量子场论

朱洪元著

科学出版社

53.5
198

量子場論

朱洪元著

1960

內 容 簡 介

本书綜述了作为物理学生长点之一的基本粒子物理的主要理論工具——量子場論。书中全面、扼要地叙述了量子場論的发展过望，各种粒子場的基本性質及处理方法，各种相互作用及用以描述相互作用的数学形式，量子場論的一些具体应用（特别在与解释新的实驗成果相結合的那些現象方面，例如：电子的反常磁矩及氫原子能級的兰姆移动），量子場論的局限性及其所遇到的困难，对消除困难的一些尝試以及发展基本粒子理論的未来展望。

当探討各种問題时，作者在闡明数学形式及数学方法的同时，比較着重地对所涉及問題的現象和本質随时加以一定的物理詮释。书的内容，除了包含一般量子电动力学所处理的电磁相互作用过程以外，作者还适当地加入了对弱相互作用現象的一些理論探討与最新成就，諸如李政道和楊振宁的二分量中微子理論（1957年）以及1958年初由费曼（Feynman）和盖尔曼（Gell-Mann）所提出的普适费米型弱相互作用理論。与此同时，在书的末尾，作者对强相互作用理論也作了初步的探討，并对色散关系作了簡略陳述。

本书是基本粒子物理的入門书，可作为高等学校量子場論課程的教材，也可供理論物理研究工作者参考之用。

量 子 場 論

朱 洪 元 著

科 学 出 版 社 出版（北京朝阳門大街 117 号）
北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号
中国科学院印刷厂印刷　新华书店总經售

1960年 9 月第 一 版　　书号：2285　字数：341,000
1960年 9 月第一次印刷　　开本：787×1092　1/32
（京）0001—7,000　　印张：16

定价：2.00 元

序　言

最近十五年来，利用宇宙綫和高能加速器进行的关于基本粒子的研究有了巨大的进展．作为分析和总結基本粒子物理現象的理論工具的量子場論，在 1947 年以来也有显著的发展．基本粒子物理已經成为物理学的重要組成部分．

本书的原材料是作者先前在北京大学講授量子場論的講义．因为在工作和教学中感覚到目前存在着对量子場論书籍的需要，在 1959 年夏将材料重新整理，写成本书．

本书的主要部分介紹处理电磁相互作用、弱相互作用和对称性質的理論工具．关于強相互作用的理論近年来虽然进行了大量的研究工作，但是显著的进展仍然不多．因此在这方面本书只限于介紹目前研究強相互作用的基本理論工具：海森堡表象和色散关系的初步理論．

在本书的写作和出版过程中，曾經得到中国科学院数学研究所戴元本同志的許多帮助，謹在此对戴元本同志表示感謝．

作者謹識

1960 年 6 月

·04708·

目　　錄

序言 …… i

第一章　引言 …… 1

§1,1. 基本粒子物理实验和量子場論的发展 …… 1

§1,2. 量子力学和相对論性古典物理理論的局限性 …… 3

§1,3. 量子場論的发展过程 …… 5

§1,4. 量子場論发展中所遇到的基本困难 …… 8

第二章　場的量子化方法的正則形式 …… 11

§2,1. 量子力学的正則形式 …… 11

§2,2. 古典場論的拉氏形式 …… 12

§2,3. 运动規律的对称性和守恒定律 …… 13

§2,4. 第一种規范变換和电荷守恒定律 …… 14

§2,5. 坐标移动和能量守恒定律及动量守恒定律 …… 15

§2,6. 洛仑兹变換和角动量守恒定律 …… 17

§2,7. 古典場論的哈密頓形式 …… 19

§2,8. 場的量子化方法的正則形式 …… 21

§2,9. 能量和动量算符 …… 24

§2,10. 总角动量算符 …… 25

第三章　自旋等于零的粒子的場 …… 28

§3,1. 自由粒子及其波动方程 …… 28

§3,2. 标量場和贋标量場 …… 29

§3,3. 荷电粒子場的拉氏函数和守恒量 …… 30

§3,4. 荷电粒子場的量子化 …… 31

§3,5. 分解为平面波 …… 32

§3,6. 量子場的粒子性 …… 34

§3,7. $a_{\vec{k}}$, $a_{\vec{k}}^{*}$, $b_{\vec{k}}$, $b_{\vec{k}}^{*}$, $N_{\vec{k}a}$ 和 $\bar{N}_{\vec{k}a}$ 的显示表式 …… 37

§3,8. 分解为球面波 …… 38

§3,9. 場的角动量 …… 41

§3,10. 对易关系的相对論不变性 ……44
§3,11. 对易关系和时間反演 ……46
§3,12. 正反粒子共軛变換 ……50
§3,13. 自旋为零的中性粒子的理論 ……51
§3,14. 同位旋空間和同位旋守恒 ……54
§3,15. 个别粒子的同位旋 ……59
第四章 光子·自由电磁場的量子化……63
§4,1. 馬克斯威方程的相对論不变形式 ……63
§4,2. 拉氏函数密度、能量、动量和角动量 ……65
§4,3. 自由电磁場的量子化 ……66
§4,4. 洛仑兹条件 ……69
§4,5. 分解为平面波 ……70
§4,6. 光子的自旋 ……74
§4,7. 洛仑兹条件的意义 ……76
§4,8. 洛仑兹条件带来的困难 ……77
§4,9. 应用不定度規的量子化方法 ……78
§4,10. 纵光子和标量光子的意义 ……83
§4,11. 对易关系的洛仑兹不变性 ……86
第五章 自旋等于 1/2 的粒子的場……88
§5,1. 狄拉克波动方程 ……88
§5,2. 狄拉克波动方程和空間反射 ……94
§5,3. 狄拉克波动方程和时間反演 ……96
§5,4. 狄拉克波动方程和正洛仑兹变換 ……98
§5,5. 由波函数組成的协变量 ……100
§5,6. 正反粒子共軛变換 ……102
§5,7. 狄拉克波动方程的量子化 ……105
§5,8. 分解为平面波 ……108
§5,9 眞空情态 ……112
§5,10. a, a^*, b, b^* 的显示形式 ……114
§5,11. 对易关系的相对論不变性 ……116
§5,12. 同位旋 ……120

§5,13. 二分量中微子理論 …… 123
第六章　基本粒子間的相互作用 …… 128
§6,1. 相互作用的分类 …… 128
§6,2. 輕子与电磁場之間的相互作用 …… 131
§6,3. 介子、重子与电磁場之間的相互作用 …… 136
§6,4. 强相互作用 …… 142
§6,5. 奇异粒子和奇异量子数 …… 147
§6,6. 牽涉到奇异粒子的强相互作用 …… 150
§6,7. 費米弱相互作用理論 …… 154
§6,8. 湯川弱相互作用理論 …… 158
§6,9. 描述相互作用的其他数学形式 …… 160
第七章　相互作用表象 …… 163
§7,1. 海森堡表象和薛定格表象 …… 163
§7,2. 相互作用表象 …… 164
§7,3. 核子与 π 介子的相互作用 …… 169
§7,4. 輕子与电磁場相互作用 …… 172
§7,5. 包含有場量微商的相互作用 …… 176
第八章　散射矩陣和微扰論 …… 182
§8,1. 散射矩陣 …… 182
§8,2. 微扰論 …… 183
§8,3. 散射矩陣的簡化 …… 186
§8,4. 正規乘积 …… 187
§8,5. 維克的二条定理 …… 190
§8,6. 用图形表示正規乘积的方法 …… 197
§8,7. 正規乘积所代表的物理过程 …… 202
§8,8. 函数 $D_f(x)$, $\Delta_f(x)$ 和 $S_f(x)$ 的表式 …… 209
§8,9. 动量表象 …… 215
第九章　微扰論的具体应用 …… 221
§9,1. 跃迁几率和反应截面 …… 221
§9,2. γ 矩陣的一些性質 …… 224
§9,3. 康普頓散射 …… 227

§9,4. 电子和正电子的湮没 …… 232
§9,5. 韧致辐射 …… 235
§9,6. μ^+介子衰变为正电子、中微子和反中微子 …… 242
第十章 量子場論中的发散困难 …… 249
§10,1. 发散困难 …… 249
§10,2. 电子的自能 …… 251
§10,3. 发散积分 …… 254
§10,4. 质量重整化 …… 258
§10,5. $\Sigma^{(2)}(p)$ 所包含的其它发散困难 …… 261
§10,6. 电子传播函数的二次近似 …… 267
§10,7. 电荷重整化和辐射修正 …… 269
§10,8. 真空极化 …… 270
§10,9. $\Pi_{\mu\mu}(k)$ 的显示表式 …… 276
§10,10. 光子传播函数的二次近似 …… 279
§10,11. 真空极化导致的电荷重整化 …… 281
§10,12. 顶角函数的高次近似 …… 282
§10,13. 顶角部分导致的电荷重整化 …… 287
§10,14. 小結 …… 288
第十一章 电子反常磁矩和兰姆能級移动 …… 290
§11,1. 辐射修正 …… 290
§11,2. 电子为外場所散射的 S 矩陣元 …… 291
§11,3. 电子的反常磁矩 …… 298
§11,4. 能級的兰姆移动 …… 300
§11,5. K 与 ρ 的数值之間的关系 …… 306
§11,6. 紅外发散困难 …… 310
第十二章 重整化的一般理論 …… 316
§12,1. 原始发散 …… 316
§12,2. 法雷定理 …… 320
§12,3. 不可約化的图形及其无穷大 …… 323
§12,4. 光子相互散射的 S 矩陣元 …… 329
§12,5. 正規图形和非正規图形 …… 330

§12,6. 顶角函数中的辐射修正 …… 334
§12,7. 可以約化的电子自能部分 …… 336
§12,8. 可以約化的真空极化图形 …… 342
§12,9. 重整化 …… 347
§12,10. 其它量子場中的重整化 …… 354
第十三章　海森堡表象 …… 357
§13,1. 海森堡表象与相互作用表象間的連系 …… 357
§13,2. 真空的波函数 …… 359
§13,3. 波函数和矩陣元 …… 363
§13,4. 传播函数 …… 364
§13,5. S 矩陣元 …… 366
§13,6. 邱和路的方程 …… 372
§13,7. 邱-路方程的进一步簡化 …… 381
§13,8. 相移与 S 矩陣元之間的关系 …… 386
§13,9. 相移所滿足的积分方程 …… 396
第十四章　色散关系 …… 404
§14,1. 因果律与色散关系 …… 404
§14,2. 散射幅与推迟格临函数 …… 409
§14,3. 解析延拓 …… 413
§14,4. 色散关系 …… 415
§14,5. 展望 …… 418

第一章 引 言

§1.1. 基本粒子物理实驗和量子場論的发展

古典物理学理論是十九世紀末以前大量实驗所累积的事实和所发現的規律的总結. 这一理論在低速的、宏观的物理現象的范围內起着普遍的作用. 由于实驗进入了新的現象領域,物理理論在二十世紀初經历了两个飞跃: 由于对微观物理現象的研究而产生了量子論,以后进一步发展成为量子力学;由于对高速物理現象的研究而产生了特殊相对論. 量子力学在低速的、微观的物理現象范围內起普遍的作用;相对論性的古典物理理論則在高速的、宏观的物理現象范围內起普遍的作用. 其后,随着物理实驗的进一步发展,人們开始研究高速微观物理現象,从而在三十年时間內发現了一系列新的前所未知的現象. 如果我們仅仅运用量子力学或相对論性古典物理理論,是不可能解释这些新現象的. 因此,有必要建立新的理論来概括这些新的現象.

这些新的研究的重要成果之一是形而上学原子概念的破产. 永恆不变而彼此孤立的原子概念产生于二千多年以前, 以后它曾以各种不同的形式保持了下来, 其中包括德謨克利特 (Democritus 公元前 460—370) 的原子概念,迦生迪 (Gassendi, 1592—1655)的原子概念, 道尔頓 (Dalton, 1766—1844) 的原子概念, 以及波劳特(Pront, 1785—1850) 所提出的氫原子为最原始物质的概念等. 在化学的原子結构被发現之后,人們又开始設想,电子和质子是永恆不变的、不可分割的最后物质单位. 其后又发現了,在一定的条件下,光子可以轉化为一对电子和正电子,电子和正电子也可以倒过来轉化成为一对光子; 中子可以轉化为质子、电子和反中微子, 质子也可以倒过来轉化为中子、正电子和中微子. 这样就証明了, 即使电子和质子也并不是永恆不变的. 我們不能确定究竟什么是

更基本的物质. 既不能說，光子是电子和正电子所組成的，也不能說，电子或正电子是由光子所組成的；既不能說中子是由质子、电子和反中微子組成的，也不能說质子是由中子、正电子和中微子組成的. 因此，永恆不变的、不可分割的最后物质单位并不存在.

这些新的研究的另一个重要成果是一系列前所未知的新粒子的发現. 我們将这些粒子以及质子、中子、电子、光子等一律称为基本粒子. 到目前为止，已經发現的基本粒子約达三十余种. 它們的名称和一些基本性质見于表 1. 表中有問号者表示实驗数值尚未确定. 在这些基本粒子之中，除了质子、反质子、电子、正电子、光子、中微子及反中微子以外，其余的粒子都是不稳定的. 这

表 1. 基本粒子的名称，自旋，质量和平均寿命

分类	名 称	符号	自旋 (ħ)	质 量 (兆电子伏)	平均寿命 (秒)
光子	光 子	γ	1	0	稳 定
輕子和反輕子	中微子和反中微子	$\nu, \tilde{\nu}$	$\frac{1}{2}$	0	稳 定
	电子和正电子	e^-, e^+	$\frac{1}{2}$	0,510976	稳 定
	負 μ 介子和正 μ 介子	μ^-, μ^+	$\frac{1}{2}$	105,70±0,06	$(2,22\pm0,02)\times10^{-6}$
介子	正 π 介子和負 π 介子	π^+, π^-	0	139,63±0,06	$(2,56\pm0,05)\times10^{-8}$
	中性 π 介子	π^0	0	135,04±0,16	$(0,0<\tau<0,4)\times10^{-15}$
	正 K 介子和負 K 介子	K^+, K^-	0	494,0±0,20	$(1,224\pm0,013)\times10^{-8}$
	第一种中性 K 介子	K_1^0	0	493±5	$(0,95\pm0,03)\times10^{-10}$
	第二种中性 K 介子	K_2^0	0	493±5	$(3<\tau<100)\times10^{-8}$
重子和反重子	质子和反質子	$P, \tilde{P}$	$\frac{1}{2}$	938,213±0,01	稳 定
	中子和反中子	$N, \tilde{N}$	$\frac{1}{2}$	939,506±0,01	$(1,04\pm0,13)\times10^{3}$
	Λ 超子	Λ	$\frac{1}{2}$?	1115,2±0,13	$(2,77\pm0,15)\times10^{-10}$
	正 Σ 超子	Σ^+	$\frac{1}{2}$?	1189,3±0,35	$(0,78\pm0,074)\times10^{-10}$
	負 Σ 超子	Σ^-	$\frac{1}{2}$?	1196,4±0,5	$(1,58\pm0,17)\times10^{-10}$
	中性 Σ 超子	Σ^0	$\frac{1}{2}$?	$1188,8^{+2}_{-3}$	$(\tau<0,1)\times10^{-10}$
	負 Ξ 超子	Ξ^-	?	1321±3,5	$(4,6<\tau<200)\times10^{-10}$
	中性 Ξ 超子	Ξ^0	?	?	?

些不稳定粒子的平均寿命长者不过 10^3 秒，短者不及 10^{-15} 秒. 即使是质子、反质子，电子、正电子、光子、中微子和反中微子，它們在一定的条件下也都会产生和消失.

基本粒子的存在和他們之間的相互轉化是高速微观現象的主要特点. 不論量子力学或相对論性的古典物理理論都未能全面地反映这些特点.

§1,2. 量子力学和相对論性古典物理理論的局限性

自从海森堡(Heisenberg)和薛定格(Schrödinger)发現了量子力学以后，量子力学就一直被用来解决一系列古典物理学理論所无法解决的問題. 例如：原子結构，分子結构；固体的結构和性质等等. 在这些問題的解决上，量子力学已取得了重要的成就. 但是，量子力学仍然有其局限性. 从哲学观点看来，这是不难理解的. 人們所認識的是相对眞理，它只有在一定的条件下才是正确的. 随着实踐經驗的日益丰富，人的認識也必会相应地更加深化. 古典物理学理論是如此，量子力学也并不例外. 显然，海森堡和薛定格所发現的量子力学不能用来处理速度接近光速的物理現象. 由描述自由粒子的运动的薛定格方程就可以看出这一点. 描述自由粒子的运动的薛定格方程如下：

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi, \\ H = \dfrac{\vec{p}^2}{2m}, \\ \vec{p} = -i\vec{\nabla}, \end{cases} \tag{1,1}$$

其中 ψ 代表波函数，H 代表哈密頓量，$\vec{p}$ 是动量算符，m 是粒子的靜质量. 在本书中将选取蒲朗克(Planck)常数的 2π 分之一($=\hbar$)和光速 c 为单位，亦即取 $\hbar = c = 1$. (1,1) 中的第二式是从非相对論性古典力学承繼而来的，它是动能的表式. 假使粒子的速度接近光速，这一表式便不准确. 在相对論中，包括靜能量在內的粒子

的能量 E 和他的动量之間应有下列关系：

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2. \tag{1,2}$$

因此不难理解，海森堡和薛定格所发現的量子力学是非相对論性的，不能用来处理相对論性的問題。

例如：基本粒子的产生，消失和相互轉化是高速微观物理現象的根本特征之一。 在粒子速度接近光速的現象中，粒子的动能可能远远超过它的靜能。因此，在这类粒子的相互作用过程中，能量轉換可能极大，因而有可能在滿足质量和能量相互联系的定律之下导致粒子的产生和消失。宇宙綫現象中的电子簇射和介子簇射就是这类例子。 然而，海森堡和薛定格的量子力学却无法处理这类問題。描述多体运动的薛定格方程具有如下的形式：

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = \left\{\sum_{j=1}^{N}\left(-\frac{\nabla_j^2}{2m_j}\right) + \sum_{k<i} V_{ik}\right\}\psi, \tag{1,3}$$

其中 N 代表粒子数，i 标志着第 i 个粒子，V_{ik} 标志着第 i 个粒子和第 k 个粒子之間的相互作用。在方程 (1,3) 中粒子的数目 N 已經給定。 不論波函数 ψ 怎样随时間而变化，它只能描述 N 个粒子的情态。这一波函数不能反映更多粒子的运动，也不能反映更少粒子的运动。因此，方程(1,3)既不能用以处理粒子的产生問題和消失問題，也不能用以处理粒子間的相互轉化問題。

和量子力学相似，相对論性古典物理理論也有其局限性。 在特殊相对論的規律被发現以后，牛頓力学被修改以滿足相对論的要求。馬克斯威 (Maxwell) 的古典电磁場理論本来相对于洛仑兹 (Lorentz) 变換就是不变的。 相对論性的古典物理理論成功地反映了高速宏观現象，但是对于微观現象的处理則无能为力。 微观世界的根本特点之一是微观客体的粒子-波动二重性。 古典物理理論不能反映这种二重性。 即使将古典物理理論加以修改，使之滿足特殊相对論的要求，也仍然不能使理論超出这一局限性。 相对論性的質点力学能够反映客体的粒子性，但是不能反映客体的波动性。相对論性的流体力学和馬克斯威的古典电磁場理論能够

反映客体的波动性，但是不能反映客体的粒子性.

因此，由于物理实验的研究进入了高速微观现象的领域，物理理論也不得不向前推进. 必須建立新的物理理論，使之一方面能反映微观現象中的粒子-波动二重性，另一方面又具有能反映高速現象特点的洛仑兹不变性. 向这一方向迈进的第一步就是量子場論的建立.

§1,3. 量子場論的发展过程

最先人們研究的高速微观現象是关于光子的現象. 光子是电磁場的量子，是靜質量等于零的粒子，只能以光速运动. 因此有关光子的現象实质上是相对論性的現象. 由于光子的靜質量等于零，即使在很小能量轉化的过程中光子也能产生和消失. 因此，即使在日常生活中，光子的产生和消失也是經常見到的現象. 馬克斯威的电磁場理論本来就滿足特殊相对論的要求. 我們有理由期望，假使将这一理論量子化，就有可能得到一个既能反映高速現象特点，又能反映微观現象特点的理論；就有可能解释光子的存在、产生和消失，因此，建立量子电磁場理論作为发展高速微观物理現象的理論的开始就是很自然的事.

我們可以将电磁場当作一个統一的客观整体，具有无穷多的自由度，正如我們可以将由极大数量分子組成的具有极多自由度的固体当作一个統一的客体看一样. 固体的內部运动可以分解为一系列基本的、簡单的振动. 固体的各种不同的基本振动方式代表固体的各个自由度，在量子化以后的簡单振动系統的能量 E 只能是一系列不連續的数值：

$$E=\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega,\quad n=0,1,2,\cdots \tag{1,4}$$

其中 ω 代表振动頻率. 如众所周知，振动能量取(1,4)中的数值对于解释固体的比热为什么随着温度而降低起着决定性的作用. 在温度低的情况下，頻率高的振动的自由度难于激发，因而它冻結起

来，于是对于比热就不再作出貢献。

电磁場的运动也可以分解为一系列基本的、簡单的振动。电磁場振动就形成电磁波。电磁場的各种基本振动方式代表电磁場的各个自由度。可以将电磁場的量子化还原为电磁場的各个基本振动的量子化。任何一种基本电磁振动在量子化以后，它的能量也只取如(1,4)中所給出的一系列不連續的数值。这样就解释了电磁場的不連續性，亦即电磁場的粒子性，解释了光子的存在。某一振动自由度被激发至 $n=1$ 的受激态就相应于产生了一个頻率等于 ω 的光子。当某一振动自由度处在 $n=5$ 的受激态时在物理意义上就相应于存在着五个頻率等于 ω 的光子。振动激发的消失相应于光子的消失。因此，量子电磁場論不仅解释了光子的存在，同时也为处理光子的产生和消失問題开辟了道路。

狄拉克[Dirac,1927]首先提出用这样的方法将电磁場量子化。显然，接着的問題是如何处理速度接近光速的电子的問題。从数学形式的对称性出发，狄拉克[1928]发現了描述单个电子的相对論性波动方程。为了处理电子的产生和消失問題，人們参照了如何处理光子的产生和消失問題的方法，从而引进了"电子場"的概念，并将电子場量子化。按照这一想法，量子电子場的激发代表电子的产生，电子場激发的消失代表电子的消失。处在不同受激态的电子場代表处在不同情态下的不同的电子系統。首先提出将电子場量子化的方法的是約旦和維格納[Jordan and Wigner, 1928]。进一步的发展是研究电子場和电磁場之間的相互作用問題，亦即建立电子和电磁場之間的相互作用的量子化理論。这一理論叫做量子电动力学。量子电动力学已被应用于光子和电子相互作用的許多問題中，并已得到了显著的成就。例如：曾經应用量子电动力学来处理光的吸收和发射，康普頓(Compton)散射，电子和正电子偶的产生和湮沒，輻致輻射等等現象，都得到了和实驗結果很符合的結果。

这样，就在物理学中引进了一个重要的新概念："量子場"。

这一概念是反映高速微观现象的有力概念. 量子場是物質存在的形式之一. 可以用不同的量子場来描述不同种类的基本粒子. 量子場的各种受激态代表处在各种情态下的基本粒子系統. 量子場的激发代表粒子的产生, 量子場激发的消失代表粒子的消失. 在上述工作的基础上, 海森堡和泡里 [Heisenberg and Pauli, 1929] 建立了量子場論的比較普遍的数学形式. 在各种新的基本粒子被发現以后, 这一比較普遍的数学形式便被用来处理这些新的基本粒子現象. 首先,相应于各种不同的基本粒子引进了各种不同的量子場概念; 各种不同的基本粒子是相应的各种不同的量子場的激发. 例如,和中微子、μ 介子、π 介子、K 介子、質子、中子、Λ 超子、Σ 超子以及 Ξ 超子相应,引入了中微子場、μ 介子場、π 介子場、K 介子場、質子場、中子場、Λ 超子場、Σ 超子場和 Ξ 超子場的概念. 其后又引进了各种量子場之間的相互作用来处理各种基本粒子之間的相互作用和相互轉化問題. 用这种方法处理基本粒子現象取得了比較重要成就的,到目前为止,除了量子电动力学現象以外,还有 β 衰变的現象. 这首先是因为,到目前为止,在所有的基本粒子現象中, 只有量子电动力学現象和 β 衰变現象已經累积了大量的和精确的实驗数据. 至于其他基本粒子現象,如涉及介子和超子的現象,实驗所累积的数据还很少而且不够精确. 例如:到現在为止还不能肯定各种超子的自旋等于多大, 他們之間的相对宇称是什么. 因此可以說,量子場論目前还处在初創的阶段,还远不是一个完备的理論. 这一理論的成长还有待于高能物理实驗研究的逐步扩大和深入.

当然, 应用上面所叙述的方法能不能建立反映基本粒子現象的理論是值得討論的. 基本粒子各具有不同的性質,这說明了各种基本粒子之間有区别. 但各种基本粒子的能够相互轉化也說明了他們之間的統一性. 因此就产生了这样的問題:这些基本粒子是不是都是"基本"的? 有沒有必要相应于每一种基本粒子都得分别引入一个量子場来描述?在科学发展的历史上,曾經将九十二种

化学原子都当作永恆不变的、相互孤立的物质的基本单元. 周期律的发現指出了他們之間的統一性. 結果发現,它們都是統一地由电子和原子核构成的. 用它們的电子壳层的波函数就能够統一地反映这些原子的化学性质. 可以設想,目前的所謂各种"基本粒子"是統一地由某种更基本的东西組成的. 根据这种想法有人建議建立統一量子場論[Heisenberg, 1953]来統一地反映基本粒子現象. 在这一理論中基本的場只有一种,目前所謂"基本粒子"应該都由这一种基本的場构成. 这样的想法具有很大的吸引力, 但是根据它来建立具体的理論却遇到了很大的困难, 目前还沒有得到什么具体的成就.

从認識发展过程的一般規律看, 相应于各种基本粒子引进許多种不同的量子場, 以反映这些基本粒子的性质和相互作用及相互轉化的現象,这种方法是可以应用的. 可以将这种做法理解为建立基本粒子理論的第一步. 人的認識发展过程一般地是从特殊到一般,从現象到本质. 因此完全可以先将基本粒子現象一部分一部分地分别加以考察,然后再进行統一的研究;先将基本粒子現象定性地分类加以討論, 然后再探索所有基本粒子現象的共同本质. 量子电动力学和 β 衰变理論所取得的一系列成就証明了这样的路是走得通的. 我們可以将目前的量子場論当作未来的完整的基本粒子理論的前驅,犹如量子論是量子力学的前驅一样.

§1,4. 量子場論发展中所遇到的基本困难

說目前的量子場論是一个前驅性理論的論断, 还有一个重要的根据. 这就是,目前的量子場論还存在着基本的困难. 这一困难在三十年来严重地阻碍着量子場論的发展.

用量子电动力学来計算任何电磁相互作用現象时, 第一次近似的計算結果常常和实驗数据非常符合. 但是,当进一步作高次近似的計算时,得到的結果总是无穷大,毫无意义. 其他的量子場理論,如 β 衰变理論,有关介子、核子和超子場的理論等等,也都遇

到了同样的基本困难。曾經有許多人尝試克服这一基本困难，提出了各式各样的理論，但結果都归于失敗。大約在十年以前，朝永振一郎[Tomonaga, 1946]、許溫格[Schwinger, 1948]和費曼[Feynman, 1949]等曾提出了避免这一困难的方法，成功地解释了某些电磁現象中极为精細的效应。他們的成就无疑地使量子場論向前跨进了一步。但是，他們的方法只能暫时避开上述基本困难，而并沒有能彻底克服这一困难。因此，即使在这种改进了的量子場論中，这一基本困难仍然存在，只是以别的形式表現出来。戴逊[Dyson, 1952]、約飞[Иоффе, 1954]和朗道等人[Ландау, Абрикосов и Халатников, 1954]、[Landau, 1955]的研究指出了这一基本困难的新形式。可以預計，这一基本困难的克服可能将和物理理論的进一步飞跃联系在一起，犹如黑体輻射困难的被克服和量子論的发現联系在一起一样。

量子場論，在其发展过程中，还遇到了另一个严重的技术上的困难。电磁場的相互作用不強，因而用微扰論方法处理就可以得到相当好的近似結果。导致β衰变的相互作用很弱，因此β衰变現象完全可以用微扰論来处理。然而，有些場之間的相互作用是很強的，例如：π介子、K介子、核子以及超子之間的相互作用的強度便远远超过电子和电磁場之間的相互作用的強度。因此，用微扰論方法来計算这些強相互作用所导致的物理效应，只能得到很坏的近似，甚至根本不能用微扰論来計算。目前正在探索处理強相互作用的普遍有效方法。但是到現在为止，在这方面得到的成就是很初步的。这一困难若不能克服，也将严重地阻碍量子場論的发展。

因此，当前量子場論的重要工作是：一方面要分析和概括高能物理实驗所提供的各方面的事实和規律，建立能在各个局部現象領域內起作用的一系列带有唯象性质的理論；另一方面应該分析目前量子場論基本困难的性质，从新的实驗結果中寻覓新的物理思想和概念，以求能克服这种基本困难。进行这些工作的重要前

提是創造普遍有效的处理強相互作用的方法．在这些方面取得了重要的成就之后，就有条件建立統一的基本粒子及其相互作用和相互轉化的理論．

參 考 文 献

Dirac, P. A. M. (1927), *Proc. Roy. Soc.*, **A114**, 243, 710.

Dirac, P. A. M. (1928), *Proc. Roy. Soc.*, **A117**, 610; A118, 341.

Dyson, F. J. (1952), *Phys. Rev.*, 85, 631.

Feynman, R. P. (1949), *Phys. Rev.*, **76**, 749, 769.

Heisenberg, W. & Pauli, W. (1929), *Zeits. f. Phys.*, **56**, 1; **59**, 168.

Heisenberg, W. (1953), *Nachr. Akad. Gött.*, 8.

Иоффе, Б. Л. (1954), ДАН СССР, **94**, 437.

Jordan, P. & Wigner, E. P. (1928), *Zeits. f. Phys.*, **47**, 631.

Ландау, Л. Д.; Абрикосов, А. А. и Халатников, И. М. (1954), ДАН, СССР, **95**, 497, 773, 1177; **96**, 261.

Landau, L. D. (1955), Niels Bohr and the Development of Physics, 52.

Schwinger, J. (1948), *Phys. Rev.*, 74, 1439.

Tomonaga, S. (1946), *Progr. Theor. Phys.*

第二章　場的量子化方法的正則形式

§2,1. 量子力学的正則形式

当研究如何将場量子化的时候，人們很自然地会想到如何将从古典力学过渡到量子力学的方法加以扩充，然后应用到場的量子化問題上去．海森堡所发現的从古典力学过渡到量子力学的量子化方法如下：首先将古典力学納入哈密頓正則形式：

$$\left.\begin{aligned}\frac{dq_k}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_k},\\ \frac{dp_k}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_k},\end{aligned}\qquad k = 1, 2, \cdots, n;\right\} \tag{2,1}$$

其中 q_k 和 p_k 各代表正則坐标和正則动量，n 代表客体的自由度数目，$H = H(q_1, q_2, \cdots, q_n, p_1, p_2, \cdots, p_n)$代表哈密頓量．然后假定一切物理量都由算符代表，并且假定正則坐标和正則动量服从下列对易定則：

$$\left.\begin{aligned}[q_j, p_k] &= i\delta_{jk},\\ [q_j, q_k] &= 0,\\ [p_j, p_k] &= 0,\end{aligned}\right\} \tag{2,2}$$

其中方括号的定义是：$[A, B] \equiv AB - BA$．利用 (2,2) 可以将运动方程(2,1)写作：

$$\left.\begin{aligned}\frac{dq_k}{dt} &= i[H, q_k],\\ \frac{dp_k}{dt} &= i[H, p_k].\end{aligned}\right\} \tag{2,3}$$

可以看出，对易定則(2,2)和运动方程是不相矛盾的．今設 F 为 q_k 和 p_k 的函数，但不是时間 t 的显示函数，那末根据(2,3)就得：

$$\frac{dF}{dt} = i[H, F]. \tag{2,4}$$

既然,(2,2)式中的量都是普通的数量,可以和H相对易,可見它們都是不随时間而变化的. 也就是說,对易关系(2,2)和运动方程(2,3)是相一致的. 运动方程(2,3)和对易定則(2,2)是量子力学的基本方程. 客体的物理性质就由这一套基本方程决定.

古典場論和古典质点力学之間的主要区别,从物理观点看来,是:古典质点力学討論的是具有有限自由度的物理系統,而古典場論所討論的則是具有无限自由度的物理系統. 从数学形式的观点看来,二者之間的区别是不大的. 它們的运动方程都可以用变分法从相应的拉氏函数推导出来,都可以写成哈密頓正則形式. 因此,我們不难将力学的量子化方法的数学形式运用到場論的量子化問題中去. 我們可以将古典場論納入哈密頓正則形式,引入正則坐标和正則动量. 然后,假設一切場物理量都是算符,而正則坐标和正則动量則滿足如(2,2)的对易定則. 这样,我們便得到一套完整的量子場論的基本方程. 量子化方法的这种形式叫做:場論的量子化方法的正則形式.

§2,2. 古典場論的拉氏形式

在本书中我們假定所研究的場的运动方程可以用变分法从拉氏函数推导出来,可以納入哈密頓正則形式. 設場物理量是:

$$\varphi_\sigma(x), \quad \sigma = 1, 2, \cdots, n, \tag{2,5}$$

其中(x)是(x_1, x_2, x_3, x_4)的簡写. x_1, x_2, x_3代表空間坐标,$x_4 = it$,t代表时間坐标. n代表在每一时空点場物理量的数目. 假定拉氏函数密度$\mathscr{L}$是φ_σ和$\dfrac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\mu}$的函数,$\mu = 1, 2, 3, 4$. 可以将拉氏函数密度簡单地写为:

$$\mathscr{L}\left(\varphi_\sigma, \frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\mu}\right). \tag{2,6}$$

拉氏函数就等于:

$$L = \int \mathscr{L}\, d^4x, \tag{2,7}$$

其中

$$d^4x = dx_1\,dx_2\,dx_3\,dt.$$

設使場物理量作一微小的改变：

$$\varphi_\sigma(x) \to \varphi_\sigma(x) + \delta\varphi_\sigma(x), \tag{2,8}$$

并且假定在拉氏函数积分的边界上的 $\delta\varphi_\sigma$ 等于零，那末因之而形成的拉氏函数的数值的改变就等于：

$$\delta L = \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_\sigma}\delta\varphi_\sigma + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}\delta\left(\frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)\right\} =$$

$$= \int d^4x \cdot \delta\varphi_\sigma \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_\sigma} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}\right)\right\}. \tag{2,9}$$

某一标符在某一項中出現二次就代表着对这一标符求和. 例如(2,9)式的右方一方面对 σ 求和从 1 到 n，另一方面对 μ 求和从 1 到 4. 假設客观的場物理量 φ_σ 使拉氏函数取极值，即任何 $\delta\varphi_\sigma$ 不改变拉氏函数的数值，那末場物理量就滿足下列拉氏运动方程：

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_\sigma} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}\right) = 0, \quad \sigma = 1, 2, \cdots n. \tag{2,10}$$

§ 2,3. 运动規律的对称性和守恒定律

物理規律常常具有一定的对称性. 这种对称性在数学形式上表現为：运动方程对于一定的数学变換具有不变性，亦即拉氏函数对于一定的数学变換具有不变性. 例如：由于时間和空間的均匀性，运动方程对于时間和空間坐标的移动具有不变性；由于空間的各向同性，运动方程对于空間坐标的轉动具有不变性. 可以証明，相应于运动方程的某一种不变性，必存在着某一种守恒定律. 例如：运动方程的規范不变性导致了电荷守恒定律，运动方程对于坐标移动的不变性导致了动量守恒和能量守恒定律，运动方程对于空間坐标轉动的不变性导致了角动量守恒定律，运动方程对于空

間坐标反射具有不变性导致了宇称守恒定律。当然，由于宇称只能取不連續的本征值 $+1$ 和 -1，因此这一物理量只出现于微观物理現象中而不出现于宏观的物理現象中，只出现于量子理論中而不出现于古典物理理論中.

因此，时間和空間的均匀性导致了能量和动量守恒定律，空間的各向同性导致了角动量守恒定律，而空間的反射对称性导致了宇称守恒定律. 由此可見，时間-空間的属性和物理运动的規律之間存在着密切的联系.

§2,4. 第一种規范变換和电荷守恒定律

假設場物理量由复数 φ_σ 和 φ_σ^* 表示，拉氏函数密度 $\mathscr{L}$ 是 φ_σ, φ_σ^*, $\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\mu}$ 和 $\frac{\partial\varphi_\sigma^*}{\partial x_\mu}$ 的函数，那末得到的場的拉氏运动方程是：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\sigma}-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}\right)=0,\\ \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\sigma^*}-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\sigma^*}{\partial x_\mu}\right)}\right)=0.\end{aligned}\right\}\tag{2,11}$$

泡里 [Pauli, 1940] 定义下列变換：

$$\left.\begin{aligned}\varphi_\sigma&\longrightarrow e^{i\alpha}\varphi_\sigma,\\ \varphi_\sigma^*&\longrightarrow e^{-i\alpha}\varphi_\sigma^*,\end{aligned}\right\}\tag{2,12}$$

为第一种規范变換，其中 α 是一个实常数. 可以証明，假如拉氏函数密度对于这一变換具有不变性，那末就存在着一条守恒定律. 証明如下：

$$\delta\mathscr{L}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\sigma}\delta\varphi_\sigma+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}\delta\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)+$$

$$+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\sigma^*}\delta\varphi_\sigma^*+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\sigma^*}{\partial x_\mu}\right)}\delta\left(\frac{\partial\varphi_\sigma^*}{\partial x_\mu}\right)=0.\tag{2,13}$$

設 α 是很小的常數，那末

$$\left.\begin{aligned}
&\delta\varphi_\sigma = e^{i\alpha}\varphi_\sigma - \varphi_\sigma \cong i\alpha\varphi_\sigma,\\
&\delta\varphi_\sigma^* = e^{-i\alpha}\varphi_\sigma^* - \varphi_\sigma^* \cong -i\alpha\varphi_\sigma^*,\\
&\delta\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\mu}\right) = i\alpha\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\mu},\\
&\delta\left(\frac{\partial\varphi_\sigma^*}{\partial x_\mu}\right) = -i\alpha\frac{\partial\varphi_\sigma^*}{\partial x_\mu}.
\end{aligned}\right\} \tag{2,14}$$

因此得：

$$i\alpha\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\sigma}\varphi_\sigma + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\sigma^*}\varphi_\sigma^* - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\sigma^*}{\partial x_\mu}\right)}\frac{\partial\varphi_\sigma^*}{\partial x_\mu}\right\} = 0. \tag{2,15}$$

利用运动方程(2,11)，就得：

$$i\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}\varphi_\sigma - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\sigma^*}{\partial x_\mu}\right)}\varphi_\sigma^*\right\} = 0. \tag{2,16}$$

(2,16)式具有守恆定律的微分形式. 在考虑 φ_σ, φ_σ^* 和电磁場相互作用的时候将发現，(2,16) 式和电荷守恆定律之間有着密切的关联. 設定义：

$$J_\mu = -ie\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}\varphi_\sigma - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\sigma^*}{\partial x_\mu}\right)}\varphi_\sigma^*\right\}, \tag{2,17}$$

則 J_1, J_2, J_3 常常代表电流密度，而 $-iJ_4$ 則代表电荷密度. (2,17) 式中的 e 代表电荷的最小单位，亦即电子的电荷. 在某些情况下，(2,16)式也可能和某一种粒子的数目的守恆定律相联系.

§2,5. 坐标移动和能量守恆定律及动量守恒定律

在坐标移动时，坐标的数值和相应的場物理量作如下的变換：

$$\left.\begin{aligned} &x_\mu \to x'_\mu = x_\mu + \Delta x_\mu, \\ &\varphi_\sigma(x) \to {}'\varphi_\sigma(x') = {}'\varphi_\sigma(x + \Delta x), \end{aligned}\right\} \tag{2,18}$$

其中 x' 和 $'\varphi$ 代表在新的坐标系統中坐标和場物理量的数值，Δx_μ 代表坐标移动的位移。 設拉氏函数密度对于坐标移动具有不变性，則

$$\begin{aligned} \delta\mathscr{L} &= \mathscr{L}\left({}'\varphi_\sigma(x'), \frac{\partial'\varphi_\sigma(x')}{\partial x'_\mu}\right) - \mathscr{L}\left(\varphi_\sigma(x), \frac{\partial\varphi_\sigma(x)}{\partial x_\mu}\right) = \\ &= \mathscr{L}\left({}'\varphi_\sigma(x'), \frac{\partial'\varphi_\sigma(x')}{\partial x'_\mu}\right) - \mathscr{L}\left({}'\varphi_\sigma(x), \frac{\partial'\varphi_\sigma(x)}{\partial x_\mu}\right) + \\ &+ \mathscr{L}\left({}'\varphi_\sigma(x), \frac{\partial'\varphi_\sigma(x)}{\partial x_\mu}\right) - \mathscr{L}\left(\varphi_\sigma(x), \frac{\partial\varphi_\sigma(x)}{\partial x_\mu}\right) = 0. \end{aligned} \tag{2,19}$$

考慮到：

$${}'\varphi_\sigma(x') = {}'\varphi_\sigma(x + \Delta x) = \varphi_\sigma(x), \tag{2,20}$$

我們有：

$$\begin{aligned} \delta\mathscr{L} = &\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_\mu}\Delta x_\mu - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\sigma}\cdot\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\mu}\cdot\Delta x_\mu - \\ &- \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\nu}\right)}\cdot\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\dot{\varphi}_\sigma}{\partial x_\nu}\right)\Delta x_\mu = 0, \end{aligned} \tag{2,21}$$

利用方程(2,10)，就有：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0, \quad \mu,\nu = 1,2,3,4; \\ &T_{\mu\nu} = \mathscr{L}\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\nu}\right)}. \end{aligned}\right\} \tag{2,22}$$

(2,22)一共包含有四个方程，每一个都具有守恆定律的微分形式。这四个方程分别地代表了动量守恆定律和能量守恆定律。我們称 $T_{\mu\nu}$ 为正則能量-动量张量。它和場的总能量和总动量 P_μ 之間存在着如下的关系：

$$P_\mu = -i\int T_{\mu 4}\, d\vec{x}, \quad d\vec{x} = dx_1\, dx_2\, dx_3, \tag{2,23}$$

其中 P_1, P_2, P_3 代表动量的分量，$-iP_4$ 代表能量.

§2,6. 洛仑兹变換和角动量守恒定律

在洛仑兹变換中 x_μ 和 φ_σ 作如下的变換：

$$\left.\begin{aligned} &x_\mu \longrightarrow x'_\mu = a_{\mu\nu}\, x_\nu, \\ &\varphi_\sigma(x) \longrightarrow {}'\varphi_\sigma(x') = \Lambda_{\sigma\rho}\, \varphi_\rho(x), \end{aligned}\right\} \tag{2,24}$$

其中 $\mu, \nu = 1,2,3,4; \sigma, \rho = 1, 2, \cdots, n$. $\Lambda_{\sigma\rho}$ 是 $a_{\mu\nu}$ 的函数. 例如，假如 φ_σ 是一个4-矢量，則 $\Lambda_{\sigma\rho}$ 就等于 $a_{\mu\nu}$. 如果我們所討論的是无穷小洛仑兹变換，那末可以将 $a_{\mu\nu}$ 写作：

$$a_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu}, \tag{2,25}$$

这里 $\delta_{\mu\nu}$ 是克隆尼克 (Kronecker) 符号，即 $\delta_{\nu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{若 } \mu = \nu \\ 0 & \mu \neq \nu \end{cases}$，而 $\varepsilon_{\mu\nu}$ 是无穷小的数值. 由于 $x_\mu x_\mu$ 是洛仑兹不变量，必須有：

$$a_{\mu\nu}a_{\mu\lambda} = \delta_{\nu\lambda}. \tag{2,26}$$

利用(2,25)并略去高次无穷小項，就得：

$$\delta_{\nu\lambda} = (\delta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu})(\delta_{\mu\lambda} + \varepsilon_{\mu\lambda}) = \delta_{\nu\lambda} + \varepsilon_{\nu\lambda} + \varepsilon_{\lambda\nu}, \tag{2,27}$$

亦即：

$$\varepsilon_{\nu\lambda} = -\varepsilon_{\lambda\nu}. \tag{2,28}$$

可以把空間坐标的轉动当作洛仑兹变換的一个特殊情况，在那时候 $\varepsilon_{\nu 4} = -\varepsilon_{4\nu} = 0$. 在討論无穷小洛仑兹变換时，我們也可以将 $\Lambda_{\sigma\rho}$ 展开成为 $\varepsilon_{\mu\nu}$ 的級数. 在略去了高次无穷小項以后就得：

$$\Lambda_{\sigma\rho} = \delta_{\sigma\rho} + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\, S_{\mu\nu;\,\sigma\rho}, \tag{2,29}$$

其中 $S_{\mu\nu,\,\sigma\rho}$ 对于标符 μ 和 ν 是反对称的. 因此，在討論无穷小的洛仑兹变換时，我們有：

$$\left.\begin{aligned} &x'_\mu = x_\mu + \varepsilon_{\mu\nu}\, x_\nu, \quad x_\mu = x'_\mu - \varepsilon_{\mu\nu}\, x'_\nu; \\ &{}'\varphi_\sigma(x') = \varphi_\sigma(x) + \frac{1}{2} S_{\mu\nu;\sigma\rho}\, \varphi_\rho(x)\varepsilon_{\mu\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{2,30}$$

假如拉氏函数密度对于洛仑兹变換具有不变性，那末就有：

$$\delta\mathscr{L} = \mathscr{L}\left({}'\varphi_\sigma(x'), \frac{\partial'\varphi_\sigma(x')}{\partial x'_\mu}\right) - \mathscr{L}\left(\varphi_\sigma(x), \frac{\partial\varphi_\sigma(x)}{\partial x_\mu}\right) = 0. \tag{2,31}$$

利用(2,30)可以将(2,31)式写成：

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{L} &= \mathscr{L}\left({}'\varphi_\sigma(x'), \frac{\partial'\varphi_\sigma(x')}{\partial x'_\mu}\right) - \mathscr{L}\left({}'\varphi_\sigma(x), \frac{\partial'\varphi_\sigma(x)}{\partial x_\mu}\right) + \\ &+ \mathscr{L}\left({}'\varphi_\sigma(x), \frac{\partial'\varphi_\sigma(x)}{\partial x_\mu}\right) - \mathscr{L}\left(\varphi_\sigma(x), \frac{\partial\varphi_\sigma(x)}{\partial x_\mu}\right) = \\ &= \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_\mu}\varepsilon_{\mu\nu}x_\nu - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\sigma}\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\mu}\varepsilon_{\mu\nu}x_\nu - \frac{1}{2}S_{\mu\nu;\sigma\rho}\varphi_\rho\varepsilon_{\mu\nu}\right) - \\ &- \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\lambda}\right)}\cdot\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\mu}\varepsilon_{\mu\nu}x_\nu - \frac{1}{2}S_{\mu\nu;\sigma\rho}\varphi_\rho\varepsilon_{\mu\nu}\right).\end{aligned} \tag{2,32}$$

应用运动方程(2,10)，考虑到 $\frac{\partial}{\partial x_\mu}(\varepsilon_{\mu\nu}x_\nu) = 0$，就有：

$$\begin{aligned}&\varepsilon_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left\{\mathscr{L}\delta_{\mu\lambda}x_\nu - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\lambda}\right)}\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\mu}x_\nu + \frac{1}{2}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\lambda}\right)}S_{\mu\nu;\sigma\rho}\varphi_\rho\right\} = \\ &= \varepsilon_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left\{x_\nu T_{\mu\lambda} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\lambda}\right)}S_{\mu\nu;\sigma\rho}\varphi_\rho\right)\right\} = 0.\end{aligned} \tag{2,33}$$

考虑到 $\varepsilon_{\mu\nu}$ 在条件(2,28)之下是任意的，并考虑到 $S_{\mu\nu;\sigma\rho}$ 对于 μ 和 ν 是反对称的，我們就有：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_\lambda}M_{\mu\nu,\lambda} = 0, \quad \mu,\nu,\lambda = 1,2,3,4;\\ &M_{\mu\nu,\lambda} = x_\nu T_{\mu\lambda} - x_\mu T_{\nu\lambda} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\lambda}\right)}S_{\mu\nu,\sigma\rho}\varphi_\rho.\end{aligned}\right\} \tag{2,34}$$

(2,34)中一共包含有六个方程，每一个方程都具有守恒定律的微分形式。当 μ 和 ν 不等于 4 时所得到的三个方程代表角动量守恒。場的总角动量具有如下的表式：

$$M_{jk} = -M_{kj} = i\int M_{jk,4}\,d\vec{x}, \quad j,k = 1,2,3. \tag{2,35}$$

不难看出，(2,35)的积分号内的一部份

$$-ix_j T_{k4} + ix_k T_{j4} \tag{2,36}$$

代表軌道运动对于总角动量的貢献．另一部份

$$i\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_4}\right)} S_{jk;\sigma\rho}\varphi_\rho \tag{2,37}$$

代表粒子的内稟运动对于总角动量的貢献，亦即粒子的自旋对于总角动量的貢献．(2,34)中另外三个方程所代表的守恆定律通常說来意义不大，因为在 μ 或 ν 等于 4 时，$M_{\mu\nu,\lambda}$ 是时間的显示函数．

§2,7. 古典場論的哈密頓形式

将古典場論从拉氏形式过渡到哈密頓形式，可以采用古典質点力学中的相应方法．首先，定义和 φ_σ 相对应的正則共軛物理量 π_σ：

$$\pi_\sigma \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}_\sigma}, \tag{2,38}$$

其中 $\dot{\varphi}_\sigma = \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial t}$．然后，引入哈密頓量密度 $\mathscr{H}$：

$$\mathscr{H} \equiv \pi_\sigma\dot{\varphi}_\sigma - \mathscr{L}. \tag{2,39}$$

不难看出，

$$\mathscr{H} = -T_{44}. \tag{2,40}$$

在(2,39)中，必須把 $\mathscr{H}$，$\mathscr{L}$ 和 $\dot{\varphi}_\sigma$ 理解为 φ_σ，π_σ 和 $\vec{\nabla}\varphi_\sigma$ 的函数．那末，从拉氏运动方程(2,10)以及(2,38)和(2,39)式可以推导得下列場的哈密頓正則运动方程：

$$\left.\begin{aligned}\dot{\varphi}_\sigma &= \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \pi_\sigma},\\ \dot{\pi}_\sigma &= -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \varphi_\sigma} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial\left(\frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_i}\right)}\right),\end{aligned}\right\} \tag{2,41}$$

$$i = 1, 2, 3.$$

其証明如下：

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \pi_\sigma} = \dot{\varphi}_\sigma + \pi_\rho \frac{\partial \dot{\varphi}_\rho}{\partial \pi_\sigma} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}_\rho} \cdot \frac{\partial \dot{\varphi}_\rho}{\partial \pi_\sigma} = \dot{\varphi}_\sigma. \tag{2,42}$$

这是(2,41)中的第一式。此外又有：

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \varphi_\sigma} = \pi_\rho \frac{\partial \dot{\varphi}_\rho}{\partial \varphi_\sigma} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_\sigma} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}_\rho} \frac{\partial \dot{\varphi}_\rho}{\partial \varphi_\sigma} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_\mu} \cdot \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \left(\frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_\mu} \right)} \right) = -\dot{\pi}_\sigma - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \left(\frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_i} \right)} \right). \tag{2,43}$$

另一方面，

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \left(\frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_i} \right)} = \pi_\rho \frac{\partial \dot{\varphi}_\rho}{\partial \left(\frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_i} \right)} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \left(\frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_i} \right)} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}_\rho} \frac{\partial \dot{\varphi}_\rho}{\partial \left(\frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_i} \right)} =$$

$$= -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \left(\frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_i} \right)}. \tag{2,44}$$

故有：

$$\dot{\pi}_\sigma = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \varphi_\sigma} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \left(\frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_i} \right)} \right). \tag{2,45}$$

这是(2,41)中的第二式。方程(2,41)的形式和方程(2,1)的形式并不完全相似；这是由于(2,41)中的 $\mathscr{H}$ 代表哈密頓量密度，而(2,1)中的 H 代表哈密頓量，二者并不完全相似的緣故。

在哈密頓正則形式中場的总能量 E，总动量 $\vec{P}$，总角动量 M_{jk} 和总电荷 Q 由下列各式表示：

$$E = \int d\vec{x} \mathscr{H} = H \tag{2,46}$$

(H 是場的哈密頓量)；

$$\vec{P} = -\int \pi_\sigma \vec{\nabla} \varphi_\sigma \cdot d\vec{x}; \tag{2,47}$$

$$M_{jk}=-\int d\vec{x}\left\{\pi_\sigma x_j\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi_\sigma-\pi_\sigma x_k\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi_\sigma+\pi_\sigma S_{jk,\sigma\rho}\varphi_\rho\right\};\quad(2,48)$$

$$Q=ie\int d\vec{x}\{\varphi_\sigma^*\pi_\sigma^*-\pi_\sigma\varphi_\sigma\}.\quad(2,49)$$

§2,8. 場的量子化方法的正則形式

为了量子化的方便起見，可以將場的运动方程納入和(2,1)式更为相似的形式。我們將空間分为許多大小相同的小元格：$\Delta\vec{x}=\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3$，并且用字母 s 标誌第 s 个小元格以及和第 s 个小元格有关的場物理量。例如：以 ${}^{(s)}\Delta\vec{x}$ 代表第 s 个小元格的体积，以 ${}^{(s)}\varphi_\sigma(t)$ 代表 φ_σ 当时間 t 时在第 s 个小元格中的平均值，以 ${}^{(s)}\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_i}\right)\equiv\frac{1}{\Delta x_i}({}^{(s+1)}\varphi_\sigma-{}^{(s)}\varphi_\sigma)$ 代表 $\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_i}$ 在第 s 个小元格中的平均值等等。于是拉氏函数 L 就可以写成如下的形式：

$$\left.\begin{aligned}L&=\int d^4x\mathscr{L}=\int dt\,{}^{(s)}\Delta\vec{x}\,{}^{(s)}\mathscr{L},\\{}^{(s)}\mathscr{L}&=\mathscr{L}\left({}^{(s)}\varphi_\sigma,\ {}^{(s)}\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_i}\right),\ {}^{(s)}(\dot{\varphi}_\sigma)\right).\end{aligned}\right\}\quad(2,50)$$

可以看出，在这一形式中，${}^{(s)}\varphi_\sigma$ 相当于質点力学中的 q_k。所不同者，在質点力学中 q_k 的数目是有限的，而在場論中 ${}^{(s)}\varphi_\sigma$ 的数目則是无限的。无限个 ${}^{(s)}\varphi_\sigma$ 相当于場的无限个自由度。从(2,50)可以得到場的运动方程：

$$\begin{aligned}&{}^{(s)}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\sigma}\right]-\frac{1}{\Delta x_i}\,{}^{(s)}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_i}\right)}\right]+\frac{1}{\Delta x_i}\,{}^{(s-1)}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_i}\right)}\right]-\\&-\frac{\partial}{\partial t}\,{}^{(s)}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}_\sigma}\right]=0.\end{aligned}\quad(2,51)$$

不难看出，当 $\Delta x_i\to 0$ 时，方程(2,51)便趋于方程(2,10)。

可以將 ${}^{(s)}\varphi_\sigma$ 当作正則坐标，引进相应的正則动量：

$${}^{(s)}p_\sigma\equiv\frac{\partial}{\partial{}^{(s)}\dot{\varphi}_\sigma}\left\{\sum_r{}^{(r)}\Delta\vec{x}\cdot{}^{(r)}\mathscr{L}\right\}={}^{(s)}\Delta\vec{x}\cdot{}^{(s)}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}_\sigma}\right].\quad(2,52)$$

这样就可以得到哈密頓量：

$$H=\sum_{(s)}\{{}^{(s)}p_\sigma\,{}^{(s)}\dot{\varphi}_\sigma-{}^{(s)}\mathscr{L}\,{}^{(s)}\Delta\vec{x}\},\tag{2,53}$$

其中 ${}^{(s)}\dot{\varphi}_\sigma$ 必須是 ${}^{(s)}\varphi_\rho$, ${}^{(s+1)}\varphi_\rho$ 和 ${}^{(s)}p_\rho$ 的函数. 可以看出，(2,53) 和表式 (2,46) 完全一样. 从 (2,53) 可以得到哈密頓正則运动方程：

$$\left.\begin{aligned}{}^{(s)}\dot{\varphi}_\sigma&=\frac{\partial H}{\partial{}^{(s)}p_\sigma},\\ {}^{(s)}\dot{p}_\sigma&=-\frac{\partial H}{\partial{}^{(s)}\varphi_\sigma}.\end{aligned}\right\}\tag{2,54}$$

当 $\Delta x_i\to 0$ 时，可以証明(2,54)便趋近于极限方程(2,41)：

$$\frac{\partial H}{\partial{}^{(s)}p_\sigma}=\frac{\partial}{\partial{}^{(s)}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}_\sigma}\right]}\left\{\sum_{(s)}\left[{}^{(s)}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}_\rho}\right){}^{(s)}\dot{\varphi}_\rho-{}^{(s)}\mathscr{L}\right]\right\}=$$

$$={}^{(s)}\left[\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\pi_\sigma}\right];\tag{2,55}$$

这就相应于方程(2,41)中的第一式. 此外，我們有：

$$\frac{\partial H}{\partial{}^{(s)}\varphi_\sigma}={}^{(s)}p_\rho\cdot\frac{\partial{}^{(s)}\dot{\varphi}_\rho}{\partial{}^{(s)}\varphi_\sigma}+{}^{(s-1)}\varphi_\rho\frac{\partial{}^{(s-1)}\dot{\varphi}_\rho}{\partial{}^{(s)}\varphi_\sigma}-{}^{(s)}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\sigma}\right]\Delta^{(s)}\vec{x}+$$

$$+{}^{(s)}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_i}\right)}\right]\frac{{}^{(s)}\Delta\vec{x}}{\Delta x_i}-{}^{(s-1)}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_i}\right)}\right]\frac{{}^{(s-1)}\Delta\vec{x}}{\Delta x_i}-$$

$$-{}^{(s)}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}_\rho}\right]\left[\frac{\partial{}^{(s)}\dot{\varphi}_\rho}{\partial{}^{(s)}\varphi_\sigma}\right]{}^{(s)}\Delta\vec{x}-{}^{(s-1)}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}_\rho}\right]\left[\frac{\partial{}^{(s-1)}\dot{\varphi}_\rho}{\partial{}^{(s)}\varphi_\sigma}\right]{}^{(s-1)}\Delta\vec{x}=$$

$$={}^{(s)}\Delta\vec{x}\left\{-{}^{(s)}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\sigma}\right]+{}^{(s)}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_i}\right)}\right)\right]\right\}.\tag{2,56}$$

参看(2,41)的証明，知 $-\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\sigma}=\dfrac{\partial\mathscr{H}}{\partial\varphi_\sigma}$, $-\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_i}\right)}=\dfrac{\partial\mathscr{H}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_i}\right)}$

故得：

$$\dot{\pi}_\sigma = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \varphi_\sigma} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial\left(\frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_i}\right)}\right). \tag{2,57}$$

方程(2,54)的形式和方程(2,1)的形式完全相似，因此將質点力学中的对易定則(2,2)和运动方程(2,3)移过来用于場的量子化在形式上不再有何障碍. 海森堡和泡里[Heisenberg and Pauli, 1929]假定場的共軛物理量滿足下列对易定則:

$$\left.\begin{aligned} &[{}^{(r)}\varphi_\sigma(t), {}^{(s)}p_\rho(t)] = i\delta_{rs}\delta_{\sigma\rho}, \\ &[{}^{(r)}\varphi_\sigma(t), {}^{(s)}\varphi_\rho(t)] = 0, \\ &[{}^{(r)}p_\sigma(t), {}^{(s)}p_\rho(t)] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2,58}$$

利用(2,54)和(2,58)可將运动方程表达为:

$$\left.\begin{aligned} &{}^{(s)}\dot{\varphi}_\sigma = i[H, {}^{(s)}\varphi_\sigma], \\ &{}^{(s)}\dot{p}_\sigma = i[H, {}^{(s)}p_\sigma]. \end{aligned}\right\} \tag{2,59}$$

当 $\Delta\vec{x} \to 0$ 时，对易定則(2,58)可以写作:

$$\left.\begin{aligned} &[\varphi_\sigma(x), \pi_\rho(x')] = i\delta_{\sigma\rho}\,\delta(\vec{x} - \vec{x}'), \\ &[\varphi_\sigma(x), \varphi_\rho(x')] = 0, \\ &[\pi_\sigma(x), \pi_\rho(x')] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2,60}$$

在(2,60)中，$t = t'$，但空間坐标 $\vec{x}$ 和 $\vec{x}'$ 可以不相等. $\delta(\vec{x}-\vec{x}') = \delta(x_1 - x_1')\delta(x_2 - x_2')\delta(x_3 - x_3')$. 运动方程(2,59)則可改写为:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\varphi}_\sigma = i[H, \varphi_\sigma], \\ &\dot{\pi}_\sigma = i[H, \pi_\sigma], \\ &H = \int d\vec{x}\mathscr{H}. \end{aligned}\right\} \tag{2,61}$$

不难証明方程(2,61)和方程(2,41)完全一样:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_\sigma(x) &= i\int d\vec{x}'[\mathscr{H}(x'), \varphi_\sigma(x)] = \\ &= i\int d\vec{x}'\frac{\partial \mathscr{H}(x')}{\partial \pi_\rho(x')}[\pi_\rho(x'), \varphi_\sigma(x)] = \\ &= i\int d\vec{x}' \cdot \frac{\partial \mathscr{H}(x')}{\partial \pi_\rho(x')}(-i)\delta_{\sigma\rho}\delta(\vec{x}-\vec{x}') = \left(\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \pi_\sigma}\right)_x; \end{aligned} \tag{2,62}$$

这是(2,41)中的第一式. 此外有:

$$\dot{\pi}_\sigma(x) = i\int d\vec{x}'[\mathscr{H}(x'), \pi_\sigma(x)] =$$

$$= i\int d\vec{x}' \left\{\frac{\partial\mathscr{H}(x')}{\partial\varphi_\rho(x')}[\varphi_\rho(x'), \pi_\sigma(x)] + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial\mathscr{H}(x')}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\rho(x')}{\partial x_i'}\right)}\left[\frac{\partial\varphi_\rho(x')}{\partial x_i'}, \pi_\sigma(x)\right]\right\} =$$

$$= i\int d\vec{x}' \left\{i\delta_{\rho\sigma}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')\frac{\partial\mathscr{H}(x')}{\partial\varphi_\rho(x')} + \right.$$

$$\left. + i\delta_{\rho\sigma}\frac{\partial}{\partial x_i'}\delta(\vec{x}-\vec{x}')\frac{\partial\mathscr{H}(x')}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\rho(x')}{\partial x_i'}\right)}\right\} =$$

$$= \left\{-\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\varphi_\sigma} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_i}\right)}\right)\right\}_x; \qquad (2,63)$$

这就是(2,41)中的第二式.

設 F 为 φ_σ 和 π_σ 的函数,則从(2,61)式可得:

$$\dot{F} = i[H, F]. \qquad (2,64)$$

可以看出,对易定則(2,60)和运动方程(2,61)之間是相互一致的.

运动方程(2,61)和对易定則(2,60)是量子場論的基本方程. 量子場的物理性質由这一套基本方程表征.

§2,9. 能量和动量算符

从(2,64)式可以看出,物理量在时間中的变化由場的总能量 H 决定. 同样,可以証明,場物理量在空間中的变化由場的总动量决定. 利用总动量 $\vec{P}$ 的表式(2,47)和对易关系(2,60),得:

$$[\vec{P}, \varphi_\sigma(x)] = -\int d\vec{x}'[\pi_\rho(x')\vec{\nabla}'\varphi_\rho(x'), \varphi_\sigma(x)] =$$

$$= -\int d\vec{x}'[\pi_\rho(x'), \varphi_\sigma(x)]\vec{\nabla}'\varphi_\rho(x') =$$

$$= i\int d\vec{x}'\delta_{\sigma\rho}\delta(\vec{x}-\vec{x}')\vec{\nabla}'\varphi_\rho(x') = i\vec{\nabla}\varphi_\sigma(x), \quad (2.65a)$$

$$[\vec{P},\pi_\sigma(x)] = -\int d\vec{x}'[\pi_\rho(x')\vec{\nabla}'\varphi_\rho(x'),\ \pi_\sigma(x)] =$$

$$= -\int d\vec{x}'\pi_\rho(x')\vec{\nabla}'[\varphi_\rho(\vec{x}'),\ \pi_\sigma(x)] =$$

$$= -i\int d\vec{x}'\pi_\rho(x')\delta_{\rho\sigma}\vec{\nabla}'\delta(\vec{x}'-\vec{x}) = i\vec{\nabla}\pi_\sigma(x). \quad (2,65b)$$

因此，任何場物理量 φ_σ 和 π_σ 的函数 F 在空間的变化都由总动量决定：

$$\vec{\nabla}F = -i[\vec{P},\ F]. \quad (2,66)$$

考虑到 $P_4 = iH$，可将(2,64)和(2,66)合并为：

$$\frac{\partial F}{\partial x_\mu} = -i[P_\mu,\ F]. \quad (2,67)$$

可以証明，动量算符和能量算符是可以互相对易的．这只要利用(2,23)就得：

$$[P_i,\ P_\mu] = -i\int d\vec{x}'[P_i, T_{\mu 4}(x')] = \int d\vec{x}'\frac{\partial T_{\mu 4}}{\partial x_i'} = 0. \quad (2,68)$$

由于場的总能量和总动量不会因为坐标的移动而改变.因而(2.68)式实际上等于：

$$\lim_{\Delta x_j=0}\frac{1}{\Delta x_i}\left\{\int d\vec{x}(T_{\mu 4}(x_\nu + (\delta_\nu)_i\Delta x_i) - T_{\mu 4}(x_\nu))\right\}. \quad (2,69)$$

§ 2,10. 总角动量算符

可以証明，总角动量 M_{ik} 所服从的对易关系和量子力学中的角动量算符所服从的对易关系完全一样．为了便于书写，我們将 φ_σ 写成一行，并以 φ 代表其总体：

$$\varphi \equiv \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}. \quad (2,70)$$

我們將 π_σ 寫成一列，而以 π 代表其总体：

$$\pi \equiv (\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n). \tag{2,71}$$

定义矩陣 S_{jk}，具有 n 行和 n 列，其第 ρ 行第 σ 列的矩陣元是：

$$-iS_{jk,\sigma\rho} \equiv [S_{jk}]_{\sigma\rho}. \tag{2,72}$$

我們并以 L_{jk} 代表算符：

$$L_{jk} \equiv x_j\left(-i\frac{\partial}{\partial x_k}\right) - x_k\left(-i\frac{\partial}{\partial x_j}\right). \tag{2,73}$$

此外还引进符号 $\mathscr{M}_{jk}$，它的定义是：

$$\mathscr{M}_{jk} \equiv L_{jk} + S_{jk}. \tag{2,74}$$

这样一来，場的总角动量的表式(2,48)就可以簡写成如下的形式：

$$M_{jk} = -i\int \pi \mathscr{M}_{jk}\varphi \cdot d\tau. \tag{2,75}$$

考虑到，在 $t = t'$ 时，

$$[\varphi(x), \pi(x')] = i\delta(x - x') \cdot 1, \tag{2,76}$$

其中 1 代表 n 行和 n 列的单位矩陣，我們就可以得到如下的場总角动量的对易关系：

$$\begin{aligned}[M_{jk}, M_{lm}] = &-\int d\tau d\tau' [\pi(x)\mathscr{M}_{jk}(x)\varphi(x),\\ &\pi(x')\mathscr{M}_{lm}(x')\varphi(x')] =\\ =&-\int d\tau d\tau' \{\pi(x)\mathscr{M}_{jk}(x)[\varphi(x),\\ &\pi(x')]\mathscr{M}_{lm}(x')\varphi(x') +\\ &+\pi(x')\mathscr{M}_{lm}(x')[\pi(x), \varphi(x')]\mathscr{M}_{jk}(x)\varphi(x)\} =\\ =&-i\int d\tau \pi[\mathscr{M}_{jk}, \mathscr{M}_{lm}]\varphi. \end{aligned} \tag{2,77}$$

于是，問題就还原为求 $\mathscr{M}_{jk}$ 的对易关系。L_{jk} 就是量子力学中的軌道角动量算符，因此他們滿足如下的对易关系：

$$[L_{jk}, L_{lm}] = i\delta_{jl}L_{km} - i\delta_{kl}L_{jm} - i\delta_{jm}L_{kl} + i\delta_{km}L_{jl}. \tag{2,78}$$

此外，由于(2,24)式中的 A 是洛仑兹羣表示，因此有：

$$[S_{jk}, S_{lm}] = i\delta_{jl}S_{km} - i\delta_{kl}S_{jm} - i\delta_{jm}S_{kl} + i\delta_{km}S_{jl}. \tag{2,79}$$

將(2,78)和(2,79)二式合起来就有：

$$[\mathscr{M}_{jk}, \mathscr{M}_{lm}] = [L_{jk}, L_{lm}] + [S_{jk}, S_{lm}] =$$
$$= i\delta_{jl}\mathscr{M}_{km} - i\delta_{kl}\mathscr{M}_{jm} - i\delta_{jm}\mathscr{M}_{kl} + i\delta_{km}\mathscr{M}_{jl}. \quad (2,80)$$

將(2,80)代入(2,77)，得：

$$[M_{jk}, M_{lm}] = i\delta_{jl}M_{km} - i\delta_{kl}M_{jm} - i\delta_{jm}M_{kl} + i\delta_{km}M_{jl}; \quad (2,81)$$

这就是量子力学中角动量所滿足的对易关系。 現在，我們引进如下定义的符号 M_1, M_2, M_3:

$$M_1 \equiv M_{23}, \quad M_2 \equiv M_{31}, \quad M_3 \equiv M_{12}; \quad (2,82)$$

那末(2,81)就可以改写为：

$$\left.\begin{aligned} [M_1, M_2] &= iM_3, \\ [M_2, M_3] &= iM_1, \\ [M_3, M_1] &= iM_2. \end{aligned}\right\} \quad (2,83)$$

不难証明，M_{jk} 和場物理量 φ_σ 和 π_σ 之間有如下的对易关系：

$$[M_{jk}, \varphi_\sigma(x)] = -i\int d\tilde{x}'[\pi(x')\mathscr{M}_{jk}(x')\varphi(x'), \varphi_\sigma(x)] =$$
$$= -(\mathscr{M}_{jk}(x)\varphi(x))_\sigma, \quad (2,84a)$$

$$[M_{jk}, \pi_\sigma(x)] = -i\int d\tilde{x}'[\pi(x')\mathscr{M}_{jk}(x')\varphi(x'), \pi_\sigma(x)] =$$
$$= \int d\tilde{x}'(\pi(x')\mathscr{M}_{jk}(x')\delta(\tilde{x}' - \tilde{x}))_\sigma =$$
$$= (\pi(x)\mathscr{M}_{jk}(x))_\sigma. \quad (2,84b)$$

在(2,84b)中，应該将 L_{jk} 之作用于 $\pi(x)$ 理解为：

$$ix_j\frac{\partial}{\partial x_k} - ix_k\frac{\partial}{\partial x_j}. \quad (2,85)$$

参 考 文 献

Heisenberg, W. and Pauli, W. (1929), *Zeits. f. Phys.*, **56**, 1.
Pauli, W. (1940), *Phys. Rev.*, **58**, 716.

第三章　自旋等于零的粒子的場

§3,1. 自由粒子及其波动方程

人們認識基本粒子現象的过程，一般地說，和一切認識过程相同，也是由現象到本質，由簡单到复杂，一步步地进展和深入的．首先研究的問題是基本粒子有多少种，哪些种类．到現在为止，已經发現的基本粒子共有如表1中所列的二十四种；其中有各种重粒子，各种介子，各种輕粒子和光子；此外，还有很大可能所有的超子都具有相应的反超子．这样一来，基本粒子的种类就将多达三十种．继而研究各种基本粒子的基本性質，諸如質量、自旋、电荷有多大，宇称如何等等．如果，所研究的是不稳定的基本粒子，則还要考察它們的平均寿命有多长，有哪些种衰变方式等等．然后，人們又进一步研究各种基本粒子之間的連系，研究它們相互作用及相互轉化的規律，研究它們碰撞、衰变、結合反应的規律．建立基本粒子現象的理論的过程大体上也和上述的过程相应．首先是建立自由粒子的理論，使之能够描述具有一定質量、自旋、电荷和宇称的粒子．然后，建立相互作用和相互轉化的理論，使之能描述基本粒子間的相互作用和相互轉化現象．最后是建立基本粒子現象的統一理論，能够使各式各样的基本粒子現象，包括基本粒子的种类，包括它們之間的相互作用和相互轉化，得到統一的解释．因此，我們首先討論如何建立自由粒子的理論．

我們先討論，具有一定靜質量 m 的粒子的波动方程应該具有什么数学形式．在非相对論性的量子力学中，具有質量 m 的自由粒子的波动方程是：

$$\left(E-\frac{\vec{p}^2}{2m}\right)\psi=0, \tag{3,1}$$

其中 E 代表能量算符 $i\frac{\partial}{\partial t}$，$\vec{p}$ 代表动量算符，ψ 代表波函数。在相对論中，能量、动量和靜質量之間存在着如下的关系：

$$p^2 + m^2 = 0, \tag{3,2}$$

其中 $p^2 \equiv p_\mu p_\mu$。因此，很自然地，(3,1) 式的相对論性扩充是：

$$(p^2 + m^2)\varphi_0 \equiv (-\Box + m^2)\varphi_0 = 0, \tag{3,3}$$

其中 $\Box \equiv \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ 代表达朗伯 (d'Alembert) 算符；φ_0 可以理解为波函数，也可以理解为相应于这种基本粒子的場(例如，电磁場是相应于光子的場)。光子的靜質量等于零。設以 A_μ 代表电磁4-矢势，則而在自由电磁場的情况下有：

$$\Box A_\mu = 0. \tag{3,4}$$

(3,4) 是 (3,3) 式的一个特殊情况。A_μ 可以被理解为光子的波函数，也可以理解为和光子相应的場。方程 (3,3) 叫做克莱因-戈登方程 [Klein, 1926; Gordon, 1926]，是相应于靜質量等于 m 的自由粒子的場所必須滿足的方程。

§3,2. 标量場和贋标量場

我們繼而討論粒子的自旋在数学形式上如何反映的問題。从 §2,6 的討論可以看出，粒子的自旋决定于 φ_0 在洛仑兹变換中的协变性質。不同的洛仑兹协变量可以反映具有不同自旋的粒子。表 1 指出，現在所已知的基本粒子，就自旋而論，可以分为三类：第一类是自旋等于零的粒子，其中包括 π 介子和 K 介子；第二类是自旋等于 1 的光子；第三类是自旋等于 1/2 的粒子，其中包括所有的輕粒子和重粒子。在本章中我們将討論自旋等于零的自由粒子。从洛仑兹协变性的角度看，这种粒子的場是最簡单的場。从 (2,37) 式可以看出，相应于这种場的 $S_{jk;\rho}$ 应該等于零。这就是說，φ_0 在空間坐标轉动的变換中应該是一个标量或贋标量。因此，能够反映

自旋等于零的粒子的洛仑兹协变量是标量和贋标量；本章所討論的場就是标量場和贋标量場.

对于坐标的轉动来說，或对于正洛仑兹羣来說，标量和贋标量是相同的. 对于空間坐标的反射来說，标量和贋标量是不同的，在空間坐标反射的变換中，标量不变，亦即

$$\varphi_\sigma \rightarrow \varphi_\sigma, \tag{3,5}$$

但是贋标量改变一个符号，亦即

$$\varphi_\sigma \rightarrow -\varphi_\sigma. \tag{3,6}$$

在物理上这意味着，标量場和贋标量場所描述的粒子虽然具有相同的自旋，虽然它們的自旋都等于零，但是它們却具有不同的內禀宇称. 标量場所描述的粒子的內禀宇称是正的，贋标量場所描述的粒子的內禀宇称則是負的. 就目前所已知的实驗事实看来，π 介子的內禀宇称是負的，应該用贋标量場来表示；K 介子的宇称則至今尚未确定. 在本章中我們將不討論有关宇称的問題，因此在本章的后面各节中將不区分贋标量場和标量場，而一概以 φ_σ 代表.

π 介子和 K 介子既有帶电的也有不帶电的. 如上一章所述，帶电的粒子可以用复数場代表，中性的粒子可以用实数場代表. 我們將先討論帶电的粒子，然后再討論中性的粒子.

§3,3. 荷电粒子場的拉氏函数和守恒量

我們討論一个最簡单的情况，即 φ 只有一个分量. φ 是一个复数場. 根据(3,3)式，φ 和它的共軛量 φ^* 滿足如下的运动方程：

$$\left.\begin{aligned}(\Box - m^2)\varphi &= 0,\\ (\Box - m^2)\varphi^* &= 0.\end{aligned}\right\} \tag{3,7}$$

方程(3,7)可以从下列拉氏函数密度 $\mathscr{L}^C$ 导出：

$$\mathscr{L}^C = -\left\{\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} + m^2\varphi^*\varphi\right\}. \tag{3,8}$$

利用(2,22)可以得到如下的能量-动量张量 $T^C_{\mu\nu}$：

$$T^C_{\mu\nu}=\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}+\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}-\delta_{\mu\nu}\left\{\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_\lambda}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_\lambda}+m^2\varphi^*\varphi\right\};\tag{3,9}$$

利用(2,34)可以得到如下的角动量 $M^C_{\mu\nu,\lambda}$:

$$M^C_{\mu\nu,\lambda}=x_\nu T^C_{\mu\lambda}-x_\mu T^C_{\nu\lambda};\tag{3,10}$$

利用(2,17)可以得到如下的电流-电荷密度 J_μ

$$J_\mu=ie\left\{\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_\mu}\varphi-\varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right\}.\tag{3,11}$$

§3,4. 荷电粒子場的量子化

可以应用§2,8中所叙述的方法将自旋等于零的荷电粒子場量子化. 首先定义下列与 φ 和 φ^* 相共軛的正則动量 π 和 π^*:

$$\left.\begin{aligned}\pi&\equiv\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot\varphi}=\frac{\partial\varphi^*}{\partial t},\\ \pi^*&\equiv\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot\varphi^*}=\frac{\partial\varphi}{\partial t},\end{aligned}\right\}\tag{3,12}$$

然后,按照(2,39)引入哈密頓量密度 $\mathscr{H}^C$:

$$\mathscr{H}^C\equiv\pi\dot\varphi+\pi^*\dot\varphi^*-\mathscr{L}^C=\vec\nabla\varphi^*\cdot\vec\nabla\varphi+\pi^*\pi+m^2\varphi^*\varphi.\tag{3,13}$$

根据(2,41),可以得到下列正則运动方程:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial t}&=\pi^*,\quad\frac{\partial\pi}{\partial t}=\nabla^2\varphi^*-m^2\varphi^*;\\ \frac{\partial\varphi^*}{\partial t}&=\pi,\quad\frac{\partial\pi^*}{\partial t}=\nabla^2\varphi-m^2\varphi.\end{aligned}\right\}\tag{3,14}$$

按照(2,60),引进如下的对易定則:在 $t=t'$ 时

$$\left.\begin{aligned}[\varphi(x),\pi(x')]&=i\delta(\vec x-\vec x'),\\ [\varphi^*(x),\pi^*(x')]&=i\delta(\vec x-\vec x'),\end{aligned}\right\}\tag{3,15}$$

而 φ, φ^*, π, π^* 之間的其他各对都可以相互对易. 最后引进如下的运动方程:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial t} &= i[H^C, \varphi], \qquad \frac{\partial\pi}{\partial t} = i[H^C, \pi], \\ \frac{\partial\varphi^*}{\partial t} &= i[H^C, \varphi^*], \quad \frac{\partial\pi^*}{\partial t} = i[H^C, \pi^*], \end{aligned}\right\} \tag{3,16}$$

其中哈密頓量 H^C 是:

$$H^C = \int d\vec{x}\, \mathscr{H}^C. \tag{3,17}$$

不難証明,运动方程(3,16)和运动方程(3,14)完全相同. (3,15) 和 (3,16)以及(3,13) 和 (3,17) 就是量子荷电标量場或贋标量場的基本方程和表式.

§3,5. 分解为平面波

微观物理現象的主要特征之一是微观客体的粒子-波动二重性. 作为古典場的运动方程,(3,7)可以描述波动性,但是不能描述粒子性. 在量子化以后,这一理論应該不仅能描述波动性,而且也能够描述粒子性. 具体地說,这个理論将能反映靜质量为 m 自旋为零的荷电粒子的存在. 为了証明这一点,我們将場的运动分解为方程 (3,7) 的本征振动, 从而使对易关系、哈密頓量和运动方程納入一个新的形式. 在新形式中,可以立刻求得方程的解,从而得到場的能量、动量以及电荷等等物理量的本征值. 这些本征值是不連續的,它們反映了量子場的不連續性和粒子性.

方程 (3,7) 的最簡单的本征振动是平面波振动. 我們首先将 φ, φ^*, π, 和 π^* 分解为平面波. 为了便于討論,我們假定場在一个立方形空間的边界上具有周期性. 这样就可以使无穷多的振动方式可以計数. 为了方便起見,我們选择这个立方体的边的长度为长度的单位. 于是就可以将 φ, φ^*, π, π^* 写成如下的迭加式:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \sum_{\vec{k}} q_{\vec{k}}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad \pi = \sum_{\vec{k}} p_{\vec{k}}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \\ \varphi^* &= \sum_{\vec{k}} q^*_{\vec{k}}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad \pi^* = \sum_{\vec{k}} p^*_{\vec{k}}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

其中 $q_{\vec{k}}$, $q^*_{\vec{k}}$, $p_{\vec{k}}$, $p^*_{\vec{k}}$ 代表振幅，是时間的函数，在量子化以后由算符代表。由于場在立方体壁上的周期性，波矢的分量必須滿足如下的条件：

$$k_i = 2\pi n_i, \quad i = 1, 2, 3; \qquad (3,19)$$
$$n_i = 0, \quad \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots.$$

可以將(3,18)倒过来写为：

$$\left.\begin{aligned} q_{\vec{k}} &= \int d\vec{x}\varphi(x)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad p_{\vec{k}} = \int d\vec{x}\pi(x)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \\ q^*_{\vec{k}} &= \int d\vec{x}\varphi^*(x)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad p^*_{\vec{k}} = \int d\vec{x}\pi^*(x)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}. \end{aligned}\right\} \qquad (3,20)$$

从(3,20)和对易关系 (3,15) 可以得到 q, q^*, p, p^* 之間的如下对易关系：

$$\left.\begin{aligned} [q_{\vec{k}}, p_{\vec{k}'}] &= i\delta_{\vec{k}\vec{k}'}, \\ [q^*_{\vec{k}}, p^*_{\vec{k}'}] &= i\delta_{\vec{k}\vec{k}'}, \end{aligned}\right\} \qquad (3,21)$$

其中 $\delta_{\vec{k}\vec{k}'} \equiv \delta_{k_1k'_1}\delta_{k_2k'_2}\delta_{k_3k'_3}$. q, q^*, p, p^* 之間的其余各对均可相互对易.

从(3,13), (3,17)和(3,18)可以得到 H^C 的另一形式：

$$H^C = \sum_{\vec{k}} \{p^*_{\vec{k}} p_{\vec{k}} + \omega^2 q^*_{\vec{k}} q_{\vec{k}}\}, \quad \omega^2 = m^2 + \vec{k}^2. \qquad (3,22)$$

从(3,21)和(3,22)可以得到 q, q^*, p, 和 p^* 的运动方程：

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_{\vec{k}}}{dt} &= p^*_{\vec{k}}, \quad \frac{dp_{\vec{k}}}{dt} = -\omega^2 q^*_{\vec{k}}, \\ \frac{dq^*_{\vec{k}}}{dt} &= p_{\vec{k}}, \quad \frac{dp^*_{\vec{k}}}{dt} = -\omega^2 q_{\vec{k}}. \end{aligned}\right\} \qquad (3,23)$$

因此，以不同的 $\vec{k}$ 标誌的不同自由度的运动可以完全分开。我們現在可以用解諧振子問題的方法来解各个自由度的方程。方程(3,21), (3,23)和表式(3,22)与方程(3,15), (3,14)和表式 (3,13) 及(3,17)完全等效，它們不过是后者的另一种写法而已。由于現在各个自由度的运动已經能分开，所以前者解起来要方便得多.

在解方程以前，我們先将場的动量 $\vec{P}^C$ 和电荷 Q 的表式写下.

从(2,47)可得:

$$\vec{P}^{C}=\sum_{\vec{k}} i\vec{k}\{p_{\vec{k}}^{*}q_{\vec{k}}^{*}-q_{\vec{k}}p_{\vec{k}}\}, \tag{3,24}$$

而从(2,49)可得:

$$Q=ie\sum_{\vec{k}}\{p_{\vec{k}}^{*}q_{\vec{k}}^{*}-q_{\vec{k}}p_{\vec{k}}\}. \tag{3,25}$$

§3,6. 量子場的粒子性

从(3,23)可以看出，$q_{\vec{k}}$，$q_{\vec{k}}^{*}$，$p_{\vec{k}}$ 和 $p_{\vec{k}}^{*}$ 都是 $e^{-i\omega t}$ 和 $e^{i\omega t}$ 的迭加. 我們將 $q_{\vec{k}}$ 和 $q_{\vec{k}}^{*}$ 写成如下的形式:

$$q_{\vec{k}}=\frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a_{\vec{k}}e^{-i\omega t}+b_{-\vec{k}}^{*}e^{i\omega t}), \tag{3,26a}$$

$$q_{\vec{k}}^{*}=\frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a_{\vec{k}}^{*}e^{i\omega t}+b_{-\vec{k}}e^{-i\omega t}), \tag{3,26b}$$

其中 a，b，a^{*}，b^{*} 都是不随时間，空間坐标而变的算符. 利用(3,23)可得:

$$\left.\begin{aligned}p_{\vec{k}}&=i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a_{\vec{k}}^{*}e^{i\omega t}-b_{-\vec{k}}e^{-i\omega t}),\\ p_{\vec{k}}^{*}&=-i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a_{\vec{k}}e^{-i\omega t}-b_{-\vec{k}}^{*}e^{+i\omega t}).\end{aligned}\right\} \tag{3,27}$$

从(3,26)和(3,27)可以得:

$$\left.\begin{aligned}a_{\vec{k}}&=\left\{\sqrt{\frac{\omega}{2}}q_{\vec{k}}+i\sqrt{\frac{1}{2\omega}}p_{\vec{k}}^{*}\right\}e^{i\omega t},\\ b_{-\vec{k}}&=\left\{\sqrt{\frac{\omega}{2}}q_{\vec{k}}^{*}+i\sqrt{\frac{1}{2\omega}}p_{\vec{k}}\right\}e^{i\omega t},\\ a_{\vec{k}}^{*}&=\left\{\sqrt{\frac{\omega}{2}}q_{\vec{k}}^{*}-i\sqrt{\frac{1}{2\omega}}p_{\vec{k}}\right\}e^{-i\omega t},\\ b_{-\vec{k}}^{*}&=\left\{\sqrt{\frac{\omega}{2}}q_{\vec{k}}-i\sqrt{\frac{1}{2\omega}}p_{\vec{k}}^{*}\right\}e^{-i\omega t}.\end{aligned}\right\} \tag{3,28}$$

从(3,21)可以得到 a, a^*, b, b^* 之間如下的对易关系:

$$\left.\begin{aligned}[a_{\vec{k}}, a^*_{\vec{k}'}] &= \delta_{\vec{k}\vec{k}'},\\ [b_{\vec{k}}, b^*_{\vec{k}'}] &= \delta_{\vec{k}\vec{k}'},\end{aligned}\right\} \tag{3,29}$$

其余各对算符都可以相互对易. 引进下列厄米(Hermite)算符:

$$\left.\begin{aligned}N_{\vec{k}a} &= a^*_{\vec{k}}\, a_{\vec{k}},\\ N_{\vec{k}b} &= b^*_{\vec{k}}\, b_{\vec{k}}.\end{aligned}\right\} \tag{3,30}$$

可以利用(3,26) 和 (3,27) 將場的总能量 H^c, 总动量 $\vec{P}^c$ 和总电荷 Q 改写成如下的表式:

$$\left.\begin{aligned}H^c &= \sum_{\vec{k}} \omega\{N_{\vec{k}a} + N_{\vec{k}b} + 1\},\\ \vec{P}^c &= \sum_{\vec{k}} \vec{k}\{N_{\vec{k}a} + N_{\vec{k}b}\},\\ Q &= \sum_{\vec{k}} e\{N_{\vec{k}a} - N_{\vec{k}b}\}.\end{aligned}\right\} \tag{3,31}$$

对易关系(3,29)和在(3,31)中的 H^c 的新表式与对易关系(3,21)和 H^c的表式(3,22)完全等效,但是前者比較更容易处理.这是由于在(3,21)和(3,22)中相应于不同 $\vec{k}$ 的不同的自由度虽然可以分开,但是和每一个 $\vec{k}$ 相应有二个由 $q_{\vec{k}}$ 和 $q^*_{\vec{k}}$ 标誌的自由度. 这二个自由度在 H^c 中不能分开. 在用了变换(3,26)以后,相应于每一个 $\vec{k}$ 的二个自由度由 a 和 b 标誌,它們在 H^c 中完全分开. 因此,可以分别就每一个自由度求解.

为了求得各个算符的显示表式,必須选择一套完全的、可以相互对易的力学量作为表式的基. 显然,所有的 $N_{\vec{k}a}$ 和 $N_{\vec{k}b}$ 形成这样一套力学量. 我們取所有的 $N_{\vec{k}a}$ 和 $N_{\vec{k}b}$ 都表示成对角矩陣. 在这样的表象中, H^c, $\vec{P}^c$ 和 Q 也是对角矩陣. 在下一节中我們将証明,所有的 $N_{\vec{k}a}$ 和 $N_{\vec{k}b}$ 都具有如下的形式:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}; \tag{3,32}$$

它們都具有如下的本征值：

$$0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots. \tag{3,33}$$

所有的 $a_{\vec{k}}$ 和 $b_{\vec{k}}$ 都具有如下的形式：

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}. \tag{3,34}$$

所有的 $a^*_{\vec{k}}$ 和 $b^*_{\vec{k}}$ 都具有如下的形式：

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}. \tag{3,35}$$

由此可見，各个自由度的能量、动量和电荷都只能取不連續的数值．例如：以 $\vec{k}$ 和 a 标誌的自由度的能量、动量和电荷只能以 ω, $\vec{k}$ 和 e 为最小单位作跳跃式的改变；以 $\vec{k}$ 和 b 标誌的自由度的能量、动量和电荷只能以 ω, $\vec{k}$ 和 $-e$ 为最小单位作跳跃式的改变．而且，(3,22) 中的 ω 和 $\vec{k}$ 之間的关系与一个靜質量为 m 的粒子的能量和动量之間的关系完全一样．因此，我們可以作如下的物理詮释：由 φ 描述的場是由一份份的粒子組成的；粒子分为二类，以 a 和 b 分别标誌；以 a 标誌的粒子具有电荷 e，以 b 标誌的粒子具有电荷 $-e$；所有的粒子都具有靜質量 m．

不难看出，算符 a 和 b 的作用在于減少粒子的数目，因此可以叫做粒子的消灭算符．算符 a^* 和 b^* 的作用在于增加粒子的数目，因此可以叫做粒子的产生算符．

§3,7. $a_{\vec{k}}$, $a^*_{\vec{k}}$, $b_{\vec{k}}$, $b^*_{\vec{k}}$, $N_{\vec{k}a}$ 和 $N_{\vec{k}b}$ 的显示表式

从对易关系(3,29)和在(3,31)中的 H^c 的表式可以看出，以 $\vec{k}$, a 或 b 标志的自由度的运动不仅可以完全分开，而且所得到的解的数学形式应該是一样的。因此我們可以将标符 $\vec{k}$, a 或 b 略去不写，只一般地求 a, a^* 和 $N = a^*a$ 的表式。我們以

$$N_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots \tag{3,36}$$

代表 N 的各个本征值，并以 a^*_{nm} 和 a_{nm} 代表算符 a^* 和 a 的矩陣元。設 $|\rangle_n$ 是 N 的本征函数，N 的相应本征值是 N_n，亦即

$$N|\rangle_n = N_n|\rangle_n. \tag{3,37}$$

可以証明，$a|\rangle_n$ 和 $a^*|\rangle_n$ 也是 N 的本征函数，其相应的本征值是 $(N_n - 1)$ 和 $(N_n + 1)$。利用对易关系(3,29)，可得：

$$\left.\begin{aligned} N(a|\rangle_n) &= a^*aa|\rangle_n = (aa^* - 1)a|\rangle_n = (N_n - 1)a|\rangle_n, \\ N(a^*|\rangle_n) &= a^*aa^*|\rangle_n = a^*(a^*a + 1)|\rangle_n = (N_n + 1)a^*|\rangle_n. \end{aligned}\right\} \tag{3,38}$$

因此，从 $|\rangle_n$ 出发可以得到一系列 N 的本征函数，和它們相应的本征值是 $(N_n \pm 1)$, $(N_n \pm 2)$, $(N_n \pm 3)\cdots$。我們在标志矩陣的行和列时，令和行列号碼 n 相应的本征值是 N_n，和号碼 $(n \pm 1)$ 相应的本征值是 $(N_n \pm 1)$，和号碼 $(n \pm 2)$ 相应的本征值是 $(N_n \pm 2)$，$\cdots$等等。那末 a 和 a^* 的矩陣元就取下列形式：

$$\left.\begin{aligned} a_{nm} &= a_n \delta_{n,m-1}, \\ a^*_{nm} &= a^*_m \delta_{n-1,m}. \end{aligned}\right\} \tag{3,39}$$

由于 a 和 a^* 是相互厄米共軛的算符，因此 a_n 和 a^*_n 是相互共軛的复数。根据定义(3,30)有：

$$N_{nm} = a^*_{nl}\, a_{lm} = a^*_l \delta_{n-1,l}\, a_l \delta_{l,m-1} = a^*_{n-1} a_{n-1} \delta_{nm} = N_n \delta_{nm}. \tag{3,40}$$

因此有：

$$N_n = a^*_{n-1}\, a_{n-1} \geqslant 0. \tag{3,41}$$

亦即 N 的任何本征值必須是大于零或等于零的实数。然而，根据(3,38)式，N 可以有一系列本征值，很可能其中有小于零的。为了

使(3,38)式和(3,41)式不相矛盾，在下列一系列波函数中

$$|\rangle_n,\ a|\rangle_n,\ a^2|\rangle_n,\ a^3|\rangle_n\cdots \tag{3,42}$$

必須从某一个波函数 $a^l|\rangle_n$ 起和以后的波函数都等于零。因此，真正的波函数只到 $a^{l-1}|\rangle_n$ 为止，在它以后的波函数都恆等于零，当然就不能算是代表物理状态的波函数了。可以証明，相应于 $a^{l-1}|\rangle_n$ 的本征值是零：

$$Na^{l-1}|\rangle_n = a^*a^l|\rangle_n = 0. \tag{3,43}$$

因此，N 只能取如(3,33)中所示的一系列本征值，他的显示表式是(3,32)，其中行和列的号碼 n 从零开始算起，逐一增加。N 的相应本征值是：

$$N_n = n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{3,44}$$

从(3,41)可以求得 a_{n-1} 和 a^*_{n-1}。我們可以选择一定的相位，使

$$a_{n-1} = a^*_{n-1} = \sqrt{n}; \tag{3,45}$$

这样就証明了，a 和 a^* 分别具有如(3,34)和(3,35)的形式。

§ 3,8. 分解为球面波

上面我們看到，将場的运动分解为平面波以后，就很容易地求得了总能量、总动量、和总电荷的本征值。另一个有兴趣的問題是求場的总角动量 M^c_{jk} 的本征值。但是，用同样的方法求 M^c_{jk} 的本征值就很不方便。在 § 3,7 和 § 3,6 所采用的表象中，場的角动量不是对角矩陣。求角动量的本征值的合适方法是将場的运动分解为方程 (3,7) 的另一种本征运动——球面波振动，为了便于討論，我們假定場存在在一个球内。球的半径 R 被选作长度的单位，在球面上 φ 和 φ^* 都等于零。这样就可以使无穷多的振动方式可以計数。由于方程(3,7)是齐次的，它具有一套完全的、正交的和满足边界条件的本征解。任何满足边界条件的函数都可以展开成为这些本征解的迭加。我們首先要寻求方程 (3,7) 的满足边界条件的本征解。

为此，我們引进球坐标 r，θ，和 ϕ，将方程 (3,7) 写成如下的形式：

$$\left\{\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{M^2}{r^2}-m^2-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right\}\varphi=0, \qquad (3,46)$$

其中

$$M^2=-\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}.$$

我們假定 φ 的解具有如下的形式：

$$\varphi=\varphi(r,\theta,\phi)e^{-i\omega t}, \qquad (3,47)$$

那末(3,46)就具有下列的形式：

$$\left\{\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{M^2}{r^2}\right\}\varphi(r,\theta,\phi)=-k^2\varphi(r,\theta,\phi), \qquad (3,48)$$

这里

$$k^2+m^2=\omega^2.$$

我們試用分离变数的方法，令

$$\varphi(r,\theta,\phi)=\rho(r)Y_{L,M}(\theta,\phi), \qquad (3,49)$$

其中 $Y_{L,M}(\theta,\phi)$ 是归一化的球諧函数．那末方程(3,48)就成为：

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\cdot\frac{d}{dr}-\frac{1}{r^2}L(L+1)+k^2\right\}\rho(r)=0. \qquad (3,50)$$

(3,50)的解是：

$$\rho(r)=AJ_{L+\frac{1}{2}}(kr)\cdot\frac{1}{\sqrt{kr}}, \qquad (3,51)$$

其中 A 是归一化常数．$J_{L+\frac{1}{2}}$ 代表貝塞耳 (Bessel) 函数．由于边界条件，应該有：

$$J_{L+\frac{1}{2}}(k)=0. \qquad (3,52)$$

因此，k 不能取任意的数值，而只能取一系列值

$$k_{nL}\begin{cases}n=0,1,2,3\cdots,\\ L=0,1,2,3\cdots,\end{cases} \qquad (3,53)$$

其中 n 代表 $J_{L+\frac{1}{2}}(k)$ 在 $k=0$ 和 $k=k_{nL}$ 之間等于零的次数．与此相应，ω 也不能取任意的数值，而只能取一系列由(3,48)中第二

式所决定的数值。为了使 $\varphi(r,\theta,\phi)$ 归一化，必须有：

$$A^*A\int_0^1 r^2\,dr\cdot\frac{1}{k_{nL}\cdot r}\cdot J^2_{L+\frac{1}{2}}(k_{nL}r)=1, \tag{3,54}$$

亦即

$$A^*A=\frac{-2k_{nL}}{J_{L-\frac{1}{2}}(k_{nL})\,J_{L+\frac{1}{2}}(k_{nL})}. \tag{3,55}$$

設 $k_{nL}\gg 1$，那末就有：

$$A^*A\cong\pi\cdot k^2_{nL}. \tag{3,56}$$

这样，我們就得到了方程(3,7)的一套完全而正交的本征解：

$$\varphi_{n,L,M}(r,\theta,\phi)\begin{cases} n=0,1,2,\cdots,\\ L=0,1,2,\cdots,\\ M=0,\pm1,\pm2\cdots\pm L. \end{cases} \tag{3,57}$$

为了写起来方便，我們以一个字母 s 代表三个字母 n，L、M 去标誌不同的本征解。

將 φ，φ^*，π 和 π^* 展开成为如下的迭加：

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x)&=\sum_s q_s\varphi_s(r,\theta,\phi),\quad \pi(x)=\sum_s p_s\varphi_s^*(r,\theta,\phi),\\ \varphi^*(x)&=\sum_s q_s^*\varphi_s^*(r,\theta,\phi),\quad \pi^*(x)=\sum_s p_s^*\varphi_s(r,\theta,\phi), \end{aligned}\right\} \tag{3,58}$$

其中 q_s，q_s^*，p_s，p_s^* 代表球面波的振幅，是时間的函数，在量子化以后由算符代表。(3,58)可以倒过来写为：

$$\left.\begin{aligned} q_s&=\int d\dot{x}\varphi(x)\varphi_s^*(r,\theta,\phi),\quad p_s=\int d\dot{x}\pi(x)\varphi_s(r,\theta,\phi),\\ q_s^*&=\int d\dot{x}\varphi^*(x)\varphi_s(r,\theta,\phi),\quad p_s^*=\int d\dot{x}\pi^*(x)\varphi_s^*(r,\theta,\phi). \end{aligned}\right\} \tag{3,59}$$

从(3,59)和对易关系(3,15)可以得到 q_s，q_s^*，p_s、p_s^* 之間的对易关系。考虑到 φ_s 的正交性和归一性，就有：

$$\left.\begin{aligned} [q_s,p_{s'}]&=i\delta_{ss'},\\ [q_s^*,p_{s'}^*]&=i\delta_{ss'}, \end{aligned}\right\} \tag{3,60}$$

其中 $\delta_{ss'}\equiv\delta_{nn'}\,\delta_{LL'}\,\delta_{MM'}$；其他各对算符之間都可以对易。从

(3,13),(3,17)和(3,58)可以得到 H^C 的另一形式. 利用 (3,48) 就得:

$$H^C = \sum_s \{p_s^* p_s + \omega_s^2 q_s^* q_s\},$$
$$\omega_s^2 = m^2 + \vec{k}_s^2. \tag{3,61}$$

从(3,60)和(3,61)可以得到 q_s, q_s^*, p_s, p_s^* 的运动方程:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_s}{dt} &= p_s^*, \quad \frac{dp_s}{dt} = -\omega_s^2 q_s^*, \\ \frac{dq_s^*}{dt} &= p_s, \quad \frac{dp_s^*}{dt} = -\omega_s^2 q_s. \end{aligned}\right\} \tag{3,62}$$

方程(3,60),(3,62)和表式(3,61)完全等效于方程(3,15),(3,14)和表式(3,13)及(3,17).在(3,61)和(3,62)中,属于不同 s 的不同自由度的运动已經分开. 但是,相应于每一个 s 有二个自由度,分别由 q_s 和 q_s^* 描述;而在(3,61)和(3,62) 中这一对自由度的运动还沒有分开. 为了求解方便起見,可以作进一步的变換.

在作进一步的变換之前,我們先写下場的角动量和場的电荷的表式. 利用(2,48)和(3,58),可以得到角动量的第三分量 M_{12}^C 如下的表式:

$$M_{12}^C = \sum_s -iM_s\{p_s q_s - q_s^* p_s^*\}. \tag{3,63}$$

利用(2,49)和(3,58),可以得到电荷 Q 如下的表式:

$$Q = \sum_s ie\{p_s^* q_s^* - q_s p_s\} \tag{3,64}$$

可以求出动量 $\vec{P}^C$ 的相应表式,但是所得到的結果十分复杂,不予写下. 将运动分解为球面波不宜于討論有关动量的問題,正和将运动分解为平面波不宜于討論有关角动量的問題一样.

§ 3,9. 場的角动量

上节已經提到,为了将 q_s 和 q_s^* 所描述的自由度的运动分开,

必須进行进一步的变换. 从(3,62)可以看出，q_s, q_s^*, p_s, p_s^* 都是 $e^{-i\omega_s t}$ 和 $e^{i\omega_s t}$ 的迭加. 設以 s 作为 (n, L, M) 的簡写，以 s_- 代表 $(n, L, -M)$，并取归一化常数 A 为实数，則有：

$$\varphi_s^*(r, \theta, \phi) = \varphi_{s_-}(r, \theta, \phi)(-1)^M. \tag{3,65}$$

我們将 q_s 和 q_s^* 写成如下的形式：

$$\left.\begin{aligned} q_s &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_s}}(a_s e^{-i\omega_s t} + b_{s_-}^* e^{i\omega_{s_-} t}(-1)^M), \\ q_s^* &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_s}}(a_s^* e^{i\omega_s t} + b_{s_-} e^{-i\omega_{s_-} t}(-1)^M), \end{aligned}\right\} \tag{3,66}$$

其中 a, a^*, b, b^* 都是不随时間、空間而变的算符. 利用(3,62)可得：

$$\left.\begin{aligned} p_s &= i\sqrt{\frac{\omega_s}{2}}(a_s^* e^{i\omega_s t} - b_{s_-} e^{-i\omega_{s_-} t}(-1)^M), \\ p_s^* &= -i\sqrt{\frac{\omega_s}{2}}(a_s e^{-i\omega_s t} - b_{s_-}^* e^{i\omega_{s_-} t}(-1)^M). \end{aligned}\right\} \tag{3,67}$$

从(3,66)和(3,67)可以得：

$$\left.\begin{aligned} a_s &= \left\{\sqrt{\frac{\omega_s}{2}} q_s + i\sqrt{\frac{1}{2\omega_s}} p_s^*\right\} e^{i\omega_s t}, \\ a_s^* &= \left\{\sqrt{\frac{\omega_s}{2}} q_s^* - i\sqrt{\frac{1}{2\omega_s}} p_s\right\} e^{-i\omega_s t}, \\ b_{s_-} &= \left\{\sqrt{\frac{\omega_s}{2}} q_s^* + i\sqrt{\frac{1}{2\omega_s}} p_s\right\}(-1)^M e^{i\omega_{s_-} t}, \\ b_{s_-}^* &= \left\{\sqrt{\frac{\omega_s}{2}} q_s - i\sqrt{\frac{1}{2\omega_s}} p_s^*\right\}(-1)^M e^{-i\omega_{s_-} t}. \end{aligned}\right\} \tag{3,68}$$

从(3,60)可以得到 a, a^*, b, b^* 之間如下的对易关系：

$$\left.\begin{aligned} [a_s, a_{s'}^*] &= \delta_{s,s'}, \\ [b_s, b_{s'}^*] &= \delta_{s,s'}; \end{aligned}\right\} \tag{3,69}$$

其余各对算符都可以相互对易. 引进下列厄米算符：

$$\left.\begin{aligned} N_{sa} &= a_s^* a_s, \\ N_{sb} &= b_s^* b_s, \end{aligned}\right\} \tag{3,70}$$

可以利用(3,66)和(3,67)將場的能量、H^c、角动量的第三分量 M_{12}^c 和电荷 Q 改写成如下的表式：

$$\left.\begin{aligned} H^c &= \sum_s \omega_s\{N_{sa} + N_{sb} + 1\}, \\ M_{12}^c &= \sum_s M_s\{N_{sa} + N_{sb}\}, \\ Q &= \sum_s e\{N_{sa} - N_{sb}\}. \end{aligned}\right\} \tag{3,71}$$

对易关系(3,69)和在(3,71)中的 H^c 与对易关系 (3,60) 和 H^c 的表式(3,61)完全等效，但前者比較更容易处理，因为所有各自由度的运动都已經分开。假使取 N_{sa} 和 N_{sb} 为一套完全的可以对易的力学量，那末可以立即看出，N_{sa} 和 N_{sb} 具有和 (3,32) 一样的形式，a_s 和 b_s 具有和(3,34)一样的形式，a_s^* 和 b_s^* 具有和 (3,35) 一样的形式。因此，場的角动量也和能量、动量和电荷一样只能取不連續的数值，以 1 为最小单位，作跳跃式的变化。φ 可以作这样的解释：以 s 和 a 标誌的粒子具有靜质量 m，电荷 e，能量 ω_s，动量 k_s 和軌道角动量 L；軌道角动量的第三分量为 M。以 s 和 b 标志的粒子具有靜质量 m，电荷 $-e$，能量 ω_s，动量 k_s 和軌道角动量 L；軌道角动量的第三分量为 M。算符 a 和 b 的作用在于消灭粒子，算符 a^* 和 b^* 的作用在于产生粒子。

可以看出，由場 φ 所描述的粒子服从鮑色 (Bose) 統計法則。主要在于，可以有 $n > 1$ 个粒子具有同样的动量、能量和电荷，因为 N_a 和 N_b 具有如(3,33)所給的一系列本征值；所有的 $N_{\vec{k}a}$ 和 $N_{\vec{k}b}$ 形成一套完全的、可以对易的力学量，因此情态可以用它們的本征值来标志。例如，我們可以說：在动量等于 $\vec{k}_1$ 的情态中有荷电 e 的粒子一个，在动量等于 $\vec{k}_2$ 的情态中有荷电 e 的粒子一个；一共有二个粒子。在这样的說法下，这二个粒子不能分辨。我們不能将这二个粒子加以标志而分别称为甲粒子和乙粒子，并說：甲粒子

具有动量 $\vec{k}_1$ 而乙粒子具有动量 $\vec{k}_2$ 的几率有多少；甲粒子具有动量 $\vec{k}_2$ 而乙粒子具有动量 $\vec{k}_1$ 的几率又有多少. 这正是同类基本粒子的不可分辨性. 因此，可以說，場 φ 所描述的是服从鮑色統計法則的基本粒子.

§ 3,10. 对易关系的相对論不变性

对易关系和运动方程是量子場論的基本方程，必須运动方程和对易关系都具有相对論不变性，整个理論才会是相对論不变的. 可以看出，运动方程(3,7)具有明显的洛仑兹不变性；但是，对易关系(3,15)并不具有显示的洛仑兹不变的形式. 在(3,15)中，时間和空間处于不对称的地位，他要求 $t = t'$，但并不要求 $\vec{x} = \vec{x}'$. (3,15)右方的 δ 函数是空間坐标的函数，但不是时間坐标的函数. 为了检驗整个理論是否具有洛仑兹不变性，必須求 $t \neq t'$ 时的对易关系. 利用(3,18)，(3,26)和(3,27)，可以将 $\varphi(x)$ 和 $\varphi^*(x)$ 写成：

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \{a_{\vec{k}}\, e^{ikx} + b^*_{\vec{k}}\, e^{-ikx}\}, \\ \varphi^*(x) &= \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \{a^*_{\vec{k}}\, e^{-ikx} + b_{\vec{k}}\, e^{ikx}\}, \end{aligned}\right\} \tag{3,72}$$

其中 $kx = k_\mu x_\mu$，$k_4 = i\omega$. 利用对易关系(3,29)和表式(3,72)，可以求得不同时間的場物理量之間的对易关系. 我們有：

$$\left.\begin{aligned} &[\varphi(x), \varphi(x')] = 0, \\ &[\varphi^*(x), \varphi^*(x')] = 0, \\ &[\varphi(x), \varphi^*(x')] = i\Delta_m(x - x'), \end{aligned}\right\} \tag{3,73}$$

其中函数 $\Delta(x)$ 的定义是：

$$\begin{aligned} \Delta_m(x) &= \sum_{\vec{k}} \frac{-i}{2\omega} \{e^{ikx} - e^{-ikx}\} = \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} \frac{1}{2\omega} \{e^{-i\omega t} - e^{i\omega t}\} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d^4k\, e^{ikx}\, \delta(k^2 + m^2)\varepsilon(k), \end{aligned} \tag{3,74}$$

其中 $\varepsilon(k)=\frac{k_0}{|k_0|}$；在从对 $\vec{k}$ 求和变到对 $d\vec{k}$ 积分的过程中应用(3,19)式，而在末一步推导中应用了 $\omega_{\vec{k}}^2$ 和 $\vec{k}^2$ 之間的关系(3,22)及关系

$$\delta(k_0^2-\omega^2)=\frac{1}{2\omega}\{\delta(k_0-\omega)+\delta(k_0+\omega)\},\quad \omega>0. \tag{3,75}$$

在(3,73)中，t 可以不等于 t'. 对于正洛仑兹羣的变换和坐标移动来說，对易关系(3,73)具有显示的不变性.

在討論坐标反射变换和对易关系之前，我們先指出，函数 $\Delta_m\equiv\Delta_m(\vec{x},t)$ 具有如下的性質：

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta_m(\vec{x},t)=\Delta_m(-\vec{x},t),\\
&\Delta_m(\vec{x},t)=-\Delta_m(\vec{x},-t),\\
&\Delta_m(\vec{x},t)=-\Delta_m(-\vec{x},-t),\\
&(\Box-m^2)\Delta_m(x)=0,\\
&\left[\frac{\partial}{\partial t}\Delta_m(x)\right]_{t=0}=-\delta(\vec{x}),\\
&\Delta_m(\vec{x},0)=0,\\
&\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\Delta_m(\vec{x},t)\right]_{t=0}=0,\\
&\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\Delta_m(\vec{x},t)\right]_{x=0}=0,\quad j=1,2,3.
\end{aligned}\right\} \tag{3,76}$$

在空間反射之下，

$$\vec{x}\longrightarrow-\vec{x},\qquad t\longrightarrow t; \tag{3,77}$$

波函数和場物理量則作如下的变换：

$$\left.\begin{aligned}
&|\rangle\longrightarrow R|\rangle\\
&\varphi(\vec{x},t)\longrightarrow R\varphi(\vec{x},t)R^{-1}=P\varphi(-\vec{x},t),\\
&\varphi^*(\vec{x},t)\longrightarrow R\varphi^*(\vec{x},t)R^{-1}=P\varphi^*(-\vec{x},t),
\end{aligned}\right\} \tag{3,78}$$

其中 R 是一个反映空間反射的么正变换，P 代表粒子的內禀宇称. 若 φ 是一个标量，則 $P=1$；若 φ 是一个贋标量，則 $P=-1$. 總

过空間反射以后，对易关系变为：

$$\left.\begin{aligned}&[\varphi(-\vec{x},t),\ \varphi(-\vec{x}',t')]=0,\\&[\varphi^*(-\vec{x},t),\ \varphi^*(-\vec{x}',t')]=0,\\&[\varphi(-\vec{x},t),\ \varphi^*(-\vec{x}',t')]=i\Delta_m(\vec{x}-\vec{x}',t-t').\end{aligned}\right\}\quad(3,79)$$

考虑到，$\Delta_m(\vec{x},t)=\Delta_m(-\vec{x},t)$，显然，对易关系(3,79)和对易关系(3,73)是完全一样的。

§ 3.11. 对易关系和时間反演

当我們进一步討論对易关系和时間反演之間的連系时，問題就比較复杂些。时間反演和空間反射具有某些不同的特点。例如：函数 $\Delta_m(x)$ 在空間反射下保持不变，但是，在时間反演下，根据(3,76)中的第二式，$\Delta_m(x)$ 应該改变一个符号。我們在討論空間反射时利用鏡子里的鏡象来帮助我們理解这一变換的物理意义。同样，在討論时間反演时，也有一个方法可以帮助我們理解这一变換的物理意义。先将所討論的物理过程拍成电影，然后，将电影从尾到头倒过来放演。那末，在銀幕上所看到的物理过程就是原来的物理过程的时間反演。例如：假使原来的物理現象是一个自由粒子，具有动量 $\vec{p}$，自旋和动量平行。那末，在空間反射以后，所得到的物理現象会是一个自由粒子，具有动量 $-\vec{p}$，自旋和动量反平行；在作时間反演以后，所得到的物理現象也是一个自由粒子，具有动量 $-\vec{p}$，但是自旋仍旧和动量平行。在这里，所謂自旋和动量平行也就是自旋方向和动量方向之間的关系一如右手拳头和大姆指之間的关系；所謂自旋和动量反平行就是自旋方向和动量方向之間的关系一如左手拳头和大姆指之間的关系。

为了研究在量子場論中波函数和物理量經过时間反演应該如何变換，先討論一下量子力学中的时間反演是有益的。我們先討論一个具有动量 $\vec{p}$ 和能量 E 的自由粒子。在空間反射以后，它变成一个动量等于 $-\vec{p}$ 的粒子。这一点，从波函数的变換也可以清楚地看出来，原来粒子的波函数 $\psi_{\vec{p}}(\vec{x},t)$ 是一个平面波，可以写成

如下的形式：

$$\psi_{\vec{p}}(\vec{x},\ t) = e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}-iEt}, \tag{3,80}$$

在空間反射

$$\vec{x} = -\vec{x}', \qquad t = t' \tag{3,81}$$

的变换中，这一波函数就变换为：

$$\psi_{-\vec{p}}(\vec{x}',\ t') = e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}'-iEt'}. \tag{3,82}$$

(3,82) 正是一个动量为 $-\vec{p}$ 的粒子的波函数. 因此，在空間反射变换下，

$$\psi_{\vec{p}}(\vec{x},\ t) \to \psi_{-\vec{p}}(\vec{x}',\ t'). \tag{3,83}$$

但是，在时間反演

$$\vec{x} = \vec{x}', \qquad t = -t' \tag{3,84}$$

的变换中，原来的波函数就变为：

$$\psi^*_{\vec{p}}(\vec{x}',t) = e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}'+iEt'}, \tag{3,85}$$

这是一个动量等于 $-\vec{p}$ 的粒子的波函数的共軛复数. 因此，在时間反演变换中，

$$\psi_{\vec{p}}(\vec{x},\ t) \to \psi^*_{-\vec{p}}(\vec{x}',\ t'). \tag{3,86}$$

在量子場論中，討論时間反演还必須考虑一些新的因素. 引进如下的定义：

$$\varphi_{\vec{k}}(\vec{x},\ t) = e^{ikx}, \qquad \varphi^*_{\vec{k}}(\vec{x},\ t) = e^{-ikx}. \tag{3,87}$$

可以将 $\varphi(x)$ 和 $\varphi^*(x)$ 的表式(3,72)改写为：

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\{a_{\vec{k}}\varphi_{\vec{k}}(\vec{x},t) + b^*_{\vec{k}}\varphi^*_{\vec{k}}(\vec{x},t)\},\\ \varphi^*(x) &= \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\{a^*_{\vec{k}}\varphi^*_{\vec{k}}(\vec{x},t) + b_{\vec{k}}\varphi_{\vec{k}}(\vec{x},t)\}.\end{aligned}\right\} \tag{3,88}$$

在时間反演变换中不仅

$$\varphi_{\vec{k}}(\vec{x},t) \to \varphi^*_{\vec{k}}(\vec{x}',t'), \quad \varphi^*_{\vec{k}}(\vec{x},t) \to \varphi_{-\vec{k}}(\vec{x}',t'), \tag{3,89}$$

而且算符 a、a^*、b、b^* 也要变换. 这是由于，本来是产生一个动量等于 $\vec{k}$ 的粒子的过程，在时間反演后就变为消灭一个动量等于 $-\vec{k}$ 的粒子的过程；本来是消灭一个动量等于 $\vec{k}$ 的粒子的过程，在时間反演后就变为产生一个动量等于 $-\vec{k}$ 的粒子的过程. 因此，

在时間反演变換中有：

$$\left.\begin{aligned} a_{\vec{k}} &\to a^{*}_{-\vec{k}}, \quad a^{*}_{\vec{k}} \to a_{-\vec{k}}, \\ b_{\vec{k}} &\to b^{*}_{-\vec{k}}, \quad b^{*}_{\vec{k}} \to b_{-\vec{k}}. \end{aligned}\right\} \tag{3,90}$$

將(3,89)和(3,90)結合起來，就得到 $\varphi(x)$ 和 $\varphi^{*}(x)$ 在时間反演时的变換規律：

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\vec{x}, t) &\to \varphi^{*}(\vec{x}', t') = \varphi^{*}(\vec{x}, -t), \\ \varphi^{*}(\vec{x}, t) &\to \varphi(\vec{x}', t') = \varphi(\vec{x}, -t). \end{aligned}\right\} \tag{3,91}$$

比較复杂一些的算符在时間反演时的变換規律还有其他一些特点。例如，算符

$$a_{\vec{k}_2} a_{\vec{k}_1} \tag{3,92}$$

所代表的物理过程是：先消灭一个动量等于 $\vec{k}_1$ 的粒子，然后消灭一个动量等于 $\vec{k}_2$ 的粒子，相应的时間反演物理过程是：先产生一个动量等于 $-\vec{k}_2$ 的粒子，然后再产生一个动量等于 $-\vec{k}_1$ 的粒子。因此，在时間反演时，(3,92)中的算符应該变換为：

$$a^{*}_{-\vec{k}_1} a^{*}_{-\vec{k}_2}, \tag{3,93}$$

其中不仅进行了如(3,90)所給出的变換，还将算符的次序顛倒过来。在时間反演变換中，有如下的一般規律：設 $A, B, C, D\cdots$ 一系列算符在时間反演时分别变換为 $A_T, B_T, C_T, D_T\cdots$；那末，算符 $ABCD\cdots\cdots$ 在时間反演时应变換为 $\cdots D_T C_T B_T A_T$。这反映了物理过程的先后次序在时間反演时顛倒出現的事实。

設以 $|\rangle$ 和 $|\rangle_T$ 分别代表某一物理情态的波函数及其时間反演情态的波函数，則一般地存在着如下的关系：

$$\left.\begin{aligned} |\rangle \to |\rangle_T &= T(\widetilde{|\rangle}) = T|\rangle^{*}, \\ A \to A_T &= T\tilde{A}T^{-1}, \\ B \to B_T &= T\tilde{B}T^{-1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}\right\} \tag{3,94}$$

其中 $|\rangle^{*}$ 代表 $|\rangle$ 的共軛复数波函数，$\tilde{A}$ 是矩陣 A 的位調矩陣，T 是一个么正矩陣。波函数的时間反演变換可以分为二步进行。第一步將波函数变成自己的共軛复数。第二步进行以 T 代表的么正

变换，这一么正变换的作用在于将 $\vec{p}$ 变成 $-\vec{p}$ 等等. 例如，变换(3,86)可以分成如下二步进行：

$$\psi_\beta(\vec{x},t)\to\psi^*_\beta(\vec{x}',t')\to\psi^*_{-\beta}(\vec{x}',t'). \tag{3,95}$$

同样，力学量的时間反演变换也可以分为二步进行. 第一步将力学量变成自己的位調量；第二步进行以 T 代表的么正变换. 假使将(3,90)中的变换分成二步进行，就得到：

$$\left.\begin{aligned} &a_{\vec{k}}\to a^*_{\vec{k}}\to a^*_{-\vec{k}},\quad a^*_{\vec{k}}\to a_{\vec{k}}\to a_{-\vec{k}},\\ &b_{\vec{k}}\to b^*_{\vec{k}}\to b^*_{-\vec{k}},\quad b^*_{\vec{k}}\to b_{\vec{k}}\to b_{-\vec{k}}. \end{aligned}\right\} \tag{3,96}$$

第一步将产生算符換成消灭算符，将消灭算符換成产生算符；第二步将以 $\vec{k}$ 标志的行和列变換成以 $-\vec{k}$ 标志的行和列. 不难看出，(3,91)可以写成：

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(\vec{x},t)\to\varphi^*(\vec{x},-t)=T\bar{\varphi}(x,t)T^{-1},\\ &\varphi^*(\vec{x},t)\to\varphi(\vec{x},-t)=T\bar{\varphi}^*(x,t)T^{-1}. \end{aligned}\right\} \tag{3,97}$$

应用(3,94) 和 (3,97)，就可以得到对易关系在时間反演时的变換規律. 首先，利用(3,94)，得：

$$\begin{aligned}[A_T,B_T]&=A_TB_T-B_TA_T=T\tilde{A}T^{-1}\,T\tilde{B}T^{-1}-T\tilde{B}T^{-1}T\tilde{A}T^{-1}=\\&=T\tilde{A}\tilde{B}T^{-1}-T\tilde{B}\tilde{A}T^{-1}=T\widetilde{BA}T^{-1}-T\widetilde{AB}T^{-1}=\\&=T[\widetilde{B,A}]T^{-1}.\end{aligned} \tag{3,98}$$

因此有：

$$\begin{aligned}&[\varphi(\vec{x},-t),\varphi(\vec{x}',-t')]=T[\widetilde{\varphi^*(\vec{x}',t'),\varphi^*(\vec{x},t)}]T^{-1}=0,\\&[\varphi^*(\vec{x},-t),\varphi^*(\vec{x}',-t')]=T[\widetilde{\varphi(\vec{x}',t'),\varphi(\vec{x},t)}]T^{-1}=0,\\&[\varphi(\vec{x},-t),\varphi^*(\vec{x}',-t')]=T[\widetilde{\varphi(\vec{x}',t'),\varphi^*(\vec{x},t)}]T^{-1}=i\Delta_m(x'-x).\end{aligned} \tag{3,99}$$

利用(3,76)中的第二式和第三式，立即可以証明，对易关系(3,99)和对易关系(3,73) 完全是一样的. 这就証明了对易关系对于全部洛仑兹变換都具有不变性. 因此，以上所討論的量子标量場和贋标量場的整个理論是相对論性的理論.

首先討論量子力学中的时間反演問題的是維格納 [Wigner,

1932]. 首先进行量子場論中时間反演問題討論的是渡边 [Watanabe, 1951, 1955], 許溫格 [Schwinger, 1951], 以及呂特 [Lüders, 1952]等人. 关于量子場論中一般的对称性理論問題, 可以参閱夏庇罗 [Шапиро, 1954] 的評介論文.

§ 3,12. 正反粒子共軛变換

从对易关系 (3,29) 和哈密頓量 (3,31) 中的第一式可以看出, 这一理論对于 a 和 b 是对称的. 假使进行如下的变換:

$$\left.\begin{aligned} a_{\vec{k}} &\longrightarrow b_{\vec{k}}, \quad b_{\vec{k}} \longrightarrow a_{\vec{k}}, \\ a^*_{\vec{k}} &\longrightarrow b^*_{\vec{k}}, \quad b^*_{\vec{k}} \longrightarrow a^*_{\vec{k}}, \end{aligned}\right\} \tag{3,100}$$

則可以看出, (3,29)和(3,31)中的第一式都將保持不变. 在这一变換中 $\varphi(x)$ 和 $\varphi^*(x)$ 作如下的变換:

$$\varphi(x) \longrightarrow \varphi^*(x), \qquad \varphi^*(x) \longrightarrow \varphi(x). \tag{3,101}$$

利用 (3,88) 中的 $\varphi(x)$ 和 $\varphi^*(x)$ 的表式就可以証明这一点. 显然, 不論对易关系的另一形式(3,15), 哈密頓量密度(3,13)和运动方程(3,7)在变換(3,101)都具有不变性. 这种不变性的物理意义是: 带有正电荷的粒子和带有負电荷的粒子在这一理論中具有完全对称的地位. 我們称变換(3,101)为电荷共軛变換.

这一理論也可以用来描写不带电荷的中性粒子. 这种中性粒子有二类, 一类由 a 标志, 另一类由 b 标志. 它們具有相同的質量、自旋和宇称. 我們可以称以 a 标志的粒子为正粒子, 称以 b 标志的粒子为反粒子. 也可以倒过来, 称以 b 标志的粒子为正粒子, 称以 a 标志的粒子为反粒子. 可以称(3,101) 所代表的变換为正反粒子共軛变換. 正粒子和反粒子在这一理論中具有完全对称的地位.

当然, 假使用这一理論来描述中性粒子, 那末, 表式 (3,11) 中的 J_μ 就不能理解为表示电流-电荷密度, 方程 (2,16) 也不能理解为电荷守恆定律. 我們可以将 J_μ/e 理解为正粒子和反粒子密度之差, 而将方程 (2,16) 理解为正粒子数和反粒子数之差的守恆定

律.

§ 3,13. 自旋为零的中性粒子的理論

表 1 中所列的目前已知自旋为零的基本粒子中，有荷电的如 $\pi^{\pm}$ 和 $K^{\pm}$，也有中性的如 π^0, K_1^0, K_2^0. 以上所建立的理論也可以用来描述中性的自旋为零的粒子. 但是，这一理論同时反映了一对粒子——正粒子和反粒子——的存在，因此用这一理論来描述 K_1^0 和 K_2^0 介子是适当的. 这些介子具有相同的質量、自旋和宇称，因此，可以用一个复数場 φ 和 φ^* 来統一地反映它們. 然而，这一理論却不能用来描述 π^0 介子. 这是因为，只存在着一种 π^0 介子，并不存在另外一种質量、自旋和宇称都和 π^0 介子相同的粒子. 因此，用复数場 φ 和 φ^* 来描述 π^0 介子，自由度将多了一倍. 理論中包含了一个客观上并不存在的粒子. 我們可以用一个实数場 φ_3 来描述 π^0 介子. 实数場的自由度恰巧比复数場少一半，因为一个复数場 φ 和 φ^* 可以分解为二个实数場 φ_1 和 φ_2:

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - i\varphi_2),\\ \varphi^* &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2).\end{aligned}\right\} \tag{3,102}$$

量子实标量場或量子实赝标量場理論的建立过程几乎和量子复标量場或量子复赝标量場理論的建立过程完全一样. 首先，引进拉氏函数密度 $\mathscr{L}_3$:

$$\mathscr{L}_3 = -\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_\mu} + m^2\varphi_3\varphi_3\right\}, \tag{3,103}$$

从(3,103)可以推导出如下的运动方程:

$$(\Box - m^2)\varphi_3 = 0, \tag{3,104}$$

得到的能量-动量张量 $T_{\mu\nu}^{(3)}$ 是:

$$T_{\mu\nu}^{(3)} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_\nu} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_\nu}\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_\mu} - \delta_{\mu\nu}\left[\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_\lambda}\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_\lambda} + m^2\varphi_3^2\right]\right\}; \tag{3,105}$$

得到的角动量密度 $M^{(3)}_{\mu\nu,\lambda}$ 是:

$$M^{(3)}_{\mu\nu,\lambda} = x_\nu T^{(3)}_{\mu\lambda} - x_\mu T^{(3)}_{\nu\lambda}. \tag{3,106}$$

为了进行量子化,引入和 φ_3 相共轭的正则动量 π_3:

$$\pi_3 \equiv \frac{\partial \mathscr{L}_3}{\partial \dot{\varphi}_3} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial t}. \tag{3,107}$$

然后,按照(2,39)引入相应的哈密頓量密度 $\mathscr{H}^{(3)}$:

$$\mathscr{H}^{(3)} = \frac{1}{2}\{\vec{\nabla}\varphi_3 \vec{\nabla}\varphi_3 + \pi_3^2 + m^2\varphi_3^2\}. \tag{3,108}$$

根据(2,41),可以得到下列的正则运动方程:

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial t} = \pi_3, \quad \frac{\partial \pi_3}{\partial t} = \nabla^2\varphi_3 - m^2\varphi_3. \tag{3,109}$$

按照(2,60),引进如下的对易定则:在 $t = t'$ 时,

$$[\varphi_3(x), \pi_3(x')] = i\delta(\vec{x} - \vec{x}'); \tag{3,110}$$

于是运动方程(3,109)就可以写为:

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial t} = i[H^{(3)}, \varphi_3], \quad \frac{\partial \pi_3}{\partial t} = i[H^{(3)}, \pi_3]; \tag{3,111}$$

其中哈密頓量 $H^{(3)}$ 是:

$$H^{(3)} = \int d\vec{x}\, \mathscr{H}^{(3)}. \tag{3,112}$$

对易关系 (3,110)、运动方程(3,111)以及哈密頓量的表式(3,108)和(3,112)是理論的基本方程和表式.

为了容易看出在量子化以后的实数場 φ_3 的粒子性,可以将 φ_3 的运动分解为平面波运动:

$$\varphi_3 = \sum_{\vec{k}} q^{(3)}_{\vec{k}}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad \pi_3 = \sum_{\vec{k}} p^{(3)}_{\vec{k}}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}. \tag{3,113}$$

由于 φ_3 和 π_3 是厄米算符,因此有:

$$q^{(3)}_{-\vec{k}} = q^{(3)*}_{\vec{k}}, \quad p^{(3)}_{-\vec{k}} = p^{(3)*}_{\vec{k}}. \tag{3,114}$$

可以証明,$q^{(3)}_{\vec{k}}$ 和 $p^{(3)}_{\vec{k}}$ 之間存在着如下的对易关系:

$$[q^{(3)}_{\vec{k}}, p^{(3)}_{\vec{k}'}] = i\delta_{\vec{k}\vec{k}'}, \tag{3,115}$$

其余各对算符都可以相互对易. 可以将 $H^{(3)}$ 写为:

$$H^{(3)}=\frac{1}{2}\sum_{\vec{k}}\{p^{(3)}_{-\vec{k}}p^{(3)}_{\vec{k}}+\omega^2 q^{(3)}_{-\vec{k}}q^{(3)}_{\vec{k}}\},\ \omega^2=m^2+\vec{k}^2. \quad (3,116)$$

从(3,115)和(3,116)可以得到如下的运动方程:

$$\frac{dq^{(3)}_{\vec{k}}}{dt}=p^{(3)}_{-\vec{k}},\qquad \frac{dp^{(3)}_{\vec{k}}}{dt}=-\omega^2 q^{(3)}_{-\vec{k}}. \quad (3,117)$$

利用(2,47),可以将場的总动量 $\vec{P}^{(3)}$ 写成如下的形式:

$$\vec{P}^{(3)}=-\frac{1}{2}\sum_{\vec{k}}i\vec{k}\{q^{(3)}_{+\vec{k}}p^{(3)}_{+\vec{k}}+p^{(3)}_{+\vec{k}}q^{(3)}_{+\vec{k}}\}. \quad (3,118)$$

为了将由 $\vec{k}$ 和 $-\vec{k}$ 所标志的自由度的运动分开，我們进一步引入如下的变换:

$$q^{(3)}_{\vec{k}}=\frac{1}{\sqrt{2\omega}}(c_{\vec{k}}e^{-i\omega t}+c^*_{-\vec{k}}e^{i\omega t}). \quad (3,119)$$

从(3,117)和(3,119),可以得:

$$p^{(3)}_{\vec{k}}=-i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(c_{-\vec{k}}e^{-i\omega t}-c^*_{\vec{k}}e^{i\omega t}), \quad (3,120)$$

求解(3,119)和(3,120),就可将 $c_{\vec{k}}$ 和 $c^*_{\vec{k}}$ 反过来表达为:

$$\left.\begin{aligned}c_{\vec{k}}&=\left\{\sqrt{\frac{\omega}{2}}q^{(3)}_{\vec{k}}+i\frac{1}{\sqrt{2\omega}}p^{(3)}_{-\vec{k}}\right\}e^{i\omega t},\\ c^*_{\vec{k}}&=\left\{\sqrt{\frac{\omega}{2}}q^{(3)}_{-\vec{k}}-i\frac{1}{\sqrt{2\omega}}p^{(3)}_{\vec{k}}\right\}e^{-i\omega t}.\end{aligned}\right\} \quad (3,121)$$

显然，$c_{\vec{k}}$ 和 $c^*_{\vec{k}}$ 之間存在着如下的对易关系:

$$[c_{\vec{k}},c^*_{\vec{k}'}]=\delta_{\vec{k}\vec{k}'}, \quad (3,122)$$

其余各对算符都可以相互对易. 引进如下的厄米算符:

$$N_{\vec{k}c}=c^*_{\vec{k}}c_{\vec{k}}, \quad (3,123)$$

于是就可以将場的总能量和总动量写为:

$$\left.\begin{aligned}H^{(3)}&=\sum_{\vec{k}}\omega\left\{N_{\vec{k}c}+\frac{1}{2}\right\},\\ \vec{P}^{(3)}&=\sum_{\vec{k}}\vec{k}N_{\vec{k}c}.\end{aligned}\right\} \quad (3,124)$$

可以立即写出 $c_{\vec{k}}$, $c^*_{\vec{k}}$ 和 $N_{\vec{k}c}$ 的显示形式. 我們取所有的 $N_{\vec{k}c}$ 作为一套完全的、可以相互对易的力学量,并以它們的本征态作为表象的基, 那末, $N_{\vec{k}c}$, $c_{\vec{k}}$ 和 $c^*_{\vec{k}}$ 就分别具有如 (3,32), (3,34)和(3,35)的数学形式.

这一整套理論的物理詮释是显然的: φ_3 所描述的場是由一份份的粒子組成的. 它們具有靜质量 m, 服从鮑色統計法則. $N_{\vec{k}c}$ 代表具有动量 $\vec{k}$ 的粒子的数目. $c_{\vec{k}}$ 的作用在于降低动量为 $\vec{k}$ 的粒子的数目,因此可以称为粒子的消灭算符. $c^*_{\vec{k}}$ 的作用在于增加动量等于 $\vec{k}$ 的粒子的数目,因此可以称为粒子的产生算符.

