psi_{\mathbf{p},\sigma}\Big) \\ & \qquad \times \Big(\Psi_{\mathbf{p},\sigma},\, T\Big\{A_{r+1}(0) \cdots A_n(y_n)\Big\} \Psi_0\Big) \\ & \times (2\pi)^4 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}_1 - \cdots - \mathbf{q}_r)\, \delta\left(\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + \omega - q_1^0 - \cdots - q_r^0\right) \\ & \times (2\pi)^4 \delta^3(\mathbf{q}_{r+1} + \cdots + \mathbf{q}_n + \mathbf{p})\, \delta\left(q_{r+1}^0 + \cdots + q_n^0 + \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + \omega\right) \\ & + \mathrm{OT} \,. \end{aligned} \tag{10.2.11}$$

我们在这里仅对那些由于分母 $\omega + \mathrm{i}\epsilon$ 为零而产生的极点感兴趣, 所以对于我们现在的目的, 我们可以令因子 $\exp(-\mathrm{i}\omega[\min - \max])$ 等于 1. 对 $\mathbf{p}$ 和 ω 的积分现在是平庸的, 并给出了极点

$$\begin{aligned} G(q_1 \cdots q_n) \to & \, \mathrm{i}(2\pi)^7\, \delta^4(q_1 + \cdots + q_n) \left[q^0 - \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2} + \mathrm{i}\epsilon\right]^{-1} \\ & \times \sum_\sigma M_{0|\mathbf{q},\sigma}(q_2 \cdots q_r)\, M_{\mathbf{q},\sigma|0}(q_{r+2} \cdots q_n) + \cdots \end{aligned} \tag{10.2.12}$$

其中现在有

$$q \equiv q_1 + \cdots + q_r = -q_{r+1} - \cdots - q_n \,,$$

$$\begin{aligned} M_{0|\mathbf{q},\sigma}(q_2 \cdots q_r) \equiv & \int \mathrm{d}^4 y_2 \cdots \mathrm{d}^4 y_r \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_2 \cdot y_2} \cdots \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_r \cdot y_r} \\ & \times \Big(\Psi_0,\, T\Big\{A_1(0) A_2(y_2) \cdots A_r(y_r)\Big\} \Psi_{\mathbf{q},\sigma}\Big) \,, \end{aligned} \tag{10.2.13}$$

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{q},\sigma|0}(q_{r+2} \cdots q_n) \equiv & \int \mathrm{d}^4 y_{r+2} \cdots \mathrm{d}^4 y_n \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_{r+2} \cdot y_{r+2}} \cdots \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_n \cdot y_n} \\ & \times \Big(\Psi_{\mathbf{q},\sigma},\, T\Big\{A_{r+1}(0) A_{r+2}(y_{r+2}) \cdots A_n(y_n)\Big\} \Psi_0\Big) \,, \end{aligned} \tag{10.2.14}$$

方程(10.2.12)中最后的"$\cdots$"代表的是那些没有这一特殊极点的项. (源于其它单粒子态的"其它项"产生了 q 在其它位置的极点, 而那些源于多粒子态的"其它项"给出了 q 的分支点, 而那些源于其它编时乘积的"其它项"产生了其它变量中的极点与分支割线.) 利用方程(10.2.9)和(10.2.10), 很容易看到这些 M 与方程(10.2.4)和(10.2.5)定义的 M 相同的. 另外, 在极点附近, 我们可以有

$$\frac{1}{q^0 - \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2} + \mathrm{i}\epsilon} = \frac{-q^0 - \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2} + \mathrm{i}\epsilon}{-(q^0)^2 + (\sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2} - \mathrm{i}\epsilon)^2} \to \frac{-2\sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}}{q^2 + m^2 - \mathrm{i}\epsilon} \,.$$

(我们通过正因子 $2\sqrt{\mathbf{q}^2+m^2}$ 再次重定义了 ϵ, 由于 ϵ 表示任意正无限小, 这样做是允许的.) 因此方程(10.2.12)与所期望的结果(10.2.3)相同.

这一结果在核力理论中有一个经典应用. 令 $\Phi_a(x)$ 是任意的实场或者场的组合(例如, 正比于夸克-反夸克双线性型 $\bar{q}\gamma_5\tau_a q$), 且它在同位旋为 a 的单 π 介子态与真空之间的矩阵元不为零, 对这个矩阵元归一化使得

$$\langle \mathrm{VAC}|\Phi_a(0)|\pi_b,\mathbf{p}\rangle = (2\pi)^{-3/2}(2p^0)^{-1/2}\delta_{ab}\,. \tag{10.2.15}$$

于是 Φ_a 在 4-动量分别为 p,p' 的单核子态之间的矩阵元会在 $(p-p')^2\to -m_\pi^2$ 处有一极点, 而同位旋不变性与 Lorentz 不变性(包含空间反演不变性)会要求这样的矩阵元必须取如下形式[†]

$$\langle N',\sigma',\mathbf{p}'|\Phi_a(0)|N,\sigma,\mathbf{p}\rangle \to \mathrm{i}(2\pi)^{-3}G_\pi \times \frac{\left(\bar{u}'\,\gamma_5\tau_a\,u\right)}{(p-p')^2+m_\pi^2}\,, \tag{10.2.16}$$

其中 u 和 u' 是初态核子和末态核子的旋量系数函数, 这些系数函数中包括同位旋空间中的核子波函数, 而 $a=1,2,3$ 的 τ_a 是 2×2 的 Pauli 同位旋矩阵. 常数 G_π 被称为 π 介子-核子耦合系数. 这个极点实际上不在矩阵元(10.2.6)的物理区域中, 即 $(p-p')^2\geq 0$ 的区域, 但可以通过对该矩阵元做解析延拓到达它, 例如, 考察离壳矩阵元

$$\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4x'\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'\cdot x'}\langle T\{\Phi_a(0)\,\bar{N}(x)\,N'(x')\}\rangle_{\mathrm{VAC}}\,,$$

其中 N 和 N' 是场算符或场算符乘积的合适分量, 并且它们在单核子态与真空态之间的矩阵元不为零. 那么本节前面所证明的定理表明, 在初态 4-动量为 p_1,p_2, 末态 4-动量为 p_1',p_2' 的两个核子的散射中, 交换一个 π 介子会在 $(p_1-p_1')^2=(p_2-p_2')^2\to -m_\pi^2$ 处产生一个极点:

$$\begin{aligned} S_{N_1'N_2',N_1N_2} &\to -\mathrm{i}(2\pi)^4\delta^4(p_1'+p_2'-p_1-p_2)\frac{G_\pi^2}{(p_1-p_1')^2+m_\pi^2} \\ &\times(2\pi)^{-3}\Big(\bar{u}_1'\,\gamma_5\tau_a\,u_1\Big)\times(2\pi)^{-3}\Big(\bar{u}_2'\,\gamma_5\tau_a\,u_2\Big) \end{aligned} \tag{10.2.17}$$

(在这类公式中, 得到右边的相位以及数值因子的最简单方式是利用 Feynman 图; 我们的定理仅是说, 如果拉格朗日量包含一个基本 π 介子, 那么上述的极点结构与这个场论中会发现的极点结构相同.) 这个 π 介子极点实际上依旧不处在在壳核子散射的物理区域中, 即 $(p_1-p_1')^2\geq 0$的区域, 但它可以通过对 S-矩阵元的解析延拓达到, 例如, 通过考察离壳矩阵元

$$\begin{aligned} &\int \mathrm{d}^4x_1\,\mathrm{d}^4x_2\,\mathrm{d}^4x_1'\,\mathrm{d}^4x_2'\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1\cdot x_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2\cdot x_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1'\cdot x_1'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_2'\cdot x_2'} \\ &\times\langle T\{\bar{N}_1(x_1),\bar{N}_2(x_2),N_1'(x_1'),N_2'(x_2')\}\rangle_{\mathrm{VAC}}\,. \end{aligned}$$

尽管这一极点不在核子-核子散射的物理区域中, 但 π 介子的质量足够小使得极点相当接近物理区域, 并且在某些环境下还可能会主导散射振幅, 例如分波展开中的大 ℓ 情形.

[†]Lorentz 不变性与同位旋不变性要求这个矩阵取 $(\bar{u}'\,\Gamma\,\tau_a\,u)$ 的形式, 其中 Γ 是一个 4×4 矩阵, 它使双线性型 $(\bar{\psi}'\,\Gamma\,\psi)$按照赝标量变换. 同其它任何 4×4 矩阵一样, Γ 可以展开成正比于 Dirac 矩阵 $1,\gamma_\mu,[\gamma_\mu,\gamma_\nu],\gamma_5\gamma_\mu$和 γ_5 的项的和. 系数必须分别是赝标量, 赝矢量, 赝张量, 矢量以及标量. 用两个动量 p 和 p' 是不可能构造出赝标量或赝矢量的; 它们仅能构造出一个赝张量, 正比于 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\rho p'_\sigma$; 两个独立的矢量, 正比于 p_μ 或 p'_μ; 以及一个正比于 1 的标量, 在每种情况中, 比例因子依赖唯一的独立标量变量 $(p-p')^2$. 通过利用 u 和 u' 在动量空间的 Dirac 方程, 很容易看到 Γ 中的张量以及赝矢量矩阵给出的贡献正比于 γ_5.

如果在坐标空间进行解释, 这种处在 $(p_1-p_1')^2=(p_2-p_2')^2\to -m_\pi^2$ 处的极点就意味着力程为 $1/m_\pi$ 的力. 例如, 在 Yukawa 最初的核力理论[2]中, 交换介子(假定是标量而非赝标量)产生了形如 $\exp(-m_\pi r)/4\pi r$ 的定域势, 它在一阶 Born 近似下给出的非相对论核子散射的 S-矩阵元正比于 Fourier 变换:

$$\begin{aligned}&\int \mathrm{d}^3x_1\,\mathrm{d}^3x_2\,\mathrm{d}^3x_1'\,\mathrm{d}^3x_2'\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{p}_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{x}_2\cdot\mathbf{p}_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{x}_1'\cdot\mathbf{p}_1'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{x}_2'\cdot\mathbf{p}_2'}\\&\times\frac{\exp\Big(-m_\pi|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|\Big)}{4\pi|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|}\delta^3(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_1')\delta^3(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_2')\\&=-(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1'-\mathbf{p}_2')\frac{1}{(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_1')^2+m_\pi^2}\,.\end{aligned}$$

因子 $1/[(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_1')^2+m_\pi^2]$ 正是(10.2.17)中传播子 $1/[(p_1-p_1')^2+m_\pi^2]$ 的非相对论极限. (在(10.2.17)中, 能量转移 $p_1^0-p_1'^0$ 在 $|\mathbf{p}_1|\ll m_N$ 且 $|\mathbf{p}_1'|\ll m_N$ 时等于 $[\mathbf{p}_1^2-\mathbf{p}_1'^2]/2m_N$, 它与动量转移的大小 $|\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_1'|$ 相比是可以忽略的.) 当 Yukawa 理论第一次提出时, 大家就普遍认为这种动量相关性源于理论中出现了介子场. 但直到 20 世纪 50 年代才普遍理解了在 $(p_1-p_1')^2\to-m_\pi^2$ 处有极点源于存在 π 介子这样一个粒子, 而这与它是否是一个基本粒子, 即它本身的场是否出现在拉格朗日量中无关.

10.3 场重整化和质量重整化

我们现在将用上节结果的一个特殊情况来阐明一般过程中内线和外线的辐射修正如何进行处理.

我们在这里所考虑的特殊情况是单个外线的 4-动量趋近质量壳的情形. (按照上一节的记法, 这对应取 $r=1$.) 我们将考虑函数

$$\begin{aligned}G_\ell(q_1q_2\cdots)=&\int \mathrm{d}^4x_1\,\mathrm{d}^4x_2\cdots\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_1\cdot x_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_2\cdot x_2}\cdots\\&\times\Big(\Psi_0,\,T\Big\{\mathcal{O}_\ell(x_1),A_2(x_2),\cdots\Big\}\Psi_0\Big)\,,\end{aligned}\tag{10.3.1}$$

其中 $\mathcal{O}_\ell(x)$ 是 Heisenberg 绘景算符, 它的 Lorentz 变换性质与某类自由场 ψ_ℓ 相同, 这里的 ψ_ℓ 属于齐次 Lorentz 群(或者, 对宇称守恒的理论, 包含空间反演的 Lorentz 群)的一个不可约表示, 这个不可约表示由下标 ℓ 标记, 而 A_2,A_3 等是任意的 Heisenberg 绘景算符. 假定存在单粒子态 $\Psi_{\mathbf{q}_1,\sigma}$, 且它与态 $\mathcal{O}_\ell^\dagger\Psi_0$ 以及态 $A_2A_3\cdots\Psi_0$ 的矩阵元不为零. 那么根据上一节中证明的定理, G_ℓ 在 $q_1^2=-m^2$ 处有一极点, 并有

$$\begin{aligned}G_\ell(q_1q_2\cdots)\to&\frac{-2\mathrm{i}\sqrt{\mathbf{q}_1^2+m^2}}{q_1^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon}(2\pi)^3\sum_\sigma\Big(\Psi_0,\mathcal{O}_\ell(0)\Psi_{\mathbf{q}_1,\sigma}\Big)\\&\times\int\mathrm{d}^4x_2\cdots\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_2\cdot x_2}\cdots\Big(\Psi_{\mathbf{q}_1,\sigma},T\Big\{A_2(x_2)\cdots\Big\}\Psi_0\Big)\,.\end{aligned}\tag{10.3.2}$$

利用 Lorentz 不变性, 我们可以写出

$$\Big(\Psi_0,\mathcal{O}_\ell(0)\Psi_{\mathbf{q}_1,\sigma}\Big)=(2\pi)^{-3/2}\,N\,u_\ell(\mathbf{q}_1,\sigma)\,,\tag{10.3.3}$$

其中 $u_\ell(\mathbf{q}_1,\sigma)$ 是(除因子 $(2\pi)^{-3/2}$ 以外)自由场 ψ_ℓ 中的系数函数*, 它与 $\mathcal{O}_\ell$ 的 Lorentz 变换性质相同, 而 N 是常数. (为了得到只有单个自由常数 N 的方程(10.3.3), 我们只能假定 $\mathcal{O}_\ell$ 的变换是不可约的.) 我们同时定义"截腿"(truncated)矩阵元 M_ℓ

$$\begin{aligned}&\int \mathrm{d}^4x_2\cdots\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_2\cdot x_2}\cdots\,\Big(\Psi_{\mathbf{q}_1,\sigma},T\Big\{A_2(x_2)\cdots\Big\}\Psi_0\Big)\\&\quad\equiv N^{-1}(2\pi)^{-3/2}\sum_\ell u_\ell^*(\mathbf{q}_1,\sigma)\,M_\ell(q_2\cdots)\,.\end{aligned}\tag{10.3.4}$$

于是, 当 $q_1^2\to -m^2$ 时, 方程(10.3.2)变成

$$G_\ell\to\frac{-2\mathrm{i}\sqrt{\mathbf{q}_1^2+m^2}}{q_1^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon}\sum_{\sigma,\ell'}u_\ell(\mathbf{q}_1,\sigma)u_{\ell'}^*(\mathbf{q}_1,\sigma)M_{\ell'}\,.\tag{10.3.5}$$

根据方程(6.2.2)与(6.2.18), (10.3.5)中与 M_ℓ 相乘的量(或者至少是它在 $q_1^2\to -m_1^2$ 时的极限行为)是自由场的动量空间矩阵传播子 $-\mathrm{i}\Delta_{\ell\ell'}(q_1)$, 这个自由场与 $\mathcal{O}_\ell$ 的 Lorentz 变换性质相同, 所以(10.3.5)使我们可以看出 M_ℓ 等于如下所有这样图的和: 携带动量 $q_1,q_2\cdots$ 的外线对应于算符 $\mathcal{O}_\ell,A_2,\cdots$, 但去掉了对应 $\mathcal{O}_\ell$ 的末态传播子. 那么方程(10.3.4)正是描述如何从 Feynman 图之和中计算出发射一个粒子的矩阵元的通用处理: 去掉粒子传播子, 并与通常的外线因子 $(2\pi)^{-3/2}u_\ell^*$ 收缩. 这与通常 Feynman 规则唯一不符的是因子 N.

上面的定理是 Lehmann(莱曼), Symanzik(塞曼则克)和 Zimmerman(齐默尔曼)[3]推出的著名结果, 称为**约化公式**, 我们在这里用一种稍微不同的方法证明了它, 这种方法使得我们可以很容易地将这一结果推广至任意自旋的情况. 这个结果的一个重要特点是它适用于任何种类的算符; $\mathcal{O}_\ell$ 不需要是真地出现在拉格朗日量中的某个场, 并且它所产生的粒子可以是那些相应的场确实出现在拉格朗日量中的粒子的束缚态. 即使 $\mathcal{O}_\ell$ 是拉格朗日量中的某个场 Ψ_ℓ, 它也提供了一个重要的启示: 如果我们打算用通常的 Feynman 规则计算 S-矩阵元, 那么我们应该首先通过因子 $1/N$ 重新定义场的归一化, 使得(为符号 Ψ 的重复使用表示歉意):

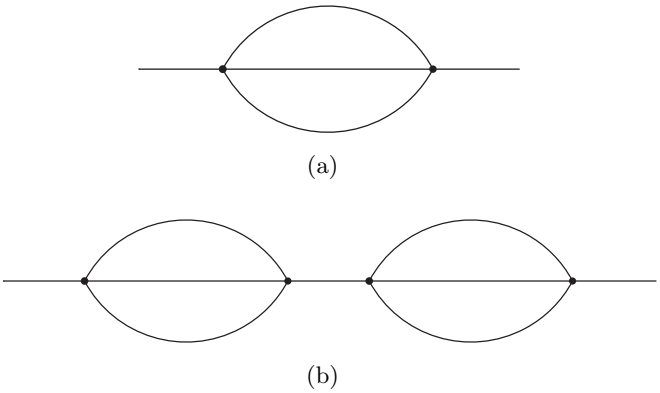
$$\Big(\Psi_0,\Psi_\ell(0)\Psi_{\mathbf{q},\sigma}\Big)=(2\pi)^{-3/2}\,u_\ell(\mathbf{q},\sigma)\tag{10.3.6}$$

像方程(10.3.6)中那样进行归一化的场被称为**重整化场**.

场重整化常数 N 也出现在另一个地方. 假定方程(10.3.1)中只有算符 $A_2,A_3,\cdots$ 中的一个, 并且将其取为与 $\mathcal{O}_\ell$ 相同的场多重态中的一成员的伴. 这样方程(10.3.2)变成

$$\begin{aligned}&\int\mathrm{d}^4x_1\int\mathrm{d}^4x_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_1\cdot x_1}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_2\cdot x_2}\,\Big(\Psi_0,\,T\Big\{\mathcal{O}_\ell(x_1)\mathcal{O}_{\ell'}^\dagger(x_2)\Big\}\Psi_0\Big)\\&\xrightarrow{q_1^2\to-m^2}\frac{-2\mathrm{i}\sqrt{\mathbf{q}_1^2+m^2}(2\pi)^3}{q_1^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon}\sum_\sigma\Big(\Psi_0,\mathcal{O}_\ell(0)\Psi_{\mathbf{q}_1,\sigma}\Big)\\&\qquad\times\int\mathrm{d}^4x_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_2\cdot x_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_1\cdot x_1}\Big(\Psi_{\mathbf{q}_1,\sigma},\mathcal{O}_{\ell'}^\dagger(0)\Psi_0\Big)\\&=\frac{-2\mathrm{i}|N|^2\sqrt{\mathbf{q}_1^2+m^2}}{q_1^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon}\sum_\sigma u_\ell(\mathbf{q}_1,\sigma)\,u_{\ell'}^*(\mathbf{q}_1,\sigma)\,(2\pi)^4\,\delta^4(q_1+q_2)\,.\end{aligned}$$

*例如, 对于通常的归一化自由标量场, $u_\ell(\mathbf{q}_1,\sigma)=[2\sqrt{\mathbf{q}_1^2+m^2}]^{-1/2}$.



(a)

(b)

图 10.4 (a)图是单粒子不可约的, 而(b)图不是. 这些图是针对有某种四线性相互作用的理论而画出的, 例如相互作用正比于 ϕ^4 的标量场ϕ的理论

除了因子 $|N|^2$, 这正是传播子(有两条外线的所有图之和)在它的极点附近的通常行为. 根据方程(10.3.6), 这个因子在重整化场 Ψ_ℓ 的传播子中是不出现的. 因此重整化场就是传播子在极点附近的行为与自由场相同的场, 而重整化质量由极点的位置定义.

为了看到这是如何实际操作的, 考虑自作用实标量场 $\Phi_{\rm B}$ 的理论, 在这里加上下标 B 是提醒我们现在这还是一个“裸(bare)”(即,非重整化)场. 拉格朗日量密度像通常那样取为

$$\mathscr{L} = -\tfrac{1}{2}\partial_\mu\Phi_{\rm B}\partial^\mu\Phi_{\rm B} - \tfrac{1}{2}m_{\rm B}^2\Phi_{\rm B}^2 - V_{\rm B}(\Phi_{\rm B})\,. \tag{10.3.7}$$

一般而言, 没有理由可以预期场 $\Phi_{\rm B}$ 会满足条件(10.3.6), 也无法预期 q^2 的极点会在 $-m_{\rm B}^2$ 处, 所以我们引入重整化场和重整化质量

$$\Phi \equiv Z^{-1/2}\Phi_{\rm B}\,, \tag{10.3.8}$$

$$m^2 \equiv m_{\rm B}^2 + \delta m^2\,, \tag{10.3.9}$$

这里选择 Z 以使 Φ 满足方程(10.3.6), 选择 δm^2 以使传播子的极点在 $q^2 = -m^2$ 处. (在这种问题中采用符号 Z 已经成了一种约定; 拉格朗日量中的每个场都有不同的 Z.) 这样拉格朗日密度(10.3.7)可以重新写成

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_1\,, \tag{10.3.10}$$

$$\mathscr{L}_0 = -\tfrac{1}{2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - \tfrac{1}{2}m^2\Phi\,, \tag{10.3.11}$$

$$\mathscr{L}_1 = -\tfrac{1}{2}(Z-1)[\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi + m^2\Phi^2] + \tfrac{1}{2}Z\,\delta m^2\Phi^2 - V(\Phi)\,, \tag{10.3.12}$$

其中

$$V(\Phi) \equiv V_{\rm B}(\sqrt{Z}\Phi)\,.$$

重整化标量场的动量空间全传播子一般记做 $\Delta'(q)$, 在计算对这个传播子的修正时, 单独考察单粒子不可约图是方便的: 即那些无法通过切断任何一条内标量线而变成不连通图的连通图(这里不包括由单个标量线构成的图). 图10.4中给出了一个例子. 在略掉两个外线传播子因子 $-\mathrm{i}(2\pi)^{-4}(q^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon)^{-1}$ 后, 习惯上将所有这种图的和写为 $\mathrm{i}(2\pi)^4\Pi^*(q^2)$, 其中的星号提醒我

们它们是单粒子不可约图. 于是对全传播子的修正由一个求和给出, 求和的每一项是一个, 两个或多个单粒子不可约子图构成的链, 而在链中连接这些子图的是通常的未修正的传播子:

$$\begin{aligned}\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\Delta'(q) &= \frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\frac{1}{q^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon}\\ &+\left[\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\frac{1}{q^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon}\right]\left[\mathrm{i}(2\pi)^4\Pi^*(q^2)\right]\left[\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\frac{1}{q^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon}\right]\\ &+\left[\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\frac{1}{q^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon}\right]\left[\mathrm{i}(2\pi)^4\Pi^*(q^2)\right]\left[\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\frac{1}{q^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon}\right]\\ &\times\left[\mathrm{i}(2\pi)^4\Pi^*(q^2)\right]\left[\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\frac{1}{q^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon}\right]+\cdots\end{aligned} \tag{10.3.13}$$

或者更简洁些

$$\begin{aligned}\Delta'(q) &= [q^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon]^{-1}+[q^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon]^{-1}\Pi^*(q^2)[q^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon]^{-1}\\ &+[q^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon]^{-1}\Pi^*(q^2)[q^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon]^{-1}\Pi^*(q^2)[q^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon]^{-1}+\cdots .\end{aligned} \tag{10.3.14}$$

对该几何级数求和, 给出

$$\Delta'(q) = \left[q^2+m^2-\Pi^*(q^2)-\mathrm{i}\epsilon\right]^{-1} . \tag{10.3.15}$$

在计算 Π^* 时, 我们会遇到单独插入顶点所给出的树图, 其中的顶点对应于方程中(10.3.12)中正比于 $\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi$ 和 Φ^2 的项, 再加上类似图 10.4a 中的圈图产生的项 Π^*_{LOOP}:

$$\Pi^*(q^2) = -(Z-1)[q^2+m^2]+Z\,\delta m^2+\Pi^*_{\mathrm{LOOP}}(q^2) . \tag{10.3.16}$$

m^2 是粒子的真实质量这个条件要求传播子的极点应该在 $q^2=-m^2$ 处, 从而使

$$\Pi^*(-m^2) = 0 . \tag{10.3.17}$$

另外, 传播子在 $q^2=-m^2$ 处的极点应该有等于 1 的留数(就像未修正的传播子)这个条件要求

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q^2}\Pi^*(q^2)\right]_{q^2=-m^2} = 0 . \tag{10.3.18}$$

这些条件使得我们能够计算 Z 和 δm^2:

$$Z\,\delta m^2 = -\Pi^*_{\mathrm{LOOP}}(-m^2) , \tag{10.3.19}$$

$$Z = 1+\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q^2}\Pi^*_{\mathrm{LOOP}}(q^2)\right]_{q^2=-m^2} . \tag{10.3.20}$$

顺带地, 这也表明了 $Z\delta m^2$ 与 $Z-1$ 由一系列包含一个或多个耦合常数因子的项给出, 证明了将方程(10.3.12)中的前两项当作相互作用 $\mathscr{L}_1$ 的一部分的处理是正确的.

在实际计算中, 最简单地说就是我们必须从圈图项 $\Pi^*_{\mathrm{LOOP}}(q^2)$ 中减除 q^2 的一阶多项式, 并选择系数使差满足方程(10.3.17)和(10.3.18). 我们将会看到, 这个减除手续顺带消掉了 Π^*_{LOOP} 中的动量空间积分产生的无限大. 然而, 随着讨论的深入而逐渐清晰的是, 质量和场的重整化与无限大的出现没有直接关系, 并且, 即使在所有动量空间积分都收敛的理论中, 重整化也是必要的.

条件(10.3.17)和(10.3.18)的一个重要结果是, 对于在壳的外线, 引入辐射修正是不必要的. 即,

$$\Big[\Pi^*(q^2)[q^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon]^{-1}+\Pi^*(q^2)[q^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon]^{-1}\Pi^*(q^2)[q^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon]^{-1} + \cdots\Big]_{q^2\to -m^2}=0\,. \tag{10.3.21}$$

类似的讨论适用于任意自旋的粒子. 例如, 对"裸" Dirac 场, 拉格朗日量是

$$\mathscr{L}=-\bar{\Psi}_{\mathrm{B}}[\not{\partial}+m_{\mathrm{B}}]\Psi_{\mathrm{B}}-V_{\mathrm{B}}(\bar{\Psi}_{\mathrm{B}}\Psi_{\mathrm{B}})\,. \tag{10.3.22}$$

我们引入重整化场和重整化质量

$$\Psi\equiv Z_2^{-1/2}\Psi_{\mathrm{B}}\,, \tag{10.3.23}$$

$$m=m_{\mathrm{B}}+\delta m\,. \tag{10.3.24}$$

(Z_2 的下标 2 一般是用来区分出这是费米场的重整化常数.) 于是拉格朗日密度可以重写成

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_0+\mathscr{L}_1\,, \tag{10.3.25}$$

$$\mathscr{L}_0=-\bar{\Psi}[\not{\partial}+m]\Psi\,, \tag{10.3.26}$$

$$\mathscr{L}_1=-(Z_2-1)[\bar{\Psi}[\not{\partial}+m]\Psi]+Z_2\delta m\bar{\Psi}\Psi-V_{\mathrm{B}}(Z_2\bar{\Psi}\Psi)\,. \tag{10.3.27}$$

令 $\mathrm{i}(2\pi)^4\Sigma^*(\not{k})$ 是所有如下连通图的和: 其中一条费米线携带 4-动量 k 进入, 而另一条费米线携带相同的动量离开, 不能通过剪断任何一条内费米线变成不连通图, 并且其中的外线传播子因子 $-\mathrm{i}(2\pi)^{-4}$和 $[\mathrm{i}\not{k}+m-\mathrm{i}\epsilon]^{-1}$ 被略掉. (通过 Lorentz 不变性能够证明可以将 Σ^* 写成 Lorentz 标量矩阵 $\not{k}\equiv k_\mu\gamma^\mu$ 的普通函数.) 这样全费米子传播子是

$$\begin{aligned}S'(k)&=[\mathrm{i}\not{k}+m-\mathrm{i}\epsilon]^{-1}+[\mathrm{i}\not{k}+m-\mathrm{i}\epsilon]^{-1}\Sigma^*(\not{k})[\mathrm{i}\not{k}+m-\mathrm{i}\epsilon]^{-1}\\&\quad+[\mathrm{i}\not{k}+m-\mathrm{i}\epsilon]^{-1}\Sigma^*(\not{k})[\mathrm{i}\not{k}+m-\mathrm{i}\epsilon]^{-1}\Sigma^*(\not{k})[\mathrm{i}\not{k}+m-i\epsilon]^{-1}+\cdots\\&=[\mathrm{i}\not{k}+m-\Sigma^*(\not{k})-\mathrm{i}\epsilon]^{-1}\,.\end{aligned} \tag{10.3.28}$$

在计算 $\Sigma^*(\not{k})$ 时, 我们需要考虑树图以及圈图贡献, 其中树图的贡献来自于方程(10.3.27)中正比于 $\bar{\Psi}\not{\partial}\Psi$ 和 $\bar{\Psi}\Psi$ 的项:

$$\Sigma^*(\not{k})=-(Z_2-1)[\mathrm{i}\not{k}+m]+Z_2\delta m+\Sigma^*_{\mathrm{LOOP}}(\not{k})\,. \tag{10.3.29}$$

于是, 全传播子在 $k^2=-m^2$ 处有一极点, 并且其留数与未修正的传播子的留数相同的条件是

$$\Sigma^*(\mathrm{i}m)=0\,, \tag{10.3.30}$$

$$\left.\frac{\partial\Sigma^*(\not{k})}{\partial\not{k}}\right|_{\not{k}=\mathrm{i}m}=0\,, \tag{10.3.31}$$

因此

$$Z_2\delta m=-\Sigma^*_{\mathrm{LOOP}}(\mathrm{i}m)\,, \tag{10.3.32}$$

$$Z_2=1-\mathrm{i}\left.\frac{\partial\Sigma^*_{\mathrm{LOOP}}(\not{k})}{\partial\not{k}}\right|_{\not{k}=\mathrm{i}m}\,. \tag{10.3.33}$$

与标量情况相同, $[\mathrm{i}\not{k}+m]^{-1}\Sigma^*(\not{k})$ 在极限 $\not{k}\to\mathrm{i}m$ 下为零告诉我们: 外费米线中的辐射修正可以被忽略. 光子传播子的相应结果将在 10.5 节导出.

10.4 重整化荷与 Ward 恒等式

利用 Heisenberg 绘景算符的对易关系和守恒关系, 我们可以找到拉格朗日密度中的荷(或者其它类似的量)与物理态性质之间的联系. 回忆, 拉格朗日密度在整体规范变换 $\Psi_\ell \to \exp(\mathrm{i}q_\ell\alpha)$ (其中 α 为任意的常数相位)下的不变性意味着存在流

$$J^\mu = -\mathrm{i}\sum_\ell \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi_\ell)} q_\ell\Psi_\ell \,, \tag{10.4.1}$$

它满足守恒条件

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \,. \tag{10.4.2}$$

这表明 J^μ 的时间分量的空间积分不依赖时间:

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q = [Q, H] = 0 \,, \tag{10.4.3}$$

其中

$$Q \equiv \int \mathrm{d}^3x \, J^0 \,. \tag{10.4.4}$$

(这里可能存在一个非常重要的例外, 即如果系统中存在因为无质量标量而产生的长程力, 积分(10.4.4)可能不存在. 我们在卷 II 中考虑破缺对称性时会回到这个问题.) 另外, 既然它是空间积分, Q 显然是平移不变的

$$[\mathbf{P}, Q] = 0 \tag{10.4.5}$$

并且, 由于 J^μ 是 4-矢, Q 在齐次 Lorentz 变换下不变

$$[J^{\mu\nu}, Q] = 0 \,. \tag{10.4.6}$$

由此可知, Q 作用在真正真空 Ψ_0 上给出的必须是另一个能量和动量均为零的 Lorentz 不变的态, 因而(假定没有真空简并)必须正比于 Ψ_0 本身. 但是比例常数必须为零, 这是因为 Lorentz 不变性要求 $(\Psi_0, J_\mu\Psi_0)$ 为零, 因此有

$$Q\Psi_0 = 0 \,. \tag{10.4.7}$$

另外, Q 作用在任何单粒子态 $\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n}$ 上给出的必须是另一个能量, 动量以及 Lorentz 变换性质均相同的态, 因此(假定单粒子态没有简并)必须正比于同一单粒子态

$$Q\,\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} = q_{(n)}\,\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} \,. \tag{10.4.8}$$

Q 的 Lorentz 不变性确保了本征值 $q_{(n)}$ 不依赖 $\mathbf{p}$ 和 σ, 而只依赖于粒子的种类. 这一本征值正是所谓单粒子态的电荷(或者其它任何流 J^μ 的量子数). 为了将其与拉格朗日量中的 q_ℓ 参量关联起来, 我们注意到正则对易关系给出

$$\Big[J^0(\mathbf{x},t),\, \Psi_\ell(\mathbf{y},t)\Big] = -q_\ell\Psi_\ell(\mathbf{y},t)\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \,, \tag{10.4.9}$$

或者对 $\mathbf{x}$ 积分:

$$\Big[Q, \Psi_\ell(y)\Big] = -q_\ell\Psi_\ell(y) \,. \tag{10.4.10}$$

对于包含确定数目的场, 场导数及其伴随场的任意定域函数 $F(y)$, 这个结论同样成立:

$$\Big[Q, F(y)\Big] = -q_F F(y)\ , \tag{10.4.11}$$

其中 q_F 等于 $F(y)$ 中所有场和场导数的 q_ℓ 之和减去所有伴随场以及伴随场导数的 q_ℓ 之和. 取该方程在单粒子态和真空之间的矩阵元, 并利用方程(10.4.7)和(10.4.8), 我们有

$$\Big(\Psi_0, F(y)\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n}\Big)\,(q_F - q_{(n)}) = 0\,. \tag{10.4.12}$$

因此我们必须有

$$q_{(n)} = q_F \tag{10.4.13}$$

只要

$$\Big(\Psi_0, F(y)\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n}\Big) \neq 0\,. \tag{10.4.14}$$

正如我们在上一节中看到的, 方程(10.4.14)是确保包含 F 的动量空间 Green 函数具有与单粒子态 $\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n}$ 相对应的极点的条件. 如果单粒子态对应于拉格朗日量中的一个场, 我们可以取 $F = \Psi_\ell$, 在这种情况下 $q_F = q_\ell$, 但是我们这里的结果适用于普遍的单粒子态, 与它们所对应的场是否出现在拉格朗日量中无关.

虽然不完全确定, 但这几乎已经在告诉我们, 虽然所有可能的高阶图都会通过带电粒子影响光子的发射与吸收, 但物理电荷就等于拉格朗日量中出现的参量 q_ℓ (或是这类参量的和, 类似 q_F.) 这里必须附加的限制是, 拉格朗日量在变换 $\Psi_\ell \to \exp(\mathrm{i}q_\ell\alpha)\Psi_\ell$ 下不变的这个要求, 无法将 q_ℓ 的整体标度确定下来. 物理电荷是那些决定物质场对一给定重整化电磁场 A^μ 如何响应的量. 即, 重整化电磁场要以线性组合 $[\partial_\mu - \mathrm{i}q_\ell A_\mu]\Psi_\ell$ 的形式出现在物质拉格朗日量 $\mathscr{L}_M$ 中这个要求固定了 q_ℓ 的标度, 进而使得流 J^μ 是

$$J^\mu = \frac{\delta\mathscr{L}_M}{\delta A_\mu}\,. \tag{10.4.15}$$

但是当我们把拉格朗日量写成它的最简形式

$$\mathscr{L} = -\tfrac{1}{4}(\partial_\mu A_{\mathrm{B}\nu} - \partial_\nu A_{\mathrm{B}\mu})(\partial^\mu A^\nu_{\mathrm{B}} - \partial^\nu A^\mu_{\mathrm{B}}) + \mathscr{L}_M(\Psi_\ell, [\partial_\mu - \mathrm{i}q_{\mathrm{B}\ell}A_{\mathrm{B}\mu}]\Psi_\ell)\,, \tag{10.4.16}$$

A^μ 与 q_ℓ 并不是该拉格朗日量中的"裸电磁场" $A_{\mathrm{B}\mu}$ 和"裸电荷" $q_{\mathrm{B}\ell}$. 按照习惯上的形式, 重整化电磁场(定义成在 $p^2 = 0$ 处具有极点且留数为 1 的全传播子)写成 A^μ_{B} 是

$$A^\mu = Z_3^{-1/2}\, A^\mu_{\mathrm{B}}\,, \tag{10.4.17}$$

所以为了使电荷 q_ℓ 表征带电粒子对给定重整化电磁场的响应, 我们应当将重整化荷定义为

$$q_\ell = \sqrt{Z_3}\, q_{\mathrm{B}\ell}\,. \tag{10.4.18}$$

我们看到任何粒子的物理电荷 q 都正好正比于 q_{B}, 即与那些出现在拉格朗日量中的粒子相关的参量, 并且对于所有粒子比例常数都为 $\sqrt{Z_3}$. 这帮助我们理解了为什么像质子这样的被虚介子以及其它强相互作用粒子云所包裹的粒子与相互作用要弱得多的正电子有相同的电荷. 唯一需要假定的是, 出于某个原因, 就拉格朗日量中的电荷 $q_{\mathrm{B}\ell}$ 而言, 那些构成质子的粒子(两个 u 夸克和一个 d 夸克)合起来与电子有大小相等符号相反的值; 那么高阶修正的效应就只出现在公共因子 $\sqrt{Z_3}$ 中.



图 10.5 量子电动力学中电子传播子与顶点函数的一阶修正图, 这里直线是电子; 波浪线是光子.

为了使电荷重整化仅来自于光子传播子的辐射修正, 那么其它对带电粒子的传播子和电磁顶点的各种辐射修正之间必存在抵消. 利用带电粒子传播子与顶点之间的著名关系 *Ward* 恒等式, 我们可以在更深的层次上理解这些抵消的本质.

例如, 考虑电子流 $J^\mu(x)$, 电荷为 q 的 Heisenberg 绘景 Dirac 场 $\Psi_n(y)$ 以及它的协变伴随场 $\bar\Psi_m(z)$ 的 Green 函数. 我们定义带电粒子的电磁顶点函数 Γ^μ 为

$$\begin{aligned}&\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathrm{d}^4z\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot y}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\ell\cdot z}\left(\Psi_0,\,T\Big\{J^\mu(x)\,\Psi_n(y)\,\bar\Psi_m(z)\Big\}\Psi_0\right)\\&\quad\equiv -\mathrm{i}(2\pi)^4 q S'_{nn'}(k)\Gamma^\mu_{n'm'}(k,\ell)S'_{m'm}(\ell)\,\delta^4(p+k-\ell)\,,\end{aligned}\tag{10.4.19}$$

其中

$$-\mathrm{i}(2\pi)^4 S'_{nm}(k)\,\delta^4(k-\ell)\equiv\int \mathrm{d}^4y\,\mathrm{d}^4z\left(\Psi_0,\,T\Big\{\Psi_n(y)\bar\Psi_m(z)\Big\}\Psi_0\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot y}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\ell\cdot z}\,.\tag{10.4.20}$$

根据 6.4 节的定理, 方程(10.4.20)给出的是有一个入费米线和一个出费米线的所有 Feynman 图之和, 即全 Dirac 传播子. 另外, 方程(10.4.19)给出的是所有这样的图与一外光子线相连后构成的图之和, 所以 Γ^μ 是有一个入 Dirac 线, 一个出 Dirac 线以及一个光子线的"顶点"图之和, 但是去掉了全 Dirac 外线传播子和裸光子外线传播子. 为了使 S' 和 Γ^μ 的归一化完全清晰, 我们提过, 在无相互作用极限下, 这些函数取值为

$$S'(k)\to[\mathrm{i}\gamma_\lambda k^\lambda+m-\mathrm{i}\epsilon]^{-1}\,,\qquad \Gamma^\mu(k,\ell)\to\gamma^\mu\,.$$

对这些极限值情况给出的一圈图修正如图 10.5 所示.

利用恒等式

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^\mu}T\Big\{J^\mu(x)\Psi_n(y)\bar\Psi_m(z)\Big\}&=T\Big\{\partial_\mu J^\mu(x)\Psi_n(y)\bar\Psi_m(z)\Big\}\\&+\delta(x^0-y^0)\,T\Big\{\Big[J^0(x),\Psi_n(y)\Big]\bar\Psi_m(z)\Big\}\\&+\delta(x^0-z^0)\,T\Big\{\Psi_n(y)\Big[J^0(x),\bar\Psi_m(z)\Big]\Big\}\,,\end{aligned}\tag{10.4.21}$$

我们可以导出 Γ^μ 和 S' 之间的关系, 上式中的 δ-函数来自阶跃函数的时间导数. 守恒条件(10.4.2)告诉我们第一项为零, 而第二项和第三项可以通过对易关系(10.4.9)计算出来, 得到

$$\Big[J^0(\mathbf{x},t),\Psi_n(\mathbf{y},t)\Big]=-q\Psi_n(\mathbf{y},t)\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\tag{10.4.22}$$

以及它的共轭

$$\Big[J^0(\mathbf{x},t),\bar\Psi_n(\mathbf{y},t)\Big]=q\bar\Psi_n(\mathbf{y},t)\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,.\tag{10.4.23}$$

于是方程(10.4.21)变成

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} T\Big\{J^\mu(x)\Psi_n(y)\bar{\Psi}_m(z)\Big\} = -q\,\delta^4(x-y)\,T\Big\{\Psi_n(y)\bar{\Psi}_m(z)\Big\} + q\,\delta^4(x-z)\,T\Big\{\Psi_n(y)\bar{\Psi}_m(z)\Big\}\,. \tag{10.4.24}$$

将其代入Fourier变换(10.4.19)给出

$$(\ell-k)_\mu\,S'(k)\,\Gamma^\mu(k,\ell)\,S'(\ell) = \mathrm{i}\,S'(\ell) - \mathrm{i}\,S'(k)$$

或者另一种形式

$$(\ell-k)_\mu\Gamma^\mu(k,\ell) = \mathrm{i}\,S'^{-1}(k) - \mathrm{i}\,S'^{-1}(\ell)\,. \tag{10.4.25}$$

这被称为*广义 Ward 恒等式*, 由Takahashi (高桥)(通过以上方法)首次导出.[4] 原始的Ward恒等式, 是Ward[5]从微扰论的研究中导出的, 可以通过令ℓ趋于k从方程(10.4.25)中得出. 在这一极限下, 方程(10.4.25)给出

$$\Gamma^\mu(k,k) = -\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial k_\mu}\,S'^{-1}(k)\,. \tag{10.4.26}$$

通过方程(10.3.28)

$$S'^{-1}(k) = \mathrm{i}\not{k} + m - \Sigma^*(\not{k})\,,$$

费米传播子与自能插入$\Sigma^*(\not{k})$相关联, 所以方程(10.4.26)可以写成

$$\Gamma^\mu(k,k) = \gamma^\mu + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial k_\mu}\Sigma^*(\not{k})\,. \tag{10.4.27}$$

对于重整化Dirac场, 方程(10.3.31)和(10.4.27)告诉我们在质壳上

$$\bar{u}'_k\,\Gamma^\mu(k,k)\,u_k = \bar{u}'_k\,\gamma^\mu\,u_k\,, \tag{10.4.28}$$

其中$[\mathrm{i}\gamma_\mu k^\mu + m]u_k = [\mathrm{i}\gamma_\mu k^\mu + m]u'_k = 0$. 因此费米场的重整化条件确保了: 当一个在壳费米子与一个没有动量传递的电磁场相互作用时, 对顶点函数Γ_μ的修正抵消了, 这正是我们开始测量费米子电荷时的情况. 如果我们没有采用重整化费米场, 那么对顶点函数的修正将正好抵消由于对外费米线的辐射修正所引起的修正, 这再一次使得电荷不变.

10.5 规范不变性

对于如下的量

$$M^{\mu\mu'\cdots}_{\beta\alpha}(q,q',\cdots) \equiv \int \mathrm{d}^4x \int \mathrm{d}^4x' \cdots \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q'\cdot x'}\cdots \times \Big(\Psi_\beta{}^-, T\Big\{J^\mu(x), J^{\mu'}(x')\cdots\Big\}\Psi_\alpha{}^+\Big)\,, \tag{10.5.1}$$

我们可以用电荷守恒来证明一个有用的结果. 在旋量电动力学这样的理论中, 电磁相互作用关于场A^μ是线性的, 上面的量是在任意跃迁$\alpha \to \beta$中发射(和(或)吸收)数个在壳或离壳光子的矩阵

元, 其中光子 4-动量为 q, q' 等(和(或) $-q, -q'$ 等), 外线光子的系数函数或传播子被省略了. 我们的结果是, 方程(10.5.1)与任何一个光子 4-动量收缩后为零:

$$q_\mu M^{\mu\mu'\cdots}_{\beta\alpha}(q, q', \cdots) = q'_{\mu'} M^{\mu\mu'\cdots}_{\beta\alpha}(q, q', \cdots) = \cdots = 0 \,. \tag{10.5.2}$$

由于 M 被定义成关于光子线对称, 证明这些量中的第一个为零就足够了.

为此, 我们注意到, 通过分部积分有

$$q_\mu M^{\mu\mu'\cdots}_{\beta\alpha}(q, q', \cdots) = -\mathrm{i} \int \mathrm{d}^4x \int \mathrm{d}^4x' \cdots \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q'\cdot x'} \cdots \left(\Psi_\beta{}^-, \frac{\partial}{\partial x^\mu} T\left\{ J^\mu(x), J^{\mu'}(x') \cdots \right\} \Psi_\alpha{}^+ \right) \,. \tag{10.5.3}$$

电流 $J^\mu(x)$ 是守恒的, 但这并不直接就意味着方程(10.5.3)为零, 这是因为我们还要考虑到出现在编时乘积定义中的 θ-函数所要求的 x^0-相关性. 例如, 只有两个流时

$$T\Big\{ J^\mu(x) J^\nu(y) \Big\} = \theta(x^0 - y^0) J^\mu(x) J^\nu(y) + \theta(y^0 - x^0) J^\nu(y) J^\mu(x)$$

所以, 考虑到 $J^\mu(x)$ 的守恒:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} T\Big\{ J^\mu(x)\, J^\nu(y) \Big\} &= \delta(x^0 - y^0)\, J^0(x)\, J^\nu(y) - \delta(y^0 - x^0)\, J^\nu(y)\, J^0(x) \\ &= \delta(x^0 - y^0) \Big[J^0(x), J^\nu(y) \Big] \,. \end{aligned} \tag{10.5.4}$$

当流的个数多于两个时, 对于除 $J^\mu(x)$ 本身以外的每一个流, 我们都得到了(在编时乘积内)类似的等时对易子. 为了计算这个对易子, 我们回忆(上一节所证明的), 对场算符以及伴随场和(或)导数的任意乘积 F 有

$$\Big[J^0(\mathbf{x}, t), F(\mathbf{y}, t) \Big] = -q_F\, F(\mathbf{x}, t) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \,,$$

其中 q_F 是 F 中场和场导数的 q_ℓ 之和减去伴随场以及伴随场导数的 q_ℓ 之和. 对于电流, q_J 是零; $J^\nu(y)$ 本身是电中性算符. 由此得出

$$\Big[J^0(\mathbf{x}, t), J^\nu(\mathbf{y}, t) \Big] = 0 \tag{10.5.5}$$

因此方程(10.5.4)为零, 从而使方程(10.5.3)给出

$$q_\mu\, M^{\mu\mu'\cdots}_{\beta\alpha}(q, q', \cdots) = 0 \,, \tag{10.5.6}$$

这正是所要证明的.

这里有一个重要条件. 在推导方程(10.5.5)时, 我们应该将如下的事实考虑在内, 类似于流算符 $J^\nu(y)$, 场在同一时空点 y 的乘积只能通过某个处理无限大的正规化方案才能被恰当地定义. 在很多情况下, $J^0(\mathbf{x}, t)$ 与正规化流 $J^i(\mathbf{y}, t)$ 的对易子会有非零的贡献, 这种贡献被称为*Schwinger*项.[6] 当流中包含来自带荷标量场 Φ 的项时, 会有包含 $\Phi^\dagger\Phi$ 且与正规化无关的 Schwinger 项. 然而, 在多光子振幅中, 所有这些 Schwinger 项被额外相互作用的贡献抵消了, 这种额外的相互作用是电磁场的二次型, 它们要么(如果规范不变)来自于正规化方案, 要么,

对于带荷标量, 直接来自于拉格朗日量中的项. 我们将主要处理带荷旋量场, 并采用一种不产生 Schwinger 项的正规化方案(维度正规化), 所以在下文中, 我们将忽略这一问题而继续使用朴素的对易关系(10.5.5).

即使除光子以外还有其它粒子不在质壳上, 只要假定所有的带荷粒子都取在质壳上, 即一直处在态 Ψ_β^- 和 $\Psi_\alpha{}^+$ 中, 同样的讨论也会给出类似于方程(10.5.2)的结果. 若非如此, 方程(10.5.2)的左边将得到非零等时对易子的贡献, 就像我们在上一节推导 Ward 恒等式时所遇到的那些一样.

方程(10.5.2)的一个结果是, 如果我们对任意光子传播子 $\Delta_{\mu\nu}(q)$ 做出如下的改变

$$\Delta_{\mu\nu}(q) \to \Delta_{\mu\nu}(q) + \alpha_\mu q_\nu + q_\mu \beta_\nu \,, \tag{10.5.7}$$

或者我们对光子极化矢量做如下改变

$$e_\rho(\mathbf{k},\lambda) \to e_\rho(\mathbf{k},\lambda) + c k_\rho \,, \tag{10.5.8}$$

其中 $k^0 \equiv |\mathbf{k}|$, 而 α_μ, β_ν 和 c 完全任意(不非得是常数, 并且对所有的传播子或极化矢量也不必取相同的值), S-矩阵元是不受影响的. 这称为(有些不严格) S-矩阵的规范不变性.

为了证明这一结果, 只需给出 S-矩阵对光子极化矢量以及传播子的显式依赖关系即可

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha} \propto \int & \mathrm{d}^4 q_1 \, \mathrm{d}^4 q_2 \cdots \Delta_{\mu_1\nu_1}(q_1) \Delta_{\mu_2\nu_2}(q_2) \cdots \\ & \times e^*_{\rho_1}(\mathbf{k}'_1\lambda'_1) e^*_{\rho_2}(\mathbf{k}'_2\lambda'_2) \cdots e_{\sigma_1}(\mathbf{k}_1\lambda_1) e_{\sigma_2}(\mathbf{k}_2\lambda_2) \cdots \\ & \times M_{ba}^{\mu_1\mu_2\cdots\nu_1\nu_2\cdots\rho_1\rho_2\cdots\sigma_1\sigma_2\cdots}(-q_1,-q_2,\cdots,q_1,q_2,\cdots,-k'_1,-k'_2,\cdots,k_1,k_2,\cdots) \end{aligned} \tag{10.5.9}$$

其中 $M^{\rho\sigma\cdots}$ 是在没有电磁相互作用的情况下计算出的矩阵元(10.5.1).* 从守恒条件(10.5.2)就立即得出了方程(10.5.9)在"规范变换"(10.5.7)和(10.5.8)下的不变性. (在 9.6 节, 我们用路径积分方法证明了这一定理的特殊情况, 即规范不变算符的编时乘积的真空期望值不依赖传播子(9.6.21)中的常数 α.) 这个结果不像看起来那么基本, 比如它不适用于单个图, 只适用于那些在图中所有可能的位置都插入了流顶点的图的和.

方程(10.5.2)对光子传播子的计算有一个特别重要的应用. 全光子传播子, 一般记做 $\Delta'_{\mu\nu}(q)$, 取如下的形式

$$\Delta'_{\mu\nu}(q) = \Delta_{\mu\nu}(q) + \Delta_{\mu\rho}(q) M^{\rho\sigma}(q) \Delta_{\sigma\nu}(q) \,, \tag{10.5.10}$$

其中 $M^{\rho\sigma}$ 正比于有两个流且 α 和 β 都是真空态的矩阵元(10.5.1), 而 $\Delta_{\mu\nu}$ 是裸光子传播子, 这里在一般的 Lorentz 不变规范下写成

$$\Delta_{\mu\nu}(q) \equiv \frac{\eta_{\mu\nu} - \xi(q^2) q_\mu q_\nu / q^2}{q^2 - \mathrm{i}\epsilon} \,. \tag{10.5.11}$$

由方程(10.5.2), 我们在这里有 $q^\mu M_{\mu\nu}(q) = 0$, 这使得

$$q^\mu \Delta'_{\mu\nu}(q) = q^\mu \Delta_{\mu\nu}(q) = \frac{q_\nu (1 - \xi(q^2))}{q^2 - \mathrm{i}\epsilon} \,. \tag{10.5.12}$$

*态 a 和 b 与 α 和 β 的唯一不同之处是 a, b 中删掉了光子. 注意, M 的变量现在全部取为入 4-动量, 这是我们要给方程(10.5.9)中 M 的某些变量插入不同符号的原因.

另一方面, 正如我们在 10.3 节中对标量场和旋量场所做的那样, 我们可以将全光子传播子表示为有两条光子外线的(不同于 M)单光子不可约图之和$\Pi^*(q)$:

$$\begin{aligned}\Delta'(q) &= \Delta(q) + \Delta(q)\Pi^*(q)\Delta(q) + \Delta(q)\Pi^*(q)\Delta(q)\Pi^*(q)\Delta(q) + \cdots \\ &= [\Delta(q)^{-1} - \Pi^*(q)]^{-1}\end{aligned} \tag{10.5.13}$$

或者换种形式

$$\Delta'_{\mu\nu}(q) = \Delta_{\mu\nu}(q) + \Delta_{\mu\rho}(q)\Pi^{*\rho\sigma}(q)\Delta'_{\sigma\nu}(q)\,. \tag{10.5.14}$$

那么为了满足方程(10.5.12), 我们必须有

$$q_\rho \Pi^{*\rho\sigma}(q) = 0\,. \tag{10.5.15}$$

结合 Lorentz 不变性, 这告诉我们 $\Pi^*(q)$ 必须取如下的形式

$$\Pi^{*\rho\sigma}(q) = (q^2\eta^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma)\pi(q^2)\,. \tag{10.5.16}$$

那么方程(10.5.13)给出的全传播子的形式为

$$\Delta'_{\mu\nu}(q) = \frac{\eta_{\mu\nu} - \tilde{\xi}(q^2)q_\mu q_\nu/q^2}{[q^2 - \mathrm{i}\epsilon][1 - \pi(q^2)]}\,, \tag{10.5.17}$$

其中

$$\tilde{\xi}(q^2) = \xi(q^2)[1 - \pi(q^2)] + \pi(q^2)\,. \tag{10.5.18}$$

现在, 因为 $\Pi^*_{\mu\nu}(q)$ 仅包含了单光子不可约图的贡献, 我们预期它在 $q^2 = 0$ 处不会有任何极点. (在破缺规范对称性的情形下, 有一个重要的例外, 我们将在卷 II 讨论.) 特别地, $\Pi^*_{\mu\nu}(q)$ 中的 $q_\mu q_\nu$ 项中在 $q^2 = 0$ 处没有极点, 这告诉我们方程(10.5.16)中的函数 $\pi(q^2)$ 也没有这样的极点, 因此全传播子(10.5.17)中的极点仍在 $q^2 = 0$ 处, 这表明辐射修正并不会赋予光子质量.

对于重整化电磁场, 辐射修正也不应该改变方程(10.5.17)中光子极点留数的规范不变部分, 所以

$$\pi(0) = 0\,. \tag{10.5.19}$$

这一条件确定了电磁场重整化常数 Z_3. 回忆, 当以重整化场(10.4.17)的形式表示时, 电动力学拉格朗日量形如

$$\mathscr{L} = -\tfrac{1}{4}Z_3(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \mathscr{L}_M(\Psi_\ell, [\partial_\mu - \mathrm{i}q_\ell A_\mu]\Psi_\ell)\,.$$

那么单光子不可约振幅中的函数 $\pi(q^2)$ 就是

$$\pi(q^2) = 1 - Z_3 + \pi_{\mathrm{LOOP}}(q^2)\,, \tag{10.5.20}$$

其中 π_{LOOP} 是圈图的贡献. 由此得出

$$Z_3 = 1 + \pi_{\mathrm{LOOP}}(0)\,. \tag{10.5.21}$$

在实际计算中, 我们只计算圈贡献然后扣掉一个常数以使 $\pi(0)$ 为零.

附带地, 方程(10.5.18)表明, 当 $q^2 \neq 0$ 时, 光子传播子中的规范项被辐射修正改变了. 一个例外是 Landau 规范的情况, 这一规范对于所有的 q^2 有 $\tilde{\xi} = \xi = 1$.

10.6 电磁形状因子与磁矩

假如我们希望计算一个粒子在外电磁场(或是另一粒子的电磁场)上的散射, 其中只计入该电磁场的第一阶贡献, 但是对我们这个粒子的所有其它相互作用(包含电磁相互作用)计入所有阶的贡献. 为此, 我们需要知道如下所有 Feynman 图的贡献之和: 有一条在壳入粒子线, 一条在壳出粒子线, 以及一条在壳或离壳的光子线. 根据 6.4 节的定理, 这个和由电磁流 $J^\mu(x)$ 的单粒子矩阵元给定. 我们现在来看看是什么控制着这个矩阵元的一般形式.

根据时空平移不变性, 电磁流的单粒子矩阵元取如下的形式

$$\Big(\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'},\, J^\mu(x)\Psi_{\mathbf{p},\sigma}\Big) = \exp(\mathrm{i}(p-p')\cdot x)\Big(\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'},\, J^\mu(0)\Psi_{\mathbf{p},\sigma}\Big)\,. \tag{10.6.1}$$

于是流守恒条件 $\partial_\mu J^\mu = 0$ 要求

$$(p'-p)_\mu \Big(\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'},\, J^\mu(0)\Psi_{\mathbf{p},\sigma}\Big) = 0\,. \tag{10.6.2}$$

另外, 令 $\mu = 0$ 并对所有 $\mathbf{x}$ 积分给出

$$\Big(\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'},\, Q\Psi_{\mathbf{p},\sigma}\Big) = (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\Big(\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'},\, J^0(0)\Psi_{\mathbf{p},\sigma}\Big)\,.$$

利用方程(10.4.8), 这给出

$$\Big(\Psi_{\mathbf{p},\sigma'},\, J^0(0)\Psi_{\mathbf{p},\sigma}\Big) = (2\pi)^{-3}\, q\, \delta_{\sigma'\sigma}\,, \tag{10.6.3}$$

其中 q 是粒子荷.

在我们的处理中, Lorentz 不变性也对流矩阵元有约束. 为了研究这些约束, 我们仅考虑最简单的情况: 自旋 0 和自旋 $\frac{1}{2}$. 这里所介绍的分析提供了几个技术的一个例子, 这些技术对像半轻子弱相互作用这样的其它流也是有用的.

自旋 0

对于自旋 0, Lorentz 不变性要求流的单粒子矩阵元取如下的一般形式

$$\Big(\Psi_{\mathbf{p}'},\, J^\mu(0)\Psi_{\mathbf{p}}\Big) = q(2\pi)^{-3}(2p'^0)^{-1/2}(2p^0)^{-1/2}\,\mathscr{J}^\mu(p',p)\,, \tag{10.6.4}$$

其中 p^0 和 p'^0 是质壳能量($p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$), 而 $\mathscr{J}^\mu(p',p)$ 是两个 4-矢 p'^μ 和 p^μ 的 4-矢函数. (为了以后的方便, 我们从 $\mathscr{J}$ 中提出了一个因子, 粒子的荷 q.) 显然, 这类 4-矢函数能取的最普遍形式是系数是标量的 p'^μ 和 p^μ 的线性组合, 或者等价地, $p'^\mu + p^\mu$ 和 $p'^\mu - p^\mu$ 的线性组合. 但标量 p^2 和 p'^2 的值被固定在 $p^2 = p'^2 = -m^2$ 处, 这使得能够用 p^μ 和 p'^μ 构造的标量变量只能是 $p\cdot p'$ 的函数, 或者等价的

$$k^2 \equiv (p-p')^2 = -2m^2 - 2p\cdot p'\,. \tag{10.6.5}$$

因此函数 $\mathscr{J}^\mu(p',p)$ 必须取如下形式

$$\mathscr{J}^\mu(p',p) = (p'+p)^\mu F(k^2) + \mathrm{i}(p'-p)^\mu H(k^2)\,. \tag{10.6.6}$$

J^μ 厄米这一性质意味着 $\mathscr{J}^\mu(p',p)^* = \mathscr{J}^\mu(p,p')$, 从而使 $F(k^2)$ 和 $H(k^2)$ 都是实的.