当然,我們可以将 φ_3 分解为球面波而討論場的角动量. 由于討論的方法几乎完全和討論复数場 φ 和 φ^* 的角动量的方法一样, 因此不再叙述.

可以証明,对易关系也具有洛仑兹不变性,因此整个理論是相对論不变的. 利用(3,113), (3,119) 和 (3,122)可以得到属于不同时間的場物理量之間的对易关系:

$$[\varphi_3(x), \varphi_3(x')] = i\Delta_m(x - x'). \qquad (3,125)$$

对于正洛仑兹变換, (3,125)显然是不变的. 对于空間反射, $\varphi_3(x)$ 作如下的变換:

$$\varphi_3(\vec{x}, t) \longrightarrow P\varphi_3(-\vec{x}, t), \qquad (3,126)$$

P 代表粒子的內稟宇称. 因此, (3,125)对于空間反射也具有不变性. 在时間反演时, $\varphi_3(x)$ 变換如下:

$$\varphi_3(\vec{x}, t) \longrightarrow \varphi_3(\vec{x}, -t) = T\bar{\varphi}_3(x, t)T^{-1}. \qquad (3,127)$$

不难証明,对易关系(3,125)在时間反演时也具有不变性.

§ 3,14. 同位旋空間和同位旋守恒

从表 1 可以看出, π^+ 介子和 π^- 介子的质量完全相同. π^0 介子的质量虽然小些,但相差不多. 中性 π 介子的质量和带电 π 介子质量之間的差别不到 3.5%. 可以設想,这一质量差别来自带电 π 介子的电磁质量. 假使不考虑电磁质量而将其略去, 那末 π^0 介

子和 $\pi^{\pm}$ 介子的质量可能完全一样. 因此,很自然地,有人尝試給予这三种 π 介子統一的描述. 第一步先进行变换(3,102),并将荷电粒子場的拉氏函数密度 $\mathscr{L}^C$ 改写成:

$$\mathscr{L}^C = \mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_2, \tag{3,128}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{L}_1 &= -\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_\mu} + m^2\varphi_1^2\right\}, \\ \mathscr{L}_2 &= -\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_\mu} + m^2\varphi_2^2\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{3,129}$$

然后引进三种粒子的总的拉氏函数密度 $\mathscr{L}$.

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}^C + \mathscr{L}_3 = \sum_{j=1,2,3}\mathscr{L}_j. \tag{3,130}$$

从(3,130)可以得到如下的运动方程:

$$(\Box - m^2)\varphi_j = 0, \qquad j = 1,2,3. \tag{3,131}$$

为了书写方便,我們引进一个三維的抽象空間,并把 φ_1, φ_2 和 φ_3 当作这个抽象空間中一个矢量 $\vec{\varphi}$ 的三个分量. 那末拉氏函数密度 $\mathscr{L}$ 就具有如下的形式:

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial x_\mu} + m^2\vec{\varphi}\cdot\vec{\varphi}\right\}. \tag{3,132}$$

运动方程就可以写为:

$$(\Box - m^2)\vec{\varphi} = 0. \tag{3,133}$$

很容易証明,运动方程(3,133)和运动方程(3,7)及(3,104)完全一样. 从(3,132)可以得到場的总能量-动量张量 $T_{\mu\nu}$:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial x_\mu} - \delta_{\mu\nu}\left[\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial x_\lambda}\cdot\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial x_\lambda} + m^2\vec{\varphi}\cdot\vec{\varphi}\right]\right\}, \tag{3,134}$$

可以証明,$T_{\mu\nu}$ 是 $T^C_{\mu\nu}$ 和 $T^{(3)}_{\mu\nu}$ 之和. 由此得到的角动量密度 $M_{\mu\nu,\lambda}$ 是:

$$M_{\mu\nu,\lambda} = x_\nu T_{\mu\lambda} - x_\mu T_{\nu\lambda}, \tag{3,135}$$

它等于 $M^C_{\mu\nu,\lambda}$ 和 $M^{(3)}_{\mu\nu,\lambda}$ 之和.

拉氏函数密度 $\mathscr{L}$ 还具有另外一个很有兴趣的对称性。假使我們旋轉这个抽象的三維空間，則 $\vec{\varphi}$ 作如下的变換：

$$\varphi_i \to {}'\varphi_i = a_{ik}\varphi_k, \quad a_{ik}a_{il} = \delta_{kl}; \tag{3,136}$$

$\mathscr{L}$ 在这一变換中將保持不变。因此，除了能量、动量和角动量之外，还有和这个变換相应的守恆量。为了求得这些守恆量的表式，我們研究无穷小变換：

$$a_{ik} = \delta_{ik} + \varepsilon_{ik}, \tag{3,137}$$

其中 ε_{ik} 是无穷小的数值。不难証明，ε_{ik} 对于 i 和 k 是反对称的，亦即

$$\varepsilon_{ik} = -\varepsilon_{ki}. \tag{3,138}$$

相应于(3,137)，$\vec{\varphi}$ 作如下的变換：

$$\varphi_i \to {}'\varphi_i = \varphi_i + \varepsilon_{ik}\varphi_k. \tag{3,139}$$

由于拉氏函数密度 $\mathscr{L}$ 在变換(3,136)中具有不变性，就有：

$$\delta\mathscr{L} = \mathscr{L}\left({}'\varphi_i, \frac{\partial'\varphi_i}{\partial x_\mu}\right) - \mathscr{L}\left(\varphi_i, \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_\mu}\right) = 0. \tag{3,140}$$

利用(3,139)，就有：

$$\delta\mathscr{L} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_i}\varepsilon_{ik}\varphi_k + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_\mu}\right)}\varepsilon_{ik}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_\mu} = 0. \tag{3,141}$$

考虑到运动方程(3,133)，就有：

$$\varepsilon_{ik}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_\mu}\right)}\varphi_k\right\} = 0. \tag{3,142}$$

在条件(3,138)之下，ε_{ik} 是任意的，因此有：

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\mathscr{T}_{ik,\mu} = 0, \quad i,k = 1,2,3;$$

$$\mathscr{T}_{ik,\mu} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_\mu}\right)}\varphi_k - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_\mu}\right)}\varphi_i. \tag{3,143}$$

从(3,132)和(3,143)可以得到：

$$\mathscr{T}_{jk,\mu}=\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_\mu}\varphi_j-\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_\mu}\varphi_k. \tag{3,144}$$

(3,143)具有微分守恆定律的形式．相应的守恆量是：

$$T_{jk}=\int d\vec{x}\left\{\frac{\partial\varphi_k}{\partial t}\varphi_j-\frac{\partial\varphi_j}{\partial t}\varphi_k\right\}. \tag{3,145}$$

可以将(3,145)式写得更簡单些．我們将 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 写成一行或一列，总括地以一个字母 φ 代表．并且引进如下三个矩陣：

$$t_{23}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\quad t_{31}=\begin{pmatrix}0&0&i\\0&0&0\\-i&0&0\end{pmatrix},\quad t_{12}=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}; \tag{3,146}$$

(3,145)就可以写成：

$$T_{jk}=-i\int d\vec{x}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,t_{jk}\varphi. \tag{3,147}$$

假使我們定义：

$$\left.\begin{aligned}&T_{23}\equiv T_1,\quad T_{31}\equiv T_2,\quad T_{12}\equiv T_3;\\&t_{23}\equiv t_1,\quad t_{31}\equiv t_2,\quad t_{12}\equiv t_3;\end{aligned}\right\} \tag{3,148}$$

并进一步引进定义 $\vec{T}$ 和 $\vec{t}$，它們都是抽象空間的矢量，分别具有分量 (T_1,T_2,T_3) 和 (t_1,t_2,t_3)．那末，就可以将(3,147)写成：

$$\vec{T}=-i\int\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\vec{t}\varphi\cdot d\vec{x}. \tag{3,149}$$

我們称守恆量 $\vec{T}$ 为"同位旋"，并称所引入的抽象空間为"同位旋空間"．从数学形式看，同位旋和自旋有很相象的地方：自旋的表式决定于場物理量 φ_a 在空間轉动时如何变换；同位旋的表式决定于場物理量在同位旋空間轉动时如何变换．

可以看出，第一种規范变换和同位旋空間轉动之間有密切的連系，在第一种規范变换中，$\vec{\varphi}$ 作如下的变换：

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_1\rightarrow{}'\varphi_1=\varphi_1\cos\alpha+\varphi_2\sin\alpha,\\&\varphi_2\rightarrow{}'\varphi_2=-\varphi_1\sin\alpha+\varphi_2\cos\alpha,\\&\varphi_3\rightarrow{}'\varphi_3=\varphi_3.\end{aligned}\right\} \tag{3,150}$$

这是因为 $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$，而实数場 φ_3 在第一种规范变換中是不变的，实数不能具有任意的相角。变換(3,150)实际上等于同位旋空間围繞第三軸的方向轉动一个角度 α。事实上，电荷守恆定律，在目前的情况下，和 T_3 的守恆定律完全等效。T_3 的表式(3,149)和場的电荷 Q 的表式(2,49)只相差一个因子 e。

为了进行量子化，引入和 $\vec{\varphi}$ 相共軛的正則动量 $\vec{\pi}$：

$$\vec{\pi} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\vec{\varphi}}} = \dot{\vec{\varphi}}, \tag{3,151}$$

然后引入哈密頓量密度 $\mathscr{H}$：

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial x_i} + \vec{\pi}\cdot\vec{\pi} + m^2\vec{\varphi}\cdot\vec{\varphi}\right\}. \tag{3,152}$$

在 $t = t'$ 时，$\vec{\varphi}$ 和 $\vec{\pi}$ 之間有如下的对易关系：

$$[\varphi_j(x), \pi_k(x')] = i\delta_{jk}\,\delta(\vec{x} - \vec{x}'), \tag{3,153}$$

其余各对物理量都可以相互对易。(3,153)和对易关系(3,15)，(3,110)完全一样。同位旋 $\vec{T}$ 可以写成如下的表式：

$$\vec{T} = -i\int d\vec{x}\,\pi\vec{t}\,\varphi, \tag{3,154}$$

其中我們将 π_1，π_2 和 π_3 写成一列，总括地以 π 代表。利用(3,153)，可以立即証明，$\vec{T}$ 服从如下的对易关系：

$$[T_1, T_2] = iT_3,\quad [T_2, T_3] = iT_1,\quad [T_3, T_1] = iT_2. \tag{3,155}$$

在証明过程中利用了 $\vec{t}$ 的对易关系：

$$[t_1, t_2] = it_3,\quad [t_2, t_3] = it_1,\quad [t_3, t_1] = it_2. \tag{3,156}$$

$\vec{T}$ 的对易关系(3,155)在数学形式上和角动量 $\vec{M}$ 的对易关系(2,83)完全一样。由于 T_3 和 Q 只相差一个因子 e，可以从(3,71)得：

$$T_3 = \sum_i \{N_{ia} - N_{ib}\}. \tag{3,157}$$

由此可見，π^+，π^0，π^- 介子的同位旋的第三分量各为 1，0，−1。場

的总同位旋的各分量 T_1, T_2, T_3 应該具有如下的一系列本征值:

$$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots. \tag{3,158}$$

§ 3,15. 个别粒子的同位旋

在上节末曾指出,假使 π^+, π^0 和 π^- 介子可以由上节中的理論描述,那末它們的同位旋的第三分量将分别是 1, 0, −1. 可以指出,个别 π 介子也是算符 $\vec{T}^2$ 的本征态,其相应的本征值是 $2 = 1(1+1)$. 因此,我們可以这样說,假使 π 介子可以由上节中的理論描述,那末 π 介子都具有同位旋 1,而 π^+, π^0, π^- 的同位旋的第三个分量将分别是 1, 0, −1.

为了証明这一点,我們可以将場 φ 展开成为平面波,如(3,113)和(3,119):

$$\varphi_j(x) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \{a_{\vec{k}}^{(j)} e^{ikx} + a_{\vec{k}}^{*(j)} e^{-ikx}\}, \tag{3,159}$$

$$j = 1, 2, 3.$$

$a_{\vec{k}}^{(j)}$ 和 $a_{\vec{k}}^{*(j)}$ 之間存在着如下的对易关系:

$$[a_{\vec{k}}^{(j)}, a_{\vec{k}'}^{*(l)}] = \delta_{jl}\delta_{\vec{k}\vec{k}'}. \tag{3,160}$$

不难証明, $a_{\vec{k}}^{(j)}$, $a_{\vec{k}}^{*(j)}$ 和以前所討論的 $a_{\vec{k}}$, $a_{\vec{k}}^*$, $b_{\vec{k}}$, $b_{\vec{k}}^*$, $c_{\vec{k}}$, $c_{\vec{k}}^*$ 之間存在着如下的关系:

$$\left.\begin{aligned} a_{\vec{k}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{\vec{k}}^{(1)} - ia_{\vec{k}}^{(2)}), & a_{\vec{k}}^* &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{\vec{k}}^{*(1)} + ia_{\vec{k}}^{*(2)}), \\ b_{\vec{k}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{\vec{k}}^{(1)} + ia_{\vec{k}}^{(2)}), & b_{\vec{k}}^* &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{\vec{k}}^{*(1)} - ia_{\vec{k}}^{*(2)}), \\ c_{\vec{k}} &= a_{\vec{k}}^{(3)}, & c_{\vec{k}}^* &= a_{\vec{k}}^{*(3)}. \end{aligned}\right\} \tag{3,161}$$

因此有:

$$\left.\begin{aligned} N_{\vec{k}a} &= \frac{1}{2}\{a_{\vec{k}}^{*(1)} a_{\vec{k}}^{(1)} + a_{\vec{k}}^{*(2)} a_{\vec{k}}^{(2)} + ia_{\vec{k}}^{*(2)} a_{\vec{k}}^{(1)} - ia_{\vec{k}}^{*(1)} a_{\vec{k}}^{(2)}\}, \\ N_{\vec{k}b} &= \frac{1}{2}\{a_{\vec{k}}^{*(1)} a_{\vec{k}}^{(1)} + a_{\vec{k}}^{*(2)} a_{\vec{k}}^{(2)} + ia_{\vec{k}}^{*(1)} a_{\vec{k}}^{(2)} - ia_{\vec{k}}^{*(2)} a_{\vec{k}}^{(1)}\}. \end{aligned}\right\} \tag{3,162}$$

不难証明，$\vec{T}$ 可以由 $a_{\vec{k}}^{(j)}$ 和 $a_{\vec{k}}^{*(j)}$ 表达为如下的表式：

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= -i\sum_{\vec{k}}\{a_{\vec{k}}^{*(2)}a_{\vec{k}}^{(3)} - a_{\vec{k}}^{*(3)}a_{\vec{k}}^{(2)}\},\\ T_2 &= -i\sum_{\vec{k}}\{a_{\vec{k}}^{*(3)}a_{\vec{k}}^{(1)} - a_{\vec{k}}^{*(1)}a_{\vec{k}}^{(3)}\},\\ T_3 &= -i\sum_{\vec{k}}\{a_{\vec{k}}^{*(1)}a_{\vec{k}}^{(2)} - a_{\vec{k}}^{*(2)}a_{\vec{k}}^{(1)}\}. \end{aligned}\right\} \qquad (3,163)$$

$\vec{T}$ 和 $a_{\vec{k}}^{*(j)}$，$a_{\vec{k}}^{(j)}$ 之間具有如下的对易关系：

$$\left.\begin{aligned} &[T_1,a_{\vec{k}}^{(1)}]=0,\quad [T_1,a_{\vec{k}}^{(2)}]=ia_{\vec{k}}^{(3)},\quad [T_1,a_{\vec{k}}^{(3)}]=-ia_{\vec{k}}^{(2)},\\ &[T_1,a_{\vec{k}}^{*(1)}]=0,\quad [T_1,a_{\vec{k}}^{*(2)}]=ia_{\vec{k}}^{*(3)},\quad [T_1,a_{\vec{k}}^{*(3)}]=-ia_{\vec{k}}^{*(2)}. \end{aligned}\right\} \qquad (3,164)$$

进行循环排列就可以得到 $\vec{T}$ 和 $a_{\vec{k}}^{(j)}$，$a_{\vec{k}}^{*(j)}$ 之間其余的对易关系．从(3,164)可以得到：

$$\left.\begin{aligned} &[\vec{T}^2,a_{\vec{k}}^{(j)}]=2a_{\vec{k}}^{(j)},\\ &[\vec{T}^2,a_{\vec{k}}^{*(j)}]=2a_{\vec{k}}^{*(j)}. \end{aligned}\right\} \qquad (3,165)$$

为了便于写下波函数，我們引进 $|\rangle_0$ 代表什么粒子也不存在的情态的波函数，亦即真空状态的波函数．那末，存在着一个动量等于 $\vec{k}$ 的 π^+ 介子的情态的波函数是：

$$a_{\vec{k}}^{*}|\rangle_0=\frac{1}{\sqrt{2}}(a_{\vec{k}}^{*(1)}-ia_{\vec{k}}^{*(2)})|\rangle_0. \qquad (3,165)$$

将 $\vec{T}^2$ 作用于 $a_{\vec{k}}^{*}|\rangle_0$，就得：

$$\vec{T}^2a_{\vec{k}}^{*}|\rangle_0=[\vec{T}^2,a_{\vec{k}}^{*}]|\rangle_0+a_{\vec{k}}^{*}\vec{T}^2|\rangle_0=2a_{\vec{k}}^{*}|\rangle_0; \qquad (3,166)$$

因为真空情态的波函数 $|\rangle_0$ 具有如下的性质：

$$a_{\vec{k}}^{(j)}|\rangle_0=0,\qquad \vec{T}|\rangle_0=0, \qquad (3,167)$$

所以利用公式(3,165)就得到(3,166)．这就証明了，π^+ 介子具有同位旋 1．用同样的方法可以証明，π^0 和 π^- 介子的同位旋也等于 1．因此可以說 π^+，π^0，π^- 介子形成一个同位旋三重态．

用同样的方法，可以給予荷电的K介子和中性 K 介子以統一的描述．从表 1 可以看出，荷电K介子和中性K介子的自旋相同，它們的质量在实驗的誤差范围以內相等．令复数場 φ_c，φ_c^* 描述荷电K介子，复数場 φ_0，φ_0^* 描述中性K介子．为了写起来方便、

我們將 φ_c 和 φ_0 写成一行，將 φ_c^* 和 φ_0^* 写成一列，分別以 φ_K 和 φ_K^* 代表：

$$\varphi_K \equiv \begin{pmatrix} \varphi_c \\ \varphi_0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_K^* \equiv (\varphi_c^*, \varphi_0^*). \tag{3,168}$$

引进荷电和中性K介子場的統一的拉氏函数 $\mathscr{L}_K$：

$$\mathscr{L}_K = -\left\{\frac{\partial \varphi_K^*}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial \varphi_K}{\partial x_\mu} + m^2 \varphi_K^* \varphi_K\right\}; \tag{3,169}$$

从(3,169)可以將荷电和中性K介子場的运动方程推导出来。由于在坐标移动和洛仑兹变換中 $\mathscr{L}_K$ 具有不变性，可以推导出K介子場的能量及动量守恆定律，并求出能量-动量张量和角动量密度的表式。可以看出，$\mathscr{L}_K$ 还具有另外一种对称性。假使我們將 φ_K 和 φ_K^* 当作一个抽象的三維空間的旋量，那末，当这个抽象空間轉动时，$\mathscr{L}_K$ 具有不变性。在基本粒子理論中，目前提出的一种比較流行的看法是：φ_K，φ_K^* 是同位旋空間中的旋量。根据这种看法，不难將K介子場的同位旋的表示推导出来。可以証明，場的同位旋的三个分量都具有如下一系列的本征值：

$$0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm 2, \cdots. \tag{3,170}$$

可以証明，个别K介子的同位旋是 $\frac{1}{2}$。証明的方法和討論 π 介子的同位旋时所用的方法相似。在以后討論自由質子和自由中子的理論的时候將討論同样的問題。因此，我們將这一問題留待以后討論。

首先引入同位旋这一概念的是卡孙和康登[Cassen and Condon, 1936]。他們是在討論原子核結构和核子力的时候引入同位旋坐标来标志質子和中子的。可以將質子和中子合并称为核子。假定核子有五个自由度：空間坐标是其中的三个自由度；第四个自由度是核子的自旋；第五个自由度是核子的同位旋。核子的同位旋是1/2。質子的同位旋的第三分量是1/2。中子的同位旋的第三分量是 $-1/2$。

此后，克茂[Kemmer, 1938]为了要建立核子力的电荷无关介子場理論，曾將同位旋这一概念扩充，并將其引入介子場的理論中去。

参 考 文 献

Cassen, B. and Condon, E. U. (1936), *Phys. Rev.*, **50**, 846.
Gordon, W. (1926), *Zeits. f. Phys.*, **40**, 117.
Kemmer, N. (1938), *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **34**, 354.
Klein, O. (1926), *Zeits. f. Phys.*, **37**, 895.
Lüders, G. (1952), *Zeits. f. Phys.*, **133**, 325.
Schwinger, J. (1951), *Phys. Rev.*, **82**, 914.
Watanabe, S. (1951), *Phys. Rev.*, **84**, 1012.
Watanabe, S. (1955), *Rev. Mod. Phys.*, 27, No. 1.
Wigner, E. (1932), *Gött. Nachr.*, **31**, 546.
Шапиро, И. С. (1954), УФН, **53**, 7.

第四章　光子·自由电磁場的量子化

§ 4.1. 馬克斯威方程的相对論性形式

在表 1 中光子占有特殊的地位. 在所有目前已經发現的基本粒子之中,只有光子的自旋等于 1. 所以,假使按自旋分类,光子就自成一类. 如所周知,光是电磁波动,但也具有粒子性. 光的最小单位就是光子. 古典电磁場的理論能够描述光的波动性,但不能描述光的粒子性.为了使理論能描述光的粒子性,必須将电磁場量子化. 在量子化以前,我們先将描述电磁場运动的方程写成具有显示的洛仑兹不变的形式,以便于建立一个具有洛仑兹不变性的量子电磁場理論.

在本章中,我們将建立自由光子的理論. 光子和别的粒子相互作用的理論留待以后討論. 自由光子由自由电磁場描述. 描述自由电磁場的馬克斯威方程是:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{E}+\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=0, \quad \operatorname{div}\vec{H}=0,\\ \operatorname{rot}\vec{H}-\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=0, \quad \operatorname{div}\vec{E}=0, \end{aligned}\right\} \tag{4,1}$$

其中 $\vec{E}$ 代表电場強度,$\vec{H}$ 代表磁場強度. 为了将馬克斯威方程表达成显示的相对論性不变的形式,可以引入 4-矢势 $A_\mu(\vec{A}, A_4=i\phi)$,其中 $\vec{A}$ 代表三維矢势,ϕ 代表标量势. 于是,电磁場強度就可以用 4-矢势的微商表达出来. 引入 $F_{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu}\equiv\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}, \tag{4,2}$$

那末,电磁場強度 $\vec{E}$,$\vec{H}$ 和反对称四維张量 $F_{\mu\nu}$ 之間存在着如下的关系:

$$\begin{pmatrix} 0 & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & 0 & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & 0 & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -iE_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -iE_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4,3}$$

从(4,2)可以直接推导出：

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial F_{\nu\rho}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\rho\mu}}{\partial x_\nu} = 0, \quad \mu \neq \nu \neq \rho; \tag{4,4}$$

因此方程組(4,1)中第一行的二个方程便自然得到滿足. (4,2)中第二行的二个方程則可以写为：

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0, \quad \mu = 1, 2, 3, 4. \tag{4,5}$$

方程(4,2)和(4,5)就是馬克斯威方程的显示洛仑兹不变形式.

当 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 已經給定之后，4-矢势 A_μ 并沒有完全确定下来. 設 A_μ 是一組給定的 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 的 4-矢势，那末

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{\partial \alpha}{\partial x_\mu} \tag{4,6}$$

也同样可以作为这組給定的 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 的 4-矢势，其中 α 可以是任何一个四維时空中的实标量函数. 因此，可以找到一套 4-矢势 A_μ 滿足下列方程：

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0, \tag{4,7}$$

在这样的情况下，方程(4,5)就可以写成：

$$\Box A_\mu = 0, \quad \mu = 1, 2, 3, 4. \tag{4,8}$$

我們可以解方程(4,5)；也可以解方程(4,8)，然后将其中所有滿足条件(4,7)的解挑选出来. 其实，只要在某一时間，方程的解同时滿足条件(4,7)和条件

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}\right) = 0, \tag{4,9}$$

那末条件(4,7)在任何时候都将得到滿足. 令 χ 代表 $\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}$，并假定

在 $t=0$ 的时候(4,7)和(4,9)得到满足. 一般地可以将任何时間 t 的 χ 展开为:

$$\chi = \chi_{t=0} + t\left(\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)_{t=0} + \frac{t^2}{2!}\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}\right)_{t=0} + \cdots, \qquad (4,10)$$

其中第一項和第二項已知等于零. 从(4,8)可得:

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}\right)_{t=0} = (\vec{\nabla}^2\chi)_{t=0} = 0,\\&\left(\frac{\partial^3\chi}{\partial t^3}\right)_{t=0} = \left(\vec{\nabla}^2\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)_{t=0} = 0,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \qquad (4,11)$$

因此第三項、第四項以及以后其余各項也都等于零. 这就証明了, χ 在任何时間都等于零, 也就是說, 条件 (4,7) 在任何时候都得到满足.

定义(4,2)、方程 (4,8) 和条件(4,7)可以用来代替馬克斯威方程(4,1). 但是, 即使加上了条件(4,7), 給定了 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 仍旧不能将 A_μ 完全确定下来. 設 A_μ 既滿足方程(4,8), 又滿足条件(4,7); 又設有一个时空的实标量函数 α 滿足方程:

$$\Box\alpha = 0, \qquad (4,12)$$

那末經过如下的变換:

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \frac{\partial\alpha}{\partial x_\mu} \qquad (4,13)$$

以后, 得到的 A'_μ 也滿足方程(4,8)和条件(4,7). 而且 A_μ 和 A'_μ 給出完全相同的电場强度和磁場强度. 泡里[Pauli, 1940]称变換(4,13)为第二种規范变換. 因此, 馬克斯威方程对于規范变換具有不变性. 通常称条件(4,7)为洛仑兹条件.

§4,2. 拉氏函数密度、能量、动量和角动量

方程(4,8)可以从下列拉氏函数密度

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \qquad (4,14)$$

推导出来. 根据 (2,22) 可以求得自由电磁場的正則能量-动量张量:

$$T_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\nu}+\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu}-\delta_{\mu\nu}\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\rho}\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\rho}\right\}. \tag{4,15}$$

利用 (2,34), 可以求得自由电磁場的角动量密度 $M_{\mu\nu,\lambda}$; 为此, 必須先求得相应的 $S_{\mu\nu;\sigma\rho}$. 由于 A_μ 是一个 4-矢量, 在洛仑兹变换 (2,24)及(2,25)中, A_μ 作如下的变换:

$$A_\mu\to A'_\mu=a_{\mu\nu}A_\nu=A_\mu+\varepsilon_{\mu\nu}A_\nu, \tag{4,16}$$

因此,相应的 $\Lambda_{\sigma\rho}$ 有如下的形式:

$$\Lambda_{\sigma\rho}=\delta_{\sigma\rho}+\varepsilon_{\mu\nu}\partial_\nu\delta_{\sigma\mu}. \tag{4,17}$$

与(2,29)相比較,就得到·

$$S_{\mu\nu;\sigma\rho}=\delta_{\sigma\mu}\delta_{\rho\nu}-\delta_{\sigma\nu}\delta_{\rho\mu}, \tag{4,18}$$

因此得到 $M_{\mu\nu,\lambda}$ 如下的表式:

$$M_{\mu\nu,\lambda}=x_\nu T_{\mu\lambda}-x_\mu T_{\nu\lambda}+\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\lambda}A_\mu-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda}A_\nu. \tag{4,19}$$

可以按照(2,23)写下自由电磁場的总能量和总动量 P_μ 的表式:

$$P_\mu=\int d\dot{x}\cdot\frac{1}{2}\left\{i\partial_{\lambda 4}\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\rho}\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\rho}-\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu}\frac{\partial A_\lambda}{\partial t}-\frac{\partial A_\lambda}{\partial t}\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu}\right\}. \tag{4,20}$$

按照(2,35)可以写下場的总角动量 M_{jk} 的表式:

$$M_{jk}=\int d\dot{x}\left\{ix_kT_{j4}-ix_jT_{k4}+\frac{\partial A_k}{\partial t}A_j-\frac{\partial A_j}{\partial t}A_k\right\}. \tag{4,21}$$

§4,3. 自由电磁場的量子化

为了将自由电磁場量子化,先将理論納入哈密頓形式. 为此引入和 A_μ 相共軛的正則动量 π_μ:

$$\pi_\mu=-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial t}\right)}=\frac{\partial A_\mu}{\partial t}. \tag{4,22}$$

按照(2,39)引进如下的哈密頓量密度：

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_i}\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_i} + \pi_\lambda\pi_\lambda\right\}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{4,23}$$

可以将运动方程(4,8)写成如下的正則形式

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial t} = \pi_\mu, \quad \frac{\partial \pi_\mu}{\partial t} = \vec{\nabla}^2 A_\mu. \tag{4,24}$$

按照(2,47)，可以将总动量 $\vec{P}$ 写为：

$$\vec{P} = -\int \pi_\mu \vec{\nabla} A_\mu \cdot d\vec{x}. \tag{4,25}$$

为了写起来方便，可以将 A_μ 写成一行，总括地以 A 代表；将 π_μ 写成一列，总括地以 π 代表：

$$A \equiv \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix}, \quad \pi \equiv (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4). \tag{4,26}$$

于是，总动量就可以簡写为：

$$\vec{P} = -\int d\vec{x} \cdot \pi \vec{\nabla} A. \tag{4,27}$$

按照(2,75)，可以将总角动量 M_{jk} 写成如下的表式：

$$M_{jk} = -i\int \pi(L_{jk} + S_{jk})A\,dx, \tag{4,28}$$

其中 L_{jk} 的表式見(2,73)，它是量子力学中的軌道角动量算符，S_{jk} 是四行四列的矩陣；利用(2,72)和(4,18)就可以求得它們的显示表式．我們令 S_1, S_2; S_3 分别代表 S_{23}, S_{31}, S_{12}，則有：

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4,29}$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

矩陣 S_1, S_2, S_3 是可以簡約的；它們可以約化为二部分，一部分是：

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4,30}$$

這些在形式上与 (3,146) 中同位旋 t_1, t_2, t_3 的表式完全一样。量子力学中代表等于 1 的自旋的矩陣就是这个样子的。不难証明，它們之間的对易关系与角动量的三个分量之間的对易关系完全一样。S_1, S_2, S_3 的另一部分是一行一列的零矩陣。不难証明，S_1, S_2, S_3 之間的对易关系与角动量的对易关系完全一样，即

$$[S_1, S_2] = iS_3, \quad [S_2, S_3] = iS_1, \quad [S_3, S_1] = iS_2. \tag{4,31}$$

假設，我們将 S_1, S_2, S_3 当作一个矢量 $\vec{S}$ 的分量；并以 L_1, L_2, L_3 分別代表 L_{23}, L_{31}, L_{12}，将它們当作一个矢量 $\vec{L}$ 的三个分量；以 M_1, M_2, M_3 分別代表 M_{23}, M_{31}, M_{12}，将它們当作一个矢量 $\vec{M}$ 的三个分量；那末，就可以将(4,28)式簡写为：

$$\vec{M} = -i\int d\vec{x}\pi(\vec{L} + \vec{S})A. \tag{4,32}$$

为了量子化，我們按照 (2,60) 引入 A_μ 和 π_μ 之間如下的对易关系：在 $t = t'$ 时，

$$[A_\mu(x), \pi_\nu(x')] = i\delta_{\mu\nu}\delta(\vec{x} - \vec{x}'), \tag{4,33}$$

其余各对物理量之間都可以相互对易。利用这些对易关系，就可以将运动方程(4,24)写成如下的形式：

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial A_\mu}{\partial t} &= i[H, A_\mu], \\ \frac{\partial \pi_\mu}{\partial t} &= i[H, \pi_\mu], \end{aligned}\right\} \tag{4,34}$$

其中 H 是哈密頓量

$$H=\int dx\mathscr{H}. \tag{4,35}$$

方程(4,33),(4,34)和表式(4,23),(4,35)是量子自由电磁場的基本方程和表式.

§4,4. 洛仑兹条件

上节中所給出的量子自由电磁場理論与一般的量子場論沒有什么区别;只是,量子电磁場理論还有自己的特点,那就是,除了基本方程(4,33),(4,34)和基本表式(4,23),(4,35)以外,还需要加上洛仑兹条件(4,7). 然而,我們不能将方程(4,7)簡单地搬进量子电磁場理論中来;在量子电磁場理論中象(4,7)这种形式的条件是无法滿足的,因为假使

$$\chi=\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}=\frac{\partial A_i}{\partial x_i}-i\pi_4=0, \tag{4,36}$$

那末算符 χ 应該和任何算符都可以相互对易,但是在 $t=t'$ 时根据(4,33)有:

$$[\chi(x),A_4(x')]=-\delta(\vec{x}'-\vec{x})\neq 0. \tag{4,37}$$

为了寻求量子电磁場理論中洛仑兹条件的适当形式,可以研究一下古典物理量和量子物理量之間的关系. 古典物理量一般地相应于量子物理量的平均值. 物理量 q 在古典力学中是一个普通的数,在量子力学中是一个算符. 它們之間存在着如下的对应关系:

$$q\longleftrightarrow\langle|q|\rangle, \tag{4,38}$$

$|\rangle$ 代表波函数. 因此,费米[Fermi, 1932]建議,在量子电磁場理論中应該如下地理解洛仑兹条件. 在古典电磁場理論中,洛仑兹条件的意义是:并不是所有滿足方程(4,8)的解都能反映客观的現象,这些解中只有那些同时能滿足条件(4,7)的才反映客观的現象;那些不滿足条件(4,7)的解并不反映任何客观現象. 与此相应,在量子电磁場理論中洛仑兹条件的意义应該是:在所有可能的

波函数中，只有那些使 χ 的平均值等于零的波函数才代表客观上可能存在的情态。設以 $|\rangle$ 代表能反映客观情态的波函数，那末 $|\rangle$ 必須滿足如下形式的洛仑兹条件：

$$\langle|\chi|\rangle = 0. \tag{4,39}$$

应用 § 4,1 中的方法可以証明：假使在某一时間

$$\left.\begin{aligned}\langle|\chi|\rangle &= 0,\\ \left\langle\left|\frac{\partial\chi}{\partial t}\right|\right\rangle &= 0,\end{aligned}\right\} \tag{4,40}$$

那末条件(4,39)在任何时間都能得到滿足。例如，設(4,40)在 $t=0$ 时得到滿足，一般地有：

$$\langle|\chi|\rangle = \langle|\chi_{t=0}|\rangle + t\left\langle\left|\left(\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)_{t=0}\right|\right\rangle + \frac{t^2}{2!}\left\langle\left|\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}\right)_{t=0}\right|\right\rangle + \cdots. \tag{4,41}$$

式(4,41)右方前二項等于零；此外，由于方程(4,8)，

$$\left.\begin{aligned}\left\langle\left|\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}\right)_{t=0}\right|\right\rangle &= \langle|(\vec{\nabla}^2\chi)_{t=0}|\rangle = \vec{\nabla}^2\langle|\chi_{t=0}|\rangle = 0,\\ \left\langle\left|\left(\frac{\partial^3\chi}{\partial t^3}\right)_{t=0}\right|\right\rangle &= \left\langle\left|\left(\vec{\nabla}^2\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)_{t=0}\right|\right\rangle = \vec{\nabla}^2\left\langle\left|\left(\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)_{t=0}\right|\right\rangle = 0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\end{aligned}\right\} \tag{4,42}$$

因此第三項、第四項以及以后各項都等于零。由之可見，初始条件(4,40)和洛仑兹条件完全等效。

方程 (4,33)，(4,34) 和表式 (4,23)，(4,35) 以及洛仑兹条件(4,39) 是量子电磁場理論的一套完整的基本方程、表式和条件。

§ 4,5. 分解为平面波

为了易于看出量子电磁場理論能够反映电磁場的粒子性，能够說明光子的存在，可以将自由电磁場的运动分解为平面波运动：

$$A_\mu = \sum_{\vec{k}} q_{\mu,\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad \pi_\mu = \sum_{\vec{k}} p_{\mu,\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}. \tag{4,43}$$

由于在古典理論中 A_1, A_2, A_3 是实数, A_4 是虚数;在量子理論中, A_1, A_2, A_3 应該由厄米算符来代表, A_4 应該由反厄米算符代表. 因此有:

$$\left.\begin{aligned} q_{j,-\vec{k}} &= q^*_{j,\vec{k}}, \qquad p_{j,-\vec{k}} = p^*_{j,\vec{k}}, \\ & j = 1, 2, 3 \\ q_{4,-\vec{k}} &= -q^*_{4,\vec{k}}, \quad p_{4,-\vec{k}} = -p^*_{4,\vec{k}}. \end{aligned}\right\} \tag{4,44}$$

不难証明,在 $q_{\mu,\vec{k}}$ 和 $p_{\mu,\vec{k}}$ 之間存在着如下的对易关系:

$$[q_{\mu,\vec{k}}, p_{\nu,\vec{k}'}] = i\delta_{\mu\nu}\delta_{\vec{k}\vec{k}'}, \tag{4,45}$$

其余各对算符之間都可以相互对易. H 可以写为:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}} \{p_{\mu,-\vec{k}}p_{\mu,\vec{k}} + \omega^2 q_{\mu,-\vec{k}}q_{\mu,\vec{k}}\}, \quad \omega^2 = \vec{k}^2; \tag{4,46}$$

可以将总动量 $\vec{P}$ 写为:

$$\vec{P} = -\frac{i}{2}\sum_{\vec{k}} \vec{k}\{p_{\mu,\vec{k}}q_{\mu,\vec{k}} + q_{\mu,\vec{k}}p_{\mu,\vec{k}}\}. \tag{4,47}$$

設以 $\vec{S}$ 代表在場的总角动量 $\vec{M}$ 中光子的自旋所作的貢献,那末就有:

$$\vec{S} = -i\sum_{\vec{k}} \vec{S}_{\mu\nu}p_{\mu,\vec{k}}q_{\nu,\vec{k}}, \tag{4,48}$$

其中 $\vec{S}_{\mu\nu}$ 代表矩陣 $\vec{S}$ 的第 ν 行第 μ 列的矩陣元. 从对易关系(4,45)和哈密頓量 H 可以推导得如下的运动方程:

$$\frac{dq_{\mu,\vec{k}}}{dt} = p_{\mu,-\vec{k}}, \quad \frac{dp_{\mu,\vec{k}}}{dt} = -\omega^2 q_{\mu,-\vec{k}}. \tag{4,49}$$

为了将以 $\vec{k}$ 和 $-\vec{k}$ 标志的自由度的运动分开,可以进一步将 $q_{\mu,\vec{k}}$ 和 $p_{\mu,\vec{k}}$ 作变換. 为了使洛仑兹条件具有比較簡单的形式,我們引进四个相互正变的单位 4-矢量 $e_{\rho\mu}(\rho = 1, 2, 3, 4)$:

$$e_{\rho\mu}e_{\sigma\mu} = \delta_{\rho\sigma}, \quad \rho, \sigma = 1, 2, 3, 4, \tag{4,50}$$

其中由 $\rho = 1, 2, 3$ 标志的三个单位矢量只有空間分量,它們的时間分量等于零. 由 $\rho = 4$ 标志的单位矢量只有时間分量而沒有空間分量,即

$$\left.\begin{aligned} e_{4i} &= 0, \quad i = 1, 2, 3. \\ e_{44} &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{4,51}$$

至于 $\rho = 1, 2, 3$ 这三个矢量，相应于不同的 $\vec{k}$ 我們作不同的选择. 我們选取 $\rho = 3$ 的矢量的空間部分和 $\vec{k}$ 平行，$\rho = 1, 2$ 的矢量的空間部分和 $\vec{k}$ 垂直. 此外，我們引进算符 $b_{\sigma,\vec{k}}$ 和 $b^{+}_{\sigma,\vec{k}}$；其中当 $\sigma = 1, 2, 3$ 时 $b_{\sigma,\vec{k}}$ 和 $b^{+}_{\sigma,\vec{k}}$ 相互厄米共軛，而 $b_{4,\vec{k}}$ 則和 $b^{+}_{4,\vec{k}}$ 相互反厄米共軛；亦即

$$\left.\begin{aligned} b^{+}_{i,\vec{k}} &= b^{*}_{i,\vec{k}}, \quad i = 1, 2, 3. \\ b^{+}_{4,\vec{k}} &= -b^{*}_{4,\vec{k}}. \end{aligned}\right\} \tag{4,52}$$

在 $q_{\mu,\vec{k}}$ 与 $b_{\sigma,\vec{k}}$ 和 $b^{+}_{\sigma,\vec{k}}$ 之間存在着如下的关系：

$$q_{\mu,\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\{e_{\sigma\mu}(\vec{k})b_{\sigma,\vec{k}}e^{-i\omega t} + e_{\sigma\mu}(-\vec{k})b^{+}_{\sigma,-\vec{k}}e^{i\omega t}\}. \tag{4,53}$$

从运动方程(4,49)可以得到：

$$p_{\mu,\vec{k}} = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}\{e_{\sigma\mu}(-\vec{k})b_{\sigma,-\vec{k}}e^{-i\omega t} - e_{\sigma\mu}(\vec{k})b^{+}_{\sigma,\vec{k}}e^{i\omega t}\}. \tag{4,54}$$

我們可以解方程(4,53)和(4,54). 将 $b_{\sigma,\vec{k}}$ 和 $b^{+}_{\sigma,\vec{k}}$ 反过来表达为：

$$\left.\begin{aligned} b_{\sigma,\vec{k}} &= \left\{\sqrt{\frac{\omega}{2}}e_{\sigma\mu}(\vec{k})q_{\mu,\vec{k}} + \sqrt{\frac{i}{2\omega}}e_{\sigma\mu}(\vec{k})p_{\mu,-\vec{k}}\right\}e^{i\omega t}, \\ b^{+}_{\sigma,\vec{k}} &= \left\{\sqrt{\frac{\omega}{2}}e_{\sigma\mu}(\vec{k})q_{\mu,-\vec{k}} - \sqrt{\frac{i}{2\omega}}e_{\sigma\mu}(\vec{k})p_{\mu,\vec{k}}\right\}e^{-i\omega t}. \end{aligned}\right\} \tag{4,55}$$

从对易关系(4,45)和式(4,55)可以得到 $b_{\sigma,\vec{k}}$ 和 $b^{+}_{\sigma,\vec{k}}$ 之間如下的对易关系：

$$[b_{\sigma,\vec{k}}, b^{+}_{\rho,\vec{k}'}] = \delta_{\sigma\rho}\delta_{\vec{k}\vec{k}'}. \tag{4,56}$$

从(4,43)和(4,53)可以得到 A_μ 如下的表式：

$$A_\mu = \sum_{\vec{k}}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}e_{\sigma\mu}(\vec{k})\{b_{\sigma,\vec{k}}e^{ikx} + b^{+}_{\sigma,\vec{k}}e^{-ikx}\}. \tag{4,57}$$

哈密頓量 H 可以表达为：

$$H = \sum_{\vec{k}}\sum_{\sigma=1}^{4}\omega\left(N_{\sigma,\vec{k}} + \frac{1}{2}\right), \tag{4,58}$$

其中 $N_{\sigma,\vec{k}}$ 的定义是：

$$N_{\sigma,\vec{k}} = b^{+}_{\sigma,\vec{k}} b_{\sigma,\vec{k}}, \quad \sigma = 1, 2, 3, 4. \tag{4,59}$$

可以将总动量 $\vec{P}$ 表达为：

$$\vec{P} = \sum_{\vec{k}} \sum_{\sigma=1}^{4} \vec{k} N_{\sigma,\vec{k}}; \tag{4,60}$$

可以将光子自旋的总和 $\vec{S}$ 表达为：

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \vec{S}_{\sigma\rho}(\vec{k}) \{ b^{+}_{\sigma,\vec{k}} b_{\rho,\vec{k}} - b_{\sigma,\vec{k}} b^{+}_{\rho,\vec{k}} \}, \tag{4,61}$$

其中 $\vec{S}_{\sigma\rho}(\vec{k})$ 的定义是：

$$\vec{S}_{\sigma\rho}(\vec{k}) \equiv e_{\sigma\mu}(\vec{k}) \vec{S}_{\mu\nu} e_{\rho\nu}(\vec{k}). \tag{4,62}$$

在推导式(4,61)的时候，我們应用了 $\vec{S}_{\mu\nu}$ 的反对称性：

$$S_{\mu\nu} = - S_{\nu\mu}. \tag{4,63}$$

如果我們选择 $N_{\sigma,\vec{k}}$ 作为一套完全的、可以对易的力学量，并以它們的共同本征态作为基，那末立刻就可以写下 $b_{\sigma,\vec{k}}$，$b^{+}_{\sigma,\vec{k}}$ 和 $N_{\sigma,\vec{k}}$ 的显示表式。应用在討論自旋等于零的粒子的問題时所得到的結果，可以看出，在 $\sigma = 1, 2, 3$ 时，$b_{\sigma,\vec{k}}$ 具有和(3,34)一样的形式，$b^{+}_{\sigma,\vec{k}}$ 具有和 (3,35) 一样的形式，$N_{\sigma,\vec{k}}$ 具有和 (3,32) 相同的形式。但是，在 $\sigma = 4$ 时，情况略有不同。这是由于，$b_{4,\vec{k}}$ 和 $b^{+}_{4,\vec{k}}$ 不是相互厄米共軛的，而是相互反厄米共軛的。不难应用和 § 3,7 中所用的方法相类似的方法来証明：$N_{4,\vec{k}}$ 应該具有如下的形式：

$$N_{4,\vec{k}} = \begin{pmatrix} -1, & 0, & 0, & 0 \cdots \\ 0, & -2, & 0, & 0 \cdots \\ 0, & 0, & -3, & 0 \cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{pmatrix}; \tag{4,64}$$

$b_{4,\vec{k}}$ 应該具有如下的形式：

$$b_{4,\vec{k}} = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{pmatrix}; \tag{4,65}$$

$b^+_{i,\vec{k}}$ 应該具有如下的形式：

$$b^+_{i,\vec{k}} = i\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}. \tag{4,66}$$

我們可以对以上所得到的結果作如下的物理詮釋：电磁場是由一份份的光子組成的．不同种类的光子由不同的标符 σ 和 $\vec{k}$ 区分；由 $\vec{k}$ 和 $\sigma = 1, 2, 3$ 标志的光子具有动量 $\vec{k}$ 和能量 ω，而由 $\vec{k}$ 和 $\sigma = 4$ 标志的光子具有动量 $-\vec{k}$ 和能量 $-\omega$．$b_{1,\vec{k}}$，$b_{2,\vec{k}}$，$b_{3,\vec{k}}$ 是相应光子的消灭算符；$b^+_{1,\vec{k}}$，$b^+_{2,\vec{k}}$ 和 $b^+_{3,\vec{k}}$ 是相应光子的产生算符；$b_{4,\vec{k}}$ 是相应光子的产生算符；$b^+_{4,\vec{k}}$ 是相应光子的消灭算符．光子是服从鮑色統計法則的基本粒子．我們称由 $\sigma = 1, 2$ 所标志的光子为横光子；称由 $\sigma = 3$ 标志的光子为縱光子；称 $\sigma = 4$ 所标志的光子为标量光子．在以后我們将証明，实驗所观察到的光子是横光子；由于洛仑兹条件，縱光子和标量光子的物理效应只归結为荷电粒子之間的庫伦 (Coulomb) 相互作用．

§ 4,6. 光子的自旋

可以証明，横光子和縱光子的自旋等于 1，标量光子的自旋等于零．我們首先来証明标量光子的自旋等于零．从(4,29)可以看出：

$$\vec{S}_{i4} = \vec{S}_{4i} = 0; \tag{4,67}$$

因此，根据(4,51)和(4,62)可以知道：

$$\vec{S}_{i4}(\vec{k}) = \vec{S}_{4i}(\vec{k}) = 0; \tag{4,68}$$

于是 $\vec{S}$ 可以改写为：

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}} \vec{S}_{ij}(\vec{k})\{b^+_{i,\vec{k}}b_{j,\vec{k}} - b^+_{j,\vec{k}}b_{i,\vec{k}}\}, \tag{4,69}$$

$$i, j = 1, 2, 3;$$

在 (4,69) 式中我們还曾将右方第二項中的二个因子 $b^+_{i,\vec{k}}$ 和 $b_{i,\vec{k}}$ 的

位置对易了一下，这是容許的，因为根据对易关系(4,56)有：

$$\vec{S}_{ij}(\vec{k})b_{i,\vec{k}}b^{+}_{j,\vec{k}} = \mathrm{Spur}\,\vec{S}(\vec{k}) + \vec{S}_{ji}(\vec{k})b^{+}_{i,\vec{k}}b_{j,\vec{k}}, \tag{4,70}$$

但是，从(4,29)可以看出：

$$\mathrm{Spur}\,\vec{S} = 0. \tag{4,71}$$

我們引入什么光子都不存在的态 $|\rangle_0$，它滿足下列方程：

$$\left.\begin{aligned} b_{i,\vec{k}}|\rangle_0 &= 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ b^{+}_{i,\vec{k}}|\rangle_0 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4,72}$$

可以用 $b_{i,\vec{k}}|\rangle_0$ 代表有一个标量光子存在的波函数. 利用对易关系(4,56)和(4,72)有：

$$\vec{S}\,b_{i,\vec{k}}|\rangle_0 = b_{i,\vec{k}}\,\vec{S}|\rangle_0 = 0. \tag{4,73}$$

这就証明了，标量光子的自旋等于零.

現在再进一步来証明横光子和纵光子的自旋等于 1. 我們以 $b^{+}_{i,\vec{k}}|\rangle_0$ 代表存在着一个横光子或存在着一个纵光子的情态的波函数. 我們有：

$$\vec{S}^2 b^{+}_{i,\vec{k}}|\rangle_0 = [\vec{S}^2, b^{+}_{i,\vec{k}}]|\rangle_0. \tag{4,74}$$

不难証明：

$$[\vec{S}, b^{+}_{i,\vec{k}}] = \frac{1}{2}\{\vec{S}_{ij}(\vec{k}) - \vec{S}_{ji}(\vec{k})\}b^{+}_{j,\vec{k}}; \tag{4,75}$$

由于 $S_{\mu\nu}$ 的反对称性(4,63)，可以証明：

$$\vec{S}_{ji}(\vec{k}) = -\vec{S}_{ij}(\vec{k}); \tag{4,76}$$

因此我們有：

$$[\vec{S}, b^{+}_{i,\vec{k}}] = \vec{S}_{ij}(\vec{k})b^{+}_{j,\vec{k}}. \tag{4,77}$$

又，由于

$$[\vec{S}^2, b^{+}_{i,\vec{k}}]|\rangle_0 = \{\vec{S}, [\vec{S}, b^{+}_{i,\vec{k}}]\}|\rangle_0, \tag{4,78}$$

我們有：

$$\vec{S}^2 b^{+}_{i,\vec{k}}|\rangle_0 = \vec{S}_{ij}(\vec{k})\cdot\vec{S}_{jl}(\vec{k})b^{+}_{l,\vec{k}}|\rangle_0 = [\vec{S}(\vec{k})]^2_{il}b^{+}_{l,\vec{k}}|\rangle_0. \tag{4,79}$$

从 (4,29) 可以得：$\vec{S}^2 = 2$，是一个常数. 因此，經过任何么正变換后它应該仍旧不变；亦即

$$[\vec{S}(\vec{k})]^2_{il} = 2\delta_{il}. \tag{4,80}$$

于是有：

$$\vec{S}^2 b^+_{j,\vec{k}}|\rangle_0 = 2b^+_{j,\vec{k}}|\rangle_0. \tag{4,81}$$

这就証明了，横光子和纵光子的自旋是 1.

§4,7. 洛仑兹条件的意义

从(4,57)，可以得：

$$\chi = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = \sum_{\vec{k}} \frac{i}{\sqrt{2\omega}} k_\mu e_{3\mu}(\vec{k})\{b_{3,\vec{k}}e^{ikx} - b^+_{3,\vec{k}}e^{-ikx}\}. \tag{4,82}$$

利用(4,51)及 $e_{1\mu}$, $e_{2\mu}$ 和 k_μ 正变的性质，并利用 $e_{3\mu}$ 的空間分量之与 $\vec{k}$ 平行而时間分量等于零的性质，我們得：

$$\chi = \sum_{\vec{k}} i\sqrt{\frac{\omega}{2}}\{(b_{3,\vec{k}} + ib_{4,\vec{k}})e^{ikx} - (b^+_{3,\vec{k}} + ib^+_{4,\vec{k}})e^{-ikx}\}; \tag{4,83}$$

因此，洛仑兹条件就可以分解为下列的一系列条件：

$$\left.\begin{aligned} \langle|b_{3,\vec{k}} + ib_{4\vec{k}}|\rangle &= 0, \\ \langle|b^+_{3,\vec{k}} + ib^+_{4,\vec{k}}|\rangle &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4,84}$$

我們只要使 $|\rangle$ 滿足条件

$$(b_{3,\vec{k}} + ib_{4,\vec{k}})|\rangle = 0, \tag{4,85}$$

那末，(4,84)中的二个方程就都可以得到滿足. 可以証明，纵光子和标量光子对于电磁場的能量和动量不作貢献. 証明如下：由于

$$N_{3,\vec{k}} + N_{4,\vec{k}} = \frac{1}{2}(b^+_{3,\vec{k}} + ib^+_{4,\vec{k}})(b_{3,\vec{k}} - ib_{4,\vec{k}}) + \\ + \frac{1}{2}(b^+_{3,\vec{k}} - ib^+_{4,\vec{k}})(b_{3,\vec{k}} + ib_{4,\vec{k}}), \tag{4,86}$$

因此得：

$$\langle|N_{3,\vec{k}} + N_{4,\vec{k}}|\rangle = 0. \tag{4,87}$$

于是，电磁場的总能量 H 和总动量 $\vec{P}$ 的平均值等于：

$$\left.\begin{aligned} \langle|H|\rangle &= \sum_{\vec{k}} \omega\langle|N_{1,\vec{k}} + N_{2,\vec{k}} + 2|\rangle, \\ \langle|\vec{P}|\rangle &= \sum_{\vec{k}} \vec{k}\langle|N_{1,\vec{k}} + N_{2,\vec{k}}|\rangle, \end{aligned}\right\} \tag{4,88}$$

而与纵光子和标量光子无关。只有横光子才是可以观察到的光子。这与光是横波及有二种极化方式的实验事实相符。

§4,8. 洛仑兹条件带来的困难

由于洛仑兹条件(4,85)的限制，在客观上存在的情态中，纵光子和标量光子的数目不可能各自取任何数值。值得研究纵光子数目和标量光子数目之間存在着怎样的关系。即使是物理上的真空也未必意味着一个纵光子和一个标量光子都不存在。我們现在就来討論这种不能再簡单的真空情态。所謂真空情态在这里应該理解为什么横光子也不存在的情态。設以 $|\rangle_v$ 代表这一情态，則有：

$$b_{1,\vec{k}}|\rangle_v = 0, \quad b_{2,\vec{k}}|\rangle_v = 0. \tag{4,89}$$

引进什么粒子也不存在的情态 $|\rangle_0$，那末 $b_{3,\vec{k}}^{+n}|\rangle_0$ 代表存在着有 n 个动量等于 $\vec{k}$ 的纵光子的情态；$b_{4,\vec{k}}^{n}|\rangle_0$ 代表存在着有 n 个动量等于 $-\vec{k}$ 的标量光子的情态。可以将 $|\rangle_v$ 写成如下的形式：

$$|\rangle_v = \hat{V}(b_{3,\vec{k}}^{+}, b_{4,\vec{k}})|\rangle_0, \tag{4,90}$$

其中 $\hat{V}$ 是一个算符，是 $b_{3,\vec{k}}^{+}$ 和 $b_{4,\vec{k}}$ 的函数。为了书写起来方便，在以下我們将所有的标符 $\vec{k}$ 略去不写。根据对易定則(4,56)可以得到：

$$b_3\hat{V}|\rangle_0 = [b_3, \hat{V}]|\rangle_0 = \frac{\partial \hat{V}}{\partial b_4^{+}}|\rangle_0 = -ib_4\hat{V}|\rangle_0, \tag{4,91}$$

因此有：

$$\frac{\partial \hat{V}}{\partial b_4^{+}} + ib_4\hat{V} = 0. \tag{4,92}$$

令

$$\hat{V} = \sum_{n=0,\ m=0}^{\infty} c_{n,m} b_3^{+n} b_4^{m}, \tag{4,93}$$

那末(4,92)就成为：

$$\sum_{n=1,\ m=1}^{\infty} (nc_{nm} + ic_{n-1,m-1}) b_3^{+n-1} b_4^{m} + \sum_{n=1}^{\infty} nc_{n,0} b_3^{+n-1} = 0, \tag{4,94}$$

因此可以得到：

$$\left.\begin{aligned} c_{n,m} &= -\frac{i}{n}c_{n-1,m-1}, \qquad n \geqslant 1,\ m \geqslant 1, \\ c_{n>1,0} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4,95}$$

令

$$c_{0,m} = g_m, \tag{4,96}$$

那末就有：

$$c_{n,m+n} = \frac{(-i)^n}{n!}g_m, \tag{4,97}$$

因此有：

$$V = \sum_{m=0} g_m b_4^m e^{-ib_3^+ b_4}. \tag{4,98}$$

要使 $|\rangle_v$ 滿足归一化条件，就必須有：

$$\begin{aligned} {}_0\langle|V^*V|\rangle_0 &= \sum_{n,m,n',m'} c^*_{n'm'}c_{n,m}(-1)^{m'}{}_0\langle|b_4^{+m'}b_3^{n'}b_3^{+n}b_4^m|\rangle_0 \\ &= \sum_{n,m} c^*_{nm}c_{nm}n!\,m!. \end{aligned} \tag{4,99}$$

引进(4,97)，就得：

$${}_0\langle|V^*V|\rangle_0 = \sum_{m=0} g^*_m g_m \sum_{n=0} \frac{(n+m)!}{n!}. \tag{4,100}$$

从(4,100)可以看出，不論我們怎样选择系数 g_m 都无法使 $|\rangle_v$ 归一化，那就是說，即使在眞空的情态中也必須存在有无穷多的纵光子和标量光子。在存在有横光子时，情况也是一样。这样的理論显然是牵強的。因此，以前所用的将电磁場量子化的方法是有缺陷的。为了避免这一缺陷，有必要将量子化的方法略加扩充和修改。

§4,9. 应用不定度規的量子化方法

为了克服在上节中所指出的缺点，可以将量子力学的数学形式略加扩充。在量子力学中，希耳伯 (Hilbert) 空間中的态矢的长度由 $\langle|\rangle$ 代表。波函数的归一化条件是：

$${}_i\langle|\rangle_i = \delta_{ij}; \tag{4,101}$$

某一力学量Q的平均值是：

$$\langle|Q|\rangle. \tag{4,102}$$

假使这一力学量可能取的数值都是实数，那末Q就必須是一个厄米算符。假使取一个表象，其中代表力学量的矩陣具有分立的行和列，那末波函数就可以由一行分立的数值a_n来代表，这里a_n是迭加态的波幅。在这样的表象中，态矢的长度是：

$$\langle|\rangle = a_n^* a_n; \tag{4,103}$$

归一化的条件是：

$${}_i\langle|\rangle_j = a_n^{(i)*} a_n^{(j)} = \delta_{ij}; \tag{4,104}$$

而力学量Q的平均值是：

$$\langle|Q|\rangle = a_n^* Q_{nm} a_m. \tag{4,105}$$

可以将希耳伯空間中关于态矢长度、归一化条件和平均值的定义(4,103)，(4,104)和(4,105)略加扩充。在現实世界的三維空間中空間間隔长度的定义是：

$$x^2 = x_i x_i = (x_1 x_2 x_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \tag{4,106}$$

在数学形式上(4,106)和(4,103)很相似，在四維时空中，时空間隔长度的定义是：

$$x^2 = x_i x_i - t^2 = (x_1 x_2 x_3 t)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ t \end{pmatrix}. \tag{4,107}$$

(4,107)中的矩陣通常称为度規矩陣，也叫做度規张量。在(4,106)中长度的平方一定是正的，但是在(4,107)中間隔长度的平方就不一定是正的，也可能是負的。因此，我們称这种度規为不定度規。是古波泰[Gupta, 1950, 1951]和勃劳楼[Bleuler, 1950]将不定度規的概念引进量子电磁場的理論的。他們引进了一个厄米度規算符η，它滿足下列条件：

$$\eta^2 = 1. \tag{4,108}$$

他們建議，在希耳伯空間中的态矢长度的定义按照(4,107)扩充为：

$$\langle|\eta|\rangle; \tag{4,109}$$

将归一化条件扩充为：

$${}_i\langle|\eta|\rangle_k = \delta_{ik} \text{ 或 } -\delta_{ik}; \tag{4,110}$$

将力学量 Q 的平均值的定义扩充为：

$$\langle|\eta Q|\rangle. \tag{4,111}$$

在作了这样的扩充以后，量子力学的数学形式增加了一些新的特征：首先是，态矢长度的平方可能取負值，因此可能要遇到負的几率这种困难的概念；另一个特点是，即使 Q 是一个厄米算符，它的平均值也不一定是实数。我們現在引入如下的曲括号 { } 的定义：設 A 和 B 是二个算符，那末，

$$\{A, B\} \equiv AB + BA. \tag{4,112}$$

假使有：

$$\{\eta, Q\} = 0, \tag{4,113}$$

那末即使 Q 是厄米算符，它的平均值也将是虚数：

$$\langle|\eta Q|\rangle^* = \langle|Q\eta|\rangle = -\langle|\eta Q|\rangle. \tag{4,114}$$

当然，假使 Q 和 η 可以相互对易，那末只要 Q 是厄米算符，他的平均值仍将是实数。

古波泰和勃劳德提出，$A_\mu(\mu = 1, 2, 3, 4)$ 都应該用厄米算符来代表。由于观察到的 $\vec{A}$ 的数值都是实数，观察到的 A_4 的数值都是虚数，所以他們假定：

$$[\vec{A}, \eta] = 0, \quad \{A_4, \eta\} = 0. \tag{4,115}$$

可以完全按照 § 4,2, § 4,3 的方式进行量子化。但是，A_4 在这里得理解为厄米算符，洛仑兹条件(4,39)則改为：

$$\langle|\eta\chi|\rangle = \left\langle\left|\eta\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}\right|\right\rangle = 0. \tag{4,116}$$

可以完全用和 § 4,5 中的方法相同的方法来将电磁場的运动展开成为平面波运动的迭加，直到(4,64)式和以后才开始改变。在引

入不定度規以后，N_{4k} 的形式将变得和 (3,32) 中的表式一样；$b_{4,k}$ 的形式将变得和 (3,34) 中的表式一样；而 $b^+_{4,k}$ 的形式則将变得和 (3,35)中的表式一样。 因此，$b_{4,k}$ 将不是标量光子的产生算符，而是标量光子的消灭算符；$b^+_{4,k}$ 将不是标量光子的消灭算符，而是标量光子的产生算符。

从(4,57)和(4,115)，可以推导得：

$$\left.\begin{aligned}&[b_{i,k},\eta]=0,\quad [b^+_{i,k},\eta]=0,\quad i=1,2,3;\\&\{b_{4,k},\eta\}=0,\quad \{b^+_{4,k},\eta\}=0.\end{aligned}\right\}\tag{4,117}$$

洛仑兹条件(4,116)則可以改写为：

$$\left.\begin{aligned}&\langle|\eta(b_{3,k}+ib_{4,k})|\rangle=0,\\&\langle|\eta(b^+_{3,k}+ib^+_{4,k})|\rangle=0;\end{aligned}\right\}\tag{4,118}$$

因此，只要假定：

$$(b_{3,k}\mp ib_{4,k})|\rangle=0,\tag{4,119}$$

那末就可以得到：

$$\langle|\eta(b^+_{3,k}+ib^+_{4,k})=\langle|(b^+_{3,k}-ib^+_{4,k})\eta=0,\tag{4,120}$$

因此(4,118)中的条件自然得到满足。 显然，由于(4,118)，在引进不定度規以后，縱光子和标量光子对于电磁場的总能量 H 和总动量 $\vec{P}$ 仍将不作任何貢献。 观察到的光子仍将都是横光子，因此这理論仍能和实驗一致。 但是，由于 $b_{4,k}$ 不再是产生算符而是消灭算符，滿足(4,119)的波函数将与(4,90)及(4,98)中的大不相同。波函数不能归一化的困难不再存在，也就是說，在真空情态中不必存在着无穷多的縱光子和标量光子。

象以前一样，我們用 $|\rangle_0$ 代表什么光子也不存在的情态，以 $|\rangle_v=V|\rangle_0$ 代表真空情态。那末不难証明：

$$\left.\begin{aligned}b_3V|\rangle_0&=\frac{\partial V}{\partial b^+_3}|\rangle_0,\\b_4V|\rangle_0&=\frac{\partial V}{\partial b^+_4}|\rangle_0,\end{aligned}\right\}\tag{4,121}$$

因为現在 V 是 b^+_3 和 b^+_4 的函数。因此有：

$$\frac{\partial V}{\partial b_3^+} + i\frac{\partial V}{\partial b_4^+} = 0. \tag{4,122}$$

設 V 等于：

$$V = \sum_{n=0,\ m=0} c_{n,m} b_3^{+n} b_4^{+m}, \tag{4,123}$$

那末就得到：

$$\sum_{n=0,\ m=0} \{(n+1)c_{n+1,m} + i(m+1)c_{n,m+1}\} = 0. \tag{4,124}$$

从(4,124)可得：

$$(n+1)c_{n+1,m} + i(m+1)c_{n,m+1} = 0. \tag{4,125}$$

令

$$c_{n,0} = g_n, \tag{4,126}$$

那末就有：

$$c_{n-m,m} = (+i)^m \frac{n!}{m!(n-m)!} g_n, \tag{4,127}$$

因此有：

$$V = \sum_{n=0} g_n (b_3^+ + ib_4^+)^n. \tag{4,128}$$

由于

$$[b_3 + ib_4,\ b_3^+ + ib_4^+] = 0, \tag{4,129}$$

$|\rangle$ 能满足洛仑兹条件(4,119)是显然的。考虑到对易关系(4,117)及(4,129)，不难得到使 $|\rangle$ 归一化的条件：

$$_0\langle | \sum_n g_n^* (b_3 - ib_4)^n \eta \sum_m g_m (b_3^+ + ib_4^+)^m | \rangle_0 = g_0^* g_0 = 1. \tag{4,130}$$

因此，在迭加的情态中，存在有纵光子和标量光子的情态部分根本不对归一化条件起影响。可以用什么光子也不存在的态 $|\rangle_0$ 来代表真空。这样就避免了 § 4,8 中所指出的困难。

不难求出，在 N_0, ξ 表象中 η 的显示形式。由于

$$[N_0, \xi,\ \eta] = 0, \tag{4,131}$$

η 在 N_0, ξ 表象中可以取对角矩阵的形式：

$$\eta_{n,m} = \eta_n \delta_{nm}. \tag{4,132}$$

从(4,108)可以知道，η_n 只能是 1 或 -1. 从(4,117)可以看出：

$$\left.\begin{aligned}[b_i, \eta]_{n,m} &= (b_i)_{nm}\eta_m - \eta_n (b_i)_{nm} = \\ &= \delta_{n,m-1}(\eta_m - \eta_n)\sqrt{m} = 0 \\ [b_i^+, \eta]_{nm} &= (b_i^+)_{nm}\eta_m - \eta_n (b^+)_{n,m} = \\ &= \delta_{n,m+1}\sqrt{n}\,(\eta_m - \eta_n) = 0;\end{aligned}\right\} \tag{4,133}$$

因此，对于 $N_{i,i}$ 来說，η 等于是单位矩陣. 此外有：

$$\left.\begin{aligned}(b_4, \eta)_{nm} &= \delta_{n,m-1}(\eta_m + \eta_n)\sqrt{m} = 0, \\ (b_4^+, \eta)_{nm} &= \delta_{n,m+1}(\eta_m + \eta_n)\sqrt{n} = 0.\end{aligned}\right\} \tag{4,134}$$

因此有：

$$\eta_{n+1} = -\eta_n. \tag{4,135}$$

对于 N_{ik} 来說，矩陣 η 具有如下的形式：

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}; \tag{4,136}$$

在这里我們考虑到的是应該使真空态 $|\rangle_0$ 能够归一化为 $+1$.

§4,10. 纵光子和标量光子的意义

在 §4,9 中我們已經指出，纵光子和标量光子对于情态的归一化、电磁場的总能量和总动量的平均值都不起任何作用；这就导致了这样一个問題：客观上存在的真空只有一种，但是却可以用无穷多种的波函数去描述它. 这无穷多种波函数之間的区别到底相应于古典电磁場理論中的什么区别呢？

我們可以討論一个更广泛的情况. 从(4,119)可以看出：只存在有横光子而不存在有纵光子和标量光子的情态是滿足洛仑兹条件的. 令

$$|\rangle \tag{4,137}$$

代表这样一个情态，那末，情态

$$V|\rangle \tag{4,138}$$

中所具有的横光子和情态 $|\rangle$ 中所具有的横光子完全一样. 但是，在 $V|\rangle$ 所代表的情态中还存在着纵光子和标量光子. (4,138)中的 V 就是(4,128)中所給的算符，而(4,138)中的波函数也是满足洛仑兹条件的. 因此，同样一个客观情态，却可以用无穷多种不同的波函数去描述. 产生的問題是：这无穷多种不同的波函数相应于古典电磁場理論中的那一方面.

古典理論中的物理量相应于量子理論中物理量的平均值. 在古典电磁場理論中，只要4-矢势 A_μ 确定了，那末其余一切物理量都可以从其中推导出来. 因此，要研究古典电磁場理論和量子电磁場理論之間的对应关系，可以从研究4-矢势 A_μ 的平均值入手. 我們先求 A_μ 对于波函数 $|\rangle$ 的平均值. 由于 $|\rangle$ 中不存在纵光子和标量光子，因此有：

$$\left.\begin{aligned} b_3|\rangle = 0, \quad b_4|\rangle = 0, \\ \langle|b_3^+ = 0, \quad \langle|b_4^+ = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4,139}$$

于是得：

$$\langle|\eta A_\mu|\rangle = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \langle|\eta\{[e_{1\mu}(\vec{k})b_{1,\vec{k}} + e_{2\mu}(\vec{k})b_{2,\vec{k}}]e^{ikx} + [e_{1\mu}(\vec{k})b_{1,\vec{k}}^+ + e_{2\mu}(\vec{k})b_{2,\vec{k}}^+]e^{-ikx}\}|\rangle. \tag{4,140}$$

A_μ 对 $V|\rangle$ 的平均值是：

$$\langle|V^*\eta A_\mu(x)V|\rangle = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \langle|V^*\eta e_{\sigma\mu}(\vec{k})\{b_{\sigma,\vec{k}}e^{ikx} + b_{\sigma,\vec{k}}^+ e^{-ikx}\}V|\rangle. \tag{4,141}$$

可以将(4,141)式的右方分为二部分：第一部分只涉及到横光子算符的部分，亦即包括 $\sigma = 1,2$ 的那些項；第二部分只涉及到纵光子和标量光子算符的部分，亦即包括 $\sigma = 3, 4$ 的那些項. 由于 b_1, b_2, b_1^+, b_2^+ 可以和 V, V^* 相互对易，利用关系(4,129)就可以証明，

第一部分和(4,140)相等.·为了求(4,141)中的第二部分,我們先求(4,141)中一項的数值:

$$\langle|V^*\eta b_{3,\vec{k}}V|\rangle=\langle|V^*\eta[b_{3,\vec{k}},V]|\rangle=$$
$$=\left\langle\left|V^*\eta\frac{\partial V}{\partial b^+_{3,\vec{k}}}\right|\right\rangle=g_0^*(\vec{k})g_1(\vec{k}),\qquad(4,142)$$

$g_n(\vec{k})$ 是迭加态中存在着 n 个动量为 $\vec{k}$ 的縱光子但沒有动量等于 $\vec{k}$ 的标量光子的情态的系数. 与(4,142)相似的公式是:

$$\left.\begin{aligned}
&\langle|V^*\eta b_{3,\vec{k}}V|\rangle=g_0^*(\vec{k})g_1(\vec{k}),\\
&\langle|V^*\eta b^+_{3,\vec{k}}V|\rangle=g_1^*(\vec{k})g_0(\vec{k}),\\
&\langle|V^*\eta b_{4,\vec{k}}V|\rangle=ig_0^*(\vec{k})g_1(\vec{k}),\\
&\langle|V^*\eta b^+_{4,\vec{k}}V|\rangle=ig_1^*(\vec{k})g_0(\vec{k});
\end{aligned}\right\}\qquad(4,143)$$

因此,(4,141)中的第二部分可以写作:

$$\sum_{\vec{k}}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\{g_0^*(\vec{k})g_1(\vec{k})[e_{3\mu}(\vec{k})+ie_{4\mu}(\vec{k})]e^{ikx}+$$
$$+g_1^*(\vec{k})g_0(\vec{k})[e_{3\mu}(\vec{k})+ie_{4\mu}(\vec{k})]e^{-ikx}\}.\qquad(4,144)$$

考虑到 $e_{3\mu}(\vec{k})$ 是和动量 $\vec{k}$ 平行的单位矢量, $e_{4\mu}(\vec{k})$ 是在时間方向的单位矢量,因此上式可以写作:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x_\mu},\qquad(4,145)$$

其中

$$\alpha=\sum_{\vec{k}}\frac{-i}{\omega\sqrt{2\omega}}\{g_0^*(\vec{k})g_1(\vec{k})e^{ikx}-g_1^*(\vec{k})g_0(\vec{k})e^{-ikx}\}.$$

显然, α 是实函数,而且滿足方程

$$\Box\alpha=0.\qquad(4,146)$$

于是我們得到:

$$\langle V^*\eta A_\mu V|\rangle=\langle|\eta A_\mu|\rangle+\frac{\partial\alpha}{\partial x_\mu};\qquad(4,147)$$

因此, A_μ 对于 $|\rangle$ 的平均值与对于 $V|\rangle$ 的平均值之間只相差一个第二种規范变換. 我們在 § 4,2 节中曾經指出,在古典电磁場理論

中，客观上同一个电磁場可以由一系列的 4-矢势 A_μ 来描述，它們之間的差别只是一个由(4,13)表达的規范变換. 在量子电磁場理論中与之相对应的情况是，客观上同一情态可以由一系列的波函数来描述，它們之間的差别只在于如下的变換：

$$|\rangle \to |\rangle' = V|\rangle. \tag{4,148}$$

我們称变換(4,148)为量子电磁場理論中的規范变換. 当然，所有具有規范不变性的物理量的平均值都不受規范变換的影响. 以前所討論过的場的总能量和总动量就是例子. 不难証明，电磁場强度的平均值也是具有規范不变性的.

§ 4,11. 对易关系的洛仑兹不变性

在以上所建立的量子电磁場理論中，运动方程(4,8)和洛仑兹条件(4,116)具有显示的洛仑兹不变性. 但是，对易关系(4,33)則受到条件 $t = t'$ 的限制，不能立刻显出洛仑兹不变性. 为了証明整个理論滿足特殊相对論的要求，有必要求 $t \neq t'$ 时的对易关系. 利用 A_μ 的表式(4,57)和对易关系(4,56)，可得：

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')] = i\delta_{\mu\nu} D(x - x'), \tag{4,149}$$

其中函数 D 的定义是 $D(x) = \Delta_{m=0}(x)$；$\Delta_m(x)$ 的定义見 (3,74). 因此，对易关系(4,149)在正洛仑兹变換中显然具有不变性. 在空間反射的变換下，4-矢势作如下的变換：

$$\left.\begin{aligned} \vec{A}(\vec{x}, t) &\to {}'\vec{A}(\vec{x}', t') = -\vec{A}(-\vec{x}, t), \\ A_4(\vec{x}, t) &\to {}'A_4(\vec{x}', t') = A_4(-\vec{x}, t). \end{aligned}\right\} \tag{4,150}$$

考虑到 $D(x)$ 具有 (3,76) 中第一式所表达的性质，可見 (4,149) 在变換(4,150)中具有不变性.

为了討論对易关系在时間反演变換中的性质，有必要先討論 4-矢势 A_μ 在时間反演时如何变化. 我們先研究一个荷电粒子的运动. 在时間反演后，电荷沒有改变；但是，由于运动的方向倒了轉来，因此电流变了一个号. 考虑到矢量势 $\vec{A}$ 与电流之間的連系及标量势 $\phi = -iA_4$ 与电荷之間的連系，我們可以肯定，在时間

反演变换中，矢量势 $\vec{A}$ 应該变一个号，而标量势 ϕ 則保持不变。因此，在时間反演变換中有：

$$\left.\begin{aligned}\vec{A}(\vec{x},t)\to'\vec{A}(\vec{x}',t')&=-\vec{A}(\vec{x},-t),\\ A_4(\vec{x},t)\to'A_4(\vec{x}',t')&=A_4(\vec{x},-t).\end{aligned}\right\}\qquad(4,151)$$

考虑到，在时間反演中，不仅算符 A_μ 要作如 (4,151) 的变換，而且算符的次序也要如 §3,11 中所說的顛倒过来；再应用 (3,76) 中的第二式，就可以証明，对易关系对于时間反演变換也具有不变性。

参　考　文　献

Blenler, K. (1950), *Helv. Phys. Acta.*, **23**, 567.
Fermi, E. (1932), *Rev. Mod. Phys.*, **4**, 87.
Gupta, S. N. (1950), *Proc. Phys. Soc.*, **63**, 681.
Gupta, S. N. (1951), *Proc. Phys. Soc.*, **64**, 850.
Pauli, W. (1940), *Phys. Rev.*, 58, 716.

第五章　自旋等于$\frac{1}{2}$的粒子的場

§5,1. 狄拉克波动方程

从表 1 可以看到，在目前已知的基本粒子之中，大多数种类是自旋等于$\frac{1}{2}$的粒子．所有的輕子和重子的自旋都是$\frac{1}{2}$．由前面二章的討論我們知道，自旋为零的粒子可以用标量場或贋标量場描述；光子的自旋等于 1，由电磁 4-矢量場 A_μ 描述．可以猜想到，自旋为$\frac{1}{2}$的粒子可以用旋量場来描述，在历史发展进程中，自旋为 1 的粒子的理論提出最早，那就是电磁場理論；自旋为零的粒子的理論次之，那就是第三章中所討論的薛定格-克莱因-戈登方程；自旋为$\frac{1}{2}$的粒子的理論提出最迟，这是由狄拉克 [Dirac, 1928] 在研究描述单个电子的相对論性波动方程时提出来的．此后，这一方程被推广应用于描述核子、μ 介子及中微子；近年来它又被尝試应用于描述超子．目前，超子的自旋还沒有被肯定，只能說它們都是自旋等于半整数的粒子；最近有实验指出，Λ 超子的自旋是$\frac{3}{2}$的可能性很小，很可能它的自旋等于$\frac{1}{2}$．

此后，为了討論电子的多体問題是电子的产生与消失的問題，在狄拉克波动方程的基础上引近了电子場的概念，并将狄拉克波动方程所描述的电子場量子化．以后，又按照同样的方法引进了量子核子場、μ 介子場、中微子場等等．在本章中我們将先討論描述单个自旋为$\frac{1}{2}$的粒子的狄拉克方程，然后再将其量子化．

自由粒子的非相对論性薛定格方程是对时間 t 的一次微分方程，另一方面又是对空間坐标 x 的二次微分方程．在这一方程中，

时間和空間处于不对称的地位．克莱因和戈登尝試将方程改为对于时間 t 說来也是二次微分方程，使时間 t 和空間 x 在方程中处于对称的地位，以求得相对論性波动方程．由于在量子力学中，能量以算符 $i\frac{\partial}{\partial t}$ 代表，动量以算符 $-i\vec{\nabla}$ 代表，他們利用关系 (3,2) 得到了克莱因-戈登方程(3,3)．狄拉克反过来認为，波动方程也应該是对于空間坐标 x 的一次微分方程，并建議取下列方程

$$\left\{+i\frac{\partial}{\partial t}+i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}-\beta m\right\}\psi=0 \tag{5,1}$$

为描述自由粒子的波动方程，其中 m 是粒子的靜质量；$\vec{\alpha}$ 和 β 是四行四列的矩陣，服从如下的对易关系：

$$\begin{cases}\alpha_j\alpha_k+\alpha_k\alpha_j=2\delta_{jk},\\ \alpha_j\beta+\beta\alpha_j=0,\quad \beta^2=1;\end{cases} \tag{5,2}$$

ψ 是描述粒子的波函数，它有四个分量：

$$\psi(x)\equiv\begin{pmatrix}\psi_1(x)\\ \psi_2(x)\\ \psi_3(x)\\ \psi_4(x)\end{pmatrix}; \tag{5,3}$$

可以看出，$\psi(x)$ 滿足克莱因-戈登方程．将(5,1)式乘以算符

$$i\frac{\partial}{\partial t}-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}+\beta m, \tag{5,4}$$

并利用对易关系(5,2)，就得到：

$$(\Box-m^2)\psi=0. \tag{5,5}$$

当然，滿足克莱因-戈登方程(5,5)的波函数 $\psi(x)$ 未必一定也能滿足狄拉克方程(5,1)．

从 (5,3) 可以看出，波函数 ψ 不仅是时間和空間的函数，而且还是另外一个变量的函数．这个变量只能取四个分立的数值．因此，三个空間坐标并不形成一套完全的、可对易的力学量．換言之，方程(5,1)所代表的粒子不仅具有空間坐标这三个自由度．必須討論：这种粒子还具有些什么自由度，代表这些自由度的力学量

具有什么物理性质.

为此,我們討論方程(5,1)的平面波解:

$$u(\vec{p})e^{ipx}, \tag{5,6}$$

其中 $u(\vec{p})$ 有四个分量. 将(5,6)代入(5,1)就可以得到:

$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m)u(\vec{p}) = p_0 u(\vec{p}), \tag{5,7}$$

其中 $p_0 = -ip_4$ 是算符 $(\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m)$ 的本征值. 为了寻求这些本征值和相应的本征函数,我們选择一个表象,在这一表象中 $\vec{\alpha}$ 和 β 取下列形式:

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}; \tag{5,8}$$

其中 $\vec{\sigma}$ 是二行二列的泡里矩陣:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \tag{5,9}$$

I 則是二行二列的单位矩陣. 从(5,7)可以得到,下列行列式应該等于零:

$$\begin{vmatrix} m - p_0 & \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -m - p_0 \end{vmatrix} = 0, \tag{5,10}$$

亦即

$$\{m^2 + \vec{p}^2 - p_0^2\}^2 = 0. \tag{5,11}$$

因此,能量 p_0 一共有四个本征值:二个等于 E,另外二个等于 $-E$,而

$$E = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \tag{5,12}$$

如果自由粒子服从非相对論性的薛定格方程,那末动量 $\vec{p}$ 确定以后,能量 p_0 也完全确定下来; p_0 只是 $\vec{p}$ 的单值函数. 但是服从狄拉克波动方程的自由粒子的情况就有所不同,即使动量确定为 $\vec{p}$,能量并不确定,它可以取值 E,也可以取值 $-E$. 这从狄拉克波动方程中的哈密頓量算符

$$\begin{aligned} &(\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m), \\ &\vec{p} \equiv -i\vec{\nabla}, \end{aligned} \tag{5,13}$$

的结构也可以看出来. 在这里,能量算符不仅是动量算符的函数,而且也是矩阵 α 和 β 的函数. 当然,能量算符 (5,13) 和动量算符是可以对易的,因此可以具有共同的本征函数.

但是,即使粒子的动量和能量完全确定,仍然不能将波函数完全确定下来,因为能级仍然是简并的. 因此,动量和能量仍不足以形成一套完全的、可对易的力学量. 可以証明,力学量

$$\vec{\Sigma}\cdot\vec{e} \tag{5,14}$$

与动量及能量可以相互对易,其中

$$\vec{\Sigma}=\begin{pmatrix}\vec{\sigma} & 0\\ 0 & \vec{\sigma}\end{pmatrix},\quad \vec{e}=\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}. \tag{5,15}$$

表式(5,14)与动量算符可以相互对易是显然的;此外,我們有:

$$\begin{aligned}[\vec{\alpha}\cdot\vec{p}+\beta m,\ \vec{\Sigma}\cdot\vec{e}] &= [\alpha_i,\ \Sigma_j]\frac{p_ip_j}{|\vec{p}|}=\\ &=\begin{pmatrix}0 & \sigma_i\sigma_j-\sigma_j\sigma_i\\ \sigma_j\sigma_i-\sigma_i\sigma_j & 0\end{pmatrix}\frac{p_ip_j}{|\vec{p}|}=0.\end{aligned} \tag{5,16}$$

由于

$$(\vec{\Sigma}\cdot\vec{e})^2=1, \tag{5,17}$$

所以力学量 $\vec{\Sigma}\cdot\vec{e}$ 的本征值不外乎 $+1$ 或 -1. $\vec{\Sigma}\cdot\vec{e}$、动量和能量形成一套完全的、可对易的力学量;它們的一套本征值和相应的本征函数如下:

	$\vec{p}$	$\vec{\alpha}\cdot\vec{p}+\beta m$,	$\vec{\Sigma}\cdot\vec{e}$
Ⅰ	$\vec{p}$	E	1
Ⅱ	$\vec{p}$	E	-1
Ⅲ	$\vec{p}$	$-E$	1
Ⅳ	$\vec{p}$	$-E$	-1

(5,18)

$$\begin{cases}\psi_{\mathrm{I}}=iA\begin{pmatrix}\chi_+\\ \chi_{+B}\end{pmatrix}e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}-iEt},\quad \psi_{\mathrm{II}}=A\begin{pmatrix}\chi_-\\ -\chi_{-B}\end{pmatrix}e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}-iEt},\\ \psi_{\mathrm{III}}=iA\begin{pmatrix}\chi_{+B}\\ -\chi_+\end{pmatrix}e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}+iEt},\quad \psi_{\mathrm{IV}}=A\begin{pmatrix}\chi_{-B}\\ \chi_-\end{pmatrix}e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}+iEt};\end{cases} \tag{5,19}$$

其中

$$A=\sqrt{\frac{E+m}{2E}},\quad B=\frac{|\vec{p}|}{E+m};\tag{5,20}$$

χ_+ 和 χ_- 則是如下的二分量波函数:

$$\chi_+=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi}{2}}\\ \sin\dfrac{\theta}{2}e^{i\frac{\varphi}{2}}\end{pmatrix},\quad \chi_-=\begin{pmatrix}-\sin\dfrac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi}{2}}\\ \cos\dfrac{\theta}{2}e^{i\frac{\varphi}{2}}\end{pmatrix},\tag{5,21}$$

其中 θ 和 φ 代表动量 $\vec{p}$ 的方向:

$$\begin{aligned}&p_1=|\vec{p}|\sin\theta\cos\varphi,\quad p_2=|\vec{p}|\sin\theta\sin\varphi,\\&p_3=|\vec{p}|\cos\theta.\end{aligned}\tag{5,22}$$

应用 (5,21) 和 (5,22) 中的符号,就可以將 $\vec{\Sigma}\cdot\vec{z}$ 和哈密頓量写成如下的表式:

$$\vec{\Sigma}\cdot\vec{z}=\begin{pmatrix}\vec{\sigma}\cdot\vec{z} & 0\\ 0 & \vec{\sigma}\cdot\vec{z}\end{pmatrix},\tag{5,23a}$$

$$H=\vec{\alpha}\cdot\vec{p}+\beta m=|\vec{p}|\begin{pmatrix}0 & \vec{\sigma}\cdot\vec{z}\\ \vec{\sigma}\cdot\vec{z} & 0\end{pmatrix}+Em,\tag{5,23b}$$

其中

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{z}=\chi_+\chi_+^*-\chi_-\chi_-^*=\begin{pmatrix}\cos\theta, & \sin\theta e^{-i\varphi}\\ \sin\theta e^{i\varphi}, & -\cos\theta\end{pmatrix}.\tag{5,23c}$$

利用 χ_+ 和 χ_- 的正交性和归一性,就可以証明:

$$\begin{cases}\vec{\Sigma}\cdot\vec{z}\psi_{\rm I}=\psi_{\rm I}, & \vec{\Sigma}\cdot\vec{z}\psi_{\rm II}=-\psi_{\rm II},\\ \vec{\Sigma}\cdot\vec{z}\psi_{\rm III}=\psi_{\rm III}, & \vec{\Sigma}\cdot\vec{z}\psi_{\rm IV}=-\psi_{\rm IV}.\end{cases}\tag{5,24}$$

此外,还可以証明:

$$\begin{cases}H\psi_{\rm I}=E\psi_{\rm I}, & H\psi_{\rm II}=E\psi_{\rm II},\\ H\psi_{\rm III}=-E\psi_{\rm III}, & H\psi_{\rm IV}=-E\psi_{\rm IV}.\end{cases}\tag{5,25}$$

不难闡明 $\vec{\Sigma}\cdot\vec{z}$ 所代表的力学量的物理意义。可以証明,粒子的軌道角动量

$$\vec{L}=-i[\vec{z},\vec{p}]\tag{5,26}$$

与哈密顿量(5,13)并不能相互对易，因此不是守恒量；而力学量

$$\vec{M} = \vec{L} + \frac{1}{2}\vec{\Sigma} \tag{5,27}$$

才是与哈密顿量相互对易的，是守恒量．显而易见的解释是：(5,27) 代表粒子的总角动量，粒子除具有轨道角动量以外，还具有自旋 $\frac{1}{2}\vec{\Sigma}$，代表粒子的内禀自由度．$\frac{1}{2}\vec{\Sigma}\cdot\vec{\partial}$ 代表自旋在动量方向的分量．因此，动量、能量和自旋在动量方向的分量形成一套完全的、可对易的力学量．

粒子可以具有负能量这一数学解导致物理诠释上的严重困难．粒子将一步一步地、无限制地向更低的负能量本征态跃迁，无限制地、不断地放出能量．假使电子和核子都服从狄拉克波动方程，那末在物理世界中将不可能存在稳定的或准稳定的状态．为了克服这一困难，狄拉克 [Dirac, 1931] 假定：在现实世界中，几乎所有负能量的情态都已被粒子所占据．由于粒子服从泡里原则，处在正能级的粒子便无法无限制地向负能级跃迁，所有的负能级都为粒子所填满，所有的正能级中都没有粒子存在的情态代表真空，这样的情态没有任何物理上可观察到的效应．假使在情态 ψ_1 中有一个粒子，那末这在物理上就代表存在着一个动量为 $\vec{p}$，能量为 E，自旋在动量方向的分量为 1/2 的粒子．假使在情态 ψ_{III} 中缺少了一个粒子，那末和真空状态相比较，这一状态比真空态在能量方面多了 E，在动量方面多了 $-\vec{p}$；在物理上这就代表存在着一个动量为 $-\vec{p}$，能量为 E，自旋在动量方向的分量为 1/2 的反粒子．假使，由于某种微扰，某一粒子从情态 ψ_{III} 跃迁至情态 ψ_1，那末在 ψ_{III} 所代表的情态中就少了一个粒子，在情态 ψ_1 中就多了一个粒子；这在物理上就代表一对粒子和反粒子的产生．一般地说来，空着的负能级就代表反粒子．

例如，假使狄拉克波动方程所描述的是电子．那末，在情态 ψ_1 中有一个粒子在物理上就代表存在着一个电子；在情态 ψ_{III} 中缺少一个粒子在物理上就代表存在着一个正电子．在情态 ψ_{III} 中

缺少一个粒子时，这样状态的电荷比真空状态的电荷多一个 e，这里 $-e$ 代表电子的电荷．因此，正电子的电荷在数量上和电子的电荷相等，但是符号相反．

§5,2. 狄拉克波动方程和空間反射

为了証明狄拉克波动方程满足特殊相对論的要求，应該証明狄拉克方程具有洛仑兹不变性．洛仑兹变換可以分为二类：一类不包含坐标的反射或反演，另一类包含有坐标的反射或反演．假使我們一方面能証明狄拉克方程对于坐标反射和反演具有不变性，另一方面能証明狄拉克方程对于不包含有坐标反射或反演的正洛仑兹变換具有不变性，那末我們就証明了狄拉克方程对于所有的洛仑兹变換都具有不变性．我們首先討論空間坐标反射的变換．

为了方便，我們将狄拉克方程改写成另一形式．首先，引进如下定义的矩陣 γ_μ：

$$\begin{cases}\gamma_i = -i\beta\alpha_i, & i = 1,2,3;\\ \gamma_4 = \beta.\end{cases} \tag{5,28}$$

可以看出，γ_μ 都是厄米矩陣，因为 α 和 β 都是厄米算符，而 α 和 β 又相互反对易．可以証明，γ_μ 滿足下列对易关系：

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}, \quad \mu,\nu = 1,2,3,4. \tag{5,29}$$

将狄拉克方程(5,1)乘以 $-\beta$，就得到：

$$\{i\hat{p} + m\}\psi = 0, \tag{5,30}$$

其中 $p_\mu\psi = -i\dfrac{\partial\psi}{\partial x_\mu}$；$\hat{A}$ 的定义是：

$$\hat{A} \equiv A_\mu\gamma_\mu, \tag{5,31}$$

A_μ 是一个 4-矢量．引进定义

$$\bar{\psi} \equiv \psi^*\gamma_4, \tag{5,32}$$

那末，和(5,30)相共軛的方程可以写作：

$$\bar{\psi}\{i\hat{p} + m\} = 0, \tag{5,33}$$

其中 $\bar{\psi}p_\mu = i\dfrac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\mu}$.

在空間反射时，我們有：

$$\vec{x} = -\vec{x}', \quad t = t'; \tag{5,34}$$

为了研究波函数在变換 (5,34) 中如何变化，我們討論一个特殊例子. 有一个动量为 $\vec{p}$，能量为 E，自旋与动量方向平行的粒子，它的波函数是(5,19)中的 ψ_{I}. 在空間反射以后，动量变为 $-\vec{p}$，但是自旋的方向并不改变，因此是与动量反平行的；它的波函数由 ψ_{II} 代表，但是其中的 $\vec{p}$ 要改为 $-\vec{p}$. 設以 $\psi(x)$ 代表在原来的坐标系統中的波函数，以 $'\psi(x')$ 代表在空間反射以后同一粒子的波函数. 那末就有：

$$\psi(x) = iA\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ \sin\dfrac{\theta}{2}e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ B\cos\dfrac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ B\sin\dfrac{\theta}{2}e^{+i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}-iEt}; \tag{5,35}$$

而由于在坐标反射以后，$\vec{p}\to-\vec{p}$，因此有：

$$\theta\to\pi-\theta, \quad \varphi\to\pi+\varphi; \tag{5,36}$$

于是，在新坐标系統中波函数是：

$$'\psi(x') = A\begin{pmatrix} i\cos\dfrac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ i\sin\dfrac{\theta}{2}e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ -iB\cos\dfrac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ -iB\sin\dfrac{\theta}{2}e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}'-iEt}. \tag{5,37}$$

因此，在 $\psi(x)$ 和 $'\psi(x')$ 之間存在着如下的关系：

$$\psi(x) = \gamma_4 '\psi(x'). \tag{5,38}$$

可以証明，在一般情形下，在空間反射时波函数作如(5,38)式所給的变換。由于在空間反射时

$$\vec{p} = -\vec{p}', \quad p_4 = p_4', \tag{5,39}$$

狄拉克方程(5,30)变为：

$$\{-i\vec{p}'\cdot\vec{\gamma} + ip_4'\gamma_4 + m\}\gamma_4'\psi(x') = 0. \tag{5,40}$$

考虑到对易关系(5,29)，可得：

$$\{i\hat{p}' + m\}'\psi(x') = 0; \tag{5,41}$$

这就証明了，狄拉克方程具有空間反射不变性。

§5,3. 狄拉克波动方程和时間反演

在討論自旋为零的粒子的理論时，我們曾指出，在时間反演时波函数变为另一波函数的共軛复数。在自旋等于 1/2 的粒子的理論中也出現类似的情况。在时間反演时，我們有：

$$\vec{x} = \vec{x}', \quad t = -t'. \tag{5,42}$$

为了研究波函数在时間反演时如何变化，我們討論一个特殊例子：有一个动量为 $\vec{p}$、能量为 E、而自旋与动量方向平行的粒子；我們以 $\psi(x)$ 代表它的波函数。在时間反演以后，动量和自旋的方向都倒了过来；因此，在新的坐标系統中，粒子的动量是 $-\vec{p}$，自旋与动量仍旧平行；我們以 $'\psi(x')$ 代表粒子在新坐标系統中的波函数。那末，就有：

$$\psi(x) = iA\begin{pmatrix} -\cos\dfrac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ \sin\dfrac{\theta}{2}e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ B\cos\dfrac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ B\sin\dfrac{\theta}{2}e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}-iEt}; \tag{5,43}$$

在考虑了当 $\vec{p}\to-\vec{p}$ 时存在着关系(5,36)之后，有：

$$'\psi(x') = A\begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ -\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ B\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ -B\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}'-ip_4'x_4'}; \qquad (5,44)$$

此外，由于在 x_μ 和 x'_μ 之間存在着关系(5,42)，因此有：

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \widetilde{['\psi^*(x')]}, \qquad (5,45)$$

其中"～"是代表位調的符号．于是，我們有：

$$\psi(x) = i\gamma_1\gamma_3\gamma_4\widetilde{['\psi(x')]}. \qquad (5,46)$$

可以証明，在时間反演时波函数一般地作 (5,46) 所示的变換．考慮到：

$$\vec{\nabla} = \vec{\nabla}', \quad \frac{\partial}{\partial x_4} = -\frac{\partial}{\partial x_4'}; \qquad (5,47)$$

因此，狄拉克方程(5,30)在时間反演时变为：

$$\{i\vec{p}'\cdot\vec{\gamma} - ip_4'\gamma_4 + m\}i\gamma_1\gamma_3\gamma_4\widetilde{['\psi(x')]} = 0. \qquad (5,48)$$

将 (5,48) 乘以 $-i\gamma_4\gamma_3\gamma_1$，并利用对易关系(5,29)，最后进行位調，就得：

$$'\bar{\psi}(x')\{i\hat{p}' + m\} = 0. \qquad (5,49)$$

在这里，我們还应用了 γ_2 及 γ_4 的矩陣元是实数而 γ_1 及 γ_3 的矩陣元是虛数这一事实．方程 (5,49) 与方程 (5,33) 的形式完全一样．同样可以証明，在时間反演时，方程(5,33)变成与方程(5,30)的形式完全一样．这就証明了，狄拉克方程对于时間反演也具有不变性．

通常我們以符号 Z 代表算符 $i\gamma_1\gamma_3\gamma_4$. 那末，在时間反演时，就有：

$$\psi(x) = Z[\overbrace{'\bar{\psi}(x')}], \quad \bar{\psi}(x) = [\overbrace{'\psi(x')}]Z^{-1}. \tag{5,50}$$

不难証明：

$$Z = Z^*, \quad ZZ^* = 1, \quad \tilde{Z} = -Z. \tag{5,51}$$

此外，还可以証明 γ_μ 和 Z 之間存在着如下的关系：

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_4 &= Z^{-1}\gamma_4 Z, \\ \tilde{\gamma}_i &= -Z^{-1}\gamma_i Z, \quad i = 1,2,3. \end{aligned} \tag{5,52}$$

§ 5,4. 狄拉克波动方程和正洛仑兹变換

在洛仑兹变換中，时間和空間坐标作如下的变化：

$$x'_\mu = a_{\mu\nu}x_\nu, \quad a_{\mu\nu}a_{\mu\lambda} = \delta_{\nu\lambda}; \tag{5,53}$$

在变換以前波函数是 $\psi(x)$，在变換以后波函数是 $'\psi(x')$. 一般地，在 $\psi(x)$ 和 $'\psi(x')$ 之間存在着如下的关系：

$$'\psi(x') = \Lambda\psi(x), \tag{5,54}$$

这里 Λ 是四行四列的矩陣，它的矩陣元是 $a_{\mu\nu}$ 的函数. 正洛仑兹变換可以由进行一系列无穷小的洛仑兹变換而完成. 因此，只要証明方程 (5,30) 对于任何无穷小洛仑兹变換具有不变性，便証明了这一方程对于任何正洛仑兹变換具有不变性. 在无穷小的洛仑兹变換中，时空坐标的变換由系数

$$a_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\nu}, \quad \epsilon_{\mu\nu} = -\epsilon_{\nu\mu} \tag{5,55}$$

决定. 将 Λ 展开成为 $\epsilon_{\mu\nu}$ 的級数，留下其中到 $\epsilon_{\mu\nu}$ 的綫性項，而略去 $\epsilon_{\mu\nu}$ 的高次項，就得：

$$\Lambda = 1 + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}S_{\mu\nu}, \tag{5,56}$$

其中

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu). \tag{5,57}$$

与此相应有：

$$\Lambda^{-1} = 1 - \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}S_{\mu\nu}. \tag{5,58}$$

将(5,53)和(5,54)代入(5,30),得:

$$\{i\hat{p} + m\}\psi(x) = \{ip'_\nu a_{\nu\mu}\gamma_\mu + m\}\Lambda^{-1\prime}\psi(x'). \tag{5,59}$$

将(5,59)乘以 Λ, 就得:

$$\{ip'_\nu \Lambda a_{\nu\mu}\gamma_\mu \Lambda^{-1} + m\}'\psi(x') = 0, \tag{5,60}$$

从(5,56)和(5,58)可以得:

$$\Lambda\gamma_\mu\Lambda^{-1} = \gamma_\mu + \frac{1}{2}\epsilon_{\rho\sigma}[S_{\rho\sigma}, \gamma_\mu]. \tag{5,61}$$

利用(5,57)和对易关系(5,29)可以得:

$$[S_{\rho\sigma}, \gamma_\mu] = \gamma_\rho\delta_{\mu\sigma} - \gamma_\sigma\delta_{\mu\rho}. \tag{5,62}$$

因此有:

$$\Lambda\gamma_\mu\Lambda^{-1} = \gamma_\mu + \frac{1}{2}\epsilon_{\rho\mu}\gamma_\rho - \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\sigma}\gamma_\sigma = a_{\nu\mu}\gamma_\nu, \tag{5,63}$$

其中应用了式(5,55). 于是(5,60)可写为:

$$\{i\hat{p}' + m\}'\psi(x') = 0. \tag{5,64}$$

这样就证明了, 狄拉克方程对于包括空间反射和时间反演在内的全部洛仑兹变换具有不变性.

在正洛仑兹变换中, $\bar{\psi}(x)$ 的变换规则可以从(5,54),(5,56)和(5,57)推导出来. 首先,从(5,54)可以得到:

$$'\bar{\psi}(x') = \bar{\psi}(x)\gamma_4\Lambda^*\gamma_4, \tag{5,65}$$

其中 Λ^* 是算符 Λ 的厄米共轭. 在无穷小的洛仑兹变换中,有:

$$\Lambda^* = 1 + \frac{1}{2}\epsilon^*_{\mu\nu}S^*_{\mu\nu} = 1 - \frac{1}{2}\epsilon^*_{\mu\nu}S_{\mu\nu}. \tag{5,66}$$

考虑到 ϵ_{jk} 是实数, ϵ_{j4} 和 ϵ_{4j} 是虚数,并考虑到对易定则(5,29), 可得:

$$\gamma_4\Lambda^*\gamma_4 = 1 - \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}S_{\mu\nu} = \Lambda^{-1}; \tag{5,67}$$

所以在正洛仑兹变换中,一般地有:

$$'\psi(x') = \Lambda\psi(x), \quad '\bar{\psi}(x') = \bar{\psi}(x)\Lambda^{-1}. \tag{5,68}$$

§5,5. 由波函数組成的协变量

由波函数 ψ 和 $\bar{\psi}$ 以及 γ_μ 矩陣可以組成如下的一系列洛仑兹协变量：

$$\begin{cases} \bar{\psi}\psi, & i\bar{\psi}\gamma_\mu\psi, & i\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\psi, \\ i\bar{\psi}\gamma_5\psi, & i\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi, & \bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\psi, \end{cases} \quad \mu \neq \nu, \tag{5,69}$$

其中 $\gamma_5 \equiv \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$. 利用 (5,63) 和 (5,68)，就可以得到这些表式在正洛仑兹变換中的变換規則：

$$\begin{cases} '\bar{\psi}'\psi = \bar{\psi}\psi, \\ i'\bar{\psi}\gamma'_\mu\psi = a_{\mu\nu}\, i\bar{\psi}\gamma_\nu\psi, \\ i'\bar{\psi}\gamma_\rho\gamma_\nu'\psi = a_{\mu\rho}a_{\nu\sigma}\, i\bar{\psi}\gamma_\rho\gamma_\sigma\psi, \\ i'\bar{\psi}\gamma_5'\psi = i\bar{\psi}\gamma_5\psi, \\ i'\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu'\psi = a_{\mu\nu}\, i\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\nu\psi, \\ '\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu'\psi = a_{\mu\rho}a_{\nu\sigma}\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\rho\gamma_\sigma\psi. \end{cases} \tag{5.70}$$

在証明(5,70)中的第 4,5,6 式的时候，我們利用了关系：

$$\Lambda^{-1}\gamma_5\Lambda = \gamma_5. \tag{5,71}$$

因为利用(5,63)，我們有：

$$\Lambda^{-1}\gamma_5\Lambda = a_{1\mu}a_{2\nu}a_{3\rho}a_{4\sigma}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma; \tag{5,72}$$

由于 γ_μ 之間的反对易性，我們有：

$$\gamma_5 = (-1)^P\gamma_\xi\gamma_\eta\gamma_\zeta\gamma_\lambda, \tag{5,73}$$

其中 (ξ,η,ζ,λ) 为 (1,2,3,4) 的一个任意排列，P 等于从(1,2,3,4)改排成(ξ,η,ζ,λ)时需要变換的次数；因此有：

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1}\gamma_5\Lambda &= \frac{1}{4!}\sum_P(-1)^P a_{\xi\mu}a_{\eta\nu}a_{\zeta\rho}a_{\lambda\sigma}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma \\ &= \frac{1}{4!}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\begin{vmatrix} a_{1\mu} & a_{1\nu} & a_{1\rho} & a_{1\sigma} \\ a_{2\mu} & a_{2\nu} & a_{2\rho} & a_{2\sigma} \\ a_{3\mu} & a_{3\nu} & a_{3\rho} & a_{3\sigma} \\ a_{4\mu} & a_{4\nu} & a_{4\rho} & a_{4\sigma} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{5,74}$$

在(5,74)式中，左边 μ,ν,ρ,σ 四个标符中若有任何二个相等，那末

行列式就等于零；假使 (μ,ν,ρ,σ) 是四个彼此不同的标符，是 (1,2,3,4) 的一种排列方式，那就有：

$$\begin{vmatrix} a_{1\mu} & a_{1\nu} & a_{1\rho} & a_{1\sigma} \\ a_{2\mu} & a_{2\nu} & a_{2\rho} & a_{2\sigma} \\ a_{3\mu} & a_{3\nu} & a_{3\rho} & a_{3\sigma} \\ a_{4\mu} & a_{4\nu} & a_{4\rho} & a_{4\sigma} \end{vmatrix} = (-1)^{Q} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \tag{5,75}$$

其中 Q 为将 (1,2,3,4) 改排成 (μ,ν,ρ,σ) 时所需要的交换次数。在正洛仑兹变换中，(5,75)式右方的行列式等于 1。将(5,74)式中的 γ_μ 等矩陣改排成 γ_5，就得到(5,71)式。

利用(5,38)式和对易关系(5,29)可以求得在空間反射时(5,69)中表式的变换规则。从(5,38)得：

$$'\psi(x') = \gamma_4\psi(x), \quad '\bar{\psi}(x') = \bar{\psi}(x)\gamma_4; \tag{5,76}$$

因此有：

$$\begin{cases} '\bar{\psi}'\psi = \bar{\psi}\psi, \\ i'\bar{\psi}\gamma_j'\psi = -i\bar{\psi}\gamma_j\psi, \quad i'\bar{\psi}\gamma_4'\psi = i\bar{\psi}\gamma_4\psi, \qquad j = 1,2,3; \\ i'\bar{\psi}\gamma_j\gamma_k'\psi = i\bar{\psi}\gamma_j\gamma_k\psi, \quad i'\bar{\psi}\gamma_4\gamma_k'\psi = -i\bar{\psi}\gamma_4\gamma_k\psi, \quad j \neq k = 1,2,3; \\ i'\bar{\psi}\gamma_5'\psi = -i\bar{\psi}\gamma_5\psi, \\ i'\bar{\psi}\gamma_5\gamma_j'\psi = i\bar{\psi}\gamma_5\gamma_j\psi, \quad i'\bar{\psi}\gamma_5\gamma_4'\psi = -i\bar{\psi}\gamma_5\gamma_4\psi, \quad j = 1,2,3; \\ '\bar{\psi}\gamma_5\gamma_j\gamma_k'\psi = -\bar{\psi}\gamma_5\gamma_j\gamma_k\psi, \quad '\bar{\psi}\gamma_5\gamma_4\gamma_k'\psi = \bar{\psi}\gamma_5\gamma_4\gamma_k\psi, \\ \qquad\qquad j \neq k = 1,2,3. \end{cases} \tag{5,77}$$

利用(5,50)，(5,52)和对易关系(5,29)可以求得在时間反演下(5,69)中表式的变换规则。可以将(5,50)中的变换规则改写为：

$$'\bar{\psi}(x') = -\widetilde{\psi(x)}Z^{-1}, \quad '\psi(x') = -Z\widetilde{\bar{\psi}(x)}; \tag{5,78}$$

因此有：

$$\begin{cases} '\bar{\psi}'\psi = \bar{\psi}\psi, \\ i'\bar{\psi}\gamma_j'\psi = -i\bar{\psi}\gamma_j\psi, \quad i'\bar{\psi}\gamma_4'\psi = i\bar{\psi}\gamma_4\psi, \quad j = 1,2,3; \\ i'\bar{\psi}\gamma_j\gamma_k'\psi = -i\bar{\psi}\gamma_j\gamma_k\psi, \quad i'\bar{\psi}\gamma_4\gamma_k'\psi = i\bar{\psi}\gamma_4\gamma_k\psi, \quad j \neq k = 1,2,3; \\ i'\bar{\psi}\gamma_5'\psi = -i\bar{\psi}\gamma_5\psi, \end{cases}$$

$$\begin{cases} i'\bar{\psi}\gamma_5\gamma_i'\psi = -i\bar{\psi}\gamma_5\gamma_i\psi, \quad i'\bar{\psi}\gamma_5\gamma_4'\psi = i\bar{\psi}\gamma_5\gamma_4\psi, \quad i=1,2,3; \\ '\bar{\psi}\gamma_5\gamma_i\gamma_k'\psi = \bar{\psi}\gamma_5\gamma_i\gamma_k\psi, \quad '\bar{\psi}\gamma_5\gamma_4\gamma_k'\psi = -\bar{\psi}\gamma_5\gamma_i\gamma_k\psi, \\ \qquad\qquad i\neq k=1,2,3. \end{cases} \tag{5,79}$$

因此，在洛仑兹变换中，(5,69)中的表式变换如下：

$$\begin{cases} \bar{\psi}\psi & \text{标量} \\ i\bar{\psi}\gamma_\mu\psi & \text{矢量} \\ i\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\psi & \text{反对称张量} \\ i\bar{\psi}\gamma_5\psi & \text{贋标量} \\ i\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi & \text{贋矢量} \\ \bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\psi & \text{贋反对称张量} \end{cases} \tag{5.80}$$

§5,6. 正反粒子共軛变換

在§3,12中我們曾指出，由复数标量場或贋标量場 φ，φ^* 描述的自旋为零的基本粒子理論对于正反粒子共軛变換具有不变性，在这个理論中，正反粒子具有完全对称的地位．在本章所討論的自旋为1/2的基本粒子理論中也存在着类似的对称性．可以証明，狄拉克波动方程(5,30)和(5,33)对于如下的变換

$$\psi'(x) = C[\overline{\bar{\psi}(x)}], \quad \bar{\psi}'(x) = \tilde{\psi}(x)[\overline{C^{-1}}] \tag{5,81}$$

具有不变性；这里 C 是四行四列的矩陣，具有下列性質：

$$C^{-1} = C^*, \quad \tilde{C} = -C, \tilde{\gamma}_\mu = -C^{-1}\gamma_\mu C. \tag{5,82}$$

假使我們取如(5,8)式中的表象，那末就有：

$$C = i\gamma_2\gamma_4. \tag{5,83}$$

从(5,30)和(5,81)可得：

$$\{i\hat{p} + m\}\psi(x) = \{i\hat{p} + m\}C[\overline{\bar{\psi}'(x)}] = 0. \tag{5,84}$$

乘(5,84)以 C^{-1}，利用(5,82)就得：

$$\{-ip_\mu\tilde{\gamma}_\mu + m\}[\overline{\bar{\psi}'(x)}] = 0. \tag{5,85}$$

这方程和方程(5,33)具有完全相同的形式．用同样方法可以証明，方程(5,33)在經过变換(5,81)以后和方程(5,30)的形式完全一样．

为了闡明这一变換的物理意义，我們討論一个簡单的例子：一个动量为 $\vec{p}$、能量为 E、自旋与动量平行的粒子。这一粒子的波函数 $\psi(x)$ 和(5,19)中的 ψ_1 完全一样。因此有：

$$\hat{C}[\overrightarrow{\psi(x)}] = -iA\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ -B\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ -B\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}+iEt}. \tag{5,86}$$

在这一表象中，矩陣 C 具有如下的形式：

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.87}$$

因此，从(5,31)，(5,86)和(5,87)可以得：

$$\psi'(x) = A\begin{pmatrix} -B\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ B\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ -\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}+iEt}. \tag{5,88}$$

我們現在引进 $\vec{p}' = -\vec{p}$ 及标志 $\vec{p}'$ 方向的角度 θ' 和 φ'，在 θ, φ 和 θ', φ' 之間存在着如下的关系：

$$\theta = \pi - \theta', \quad \varphi = \pi + \varphi'. \tag{5,89}$$

因此，可以将 $\psi'(x)$ 写成如下的表式：

$$\psi'(x)=iA\begin{pmatrix} B\cos\theta\,\dfrac{\theta'}{2}\,e^{-i\frac{\varphi'}{2}} \\ B\sin\dfrac{\theta'}{2}\,e^{i\frac{\varphi'}{2}} \\ -\cos\dfrac{\theta'}{2}\,e^{-i\frac{\varphi'}{2}} \\ -\sin\dfrac{\theta'}{2}\,e^{i\frac{\varphi'}{2}} \end{pmatrix} e^{i\vec{p}'\cdot\vec{x}+iEt}. \tag{5,90}$$

可以看出，$\psi'(x)$ 的形式和 (5,19) 中 ψ_{III} 的形式完全一样. 因此，一个代表动量为 $\vec{p}$、能量为 E、自旋与动量平行的粒子的波函数經过变换(5,81)以后就变为一个代表动量为 $-\vec{p}$、能量为 $-E$、自旋与动量平行的粒子的波函数.

不难看出，变换 (5,81) 将动量为 $\vec{p}$ 及能量为 E 的情态变换为动量为 $-\vec{p}$ 及能量为 $-E$ 的情态；另一方面，又将动量为 $\vec{p}$ 及能量为 $-E$ 的情态变换为动量为 $-\vec{p}$ 及能量为 E 的情态. 在变换过程中，自旋的方向也倒了过来. 因此，本来自旋与动量平行的情态在变换以后自旋与动量仍旧平行、本来反平行的在变换以后仍旧反平行. 設 ψ_+ 及 ψ_- 分别代表描述其自旋与动量方向平行及反平行的粒子的波函数，

$$\vec{\Sigma}\cdot\vec{e}\psi_\pm=\pm\psi_\pm, \tag{5,91}$$

則有：

$$\tilde{\vec{\Sigma}}\cdot\vec{e}[\tilde{\psi}_\pm]=\pm[\tilde{\psi}_\pm]. \tag{5,92}$$

考虑到：

$$C\tilde{\vec{\Sigma}}C^{-1}=-\vec{\Sigma}, \tag{5,93}$$

令 $\vec{e}'=-\vec{e}$，則有：

$$\vec{\Sigma}\cdot\vec{e}'\psi'_\pm=\pm\psi'_\pm. \tag{5,94}$$

由于动量为 $-\vec{p}$ 及能量为 $-E$ 的情态与动量为 $\vec{p}$ 及能量为 E 的反粒子相联系，变换 (5,81) 的作用是将描述正粒子的波函数与描述反粒子的波函数相联系起来. 因此这一变换叫做正反粒子

共軛变换.

假使狄拉克波动方程被用来描述带电的粒子，那末討論这种粒子在静电場中的运动可以帮助闡明正反粒子共軛变換的物理意义. 設我們討論电子在静电場中的运动；以V代表静电場的电势，則狄拉克波动方程扩充为：

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=\{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}+\beta m-eV\}\psi. \tag{5,95}$$

可以将(5,95)写成如下的形式：

$$\{i\hat{p}+m-e\not{V}\gamma_4\}\psi=0. \tag{5,96}$$

与(5,96)相共軛的方程是：

$$\bar{\psi}\{i\hat{p}+m-eV\gamma_4\}=0. \tag{5,97}$$

如果进行正反粒子共軛变換，那末方程(5,96)就成为：

$$\{i\hat{p}+m-eV\gamma_4\}C[\tilde{\bar{\psi}}]=0. \tag{5,98}$$

将上式乘以C^{-1}应用(5,82)，就得.

$$\{-i\tilde{\hat{p}}+m+eV\gamma_4\}[\tilde{\bar{\psi}}]=0. \tag{5,99}$$

将(5,99)进行位調，就得到：

$$\bar{\psi}'\{i\hat{p}+m+eV\gamma_4\}=0. \tag{5,100}$$

方程(5,100)与方程(5,97)几乎完全相同，只是常数e前面的符号相反. 因此，可以将(5,100)当作描述正电子运动的方程. 正反粒子共軛变換将描述电子的波函数变換为描述在同样电磁場中运动的正电子的波函数. 这一变換一般地将电子的負能級的波函数变換为正电子的正能級的波函数. 所以，变換(5,81)也叫做电荷共軛变換. 狄拉克波动方程对于正反粒子共軛变換具有不变性.

§5,7. 狄拉克波动方程的量子化

狄拉克波动方程(5,30)和(5,33)是描写单个粒子的运动方程，不能用来描述包含有二个以上粒子的运动，也不能用来描述粒子的产生和消失的現象. 为了使这一方程也能够描述这些現象，有

必要将这一方程当作場的运动方程看待，并进一步将这个場量子化. 可以尝試用第二章中所討論的正則量子化方法来将这个場量子化. 首先引进一个能够导致运动方程(5,30)和(5,33)的拉氏函数密度 $\mathscr{L}$:

$$\mathscr{L} = -\left\{\bar{\psi}\gamma_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} + m\bar{\psi}\psi\right\}. \tag{5,101}$$

从(5,101)可以推导得如下的能量-动量张量 $T_{\mu\nu}$:

$$T_{\mu\nu} = \bar{\psi}\gamma_\nu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} - \delta_{\mu\nu}\left\{\bar{\psi}\gamma_\rho \frac{\partial \psi}{\partial x_\rho} + m\bar{\psi}\psi\right\}. \tag{5,102}$$

从(5,101),(2,34)和(5,57)可以推导得如下的角动量密度 $M_{\mu\nu,\lambda}$:

$$M_{\mu\nu,\lambda} = x_\nu T_{\mu\lambda} - x_\mu T_{\nu\lambda} - \frac{1}{4}\bar{\psi}\gamma_\lambda(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)\psi. \tag{5,103}$$

从(2,35)及定义(2,82),(5,15)和(5,26)可以写下場的总角动量 $\vec{M}$:

$$\vec{M} = \int d\vec{x}\psi^*(x)\left\{\vec{L} + \frac{1}{2}\vec{\Sigma}\right\}\psi(x). \tag{5,104}$$

它和表式(5,27)完全相应：由 $\vec{L}$ 貢献的部分是軌道角动量，由 $\frac{1}{2}\vec{\Sigma}$ 貢献的部分代表自旋. 从(5,101)可以推导得如下的电流-电荷密度 J_μ:

$$J_\mu = ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi. \tag{5,105}$$

我們現在进一步引进正則动量. 和 ψ 相应的正則动量 π 是:

$$\pi = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)} = i\bar{\psi}\gamma_4 = i\psi^*. \tag{5,106}$$

可以按照 (2,60) 引进 ψ 和 ψ^* 之間如下的对易关系：在 $t = t'$ 时，有:

$$[\psi_\rho(x), \psi^*_\sigma(x')] = \delta_{\rho\sigma}\delta(\vec{x} - \vec{x}'). \tag{5,107}$$

其余各对都可以相互对易. 从 (5,101) 可以得到如下的哈密頓量密度 $\mathscr{H}$:

$$\mathscr{H} = \psi^*\{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta m\}\psi. \tag{5,108}$$

不难利用(5,107)和(5,108)証明，运动方程可以写成如下的形式：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi}{\partial t}=i[H,\psi], \quad \dfrac{\partial\psi^*}{\partial t}=i[H,\psi^*],\\ H=\int dx\mathscr{H}.\end{cases} \tag{5,109}$$

到此为止，一切都沒有問題．但是，假使我們进一步將場的运动分解为运动方程(5,30)和(5,31)的本征运动，例如，將ψ和ψ^*分解为平面波，那末我們就將发現，場ψ和ψ^*所描述的基本粒子是服从鮑色統計法則的粒子——在任何情态中都可以容納一个以上的这种粒子．然而，由于負能量情态的存在，这样的理論將导致严重的困难——这种粒子將不断地向更深的負能級跃迁，同时无限制地放出能量．然而客观上从来沒有观察到这种現象．假使电子和核子由这样的理論描述，那末稳定的原子和原子核將不可能存在．

因此有必要改变量子化的方法，使理論能够描述服从費米統計法則的粒子．在量子力学中，处理服从一定統計法則的多体問題的完美方法是將波动方程进行二次量子化．二次量子化了的波动方程將統計法則作为不可分割的一部分包括在內．在二次量子化以后，理論中引入粒子的产生和消失算符，可以描述基本粒子相互轉化的現象．可以尝試用約旦和維格納[Jordan and Wigner, 1928]所提出的將費米子波动方程二次量子化的方法来將狄拉克方程量子化．按照这一理論，ψ和ψ^*之間应該存在着如下的对易关系：在$t=t'$时，有：

$$\{\psi_\rho(x),\psi_\sigma^*(x')\}=\delta_{\rho\sigma}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'), \tag{5,110}$$

其余各对之間都可以相互反对易；曲括号所代表的意义見于定义(4,112)．不难証明，利用(5,108)和对易关系(5,110)也可以將运动方程(5,30)和(5,33)写成如(5,109)中的形式．因此，对易关系(5,110)是和运动方程相一致的，彼此間并不存在矛盾．哈密頓量密度(5,108)、运动方程(5,109)及对易关系(5,110)是描述自旋为1/2的粒子的理論的基本表式和方程．

§5,8, 分解为平面波

为了証明由上节中建立的量子化的狄拉克波动方程所描述的粒子服从費米統計法則，可以将場的运动分解为方程(5,30)的本征运动。最簡单的办法是分解为平面波。为了书写方便起見，我們将(5,19)中的波函数用如下的符号来代表：

$$\begin{cases} \psi^{(+)}_{p,\Sigma=1} & \text{代表动量为 } \vec{p}, \text{ 能量为 } E, \text{ 而自旋与动量相平行的粒子的波函数,} \\ \psi^{(+)}_{p,\Sigma=-1} & \text{代表动量为 } \vec{p}, \text{ 能量为 } E, \text{ 而自旋与动量相反平行的粒子的波函数,} \\ \psi^{(-)}_{p,\Sigma=1} & \text{代表动量为 } -\vec{p}, \text{ 能量为 } -E, \text{ 而自旋与动量相平行的粒子的波函数,} \\ \psi^{(-)}_{p,\Sigma=-1} & \text{代表动量为 } -\vec{p}, \text{ 能量为 } -E, \text{ 而自旋与动量相反平行的粒子的波函数.} \end{cases}$$

为了进一步使公式簡化，我們以一个字母 ζ 来代表标符$(\vec{p},\Sigma)$. 为了便于討論，我們假定場在一个立方形空間的边界上具有周期性，并选择这个立方体的边的长度为长度的单位. 那末我們就可以将 ψ 和 ψ^* 写成如下的迭加：

$$\begin{cases} \psi(x) = \sum_{\zeta} \{a_\zeta \psi^{(+)}_\zeta + b^*_\zeta \psi^{(-)}_\zeta\}, \\ \psi^*(x) = \sum_{\zeta} \{a^*_\zeta \psi^{*(+)}_\zeta + b_\zeta \psi^{*(-)}_\zeta\} \end{cases} \tag{5,111}$$

其中 a_ζ, a^*_ζ, b_ζ 和 b^*_ζ 代表振幅，由不随时間而变的矩陣代表. 由于場在立方体壁上的周期性，波矢的分量 $p_i (i = 1, 2, 3)$ 必須滿足如下的条件：

$$\begin{aligned} &p_i = 2\pi n_i, \quad i = 1,2,3; \\ &n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots. \end{aligned} \tag{5,112}$$

利用 $\psi^{(+)}_\zeta$, $\psi^{(-)}_\zeta$ 的归一性和正交性，可以从对易关系(5,110)推导得 a, a^*, b, b^* 之間如下的对易关系：

$$\begin{cases}\{a_\zeta, a^*_{\zeta'}\} = \delta_{\zeta\zeta'}, \\ \{b_\zeta, b^*_{\zeta'}\} = \delta_{\zeta\zeta'}.\end{cases} \tag{5,113}$$

其余各对之間均相互反对易．将(5,111)代入(5,108)和(5,109)，并引入下列厄米算符：

$$\begin{cases}N^{(+)}_\zeta = a^*_\zeta a_\zeta, \\ N^{(-)}_\zeta = b^*_\zeta b_\zeta.\end{cases} \tag{5,114}$$

我們就可以将哈密頓量H写成如下的形式：

$$H = \sum_\zeta E(N^{(+)}_\zeta + N^{(-)}_\zeta - 1), \tag{5,115}$$

其中我們应用了$\psi^{(+)}_\zeta$，$\psi^{(-)}_\zeta$的归一性和正交性以及对易关系(5,113)．用同样方法，可以将場的总动量 $\vec{P}$ 写成如下的形式：

$$\vec{P} = \int d\vec{x}\psi^*(-i\vec{\nabla})\psi = \sum_\zeta \vec{p}(N^{(+)}_\zeta + N^{(-)}_\zeta - 1). \tag{5,116}$$

場的总电荷Q可以写成如下的表式：

$$Q = \int d\vec{x}e\psi^*\psi = \sum_\zeta e(N^{(+)}_\zeta - N^{(-)}_\zeta + 1). \tag{5,117}$$

对易关系(5,113)和哈密頓量(5,115)与对易关系(5,110) 和哈密頓量(5,109)完全等效，但是前者更容易处理．

为了求得 a，a^*，b，b^* 和 $N^{(+)}$，$N^{(-)}$ 的显示表式，我們必須选择一套完全的、可对易的力学量，用它們的共同本征函数作为表象的基．ζ，(+)和(−)标志着場的不同自由度．由于$N^{(+)}_\zeta$和$N^{(-)}_\zeta$都可以相互对易，我們选定它們作为一套完全的、可以对易的力学量．在将它們的共同本征函数作为表象的基之后，它們就都由对角矩陣代表．显然，在这一表象中，場的总能量H、总动量 $\vec{P}$ 和总电荷Q也都由对角矩陣代表．

可以証明，所有的 $N^{(+)}_\zeta$ 和 $N^{(-)}_\zeta$ 都只有二个本征值：一个是 0，另一个是 1．首先，我們利用(5,113)可以得到如下的关系：

$$\begin{cases}a_\zeta a_\zeta = 0, \quad a^*_\zeta a^*_\zeta = 0, \quad b_\zeta b_\zeta = 0, \quad b^*_\zeta b^*_\zeta = 0, \\ [a_\zeta, N^{(+)}_{\zeta'}] = \delta_{\zeta\zeta'} a_\zeta, \quad [a^*_\zeta, N^{(+)}_{\zeta'}] = -\delta_{\zeta\zeta'} a^*_\zeta, \\ [b_\zeta, N^{(-)}_{\zeta'}] = \delta_{\zeta\zeta'} b_\zeta, \quad [b^*_\zeta, N^{(-)}_{\zeta'}] = -\delta_{\zeta\zeta'} b^*_\zeta.\end{cases} \tag{5,118}$$

所有的 a, a^* 都可以和 $N^{(-)}$ 相对易，所有的 b, b^* 都可以和 $N^{(+)}$ 相对易. 設 $1>$ 是 $N_\zeta^{(+)}$ 的一个本征函数，它的相应本征值是 n，那末，除非 $a_\zeta|\rangle=0$, $a_\zeta|\rangle$ 一定也是 $N_\zeta^{(+)}$ 的本征函数，它的相应的本征值是 $(n-1)$. 应用(5,118)可得:

$$N_\zeta^{(+)}a_\zeta|\rangle=(a_\zeta N_\zeta^{(+)}-a_\zeta)|\rangle=(n-1)a_\zeta|\rangle. \quad (5,119)$$

假使

$$a_\zeta|\rangle=0, \quad (5,120)$$

則

$$N_\zeta^{(+)}|\rangle=a_\zeta^*a_\zeta|\rangle=0, \quad (5,121)$$

亦即 $n=0$. 这就是說，只有当与 $|\rangle$ 相应的 $N_\zeta^{(+)}$ 的本征值等于零的时候，$a_\zeta|\rangle$ 才等于零.

另一方面可以証明，除非 $a_\zeta^*|\rangle=0$，那末 $a_\zeta^*|\rangle$ 也是 $N_\zeta^{(+)}$的本征函数，它的相应的本征值是 $(n+1)$. 应用(5,118)可得:

$$N_\zeta^{(+)}a_\zeta^*|\rangle=(a_\zeta^*N_\zeta^{(+)}+a_\zeta^*)|\rangle=(n+1)a_\zeta^*|\rangle. \quad (5,122)$$

假使

$$a_\zeta^*|\rangle=0, \quad (1,123)$$

則

$$N_\zeta^{(+)}|\rangle=a_\zeta^*a_\zeta|\rangle=(a_\zeta^*a_\zeta+a_\zeta a_\zeta^*)|\rangle=|\rangle, \quad (5,124)$$

亦即 $n=1$. 这就是說，只有当与 $|\rangle$ 相应的 $N_\zeta^{(+)}$ 的本征值等于 1 的时候，$a_\zeta^*|\rangle$ 才等于零.

于是，我們得到了 $N_\zeta^{(+)}$ 的如下一系列本征函数:

$$\cdots, a_\zeta^2|\rangle, a_\zeta|\rangle, |\rangle, a_\zeta^*|\rangle, a_\zeta^{*2}|\rangle, \cdots. \quad (5,125)$$

与上列本征函数相应的一系列本征值是:

$$\cdots,(n-2),(n-1),n,(n+1),(n+2),\cdots. \quad (5,126)$$

但是，由于 a_ζ^* 和 a_ζ 是相互厄米共軛的算符，$N_\zeta^{(+)}=a_\zeta^*a_\zeta$ 的本征值只能是正数或零，而不可能是負数. 这說明了(5,125)和(5,126)中的序列不可能不断地向左端延伸过去. 根据 (5,120) 和 (5,121)，(5,126)的左端必須以零告終. 因此，n 必須是一个正整数或零. 与此相应，(5,125) 的左端也必須以 $a_\zeta^n|\rangle$ 告終. 我們以 $|\rangle_0$ 代表

$a_\zeta^{*n}|\rangle$. 假使不考虑波函数前的与本征值无关的系数，那末(5,125)可以改写为：

$$|\rangle_0,\ a_\zeta^*|\rangle_0,\ a_\zeta^{*2}|\rangle_0,\ \cdots. \tag{5,127}$$

但是(5,127)中的序列也不可能无限制地向右端延伸下去. 因为，由于(5,118)，

$$a_\zeta^{*2}|\rangle_0 = 0, \tag{5,128}$$

所以，实际上(5,127)中的序列只包含有二项 $|\rangle_0$ 和 $a_\zeta^*|\rangle_0$. 与之相应的 $N_\zeta^{(+)}$ 的本征值也只有二个：0 和 1. 用同样的方法可以証明，$N_\zeta^{(-)}$ 也只有 0 和 1 二个本征值.

由此可見，各个自由度的能量、动量和电荷都只能取不連續的数值. 例如，以 $a, \vec{p}$ 和 $\Sigma=1$ 标志的自由度的能量只能是 0 或 E，动量只能是 0 或 $\vec{p}$，电荷只能是 0 或 e，自旋在动量方向的分量只能是 0 或 1/2；以 $b, \vec{p}$ $\Sigma = -1$ 标志的自由度的能量只能是 0 或 E，动量只能是 0 或 $\vec{p}$，电荷只能是 0 或 $-e$，自旋在动量方向的分量只能是 0 或 $-\frac{1}{2}$；而且，在能量 E 和动量 $\vec{p}$ 之間存在着如 (5,12) 式中的关系. 因此我們可以作如下的物理詮释：由 ψ, ψ^* 描述的場是由一份份的粒子組成的. 粒子可以分为二类，以 a 和 b 分别标志. 以 a 标志的粒子具有电荷 e，以 b 标志的粒子具有电荷 $-e$. 所有的粒子都具有相同的靜质量 m 和相同的自旋 1/2. 具有一定的动量 $\vec{p}$、一定的自旋在动量方向的分量及一定的电荷的粒子最多只能有一个. 不可能有二个或二个以上的粒子具有相同的动量、相同的自旋在动量方向的分量和相同的电荷. 因此，由 ψ 及 ψ^* 所描述的粒子服从費米統計法則.

从(5,119)可以看出，a_ζ 是以 a 和 ζ 标志的粒子的消灭算符；从 (5,122) 可以看出，a_ζ^* 是以 a 和 ζ 标志的粒子的产生算符. 同样不难看出，b_ζ 和 b_ζ^* 是以 b 和 ζ 标志的粒子的相应的消失算符和产生算符. $N_\zeta^{(+)}$ 代表以 a 和 ζ 标志的粒子的数目；$N_\zeta^{(-)}$ 則代表以 b 和 ζ 标志的粒子的数目. 通常我們称以 a 标志的粒子为正粒

子，以 b 标志的粒子则称为反粒子. 当然，在理論中正、反粒子处于对称的地位.