现在尽管 $(p'-p)\cdot(p'+p)$ 为零, 但$(p'-p)^2 = k^2$一般不为零, 所以流守恒条件就是

$$H(k^2) = 0\,. \tag{10.6.7}$$

另外, 令方程(10.6.4)中 $\mathbf{p}'=\mathbf{p}$ 且 $\mu=0$, 并与方程(10.6.3)比较, 我们发现

$$F(0)=1\,. \tag{10.6.8}$$

函数 $F(k^2)$ 称作粒子的*电磁形状因子*.

自旋 $\frac{1}{2}$

对于自旋 $\frac{1}{2}$, Lorentz 不变性要求流的单粒子矩阵元取如下的一般形式

$$\left(\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'},\, J^{\mu}(0)\Psi_{\mathbf{p},\sigma}\right)=\mathrm{i}q\,(2\pi)^{-3}\,\bar{u}(\mathbf{p}',\sigma')\Gamma^{\mu}(p',p)u(\mathbf{p},\sigma)\,, \tag{10.6.9}$$

其中 Γ^{μ} 是 p^{ν}, p'^{ν} 以及 γ^{ν} 的 4-矢 4×4 矩阵函数, 而 u 是通常的 Dirac 系数函数. 我们以及提出了因子 $\mathrm{i}q$ 以使 Γ^{μ} 的归一化与上一节中的归一化相同.

和任何 4×4 矩阵一样, 我们可以用 16 个协变矩阵 1, γ_{ρ}, $[\gamma_{\rho},\gamma_{\sigma}]$, $\gamma_5\gamma_{\rho}$ 和 γ_5 展开 Γ^{μ}. 因此, 最一般的 4-矢 Γ^{μ} 可以写成如下各量的线性组合

$$\begin{aligned}
1\ :&\quad p^{\mu}\,,\ p'^{\mu}\\
\gamma_{\rho}\ :&\quad \gamma^{\mu}\,,\ p^{\mu}\not{p}\,,\ p'^{\mu}\not{p}\,,\ p^{\mu}\not{p}'\,,\ p'^{\mu}\not{p}'\\
[\gamma_{\rho},\gamma_{\sigma}]\ :&\quad [\gamma^{\mu},\not{p}],\ [\gamma^{\mu},\not{p}'],\ [\not{p},\not{p}']p^{\mu},\ [\not{p},\not{p}']p'^{\mu}\\
\gamma_5\gamma_{\rho}\ :&\quad \gamma_5\gamma_{\rho}\,\epsilon^{\rho\mu\nu\sigma}\,p_{\nu}p'_{\sigma}\\
\gamma_5\ :&\quad \text{无}
\end{aligned}$$

其中每一项的系数是这个问题中的唯一标量变量(10.6.5)的函数. 利用 u 和 $\bar{u}$ 满足的 Dirac 方程:

$$\bar{u}(\mathbf{p}',\sigma')\,(\mathrm{i}\not{p}'+m)=0\,,\qquad (\mathrm{i}\not{p}+m)\,u(\mathbf{p},\sigma)=0\,,$$

可以极大地简化结果. 结果是, 除了前三条: p^{μ}, p'^{μ} 和 γ^{μ}, 其它所有的项都可以被扔掉.* 我们得到结论, 在费米子的质壳上, Γ^{μ} 可以表示成 γ^{μ}, p^{μ} 和 p'^{μ} 的线性组合, 我们将其写成

$$\begin{aligned}
\bar{u}(\mathbf{p}',\sigma')\Gamma^{\mu}(p',p)u(\mathbf{p},\sigma)=\bar{u}(\mathbf{p}',\sigma')\Big[&\gamma^{\mu}F(k^2)\\
&-\frac{\mathrm{i}}{2m}(p+p')^{\mu}G(k^2)+\frac{(p-p')^{\mu}}{2m}H(k^2)\Big]u(\mathbf{p},\sigma)\,.
\end{aligned} \tag{10.6.10}$$

$J^{\mu}(0)$ 的厄米性给出

$$\beta\Gamma^{\mu\dagger}(p',p)\beta=-\Gamma^{\mu}(p,p')\,, \tag{10.6.11}$$

---

*对于 $p^{\mu}\not{p}$, $p'^{\mu}\not{p}$, $p^{\mu}\not{p}'$ 和 $p'^{\mu}\not{p}'$, 它们分别可以被替换成 $\mathrm{i}mp^{\mu}$, $\mathrm{i}mp'^{\mu}$, $\mathrm{i}mp^{\mu}$ 和 $\mathrm{i}mp'^{\mu}$, 已经出现在我们的列表中, 所以是这些项显然不用考虑. 另外, 我们可以写出

$$[\gamma^{\mu},\not{p}]=2\gamma^{\mu}\not{p}-\{\gamma^{\mu},\not{p}\}=2\gamma^{\mu}\not{p}-2p^{\mu}\,,$$

这可以被替换成 $2\mathrm{i}m\gamma^{\mu}-2p^{\mu}$, 是已经出现在我们列表中的项的线性组合. 对于 $[\gamma^{\mu},\not{p}']$ 也同样如此. 另外,

$$[\not{p},\not{p}']=-2\not{p}'\not{p}+\{\not{p},\not{p}'\}=-2\not{p}'\not{p}+2p\cdot p'\,,$$

这可以被替换成 $2m^2+2p\cdot p'=-k^2$. 因此 $[\not{p},\not{p}']p^{\mu}$ 和 $[\not{p},\not{p}']p'^{\mu}$ 并不给出新结果. 最后, 为了处理最后一项, 我们可以使用关系

$$\gamma_5\gamma_{\rho}\,\epsilon^{\rho\mu\nu\sigma}=\tfrac{1}{6}\mathrm{i}\Big(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\sigma}+\gamma^{\sigma}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}+\gamma^{\nu}\gamma^{\sigma}\gamma^{\mu}-\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\sigma}-\gamma^{\mu}\gamma^{\sigma}\gamma^{\nu}-\gamma^{\sigma}\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\Big)\,.$$

与 p_{ν} 和 p'_{σ} 收缩, 然后将所有的 $\not{p}$ 因子移至右边, 将所有的 $\not{p}'$ 因子移至左边, 这又一次给出 p^{μ}, p'^{μ} 和 γ^{μ} 的线性组合.

这使得 $F(k^2)$, $G(k^2)$ 和 $H(k^2)$ 都必须是 k^2 的实函数.

方程(10.6.10)中的前两项自动满足守恒条件(10.6.2), 这是因为

$$(p'-p)_\mu\gamma^\mu = -\mathrm{i}\Big[(\mathrm{i}\not{p}'+m)-(\mathrm{i}\not{p}+m)\Big]$$

以及

$$(p'-p)\cdot(p'+p) = p'^2-p^2\,.$$

另一方面, $(p'-p)^2$ 一般不为零, 所以流守恒要求第三项为零

$$H(k^2)=0\,. \tag{10.6.12}$$

另外, 在方程(10.6.9)和(10.6.10)中令 $\mathbf{p}'\to\mathbf{p}$, 我们发现

$$\Big(\Psi_{\mathbf{p},\sigma'},\,J^\mu(0)\Psi_{\mathbf{p},\sigma}\Big) = \mathrm{i}\,q(2\pi)^{-3}\bar{u}(\mathbf{p},\sigma')\Big[\gamma^\mu F(0)-\frac{\mathrm{i}}{m}p^\mu G(0)\Big]u(\mathbf{p},\sigma)\,.$$

利用恒等式 $\{\gamma^\mu,\mathrm{i}\not{p}+m\}=2m\gamma^\mu+2\mathrm{i}p^\mu$, 我们又有

$$\bar{u}(\mathbf{p},\sigma')\gamma^\mu u(\mathbf{p},\sigma) = -\frac{\mathrm{i}p^\mu}{m}\bar{u}(\mathbf{p},\sigma')u(\mathbf{p},\sigma)\,.$$

再回忆起

$$\bar{u}(\mathbf{p},\sigma')u(\mathbf{p},\sigma)=\delta_{\sigma'\sigma}m/p^0$$

因而

$$\Big(\Psi_{\mathbf{p},\sigma'},\,J^\mu(0)\Psi_{\mathbf{p},\sigma}\Big) = q(2\pi)^{-3}(p^\mu/p^0)\delta_{\sigma'\sigma}\Big[F(0)+G(0)\Big]\,. \tag{10.6.13}$$

与方程(10.6.3)比较给出了归一化条件

$$F(0)+G(0)=1\,. \tag{10.6.14}$$

注意, 电磁顶点矩阵 Γ^μ 通常写成另外两个矩阵

$$\begin{aligned}\bar{u}(\mathbf{p}',\sigma')\Gamma^\mu(p',p)u(\mathbf{p},\sigma) = \bar{u}(\mathbf{p}',\sigma')\,\Big[&\gamma^\mu F_1(k^2)\\ &+\tfrac{1}{2}\mathrm{i}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\,(p'-p)_\nu\,F_2(k^2)\Big]u(\mathbf{p},\sigma)\,,\end{aligned} \tag{10.6.15}$$

这一形式将是有用的. 正如前面提到的, 利用定义 $F(k^2)$ 和 $G(k^2)$ 的那些量, 我们可以将第二项中的矩阵重新写为

$$\begin{aligned}&\bar{u}(\mathbf{p}',\sigma')\,\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\,[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\,(p'-p)_\nu\,u(\mathbf{p},\sigma)\\ &\quad=\bar{u}(\mathbf{p}',\sigma')\,\Big[-\mathrm{i}\not{p}'\gamma^\mu+\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\{\gamma^\mu,\not{p}'\}-\mathrm{i}\gamma^\mu\not{p}+\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\{\gamma^\mu,\not{p}\}\Big]\,u(\mathbf{p},\sigma)\\ &\quad=\bar{u}(\mathbf{p}',\sigma')\,\Big[\mathrm{i}(p'^\mu+p^\mu)+2m\gamma^\mu\Big]u(\mathbf{p},\sigma)\,.\end{aligned} \tag{10.6.16}$$

比较方程(10.6.15)与(10.6.10), 我们发现

$$F(k^2)=F_1(k^2)+2m\,F_2(k^2) \tag{10.6.17}$$

$$G(k^2)=-2m\,F_2(k^2)\,. \tag{10.6.18}$$

归一化条件(10.6.14)现在变成

$$F_1(0)=1\,.$$

为了用粒子的形状因子计算出它的磁矩, 我们在小动量的情况下, 即 $|\mathbf{p}|,|\mathbf{p}'|\ll m$, 考察顶点函数的空间部分. 为此, 利用方程(10.6.16)将方程(10.6.10)(其中$H=0$)重写成第三种形式:

$$\begin{aligned}\bar{u}(\mathbf{p}',\sigma')\Gamma^{\mu}(p',p)u(\mathbf{p},\sigma)=\frac{-\mathrm{i}}{2m}\bar{u}(\mathbf{p}',\sigma')\Big[&(p+p')^{\mu}\{F(k^2)+G(k^2)\}\\&-\frac{1}{2}[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}]\,(p'-p)_{\nu}\,F(k^2)\Big]u(\mathbf{p},\sigma)\,.\end{aligned}\tag{10.6.19}$$

对于零动量, 方程(5.4.19)和(5.4.20)给出的Dirac矩阵对易子的矩阵元是

$$\bar{u}(0,\sigma')[\gamma^i,\gamma^j]u(0,\sigma)=4\mathrm{i}\epsilon_{ijk}\Big(J_k^{(\frac{1}{2})}\Big)_{\sigma',\sigma}\,,\qquad \bar{u}(0,\sigma')[\gamma^i,\gamma^0]u(0,\sigma)=0\,,$$

其中 $\mathbf{J}^{(\frac{1}{2})}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$ 是自旋 $\frac{1}{2}$ 的角动量矩阵. 因此到小动量的第一阶,

$$\bar{u}(\mathbf{p}',\sigma')\boldsymbol{\Gamma}(p',p)u(\mathbf{p},\sigma)\to\frac{-\mathrm{i}}{2m}(\mathbf{p}+\mathbf{p}')\delta_{\sigma',\sigma}+\frac{1}{m}[(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\times\mathbf{J}^{(\frac{1}{2})}]_{\sigma',\sigma}\,F(0)\,.\tag{10.6.20}$$

因此, 在非常弱且与时间无关的外矢势 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 中, 相互作用哈密顿量 $H'=-\int\mathrm{d}^3x\,\mathbf{J}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 在小动量单粒子态之间的矩阵元是

$$\begin{aligned}(\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'},H'\Psi_{\mathbf{p},\sigma})&=\frac{-\mathrm{i}qF(0)}{m(2\pi)^3}\int\mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}}\,\mathbf{A}(\mathbf{x})\cdot[(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\times\mathbf{J}^{(\frac{1}{2})}]_{\sigma',\sigma}\\&=-\frac{qF(0)}{m(2\pi)^3}\int\mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}}(\mathbf{J}^{(\frac{1}{2})})_{\sigma',\sigma}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{x})\,,\end{aligned}\tag{10.6.21}$$

其中 $\mathbf{B}=\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}$ 是磁场. 因此在平缓变化的弱磁场极限下, 相互作用哈密顿量的矩阵元是

$$(\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'},H'\Psi_{\mathbf{p},\sigma})=-\frac{qF(0)}{m}(\mathbf{J}^{(\frac{1}{2})})_{\sigma',\sigma}\cdot\mathbf{B}\,\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,.\tag{10.6.22}$$

对于具有一般自旋 j 的任意粒子, 它的磁矩 μ 定义为: 粒子与平缓变化的静态弱磁场的相互作用矩阵元是

$$(\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'},H'\Psi_{\mathbf{p},\sigma})=-\frac{\mu}{j}(\mathbf{J}^{(j)})_{\sigma',\sigma}\cdot\mathbf{B}\,\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,.\tag{10.6.23}$$

因此, 对于电荷为 q, 质量为 m, 自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子, 方程(10.6.22)给出的磁矩是:

$$\mu=\frac{qF(0)}{2m}\,.\tag{10.6.24}$$

作为一个特殊情形, 这包含了著名的Dirac结果[7] $\mu=q/2m$, 即没有辐射修正的自旋 $\frac{1}{2}$ 粒子的磁矩.

在这里不加证明地讨论一下质子形状因子的测量, 比较电子-质子散射的实验数据与实验室参照系中的微分截面的Rosenbluth(罗森布鲁斯)公式[8]:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=&\frac{e^4}{4(4\pi)^2E_0^2}\frac{\cos^2(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)}\left[1+\frac{2E_0}{m}\sin^2(\theta/2)\right]^{-1}\\&\times\left\{\Big(F(k^2)+G(k^2)\Big)^2+\frac{k^2}{4m^2}\Big(2F^2(k^2)\tan^2(\theta/2)+G^2(k^2)\Big)\right\}\,,\end{aligned}$$

我们可以得到 $k^2>0$ 的形状因子 $F(k^2)$ 和 $G(k^2)$, 上式中, E_0 是入射电子的能量(这里取$E_0\gg m_e$); θ 是散射角; 而

$$k^2=\frac{4E_0^2\sin^2(\theta/2)}{1+(2E_0/m)\sin^2(\theta/2)}$$

10.7 Källén-Lehmann表示*

我们在10.2节看到, 对于(10.2.1)这样的编时乘积的矩阵元, 单粒子中间态的出现导致了它的Fourier变换中出现了极点. 多粒子中间态则会导致更加复杂的奇异性, 很难进行一般描述. 然而, 在真空期望值只包含两个算符的特殊情况下, 我们有一个方便的表示, 它清楚地展示了这个Fourier变换的解析结构. 特别地, 这个表示可用于传播子, 即两个算符是基本粒子的场. 结合量子力学中的正定性要求, 这一表示对传播子的渐进行为和重整化常数的大小给出了有趣的限制.

考虑复标量Heisenberg绘景算符$\Phi(x)$, 它可以是也可以不是基本粒子场. 乘积$\Phi(x)\Phi^\dagger(y)$的真空期望值可以表示成

$$\langle\Phi(x)\Phi^\dagger(y)\rangle_0 = \sum_n \langle 0|\Phi(x)|n\rangle\,\langle n|\Phi^\dagger(y)|0\rangle\,, \tag{10.7.1}$$

其中求和取遍态的任意完全集. (这里对n的求和包含对连续指标的积分和对离散指标的求和.) 选这些态为动量4-矢P^μ的本征态, 平移不变性告诉我们

$$\begin{aligned}\langle 0|\Phi(x)|n\rangle &= \exp(\mathrm{i}p_n\cdot x)\langle 0|\Phi(0)|n\rangle\,,\\ \langle n|\Phi^\dagger(y)|0\rangle &= \exp(-\mathrm{i}p_n\cdot y)\langle n|\Phi^\dagger(0)|0\rangle\end{aligned} \tag{10.7.2}$$

因此

$$\langle\Phi(x)\Phi^\dagger(y)\rangle_0 = \sum_n \exp(\mathrm{i}p_n\cdot(x-y))\,|\langle 0|\Phi(0)|n\rangle|^2\,. \tag{10.7.3}$$

将这一结果写成谱函数的形式将是方便的. 注意到求和$\sum_n \delta^4(p-p_n)|\langle 0|\Phi(0)|n\rangle|^2$是4-矢$p^\mu$的标量函数, 因此只能依赖$p^2$和(当$p^2\le 0$时)阶跃函数$\theta(p^0)$. 事实上, 方程(10.7.3)中的中间态总有$p^2\le 0$和$p^0>0$, 所以这个求和取如下的形式

$$\sum_n \delta^4(p-p_n)\,|\langle 0|\Phi(0)|n\rangle|^2 = (2\pi)^{-3}\,\theta(p^0)\,\rho(-p^2) \tag{10.7.4}$$

其中在$p^2>0$时有$\rho(-p^2)=0$. (为了以后的方便, 从ρ中提取出了因子$(2\pi)^{-3}$.) 谱函数$\rho(-p^2)$显然是实的而且是正的. 有了这个定义, 我们可以将(10.7.3)重新表示成

$$\begin{aligned}\langle\Phi(x)\Phi^\dagger(y)\rangle_0 &= (2\pi)^{-3}\int \mathrm{d}^4p\,\exp[\mathrm{i}p\cdot(x-y)]\,\theta(p^0)\,\rho(-p^2)\\ &= (2\pi)^{-3}\int \mathrm{d}^4p\int_0^\infty \mathrm{d}\mu^2\,\exp[\mathrm{i}p\cdot(x-y)]\,\theta(p^0)\\ &\qquad\times\rho(\mu^2)\,\delta(p^2+\mu^2)\,.\end{aligned} \tag{10.7.5}$$

交换对p^μ和μ^2积分的次序, 这可以表示成

$$\langle\Phi(x)\Phi^\dagger(y)\rangle_0 = \int_0^\infty \mathrm{d}\mu^2\,\rho(\mu^2)\,\Delta_+(x-y;\mu^2)\,, \tag{10.7.6}$$

其中Δ_+是熟悉的函数

$$\Delta_+(x-y;\mu^2) \equiv (2\pi)^{-3}\int \mathrm{d}^4p\,\exp[\mathrm{i}p\cdot(x-y)]\,\theta(p^0)\,\delta(p^2+\mu^2)\,. \tag{10.7.7}$$

*本节有些脱离本书的发展主线, 可以在第一次阅读时跳过.

用相同的方法, 我们可以证明

$$\langle\Phi^\dagger(y)\Phi(x)\rangle_0 = \int_0^\infty \mathrm{d}\mu^2\,\bar\rho(\mu^2)\,\Delta_+(y-x;\mu^2) \tag{10.7.8}$$

其中第二个谱函数 $\bar\rho(\mu^2)$ 定义为

$$\sum_n \delta^4(p-p_n)\,|\langle n|\Phi(0)|0\rangle|^2 = (2\pi)^{-3}\,\theta(p^0)\,\bar\rho(-p^2)\,. \tag{10.7.9}$$

我们现在使用因果律条件, 即对于类空间隔 $x-y$, 对易子 $[\Phi(x),\Phi^\dagger(y)]$ 必须为零. 这个对易子的真空期望值是

$$\langle[\Phi(x),\Phi^\dagger(y)]\rangle_0 = \int_0^\infty \mathrm{d}\mu^2\,\Big(\rho(\mu^2)\,\Delta_+(x-y;\mu^2) - \bar\rho(\mu^2)\,\Delta_+(y-x;\mu^2)\Big)\,. \tag{10.7.10}$$

我们在 5.2 节中提到过, 对于类空的 $x-y$, 函数 $\Delta_+(x-y)$ 虽然不为零, 但它会是偶函数. 为了使(10.7.10)对于所有类空间隔都为零, 必须有

$$\rho(\mu^2) = \bar\rho(\mu^2)\,. \tag{10.7.11}$$

这是 CPT 定理的特殊情况, 我们在这里没有使用微扰论就证明了它; 对于 $p^2=-\mu^2$ 的任何态, 如果它有算符 Φ 的量子数, 那么必有另外一个相应的态, 它有 $p^2=-\mu^2$ 并且有算符 $\Phi^\dagger$ 的量子数.

利用方程(10.7.11), 编时乘积的真空期望值是

$$\Big\langle T\Big\{\Phi(x)\Phi^\dagger(y)\Big\}\Big\rangle_0 = -\mathrm{i}\int_0^\infty \mathrm{d}\mu^2\,\rho(\mu^2)\,\Delta_F(x-y;\mu^2)\,, \tag{10.7.12}$$

其中 $\Delta_F(x-y;\mu^2)$ 是质量为 μ 的无自旋粒子的 Feynman 传播子:

$$-\mathrm{i}\Delta_F(x-y;\mu^2) \equiv \theta(x^0-y^0)\Delta_+(x-y;\mu^2) - \theta(y^0-x^0)\Delta_+(y-x;\mu^2)\,. \tag{10.7.13}$$

借用 10.3 节引入的全传播子的记号, 我们引入动量空间函数

$$-\mathrm{i}\Delta'(p) \equiv \int \mathrm{d}^4x\,\exp[-\mathrm{i}p\cdot(x-y)]\,\Big\langle T\Big\{\Phi(x)\Phi^\dagger(y)\Big\}\Big\rangle_0\,. \tag{10.7.14}$$

回忆起

$$\int \mathrm{d}^4x\,\exp[-\mathrm{i}p\cdot(x-y)]\,\Delta_F(x-y;\mu^2) = \frac{1}{p^2+\mu^2-\mathrm{i}\epsilon}\,. \tag{10.7.15}$$

这给出了我们的谱表示:[9]

$$\Delta'(p) = \int_0^\infty \rho(\mu^2)\,\frac{\mathrm{d}\mu^2}{p^2+\mu^2-\mathrm{i}\epsilon}\,. \tag{10.7.16}$$

这一结果再加上 $\rho(\mu^2)$ 的正定性要求可以立即给出这样的结论, 当 $|p^2|\to\infty$ 时, $\Delta'(p)$ 不可能比裸传播子 $1/(p^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon)$ 更快**地趋于零. 不时地有人提议在非微扰拉格朗日量中引入高阶导

**实际上, 我们甚至不能确定 $\Delta'(p)$ 在 $|p^2|\to\infty$ 时是否为零, 即使看上去似乎能从谱表示中得到这个结论. 问题源于我们交换了对 p^μ 和对 μ^2 的积分. 可以确定的是, $\Delta'(p)$ 是 $-p^2$ 的解析函数, 且有一穿过正实轴 $-p^2=\mu^2$ 的大小为 $\pi\rho(\mu^2)$ 的间断点, 这将通过下一节的方法证明. 由此得出, $\Delta'(p)$ 由谱函数 $\rho(\mu^2)$ 的色散关系加上可能的减除给出:

$$\Delta'(p) = P(p^2) + (-p^2+\mu_0^2)^n\int_0^\infty \frac{\rho(\mu^2)}{(\mu^2+\mu_0^2)^n}\,\frac{\mathrm{d}\mu^2}{p^2+\mu^2-\mathrm{i}\epsilon}\,,$$

其中 n 是正整数, μ_0^2 是任意的正常数, 而 $P(p^2)$ 是依赖于 μ_0^2 的 p^2 的 $n-1$ 阶多项式, 在 $n=0$ 时不出现.

数项, 这会使传播子在 $|p^2| \to \infty$ 时比 $1/p^2$ 更快地趋于零, 但是谱表示表明这必将违背量子力学的正定性假设.

利用谱表示与等时对易关系, 我们可以对谱函数导出一个有趣的求和规则. 如果 $\Phi(x)$ 是按照通常方式归一化的(非重整化)正则场算符, 那么

$$\left[\frac{\partial\Phi(\mathbf{x},t)}{\partial t}\,,\Phi^\dagger(\mathbf{y},t)\right] = -\mathrm{i}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,. \tag{10.7.17}$$

我们注意到

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\Delta_+(x-y)\bigg|_{x^0=y^0} = -\mathrm{i}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

所以谱表示(10.7.10)与对易关系(10.7.17)告诉我们

$$\int_0^\infty \rho(\mu^2)\,\mathrm{d}\mu^2 = 1\,. \tag{10.7.18}$$

这表明在 $|p^2| \to \infty$ 时, 非重整化场的动量空间传播子(10.7.16)具有自由场的渐进行为

$$\Delta'(p) \to \frac{1}{p^2}\,.$$

这一结果仅在合理的紫外发散正规化方案下才是有意义的; 在微扰论中, 非重整化场会有无限大的矩阵元, 且传播子的定义是有问题的.

现在考虑这样的可能性, 存在一个质量为 m 的单粒子态 $|\mathbf{k}\rangle$, 它与态 $\langle 0|\Phi(0)$ 的矩阵元不为零. Lorentz 不变性要求这个矩阵元取如下形式

$$\langle 0|\Phi(0)|\mathbf{k}\rangle = (2\pi)^{-3/2}\left(2\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}\right)^{-1/2} N\,, \tag{10.7.19}$$

其中 N 是常数. 根据 10.3 节中的普遍结果, 非重整化场的传播子 $\Delta'(p)$ 在 $p^2 \to -m^2$ 处应该有一个留数为 $Z \equiv |N|^2 > 0$ 的极点. 即,

$$\rho(\mu^2) = Z\,\delta(\mu^2-m^2) + \sigma(\mu^2)\,, \tag{10.7.20}$$

其中 $\sigma(\mu^2) \geq 0$ 是多粒子态的贡献. 结合方程(10.7.18), 这会给出这样的结果

$$1 = Z + \int_0^\infty \sigma(\mu^2)\,\mathrm{d}\mu^2 \tag{10.7.21}$$

因此

$$Z \leq 1 \tag{10.7.22}$$

其中等号仅对于自由粒子成立, 这时 $\langle 0|\Phi(0)$ 与多粒子态之间的矩阵元为零.

因为 Z 是正的, 方程(10.7.21)也可以认为是给场 Φ 与多粒子态的耦合提供了一个上界:

$$\int_0^\infty \sigma(\mu^2)\,\mathrm{d}\mu^2 \leq 1 \tag{10.7.23}$$

其中等号在 $Z=0$ 时成立. 极限 $Z=0$ 有一个有趣的解释, 它可以作为粒子是复合粒子而非基本粒子的条件.[10] 在这里, "复合"粒子可以理解成场不出现在拉格朗日量中的粒子. 考虑这样一个

粒子, 例如一个中性无自旋粒子, 并假定它的量子数允许它被由其它场构造出的算符 $F(\Psi)$ 湮灭. 通过在拉格朗日密度中添加形如[†] $\Delta\mathscr{L} = (\Phi - F(\Psi))^2$ 的项, 我们可以自由地引入该粒子的场 Φ, 这是因为对 Φ 的路径积分可以通过令它等于稳相点 $\Phi = F(\Psi)$ 做掉, 这时 $\Delta\mathscr{L} = 0$. 但是假使我们不这样做, 转而写成 $\Delta\mathscr{L} = \Delta\mathscr{L}_0 + \Delta\mathscr{L}_1$, 其中 $\Delta\mathscr{L}_0 \equiv -\frac{1}{2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - \frac{1}{2}m^2\Phi^2$ 是通常的自由场拉格朗日量, 并将 $\Delta\mathscr{L}_1 = \Delta\mathscr{L} - \Delta\mathscr{L}_0$ 视作相互作用. 相互作用中的项 $\frac{1}{2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi$ 是不新奇的. 我们在方程(10.3.12)中见过这样的项, 但在那里乘了因子 $(1 - Z)$; 唯一的不同是在这里 $Z = 0$. 代替调整 Z 以满足场重整化条件 $\Pi^{*\prime}(0) = 0$, 我们在这里必须视其为加在复合粒子耦合常数上的条件. 不幸的是, 在量子场论中实现这一步骤是不可能的, 这是因为, 正如我们已经看到的, $Z = 0$意味着粒子与它组分的耦合会尽可能的强, 这使得无法采用微扰论. 在非相对论量子力学中, 条件 $Z = 0$ 被证实确实是有用的; 例如, 它确定了氘核与中子和质子的耦合.[12]

尽管这里导出的谱表示针对的是无自旋粒子, 但很容易推广到其它场. 事实上, 在下一章我们将证明, 精确到 e^2 阶, 电磁场的 Z-因子(一般称为 Z_3)为

$$Z_3 = 1 - \frac{e^2}{12\pi^2}\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m_e^2}\right)$$

(其中$\Lambda \gg m_e$是紫外截断), 符合约束(10.7.22)的要求.

10.8 色散关系*

早期理论家曾尝试将微扰量子场论用于强核力和弱核力, 不过失败了, 这在 20 世纪 50 年代后期引导理论家们尝试利用散射振幅的解析性与幺正性推导不依赖于任何特定场论的非微扰结果. 这开始于色散关系研究的复兴. 在它的原始形式中,[13] 色散关系将折射率的实部写成了对虚部的积分. 这是将折射律作为频率的函数, 然后从这个函数的解析性质中推导出的结果, 这一结果来自如下条件: 电磁信号在介质中不能比光在真空中传播的更快. 通过将折射率表示为向前光子散射振幅, 色散关系可以重新写为向前散射振幅的实部是对虚部的积分, 再经由幺正性, 就可以用总截面表示. 这一关系让人振奋的一件事情是, 它为传统微扰论提供了一个替代品; 给定 e^2 阶的散射振幅, 我们可以计算出到 e^4 阶的散射截面以及散射振幅的虚部, 然后利用色散关系计算向前散射振幅的实部到同一阶, 在这个过程中甚至不需要计算一个圈图.

色散关系的现代方法始于 Gell-Mann, Goldberger(戈德伯格)和 Thirring(瑟林)在 1954 年的工作.[14] 取代考察光在介质中的传播, 他们从微观因果律的条件, 即算符的对易子在类空间隔下为零, 直接导出了散射振幅的解析性. 这一方法使 Goldberger[15]在不久之后就导出了 π 介子-核子向前散射振幅的一个非常有用的公式.

为了看到如何使用微观因果律原理, 在实验室参照系中考虑任意自旋的无质量玻色子在任意靶 α 上的向前散射, 这里靶的质量 $m_\alpha > 0$ 且 $\mathbf{p}_\alpha = 0$. (这不仅对光子的散射有重要的应用, 在 $m_\pi = 0$ 的极限下对 π 介子散射也很有用, 我们将在卷II中对此进行讨论.) 通过反复使用方

[†] 在凝聚态物理中, 这被称为“Hubbard-Stratonovich(哈伯德-斯特拉托诺维奇)变换”.[11] 在卷II我们关于超导的讨论中, 这被用来引入电子对的场.

* 本节或多或少的处在本书的发展主线之外, 可以在第一次阅读时跳过.

程(10.3.4)或 Lehmann-Symanzik-Zimmerman 定理,[3] 这里的 S-矩阵元是

$$S = \frac{1}{(2\pi)^3\sqrt{4\omega\omega'}|N|^2}\lim_{k^2\to 0}\lim_{k'^2\to 0} \times \int \mathrm{d}^4x \int \mathrm{d}^4y\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'\cdot y}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}(\mathrm{i}\Box_y)(\mathrm{i}\Box_x)\,\langle\alpha|T\{A^\dagger(y),\,A(x)\}|\alpha\rangle\,. \tag{10.8.1}$$

这里的 k 和 k' 是初态和末态玻色子的 4-动量, 其中 $\omega = k^0$, $\omega' = k'^0$; $A(x)$ 是任意 Heisenberg 绘景算符, 它在单玻色子态 $|k\rangle$ 与真空之间有不为零的矩阵元 $\langle \mathrm{VAC}|A(x)|k\rangle = (2\pi)^{-3/2}(2\omega)^{-1/2}N\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}$; N 是该矩阵元中的常数. 在光子散射中, $A(x)$ 是电磁场的一个横向分量, 而对于无质量 π 介子散射, 它是强子场的一个赝标量函数. 插入微分算符 $-\mathrm{i}\Box_x$ 和 $-\mathrm{i}\Box_y$ 是为了提供因子 $\mathrm{i}k'^2$ 和 $\mathrm{i}k^2$ 来抵消外线玻色子传播子. 令这些算符作用在 $A^\dagger(y)$ 和 $A(x)$ 上, 我们有

$$S = \frac{-1}{(2\pi)^3\sqrt{4\omega\omega'}|N|^2}\lim_{k^2\to 0}\lim_{k'^2\to 0} \times \int \mathrm{d}^4x \int \mathrm{d}^4y\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'\cdot y}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\langle\alpha|T\{J^\dagger(y),\,J(x)\}|\alpha\rangle + \mathrm{ETC}\,, \tag{10.8.2}$$

其中 $J(x) \equiv \Box_x A(x)$, 导数作用在编时乘积中的阶跃函数上产生了等时对易子, 而"ETC"代表等时对易子项(equal time commutator)的 Fourier 变换. 对于 $A(x)$ 和 $A^\dagger(y)$ (或者它们的导数)这样的算符, 除非 $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, 否则对易子在 $x^0 = y^0$ 时为零, 所以"ETC"项是作用在 $\delta^4(x-y)$ 上的微分算符的 Fourier 变换, 因而是玻色子 4-动量的多项式函数. 我们在这里关心的是S-矩阵元的解析性质, 所以这个多项式的细节是无关紧要的.

利用平移不变性, 方程(10.8.2)给出的 S-矩阵元形如 $S = -2\pi\mathrm{i}\delta^4(k'-k)M(\omega)$, 其中

$$M(\omega) = \frac{-\mathrm{i}}{2\omega|N|^2}F(\omega)\,, \tag{10.8.3}$$

$$F(\omega) \equiv \int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\,\ell\cdot x}\langle\alpha|T\{J^\dagger(0),\,J(x)\}|\alpha\rangle + \mathrm{ETC}\,, \tag{10.8.4}$$

现在有 $k^\mu = \omega\ell^\mu$, 其中 ℓ 是满足 $\ell^\mu\ell_\mu = 0$ 和 $\ell^0 = 1$ 的固定 4-矢.

以对易子的形式, 编时乘积可以重新写成两种不同的形式

$$\begin{aligned} T\{J^\dagger(0), J(x)\} &= \theta(-x^0)[J^\dagger(0), J(x)] + J(x)J^\dagger(0) \\ &= -\theta(x^0)[J^\dagger(0), J(x)] + J^\dagger(0)J(x)\,. \end{aligned} \tag{10.8.5}$$

相应地, 我们可以写下

$$F(\omega) = F_A(\omega) + F_+(\omega) = F_R(\omega) + F_-(\omega)\,, \tag{10.8.6}$$

其中

$$F_A(\omega) \equiv \int \mathrm{d}^4x\,\theta(-x^0)\,\langle\alpha|[J^\dagger(0), J(x)]|\alpha\rangle\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\,\ell\cdot x} + \mathrm{ETC}\,, \tag{10.8.7}$$

$$F_R(\omega) \equiv -\int \mathrm{d}^4x\,\theta(x^0)\,\langle\alpha|[J^\dagger(0), J(x)]|\alpha\rangle\,\mathrm{e}^{i\omega\,\ell\cdot x} + \mathrm{ETC}\,, \tag{10.8.8}$$

$$F_+(\omega) \equiv \int \mathrm{d}^4x\,\langle\alpha|J(x)\,J^\dagger(0)|\alpha\rangle\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\,\ell\cdot x}\,, \tag{10.8.9}$$

$$F_-(\omega) \equiv \int \mathrm{d}^4x\,\langle\alpha|J^\dagger(0)\,J(x)|\alpha\rangle\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\,\ell\cdot x}\,. \tag{10.8.10}$$

微观因果律告诉我们, 除非 x^μ 在光锥内, 否则(10.8.7)和(10.8.8)中的被积函数为零, 而阶跃函数又要求(10.8.7)中的 x^μ 在向后光锥内, 从而使 $x\cdot\ell>0$, 阶跃函数还要求(10.8.8)中的 x^μ 在向前光锥内, 从而使 $x\cdot\ell<0$. 我们由此得到结论, $F_A(\omega)$在 $\mathrm{Im}\,\omega>0$ 时是解析的而 $F_R(\omega)$ 在 $\mathrm{Im}\,\omega<0$ 是解析的, 这是因为在这两种情况中因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\,\ell\cdot x}$ 均为 x^μ 的积分提供了一个截断. (回忆"ETC"项是多项式, 因此对于所有有限点均解析.) 这样我们可以定义函数

$$\mathscr{F}(\omega)\equiv\begin{cases}F_A(\omega) & \mathrm{Im}\,\omega>0\\ F_R(\omega) & \mathrm{Im}\,\omega<0\end{cases}\,, \tag{10.8.11}$$

除了在实轴上有分支割线, 这个函数在整个复 ω 平面上是解析的.

我们现在可以来推导色散关系了. 根据方程(10.8.6), $\mathscr{F}(\omega)$ 穿越任意实 E 上的分支割线给出的间断值是

$$\mathscr{F}(E+\mathrm{i}\epsilon)-\mathscr{F}(E-\mathrm{i}\epsilon)=F_A(E)-F_R(E)=F_-(E)-F_+(E)\,. \tag{10.8.12}$$

如果 $\mathscr{F}(\omega)/\omega^n$ 在 $|\omega|\to\infty$ 时在上半平面或下半平面为零, 那么通过除以任意一个 n 阶多项式 $P(\omega)$, 我们可以得到一个在 $|\omega|\to\infty$ 时为零的函数, 并且这个函数除了实轴上的分支割线以及 $P(\omega)$ 的零点 ω_ν 所给出的极点外都是解析的. (如果这里$\mathscr{F}(\omega)$ 本身在 $|\omega|\to\infty$ 时为零, 我们可以取 $P(\omega)=1$.) 根据留数方法, 我们有

$$\frac{\mathscr{F}(\omega)}{P(\omega)}+\sum_\nu\frac{\mathscr{F}(\omega_\nu)}{(\omega_\nu-\omega)P'(\omega_\nu)}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{\mathscr{F}(z)\,\mathrm{d}z}{(z-\omega)\,P(z)}\,, \tag{10.8.13}$$

其中 ω 是实轴以外的任意点, 而 C 是由两部分构成的围道: 一个在实轴以上从 $-\infty+\mathrm{i}\epsilon$ 跑到 $+\infty+\mathrm{i}\epsilon$ 然后沿着大半圆回到 $-\infty+\mathrm{i}\epsilon$, 另一个在实轴以下, 从 $+\infty-\mathrm{i}\epsilon$ 跑到 $-\infty-\mathrm{i}\epsilon$ 然后沿着大半圆回到 $+\infty-\mathrm{i}\epsilon$. 由于函数 $\mathscr{F}(z)/P(z)$ 在 $|z|\to\infty$ 时为零, 我们可以忽略来自大半圆的贡献. 利用方程(10.8.12), 方程(10.8.13)变成

$$\mathscr{F}(\omega)=Q(\omega)+\frac{P(\omega)}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F_-(E)-F_+(E)}{(E-\omega)P(E)}\,\mathrm{d}E\,, \tag{10.8.14}$$

其中 $Q(\omega)$ 是 $(n-1)$ 阶多项式

$$Q(\omega)\equiv-P(\omega)\sum_\nu\frac{\mathscr{F}(\omega_\nu)}{(\omega_\nu-\omega)P'(\omega_\nu)}\,.$$

这种形式的色散关系, 即 $P(\omega)$ 和 $Q(\omega)$ 分别是 n 阶和 $n-1$ 阶多项式, 被称为有 n 个减除. 如果我们可以取 $P=1$, 那么 $Q=0$, 这个色散关系就被称为未减除的.

如果我们让 ω 从上方接近实轴, 方程(10.8.14)给出

$$F_A(\omega)=Q(\omega)+\frac{P(\omega)}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F_-(E)-F_+(E)}{(E-\omega-\mathrm{i}\epsilon)\,P(E)}\,\mathrm{d}E\,. \tag{10.8.15}$$

回忆方程(10.8.6)和(3.1.25), 就有

$$F(\omega)=Q(\omega)+\frac{1}{2}F_-(\omega)+\frac{1}{2}F_+(\omega)+\frac{P(\omega)}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F_-(E)-F_+(E)}{(E-\omega)\,P(E)}\,\mathrm{d}E \tag{10.8.16}$$

这里 $1/(E-\omega)$ 现在要解释成主值函数 $\mathscr{P}/(E-\omega)$.

这一结果是有用的, 因为我们可以用可测截面表示函数 $F_\pm(E)$. 对方程(10.8.9)和(10.8.10)中的多粒子中间态 β 的完全集求和(包括对 β 中粒子的动量积分)并再次使用平移不变性, 我们有

$$F_+(E)=(2\pi)^4\sum_\beta|\langle\beta|J(0)^\dagger|\alpha\rangle|^2\,\delta^4(-p_\alpha+E\ell+p_\beta)\,, \tag{10.8.17}$$

$$F_-(E)=(2\pi)^4\sum_\beta|\langle\beta|J(0)|\alpha\rangle|^2\,\delta^4(p_\alpha+E\ell-p_\beta)\,. \tag{10.8.18}$$

但是, 对于吸收无质量玻色子 B 的过程 $B+\alpha\to\beta$, 或者吸收它的反粒子 B^c 的过程 $B^c+\alpha\to\beta$, 它们的矩阵元是

$$-2\mathrm{i}\pi M_{B^c+\alpha\to\beta}=\frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E_{B^c}N}}\langle\beta|J(0)^\dagger|\alpha\rangle\,, \tag{10.8.19}$$

$$-2\mathrm{i}\pi M_{B+\alpha\to\beta}=\frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E_BN}}\langle\beta|J(0)|\alpha\rangle\,. \tag{10.8.20}$$

与方程(3.4.15)比较, 我们看到 $F_\pm(E)$ 可以用能量 $\mp E$ 处的总截面表示[**]:

$$F_+(E)=\theta(-E)\frac{2|E|\,|N|^2}{(2\pi)^3}\sigma_{\alpha+B^c}(|E|)\,, \tag{10.8.21}$$

$$F_-(E)=\theta(E)\frac{2E\,|N|^2}{(2\pi)^3}\sigma_{\alpha+B}(E)\,. \tag{10.8.22}$$

现在, 对于大于零的实 ω, 散射振幅(10.8.3)是

$$\begin{aligned}M(\omega)=&\frac{-\mathrm{i}Q(\omega)}{2\omega|N|^2}-\frac{\mathrm{i}}{2(2\pi)^3}\sigma_{\alpha+B}(\omega)\\&-\frac{P(\omega)}{\omega(2\pi)^4}\int_0^\infty\left[\frac{\sigma_{\alpha+B}(E)}{(E-\omega)P(E)}+\frac{\sigma_{\alpha+B^c}(E)}{(E+\omega)P(-E)}\right]E\,dE\,.\end{aligned} \tag{10.8.23}$$

更加常见的是用实验室参照系中的向前散射振幅 $f(\omega)$ 来表示这个色散关系, 实验室参照系被定义成实验室参照系中的微分截面在向前方向上是 $|f(\omega)|^2$. 这个振幅用 $M(\omega)$ 表示是 $f(\omega)=-4\pi^2\omega\,M(\omega)=2\pi^2\mathrm{i}F(\omega)/|N|^2$, 所以方程(10.8.23)现在变成

$$\begin{aligned}f(\omega)=&R(\omega)+\frac{\mathrm{i}\omega}{4\pi}\sigma_{\alpha+B}(\omega)\\&+\frac{P(\omega)}{4\pi^2}\int_0^\infty\left[\frac{\sigma_{\alpha+B}(E)}{(E-\omega)P(E)}+\frac{\sigma_{\alpha+B^c}(E)}{(E+\omega)P(-E)}\right]E\,\mathrm{d}E\,,\end{aligned}$$

其中 $R(\omega)\equiv 2\mathrm{i}\pi^2Q(\omega)/|N|^2$. 光学定理(3.6.4)告诉我们右边第二项等于 $\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,f(\omega)$, 所以这也可以写成更传统的形式

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,f(\omega)=&R(\omega)\\&+\frac{P(\omega)}{4\pi^2}\int_0^\infty\left[\frac{\sigma_{\alpha+B}(E)}{(E-\omega)P(E)}+\frac{\sigma_{\alpha+B^c}(E)}{(E+\omega)P(-E)}\right]E\,\mathrm{d}E\,.\end{aligned} \tag{10.8.24}$$

[**]在选择定则允许跃迁 $\alpha\to\alpha+B$ 和 $\alpha\to\alpha+B^c$ 的某些情况下, 函数 $F_\pm(E)$ 也包含正比于 $\delta(E)$ 的项, 这一项来源于对中间态 β 的求和中单粒子态 α 的贡献. 对于横向极化光子, 或是极限 $m_\pi\to0$ 下的赝标量 π 介子, 这种情况不会发生.

特别地, 我们看到, 如果我们将 $P(\omega)$ 选为实的, 那么 $R(\omega)$ 也是实的.

向前散射振幅同时满足一个重要的对称性条件. 通过将方程(10.8.7)和(10.8.8)中的积分变量 x 变成 $-x$, 然后再使用平移不变性

$$\langle\alpha|[J^\dagger(0),J(-x)]|\alpha\rangle=\langle\alpha|[J^\dagger(x),J(0)]|\alpha\rangle$$

我们看到当 $\operatorname{Im}\omega\le 0$ 时, 除了 J 与 $J^\dagger$ 交换了位置, $F_A(-\omega)$ 与 $F_R(\omega)$ 是相同的. 即,

$$F_A(-\omega)=F_R^c(\omega)\quad \text{对于}\quad \operatorname{Im}\omega\le 0\,,$$

其中下标 c 表示该振幅是反粒子 B^c 在 α 上的散射. (这个关系不受方程(10.8.7)和(10.8.8)中的等时对易子项的影响, 我们把这个证明留给读者.) 以同样的方式, 我们发现

$$F_R(-\omega)=F_A^c(\omega)\quad \text{对于}\quad \operatorname{Im}\omega\ge 0\,,$$

以及, 对实 ω

$$F_\pm(-\omega)=F_\mp(\omega)\,.$$

在(10.8.6)中使用这些关系, 并回忆 $f(\omega)$ 正比于 $F(\omega)$, 对实 ω, 我们发现了**交叉对称性关系**,

$$f(-\omega)=f^c(\omega)\,. \tag{10.8.25}$$

我们可以随意地将 $P(\omega)$ 取为任何阶数足够高的多项式, 但这样一来, $R(\omega)$ 不仅依赖于 $P(\omega)$, 还依赖于 $\mathscr{F}(\omega)$ 在 $P(\omega)$ 零点处的值. 如果 $P(\omega)$ 是实的且是 n 阶的, 方程(10.8.16)中的自由参量只能是实 $(n-1)$ 阶多项式 $R(\omega)$ 中的 n 个实系数. 因此方程(10.8.16)中只包含 n 个未知的独立实常数, 即对于给定的 $P(\omega)$, 多项式 $R(\omega)$ 中的系数. 除此之外 $P(\omega)$ 是任意的, 因此我们希望将 n 阶多项式 $P(\omega)$ 取得尽可能的小.

我们可以尝试取 $P(\omega)=1$, 但这并不奏效. 3.7 节的分析表明向前散射振幅应该以 ω 或者 $\omega\ln^2\omega$ 那样的速率增长. 在这种情况下, 为了使 $f(\omega)/P(\omega)$ 在 $\omega\to\infty$ 时趋于零, 将 $P(\omega)$ 取为二阶多项式是足够的, 这使得 $R(\omega)$ 关于 ω 是线性的. 方便起见选择 $P(E)=E^2$, 于是方程(10.8.24)变成

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}f(\omega)&=a+b\omega\\&\quad+\frac{\omega^2}{4\pi^2}\int_0^\infty\left[\frac{\sigma_{\alpha+B}(E)}{(E-\omega)}+\frac{\sigma_{\alpha+B^c}(E)}{(E+\omega)}\right]\frac{\mathrm{d}E}{E},\end{aligned} \tag{10.8.26}$$

其中 a 和 b 是未知的实常数. 交叉对称性条件(10.8.25)告诉我们, 对反粒子散射振幅 $f^c(\omega)$, 色散关系中相应的常数是

$$a^c=a\,,\qquad b^c=-b\,. \tag{10.8.27}$$

例如, 如果我们假定截面 $\sigma_{\alpha+B}(E)$ 和 $\sigma_{\alpha+B^c}(E)$ 在 $E\to\infty$ 时的行为是 $(\ln E)^r$ 乘以不同的常数, 那么(10.8.26)给出

$$\operatorname{Re}f(\omega)\sim[\sigma_{\alpha+B}(\omega)-\sigma_{\alpha+B^c}(\omega)]\omega\ln\omega\sim\omega(\ln\omega)^{r+1} \tag{10.8.28}$$

因此散射振幅实部的增长要比虚部快一个因子 $\ln\omega$. 这是难以置信的; 我们在 3.7 节看到, 在 $\omega\to\infty$ 时, 散射振幅的实部预期要比虚部小得多, 这也是被实验所证实的. 由此我们得出结论,

如果 $\sigma_{\alpha+B}(E)$ 和 $\sigma_{\alpha+B^c}(E)$ 在 $E\to\infty$ 时的行为是 $(\ln E)^r$ 乘以常数, 那么这两个常数必须相同. 由于我们这里关心的是高能极限, 这一结果不依赖 B 是无质量玻色子的假定, 所以在同样意义上, 在高能下, 任何粒子在固定靶上的散射截面与它的反粒子在同一靶上的散射截面之比应趋于一. 这一结果是所谓的 Pomeranchuk (波梅兰丘克)定理[16]稍微推广后的版本. (Pomeranchuk 仅考虑了 $r=0$ 的情况, 而 3.7 节以及对截面行为的观测都表明 $r=2$ 是更可能的情况.)

尽管 Pomeranchuk 对散射振幅渐进行为的估计类似于 3.7 节中的讨论, 当今, 高能行为通常从 Regge (雷杰)极点理论[17]得到. 在这里进入该理论的细节会使我们偏离主题; 我们只需知道, 对于强子过程, 随着 ω 趋于无穷, $f(\omega)$ 的渐进行为是对正比于 $\omega^{\alpha_n(0)}$ 的项的求和, 其中 $\alpha_n(t)$ 是一组"Regge 轨迹", 每一个代表在碰撞过程中不同单强子态的一个无线族的交换. 强子-强子散射中的领头轨迹(实际上是很多轨迹的复合)是"玻密子(Pomeron)", 对于玻密子, $\alpha(0)$ 接近一. 正是这个轨迹给出了在 $E\to\infty$ 时近似等于常数的截面. 根据 Pomeranchuk 定理, 玻密子与任何强子的耦合都等于它与该强子反粒子的耦合. 从强子态的频谱中, 我们可以估计出更低阶 Regge 轨迹的 $\alpha_n(0)$. 在质量 m 处发生自旋 j 的介子共振有一个必要不充分条件,[18] 即其中一个轨迹 $\alpha_n(t)$ 等于 j 时, m^2 要等于 t 的值. 除了玻密子, 在 π 介子-核子散射的领头轨迹上, 我们发现了, 在 $m=770\,\text{Mev}$ 处 $j=1$ 的 ρ 介子, $m=1690\,\text{Mev}$ 处 $j=3$ 的 g 介子, 以及 $m=2350\,\text{Mev}$ 处 $j=5$ 的介子. 推算 $\alpha(t)$ 在 $t=0$ 的值, 我们可以估计出这个轨迹有 $\alpha(0)\approx 0.5$. 这个轨迹与 π^+ 和 π^- 的耦合符号相反, 所以, 对于 π 介子-核子散射, 我们预期 $f(\omega)-f^c(\omega)$ 的行为大体类似于 $\sqrt{\omega}$.

对于光子散射, B 和 B^c 没有区别, 所以方程(10.8.27)会给出 $b=0$, 而方程(10.8.26)变成

$$f(\omega)=a+\frac{\omega^2}{2\pi^2}\int_0^\infty\frac{\sigma(E)}{E^2-\omega^2}\,\mathrm{d}E\,. \tag{10.8.29}$$

这本质上是原始的 Kramers-Kronig [13]关系. 我们将在 13.5 节中看到的, 对于电荷为 e 和质量为 m 的靶, 常数 a 是著名的值 $\operatorname{Re}f(0)=-e^2/m$.

习题

1. 考虑中性矢量场 $v_\mu(x)$. 为了使这个场可以被正确地重整化并用以描述一个重整化质量为 m 的粒子, 对有两条外矢量场线的单粒子不可约图之和 $\Pi^*_{\mu\nu}(k)$, 我们必须附加什么样的条件? 为了实现这点, 我们应如何将拉格朗日量分成自由场项和相互作用项两部分?

2. 推导决定带荷标量场电磁顶点函数的广义 Ward 恒等式.

3. 电磁流 $J^\mu(x)$ 在两个自旋 $\frac{1}{2}$, 宇称相同, 质量分别为 m_1 和 m_2 且不相同的单粒子态之间的矩阵元 $\langle\mathbf{p}_2\sigma_2|J^\mu(x)|\mathbf{p}_1\sigma_1\rangle$ 的最一般形式是什么? 如果宇称相反, 这个矩阵元的最一般形式又是什么? (自始至终假定宇称守恒.)

4. 对复守恒流 $J^\mu(x)$, 推导真空期望值 $\langle T\{J^\mu(x)\,J^\nu(y)^\dagger\}\rangle_0$ 的谱(Källen-Lehmann)表示.

5. 对 Dirac 场 $\psi(x)$, 推导真空期望值 $\langle T\{\psi_n(x)\,\bar\psi_m(y)\}\rangle_0$ 的谱(Källen-Lehmann)表示.

6. 在对散射振幅或截面的渐进行为不做任何假定的前提下, 证明向前光子散射振幅不可能满足未减除的色散关系.

7. 利用色散理论的方法, 推导一个复标量场的谱(Källen-Lehmann)表示.

8. 利用色散理论和 8.7 节的结果, 在电子静止参考系下计算光子-电子向前散射振幅至 e^4 阶.

参考文献

[1] W. H. Furry, *Phys. Rev.* **51**, 125 (1937).

[2] H. Yukawa, *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan* **17**, 48 (1935).

[3] H. Lehmann, K. Symanzik, and W. Zimmerman, *Nuovo Cimento* **1**, 205 (1955).

[4] Y. Takahashi, *Nuovo Cimento*, Ser. 10, **6**, 370 (1957).

[5] J. C. Ward, *Phys. Rev.* **78**, 182 (1950).

[6] J. Schwinger, *Phys. Rev. Lett.* **3**, 296 (1959).

[7] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A117**, 610 (1928).

[8] M. N. Rosenbluth, *Phys. Rev.* **79**, 615 (1950).

[9] G. Källen, *Helv. Phys. Acta* **25**, 417 (1952); *Quantum Electrodynamics* (Springer-Verlag, Berlin, 1972); H. Lehmann, *Nuovo Cimento* **11**, 342 (1954).

[10] J. C. Howard and B. Jouvet, *Nuovo Cimento* **18**, 466 (1960); M. J. Vaughan, R. Aaron, and R. D. Amado, *Phys. Rev.* **1254**, 1258 (1961); S. Weinberg, in *Proceedings of the 1962 High-Energy Conference at CERN* (CERN, Geneva, 1962): p. 683.

[11] R. L. Stratonovich, *Sov. Phys. Dokl.* **2**, 416 (1957); J. Hubbard, *Phys. Rev. Lett.* **3**, 77 (1959).

[12] S. Weinberg, *Phys. Rev.* **137**, B672 (1965).

[13] H. A. Kramers, *Atti Congr. Intern. Fisici, Como* (Nicolo Zanichellli, Bologna, 1927); 重印于 H. A. Kramers. *Collected Scientific Papers* (North-Holland, Amsterdam, 1956); R. de Kronig, *Ned. Tyd. Nat. Kunde* **9**, 402 (1942); *Physica* **12**, 543 (1946); J. S. Toll, The Dispersion Relation for Light and its Application to Problems Involving Electron Pairs (Princeton University Ph. D. Thesis 1952). 历史回顾, 参看 J. D. Jackson in *Dispersion Relations* G. R. Screaton 编辑 (Oliver and Boyd, Edinburgh, 1961); M. L. Goldberger in *Dispersion Relations and Elementary Particles*, C. De Witt and R. Omnes 编辑 (Hermann, Pairs, 1960).

[14] M. Gell-Mann, M. L. Goldberger, and W. Thirring, *Phys. Rev.* **95**, 1612 (1954). M. L. Goldberger 证明了这一结果的非微扰本质, *Phys. Rev.* **97**, 508 (1955).

[15] M. L. Goldberger, *Phys. Rev.* **99**, 979 (1955).

[16] I. Ia. Pomeranchuk, *J. Expt. Theor. Phys. (USSR.)* **34**, 725 (1958). 英文版: *Soviet Physics - JETP* **34**(7), 499 (1958). 结果的推广参看 S. Weinberg, *Phys. Rev.* **124**, 2049 (1961).

[17] 可参看 P. D. B. Collins, *An Introduction to Regge Theory and High Energy Physics* (Combridge University Press, Cambridge, 1977). 原始文献是 T. Regge, *Nuovo Cimento* **14**, 951 (1959): **18**, 947 (1960).

[18] 自旋随质量平方变化的曲线被称为 Chew-Frautschi 图; 参看 G. F. Chew and S. C. Frautschi, *Phys. Rev. Lett.* **8**, 41 (1962).

第 11 章　量子电动力学中的单圈辐射修正

本章中, 我们将在带电轻子的理论——仅与电磁场有相互作用的自旋 $\frac{1}{2}$ 有质量粒子的理论中做一些经典地单圈计算. 已知存在的轻子有三种或三“味”: 电子和 μ 子, 以及更重的, 最近才发现的 τ 子. 尽管我们的大多数计算将等价地适用于 μ 子和 τ 子, 明确起见, 这里计算中的带荷粒子指的是“电子”. 在 11.1 节的一些普遍讨论后, 我们将在 11.2 节计算真空极化, 在 11.3 节计算电子的反常磁矩, 在 11.4 节计算电子自能. 在这个过程中, 我们将引入数个在这些计算中被证实有用的数学技巧, 包括 Feynman 参量的应用, Wick 旋转, 以及 ‘t Hooft 和 Veltman 的维数正规化和 Pauli 和 Villars (维拉斯)的旧正规化方法. 尽管会遇到无限大, 但我们将看到, 如果用重整化荷和重整化质量表述, 最终的结果是有限的. 在下一章, 我们在这里关于重整化所学到的东西将推广至一般理论的微扰论任意阶.

11.1　抵消项

电子和光子的拉格朗日量密度取如下形式*

$$\mathscr{L} = -\tfrac{1}{4}F_{\mathrm{B}}^{\mu\nu}F_{\mathrm{B}\,\mu\nu} - \bar{\psi}_{\mathrm{B}}\Big[\gamma_\mu\left[\partial^\mu + \mathrm{i}e_{\mathrm{B}}A_{\mathrm{B}}^\mu\right] + m_{\mathrm{B}}\Big]\psi_{\mathrm{B}} \tag{11.1.1}$$

其中 $F_{\mathrm{B}}^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A_{\mathrm{B}}^\nu - \partial^\nu A_{\mathrm{B}}^\mu$; A_{B}^μ 和 ψ_{B} 是光子和电子的裸场(即, 非重整化的场), 而 $-e_{\mathrm{B}}$ 和 m_{B} 是电子的裸荷和裸质量. 正如上一章所描述的, 我们引入重整化场, 重整化荷以及重整化质量:

$$\psi \equiv Z_2^{-1/2}\psi_{\mathrm{B}}\,, \tag{11.1.2}$$

$$A^\mu \equiv Z_3^{-1/2}A_{\mathrm{B}}^\mu\,, \tag{11.1.3}$$

$$e \equiv Z_3^{+1/2}e_{\mathrm{B}}\,, \tag{11.1.4}$$

$$m \equiv m_{\mathrm{B}} + \delta m\,, \tag{11.1.5}$$

这里调整了常数 Z_2, Z_3 和 δm 以使重整化场传播子的极点与没有相互作用时的自由场传播子的极点具有相同的位置和留数. 那么, 拉格朗日量用重整化量表示出来就是

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_2\,, \tag{11.1.6}$$

其中

$$\mathscr{L}_0 = -\tfrac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \bar{\psi}\Big[\gamma_\mu\partial^\mu + m\Big]\psi\,, \tag{11.1.7}$$

$$\mathscr{L}_1 = -\mathrm{i}eA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\,, \tag{11.1.8}$$

*在本章, 我们不会 在Heisenberg 绘景算符和相互作用绘景算符之间做变换, 所以我们将回到传统的记法, 在这个记法中分别用大写的 A 和小写的 ψ 来标记光子场和带电粒子场.

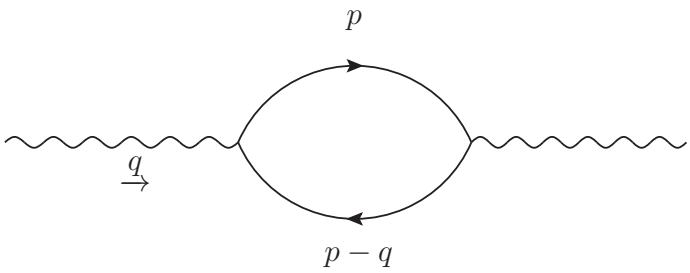


图 11.1 量子电动力学中真空极化的单圈图. 这里波浪线代表光子; 带箭头的线代表电子

而 $\mathscr{L}_2$ 是"抵消项"之和

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_2 = &-\tfrac{1}{4}(Z_3-1)F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - (Z_2-1)\bar{\psi}\Big[\gamma_\mu\partial^\mu + m\Big]\psi \\ &+ Z_2\delta m\bar{\psi}\psi - \mathrm{i}e(Z_2-1)A_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\,.\end{aligned} \tag{11.1.9}$$

$\mathscr{L}_2$ 中的所有项是 e 的二阶或更高阶, 并且这些项正好抵消了圈图产生的发散.

11.2 真空极化

我们现在开始我们首个包含圈图的辐射修正计算, 即所谓的真空极化效应, 由与内光子线相关的传播子修正构成. 在氢原子能级中, 真空极化会产生可以观测到的位移, 并对束缚在重核周围原子轨道上的 μ 子能量给出重要修正. 另外, 正如我们将在卷 II 中讨论的, 在电动力学或其它规范理论中计算高能行为时, 真空极化的计算提供了一个关键要素.

就像 10.5 节中那样, 我们定义 $\mathrm{i}(2\pi)^4\Pi^{*\mu\nu}(q)$ 为所有具有两个光子外线的连通图之和, 这些连通图带有极化指标 μ 和 ν 并携带 4-动量 q 进入并离开图, 不包含两条外线的光子传播子, 而星号表示我们排除了那些可以通过剪断某条内光子线而变得不连通的图. 全光子传播子 $\Delta'^{\mu\nu}(q)$ 由方程(10.5.13)给出:

$$\Delta' = \Delta[1-\Pi^*\Delta]^{-1}\,, \tag{11.2.1}$$

其中 $\Delta^{\mu\nu}(q)$ 是没有辐射修正的光子传播子. 在这里我们的任务是计算对 $\Pi^{*\mu\nu}(q)$ 的领头阶贡献.

在最低阶中有对 Π^* 的单圈贡献, 对应于图 11.1 中的图:

$$\begin{aligned}\mathrm{i}(2\pi)^4\Pi^{*\rho\sigma}_{1\,\mathrm{loop}}(q) = -\int \mathrm{d}^4p\ \mathrm{Tr}\Bigg\{&\left[\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\,\frac{-\mathrm{i}\not{p}+m}{p^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon}\right] \\ &\times\Big[(2\pi)^4 e\gamma^\rho\Big]\left[\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\,\frac{-\mathrm{i}(\not{p}-\not{q})+m}{(p-q)^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon}\right]\Big[(2\pi)^4 e\gamma^\sigma\Big]\Bigg\}\end{aligned} \tag{11.2.2}$$

其中右边的负号是存在费米子圈所要求的. 更简洁些, 有

$$\Pi^{*\rho\sigma}_{1\,\mathrm{loop}}(q) = \frac{-\mathrm{i}e^2}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4p\,\frac{\mathrm{Tr}\big\{[-\mathrm{i}\not{p}+m]\gamma^\rho\,\big[-i(\not{p}-\not{q})+m\big]\gamma^\sigma\big\}}{(p^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon)\big((p-q)^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon\big)}\,. \tag{11.2.3}$$

做这个积分的第一步要用到 Feynman 引入的一个技巧.[1] 我们使用基本公式

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{[(1-x)A+xB]^2} \tag{11.2.4}$$

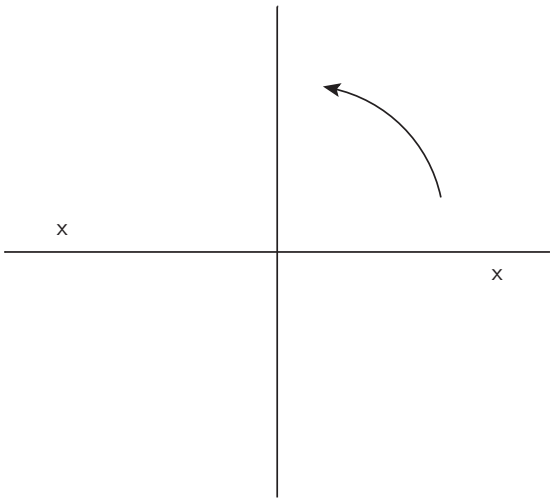


图 11.2 p^0 积分围道的 Wick 旋转. 小 x 标记 p^0 复平面中的极点; 箭头代表积分围道旋转的方向, 从实 p^0-轴到虚 p^0-轴.

将方程(11.2.3)中的标量传播子的乘积写成

$$\begin{aligned}\frac{1}{(p^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon)((p-q)^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon)} &= \int_0^1 \Big[(p^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon)(1-x)\\ &\quad + \Big((p-q)^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon\Big)x\Big]^{-2}\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \Big[p^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon-2p\cdot qx+q^2x\Big]^{-2}\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \Big[(p-qx)^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon+q^2x(1-x)\Big]^{-2}\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

(这是本章附录所给出的一类积分中的特殊情况.) 我们现在可以偏移动量空间中的积分变量*

$$p \to p+qx\,,$$

使方程(11.2.3)变成

$$\begin{aligned}&\Pi^{*\rho\sigma}_{1\,\mathrm{loop}}(q) = \frac{-\mathrm{i}e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 \mathrm{d}x \int \mathrm{d}^4p \,\Big[p^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon+q^2x(1-x)\Big]^{-2}\\ &\times \mathrm{Tr}\big\{\big[-\mathrm{i}(\not{p}+\not{q}x)+m\big]\gamma^\rho\big[-\mathrm{i}\big(\not{p}-\not{q}(1-x)\big)+m\big]\gamma^\sigma\big\}\,.\end{aligned} \tag{11.2.5}$$

利用第 8 章附录中的结果, 可以轻松地计算出这里的迹

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\big\{\big[-\mathrm{i}(\not{p}+\not{q}x)+m\big]\gamma^\rho\big[-\mathrm{i}\big(\not{p}-\not{q}(1-x)\big)+m\big]\gamma^\sigma\big\}\\ &= 4\Big[-(p+qx)^\rho\,(p-q(1-x))^\sigma+(p+qx)\cdot(p-q(1-x))\eta^{\rho\sigma}\\ &\quad -(p+qx)^\sigma\,(p-q(1-x))^\rho+m^2\eta^{\rho\sigma}\Big]\,.\end{aligned} \tag{11.2.6}$$

*严格地讲, 这一步仅在收敛积分中适用. 原则上, 为了证明这种变量的偏移合理. 我们应该引入一些正规化方案使得所有积分收敛, 例如下面要讨论的维数正规化方案.

我们的下一步被称为 *Wick 旋转*.[2] 只要 $-q^2 < 4m^2$, 对于 0 和 1 之间的所有 x, $m^2 + q^2x(1-x)$ 都是正的, 所以方程(11.2.5)中的被积函数的极点处在 $p^0 = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 + q^2x(1-x) - \mathrm{i}\epsilon}$, 即, 恰好处在负实轴的上方和正实轴的下方. (见图 11.2.) 我们可以逆时针旋转 p^0 的围道而不穿过任何极点, 从而取代在实轴上从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 对 p^0 积分, 我们转而在虚轴上从 $-\mathrm{i}\infty$ 到 $+\mathrm{i}\infty$ 对它积分. 也就是说, 我们可以写成 $p^0 = \mathrm{i}p^4$, 其中 p^4 取实值从 $-\infty$ 积到 $+\infty$. (如果不是 $-\mathrm{i}\epsilon$ 而是 $\mathrm{i}\epsilon$ 出现在传播子的分母中, 那么我们将会令 $p^0 = -\mathrm{i}p^4$, 其中 p^4 仍取实值从 $-\infty$ 积到 $+\infty$. 它的影响是改变 $\Pi^{*\rho\sigma}_{1\,\mathrm{loop}}(q)$ 的符号.) 方程(11.2.5)现在变成

$$\begin{aligned}\Pi^{*\rho\sigma}_{1\,\mathrm{loop}}(q) = \frac{4e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 \mathrm{d}x \int (\mathrm{d}^4p)_E \left[p^2 + m^2 + q^2x(1-x)\right]^{-2} \\ \times \Big[-(p+qx)^\rho (p - q(1-x))^\sigma + (p+qx)\cdot(p-q(1-x))\,\eta^{\rho\sigma} \\ - (p+qx)^\sigma (p-q(1-x))^\rho + m^2\eta^{\rho\sigma}\Big]\,, \end{aligned} \tag{11.2.7}$$

其中

$$(\mathrm{d}^4p)_E = \mathrm{d}p^1\mathrm{d}p^2\mathrm{d}p^3\mathrm{d}p^4$$

且所有标量积都按照欧几里得模进行计算

$$a\cdot b = a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3 + a^4b^4$$

这里约定了 $q^4 \equiv -\mathrm{i}q^0$. 另外, $\eta^{\rho\sigma}$ 可以被取为克罗内克 δ-符号, 此时指标取 $1,2,3,4$, 或者取为通常的 Minkowski 张量, 此时指标取 $1,2,3,0$.

积分(11.2.7)严重发散. 最终所有无穷大会抵消, 但是为了看到这点, 必须在计算的中间阶段使用一些正规化技术使得积分有限. 不是简单地在某个最大动量 Λ 处截断积分, 而是只对满足 $p^2 < \Lambda^2$ 的 p^μ 积分, 因为这相当于在电子传播子中引入阶跃函数 $\theta(\Lambda^2 - p^2)$, 而 Ward 恒等式(10.4.25)表明为了保持规范不变性, 对电子传播子的任何修正必须伴随着对电子-光子顶点的修正. 事实上, 伴随着一个普通的截断, 辐射修正会引入一个光子质量, 这是对规范不变性要求的一个显然的破坏.

经验表明正规化一个发散积分而不损害规范不变性的最方便方法是维数正规化, 这一技巧是 't Hooft 和 Veltman [3]在 1972 年引入的, 它基于从 4 维到任意时空维数 d 的一个延拓. 这相当于在类似(11.2.7)的积分中做角度平均, 方法是扔掉所有的 p 的奇次项, 而将具有偶数个 p-因子的项替换成**

$$p^\mu p^\nu \to p^2\eta^{\mu\nu}\Big/ d\,, \tag{11.2.8}$$

$$p^\mu p^\nu p^\rho p^\sigma \to (p^2)^2[\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} + \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}]\Big/ d(d+2)\,. \tag{11.2.9}$$

另外, 在以这种方式将被积函数写成仅是 p^2 的函数后, 体积元 $(\mathrm{d}^4p)_E$ 被替换成了 $\Omega_d\kappa^{d-1}\mathrm{d}\kappa$, 其中 $\kappa \equiv \sqrt{p^2}$, 而 Ω_d 是 d 维单位球的面积

$$\Omega_d = 2\pi^{d/2}\Big/\Gamma(d/2)\,. \tag{11.2.10}$$

**注意到这些表达式的形式是由 Lorentz 不变性以及指标 μ,ν,ρ 等之间的对称性确定的, 我们可以轻松地导出它们, 其中的因子可以通过要求两边在与 η 收缩后给出相同的结果得到.

积分(11.2.7)现在对复时空维数 d 收敛. 我们可以通过复 d 值将积分延拓至 $d=4$, 这时无穷大将作为因子 $(d-4)^{-1}$ 重新出现.

对于积分(11.2.7), 维数正规化给出

$$\Pi^{*\rho\sigma}_{1\,\text{loop}}(q)=\frac{4e^2\Omega_d}{(2\pi)^4}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^\infty\kappa^{d-1}\mathrm{d}\kappa\left[\kappa^2+m^2+q^2x(1-x)\right]^{-2}\\ \times\left[\frac{-2\kappa^2}{d}\eta^{\rho\sigma}+2q^\rho q^\sigma x(1-x)+\Big(\kappa^2-q^2x(1-x)\Big)\eta^{\rho\sigma}+m^2\eta^{\rho\sigma}\right].$$

对 κ 的积分对任意复数的 d (或除了偶数以外任意实数 d)做出. 利用著名公式(本章附录中将给出更普遍的形式):

$$\int_0^\infty\kappa^{d-1}[\kappa^2+\nu^2]^{-2}\,\mathrm{d}\kappa=\tfrac{1}{2}(\nu^2)^{\frac{d}{2}-2}\,\Gamma(d/2)\,\Gamma(2-d/2)\,, \tag{11.2.11}$$

$$\int_0^\infty\kappa^{d+1}[\kappa^2+\nu^2]^{-2}\,\mathrm{d}\kappa=\tfrac{1}{2}(\nu^2)^{\frac{d}{2}-1}\,\Gamma(1+d/2)\,\Gamma(1-d/2)\,, \tag{11.2.12}$$

得到

$$\Pi^{*\rho\sigma}_{1\,\text{loop}}(q)=\frac{2e^2\Omega_d}{(2\pi)^4}\\ \times\int_0^1\mathrm{d}x\left[(1-2/d)\eta^{\rho\sigma}\left(m^2+q^2x(1-x)\right)^{\frac{d}{2}-1}\Gamma(1+d/2)\,\Gamma(1-d/2)\right.\\ +\Big(2q^\rho q^\sigma x(1-x)-q^2\eta^{\rho\sigma}x(1-x)+m^2\eta^{\rho\sigma}\Big)\Big(m^2+q^2x(1-x)\Big)^{\frac{d}{2}-2}\\ \left.\times\,\Gamma(d/2)\,\Gamma(2-d/2)\right].$$

通过利用

$$(1-2/d)\,\Gamma(1+d/2)\,\Gamma(1-d/2)=-\Gamma(d/2)\,\Gamma(2-d/2)\,,$$

积分中的两项可以合并. 我们发现

$$\Pi^{*\rho\sigma}_{1\,\text{loop}}(q)=\frac{4e^2\Omega_d}{(2\pi)^4}\,\Gamma(d/2)\,\Gamma(2-d/2)\,(q^\rho q^\sigma-q^2\eta^{\rho\sigma})\\ \times\int_0^1\mathrm{d}x\,x(1-x)(m^2+q^2x(1-x))^{\frac{d}{2}-2}\,. \tag{11.2.13}$$

我们注意到一个重要的结果, 对 $\Pi^{*\rho\sigma}$, 这一贡献满足关系

$$q_\rho\Pi^{*\rho\sigma}_{1\,\text{loop}}(q)=0 \tag{11.2.14}$$

这正是 10.5 节中基于电流的守恒与中性推导出的结果. 我们利用维数正规化方案精确地得到了这个结果. 维数正规化能够给出这一结果的原因是流的守恒不依赖于时空的维数.

方程(11.2.13)中的 Γ-函数 $\Gamma(2-d/2)$ 在 $d\to4$ 时发散. 幸运的是, 正如我们在 11.1 节中看到的, 存在另外一个必须加到 $\Pi^{*\rho\sigma}$ 上的项, 它来自于相互作用拉格朗日量中的 $-\frac{1}{4}(Z_3-1)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ 项. 这一项具有类似方程(11.2.13)的结构

$$\Pi^{*\rho\sigma}_{\mathscr{L}_2}(q)=-(Z_3-1)(q^2\eta^{\rho\sigma}-q^\rho q^\sigma)\,, \tag{11.2.15}$$

所以到 e^2 阶, 完整的 Π^* 具有形式

$$\Pi^{*\rho\sigma}(q) = (q^2\eta^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma)\pi(q^2)\,, \tag{11.2.16}$$

其中

$$\pi(q^2) = -\frac{4e^2\Omega_d}{(2\pi)^4}\,\Gamma(\tfrac{d}{2})\,\Gamma(2-\tfrac{d}{2})\int_0^1 \mathrm{d}x\, x(1-x)(m^2+q^2x(1-x))^{\frac{d}{2}-2} - (Z_3-1)\,. \tag{11.2.17}$$

正如我们在 10.5 节所看到的, 重整化电磁场的定义要求 $\pi(0)=0$ (这是为了, 除依赖规范的项以外, 全光子传播子在 $q^2=0$ 处极点的留数与裸传播子相同). 因此, 到 e^2 阶,

$$Z_3 = 1 - \frac{4e^2\Omega_d}{(2\pi)^4}\Gamma(\tfrac{d}{2})\,\Gamma(2-\tfrac{d}{2})\,(m^2)^{\frac{d}{2}-2}\int_0^1 x(1-x)\,\mathrm{d}x\,, \tag{11.2.18}$$

使得到 e^2 阶,

$$\pi(q^2) = -\frac{4e^2\Omega_d}{(2\pi)^4}\,\Gamma(\tfrac{d}{2})\,\Gamma(2-\tfrac{d}{2})\int_0^1 \mathrm{d}x\, x(1-x) \times\left[\Big(m^2+q^2x(1-x)\Big)^{\frac{d}{2}-2} - (m^2)^{\frac{d}{2}-2}\right]. \tag{11.2.19}$$

现在我们可以移除正规化, 允许 d 趋于它的物理值 $d=4$. 正如上面所提及的, 在单圈贡献中存在一个无限大, 源于 Γ-函数的极限行为

$$\Gamma(2-\tfrac{d}{2}) \to \frac{1}{(2-d/2)} - \gamma\,,$$

其中 γ 是 Euler 常数, $\gamma = 0.5772157$. 通过对 $\Gamma(2-d/2)$ 使用 $1/(2-d/2)$, 再将其它的 d 替换成 4, 就给出了 (Z_3-1) 的无限部分:

$$(Z_3-1)_\infty = -\frac{4e^2\cdot 2\pi^2}{6(2\pi)^4}\,\frac{1}{2-d/2} = \frac{e^2}{6\pi^2}\,\frac{1}{d-4}\,. \tag{11.2.20}$$

我们将在卷 II 看到, 这一结果将被用来推导电荷重整化群方程中的领头项.

在 $d=4$ 处的极点在 $\pi(q^2)$ 中显然抵消了, 这是因为 $(m^2+q^2x(1-x))^{\frac{d}{2}-2}$ 与 $(m^2)^{\frac{d}{2}-2}$ 在 $d=4$ 时有相同的极限 1. 由于同样的原因, $\Gamma(2-d/2)$ 中的 $-\gamma$ 项尽管对 Z_3-1 有有限的贡献, 但在总的 $\pi(q^2)$ 中也抵消了. 存在其它对 Z_3-1 有限的贡献, 这些贡献来源于 $\Gamma(2-d/2)$ 中的极点与 $\Omega_d\Gamma(d/2)$ 在 $d=4$ 附加展开的线性项的乘积, 但这些在总的 $\pi(q^2)$ 中也抵消了. 其实, 在维数正规化中, 我们也可以将 $(2\pi)^{-4}$ 替换成 $(2\pi)^{-d}$, 而将因子 $\mathrm{Tr}\,1=4$ 替换成 γ-矩阵在任意偶数时空维 d 中的维数 $2^{d/2}$, 并且这些也将会对 (Z_3-1) 的有限部分有贡献, 但是对 $\pi(q^2)$ 没有贡献. 更进一步, e^2 不能认为与 d 无关, 这是因为对方程(11.2.13)的观察表明, 它有 d-相关的量纲 [质量]$^{4-d}$. 如果我们取 $e^2\propto\mu^{4-d}$, 其中 μ 是某个带有质量量纲的量, 那么在 Z_3-1 存在额外的有限项, 它们源于 $\Gamma(2-d/2)$ 中的极点与 μ^{4-d} 按照 $(4-d)$ 展开的级数中的项 $(4-d)\ln\mu$ 的乘积, 但是, 又一次地, 它们在 Z_3-1 与 $\pi(q^2)$ 的单圈贡献之间抵消了.

在 $d\to 4$ 的极限下, 唯一对 $\pi(q^2)$ 有贡献的项, 来自于 $\Gamma(2-d/2)$ 中的极点与 $(m^2+q^2x(1-x))^{\frac{d}{2}-2}$ 和 $(m^2)^{\frac{d}{2}-2}$ 按照 $d-4$ 展开的级数中的线性项的乘积:

$$(m^2+q^2x(1-x))^{\frac{d}{2}-2}-(m^2)^{\frac{d}{2}-2}\to(\tfrac{d}{2}-2)\ln\left(1+\frac{q^2x(1-x)}{m^2}\right). \tag{11.2.21}$$

这最终给出了

$$\pi(q^2)=\frac{e^2}{2\pi^2}\int_0^1 x(1-x)\ln\left(1+\frac{q^2x(1-x)}{m^2}\right)\mathrm{d}x\,. \tag{11.2.22}$$

真空极化的物理意义可以通过考察它在两个自旋 $\frac{1}{2}$ 带电粒子散射上的效应来研究. 图 11.3 中的 Feynman 图对散射 S-矩阵元有如下形式的贡献

$$\begin{aligned}S_a(1,2\to 1',2')&=(2\pi)^{-12/2}\delta^4(p_{1'}+p_{2'}-p_1-p_2)\left[e_1(2\pi)^4\bar u_{1'}\gamma^\mu u_1\right]\\&\times\left[-\mathrm{i}(2\pi)^{-4}\frac{1}{q^2}\right]\left[e_2(2\pi)^4\bar u_{2'}\gamma_\mu u_2\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_b(1,2\to 1',2')&=(2\pi)^{-12/2}\delta^4(p_{1'}+p_{2'}-p_1-p_2)\left[e_1(2\pi)^4\bar u_{1'}\gamma^\mu u_1\right]\\&\times\left[-\mathrm{i}(2\pi)^{-4}\frac{1}{q^2}\right]^2\left[\mathrm{i}(2\pi)^4(q^2\eta_{\mu\nu}-q_\mu q_\nu)\pi(q^2)\right]\left[e_2(2\pi)^4\bar u_{2'}\gamma^\nu u_2\right],\end{aligned}$$

其中 e_1 和 e_2 是两个参与散射的粒子的电荷; 方程(11.2.22)中计算 $\pi(q^2)$ 采用的 e 是图11.3的圈中环流粒子电荷的大小; 而 q^μ 是动量转移 $q\equiv p_1-p_{1'}=p_{2'}-p_2$. 利用守恒性质 $q_\mu\bar u_{1'}\gamma^\mu u_1=0$, 这两个图合起来给出 S-矩阵元:

$$\begin{aligned}S_{a+b}(1,2\to 1',2')=&\frac{-\mathrm{i}e_1e_2}{4\pi^2q^2}\left[1+\pi(q^2)\right]\delta^4(p_{1'}+p_{2'}-p_1-p_2)\\&\times\left[\bar u_{1'}\gamma^\mu u_1\right]\left[\bar u_{2'}\gamma_\mu u_2\right].\end{aligned} \tag{11.2.23}$$

在非相对论极限下, $\bar u_{1'}\gamma^0u_1\simeq-\mathrm{i}\delta_{\sigma_1'\sigma_1}$ 而 $\bar u_{1'}\gamma^iu_1\simeq 0$, 对粒子 2 同样如此. 另外, 在这一极限下 q^0 与 $|\mathbf{q}|$ 相比可以忽略. 方程(11.2.23)在这一极限下变成

$$S_{a+b}(1,2\to 1',2')=\frac{-\mathrm{i}e_1e_2}{4\pi^2\mathbf{q}^2}\left[1+\pi(\mathbf{q}^2)\right]\delta^4(p_{1'}+p_{2'}-p_1-p_2)\,\delta_{\sigma_1'\sigma_1}\delta_{\sigma_2'\sigma_2}\,. \tag{11.2.24}$$

这个结果可以与一个定域且不依赖自旋的中心势 $V(r)$ 在 Born 近似下给出的 S-矩阵比较一下

$$S_{\mathrm{Born}}(1,2\to 1',2')=-2\mathrm{i}\pi\delta(E_{1'}+E_{2'}-E_1-E_2)T_{\mathrm{Born}}(1,2\to 1',2')\,. \tag{11.2.25}$$

$$\begin{aligned}T_{\mathrm{Born}}(1,2\to 1',2')=&\delta_{\sigma_1'\sigma_1}\delta_{\sigma_2'\sigma_2}\int\mathrm{d}^3x_1\int\mathrm{d}^3x_2\,V\Big(|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|\Big)\\&\times(2\pi)^{-12/2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}_{1'}\cdot\mathbf{x}_1}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}_{2'}\cdot\mathbf{x}_2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{x}_1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}_2\cdot\mathbf{x}_2}\,.\end{aligned} \tag{11.2.26}$$

令 $\mathbf{x}_1=\mathbf{x}_2+\mathbf{r}$, 给出

$$\begin{aligned}S_{\mathrm{Born}}=&\frac{-\mathrm{i}}{4\pi^2}\,\delta^4(p_{1'}+p_{2'}-p_1-p_2)\delta_{\sigma_1'\sigma_1}\delta_{\sigma_2'\sigma_2}\\&\times\int\mathrm{d}^3r\,V(r)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}\,.\end{aligned} \tag{11.2.27}$$



图 11.3 带荷粒子散射的两个图. 这里带箭头的线是带荷粒子; 波浪线是光子. 图(b)表示对树级近似图(a)的最低阶真空极化修正.

比较该式与方程(11.2.23)表明, 在非相对论极限下, 图 11.3 所给出的 S-矩阵与满足

$$\int \mathrm{d}^3 r\, V(r)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} = e_1 e_2\, \frac{1+\pi(\mathbf{q}^2)}{\mathbf{q}^2}$$

或逆 Fourier 变换

$$V(r) = \frac{e_1 e_2}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}^3 q\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \left[\frac{1+\pi(\mathbf{q}^2)}{\mathbf{q}^2}\right] \tag{11.2.28}$$

的势 $V(r)$ 给出的结果相同. 到辐射修正的第一阶, 方程(11.2.28)与两个相距为 r 的延展的电荷分布 $e_1\eta(\mathbf{x})$ 和 $e_2\eta(\mathbf{y})$ 所产生的静电相互作用给出的是同一个势能:

$$V(|\mathbf{r}|) = e_1 e_2 \int \mathrm{d}^3 x \int \mathrm{d}^3 y\, \frac{\eta(\mathbf{x})\eta(\mathbf{y})}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{r}|}\,, \tag{11.2.29}$$

其中

$$\eta(\mathbf{r}) = \delta^3(\mathbf{r}) + \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \mathrm{d}^3 q\, \pi(\mathbf{q}^2)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}\,. \tag{11.2.30}$$

注意到

$$\int \mathrm{d}^3 r\, \eta(\mathbf{r}) = 1 + \tfrac{1}{2}\pi(0) = 1\,, \tag{11.2.31}$$

所以粒子 1 和 2 的总电荷, 正如由 Coulomb 势的长程部分所决定的, 与支配重整化电磁场相互作用的常数 e_1 和 e_2 相同.

对于 $|\mathbf{r}| \neq 0$, 通过一个直接的围道积分, 积分(11.2.30)可以被积掉:

$$\eta(\mathbf{r}) = -\frac{e^2}{8\pi^3 r^3} \int_0^1 x(1-x)\, \mathrm{d}x \left[1 + \frac{mr}{\sqrt{x(1-x)}}\right] \exp\left(\frac{-mr}{\sqrt{x(1-x)}}\right).$$

这个表达式总是负的. 然而, 我们已经看到 $\eta(\mathbf{r})$ 对所有 $\mathbf{r}$ 积分等于1. 因此 $\eta(\mathbf{r})$ 必须含有在 $\mathbf{r} = 0$ 处奇异的项 $(1+L)\delta^3(\mathbf{r})$, 其中对 L 进行选择使其满足方程(11.2.31):

$$L = \frac{e^2}{8\pi^3} \int \frac{\mathrm{d}^3 r}{r^3} \int_0^1 x(1-x)\, \mathrm{d}x \left[1 + \frac{mr}{\sqrt{x(1-x)}}\right] \exp\left(\frac{-mr}{\sqrt{x(1-x)}}\right). \tag{11.2.32}$$

于是电荷分布函数的完整表达式是

$$\eta(\mathbf{r}) = (1+L)\delta^3(\mathbf{r}) - \frac{e^2}{8\pi^3 r^3}\int_0^1 x(1-x)\,\mathrm{d}x \times \left[1+\frac{mr}{\sqrt{x(1-x)}}\right]\exp\left(\frac{-mr}{\sqrt{x(1-x)}}\right). \tag{11.2.33}$$

这一结果的物理解释是, 一个裸点电荷吸引真空中产生的带相反符号电荷的粒子, 排斥它们的反粒子至无穷远, 从而使裸电荷部分地被屏蔽了, 产生了一个变小了 $1/(1+L)$ 倍的重整化电荷. 作为一个检验, 我们会注意到如果我们截断发散积分(11.2.32), 使积分仅覆盖 $r \geq a$ 的部分, 我们发现这部分在 $a \to 0$ 时的发散是

$$L_\infty = \frac{e^2}{12\pi^2}\ln a^{-1}\,. \tag{11.2.34}$$

因此如果我们将动量空间截断 Λ 与 a^{-1} 等同起来, L 的发散部分与 (Z_3-1) 的发散部分的关系是

$$(Z_3-1)_\infty = -2L_\infty\,, \tag{11.2.35}$$

这是因为到 e^2 阶的重整化荷(10.4.18)由下式给定

$$e_\ell = Z_3^{1/2}\,e_{\mathrm{B}\ell} \simeq \left(1+\tfrac{1}{2}(Z_3-1)\right)e_{\mathrm{B}\ell} \simeq (1+L)^{-1}\,e_{\mathrm{B}\ell}\,. \tag{11.2.36}$$

下面来证明方程(11.2.35).

真空极化在 μ 子原子的能级上有一个可观测的效应. 我们将在第 14 章看到, 图 11.3 中 Feynman 图(b)的效应是将波函数为 $\psi(\mathbf{r})$ 的原子态能级位移

$$\Delta E = \int \mathrm{d}^3 r\,\Delta V(\mathbf{r})\,|\psi(\mathbf{r})|^2\,, \tag{11.2.37}$$

其中 $\Delta V(\mathbf{r})$ 是势(11.2.28)中的微扰

$$\Delta V(\mathbf{r}) = \frac{e_1 e_2}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3 q\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}\left[\frac{\pi(\mathbf{q}^2)}{\mathbf{q}^2}\right]. \tag{11.2.38}$$

这个微扰在 $r \gg m^{-1}$ 时指数衰减. 另一方面, 普通原子的电子波函数一般被限制在一个大得多的半径 $a \gg m^{-1}$ 之内; 例如, 对绕电荷为 Ze 的核的电子的类氢轨道, 我们有 $a = 137/Zm$ (这里 $m = m_e$). 这样一来, 能量位移将仅依赖于 $r \ll a$ 处的波函数行为. 对轨道角动量 ℓ, 波函数的行为在 $r \ll a$ 类似于 r^ℓ, 所以方程(11.2.37)给出了正比于 $(ma)^{-(2\ell+1)}$ 的因子. 因此与更高的轨道角动量相比, $\ell = 0$ 的真空极化效应要大得多. 对 $\ell = 0$, 波函数在 r 小于或等于 m^{-1} 阶时近似等于常数 $\psi(0)$, 所以方程(11.2.37)变成

$$\Delta E = |\psi(0)|^2\int \mathrm{d}^3 r\,\Delta V(\mathbf{r})\,. \tag{11.2.39}$$

利用方程(11.2.38)和(11.2.22), 对势($e_1 e_1 = -Ze^2$)的偏移的积分是

$$\int \mathrm{d}^3 r\,\Delta V(\mathbf{r}) = -Ze^2\pi'(0) = -\frac{4Z\alpha^2}{15m^2}\,. \tag{11.2.40}$$

另外, 在 $\ell = 0$ 且主量子数为 n 的类氢原子态中, 原点处的波函数是

$$\psi(0) = \frac{2}{\sqrt{4\pi}} \left(\frac{Z\alpha m}{n} \right)^{3/2} , \tag{11.2.41}$$

所以能量位移(11.2.39)是

$$\Delta E = -\frac{4Z^4\alpha^5 m}{15\pi n^3} . \tag{11.2.42}$$

例如, 在氢原子的 $2s$ 态中, 这个能量偏移是 -1.122×10^{-7} eV, 对应的频率偏移 $\Delta E/2\pi\hbar$ 是 -27.13 MHz. 这有时被称作 *Uehling* (尤林)效应.[4] 正如我们在第 1 章所讨论过的, 这样微弱的能量偏移变得可观测的原因是, 在没有各种辐射修正时, 纯粹 Dirac 理论将预言氢原子的 $2s$ 态和 $2p$ 态是精确简并的. 我们将在第 14 章看到, $2s$ 态和 $2p$ 态之间 +1580MHz 的"Lamb 位移"中的大部分来自于其它的辐射修正, 但是理论与实验吻合得相当好, 足以证实由真空极化引起的 -37.13 MHz 偏移确实出现了.

尽管在普通原子的辐射修正中, 真空极化只贡献一小部分, 但在 μ 子原子中, 即轨道电子被 μ 子取代的原子, 真空极化占据主导地位. 这是因为在 μ 子原子中, 由于量纲的原因, 大部分辐射修正给出的能量偏移正比于 m_μ, 而真空极化能积分 $\int \mathrm{d}^3r\,\Delta V$ 由于是一个电子圈产生的, 所以仍然像方程(11.2.40)中那样正比于 m_e^{-2}, 给出的能量偏移正比于 $m_\mu^3 m_e^{-2} = (210)^2 m_\mu$. 然而, 在这种情况下, μ 子原子半径并不比电子 Compton 波长大多少, 所以近似结果(11.2.39)仅给出真空极化量级的能量偏移.

* * *

为了与后面的计算相比较, 注意到如果我们在 $\kappa = \Lambda$ 处截断积分, 那么取代方程(11.2.20), 我们将遇到如下形式的积分

$$(Z_3 - 1)_\infty = -\frac{e^2}{6\pi^2} \int_\mu^\Lambda \kappa^{d-5}\,\mathrm{d}\kappa = \frac{e^2}{6\pi^2} \frac{\mu^{d-4} - \Lambda^{d-4}}{d-4} ,$$

其中 μ 是红外有效截断, 与图11.1的圈中环流的带电粒子的质量是同一阶的. (找到这里的常数因子的最简单方法是, 要求这个表达式在 $d < 3$ 时的 $\Lambda \to \infty$ 的极限与方程(11.2.20)相匹配.) 代之以这样一个紫外截断, 我们可以得到 $d \to 4$ 的极限, 并得到

$$(Z_3 - 1)_\infty = -\frac{e^2}{6\pi^2} \ln(\Lambda/\mu) . \tag{11.2.43}$$

11.3 反常磁矩与电荷半径

我们的下一个例子是计算最低阶辐射修正所带来的电子或 μ 子的磁矩或荷半径的偏移. 光子-轻子顶点的单圈图以及重整化修正如图 11.4 所示. 正如我们在 10.3 节中讨论过的那样, 由于轻子在质壳上, 那些在入轻子线或出轻子线上有额外插入的图为零. 在外光子线上有插入的图是上一节所讨论的真空极化效应. 这样一来, 这里需要计算的就只剩一个单圈图(图 11.4 中的最后一个):

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu_{1\,\mathrm{loop}}(p', p) = \int \mathrm{d}^4k \left[e\gamma^\rho (2\pi)^4 \right] \left[\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4} \frac{-\mathrm{i}(\not{p}' - \not{k}) + m}{(p'-k)^2 + m^2 - \mathrm{i}\epsilon} \right] [\gamma^\mu] \\ \times \left[\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4} \frac{-\mathrm{i}(\not{p} - \not{k}) + m}{(p-k)^2 + m^2 - \mathrm{i}\epsilon} \right] \left[e\gamma_\rho (2\pi)^4 \right] \left[\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - \mathrm{i}\epsilon} \right] , \end{aligned} \tag{11.3.1}$$

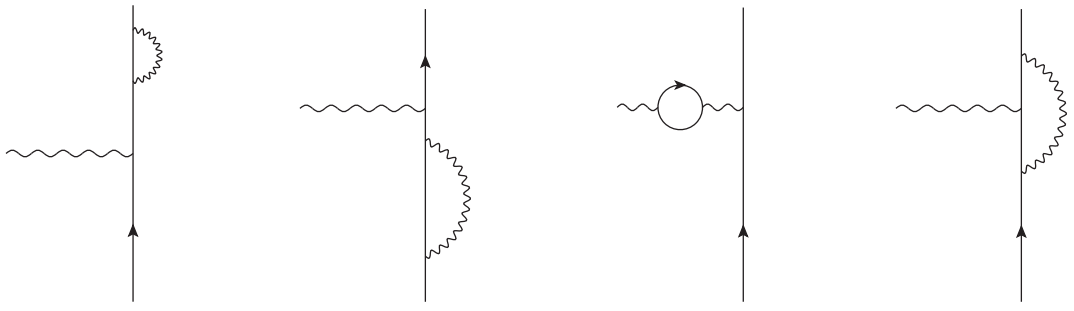


图 11.4 光子-轻子顶点函数Γ^{μ}的单圈图. 这里波浪线代表光子; 其它线代表电子或μ子. 图(a)和图(b)被轻子场重整化项抵消了; 图(c)源于 11.2 节中计算的真空极化; 而图(d)是 11.3 节所要计算的.

其中p'和p分别是末态轻子4-动量和初态轻子4-动量. (连接外光子线与内轻子线的顶点的贡献被取为了γ^{μ}, 这是因为Γ^{μ}的定义中抽取了一个$e(2\pi)^4$的因子.)

这个积分有一个明显的紫外发散, 粗略地类似于$\int \mathrm{d}^4k/(k^2)^2$. 不同于真空极化, 在这里我们不需要为了保持规范不变性所要求的结构而采用一个像维数正规化那样精妙的重整化处理, 这是因为光子是一个中性粒子, 因此通过对光子传播子的适当修正(例如引入一个有很大截断质量M的因子$M^2/(k^2+M^2)$), 无需在其它地方引入修正以保持规范不变性, 就可以使积分有限. 无论如何, 正如我们将看到的, 反常磁矩和电荷半径的计算中根本就不会遇到任何紫外发散. 在下文中, 本着如有必要任何发散积分都可以用截断质量M来表示这一理念, 我们将保留顶点函数积分的无限形式.

我们从整合分母开始, 采用本章附录中介绍的Feynman技巧的多重版本

$$\frac{1}{ABC}=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\,\Big[Ay+B(x-y)+C(1-x)\Big]^{-3}. \tag{11.3.2}$$

应用于方程(11.3.1)中的分母, 给出

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(p'-k)^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon}\,\frac{1}{(p-k)^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon}\,\frac{1}{k^2-\mathrm{i}\epsilon}\\
&=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\,\Big[\Big((p'-k)^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon\Big)y+\Big((p-k)^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon\Big)(x-y)\\
&\qquad+\Big(k^2-\mathrm{i}\epsilon\Big)(1-x)\Big]^{-3}\\
&=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\,\Big[\Big(k-p'y-p(x-y)\Big)^2+m^2x^2+q^2y(x-y)-\mathrm{i}\epsilon\Big]^{-3},
\end{aligned} \tag{11.3.3}$$

其中$q\equiv p-p'$是传递给光子的动量. 偏移积分变量

$$k\to k+p'y+p(x-y)$$

积分(11.3.1)变成

$$\begin{aligned}\Gamma^{\mu}_{1\,\mathrm{loop}}(p',p)=\frac{2\mathrm{i}e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int\frac{\mathrm{d}^4k}{\Big[k^2+m^2x^2+q^2y(x-y)-\mathrm{i}\epsilon\Big]^3}\\ \times\gamma^{\rho}\Big[-\mathrm{i}\Big(\not{p}'(1-y)-\not{k}-\not{p}(x-y)\Big)+m\Big]\gamma^{\mu}\\ \times\Big[-\mathrm{i}\Big(\not{p}(1-x+y)-\not{k}-\not{p}'y\Big)+m\Big]\gamma_{\rho}\,.\end{aligned}\tag{11.3.4}$$

我们的下一步是 Wick 旋转. 正如上一节所解释的那样, 分母中的 $-\mathrm{i}\epsilon$ 要求, 当我们把 k^0 的积分围道旋转至虚轴时, 必须逆时针旋转, 使得对 k^0 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的积分被替换成对虚值 k^0 从 $-\mathrm{i}\infty$ 到 $+\mathrm{i}\infty$ 的积分, 或者等价地, 对实值 $k^4\equiv-\mathrm{i}k^0$ 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的积分. 我们还利用方程(11.3.4)中分母的旋转对称性; 扔掉分子中 k 的奇数次项, 将 $k^{\lambda}k^{\sigma}$ 替换成 $\eta^{\lambda\sigma}k^2/4$, 并将体积元 $\mathrm{d}^4k=\mathrm{i}\mathrm{d}k^1\mathrm{d}k^2\mathrm{d}k^3\mathrm{d}k^4$ 替换成 $2\mathrm{i}\pi^2\kappa^3\mathrm{d}\kappa$, 其中 κ 是 4-矢 k 的欧几里得长度. 汇总以上结果, 方程(11.3.4)变成

$$\begin{aligned}\Gamma^{\mu}_{1\,\mathrm{loop}}(p',p)=\frac{-4\pi^2e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^{\infty}\kappa^3\mathrm{d}\kappa\,\Big\{-\kappa^2\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma^{\mu}\gamma_{\sigma}\gamma_{\rho}/4\\ +\gamma^{\rho}\Big[-\mathrm{i}\Big(\not{p}'(1-y)-\not{p}(x-y)\Big)+m\Big]\gamma^{\mu}\\ \times\Big[-\mathrm{i}\Big(\not{p}(1-x+y)-\not{p}'y\Big)+m\Big]\gamma_{\rho}\Big\}\\ \times\Big[\kappa^2+m^2x^2+q^2y(x-y)\Big]^{-3}\,.\end{aligned}\tag{11.3.5}$$

这里我们仅对顶点函数在 Dirac 旋量之间的矩阵元 $\bar{u}'\Gamma u$ 感兴趣, 这些旋量满足关系

$$\bar{u}'[\mathrm{i}\not{p}'+m]=0\,,\qquad[\mathrm{i}\not{p}+m]u=0\,.$$

这样, 我们可以通过 Dirac 矩阵的反对易关系把所有的因子 $\not{p}'$ 挪到左边而把所有的因子 $\not{p}$ 挪到右边, 移至两边后再把它们替换成 $\mathrm{i}m$, 来简化这个表达式. 在一个直接但冗长的计算后, 方程(11.3.5)变成

$$\begin{aligned}\bar{u}'\Gamma^{\mu}_{1\,\mathrm{loop}}(p',p)u=\frac{-4\pi^2e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^{\infty}\kappa^3\,\mathrm{d}\kappa\\ \bar{u}'\Big\{\gamma^{\mu}\Big[-\kappa^2+2m^2(x^2-4x+2)+2q^2(y(x-y)+1-x)\Big]\\ +4\mathrm{i}m\,p'^{\mu}(y-x+xy)+4\mathrm{i}m\,p^{\mu}(x^2-xy-y)\Big\}u\\ \times\Big[\kappa^2+m^2x^2+q^2y(x-y)\Big]^{-3}\,.\end{aligned}\tag{11.3.6}$$

接下来我们利用最后的因子在反射 $y\to x-y$ 下的对称性. 在这个反射下, 乘在 p'^{μ} 和 p^{μ} 的函数 $y-x+xy$ 和 x^2-xy-y 互换, 所以这两个函数均可以被它们的平均替代:

$$\tfrac{1}{2}(y-x+xy)+\tfrac{1}{2}(x^2-xy-y)=-\tfrac{1}{2}x(1-x)\,.$$

这最终给出

$$\begin{aligned}\bar{u}'\Gamma^{\mu}_{1\,\mathrm{loop}}(p',p)u=&\frac{-4\pi^2e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^\infty\kappa^3\,\mathrm{d}\kappa\\&\times\bar{u}'\Big\{\gamma^\mu\Big[-\kappa^2+2m^2(x^2-4x+2)+2q^2(y(x-y)+1-x)\Big]\\&\qquad-2\mathrm{i}m(p'^\mu+p^\mu)x(1-x)\Big\}u\\&\times\Big[\kappa^2+m^2x^2+q^2y(x-y)\Big]^{-3}.\end{aligned}\tag{11.3.7}$$

注意到 p^μ 和 p'^μ 现在仅出现在组合 $p^\mu+p'^\mu$ 中, 正如流守恒所要求的那样.

还有其它需要考虑的图. 当然, Γ^μ 中有零阶项 γ^μ. 修正项(11.1.9)中正比于 Z_2-1 的项在 Γ^μ 中产生了

$$\Gamma^\mu_{\mathscr{Z}_2}=(Z_2-1)\gamma^\mu\,.\tag{11.3.8}$$

另外, 在外光子传播子中插入修正的效果是:

$$\Gamma^\mu_{\text{vac pol}}(p',p)=\frac{1}{(p'-p)^2-\mathrm{i}\epsilon}\Pi^{\mu\nu}(p'-p)\,\gamma_\nu\,.\tag{11.3.9}$$

这些项中的每个项的形式都与($H(q^2)=0$ 的)一般结果(10.6.10)一致

$$\bar{u}'\Gamma^\mu(p',p)u=\bar{u}'\left[\gamma^\mu F(q^2)-\frac{\mathrm{i}}{2m}(p+p')^\mu G(q^2)\right]u\,.\tag{11.3.10}$$

到 e^2 阶, 形状因子是

$$\begin{aligned}F(q^2)=Z_2+\pi(q^2)+&\frac{4\pi^2e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^\infty\kappa^3\mathrm{d}\kappa\\&\times\frac{\Big[\kappa^2-2m^2(x^2-4x+2)-2q^2(y(x-y)+1-x)\Big]}{\Big[\kappa^2+m^2x^2+q^2y(x-y)\Big]^3}\,,\end{aligned}\tag{11.3.11}$$

$$G(q^2)=\frac{-4\pi^2e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^\infty\frac{4m^2x(1-x)\kappa^3\,\mathrm{d}\kappa}{\Big[\kappa^2+m^2x^2+q^2y(x-y)\Big]^3}\,,\tag{11.3.12}$$

其中 $\pi(q^2)$ 是真空极化函数(11.2.22).

现在, 形状因子 $G(q^2)$ 的积分是有限的:

$$G(q^2)=\frac{-e^2m^2}{4\pi^2}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\,\frac{x(1-x)}{m^2x^2+q^2y(x-y)}\,.\tag{11.3.13}$$

这使计算反常磁矩变得简单. 在 10.6 节我们注意到, 仅 γ^μ 项对磁矩有贡献, 所以辐射修正的效果是给磁矩的 Dirac 值 $e/2m$ 乘上因子 $F(0)$. 但是 e 作为真正轻子电荷的定义要求

$$F(0)+G(0)=1\,,\tag{11.3.14}$$

所以磁矩可以表示为

$$\mu=\frac{e}{2m}\Big(1-G(0)\Big)\,.\tag{11.3.15}$$

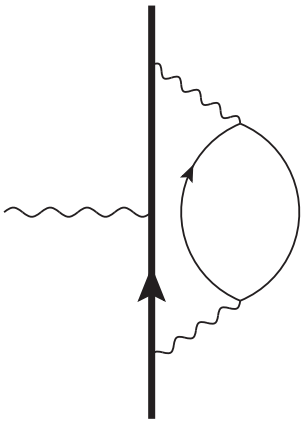


图 11.5 μ 子磁矩的两圈图. 这里粗直线代表 μ 子; 细的波浪线代表光子; 而其它细线是电子. 这个图对四阶的 μ 子旋磁比有一个相对较大的贡献, 这个贡献正比于 $\ln(m_\mu/m_e)$.

由方程(11.3.13), 我们发现

$$-G(0)=\frac{e^2}{8\pi^2}=0.001161\,. \tag{11.3.16}$$

这是由 Schwinger 首次计算出的著名的 $\alpha/2\pi$ 的修正.[5]

当然, 这只是磁矩的辐射修正中的第一项. 即使就在下一阶, e 的 4 次方阶, 项的个数变得非常多从而使计算变得相当复杂. 然而, 由于 μ 子-电子质量比值很大, 在 μ 子的磁矩中有一个四阶项要比其它几个四阶项都大一些. 这一项源于在二阶图的虚光子线中插入了一个电子圈. 如图 11.5 所示. 这个电子圈的效果是将方程(11.3.1)中的光子传播子 $1/k^2$ 变成 $(1+\pi_e(k^2))/k^2$, $\pi_e(k^2)$ 由方程(11.2.22)给出, 但其中的质量 m 取为电子质量:

$$\pi_e(k^2)=\frac{e^2}{2\pi^2}\int_0^1 x(1-x)\ln\left(1+\frac{k^2x(1-x)}{m_e^2}\right)\mathrm{d}x\,.$$

对方程(11.3.12)的考察表明, 在 μ 子磁矩的计算中, 虚光子动量 k 上的有效截断是 m_μ. 比值 m_μ/m_e 非常大使我们可以对 m_μ^2 阶的 k^2 取近似

$$\pi_e(k^2)\simeq\frac{e^2}{2\pi^2}\int_0^1\mathrm{d}x\,x(1-x)\ln(m_\mu^2/m_e^2)=\frac{e^2}{12\pi^2}\ln(m_\mu^2/m_e^2) \tag{11.3.17}$$

其中被忽略的是系数阶为 1 的项而不是系数阶为 $\ln(m_\mu^2/m_e^2)$ 的项. 由于这是一个常数, 在 $-G(0)$ 中, 通过在虚光子线中增加一个电子圈所带来的变化, 就是给前面 $-G(0)$ 的结果(11.3.16)乘上方程(11.3.17), 使得现在

$$\mu_\mu=\frac{e}{2m_\mu}\left(1+\frac{e^2}{8\pi^2}+\frac{e^4}{96\pi^4}\left[\ln\frac{m_\mu^2}{m_e^2}+O(1)\right]\right)\,. \tag{11.3.18}$$

(我们将在卷 II 看到, 这个讨论是重整化群方法的一个原始版本.) 可以将这个结果(11.3.18)与整个 4 阶结果[6]相比较:

$$\begin{aligned}\mu_\mu=\frac{e}{2m_\mu}\Bigg(1+\frac{e^2}{8\pi^2}+\frac{e^4}{96\pi^4}\Bigg[&\ln\frac{m_\mu^2}{m_e^2}\\&-\frac{25}{6}+\frac{197}{24}+\frac{\pi^2}{2}+\frac{9\zeta(3)}{2}-3\pi^2\ln 2+O\left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)\Bigg]\Bigg)\,.\end{aligned} \tag{11.3.19}$$

结果是乘以 $e^4/96\pi^4$ 的“$O(1)$”项增加到了 -6.137, 这比 $\ln(m_\mu^2/m_e^2)=10.663$ 小不了多少, 所以近似(11.3.18)给出的是仅是相差一个量级为 2 的因子的第四阶项. 与二阶结果 $\mu_\mu=1.001161\,e/2m_\mu$ 以及当前的实验值[7] $\mu_\mu=1.001165923(8)\,e/2m_\mu$ 相比, 正确的 4 阶结果给出 $\mu_\mu=1.00116546\,e/2m_\mu$.

现在我们考虑另一个形状因子. 方程(11.3.11)中 $F(q^2)$ 的积分有紫外发散. 然而为了满足电荷的非重整化条件(11.3.14), Z_2 必须取如下值

$$Z_2=1+\frac{e^2}{8\pi^2}-\frac{4\pi^2e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^\infty\kappa^3\,\mathrm{d}\kappa \times\frac{\kappa^2-2m^2(x^2-4x+2)}{\left[\kappa^2+m^2x^2\right]^3}\,. \tag{11.3.20}$$

(回忆 $\pi(0)=0$.) 它本身是紫外发散, 其中无限大部分是

$$(Z_2-1)_\infty=-\frac{e^2}{8\pi^2}\int^\infty\frac{\mathrm{d}\kappa}{\kappa}\,. \tag{11.3.21}$$

将方程(11.3.20)代回方程(11.3.11)给出

$$F(q^2)=1+\frac{e^2}{8\pi^2}+\pi(q^2)+\frac{4\pi^2e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^\infty\kappa^3\,\mathrm{d}\kappa \times\left\{\frac{\left[\kappa^2-2m^2(x^2-4x+2)-2q^2(y(x-y)+1-x)\right]}{\left[\kappa^2+m^2x^2+q^2y(x-y)\right]^3} -\frac{\left[\kappa^2-2m^2(x^2-4x+2)\right]}{\left[\kappa^2+m^2x^2\right]^3}\right\}\,. \tag{11.3.22}$$

κ 的积分现在是收敛的:

$$F(q^2)=1+\frac{e^2}{8\pi^2}+\pi(q^2)+\frac{2\pi^2e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y \times\left\{\frac{-m^2[x^2-4x+2]-q^2[y(x-y)+1-x)]}{m^2x^2+q^2y(x-y)}+\frac{x^2-4x+2}{x^2} -\ln\left[\frac{m^2x^2+q^2y(x-y)}{m^2x^2}\right]\right\}\,. \tag{11.3.23}$$

然而, 我们看到, 对 x 和 y 的积分现在在 $x=0$ 和 $y=0$ 处对数发散, 这是因为在分母中有 x 和(或) y 的二次项, 而在分子上只有两个微分 $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. 这个发散可以追溯到方程(11.3.11)中在 $x=0$, $y=0$ 和 $\kappa=0$ 处为零的分母 $[\kappa^2+m^2x^2+q^2y(x-y)]^3$. 由于这个发散来自于小 κ 区域而非大 κ 区域, 它被称为*红外发散*而不是紫外发散.

我们将在第 13 章给出红外发散的一个全面的处理. 在那里将证明, 对于类似电子-电子散射的过程, 截面中的红外发散, 例如电子形状因子 $F(q^2)$ 中的红外发散所带来的那些发散, 在我们将低能光子发射以及弹性散射包含在内后, 将会被抵消掉. 另外, 我们将在第 14 章看到, 当我们计算原子能级的辐射修正时, 由于束缚态电子不精确地在自由粒子质量壳上, $F(q^2)$ 中的红外发散是截断的. 现在, 我们将简单地通过引入一个假想的光子质量 μ 以截断 $F(q^2)$ 中的红外发散来继续我们的计算, 而将这个问题留给第 14 章, 看看如何应用这个结果.

若光子有质量 μ, 方程(11.3.1)中的分母 $k^2-\mathrm{i}\epsilon$ 将被 $k^2+\mu^2-\mathrm{i}\epsilon$ 所替代. 这样的效果就是在方程(11.3.3)—(11.3.7), (11.3.11), (11.3.20) 以及(11.3.22)的分母中给立方的项加上一项 $\mu^2(1-x)$. 这样方程(11.3.23)被替换成

$$\begin{aligned} F(q^2) = 1 + \frac{e^2}{8\pi^2} + \pi(q^2) + \frac{2\pi^2 e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}y \\ \times \left\{ \frac{-m^2[x^2-4x+2]-q^2[y(x-y)+1-x]}{m^2x^2+q^2y(x-y)+\mu^2(1-x)} + \frac{m^2[x^2-4x+2]}{m^2x^2+\mu^2(1-x)} \right. \\ \left. - \ln\left[\frac{m^2x^2+q^2y(x-y)+\mu^2(1-x)}{m^2x^2+\mu^2(1-x)}\right] \right\}. \end{aligned} \tag{11.3.24}$$

这个积分现在是完全收敛的. 它可以表示成 Spence 函数的形式, 但是这个结果并没有多少启发性. 就我们第 14 章的目的而言, 计算 $F(q^2)$ 在 q^2 很小时的行为就足够了. 由 Ward 恒等式, 我们已经知道 $F(0)=1-G(0)=1+e^2/8\pi^2$, 所以我们来考虑 $q^2=0$ 处的一阶导数 $F'(q^2)$. 根据方程(11.3.24), 有

$$\begin{aligned} F'(0) = \pi'(0) + \frac{2\pi^2 e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}y \\ \times \left\{ -\frac{2y(x-y)+1-x}{m^2x^2+\mu^2(1-x)} + \frac{m^2[x^2-4x+2]y(x-y)}{[m^2x^2+\mu^2(1-x)]^2} \right\}. \end{aligned} \tag{11.3.25}$$

方程(11.2.22)所给出的真空极化贡献是

$$\pi'(0) = \frac{e^2}{60\pi^2 m^2}\,. \tag{11.3.26}$$

扔掉方程(11.3.25)中所有正比于 μ/m 的幂次的项, 我们就有*

$$F'(0) = \frac{e^2}{24\pi^2 m^2}\left[\ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) + \frac{2}{5} + \frac{1}{4}\right] \tag{11.3.27}$$

其中 $\frac{2}{5}$ 是真空极化的贡献. 另一方面, 方程(11.3.13)表明 $G(q^2)$ 在 $q^2=0$ 处有一个有限的导数,

$$G'(0) = \frac{e^2}{48\pi^2 m^2}\,. \tag{11.3.28}$$

这些结果用顶点函数的另一个表达式(10.6.15)中所定义的电荷形状因子 $F_1(q^2)$ 来表示最为方便

$$\begin{aligned} &\bar{u}(\mathbf{p}',\sigma')\Gamma^\mu(p',p)u(\mathbf{p},\sigma) \\ &\quad = \bar{u}(\mathbf{p}',\sigma')\left[\gamma^\mu F_1(q^2) + \tfrac{1}{2}\mathrm{i}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\,(p'-p)_\nu\, F_2(q^2)\right] u(\mathbf{p},\sigma)\,. \end{aligned} \tag{11.3.29}$$

根据方程(10.6.17)和(10.6.18)

$$F_1(q^2) = F(q^2) + G(q^2)\,. \tag{11.3.30}$$

对 $|q^2| \ll m^2$, 这一形状因子近似是

$$F_1(q^2) \simeq 1 + \frac{e^2}{24\pi^2}\left(\frac{q^2}{m^2}\right)\left[\ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) + \frac{2}{5} + \frac{3}{4}\right]\,. \tag{11.3.31}$$

---

*y-积分是平庸的. 在 $\mu \ll m$ 的极限下, x-积分的计算变得非常容易, 方法是将积分区间分成两部分, 一个从 0 到 s, 其中 $\mu/m \ll s \ll 1$, 而另一个是从 s 到 1.

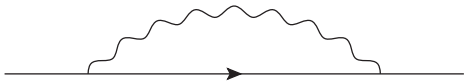


图 11.6 电子自能函数的单圈图. 像往常一样, 直线代表电子, 波浪线代表光子.

它可以表示成电荷半径 a 的形式, 电荷半径由电荷形状因子在 $q^2 \to 0$ 时的极限行为定义:

$$F_1(q^2) \to 1 - q^2 a^2/6 \,. \tag{11.3.32}$$

(这样来定义的初衷是, $\exp(\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{x})$ 对于半径为 a 的球壳的平均在 $\mathbf{q}^2a^2 \ll 1$ 时趋于 $1 - \mathbf{q}^2a^2/6$.) 我们看到电子的电荷半径由下式给出

$$a^2 = -\frac{e^2}{4\pi^2 m^2}\left[\ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) + \frac{2}{5} + \frac{3}{4}\right] . \tag{11.3.33}$$

我们将在第 14 章看到, 对于原子中的电子, 光子质量的角色由一个远小于 m 的有效红外截断扮演, 所以这里的对数很大且是负值, 这给出了一个正的 a^2 值.