§ 5,9. 眞空情态

眞空情态应該是什么粒子也沒有的情态，亦即相应于所有的 $N_\zeta^{(+)}$ 和 $N_\zeta^{(-)}$ 的本征值都等于零的情态. 設以 $E_{眞空}$，$\vec{P}_{眞空}$ 和 $Q_{眞空}$ 代表这一情态的能量、动量和电荷，則从(5,115)，(5,116) 和 (5,117) 得到：

$$\begin{cases} E_{眞空} = -\sum_\zeta E, \\ \vec{P}_{眞空} = -\sum_\zeta \vec{p}, \\ Q_{眞空} = \sum_\zeta e. \end{cases} \tag{5,129}$$

因此，眞空将具有負无穷大的能量和无穷多的电荷. 这与狄拉克原来所提出的眞空的理解是一致的. 狄拉克認为：在正能級中一个粒子也不存在而所有的負能級都被粒子填滿的态是眞空态. 这就是为什么在数学形式上我們得到眞空具有无限負能量和无限电荷的結果的原因. 狄拉克認为：由 (5,129) 所代表的眞空其能量 $E_{眞空}$、动量 $\vec{P}_{眞空}$ 和电荷 $Q_{眞空}$ 在实验上是观察不到的；所观察到的任何情态的能量、动量和电荷应該只是相对于眞空状态而言的能量、动量和电荷，亦即表式(5,115)，(5,116)、(5,117)与表式(5,129)之間的差. 設以 $E_{观察}$，$\vec{P}_{观察}$ 和 $Q_{观察}$ 代表实验上观察到的能量、动量和电荷，那末就有

$$\begin{cases} E_{观察} = H - E_{眞空} = \sum_\zeta E(N_\zeta^{(+)} + N_\zeta^{(-)}), \\ \vec{P}_{观察} = \vec{P} - \vec{P}_{眞空} = \sum_\zeta \vec{p}(N_\zeta^{(-)} + N_\zeta^{(-)}), \\ Q_{观察} = Q - Q_{眞空} = e\sum_\zeta (N_\zeta^{(+)} - N_\zeta^{(-)}). \end{cases} \tag{5,130}$$

这样，数学形式中所得到的不平常的結果(5,129)就可以用以

上的說法来解释了。在(5,130)中，正、反粒子处于完全对称的地位。但是，假使我們注意一下表式(5,117)，就会发現在这一原来的表式中正、反粒子所处的地位不能算是完全对称。不对称的来源在于所假定的拉氏函数密度(5,101)对于正反粒子并不是完全对称的。我們将拉氏函数密度略加改变，就可以使正、反粒子在理論中处于完全对称的地位。为此，我們选择如下的拉氏函数密度 $\mathscr{L}$：

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\left\{\bar{\psi}\gamma_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} + m\bar{\psi}\psi + \bar{\psi}'\gamma_\mu\frac{\partial\psi'}{\partial x_\mu} + m\bar{\psi}'\psi'\right\}, \tag{5,131}$$

其中 ψ' 是 ψ 的电荷共軛波函数。应用(5,81)中 $\vec{\psi}'$，ψ' 和 $\tilde{\psi}$，ψ 之間的連系以及(5,82)中的关系，就可以将(5,131)改写为：

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\left\{\bar{\psi}\gamma_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} + m\bar{\psi}\psi + \tilde{\psi}\tilde{\gamma}_\mu\frac{\partial\tilde{\bar{\psi}}}{\partial x_\mu} - m\tilde{\psi}\tilde{\bar{\psi}}\right\}. \tag{5,132}$$

从(5,132)可以推导得如下的能量-动量张量 $T_{\mu\nu}$：

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left\{\bar{\psi}\gamma_\nu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} + \tilde{\psi}\tilde{\gamma}_\nu\frac{\partial\tilde{\bar{\psi}}}{\partial x_\mu}\right\} + \delta_{\mu\nu}\mathscr{L}. \tag{5,133}$$

从(5,132)可以推导得如下的电流-电荷密度 J_μ：

$$J_\mu = \frac{ie}{2}\{\bar{\psi}\gamma_\mu\psi - \tilde{\psi}\tilde{\gamma}_\mu\tilde{\bar{\psi}}\}. \tag{5,134}$$

从(5,133)和(5,134)得到如下的总能量 H、总动量 $\vec{P}$ 和总电荷 Q：

$$\begin{cases} H = \frac{1}{2}\int dx\{\psi^*[-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta m]\psi + \tilde{\psi}[-i\tilde{\vec{\alpha}}\cdot\vec{\nabla} - \tilde{\beta}m]\tilde{\psi}^*\}, \\ \vec{P} = \frac{1}{2}\int dx\{\psi^*(-i\vec{\nabla})\psi + \tilde{\psi}(-i\vec{\nabla})\tilde{\psi}^*\}, \\ Q = \frac{e}{2}\int dx\{\psi^*\psi - \tilde{\psi}\tilde{\psi}^*\}. \end{cases} \tag{5,135}$$

在进行量子化的时候，我們引进了对易关系(5,110)。可以立即証明，应用(5,135)中的哈密頓量所得到的运动方程和运动方程(5,30)及(5,33)完全一样。在将 ψ 和 ψ^* 展开成为平面波的迭加以后，可以将 H，$\vec{P}$ 和 Q 写成如下的表式：

$$\begin{cases} H = \sum_{\xi} E\{N_{\xi}^{(+)} + N_{\xi}^{(-)} - 1\}, \\ \vec{P} = \sum_{\xi} \vec{p}\{N_{\xi}^{(+)} + N_{\xi}^{(-)} - 1\}, \\ Q = \sum_{\xi} e\{N_{\xi}^{(+)} - N_{\xi}^{(-)}\}. \end{cases} \tag{5,136}$$

在(5,136)中正、反粒子处于完全对称的地位.

§5,10. a, a^*, b、b^* 的显示形式

在写下代表各物理量的矩阵时,为了写起来方便起见,我們将符号进一步加以簡化. 在以前,不同的自由度以 ξ 和 a 或 b 标志. 現在,将所有的自由度按任意选定的統一次序排列,并按照这个次序以正整数 1, 2, 3, $\cdots n$, $\cdots$ 标志各个自由度. 我們統一地以 a 代表消失算符,以 c 代表产生算符,而不再区分 a 和 b, a^* 和 b^*. 此外,用 N 統一地代表粒子数算符,而不再区分 $N^{(+)}$ 和 $N^{(-)}$. 相应于每一个自由度 n,我們引进下列的矩陣:

$$\begin{cases} I_n = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}_n, & \sigma_{nx} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{pmatrix}_n, \\ \sigma_{ny} = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}_n, & \sigma_{nz} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}_n. \end{cases} \tag{5,137}$$

用(5,137)中的矩陣可以組成下列矩陣:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(I - \sigma_z)_n & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ & 1 \end{pmatrix}_n, \\ \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y)_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{pmatrix}_n, \\ \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y)_n = \begin{pmatrix} 0 & \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_n. \end{cases} \tag{5,138}$$

可以用 (5,137)和(5,138) 中的符号将算符 N_n, c_n 和 c_n^* 显示地表达如下:

$$\begin{cases} N_n = I_1 \times I_2 \times I_3 \times \cdots \times I_{(n-1)} \times \\ \qquad \times \frac{1}{2}(1 - \sigma_z)_n \times I_{(n+1)} \times I_{(n+2)} \times \cdots, \\ c_n = \sigma_{1z} \times \sigma_{2z} \times \sigma_{3z} \times \cdots \times \sigma_{(n-1)z} \times \\ \qquad \times \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y)_n \times I_{(n+1)} \times I_{(n+2)} \times \cdots, \\ c_n^* = \sigma_{1z} \times \sigma_{2z} \times \sigma_{3z} \times \cdots \times \sigma_{(n-1)z} \times \\ \qquad \times \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y)_n \times I_{(n+1)} \times I_{(n+2)} \times \cdots, \end{cases} \tag{5,139}$$

其中 $A \times B$ 代表矩陣 A 和 B 的外积。可以証明，以上的矩陣滿足对易关系(5,113)和定义(5,114)。首先，由于

$$\frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y)_n \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y)_n = \frac{1}{2}(I - \sigma_z)_n, \tag{5,140}$$

(5,139)中的表式滿足定义(5,114)的要求。其次，由于

$$\frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y)_n \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y)_n = \frac{1}{2}(I + \sigma_z)_n, \tag{5,141}$$

有：

$$c_n c_n^* + c_n^* c_n = I, \tag{5,142}$$

其中

$$I = \prod_{n=1}^{\infty} I_n, \tag{5,143}$$

$\prod$ 是无穷外积的符号。此外，由于

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y)_n \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y)_n = 0, \\ \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y)_n \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y)_n = 0, \end{cases} \tag{5,144}$$

有：

$$\{c_n, c_n\} = 0, \quad \{c_n^*, c_n^*\} = 0. \tag{5,145}$$

設 $n' > n$，則有：

$$\begin{cases} c_n c^*_{n'} = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_{(n-1)} \times \dfrac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y)_n \cdot \sigma_{nz} \times \\ \qquad \times \cdots \times \sigma_{(n'-1)z} \times \dfrac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y)_{n'} \times I_{(n'+1)} \times \cdots, \\ c^*_{n'} c = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_{(n-1)} \times \sigma_{nz} \cdot \dfrac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y)_n \times \\ \qquad \times \sigma_{(n+1)z} \times \cdots \times \sigma_{(n'-1)z} \times \dfrac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y)_{n'} \times I_{(n'+1)} \times \cdots. \end{cases} \tag{5,146}$$

考虑到 σ_{nz} 是与 σ_{nx} 及 σ_{ny} 反对易的，因此有：

$$c_n c^*_{n'} + c^*_{n'} c_n = 0. \tag{5.146}$$

用同样方法可以証明：

$$\{c_n, c_{n'}\} = 0, \quad \{c^*_n, c^*_{n'}\} = 0. \tag{5,147,}$$

不难看出，在 $n' < n$ 的时候 (5,146)和(5,147) 也成立. (5,142))
(5,145)，(5,146)和(5,147)就是对易关系(5,113).

§5,11. 对易关系的相对論不变性

运动方程(5,30)，(5,33)和对易关系(5,110)是描述自旋为 1/2 的粒子的理論的基本方程. 必須証明二者都具有洛仑兹不变性才能証明整个理論满足特殊相对論的要求. 在 §5,3 和 §5,4 中已經証明了运动方程具有洛仑兹不变性. 但是，在对易关系 (5,110)中的时間和空間处于不对称的地位，它要求 $t = t'$，因而不能立刻显示出对易关系的洛仑兹不变性. 为了看出整个理論是否满足特殊相对論的要求，必須求得 $t \neq t'$ 时的对易关系. 从(5,11)和(5,113)立刻可以得到：

$$\{\psi(x), \psi(x')\} = 0, \quad \{\bar{\psi}(x), \bar{\psi}(x')\} = 0; \tag{5,148}$$

此外，可以得到：

$$\{\psi(x), \bar{\psi}(x')\} = \sum_\zeta \{\psi^{(+)}_\zeta \bar{\psi}^{(+)}_\zeta + \psi^{(-)}_\zeta \bar{\psi}^{(-)}_\zeta\}. \tag{5,149}$$

我們可以將 $\psi_\xi^{(+)}$ 和 $\psi_\xi^{(-)}$ 写成如下的形式：

$$\begin{cases}\psi_\xi^{(+)}(x) = u_\Sigma^{(+)}(\vec{p})e^{ipx}, \\ \psi_\xi^{(-)}(x) = u_\Sigma^{(-)}(\vec{p})e^{-ipx}, \end{cases} \Sigma = \pm 1. \tag{5,150}$$

于是可以將(5,149)写作：

$$\{\psi(x), \bar{\psi}(x')\} = \sum_{\vec{p}} \left\{ \sum_{\Sigma} u_\Sigma^{(+)}(\vec{p})\bar{u}_\Sigma^{(+)}(\vec{p})e^{ip(x-x')} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\Sigma} u_\Sigma^{(-)}(\vec{p})\bar{u}_\Sigma^{(-)}(\vec{p})e^{-ip(x-x')} \right\}. \tag{5.151}$$

在(5,151)式的右方，括号中第一項只对正能級求和，第二項只对負能級求和．我們可以將这二項都改写成为既对正能級求和又对負能級求和，使表式得到簡化．設將 (5,19) 中的波函數以另一种符号写出：

$$\begin{cases}\psi_{\rm I} = u_1(\vec{p})e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}-iEt}, & \psi_{\rm II} = u_2(\vec{p})e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}-iEt}, \\ \psi_{\rm III} = u_3(\vec{p})e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}+iEt}, & \psi_{\rm IV} = u_4(\vec{p})e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}+iEt}, \end{cases} \tag{5,152}$$

那末由于 $u_1(\vec{p})$, $u_2(\vec{p})$, $u_3(\vec{p})$, $u_4(\vec{p})$ 的归一性、正交性和完全性，可以得：

$$\sum_{r=1}^{4} u_r(\vec{p})u_r^*(\vec{p}) = 1, \tag{5,153}$$

其中 1 代表四行四列的单位矩陣．利用(5,152)中的符号，可以將表式(5,151)改写为：

$$\{\psi(x), \bar{\psi}(x')\} = \sum_{\vec{p}} \left\{ \sum_{r=1,2} u_r(\vec{p})u_r^*(\vec{p})e^{ip(x-x')} + \right.$$

$$\left. + \sum_{r=3,4} u_r(-\vec{p})u_r^*(-\vec{p})e^{-ip(x-x')} \right\}\gamma_4. \tag{5,154}$$

由于

$$\begin{cases}\{\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m\}u_r(\vec{p}) = Eu_r(\vec{p}), & r = 1,2; \\ \{\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m\}u_s(\vec{p}) = -Eu_s(\vec{p}), & s = 3,4; \end{cases} \tag{5,155}$$

可以將(5,151)写作：

$$\{\psi(x), \bar{\psi}(x')\} =$$

$$= \sum_{\vec{p}} \left\{ \frac{1}{2E}(\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m + E) \sum_{r=1}^{4} u_r(\vec{p}) u_r^*(\vec{p}) e^{ip(x-x')} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2E}(-\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m - E) \sum_{r=1}^{4} u_r(-\vec{p}) u_r^*(-\vec{p}) e^{-ip(x-x')} \right\} \gamma_4 =$$

$$= \sum_{\vec{p}} \frac{1}{2E} \left\{ \left(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta m + i\frac{\partial}{\partial t} \right) e^{ip(x-x')} - \right.$$

$$\left. - \left(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta m + i\frac{\partial}{\partial t} \right) e^{-ip(x-x')} \right\} \gamma_4 =$$

$$= \left(-\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right) \sum_{\vec{p}} \frac{1}{2E} (e^{ip(x-x')} - e^{-ip(x-x')}). \quad (5,156)$$

于是,利用(3,74)中的定义,可以将 $t \neq t'$ 时 ψ 和 ψ^* 之間的对易关系写为:

$$\{\psi(x), \bar{\psi}(x')\} = \frac{1}{i} S_m(x - x'), \quad (5,157)$$

其余各对之間都可以相互反对易. S_m 的定义是:

$$S_m(x) = \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right) \Delta_m(x), \quad (5,158)$$

其中 $\Delta_m(x)$ 的定义見(3,74).

显然,对易关系对于正洛仑兹变换具有不变性. 在正洛仑兹变换中,

$$\xi_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu, \quad '\psi(\xi) = \Lambda\psi(x), \quad '\bar{\psi}(\xi') = \overline{\psi(x')}\Lambda^{-1}. \quad (5,159)$$

因此,(5,157)变为:

$$\Lambda^{-1}\{'\psi(\xi), '\bar{\psi}(\xi')\}\Lambda = \frac{1}{i}\left(\gamma_\mu a_{\nu\mu} \frac{\partial}{\partial \xi_\nu} - m \right) \Delta_m(\xi - \xi'). \quad (5,160)$$

将(5,160)中二边的表式的左右二端各乘以 Λ 和 Λ^{-1},并利用关系(5,63)和(5,53),就得到:

$$\{'\psi(\xi), '\bar{\psi}(\xi')\} = \frac{1}{i} S_m(\xi - \xi'). \quad (5,161)$$

对易关系(5,148)在正洛仑兹变换中显然是不变的。这就証明了，整个对易关系对于正洛仑兹变换具有不变性.

在空間反射时有:

$$\begin{cases} \vec{x} = -\vec{\xi}, \quad x_4 = \xi_4, \\ \psi(x) = \gamma_4 {}'\psi(\xi), \quad \bar{\psi}(x') = {}'\bar{\psi}(\xi')\gamma_4. \end{cases} \tag{5,162}$$

因此(5,157)变为:

$$\gamma_4\{{}'\psi(\xi), {}'\bar{\psi}(\xi')\}\gamma_4 = \frac{1}{i}\left(-\gamma_i\frac{\partial}{\partial\xi_i} + \gamma_4\frac{\partial}{\partial\xi_4} - m\right)\Delta_m(\xi - \xi'). \tag{5,163}$$

其中应用了(3,76)中的第一式。将(5,163)中二边的表式的左右二端各乘以 γ_4，并利用(5,29)中 γ_μ 之間的对易关系，就得到:

$$\{{}'\psi(\xi), {}'\bar{\psi}(\xi')\} = \frac{1}{i}S_m(\xi - \xi'). \tag{5.164}$$

对易关系 (5,148) 在空間反射时显然是不变的。这就証明了整个对易关系对于空間反射具有不变性.

在时間反演时有:

$$\begin{cases} \vec{x} = \vec{\xi}, & x_4 = -\xi_4, \\ \psi(x) = Z[\overbrace{{}'\bar{\psi}(\xi)}], & \bar{\psi}(x') = [\overbrace{{}'\psi(\xi')}]Z^{-1}. \end{cases} \tag{5,165}$$

由于在时間反演时算符排列的次序要顛倒过来，因此 (5,157) 变为:

$$Z\{{}'\psi(\xi'), {}'\bar{\psi}(\xi)\}Z^{-1} = \frac{-1}{i}\left(\gamma_i\frac{\partial}{\partial\xi_i} - \gamma_4\frac{\partial}{\partial\xi_4} - m\right)\Delta_m(\xi - \xi'), \tag{5,166}$$

其中利用了(3,76)中的第二式。将(5,166)中二边的表式的左右二端各乘以 Z^{-1} 和 Z，并利用(5,52)中的关系，就得到:

$$\overbrace{\{{}'\psi(\xi'), {}'\bar{\psi}(\xi)\}} = \frac{1}{i}\left(\tilde{\gamma}_i\frac{\partial}{\partial\xi_i} + \tilde{\gamma}_4\frac{\partial}{\partial\xi_4} + m\right)\Delta_m(\xi - \xi'). \tag{5,167}$$

将(5,167)式进行位調，并利用(3,76)中的第三式，就得到:

$$\{'\psi(\xi'),\ '\bar{\psi}(\xi)\} = \frac{1}{i}S_m(\xi' - \xi). \qquad (5,168)$$

对易关系 (5,148) 在时間反演时显然是不变的. 这就証明了整个对易关系对于时間反演具有不变性. 因此, 对易关系在全部洛仑兹变換中具有不变性, 以上所建立的描述自旋为 1/2 的粒子的理論滿足特殊相对論的要求.

§ 5,12. 同位旋

以上所建立的理論可以用来分别地描述所有的輕粒子和重粒子. 我們注意到,在表 1 的重粒子之中,有些粒子具有很相近的性质. 例如,质子和中子的质量只相差千分之 1.3. 在三种 Σ 超子之間的质量差别也不超过千分之八. 因此,卡孙和康登 [Cassen and Condon, 1936] 首先建議給予质子和中子以統一的描述,引进了抽象的同位旋空間的概念. 此后克茂 [Kemmer, 1938] 将这一概念扩充, 应用于对 π 介子的統一描述. 在超子被发現以后, 沛依士 [Pais, 1953] 及盖尔曼 [Gell-Mann, 1953] 等将同位旋空間这一概念扩充应用于对重粒子的分类和描述. 他們認为: 質子和中子場可以統一地由同位旋空間中一个旋量来描述; Λ 超子則是同位旋空間的一个标量; 三种 Σ 超子在同位旋空間形成一个矢量; 而 Ξ^0 和 Ξ^- 超子則在同位旋空間形成一个屬旋量. 在目前的基本粒子研究中,这一理論起了一定的作用. 当在第三章中討論 π 介子的統一描述时, 我們曾介紹了用一个同位旋矢量将三种 π 介子綜合地处理的方法. 現在, 我們很容易将这一方法扩充而用于三种 Σ 超子的綜合描述. 我們在以下将介紹用一个同位旋空間中的旋量来統一地处理質子和中子的方法. 不难将这一方法略加扩充而应用于三种 Σ 超子的統一处理.

我們可以用一个拉氏函数密度 $\mathscr{L}_p$,

$$\mathscr{L}_p = -\left\{\bar{\psi}_p\gamma_\mu\frac{\partial\psi_p}{\partial x_\mu} + m_p\bar{\psi}_p\psi_p\right\}, \qquad (5,169)$$

来描述自由质子，其中 ψ_p 代表质子場，m_p 代表质子的静质量．从这一拉氏函数密度可以推导出质子場的能量、动量、角动量及运动方程等等；然后，可以引入对易关系，将质子場量子化．同样，为了描述自由中子，我們可以引进另一个拉氏函数密度 $\mathscr{L}_n$，

$$\mathscr{L}_n = -\frac{1}{2}\left\{\bar{\psi}_n\gamma_\mu\frac{\partial\psi_n}{\partial x_\mu} + m_n\bar{\psi}_n\psi_n\right\}, \qquad (5,170)$$

其中 ψ_n 代表中子場，m_n 代表中子的静质量．从 $\mathscr{L}_n$ 可以推导出中子場的能量、动量、角动量及运动方程等等；然后，可以引入 ψ_n 和 $\bar{\psi}_n$ 之間的对易关系，将中子場量子化．最后，我們也可以引入一个总的拉氏函数密度 $\mathscr{L}$，

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_p + \mathscr{L}_n, \qquad (5,171)$$

将质子和中子合并起来描述．不难看出，从 $\mathscr{L}$ 推导出来的能量、动量和角动量是由(5,169)和(5,170)所推导出来的相应的能量、动量和角动量之和．从 $\mathscr{L}$ 推导出来的运动方程中既包括了从(5,169)推导出的质子場的运动方程，也包括了从(5,170)推导出的中子場的运动方程．于是我們可以引入 ψ_p, $\bar{\psi}_p$, ψ_n, $\bar{\psi}_n$ 之間的对易关系，进行量子化．从 $\mathscr{L}$ 推导出来的一套理論与从(5,169)和(5,170)中的拉氏函数密度 $\mathscr{L}_p$ 和 $\mathscr{L}_n$ 所推导出来的二个理論完全等效．

质子的静质量 m_p 与中子的静质量 m_n 相差很小．假使我們忽略这一点差别，将它們的静质量都以 m 代表，那末可以将(5,171)中的表式写成为一个更簡单的表式：我們将 ψ_p 和 ψ_n 合起来写成一行：

$$\Psi = \begin{pmatrix}\psi_p\\ \psi_n\end{pmatrix}; \qquad (5,172)$$

因为 ψ_p 和 ψ_n 各有四个分量，所以 Ψ 一共有八个分量．于是 $\mathscr{L}$ 就可以写成如下的形式：

$$\mathscr{L} = -\left\{\bar{\Psi}\gamma_\mu\frac{\partial\Psi}{\partial x_\mu} + m\bar{\Psi}\Psi\right\}, \qquad (5,173)$$

其中 γ_μ 是八行八列的矩陣，其显示的形式是：

$$\begin{pmatrix} \gamma_\mu & 0 \\ 0 & \gamma_\mu \end{pmatrix} = \gamma_\mu \times I, \tag{5,174}$$

其中 I 是二行二列的单位矩陣。为了书写方便，就簡单地將它写作 γ_μ。当將拉氏函数密度 $\mathscr{L}$ 写成为(5,173)的形式之后，很容易发現，$\mathscr{L}$ 除了对于坐标移动变換、洛仑兹变換和規范变換具有不变性以外，还对于另外一种变換具有不变性。假使我們將 (5,172) 中的 Ψ 当作同位旋空間中的一个旋量，而 ψ_p 和 ψ_n 是这个旋量的二个分量，那末在同位旋空間中旋轉时，$\mathscr{L}$ 显然具有不变性。很有兴趣的問題是：与这一不变性相应的守恆量具有什么表式？

在同位旋空間作无穷小的轉动时，同位旋空間中的矢量作如(3,136)，(3,137)，(3,138)中的变換，旋量則作如下的相应变換：

$$\begin{cases} \Psi \to \Psi' = \mathscr{D}\Psi, \\ \bar{\Psi} \to \bar{\Psi}' = \bar{\Psi}\mathscr{D}^*, \end{cases} \tag{5,175}$$

其中 $\mathscr{D}$ 是八行八列的矩陣，具有如下的形式：

$$\begin{cases} \mathscr{D} = I + \dfrac{1}{2}\epsilon_{jk}\tau_{jk}, \\ \tau_{jk} = \dfrac{1}{4}(\tau_j\tau_k - \tau_k\tau_j), \end{cases} \tag{5,176}$$

其中 $\tau_j (j = 1,2,3)$ 是八行八列的矩陣，具有如下的形式：

$$\tau_1 = 1 \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = 1 \times \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = 1 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{5,177}$$

其中 1 代表四行四列的单位矩陣。由于

$$\mathscr{D}^* = I - \frac{1}{2}\epsilon_{jk}\tau_{jk}, \tag{5,178}$$

考虑到 ϵ_{jk} 是无穷小的数量，我們有：

$$\mathscr{D}^*\mathscr{D} = I. \tag{5,179}$$

在变換中 $\mathscr{L}$ 具有不变性，因此得：

$$\delta\mathscr{L}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Psi}\delta\Psi+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\bar{\Psi}}\delta\bar{\Psi}+$$

$$+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_\mu}\right)}\delta\frac{\partial\Psi}{\partial x_\mu}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial x_\mu}\right)}\delta\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial x_\mu}=0. \tag{5,180}$$

应用运动方程,可得:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_\mu}\right)}\delta\Psi+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial x_\mu}\right)}\delta\bar{\Psi}\right\}=0. \tag{5,181}$$

从 $\mathscr{L}$ 的表式(5,173)以及(5,176)中 $\delta\Psi$ 的表式,可得:

$$-\varepsilon_{jk}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left\{\frac{1}{2}\bar{\Psi}\gamma_\mu\tau_{jk}\Psi\right\}=0, \tag{5,182}$$

其中 ε_{jk} 除了必須滿足反对称条件以外是任意的. 因此有:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\{-\bar{\Psi}\gamma_\mu\tau_{jk}\Psi\}=0,\quad j\neq k=1,2,3. \tag{5,183}$$

(5,183)具有微分守恆定律的形式,其相应的守恆量是:

$$\vec{T}=\int dx\Psi^*\frac{1}{2}\vec{\tau}\Psi, \tag{5,184}$$

其中 $\vec{\tau}$ 的三个分量 τ_1, τ_2, τ_3 就是(5,177)中所給的矩陣. 利用 Ψ 和 Ψ^* 之間的对易关系,可以証明:

$$[T_1, T_2]=iT_3,\ [T_2, T_3]=iT_1,\ [T_3, T_1]=iT_2. \tag{5,185}$$

我們称(5,184)中的表式 $\vec{T}$ 为核子場的同位旋. 不难証明,質子和中子的同位旋都等于$\frac{1}{2}$; 質子和中子的同位旋第三分量分别等于 $\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}$.

§5,13. 二分量中微子理論

狄拉克波函数有四个分量. 狄拉克波动方程是一組四个联立微分方程, 将波函数的四个分量不可分割地联系在一起. 描述

自旋等于 1/2 靜質量等于零的粒子的狄拉克波动方程具有如下特別簡单的形式：

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\psi. \tag{5,186}$$

有可能將(5,186)拆成二組彼此独立的方程。为此，我們引进一个新的表象，將波函数 ψ，ψ^* 和算符 γ 进行如下的么正变換：

$$\psi=K\psi',\quad \psi^*=\psi'^*K^{-1},\quad \gamma=K\gamma'K^{-1}, \tag{5,187}$$

其中 K 和 K^{-1} 是如下的么正矩陣：

$$K=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}I & I\\ -I & I\end{pmatrix},\quad K^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}I & -I\\ I & I\end{pmatrix}, \tag{5,188}$$

而 I 是二行二列的单位矩陣。因此，在新表象中，方程(5,186)取得如下的形式：

$$i\frac{\partial\psi'}{\partial t}=-i\vec{\alpha}'\cdot\vec{\nabla}\psi', \tag{5,189}$$

其中

$$\vec{\alpha}'=K^{-1}\vec{\alpha}K=K^{-1}\begin{pmatrix}0 & \vec{\sigma}\\ \vec{\sigma} & 0\end{pmatrix}K=\begin{pmatrix}-\vec{\sigma} & 0\\ 0 & \vec{\sigma}\end{pmatrix}. \tag{5,190}$$

假使我們將 ψ' 写成如下的形式：

$$\psi'=\begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{pmatrix}, \tag{5,191}$$

那末(5,189)就拆成二个彼此完全分开的方程：

$$\begin{cases}i\dfrac{\partial\chi_1}{\partial t}=-\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\chi_1,\\ i\dfrac{\partial\chi_2}{\partial t}=\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\chi_2.\end{cases} \tag{5,192}$$

因此，可以將整个希耳伯空間分开成为 G_1 和 G_2 二个部分；χ_1 和 χ_2 所描述的粒子分别在 G_1 和 G_2 中运动。

为了闡明(5,192)中二个方程的二套解 χ_1 和 χ_2 各自的特点，我們要指出，自旋算符在新的表象中的形式与老的表象中的形式是一样的：

$$\vec{\Sigma}' = K^{-1}\vec{\Sigma}K = \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}. \tag{5,193}$$

因此，解 χ_1 所描述的正能量粒子的自旋一定与动量反平行，它所描述的負能量粒子的自旋一定与动量平行．与之相反，χ_2 所描述的正能量粒子的自旋一定与动量平行，它所描述的負能量粒子的自旋一定与动量反平行．

可以証明，χ_1 和 χ_2 的运动方程在正洛仑兹变換和时間反演变換下各自分别具有不变性．(5,57) 中决定无穷小正洛仑兹变換的算符 $S_{\mu\nu}$ 在新的表象中具有如下的形式：

$$S'_{\mu\nu} = K^{-1}S_{\mu\nu}K,$$

亦即：

$$\begin{cases} S'_{12} = \dfrac{i}{2}\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, & S'_{34} = \dfrac{i}{2}\begin{pmatrix} -\sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \\ S'_{23} = \dfrac{i}{2}\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix}, & S'_{14} = \dfrac{i}{2}\begin{pmatrix} -\sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix}, \\ S'_{31} = \dfrac{i}{2}\begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}, & S'_{24} = \dfrac{i}{2}\begin{pmatrix} -\sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{5,194}$$

因此，在正洛仑兹变換中 χ_1 和 χ_2 仍分别在 G_1 和 G_2 中进行变換；在时間反演中，波函数进行如 (5,50) 中所給的变換．注意到 Z 在老的表象中的形式，可以将(5,50)改写为：

$$\psi = \Sigma_2{}'\tilde{\psi}^*, \quad \psi^* = {}'\tilde{\psi}\Sigma_2. \tag{5,195}$$

不难証明，在新的表象中时間反演的数学形式与 (5,195) 完全一样．因此，在时間反演的时候，χ_1 和 χ_2 仍旧分别在自己的希耳伯空間中进行变換．这就証明了，χ_1 和 χ_2 的运动方程在正洛仑兹变換以及时間反演中各自分别具有不变性．

但是，χ_1 和 χ_2 的运动方程在空間反射时不再分别具有不变性；决定空間反射变換的算符 γ_4 在新表象中有如下的形式：

$$\gamma'_4 = K^{-1}\gamma_4 K = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}; \tag{5,196}$$

因此，在空間反射时 χ_1 变换为 G_2 中的态矢，χ_2 則变换为 G_1 中的态矢；(5,192)中的第一式变换为第二式，而第二式則变换为第一式.

我們可以单用 (5,192) 中的第一式或单用其中的第二式来描述自旋为 1/2 靜質量为零的粒子；这样的理論滿足特殊相对論的要求，但是在空間反射变换中不再具有不变性，因此宇称在这种理論中不再是一个守恒量. 宇称在弱相互作用中不守恒的現象被发現以后，李政道和楊振宁 [Lee and Yang, 1957]、朗道 [Landau, 1957] 以及薩拉姆 [Salam, 1957] 就同时建議用这种理論来描述中微子，并称之为二分量中微子理論. 假使用 χ_1 来描述中微子，那末中微子一定是左旋的粒子，反中微子一定是右旋的粒子. 假使用 χ_2 来描述中微子，那末中微子一定是右旋的粒子、反中微子一定是左旋的粒子.

利用四分量的狄拉克波函数同样可以描述二分量的中微子. 例如，$\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi$ 只能描述左旋的中微子和右旋的反中微子，而不能描述右旋的中微子和左旋的反中微子. 設我們以 $\psi_{右}^{(-)}$ 和 $\psi_{左}^{(+)}$ 分别代表正能量右旋的和左旋的粒子，$\psi_{右}^{(-)}$ 和 $\psi_{左}^{(-)}$ 分别代表負能量右旋的和左旋的粒子，并以 s 代表 $\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$；那末就有：

$$\begin{cases} (\vec{\alpha}\cdot\vec{s})\psi_{右}^{(+)} = \psi_{右}^{(+)}, \quad (\vec{\alpha}\cdot\vec{s})\psi_{左}^{(+)} = \psi_{左}^{(+)}, \\ (\vec{\alpha}\cdot\vec{s})\psi_{右}^{(-)} = -\psi_{右}^{(-)}, \quad (\vec{\alpha}\cdot\vec{s})\psi_{左}^{(-)} = -\psi_{左}^{(-)}; \\ (\vec{\Sigma}\cdot\vec{s})\psi_{右}^{(+)} = \psi_{右}^{(+)}, \quad (\vec{\Sigma}\cdot\vec{s})\psi_{左}^{(+)} = -\psi_{左}^{(+)}, \\ (\vec{\Sigma}\cdot\vec{s})\psi_{右}^{(-)} = \psi_{右}^{(-)}, \quad (\vec{\Sigma}\cdot\vec{s})\psi_{左}^{(-)} = -\psi_{左}^{(-)}. \end{cases} \tag{5,197}$$

假使考慮到：

$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{s})(\vec{\Sigma}\cdot\vec{s}) + (\vec{\Sigma}\cdot\vec{s})(\vec{\alpha}\cdot\vec{s}) = -2\gamma_5, \tag{5,198}$$

就得：

$$\begin{cases} \gamma_5\psi_{右}^{(+)} = -\psi_{右}^{(+)}, \quad \gamma_5\psi_{左}^{(+)} = \psi_{左}^{(+)}, \\ \gamma_5\psi_{右}^{(-)} = \psi_{右}^{(-)}, \quad \gamma_5\psi_{左}^{(-)} = -\psi_{左}^{(-)}. \end{cases} \tag{5,199}$$

这就证明了：$\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi$ 只能描述左旋的中微子和右旋的反中微子. 同样可以看出，$\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi$ 只能描述右旋的中微子和左旋的反中微子.

参 考 文 献

Casson, B. and Condon, E. U. (1936), *Phys. Rev.*, **50**, 846.
Dirac, P. A. M. (1928), *Proc. Roy. Soc.*, **117**, 610; 118, 341.
Dirac, P. A. M. (1931), *Proc. Roy. Soc.*, **126**, 130; **133**, 60.
Gell-Mann, M. (1953), *Phys. Rev.*, **92**, 833.
Jordan, P. and Wigner, E. P. (1928), *Zeits. f. Phys.*, **47**, 631.
Kemmer, N. (1938), *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **34**, 354.
Ландау, Л. Д. (1957), ЖЭТФ, **32**, 405, 407.
Lee, T. D. and Yang, C. N. (1957), *Phys. Rev.*, **105**, 1671.
Pais, A. (1953), *Physica*, **19**, 869.
Salam, A. (1957), *Nuovo Cimento*, **5**, 299.

第六章　基本粒子間的相互作用

§6,1. 相互作用的分类

研究基本粒子之間的联系，研究它們之間相互作用和相互轉化的規律，是基本粒子研究工作中十分重要的一部分。根据現在已經获得的知識，可以将物理現象中的基本相互作用分为四类：

1）重力相互作用；

2）电磁相互作用；

3）強相互作用；

4）弱相互作用。

重力相互作用和电磁相互作用是长力程的相互作用，因此在宏观物理現象中起直接而明显的作用；強相互作用和弱相互作用是短力程的相互作用，虽然对于不少宏观物理現象也起間接的重要影响，但是它們的作用只有在微观物理現象中才直接地、明显地表現出来。人認識物理运动規律是从宏观現象开始的，因此首先研究的相互作用是重力相互作用和电磁相互作用。关于重力相互作用的第一个理論是牛頓所提出的万有引力論，其后經爱因斯坦发展成为普遍相对論。应該說，重力相互作用对于規模巨大的天体現象、对于天体的結构和运动起着十分重要的、甚至是决定性的影响。但是，在微观物理現象中，重力相互作用，与别的相互作用比較起来，便微不足道了，它甚至比弱相互作用还小得多。因此，現在基本粒子的理論很少考虑或根本不考虑重力相互作用的影响。

宏观电磁相互作用的理論也是很早就发展成熟了的理論。但是，与重力相互作用不同，电磁相互作用不仅是宏观物理現象中的重要因素，在微观物理現象中也起着重要的作用。例如，电磁相互作用是决定原子結构的基本因素之一。就強度而論，电磁相互作

用也远远超过弱相互作用．因此，研究电磁相互作用是基本粒子研究的重要部分，开始得最早，发展得最成熟．可以說，量子电动力学是現在基本粒子理論中最可靠的部分．

由于強相互作用和弱相互作用是短力程的，它們在微观物理現象中才起直接的、明显的影响．因此对它們的研究开始得很迟，一直到物理研究进入了原子核的領域时，人們才发現这二种相互作用．在原子核物理中，核子力属于強相互作用；質子之間的庫伦力属于电磁相互作用，β衰变現象則属于弱相互作用．相互作用的弱和強可以通过許多方面表現出来．例如，相互作用的強弱可以用各自对于原子核的結合能的貢献来表示．原子核的結合能主要是由属于強相互作用的核子力决定的；庫伦力对于原子核的結合能起一定的影响，但是这一影响与核子力的影响相比較显然是次要的；至于导致β衰变的弱相互作用对于原子核結合能的貢献則微不足道，直到現在为止，实验方法还远远沒有精确到能够測定弱相互作用对于原子核結合能所作的貢献．相互作用的強弱也可以通过各自所引起的反应和轉化过程的迅速程度表現出来．例如，可以用一定方法将原子核激发，使它处于很高的激发状态；处于激发状态的原子核可以通过不同的变化途径回到稳定状态；激发的原子核可以放出核子，也可以放出光子，也可以进行β衰变，跃迁到能量較低的状态．一般說来，假使这三种变化的可能性都存在的話，那末其竞爭結果，在絕对大多数情况下总是放出核子．只有在原子核的激发不够高，不足以放出核子的时候，才放出γ光子；只有在不能再放出γ光子的时候，才进行β衰变．因此，放出核子是最迅速的过程，通常是由強相互作用引起来的；γ衰变是比較慢的过程，由电磁相互作用决定；β衰变，通常是很慢的过程，由弱相互作用决定．

我們也可以根据基本粒子的反应和轉化过程的迅速程度来区分引起这一过程的相应相互作用是強相互作用、电磁相互作用或弱相互作用．假使在基本粒子反应过程中，起决定性作用的是強相

互作用，那末这种反应常常进行得异常迅速，反应过程所需的时間約在 10^{-23} 秒左右；由电磁相互作用决定的反应过程所需的时間通常在 10^{-19}—10^{-12} 秒之間；而主要由弱相互作用决定的反应过程，所需的时間在 10^{-10} 秒以上。因此，在碰撞現象中，弱相互作用的影响是微不足道的，这是因为粒子碰撞所經历的时間十分短暫。弱相互作用只能在衰变現象和俘获現象中起主要作用。

根据目前已知的实驗事实来看，強相互作用只存在于重子与介子之間；这里所謂介子，仅包括 π 介子和K介子；我們按照表 1 将 μ 介子划入輕子一类。电磁相互作用首先存在于电磁場与荷电粒子之間。在中性粒子与电磁場之間，也常常存在着相互作用。例如：中子具有反常磁矩；中性 π 介子能衰变为二个光子。有可能这种中性粒子与电磁場之間的相互作用是通过别的荷电粒子作媒介而产生的間接相互作用。例如：中子与荷电的 π 介子之間有相互作用，而荷电的 π 介子与电磁場之間又有相互作用；由于荷电的 π 介子作媒介，中子与电磁場之間就产生了間接的相互作用。这种間接相互作用的想法在物理理論中是常見的：电子与电子之間的庫伦力被認为是由于电磁場作媒介而产生的間接相互作用；核子之間的核子力被認为是由于介子作媒介而产生的間接相互作用。弱相互作用則广泛地存在于輕子、介子以及重子之間。例如：核子可以进行 β 衰变而放出中微子和电子；Λ 超子可以衰变为核子和 π 介子；π 介子可以衰变为 μ 介子；μ 介子可以衰变为电子和中微子；K介子可以衰变为几个 π 介子。在弱相互作用的理論中，也有直接相互作用和間接相互作用的想法。例如：湯川秀树[Yukawa, 1935]認为 β 衰变是一种間接相互作用，通过 π 介子作媒介而进行——核子先放出一个 π 介子，然后 π 介子衰变成为电子和中微子。費曼和蓋尔曼[Feynman and Gell-Mann, 1957]則倒过来認为 β 衰变是一种直接相互作用，π 介子衰变是一种間接相互作用——π 介子通过核子和反核子作媒介而衰变成为 μ 介子和中微子。究竟什么相互作用是直接的，什么相互作用是間接的，这是十分有兴趣的

問題;而更深刻的問題是,能不能将所有的相互作用划分为直接相互作用和間接相互作用. 完全有可能,将相互作用区分为直接的和間接的相互作用这种思想只有在一定的条件下才反映客观的实际情况.

在本章中,我們将討論如何建立描述基本粒子相互作用的数学形式的問題. 在目前已經提出的各种数学形式中,只有描述电磁相互作用的数学形式可以被認为是比較成熟的. 描述弱相互作用的数学形式的建立最近已取得比較大的进展,但还不能認为已經得到了全面的、系統的成就. 描述強相互作用的数学形式的建立則还在摸索的阶段. 我們在以下将首先討論描述电磁相互作用的数学形式,次之討論描述強相互作用的数学形式,又次之討論描述弱相互作用的数学形式,最后介紹一些关于如何描述相互作用的有趣的,但却是十分初步的思想.

§ 6,2. 輕子与电磁場之間的相互作用

我們首先来討論輕子与电磁場之間的相互作用. 因为輕子与強相互作用沒有什么关系,它們与电磁場之間沒有強相互作用夾杂在內,問題比較簡单. 与电磁場有相互作用的輕子是电子和 μ 介子,它們的自旋都等于 1/2,都可以用一个狄拉克場描述,所不同者只是質量而已. 描述它們与电磁場之間的相互作用的数学形式几乎完全一样. 因此,以下的討論既适用于电子,也适用于 μ 介子.

因为存在着比較成熟的古典电磁相互作用理論,在量子理論中引入电磁相互作用是比較有路可循的工作. 在古典物理和量子物理理論之間存在着对应的关系,可以利用对应关系将古典电磁相互作用理論移植进量子理論. 在古典理論中,一个自由粒子的哈密頓量是:

$$H = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}; \tag{6,1}$$

一个具有电荷 e,在一定的电磁場 A_μ 中运动的粒子的哈密頓量是:

$$H = e\phi + \sqrt{m^2 + (\vec{p} - e\vec{A})^2}, \tag{6,2}$$

其中 $\phi = -iA_4$. 假使將(6,1)中的 H 和 $\vec{p}$ 作如下的變換:

$$H \to H - e\phi, \quad \vec{p} \to \vec{p} - e\vec{A}, \tag{6,3}$$

就得到(6,2)中的哈密頓量. 可以將(6,3)中的變換合并為一个式子:

$$p_\mu \to p_\mu - eA_\mu, \tag{6,4}$$

利用變換(6,4), 就能够从自由粒子的哈密頓量获得在一定的电磁場中运动的粒子的哈密頓量; 將变換(6,4)应用于描述自由粒子的波动方程,就可以得到荷电粒子在电磁場中运动的波动方程;將变換应用于(5,30)和(5,33),就得到:

$$\begin{cases} \{i(\hat{p} - e\hat{A}) + m\}\psi = 0, \\ \bar{\psi}\{i(\hat{p} - e\hat{A}) + m\} = 0. \end{cases} \tag{6,5}$$

(6,5)是描述具有电荷 e、自旋1/2和靜質量 m 的粒子在电磁場 A_μ 中运动的波动方程;算符 p_μ 作用于 ψ 时相应于 $-i\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$, 作用于 ψ^* 时相应于 $i\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$. 因此,可以將(6,5)写为:

$$\begin{cases} \left\{\gamma_\mu\left(\dfrac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu\right) + m\right\}\psi = 0, \\ \bar{\psi}\left\{\gamma_\mu\left(\dfrac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_\mu} + ieA_\mu\right) - m\right\} = 0, \end{cases} \tag{6,6}$$

其中 $\dfrac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_\mu}$ 代表作用于左面的 $\bar{\psi}$ 的微分算符. 可以將 (6,4) 在量子理論中換写成如下的形式:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial x_\mu} \to \left(\dfrac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu\right)\psi, \\ \dfrac{\partial\psi^*}{\partial x_\mu} \to \left(\dfrac{\partial}{\partial x_\mu} + ieA_\mu\right)\psi^*. \end{cases} \tag{6,7}$$

(6,7) 中的 ψ, ψ^* 是描述荷电粒子的場; 它們可以是标量場、旋量場或是其他具有洛仑兹协变性的場; 它們可以代表自旋为零、为

1/2 或为其他数值的荷电粒子.

假使我們应用 (6,5) 来討論速度远比光速为小的粒子在很弱的电磁場中的运动,就可以看出,由方程(6,5)描述的粒子具有磁矩 $\frac{e}{2m}$. 将(6,5)中的第一式乘以算符 $\{i(\hat{p}-e\hat{A})-m\}$, 就得:

$$\{-(\hat{p}-e\hat{A})^2-m^2\}\psi=0. \tag{6,8}$$

利用对易关系(5,29),可以証明:

$$(\hat{p}-e\hat{A})^2=(p-eA)^2+\frac{i}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu)F_{\mu\nu}. \tag{6,9}$$

因此,可以将方程(6,8)写为:

$$\{(p_0-e\phi)^2-m^2\}\psi=$$

$$=\left\{(\vec{p}-e\vec{A})^2+\frac{i}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu)F_{\mu\nu}\right\}\psi. \tag{6,10}$$

可以将(6,10)式左方的算符写成:

$$\{p_0-e\phi-m\}\{p_0-e\phi+m\}. \tag{6,11}$$

由于粒子的速度很小,而电磁場也很弱,粒子的动能和势能与靜能量 m 相比較可以略去,故有

$$\{p_0-e\phi+m\}\cong 2m; \tag{6,12}$$

p_0-m 則相当于粒子的非相对論性哈密頓量 H. 利用 (5,3) 和 (5,28),可以将方程(6,10)写成如下的形式:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left\{\frac{1}{2m}(\vec{p}-e\vec{A})^2+e\phi-\frac{e}{2m}\vec{\Sigma}\cdot\vec{H}+\frac{ie}{2m}\vec{\alpha}\cdot\vec{E}\right\}\psi; \tag{6,13}$$

上式中哈密頓量所包含的一項

$$-\frac{e}{2m}\vec{\Sigma}\cdot\vec{H} \tag{6,14}$$

表明粒子具有磁矩 $\frac{e}{2m}$.

假使我們将(5,132)中的拉氏函数密度进行如(6,7)中的变換,那末,从变換了的拉氏函数密度:

$$-\frac{1}{2}\left\{\bar{\psi}\gamma_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}-ieA_\mu\right)\psi+m\bar{\psi}\psi+\right.$$
$$\left.+\tilde{\bar{\psi}}\tilde{\gamma}_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}+ieA_\mu\right)\tilde{\bar{\psi}}-m\tilde{\bar{\psi}}\tilde{\bar{\psi}}\right\} \qquad (6,15)$$

可以將粒子的波动方程(6,6)推导出来. 方程(6,6)是描述粒子在一定的电磁場中如何运动,它表現了电磁場对于粒子的作用,但却并不表現荷电粒子对于电磁場运动的影响,并不描述荷电粒子如何反过来作用于电磁場. 为了描述荷电粒子与电磁場之間的相互的、双方面的作用,我們將(6,15)中的拉氏函数密度和自由电磁場的拉氏函数密度(4,14)合起来,引入如下的拉氏函数密度:

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_e+\mathscr{L}_f+\mathscr{L}_i, \qquad (6,16)$$

其中 $\mathscr{L}_e$ 是自由粒子的拉氏函数密度:

$$\mathscr{L}_e=-\frac{1}{2}\left\{\bar{\psi}\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi+m\bar{\psi}\psi+\tilde{\bar{\psi}}\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\tilde{\bar{\psi}}-m\tilde{\bar{\psi}}\tilde{\bar{\psi}}\right\}; \qquad (6,17)$$

$\mathscr{L}_f$ 是自由电磁場的拉氏函数密度:

$$\mathscr{L}_f=-\frac{1}{2}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}; \qquad (6,18)$$

$\mathscr{L}_i$ 称为相互作用拉氏函数密度,其表式为:

$$\mathscr{L}_i=A_\mu J_\mu,\quad J_\mu=\frac{ie}{2}\{\bar{\psi}\gamma_\mu\psi-\tilde{\bar{\psi}}\tilde{\gamma}_\mu\tilde{\bar{\psi}}\}, \qquad (6,19)$$

J_μ 就是上一章中推导得的电流-电荷密度的表式. 表式(6,15)就是 $\mathscr{L}_e$ 与 $\mathscr{L}_i$ 之和. 从拉氏函数密度(6,16),不仅可以推导得波动方程(6,6),还可以推导得如下的电磁場的运动方程:

$$\Box A_\mu=-J_\mu. \qquad (6,20)$$

方程(6,20)描述了荷电粒子对于电磁場的作用. 我們可以將輕子与电磁場相互作用的整个理論从拉氏函数密度推导出来: 除了运动方程(6,5)和(6,20)以外,还可以推导得如下的一些物理量,例如,能量-动量张量 $T_{\mu\nu}$:

$$T_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu}\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\nu}+\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu}+\right.$$

$$\left.+\bar{\psi}\gamma_\nu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}+\tilde{\psi}\tilde{\gamma}_\nu\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x_\mu}\right\}+\mathscr{L}\delta_{\mu\nu};\qquad(6,21)$$

(6,19)中的电流-电荷密度；以及輕子場和电磁場的总角动量密度等等。

为了进行量子化，可以引入 ψ，ψ^*，A_μ 之間如下的对易定則：当 $t=t'$ 时，

$$\begin{cases}\{\psi(x),\psi^*(x')\}=I\delta(\vec{x}-\vec{x}'),\\ [A_\mu(x),\pi_\nu(x')]=i\delta_{\mu\nu}\delta(\vec{x}-\vec{x}'),\end{cases}\qquad(6,22)$$

ψ，ψ^* 之間的其余各对都可相互反对易，A_μ，π_μ 之間的其余各对都可相互对易，而 ψ，ψ^* 与 A_μ，π_μ 也可以相互对易。正則动量 π_μ 的定义是：

$$\pi_\mu=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial t}\right)}=\frac{\partial A_\mu}{\partial t}.\qquad(6,23)$$

可以将哈密頓量密度 $\mathscr{H}=-T_{44}$ 写成如下的形式：

$$\mathscr{H}=\mathscr{H}_e+\mathscr{H}_f+\mathscr{H}_i,\qquad(6,24)$$

其中 $\mathscr{H}_e$ 是自由粒子的哈密頓量密度，$\mathscr{H}_f$ 是自由电磁場的哈密頓量密度，$\mathscr{H}_i$ 則称为相互作用哈密頓量密度。它們具有如下的形式：

$$\begin{cases}\mathscr{H}_e=\frac{1}{2}\{\psi^*[-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}+\beta m]\psi+\tilde{\psi}[-i\tilde{\vec{\alpha}}\cdot\vec{\nabla}-\tilde{\beta}m]\tilde{\psi}^*\};\\ \mathscr{H}_f=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_i}\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_i}+\pi_\lambda\pi_\lambda\right\},\\ \mathscr{H}_i=-A_\mu J_\mu=-\frac{ie}{2}\{\bar{\psi}\hat{A}\psi-\tilde{\psi}\tilde{\hat{A}}\tilde{\psi}\}.\end{cases}\qquad(6,25)$$

应用对易关系(6,22)可以証明，下列运动方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial t} = i[H, \psi], & \dfrac{\partial \psi^*}{\partial t} = i[H, \psi^*], \\ \dfrac{\partial A_\mu}{\partial t} = i[H, A_\mu], & \dfrac{\partial \pi_\mu}{\partial t} = i[H, \pi_\mu]. \end{cases} \tag{6,26}$$

与方程(6,5),(6,20)以及(6,23)完全一样;其中

$$H = \int dx \cdot \mathscr{H} \tag{6,27}$$

是輕子場和电磁場的总哈密頓量.

为了便于看出相互作用哈密頓量密度的物理意义,可以将 A_μ, ψ、和 ψ^* 展开成平面波,略如(4,57)和(5,11). 可以看出, A_μ 是一系列光子的消灭算符与产生算符之和; ψ, ψ^* 是一系列輕粒子与反輕粒子的消灭算符与产生算符之和. 因此,假使将 $\mathscr{H}_I$ 展开,則不难看出, $\mathscr{H}_I$ 是一系列算符之和,每个算符代表如下的物理过程之一:

1) 輕子放出光子;

2) 輕子吸收光子;

3) 反輕子放出光子;

4) 反輕子吸收光子;

5) 輕子和反輕子轉化为一个光子;

6) 一个光子轉化为一对輕子和反輕子;

以及其他的一些物理过程. 因此,在引入了相互作用哈密頓量以后,理論的确就有可能描述基本粒子的相互作用及相互轉化的現象.

§ 6,3. 介子、重子与电磁場之間的相互作用

我們可以用上节所給的方法来建立介子、重子与电磁場相互作用的理論. 例如,为了建立荷电介子与电磁場相互作用的理論,可以引入如下的拉氏函数密度:

$$\mathscr{L} = -\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ieA_\mu\right)\varphi^*\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu\right)\varphi + m^2\varphi^*\varphi\right\} - \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}, \tag{6,28}$$

其中第一項是將自由荷电介子場的拉氏函数密度 (3,8) 經过变換 (6,7) 后所得到的表式，第二項是自由电磁場的拉氏函数密度. 可以將(6,28)中的表式改写为：

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_c + \mathscr{L}_f + \mathscr{L}_i, \tag{6,29}$$

其中 $\mathscr{L}_c$ 就是(3,8)中的自由荷电介子場的拉氏函数密度，$\mathscr{L}_f$ 是自由电磁場的拉氏函数密度，$\mathscr{L}_i$ 称为荷电介子与电磁場之間的相互作用拉氏函数密度，它具有如下的形式：

$$\mathscr{L}_i = ie\left\{\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_\mu}A_\mu\varphi - A_\mu\varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} + ieA_\mu\varphi^*A_\mu\varphi\right\}. \tag{6,30}$$

从(6,28)，可以推导得如下的运动方程：

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu\right)\left(\dfrac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu\right)\varphi - m^2\varphi = 0, \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial x_\mu} + ieA_\mu\right)\left(\dfrac{\partial}{\partial x_\mu} + ieA_\mu\right)\varphi^* - m^2\varphi = 0, \\ \Box A_\mu = -J_\mu.\end{cases} \tag{6,31}$$

(6,31) 中第三式右边的 J_μ 代表荷电介子場的电流-电荷密度，具有如下的形式：

$$J_\mu = ie\left\{\varphi^*\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu\right)\varphi - \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ieA_\mu\right)\varphi^*\varphi\right\}; \tag{6,32}$$

利用 (2,17)，就可以从 (6,28) 中的拉氏函数密度得到这一表式. (6,31) 中的前面二个方程描述电磁場如何作用于荷电介子，第三个方程則描述荷电介子如何反作用于电磁場. 在 A_μ 等于零时，不难看出，(6,32)中的 J_μ 的表式还原为 (3,11) 中自由荷电介子的电流-电荷密度的表式.

我們可以从(6,29) 推导得相互作用着的荷电介子場和电磁場的能量-动量张量、角动量密度等等. 为了进行量子化，可以引进

如下的正則坐标和正則动量：

$$\begin{cases}\varphi,\ \pi=\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right)}=\left(\dfrac{\partial}{\partial t}-ie\phi\right)\varphi^*,\\ \varphi^*,\ \pi^*=\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial\varphi^*}{\partial t}\right)}=\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+ie\phi\right)\varphi,\\ A_\mu,\ \pi_\mu=\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial A_\mu}{\partial t}\right)}=-\dfrac{\partial A_\mu}{\partial t};\end{cases}\tag{6,33}$$

并且可以在 φ, φ^*, A_μ, π, π^*, π_μ 之間引入如下的对易关系：在 $t=t'$ 时，

$$\begin{cases}[\varphi(x),\ \pi(x')]=i\delta(\vec{x}-\vec{x}'),\\ [\varphi^*(x),\ \pi^*(x')]=i\delta(\vec{x}-\vec{x}'),\\ [A_\mu(x),\ \pi_\nu(x')]=i\delta_{\mu\nu}\delta(\vec{x}-\vec{x}'),\end{cases}\tag{6,34}$$

其余各对之間都可以相互对易. 不难从(6,29)得到如下的哈密頓量密度：

$$\mathscr{H}=\mathscr{H}_c+\mathscr{H}_f+\mathscr{H}_i,\tag{6,35}$$

其中 $\mathscr{H}_c$ 就是表式(3,13)中自由荷电介子的哈密頓量密度，$\mathscr{H}_f$ 是自由电磁場的哈密頓量密度，而 $\mathscr{H}_i$ 則叫做荷电介子場与电磁場之間的相互作用哈密頓量密度. $\mathscr{H}_i$ 的表式是：

$$\mathscr{H}_i=-ie\left\{\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_i}A_i\varphi-A_i\varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}+\right.$$
$$\left.+\phi_0\pi\varphi-\phi_0\pi^*\varphi^*+ieA_iA_i\varphi^*\varphi\right\}.\tag{6,36}$$

可以将运动方程(6,31)和定义(6,33)写成下列形式：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=i[H,\varphi],\ \dfrac{\partial\varphi^*}{\partial t}=i[H,\varphi^*],\ \dfrac{\partial A_\mu}{\partial t}=i[H,A_\mu],\\ \dfrac{\partial\pi}{\partial t}=i[H,\pi],\ \dfrac{\partial\pi^*}{\partial t}=i[H,\pi^*],\ \dfrac{\partial\pi_\mu}{\partial t}=i[H,\pi_\mu];\end{cases}\tag{6,37}$$

其中 H 是相应于(6,35)的哈密頓量. 假使我們将 φ 等展开成为平

面波，就可以看出，相互作用哈密頓量所描述的是荷电介子与光子相互作用和相互轉化过程.

在 § 3,14 中，为了給予自由的、荷电的 π 介子和中性 π 介子以統一的描述，我們曾将它們的拉氏函数密度合并起来，并且将其改写成为(3,132)的形式. 产生这样的問題：怎样統一地描述三种 π 介子与电磁場之間的相互作用？由于中性介子沒有电荷，它与电磁場之間沒有直接的相互作用. 因此，引入相互作用的办法是：将自由介子場的拉氏函数密度 (3,132) 和自由电磁場的拉氏函数密度合并起来，并将相应于荷电介子部分的拉氏函数密度作如 (6,7) 的变換，得到描述三种 π 介子和电磁場相互作用的总拉氏函数密度. 利用这个总拉氏函数密度，就可以建立三种 π 介子与电磁場相互作用的理論. 不难看出，这个总拉氏函数密度就是表式(,28) 和表式(3,103)之和，表式(3,103)是自由中性介子場的拉氏函数密度. 可以利用(3,102)，(3,146)和(3,148)将总拉氏函数密度写成比較对称的形式. 我們注意到：

$$-\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}+ieA_\mu\right)\varphi^*\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}-ieA_\mu\right)\varphi+m^2\varphi^*\varphi+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_\mu}+\frac{m^2}{2}\varphi_3\varphi_3\right\}=-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}-ieA_\mu t_3\right)\vec{\varphi}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}-ieA_\mu t_3\right)\vec{\varphi}+m^2\vec{\varphi}\cdot\vec{\varphi}\right\},\qquad(6,38$$

因此，假使将三种自由 π 介子的拉氏函数密度(3,132)进行如下的变換：

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\to\frac{\partial}{\partial x_\mu}-iet_3A_\mu,\qquad(6,39)$$

然后和自由电磁場的拉氏函数密度相加，就得到統一地描述三种 π 介子与电磁場相互作用的总拉氏函数密度 $\mathscr{L}$：

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}-ieA_\mu t_3\right)\vec{\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}-ieA_\mu t_3\right)\vec{\varphi}+\right.$$
$$\left.+m^2\vec{\varphi}\cdot\vec{\varphi}+\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}\right\}.\qquad(6,40)$$

变换 (6,39) 不难理解：t_3 代表 π 介子的同位旋的第三分量；根据 § 3,14 的討論，我們知道，π 介子場的电荷就等于 π 介子場的同位旋第三分量乘上一个因子 e.

我們注意到，(6,40)对于同位旋空間繞第三个軸旋轉具有不变性，但是对于同位旋空間繞其他方向旋轉却并不具有不变性. 因此，在引入电磁相互作用以后，除了同位旋的第三个分量以外，其他的同位旋分量都不再是守恆量. 在 π 介子的情况下，同位旋第三分量的守恆就等同于电荷的守恆.

用类似的方法，可以建立K介子、核子、超子与电磁場相互作用的理論. 例如：将描述自由K介子場的拉氏函数密度(3,169)作如下的变换：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_\mu} \to \left(\dfrac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu \dfrac{1}{2}(1+\tau_3) \right) \varphi_k, \\ \dfrac{\partial \varphi_k^*}{\partial x_\mu} \to \left(\dfrac{\partial}{\partial x_\mu} + ieA_\mu \dfrac{1}{2}(1+\tau_3) \right) \varphi_k^*, \end{cases} \tag{6,41}$$

然后和自由电磁場的拉氏函数密度相加，就得到統一地描述四种K介子与电磁場相互作用的总拉氏函数密度 $\mathscr{L}$：

$$\mathscr{L} = -\left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{ie}{2}(1+\tau_3)A_\mu \right] \varphi_k^* \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{ie}{2}(1+\tau_3)A_\mu \right] \varphi_k + m^2 \varphi_k^* \varphi_k + \frac{1}{2} \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \right\}, \tag{6,42}$$

其中 τ_3 是二行二列的矩陣 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，代表K介子的同位旋的第三个分量.

描述核子与电磁場相互作用的拉氏函数密度获得的方法和处理K介子場与电磁場相互作用的方法相似. 首先，进行类似(6,41)的变换，只是在这里得将 φ 和 φ_k^* 改为核子場 Ψ 和 Ψ^*，而 τ_3 則是(5,177)中所給的八行八列矩陣；然后，将其与自由电磁場的拉氏函数密度相加. 于是就得到如下的描述核子与电磁場間相互作

用的总拉氏函数密度 $\mathscr{L}$：

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_N + \mathscr{L}_f + \mathscr{L}_i, \tag{6,43}$$

其中 $\mathscr{L}_N$ 是描述自由核子場的拉氏函数密度(5,173)，$\mathscr{L}_f$ 是自由电磁場的拉氏函数密度．代表核子与电磁場之間相互作用的拉氏函数密度 $\mathscr{L}_i$ 具有如下的形式：

$$\mathscr{L}_i = A_\mu J_\mu, \quad J_\mu = \frac{ie}{2}\left\{\bar{\Psi}\gamma_\mu \frac{1}{2}(1+\tau_3)\Psi - \bar{\Psi}\frac{1}{2}(1+\tau_3)\gamma_\mu\bar{\Psi}\right\}. \tag{6,44}$$

不难看出，假使用 (6,43) 中的拉氏函数密度来描述核子的电磁性质，那末，质子将具有磁矩 $\frac{e}{2m}$，m 是核子的靜质量．中子将不具有磁矩．但是，质子和中子的磁矩的实驗值分别为 $2.7896\frac{e}{2m}$ 和 $-1.9103\frac{e}{2m}$．我們可以在相互作用拉氏函数密度(6,44)中加入如下的項：

$$-\frac{ie}{8m}1.7896\bar{\Psi}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)\frac{1}{2}(1+\tau_3)\Psi F_{\mu\nu} + \\ + \frac{ie}{8m}1.9103\bar{\Psi}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)\frac{1}{2}(1-\tau_3)\Psi F_{\mu\nu} \tag{6,45}$$

以描述磁矩的反常部分．但也很有可能不必引入象(6,45)这样的附加項．因为核子与介子之間存在着强相互作用，介子与电磁場之間也有如(6,40)和(6,42)所描述的相互作用；因此，核子与电磁場之間除了有由(6,44)所代表的直接相互作用以外，还存在着以介子为媒介的間接相互作用．核子的反常磁矩可能就是这种間接相互作用所表現的一个方面．

可以看出，(6,42)及(6,43)中的拉氏函数密度对于同位旋空間繞第三个軸旋轉具有不变性，但是对于同位旋空間繞其他方向旋轉不再具有不变性．因此，在引入了电磁相互作用以后，除了同位旋的第三个分量以外，其他的同位旋分量不再是守恆量．同位旋的第三分量与电荷之間有着密切的关系，与之相应，同位旋空間繞

第三个軸旋轉与第一种規范变換之間也有着密切的連系. 在电磁相互作用現象中規范变換具有重要的意义，至于普遍的同位旋空間概念就不再占据重要的地位. 可以看出，拉氏函数密度 (6,42) 对于如下的第一种規范变換具有不变性: α 是一个常数，

$$\varphi_K \to e^{\frac{i\theta}{2}(1+\tau_3)\alpha}, \quad \varphi_K^* \to e^{-\frac{i\theta}{2}(1+\tau_3)\alpha}. \tag{6,46}$$

不难証明，在引入了电磁相互作用以后，所有的拉氏函数密度仍旧对于相应的第一种規范变換具有不变性. 这就保証了电荷守恆定律的成立. 应該指出，在引入了电磁相互作用以后，拉氏函数密度对于将第一和第二类規范变換結合起来的一种更普遍的变換具有不变性. 以拉氏函数密度(6,42)为例，它对于如下的变換:

$$\begin{cases} \varphi_K \to e^{\frac{i\theta}{2}(1+\tau_3)\alpha}, \quad \varphi_K^* \to e^{-\frac{i\theta}{2}(1+\tau_3)\alpha}, \\ A_\mu \to A_\mu + \dfrac{\partial \alpha}{\partial x_\mu} \end{cases} \tag{6,47}$$

具有不变性，其中 α 是 x_μ 的函数，满足方程

$$\Box \alpha = 0. \tag{6,48}$$

我們称变換(6,47)、(6,48)为規范变換; 第一类規范变換是規范变換的一个特殊情况. 規范变換一方面保証了电荷的守恆，另一方面也保証了光子的靜質量一定等于零. 关于后一点在以后要討論到.

§ 6,4. 强相互作用

强相互作用存在于介子与重粒子之間. 目前我們对于强相互作用的理解是极其初步的. 因此，現在所有关于强相互作用的理論都是試探性的理論. 在尝試建立强相互作用的理論的时候，首先将遇到下面的問題: 如何在場論的数学形式中引入强相互作用? 很自然地被人們采用的方法是将描述电磁相互作用的一套方法加以扩充，然后移过来用之于建立强相互作用理論的数学形式. 用这种方法所建立起来的理論是否正确，最后取决于理論推算的結

果是否与实驗事实相符。

从方程(6,5)和(6,20)可以看出，輕子与电磁場之間的相互作用在数学形式上表現为：在輕子場 ψ, ψ^* 的运动方程中出現了电磁場 A_μ；在电磁場 A_μ 的运动方程中出現了輕子場 ψ, ψ^*。因此，輕子場和电磁場的运动不再是彼此孤立的，而是彼此联系的。ψ, ψ^* 和 A_μ 之在同一个运动方程中出現是由于在总拉氏函数密度中引入了 $\mathscr{L}_I$ 这一項。这一項的特点是：他既包含有代表电磁場的因子 A_μ，又包含有代表輕子場的因子 ψ, ψ^*。因此，在推导 A_μ 的运动方程对 A_μ 变分的时候，ψ 和 ψ^* 出現在 A_μ 的运动方程之中；在推导 ψ, ψ^* 的运动方程对 ψ, ψ^* 变分的时候，A_μ 出現在 ψ 和 ψ^* 的运动方程之中。因此，描述各种場之間的相互作用的一种可能的数学形式是在总拉氏函数密度之中除了各个自由場的拉氏函数密度以外，还引进若干代表相互作用的項。每一个这种相互作用項都包含有代表二种或二种以上不同的場的因子。由于这些項的存在，推导得的运动方程就将不同的場联系了起来。

在数学形式上，存在着无穷多种引入这种相互作用項的可能性。因此，一个困难的問題是究竟选择那一种形式的項来描述相互作用。我們可以根据物理上的普遍考虑将选择的范围加以限制。例如：为了滿足特殊相对論的要求，相互作用拉氏函数密度必須在正洛仑兹变換中具有不变性，因而它必須是一个标量或一个贋标量；为了滿足能量守恆和动量守恆的要求，相互作用拉氏函数密度必須对于坐标移动具有不变性；为了滿足电荷守恆的要求和保証光子的靜质量为零，在选择相互作用拉氏函数密度的时候必須注意保証总的拉氏函数密度对于規范变換具有不变性。但是，即使在这些限制的范围以內，仍然存在着无穷多种的选择的可能性。因此，在建立相互作用的理論的时候，常常在以上种种物理上的考虑之外，也从数学形式和方法的角度考虑：首先挑选既滿足物理普遍規律的要求，但又比較簡单，在数学上比較易于处理的相互作用拉氏函数密度。当然，并不存在什么先驗的理由可以証明，客

观存在的相互作用在数学形式上是簡单的。

在各种強相互作用之中，研究开始得最早而研究結果累积得比較多的是核子与π介子之間的強相互作用。在实驗上发現最早的強相互作用是核子之間的核子力，其次研究了π介子的产生以及π介子与原子核間的相互作用，发現在π介子与核子之間存在着強相互作用。現在流行的理論認为：核子之間的相互作用是間接相互作用，是通过介子作为媒介而产生的；介子与核子之間的相互作用則是直接相互作用。因此，我們首先討論如何描述π介子与核子之間的相互作用。

假使，核子力是通过介子作为媒介而产生的这种看法是正确的，那末核子力的特点就将为建立π介子与核子間相互作用的理論提供綫索。核子力的一个重要特点是它的电荷无关性。假使将質子之間的庫伦力撇开不計，那末，質子与質子之間的力、中子与中子之間的力以及中子与質子之間的力都是相同的。例如，假使考慮了庫伦能的修正，将它減去以后，鏡象原子核就将具有相同的結合能和能級。鏡象原子核彼此間的差别在于中子数和質子数不相同。应用同位旋空間这一概念，我們可以說，它們之間的差别在于它們的同位旋的第三分量不相同。在人們分析了原子核能級所提供的材料以及核子散射实驗所提供的材料以后，得到了相当強的証据，說明核子力具有电荷无关性。有兴趣的問題是：当引入π介子与核子間的相互作用的时候怎样能保証由此而产生的核子力能具有电荷无关性呢？

在討論这一問題的时候，可以回想一下原子能級的問題。原子的能級常常是簡并性的。一条譜綫在磁場中常常分裂为几条綫。磁量子数不同而其余一切量子数都相同的能級，在沒有外加磁場的时候是一样高的。与此类似，鏡象原子核的能級相同也可以看作是一种能級的簡并性。在原子核能譜中存在着这样的特点：在庫伦力导致的修正被減去以后，同位旋第三分量的量子数不同而其余量子数都相同的能級是一样高的。因此，可以研究原子光

譜中能級簡并化的原因，分析描述原子結构的理論的数学形式中有什么特点使能級簡并化，然后尝試将这种特点移用到核子与介子間相互作用理論的数学形式中去。

原子結构中不同磁量子数的能級之所以相同是因为描述原子結构的哈密頓量对于空間坐标的旋轉具有不变性。設以H代表描述原子結构的哈密頓量，ψ是H的本徵函数，相应的本徵值是E，那末就有：

$$H\psi = E\psi. \tag{6,49}$$

我們假定ψ的角量子数是L，磁量子数是M。在空間坐标轉动的时候，波函数ψ和力学量A作如下的变換：

$$\begin{cases}\psi \to \psi' = \mathscr{D}\psi, \\ A \to A' = \mathscr{D}A\mathscr{D}^{-1}.\end{cases} \tag{6,50}$$

由于H对于坐标轉动具有不变性，因此有：

$$\mathscr{D}H\mathscr{D}^{-1} = H. \tag{6,51}$$

从(6,49)，(6,50)和(6,51)可以得：

$$E\psi' = H\psi', \tag{6,52}$$

也就是說，ψ'也是H的本徵函数，而相应的本徵值也是E。因此，从ψ可以得到一系列的波函数ψ'，它們都具有相同的能量。可以証明，这些ψ'的角量子数也是相同的，都等于L。所不同的是，ψ'不再具有一定的磁量子数，而是許多具有不同磁量子数的波函数的迭加。这些具有不同磁量子数的波函数都是H的本徵函数，具有相同的本徵值。这样就形成了能級的簡并化。假使存在着外加的磁場，那末在哈密頓量中就增加了一些新的項，代表磁場与原子的相互作用。由于外加磁場在空間取一定的方向，哈密頓量不再对于坐标轉动具有不变性，于是具有不同磁量子数而原来是簡并性的能級便分裂为許多綫条，簡并性因之也就消失了。

可以从以上的討論得出結論：假使我們所引入的核子与π介子之間相互作用拉氏函数密度对于同位旋空間的轉动具有不变性，那末就能保証具有不同的同位旋第三分量量子数而其他量子

数都相同的原子核必具有相同的結合能和能級，也就能保証核子力的电荷无关性．根据这一想法，克茂［Kemmer, 1938］建議引入如下的拉氏函数密度以描述核子与 π 介子間的相互作用：

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_N + \mathscr{L}_\pi + \mathscr{L}_i, \tag{6,53}$$

其中 $\mathscr{L}_N$ 是自由核子的拉氏函数密度(5,173)，$\mathscr{L}_\pi$ 是自由 π 介子的拉氏函数密度(3,132)，而 $\mathscr{L}_i$ 則是相互作用拉氏函数密度，具有如下的形式：

$$\mathscr{L}_i = -ig\bar{\Psi}\gamma_5\vec{\tau}\Psi\cdot\vec{\varphi}. \tag{6,54}$$

(6,53)中的表式对于坐标移动和正洛仑兹变換具有不变性．由于 π 介子的内禀宇称是負的，$\vec{\varphi}$ 在时空变換中是贋标量，因此在(6,54)的表式中引入了 γ_5 以保証 $\mathscr{L}$ 对于空間反射具有不变性．不难証明，$\mathscr{L}$ 对于同位旋空間的轉动也具有不变性．为了保証 $\mathscr{L}_i$ 是厄米算符，g 必須是一个实数，称为相互作用常数．

我們从(6,53)可以推导得如下的运动方程：

$$\begin{cases} \{i\hat{\partial} + M + ig\gamma_5\vec{\tau}\cdot\vec{\varphi}\}\Psi = 0, \\ \bar{\Psi}\{i\hat{\partial} + M + ig\gamma_5\vec{\tau}\cdot\vec{\varphi}\} = 0, \\ \{\Box - m^2\}\vec{\varphi} = ig\bar{\Psi}\gamma_5\vec{\tau}\Psi, \end{cases} \tag{6,55}$$

其中 M 代表核子的靜质量，m 代表 π 介子的靜质量．从(6,54)可以推导得一系列守恒量，包括能量、动量、角动量，同位旋、电荷等等．为了便于进行量子化，我們引入 Ψ，Ψ^*，$\vec{\varphi}$ 以及与 $\vec{\varphi}$ 相应的正則动量 $\vec{\pi}$ 之間如下的对易关系：在 $t = t'$ 时，有：

$$\begin{cases} \{\Psi_\rho(x), \Psi^*_\sigma(x')\} = \delta_{\rho\sigma}\delta(\vec{x} - \vec{x}'), \\ [\varphi_j(x), \pi_k(x')] = i\delta_{jk}\delta(\vec{x} - \vec{x}'), \end{cases} \tag{6,56}$$

Ψ，Ψ^* 之間其余各对都相互反对易，$\vec{\varphi}$，$\vec{\pi}$ 之間其余各对都相互对易，而 Ψ，Ψ^* 和 $\vec{\varphi}$，$\vec{\pi}$ 則都可以相互对易．$\vec{\pi}$ 的定义是：

$$\vec{\pi} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial t}\right)} = \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial t}. \tag{6,57}$$

从(6,54)推导得的哈密頓量密度 $\mathscr{H}$ 是：

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_N + \mathscr{H}_\pi + \mathscr{H}_i, \tag{6,58}$$

其中 $\mathscr{H}_N$ 代表自由核子的哈密頓量密度：

$$\mathscr{H}_N = \Psi^*\{\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta M\}\Psi; \tag{6,59}$$

$\mathscr{H}_\pi$ 代表自由介子的哈密頓量密度 (3,152)；$\mathscr{H}_i$ 是相互作用哈密頓量密度，具有如下的形式：

$$\mathscr{H}_i = ig\bar{\Psi}\gamma_5\vec{\tau}\Psi\cdot\vec{\varphi}. \tag{6,60}$$

引入哈密頓量 H：

$$H = \int dx\mathscr{H}, \tag{6,61}$$

那末就可以將运动方程写成标准的形式：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Psi}{\partial t} = i[H,\Psi], \quad \dfrac{\partial\bar{\Psi}}{\partial t} = i[H,\bar{\Psi}], \\ \dfrac{\partial\vec{\varphi}}{\partial t} = i[H,\vec{\varphi}], \quad \dfrac{\partial\vec{\pi}}{\partial t} = i[H,\vec{\pi}], \end{cases} \tag{6,62}$$

对易关系(6,56)；哈密頓量密度(6,58)和运动方程(6,62)是近年来比較常見的核子与 π 介子相互作用理論的基本方程和表式.

可以嘗試在拉氏函数中引入如下的項：

$$-i\frac{f}{m}\bar{\Psi}\gamma_5\gamma_\mu\vec{\tau}\Psi\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial x_\mu} \tag{6,63}$$

来描述核子与 π 介子之間的相互作用. (6,63) 对于坐标移动、洛仑茲变換以及同位旋空間轉动等等都具有不变性. 通常称由表式(6,54)所描述的相互作用为贋标量耦合，称由(6,63)所描述的相互作用为贋矢量耦合. 在引入(6,63)以后，按照标准的方法可以推导出运动方程、守恆量，并进行量子化，此处不再贅述.

§ 6,5. 奇异粒子和奇异量子数

強相互作用也存在于K介子与超子之間. K介子和超子发現得比較迟，統称为奇异粒子. 关于奇异粒子的实驗結果既是很少，而且也不精确，因此，建立有关奇异粒子的理論就更缺少綫索. 由于核子与奇异粒子之間也存在着強相互作用，因而由核子力的电

荷无关性质可以推得，牵涉到奇异粒子的強相互作用也可能具有同位旋不变性．关于奇异粒子現象的一个重要特点是：在碰撞过程中不可能产生单个奇异粒子．例如：

$$\begin{cases}\pi^+ + \mathrm{P} \to \mathrm{K}^+ + \Sigma^+, \\ \pi^+ + \mathrm{N} \to \mathrm{K}^+ + \Lambda.\end{cases} \tag{6,64}$$

在这些过程中，奇异粒子是成对地产生的．这样的产生过程十分迅速，例如，π^+ 和核子碰撞的时間不过 10^{-23} 秒左右．因此，产生奇异粒子的碰撞过程由強相互作用决定．在碰撞过程中不能产生单个奇异粒子这一事实，是有关奇异粒子的強相互作用的一个重要特点．其实，所有涉及奇异粒子的十分迅速的反应过程都牵涉到二个或二个以上的奇异粒子．例如：

$$\mathrm{K}^- + \mathrm{N} \to \Lambda + \pi^- \tag{6,65}$$

是实驗上曾經观察过的碰撞过程，其中牵涉到一对奇异粒子 K^- 和 Λ．当然，也存在某些轉化过程，其中只出現一个奇异粒子．首先是奇异粒子的衰变現象，例如：

$$\begin{cases}\Lambda \to \mathrm{P} + \pi^-, \\ \mathrm{K}^+ \to \pi^+ + \pi^+ + \pi^-,\end{cases} \tag{6,66}$$

等等．但是这些过程进行得很慢．(6,66) 中第一个过程所需要的平均时間大于 10^{-10} 秒；第二个过程需所要的平均时間大于 10^{-7} 秒．因此，在这些轉化过程中，起决定性作用的是弱相互作用．

我們如何来理解在強相互作用过程中奇异粒子不可能单个出現这一規律呢？一种可能的解释是：牵涉到奇异粒子的強相互作用具有某种新的对称性，因此在強相互作用現象中出現新的守恆定律．奇异粒子单个出現的現象违背这一守恆定律，因此不可能仅仅通过強相互作用来实現．提出这种理論的是盖尔曼 [Gell-Mann, 1956] 和西島 [Nishijima, 1955]．他們称这一新的守恆量为"奇异量"；并假定：参与強相互作用的普通粒子如核子和 π 介子的奇异量等于零，奇异粒子的奇异量則不等于零；在由強相互作用决定的反应过程中，反应前和反应后的奇异量必須相等．这就排斥了奇

异粒子单个出现在由強相互作用决定的反应过程中的可能性. 例如:(6,66)中所表示的二个反应都只牵涉到单个的奇异粒子,在反应以前奇异量不等于零,在反应以后奇异量都等于零,因此这二个反应都不可能仅仅通过強相互作用实现.

在基本粒子的反应和轉化現象中,一个普遍的規律是重粒子数守恆的規律. 所謂"重粒子数"就是指所有核子与超子数目之和減去所有反核子与反超子数目之和所得到的数目. 例如在(6,64)和(6,65)所示的反应中,反应前和反应后的重粒子数都等于 1; 在(6,66)的第一个反应中,反应前和反应后的重粒子数也都等于 1; 在(6,66)的第二个反应中,反应前和反应后的重粒子数都等于零. 重粒子守恆定律是原子核可以具有稳定的結构的根本保証. 假使这一条定律不存在,那末原子核中的核子迟早将轉化为质量更輕的介子和輕子. 重粒子守恆定律不仅适用于強相互作用所决定的現象,也普遍适用于一切基本粒子現象.

設以 T 代表同位旋量子数, T_3 代表相应于同位旋的第三分量的量子数, S 代表奇异量子数, n 代表重粒子数,而 Q 代表电荷;盖尔曼和西島提出,重粒子和介子应該具有如表 2 中所示的量子数,

表 2　基本粒子的同位旋、奇异数子数和电荷

名　称	T	T_3	S	n	Q/e
p, $\bar{p}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$	0	1, −1	1, −1
N, $\bar{N}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$	0	1, −1	0
Λ, $\bar{\Lambda}$	0	0, 0	−1, 1	1, −1	0
Σ^+, $\bar{\Sigma}^+$	1	1, −1	−1, 1	1, −1	1, −1
Σ^0, $\bar{\Sigma}^0$	1	0, 0	−1, 1	1, −1	0
Σ^-, $\bar{\Sigma}^-$	1	−1, 1	−1, 1	1, −1	−1, 1
Ξ^0, $\bar{\Xi}^0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$	−2, 2	1, −1	0
Ξ^-, $\bar{\Xi}^-$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$	−2, 2	1, −1	−1, 1
π^+, π^0, π^-	1	1, 0, −1	0	0	1, 0, −1
K^+, K^-	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$	1, −1	0	1, −1
K^0, $\bar{K}^0$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$	1, −1	0	0

其中符号"～"标志反粒子. 从表 2 可以看出，在 T_3, S, n 和 Q 之間存在着如下的关系：

$$\frac{Q}{e} = T_3 + \frac{n}{2} + \frac{S}{2}, \tag{6,67}$$

其中 Q 和 n 是絕对的守恆量，在任何相互作用中都守恆不变；T_3 則在強相互作用和电磁相互作用中守恆. 因此，从 (6,67) 可以推导得，奇异量子数 S 不仅在強相互作用中守恆，它在电磁相互作用中也守恆不变. 根据(6,67)可以看出，在(6,64)和(6,65)的反应中奇异量子数是守恆的；在 (6,66) 的反应中奇异量子数就不再是一个守恆量，反应前后奇异量子数相差 $|\Delta S| = 1$，亦即同位旋的第三分量在反应前后相差 $|\Delta T_3| = \frac{1}{2}$. 又如，根据奇异量子数在強相互作用中守恆这一假定，下列碰撞反应过程是不可能的：

$$\pi^- + \mathrm{N} \rightarrow \mathrm{K}^- + \Lambda; \tag{6,68}$$

的确，在实驗上从沒有发現过象(6,68)中所示的反应.

§6,6. 牽涉到奇异粒子的强相互作用

同位旋守恆定律、奇异量子数守恆定律以及重粒子数守恆定律对于决定牽涉到奇异粒子的強相互作用的数学形式起一定的指导作用，但是还不足以将数学形式完全确定下来. 在以上所述的这些守恆定律、洛仑兹不变性以及动量、能量守恆定律的范围內，仍旧存在着許多能用来描述牽涉到奇异粒子的強相互作用的数学形式. 以下我們将介紹一种比較多地被采用的数学形式，它是由德斯派格納脫和泼冷脫基 [d' Espagnat and Prentki, 1956] 及薩拉姆 [Salam, 1956] 提出来的. 为了写起来方便，我們暫以符号 P, N, Λ, Σ^+, Σ^0, Σ^-, Ξ^0, Ξ^-, π^+, π^0, π^-, K^+, K^0, $\bar{\mathrm{K}}^0$, K^- 代表相应粒子的場量. 設所有的重粒子的自旋都等于 1/2，則

$$\mathrm{P}, \mathrm{N}, \Lambda, \Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-, \Xi^0, \Xi^- \tag{6,69}$$

在洛仑兹变換中将变換如旋量；設所有的介子的自旋都等于零，都

具有負的內稟宇称，則

$$\pi^+, \pi^0, \pi^-, \bar{K}^+, K^0, \bar{K}^0, K^- \tag{6,70}$$

在洛仑兹变換中將变換如質标量．为了易于表明这些場量在同位旋空間中的变換性質，我們可以引入如下的場量的綫性組合：

$$\begin{cases} \pi^- = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1 + i\pi_2), \quad \pi^+ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1 - i\pi_2), \quad \pi^0 = \pi_3, \\ \Sigma^- = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\Sigma_1 + \Sigma_2), \quad \Sigma^+ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\Sigma_1 - i\Sigma_2), \quad \Sigma^0 = \Sigma_3. \end{cases} \tag{6,71}$$

于是根据表 2，在同位旋空間轉动下，可以假定：

$$\vec{\pi} \equiv \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{\Sigma} \equiv \begin{pmatrix} \Sigma_1 \\ \Sigma_2 \\ \Sigma_3 \end{pmatrix} \tag{6,72}$$

將变換如矢量；假定

$$N \equiv \begin{pmatrix} P \\ N \end{pmatrix}, \quad K \equiv \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix} \tag{6,73}$$

將变換如第一种旋量；假定

$$\Xi \equiv \begin{pmatrix} \Xi^0 \\ \Xi^- \end{pmatrix} \tag{6,74}$$

將变換如第二种旋量．第一种旋量与第二种旋量之間的关系是这样的：假使在同位旋空間轉动下，第一种旋量K变換为：

$$K' = \mathscr{D}K, \tag{6,75}$$

那末第二种旋量 Ξ 將变換为：

$$\Xi' = e\tilde{\mathscr{D}}^* e^{-1}\Xi, \tag{6,76}$$

其中 ～ 代表位調，* 代表厄米共軛，而

$$e = i\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6,77}$$

从(5,176)，(5,177)，(6,75)，(6,76)及(6,77)，不难証明：

$$(\bar{K}e\Xi), \quad (\bar{\Xi}e^*\bar{K}^*) \tag{6,78}$$

是同位旋空間中的标量;而

$$(\bar{\mathrm{K}}\epsilon\vec{\tau}\Xi),\quad (\bar{\Xi}\vec{\tau}\epsilon^{*}\bar{\mathrm{K}}^{*}) \tag{6,79}$$

是同位旋空間中的贋矢量. 为了描述重粒子与介子之間的強相互作用,德斯派格納脫、泼冷脫基和薩拉姆应用了如下的拉氏函数密度:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_i, \tag{6,80}$$

其中 $\mathscr{L}_0$ 代表所有的自由重粒子和自由介子的拉氏函数密度之和:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_0 = &-\bar{\mathrm{N}}\left\{\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+M_{\mathrm{N}}\right\}\mathrm{N}-\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial\vec{\pi}}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial\vec{\pi}}{\partial x_\mu}+m_\pi^2\vec{\pi}\cdot\vec{\pi}\right\}-\\&-\bar{\Lambda}\left\{\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+M_\Lambda\right\}\Lambda-\bar{\vec{\Sigma}}\left\{\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+M_\Sigma\right\}\vec{\Sigma}-\\&-\bar{\Xi}\left\{\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+M_\Xi\right\}\Xi-\left\{\frac{\partial\mathrm{K}^*}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial\mathrm{K}}{\partial x_\mu}+m_{\mathrm{K}}^2\mathrm{K}^*\mathrm{K}\right\},\end{aligned} \tag{6,81}$$

其中 M_{N}, M_Λ, M_Σ, M_Ξ 各代表核子、Λ 超子、Σ 超子、Ξ 超子的靜質量; m_π, m_K 則各代表 π 介子和 K 介子的靜質量.

$\mathscr{L}_i$ 代表相互作用拉氏函数密度,具有如下的形式:

$$\mathscr{L}_i = -\sum_{j=1}^{8} g_j\mathscr{L}_j; \tag{6,82}$$

式中

$$\begin{cases}\mathscr{L}_1 = \bar{\mathrm{N}}i\gamma_5\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}\mathrm{N},\\ \mathscr{L}_2 = \bar{\Lambda}i\gamma_5\vec{\pi}\cdot\vec{\Sigma}+\bar{\vec{\Sigma}}\cdot\vec{\pi}i\gamma_5\Lambda,\\ \mathscr{L}_3 = i[\vec{\Sigma}\times\vec{\pi}]i\gamma_5\vec{\Sigma},\\ \mathscr{L}_4 = \bar{\Xi}i\gamma_5\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}\Xi,\\ \mathscr{L}_5 = \bar{\mathrm{N}}i\gamma_5\mathrm{K}\Lambda+\bar{\Lambda}\mathrm{K}^*i\gamma_5\mathrm{N},\\ \mathscr{L}_6 = \bar{\mathrm{N}}i\gamma_5\vec{\tau}\cdot\vec{\Sigma}\mathrm{K}+\mathrm{K}^*\bar{\vec{\Sigma}}\cdot\vec{\tau}i\gamma_5\mathrm{N},\\ \mathscr{L}_7 = \bar{\Lambda}i\gamma_5\bar{\mathrm{K}}\epsilon\Xi+\bar{\Xi}\epsilon^*\bar{\mathrm{K}}^*i\gamma_5\Lambda,\\ \mathscr{L}_8 = \bar{\Xi}i\gamma_5\vec{\tau}\epsilon\bar{\mathrm{K}}^*\cdot\vec{\Sigma}+\bar{\vec{\Sigma}}\cdot\bar{\mathrm{K}}\epsilon^*\vec{\tau}i\gamma_5\Xi;\end{cases}$$

其中 $g_i(i=1-8)$ 代表相互作用常数,都是实数,保証了拉氏函数

密度对于时間反演具有不变性.

显然, (6,80) 所給的拉氏函数密度 $\mathscr{L}$ 对于坐标移动、洛仑兹变換以及坐标反射都具有不变性. 这就保証了动量、能量、角动量、宇称等守恆定律的存在. 在同位旋空間中, $\mathscr{L}$ 是一个标量, 这就保証了由強相互作用所决定的基本粒子現象的电荷无关性. 不难看出, $\mathscr{L}$ 对于如下的变換:

$$\begin{cases} B \to B' = e^{id} B, \\ \bar{B} \to \bar{B}' = e^{-id} \bar{B}, \end{cases} \tag{6,83}$$

具有不变性, 其中 d 是一个实常数, 而 B 則代表重粒子的場量 N, Λ, $\vec{\Sigma}$, Ξ. 这就导致了重粒子数目的守恆定律:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}(\bar{\mathrm{N}}\gamma_\mu \mathrm{N} + \bar{\Lambda}\gamma_\mu \Lambda + \vec{\bar{\Sigma}}\gamma_\mu \vec{\Sigma} + \bar{\Xi}\gamma_\mu \Xi) = 0. \tag{6,84}$$

同样可以証明, $\mathscr{L}$ 对于如下的变換:

$$\begin{cases} \mathrm{N} \to \mathrm{N}' = \mathrm{N}, & \bar{\mathrm{N}} \to \bar{\mathrm{N}}' = \bar{\mathrm{N}}, \\ \Lambda \to \Lambda' = e^{-i\alpha}\Lambda, & \bar{\Lambda} \to \bar{\Lambda}' = e^{i\alpha}\bar{\Lambda}, \\ \vec{\Sigma} \to \vec{\Sigma}' = e^{-i\alpha}\vec{\Sigma}, & \vec{\bar{\Sigma}} \to \vec{\bar{\Sigma}}' = e^{i\alpha}\vec{\bar{\Sigma}}, \\ \Xi \to \Xi' = e^{-2i\alpha}\Xi, & \bar{\Xi} \to \bar{\Xi}' = e^{2i\alpha}\bar{\Xi}, \\ \vec{\pi} \to \vec{\pi}' = \vec{\pi}, & \\ \mathrm{K} \to \mathrm{K}' = e^{i\alpha}\mathrm{K}, & \mathrm{K}^* \to \mathrm{K}^{*\prime} = e^{-i\alpha}\mathrm{K}^* \end{cases} \tag{6,85}$$

具有不变性. 从这一不变性, 可以推导出如下的守恆定律:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left\{\frac{\partial \mathrm{K}^*}{\partial x_\mu}\mathrm{K} - \mathrm{K}^*\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x_\mu} - \bar{\Lambda}\gamma_\mu\Lambda - \vec{\bar{\Sigma}}\gamma_\mu\vec{\Sigma} - 2\bar{\Xi}\gamma_\mu\Xi\right\} = 0. \tag{6,86}$$

(6,86)就代表奇异量守恆定律. 从 $\mathscr{L}$ 可以推导出电荷守恆定律. 不难証明, $\mathscr{L}$ 对于正反粒子共軛变換也具有不变性.

从拉氏函数密度 $\mathscr{L}$ 可以推导出运动方程, 并可用以前所用的方法进行量子化. 由于所用的方法是标准方法, 这里就不再贅述. 在量子化以后, 如将所有的場量展开成为平面波, 那末就可以看到, 相互作用拉氏函数密度 $\mathscr{L}_i$ 描写一系列重粒子的相互作用

和相互轉化过程. 例如:

1) 核子放出 π 介子;

2) Λ 超子放出K介子而轉化为 Σ 超子;

3) Σ 超子吸收 π 介子;

4) Ξ 超子放出 π 介子;

5) Λ 超子吸收 K^+ 介子而轉化为質子;

6) 核子放出K介子而轉化为 Σ 超子;

7) Λ 超子放出K介子而轉化为 Ξ 超子;

8) Ξ 超子吸收K介子而轉化为 Σ 超子.

$\mathscr{L}_I$ 不仅描写了重粒子与介子之間的直接的强相互作用，并且也描述了重粒子之間可以通过介子作媒介而产生間接相互作用；同样，介子之間也可以通过重粒子作媒介产生間接的相互作用.

必須指出，以上所介紹的德斯派格納脫等所提出的描述重粒子与介子之間强相互作用的理論仅是尝試性質的，許多假定还沒有可靠的实驗基础. 除此以外，还存在着許多别的尝試性的理論，此处不再介紹. 对此有兴趣的讀者可以参閱当前有关的文献，例如馬尔可夫关于超子和K介子的著作 [Марков, 1958].

§ 6,7. 費米弱相互作用理論

弱相互作用主要表現在衰变和俘获現象中. 不仅在輕子之間存在着弱相互作用，在輕子与介子之間、輕子与重粒子之間、介子之間、介子与重粒子之間都存在有弱相互作用. 例如 μ 介子的衰变

$$\mu^+ \to e^+ + \nu + \tilde{\nu} \tag{6,87}$$

是輕子之間的弱相互作用的表現；π 介子和K介子的衰变

$$\begin{cases} \pi^+ \to e^+ + \nu, \\ \mathrm{K}^+ \to \mu^+ + \nu \end{cases} \tag{6,88}$$

是介子与輕子之間的弱相互作用的表現；β 衰变和 μ 俘获

$$\begin{cases} \mathrm{N} \to \mathrm{P} + e^- + \tilde{\nu}, \\ \mu^- + \mathrm{P} \to \mathrm{N} + \nu \end{cases} \tag{6,89}$$

是輕子与重粒子之間的弱相互作用的表現；K介子衰变为π介子，如(6,66)中的第二式，是介子之間的弱相互作用的表現；(6,66)第一式所描写的Λ超子衰变为核子和π介子是介子与重粒子之間的弱相互作用的表現．由此可見，弱相互作用是在很广泛的范围內起作用的相互作用．

关于弱相互作用的理論的建立比強相互作用的理論的建立要較为順利些，取得的成就也比較多．但是，由于有关奇异粒子的衰变現象的实驗研究至今还不够精确和系統化；也由于多数衰变及俘获現象同时受強相互作用的影响而比較复杂，因而，关于弱相互作用的理論也还不是一个成熟了的理論．在弱相互作用現象中最早被人发現和被研究得最詳細的是β衰变現象．第一个提出β衰变理論的是費米 [Fermi, 1934]．为了描述如 (6,89) 中第一式所表示的β衰变現象，可以在拉氏函数密度中引入如下的項：

$$C_S(\bar{\mathrm{P}}\mathrm{N})(\bar{e}\nu) + C_S^*(\bar{\mathrm{N}}\mathrm{P})(\bar{\nu}e), \qquad (6,90)$$

其中 P, N, e 和 ν 是 ψ_{P}, ψ_{N}, ψ_e 和 ψ_ν 的簡写，各代表質子、中子、电子和中微子的場量．不难看出，在量子化以后，P 代表質子的消灭和反質子的产生算符，$\bar{\mathrm{P}}$ 代表質子的产生和反質子的消灭算符．N, $\bar{\mathrm{N}}$, e, $\bar{e}$, ν, $\tilde{\nu}$ 等算符具有相应的意义．因此 (6,90) 中的相互作用拉氏函数密度可以描述如下的过程：

1) 中子轉化为質子、电子和反中微子；

2) 質子轉化为中子、正电子和中微子；

等等．(6,90)中的表式显然是厄米算符，它具有洛仑兹不变性，滿足电荷守恆定律的要求，也滿足动量守恆定律、能量守恆定律以及宇称守恆定律的要求．但是，滿足这些要求的表式远不止 (6,90) 一种．象以下这些項：

$$\begin{cases} C_V(\bar{\mathrm{P}}\gamma_\mu\mathrm{N})(\bar{e}\gamma_\mu\nu) + C_V^*(\bar{\mathrm{N}}\gamma_\mu\mathrm{P})(\bar{\nu}\gamma_\mu e), \\ C_T(\bar{\mathrm{P}}S_{\mu\nu}\mathrm{N})(\bar{e}S_{\mu\nu}\nu) + C_T^*(\bar{\mathrm{N}}S_{\mu\nu}\mathrm{P})(\bar{\nu}S_{\mu\nu}e), \\ C_A(\bar{\mathrm{P}}\gamma_5\gamma_\mu\mathrm{N})(\bar{e}\gamma_5\gamma_\mu\nu) + C_A^*(\bar{\mathrm{N}}\gamma_5\gamma_\mu\mathrm{P})(\bar{\nu}\gamma_5\gamma_\mu e), \\ C_P(\bar{\mathrm{P}}\gamma_5\mathrm{N})(\bar{e}\gamma_5\nu) + C_P^*(\bar{\mathrm{N}}\gamma_5\mathrm{P})(\bar{\nu}\gamma_5 e) \end{cases} \qquad (6,91)$$

也都滿足几率守恆(相应于拉氏函数密度是厄米算符)、动量守恆、能量守恆、角动量守恆、宇称守恆以及电荷守恆等等定律的要求. (6,91) 中 $S_{\mu\nu}$ 的表式見 (5,57). 我們沒有任何先驗的理由可以肯定:只有 (6,90) 中的表式才能反映客观存在的 β 衰变現象,(6,91) 中的表式和 β 衰变現象无关. 事实上,描述 β 衰变現象的更普遍的相互作用拉氏函数密度应該是表式(6,90) 和 (6,91)中的表式的迭加. 在很长一段时間內,人們曾經企图用这样的一个綫性迭加的表式来作为相互作用拉氏函数密度,用它来描述所有的 β 衰变現象;人們尝試寻找一套相互作用常数 C_S, C_V, C_T, C_A 和 C_P 能使理論計算結果与所有的 β 衰变現象的实驗結果相符合.

李政道、楊振宁及吳健雄等 [Lee and Yang, 1956] [Wu et. al., 1957] 发現,宇称在弱相互作用不守恆,这对弱相互作用理論的发展有很大的影响. 既然在弱相互作用中宇称不守恆,那末,描述弱相互作用的拉氏函数密度就不必一定在坐标反射时具有不变性. 这样将弱相互作用拉氏函数密度的这一限制取消以后,拉氏函数密度数学形式的选择范圍就扩大了. 于是,在弱相互作用拉氏函数密度中可以包括标量項,也可以包括贋标量項. 以 β 衰变为例,比較普遍的描述 β 衰变的拉氏函数密度具有如下的形式:

$$\begin{aligned}
&C_S(\bar{\mathrm{P}}\mathrm{N})(\bar{e}\nu) + C'_S(\bar{\mathrm{P}}\mathrm{N})(\bar{e}\gamma_5\nu) + \\
&\quad + C_V(\bar{\mathrm{P}}\gamma_\mu\mathrm{N})(\bar{e}\gamma_\mu\nu) + C'_V(\bar{\mathrm{P}}\gamma_\mu\mathrm{N})(\bar{e}\gamma_5\gamma_\mu\nu) + \\
&\quad + C_T(\bar{\mathrm{P}}S_{\mu\nu}\mathrm{N})(\bar{e}S_{\mu\nu}\nu) + C'_T(\bar{\mathrm{P}}S_{\mu\nu}\mathrm{N})(\bar{e}\gamma_5 S_{\mu\nu}\nu) + \\
&\quad + C_A(\bar{\mathrm{P}}\gamma_5\gamma_\mu\mathrm{N})(\bar{e}\gamma_5\gamma_\mu\nu) + C'_A(\bar{\mathrm{P}}\gamma_5\gamma_\mu\mathrm{N})(\bar{e}\gamma_\mu\nu) + \\
&\quad + C_P(\bar{\mathrm{P}}\gamma_5\mathrm{N})(\bar{e}\gamma_5\nu) + C'_P(\bar{\mathrm{P}}\gamma_5\mathrm{N})(\bar{e}\nu) + \\
&\quad + \text{Herm. conj.}
\end{aligned} \tag{6,92}$$

其中 Herm. conj. 代表以前各項的厄米共軛. 人們重又尝試寻覓一套相互作用常数 C_S, C'_S, C_V, C'_V, $\cdots$ C_P, C'_P, 使上列相互作用拉氏函数密度能解释所有的 β 衰变現象.

費曼和盖尔曼 [Feynman and Gell-Mann, 1958] 以及馬夏克和森德香 [Marshak and Sundarshan, 1958] 发現:假使 C_S, C'_S,

C_T, C_T', C_P和 C_P' 都等于零，而

$$C_V = -C_V' = -C_A' = C_A = -\frac{G}{\sqrt{2}}, \qquad (6,93)$$
$$GM_N^2 \approx 10^{-5},$$

那末 (6,92)就能很好地解释 β 衰变现象. 亦即假使我們在拉氏函数密度中引入如下的相互作用項：

$$-\frac{G}{\sqrt{2}}\{[\bar{\mathrm{P}}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\mathrm{N}][\bar{e}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\nu] + [\bar{\mathrm{N}}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\mathrm{P}][\bar{\nu}\gamma_\mu(1+\gamma_5)e]\}, \qquad (6,94)$$

就能解释所有的 β 衰变现象. 他們并且发現：假使在拉氏函数密度中引入如下的項：

$$-\frac{G}{\sqrt{2}}\{[\bar{\mu}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\nu][\bar{\nu}\gamma_\mu(1+\gamma_5)e] + [\bar{e}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\nu][\bar{\nu}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\mu]\}, \qquad (6,95)$$

那末就能很好地解释如(6,87)中所示的 μ 介子的衰变現象.(6,95)不仅在形式上与(6,94)一样，而且他們的相互作用常数也相等. 根据这一結果和其他許多事实，他們提出了一个普适的弱相互作用理論：設 A、B、C 和 D 代表任何輕子或重粒子的場量，那末他們認为拉氏函数密度中一定包含有如下的相互作用項：

$$-\frac{G}{\sqrt{2}}\{[\bar{A}\gamma_\mu(1+\gamma_5)B][\bar{C}\gamma_\mu(1+\gamma_5)D] + [\bar{D}\gamma_\mu(1+\gamma_5)C][\bar{B}\gamma_\mu(1+\gamma_5)A]\}; \qquad (6,96)$$

只要 A, B, C 和 D 滿足如下的条件：

1) A 和 B 二个都是輕子或二个都是重子；

2) C 和 D 二个都是輕子或二个都是重子；

3) A 和 B 中一个粒子带电，另一个不带电；

4) C 和 D 中一个粒子带电，另一个不带电；

5) (6,96)表式具有規范不变性，亦即滿足电荷守恆定律的要求；

6) 設 A 和 B 具有不同的奇异量子数，則 A 和 B 之間的电荷量子数的差别就等于奇异量子数的差别，亦即 $\Delta(Q/e) = \Delta S$;

7) 設 C 和 D 具有不同的奇异量子数，則 C 和 D 之間也存在着关系 $\Delta(Q/-) = \Delta S$.

費曼等提出的这一理論目前已取得不少成就；它是建立弱相互作用理論过程中的一个重要的进展.我們称四个自旋为1/2的粒子之間如 (6,92)所給出的形式的直接弱相互作用为費米弱相互作用，因为用这种数学形式来描述弱相互作用是由費米开始的.我們称費曼等所提出的弱相互作用理論为普适費米弱相互作用理論.

§ 6,8. 湯川弱相互作用理論

利用費曼等所提出的普适費米弱相互作用理論，可以直接描述輕子的衰变和俘获現象以及重粒子衰变为另一种重粒子和輕子的現象，例如在 (6,87) 和 (6,89) 中所給出的現象. 进一步应該研究的是，如何描述介子的衰变現象及重粒子衰变为介子和另外一个重粒子的現象，例如在 (6,66) 和 (6,88) 中所給出的現象. 湯川秀树[Yukawa, 1935] 建議在拉氏函数密度中引入如下的項：

$$C\pi(\bar{\nu}\gamma_5 e) + C^*(\bar{e}\gamma_5\nu)\pi^* \qquad (6,97)$$

来描述 π 介子衰变为电子和中微子的現象. 我們也可以进一步引入与(6,97) 的形式相似的相互作用拉氏函数密度来描述 K 介子的衰变和超子的衰变現象. 例如，在拉氏函数密度中引入如下的項：

$$C'\mathrm{K}^+(\bar{\nu}\gamma_5\mu) + C'^*(\bar{\mu}\gamma_5\nu)\mathrm{K}^{+*}, \qquad (6,98)$$

就可能描述(6,88)中 K^+ 介子的衰变現象；引入

$$C''\pi(\bar{\mathrm{P}}\gamma_5\Lambda) + C''^*(\bar{\Lambda}\gamma_5\mathrm{P})\pi^*, \qquad (6,99)$$

就有可能描述(6,66)中 Λ 超子的衰变現象. 这些相互作用拉氏函数密度在数学形式上的特点是：其中每一項都包含有一个觀色子場量的因子和二个費米子場量的因子. 我們称具有这种数学形式的相互作用为湯川型相互作用.

湯川秀树甚至曾进一步尝試利用湯川型弱相互作用来解释 β

衰变現象. 根据他的看法，β 衰变是一个間接的过程：通过核子与 π 介子之間的強相互作用 (6,54)，一个中子可以轉化为一个質子和一个 π^- 介子，这个 π^- 介子又可以再进一步通过 (6,97) 中的湯川型弱相互作用而轉化为一个电子和一个反中微子. 可以尝試用类似的办法来解释 (6,89) 中第二式所給出的 μ^- 介子为質子所俘获的現象，以及其他一些牽涉到四个費米子的衰变現象.

与此相反，也可以利用費米弱相互作用来解释牽涉到介子的衰变現象.例如：可以将 π 介子衰变为电子和中微子看作是一个間接的过程：π 介子首先通过強相互作用 (6,54) 轉化为核子和反核子偶，然后这一核子和反核子偶通过 (6,94) 中的費米弱相互作用轉化为一个电子和一个中微子. 目前大家正在尝試不引入湯川型弱相互作用，只利用費曼、盖尔曼、馬夏克和森德香的普适費米弱相互作用与电磁相互作用、強相互作用結合起来解释一切基本粒子的衰变現象和俘获現象，其中也包括牽涉到介子的衰变和俘获現象. 这一尝試正在取得进展. 假使这一尝試获得成功，那末根据普适費米弱相互作用的数学形式 (6,94)，就可以証明弱相互作用将具有如下的特点：

1) 弱相互作用对于空間反射不再具有不变性，亦即在弱相互作用中宇称不再守恆；

2) 弱相互作用对于正反粒子共軛变換不再具有不变性；

3) 弱相互作用对于空間反射和正反粒子共軛結合起来的变換具有不变性；

4) 弱相互作用对于时間反演具有不变性；

5) 輕粒子数目的守恆定律在弱相互作用中也成立；

6) 根据 §5,13 中的討論可以看出，所有的中微子都是左旋的，所有的反中微子都是右旋的.

泡里 [Pauli, 1955] 曾經証明，假使某个拉氏函数密度对于正洛仑茲变換具有不变性，那末它对于正反粒子共軛、空間反射和时間反演三者結合起来的复合变換一定也具有不变性. 通常称这一

定理为 CPT 定理；C 代表正反粒子共軛，P 代表空間反射，T 代表时間反演．以上所提到的 3) 和 4) 二点是 CPT 定理的一个特殊例子．

在強相互作用中，同位旋和奇异量是守恆量．在电磁相互作用中，同位旋的第三分量和奇异量仍旧是守恆量，而同位旋的其他分量却不再守恆．不难看出，在弱相互作用中同位旋和奇异量都不再是守恆量．在 § 6,7 末的条件 6) 和 7) 保証了：当奇异粒子衰变为強相互作用的粒子的时候，衰变前后的奇异量子数相差一个单位，亦即 $|\Delta S| = 1$．目前的实驗結果都支持这一規律，但是这一規律究竟是否普遍成立，仍有待于更多的实驗事实驗証．我們現在还沒有理論可将不同的輕子用同位旋的概念联系起来．μ, e, ν 这三种輕子之間存在着很大的差别，看不出它們之間存在任何显著的对称性；因此，同位旋的概念現在还不适用于輕子的現象．在涉及輕子的衰变現象中談不上什么同位旋守恆的問題．

应該再一次說明，在这一节中和上一节中曾介紹了一些关于弱相互作用的理論，但是所有这些理論都还不是成熟的理論．

§ 6,9. 描述相互作用的其他数学形式

在以上的討論中曾經指出，描述相互作用的数学形式虽然受到一些物理普遍定律的限制，却仍然存在着范围很寬的选择可能性．因此在建立描述相互作用的理論的时候，除了从物理普遍定律的要求出发考虑以外，也从数学的角度出发考虑問題，首先討論最簡单的、数学处理最方便的数学形式．以上所介紹的一些理論都具有比較簡单的数学形式．可以嘗試用具有更复杂数学形式的相互作用拉氏函数密度来描述基本粒子运动和轉化的現象．例如，可以嘗試在拉氏函数密度中引入如下的項：

$$-g\{(\bar{N}i\gamma_5\vec{\tau}N)\cdot\vec{\pi}\}^n \qquad (6,100)$$

来描述核子与 π 介子之間的相互作用．(6,100)中的表式显然对于洛仑茲变換、規范变換、空間反射、时間反演、正反粒子共軛变換，

同位旋空間轉动等等都具有不变性，因而滿足物理普遍定律的要求．当然，我們也可以引入包含有場量的高阶微商的相互作用拉氏函数密度，但是关于这样的具有复杂的数学形式的理論还很少討論．

华太勤 [Wataghin, 1934]、布洛欣采夫 [Блохинцев, 1948] 等曾經尝試在拉氏函数密度中引入如下的項：

$$\mathscr{L}_i(x)=\int F(x,x',x'',x''')\bar{\psi}(x')\psi(x'')\varphi(x''')d^4x'd^4x''d^4x''' \quad (6,101)$$

来描述旋量場 ψ 和标量場 φ 之間的相互作用，其中函数 F 对于洛仑兹变換、空間反射和时間反演具有不变性．由于处在不同时-空点 x', x'' 和 x''' 的場 $\bar{\psi}$, ψ 和 φ 可以通过(6,101)而相互作用，人們称具有这种数学形式的相互作用为非定域性相互作用．到目前为止，还沒有找到将具有非定域性相互作用的場的理論进行量子化的方法．

虽然可以用以上各节所叙述的方法引入不同的場之間的相互作用，但一个場也可以通过别的場作媒介而与自己相互作用．例如：电子与电子可以通过电磁場作媒介而相互作用；核子与核子可以通过介子作媒介而相互作用．然而，从数学形式的角度来看，从物理的角度来看，并沒有任何先驗的理由可以要求，一个場必須通过别的場作媒介才能和自己相互作用．完全有可能場直接与自身相互作用．在数学形式上要描述一个場直接与自己相互作用并不困难．例如，自旋为 1/2 的自由粒子的場的拉氏函数密度是：

$$\mathscr{L}_0=-\bar{\psi}\left\{\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+M\right\}\psi; \quad (6,102)$$

假使在拉氏函数密度中再引入如下的項：

$$\mathscr{L}_i=-\frac{1}{2}(\bar{\psi}\psi)^2, \quad (6,103)$$

那末推导得的运动方程将是：

$$\left\{\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+M+g\bar{\psi}\psi\right\}\psi=0. \quad (6,104)$$

不难看出，假使 ψ_1 和 ψ_2 是(6,104)的二个平面波解，各代表作直綫运动的粒子；那末，一般說来，$\psi_1 + \psi_2$ 不再是(6,104)的解。这就是說，原来作直綫运动的粒子将受到彼此的影响。(6,103) 就是代表場 ψ 自相作用的数学形式。假設在 (6,104) 中，$M = 0$，那末 (6,104)就变为海森堡 [Heisenberg, 1953] 近年来所建立的基本粒子理論的运动方程。但是到目前为止，海森堡还沒有寻求到能使他的理論量子化的妥善方法。

參 考 文 献

Блохинцев, Д. И. (1948), ЖЭТФ, **18**, 566.
d'Espagnat, B. & Prentki, J. (1956), *Nucl. Phys.*, **1**, 33.
Fermi, E. (1934), *Zeit. Phys.*, 88, 161.
Feynman, R. P. & Gell-Mann, M. (1958), *Phys. Rev.*, **109**, 193.
Gell-Mann, M. (1956), *Nuovo. Cimento*, **4**, Suppl. 2, 848.
Heisenberg, W. (1953), *Nachr. Akad. Gött.* **8**.
Kemmer, N. (1938), *Proc. Camb. Phil. Soc.* **34**, 354.
Lee, T. D. & Yang, C. N. (1956), *Phys. Rev.*, **104**, 254.
Марков, М. А. (1958), Гипероны и К-тела.
Nishijima, K. (1955), *Prog. Theor. Phys.*, **13**, 285.
Pauli, W. (1955), N. Bohr & the development of physics, 30.
Salam, A. (1956), *Nucl. Phys.*, **2**, 173.
Sudarshan, G. & Marshak, R. (1958), *Phys. Rev.*, **109**, 1860.
Wataghin, G. (1934), *Zeit. Phys.*, **88**, 92.
Wu, C. S. et. al. (1957), *Phys. Rev.*, **105**, 1413.
Yukawa, H. (1935), *Proc. Phys. Math. Soc. Japan.*, **17**, 48.

第七章　相互作用表象

§7,1. 海森堡表象和薛定格表象

不难看出，上章所討論的有相互作用的量子場論，还不能从形式上明显地看出具有洛仑兹不变性．以輕子与电磁場相互作用的理論为例．运动方程 (6,5) 和 (6,20) 虽然具有显示的洛仑兹不变性，但是所假定的对易定則(6,22)只牵涉到在同一时間 t 的場量，但是"同时"并不是洛仑兹不变性的概念．为了便于看出对易关系是否也具有洛仑兹不变性，必須寻求属于不同时間 t 和 t' 的場量之間的对易关系．这样就必須求解运动方程．在有相互作用存在时，运动方程将成为非齐次的方程，而且常常也是非綫性的方程，求解这类方程远較求解綫性齐次的自由場的运动方程困难得多。

在量子力学中人們常用的表象有二种：一种是海森堡表象；另一种是薛定格表象；二者通过一个么正变換联系起来．在海森堡表象中，力学量随时間而变，波函数則不随时間而变；在薛定格表象中，力学量不随时間而变，波函数却随时間而变．直到現在为止，我們在本书中所討論的理論是在海森堡表象中的量子場論．在量子場論中，我們也可以应用一个么正变換引入薛定格表象．为了区别在不同表象中的場量和波函数，我們引入标符(海)和(薛)来分别标志海森堡表象和薛定格表象中的場量和波函数．在海森堡表象中，我們有：

$$\left.\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}\{^{(海)}|\rangle\} &= 0, \\ i\frac{\partial}{\partial t}\{^{(海)}F\} &= [^{(海)}F, {}^{(海)}H]; \end{aligned}\right\} \tag{7,1}$$

其中 F 代表任何場量，H 代表哈密頓量，$|\rangle$ 代表波函数．在海森

堡表象和薛定格表象之間存在着如下的关系：

$$\left.\begin{aligned} {}^{(薛)}|\rangle &= u^{-1}\,{}^{(海)}|\rangle, \\ {}^{(薛)}F &= u^{-1}\,{}^{(海)}F\,u; \end{aligned}\right\} \tag{7,2}$$

其中 u 是如下的么正矩陣：

$$u = e^{i\,{}^{(海)}Ht}. \tag{7,3}$$

显然，根据(7,1)，${}^{(海)}H$ 是不随时間而变的．由于

$${}^{(薛)}H = u^{-1}\,{}^{(海)}Hu = {}^{(海)}H, \tag{7,4}$$

因而哈密頓量在海森堡表象中的形式与在薛定格表象中的形式完全相等．因此，可以用一个符号 H 来代表二个不同表象中的哈密頓量．不难看出，在薛定格表象中的对易关系仍旧和海森堡表象中的对易关系一样．致于在薛定格表象中的波函数和場量則服从如下的运动方程：

$$\left.\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}\{{}^{(薛)}|\rangle\} &= H\,{}^{(薛)}|\rangle, \\ i\frac{\partial}{\partial t}\{{}^{(薛)}F\} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{7,5}$$

从(7,5)可以看出，在薛定格表象中，場量随空間坐标而变，不随时間坐标而变．因此，在将量子場論納入薛定格表象以后，也还不能从形式上明显地看出，理論具有洛仑兹不变性．为了将量子場論納入显示的洛仑兹不变的形式，朝永振一郎［Tomonaga, 1946］和許溫格［Schwinger, 1948］引入了一种新的表象，叫做"相互作用表象".

§ 7,2. 相互作用表象

从上一章的討論中可以看出：当場与場之間存在着相互作用时，哈密頓量可以分为两部分：一部分是各个自由場的哈密頓量，另一部分是各种場彼此間的相互作用哈密頓量．以輕子与电磁場相互作用的理論为例，(6,25)中的 $\mathscr{H}_e$ 和 $\mathscr{H}_f$ 就代表自由場的哈密頓量密度，而 $\mathscr{H}_i$ 則代表相互作用哈密頓量密度．在以后，我

們将以 H_0 和 H_I 分别代表自由場的哈密頓量和相互作用哈密頓量，并将以标符(相互)标志相互作用表象中的波函数和場量。朝永振一郎应用了一个么正变換使理論从薛定格表象过渡到相互作用表象：

$$\left.\begin{aligned} {}^{(相互)}|\rangle &= u_0\,{}^{(薛)}|\rangle, \\ {}^{(相互)}F &= u_0\,{}^{(薛)}F u_0^{-1}; \end{aligned}\right\} \tag{7,6}$$

其中 u_0 是如下的么正矩陣：

$$u_0 = e^{i\,{}^{(薛)}H_0 t}. \tag{7,7}$$

从 (7,6) 可以知道，在相互作用表象中，同一时間的場量之間的对易关系仍旧与海森堡表象中的相应的对易关系一样，但是波函数和場量則服从如下的运动方程：

$$\left.\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}\{{}^{(相互)}|\rangle\} &= {}^{(相互)}H_I\,{}^{(相互)}|\rangle, \\ i\frac{\partial}{\partial t}\{{}^{(相互)}F\} &= [{}^{(相互)}F, {}^{(相互)}H_0]. \end{aligned}\right\} \tag{7,8}$$

不难看出，${}^{(相互)}H_0$ 不随时間而变，(7,8) 中第二式和自由場的运动方程一样。由于 ${}^{(相互)}H_0$ 的表式就与自由場的哈密頓量的表式相同，而另一方面同一时間的場量之間的对易关系也与自由場理論中相应的对易关系相同，从同一时間場量之間的对易关系和場量的运动方程，可以求得不同时間的場量之間的对易关系，因而可以看出，在相互作用表象中属于不同时間的場量之間的对易关系也与自由場理論中相应的对易关系完全一样，也具有显示的洛仑兹不变性。这就証明了，在相互作用表象中，場量的运动方程和对易关系都具有显示的洛仑兹不变性。

但是作为描述相互作用表象中波函数如何随时間而变化的(7,8)中的第一式还不具有显示的洛仑兹不变形式。在这一方程中时間 t 具有特殊的地位。波函数所反映的是在同一时間的不同空間各点的場量取各套共同本徵值的几率。"同一时間的不同空間点"这一概念并不是洛仑兹不变性的。因此有必要将(7,8)中的第

一式加以扩充，以便于納入显示的洛仑兹不变的形式. 我們可以将(7,8)中的第一式先改写为:

$$\Delta^{(\text{相互})}|\rangle = \left\{-i\int d\vec{x}^{\,(\text{相互})}\mathscr{H}_i\Delta t\right\}^{(\text{相互})}|\rangle, \qquad (7,9)$$

其中 $\mathscr{H}_i$ 代表相互作用哈密頓量密度. 可以将 (7,9) 式右方的积分改写成为一个和:

$$\Delta^{(\text{相互})}|\rangle = \left\{-i\sum_n \Delta^4 x_{(n)}{}^{(\text{相互})}\mathscr{H}_i(x_{(n)})\right\}^{(\text{相互})}|\rangle, \quad (7,10)$$

其中 $\Delta^4 x_{(n)}$ 代表四維时空体积元，n 对同一时間的整个空間各点求和;这就相当于将空間分割为許多小元格 $\Delta\vec{x}_{(n)}$，以字母 n 标志各个不同的格子. 因此,波函数的改变可以当作是許多小的改变之和. 空間每一个小元格 $\Delta\vec{x}_{(n)}$ 內的相互作用哈密頓量密度${}^{(\text{相互})}\mathscr{H}_i$ 在某一段时間 Δt 內对波函数的改变作出貢献:

$$\{-i\Delta^4 x_{(n)}{}^{(\text{相互})}\mathscr{H}_i(x_{(n)})\}^{(\text{相互})}|\rangle. \qquad (7,11)$$

在表式(7,11)中，时間 t 就不再处于特殊的地位. 在这一想法的基础上,我們可以将波函数的意义加以扩充,将波函数的运动方程(7,8)中的第一式加以扩充.

同一时間的空間各点在四維的时空中形成一个三維平面. 不同时間的空間相应于不同的三維平面. 波函数是这种三維平面的函数. 它給出了平面上各点的一套完全的、可对易的場量取各种共同本徵值的几率. 我們可以将这种三維平面的概念扩充为任何"三維空間性曲面"的概念. 所謂"三維空間性曲面"就是一种曲面,在这曲面上的任何二点 x' 和 x'' 都滿足如下的条件:

$$(x'-x'')_\mu(x'-x'')_\mu = (\vec{x}'-\vec{x}'')^2-(t'-t'')^2 > 0. \qquad (7,12)$$

我們将波函数扩充为这种空間性曲面的函数，它給出了在曲面上各点的一套完全的、可对易的場量取各种共同本徵值的几率. 我們可以尝試将(7,8)中的第一式扩充为:

$$i\frac{\delta}{\delta\sigma(x)}\{{}^{(\text{相互})}|\rangle\} = {}^{(\text{相互})}\mathscr{H}_i(x,\sigma)^{(\text{相互})}|\rangle, \qquad (7,13)$$

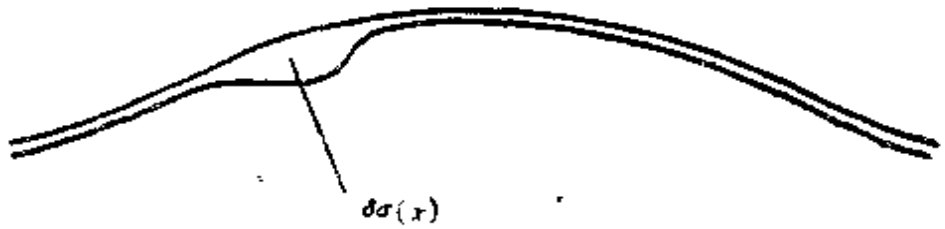


图 1

其中 $\delta\sigma(x)$ 代表二个空間性曲面之間所包着的四維时空体积，如图 1 所示；$^{(相互)}\mathscr{H}_i(x,\sigma)$ 为由 x 点的場量和曲面参数所組成的洛仑兹不变量．在曲面 σ 是一个 t 等于常数的空間性平面的时候，$^{(相互)}\mathscr{H}_i(x,\sigma)$ 就还原为在 x 点的相互作用哈密頓量密度 $^{(相互)}\mathscr{H}_i(x)$．由于 $\delta\sigma(x)$ 和 $^{(相互)}\mathscr{H}_i(x,\sigma)$ 都是相对論不变的，因而方程(7,13)具有显示的洛仑兹不变形式．

但是，在将波函数的运动方程扩充成 (7,13) 的形式之后，它未必在任何情况之下都是可积分的．当曲面 σ_1 逐步变到曲面 σ_2 时，波函数便相应地从 $^{(相互)}|\sigma_1\rangle$ 逐步按照运动方程 (7,13) 变到

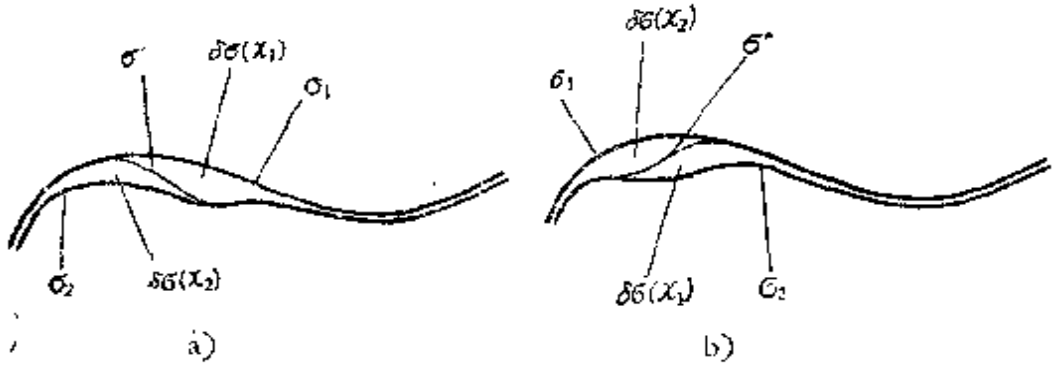


图 2

$^{(相互)}|\sigma_2\rangle$．σ_1 可以經过一系列不同的中間步驟而到达 σ_2，但是最后按照运动方程(7,13)所得到的 $^{(相互)}|\sigma_2\rangle$ 应該是相同的，与具体的中間步驟无关．举个例說：σ_1 可以先变成 σ'，然后变成 σ_2，如图 2a 所示；波函数相应地先从 $^{(相互)}|\sigma_1\rangle$ 变为 $^{(相互)}|\sigma'\rangle$，根据(7,13)有：

$$^{(相互)}|\sigma'\rangle = {}^{(相互)}|\sigma_1\rangle + \frac{1}{i}\,{}^{(相互)}\mathscr{H}_i(x_1,\sigma)\,{}^{(相互)}|\sigma_1\rangle\cdot\delta\sigma(x_1), \quad (7,14)$$

然后再从 $^{(相互)}|\sigma'\rangle$ 变为 $^{(相互)}|\sigma_2\rangle$：

$$^{(相互)}|\sigma_2\rangle = {}^{(相互)}|\sigma'\rangle + \delta\sigma(x_2)\frac{\delta}{\delta\sigma(x_2)}\{{}^{(相互)}|\sigma'\rangle\}, \quad (7,15)$$

經过簡单的运算，可得：

$$^{(相互)}|\sigma_2\rangle = \Big\{1 - i^{(相互)}\mathscr{H}_i(x_1,\sigma)\cdot\delta\sigma(x_1) - i^{(相互)}\mathscr{H}_i(x_2,\sigma)\cdot$$

$$\cdot\delta\sigma(x_2) - i\frac{\delta^{(相互)}\mathscr{H}_i(x_1,\sigma)}{\delta\sigma(x_2)}\delta\sigma(x_1)\delta\sigma(x_2) -$$

$$- {}^{(相互)}\mathscr{H}_i(x_1,\sigma)\,{}^{(相互)}\mathscr{H}_i(x_2,\sigma_2)\delta\sigma(x_1)\delta\sigma(x_2)\Big\}^{(相互)}|\sigma_1\rangle. \quad (7,16)$$

同样，σ_1 也可以先变成 σ''，然后再变成 σ_2，如图 2b 所示；通过这样的中間步驟得到的 $^{(相互)}|\sigma_2\rangle$ 是：

$$^{(相互)}|\sigma_2\rangle = \Big\{1 - i^{(相互)}\mathscr{H}_i(x_2,\sigma)\cdot\delta\sigma(x_2) - i^{(相互)}\mathscr{H}_i(x_1,\sigma)\cdot$$

$$\cdot\delta\sigma(x_1) - i\frac{\delta^{(相互)}\mathscr{H}_i(x_2,\sigma)}{\delta\sigma(x_1)}\delta\sigma(x_2)\delta\sigma(x_1) -$$

$$- {}^{(相互)}\mathscr{H}_i(x_2,\sigma)\,{}^{(相互)}\mathscr{H}_i(x_1,\sigma)\delta\sigma(x_2)\delta\sigma(x_1)\Big\}^{(相互)}|\sigma_1\rangle. \quad (7,17)$$

从(7,16)和(7,17)可以得：

$$\Big[{}^{(相互)}\mathscr{H}_i(x_1,\sigma) - i\frac{\delta}{\delta\sigma(x_1)},\ {}^{(相互)}\mathscr{H}_i(x_2,\sigma) -$$

$$- i\frac{\delta}{\delta\sigma(x_2)}\Big]^{(相互)}|\sigma_1\rangle = 0. \quad (7,18)$$

由于 $^{(相互)}|\sigma_1\rangle$ 可以是任何波函数，因此 $^{(相互)}\mathscr{H}_i(x,\sigma)$ 必須滿足如下的条件：

$$\Big[{}^{(相互)}\mathscr{H}_i(x_1,\sigma) - i\frac{\delta}{\delta\sigma(x_1)},\ {}^{(相互)}\mathscr{H}_i(x_2,\sigma) - i\frac{\delta}{\delta\sigma(x_2)}\Big] = 0,$$

$$(x_1 - x_2)^2 > 0, \quad (7,19)$$

其中 x^2 是 $x_\mu x_\mu$ 的縮写。假使条件(7,19)得到滿足，那末波函数和場量的运动方程：

$$\left.\begin{aligned} i\frac{\delta}{\delta\sigma(x)}\{^{(\text{相互})}|\rangle\} &= {}^{(\text{相互})}\mathscr{H}_I(x,\sigma)^{(\text{相互})}|\rangle, \\ i\frac{\partial^{(\text{相互})}F}{\partial t} &= [{}^{(\text{相互})}F, {}^{(\text{相互})}H_0], \end{aligned}\right\} \tag{7,20}$$

和对易定则就是量子場論在相互作用表象中一套完整的方程；它們通过么正变換 (7,6) 和 (7,7) 与薛定格表象中的理論連系起来. (7,20) 和相互作用表象中的对易定則都具有显示的洛仑兹不变的形式.

§ 7,3. 核子与 π 介子相互作用

我們先以核子場与 π 介子場的相互作用为例来說明如何变換到相互作用表象. 在上一章 § 6,4 中曾給出了在海森堡表象中的核子場与 π 介子場的相互作用理論，哈密頓量密度和哈密頓量的表式見(6,58)、(6,59)、(3,152)、(6,60) 和 (6,61). 在按照(7,2)和(7,3) 引入了薛定格表象以后就得到如下的运动方程和对易关系. 波函数的运动方程是:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\{^{(\text{薛})}|\rangle\} = H^{(\text{薛})}|\rangle, \tag{7,21}$$

場量的运动方程是:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\{^{(\text{薛})}F\} = 0, \tag{7,22}$$

其中 ${}^{(\text{薛})}F$ 代表 ${}^{(\text{薛})}\psi$, ${}^{(\text{薛})}\bar{\psi}$, ${}^{(\text{薛})}\vec{\varphi}$ 和 ${}^{(\text{薛})}\vec{\pi}$, 在他們之間存在着如下的对易关系:

$$\left.\begin{aligned} \{{}^{(\text{薛})}\psi_\rho(\vec{x}), {}^{(\text{薛})}\psi^*_\sigma(\vec{x}')\} &= \delta_{\rho\sigma}\delta(\vec{x}-\vec{x}'), \\ [{}^{(\text{薛})}\varphi_i(\vec{x}), {}^{(\text{薛})}\pi_k(\vec{x}')] &= i\delta_{ik}\delta(\vec{x}-\vec{x}'), \end{aligned}\right\} \tag{7,23}$$

${}^{(\text{薛})}\psi$, ${}^{(\text{薛})}\psi^*$ 之間其余各对都相互反对易, ${}^{(\text{薛})}\vec{\varphi}$, ${}^{(\text{薛})}\vec{\pi}$ 之間其余各对都相互对易，而 ${}^{(\text{薛})}\psi$, ${}^{(\text{薛})}\psi^*$ 和 ${}^{(\text{薛})}\vec{\varphi}$, ${}^{(\text{薛})}\vec{\pi}$ 都可以相互对易. 注意,在薛定格表象中，場量是空間坐标 $\vec{x}$ 的函数,而不再是时間坐标 t 的函数.