11.4 电子自能

我们以电子自能的计算结束本章. 尽管其本身没有什么直接的实验含义, 但是这里的一些结果在第 14 章和卷 II 中将是有用的.

同 10.3 节一样, 我们将所有具有一条入电子线和一条出电子线的图之和定义为 $\mathrm{i}(2\pi)^4[\Sigma^*(p)]_{\beta,\alpha}$, 其中 p 是两条电子线携带的动量, α, β 分别是入电子线和出电子线的 Dirac 指标, 而星号表示我们排除掉了可以通过剪断某个内电子线就变得不连通的那些图, 并且两个外线上的传播子被省略掉了. 那么全电子传播子就由如下的求和给出

$$\begin{aligned}[-\mathrm{i}(2\pi)^{-4}S'(p)] &= [-\mathrm{i}(2\pi)^{-4}S(p)] \\ &+ [-\mathrm{i}(2\pi)^{-4}S(p)]\,[\mathrm{i}(2\pi)^4\Sigma^*(p)]\,[-\mathrm{i}(2\pi)^{-4}S(p)] + \cdots ,\end{aligned} \tag{11.4.1}$$

其中

$$S(p) \equiv \frac{-\mathrm{i}\not{p} + m_e}{p^2 + m_e^2 - \mathrm{i}\epsilon} \,. \tag{11.4.2}$$

这个求和是简单的, 可以直接给出

$$S'(p) = [\mathrm{i}\not{p} + m_e - \Sigma^*(p) - \mathrm{i}\epsilon]^{-1} \,. \tag{11.4.3}$$

在最低阶中有一个对 Σ^* 的单圈贡献, 由图 11.6 给出:

$$\begin{aligned}\mathrm{i}(2\pi)^4\Sigma^*_{1\,\mathrm{loop}}(p) = \int \mathrm{d}^4k \left[\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\frac{\eta_{\rho\sigma}}{k^2 - \mathrm{i}\epsilon}\right] \\ \times [(2\pi)^2 e\gamma^\rho]\left[\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}\not{p} + \mathrm{i}\not{k} + m_e}{(p-k)^2 + m_e^2 - \mathrm{i}\epsilon}\right][(2\pi)^4 e\gamma^\sigma]\end{aligned}$$

或者简化一些

$$\Sigma^*_{1\,\mathrm{loop}}(p) = \frac{\mathrm{i}e^2}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4k \left[\frac{1}{k^2-\mathrm{i}\epsilon}\right] \times \left[\frac{\gamma^\rho(-\mathrm{i}\not{p}+\mathrm{i}\not{k}+m_e)\gamma_\rho}{(p-k)^2+m_e^2-\mathrm{i}\epsilon}\right]. \tag{11.4.4}$$

(这是在 Feynman 规范下的结果, 带电粒子不在质壳上的振幅不是规范不变的.) 为了在我们计算 Lamb 位移时使用, 采用 Pauli 和 Villars[8] 引入的正规化方法将是方便的. 我们将光子传播子 $(k^2-\mathrm{i}\epsilon)^{-1}$ 换成

$$\frac{1}{k^2-\mathrm{i}\epsilon} - \frac{1}{k^2+\mu^2-\mathrm{i}\epsilon},$$

从而使电子自能函数变成

$$\Sigma^*_{1\,\mathrm{loop}}(p) = \frac{\mathrm{i}e^2}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4k \left[\frac{1}{k^2-\mathrm{i}\epsilon} - \frac{1}{k^2+\mu^2-\mathrm{i}\epsilon}\right] \times \left[\frac{\gamma^\rho(-\mathrm{i}\not{p}+\mathrm{i}\not{k}+m_e)\gamma_\rho}{(p-k)^2+m_e^2-\mathrm{i}\epsilon}\right]. \tag{11.4.5}$$

后面我们可以通过令正规化子质量 μ 趋于 ∞ 来扔掉正规化子. 而在第 14 章, 我们也会关心 $\mu \ll m_e$ 的情况.

我们仍采用 Feynman 技巧来整合分母, 并忆及 $\gamma^\rho\gamma^\kappa\gamma_\rho = -2\gamma^\kappa$ 和 $\gamma^\rho\gamma_\rho = 4$. 这给出

$$\begin{aligned}\Sigma^*_{1\,\mathrm{loop}}(p) = \frac{\mathrm{i}e^2}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4k\,[2\mathrm{i}(\not{p}-\not{k})+4m_e] \\ \times\int_0^1 \mathrm{d}x \left[\frac{1}{((k-px)^2+p^2x(1-x)+m_e^2x-\mathrm{i}\epsilon)^2}\right. \\ \left. - \frac{1}{((k-px)^2+p^2x(1-x)+m_e^2x+\mu^2(1-x)-\mathrm{i}\epsilon)^2}\right].\end{aligned} \tag{11.4.6}$$

偏移积分变量 $k \to k+px$ 并旋转积分围道, 给出

$$\begin{aligned}\Sigma^*_{1\,\mathrm{loop}}(p) = \frac{-2\pi^2e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 \mathrm{d}x\,[2\mathrm{i}(1-x)\not{p}+4m_e]\int_0^\infty \mathrm{d}\kappa\,\kappa^3 \\ \times\left[\frac{1}{(\kappa^2+p^2x(1-x)+m_e^2x)^2} - \frac{1}{(\kappa^2+p^2x(1-x)+m_e^2x+\mu^2(1-x))^2}\right].\end{aligned} \tag{11.4.7}$$

κ-积分是简单的

$$\Sigma^*_{1\,\mathrm{loop}}(p) = \frac{-\pi^2e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 \mathrm{d}x\,[2\mathrm{i}(1-x)\not{p}+4m_e] \times \ln\left(\frac{p^2x(1-x)+m_e^2x+\mu^2(1-x)}{p^2x(1-x)+m_e^2x}\right). \tag{11.4.8}$$

相互作用(11.1.9)也在 $\Sigma^*(p)$ 中贡献了一个重整化抵消项 $-(Z_2-1)(\mathrm{i}\not{p}+m_e)+Z_2\delta m_e$, 其中确定 Z_2 与 δm_e 的条件是, 被看作 $\mathrm{i}\not{p}$ 函数的全传播子 $S'(p)$ 应该在 $\mathrm{i}\not{p} = -m_e$ 处有一个留数为 1 的

极点. (我们将在下一章看到, 这使得当 $\mu\to\infty$ 时, Σ^* 在 e 的所有阶有限.) 在最低阶, 这给出

$$\begin{aligned}\delta m_e &= -\Sigma^*_{1\,\text{loop}}\Big|_{\mathrm{i}\not{p}=-m_e}\\ &= \frac{2m_e\pi^2e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 \mathrm{d}x\,[1+x]\,\ln\left(\frac{m_e^2x^2+\mu^2(1-x)}{m_e^2x^2}\right),\end{aligned}\tag{11.4.9}$$

$$\begin{aligned}Z_2-1 &= -\mathrm{i}\frac{\partial\Sigma^*_{1\,\text{loop}}}{\partial\not{p}}\Big|_{\mathrm{i}\not{p}=-m_e}\\ &= -\frac{2\pi^2e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1\mathrm{d}x\left\{(1-x)\ln\left(\frac{m_e^2x^2+\mu^2(1-x)}{m_e^2x^2}\right)\right.\\ &\qquad\left.-\frac{2\mu^2(1-x)^2(1+x)}{x(m_e^2x^2+\mu^2(1-x))}\right\}.\end{aligned}\tag{11.4.10}$$

(到这一阶, 我们不区分 δm_e 和 $Z_2\delta m_e$.) 扔掉在 $\mu^2\to\infty$ 时为零的项, 方程(11.4.8)—(11.4.10)给出

$$\Sigma^*_{1\,\text{loop}}(p)=\frac{-\pi^2e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1\mathrm{d}x\,[2\mathrm{i}(1-x)\not{p}-4m_e]\ln\left(\frac{\mu^2(1-x)}{p^2x(1-x)+m_e^2x}\right),\tag{11.4.11}$$

$$\delta m_e=\frac{2m_e\pi^2e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1\mathrm{d}x\,[1+x]\ln\left(\frac{\mu^2(1-x)}{m_e^2x^2}\right),\tag{11.4.12}$$

$$Z_2-1=\frac{-2\pi^2e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1\mathrm{d}x\left\{(1-x)\ln\left(\frac{\mu^2(1-x)}{m_e^2x^2}\right)-\frac{2(1-x^2)}{x}\right\}.\tag{11.4.13}$$

观察后发现, $\ln\mu^2$ 项在全自能函数中抵消了, 留下了

$$\begin{aligned}\Sigma^*_{\text{order}\,e^2}(p) &= \Sigma^*_{1\,\text{loop}}(p)-(Z_2-1)(\mathrm{i}\not{p}+m_e)+Z_2\delta m_e\\ &= \frac{-2\pi^2e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1\mathrm{d}x\left\{[\mathrm{i}(1-x)\not{p}+2m_e]\ln\left(\frac{m_e^2(1-x)}{p^2x(1-x)+m_e^2x}\right)\right.\\ &\quad -m_e[1+x]\ln\left(\frac{1-x}{x^2}\right)\\ &\quad\left.-(\mathrm{i}\not{p}+m_e)\left[(1-x)\ln\left(\frac{1-x}{x^2}\right)-\frac{2(1-x^2)}{x}\right]\right\}.\end{aligned}\tag{11.4.14}$$

还有一个发散来自于最后一项在 $x\to0$ 时的行为, 这个发散可以追溯到在我们取 p^2 为计算 Z_2-1 时所在的 $p=-m_e^2$ 那一点后, 方程(11.4.5)中对光子动量 k 的积分在 $k^2=0$ 处的奇异行为. 这种红外发散将在第 13 章进行详细讨论. 现在, 我们关心的是紫外发散已经抵消掉了.

* * *

δm_e 的结果(11.4.9)本身有一些值得注意的地方. 注意到 $\delta m_e/m_e>0$, 这正是我们对电荷与其自身的场的相互作用所产生的电磁自能所预期的. 但是不像 Poincaré, Adraham(亚伯拉罕)以及其他人[9]对电磁自能所做的经典估计, 在 $\mu\to\infty$ 的极限下, 这时截断已经移除, 方程(11.4.9)只是对数发散的. 在这一极限下:

$$\delta m_e\to\frac{6m_e\pi^2e^2}{(2\pi)^4}\ln\left(\frac{\mu}{m_e}\right).\tag{11.4.15}$$

在 14.3 节我们将对 Lamb 位移的进行计算中, 我们将致力于相反的极限, $\mu \ll m_e$. 这里方程(11.4.9)给出

$$\delta m_e \to \frac{e^2\mu}{8\pi}\left[1-\frac{3\mu}{2\pi m_e}+\cdots\right]. \tag{11.4.16}$$

附录A 各种积分

为了整合 N 个传播子的分母, 我们需要将类似 $D_1^{-1}D_2^{-1}\cdots D_N^{-1}$ 的乘积替换成对一个函数的积分, 而这个函数包含 D_1, D_2, $\cdots D_N$ 的一个线性组合. 出于这个目的, 采用如下的公式通常是方便的

$$\begin{aligned}\frac{1}{D_1D_2\cdots D_N} &= (N-1)!\int_0^1 \mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{N-2}}\mathrm{d}x_{N-1}\\ &\times\left[D_1x_{N-1}+D_2(x_{N-2}-x_{N-1})+\cdots+D_N(1-x_1)\right]^{-N}.\end{aligned} \tag{11.A.1}$$

在本章我们用到了这一公式在 $N=2$ 和 $N=3$ 时的特殊情况.

整合分母, 偏移 4-动量积分变量, Wick 旋转并利用 4 维旋转不变性之后, 我们通常会遇到如下形式的积分

$$\int \mathrm{d}^4k\,\frac{(k^2)^n}{(k^2+\nu^2)^m}$$

其中 $(k^2+\nu^2)^m$ 来自整合后的传播子分母, 而 $(k^2)^n$ 来自传播子分子以及顶点动量因子. 这个积分在 $2n+4\geq 2m$ 时是发散的, 但是通过解析延拓, 将时空维数从 4 延拓到复值的 d, 这个积分可以给出有限值. 为了计算由此得到的积分, 我们利用著名的公式

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\kappa\,\frac{\kappa^{\ell-1}}{(\kappa^2+\nu^2)^m} = \nu^{\ell-2m}\,\frac{\Gamma(\ell/2)\Gamma(m-\ell/2)}{2\Gamma(m)}, \tag{11.A.2}$$

其中 $\ell=d+2n$. 在 11.2 节中, 我们用到了这一公式的特殊情况 $n=0,m=2$ 和 $n=1,m=2$.

紫外发散在方程(11.A.2)中表现为: 对固定的 n, 因子 $\Gamma(m-\ell/2)=\Gamma(m-n-d/2)$ 在 $d\to 4$ 处的极点. 对 $2+n=m$, 这个因子变成

$$\Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right)\to\frac{2}{d-4}+\gamma, \tag{11.A.3}$$

其中 $\gamma=0.5772157\cdots$ 是 Euler 常数. 由(11.A.3)以及 Γ-函数的递推公式, 我们可以得到 $2+n>m$ 时的极限行为.

习题

1. 计算包含一个质量为 m_s 的无自旋带电粒子的单圈图对真空极化函数 $\pi(q^2)$ 和 Z_3 的贡献. 如果 $m_s\gg Z\alpha m_e$, 这对氢原子的 $2s$ 能级位移有什么影响?

2. 假定一个质量为 m_ϕ 的中性场 ϕ 与电子场有相互作用 $g\phi\bar{\psi}\psi$. 考虑到单圈, 它对电子磁矩和 Z_2 有什么影响?

3. 考虑一个质量为m_ϕ且有自相互作用$g\phi^3/6$的中性标量场ϕ. 计算标量-标量散射S-矩阵直到单圈阶.

4. 计算问题2中的中性标量场对电子质量位移δm_e直到单圈阶的影响.

参考文献

[1] R. P. Feynman, *Phys. Rev.* **76**, 769 (1949).

[2] G. C. Wick, *Phys. Rev.* **96**, 1124 (1954).

[3] G. 't Hooft and M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B44**, 189 (1972).

[4] E. A. Uehling, *Phys. Rev.* **48**, 55 (1935). $q^2 \neq 0$的单圈函数$\pi(q^2)$由J. Schwinger首次给出, *Phys. Rev.* **75**, 651 (1949).

[5] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **73**, 416 (1948).

[6] 这是H. Suura和E. Wichmann给出的计算(包含那些$m_e \ll m_\mu$时为零的项), *Phys. Rev.* **105**, 1930 (1957); A. Petermann, *Phys. Rev.* **105**, 1931 (1957); H. H. Elend, *Phys. Lett.* **20**, 682 (1966); **21**, 720 (1966); G. W. Erickson and H. H. T. Liu, UCD-CNL-81 report (1968).

[7] J. Bailey *et. al.* (CERN-Mainz-Daresbury Collaboration), *Nucl. Phys.* **B150**, 1 (1979). 这些实验是通过观察μ子自旋在储存环内的进动实现的.

[8] W. Pauli and F. Villars, *Rev. Mod. Phys.* **21**, 434 (1949). 另见J. Rayski, *Phys. Rev.* **75**, 1961 (1949).

[9] 可参看A. I. Miller, *Theory of Relativity — Emergence (1905) and Early Interpretation (1905-1911)* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1981): Chapter 1.

第 12 章　重整化的一般理论

我们在上一章看到, 在含有单圈图的量子电动力学计算中, 出现了发散的动量空间发散积分, 但当我们将理论中的所有参量表示成“重整化”参量后, 例如实际测量的质量和电荷, 这些发散抵消了. 在 1949 年, Dyson[1]概述了一个证明, 表明这种抵消会在量子电动力学所有阶发生. 很快大家就明白了 Dyson 的讨论适用于更大的一类理论(我们将在 12.1 节和 12.2 节讲到), 这类理论具有有限个相对简单的相互作用, 即所谓的可重整理论, 而量子电动力学仅是这类理论的一个简单例子.

多年来, 大家普遍认为任何合理的物理理论都只能采用可重整量子场论的形式. 在发展弱作用, 电磁作用和强作用的现代“标准模型”中, 可重整的要求扮演了重要角色. 然而, 我们将在这里看到, 紫外发散的抵消并不真正依赖于可重整性; 只要我们将对称性所允许的无限多个相互作用一一包含在内, 所谓的不可重整理论实际上同可重整理论一样是可重整的.

现今, 大家普遍认为我们在当前可达到能区用来描述物理的真实理论是所谓的“有效场论”. 正如 12.3 节所要讨论的, 它们是某个更基础理论的低能近似, 而这个基础理论可能根本就不是场论. 任何有效场论必然包含无限个不可重整的相互作用. 然而, 就像在 12.3 节和 12.4 节所讨论的, 在这种有效场论中, 我们预期所有的不可重整的相互作用在能量足够低时都被压低了. 因此, 尽管原因上与最初在这些理论中做出可重整假定的动机不同, 类似量子电动力学和标准模型这样的可重整理论保留了它们在物理中的特殊地位.

12.1　发散度

我们来考察一类非常广泛的理论, 其中包含各种相互作用, 不同相互作用用 i 标记. 每种相互作用可以用每一类 f 型场的个数 n_{if}, 以及作用在场上的导数个数 d_i 表征.

我们将从计算这种理论中任意一个连通单粒子不可约 Feynman 图的“表观发散度” D 开始. 表观发散度 D 是被积函数分子中动量因子的数目减去分母中动量因子的数目, 对每个我们要做的独立 4-动量空间积分还要再加上 4. 表观发散是动量空间区域上的积分在所有内线动量都一起趋于无穷大时的实际发散度. 就是说, 如果 $D > 0$, 那么振幅中所有内动量以公共因子 κ 趋于无穷的部分, 其发散类似于

$$\int^{\infty} \kappa^{D-1}\, \mathrm{d}\kappa\,. \tag{12.1.1}$$

在同样的意义上, 只要考察的动量空间区域没变, 发散度 $D = 0$ 的积分是对数发散的, 而 $D < 0$ 的积分是收敛的. 稍后我们将回到子积分的性质比在原区域积分更坏这个问题上.

为了计算 D, 我们需要知道图的如下信息:

$$I_f \equiv f \text{ 类场内线的数目},$$
$$E_f \equiv f \text{ 类场外线的数目},$$
$$N_i \equiv i \text{ 类相互作用顶点的数目}.$$

我们将 f 类场的传播子 $\Delta_f(k)$ 的渐进行为写成如下形式

$$\Delta_f(k) \sim k^{-2+2s_f} . \tag{12.1.2}$$

回顾第 6 章, 我们看到, 对标量场, $s_f = 0$, 对 Dirac 场, $s_f = \frac{1}{2}$, 对有质量矢量场, $s_f = 1$. 更普遍地, 可以证明, 对 (A, B) 型 Lorentz 变换的有质量场, 我们有 $s_f = A + B$. 不严格地说, 我们可以称 s_f 为“自旋”. 然而, 扔掉那些由于规范不变性而对结果没有影响的项后, 有效光子传播子 $\eta_{\mu\nu}/k^2$ 有 $s_f = 0$. 对于有质量矢量场与守恒流的耦合, 只要这个流不依赖于该矢量场, 依然会有类似的结果. 也可以证明, 在相同意义下, 引力场 $g_{\mu\nu}$ 的传播子也有 $s_f = 0$.

根据方程(12.1.2), 传播子对 D 的总贡献等于

$$\sum_f I_f(2s_f - 2) . \tag{12.1.3}$$

另外, 每个 i 类相互作用中的导数向积分中引入了 d_i 个动量因子, 对 D 的总贡献等于

$$\sum_i N_i\, d_i . \tag{12.1.4}$$

最后, 我们需要独立动量积分变量的总数. 每个内线可以用一个 4-动量标记, 但是它们不全是独立的; 除了一个用以保证外动量守恒的 δ-函数之外, 每个顶点所附带的 δ-函数在这些内动量之间强加了一个线性关系. 因此, 动量空间积分体积元对 D 贡献了一项

$$4\left[\sum_f I_f - \left(\sum_i N_i - 1\right)\right] , \tag{12.1.5}$$

显然, 这正是 4 乘上图中相互独立圈的数目. 加上贡献(12.1.3), (12.1.4)和(12.1.5), 我们发现

$$D = \sum_f I_f(2s_f + 2) + \sum_i N_i(d_i - 4) + 4 . \tag{12.1.6}$$

方程(12.1.6)现在的形式并不方便, 因为它给出的 D 值似乎依赖于 Feynman 图的内部细节. 幸运地是, 可以利用拓扑恒等式

$$2I_f + E_f = \sum_i N_i\, n_{if} \tag{12.1.7}$$

简化它. (每个内线贡献两条与顶点相连的线, 而每个外线只贡献一条.) 利用方程(12.1.7)消掉 I_f, 我们看到方程(12.1.6)变成

$$D = 4 - \sum_f E_f(s_f + 1) - \sum_i N_i\Delta_i , \tag{12.1.8}$$

表 12.1 下表是量子电动力学拉格朗日密度中的项. 这里的 d_i, $n_{i\gamma}$ 和 n_{ie} 分别是相互作用中导数, 光子场和电子场的个数, 而 Δ_i 是相应系数的量纲. (回忆起 $s_\gamma = 0$, $s_e = \frac{1}{2}$.)

相互作用	d_i	$n_{i\gamma}$	n_{ie}	Δ_i
$-\mathrm{i}e\bar{\psi}\not{A}\psi$	0	1	2	$4-1-3=0$
$-\frac{1}{4}(Z_3-1)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$	2	2	0	$4-2-2=0$
$-(Z_2-1)\bar{\psi}\not{\partial}\psi$	1	0	2	$4-1-3=0$
$[-(Z_2-1)m+Z_2\delta m]\bar{\psi}\psi$	0	0	2	$4-3=1$

其中 Δ_i 是用来表征 i 类相互作用的一个参量:

$$\Delta_i \equiv 4 - d_i - \sum_f n_{if}(s_f+1)\,. \tag{12.1.9}$$

无需考虑 Feynman 图的结构, 这个结果也可以通过简单的量纲分析得到. 场的传播子是一对自由场编时乘积的真空期望值的四维 Fourier 变换, 所以一个按照惯例归一化的场, 若它的量纲*用动量幂次表示是 $\mathscr{D}_f$, 那么这个场就有一个量纲为 $-4+2\mathscr{D}_f$ 的传播子. 因此, 如果传播子在 k 远大于质量时的行为类似于 k^{-2+2s_f}, 那么这个场的量纲必须是 $-4+2\mathscr{D}_f = -2+2s_f$, 或者 $\mathscr{D}_f = 1+s_f$. 对于一个 i 类相互作用, 若它具有 n_{if} 个这样的场和 d_i 个导数, 那么它的量纲是 $d_i + \sum_f n_{if}(1+s_f)$. 但是作用量必须是无量纲的, 因此为了抵消 d^4x 的量纲 -4, 拉格朗日密度中的每一项量纲必须是 $+4$. 因此, 相互作用必须有一个量纲为 $4-d_i-\sum_f n_{if}(1+s_f)$ 的耦合常数, 这正好就是参数 Δ_i. 对于有 E_f 条 f 类外线的连通 Feynman 图, 它对应的动量空间振幅是总量纲为 $\sum_f E_f(1+s_f)$ 的场的编时乘积的真空期望值对 $4\sum_f E_f$ 个坐标的 Fourier 变换, 所以它的量纲为 $\sum_f E_f(-3+s_f)$. 在这个量纲中, 有 -4 个来源于动量空间 δ-函数, 而 $\sum_f E_f(-2+2s_f)$ 是外线传播子的量纲, 所以动量空间积分本身再加上所有耦合常数因子后的量纲是

$$\sum_f E_f(-3+s_f) - (-4) - \sum_f E_f(-2+2s_f) = 4 - \sum_f E_f(s_f+1)\,.$$

一个给定 Feynman 图的耦合常数的总量纲是 $\sum_i N_i\Delta_i$, 剩下的是量纲为 $4-\sum_f E_f(s_f+1) - \sum_i N_i\Delta_i$ 的动量空间积分. 只要我们关心的积分区域中所有动量一起趋于无穷, 动量空间积分的发散度就是它的量纲, 这样就证明了方程(12.1.8).

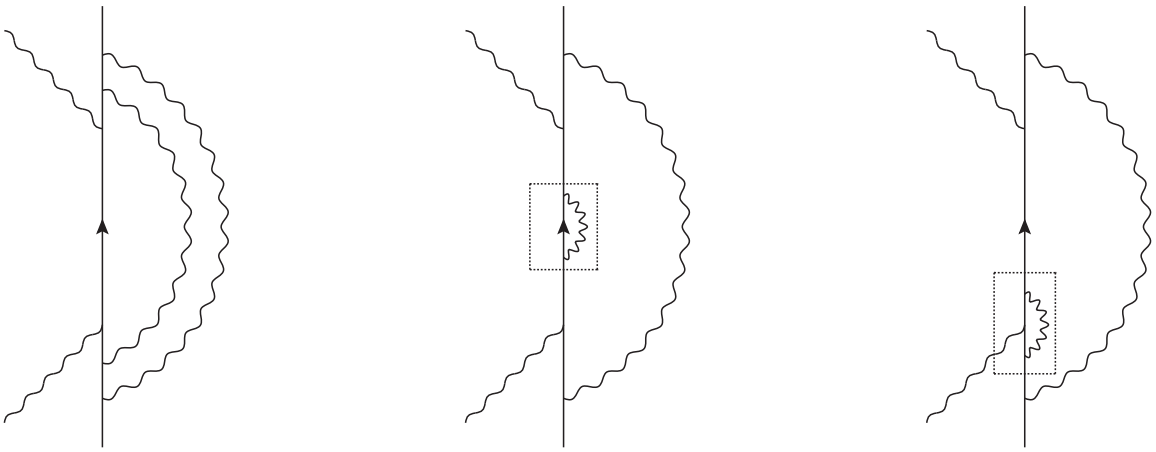
如果所有相互作用都有 $\Delta_i \geq 0$, 那么方程(12.1.8)就给出了 D 的上界, 这个上界只依赖每类外线的数目，即对一个要计算振幅的物理过程

$$D \leq 4 - \sum_f E_f(s_f+1)\,. \tag{12.1.10}$$

例如, 在上一章所研究的量子电动力学的简单版本中, 拉格朗日量中包含的项的类型如表12.1所示. 这里所有的相互作用都有 $\Delta_i \geq 0$, 因而有 E_γ 个外光子线和 E_e 个外 Dirac 线的 Feynman 图的表观发散度满足方程(12.1.10)的限制:

$$D \leq 4 - \frac{3}{2}E_e - E_\gamma\,. \tag{12.1.11}$$

*本章中, 在 $\hbar = c = 1$ 的单位值下, "量纲"总是指质量或动量幂次的量纲. 我们使用的场是按惯例归一化的, 也就是说自由场拉格朗日量中导数数目最多的那一项(其决定了传播子的渐进行为)的系数是无量纲的.



(a) (b) (c)

图 12.1 一些 Compton 散射的两圈图. 这里直线是电子; 波浪线是光子. 图 (a) 的动量空间积分是收敛的, 而由于与虚线框中的子图相关的子积分是发散的, (b) 和 (c) 的积分则是发散的.

仅有有限多组外线可以产生表观发散的积分; 我们将在 12.2 节将列举它们. 我们将要证明, 对于所有相互作用的 $\Delta_i \geq 0$ 的理论, 其中出现的有限多个发散通过对有限数目的物理常数的重新定义以及场的重整化被自动地消除了. 出于这个原因, 这种理论被称为**可重整的**. 在 12.3 节我们将罗列所有可重整理论, 并讨论可重整性作为物理理论判据的意义.

"可重整"这个词也可用于单个相互作用. 可重整的相互作用是那些 $\Delta_i \geq 0$ 的相互作用, 它们的耦合常数的量纲为正或为零. 有时会区分 $\Delta_i = 0$ 的相互作用和 $\Delta_i > 0$ 的相互作用, 前者称为可重整的, 后者称为**超可重整的**. 由于增加额外的场或导数总会降低 Δ_i, 包含任意给定类型场的可重整相互作用只能有有限个. 我们已经看到在量子电动力学的最简版本中, 所有相互作用都是可重整的, 而 $\bar{\psi}\psi$ 项是超重整的.

另一方面, 如果相互作用的 $\Delta_i < 0$, 那么这样的顶点越多, 发散度(12.1.8)就越大. 不管我们把各种 E_f 取得多大, 最终, 足够多的 $\Delta_i < 0$ 的 i 类顶点都可以使方程(12.1.8)将变成正的(或零), 而积分会发散. 这种耦合常数量纲为负的相互作用被称为**不可重整的**;[**] 含有任何不可重整相互作用的理论也被称为不可重整的. 但这并不意味着这样的理论就是没有希望的; 我们将看到这些发散也可以被吸收进理论参量的重新定义中, 但这时我们需要无穷多个耦合.

需要铭记于心的是, 我们在这里计算的 Feynman 图发散度仅来源于所有内 4-动量一起趋于无穷大的动量空间区域. 如果区域中仅属于某些子图的线的动量也趋于无穷大, 同样能产生发散. 例如, 在量子电动力学中, 对 Compton 散射(其中 $E_e = 2$, $E_\gamma = 2$), 方程(12.1.11)给出 $D \leq -1$, 并且事实上像图12.1(a)这样的图是收敛的, 但是像图12.1??或12.1(c)这样的图是对数发散的, 这是因为这些图包含 $D \geq 0$ 的子图(由虚线框标出). 我们可以认为这些图的发散来自于两个独立内 4-动量的八个分量在一个特定的 4-维子空间上, 即, 唯一真正趋于无穷的 4-动量是插入在内线或电子-光子顶点上的圈中环流的动量的子空间, 趋于无穷时造成的糟糕的反常渐进行为.

已经被证明了,[2] 对应任意图的振幅, 使其真正收敛的要求是幂次计数不仅对整个积分的完

[**] 在微扰统计力学中, 不可重整相互作用称为**不相关的**, 因为它们在低能极限下变得不重要. 而可重整和超重整相互作用被分别称为**临界的**和**相关的**.

整多重积分给出 $D<0$, 对于通过保持任何一个或多个圈动量的线性组合不变所定义的任意子积分, 也要保证 $D<0$. (图12.1(b)和12.1(c)所示的图没有通过这个检验, 因为仅对那些虚线框中的圈的动量积分的子积分, $D\geq 0$.) 因为在较早的书[3]中有很好的处理, 并且这个证明方法无论在何种情况下都与我们的实际计算没多大关系, 我们不会在这里重复这个相当长的证明. 下一节将阐述这一要求是如何被满足的.

12.2 发散的消除

考虑一个 Feynman 图, 或 Feynman 图的一个部分, 它的表观发散度为正, 即 $D\geq 0$. 那么, 所有内动量一起趋于无穷的那部分动量空间积分将会像 $\int^{\infty} k^{D-1}\,\mathrm{d}k$ 那样发散. 如果我们对任意外动量微分 $D+1$ 次, 那么被积函数中的净动量因子的数目就会减少 $D+1$ 个,* 从而使这部分动量空间积分收敛. 这样做之后仍然可能存在源于子图的发散, 例如图12.1(b)和图12.1(c)中的子图; 我们暂且忽略这种可能性, 在本节后面再回到这种情况. 因为微分 $D+1$ 次使积分有限, 因此这样的图或子图的贡献可以写成外动量的 D 次多项式, 多项式的系数发散但有一个有限的余项.

为了在没有无关复杂性的干扰下看到这一处理如何起作用, 我们考虑一个对数发散的一维积分

$$\mathscr{I}(q)\equiv\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}k}{k+q}$$

其中 $D=1-1=0$. 微分一次给出

$$\mathscr{I}'(q)\equiv-\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}k}{(k+q)^2}=-\frac{1}{q}\,,$$

所以

$$\mathscr{I}(q)=-\ln q+c\,.$$

常数 c 显然是发散的, 但是积分的其它部分完全是有限的. 以精确相同的方式, 我们可以算出 $D=1$ 的积分

$$\int_0^{\infty}\frac{k\,\mathrm{d}k}{k+q}=a+bq+q\ln q$$

其中常数 a 和 b 是发散的.

现在, 外动量的多项式项正是通过在拉格朗日量中添加合适的项来产生的: 如果一个图有 E_f 个 f 类外线, 发散度为 $D\geq 0$, 那么它的紫外发散的多项式与通过添加各种具有 $n_{if}=E_f$ 个 f 类场以及 $d_i\leq D$ 个导数的 i 种相互作用的结果相同. 如果在拉格朗日量中已经有了这样的相互作用, 那么紫外发散就是给这些相互作用的耦合常数加上修正. 因此, 通过在这些耦合常数中引入合适的无限大项就可以抵消掉这些无穷大. 所有我们曾经测量到的耦合常数都是裸耦合常数与其中一个发散多项式相对应系数的和, 所以, 如果我们要求这个和等于(可能有限的)测量值, 那么裸耦合常数必须包含一个无穷大以抵消内动量的发散积分带来的无穷大. (一个条件: 当发散发生在只有两条外线的图或子图中, 它表现为对粒子传播子的辐射修正时, 我们不是要求某些有效耦合常数等于测量值, 而是要求全传播子与自由传播子在相同位置有留数相同的极点.) 以这种方式, 所有的无限大都被吸收进耦合常数, 质量以及场的重新定义中.

*例如, 如果一个内标量场线携带动量 $k+p$, 其中 p 是外 4-动量的线性组合而 k 是要积分的 4-动量变量, 那么传播子 $[(k+p)^2+m^2]^{-1}$ 对 p^{μ} 的导数给出 $-2(k_{\mu}+p_{\mu})[(k+p)^2+m^2]^{-2}$, 它在 $k\to\infty$ 时趋于 k^{-3} 而不是 k^{-2}.

为了使这个重整化程序起作用, 最根本的是, 拉格朗日量中要包含所有与 Feynman 振幅紫外发散部分对应的相互作用. 当然, 拉格朗日量中的相互作用会被各种对称性原理限制, 例如 Lorentz 不变性, 规范不变性等等, 但是这也同样限制了紫外发散. (证明非阿贝尔规范对称性以限制相互作用的方式限制了无限大要费些功夫, 这个证明将在卷 II 中给出.) 在一般情况下, 紫外发散上没有其它限制, 所以拉格朗日量必须包含所有符合对称性原理要求的项. (在超对称理论中, 这个规则存在例外.[4])

然而, 存在一类重要的理论, 它们只有有限多个相互作用, 但重整化程序依旧有效. 这就是所谓的可重整理论, 它们的相互作用都有 $\Delta_i \geq 0$. 这样, 方程(12.1.8)就给出

$$D \leq 4 - \sum_f E_f(s_f + 1) \,,$$

所以发散多项式只出现在有限多个 Feynman 图或子图中: 足够少的外线使得 $D \geq 0$. 这种发散多项式与由以下方式产生的图相同: 将发散图或发散子图替换成一个单个顶点, 该顶点来自于拉格朗日量中具有 E_f 个 f 类场和 $0, 1, \cdots D$ 个导数的项. 但是, 与方程(12.1.9)相比, 我们看到它们与满足可重整性要求 $\Delta_i \geq 0$ 的相互作用是精确相同的, 或者换句话说,

$$0 \leq d_i \leq 4 - \sum_f n_{if}(s_f + 1) \,.$$

为了使所有的无限大在可重整理论中抵消掉, 通常需要对称性允许的所有相互作用都必须真正地出现在拉格朗日量中**. 例如, 如果有相互作用为 $\bar{\psi}\psi\phi$ (或 $\bar{\psi}\gamma_5\psi\phi$)的标量(或赝标量)场 ϕ 和费米场 ψ, 那么我们无法排除相互作用 ϕ^4; 否则就没有抵消项来抵消与四个标量或赝标量线相连的费米圈所产生的对数发散.

我们在量子电动力学的最简版本中来更细致地看一下无限大的抵消是如何运作的. 方程(12.1.11)表明只有如下的图或子图才有可能产生发散积分:

$\mathbf{E_e = 2}$, $\mathbf{E_\gamma = 1}$

这是电子-光子顶点 $\Gamma^{(\ell)}_\mu(p', p)$. (上标 ℓ 表明这里仅包含圈图的贡献.) 这种情况下 $D = 0$, 所以它的发散部分是不依赖动量的. 这样 Lorentz 不变性仅允许这个发散常数正比于 γ_μ, 所以

$$\Gamma^{(\ell)}_\mu = L\gamma_\mu + \Gamma^{(f)}_\mu \tag{12.2.1}$$

其中 L 是个对数发散的常数, 而 $\Gamma^{(f)}_\mu$ 是有限的. 由于我们总可以把 $\Gamma^{(f)}_\mu$ 中的有限项 $\delta L\,\gamma_\mu$ 移到 $L\gamma_\mu$ 中, 所以这并没有唯一地定义常数 L. 为了完成这个定义, 我们注意到, 就像 10.4 节中所证明的那样, $\Gamma_\mu(p, p)$, 继而 $\Gamma^{(f)}_\mu(p, p)$, 在质壳 Dirac 旋量之间的在壳矩阵元正比于 γ^μ 的同一个矩阵元, 所以我们可以通过对 $p^2 + m_e^2 = 0$ 规定

$$\bar{u}(\mathbf{p}, \sigma')\Gamma^{(f)}_\mu(p, p)u(\mathbf{p}, \sigma) = 0 \tag{12.2.2}$$

来定义 L.

$\mathbf{E_e = 2}$, $\mathbf{E_\gamma = 0}$

** 另外, 整体对称性不允许的相互作用和质量项, 只要它们是超重整的, 即 $\Delta_i > 0$, 就可以出现在拉格朗日量中. 这是因为超重整耦合的出现降低了发散度, 使得对称性破缺不影响那些被 $\Delta_i = 0$ 的严格可重整耦合抵消掉的发散. 要注意的是, 体现对称性的是裸的严格可重整耦合; 以质壳矩阵元定义的重整化耦合一般体现的是对称性破缺的影响.

这是电子自能插入 $\Sigma^*(p)$. 这种情况下 $D=1$, 所以它的发散部分对入费米子和出费米子携带的动量 p^μ 是线性的. Lorentz 不变性(包括宇称守恒)只允许它是 $\not{p}$ 的函数, 所以我们可以将圈贡献写成

$$\Sigma^{(\ell)}(p) = A - (\mathrm{i}\not{p} + m)B + \Sigma^{(f)}(\not{p})\,, \tag{12.2.3}$$

其中 A 和 B 是发散常数, 而 $\Sigma^{(f)}$ 是有限的. 同样地, 这并不能唯一地定义常数 A 和 B, 因为我们总可以使 $\Sigma^{(f)}$ 偏移一个有限的 $\not{p}$ 的一阶多项式. 我们将通过规定

$$\Sigma^{(f)} = \frac{\partial \Sigma^{(f)}}{\partial \not{p}} = 0 \qquad \text{对 } \mathrm{i}\not{p} = -m \tag{12.2.4}$$

来定义 A 和 B. 实际上, B 不是一个新的发散常数. 只要我们采用一个遵守流守恒的正规化方案, Γ_μ 和 Σ 就将通过 Ward 恒等式(10.4.27)相联系

$$\Gamma^\mu(p,p) = \gamma^\mu + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial p_\mu}\Sigma(p)$$

因而

$$L\gamma_\mu + \Gamma^{(f)}_\mu(p,p) = B\gamma_\mu + \mathrm{i}\frac{\partial \Sigma^{(f)}(p)}{\partial p^\mu}\,. \tag{12.2.5}$$

取该方程在 $\bar{u}(\mathbf{p},\sigma')$ 与 $u(\mathbf{p},\sigma)$ 之间的矩阵元, 并利用方程(12.2.2)和(12.2.4), 我们发现

$$L = B\,. \tag{12.2.6}$$

$\mathbf{E_\gamma = 2}$, $\mathbf{E_e = 0}$

这是光子自能插入 $\Pi^*_{\mu\nu}(q)$. 这种情况下 $D=2$, 所以它的发散部分是 q 的二次多项式. Lorentz 不变性仅允许 $\Pi^*_{\mu\nu}$ 的形式是 $\eta_{\mu\nu}$ 和 $q_\mu q_\nu$ 的线性组合, 而系数只能依赖于 q^2, 所以圈贡献为如下形式

$$\Pi^{(\ell)}_{\mu\nu}(q) = C_1\eta_{\mu\nu} + C_2\eta_{\mu\nu}q^2 + C_3 q_\mu q_\nu + \text{有限项},$$

其中 C_1, C_2 和 C_3 是发散常数. 只要采用遵守流守恒的正规化方案, 我们必然有

$$q^\mu \Pi^{(\ell)}_{\mu\nu}(q) = 0\,.$$

于是, 对发散项这些同样要成立, 所以 $C_1 q_\nu + (C_2+C_3)q^2 q_\nu$ 对所有的 q 都必须是有限的. 由此得出 C_1 和 C_2+C_3 都必须是有限的, 因而可以被纳入到 $\Pi^{(\ell)}_{\mu\nu}(q)$ 的有限部分中. 因此

$$\Pi^{(\ell)}_{\mu\nu}(q) = (\eta_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu)\left(C + \pi(q^2)\right)\,, \tag{12.2.7}$$

其中 $\pi(q^2)$ 是有限的而 C 是 $\Pi^{(\ell)}_{\mu\nu}$ 中仅剩的发散. 为了确定 C 的定义, 我们可以将任意的有限常数 $\pi(0)$ 移入 C, 使得

$$\pi(0) = 0\,. \tag{12.2.8}$$

$\mathbf{E_\gamma = 4}$, $\mathbf{E_e = 0}$

这是光被光散射的振幅 $M_{\mu\nu\rho\sigma}$. 这种情况下 $D=0$, 所以, 利用 Lorentz 不变性和 Bose 统计, 它可以写成(这里不存在非圈图贡献)

$$M_{\mu\nu\rho\sigma} = K(\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} + \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}) + \text{有限项}$$

其中 K 是潜在的发散常数. 然而, 流守恒给出

$$q^\mu M_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$$

因而 $K(q_\nu\eta_{\rho\sigma} + q_\rho\eta_{\nu\sigma} + q_\sigma\eta_{\nu\rho})$ 是有限的. 为了使其对 $q \neq 0$ 依然成立, K 本身必须是有限的. 这是对称性原理在重整化手序中所扮演角色的一个很好的例子; 如果 K 被证明是无限的, 那么无法通过相互作用 $(A_\mu A^\mu)^2$ 的耦合常数的重整化来移除它, 因为规范不变性根本就不允许这样的相互作用, 但是由于规范不变性所附加的流守恒条件, K 是有限的.

$\mathbf{E_\gamma = 1}$, $\mathbf{E_e = 0}$ 和 $\mathbf{E_e = 1}$, $\mathbf{E_\gamma = 0, 1, 2}$

这时分别有 $D = 3$ 和 $D = \frac{5}{2}, \frac{3}{2}$ 和 $\frac{1}{2}$, 但 Lorentz 不变性使所有这样的图为零.

$\mathbf{E_\gamma = 3}$, $\mathbf{E_e = 0}$

这种情况下 $D = 1$, 但由于电荷共轭不变性为零.

读者也许已经注意到了, 独立的发散常数 A, B, C 与量子电动力学拉格朗日量的抵消项部分(11.1.9)中的独立参量 Z_2, Z_3 以及 δm 是一一对应的. 这些抵消项对 $\Sigma^*(p)$ 有一个直接的贡献 $Z_2\delta m - (Z_2 - 1)(\mathrm{i}\not{p} + m)$. 单粒子极点的位置和留数要与自由场传播子中的相同, 这个要求意味着我们必须选择 Z_2 和 δm 使总的 $\Sigma^*(p)$ 满足方程(12.2.4), 即

$$Z_2\,\delta m = -A\,, \tag{12.2.9}$$

$$Z_2 - 1 = -B\,, \tag{12.2.10}$$

从而, 完全电子自能插入函数只是有限函数 $\Sigma^{(f)}(p)$:

$$\Sigma(p) = \Sigma^{(f)}(p)\,. \tag{12.2.11}$$

另外, $\mathscr{L}_2$ 对 Γ_μ 的直接贡献等于 $(Z_2 - 1)\gamma_\mu$. 利用方程(12.2.6), 我们看到全顶点是

$$\Gamma_\mu = \gamma_\mu + (Z_2 - 1)\gamma_\mu + \Gamma_\mu^{(\ell)} = \gamma_\mu + \Gamma_\mu^{(f)}\,. \tag{12.2.12}$$

这不仅是有限的, 而且满足条件

$$\bar{u}(\mathbf{p}, \sigma')\Gamma_\mu(p, p)u(\mathbf{p}, \sigma) = \bar{u}(\mathbf{p}, \sigma')\gamma_\mu u(\mathbf{p}, \sigma)\,, \tag{12.2.13}$$

这也可以从方程(10.6.13)和(10.6.14)中看到. 最后, $\mathscr{L}_2$ 对 $\Pi^*_{\mu\nu}(q)$ 的贡献是 $-(Z_3-1)(q^2\eta_{\mu\nu}-q_\mu q_\nu)$. 为了使光子传播子有一个留数与自由场相同的极点, 我们需要 $q^2\eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu$ 在总 $\Pi_{\mu\nu}(q)$ 中的系数为零, 所以

$$Z_3 = 1 + C \tag{12.2.14}$$

这样光子传播子就是有限的:

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = (\eta_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu)\pi(q^2)\,. \tag{12.2.15}$$

目前, 我们检验的发散来自于动量空间中所有内动量都很大(并且比例为一般值)的区域, 它们是外动量的多项式, 并可以被合适的抵消项抵消掉. 这样的图被称为*表观收敛的*. 在我们得出所有的紫外发散实际上都可以被重整化消除的结论之前, 我们还需要考察另一类发散, 它们出现在高阶图中, 来自于动量空间积分变量的一些子集而非全体趋于无穷大. 例如, 在量子电动力学

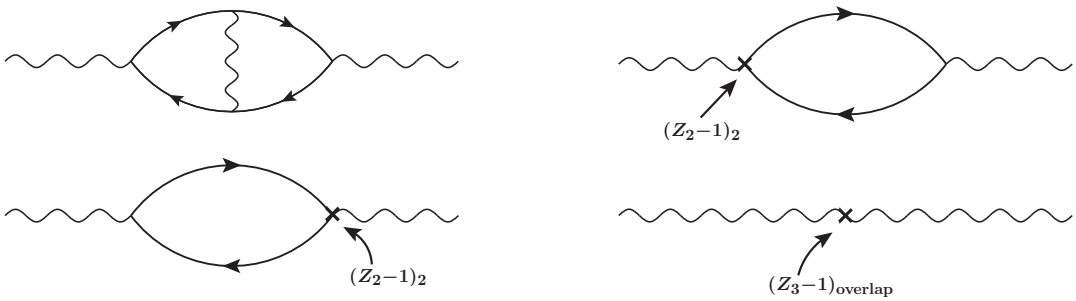


图 12.2 量子电动力学中一些包含交缠发散的 4 阶光子自能图. 带箭头的线是电子; 波浪线是光子. 十字代表抵消项的贡献.

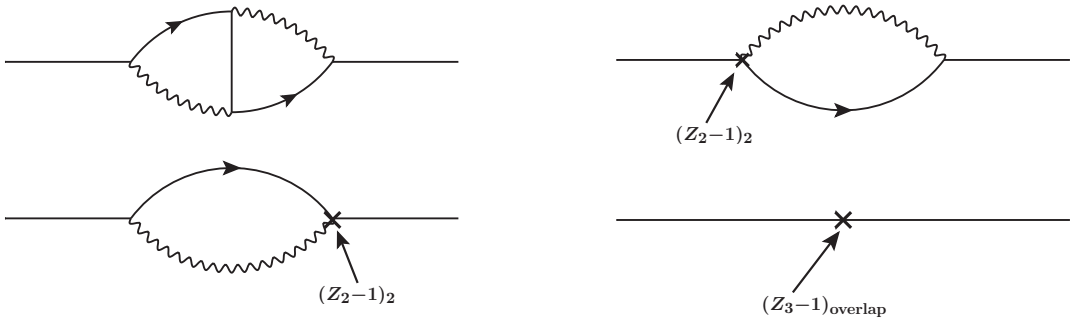


图 12.3 量子电动力学中一些包含交缠发散的 4 阶电子自能图. 波浪线是光子; 其它线是电子. 十字代表抵消项的贡献.

中, 子积分中的表观发散要么来源于光子自能部分 Π^*, 要么来源于电子自能部分 Σ^*, 要么来源于电子-电子-光子顶点 Γ^μ. 这些发散的问题在于它们无法通过对外动量微分去掉; 留给我们的项, 导数只能作用在不在发散子图中的内线上, 因而没有降低那些子图的发散度. 正如上一节所提到的, 对于一个图或几个图的和, 仅当它的以及它所有的子积分在动量幂次计数的意义下是表观收敛时, 它才是真正收敛的. 然而, 只要这样的发散子图出现, 一个无限大的抵消项都会伴随它出现. 在电动力学中, 它们是方程(11.1.9)中的项: 对每一个 $\Pi^*_{\mu\nu}(q)$ 是 $-(Z_3-1)(q^2\eta_{\mu\nu}-q_\mu q_\nu)$, 对每一个 $\Sigma^*(p)$ 是 $Z_2\delta m-(Z_2-1)(\mathrm{i}\not{p}+m)$, 而对每一个 Γ^μ 是 $(Z_2-1)\gamma^\mu$. 把图作为一个整体, 这些抵消项抵消了来自发散子图的无限大.[1]

不幸的是, 这个简单的论证中存在疏漏——没有考虑到交缠(overlap)发散的可能性. 就是说, 两个发散子图有可能共有一条内线, 使得我们无法将它们视为独立的发散积分. 在量子电动力学中, 仅当两个电子-电子-光子顶点在光子或电子自能插入图†中交缠时, 如图12.2和12.3所示, 才会遇到这样的发散.

将交缠发散考虑在内的完整重整化方案应该不仅要消除整体积分中的表观紫外发散, 也要消除所有子积分中的表观发散, 并且要证明这个处理可以被质量, 场以及耦合常数的重整化(至少形式上地)实现. 这样, 参考文献 [2] 的定理就确保了, 对于所有重整化场的 Green 函数, 当它以重整

†两个自能插入图或者一个自能插入图与一个顶点共享一条线会使得外线的数目不足以将这样的子图与图的剩余部分相连. 历史上, 为了绕过电子自能中的交缠发散问题, 曾用 Ward 恒等式(10.4.26)将电子自能表示成不会产生交缠发散的顶点函数. 因为这个方法不是必要的, 并且在任何情况下都不能解决光子或其它中性粒子的自能问题, 所以我们不在这里叙述这个方法.

化质量和耦合表示时是有限的. 场, 质量以及耦合的重整化使整体积分以及所有的子积分表观收敛的第一个证明由 Salam(萨拉姆)给出.[5] 一个更具体的消除紫外发散的处理由 Bogoliubov(玻戈留玻夫)和 Parasiuk(泊拉奇克)[6]给出, 并由 Hepp(海普)修正,[7] 而且他们证明了这等价于场, 质量以及耦合常数的重整化. 最后, Zimmerman[8](齐默尔曼)证明了这一处理确实消除了整个积分以及所有子积分中的表观发散, 并利用参考文献 [2] 的定理得到了这样的结论: 重整化的 Feynman 动量空间积分是收敛的.

简言之, 消除表观发散的 "BPHZ" 方案要求我们考虑用盒子围住整个图和(或)子图的所有可能方式(称为"树林"), 盒子可以彼此嵌套但不能重叠. (下面会给出一个例子.) 对于每一树林, 通过将盒子内(从最内部的盒子开始, 逐步向外扩展)表观发散度为 D 的所有子图的被积函数替换成它关于流入或流出该盒子的动量的 Taylor 级数展开的前 $D+1$ 项, 我们可以定义一个减除项.‡ 减除后的 Feynman 图由原始图减去所有这些减除项给出, 这些减除项中包括由包围整个图的单个盒子组成的树林的减除项.

很容易看到, 以这种方式计算出的减除后的 Feynman 振幅与将原始拉格朗日量中的所有场, 耦合常数以及质量替换成它们相应的重整化后的结果得到的振幅是相同的. 这种方法与我们在第 11 章所采用的那类重整化之间的差异是: 用振幅定义的重整化场, 耦合常数和质量处在非常规的重整化点上, 这个点上所有的 4-动量为零. (在这一方面, 本节开头讨论的一维发散积分提供了 BPHZ 方法分离发散项的一个基本例子.) 但重整化点没有什么特殊之处; 一旦用这些非常规的重整化量表示 Feynman 振幅以使其收敛, 我们就能在不带来新的无限大的同时将其改写成用常规重整化场, 耦合以及质量表示的形式.

在实际问题中采用 BPHZ 减除方案是不必要的. 将场, 质量以及耦合替换成它们相应的(利用任何方便的重整化点定义的)重整化量就会自动给出抵消所有无限大的抵消项. 代替给出 BPHZ 减除方案确实会使所有积分收敛的证明, 我们就看一个例子, 在这个例子中展示重整化在即使有交缠发散时是如何起作用的.

考察图12.2所示的光子自能插入图 $\Pi^*_{\mu\nu}(q)$ 的 4 阶贡献. (这里的树林由对 p 和 p' 的整体积分, 单独对 p 的子积分以及单独对 p' 的子积分构成.) 将顶点部分和光子场重整化的相应抵消项包含在内, 它的值是

$$\begin{aligned}[\Pi^*_{\mu\nu}(q)]_{\text{overlap}} = &-\frac{e^4}{(2\pi)^8}\int \mathrm{d}^4p \int \mathrm{d}^4p' \frac{1}{(p-p')^2-\mathrm{i}\epsilon} \\ &\times \operatorname{Tr}\left\{S(p')\,\gamma_\nu\, S(p'+q)\,\gamma^\rho\, S(p+q)\,\gamma_\mu\, S(p)\,\gamma_\rho\right\} \\ &-2(Z_2-1)_2\frac{\mathrm{i}e^2}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4p\ \operatorname{Tr}\left\{\gamma_\nu\, S(p+q)\,\gamma_\mu\, S(p)\right\} \\ &-(Z_3-1)_{\text{overlap}}\left(q^2\eta_{\mu\nu}-q_\mu q_\nu\right), \end{aligned} \tag{12.2.16}$$

其中 $S(p)\equiv[-\mathrm{i}\not{p}+m]/[p^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon]$; $(Z_2-1)_2$ 是 Z_2-1 中 e 的二阶项; 而 $(Z_3-1)_{\text{overlap}}$ 是一个对数发散常数, 它是 e 的 4 阶项, 用来抵消 $[\Pi^*_{\mu\nu}(q)]_{\text{overlap}}$ 中 q^λ 的二阶项. 第二项中出现因子 2 是因为二阶光子自能中的两个顶点都有重整化抵消项 Z_2-1. 然而, 要注意的是, 这里的第一项既可以被理解成由 p'-积分给出的顶点修正插入到由 p-积分给出的光子自能上, 也可以被理解成由 p-积

‡正如这里所说的, 这个方案既适用于可重整理论也适用于不可重整理论. 在可重整理论中, 它意味着, 除非该盒子包含的图是与拉格朗日量中可重整项相对应的有限多个图中的一个, 否则就没有减除项.

分给出的顶点修正插入到由 p'-积分给出的光子自能上, 但是, 因为只有一个光子传播子, 它不能理解成插入两个独立的顶点修正.

为了看到如何处理方程(12.2.16)中的无限大, 注意到

$$[(Z_2-1)_2+R_2]\gamma_\mu=\frac{\mathrm{i}e^2}{(2\pi)^4}\int\frac{\mathrm{d}^4p'}{p'^2-\mathrm{i}\epsilon}\,\gamma_\rho\,S(p')\,\gamma_\mu\,S(p')\gamma^\rho\,, \tag{12.2.17}$$

其中 R_2 是有限的余项. (Lorentz 不变性告诉我们右边的积分正比于 γ_μ. 这个积分与 $(Z_2-1)_2\gamma_\mu$ 的差等于全重整化电子-电子-光子顶点在零电子动量和零光子动量处精确到 e 的二阶的值, 因而是有限的.) 这使我们可以将方程(12.2.16)重新表述成如下形式

$$\begin{aligned}[\Pi^*_{\mu\nu}(q)]_{\text{overlap}}=&-\frac{e^4}{(2\pi)^8}\int\mathrm{d}^4p\int\mathrm{d}^4p'\\
&\times\left[\frac{1}{(p-p')^2-\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{Tr}\left\{S(p')\,\gamma_\nu\,S(p'+q)\,\gamma^\rho\,S(p+q)\,\gamma_\mu\,S(p)\,\gamma_\rho\right\}\right.\\
&\quad-\frac{1}{p'^2-\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{Tr}\left\{S(p')\,\gamma_\nu\,S(p')\,\gamma^\rho\,S(p+q)\,\gamma_\mu\,S(p)\,\gamma_\rho\right\}\\
&\quad\left.-\frac{1}{p^2-\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{Tr}\left\{S(p')\,\gamma_\nu\,S(p'+q)\,\gamma^\rho\,S(p)\,\gamma_\mu\,S(p)\,\gamma_\rho\right\}\right]\\
&-2R_2\frac{\mathrm{i}e^2}{(2\pi)^4}\int\mathrm{d}^4p\;\mathrm{Tr}\left\{\gamma_\nu\,S(p+q)\,\gamma_\mu\,S(p)\right\}\\
&-(Z_3-1)_{\text{overlap}}\,(q^2\eta_{\mu\nu}-q_\mu q_\nu)\,.\end{aligned} \tag{12.2.18}$$

首先考察只对 p' 的积分. 前两项都是对数发散的, 但是它们的差是有限的. 第三项(加上一个规范不变的正规化子后)也是对数发散的, 但这一项中的发散(不像前两项)的形式是 q 的二次多项式, 而余项是有限的. 剩下的发散被 $-(Z_3-1)(q^2\eta_{\mu\nu}-q_\mu q_\nu)$ 这一项抵消, 这一项抵消了 $\Pi^*_{\mu\nu}(q)$ 中的所有二阶项. 所以 p'-子积分给出了有限的结果. 方程(12.2.16)的对称性表明 p-积分也会以精确相同的方式给出一个有限的结果. 一般的对 p 和 p' 的子积分, 即保持 $ap+bp'$ (其中 a 和 b 为任意非零常数)不变的子积分, 明显是收敛的, 而抵消项 $-(Z_3-1)_{\text{overlap}}(q^2\eta_{\mu\nu}-q_\mu q_\nu)$ 使对 p 和 p' 一起积分变得有限. 因此方程(12.2.18)和它的任意一个子积分都满足收敛的幂次计数要求, 因此根据上一节所引用的定理[2], 总表达式实际上是收敛的.

* * *

在电动力学中, 存在着重整化耦合以及重整化质量和场的一个自然定义. 但并非总是如此, 例如, 考察单个实标量场 $\phi(x)$ 的理论, 其拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}=-\tfrac{1}{2}\,\partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi-\tfrac{1}{2}\,m^2\phi^2-\tfrac{1}{24}\,g\,\phi^4\,. \tag{12.2.19}$$

到单圈阶, 标量-标量散射的 S-矩阵由 Feynman 规则给出

$$S(q_1q_2\to q_1'q_2')=\frac{-\mathrm{i}(2\pi)^4\delta^4(q_1'+q_2'-q_1-q_2)}{(2\pi)^6(16E_1'E_2'E_1E_2)^{1/2}}F(q_1q_2\to q_1'q_2')\,, \tag{12.2.20}$$

其中

$$-\mathrm{i}(2\pi)^4 F(q_1q_2\to q_1'q_2') = -\mathrm{i}(2\pi)^4 g + \frac{1}{2}\Big[-\mathrm{i}(2\pi)^4 g\Big]^2 \left[\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\right]^2 \times \int \mathrm{d}^4k \left[\frac{1}{\Big[(q_1+k)^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon\Big]\Big[(q_2-k)^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon\Big]} + (q_2\to -q_1') + (q_2\to -q_2')\right], \tag{12.2.21}$$

而 q_1, q_2 和 q_1', q_2' 是入 4-动量和出 4-动量. 像通常一样, 组合分母并旋转 k^0-积分围道, 这给出

$$F = g - \frac{g^2}{16\pi^2}\int_0^\infty k^3\,\mathrm{d}k \int_0^1 \mathrm{d}x \left\{\Big[k^2+m^2-sx(1-x)\Big]^{-2} + \Big[k^2+m^2-tx(1-x)\Big]^{-2} + \Big[k^2+m^2-ux(1-x)\Big]^{-2}\right\}, \tag{12.2.22}$$

其中 s, t 和 u 是 *Mandelstam*(曼德斯塔姆)变量

$$s = -(q_1+q_2)^2\,, \qquad t = -(q_1-q_1')^2\,, \qquad u = -(q_1-q_1')^2\,, \tag{12.2.23}$$

满足 $s+t+u = 4m^2$; 另外, x 是在组合分母时引入的 Feynman 参量. 加上一个在 $k=\Lambda$ 处的紫外截断, 这给出结果(对于 $\Lambda \gg m$)

$$F = g - \frac{g^2}{32\pi^2}\int_0^1 \mathrm{d}x \left\{\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2-sx(1-x)}\right) + \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2-tx(1-x)}\right) + \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2-ux(1-x)}\right) - 3\right\}. \tag{12.2.24}$$

假定我们处在 F 为实的区域, 我们可以将重整化耦合 g_R 定义为 F 在我们希望的任意 s, t, u 点的值. 例如, 假使为了保留标量间的对称性, 我们选择在离壳点[¶] $q_1^2 = q_2^2 = q_1'^2 = q_2'^2 = \mu^2$, $s = t = u = -4\mu^2/3$ 处重整化. 定义重整化耦合 g_R 为 F 在该点的值, 我们有

$$g = g_R + \frac{3g^2}{32\pi^2}\left[\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right) - 1 - \int_0^1 \mathrm{d}x\,\ln\left(\frac{4x(1-x)}{3}+\frac{m^2}{\mu^2}\right)\right] + \cdots. \tag{12.2.25}$$

这样, 到 g_R^2 阶, 方程(12.2.24)对截断的依赖被抵消了, 留下了由 g_R 表示 F 的有限公式:

$$F = g_R - \frac{g_R^2}{32\pi^2}\int_0^1 \mathrm{d}x \left\{\ln\left(\frac{m^2+4x(1-x)\mu^2/3}{m^2-sx(1-x)}\right) + \ln\left(\frac{m^2+4x(1-x)\mu^2/3}{m^2-tx(1-x)}\right) + \ln\left(\frac{m^2+4x(1-x)\mu^2/3}{m^2-ux(1-x)}\right)\right\} + \cdots. \tag{12.2.26}$$

这里, μ^2 可以取任何大于 $-3m^2$ 的值, 在这个范围内 g_R 是实的. 自然, 方程(12.2.26)中显式的 μ-依赖性被重整化耦合的 μ-依赖性抵消了. 在卷 II 中的重整化群方法中, 这种选择重整化方式(这当然也存在于电动力学和其它真实理论中)上的这种自由将变得非常重要.