为了引进相互作用表象，我們将薛定格表象中的哈密頓量密

度分为自由場的哈密頓量密度 $^{(薛)}\mathscr{H}_0$ 和相互作用哈密頓量密度 $^{(薛)}\mathscr{H}_i$ 二部分：

$$^{(薛)}\mathscr{H} = {}^{(薛)}\mathscr{H}_0 + {}^{(薛)}\mathscr{H}_i, \tag{7,24}$$

其中

$$^{(薛)}\mathscr{H}_0 = {}^{(薛)}\Psi^* \{\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta M_N\}\,{}^{(薛)}\Psi + \\ + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial\,{}^{(薛)}\vec{\varphi}}{\partial x_i}\,\frac{\partial\,{}^{(薛)}\vec{\varphi}}{\partial x_i} + {}^{(薛)}\vec{\pi}\,{}^{(薛)}\vec{\pi} + m_\pi^2\,{}^{(薛)}\vec{\varphi}\,{}^{(薛)}\vec{\varphi}\right\}. \tag{7,25}$$

相互作用哈密頓量密度是：

$$^{(薛)}\mathscr{H}_i = ig\,{}^{(薛)}\bar{\Psi}\vec{\tau}\gamma_5\,{}^{(薛)}\Psi\cdot{}^{(薛)}\vec{\varphi}. \tag{7,26}$$

我們可以按照(7,6)和(7,7)引进相互作用表象。当引入了相互作用表象以后，場量就不再仅是空間坐标 x，也是时間 t 的函数。但是，在相同时間的場量之間仍旧存在着如 (7,23) 的形式的对易关系；在 $t = t'$ 时有：

$$\left.\begin{aligned}\{{}^{(相互)}\Psi_\rho(x),\,{}^{(相互)}\Psi^*_\sigma(x')\} &= \delta_{\rho\sigma}\delta(\vec{x}-\vec{x}'),\\ [{}^{(相互)}\varphi_j(x),\,{}^{(相互)}\pi_k(x')] &= i\delta_{jk}\delta(\vec{x}-\vec{x}'),\end{aligned}\right\} \tag{7,27}$$

$^{(相互)}\Psi$，$^{(相互)}\Psi^*$ 之間其余各对都相互反对易，$^{(相互)}\vec{\varphi}$，$^{(相互)}\vec{\pi}$ 之間其余各对都相互对易，而 $^{(相互)}\Psi$，$^{(相互)}\Psi^*$ 和 $^{(相互)}\vec{\varphi}$，$^{(相互)}\vec{\pi}$ 都可以相互对易。根据 (7,8)，(7,25)，(7,6) 和 (7,27)，可以得到在相互作用表象中的場量的如下运动方程：

$$\left.\begin{aligned}
i\frac{\partial\,{}^{(相互)}\Psi}{\partial t} &= [{}^{(相互)}\Psi, {}^{(相互)}H_0] = \gamma_4\gamma_j\frac{\partial\,{}^{(相互)}\Psi}{\partial x_j} + M_N\gamma_4\,{}^{(相互)}\Psi,\\
i\frac{\partial\,{}^{(相互)}\Psi^*}{\partial t} &= [{}^{(相互)}\Psi^*, {}^{(相互)}H_0] =\\
&= \frac{\partial\,{}^{(相互)}\Psi^*}{\partial x_j}\gamma_4\gamma_j - M_N\,{}^{(相互)}\Psi^*\gamma_4,\\
i\frac{\partial\,{}^{(相互)}\vec{\varphi}}{\partial t} &= [{}^{(相互)}\vec{\varphi}, {}^{(相互)}H_0] = i\,{}^{(相互)}\vec{\pi},\\
i\frac{\partial\,{}^{(相互)}\vec{\pi}}{\partial t} &= [{}^{(相互)}\vec{\pi}, {}^{(相互)}H_0] = i\frac{\partial^2\,{}^{(相互)}\vec{\varphi}}{\partial x_j\partial x_j} - im_\pi^2\,{}^{(相互)}\vec{\varphi}.
\end{aligned}\right\} \tag{7,28}$$

可以将(7,28)改写为如下的自由場的运动方程：

$$\left.\begin{aligned}&\{i\hat{\not p}+M_N\}^{(\text{相互})}\Psi=0,\\&{}^{(\text{相互})}\bar\Psi\{i\hat{\not p}+M_N\}=0,\\&\{\Box-m_\pi^2\}^{(\text{相互})}\vec\varphi=0.\end{aligned}\right\}\tag{7,29}$$

从(7,27)和(7,29)可以推导出不同时間的場量之間的对易关系，利用与第三章和第五章中所用的完全相同的方法，可得：

$$\left.\begin{aligned}&[{}^{(\text{相互})}\varphi_j(x),{}^{(\text{相互})}\varphi_k(x')]=i\delta_{jk}\Delta_{m_\pi}(x-x'),\\&\{{}^{(\text{相互})}\Psi(x),{}^{(\text{相互})}\bar\Psi(x')\}=\frac{1}{i}S_{M_N}(x-x'),\end{aligned}\right\}\tag{7,30}$$

${}^{(\text{相互})}\Psi(x)$ 和 ${}^{(\text{相互})}\Psi(x')$可以相互反对易，${}^{(\text{相互})}\bar\Psi(x)$ 和 ${}^{(\text{相互})}\bar\Psi(x')$ 可以相互反对易，${}^{(\text{相互})}\vec\varphi(x)$ 和 ${}^{(\text{相互})}\Psi(x')$、${}^{(\text{相互})}\bar\Psi(x')$ 可以相互对易.

当变换到相互作用表象以后，波函数变换为：

$${}^{(\text{相互})}|\rangle=e^{i\,{}^{(\text{薛})}H_0t}\cdot{}^{(\text{薛})}|\rangle.\tag{7,31}$$

它服从运动方程：

$$i\frac{\partial}{\partial t}\{{}^{(\text{相互})}|\rangle\}={}^{(\text{相互})}H_I{}^{(\text{相互})}|\rangle.\tag{7,32}$$

我們可以尝試按照上一节中所叙述的方式将上式扩充为：

$$i\frac{\delta}{\delta\sigma(x)}\{{}^{(\text{相互})}|\rangle\}={}^{(\text{相互})}\mathscr{H}_I(x)\cdot{}^{(\text{相互})}|\rangle,\tag{7,33}$$

其中${}^{(\text{相互})}\mathscr{H}_I(x)$的形式与(7,26)中的表式相同，只是得将(7,26)中的薛定格表象中的場量換成相应的相互作用表象中的場量. 由于 ${}^{(\text{相互})}\mathscr{H}_I(x)$ 具有显示的洛仑兹不变性，因此方程 (7,33) 也具有显示的洛仑兹不变性.

不难証明，方程(7,33)是可以积分的. 由于 ${}^{(\text{相互})}\mathscr{H}_I(x)$ 与曲面的参数无关，条件(7,19)就成为：

$$\left.\begin{aligned}&[{}^{(\text{相互})}\mathscr{H}_I(x),{}^{(\text{相互})}\mathscr{H}_I(x')]=0,\\&(x-x')^2>0.\end{aligned}\right\}\tag{7,34}$$

既然对易关系 (7,30) 是洛仑兹不变的，而 x 和 x'又在同一个空間性曲面上，所以我們可以选择一个坐标系統，在其中 $t=t'$. 那末

就有：

$$[{}^{(\text{相互})}\mathscr{H}_i(x), {}^{(\text{相互})}\mathscr{H}_i(x')] = -g^2\{{}^{(\text{相互})}\bar{\psi}(x)\tau_k\tau_j\gamma_5\gamma_4\gamma_5{}^{(\text{相互})}\psi(x') - {}^{(\text{相互})}\bar{\psi}(x')\tau_j\tau_k\gamma_5\gamma_4\gamma_5{}^{(\text{相互})}\psi(x)\}\delta(\vec{x}-\vec{x}'){}^{(\text{相互})}\varphi_k(x){}^{(\text{相互})}\varphi_j(x') = 0. \tag{7,35}$$

上式中間的表式可以分为二个因子：在曲括号中的因子对于替換

$$x \rightleftharpoons x', \quad k \rightleftharpoons j \tag{7,36}$$

是反对称的，另外一个因子对于替換(7,36)是对称的.

在 σ 是 t 等于常数的平面的特殊情况下，从同样的起始波函数出发，用(7,32)和(7,33)求得的在另一个 t 等于常数的平面 σ' 上的波函数完全相同. 运动方程(7,29)和(7,33)以及对易关系(7,30)就是在相互作用表象中的核子与 π 介子場的一套基本方程.

§7,4. 輕子与电磁場相互作用

我們以輕子与电磁場相互作用作为第二个例子. 在§6,2中曾給出了在海森堡表象中輕子与电磁場相互作用的理論. 不难証明，在相互作用表象中；力学量的运动方程不再是(6,5)和(6,20)，而是：

$$\left.\begin{aligned} \{i\hat{\partial} + m\}{}^{(\text{相互})}\psi &= 0, \\ {}^{(\text{相互})}\bar{\psi}\{i\hat{\partial} + m\} &= 0, \\ \square{}^{(\text{相互})}A_\mu &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{7,37}$$

对易关系則成为：

$$\left.\begin{aligned} [{}^{(\text{相互})}A_\mu(x), {}^{(\text{相互})}A_\nu(x')] &= i\delta_{\mu\nu}D(x-x'), \\ \{{}^{(\text{相互})}\psi(x), {}^{(\text{相互})}\bar{\psi}(x')\} &= \frac{1}{i}S_m(x-x'), \end{aligned}\right\} \tag{7,38}$$

此外，${}^{(\text{相互})}\psi(x)$ 和 ${}^{(\text{相互})}\psi(x')$ 相互反对易，${}^{(\text{相互})}\bar{\psi}(x)$ 和 ${}^{(\text{相互})}\bar{\psi}(x')$ 相互反对易，${}^{(\text{相互})}A_\mu(x)$ 則可和 ${}^{(\text{相互})}\psi(x')$、${}^{(\text{相互})}\bar{\psi}(x')$ 相互对易. 波函数所服从的运动方程是：

$$i\frac{\delta}{\delta\sigma(x)}\{{}^{(\text{相互})}|\rangle\} = {}^{(\text{相互})}\mathscr{H}_i(x)\cdot{}^{(\text{相互})}|\rangle, \tag{7,39}$$

${}^{(\text{相互})}\mathscr{H}_i(x)$的形式与(6,25)中第三式的形式相同，只是得将海森

薛表象中的場量換成相应的相互作用表象中的場量。不难証明，方程(7,39)是可积的。假使 x 和 x' 在同一个空間性的曲面上，則 ${}^{(相互)}A_\mu(x)$ 和 ${}^{(相互)}A_\nu(x')$ 就可以相互对易；因此有：

$$[{}^{(相互)}\mathscr{H}_i(x), {}^{(相互)}\mathscr{H}_i(x')] = \\ = [{}^{(相互)}J_\mu(x), {}^{(相互)}J_\nu(x')]\,{}^{(相互)}A_\mu(x)\,{}^{(相互)}A_\nu(x'), \quad (7,40)$$

上式右方的表式是二个因子的乘积：一个因子对于替換

$$\mu \rightleftarrows \nu, \quad x \rightleftarrows x' \quad (7,41)$$

是对称的，而另一个因子对于替換(7,41)是反对称的。由于(7,40)式的右方只有在 $x = x'$ 时才不等于零，因此(7,40)式右方整个表式必等于零。这就証明了方程(7,39)的可积性。

值得注意的是，在引进不定度規以后，

$${}^{(相互)}\mathscr{H}_i = -{}^{(相互)}J_\mu\,{}^{(相互)}A_\mu \quad (7,42)$$

就不再是厄米算符。这是由于

$${}^{(相互)}J_4\,{}^{(相互)}A_4 = \frac{ie}{2}\{{}^{(相互)}\phi^*\,{}^{(相互)}\psi - {}^{(相互)}\dot{\phi}\,{}^{(相互)}\phi^*\}A_4 \quad (7,43)$$

在引进不定度規 η 以后，由于 ${}^{(相互)}A_4$ 是厄米算符，${}^{(相互)}J_4$ 是反厄米算符，因此整个說来，就是一个反厄米算符。于是

$$\frac{\delta}{\delta\sigma}\langle|{}^{(相互)}|\rangle = \langle|{}^{(相互)}\frac{\delta}{\delta\sigma}\{{}^{(相互)}|\rangle\} + \frac{\delta}{\delta\sigma}\{\langle|{}^{(相互)}\}{}^{(相互)}|\rangle = \\ = -i\langle|{}^{(相互)}[{}^{(相互)}\mathscr{H}_i - {}^{(相互)}\mathscr{H}_i^*]\,{}^{(相互)}|\rangle \neq 0, \quad (7,44)$$

也就是說，$\langle|{}^{(相互)}|\rangle$ 可能随时間而变。但是不难証明，几率 $\langle|{}^{(相互)}\eta\,{}^{(相互)}|\rangle$ 則仍然是守恆的。因为考虑到 η 和 ${}^{(相互)}A_i$ 之可以相互对易，和 ${}^{(相互)}A_4$ 之相互反对易，就有：

$$\frac{\delta}{\delta\sigma}\{\langle|{}^{(相互)}\eta\,{}^{(相互)}|\rangle\} = -i\langle|{}^{(相互)}[\eta\,{}^{(相互)}\mathscr{H}_i - \\ - {}^{(相互)}\mathscr{H}_i^*\eta]\,{}^{(相互)}|\rangle = 0, \quad (7,45)$$

在輕子与电磁場相互作用的理論中比較复杂的一个問題是附加洛仑兹条件的問題。假使 σ 是一个 t 等于常数的平面，那末洛仑兹条件就具有如下的形式：

$$\langle|{}^{(相互)}\eta\,\frac{\partial\,{}^{(相互)}A_\mu}{\partial x_\mu}\,{}^{(相互)}|\rangle_{\sigma/x} = 0, \quad (7,46)$$

其中符号"σ/x"的意义是，x是平面σ上的一点。(7,46)可以从海森堡表象中的洛仑兹条件出发，通过么正变换而得。为了使洛仑兹条件获得显示的洛仑兹不变的形式，我們尝試将(7,46)扩充为σ是一个空間性曲面、x不是σ上的一点时的条件。我們假定(7,46)在經扩充了以后具有如下的形式：

$$\langle\sigma|^{(\text{相互})}\eta\left\{\frac{\partial^{(\text{相互})}A_\mu}{\partial x_\mu}+F(x,\sigma)\right\}^{(\text{相互})}|\sigma\rangle=0, \qquad (7,47)$$

其中$F(x,\sigma)$是一个由場量組成的場的物理量，它一方面是x的函数，另一方面又是曲面σ的函数。为了使条件(7,47)与波动方程(7,39)不致相矛盾，必須有：

$$\left[{}^{(\text{相互})}\mathscr{H}_i(x')-i\frac{\delta}{\delta\sigma(x')},\ \frac{\partial^{(\text{相互})}A_\mu}{\partial x_\mu}+F(x,\sigma)\right]=0. \qquad (7,48)$$

不难看出，

$$\left.\begin{aligned}\left[{}^{(\text{相互})}\mathscr{H}_i(x'),\ \frac{\partial^{(\text{相互})}A_\mu}{\partial x_\mu}\right]&=i^{(\text{相互})}J_\mu(x')\frac{\partial}{\partial x_\mu}D(x-x'),\\ \left[\frac{\delta}{\delta\sigma(x')},\ \frac{\partial^{(\text{相互})}A_\mu}{\partial x_\mu}\right]&=0.\end{aligned}\right\} \qquad (7,49)$$

我們假定：

$$[{}^{(\text{相互})}\mathscr{H}_i(x'),\ F(x,\sigma)]=0, \qquad (7,50)$$

那末，为了使(7,48)得到滿足，必須有：

$$\left[i\frac{\delta}{\delta\sigma(x')},F(x,\sigma)\right]=i\frac{\delta F(x,\sigma)}{\delta\sigma(x')}=$$

$$=i^{(\text{相互})}J_\mu(x')\frac{\partial}{\partial x_\mu}D(x-x'). \qquad (7,51)$$

考虑到

$$D(x)=-D(-x),\ \frac{\partial^{(\text{相互})}J_\mu(x')}{\partial x'_\mu}=0, \qquad (7,52)$$

我們有：

$$\frac{\delta F(x,\sigma)}{\delta\sigma(x')}=\frac{\partial}{\partial x'_\mu}\{{}^{(\text{相互})}J_\mu(x')D(x'-x)\}. \qquad (7,53)$$

方程(7,53)的解是：

$$F(x,\sigma)=\int {}^{(相互)}J_\mu(x'')D(x''-x)d\sigma_\mu(x''),\qquad (7,54)$$

其中 $d\sigma_\mu(x'')$ 是曲面 σ 上的面积元，其四个分量各为：$dx_2''dx_3''dt''$，$dx_1''dx_3''dt''$，$dx_1''dx_2''dt''$ 和 $-idx_1''dx_2''dx_3''$. 不难証明，当 σ 經过 x 点时，有如下的等式：

$$\frac{\delta}{\delta\sigma(x)}\int G(x')d\sigma_\mu(x')=\frac{\partial}{\partial x_\mu}G(x),\qquad (7,55)$$

其中 $G(x)$ 是 x 的任何函数. 可以証明，(7,54)中的 $F(x,\sigma)$ 的确满足方程(7,50). 因为

$$\left[{}^{(相互)}\mathscr{H}_i(x'),\int {}^{(相互)}J_\mu(x'')D(x''-x)d\sigma_\mu(x'')\right]=$$

$$=-{}^{(相互)}A_\nu(x')\int[{}^{(相互)}J_\nu(x'),{}^{(相互)}J_\mu(x'')]D(x''-$$

$$-x)d\sigma_\mu(x''),\qquad (7,56)$$

由于 x' 和 x'' 处在同一个空間性曲面上，(7,56) 式中的表式 $[{}^{(相互)}J_\nu(x'),{}^{(相互)}J_\mu(x'')]$ 只有在 $x'=x''$ 时才不等于零. 我們选择一个坐标系，使在 x' 点附近的面积元只有第四个分量 $d\sigma_4$ 不等于零. 那末，(7,56)式右方的表式就等于：

$${}^{(相互)}A_\nu(x')e^2\int\{{}^{(相互)}\psi^*(x')\gamma_4\gamma_\nu{}^{(相互)}\psi(x'')-$$

$$-{}^{(相互)}\psi^*(x'')\gamma_4\gamma_\nu{}^{(相互)}\psi(x'')\}\delta(\vec{x}'-$$

$$-\vec{x}'')D(x''-x)d\sigma_4(x'')=0.\qquad (7,57)$$

要使条件(7,47)不致自相矛盾，还必須有：

$$\left[\frac{\partial^{(相互)}A_\mu}{\partial x_\mu}+F(x,\sigma),\ \frac{\partial^{(相互)}A_\nu}{\partial x_\nu'}+F(x',\sigma)\right]=0,\qquad (7,58)$$

其中 x 和 x' 为时空中任何二点. 显然，$\dfrac{\partial^{(相互)}A_\mu}{\partial x_\mu}$ 和 $F(x',\sigma)$ 可以相互对易，$\dfrac{\partial^{(相互)}A_\nu}{\partial x_\nu'}$ 和 $F(x,\sigma)$ 也可以相互对易. 此外又有：

$$\left[\frac{\partial^{(相互)}A_\mu}{\partial x_\mu},\ \frac{\partial^{(相互)}A_\nu}{\partial x_\nu'}\right]=-i\Box D(x-x')=0.\qquad (7,59)$$

我們还可以用与証明(7,50)相似的方法来証明：

$$[F(x,\sigma),\ F(x',\sigma)]=0. \tag{7,60}$$

因此，最后我們得到了一套既不与波动方程相矛盾，又不自相矛盾的扩充了的洛仑兹条件：

$$\langle\sigma|^{(\text{相互})}\eta\left\{\frac{\partial^{(\text{相互})}A_\mu}{\partial x_\mu}-\right.$$
$$\left.-\int D(x-x')^{(\text{相互})}J_\mu(x')d\sigma_\mu(x')\right\}^{(\text{相互})}|\sigma\rangle=0. \tag{7,61}$$

不难看出，当 x 在曲面 σ 上时，(7,61)就还原为(7,46)的形式. 运动方程 (7,37)、波动方程 (7,39)、对易定則 (7,38) 和洛仑兹条件 (7,61) 就是在相互作用表象中的輕子与电磁場相互作用理論的一套基本方程.

§ 7,5. 包含有場量微商的相互作用

最后，我們来討論在相互作用拉氏函数密度中包含有場量微商的例子. 我們选择核子与 π 介子相互作用的問題，并选择(6,63)作为相互作用拉氏函数密度. 可以按照标准的办法建立在海森堡表象中的理論，所推导得的哈密頓量密度可以分成二部分：一部分是自由核子場和自由介子場的哈密頓量密度，形式与 (6,59) 和 (3,152) 一样；另一部分是相互作用哈密頓量密度，它具有如下的形式：

$$^{(\text{海})}\mathscr{H}_I=i\frac{f}{m_\pi}{}^{(\text{海})}\bar{\Psi}\gamma_5\gamma_i\vec{\tau}\,{}^{(\text{海})}\Psi\frac{\partial^{(\text{海})}\vec{\varphi}}{\partial x_i}+\frac{f}{m_\pi}{}^{(\text{海})}\bar{\Psi}\gamma_5\gamma_4\vec{\tau}\,{}^{(\text{海})}\Psi\,{}^{(\text{海})}\vec{\pi}+$$
$$+\frac{f^2}{2m_\pi^2}{}^{(\text{海})}\bar{\Psi}\gamma_5\gamma_4\vec{\tau}\,{}^{(\text{海})}\Psi\,{}^{(\text{海})}\bar{\Psi}\gamma_5\gamma_4\vec{\tau}\,{}^{(\text{海})}\Psi, \tag{7,62}$$

其中 ${}^{(\text{海})}\vec{\pi}$ 的定义是：

$${}^{(\text{海})}\vec{\pi}=\frac{\partial^{(\text{海})}\vec{\varphi}}{\partial t}-\frac{f}{m_\pi}{}^{(\text{海})}\bar{\Psi}\gamma_5\gamma_4\vec{\tau}\,{}^{(\text{海})}\Psi. \tag{7,63}$$

对易关系的形式則和 (6,56) 完全一样. 不难看出，在相互作用表象引入以后，場量的运动方程和(7,28)与(7,29)完全一样，对易关

系也和(7,30)完全一样。假使 σ 是 t 等于常数的三维平面，那末波动方程就成为：

$$\left.\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}\{^{(\text{相互})}\sigma\rangle\} &= \int {}^{(\text{相互})}\mathscr{H}_I d\sigma\, {}^{(\text{相互})}|\sigma\rangle, \\ {}^{(\text{相互})}\mathscr{H}_I(x) &= i\frac{f}{m_\pi}{}^{(\text{相互})}\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\vec{\tau}{}^{(\text{相互})}\psi\frac{\partial^{(\text{相互})}\vec{\varphi}}{\partial x_\mu} + \\ &+\frac{f^2}{2m_\pi^2}{}^{(\text{相互})}\bar{\psi}\gamma_5\gamma_4\vec{\tau}{}^{(\text{相互})}\psi\,{}^{(\text{相互})}\bar{\psi}\gamma_5\gamma_4\vec{\tau}{}^{(\text{相互})}\psi, \end{aligned}\right\} \quad (7,64)$$

在这里我們应用了(7,28)中的第三式。显然，(7,64)中的 ${}^{(\text{相互})}\mathscr{H}_I$ 并不具有显示的洛仑兹不变的形式，但我們可以尝試将它扩充成为显示的洛仑兹不变性的表式。最簡单的扩充是：

$$\left.\begin{aligned} {}^{(\text{相互})}\mathscr{H}_I(x,\sigma) &= i\frac{f}{m_\pi}{}^{(\text{相互})}\bar{\psi}\gamma_5\gamma_4\vec{\tau}{}^{(\text{相互})}\psi\frac{\partial^{(\text{相互})}\vec{\varphi}}{\partial x_\mu} - \\ &-\frac{f^2}{2m_\pi^2}({}^{(\text{相互})}\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\vec{\tau}{}^{(\text{相互})}\bar{\psi}n_\mu)({}^{(\text{相互})}\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\nu\vec{\tau}{}^{(\text{相互})}\bar{\psi}n_\nu), \end{aligned}\right\} \quad (7,65)$$

其中 n_μ 代表和 $d\sigma_\mu$ 相平行的单位 4-矢量。可以看出，当 σ 是 t 等于常数的平面时，表式(7,65)就还原为(7,64)中第二式的表式。我們尝試将(7,64)中的第一式扩充为如下的波动方程：

$$i\frac{\delta}{\delta\sigma(x)}\{^{(\text{相互})}|\sigma\rangle\} = {}^{(\text{相互})}\mathscr{H}_I(x,\sigma)\,{}^{(\text{相互})}|\sigma\rangle; \quad (7,66)$$

方程(7,66)具有显示的洛仑兹不变形式。

要使方程(7,66)不自相矛盾并具有可积性，${}^{(\text{相互})}\mathscr{H}_I(x,\sigma)$ 必須满足条件(7,19)，亦即必須有：

$$\begin{aligned} [{}^{(\text{相互})}\mathscr{H}_I(x,\sigma), {}^{(\text{相互})}\mathscr{H}_I(x',\sigma)] &= i\frac{\delta}{\delta\sigma(x)}{}^{(\text{相互})}\mathscr{H}_I(x',\sigma) - \\ &- i\frac{\delta}{\delta\sigma(x')}{}^{(\text{相互})}\mathscr{H}_I(x,\sigma). \end{aligned} \quad (7,67)$$

我們首先有：

$$\begin{aligned} &[{}^{(\text{相互})}\mathscr{H}_I(x,\sigma), {}^{(\text{相互})}\mathscr{H}_I(x',\sigma)] = \\ &= -\frac{f^2}{m_\pi^2}\left[{}^{(\text{相互})}\bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma_\mu\vec{\tau}{}^{(\text{相互})}\psi(x)\frac{\partial^{(\text{相互})}\vec{\varphi}}{\partial x_\mu},\right. \end{aligned}$$

$$
{}^{(相互)}\bar{\Psi}(x')\gamma_5\gamma_\nu\vec{\tau}\,{}^{(相互)}\Psi(x')\frac{\partial^{(相互)}\vec{\varphi}}{\partial x'_\nu}\Big] -
$$

$$
-i\frac{f^3}{2m_\pi^2}\Big[{}^{(相互)}\bar{\Psi}(x)\gamma_5\gamma_\mu\vec{\tau}^{(相互)}\Psi(x)\,\frac{\partial^{(相互)}\vec{\varphi}}{\partial x_\mu},
$$

$$
{}^{(相互)}\bar{\Psi}(x')\gamma_5\gamma_\rho\vec{\tau}^{(相互)}\Psi(x')n_\rho(x')^{(相互)}\bar{\Psi}(x')\gamma_5\gamma_\sigma\vec{\tau}^{(相互)}\Psi(x')n_\sigma(x')\Big] -
$$

$$
-i\frac{f^3}{2m_\pi^2}\Big[{}^{(相互)}\bar{\Psi}(x)\gamma_5\gamma_\rho\vec{\tau}^{(相互)}\Psi(x)n_\rho(x)^{(相互)}\bar{\Psi}(x)\gamma_5\gamma_\sigma\vec{\tau}^{(相互)}\Psi(x)n_\sigma(x),
$$

$$
{}^{(相互)}\bar{\Psi}(x')\gamma_5\gamma_\mu\vec{\tau}\,{}^{(相互)}\Psi(x')\frac{\partial^{(相互)}\vec{\varphi}}{\partial x'_\mu}\Big] +
$$

$$
+\frac{f^4}{4m_\pi^4}\big[{}^{(相互)}\bar{\Psi}(x)\gamma_5\gamma_\mu\vec{\tau}^{(相互)}\Psi(x)n_\mu(x)^{(相互)}\bar{\Psi}\gamma_5\gamma_\nu\vec{\tau}\,{}^{(相互)}\Psi(x)n_\nu(x),
$$

$$
{}^{(相互)}\bar{\Psi}(x')\gamma_5\gamma_\rho\vec{\tau}^{(相互)}\Psi(x')n_\rho(x')\,{}^{(相互)}\bar{\Psi}(x')\gamma_5\gamma_\sigma\vec{\tau}\,{}^{(相互)}\Psi(x')n_\sigma(x')\big].
\tag{7,68}
$$

由于 x 和 x' 处于同一个空間性曲面上，因而只有当 x 无穷接近 x' 时，(7,68)才不等于零. 我們选择一个坐标系統，在其中 $n_\mu(x)$ 只有第四个分量不等于零. 那末在(7,68)中右方的第二、三、四項当展开以后，我們将发現它們都包含有一个因子 $\delta(\vec{x}-\vec{x}')$. 因此，这些項只有在 $x=x'$ 时才可能不等于零. 但是，在 $x=x'$ 的时候，第二項和第三項相互抵消，第四項等于零. 因此，留下来的就只有第一項了. 可以将第一項展开如下：

$$
-\frac{f^2}{m_\pi^2}\Big[{}^{(相互)}\bar{\Psi}(x)\gamma_5\gamma_j\vec{\tau}^{(相互)}\Psi(x)\frac{\partial^{(相互)}\vec{\varphi}}{\partial x_j},
$$

$$
{}^{(相互)}\bar{\Psi}(x')\gamma_5\gamma_k\vec{\tau}\,{}^{(相互)}\Psi(x')\frac{\partial^{(相互)}\vec{\varphi}}{\partial x'_k}\Big] +
$$

$$
+\frac{f^2}{m_\pi^2}\Big[{}^{(相互)}\bar{\Psi}(x)\gamma_5\gamma_4\vec{\tau}^{(相互)}\Psi(x)^{(相互)}\vec{\pi}(x),
$$

$$
{}^{(相互)}\bar{\Psi}(x')\gamma_5\gamma_4\vec{\tau}^{(相互)}\Psi(x')^{(相互)}\vec{\pi}(x')\Big] +
$$

$$
+\frac{if^3}{m_\pi^2}\Big[{}^{(相互)}\bar{\Psi}(x)\gamma_5\gamma_j\vec{\tau}^{(相互)}\Psi(x)\frac{\partial^{(相互)}\vec{\varphi}}{\partial x_j},
$$

$$
{}^{(相互)}\bar{\Psi}(x')\gamma_5\gamma_4\vec{\tau}^{(相互)}\Psi(x')^{(相互)}\vec{\pi}(x')\Big] +
$$

$$+\frac{if^2}{m_\pi^2}\Big[{}^{(相互)}\bar{\Psi}(x)\gamma_5\gamma_4\vec{\tau}\,{}^{(相互)}\Psi(x)\,{}^{(相互)}\vec{\varphi}(x),$$

$${}^{(相互)}\bar{\Psi}(x')\gamma_5\gamma_j\vec{\tau}\,{}^{(相互)}\Psi(x')\frac{\partial^{(相互)}\vec{\varphi}}{\partial x_j'}\Big]. \qquad (7,69)$$

(7,69)中第一項和第二項都包含有一个因子 $\delta(\vec{x}-\vec{x}')$，因此都等于零．在(7,69)的第三項和第四項中，包含有 $\delta(\vec{x}-\vec{x}')$ 的部分都相互抵消，只留下了包含有 $\delta(\vec{x}-\vec{x}')$ 的微商作为因子的部分．因此我們有：

$$[{}^{(相互)}\mathscr{H}_i(x,\sigma),{}^{(相互)}\mathscr{H}_i(x',\sigma)]=$$

$$=-\frac{f^2}{m_\pi^2}{}^{(相互)}\bar{\Psi}(x)\gamma_5\gamma_j\vec{\tau}\,{}^{(相互)}\Psi(x)\times$$

$$\times{}^{(相互)}\bar{\Psi}(x')\gamma_5\gamma_4\vec{\tau}\,{}^{(相互)}\Psi(x')\frac{\partial}{\partial x_j}\delta(\vec{x}-\vec{x}')-$$

$$-\frac{f^2}{m_\pi^2}{}^{(相互)}\bar{\Psi}(x)\gamma_5\gamma_4\vec{\tau}\,{}^{(相互)}\Psi(x)\times$$

$$\times{}^{(相互)}\bar{\Psi}(x')\gamma_5\gamma_j\vec{\tau}\,{}^{(相互)}\Psi(x')\frac{\partial}{\partial x_j}\delta(\vec{x}-\vec{x}'). \qquad (7,70)$$

另一方面，我們可以証明

$$n_\mu(x)n_\nu(x)=-\int\frac{\partial}{\partial x_\nu}\Delta_{m_\pi}(x-x')d\sigma_\mu(x'). \qquad (7,71)$$

(7,71)式的二方都是二級张量，因此只要在一个特定的坐标系中証明(7,71)成立，便已足够．我們选择一个坐标系，使 σ 在 x 点的法綫与时間坐标平行．那末就有：$n_\mu(x)=-i\delta_{4\mu}$，亦即

$$n_\mu(x)n_\nu(x)=-\delta_{4\mu}\delta_{4\nu}. \qquad (7,72)$$

此外，可以根据(3,76)証明，在这一坐标系中有：

$$-\int\frac{\partial}{\partial x_\nu}\Delta_{m_\pi}(x-x')d\sigma_\mu(x')=-\delta_{4\mu}\delta_{4\nu}. \qquad (7,73)$$

从(7,71)可以得：

$$\frac{\delta}{\delta\sigma(x')}(u_\mu(x)u_\nu(x))=\frac{\partial^2}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}\cdot\Delta_{m_\pi}(x-x'); \qquad (7,74)$$

在我們所选定的坐标系中，这就等于：

$$i\,\delta_{4\mu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\delta(\vec{x}-\vec{x}')+i\,\delta_{4\nu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\delta(\vec{x}-\vec{x}'); \qquad (7,75)$$

因此有：

$$\begin{aligned}
&i\frac{\delta}{\delta\sigma(x)}{}^{(\text{相互})}\mathscr{H}_i(x',\sigma)-i\frac{\delta}{\delta\sigma(x')}{}^{(\text{相互})}\mathscr{H}_i(x,\sigma)=\\
&=-\frac{f^2}{2m_\pi^2}\{{}^{(\text{相互})}\bar{\Psi}(x')\gamma_5\gamma_i\vec{\tau}{}^{(\text{相互})}\Psi(x'),\\
&\quad{}^{(\text{相互})}\bar{\Psi}(x')\gamma_5\gamma_4\vec{\tau}{}^{(\text{相互})}\Psi(x')\}\frac{\partial}{\partial x_i}\delta(\vec{x}-\vec{x}')-\\
&-\frac{f^2}{2m_\pi^2}\{{}^{(\text{相互})}\bar{\Psi}(x)\gamma_5\gamma_i\vec{\tau}{}^{(\text{相互})}\Psi(x),\\
&\quad{}^{(\text{相互})}\bar{\Psi}(x)\gamma_5\gamma_4\vec{\tau}{}^{(\text{相互})}\Psi(x)\}\frac{\partial}{\partial x_i}\delta(\vec{x}-\vec{x}'). \qquad (7,76)
\end{aligned}$$

不难証明，(7,70)和(7,76)的右方完全相等。可以将(7,70)改写为：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}[{}^{(\text{相互})}\mathscr{H}_i(x,\sigma),{}^{(\text{相互})}\mathscr{H}_i(x',\sigma)]-\\
&\quad-\frac{1}{2}[{}^{(\text{相互})}\mathscr{H}_i(x',\sigma),{}^{(\text{相互})}\mathscr{H}_i(x,\sigma)]=\\
&=-\frac{f^2}{2m_\pi^2}\{{}^{(\text{相互})}\bar{\Psi}(x)\gamma_5\gamma_i\vec{\tau}{}^{(\text{相互})}\Psi(x),\\
&\quad{}^{(\text{相互})}\bar{\Psi}(x')\gamma_5\gamma_4\vec{\tau}{}^{(\text{相互})}\Psi(x')\}\frac{\partial}{\partial x_i}\delta(\vec{x}-\vec{x}')-\\
&-\frac{f^2}{2m_\pi^2}\{{}^{(\text{相互})}\bar{\Psi}(x)\gamma_5\gamma_4\vec{\tau}{}^{(\text{相互})}\Psi(x),\\
&\quad{}^{(\text{相互})}\bar{\Psi}(x')\gamma_5\gamma_i\vec{\tau}{}^{(\text{相互})}\Psi(x')\}\frac{\partial}{\partial x_i}\delta(\vec{x}-\vec{x}'). \qquad (7,77)
\end{aligned}$$

将(7,76)和(7,77)都对 $d\vec{x}$ 或都对 $d\vec{x}'$ 积分，就可以看出，这二个表式是完全相等的。这就証明了波动方程(7,66)的可积性。

运动方程(7,29)、波动方程(7,66)和对易关系(7,30)是当相互作用拉氏函数密度是(6,63)时，核子与 π 介子在相互作用表象中的相互作用理論。

可以指出，相互作用表象的理論也就是狄拉克、福克和普陀尔

斯基［Dirac, Fock and Podolsky, 1932］所提出的多时理論形式的扩充。

參 考 文 献

Dirac, P. A. M., Fock, W. A. and Podolsky, B. (1932), *Phys. Zs. Sowjetunion*, 2, 468.

Schwinger, J. (1948), *Phys. Rev.*, 74, 1439.

Tomonaga, S. (1946), *Prog. Theor. Phys.*, 1, 27.

第八章　散射矩陣和微扰論

§8,1. 散射矩陣

在相互作用表象中，場量服从自由場的运动方程和对易关系．关于自由量子場的理論我們已經在第三、四、五各章中比較詳細地討論过了，并且求出了自由电磁場、自旋为零和自旋为 1/2 的粒子的自由場的場量的显示的矩陣表式．相互作用表象中的量子場論的进一步工作是求解波动方程．为了书写方便起見，我們在以后将略去标志相互作用表象的标符(相互)．那末，在相互作用表象中的波动方程就具有如下的形式：

$$i\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle = H_i(t)|t\rangle, \tag{8,1}$$

其中 $|t\rangle$ 为时間 t 时的波函数．設在时間 t_0 时的波函数是 $|t_0\rangle$，那末在时間 t 的波函数可以写作：

$$|t\rangle = u(t, t_0)|t_0\rangle, \tag{8,2}$$

其中 $u(t, t_0)$ 滿足如下的方程：

$$i\frac{\partial}{\partial t}u(t, t_0) = H_i(t)\,u(t, t_0), \tag{8,3}$$

并滿足如下的初始条件：

$$u(t_0, t_0) = 1. \tag{8,4}$$

不难証明，作用在波函数上的矩陣 $u(t, t_0)$ 是么正矩陣．$u^*(t, t_0)$ 滿足与(8,3)相厄米共軛的方程：

$$-i\frac{\partial}{\partial t}u^*(t, t_0) = u^*(t, t_0)H_i(t). \tag{8,5}$$

从(8,3)和(8,5)可以得：

$$\frac{\partial}{\partial t}\{u^*(t, t_0)u(t, t_0)\} = 0; \tag{8,6}$$

考虑到初始条件(8,4),就得:

$$u^*(t, t_0)u(t, t_0) = 1. \tag{8,7}$$

在另一方面,必須有:

$$u(t, t_0)u(t_0, t_1) = u(t, t_1); \tag{8,8}$$

在 $t_1 = t$ 时,就有:

$$u(t, t_0)u(t_0, t) = 1. \tag{8,9}$$

利用(8,7),可得:

$$u(t_0, t) = u^*(t, t_0); \tag{8,10}$$

因此得:

$$u(t, t_0)u^*(t, t_0) = 1; \tag{8,11}$$

这就証明了 $u(t, t_0)$ 是么正矩陣,保証了几率守恆.

我們称矩陣

$$S \equiv u(\infty, -\infty) \tag{8,12}$$

为散射矩陣, 亦簡写作 S-矩陣. 假使在 $t = -\infty$ 时波函数是 $1\rangle_i$, 那末在 $t = \infty$ 时,波函数中包含 $1\rangle_f$ 的波幅就是

$$f\langle|S|\rangle_i. \tag{8,13}$$

§ 8,2. 微扰論

我們可以将公式(8,8)加以扩充成为:

$$u(t_n, t_0) = u(t_n, t_{n-1})u(t_{n-1}, t_{n-2})\cdots u(t_2, t_1)u(t_1, t_0). \tag{8,14}$$

假使 t_{m+1} 接近 t_m,那末根据(8,3)可以得:

$$u(t_{m+1}, t_m) \cong 1 - i\int_{t_m}^{t_{m+1}} H_i(t)\,dt. \tag{8,15}$$

当 t_{m+1} 无限地趋近 t_m 时,(8,15)式的誤差就趋于无穷小. 因此(8,14)可以写作:

$$u(t_n, t_0) \cong \prod_{m=0}^{n-1}\left(1 - i\int_{t_m}^{t_{m+1}} H_i(t)\,dt\right); \tag{8,16}$$

在 (8,16) 中右方各因子的次序按时間的次序 $t_{n-1}, t_{n-2}, t_{n-3}, \cdots t_2, t_1, t_0$ 自左向右排列. 假使我們将时間分割为无穷小的間隔,使

t_{m+1} 无限地趋近于 t_m，并使(8,16)成为无穷多因子的乘积，那末(8,16)式的誤差就趋于无穷小．可以将(8,16)展开如下：

$$u(t_n, t_0) \cong 1 - i\sum_{m=0}^{n-1}\int_{t_m}^{t_{m+1}} H_i(t)\,dt +$$

$$+ (-i)^2\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{m'=0}^{m-1}\int_{t_m}^{t_{m+1}} H_i(t)\,dt\int_{t_{m'}}^{t_{m'+1}} H_i(t')\,dt' +$$

$$+ (-i)^3\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{m'=0}^{m-1}\sum_{m''=0}^{m'-1}\int_{t_m}^{t_{m+1}} H_i(t)\,dt \times$$

$$\times\int_{t_{m'}}^{t_{m'+1}} H_i(t')\,dt'\int_{t_{m''}}^{t_{m''+1}} H_i(t'')\,dt'' + \cdots. \qquad (8,17)$$

在时間分割的間隔趋于无穷小时，(8,17)式的誤差就趋于零．我們得：

$$u(t', t) = \sum_{n=0}^{\infty} u^{(n)}(t', t), \qquad (8,18)$$

其中

$$\left.\begin{aligned} u^{(0)}(t', t) &= 1, \\ u^{(n)}(t', t) &= (-i)^n\int_t^{t'} dt_n\int_t^{t_n} dt_{n-1}\cdots\times \\ &\quad\times\int_t^{t_2} dt_1\, H_i(t_n)\, H_i(t_{n-1})\cdots H_i(t_1). \end{aligned}\right\} \qquad (8,19)$$

从(8,19)中的积分的上限可以看出：

$$t_n > t_{n-1} > \cdots > t_2 > t_1. \qquad (8,20)$$

我們可以将 $u^{(n)}(t', t)$ 改写为如下的形式：

$$u^{(n)}(t', t) = \frac{(-i)^n}{n!}\int_t^{t'} dt_n\int_t^{t'} dt_{n-1}\cdots\times$$

$$\times\int_t^{t'} dt_1\,\mathrm{T}\{H_i(t_n)\,H_i(t_{n-1})\cdots H_i(t_1)\}. \qquad (8,21)$$

上式中的 T 代表一个算符，叫做"編时算符"．編时算符的作用如下：設 U，V，W，$\cdots$ 是一系列的算符，都是时間的函数．那末

$$\mathrm{T}(UVW\cdots Z) = \delta_P U'V'W'\cdots Z'. \qquad (8,22)$$

其中右方的 $U'V'W'\cdots Z'$ 的算符因子和 $UVW\cdots Z$ 中的各因子一样，而在 $U'V'W'\cdots Z'$ 中算符的次序是按时間的先后由右向左排列．假使要将 $UVW\cdots Z$ 改排成 $U'V'W'\cdots Z'$，需要将費米子的算符交換的次数是偶数，δ_P 就等于 1；假使需要将費米子算符交換的次数是奇数，那末 $\delta_P=-1$．从第七章的討論中可以看出，所有的 H_i 都包含有偶数个費米子場的算符；因此在(8,21)中，T 作用以后出現的 δ_P 一定等于 1．在(8,21)式中，积分的上限都是 t'，这与(8,19)式中的积分上限不同．对于(8,21)式說来，条件(8,20)不再存在：t_{m+1} 可以大于 t_m，也可以小于 t_m．因此，(8,21)式中的积分区域要比 (8,19) 式中的积分区域大 $n!$ 倍．这就說明了为什么在(8,21)式右方的积分号前面会出現一个因子 $\frac{1}{n!}$．

考虑到

$$H_i(t)=\int \mathscr{H}_i(x)\,d\tilde{x}, \tag{8,22}$$

可以将表式(8,21)写作：

$$S^{(n)}(t',t)=\frac{(-i)^n}{n!}\int_t^{t'}d^4x_n\int_t^{t'}d^4x_{n-1}\cdot\quad\times$$

$$\times\int_t^{t'}d^4x_1\,\mathrm{T}\{\mathscr{H}_i(x_n)\mathscr{H}_i(x_{n-1})\cdots\mathscr{H}_i(x_1)\}. \tag{8,23}$$

(8,18)和(8,23)就是量子場論中的微扰論；它是方程 (8,3) 按相互作用哈密頓量密度的冪展开的无穷級数解．假使相互作用不強，那末，有可能只要取这一級数的最前面几項，就能得到相当好的近似解．

令 $t=-\infty$，$t'=\infty$，我們就得到 S 矩陣的无穷級数展开式：

$$\left.\begin{aligned}S&=\sum_{n=0}^{\infty}S^{(n)}\\ S^{(0)}&=1\\ S^{(n)}&=\frac{(-i)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}d^4x_n\int_{-\infty}^{\infty}d^4x_{n-1}\cdots\times\\ &\quad\times\int_{-\infty}^{\infty}d^4x_1\,\mathrm{T}\{\mathscr{H}_i(x_n)\mathscr{H}_i(x_{n-1})\cdots\mathscr{H}_i(x_1)\}.\end{aligned}\right\} \tag{8,24}$$

(8,24)具有显示的洛仑兹不变形式.

§ 8,3. 散射矩陣的簡化

在通常情况下，$\mathscr{H}_I(x)$ 是一些場量的乘积. 例如:在輕子与电磁場相互作用时,有

$$\mathscr{H}_I(x) = -A_\mu J_\mu = -\frac{ie}{2}\{\bar{\psi}\hat{A}\psi - \tilde{\psi}\hat{A}\tilde{\psi}\}; \qquad (8,25)$$

在核子与π介子通过拉氏函数密度 (6,53) 及 (6,54) 相互作用时，有:

$$\mathscr{H}_I(x) = ig\bar{\Psi}\gamma_5\vec{\tau}\Psi\cdot\vec{\varphi}. \qquad (8,26)$$

每一个場量是一系列粒子的产生算符与消灭算符之和. 例如，可以将輕子的場量写作:

$$\left.\begin{aligned}\psi(x) &= U(x) + \bar{V}(x) = \sum_\zeta \{a_\zeta\psi_\zeta^{(+)} + b_\zeta^*\psi_\zeta^{(-)}\},\\ \bar{\psi}(x) &= \bar{U}(x) + V(x) = \sum_\zeta \{a_\zeta^*\bar{\psi}_\zeta^{(+)} + b_\zeta\bar{\psi}_\zeta^{(-)}\},\end{aligned}\right\} \qquad (8,27)$$

其中 $\psi_\zeta^{(+)}$ 代表各正能級的波函数，$\psi_\zeta^{(-)}$ 代表各负能級的波函数; ζ 按所有的正能級或负能級求和. $U(x)$ 和 $\bar{V}(x)$ 各代表 $\psi(x)$ 中粒子的消失部分和反粒子的产生部分; $\bar{U}(x)$ 和 $V(x)$ 則各代表 $\bar{\psi}(x)$ 中粒子的产生部分和反粒子的消失部分. 又如可以将电磁場的 4-矢势写作:

$$A_\mu(x) = W_\mu(x) + \bar{W}_\mu(x) = \sum_{\vec{k}} \frac{e_{\nu\mu}(\vec{k})}{\sqrt{2\omega}}\cdot\{c_{\nu\vec{k}}e^{ikx} + c_{\nu\vec{k}}^*e^{-ikx}\}, \qquad (8,28)$$

其中 $W_\mu(x)$ 代表 $A_\mu(x)$ 中光子的消失部分，$\bar{W}(x)$ 則代表 $A_\mu(x)$ 中光子的产生部分. 因此,假使将 $\mathscr{H}_I(x)$ 展开,就得到一系列的项,每一项的作用都是一些粒子的产生和消失. 与此相应，$S^{(n)}$ 也可以分解为一系列的項，每一項所反映的物理上的作用就是消失若干粒子和产生若干粒子. 換句話說，每一項都反映了一定的粒子轉化現象或一定的粒子碰撞現象.

通常可以用如下的波函数

$$a^*b^*c^*\cdots d^*|\rangle_0 \tag{8,29}$$

来代表存在着某些粒子的状态。其中$|\rangle_0$代表沒有任何粒子存在的眞空状态的波函数；a^*、b^*、$c^*\cdots d^*$則代表这些粒子的产生算符。假使在$t=-\infty$时，波函数是(8,29)，那末在$t=\infty$时波函数就是：

$$Sa^*b^*c^*\cdots d^*|\rangle_0, \tag{8,30}$$

其中属于某一态

$$e^*f^*\cdots g^*|\rangle_0 \tag{8,31}$$

的波幅是：

$${}_0\langle g\cdots feSa^*b^*c^*\cdots d^*|\rangle_0. \tag{8,32}$$

如前所述，S可以分解为一系列的項，但是并不是每一項都能对(8,32)作出貢献的。只有那些一方面具有消失算符$a, b, c, \cdots d$，另一方面又具有产生算符$e^*, f^*, \cdots g^*$作为因子的各項才有可能对(8,32)作出貢献。因此，为了計算方便，最好能将S矩陣(8,24)的形式加以变換，写成新的形式。方法是利用算符的对易关系，将S矩陣中各算符的地位調动，使新形式的S矩陣中所有代表粒子消失的算符都排在右端，所有代表粒子产生的算符都排在左端。这样所得到的新形式使我們一眼就可看出，在S矩陣中究竟有那些項对于(8,32)有貢献，那些項并不作出貢献。于是，就可能使各种物理过程的討論簡化。

§8,4. 正規乘积

为了将S矩陣改写为如上所述的新形式，維克 [Wick, 1950] 創造了一套簡便的方法。首先，他引进了"正規乘积"这一概念。"正規乘积"的定义如下：

設$U, V, W, \cdots Z$是一系列的产生算符和消失算符，以符号$\mathsf{N}(UVW\cdots Z)$代表它們的正規乘积，那末N的定义就是：

$$\mathsf{N}(UVW\cdots Z)=\delta_P U'V'W'\cdots Z'. \tag{8,33}$$

上式右方的$U'V'W'\cdots Z'$是左方的算符$UVW\cdots Z$按一定次序的排列。在$U'V'W'\cdots Z'$中，所有的消失算符都排在所有的

产生算符的右面. 假使将 $UVW\cdots Z$ 重排成 $U'V'W'\cdots Z'$ 时，需要将其中费米子算符交换的次数是偶数，那末 δ_P 就等于 1；假使需要将其中费米子算符交换的次数是奇数，那末 $\delta_P=-1$.

假使 $U, V, W, \cdots, Z$ 中，每一个因子都是一系列的产生算符和消灭算符之和，那末 $\mathrm{N}(UVW\cdots Z)$ 就等于乘积 $UVW\cdots Z$ 分解为一系列的简单项之后所有各项的正规乘积之和. 例如：

$$\mathrm{N}(U\cdots V\phi W\cdots Z)=\mathrm{N}(U\cdots VuW\cdots Z)+ +\mathrm{N}(U\cdots V\bar{v}W\cdots Z). \tag{8,34}$$

又例如：

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{N}(\psi(x)\bar{\psi}(y))&=\mathrm{N}(u(x)\bar{u}(y))+\mathrm{N}(u(x)v(y))+\\&+\mathrm{N}(\bar{v}(x)\bar{u}(y))+\mathrm{N}(\bar{v}(x)v(y))=\\&=-\bar{u}(y)u(x)+u(x)v(y)+\\&+\bar{v}(x)\bar{u}(y)+\bar{v}(x)v(y)\\\mathrm{N}(\bar{\psi}(y)\psi(x))&=\mathrm{N}(\bar{u}(y)u(x))+\mathrm{N}(v(y)u(x))+\\&+\mathrm{N}(\bar{u}(y)\bar{v}(x))+\mathrm{N}(v(y)\bar{v}(x))=\\&=\bar{u}(y)u(x)+v(y)u(x)+\\&+\bar{u}(y)\bar{v}(x)-\bar{v}(x)v(y).\end{aligned}\right\}\tag{8,35}$$

不难看出：

$$\mathrm{N}(\bar{\psi}(y)\psi(x))+\mathrm{N}(\psi(x)\bar{\psi}(y))=0. \tag{8,36}$$

可以很容易証明：

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{N}(\psi(x)\psi(y))&=\psi(x)\psi(y),\\\mathrm{N}(\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(y))&=\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(y).\end{aligned}\right\}\tag{8,37}$$

于是可以将(6,19)中的电流—电荷密度的表式写作：

$$J_\mu=ie(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\mathrm{N}(\bar{\psi}_\alpha\psi_\beta)=ie\,\mathrm{N}(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi). \tag{8,38}$$

根据(6,19)，有：

$$\begin{aligned}J_\mu&=\frac{ie}{2}(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\{[v(x)+\bar{u}(x)]_\alpha[\bar{v}(x)+u(x)]_\beta-\\&\quad-[\bar{v}(x)+u(x)]_\beta[v(x)+\bar{u}(x)]_\alpha\}=\\&=\frac{ie}{2}(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\{v_\alpha(x)\bar{v}_\beta(x)+v_\alpha(x)u_\beta(x)+\bar{u}_\alpha(x)\bar{v}_\beta(x)+\end{aligned}$$

$$+\bar{u}_\alpha(x)u_\beta(x)-\bar{v}_\beta(x)v_\alpha(x)-u_\beta(x)v_\alpha(x)-$$
$$-\bar{v}_\beta(x)\bar{u}_\alpha(x)-u_\beta(x)\bar{u}_\alpha(x)\}=$$
$$=\frac{ie}{2}(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\{2\mathrm{N}(\bar{\psi}_\alpha\psi_\beta)+\{v_\alpha(x),\bar{v}_\beta(x)\}-\{u_\beta(x)\bar{u}_\alpha(x)\}\}. \tag{8,39}$$

利用对易关系(5,113)，可以得：

$$\left.\begin{aligned}(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\{u_\beta(x),\bar{u}_\alpha(x)\}&=\sum_\zeta\bar{\psi}_\zeta^{(+)}(x)\gamma_\mu\psi_\zeta^{(+)}(x),\\(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\{v_\alpha(x),\bar{v}_\beta(x)\}&=\sum_\zeta\bar{\psi}_\zeta^{(-)}(x)\gamma_\mu\psi_\zeta^{(-)}(x).\end{aligned}\right\}\tag{8,40}$$

考虑到正能級的正反粒子共軛变換波函数也就是負能級的波函数，利用(5,81)和(5,82)可以得：

$$\sum_\zeta\bar{\psi}_\zeta^{(-)}(x)\gamma_\mu\psi_\zeta^{(-)}(x)=\sum_{\zeta'}\tilde{\psi}_{\zeta'}^{(+)}(x)[\widetilde{C^{-1}}]\gamma_\mu C[\tilde{\psi}_{\zeta'}^{(+)}(x)]=$$
$$=\sum_{\zeta'}\bar{\psi}_{\zeta'}^{(+)}(x)\tilde{C}\tilde{\gamma}_\mu C^{-1}\psi_{\zeta'}^{(+)}(x)=\sum_{\zeta'}\bar{\psi}_{\zeta'}^{(+)}(x)\gamma_\mu\psi_{\zeta'}^{(+)}(x). \tag{8,41}$$

这就証明了等式(8,38)．因此，可以將輕子与电磁場之間的相互作用哈密頓量密度写作：

$$\mathscr{H}_i=-ie\mathrm{N}(\bar{\psi}\hat{A}\psi), \tag{8,42}$$

在这里我們曾考虑到光子的消失和产生算符可以与輕子的消失和产生算符相互对易．

可以証明：

$$\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)=\mathrm{N}(\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)); \tag{8,43}$$

因为，將 $\bar{\psi}$ 和 ψ 展开以后，就得到：

$$\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)=\mathrm{N}(\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x))+(\gamma_5)_{\alpha\beta}\{v_\alpha(x)\bar{v}_\beta(x)\}, \tag{8,44}$$

利用对易关系(5,113)，可以得：

$$(\gamma_5)_{\alpha\beta}\{v_\alpha(x)\bar{v}_\beta(x)\}=\sum_\zeta\bar{\psi}_\zeta^{(-)}(x)\gamma_5\psi_\zeta^{(-)}(x), \tag{8,45}$$

再利用(5,19)中 $\psi_\zeta^{(-)}(x)$ 的表式就立即得到(8,45)式等于零．不难証明，可以將 §7,3 中討論的核子与 π 介子之間的相互作用哈密頓量密度写作：

$$\mathscr{H}_i=ig\mathrm{N}(\bar{\Psi}\tau\gamma_5\Psi\cdot\vec{\varphi}). \tag{8,46}$$

并且也可以証明，可以将費曼和盖尔曼所提出的描述 β 衰变的相互作用哈密頓量密度写作：

$$\mathscr{H}_I = \frac{G}{\sqrt{2}}\mathsf{N}(\bar{\psi}_P\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_N\bar{\psi}_e\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_\nu) + \\ + \frac{G}{\sqrt{2}}\mathsf{N}(\bar{\psi}_\nu\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_e\bar{\psi}_N\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_P). \quad (8,47)$$

不难看出，在正規乘积的符号 $\mathsf{N}(\cdots)$ 内部，所有的費米子算符都可以反对易，所有的鮑色子算符都可以相互对易. 設乘积 $ABC\cdots D$ 中的各因子和乘积 $A'B'C'\cdots D'$ 中的因子完全一样，則有：

$$\mathsf{N}(A'B'C'\cdots D') = \delta_P\mathsf{N}(ABC\cdots D), \quad (8,48)$$

其中 $\delta_P = 1$，假使将 $ABC\cdots D$ 中的因子調动排成 $A'B'C'\cdots D'$ 时所需要交換費米子算符的次数是偶数的話；$\delta_P = -1$，假使需要交換費米子算符的次数是奇数的話.

同样地可以看出，在編时乘积的符号 $\mathsf{T}(\cdots)$ 内部，所有的費米子算符都可以相互反对易，所有的鮑色子算符都可以相互对易，即

$$\mathsf{T}(A'B'C'\cdots D') = \delta_P\mathsf{T}(ABC\cdots D). \quad (8,49)$$

簡化 S 矩陣的过程，就是将 (8,24) 式中的編时乘积改变为正規乘积的过程. 因此，必須討論：如何将編时乘积改写成为正規乘积.

§ 8,5. 維克的二条定理

我們先来討論最簡单的情况. 設 U 和 V 是两个算符. 我們称 $\mathsf{T}(UV)$ 和 $\mathsf{N}(UV)$ 之差为"算符 U 和 V 的收縮"，并以符号 $U^{\cdot}V^{\cdot}$ 表示. 亦即

$$\mathsf{T}(UV) = \mathsf{N}(UV) + U^{\cdot}V^{\cdot}. \quad (8,50)$$

以輕子場量为例. 利用輕子場量之間的对易关系，很容易証明：

$$\left.\begin{aligned}\mathsf{T}(\psi(x)\psi(y)) &= \psi(x)\psi(y),\\ \mathsf{T}(\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(y)) &= \bar{\psi}(x)\bar{\psi}(y);\end{aligned}\right\} \quad (8,51)$$

于是，利用(8,37)和(8,51)，就得：

$$\left.\begin{aligned}\psi^{\cdot}(x)\psi^{\cdot}(y) &= 0,\\ \bar{\psi}^{\cdot}(x)\bar{\psi}^{\cdot}(y) &= 0.\end{aligned}\right\} \tag{8,52}$$

为了寻求 $\psi_\alpha^{\cdot}(x)\bar{\psi}_\beta^{\cdot}(y)$ 的表式，我們注意到，当 $x_0 > y_0$ 时

$$\begin{aligned}\mathrm{T}(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)) &= u_\alpha(x)\bar{u}_\beta(y) + u_\alpha(x)v_\beta(y) +\\ &+ \bar{v}_\alpha(x)\bar{u}_\beta(y) + \bar{v}_\alpha(x)v_\beta(y).\end{aligned} \tag{8,53}$$

从(8,35)和(8,53)，可得：

$$\psi_\alpha^{\cdot}(x)\bar{\psi}_\beta^{\cdot}(y) = \{u_\alpha(x), \bar{u}_\beta(y)\}, \quad x_0 > y_0. \tag{8,54}$$

同样，可以証明，当 $y_0 > x_0$ 时

$$\begin{aligned}\mathrm{T}(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)) &= -\bar{u}_\beta(y)u_\alpha(x) -\\ &- \bar{u}_\beta(y)\bar{v}_\alpha(x) - v_\beta(y)u_\alpha(x) - v_\beta(y)\bar{v}_\alpha(x).\end{aligned} \tag{8,55}$$

从(8,35)和(8,55)可以得：

$$\psi_\alpha^{\cdot}(x)\bar{\psi}_\beta^{\cdot}(y) = -\{v_\beta(y), \bar{v}_\alpha(x)\}. \tag{8,56}$$

我們引进函数 $S_{f,\alpha\beta}(x-y)$，它的定义是：

$$\psi_\alpha^{\cdot}(x)\bar{\psi}_\beta^{\cdot}(y) = -\frac{1}{2}S_{f,\alpha\beta}(x-y), \tag{8,57}$$

那末就有：

$$\left.\begin{aligned}S_{f,\alpha\beta}(x-y) &= -2\{u_\alpha(x), \bar{u}_\beta(y)\}, \quad x_0 > y_0;\\ S_{f,\alpha\beta}(x-y) &= 2\{v_\beta(y), \bar{v}_\alpha(x)\}, \quad x_0 < y_0.\end{aligned}\right\} \tag{8,58}$$

不难証明：

$$\bar{\psi}_\alpha^{\cdot}(x)\psi_\beta^{\cdot}(y) = -\psi_\beta^{\cdot}(y)\bar{\psi}_\alpha^{\cdot}(x) = \frac{1}{2}S_{f,\beta\alpha}(y-x). \tag{8,59}$$

再以电磁場为例，可以証明：

$$A_\mu^{\cdot}(x)A_\nu^{\cdot}(y) = \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}D_f(x-y), \tag{8,60}$$

其中 $D_f(x-y)$ 的定义是：

$$\left.\begin{aligned}\delta_{\mu\nu}D_f(x-y) &= 2[W_\mu(x), \overline{W}_\nu(y)], \quad x_0 > y_0;\\ \delta_{\mu\nu}D_f(x-y) &= 2[W_\nu(y), \overline{W}_\mu(x)], \quad x_0 < y_0.\end{aligned}\right\} \tag{8,61}$$

$W_\mu(x)$ 和 $\overline{W}_\mu(x)$ 的定义見(8,28)。

再以 π 介子場为例，可以証明：

$$\varphi_i^{\cdot}(x)\varphi_k^{\cdot}(y) = \frac{1}{2}\delta_{ik}\Delta_f(x-y), \tag{8,62}$$

其中 $\Delta_f(x-y)$ 的定义是：

$$\left.\begin{aligned}\delta_{jk}\Delta_f(x-y) &= 2[Z_j(x), \bar{Z}_k(y)], \quad x_0 > y_0;\\ \delta_{jk}\Delta_f(x-y) &= 2[Z_k(y), \bar{Z}_j(x)], \quad x_0 < y_0.\end{aligned}\right\} \tag{8,63}$$

$Z_j(x)$ 和 $\bar{Z}_j(x)$ 的定义是：

$$\varphi_j(x) = Z_j(x) + \bar{Z}_j(x) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\{d_k^{(j)}e^{ikx} + d_k^{*(j)}e^{-ikx}\}; \tag{8,64}$$

$Z_j(x)$ 代表 $\varphi_j(x)$ 中的 π 介子消灭部分，$\bar{Z}_j(x)$ 代表 $\varphi_j(x)$ 中的 π 介子产生部分。

不难証明，不同場的場量的收縮等于零。例如：

$$\left.\begin{aligned}A_\mu^+(x)\phi_\alpha^+(y) &= 0,\\ A_\mu^+(x)\bar{\psi}_\beta^+(y) &= 0,\\ \varphi_j^+(x)\Psi_\alpha^+(y) &= 0,\\ \varphi_j^+(x)\bar{\Psi}_\beta^+(y) &= 0.\end{aligned}\right\} \tag{8,65}$$

为了便于討論二个以上的算符的編时乘积和正規乘积之間的关系，我們引进正規乘积內部算符收縮的概念和定义。我們以符号 $\mathsf{N}(UV^\cdot W^\cdot X\cdots Z)$ 代表正規乘积內有一对算符 V 和 W 收縮。它的定义是：

$$\mathsf{N}(UV^\cdot W^\cdot X\cdots Z) = (V^\cdot W^\cdot)\mathsf{N}(UX\cdots Z). \tag{8,66}$$

在正規乘积內部不是邻近的算符也可以收縮。它的定义是：

$$\mathsf{N}(UV^\cdot WX\cdots YZ^\cdot) = \delta_P\mathsf{N}(UV^\cdot Z^\cdot WX\cdots Y) = \\ = \delta_P(V^\cdot Z^\cdot)\mathsf{N}(UWX\cdots Y). \tag{8,67}$$

假使将在正規乘积內部不相邻近的应該收縮的算符調动使他們排在邻近时，需要将費米子算符交換的次数是偶数，則 $\delta_P = 1$；假使需要将費米子算符交換的次数是奇数，那末 $\delta_P = -1$。在正規乘积內部可以有一对以上的算符收縮。当然，我們应該以不同的符号将各对收縮的算符标志出来。例如：我們可以用一个点"·"标志一对算符，用二个点"··"标志另一对算符，用三个点"···"标志又另一对算符。那末，在正規乘积中有一对以上的算符收縮的定义如下：

$$\mathbf{N}(U^{\cdot}V^{\cdot\cdot}RS^{\cdot\cdot}W^{\cdot\cdot\cdot}\cdots X^{\cdot}Y\cdots K^{\cdot\cdot\cdot}Z) =$$
$$= \delta_P\mathbf{N}(U^{\cdot}X^{\cdot}V^{\cdot\cdot}S^{\cdot\cdot}RW^{\cdot\cdot\cdot}K^{\cdot\cdot\cdot}\cdots Y\cdots Z) =$$
$$= \delta_P(U^{\cdot}X^{\cdot})(V^{\cdot\cdot}S^{\cdot\cdot})(W^{\cdot\cdot\cdot}K^{\cdot\cdot\cdot})\mathbf{N}(R\cdots Y\cdots Z). \quad (8,68)$$

在将各对应該收縮的算符調动使各对算符排在邻近时，假使需要将費米子算符交換的次数是偶数，則 $\delta_P = 1$；假使需要將費米子算符交換的次数是奇数，那末 $\delta_P = -1$.

应用以上引入的符号，我們可以証明如下的关系：設 $\mathbf{N}(UV\cdots XY)$ 是一个正規乘积；Z 是一个算符，用以标志他的时間比标志 $\mathbf{N}(UV\cdots XY)$ 中任何一个算符因子的时間都早，那末就有：

$$\mathbf{N}(UV\cdots XY)Z = \mathbf{N}(UV\cdots XY^{\cdot}Z^{\cdot}) +$$
$$+ \mathbf{N}(UV\cdots X^{\cdot}YZ^{\cdot}) + \cdots + \mathbf{N}(UV^{\cdot}\cdots XYZ^{\cdot}) +$$
$$+ \mathbf{N}(U^{\cdot}V\cdots XYZ^{\cdot}) + \mathbf{N}(UV\cdots XYZ). \quad (8,69)$$

公式(8,69)可以用数学归納法得到証明. 显然，我們只要能証明(8,69)在所有 $U, V, \cdots X, Y$ 和 Z 都是单个的消失或产生算符时是正确的，那末(8,69)就一定在任何情况下都是正确的。此外，只要能証明，当 Z 是一个产生算符时 (8,69) 是正确的，那就已經够了；因为假使 Z 是一个消失算符，那末所有的收縮 $Y^{\cdot}Z^{\cdot}$, $X^{\cdot}Z^{\cdot}$, $V^{\cdot}Z^{\cdot}$, $\cdots U^{\cdot}Z^{\cdot}$ 都将等于零. 关系(8,69)显然是正确的.

可以看出，公式(8,69)对于 $UV\cdots XY$ 的任何重新排列都是不变的. 当(8,69)式的左右二边各項內的各因子 $U, V, \cdots X$ 和 Y 按同一个新次序排列后，左右二边各項都添了同一个因子 δ_P，可以相互消去. 因此，我們可以假定 $UV\cdots XY$ 已經按正規乘积的次序排列. 而且，我們只要証明 $U, V, \cdots X$ 和 Y 都是消失算符的情况就已經够了. 因为假使其中还有产生算符的話，只要將所有的产生算符乘在 (8,69) 中各項的左端也就行了；产生算符与产生算符 Z 之間的收縮等于零.

公式(8,69)在 $\mathbf{N}(UV\cdots XY)$ 只含有一个因子 Y 时显然是正确的：应用定义(8,50)，有：

$$\mathbf{N}(Y)Z = YZ = T(YZ) = (Y^{\cdot}Z^{\cdot}) + \mathbf{N}(YZ). \quad (8,70)$$

現在假定，在 $\mathbf{N}(UV\cdots XY)$ 中共有 n 个因子时，关系(8,69)是正确的。在(8,69)式各項的左端都乘上一个消失算符 R，并設标志 R 的时間比标志 Z 的时間迟，那末就有：

$$R\cdot\mathbf{N}(UV\cdots XY)Z = R\cdot\mathbf{N}(UV\cdots XY^{\cdot}Z^{\cdot}) + \cdots +$$
$$+ R\cdot\mathbf{N}(U^{\cdot}V\cdots XYZ^{\cdot}) + R\cdot\mathbf{N}(UV\cdots XYZ). \quad (8,71)$$

由于 $U, V, \cdots X$ 和 Y 都是消失算符，因而在(8,71)式各項中，除等式右方最后一項以外，都可以将 R 移进括弧号以內。在最后一項中

$$\mathbf{N}(UV\cdots XYZ) = \delta_P ZUV\cdots XY, \quad (8,72)$$

其中 δ_P 为由于将排在末尾的算符 Z 調动而排到最前面时交換費米子算符而产生的因子。由于

$$RZ = T(RZ) = R^{\cdot}Z^{\cdot} + \mathbf{N}(RZ) = R^{\cdot}Z^{\cdot} + \delta_q ZR, \quad (8,73)$$

其中 δ_q 是由于交換 R 和 Z 所产生的因子；因此

$$R\mathbf{N}(UV\cdots XYZ) =$$
$$= \delta_P R^{\cdot}Z^{\cdot}UV\cdots XY + \delta_P\delta_q ZRUV\cdots XY =$$
$$= \mathbf{N}(R^{\cdot}UV\cdots XYZ^{\cdot}) + \mathbf{N}(RUV\cdots XYZ). \quad (8,74)$$

这就証明了，在 $\mathbf{N}(RUV\cdots XY)$ 中共有 $(n+1)$ 个因子时，公式(8,69)也是正确的：

$$\mathbf{N}(RUV\cdots XY)Z = \mathbf{N}(RUV\cdots XY^{\cdot}Z^{\cdot}) + \cdots +$$
$$+ \mathbf{N}(R^{\cdot}UV\cdots XYZ^{\cdot}) + \mathbf{N}(RUV\cdots XYZ). \quad (8,75)$$

这也就証明了，(8,69)在一般情况下都是正确的。

我們可以将公式(8,69)略加扩充。可在該式各項中相同的地方加入若干对算符的收縮。例如：

$$\mathbf{N}(UVR^{\cdot\cdot}\cdots Q^{\cdot\cdot}XY)Z = \mathbf{N}(UVR^{\cdot\cdot}\cdots Q^{\cdot\cdot}XY^{\cdot}Z^{\cdot}) +$$
$$+ \mathbf{N}(UVR^{\cdot\cdot}\cdots Q^{\cdot\cdot}X^{\cdot}YZ^{\cdot}) + \cdots +$$
$$+ \mathbf{N}(UV^{\cdot}R^{\cdot\cdot}\cdots Q^{\cdot\cdot}XYZ^{\cdot}) +$$
$$+ \mathbf{N}(U^{\cdot}VR^{\cdot\cdot}\cdots Q^{\cdot\cdot}XYZ^{\cdot}) +$$
$$+ \mathbf{N}(UVR^{\cdot\cdot}\cdots Q^{\cdot\cdot}XYZ). \quad (8,76)$$

在公式 (8,69) 和 (8,76) 的基础上，維克曾証明了以下二条定理.

定理 1. 編时乘积可以按照如下的方式改写成为一系列的正規乘积之和：

$$\begin{aligned}\mathrm{T}(UVW\cdots XYZ) &= \mathrm{N}(UVW\cdots XYZ) + \\ &+ \mathrm{N}(U^{\cdot}V^{\cdot}W\cdots XYZ) + \mathrm{N}(U^{\cdot}VW^{\cdot}\cdots XYZ) + \cdots + \\ &+ \mathrm{N}(UVW\cdots XY^{\cdot}Z^{\cdot}) + \cdots + \cdots + \\ &+ \mathrm{N}(U^{\cdot}V^{\cdot\cdot}W^{\cdot\cdot\cdot}\cdots X^{\cdot\cdot\cdot}Y^{\cdot\cdot}Z^{\cdot}); \qquad (8,77)\end{aligned}$$

上式的右方包括了一切有着不同的收縮算符对的項. 当然，假使任何一項中有一对等于零的收縮算符为 $\psi_\alpha^{\cdot}(x)\psi_\beta^{\cdot}(y)$, $A_\mu^{\cdot}(x)\psi_\alpha^{\cdot}(x)$ 等等，那末这一項就可以略去.

我們可以用数学归納法来証明(8,77). 根据定义(8,50)，我們首先有：

$$\mathrm{T}(UV) = \mathrm{N}(UV) + (U^{\cdot}V^{\cdot}); \qquad (8,78)$$

因此，(8,77)在乘积只有二个因子时是正确的. 假定(8,77)在乘积有 n 个因子时仍然是正确的. 可以在(8,77)式各項的右端乘上一个算符 R，并且假定标志 R 的时間比标志 U, V, W, $\cdots$ X, Y 和 Z 的时間都早，那末就有：

$$\begin{aligned}\mathrm{T}(UVW\cdots XYZR) &= \mathrm{N}(UVW\cdots XYZ)R + \\ &+ \mathrm{N}(U^{\cdot}V^{\cdot}W\cdots XYZ)R + \cdots + \\ &+ \mathrm{N}(U^{\cdot}V^{\cdot\cdot}W^{\cdot\cdot\cdot}\cdots X^{\cdot\cdot}Y^{\cdot\cdot}Z^{\cdot})R. \qquad (8,79)\end{aligned}$$

应用公式(8,69)和(8,76)就可以証明，(8,77)在乘积有 $(n+1)$ 个因子时也是正确的. 标志 R 的时間并沒有限制(8,77)公式的普遍性. 因为将該式中各項的因子按同一个新的次序重新排列，每項都添了一个因子 δ_P，可以相互消去，而(8,77)仍然成立. 这样就証明了，不論乘积中有多少因子，(8,77)公式总是正确的.

在实际应用中出現的情况比定理 1 所討論的情况要复杂些；因为在 S 矩陣表式中出現的，常常不是单純的編时乘积，而是混合的編时和正規乘积. 相互作用哈密頓量密度常常是正規乘积. 今

以輕子与电磁場的相互作用理論为例，在 S 矩陣表式中出現的乘积具有如下的形式：

$$\mathrm{T}\{\mathrm{N}(\bar{\psi}(x_n)\hat{A}(x_n)\psi(x_n))\cdots\mathrm{N}(\bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)\psi(x_1))\}. \quad (8,80)$$

維克所証明的第二条定理提供了一个将这种混合的編时和正規乘积改写为一系列的正規乘积之和的方法. 維克証明的第二条定理如下：

定理 2. 假使要将如(8,80)的混合乘积展开成为正規乘积之和，我們仍旧可以利用公式(8,77)，只是得将(8,80)中每一个正規乘积内部各因子的收縮而产生的項略去. 例如，必須略去包含有

$$\left.\begin{aligned}&\bar{\psi}^{\cdot}(x_n)\hat{A}(x_n)\psi^{\cdot}(x_n),\\&\bar{\psi}^{\cdot}(x_n)\hat{A}^{\cdot}(x_n)\psi(x_n),\\&\bar{\psi}(x_n)\hat{A}^{\cdot}(x_n)\psi^{\cdot}(x_n)\end{aligned}\right\} \quad (8,81)$$

作为因子的各項.

我們来証明一个簡单的情况，以作为如何証明定理 2 的例子. 有一个混合乘积：

$$\mathrm{T}(UV\mathrm{N}(WXY)\cdots Z), \quad (8,82)$$

其中所有的因子都是单純的产生算符或是单純的消失算符；标志算符 W、X 和 Y 的时間相同. 我們可以将(8,82)当作另一乘积的极限，这一乘积在形式上和(8,82)完全相同，所不同的只是 W, X 和 Y 中标志消失算符的时間略早于其中标志产生算符的时間. 那末(8,82)就等于：

$$\mathrm{T}(UVWXY\cdots Z). \quad (8,83)$$

于是(8,83)中的表式就可以按照公式 (8,77) 展开成为正規乘积之和. 由于 W, X 和 Y 中标志消失算符的时間略早于标志产生算符的时間，因而它們之間任何一对算符的收縮都等于零. 当标志 W, X 和 Y 的时間无限地趋于一致时，就得到定理 2.

在 U, V ···并不是单純的产生算符或单純的消失算符的情况下，在混合乘积中有許多正規乘积的情况下，可以先展开成为只有单純产生算符和单純消失算符作为因子的項的和；然后将每一項

改写为正規乘积；最后再将各相应項合并起来．得到的結果将与定理 2 一样．

§ 8,6. 用图形表示正規乘积的方法

我們将以輕子与电磁場相互作用的理論为例，来說明如何具体地将混合的編时和正規乘积分解为正規乘积．从 (8,42) 和 (8,24)可以得到如下的 S 矩陣：

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)} \\ S^{(0)} &= 1 \\ S^{(n)} &= \frac{(-e)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} d^4x_n \cdots \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \times \\ &\quad \times \mathrm{T}\{\mathrm{N}(\bar{\psi}(x_n)\hat{A}(x_n)\psi(x_n))\cdots \times \\ &\quad \times \mathrm{N}(\bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)\psi(x_1))\}. \end{aligned} \tag{8,84}$$

显然，$S^{(1)}$ 中的混合乘积只分解为一个正規乘积：

$$\mathrm{T}\{\mathrm{N}(\bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)\psi(x_1)\} = \mathrm{N}(\bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)\psi(x_1)). \tag{8,85}$$

显然，$S^{(2)}$ 中的混合乘积可以分解为如下的八个正規乘积：

$$\begin{aligned} &\mathrm{T}\{\mathrm{N}(\bar{\psi}(x_2)\hat{A}(x_2)\psi(x_2))\mathrm{N}(\bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)\psi(x_1))\} = \\ &= \mathrm{N}(\bar{\psi}\hat{A}\psi\bar{\psi}\hat{A}\psi) + \mathrm{N}(\bar{\psi}\hat{A}^{\cdot}\psi\bar{\psi}\hat{A}^{\cdot}\psi) + \\ &+ \mathrm{N}(\bar{\psi}\hat{A}\psi^{\cdot}\bar{\psi}^{\cdot}\hat{A}\psi) + \mathrm{N}(\bar{\psi}^{\cdot}\hat{A}\psi\bar{\psi}\hat{A}\psi^{\cdot}) + \\ &+ \mathrm{N}(\bar{\psi}\hat{A}^{\cdot}\psi^{\cdot\cdot}\bar{\psi}^{\cdot\cdot}\hat{A}^{\cdot}\psi) + \mathrm{N}(\bar{\psi}^{\cdot\cdot}\hat{A}^{\cdot}\psi\bar{\psi}\hat{A}^{\cdot}\psi^{\cdot\cdot}) + \\ &+ \mathrm{N}(\bar{\psi}^{\cdot\cdot}\hat{A}\psi^{\cdot}\bar{\psi}^{\cdot}\hat{A}\psi^{\cdot\cdot}) + \mathrm{N}(\bar{\psi}^{\cdot\cdot\cdot}\hat{A}^{\cdot}\psi^{\cdot\cdot}\bar{\psi}^{\cdot\cdot}\hat{A}^{\cdot}\psi^{\cdot\cdot\cdot}). \end{aligned} \tag{8,86}$$

为了写起来方便，我們将(8,86)右方表式中的 x_1 和 x_2 略去不写．应該注意，(8,86)式右方的第三項与第四項代入 $S^{(2)}$ 后，所作出的貢献完全一样．这是由于在 $\mathscr{H}_i(x)$ 内部包含有一对費米子算符 $\bar{\psi}$ 和 ψ，在正規乘积内部将二个 $\mathscr{H}_i$ 的位置互換，結果仍是一样，甚至不会改变符号．这二項的貢献合并起来就等于只取一項的貢献，同时将 $S^{(2)}$ 中积分前面的因子 $\frac{1}{2!}$ 消去．与此相似，在(8,86)中公

式右方的第五項与第六項所作貢献完全一样，結果也就等于在 $S^{(2)}$ 中取消因子 $\frac{1}{2!}$ 而只取一項的貢献. 用同样的方法，可以将 $S^{(3)}$ 中的混合乘积分解为正規乘积，結果将发現，好多項所作的貢献完全一样. 例如，其中有如下的六項：

$$\begin{aligned}&\mathbf{N}(\bar{\psi}\hat{A}\psi\cdot\bar{\psi}\cdot\hat{A}\cdot\cdot\psi\bar{\psi}\hat{A}\cdot\cdot\psi)+\mathbf{N}(\bar{\psi}\hat{A}\cdot\cdot\psi\bar{\psi}\hat{A}\psi\cdot\bar{\psi}\cdot\hat{A}\cdot\cdot\psi)+\\&+\mathbf{N}(\bar{\psi}\cdot\hat{A}\cdot\cdot\psi\bar{\psi}\hat{A}\cdot\cdot\psi\bar{\psi}\hat{A}\psi\cdot)+\mathbf{N}(\bar{\psi}\hat{A}\psi\cdot\bar{\psi}\hat{A}\cdot\cdot\psi\bar{\psi}\cdot\hat{A}\cdot\cdot\psi)+\\&+\mathbf{N}(\bar{\psi}\hat{A}\cdot\cdot\psi\bar{\psi}\cdot\hat{A}\cdot\cdot\psi\bar{\psi}\hat{A}\psi\cdot)+\mathbf{N}(\bar{\psi}\cdot\hat{A}\cdot\cdot\psi\bar{\psi}\hat{A}\psi\cdot\bar{\psi}\hat{A}\cdot\cdot\psi)\end{aligned}\tag{8,87}$$

它們的貢献完全一样. 这六項对于 $S^{(3)}$ 的貢献的相加，恰巧等于取消了 $S^{(3)}$ 的表式中的因子 $\frac{1}{3!}$ 而只取其中一項的貢献. 当然，也有若干項的貢献与其他任何項的貢献都不相同，例如：

$$\mathbf{N}(\bar{\psi}\hat{A}\psi\bar{\psi}\hat{A}\psi\bar{\psi}\hat{A}\psi).\tag{8,88}$$

也有些作相同貢献的項的总数不到六項，如：

$$\begin{aligned}&\mathbf{N}(\bar{\psi}\cdot\cdot\hat{A}\psi\cdot\bar{\psi}\cdot\hat{A}\psi\cdot\cdot\bar{\psi}\cdot\cdot\hat{A}\psi\cdot\cdot\cdot)+\\&+\mathbf{N}(\bar{\psi}\cdot\cdot\hat{A}\psi\cdot\bar{\psi}\cdot\cdot\hat{A}\psi\cdot\cdot\cdot\bar{\psi}\cdot\hat{A}\psi\cdot\cdot);\end{aligned}\tag{8,89}$$

二項的貢献相同，但是，在 $S^{(3)}$ 中的混合乘积的展开中再也沒有第三項，它所作的貢献与(8,89)中二項所作的貢献相同.

我們可以用图形来表示各种正規乘积：一对費米子算符的收縮 $\psi(x_2)\bar{\psi}(x_1)$ 用一根如下(图 3)的带箭头的綫

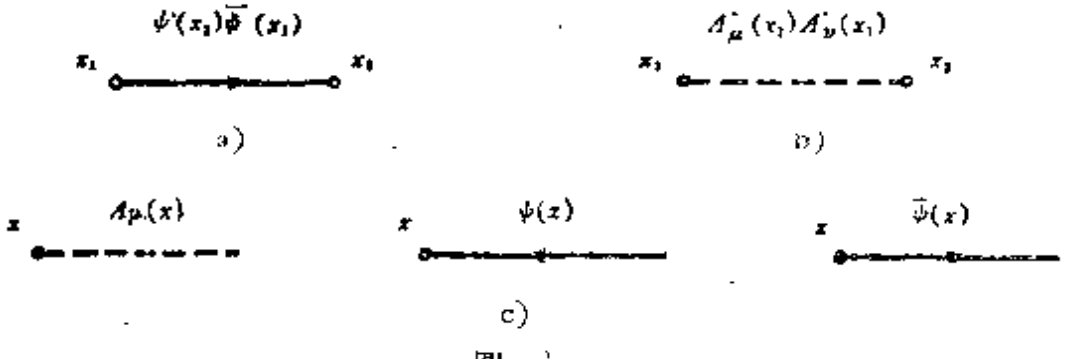


图 3

来代表；綫从 x_1 点开始，到 x_2 点結束，箭头从 x_1 指向 x_2，如图 3a 所示. 玻色子算符的收縮 $\hat{A}\cdot(x_2)\hat{A}\cdot(x_1)$ 用一根不带箭头的虛綫来

代表；一头在 x_1 点，一头在 x_2 点，如图 3b 所示．一个算符 $\psi(x)$ 以一条指向 x 点的带箭头的綫来代表；一个算符 $\bar{\psi}(x)$ 則以一条从 x 点出发的带箭头的綫来代表；而一个算符 $\hat{A}(x)$ 則以一条一头連在 x 点的虛綫代表，如图 3c 所示．应用这一方法，可以将表式 (8,85) 中的正規乘积用图 4 来表示．表式(8,86) 中的各項正規乘积可以用图5中的图形表示．可以看出，代表 (8,86) 式右方第三項和第四項的图形 (c) 和 (d) 几乎是完全一样的，所不同者只不过是 x_1 和 x_2 的位置排列不同而已．与此相似，代表(8,86)式右方的第五項和第六項的图形 e 和 f 之間的不同，也只在于 x_1 和 x_2 的位置排列不同而已．其余的图形 5a，5b，5g 和 5h 都各不相同，所作的貢献也各不相同；这些图形的特点是：如将 x_1 和 x_2 的位置互換一下，得到的图形仍和原来的图形完全一样，不代表任何新的正規乘积．

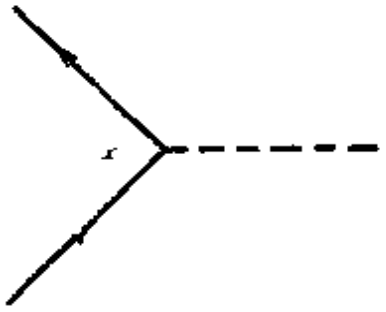


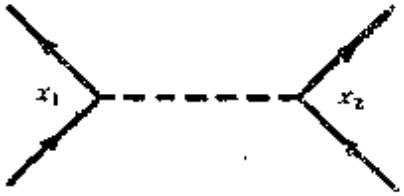
图　4

又如 (8,87) 中的六个正規乘积可以用图 6 中的图形来表示．这些图形基本上是相同的，它們对 $S^{(3)}$ 所作的貢献完全相同；但是，它們并不是完全相同的，它們的不同处在于 x_1，x_2 和 x_3 的位置的排列，因此它們代表了不同的正規乘积．根据这一想法，我們在画下一个图形以后就立即可以判断：究竟有几項正規乘积可以用这类图形表示而对 S 矩陣作出相同的貢献．例如，若画下图 7 中的图形，再将 x_1、x_2 和 x_3 的位置重新排列，于是就会发現另外只有一个图形能与图 7 相似，但又不完全相同：这就是图 8．图 7 和图 8 所代表的，就是(8,89)中的二項正規乘积．不論将 x_1，x_2 和 x_3 怎样排列，都不可能引导到新的正規乘积；原因是这类图形具有一定的对称性质．

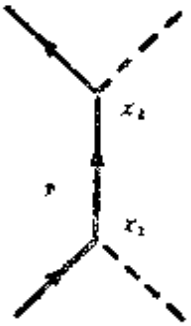
又以图 9 中的图形为例，我們看到，不論将 x_1，x_2 和 x_3 怎样重新排列，得到的图形总和原来的一样，都代表同一个正規乘积 (8,88)．



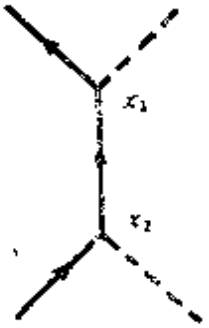
a)



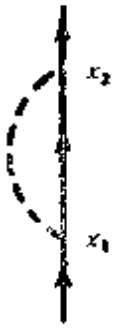
b)



c)



d)



e)



f)



g)



h)

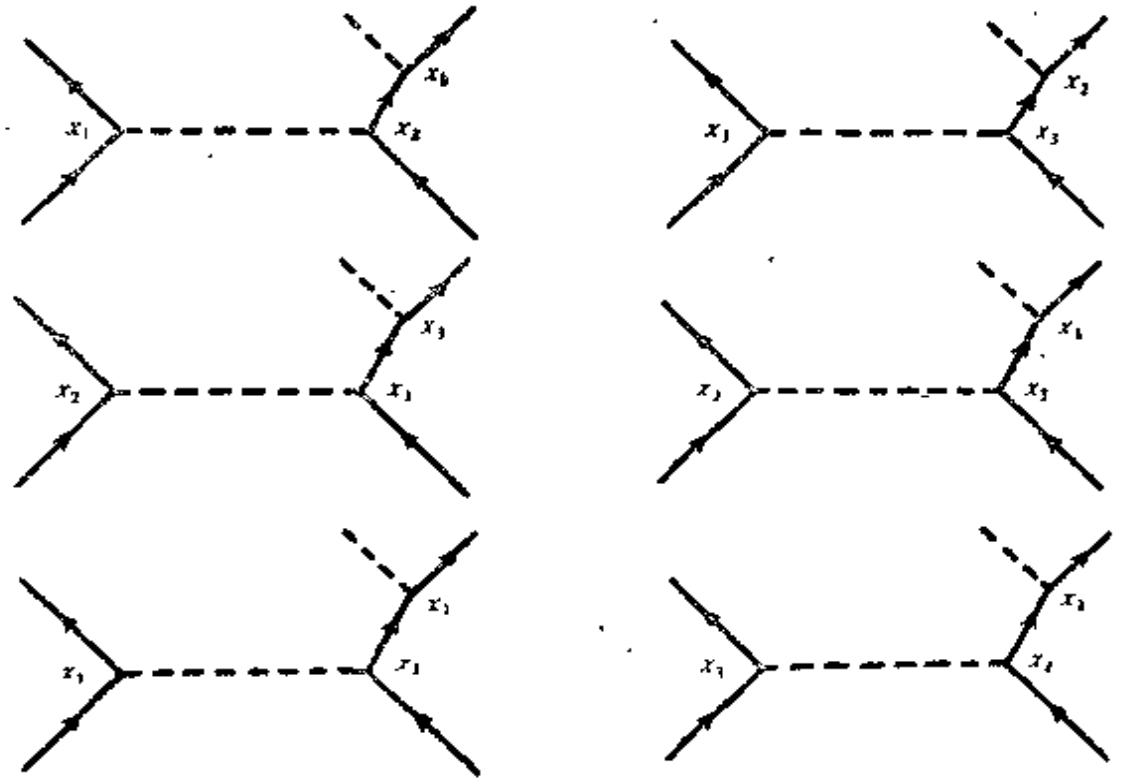


图 6

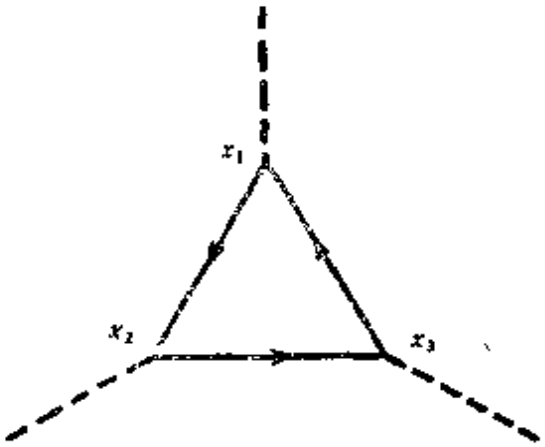


图 7

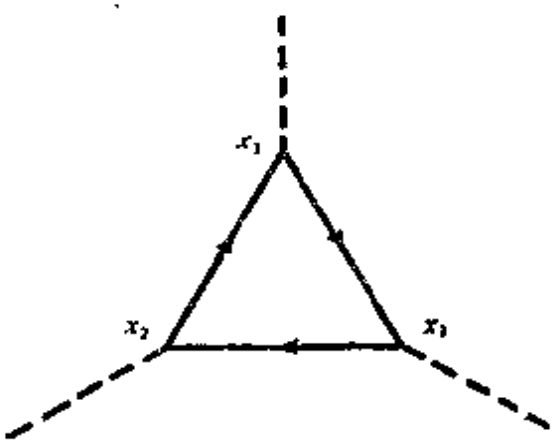


图 8



图 9

我們可以画下任何一个图形，例如图 10．在画下了以后，我們立刻可以看出，它代表了从 $S^{(6)}$ 中分解出来的正規乘积，因为其中有六个点 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 和 x_6．此外，还可以断定，如将这六个点作不同的排列，一共可以得到 $\frac{1}{2}\times 6!$ 种不同的图形，代表 $\frac{1}{2}\times 6!$ 种对 $S^{(6)}$ 作出相同貢献的不同的正規乘积．因此，我們在将由图 10 所代表的正規乘积对 $S^{(6)}$ 所作的貢献計算出来以后，可以乘上一个因子 $\frac{1}{2}\times 6!$，那就等于将其余所有类似的正規乘积的貢献都包括进去了．这些类似的正規乘积对 S 矩陣所作的貢献完全相同，連符号也不会相差一个．这是因为在正規乘积之中，$\mathscr{H}_I$ 的位置可以任意相互調換；我們可以将这些类似的正規乘积中的 $\mathscr{H}_I$ 的位置加以适当的調动，使所有这些类似的正規乘积中相应的算符收縮都站在相同的位置上；这样一来，在积分号后的这些正規乘积就只是积分变数的符号不同而已；将积分变数加以变換后，就可以看出，这些正規乘积对于 S 矩陣所作的貢献是完全一样的．

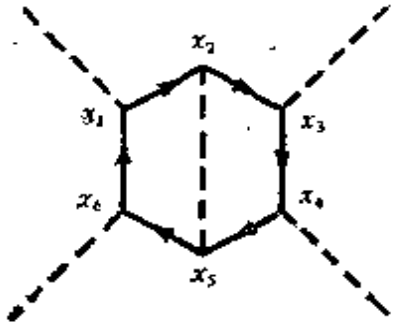


图 10

§ 8,7. 正規乘积所代表的物理过程

从(8,27)可以看出，ψ 是許多項的和，其中有一些所代表的物理作用是輕子的消失，另一些所代表的物理作用則是反輕子的产生．与此相似，在 $\bar{\psi}$ 中有許多項代表輕子的产生，另有許多項代表反輕子的消失．从(8,28)可以看出，A_μ 有許多項代表光子的产生，另有許多項代表光子的消失．因此，一个正規乘积所代表的是一系列的不同的物理过程．例如，由图 4 所代表的(8,85)中的正規乘积可以反映一系列如下的物理过程：

1）輕子放出光子或吸收光子，

2）反輕子放出光子或吸收光子，

3）輕子和反輕子湮沒而轉化为光子，

4）光子轉化为輕子—反輕子偶。

又例如图 5b，可以反映如下一系列的物理过程：

1）二个輕子相互散射，

2）二个反輕子相互散射，

3）一个輕子和一个反輕子相互散射。

又例如图 5c 和 5d，可以反映如下的物理过程：

1）光子和輕子相互散射，

2）光子和反輕子相互散射，

3）輕子放出二个光子或吸收二个光子，

4）反輕子放出二个光子或吸收二个光子，

5）輕子和反輕子湮沒而轉化为一对光子，

6）二个光子碰撞轉化为輕子和反輕子。

因此，当討論某一物理过程的时候，应該先將正規乘积中决定这一过程的部分挑选出来。我們下面举例来說明挑选的方法。

先以康普頓散射为例。在始态中有一个电子和一个光子。令 ζ_i 代表始态电子的动量和自旋，η_i 代表始态光子的动量和极化方向。电子与光子相互散射。求在 $t=\infty$ 时，电子具有动量和自旋 ζ_f 及光子具有动量和极化 η_f 的波幅。

設以 $|\rangle_0$ 代表眞空态，那末始态是：

$$|\rangle_i = a^*_{\zeta_i} c^*_{\eta_i} |\rangle_0, \tag{8,90}$$

其中我們以 a^* 和 a 代表电子的产生和消灭算符，而以 c^* 和 c 代表光子的产生和消灭算符。終态波函数是：

$$|\rangle_f = a^*_{\zeta_f} c^*_{\eta_f} |\rangle_0. \tag{8,91}$$

要寻求的波幅是：

$${}_0\langle | c_{\eta_f} a_{\zeta_f} S a^*_{\zeta_i} c^*_{\eta_i} | \rangle_0. \tag{8,92}$$

显然，只有那些包含有吸收算符 a_{ζ_i}，c_{η_i} 和产生算符 $a^*_{\zeta_f}$，$c^*_{\eta_f}$ 作为因子的正規乘积才能对(8,92)作出貢献。因此，至少要包括有二个

$\mathscr{H}_I$ 作因子的正規乘积才能作出貢献；例如图 5c 和图 5d 所代表的正規乘积等. 由于 $\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$ 是一个很小的数值，因而在作第一次近似計算时，可以只考虑 $S^{(2)}$ 所作的貢献，而将高次貢献暫时略去. 不难看出，在考虑到图 5c 和 5d 所作出的貢献相等以后，$S^{(2)}$ 对于(8,92)的貢献将是：

$$2 \times \frac{(-e)^2}{2!}\int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \, {}_0\langle | c_{\eta_f} a_{\zeta_f} \mathbf{N}(\bar{\psi}\hat{A}\psi \cdot \bar{\psi}\cdot\hat{A}\psi) a^*_{\zeta_i} c^*_{\eta_i} | \rangle_0 . \tag{8,93}$$

应用熟知的对易关系，就得到：

$$\begin{aligned} {}_f\langle | S^{(2)} | \rangle_i = e^2 &\int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \, \bar{\psi}_{\zeta_f}(x_2) \frac{\hat{e}_f}{\sqrt{2\omega_f}} \times \\ &\times e^{-ik_f x_2}\left(-\frac{1}{2}\right) S_f(x_2 - x_1) \frac{\hat{e}_i}{\sqrt{2\omega_i}} e^{ik_i x_1} \psi_{\zeta_i}(x_1) + \\ &+ e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \, \bar{\psi}_{\zeta_f} \frac{\hat{e}_i}{\sqrt{2\omega_i}} \times \\ &\times e^{ik_i x_2}\left(-\frac{1}{2}\right) S_f(x_2 - x_1) \frac{\hat{e}_f}{\sqrt{2\omega_f}} e^{-ik_f x_1} \psi_{\zeta_i}(x_1), \end{aligned} \tag{8,94}$$

其中 e_i 和 e_f 各代表始态光子和終态光子的极化矢量，k_i 和 k_f 各代表始态光子和終态光子的动量-能量 4-矢量，而 ω_i 和 ω_f 各代表始态光子和終态光子的能量. (8,94)式右方的前后二項各可以用图 11a 和 11b 表示. 所以产生二項的原因是，A_μ 中既包括了吸收光子的項，也包括了产生光子的項. 因此可能在 x_1 点吸收光子，在 x_2 点放出光子；也可以在 x_1 点产生光子，在 x_2 点吸收光子. 应該注意，这二項的貢献一般說来并不相等，不能只取其中一項，再乘上一个 2.

再以电子和电子的相互散射为例. 設以 ζ_1 和 ζ_2 代表始态电子的动量和自旋，以 ζ_3 和 ζ_4 代表終态电子的动量和自旋. 那末始态波函数是：

$$|\rangle_i = a^*_{\zeta_2} a^*_{\zeta_1} |\rangle_0; \tag{8,95}$$

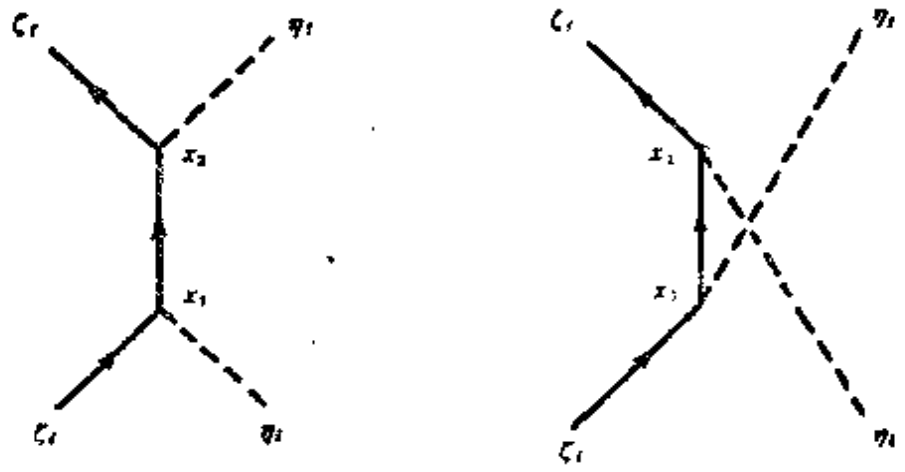


图　11

終态波函数是:

$$|\rangle_f = a^*_{\zeta_3} a^*_{\zeta_4} |\rangle_0. \tag{8,96}$$

可以看出，$S^{(2)}$ 作出对电子散射过程的最低次近似的貢献. 假使我們考慮到在 $S^{(2)}$ 中只有图 5b 所代表的一項正規乘积对电子的散射过程起作用，那末在最低次近似中，当 $t = \infty$ 时，(8,96)的波幅应該是:

$$\begin{aligned} {}_f\langle |S^{(2)}| \rangle_i = \frac{(-e)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \times \\ \times {}_0\langle | a_{\zeta_4} a_{\zeta_3} \mathrm{N}(\bar{\psi} \hat{A}^* \psi \bar{\psi} \hat{A}^* \psi) a^*_{\xi_2} a^*_{\xi_1} | \rangle_0 , \end{aligned} \tag{8,97}$$

可以看出，(8,97)中一共有四項作出貢献. 考慮到費米子算符的反对易性，我們得:

$$\begin{aligned} {}_0\langle | a_{\zeta_4} a_{\zeta_3} \mathrm{N}(\bar{\psi}(x_2) \hat{A}^*(x_2) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_1) \hat{A}^*(x_1) \psi(x_1)) a^*_{\xi_2} a^*_{\xi_1} | \rangle_0 = \\ = \bar{\psi}_{\zeta_3}(x_2) \gamma_\mu \psi_{\zeta_2}(x_2) \frac{1}{2} D_f(x_2 - x_1) \bar{\psi}_{\zeta_4}(x_1) \gamma_\mu \psi_{\zeta_1}(x_1) + \\ + \bar{\psi}_{\zeta_4}(x_2) \gamma_\mu \psi_{\zeta_1}(x_2) \frac{1}{2} D_f(x_2 - x_1) \bar{\psi}_{\zeta_3}(x_1) \gamma_\mu \psi_{\zeta_2}(x_1) - \\ - \bar{\psi}_{\zeta_3}(x_2) \gamma_\mu \psi_{\zeta_1}(x_2) \frac{1}{2} D_f(x_2 - x_1) \bar{\psi}_{\zeta_4}(x_1) \gamma_\mu \psi_{\zeta_2}(x_1) - \\ - \bar{\psi}_{\zeta_4}(x_2) \gamma_\mu \psi_{\zeta_2}(x_2) \frac{1}{2} D_f(x_2 - x_1) \bar{\psi}_{\zeta_3}(x_1) \gamma_\mu \psi_{\zeta_1}(x_1). \end{aligned} \tag{8,98}$$

上式右方的四項可以用图 12a、b、c、d 表示. 不难看出，图 12a和12b基本上相同，不同的只是将 x_1 和 x_2 的位置互换一下；图 12c 和 12d 也基本上相同，不同的只是 x_1 和 x_2 的位置互换了一下. 考虑到

$$D_f(x_2 - x_1) = D_f(x_1 - x_2), \tag{8,99}$$

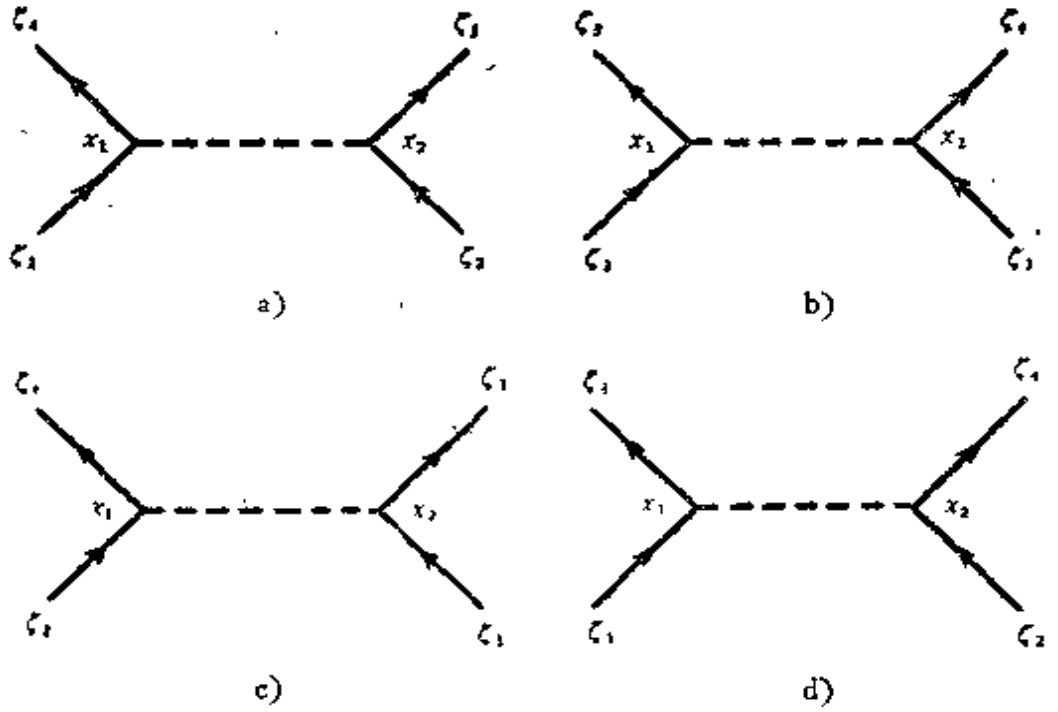


图 12

就可以看出，当将(8,98)代入(8,97)以后，(8,98)式右方的第一項和第二項所作的貢献完全相同；第三項和第四項所作的貢献也完全相同. 因此，我們可以只取图 12a 和图 12c 的貢献，然后乘一个因子 2. 这个因子 2 恰巧与 (8,97) 式右方积分前的因子 $\frac{1}{2!}$ 相消. 因此(8,97)就成为：

$$\begin{aligned} {}_I\langle |S^{(2)}| \rangle_I = e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \bar{\psi}_{\zeta_3}(x_2)\gamma_\mu \psi_{\zeta_2}(x_2) \times \\ \times \frac{1}{2} D_f(x_2 - x_1)\bar{\psi}_{\zeta_4}(x_1)\gamma_\mu \psi_{\zeta_1}(x_1) - \\ - e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \bar{\psi}_{\zeta_3}(x_2)\gamma_\mu \psi_{\zeta_1}(x_2) \times \\ \times \frac{1}{2} D_f(x_2 - x_1)\bar{\psi}_{\zeta_4}(x_1)\gamma_\mu \psi_{\zeta_2}(x_1). \end{aligned} \tag{8,100}$$

当然，(8,100) 中二項的貢献一般說来并不相同，不能只取一項而乘一个因子 2. (8,100)式右方第二項相当于通常的交換积分項.

値得注意的是：由于图 5b 的对称性，交換 x_1 和 x_2 引导到原来的正規乘积. 因此，当将混合乘积分解为正規乘积时，由类似于图 5b 的图形所代表的正規乘积只有一項，不能将 $S^{(2)}$ 中积分前的一个因子 $\frac{1}{2!}$ 消去. 但是，正是由于这种对称性，使我們在討論具体物理問題的时候，可以得到貢献相同的項，因而終于可将 $S^{(2)}$ 中的因子 $\frac{1}{2!}$ 消去. 除了特殊的情况以外，在需要計算某一具体物理过程的 S 矩陣元时，可以将 $S^{(n)}$ 所貢献的項分为許多套；每一套包含有 $n!$ 項，这 $n!$ 項都作出相同的貢献. 因此，可以在每套中只取一項貢献，再乘一个因子 $n!$. 这个 $n!$ 正足以将 $S^{(n)}$ 中原有的一个因子 $\frac{1}{n!}$ 消去.

我們可以再举一个例子来說明这一点. 图 10 可以代表光子对光子的散射过程. 設入射光子的动量-能量 4-矢量为 k_1 和 k_2，出射光子的动量-能量 4-矢量为 k_3 和 k_4，那末，由图 10 所代表的正規乘积就可以对这一过程作出二十四項貢献，因为在 x_1, x_3, x_4 和 x_6 各点都可以消灭光子 k_1 和 k_2，或产生光子 k_3 和 k_4. 可以将这二十四項再分成十二对，每一对中的二項作出相同的貢献. 例如，图 13a 和 13b 之間的差别只在于将 x_2 和 x_5 互換，x_1 和 x_4 互換

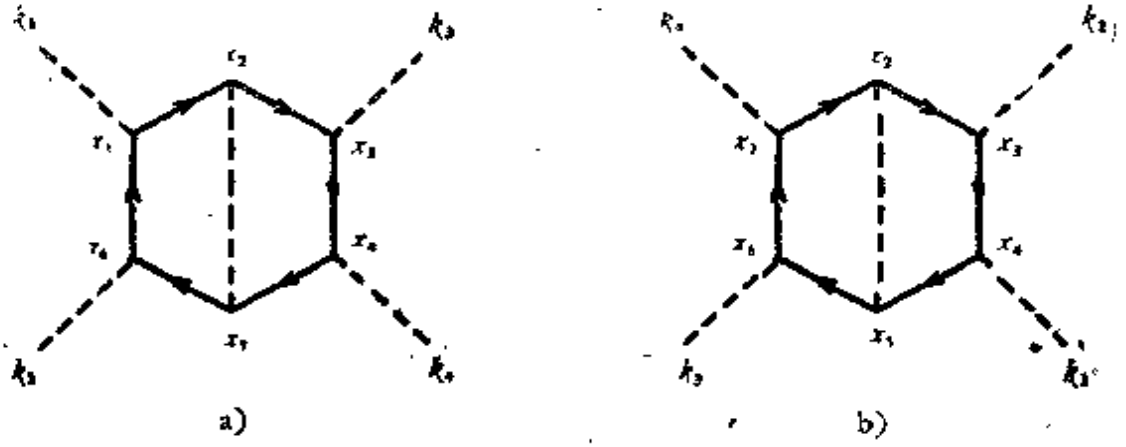


图 13

及 x_3 和 x_6 互換；与每一对 x 相应的二項所作的貢献完全相同. 由于图 10 具有一定程度的对称性，因而若将 x_1 和 x_4 互換，x_2 和 x_5 互換，x_3 和 x_6 互換，将导致同一个正規乘积；因此，現在一共只有 $\frac{1}{2}\times 6!$ 个正規乘积作出与图 10 相同的貢献. 但是，也正是由于这一对称性，使每一个正規乘积又包含有一对一对的貢献相同的項. 因此，总的效果是：我們可以将所有由于 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 和 x_6 的不同排列而产生的貢献略去，而只将計算結果乘一个因子 6!；这个 6! 恰巧和 $S^{(6)}$ 中原有的因子 $\frac{1}{6!}$ 相互消去.

唯一不能应用以上所闡述的方法处理的物理过程是眞空涨落过程. 例如，图 5h 就代表了一种眞空涨落过程，代表了一种从什么粒子也沒有的状态过渡到同一个什么粒子也沒有的状态的过程. 由于将图中 x_1 和 x_2 的位置互換将导致同一正規乘积，因此并沒有二个正規乘积作出相同的貢献. 于是，$S^{(2)}$ 对眞空涨落过程所作的貢献只是：

$$
\begin{aligned}
{}_0\langle|S^{(2)}|\rangle_0 &= \frac{(-e)^2}{2!}\int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2\int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1\times\\
&\times \mathrm{N}(\bar{\psi}^{\cdots}(x_2)\hat{A}^{\cdots}(x_2)\psi^{\cdots}(x_2)\bar{\psi}^{\cdots}(x_1)\hat{A}^{\cdots}(x_1)\psi^{\cdots}(x_1)) =\\
&= -\frac{(-e)^2}{2!}\int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2\int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1\,\mathrm{Sp}\left\{\gamma_\mu\frac{1}{2}D_f(x_2-x_1)\times\right.\\
&\left.\times\left(-\frac{1}{2}\right)S_f(x_2-x_1)\gamma_\mu\left(-\frac{1}{2}\right)S_f(x_1-x_2)\right\};\qquad (8{,}101)
\end{aligned}
$$

在 $S^{(2)}$ 中，沒有另外一項的貢献与(8,101)相同，因而可以和(8,101)合起来，将其中的因子 $\frac{1}{2!}$ 消去. 方程(8,101)右方积分前的一个負号是由于将 $\bar{\psi}^{\cdots}(x_2)$ 移到 $\psi^{\cdots}(x_1)$ 的后面組成收縮函数 $-\frac{1}{2}\bar{S}_f(x_1-x_2)$ 而产生的. (8,101)中的符号"Sp"代表求矩陣的迹. 一般地說来，在图形中出現一个由电子綫組成的多角形，那末

在 S 矩陣元中就相应地出現一个 Sp 的求迹符号，同时产生一个因子 -1. 費曼[Feynman, 1949]証明了，将一切真空涨落过程的 S 矩陣元計算出来，所得到的总結果可以写成如下的形式：

$$_0\langle|S|\rangle_0 = e^{-L} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-L)^n}{n!}, \tag{8,102}$$

其中 L 是一个无限大的虚数. 这就是說，真空涨落过程的总效果只是改变波函数的相位，而不产生任何真正的物理效应. 因此，在以后的討論中我們将不再考虑象图 5h 所代表的真空涨落过程，而将所有这样的图形略去.

§ 8,8. 函数 $D_f(x)$, $\Delta_f(x)$ 和 $S_f(x)$ 的表式

在量子場論中，常常要应用到一些洛仑兹不变性的函数. 例如，在对易关系(7,30)中出現了函数 $\Delta(x)$ 和 $S(x)$. 为了书写方便起見，我們以后将标志粒子靜質量的标符 m_n 和 M_N 略去；在对易关系(7,38)中出現了函数 $D(x)$ 和 $S(x)$；在(3,74)和(5,158)中給出了 $\Delta(x)$ 和 $S(x)$ 的表式，从 $\Delta(x)$ 的表式可以立刻得到 $D(x)$ 的表式. 从本章以前各节的討論可以看出，在計算具体物理过程的 S 矩陣元的时候，常常出現函数 $\Delta_f(x)$、$D_f(x)$ 和 $S_f(x)$. 因此，有必要求出 $\Delta_f(x)$、$D_f(x)$ 和 $S_f(x)$ 的显示表式.

我們先求 $\Delta_f(x)$ 的表式. 它的定义見(8,63). 利用熟知的对易关系，我們得：

$$\left.\begin{aligned} \Delta_f(x) &= \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\omega} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega x_0)}, \quad x_0 > 0; \\ \Delta_f(x) &= \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\omega} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega x_0)}, \quad x_0 < 0; \end{aligned}\right\} \tag{8,103}$$

其中

$$\omega = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}. \tag{8,104}$$

可以将(8,103)中的和換成一个积分，就得：

$$\left.\begin{aligned}\Delta_f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}\,\frac{e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega x_0)}}{\omega}, \quad x_0 > 0;\\ \Delta_f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}\,\frac{e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega x_0)}}{\omega}, \quad x_0 < 0.\end{aligned}\right\} \tag{8,105}$$

可以将(8,105)合并写作一个积分:

$$\Delta_f(x) = \frac{-2i}{(2\pi)^4}\int_{C_f} d^4k\,\frac{e^{ikx}}{k^2+m^2}, \tag{8,106}$$

k_0 的积分路程 C_f 如图 14a 所示: 先沿实数轴进行,然后从下半平面绕过 $-\omega$ 这一点,再由上半平面绕过 $+\omega$ 这一点,再沿实数轴伸向 $k_0=\infty$. 显然,在 $x_0>0$ 时,只有极点 $k_0=+\omega$ 作出贡献;

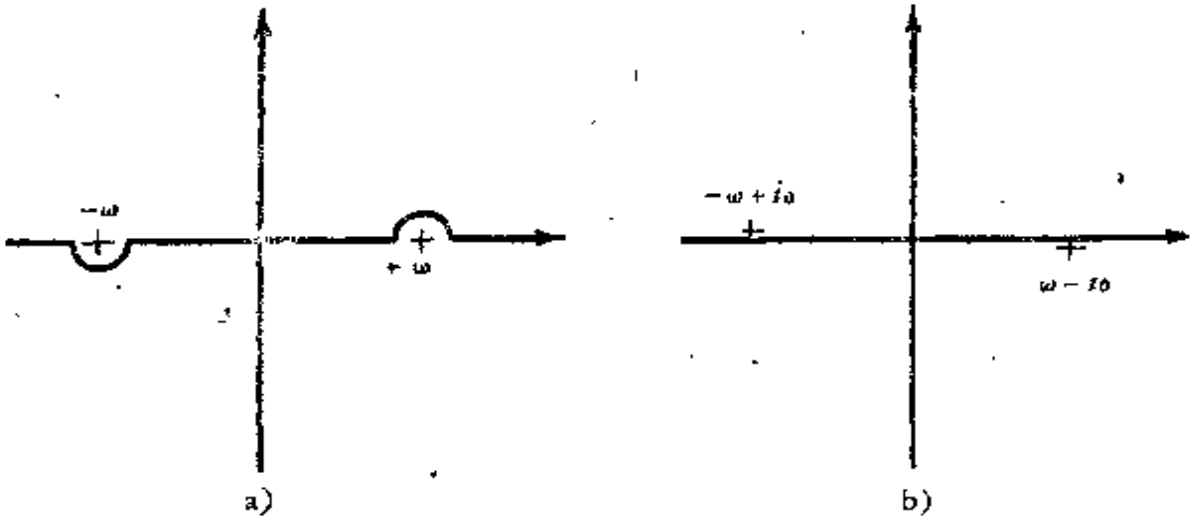


图 14

在 $x_0<0$ 时, 只有极点 $k_0=-\omega$ 作出贡献. 这样, 我們就从(8,106)得到(8,105). 我們也可以将(8,106)写成如下的形式:

$$\Delta_f(x) = \frac{-2i}{(2\pi)^4}\lim_{\varepsilon\to 0}\int d^4k\,\frac{e^{ikx}}{k^2+m^2-i\varepsilon}, \tag{8,107}$$

其中 ε 是一个微小的正数, 在积分以后趋近于零. k_0 的积分路程取整个实数轴. 由于 $i\varepsilon$ 这一项的存在, 极点将不再在实数 k_0 轴上,它們的位置将是 $k_0=\omega-i0$ 和 $k_0=-\omega+i0$, 如图 14b 所示.

用同样的方法，可以将(3,74)中 $\Delta(x)$ 的表式改写为：

$$\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_C d^4k \frac{e^{ikx}}{k^2 + m^2}, \tag{8,108}$$

k_0的积分路程C如图15所示．从(3,74)和(8,106)可以看出，$\Delta_f(x)$和 $\Delta(x)$ 之間有如下的关系：

$$\Delta_f(x) = i\epsilon(x)\Delta(x) + \Delta^{(1)}(x), \tag{8,109}$$

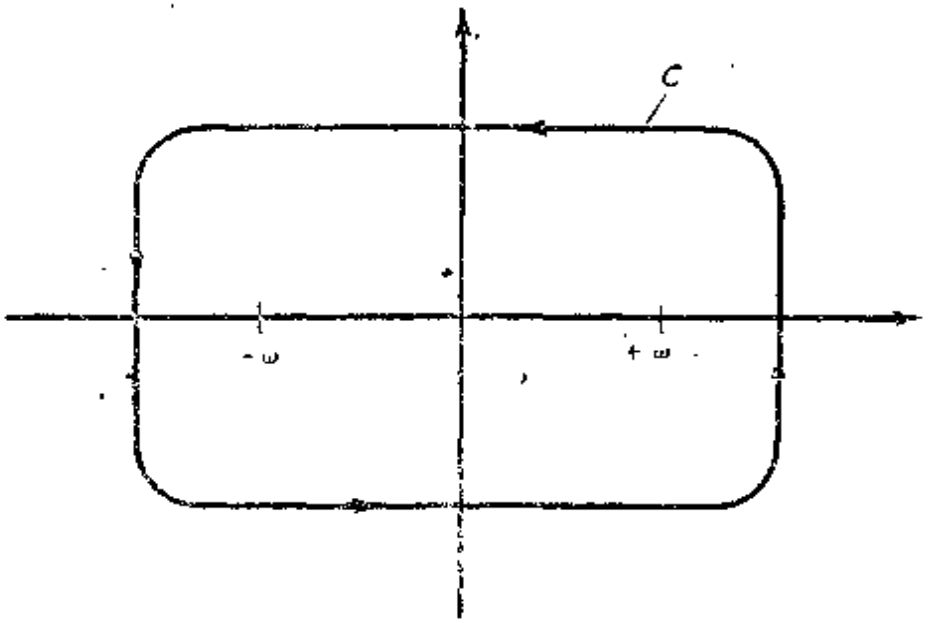


图 15

其中

$$\epsilon(x) = \frac{x_0}{|x_0|}, \tag{8,110}$$

$\Delta^{(1)}(x)$ 是一个洛仑兹不变性的函数，具有如下的表式：

$$\Delta^{(1)}(x) = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}\frac{1}{2\omega}\left(e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega x_0)} + e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega x_0)}\right). \tag{8,111}$$

(8,111)式也可以表达成如下的形式：

$$\Delta^{(1)}(x) = \frac{i}{(2\pi)^4}\int_{C_1} d^4k \frac{e^{ikx}}{k^2 + m^2}, \tag{8,112}$$

其中 k_0 的积分路程 C_1 如图 16 所示．

不难証明，$\Delta^{(1)}(x)$ 和 $\Delta_f(x)$ 满足如下的方程：

$$\left.\begin{aligned}(\Box - m^2)\Delta^{(1)}(x) &= 0,\\ (\Box - m^2)\Delta_f(x) &= 2i\delta^4(x);\end{aligned}\right\} \tag{8,113}$$

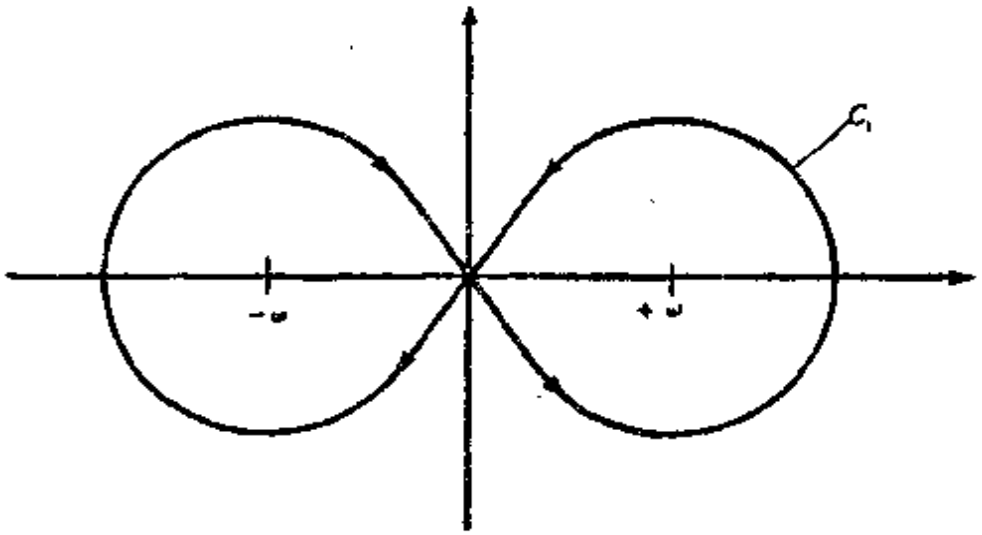


图 16

其中

$$\delta^4(x) = \delta(x_0)\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3). \tag{8,114}$$

因此，函数 $-\frac{i}{2}\Delta_f(x)$ 是求解克莱因-戈登方程的格临（Green）函数. 更常見的格临函数是推迟格临函数 $\Delta^{\text{迟}}(x)$ 和超前格临函数 $\Delta^{\text{超}}(x)$；它們的定义是：

$$\left.\begin{aligned}\Delta^{\text{迟}}(x) &= -\frac{1}{2}(1+\epsilon(x))\Delta(x),\\ \Delta^{\text{超}}(x) &= \frac{1}{2}(1-\epsilon(x))\Delta(x).\end{aligned}\right\} \tag{8,115}$$

它們都滿足方程：

$$\left.\begin{aligned}(\Box - m^2)\Delta^{\text{迟}}(x) &= -\delta^4(x),\\ (\Box - m^2)\Delta^{\text{超}}(x) &= -\delta^4(x).\end{aligned}\right\} \tag{8,116}$$

可以将 $\Delta^{\text{迟}}(x)$ 和 $\Delta^{\text{超}}(x)$ 都表达成如下的积分：

$$\left.\begin{aligned}\Delta^{\text{迟}}(x) &= -\frac{i}{(2\pi)^4}\int_{C_{\text{迟}}} d^4k\,\frac{e^{ikx}}{k^2+m^2},\\ \Delta^{\text{超}}(x) &= -\frac{i}{(2\pi)^4}\int_{C_{\text{超}}} d^4k\,\frac{e^{ikx}}{k^2+m^2};\end{aligned}\right\} \tag{8,117}$$

其中 k_0 的积分路程 $C_{\text{迟}}$ 和 $C_{\text{超}}$ 如图 17 所示.

現在进行积分，将 $\Delta(x)$、$\Delta^{(1)}(x)$、$\Delta_f(x)$、$\Delta^{\text{迟}}(x)$ 和 $\Delta^{\text{超}}(x)$

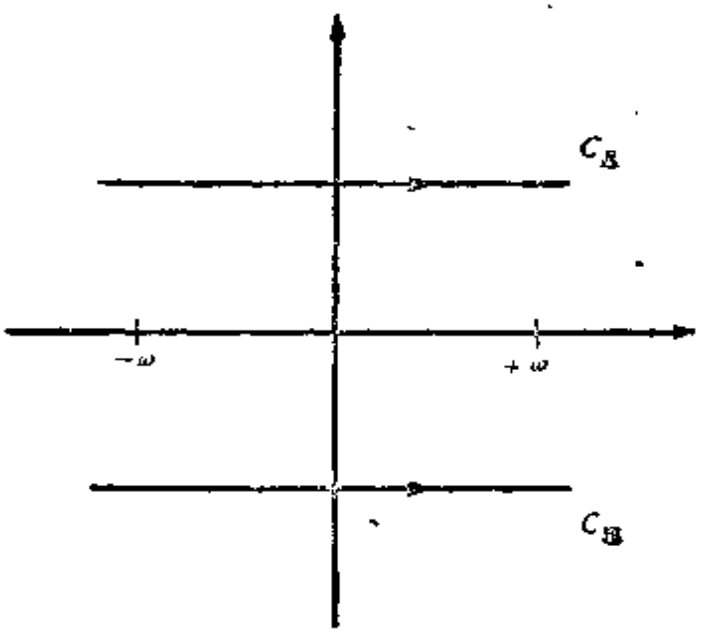


图　17

的显示表式求出．为此，只要求出 $\Delta(x)$ 和 $\Delta^{(1)}(x)$ 的显示表式，其余 $\Delta_f(x)$、$\Delta^{\text{迟}}(x)$ 和 $\Delta^{\text{超}}(x)$ 都可以通过(8,109)和(8,115)利用 $\Delta(x)$ 和 $\Delta^{(1)}(x)$ 表达出来．利用公式

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\theta \sin(z\cosh\theta), \tag{8,118}$$

可以得：

$$\Delta(x) = \frac{1}{4\pi r}\frac{\partial}{\partial r}G(r, x_0), \qquad r = |\vec{x}|,$$

其中

$$G(r, x_0) = \begin{cases} J_0(m\sqrt{x_0^2 - r^2}), & x_0 > r; \\ 0, & |x_0| < r; \\ -J_0(m\sqrt{x_0^2 - r^2}), & x_0 < -r; \end{cases} \tag{8,119}$$

而 J_0 代表零級貝塞耳函数．用类似的方法可得：

$$\left.\begin{aligned} \Delta^{(1)} &= \frac{1}{4\pi r}\frac{\partial}{\partial r}G^{(1)}(r, x_0); \\ G^{(1)}(r, x_0) &= \begin{cases} N_0(m\sqrt{x_0^2 - r^2}), & |x_0| > r; \\ -iH_0^{(1)}(im\sqrt{r^2 - x_0^2}), & |x_0| < r; \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{8,120}$$

其中 N_0 和 $H_0^{(1)}$ 各代表零級諾埃曼（Neumann）函数和零級第一种汉克耳（Hankel）函数. 在 $m=0$ 时，通常以特殊的符号 D，$D^{(1)}$，D_f，$D^{迟}$ 和 $D^{超}$ 来代表 Δ，$\Delta^{(1)}$，Δ_f，$\Delta^{迟}$ 和 $\Delta^{超}$. 它們具有如下的簡单表式：

$$\left.\begin{aligned} D(x) &= -\frac{\epsilon(x_0)}{2\pi}\delta(x^2), \\ D^{(1)}(x) &= \frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{x^2}, \\ D^{迟}(x) &= \frac{1}{4\pi r}\delta(r-x_0), \\ D^{超}(x) &= \frac{1}{4\pi r}\delta(r+x_0), \\ D_f(x) &= \frac{1}{2\pi^2}\left\{\frac{1}{x^2}-i\pi\delta(x^2)\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{8,121}$$

在 $\Delta_f(x)$ 的基础上，可以很容易地求出 $S_f(x)$. 根据定义(8,58)，并利用熟知的对易关系和(5,152)中的符号，我們得：

$$\left.\begin{aligned} S_f(x) &= \frac{-2}{(2\pi)^3}\int d\vec{p}\sum_{r=1,2}u_r(\vec{p})\bar{u}_r(\vec{p})e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}-Ex_0)}, \quad x_0>0; \\ S_f(x) &= \frac{2}{(2\pi)^3}\int d\vec{p}\sum_{r=3,4}u_r(-\vec{p})\bar{u}_r(-\vec{p})e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{x}-Ex_0)}, \\ & \qquad\qquad x_0<0. \end{aligned}\right\} \tag{8,122}$$

利用(5,153)和(5,155)，可以得：

$$\left.\begin{aligned} \sum_{r=1,2}u_r(\vec{p})\bar{u}_r(\vec{p}) &= \frac{-i\hat{p}+m}{2E}, \\ \sum_{r=3,4}u_r(-\vec{p})\bar{u}_r(-\vec{p}) &= \frac{-i\hat{p}-m}{2E}; \end{aligned}\right\} \tag{8,123}$$

其中

$$E=\sqrt{m^2+\vec{p}^2}. \tag{8,124}$$

将(8,123)代入(8,122)，并利用表式(8,105)，就可以得到：

$$S_f(x)=\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}-m\right)\Delta_f(x); \tag{8,125}$$

再利用 $\Delta_f(x)$ 的表式(8,107)，就得：

$$S_f(x)=\frac{-2i}{(2\pi)^4}\lim_{\epsilon\to 0}\int d^4p\,\frac{i\hat{p}-m}{p^2+m^2-i\epsilon}e^{ipx} \tag{8,126}$$

总結本节的討論，我們得：

$$\begin{aligned}
&\varphi_j^{+}(x_2)\varphi_k^{-}(x_1)=\delta_{jk}\frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\frac{e^{ik(x_2-x_1)}}{k^2+m^2};\\
&A_\mu^{+}(x_2)A_\nu^{-}(x_1)=\delta_{\mu\nu}\frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\frac{e^{ik(x_2-x_1)}}{k^2};\\
&\psi^{+}(x_2)\bar{\psi}^{-}(x_1)=\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{i\hat{p}-m}{p^2+m^2}e^{ip(x_2-x_1)}.
\end{aligned} \tag{8,127}$$

当我們在应用(8,127)时应該經常記住的是，在以上三式右方的分母中有一个微小的負虛数 $-i\epsilon$；但为了书写方便起見，在这里略去未写.

§ 8,9. 动量表象

利用公式(8,127)，可以将 S 矩陣元的計算变換到动量表象中进行. 这利用公式

$$\int d^4x e^{ipx}=(2\pi)^4\delta^4(p) \tag{8,128}$$

就可以，例如，将康普頓散射的最低次 S 矩陣元写作：

$$\begin{aligned}
{}_f\langle|S^{(2)}|\rangle_i=e^2\int d^4p\,\bar{u}_{\zeta_f}\frac{\hat{e}_f}{\sqrt{2\omega_f}}\frac{i}{(2\pi)^4}\frac{i\hat{p}-m}{p^2+m^2}\frac{\hat{e}_i}{\sqrt{2\omega_i}}\times\\
\times u_{\zeta_i}(2\pi)^8\delta^4(p_i+k_i-p)\delta^4(p-p_i-k_f)+\\
+e^2\int d^4p\,\bar{u}_{\zeta_f}\frac{\hat{e}_i}{\sqrt{2\omega_i}}\frac{i}{(2\pi)^4}\frac{i\hat{p}-m}{p^2+m^2}\frac{\hat{e}_f}{\sqrt{2\omega_f}}\times\\
\times u_{\zeta_i}(2\pi)^8\delta^4(p_i-k_f-p)\delta^4(p+k_i-p_f);
\end{aligned} \tag{8,129}$$

对 d^4p 进行积分以后，就得：

$$\begin{aligned}
{}_f\langle|S^{(2)}|\rangle i=ie^2(2\pi)^4\delta^4(p_i+k_i-p_f-k_f)\times\\
\times\frac{1}{2\sqrt{\omega_i\omega_f}}\left\{\bar{u}_{\zeta_f}\hat{e}_f\frac{i(\hat{p}_i+\hat{k}_i)-m}{(p_i+k_i)^2+m^2}\hat{e}_i u_{\zeta_i}+\right.\\
\left.+\bar{u}_{\zeta_f}\hat{e}_i\frac{i(\hat{p}_i-\hat{k}_f)-m}{(p_i-k_f)^2+m^2}\hat{e}_f u_{\zeta_i}\right\}.
\end{aligned} \tag{8,130}$$

从上面所举的特例，可以看出，如何直接按照图形在动量表象中写下 S 矩陣元的規律. 以輕子与电磁場的相互作用为例. 图形由带箭头的輕子綫、不带箭头的代表光子的虛綫以及頂角組成. 每一个頂角是二条輕子綫和一条光子綫的相遇之处，如图 4 中的 x 点. 輕子綫可分为二类：一类叫做內部輕子綫，二端都由頂角限住，如图 3a；一类叫做外部輕子綫，只有一端由一个頂角限住，如图 3c 中間的一个图，或右边的一个图. 图 3c 的中間那条外部輕子綫可以代表輕子的消失，也可以代表反輕子的产生. 图 3c 右面的外部輕子綫可以代表輕子的产子，也可以代表反輕子的消失. 光子綫也可以分为二类：一类叫做內部光子綫，二端都由頂角限住，如图 3b 所示；一类叫做外部光子綫，只有一端为頂角限住，如图 3c 中左面的图所示. 外部光子綫代表光子的消失或产生.