[¶]回顾方程(12.2.25)的推导, 可以验证在这个推导中, 我们没有用到条件 $q_1^2 = q_2^2 = q_1'^2 = q_2'^2 = -m^2$, 所以无论我们取外线动量是多少, 方程(12.2.24)总是适用的.

表 12.2 包含标量 ϕ, Dirac 场 ψ 和光子场 A^μ 的拉格朗日密度中所允许的可重整项. 这里的 n_{if} 和 d_i 是 i 类相互作用中 f 类场和导数的数目, 而 Δ_i 是相应系数的量纲.

	n_{if}		d_i	Δ_i	$\mathscr{H}_i$
标量	光子	自旋 $\frac{1}{2}$			
1	0	0	0	3	ϕ
2	0	0	0	2	ϕ^2
2	0	0	2	0	$\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$
3	0	0	0	1	ϕ^3
4	0	0	0	0	ϕ^4
2	1	0	1	0	$\phi\partial_\mu\phi A^\mu$
2	2	0	0	0	$\phi^2 A_\mu A^\mu$
1	0	2	0	0	$\phi\bar{\psi}\psi$
0	2	0	2	0	$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$
0	0	2	0	1	$\bar{\psi}\psi$
0	0	2	1	0	$\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$
0	1	2	0	0	$\bar{\phi}\gamma^\mu A_\mu\psi$

12.3 可重整性是必要的吗?

在上一节, 我们发现了一类特殊理论, 这类理论的拉格朗日量只包含有限个项, 然而重整化手续对于这类理论也是适用的. 在这些理论中, 所有相互作用都满足可重整条件

$$\Delta_i \equiv 4 - d_i - \sum_f n_{if}(s_f + 1) \geq 0\,,$$

其中 d_i 和 n_{if} 分别是第 i 类相互作用中 f 类场和导数的数目, s_f 是(附加一些限制后的) f 类场的自旋. 为了使重整化在这类理论中起作用, 通常还要对称性原理所允许的所有可重整相互作用都应该真正地出现在拉格朗日量中.

很重要的是, 这样的相互作用只有有限多种. 如果有太多的场或导数, 或者场的自旋过高, Δ_i 都会变成负的. 除非有特殊的抵消, 可重整相互作用根本就不能包含 $s_f \geq 1$ 的场, 这是因为对于拉格朗日量中的任何一项, 要包含这种场以及两个或多个其他场同时还有 $\Delta_i \geq 0$, 那么它只能包含单个 $s_f = 1$ 的场连同两个标量场但不能有导数, 而这不是 Lorentz 不变的. 我们将在卷 II 中看到, 在合适的规范下, 一般的无质量自旋 1 规范场等效于有 $s_f = 0$, 就像光子. 另外, 我们将在卷 II 中看到, 即便是有质量规范场, 取决于它们的质量实际上来自于哪里, 它们也可以等效地有 $s_f = 0$. 暂且将这些特殊情况搁置一旁, 对于只涉及标量($s = 0$), 光子($s = 0$)以及自旋 $\frac{1}{2}$ 费米子($s = \frac{1}{2}$)的拉格朗日密度, 表12.2中给出了 Lorentz 不变性和规范不变性所允许的所有可重整项.

我们看到, 可重整性的要求对我们能够考虑的物理理论的种类施加了苛刻的约束. 这些约束为物理理论结构提供了一条有价值的线索. 例如, Lorentz 不变性和规范不变性本身允许在量子电动力学的拉格朗日量中引入正比于 $\bar{\psi}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\psi F^{\mu\nu}$ 的"Pauli"项, 而这一项使电子磁矩变成了一个可调的参量, 但因为它们不是可重整的, 我们排除了这些项. 量子电动力学的成功预言, 例如 11.3 节中概述的电子磁矩的计算, 可以看作是可重整性原理起作用的结果. 同样的分析也适用

于我们将在卷 II 讨论的弱作用, 电磁作用和强作用的标准模型; 可以在该理论中加入任意多个项, 例如夸克和轻子之间的 4-费米子相互作用, 这个相互作用会使标准模型的所有预测失效, 而这些项仅仅因为是不可重整的被排除掉了.

我们非得相信拉格朗日量必须被限制成只能包含可重整的相互作用吗? 正如我们在上一节中所看到的, 如果我们在拉格朗日量中引入对称性所允许的*所有*相互作用, 这样的相互作用有无穷多个, 那么就会有可用来抵消每一个紫外发散的抵消项. 在这个意义上, 只要我们像前面说过的那样在拉格朗日量中引入了所有可能的项, 不可重整理论就变得和可重整理论一样可重整.

近些年来, 可重整性不是一个基本的物理要求以及任何真实的量子场论实际上都将同时包含可重整项和不可重整项, 这些变得越来越显而易见. 这一观点的改变, 部分可以归因于在寻找可重整引力理论上接二连三的失败. 在由 Einstein 等效原理所支配的一类普遍的引力度规理论中, 可重整的相互作用根本就不存在——广义协变的相互作用必须从曲率张量和它的广义协变导数中构造, 因此, 即便是在引力子传播子形如 k^{-2} 的"规范"中, 这些相互作用包含了过多的度规导数以至于丧失了可重整性. 特别地, 引力的耦合常数 $8\pi G_N = (2.43 \times 10^{18}\,\mathrm{GeV})^{-2}$ 量纲为负, 我们可以从这一点很容易地看到广义相对论的不可重整性. 即使只有这些, 抵消虚引力子引起的发散也将要求拉格朗日量包含对称性所允许的所有相互作用——不仅是包含引力子的相互作用, 还有包含任意粒子的相互作用.

但是, 如果可重整性不是一个基本的物理原理, 那么我们又该如何解释量子电动力学和标准模型这类可重整理论的成功呢? 答案可以通过简单的量纲分析看到. 我们已经注意到 i 类相互作用的耦合常数具有量纲

$$[g_i] \sim [\text{质量}]^{\Delta_i}\,, \tag{12.3.1}$$

其中 Δ_i 是指标(12.1.9). 不可重整相互作用就是那些耦合常数量纲为质量负幂次的相互作用. 现在从(12.3.1)出发可以不无道理地猜测: 耦合常数不仅有被 Δ_i 确定的量纲, 而且量级上大体是

$$g_i \approx M^{\Delta_i}\,, \tag{12.3.2}$$

其中 M 是某个通常的质量. (我们将会看到这实际上是下面要讨论的有效场论中的情况, 在卷 II 中会更加详细地讨论.) 在计算特征动量标度 $k \ll M$ 的物理过程时, 将 $\Delta_i < 0$ 的 i 类不可重整相互作用包含在内将会引入因子 $g_i \approx M^{\Delta_i}$, 由量纲分析可知, 这必将伴随一个因子 $k^{-\Delta_i}$, 因而这种相互作用的效应在 $k \ll M$ 时被因子 $(k/M)^{-\Delta_i} \ll 1$ 压低*了. (在卷 II 中, 会用重整化群方法更加仔细地进行这个讨论.) 可重整的电弱理论和强相互作用理论的成功仅表明 M 远高于检验这些理论的能标.

例如, 对电子或 μ 子的传统电动力学的领头阶不可重整修正是那些量纲为 5 的相互作用, 它们仅被压低了一个 $1/M$ 因子. 同时满足 Lorentz 不变性, 规范不变性和 CP 不变性的此类相互作用只有一个, 就是 $(\mathrm{i}e/2M)\bar{\psi}[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\psi F^{\mu\nu}$ 阶的 Pauli 项. 根据方程(10.6.24), (10.6.17)和(10.6.19), 这样的项会给电子或 μ 子磁矩带来 $4e/M$ 阶的贡献. 电子磁矩的计算结果与实验相符至 $10^{-10}e/2m_e$ 阶, 所以 M 必须要大于约 $8 \times 10^{10} m_e = 4 \times 10^7\,\mathrm{GeV}$.

*在此有必要假定紫外发散已经被重整化移除了, 这样就不会有紫外截断因子 Λ 来干扰我们的量纲分析. 否则, 量纲分析会告诉我们, 对于每个额外的 $\Delta_i < 0$ 的不可重整耦合常数因子 g_i, 它在 $\Lambda \to \infty$ 时将伴随一个增长因子 $\Lambda^{-\Delta_i}$. 这个对量纲的讨论促使 Heisenberg[9] 很早就依照耦合常数的量纲对相互作用进行了分类, 并提出[10]新效应将发生在量级为 g_i^{1/Δ_i} 的能量处, 例如能量 $G_F^{-1/2} \approx 300\,\mathrm{GeV}$ 处, 其中 G_F 是费米 β-衰变理论的 4-费米子耦合常数. 在重整化理论发展起来后, Sakata(坂田)等人[11]注意到了不可重整理论是那些耦合常数量纲为负的理论.

如果其它对称性约束了不可重整相互作用的形式, 这一限制会被削弱. 例如, 对于传统的量子电动力学, 在手征变换 $\psi \to \gamma_5\psi$ 下, 除了费米子质量项 $-m\bar{\psi}\psi$ 有一个符号改变外, 拉格朗日量是不变的. 如果我们假定整个拉格朗日量在形式对称性 $\psi \to \gamma_5\psi$, $m \to -m$ 下不变, 那么, 为了使拉格朗日量中的Pauli项对电子磁矩的贡献仅是 $4em/M^2$ 阶的, 它就必须伴随着一个额外因子 m/M 出现. 正是由于这个额外的因子 m, 这里为 M 提供最有用限制的是 μ 子而不是电子. μ 子磁矩的计算值与实验直至 $10^{-8}e/2m_\mu$ 阶都是相符的, 所以 M 必须大于约 $\sqrt{8\times10^8}m_\mu = 3\times10^3\,\mathrm{GeV}$. 在任何情况下, 如果 M 非常接近 $10^{18}\,\mathrm{GeV}$, 那么我们就可以合理地忽略掉可能出现在量子电动力学中的不可重整相互作用.

这些考察帮助我们解决了拉格朗日量中的高阶导数项所带来的一些谜题. 例如, 在实标量场 ϕ 的一般理论中, 我们会期望在拉格朗日密度中找到形如 $\phi\Box^n\phi$ 的项. 任何一个这样的项都会对标量自能函数 $\Pi^*(q^2)$ 有一个正比于 $(q^2)^n$ 的直接贡献. 如果我们计入了这样的贡献的所有阶, 但忽略所有其它不可重整相互作用的效应, 那么传播子 $\Delta'(q^2) = 1/(q^2 + m^2 - \Pi^*(q^2))$ 就不会像10.7节的一般讨论中所预期的那样在 q^2 的负值处有单极点, 而是有 n 个这样的极点(其中一些会重合), 而且一般处在 q^2 的复值处. 但是, 如果不可重整项 $\phi\Box^n\phi$ 有一个 $M^{-2(n-1)}$ 阶的系数, 其中 $M \gg m$, 那么多余的极点就在 M^2 阶的 q^2 处, 在这里忽略其它也必须出现在拉格朗日量中的无限多个不可重整相互作用就是不合理的. 因此, 在一般的不可重整拉格朗日量中出现高阶导数项与10.7节中使用的量子场论的一般底层原理并不矛盾. 然而, 正如反复提到的, 由于同样的原因, 我们也不能用高阶导数项来完全避免紫外发散. 拉格朗日密度中的项 $M^{-2(n-1)}\phi\Box^n\phi$ 在动量 $q^2 \approx M^2$ 处提供了一个截断, 但是在这些动量处我们无法忽略所有其它必须要出现的不可重整相互作用.

尽管不可重整相互作用被高度压低了, 但如果它们有其它本要被禁止的效应, 不可重整相互作用也是可探测的. 例如, 我们将在12.5节看到, 电荷共轭对称性和空间反演不变性是电磁相互作用的结构被要求了规范不变性, Lorentz不变性和可重整性后的自然结果, 然而我们可以很容易想出破坏这些对称性的不可重整项, 例如电子电偶极矩项 $\bar{\psi}\gamma_5[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\psi F^{\mu\nu}$, 或者Fermi相互作用 $\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$. 现今被广泛接受的一个观点是, 重子数和轻子数守恒被高度压低的不可重整相互作用的微弱效应破坏了. 另一可探测不可重整相互作用的例子是引力给出的. 正如前面提到的, 引力子根本就没有可重整相互作用. 然而, 我们显然探测到了引力, 这是因为引力有这样的特殊性质: 一个宏观物体中的所有粒子的引力场可以相互叠加.

尽管不可重整理论包含无限多个自由参量, 它们依旧保持着可观的预测能力:[12] 它使我们可以计算Feynman振幅的不解析部分, 就像上一节开头一维例子中的 $\ln q$ 和 $q\ln q$ 项. 这种计算只是再次产生了 S-矩阵理论的公理所要求的结果, 即 S-矩阵只有那些幺正性所要求的奇异性.

矛盾的是, 当对称性原理禁止了可重整相互作用时, 不可重整量子场论显示出了它最有用的地方. 在这种情况下, 通过做 k/M 的幂级数展开, 我们可以导出一个有用的微扰论. 这已经在低能 π 介子理论[12, 13]以及低能引力子理论中做了详尽的推导,[14] 我们将在卷II中对 π 介子情况进行详细的讨论. 作为一个简单的例子, 考察一个实标量场的理论, 该场在平移

$$\phi(x) \to \phi(x) + \epsilon$$

下满足不变性原理, 其中 ϵ 是任意常数. 这个对称性禁止了任何可重整相互作用和标量质量, 但它允许无限多个不可重整的导数相互作用

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{g}{4}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi)^2 - \cdots,$$

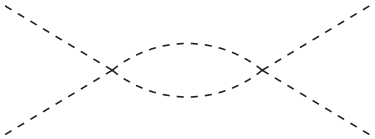


图 12.4 带有导数四线性相互作用的理论中的标量-标量散射的单圈图.

其中 $g \approx M^{-4}$, 而 "$\cdots$" 表示有更多导数或场的项. (简单起见, 在这里假定该理论在反演 $\phi \to -\phi$ 下也具有对称性.) 根据上面的量纲分析, 所有能量和动量都是 $k \ll M$ 阶的一般反应的图都被因子 $(k/M)^\nu$ 压低了, 其中

$$\nu = -\sum_i V_i \Delta_i = \sum_i V_i (d_i + n_i - 4)\,,$$

而 n_i 和 d_i 是 i 类相互作用中标量场和导数的个数, V_i 是这些相互作用顶点在我们图中的个数. 当 $k \ll M$ 时, 对任何过程的主要贡献都是那些 ν 值最小的. 利用熟悉的连通图的拓扑恒等式:

$$\sum_i V_i = I - L + 1\,, \qquad \sum_i V_i n_i = 2I + E\,,$$

其中 I, E 和 L 是图中内线, 外线和圈的个数, ν 的公式可以用一个更有用的形式表示. 结合这些关系给出:

$$\nu = 2E - 4 + 4L + \sum_i V_i (d_i - n_i)\,.$$

现在, 场变换对称性要求每个场必须伴随至少一个导数, 所以 $d_i - n_i$ 以及 L 和 V_i 对于所有相互作用都是非负的. 因此, 对一个给定过程(即外线个数 E 固定), 主要的项是那些仅由树图(即 $L = 0$)和导数个数 $d_i = n_i$ 最少的相互作用构成的项. 也就是说, 在领头阶中, 我们可以取拉格朗日密度仅依赖于场的一阶导数. 高阶修正可以包含圈和(或)那些包含某些场的更多导数的相互作用. 但到 k/M 的任意给定的 ν 阶, 我们只需考虑有限个图, 即那些 $L \leq (4 - 2E + \nu)/4$ 的图, 以及有限多种相互作用类型.

例如, 标量-标量散射的领头阶是通过利用第一阶相互作用 $-g(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi)^2$ 计算单顶点树图给出. 根据我们对 ν 的公式, 在低能下被因子 $(k/M)^2$ 压低的领头阶修正来源于另一单顶点树图, 它由形如[**] $\partial_\mu\partial_\nu\partial^\mu\partial^\nu\phi\partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi$ 这种包含两个额外导数的相互作用产生. 下一阶的修正, 在低能处又被两个额外的 k/M 因子压低了, 它们既来自图12.4中仅由相互作用 $-g(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi)^2$ 计算的单圈图(包含外线间的置换), 还有一部分来自单顶点树图, 其中的单顶点来自有 8 个导数的四次相互作用, 它的耦合常数中含有用来抵消圈图发散[†]的无穷大部分. 圈图也在散射振幅中产生有限项, 这些有限项正比于类似 $s^4 \ln s + t^4 \ln t + u^4 \ln u$, $s^2t^2 \ln u + t^2u^2 \ln s + u^2s^2 \ln t$ 等等这样的项, 其中系数是可计算的且正比于 g^2. 这些有限项代表为了保证 S-矩阵幺正性所需的最低阶散射振幅修正, 然而到目前为止, 微扰量子场论仍是计算它们的最简单方法.

尽管不可重整理论可以提供一个有用的关于能量的幂级数展开, 但是当能量达到各种耦合共有的典型质量标度 M 处时, 它们在所难免地的失去了所有预测能力. 如果我们打算逐级地做这些

[**] 依照 7.7 节的评述, 我们排除了包含 $\Box\phi$ 的相互作用, 因为这些相互作用可以用 ϕ 的场方程以其它相互作用的形式表示出来.

[†] 如果我们采用维数正规化, 它们是我们在单圈图中唯一遇到的发散. 对于其它正规化方法, 也存在四次发散和二次发散, 它们被有 4 个或 6 个导数的 4-标量相互作用中的抵消项抵消.

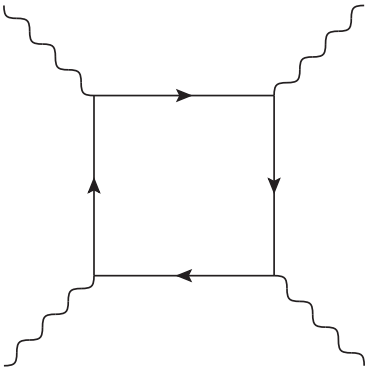


图 12.5 光子-光子散射图, 它的效应在低能时可以从 Euler 等人[16]的有效拉格朗日量中计算出来. 直线是电子; 波浪线是光子.

展开, S-矩阵元的结果将在 $E \gg M$ 时破坏幺正性要求. 在这样的能量下究竟发生了什么? 似乎仅有两种可能. 一种是强度不断增长的不可重整耦合的效应以某种方式达到极点了, 避免了与幺正性矛盾.[15] 另一种可能是某种新物理在标度 M 处介入了. 在这种情况下, 描述能量 $E \ll M$ 的自然规律的不可重整理论只是*有效场论*而不是真正基本的理论.

有效场论最早的例子可能是 Euler 等人[16]在 20 世纪 30 年代给出的低能光子-光子相互作用理论. (参看 1.3 节.) 事实上, 他们计算了像图12.5中的那样 Feynman 图对光子-光子散射的贡献, 并发现在能量远小于 m_e 时, 光子被光子散射得结果与如下有效拉格朗日量计算出的结果相同

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} = \frac{2\alpha^2}{45m_e^4}\left[(\mathbf{E}^2-\mathbf{B}^2)^2+7(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})^2\right] + \frac{eE}{m_e^2} \text{ 和 } \frac{eB}{m_e^2}\text{的高阶项}\,.$$

为了计算光子相互作用矩阵元中的领头项, Euler 等人只在树图近似下使用这个有效拉格朗日量. 尽管这种拉格朗日量是不可重整的, 不久之后它们就被应用到树图近似以外了.[12, 17]

在现代术语中, 我们称, 电子在推导该拉格朗日量时被"积掉"了, 这是因为在单圈近似下我们有

$$\exp\left(\mathrm{i}\int \mathscr{L}_{\text{eff}}(\mathbf{E},\mathbf{B})\mathrm{d}^4x\right) = \int\left[\prod_x \mathrm{d}\psi_e(x)\right]\exp\left(\mathrm{i}\int \mathscr{L}_{\text{QED}}(\psi_e,\mathbf{A})\mathrm{d}^4x\right)\,.$$

一个更加普遍的方法就是写出最普遍的不可重整有效拉格朗日量, 利用它计算出各种振幅的能量和动量的展开式, 然后通过比对振幅结果与从底层理论得到的结果来确定有效拉格朗日量中的常数.

我们还会遇到有效场论, 尤其是到卷 II 考察破缺对称性的时候. 我们将看到, 即便有效场论无法从一个底层理论中导出, 无法导出的原因要么是对底层理论并不清楚, 要么是相互作用过强以至于无法使用微扰论, 有效场论仍是十分有用的. 事实上, 即使我们对带电粒子的性质一无所知, 能量足够低的光子散射也只能由 $(\mathbf{E}^2-\mathbf{B}^2)^2$和$(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})^2$ 构成的有效拉格朗日量来描述, 这是因为它们是唯一的 Lorentz 不变和规范不变且在 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 上没有导数作用的 4 次项. 有这种导数的项在低的光子能量 E 处被额外的因子 E/M 压低, 其中 M 是要被积掉的带电粒子的某个典型质量. 我们可以更进一步: 我们将看到, 即便有效场论所描述的轻粒子根本没有出现在底层理论中, 只要重粒子组分被积掉了, 它仍是很有用的. 底层理论甚至可能根本不是场论——引力的不相容问题使

得很多理论家相信这个底层理论, 事实上, 是弦论. 但是, 无论有效场论来自何处, 它都不可避免地是不可重整理论.

12.4 浮动截断*

在结束本章之前, 值得讨论一下传统重整化理论与 Wilson(威尔逊)所开创方法[18]之间的关系. 在 Wilson 方法中, 我们要在分量为 Λ 阶的动量上加入一个"浮动"的有限紫外截断(或尖锐或光滑), 并且取代要求 $\Lambda\to\infty$, 我们将要求理论中的(那些出现在拉格朗日量中的)裸常数对 Λ 的依赖方式要使可观测量是 Λ-无关的.

采用无量纲参量要方便一些. 如果一个裸耦合参量或裸质量参量 $g_i(\Lambda)$ 的量纲是[质量]$^{\Delta_i}$, 我们定义相应的无量纲参量 $\mathscr{G}_i$

$$\mathscr{G}_i(\Lambda)\equiv\Lambda^{-\Delta_i}g_i(\Lambda)\,. \tag{12.4.1}$$

普通的量纲分析告诉我们, $\mathscr{G}_i$ 在某个截断 Λ' 处的值可以表示成 $\mathscr{G}_j$ 在另一截断 Λ 处的值和无量纲比值 Λ'/Λ 的函数:

$$\mathscr{G}_i(\Lambda')=F_i\Big(\mathscr{G}(\Lambda),\Lambda'/\Lambda\Big)\,. \tag{12.4.2}$$

除 Λ' 和 Λ 外, F 中不可能再有其它带量纲的参量, 这是因为没有任何紫外或红外发散可以进来; 常数 Λ 与 Λ' 之差来自于内线动量被限制在 Λ 和 Λ' 之间的那些图. 将方程(12.4.2)对 Λ' 微分, 然后令 Λ' 等于 Λ, 这产生了一个 $\mathscr{G}_i$ 的微分方程:

$$\Lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Lambda}\mathscr{G}_i(\Lambda)=\beta_i(\mathscr{G}(\Lambda))\,, \tag{12.4.3}$$

其中 $\beta_i(\mathscr{G})\equiv[\partial/\partial z\;F_i(\mathscr{G},z)]_{z=1}$. 对于弱耦合, 函数 $\beta_i(\mathscr{G})$ 可以在微扰论中计算出来. 这是重整化群方程的 Wilson 版本, 我们将在卷 II 中以稍许不同的方式来讨论它.

对于任意有限的截断值, 拉格朗日量定义了一个有效场论, 这个有效场论不是(或不只是)积掉了"重"粒子, 例如 Euler 等人的工作中电子, 而是积掉了所有动量大于 Λ 的粒子. 即便我们出发的理论在某个截断 Λ_0 处只有有限个耦合参量 $\mathscr{G}_i^0$, 在任何其它的截断值处, 微分方程(12.4.3)一般会产生对称性原理允许的所有耦合的非零值.**

我们现在对可重整耦合和不可重整耦合做一区分, 分别标记为 $\mathscr{G}_a$ 和 $\mathscr{G}_n$, 其中 a 取遍有限多个 $\Delta_a\geq 0$ 的耦合(包括质量), 这些耦合的数目记为 N, 而 n 取遍量纲 $\Delta_n<0$ 的无限个耦合. 我们希望证明, 如果在某个初始截断值 Λ_0 处 $\mathscr{G}_a(\Lambda_0)$ 和 $\mathscr{G}_n(\Lambda_0)$ 处在一个一般的 N-维初始曲面 $\mathscr{S}_0$ 上, 那么(附加一些条件)当 $\Lambda\ll\Lambda_0$ 时, 它们会到达一个与 Λ_0 和初始曲面无关的固定曲面 $\mathscr{G}$.† 这个固定曲面是稳定的, 也就是说, 从曲面上的任意一点出发, 由方程(12.4.3)生成的轨道都在曲面上. 这样一个稳定曲面定义了一组参量个数有限的理论, 这组理论的物理内容都与截断无关, 而正如上一节所论述的, 这正是可重整理论必需的性质. 更进一步, 这一构造表明, 在截断 Λ_0 处定义的一般理论在 $\Lambda\ll\Lambda_0$ 时看起来将像个可重整理论.‡

---

*本节内容或多或少在本书的发展主线之外, 可以在第一次阅读时略过.

**这一规则唯一已知例外出现在基于超对称的理论中.[4]

†这一定理源于 Polchinski.[19] 这里给出的是一个不太严格的简化版本. (在 Polchinski 的证明中, 初始曲面被取成所有不可重整耦合都为零. 我们将在这里看到, 对于一般的初始曲面, 耦合会趋于同一固定曲面.)

‡当然, 有些理论的对称性和场根本就不允许存在任何可重整相互作用. 只含费米场或只含引力场的理论就是这种情况.这样的理论在 $\Lambda\ll\Lambda_0$ 时看起来像自由场理论.

为了证明这些结果, 考察在满足方程(12.4.3)的$\mathscr{G}_i(\Lambda)$值上的一个小微扰$\delta\mathscr{G}_i(\Lambda)$. 它将满足微分方程

$$\Lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Lambda}\delta\mathscr{G}_i(\Lambda)=\sum_j M_{ij}(\mathscr{G}(\Lambda))\,\delta\mathscr{G}_j(\Lambda)\,, \tag{12.4.4}$$

其中

$$M_{ij}(\mathscr{G})\equiv\frac{\partial}{\partial\mathscr{G}_j}\beta_i(\mathscr{G})\,. \tag{12.4.5}$$

这一方程将可重整耦合与不可重整耦合耦合在一起, 使我们很难看清它们行为之间的差异. 为了让它们退耦, 我们引入线性变换

$$\xi_n\equiv\delta\mathscr{G}_n-\sum_{ab}\frac{\partial\mathscr{G}_n}{\partial\mathscr{G}_a^0}\left(\frac{\partial\mathscr{G}}{\partial\mathscr{G}^0}\right)^{-1}_{ab}\delta\mathscr{G}_b\,, \tag{12.4.6}$$

其中$\mathscr{G}_n^0$是可重整耦合在截断Λ_0处的值, 我们将用它作为初始曲面的坐标, 而$\mathscr{G}_n$是从微分方程(12.4.3)中导出的不可重整耦合在截断Λ处的值, 它在Λ_0的初值是初始表面上坐标为$\mathscr{G}_a^0$的点. 为了计算ξ_n对Λ的导数, 我们注意到导数$\partial\mathscr{G}_i/\partial\mathscr{G}_a^0$与$\delta\mathscr{G}_i$满足同一个微分方程(12.4.4). 这样, 证明下式就是一个初等练习

$$\Lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Lambda}\xi_n=\sum_m N_{nm}\,\xi_m\,, \tag{12.4.7}$$

其中

$$N_{nm}\equiv M_{nm}-\sum_{ab}\frac{\partial\mathscr{G}_n}{\partial\mathscr{G}_a^0}\left(\frac{\partial\mathscr{G}}{\partial\mathscr{G}^0}\right)^{-1}_{ab}M_{bm}\,. \tag{12.4.8}$$

现在我们必须估计N_{nm}的元. 自由场不需要截断, 所以对于非常弱的耦合, 所有裸参量$g_i(\Lambda)$都变成Λ-无关的. 因此, 对于弱耦合, 无量纲参量$\mathscr{G}_i$的标度就是$\Lambda^{-\Delta_i}$, 而矩阵M_{ij}是

$$M_{ij}\approx-\Delta_i\delta_{ij}\,. \tag{12.4.9}$$

由此可知矩阵N_{nm}近似为$-\Delta_n\delta_{nm}$. 不可重整耦合的标志性特征是$\Delta_n<0$, 所以方程(12.4.7)告诉我们, 至少对于某些有限范围内的耦合, 其中N_{nm}是正定的, ξ_n在$\Lambda\ll\Lambda_0$时像Λ/Λ_0的正幂次那样衰减. 于是在这一极限下, 微扰之间的关系是

$$\delta\mathscr{G}_n=\sum_{ab}\frac{\partial\mathscr{G}_n}{\partial\mathscr{G}_a^0}\left(\frac{\partial\mathscr{G}}{\partial\mathscr{G}^0}\right)^{-1}_{ab}\delta\mathscr{G}_b\,. \tag{12.4.10}$$

特别地, 如果我们在初始曲面$\mathscr{S}_0$上和(或)该曲面的起始点上和(或)初始截断Λ_0上做一点小变动, 使得可重整耦合的微扰$\delta\mathscr{G}_a$在某个截断$\Lambda\ll\Lambda_0$处为零, 那么所有其它耦合的微扰$\delta\mathscr{G}_n$在截断Λ处也为零. 因此$\Lambda\ll\Lambda_0$处的不可重整耦合$\mathscr{G}_n(\Lambda)$只能依赖于可重整耦合$\mathscr{G}_a(\Lambda)$, 而不另外依赖初始曲面或曲面上的起始点或初始截断Λ_0. 因此, 在截断$\Lambda\ll\Lambda_0$处, 所有耦合趋于一个N-维曲面$\mathscr{S}$, 坐标为$\mathscr{G}_\alpha(\Lambda)$, 这个曲面既不依赖初始曲面也不依赖$\Lambda_0$. 要注意的是, 不可重整耦合$\mathscr{G}_n$在$\mathscr{S}$上一般不是小量; 重要的是它们变成了可重整耦合的函数. 保持Λ远小于Λ_0的Λ变分将改变耦合, 但耦合将依旧贴近于$\mathscr{S}$(至少只要耦合不要变得过大以至于N_{nm}不再是正定矩阵). 因此, 正如所要证明的, $\mathscr{S}$是稳定曲面.

我们已经知道所有的物理量都可以用Λ和$\mathscr{G}_n(\Lambda)$表示, 并且是Λ-无关的. 特别是对那N个传统重整化耦合和质量, 例如量子电动力学中的e和m_e, 这是正确的. 然而, 我们可以反过来用这个

关系, 用传统参量和 Λ 来表示 $\mathscr{G}_n(\Lambda)$. 以这种方式, 我们可以证明通常的重整化程序的合理性: 所有的物理量以一种不依赖截断的方式表示成了传统重整化耦合和质量.

Wilson 方法在是实际应用中有一些优点. 那就是无需担心子积分和交缠发散; 这个动量截断适用于所有内线. 另外, 超对称理论的一些仅对截断相关的裸耦合成立的不可重整定理告诉我们, 某些耦合是不受辐射修正影响的.[20]

另一方面, Wilson 方法也有一些缺点. 一个是, 在处理类似量子电动力学这样可重整理论时, 使用 Wilson 方法必须放弃方法上的一些特殊的简单性; 一旦开始积掉动量高于某个标度 Λ 的粒子, 所得到的有限场论将包含所有的 Lorentz 不变且规范不变的相互作用, 但这些相互作用的耦合是依赖 Λ 的. (虽然如此, 在能量 $E \ll \Lambda$ 处的物理过程中, 起主导作用的耦合仍将是那些可重整的.) 另外, 截断一般会破坏明显的规范不变性, 亦或是明显的 Lorentz 不变性或幺正性. 在建立 Wilson 方法的原始背景——凝聚态物理中, 这些都不是问题, 因为没有人会期望一个真实的凝聚态理论是严格可重整的, 而且不存在一定会被截断破坏的基本物理原理. 实际上, 在晶体中, 光子动量上就存在截断, 这一截断由倒格子空间给出.

实际上, 传统方法与 Wilson 方法之间的差异是数学上的便利性而非物理解释. 确实, 传统重整化已经提供了一类可调截断; 当我们将我们的答案表示成耦合常数, 而这些耦合常数又被定义成物理振幅在某个 μ 阶动量处的值(就上节所讨论的标量场论而言), 使积分收敛的抵消就开始在 μ 阶虚动量上开始起作用了. 相反, Wilson 方法中 Λ-相关的耦合常数最终必须用可观察质量和电荷表示, 而一旦做到了这点, 所得结果显然与传统方法所得结果相同.

12.5 偶然对称性*

在 12.3 节中我们看到, 在能量足够低时, 将可重整场论用作自然的近似描述是有一些好处的. 经常遇到的情况是: 可重整条件如此之强以至于有效拉格朗日量自动满足一个或多个对称性, 而这些对称性不是底层理论中的对称性, 因而可以被有效拉格朗日量中被压低的不可重整项破坏. 实际上, 大多数实验上发现的基本粒子物理对称性都是这类“偶然对称性”.

带电轻子的电动力学中的反演与味守恒提供了一个经典例子. 光子和自旋 $\frac{1}{2}$, 电荷 $-e$ 的场 ψ_i 的规范不变且 Lorentz 不变的最一般的可重整拉格朗日密度为

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &-\tfrac{1}{4}Z_3 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &- \sum_{ij} Z_{Lij}\bar{\psi}_{Li}[\partial\!\!\!/ + \mathrm{i}eA\!\!\!/]\psi_{Lj} - \sum_{ij} Z_{Rij}\bar{\psi}_{Ri}[\partial\!\!\!/ + \mathrm{i}eA\!\!\!/]\psi_{Rj} \\ &- \sum_{ij} M_{ij}\bar{\psi}_{Li}\psi_{Rj} - \sum_{ij} M^{\dagger}_{ij}\bar{\psi}_{Ri}\psi_{Lj}\,,\end{aligned} \tag{12.5.1}$$

其中 i, j 对三个轻子味(e, μ 和 τ)求和, ψ_{iL} 和 ψ_{iR} 是场 ψ_i 的左手部分和右手部分, 定义成

$$\psi_{Li} = \tfrac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi_i\,, \qquad \psi_{Ri} = \tfrac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi_i\,, \tag{12.5.2}$$

而 Z_L, Z_R 和 M 是数值矩阵. 我们没有对轻子味守恒做任何假定, 所以矩阵 Z_{Lij}, Z_{Rij} 和 M_{ij} 不需要是对角的. 另外, 我们也没有对 P, C 和 T 不变性做任何假定, 所以 Z_L 和 Z_R 之间或 M 和 $M^\dagger$ 之

*本节或多或少处在本书发展主线之外, 可以在第一次阅读时跳过.

间没有必然联系. 对这些矩阵的唯一约束来自于拉格朗日密度是实的以及正则反对易关系, 前者要求 Z_{Lij} 和 Z_{Rij} 是厄米的, 后者要求 Z_{Lij} 和 Z_{Rij} 是正定的.

现在假定我们用新的场 ψ'_L 和 ψ'_R 来代替轻子场 ψ_L 和 ψ_R, 这些新的场定义为

$$\psi_L = S_L\psi'_L\,, \qquad \psi_R = S_R\psi'_R\,, \tag{12.5.3}$$

其中 $S_{L,R}$ 是我们任选的非奇异矩阵. 当用这些新场表示拉格朗日密度时, 拉格朗日密度的形式与方程(12.5.1)相同, 只不过矩阵被替换为新矩阵

$$Z'_L = S_L^\dagger Z_L S_L\,, \qquad Z'_R = S_R^\dagger Z_R S_R\,, \qquad M' = S_L^\dagger M S_R\,. \tag{12.5.4}$$

我们可以选择 S_L 和 S_R 以使 $Z'_L = Z'_R = 1$. (取 $S_{L,R} = U_{L,R}D_{L,R}$, 其中 $U_{L,R}$ 是使得正定厄米矩阵 $Z_{L,R}$ 对角化的幺正矩阵, 而 $D_{L,R}$ 是对角矩阵, 矩阵元是 $Z_{L,R}$ 的本征值平方根的倒数.)

现在做另一变换, 变换到轻子场 ψ''_i, 定义为

$$\psi'_L = S'_L\psi''_L\,, \qquad \psi'_R = S'_R\psi''_R\,. \tag{12.5.5}$$

再一次地, 用这些新场和如下矩阵表示的拉格朗日密度取同一形式, 只不过矩阵变成

$$Z''_L = S_L'^\dagger S'_L\,, \qquad Z''_R = S_R'^\dagger S'_R\,, \qquad M'' = S_L'^\dagger M' S'_R\,. \tag{12.5.6}$$

这一次我们让 $S'_{L,R}$ 幺正, 从而再次使 $Z''_L = Z''_R = 1$. 我们选择这些幺正矩阵使 M'' 是实的且对角. (通过极分解原理, 同所有方阵一样, M' 可以表示成 $M' = VH$, 其中 V 幺正而 H 厄米. 取 $S'_L = S_R'^\dagger V^\dagger$ 并选 S'_R 为使 H 对角化的幺正矩阵.) 扔掉撇号, 拉格朗日密度现在的形式为

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &-\tfrac{1}{4}Z_3F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \sum_i \bar\psi_{Li}[\partial\!\!\!/ + \mathrm{i}eA\!\!\!/]\psi_{Li} - \sum_i \bar\psi_{Ri}[\partial\!\!\!/ + \mathrm{i}eA\!\!\!/]\psi_{Ri}\\ &- \sum_i m_i\bar\psi_{Li}\psi_{Ri} - \sum_i m_i\bar\psi_{Ri}\psi_{Li}\,,\end{aligned} \tag{12.5.7}$$

其中 m_i 是实数, 是厄米矩阵 H 的本征值. 最后, 它可以写成更常见的形式

$$\mathscr{L} = -\tfrac{1}{4}Z_3F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \sum_i \bar\psi_i[\partial\!\!\!/ + \mathrm{i}eA\!\!\!/]\psi_i - \sum_i m_i\bar\psi_i\psi_i\,. \tag{12.5.8}$$

当拉格朗日量取这一形式时, 轻子电动力学的任何可重整拉格朗日量明显将自动保证 P, C 和 T 守恒, 并且使每个味的轻子数(减去反轻子数)守恒: 电子, μ 子和 τ 子的轻子数守恒.[**] 特别地, 尽管有方程(12.5.1), 这一理论并不允许诸如 $\mu \to e + \gamma$ 这样的过程. 读者或许会担心将方程(12.5.8)中的 ψ_i(前面写作 ψ''_i)而非方程(12.5.1)中的 ψ_i 作为轻子场是否正确, 前者显然使轻子数守恒, 而后者似乎允许类似 $\mu \to e + \gamma$ 这样的过程. 这样的担心可以暂且搁置; 正如 10.3 节所强调的, 不存在仅作为电子场或 μ 子场的场. 事实上, 尽管方程(12.5.1)给出了轻子 1 辐射衰变到轻子 2 的非零矩阵元, 但这个矩阵元不在轻子质量壳上, 通过令轻子在质量壳上, 即使采用方程(12.5.1)进行计算, 我们也会发现所有这种过程的 S-矩阵元为零.

[**]这是由 Feinberg(范伯格), Kabir(卡比尔)和我[21]首先证明的. Feinberg[22]更早注意到了, 在只有一种中微子的理论中, 弱作用效应将使过程 $\mu \to e + \gamma$ 有一个可观测的发生率, 这个问题直到发现了第二种中微子才得以解决.

推导这些结果中的关键是, 在方程(12.5.1)中, 电荷对于轻子场的左手部分和右手部分是相同的, 换句话说, 轻子场的左手部分和右手部分在电磁规范变换下的变换形式是相同的. 我们将在卷 II 中看到, 由于类似的原因, 被称为量子色动力学的强相互作用的现代可重整理论自动满足 C 守恒, (除了某些的非微扰效应) P 守恒和 T 守恒, 以及每一夸克味的夸克数(减去反夸克数)守恒. 在卷 II 中, 我们还将看到, 出于与这里所描述的电动力学相类似的原因, 弱作用和电磁作用的可重整标准模型的最简单版本将自动满足轻子味守恒(尽管 C 和 P 是不守恒的). 来自更高质量标度的不可重整相互作用或许会破坏所有这些守恒律的可能性依然存在.

习题

1. 对于 2, 3 和 6 维时空中的单个标量场, 列出它的拉格朗日量中所有可重整(或超可重整)的 Lorentz 不变项.

2. 说明电子自能的交缠发散在量子电动力学中是如何抵消的.

3. 考察标量场 ϕ 和旋量场 ψ 的相互作用哈密顿量为 $g\phi\bar{\psi}\psi$ 的理论. 将标量自能函数 $\Pi^*(q)$ 的单圈部分写成 p^μ 的发散多项式加上一个明显收敛的积分.

4. 假如电子和光子的量子电动力学其实是一个有效场论, 是通过积掉某个质量 $M \gg m_e$ 的未知粒子得到的. 假定这个理论满足规范不变性和 Lorentz 不变性, 但没有 C, P 和 T 不变性. 拉格朗日量中 $1/M$ 的领头阶不可重整项是什么? 次领头阶又是什么?

参考文献

[1] F. J. Dyson, *Phys. Rev.* **75**, 486, 1736 (1949). L. M. Brown 编辑的 *Renormalization* (Springer-Verlag, New York, 1993) 中从历史角度给了一个评论. 一个全面的现代处理, 参看 J. Collins, *Renormalization* (Cambridge University Press, Cambridge, 1984).

[2] S. Weinberg, *Phys. Rev.* **118**, 838 (1959). 这个证明仅依赖于 Feynman 图在欧几里得动量空间中的被积函数的一般渐进性质, 这种被积函数通过 Wick 旋转所有积分围道得到. 通过利用被积函数更详尽的性质, 这个证明被 Y. Hahn 和 W. Zimmerman 简化了, *Commun. Math. Phys.* **10**, 330 (1968), 然后被 W. Zimmerman 拓展至闵可夫斯基动量空间, *Commun. Math. Phys.* **11**, 1 (1968).

[3] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Fields* (McGraw-Hill, New York, 1965): Section 19.10 and 19.11.

[4] 可参看 J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity* (Princeton University Press, Princeton, 1983), 以及那里引用的原始文献.

[5] A. Salam, *Phys. Rev.* **82**, 217 (1951); *Phys. Rev.* **84**, 426 (1951); P. T. Matthews and A. Salam, *Phys. Rev.* **94**, 185 (1954).

[6] N. N. Bogoliubov and O. Parasiuk, *Acta Math.* **97**, 227 (1957).

[7] K. Hepp, *Comm. Math. Phys.* **2**, 301 (1966). Hepp评论道"很难找到两个理论家, 他们对[Bogoliubov和Parasiuk]证明中关键步骤的理解是相同的," 而Hepp的论文本身就很难读.

[8] W. Zimmerman, *Comm. Math. Phys.* **15**, 208 (1969). 另见W. Zimmerman, 收录于*Lecture on Elementry Particles and Quantum Field Theory — Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics* (M.I.T. Press, Cambridge, 1970).

[9] W. Heisenberg, *Z. Physik* **110**, 251 (1938).

[10] W. Heisenberg, 文献[6]和 *Z. Physik* **113**, 61 (1939).

[11] S. Sakata, H.Umezawa, and S. Kamefuchi, *Prog. Theor. Phys.* **7**, 327 (1952).

[12] S. Weinberg, *Physica* **96A**, 327 (1979).

[13] J. Gasser and H. Leutwyler, *Ann. Phys.* (NY) **158**, 142 (1984); *Nucl. Phys.* **B250**, 465 (1985).

[14] J. F. Donoghue, *Phys. Rev.* **D 50**, 3874 (1994).

[15] 这一现象能够发生的一种可能方式是通过"渐进安全"现象; 参看S. Weinberg, *General Relativity — An Einstein Centenary Survey*, S. W. Hawking和W. Israel编辑(Cambridge University Press, Cambridge, 1979): Section 16.3.

[16] H. Euler and B. Kockel, *Naturwiss.* **23**, 246 (1935); W. Heisenberg and H. Euler, *Z. Physik* **98**, 714 (1936).

[17] J. Halter在单圈计算中采用了Euler等人的有效拉格朗日量, *Phys. Lett.* **B 316**, 155 (1993).

[18] K. G. Wilson, *Phys. Rev.* **B4**, 3174, 3184 (1971); *Rev. Mod. Phys.* **47**, 773 (1975).

[19] J. Polchinski, *Nucl. Phys.* **B231**, 269 (1984); *Recent Directions in Particle Theory — Proceedings of the 1992 TASI Conference* 中的讲稿, J. Harvey和J. Polchinski编辑(World Scientific, Singapore, 1993): p. 235.

[20] V. Novikov, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, and V. I. Zakharov, *Nucl. Phys.* **B229**, 381 (1983); M. A. Shifman and A. I. Vainshtein, *Nucl. Phys.* **B229**, 456 (1986); 以及那里所引的文献. 另见, M. A. Shifman and A. I. Vainshtein, *Nucl. Phys.* **B359**, 571 (1991).

[21] G. Feinberg, P. Kabir, and S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **3**, 527 (1959).

[22] G. Feinberg, *Phys. Rev.* **110**, 1482 (1958).

第 13 章　红外效应

在辐射修正的研究中, “软光子”, 即那些能量和动量远小于所研究的过程中的典型质量和能量的光子, 产生的修正扮演了一个特殊角色. 一方面是因为这些修正通常非常大, 所以必须对它们在微扰论的所有阶求和; 另一方面, 这些修正非常简单以至于求和是不困难的. 无限大波长光子的贡献以发散积分的形式出现, 但是正如我们将看到的, 这些“红外发散”全部抵消了.[1]

在本章大部分内容中, 我们将处理与任意类型和任意自旋带电粒子相互作用的光子, 这些带电粒子中包括原子核这样既有强相互作用又有电磁相互作用的粒子. 而将这里所做的计算用到其它无质量粒子上, 例如量子色动力学的胶子, 是没有困难的. 在 13.4 节, 我们将明确地考察非常普遍的无质量粒子的理论, 并在普遍的基础上证明红外发散的抵消.

在这些一般性的讨论之后, 我们将回到光子, 并讨论两个有实际意义的专题: 软光子在有非电磁相互作用且自旋任意的带电粒子上的散射, 以及将原子核这样的带电重粒子作为外电磁场源的处理.

13.1　软光子振幅

在本节, 对于包含任意多个任意种类的高能带电粒子的过程 $\alpha \to \beta$, 我们导出在这个过程发射任意多个低能光子的振幅的通用公式.

我们从只发射一个软光子的振幅出发. 如果我们将具有出动量 q 和极化指标 μ 的软光子线连到过程 $\alpha \to \beta$ 的某个连通 Feynman 图的出带电粒子线上, 如图13.1(a)所示, 那么我们就要给 $\alpha \to \beta$ 的 S-矩阵元乘上一个额外的带电粒子传播子, 该传播子携带着带电粒子在发射光子之前所拥有的动量 $p+q$, 再乘上新的带电粒子-光子顶点给出的贡献. 对于零自旋, 质量为 m 而电荷为 $+e$ 的带电粒子, 这些因子是

$$\left[\mathrm{i}(2\pi)^4 e(2p^\mu + q^\mu)\right]\left[\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\frac{1}{(p+q)^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon}\right],$$

它在 $q \to 0$ 的极限下变为

$$\frac{e\,p^\mu}{p\cdot q - \mathrm{i}\epsilon}\,. \tag{13.1.1}$$

(我们可以随意地重新定义正无限小 ϵ 的标度, 要小心的只是要保留它的符号.) 这一结果实际上对于任意自旋的带电粒子都成立. 例如, 对于一个自旋 $\frac{1}{2}$ 且电荷为 $+e$ 的粒子, 我们必须将出带电粒子的系数函数 $\bar{u}(\mathbf{p},\sigma)$ 替换成

$$\bar{u}(\mathbf{p},\sigma)\left[-(2\pi)^4 e\gamma^\mu\right]\left[\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}(\not{p}+\not{q})+m}{(p+q)^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon}\right].$$

在 $q \to 0$ 的极限下, 传播子的分子由对并旋量的求和给出:

$$-\mathrm{i}\not{p}+m = 2p^0\sum_{\sigma'} u(\mathbf{p},\sigma')\,\bar{u}(\mathbf{p},\sigma')\,,$$

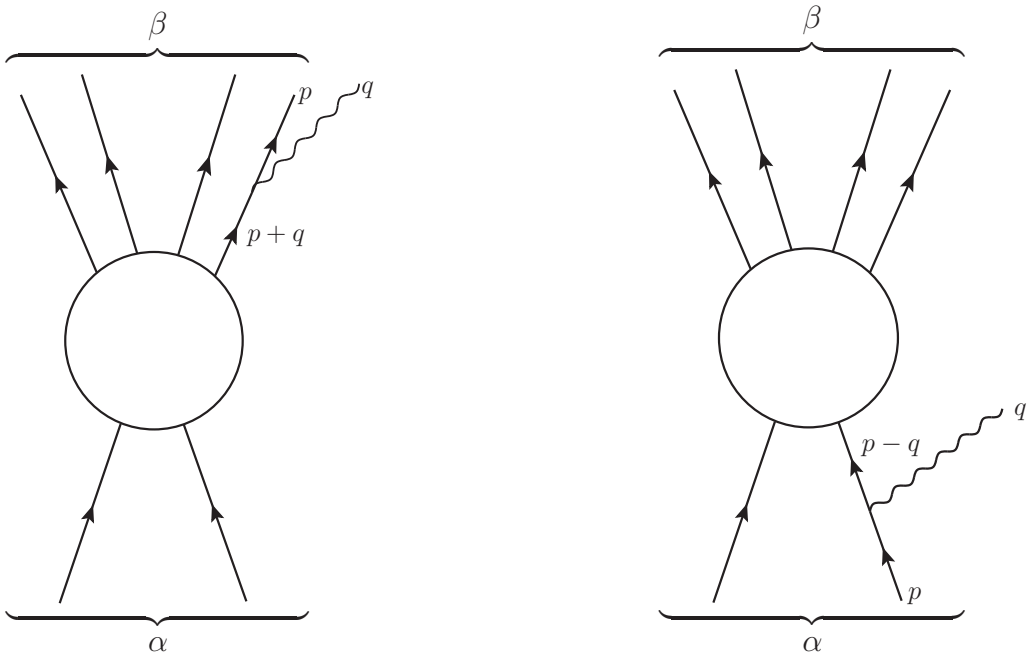


图 13.1 在任意过程 $\alpha \to \beta$ 中发射软光子的主导图. 直线是态 α 和 β 中的带电粒子(包含可能的硬光子); 波浪线是软光子.

所以我们有了对 γ^μ 的等动量矩阵元的求和, 由

$$\bar{u}(\mathbf{p},\sigma)\gamma^\mu u(\mathbf{p},\sigma') = -\mathrm{i}\delta_{\sigma,\sigma'}\, p^\mu/p^0$$

给出, 而这个效果仍旧是在过程 $\alpha \to \beta$ 的矩阵元上乘以因子(13.1.1). 更普遍地, 对任意自旋, 在 $q \to 0$ 的极限下, 新的带电粒子内线的 4-动量 $p+q$ 会趋于质量壳, 所以传播子的分子就趋于对并旋量系数函数的求和, 它将新的顶点矩阵转化成一个正比于 p^μ 以及以螺旋度为指标的单位矩阵的因子, 这就又一次导出了因子(13.1.1). 更进一步, 我们在第 10 章已经看到, 高阶修正既不影响传播子中质壳极点的留数, 也不影响电流在同一粒子的等动量态之间的矩阵元, 所以(13.1.1)给出了从出射带电粒子线上发射一个软光子所附带的正确因子, 这一结果适用于微扰论的所有阶.

同样的推理也可套用在过程 $\alpha \to \beta$ 的入射带电粒子线上发射光子的情况中, 所不同的是, 在带电粒子发射一个 4-动量为 q 的光子后, 带电粒子线的 4-动量变成 $p-q$, 所以取代(13.1.1), 我们有因子

$$\frac{e\,p^\mu}{-p\cdot q - \mathrm{i}\epsilon}. \tag{13.1.2}$$

当然, 光子也可以从过程 $\alpha \to \beta$ 中的内线发射出来, 但在这一情况下, 没有因子在 $q \to 0$ 时趋于 $(p\cdot q)^{-1}$. 因此, 在过程 $\alpha \to \beta$ 中发射 4-动量为 q 且极化指标为 μ 的单个软光子的振幅 $M^\mu_{\beta\alpha}(q)$ (不带有能动量守恒 δ-函数的 S-矩阵), 在 $q \to 0$ 的极限下, 由 $\alpha \to \beta$ 的矩阵元 $M_{\beta\alpha}$ 乘以像(13.1.1)和(13.1.2)这样的项之和给出, 每一个这样的项对应每一个出射或入射带电粒子:

$$M^\mu_{\beta\alpha}(q) \to M_{\beta\alpha}\sum_n \frac{\eta_n e_n\, p_n^\mu}{p_n\cdot q - \mathrm{i}\eta_n\epsilon}\,, \tag{13.1.3}$$

其中 p_n 和 $+e_n$ 是初态和末态中第 n 个粒子的 4-动量和电荷, 而 η_n 是符号因子, 对于末态 β 中的粒子取 $+1$, 对于初态 α 中的粒子取 -1.

在进一步考察发射多个软光子之前, 值得讨论一下公式(13.1.3)的一个重要特征.[2] 为了计算发射一个具有确定螺旋度的光子的振幅, 我们必须用相应的光子极化矢量 $e_\mu(\mathbf{q},\pm)$ 来收缩该式. 但是, 我们在 5.9 节已经看到, $e_\mu(\mathbf{q},\pm)$ 并不是一个 4-矢量; 在 Lorentz 变换 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 下, 极化矢量变成 $\Lambda^\mu{}_\nu e^\nu(\mathbf{q},\pm)$ 再加上一个正比于 q^μ 的项. 为了不让后一项破坏 Lorentz 不变性, 必须使 $M^\mu_{\beta\alpha}(q)$ 与 q_μ 收缩后为零. 而在 $q\to 0$时, (13.1.3)给出

$$q_\mu M^\mu_{\beta\alpha}(q)\to M_{\beta\alpha}\sum_n \eta_n e_n\,. \tag{13.1.4}$$

右边 $M_{\beta\alpha}$ 的系数正是末态总电荷减去初态总电荷, 所以使它为零的条件正是电荷守恒条件. 因此, 在没有任何独立的关于规范不变的假定下, 我们看到对自旋 1 的无质量粒子, *Lorentz* 不变性要求, 任何支配这些粒子的相互作用的耦合常数, 例如电荷, 在低能下都必须守恒.

附带说一下, 在过程 $\alpha\to\beta$ 中发射一个 4-动量为 q 并携带张量指标 μ,ν 的软引力子的振幅由类似(13.1.3)的公式[3]给出:

$$M^{\mu\nu}_{\beta\alpha}(q)\to M_{\beta\alpha}\sum_n \frac{\eta_n f_n\, p_n^\mu\, p_n^\nu}{p_n\cdot q-\mathrm{i}\eta_n\epsilon}\,, \tag{13.1.5}$$

其中 f_n 是软引力子与第 n 种粒子的耦合常数. Lorentz 不变性要求它与 q_μ 收缩后为零. 但是

$$q_\mu M^{\mu\nu}_{\beta\alpha}(q)\to M_{\beta\alpha}\sum_n \eta_n f_n\, p_n^\nu\,, \tag{13.1.6}$$

所以求和 $\sum f_n p_n^\nu$ 是守恒的. 然而, 在 4-动量的所有线性组合中, 能够守恒且不禁止任何非平庸散射过程的只有总 4-动量, 所以为了使(13.1.6)为零, f_n 必须都相等. (所有 f_n 的共同取值可以认为是 $\sqrt{8\pi G_N}$, 其中 G_N 是牛顿引力常数.) 因此 Lorentz 不变性要求自旋 2 的低能无质量粒子与所有形式的能量和动量都有相同的耦合. 在证明 Einstein 等效原理是将 Lorentz 不变性应用到自旋 2 无质量粒子上的必然结果时, 这起了很大作用. 同样, 在过程 $\alpha\to\beta$ 中发射 4-动量为 q 且自旋 $j\geq 3$ 的无质量软粒子的振幅形如

$$M^{\mu\nu\rho\cdots}_{\beta\alpha}(q)\to M_{\beta\alpha}\sum_n \frac{\eta_n g_n\, p_n^\mu\, p_n^\nu\, p_n^\rho\cdots}{p_n\cdot q-\mathrm{i}\eta_n\epsilon}\,.$$

这时 Lorentz 不变性要求 $\sum g_n p_n^\nu p_n^\rho\cdots$ 必须守恒. 但是这种既守恒又不禁止非平庸散射过程的量是不存在的, 所以 g_n 必须全部为零. 自旋 $j\geq 3$ 的无质量粒子或许存在, 但是它们的耦合在低能极限下无法存留下来, 特别地, 它们无法传递平方反比力.

现在, 我们来考察发射两个软光子. 如果一个图中的两个光子是从过程 $\alpha\to\beta$ 的两个不同外线上发射的, 那么该图对矩阵元的贡献就是 $\alpha\to\beta$ 的矩阵乘以像(13.1.1)或(13.1.2)那样的因子. 或许会有些惊奇的是, 即使这两个光子是从同一外线上发射的, 上述结论依然成立. 例如, 如果光子 1 是继光子 2 之后从电荷为 $+e$ 且能动量 4-矢为 p 的外线上发射的, 那么我们就会得到因子

$$\left[\frac{\eta\, e\, p^{\mu_1}}{p\cdot q_1-\mathrm{i}\eta\epsilon}\right]\left[\frac{\eta\, e\, p^{\mu_2}}{p\cdot(q_2+q_1)-\mathrm{i}\eta\epsilon}\right]\,,$$

但是, 如果光子 2 是在光子 1 之后发射的, 这个因子就变成

$$\left[\frac{\eta\, e\, p^{\mu_2}}{p\cdot q_2-\mathrm{i}\eta\epsilon}\right]\left[\frac{\eta\, e\, p^{\mu_1}}{p\cdot(q_1+q_2)-\mathrm{i}\eta\epsilon}\right]\,.$$

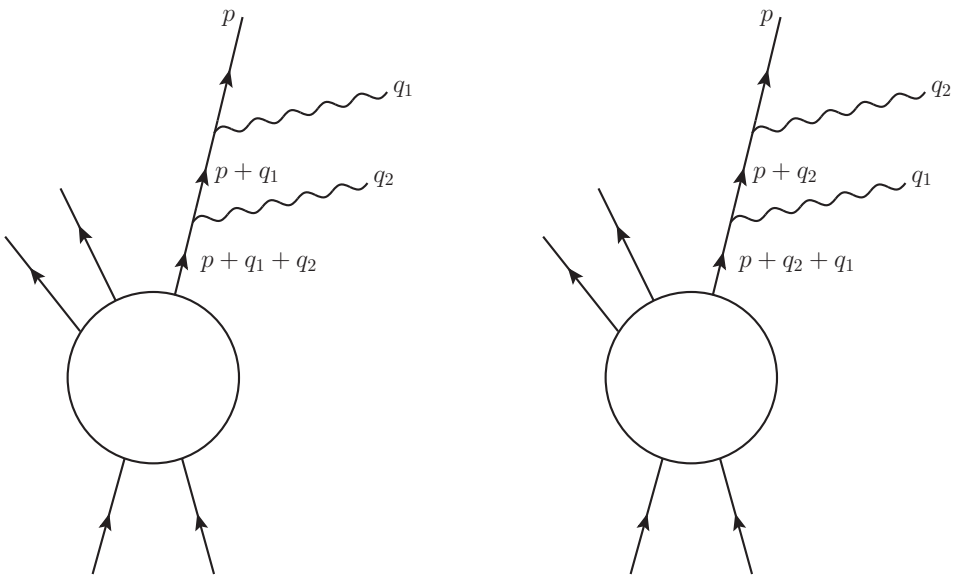


图 13.2 从同一出带电粒子线上发射两个软光子的图. 直线是硬粒子; 波浪线是软光子.

(参看图13.2. η 仍旧是由带电粒子线是离开还是进入来决定是 $+1$ 还是 -1 .) 这两个因子之和为

$$\left[\frac{\eta\, e\, p^{\mu_1}}{p\cdot q_1 - \mathrm{i}\eta\epsilon}\right]\left[\frac{\eta\, e\, p^{\mu_2}}{p\cdot q_2 - \mathrm{i}\eta\epsilon}\right] ,$$

这正是发射单个光子所遇到的因子的乘积.

更普遍地, 从单个外线上发射任意多个光子时, 我们会遇到如下形式的求和*

$$\begin{aligned}&[p\cdot q_1 - \mathrm{i}\eta\epsilon]^{-1}[p\cdot(q_1+q_2) - \mathrm{i}\eta\epsilon]^{-1}[p\cdot(q_1+q_2+q_3) - \mathrm{i}\eta\epsilon]^{-1}\cdots\\ &\qquad + \text{置换}\\ &= [p\cdot q_1 - \mathrm{i}\eta\epsilon]^{-1}[p\cdot q_2 - \mathrm{i}\eta\epsilon]^{-1}[p\cdot q_3 - \mathrm{i}\eta\epsilon]^{-1}\cdots . \end{aligned} \tag{13.1.7}$$

由此可知, 在过程 $\alpha \to \beta$ 中发射 N 个极化指标和 4-动量分别为 $\mu_1,\cdots,\mu_N$ 和 $q_1,\cdots,q_N$ 的极软光子的振幅 $M_{\beta\alpha}^{\mu_1\cdots\mu_N}(q_1\cdots q_N)$, 在 $q \to 0$ 的极限下, 由 $\alpha \to \beta$ 的矩阵元对每个光子乘以类

*这个恒等式可以用数学归纳法进行证明. 我们已经看到该等式对于两个光子是成立的. 假定它对于 $N-1$ 个光子也是成立的. 这样, 对于 N 个光子, 我们可以将置换的求和写成, 先选择第一个要发射的光子, 再对剩余光子的置换求和, 然后对选择这个光子的方式求和:

$$\begin{aligned}&[p\cdot q_1 - \mathrm{i}\eta\epsilon]^{-1}[p\cdot(q_1+q_2) - \mathrm{i}\eta\epsilon]^{-1}\cdots[p\cdot(q_1+q_2+\cdots+q_N) - \mathrm{i}\eta\epsilon]^{-1} + \text{置换}\\ &= \sum_{r=1}^{N}\left[p\cdot\left(\sum_{s=1}^{N} q_s\right) - \mathrm{i}\eta\epsilon\right]^{-1}\prod_{s\neq r}[p\cdot q_s - \mathrm{i}\eta\epsilon]^{-1}\\ &= \sum_{r=1}^{N}\left[p\cdot\left(\sum_{s=1}^{N} q_s\right) - \mathrm{i}\eta\epsilon\right]^{-1}[p\cdot q_r - \mathrm{i}\eta\epsilon]\prod_{s=1}^{N}[p\cdot q_s - \mathrm{i}\eta\epsilon]^{-1} = \prod_{s=1}^{N}[p\cdot q_s - \mathrm{i}\eta\epsilon]^{-1}\end{aligned}$$

这正是所要证明的.

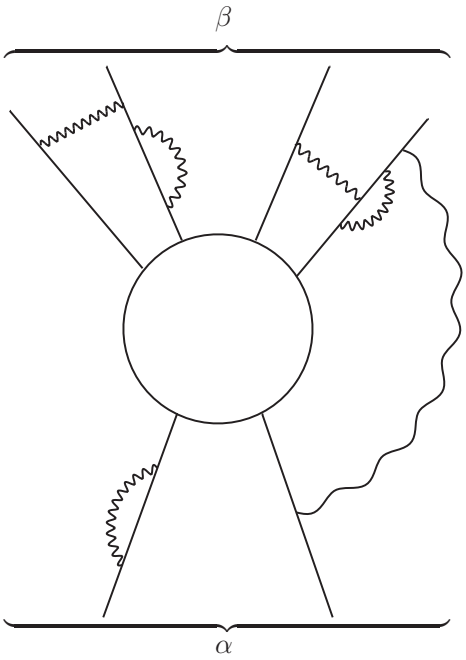


图 13.3 虚软光子对反应 $\alpha \to \beta$ 的 S-矩阵的辐射修正的典型主导图. 直线是态 α 和 β 中的粒子(包括硬光子); 波浪线是软光子.

似(13.1.3)中的因子之积给出:

$$M_{\beta\alpha}^{\mu_1\cdots\mu_N}(q_1\cdots q_N) \to M_{\beta\alpha}\prod_{r=1}^{N}\left(\sum_n \frac{\eta_n\, e_n\, p_n^{\mu_r}}{p_n\cdot q_r - \mathrm{i}\eta_n\epsilon}\right) . \tag{13.1.8}$$

13.2 虚软光子

我们现在要用上一节的结果计算在过程 $\alpha \to \beta$ 的两个带电粒子线之间交换虚软光子对所有阶辐射修正的影响, 如图13.3所示. 对于"软"光子, 我们是指携带的动量远小于 Λ 的光子, 这里 Λ 是某个适当的分界点, 它被选得足够低以确保上一节所做的近似有效. 我们将看到这些软光子引入了红外发散, 所以, 作为权宜之计, 我们不得不对光子动量引入下界 λ. 分辨出软光子动量上的两个限制之间的差异非常重要. 上界 Λ 仅用来定义软光子的"软"指什么; 软光子辐射修正的 Λ-相关性被振幅其余部分的 Λ-相关性抵消了, 而计算后者时仅需计入动量大于 Λ 的虚光子. 另一方面, 下界截断最终必须通过取 $\lambda \to 0$ 消除掉; 正如我们将看到的, 这一极限下的红外发散将被发射实软光子的效应抵消.

对每一个虚软光子, 我们都必须补充一个传播子因子

$$\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\frac{\eta_{\mu\mu'}}{q^2-\mathrm{i}\epsilon}, \tag{13.2.1}$$

然后给振幅(13.1.8)乘上这些传播子的乘积, 收缩掉光子极化指标, 并积掉光子 4-动量. 另外, 对 N 个虚软光子, 我们必须除以因子 $2^N N!$, 这是因为对虚光子线所有可以连接的两个端点进行的求和引入了对 $N!$ 个光子线置换的重复求和以及对这些线的两端交换的重复求和. 那么, 包括 N 个

软光子的辐射修正的效果就是在不包含这种辐射修正的矩阵元 $M_{\beta\alpha}$ 上乘以因子

$$\frac{1}{N!2^N}\left[\frac{1}{(2\pi)^4}\sum_{nm}e_ne_m\eta_n\eta_m\,J_{nm}\right]^N, \tag{13.2.2}$$

其中

$$J_{nm}\equiv -\mathrm{i}(p_n\cdot p_m)\int_{\lambda\le|\mathbf{q}|\le\Lambda}\frac{\mathrm{d}^4q}{[q^2-\mathrm{i}\epsilon][p_n\cdot q-\mathrm{i}\eta_n\epsilon][-p_m\cdot q-\mathrm{i}\eta_m\epsilon]}\,. \tag{13.2.3}$$

要注意的是, 我们改变了(13.2.3)分母中 $p_m\cdot q$ 的符号, 这是因为如果我们定义 q 为线 n 发出的动量, 那么线 m 射出的动量就是 $-q$.

对 N 求和, 我们得到的结论是, 当一个过程包含任意多个动量 $|\mathbf{q}|\ge\lambda$ 的软光子引起的辐射修正时, 它的矩阵元是

$$M^{\lambda}_{\beta\alpha}=M^{\Lambda}_{\beta\alpha}\exp\left[\frac{1}{2(2\pi)^4}\sum_{nm}e_ne_m\eta_n\eta_m\,J_{nm}\right], \tag{13.2.4}$$

其中 $M^{\Lambda}_{\beta\alpha}$ 是仅包含动量大于 Λ 的虚光子的振幅.

(13.2.3)中对 q^0 的积分可以通过留数方法积出来. 被积函数除了4个极点外对 q^0 是解析的, 这四个极点是

$$\begin{aligned} q^0&=|\mathbf{q}|-\mathrm{i}\epsilon & q^0&=-|\mathbf{q}|+\mathrm{i}\epsilon\,,\\ q^0&=\mathbf{v}_n\cdot\mathbf{q}-\mathrm{i}\eta_n\epsilon & q^0&=\mathbf{v}_m\cdot\mathbf{q}+\mathrm{i}\eta_m\epsilon\,, \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{v}_n\equiv\mathbf{p}_n/p_n^0$, 对 $\mathbf{v}_m$ 同样如此. 如果粒子 n 是出射的而粒子 m 是入射的, 就有 $\eta_n=+1$ 和 $\eta_m=-1$, 那么通过在上半平面闭合 q^0 的围道, 我们就避开了 $q^0=\mathbf{v}_n\cdot\mathbf{q}-\mathrm{i}\eta_n\epsilon$ 和 $q^0=\mathbf{v}_m\cdot\mathbf{q}+\mathrm{i}\eta_m\epsilon$ 处的极点的贡献. 类似的, 如果 n 是入射的而 m 是出射的, 我们可以在下半平面闭合围道来避开这两个极点. 在这两种情况中, $q^0=\pm(|\mathbf{q}|-\mathrm{i}\epsilon)$ 处的极点中只有一个有贡献, 我们得到了纯实的积分

$$\begin{aligned} J_{nm}=-\pi(p_n\cdot p_m)\int_{\lambda\le|\mathbf{q}|\le\Lambda}&\frac{\mathrm{d}^3q}{|\mathbf{q}|^3\,(E_n-\hat{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{p}_n)(E_m-\hat{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{p}_m)}\\ &(\text{对 }\eta_n=-\eta_m=\pm1\,)\,. \end{aligned} \tag{13.2.5}$$

另一方面, 如果粒子 n 和 m 都是出射的或都是入射的, 那么 $\mathbf{v}_n\cdot\mathbf{q}-\mathrm{i}\eta_n\epsilon$ 和 $\mathbf{v}_m\cdot\mathbf{q}+\mathrm{i}\eta_m\epsilon$ 处的极点对称地处在实 q^0-轴的两侧, 无论以何种方式闭合围道, 我们都无法避开来自其中一个极点的贡献:

$$\begin{aligned} J_{nm}=-\pi(p_n\cdot p_m)\int_{\lambda\le|\mathbf{q}|\le\Lambda}&\frac{\mathrm{d}^3q}{|\mathbf{q}|^3\,(E_n-\hat{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{p}_n)(E_m-\hat{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{p}_m)}\\ &-\frac{4\mathrm{i}\pi^3}{\beta_{nm}}\ln\left(\frac{\Lambda}{\lambda}\right)\qquad(\text{对 }\eta_n=\eta_m=\pm1)\,, \end{aligned} \tag{13.2.6}$$

其中 β_{nm} 是粒子 n 和 m 在其中一个粒子的静止系中的相对速度:

$$\beta_{nm}\equiv\sqrt{1-\frac{m_n^2m_m^2}{(p_n\cdot p_m)^2}}\,. \tag{13.2.7}$$

方程(13.2.6)中的虚项导致了方程(13.2.4)中的相因子红外发散[4], 这个相因子在我们取矩阵元的绝对值以计算反应 $\alpha\to\beta$ 的速率时会消失. (这个无限大的相因子是非相对论 Coulomb 散射中

一个著名特征对应的相对论版, 即 Schrödinger 波函数的出射波部分对径向坐标 r 的依赖关系形如 $\exp(\mathrm{i}pr - \mathrm{i}\nu \ln r)/r$ 而不是 $\exp(\mathrm{i}pr)/r$, 其中 ν 是电荷乘积除以相对速度.[5]) 影响反应速率的是 J_{nm} 的实部, 它对于所有的 η_n 和 η_m 取值为

$$\mathrm{Re}\, J_{mn} = -\pi(p_n \cdot p_m) \int_{\lambda \le |\mathbf{q}| \le \Lambda} \frac{\mathrm{d}^3 q}{|\mathbf{q}|^3 (E_n - \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_n)(E_m - \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_m)} \,. \tag{13.2.8}$$

一个初级的计算给出

$$\mathrm{Re}\, J_{mn} = \frac{2\pi^2}{\beta_{nm}} \ln\left(\frac{1+\beta_{nm}}{1-\beta_{nm}}\right) \ln\left(\frac{\Lambda}{\lambda}\right) . \tag{13.2.9}$$

在方程(13.2.4)的绝对值平方中应用此式就给出了虚软光子对过程的速率 $\Gamma_{\beta\alpha}$ 的影响

$$\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha} = \left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)^{A(\alpha\to\beta)} \Gamma^{\Lambda}_{\beta\alpha} \,, \tag{13.2.10}$$

其中 $\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha}$ 和 $\Gamma^{\Lambda}_{\beta\alpha}$ 分别是过程 $\alpha \to \beta$ 仅包含动量大于 λ 或 Λ 的软光子辐射修正时的速率, A 是指数

$$A(\alpha \to \beta) = -\frac{1}{8\pi^2} \sum_{nm} \frac{e_n e_m \eta_n \eta_m}{\beta_{nm}} \ln\left(\frac{1+\beta_{nm}}{1-\beta_{nm}}\right) . \tag{13.2.11}$$

要注意的是, 由于方程(13.2.10)中的两个速率只分别依赖于 λ 和 Λ, 上述结论成立仅因为修正因子 $(\lambda/\Lambda)^A$ 变成了 λ 和 Λ 的同一函数的比值.

指数 A 总是正的. 例如, 在单个带电粒子被一个中性粒子或外势散射时, 当 n 和 m 都是初态带电粒子或末态带电粒子时(在这一情况下, $\eta_n\eta_m = +1$ 而 $\beta_{nm} = 0$), 或者 n 是初态或末态带电粒子而 m 是另一态中的粒子时(在这一情况下, $\eta_n\eta_m = -1$ 而 $\beta_{nm} = \beta$, 其中 $1 > \beta > 0$), 我们都必须在方程(13.2.11)中把项加起来. 这给出

$$A = -\frac{e^2}{8\pi^2}\left[4 - \frac{2}{\beta}\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)\right] ,$$

它对于所有的 $1 > \beta > 0$ 都是正的. 因为 A 是正的, 所以对于任意给定的带电粒子过程 $\alpha \to \beta$, 虚软光子所引入的红外发散效应在对所有阶求和后就变成使得反应速率在极限 $\lambda \to 0$ 下为零.

* * *

在我们继续考察实软光子发射是如何抵消这些红外发散之前, 我们应该暂停一下, 关注上面计算中的一个技术, 就我所知, 这个技术总被文献忽略. 在计算这些辐射修正时, 既包含了虚光子被同一带电粒子外线吸收并发射的图, 也包含了虚光子被不同的线吸收和发射的那些图. 然而, 我们在第 10 章就已经知道, 在计算 S-矩阵时, 我们没有假设计入了在外线中插入自能子图所产生的辐射修正. 这似乎表明我们应该扔掉方程(13.2.11)中 $n = m$ 的项, 但如果这样做的话, 我们在下一节会发现红外发散的抵消将是不完整的.

这一问题的解决可以通过下述观察得到: 虚软光子不仅直接产生红外发散, 而且通过它们对带电粒子场的重整化常数 Z_n 的影响产生红外发散. (在只含有一个自旋 $\frac{1}{2}$ 的带电荷场的理论中, 例如量子电动力学, 重整化常数 Z_n 就是通常被称作 Z_2 的那个常数.) 正是正比于 $Z_n - 1$ 的抵消项抵消了外线中辐射修正的影响. 具体一些, n 类带电粒子的重整化场是因子 $Z_n^{-1/2}$ 乘以非重整化场, 所以当我们用重整化场(对应于略掉了外线中的辐射修正)计算 S-矩阵时, 我们引入了一个额外的

因子 $\prod_n Z_n^{-1/2}$, 该乘积取遍初态和末态中的所有带电粒子. (当然, 对中性粒子也存在因子 $Z_n^{-1/2}$, 但它们不是红外发散的.) 以一种稍微不同的记法, 这个因子是

$$\prod_f Z_f^{-E_f/2} ,$$

其中 Z_f 是 f 类场的场重整化常数, E_f 是 f 类外线的数目, 而乘积现在取遍所有的带电场种类. 然而, 这些场重整化常数也出现在图的内部; 用重整化场表示包含 N_{if} 个 f 类带电粒子场的 i 类相互作用时会引入一个红外发散因子

$$\prod_f (Z_f)^{N_{if}/2} .$$

(例如, 方程(11.1.9)中的抵消项 $-\mathrm{i}e(Z_2-1)A_\mu\bar\psi\gamma^\mu\psi$ 与普通的电磁相互作用 $-\mathrm{i}eA_\mu\bar\psi\gamma^\mu\psi$ 合起来得出了总的相互作用 $-\mathrm{i}Z_2eA_\mu\bar\psi\gamma^\mu\psi$. Z_2 因子中的红外发散正是方程(11.3.23)括号中的第二项以及方程(11.4.14)中的最后一项出现红外发散的原因.) 在重整化场的传播子中也存在红外发散; 当用非重整化场传播子表示 f 类重整化带电场的传播子时, 会引入因子 Z_f^{-1}. 将这些放到一起, 对每一个 f 类的带电场, 由相互作用以及外线和内线的辐射修正的抵消项引入的因子 Z_f 的总数是

$$\tfrac{1}{2}\sum_i V_i N_{if} - I_f - \tfrac{1}{2}E_f ,$$

其中 I_f 和 E_f 是 f 类内线和外线的数目, V_i 是 i 类相互作用顶点的数目. 在 6.3 节我们已经注意到这个量对于每个 f 为零. 因此, 抵消外线上的辐射修正的抵消项自身被产生自内线和顶点的 Z_f 因子抵消了. 因此方程(13.2.11)现在这种包括 $n=m$ 的项的样子是正确的.

13.3 实软光子; 发散的抵消

要解决上一节所遇到的红外发散问题, 需要注意到如下的事实: 因为能量非常低的光子总可以逃避探测, 测量包含数目确定的光子和带电粒子的反应 $\alpha\to\beta$ 的速率 $\Gamma_{\beta\alpha}$ 是不大可能的. 对这种过程可以测量的速率是 $\Gamma_{\beta\alpha}(E,E_T)$, 即不可观测的光子能量都小于某个小量 E, 并且无论不可观测光子的数目是多少, 它们的总能量小于某个很小的总能量 E_T. (显然, $E<E_T$. 在没有软光子探测器的实验中, 我们可以通过测量 α 和 β 中"硬"粒子的能量给软光子的能量施加一个限制 E_T, 在这一情况下我们就令 $E=E_T$.) 我们现在来计算这一速率.

在过程 $\alpha\to\beta$ 中发射 N 个实软光子的 S-矩阵是通过用合适的系数函数

$$\frac{\epsilon_\mu^*(\mathbf{q},h)}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2|\mathbf{q}|}}$$

与振幅(13.1.8)上这 N 个光子的极化指标 $\mu_1,\mu_2,\cdots$ 一一收缩得到的, 其中 $\mathbf{q}$ 是光子动量, $h=\pm1$ 是它的螺旋度, 而 ϵ^μ 是相应的光子极化"矢量".* 这给出光子发射矩阵元(省略掉 δ-函数的 S-矩阵元)

$$\begin{aligned} M^\lambda_{\beta\alpha}(\mathbf{q}_1,h_1,\mathbf{q}_2,h_2,\cdots) &= M^\lambda_{\beta\alpha} \\ &\times\prod_{r=1}^N (2\pi)^{-3/2}(2|\mathbf{q}_r|)^{-1/2}\sum_n \frac{\eta_n e_n[p_n\cdot\epsilon^*(\mathbf{q}_r,h_r)]}{p_n\cdot q_r} . \end{aligned} \tag{13.3.1}$$

*是为了避免与电荷的 e_n 发生混淆, 我们用 ϵ^μ 而不是 e^μ 来表示光子极化矢量.

(上标 λ 是提醒我们这些振幅是在虚光子动量上有红外截断 λ 的前提下计算的. 最后我们会取 $\lambda \to 0$. 根据 13.1 节讨论的因式分解, 虚光子的出现并不会影响结果(13.3.1).) 对该矩阵元取平方, 对螺旋度求和, 并乘以 $\prod_r \mathrm{d}^3 q_r$, 就给出了发射 N 个软光子到动量空间体积 $\prod_r \mathrm{d}^3 q_r$ 中的微分速率. 从方程(8.5.7)中我们回忆起, 当 $q^2 = 0$ 时, 螺旋度求和后的形式为

$$\sum_{h=\pm 1} \epsilon_\mu(\mathbf{q}, h)\epsilon^*_\nu(\mathbf{q}, h) = \eta_{\mu\nu} + q_\mu c_\nu + q_\nu c_\mu \,, \tag{13.3.2}$$

其中 $\mathbf{c} \equiv -\mathbf{q}/2|\mathbf{q}|^2$ 且 $c^0 \equiv 1/2|\mathbf{q}|$. 电荷守恒条件 $\sum_n \eta_n e_n = 0$ 允许我们扔掉方程(13.3.2)中含有 q_μ 或 q_ν 的项, 这给出微分速率**

$$\mathrm{d}\Gamma^\lambda_{\beta\alpha}(\mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_N) = \Gamma^\lambda_{\beta\alpha} \prod_{r=1}^{N} \frac{\mathrm{d}^3 q_r}{(2\pi)^3(2|\mathbf{q}_r|)} \sum_{nm} \frac{\eta_n \eta_m e_n e_m (p_n \cdot p_m)}{(p_n \cdot q_r)(p_m \cdot q_r)} \,. \tag{13.3.3}$$

为了计算发射 N 个具有确定能量 $\omega_r \equiv |\mathbf{q}_r|$ 的软光子的微分速率, 我们必须要把方程(13.3.3)中光子动量 $\mathbf{q}_r$ 的方向积掉. 这些积分与我们在积分(13.2.8)中遇到的是一样,

$$-\pi(p_n \cdot p_m) \int \frac{\mathrm{d}^2 \hat{\mathbf{q}}}{(E_n - \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_n)(E_m - \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_m)} = \frac{2\pi^2}{\beta_{nm}} \ln\left(\frac{1+\beta_{nm}}{1-\beta_{nm}}\right) \,. \tag{13.3.4}$$

因此, 方程(13.3.3)对光子方向的积分给出了发射能量为 $\omega_1, \cdots, \omega_N$ 的光子的微分速率:

$$\mathrm{d}\Gamma^\lambda_{\beta\alpha}(\omega_1 \cdots \omega_N) = \Gamma^\lambda_{\beta\alpha} A(\alpha \to \beta)^N \frac{\mathrm{d}\omega_1}{\omega_1} \cdots \frac{\mathrm{d}\omega_N}{\omega_N} \,, \tag{13.3.5}$$

其中 $A(\alpha \to \beta)$ 是上一节中曾遇到的同一常数:

$$A(\alpha \to \beta) = -\frac{1}{8\pi^2} \sum_{nm} \frac{e_n e_m \eta_n \eta_m}{\beta_{nm}} \ln\left(\frac{1+\beta_{nm}}{1-\beta_{nm}}\right) \,.$$

我们从方程(13.3.5)中看到, 不对发射光子能量进行约束的积分将导致另一个红外发散. 然而, 幺正性要求, 如果我们对虚光子动量施加红外截断(正如上标 λ 所表明的), 那么我们也必须对实光子使用同一截断. 对于任意一个未观测光子能量不大于 E 而任意多个未观测光子能量之和不大于 E_T 的反应 $\alpha \to \beta$, 为了计算这个反应的速率 $\Gamma^\lambda_{\beta\alpha}(E, E_T)$ (其中 E 和 E_T 选得足够小使得用来导出方程(13.3.1)的近似是合理的), 我们必须在 $E \geq \omega_r \geq \lambda$ 和 $\sum_r \omega_r \leq E_T$ 这个限制内做方程(13.3.5)对所有光子能量的积分, 然后, 由于该积分会包含仅相差置换 N 个软光子的构形, 所以要除以 $N!$, 最后对所有可能的 N 求和. 这给出

$$\Gamma^\lambda_{\beta\alpha}(E, E_T) = \Gamma^\lambda_{\beta\alpha} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{A(\alpha \to \beta)^N}{N!} \int_{E \geq \omega_r \geq \lambda, \sum_r \omega_r \leq E_T} \prod_{r=1}^{N} \frac{\mathrm{d}\omega_r}{\omega_r} \,. \tag{13.3.6}$$

如果不是有约束 $\sum_r \omega_r \leq E_T$, 该积分可以因式分解成 N 个对单个 ω_r 积分的乘积. 这个约束可以通过在被积函数中引入一个阶跃函数

$$\theta(E_T - \sum_r \omega_r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}u \, \frac{\sin E_T u}{u} \exp\left(\mathrm{i}u \sum_r \omega_r\right) \tag{13.3.7}$$

** 在 $N = 1$ 时, $|\mathbf{q}|\mathrm{d}\Gamma_{\beta\alpha}(\mathbf{q})/\Gamma_{\beta\alpha}$ 的结果对应一个不连续变化的流密度 4-矢 $J^\mu(x) = \sum_n{}^{(t)} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{v}_n t) p^\mu_n e_n / E_n$ 只考虑经典效应发射的能量分布, 其中求和在 $t < 0$ 时取遍初态中的粒子而在 $t > 0$ 时取遍末态中的粒子.

作为因子来实现. 这样方程(13.3.6)就变成

$$\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha}(E,E_T)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}u\,\frac{\sin E_T u}{u}\exp\left(A(\alpha\to\beta)\int_{\lambda}^{E}\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega u}\right)\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha}\,. \tag{13.3.8}$$

在极限 $\lambda\ll E$ 下, 指数中的积分可以通过写成对 $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega u}-1)/\omega$ 与 $1/\omega$ 的积分之和积出来, 其中, 对 $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega u}-1)/\omega$ 的积分, 我们可以令 $\lambda=0$, 而对 $1/\omega$ 的积分是平庸的. 重新标度变量 u 和 ω, 对 $\lambda\ll E$, 这给出:

$$\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha}(E,E_T)\to\mathscr{F}\Big(E/E_T;A(\alpha\to\beta)\Big)\left(\frac{E}{\lambda}\right)^{A(\alpha\to\beta)}\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha}\,, \tag{13.3.9}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(x;A)&\equiv\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}u\,\frac{\sin u}{u}\exp\left(A\int_0^x\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega u}-1)\right)\\&=1-\frac{A^2\theta(x-\frac{1}{2})}{2}\int_{1-x}^{x}\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega}\ln\left(\frac{x}{1-\omega}\right)+\cdots\,.\end{aligned} \tag{13.3.10}$$

当 E 和 E_T 为同一阶且 $A\ll 1$ 时, 方程(13.3.9)中的因子 $\mathscr{F}(E/E_T;A)$ 接近于 1; 例如,

$$\mathscr{F}\,(1;A)\simeq 1-\tfrac{1}{12}\pi^2A^2+\cdots\,.$$

由于 $A(\alpha\to\beta)>0$, 方程(13.3.9)中的因子 $(E/\lambda)^{A(\alpha\to\beta)}$ 在 $\lambda\to 0$ 的极限下变成无限大. 然而, 方程(13.2.10)表明速率 $\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha}$ 在这一极限下为零:

$$\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha}=\left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)^{A(\alpha\to\beta)}\Gamma^{\Lambda}_{\beta\alpha}\,.$$

在方程(13.3.9)中应用该式表明, 红外截断 λ 在 $\lambda\ll E$ 的极限下消失了:

$$\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha}(E,E_T)\to\mathscr{F}\Big(E/E_T;A(\alpha\to\beta)\Big)\left(\frac{E}{\Lambda}\right)^{A(\alpha\to\beta)}\Gamma^{\Lambda}_{\beta\alpha}\,. \tag{13.3.11}$$

我们要提醒读者, 能量 Λ 仅是"软"光子和"硬"光子之间一个方便的分界点, 其中软光子在方程(13.3.11)中被显式地计入了而硬光子的影响隐含在 $\Gamma^{\Lambda}_{\beta\alpha}$ 中. 由于 $\Gamma^{\Lambda}_{\beta\alpha}\propto\Lambda^A$, 方程(13.3.11)的右边不依赖 Λ. 然而, 在耦合常数较小的理论中, 例如量子电动力学, 相比碰撞中的典型能量 W, 将 Λ 取得充分小使得这里所做的近似适用于能量小于 Λ 的光子, 但又足够大使得 $A(\alpha\to\beta)\ln(W/\Lambda)\ll 1$, 通常是一个很好的策略. 这样, 当 $E\ll\Lambda$ 时的主要辐射修正由方程(13.3.11)中的因子 $(E/\Lambda)^A$ 给出后, 在最低阶微扰论下计算 $\Gamma^{\Lambda}_{\beta\alpha}$ 会是一个很好的近似.

* * *

软引力子会有相同的红外发散消除.[3] 在软引力子能量小于 E 时, 可以证明任意反应 $\alpha\to\beta$ 的速率会正比于 E^B, 其中

$$B=\frac{G}{2\pi}\sum_{nm}\eta_n\eta_m m_n m_m\frac{1+\beta_{nm}^2}{\beta_{nm}\sqrt{1-\beta_{nm}^2}}\ln\left(\frac{1+\beta_{nm}}{1-\beta_{nm}}\right)\,. \tag{13.3.12}$$

13.4 一般的红外发散

迄今为止, 我们在本章中所考虑的由软光子引起的红外发散, 只是在不同物理理论中会遇到的各种红外发散的一个例子. 另一个例子是由无质量带电粒子的量子电动力学给出的. 在这种理论中, 即使消除了软光子引起的红外发散, 我们仍在方程(13.3.11)的指数 A 中发现了对数发散. 根据方程(13.2.11)和(13.2.7), 对于所有带电粒子都是电子的过程, 在 $m_e \to 0$ 的极限下, 指数趋于

$$A \to -\frac{1}{4\pi^2}\sum_n e_n^2 - \frac{1}{4\pi^2}\sum_{n\neq m} e_n e_m \eta_n \eta_m \ln\left(\frac{2|p_n\cdot p_m|}{m_e^2}\right) \to -\frac{\ln m_e}{2\pi^2}\sum_n e_n^2 \,.$$

(我们在最后一步中使用了电荷守恒条件 $\sum_n e_n\eta_n = 0$.) 这个公式中的红外发散源于以平行于初末态中某个"硬"电子动量方向发射的软光子, 但是, 即使光子像电子那样并不是软的, 这也同样也会发生, 这是因为如果 $\mathbf{p}_n$ 平行于 $\mathbf{q}$, 那么传播子分母 $(p_n \pm q)^2$ 在 $p_n^2 = q^2 = 0$ 时为零. 稍微再明确一点, 对 $p_n^2 = q^2 = 0$, 这一因子*对光子方向的积分取如下形式

$$\int \mathrm{d}^2\hat{q}\,(p\pm q)^{-2} = \mp\frac{\pi}{\sqrt{\mathbf{p}^2\mathbf{q}^2}}\int_0^\pi \frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{1-\cos\theta}\,,$$

其中 θ 是光子动量与带电粒子动量之间的夹角. 这个积分在 $\theta = 0$ 处对数发散.

当然, 在真实世界中不存在无质量的带电粒子, 但是在标量积 $|p_n\cdot p_m|$ 的典型值 E^2 远大于 m_e^2 的反应中, 让人感兴趣的是确定大 $\ln(m_e/E)$ 因子出现的地方. 在这一情况下, 主要的辐射修正通常由 A 中的 $-\ln(m_e/E)\sum_n e_n^2/2\pi^2$ 项给出. 更重要的是, 量子色动力学中存在无质量粒子——胶子, 胶子携带类似于电荷的守恒量子数, 称为色荷, 这使得从初末态中的硬胶子或其它带色硬粒子发射的平行硬胶子会产生红外发散.

一般而言, 这些红外发散无法通过对适当的末态组合求和消除掉. 然而, 李政道和 Nauenberg(诺恩堡)[6]业已指出, 如果我们不仅对适当的末态进行求和, 并且假定初态也呈某种几率分布, 那么这个红外发散就可以被抵消掉. 下面给出的是他们的讨论的修正版, 它会使得我们立刻清楚为什么在有质量带电粒子的电动力学仅对末态求和就足够了.

出于这个目的, 回到"旧式"微扰论比较方便, 在这里, S-矩阵由方程(3.2.7)和方程(3.5.3)给出

$$S_{ba} = \delta(b-a) - 2\mathrm{i}\pi\delta(E_a - E_b)T_{ba}\,, \tag{13.4.1}$$

其中

$$T_{ba} = V_{ba} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\int \mathrm{d}c_1\cdots\mathrm{d}c_\nu\,\frac{V_{bc_1}V_{c_1c_2}\cdots V_{c_\nu a}}{(E_a - E_{c_1}+\mathrm{i}\epsilon)\cdots(E_a - E_{c_\nu}+\mathrm{i}\epsilon)}\,. \tag{13.4.2}$$

(对 $c_1\cdots c_\nu$ 的积分应该理解成对这些态中的自旋和粒子种类进行求和, 以及对这些粒子的 3-动量进行积分.) 红外发散产生于(且仅产生于)该表达式中一个或多个能量分母为零时.

然而, 不是所有为零的能量分母都产生红外发散. 一般的中间态 c 可能有 $E_c = E_a$, 但通常这只是积分区域内部的一个点, 并且该区域上的积分凭借在分母中加入 $\mathrm{i}\epsilon$ 的处理而变得收敛. 为了使中间态 c 产生红外发散, 必须在积分区域的端点使能量 $E_c = E_a$. 例如, 如果方程(13.4.2)中的第一个中间态 c_1 由初态 α 中的粒子构成, 而这一态中的所有无质量粒子同时都被替换成由任意多

*这个因子是不平方的, 因为发散仅发生两个项的干涉之间, 其中一项是 S-矩阵元中的项, 而另一项是从其它某个 $m \neq n$ 的带电粒子线上发射光子的项. 对 $m = n$, 积分(13.2.8)正比于 m_n^2.

个近平行的无质量粒子构成且总动量相等的喷注(*jets*), 那么这种情况就会发生. 在这种情况下, 使 $E_{c_1} = E_a$ 的端点是动量空间中每一喷注内的所有无质量粒子都平行的那一点. 更一般地, 在态 a 中, 我们可以将任意多个无质量粒子替换成近平行的无质量粒子的喷注, 再加上任意多个额外的无质量软粒子. 所有这样态的集合称为 $D(a)$ (更精确些, 我们需要引入一个小角度 Θ 和一个小能量 Λ 以定义什么是"近平行"和"软". 我们不会在阐明集合 $D(a)$ 对 Θ 和 Λ 的依赖关系上花时间了.) $D(a)$ 中的态是"危险"的, 就是说, 能量分母 $E_a - E_{c_1}$ 在端点处为零会引入一个红外发散; $E_{c_1} = E_a$ 时的端点是每一个喷注中的所有无质量粒子都平行并且所有无质量软粒子的能量为零的点.

更进一步, 如果 $c_1, \cdots, c_n$ 中的每一个都在集合 $D(a)$ 中, 那么 $D(a)$ 中的中间态 c_{n+1} 在同等意义下也是危险的. 另一方面, 如果某个态 c_m 不在 $D(a)$ 中, 那么后面 $k > m$ 的态 c_k 即使属于集合 $D(a)$ 也不是危险的, 这是因为, 硬粒子或喷注的 3-动量与态 a 中的那些粒子的动量相等的构形空间将只是积分区域中的普通点. 以精确相同的方式, 我们可以定义集合 $D(b)$, 在这个集合中, 态 b 中的一个或多个无质量粒子被近平行无质量粒子的喷注代替, 而每个喷注的动量与被它代替的粒子的总动量相等, 并且添加上任意数量的无质量软粒子. 如果中间态 c_m 属于集合 $D(b)$, 并且其后 $k > m$ 的态 c_k 都属于 $D(b)$, 那么它就是危险的.

为了分离出这些危险态的影响, 我们将方程(13.4.2)重写成以下形式

$$T_{ba} = V_{ba} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(V \left[\frac{\mathscr{P}_a + \mathscr{P}_b + \mathscr{P}_{\notin a,b}}{E_a - H_0 + \mathrm{i}\epsilon} V \right]^{\nu} \right)_{ba} , \tag{13.4.3}$$

其中 $\mathscr{P}_a$, $\mathscr{P}_b$ 和 $\mathscr{P}_{\notin a,b}$ 分别是投影到 $D(a)$, $D(b)$ 和所有其它态上的投影算符. (我们在这里假定了态 b 和态 a 中的粒子动量不会非常接近, 从而使 $D(a)$ 和 $D(b)$ 不会重叠.) 现在, 在 $\Lambda \to 0$ 且 $\Theta \to 0$ 时, 危险中间态占据的相空间非常小, 这使得在它们没有引起红外发散的所有地方, 它们都可以被忽略. 因此, 幂级数(13.4.3)变为

$$\begin{aligned} T_{ba} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \Bigg(\left[V \frac{\mathscr{P}_b}{E_a - H_0 + \mathrm{i}\epsilon} \right]^r V \left[\frac{\mathscr{P}_{\notin a,b}}{E_a - H_0 + \mathrm{i}\epsilon} V \right]^{\nu} \\ \times \left[\frac{\mathscr{P}_a}{E_a - H_0 + \mathrm{i}\epsilon} V \right]^s \Bigg)_{ba} . \end{aligned} \tag{13.4.4}$$

如果把最左边和最右边之间的投影算符 $\mathscr{P}_{\notin a,b}$ 都换成 $\mathscr{P}_a + \mathscr{P}_b + \mathscr{P}_{\notin a,b}$, 并且把左边和右边的 $\mathscr{P}_b$ 和 $\mathscr{P}_a$ 换成 $\mathscr{P}_b + \mathscr{P}_a$, 这将是精确的, 但正如上面所提到的, 当 Λ 和 Θ 充分小的时候, 这对最终结果的影响可以忽略掉.

方程(13.4.4)可以写成更紧凑的形式:

$$T_{ba} = \left(\Omega_b^{-\dagger} T_S \Omega_a^{+} \right)_{ba} , \tag{13.4.5}$$

其中, 为了将来的应用, 对于一般的态 α 和 β, 我们定义 Ω_α^+ 和 Ω_β^- 为:

$$(\Omega_\alpha^+)_{ca} \equiv \sum_{r=0}^{\infty} \left(\left[\frac{\mathscr{P}_\alpha}{E_a - H_0 + \mathrm{i}\epsilon} V \right]^r \right)_{ca} , \tag{13.4.6}$$

$$(\Omega_\beta^-)_{db} \equiv \sum_{r=0}^{\infty} \left(\left[\frac{\mathscr{P}_\beta}{E_b - H_0 - \mathrm{i}\epsilon} V \right]^r \right)_{db} , \tag{13.4.7}$$

T_S 是“安全”算符[**]

$$(T_S)_{dc} \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(V \left[\frac{\mathscr{P}_{\notin c,d}}{E_c - H_0 + \mathrm{i}\epsilon} V \right]^{\nu} \right)_{dc} . \tag{13.4.8}$$

现在, 所有红外发散都被隔离在 Ω_b^- 和 Ω_a^+ 这两个算符中.

为了消除这些红外发散, 现在只需注意到, 要不是因为有投影到危险态上的投影算符, 那么根据方程(3.1.16), 算符 Ω_b^- 和 Ω_a^+ 分别本将是将自由粒子态转化到“出”态和“入”态的幺正算符. 因此, 对于 $D(\beta)$ 和 $D(\alpha)$ 中使得对某些给定末态 β 和某些给定初态 α 是危险态的子空间, 如果这些算符被限制在的这些子空间上, 那么它们就是幺正的. 即, 对于一般的 α 和 β

$$\Omega_\beta^- \mathscr{P}_\beta \Omega_\beta^{-\dagger} = \mathscr{P}_\beta , \tag{13.4.9}$$

$$\Omega_\alpha^+ \mathscr{P}_\alpha \Omega_\alpha^{+\dagger} = \mathscr{P}_\alpha . \tag{13.4.10}$$

因此, 如果要进行求和的那部分态的子空间对任意给定末态和初态 β 和 α 是危险, 那么跃迁速率就没有红外发散:

$$\begin{aligned} \sum_{a\in D(\alpha)} \sum_{b\in D(\beta)} |T_{ba}|^2 &= \mathrm{Tr}\left\{ \Omega_\beta^- \mathscr{P}_\beta \Omega_\beta^{-\dagger} T_S \Omega_\alpha^+ \mathscr{P}_\alpha \Omega_\alpha^{+\dagger} T_S^\dagger \right\} \\ &= \mathrm{Tr}\left\{ \mathscr{P}_\beta T_S \mathscr{P}_\alpha T_S^\dagger \right\} = \sum_{a\in D(\alpha)} \sum_{b\in D(\beta)} |(T_S)_{ba}|^2 . \end{aligned} \tag{13.4.11}$$

为了弄清楚这确实解决了红外发散的一般问题, 有必要说明一下, 只有类似方程(13.4.11)中那样的求和在实验上才是可测的. 既然实验上不可能将出射带电(或带色)无质量粒子与动量近平行且总能量相同[7]的无质量粒子喷注区分开, 为了获得可测的跃迁速率, 我们貌似还必须对危险末态连同极软量子求和, 而所有这些态具有相同的总电荷(或色荷). 对初态的求和则更有问题. 我们可以假定真实的无质量粒子总是作为喷注伴随着软量子全体产生, 这里的全体软量子在某些动量空间体积内是相同的. 然而, 据我所知, 还没有人能够给出一个完整范例说明实验上可测的量只能是不受红外发散影响的跃迁速率之和.

(有质量带电粒子的)量子电动力学中不会出现这样的问题, 正如我们已看到的, 为了消除量子电动力学中的红外发散, 只需要对末态求和. 这一差异的原因可以追溯到电动力学中的如下性质: 在电动力学中, 态 $a, b, c\cdots$ 是带电粒子数以及硬光子数确定的态(用希腊字母标记)与只包含能量小于某个小量 Λ 的软光子的态的直积. 那么, 对于在带电粒子与硬光子间的反应 $\alpha \to \beta$ 中产生了软光子的某个集合 f 的情况, 方程(13.4.5)简化为

$$T_{\beta f,\alpha} = \left(\Omega^-(\beta)^\dagger \Omega^+(\alpha) \right)_{f0} (T_S)_{\beta\alpha} , \tag{13.4.12}$$

其中 0 代表软光子真空, 而 $\Omega^\pm$ 按照前面那样计算, 不过现在计算所用的 Hilbert 空间是在仅有软光子构成的约化 Hilbert 空间, 并且这些光子的相互作用取作所有带电粒子都处在由变量 β 和 α 所标记的固定态的相互作用哈密顿量. 就像前面一样, 这些算符在软光子的“危险” Hilbert 空间 $\mathscr{D}$ 中

[**]在 $(\Omega_b^-)_{db}$ 中, 我们用到了 T_{ba} 是在 $E_b = E_a$ 下算出来的这一事实, 而在 $(T_S)_{dc}$ 中, 我们用到了除非 E_c 非常接近 E_a, 否则投影算符 $\mathscr{P}_a$ 会使得 $(\Omega_a^+)_{ca}$ 为零这一事实. 另外, 方程(13.4.5)中的因子 $\Omega_b^{-\dagger}$ 和 Ω_a^+ 使得 $\mathscr{P}_{\notin c,d} = \mathscr{P}_{\notin a,b}$.

是幺正的, 所以,[†] 无需对初态求和, 我们就有

$$\sum_{f\in\mathscr{D}}|T_{\beta f,\alpha 0}|^2=|(T_S)_{\beta\alpha}|^2\left(\Omega^+(\alpha)^\dagger\Omega^-(\beta)\Omega^-(\beta)^\dagger\Omega^+(\alpha)\right)_{00}$$
$$=|(T_S)_{\beta\alpha}|^2\left(\Omega^+(\alpha)^\dagger\Omega^+(\alpha)\right)_{00}=|(T_S)_{\beta\alpha}|^2\,. \tag{13.4.13}$$

13.5 软光子散射*

在本章对软光子相互作用的处理中, 迄今为止我们所考虑的反应都是这样的反应: 在一个无论如何都要发生的反应 $\alpha\to\beta$ 中, 光子被发射或吸收. 另一方面, 如果反应 $\alpha\to\beta$ 本身是平庸的, 但软光子参与其中并扮演了重要的角色使之变成了一个有趣的反应, 我们对于这样的反应也有希望做一些很有用的一般性论述. 我们将考虑这类反应最简单同时也是最重要的例子, 软光子在任意种类和任意自旋的有质量粒子上散射, 这里的α 和 β 就是单粒子态. 这里的复杂性来自于: 软光子散射振幅中的领头项并不来源于极点项, 而是来源于通过流守恒条件与极点项相关的非极点项.

光子散射的 S-矩阵元可以写成如下形式

$$S(q,\lambda;p,\sigma\to q',\lambda';p',\sigma')=\mathrm{i}(2\pi)^4\delta^4(q+p-q'-p')$$
$$\times\frac{\epsilon^*_\nu(\mathbf{q}',\lambda')\,\epsilon_\mu(\mathbf{q},\lambda)\,M^{\nu\mu}_{\sigma',\sigma}(q;\mathbf{p}',\mathbf{p})}{(2\pi)^6\sqrt{4q^0q'^0}}\,, \tag{13.5.1}$$

其中 q 和 q' 是初态光子和末态光子的 4-动量, p 和 p' 是初态靶和末态靶的 4-动量, λ 和 λ' 是初末态光子的螺旋度, $\epsilon_\nu(\mathbf{q}',\lambda')$ 和 $\epsilon_\mu(\mathbf{q},\lambda)$ 是相应的光子极化矢量, σ 和 σ' 是初态靶和末态靶的自旋 z-分量. 根据 6.4 节中的定理, 振幅 $M^{\nu\mu}$ 可以表示成

$$(2\pi)^{-3}M^{\nu\mu}_{\sigma',\sigma}(q;\mathbf{p}',\mathbf{p})=\int\mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\left(\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'},T\{J^\nu(0),J^\mu(x)\}\Psi_{\mathbf{p},\sigma}\right)+\cdots \tag{13.5.2}$$

其中 $J^\mu(x)$ 是电磁流, 而省略号代表可能的“海鸥”项(seagull terms), 例如带电标量场理论中表示两个光子不通过各自的流而是在单个顶点上相互作用的项. 我们现在重复一下在第 10 章给出的并在 13.1 节使用过的标准定极讨论. 在方程(13.5.2)中的两个流算符之间插入中间态的完备集, 对 x 积分并分离出单粒子中间态, 这给出

$$M^{\nu\mu}(q;\mathbf{p}',\mathbf{p})=\frac{G^\nu(\mathbf{p}',\mathbf{p}+\mathbf{q})G^\mu(\mathbf{p}+\mathbf{q},\mathbf{p})}{E(\mathbf{p}+\mathbf{q})-E(\mathbf{p})-q^0-\mathrm{i}\epsilon}$$
$$+\frac{G^\mu(\mathbf{p}',\mathbf{p}'-\mathbf{q})G^\nu(\mathbf{p}'-\mathbf{q},\mathbf{p})}{E(\mathbf{p}'-\mathbf{q})-E(\mathbf{p}')+q^0-\mathrm{i}\epsilon}+N^{\nu\mu}(q;\mathbf{p}',\mathbf{p})\,, \tag{13.5.3}$$

其中 G^μ 是流的单粒子矩阵元

$$(2\pi)^{-3}G^\mu_{\sigma',\sigma}(\mathbf{p}',\mathbf{p})\equiv\left(\Psi_{\mathbf{p}',\sigma'},J^\mu(0)\Psi_{\mathbf{p},\sigma}\right) \tag{13.5.4}$$

而 $N^{\nu\mu}$ 表示除了单粒子态本身以外的态的贡献, 再加上任意的双光子直接相互作用的项. (方程(13.5.3)理解成矩阵乘法, 其中自旋指标没有显式地写出来.) 关于 $N^{\nu\mu}$, 除了它在 $q^\mu\to0$ 时不具有前两项中那样的奇异项, 因而可以展成 q^μ 的幂级数之外, 我们知道的很少.

[†]我们现在之所以没有像方程(13.3.11)中那样遇到任何 $(E/\Lambda)^A$ 这样的因子, 是因为我们这里把要求和的实软光子态中的最大能量 E 取成了计算 $\Omega^\pm$ 时要求和的“危险”软光子态的最大能量 Λ.

*本节或多或少的在本书的发展主线之外, 可以在第一次阅读时略过.

我们现在应用流守恒(或规范不变)条件:

$$q_\mu M^{\nu\mu}(q;\mathbf{p}',\mathbf{p}) = 0\,, \tag{13.5.5}$$

$$\mathbf{q}\cdot\mathbf{G}(\mathbf{p}+\mathbf{q},\mathbf{p}) = [E(\mathbf{p}+\mathbf{q}) - E(\mathbf{p})]G^0(\mathbf{p}+\mathbf{q},\mathbf{p})\,, \tag{13.5.6}$$

$$\mathbf{q}\cdot\mathbf{G}(\mathbf{p}',\mathbf{p}'-\mathbf{q}) = [E(\mathbf{p}') - E(\mathbf{p}'-\mathbf{q})]G^0(\mathbf{p}',\mathbf{p}'-\mathbf{q})\,. \tag{13.5.7}$$

应用于方程(13.5.3), 这些条件给出了我们需要的 $N^{\nu\mu}$ 上的条件:

$$q_\mu N^{\nu\mu}(q;\mathbf{p}',\mathbf{p}) = -G^\nu(\mathbf{p}',\mathbf{p}+\mathbf{q})\,G^0(\mathbf{p}+\mathbf{q},\mathbf{p}) + G^0(\mathbf{p}',\mathbf{p}'-\mathbf{q})\,G^\nu(\mathbf{p}'-\mathbf{q},\mathbf{p})\,. \tag{13.5.8}$$

我们还注意到 $M^{\nu\mu}$ 满足"交叉"对称性条件

$$M^{\nu\mu}(q;\mathbf{p}',\mathbf{p}) = M^{\mu\nu}(p'-p-q;\mathbf{p}',\mathbf{p})\,, \tag{13.5.9}$$

并且, 由于方程(13.5.3)中的极点项显然满足这一条件, 所以 $N^{\nu\mu}$ 也满足这一条件:

$$N^{\nu\mu}(q;\mathbf{p}',\mathbf{p}) = N^{\mu\nu}(p'-p-q;\mathbf{p}',\mathbf{p})\,, \tag{13.5.10}$$

我们将用这些条件确定 $N^{\nu\mu}$ 的动量幂级数展开中的第一项.

首先, 我们需要对单粒子流矩阵元 $G^\mu(\mathbf{p}',\mathbf{p})$ 相对动量 $\mathbf{p}'$ 和 $\mathbf{p}$ 的幂级数展开做一些说明. 空间反演不变性(在它适用的范围内)告诉我们, G^0 和 G^i (其中 $i=1,2,3$)的展开中分别只包含动量的偶数阶项和奇数阶项. 根据方程(10.6.3), $G^0_{\sigma',\sigma}$ 中动量的零阶项是 $e\delta_{\sigma',\sigma}$, 其中 e 是粒子电荷. 这样, 流守恒条件就告诉我们, 到动量的第二阶,

$$(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\cdot\mathbf{G}_{\sigma',\sigma}(\mathbf{p}',\mathbf{p}) = \left(\frac{\mathbf{p}'^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right) e\delta_{\sigma',\sigma}\,.$$

因此, $\mathbf{G}$ 中动量的一阶项是 $e(\mathbf{p}'+\mathbf{p})\delta_{\sigma',\sigma}/2m$ 加上可能的与 $\mathbf{p}'-\mathbf{p}$ 正交的一阶项, 而旋转不变性告诉我们后者必须正比于 $(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\times\mathbf{J}_{\sigma',\sigma}$, 其中 $\mathbf{J}$ 是我们熟悉的带电粒子的自旋矩阵. 综合这些结果, 我们有展开

$$G^0(\mathbf{p}',\mathbf{p}) = e1 + \text{二次}\,, \tag{13.5.11}$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{p}',\mathbf{p}) = \frac{e1}{2m}(\mathbf{p}'+\mathbf{p}) + \frac{\mathrm{i}\mu}{j}\mathbf{J}\times(\mathbf{p}'-\mathbf{p}) + \text{三次}\,, \tag{13.5.12}$$

其中"1"是单位自旋矩阵, 而"二次"和"三次"指的是小动量 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{p}'$ 的幂级数展开中可以忽略项的阶数. 由于流是厄米的, 方程(13.5.12)中的系数 μ/j 是实的. 当系数以这种形式表示时(其中 j 是带电粒子的自旋), μ 就是粒子的磁矩.

现在我们回到 $N^{\nu\mu}$, 考察方程(13.5.8)关于小动量 q^μ, $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{p}'$ 的幂级数展开. 在方程(13.5.8)中取 $\nu=0$ 表明 $q_\mu N^{0\mu}$ 至少是这些小量的二次项. 不存在与 q^μ 正交的常矢量, 所以 $N^{0\mu}$ 必须至少是小动量的一阶项. 这样, 交叉对称性条件(13.5.10)就告诉我们, N^{i0} 也必须至少是小动量的一阶项. 然后, 在方程(13.5.8)中取 $\nu=i$ 并应用方程(13.5.12)就告诉我们

$$q_k N^{ik} = -\frac{e^2 q^i}{m} + \text{二次}$$

从而

$$N^{ik} = -\frac{e^2}{m}\delta_{ik} + \text{线性}\,. \tag{13.5.13}$$

由于 G^i 至少是小动量的一阶项, 那么方程(13.5.3)中 M^{ik} 的极点项也将是这样, 于是在零阶仅给我们留下了非极点项 N^{ik}

$$M^{ik}(0;0,0) = N^{ik}(0;0,0) = -\frac{e^2}{m}\delta_{ik}\,. \tag{13.5.14}$$

由此我们可以算出软光子散射截面. 但这里并不需要进行这个计算; 既然我们已经知道了, 光子散射振幅在零动量极限下仅依赖于靶粒子的质量和电荷, 并且关于电荷是二阶的, 我们可以立即使用光子在任意给定自旋靶粒子上的散射截面的二阶计算结果, 例如量子电动力学中微分光子散射截面的结果(8.7.42):

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{e^4}{32\pi^2 m^2}(1+\cos^2\theta)\,. \tag{13.5.15}$$

我们现在看到这是一个通用公式, 在低能极限下, 对质量为 m, 电荷为 e 且种类和自旋任意的靶粒子, 即使这些粒子是复合粒子且有比较强的相互作用, 例如原子核, 这一公式依然适用. Gell-Mann, Goldberger 和 Low(洛)[8]已经证明了, 在软光子散射振幅中, 可以将这些结果推广以给出用靶粒子质量, 电荷和磁矩表示的次领头阶项.

13.6 外场近似*

重的带电粒子, 像原子核, 在作用上近似地像一个经典外场的源, 这在直觉上是显然的. 本节中, 我们将看到如何证明这一近似是合理的, 并得到其局限性的一些概念.

考察这样的 Feynman 图或 Feynman 图的一部分, 其中重带电粒子从初态到末态穿过图并发射 N 个 4-动量为 $q_1, q_2, \cdots q_N$, 极化指标为 $\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_N$ 的离壳光子. 对所有这样的图或子图(不包括那 N 个光子传播子)求和给出振幅

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}^4x_1\,\mathrm{d}^4x_2\cdots\mathrm{d}^4x_N\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_1\cdot x_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_2\cdot x_2}\cdots\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_N\cdot x_N}\\
&\qquad\times\langle \mathbf{p}',\sigma'|T\Big\{J^{\mu_1}(x_1),J^{\mu_2}(x_2),\cdots J^{\mu_N}(x_N)\Big\}|\mathbf{p},\sigma\rangle\\
&\equiv \mathscr{G}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_N}_{\sigma',\sigma}(q_1,q_2,\cdots q_N;p)
\end{aligned} \tag{13.6.1}$$

矩阵元中包含了重粒子可以参与的所有相互作用, 包括强核力. 该振幅在 $q_1, q_2, \cdots q_N \to 0$ 时有一个高阶极点, 这个极点来自于流乘积矩阵元中中间态仅由初态和末态中的重粒子构成的那些项. 当 $q_1, q_2, \cdots q_N$ 的所有分量与(可能是复合粒子的)重粒子动力学相关的所有能量和动量相比很小

*本节或多或少的在本书发展的主线之外, 可以在第一次阅读时略过.

时, 这一高阶极点将主导(13.6.1). 在这一情况下, 10.2 节的方法给出**

$$\begin{aligned}\mathscr{G}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_N}_{\sigma',\sigma}(q_1,q_2,\cdots q_N;p) \to{}& \frac{(-\mathrm{i})^{N-1}}{2p^0(2\pi)^3}(2\pi)^4\\ &\times\delta^4(p'+q_1+q_2+\cdots+q_N-p)\sum_{\sigma_1,\sigma_2,\cdots\sigma_{N-1}}\\ &\times\frac{\mathscr{G}^{\mu_1}_{\sigma',\sigma_1}(p)\,\mathscr{G}^{\mu_2}_{\sigma_1,\sigma_2}(p)\cdots\mathscr{G}^{\mu_N}_{\sigma_{N-1},\sigma}(p)}{[2p\cdot q_1-\mathrm{i}\epsilon][2p\cdot(q_1+q_2)-\mathrm{i}\epsilon]\cdots[2p\cdot(q_1+\cdots+q_{N-1})-\mathrm{i}\epsilon]}\\ &+\text{置换}\,,\end{aligned}\tag{13.6.2}$$

其中

$$\frac{\mathscr{G}^{\mu}_{\sigma',\sigma}(p)}{2p^0(2\pi)^3}\equiv\langle\mathbf{p},\sigma'|J^\mu(0)|\mathbf{p},\sigma\rangle\tag{13.6.3}$$

而"+置换"表示我们要对 N 个光子的所有置换求和. 应用于原子系统, 重要的是要注意到(13.6.1)适用于既有强相互作用又有电磁相互作用的任意自旋的粒子, 比如原子核.