費曼 [Feynman, 1949] 和戴逊 [Dyson, 1949] 給出了在动量表象中按照图形写出 S 矩陣元的如下的規律：

1）每一条內部輕子綫貢献一个因子：

$$\int d^4p\, S_f(p);\quad S_f(p) = \frac{i}{(2\pi)^4}\frac{i\hat{p} - m}{p^2 + m^2}; \tag{8,131}$$

2）每一条代表輕子产生的外部輕子綫貢献一个因子：

$$\bar{u}_\zeta; \tag{8,132a}$$

每一条代表反輕子产生的外部輕子綫貢献一个因子：

$$\bar{v}_\zeta; \tag{8,132b}$$

3）每一条代表輕子消失的外部輕子綫貢献一个因子：

$$u_\zeta; \tag{8,133a}$$

每一条代表反輕子消失的外部輕子綫貢献一个因子：

$$v_\zeta; \tag{8,133b}$$

4）每一条內部光子綫貢献一个因子：

$$\int d^4k\,\delta_{\mu\nu}D_f(k);\quad D_f(k) = \frac{-i}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2}, \tag{8,134}$$

其中 $\delta_{\mu\nu}$ 中的标符 μ 和 ν 与这条光子綫的二端的頂角中的因子 γ_μ 和 γ_ν 相配合；

5）每一条代表光子吸收或光子产生的外部光子綫貢献一个因子：

$$\frac{e_\mu}{\sqrt{2\omega}}, \tag{8,135}$$

其中 e_μ 中的标符 μ 与一端頂角中的 γ_μ 相配合；

6）每一个頂角貢献一个因子：

$$-e(2\pi)^4\gamma_\mu\delta^4(\Sigma p), \tag{8,136}$$

其中 Σp 代表在頂角处相遇的輕子綫与光子綫的动量-能量 4-矢量之和；

7）每一个封閉的輕子綫多角形貢献矩陣的一个迹和一个因子－1．矩陣的迹以符号 Sp 表示．

应用上述規則并按照图 18，立刻可以写下(8,129)中的表式．用同样的方法，也可以按照图 19 立刻写下輕子与輕子相互散射的

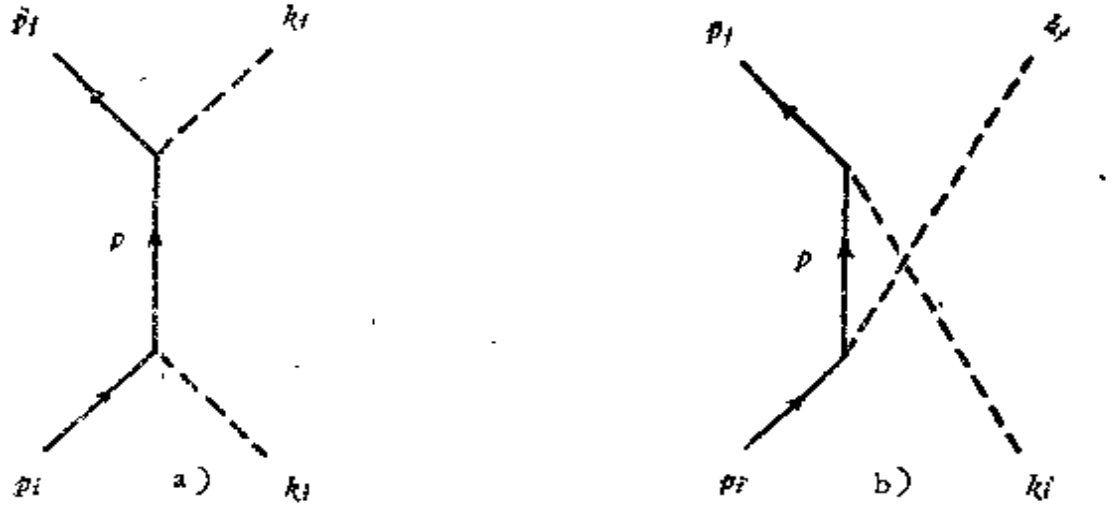


图 18

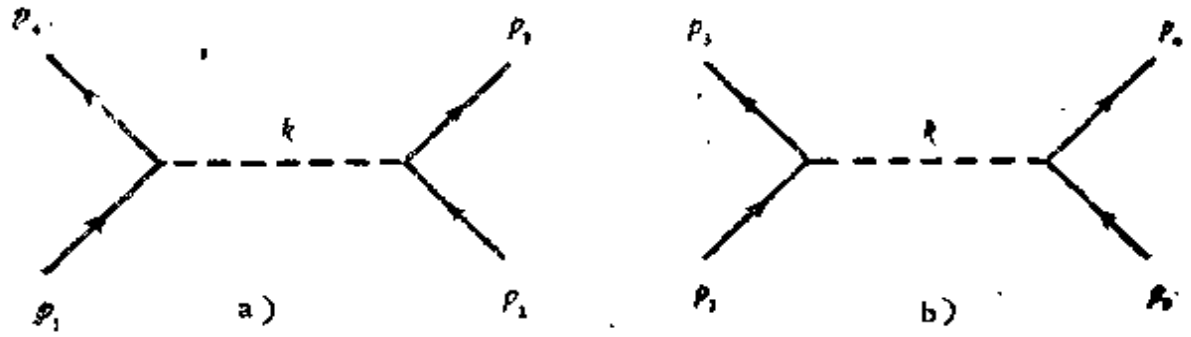


图 19

最低次 S 矩陣元在动量表象中的表式：

$$
{}_f\langle|S^{(2)}|\rangle_i = e^2\int d^4k\bar{u}_{\zeta_4}\gamma_\mu u_{\zeta_1}\frac{-i}{(2\pi)^4}\times
$$

$$
\times\frac{1}{k^2}\bar{u}_{\zeta_3}\gamma_\mu u_{\zeta_2}(2\pi)^8\delta^4(p_1-k-p_4)\delta^4(p_2+k-p_3)-
$$

$$
-e^2\int d^4k\bar{u}_{\zeta_3}\gamma_\mu u_{\zeta_1}\frac{-i}{(2\pi)^4}\times
$$

$$
\times\frac{1}{k^2}\bar{u}_{\zeta_4}\gamma_\mu u_{\zeta_2}(2\pi)^8\delta^4(p_1-k-p_3)\delta^4(p_2+k-p_4);\quad(8,137)
$$

对 d^4k 积分以后，上式就成为：

$$
{}_f\langle|S^{(2)}|\rangle_i = ie^2(2\pi)^4\delta(p_1+p_2-p_3-p_4)\times
$$

$$
\times\left\{\bar{u}_{\zeta_3}\gamma_\mu u_{\zeta_1}\frac{1}{(p_1-p_3)^2}\bar{u}_{\zeta_4}\gamma_\mu u_{\zeta_2}-\bar{u}_{\zeta_4}\gamma_\mu u_{\zeta_1}\frac{1}{(p_1-p_4)^2}\bar{u}_{\zeta_3}\gamma_\mu u_{\zeta_2}\right\}.
\quad(8,138)
$$

上式也可以借公式(8,127)从(8,100)推导出来. (8,130)式右方的因子 $\delta^4(p_i+k_i-p_f-k_f)$ 和(8,138)式右方的因子都是物理过程的动量守恒及能量守恒定律的反映.

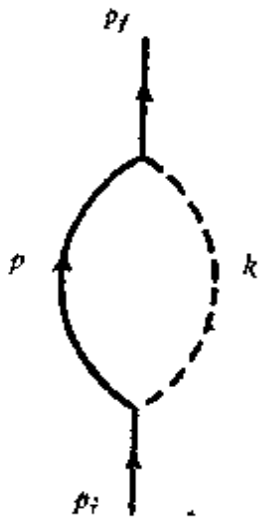


图 20

再举一个例子：可以利用費曼和戴逊所給出的規則，立即写下由图 20 所表示的輕子电磁能的最低次 S 矩陣元：

$$
{}_f\langle|S^{(2)}|\rangle_i = e^2\int d^4p\int d^4k\bar{u}_f\gamma_\mu\frac{i\hat{p}-m}{p^2+m^2}\gamma_\mu u_i\times
$$

$$
\times\frac{1}{k^2}\delta^4(p_i-p-k)\delta^4(p+k-p_f)=
$$

$$
=e^2\int d^4k\bar{u}_f\gamma_\mu\frac{i(\hat{p}_i-\hat{k})-m}{(p_i-k)^2+m^2}\gamma_\mu u_i\frac{1}{k^2}\delta^4(p_i-p_f);\quad(8,139)
$$

上式右方的因子 $\delta^4(p_i-p_f)$ 代表动量-能量守恒定律. 用图形来代表物理过程的方法是費曼 [Feynman, 1949] 首先提出的，因此通常称这种图形为"費曼图形".

不难給出写下核子与 π 介子相互作用的 S 矩陣在动量表象中

的表式。 設核子与 π 介子之間的相互作用哈密頓量密度由表式 (8,46) 代表，那末代表核子与 π 介子相互作用的物理过程的費曼图形的基本組成部分也有三种。

1) 核子綫：以带箭头的实綫代表。核子綫又可以分为二类：一类是內部核子綫；另一类是外部核子綫。外部核子綫又可以分二种：一种箭头指向頂角，代表核子的消失或反核子的产生；另一种箭头背离頂角，代表核子的产生或反核子的消失。

2) 介子綫：以不带箭头的波紋形綫代表。 介子綫也可以分为二类：一类是內部介子綫；另一类是外部介子綫，代表介子的消失或产生。

3) 頂角：是二条核子綫和一条介子綫的相遇之处。

在將代表物理过程的費曼图形画下以后，就可以按照費曼图形并利用下列的規則，將相应的 S 矩陣元在动量表象中的表式写下来：

1) 每一条內部核子綫貢献一个因子：

$$\int d^4p S_f(p); \quad S_f(p) = \frac{i}{(2\pi)^4} \cdot \frac{i\hat{p} - M}{p^2 + M^2}, \tag{8,140}$$

M 代表核子的靜質量；

2) 代表核子产生的外部核子綫貢献一个因子：

$$\bar{u}_\zeta, \tag{8,141a}$$

代表反核子产生的外部核子綫貢献一个因子：

$$\bar{v}_\zeta; \tag{8,141b}$$

3) 代表核子消失的外部核子綫貢献一个因子：

$$u_\zeta, \tag{8,142a}$$

代表反核子消失的外部核子綫貢献一个因子：

$$v_\zeta; \tag{8,142b}$$

4) 每条內部介子綫貢献一个因子：

$$\int d^4k \delta_{fl} \Delta_f(k); \quad \Delta_f(k) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + m^2}; \tag{8,143}$$

m代表π介子的静质量，δ_{jl}中的标符j和l与二端顶角中的因子τ_j和τ_l相配合；

5）每一条外部介子线贡献一个因子：

$$\frac{e_j}{\sqrt{2\omega}}, \tag{8,144}$$

其中j与一端顶角中的因子τ_j相配合；

6）每一个顶角贡献一个因子：

$$g(2\pi)^4\gamma_5\tau_j\delta^4(\sum p), \tag{8,145}$$

其中$\sum p$代表在顶角处相遇的核子线和介子线的动量-能量4-矢量之和；

7）每一个封闭的核子线多角形贡献一个因子-1和一个以符号Sp代表的矩阵的迹.

写下由弱相互作用(8,47)所决定的物理过程的S矩阵元的规则和以上所述的相差不大，这里不再赘述.

参 考 文 献

Dyson, F. J. (1949), *Phys. Rev.*, **75**, 486, 1736.
Feynman, R. P. (1949), *Phys. Rev.*, **76**, 749, 769.
Wick, G. C. (1950), *Phys. Rev.*, **80**, 268.

第九章　微扰論的具体应用

§9,1. 跃迁几率和反应截面

知道了 S 矩陣，就可以求得任何物理过程的跃迁几率或反应截面. 設在 $t=-\infty$ 时，某一系統的始态是 $|\rangle_i$，那末在 $t=\infty$ 时，其終态就将是 $S|\rangle_i$. 因此，在終态中，$|\rangle_f$ 的波幅是：

$$ {}_f\langle|S|\rangle_i. \tag{9,1}$$

我們发現，在 $t=\infty$ 时該系統处于态 $|\rangle_f$ 的几率是：

$$ W_f = |{}_f\langle|S|\rangle_i|^2. \tag{9,2}$$

在上一章中曾經指出，代表物理过程的图形中每一个頂角的貢献中都有一个因子 $\delta^4(\sum p)$，其中 $\sum p$ 代表在該頂角处消失粒子的动量-能量 4-矢量之和減去所产生粒子的动量-能量 4-矢量之和；因子 $\delta^4(\sum p)$ 代表在該頂角处进行的轉化过程中的能量守恆和动量守恆. 在按內部粒子綫的动量和能量积分以后，一定在最后得到一个因子：

$$ \delta^4\Big(\sum_i p_i - \sum_f p_f\Big), \tag{9,3}$$

其中 $\sum_i p_i$ 代表所有始态粒子的动量-能量 4-矢量之和，$\sum_f p_f$ 代表所有終态粒子的动量-能量 4-矢量之和；因子(9,3)代表整个物理过程的动量守恆和能量守恆. 因此，可以将 S 矩陣元 (9,1) 写作：

$$ {}_f\langle|S|\rangle_i = M_{fi}\delta^4\Big(\sum_i p_i - \sum p_f\Big); \tag{9,4}$$

而相应的几率可以写作：

$$ W_f = |M_{fi}|^2\delta^4(0)\delta^4\Big(\sum_i p_i - \sum_f p_f\Big). \tag{9,5}$$

可以將函数 $\delta^4(p)$ 表达为：

$$\delta^4(p) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x e^{ipx}. \tag{9,6}$$

为了計算方便，可以假定場量在一个相当大的立方体的壁上具有周期性，使动量 p 只能取分立的数值。 那末，和(9,6)相应的表式是：

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} dx_0 e^{-ip_0x_0}\int_G d\vec{x}e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}, \tag{9,7}$$

其中 G 代表立方体内部的区域。在 $p=0$ 时，(9,7) 就成为 $\delta^4(0)$ 的表式：

$$\delta^4(0) = \frac{1}{(2\pi)^4}\lim_{T\to\infty} 2TV, \tag{9,8}$$

其中 V 代表立方体的体积。我們可以选择立方体的边为长度的单位；在用了这一单位以后，V 就等于 1。 从表式 (9,5)，可以利用(9,8)得到每单位时間内的几率的改变等于：

$$\frac{1}{(2\pi)^4}|M_{fi}|^2\delta^4\left(\sum_i p_i - \sum_f p_f\right), \tag{9,9}$$

而跃迁到相空間元 $\prod_f d\vec{p}_f$ 内的几率 dw 是：

$$dw = \frac{1}{(2\pi)^4}|M_{fi}|^2\delta\left(\sum_i p_i - \sum_f p_f\right)\prod_f \frac{d\vec{p}_f}{(2\pi)^3}; \tag{9,10}$$

上式中的因子 $\frac{1}{(2\pi)^3}$ 是由于从对分立的 $\vec{p}_f$ 求和改变为对連續的 $d\vec{p}_f$ 的积分而产生的。 我們可以首先按終态中某一个粒子的动量积分，将 (9,10) 表式中 $\delta\left(\sum_i \vec{p}_i - \sum_f \vec{p}_f\right)$ 这一因子积去，則得：

$$dw = \frac{1}{(2\pi)^7}|M_{fi}|^2\delta\left(\sum_i E_i - \sum_f E_f\right)\prod_{f'} \frac{d\vec{p}_{f'}}{(2\pi)^3}, \tag{9,11}$$

其中 $\prod_{f'} d\vec{p}_{f'}$ 代表将上述粒子除外的相空間元。 我們可以在留下的終态粒子中再挑选出一个粒子来，将这一个粒子的相空間元表

达为：

$$\rho_E dE\, d\Omega, \tag{9,12}$$

其中 $E = \sum_f E_f$, $d\Omega$ 为該粒子的立体角元. 在按 dE 积分以后，就可以得到如下的微分跃迁几率：

$$dw = \frac{1}{(2\pi)^{10}} |M_{fi}|^2 \rho_E\, d\Omega \prod_{f''} \frac{d\vec{p}_{f''}}{(2\pi)^3}, \tag{9,13}$$

其中 $\prod_{f''} d\vec{p}_{f''}$ 代表将上述二个終态中的粒子除外的相空間元. 这就是跃迁到 $d\Omega \prod_{f''} d\vec{p}_{f''}$ 这一范围内的微分跃迁几率. 假使我們所討論的是一个碰撞过程，那末，在实驗上所測量到的将是反应微分截面 $d\Phi$. 設入射粒子的速度是 v，則有：

$$d\Phi = \frac{1}{(2\pi)^{10}} |M_{fi}|^2 \rho_E \frac{d\Omega}{v} \prod_{f''} \frac{d\vec{p}_{f''}}{(2\pi)^3}. \tag{9,14}$$

可以用上一章中所述的微扰論方法求出 S 矩陣元，从而利用(9,13)或(9,14)求出跃迁几率或反应截面. 但是，上一章所給出的 S 矩陣元是一个无穷級数，不可能将这一級数的每一項都計算出来. 实际上，最多只能計算出这一級数的前面少数几項，后面的項計算起来越来越复杂，工作量太大. 这就产生了下面的問題：假使只計算这一无穷級数的前面几項，所得到的結果是不是足够好的近似呢？从(8,24)可以看出，这一无穷級数是相互作用哈密頓量密度中的相互作用常数的冪級数. 假使所討論的是电磁相互作用的現象或弱相互作用現象，那末，由于 $\frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$ 和 $GM^2 \approx 10^{-5}$ 都是很小的数值，因而只計算級数的最初几項就可能得到相当好的近似結果. 但是，假使討論的是强相互作用的現象，情况就完全不同了. 以核子与 π 介子的相互作用現象为例，假使相互作用哈密頓量密度具有如(8,46)的形式，那末，根据理論与实驗的比較可得：

$$\frac{g^2}{4\pi} \cong 15; \tag{9,15}$$

因此，应用上一章中所介紹的微扰論的方法来討論強相互作用的現象，不可能得到可靠的結果。我們在本章中將应用微扰論的方法討論一些电磁相互作用的現象和弱相互作用的現象，并將指出，目前的量子場論已能很好地解释范围相当广泛的基本粒子現象，因此，它必然包含着重要的、能够反映客观世界的正确因素。

§9,2. γ矩陣的一些性質

在很多具体的計算問題中，常常牽涉到所謂γ矩陣。为了以后計算的方便，我們在下面給出一些关于γ矩陣的公式。我們將首先推导出一些求γ矩陣乘积的迹的公式。設 μ,ν,ρ 和 σ 代表不同的标符，可以証明：

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{Sp}\,\gamma_\mu = 0,\\&\mathrm{Sp}\,\gamma_\mu\gamma_\nu = 0,\\&\mathrm{Sp}\,\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho = 0,\\&\mathrm{Sp}\,\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma = 0.\end{aligned}\right\} \tag{9,16}$$

其証明如下：取 $\lambda \neq \mu$，則由于

$$\gamma_\mu = \gamma_\mu\gamma_\lambda^2 = \gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\lambda, \tag{9,17}$$

故有：

$$\mathrm{Sp}\gamma_\mu = \mathrm{Sp}\gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\lambda. \tag{9,18}$$

考虑到 γ_μ 和 γ_λ 的反对易性，有：

$$\gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\lambda = -\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\lambda; \tag{9,19}$$

因此有：

$$\mathrm{Sp}\gamma_\mu\gamma_\lambda\cdot\gamma_\lambda = -\mathrm{Sp}\gamma_\lambda\cdot\gamma_\mu\gamma_\lambda. \tag{9,20}$$

但是，一般地有：

$$\mathrm{Sp}AB = \mathrm{Sp}BA, \tag{9,21}$$

因此又有：

$$\mathrm{Sp}\gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\lambda = \mathrm{Sp}\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\lambda. \tag{9,22}$$

比較(9,20)和(9,22)，就得：

$$\mathrm{Sp}\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\lambda = -\mathrm{Sp}\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\lambda = 0; \tag{9,23}$$

与(9,18)式結合起来，这就証明了(9,16)中的第一式。次之，由于

$\mu \neq \nu$,故有:

$$\gamma_\mu\gamma_\nu = -\gamma_\nu\gamma_\mu, \tag{9,24}$$

因此有:

$$\mathrm{Sp}\gamma_\mu\gamma_\nu = -\mathrm{Sp}\gamma_\nu\gamma_\mu. \tag{9,25}$$

在考虑了(9,21)式以后,又有:

$$\mathrm{Sp}\gamma_\mu\gamma_\nu = \mathrm{Sp}\gamma_\nu\gamma_\mu. \tag{9,26}$$

将(9,25)和(9,26)結合起来,就得到(9,16)中的第二式:

$$\mathrm{Sp}\gamma_\mu\gamma_\nu = 0. \tag{9,27}$$

又次之,我們取 λ 既不等于μ,也不等于 ν 和 ρ,那末就有:

$$\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho = \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\lambda\gamma_\lambda = -\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\lambda; \tag{9,28}$$

因此有:

$$\mathrm{Sp}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\lambda\gamma_\lambda = -\mathrm{Sp}\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\lambda. \tag{9,29}$$

另一方面,考虑到(9,21),又有:

$$\mathrm{Sp}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\lambda\gamma_\lambda = \mathrm{Sp}\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\lambda. \tag{9,30}$$

将(9,28),(9,29)和(9,30)結合起来,就得到(9,16)中的第三式:

$$\mathrm{Sp}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho = 0. \tag{9,31}$$

最后,由于 μ、ν、ρ 和 σ 彼此都不相同,因此有:

$$\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma = -\gamma_\sigma\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho; \tag{9,32}$$

于是

$$\mathrm{Sp}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma = -\mathrm{Sp}\gamma_\sigma\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho. \tag{9,33}$$

另一方面,由于(9,21),我們又有:

$$\mathrm{Sp}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma = \mathrm{Sp}\gamma_\sigma\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho. \tag{9,34}$$

将以上三式結合起来,就得到(9,16)中的第四式.

現在,假使要寻求任何γ矩陣的乘积

$$\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\cdots\gamma_{\mu_n} \tag{9,35}$$

的迹,那末我們可以利用 γ 矩陣之間的对易关系,将(9,35)中的表式改写成如下的形式:

$$(-1)^N\gamma_1\gamma_1\cdots\gamma_1\gamma_2\gamma_2\cdots\gamma_2\gamma_3\gamma_3\cdots\gamma_3\gamma_4\gamma_4\cdots\gamma_4; \tag{9,36}$$

也就是将(9,35)中的 γ 矩陣重新排列, 使相同的 γ 矩陣排列在一起; N 是将(9,35)中的 γ 矩陣改排成为如(9,36)中的次序所需要交

換的不同的 γ 矩陣的次數. 考慮到(9,16)和公式

$$\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = \gamma_4^2 = 1, \tag{9,37}$$

就可以看出，在(9,35)中若有任何一种 γ 矩陣出現的次數是奇數，那末(9,35)中的表式的迹一定等于零. 因此，我們可以肯定，假使表式(9,35)中 γ 矩陣的总數是奇數，那末它的迹一定等于零.

在以后的計算中，也常常应用到如下二个公式:

$$\left.\begin{aligned} \{\hat{A},\hat{B}\} &= 2(AB), \\ \hat{A}\hat{A} &= (AA); \end{aligned}\right\} \tag{9,38}$$

其中 (AB) 的定义是:

$$(AB) \equiv A_\mu B_\mu. \tag{9,39}$$

要証明(9,38)中的公式是很容易的:

$$\begin{aligned} \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} &= A_\mu B_\nu(\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu) = \\ &= 2\delta_{\mu\nu}A_\mu B_\nu = 2(AB). \end{aligned} \tag{9,40}$$

另一些常用的公式是:

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_\mu\gamma_\mu = 4, \\ &\gamma_\mu\hat{A}\gamma_\mu = -2\hat{A}, \\ &\gamma_\mu\hat{A}\hat{B}\gamma_\mu = 4(AB), \\ &\gamma_\mu\hat{A}\hat{B}\hat{C}\gamma_\mu = -2\hat{C}\hat{B}\hat{A}. \end{aligned}\right\} \tag{9,41}$$

(9,41)中的第一式是显而易見的，其他三式可以証明如下:

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_\mu\hat{A}\gamma_\mu = (-\hat{A}\gamma_\mu + 2A_\mu)\gamma_\mu = -2\hat{A}, \\ &\gamma_\mu\hat{A}\hat{B}\gamma_\mu = (-\hat{A}\gamma_\mu + 2A_\mu)(-\gamma_\mu\hat{B} + 2B_\mu) = \\ &\quad = 4\hat{A}\hat{B} + 4(AB) - 2\hat{A}\hat{B} - 2\hat{A}\hat{B} = 4(AB), \\ &\gamma_\mu\hat{A}\hat{B}\hat{C}\gamma_\mu = (-\hat{A}\gamma_\mu + 2A_\mu)\hat{B}(-\gamma_\mu\hat{C} + 2C_\mu) = \\ &\quad = 4(AC)\hat{B} - 2\hat{B}\hat{A}\hat{C} - 2\hat{A}\hat{C}\hat{B} - 2\hat{A}\hat{B}\hat{C} = \\ &\quad = 2\hat{B}\hat{C}\hat{A} - 4(CB)\hat{A} = -2\hat{C}\hat{B}\hat{A}. \end{aligned}\right\} \tag{9,42}$$

在計算中常常用到的公式还有:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{r=1,2} u_r(\vec{p})\bar{u}_r(\vec{p}) = \frac{-i\hat{p} + m}{2E}, \\ &\sum_{r=3,4} u_r(-\vec{p})\bar{u}_r(-\vec{p}) = \frac{-i\hat{p} - m}{2E}; \end{aligned}\right\} \tag{9,43}$$

其中

$$E = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}. \tag{9,44}$$

(9,43)式就是第八章中的(8,123)式.

§ 9,3. 康普頓散射

作为上一章中所介紹的微扰論的应用的第一个例，我們現在来計算康普頓散射截面的最低次近似. 由于康普頓散射的終态只有二个粒子，散射的微分截面就等于：

$$d\Phi = \frac{1}{(2\pi)^{10}} |M_{fi}| \rho_E d\Omega, \tag{9,45}$$

其中 $d\Omega$ 代表射出光子方向的立体角；在这里我們假定，始态中的电子靜止不动，而在我們所选择的单位系統中，光子的速度等于 1.

我們先求 ρ_E 的表式. 为此，我們以 p 和 k 各代表电子和光子的能量-动量 4-矢量，以标符 i 和 f 分别标志始态和終态的物理量. 我們有：

$$\left.\begin{aligned} &\vec{p}_i = 0, \quad \vec{k}_i = \vec{p}_f + \vec{k}_f, \\ &m + \omega_i = E_f + \omega_f; \end{aligned}\right\} \tag{9,46}$$

其中 E 和 ω 各代表电子和光子的能量，m 代表电子的靜质量. 可以将 $d\vec{k}_f$ 写作：

$$d\vec{k}_f = \omega_f^2 d\omega_f d\Omega; \tag{9,47}$$

另一方面，利用(9,46)中的动量守恆的公式，可以将終态的总能量 E 表达为：

$$E = E_f + \omega_f = \sqrt{m^2 + (\vec{k}_i - \vec{k}_f)^2} + \omega_f. \tag{9,48}$$

設以 θ 代表終态光子和始态光子方向之間的夹角，則有：

$$dE = \frac{E_f + \omega_f - \omega_i \cos\theta}{E_f} d\omega_f. \tag{9,49}$$

从(9,47)和(9,49)可以得：

$$\rho_E = \frac{E_f \omega_f^2}{E - \omega_i \cos\theta}. \tag{9,50}$$

此外，根据(9,48)又有：

$$E^2 + \omega_f^2 - 2E\omega_f = m^2 + \omega_i^2 + \omega_f^2 - 2\omega_i\omega_f\cos\theta; \quad (9,51)$$

根据(9,46)中的第三式，有：

$$E^2 - m^2 - \omega_i^2 = 2m\omega_i; \quad (9,52)$$

因此有：

$$\omega_f = \frac{m\omega_i}{E - \omega_i\cos\theta}. \quad (9,53)$$

利用(9,53)，可以将 ρ_E 表达为如下的表式：

$$\rho_E = \frac{E_f\omega_f^3}{m\omega_i}. \quad (9,54)$$

其次，我們計算 $|M_{fi}|^2$. 从(8,130)可以得到 M_{fi} 的如下最低次近似表式：

$$M_{fi} = \frac{ie^2(2\pi)^4}{2\sqrt{\omega_i\omega_f}}\bar{u}_f(\vec{p}_i)\left\{\hat{e}_f\frac{i(\hat{p}_i + \hat{k}_i) - m}{(p_i + k_i)^2 + m^2}\hat{e}_i + \right.$$
$$\left. + \hat{e}_i\frac{i(\hat{p}_i - \hat{k}_f) - m}{(p_i - k_f)^2 + m^2}\hat{e}_f\right\}u_i(\vec{p}_i). \quad (9,55)$$

由于

$$p_i^2 = p_f^2 = -m^2, \quad k_i^2 = k_f^2 = 0; \quad (9,56)$$

我們有：

$$\left.\begin{aligned}(p_i + k_i)^2 + m^2 &= 2p_ik_i = -2m\omega_i,\\ (p_i - k_f)^2 + m^2 &= -2p_ik_f = 2m\omega_f.\end{aligned}\right\} \quad (9,57)$$

此外，考虑到 $\hat{p}_i = 0$，可以知道 $\hat{e}_i$、$\hat{e}_f$ 和 $\hat{p}_i$ 相互反对易；由于光子的极化方向与动量方向相互正交，可知 $\hat{e}_i$ 和 $\hat{k}_i$ 相互反对易，$\hat{e}_f$ 和 $\hat{k}_f$ 相互反对易. 因此有：

$$M_{fi} = \frac{ie^2(2\pi)^4}{4m(\omega_i\omega_f)^{3/2}}\bar{u}_f(\vec{p}_f)\{\omega_f\hat{e}_f\hat{e}_i[i(\hat{p}_i + \hat{k}_i) + m] -$$
$$- \omega_i\hat{e}_i\hat{e}_f[i(\hat{p}_i - \hat{k}_f) + m]\}u_i(\vec{p}_i). \quad (9,58)$$

利用

$$(i\hat{p}_i + m)u_i(\vec{p}_i) = 0, \quad (9,59)$$

可以得：

$$M_{fi} = \frac{e^2(2\pi)^4}{4m(\omega_i\omega_f)^{3/2}}\bar{u}_f(\vec{p}_f)Ru_i(\vec{p}_i),$$
$$R = \omega_f\hat{e}_f\hat{k}_i\hat{e}_i + \omega_i\hat{e}_i\hat{k}_f\hat{e}_f. \quad (9,60)$$

从(9,45),(9,54)和(9,60)可以得:

$$d\Phi = \left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2 \cdot \frac{E_f}{4m^3\omega_i^4} |\bar{u}_f R u_i|^2 d\Omega. \tag{9,61}$$

假使我們不測量电子的自旋，那末我們可以将表式 (9,61) 对終态电子的自旋 s_f 求和，对始态电子的自旋 s_i 求平均，这样得到的平均散射微分截面 $d\Phi$ 为:

$$d\Phi = \left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2 \frac{E_f}{8m^3\omega_i^4} \sum_{s_i s_f} |\bar{u}_f R u_i|^2 d\Omega. \tag{9,62}$$

因此，最后归結为計算 $\sum_{s_i s_f} |\bar{u}_f R u_i|^2$ 的問題.

我們可以利用公式 (9,43)，将 $\sum_{s_i s_f} |\bar{u}_f R u_i|^2$ 表达成如下的形式:

$$\sum_{s_i s_f} |\bar{u}_f R u_i|^2 = \mathrm{Sp} \sum_{s_i s_f} u_i \bar{u}_i \gamma_4 R^* \gamma_4 u_f \bar{u}_f R =$$

$$= \frac{1}{4mE_f} \mathrm{Sp}(i\hat{p}_i - m)\gamma_4 R^* \gamma_4 (i\hat{p}_f - m) R, \tag{9,63}$$

其中 R^* 是 R 的厄米共軛. 引进

$$\bar{R} = -\gamma_4 R^* \gamma_4 = \omega_f \hat{e}_i \hat{k}_i \hat{e}_f + \omega_i \hat{e}_f \hat{k}_f \hat{e}_i, \tag{9,64}$$

則得:

$$d\Phi = \left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2m\omega_i}\right)^4 A\, d\Omega,$$

$$A = \mathrm{Sp}(\hat{p}_i + im)\bar{R}(\hat{p}_f + im)R. \tag{9,65}$$

可以利用 § 9,2 中求矩陣的迹的方法来計算 A. 考虑到

$$\hat{p}_f = \hat{p}_i + \hat{k}_i - \hat{k}_f, \tag{9,66}$$

和具有单数 γ 因子的矩陣的迹等于零，我們可以将 A 分解为如下三部分:

$$\left.\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 + A_3; \\ A_1 &= \mathrm{Sp}\,(\hat{p}_i \bar{R} \hat{p}_i R - m^2 \bar{R} R), \\ A_2 &= \mathrm{Sp}\ \hat{p}_i \bar{R} \hat{k}_i R, \\ A_3 &= -\mathrm{Sp}\ \hat{p}_i \bar{R} \hat{k}_f R. \end{aligned}\right\} \tag{9,67}$$

我們首先計算 A_1. 利用(9,38)、(9,60)和

$$(e_i p_i) = 0, \quad (e_f p_f) = 0; \tag{9,68}$$

可以得:

$$\begin{aligned}\{\hat{p}_i, R\} &= -2\omega_f(p_i k_i)\hat{e}_f\hat{e}_i - 2\omega_i(p_i k_f)\hat{e}_i\hat{e}_f = \\ &= 2\omega_i\omega_f m\hat{e}_f\hat{e}_i + 2\omega_i\omega_f m\hat{e}_i\hat{e}_f = \\ &= 4\omega_i\omega_f m(e_i e_f).\end{aligned} \tag{9,69}$$

用同样方法可以証明:

$$\{\hat{p}_i, \bar{R}\} = \{\hat{p}_i, R\} = 4m\omega_i\omega_f(e_i e_f). \tag{9,70}$$

利用(9,38)、(9,56)和(9,70),可得:

$$A_1 = \mathrm{Sp}\, 4\, m\omega_i\omega_f(e_i e_f)\hat{p}_i R. \tag{9,71}$$

再应用(9,70),得:

$$\mathrm{Sp}\,\hat{p}_i R = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\,(\hat{p}_i R + R\hat{p}_i) = 8m\omega_i\omega_f(e_i e_f). \tag{9,72}$$

因此有:

$$A_1 = 32\, m^2\omega_i^2\omega_f^2(e_i e_f)^2. \tag{9,73}$$

其次,我們計算 A_2:

$$\begin{aligned}A_2 = \mathrm{Sp}\,\hat{p}_i\bar{R}\hat{k}_i R &= \mathrm{Sp}\,\omega_i^2\hat{p}_i\hat{e}_f\hat{k}_f\hat{e}_i\hat{k}_i\hat{e}_i\hat{k}_f\hat{e}_f + \\ &+ \mathrm{Sp}\,\omega_f^2\hat{p}_i\hat{e}_i\hat{k}_i\hat{e}_f\hat{k}_i\hat{e}_f\hat{k}_i\hat{e}_i + \\ &+ \mathrm{Sp}\,\omega_i\omega_f\hat{p}_i\hat{e}_f\hat{k}_f\hat{e}_i\hat{k}_i\hat{e}_f\hat{k}_i\hat{e}_i + \\ &+ \mathrm{Sp}\,\omega_i\omega_f\hat{p}_i\hat{e}_i\hat{k}_i\hat{e}_f\hat{k}_i\hat{e}_i\hat{k}_f\hat{e}_f;\end{aligned} \tag{9,74}$$

由于

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{Sp}\,\omega_i^2\hat{p}_i\hat{e}_f\hat{k}_f\hat{e}_i\hat{k}_i\hat{e}_i\hat{k}_f\hat{e}_f &= \omega_i^2\mathrm{Sp}\hat{p}_i\hat{k}_f\hat{k}_i\hat{k}_f = \\ &= 8\omega_i^2(p_i k_f)(k_i k_f), \\ \mathrm{Sp}\,\omega_f^2\hat{p}_i\hat{e}_i\hat{k}_i\hat{e}_f\hat{k}_i\hat{e}_f\hat{k}_i\hat{e}_i &= -2\omega_f^2(e_f k_i)\mathrm{Sp}\hat{p}_i\hat{k}_i\hat{e}_f\hat{k}_i = \\ &= -16\omega_f^2(p_i k_i)(e_f k_i)^2, \\ \mathrm{Sp}\,\omega_i\omega_f\hat{p}_i\hat{e}_f\hat{k}_f\hat{e}_i\hat{k}_i\hat{e}_f\hat{k}_i\hat{e}_i &= 2\omega_i\omega_f(k_i e_f)\mathrm{Sp}\,\hat{p}_i\hat{e}_f\hat{k}_f\hat{e}_i\hat{k}_i\hat{e}_i = \\ &= 8\omega_i\omega_f(k_i e_f)^2(p_i k_f), \\ \mathrm{Sp}\,\omega_i\omega_f\hat{p}_i\hat{e}_i\hat{k}_i\hat{e}_f\hat{k}_i\hat{e}_i\hat{k}_f\hat{e}_f &= -2\omega_i\omega_f(e_f k_i)\mathrm{Sp}\hat{p}_i\hat{k}_i\hat{k}_f\hat{e}_f = \\ &= 8\omega_i\omega_f(e_f k_i)^2(p_i k_f),\end{aligned}\right\} \tag{9,75}$$

故有:

$$A_2 = -8m\omega_i^2\omega_f(k_i k_f). \tag{9,76}$$

第三步計算 A_3. 不难看出，假使将 k_i 和 k_f 互換，e_i 和 e_f 互換；那末 R 仍然是 R，$\bar{R}$ 仍然是 $\bar{R}$，而 A_2 則变为 $-A_3$. 因此，假使将(9,76)式右方的标符 i 和 f 互換，就得到 $-A_3$:

$$A_3 = 8m\omega_i\omega_f^2(k_ik_f). \tag{9,77}$$

从(9,67)，(9,73)，(9,76)和(9,77)可以得：

$$A = 8m\omega_i\omega_f[4m\omega_i\omega_f(e_ie_f)^2 + (\omega_f - \omega_i)(k_ik_f)]. \tag{9,78}$$

可以将 (k_ik_f) 改写成如下的形式：

$$(k_ik_f) = \omega_i\omega_f(\cos\theta - 1) = m(\omega_f - \omega_i), \tag{9,79}$$

其中应用了公式(9,53)，因此有：

$$A = 8m^2\omega_i^2\omega_f^2\left[4(e_ie_f)^2 + \frac{\omega_f}{\omega_i} + \frac{\omega_i}{\omega_f} - 2\right]; \tag{9,80}$$

代入(9,65)，就得到如下的微分散射截面：

$$d\Phi = \frac{r_0^2}{4}\frac{\omega_f^2}{\omega_i^2}\left[4\cos^2\varphi + \frac{\omega_f}{\omega_i} + \frac{\omega_i}{\omega_f} - 2\right]d\Omega, \tag{9,81}$$

其中 φ 代表始态和終态光子的极化方向之間的夹角，而 r_0 代表电子的經典半径 $\frac{e^2}{4\pi m}$.

假使我們不測量光子的极化，那末就应該对始态光子的极化求平均，对終态光子的极化求和，以求得对于电子的自旋和光子的极化平均微分截面 $d\bar{\Phi}$. 考虑到

$$\sum_{i,f}(e_ie_f)^2 = \sum_f\left(1 - \frac{(\vec{k}_i\vec{e}_f)^2}{|\vec{k}_i|^2}\right) =$$
$$= 2 - 1 + \cos^2\theta = 1 + \cos^2\theta, \tag{9,82}$$

因此最后有：

$$d\bar{\Phi} = \frac{r_0^2}{2}\frac{\omega_f^2}{\omega_i^2}\left(\cos^2\theta + \frac{\omega_f}{\omega_i} + \frac{\omega_f}{\omega_f} - 1\right)d\Omega. \tag{9,83}$$

首先推导出公式(9,81)和(9,83)的是克莱因和仁科 [Klein & Nishina, 1929] 以及塔姆 [Tamm, 1930]. 实驗的結果与(9,81)和(9,83)符合得很好. 关于理論与实驗結果的比較可参看海脫勒所著"輻射的量子理論"一书 [Heitler, 1954].

§ 9,4. 电子和正电子的湮沒

在电子和正电子相碰撞的时候，它們可能湮沒而轉化为一对光子. 作为說明上一章所介紹的方法的另一个例，我們今以微扰論来討論这一問題. 設以 p_1 和 p_2 分别代表电子和正电子的动量和能量，以 k_1 和 k_2 代表所产生的二个光子的动量和能量；那末这一过程的最低次近似可以用图 21 中的二个图形来表示. 利用 § 8,9 中所叙述的規則，可以得到如下的相应矩陣元：

$$ {}_f\langle|S^{(2)}|\rangle_i = M_{fi}\delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2), \tag{9,84} $$

$$ M_{fi} = v_s(p_2)\Big\{\hat{e}_2\frac{i(\hat{p}_1 - \hat{k}_1) - m}{(p_1 - k_1)^2 + m^2}\hat{e}_1 + \hat{e}_1\frac{i(\hat{p}_1 - \hat{k}_2) - m}{(p_1 - k_2)^2 + m^2}\hat{e}_2\Big\}u_r(p_1)\frac{ie^2(2\pi)^4}{2\sqrt{\omega_1\omega_2}}, $$

其中 e_1 和 e_2 分别代表二个光子的极化矢量，r 和 s 則各标志电子和正电子的自旋. 假定电子静止不动，那末由于

$$ \left.\begin{aligned} &p_1^2 = p_2^2 = -m^2; \qquad k_1^2 = k_2^2 = 0,\\ &\{\hat{e}_1, \hat{p}_1\} = 0, \qquad \{\hat{e}_2, \hat{p}_1\} = 0,\\ &\{\hat{e}_1, \hat{k}_1\} = 0, \qquad \{\hat{e}_2, \hat{k}_2\} = 0,\\ &\{i\hat{p}_1 + m\}u_r(p_1) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{9,85} $$

可以将 M_{fi} 化簡为：

$$ M_{fi} = \frac{e^2(2\pi)^4}{4m(\omega_1\omega_2)^{3/2}}v_s(p_2)Ru(p_1), $$

$$ R = \omega_2\hat{e}_2\hat{k}_1\hat{e}_1 + \omega_1\hat{e}_1\hat{k}_2\hat{e}_2. \tag{9,86} $$

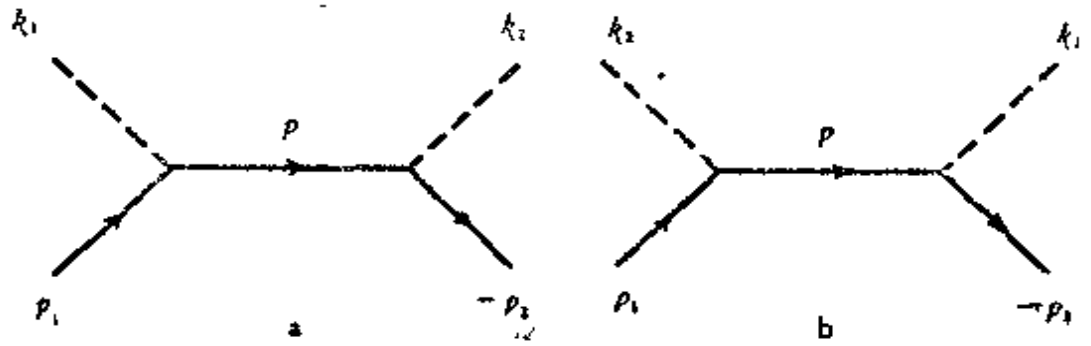


图 21

由于終态只有二个粒子，因而，假使不測量电子和正电子的自旋，那末在应用公式 (9,14) 对电子和正电子的自旋平均以后，就得到如下的湮沒微分截面：

$$d\Phi = \frac{r_0^2}{16}\frac{\rho_E d\Omega}{v\omega_1^3\omega_2^3}\sum_{r,s}|v_r(p_2)Ru_r(p_1)|^2, \qquad (9,87)$$

其中 v 代表入射正电子的速度：

$$v = \frac{|\vec{p}_2|}{E_2}. \qquad (9,88)$$

我們先求 ρ_E 的表式。动量和能量守恒要求：

$$p_1 + p_2 = k_1 + k_2. \qquad (9,89)$$

在考虑了动量守恒以后，終态的能量 E 等于：

$$E = \omega_1 + \omega_2 = \omega_1 + |\vec{p}_2 - \vec{k}_1|. \qquad (9,90)$$

从(9,90)可以得：

$$dE = \frac{d\omega_1}{\omega_2}(E - |\vec{p}_2|\cos\theta), \qquad (9,91)$$

其中 θ 代表正电子和第一个光子的动量之間的夹角。由于

$$\rho_E dE d\Omega = d\vec{k}_1 = \omega_1^2 d\omega_1 d\Omega, \qquad (9,92)$$

从(9,91)和(9,92)可得：

$$\rho_E = \frac{\omega_1^2\omega_2}{E - |\vec{p}_2|\cos\theta}. \qquad (9,93)$$

可以将(9,93)式加以簡化。由于 ω_2 一方面等于 $|\vec{p}_2 - \vec{k}_1|$，另一方面又等于 $(E - \omega_1)$，因此有：

$$E^2 + \omega_1^2 - 2E\omega_1 = \omega_1^2 + |\vec{p}_2|^2 - 2|\vec{p}_2|\omega_1\cos\theta; \qquad (9,94)$$

另一方面，由于

$$E^2 = (E_1 + E_2)^2 = 2m^2 + 2mE_2 + |\vec{p}_2|^2, \qquad (9,95)$$

故得：

$$mE = \omega_1(E - |\vec{p}_2|\cos\theta). \qquad (9,96)$$

将(9,96)代入(9,93)，就得：

$$\rho_E = \frac{\omega_1^3\omega_2}{mE}. \qquad (9,97)$$

第二步的工作是計算 $\sum_{r,s}|v_s(p_2)Ru_r(p_1)|^2$:

$$\sum_{r,s}|v_s(p_2)Ru_r(p_1)|^2 = \\ = \mathrm{Sp}\sum_{r,s'}u_r(p_1)\bar{u}_r(p_1)\gamma_4 R^* v_s^*(p_2)v_s(p_2)R. \quad (9,98)$$

利用(9,43),有:

$$\sum_r u_r(p_1)\bar{u}_r(p_2) = \frac{-i\hat{p}_1+m}{E_1}. \quad (9,99)$$

考虑到 $v_s(p_2)$ 与负能級波函数 $\bar{u}_{s'}(-p_2)$ 之間的关系,并利用(9,43),就有:

$$\sum_s v_s^*(p_2)v_s(p_2) = \gamma_4\sum_{s'=3,4}u_{s'}(-p_2)\bar{u}_{s'}(-p_2) = \\ = -\gamma_4\cdot\frac{i\hat{p}_2+m}{2E_2}. \quad (9,100)$$

將(9,99)和(9,100)代入(9,98),并利用(9,64),就得:

$$\sum_{r,s}|v_s(p_2)Ru_r(p_1)|^2 = \frac{1}{4mE_2}\mathrm{Sp}(\hat{p}_1+im)\bar{R}(\hat{p}_2-im)R. \quad (9,101)$$

注意到,$\hat{p}_2 = \hat{k}_1+\hat{k}_2-\hat{p}_1$,就不难証明:

$$\mathrm{Sp}(\hat{p}_1+im)\bar{R}(\hat{p}_2-im)R = -A_1+A_2-A_3; \quad (9,102)$$

A_1, A_2 和 A_3的定义見 (9,67),但是得將 i 換成 1, f 換成2. 利用(9,73),(9,76)和(9,77),就得:

$$\sum_{r,s}|v_s(p_2)Ru_r(p_1)|^2 = -\frac{2\omega_1\omega_2}{E_2}[4m\omega_1\omega_2(e_1e_2)^2+E(k_1k_2)]. \quad (9,103)$$

將(9,88),(9,97)和(9,103)代入 (9,87), 并以 φ 代表 e_1 和 e_2 之間的夾角,那末就得到一个光子在立体角 $d\Omega$ 之內放出,具有极化 e_1,而另一个光子具有极化 e_2 的微分截面:

$$d\Phi = \frac{r_0^2}{8}\cdot\frac{\omega_1^2 d\Omega}{mE|\vec{p}_2|}\{E(1-\cos\theta)-4m\cos^2\varphi\}. \quad (9,104)$$

假使我們不測量光子的极化方向,那末应該將(9,104)式对 e_1 和 e_2

求和，于是得到：

$$d\bar{\Phi} = \frac{r_0^2}{2}\frac{\omega_1^2 d\Omega}{mE|\vec{p}_2|}\{E(1-\cos\theta) - m(1+\cos^2\theta)\}; \quad (9,105)$$

$d\bar{\Phi}$ 是一个光子在立体角 $d\Omega$ 之內放出的微分截面. 将 (9,105) 对 $d\Omega$ 积分，就得到湮沒过程的总截面 Φ：

$$\Phi = \frac{\pi r_0^2}{\gamma^2-1}\left\{\frac{1+4\gamma+\gamma^2}{1+\gamma}\ln(\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}) - \right.$$
$$\left. - \frac{3+\gamma}{1+\gamma}\sqrt{\gamma^2-1}\right\};$$

$$\gamma = \frac{E_i}{m} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (9,106)$$

首先推导出上述关于自由电子和正电子的湮沒截面公式的是狄拉克 [Dirac, 1930].

§ 9,5. 軔致輻射

作为微扰論的应用的第三个例，我們来討論軔致輻射現象. 电子在庫伦場中被散射时，由于經受到一定的速度改变，会輻射出光子来，称为軔致輻射. 在討論这一問題时，有必要将理論略加扩充，使之也能反映受外部电磁場影响的現象. 設以 $A_\mu^{(外)}$ 代表外部电磁場的4-矢势，$A^{(总)}$ 代表包括外部电磁場 $A_\mu^{(外)}$ 和輻射場 A_μ 在內的总电磁場的 4-矢势，那末就有：

$$A_\mu^{(总)} = A_\mu + A_\mu^{(外)}. \quad (9,107)$$

于是相互作用哈密頓量密度就扩充为：

$$\mathscr{H}_I = -ie\mathrm{N}(\bar{\psi}\hat{A}^{(总)}\psi). \quad (9,108)$$

将 (9,108) 代入 (8,24)，就得到包括了外部电磁場影响的 S 矩陣. 由于在軔致輻射过程中，电子一方面为外部电磁場所散射. 另一方面又要放出光子；因此，能对这一过程作出貢献的最低次近似的 S 矩陣元是：

$$S^{(2)} = \frac{e^2}{2!}\int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \mathrm{T}\{\mathrm{N}(\bar{\psi}\hat{A}^{(总)}\psi)\mathrm{N}(\bar{\psi}\hat{A}^{(总)}\psi)\}. \quad (9,109)$$

我們可以将(9,109)中的混合乘积改写为正規乘积. 不难看出，对

軔致輻射起作用的正規乘积有下列二項：

$$e^2\int_{-\infty}^{\infty}d^4x_2\int_{-\infty}^{\infty}d^4x_1\{\mathrm{N}(\bar{\psi}(x_2)\hat{A}(x_2)\psi(x_2)\bar{\psi}(x_1)\hat{A}^{(外)}(x_1)\psi(x_1))+$$

$$+\mathrm{N}(\bar{\psi}(x_2)\hat{A}^{(外)}(x_2)\psi(x_2)\bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)\psi(x_1))\}. \quad (9,110)$$

值得注意的是，由于存在着二类相似的收縮方式，它們产生出二类貢献相同的項，因此(9,109)式右方的一个因子 $\frac{1}{2!}$ 就被消去. 設以 $p_1(\vec{p}_1,E_1)$ 和 $p_2(\vec{p}_2,E_2)$ 分别代表电子在始态和終态的动量-能量4-矢量，以 $k(\vec{k},\omega)$ 代表所放出的光子的动量-能量4-矢量，以 $e(\vec{e},0)$ 代表光子的极化矢量，那末，由于(9,110)而产生的軔致輻射的 S 矩陣元在动量表象中具有如下的形式：

$$\begin{aligned}{}_f\langle|S^{(2)}|\rangle_i &= \frac{ie^2(2\pi)^4}{\sqrt{2\omega}}\int d^4p\,d^4k'\bar{u}_{s_2}(p_2)\times\\ &\times\left\{\hat{e}\,\frac{i\hat{p}-m}{p^2+m^2}\hat{A}^{(外)}(k')\delta(p-k'-p_1)\delta(p_2+k-p)+\right.\\ &\left.+\hat{A}^{(外)}(k')\,\frac{i\hat{p}-m}{p^2+m^2}\hat{e}\,\delta(p+k-p_1)\delta(p_2-p-k')\right\}u_{s_1}(p_1)=\\ &=\frac{ie^2(2\pi)^4}{\sqrt{2\omega}}\bar{u}_{s_2}(p_2)\left\{\hat{e}\,\frac{i(\hat{p}_2+\hat{k})-m}{(p_2+k)^2+m^2}\hat{A}^{(外)}(p_2+k-p_1)+\right.\\ &\left.+\hat{A}^{(外)}(p_2+k-p_1)\,\frac{i(\hat{p}_1-\hat{k})-m}{(p_1-k)^2+m^2}\,\hat{e}\right\}u_{s_1}(p_1), \quad (9,111)\end{aligned}$$

其中 s_1 和 s_2 各标志始态和終态电子的自旋. $A_\mu^{(外)}(k')$ 的定义是：

$$A_\mu^{(外)}(k')=\frac{1}{(2\pi)^4}\int A_\mu^{(外)}(x)e^{-ik'x}d^4x. \quad (9,112)$$

在我們所討論的具体情况下，

$$\vec{A}^{(外)}(x)=0, \quad A_4^{(外)}(x)=i\phi^{(外)}(x)=-\frac{iZe}{4\pi r}, \quad (9,113)$$

其中 Z 为产生庫伦場的原子核的原子序数. 从(9,113)和(9,112)可得：

$$\vec{A}^{(外)}(k')=0, \quad A_4^{(外)}(k')=-\frac{iZe}{(2\pi)^3}\frac{\delta(k_0')}{|\vec{k}'|^2}; \quad (9,114)$$

因此，(9,111)中的 S 矩陣元具有如下的形式：

$$
{}_f\langle|S^{(2)}|\rangle_i = \frac{2\pi Ze^3}{\sqrt{2\omega}} \frac{\delta(E_2+\omega-E_1)}{|\vec{p}_2+\vec{k}-\vec{p}_1|^2} \times
$$
$$
\times \bar{u}_{s_2}(p_2)\Big\{ \hat{e}\frac{i(\hat{p}_2+\hat{k})-m}{(p_2+k)^2+m^2}\gamma_4 +
$$
$$
+ \gamma_4 \frac{i(\hat{p}_1-\hat{k})-m}{(p_1-k)^2+m^2}\hat{e}\Big\}u_{s_1}(p_1). \qquad (9,115)
$$

应用与 § 9,1 中的討論相类似的考虑，假使不測量电子的自旋，就得到如下的跃迁几率：

$$
dw = \frac{Z^2e^6}{4(2\pi)^5\omega} d\vec{p}_2 \int d\vec{k} \frac{\delta(E_2+\omega-E_1)}{|\vec{p}_2+\vec{k}-\vec{p}_1|^4} \times
$$
$$
\times \sum_{s_1,s_2} |u_{s_2}(p_2)Mu_{s_1}(p_1)|^2, \qquad (9,116)
$$

其中

$$
M = \hat{e}\frac{i(\hat{p}_2+\hat{k})-m}{(p_2+k)^2+m^2}\gamma_4 + \gamma_4\frac{i(\hat{p}_1-\hat{k})-m}{(p_1-k)^2+m^2}\hat{e}. \qquad (9,117)
$$

(9,116) 式的特点是，它的右方并不包含因子 $\delta(\vec{p}_2+\vec{k}-\vec{p}_1)$；这是由于庫伦場要吸收一部分动量，因而終态中电子和光子的总动量就不必一定等于始态电子的动量的緣故。于是有：

$$
\left.\begin{aligned} \int d\vec{k}\delta(E_2+\omega-E_1) &= \omega^2 d\Omega_\nu, \\ d\vec{p}_2 &= |\vec{p}_2|E_2dE_2d\Omega_e; \end{aligned}\right\} \qquad (9,118)
$$

其中 $d\Omega_\nu$ 和 $d\Omega_e$ 各代表終态光子和終态电子射出方向上的立体角。这样，我們就得到如下的輻致輻射的微分截面：

$$
d\Phi = \frac{Z^2e^6\omega E_1E_2}{4(2\pi)^5|\vec{k}'|^4}\frac{|\vec{p}_2|}{|\vec{p}_1|} dE_2d\Omega_ed\Omega_\nu \sum_{s_1,s_2} |\bar{u}_{s_2}(p_2)Mu_{s_1}(p_1)|^2, \qquad (9,119)
$$

其中

$$
\vec{k}' = \vec{p}_2+\vec{k}-\vec{p}_1. \qquad (9,120)
$$

現在問題归結为計算(9,119)右方的最后一个因子：

$$
\mathscr{M} = \sum_{s_1,s_2} |u_{s_2}(p_2)Mu_{s_1}(p_1)|^2. \qquad (9,121)
$$

我們可以先將M的形式略加簡化. 首先, 引入符号 D_1 和 D_2:

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= -\frac{1}{(p_1-k)^2+m^2} = \frac{1}{2p_1k}, \\ D_2 &= \frac{1}{(p_2+k)^2+m^2} = \frac{1}{2p_2k}. \end{aligned}\right\} \tag{9,122}$$

当將表式(9,117)中 $\hat{p}_1$、$\hat{p}_2$ 的位置和 $\hat{e}$ 的位置交換以后, 并考虑到

$$(i\hat{p}_1+m)u_{s_1}(p_1)=0, \quad \bar{u}_{s_2}(p_2)(i\hat{p}_2+m)=0, \tag{9,123}$$

我們就得到:

$$\bar{u}_{s_2}(p_2)Mu_{s_1}(p_1) = i\bar{u}_{s_2}(p_2)(a+b)u_{s_1}(p_1), \tag{9,124}$$

其中 a 和 b 具有如下的形式:

$$\left.\begin{aligned} a &= D_2(\hat{e}\hat{k}+2(ep_2))\gamma_4, \\ b &= D_1\gamma_4(\hat{k}\hat{e}-2(ep_1)). \end{aligned}\right\} \tag{9,125}$$

从(9,43), (9,121)和(9,124)可得

$$\mathscr{M} = \frac{1}{4E_1E_2}\,\mathrm{Sp}\,(\bar{a}+\bar{b})(-i\hat{p}_2+m)(a+b)(-i\hat{p}_1+m), \tag{9,126}$$

其中 $\bar{a}$ 和 $\bar{b}$ 具有如下的形式

$$\left.\begin{aligned} \bar{a} &= \gamma_4 a^*\gamma_4 = D_2\gamma_4(\hat{k}\hat{e}+2(ep_2)), \\ \bar{b} &= \gamma_4 b^*\gamma_4 = D_1(\hat{e}\hat{k}-2(ep_1))\gamma_4. \end{aligned}\right\} \tag{9,127}$$

我們可以將(9,126)式右方的矩陣的迹分解为如下的四項:

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{Sp}\,(\bar{a}+\bar{b})(-i\hat{p}_2+m)(a+b)(-i\hat{p}_1+m) = \\ &\quad = B_1+B_2+B_3+B_4; \\ &B_1 = \mathrm{Sp}\,\bar{a}(-i\hat{p}_2+m)a(-i\hat{p}_1+m), \\ &B_2 = \mathrm{Sp}\,\bar{b}(-i\hat{p}_2+m)b(-i\hat{p}_1+m), \\ &B_3 = \mathrm{Sp}\,\bar{a}(-i\hat{p}_2+m)b(-i\hat{p}_1+m), \\ &B_4 = \mathrm{Sp}\,\bar{b}(-i\hat{p}_2+m)a(-i\hat{p}_1+m). \end{aligned}\right\} \tag{9,128}$$

第一步我們計算B_1. 根据(9,128), 我們有:

$$B_1 = \mathrm{Sp}\,\{-\bar{a}\hat{p}_2a\hat{p}_1+m^2\bar{a}a\}. \tag{9,129}$$

由于

$$\gamma_4\hat{p} = -\hat{p}^*\gamma_4, \tag{9,130}$$

因而

$$\begin{aligned}-\mathrm{Sp}\,\bar{a}\hat{p}_2 a\hat{p}_1 &= D_2^2\,\mathrm{Sp}\,(\hat{k}\hat{e}+2(ep_2))\hat{p}_2(\hat{e}\hat{k}+2(ep_2))\hat{p}_1^* = \\ &= D_2^2\,\mathrm{Sp}\,\{\hat{k}\hat{e}\hat{p}_2\hat{e}\hat{k}\hat{p}_1^* + 4(ep_2)^2\hat{p}_2\hat{p}_1^* + \\ &\quad + 2(ep_2)\hat{p}_2\hat{e}\hat{k}\hat{p}_1^* + 2(ep_2)\hat{k}\hat{e}\hat{p}_2\hat{p}_1^*\} = \\ &= D_2^2\,\mathrm{Sp}\,\{-2(kp_1^*)(kp_2) + 4(ep_2)^2(p_2p_1^*) + \\ &\quad + 4(ep_2)^2(kp_1^*) - 4(ep_2)(ep_1^*)(kp_2) = \\ &= 8D_2^2\{2(ep_2)^2(k+p_2,p_1^*) - (kp_2)[(kp_1^*) + \\ &\quad + 2(ep_2)(ep_1^*)]\}; \end{aligned} \tag{9,131}$$

其中应用了如下的公式：

$$\left.\begin{aligned} &\hat{k}\hat{k}=0, \qquad \hat{e}\hat{e}=1, \qquad \hat{e}\hat{k}=-\hat{k}\hat{e}, \\ &\mathrm{Sp}C_1C_2C_3C_4 = 2[(C_1C_2)(C_3C_4) - (C_1C_3)(C_2C_4) + \\ &\qquad + (C_1C_4)(C_2C_3)]. \end{aligned}\right\} \tag{9,132}$$

此外，又有：

$$m^2\,\mathrm{Sp}\,\bar{a}a = 16D_2^2m^2(ep_2)^2, \tag{9,133}$$

因此有：

$$\begin{aligned} B_1 = 8D_2^2\{&2(ep_2)^2[m^2 + (k+p_2,p_1^*)] - \\ &- (kp_2)[(kp_1^*) + 2(ep_2)(ep_1^*)]\}. \end{aligned} \tag{9,134}$$

第二步是計算 B_2. 假使我們作如下的替換：

$$D_2 \to D_1, \qquad m \to -m, \qquad p_1 \rightleftarrows -p_2, \tag{9,135}$$

那末就有：

$$\left.\begin{aligned} &\bar{a} \to b, \qquad a \to \bar{b}, \\ &-i\hat{p}_1 + m \rightleftarrows i\hat{p}_2 - m, \quad B_1 \to B_2. \end{aligned}\right\} \tag{9,136}$$

因此，从(9,134)、(9,135)和(9,136)可得：

$$\begin{aligned} B_2 = 8D_1^2\{&2(ep_1)^2[m^2 + (p_1 - k,p_2^*)] - \\ &- (kp_1)[(kp_2^*) - 2(ep_1)(ep_2^*)]\}. \end{aligned} \tag{9,137}$$

第三步是計算 B_3. 利用(9,130)和(9,132)并根据(9,128)，就可以求得如下的 B_3 的表式：

$$\begin{aligned} B_3 = 4D_1D_2\{&2(ep_1^*)(ep_2)[(k,k'^*) - 2(p_2p_1^*) - 2m^2] + \\ &+ 2(ep_1^*)(ep_1)(kp_2) - 2(ep_2)^2(kp_1) + \\ &+ (kp_1)(kp_2) + (k^*p_2)(kp_1^*) - \\ &- (kk^*)[(p_2p_1^*) + m^2]\}. \end{aligned} \tag{9,138}$$

可以証明，B_4 等于 B_3. 由于 B_3 是实数，因此 B_3^* 等于 B_3，亦即

$$B_3 = B_3^* = \mathrm{Sp}(i\hat{p}_1^* + m)b^*(i\hat{p}_2^* + m)\bar{a}^*. \qquad (9,139)$$

可以在上式右方末端乘以 γ_4^2，并考虑到 (9,127) 和(9,130)，就得：

$$B_3 = \mathrm{Sp}\,(-i\hat{p}_1 + m)\bar{b}(-i\hat{p}_2 + m)a = B_4. \qquad (9,140)$$

从(9,134)，(9,137)，(9,138)和(9,140)，可以得：

$$\begin{aligned}
&B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = \\
&= 2\Big\{\frac{2(ep_1)^2}{(kp_1)^2}[m^2 + (p_1 - k, p_2^*) + (kp_1)] + \\
&\quad + \frac{2(ep_2)^2}{(kp_2)^2}[m^2 + (p_2 + k, p_1^*) - (kp_2)] + \\
&\quad + \frac{2(ep_1)(ep_2)}{(kp_1)(kp_2)}[(kp_2) - (kp_1) + (k, k'^*) - 2(p_2p_1^*) - 2m^2] + \\
&\quad + \frac{1}{(kp_1)(kp_2)}[(kp_1)(kp_2) + (k^*p_2)(kp_1^*) - (kp_1)(kp_1^*) - \\
&\quad - (kp_2)(kp_2^*) - (p_2p_1^*)(kk^*) - m^2(kk^*)]\Big\}. \qquad (9,141)
\end{aligned}$$

可以将上式大为简化. 不难証明：

$$\left.\begin{aligned}
&m^2 + (p_1 - k, p_2^*) + (kp_1) = 2E_2^2 - \frac{k'^2}{2}, \\
&m^2 + (p_2 + k, p_1^*) - (kp_2) = 2E_1^2 - \frac{k'^2}{2}, \\
&(kp_2) - (kp_1) + (k, k'^*) - 2(p_2p_1^*) - 2m^2 = \\
&\quad = k'^2 - 4E_1E_2, \\
&(kp_1)(kp_2) + (k^*p_2)(kp_1^*) - (kp_1)(kp_1^*) - \\
&\quad - (kp_2)(kp_2^*) - (p_2p_1^*)(kk^*) - \\
&\quad - m^2(kk^*) = \omega^2k'^2 - (k, k')^2.
\end{aligned}\right\} \qquad (9,142)$$

将 (9,142) 代入 (9,141)，然后将 (9,141) 代入 (9,128)；并考虑到 (9,126)，(9,121)和(9,119)，就得到：

$$\begin{aligned}
d\Phi = \frac{Z^2e^6\omega}{8(2\pi)^5} \cdot \frac{|\vec{p}_2|}{|\vec{p}_1|} \cdot \frac{dE_2}{|\vec{k}'|^4} d\Omega_k d\Omega_e \Big\{&\frac{(ep_1)^2}{(kp_1)^2}(4E_2^2 - k'^2) + \\
&+ \frac{(ep_2)^2}{(kp_2)^2}(4E_1^2 - k'^2) - \frac{2(ep_1)(ep_2)}{(kp_1)(kp_2)}(4E_1E_2 - k'^2) +
\end{aligned}$$

$$+\frac{\omega^2k'^2-(kk')^2}{(kp_1)(kp_2)}\Big\}. \tag{9,143}$$

假使我們不測量光子的极化，那末就可以將(9,143)对光子的极化 e 求和. 令 θ_1 代表 $\vec{p}_1$ 与 $\vec{k}$ 之間的夾角，θ_2 代表 $\vec{p}_2$ 与 $\vec{k}$ 之間的夾角，φ 代表 $\vec{p}_1$ 和 $\vec{k}$ 所組成的平面与 $\vec{p}_2$ 和 $\vec{k}$ 所組成的平面之間的夾角，那末就有：

$$\left.\begin{aligned}
&(kp_1)^2=\omega^2(E_1-|\vec{p}_1|\cos\theta_1)^2,\\
&(kp_2)^2=\omega^2(E_2-|\vec{p}_2|\cos\theta_2)^2,\\
&(kp_1)(kp_2)=\omega^2(E_1-|\vec{p}_1|\cos\theta_1)(E_2-|\vec{p}_2|\cos\theta_2),\\
&\sum_e(ep_2)^2=|\vec{p}_2|^2\sin^2\theta_2,\quad \sum_e(ep_1)^2=|\vec{p}_1|^2\sin^2\theta_1,\\
&\sum_e(ep_1)(ep_2)=|\vec{p}_1||\vec{p}_2|\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi.
\end{aligned}\right\} \tag{9,144}$$

此外还有：

$$\begin{aligned}
\omega^2k'^2-(k,k')^2&=\omega^2\sum_e(ek')^2=\\
&=\omega^2(|\vec{p}_1|^2\sin^2\theta_1+|\vec{p}_2|^2\sin^2\theta_2-\\
&\quad-2|\vec{p}_1||\vec{p}_2|\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi.
\end{aligned} \tag{9,145}$$

在將(9,143)对 e 求和以后，再利用(9,144)和(9,145)，就可以得到对光子极化求和以后的截面：

$$d\bar{\Phi}=\frac{Z^2e^6d\Omega_1d\Omega_2dE_2}{8(2\pi)^5\omega|\vec{k}'|^4}\frac{|\vec{p}_2|}{|\vec{p}_1|}G, \tag{9,146}$$

其中 G 是如下的表式：

$$\begin{aligned}
G=&\frac{|\vec{p}_1|^2\sin^2\theta_1}{(E_1-|\vec{p}_1|\cos\theta_1)^2}(4E_2^2-|\vec{k}'|^2)+\\
&+\frac{|\vec{p}_2|^2\sin^2\theta_2}{(E_2-|\vec{p}_2|\cos\theta_2)^2}(4E_1^2-|\vec{k}'|^2)-\\
&-\frac{2|\vec{p}_1||\vec{p}_2|\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi}{(E_1-|\vec{p}_1|\cos\theta_1)(E_2-|\vec{p}_2|\cos\theta_2)}(4E_1E_2+2\omega^2-\\
&-|\vec{k}'|^2)+\frac{2\omega^2(|\vec{p}_1|^2\sin^2\theta_1+|\vec{p}_2|^2\sin^2\theta_2)}{(E_1-|\vec{p}_1|\cos\theta_1)(E_2-|\vec{p}_2|\cos\theta_2)}.
\end{aligned} \tag{9,147}$$

$\vec{k}'$ 的表式見(9,120)，它是庫伦場所給予电子和光子的动量。首先推导出公式(9,147)的是貝脫和海脫勒[Bethe & Heitler, 1934]。到目前为止，測量高能量輒致輻射的实驗工作还不多，精确程度也不很高。曾經有人将理論結果与宇宙綫的級联簇射結果作間接的比較，得到了一定程度的符合。也曾有人把理論結果直接与当电子通过 Pt 板时所产生的輒致輻射作比較，也得到了符合的結果。但是，所有这些实驗的精确程度是并不高的。

有关各种量子电动力学現象的詳尽討論，讀者可参閱阿罕寿和貝列杰斯基[Ахиезер и Берестецкий, 1959]所著"量子电动力学"一书。

§ 9,6. μ^+ 介子衰变为正电子、中微子和反中微子

作为微扰論的应用的第四个例子，我們应用費曼和盖尔曼[Feynman & Gell-Mann, 1958]所提出的普适費米弱相互作用的理論，来討論 μ^+ 介子衰变为正电子、中微子和反中微子的現象。由于在相互作用哈密頓量密度中存在着如下的項：

$$\frac{G}{\sqrt{2}}\mathrm{N}(\bar{\psi}_\mu\gamma_\rho(1+\gamma_5)\psi_\nu\bar{\psi}_\nu\gamma_\rho(1+\gamma_5)\psi_e), \qquad (9,148)$$

μ^+ 介子就能够衰变为正电子、中微子和反中微子。根据第八章中的一般理論，可以看出，S 矩陣元的最低次近似由 $S^{(1)}$ 作出，并且有：

$$\langle f|S^{(1)}|i\rangle = \delta^4(p_\mu - p_e - p_\nu - p_{\bar{\nu}})M_{fi}, \qquad (9,149)$$

$$M_{fi} = -i(2\pi)^4\frac{G}{\sqrt{2}}u_{\mu s}(p_\mu)\gamma_\rho(1+\gamma_5)\bar{v}_{\bar{\nu}}(p_{\bar{\nu}})\times$$
$$\times\bar{u}_\nu(p_\nu)\gamma_\rho(1+\gamma_5)\bar{v}_{er}(p_e),$$

其中 $p_\mu(\vec{p}_\mu, E_\mu)$，$p_e(\vec{p}_e, E_e)$，$p_\nu(\vec{p}_\nu, \omega_\nu)$ 和 $p_{\bar{\nu}}(\vec{p}_{\bar{\nu}}, \omega_{\bar{\nu}})$ 分别代表 μ^+ 介子、正电子、中微子和反中微子的动量-能量 4-矢量，$u_{\mu s}$，v_{er}，u_ν 和 $v_{\bar{\nu}}$ 分别代表它們在动量表象中的波函数，s 和 r 各标志 μ^+ 介子和正电子的自旋。由于在費曼和盖尔曼的理論中，中微子一定

左旋，反中微子一定右旋，所以不再需要用标符来标志中微子和反中微子的自旋. 利用公式(9,13)，就可以得到衰变的微分几率. 假使不測量 μ^+ 介子和正电子的自旋，可以对 μ^+ 介子的自旋平均，对正电子的自旋求和，这样就得到如下的衰变微分几率：

$$dw = \frac{G^2}{4(2\pi)^5} F \rho_E d\Omega_{\bar{\nu}} d\vec{p}_e, \tag{9,150}$$

$$F = \sum_{r,s} |v_{\mu_s}(p_\mu)\gamma_\rho(1+\gamma_5)\bar{v}_{\bar{\nu}}(p_{\bar{\nu}})\bar{u}_{\nu}(p_\nu)\gamma_\rho(1+\gamma_5)\bar{v}_{e_r}(p_e)|^2,$$

其中 $d\Omega_{\bar{\nu}}$ 代表反中微子放出方向上的立体角元.

我們首先計算 F. 考虑到反粒子的波函数与负能級的波函数之間的关系，并利用(9,43)，得：

$$\begin{aligned} F = \frac{1}{16 E_\mu E_e \omega_\nu \omega_{\bar{\nu}}} \cdot \mathrm{Sp}\{-i\hat{p}_{\bar{\nu}}\gamma_4(1+\gamma_5)\gamma_\sigma\gamma_4(-i\hat{p}_\mu - \\ - m_\mu)\gamma_\sigma(1+\gamma_5)\} \cdot \mathrm{Sp}\{(-i\hat{p}_e - m_e)\gamma_4(1+ \\ + \gamma_5)\gamma_\sigma\gamma_4(-i\hat{p}_\nu)\gamma_\rho(1+\gamma_5)\}. \end{aligned} \tag{9,151}$$

注意到 $\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ 中包含有偶数个 γ_μ 因子，并考虑到有奇数个 γ_μ 矩陣因子的矩陣的迹等于零，可以看出，(9,151)式右方包含有 m_μ 和 m_e 的項不作貢献. 因此有：

$$\begin{aligned} F = \frac{1}{16 E_\mu E_e \omega_\nu \omega_{\bar{\nu}}} \mathrm{Sp}\{\hat{p}_{\bar{\nu}}\gamma_4(1+\gamma_5)\gamma_\sigma\gamma_4\hat{p}_\mu\gamma_\rho(1+\gamma_5)\} \times \\ \times \mathrm{Sp}\{\hat{p}_e\gamma_4(1+\gamma_5)\gamma_\sigma\gamma_4\hat{p}_\nu\gamma_\rho(1+\gamma_5)\}. \end{aligned} \tag{9,152}$$

考虑到 γ_5 和 γ_μ 都反对易，因而可以将每一个迹的中部的因子 $(1+\gamma_5)$ 移向右面，和右端的一个因子 $(1+\gamma_5)$ 乘在一起. 由于

$$(1+\gamma_5)^2 = 2(1+\gamma_5), \tag{9,153}$$

故得：

$$\begin{aligned} F = \frac{1}{4 E_\mu E_e \omega_\nu \omega_{\bar{\nu}}} \mathrm{Sp}\{\hat{p}_{\bar{\nu}}\gamma_4\gamma_\sigma\gamma_4\hat{p}_\mu\gamma_\rho(1+\gamma_5)\} \times \\ \times \mathrm{Sp}\{\hat{p}_e\gamma_4\gamma_\sigma\gamma_4\hat{p}_\nu\gamma_\rho(1+\gamma_5)\}. \end{aligned} \tag{9,154}$$

在每一个迹中将 γ_4 和 γ_σ 的位置对换以后，就得：

$$F=\frac{A\cdot B'}{4E_\mu E_\rho\omega_\nu\omega_{\bar\nu}};$$

$$A=\mathrm{Sp}\hat p_{\bar\nu}\gamma_\sigma\hat p_\mu\gamma_\rho(1+\gamma_5),$$

$$B=\mathrm{Sp}\hat p_\rho\gamma_\sigma\hat p_\nu\gamma_\sigma(1+\gamma_5). \qquad (9,155)$$

可以用 § 9,2中 的公式求 A 和 B，得到：

$$A=4\{(p_{\bar\nu})_\sigma(p_\mu)_\rho+(p_{\bar\nu})_\rho(p_\mu)_\sigma-(p_{\bar\nu}p_\mu)\delta_{\rho\sigma}+$$
$$+\Delta(p_{\bar\nu},\sigma,p_\mu,\rho)\},$$

$$\Delta(p_{\bar\nu},\sigma,p_\mu,\rho)=\begin{vmatrix}p_{\bar\nu 1}&p_{\bar\nu 2}&p_{\bar\nu 3}&p_{\bar\nu 4}\\ \delta_{\sigma 1}&\delta_{\sigma 2}&\delta_{\sigma 3}&\delta_{\sigma 4}\\ p_{\mu 1}&p_{\mu 2}&p_{\mu 3}&p_{\mu 4}\\ \delta_{\rho 1}&\delta_{\sigma 2}&\delta_{\rho 3}&\delta_{\rho 4}\end{vmatrix}. \qquad (9,156)$$

将(9,156)中的 $p_{\bar\nu}$ 和 p_μ 各换为 p_ρ 和 p_ν，就得到 B：

$$B=4\{(p_\rho)_\sigma(p_\nu)_\rho+(p_\rho)_\rho(p_\nu)_\sigma-(p_\rho p_\nu)\delta_{\rho\sigma}+\Delta(p_\rho,\sigma,p_\nu,\rho)\},$$

$$\Delta(p_\rho,\sigma,p_\nu,\rho)=\begin{vmatrix}p_{\rho 1}&p_{\rho 2}&p_{\rho 3}&p_{\rho 4}\\ \delta_{\sigma 1}&\delta_{\sigma 2}&\delta_{\sigma 3}&\delta_{\sigma 4}\\ p_{\nu 1}&p_{\nu 2}&p_{\nu 3}&p_{\nu 4}\\ \delta_{\rho 1}&\delta_{\rho 2}&\delta_{\rho 3}&\delta_{\rho 4}\end{vmatrix}. \qquad (9,157)$$

在将 A 和 B 相乘的时候，可以利用能量和动量守恒的公式：

$$p_\mu-p_\sigma-p_\nu-p_{\bar\nu}=0, \qquad (9,158)$$

由于(9,158)，下面的乘积就等于零：

$$(p_{\bar\nu})_\sigma(p_\mu)_\rho\Delta(p_\rho,\sigma,p_\nu,\rho)=\begin{vmatrix}p_{\rho 1}&p_{\rho 2}&p_{\rho 3}&p_{\rho 4}\\ p_{\bar\nu 1}&p_{\bar\nu 2}&p_{\bar\nu 3}&p_{\bar\nu 4}\\ p_{\nu 1}&p_{\nu 2}&p_{\nu 3}&p_{\nu 4}\\ p_{\mu 1}&p_{\mu 2}&p_{\mu 3}&p_{\mu 4}\end{vmatrix}=0. \qquad (9,159)$$

这样就可以証明：

$$A\cdot B=16\{2(p_\rho p_{\bar\nu})(p_\nu p_\mu)+2(p_\nu p_{\bar\nu})(p_\rho p_\mu)+$$
$$+\Delta(p_{\bar\nu},\sigma,p_\mu,\rho)\Delta(p_\rho,\sigma,p_\mu,\rho)\}. \qquad (9,160)$$

利用(9,156)和(9,157)中的表式可以証明：

$$\Delta(p_{\bar\nu},\sigma,p_\mu,\rho)\Delta(p_e,\sigma,p_\mu,\rho)=$$

$$=\begin{vmatrix}\delta_{\rho1}&\delta_{\rho2}&\delta_{\rho3}&\delta_{\rho4}\\ \delta_{\sigma1}&\delta_{\sigma2}&\delta_{\sigma3}&\delta_{\sigma4}\\ p_{\mu1}&p_{\mu2}&p_{\mu3}&p_{\mu4}\\ p_{\bar\nu1}&p_{\bar\nu2}&p_{\bar\nu3}&p_{\bar\nu4}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\delta_{\rho1}&\delta_{\sigma1}&p_{\nu1}&p_{e1}\\ \delta_{\rho2}&\delta_{\sigma2}&p_{\nu2}&p_{e2}\\ \delta_{\rho3}&\delta_{\sigma3}&p_{\nu3}&p_{e3}\\ \delta_{\rho4}&\delta_{\sigma4}&p_{\nu4}&p_{e4}\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}4&\delta_{\rho\sigma}&(p_\nu)_\rho&(p_e)_\rho\\ \delta_{\rho\sigma}&4&(p_\nu)_\sigma&(p_e)_\sigma\\ (p_\mu)_\rho&(p_\mu)_\sigma&(p_\nu p_\mu)&(p_e p_\mu)\\ (p_{\bar\nu})_\rho&(p_{\bar\nu})_\sigma&(p_\nu p_{\bar\nu})&(p_e p_{\bar\nu})\end{vmatrix}=$$

$$=2(p_\nu p_\mu)(p_e p_{\bar\nu})-2(p_e p_\mu)(p_\nu p_{\bar\nu}). \tag{9,161}$$

將(9,161)代入(9,160)，然后將(9,160)代入(9,155)，就得：

$$F=\frac{16(p_\mu p_\nu)(p_{\bar\nu}p_e)}{E_\mu E_e\omega_\nu\omega_{\bar\nu}}. \tag{9,162}$$

其次，我們計算 ρ_E. 假定 μ^+ 介子靜止不动，那末，由于动量守恆定律，就有：

$$\vec p_e+\vec p_{\bar\nu}+\vec p_\nu=0. \tag{9,163}$$

令 E 代表終态的总能量，就有

$$E=E_e+\omega_{\bar\nu}+|\vec p_e+\vec p_{\bar\nu}|. \tag{9,164}$$

保持 $\vec p_e$ 不动，將(9,164)式微分，就得：

$$dE=\frac{d\omega_{\bar\nu}}{\omega_\nu\omega_{\bar\nu}}\{\omega_{\bar\nu}(\omega_\nu+\omega_{\bar\nu})+\vec p_e\cdot\vec p_{\bar\nu}\}. \tag{9,165}$$

由于

$$\rho_E dE=\omega_{\bar\nu}^2\,d\omega_{\bar\nu}, \tag{9,166}$$

可得：

$$\rho_E=\frac{\omega_\nu\omega_{\bar\nu}^3}{\omega_{\bar\nu}(\omega_\nu+\omega_{\bar\nu})+\vec p_e\cdot\vec p_{\bar\nu}}. \tag{9,167}$$

可以將上式进一步化簡. 由于能量守恆定律，有

$$m_\mu=E_e+\omega_{\bar\nu}+|\vec p_e+\vec p_{\bar\nu}|. \tag{9,168}$$

因为在衰变过程中，正电子的能量在极大多数情况下远远地超过电子的靜质量 m_e，因此，在以后的計算中我們可以將正电子的靜

質量略去不計. 于是从(9,168)就可得:

$$(m_\mu - E_e - \omega_\nu)^2 = (\vec{p}_e + \vec{p}_\nu)^2. \tag{9,169}$$

从(9,169)可以得:

$$2\{\omega_\nu(m_\mu - E_e) + \vec{p}_e \cdot \vec{p}_\nu\} = m_\mu(m_\mu - 2E_e). \tag{9,170}$$

將(9,170)代入(9,167),并考慮到能量守恆,就得:

$$\rho_E = \frac{2\omega_\nu\omega_\nu^2}{m_\mu(m_\mu - 2E_e)}. \tag{9,171}$$

將(9,162)和(9,171)代入(9,150),就得:

$$dw = \frac{G^2}{4\pi^5}\frac{(\omega_\nu E_e - \vec{p}_e \cdot \vec{p}_\nu)\omega_\nu\omega_\nu^2}{m_\mu E_e(m_\mu - 2E_e)}\, d\Omega_\nu d\vec{p}_e; \tag{9,172}$$

这是正电子的动量在 $d\vec{p}_e$ 的范围內, 反中微子的方向在 $d\Omega_\nu$ 之內的微分衰变几率. 为了求得总的衰变几率 w, 可以將(9,172)式积分,就得:

$$w = \frac{G^2}{4\pi^5}\int d\vec{p}_e \frac{1}{m_\mu E_e(m_\mu - 2E_e)}\int d\Omega_\nu(\omega_\nu E_e - \vec{p}_e \cdot \vec{p}_\nu)\omega_\nu\omega_\nu^2. \tag{9,173}$$

我們首先对反中微子的变数进行积分. 在积分以前,还可以將积分号內的表式先进行簡化. 从(9,170),可以得:

$$\omega_\nu E_e - \vec{p}_e \cdot \vec{p}_\nu = m_\mu(\omega_\nu + E_e - \frac{m_\mu}{2}. \tag{9,174}$$

我們选择 $\vec{p}_e$ 作为 Z 軸,那末可以將 $d\Omega_\nu$ 写作:

$$d\Omega_\nu = d\varphi d\cos\theta, \tag{9,175}$$

其中 θ 代表正电子和反中微子的动量之間的夹角. 我們可以首先对 $d\varphi$ 积分,得到一个因子 2π. 于是

$$w = \frac{G^2}{2\pi^4}\int \frac{d\vec{p}_e}{m_\mu E_e(m_\mu - 2E_e)}\int d(\cos\theta)(\omega_\nu E_e - \vec{p}_e \cdot \vec{p}_\nu)\omega_\nu\omega_\nu^2. \tag{9,175}$$

为了进一步积分的方便, 我們將积分变数从 $\cos\theta$ 改为 ω_ν. 从(9,170)可以得:

$$\left(m_\mu - E_e + \frac{1}{\omega_\nu}\vec{p}_e \cdot \vec{p}_\nu\right)d\omega_\nu + E_e\omega_\nu d\cos\theta = 0. \tag{9,176}$$

将(9,174)和(9,176)代入(9,175)，并把 $d\omega_{\tilde{\nu}}$ 的积分极限倒过来，就得：

$$w = \frac{G^2}{4\pi^4}\int d\vec{p}_e \frac{m_\mu}{E_e^2}\int_{\omega_{\tilde{\nu}}\text{极小}}^{\omega_{\tilde{\nu}}\text{极大}} d\omega_{\tilde{\nu}}\left(\omega_{\tilde{\nu}} + E_e - \frac{m_\mu}{2}\right)\omega_\nu. \qquad (9,177)$$

在(9,177)中对于 $d\omega_{\tilde{\nu}}$ 的积分可以立即进行。考虑到 $\omega_\nu = m_\mu - E_e - \omega_{\tilde{\nu}}$，我們得：

$$w = \frac{G^2}{4\pi^4}\int d\vec{p}_e \frac{m_\mu}{E_e^2}\left[\left(\frac{3}{4}m_\mu - E_e\right)\omega_{\tilde{\nu}}^2 - (m_\mu - E_e)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{m_\mu}{2} - E_e\right)\omega_{\tilde{\nu}} - \frac{1}{3}\omega_{\tilde{\nu}}^3\right]_{\omega_{\tilde{\nu}}\text{极小}}^{\omega_{\tilde{\nu}}\text{极大}}. \qquad (9,178)$$

当反中微子放出的方向与电子的方向平行时，具有最小的能量 $\omega_{\tilde{\nu}\text{极小}}$；当反中微子放出的方向与电子放出的方向以及中微子放出的方向反平行时，具有最大的能量 $\omega_{\tilde{\nu}\text{极大}}$。在 $\omega_{\tilde{\nu}\text{极小}}$ 和 $\omega_{\tilde{\nu}\text{极大}}$ 之間存在着如下的关系：

$$\left.\begin{aligned} m_\mu &= E_e + \omega_{\tilde{\nu}\text{极小}} + \omega_{\tilde{\nu}\text{极大}}, \\ 0 &= -E_e - \omega_{\tilde{\nu}\text{极小}} + \omega_{\tilde{\nu}\text{极大}}. \end{aligned}\right\} \qquad (9,179)$$

因此我們有：

$$\omega_{\tilde{\nu}\text{极小}} = \frac{1}{2}m_\mu - E_e,\quad \omega_{\tilde{\nu}\text{极大}} = \frac{1}{2}m_\mu. \qquad (9,180)$$

将(9,180)代入(9,178)，就得：

$$w = \frac{G^2}{4\pi^4}\int d\vec{p}_e m_\mu\left(\frac{1}{4}m_\mu - \frac{1}{3}E_e\right). \qquad (9,181)$$

可以将 $d\vec{p}_e$ 写作 $E_e^2\,dE_e d\Omega_e$，并先对 $d\Omega_e$ 积分得到一个因子 4π；于是

$$w = \frac{G^2}{\pi^3}\int m_\mu dE_e\left(\frac{1}{4}m_\mu E_e^2 - \frac{1}{3}E_e^3\right). \qquad (9,182)$$

考虑到，E_e 的下限是零，上限是 $\frac{m_\mu}{2}$，我們最后得：

$$w = \frac{G^2 m_\mu^5}{192\pi^3}. \qquad (9,183)$$

将(6,93)中的 G 的数值和表 1 中的 m_μ 和 M_N 的数值代入(9,183)，就得

$$w = 4.42 \times 10^5 \text{ 秒}^{-1}. \qquad (9,184)$$

这与实驗所得到的結果完全符合.

参 考 文 献

Ахиезер, А. И. и Берестецкий, В. Б. (1959), Квантовая Электродинамика
Bethe, H. A. & Heitler, W. (1934), *Proc. Roy. Soc.*, **A146**, 83.
Dirac, P. A. M. (1930), *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **26**, 361.
Feynman, R. P. & Gell-Mann, M. (1958), *Phys. Rev.* **109**, 193.
Heitler, W. (1954), The Quantum Theory of Radiation.
Klein, O. & Nishina, Y. (1929), *Zeit. Phys.*, **52**, 853.
Tamm, I. (1930), *Zeit. Phys.*, **62**, 545.

第十章　量子場論中的发散困难

§10,1. 发散困难

在第九章中我們曾討論了量子場論应用于一些物理过程的例子。虽然这些計算都是最低次近似，得到的結果却相当符合实验所得到的結果。但是，假使为了求得更精确的理論結果，作較高次近似的計算，那末得到的結果却总是无穷大。这种发散的困难多年来一直成为量子場論发展中的主要障碍之一。

其实，发散的困难在古典場論中早已存在。例如：在古典电动力学中，有黑体輻射的困难、点电荷具有无穷大的自能的困难，等等。量子理論的发現解决了黑体輻射的紫外困难，但是，电子自能无穷大的困难却仍然存在。这样的发散困难与場的无穷多的自由度之間存在着密切的关系。在量子場論中，无穷大的困难的种类甚至还有所增加；因为，在量子場論中，具有靜质量的基本粒子，例如电子、介子、核子等等，也被認为是某种場的受激状态；所有这些場，例如电子場、介子場、核子場等等，也都具有无穷多的自由度，因此也就带来了一些古典物理中所沒有的新的发散困难。例如：在古典电动力学中，自由电磁場的理論并不具有发散困难；但是，在量子电动力学中，即使是自由电磁場的传播理論也会带来无穷大的計算結果。这是由于根据狄拉克的电子理論，眞空是所有負能級都被填滿而所有正能級都空着的状态。在外来电磁場的作用下，負能級中的电子的运动状态将起变化，从而使眞空产生极化；換句話說，外来电磁場可能造成电子偶。具体計算結果表明，眞空极化理論的高次近似結果也是发散的。

自从 1947 年以来，經过貝脫[Bethe, 1947]、朝永等 [Fukuda, Miyamoto & Tomonaga, 1949]、許溫格 [Schwinger, 1948]、費曼

[Feynman, 1949] 和戴逊 [Dyson, 1949] 等人的研究，人們对于量子場論中出現的許多无穷大的物理意义有了比較深刻的認識，同时发現了如何处理这些无穷大的比較有效的数学方法. 人們发現，在量子电动力学中所出現的无穷大在物理效应上只表現在二个方面：一个是电子的自能的改变，亦即电子的靜质量的改变；另一个是电子电荷的改变，亦即电子与电磁場之間的相互作用常数的改变.

当然，从实驗所观察到的电子的质量是电子的全部质量. 实驗并不能区分，在观察到的质量中，那一部份是电子"固有"的质量，那一部份是电子的电磁质量，亦即由于与电磁場相互作用而产生的电子自能. 因此，在理論上，我們应該将电子的"固有"质量和电磁质量合并起来，作为由实驗所观察到的电子的质量. 即使电子的电磁质量是无穷大，我們也仍应假定，它与电子的固有质量合并之和等于由实驗所观察到的有限的电子质量.

此外，实驗也无法区分，究竟在电子的电荷中，那一部份是电子"固有"的电荷，那一部份是由于眞空极化作用而产生的附加电荷. 因此，在理論上，我們应該将电子的"固有"电荷和它的由于眞空极化而产生的附加电荷合并起来，作为由实驗观察到的电子的电荷. 即使由于眞空极化而导致了电子电荷有无穷大的改变，我們也仍应該假定，电子的固有电荷与由眞空极化所导致的附加电荷合并之和等于由实驗所观察到的有限的电子电荷.

这种将电子的质量重新定义的过程叫做电子质量的重整化过程，将电子的电荷重新定义的过程叫做电子的电荷的重整化过程. 經过质量重整化和电荷重整化以后，量子电动力学中的无穷大便都被吸收在质量和电荷之中. 令重整化了的质量和电荷取实驗上所测定的有限数值以后，在量子电动力学的每一高次近似計算中便不再出現无穷大. 因而，用这样的方法，就可以計算电子与电磁場相互作用現象中的高次近似的貢献. 由于 $\frac{e^2}{4\pi}=\frac{1}{137}$ 是一个微

小的数值，高次近似所作的貢献往往远較低次近似所作的貢献为小；因此，高次近似的貢献对理論結果所作的修正是很小的。但是，在第二次世界大战以后，物理实驗的技术有了巨大的进展；很多实驗的結果非常精确。即使理論結果的很微小的修正也能用实驗加以驗証。目前，十分准确的实驗研究过的一些物理現象証实，高次近似計算中所給出的微小修正在实驗上不仅存在，而且在数值上也与实驗結果完全符合。这是近年来量子場論所取得的重大胜利之一。

除了量子电动力学以外，其他一些量子場論中的无穷大也可以用重整化的方法消去。但是，应該指出：重整化的方法并不能够消去量子場論中的一切发散困难。首先是，重整化的方法对于量子場論中的某些数学类型的发散困难的消去无能为力。例如：假使核子与介子之間的相互作用哈密頓量密度包含有介子場量的微商，如(7,65)中的表式所示，那末就不能用重整化的方法来消去这一理論中所包含的无穷大的困难。其次是，即使在量子电动力学中，重整化的方法也沒有将一切困难全部解决。重整化方法虽然保証了量子电动力学中的每一个高次近似計算結果都不包含有无穷大，但是，到現在为止，人們还无法証明，所有这些高次近似計算結果的相加之和是否仍然是有限的，而不是发散的。戴逊[Dyson, 1952]及約飞[Иоффе, 1954]等甚至还曾提出了一定的論据，說明所有这些高次近似計算的有限結果相加起来仍可能是发散的。

所有这些情况都指出：量子場論虽然在近年来已取得了重大的进展，但仍不能称为是一个完善的理論，还有待于繼續改进和发展。我們在本章中将列举一些例子，用以說明量子电动力学中所出現的某些无穷大的性質以及闡明重整化的方法。

§ 10,2. 电子的自能

我們首先討論一个最簡单的物理現象，討論一个单独的电子。显然，由于电子是一个稳定的粒子，因而假使在始态时系統中只有

一个电子，那末在終态中也將只有一个电子．我們以

$$|\rangle_i = a^*_{\zeta_1}|\rangle_0 \tag{10,1}$$

代表始态，并以

$$|\rangle_f = a^*_{\zeta_2}|\rangle_0 \tag{10,2}$$

代表終态，其中 ζ_1 和 ζ_2 各代表始态电子和終态电子的动量和自旋；$|\rangle_0$ 代表什么粒子也沒有的态．那末 S 矩陣对这一現象所作的貢献的最低次近似是由于 $S^{(1)}$ 而产生的．由于 $S^{(0)}=1$，因此得：

$${}_f\langle|S^{(0)}|\rangle_i = {}_0\langle|a_{\zeta_2}a^*_{\zeta_1}|\rangle_0 = \delta_{\zeta_2\zeta_1}. \tag{10,3}$$

(10,3)式的物理意义是显而易見的．电子在始态中的动量和自旋应該与它在終态中的动量和自旋一样．

S 矩陣对这一物理現象所作的貢献的下一高次近似由 $S^{(2)}$ 作出．$S^{(2)}$ 所导致的有关过程可以用图 22 表示，与之相应的矩陣元已經由(8,13a)給出．将符号略加改写，即得：

$${}_f\langle|S^{(2)}|\rangle_i =$$

$$= \delta^4(p_1-p_2)e^2\int d^4k\,\frac{1}{k^2}\,\bar{u}_{s_2}(p_2)\gamma_\mu\,\frac{i(\hat{p}_1-\hat{k})-m}{(p_1-k)^2+m^2}\,\gamma_\mu u_{s_1}(p_1), \tag{10,4}$$

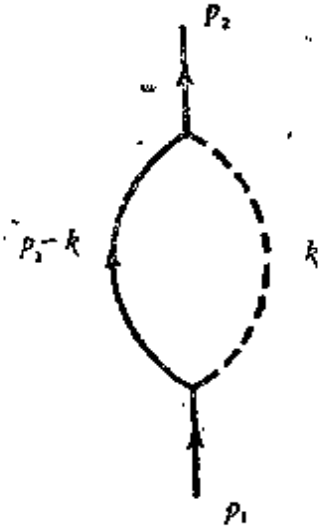


图 22

其中 p_1 和 p_2 各代表始态和終态电子的动量-能量 4-矢量，s_1 和 s_2 各代表始态和終态电子的自旋．我們引入符号 $\Sigma^{(2)}(p)$，它具有如下的定义：

$$\Sigma^{(2)}(p) =$$

$$= e^2\int d^4k\,\frac{1}{k^2}\,\gamma_\mu\,\frac{i(\hat{p}-\hat{k})-m}{(p-k)^2+m^2}\,\gamma_\mu. \tag{10,5}$$

应用公式(9,41)，就可以将(10,5)式簡化，得：

$$\Sigma^{(2)}(p) = -2e^2\int d^4k\,\frac{1}{k^2}\cdot\frac{i(\hat{p}-\hat{k})+2m}{(p-k)^2+m^2}. \tag{10,6}$$

以下二个公式对于以后的計算很有用：

$$\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}=(n-1)!\int_0^1 dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{n-2}}dx_{n-1}\frac{1}{F^n},\quad(10,7)$$

$$F=a_1x_{n-1}+a_2(x_{n-2}-x_{n-1})+\cdots+a_n(1-x_1);$$

以及

$$\frac{1}{\alpha^n}-\frac{1}{\beta^n}=\int_0^1\frac{n(\beta-\alpha)dx}{\{\alpha x+\beta(1-x)\}^{n+1}}.\quad(10,8)$$

公式(10,7)可以用数学归納法証明，公式(10,8)用直接的积分就可以証明。根据(8,131)，S矩陣元中每一条內部电子綫由如下的因子代表：

$$\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{i\not p-m}{p^2+m^2-i\varepsilon};\quad(10,9)$$

根据(8,134)，每一条內部光子綫由下列因子代表：

$$-\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\frac{1}{k^2-i\varepsilon};\quad(10,10)$$

因此在S矩陣元的表式中常常出現一系列分母因子，为$\frac{1}{k^2-i\varepsilon}$，$\frac{1}{p^2+m^2-i\varepsilon}\cdots$等等。利用公式(10,7)，就可以将这一系列分母因子合并为一个因子。而且，由于在原来的分母因子中都有一个无穷小的負虛数$-i\varepsilon$，因此根据(10,7)将它們合并以后，得到的分母表式F中也有一个无穷小的負虛数$-i\varepsilon$。同样地，假使在α和β中都有一个小的負虛数$-i\varepsilon$，那末在(10,8)式右方的分母中也将有一个小的負虛数$-i\varepsilon$。

应用(10,7)，可以将(10,6)式改写为：

$$\Sigma^{(2)}(p)=-2e^2\int d^4k\int_0^1 dx\,\frac{i(\not p-\not k)+2m}{\{(k-px)^2+l^2\}^2},$$

$$l^2=m^2x^2+(p^2+m^2)x(1-x);\quad(10,11)$$

可以看出，积分(10,11)将随着$k\to\infty$而綫性地发散。这种发散的积分在量子場論的高次近似計算中到处出現。它的来源是显而易見的：由于积分的区域$\int d^4k$本身就是无穷大。在物理上这意味着什么呢？从图22可以看出，k代表中間状态中虛光子的动量和

能量. 在以前关于自由場的討論中已經指出过,各种不同的动量和极化方向标志着电磁場的各种不同的自由度. 由于电磁場具有无穷多的自由度,因此光子可以具有无穷多种的动量. 在中間态中,这些无穷多种不同的光子都可以存在.于是,图.22 的物理含义是:始态中的电子可以放出各种不同的光子,然后再吸收这些光子而到达終态. 由于存在着无穷多种的光子,因此电子从始态出发,可以通过无穷多种的道路到达終态., 积分区域 $\int d^4k$ 的无穷大正代表着无穷多种通往終态的道路. 因此,积分(10,11)的发散与无穷多种光子的存在有密切的連系, 亦即与电磁場的无穷多自由度有連系. 实际上, 在量子場論中所有主要的发散困难都与場的无穷多自由度相連系.

§ 10,3. 发散积分

在以后的討論中常常会出現发散的积分, 因此有必要首先研究这种发散的积分. 先以(10,11)中的积分为例. 为了进行积分的方便, 最好将积分的原点略加移动, 使在分母中只出現与 k^2 成正比的項而不出現 k 的綫性項. 但是,由于积分是发散的,在移动积分的原点时必須留心. 为了討論的方便,我們先假定积分的区域是有限的而不是无限的, 并且首先討論一重积分而不討論四重积分. 我們研究积分:

$$I = \int_{-d}^{d} f(x)dx, \tag{10,12}$$

其中 d 取很大的数值. 我們将积分的原点移动,令

$$\xi = x + \delta, \quad f(x) = f(\xi - \delta) = g(\xi).$$

那末如下的积分:

$$I' = \int_{-d}^{d} g(\xi)d\xi \tag{10,13}$$

和积分(10,12)的数值显然不一定相等. 我們有:

$$I - I' = \int_{d-\delta}^{d} f(x)dx - \int_{-d-\delta}^{-d} f(x)dx. \tag{10,14}$$

但是，假使积分 (10,12) 随着 $d \to \infty$ 而对数性地发散，那末在 $|x| \to \infty$ 时，$f(x) \sim \frac{1}{x} \to 0$. 因此，只要我們取 δ 为有限的数值，(10,14)中的表式就将趋于零. 这样，随着 $d \to \infty$，I 和 I' 的数值就完全相等. 因此，对数性地发散积分的原点是可以随便移动的.

但是，假使积分 (10,12)随着 $d \to \infty$ 而綫性地发散，那末在 $x \to \infty$ 时，$f(x)$ 将趋于常数. 因此，假使取 δ 为有限的数值，(10,14)中的表式也不一定等于零. 随着 $d \to \infty$，I 和 I' 可能相差一个有限的数值. 因此綫性发散的积分当移动原点时，可能使积分的数值改变一个有限的常数. 用类似的考虑可以証明，n 次发散的积分在移动积分原点时，可能使积分的数值改变一个 $(n-1)$ 次发散的数值. 不难将以上所得到的結果扩充到多重积分的情况中去.

我們举二个例子，用以說明以上所得到的結果. 第一个例是討論如下的积分：

$$I_1 = \int d^4k \frac{1}{\{(k-b)^2 + a^2\}^2}. \tag{10,15}$$

I_1 是对数性发散的积分. 可以証明，在移动原点后，I_1 的数值不会改变. 利用(10,8)，可得：

$$\Delta I_1 = \int d^4k \frac{1}{\{(k-b)^2 + a^2\}^2} - \int d^4k \frac{1}{\{k^2 + a^2\}^2} =$$

$$= 2\int d^4k \int_0^1 dz \frac{2(bk) - b^2}{\{(k-c)^2 + d^2\}^3}, \tag{10,16}$$

$$c = bz, \qquad d^2 = a^2 + b^2 z(1-z).$$

由于(10,16)式右方的积分是收敛的，因而我們可以将积分的原点移动，作替換 $(k-c) \to k$，并可以将对 d^4k 的积分和对 dz 的积分的次序互換，得：

$$\Delta I_1 = 2\int_0^1 dz \int d^4k \frac{2(bk) + 2(bc) - b^2}{\{k^2 + d^2\}^3}. \tag{10,17}$$

上式右方表式中的分母是 k 的偶函数，(bk) 是 k 的奇函数. 因此，在对 d^4k 积分的时候，(10,17)式右方分子中的 $2(bk)$ 这一項不作貢献，可以略去. 在对 d^4k 积分时，可以将 k_0 的积分路綫改变. 因为(10,17)式右方的分母中有一項无穷小的虛数 $-is$，因而在对 k_0 积分时有二个极点，如图 23 所示；但是，在右上半平面和左下半平面内并沒有极点，因此可以将 k_0 的积分途径从实数軸改变为虛数軸；于是得：

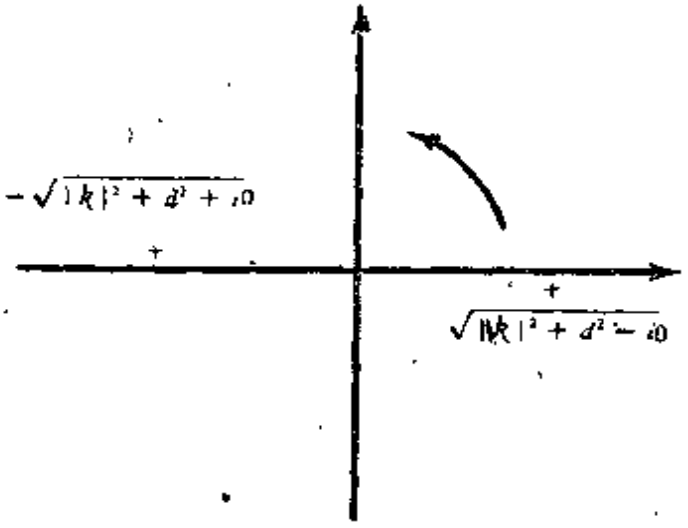


图 23

$$\Delta I_1 = 2i\int_0^1 dz\int d^4k\,\frac{2(bc)-b^2}{\{k^2+d^2\}^3}. \tag{10,18}$$

(10,18)中的 k^2 不再是 $(k_1^2+k_2^2+k_3^2-k_0^2)$，而是

$$k^2 = k_0^2+k_1^2+k_2^2+k_3^2. \tag{10,19}$$

这样就可以引入四維空間的球坐标. 令

$$\begin{cases} k_0 = K\cos\Phi, \\ k_3 = K\sin\Phi\cos\theta, \\ k_2 = K\sin\Phi\sin\theta\sin\varphi, \\ k_1 = K\sin\Phi\sin\theta\cos\varphi. \end{cases} \tag{10,20}$$

可以証明：

$$d^4k = K^3dK\,d\varphi\sin\theta\,d\theta\sin^2\Phi\,d\Phi; \tag{10,21}$$

积分的极限是：

$$\begin{cases} K\colon\ 0\to\infty; & \Phi\colon\ 0\to\pi; \\ \theta\colon\ 0\to\pi; & \varphi\colon\ 0\to 2\pi. \end{cases} \tag{10,22}$$

可以将(10,18)先按立体角 Φ、θ 和 φ 积分：

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{\pi}\sin^2\Phi d\Phi = 2\pi^2, \tag{10,23}$$

代入(10,18),就得:

$$\Delta I_1 = 2i\pi^2 \int_0^1 dz \int_0^\infty K^2 dK^2 \frac{2(bc) - b^2}{\{K^2 + d^2\}^3} =$$

$$= i\pi^2 \int_0^1 dz \frac{2(bc) - b^2}{d^2}. \qquad (10,24)$$

利用(10,16)中 c 和 d^2 的表式,就得:

$$\Delta I_1 = i\pi^2 b^2 \int_0^1 dz \frac{2z - 1}{a^2 + b^2 z(1 - z)} =$$

$$= -i\pi^2 \ln (a^2 + b^2 z(1 - z))\Big|_0^1 = 0. \qquad (10,25)$$

这就証明了,对对数性地发散的积分 I_1,可以随便移动积分原点而不致改变积分的数值.

第二个例子是討論积分

$$I_2 = \int d^4k \frac{k_\mu}{\{(k - b)^2 + a^2\}^2}; \qquad (10,26)$$

这是綫性发散的积分. 可以証明,在移动积分原点后,I_2 的数值作有限的改变. 証明如下:利用(10,8),得:

$$\Delta I_2 = \int d^4k \frac{k_\mu}{\{(k - b)^2 + a^2\}^2} - \int d^4k \frac{k_\mu + b_\mu}{\{k^2 + a^2\}^2} =$$

$$= -\int d^4k \frac{b_\mu}{\{k^2 + a^2\}^2} + 2\int d^4k \int_0^1 dz \frac{2k_\mu(bk) - b^2 k_\mu}{\{(k - c)^2 + d^2\}^3}, \qquad (10,27)$$

其中 c 和 d^2 的表式見(10,16). (10,27)式右端的第二个积分是对数性发散的,因此可以随便移动它的积分原点. 这个积分就等于:

$$2\int d^4k \int_0^1 dz \frac{2(k_\mu + c_\mu)(b, k + c) - b^2(k_\mu + c_\mu)}{(k^2 + d^2)^3}. \qquad (10,28)$$

考虑到 (10,28) 中积分的对称性质,分子中的 k 的綫性項以及与 $k_\mu k_\nu \ldots k_\mu$ 成正比的項对积分都不作貢献,因此(10,28)中的积分就等于:

$$2\int d^4k \int_0^1 dz \frac{\frac{1}{2} b_\mu k^2 + b_\mu b^2 z(2z - 1)}{(k^2 + d^2)^3}, \qquad (10,29)$$

其中应用了由于积分的对称性而导致的公式：

$$\int d^4k \frac{k_\mu^2}{(k^2+a^2)^n} = \frac{1}{4}\int d^4k \frac{k^2}{(k^2+a^2)^n}. \tag{10,30}$$

利用分部积分法和 (10,16) 中 d^2 的表式，可以将积分(10,29)中的第二項化为：

$$2\int d^4k \int_0^1 dz \frac{b_\mu b^\nu z(2z-1)}{(k^2+d^2)^3} = \int d^4k \int_0^1 z d \frac{b_\mu}{(k^2+d^2)^2} =$$

$$= \int d^4k \frac{b_\mu}{(k^2+a^2)^2} - \int d^4k \int_0^1 \frac{b_\mu dz}{(k^2+d^2)^2}. \tag{10,31}$$

从(10,27)、(10,29)和(10,31)，可以得：

$$\Delta I_2 = -b_\mu \int d^4k \int_0^1 \frac{d^2 dz}{(k^2+d^2)^3}. \tag{10,32}$$

积分(10,32)显然是收敛的，因此可以将对 d^4k 的积分和对 dz 的积分的次序对調，然后，就可以按照上面曾用过的方法，改变对 k_0 积分的途径，引进四維空間的球坐标，进行积分；这样得：

$$\int \frac{d^4k}{(k^2+d^2)^3} = i\pi^2 \int_0^\infty \frac{K^3 dK^2}{(K^2+d^2)^3} = \frac{i\pi^2}{2d^2}. \tag{10,33}$$

将(10,33)代入(10,32)，对 dz 积分，就得：

$$\Delta I_2 = -\frac{i}{2}\pi^2 b_\mu. \tag{10,34}$$

以后将常常出現如下一类的积分：

$$J_n = \int \frac{d^4k}{(k^2+a^2)^n}, \qquad n \geqslant 3. \tag{10,35}$$

改变 k_0 的积分途径，引进球坐标，积分后，可得：

$$J_n = \frac{i\pi^2}{(n-1)(n-2)a^{2(n-2)}}. \tag{10,36}$$

§ 10,4. 質量重整化

我們可以利用公式(10,25)和(10,34)，将(10.11)中 $\Sigma^{(2)}(p)$ 的表式的积分原点移动。在 (10,11) 式中，只有与分子中 $-i\hat{k}$ 相应

的一項是綫性发散的，当积分原点移动时数值有所改变；其他二項是对数性发散的，当积分原点移动时数值不会改变。因此我們有：

$$\Sigma^{(2)}(p) = \frac{\pi^2 e^2 \hat{p}}{2} - 2e^2 \int d^4k \int_0^1 dx \frac{i\hat{p}(1-x) + 2m - i\hat{k}}{\{k^2 + l^2\}^2}. \tag{10,37}$$

可以看出，由于对称性的原因，上式右方积分中与 $-i\hat{k}$ 相应的一項的貢献等于零。将(10,37)代入(10,4)，再将(10,4)代入(10,5)，可以得到：

$${}_f\langle |S^{(2)}| \rangle_i = \delta^4(p_1 - p_2)\bar{u}_{s_2}(p_2)\Sigma^{(2)}(p_1)u_{s_1}(p_1). \tag{10,38}$$

对于自由电子的波函数 $u_{s_1}(p_1)$ 来說

$$(i\hat{p}_1 + m)u_{s_1}(p_1) = 0, \qquad p_1^2 = -m^2. \tag{10,39}$$

因此得：

$${}_f\langle |S^{(2)}| \rangle_i = -i(2\pi)^4 A \bar{u}_{s_2} u_{s_1} \delta^4(p_1 - p_2).$$

$$A = \frac{-e^2 m}{(2\pi)^4}\left(\frac{\pi^2}{2} + 2i\int d^4k \int_0^1 dx \frac{1+x}{(k^2 + m^2x^2)^2}\right). \tag{10,40}$$

不难将上式中的积分求出。应用分部积分法，得：

$$\int d^4k \int_0^1 dx \frac{1+x}{(k^2+m^2x^2)^2} = \int d^4k \int_0^1 \frac{d\left(x + \frac{x^2}{2}\right)}{(k^2+m^2x^2)^2} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d^4k}{(k^2+m^2)^2} + 2m^2 \int d^4k \int_0^1 \frac{x^2(2+x)dx}{(k^2+m^2x^2)^3}. \tag{10,41}$$

上式右方第一个积分是对数性发散的。我們可以先令这一积分的极限取有限的数值，在积分以后，再令极限趋于无穷大，这样就可以看出积分本身如何发散。为此，我們将对 k_0 积分的途径改取虛数軸，并引入四維空間的球坐标。在对 $d\Phi$, $d\varphi$ 和 $d\theta$ 积分以后，就得：

$$\int d^4k \frac{1}{(k^2+m^2)^2} = i\pi^2 \int \frac{K^2 dK^2}{(K^2+m^2)^2}. \tag{10,42}$$

将 K^2 的上限取做 M^2，則上式就等于：

$$i\pi^2\left\{\ln\frac{M^2+m^2}{m^2} + \frac{m^2}{M^2+m^2} - 1\right\}. \tag{10,43}$$

引入符号 D，具有如下的定义：

$$D=\lim_{M^2\to\infty}\left\{\ln\frac{M^2+m^2}{m^2}+\frac{m^2}{M^2+m^2}-1\right\};\qquad(10,44)$$

則有：

$$\int\frac{d^4k}{(k^2+m^2)^2}=i\pi^2D.\qquad(10,45)$$

利用公式(10,36)，可以将(10,41)式右方的第二項改写为：

$$2m^2\int d^4k\int_0^1dx\,\frac{x^2(2+x)}{(k^2+m^2x^2)^3}=\frac{5}{2}i\pi^2.\qquad(10,46)$$

将(10,45)和(10,46)代入(10,41)，将(10,41)代入(10,40)，得：

$$A=\frac{\alpha}{2\pi}m\left(\frac{3}{2}D+\frac{9}{4}\right),$$

$$\alpha=\frac{e^2}{4\pi}=\frac{1}{137}.\qquad(10,47)$$

从(10,40)、(10,44)和(10,47)可以看出，${}_I\langle|S^{(2)}|\rangle_I$ 是对数性发散的。

我們应該研究，${}_I\langle|S^{(2)}|\rangle_I$ 在物理上代表什么作用，应該指出，假使相互作用哈密頓量密度具有如下的形式：

$$\mathscr{H}_I(x)=\delta m\bar\psi(x)\psi(x),\qquad\delta m=A;\qquad(10,48)$$

那末它对以上所討論的单个自由电子問題的 S 矩陣元的第一次近似貢献将与(10,40)中的 ${}_I\langle|S^{(2)}|\rangle_I$ 完全一样；因为利用(10,48)所得的第一次近似矩陣元是：

$$-i{}_I\langle|\int d^4x\delta m\bar\psi(x)\psi(x)|\rangle_I=-i(2\pi)^4\delta m\bar u_{s_1}u_{s_2}\delta^4(p_1-p_2),\qquad(10,49)$$

将(10,49)与(10,40)相比較，就可以看出，二个表式完全一样。因此，在物理作用上我們可以将 ${}_I\langle|S^{(2)}|\rangle_I$ 作如下的理解：电子与电磁場相互作用，产生了电子的电磁质量 δm；电子的电磁质量 δm 又导致了 ${}_I\langle|S^{(2)}|\rangle_I$。

在以上的討論中，我們在实际上将电子的质量划分为固有质量和电磁质量二部份，将固有质量划入自由电子的哈密頓量，将电

磁质量划入相互作用哈密頓量．这种做法显然是不合适的．在实验上我們根本无法区分固有质量和电磁质量．实验所观察到的自由电子的质量中不仅包含有电子的固有质量，也包含有电子的电磁质量．因此，应該将电子的电磁质量从相互作用哈密頓量中取出，归入自由电子場的哈密頓量．令

$$m_0 = m + \delta m \tag{10,50}$$

代表实验所观察到的自由电子的静质量，那末自由电子場的哈密頓量密度应該是：

$$\mathscr{H}_e = \bar{\psi}\gamma_i \frac{\partial}{\partial x_i}\psi + m_0\bar{\psi}\psi; \tag{10,51}$$

而相互作用哈密頓量密度則应該是：

$$\mathscr{H}_i = -ie\mathbf{N}(\bar{\psi}\hat{A}\psi) - \delta m\bar{\psi}\psi,$$
$$\delta m = \frac{\alpha}{2\pi} m_0\left(\frac{3}{2}D + \frac{9}{4}\right). \tag{10,52}$$

假使在討論自由电子問題时只限于 α 的一次方近似，那末(10,52)式右方的 $-ie\mathbf{N}(\bar{\psi}\hat{A}\psi)$ 項对 S 矩陣元所作的貢献就恰巧与 $-\delta m\bar{\psi}\psi$ 所作的貢献相抵消．也就是說，在这一具体問題的討論的这一近似中，无穷大不再出現．(10,50) 中将固有质量和电磁质量合并起来的过程叫做"质量重整化"的过程．当然，在討論自由电子問題的更高次近似 S 矩陣元时，仍将出現与 α^2，$\alpha^3\cdots$ 成比例的更高次的电磁质量；这就应該相应地将电子的质量作更高次的重整化；这时，δm 的形式不再如 (10,52)中的第二式那样簡单，其中将包括与 α^2、$\alpha^3\cdots$ 成正比的一些項．

§ 10,5. $\Sigma^{(2)}(p)$ 所包含的其它发散困难

质量重整化虽然克服了自由电子問題中的发散困难，但还不能克服其它的一些发散困难．象图 22 这样的图形不仅在自由电子問題中出現，也可以作为反映其它物理过程的图形中的一部份而出現．例如：图 24a 反映了康普頓散射的最低次近似过程之一，图

24 b 則代表了同一散射現象的較高次近似过程之一；图 22 作为一个部份而出現在图 24 b 之中．与图 24 a 相应的 S 矩陣元是：

$$ {}_f\langle|S^{(2)}|\rangle_i = \frac{e^2(2\pi)^8}{2\sqrt{\omega_1\omega_2}}\int d^4p\bar{u}_2\hat{e}_2S_f(p)\hat{e}_1u_1\delta^4(p_1+k_1-p)\times $$

$$ \times\delta^4(p-p_2-k_2), \qquad (10,53) $$

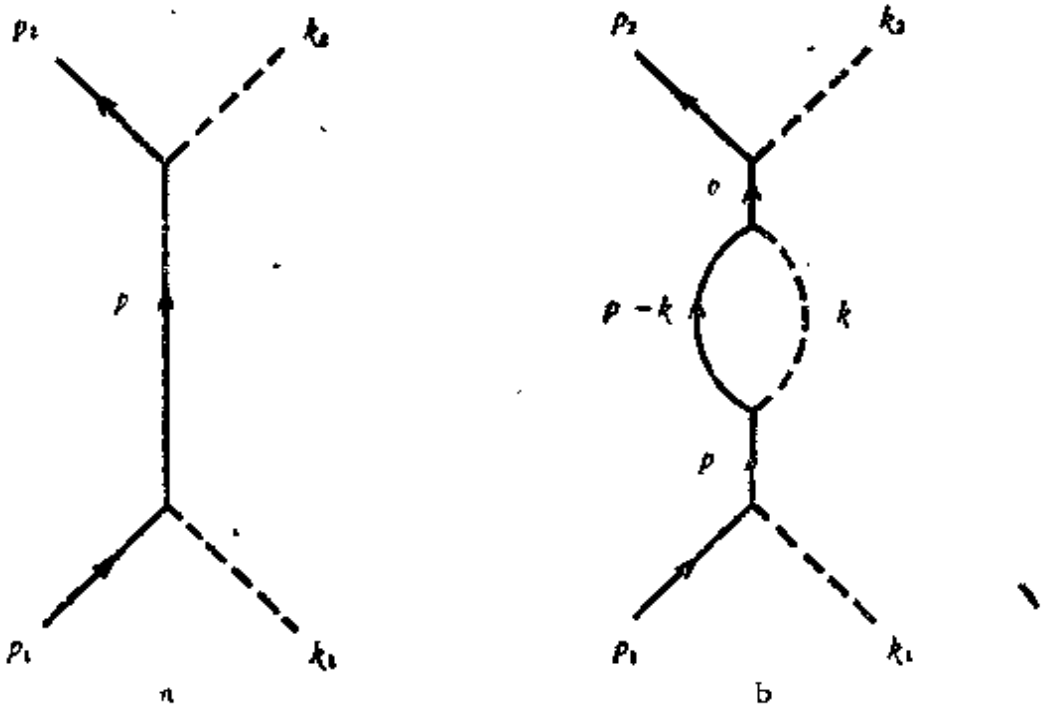


图 24

其中 $S_f(p)$ 的定义見(8,131)． 不难看出，与图 24 b 相应的貢献由 $S^{(1)}$ 作出． 利用(8,134)中引入的符号 $D_f(k)$，可以将与图 24 b 相应的 S 矩陣元写作：

$$ {}_f\langle|S^{(4)}|\rangle_i = \frac{e^2(2\pi)^8}{2\sqrt{\omega_1\omega_2}}\int d^4p\bar{u}_2\hat{e}_2S_f(p)\Sigma^{(2)}(p)S_f(p)\hat{e}_1u_1\delta^4(p_1+ $$

$$ +k_1-p)\delta^4(p-p_2-k_2), \qquad (10,54) $$

其中

$$ \Sigma^{(2)}(p) = e^2(2\pi)^8\int d^4k\gamma_\mu D_f(k)S_f(p-k)\gamma_\mu. \qquad (10,55) $$

可以看出，(10,55)中的表式和(10,5)中 $\Sigma^{(2)}(p)$ 的表式完全一样．由于 $\Sigma^{(2)}(p)$ 是发散的，${}_f\langle|S^{(4)}|\rangle_i$ 不可避免也是发散的，因此康普頓散射的高次近似的确也是发散的． 假使我們进行質量重整化，

取表式(10,52)作为相互作用哈密頓量密度，那末在 $S^{(3)}$ 中还有一項也对康普頓散射作出貢献。作出这一貢献的过程可以由图 25 表示。与图 25 相应的 $S^{(3)}$ 中的正規乘积是：

$$ie^2\delta m\int d^4x_3\int d^4x_2\int d^4x_1 N$$
$$\{\bar{\psi}(x_3)\hat{A}(x_3)\psi^{\cdot}(x_3)\bar{\psi}^{\cdot}(x_2)\psi^{\cdot\cdot}(x_2)\bar{\psi}^{\cdot\cdot}(x_1)\times$$
$$\times\hat{A}(x_1)\psi(x_1)\}; \qquad (10,56)$$

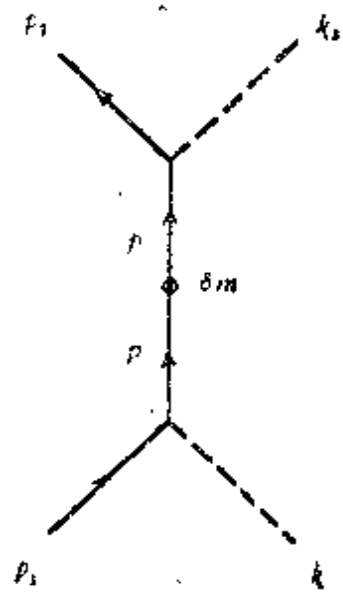


图　25

相应的 S 矩陣元是：

$$_f\langle|S^{(3)}|\rangle_i=\frac{e^2(2\pi)^8}{2\sqrt{\omega_1\omega_2}}\times$$
$$\times\int d^4p\bar{u}_2\hat{e}_2S_f(p)(i(2\pi)^4\delta m)S_f(p)\hat{e}_1u_1\times$$
$$\times\delta^4(p_1+k_1-p)\delta^4(p-p_2-k_2). \qquad (10,57)$$

将(10,53)，(10,54)和(10,57)的貢献相加，就得：

$$_f\langle|S^{(2)}+S^{(3)}+S^{(4)}|\rangle_i=\frac{e^2(2\pi)^5}{2\sqrt{\omega_1\omega_2}}\times$$
$$\times\int d^4p\bar{u}_2\hat{e}_2S_f^{(2)}(p)\hat{e}_1u_1\delta^4(p_1+k_1-p)\delta^4(p-p_2-k_2), \qquad (10,58)$$

其中 $S_f^{(2)}(p)$ 的定义是：

$$S_f^{(2)}(p)=S_f(p)+S_f(p)\{\Sigma^{(2)}(p)+i\delta m(2\pi)^4\}S_f(p). \qquad (10,59)$$

这就是說，只要将(10,53)式中的 $S_f(p)$ 換成 $S_f^{(2)}(p)$，就能够得到图 24 a，24 b 和 25 的貢献的总和。

可以看出，即使进行了质量重整化，也未必能消去 (10,58) 中的发散困难。只有当 $p^2=-m_0^2$ 的时候亦即只有当 $\Sigma^{(2)}(p)$ 作用在自由电子的波函数上的結果相当于 ip 为 $-m_0$ 所代替的时候，$\Sigma^{(2)}(p)$才会与 $i(2\pi)^4\delta m$ 相互消去。但是，在康普頓散射的中間态中出现的电子的动量-能量 p 等于：

$$p = p_1 + k_1, \tag{10,60}$$

它并不滿足自由电子的动量-能量所应滿足的条件. 因此,(10,59)式中的 $i(2\pi)^4\delta m$ 未必能消去 $\Sigma^{(2)}(p)$ 中的无穷大,散射矩陣元因而也仍然可能是发散的.

象图形 22 以及与 (10,52) 中的 $-\delta m\bar{\psi}\psi$ 相应的图 26 等也可以作为其它現象的高次近似图形的一部份而出現. 它們的实际效果是将 $S_f(p)$ 換成 $S_f^{(2)}(p)$. 因此、$S^{(2)}(p)$ 中的发散困难在一切量子电动力学所討論的問題中都出現,是具有普遍意义的困难,必須詳加分析和討論. 我們称 $S_f(p)$ 为电子传播函数的零次近似, 称 $S_f^{(2)}(p)$ 为电子传播函数的二次近似; 因为 $S_f(p)$ 和 e 无关, $S_f^{(2)}(p)$ 是 e 的二次函数. 也可以将 $S_f(p)$ 写作 $S_f^{(0)}(p)$.



图 26

为了討論 $S_f^{(2)}(p)$ 中所包含的无穷大,必須研究 $\Sigma^{(2)}(p)$ 在 $p^2 \neq -m_0^2$ 时的数值. 我們注意,假使将 $\Sigma^{(2)}(p)$ 展开成为 $(i\hat{p} + m_0)$ 的冪級数, 那末这个級数的第一項就是 $-i(2\pi)^4\delta m$. 因此可以将 $\Sigma^{(2)}(p)$ 写成如下的表式:

$$\Sigma^{(2)}(p) = -i(2\pi)^4\delta m + BS_f^{-1}(p) + S_f^{-2}(p)\Sigma_f^{(2)}(p), \tag{10,61}$$

其中

$$S_f^{-1}(p) = i(2\pi)^4(i\hat{p} + m_0); \tag{10,62}$$

这就是将 $\Sigma^{(2)}(p)$ 展开到 $(i\hat{p} + m_0)$ 的平方項. 为了确定 $S_f^{(2)}(p)$ 中存在的无穷大的性质, 我們应該求出 B 和 $\Sigma_f^{(2)}(p)$. 由于 δm 等于 A, 可以利用(10,40),得:

$$\Sigma^{(2)}(p) + i(2\pi)^4\delta m =$$

$$= -\frac{i}{2}e^2\pi^2(i\hat{p}+m_0) - 2e^2\int d^4k\int_0^1 dx\,\frac{i\hat{p}(1-x)+2m_0}{\{k^2+l^2\}^2} +$$

$$+ 2e^2\int d^4k\int_0^1 dx\,\frac{-m_0(1-x)+2m_0}{\{k^2+m_0^2x^2\}^2}. \tag{10,63}$$

可以将上式改写为:

$$\Sigma^{(2)}(p) + i(2\pi)^4\delta m =$$

$$= (i\hat{p} + m_0)\left\{-\frac{i}{2}e^2\pi^2 - 2e^2\int d^4k\int_0^1 dx\,\frac{1-x}{(k^2+m_0^2x^2)^2}\right\} -$$

$$- 2e^2\int d^4k\int_0^1 dx\{i\hat{p}(1-x)+2m_0\}\left\{\frac{1}{(k^2+l^2)^2}-\frac{1}{(k^2+m_0^2x^2)^2}\right\}. \tag{10,64}$$

为了将(10,64)式右方的最后一項中的因子 $(i\hat{p} + m_0)$ 分出来，必須将这一項改写成另一形式。利用(10,8)式和(10,11)式中 l^2 的表式，可以得：

$$\frac{1}{(k^2+l^2)^2}-\frac{1}{(k^2+m_0^2x^2)} = -\int_0^1 dz\,\frac{2(p^2+m_0^2)x(1-x)}{\{k^2+q^2\}^3},$$

$$q^2 = m_0^2x^2 + (p^2+m_0^2)x(1-x)z. \tag{10,65}$$

将(10,65)代入(10,64)，可見(10,64)式右方的最后一項的积分是收敛的。可以改变积分的次序，先按 d^4k 积分。利用(10,36)式，可以求得最后一項具有如下的形式：

$$2ie^2\pi^2(p^2+m_0^2)\int_0^1 dx\int_0^1 dz\,\frac{x(1-x)\{i\hat{p}(1-x)+2m_0\}}{m_0^2x^2+(p^2+m_0^2)x(1-x)z}. \tag{10,66}$$

将(10,66)代入(10,64)，考虑到 $(p^2+m_0^2) = -(i\hat{p}+m)(i\hat{p}-m)$，可得：

$$\Sigma^{(2)}(p) + i(2\pi)^4\delta m =$$

$$= S_f^{-1}(p)\left\{-\frac{\alpha}{8\pi}+\frac{i\alpha}{2\pi^3}\int d^4k\int_0^1 dx\,\frac{1-x}{(k^2+m_0^2x^2)^2} -\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha}{2\pi}(i\hat{p}-m_0)\int_0^1 dx\int_0^1 dz\,\frac{x(1-x)\{i\hat{p}(1-x)+2m_0\}}{m_0^2x^2+(p^2+m_0^2)x(1-x)z}\right\}. \tag{10,67}$$

当 $i\hat{p} = -m_0$，$p^2 = -m_0^2$ 时，上式大曲括号中的数值就是 B。

为了寻求 B 的数值，首先計算(10,67)式大曲括号中第二項的数值。在对 dx 分部积分后，得：

$$\int d^4k \int_0^1 dx \frac{1-x}{(k^2+m_0^2x^2)^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(k^2+m_0^2)^2} + 2m_0^2 \int d^4k \int_0^1 dx \frac{x^2(2-x)}{(k^2+m_0^2x^2)^3}. \tag{10,68}$$

根据(10.45)，上式右方第一项等于 $\frac{i}{2}\pi^2 D$；根据(10.36)式，上式右方第二项等于 $\frac{3}{2}i\pi^2$. 因此，(10.67)式中曲括号内的第二项等于：

$$\frac{i\alpha}{(2\pi)^3}\int d^4k \int_0^1 dx \frac{(1-x)}{(k^2+m_0^2x^2)^2} = -\frac{\alpha}{4\pi}D - \frac{3\alpha}{4\pi}. \tag{10,69}$$

当 $i\beta = -m_0$ 时，(10,67)式右方大曲括号中的第三项等于：

$$\frac{\alpha}{\pi} m_0^2 \int_0^1 dx \int_0^1 dz \frac{x(1-x)(1+x)}{m_0^2x^2} = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 \frac{dx}{x} - \frac{\alpha}{2\pi}. \tag{10,70}$$

从(10,67)，(10,69)和(10,70)可得：

$$B = -\frac{\alpha}{4\pi}\left(D - 4\int_0^1 \frac{dx}{x} + \frac{11}{2}\right). \tag{10,71}$$

从(10,71)可以看出，B 果然也是对数性发散的. 而且，B 包含着二种不同的发散：D 在积分的上限发散，而上式中的第二项则在积分的下限发散. 这二种发散在物理上具有不同的意义. D 的发散来自大能量的光子，亦即来自电磁場的无穷多自由度，故称为紫外发散，是带有基本性质的困难. (10,71)式右方第二项的发散来自极小能量的光子，故称为紅外发散. 这种发散并不来自場的无穷多自由度，不是基本性质的困难. 紅外发散的来源是由于所用的数学方法不适合于处理低能量光子与电子的相互作用，而不是由于場論本身的缺点. 假使将 $A_\mu(x)$ 分解为平面波：

$$A_\mu(x) = \sum_{\vec{k}} \frac{e_{\sigma\mu}(\vec{k})}{\sqrt{2\omega}}\{c_{\sigma,\vec{k}}e^{ikx} + c^*_{\sigma,\vec{k}}e^{-ikx}\}, \tag{10,72}$$

然后将它代入 (10,52) 中的相互作用哈密頓量密度，則可以看出，随着光子的能量 $\omega \to 0$，光子与电子的相互作用将愈来愈大；因此，用微扰論的方法来处理电子与低能量的光子間的相互作用現

象是不合适的。我們在以后将討論如何克服紅外发散困难的方法，目前則暫且不去管它。

(10,47)式中的 A 和(10,71)式中的 B 是 $\Sigma^{(2)}(p)$ 中所包含的全部紫外发散。

§ 10,6. 电子传播函数的二次近似

为了求得 $\Sigma^{(2)}(p)$ 的显示表式，还必須求得 $\Sigma_f^{(2)}(p)$ 的表式。从(10,67)式不难求得 $\Sigma_f^{(2)}(p)$ 的表式。經过并不复杂的計算，可得：

$$\Sigma_f^{(2)}(p) = \frac{i\alpha}{(2\pi)^5} \times$$
$$\times \int_0^1 dx \int_0^1 dz \frac{(1-x)\{(i\hat{p}-m_0)(1-x)[x-2(1+x)z]+m_0(1+x)\}}{m_0^2x^2+(p^2+m_0^2)x(1-x)z}. \tag{10,73}$$

显然，在 $\Sigma_f^{(2)}(p)$ 中并不存在紫外困难，但是却存在着紅外困难。很容易看出这种紅外困难的人为性质。我們看到，(10,67)式右方第三項本来是收敛的，并不存在什么紅外困难；后来人为地将这一項拆开成二部份：一部份归入 B 的表式中，另一部份归入 $\Sigma_f^{(2)}(p)$ 的表式中；結果二方面都产生了紅外困难。假使不計紅外困难，那末可以說：B 是对数性发散的，$\Sigma_f^{(2)}(p)$ 則不再包含有无穷大。

从(10,59)和(10,61)可得：

$$S_f^{(2)}(p) = (1+B)S_f(p) + \Sigma_f^{(2)}(p). \tag{10,74}$$

假使我們的討論只限于二次近似，那末可以将(10,74)式改写为：

$$S_f^{(2)}(p) = (1+B)\{S_f(p) + \Sigma_f^{(2)}(p)\}. \tag{10,75}$$

上式是电子传播函数的二次近似。$S_f(p)$ 是电子传播函数的零次近似，在图形中由一根簡单的内部电子綫代表。$S_f^{(2)}(p)$ 則将电子自能部份图 22 和图 26 对于电子場传播的影响也包括了在內。

电子的自能部份不仅对内部电子綫的作用产生修正的影响，它們对外部电子綫的作用也能产生修正的影响。根据(8,133a)和

(8,132 a),外部电子綫在动量表象中由波函数 $u(p)$ 或 $\bar{u}(p)$ 代表. 不难看出,图 22 和图 26 中的电子自能部份将上述代表外部电子綫的波函数修正成为:

$$\left.\begin{aligned} u^{(2)}(p) &= u(p) + S_f(p)\{\Sigma^{(2)}(p) + i(2\pi)^4\delta m\}u(p), \\ \bar{u}^{(2)}(p) &= \bar{u}(p) + \bar{u}(p)\{\Sigma^{(2)}(p) + i(2\pi)^4\delta m\}S_f(p). \end{aligned}\right\} \quad (10,76)$$

由于 $S_f^{-1}(p)u(p) = 0$ 和 $\bar{u}(p)S_f^{-1}(p) = 0$,上式可以写为:

$$\left\{\begin{aligned} u^{(2)}(p) &= u(p) + BS_f(p)S_f^{-1}(p)u(p), \\ \bar{u}^{(2)}(p) &= \bar{u}(p) + B\bar{u}(p)S_f^{-1}(p)S_f(p). \end{aligned}\right. \quad (10,77)$$

上二式的右方是不定的,因为假使 $S_f^{-1}(p)$ 先作用在波函数上,我們就得:

$$u^{(2)}(p) = u(p), \qquad \bar{u}^{(2)}(p) = \bar{u}(p); \quad (10,78)$$

而假使 $S_f^{-1}(p)$ 先作用在 $S_f(p)$ 上,我們就得:

$$u^{(2)}(p) = (1 + B)u(p); \quad \bar{u}^{(2)}(p) = (1 + B)\bar{u}(p). \quad (10,79)$$

为了确定电子的自能部份到底应該怎样修改 S 矩陣元中代表外部电子綫的波函数 $u(p)$ 和 $\bar{u}(p)$,我們可以作如下的考虑:一个电子前后参加了二个物理过程. 当它結束了第一个物理过程,但是还沒有进入第二个物理过程的时候,我們可以用第一过程图形中的射出外部电子綫来代表,也可以用第二过程图形中的射入外部电子綫来代表. 但是,假使将二个过程合并当作一个总的过程看,那末这个电子就应該由总的过程图形中的一条內部电子綫来代表. 这条內部电子綫的二端就是前面所說的二条外部电子綫. 因此,电子自能部份对这二条外部电子綫的波函数的修正影响应該和对代表一条內部电子綫的电子传播函数的修正影响相当. 考虑到这条內部电子綫实际上代表着自由电子,因此有:

$$u^{(2)}(p) = \sqrt{1 + B}u(p); \quad \bar{u}^{(2)}(p) = \sqrt{1 + B}\bar{u}(p); \quad (10,80)$$

也就是說,应該取(10,78)和(10,79)的几何平均值. 式(10,80)有时被称为波函数重整化.