我们还注意到, 对任意自旋但电荷为 Ze 的粒子, 电流在 4-动量相等的态之间的矩阵元是†

$$\langle p,\sigma'|J^\mu(0)|p,\sigma\rangle=\frac{Z\,e\,p^\mu\delta_{\sigma'\sigma}}{p^0(2\pi)^3}\,,\tag{13.6.4}$$

从而使

$$\mathscr{G}^{\mu}_{\sigma'\sigma}(p)=2Z\,e\,p^\mu\delta_{\sigma'\sigma}\,.\tag{13.6.5}$$

方程(13.6.5)关键之处在于指出这些矩阵都是对易的, 所以它们的乘积可以从对置换的求和中分解出来:

$$\begin{aligned}&\mathscr{G}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_N}_{\sigma',\sigma}(q_1,q_2,\cdots q_N;p)\to\\ &\frac{(-\mathrm{i})^{N-1}(Ze)^N p^{\mu_1}p^{\mu_2}\cdots p^{\mu_N}}{p^0(2\pi)^3}(2\pi)^4\delta^4(p'+q_1+q_2+\cdots+q_N-p)\delta_{\sigma',\sigma}\\ &\times\left[\frac{1}{[p\cdot q_1-\mathrm{i}\epsilon][p\cdot(q_1+q_2)-\mathrm{i}\epsilon]\cdots[p\cdot(q_1+\cdots+q_{N-1})-\mathrm{i}\epsilon]}\right.\\ &\qquad\left.+\text{置换}\right]\,.\end{aligned}\tag{13.6.6}$$

到 q 的领头阶, 这里的 δ-函数可以写成

$$\delta^4(p'+q_1+\cdots+q_N-p)=p^0\delta^3(\mathbf{p}'+\mathbf{q}_1+\cdots+\mathbf{q}_N-\mathbf{p})\delta(p\cdot(q_1+\cdots+q_N))\,.\tag{13.6.7}$$

**在微扰论中, 分母来自于传播子的分母:

$$(p'+q_1+\cdots q_r)^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon\to 2p'\cdot(q_1+\cdots q_r)-\mathrm{i}\epsilon\to 2p\cdot(q_1+\cdots q_r)-\mathrm{i}\epsilon\,,$$

而传播子的分子提供了因子 $\sum uu^\dagger$, 它与光子发射顶点矩阵一起给出了矩阵元(13.6.3). 矩阵 $\mathscr{G}^\mu$ 与上一节中的矩阵 G^μ 相差因子 $2p^0$.

†证明该式最简单的方法是: 首先注意到, 在粒子静止的 Lorentz 系中, 旋转不变性要求流矩阵元的空间分量为零而时间分量正比于 $\delta_{\sigma',\sigma}$, 且除此之外不再依赖 σ 或 σ'. 比例常数由方程(10.6.3)给出, 然后做一个 Lorentz 变换就给出了方程(13.6.4).

幸运地是, 这里可以证明对置换求和后的结果比单个项要简单得多. 对 $p\cdot(q_1+\cdots+q_N)=0$, 我们有

$$\left[\frac{1}{[p\cdot q_1-\mathrm{i}\epsilon][p\cdot(q_1+q_2)-\mathrm{i}\epsilon]\cdots[p\cdot(q_1+\cdots+q_{N-1})-\mathrm{i}\epsilon]}\right.$$
$$\left.+\text{置换}\right]=(2\mathrm{i}\pi)^{N-1}\delta(p\cdot q_1)\delta(p\cdot q_2)\cdots\delta(p\cdot q_{N-1})\,. \tag{13.6.8}$$

例如, 对 $N=2$, 这给出:

$$\frac{1}{[p\cdot q_1-\mathrm{i}\epsilon]}+\frac{1}{[p\cdot q_2-\mathrm{i}\epsilon]}=\frac{1}{[p\cdot q_1-\mathrm{i}\epsilon]}+\frac{1}{[-p\cdot q_1-\mathrm{i}\epsilon]}=2\mathrm{i}\pi\delta(p\cdot q_1)\,.$$

得到普遍结果(13.6.8)的最简单方法是做如下恒等式的 Fourier 变换

$$\theta(\tau_1-\tau_2)\theta(\tau_2-\tau_3)\cdots\theta(\tau_{N-1}-\tau_N)+\text{置换}=1\,.$$

将方程(13.6.8)代入方程(13.6.6)就给出了振幅的最终结果(13.6.1):

$$\mathscr{G}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_N}_{\sigma',\sigma}(q_1,q_2,\cdots q_N;p)\to(Ze)^N(2\pi)^N\delta_{\sigma',\sigma}p^{\mu_1}p^{\mu_2}\cdots p^{\mu_N}$$
$$\times\,\delta^3(\mathbf{p}'+\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\cdots+\mathbf{q}_N-\mathbf{p})\delta(p\cdot q_1)\delta(p\cdot q_2)\cdots\delta(p\cdot q_N)\,. \tag{13.6.9}$$

这一结果既适用于相对论性粒子也适用于缓慢运动的重粒子, 也可用来推导带电粒子散射的“Weizsäcker-Williams”(魏伯乐-威廉姆斯)近似.[9] 在带电重粒子是非相对论性粒子的特殊情况下, 即 $|\mathbf{p}|\ll p^0$, 方程(13.6.9)进一步化简成

$$\mathscr{G}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_N}_{\sigma',\sigma}(q_1,q_2,\cdots q_N;p)\to(Ze)^N(2\pi)^N n^{\mu_1}n^{\mu_2}\cdots n^{\mu_N}$$
$$\times\,\delta^3(\mathbf{p}'+\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\cdots+\mathbf{q}_N-\mathbf{p})\delta(q_1^0)\delta(q_2^0)\cdots\delta(q_N^0)\delta_{\sigma',\sigma}\,, \tag{13.6.10}$$

其中 n 是单位类时矢量

$$n^0=1\,,\qquad \mathbf{n}=0\,.$$

现在, 对于电荷为 Ze 的单个非相对论重粒子, 设它的动量空间归一化波函数是 $\chi_\sigma(\mathbf{p})$, 假定这个粒子既出现在初态又出现在末态. 对方程(13.6.10)中的 δ-函数使用 Fourier 表示, $\mathscr{G}$ 在这一态下的矩阵元是

$$\int \mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3p'\,\chi^*_{\sigma'}(\mathbf{p}')\,\chi_\sigma(\mathbf{p})\,\mathscr{G}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_N}_{\sigma',\sigma}(q_1,q_2,\cdots q_N;p)\to$$
$$\int \mathrm{d}^3X\,\sum_\sigma|\psi_\sigma(\mathbf{X})|^2\prod_{r=1}^{N}2\pi Z\,e\,n^{\mu_r}\,\delta(q_r^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{q}_r\cdot\mathbf{X}} \tag{13.6.11}$$

其中 $\psi(\mathbf{X})$ 是坐标空间波函数:

$$\psi_\sigma(\mathbf{X})\equiv(2\pi)^{-3/2}\int\mathrm{d}^3p\,\chi_\sigma(\mathbf{p})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{X}}\,. \tag{13.6.12}$$

由于方程(13.6.11)中的因式分解, 在该态中引入一个带电重粒子的效果等效于在动量空间 Feynman 图中加入任意多个新型顶点, 在这种新顶点中, 像电子这种电荷为 $-e$ 的轻 Dirac 粒子

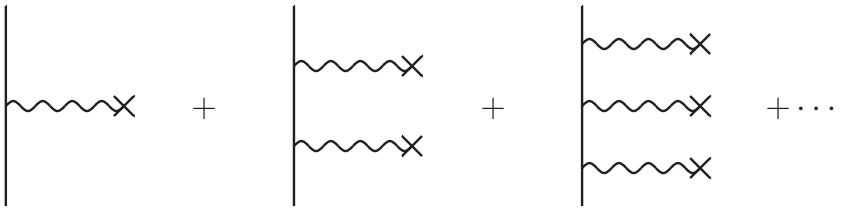


图 13.4 电子被外电磁场散射的图. 这里的直线代表电子, 端点为叉的波浪线代表电子与外场的相互作用

与一外场相互作用, 而每个这样的顶点对整个振幅贡献因子‡(现在包含了光子传播子和电子-光子顶点)

$$\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4q\,\left[\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\frac{1}{q^2-\mathrm{i}\epsilon}\right]\left[2\pi Z\,e\,n_\mu\delta(q^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{X}}\right]\left[(2\pi)^4\,e\,\gamma^\mu\,\delta^4(k-k'-q)\right] \tag{13.6.13}$$

其中 k 和 k' 是初态和末态电子的 4-动量. 于是完整的散射振幅必须是在权函数 $\sum_\sigma|\psi_\sigma(\mathbf{X})|^2$ 下对重粒子位置 $\mathbf{X}$ 的平均. 因子(13.6.13)与通过在相互作用拉格朗日量中增加新项

$$\mathscr{L}_{\mathrm{ext}}(x)=\mathscr{A}_\mu(x)\,J_e^\mu(x) \tag{13.6.14}$$

所得到的相同, 其中 $J_e^\mu\equiv-\mathrm{i}e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ 是电子的电流, 而 $\mathscr{A}^\mu$ 是外矢势

$$\mathscr{A}^\mu(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4q\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\left[\frac{2\pi\,Z\,e\,n^\mu\delta(q^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{X}}}{q^2-\mathrm{i}\epsilon}\right]. \tag{13.6.15}$$

当然, 这正是通常的 Coulomb 势:

$$\mathscr{A}^0(x)=\frac{Ze}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{X}|}\qquad \boldsymbol{\mathscr{A}}(x)=0\,. \tag{13.6.16}$$

如果存在多个带电重粒子(就像分子中那样), 我们必须将 $\mathscr{A}^\mu(x)$ 表示为像(13.6.16)这样的项的和, 其中每一项都有自己的电荷 Ze 以及位置 $\mathbf{X}$.

采用外场近似时, 记住要求和的是哪些图是有用的. 考虑单个(相对论性或非相对论性)电子与单个带电重粒子, 例如质子或氘核, 的相互作用. 如果我们忽略所有其它相互作用, 那么, 对于与外场相互作用所引起的电子散射, 它的 Feynman 图就是那些在电子线上插入任意多个电子-外场顶点(13.6.14)的 Feynman 图. (参看图13.4.) 但就像方程(13.6.2)中对置换的求和所表明的, 外场近似下的这些图来自于低层理论中与电子线相连的光子在所有可能的阶被连到带电重粒子线上的那些图. (参看图13.5) 除非电子和带电重粒子是非相对论性的, 否则图13.5中的"非交叉梯形"图(用 L 标记)不会在这个求和中占主导地位. (一些来自旧式微扰论中的项也对这些图有贡献, 这些项的中间态含有与初末态相同的粒子, 当电子和带电重粒子均为非相对论性时, 这会使能量分母很小, 而图13.5中的其它所有图所对应的中间态, 要么有额外的光子, 要么有额外的电子-正电子对, 要么有重的粒子-反粒子对. 它们被大能量分母压低了.) 非交叉梯形图的求和可以通过解一个积分方程求出, 这一积分方程称为 *Bethe-Salpeter*(贝特-萨尔皮特)方程,[10] 然而, 除非两个粒子都是非相对论性的, 否则没有什么合适的理由只挑出图的这个子集, 在两个粒子均为非相对论性

‡这里的第一个因子是通常的因子 i, 在 Feynman 规则中, 这个因子伴随着带电重粒子相互作用拉格朗日量中的常数.

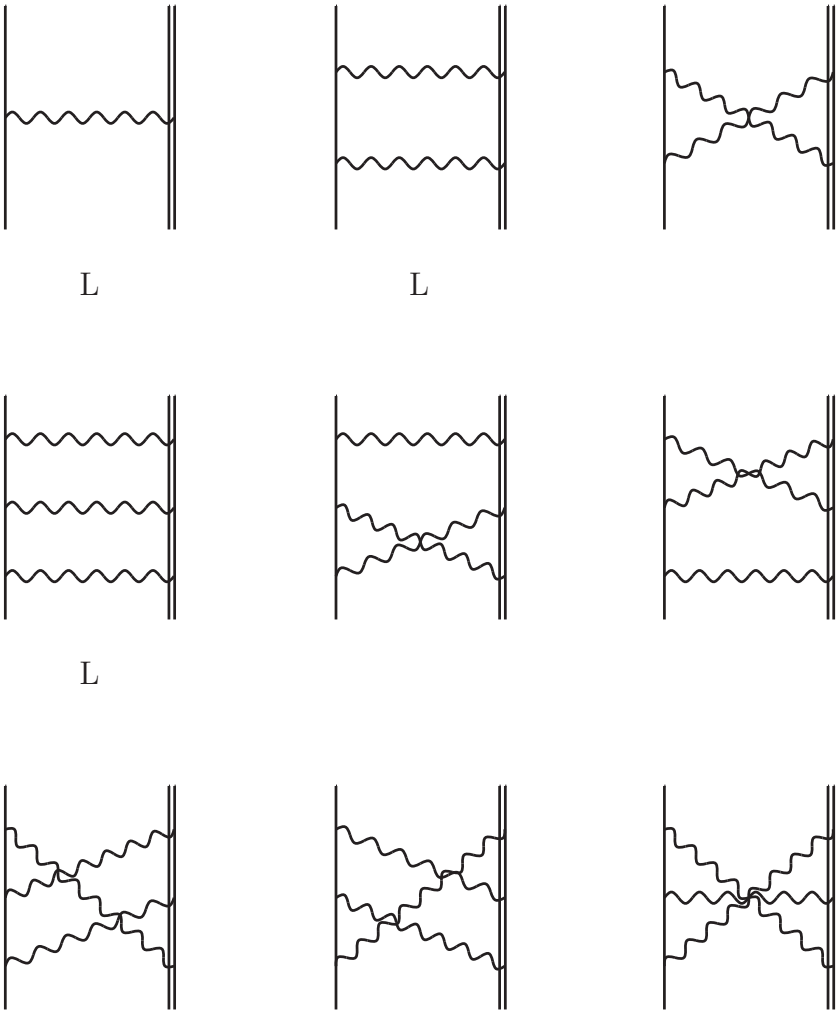


图 13.5 一个电子被一个重带电靶粒子散射的图, 这个图在靶质量很大的极限下会产生与图13.4相同的结果. 这里单线是电子, 双线是重的靶粒子; 波浪线是虚光子. 被“L”标记的图被称作非交叉梯形图; 当电子和靶粒子都是非相对论粒子时, 这些图在求和中占主导地位.

的情况下, Bethe-Salpeter 方程就退化成了普通的非相对论 Schrödinger 方程, 再加上与自旋-轨道耦合相关的相对论性修正, 这个修正可以作为微扰处理. 我们必须承认, 束缚态中的相对论效应和辐射修正的理论仍不令人满意.

在推导外场(13.6.16)时, 我们仅将带电重粒子与电磁场的相互作用计算至光子动量的领头阶. 重粒子的磁偶极矩, 电偶极矩等会产生关于光子动量的高阶修正. 当然, 在图13.4中那些图以外, 还会有 Feynman 图产生辐射修正, 例如光子从电子线发射并被吸收或者在光子线中插入电子圈的那些图. 我们在下一章将看到, 在束缚态中, 图13.4中的图必须计入所有阶, 而所有其它的光子动量或 e 的高阶修正可以视为这些图的微扰.

习题

1. 在质心系下考虑能量为 1 GeV 且散射角为 90° 的过程 $e^+ + e^- \to \pi^+ + \pi^-$. 假设通过对末态 π 介子能量的测量, 我们确定出有不超过 $E_T \ll 1\,\mathrm{GeV}$ 的能量被软光子带走了. 反应速率对 E_T 的依赖

关系是什么?

2. 考虑一个由标量场 ϕ 描述的无质量无自旋粒子, 它的相互作用拉格朗日密度的形式是 $\phi(x)J(x)$, 其中 $J(x)$ 只包含有质量粒子的场. 推导在过程 $\alpha \to \beta$ 中发射任意多个软标量粒子的速率公式, 这里这些软标量粒子的总能量小于某个小量 E_T. 计入能量小于某个小量 Λ 的软标量粒子引起的辐射修正.

3. 对低能光子在任意靶上的散射, 推导方程(13.5.14)的下一项贡献的公式.

4. 假定一个质量 m 很小的自旋 1 粒子由一个矢量场 $V^\mu(x)$ 描述, 它只与一个重得多的由 Dirac 场 $\psi(x)$ 描述的费米子耦合, 相互作用拉格朗日密度的形式是 $gV^\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$. 假定这个重费米子正常地衰变到与 V^μ 没有相互作用的其它粒子, 并释放出远大于 m 的能量 W. 考虑这样一个散射过程, 但其中有一个额外的伴随其它衰变产生的 V^μ 粒子, 这个矢量粒子的能量小于一个上限能量 E, 而能量范围是 $W \gg E \gg m$. 这个过程的衰变率与 E 和 m 的关系是什么? 计算中忽略辐射修正

5. 证明方程(13.6.8)在 $p \cdot (q_1 + \cdots + q_N) = 0$ 时是成立的.

参考文献

[1] F. Bloch and A. Nordsieck, *Phys. Rev.* **37**, 54 (1937); D. R. Yennie, S. C. Frautschi, and H. Suura, *Ann. Phys. (NY)* **13**, 379 (1961). 另见K. T. Mahantappa, Ph.D. Thesis at Harvard University (1961), 未发表.

[2] S. Weinberg, *Phys. Lett.* **9**, 357 (1964); *Phys. Rev.* **135**, B1049 (1964).

[3] S. Weinberg, *Phys. Rev.* **140**, B515 (1965).

[4] 在非相对论Coulomb散射的微扰展开中会遇到这个相因子, R. H. Dalitz, *Proc. Roy. Soc. London* **206**, 509 (1951).

[5] 可参看 L. I. Schiff, *Quantum Mechanics* (McGraw-Hill, New York, 1949): Section 20.

[6] T. D. Lee and M. Nauenberg, *Phys. Rev.* **133**, B1549 (1964). 另见T. Kinoshita, *J. Math. Phys.* **3**, 650 (1962); G. Sterman and S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 1416 (1977).

[7] G. Sterman and S. Weinberg, 文献[6].

[8] F. E. Low, *Phys. Rev.* **96**, 1428 (1954); M. Gell-Mann and M. L. Goldberger, *Phys. Rev.* **96**, 1433 (1954). 另见S. Weinberg, *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory — 1970 Brandeis Summer Institute in Theoretical Physics*, S. Deser, M. Grisaru, and H. Pendleton 编辑(MIT Press, Cambridge, MA, 1970).

[9] E. J. Williams, *Kgl. Dan. Vid. Sel. Mat.-fys. Medd.* **XIII**, No. 4 (1935).

[10] H. A. Bethe and E. E. Salpeter, *Phys. Rev.* **82**, 309 (1951); **84**, 1232 (1951).

第 14 章　外场中的束缚态

在第 11 章对辐射修正的处理中, 我们仅比微扰论的最低阶多迈出一步. 然而, 存在一类非常重要的问题, 在这类问题中, 即便是最简单的计算, 也要求我们从一开始就要考虑数类到耦合常数, 例如 e 的, 任意高阶的 Feynman 图. 这些问题是那些涉及束缚态的问题——在电动力学中, 既有普通的原子和分子, 也有电子偶素或 μ 子偶素这样的奇异原子.

很容易看到这种问题必然会面临普通微扰论的失效. 例如, 将电子-质子散射的振幅看做质心系能量 E 的函数. 如 10.3 节所示, 束缚态的存在, 例如氢原子的基态, 意味着这一振幅在 $E = m_p + m_e - 13.6\,\mathrm{eV}$ 处有一极点. 然而, 在电子-质子散射的微扰展开中, 任何单个项中都没有这样的极点. 因此, 这样的极点只能来自于所有图之和在质心能接近 $m_p + m_e$ 时的发散.

这一微扰级数发散的原因也很容易看到, 特别是在我们考虑旧式微扰论的编时图而不是 Feynman 图的时候. 假定在质心系中电子和质子均有量级 $q \ll m_e$ 的动量, 并考虑一个电子和质子的动量不同但大小也为 q 的中间态. 这个态所贡献的能量分母因子将是 $[q^2/m_e]^{-1}$ 阶的. 每个这样的态还会贡献一个 e^2/q^2 (e^2/r 的 Fourier 变换)阶的 Coulomb 相互作用的矩阵元, 并且, 相应的动量空间积分会贡献一个 q^3 阶的因子. 综合以上这些, 我们看到每个额外的 Coulomb 相互作用贡献一个阶为

$$[q^2/m_e]^{-1}[e^2/q^2][q^3] = e^2 m_e/q$$

的整体因子. 因此, 当 q 小于或等于 $e^2 m_e$ 阶时, 或者换句话说, 当动能和势能, 它们是 q^2/m_e 阶的, 不再大于 e^4/m_e, 即氢原子的束缚能量级时, 微扰论会失效.

我们这里的问题是研究如何利用微扰论计算束缚态问题中的辐射修正, 对那些需要对所有阶求和的图进行求和, 并只保留有限个不需要求和的图

14.1　Dirac 方程

这一章, 我们只考虑电子(或 μ 子)与像原子核这样的带电重粒子之间的 Coulomb 相互作用产生的束缚态问题. 如 13.6 节所示, 计入这一相互作用可以通过在相互作用拉格朗日量中加入表示 c-数外矢势 $\mathscr{A}^\mu(x)$ 的项*

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\mathscr{A}} = &-\mathrm{i}e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\mathscr{A}_\mu - \tfrac{1}{2}(Z_3-1)(\partial^\mu\mathscr{A}^\nu - \partial^\nu\mathscr{A}^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A^\mu)\\ &- \mathrm{i}e(Z_2-1)\mathscr{A}_\mu\,\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\,,\end{aligned} \tag{14.1.1}$$

来实现, 这一相互作用是通过将方程(11.1.6)相互作用部分中的量子矢势 A^μ 替换为 $A^\mu + \mathscr{A}^\mu$ 得到的. 例如, 对处在原点且电荷为 Ze 的单个带电重粒子,

$$\mathscr{A}^0(x) = \frac{Z\,e}{4\pi|\mathbf{x}|}\,, \qquad \boldsymbol{\mathscr{A}}(x) = 0\,. \tag{14.1.2}$$

*在本章, 我们重新用大写字母 Ψ 来标记 Heisenberg 绘景中的电子场, 保留小写字母 ψ 来表示时间相关性仅由 c-数外场 $\mathscr{A}^\mu(x)$ 决定的 Dirac 场.

相互作用(14.1.1)就是要必须计入到所有阶的贡献. 在本节, 我们将考虑只有这一个相互作用的理论, 而将辐射修正留至后续章节.

物理学家们在幼儿园里就学会了处理这类问题的方法: 求解有外场的 Dirac 波动方程. 在这里推导这一方程看起来似乎是不必要的, 但正如第 1 章中所强调的, Dirac 将这一方程作为一种相对论 Schrödinger 方程的原始动机并没有经受住检验. 另外, 在我们的推导中, 我们将发现必须要在 Dirac 方程的解上附加的归一化条件, 而这个条件在 Dirac 方法中看起来似乎是特设的. 在下一节辐射修正的处理中, 这里所讨论的 Dirac 方程的解将是关键因素.

这里, 我们将在 Heisenberg 绘景的版本下进行处理, 其中算符对时间的依赖由包含外场作用(14.1.1)但不包含其它相互作用的哈密顿量决定. 电子场 $\psi(x)$ 在这一绘景下满足场方程

$$\left[\gamma^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + m + \mathrm{i}e\gamma^\lambda \mathscr{A}_\lambda(x)\right]\psi(x) = 0\,. \tag{14.1.3}$$

这不是 Dirac 原始含义下的 Dirac 方程,[1] 因为这里的 $\psi(x)$ 不是 c-数波函数而是量子算符. c-数 Dirac 波函数定义为

$$u_N(x) \equiv (\Phi_0, \psi(x)\Phi_N)\,, \tag{14.1.4}$$

$$v_N(x) \equiv (\Phi_N, \psi(x)\Phi_0)\,, \tag{14.1.5}$$

其中 Φ_N 是态矢的正交完备集, 而 Φ_0 是真空. 由方程(14.1.3)中立刻可知这些函数满足齐次 Dirac 方程

$$\begin{aligned}\left[\gamma^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + m + \mathrm{i}e\gamma^\lambda \mathscr{A}_\lambda(x)\right]u_N(x) &= \left[\gamma^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + m + \mathrm{i}e\gamma^\lambda \mathscr{A}_\lambda(x)\right]v_N(x)\\ &= 0\,.\end{aligned} \tag{14.1.6}$$

我们也可以从 Dirac 场的等时反对易关系中导出归一化条件. 相互作用(14.1.1)不会影响这些归一化条件, 所以归一化条件可以取成与自由场相同的形式:

$$\{\psi(\mathbf{x},t), \bar{\psi}(\mathbf{y},t)\} = \mathrm{i}\gamma^0\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,. \tag{14.1.7}$$

取真空期望值, 并插入对 Φ_N 的求和, 我们发现

$$\sum_N u_N(\mathbf{x},t)u_N^\dagger(\mathbf{y},t) + \sum_N v_N(\mathbf{x},t)v_N^\dagger(\mathbf{y},t) = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,, \tag{14.1.8}$$

对 N 的求和理解成对连续态的积分以及对所有离散束缚态的求和.

我们主要感兴趣的情况是外场不依赖于时间, 像(14.1.2). 在这种情况下, Φ_N 可以取为哈密顿量(包含相互作用(14.1.1))本征值为 E_N 的本征态. 这样, 时间平移不变性就告诉我们 $u_N(x)$ 和 $v_N(x)$ 对时间的依赖是:

$$u_N(\mathbf{x},t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_N t}u_N(\mathbf{x})\,, \qquad v_N(\mathbf{x},t) = \mathrm{e}^{+\mathrm{i}E_N t}v_N(\mathbf{x})\,. \tag{14.1.9}$$

这样, 齐次 Dirac 方程(14.1.6)就变成

$$\mathrm{i}\gamma^0\left[\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} + m + \mathrm{i}e\gamma^\lambda \mathscr{A}_\lambda(\mathbf{x})\right]u_N(\mathbf{x}) = E_N u_N(\mathbf{x})\,, \tag{14.1.10}$$

$$\mathrm{i}\gamma^0\left[\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} + m + \mathrm{i}e\gamma^\lambda \mathscr{A}_\lambda(\mathbf{x})\right]v_N(\mathbf{x}) = -E_N v_N(\mathbf{x})\,. \tag{14.1.11}$$

方程(14.1.11)右边的负号表明 v_N 是著名的 Dirac "负能"解. 正如方程(14.1.8)所表明的, 构造波函数完备集需要这些负能解. 当然, 对合适的外场, 理论中不存在负能态, 所以所有的 E_N 都是正的, 但是, 那些 u_N 或 v_N 非零的态之间仍然存在着一个重要差异: 定义(14.1.4)和(14.1.5)表明, 仅当一个态分别具有电荷 $-e$ 和 $+e$ 时, 这个态才可以有 $u_N \neq 0$ 或 $v_N \neq 0$. 正是在这一意义下, Dirac 方程的负能解与反粒子的存在相关. 然而, 这个讨论并没有涉及 Dirac 方程的任何细节, 甚至没有考虑电子自旋.

由 Dirac 波动方程(14.1.10)和(14.1.11), 我们很容易看到能量不同的波函数是正交的. 即,

$$(E_M - E_N^*)\left(u_N^\dagger u_M\right) = \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(u_N^\dagger \mathrm{i}\gamma^0\boldsymbol{\gamma} u_M\right)$$

所以, 如果 $|\mathbf{x}|^2(u_N^\dagger \mathrm{i}\gamma^0\boldsymbol{\gamma}u_M)$ 在 $|\mathbf{x}|\to 0$ 且 $|\mathbf{x}|\to\infty$ 时仍然是有界的, 那么

$$\int \mathrm{d}^3x\,\left((u_N^\dagger(\mathbf{x})u_M(\mathbf{x})\right) = 0 \quad \text{如果} \quad E_N \neq E_M^*\,. \tag{14.1.12}$$

若 v_N 有类似的边界条件, 我们以同样的方法发现

$$\int \mathrm{d}^3x\,\left(v_N^\dagger(\mathbf{x})v_M(\mathbf{x})\right) = 0 \quad \text{如果} \quad E_N \neq E_M^*\,, \tag{14.1.13}$$

$$\int \mathrm{d}^3x\,\left(u_N^\dagger(\mathbf{x})v_M(\mathbf{x})\right) = 0 \quad \text{如果} \quad E_N \neq -E_M^*\,, \tag{14.1.14}$$

取 $N = M$, 方程(14.1.12)和(14.1.13)告诉我们能量都是实的. 在方程(14.1.12)—(14.1.14)中去掉 E_M 上的复共轭标记, 我们看到能量不同的 u 是正交的, 能量不同的 v 是正交的, 并且(只要势能没有强到产生负能态)所有 u 与所有 v 正交. 那么, 通过恰当地选择那些与能量一起表征态的分立量子数, 我们总可以将结果整理成

$$\int \mathrm{d}^3x\,\left(u_N^\dagger(\mathbf{x})u_M(\mathbf{x})\right) = 0 \quad \text{如果} \quad N \neq M\,, \tag{14.1.15}$$

$$\int \mathrm{d}^3x\,\left(v_N^\dagger(\mathbf{x})v_M(\mathbf{x})\right) = 0 \quad \text{如果} \quad N \neq M\,, \tag{14.1.16}$$

$$\int \mathrm{d}^3x\,\left(u_N^\dagger(\mathbf{x})v_M(\mathbf{x})\right) = 0\,. \tag{14.1.17}$$

给方程(14.1.8)右乘 $u_M(\mathbf{x})$ 或 $v_M(\mathbf{y})$, 我们就会发现这些波函数一定满足归一化条件

$$\int \mathrm{d}^3y\,\left(u_N^\dagger(\mathbf{y})u_M(\mathbf{y})\right) = \int \mathrm{d}^3y\,\left(v_N^\dagger(\mathbf{y})v_M(\mathbf{y})\right) = \delta_{NM}\,, \tag{14.1.18}$$

其中 δ_{NM} 是克罗内克 δ-符号与动量空间 δ-函数的乘积, 定义 $\sum_N$ 时使用的归一化是 $\sum_N \delta_{MN} = 1$. 这些归一化条件与 Dirac 波函数的几率解释并无直接关系, 而是来自于场的反对易关系(14.1.7).

我们现在详细说明一下 $\mathscr{A} = 0$ 的纯静电外场的情况. 在我们的 Dirac 矩阵标准表示中, 有

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}\,, \qquad \mathrm{i}\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 是通常的 2×2 Pauli 矩阵 3-矢, 这里的"1"和"0"是 2×2 单位阵和零矩阵. 通过令

$$u_N = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} f_N + \mathrm{i}g_N \\ f_N - \mathrm{i}g_N \end{pmatrix}\,, \tag{14.1.19}$$

我们引入两分量波函数 f_N 和 g_N. 这样, 能量本征值条件(14.1.10)就取如下形式:

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla})f_N = (E_N + e\mathscr{A}^0 + m)g_N\,, \tag{14.1.20}$$

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla})g_N = -(E_N + e\mathscr{A}^0 - m)f_N\,. \tag{14.1.21}$$

在 $e\mathscr{A}^0 r \approx Z\alpha \ll 1$ 的非相对论情况下, 束缚能 $m - E_N$ 是 $Z^2\alpha^2 m$ 阶的, 而梯度算符是 $Z\alpha m$ 阶的, 所以 g_N 要比 f_N 小一个阶为 $Z\alpha$ 的因子. (为了得到位置波函数 v_N, 要把所有的 E_N 替换成 $-E_N$, 所以在这一情况下, f_N 要比 g_N 小同样的因子.) 在本节末尾我们将回到这个非相对论情况.

根据空间反演, 物理态可以分成奇和偶两类:

$$\mathsf{P}\Phi_N = \eta_N\Phi_N\,, \tag{14.1.22}$$

其中 η_N 是符号因子 ±1. 回忆起电子的内禀宇称被定义成 $+1$, Dirac 场具有空间反演性质

$$\mathsf{P}\psi(\mathbf{x},t)\mathsf{P}^{-1} = \beta\,\psi(-\mathbf{x},t)$$

所以方程(14.1.4)和(14.1.22)表明 Dirac 波函数满足宇称条件

$$u_N(\mathbf{x}) = \eta_N\beta\,u_N(-\mathbf{x}) \tag{14.1.23}$$

或者等价地

$$f_N(\mathbf{x}) = \eta_N f_N(-\mathbf{x})\,,\qquad g_N(\mathbf{x}) = -\eta_N g_N(-\mathbf{x})\,. \tag{14.1.24}$$

要注意的是, 与态的宇称相同的是 $f_N(\mathbf{x})$, 而不是 $g_N(\mathbf{x})$.

这里势 $\mathscr{A}^0$ 是旋转不变的, 波动方程的解可以根据它们的总角动量 j 和宇称 η 进行分类. 对给定的 j, 分量 f 和 g 可以展成轨道角动量为 $\ell = j + \frac{1}{2}$ 和 $\ell = j - \frac{1}{2}$ 的球谐函数, 但对于确定的宇称 $\eta = (-1)^{j\mp\frac{1}{2}}$, 方程(14.1.24)表明 f 中只能有 $\ell = j \mp \frac{1}{2}$ 而 g 中只能有 $\ell = j \pm \frac{1}{2}$. 于是, 通常的角动量加法规则就表明了, 对总角动量为 j, 总角动量 z-分量为 μ, 且宇称为 $(-1)^{j\mp\frac{1}{2}}$ 的态, "大"两分量波函数 f 具有如下形式

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} C_{j\mp\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(j\,\mu;\mu-\frac{1}{2}\quad\frac{1}{2})Y^{\mu-\frac{1}{2}}_{j\mp\frac{1}{2}}(\hat{\mathbf{x}}) \\ C_{j\mp\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(j\,\mu;\mu+\frac{1}{2}\quad-\frac{1}{2})Y^{\mu+\frac{1}{2}}_{j\mp\frac{1}{2}}(\hat{\mathbf{x}}) \end{pmatrix} F(|\mathbf{x}|)\,, \tag{14.1.25}$$

其中 C 和 Y 是通常的 Clebsch-Gordan 系数和球谐函数.[2] 此外, 对任何总角动量给定且宇称确定的波函数, 利用算符 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{x}}$, 我们可以构造出另一个 j 和 μ 相同但宇称相反的波函数, 所以, "小"分量可以写成如下形式

$$g(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{x}}\begin{pmatrix} C_{j\mp\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(j\,\mu;\mu-\frac{1}{2}\quad\frac{1}{2})Y^{\mu-\frac{1}{2}}_{j\mp\frac{1}{2}}(\hat{\mathbf{x}}) \\ C_{j\mp\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(j\,\mu;\mu+\frac{1}{2}\quad-\frac{1}{2})Y^{\mu+\frac{1}{2}}_{j\mp\frac{1}{2}}(\hat{\mathbf{x}}) \end{pmatrix} G(|\mathbf{x}|)\,. \tag{14.1.26}$$

习惯上将态的轨道角动量 ℓ 定义为"大"分量 $f(\mathbf{x})$ 的轨道角动量,

$$\ell = j \mp \tfrac{1}{2}\,, \tag{14.1.27}$$

这使得宇称总是 $(-1)^\ell$.

将方程(14.1.25)和(14.1.26)代入方程(14.1.20)和(14.1.21)给出了耦合微分方程

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}r}+\frac{k+1}{r}G+(E+e\mathscr{A}^0-m)F=0\,, \tag{14.1.28}$$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}-\frac{k-1}{r}F-(E+e\mathscr{A}^0+m)G=0\,, \tag{14.1.29}$$

其中, 对宇称 $\eta=(-1)^{j\mp\frac{1}{2}}$,

$$k\equiv\pm(j+\tfrac{1}{2})\,. \tag{14.1.30}$$

我们现在专注于简单 Coulomb 外场(14.1.2), 对这个外场, $e\mathscr{A}^0=Z\alpha/r$. 这一情况[3]下对 Dirac 方程的处理是熟悉的, 所以, 仅仅为了完整性, 我们在这里简单总结一下. 很容易看到原点附近的解趋于 r^{s-1}, 其中 $s^2=k^2-Z^2\alpha^2$. (注意到 $k^2\geq 1$, 所以指数 s 对于 $Z\alpha\leq 1$ 是实的.) 而 $s<0$ 的解与归一化条件(14.1.18)不相容, 我们必须丢弃掉. 这样, 波函数在 $r\to\infty$ 时不能发散这一条件就确定了能量本征值的允许值:

$$E_{n,j}=m\left[1+\left(\frac{Z\alpha}{n-j-\frac{1}{2}+\sqrt{(j+\frac{1}{2})^2-Z^2\alpha^2}}\right)^2\right]^{-1/2}\,, \tag{14.1.31}$$

其中 n 是"主量子数"且

$$j+\tfrac{1}{2}\leq n\,. \tag{14.1.32}$$

值得注意的是, 这些能量并不依赖宇称或 ℓ, 而只依赖于 n 和 j. 在 $n=j+\frac{1}{2}$ 的情况下, 我们只有 $k>0$ 以及宇称 $(-1)^{j-\frac{1}{2}}$, 从而使 $\ell=j-\frac{1}{2}$, 除此之外, 每一个 n 和 j 都有两个解, 分别对应 k 的两个符号或两个可能的宇称. 方程(14.1.32)与熟悉的非相对论约束 $\ell\leq n-1$ 是相同的.

对于 $Z\alpha\ll 1$ 的轻原子, 方程(14.1.31)给出了幂级数

$$E=m\left[1-\frac{Z^2\alpha^2}{2n^2}+\frac{Z^4\alpha^4}{n^4}\left(\frac{3}{8}-\frac{n}{2j+1}\right)+\cdots\right]\,. \tag{14.1.33}$$

当然, 前两项就代表静质量能和非相对论 Schrödinger 方程给出的束缚能. 既依赖 j 也依赖 n 的领头项是这里的第三项, 它是第一个相对论修正. 对 $n=1$, 总角动量只有一个值 $j=\frac{1}{2}$, 并且, 由于这里 $n=j+\frac{1}{2}$, 所以只有一个宇称 $(-1)^{j-\frac{1}{2}}=+1$, 对应于 $\ell=0$. 因此, 在氢原子 $n=1$ 的态中, 很难看到方程(14.1.33)中的相对论修正效应, 虽然我们将在 14.3 节看到这在最近变得可能了. 另一方面, 对 $n=2$, 我们有一个两种宇称都有的 $j=\frac{1}{2}$ 的态(即, $2s_{1/2}$ 态和 $2p_{1/2}$ 态), 以及 $j=\frac{3}{2}$ 且宇称为负的态 $2p_{3/2}$. 方程(14.1.33)给出了氢原子中 p 态之间的分裂

$$E(2p_{3/2})-E(2p_{1/2})=\frac{\alpha^4 m_e}{32}=4.5823\times 10^{-5}\,\mathrm{eV}\,. \tag{14.1.34}$$

这种相对论性的线分裂称为原子态的精细结构. 从一开始就知道这一预测与所观测到的精细结构是高度吻合的. 另一方面, Dirac 方程并不给出 $2s_{1/2}$ 态和 $2p_{1/2}$ 态之间的任何能量差, 所以这将是寻找进一步的修正效应的好地方, 我们将在 14.3 节中对此进行考察.

在结束本节之前, 一般的静电势 $\mathscr{A}^0$, 我们将考察波函数和矩阵元在非相对论情况下的近似形式. (对 Coulomb 势, 这是 $Z\alpha\ll 1$ 的极限.) 既然这里 $E_N+m\simeq 2m\gg|e\mathscr{A}^0|$, 电子波函数的"小"分量近似地由大分量给出

$$g_N\simeq(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla})f_N/2m\,. \tag{14.1.35}$$

这样方程(14.1.21)就变成了非相对论 Schrödinger 方程

$$\left[-\frac{\nabla^2}{2m} - e\mathscr{A}^0\right] f_N \simeq (E_N - m) f_N \,. \tag{14.1.36}$$

既然在 f_N 的方程中自旋自由度与轨道自由度之间不再有耦合, 对该方程的解, 我们可以找到如下形式的完全集

$$f_N = \chi_N \, \psi_N(\mathbf{x}) \,,$$

其中 χ_N 是两分量常值旋量, 而 $\psi_N(\mathbf{x})$ 是 Schrödinger 方程的普通单分量解. 然而, 我们经常考虑总角动量有确定值 j 的态, 对这样的态, f_N (对非零轨道角动量)是这些项的和.

在非相对论近似下, 四分量 Dirac 波函数取如下形式

$$u_N \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (1 + \mathrm{i}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla}/2m) f_N \\ (1 - \mathrm{i}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla}/2m) f_N \end{bmatrix} \tag{14.1.37}$$

而方程(14.1.18)给出了归一化条件

$$\int \mathrm{d}^3x \, (f_N^\dagger, f_M) \simeq \delta_{NM} - \tfrac{1}{4}(\mathbf{v}^2)_{NM} \tag{14.1.38}$$

其中

$$(\mathbf{v}^2)_{NM} \equiv -\frac{1}{m^2} \int \mathrm{d}^3x \, f_N^\dagger(\mathbf{x}) \nabla^2 f_M(\mathbf{x}) \,.$$

在联系外场中的矩阵元与自由粒子矩阵元时, 注意到能量本征态 N 中的动量空间波函数可以写成

$$u_N(\mathbf{p}) \equiv (2\pi)^{-3/2} \int \mathrm{d}^3x \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} u_N(\mathbf{x}) \simeq \sum_\sigma u(\mathbf{p}, \sigma) [f_N(\mathbf{p})]_\sigma \,, \tag{14.1.39}$$

是很有用的, 其中 $u(\mathbf{p}, \sigma)$ 是自由粒子 Dirac 旋量

$$u(\mathbf{p}, \sigma) \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (1 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}/2m) \chi_\sigma \\ (1 + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}/2m) \chi_\sigma \end{bmatrix} \,,$$
$$\chi_{+\frac{1}{2}} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \,, \qquad \chi_{-\frac{1}{2}} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

而 $f_N(\mathbf{p})$ 是两分量 Schrödinger 波函数的 Fourier 变换

$$f_N(\mathbf{p}) \equiv (2\pi)^{-3/2} \int \mathrm{d}^3x \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} f_N(\mathbf{x}) \,.$$

* * *

最后, 作为计算各种微扰效应的辅助, 我们给出 16 个独立的 4×4 电子矩阵元的领头项

$$(\bar{u}_M\, u_N) \simeq (f_M^\dagger\, f_N) - \frac{1}{4m^2}(\boldsymbol{\nabla} f_M^\dagger \cdot \boldsymbol{\sigma}\, \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} f_N)\,, \tag{14.1.40}$$

$$\mathrm{i}(\bar{u}_M \gamma^0 u_N) \simeq (f_M^\dagger\, f_N) + \frac{1}{4m^2}(\boldsymbol{\nabla} f_M^\dagger \cdot \boldsymbol{\sigma}\, \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} f_N)\,, \tag{14.1.41}$$

$$(\bar{u}_M\, \boldsymbol{\gamma}\, u_N) \simeq \frac{1}{2m}[(\boldsymbol{\nabla} f_M^\dagger \cdot \boldsymbol{\sigma}\, \boldsymbol{\sigma} f_N) - (f_M^\dagger \boldsymbol{\sigma}\, \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} f_N)]\,, \tag{14.1.42}$$

$$(\bar{u}_M\, [\gamma^0, \boldsymbol{\gamma}]\, u_N) \simeq \frac{\mathrm{i}}{m}[(\boldsymbol{\nabla} f_M^\dagger \cdot \boldsymbol{\sigma}\, \boldsymbol{\sigma} f_N) + (f_M^\dagger \boldsymbol{\sigma}\, \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} f_N)]\,, \tag{14.1.43}$$

$$(\bar{u}_M\, [\gamma^i, \gamma^j]\, u_N) \simeq 2\mathrm{i}\epsilon_{ijk}(f_M^\dagger \sigma_k f_N)\,, \tag{14.1.44}$$

$$(\bar{u}_M\, \gamma_5 \boldsymbol{\gamma}\, u_N) \simeq -\mathrm{i}(f_M^\dagger \boldsymbol{\sigma} f_N)\,, \tag{14.1.45}$$

$$(\bar{u}_M\, \gamma_5 \gamma^0\, u_N) \simeq \frac{1}{2m}[(\boldsymbol{\nabla} f_M^\dagger \cdot \boldsymbol{\sigma} f_N) - (f_M^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} f_N)]\,, \tag{14.1.46}$$

$$(\bar{u}_M\, \gamma_5\, u_N) \simeq \frac{\mathrm{i}}{2m}[(\boldsymbol{\nabla} f_M^\dagger \cdot \boldsymbol{\sigma} f_N) + (f_M^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} f_N)]\,. \tag{14.1.47}$$

14.2 外场中的辐射修正

我们现在来考虑上一节结果的辐射修正, 这些辐射修正是电子与量子电磁场以及带电重粒子外场相互作用引起的. 这些辐射修正可以用通常的 Feynman 图进行计算, 外场的全部效果就是修正存在电磁外场时的电子场传播子(并提供方程(14.1.1)中依赖外场的重整化抵消项.) 再具体些, 在任意图的电子内线中, 插入任意多个与相互作用(14.1.1)中第一项对应的顶点, 其效果相当于将裸坐标空间传播子 $-\mathrm{i}S(x-y)$ 替换成修正了的传播子

$$\begin{aligned}
&-\mathrm{i}S_{\mathscr{A}}(x,y) \equiv -\mathrm{i}S(x-y) + (-\mathrm{i})^2 \int \mathrm{d}^4 z_1\, S(x-z_1) e\gamma^\mu \mathscr{A}_\mu(z_1) S(z_1-y) \\
&+ (-\mathrm{i})^3 \int \mathrm{d}^4 z_1 \int \mathrm{d}^4 z_2\, S(x-z_1) e\gamma^\mu \mathscr{A}_\mu(z_1) S(z_1-z_2) e\gamma^\nu \mathscr{A}_\nu(z_2) S(z_2-y) \\
&+ \cdots\,,
\end{aligned} \tag{14.2.1}$$

其中, 像通常那样,

$$S(x-y) \equiv \frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathrm{d}^4 p\, \frac{-\mathrm{i}\gamma_\lambda p^\lambda + m}{p^2 + m^2 - \mathrm{i}\epsilon} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}\,.$$

(因为外场破坏了平移不变性, 所以我们必须将 $S_{\mathscr{A}}$ 写成 x 和 y 的函数而不是 $x-y$ 的函数.) 6.4 节中证明的定理告诉我们, 方程(14.2.1)与

$$-\mathrm{i}S_{\mathscr{A}}(x,y) = (\Phi_0, T\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\}\Phi_0)_{\mathscr{A}} \tag{14.2.2}$$

是相同的, 方程右边的下标 $\mathscr{A}$ 表示在定义真空态 Φ_0 和电子场 $\psi(x)$ 的 Heisenberg 绘景中, 唯一考虑的相互作用是存在外场的相互作用(14.1.1). 在方程(14.2.2)插入中间态 Φ_N 的完备集, 这给出了用上一节引入的 Dirac 波函数 u_N 和 v_N 表示的传播子

$$\mathrm{i}S_{\mathscr{A}}(x,y) = \theta(x^0-y^0)\sum_N u_N(x)\bar{u}_N(y) - \theta(y^0-x^0)\sum_M v_M(x)\bar{v}_M(y)\,. \tag{14.2.3}$$

另一个得到传播子(14.2.2)的可能方法是作为非齐次 *Dirac* 方程的解:

$$\left[\gamma^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + m + \mathrm{i}e\gamma^\lambda \mathscr{A}_\lambda(x)\right] S_{\mathscr{A}}(x,y) = \delta^4(x-y)\,, \tag{14.2.4}$$

这一方程可以从场方程(14.1.3)和反对易关系(14.1.7)得到, 或者由微扰级数(14.2.1)形式地得到. 另外, 方程(14.2.3)告诉了我们传播子满足的边界条件: 在 $x^0 - y^0 \to \infty$ 时, 它的 Fourier 分解只包含正比于 $E > 0$ 的 $\exp(-\mathrm{i}E(x^0-y^0))$ 的"正频项", 而在 $x^0 - y^0 \to -\infty$ 时, 则只包含正比于 $E > 0$ 的 $\exp(+\mathrm{i}E(x^0-y^0))$ 的"负频项". 即使在外场过强以至于无法采用微扰级数(14.2.1)的情况下, 也可以利用满足这些边界条件的非齐次 Dirac 方程来得到该传播子的数值解.[4] 只要算出了传播子 $S_{\mathscr{A}}(x,y)$, 外场中的散射振幅就可以用普通的 Feynman 图进行计算, 但是要将 $S(x-y)$ 替换成 $S_{\mathscr{A}}(x,y)$ (并将 $\mathscr{A}$ -相关的重整化抵消项插入到合适的地方).

现在我们来看一下如何利用这种传播子被修正后的微扰级数计算束缚态能级的位移. 考虑全电子传播子 $S'_{\mathscr{A}}(x,y)$, 其中包含了电子与量子电磁场以及外场的相互作用:

$$-\mathrm{i}S'_{\mathscr{A}}(x,y) \equiv (\Omega_0, T\{\Psi(x), \bar{\Psi}(y)\}\Omega_0)_{\mathscr{A}} \tag{14.2.5}$$

其中, $\Psi(x)$ 是包含所有相互作用的 Heisenberg 绘景中的电子场, 而 Ω_0 是全哈密顿量的真空本征态. 对不依赖时间的外势, 我们可以找到全哈密顿量的一组完备正交的本征态 Ω_N, 相应的本征值为 E'_N. 在方程(14.2.5)的算符乘积中插入这些态的和, 我们有

$$\begin{aligned} -\mathrm{i}S'_{\mathscr{A}}(x,y) = {} & \theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E'_N(x^0-y^0)} \sum_N U_N(\mathbf{x})\bar{U}_N(\mathbf{y}) \\ & - \theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E'_N(y^0-x^0)} \sum_N V_N(\mathbf{x})\bar{V}_N(\mathbf{y})\,, \end{aligned} \tag{14.2.6}$$

其中

$$(\Omega_0, \Psi(\mathbf{x},t)\Omega_N) \equiv \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E'_N t} U_N(\mathbf{x})\,, \tag{14.2.7}$$

$$(\Omega_N, \Psi(\mathbf{x},t)\Omega_0) \equiv \mathrm{e}^{+\mathrm{i}E'_N t} V_N(\mathbf{x})\,. \tag{14.2.8}$$

(求和包含对连续态的积分和对分立束缚态的求和. 像前面一样, 仅当态 Ω_N 分别有电荷 $-e$ 和 $+e$ 时, U_N 和 V_N 才是非零的.) 我们可以将传播子重新定义为能量而非时间的函数

$$S'_{\mathscr{A}}(\mathbf{x},\mathbf{y};E) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x^0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}E(x^0-y^0)} S'_{\mathscr{A}}(x,y)\,. \tag{14.2.9}$$

(时间平移不变性要求 $S'_{\mathscr{A}}(x,y)$ 是 x^0-y^0 的函数而不是 x 和 y 各自的函数.) 从方程(14.2.6)中我们看到

$$S'_{\mathscr{A}}(\mathbf{x},\mathbf{y};E) = \sum_N \frac{U_N(\mathbf{x})\bar{U}_N(\mathbf{y})}{E'_N - E - \mathrm{i}\epsilon} - \sum_N \frac{V_N(\mathbf{x})\bar{V}_N(\mathbf{y})}{E'_N + E - \mathrm{i}\epsilon}\,. \tag{14.2.10}$$

特别地, $S'_{\mathscr{A}}(\mathbf{x},\mathbf{y};E)$ 在所有电子束缚态能量处有极点, 且在所有负的正电子束缚态能量处有极点. (当然, 正电子在普通的带正电荷的 Coulomb 外场中没有束缚态.)

我们现在考虑全传播子的最低阶辐射修正. 这里 Feynman 规则给出到这一阶的全传播子是 $S'_{\mathscr{A}} = S_{\mathscr{A}} + \delta S_{\mathscr{A}}$, 其中修正项为

$$\delta S_{\mathscr{A}}(x,y) = \int \mathrm{d}^4 z \int \mathrm{d}^4 w\, S_{\mathscr{A}}(x,z)\, \Sigma^*_{\mathscr{A}}(z,w)\, S_{\mathscr{A}}(w,y)\,, \tag{14.2.11}$$

$\mathrm{i}\Sigma^*_{\mathscr{A}}$ 是所有具有一个入电子线和一个出电子线的单圈图(去掉了最后的电子传播子)之和, 计算这些图时, 要将电子内线的 $S(x-y)$ 换成 $S_{\mathscr{A}}(x,y)$, 最后再加上一个二阶重整化抵消项. 用能量变量代替时间变量, 这是

$$\delta S_{\mathscr{A}}(\mathbf{x},\mathbf{y};E)=\int \mathrm{d}^3z\int \mathrm{d}^3w\, S_{\mathscr{A}}(\mathbf{x},\mathbf{z};E)\,\Sigma^*_{\mathscr{A}}(\mathbf{z},\mathbf{w};E)\,S_{\mathscr{A}}(\mathbf{w},\mathbf{y};E)\,, \tag{14.2.12}$$

其中

$$\Sigma^*_{\mathscr{A}}(\mathbf{z},\mathbf{w};E)\equiv\int \mathrm{d}z^0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}E(z^0-w^0)}\Sigma^*_{\mathscr{A}}(z,w)\,. \tag{14.2.13}$$

这些辐射修正的效果是将波函数变成 $U_N=u_N+\delta u_N$ 和 $V_N=v_N+\delta v_N$, 并将束缚态能量变成 $E'_N=E_N+\delta E_N$, 所以全传播子是

$$\begin{aligned}S'_{\mathscr{A}}(\mathbf{x},\mathbf{y};E)\simeq{}& S_{\mathscr{A}}(\mathbf{x},\mathbf{y};E)\\&+\sum_N\frac{\delta u_N(\mathbf{x})\bar u_N(\mathbf{y})+u_N(\mathbf{x})\delta\bar u_N(\mathbf{y})}{E_N-E}\\&-\sum_N\frac{\delta v_N(\mathbf{x})\bar v_N(\mathbf{y})+v_N(\mathbf{x})\delta\bar v_N(\mathbf{y})}{E_N+E}\\&-\sum_N\frac{u_N(\mathbf{x})\bar u_N(\mathbf{y})\delta E_N}{(E_N-E)^2}+\sum_N\frac{v_N(\mathbf{x})\bar v_N(\mathbf{y})\delta E_N}{(E_N+E)^2}\,.\end{aligned} \tag{14.2.14}$$

(因为我们现在没有在散射态的连续谱中取 E, 所以我们扔掉了 $\mathrm{i}\epsilon$ 项.) 我们看到电子束缚态的能量位移 δE_N 由全传播子中 $-u_N(\mathbf{x})\bar u_N(\mathbf{y})/(E_N-E)^2$ 的系数给出. 为了计算它, 我们注意到方程(14.2.3)给出

$$S_{\mathscr{A}}(\mathbf{x},\mathbf{y};E)=\sum_N\frac{u_N(\mathbf{x})\bar u_N(\mathbf{y})}{E_N-E-\mathrm{i}\epsilon}-\sum_N\frac{v_N(\mathbf{x})\bar v_N(\mathbf{y})}{E_N+E-\mathrm{i}\epsilon}\,. \tag{14.2.15}$$

将其代入方程(14.2.12), 给出

$$\begin{aligned}\delta S_{\mathscr{A}}(\mathbf{x},\mathbf{y};E)=&\sum_{N,M}\frac{u_N(\mathbf{x})\bar u_M(\mathbf{y})}{(E_N-E)(E_M-E)}\\&\times\int \mathrm{d}^3z\int \mathrm{d}^3w\,\bar u_N(\mathbf{z})\,\Sigma^*_{\mathscr{A}}(\mathbf{z},\mathbf{w};E)\,u_M(\mathbf{w})+\cdots\end{aligned} \tag{14.2.16}$$

其中, 省略号代表至少含有一个负能极点的额外项. 比较 $(E_N-E)^{-2}$ 在这里与方程(14.2.14)中的系数, 我们发现

$$\delta E_N=-\int \mathrm{d}^3x\int \mathrm{d}^3y\,\bar u_N(\mathbf{x})\,\Sigma^*_{\mathscr{A}}(\mathbf{x},\mathbf{y};E_N)\,u_N(\mathbf{y})\,. \tag{14.2.17}$$

u_N 是齐次 Dirac 方程满足归一化条件(14.1.8)的解, 所以这非常像普通的一阶微扰论, 只不过把哈密顿量的微扰换成了 $-\Sigma^*$.

一般而言, δE_N 是复的. 这就是不稳定原子能级辐射衰变到更低能级的结果; 我们在第 3 章中看到, 能量为 E 的不稳定态与衰变速率 Γ 在各种振幅的复值能量 $E-\mathrm{i}\Gamma/2$ 处产生了极点. 因而方程(14.2.17) 的虚部等于 $-\Gamma/2$, 而它的实部给出了能量位移.

Σ^* 的 Feynman 图如图14.1所示. (注意到这里出现了新的光子蝌蚪图, 这是因为一般 Feynman 规则中禁止这种图出现的 Lorentz 不变性与电荷共轭不变性被外场破坏了.) 应用位置空

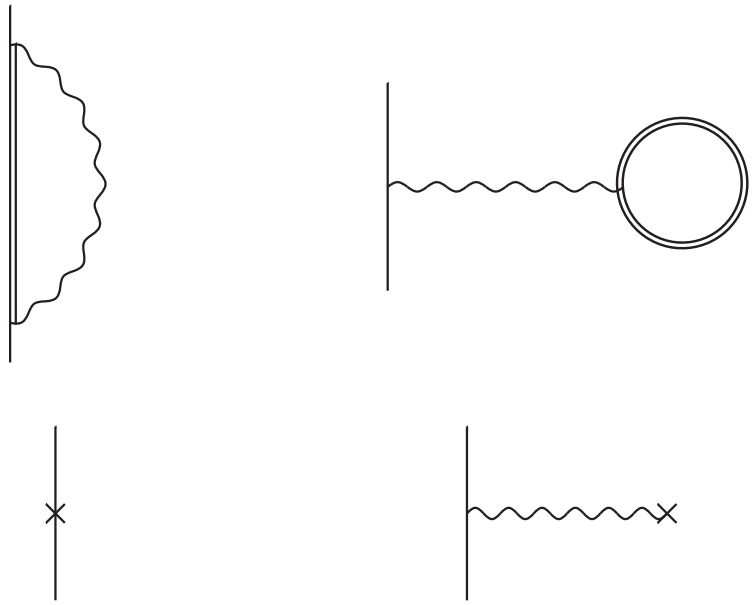


图 14.1 有外场时的电子自能函数 $\Sigma^*_{\mathscr{A}}(x,y)$ 的最低阶 Feynman 图. 这里的双实线代表包含了外场效应的电子传播子 $S_{\mathscr{A}}$; 单实线是入电子线和出电子线; 波浪线是虚光子; ×代表重整化抵消项.

间 Feynman 规则, 这些图给出

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{i}\Sigma^*_{\mathscr{A}}(x,y) = [e\gamma^\mu]\,[-\mathrm{i}S_{\mathscr{A}}(x,y)]\,\big[e\gamma_\mu\big]\,[-\mathrm{i}D(x-y)] \\
&-\Big[e\gamma^\mu\delta^4(x-y)\Big]\int \mathrm{d}^4z\,[-\mathrm{i}D(x-z)]\ \mathrm{Tr}\big\{[-\mathrm{i}S_{\mathscr{A}}(z,z)]\,\big[e\gamma_\mu\big]\big\} \\
&-\mathrm{i}(Z_2-1)(\gamma^\mu\partial_\mu+m)\delta^4(x-y)+\mathrm{i}\delta m\,\delta^4(x-y) \\
&+e\gamma^\mu(Z_2-1)\delta^4(x-y)\mathscr{A}_\mu(x) \\
&+\mathrm{i}(Z_3-1)[e\gamma_\mu]\delta^4(x-y)\int \mathrm{d}^4z\,[-\mathrm{i}D(x-z)]\,\partial_\nu(\partial^\nu\mathscr{A}^\mu(z)-\partial^\mu\mathscr{A}^\nu(z))\,,
\end{aligned}
\tag{14.2.18}
$$

其中重整化常数 (Z_2-1), (Z_3-1) 与 δm 计算至 e 的第二阶. (第二项中的负号就是通常伴随闭合费米圈的那个负号.)