§10,7. 电荷重整化和輻射修正

以上的討論指出，經过質量重整化以后，在关于自由电子的理論中就不再出現发散的困难；但是，图 22 和图 26 中的电子自能部份对内部电子綫和外部电子綫的作用却作了无穷大的修正．有必要来研究这种修正在物理上所代表的意义．从(10,75)和(10,80)可以看出，电子自能部分对于任何电动力学过程的 S 矩陣元的修正可以归結为：

1) 用 $S_f^{(2)}(p) = (1 + B)\{S_f(p) + \Sigma_f^{(2)}(p)\}$ 代替 $S_f(p)$ 去代表内部电子綫；

2) 用 $u^{(2)}(p) = \sqrt{1 + B}u(p)$ 和 $\bar{u}^{(2)}(p) = \sqrt{1 + B}\bar{u}(p)$ 代替 $u(p)$ 和 $\bar{u}(p)$ 去代表外部电子綫．

我們也可以用另一种方式来表达这种修改：

1) 用

$$S_{fi}^{(2)}(p) = S_f(p) + \Sigma_f^{(2)}(p) \tag{10,81}$$

代替 $S_f(p)$ 去反映内部电子綫．外部电子綫則仍用 $u(p)$ 或 $\bar{u}(p)$ 去反映．

2) 此外，每一条内部电子綫还貢献一个因子 $(1 + B)$，每一条外部电子綫还貢献一个因子 $\sqrt{1 + B}$．

設某一費曼图形一共有 E_i 条内部电子綫和 E_e 条外部电子綫，那末，电子自能部份的作用除了将 $S_f(p)$ 換为 $S_{fi}^{(2)}(p)$ 之外，还对 S 矩陣元添上一个因子

$$(1 + B)^{E_i + \frac{E_e}{2}}; \tag{10,82}$$

在另一方面，图形中頂角的数目 n 和电子綫的数目之間存在着如下的关系：

$$n = E_i + \frac{E_e}{2}. \tag{10,83}$$

与这一图形相应的矩陣元前面一定有一个因子 e^n；将(10,82)和 e^n 合并起来，就等于以

$$e_1 = (1 + E)e \tag{10,84}$$

代替 e. 因此，电子自能部份的一部份作用是改变电子的电荷. 显然，假使沒有其他的因素发生影响，由实驗所測量得的电子的电荷应該是 e_1 而不是 e. 这样，我們可以将电子自能部份所产生的无穷大划入实驗所观察到的电荷之內. 这一重新定义电荷的过程叫做"电荷重整化"的过程.

經过电荷重整化以后，由于电子自能部份而导致的无穷大全部消去，留下的影响只是对 S 矩陣元的有限修正，即以 $S_{f0}^{(2)}(p) = S_f(p) + \Sigma_f^{(2)}(p)$ 代替 $S_f(p)$. 我們称这种有限的修正为"輻射修正". 这样的輻射修正往往是微小的.

§ 10,8. 真空极化

另一个导致无穷大的簡单物理現象是单个光子的問題. 由实驗所观察到的是，单个光子在开始时处于什么态，那末在終了时应該仍旧处于这同一个态. 設以 η_1 和 η_2 各代表始态光子和終态光子的动量和极化，以 $|\rangle_i$ 和 $|\rangle_f$，

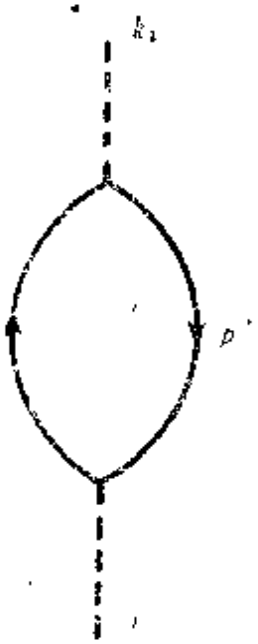


图 27

$$|\rangle_i = c_{\eta_1}^*|\rangle_0, \quad |\rangle_f = c_{\eta_2}^*|\rangle_0, \tag{10,85}$$

各代表始态和終态，則 S 矩陣对这一現象的最低次近似的貢献由 $S^{(0)}$ 作出，相应的矩陣元是：

$$_f\langle|S^{(0)}|\rangle_i = c\langle|c_{\eta_2}c_{\eta_1}^*|\rangle_0 = \delta_{\eta_2\eta_1}. \tag{10,86}$$

(10,86)式的物理意义是显然的：終态光子和始态光子的动量和极化完全一样. S 矩陣对这一現象的下一次近似的貢献由 $S^{(2)}$ 作出，它的作用可以用图 27 表示. 令 k_1 和 e_1 各代表始态光子的动量-能量和极化，令 k_2 和 e_2 各代表終态光子的动量-能量和极化，引进符号 a_1 和 a_2：

$$a_1 = -\frac{e_1}{\sqrt{2\omega_1}}, \qquad a_2 = -\frac{e_2}{\sqrt{2\omega_2}}, \tag{10,87}$$

那末与图 27 相应的矩陣元是：

$$
\begin{aligned}
{}_f\langle|S^{(2)}|\rangle_i &= \\
&= -e^2(2\pi)^8\int d^4p'd^4p''\mathrm{Sp.}\{\hat{a}_2S_f(p')\hat{a}_1S_f(p'')\}\delta^4(k_1+ \\
&\quad + p''-p')\delta^4(p'-p''-k_2). \qquad (10{,}88)
\end{aligned}
$$

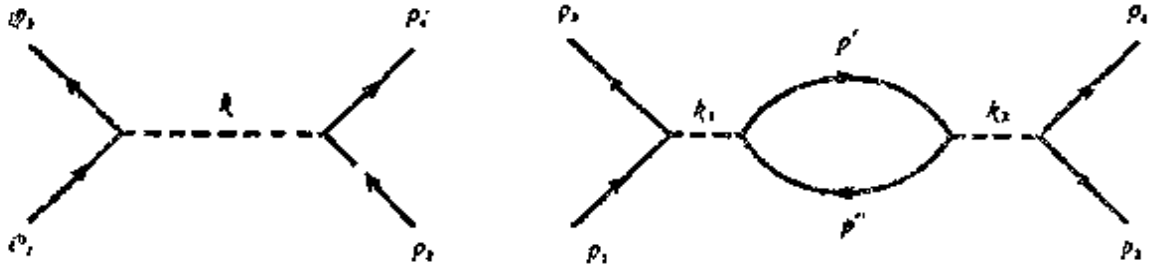
將其中一个 δ^4 函数积分掉后，上式可以写作：

$$
{}_f\langle|S^{(2)}|\rangle_i = \delta^4(k_1-k_2)a_{2\mu}\Pi^{(2)}_{\mu\nu}(k_1)a_{1\nu}, \qquad (10{,}88a)
$$

其中

$$
\Pi^{(2)}_{\mu\nu}(k) = e^4\int d^4p\,\mathrm{Sp.}\left\{\gamma_\mu\frac{i\hat{p}-m_0}{p^2+m_0^2}\gamma_\nu\frac{i(\hat{p}-\hat{k})-m_0}{(p-k)^2+m_0^2}\right\}. \qquad (10{,}89)
$$

检查上式中的积分就可以看出，当对d^4p积分的极限趋于无穷大时，$\Pi^{(2)}_{\mu\nu}$是二次性发散的。图 27 也可以作为更复杂現象的图形的一部分而出現。例如：图 28 a 反映了电子相互散射的最低次近似过程之一；图 28 b 則反映了同一散射現象的較高次近似过程之一；图 27 代替了图 28 a 中的内部光子綫而出現在图 28 b 之中。与图 28 a 相应的 S 矩陣元是：



a) b)

图 28

$$
\begin{aligned}
{}_f\langle|S^{(2)}|\rangle_i &= \\
&= e^2(2\pi)^8\int d^4k\bar{u}_3\gamma_\mu u_1\delta_{\mu\nu}D_f(k)\bar{u}_4\gamma_\nu u_2\delta^4(p_1- \\
&\quad -k-p_3)\delta^4(p_2+k-p_4); \qquad (10{,}90)
\end{aligned}
$$

与图 28b 相应的矩陣元則是：

$$
\begin{aligned}
{}_f\langle|S^{(4)}|\rangle_i &= -e^2(2\pi)^{16}\times \\
&\times\int d^4k_1d^4p'd^4p''d^4k_2\bar{u}_3\gamma_\mu u_1D_f(k_1)\mathrm{Sp.}\{\gamma_\mu S_f(p')\gamma_\nu S_f(p'')\}\times \\
&\quad\times D_f(k_2)\bar{u}_4\gamma_\nu u_2\delta^4(p_1-p_3-k_1)\delta^4(k_1+p''- \\
&\quad -p')\delta^4(k_2+p''-p')\delta^4(k_2+p_2-p_4). \qquad (10{,}91)
\end{aligned}
$$

不难証明，可以将上式改写为如下的形式：

$$
\begin{aligned}
&{}_f\langle|S^{(4)}|\rangle_i = \\
&\quad = e^2(2\pi)^8\int d^4k\bar{u}_3\gamma_\mu u_1 D_f(k)\Pi^{(2)}_{\mu\nu}(k)D_f(k)\bar{u}_4\gamma_\nu u_2\delta^4(p_1 - \\
&\qquad - p_3 - k)\delta^4(k + p_2 - p_4). \qquad (10,92)
\end{aligned}
$$

因此，图 28 a 与图 28 b 的貢献之和就是：

$$
\begin{aligned}
&{}_f\langle|S^{(2)} + S^{(4)}|\rangle_i = \\
&\quad = e^2(2\pi)^8\int d^4k\bar{u}_3\gamma_\mu u_1 D^{(2)}_{f,\mu\nu}(k)\bar{u}_4\gamma_\nu u_2\delta^4(p_1 - p_3 - \\
&\qquad - k)\delta^4(k + p_2 - p_4), \qquad (10,93)
\end{aligned}
$$

其中

$$
D^{(2)}_{f,\mu\nu}(k) = \delta_{\mu\nu}D_f(k) + D_f(k)\Pi^{(2)}_{\mu\nu}(k)D_f(k). \qquad (10,94)
$$

从 (10,93) 式可以看出，当图 27 作为某一更复杂現象的图形的一部分而出現时，它的作用是将代表内部光子綫的函数 $\delta_{\mu\nu}D_f(k)$ 修改成为 $D^{(2)}_{f,\mu\nu}(k)$. 我們称 $\delta_{\mu\nu}D_f(k)$ 为光子传播函数的零次近似，称 $D^{(2)}_{f,\mu\nu}(k)$ 为光子传播函数的二次近似. 也可以将 $\delta_{\mu\nu}D_f(k)$ 写作 $D^{(0)}_{f,\mu\nu}(k)$.

由于 $\Pi^{(2)}_{\mu\nu}$ 中包含着无穷大，$D^{(2)}_{f,\mu\nu}$ 也必然包含着无穷大. 既然图27可以在一系列的物理現象的图形中出現，它就給 S 矩陣带来了一系列的无穷大. 因此，有必要来詳細討論图 27 的表式中所包含的无穷大的性質及其相应的物理效应.

在討論图 27 中所包含的无穷大以前，研究一下这个图形的物理意义是有益的. 可以对图 28 a 作如下的解释：电子之一放出一个光子，这个光子为另一个电子所吸收，因此它們的运动状态起了变化. 图 28 b 則可以作如下的解释：一个电子放出一个光子，这个光子又轉化为电子偶，电子偶再湮沒而轉化为一个光子去影响另一个电子的运动. 图 28 b 也可以这样理解：一个电子产生电磁場，这电磁場在图 28 b 中以光子綫 k_1 形象地表示；因为真空中有无穷多的負能級的电子，因此电磁場就可以引起真空中負能級的电子极化而产生极化的电荷和电流；在图 28 b 中，真空极化电荷和电流以电子偶 p' 和 p'' 形象地表示；真空极化电荷和电流又产生

电磁場，这个电磁場在图中以光子綫 k_2 表示；电磁場 k_2 又去影响另一个电子的运动。因此，图 27 所表示的效应也称为"眞空极化效应"。

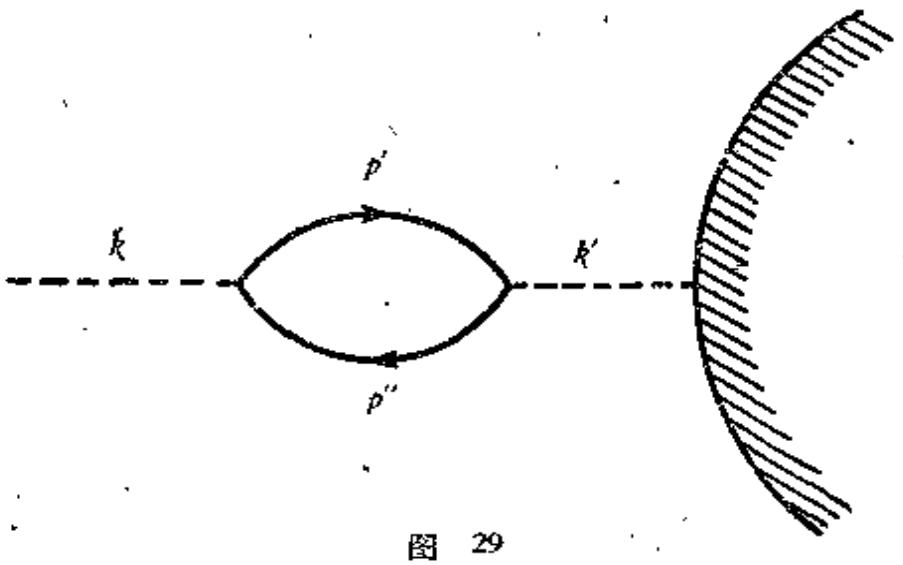


图 29

我們可以研究一下：由于电磁場 a_μ 所产生的眞空极化电流究竟有多大？我們記得，在 S 矩陣元的动量表象中，外部电磁場由因子 a_μ 代表。假使考虑到外部电磁場通过眞空极化而产生的影响，那末代表外部电磁場的因子应該按照图 29 略加修改。設以 $a_\mu^{(2)}$ 代表修改以后代表外部电磁場的因子，那末就有：

$$a_\mu^{(2)} = a_\mu + \delta a_\mu, \tag{10,95}$$

$$\delta a_\mu = -e^2(2\pi)^8 \times$$
$$\times \int d^4p'd^4p''d^4k' D_f(k')\mathrm{Sp}\{\gamma_\mu S_f(p')\gamma_\nu S_f(p'')\}a_\nu(k) \times$$
$$\times \delta^4(k + p'' - p')\delta^4(k' + p'' - p');$$

δa_μ 代表由于眞空极化而产生的附加电磁場。利用 (10,89) 可以将(10,95)中的第二式写为：

$$\delta a_\mu(k) = -\frac{i}{(2\pi)^4}\cdot\frac{1}{k^2}\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k)a_\nu(k). \tag{10,96}$$

由于在空間坐标表象中存在着关系：

$$j_\mu = -\Box A_\mu, \tag{10,97}$$

在动量表象中就存在着相应的关系：

$$j_\mu(k) = k^2 a_\mu(k). \tag{10,98}$$

从(10,96)和(10,98)就可以求得由于 $a_\mu(k)$ 而产生的真空极化电荷-电流密度在动量表象中的表式:

$$\delta j_\mu(k) = -\frac{i}{(2\pi)^4}\Pi^{(2)}_{\mu\nu}(k)a_\nu(k). \tag{10,99}$$

从电荷守恒定律，可以推导得 $\Pi^{(2)}_{\mu\nu}(k)$ 必须满足的一个重要条件. 在动量表象中，电荷守恒的公式是:

$$k_\mu j_\mu(k) = 0. \tag{10,100}$$

真空极化电荷也必须遵守电荷守恒律;因此有:

$$-\frac{i}{(2\pi)^4}k_\mu\Pi^{(2)}_{\mu\nu}(k)a_\nu(k) = 0. \tag{10,101}$$

上式在 $a_\nu(k)$ 取任何值时都必须得到满足，因此得:

$$k_\mu\Pi^{(2)}_{\mu\nu}(k) = 0. \tag{10,102}$$

电磁相互作用的规范不变性一方面导致了电荷守恒定律，另一方面又保証了光子不能具有静质量. 电荷守恒定律要求 $\Pi^{(2)}_{\mu\nu}$ 满足条件(10,102);可以証明，光子不能具有静质量要求 $\Pi^{(2)}_{\mu\nu}$ 满足另一个重要条件. 从(10,88)可以看出，$\Pi^{(2)}_{\mu\nu}$ 在洛仑兹变换中应该象一个二级张量; 因为 S 矩陣元是洛仑兹不变的，而 $a_\mu a_\nu$ 又是一个二级张量，因此从(10,89)式看，$\Pi^{(2)}_{\mu\nu}$ 只能具有如下的形式:

$$\Pi^{(2)}_{\mu\nu}(k) = k_\mu k_\nu Q(k^2) + \delta_{\mu\nu}P(k^2). \tag{10,103}$$

从(10,102)和(10,103)可得:

$$k^2Q(k^2) + P(k^2) = 0; \tag{10,104}$$

因此有:

$$\Pi^{(2)}_{\mu\nu} = (k_\mu k_\nu - k^2\delta_{\mu\nu})Q(k^2). \tag{10,105}$$

从(10,89)和(10,105)可以得:

$$\Pi^{(2)}_{\mu\mu}(k) = -3k^2Q(k^2) = e^2\int d^4p\ \mathrm{Sp.}\left\{\gamma_\mu\frac{i\hat{p}-m_0}{p^2+m_0^2}\gamma_\mu\frac{i(\hat{p}-\hat{k})-m_0}{(p-k)^2+m_0^2}\right\}. \tag{10,106}$$

从(10,106)可以求出 $Q(k^2)$，从而也可以求出 $\Pi^{(2)}_{\mu\nu}$ 的显示表式.

我們首先来求 $\Pi^{(2)}_{\mu\nu}(k)$ 对于自由光子的 S 矩陣元所作的貢献，

尤其是对动量和能量都趋于零的光子的 S 矩陣元所作的貢献. 应用(9.41),得:

$$\Pi^{(2)}_{\mu\mu}(0) = e^2\int d^4p\ \mathrm{Sp}\left\{\frac{(-2i\hat{p}-4m_0)(i\hat{p}-m_0)}{(p^2+m_0^2)^2}\right\} =$$

$$= 8e^2\int d^4p\,\frac{p^2+2m_0^2}{(p^2+m_0^2)^2}. \qquad (10,107)$$

(10.107)式右方的表式随着积分极限趋于无穷大而二次性地发散. 但是 $\Pi^{(2)}_{\mu\mu}(0)$不等于零是不可能的,因为 $\Pi_{\mu\mu}(0)$不等于零在物理上就意味着光子具有自能,也就是具有静質量;但是光子具有静質量和規范不变性的要求相矛盾. 假使光子具有静質量 κ,则相应地就应該存在着一項等效的哈密頓量密度 $\kappa^2A_\mu A_\mu$. 但是,这样的項显然不是規范不变的. 从另一方面也可以看出,規范不变性要求

$$\Pi^{(2)}_{\mu\mu}(0) = 0. \qquad (10,108)$$

这是由于規范不变性要求电荷守恆,后者又轉而要求 $\Pi^{(2)}_{\mu\nu}$ 滿足公式(10,102),要求 $\Pi^{(2)}_{\mu\mu}(k)$ 等于 $-3k^2Q(k^2)$;因此也要求公式(10,108)得到滿足.

其实,(10,107)与(10,108)之間的矛盾是表面的. 因为(10,107)中的积分是发散的,因而假使 p_μ 的四个积分极限按不同的方式趋于无穷大,則所得到的結果可以完全不同. 假使所得結果与規范不变性的要求相矛盾,那末应該認为这是由于計算方法有毛病. 正确的計算方法应該选择 p_μ 的积分极限趋于无穷大的适当方式,使(10,108)式得到滿足,以保証理論的規范不变性和内在的一致性. 因此,我們可以利用(10,107)和(9,41),将 $\Pi^{(2)}_{\mu\mu}(k)$ 的表式写作:

$$\Pi^{(2)}_{\mu\mu}(k) = 8e^2\int d^4p\left\{\frac{p^2-(pk)+2m_0^2}{(p^2+m_0^2)[(p-k)^2+m_0^2]} - \right.$$

$$\left. - \frac{p^2+2m_0^2}{(p^2+m_0^2)^2}\right\}. \qquad (10,109)$$

§ 10,9. $\Pi_{\mu\nu}(k)$ 的显示表式

从(10,106)可以看出，可以将 $\Pi^{(2)}_{\mu\mu}(k)$ 展开成为 k^2 的幂級数，亦即

$$D_f^{-1}(k) = i(2\pi)^4 k^2 \tag{10,110}$$

的幂級数；而且，由于(10,108)式，展开后所得的常数項一定等于零. 因此，可以假定：

$$\Pi^{(2)}_{\mu\mu}(k) = 3\{C \cdot D_f^{-1}(k) + \Pi_f^{(2)}(k^2) D_f^{-1}(k)\}, \tag{10,111}$$

其中 C 是一个常数. 因子"3"是为了方便而引入的. 利用公式(10,7)，可以将(10,109)式右方的第一項写作：

$$8e^2 \int d^4p \int_0^1 dx \frac{p^2 + 2m_0^2 - (pk)}{\{(p - kx)^2 + q^2\}^2},$$
$$q^2 = m_0^2 + k^2 x(1 - x). \tag{10,112}$$

利用公式(10,8)和(10,112)，可将(10,109)写作：

$$\Pi^{(2)}_{\mu\mu}(k) = 8e^2 \times$$
$$\times \int d^4p (p^2 + 2m_0^2 - (pk)) \int_0^1 dx \int_0^1 dz \frac{2(2(pk) - k^2)x}{\{(p - kxz)^2 + l^2\}^3},$$
$$l^2 = m_0^2 + k^2 xz(1 - xz). \tag{10,113}$$

可以将上式略加簡化. 令 $y = xz$，$dy = xdz$，那末在对 dx 积分以后，上式就可以写成：

$$\Pi^{(2)}_{\mu\mu}(k) =$$
$$= 16e^2 \int d^4p \int_0^1 dy \cdot (1-y) \frac{[p^2 + 2m_0^2 - (pk)][2(pk) - k^2]}{\{(p - ky)^2 + l^2\}^3},$$
$$l^2 = m_0^2 + k^2 y(1 - y). \tag{10,114}$$

我們可以将上式中对 d^4p 积分的原点加以移动. 上式右方只有一項是綫性发散的，当积分原点移动以后数值略有改变；其他各項則最多是对数性发散，移动积分原点不改变它們的数值. 可以看出，当移动积分原点后，上式右方数值的改变与

$$16e^2\int d^4p\int_0^1 dy(1-y)\frac{[(p-ky)^2+l^2]2(pk)}{\{(p-ky)^2+l^2\}^3}=$$
$$=32e^2\int d^4p\int_0^1 dy\frac{(1-y)(pk)}{\{(p-ky)^2+l^2\}^2} \qquad (10,115)$$

在移动积分原点后的数值改变相等. 利用公式(10,34),可以得到(10,115)当 $p-ky\to p$ 时的数值改变:

$$32e^2\int_0^1(1-y)dy\left(-\frac{i}{2}\pi^2k^2y\right)=-\frac{8}{3}ie^2\pi^2k^2. \qquad (10,116)$$

因此,可以将(10,114)式写作:

$$\Pi^{(2)}_{\mu\mu}(k)=-\frac{8}{3}ie^2\pi^2k^2+16e^2\int d^4p\int_0^1 dy\frac{(1-y)R}{(p^2+l^2)^3},$$
$$R=[(p+ky)^2-(p+ky)k+2m_0^2][2(p+ky)k-k^2]. \qquad (10,117)$$

考虑到积分(10,117)的对称性,R 中 p 的奇次项的贡献等于零,可以略去. 因此,可以将(10,117)式积分中的 R 换为:

$$R'=(2y-1)[2(pk)^2+p^2k^2+k^2\cdot k^2y(y-1)+2m_0^2k^2]. \qquad (10,118)$$

再考虑到(10,117)式中积分的对称性,可以进一步将 R' 中的 $(pk)^2=p_\mu p_\nu k_\mu k_\nu$ 换作 $\frac{1}{4}p^2k^2$; 因此,可以将 R' 再换作:

$$R''=(2y-1)k^2\left[\frac{3}{2}p^2+k^2y(y-1)+2m_0^2\right]. \qquad (10,119)$$

利用(10,110)和(10,119),可以将(10,117)写作:

$$\Pi^{(2)}_{\mu\mu}(k)=D_l^{-1}(k)\left\{-\frac{2\alpha}{3\pi}-\right.$$
$$\left.-\frac{4i\alpha}{\pi^3}\int d^4p\int_0^1 dy(1-y)(2y-1)\frac{\frac{3}{2}p^2+k^2y(y-1)+2m_0^2}{(p^2+l^2)^3}\right\}. \qquad (10,120)$$

将上式与(10,111)比较后,可以求得 C 和 $\Pi^{(2)}(k^2)$ 的表式. 当 $k^2=0$ 时,上式曲括号中的表式就等于 $3C$. 因此有:

$$3C = -\frac{2\alpha}{3\pi} -$$

$$-\frac{4i\alpha}{\pi^3}\int d^4p\int_0^1 dy(1-y)(2y-1)\frac{\frac{3}{2}p^2+2m_0^2}{(p^2+m_0^2)^3}. \quad (10,121)$$

我們先对 dy 积分，然后再利用公式(10,36)和(10,45)，可得：

$$C = -\frac{\alpha}{3\pi}\left(D+\frac{5}{6}\right). \quad (10,122)$$

从(10,111)、(10,120)和(10,121)可得：

$$3D_f^{-1}(k)\Pi_f^{(2)}(k^2) = \frac{-4i\alpha}{\pi^3}\int d^4p\int_0^1 dy\cdot(1-y)(2y-$$

$$-1)\left\{\frac{\frac{3}{2}p^2+k^2y(y-1)+2m_0^2}{(p^2+l^2)^3}-\frac{\frac{3}{2}p^2+2m_0^2}{(p^2+m_0^2)^3}\right\}. \quad (10,123)$$

利用公式(10,8)，并考虑到公式(10,110)，可以将上式改写为如下的形式：

$$\Pi_f^{(2)}(k^2) = \frac{\alpha}{24\pi^7}\int d^4p\int_0^1 dy\cdot y(1-y)^2(2y-$$

$$-1)\left\{\frac{2}{(p^2+l^2)^3}+\int_0^1 dz\,\frac{3(3p^2+4m_0^2)}{(p^2+l_1^2)^4}\right\},$$

$$l_1^2 = m_0^2+k^2yz(1-y). \quad (10,124)$$

利用公式(10,36)，先对 d^4p 积分，得：

$$\Pi_f^{(2)}(k^2) = \frac{i\alpha}{24\pi^5}\int_0^1 dy\cdot y(1-y)^2(2y-1)\left\{\frac{1}{l^2}+\right.$$

$$\left.+\int_0^1 dz\left(\frac{3}{l_1^4}+\frac{2m_0^2}{l_1^4}\right)\right\}. \quad (10,125)$$

可以进而对 dz 积分，得：

$$\Pi_f^{(2)}(k^2) = \frac{i\alpha}{24\pi^5}\int_0^1 dy\cdot(1-y)(2y-$$

$$-1)\left\{\frac{3y(1-y)}{l^2}+\frac{3}{k^2}\ln\left(\frac{l^2}{m_0^2}\right)\right\}. \quad (10,126)$$

将上式右方第二項进行分部积分，可得：

$$\Pi_1^{(2)}(k^2)=\frac{2i\alpha}{3(2\pi)^3}\int_0^1 dy\,\frac{y^2(2y-1)(2y-3)}{m_0^2+k^2y(1-y)};\quad(10,127)$$

其中应用了 I^2 的表式(10,114)。(10,127)式右方显然是有限的。不难再对 dy 进行积分，求得 $\Pi_1^{(2)}(k^2)$ 的显示表式。

§ 10,10. 光子传播函数的二次近似

在上节的討論中，我們曾經指出，由图 27 所代表的真空极化效应在于以 $D_{1\mu\nu}^{(2)}(k)$ 和 $a_\mu^{(2)}(k)$ 代替 S 矩陣元中的因子 $\delta_{\mu\nu}D_1(k)$ 和 $a_\mu(k)$。从(10,94)和(10,96)可以看出，图 27 所导致的修正由 $\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k)$ 决定。$\Pi_{\mu\nu}^{(2)}$ 的表式見(10,105)。可以証明，(10,105)式右方的与 $k_\mu k_\nu$ 成比例的一項对 S 矩陣元不作貢献。証明如下：假使图 27 是处在一条外部光子綫上，那末这一項不起作用是显然的，因为根据(10,96)和(10,105)，

$$\delta a_\mu=D_1(k)Q(k^2)(k_\mu k_\nu-k^2\delta_{\mu\nu})a_\nu(k);\quad(10,128)$$

考虑到动量表象中的洛仑兹条件具有下列形式：

$$k_\nu a_\nu=0,\quad(10,129)$$

可見与 $k_\mu k_\nu$ 成比例的一項对于 S 矩陣元不作出貢献。

假使图 27 处在某一物理过程的图形中的内部光子綫上，假使和这些图形相应的矩陣元是：

$$\sum\int U\gamma_\mu V D_1(k)W\gamma_\mu X d^4k,\quad(10,130)$$

其中 $D_1(k)$ 代表这条光子綫，二个 γ_μ 代表这条光子綫二端的頂角，U,V,W 和 X 代表图形的其它部分；那末，这条光子綫上的真空极化效应对这一矩陣元的修正将是：

$$\sum\int U\gamma_\mu V D_1(k)\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k)D_1(k)W\gamma_\nu X d^4k.\quad(10,131)$$

可以証明，(10,131)式中与 $k_\mu k_\nu$ 成比例的一項

$$\sum\int U\hat{k}V D_1(k)Q(k^2)D_1(k)W\hat{k}X d^4k\quad(10,132)$$

等于零。我們再想象另外一个物理过程，它同上面所討論的物理

过程之間的差别在于将二条外部光子綫代替那条内部光子綫. 不难看出,与这一物理过程相应的矩陣元应該是:

$$\sum Ua(k)VWb(k')X, \qquad (10,133)$$

其中 $a_\mu(k)$ 和 $b_\mu(k')$ 代表二条外部光子綫. 假使我們进行一个規范变換,那末在动量表象中就相应于以 $a_\mu(k)+k_\mu\alpha(k)$ 代替 $a_\mu(k)$、以 $b_\mu(k')+k'_\mu\alpha(k')$ 代替 $b_\mu(k')$; 既然 S 矩陣具有規范不变性,这就要求:

$$\sum\{\alpha(k)U\hat{k}VWbX+\alpha(k')Ua\hat{V}W\hat{k}'X+ \\ +\alpha(k)\alpha(k')U\hat{k}VW\hat{k}'X\}=0. \qquad (10,134)$$

由于,$\alpha(k)$ 可以是任何 k 的函数,只要能满足条件:

$$k^2\alpha(k)=0; \qquad (10,135)$$

因此有:

$$\begin{cases}\sum U\hat{k}VWbX=0,\\ \sum Ua\hat{V}W\hat{k}'X=0,\\ \sum U\hat{k}VW\hat{k}'X=0.\end{cases} \qquad (10,136)$$

这就証明了,表式(10,132)等于零,因此在 $\Pi^{(2)}_{\mu\nu}(k)$ 中与 $k_\mu k_\nu$ 成正比的一項对 S 矩陣元不作出任何貢献,因而可以略去. 于是,可以将(10,105)改写成:

$$\Pi^{(2)}_{\mu\nu}(k)=-\delta_{\mu\nu}k^2Q(k^2). \qquad (10,137)$$

从(10,106)、(10,111)和(10,137)可得:

$$\Pi^{(2)}_{\mu\nu}(k)=\delta_{\mu\nu}\{CD_f^{-1}(k)+\Pi^{(2)}_f(k^2)D_f^{-2}(k)\}; \qquad (10,138)$$

C 和 $\Pi^{(2)}_f(k^2)$ 的表式見(10,122)和(10,127).

从(10,94)和(10,138),可以求得光子传播函数的二次近似的如下表式.

$$D^{(2)}_{f,\mu\nu}(k)=\delta_{\mu\nu}(1+C)D_f(k)+\delta_{\mu\nu}\Pi^{(2)}_f(k^2). \qquad (10,139)$$

假使我們的討論只限于二次近似,那末就可以将(10,139)式改写为:

$$D^{(2)}_{f,\mu\nu}(k)=\delta_{\mu\nu}(1+C)\{D_f(k)+\Pi^{(2)}_f(k^2)\}. \qquad (10,140)$$

根据 (10,95)、(10,96) 和 (10,138)，并考虑到，对于自由光子来說，$k^2 = 0$，我們立即可以求出眞空极化效应对于外部光子綫的作用所产生的影响．这一影响归結为将 $a_\mu(k)$ 修改成为：

$$a_\mu^{(2)}(k) = a_\mu(k) + CD_f(k)D_f^{-1}(k)a_\mu(k). \qquad (10,141)$$

上式右方的表式是不定的：假使 $D_f^{-1}(k)$ 先作用于 $a_\mu(k)$ 上，则由于 $k^2 = 0$，得：

$$a_\mu^{(2)}(k) = a_\mu(k); \qquad (10,142)$$

假使 $D_f^{-1}(k)$ 先作用于 $D_f(k)$ 上，我們就得：

$$a_\mu^{(2)}(k) = (1 + C)a_\mu(k). \qquad (10,143)$$

应用在討論电子綫的相应情况时所采用的方法，可以証明，$a_\mu^{(2)}(k)$ 应該取上二式的几何平均值：

$$a_\mu^{(2)}(k) = \sqrt{1 + C}\,a_\mu(k). \qquad (10,144)$$

§ 10,11. 眞空极化导致的电荷重整化

由于 C 是对数性发散的，因此，眞空极化通过 (10,140) 和 (10,144) 給 S 矩陣带来一系列的无穷大．但是这种无穷大的眞空极化效应的物理意义却是不难理解的．从 (10,140) 和 (10,144) 可以看出，眞空极化对于 S 矩陣元的修正可以归結为：

1) 以

$$D_0^{(2)}(k) = D_f(k) + \Pi_f^{(2)}(k) \qquad (10,145)$$

代替 $D_f(k)$ 去反映內部光子綫；外部光子綫則仍用 $a_\mu(k)$ 去反映；

2) 此外，每一条內部光子綫貢献一个因子 $(1 + C)$，每一条外部光子綫貢献一个因子 $\sqrt{1 + C}$．

第一部分的修正是有限的，因为 $\Pi_f^{(2)}(k)$ 不包含无穷大．第二部分修正是无穷大的，但是产生的問題并不严重．設費曼图形有 n 个頂角、P_i 条內部光子綫和 P_e 条外部光子綫，則在相应的 S 矩陣元的表式中一定有一个因子 e^n．此外，由于眞空极化的第二部分效应，內部光子綫和外部光子綫合起来貢献一个因子：

$$(1+C)^{P_i+\frac{P_e}{2}}. \tag{10,146}$$

由于在 n、P_i 和 P_e 之間存在着如下的关系：

$$2P_i + P_e = n, \tag{10,147}$$

因而将(10,146)和 e^n 合并起来，也就等于以

$$e_2 = \sqrt{1+C}e \tag{10,148}$$

代替 e. 因此，眞空极化的一部分效应在于改变电子电荷的数值. 我們可以作如下的理解：电子的"固有"电荷不可避免地要产生电磁場，电磁場又不可避免地导致眞空极化电荷-电流. 这样，电子的固有电荷与由此而产生的眞空极化电荷不可分割地連系在一起. 在实验上只能观察到二者之和而不能加以区分. 也就是說，假使除了眞空极化以外沒有别的效应，那末实验所观察到的电荷应該是 e_2 而不是 e. 假使令 e_2 取电子电荷的有限的实验数值，那末在 S 矩陣中所有由于眞空极化而导致的无穷大将全部消去. 公式(10,148)即是由于眞空极化所导致的电荷的重整化. 經过电荷重整化以后，眞空极化只在 S 矩陣元中留下有限的修正. 这种修正的来源是由于以(10,145)中的 $D_0^{(2)}(k)$ 代替了 S 矩陣元中的 $D_f(k)$. 我們称这样的修正为眞空极化所导致的輻射修正. 上述輻射修正不仅是有限的，而且常常是微小的.

§ 10,12. 頂角函数的高次近似

代表 S 矩陣元的基本組成部分有三种：一种是电子綫，一种是光子綫，一种是頂角. 在以上各节中曾討論了代表电子綫和光子綫的传播函数和波函数如何为高次近似的效应所修正，修正怎样带来了无穷大，无穷大怎样通过电子綫和光子綫被带进一系列的 S 矩陣元中，以及怎样消去这些无穷大. 显然，假使高次近似效应为頂角函数带来了无穷大的修正，那末，由于頂角也是費曼图形的基本組成部分，这种无穷大也将为 S 矩陣带来普遍的发散困难. 因此，有必要研究代表頂角的函数的高次近似.

在 S 矩陣中經常遇見的頂角部分由图 30 a 表示.

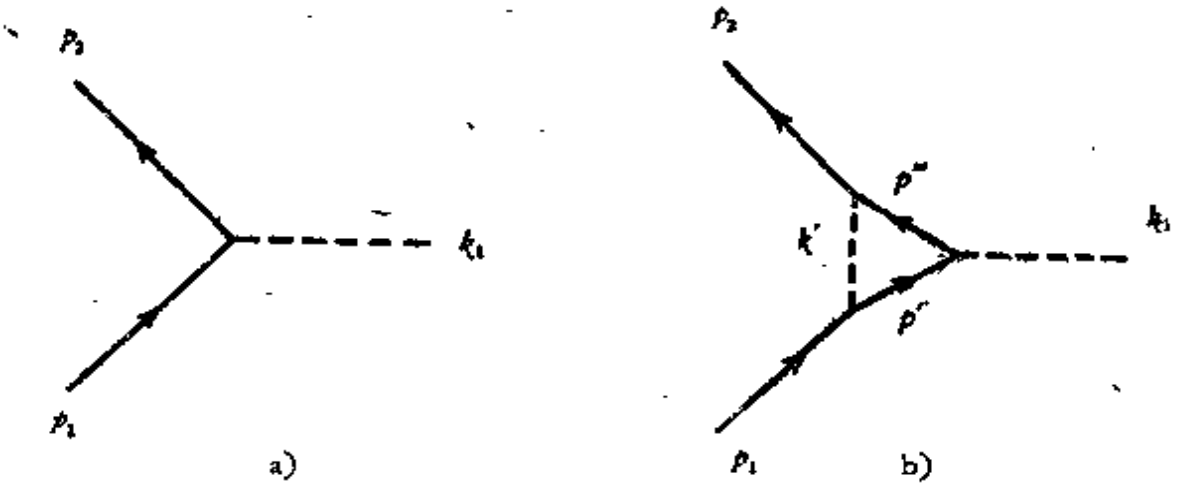


图　30

在物理上这代表一个电子为一个电磁場所散射.　与图 30 a 相应的矩陣元是:

$$ {}_f\langle|S^{(1)}|\rangle_i = \bar{u}_2(p_2)[-e\gamma_\mu(2\pi)^4\delta^4(p_2-p_1-k_1)]u_1(p_1)a_\mu(k_1). \tag{10,149} $$

电子为电磁場所散射的下一次近似包含在 $S^{(3)}$ 之中, 它可以用图 30 b 反映. 与图 30 b 相应的矩陣元是:

$$ \begin{aligned} {}_f\langle|S^{(3)}|\rangle_i = &-e^3(2\pi)^{12}\int d^4k'd^4p'd^4p''\bar{u}_2(p_2)\gamma_\nu D_f(k')S_f(p'')\times \\ &\times\gamma_\mu S_f(p')\gamma_\rho u_1(p_1)a_\rho(k_1)\delta^4(p_1-p'- \\ &-k')\delta^4(p'+k_1-p'')\delta^4(k'+p''-p_2), \end{aligned} \tag{10,150} $$

在对 d^4p' 和 d^4p'' 积分以后, 上式就成为:

$$ \begin{aligned} {}_f\langle|S^{(3)}|\rangle_i = &-e(2\pi)^4\delta^4(p_2-p_1- \\ &-k_1)\bar{u}_2(p_2)\Lambda_\mu^{(3)}(p_1,p_2)u_1(p_1)a_\mu(k_1), \end{aligned} \tag{10,151} $$

其中

$$ \begin{aligned} \Lambda_\mu^{(3)}(p_1,p_2) &= \\ &= \frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{k^2}\quad\frac{i(\hat{p}_2-\hat{k})-m_0}{(p_2-k)^2+m_0^2}\gamma_\mu\frac{i(\hat{p}_1-\hat{k})-m_0}{(p_1-k)^2+m_0^2}\gamma_\nu. \end{aligned} \tag{10,152} $$

因此, 图 30b 对 S 矩陣元的貢献就相当于将代表頂角的 γ_μ 略加修正, 即以

$$\Gamma_\mu^{(2)}(p_1, p_2) = \gamma_\mu + \Lambda_\mu^{(2)}(p_1, p_2) \qquad (10,153)$$

代替 γ_μ. 不难看出，$\Lambda_\mu^{(2)}(p_1, p_2)$是对数性发散的. 当然，图 30 b 也可以作为一个更复杂图形的一部分而出现，它的作用也就是将 S 矩陣元加以修正，以 $\Gamma_\mu^{(2)}(p_1, p_2)$ 代替 S 矩陣元表式中的 γ_μ. 由于 $\Lambda_\mu^{(2)}(p_1, p_2)$ 是发散的，因此，象图 30 b 这种頂角部分就为 S 矩陣帶来普遍的发散困难. 有必要对 $\Lambda_\mu^{(2)}(p_1, p_2)$ 中所包含的无穷大詳加研究.

利用公式(9,41)和(10,7)，可以将(10,152)写为：

$$\Lambda_\mu^{(2)}(p_1, p_2) = \frac{ie^2}{4\pi^4} \times$$

$$\times \int d^4k \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{(\hat{p}_1 - \hat{k})\gamma_\mu(\hat{p}_2 - \hat{k}) - 2im_0(p_{1\mu} + p_{2\mu} - 2k_\mu) - m_0^2\gamma_\mu}{\{(k - p_1x - k_1y)^2 + q^2\}^3},$$

$$q^2 = m_0^2x + p_1^2x + k_1(p_1 + p_2)y - (k_1y + p_1x)^2. \qquad (10,154)$$

可以将(10,154)式中的积分原点移动. 这一积分是对数性发散的，因此，移动积分原点并不改变它的数值. 当 $k - p_1x - k_1y \to k$ 后，我們得：

$$\Lambda_\mu^{(2)}(p_1, p_2) = \frac{ie^2}{4\pi^4} \int d^4k \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{T}{(k^2 + q^2)^3},$$

$$T = (\hat{p}_1(1-x) - \hat{k}_1y - \hat{k})\gamma_\mu(\hat{p}_2 - \hat{p}_1x - \hat{k}_1y - \hat{k}) - m_0^2\gamma_\mu -$$

$$- 2im_0(p_{1\mu} + p_{2\mu} - 2p_{1\mu}x - 2k_{1\mu}y - 2k_\mu). \qquad (10,155)$$

考虑到积分的对称性，可以看出，在表式 T 中 k 的奇次項对于积分的貢献等于零，因而可以略去；k_1^2, k_2^2, k_3^2 和 k_4^2 对于积分的貢献相当于 $\frac{k^2}{4}$ 对于积分的貢献. 再考虑到，$\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\nu = -2\gamma_\mu$，于是可以将(10,155)的 T 換成表式 T'：

$$T' = (\hat{p}_1(1-x) - \hat{k}_1y)\gamma_\mu(\hat{p}_2 - \hat{p}_1x - \hat{k}_1y) -$$

$$- \frac{1}{2}k^2\gamma_\mu - m_0^2\gamma_\mu - 2im_0(p_{1\mu} + p_{2\mu} - 2p_{1\mu}x - 2k_{1\mu}y). \qquad (10,156)$$

我們先来討論一个最簡单的情况：一个电子通过电磁場但沒

有为电磁場所散射．我們有：

$$\begin{cases} p_1 = p_2 = p, \\ k_1 = p_2 - p_1 = 0. \end{cases} \tag{10,157}$$

在这种情况下，T' 就簡化为：

$$T' = (1-x)^2 \hat{p}\gamma_\mu \hat{p} - \frac{1}{2}k^2\gamma_\mu - m_0^2\gamma_\mu - \\ - 2im_0(1-x)\{\gamma_\mu, \hat{p}\}. \tag{10,158}$$

可以將(10,158)进一步化簡：从(10,151)式可以看出，$\Lambda_\mu^{(2)}(p, p)$ 一方面向右作用于 $u(p)$，另一方面又向左作用于 $\bar{u}(p)$．由于

$$(i\hat{p} + m_0)u(p) = 0, \quad \bar{u}(p)(i\hat{p} + m_0) = 0, \tag{10,159}$$

可以將(10,158)中的 $\hat{p}$ 用 im_0 代替．我們有：

$$T' = \gamma_\mu \left\{ m_0^2\left(2 - 2x - \frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{2}(k^2 + m_0^2x^2)\right\}. \tag{10,160}$$

在这一情况下，(10,154)式中的 q^2 簡化为：

$$q^2 = m_0^2x^2. \tag{10,161}$$

將(10,160)和(10,161)代入(10,155)，就得：

$$\Lambda_\mu^{(2)}(p, p) = L\gamma_\mu, \tag{10,162}$$

其中

$$L = \frac{i\alpha}{2\pi^3}\int d^4k \int_0^1 dx \cdot x \left\{ \frac{m_0^2(4-4x-x^2)}{(k^2 + m_0^2x^2)^3} - \frac{1}{(k^2 + m_0^2x^2)^2}\right\}. \tag{10,163}$$

上式中的第二項是对数性发散的．可以利用对 dx 的分部积分得到下式：

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{(k^2 + m_0^2x^2)^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2} + \int_0^1 \frac{2m_0^2x^3\,dx}{(k^2 + m_0^2x^2)^3}. \tag{10,164}$$

將上式代入(10,163)，应用公式(10,45)，就得：

$$L = \frac{\alpha D}{4\pi} + \frac{i\alpha}{2\pi^3}\int d^4k \int_0^1 x\,dx\, \frac{m_0^2(4 - 4x - 3x^2)}{(k^2 + m_0^2x^2)^3}. \tag{10,165}$$

上式右方的积分是收敛的，因此，可以調換积分的次序，先对 d^4k 积分．利用公式(10,36)，就得：

$$\frac{i\alpha}{2\pi^3}\int d^4k\int xdx\,\frac{m_0^2(4-4x-3x^2)}{(k^2+m_0^2x^2)^3}=$$

$$=-\frac{\alpha}{4\pi}\left\{\int_0^1 4\,\frac{dx}{x}-\frac{11}{2}\right\}. \tag{10,166}$$

将上式代入(10,165),就得:

$$L=\frac{\alpha}{4\pi}\left(D-4\int_0^1\frac{dx}{x}+\frac{11}{2}\right). \tag{10,167}$$

从上式可以看出，L所包含的无穷大可以分为二部分：一部分是D，它随着k的积分上限趋于无穷大而发散，因此它的来源是場的无穷多自由度；另一部分是上式右方的第二項，它随着x的下限趋于零而发散，这是前面已經提到过的紅外发散困难，它是由于計算方法不合适而产生的不是基本的困难.

将(10,162)代入(10,153)，可以看出，对于此处所討論的簡单物理現象，图 30 b 的作用归結为以 $(1+L)\gamma_\mu$ 代替 γ_μ，亦即以

$$-(1+L)e\gamma_\mu(2\pi)^4\delta^4(\Sigma p) \tag{10,168}$$

代替 $-e\gamma_\mu(2\pi)^4\delta^4(\Sigma p)$ 去反映 S 矩陣元中的頂角部分. 簡单地說，图 30 b 的作用归結为以

$$e_3=(1+L)e \tag{10,169}$$

代替 e. 經过如(10,169)的电荷重整化以后，在我們所討論的最簡单物理現象的 S 矩陣元中便不再包含无穷大.

討論了以上的特殊情况以后，我們进一步再討論一般的情况，研究当图形 30 b 作为更复杂图形的一部分而出現时所导致的效应. 在一般的情况下，$\not p$ 未必能用 im_0 来代替，因此 $\Lambda_\mu^{(2)}(p_1,p_2)$ 也未必等于 $L\gamma_\mu$. 我們令

$$\Lambda_\mu^{(2)}(p_1,p_2)=L\gamma_\mu+\Lambda_{\mu'}^{(2)}(p_1,p_2). \tag{10,170}$$

根据(10,155)、(10,156)和(10,163)，$\Lambda_{\mu'}^{(2)}(p_1,p_2)$的表式是:

$$\Lambda_{\mu'}^{(2)}(p_1,p_2)=\frac{ie^2}{4\pi^4}\int d^4k\int_0^1 dx\int_0^x dy\left\{\frac{T''}{(k^2+q^2)^3}-\right.$$

$$\left.-\frac{\gamma_\mu\left[m_0^2(2-2x-x^2)-\dfrac{k^2}{2}\right]}{(k^2+m_0^2x^2)^3}\right\}. \tag{10,171}$$

Γ' 的表式見(10,155)．不难証明，$\Lambda^{(2)}_{\mu f}(p_1,p_2)$ 不再包含有无穷大．可以将上式右方的表式分为二部分：

$$\Lambda^{(2)}_{\mu f}(p_1,\ p_2) = \lambda_1 + \lambda_2, \qquad (10,172)$$

其中 λ_1 等于：

$$\lambda_1 = \frac{ie^2}{4\pi^4}\int d^4k \int_0^1 dx \int_0^x dy \left\{\frac{Y}{(k^2+q^2)^3} - \frac{\gamma_\mu m_0^2\left(2-2x-\frac{x^2}{2}\right)}{(k^2+m_0^2x^2)^3}\right\},$$

$$Y = (\hat{p}_1(1-x)-\hat{k}_1y)\gamma_\mu(\hat{p}_2-\hat{p}_1x-\hat{k}_1y)+\frac{1}{2}q^2\gamma_\mu - m_0^2\gamma_\mu -$$

$$- 2im_0(p_{1\mu}+p_{2\mu}-2p_{1\mu}x-2\hat{k}_1y); \qquad (10,173)$$

而 λ_2 則等于：

$$\lambda_2 = \frac{ie^2}{4\pi^4}\int d^4k \int_0^1 dx \int_0^x dy \left\{\frac{\gamma_\mu}{2}\frac{1}{(k^2+m_0^2x^2)^2} - \frac{\gamma_\mu}{2}\frac{1}{(k^2+q^2)^2}\right\}. \qquad (10,174)$$

在 λ_1 的表式中对于 d^4k 的积分显然是收敛的．利用公式(10,8)，可将 λ_2 的表式化为：

$$\lambda_2 = \frac{ie^2}{4\pi^4}\int d^4k \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^1 dz \times$$

$$\times\gamma_\mu \frac{m_0^2x(1-x)+p_1^2x+k_1(p_1+p_2)y-(k_1y+p_1x)^2}{\{k^2+zm_0^2x^2+q^2(1-z)\}^3}; \qquad (10,175)$$

上式对 d^4k 的积分也显然是收敛的．因此，$\Lambda^{(2)}_{\mu f}(p_1,\ p_2)$ 的表式对 d^4k 的积分也是收敛的，除了紅外发散以外，不再包含有别的无穷大．

§ 10,13. 頂角部分导致的电荷重整化

从(10,153)和(10,170)，可以看出，在一般情况下，图形 30 b 的作用在于将 S 矩陣元的表式中代表頂角的因子 γ_μ 以

$$\Gamma^{(2)}_\mu(p_1,\ p_2) = (1+L)\gamma_\mu + \Lambda^{(2)}_{\mu f}(p_1,\ p_2) \qquad (10,176)$$

代替．假使討論只限于二次近似，則可以将上式写为：

$$\Gamma_{\mu}^{(2)}(p_1, p_2) = (1 + L)(\gamma_{\mu} + \Lambda_{\mu f}^{(2)}(p_1, p_2)). \quad (10,177)$$

因此，图形 30 b 对于 S 矩陣元的修正可以归結为：

1）以

$$\Gamma_{\mu 0}^{(2)}(p_1, p_2) = \gamma_{\mu} + \Lambda_{\mu f}^{(2)}(p_1, p_2) \quad (10,178)$$

代替 S 矩陣中反映頂角的因子 γ_{μ}；

2）以 e_3 代替 S 矩陣元中的 e.

第二部分效应是由于頂角部分图 30 b 导致的电荷重整化，其中吸收了由于图 30 b 带来的无穷大. 假使除了頂角部分图 30 b 以外，沒有别的效应，那末实驗所观察到的电子的电荷将不是 e 而是 e_3. 假使我們令 S 矩陣元中的 e_3 取电子电荷的有限的实驗值，那末图 30 b 所带給 S 矩陣的无穷大就可全部消去，留下的只是包含在表式(10,178)中的有限修正 $\Lambda_{\mu f}^{(2)}(p_1, p_2)$. 这种修正叫做頂角部分带来的輻射修正，常常是微小的.

§ 10,14. 小結

我們在本章中討論了高次近似对于 S 矩陣中的基本組成部分——电子传播函数、光子传播函数和頂角函数——所起的修正作用. 这些作用可以归結为三部分：

1）以 $S_{f0}^{(2)}(p)$ 代替 $S_f(p)$ 反映电子綫，以 $D_{f0}^{(2)}(k)$ 代替 $D_f(k)$ 反映光子綫，以 $\Gamma_{\mu 0}^{(2)}(p_1, p_2)$ 代替 γ_{μ} 反映頂角；$S_{f0}^{(2)}(p)$、$D_{f0}^{(2)}(k)$ 和 $\Gamma_{\mu 0}^{(2)}(p_1, p_2)$ 的表式見 (10,81)、(10,73)、(10,145)、(10,127)、(10,178)和(10,171).

2）以 m_0 代替 m 作为从实驗所观察到的电子質量；这一过程称为質量重整化过程；m_0 的表式見(10,50)和(10,52).

3）以

$$e_0 = (1 + B)\sqrt{1 + C}\,(1 + L)e \quad (10,179)$$

代替 e 作为从实驗所观察到的电子电荷；这一过程称为电荷重整化过程. B、C 和 L 的表式見(10,71)、(10,122)和(10,167). 在将 S 矩陣元中的 m_0 和 e_0 以有限的实驗数值代入以后，由于电子自

能部分、真空极化部分和頂角部分所带来的无穷大就全部消去，留下的只是微小的輻射修正．这些輻射修正才是可以在实验中观察到的．

本章中所討論的只是二次近似的修正，因此所得到的結果只精确到与 e^2 成比例的項．由于(10,71)、(10,122)和(10,167)中的 B、C 和 L 都与 e^2 成正比，而且 $B = -L$，因此可以将(10,179)式右方的表式展开成为 e 的冪級数，略去 $e^{n>4}$ 的項，得：

$$e_0 = \left(1 + \frac{1}{2}C\right)e. \tag{10,180}$$

这样，由于 $B = -L$，电子自能部分和頂角部分所导致的电荷重整化的效应恰巧相互抵消，留下的只是真空极化所导致的电荷重整化效应．这一規律存在于一切更高次的近似中．

在下一章中我們将对本章討論的結果作一些具体的应用，然后在更下一章中将討論所有更高次近似所带来的发散困难和輻射修正，以及用以消去这些无穷大的質量重整化和电荷重整化的方法．

参 考 文 献

Bethe, H. A. (1947), *Phys. Rev.*, **72**, 339.

Dyson, F. J. (1949), *Phys. Rev.*, **75**, 486, 1736.

Dyson, F. J. (1952), *Phys. Rev.*, **85**, 631.

Feynman, R. P. (1949), *Phys. Rev.*, **76**, 749, 769.

Fukuda, H., Miyamoto, Y. & Tomonaga, S. (1949), *Progr. Theor. Phys.*, **4**, 47, 121.

Иоффе, Б. Л. (1954), ДАН СССР, **94**, 437.

Schwinger, J. (1948), *Phys. Rev.*, **74**, 1439.

第十一章　电子反常磁矩和兰姆能級移动

§11,1. 輻射修正

在进行了質量重整化和电荷重整化以后，量子电动力学的各高次近似計算中所出現的紫外发散困难便都消去，留下的輻射修正虽然在实驗上应該可以观察到，但是十分微小，只有用非常精确的实驗才能有效地驗証这种从理論上推导出来的輻射修正是否眞正存在。目前已有二种实驗，其精确程度足以用来检驗理論：一种是关于电子反常磁矩的实驗；另一种是原子能級的兰姆(Lamb)移动的实驗。二种实驗的結果与理論計算的結果都非常符合，因而有力地証明了，量子电动力学包含有高度正确的因素。

根据狄拉克所提出的关于自旋等于 $\frac{1}{2}$ 的粒子的理論，电子应該具有一个磁矩，整整等于一个玻尔 (Bohr) 磁子：

$$\mu_0 = \frac{e_0}{2m_0}. \tag{11,1}$$

然而，納飞等 [Nafe, Nelson and Rabi, 1947]，[Nagel, Julian and Zacharias, 1947]，[Kusch and Foley, 1947]，[Franken and Liebes, 1956] 所进行的精确实驗指出，电子的磁矩是，

$$\mu = (1.001167 \pm 0.000005)\mu_0. \tag{11,2}$$

卡泼勒斯等 [Karplus and Kroll, 1950]，[Petermann, 1957]，[Sommerfeld, 1957] 曾計算了由于高次近似而导致的輻射修正，精确到与 α^2 成比例的項，得到的理論結果与 (11,2) 中的实驗結果完全符合。

根据狄拉克的理論，氫原子的能級 $2^2S_{\frac{1}{2}}$ 与 $2^2P_{\frac{1}{2}}$ 应該完全重合。但是，兰姆等 [Lamb and Retherford, 1947]，[Dayhoff, Triebwasse and Lamb, 1953] 所进行的精确实驗指出，这二个能級的結合能并

不完全相等，它們之間有一定的距离。$2^2S_{\frac{1}{2}}$ 态的能級略較 $2^2P_{\frac{1}{2}}$ 态的能級为高；它們之間的差别是：

$$\Delta E = (1057.8 \pm 0.1) \text{ 兆周/秒}. \qquad (11,3)$$

能級之間的这种差别叫做"能級的兰姆移动"。貝脫[Bethe,1947]，費曼 [Feynman, 1948; 1949]、朝永等 [Fukuda, Miyamoto and Tomonaga, 1949]，沙耳彼得 [Salpeter, 1953]，索謀菲尔得 [Sommerfeld, 1957] 以及庇得曼 [Petermann, 1957] 等人曾先后利用量子电动力学来計算高次近似所带来的輻射修正，得到的理論結果与上述实驗結果(11,3)完全符合。

从原則上来看，測量电子磁矩是測量电子在磁場中的能量問題，氫原子的結合能問題是电子在庫伦場中如何运动的問題。总的說来，以上二个問題都是电子在已知的电磁場中如何运动的問題。因此，有必要討論利用量子电动力学来处理电子在已知的电磁場中的运动所得到的輻射修正。由于 $\frac{e_0^2}{4\pi} = \alpha = \frac{1}{137}$，輻射修正往往很微小。在以下我們將只討論最初次的輻射修正。

§11,2. 电子为外場所散射的 S 矩陣元

电子为外場所散射的最低次近似和下一高次近似的費曼图形可由图31表示；其中图 31a 代表最低次近似的費曼图形，图 31b、c、d 与 e 則代表下一高次近似的費曼图形。应用第十章中所得到的結果，經过質量重整化以后，可以得到如下的与图 31 相应的 S 矩陣元：

$$\begin{aligned} {}_f\langle |S^{(1)} + S^{(3)}| \rangle_i = & -e(2\pi)^4\sqrt{1+B}\bar{u}(p_2)(1+L) \times \\ & \times (\gamma_\mu + \Lambda_\mu^{(2)}(p_1,p_2))\sqrt{1+B}u(p_1) \times \\ & \times \sqrt{1+C}(1+\Pi_f^{(2)}(k_1^2)D_f^{-1}(k_1))a_\mu(k_1)\delta^4(p_2-p_1-k_1). \end{aligned} \qquad (11,4)$$

我們注意到，对于外部电磁場 $a_\mu(k_1)$ 說来，当 k_1^2 不等于零的时候，也就是当 $D_f^{-1}(k_1)$ 不等于零的时候，$a_\mu(k_1)$ 也未必等于零。因此，

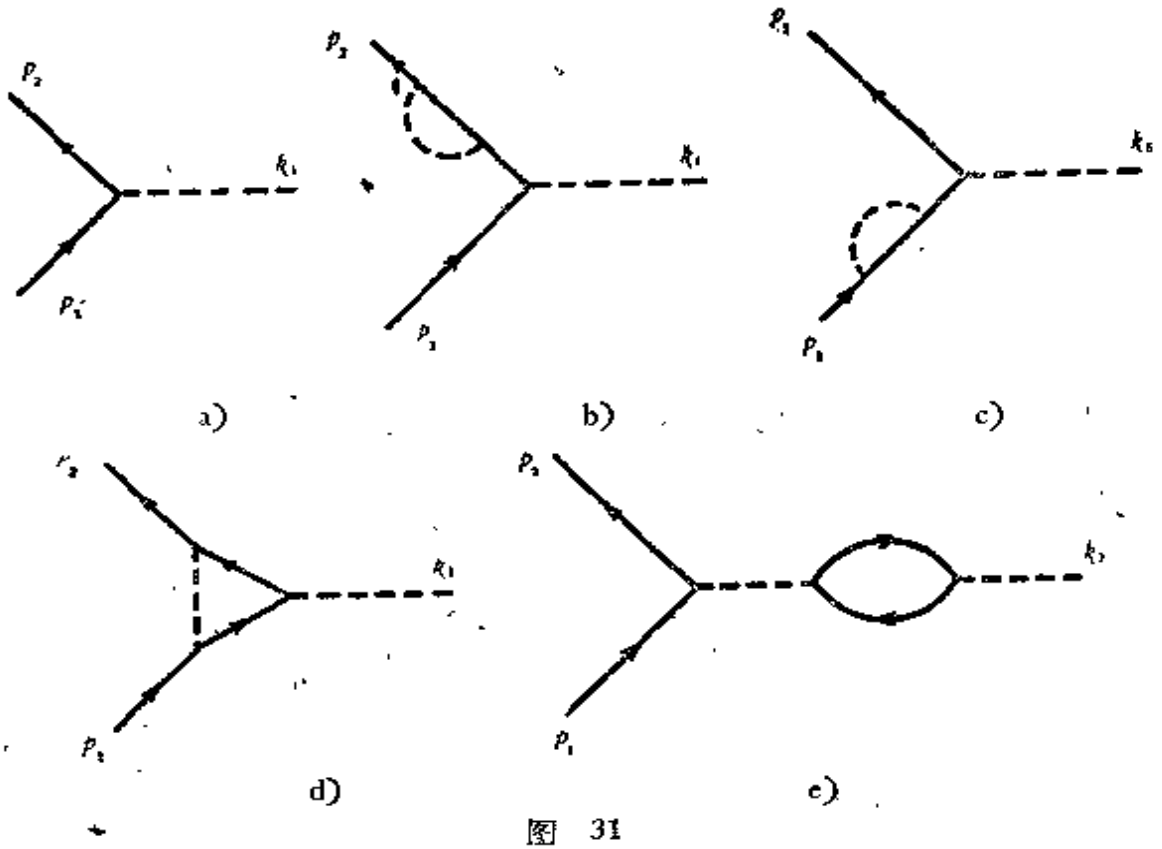


图 31

在(11,4)式中存在着与 $\Pi_f^{(2)}(k_1^2)D_f^{-1}(k_1)$ 成正比的项. 按照(10,179)进行电荷重整化,令 e_0 取电子电荷的实验值,得:

$$ {}_f\langle|S^{(1)}+S^{(3)}|\rangle_i = -e_0(2\pi)^4\bar{u}(p_2)(\gamma_\mu+\Lambda_{\mu f}^{(2)}(p_1,p_2))u(p_1)\times $$
$$ \times(1+\Pi_f^{(2)}(k_1^2)D_f^{-1}(k_1))a_\mu(k_1)\delta^4(p_2-p_1-k_1). \qquad (11,5) $$

由于上式只精确到与 e^3 成正比的项,因而可以将上式展开成为 e_0 的幂级数,略去与 $e_0^{n>4}$ 成正比的项. 这样就得到:

$$ {}_f\langle|S^{(1)}+S^{(3)}|\rangle_i = -e_0(2\pi)^4\bar{u}(p_2)(\gamma_\mu+\Lambda_{\mu f}^{(2)}(p_1,p_2)+ $$
$$ +\gamma_\mu\Pi_f^{(2)}(k_1^2)D_f^{-1}(k_1))u(p_1)a_\mu(k_1)\delta^4(p_2-p_1-k_1). \qquad (11,6) $$

为了求得上列矩陣元的显示表式,必須計算 $\Lambda_{\mu f}^{(2)}(p_1,p_2)$ 和 $\Pi_f^{(2)}(k_1^2)D_f^{-1}(k_1)$. 可以根据(10,110)和(10,127)立即求得 $\Pi_f^{(2)}(k_1^2)D_f^{-1}(k_1)$:

$$ \Pi_f^{(2)}(k_1^2)D_f^{-1}(k_1) = \frac{\alpha k_1^2}{3\pi}\int_0^1 dy\,\frac{y^2(1-2y)(2y-3)}{m_0^2+k_1^2y(1-y)}. \qquad (11,7) $$

当討論反常磁矩的时候,我們所研究的是几乎靜止的电子在均匀磁場中的运动. 在这种現象中,动量-能量的变换 k_1 远比电子的

质量 m_0 为小。当討論能級的兰姆移动时，我們所研究的是氢原子中电子的运动。在氢原子中，电子与庫伦場之間的动量-能量交換也远較 m_0 为小。因此，在討論上述問題时，可以将有关表式展开为 $\frac{k_1^2}{m_0^2}$ 的冪級数，略去其中 $\frac{k_1^2}{m_0^2}$ 的高次項。这样就得：

$$\Pi_f^{(2)}(k_1^2)D_f^{-1}(k_1) \cong \frac{\alpha}{3\pi}\frac{k_1^2}{m_0^2}\int_0^1 dy\cdot y^2(1-2y)(2y-3) =$$

$$= \frac{\alpha}{15\pi}\frac{k_1^2}{m_0^2}. \tag{11,8}$$

当計算 $\Lambda_\mu^{(2)}(p_1, p_2)$ 的时候，我們将遇到紅外发散困难。为了分析和克服这一困难，我們先假定光子具有极微小的靜质量 ρ，在以后再令 ρ 趋于零。假定了光子具有靜质量 ρ 以后，必須将(10,172)、(10,173) 和 (10,175) 中 $\Lambda_\mu^{(2)}(p_1, p_2)$ 的表式略加修改。根据 § 8,9 节中的討論可以看出，假使光子具有质量 ρ，那末它的传播函数的零次近似将不再是 $\delta_{\mu\nu}D_f(k)$，而是：

$$-\frac{i}{(2\pi)^4}\delta_{\mu\nu}\frac{1}{k^2+\rho^2}. \tag{11,9}$$

因此，(10,152)式右方积分中的分母将改为：

$$(k^2+\rho^2)\{(p_2-k)^2+m_0^2\}\{(p_1-k)^2+m_0^2\}; \tag{11,10}$$

(10,154)式中的 q^2 的表式則将随之而改为：

$$q^2 = m_0^2x + p_1^2x + k_1(p_1+p_2)y - (k_1y+p_1x)^2 + \rho^2(1-x), \tag{11,11}$$

在目前所討論的电子散射問題中，我們有：

$$\left.\begin{aligned}(i\hat{p}_1+m_0)u(p_1) = 0,\quad \bar{u}(p_2)(i\hat{p}_2+m_0) = 0,\\ p_1^2 = p_2^2 = -m_0^2.\end{aligned}\right\} \tag{11,12}$$

因此可以将 q^2 的表式簡化为：

$$q^2 = m_0^2x^2 + k_1^2y(x-y) + \rho^2(1-x). \tag{11,13}$$

可以将(10,156)中 T' 的表式相应地簡化。注意到

$$-2im_0(p_{1\mu}+p_{2\mu}-2p_{1\mu}x-2k_{1\mu}y) =$$

$$= -im_0\{\gamma_\mu, \hat{p}_1+\hat{p}_2-2\hat{p}_1x-2\hat{k}_1y\}, \tag{11,14a}$$

利用(11,12),我們得:

$$T' = \{im_0(1-x) - \hat{k}_1(1-x+y)\}\gamma_\mu\{im_0(1-x) + \\ + \hat{k}_1(1-y)\} - im_0\gamma_\mu\{\hat{k}_1(1-2y) + \\ + 2im_0(1-x)\} - \frac{k^2}{2}\gamma_\mu - im_0\{2im_0(1-x) - \\ - \hat{k}_1(1-2x+2y)\}\gamma_\mu - m_0^2\gamma_\mu. \tag{11,14}$$

利用(11,12),还可以証明:

$$\hat{k}_1\gamma_\mu\hat{k}_1 = 2k_{1\mu}\hat{k}_1 - \gamma_\mu k_1^2 = -\gamma_\mu k_1^2. \tag{11,15}$$

將(11,15)代入(11,14),經过簡单計算,可得:

$$T' = \gamma_\mu\left\{(1-x+y)(1-y)k_1^2 + (2-2x-x^2)m_0^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{2}k^2\right\} + im_0\gamma_\mu\hat{k}_1(y-x+xy) + \\ + im_0\hat{k}_1\gamma_\mu(y-x^2+xy). \tag{11,16}$$

考虑到

$$\begin{cases}\{\gamma_\mu, \hat{k}_1\} = 2k_{1\mu}, \\ [\gamma_\mu, \hat{k}_1] = 2i\sigma_{\mu\nu}k_{1\nu},\end{cases} \tag{11,17}$$

其中

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2i}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu), \tag{11,18}$$

可得:

$$T' = \gamma_\mu\left\{(1-x+y)(1-y)k_1^2 + (2-2x-x^2)m_0^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{2}k^2\right\} + im_0\hat{k}_{1\mu}(1+x)(2y-x) + \\ + m_0x(1-x)\sigma_{\mu\nu}k_{1\nu}. \tag{11,19}$$

在 $k_1 = 0$ 时,將(11,13)和(11,19)代入(10,155),就得:

$$L\gamma_\mu = \frac{ie_0^2}{4\pi^4}\int d^4k\int_0^1 dx\int_0^x dy\gamma_\mu\cdot\frac{(2-2x-x^2)m_0^2 - \frac{1}{2}k^2}{(k^2+q_0^2)^3}, \tag{11,20}$$

其中

$$q_0^2 = m_0^2x^2 + p^2(1-x). \tag{11,21}$$

从(10,155)和(11,20)可以得到 $\Lambda_{\mu f}^{(2)}(p_1, p_2)$ 的表式：

$$\Lambda_{\mu f}^{(2)}(p_1, p_2) = \frac{ie_0^2}{4\pi^4}\int d^4k \int_0^1 dx \int_0^x dy \times$$

$$\times\left\{\frac{T'}{(k^2+q^2)^3} - \gamma_\mu \cdot \frac{(2-2x-x^2)m_0^2 - \frac{k^2}{2}}{(k^2+q_0^2)^3}\right\}. \tag{11,22}$$

考虑到 (11,6) 式中的 $\Lambda_{\mu f}^{(2)}(p_1, p_2)$ 作用在 $a_\mu(k_1)$ 上，并考虑到洛仑兹条件

$$k_{1\mu}a_\mu(k_1) = 0, \tag{11,23}$$

得：

$$\Lambda_{\mu f}^{(2)}(p_1, p_2) = \frac{ie_0^2}{4\pi^4}\int d^4k \int_0^1 dx \int_0^x dy \times$$

$$\times\left\{\frac{\gamma_\mu(1-x+y)(1-y)k_1^2 + m_0x(1-x)\sigma_{\mu\nu}k_{1\nu}}{(k^2+q^2)^3} + \right.$$

$$+\gamma_\mu\left[(2-2x-x^2)m_0^2 - \frac{k^2}{2}\right]\left[\frac{1}{(k^2+q^2)^3} - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{(k^2+q_0^2)^3}\right]\right\}. \tag{11,24}$$

我們可以利用(10,8)式，將上式的形式略加改写，得到：

$$\Lambda_{\mu f}^{(2)}(p_1, p_2) = \frac{ie_0^2}{4\pi^4}\int d^4k \int_0^1 dx \int_0^x dy \left\{\int_0^1 dz \frac{k_1^2y(x-y)\gamma_\mu}{(k^2+q_1^2)^3} - \right.$$

$$- \gamma_\mu\frac{(2-2x-x^2)m_0^2 + \frac{q_0^2}{2}}{(k^2+q_0^2)^3} +$$

$$+ \frac{1}{(k^2+q^2)^3}\left[(1-x+y)(1-y)k_1^2\gamma_\mu + \right.$$

$$+ (2-2x-x^2)m_0^2\gamma_\mu + \frac{q^2}{2}\gamma_\mu +$$

$$\left.\left. + m_0x(1-x)\sigma_{\mu\nu}k_{1\nu}\right]\right\}, \tag{11,25}$$

其中

$$q_1^2 = q_0^2 + k_1^2 y(x-y)z. \tag{11,26}$$

(11,25)式右方的积分是收敛的，可以改变积分次序，先对 d^4k 积分. 利用(10,36)，可得：

$$\begin{aligned}\Lambda_{\mu 1}^{(2)}(p_1,p_2) = \frac{-\alpha}{2\pi}\int_0^1 dx\int_0^x dy\Big\{\int_0^1 dz\,\frac{1}{q_1^2}k_1^2 y(x-y)\gamma_\mu - \\ -\frac{1}{q_0^2}(2-2x-x^2)m_0^2\gamma_\mu + \\ +\frac{1}{q^2}[(1-x+y)(1-y)k_1^2\gamma_\mu + \\ +(2-2x-x^2)m_0^2\gamma_\mu + m_0x(1-x)\sigma_{\mu\nu}k_{1\nu}]\Big\}.\end{aligned} \tag{11,27}$$

由于在当前所討論的問題中，k_1 远比 m_0 为小，因此，可以将上式右方积分内部的表式展开成为 k_1 的幂級数，略去 $k_1^{n\geqslant 3}$ 的項. 这样就得：

$$\begin{aligned}\Lambda_{\mu 1}^{(2)}(p_1,p_2) \cong \frac{-\alpha}{2\pi}\int_0^1 dx\int_0^x dy\Big\{\int_0^1 dz\,\frac{1}{q_0^2}k_1^2 y(x-y)\gamma_\mu - \\ -\frac{1}{q_0^4}k_1^2 y(x-y)(2-2x-x^2)m_0^2\gamma_\mu + \\ +\frac{1}{q_0^2}[(1-x+y)(1-y)k_1^2\gamma_\mu + \\ +m_0x(1-x)\sigma_{\mu\nu}k_{1\nu}]\Big\}.\end{aligned} \tag{11,28}$$

我們可以将上式中的积分变数 y 作如下的代換：

$$y = xu, \qquad dy = x\,du; \tag{11,29}$$

du 的积分上下限各为 1 和 0. 考虑到，q_0^2 与 y 和 z 都无关，(11,28)式就可以写作：

$$\begin{aligned}\Lambda_{\mu 1}^{(2)}(p_1,p_2) \cong \frac{-\alpha}{2\pi}\int_0^1 x\,dx\int_0^1 du\Big\{\frac{1}{q_0^2}k_1^2x^2u(1-u)\gamma_\mu - \\ -\frac{1}{q_0^4}k_1^2x^2u(1-u)(2-2x-x^2)m_0^2\gamma_\mu +\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{q_0^2}[(1-x+xu)(1-xu)\hat{k}_1\gamma_\mu+$$

$$+m_0x(1-x)\sigma_{\mu\nu}k_{1\nu}]\Big\}. \tag{11,30}$$

将上式右方对 du 积分，就得：

$$\Lambda_{\mu f}^{(2)}(p_1,p_2)\cong\frac{-\alpha}{2\pi}\int_0^1 xdx\left\{\frac{k_1^2x^2\gamma_\mu}{6q_0^2}-\frac{k_1^2m_0^2x^2}{6q_0^4}(2-2x-x^3)\gamma_\mu+\right.$$

$$+\frac{k_1^2}{q_0^2}\left(1-x+\frac{x^2}{6}\right)\gamma_\mu+$$

$$\left.+\frac{m_0}{q_0^2}x(1-x)\sigma_{\mu\nu}k_{1\nu}\right\}. \tag{11,31}$$

可以将上式右方的表式分为二部分：

$$\Lambda_{\mu f}^{(2)}(p_1,p_2)=A_1+A_2; \tag{11,32}$$

$$\begin{cases}A_1=-\dfrac{\alpha}{2\pi}\displaystyle\int_0^1 dx\cdot\frac{1}{q_0^2}\left\{\gamma_\mu k_1^2x\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}x+\frac{x^2}{2}\right)+\right.\\ \qquad\left.+m_0x^2(1-x)\sigma_{\mu\nu}k_{1\nu}\right\},\\ A_2=\dfrac{-\alpha}{2\pi}\displaystyle\int_0^1 dx\cdot\frac{k_1^2\rho^2}{6q_0^4}x(1-x)(2-2x-x^2)\gamma_\mu.\end{cases}$$

在 A_1 中出现了如下类型的积分：

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^1\frac{x^ndx}{q_0^2}=\frac{1}{(n-1)m_0^2}+\frac{\rho^2}{m_0^2}\int_0^1\frac{x^{n-1}-x^{n-2}}{q_0^2}dx,\\ \displaystyle\int_0^1\frac{xdx}{q_0^2}=\frac{1}{m_0^2}\ln\frac{m_0}{\rho}+\frac{\rho^2}{2m_0^2}\int_0^1\frac{dx}{q_0^2},\\ \displaystyle\int_0^1\frac{dx}{q_0^2}=\frac{2}{\rho\sqrt{4m_0^2-\rho^2}}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2m_0^2x-\rho^2}{\rho\sqrt{4m_0^2-\rho^2}}\right)\Big]_{x=0}^{x=1}.\end{cases} \tag{11,33}$$

q_0^2 的表式见(11,21)。将(11,33)式代入 A_1 的表式，略去与 $\left(\frac{\rho}{m_0}\right)^{n>1}$ 成比例的高次项，就得：

$$A_1=-\frac{\alpha}{2\pi m_0^2}\left\{\gamma_\mu k_1^2\left(\frac{2}{3}\ln\frac{m_0}{\rho}-\frac{5}{12}\right)+\frac{1}{2}m_0\sigma_{\mu\nu}k_{1\nu}\right\}. \tag{11,34}$$

在 A_2 的表式中出现如下类型的积分：

$$\begin{cases} \rho^2\int_0^1 dx\,\frac{x^{n+2}}{q_0^4} = -\frac{\rho^2}{2m_0^4} + \frac{\rho^4}{2m_0^2}\int_0^1 dx\cdot\frac{x^{n-1}}{q_0^4} + \\ \qquad + \frac{(n-1)\rho^2}{2m_0^2}\int_0^1 dx\cdot\frac{x^{n-2}}{q_0^2}, \\ \rho^2\int_0^1 \frac{x\,dx}{q_0^4} = -\frac{\rho^2}{2m_0^2}\left(\frac{1}{m_0^2}-\frac{1}{\rho^2}\right) + \frac{\rho^4}{2m_0^2}\int_0^1\frac{dx}{q_0^4}, \\ \frac{\rho^4}{2m_0^2}\int_0^1\frac{dx}{q_0^4} = \frac{\rho^2}{2m_0^2}\left[\frac{2m_0^2x-\rho^2}{q_0^2(4m_0^2-\rho^2)}\right]_{x=0}^{x=1} + \\ \qquad + \frac{\rho^2}{4m_0^2-\rho^2}\int_0^1\frac{dx}{q_0^2}. \end{cases} \tag{11,35}$$

可以看出，將(11,33)中的公式代入(11,35)，然后將公式(11,35)代入 A_2 的表式，則当 ρ 趋近于零的时候，只有(11,35)式中第二式这样的項才作出有限的貢献。因此得：

$$A_2 = -\frac{\alpha k_1^2\gamma_\mu}{12\pi m_0^2}. \tag{11,36}$$

將(11,34)和(11,36)代入(11,32)，可得：

$$\Lambda_\mu^{(2)}(p_1,p_2) = -\frac{\alpha}{3\pi m_0^2}\left\{k_1^2\gamma_\mu\left(\ln\frac{m_0}{\rho}-\frac{3}{8}\right) + \frac{3}{4}m_0\sigma_{\mu\nu}k_{1\nu}\right\}; \tag{11,37}$$

公式对于自由电子在电磁場中的运动有效，并且精确到与 $\frac{k_1^2}{m_0^2}$ 成比例的項。

§ 11,3. 电子的反常磁矩

將(11,8)和(11,37)代入(11,6)，就得：

$$\left.\begin{aligned} &\langle|S^{(1)}+S^{(3)}|\rangle_i = \\ &\quad -e_0(2\pi)^4\bar{u}(p_2)F_\mu u(p_1)a_\mu(k_1)\delta^4(p_2-p_1-k_1), \\ &F_\mu = \gamma_\mu - \frac{\alpha}{3\pi m_0^2}\left\{k_1^2\gamma_\mu\left(\ln\frac{m_0}{\rho}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\right) + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{3}{4}m_0\sigma_{\mu\nu}k_{1\nu}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{11,38}$$

不难从（11,38）式推导出由于辐射修正而导致的等效相互作用哈密顿量密度．假使不考虑高次近似的辐射修正，那末描述电子为电磁場所散射的最低次近似矩陣元是：

$$-e_0(2\pi)^4\bar{u}(p_2)\gamma_\mu u(p_1)a_\mu(k_1)\delta^4(p_2-p_1-k_1);\quad(11,39)$$

相应的相互作用哈密顿量密度是：

$$-ie_0\bar{\psi}\gamma_\mu A_\mu\psi.\quad(11,40)$$

我們想象，（11,38）中的矩陣元是由于某一等效相互作用哈密顿量密度所导致的最低次近似的电子散射 S 矩陣元．不难从表式（11,38）推导出这一等效哈密顿量密度的表式 $\mathscr{H}'_i(x)$．由于

$$\langle f|-i\int\mathscr{H}'_i(x)d^4x|i\rangle=-$$
$$-e_0(2\pi)^4\bar{u}(p_2)F_\mu u(p_1)a_\mu(k_1)\delta^4(p_2-p_1-k_1),\quad(11,41)$$

可得

$$\mathscr{H}'_i(x)=-ie_0\bar{\psi}\left\{\hat{A}+\frac{\alpha}{3\pi m_0^2}\left(\ln\frac{m_0}{\rho}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\right)\Box\hat{A}-\right.$$
$$\left.-\frac{i\alpha}{8\pi m_3}\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right\}\psi,\quad(11,42)$$

其中我們应用了公式：

$$\sigma_{\mu\nu}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}=-\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right)=-\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}.\quad(11,43)$$

与(11,42)相应的单个电子的相互作用哈密顿量是：

$$e_0\varphi-e_0\vec{\alpha}\cdot\vec{A}+\frac{\alpha}{3\pi m_0^2}\left(\ln\frac{m_0}{\rho}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\right)\Box(e_0\varphi-e_0\vec{\alpha}\cdot\vec{A})-$$
$$-\frac{e_0\alpha}{4\pi m_0}(\beta\vec{\sigma}\cdot\vec{H}-i\beta\vec{\alpha}\cdot\vec{E}),\quad(11,44)$$

其中 $\vec{H}$ 和 $\vec{E}$ 各代表磁場強度和电場強度．

假使电子处在一个均匀的磁場 $\vec{H}$ 中，那末根据（11,44），它与电磁場的相互作用能是：

$$-e_0\vec{\alpha}\cdot\vec{A}-\frac{e_0\alpha}{4\pi m}\beta\vec{\sigma}\cdot\vec{H}.\quad(11,45)$$

上式第一項相当于电子具有一个磁矩 $\frac{e_0}{2m_0}$，第二項是由于輻射修正而导致的附加磁矩的貢献. 这一附加磁矩的值是：

$$\frac{e_0\alpha}{4\pi m_0}. \tag{11,46}$$

(11,46)中的附加磁矩亦称为"电子的反常磁矩". 因此，电子的总磁矩的数值是：

$$\mu = \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right)\mu_0 = 1.0011614\mu_0. \tag{11,47}$$

与式(11,2)中的实验值相比較，我們可以看出，理論与实驗結果符合得非常好. 实际上，上式只計算到了与 α 成正比的輻射修正；如果我們将与 α^2 成比例的輻射修正也考虑进去，則理論結果与实驗結果就完全符合.

§11,4. 能級的兰姆移动

在利用相互作用哈密頓量 (11,44) 討論能級的兰姆移动的时候，必須注意到这一公式的局限性. 对自由电子而言，这一公式是正确的；但是，对于氢原子中的电子而言，(11,44)就并不完全正确. 这是因为在結合态中的电子的动量和能量并不滿足公式 $p^2 = -m_0^2$；电子的波函数也不服从象(11,12)中所給的波动方程. 我們可以認为，当中間态中的虛光子的能量远远大于氢原子的結合能的时候，电子可以当作自由电子看待；但是，当中間态中的虛光子的能量并不远远大于氢原子的結合能的时候，电子就不能当作自由电子看待. 因此，可以将輻射修正分为二部分：一部分是由高能虛光子引起的，另一部分是由低能虛光子引起的. 我們选择一个能量 K，作为上述高能虛光子与低能虛光子的分界綫. 設 E_0 为氢原子的結合能，我們选择 K 滿足下列条件：

$$E_0 \ll K \ll m_0. \tag{11,48}$$

这是完全可以做到的，因为 m_0 比 E_0 大几万倍. 当处理低能虛光子引起的輻射修正时，我們可以用非相对論性的理論；当处理高能虛

光子引起的輻射修正时，我們可以利用公式（11,37）。选择不同的 K 对公式（11,37）的影响主要相应于选择不同的 ρ 的数值。K 的数值与 ρ 的数值之間的关系将在以后討論。我們現在先来討論能量小于 K 的虛光子所引起的輻射修正。

电子和电磁場的总哈密頓量是：

$$H = H_e + H_f + H_i, \tag{11,49}$$

其中 H_e 代表电子的哈密頓量，H_f 代表电磁場的哈密頓量，H_i 代表电子与电磁場之間的相互作用哈密頓量。假使我們只处理非相对論性問題，那末有：

$$H_e + H_i = \frac{1}{2m_0}(\vec{p} - e_0\vec{A}^{(总)})^2 + e_0\varphi^{(总)}; \tag{11,50}$$

$\vec{A}^{(总)}$ 和 $\varphi^{(总)}$ 中既包括外場 $A_\mu^{(外)}$，也包括輻射場 A_μ：

$$\vec{A}^{(总)} = \vec{A} + \vec{A}^{(外)}, \qquad \varphi^{(总)} = \varphi + \varphi^{(外)}. \tag{11,51}$$

假使我們采取庫伦規范，那末就有：

$$\varphi = 0, \qquad \operatorname{div}\vec{A} = 0; \tag{11,52}$$

这就是說，在縱光子和标量光子的物理作用归結为庫伦能以后，$\vec{A}$ 和 φ 中只剩下横光子。在我們所討論的情况下，

$$\vec{A}^{(外)} = 0, \quad e_0\varphi^{(外)} = \frac{-e_0^2}{4\pi r} \equiv V(r); \tag{11,53}$$

因此有：

$$H_e + H_i = \frac{\vec{p}^2}{2m_0} - e_0\frac{\vec{A}\cdot\vec{p}}{m_0} + \frac{e_0^2\vec{A}^2}{2m_0} + V(r). \tag{11,54}$$

于是，可以将(11,49)中的总哈密頓量重新划分为如下的二部分：

$$\left.\begin{aligned} H &= H_0 + H_i', \\ H_0 &= \frac{\vec{p}^2}{2m_0} + V(r) + H_f, \\ H_i' &= -\frac{e_0}{m_0}\vec{A}\cdot\vec{p} + \frac{e_0^2}{2m_0}\vec{A}^2; \end{aligned}\right\} \tag{11,55}$$

H_0 一方面給出氫原子的能級，另一方面給出各种横光子的体系。

我們以

$$|\rangle_{n,N} \tag{11,56}$$

代表 H_0 的本征态，其中 n 代表氫原子的量子数，N 代表各种光子的各种数目。我們并以符号 $|\rangle_n$ 代表只有氫原子而沒有光子的态。可以將 $\vec{A}$ 分解为平面波：

$$\vec{A} = \sum_{\vec{k},s=1,2} \frac{\vec{e}_s}{\sqrt{2\omega}}(c_{s,\vec{k}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + c^*_{s,\vec{k}}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}), \tag{11,57}$$

其中 e_s 标志横光子的二个不同的极化方向，有：

$$\vec{e}_s \cdot \vec{k} = 0; \tag{11,58}$$

$c_{s,\vec{k}}$ 和 $c^*_{s,\vec{k}}$ 則各代表光子的消灭和产生算符。

由于 H'_i 而导致的能級移动可以用量子力学中常用的微扰論求得。以 $\Delta E'_n$ 代表这一移动。設只求精确到 e_0^2 項，則有：

$$\Delta E'_n = \frac{e_0^2}{2m_0}{}_n\langle|\vec{A}^2|\rangle_n + \frac{e_0^2}{m_0^2}\sum_{n',N}\frac{{}_n\langle|\vec{A}\cdot\vec{p}|\rangle_{n',N}\langle|\vec{A}\cdot\vec{p}|\rangle_n}{E_n - E_{n',N}}, \tag{11,59}$$

其中 E_n 和 $E_{n',N}$ 各代表态 $|\rangle_n$ 和 $|\rangle_{n',N}$ 的能量。考虑到 $\vec{A}$ 中只有光子的吸收算符和光子的产生算符，可以將上式化簡而得：

$$\Delta E'_n = \frac{e_0^2}{2m_0}\sum_{\vec{k}}\frac{1}{\omega} + \frac{e_0^2}{m_0^2}\cdot \cdot\sum_{n',\vec{k},s}\frac{{}_n\langle|e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\vec{e}_s\cdot\vec{p}|\rangle_{n'}\langle|e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\vec{e}_s\cdot\vec{p}|\rangle_n}{2\omega(E_n - E_{n'} - \omega)}. \tag{11,60}$$

可以將上式进一步簡化。因为目前我們只考虑低能虛光子的貢献，上式中的 $|\vec{k}| \leqslant K$。注意到氫原子的結合能是 $\frac{1}{2}\alpha^2 m_0$，具有这样能量的光子的波长是 $\lambda = \frac{2}{\alpha^2 m_0}$；在另一方面，氫原子的半径 $a = \frac{1}{\alpha m_0}$；因此，这种光子的波长比氫原子的半径大 $\frac{2}{\alpha} = 274$ 倍。即使我們取 K 的数值比氫原子的結合能大許多倍，这些低能光子的波长仍將远远比氫原子的半径大。因此，(11,60)中的因子 $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$

和 $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ 在氢原子的内部与 1 相差极小，都可以用 1 来代替。于是有：

$$\Delta E_n' = \frac{e_0^2}{2m_0}\sum_{\vec{k}}\frac{1}{\omega} + \\ + \frac{e_0^2}{m_0^2}\sum_{n',\vec{k},s}\frac{{}_n\langle|\vec{e}_s\cdot\vec{p}|\rangle_{n'}\langle|\vec{e}_s\cdot\vec{p}|\rangle_n}{2\omega(E_n - E_{n'} - \omega)}. \qquad (11,61)$$

因为氢原子中的库伦场是球形对称的，所以

$${}_n\langle|\vec{e}_s\cdot\vec{p}|\rangle_{n'}\langle|\vec{e}_s\cdot\vec{p}|\rangle_n; \qquad (11,62)$$

在对 n' 求和之后的数值应该与 $\vec{e}_s$ 的方向无关。因此，可以将 (11,61) 式进一步简化为：

$$\Delta E_n' = \frac{e_0^2}{2m_0}\sum_{\vec{k}}\frac{1}{\omega} + \frac{e_0^2}{m_0^2}\sum_{\vec{k},n'}\frac{{}_n\langle|\vec{p}|\rangle_{n'}\langle|\vec{p}|\rangle_n}{3\omega(E_n - E_{n'} - \omega)}. \qquad (11,63)$$

必须注意，(11,63)中包含着电磁质量的效应。这部分效应在实验上是观察不到的。必须进行质量重整化，将这一部分效应从(11,63)中划出来，并入 H_0 的表式中。所谓电磁质量效应，就是自由电子的电磁能。假使自由电子具有确定的动量，它的波函数是一个平面波，那末从(11,63)可以求得自由电子的电磁能 $\Delta E_n''$：

$$\Delta E_n'' = \frac{e_0^2}{2m_0}\sum_{\vec{k}}\frac{1}{\omega} + \frac{e_0^2}{m_0^2}\sum_{\vec{k},n'}\frac{{}_n\langle|\vec{p}|\rangle_{n'}\langle|\vec{p}|\rangle_n}{-3\omega^2}, \qquad (11,64)$$

因为，在自由电子的情况下，E_n 与 $E_{n'}$ 的数值之间的差比 ω 小得很多，可以略去。我们现在讨论的是氢原子。氢原子中电子的波函数是一个波包而不是一个平面波。我们可以将这一波包当作许多平面波的迭加。这一波包的电磁能就是这些迭加的平面波的电磁能之和。不难证明，这一电磁能仍旧可以用表式 (11,64) 来表示，但是其中 $|\rangle_n$ 不再是一个平面波，而是许多平面波的迭加，也就是氢原子的波函数。从(11,63)和(11,64)，可以得到由于低能虚光子而导致的可以观察到的能级移动部分：

$$\Delta E_n' - \Delta E_n'' = \frac{e_0^2}{3m_0^2}\sum_{\vec{k},n'}\frac{{}_n\langle|\vec{p}|\rangle_{n'}\langle|\vec{p}|\rangle_n(E_n - E_{n'})}{\omega^2(E_n - E_{n'} - \omega)} =$$

$$= \frac{2\alpha}{3\pi m_0^2} \sum_{n'} {}_n\langle|\vec{p}|\rangle_{n'}\langle|\vec{p}|\rangle_n (E_{n'} - E_n) \ln \frac{K}{|E_{n'} - E_n|}, \tag{11,65}$$

其中我們考慮了 $K \gg |E_{n'} - E_n|$，略去与 K 相加的一項 $(E_{n'} - E_n)$. 引进符号 ϵ_0，具有如下的定义：

$$\ln \epsilon_0 = \frac{\sum_{n'} |{}_{n'}\langle|\vec{p}|\rangle_n|^2 (E_{n'} - E_n) \ln |E_{n'} - E_n|}{\sum_{n'} |{}_{n'}\langle|\vec{p}|\rangle_n|^2 (E_{n'} - E_n)}. \tag{11,66}$$

可以証明：

$$\Delta E_n' - \Delta E_n'' = \frac{2\alpha}{3\pi m_0^2} \sum_{n'} |{}_{n'}\langle|\vec{p}|\rangle_n|^2 (E_{n'} - E_n) \ln \frac{K}{\epsilon_0}. \tag{11,67}$$

可以將上式进一步簡化. 由于，$|\rangle_n$ 和 $|\rangle_{n'}$ 都是

$$H_0' = \frac{\vec{p}^2}{2m_0} + V(r)$$

的本征函数，其相应的本征值是 E_n 和 $E_{n'}$，因此有：

$$\sum_{n'} {}_n\langle|\vec{p}|\rangle_{n'}\langle|\vec{p}|\rangle_n (E_{n'} - E_n) =$$

$$= \sum_{n'} \{{}_n\langle|\vec{p}H_0'|\rangle_{n'}\langle|\vec{p}|\rangle_n - {}_n\langle|\vec{p}|\rangle_{n'}\langle|\vec{p}H_0'|\rangle_n =$$

$$= {}_n\langle|\vec{p}[H_0', \vec{p}]|\rangle_n = {}_n\langle|\{\vec{\nabla}^2 V(r) + (\vec{\nabla}V(r)) \cdot \vec{\nabla}\}|\rangle_n; \tag{11,68}$$

另一方面，也可以証明：

$$\sum_{n'} {}_n\langle|\vec{p}|\rangle_{n'}\langle|\vec{p}|\rangle_n (E_{n'} - E_n) = {}_n\langle|[\vec{p}, H_0']\vec{p}|\rangle_n =$$

$$= -{}_n\langle|(\vec{\nabla} \cdot V(r)) \cdot \vec{\nabla}|\rangle_n. \tag{11,69}$$

从(11,68)和(11,69)，可得：

$$\sum_{n'} |{}_{n'}\langle|\vec{p}|\rangle_n|^2 (E_{n'} - E_n) = \frac{1}{2} {}_n\langle|(\vec{\nabla}^2 V(r))|\rangle_n. \tag{11,70}$$

从(11,53)中 $V(r)$ 的表式可得：

$$\vec{\nabla}^2 V(r) = e_0^2 \delta(\vec{x}); \tag{11,71}$$

因此我們有：

$$\Delta E_n' - \Delta E_n'' = \frac{4\alpha^2}{3m_0^2}\ln\left(\frac{K}{\epsilon_0}\right)\langle|\delta(\vec{x})|\rangle. \tag{11.72}$$

(11,72) 式的表式是低能虛光子对能級移动所作的貢献. 从(11,44)，可以得到高能虛光子对于能級移动的貢献. 庫伦場的电磁場是：

$$\vec{E}^{(外)} = \frac{e_0}{4\pi}\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{r}, \quad \vec{H}^{(外)} = 0. \tag{11,73}$$

将上式和(11,53)代入(11,44)，就可以得到高能虛光子对于能級移动的貢献 $\Delta E_n'''$：

$$\Delta E_n''' = \frac{4\alpha^2}{3m_0^2}\left(\ln\frac{m_0}{\rho} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5}\right)\cdot{}_n\langle|\delta(\vec{x})|\rangle_n + \\ + \frac{i\alpha^2}{4\pi m_0}\cdot{}_n\left\langle\left|\left(\beta\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)\right)\right|\right\rangle_n. \tag{11,74}$$

将(11,72)和(11,74)合并，就可得到总的能級移动 ΔE_n：

$$\Delta E_n = \frac{4\alpha^2}{3m_0^2}\left(\ln\frac{m_0}{\epsilon_0} + \ln\frac{K}{\rho} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5}\right){}_n\langle|\delta(\vec{x})|\rangle_n + \\ + \frac{i\alpha^2}{\pi m_0}{}_n\left\langle\left|\left(\beta\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right)\right|\right\rangle_n; \tag{11,75}$$

上式中唯一的未知量是 $\ln\frac{K}{\rho}$. 我們将在下一节中証明：

$$\ln\frac{2K}{\rho} = \frac{5}{6}; \tag{11,76}$$

因此最后得：

$$\Delta E_n = \frac{4\alpha^2}{3m_0^2}\left(\ln\frac{m_0}{2\epsilon_0} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5} + \frac{5}{6}\right)\cdot{}_n\langle|\delta(\vec{x})|\rangle_n + \\ + \frac{i\alpha^2}{4\pi m_0}{}_n\left\langle\left|\left(\beta\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right)\right|\right\rangle_n. \tag{11,77}$$

知道了氢原子的能級和波函数，就可以求得 ${}_n\langle|\delta(\vec{x})|\rangle_n$ 和 ${}_n\left\langle\left|\left(\beta\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right)\right|\right\rangle_n$ 的数值；另一方面，根据 (11,66) 式可以計算 $\ln\epsilon_0$.

的数值. 这样,我們可以計算出氫原子 $2^2S_{\frac{1}{2}}$ 态的能級移动:

$$\Delta\nu_{(2^2S_{\frac{1}{2}})} = 1039.25 \text{ 兆周/秒}; \tag{11,78}$$

而計算得的 $2^2P_{\frac{1}{2}}$ 态的能級移动是:

$$\Delta\nu_{(2^2P_{\frac{1}{2}})} = -12.89 \text{ 兆周/秒}. \tag{11,79}$$

因此,态 $2^2S_{\frac{1}{2}}$ 的能量应該比态 $2^2P_{\frac{1}{2}}$ 的能量大

$$1052.14 \text{ 兆周/秒}. \tag{11,80}$$

与实驗結果(11,3)相比較,可以看出,理論結果与实驗結果相当符合. 当然,也并不是完全的符合,它們之間仍有差别达 6 兆周/秒;这是由于我們只考虑到 e_0^3 近似,而且,即使在計算 $S^{(3)}$ 的矩陣元的时候,我們也略去了一些相对論性的效应. 假使我們将这种相对論性效应、$S^{(5)}$ 的貢献以及质子的有限质量考虑进去,那末所得到的 $2^2S_{\frac{1}{2}}$ 态与 $2^2P_{\frac{1}{2}}$ 态能級之間的距离将是 1057.9 ± 0.2 兆周/秒,与实驗結果完全符合.

§ 11,5. K 与 ρ 的数值之間的关系

为了寻找 K 与 ρ 的数值之間的关系,我們应該用二种不同的方法来計算同一个量子电动力学的現象. 在一个計算中,我們假定光子具有一个微小的质量 ρ;在另一个計算中,我們假定光子沒有靜质量,但是将所有能量小于 K 的光子的貢献略去. 最后将二个計算結果加以比較,就可以得到 K 与 ρ 的数值之間的关系.

按照这一想法看来,最簡便的方法是利用公式 (11,25). 先令 $\rho = 0$. 当对 d^4k 进行积分时,先对 dk_0 积分;然后对 $d\vec{k}$ 积分,但是积分的下限不取作零而取作 K. 将求得的表式 $\Lambda_{\mu}^{(2)}(p_1, p_2)$ 与 (11,37) 中的 $\Lambda_{\mu}^{(2)}(p_1, p_2)$ 相比較,就可以得到 K 与 ρ 的数值之間的关系. 用这一方法所求得的結果是:

$$\ln\frac{2K}{\rho} = 1. \tag{11,81}$$

这一結果是錯誤的. 錯誤的原因在于:公式(11,25)是从(10,154)中的 $\Lambda_{\mu}^{(2)}(p_1, p_2)$ 的表式推导来的;用推导的过程中曾經經历了如

下的变換：

$$k - p_1 x - k_1 y \to k. \tag{11,82}$$

正确的办法是：直接从 (10,154) 式出发，将对 $d\vec{k}$ 积分的下限取作 K. 假使在經过变換(11,82)以后再将对 $d\vec{k}$ 积分的下限取作 K，那末，这就相当于将(10,154)式对 $d\vec{k}$ 积分的下限取作

$$|\vec{k} - \vec{p}_1 x - \vec{k}_1 y| = K; \tag{11,83}$$

这样的下限当然是錯誤的. 我們可以直接从公式(10,154)出发进行計算；但是，由于在分母中出現 k 的緩性項，計算变得十分复杂. 为了避免这一困难，我們計算另外一个物理过程，在这一計算中可以不必用象 (11,82) 这样的变換. 我們挑选电子在外場中散射并放出光子这一最簡单的現象，計算放出低能量的光子的几率：当光子具有一个微小的质量 ρ 时，我們寻求放出光子的能量在下列范围内

$$\rho \leqslant \omega \leqslant \varepsilon \tag{11,84}$$

的总截面；当光子沒有靜质量时，我們寻求放出光子的能量在下列范围内

$$K \leqslant \omega \leqslant \varepsilon \tag{11,85}$$

的总截面. 我們假定电子的动量 $|\vec{p}| \ll m$，另一方面又假定 $\varepsilon \ll |\vec{p}|$. 我們并假定外場不随时間而变. 这样，根据(9,111)，最低次近似的矩陣元是：

$$_f\langle |S^{(2)}| \rangle_i = M_{fi}\delta(E_2 + \omega - E_1), \tag{11,86}$$

$$M_{fi} = \frac{ie^3}{\sqrt{2\omega}}(2\pi)^4 \bar{u}_{s_2}(p_2)\left\{\gamma_\mu \frac{i(\hat{p}_2 + \hat{k}) - m}{(p_2 + k)^2 + m^2}\hat{a}(q) + \right.$$

$$\left. + \hat{a}(q)\frac{i(\hat{p}_1 - \hat{k}) - m}{(p_1 - k)^2 + m^2}\gamma_\mu\right\} u_{s_1}(p_1);$$

其中为了书写方便，已將 m_0 和 e_0 中的标符“0”略去，

$$\begin{cases} q = p_2 + k - p_1, \\ \hat{A}^{(外)}(p_2 + k - p_1) = \delta(E_2 + \omega - E_1)\hat{a}(q). \end{cases} \tag{11,87}$$

我們再假定放出光子的极化方向与 μ 軸平行. 首先，由于

$|\vec{k}| \ll |\vec{p}|$，可以將 (11,86) 式右方分子中的 $\hat{k}$ 略去．于是可以將分子进一步簡化．由于

$$\left.\begin{aligned}\gamma_\mu(i\hat{p}_2 - m) &= -(i\hat{p}_2 + m)\gamma_\mu + 2ip_{2\mu},\\ (i\hat{p}_1 - m)\gamma_\mu &= -\gamma_\mu(i\hat{p}_1 + m) + 2ip_{1\mu},\end{aligned}\right\} \tag{11,88}$$

此外又有

$$(i\hat{p}_1 + m)u_{s_1}(p_1) = 0, \quad \bar{u}_{s_2}(p_2)(i\hat{p}_2 + m) = 0, \tag{11,89}$$

故得

$$M_{fi} = \frac{2e^2}{\sqrt{2\omega}}(2\pi)^4\bar{u}_{s_2}(p_2)\left\{\frac{p_2\cdot\hat{a}(q)}{\rho^2 - 2p_2k} + \frac{p_1\cdot\hat{a}(q)}{\rho^2 + 2p_1k}\right\}u_{s_1}(p_1). \tag{11,90}$$

在推导上式的时候，我們利用了下列关系：

$$p_1^2 + m^2 = 0, \quad p_2^2 + m^2 = 0, \quad k^2 + \rho^2 = 0. \tag{11,91}$$

可以看出，在(11,90)式的分母中

$$\left.\begin{aligned}\rho^2 - 2p_2k &= 2\sqrt{|\vec{p}_2|^2 + m^2}\cdot\sqrt{|\vec{k}|^2 + \rho^2} - 2\vec{p}_2\cdot\vec{k} + \rho^2,\\ \rho^2 + 2p_1k &= -2\sqrt{|\vec{p}_1|^2 + m^2}\cdot\sqrt{|\vec{k}|^2 + \rho^2} + 2\vec{p}_1\cdot\vec{k} + \rho^2.\end{aligned}\right\} \tag{11,92}$$

ρ^2 这項与其他項相比較，可以略去．因此有：

$$M_{fi} = \frac{e^2}{\sqrt{2\omega_q}}(2\pi)^4\left\{\frac{p_{1\mu}}{p_1k} - \frac{p_{2\mu}}{p_2k}\right\}\bar{u}_{s_2}(p_2)\hat{a}(q)u_{s_1}(p_1). \tag{11,93}$$

利用 (9,14) 并略加修改以适合于目前的情况，我們可以从(11,93)式得到放出光子的微分截面：

$$d\Phi_r = \frac{1}{(2\pi)^7}\int d\vec{k}\,\frac{|\vec{p}_2|}{|\vec{p}_1|}E_1E_2\,d\Omega_e\sum_\mu |M_{fi}|^2, \tag{11,94}$$

其中 $d\Omega_e$ 代表射出电子的方向，$\sum_\mu$ 代表对光子的极化方向求和．由于我們只考虑能量很小的光子，所以

$$|\vec{p}_2| \cong |\vec{p}_1|, \quad E_2 \cong E_1 = E_0. \tag{11,95}$$

当电子的放出方向 $d\Omega_e$ 确定后，q 的数值就差不多不受 $\vec{k}$ 的数值和方向的影响．可以将(11,94)中許多因子提到积分号以外：

$$\left.\begin{aligned}d\Phi_r &= -F\int\frac{d\vec{k}}{\omega}\left\{\frac{2p_1p_2}{(p_1k)(p_2k)} + \frac{m^2}{(p_1k)^2} + \frac{m^2}{(p_2k)^2}\right\},\\ F &= 16\pi^3\alpha^2E^2d\Omega_e|\bar{u}_{s_2}(p_2)\hat{a}(q)u_{s_1}(p_1)|^2.\end{aligned}\right\} \tag{11,96}$$

由于 $|\vec{p}_1| \cong |\vec{p}_2| \ll m$，我們可以将上式右方曲括号内的表式展开成为 $\frac{\vec{p}_1}{m}$ 和 $\frac{\vec{p}_2}{m}$ 的幂級数，略去 $\frac{|\vec{p}|}{m}$ 的三次及更高次的項．經过簡单計算，得：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{m^2}{(p_1k)^2} \cong \frac{1}{\omega^2}\left[1 + 2\frac{\vec{k}\cdot\vec{p}_1}{m\omega} - \frac{|\vec{p}_1|^2}{m^2} + 3\left(\frac{\vec{k}\cdot\vec{p}_1}{m\omega}\right)^2\right],\\
&\frac{m^2}{(p_2k)^2} \cong \frac{1}{\omega^2}\left[1 + 2\frac{\vec{k}\cdot\vec{p}_2}{m\omega} - \frac{|\vec{p}_2|^2}{m^2} + 3\left(\frac{\vec{k}\cdot\vec{p}_2}{m\omega}\right)^2\right],\\
&\frac{2(p_1p_2)}{(kp_1)(kp_2)} \cong \frac{2}{\omega^2}\left[1 - \frac{\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2}{m^2} + \frac{\vec{k}\cdot\vec{p}_1}{m\omega} + \frac{\vec{k}\cdot\vec{p}_2}{m\omega} + \right.\\
&\qquad\left. + \left(\frac{\vec{k}\cdot\vec{p}_1}{m\omega}\right)^2 + \left(\frac{\vec{k}\cdot\vec{p}_2}{m\omega}\right)^2 + \frac{(\vec{k}\cdot\vec{p}_1)(\vec{k}\cdot\vec{p}_2)}{m^2\omega^2}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{11,97}$$

將上式代入(11,96)，得：

$$d\Phi_1 = F\int\frac{d\vec{k}}{\omega^3}\left[\frac{|\vec{q}|^2}{m^2} - \left(\frac{\vec{k}\cdot\vec{q}}{m\omega}\right)^2\right]. \tag{11,98}$$

引入球坐标，先对立体角积分．設以 κ 代表光子的动量，則有：

$$d\Phi_r = \frac{4\pi q^2}{3m^2}F\int d\kappa\left(\frac{2}{\omega} - \frac{\rho^2}{\omega^3} - \frac{\rho^4}{\omega^5}\right), \tag{11,99}$$

其中

$$\omega = \sqrt{\kappa^2 + \rho^2}. \tag{11,100}$$

应用下列公式：

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^{\varepsilon\gg\rho}\frac{d\kappa}{\omega} \cong \ln\frac{2\varepsilon}{\rho},\\
&\rho^2\int_0^{\varepsilon}\frac{d\kappa}{\omega^3} \cong 1,\\
&\rho^4\int_0^{\varepsilon}\frac{d\kappa}{\omega^5} \cong \frac{2}{3},
\end{aligned}\right\} \tag{11,101}$$

于是有：

$$d\Phi_r = \frac{8\pi q^2F}{3m^2}\left(\ln\frac{2\varepsilon}{\rho} - \frac{5}{6}\right). \tag{11,102}$$

假設光子的靜質量 $\rho = 0$，积分下限取作 K，則

$$d\Phi_r = \frac{8\pi q^2 F}{3m^2} \ln \frac{\varepsilon}{K}. \tag{11,103}$$

比較(10,102)和(10,103)式,就得:

$$\ln \frac{2K}{\rho} = \frac{5}{6}. \tag{11,104}$$

这就是上节所用的公式(11,76).

§ 11,6. 紅外发散困难

將(11,96)中 F 的表式代入(10,103),就得到电子散射到 $d\Omega_r$ 的方向,放出光子的能量在 ε 和 K 之間的微分截面:

$$d\Phi_r = \frac{8\alpha^2 q^2 E^2}{3m^2} (2\pi)^4 \left\{ \ln \frac{2\varepsilon}{\rho} - \frac{5}{6} \right\} |u_{s_2}(p_2)\hat{a}(q)u_{s_1}(p_1)|^2 d\Omega_r. \tag{11,105}$$

当 ρ 趋近于零的时候,上式中的微分截面就趋于无穷. 这样的結果显然是沒有意义的. 这是紅外发散的表現的另一个方面. 紅外发散产生的原因在 § 10,5 节中曾經有所討論. 紅外发散产生的数学上的原因是由于我們所采用的計算方法不适合于处理低能光子与电子的相互作用; 这一困难产生的物理原因在于沒有恰当地区分低能的光子与低能的虛光子. 我們在討論紫外发散困难的时候,曾遇到怎样定义电子质量的問題,发現应該將电磁場与电子相互作用中所包含的电子电磁质量划出来,归并入自由电子的哈密頓量.在物理上,这一重整化过程的意义在于恰当地反映了客观情况:不帶着电磁場的光禿禿的自由电子是不存在的,所有在实驗上所观察到的自由电子都帶着自己的电磁場,在所有观察到的自由电子的质量中都包含有电磁质量. 紅外发散困难所遇到的問題的性質在某些方面与上面所說的情况很相象: 在自由电子所帶的电磁場中包含有低能量的光子; 这些光子都是虛光子,不断地放出,放出后不久又被吸收;設以 ω 代表光子的能量,那末从放出到吸收的时間間隔大約为:

$$t \cong \frac{1}{\omega}. \tag{11,106}$$

这是测不准原理的一般表式. 从动量和能量守恆定律看来，自由电子是不会放出真正的光子的；因此，只能是放出虛光子，放出后又立刻将它吸收回去. 但是，当自由电子为外場所散射的时候，就有可能放出真正的光子，其中也包括能量相当低的光子. 事实上，实验很难将这种低能的真光子与低能的虛光子区分开来，因为根据(11,106)式，当 ω 很小的时候，虛光子的存在时間可以很长，因而难于将它与低能的真正的光子区别开来. 质量重整化方法解决了高能虛光子的問題，明确地划分出了自由电子应該自己携带的波长比較短的电磁場，但是，并沒有适当地处理自由电子究竟应該具有那些低能虛光子的問題，亦即应該具有那些波长很长的电磁場的問題.

事实上，当进行实验观察的时候，由于观察的誤差，能量很低的光子是測量不出来的. 当能量不很大的电子經过静电磁場的时候，一般地可以产生二种过程，一种是弹性散射，另一种是放出輻射的非弹性散射. 設以 $d\Phi_s$ 和 $d\Phi_r$ 分别代表这二种散射过程的微分截面，那末，当放出的光子能量小于某一数值 ε 的时候，在实验上就难于将这种非弹性散射与弹性散射区分开来；实验测量得的将是它們之和 $d\Phi$：

$$d\Phi = d\Phi_s + d\Phi_r. \tag{11,107}$$

假使我們只計算 $d\Phi$，那末就不再遇到紅外发散困难. 在 $d\Phi_r$ 中包含着由于紅外发散困难带来的无穷大，假使我們計算 $d\Phi_s$ 的相应高次近似，那末也将会遇到紅外发散困难，即得到的結果随着 ρ 趋近于零而趋于无穷大. 但是，若将 $d\Phi_r$ 和 $d\Phi_s$ 相加，我們将发現二者所包含的无穷大恰巧相互抵消，紅外发散困难不再存在.

$d\Phi_r$ 的最低次近似表式見 (11,105). 为了計算 $d\Phi_s$ 的最低次及下一次近似的表式，可以利用公式 (11,38). 考虑到我們所討論的問題中外場并不随时間而变，我們有：

$$\left.\begin{aligned} &{}_f\langle|S^{(1)}+S^{(3)}|\rangle_i = M_{fi}\delta(E_2-E_1),\\ &M_{fi} = -e(2\pi)^4\bar{u}_{s_1}(p_2)F_\mu u_{s_1}(p_1)a_\mu(q),\\ &F_\mu = \gamma_\mu - \frac{\alpha}{3\pi m^2}\left\{q^2\gamma_\mu\left(\ln\frac{m}{\rho}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\right)+\right.\\ &\qquad\left.+\frac{3}{4}m\sigma_{\mu\nu}q_\nu\right\}; \end{aligned}\right\} \quad (11,108)$$

其中

$$q = p_2 - p_1, \quad (11,109)$$

$a_\mu(q)$ 的定义与(11,87)式相同.

从 (11,108) 可以求出弹性散射的微分截面 $d\Phi_r$. 利用类似 §9,1 节中的考虑,可得:

$$d\Phi_r = \frac{1}{(2\pi)^4}|M_{fi}|^2E^2\,d\Omega_e, \quad (11,110)$$

其中 $d\Omega_e$ 代表电子在散射后的动量方向. 我们的計算只精确到与 α^2 成比例的項,可以将与 α^2 成比例的項略去,得:

$$\begin{aligned} d\Phi_r = 2(2\pi)^5\alpha E^2\,d\Omega_e\Big\{&|\bar{u}_{s_2}(p_2)\hat{a}(q)u_{s_1}(p_1)|^2\times\\ &\times\left[1-\frac{2\alpha q^2}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{\rho}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\right)\right]+\\ &+\frac{\alpha}{2\pi m}\mathscr{R}e[\bar{u}_{s_1}(p_1)\hat{a}(q)u_{s_2}(p_2)\bar{u}_{s_2}(p_2)\times\\ &\times a_\mu(q)\,\sigma_{\mu\nu}q_\nu u_{s_1}(p_1)]\Big\}, \end{aligned} \quad (11,111)$$

其中符号 $\mathscr{R}e$ 的意义是: 取符号后表式数值的实数部分. 将(11,105)和(11,111)式相加,于是就得:

$$\begin{aligned} d\Phi = 2(2\pi)^5\alpha E^2\,d\Omega_e\Big\{&|\bar{u}_{s_2}(p_2)\hat{a}(q)u_{s_1}(p_1)|^2\times\\ &\times\left[1-\frac{3\alpha q^2}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{2\varepsilon}+\frac{31}{120}\right)\right]+\\ &+\frac{\alpha}{2\pi m}\mathscr{R}e[\bar{u}_{s_1}(p_1)\hat{a}(q)u_{s_2}(p_2)\bar{u}_{s_2}(p_2)\times\\ &\times a_\mu(q)\,\sigma_{\mu\nu}q_\nu u_{s_1}(p_1)]\Big\}. \end{aligned} \quad (11,112)$$

在上式中不再出现 ρ，因此，即使 $\rho \to 0$，上式仍然是有限的；也就是說，紅外发散困难不再存在。

今以电子在庫伦場中的散射为例。根据 (9,114)，

$$\vec{a}(q) = 0, \quad a_4(q) = -\frac{iZe}{(2\pi)^3}\frac{1}{q^2}; \tag{11,113}$$

代入(11,112)，得：

$$d\Phi = \frac{1}{\pi q^4}\alpha E^2 Z^2 e^4 d\Omega_r \left\{ |\bar{u}_{s_2}(p_2)\gamma_4 u_{s_1}(p_1)|^2 \times \right.$$
$$\times \left[1 - \frac{2\alpha q^2}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{2\varepsilon} + \frac{31}{120}\right)\right] -$$
$$\left. - \frac{\alpha}{2\pi m}\mathscr{R}e\left[\bar{u}_{s_1}(p_1)\gamma_4 u_{s_2}(p_2)\bar{u}_{s_2}(p_2)\sigma_{4\nu}q_\nu u_{s_1}(p_1)\right]\right\}. \tag{11,114}$$

假使不測量电子的自旋，可以将上式对始态电子的自旋平均，对終态电子的自旋求和，于是得到平均的微分截面 $d\bar{\Phi}$：

$$d\bar{\Phi} = \frac{\alpha^2 Z^2 e^3 E^2}{2\pi q^4} d\Omega_r \left\{\left[1 - \frac{2\alpha q^2}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{2\varepsilon} + \frac{31}{120}\right)\right] \times \right.$$
$$\times \mathrm{Sp}\sum_{s_1,s_2}\gamma_4 u_{s_1}(p_1)\bar{u}_{s_1}(p_1)\gamma_4 u_{s_2}(p_2)\bar{u}_{s_2}(p_2) +$$
$$+ \frac{\alpha}{2\pi m}\mathscr{R}e\left[\mathrm{Sp}\sum_{s_1,s_2}\gamma_4 u_{s_2}(p_2)\bar{u}_{s_2}(p_2) \times \right.$$
$$\left.\left. \times \gamma_4 i\hat{q} u_{s_1}(p_1)\bar{u}_{s_1}(p_1)\right]\right\}. \tag{11,115}$$

利用(9,43)式，可以将上式加以改写，成为如下的形式：

$$d\bar{\Phi} = \frac{Z^2 e^4}{2(4\pi)^2 q^4} d\Omega_r \left\{\left[1 - \frac{2\alpha q^2}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{2\varepsilon} + \frac{31}{120}\right)\right] \times \right.$$
$$\times \mathrm{Sp}[\gamma_4(-i\hat{p}_1 + m)\gamma_4(-i\hat{p}_2 + m)] -$$
$$\left. + \frac{\alpha}{2\pi m}\mathscr{R}e \cdot \mathrm{Sp}[\gamma_4(-i\hat{p}_2 + m)\gamma_4 i\hat{q}(-ip_1 + m)]\right\}. \tag{11,116}$$

应用 § 9,2 节中的求矩陣的跡的方法，得：

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{4}\mathrm{Sp}[\gamma_4(-i\hat{p}_1+m)\gamma_4(-i\hat{p}_2+m)] &= (p_1^* p_2)+m^2,\\ \frac{1}{4}\mathrm{Sp}[\gamma_4(-i\hat{p}_2+m)\gamma_4 i\hat{q}(-i\hat{p}_1+m)] &= -mq(p_2^*-p_1).\end{aligned}\right\} \quad (11,117)$$

不难証明：

$$\left.\begin{aligned}(p_1^* p_2)+m^2 &= 2E^2-\frac{1}{2}q^2,\\ -mq(p_2^*-p_1) &= -mq^2.\end{aligned}\right\} \quad (11,118)$$

將(11,118)代入(11,116)，得：

$$d\bar{\Phi}=\frac{2Z^2e^4}{(4\pi)^2q^4}\,d\Omega_e\left\{2E^2\left(1-\frac{q^2}{4E^2}\right)\left[1-\frac{2\alpha q^2}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{2\varepsilon}+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{31}{120}\right)\right]-\frac{\alpha q^2}{2\pi}\right\}. \quad (11,119)$$

令始态电子与終态电子的动量之間的夾角为 θ，并令电子动量的絕对值 $|\vec{p}_1|=|\vec{p}_2|=p$，則

$$q^2=4p^2\sin^2\frac{\theta}{2}=2p^2(1-\cos\theta). \quad (11,120)$$

假使略去与 $\alpha\frac{q^4}{m^4}$ 成比例的微小項，則可以將(11,120)式写作：

$$d\bar{\Phi}=d\Phi_{\text{盧伦}}(1-\delta), \quad (11,121)$$

其中 $d\Phi_{\text{盧伦}}$ 是卢瑟福（Rutherford）散射截面：

$$d\Phi_{\text{盧伦}}=\frac{Z^2r_0^2}{4}\cdot\frac{m^2\,d\Omega_e}{p^2v^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\left(1-v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right), \quad (11,122)$$

这里 $r_0=\frac{e^2}{4\pi m}$ 代表古典电子半径，$v=\frac{p}{E}$ 代表电子的速率，而 δ 是：

$$\delta=\frac{4\alpha p^2}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{2\varepsilon}+\frac{19}{30}\right)(1-\cos\theta). \quad (11,123)$$

有关克服紅外发散困难的一般理論，讀者可参看布洛赫-諾塞克 [Bloch and Nordsieck, 1937]、阿勃利可索夫 [Абрикосов, 1956] 及斯維进斯基 [Свидзинский, 1955] 的工作。

参 考 文 献

Абрикосов, А. А. (1956). ЖЭТФ, **30**, 96.
Bethe, H. A. (1947), *Phys. Rev.*, **72**, 339.
Bloch, F. & Nordsieck, A. (1937), *Phys. Rev.*, **52**, 54.
Dayhoff, E. S., Triebwasser, S. & Lamb, W. E. (1953), *Phys. Rev.*, **89**, 98.
Feynman, R. P. (1948), *Phys. Rev.*, **74**, 1430; (1949), *Phys. Rev.*, **76**, 769.
Franken, P. & Liebes, Jr. S. (1956), *Phys. Rev.*, **104**, 1197.
Fukuda, H., Miyamoto, Y. & Tomonaga, S. (1949), *Progr. Theor. Phys.*, **4**, **47**, 121.
Karplus, R. & Kroll, N. M. (1950), *Phys. Rev.*, **77**, 536.
Kusch, P. & Foley, H. M. (1947), *Phys. Rev.*, **72**, 1256.
Lamb, W. E. & Retherford, R. C. (1947), *Phys. Rev.*, **72**, 214.
Nafe, J. E., Nelson, E. B. & Rabi, I. I. (1947), *Phys. Rev.*, **71**, 914.
Nagel, D. E., Julian, R. S. & Zacharias, J. R. (1947), *Phys. Rev.*, **72**, 971.
Petermann, A. (1957), *Helv. Phys. Acta.*, **30**, 407.
Petermann, A. (1957), *Nucl. Phys.*, **3**, 689.
Свидзинский, А. В. (1955), Диссертация, Львовский гос. ун-т.
Sommerfeld, C. M. (1957), *Phys. Rev.*, **107**, 328.

第十二章　重整化的一般理論

§12,1. 原始发散

在第十章中，我們曾討論了与α成正比的高次近似中所出現的发散困难，发現了这些发散的效应都可以还原为質量的效应和电荷的效应．我們看到，經过質量重整化和电荷重整化以后，所有这些无穷大便都消失，留下的是微小的輻射修正．我們又在第十一章中应用这些方法討論了电子的反常磁矩問題和氫原子能級的兰姆移动問題，得到了与实驗符合得很好的理論結果．在本章中，我們將仍以量子电动力学为例，討論在所有的高次近似中出現的各种发散困难，以及如何避免这些发散困难的方法．

我們先来研究，用什么方法可以檢驗某一S矩陣元是否发散，最簡便的方法是將S矩陣元在动量表象中的表式写下来．我們在这里將写下S矩陣元的表式的規則重述一遍是有用的．假使和这一矩陣元相应的費曼图形有n个頂角、P_i条內部光子綫、E_i条內部电子綫、P_e条外部光子綫和E_e条外部电子綫；那末，根据§8,9节中所述的規則，矩陣元中將有如下的因子：

1) 与n个頂角相应，有n个如下形式的因子：

$$-e(2\pi)^4\gamma_\mu\delta^4(\Sigma p); \tag{12,1}$$

2) 与P_i条內部光子綫相应，有如

$$-\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4k_i\,\frac{1}{k_i^2} \tag{12,2}$$

形式的因子P_i个；

3) 与E_i条內部电子綫相应，有如

$$\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4p_i\,\frac{ip_i-m}{p_i^2+m^2} \tag{12,3}$$

形式的因子E_i个；

4) 与 P_e 条外部光子綫相应，有如

$$\frac{e_\mu}{\sqrt{2\omega_r}} \tag{12,4}$$

形式的因子 P_e 个；

5) 与 E_e 条外部电子綫相应，有如

$$u(p_r),\quad v(p_r),\quad \bar{u}(p_r)\ 或\ \bar{v}(p_r) \tag{12,5}$$

形式的因子 E_e 个.

紫外发散困难主要是由于对内部电子綫和光子綫的动量 p_i 和 k_i 积分的积分区域无限大而产生的. 因此，在矩陣元表式中分子和分母内 k_i 和 p_i 的冪次在一定程度上决定这一矩陣元是否发散及其发散的程度. 显然，分母是内部动量的 $2(E_i + P_i)$ 次函数；分子則是内部动量的 $\{4(E_i + P_i - n + 1) + E_i\}$ 次函数. 因为，在 n 个頂角所貢献的 n 个 δ 函数中，除有一个留下代表总的过程的动量守恆和能量守恆以外，其余的 $(n-1)$ 个 δ 函数可以用来消去对 d^4k_i 或 d^4p_i 的 $(n-1)$ 重积分，使 $4(P_i + E_i)$ 重积分約化为 $4(P_i + E_i - n + 1)$ 重积分；因此，假使

$$\xi = \{4(E_i + P_i - n + 1) + E_i\} - 2(E_i + P_i) \geqslant 0, \tag{12,6}$$

那末积分就可能是发散的. 考虑到如下的关系：

$$\begin{cases} n = 2P_i + P_e, \\ 2n = 2E_i + E_e, \end{cases} \tag{12,7}$$

我們就可以将(12,6)式写成如下的形式：

$$\xi = 4 - \frac{3}{2}E_e - P_e \geqslant 0. \tag{12,8}$$

但是必須注意二种情况：第一种情况是，即使費曼图形不滿足条件 (12,8)，其相应的矩陣元仍然是发散的；第二种情况是，即使費曼图形滿足条件(12,8)，相应的矩陣元并不发散.

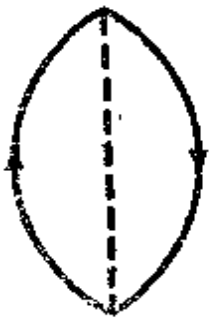
图 24b 就是第一种情况的例子. 这一图形只有二条外部电子綫和二条外部光子綫，因此

$$\xi = 4 - 3 - 2 = -1 < 0; \tag{12,9}$$

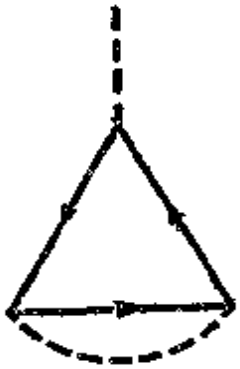
但是，图形中包含有电子自能部分，其相应的矩陣元显然是发散的。原因是这样的：在代表矩陣元的积分中一共有 $(E_i + P_i - n + 1)$ 个内部动量作为积分变数；只要其中任何一个或任何一組内部动量，它或它們在分子中的冪次等于或大于它或它們在分母中的冪次，那末积分就是发散的；即使只对这一内部动量或这一組内部动量积分，不对别的内部动量积分，也已經出現无穷大。

但是，从另一个角度来看，象图 24b 所包含的发散困难，实質上也就是电子自能問題的困难，亦即更簡单的图 22 所包含的困难。对电子自能問題的困难分析清楚了，那末，由于电子自能部分而导致的发散矩陣元的一系列問題也就解决了。因此，在发散的矩陣元中有些是原始性的，带有基本性質的；另一些則不是原始性的，但可以分解为原始性的发散，所有那些矩陣元，假使将其中某一个或某一組内部动量当作恆量而不对它或它們积分仍然出現无穷大的話，那末这些矩陣元的发散就不是原始性的；它的一部分内部动量已經导致了发散，也就是图形中相应的一个部分已經包含着发散。因此，象这样的图形的发散可以分解或約化为更为簡单的图形的发散。我們可以給所謂原始性发散的图形以如下的定义：在与这些图形相应的矩陣元中，假使令任何一个内部动量取一定的数值而不对它进行积分，那末就一定得到收斂的結果。我們也可以換用另一种完全等效的定义、假使有一个发散的图形，在将它的任何一条内部綫割断，使之成为二条外部綫之后，便变为一个不再发散的图形的話，那末这种图形的发散就称为"原始发散"。

(12,8) 是原始发散图形所必需服从的条件。但是同时应該注意到上面所提及的第二种情况，即滿足条件 (12,8) 的图形未必一定是发散的。由于非原始性发散的图形可以分解或約化为原始性发散的图形，因此我們可以先从分析原始性发散图形入手。有必要首先确定，那些类图形是原始发散的。为此，应該分析滿足条件 (12,8) 的图形。条件(12,8)的一个重要特点是它与頂角数 n 无关，因此，导致原始发散的物理过程只有有限的几种，所有的发散都可



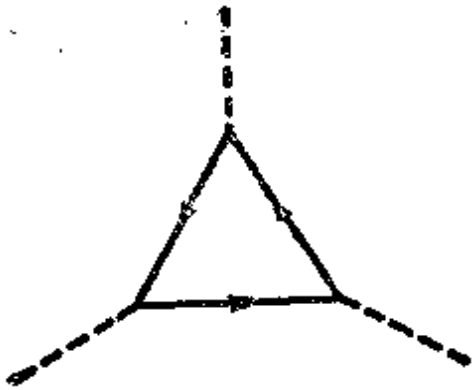
$E_e = 0,\ P_e = 0$
a)



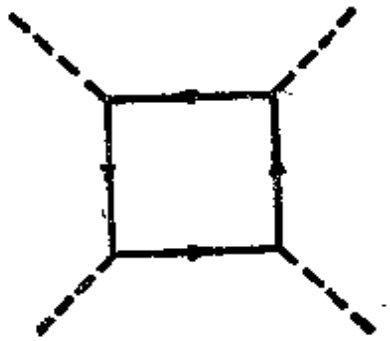
$E_e = 0,\ P_e = 1$
b)



$E_e = 0,\ P_e = 2$
c)



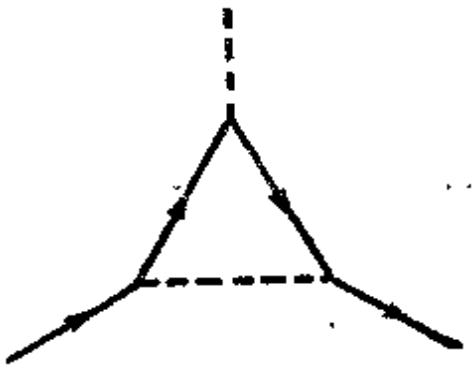
$E_e = 0,\ P_e = 3$
d)



$E_e = 0,\ P_e = 4$
e)



$E_e = 2,\ P_e = 0$
f)



$E_e = 2,\ P_e = 1$
g)

图 32

以分解或約化为这有限几类的原始发散. 这是重整化方法能取得成功的重要原因之一. 退一步講,假使在条件 (12,8) 中有正比于 n 的項, ξ 随着 n 的增加而增加,那末将会有无限多种的导致原始发散的物理过程;只依靠重整化的方法,調整理論中仅有的几个常数,是无法消去这无限多种的原始发散的. 我們現在将滿足条件 (12,8)的各类图形罗列于图 32 中. 为了方便起見,我們只画下了頂角数最少而滿足条件 (12,8) 的图形.

图 32a 是既沒有外部电子綫、又沒有外部光子綫的图形. 这种图形所代表的是眞空涨落过程. 在第八章中我們曾經指出,眞空涨落效应可归結为改变波函数的相位;这在物理上是不重要的,因此沒有必要对这类图形多加探討. 图 32c, 32f 和 32g 是在上一章中曾經討論过的眞空极化、电子自能和頂角部分. 可以証明,其余的图形 32b、32d 和 32e 并不包含有发散困难. 因此,在量子电动力学中,原始的发散只有三类,都曾經在上一章中初步討論过.

§ 12,2. 法雷定理

我們首先来証明, 与图 32b 及图 32d 相应的矩陣元等于零. 法雷 [Furry, 1937] 曾証明了如下的定理:

假使图形中有一条封閉的电子綫, 这条封閉的电子綫上的頂角数是單数,那末这种图形对于 S 矩陣元的貢献就等于零.

我們将通过下面的簡单例子来說明, 如何証明法雷定理. 图 33a 是具有三个頂角的封閉电子綫的图形; k_1、k_2 和 k_3 可以是外部光子綫,也可以是內部光子綫; 換句話說,图 33a 可能是費曼图形的全部、也可以是更复杂图形的一部分. 在矩陣元的表式中,这一封閉的电子綫由如下的因子代表:

$$S_a = (-e)^3 (2\pi)^{12} \int d^4p_1 d^4p_2 d^4p_3 \mathrm{Sp} A \cdot$$

$$\cdot \delta^4(p_1 + k_1 - p_2)\delta^4(p_2 + k_3 - p_3)\delta^4(p_3 + k_2 - p_1), \quad (12,10)$$

$$A = \gamma_\sigma S_f(p_1)\gamma_\nu S_f(p_3)\gamma_\rho S_f(p_2);$$

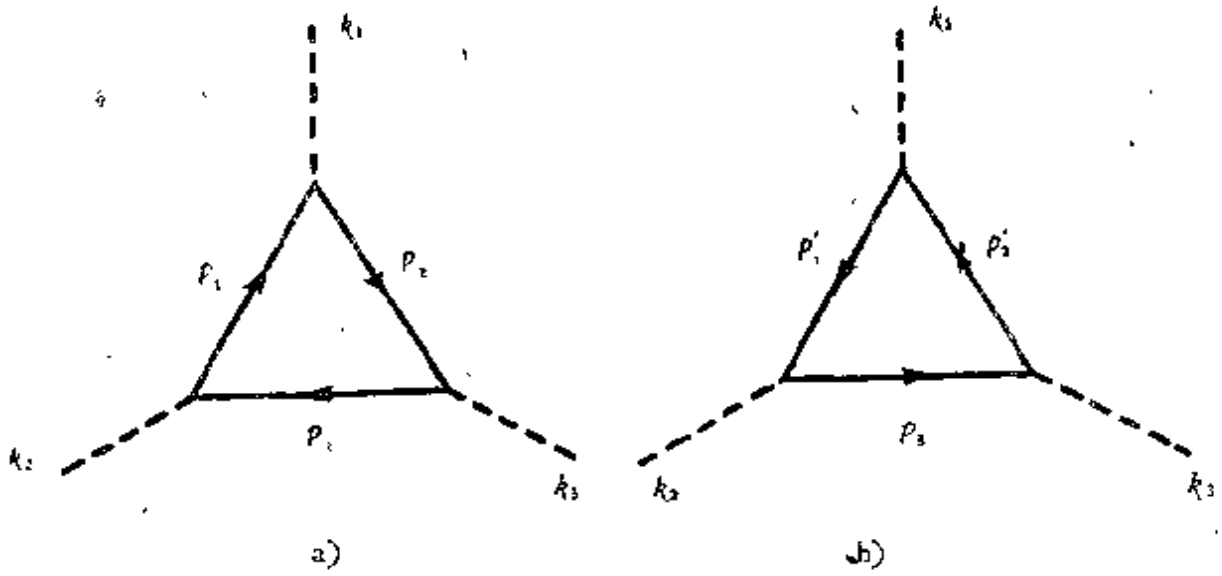


图 33

$S_f(p)$ 的表式見(8,131). 当然，矩陣元中还有其他的因子，为了簡略起見，沒有将它們写下来. 与图 33a 相应，一定存在着另外一个費曼图形，它对同一物理过程的 S 矩陣元作出貢献. 这个費曼图形和前面討論过的一个費曼图形几乎完全相同，所不同者，只是封閉电子綫箭头的方向倒了过来，如图 33b 所示. 这二个費曼图形对 S 矩陣元的貢献几乎完全相同；只有代表封閉的电子綫的因子互不相同，代表图形其余各部分的因子則完全一样. 在矩陣元中，与图 33b 中的封閉电子綫相应的因子具有如下的表式：

$$S_b = (-e)^3(2\pi)^{12}\int d^4p_1'd^4p_2'd^4p_3'\mathrm{Sp}B \cdot$$
$$\cdot \delta^4(p_2' + k_1 - p_1')\delta^4(p_1' + k_2 - p_3')\delta^4(p_3' + k_3 - p_2'),$$
$$B = S_f(p_2')\gamma_\rho S_f(p_3')\gamma_\nu S_f(p_1')\gamma_\mu. \qquad (12,11)$$

可以証明，S_b 的貢献恰巧与 S_a 的貢献相互抵消. 为此，我們利用以前曾討論过的自旋等于 1/2 的粒子进行正反粒子共軛变換时所出現的矩陣 C：

$$\mathrm{Sp}B = \mathrm{Sp}BCC^{-1} = \mathrm{Sp}C^{-1}BC. \qquad (12,12)$$

利用公式(5,82)，有：

$$-\tilde{\gamma}_\mu = C^{-1}\gamma_\mu C, \quad \widetilde{S_f(-p)} = C^{-1}S_f(p)C; \qquad (12,13)$$

因此有:

$$C^{-1}BC = -\widetilde{S_f(-p_2')}\tilde{\gamma}_q\widetilde{S_f(-p_3')}\tilde{\gamma}_\nu\widetilde{S_f(-p_1')}\tilde{\gamma}_\mu. \quad (12,14)$$

將(12,12)和(12,14)代入(12,11),并作如下的变換:

$$-p_1' \to p_1, \quad -p_2' \to p_2, \quad -p_3' \to p_3; \quad (12,15)$$

就得:

$$S_b = -(-e)^3(2\pi)^{12}\int d^4p_1d^4p_2d^4p_3\mathrm{Sp}\tilde{A}\cdot$$

$$\cdot\delta^4(p_1+k_1-p_2)\delta^4(p_2+k_3-p_3)\delta^4(p_3+k_2-p_1). \quad (12,16)$$

这就証明了:

$$S_b = -S_a. \quad (12,17)$$

因此,这二个費曼图形对于 S 矩陣元的貢献恰巧相互抵消.

图 32d 是属于滿足条件

$$E_e = 0, \qquad P_e = 3 \quad (12,18)$$

类型的图形,而且是其中最簡单的一个. 也有滿足条件 (12,18),但是远比图 32d 为复杂的图形. 利用法雷定理,可以証明,不論图形怎样复杂,只要它滿足条件 (12,18),則它对 S 矩陣元的貢献就等于零. 从(12,7)式可知,这种图形的頂角数 n 一定是单数. 由于沒有外部电子綫,所有的电子綫都是內部电子綫,这些电子綫就只能形成一个或几个封閉的电子綫多角形,角的总数是 n. 由于 n 是一个单数,因而在这些多角形中至少有一个多角形的角是单数. 于是,利用法雷定理,立刻可以証明这样的图形对于 S 矩陣元不作出貢献.

用同样方法也可以証明,滿足条件

$$E_e = 0, \qquad P_e = 1 \quad (12,19)$$

的图形对于 S 矩陣元不作貢献. 图 32b 是滿足条件 (12,19) 的最簡单的图形.

从上面所討論的例子我們可以理解,为什么有些图形虽然滿足条件 (12,8),但是相应的矩陣元却并不发散. 这是由于我們的理論具有許多对称性质,因此在一些矩陣元中的发散項可能恰巧

相互消去，法雷定理之所以成立，是由于量子电动力学对于电荷共軛变換具有不变性．电荷共軛变換有时也叫做正反粒子共軛变換．在以后我們将証明，由于量子电动力学对于規范变換具有不变性，因此图 32e 虽然滿足条件 (12,8)，但是其相应的矩陣元却并不发散．

§ 12,3. 不可約化的图形及其无穷大

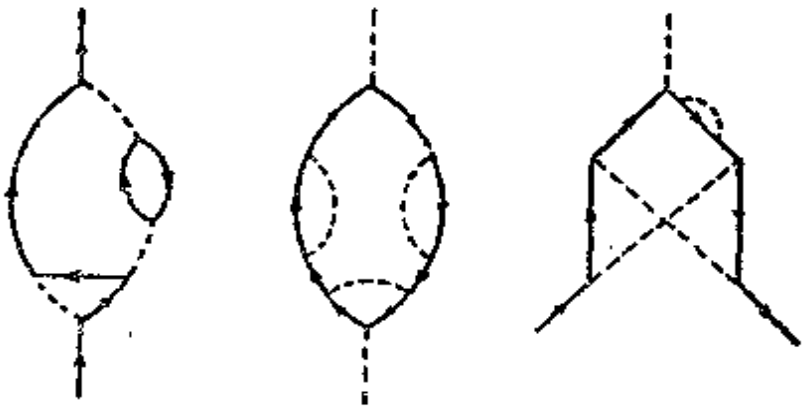
上节的討論指出，原始发散的图形只有三类：

1) 电子的自能部分，如图 32f；

2) 眞空极化部分，如图 32c；

3) 頂角部分，如图 32g．

当然，电子自能部分决不止如图 32f 中所示的一种．我們称任何只有二条外部电子綫而沒有外部光子綫的图形为电子自能图形．假使电子自能图形是作为另一个更复杂的图形的一部分而出現的，那末它就叫作电子自能部分．例如图 34a 是一种电子自能图形，它也可以作为电子自能部分出現在另一个更复杂的图形之中．同样，我們称除了二条外部光子綫以外沒有其他外部綫的图形为



a)　b)　c)

图 34

眞空极化图形．眞空极化图形作为一个更复杂的图形的一部分而

出現时，就叫做眞空极化部分. 图 34b 是一种可能的眞空极化图形；它在更复杂的图形中作为一部分而出現的时候，就叫做眞空极化部分. 发散的頂角图形也不止图 32g 一种. 任何除了二条外部电子綫和一条外部光子綫以外不再包含有其它外部綫的图形都叫做頂角图形. 頂角图形作为一个更复杂图形的一部分而出現的时候，就叫做頂角部分. 图 34c 是一种可能的頂角图形；它也可以作为一个頂角部分而出現在另一个更复杂的图形之中.

从图 34 可以看出問題的复杂性. 即使是滿足条件 (12,8) 的发散图形，也可以具有复杂的結构. 在电子自能图形的內部可以包含有眞空极化部分和頂角部分；在眞空极化图形的內部可以包含有电子自能部分和頂角部分；在頂角图形內部也可以包含有电子自能部分和眞空极化部分. 为了分析方便起見，我們的討論必須从最簡单的图形开始. 为此，我們引进一个叫做"图形的骨架"的新概念，它的定义如下：有一个图形 A；假使我們将 A 內部所包含的一切电子自能部分、眞空极化部分和頂角部分略去，分别代以簡单的电子綫、光子綫和頂角，如此得到另外一个图形 A'，則我們称图形 A' 为"图形 A 的骨架". 例如图 35a, b, c 就是与图 34a, b, c

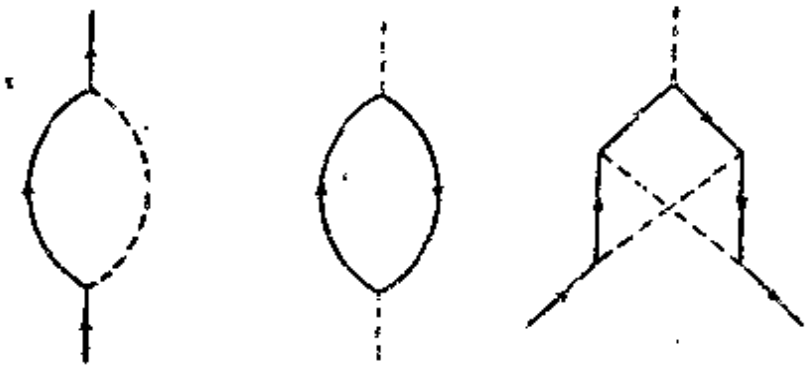


图 35

相应的骨架. 图 36b 就是图 36a 的骨架. 不难看出，任何一个图形只有一种骨架，不会有二种或二种以上不同的骨架.

假使有图形 A，它的骨架 A' 与 A 自己完全一样，那末我們称



a)　　b)

图 36

A 为"不可約化的图形"。显然，不可約化的电子自能图形就只有图 35a 一种，不可約化的眞空极化图形也只有图 35b 一种，而不可約化的頂角图形則除图 32g 和图 35c 以外还有很多别的种类。如上所述，一切发散图形可以分解或約化为原始发散图形，原始发散图形又可以分解或約化为不可約化的原始发散图形。因此，对发散困难作分析的第一步应該是研究不可約化的原始发散图形。

可以看出，条件 (12,8) 中的 ξ 代表了不可約化的原始发散图形的最高发散程度。当 $\xi = 0$ 时，发散最高是对数性的；当 $\xi = 1$ 时，发散最高是綫性的；当 $\xi = 2$ 时，发散最高是二次性的。实际上，由于理論的对称性，发散的程度常常不到 ξ。例如：相应于頂角部分的 $\xi = 0$，相应于光子相互散射的图形的 $\xi = 0$，相应于电子自能图形的 $\xi = 1$，相应于眞空极化图形的 $\xi = 2$；但从第十章中的討論可以看出，頂角部分的发散的确是对数性的，但是电子自能部分的发散程度却并不是綫性的而是对数性的。这从 (10,37) 中 $\Sigma^{(2)}(p)$ 的表式可以看出，由于积分的对称性，分子中与 $\hat{k}$ 成正比的一項根本不作貢献，只剩下对数性发散的結果。与此类似眞空极化图形的发散程度由于理論的規范不变性也不是二次性的。二次性发散的項由于理論的規范不变性而相互消去，并且，由于理論的洛仑兹不变性，綫性发散項也应該相互抵消。于是剩下的結果也是对数性发散的。至于光子相互散射的图形 32e 的 S 矩陣元，則由于理論的規范不变性，并不发散。因此，在量子电动力学中所出現的发散都是对数性的发散。

可以利用第十章的討論中所用的办法來將不可約化的原始发散图形中的无穷大分出来. 为此,令

$$\left.\begin{aligned}\Sigma(W,p) &= -i(2\pi)^4\delta m(W) + B(W)S_f^{-1}(p) + \\ &\quad + \Sigma_f(W,p)S_f^{-2}(p),\\ \Pi_{\mu\nu}(U,k) &= \delta_{\mu\nu}C(U)D_f^{-1}(k) + \delta_{\mu\nu}\Pi_f(U,k)D_f^{-2}(k),\\ \Lambda_\mu(V,p_1,p_2) &= L(V)\gamma_\mu + \Lambda_{\mu f}(V,p_1,p_2);\end{aligned}\right\} \quad (12,20)$$

其中W, U 和V 各代表不可約化的电子自能图形、真空极化图形和頂角图形, $\delta m(W)$, $B(W)$, $C(U)$ 和 $L(V)$ 都是与各該图形相应的对数性发散常数, $\Sigma_f(W,p)$, $\Pi_f(U,k)$ 和 $\Lambda_{\mu f}(V,p_1,p_2)$ 都是收敛的函数. 如前所述, 不可約化的电子自能图形只有图 35a 一种,因此 (12,20) 中的第一式就是第十章中的 (10,61) 式. 不可約化的真空极化图形只有图 35b 一种,因此(12,20)中的第二式就是(10,138) 式. 但是, 不可約化的頂角图形有很多种, 其中包括图 30b 和图 35c. 在第十章中已經証明了公式(10,170),这就是与图(30b)相应的 (12,20) 中的第三式. 我們可以証明,任何不可約化的頂角部分在矩陣元中所貢献的因子都可以分解为 (12,20) 中第三式右方的表式. 一般說来, $\Lambda_\mu(V,p_1,p_2)$ 可以写成如下的表式:

$$\Lambda_\mu(V,p_1,p_2) = \int d^4k_1\cdots d^4k_n d^4p_3\cdots d^4p_m \cdot$$
$$\cdot R_\mu(k_1,\cdots k_n,p_3,\cdots p_m,p_1,p_2,V), \quad (12,21)$$

其中 $k_1\cdots k_n$ 代表内部光子綫的动量, $p_3\cdots p_m$ 代表内部电子綫的动量. 既然我們所討論的图形是不可約化的原始发散图形,因此可将 (12,21) 中的表式先对 d^4k_1 以外的所有内部动量积分而不出現无穷大. 令

$$Q_\mu(V,k_1,p_1,p_2) = \int d^4k_2\cdots d^4k_n d^4p_3\cdots d^4p_m \cdot$$
$$\cdot R_\mu(k_1,\cdots k_n,p_3,\cdots p_m,p_1,p_2,V), \quad (12,22)$$

則 Q_μ 并不发散. 于是 $\Lambda_\mu(V,p_1,p_2)$ 可以写作:

$$\Lambda_\mu(V,p_1,p_2) = \int d^4k Q_\mu(V,k,p_1,p_2). \quad (12,23)$$

可以将 Q_μ 展开成为 p_1 和 p_2 的幂级数：

$$Q_\mu = [Q_\mu]_{p_1=p_2=0} + p_{1\rho}\left[\frac{\partial Q_\mu}{\partial p_{1\rho}}\right]_{p_1=p_2=0} + p_{2\sigma}\left[\frac{\partial Q_\mu}{\partial p_{2\sigma}}\right]_{p_1=p_2=0} +$$

$$+ p_{1\rho}p_{2\sigma}\left[\frac{\partial^2 Q_\mu}{\partial p_{1\rho}\partial p_{2\sigma}}\right]_{p_1=p_2=0} + \cdots. \qquad (12,24)$$

可以看出，假使 Q_μ 是 k 的 N 次函数，那末 $[Q_\mu]_{p_1=p_2=0}$ 也是 k 的 N 次函数，$\left[\frac{\partial Q_\mu}{\partial p_{1\rho}}\right]_{p_1=p_2=0}$ 和 $\left[\frac{\partial Q_\mu}{\partial p_{2\sigma}}\right]_{p_1=p_2=0}$ 将是 k 的 $(N-1)$ 次函数，$\left[\frac{\partial^2 Q_\mu}{\partial p_{1\rho}\partial p_{2\sigma}}\right]_{p_1=p_2=0}$ 将是 k 的 $(n-2)$ 次函数，Q_μ 的更高次微商将是 k 的更低次函数. 这是由于在 Q_μ 的表式中，p_1，p_2 和 k 总是以线性组合的形式或其他组合的形式出现，因而若将 Q_μ 对 p_1 或 p_2 微分，不仅减少 p_1 或 p_2 的幂次，同时也减少 k 的幂次. 将表式 (12,24) 代入 (12,23) 式中，就得：

$$\Lambda_\mu(V, p_1, p_2) = l + l_{(1\rho)}p_{1\rho} + l_{(2\sigma)}p_{2\sigma} +$$
$$+ l_{(1\rho)(2\sigma)}p_{1\rho}p_{2\sigma} + \cdots, \qquad (12,25)$$

其中 l，$l_{(1\rho)}$，$l_{(2\sigma)}$，$l_{(1\rho)(2\sigma)}\cdots$ 等等是常数或常数矩阵. l 一般地是对数性发散的，$l_{(1\rho)}$、$l_{(2\sigma)}$、$l_{(1\rho)(2\sigma)}\cdots$ 等等则都是收敛的，不再发散. 从表式 $\Lambda_\mu(V, p_1, p_2)$ 的洛仑兹协变性质考虑，(12,25) 式右方每一项都应该是一个 4-矢量的第 μ 个分量. 这些项除了与 p_1 和 p_2 有关以外，只和 γ 矩阵有关；因为 l，$l_{(1\rho)}$，$l_{(2\sigma)}$，$l_{(1\rho)(2\sigma)}\cdots$ 等等除了可能随着 V 的不同而不同以外，也可能是 γ 矩阵的函数. 在 p_1，p_2 和 γ 矩阵中，下列三个量：

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_\mu \\ &p_{1\mu} = \frac{1}{2}\{\hat{p}_1\gamma_\mu + \gamma_\mu\hat{p}_1\}, \\ &p_{2\mu} = \frac{1}{2}\{\hat{p}_2\gamma_\mu + \gamma_\mu\hat{p}_2\}, \end{aligned}\right\} \qquad (12,26)$$

是 4-矢量的第 μ 个分量. 此外，从 p_1，p_2 和 γ 矩阵还可以组成下

列标量：

$$\left.\begin{aligned} &\hat{p}_1,\quad \hat{p}_2,\quad (p_1p_2)=\frac{1}{2}\{\hat{p}_1\hat{p}_2+\hat{p}_2\hat{p}_1\},\\ &\hat{p}_1^2=\hat{p}_1\hat{p}_1,\qquad \hat{p}_2^2=\hat{p}_2\hat{p}_2. \end{aligned}\right\} \tag{12,27}$$

因此 $\Lambda_\mu(V,p_1,p_2)$ 的普遍形式只能是：

$$\Lambda_\mu(V,p_1,p_2)=l_0\gamma_\mu+l_1\gamma_\mu\hat{p}_1+{}_1l\hat{p}_1\gamma_\mu+l_2\gamma_\mu\hat{p}_2+$$
$$+{}_2l\hat{p}_2\gamma_\mu+l_{12}\gamma_\mu\hat{p}_1\hat{p}_2+l_{21}\gamma_\mu\hat{p}_2\hat{p}_1+{}_1l_2\hat{p}_2\gamma_\mu\hat{p}_2+\cdots, \tag{12,28}$$

其中 l_0 是一个对数性发散的常数，其余 l_1，${}_1l$，l_2，${}_2l$，l_{12}，l_{21}，${}_1l_2\cdots$ 等等都是有限的常数；它們都可能与具体的图形 V 有关。(12,28) 式右方各項一般地具有如下的形式：

$$\hat{p}_i\hat{p}_j\cdots\gamma_\mu\hat{p}_k\hat{p}_m\cdots\hat{p}_n, \tag{12,29}$$

其中 i，j，k，m，$n\cdots$ 的值可以取 1 或 2。我們將 (12,28) 式右方表式中的 $\hat{p}_1$ 和 $\hat{p}_2$ 以 im 代替，这一表式就变为：

$$L(V)\gamma_\mu; \tag{12,30}$$
$$L(V)=l_0+im(l_1+{}_1l+l_2+{}_2l)-m^2(l_{12}+$$
$$+l_{21}+{}_1l_2+\cdots)+\cdots,$$

其中 $L(V)$ 是一个与 V 有关的对数性发散的常数。这样就証明了，$\Lambda_\mu(V,p_1,p_2)$ 可以写成如 (12,20) 中第三式右方的表式，其中

$$\Lambda_{\mu f}(V,p_1,p_2)=l_1\gamma_\mu(\hat{p}_1-im)+{}_1l(\hat{p}_1-im)\gamma_\mu+$$
$$+l_2\gamma_\mu(\hat{p}_2-im)+{}_2l(\hat{p}_2-im)\gamma_\mu+$$
$$+l_{12}\gamma_\mu(\hat{p}_1\hat{p}_2+m^2)+\cdots. \tag{12,31}$$

显然，上式不再包含有紫外发散困难。而且，当討論电子經过电磁場不被散射的情况时，$\Lambda_{\mu f}(V,p_1,p_2)$ 对于相应的矩陣元不作任何貢献，因为在这种情况下，

$$p_1=p_2=p, \tag{12,32}$$
$$\hat{p}u(p)=imu(p),\quad \bar{u}(p)\hat{p}=im\bar{u}(p),$$

$\Lambda_{\mu f}(V,p_1,p_2)$ 当作用在波函数 $\bar{u}(p)$ 和 $u(p)$ 上的时候，它內部的 $\hat{p}_1$ 和 $\hat{p}_2$ 都变成 im。这样就証明了 (12,20) 中第三式具有普遍的正确性。

§12,4. 光子相互散射的 S 矩陣元

在本节中，我們將証明，不可約化的光子相互散射图形所导致的矩陣元不包含有无穷大。从上节的討論可以看出，不可約化的光子相互散射的 S 矩陣元可以写成如下的形式：

$$ {}_f\langle|S|\rangle_i = I_{\lambda\mu\nu\rho}(k_1,k_2,k_3,k_4)a_\lambda(k_1)a_\mu(k_2)a_\nu(k_3) a_\rho(k_4)\delta^4(k_1+k_2-k_3-k_4), \tag{12,33} $$

其中 k_1 和 k_2 代表入射光子的动量，k_3 和 k_4 代表射出光子的动量；$a(k_1)$，$a(k_2)$，$a(k_3)$ 和 $a(k_4)$ 則与各該光子的极化矢量之間存在着如(10,87)式所表达的关系。$I_{\lambda\mu\nu\rho}(k_1,k_2,k_3,k_4)$ 的表式是：

$$ I_{\lambda\mu\nu\rho}(k_1,k_2,k_3,k_4) = \int d^4p R_{\lambda\mu\nu\rho}(k_1,k_2,k_3,k_4,p), \tag{12,34} $$

$R_{\lambda\mu\nu\rho}$ 中不包含有无穷大，可以将它展开成为 k_1，k_2，k_3 和 k_4 的幂級数：

$$ R_{\lambda\mu\nu\rho}(k_1,k_2,k_3,k_4,p) = [R_{\lambda\mu\nu\rho}]_0 + k_{n\sigma}\left[\frac{\partial R_{\lambda\mu\nu\rho}}{\partial k_{n\sigma}}\right]_0 + + \frac{1}{2}k_{n\sigma}k_{m\eta}\left[\frac{\partial^2 R_{\lambda\mu\nu\rho}}{\partial k_{n\sigma}\partial k_{m\eta}}\right]_0 + \cdots, $$

$$ n=1,2,3,4; \quad m=1,2,3,4; \tag{12,35} $$

其中 $[\quad]_0$ 表示取 $k_1=k_2=k_3=k_4=0$ 时的数值。可以看出，假設 $R_{\lambda\mu\nu\rho}$ 是 p 的 N 次函数，那末 $\frac{\partial R_{\lambda\mu\nu\rho}}{\partial k_{n\sigma}}$ 只能是 p 的 $(N-1)$ 次函数。$R_{\lambda\mu\nu\rho}$ 的更高次微商只能是 p 的更低次函数。因此，将(12,35)式代入(12,34)式右方，在积分以后，只有第一項可能是对数性发散的，其余各項都将是收敛的。可以将 $I_{\lambda\mu\nu\rho}(k_1,k_2,k_3,k_4)$ 写成如下的形式：

$$ I_{\lambda\mu\nu\rho}(k_1,k_2,k_3,k_4) = I_{\lambda\mu\nu\rho}(0) + J_{\lambda\mu\nu\rho}(k_1,k_2,k_3,k_4), \tag{12,36} $$

其中 $J_{\lambda\mu\nu\rho}$ 不包含有无穷大。可以証明，$I_{\lambda\mu\nu\rho}(0)=0$。因为，与这一項相应，在光子与光子相互散射的 S 矩陣元中有如下的一

項：

$$I_{\lambda\mu\nu\rho}(0)a_\lambda(k_1)a_\mu(k_2)a_\nu(k_3)a_\rho(k_4)\delta^4(k_1+k_2-k_3-k_4). \quad (12,37)$$

在坐标表象中，上式可以写作：

$$\langle_f\left|\frac{1}{4!(2\pi)^4}\int d^4x I_{\lambda\mu\nu\rho}(0)A_\lambda(x)A_\mu(x)A_\nu(x)A_\rho(x)\right|\rangle_i, \quad (12,38)$$

其中

$$|\rangle_i = c^+_{k_2}\, c^+_{k_1}\,|\rangle_0, \quad |\rangle_f = c^+_{k_3}\, c^+_{k_4}\,|\rangle_0. \quad (12,39)$$

不难看出，(12,38)可以当作是由下列相互作用哈密頓量密度

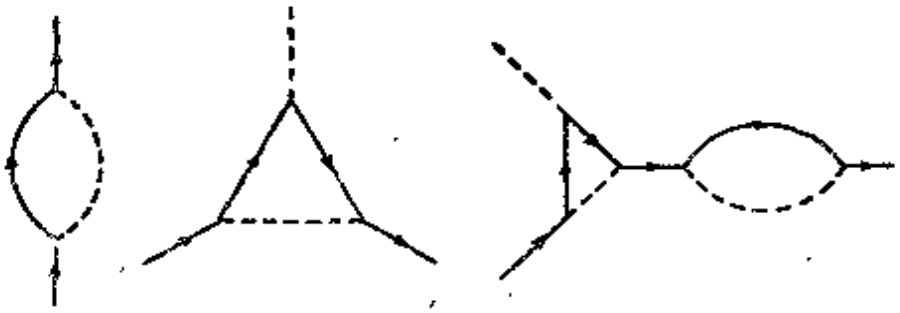
$$\frac{i}{4!(2\pi)^4} I_{\lambda\mu\nu\rho}(0)A_\lambda(x)A_\mu(x)A_\nu(x)A_\rho(x) \quad (12,40)$$

所导致的. 表式(12,40)显然不具有規范不变性. 如用这样的項来計算一些物理过程，将得到奇怪的結果. 例如，对光子为一个电場所散射的現象，(12,40)也将作出貢献；而且，当我們选择不同的規范来代表这一电場的时候，(12,40)也将对跃迁几率作出不同的貢献. 这显然与理論的規范不变性相矛盾. 因此，$I_{\lambda\mu\nu\rho}(0)$ 必須等于零. 这就是說，在与不可約化的光子相互散射图形相应的矩陣元中并沒有无穷大，图 32e 并不是原始性发散的图形.

§ 12,5. 正規图形和非正規图形

在以上各节中我們証明了，只有三种原始发散图形. 它們是：电子自能图形、眞空极化图形和頂角图形. 我們也曾給出了一定的方法，将不可約化的电子自能部分、眞空极化部分和頂角部分中的无穷大分出来，得到有限的表式 $\Sigma_f(W,p)$, $\Pi_f(U,k)$ 和 $\Lambda_{uf}(V,p_1,p_2)$. 从这些表式可以得到电子传播函数、光子传播函数和頂角函数的輻射修正的一部分. 我們的目的是要求出这些函数的全部輻射修正. 不仅要将来自不可約化的电子自能部分、眞空极化部分和頂角部分的輻射修正求出来，还应該将可以約化的电子自能部分、眞空极化部分和頂角部分所导致的輻射修正求出来，这样才可能得到包括所有輻射修正的电子传播函数 $S'_0(p)$，光子传播函

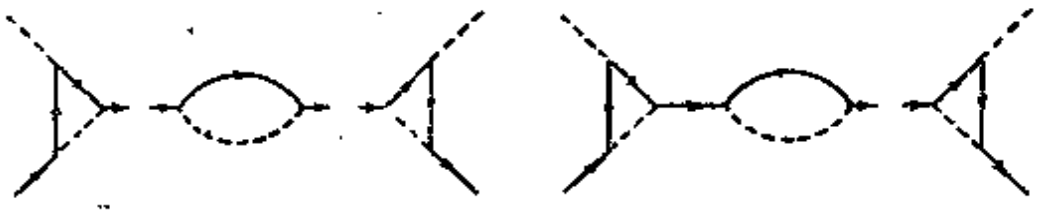
数 $D'_{f0}(k)$ 和頂角函数 $\Gamma'_{\mu 0}(p_1, p_2)$. 利用这些包含所有輻射修正的表式，我們就可以計算出包含所有輻射修正的 S 矩陣元. 例如图 36b 是电子和正电子湮沒而轉化为一对光子的不可約化的費曼图形中的一种，图 36a 則是一种可以約化的費曼图形. 假使将图 36b 中的二个頂角各以 $\Gamma'_{\mu 0}$ 代替，內部电子綫以 $S'_{f0}(p)$ 代替，那末所得到的 S 矩陣元中自然就包含有图 36a 所作的貢献. 但是在这里我們遇到了一个困难. 假使在 $S'_{f0}(p)$ 中包含了图 37a 所作的貢献，



a)　　b)　　c)

图 37

在 $\Gamma'_{\mu 0}$ 中包含了图 37b 和图 37c 所作的貢献；那末图 36a 的貢献在我們所計算得到的 S 矩陣元中出現了二次. 因为二个图 37b、一个图 37a 可以拼成一个图 36a，如图 38a 所示；一个图 37b 和一个图 37c 合起来也可以拼成一个图 36a，如图 38b 所示. 图 36a 只



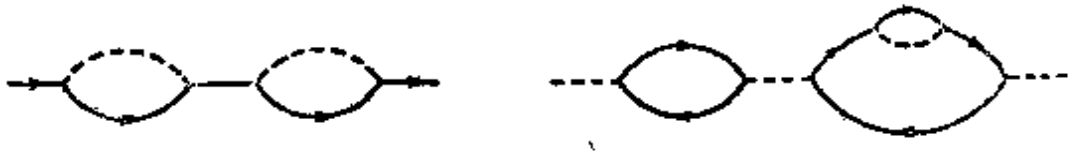
a)　　b)

图 38

在 $S^{(3)}$ 中出現一次；但在我們的計算中，图 36a 的貢献却不止出現一次. 因此这样的計算方法是不正确的.

为了避免将某些图形的貢献过多次数地包括进計算中去，我們引进"正規图形"和"非正規图形"的概念. 假使我們割断某一个

图形中的某一条内部电子綫或内部光子綫，就将图形分解为不相連接的二部分，那末这种图形就叫做"非正規图形"。假使我們将某一个图形中不論那一条内部电子綫或内部光子綫割断，都不能将图形分解为不相連接的二部分，那末这个图形就叫做"正規图形"。例如图 37a 和图 37b 是正規图形，图 37c 就是非正規图形。图 39a 和图 39b 也是非正規图形。假使我們令 $S'_{f0}(p)$ 中既包含有正規电子自能图形的貢献，又包含有非正規电子自能图形的貢献；



a) b)

图 39

令 $D'_{f0}(k)$ 中既包含有正規眞空极化图形的貢献，又包含有非正規眞空极化图形的貢献；但是令 $\Gamma'_{\mu 0}(p_1,p_2)$ 中只包含有正規頂角图形的貢献；那末，利用 $S'_{f0}(p)$、$D'_{f0}(k)$ 和 $\Gamma'_{\mu 0}(p_1,p_2)$ 就能将可以約化的图形的貢献正确地、恰如其量地考虑进去。例如：在計算图 36b 的矩陣元的时候，我們用 $\Gamma'_{\mu 0}$ 代表頂角，用 $S'_{f0}(p)$ 代表内部电子綫，那末图 36a 的貢献也就已經被正确地包括在内了。

我們令 $\Sigma(p)$ 代表包括所有正規和非正規的电子自能图形在无穷大沒有分出以前的矩陣表式：

$$\Sigma(p) = \sum_W \Sigma(W,p), \qquad (12,41)$$

其中 W 代表个别的正規或非正規电子自能图形，$\sum_W$ 代表对所有正規和非正規的电子自能图形求和。令 $S'_f(p)$ 代表包括所有电子自能部分的貢献，但是无穷大还沒有分割出去的电子传播函数，那末就有：

$$S'_f(p) = S_f(p) + S_f(p)\Sigma(p)S_f(p). \qquad (12,42)$$

令 $\Pi(k)$ 代表所有正規和非正規眞空极化矩陣之和：

$$\Pi(k) = \sum_U \Pi(U,k), \qquad (12,43)$$

其中 U 代表个别的正规或非正规的真空极化图形，$\sum_U$ 代表对所有的正规和非正规的真空极化图形求和．令 $D_f'(k)$ 代表包括所有真空极化图形的贡献，但是无穷大还没有分割出去的光子传播函数，那末就有：

$$D_f'(k) = D_f(k) + D_f(k)\Pi(k)D_f(k). \qquad (12,44)$$

令 V_r 代表正规的顶角图形，$\Lambda_\mu(V_r, p_1, p_2)$ 代表与这一图形相应的顶角矩阵．令 $\Lambda_\mu(p_1, p_2)$ 代表与所有正规顶角图形相应的顶角矩阵之和，那末就有：

$$\Lambda_\mu(p_1, p_2) = \sum_{V_r} \Lambda_\mu(V_r, p_1, p_2). \qquad (12,45)$$

令 $\Gamma'_\mu(p_1, p_2)$ 代表无穷大还没有分割出去的全部顶角函数，那末我們就有：

$$\Gamma'_\mu(p_1, p_2) = \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p_1, p_2). \qquad (12,46)$$

可以将 $S_f'(p)$ 和 $D_f'(k)$ 只用正规电子自能图形和正规真空极化图形的贡献表达出来．为此，令 W_r 代表正规的电子自能图形；$\Sigma^*(p)$ 代表包括所有正规电子自能图形，但是不包括非正规电子自能图形的贡献的电子自能矩阵：

$$\Sigma^*(p) = \sum_{W_r} \Sigma(W_r, p); \qquad (12,47)$$

那末，不难看出，$S_f'(p)$ 满足下列方程：

$$\left.\begin{aligned} S_f'(p) &= S_f(p) + S_f'(p)\Sigma^*(p)S_f(p), \\ S_f'(p) &= S_f(p) + S_f(p)\Sigma^*(p)S_f'(p). \end{aligned}\right\} \qquad (12,48)$$

知道了 $\Sigma^*(p)$，就可以从(12,48)解得 $S_f'(p)$：

$$S_f^{-1}(p) - S_f'^{-1}(p) = \Sigma^*(p). \qquad (12,49)$$

令 U_r 代表正规的真空极化图形；$\Pi^*(k)$ 代表包括所有正规真空极化图形但是不包括非正规真空极化图形的贡献的真空极化矩阵：

$$\Pi^*(k) = \sum_{U_r} \Pi(U_r, k); \qquad (12,50)$$

那末，不难看出，$D'_f(k)$ 满足下列方程：

$$\left.\begin{aligned} D'_f(k) &= D_f(k) + D'_f(k)\Pi^*(k)D_f(k), \\ D'_f(k) &= D_f(k) + D_f(k)\Pi^*(k)D'_f(k). \end{aligned}\right\} \quad (12,51)$$

知道了 $\Pi^*(k)$，就可以从(12,51)解得 $D'_f(k)$：

$$D_f^{-1}(k) - D_f'^{-1}(k) = \Pi^*(k). \quad (12,52)$$

现在的問題是，如何計算 $\Sigma^*(p)$、$\Pi^*(k)$ 和 $\Lambda_\mu(p_1,p_2)$；如何将其中的无穷大分割出来，得到有限的輻射修正 $\Sigma_f^*(p)$，$\Pi_f^*(k)$ 和 $\Lambda_{\mu f}(p_1,p_2)$；如何証明，将这些无穷大分割出来，并将它們抛去，就相应于质量重整化和电荷重整化．我們在下面将用逐步近似的方法来解决这些問題．

§ 12.6. 頂角函数中的輻射修正

在第十章中我們曾給出了精确到 e^2 項的近似表式 $\Sigma^{*(2)}(p)$，$\Pi^{*(2)}(k)$ 和 $\Lambda_\mu^{(2)}(p_1,p_2)$，以及与之相应的、包含有无穷大的、精确到 e^2 項的 $S_f^{(2)}(p)$，$D_f^{(2)}(k)$ 和 $\Gamma_\mu^{(2)}(p_1,p_2)$．以后，我們又曾用一定的方法将无穷大分出去，得到有限的表式 $\Sigma_f^{*(2)}(p)$，$\Pi_f^{*(2)}(k)$ 和 $\Lambda_{\mu f}^{(2)}(p_1,p_2)$，以及与之相应的有限的、包含有精确到 e^2 項的輻射修正的 $S_{f0}^{(2)}(p)$，$D_{f0}^{(2)}(k)$ 和 $\Gamma_{\mu 0}^{(2)}(p_1,p_2)$：

$$\left.\begin{aligned} S_{f0}^{(2)}(p) &= S_f(p) + S_f^{-1}(p)\Sigma_f^{*(2)}(p)S_{f0}^{(0)}(p), \\ D_{f0}^{(2)}(k) &= D_f(k) + D_f^{-1}(k)\Pi_f^{*(2)}(p)D_{f0}^{(0)}(k), \\ \Gamma_{\mu 0}^{(2)}(p_1,p_2) &= \gamma_\mu + \Lambda_{\mu f}^{(2)}(p_1,p_2). \end{aligned}\right\} \quad (12,53)$$

由于 $S_f(p)$，$D_f(k)$ 是电子和光子的传播函数的零級近似，所以它們也可以写作为 $S_{f0}^{(0)}(p)$ 和 $D_{f0}^{(0)}(k)$．

我們的逐步近似法的內容如下：給出一定的方法，在这些表式的 n 次以及更低次近似的基础上，求出这些表式的第 $(n+1)$ 次近似；亦即从精确到 e^{2n} 的項的表式，求得精确到 $e^{2(n+1)}$ 的項的各种表式．这样就能在最后求得 $\Sigma_f^*(p)$，$\Pi_f^*(k)$，$\Lambda_{\mu f}(p_1,p_2)$，$S'_{f0}(p)$，$D'_{f0}(k)$ 和 $\Gamma'_{\mu 0}(p_1,p_2)$ 的精确表式．

假使我們已經知道了 n 次近似以及更低次近似的表式

$\Sigma_f^{*(2n)}(p)$, $\Pi_f^{*(2n)}(k)$, $\Lambda_{\mu f}^{(2n)}(p_1,p_2)$, $S_{f0}^{(2n)}(p)$, $D_{f0}^{(2n)}(k)$ 和 $\Gamma_{\mu 0}^{(2n)}(p_1,p_2)$ 等等，就可以比較方便地求出頂角矩陣和頂角函数的$(n+1)$次近似的表式 $\Lambda_{\mu f}^{2(n+1)}(p_1,p_2)$ 和 $\Gamma_{\mu 0}^{2(n+1)}(p_1,p_2)$；右上方的标符 $(2n)$ 說明，相应的表式精确到 e^{2n} 的項. 我們首先将 $S^{(2n+3)}$ 中所包含的一切頂角图形画下来，将它們分为正規的图形和非正規的图形. 将非正規頂角图形抛去，只留下正規图形. 我們以符号 $V_r^{2(n+1)}$ 标志这些正規頂角图形. 不难写出与这些图形相应的矩陣表式 $\Lambda_\mu(V_r^{2(n+1)}, p_1, p_2)$. 从这些表式，以及 $\Lambda_\mu^{(2n)}(p_1,p_2)$，就可以得到 $\Lambda_\mu^{2(n+1)}(p_1,p_2)$：

$$\Lambda_\mu^{2(n+1)}(p_1,p_2) = \Lambda_\mu^{(2n)}(p_1,p_2) + \sum_{V_r^{2(n+1)}} \Lambda_\mu(V_r^{2(n+1)},p_1,p_2); \quad (12{,}54)$$

当然，(12,54)中的各項都包含着无穷大. 我們假定已經成功地将 $\Lambda_\mu^{(2n)}(p_1,p_2)$ 中的无穷大分割出去了，得到有限的表式$\Lambda_{\mu f}^{(2n)}(p_1,p_2)$. 現在的問題是，如何将 $\Lambda_\mu(V_r^{2(n+1)},p_1,p_2)$ 中的无穷大也分出去，以得到有限的表式 $\Lambda_{\mu f}(V_r^{2(n+1)},p_1,p_2)$. 这样就可以得到：

$$\Lambda_{\mu f}^{2(n+1)}(p_1,p_2) = \Lambda_{\mu f}^{(2n)}(p_1,p_2) + \sum_{V_r^{2(n+1)}} \Lambda_{\mu f}(V_r^{2(n+1)},p_1,p_2). \quad (12{,}55)$$

可以将所有这些正規頂角图形 $V_r^{2(n+1)}$ 分为二类，一类是不可約化的，另一类是可以約化的. 不可約化的图形中的无穷大可以用 § 12,3 中所述的方法分出去，得到一定的有限部分，如式(12,31)所示. 与每一个可以約化的頂角图形 $V_r^{2(n+1)}$ 相应，有一个不可約化的骨架图形 $V_{rs}^{2(n+1)}$. $V_{rs}^{2(n+1)}$ 被包括在較低次的 $S^{(2m+1)}$ 之內，$m \leqslant n$. 将 $V_{rs}^{2(n+1)}$ 內部的頂角、电子綫和光子綫換成一定的頂角部分、电子自能部分和眞空极化部分，我們就得到 $V_r^{2(n+1)}$. 于是，我們的第一步工作应該将这些包含在 $V_r^{2(n+1)}$ 內部的頂角部分、电子自能部分和眞空极化部分中的无穷大分出来，抛出去. 这些 $V_r^{2(n+1)}$ 內部所包含的頂角部分、电子自能部分和眞空极化部分都属于低于 $(n+1)$ 次近似的范围；我們既然已經将它們所包含的无穷大分割出去，得到了相应的有限的表式；因此，第一步分离无

穷大的結果实际上等于利用骨架图形 $V_r^{2(n+1)}$ 的 S 矩陣元，将其中的因子 $S_f(p)$，$D_f(k)$ 和 γ_μ 用这些相应的有限的表式代替；这样，就分去了 $V_r^{2(n+1)}$ 内部各个部分所包含的无穷大。当然，作为与整个图形相应的整个表式仍然是对数性发散的；这最后的无穷大也叫做"骨架无穷大"。我們的第二步工作是将骨架无穷大分割出去。因为骨架图形是不可約化的，因而可以用 § 12,3 中所介紹的方法将其中的无穷大分出去，于是得到我們所需要的有限表式 $\Lambda_{\mu f}(V_r^{2(n+1)}, p_1, p_2)$。在求得了所有与 $V_r^{2(n+2)}$ 相应的有限表式以后，立刻可以用(12,55)求得 $\Lambda_{\mu f}^{2(n+1)}(p_1, p_2)$，从而也就求得 $\Gamma_{\mu 0}^{2(n+1)}(p_1, p_2)$：

$$\Gamma_{\mu 0}^{2(n+1)} = \gamma_\mu + \Lambda_{\mu f}^{2(n+1)}(p_1, p_2). \qquad (12,56)$$

从以上的討論可以看出，我們还可以用另外一种方法来求得 $\Lambda_{\mu f}^{2(n+1)}(p_1, p_2)$。将 $S^{(3)}$，$S^{(5)}$，$S^{(7)} \cdots S^{(2n+3)}$ 中所有不可約化的頂角图形 $V_r^{(2m)}$，$m \leqslant n+1$，画出来；我們写下相应于每一个图形的矩陣表式，但是其中的内部电子綫、内部光子綫和頂角用已經求得的 $S_{f0}^{(2m)}(p)$、$D_{f0}^{(2m)}(k)$ 和 $\Gamma_{\mu 0}^{(2m)}(p_1, p_2)$ 代表；然后，用 § 12,3 中所介紹的方法，将这些表式中的无穷大分割出去，留下有限的表式；最后，将这些有限的表式加起来，略去正比于 $e^{I>(2n+3)}$ 的項，于是就得到 $\Lambda_{\mu f}^{2(n+1)}(p_1, p_2)$，其中不仅包含了 $S^{(3)}$，$S^{(5)} \cdots S^{(2n+3)}$ 中所有不可約化的頂角图形的貢献，也包含了所有 $S^{(3)}$，$S^{(5)} \cdots S^{(2n+3)}$ 中可以約化的正規頂角图形的貢献，这是因为在計算不可約化的 $V_r^{(2m)}$ 的矩陣的时候，我們曾用 $S_{f0}^{(2m)}(p)$，$D_{f0}^{(2m)}(k)$ 和 $\Gamma_{\mu 0}^{(2m)}(p_1, p_2)$ 代替了 $S_f(p)$，$D_f(k)$ 和 γ_μ。

§ 12,7. 可以約化的电子自能部分

当討論如何将可以約化的电子自能部分中所包含的无穷大分割出去的时候，我們遇到了比較复杂的情况。例如，图 40a 是一个可以約化的电子自能图形。若将一个頂角部分图 32g 代替图 40b 中的不可約化的电子自能图形中的一个普通頂角 a，就可以得到图 40a。但是，若将图 32g 中的頂角图形代替图 40b 中的頂角 b，

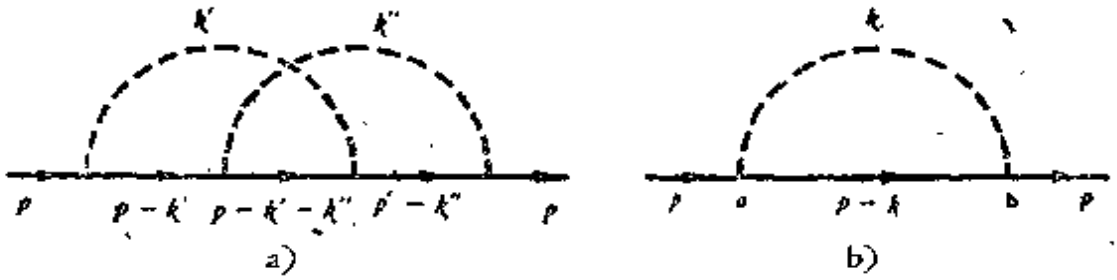


图 40

也可以得到图 40a. 任何可以約化的电子自能图形都可以从图 40b 用許多种不同的代替的方法得到. 这一情况使数学的处理大为复杂化. 例如:相应于图 40a 的矩陣表式是:

$$\frac{ie^4}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k'}{k'^2}\frac{d^4k''}{k''^2}\gamma_\mu\frac{i(\hat{p}-\hat{k}'')-m}{(p-k'')^2+m^2}\times$$

$$\times\gamma_\nu\frac{i(\hat{p}-\hat{k}'-\hat{k}'')-m}{(p-k'-k'')^2+m^2}\gamma_\mu\frac{i(\hat{p}-\hat{k}')-m}{(p-k')^2+m^2}\gamma_\nu. \qquad (12{,}57)$$

可以看出,上式在只对 d^4k' 积分后, 已經出現无穷大. 假使不对 d^4k' 积分,而只对 d^4k'' 积分,也将出現无穷大. 这二方面的无穷大是与从图 40b 得到图 40a 的二种不同的代替方式相应的. 与这二方面的无穷大相应的部分的图既不完全分开,又不是一个图将另一个图包在里面; 它們通过具有动量 $(p-k'-k'')$ 的內部电子綫而交纏在一起. 我們称与这种图形相应的无穷大为"交纏的无穷大". 由于更复杂的电子自能图形可以用更多种代替方法从图 40b 得到,无穷大的数目也更多,交纏的形式也更复杂. 将这些交纏的无穷大系統地分割出来,以便最后获得有限的表式,是一件很复杂的工作. 华德 [Ward, 1950] 曾指出了如何避免这一困难的方法,是从 $\Lambda_\mu(p_1,p_2)$ 和 $\Lambda_{\mu f}(p_1,p_2)$ 的表式直接求得 $\Sigma^*(p)$ 和 $\Sigma_f^*(p)$ 的表式.

华德发現了下列关系:

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu}S_f(p)=(2\pi)^4S_f(p)\gamma_\mu S_f(p); \qquad (12{,}58)$$

他并指出,假使 $W_r^{(2n)}$ 是一个正規的包含在 $S^{(2n)}$ 中的电子自能图

形，其相应的矩陣表式是 $\Sigma(W_r^{(2n)},p)$，那末就有：

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu}\Sigma(W_r^{(2n)},p)=(2\pi)^4\sum_{V_r^{(2n)}}\Lambda_\mu(V^{(2n)},p,p),\qquad(12,59)$$

其中 $\sum_{V_r^{(2n)}}$ 是代表对一套一定的正規頂角图形 $V_r^{(2n)}$ 求和. 在 $W_r^{(2n)}$ 中任何一条內部电子綫上掛上一条光子綫，就得到一个正規的頂角图形. 与 $W_r^{(2n)}$ 中每一条內部电子綫相应，可以得到一个正規的頂角图形. (12,59) 式的右方就是对这一套的正規頂角图形求和. 例如，与图 40b 相应的頂角图形就是图 32g. 与图 40a 相应的，是如下的一套正規頂角图形：



r) b) c)

图 41

我們可以用 (12,57) 式为例看出公式 (12,59) 的正确性. 令 $\Sigma(W_r^{(4)},p)$ 代表 (12,57) 式. 可以将 (12,57) 式改写为：

$$\Sigma(W_r^{(4)},p)=e^4(2\pi)^{16}\int d^4k'd^4k''\gamma_\rho D_f(k'')S_f(p-k'')\gamma_\sigma D_f(k')\cdot$$
$$\cdot S_f(p-k'-k'')\gamma_\rho S_f(p-k')\gamma_\sigma.\qquad(12,60)$$

利用 (12,58) 式，就可以得到：

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu}\Sigma(W_r^{(4)},p)=e^4(2\pi)^{20}\int d^4k'd^4k''Q_\mu,\qquad(12,61)$$

$$\begin{aligned}Q_\mu=&\gamma_\rho D_f(k'')S_f(p-k'')\gamma_\sigma D_f(k')S_f(p-k'-k'')\gamma_\rho S_f(p-\\&-k')\gamma_\mu S_f(p-k')\gamma_\sigma+\gamma_\rho D_f(k'')S_f(p-\\&-k'')\gamma_\sigma D_f(k')S_f(p-k'-k'')\gamma_\mu S_f(p-k'-\\&-k'')\gamma_\rho S_f(p-k')\gamma_\sigma+\gamma_\rho D_f(k'')S_f(p-k'')\gamma_\mu S_f(p-\\&-k'')\gamma_\sigma D_f(k'')S_f(p-k'-k'')\gamma_\sigma S_f(p-k')\gamma_\sigma.\end{aligned}$$

不难看出，上式可以写作：

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu}\Sigma(V_r^{(4)},p)=(2\pi)^4\{\Lambda_\mu(V_a^{(4)},p,p)+$$
$$+\Lambda_\mu(V_b^{(4)},p,p)+\Lambda_\mu(V_c^{(4)},p,p)\},\qquad(12,62)$$

其中 $V_a^{(4)}$, $V_b^{(4)}$ 和 $V_c^{(4)}$ 各代表图 41a, 41b 和 41c.

我們可以普遍地証明公式 (12,59). 一个正規的电子自能图形是由一条从射入电子綫一直通到射出电子綫的由电子綫組成的鏈、一些封閉的电子綫多角形、以及一些內部光子綫所組成的. 將各条光子綫分別掛到各条內部电子綫上，就得到一套正規的頂角图形.我們在写下电子自能图形的表式时，采取一定的方式标志各条內部电子綫和內部光子綫的动量，使只有在那条从入射电子一直通到出射电子的电子綫鏈上的动量与外部电子綫的动量有关，其余的內部电子綫和內部光子綫的动量都与外部电子綫的动量 p 沒有关系；那末，將这一电子自能图形的表式对 p 微分，就可以得到一系列的相应于將外部光子綫掛在电子綫鏈上而形成的頂角图形的表式.

可以証明，如將一条动量-能量等于零的外部光子綫掛在一个封閉的电子綫多角形上，則所得到的頂角图形对 S 矩陣將不作出貢献，其相应的表式等于零.在标志某一个封閉电子綫多角形上的动量时，我們可以采取一种特定的方式，使所有这些动量都与其中某一条电子綫的动量 q 有关，而在电子自能图形中其它的光子綫和电子綫的动量都与 q 无关. 当然，整个电子自能图形的表式是对 d^4q 的积分，因为 q 是某一条內部电子綫的动量-能量. 如果我們將在这一积分內部的表式对 q 微分，就可以得到一系列的表式，相应于將外部光子綫掛在这个封閉电子綫多角形上而获得的頂角图形. 在对 d^4q 积分后，可以看出，这些表式之和等于零. 这是由于积分內部的表式是对 q_μ 的微分，所以立即可以对 dq_μ 进行积分；由于积分內部表式中分母內 q 的冪次高于分子內 q 的冪次，因此，当 q_μ 的积分极限取 $\pm\infty$ 时，所得到的結果等于零. 这就証明

了(12,59)式的普遍正确性. 从(12,59)可得:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p_\mu}\Sigma^{*(2n)}(p) &= (2\pi)^4\Lambda_\mu^{(2n)}(p,p),\\ \frac{\partial}{\partial p_\mu}\Sigma^{*}(p) &= (2\pi)^4\Lambda_\mu(p,p);\end{aligned}\right\} \tag{12.63}$$

其中 $\Sigma^{*(2n)}(p)$ 是所有 n 次或更低次的电子自能图形的表式之和，亦即 $\Sigma^*(p)$ 的 n 次近似.

在上一节中，我們已經成功地将頂角图形表式中的无穷大分出来，求得有限的表式. 办法是将所有不可約化的正規頂角部分画出来，然后用 $S'_{f0}(p)$, $D'_{f0}(k)$ 和 $\Gamma'_{\mu 0}(p_1,p_2)$ 代替 $S_f(p)$, $D_f(k)$ 和 γ_μ 写下相应的矩陣表式，并以 $\Lambda_{\mu s}(p_1,p_2)$ 代表这些矩陣表式之和. $\Lambda_{\mu s}(p_1,p_2)$ 仍然是发散的. 可以用 § 12,3 中所介紹的方法把无穷大分出来:

$$\Lambda_{\mu s}(p_1,p_2) = L\gamma_\mu + \Lambda_{\mu f}(p_1,p_2), \tag{12,64}$$

其中 L 就是骨架无穷大，$\Lambda_{\mu f}(p_1,p_2)$ 就是所寻求的有限表式. 为了将 $\Sigma^*(p)$ 中的无穷大分出去，得到有限的表式，我們可以用 $D'_{f0}(k)$ 代表图 40b 中的光子綫，用 $S'_{f0}(p-k)$ 代表其中的电子綫，以 $\Gamma'_{\mu 0}(p-k,p)$ 代表頂角 b，以 γ_μ 代表頂角 a，如此得到一个矩陣表式. 这个表式內部还包含有一部分的交纏无穷大. 将这个內部剩下的交纏无穷大分出去以后，剩下的表式以 $\Sigma_f^*(p)$ 代表；它与不可約化的电子自能图形的表式相似，仍旧包含着骨架无穷大. 可以用 § 12,3 中的方法将其中的无穷大分出来；得到:

$$\Sigma_f^*(p) = A + BS_f^{-1}(p) + S_f^{-1}(p)\Sigma_f^*(p)S_f^{-1}(p), \tag{12,65}$$

其中 A 和 B 都是发散的常数，代表骨架无穷大，$\Sigma_f^*(p)$ 就是我們所寻求的有限部分. 但是，这样的做法是复杂的，而且在将来以此为基础作质量重整化和电荷重整化的証明时，将遇到困难. 更好的办法是利用华德所指出的恆等式 (12,63).

将 (12,64) 式积分，就可以直接求得 $\Sigma_f^*(p)$:

$$\Sigma_f^*(p) = K + (2\pi)^4\hat{p}L + F(p); \tag{12,66}$$

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu} F(p) = (2\pi)^4 \Lambda'_{\mu f}(p,p);$$

其中K是积分常数．这个常数的数值是：

$$K = \Sigma_f^*(p_0) - (2\pi)^4 \hat{p}_0 L - F(p_0), \qquad (12,67)$$

其中p_0是自由电子的动量-能量．因为K是一个洛仑兹不变量，而且应该与p_0的分量的具体数值无关，因此它应该是m的函数．我們可以将(12,67)式右方的$\hat{p}_0$以im代替，p_0^2以$-m^2$代替，这样就可以得到K的具体的数值．将(12,66)式与(12,65)式作比較，就得到下列关系：

$$\left.\begin{aligned} A &= K + i(2\pi)^4 m L + F(\hat{p} = im), \\ B &= -L, \\ \Sigma_f^*(p) &= S_f(p)[F(p) - F(\hat{p} = im)]S_f(p), \end{aligned}\right\} \qquad (12,68)$$

$\Sigma_f^*(p)$就是我們所寻求的有限表式．用同样的方法，可以从$\Lambda_{\mu f}^{2(n+1)}(p_1,p_2)$的表式求得$\Sigma_f^{*2(n+1)}(p)$的表式．值得注意的是(12,68)中的第二式．在第十章中我們已經証明过在与e^2成正比的近似中这一公式的正确性．这一公式对于电荷重整化具有重要意义．

求得了有限的表式$\Sigma_f^*(p)$以后，就可以定义如下的有限的电子传播函数$S'_{f0}(p)$：

$$S'_{f0}(p) = S_f(p) + \Sigma_f^*(p) S_f^{-1}(p) S'_{f0}(p). \qquad (12,69)$$

从上式及(12,68)中的第三式，可得：

$$S'^{-1}_{f0}(p) - S_f^{-1}(p) = F(\hat{p} = im) - F(p). \qquad (12,70)$$

利用(12,66)中的第二式，可以从上式求得关系：

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu} S'^{-1}_{f0}(p) = -(2\pi)^4 \Gamma'_{\mu 0}(p,p); \qquad (12,71)$$

$\Gamma'_{\mu 0}(p_1,p_2)$是有限的、包含全部輻射修正的顶角函数．(12,56)式当$n \to \infty$时就是它的定义：

$$\Gamma'_{\mu 0}(p_1,p_2) = \gamma'_\mu + \Lambda_{\mu f}(p_1,p_2). \qquad (12,72)$$

§ 12,8. 可以約化的眞空极化图形

当討論如何将可以約化的眞空极化图形中所包含的无穷大分割出来的时候，我們也遇到交纏无穷大。例如图 42a 是一个可以約化的正規的眞空极化图形，图 42b 是唯一的不可約化的正規眞

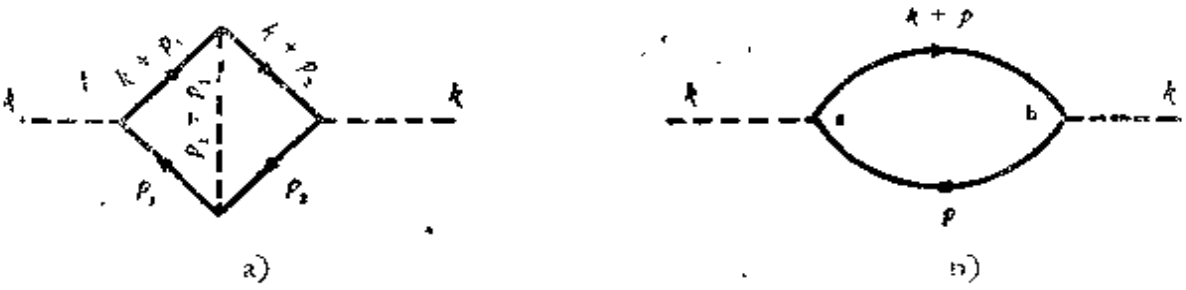


图 42

空极化图形。如将图 32g 中的頂角部份代替图 42b 中的頂角 a，就可以得到图 42a；如将图 32g 中的頂角部分代替图 42b 中的頂角 b，也可以得到图 42a。为了写下与图 42a 相应的表式，我們注意到，$\Pi_{\mu\nu}(k)$ 一般地可以写为：

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = (k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu}k^2)Q(k^2). \tag{12,73}$$

从上式可得：

$$\Pi_{\mu\mu}(k) = -3k^2Q(k^2). \tag{12,74}$$

由于理論的規范不变性，已經在第十章中証明过，(12,73) 式右方与 $k_\mu k_\nu$ 成正比的一項不作貢献。因此有：

$$\left.\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}(k) &= \delta_{\mu\nu}\Pi(k^2),\\ \Pi(k^2) &= \frac{1}{3}\Pi_{\mu\mu}(k).\end{aligned}\right\} \tag{12,75}$$

以 $U_r^{(4)}$ 标志图 42a，我們有：

$$\Pi(U_r^{(4)},k^2) = -\frac{e^4}{3}(2\pi)^{16}\int d^4p_1d^4p_2\mathrm{Sp}\{\gamma_\rho S_f(p_2+k)\gamma_\sigma S_f(p_1+ + k)D_f(p_1-p_2)\gamma_\rho S_f(p_1)\gamma_\sigma S_f(p_2)\}. \tag{12,76}$$

可以看出，即使上式积分号内的表式不对 d^4p_2 积分，只对 d^4p_1 积分，也已經产生了无穷大。在另一方面，即使不对 d^4p_1 积分，只

对 d^4p_2 积分，也同样产生无穷大．　导致这二方面的无穷大的二个顶角部分既不完全分开，也不是一部分包含另一部分；它們通过动量为 $(p_1 - p_2)$ 的内部光子綫交纏在一起．　为了有系統地将这种交纏的无穷大分出来，我們将上节所述的华德的方法略加扩充．

将(12,76)式对 k_μ 微分，可得：

$$\frac{\partial}{\partial k_\mu}\Pi(u_r^{(4)},k) = -\frac{e^4}{3}(2\pi)^{20}\int d^4p_1 d^4p_2\,\mathrm{Sp}\,R, \quad (12,77)$$

$$R = \gamma_\rho S_f(p_2+k)\gamma_\mu S_f(p_2+k)\gamma_\sigma S_f(p_1+k)D_f(p_1-p_2)\gamma_\rho S_f(p_1)\gamma_\sigma S_f(p_2) + \gamma_\rho S_f(p_2+k)\gamma_\sigma S_f(p_1+k)\gamma_\mu S_f(p_1+k)D_f(p_1-p_2)\gamma_\rho S_f(p_1)\gamma_\sigma S_f(p_2).$$

不难看出，可以将上式写作：

$$\frac{\partial}{\partial k_\mu}\Pi(u_r^{(4)},k) = (2\pi)^4\{\Delta_\mu(Y_a^{(4)},k,k) + \Delta_\mu(Y_b^{(4)},k,k)\}, \quad (12,78)$$

其中 $Y_a^{(4)}$ 代表图 43a，$Y_b^{(4)}$ 代表图 43b，$\Delta_\mu(Y_a^{(4)},k,k)$ 代表与图 43a 相应的矩陣表式，$\Delta_\mu(Y_b^{(4)},k,k)$ 代表与图 43b 相应的矩陣表式．不

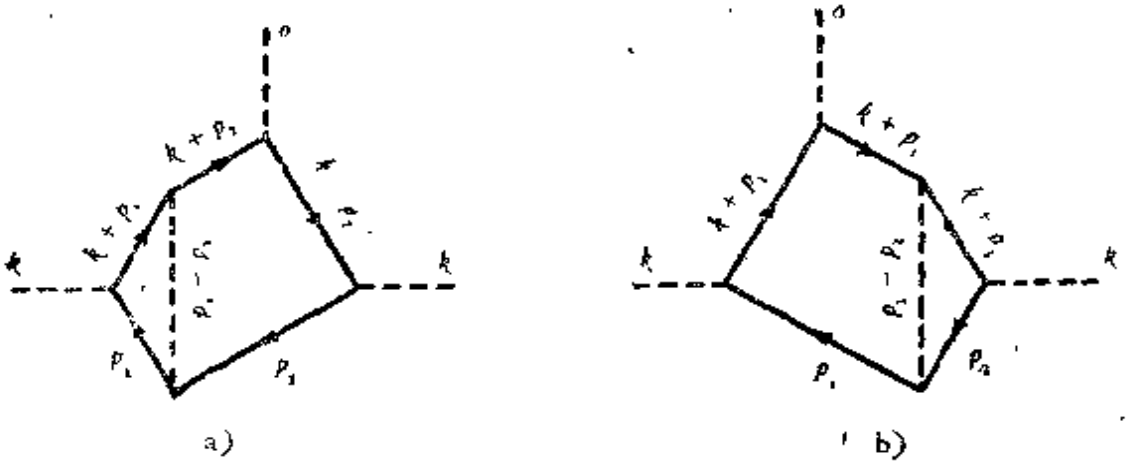


图 43

难看出，在 $\Delta_\mu(Y_a^{(4)},k,k)$ 的表式中对 d^4p_1 的积分导致无穷大，但是对 d^4p_2 的积分不导致无穷大．另一方面，在 $\Delta_\mu(Y_b^{(4)},k,k,)$ 的表式中对 d^4p_2 的积分导致无穷大，但是对 d^4p_1 的积分则不再导致无穷大．因此，在这二个表式中都不再存在着交纏的无穷大，于是可以用处理 $\Lambda_\mu(U_r,p_1,p_2)$ 的办法将 $\Delta_\mu(Y_r,k_1,k_2)$ 中的无穷大分割

出来. 以 $\Delta_\rho(Y_a^{(4)},k,k)$ 为例，我們先将图 43a 的内部的頂角部份所包含的无穷大分出去. 用符号 $\Delta_{\mu s}(Y_a^{(4)},k,k)$ 代表留下来的表式，其中仍旧包含着骨架无穷大；根据条件 (12,8)，最高的发散是綫性的. 应用 § 12,3 中所述的方法，我們可以将 $\Delta_{\mu s}(Y_a^{(4)},k,k)$ 写作：

$$\Delta_{\mu s}(Y_a^{(4)},k,k) = J^{(4a)}+2iC^{(4a)}\cdot k_\mu+\Delta_{\mu f}(Y_a^{(4)},k,k), \quad (12,79)$$

其中 $J^{(4a)}$ 最高是綫性发散的常数，$C^{(4a)}$ 最高是对数性发散的常数. $\Delta_{\mu f}(Y_a^{(4)},k,k)$ 是有限的表式，其中不包含常数項和 k 的綫性項. 由于 $\Delta_{\mu s}(Y_a^{(4)},k,k)$ 在洛仑兹变换中是一个 4 -矢量的第 μ 分量，所以 $J^{(4a)}$ 必須等于零. 与(12,79)式相似，$\Delta_{\mu s}(Y_b^{(4)},k,k)$ 可以写作

$$\Delta_{\mu s}(Y_b^{(4)},k,k) = 2iC^{(4b)}\cdot k_\mu + \Delta_{\mu f}(Y_b^{(4)},k,k). \quad (12,80)$$

利用 (12,78) 式，将(12,79)和(12,80)对 dk_μ 积分，就得：

$$\Pi_r(U_r^{(4)},k) = N_r^{(4)} + i(2\pi)^4C_r^{(4)}k^2 + G(u_r^{(4)},k^2), \quad (12,81)$$

$$C_r^{(4)} = C^{(4a)} + C^{(4b)},$$

$$\frac{\partial}{\partial k_\mu}G(U_r^{(4)},k^2) = (2\pi)^4[\Delta_{\mu f}(Y_a^{(4)},k,k)+\Delta_{\mu f}(Y_b^{(4)},k,k)];$$

其中 $G(U_r^{(4)},k^2)$ 沒有常数項和 k^2 的綫性項. 理論的規范不变性要求

$$\Pi_r(U_r^{(4)},k=0) = 0, \quad (12,82)$$

因此积分常数 $N_r^{(4)}$ 也一定等于零. 引进符号

$$\Pi_f(U_r^{(4)},k) = D_f(k)G(U_r^{(4)},k^2)D_f(k), \quad (12,83)$$

就可以将(12,81)中的第一式写作：

$$\Pi_r(U_r^{(4)},k) = C_r^{(4)}D_f^{-1}(k)+D_f^{-1}(k)\Pi_f(U_r^{(4)},k)D_f^{-1}(k). \quad (12,84)$$

不难将以上的討論扩充到所有的高次近似中去. 先将所有的正規真空极化图形画下来；在将它們的相应矩陣表式对 k_μ 微分以后，就得到表式 $\Delta_\mu(k,k)$，相应于一系列图形的矩陣表式之和. 这一系列图形中的每一个图形都具有三条外部光子綫，沒有外部电子綫，如图 43 所示，但比图 43 更为复杂. $\Delta_\mu(k,k)$ 中包含有二类

无穷大．　第一类是由于許多图形是可以約化的，它們內部包含有电子自能部分、眞空极化部份和頂角部分，因此它們包含有一系列的內部无穷大．第二类是由于所有的这些图形都滿足条件

$$\xi = 4 - \frac{3}{2}E_e - P_e = 1, \tag{12,85}$$

因此，它們的骨架图形还包含着骨架无穷大．　我們先将第一类无穷大分出来，留下只包含有骨架无穷大的表式 $\Delta_{\mu s}(k,k)$；然后再将 $\Delta_{\mu s}(k,k)$ 中的骨架无穷大分出来，得到：

$$\Delta_{\mu s}(k,k) = 2iCk_\mu + \Delta_{\mu f}(k,k), \tag{12,86}$$

其中由于洛仑茲协变性的要求，常数項一定等于零．　C 是对数性发散的常数．　$\Delta_{\mu f}(k,k)$ 是有限的表式，不包含有 k 的綫性項和常数項．将(12,86)式对 dk_μ 积分，就得到：

$$\Pi_f^*(k) = CD_f^{-1}(k) + G(k^2), \tag{12,87}$$

$$\frac{\partial}{\partial k_\mu}G(k^2) = (2\pi)^4\Delta_{\mu f}(k,k).$$

由于規范不变性的要求，上式的右方沒有常数項．　$G(k^2)$ 中沒有常数項，也沒有 k^2 的綫性項，最低次是 k^4 項．因此，可以将 $G(k^2)$ 写作：

$$G(k^2) = D_f^{-1}(k)\Pi_f^*(k)D_f^{-1}(k), \tag{12,88}$$

$\Pi_f^*(k)$ 是在将无穷大分割出来以后，留下的眞空极化图形的有限表式．利用 $\Pi_f^*(k)$，可以定义如下的有限的光子传播函数 $D'_{f0}(k)$：

$$D'_{f0}(k) = D_f(k) + \Pi_f^*(k)D_f^{-1}(k)D'_{f0}(k). \tag{12,89}$$

从上式(12,87) 和 (12,88)式可得如下的关系：

$$D_{f0}'^{-1} - D_f^{-1}(k) = -G(k^2). \tag{12,90}$$

考虑到

$$\frac{\partial}{\partial k_\mu}D_f^{-1}(k) = 2i(2\pi)^4k_\mu, \tag{12,91}$$

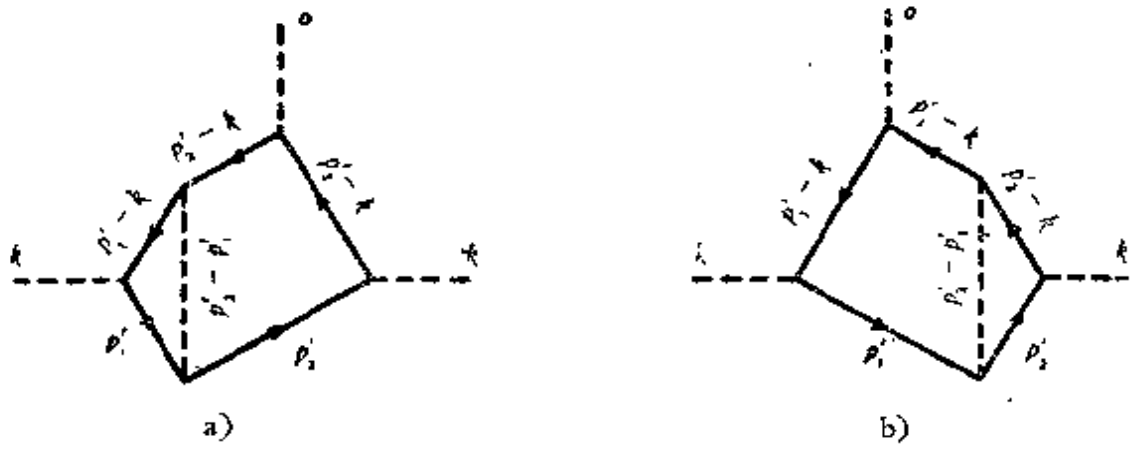
不难証明下列关系：

$$\frac{\partial}{\partial k_\mu}D_{f0}'^{-1}(k) = -(2\pi)^4\Omega'_{\mu 0}(k,k), \tag{12,92}$$

其中 $\Omega'_{\mu 0}(k,k)$ 的定义是：

$$\Omega'_{\mu 0}(k,k) = -2ik_\mu + \Delta_{\mu f}(k,k). \qquad (12,93)$$

对以上的討論还必須加上二点补充. 第一点是：在图 43 中存在着封閉的由单数电子綫組成的多角形. 根据法雷定理，假使在导致某一物理过程的图形中存在着具有单数电子綫的多角形，那末这种图形对这一物理过程的 S 矩陣元的貢献等于零. 这样看来，$\Delta_\mu(k,k)$ 似乎应該等于零. 其实，法雷定理的內容是：图 43a 的貢献与图 44a 的貢献相互抵消；图 43b 的貢献与图 44b 的貢献



a) b)

图 44

相互抵消；但是，个别图形的貢献却不一定等于零. 当我們在寻求 $\Pi(U_f^{(q)},k)$ 的数值的时候，只取了图 43a 和 43b 的貢献，根本沒有取图 44a 和 44b 的貢献；因此，不存在相互抵消的問題；$\Delta_\mu(k,k)$ 并不一定等于零.

第二点是：眞空极化图形只有外部光子綫而沒有外部电子綫；因此，所有的电子綫都只能組成封閉的多角形；二条外部光子綫必須与这种电子綫多角形相連接. 可以有二种不同的相連接的方式. 第一种方式是：二条外部光子綫与同一个电子綫多角形相連接，如图42a和图42b所示. 第二种方式是：二条外部光子綫与二个不同的电子綫多角形相連接，如图 45 所示. 不論用什么方法去标志图 45 中的动量，一定有內部光子綫的动量与 k 有关. 图 45 中的三条內部光子綫的动量之和一定等于 k. 因此，将图 45 的矩陣表式对 k_μ

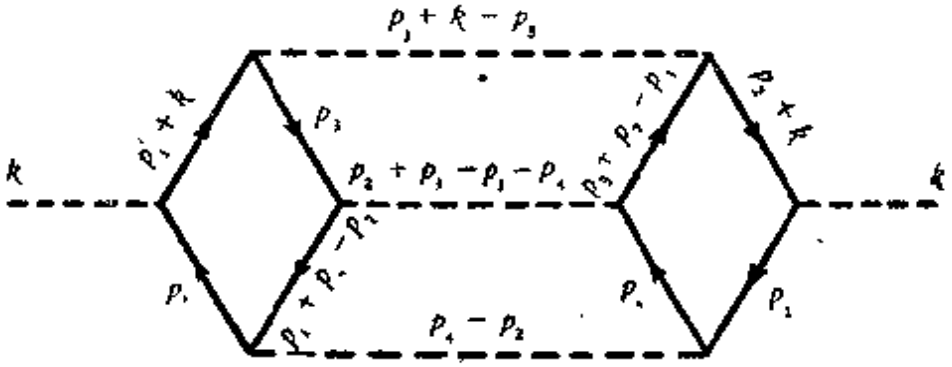


图 45

微分时，不仅有电子传播函数被微分，一定也有光子传播函数被微分．将光子传播函数对 k_μ 微分的結果是：

$$\frac{\partial}{\partial k_\mu} D_f(k) = -2i(2\pi)^4 D_f(k) k_\mu D_f(k). \qquad (12,94)$$

上式右方的表式在通常的量子电动力学的 S 矩陣元中是沒有的；但是在积分中出現这种因子并不导致任何困难．在将图 45 的矩陣表式对 k_μ 微分以后，交纏的无穷大就不再存在．我們可以用 § 12,3 中所介紹的方法，将其中的无穷大逐类、逐步地分割出来．积分的形式虽然略有不同，但是不会遇到什么新的、原則上的困难．

§ 12,9. 重整化

在以上三节的討論中，我們給出了一套方法，逐步近似地求出 $\Sigma_f^*(p)$，$\Pi_f^*(k)$，$\Lambda_{\mu f}(p_1,p_2)$，$\Delta_{\mu f}(k,k)$，$S'_{f0}(p)$，$D'_{f0}(k)$，$\Gamma'_{\mu 0}(p_1,p_2)$ 和 $\Omega'_{\mu 0}(k,k)$ 的精确表式．当这些精确的表式求出以后，就可以計算任何量子电动力学現象的 S 矩陣元，而不再出現发散的困难．在需要計算任何現象的 S 矩陣元时，只要将所有属于这一現象的不可約化的图形画出来，然后以 $S'_{f0}(p)$，$D'_{f0}(k)$ 和 $\Gamma'_{\mu 0}(p_1,p_2)$ 分别代表内部电子綫，内部光子綫和頂角，以 $\bar{u}(p)$，$u(p)$，$\bar{v}(p)$，$v(p)$ 和 $a_\nu(k)$ 分别代表外部电子綫、外部正电子綫和外部光子綫，就可以按照所有的图形写出相应的 S 矩陣元．在这些矩陣元中不再存

在紫外发散困难，而且它們包括了所有的輻射修正在內.

在本节中我們將証明，用这种方法計算得到的結果与用沒有略去无穷大的表式 $S_f'(p)$, $D_f'(p)$ 和 $\Gamma'_\mu(p_1,p_2)$ 进行計算，而后再进行質量重整化以及电荷重整化所得到的結果完全等同.

首先进行質量重整化. $\Sigma^*(p)$ 代表所有正規电子自能图形的貢献，將它展开成为 $S_f^{-1}(p)$ 的冪級数，并以 A^* 代表級数中与 $S_f^{-1}(p)$ 无关的一項. A^* 是 e^2 和 m 的函数，代表电磁質量的效应. 应該將这一部分效应划入自由电子的哈密頓量. 因此，在自由电子的哈密頓量密度中加进了一項：

$$\delta m\bar{\psi}\psi, \tag{12,95}$$

而从相互作用哈密頓量密度中減去了这一項. 这样一来，由实驗所观察到的电子的靜質量將是：

$$m_0 = m + \delta m, \tag{12,96}$$

而相互作用哈密頓量密度則成为：

$$\mathscr{H}_i = -ie\bar{\psi}\hat{A}\psi - \delta m\bar{\psi}\psi. \tag{12,97}$$

將上式作为微扰而求得的电子传播函数 $S_f'(p)$ 滿足下列方程：

$$S_f'(p) = S_f(p) + S_f(p)\{\Sigma^*(p) + i\delta m(2\pi)^4\}S_f'(p). \tag{12,98}$$

上式中的 $S_f'(p)$ 已經經过質量重整化，但是还沒有經过电荷重整化. δm 的表式是：

$$\delta m = \frac{iA^*}{(2\pi)^4}. \tag{12,99}$$

必須注意，上式中的 A^* 是重整化了的电子質量 m_0 和沒有重整化的电荷 e 的函数. 从(12,98)可得：

$$S_f^{-1}(p) = S_f'^{-1}(p) + \Sigma^*(p) + i\delta m(2\pi)^4. \tag{12,100}$$

我們再进一步进行电荷重整化，証明略去无穷大以后所得到的有限表式 $S'_{f0}(p)$, $D'_{f0}(k)$, $\Gamma'_{\mu 0}(p_1,p_2)$, $\Omega'_{\mu 0}(k,k)$ 与包含着无穷大、但是經过了質量重整化的表式 $S_f'(p)$, $D_f'(k)$, $\Gamma'_\mu(p_1,p_2)$,

$\Omega'_\mu(k,k)$之間存在着如下的关系：

$$\left.\begin{aligned}
\Gamma'_\mu(e) &= \frac{1}{Z'}\Gamma'_{\mu 0}(e_0),\\
S'_f(e) &= Z'S'_{f0}(e_0),\\
D'_f(e) &= ZD'_{f0}(e_0),\\
\Omega'_\mu(e) &= \frac{1}{Z}\Omega'_{\mu 0}(e_0).
\end{aligned}\right\} \tag{12,101}$$

我們注意，$\Gamma'_\mu, S'_f, D'_f, \Omega'_\mu, \Gamma'_{\mu 0}, S'_{f0}, D'_{f0}, \Omega'_{\mu 0}$不仅各是相应动量的函数，而且也是重整化了的质量$m_0$和$e$的函数. 上式的含义是，各式左右二方表式的动量变量以及质量都取相同的数值，但是电荷取不同的数值. 在各式左方，电荷取沒有重整化过的数值e；在各式的右方，电荷取重整化了的数值e_0：

$$e_0 = \sqrt{Z}\, e. \tag{12,102}$$

我們首先来証明，假使(12,101)成立，就有：

$$\left.\begin{aligned}
\Lambda_\mu(e) &= \frac{1}{Z'}\Lambda_{\mu s}(e_0),\\
\Delta_\mu(e) &= \frac{1}{Z}\Delta_{\mu s}(e_0).
\end{aligned}\right\} \tag{12,103}$$

根据定义，$\Lambda_\mu(e)$是用下面的方法求得的：将所有不可約化的頂角图形画下来. 用$S'_f(e)$、$D'_f(e)$和$\Gamma'_\mu(e)$代表电子綫、光子綫和頂角，写下与每一个图相应的矩陣表式. 将所有这些表式加起来，就得到$\Lambda_\mu(e)$. 根据(12,86)，我們也可以用$Z'S'_{f0}(e_0)$，$ZD'_{f0}(e_0)$和$\frac{1}{Z'}\Gamma'_{\mu 0}(e_0)$代表电子綫、光子綫和頂角. 另一方面，假使我們用$S'_{f0}(e)$、$D'_{f0}(e)$和$\Gamma'_{\mu 0}(e)$代表电子綫、光子綫和頂角，則所得到的表式就是$\Lambda_{\mu s}(e)$. 我們討論一个具有$n$个頂角的頂角图形的表式；它是$S^{(n)}$的一部分，其中有$(n-1)$条内部电子綫和$\frac{1}{2}(n-1)$条内部光子綫，前面有一个因子$e^{(n-1)}$. 当然，$S^{(n)}$是与$e^n$成正比的. 但是，在計算頂角图形的表式时，我們不仅不将外部电子綫和外部光子

綫的因子考虑在内，而且还从 $S^{(n)}$ 中去掉一个因子：

$$-e(2\pi)^4\delta^4(p_2-p_1-k); \qquad (12,104)$$

因此顶角部分的表式只与 $e^{(n-1)}$ 成正比．在将 $Z'S'_{f0}(e_0)$，$ZD'_{f0}(e_0)$，$\frac{1}{Z'}\Gamma'_{\mu 0}(e_0)$ 代入表式中，代表电子綫、光子綫和顶角以后，则得到的结果实际上与将 $S'_{f0}(e)$，$D'_{f0}(e)$，$\Gamma'_{\mu 0}(e)$ 代入而另外乘上一个因子

$$Z'^{-1}Z^{\frac{1}{2}(n-1)} \qquad (12,105)$$

等同；上式中的因子 $Z^{\frac{1}{2}(n-1)}$ 可以和表式中的 $e^{(n-1)}$ 并在一起，成为 $e_0^{(n-1)}$．因此总的结果是：将 $S'_{f0}(e)$，$D'_{f0}(e)$ 和 $\Gamma'_{\mu 0}(e)$ 代表电子綫、光子綫和顶角，将表式中原有的 e 换作 e_0，最后乘上一个因子 $\frac{1}{Z'}$．这就証明了(12,103)中第一式的正确性．用同样的方法也可以証明 (12,103) 中第二式的正确性．

从(12,103)可以得：

$$\Gamma'_\mu(e)=\gamma_\mu+\frac{1}{Z'}\{L(e_0)\gamma_\mu+\Lambda_{\mu f}(e_0)\}, \qquad (12,105)$$

其中我們利用了公式(12,64)．假使我們取

$$Z'=1-L(e_0), \qquad (12,106)$$

那末从(12,105)重又得到(12,101)中的第一式．同样，假使取

$$Z=1+C(e_0) \qquad (12,107)$$

那末用类似的方法，可以从(12,103)中的第二式重又得到(12,101)中的第四式．这就証明了(12,101)中的第一式和第四式是与整个理論相一致的．

另一方面，也可以利用韋德定理、公式 (12,71) 和 (12,101)中的第一式，得到：

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu}S'^{-1}_{f0}(e_0,p)=-Z'(2\pi)^4\Gamma'_\mu(e,p,p). \qquad (12,108)$$

从(12,63)和(12,100)可以得：

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu}S'^{-1}_f(e,p)=-(2\pi)^4\Gamma'_\mu(e,p,p). \qquad (12,109)$$

从上二式可得：

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu}\{S'^{-1}_{f0}(e_0) - Z'S'_f(e)\} = 0. \qquad (12,110)$$

将上式对 dp_μ 积分以后，可得：

$$S'^{-1}_{f0}(e_0) - Z'S'_f(e) = R, \qquad (12,111)$$

其中 R 是一个与 p 无关的常数。可以証明，R 等于零：令 $u(p)$ 代表自由电子的波函数，就有：

$$\bar{u}(p)\{S'^{-1}_{f0}(e_0) - Z'S'^{-1}_f(e)\}u(p) =$$

$$= R\bar{u}(p)u(p) = R\frac{m_0}{E}. \qquad (12,112)$$

因为在洛仑兹变换中，R 是一个标量，因此它不可能是 γ 矩阵。由于

$$S_f^{-1}(p)u(p) = 0, \qquad (12,113)$$

可以利用公式(12,70)証明：

$$\bar{u}(p)S'^{-1}_{f0}(e_0)u(p) = 0. \qquad (12,114)$$

从(12,109)和(12,113)，可以証明：

$$\bar{u}(p)S'^{-1}_f(p)u(p) = 0, \qquad (12,115)$$

因为 $[\Sigma^*(p) + i\delta m(2\pi)^4]$ 在展开成为 $S_f^{-1}(p)$ 的幂級数时，沒有与 $S_f^{-1}(p)$ 无关的項。从(12,112)、(12,114)和(12,115)三式我們可以看出，R 一定等于零。于是(12,111)式就等同于(12,101)中的第二式。用同样的方法可以証明：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial k_\mu}D'_{f0}(e_0,k) &= -Z(2\pi)^4\Omega'_\mu(e,k,k),\\ \frac{\partial}{\partial k_\mu}D'^{-1}_f(e,k) &= -(2\pi)^4\Omega'_\mu(e,k,k);\end{aligned}\right\} \qquad (12,116)$$

因此有：

$$\frac{\partial}{\partial k_\mu}\{D'^{-1}_{f0}(e_0) - ZD'^{-1}_f(e)\} = 0. \qquad (12,117)$$

将上式对 dk_μ 积分，可得：

$$D'^{-1}_{f0}(e_0) - ZD'^{-1}_f(e) = T, \qquad (12,118)$$

其中 T 是一个与 k 无关的常数，当 $k=0$ 时，

$$D_f^{-1}(k)=0; \tag{12,119}$$

因此有：

$$\left.\begin{aligned} D_{f0}'^{-1}(e_0) &= D_f^{-1}(e_0)-D_f^{-1}(e_0)\Pi_f'(e_0)D_f^{-1}(e_0)=0,\\ D_f'^{-1}(e) &= D_f^{-1}(e)-\Pi^*(e)=0. \end{aligned}\right\} \tag{12,120}$$

由于规范不变性的要求，$\Pi^*(e,k=0)=0$；因而就証明了 T 等于零．于是(12,118)式就等同于(12,101)中的第三式．这样我們就証明了，(12,101) 中的第二式和第三式也是与整个理論相一致的．将以上証明中所用的方法运用到 §12,6，§12,7 和 §12,8 三节中的討論中去；那末，不难証明，用逐步近似法逐步地分出电子自能图形、真空极化图形和頂角图形中所包含的无穷大的过程，逐步地求得有限的、更精确的表式 $S_{f0}^{(2n)}(p)$，$D_{f0}^{(2n)}(k)$ 和 $\Gamma_{\mu 0}^{(2n)}(p_1,p_2)$ 的过程，实际上也就是逐步地进行质量重整化和电荷重整化的过程．第十章中的討論就是这一証明方法在最低次近似中的应用．

以上的討論証明了，应該将电子传播函数、光子传播函数和頂角函数中的 e 进行电荷重整化，改成 e_0．剩下的問題是如何将代表外部电子綫和外部光子綫的波函数也进行重整化．令 $u'(p)$ $\bar{u}'(p)$ 和 $a'(k)$ 代表包括所有高次效应的外部电子綫和外部光子綫，以 $u(p)$、$\bar{u}(p)$ 和 $a(k)$ 代表零次近似的外部电子綫和外部光子綫．那末，在經过质量重整化以后，它們之間存在着如下的关系：

$$\left.\begin{aligned} u'(p) &= \{1+S_f'(e)[\Sigma^*(e)+i\delta m(2\pi)^4]\}u(p),\\ \bar{u}'(p) &= \bar{u}(p)\{1+[\Sigma^*(e)+i\delta m(2\pi)^4]S_f'(e)\},\\ a'(k) &= \{1+D_f'(e)\Pi^*(e)\}a(k). \end{aligned}\right\} \tag{12,121}$$

以上三个公式都是不定式．例如，假使(12,121)的第一式右方的算符 $[\Sigma^*(e)+i\delta m(2\pi)^4]$ 先作用在右端的波函数 $u(p)$ 上，那末就有：

$$u'(p)=u(p), \tag{12,122}$$

因为当 $[\Sigma^*(e)+i\delta m(2\pi)^4]$ 展开成为 $S_f^{-1}(p)$ 的冪級数时，沒有

与 $S_f^{-1}(p)$ 无关的项；而 $S_f^{-1}(p)u(p) = 0$. 但是，假使将 $[\Sigma^*(e) + i\delta m(2\pi)^4]$ 先作用在左边的 $S_f'(e)$ 上，那末，利用 (12,100)，(12,101)和(12,69)，就得：

$$1 + S_f'(e)[\Sigma^*(e) + i\delta m(2\pi)^4] = Z'[1 + S_{f0}'(e_0)\Sigma_f(e_0)S_f^{-2}(p)]. \tag{12,123}$$

代入 (12,121) 中的第一式，就得：

$$u'(p) = Z'u(p). \tag{12,124}$$

为了确定 $u'(p)$，$\bar{u}'(p)$，$a'(k)$ 和 $u(p)$，$\bar{u}(p)$，$a(k)$ 之間的正确关系，可以采用第十章中曾經用过的方法，将二条外部綫当作一条很长的内部綫的二端. 应用这样的考虑，就得到如下的关系：

$$\left.\begin{aligned} u'(p) &= \sqrt{Z'}\,u(p), \\ \bar{u}'(p) &= \sqrt{Z'}\,\bar{u}(p), \\ a'(k) &= \sqrt{Z}\,a(k). \end{aligned}\right\} \tag{12,125}$$

公式(12,101)和(12,125)是电荷重整化的基础.

当需要計算任何物理过程的 S 矩陣元的时候，我們先将所有相应于这一过程的不可約化的图形画出来. 然后，按下列規則将相应的矩陣元写下：

1) 以 $Z'^{-1}\Gamma_{\mu 0}'(e_0)$ 代表頂角，

2) 以 $Z'S_{f0}'(e_0)$ 代表内部电子綫，

3) 以 $ZD_{f0}'(e_0)$ 代表内部光子綫，

4) 以 $\sqrt{Z'}\,u(p)$ 或 $\sqrt{Z'}\bar{u}(p)$ 代表外部电子綫，

5) 以 $\sqrt{Z}\,a(k)$ 代表外部光子綫.

举一个例：有一个属于 $S^{(n)}$ 的不可約化的图形，具有：

1) n 个頂角，

2) E_i 条内部电子綫，

3) P_i 条内部光子綫，

4) E_e 条外部电子綫，

5) P_e 条外部光子綫.

計算的过程实际上等效于以 $S_{f0}'(e_0)$，$D_{f0}'(e_0)$，$\Gamma_{\mu 0}'(e_0)$，$u(p)$，$\bar{u}(p)$

和 $a(k)$ 分别代表内部电子綫、内部光子綫、頂角、外部电子綫和外部光子綫，此外，再将整个矩陣元表式乘上一个因子：

$$Z'^{(-n+E_i+\frac{E_e}{2})}\cdot Z^{(P_i+\frac{P_e}{2})}=(\sqrt{Z})^n, \qquad (12,126)$$

其中我們应用了关系 (12,7)。 由于这一表式是属于 $S^{(n)}$ 的，其中一定有一个因子 e^n；将它和上式中的因子 $(\sqrt{Z})^n$ 合并起来，就得到 e_0^n。这样，在矩陣元中就不再出現未經重整化的电荷 e 和质量 m，而只出現重整化了的电荷 e_0 和质量 m_0。我們令 e_0 和 m_0 取实驗上所观察到的电子电荷和电子质量的数值。于是，計算的方法归結为：将与所討論的物理过程相应的所有不可約化的图形画下；

1) 以 $\Gamma'_{\mu 0}$ 代表頂角，

2) 以 S'_{f0} 代表内部电子綫，

3) 以 D'_{fc} 代表内部光子綫，

4) 以 $u,\bar{u}$ 代表外部电子綫，

5) 以 a 代表外部光子綫；

如此組成相应的 S 矩陣元。所有以上的表式都是有限的，包含了全部的輻射修正。一切紫外发散困难都已消失。

§ 12,10. 其它量子場的重整化

我們也可以将重整化的方法应用到其它的量子場的理論中去，以避免場的无穷多自由度所带来的发散困难。但是这种推广是有局限性的。在許多情况下，存在着无穷多种的原始性发散的图形。只依靠重整化的方法，仅仅調整或引进有限的几个常数，是不足以将这些无穷多种的原始性发散消去的。例如，费曼和盖尔曼所提出的普适费米弱相互作用

$$\frac{G}{\sqrt{2}}(\bar{\psi}_a\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_b)(\bar{\psi}_c\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_d) \qquad (12,127)$$

的理論中就包含有无穷多种的原始发散，这些原始发散并不能用重整化的方法消去。(12,127) 式中的 a, b, c 和 d 标志四种費米

子．这种理論的費曼图形由費米子綫和頂角組成，后者是四条費米子綫的相交点．假使有一費曼图形，具有 n 个頂角、F_i 条內部費米子綫和 F_e 条外部費米子綫，則不难看出，与这一图形相应的矩陣表式的分母是內部动量的 $2F_i$ 次函数，而分子則是內部动量的 $\{4(F_i - n + 1) + F_i\}$ 次函数．因此，假使

$$\xi = \{4(F_i - n + 1) + F_i\} - 2F_i \geqslant 0, \qquad (12,128)$$

那末积分就可能是发散的．利用关系

$$2n = F_i + 2F_e \qquad (12,129)$$

可以将条件(12,128)写作

$$\xi = 2n + 4 - 6F_e \geqslant 0; \qquad (12,130)$$

因此，只要 n 够大，任何这种費米弱相互作用过程的矩陣元都可以是原始发散的．用同样的方法也可以看出，假使核子与 π 介子場的相互作用包含了介子場量的微商，如(7,65)式所示的話，那末在理論中也將出現无穷多种的原始发散，它們不能用重整化的方法消去．

当然，也有一些理論可以用重整化的方法消去发散困难．例如：贋标量介子与核子之間的贋标量耦合、标量介子与核子之間的标量耦合的理論中的发散困难，都可以用重整化的方法消去．这些理論中的重整化比量子电动力学中的重整化略較复杂，这是因为这些理論并不具有某些量子电动力学所具有的对称性．例如，介子与核子之間的相互作用就不具有規范不变性．因此，虽然在量子电动力学中，光子与光子之間的相互散射过程不是原始发散的过程，但是，在介子与核子的相互作用理論中，介子与介子之間的相互散射却是原始发散的过程．因而仅仅进行質量重整化和相互作用常数重整化，是不足以消去介子与核子相互作用理論中所包含的无穷大的．有必要在相互作用哈密頓量密度中引入如下的項：

$$\frac{1}{4}\delta\lambda(\vec{\varphi}\cdot\vec{\varphi})(\vec{\varphi}\cdot\vec{\varphi}), \qquad (12,131)$$

能消去介子相互散射理論中所出現的无穷大．上式中的

$\vec{\phi}$代表π介子場量，它是同位旋空間中的矢量．此外，在有些情況下，法雷定理也不能随意推广应用．例如，法雷定理不能推广到中性标量介子与核子的相互作用理論中去；必須在相互作用哈密頓量密度中引入如下的項：

$$\frac{1}{3}\delta\lambda\phi^3, \tag{12,132}$$

才能避免具有三条外部介子綫的图形所包含的发散困难．

本章中所用的重整化方法主要是由戴逊［Dyson, 1949］所提出的，并經过华德补充．薩拉姆［Salam, 1951］曾証明了，在介子場与核子場之間不包含有場量微商的相互作用理論中的无穷大，可以用重整化的方法消去．

所有这些討論只証明了，某些理論中的各次近似的矩陣元經过重整化以后不再发散；但并沒有証明，将所有各次近似中的有限的矩陣元加起来，仍旧得到有限的結果．戴逊［Dyson, 1952］指出，这样得到的級数很可能是发散的，也可能是正确理論的漸近展开．这些情况說明：現在的量子場論包含有合理的内核，但是也还存在有内在的矛盾，有待于进一步的发展和解决．

参 考 文 献

Dyson, F. J. (1949), *Phys. Rev.*, 75, 486, 1736.
Dyson, F. J. (1952), *Phys. Rev.*, 85, 631.
Furry, W. H. (1937), *Phys. Rev.*, 51, 125.
Salam, A. (1951), *Phys. Rev.*, 82, 217.
Salam, A. (1951), *Phys. Rev.*, 84, 426.
Ward, J. C. (1950), *Phys. Rev.*, 78, 182.
Ward, J. C. (1951), *Phys. Rev.*, 84, 497.

第十三章　海森堡表象

§13,1. 海森堡表象与相互作用表象間的連系

本书介紹量子場論是从海森堡表象中的量子場論开始的. 在引入了相互作用以后,为了使理論納入显示的洛仑兹不变的形式,使运算的每一步驟都具有显示的洛仑兹不变性,我們引入了相互作用表象. 以后又进一步发展了微扰論,用以处理了一系列的电磁相互作用現象和弱相互作用現象,分析了量子場論中所出現的发散困难的性質,制定了避免这些困难的重整化方法. 所有这些成就都說明了相互作用表象和微扰論的优点. 但是也不能忽視,相互作用表象和微扰論也具有很大的局限性,它們不适用于处理牽涉到强相互作用的現象. 以 π 介子与核子間的相互作用为例,假使取(7,26)式作为相互作用哈密頓量密度,那末

$$\frac{g^2}{4\pi} = 15. \tag{13,1}$$

微扰論的計算結果实际上是相互作用常数的冪級数. 当相互作用常数达到如(13,1)中的数值的时候,高次項和低次項相比較,不仅不能略去,且完全有可能高次項的貢献远远超过低次項的貢献. 因此,如只計算最低次的几个近似就沒有意义,于是,微扰論用于討論这些問題的时候就显得沒有什么用处. 应該說,到目前为止,还沒有寻找到能处理牽涉到强相互作用的現象的普遍而有效的方法. 寻求能处理强相互作用的方法是目前量子場論亟待解决的問題之一.

在利用相互作用表象,将量子場論中的一些基本特点、基本困难和克服这些困难的方法加以研究以后,再回过头来运用海森堡表象处理問題,便会有很多方便之处. 在这一章和下一章中我們将进一步介紹海森堡表象中的量子場論,并将举例說明如何利用

海森堡表象來处理問題的一些方法. 这些方法至今都还有很大的局限性,但是它們却也是值得注意的、超出微扰范围的尝試的初步成就.

在海森堡表象中,波函数不随时間而变,場量在时間中的变化由总哈密頓量决定,如(7,1)式所示. 在薛定格表象中,場量不随时間而变,波函数在时間中的变化由总哈密頓量决定,如(7,5)式所示,在相互作用表象中,波函数和場量都随着时間而变;波函数在时間中的变化中相互作用哈密頓量决定,場量在时間中的变化則由自由場的哈密頓量决定,如(7,8)式所示. 在海森堡表象与薛定格表象之間,存在着如下的連系:

$$\left.\begin{aligned} {}^{(薛)}|t\rangle &= e^{-iHt}{}^{(海)}|\rangle, \\ {}^{(薛)}F(x) &= e^{-iHt}{}^{(海)}F(x)e^{iHt}; \end{aligned}\right\} \tag{13,2}$$

其中 H 是总哈密頓量,在海森堡表象和薛定格表象中都不随时間而变. 在薛定格表象与相互作用表象之間存在着如下的連系:

$$\left.\begin{aligned} {}^{(相互)}|t\rangle &= e^{iH_0t}{}^{(薛)}|t\rangle, \\ {}^{(相互)}F(x) &= e^{iH_0t}{}^{(薛)}F(x)e^{-iH_0t}; \end{aligned}\right\} \tag{13,3}$$

其中 H_0 是自由場的哈密頓量,在薛定格表象和相互作用表象中都不随时間而变. 在相互作用表象与海森堡表象之間存在着如下的連系:

$$\left.\begin{aligned} {}^{(相互)}|t\rangle &= u(t){}^{(海)}|\rangle, \\ {}^{(相互)}F(x) &= u(t){}^{(海)}F(x)u^{-1}(t); \end{aligned}\right\} \tag{13,4}$$

其中

$$u(t) = e^{iH_0t}\cdot e^{-iHt}. \tag{13,5}$$

注意,不能將上式右方写为 $e^{i(H_0-H)t} = e^{-Ht}$,因为 H_0 和 H 并不一定是可以相互对易的. 从以上四式可以看出,当 $t=0$ 的时候,这三个表象中的波函数和場量是相同的;然而,由于它們各具有不同的随时間而变的規律,当 t 不等于零的时候,这三个表象中的波函数和場量就不相同. 注意到,${}^{(海)}|\rangle$ 就等于在 $t=0$ 的时候的相互作用表象中的波函数,因此,如将(13,4)中的第一式和(8,2)式相比

較,就可知:

$$u(t) = u(t, 0), \tag{13,6}$$

其中 $u(t, t_0)$ 的定义見(8,3)式和(8,4)式. 因此, 可以将(13,4)式改写成如下的形式:

$$\left.\begin{aligned} {}^{(\text{相互})}|x_0\rangle &= u(x_0, 0)^{(\text{海})}|\rangle, \\ {}^{(\text{相互})}F(x) &= u(x_0, 0)^{(\text{海})}F(x)u(0, x_0). \end{aligned}\right\} \tag{13,7}$$

也可以将上式倒过来写作:

$$\left.\begin{aligned} {}^{(\text{海})}|\rangle &= u(0, x_0)^{(\text{相互})}|x_0\rangle, \\ {}^{(\text{海})}F(x) &= u(0, x_0)^{(\text{相互})}F(x)u(x_0, 0). \end{aligned}\right\} \tag{13,8}$$

应該指出,(13,7)和(13,8)中所給的連系只是可能形式中的一种,因为每一种表象只确定到一个不随时間而变的么正变換. 例如,在薛定格表象中还可以有动量表象、角动量表象等等,彼此之間由么正变換連系起来. 因此,在海森堡表象与相互作用表象之間的連系也只能确定到一个不随时間而变的么正变換. (13,7) 和 (13,8) 式中所給出的連系方式对以后的討論将給予不少的方便,因此我們将在本书中采用它. 当然,我們也完全可以选择另一种連系的方式, 使相互作用表象和海森堡表象中的波函数和場量不在 $t = 0$ 时相符合,而在 $t = t_0$ 时相符合. 但是,在本书中我們不拟采用这样的联系方式.

§ 13,2. 眞空的波函数

在相互作用表象中,我們以 $|\rangle_0$ 代表在 $t = -\infty$ 时或 $t = \infty$ 时的眞空状态, 这里 $|\rangle_0$ 代表什么粒子也沒有的态. 实际上,眞空并不是单純的一个粒子也沒有的态. 由于相互作用的存在, 产生眞空涨落現象. 在眞空中不断有虛粒子产生和湮沒. 在相互作用表象中,在时間 t 的眞空状态用波函数

$$u(t, -\infty)|\rangle_0 \tag{13,9}$$

描述. 不难看出,在相互作用表象中的波函数 (13,9) 并不代表什么粒子也沒有的态. 可以根据(13,8)写下海森堡表象中的眞空的

波函数. 为了书写方便起見,我們将略去标符(相互)和(海),而以 $|\rangle$ 和 $\|\rangle$ 分别代表相互作用表象和海森堡表象中的波函数,以普通字母如 F 和黑体字母如 $\mathbf{F}$ 分别代表相互作用表象和海森堡表象中的場量. 利用这样的符号,可以将(13,7)和(13,8)写作:

$$\left.\begin{aligned} &|x_0\rangle = u(x_0, 0)\|\rangle; \quad \|\rangle = u(0, x_0)|x_0\rangle; \\ &F(x) = u(x_0, 0)\mathbf{F}(x)u(0, x_0); \\ &\mathbf{F}(x) = u(0, x_0)F(x)u(x_0, 0). \end{aligned}\right\} \tag{13,10}$$

可以将海森堡表象中的眞空的波函数写作:

$$\|\rangle_0^{(\text{进})} = u(0, -\infty)|\rangle_0; \tag{13,11}$$

$\|\rangle_0^{(\text{进})}$ 所代表的态的物理意义是很清楚的: 这一个态在 $t = -\infty$ 时代表什么粒子也不存在的情况. 我們也可以将海森堡表象中的眞空的波函数写作:

$$\|\rangle_0^{(\text{出})} = u(0, \infty)|\rangle_0; \tag{13,12}$$

$\|\rangle_0^{(\text{出})}$ 所代表的态的物理意义也是很清楚的: 这一个态在 $t = \infty$ 时代表什么粒子也不存在的情况. 从(8,103)可得:

$${}^{(\text{出})}{}_0\langle\|\cdot\|\rangle_0^{(\text{进})} = {}_0\langle|S|\rangle_0 = e^{-L}, \tag{13,13}$$

其中 $S = u(\infty, -\infty)$ 代表散射矩陣, L 是一个无穷大的虚数. 由于 $\|\rangle_0^{(\text{进})}$ 和 $\|\rangle_0^{(\text{出})}$ 都是归一化的波函数,我們可以从(13,13)看出:

$$\|\rangle_0^{(\text{出})} = e^{-L}\|\rangle_0^{(\text{进})}. \tag{13,14}$$

这二个波函数只相差一个相角,因此代表同一物理状态.

可以这样来理解(13,11)和(13,12)式. 在 $t = -\infty$ 时,相互作用不存在,因此在那时 $|\rangle_0$ 就代表眞空态. 在这以后,相互作用逐渐发生,眞空的波函数也随着改变. 到 $t = 0$ 时,全部相互作用都已产生并在起着作用,那时的波函数就代表物理上的眞空. 然后,相互作用又逐渐消失. 到 $t = \infty$ 时,相互作用已不复存在,眞空状态重又由 $|\rangle_0$ 代表. 盖尔曼和駱 [Gell-Mann & Low, 1951] 曾証明: $\|\rangle_0^{(\text{进})}$ 和 $\|\rangle_0^{(\text{出})}$ 都是总哈密頓量 $\mathbf{H}$ 的本征态, 亦即都是定态. 証明如下:令相互作用哈密頓量具有如下的形式:

$$H_i(x_0)e^{-a|x_0|}, \tag{13,15}$$

α 是一个微小的正数. 当 $x_0 = -\infty$ 和 $x_0 = +\infty$ 时,相互作用消失; 当 $x_0 = 0$ 的时候, 全部相互作用起作用. 在下面将先用(13,15)来計算相应的真空态的波函数,然后令 $\alpha \to 0$,这样得到的結果就趋近于 $|\rangle_0^{(退)}$ 或 $|\rangle_0^{(出)}$. 利用(8,21)可得:

$$|\rangle_{0(\alpha)}^{(退)} = u_{(\alpha)}(0, -\infty)|\rangle_0 =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{0} dt_n \int_{-\infty}^{0} dt_{(n-1)} \cdots$$

$$\int_{-\infty}^{0} dt_1 e^{+\alpha(t_n + t_{n-1} + \cdots + t_1)} \mathrm{T}[H_i(t_n) \cdots H_i(x_1)]|\rangle_0. \tag{13,16}$$

我們以字母 α 标志利用相互作用(13,15)所計算得到的各种表式. 由于 $|\rangle_0$ 是自由場的哈密頓量 H_0 的本征函数, 令 ϵ_0 代表其相应的本征值,就有:

$$(H_0 - \epsilon_0)|\rangle_{0(\alpha)}^{(退)} = [H_0, u_{(\alpha)}(0, -\infty)]|\rangle_0. \tag{13,17}$$

利用(7,20)中的第二式,就得:

$$(H_0 - \epsilon_0)|\rangle_{0(\alpha)}^{(退)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^{n-1}}{(n-1)!} \int_{-\infty}^{0} dt_n \cdots$$

$$\int_{-\infty}^{0} dt_1 e^{\alpha(t_n + \cdots + t_1)} \frac{\partial}{\partial t_n} \mathrm{T}[H_i(t_n) \cdots H_i(t_1)]|\rangle_0 =$$

$$= -H_i(0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{0} dt_n \cdots$$

$$\int_{-\infty}^{0} dt_1 e^{\alpha(t_n + \cdots + t_1)} \mathrm{T}[H_i(t_n) \cdots H_i(t_1)]|\rangle_0 +$$

$$+ \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^{n-1}}{(n-1)!} \int_{-\infty}^{0} dt_n \cdots$$

$$\int_{-\infty}^{0} dt_1 e^{\alpha(t_n + \cdots + t_1)} \mathrm{T}[H_i(t_n) \cdots H_i(t_1)]|\rangle_0. \tag{13,18}$$

我們令 $H_i(t)$ 和某一个常数 g 成正比,于是就可以将上式写作:

$$(H_0 - \epsilon_0)|\rangle_{0(\alpha)}^{(退)} = -H_i(0)|\rangle_{0(\alpha)}^{(退)} + i\alpha g \frac{\partial}{\partial g}|\rangle_{0(\alpha)}^{(退)}. \tag{13,19}$$

注意到，$\mathbf{H} = H_0 + H_I(0)$ 就是海森堡表象中的总哈密頓量，因而可以将上式写作：

$$(\mathbf{H} - \epsilon_0)\|\rangle_{0(\alpha)}^{(进)} = i\alpha g \frac{\partial}{\partial g}\|\rangle_{0(\alpha)}^{(进)}. \tag{13,20}$$

列入符号 $\|\alpha\rangle_0^{(进)}$，他所代表的表式是：

$$\|\alpha\rangle_0^{(进)} = \frac{\|\rangle_{0(\alpha)}^{(进)}}{{}_0\langle|u_\alpha(0,-\infty)|\rangle_0}. \tag{13,21}$$

不难从(13,20)和(13,21)式得到：

$$\left\{\mathbf{H} - \epsilon_0 - i\alpha g\frac{\partial}{\partial g}\right\}|\alpha\rangle_0^{(进)} =$$

$$= \left\{i\alpha g\frac{\partial}{\partial g}[\ln{}_0\langle|u_{(\alpha)}(0,-\infty)|\rangle_0]\right\}\|\alpha\rangle_0^{(进)}; \tag{13,22}$$

此外，从(13,20)可以得：

$${}_0\langle|(\mathbf{H} - \epsilon_0)\|\alpha\rangle_0^{(进)} = i\alpha g\frac{\partial}{\partial g}[\ln{}_0\langle|u_{(\alpha)}(0,-\infty)|\rangle_0]. \tag{13,23}$$

将(13,23)和(13,22)式合并起来，并令 $\alpha \to 0$，我們得：

$$(\mathbf{H} - E_0)\|\rangle_0^{(进)} = 0, \tag{13,24}$$

其中

$$E_0 = \epsilon_0 + \lim_{\alpha\to 0}{}_0\langle|(\mathbf{H} - \epsilon_0)\|\alpha\rangle_0^{(进)}. \tag{13,25}$$

考虑到

$${}_0\langle|1\|\alpha\rangle_0^{(进)} = 1, \tag{13,26}$$

可見(13,24) 和 (13,25)式是相互一致的. 用同样的方法可以証明 $\|\rangle_0^{(出)}$ 也是总哈密頓量 $\mathbf{H}$ 的本征态.

E_0 是眞空态的能量. 在实验中，能量的定义常常是以眞空的能量作为零，以之为基准而确定的. 从洛仑兹不变性的要求看来，眞空不仅不应該具有动量，且也不应該具有能量. 在以后，我們将令 $E_0 = 0$，并假定眞空态的能量是最低的能量，其它任何态的能量都大于零.

(13,14)曾指出，$\|\rangle_0^{(出)}$ 与 $\|\rangle_0^{(进)}$ 之間相差一个相角. 这一相

角是由于真空涨落效应引起的，真空涨落效应归結于将所有的 S 矩陣元都改变相同的相角，因此它在物理上并不导致任何可以观察的效应。在以后，我們将真空涨落效应略去。这样就得：

$$|\rangle_0^{(\text{出})} = |\rangle_0^{(\text{进})} = |\rangle_0. \tag{13,27}$$

§ 13,3. 波函数和矩陣元

在相互作用表象中，波函数

$$a_\xi^* b_\eta^* c_\zeta^* \cdots |\rangle_0 \equiv |\xi, \eta, \zeta, \cdots\rangle \tag{13,28}$$

代表一个态，在这一个态中存在着一个力学量的数值为 ξ 的第一种粒子 a，一个力学量的数值为 η 的第二种粒子 b，一个力学量的数值为 ζ 的第三种粒子 $c\cdots$ 等等。在海森堡表象中，我們将引入如下二种波函数。第一种波函数的定义是：

$$|\xi, \eta, \zeta, \cdots\rangle^{(\text{进})} = u(0, -\infty)|\xi, \eta, \zeta, \cdots\rangle. \tag{13,29}$$

这一波函数在 $t = -\infty$ 时所代表的情态是：粒子 a 的力学量的数值为 ξ，粒子 b 的力学量的数值为 η，粒子 c 的力学量的数值为 $\zeta\cdots$ 等等。假使我們所討論的是散射問題，并取动量、自旋等为标志各种粒子所处的状态的力学量；那末(13,29)中的波函数就代表平面波加射出波。第二种波函数的定义是：

$$|\xi, \eta, \zeta, \cdots\rangle^{(\text{出})} = u(0, \infty)|\xi, \eta, \zeta, \cdots\rangle. \tag{13,30}$$

这一波函数在 $t = +\infty$ 时所代表的情态是：粒子 a 的力学量的数值为 ξ，粒子 b 的力学量的数值为 η，粒子 c 的力学量的数值为 $\zeta\cdots$ 等等。假使我們所討論的是散射問題，那末(13,30)中的波函数就代表平面波加射入波。不难看出：

$$^{(\text{出})}\langle\xi_2, \eta_2\cdots|1||\xi_1, \eta_1, \cdots\rangle^{(\text{进})} = \langle\xi_2, \eta_2\cdots|S|\xi_1, \eta_1\cdots\rangle \tag{13,31}$$

就是相互作用表象中从 $|\xi_1, \eta_1, \cdots\rangle$ 态散射到 $|\xi_2, \eta_2\cdots\rangle$ 态的 S 矩陣元。从(13,31)可以看出，在一般情况下，$|\xi, \eta, \cdots\rangle^{(\text{进})}$ 并不等于 $|\xi, \eta, \cdots\rangle^{(\text{出})}$。在上一节中我們証明了，假使略去真空涨落效应，那末真空的二种波函数 $|\rangle_0^{(\text{进})}$ 和 $|\rangle_0^{(\text{出})}$ 将完全相等。这是一个特殊的情况。另外的一个特殊情况是某一单独的稳定基本粒

子. 假使不考虑真空涨落效应和进行了质量重整化，那末基本粒子的二种波函数就将彼此相等. 以单个电子的波函数为例，設

$$\left.\begin{aligned}|\xi\rangle^{(进)} &= u(0, -\infty)a_\xi^*|\rangle_0,\\ |\xi\rangle^{(出)} &= u(0, \infty)a_\xi^*|\rangle_0\end{aligned}\right\}$$

代表力学量的数值等于 ξ 的单个电子的二种波函数，那末，由于已經进行了质量重整化，电子自能图形的貢献等于零，因此

$$^{(出)}\langle\xi|1|\xi\rangle^{(进)} = {}_0\langle|a_\xi S a_\xi^*|\rangle_0 = 1;$$

亦即

$$|\xi\rangle^{(出)} = |\xi\rangle^{(进)} = |\xi\rangle. \tag{13,32}$$

从公式(2,68)我們可以看出，总动量的各个分量以及总能量 $\mathbf{P}_\mu$ 可以彼此对易，因此它們可以具有共同的本征态. 这样的共同本征态具有一定的动量和能量. 設 $|\rangle_1$ 是这种共同本征态中的一个，具有动量-能量 $p_{1\mu}$；$|\rangle_2$ 是这种共同本征态中的另一个，具有动量-能量 $p_{2\mu}$；$\mathbf{F}(x)$ 是任何一个場量；那末矩陣元 ${}_2\langle|\mathbf{F}(x)|\rangle_1$ 作为 x 的函数将具有特别簡单的形式. 根据公式(2,67)，可得：

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}{}_2\langle|\mathbf{F}(x)|\rangle_1 = i(p_{1\mu} - p_{2\mu})_2\langle|\mathbf{F}(x)|\rangle_1.$$

将上式对 dx_μ 积分，可得：

$${}_2\langle|\mathbf{F}(x)|\rangle_1 = {}_2\langle|\mathbf{F}(0)|\rangle_1 e^{i(p_1-p_2)x}. \tag{13,33}$$

用同样的方法可以証明：

$$\left.\begin{aligned}{}_2\langle|\mathbf{F}(x)|\rangle_1 &= {}_2\langle|\mathbf{F}(x-y)|\rangle_1 e^{i(p_1-p_2)y},\\ {}_2\langle|\mathbf{F}(x)\mathbf{G}(x')|\rangle_1 &= {}_2\langle|\mathbf{F}(x-y)\mathbf{G}(x'-y)|\rangle_1 e^{i(p_1-p_2)y};\end{aligned}\right\} \tag{13,34}$$

其中 $\mathbf{G}(x')$ 也可以是任何一个場量.

§ 13,4. 传播函数

传播函数在海森堡表象中具有很簡单的形式. 以量子电动力学为例，可以証明，包含所有高次近似的貢献在內的电子传播函数就等于 ${}_0\langle|\mathrm{T}[\psi(x)\bar{\psi}(y)]|\rangle_0$. 根据(13,10)式，在 $x_0 > y_0$ 时，我們

有：

$$
{}_0\langle\|\mathrm{T}[\psi(x)\bar{\psi}(y)]\|\rangle_0 =
$$
$$
= {}_0\langle|u(\infty, x_0)\psi(x)u(x_0, y_0)\bar{\psi}(y)u(y_0, -\infty)|\rangle_0 \tag{13,35}
$$

在 $x_0 < y_0$ 时，我們有：

$$
{}_0\langle\|\mathrm{T}[\psi(x)\bar{\psi}(y)]\|\rangle_0 =
$$
$$
= -{}_0\langle|u(\infty, y_0)\bar{\psi}(y)u(y_0, x_0)\psi(x)u(x_0, -\infty)|\rangle_0. \tag{13,36}
$$

考慮到

$$
u(t_n, t_1) = \lim_{\Delta t\to 0}\prod_{m=1}^{n-1}\left(1 - i\int_{t_m}^{t_{m+1}=t_m+\Delta t} H_i(t)dt\right), \tag{13,37}
$$

其中时間早的因子排在右方，时間迟的因子排在左方，將 (13,37) 应用于(13,35)和(13,36)式，可得：

$$
{}_0\langle\|\mathrm{T}[\psi(x)\bar{\psi}(y)]\|\rangle_0 = {}_0\langle|\mathrm{T}[u(\infty, -\infty)\psi(x)\bar{\psi}(y)]|\rangle_0 =
$$
$$
= {}_0\langle|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}d^4x_n\cdots\int_{-\infty}^{\infty}d^4x_1\mathrm{T}[\mathscr{H}_i(x_n)\cdots
$$
$$
\mathscr{H}_i(x_1)\psi(x)\bar{\psi}(y)]|\rangle_0. \tag{13,38}
$$

假使我們按照維克的方法，將上式中的編时乘积展开成为正規乘积之和，那末显然只有那些全部算符因子都收縮了的項才作出貢献．考慮到

$$
\mathscr{H}_i(x) = -ie\mathrm{N}(\bar{\psi}(x)\hat{A}\psi(x)) - \delta m\bar{\psi}(x)\psi(x), \tag{13,39}
$$

可得：

$$
{}_0\langle\|\mathrm{T}[\psi(x)\bar{\psi}(y)]\|\rangle_0 = \psi^{\cdot}(x)\bar{\psi}^{\cdot}(y) +
$$
$$
+ i\delta m\int d^4x_1\bar{\psi}^{\cdot}(x_1)\psi^{\cdot\cdot}(x_1)\psi^{\cdot}(x)\bar{\psi}^{\cdot\cdot}(y) +
$$
$$
+ e^2\int d^4x_2\int d^4x_1\bar{\psi}^{\cdot}(x_2)\hat{A}^{\cdot\cdot}(x_2)\psi^{\cdot\cdot\cdot}(x_2)\bar{\psi}^{\cdot\cdot}(x_1)\times
$$
$$
\times\hat{A}^{\cdot\cdot}(x_1)\psi^{\cdot\cdot\cdot\cdot}(x_1)\psi^{\cdot}(x)\bar{\psi}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}(y) +
$$
$$
+\frac{e^2}{2}\int d^4x_2\int d^4x_1\bar{\psi}^{\cdot\cdot}(x_2)\hat{A}^{\cdot\cdot\cdot}(x_2)\psi^{\cdot\cdot\cdot\cdot}(x_2)\bar{\psi}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}(x_1)\times
$$

$$\times \hat{A}^{\cdots}(x_1)\psi^{\cdot\cdot}(x_1)\psi^{\cdot}(x)\bar{\psi}^{\cdot}(y) + \cdots =$$

$$= -\frac{1}{2}S_f(x-y) + i\delta m\int d^4x_1\left(-\frac{1}{2}\right)S_f(x-x_1)\times$$

$$\times\left(-\frac{1}{2}\right)S_f(x_1-y) + e^2\int d^4x_2\int d^4x_1\left(-\frac{1}{2}\right)\times$$

$$\times S_f(x-x_2)\gamma_\mu\frac{1}{2}D_f(x_2-x_1)\left(\frac{-1}{2}\right)S_f(x_2-x_1)\gamma_\mu\times$$

$$\times\left(\frac{-1}{2}\right)S_f(x_1-y) - \frac{e^2}{2}\int d^4x_2\int d^4x_1\left(\frac{-1}{2}\right)\times$$

$$\times S_f(x-y)\,\mathrm{Sp}\left\{\gamma_\mu\frac{1}{2}D_f(x_2-x_1)\left(\frac{-1}{2}\right)S_f(x_2-x_1)\gamma_\nu\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{-1}{2}\right)S_f(x_1-x_2)\right\} + \cdots. \qquad (13,40)$$

上式右方的第一項是电子传播函数的零次近似，第二項和第三項是包括质量重整化效应在内的一次近似修正，第四項是真空涨落效应的貢献。不难驗証，上式右方包括了所有的电子自能图形。这就証明了：

$$_0\langle\|\mathrm{T}[\psi(x)\bar{\psi}(y)]\|\rangle_0 = -\frac{1}{2}S'_f(x-y). \qquad (13,41)$$

用同样方法可以証明：

$$_0\langle\|\mathrm{T}[\mathbf{A}_\mu(x)\mathbf{A}_\nu(y)]\|\rangle_0 = \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}D'_f(x-y), \qquad (13,42)$$

設 $\varphi_j(x)$ 代表 π 介子場，則不难証明：

$$_0\langle\|\mathrm{T}[\varphi_j(x)\varphi_k(y)]\|\rangle_0 = \frac{1}{2}\delta_{jk}\Delta'_f(x-y), \qquad (13,43)$$

其中 $\Delta'_f(x-y)$ 代表包括所有高次近似的貢献在内的 π 介子的传播函数。

§ 13,5. S 矩陣元

S 矩陣元在海森堡表象中也具有比較簡单的形式。我們先以 π 介子为核子所散射为例来說明如何在海森堡表象中写下 S 矩陣

元. 設以 $\xi_1(p_1, s_1)$ 和 $\xi_2(p_2, s_2)$ 分別代表始态核子和終态核子的动量-能量和自旋-同位旋; 以 $\eta_1(k_1, r_1)$ 和 $\eta_2(k_2, r_2)$ 分別代表始态 π 介子和終态 π 介子的动量-能量和同位旋; 以 a_ξ 和 a_ξ^* 分別代表相互作用表象中核子的消失算符和产生算符; 以 c_η 和 c_η^* 分別代表相互作用表象中 π 介子的消失算符和产生算符; 以 $|\rangle_i$ 和 $|\rangle_f$ 分別代表相互作用表象中的始态和終态; 那末我們就有如下的 S 矩陣元:

$$\begin{aligned}{}_f\langle|S|\rangle_i &= {}_0\langle|a_{\xi_2}c_{\eta_2}u(\infty, -\infty)c_{\eta_1}^*a_{\xi_1}^*|\rangle_0 = \\ &= {}_0\langle|a_{\xi_2}c_{\eta_2}c_{\eta_1}^*u(\infty, -\infty)a_{\xi_1}^*|\rangle_0 + \\ &+ {}_0\langle|a_{\xi_2}c_{\eta_2}[u(\infty, -\infty), c_{\eta_1}^*]a_{\xi_1}^*|\rangle_0. \end{aligned} \tag{13,44}$$

由于 π 介子为核子所散射是強相互作用的現象, 在討論 π 介子为核子所散射的时候, 我們可以略去弱相互作用的影响, 而将中子当作一个稳定的基本粒子. 利用公式(13,32), 可以将上式右方第一項改写成比較簡单的形式:

$${}_0\langle|a_{\xi_2}c_{\eta_2}c_{\eta_1}^*u(\infty, -\infty)a_{\xi_1}^*|\rangle_0 = \delta_{\eta_2\eta_1}{}_0\langle|a_{\xi_2}Sa_{\xi_1}^*|\rangle_0 = \delta_{\eta_2\eta_1}\delta_{\xi_2\xi_1}. \tag{13,45}$$

为了求得(13,44)式右方第二項的表式, 我們利用公式(13,37), 得到:

$$\begin{aligned}&[u(\infty, -\infty), c_{\eta_1}^*] = \\ &= -i\int d^4x_1 u(\infty, t_1)[\mathscr{H}_i(x_1), c_{\eta_1}^*]u(t_1, -\infty). \end{aligned} \tag{13,46}$$

我們假定在这理論中是可以重整化的, 相互作用哈密頓量密度与場量的微商无关. 例如: 假使在开始时取表式(6,60)作为相互作用哈密頓量密度, 那末在进行了重整化以后, 相互作用哈密頓量密度应該具有如下的形式:

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_i(x) &= ig\bar{\Psi}\gamma_5\vec{\tau}\Psi\cdot\vec{\varphi} - \delta M\bar{\Psi}\Psi - \\ &- \frac{1}{2}\delta m^2\vec{\varphi}\cdot\vec{\varphi} + \frac{1}{4}\delta\lambda(\vec{\varphi}\cdot\vec{\varphi})^2. \end{aligned} \tag{13,47}$$

上式右方的第二項代表核子質量的重整化, 第三項代表 π 介子質

量的重整化，而第四項的作用在于消去 π 介子与 π 介子相互散射的图形所带来的无穷大. 由于

$$[\varphi_i(x_1), c^*_{\eta_1}] = \frac{r_{1i}}{\sqrt{2\omega_1}} e^{ik_1x_1}, \tag{13,48}$$

其中 ω_1 代表始态 π 介子的能量，r_{1i} 代表始态 π 介子的同位旋的第 i 分量，我們有：

$$[\mathscr{H}_i(x_1) c^*_{\eta_1}] = I_i(x_1) \cdot \frac{r_{1i}}{\sqrt{2\omega_1}} e^{ik_1x_1}, \tag{13,49}$$

其中

$$I_i(x_1) = \frac{\partial \mathscr{H}_i(x_1)}{\partial \varphi_i(x_1)}. \tag{13,50}$$

将上二式代入(13,46)，得：

$$[u(\infty, -\infty), c^*_{\eta_1}] = \\ = -i \int d^4x_1 \frac{r_{1i}}{\sqrt{2\omega_1}} e^{ik_1x_1} u(\infty, t_1) I_i(x_1) u(t_1, -\infty). \tag{13,51}$$

将上式代入(13,44)式右方的第二項，并利用(13,10)式，可得：

$${}_i\langle |S-1| \rangle_i = \\ = -i \int d^4x_1 \frac{r_{1i}}{\sqrt{2\omega_1}} e^{ik_1x_1(出)} \langle \xi_2, \eta_2 \| \mathbf{I}_i(x_1) \| \xi_1 \rangle^{(进)}. \tag{13,52}$$

由于在海森堡表象中有如下的运动方程：

$$(\Box - m^2)\varphi_i(x) = \mathbf{I}_i(x), \tag{13,53}$$

其中 m 代表重整化了的 π 介子質量；可以将式(13,52)改写为：

$${}_i\langle |S-1| \rangle_i = \\ = -i \int d^4x_1 \frac{e^{ik_1x_1}}{\sqrt{2\omega_1}} (\Box_1 - m^2)^{(出)} \langle \xi_2, \eta_2 \| \varphi_r(x_1) \| \xi_1 \rangle^{(进)}, \tag{13,54}$$

其中

$$\varphi_{r_1}(x_1) = r_{1i}, \varphi_i(x_1) \tag{13,55}$$

代表 $\vec{\varphi}(x_1)$ 在同位旋 r_1 方向的分量. 可以利用以上所用的方法，将(13,54)式进一步改写. 应用对易关系

$$[c_{\eta_2}, \varphi_k(x_2)] = \frac{r_{2k}}{\sqrt{2\omega_2}} e^{-ik_2x_2}, \tag{13,56}$$

其中 ω_2 代表終态 π 介子的能量，r_{2k} 代表終态 π 介子的同位旋的第 k 分量，可得:

$$\begin{aligned}
&{}^{(出)}\langle \xi_2, \eta_2 \| \varphi_{r_1}(x_1) \| \xi_1 \rangle^{(进)} = \\
&= {}_0\langle | a_{\xi_2} c_{\eta_2} u(\infty, t_1) \varphi_{r_1}(x_1) u(t_1, -\infty) a^*_{\xi_1} | \rangle_0 = \\
&= {}_0\langle | a_{\xi_2} [c_{\eta_2}, u(\infty, t_1) \varphi_{r_1}(x_1) u(t_1, -\infty)] a^*_{\xi_1} | \rangle_0,
\end{aligned} \tag{13,57}$$

其中

$$\begin{aligned}
&[c_{\eta_2}, u(\infty, t_1) \varphi_{r_1}(x_1) u(t_1, -\infty)] = \\
&= -i \int_{t_2=t_1}^{\infty} d^4x_2 \frac{r_{2k}}{\sqrt{2\omega_2}} e^{-ik_2x_2} u(\infty, t_2) I_k(x_2) u(t_2, t_1) \times \\
&\times \varphi_{r_1}(x_1) u(t_1, -\infty) + \frac{(r_2 r_1)}{\sqrt{2\omega_2}} e^{-ik_2x_1} u(\infty, -\infty) - \\
&- i \int_{-\infty}^{t_2=t_1} d^4x_2 \frac{r_{2k}}{\sqrt{2\omega_2}} e^{-ik_2x_2} u(\infty, t_1) \varphi_{r_1}(x_1) u(t_1, t_2) \times \\
&\times I_k(x_2) u(t_2, -\infty).
\end{aligned} \tag{13,58}$$

将以上二式代入 (13,54) 式，利用关系 $k_2^2 + m^2 = 0$，可以看出，(13,58) 式右方第二項的貢献等于零；因此得:

$$\begin{aligned}
{}_t\langle | S - 1 | \rangle_i = -\int d^4x_2 d^4x_1 \frac{e^{i(k_1x_1 - k_2x_2)}}{\sqrt{4\omega_1\omega_2}} (\Box_1 - m^2) \times \\
\times {}^{(出)}\langle \xi_2 \| \mathrm{T}[(\Box_2 - m^2) \varphi_{r_2}(x_2) \varphi_{r_1}(x_1)] \| \xi_1 \rangle^{(进)}.
\end{aligned} \tag{13,59}$$

我們再以光子与核子相互散射为例来說明如何在海森堡表象中写下 S 矩陣元. 我們沿用以上所引入的关于核子的符号，此外又以 $\zeta_1(k_1, e_1)$ 和 $\zeta_2(k_2, e_2)$ 分别代表始态光子和終态光子的动量-能量和极化矢量；以 b_ζ 和 b^*_ζ 分别代表相互作用表象中光子的消灭算符和产生算符；那末就得到如下的 S 矩陣元:

$$ {}_i\langle|S|\rangle_i = {}_0\langle|a_{\xi_2}b_{\zeta_2}u(\infty,-\infty)b^*_{\zeta_1}a^*_{\xi_1}|\rangle_0 = $$
$$ = \delta_{\zeta_2\zeta_1}\delta_{\xi_2\xi_1} + {}_0\langle|a_{\xi_2}b_{\zeta_2}[u(\infty,-\infty),b^*_{\zeta_1}]a^*_{\xi_1}|\rangle_0. \tag{13,60} $$

为了求得上式右方第二項的表式，我們可以利用公式(13,37)，得到：

$$ [u(\infty,-\infty),b^*_{\zeta_1}] = $$
$$ = -i\int d^4x_1 u(\infty,t_1)[\mathscr{H}_i(x_1),b^*_{\zeta_1}]u(t_1,-\infty), \tag{13,61} $$

其中 $\mathscr{H}_i(x)$ 代表相互作用哈密頓量密度，它可以具有很复杂的結构，因为核子不仅可以直接与电磁場相互作用，也可以通过 π 介子或其他粒子間接地和电磁場相互作用；核子的反常磁矩就可能是这样間接的电磁相互作用的表現的一个方面；因此，在 $\mathscr{H}_i(x)$ 中除了包含有如 (6,44) 中 $-\mathscr{L}_i$ 这种項以外，还应該包含有表式(13,47)，(6,36)等等一系列的項．虽然如此，我們仍旧假定 $\mathscr{H}_i(x)$ 与电磁 4-矢势 A_μ 的微商无关．由于

$$ [A_\nu(x_1),b^*_{\zeta_1}] = \frac{e_{1\nu}}{\sqrt{2\omega_1}}e^{ik_1x_1}, \tag{13,62} $$

其中 ω_1 代表始态光子的能量，$e_{1\nu}$ 代表始态光子极化矢量的第 ν 个分量，我們有：

$$ [\mathscr{H}_i(x_1)b^*_{\zeta_1}] = -J_\nu(x_1)\frac{e_{1\nu}}{\sqrt{2\omega_1}}\cdot e^{ik_1x_1}, \tag{13,63} $$

其中 $J(x_1)$ 代表电荷-电流密度．将上式代入式(13,61)，得：

$$ [u(\infty,-\infty),b^*_{\zeta_1}] = $$
$$ = i\int d^4x_1 \frac{e_{1\nu}}{\sqrt{2\omega_1}}e^{ik_1x_1}u(\infty,t_1)J_\nu(x_1)u(t_1,-\infty). \tag{13,64} $$

再將上式代入(13,60)，利用公式(13,10)，可得：

$$ {}_i\langle|S-1|\rangle_i = i\int d^4x_1 \frac{e_{1\nu}}{\sqrt{2\omega_1}}e^{ik_1x_1}{}^{(出)}\langle\xi_2,\zeta_2|\mathbf{J}_\nu(x_1)|\xi_1\rangle^{(进)}. \tag{13,65} $$

利用海森堡表象中的运动方程

$$\Box \mathbf{A}_\nu(x) = -\mathbf{J}_\nu(x) \tag{13,66}$$

可以将(13,65)式改写为：

$${}_f\langle|S-1|\rangle_i = -i\int d^4x_1 \frac{e^{ik_1x_1}}{\sqrt{2\omega_1}} \Box_1 {}^{(出)}\langle\xi_2, \zeta_2\|\mathbf{A}_{e_1}(x_1)\|\xi_1\rangle^{(进)}, \tag{13,67}$$

其中

$$\mathbf{A}_{e_1}(x_1) = e_{1\nu}\mathbf{A}_\nu(x_1). \tag{13,68}$$

我們还可以将(13,67)式进一步改写。首先有：

$$\begin{aligned}&{}^{(出)}\langle\xi_2\zeta_2\|\mathbf{A}_{e_1}(x_1)\|\xi_1\rangle^{(进)} = \\ &= {}_0\langle|a_{\xi_2}[b_{\zeta_2}, u(\infty, t_1)A_{e_1}(x_1)u(t_1, -\infty)]a^*_{\xi_1}|\rangle_0;\end{aligned} \tag{13,69}$$

利用对易关系

$$[b_{\zeta_2}, A_\mu(x_2)] = \frac{e_{2\mu}}{\sqrt{2\omega_2}}\cdot e^{-ik_2x_2}, \tag{13,70}$$

其中 ω_2 和 $e_{2\mu}$ 分别代表終态光子的能量和极化矢量的第 μ 个分量，于是可得：

$$\begin{aligned}&[b_{\zeta_2}, u(\infty, t_1)A_{e_1}(x_1)u(t_1, -\infty)] = \\ &= i\int_{t_2=t_1}^{\infty} d^4x_2 \frac{e_{2\mu}}{\sqrt{2\omega_2}}\cdot e^{-ik_2x_2}u(\infty, t_2)J_\mu(x_2)u(t_2, t_1)\times \\ &\times A_{e_1}(x_1)u(t_1, -\infty) + \frac{(e_2e_1)}{\sqrt{2\omega_2}} e^{-ik_2x_1}u(\infty, -\infty) + \\ &+ i\int_{-\infty}^{t_2=t_1} d^4x_2 \frac{e_{2\mu}}{\sqrt{2\omega_2}} e^{-ik_2x_2}u(\infty, t_1)A_{e_1}(x_1)u(t_1, t_2)\times \\ &\times J_\mu(x_2)u(t_2, -\infty).\end{aligned} \tag{13,71}$$

将(13,71)式代入(13,69)式，再将(13,69)式代入(13,67)式，利用关系 $k_2^2 = 0$ 和公式(13,66)，就得：

$$\begin{aligned}&{}_f\langle|S-1|\rangle_i = -\int d^4x_2d^4x_1 \frac{e^{i(k_1x_1-k_2x_2)}}{\sqrt{4\omega_1\omega_2}} \Box_1 \times \\ &\times {}^{(出)}\langle\xi_2\|\mathbf{T}[\Box_2\mathbf{A}_{e_2}(x_2)\mathbf{A}_{e_1}(x_1)]\|\xi_1\rangle^{(进)}.\end{aligned} \tag{13,72}$$

§ 13,6. 邱和駱的方程

公式(13,59)和(13,72)中的 S 矩陣元的表式不仅已經包含了所有高次近似的貢献，而且也已經进行了质量重整化. 用海森堡表象所写下的 S 矩陣元，就数学形式来說，显然比用相互作用表象所写下的 S 矩陣元要簡单些. 但是，在实际应用的时候，利用海森堡表象仍将遇到困难. 从(13,59)和(13,72)式中的表式可以看出，在实际应用的时候，关鍵問題在于如何求得海森堡表象中算符的矩陣元. 相互作用表象中的算符是自由場的算符，它們的矩陣元是我們所知道的. 但是，海森堡表象中的算符是相互作用着的場的算符，寻求这些算符的显示表式，等于寻求量子場論的全部解，这是十分困难的問題. 因此人們先設法寻求近似的、个别的解. 在近年来所作的尝試之中取得初步成就的，有邱和駱 [Low, 1955], [Chew & Low, 1956] 所提出的方法. 我們下面以 π 介子与核子的相互散射为例，来介紹邱和駱的理論.