对于 $Z\alpha$ 量级为一的强场, 构形空间电子传播子 $S_{\mathscr{A}}$ 和方程(14.2.17)和(14.2.18)中的积分需要数值地计算.[4] 然而, 对弱场, 我们可以在方程(14.2.18)中应用级数(14.2.1)的前几项并以封闭的形式计算这些积分. 出于这个目的, 在动量空间中处理更加方便, 定义:

$$
S_{\mathscr{A}}(x,y) = (2\pi)^{-4}\int \mathrm{d}^4p'\,\mathrm{d}^4p\,e^{\mathrm{i}p'\cdot x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot y}\,S_{\mathscr{A}}(p',p)\,, \tag{14.2.19}
$$

$$
\Sigma^*_{\mathscr{A}}(x,y) = (2\pi)^{-4}\int \mathrm{d}^4p'\,\mathrm{d}^4p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'\cdot x}e^{-\mathrm{i}p\cdot y}\,\Sigma^*_{\mathscr{A}}(p',p)\,, \tag{14.2.20}
$$

$$
u_N(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-3/2}\int \mathrm{d}^3p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}u_N(\mathbf{p})\,, \tag{14.2.21}
$$

$$
\mathscr{A}^\mu(x) = \int \mathrm{d}^4q\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\mathscr{A}^\mu(q)\,. \tag{14.2.22}
$$

(在这里, 我们不妥当地对一个函数与它的Fourier变换用了同一个符号, 我们会标明变量以区分出哪个是哪个.) 这样方程(14.2.1)和(14.2.18)就变成

$$S_{\mathscr{A}}(p',p)=\frac{-\mathrm{i}\not{p}+m}{p^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon}-\mathrm{i}e\,\frac{-\mathrm{i}\not{p}'+m}{p'^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon}\not{\mathscr{A}}(p'-p)\,\frac{-\mathrm{i}\not{p}+m}{p^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon}+\cdots\,, \tag{14.2.23}$$

和

$$\begin{aligned}\Sigma^*_{\mathscr{A}}(p',p)=&\frac{\mathrm{i}e^2}{(2\pi)^4}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{k^2-\mathrm{i}\epsilon}\,\gamma^\mu S_{\mathscr{A}}(p'-k,p-k)\gamma_\mu\\&+\left[-(Z_2-1)(\mathrm{i}\not{p}+m)+Z_2\delta m\right]\delta^4(p'-p)-\mathrm{i}e(Z_2-1)\not{\mathscr{A}}(p'-p)\\&-\frac{\mathrm{i}e^2\gamma^\mu}{(2\pi)^4}\frac{1}{(p-p')^2-\mathrm{i}\epsilon}\int\mathrm{d}^4q\ \mathrm{Tr}\{S_{\mathscr{A}}(q,q+p'-p)\gamma_\mu\}\\&+\frac{\mathrm{i}e(Z_3-1)}{(p-p')^2-\mathrm{i}\epsilon}\Big[(p-p')^2\not{\mathscr{A}}(p'-p)-(\not{p}-\not{p}')\,(p-p')\cdot\mathscr{A}(p'-p)\Big]\,.\end{aligned} \tag{14.2.24}$$

因为外场是不含时的, 所以$S_{\mathscr{A}}(x,y)$和$\Sigma^*_{\mathscr{A}}(x,y)$可以只通过依赖差$x^0-y^0$而与$x^0$和$y^0$相关, 所以$S_{\mathscr{A}}(p',p)$, $\Sigma^*_{\mathscr{A}}(p',p)$以及$\mathscr{A}^\mu(p'-p)$必须正比于$\delta(p'^0-p^0)$:

$$\mathscr{A}^\mu(p'-p)=\delta(p'^0-p^0)\mathscr{A}^\mu(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\,, \tag{14.2.25}$$

$$S_{\mathscr{A}}(p',p)=\delta(p'^0-p^0)S_{\mathscr{A}}(\mathbf{p}',\mathbf{p};p^0)\,, \tag{14.2.26}$$

$$\Sigma^*_{\mathscr{A}}(p',p)=\delta(p'^0-p^0)\Sigma^*_{\mathscr{A}}(\mathbf{p}',\mathbf{p};p^0)\,. \tag{14.2.27}$$

于是, 方程(14.2.17)和(14.2.13)就给出了能量位移

$$\delta E_N=-\int\mathrm{d}^3p'\int\mathrm{d}^3p\,\bar{u}_N(\mathbf{p}')\,\Sigma^*_{\mathscr{A}}(\mathbf{p}',\mathbf{p};E_N)\,u_N(\mathbf{p})\,, \tag{14.2.28}$$

其中$\Sigma^*_{\mathscr{A}}(\mathbf{p}',\mathbf{p};E_N)$由方程(14.2.23), (14.2.24)和(14.2.27)给出. 在下一节计算弱外场中的能量位移时, 这是我们将用到的主要公式.

14.3 轻原子中的Lamb移动

我们现在来考虑一般静电场中非相对论性电子能级的辐射修正, 例如处在$Z\alpha\ll1$的轻核Coulomb场中的电子. 在这一极限下, 将Coulomb场按弱微扰处理是很自然的, 但是我们会看到这将导致红外发散, 这种红外发散与11.3节中的红外发散有关. 这个红外发散其实不是真实的, 这是因为4-动量$\mathbf{p},E_N$和$\mathbf{p}',E'_N$不在电子质量壳上, 但它确实迫使我们要小心翼翼地处理.

通常处理这一问题的方法是将对虚光子能量的积分分成低能区间和高能区间, 在低能区间, 我们可以非相对论地处理电子, 但必须计入外场的所有阶效应, 而在高能区域, 则必须考虑相对论效应, 但可以只计入外场的最低阶效应. 不过, 我们将在这里引入一个虚构的光子质量μ, 选择μ使它远大于电子的典型动能, 但远小于电子的典型动量. 对于Coulomb场, 这相当于要求

$$(Z\alpha)^2m_e\ll\mu\ll Z\alpha m_e\,. \tag{14.3.1}$$

我们将方程(14.2.24)前两项(包括抵消项 Z_2-1 和 $Z_2\delta m$ 的式子)中的光子传播子写成如下形式

$$\frac{1}{k^2-\mathrm{i}\epsilon}=\left[\frac{1}{k^2+\mu^2-\mathrm{i}\epsilon}\right]+\left[\frac{1}{k^2-\mathrm{i}\epsilon}-\frac{1}{k^2+\mu^2-\mathrm{i}\epsilon}\right]. \tag{14.3.2}$$

相应地, 能量位移是两个项的和, 一个"高能"项和一个"低能"项: 计算高能项的方法是在方程(14.2.24)的前三项中应用光子传播子(14.3.2)的第一项, 并将结果加到方程(14.2.24)的最后两个不是红外发散的项(真空极化项)上; 计算低能项则是对方程(14.2.24)的前三项中使用光子传播子(14.3.2)的第二项. 这个处理的一个优点是, 我们可以直接利用 11.3 节和 11.4 节中的相对论性计算结果, 而不需要做从光子质量截断到红外能量截断这个相当棘手的转化. 当然, 在最后, 我们就必须去检验在能量位移的高能贡献和低能贡献中, 对光子质量 μ 的依赖抵消掉了, 从而使总能量位移是 μ-无关的.

A 高能项

因为 μ 被取成远大于原子束缚能, 我们可以只保留外场的最低阶项. 在不依赖时间的一般外矢势 $\mathscr{A}^\mu(\mathbf{x})$ 中, 动量空间中原子能级的单圈辐射修正由方程(14.2.28)给出, 其中的自能插入 $\Sigma_{\mathscr{A}}(p',p)$ 由方程(14.2.24)和(14.2.23)给出. 外场的零阶项简单地抵消掉了: δm 项抵消了 $\mathscr{A}=0$ 的第一项; Z_3-1 项抵消了 $\mathscr{A}=0$ 的第三项; 而由于 $u(p)$ 满足 Dirac 方程, Z_2-1 项等于零. $\Sigma_{\mathscr{A}}(p',p)$ 中 $\mathscr{A}^\mu$ 的一阶项可以写成如下形式

$$\Sigma_{\mathscr{A}1}(p',p)=-\mathrm{i}e\mathscr{A}_\mu(p'-p)\Gamma_1^\mu(p',p) \tag{14.3.3}$$

其中

$$\begin{aligned}\Gamma_1^\mu(p',p)=&\frac{\mathrm{i}e^2}{(2\pi)^4}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{k^2+\mu^2-\mathrm{i}\epsilon}\\&\times\gamma^\nu\left[\frac{-\mathrm{i}(\not{p}'-\not{k})+m_e}{(p'-k)^2+m_e^2-\mathrm{i}\epsilon}\right]\gamma^\mu\left[\frac{-\mathrm{i}(\not{p}-\not{k})+m_e}{(p-k)^2+m_e^2-\mathrm{i}\epsilon}\right]\gamma_\nu\\&+(Z_2-1)\gamma^\mu\\&-\frac{\mathrm{i}e^2\gamma_\nu}{(2\pi)^4}\frac{1}{(p-p')^2-\mathrm{i}\epsilon}\\&\times\int\mathrm{d}^4l\ \mathrm{Tr}\left\{\left[\frac{-\mathrm{i}\not{l}+m_e}{l^2+m_e^2}\right]\gamma^\mu\left[\frac{-\mathrm{i}\not{l}-\mathrm{i}\not{p}'+\mathrm{i}\not{p}+m_e}{(l+p'-p)^2+m_e^2}\right]\gamma^\nu\right\}\\&-\frac{Z_3-1}{(p'-p)^2-\mathrm{i}\epsilon}\Big[(p-p')^2\eta^{\mu\nu}-(p'-p)^\mu(p'-p)^\nu\Big]\gamma_\nu\,.\end{aligned} \tag{14.3.4}$$

比较前两项与方程(11.3.1)和(11.3.8), 并比较接下来的两项与方程(11.3.9), (11.2.3)和(11.2.15), 这告诉我们 $\Gamma_1^\mu(p',p)$ 是完整的单圈顶点函数, 包含了真空极化和所有抵消项, 而我们已经在 11.3 节计算过了它的质壳矩阵元. 利用方程(14.2.26)和(14.2.25), 可知它对能量位移(14.2.28)的贡献是

$$\begin{aligned}[\delta E_N]_{\text{high energy}}=\mathrm{i}e\int\mathrm{d}^3p'\int\mathrm{d}^3p\ &\big(\bar{u}_N(\mathbf{p}')\Gamma_1^\mu(\mathbf{p}',E_N,\mathbf{p},E_N)u_N(\mathbf{p})\big)\\&\times\mathscr{A}_\mu(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\,.\end{aligned} \tag{14.3.5}$$

(这其实可以猜出来, 只需将电子与外场相互作用中的γ^μ替换成Γ_1^μ即可.) 正如我们在14.1节讨论过的, 因为$Z\alpha \ll 1$, 我们可以将方程(14.3.5)中的Dirac波函数u_N近似取为

$$[u_N(\mathbf{p})]_\alpha = \sum_\sigma u_\alpha(\mathbf{p},\sigma)[f_N(\mathbf{p})]_\sigma \,, \tag{14.3.6}$$

其中f_N是电子在外Coulomb场中的非相对论两分量波函数, $u(\mathbf{p},\sigma)$是动量空间Dirac方程

$$[\mathrm{i}\gamma_\mu p^\mu + m_e]u(\mathbf{p},\sigma) = 0 \tag{14.3.7}$$

的自旋z-分量为σ的归一化四分量解. 既然$u_N(\mathbf{p})$近似满足自由粒子Dirac方程, 方程(10.6.15)给出了Γ_1^μ矩阵元的一般形式

$$\begin{aligned}&\bar{u}_M(\mathbf{p}')[\gamma^\mu + \Gamma_1^\mu(p',p)]u_N(\mathbf{p})\\ &= \bar{u}_M(\mathbf{p}')\Big[\gamma^\mu F_1(q^2) + \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\,[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\,q_\nu\,F_2(q^2)\Big]u_N(\mathbf{p})\,,\end{aligned} \tag{14.3.8}$$

其中$q = p' - p$. 波函数$u_N(\mathbf{p})$在$|\mathbf{p}| \gg Z\alpha m_e$时衰减得非常快, 所以我们只需要极限$|q^2| \ll m_e^2$下的$F_1(\mathbf{q}^2)$和$F_2(\mathbf{q}^2)$. 在这一极限下, 方程(11.3.31), (10.6.18)和(11.3.16)给出

$$F_1(q^2) \simeq 1 + \frac{e^2}{24\pi^2}\left(\frac{q^2}{m_e^2}\right)\left[\ln\left(\frac{\mu^2}{m_e^2}\right) + \frac{2}{5} + \frac{3}{4}\right] \,, \tag{14.3.9}$$

$$F_2(q^2) \simeq \frac{e^2}{16 m_e \pi^2} \,. \tag{14.3.10}$$

我们先考虑方程(14.3.8)中F_1项的贡献, 这一项到目前为止对能量位移的贡献最大, 并且最有趣的问题也出自对它的计算. 对$\mathscr{A} = 0$的纯静电场, 方程(14.3.5), (14.3.8)和(14.3.9)给出

$$\begin{aligned}[\delta E_N]_{F_1} &= -\frac{e^2}{24\pi^2 m_e^2}\left[\ln\left(\frac{\mu^2}{m_e^2}\right) + \frac{2}{5} + \frac{3}{4}\right]\\ &\times \int \mathrm{d}^3p' \int \mathrm{d}^3p\, \bar{u}_N(\mathbf{p}')\Big(-\mathrm{i}e\mathscr{A}^0(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\Big)\gamma^0(\mathbf{p}'-\mathbf{p})^2 u_N(\mathbf{p}) \,.\end{aligned} \tag{14.3.11}$$

为了计算这个贡献, 我们可以采用非相对论矩阵元(14.1.41)中的领头项, 得到

$$\begin{aligned}[\delta E_N]_{F_1} &= -\frac{e^2}{24\pi^2 m_e^2}\left[\ln\left(\frac{\mu^2}{m_e^2}\right) + \frac{2}{5} + \frac{3}{4}\right]\\ &\times \int \mathrm{d}^3p' \int \mathrm{d}^3p\, f_N^\dagger(\mathbf{p}')\, e\mathscr{A}^0(\mathbf{p}'-\mathbf{p})[\mathbf{p}'-\mathbf{p}]^2 f_N(\mathbf{p}) \,,\end{aligned} \tag{14.3.12}$$

而在位置空间的结果是

$$[\delta E_N]_{F_1} = \frac{e^2}{24\pi^2 m_e^2}\left[\ln\left(\frac{\mu^2}{m_e^2}\right) + \frac{2}{5} + \frac{3}{4}\right]\int \mathrm{d}^3x\, f_N^\dagger(\mathbf{x})\,[e\nabla^2\mathscr{A}^0(\mathbf{x})] f_N(\mathbf{x}) \,. \tag{14.3.13}$$

特别地, 对Coulomb势(14.1.2), 我们有$e\nabla^2\mathscr{A}^0(\mathbf{x}) = -Ze^2\delta^3(\mathbf{x})$, 指标$N$中包括主量子数$n$和角动量量子数$j, m, \ell$, 而方程(11.2.41)给出$[f_{njm\ell}(0)]_\sigma = 2(Z\alpha m_e/n)^{3/2}\delta_{\ell,0}\delta_{\sigma,m}/\sqrt{4\pi}$. 那么能量位移就是

$$[\delta E_{jnl}]_{F_1} = -\frac{2Z^4\alpha^5 m_e}{3\pi n^3}\left[\ln\left(\frac{\mu^2}{m_e^2}\right) + \frac{2}{5} + \frac{3}{4}\right]\delta_{\ell,0} \,. \tag{14.3.14}$$

(δE 不依赖总角动量 z-分量 m 是由旋转不变性保证的.) 方程(14.3.12)和(14.3.13)括号中的 $\frac{2}{5}$ 项来自于真空极化, 并正好产生了 11.2 节中尝试性计算给出的能量位移.

在继续计算磁矩和能量位移的低能贡献之前, 值得注意的是, 在进一步处理之前, 我们现在得到的结果就给出了 Lamb 位移的一个合理的量级估计. 我们可以预计, 低能项将包含一个正比于 $\ln(\mu/B)$ 项, 该项的系数会使这一项抵消掉方程(14.3.12)对 μ 的依赖. 这里的常数 B 是为了使对数变量无量纲而必须引入的一个能量; 既然最终提供了红外截断的是电子被束缚在原子中这一事实, 我们可以猜测 B 是典型的原子束缚能, 量级为 $B \simeq (Z\alpha)^2 m_e$. 因此, 态 N 中主量子数为 n 且轨道角动量为 ℓ 的总能量位移采取如下形式

$$\delta E_N = -\frac{2Z^4\alpha^5 m_e}{3\pi n^3}\left[\ln\left(Z^4\alpha^4\right)\delta_{\ell,0} + O(1)\right] . \tag{14.3.15}$$

对氢原子的 $2s$ 态, 对数项单独给出

$$\delta E_{2s} \simeq -\frac{\alpha^5 m_e}{12\pi}\ln\left(\alpha^4\right) = 5.5\times 10^{-6}\,\mathrm{eV} = 1300\,\mathrm{MHz}\times 2\pi\hbar\,.$$

我们将看到, 方程(14.3.15)中的“$O(1)$”项会使总能量位移降低大约 25%.

现在我们考虑 Γ_1^μ 矩阵元中 F_2 项的贡献, 正如我们在 10.6 节中看到的那样, 这一贡献可以解释为对电子磁矩的辐射修正. 在方程(14.3.5)中应用方程(14.3.10), (14.3.8)和(14.3.6), 我们看到这一项给出的能量位移为

$$\begin{aligned}[\delta E_N]_{F_2} = -\frac{e^2}{32\pi^2 m_e}\int \mathrm{d}^3p' \int \mathrm{d}^3p\,\big(\bar u_N(\mathbf{p}')\,[\gamma^\mu,\gamma^\nu]u_N(\mathbf{p})\big) \\ \times e\mathscr{A}_\mu(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\,(p'-p)_\nu\end{aligned} \tag{14.3.16}$$

或者, 在位置空间,

$$[\delta E_N]_{F_2} = \frac{\mathrm{i}e^2}{64\pi^2 m_e}\int \mathrm{d}^3x\,(\bar u_N(\mathbf{x})[\gamma^\mu,\gamma^\nu]u_N(\mathbf{x}))\,e\mathscr{F}_{\mu\nu}(\mathbf{x})\,, \tag{14.3.17}$$

其中

$$\mathscr{F}_{\mu\nu}(\mathbf{x}) \equiv \partial_\mu\mathscr{A}_\nu(\mathbf{x}) - \partial_\nu\mathscr{A}_\mu(\mathbf{x})\,. \tag{14.3.18}$$

对 $\mathscr{A}=0$ 的纯静电场, 这是

$$[\delta E_N]_{F_2} = \frac{-\mathrm{i}e^2}{32\pi^2 m_e}\int \mathrm{d}^3x\,\Big(\bar u_N(\mathbf{x})[\boldsymbol{\gamma},\gamma^0]u_N(\mathbf{x})\Big)\cdot\boldsymbol{\nabla}[e\mathscr{A}^0(\mathbf{x})]\,. \tag{14.3.19}$$

在 $Z\alpha \ll 1$ 的非相对论极限下, 我们可以采用近似结果(14.1.43), 这个结果在这里是

$$\begin{aligned}(\bar u_N[\gamma^0,\boldsymbol{\gamma}]u_N) &\simeq \frac{\mathrm{i}}{m_e}[(\boldsymbol{\nabla}f_N^\dagger\cdot\boldsymbol{\sigma}\,\boldsymbol{\sigma}f_N) + (f_N^\dagger\boldsymbol{\sigma}\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla}f_N)] \\ &= \frac{\mathrm{i}}{m_e}[\boldsymbol{\nabla}(f_N^\dagger f_N) - \mathrm{i}(\boldsymbol{\nabla}f_N^\dagger\times\boldsymbol{\sigma})f_N - \mathrm{i}f_N^\dagger(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{\nabla}f_N)]\,.\end{aligned} \tag{14.3.20}$$

在方程(14.3.8)应用上式并分部积分, 这部分的能量位移是

$$\begin{aligned}[\delta E_N]_{F_2} = \frac{e^2}{32\pi^2 m_e^2}\int \mathrm{d}^3x\,\Big[-|f_N(\mathbf{x})|^2\nabla^2(e\mathscr{A}^0(\mathbf{x})) \\ + 2\mathrm{i}\,f_N^\dagger(\mathbf{x})\,\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\nabla}(e\mathscr{A}^0(\mathbf{x}))\times\boldsymbol{\nabla}f_N(\mathbf{x}))\Big]\,.\end{aligned} \tag{14.3.21}$$

结合方程(14.3.12)和(14.3.21)就给出了在任意静电势 $\mathscr{A}^0$ 中能量位移的所有高能贡献:

$$[\delta E_N]_{\text{high energy}} = \frac{e^2}{24\pi^2 m_e^2}\left[\ln\left(\frac{\mu^2}{m_e^2}\right)+\frac{2}{5}\right]\int \mathrm{d}^3x\, f_N^\dagger(\mathbf{x})\,[e\nabla^2\mathscr{A}^0(\mathbf{x})]f_N(\mathbf{x}) + \frac{\mathrm{i}e^2}{16\pi^2 m_e^2}\int \mathrm{d}^3x\, f_N^\dagger(\mathbf{x})\,\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\nabla}(e\mathscr{A}^0(\mathbf{x}))\times\boldsymbol{\nabla}f_N(\mathbf{x}))\,. \tag{14.3.22}$$

B 低能项

能量位移的低能贡献是通过对光子传播子做替换

$$\frac{1}{k^2-\mathrm{i}\epsilon}\to\frac{1}{k^2-\mathrm{i}\epsilon}-\frac{1}{k^2+\mu^2-\mathrm{i}\epsilon}\,, \tag{14.3.23}$$

然后从方程(14.2.24)的前三项中得到的. 这一替换最终将用于在 μ 阶 k 值处截断对光子4-动量 k 的积分, 但是, 直到我们仔细地将质量重整化考虑在内, 我们才能看到这一点, 所以我们将非相对论近似推迟至那之后. 另外, 我们现在引入的光子动量同原子态的束缚能一样小, 或者比原子态的束缚能还要小, 所以产生这一束缚的静电力必须要处理到所有阶.

取代采用动量空间的公式(14.2.24), 回到构形空间公式(14.2.18)会更方便一些. 这给出电子自能函数的低能贡献是

$$[\Sigma^*_{\mathscr{A}}(x,y)]_{\text{low energy}} = \mathrm{i}e^2\gamma^\rho\, S_{\mathscr{A}}(x,y)\,\gamma_\rho\, D(x-y;\mu) + \delta m_e(\mu)\,\delta^4(x-y) - (Z_2(\mu)-1)(\gamma^\mu[\partial_\mu+\mathrm{i}e\mathscr{A}_\mu]+m_e)\delta^4(x-y)\,, \tag{14.3.24}$$

其中 $D(x-y;\mu)$ 是修正后的光子传播子

$$D(x-y;\mu)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot(x-y)}\left[\frac{1}{k^2-\mathrm{i}\epsilon}-\frac{1}{k^2+\mu^2-\mathrm{i}\epsilon}\right]\,, \tag{14.3.25}$$

并且, 抵消项 $Z_2(\mu)-1$ 和 $\delta m(\mu)$ 是用该修正传播子计算的. 从时间变量转化到能量变量, 对函数(14.2.13)的低能贡献就是

$$[\Sigma^*_{\mathscr{A}}(\mathbf{x},\mathbf{y};E)]_{\text{low energy}} = \frac{\mathrm{i}e^2}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4k\,\gamma^\rho\, S_{\mathscr{A}}(\mathbf{x},\mathbf{y};E-k^0)\,\gamma_\rho \times\left[\frac{1}{k^2-\mathrm{i}\epsilon}-\frac{1}{k^2+\mu^2-\mathrm{i}\epsilon}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} - (Z_2(\mu)-1)\Big(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla}+\mathrm{i}\gamma^0E+\mathrm{i}e\gamma^\nu\mathscr{A}_\nu+m_e\Big)\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \delta m_e(\mu)\,\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,. \tag{14.3.26}$$

于是, 方程(14.2.17)就给出了能量位移的低能贡献

$$[\delta E_N]_{\text{low energy}} = -\int \mathrm{d}^3x\int \mathrm{d}^3y\,\bar{u}_N(\mathbf{x})\,[\Sigma^*_{\mathscr{A}}(\mathbf{x},\mathbf{y};E_N)]_{\text{low energy}}\,u_N(\mathbf{y}) = \frac{-\mathrm{i}e^2}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4k\int \mathrm{d}^3x\int \mathrm{d}^3y\,\bar{u}_N(\mathbf{x})\,\gamma^\rho\, S_{\mathscr{A}}(\mathbf{x},\mathbf{y};E_N-k^0)\,\gamma_\rho\,u_N(\mathbf{y}) \times\left[\frac{1}{k^2-\mathrm{i}\epsilon}-\frac{1}{k^2+\mu^2-i\epsilon}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} - \delta m_e(\mu)\int \mathrm{d}^3x\,\bar{u}_N(\mathbf{x})u_N(\mathbf{x})\,. \tag{14.3.27}$$

注意到, 由于Dirac波函数 $u_N(\mathbf{x})$ 满足Dirac方程(14.1.10), 正比于 $Z_2(\mu)-1$ 的项被扔掉了. 对于Coulomb场中的电子传播子, 我们使用方程(14.2.15):

$$S_{\mathscr{A}}(\mathbf{x},\mathbf{y};E)=\sum_M \frac{u_M(\mathbf{x})\bar{u}_M(\mathbf{y})}{E_M-E-\mathrm{i}\epsilon}-\sum_M \frac{v_M(\mathbf{x})\bar{v}_M(\mathbf{y})}{E_M+E-\mathrm{i}\epsilon}\,,$$

其中第一项和第二项中的求和分别取遍单电子态和单正电子态. 做 k^0 积分的最简单方法是, 对第一项选择在下半平面闭合大半圆积分围道, 对第二项选择在上半平面闭合大半圆积分围道:

$$\begin{aligned}&\int \mathrm{d}k^0 \left(\frac{1}{k^2+\mu^2-\mathrm{i}\epsilon}\right)\left(\frac{1}{E_M\mp E_N\pm k^0-\mathrm{i}\epsilon}\right)\\ &\qquad=\frac{\mathrm{i}\pi}{\sqrt{\mathbf{k}^2+\mu^2}}\left(\frac{1}{E_M\mp E_N+\sqrt{\mathbf{k}^2+\mu^2}-\mathrm{i}\epsilon}\right)\end{aligned}$$

如果 μ 被换成了 0 , 也用同样的方法处理. 能量位移(14.3.27)现在变成

$$\begin{aligned}[\delta E_N]_{\text{low energy}}=&-\frac{e^2}{2(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3k\sum_M\\ &\times\Bigg[\Gamma^\rho_{MN}(\mathbf{k})^*\Gamma_{\rho MN}(\mathbf{k})\Bigg(\frac{1}{|\mathbf{k}|\,(E_M-E_N+|\mathbf{k}|-\mathrm{i}\epsilon)}\\ &\qquad-\frac{1}{\sqrt{\mathbf{k}^2+\mu^2}(E_M-E_N+\sqrt{\mathbf{k}^2+\mu^2}-\mathrm{i}\epsilon)}\Bigg)\\ &-\tilde{\Gamma}^\rho_{MN}(\mathbf{k})^*\tilde{\Gamma}_{\rho MN}(\mathbf{k})\Bigg(\frac{1}{|\mathbf{k}|\,(E_M+E_N+|\mathbf{k}|-\mathrm{i}\epsilon)}\\ &\qquad-\frac{1}{\sqrt{\mathbf{k}^2+\mu^2}(E_M+E_N+\sqrt{\mathbf{k}^2+\mu^2}-\mathrm{i}\epsilon)}\Bigg)\Bigg]\\ &-\delta m_e(\mu)\int \mathrm{d}^3x\,\bar{u}_N(\mathbf{x})u_N(\mathbf{x})\,,\end{aligned}\tag{14.3.28}$$

其中

$$\Gamma^\rho_{MN}(\mathbf{k})\equiv\int \mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}}\bar{u}_M(\mathbf{y})\gamma^\rho u_N(\mathbf{y})\,,\tag{14.3.29}$$

$$\tilde{\Gamma}^\rho_{MN}(\mathbf{k})\equiv\int \mathrm{d}^3y\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}}\bar{v}_M(\mathbf{y})\gamma^\rho u_N(\mathbf{y})\,.\tag{14.3.30}$$

(当然, 方程(14.3.28)中对 M 的"求和"仅有第一项中的电子态贡献和第二项中的正电子态贡献.) 方程(14.3.28)可以从旧式微扰论中更直接地导出; 能量分母 $E_M-E_N+\omega$ 和 $E_M+E_N+\omega$ 是从中间态的能量中减去初态的能量 E_N 后的结果, 前者的中间态由能量为 E_M 电子和能量为 ω 的光子构成, 后者的中间态由能量为 E_M 的正电子, 能量为 ω 的光子, 以及初末态电子构成. (参看图14.2.)

在对方程(14.3.28)取任何近似之前, 利用从电流守恒中导出的关系, 将矩阵元 Γ^ρ_{MN} 和 $\tilde{\Gamma}^\rho_{MN}$ 的

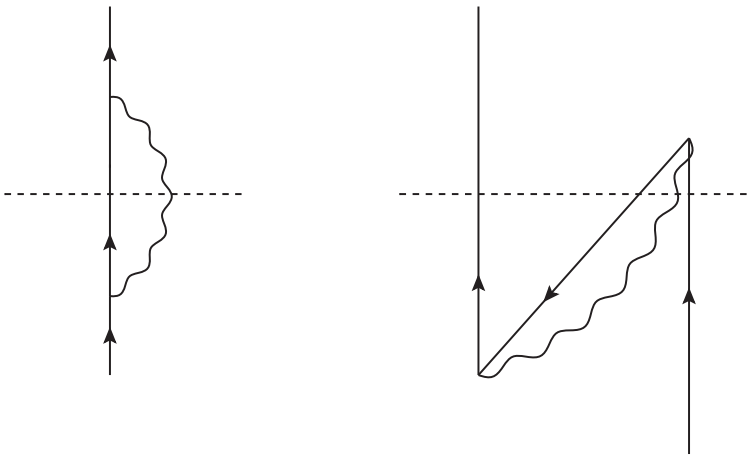


图 14.2 电子能量位移低能部分的旧式微扰论图. 这里实线是电子; 波浪线是光子, 虚线截断的粒子线对应出现在(14.3.28)前两项中的中间态.

时间分量表示成相应的空间分量将是方便的:*

$$k_i\,\Gamma^i_{MN}(\mathbf{k}) = (E_N - E_M)\Gamma^0_{MN}(\mathbf{k})\,, \tag{14.3.31}$$

$$k_i\,\tilde{\Gamma}^i_{MN}(\mathbf{k}) = (E_N + E_M)\tilde{\Gamma}^0_{MN}(\mathbf{k})\,. \tag{14.3.32}$$

更进一步, 通过完备性关系(14.1.8), 可以直接证明:

$$\sum_M \left[|\Gamma^0_{MN}(\mathbf{k})|^2 + |\tilde{\Gamma}^0_{MN}(\mathbf{k})|^2\right] = 1 \tag{14.3.33}$$

和

$$\begin{aligned}
&\sum_M \left[|\Gamma^0_{MN}(\mathbf{k})|^2(E_M - E_N) - |\tilde{\Gamma}^0_{MN}(\mathbf{k})|^2(E_M + E_N)\right] \\
&= \sum_M \left[-\Gamma^{0*}_{MN}(\mathbf{k})\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k}) - \tilde{\Gamma}^{0*}_{MN}(\mathbf{k})\,\mathbf{k}\cdot\tilde{\mathbf{\Gamma}}_{MN}(\mathbf{k})\right] \\
&= -\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\int \mathrm{d}^3x\;\bar{u}_N(\mathbf{x})\,\boldsymbol{\gamma}\,u_N(\mathbf{x}) = 0\,,
\end{aligned} \tag{14.3.34}$$

*为了导出方程(14.3.31), 注意到

$$\begin{aligned}
k_i\Gamma^i_{MN}(\mathbf{k}) &= -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\,\boldsymbol{\nabla}\cdot(\bar{u}_M(\mathbf{x})\boldsymbol{\gamma}u_N(\mathbf{x})) \\
&= \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\,\partial_0\left[\left(\bar{u}_M(\mathbf{x})\gamma^0 u_N(\mathbf{x})\right)e^{-\mathrm{i}(E_N-E_M)x^0}\right]_{x^0=0} = (E_N - E_M)\Gamma^0_{MN}(\mathbf{k})\,.
\end{aligned}$$

方程(14.3.32)以同样的方式导出.

上式最后一步是根据宇称条件(14.1.23)得到的. 以这一方式, 方程(14.3.28)可以重新写成

$$
\begin{aligned}
&[\delta E_N]_{\text{low energy}} = \\
&-\frac{e^2}{2(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3k \sum_M \left[\frac{\left(|\boldsymbol{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2 - |\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2/\mathbf{k}^2\right)}{|\mathbf{k}|\,(E_M - E_N + |\mathbf{k}| - \mathrm{i}\epsilon)}\right. \\
&\qquad \left. -\frac{\left(|\boldsymbol{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2 - |\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2/(\mathbf{k}^2+\mu^2)\right)}{\sqrt{\mathbf{k}^2+\mu^2}\,(E_M - E_N + \sqrt{\mathbf{k}^2+\mu^2} - \mathrm{i}\epsilon)}\right] \\
&+\frac{e^2}{2(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3k \sum_M \left[\frac{\left(|\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_{MN}(\mathbf{k})|^2 - |\mathbf{k}\cdot\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_{MN}(\mathbf{k})|^2/\mathbf{k}^2\right)}{|\mathbf{k}|\,(E_M + E_N + |\mathbf{k}|)}\right. \\
&\qquad \left. -\frac{\left(|\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_{MN}(\mathbf{k})|^2 - |\mathbf{k}\cdot\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_{MN}(\mathbf{k})|^2/(\mathbf{k}^2+\mu^2)\right)}{\sqrt{\mathbf{k}^2+\mu^2}\,(E_M + E_N + \sqrt{\mathbf{k}^2+\mu^2})}\right] \\
&-\frac{e^2}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3k \sum_M |\tilde{\Gamma}^0_{MN}(\mathbf{k})|^2 \left(\frac{1}{\mathbf{k}^2} - \frac{1}{\mathbf{k}^2+\mu^2}\right) \\
&+\tfrac{1}{2}\alpha\mu - \delta m_e(\mu)\int \mathrm{d}^3x\, \bar{u}_N(\mathbf{x})u_N(\mathbf{x})\,,
\end{aligned}
\tag{14.3.35}
$$

在倒数第二项中, 我们用到了初等积分

$$
\int \mathrm{d}^3k \left(\frac{1}{\mathbf{k}^2} - \frac{1}{\mathbf{k}^2+\mu^2}\right) = 2\mu\pi^2\,.
$$

至此, 这只是方程(14.3.28)一个精确的改写. 我们现在必须借助几个近似. 首先, 考虑质量重整化. 在 11.4 节中, 我们已经计算了到 α 阶的 $\delta m_e(\mu)$; 结果是

$$
\delta m_e(\mu) = \frac{2m_e\pi^2e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 \mathrm{d}x\,[1+x]\ln\left(\frac{m_e^2x^2+\mu^2(1-x)}{m_e^2x^2}\right)\,. \tag{14.3.36}
$$

尽管在 11.4 节中我们认为 μ 是正规化质量而取了 μ 远大于 m_e, 对这里我们所感兴趣的情况 $\mu \ll m_e$, 我们还是可以用方程(14.3.36)得到 $\delta m_e(\mu)$ 的值. 在这一极限下, 方程(14.3.36)给出

$$
\delta m_e(\mu) \to \frac{\alpha\mu}{2}\left[1 - \frac{3\mu}{2\pi m_e} + \ldots\right]\,. \tag{14.3.37}
$$

我们又回想起, 当 $Z\alpha \ll 1$ 时, $u_N(\mathbf{x})$ 由方程(14.1.37)给定

$$
u_N(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}(1 - \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{v}/2 + \cdots)f_N(\mathbf{x}) \\ (1 + \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{v}/2 + \cdots)f_N(\mathbf{x})\end{bmatrix}\,. \tag{14.3.38}
$$

其中省略号代表 $Z\alpha$ 的高阶项; $\mathbf{v}$ 是非相对论速度算符 $-\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla}/m_e$; $f_N(\mathbf{x})$ 是非相对论 Schrödinger 方程的两分量旋量解, 按照方程(14.1.38)归一化, 使得

$$
\int \mathrm{d}^3x\,|f_N(\mathbf{x})|^2 = 1 - \tfrac{1}{4}(\mathbf{v}^2)_{NN} + \cdots\,. \tag{14.3.39}
$$

这给出了方程(14.3.35)中 $\delta m_e(\mu)$ 的系数

$$\int \mathrm{d}^3x\, \bar{u}_N(\mathbf{x})u_N(\mathbf{x}) = 1 - \tfrac{1}{2}(\mathbf{v}^2)_{NN} + \cdots . \tag{14.3.40}$$

我们立刻注意到, $-\delta m_e(\mu)\int \mathrm{d}^3x\, \bar{u}_N u_N$ 中的领头项抵消了方程(14.3.35)中的 $\alpha\mu/2$ 项. 我们其实可以预估出这个抵消, 原因是在 $Z\alpha \to 0$ 的极限下, 方程(14.3.35)中的 $\alpha\mu/2$ 项仍然保留下来, 以及 $m_e(\mu)$ 作为重整化电子质量的定义意味着在这一极限下不存在能量位移. 通过相同的讨论, 我们可以预估出 $\delta m_e(\mu)$ 中的 $\alpha\mu^2/m_e$ 阶项(这一项大于 $\alpha(Z\alpha)^4 m_e$ 阶项, 因而不能简单地忽略掉)抵消了方程(14.3.35)中与它同阶的第二项和第三项.** 另一方面, δm_e 中 $\alpha\mu^2/m_e$ 项与矩阵元(14.3.40)中第二项的乘积的阶是 $(Z\alpha)^2\alpha\mu^2/m_e \ll \alpha(Z\alpha)^4 m_e$, 因而可以被忽略掉. 到 $\alpha(Z\alpha)^4 m_e$ 阶, 质量重整化仅剩的影响是 $\delta m_e(\mu)$ 中的领头项与 $\int \mathrm{d}^3x\, \bar{u}_N u_N$ 中 $(Z\alpha)^2$ 阶项的乘积:

$$-\left[\frac{e^2\mu}{8\pi}\right]\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{v}^2)_{NN}\right] = \frac{e^2\mu}{16\pi}(\mathbf{v}^2)_{NN} .$$

(这是质量重整化对电子动能的影响, 在1.3节曾提到过.) 可以证明, 如果我们忽略能级之间的差异, 这正是方程(14.3.35)中第一项的负数. 为了看到这一点, 注意到这一项中的积分实际上在 $|\mathbf{k}| \sim \mu \ll Z\alpha m_e$ 处被截断了, 所以我们可以在 $\mathbf{k} \to 0$ 的极限下计算矩阵元 $\mathbf{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})$. 到 $Z\alpha$ 的最低阶, 方程(14.1.42)给出

$$\mathbf{\Gamma}_{MN}(0) = (\mathbf{v})_{MN} \tag{14.3.41}$$

然后利用非相对论Schrödinger方程解 f_N 的完备性, 我们有

$$\sum_M \Gamma^{i*}_{MN}(\mathbf{k})\Gamma^j_{MN}(\mathbf{k}) \simeq (v^i v^j)_{NN} , \tag{14.3.42}$$

**这个抵消的证明如下. 我们预期方程(14.3.35)中的第二项和第三项足够小, 使得它们可以用 $u_N(\mathbf{x})$ 所满足的Dirac方程的极端非相对论近似 $\beta u_N(\mathbf{x}) = u_N(\mathbf{x})$ 来计算. 另一方面, 尽管正电子波函数 $v_M(\mathbf{x})$ 中的Coulomb力可以被忽略掉, 第三项中对 M 的求和中还是包含了来自相对论性正电子的重要贡献, 所以我们采用近似 $v_{\mathbf{p},\sigma}(\mathbf{x}) \simeq (2\pi)^{-3/2}v(\mathbf{p},\sigma)e^{\mathrm{i}p\cdot x}$, 其中 $v(\mathbf{p},\sigma)$ 是5.5节中引入的正电子旋量, 它的归一化为 $\bar{v}(\mathbf{p}',\sigma)v(\mathbf{p},\sigma) = \delta_{\sigma',\sigma}$. 因此, 在方程(14.3.35)的第二项和第三项中, 对 M 的求和近似为

$$\tfrac{1}{2}\left[\sum_M \tilde{\Gamma}^{i*}_{MN}(\mathbf{k})\tilde{\Gamma}^j_{MN}(\mathbf{k}) + (i \leftrightarrow j)\right] \simeq \delta_{ij}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{k}^2+m_e^2}+m_e}{2\sqrt{\mathbf{k}^2+m_e^2}}\right) ,$$

$$\sum_M |\tilde{\Gamma}^0_{MN}(\mathbf{k})|^2 \simeq \left(\frac{\sqrt{\mathbf{k}^2+m_e^2}-m_e}{2\sqrt{\mathbf{k}^2+m_e^2}}\right) .$$

那么, 到 μ/m_e 的领头阶, 方程(14.3.35)中的第二项和第三项分别是

$$\frac{e^2}{4m_e(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3k\left[\frac{2}{k} - \frac{(3-k^2/(k^2+\mu^2))}{\sqrt{k^2+\mu^2}}\right]\left(\frac{\sqrt{\mathbf{k}^2+m_e^2}+m_e}{2\sqrt{\mathbf{k}^2+m_e^2}}\right) \simeq \frac{\alpha\mu^2}{4\pi m_e}$$

和

$$-\frac{e^2}{2(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3k\left(\frac{1}{\mathbf{k}^2} - \frac{1}{\mathbf{k}^2+\mu^2}\right)\left(\frac{\sqrt{\mathbf{k}^2+m_e^2}-m_e}{2\sqrt{\mathbf{k}^2+m_e^2}}\right) \simeq -\frac{\alpha\mu^2}{\pi m_e} .$$

(方程(14.3.32)排除了对后一表达式的相对论修正可能没有被因子 $\mathbf{k}^2/m_e$ 压低的可能性, 这一因子在 $|\mathbf{k}|^2 \ll m_e^2$ 时会出现在该表达式中.) 这两项被 $-\delta m_e(\mu)\int \mathrm{d}^3x\, \bar{u}_N(\mathbf{x})u_N(\mathbf{x})$ 中的 $+3\alpha\mu^2/4\pi m_e$ 抵消了. 最后, 我们注意到, 对于对正电子态求和的估计, 它的相对论修正将会包含额外的因子 $v^2/c^2 \approx (Z\alpha)^2$, 这产生了阶为 $\alpha(Z\alpha)^2\mu^2/m_e \ll \alpha(Z\alpha)^4 m_e$ 的贡献, 这证明了这里所采用的非相对论近似是合理的.

所以, 到这一阶

$$
\begin{aligned}
&-\frac{e^2}{2(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3k\ \sum_M \left[\frac{\left(|\boldsymbol{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2-|\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2/\mathbf{k}^2\right)}{\mathbf{k}^2}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{\left(|\boldsymbol{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2-|\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2/(\mathbf{k}^2+\mu^2)\right)}{\mathbf{k}^2+\mu^2}\right]\\
&\simeq -\frac{e^2}{2(2\pi)^3}(\mathbf{v}^2)_{NN}\int \mathrm{d}^3k\left[\frac{2}{3\mathbf{k}^2}-\frac{1-\mathbf{k}^2/3(\mathbf{k}^2+\mu^2)}{\mathbf{k}^2+\mu^2}\right]\\
&=-\frac{e^2\mu}{16\pi}(\mathbf{v}^2)_{NN}\,.
\end{aligned}
$$

因此, 在质量重整化之后, 我们只剩下了方程(14.3.35)中的第一项, 再补上去掉的能量差 E_N-E_M:

$$
\begin{aligned}
[\delta E_N]_{\text{low energy}}=&\frac{e^2}{2(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3k\ \sum_M (E_M-E_N)\\
&\times\left[\frac{\left(|\boldsymbol{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2-|\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2/\mathbf{k}^2\right)}{\mathbf{k}^2(E_M-E_N+|\mathbf{k}|-\mathrm{i}\epsilon)}\right.\\
&\left.-\frac{\left(|\boldsymbol{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2-|\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2/(\mathbf{k}^2+\mu^2)\right)}{(\mathbf{k}^2+\mu^2)(E_M-E_N+\sqrt{\mathbf{k}^2+\mu^2}-\mathrm{i}\epsilon)}\right]\,.
\end{aligned}
\tag{14.3.43}
$$

再一次利用方程(14.3.41), 给出

$$
\begin{aligned}
[\delta E_N]_{\text{low energy}}=&\frac{e^2}{2(2\pi)^3}\sum_M (E_M-E_N)|\mathbf{v}_{MN}|^2\\
&\times\int \mathrm{d}^3k\left[\frac{2}{3\mathbf{k}^2(E_M-E_N+|\mathbf{k}|-\mathrm{i}\epsilon)}\right.\\
&\left.-\frac{1-\mathbf{k}^2/3(\mathbf{k}^2+\mu^2)}{(\mathbf{k}^2+\mu^2)(E_M-E_N+\sqrt{\mathbf{k}^2+\mu^2}-\mathrm{i}\epsilon)}\right]\,.
\end{aligned}
\tag{14.3.44}
$$

尽管电子动量的典型值远大于原子能量差的典型值, 但它不是这一积分中 $|\mathbf{k}|$ 的典型值, 这是因为, 如果我们不保留分母中的 E_M-E_N 项, 这一积分会红外发散. 在 $\mu\gg|E_M-E_N|\sim(Z\alpha)^2m_e$ 的极限下, 通过将方程(14.3.44)中积分的积分区域分为两段, 一段从 0 到 λ, 另一段从 λ 到无穷, 其中对 λ 的选择仅要求 $|E_M-E_N|\ll\lambda\ll\mu$, 我们就可以把这个积分算出来. 以这种方式, 我们发现

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty k^2\mathrm{d}k\left[\frac{2}{3k^2(E_M-E_N+k-\mathrm{i}\epsilon)}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1-k^2/3(k^2+\mu^2)}{(k^2+\mu^2)(E_M-E_N+\sqrt{k^2+\mu^2}-\mathrm{i}\epsilon)}\right]\\
&\simeq\frac{2}{3}\left[\ln\left(\frac{\mu}{2|E_M-E_N|}\right)+\frac{5}{6}+\mathrm{i}\pi\theta(E_N-E_M)\right]\,.
\end{aligned}
$$

这里的纯虚项反映了原子从态 N 衰变到能量更低的态 M 的可能性. 这一项贡献了衰变率, 由能量位移虚部给出. 我们在这里感兴趣的是能量位移的实部, 因而会在下文中扔掉这个虚的项. 方

程(14.3.44)现在给出

$$[\delta E_N]_{\text{low energy}} = \frac{e^2}{6\pi^2}\sum_M (E_M - E_N)|\mathbf{v}_{MN}|^2 \left[\ln\left(\frac{\mu}{2|E_N - E_M|}\right) + \frac{5}{6}\right] . \tag{14.3.45}$$

C 总能量位移

我们需要在方程(14.3.45)中的求和与高能项(14.3.22)中的矩阵元之间建立一个联系. 出于这个目的, 我们先来看看如果可以略去方程(14.3.45)中的对数, 方程(14.3.45)中的求和将会是什么值. 我们注意到 $(E_M - E_N)\mathbf{v}_{NM} = [\mathbf{v}, H]_{NM}$, 所以

$$\begin{aligned}\sum_M (E_M - E_N)|\mathbf{v}_{MN}|^2 &= \tfrac{1}{2}\sum_M \Big([v^i, H]_{NM}\, v^i_{MN} + v^i_{NM}\,[H, v^i]_{MN}\Big) \\ &= -\frac{1}{2m_e^2}\Big([p^i, [p^i, H]]\Big)_{NN} .\end{aligned}$$

非相对论哈密顿量 H 中唯一不与动量算符 $\mathbf{p}$ 对易的项是势能项 $-e\mathscr{A}^0(\mathbf{x})$, 所以这给出

$$\sum_M (E_M - E_N)|\mathbf{v}_{MN}|^2 = -\frac{e}{2m_e^2}\Big(\nabla^2\mathscr{A}^0(\mathbf{x})\Big)_{NN} . \tag{14.3.46}$$

对方程(14.3.45)和(14.3.22)的观察表明, 高能项中正比于 $\ln\mu$ 的项被低能项中正比于 $\ln\mu$ 的项抵消了:

$$\begin{aligned}\delta E_N &= [\delta E_N]_{\text{high energy}} + [\delta E_N]_{\text{low energy}} \\ &= \frac{e^2}{6\pi^2}\sum_M (E_M - E_N)|\mathbf{v}_{MN}|^2 \left[\ln\left(\frac{m_e}{2\,|E_N - E_M|}\right) + \frac{5}{6} - \frac{1}{5}\right] \\ &\quad - \frac{e^2}{16\pi^2 m_e^2}\Big(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla}(e\mathscr{A}^0(\mathbf{x}))\times\mathbf{p}\Big)_{NN} .\end{aligned} \tag{14.3.47}$$

至此, 我们处理的是一般的静电场 $\mathscr{A}^0(\mathbf{x})$. 我们现在专门来考虑纯 Coulomb 场, 此时

$$\mathscr{A}^0(\mathbf{x}) = Ze/|\mathbf{x}| . \tag{14.3.48}$$

在这种情况下, 方程(14.3.46)变成

$$\sum_M (E_M - E_N)|\mathbf{v}_{MN}|^2 = \frac{Ze^2}{2m_e^2}\Big(\delta^3(\mathbf{x})\Big)_{NN} = \frac{Ze^2}{2m_e^2}\Big(f_N^\dagger(0) f_N(0)\Big) . \tag{14.3.49}$$

这仅对 $\ell = 0$ 才是非零的. 另外, 方程(14.3.47)中后一项中矩阵元的值是

$$\Big(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla}(e\mathscr{A}^0(\mathbf{x}))\times\mathbf{p}\Big)_{NN} = -Ze\Big(\frac{1}{r^3}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{L}\Big)_{NN} , \tag{14.3.50}$$

这个矩阵元仅当 $\ell \neq 0$ 时才是非零的. 因此, 现在分别考虑 $\ell = 0$ 和 $\ell \neq 0$ 这两种情况将是有用的.

i. $\boldsymbol{\ell = 0}$

在这里定义一个平均激发能量 ΔE_N 将是方便的:

$$\begin{aligned}\sum_M |\mathbf{v}_{MN}|^2 (E_M - E_N)\ln|E_N - E_M| &\equiv \ln\Delta E_N \sum_M |\mathbf{v}_{MN}|^2 (E_M - E_N) \\ &= \frac{Ze^2}{2m_e^2}\ln\Delta E_N \Big(f_N^\dagger(0) f_N(0)\Big) .\end{aligned} \tag{14.3.51}$$

对氢原子的 s-波态, 指标 N 由主量子数 n 和自旋 z-分量 m 构成, 而 $[f_{nm}(0)]_\sigma = 2(Z\alpha m_e/n)^{3/2}\delta_{\sigma,m}/\sqrt{4\pi}$, 所以

$$\left(f_N^\dagger(0) f_N(0)\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{Z\alpha m_e}{n}\right)^3 . \tag{14.3.52}$$

在方程(14.3.47)中应用方程(14.3.51)和(14.3.52)给出了这些态的能量位移

$$[\delta E]_{n,\ell=0} = \frac{4\alpha(Z\alpha)^4 m_e}{3\pi n^3}\left[\ln\left(\frac{m_e}{2\Delta E_{n,\ell=0}}\right) + \frac{19}{30}\right] . \tag{14.3.53}$$

ii. $\ell \neq 0$

对非零的轨道角动量, 求和(14.3.49)为零, 所以(14.3.51)这个定义是不合适的. 取代它, 在这里将平均激发能量 ΔE_N 定义成

$$\sum_M (E_M - E_N)|\mathbf{v}_{MN}|^2 \ln|E_N - E_M| \equiv \frac{2(Z\alpha)^4 m_e}{n^3}\ln\left(\frac{2\Delta E_N}{Z^2\alpha^2 m_e}\right) \tag{14.3.54}$$

将是方便的. (由于方程(14.3.49)为零, 这使得在测量方程(14.3.54)中的 $E_N - E_M$ 时选择何种单位变得无关紧要.) 另外, 在总角动量为 j 而轨道角动量为 ℓ 的态中, 标量积 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{L}$ 取熟悉的值 $j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4}$, 并且对主量子数 n, 算符 $1/r^3$ 具有期望值

$$\int \mathrm{d}^3 r\, |f_N|^2/r^3 = \frac{2Z^3\alpha^3 m_e^3}{n^3\ell(\ell+1)(2\ell+1)} . \tag{14.3.55}$$

将所有这些代入方程(14.3.47), 对 $\ell \neq 0$ 我们有:

$$\begin{aligned}[\delta E]_{jn\ell} = &-\frac{4\alpha(Z\alpha)^4 m_e}{3\pi n^3}\ln\left(\frac{2\Delta E_{jn\ell}}{Z^2\alpha^2 m_e}\right) \\ &+ \frac{\alpha(Z\alpha)^4 m_e}{2\pi n^3}\left[\frac{j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4}}{\ell(\ell+1)(2\ell+1)}\right] .\end{aligned} \tag{14.3.56}$$

剩下要做的就是应用这些结果给出能量位移的数值结果. 这里的平均激发能量必须做数值计算; 利用非相对论氢原子波函数, 它们的值是[5]:

$$\begin{aligned}\Delta E_{1s} &= 19.769266917(6)\,\mathrm{Ry} , \\ \Delta E_{2s} &= 16.63934203(1)\,\mathrm{Ry} , \\ \Delta E_{2p} &= 0.9704293186(3)\,\mathrm{Ry} ,\end{aligned}$$

这里 $1\,\mathrm{Ry} \equiv m_e\alpha^2/2 = 13.6057\,\mathrm{eV}$. 于是方程(14.3.53)给出

$$\begin{aligned}[\delta E]_{1s} &= \frac{4\alpha^5 m_e}{3\pi}\left[\ln\left(\frac{m_e}{2\Delta E_{1s}}\right) + \frac{19}{30}\right] = 3.3612\times 10^{-6}\,\mathrm{eV} \\ &= 2\pi\hbar \times 8127.4\,\mathrm{MHz} ,\end{aligned} \tag{14.3.57}$$

$$\begin{aligned}[\delta E]_{2s} &= \frac{\alpha^5 m_e}{6\pi}\left[\ln\left(\frac{m_e}{2\Delta E_{2s}}\right) + \frac{19}{30}\right] = 4.2982\times 10^{-5}\,\mathrm{eV} \\ &= 2\pi\hbar \times 1039.31\,\mathrm{MHz} ,\end{aligned} \tag{14.3.58}$$

而方程(14.3.56)给出

$$[\delta E]_{2p_{1/2}} = \frac{\alpha^5 m_e}{6\pi}\left[\ln\left(\frac{\alpha^2 m_e}{2\Delta E_{2p}}\right) - \frac{1}{8}\right] = -5.3267\times 10^{-8}\,\text{eV}$$
$$= 2\pi\hbar \times -12.88\,\text{MHz}\,. \tag{14.3.59}$$

经典的Lamb位移是氢原子$2s$态和$2p_{\frac{1}{2}}$态之间的能量差, 这些态在没有辐射修正时是简并的. 我们的计算给出了

$$[\delta E]_{2s} - [\delta E]_{2p_{1/2}} = 4.35152\times 10^{-6}\,\text{eV} = 2\pi\hbar \times 1052.19\,\text{MHz}\,.$$

这与Kroll和Lamb[6]以及French和Weisskopf[7]的旧结果相同, 他们的结果是通过旧式微扰论的技术得到的. 在本节开头红外截断是$\alpha^2 m_e = 2\,\text{Ry}$阶的假定下, 我们通过仅考虑高能贡献对$2s$能量位移的影响给出了1300 MHz的粗略估计. 现在可以看到这个估计过高了, 这个过高的估计主要因为有限红外截断的真实值$\Delta E_{2s} = 16.64\,\text{Ry}$远大于我们的估计值. 另一方面, 如1.3节中所描述的, 在紫外截断猜测为m_e的前提下, 通过只考虑$2s$态的低能贡献, Hans Bethe在1947年就能对Lamb位移做出相当好的估计, 1040 MHz. (Bethe对激发能做了第一个估计, $\Delta E_{2s} \simeq 17.8\,\text{Ry}$.)

这里描述的Lamb位移的计算, 已经计入高阶辐射修正以及核的大小和反冲效应做了进一步的完善. 目前, 最大的不确定性来自于质子荷半径方均根r_p的准确值. 对于$r_p = 0.862\times 10^{-13}\,\text{cm}$或$r_p = 0.805\times 10^{-13}\,\text{cm}$, 一个计算[9]给出Lamb位移是1057.87 MHz或1057.85 MHz, 而另一个计算[10]给出的是1057.883 MHz或1057.865 MHz. 确定了质子半径的不确定性, 理论结果与目前的实验值1057.845(9) MHz [11]是高度吻合的. 这个实验的精度主要为氢原子$2p$态的约100 MHz的自然展宽所限, 进一步提高精度将非常困难.

最近几年, 关于$1s$态本身能量位移的测量有一个重大进展: 直接比较$1s$-$2s$的共振频率与4倍的$2s$-$4s$和$2s$-$4d$双光子共振频率. 这些s态和d态要比$2p$态窄得多, 所以相比经典的Lamb位移, 这些频率的差可以更精确地测出来. 在一小段时间里曾认为理论和实验之间存在矛盾. 计算[12, 13]表明, 对$r_p = 0.862(11)\times 10^{-13}\,\text{cm}$或$0.805(11)\times 10^{-13}\,\text{cm}$的质子半径, 通过将质子尺寸与其它修正考虑在内, 理论中的$1s$能量从以前的8127.4 MHz分别被提高到8173.12(6) MHz或8172.94(9) MHz. 质子半径$r_p = 0.862(11)\times 10^{-13}\,\text{cm}$给出的结果是我们认为更可靠的那个, 但与测量值8172.86(5) MHz符合得不太好. 但在后来的计算中, 仍采用这个质子半径但计入$\alpha^2(Z\alpha)^5$阶项, 所给出的$1s, 2s$和$4s$态的能量位移与实验相符. 所以, 显然量子电动力学又胜利了.

习题

1. 考虑一个质量为$m \neq 0$的带电标量粒子, 它由一个仅与不含时的外电磁场$\mathscr{A}^\mu(x)$相互作用的场$\phi(x)$描述. 令Φ_N是能量为E_N 的归一化单玻色态或单反波色态的一个完备集, 记真空为Φ_0, 并定义$u_N(\mathbf{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_N t} \equiv (\Phi_0, \phi(\mathbf{x}, t)\Phi_N)$以及$v_N(\mathbf{x})\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_N t} \equiv (\Phi_N, \phi(\mathbf{x}, t)\Phi_0)$. 证明$u_N$和$v_N$合起来构成了一个完备集, 并给出一般函数$f(\mathbf{x})$在$u_N$和$v_N$上的展开系数公式.

2. 假定我们在习题1的理论中计入辐射修正. 令$\mathrm{i}\Pi^*(x, y)$是到α阶的只有一条入带电标量线和一条出带电标量线的所有图(去掉末态标量传播子)之和. 计算这些辐射修正引起的单玻色态能

量 E_N 的位移, 用 $u_N(\mathbf{x})$ 和 $\Pi^*(x,y)$ 表示.

3. 利用 14.3 节的结果计算氢原子 $2p$ 态的辐射衰变速率.

4. 假定电子与轻标量场 ϕ 有形如 $g\phi\bar{\psi}_e\psi_e$ 的相互作用. 假定标量质量 m_ϕ 处在 $(Z\alpha)^2 m_e \ll m_\phi \ll Z\alpha m_e$ 的范围内. 计算这个相互作用造成的氢原子 $1s$ 态的能量位移.

5. 对习题 4 计算出 $m_\phi = 0$ 的结果.

参考文献

[1] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A117**, 610 (1928).

[2] 可参看 A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics,* (Princeton University Press, Princeton, 1957); M. E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum* (John Wiley & Sons, Now York, 1957).

[3] 可参看 L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, (McGraw-Hill, New York, 1949): Section 43. 原始文献是 C. G. Darwin, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A118**, 654 (1928); *ibid*., **A120**, 621 (1928); W. Gordon, *Zeit. f. Phys.* **48**, 11 (1928).

[4] G. E. Brown, J. S. Langer, and G. W. Schaefer, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A251**, 92 (1959); G. E. Brown and D. F. Mayers, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A251**, 105 (1959); A. M. Desiderio and W. R. Johnson, *Phys. Rev.* **A3**, 1267 (1971).

[5] R. W. Huff, *Phys. Rev.* **186**, 1367 (1969).

[6] N. M. Kroll amd W. E. Lamb, *Phys. Rev.* **75**, 388 (1949).

[7] J. B. French and V. F. Weisskopf, *Phys. Rev.* **75**, 1240 (1949).

[8] H. A. Bethe, *Phys. Rev.* **72**, 339 (1947).

[9] J. R. Sapirstein and D. R. Yennie, 收录于*Quantum Electrodynamics*, T. Kinoshita 编辑(World Scientific, Singapore, 1990): p. 575, 以及所引的文献.

[10] H. Grotch, *Foundations of Physics* **24**, 249 (1994).

[11] S. R. Lundeen and F. M. Pipkin, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 232 (1981); S. R. Lundeen and F. M. Pipkin, *Metrologia* **22**, 9 (1986). 综述参看 F. M. Pipkin, 收录于*Quantum Electrodynamics*, T. Kinoshita 编辑(World Scientific, Singapore, 1990): p. 697.

[12] M. Weitz, A. Huber, F. Schmidt-Kaler, D. Leibfried, and T. W. Hänsch, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 328 (1994).

[13] M. Weitz, F. Schmidt-Kaler, and T. W. Hänsch, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1120 (1992), 以及文献[12].

[14] K. Pachucki, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3154 (1994).