利用公式(13,33)，我們可以将(13,52)式改写为：

$$
\begin{aligned}
{}_f\langle|S-1|\rangle_i &= -i\int d^4x_1 \frac{\tau_{1j}}{\sqrt{2\omega_1}} e^{i(k_1+p_1-k_2-p_2)x_1} \times \\
&\times {}^{(出)}\langle\xi_2, \eta_2\|\mathbf{I}_j(0)\|\xi_1\rangle^{(进)} = -i\frac{(2\pi)^4}{\sqrt{2\omega_1}}\delta^4(k_1+ \\
&+ p_1 - k_2 - p_2)^{(出)}\langle\xi_2, \eta_2\|\mathbf{I}_{\tau_1}(0)\|\xi_1\rangle^{(进)}; \qquad (13,73)
\end{aligned}
$$

其中

$$
\mathbf{I}_{\tau_1} = \tau_{1j}\mathbf{I}_j \qquad (13,74a)
$$

是 $\mathbf{I}$ 在同位旋空間中 τ_1 方向的分量. 可以用类似的方法将(13,59)式改写. 利用(13,53)式，有：

$$
\begin{aligned}
&(\Box_1 - m^2)\mathbf{T}[(\Box_2 - m^2)\varphi_{\tau_2}(x_2)\varphi_{\tau_1}(x_1)] = \\
&\quad = (\Box_1 - m^2)\mathbf{T}[\mathbf{I}_{\tau_2}(x_2)\varphi_{\tau_1}(x_1)] = \\
&\quad = (\Box_1 - m^2)\left\{\frac{1}{2}(1+\epsilon(t_2-t_1))\mathbf{I}_{\tau_2}(x_2)\varphi_{\tau_1}(x_1) + \right.
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{2}(1-\varepsilon(t_2-t_1))\Phi_{r_1}(x_1)\mathbf{I}_{r_2}(x_2)\Big\}=$$

$$=\mathbf{T}[\mathbf{I}_{r_2}(x_2)\mathbf{I}_{r_1}(x_1)]+2\delta(t_2-t_1)[\mathbf{I}_{r_2}(x_2),$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\Phi_{r_1}(x_1)]-\delta'(t_2-t_1)[\mathbf{I}_{r_2}(x_2),\Phi_{r_1}(x_1)]. \quad (13,74)$$

将上式代入(13,59)式,就得:

$${}_t\langle|S-1|\rangle_t=-\int d^4x_2d^4x_1\frac{e^{i(k_1x_1-k_2x_2)}}{\sqrt{4\omega_1\omega_2}}\times$$

$$\times{}^{(出)}\langle\xi_2\|\mathbf{T}[\mathbf{I}_{r_2}(x_2)\mathbf{I}_{r_1}(x_1)]+\delta(t_2-t_1)[\mathbf{I}_{r_2}(x_2),$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\Phi_{r_1}(x_1)]\|\xi_1\rangle^{(进)}. \quad (13,75)$$

我们假定 $\mathscr{H}_t(x)$ 与 $\vec{\Phi}(x)$ 的微商无关,因而 $\mathbf{I}(x)$ 也与 $\vec{\Phi}(x)$ 的微商无关; $\frac{\partial}{\partial t}\vec{\Phi}(x)$ 就是与 $\vec{\Phi}(x)$ 相应的正则共轭动量。利用同一时间的正则坐标与正则动量之间的对易关系,可得:

$$\delta(t_2-t_1)[\mathbf{I}_{r_2}(x_2),\frac{\partial}{\partial t_1}\Phi_{r_1}(x_1)]=i\delta^4(x_2-x_1)\frac{\partial\mathbf{I}_{r_2}(x_2)}{\partial\Phi_{r_1}(x_2)}. \quad (13,76)$$

将上式代入(13,75)式,利用公式(13,50),可得:

$${}_t\langle|S-1|\rangle_t=G_1+G_2, \quad (13,77)$$

其中

$$G_1=-\int d^4x_2d^4x_1\frac{e^{i(k_1x_1-k_2x_2)}}{\sqrt{4\omega_1\omega_2}}{}^{(出)}\langle\xi_2\|\mathbf{T}[\mathbf{I}_{r_2}(x_2)\mathbf{I}_{r_1}(x_1)]\|\xi_1\rangle^{(进)},$$

$$G_2=-i\int d^4x_2d^4x_1\frac{e^{i(k_1x_1-k_2x_2)}}{\sqrt{4\omega_1\omega_2}}\delta^4(x_2-x_1){}^{(出)}\langle\xi_2\|\mathbf{K}_{r_1r_2}(x_2)\|\xi_1\rangle^{(进)},$$

而

$$\mathbf{K}_{r_1r_2}(x)=\frac{\delta^2\mathscr{H}_t(x)}{\delta\Phi_{r_1}(x)\delta\Phi_{r_2}(x)}. \quad (13,78)$$

利用公式(13,33),可以将 G_2 写成:

$$G_2 = -i\int d^4x_1 \frac{e^{i(k_1+p_1-k_2-p_2)x_1}}{\sqrt{4\omega_1\omega_2}} {}^{(出)}\langle\xi_2\|\mathbf{K}_{r_1r_2}(0)\|\xi_1\rangle^{(进)} =$$

$$= -i\frac{(2\pi)^4}{\sqrt{4\omega_1\omega_2}}\cdot\delta^4(k_1+p_1-k_2-p_2)\times$$

$$\times {}^{(出)}\langle\xi_2\|\mathbf{K}_{r_1r_2}(0)\|\xi_1\rangle^{(进)}. \tag{13,79}$$

利用公式

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}(1+\epsilon(t)) &= \frac{-1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iat}}{a+i\epsilon}da,\\ \frac{1}{2}(1-\epsilon(t)) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iat}}{a-i\epsilon}da,\end{aligned}\right\} \tag{13,80}$$

其中 ϵ 代表一个微小的正数，可以将 G_1 写作：

$$G_1 = \frac{1}{2\pi i}\int d^4x_2d^4x_1da\frac{e^{i(k_1x_1-k_2x_2+at_1-at_2)}}{\sqrt{4\omega_1\omega_2}}\times$$

$$\times {}^{(出)}\langle\xi_2\|\frac{\mathbf{I}_{r_2}(x_2)\mathbf{I}_{r_1}(x_1)}{a+i\epsilon}-\frac{\mathbf{I}_{r_1}(x_1)\mathbf{I}_{r_2}(x_2)}{a-i\epsilon}\|\xi_1\rangle^{(进)}. \tag{13,81a}$$

設 $\|n\rangle^{(出)}$ 是一套完全的、正交的波函数，A 和 B 为任何二个場量，則有：

$${}^{(出)}\langle\xi_2\|AB\|\xi_1\rangle^{(进)} = \sum_n {}^{(出)}\langle\xi_2\|A\|n\rangle^{(出)}\langle n\|B\|\xi_1\rangle^{(进)}. \tag{13,81b}$$

利用(13,81)和(13,33)，可以将 G_1 写成：

$$G_1 = G_{1\alpha} + G_{1\beta}, \tag{13,82}$$

其中

$$G_{1\alpha} = \sum_n\int\frac{d^4x_2d^4x_1da\,e^{i(k_1+p_1-p_n)x_1-i(k_2+p_2-p_n)x_2+iat_1-iat_2}}{2\pi i\sqrt{4\omega_1\omega_2}(a+i\epsilon)}\times$$

$$\times {}^{(出)}\langle\xi_2\|\mathbf{I}_{r_2}(0)\|n\rangle^{(出)}\langle n\|\mathbf{I}_{r_1}(0)\|\xi_1\rangle^{(进)},$$

$$G_{1\beta} = -\sum_n\int\frac{d^4x_2d^4x_1da\,e^{i(k_1+p_n-p_2)x_1-i(k_2+p_n-p_1)x_2+iat_1-iat_2}}{2\pi i\sqrt{4\omega_1\omega_2}(a-i\epsilon)}\times$$

$$\times {}^{(出)}\langle\xi_2\|\mathbf{I}_{r_1}(0)\|n\rangle^{(出)}\langle n\|\mathbf{I}_{r_2}(0)\|\xi_1\rangle^{(进)}, \tag{13,83}$$

式中 p_n 代表 $\|n\rangle^{(出)}$ 态的动量-能量。对 d^4x_2 和 d^4x_1 积分以后，

得：

$$\left.\begin{aligned} C_{1\alpha} &= i\frac{(2\pi)^4}{\sqrt{4\omega_1\omega_2}}\delta^4(k_1+p_1-k_2-p_2)\times \\ &\quad\times\sum_{\vec{p}_n=\vec{p}_1+\vec{k}_1}\frac{{}^{(出)}\langle\xi_2\|\mathbf{I}_{r_2}(0)\|n\rangle^{(出)}\langle n\|\mathbf{I}_{r_1}(0)\|\xi_1\rangle^{(进)}}{(E_n-E_1-\omega_1-i\epsilon)}, \\ C_{1\beta} &= i\frac{(2\pi)^4}{\sqrt{4\omega_1\omega_2}}\delta^4(k_1+p_1-k_2-p_2)\times \\ &\quad\times\sum_{\vec{p}_n=\vec{p}_1-\vec{k}_2}\frac{{}^{(出)}\langle\xi_2\|\mathbf{I}_{r_1}(0)\|n\rangle^{(出)}\langle n\|\mathbf{I}_{r_2}(0)\|\xi_1\rangle^{(进)}}{(E_n-E_1+\omega_2-i\epsilon)}; \end{aligned}\right\} \quad (13,84)$$

其中 E_1 代表始态核子的能量，E_n 代表 $\|n\rangle^{(出)}$ 态的能量. 将(13,79)和(13,84)代入(13,77)，得：

$$\begin{aligned} {}_f\langle|S-1|\rangle_i &= i\frac{(2\pi)^4}{\sqrt{4\omega_1\omega_2}}\delta^4(k_1+p_1-k_2-p_2)\times \\ &\quad\times\{-{}^{(出)}\langle\xi_2\|\mathbf{K}_{r_1r_2}(0)\|\xi_1\rangle^{(进)}+ \\ &\quad+\sum_{\vec{p}_n=\vec{p}_1-\vec{k}_1}\frac{{}^{(出)}\langle\xi_2\|\mathbf{I}_{r_2}(0)\|n\rangle^{(出)}\langle n|\mathbf{I}_{r_1}(0)|\xi_1\rangle^{(进)}}{(E_n-E_1-\omega_1-i\epsilon)}+ \\ &\quad+\sum_{\vec{p}_n=\vec{p}_1+\vec{k}_2}\frac{{}^{(出)}\langle\xi_2\|\mathbf{I}_{r_1}(0)\|n\rangle^{(出)}\langle n|\mathbf{I}_{r_2}(0)|\xi_1\rangle^{(进)}}{(E_n-E_1+\omega_2-i\epsilon)}\}. \end{aligned} \quad (13,85)$$

将(13,85)与(13,73)比較，并考虑到(13,32)式，于是有：

$$\begin{aligned} {}^{(出)}\langle\xi_2,\eta_2\|\mathbf{K}_{r_1}(0)\|\xi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_2}}\langle\xi_2\|\mathbf{K}_{r_1r_2}(0)\|\xi_1\rangle- \\ &-\frac{1}{\sqrt{2\omega_2}}\sum_{\vec{p}_n=\vec{p}_1+\vec{k}_1}\frac{\langle\xi_2\|\mathbf{I}_{r_2}(0)\|n\rangle^{(出)}\langle n\|\mathbf{I}_{r_1}(0)\|\xi_1\rangle}{(E_n-E_1-\omega_1-i\epsilon)}- \\ &-\frac{1}{\sqrt{2\omega_2}}\sum_{\vec{p}_n=\vec{p}_1-\vec{k}_2}\frac{\langle\xi_2\|\mathbf{I}_{r_1}(0)\|n\rangle^{(出)}\langle n\|\mathbf{I}_{r_2}(0)\|\xi_1\rangle}{(E_n-E_1+\omega_2-i\epsilon)}. \end{aligned} \quad (13,86)$$

方程(13,86)代表不同物理过程的 S 矩陣元之間的联系. (13,86)式左方表式的物理意义是明确的，它与介子和核子相互散射的 S 矩陣元相密切連系. 为了闡明(13,86)式右方各个因子所代表的物理意义，我們应該先討論矩陣元

$$^{(出)}\langle n\|\mathbf{I}_r(0)\|\xi_1\rangle \quad (13,87)$$

所代表的物理过程.假使 $\|n\rangle^{(\text{出})}$ 代表一个核子和一个 π 介子的态，那末(13,87)式就与 π 介子和核子相互散射的 S 矩陣元相密切連系;假使 $\|n\rangle^{(\text{出})}$ 代表一个核子和二个 π 介子的态,那末,不难看出,表式(13,87)与一个 π 介子和一个核子相碰撞而轉化为一个核子和二个 π 介子的 S 矩陣元相密切連系;假使 $\|n\rangle^{(\text{出})}$ 代表二个核子、一个反核子和一个 π 介子的态,那末,也不难看出,表式(13,87)与一个 π 介子和一个核子相碰撞而轉化为二个核子、一个反核子和一个 π 介子的 S 矩陣元相密切連系. 因此,方程(13,86)代表无穷多种物理过程的 S 矩陣元之間的連系的一个方面. 可以用类似的方法推导出一系列的这样的方程; 所有这些无穷多的方程形成一套联立方程. 假使能够解出这一套联立方程，就能够求出所有物理过程的 S 矩陣元. 事实上,这是非常困难的事. 不难看出,(13,86)其实是积分方程. 由于,(13,86)式右方的求和符号代表对于分立的本征态 $\|n\rangle^{(\text{出})}$ 求和以及代表对于連續的本征态 $\|n\rangle^{(\text{出})}$ 积分,而且(13,86)还是非綫性的积分方程，因此，摆在我們面前的，是一套无穷多个的非綫性联立积分方程. 寻求这样的方程的严格解显然是一件十分困难的事. 应該嘗試求得近似的解. 当討論某一物理过程的时候，最好先作物理上的估計: 另外还有那些物理过程与我們所討論的物理过程有密切的关系，那些过程与我們所討論的物理过程之間的关系不大. 然后,将那些关系不大的物理过程的 S 矩陣元从方程中略去. 这样就可能得到一套数目有限的联立积分方程. 求解这一套有限的联立积分方程就可以得到我們所討論的物理过程的近似的 S 矩陣元.

以 π 介子与核子相互散射的問題为例. 假設我們討論的是能量比較低的散射过程. 由于能量低，π 介子和核子碰撞的时候不可能轉化为二个 π 介子和一个核子,更不可能轉化为二个核子、一个反核子和一个 π 介子或其他能量更高的态. 此外,由于重粒子数的守恆定理,它們也不可能轉化为沒有核子而只有 π 介子的态. 因此,可以将所有与这些过程相应的 S 矩陣元从方程中略去,估計

它們的影响不大。在所有的波函数 $\|n\rangle^{(H)}$ 中，可以只考虑二种波函数：一种是一个核子的波函数 $\|\xi\rangle^{(H)}$，另一种是一个核子和一个 π 介子的波函数 $\|\xi,\eta\rangle^{(H)}$。假使取(13,47)作为相互作用哈密頓量密度，那末，根据(13,78)，

$$\mathrm{K}_{r_1r_2} = -\delta m^2(r_2r_1) + 2\delta\lambda\varphi_{r_1}\varphi_{r_2} + \delta\lambda(r_2r_1)(\vec{\varphi}\cdot\vec{\varphi}); \quad (13,88)$$

因此，(13,86)式右方的第一項等于：

$$\frac{1}{\sqrt{2\omega_2}}\{-\delta m^2(r_2r_1)\delta_{\xi_2\xi_1} + \delta\lambda\langle\xi_2\|2\varphi_{r_1}(0)\varphi_{r_2}(0) + (r_2r_1)(\vec{\varphi}(0)\vec{\varphi}(0))\|\xi_1\rangle\}. \quad (13,89)$$

上式第一項代表介子質量的重整化效应的一部分，第二項代表 π 介子与 π 介子相互散射对于 π 介子与核子相互散射所产生的影响。假使将这二种影响都略去，那末方程(13,86)就簡化成如下的形式：

$$\begin{aligned}
&{}^{(H)}\langle\xi_2,\eta_2\|\mathrm{I}_{r_1}(0)\|\xi_1\rangle = \\
&= \frac{-1}{\sqrt{2\omega_2}}\Bigg\{\sum_{\vec{p}_n=\vec{p}_1+\vec{k}_1}\frac{\langle\xi_2\|\mathrm{I}_{r_2}(0)\|\xi_n\rangle\langle\xi_n\|\mathrm{I}_{r_1}(0)\|\xi_1\rangle}{(E(\vec{p}_1+\vec{k}_1)-E_1-\omega_1-i\epsilon)} + \\
&+ \sum_{\vec{p}_n=\vec{p}_1-\vec{k}_2}\frac{\langle\xi_2\|\mathrm{I}_{r_1}(0)\|\xi_n\rangle\langle\xi_n\|\mathrm{I}_{r_2}(0)\|\xi_1\rangle}{(E(\vec{p}_1-\vec{k}_2)-E_1+\omega_2-i\epsilon)} + \\
&+ \sum_{\vec{p}_n+\vec{k}_n=\vec{p}_1+\vec{k}_1}\frac{\langle\xi_2\|\mathrm{I}_{r_2}(0)\|\xi_n,\eta_n\rangle^{(H)}\langle\xi_n,\eta_n\|\mathrm{I}_{r_1}(0)\|\xi_1\rangle}{(E_n+\omega_n-E_1-\omega_1-i\epsilon)} + \\
&+ \sum_{\vec{p}_n+\vec{k}_n=\vec{p}_1-\vec{k}_2}\frac{\langle\xi_2\|\mathrm{I}_{r_1}(0)\|\xi_n,\eta_n\rangle^{(H)}\langle\xi_n,\eta_n\|\mathrm{I}_{r_2}(0)\|\xi_1\rangle}{(E_n+\omega_n-E_1+\omega_2-i\epsilon)}\Bigg\},
\end{aligned} \quad (13,90)$$

其中 $\xi_n(\vec{p}_n, E_n, s_n)$ 代表中間状态中的核子的动量、能量和自旋—同位旋，$\eta_n(\vec{k}_n, \omega_n, r_n)$ 代表中間状态中的 π 介子的动量、能量和同位旋，$E(\vec{p})$ 代表具有动量 $\vec{p}$ 的核子的能量。我們可以写下上式右方的第一項和第二項的显示表式。利用(13,53)式，有：

$$\langle\xi_n\|\mathrm{I}_f(0)\|\xi_1\rangle = \{(\Box - m^2)\langle\xi_n\|\varphi_f(x)\|\xi_1\rangle\}_{x=0}; \quad (13,91)$$

利用公式(13,33)，有：

$$\langle\xi_n\|\mathbf{I}_i(0)\|\xi_1\rangle=-[(p_1-p_n)^2+m^2]\langle\xi_n\|\Phi_i(0)\|\xi_1\rangle;\quad(13,92)$$

上式右方的第二个因子可以写作：

$$\langle\xi_n\|\Phi_i(0)\|\xi_1\rangle={}_0\langle|a_{\xi_n},u(\infty,0)\varphi_i(0)u(0,-\infty)a^*_{\xi_1}|\rangle_0=$$

$$=\sum_{n'}\frac{(-i)^{n'}}{n'!}{}_0\langle|a_{\xi_n}\int d^4x_{n'}\cdots d^4x_1\mathrm{T}[\mathscr{H}_i(x_{n'})\cdots$$

$$\mathscr{H}_i(x_1)\varphi_i(0)]a^*_{\xi_1}|\rangle_0.\qquad(13,93)$$

假使将上式右方的編时乘积展开成为正規乘积之和，那末不难看出，只有那一个 Ψ 和一个 $\bar{\Psi}$ 沒有被收縮而其余的場量算符都已經收縮的項才作出貢献。 Ψ 的作用在于消灭始态中的核子，$\bar{\Psi}$ 的作用在于产生終态中的核子，$\varphi_i(0)$ 和另一个 $\varphi(x)$ 收縮而貢献一个因子 $\frac{1}{2}\Delta_f(x)$。 假使画下与上式右方矩陣元相应的費曼图形，那末就可以看到，所有这些图形都只有二条外部核子綫和一条外部介子綫。这条外部介子綫相应于一个外部介子場

$$\varphi_i^{(外)}(x)=\delta_{ij}\frac{1}{2}\Delta_f(x),\qquad(13,94)$$

它也可以代表一条很长的內部介子綫的一端。这条介子綫的另一端参与另一个物理过程。 我們对这另一物理过程不感兴趣，所以不将这介子綫的另一端画在图中。 显然，这一系列的图形都是頂角图形，其中不仅包括所有的正規頂角图形，也包含所有的非正規頂角图形和眞空涨落效应。将眞空涨落效应略去后，不难看出：

$$\langle\xi_n\|\Phi_j(0)\|\xi_1\rangle=$$

$$=g(2\pi)^4\bar{u}_{s_n}(\vec{p}_n)\sqrt{z_2}\Gamma'_j(p_n,p_1)\sqrt{z_2}u_{s_1}(\vec{p}_1)\Delta'_j(p_n-p_1),\quad(13,95)$$

其中 $u_{s_1}(\vec{p}_1)$ 和 $u_{s_n}(\vec{p}_n)$ 是动量表象中的核子波函数，$\Gamma'_j(p_n,p_1)$ 是包含所有正規頂角图形貢献的頂角函数，$\sqrt{z_2}$ 是由于非正規頂角图形中核子自能部分所导致的核子波函数的重整化因子，$\Delta'_j(p_n-p_1)$ 則是由于非正規頂角图形中的眞空极化部分的貢献而产生的。可以将 $\Gamma'_j(p_n,p_1)$ 写作：

$$\Gamma'_j(p_n,p_1)=\frac{1}{z_1}\Gamma'_{jc}(p_n,p_1),\qquad(13,95a)$$

其中 $\Gamma'_{f0}(p_n, p_1)$ 为不包含有无穷大的顶角函数，它满足如下的条件：假使 $p_1 = p_n$ 是自由核子的动量-能量，则

$$\Gamma'_{f0}(p_n, p_1)]_{(\hat{p}_n=iM,\hat{p}_1=iM)} = \gamma_5\tau_f. \tag{13,96}$$

可以将 $\Delta'_f(k)$ 写作：

$$\Delta'_f(k) = z_3\Delta'_{f0}(k), \tag{13,97}$$

其中 $\Delta'_{f0}(k)$ 为不包含有无穷大的 π 介子的传播函数。这样，就可以将(13,95)式写作：

$$\langle\xi_n|\Phi_f(0)|\xi_1\rangle = \\ = g_0(2\pi)^4\sqrt{z_3}\bar{u}_{s_n}(\vec{p}_n)\Gamma'_{f0}(p_n, p_1)u_{s_1}(\vec{p}_1)\Delta'_{f0}(p_n - p_1), \tag{13,98}$$

其中 g_0 为重整化了的相互作用常数：

$$g_0 = z_1^{-1}z_2z_3^{\frac{1}{2}}g. \tag{13,99}$$

假使令 g_0 取有限的实验数值，那末，表式(13,93)除了因子 $\sqrt{z_3}$ 以外，不再包含有无穷大。假使我們将表式(13,93)中由于 $\varphi_f(0)$ 所貢献的因子 $\frac{1}{2}\Delta_f(x)$ 当作一条很长的内部介子綫的二端中的一端的貢献，那末，在我們所討論的問題中就应該只取一个因子 $\sqrt{z_1}$，而应該将另外一个因子 $\sqrt{z_3}$ 归入这条内部介子綫的另一端的顶角函数中。这样就得：

$$\langle\xi_n|\Phi_f(0)|\xi_1\rangle = g_0(2\pi)^4\bar{u}_{s_n}(\vec{p}_n)\Gamma'_{f0}(p_n, p_1)u_{s_1}(\vec{p}_1)\Delta'_{f0}(p_n - p_1). \tag{13,100}$$

将上式代入(13,92)，并考虑到

$$k^2 + m^2 = \frac{-i}{(2\pi)^4}\cdot\Delta_f^{-1}(k), \tag{13,101}$$

就得：

$$\langle\xi_n|\mathbf{I}_f(0)|\xi_1\rangle = \\ = ig_0\bar{u}_{s_n}(\vec{p}_n)\Gamma'_{f0}(p_n, p_1)u_{s_1}(\vec{p}_1)\Delta_f^{-1}(p_n - p_1)\Delta'_{f0}(p_n - p_1), \tag{13,102}$$

其中表式 $\Delta_f^{-1}(p_n - p_1)\Delta'_{f0}(p_n - p_1)$ 可以展开成为 $[(p_n - p_1)^2 + m^2]$ 的幂級数，其常数項等于 1。可以将(13,102)式进一步簡化。考虑

到表式

$$\bar{u}_{s_n}(\vec{p}_n)\Gamma'_{j0}(p_n, p_1)u_{s_1}(\vec{p}_1) \tag{13,103}$$

是同位旋空間中矢量的第 j 个分量，是四維时空中的贋标量，因此 $\Gamma'_{jl}(p_n, p_1)$ 必須与 τ_j 成正比. 此外，$\Gamma'_{j0}(p_n, p_1)$ 是由 γ 矩陣、p_1 和 p_n 組成的，利用这些量可以組成如下的标量：

$$\begin{aligned} &p_n^2 = -M^2, \quad p_1^2 = -M^2, \quad p_1\cdot p_n, \\ &\hat{p}_n, \qquad\qquad \hat{p}_1; \end{aligned} \tag{13,104}$$

因此，$\Gamma'_{j0}(p_n, p_1)$ 在这一情况下可以写成：

$$\Gamma'_{j0}(p_n, p_1) = \gamma_5\tau_j\mathscr{F}(p_1\cdot p_n, \hat{p}_n, \hat{p}_1). \tag{13,105}$$

由于 $\hat{p}_1$ 作用在右边的波函数 $u_{s_1}(\vec{p}_1)$ 上等于一个因子 iM，$\hat{p}_n$ 作用在左边的波函数 $\bar{u}_{s_n}(\vec{p}_n)$ 上也等于一个因子 iM，因而$\mathscr{F}$实际上是 $(p_1\cdot p_n)$ 的函数. 考虑到

$$(p_1p_n) = -\frac{1}{2}(p_n - p_1)^2 - M^2, \tag{13,106}$$

可以將(13,105)式写成：

$$\Gamma'_{j0}(p_n, p_1) = \gamma_5\tau_jG((p_n - p_1)^2). \tag{13,107}$$

假使將 $G((p_n - p_1)^2)$ 展开成为 $(p_n - p_1)^2$ 的級数，那末，由于公式(13,96)，这一級数的常数項一定等于 1. 因此，可以將(13,102)式改写为：

$$\langle\xi_n\|\mathbf{I}_j^{(0)}\|\xi_1\rangle = ig_0v((p_n - p_1)^2)\bar{u}_{s_n}(\vec{p}_n)\gamma_5\tau_ju_{s_1}(\vec{p}_1), \tag{13,108}$$

其中

$$v((p_n - p_1)^2) = G((p_n - p_1)^2)\Delta_1^{-1}(p_n - p_1)\Delta'_{j0}(p_n - p_1), \tag{13,109}$$

而 $v(0) \cong 1$. 將(13,108)代入(13,90)，于是就得到駱[Low, 1955]所提出的如下的方程：

$$^{(出)}\langle\xi_2, \eta_2\|\mathbf{I}_{\tau_3}(0)\|\xi_1\rangle = \frac{-1}{\sqrt{2\omega_2}} \times$$

$$\times\left\{\sum_{\vec{p}_n=\vec{p}_1+\vec{k}_1} g_0^2v((p_2 - p_n)^2)v((p_n - p_1)^2) \times\right.$$

$$\times \frac{\bar{u}_{s_2}(\vec{p}_2)i\gamma_5\tau_{r_2}u_{s_n}(\vec{p}_n)\bar{u}_{s_n}(\vec{p}_n)i\gamma_5\tau_{r_1}u_{r_1}(\vec{p}_1)}{E_n - E_1 - \omega_1 - i\epsilon} +$$

$$+ \sum_{\vec{p}_n=\vec{p}_1-\vec{k}_2} g_0^2 v((p_2 - p_n)^2) v((p_n - p_1)^2) \times$$

$$\times \frac{\bar{u}_{s_2}(\vec{p}_2)i\gamma_5\tau_{r_1}u_{s_n}(\vec{p}_n)\bar{u}_{s_n}(\vec{p}_n)i\gamma_5\tau_{r_2}u_{s_1}(\vec{p}_1)}{E_n - E_1 + \omega_2 - i\epsilon} +$$

$$+ \sum_{\vec{p}_n+\vec{k}_n=\vec{p}_1+\vec{k}_1} \frac{\langle \xi_2 \| \mathbf{I}_{r_2}(0) \| \xi_n, \eta_n \rangle^{(\text{出})} \langle \xi_n, \eta_n \| \mathbf{I}_{r_1}(0) \| \xi_1 \rangle}{E_n + \omega_n - E_1 - \omega_1 - i\epsilon} +$$

$$+ \sum_{\vec{p}_n+\vec{k}_n=\vec{p}_1-\vec{k}_2} \frac{\langle \xi_2 \| \mathbf{I}_{r_1}(0) \| \xi_n, \eta_n \rangle^{(\text{出})} \langle \xi_n, \eta_n \| \mathbf{I}_{r_2}(0) \| \xi_1 \rangle}{E_n + \omega_n - E_1 + \omega_2 - i\epsilon} \Big\}. \tag{13,110}$$

在上式中所出現的是重整化了的質量和相互作用常数，不再包含有无穷大。不难看出，上式右方第一項和第二項基本上是玻恩近似的計算結果。虽然如此，却也有一点不同，多了一个因子：

$$v((p_2 - p_n)^2) v((p_n - p_1)^2). \tag{13,111}$$

在低能領域中，如 (13,109) 所指出的，这一因子差不多等于 1；但是，在很大能量的碰撞中，这一个因子可能起比較大的改变，以致与 1 相差很远。假使知道了相互作用常数 g_0 和函数 v，(13,110) 式右方第一項和第二項就立刻可以計算出来。于是，問題最后就約化为求解积分方程(13,110)。与原来的方程(13,86)相比較，这是已經大为簡化了的方程。

§ 13,7. 邱-駱方程的进一步簡化

由于我們所討論的是低能量 π 介子的散射現象，在散射过程中，核子的速度很小，远远不到光速，所以核子的波函数和代表核子的力学量的算符都可以用非相对論性近似、用二分量的波函数和二行二列的矩陣代替四分量的波函数和四行四列的矩陣。自由核子的波动方程是：

$$\{\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta M - E\}u(\vec{p}) = 0. \tag{13,112}$$

假使將 $u(\vec{p})$ 写作：

$$u(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \chi(\vec{p}) \\ \theta(\vec{p}) \end{pmatrix}. \tag{13,113}$$

其中 χ 和 θ 各有二个分量，那末就可以将(13,112)式写作：

$$\left.\begin{aligned} (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\theta(\vec{p}) - (E-M)\chi(\vec{p}) = 0, \\ -(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\chi(\vec{p}) + (E+M)\theta(\vec{p}) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{13,114}$$

因此有：

$$\left.\begin{aligned} \theta(\vec{p}) = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+M}\chi(\vec{p}), \\ \chi(\vec{p}) = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E-M}\theta(\vec{p}). \end{aligned}\right\} \tag{13,115}$$

从(13,113)和(13,115)可得：

$$u(\vec{p}) = \left(1 - \gamma_5\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+M}\right)\begin{pmatrix} \chi(\vec{p}) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{13,116}$$

利用上式，可得：

$$\begin{aligned} \bar{u}(\vec{p}_2)i\gamma_5\tau_i u(\vec{p}_1) &= (\chi^*(\vec{p}_2), 0)\left(1 - \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_2}{E_2+M}\gamma_5\right)\gamma_4 i\gamma_5\tau_i \times \\ &\times \left(1 - \gamma_5\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_1}{E_1+M}\right)\begin{pmatrix} \chi(\vec{p}_1) \\ 0 \end{pmatrix} = i(\chi^*(\vec{p}_2), 0) \times \\ &\times \left(1 + \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_2}{E_2+M}\gamma_5\right)\gamma_5\tau_i\left(1 - \gamma_5\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_1}{E_1+M}\right)\begin{pmatrix} \chi(\vec{p}_1) \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= i\chi^*(\vec{p}_2)\tau_i\left(\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_2}{E_2+M} - \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_1}{E_1+M}\right)\chi(\vec{p}_1). \end{aligned} \tag{13,117}$$

核子的靜質量远远大于 π 介子的靜質量．在与低能量的 π 介子碰撞时，核子基本上不大动．假使我們取更进一步的近似，假定核子无限重，在碰撞时会吸收动量，但本身却不动，那末核子的波函数就只是自旋和同位旋的波函数，与其动量无关；并且有：

$$\left.\begin{aligned} E_1 = E_2 = E_n = M, \\ \omega_1 = \omega_2 \equiv \omega_0, \quad |\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| \equiv k_0. \end{aligned}\right\} \tag{13,118}$$

将(13,117)代入(13,110)，利用(13,118)式，并引入新的常数 f_0：

$$f_0 = \frac{m}{2M} g_0, \tag{13,119}$$

就得到如下的方程：

$$\begin{aligned}
&{}^{(\text{出})}\langle \vec{k}_2,\ r_2,\ s_2 \| \mathbf{I}_{r_1}(0) \| s_1 \rangle = \\
&= \frac{f_0^2 v^2(k_0^2)}{\sqrt{2}\, m^2 \omega_0^{3/2}} \chi_{s_2}^{*} \{ \tau_{r_2}(\vec{\sigma}\cdot\vec{k}_2)\tau_{r_1}(\vec{\sigma}\cdot\vec{k}_1) - \tau_{r_1}(\vec{\sigma}\cdot\vec{k}_1)\tau_{r_2}(\vec{\sigma}\cdot\vec{k}_2) \} \chi_{s_1} - \\
&- \frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} \sum_{\vec{k},r,s} \frac{\langle s_2 \| \mathbf{I}_{r_2}(0) \| \vec{k}, r, s \rangle^{(\text{出})} \langle \vec{k}, r, s \| \mathbf{I}_{r_1}(0) \| s_1 \rangle}{\omega - \omega_0 - i\epsilon} - \\
&- \frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} \sum_{\vec{k},r,s} \frac{\langle s_2 \| \mathbf{I}_{r_1}(0) \| \vec{k}, r, s \rangle^{(\text{出})} \langle \vec{k}, r, s \| \mathbf{I}_{r_2}(0) \| s_1 \rangle}{\omega + \omega_0},
\end{aligned} \tag{13,120}$$

其中

$$\omega = \sqrt{m^2 + |\vec{k}|^2}, \tag{13,121}$$

χ_{s_1} 和 χ_{s_2} 是与核子动量无关的归一化了的二分量旋量. 在写下(13,120)式时，我們还利用了关系：

$$\sum_s \chi_s \chi_s^{*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1. \tag{13,122}$$

在假定了核子静止不动之后，还可以使問題簡化. 因为，假使核子静止不动，那末核子就不会有軌道角动量，于是它的自旋就是它的全部角动量，它的角动量的变化只能来源于它的自旋的变化. 当核子放出或吸收 π 介子的时候，π 介子可能具有軌道角动量，角动量守恆要求在放出介子过程的前后总的角动量应該相等，要求在吸收介子过程的前后总的角动量应該相等. 由此可見，静止不动的核子只能放出和吸收 S 波或 P 波的 π 介子；因为，假使 π 介子的軌道角动量大于 1，那末核子在吸收或放出介子之后，它的自旋必須大于 $\frac{1}{2}$，否則无法滿足角动量守恆定律的要求. 这显然是不可能的. 此外，由于宇称守恆定律在強相互作用現象中仍然起作用，静止不动的核子不可能放出 S 波的 π 介子；因为 π 介子的內禀宇称是負的. 因此，在假定了核子是静止不动以后，核子便只能放出和吸收 P 波的 π 介子，这一方面使問題簡化，另一方面也显示了这

一假設的局限性. 建筑在这一假設基础上的理論只能用来討論 P 波 π 介子的散射. 然而,实驗事实指出,当低能量 π 介子与核子相互作用时,主要的貢献的确是由 P 波的 π 介子作出的. 因此,用这样的理論来处理低能量 π 介子与核子的散射过程也还是可以的.

(13,120) 式左方的矩陣元可以直接与散射的相移連系起来,但是該式右方的矩陣元如

$$^{(\text{出})}\langle \vec{k},\ r,\ s|\mathbf{I}_{r_1}(0)|s_1\rangle \tag{13,123}$$

則与实际的散射相移之間的連系是比較間接的. (13,120) 是从 (13,110)式推导来的. 从(13,110)式可以看出,对于这一矩陣元要求 $\vec{p}_n + \vec{k}_n = \vec{p}_1 + \vec{k}_1$, 但并不要求 $E_n + \omega_n = E_1 + \omega_1$. 因此这一矩陣元并不直接与現实的散射过程相連系,而是与虛过程相連系. 我們可以作这样的推論:当将核子当作靜止不动以后,那末 $\vec{p}_1$ 和 E_1 根本不在矩陣元 (13,123)中出現. 从(13,50)和(13,47)也可以看出, $I_{r_1}(0)$ 与介子的动量 $\vec{k}_1$ 沒有关系,因此(13,123)中的矩陣元也与 $\vec{k}_1$ 沒有关系. 可以令 $\vec{p}_1$ 和 $\vec{k}_1$ 取别的数值,使 $\vec{p}_1 + \vec{k}_1 = \vec{p}_n + \vec{k}_n$ 和 $E_1 + \omega_1 = E_n + \omega_n$ 都得到滿足,那末所得到的矩陣元应該仍旧与(13,123)一样.这样就可以使矩陣元(13,123)与現实的散射过程相連系. 应該指出,这样的推論是有毛病的. 假使已將核子当作靜止不动而取非相对論性的近似,那末就不会有負能級、眞空极化效应、介子的質量重整化以及介子与介子相互散射的問題. 因此 $\mathscr{H}_i$ 的表式(13,47)中的第三項和第四項也就不存在, $\bar{\Psi}\gamma_5\tau_i\Psi$ 也就应該等于零. 这样一来,整个矩陣元(13,123)都等于零. 这显然是与方程 (13,120) 相矛盾的. 事实上,不应該将核子当作絕对靜止,而应該将核子看作具有很小的速度,然后令这一速度趋于零,那末 $\bar{\Psi}_f\gamma_5\tau_i\Psi$ 就不等于零. 这从(13,117)中的表式就可以看出;只要 $\vec{p}_2 - \vec{p}_1$ 不等于零,則(13,117)中的表式就一般地不等于零.既然我們所取的是非相对論性近似,那末就应該取二分量的旋量和二行二列的矩陣作为核子的波函数和力学量,并用这些旋量和矩陣組成等效的相互作用哈密頓量,然后利用这种等效相互作用哈密

頓量进行討論。 (13,120) 式右方第一項相当于波恩 (Born) 近似的貢献；不难从这一項和公式(13,117)看出，等效的相互作用哈密頓量密度应該具有如下的表式：

$$\mathscr{H}_i^{(等效)} = \frac{f_0}{m}\phi^*\tau_i\vec{\sigma}\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}v(-\vec{\nabla}^2)\varphi_i, \qquad (13,124)$$

其中 ϕ 和 ϕ^* 是代表核子場的二分量旋量場，$v(-\vec{\nabla}^2)$ 中的微分算符 $\vec{\nabla}^2$ 作用在 π 介子場量 φ_i 上。通过重整化了的相互作用常数 f_0 以及算符 $v(-\vec{\nabla}^2)$，$\mathscr{H}_i^{(等效)}$ 中不仅包含了表式 (13,47) 中的第一項的作用，且也包含了第二、第三和第四項的作用。利用表式 (13,124) 推导得的 $\mathbf{I}_{r_1}(0)$ 是：

$$\mathbf{I}_{r_1}(0) = \frac{if_0}{m}v(|\vec{k}_1|^2)\phi^*(0)\tau_{r_1}\vec{\sigma}\cdot\vec{k}_1\phi(0). \qquad (13,125)$$

可以看出 $\mathbf{I}_{r_1}(0)$ 是与 $\vec{k}_1$ 有关的。为了标明矩陣元(13,123)与 $\vec{k}_1$ 之間的关系，我們将它写作：

$$^{(出)}\langle\vec{k},\ r,\ s||\mathbf{I}_{r_1}(\vec{k}_1)||s_1\rangle. \qquad (13,126)$$

从(13,125)可以看出：

$$^{(出)}\langle\vec{k},\ r,\ s||\mathbf{I}_{r_1}(\alpha\vec{k}_1)||s_1\rangle = \alpha\cdot\frac{v(\alpha^2|\vec{k}_1|^2)}{v(|\vec{k}_1|^2)}{}^{(出)}\langle\vec{k},\ r,s||\mathbf{I}_{r_1}(\vec{k}_1)||s_1\rangle; \qquad (13,127)$$

因此可以将(13,120)式改写为：

$$\begin{aligned}
&^{(出)}\langle\vec{k}_2,\ r_2,\ s_2||\mathbf{I}_{r_1}(\vec{k}_1)||s_1\rangle = \\
&= \frac{f_0^2v^2(k_0^2)}{\sqrt{2}\,m^2\omega_0^{3/2}}\chi_{s_2}^*\{\tau_{r_2}(\vec{\sigma}\cdot\vec{k}_2)\tau_{r_1}(\vec{\sigma}\cdot\vec{k}_1)-\tau_{r_1}(\vec{\sigma}\cdot\vec{k}_1)\tau_{r_2}(\vec{\sigma}\cdot\vec{k}_2)\}\chi_{s_1}- \\
&-\frac{1}{\sqrt{2\omega_0}}\sum_{r,s}\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\left\{\frac{^{(出)}\langle\vec{k},r,s||\mathbf{I}_{r_2}(\vec{k}'_2)||s_2\rangle^*{}^{(出)}\langle\vec{k},r,s||\mathbf{I}_{r_1}(\vec{k}'_1)||s_1\rangle}{\omega-\omega_0-i\epsilon}+\right. \\
&\left.+\frac{^{(出)}\langle\vec{k},\ r,s||\mathbf{I}_{r_1}(\vec{k}'_1)||s_2\rangle^*{}^{(出)}\langle\vec{k},\ r,s||\mathbf{I}_{r_2}(\vec{k}'_1)||s_1\rangle}{\omega+\omega_0}\right\}\frac{k_0^2v^2(k_0^2)}{k^2v^2(k^2)},
\end{aligned} \qquad (13,128)$$

其中 $\vec{k}'_1$ 和 $\vec{k}'_2$ 分别与 $\vec{k}_1$ 和 $\vec{k}_2$ 相平行，但是有：

$$|\vec{k}_2| = |\vec{k}'_2| = |\vec{k}| \equiv k. \qquad (13,129)$$

(13,128) 中所出現的矩陣元都可以和由实驗所观察到的散射相移直接相連系. 我們現在来尝試将(13,128)式改写成为散射相移所应該服从的积分方程.

§ 13,8. 相移与 S 矩陣元之間的关系

为了将 (13,128) 式改写成为散射相移所服从的积分方程, 必須首先寻求相移与 S 矩陣元之間的关系. 我們可以将 S 矩陣元写作:

$$ {}_f\langle|S|\rangle_i = {}^{(出)}_f\langle||1||\rangle_i^{(進)}. \tag{13,130}$$

可以将运动分解为二部份: 第一部份是整个系統的重心的运动, 与散射过程无关, 由簡单的平面波描述; 第二部份是系統的內部运动, 也就是散射的运动. 与二部份的运动相应, 我們也可以将波函数分解为二个因子:

$$\left.\begin{aligned} ||\rangle_i^{(進)} &= \phi_i^{(進)}\psi_i^{(進)}, \\ ||\rangle_f^{(出)} &= \phi_f^{(出)}\psi_f^{(出)}; \end{aligned}\right\} \tag{13,131}$$

其中 $\phi_i^{(進)}$ 和 $\phi_f^{(出)}$ 都是平面波, 在坐标表象中它們具有如下的形式:

$$\phi_i^{(進)} = e^{i\vec{p}_i\cdot\vec{X}}, \quad \phi_f^{(出)} = e^{i\vec{p}_f\cdot\vec{X}}; \tag{13,132}$$

其中 $\vec{p}_i$ 和 $\vec{p}_f$ 分别代表始态和終态的总动量, $\vec{X}$ 代表整个系統的重心的坐标. 因此有:

$$\begin{aligned} {}_f\langle|S|\rangle_i &= (\phi_f^{*(出)}, \phi_i^{(進)})(\psi_f^{*(出)}, \psi_i^{(進)}) = \\ &= (2\pi)^3\delta(\vec{p}_i - \vec{p}_f)(\psi_f^{*(出)}, \psi_i^{(進)}). \end{aligned} \tag{13,133}$$

为了寻求 $(\psi_f^{*(出)}, \psi_i^{(進)})$ 的表式, 我們先討論一个最簡单的情况: 散射粒子沒有自旋、同位旋等等; 它們除了坐标运动以外, 沒有别的自由度. 那末, 根据量子力学的一般理論 (参看 Mott & Massey: The Theory of Atomic Collision [中譯本: "原子碰撞理論", 科学出版社出版]一书), 波函数 $\psi_i^{(進)}$ 和 $\psi_f^{(出)}$ 在坐标表象中具有如下的一般形式:

$$\left.\begin{aligned}\psi_i^{(+)} &= e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{r}} + \text{射出波} = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l e^{i\delta_l}L_l(r)P_l(\cos\theta_i),\\ \psi_f^{(-)} &= e^{i\vec{k}_f\cdot\vec{r}} + \text{射入波} = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l e^{-i\delta_l}L_l(r)P_l(\cos\theta_f);\end{aligned}\right\} \quad (13.134)$$

其中 $\vec{r}$ 为散射粒子间的相对坐标，$\vec{k}_i$ 和 $\vec{k}_f$ 分别为始态粒子间以及终态粒子间的相对动量；δ_l 为第 l 次波的相移，P_l 为 l 次球谱函数，θ_i 为 $\vec{r}$ 和 $\vec{k}_i$ 之间的夹角，θ_f 为 $\vec{r}$ 和 $\vec{k}_f$ 之间的夹角，$L_l(r)$ 在 $r\to\infty$ 时具有如下的渐近表式：

$$L_l(r)\to\frac{1}{kr}\sin\left(kr-\frac{1}{2}l\pi+\delta_l\right). \quad (13.135)$$

因此，假使略去次要的项，就有：

$$(\psi_f^{*(+)},\psi_i^{(+)})\cong\sum_{l,l'}(2l+1)(2l'+1)i^{(l-l')}e^{i(\delta_l+\delta_{l'})}\times$$

$$\times\int d\vec{r}\,\frac{1}{k_ik_fr^2}\sin\left(k_ir-\frac{l}{2}\pi+\delta_l\right)\sin\left(k_fr-\frac{l'}{2}\pi+\delta_{l'}\right)\times$$

$$\times P_{l'}(\cos\theta_f)P_l(\cos\theta_i), \quad (13.136)$$

其中

$$k_i\equiv|\vec{k}_i|,\quad k_f\equiv|\vec{k}_f|. \quad (13.137)$$

为了便于进行积分，我们引入球坐标，并利用下列公式：

$$P_l(\cos\theta_i)=P_l(\cos\theta_f)P_l(\cos\theta)+$$

$$+2\sum_{m=1}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(\cos\theta_f)P_l^m(\cos\theta)\cos[m(\varphi_f-\varphi)]. \quad (13.138)$$

我们选择 $\vec{k}_f$ 的方向为球坐标的极轴方向，θ 和 φ 代表动量 $\vec{k}_i$ 的方向，θ_f 和 φ_f 代表 $\vec{r}$ 的方向。假使再选定 $\varphi=0$，将(13.138)式代入(13.136)式，就得：

$$(\psi_f^{*(+)},\psi_i^{(+)})=\sum_l 4\pi(2l+1)P_l(\cos\theta)\frac{e^{2i\delta_l}}{k_ik_f}\times$$

$$\times \int_0^\infty dr \sin\left(k_i r - \frac{l}{2}\pi + \delta_l\right) \sin\left(k_f r - \frac{l}{2}\pi + \delta_l\right). \tag{13,139}$$

在略去了次要項以后，有：

$$\int_0^\infty \sin\left(k_i r - \frac{l}{2}\pi + \delta_l\right) \sin\left(k_f r - \frac{l}{2}\pi + \delta_l\right) dr \cong \frac{\pi}{2}\delta(k_i - k_f). \tag{13,140}$$

將上式代入(13,139)式，然后將(13,139)式代入公式(13,133)，那末就得：

$$\begin{aligned} {}_f\langle |S| \rangle_i \cong (2\pi)^4 \pi \delta(\vec{p}_i - \vec{p}_f)\delta(k_i - k_f) \times \\ \times \sum_l \frac{(2l+1)}{k_i^2} e^{2i\delta_l} P_l(\cos\theta). \end{aligned} \tag{13,141}$$

假使粒子間的相互作用等于零，那末 S 矩陣就变为单位矩陣，而所有的相移 δ_l 都等于零. 于是有：

$$\begin{aligned} {}_f\langle |1| \rangle_i \cong (2\pi)^4 \pi \delta(\vec{p}_i - \vec{p}_f)\delta(k_i - k_f) \times \\ \times \sum_l \frac{(2l+1)}{k_i^2} P_l(\cos\theta). \end{aligned} \tag{13,142}$$

从(13,141)和(13,142)可得：

$$\begin{aligned} {}_f\langle |S-1| \rangle_i \cong (2\pi)^4 \pi \delta(\vec{p}_i - \vec{p}_f)\delta(k_i - k_f) \times \\ \times \sum_l \frac{(2l+1)}{k_i^2} 2i \sin\delta_l \cdot e^{i\delta_l} P_l(\cos\theta). \end{aligned} \tag{13,143}$$

將上式与(13,73)式作比較，就得：

$$\begin{aligned} \delta(E_f - E_i)^{(\text{出})}\langle \xi_2, \eta_2 | \mathbf{I}_{r_1}(0) | \xi_1 \rangle \\ = -2\sqrt{2} \cdot \pi \frac{\sqrt{\omega_1}}{k_i^2} \delta(k_i - k_f) \sum_l (2l+1) \times \\ \times \sin\delta_l \cdot e^{i\delta_l} P_l(\cos\theta). \end{aligned} \tag{13,143a}$$

假使我們取近似，假定核子靜止不动，那末

$$\delta(E_f - E_i) = \delta(\omega_f - \omega_i) = \delta\left(\frac{d\omega}{dk}(k_f - k_i)\right) = \frac{\omega_1}{k_1}\delta(k_f - k_i), \tag{13,144}$$

其中 $k_i \equiv k_1$, $k_f \equiv k_2$. 将上式代入(13,143),得:

$$^{(出)}\langle \xi_2, \eta_2 \| \mathbf{I}_{r_1}(0) \| \xi_1 \rangle =$$

$$= -\frac{2\sqrt{2}\,\pi}{k_1\sqrt{\omega_1}} \sum_l (2l+1) e^{i\delta_l} \sin\delta_l P_l(\cos\theta). \quad (13,145)$$

假使在散射过程中,只有 P 波作出貢献,则有:

$$^{(出)}\langle \xi_2, \eta_2 \| \mathbf{I}_{r_1}(0) \| \xi_1 \rangle = -\frac{6\sqrt{2}\,\pi}{k_1\sqrt{\omega_1}} e^{i\delta_1} \sin\delta_1 P_1(\cos\theta); \quad (13,146)$$

因此,将上式乘以 $P_1(\cos\theta)$ 并对 $d\Omega$ 积分,就得:

$$e^{i\delta_1}\sin\delta_1 = -\frac{k_1\sqrt{\omega_1}}{8\sqrt{2}\,\pi^2} \int {}^{(出)}\langle \xi_2, \eta_2 \| \mathbf{I}_{r_1}(0) \| \xi_1 \rangle P_1(\cos\theta) d\Omega, \quad (13,147)$$

这就是相移 δ_1 与矩陣元 $^{(出)}\langle \xi_2, \eta_2 \| \mathbf{I}_{r_1}(0) \| \xi_1 \rangle$ 之間显示的連系. 假使散射粒子沒有自旋和同位旋,那末,我們利用(13,146)和(13,147)式,就很容易从矩陣元所服从的积分方程求得相移所服从的积分方程.

然而,我們現在的問題要复杂一些. π 介子有同位旋,核子有自旋和同位旋. 在散射前,粒子的自旋和同位旋处在某一状态;在散射以后,它們未必再处在同一状态,可以处在其它許多不同的状态. 假使能量已經确定,可以計算一下,始态和終态各可以取多少种状态. 为此我們取一套完全的可对易的力学量:

$$\sigma^2, \sigma_z; \tau^2, \tau_3; t, t_3; L, L_z, \omega; \quad (13,147)$$

它們分别代表:核子的自旋、核子自旋在 z 軸方向的分量,核子的同位旋. 核子同位旋的第三分量,介子的同位旋、介子同位旋的第三分量,介子的軌道角动量、介子軌道角动量在 z 軸方向的分量以及碰撞能量.核子的同位旋可以有 2 个不同的态;核子的自旋可以有 2 个不同的态;介子的同位旋可以有三个不同的态;介子的軌道角动量可以有三个不同的态. 因为只有 P 波的介子才能被静止不动的核子所散射. 因此,当散射的能量确定以后,一个介子和一个

靜止核子所形成的系統可以处在

$$2\times 2\times 3\times 3=36, \qquad (13,148)$$

种不同的、相互正交的状态中. 当散射的时候,系統可以从这三十六种态中的一个态跃迁到其中的另一个态. 因此,在这一問題中所牽涉到的不只是一个相移,而是一个三十六行、三十六列的相移矩陣. 假使将方程(13,128)拆开,就分解为 36×36 个联立积分方程. 初看起来,这样的問題似很难解决. 其实,問題并沒有这样复杂,因为角动量守恆定律要求,具有不同角动量的态之間不能跃迁;同位旋守恆定律也要求,具有不同的同位旋的态之間也不能跃迁. 因此,假使把态选择得合适,則将有許多的 S 矩陣元都等于零. 現在假設我們取总角动量和总同位旋的本征态作为表象的基矢,那末我們的討論就可以大为簡化. 总同位旋可以取二个数值:一个是 $\frac{1}{2}$,另一个是 $\frac{3}{2}$. 总同位旋等于 $\frac{1}{2}$ 的有二个态:一个态的同位旋的第三分量是 $\frac{1}{2}$,另一个态的同位旋的第三分量是 $-\frac{1}{2}$. 总同位旋等于 $\frac{3}{2}$ 的有四个态,它們的同位旋的第三分量分别为 $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{3}{2}$. 按照同位旋的量子数分类,态可以分为六种,如下表所示:

总同位旋	$\frac{1}{2}$,	$\frac{1}{2}$,	$\frac{3}{2}$,	$\frac{3}{2}$,	$\frac{3}{2}$,	$\frac{3}{2}$
总同位旋的第三分量	$\frac{1}{2}$,	$-\frac{1}{2}$,	$\frac{3}{2}$,	$\frac{1}{2}$,	$-\frac{1}{2}$,	$-\frac{3}{2}$

不难看出,按照总角动量分类,态也可以分为六种,如下表所示:

总角动量	$\frac{1}{2}$,	$\frac{1}{2}$,	$\frac{3}{2}$,	$\frac{3}{2}$,	$\frac{3}{2}$,	$\frac{3}{2}$
总角动量在 z 轴方向的分量	$\frac{1}{2}$,	$-\frac{1}{2}$,	$\frac{3}{2}$,	$\frac{1}{2}$,	$-\frac{1}{2}$,	$-\frac{3}{2}$

因此,存在着三十六套不同的量子数,标志着三十六种不同的态,这些态彼此間不能相互跃迁. 假若我們用这样一套三十六个态作

为表象的基矢，那末 (13,128) 方程中的散射矩陣就將成为对角矩陣，其相应的相移矩陣也將成为对角矩陣。而且，三十六个相移也并不是都彼此不同的。假使我們有二个散射过程，它們的能量相同，总同位旋相同，总角动量也相同，但是它們的总同位旋的第三分量和总角动量在 z 軸方向的分量却各不相同；由于空間的各向同性以及同位旋空間的各向同性，亦即由于理論对于空間和同位旋空間的旋轉具有不变性，不难看出，这二个态的物理过程是相同的，只是几何方向不同而已；它們的散射相移也应該相同。假使不考慮总同位旋的第三分量和总角动量的 z 軸方向的分量，只按总同位旋和总角动量来分类，那末我們可以將态分为下列四类：

1) 总同位旋和总角动量都等于 $\frac{3}{2}$；我們以符号 (3,3) 标志这一类状态.

2) 总同位旋等于 $\frac{3}{2}$，总角动量等于 $\frac{1}{2}$；我們以符号 (3,1) 标志这一类状态.

3) 总同位旋等于 $\frac{1}{2}$，总角动量等于 $\frac{3}{2}$；我們以符号 (1,3) 标志这一类状态.

4) 总同位旋等于 $\frac{1}{2}$，总角动量也等于 $\frac{1}{2}$；我們以符号 (1,1) 标志这一类状态.

与这四类态相应，只存在着四种相移：δ_{33}, δ_{31}, δ_{13} 和 δ_{11}，它們都是能量 ω 的函数。因此，方程 (13,128) 实質上只是这四个相移的联立积分方程。方程 (13,128) 所以看起来很复杂，是因为我們选择的表象不合适。我們所用的表象的基矢在这里是不大适用的。标志波函数的是核子的自旋、核子的同位旋、介子的同位旋和介子动量的方向，并沒有用总同位旋和总角动量的本征态作为表象的基矢。正規的办法应該是首先选定一套三十六个相互正交的波函数作为表象的基矢；然后將方程 (13,128) 中的矩陣元表达为这一套基矢

之間的矩陣元;最后利用一个么正变换,轉換到以总同位旋和总角动量的共同本征态为基矢的表象,如此求得各个相移.

在(13,128)中,标志波函数用的力学量是核子的同位旋和自旋以及介子的同位旋,这些都还比較合用;另外还用了介子的动量$\vec{k}$来标志波函数,这就不大合适了;因为,动量具有无限多个本征值,用它們来标志有限的三十六个基矢,未免太多了. 最好是用介子的軌道角动量代替动量$\vec{k}$来标志波函数,因为P波只有三个相互正交的态. 可以指出,一个平面波可以分解为一系列的球面波的迭加. 設以θ_0代表$\vec{k}$和$\vec{x}$之間的夹角,則有:

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l P_l(\cos\theta_0)\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\cdot J_{l+\frac{1}{2}}(kr);\quad(13,149)$$

其中既包含有S波,也包含有P波、D波、F波等等.这就是說,某一动量的本征态可以分解为一系列的軌道角动量的本征态的迭加,其中包括軌道角动量等于0、1、2、3等等的本征态. 当然,所有的这些軌道角动量在$\vec{k}$方向的分量都等于零. 假使在散射中只有P波起作用,那末在波函数(13,149)中起作用的将只是如下的一項:

$$3i\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}J_{\frac{3}{2}}(kr)P_1(\cos\theta_0).\qquad(13,150)$$

軌道角动量等于1的π介子的波函数可以分为三类,相应于軌道角动量在z軸方向的分量等于1、0和-1. 这三类波函数是相互正交的,可以选为表象的基矢. 但是,也可以选择相互正交的动量$\vec{k}$的三个方向来标志我們的表象;因为在具有一定方向的动量的波函数中起作用的仅是如(13,150)中所示的P波部份,因而只要选择三个动量方向,其相应的P波部份相互正交,就可以用这三个相应的P波的波函数作为表象的基矢. 可以証明,假使三个动量的方向相互垂直,則其相应的P波部份也就相互正交.

选定一个球座标. 令θ_k和φ_k代表动量$\vec{k}$的方向,θ和φ代表坐标$\vec{x}$的方向,那末,利用公式(13,138),就可以将表式(13,150)

写作：

$$3i\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}J_{\frac{3}{2}}(kr)\{\cos\theta_k P_1(\cos\theta)+\sin\theta_k\cos\varphi_k\cdot P_1^1(\cos\theta)\cos\varphi+$$
$$+\sin\theta_k\sin\varphi_k\cdot P_1^1(\cos\theta)\cdot\sin\varphi\}\equiv\Phi_{\vec{k}}. \qquad (13,151)$$

假使动量与 z 軸平行，那末 $\theta_k=0$，上式就成为：

$$3i\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}J_{\frac{3}{2}}(kr)P_1(\cos\theta)\equiv\Phi_z; \qquad (13,152)$$

假使动量的方向与 z 軸平行，那末 $\theta_k=\frac{\pi}{2}$，$\varphi_k=0$，(13,151) 式就成为：

$$3i\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\cdot J_{\frac{3}{2}}(kr)\cdot P_1^1(\cos\theta)\cos\varphi\equiv\Phi_x; \qquad (13,153)$$

假使动量与 y 軸平行，那末 $\theta_k=\frac{\pi}{2}$，$\varphi_k=\frac{\pi}{2}$，(13,151) 式就成为：

$$3i\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\cdot J_{\frac{3}{2}}(kr)\cdot P_1^1(\cos\theta)\sin\varphi\equiv\Phi_y. \qquad (13,154)$$

不难看出，波函数 Φ_x，Φ_y 和 Φ_z 是相互正交的。Φ_z 是自旋等于零，軌道角动量等于 1，軌道角动量在 z 軸方向的分量等于零的粒子的波函数。Φ_x 是自旋等于零，軌道角动量等于 1，軌道角动量在 x 軸方向的分量等于零的粒子的波函数；假使我們将 $\cos\varphi$ 写作 $\frac{1}{2}(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})$，就可以看出，$\Phi_x$ 是二个 P 波的迭加，它們所代表的状态的軌道角动量在 z 軸方向的分量分别为 1 和 -1。Φ_y 是自旋等于零，軌道角动量等于 1，軌道角动量在 y 軸方向的分量等于零的粒子的波函数；如将 $\sin\varphi$ 写作 $\frac{1}{2i}(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})$，則可以看出，$\Phi_y$ 也是二个 P 波的迭加，它們所代表的状态的軌道角动量在 z 軸方向的分量分别为 1 和 -1。因此，Φ_x，Φ_y 和 Φ_z 是軌道角动量在 z 軸方向的分量等于 1，0 和 -1 的波函数的不同的綫性組合；它們彼此正交，完全可以用来作为表象的基矢。例如 (13,151) 中的波

函数 Φ_k 就可以写为它們的迭加：

$$\Phi_k = \cos\theta_k\Phi_z + \sin\theta_k\cos\varphi_k\Phi_x + \sin\theta_k\sin\varphi_k\Phi_y. \quad (13,155)$$

公式(13,146)也可以說明这一点。假使 $\vec{k}_1$ 与 $\vec{k}_2$ 的方向相互垂直，那末与它們相应的 P 波就相互正交，彼此間不能跃迁。在这时候，$\theta = \frac{\pi}{2}$，$P_1(\cos\theta)$ 就等于零。$^{(\mathrm{III})}\langle\xi_2, \eta_2|\mathbb{I}_{r_1}(0)|\xi_1\rangle$ 也的确等于零。假使 $\vec{k}_1$ 与 $\vec{k}_2$ 平行，那末与它們相应的 P 波完全相同，散射能够充分进行。在这时候，$\theta = 0$，$P_1(\cos\theta) = 1$，

$$^{(\mathrm{III})}\langle|\xi_2, \eta_2|\mathbb{I}_{r_1}(0)|\xi_1\rangle = -\frac{6\sqrt{2\pi}}{k_1\sqrt{\omega_1}}e^{i\delta_1}\sin\delta_1. \quad (13,156)$$

假使 $\vec{k}_1$ 与 $\vec{k}_2$ 既不相互垂直又不相互平行，那末可以将波函数分解为如(13,155)的迭加，其中一部份相互平行，一部份相互垂直。相互垂直的部份对散射不作貢献，相互平行的部份对散射作出貢献，这就說明了，为什么在公式(13,146)式的右方出现一个因子 $P_1(\cos\theta)$。将与动量 $\vec{k}_2$ 相应的 P 波分解为綫性迭加，則其中所包含的与 $\vec{k}_1$ 相应的 P 波的比重等于 $P_1(\cos\theta)$。

根据以上的討論，我們可以选择如下的量子数来标志表象的基矢：

1) 核子的自旋在 z 軸方向的分量，以字母 α 表示；α 可以是 $\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$。

2) 核子的同位旋的第三分量，以字母 β 表示；β 可以是 $\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$。

3) 介子的动量的方向，以字母 i 表示；i 的数值可以取 1，2 或 3；$i = 1$ 表示动量与 x 軸平行，$i = 2$ 表示动量与 y 軸平行，$i = 3$ 表示动量与 z 軸平行。

4) 介子的同位旋的方向，以字母 j 代表；j 可以是 1，2 或 3，分别代表与 π 介子場量 φ_1，φ_2 和 φ_3 相应的三种介子。

当然,我們也可以将 π 介子分为正 π 介子、负 π 介子和中性 π 介子三类;这与将 π 介子分为与 φ_1、φ_2 和 φ_3 相应的三种是等效的,前者是后者的綫性迭加. 当选择了这样的表象以后,就可以将积分方程(13,128)中的矩陣元[附] $\langle \vec{k}_2, r_2, s_2 \| \mathbf{I}_{r_1}(\vec{k}_1) \| s_1 \rangle$ 等等用另一个更对称的符号

$$\langle \alpha'', \beta'', i'', j'' | R(\omega_0) | \alpha', \beta', i', j' \rangle \qquad (13,157)$$

来代表,其中 ω_0 代表散射介子的能量,α', β', i', j' 代表始态核子和介子的自旋、同位旋和軌道角动量,α'', β'', i'', j'' 代表終态核子和介子的自旋、同位旋和軌道角动量. 为了书写方便,我們在以下有时用一个字母 ζ 代表四个字母 α, β, i, j, 那末,(13,157) 中的表式可以簡写为:

$$\langle \zeta'' | R(\omega_0) | \zeta' \rangle. \qquad (13,158)$$

現在可以将积分方程 (13,128) 写成比較对称的形式. 为此,我們令始态和終态介子的动量 $\vec{k}_1$ 和 $\vec{k}_2$ 的方向只取三个方向,亦即 x 軸、y 軸和 z 軸的方向;中間态中的介子动量 $\vec{k}$ 当然可以取任何方向. 我們利用公式(13,155),可以将它的波函数中的 P 波部份写成綫性迭加. 那末,不难看出,用新的符号和利用公式(13,155),就可以将出現在(13,128)式右方的矩陣元 $^{(\text{III})}\langle \vec{k}, r, s \| \mathbf{I}_{r_1}(\vec{k}_1') \| s_1 \rangle$ 改写为如下的綫性迭加:

$$\begin{aligned} {}^{(\text{III})}\langle \vec{k}, r, s \| \mathbf{I}_{r_1}(\vec{k}_1') \| s_1 \rangle = {} & \sin\theta_k \cos\varphi_k \langle \zeta | R(\omega) | \zeta' \rangle_{i=1} + \\ & + \sin\theta_k \sin\varphi_k \langle \zeta | R(\omega) | \zeta' \rangle_{i=2} + \cos\theta_k \langle \zeta | R(\omega) | \zeta' \rangle_{i=3}. \end{aligned} \qquad (13,159)$$

将(13,159)代入(13,128),并对 $d\Omega_k$ 积分,得:

$$\begin{aligned} & \langle \alpha'', \beta'', i'', j'' | R(\omega_0) | \alpha', \beta', i', j' \rangle \\ & = \frac{f_0^2 k_0^2 v^2(k_0^2)}{\sqrt{2}\, m^3 \omega_3^{3/2}} \chi^*_{\alpha'', \beta''} \{ \tau_{j''} \sigma_{i''} \tau_{j'} \sigma_{i'} - \tau_{i''} \sigma_{i'} \tau_{j'} \sigma_{j''} \} \chi_{\alpha', \beta'} - \\ & - \frac{k_0^2 v^2(k_0^2)}{6\pi^2 \sqrt{2\omega_0}} \sum_{\zeta} \int \frac{\omega^2 d\omega}{k v^2(k^2)} \times \end{aligned}$$

$$\times\left\{\frac{\langle\zeta|R(\omega)|\alpha'',\beta'',i'',j''\rangle^{*}\langle\zeta|R(\omega)|\alpha',\beta',i',j'\rangle}{\omega-\omega_0-i\epsilon}+\right.$$
$$\left.+\frac{\langle\zeta|R(\omega)|\alpha'',\beta'',i',j'\rangle^{*}\langle\zeta|R(\omega)|\alpha',\beta',i'',j''\rangle}{\omega+\omega_0}\right\};$$

(13,160)

注意，上式右方积分号内曲括号中的 i', j' 和 i'', j'' 所处的地位在前后二項中并不相同. 現在，我們可以将方程(13,160)进一步变换，使之成为相移所服从的积分方程.

§ 13,9. 相移所滿足的积分方程

假使我們进行么正变換，使矩陣 R 变为对角矩陣；那末，根据公式(13,156)以及有关的討論，就不难看出，这一对角矩陣应該具有如下的形式：

$$-\frac{6\sqrt{2\pi}}{k\sqrt{\omega}}\cdot e^{i\delta_\rho}\sin\delta_\rho, \qquad (13,161)$$
$$\rho=(3,3),(3,1),(1,3),(1,1);$$

ρ 标志着四种不同的相移. 因此，在进行么正变換以前，我們先进行如下的变換：

$$\langle\zeta''|R(\omega)|\zeta'\rangle=-\frac{6\sqrt{2\pi}}{k\sqrt{\omega}}\langle\zeta''|r(\omega)|\zeta'\rangle; \qquad (13,162)$$

于是在将 r 矩陣变成对角矩陣以后，它的矩陣元将直接是：

$$e^{i\delta_\rho}\sin\delta_\rho, \qquad (13,163)$$
$$\rho=(3,3),(3,1),(1,3),(1,1).$$

将(13,162)代入方程(13,160)，就得：

$$\langle\alpha'',\beta'',i'',j''|r(\omega_0)|\alpha',\beta',i',j'\rangle=$$
$$=-\frac{f_0^2v^2(k_0^2)k_0^3}{12\pi n^2\omega_0}\chi^{*}_{\alpha'',\beta''}\{\sigma_{i''i'}\sigma_{i''i'}\tau_{j''j'}\tau_{j''j'}-\sigma_{i''i'}\sigma_{i''i'}\tau_{j''j'}\tau_{j''j'}\}\chi_{\alpha',\beta'}+$$
$$+\frac{k_0^3}{\pi}v^3(k_0^2)\sum_{\zeta}\int\frac{d\omega}{k^3v^3(k^2)}\times$$

$$\times\left\{\frac{\langle\zeta|r(\omega)|\alpha'',\beta'',i'',j''\rangle^*\langle\zeta|r(\omega)|\alpha',\beta',i',j'\rangle}{\omega-\omega_0-i\epsilon}+\right.$$
$$\left.+\frac{\langle\zeta|r(\omega)|\alpha'',\beta'',i',j'\rangle^*\langle\zeta|r(\omega)|\alpha',\beta',i'',j''\rangle}{\omega+\omega_0}\right\}. \tag{13,164}$$

可以將 r 矩陣写成如下的形式:

$$r(\omega)=P^\rho g_\rho(\omega), \tag{13,165}$$
$$\rho=(3,3),(3,1),(1,3),(1,1);$$

其中

$$g_\rho(\omega)=e^{i\delta_\rho(\omega)}\sin\delta_\rho(\omega), \tag{13,166}$$

P^ρ 是三十六行、三十六列的矩陣，它們具有如下的性質：当 P^ρ 作用在以 ρ 标志的态的波函数上时，得到的仍然是原来的波函数；作用在其它的波函数上，得到的結果就等于零. 以矩陣 $P^{(33)}$ 为例，它如作用在(3,3)态的波函数上，則得到的还是原来的波函数；假使它作用在(3,1)、(1,3)或(1,1)态的波函数上，則得到的結果就等于零. 只要能求得 P^ρ 的显示表式，就可以将(13,164)化为 $g_\rho(\omega)$ 所滿足的积分方程.

为了寻求 P^ρ 的显示表式，我們先研究(13,164)式右方第一項的矩陣元；它們也是36×36的矩陣的矩陣元. 撇开因子 $-\frac{f_0^2v^2(k_0^2)k_0^3}{12\pi m^2\omega_0}$ 不談，这个 36×36 的矩陣是由二項組成的. 一項是：

$$N\times M=\begin{pmatrix}1&\tau_1\tau_2&\tau_1\tau_3\\ \tau_2\tau_1&1&\tau_2\tau_3\\ \tau_3\tau_1&\tau_3\tau_2&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&\sigma_1\sigma_2&\sigma_1\sigma_3\\ \sigma_2\sigma_1&1&\sigma_2\sigma_3\\ \sigma_3\sigma_1&\sigma_3\sigma_2&1\end{pmatrix}, \tag{13,167}$$

另一項是：

$$\widetilde{N}\times\widetilde{M}=\begin{pmatrix}1&\tau_2\tau_1&\tau_3\tau_1\\ \tau_1\tau_2&1&\tau_3\tau_2\\ \tau_1\tau_3&\tau_2\tau_3&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&\sigma_2\sigma_1&\sigma_3\sigma_1\\ \sigma_1\sigma_2&1&\sigma_3\sigma_2\\ \sigma_1\sigma_3&\sigma_2\sigma_3&1\end{pmatrix}; \tag{13,168}$$

其中 N, M, $\widetilde{N}$ 和 $\widetilde{M}$ 都是 6×6 的矩陣，因此它們的外积 A 和 $\widetilde{A}$ 都

是 36×36 的矩陣. 可以將 N 寫作:

$$N=\begin{pmatrix}1 & +i\tau_3 & -i\tau_2\\ -i\tau_3 & 1 & +i\tau_1\\ +i\tau_2 & -i\tau_1 & 1\end{pmatrix}=1-\vec{\tau}\cdot\vec{i}, \tag{13,169}$$

其中 $\vec{i}$ 是三个 3×3 的矩陣,代表 π 介子同位旋的三个分量;它們的表式見(3,146)式和(3,148)式.我們还可以將上式略加改写.令

$$\vec{T}=\frac{1}{2}\vec{\tau}+\vec{i} \tag{13,170}$$

代表总同位旋的三个分量,則有:

$$T^2=\frac{1}{4}\tau^2+i^2+\vec{\tau}\cdot\vec{i}=\frac{3}{4}+2+\vec{\tau}\cdot\vec{i}; \tag{13,171}$$

因此

$$\vec{\tau}\cdot\vec{i}=T^2-\frac{11}{4}. \tag{13,172}$$

利用(13,172)式,可得:

$$\left.\begin{aligned}N&=\frac{15}{4}-T^2,\\ \widetilde{N}&=-\frac{7}{4}+T^2;\end{aligned}\right\} \tag{13,173}$$

因此总同位旋的本征态也是算符 N 和 $\widetilde{N}$ 的本征态,其相应的本征值如下表:

	N	$\widetilde{N}$
$T=\frac{3}{2}$	0	2
$T=\frac{1}{2}$	3	-1

(13,174)

与上相类似,可以証明,总角动量 L 的本征态也是矩陣 M 和 $\widetilde{M}$ 的本征态,其相应的本征值如下表:

$$\begin{array}{lcc} & M & \widetilde{M} \\ L=\dfrac{3}{2} & 0 & 2 \\ L=\dfrac{1}{2} & 3 & -1 \end{array} \tag{13,175}$$

因此，与(13,164)式右方第一项相应的矩阵在总同位旋和总角动量表象中的确是对角矩阵，其数值是：

$$-\frac{f_0^2\nu^2(k_0^2)k_0^3}{12\pi m^2\omega_0}\times \begin{array}{cccc} (3,3), & (3,1), & (1,3), & (1,1) \\ -4, & 2 & 2 & 8 \end{array} \tag{13,176}$$

利用矩阵M和N，我们立即可以将P^ρ的显示表式写下。不难证明：

$$\left.\begin{aligned} P^{(33)} &= \left(1-\frac{N}{3}\right)\times\left(1-\frac{M}{3}\right), \\ P^{(31)} &= \left(1-\frac{N}{3}\right)\times\frac{M}{3}, \\ P^{(13)} &= \frac{N}{3}\left(1-\frac{M}{3}\right), \\ P^{(11)} &= \frac{N}{3}\cdot\frac{M}{3}. \end{aligned}\right\} \tag{13,177}$$

P^ρ的显示表式求出之后，就可以将方程(13,164)加以改写。为了书写方便起见，我们仍以字母ξ和η分别代表核子和介子的力学量，以$P^\rho_{\xi\eta\xi''\eta'',\xi'\eta'}$代表$P^\rho$的矩阵元，于是可以将(13,164)式改写为

$$\begin{aligned} P^\rho_{\xi\eta\xi''\eta'',\xi'\eta'}\cdot g_\rho(\omega_0) &= -\frac{f_0^2\nu^2(k_0^2)k_0^3}{12\pi m^2\omega_0}P^\rho_{\xi\eta\xi''\eta'',\xi'\eta'}\cdot\lambda_\rho + \\ &+\frac{k_0^3\nu^2(k_0^2)}{\pi}\int\frac{d\omega}{k^3\nu^2(k^2)}\left\{\frac{P^{*\rho''}_{\xi\eta,\xi\eta\xi''\eta''}P^{\rho'}_{\xi\eta,\xi'\eta'}g_{\rho''}(\omega)g_{\rho'}(\omega)}{\omega-\omega_1-i\epsilon}+\right. \\ &+\left.\frac{P^{*\rho''}_{\xi\eta,\xi\eta\xi''\eta''}P^{\rho'}_{\xi\eta,\xi'\eta'}g_{\rho''}(\omega)g_{\rho'}(\omega)}{\omega+\omega_0}\right\}; \end{aligned} \tag{13,178}$$

$$\lambda_{(33)}=-4,\quad \lambda_{(31)}=\lambda_{(13)}=2,\quad \lambda_{(11)}=8.$$

由于 P^{ρ} 是厄米矩陣，我們有：

$$P^{*\rho''}_{\xi\eta,\xi'\eta''} = P^{\rho''}_{\xi'\eta'',\xi\eta}, \tag{13,179}$$

因此

$$P^{*\rho''}_{\xi\eta,\xi'\eta''}P^{\rho'}_{\xi\eta,\xi'\eta'} = (P^{\rho''}P^{\rho'})_{\xi'\eta'',\xi'\eta'}. \tag{13,180}$$

利用公式(13,177)和(13,167)，可以証明：

$$P^{\rho''}P^{\rho'} = \delta_{\rho''\rho'}P^{\rho'}; \tag{13,181}$$

用同样方法可以証明：

$$P^{*\rho''}_{\xi\eta,\xi'\eta''}P^{\rho'}_{\xi\eta,\xi'\eta''} = \delta_{\rho''\rho'}P^{\rho'}_{\xi'\eta',\xi'\eta''}. \tag{13,182}$$

因此，我們可以將(13,178)式写作：

$$P^{\rho}_{\xi'\eta'',\xi'\eta'}g_{\rho}(\omega_0) = -\frac{f_0^2v^2(k_0^2)k_0^3}{12\pi m^2\omega_0}\cdot P^{\rho}_{\xi'\eta'',\xi'\eta'}\cdot\lambda_{\rho} +$$
$$+\frac{k_0^3v^2(k_0^2)}{\pi}\int\frac{d\omega}{k^3v^2(k^2)}\left\{\frac{P^{\rho}_{\xi'\eta'',\xi'\eta'}|g_{\rho}(\omega)|^2}{\omega-\omega_0-i\epsilon}+\right.$$
$$\left.+\frac{P^{\rho}_{\xi'\eta',\xi'\eta''}|g_{\rho}(\omega)|^2}{\omega+\omega_0}\right\}. \tag{13,183}$$

可以引入四个矩陣 $\tilde{P}^{\rho}$，它們的定义是：

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{P}^{(33)} &= \left(1-\frac{\tilde{N}}{3}\right)\times\left(1-\frac{\tilde{M}}{3}\right),\\
\tilde{P}^{(31)} &= \left(1-\frac{\tilde{N}}{3}\right)\frac{\tilde{M}}{3},\\
\tilde{P}^{(13)} &= \frac{\tilde{N}}{3}\left(1-\frac{\tilde{M}}{3}\right),\\
\tilde{P}^{(11)} &= \frac{\tilde{N}}{3}\cdot\frac{\tilde{M}}{3}.
\end{aligned}\right\} \tag{13,184}$$

不难看出，在 P^{ρ} 和 $\tilde{P}^{\rho}$ 之間存在着如下的关系：

$$P^{\rho}_{\xi'\eta',\xi'\eta''} = \tilde{P}^{\rho}_{\xi'\eta'',\xi'\eta'}. \tag{13,184a}$$

因此，可以將(13,183)式写作：

$$P^{\rho}g_{\rho}(\omega_0) = -\frac{f_0^2v^2(k_0^2)k_0^3}{12\pi m^2\omega_0}P^{\rho}\lambda_{\rho} +$$
$$+\frac{k_0^3v^2(k_0^2)}{\pi}\int\frac{d\omega}{k^3v^2(k^2)}\left\{\frac{P^{\rho}|g_{\rho}(\omega)|^2}{\omega-\omega_0-i\epsilon}+\frac{\tilde{P}^{\rho}|g_{\rho}(\omega)|^2}{\omega+\omega_0}\right\}. \tag{13,185}$$

可以看出，总同位旋和总角动量的共同本征态也是 $\hat{P}^{\rho}$ 的本征态；利用公式(13,174)和(13,175)可以得到它們相应的本征值为：

	$\hat{P}^{(33)}$	$\hat{P}^{(31)}$	$\hat{P}^{(13)}$	$\hat{P}^{(11)}$
(3,3)	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$
(3,1)	$\frac{4}{9}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{8}{9}$	$-\frac{2}{9}$
(1,3)	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{9}$	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{2}{9}$
(1,1)	$\frac{16}{9}$	$-\frac{4}{9}$	$-\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

(13,186a)

因此，可以将(13,185)写成如下的形式：

$$g_{\rho}(\omega_0) = -\frac{f_0^2 v^2(k_0^2) k_0^3}{12\pi m^2 \omega_0}\lambda_{\rho} + \\ + \frac{k_0^3 v^2(k_0^2)}{\pi}\int \frac{d\omega}{k^3 v^2(k^2)}\left\{\frac{|g_{\rho}(\omega)|^2}{\omega - \omega_0 - i\varepsilon} + \frac{A^{\mu\nu}|g_{\sigma}(\omega)|^2}{\omega + \omega_0}\right\}, \quad (13,186)$$

其中 $A^{\mu\nu}$ 取(13,186a)中的数值，μ 代表行数，ν 代表列数.

从(13,176)可以看出，(1,3)态和(3,1)态在积分方程(13,186)中具有完全对称的地位. 这是合理的；因为在原来的积分方程(13,160)中，同位旋和角动量占有完全对称的地位. 因此我們有：

$$g_{(13)}(\omega) = g_{(31)}(\omega). \quad (13,187)$$

引进新的符号：

$$\left.\begin{aligned} g_1(\omega) &\equiv g_{(11)}(\omega), \quad g_3(\omega) \equiv g_{(33)}(\omega), \\ g_2(\omega) &\equiv g_{(13)}(\omega) = g_{(31)}(\omega); \end{aligned}\right\} \quad (13,188)$$

引进新的三行三列的矩陣：

$$A \equiv \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{9}, & -\frac{8}{9}, & \frac{16}{9} \\ -\frac{2}{9}, & \frac{7}{9}, & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9}, & \frac{4}{9}, & \frac{1}{9} \end{pmatrix}; \quad (13,189)$$

那末就可以将(13,186)式进一步簡化为：

$$g_i(\omega_0) = -\frac{f_0^2 v^2(k_0^2) k_0^3}{12\pi m^2 \omega_0}\lambda_i + \\ + \frac{k_0^3 v^2(k_0^2)}{\pi}\int \frac{d\omega}{k^3 v^2(k^2)}\left\{\frac{|g_i(\omega)|^2}{\omega - \omega_0 - i\epsilon} + \frac{A_{ij}|g_i(\omega)|^2}{\omega + \omega_0}\right\}, \tag{13,190}$$

$$i, j = 1, 2, 3;$$

其中

$$\lambda_1 = 8, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = -4. \tag{13,191}$$

假使令

$$v(k_0^2) = v(k^2) = 1, \tag{13,192}$$

則(13,190)就是駱 [Low, 1955] 所推导得的方程. 又令

$$g_i(\omega) = v^2(k^2) k^3 h_i(\omega), \tag{13,193}$$

(13,190)式就可以写成如下的形式：

$$h_i = -\frac{f_0^2 \lambda_i}{12\pi m^2 \omega_0} + \frac{1}{\pi}\int k^3 v^2(k^2) d\omega \left\{\frac{|h_i(\omega)|^2}{\omega - \omega_0 - i\epsilon} + \frac{A_{ij}|h_i(\omega)|^2}{\omega + \omega_0}\right\}. \tag{13,194}$$

这就是邱和駱 (Chew & Low, 1956) 所提出的 π 介子与核子相互散射理論的方程。

邱和駱以及柴尔茨曼 [Salzman & Salzman, 1957] 研究了方程(13,194)的解. 他們指出，假使令

$$\frac{f_0^2}{4\pi} = 0.08, \tag{13,195}$$

并令 $v(k^2)$ 在 $k > 7m_\pi$ (m_π 为 π 介子的质量)时趋于零，那末(3,3)态和(1,3)态的相移的实驗值就能滿足方程(13,194). 这是介子理論的重要成就. 在另一方面，卡斯蒂列蜀等 [Castillejo, Dalitz & Dyson, 1956] 的研究指出：当 f_0^2 和 $v(k^2)$ 确定以后，方程(13,194)具有无穷多种的解，因此方程(13,194)还不足以将相移确定下来，它只是相移所必須滿足的条件。

参 考 文 献

Castillegs, L., Dalitz, R. H. & Dyson, F. J. (1956), *Phys. Rev.*, **101**, 453.
Chew, G. F. & Low, F. E. (1956), *Phys. Rev.*, **101**, 1570.
Gell-Mann, M. & Low, F. E. (1951), *Phys. Rev.*, **84**, 350.
Low, F. E. (1955), *Phys. Rev.*, **97**, 1392.
Salzman, G. & Salzman, F. (1957), *Phys. Rev.*, **108**, 1619.

第十四章　色散关系

§14,1. 因果律与色散关系

在对強相互作用的理論研究方面，人們也曾进行了不少的工作，近年来也取得了一些进展，例如上章中所介紹的邓和路的理論等等。但是，总的說来，其进展是不大的。在对強相互作用現象的研究方面，理論显然落后于实驗。由于高能量加速器的建成，有关基本粒子間的強相互作用現象的实驗事实正在迅速地累积起来，亟待人們用理論去分析整理，寻求出对这些現象的系統而統一的理解。由于我們还缺乏处理強相互作用理論的有效而普遍的数学方法，理論工作的进行受到了許多阻碍。但是，理論工作者利用一些普遍的原理，在来分析和整理实驗事实以及寻求許多現象的解释方面，也取得了不少的成就。

在自然界中存在着一些普遍規律，它們在一切現象中起着作用。掌握这些規律，用以分析和整理实驗事实，就常常会得到有用的結果。例如动量和能量守恆定律具有极大的普遍性。它来源于自然規律对于坐标移动具有不变性，亦即来源于时間和空間的均匀性，因此它不受具体規律的限制。不論在物理現象、化学現象或生命現象中，这些規律都起着作用。我們尽管可以对某一化学变化的具体机制不大了解，但是却仍然可以肯定，化学变化前后的总能量应該是相等的。自然現象的許多特点与这种普遍規律密切連系着，而与一些具体的、特殊的規律无关。因此，即使我們对在某些現象中起作用的具体規律还不清楚，却仍旧可以利用这些普遍規律去分析这些現象，理解这些現象的各种特点。举一个例：原子核在受激后可能接連放出几个 γ 光子。这些 γ 光子的放出方向之間的角关联在許多情况之下决定于这一原子核的各个态的自旋和宇

称，而与原子核结构的其它具体特点无关．这些角关联的特点往往是由角动量守恒定律和宇称守恒定律决定的，它不受核子力的其他具体性质所影响．因此，即使我們在目前对于核子力的了解还很粗浅，即使核結构的理論还处在发展的初級阶段；我們仍然可以利用角动量守恒定律和宇称守恒定律来对这些角关联現象进行深入的研究，从而得出正确和有用的結論．

近年来，人們利用了因果律来分析和整理基本粒子的实驗事实，取得了显著的成就．因果律与物理現象的許多特点有着密切的联系．在古典电磁場的理論中，克拉茂斯和克隆尼許 [Kramers, 1927]，[Kronig, 1942, 1946] 曾研究过因果律与色散关系之間的連系．盖尔曼等 [Gell-Mann, Goldberger & Thirring, 1954] 及波戈留波夫 [Боголюбов, 1957] 将这一研究扩充到量子場論的領域中；他們統称这种利用因果律所得到的关系为“色散关系”．由于人們在推导这些关系时常常只应用一些普遍的前提，因而这些关系具有很大的普遍性，成为分析和整理实驗事实的有力工具．对这些关系与实驗事实所作的比較还可以倒过来用来检驗推导这些关系时所应用的前提的正确性，因此它还具有原則性的意义．我們在这里将先介紹古典电磁場理論中的因果律与色散关系之間的連系，然后再进一步介紹量子場論中的色散关系．

因果律在物理現象中表現为：任何物理作用的传播速度不能超过光速；假使二个事件之間的間隔是类空間隔，它們就不可能彼此影响．以电磁扰动的传播为例．为了討論簡单起見，我們只討論一个一維的例子．設 $u(x, t)$ 代表任何一个电磁扰动，它滿足如下的条件：

$$u(x, t) = 0; \quad 当 \quad t < 0, \quad x \geqslant 0. \tag{14,1}$$

那末，根据因果律，$u(x, t)$ 也必須滿足如下的条件：

$$u(x, t) = 0; \quad 当 \quad t < \tau, \quad x \geqslant \tau. \tag{14,2}$$

可以将 $u(x, t)$ 分解为一系列的平面波：

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\omega) e^{i(kx-\omega t)} d\omega. \tag{14,3}$$

由于 $u(x,t)$ 必須是实数，有：

$$\left.\begin{aligned} u^*(-\omega) &= u(\omega), \\ k^*(-\omega) &= -k(\omega); \end{aligned}\right\} \tag{14,4}$$

$k(\omega)$ 由折射率 $n(\omega)$ 决定：

$$k(\omega) = \omega n(\omega). \tag{14,5}$$

实验上所測定的，是 ω 为正实数时的折射率。我們按照公式(14,4)和(14,5)，定义 $n(\omega)$ 当 ω 是負数时为：

$$n(-\omega) = n^*(+\omega). \tag{14,6}$$

在眞空中，$n(\omega) = 1$；(14,3)式就成为：

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\omega) e^{i\omega(x-t)} d\omega. \tag{14,7}$$

显然，假使(14,7)式滿足条件(14,1)，那末它也一定滿足条件(14,2)；也就是說，滿足因果律的要求。

在媒質中，$n(\omega)$ 通常不等于 1。而且，由于媒質能吸收电磁波，$n(\omega)$ 甚至不是实数。假使 $n(\omega)$ 是 ω 的任何函数，那末，即使表式(14,3)滿足条件(14,1)，它也未必能滿足条件(14,2)。因此，产生了这样的問題：究竟 $n(\omega)$ 应該具备些什么样的条件，才能使表式(14,3)滿足因果律的要求。我們令

$$n(\omega) = n_1(\omega) + i n_2(\omega), \tag{14,8}$$

并假定媒質处在基态，而不是在亚稳的受激态，因此它只能吸收电磁波而不能放出电磁波。这就要求当 ω 是正实数时

$$n_2(\omega) \geqslant 0. \tag{14,9}$$

为了討論的方便，我們引进一个色散函数 $f(\omega)$；它的定义是：

$$f(\omega) \equiv \omega(n(\omega) - 1). \tag{14,10}$$

从(14,6)，我們可得：

$$f(-\omega) = -f^*(\omega). \tag{14,11}$$

将 $f(\omega)$ 显示地分解为实数部分和虛数部分：

$$f(\omega) = f_1(\omega) + i f_2(\omega); \tag{14,12}$$

那末，根据(14,9)，(14,8)和(14,10)式，我們有：

$$f_2(\omega) \geqslant 0, \quad \text{当} \quad \omega > 0. \tag{14,13}$$

利用(14,5)和(14,10),可以将(14,3)式写作:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\omega) e^{if(\omega)x - i\omega(t-x)} d\omega. \tag{14,14}$$

我們的問題是: $f(\omega)$ 应該滿足什么条件, 才能保証 $u(x, t)$ 当 $z = t - x < 0$ 的时候一定等于零. 可以根据蒂区曼許[Titchmarsh, 1937] 所証明的一条定理, 来証明 $f(\omega)$ 可以解析延拓到复数 $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ 平面的整个上半平面.

蒂区曼許定理: 設 $F(\omega)$ 是实变数 ω 的函数,在 $-\infty < \omega < \infty$ 的区域内平方可积. 假使它的傅里叶变換 $E(z)$ 在 $z < 0$ 的时候等于零, 那末 $F(\omega)$ 就可以解析延拓至复变数 $\omega_1 + i\omega_2$ 平面的整个上半平面,而且有:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega_1 + i\omega_2)|^2 d\omega_1 \leqslant K \quad (K \text{ 为某一恒量}). \tag{14,15}$$

根据这一定理, 立刻可以知道, $u(\omega_1)$ 一定可以解析延拓到 ω 的整个上半平面; 因为电磁扰动的能量有限, $u(\omega_1)$ 一定在 $-\infty < \omega_1 < \infty$ 的区域内是平方可积的. 此外, 由于(14,13)和(14,11),可以看出,当 $x > 0$ 时,

$$|u(\omega_1) e^{if(\omega_1)x}|^2 = |u(\omega_1)|^2 e^{-2f_2(\omega_1)x} \leqslant |u(\omega_1)|^2, \tag{14,16}$$

因此, $u(\omega_1) e^{if(\omega_1)x}$ 也是在 $-\infty < \omega_1 < \infty$ 的区域内平方可积的. 現在假使我們选择一个函数 $u(\omega)$,它在 ω 的整个上半平面是解析的和恆正的,那末, 根据因果律所要求的条件(14,2)和上述定理,可以看出, 当 $x > 0$ 时, $e^{if(\omega)x}$ 可以解析延拓至 ω 的整个上半平面. 假使在 $\omega_2 > 0$ 时 $e^{if(\omega_1 + i\omega_2)x} \neq 0$,那末

$$f(\omega) = \frac{1}{ix} \ln (e^{if(\omega)x}) \tag{14,17}$$

在 ω 的整个上半平面也是解析的. 可以証明, $e^{if(\omega_1 + i\omega_2)x}$ 在 $\omega_2 > 0$ 时不可能等于零. 如果在 $\omega = \omega_0$ 的时候, $e^{if(\omega)x}$ 的确等于零. 那末,就可以将 $e^{if(\omega)}$ 在 ω_0 附近展开成为如下的級数:

$$e^{if(\omega)} = c(\omega - \omega_0)^p + \cdots; \tag{14,18}$$

其中 P 是一个正整数，c 是一个常数。选择 $x = \frac{x'}{2P}$，我們有：

$$e^{if(\omega)x} = c(\omega - \omega_0)^{x'/2} + \cdots; \qquad (14,19)$$

显然，表式(14,19)不可能当 x 取任何正数值时都是解析的。这就証明了，$f(\omega)$ 可以解析延拓到 ω 的整个上半平面。也可以証明，当 $\omega_2 > 0$ 时，$f(\omega)$ 的虛数部分大于零或等于零：

$$f_2(\omega_1 + i\omega_2) \geqslant 0, \quad \text{当} \quad \omega_2 > 0. \qquad (14,20)$$

証明如下：根据(14,15)式，我們有：

$$\int |u(\omega_1 + i\omega_2) e^{if(\omega_1 + i\omega_2)x}|^2 d\omega_1 \leqslant K. \qquad (14,21)$$

假使在 $\omega = \Omega_1$ 附近的时候，$-f_2(\omega) \geqslant \varepsilon > 0$，那末根据(14,21)，必須有：

$$\int_{\Omega_1 - \frac{\delta}{2}}^{\Omega_1 + \frac{\delta}{2}} |u(\omega)|^2 e^{2\varepsilon x} d\omega_1 \leqslant K. \qquad (14,22)$$

当 $x \to \infty$ 时，上式显然不成立。另一方面，也可以証明，K 与 x 的数值无关。于是我們有：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(\omega) e^{ixf(\omega)}|^2 d\omega_1 = \int_0^{\infty} u^2(x_1 z + x) e^{-2zw_2} dz \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{\infty} u^2(x, z + x) dz = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |u(\omega_1)|^2 e^{-2f_2(\omega_1)x} d\omega_1 \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |u(\omega_1)|^2 d\omega_1 = K. \qquad (14,23)$$

这就証明了，在 $\omega_2 > 0$ 时，$f_2(\omega_1 + i\omega_2) \geqslant 0$。

折射率 $n(\omega)$ 的数值决定于具体的物質結构。設 N 为单位容积內的散射中心数。$h(\omega)$ 代表电磁波的前进散射幅，那末在 $n(\omega)$ 与 $h(\omega)$ 之間存在着如下的关系：

$$n(\omega) = 1 + \frac{2\pi}{\omega^2} N \cdot h(\omega); \qquad (14,24)$$

因此在 $f(\omega)$ 和 $h(\omega)$ 之間存在着如下的关系：

$$h(\omega) = \frac{\omega f(\omega)}{2\pi N}. \qquad (14,25)$$

由此可见，$h(\omega)$ 也可以解析延拓到整个 ω 平面的上半平面。我們假定，当 $|\omega| \to \infty$ 时，$|h(\omega)|$ 小于某一个上限，那末利用科希(Cauchy) 定理，可得：

$$\frac{h(\omega)}{\omega - \omega_0} = \frac{1}{\pi i}\mathscr{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h(\omega')d\omega'}{(\omega' - \omega)(\omega' - \omega_0 + i\varepsilon)}, \quad (14,26)$$

其中 ω 和 ω_0 为任何实数，积分沿实軸进行，在 $\omega' = \omega$ 处取主值，ε 为一微小的正数。由于

$$\frac{1}{\omega' - \omega_0 \pm i\varepsilon} = \mathscr{P}\frac{1}{\omega' - \omega_0} \mp i\pi\delta(\omega' - \omega_0); \quad (14,27)$$

可以將(14,26)式写作：

$$h(\omega) - h(\omega_0) = \frac{\omega - \omega_0}{\pi i}\mathscr{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h(\omega')d\omega'}{(\omega' - \omega)(\omega' - \omega_0)}, \quad (14,28)$$

积分在 $\omega' = \omega$ 和 $\omega' = \omega_0$ 处都取主值。上式的实数部分是：

$$\mathscr{R}e\,h(\omega) - \mathscr{R}e\,h(\omega_0) = \frac{\omega - \omega_0}{\pi}\mathscr{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathscr{I}m\,h(\omega')d\omega'}{(\omega' - \omega)(\omega' - \omega_0)}; \quad (14,29)$$

式中符号 $\mathscr{R}e$ 及 $\mathscr{I}m$ 分别代表取实数部分和取虛数部分。另外，从公式(14,11)和(14,25)，可得：

$$h(\omega) = h^*(-\omega). \quad (14,30)$$

令 $\omega_0 = 0$，利用上式，就可以將(14,29)式改写为：

$$\mathscr{R}e\,h(\omega) - \mathscr{R}e\,h(0) = \frac{2\omega^2}{\pi}\mathscr{P}\int_0^{\infty}\frac{\mathscr{I}m\,h(\omega')d\omega'}{\omega'(\omega'^2 - \omega^2)}; \quad (14,31)$$

这就是光学中的色散关系。

§ 14,2. 散射幅与推迟格临函数

从上节的討論，可以看出，因果律与色散关系之間的連系是通过散射幅的解析性質而产生的。因果律保証了散射幅的可解析延拓性，散射幅的解析性質又通过科希定理导致色散关系。在量子場論中，推导色散关系也按上述步驟进行。量子場論中的因果律体現在对易关系中。假使在时空中有二点，它們之間的間隔是

类空間隔，那末在这二点的場量就可以相互对易；在物理上这意味着，当我們測量其中一点的場量的时候，不会影响到另一点的場量；也就是說，一点的場量不会影响另一点的場量的运动．因为这二点的間隔是类空間隔，于是我們就可以选择一个坐标系統，使在这个坐标系統中，該二点的时間是相同的．場量在时間中的变化由哈密頓量决定：

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{F}(x) = i[\mathbf{H}, \mathbf{F}(x)]. \tag{14,32}$$

假使我們将 $\mathbf{H}$ 写作哈密頓量密度的空間积分，則上式就成为：

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{F}(x) = i\int dx'[\mathscr{H}(x'), \mathbf{F}(x)]. \tag{14,33}$$

設 $x \neq x$，而这二点的場量可以相互对易，那末从上式我們可以看出，在 x' 点的哈密頓量密度 $\mathscr{H}(x')$ 不可能对在 x 点的場量 $\mathbf{F}(x)$ 的运动发生任何影响．

場論中的对易关系与推迟格临函数以及超前格临函数之間存在着很密切的关系，如(8,115)式所示．因此，这些格临函数不仅在古典場論中体現了因果律，它們在量子場論中也体現了因果律．在量子場論中，推导色散关系通常是按照如下的步驟进行的：

1）建立散射幅与格临函数之間的連系；

2）研究格临函数的解析性质，进行解析延拓；

3）利用科希（Cauchy）定理，从格临函数的解析性质以及散射幅与格临函数之間的連系推导出色散关系．

我們以光子与核子的相互散射为例，来說明在量子場論中如何寻求色散关系的途径．

光子为核子散射的 S 矩陣元見表式(13,72)．我們首先将(13,72)化簡．利用(13,66)式，我們有：

$$\square_1 T[\square_2 \mathbf{A}_{c_2}(x_2)\mathbf{A}_{c_1}(x_1)] = -\square_1 T[\mathbf{J}_{c_2}(x_2)\mathbf{A}_{c_1}(x_1)] =$$

$$= -\square_1\left\{\frac{1}{2}(1 + \epsilon(t_2 - t_1))\mathbf{J}_{c_2}(x_2)\mathbf{A}_{c_1}(x_1) +\right.$$

$$+\frac{1}{2}(1-\epsilon(t_2-t_1))\mathbf{A}_{c_1}(x_1)\mathbf{J}_{c_2}(x_2)\Big\} =$$

$$= \mathrm{T}[\mathbf{J}_{c_2}(x_2)\mathbf{J}_{c_1}(x_1)] - 2\delta(t_2-t_1)\times$$

$$\times\left[\mathbf{J}_{c_2}(x_2), \frac{\partial}{\partial t_1}\mathbf{A}_{c_1}(x_1)\right] + \delta'(t_2-t_1)[\mathbf{J}_{c_2}(x_2), \mathbf{A}_{c_1}(x_1)]. \tag{14,34}$$

将上式代入(13,72)式,就得:

$$_I\langle|S-1|\rangle_I = -\int d^4x_2 d^4x_1 \frac{e^{i(k_1x_1-k_2x_2)}}{\sqrt{4\omega_1\omega_2}}\times$$

$$\times {}^{(H)}\left\langle \xi_2 \right\| \mathrm{T}[\mathbf{J}_{c_2}(x_2)\mathbf{J}_{c_1}(x_1)] - \delta(t_2-t_1)\times$$

$$\times\left[\mathbf{J}_{c_2}(x_2), \frac{\partial}{\partial t_1}\mathbf{A}_{c_1}(x_1)\right]\Big\| \xi_1 \Big\rangle_I^{(\text{注})}. \tag{14,35}$$

我們假定 $\mathscr{H}_I(x)$ 与 $\mathbf{A}_\mu(x)$ 的微商无关,因而 $\mathbf{J}_{c_2}(x_2)$ 也与 $\mathbf{A}_\mu(x)$ 的微商无关; $\dfrac{\partial \mathbf{A}_\mu}{\partial t}$ 就是与 $\mathbf{A}_\mu$ 相应的正則共軛动量. 利用同一时間的正則坐标与正則动量之間的对易关系,可得:

$$\delta(t_2-t_1)\left[\mathbf{J}_{c_2}(x_2), \frac{\partial}{\partial t_1}\mathbf{A}_{c_1}(x_1)\right] = i\delta^4(x_2-x_1)\frac{\partial \mathbf{J}_{c_2}(x_2)}{\partial \mathbf{A}_{c_1}(x_2)}. \tag{14,36}$$

将上式代入(14,35)式,并利用公式

$$\mathbf{J}_{c_2}(x_2) = -\frac{\partial \mathscr{H}_I(x_2)}{\partial \mathbf{A}_{c_2}(x_2)}, \tag{14,37}$$

可得:

$$_I\langle|S-1|\rangle_I = -\int d^4x_2 d^4x_1 \frac{e^{i(k_1x_1-k_2x_2)}}{\sqrt{4\omega_1\omega_2}}\times$$

$$\times\langle\xi_2\|\mathrm{T}[\mathbf{J}_{c_2}(x_2)\mathbf{J}_{c_1}(x_1)] + i\delta^4(x_2-x_1)\mathbf{L}_{c_2c_1}(x_2)\|\xi_1\rangle; \tag{14,38}$$

其中 $\mathbf{L}_{c_2c_1}(x_2)$ 的定义是:

$$\mathbf{L}_{c_2c_1}(x_2) = \frac{\partial^2 \mathscr{H}_I(x_2)}{\partial \mathbf{A}_{c_2}(x_2)\,\partial \mathbf{A}_{c_1}(x_2)}, \tag{14,39}$$

此处还应用了公式(13,32). 利用公式(13,34),可以将(14,38)式

改写为：

$$ {}_f\langle|S-1|\rangle_i = -\int d^4x_2 d^4x_1 \frac{e^{i(k_1x_1-k_2x_2)+i(p_1-p_2)\frac{1}{2}(x_1+x_2)}}{\sqrt{4\omega_1\omega_2}} \times $$
$$ \times \left\langle \xi_2 \middle\| \mathrm{T}\left[\mathbf{J}_{e_2}\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) \mathbf{J}_{e_1}\left(\frac{-x_2+x_1}{2}\right)\right] + \right. $$
$$ \left. + i\delta^4(x_2-x_1)\mathbf{L}_{e_2e_1}\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) \middle\| \xi_1 \right\rangle. \qquad (14,40) $$

引进变换

$$ \xi = x_2 - x_1, \quad \eta = \frac{1}{2}(x_2+x_1); \qquad (14,41) $$

于是可以将(14,40)式写作：

$$ {}_f\langle|S-1|\rangle_i = -(2\pi)^4\delta^4(p_1+k_1-p_2-k_2) \times $$
$$ \times \frac{1}{\sqrt{4\omega_1\omega_2}} \int e^{-i\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)\xi} \times $$
$$ \times \left\langle \xi_2 \middle\| \mathrm{T}\left[\mathbf{J}_{e_2}\left(\frac{\xi}{2}\right) \mathbf{J}_{e_1}\left(-\frac{\xi}{2}\right)\right] + i\delta^4(\xi)\,\mathbf{L}_{e_2e_1}(0) \middle\| \xi_1 \right\rangle d\xi. \qquad (14,42) $$

我們引进符号 $h(k)$，它的定义是：

$$ h_{e_2e_1}(k) = \frac{1}{4\pi i}\int e^{-ik\xi}\left\langle \xi_2 \middle\| \mathrm{T}\left[\mathbf{J}_{e_2}\left(\frac{\xi}{2}\right) \mathbf{J}_{e_1}\left(-\frac{\xi}{2}\right)\right] + \right. $$
$$ \left. + i\delta^4(\xi)\,\mathbf{L}_{e_2e_1}(0) \middle| \xi_1 \right\rangle d\xi. \qquad (14,43a) $$

我們在以后将說明，$h_{e_2e_1}(k)$ 与散射幅之間存在着极簡单的連系。从上式可以看出，$h_{e_2e_1}(k)$ 具有如下的特点：

$$ h_{e_2e_1}(k) = h_{e_1e_2}(-k), \qquad (14,45a) $$

因为不难証明，$\mathbf{L}_{e_2e_1}$ 就等于 $\mathbf{L}_{e_1e_2}$。利用公式(14,39)，我們有：

$$ \mathbf{L}_{e_2e_1} = e_{2\mu}e_{1\nu}\frac{\partial^2\mathscr{H}_i}{\partial\mathbf{A}_\mu\,\partial\mathbf{A}_\nu} = e_{1\nu}e_{2\mu}\frac{\partial^2\mathscr{H}_i}{\partial\mathbf{A}_\nu\,\partial\mathbf{A}_\mu} = \mathbf{L}_{e_1e_2}. \qquad (14,39a) $$

为了討論因果律要求 $h_{e_2e_1}(k)$ 所满足的条件，我們引进如下的推迟函数：

$$h^{(退)}_{e_2e_1}(k)=\frac{1}{4\pi i}\int e^{-ik\xi}\left\langle \xi_2\left\|\frac{1}{2}(1+\epsilon(\xi_0))\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left[\mathbf{J}_{e_2}\left(\frac{\xi}{2}\right),\mathbf{J}_{e_1}\left(-\frac{\xi}{2}\right)\right]+i\delta^4(\xi)\,\mathbf{L}_{e_2e_1}(0)\right\|\xi_1\right\rangle d\xi. \quad (14,43)$$

表式

$$\left\langle \xi_2\left\|\frac{1}{2}(1+\epsilon(\xi_0))\left[\mathbf{J}_{e_2}\left(\frac{\xi}{2}\right),\mathbf{J}_{e_1}\left(-\frac{\xi}{2}\right)\right]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+i\delta^4(\xi)\,\mathbf{L}_{e_2e_1}(0)\right\|\xi_1\right\rangle \quad (14,44)$$

在 $\xi_0-|\vec{\xi}|<0$ 的时候等于零. 这一点是因果律的体现，对于函数 $h^{(退)}_{e_2e_1}(k)$ 的解析性质有很重要的影响. 另一方面，$h_{e_2e_1}(k)$ 与 $h^{(退)}_{e_2e_1}(k)$ 之间存在着如下的关系：

$$h^{(退)}_{e_2e_1}(k)-h_{e_2e_1}(k)=h^{(+)}_{e_2e_1}(k), \quad (14,45)$$

其中 $h^{(+)}_{e_2e_1}(k)$ 的定义是：

$$h^{(+)}_{e_2e_1}(k)=\frac{-1}{4\pi i}\int e^{-ik\xi}\left\langle \xi_2\left\|\mathbf{J}_{e_1}\left(-\frac{\xi}{2}\right)\mathbf{J}_{e_2}\left(\frac{\xi}{2}\right)\right\|\xi_1\right\rangle d\xi. \quad (14,46)$$

令 $\|n\rangle$ 代表一套完整的正交的波函数，它們都是动量-能量的本征态，其相应的本征值是 p_n. 利用公式(13,34)，可以将上式改写为：

$$h^{(+)}_{e_2e_1}(k)=\sum_n\frac{-(2\pi)^4}{4\pi i}\delta^4\left(p_n-\frac{1}{2}p_1-\frac{1}{2}p_2+k\right)\times$$

$$\times\langle\xi_2\|\mathbf{J}_{e_1}(0)\|n\rangle\langle n\|\mathbf{J}_{e_2}(0)\|\xi_1\rangle. \quad (14,47)$$

§ 14,3. 解析延拓

我們现在来研究 $h^{(退)}_{e_2e_1}(k)$ 的解析性质，进行解析延拓. 首先遇到的問題是延拓那一个变量；因为 $h^{(退)}_{e_2e_1}(k)$ 是一个多变数的函数，它不仅是 $k=\frac{k_1+k_2}{2}$ 的四个分量的函数，而且，由于表式(14,44)是核子的力学量 ξ_1 和 ξ_2 的函数，因此它也是核子的动量的函数. 此外，由于能量守恒和动量守恒，有：

$$k_1 + p_1 - k_2 - p_2 = 0; \qquad (14,48)$$

这些变量在通常的情况下并不是彼此无关的. 例如,假使 p_1 和 k_1 不变, k_2 改变,则 p_2 必随之而改变. 因此,(14,43)式右方的积分号内的表式是一个很复杂的函数,在一般的情况下,对它进行解析延拓是非常困难的. 我們应該討論一些比較簡单的情况, 只取一个变量, 其余的变量可以取一定的数值而不改变, 于是, 由于(14,43) 式右方积分号内的表式是我們所选定的变量的簡单函数, 就可以比較容易地进行解析延拓. 在本书中我們将討論一个最簡单的情况:光子的前进散射的情况. 在这种情况下,

$$k = k_1 = k_2, \quad e_1 = e_2 = e, \quad \xi_1 = \xi_2. \qquad (14,49)$$

我們可以改变 k,而不改变 p_1 和 p_2. 在这里, 可以将 $h^{(\mathrm{ЗД})}_{e_2e_1}(k)$ 簡写作 $h^{(\mathrm{ЗД})}(k)$, 将 $h_{e_2e_1}(k)$ 和 $h^{(+)}_{e_2e_1}(k)$ 分别簡写为 $h(k)$ 和 $h^{(+)}(k)$. 为了討論方便起見,我們选择实驗室坐标系統,选定

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 = 0; \qquad (14,50)$$

这样一来, $h(k)$、$h^{(\mathrm{ЗД})}(k)$ 和 $h^{(+)}(k)$ 将只是 k 的函数, 而不再作为 p_1 和 p_2 的函数. 假使我們只討論动量方向都在单位矢量 a 方向的光子的前进散射,那末 $h(k)$, $h^{(\mathrm{ЗД})}(k)$和$h^{(+)}(k)$将都只是光子的能量 ω 的函数,因而可以将 $h(k)$, $h^{(\mathrm{ЗД})}(k)$ 和 $h^{(+)}(k)$写作$h(\omega)$, $h^{(\mathrm{ЗД})}(\omega)$ 和 $h^{(+)}(\omega)$. 我們現在来討論这些函数在复数 $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ 平面上的解析性质.

在我們所討論的簡单情况下,可以証明,当 ω 是正实数时,$h(\omega)$ 等于 $h^{(\mathrm{ЗД})}(\omega)$: 考虑到公式(14,50),可以将(14,47)式写作:

$$h^{(+)}(\omega) = -\frac{1}{2i}\sum_{\vec{p}_n=\vec{k}} \delta(\sqrt{M_n^2+\omega^2} - M + \omega) \times$$
$$\times \langle \xi_2 \| \mathbf{J}_{e_1}(0) \| n \rangle \langle n \| \mathbf{J}_{e_2}(0) \| \xi_1 \rangle, \qquad (14,51)$$

其中 M_n 代表由 $\|n\rangle$ 所代表的整个系統的靜质量. $\|\xi_1\rangle$ 和 $\|\xi_2\rangle$ 都是单核子的态. 由于重粒子数守恆定律, $\|n\rangle$ 态中的重粒子数与反重粒子数之差应該等于 1. 因此有:

$$M_n \geqslant M. \qquad (14,51a)$$

若将 $h^{(+)}(\omega)$ 当作复数 $\omega=\omega_1+i\omega_2$ 的整个平面上的函数，那末，显然，在正实轴上，$h^{(+)}(\omega)$ 等于零。这是因为要(14,51)式右方不等于零，至少得有一个 $\|n\rangle$ 满足条件

$$\sqrt{M_n^2+\omega^2}-M+\omega=0; \tag{14,52}$$

这就要求

$$M_n^2=M^2-2M\omega. \tag{14,53}$$

当 $\omega>0$ 时，上式显然是与(14,51a)式相矛盾的。于是就得：

$$\left.\begin{aligned} &h^{(+)}(\omega)=0,\\ &h(\omega)=h^{(\text{退})}(\omega). \end{aligned}\right\} \quad (\omega>0) \tag{14,54}$$

我們可以将(14,43)式写成：

$$h^{(\text{退})}(\omega)=\frac{1}{4\pi i}\int e^{i\omega(\xi_0-\vec{n}\cdot\vec{\xi})}E(\xi)d\xi, \tag{14,55}$$

其中

$$E(\xi)=\left\langle\xi_1\left\|\frac{1}{2}(1+\epsilon(\xi_0))\left[\mathbf{J}_c\left(\frac{\xi}{2}\right),\mathbf{J}_c\left(-\frac{\xi}{2}\right)\right]+i\delta^4(\xi)\mathbf{L}_{cc}(0)\right\|\xi_1\right\rangle. \tag{14,56}$$

可以証明，$h^{(\text{退})}(\omega)$ 可以延拓到 ω 的整个上半平面。由于

$$E(\xi)=0, \quad (\xi_0-|\vec{\xi}|<0); \tag{14,57}$$

我們有：

$$\begin{aligned}|e^{i\omega(\xi_0-\vec{n}\cdot\vec{\xi})}E(\xi)| &= |e^{i\omega_1(\xi_0-\vec{n}\cdot\vec{\xi})}E(\xi)|e^{-\omega_2(\xi_0-\vec{n}\cdot\vec{\xi})}\leqslant\\ &\leqslant |e^{i\omega_1(\xi_0-\vec{n}\cdot\vec{\xi})}E(\xi)|, \quad (\omega_2>0).\end{aligned} \tag{14,58}$$

这就証明了，$h^{(\text{退})}(\omega)$ 可以解析延拓到复数 ω 平面的整个上半平面。

§ 14,4. 色散关系

我們假定，当 $|\omega|\to\infty$ 时，$|h^{(\text{退})}(\omega)|$ 小于某一个上限，那末利用科希定理，可得：

$$\frac{h^{(\text{退})}(\omega)}{\omega-\omega_0}=\frac{1}{\pi i}\mathscr{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h^{(\text{退})}(\omega')d\omega'}{(\omega'-\omega)(\omega'-\omega_0+i\epsilon)}, \tag{14,59}$$

其中 ω 和 ω_0 为任何实数，积分沿实轴进行，在 $\omega'=\omega$ 处取主值。ϵ 为一微小的正数。利用公式(14,27)，可以将上式写作：

$$h^{(\mathrm{BS})}(\omega)-h^{(\mathrm{BS})}(\omega_0)=\frac{\omega-\omega_0}{\pi i}\mathscr{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h^{(\mathrm{BS})}(\omega')d\omega'}{(\omega'-\omega)(\omega'-\omega_0)}; \tag{14,60}$$

积分在 $\omega'=\omega$ 和 $\omega'=\omega_0$ 处都取主值。上式的实数部分是：

$$\mathscr{R}e\,h^{(\mathrm{BS})}(\omega)-\mathscr{R}e\,h^{(\mathrm{BS})}(\omega_0)=\frac{\omega-\omega_0}{\pi}\mathscr{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathscr{I}m\,h^{(\mathrm{BS})}(\omega')d\omega'}{(\omega'-\omega)(\omega'-\omega_0)}. \tag{14,61}$$

利用(14,55)和(14,56)，可以証明：

$$h^{(\mathrm{BS})}(-\omega)=h^{*(\mathrm{BS})}(\omega); \tag{14,62}$$

因为根据(14,39)式可以看出 $\mathbf{L}_{ee}(0)$ 是厄米算符；从(14,37)式也可以看出，$\mathbf{J}_e$ 是厄米算符，因而

$$\left[\mathbf{J}_e\left(\frac{\xi}{2}\right),\mathbf{J}_e\left(-\frac{\xi}{2}\right)\right] \tag{14,63}$$

是反厄米算符；于是有：

$$E^*(\xi)=-E(\xi); \tag{14,64}$$

将上式代入(14,55)的复数共軛式，就得：

$$h^{*(\mathrm{BS})}(\omega)=\frac{1}{4\pi i}\int e^{-i\omega(\xi_0-\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\xi})}E(\xi)d\xi=h^{(\mathrm{BS})}(-\omega). \tag{14,65a}$$

现在令 $\omega_0=0$，并利用上式，就可以将(14,61)改写为：

$$\mathscr{R}e\,h^{(\mathrm{BS})}(\omega)-\mathscr{R}e\,h^{(\mathrm{BS})}(0)=\frac{2\omega^2}{\pi}\mathscr{P}\int_0^{\infty}\frac{\mathscr{I}m\,h^{(\mathrm{BS})}(\omega')d\omega'}{\omega'(\omega'^2-\omega^2)}. \tag{14,65}$$

利用(14,44a)、(14,54)和(14,62)，可以将上式写作：

$$\mathscr{R}e\,h(\omega)-\mathscr{R}e\,h(0)=\frac{2\omega^2}{\pi}\mathscr{P}\int_0^{\infty}\frac{\mathscr{I}m\,h(\omega')d\omega'}{\omega'(\omega'^2-\omega^2)}. \tag{14,66}$$

不难証明，上式中的 $h(\omega)$ 就是散射幅。以无自旋粒子的散射幅 $h(\omega,\theta)$ 为例，我們有：

$$h(\omega,\theta)=\frac{1}{2ik}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)[e^{2i\delta_l}-1]P_l(\cos\theta). \tag{14,67}$$

将上式与(13,143)式作比較，就有：

$$_f\langle|S-1|\rangle_i = i(2\pi)^5\delta(\vec{p}_i-\vec{p}_f)\delta(k_i-k_f)\frac{1}{k_i}h(\omega,\theta). \quad (14,68)$$

将上式与(14,42)作比較，可得：

$$h(\omega)=h(\omega,0). \quad (14,69)$$

这就說明了，(14,66)式与(14,31)式完全一样.

应該指出，$\mathscr{I}m\,h(\omega')$ 与光子和核子碰撞的总截面之間有直接的連系. 令

$$S=1+iR, \quad (14,70)$$

則有：

$$S^*S=1=(1-iR^*)(1+iR); \quad (14,71)$$

亦即

$$i(R^*-R)=R^*R. \quad (14,72)$$

因此有：

$$2\mathscr{I}m\langle i|R|i\rangle=\sum_n\langle i|R^*|n\rangle\langle n|R|i\rangle, \quad (14,73)$$

其中 $|n\rangle$ 为一套完全的正交的波函数. 从(14,68)、(14,70)和(14,69)可得：

$$\mathscr{I}m\langle i|R|i\rangle=(2\pi)^5\delta^4(p_i-p_{f=i})\frac{1}{\omega}\mathscr{I}m\,h(\omega). \quad (14,74)$$

引入符号 M_{ni}，它的定义是：

$$\langle n|R|i\rangle=\delta^4(p_n-p_i)M_{ni}. \quad (14,75)$$

从(14,73)、(14,74)和(14,75)式可得：

$$(2\pi)^5\frac{2}{\omega}\mathscr{I}m\,h(\omega)=\sum_n\delta^4(p_n-p_i)|M_{ni}|^2=$$

$$=\sum_{\vec{p}_n=\vec{p}_i}\frac{1}{(2\pi)^3}\delta(E_n-E_i)|M_{ni}|^2. \quad (14,76)$$

将上式的右方与(9,14)式相比較，就可以看出，上式的右方应該等于：

$$\sum_{\vec{p}_n=\vec{p}_i}\frac{1}{(2\pi)^3}\delta(E_n-E_i)|M_{ni}|^2=(2\pi)^4\Phi(\omega), \quad (14,77)$$

其中Φ代表光子和核子相碰撞的总截面. 因此有:

$$\mathscr{I}m\,h(\omega)=\frac{\omega}{4\pi}\Phi(\omega). \tag{14,78}$$

将上式代入(14,66)式,就得:

$$\mathscr{R}e\,h(\omega)-\mathscr{R}e\,h(0)=\frac{\omega^2}{2\pi^2}\int_0^\infty\frac{\Phi(\omega')d\omega'}{(\omega'^2-\omega^2)}. \tag{14,79}$$

(14,79)式将散射幅的实数部分直接与总截面Φ連系了起来. 在$\Phi(\omega)$中,不仅包含了弹性散射的截面,也包含了非弹性散射截面和一切反应截面,例如π介子的光致产生等等.

当作相互碰撞的粒子都具有静质量时,推导色散关系要困难得多. 首先严格地推导出π介子与核子相互散射的色散关系的是波戈留波夫等[Боголюбов, Медведев и Поливанов, 1957]. 在他們的推导中所进行的解析延拓,远較光子散射的色散关系的推导中所进行的解析延拓复杂. 目前,色散关系正被用来作为分析和整理实驗結果以及寻找各种現象之間的連系的工具. 用它所取得的成就常常超过利用邱-路方法所取得的成就.

在处理強相互作用的方法的研究方面,此外还有一些值得重視的工作,其中包括塔姆-唐可夫方法[Tamm, 1945], [Dancoff, 1950], 連續积分方法[Edwards & Peierls, 1945], [Боголюбов, 1954]以及重整化羣表示方法[Боголюбов и Ширков, 1955; 1956], [Ширков, 1955]. 但是,所有这些方法至今都还具有很大的局限性和困难,有待进一步研究,因此我們在这里不多介紹. 对塔姆-唐可夫方法感到兴趣的讀者可以参閱塔姆和唐可夫的論文,以及西林和費因貝格[Силин и Файнберг, 1955]、戴逊等人[Dyson et al., 1954]的工作. 对于連續积分方法和重整化羣表示方法感到兴趣的讀者, 可以参閱波戈留波夫和希尔可夫[Боголюбов и Ширков, 1957]所著"量子場論导論"一书.

§ 14,5. 展望

从全书的討論可以看出,量子場論是由于科学实践进入高速

微观现象的领域而产生的初步理論，是人类努力更深入地理解自然界的初步結果．量子場論在电磁相互作用和弱相互作用現象的領域中已經取得了显著的成就，但是，在強相互作用現象的領域中取得的成就还很有限，而且进展也很緩慢．到目前为止，人們还沒有寻找到处理強相互作用的普遍有效的数学方法；这就使我們难于利用实驗結果来检驗理論的正确性，因而在很大程度上阻碍了理論的向前发展．

即使在电磁相互作用現象的領域中，近年来已經发現了可以避免发散困难的重整化方法，但是这一方法很可能只是将困难向后推远了一步，并沒有将困难克服．戴逊[Dyson, 1952]、約飞[Иоффе, 1954]等人的研究指出，当进行了重整化以后，虽然微扰計算的每一項不再发散，但是整个級数仍旧很可能是发散的．朗道等人[Ландау, Абрикосов и Халатников, 1954], [Landau, 1955]的研究指出，在量子电动力学中，在經过重整化以后，电荷的数值应該等于零，这突出地暴露了点电荷模型的根本缺陷，說明了点相互作用理論的一般困难．至于費曼和盖尔曼所提出的普遍費米弱相互作用理論中所包含的发散困难，則显然还不能用重整化的方法来避免．因此，在目前的量子場論中，除了数学技术上的困难以外，还存在着原則性的困难．

誠如第一章的討論所指出的，量子場論只能算作是未来的完整的基本粒子理論的前驅性理論．目前已經发現的基本粒子已达三十种，它們之間普遍相互作用和相互轉化的現象說明了物质的統一性．应該有統一的基本粒子理論，来概括一切基本粒子現象的規律．但是，至今为止，除了一些不成熟的尝試以外，还沒有建立起一个統一的基本粒子理論．目前所有的理論都只在基本粒子現象的某一局部領域內起作用．存在着介子与重粒子相互作用的初步理論，存在着电磁場与各种基本粒子的相互作用的理論，存在着弱相互作用的理論，但是所有这些还不是一个統一理論的有机組成部分．因此，目前的量子場論还带有显然的唯象性質．

所有的这些局限性和困难都推动着量子場論向前发展。对新的、普遍有效的、处理強相互作用的数学方法的寻求，对現有理論的基本前提的合理部分与不合理部分的深入分析，对由实驗提供的事实所包含的意义的探索，必将导致创立新的基本物理概念，从而使物理理論經历新的飞跃。

参 考 文 献

Боголюбов, Н. Н. (1954), ДАН СССР, **99**, 225.

Боголюбов, Н. Н. и Ширков, Д. В. (1955), ДАН СССР, **103**, 203, 391.

Боголюбов, Н. Н. и Ширков, Д. В. (1956), ЖЭТФ, **30**, 77, *Nuov. Cim.*, **3**, 845.

Боголюбов, Н. Н. и Ширков, Д. В. (1957), Введение в Теорию Квантованных Полей.

Боголюбов, Н. Н., Медведев, Б. В. и Поливанов, М. К. (1958), Вопросы Теории Дисперсионных Соотношений.

Dancoff, S. M. (1950), *Phys. Rev.*, **78**, 382.

Dyson, F. J. (1952), *Phys. Rev.*, **85**, 631.

Dyson, F. J. et al. (1954), *Phys. Rev.*, **95**, 1644.

Edwards, S. F. & Peierls, R. E. (1954), *Proc. Roy. Soc.*, **A224**, 24.

Gell-Mann, M., Goldberger, M. L. & Thirring, W. E. (1954), *Phys. Rev.*, **95**, 1612.

Иоффе, Б. Л. (1954), ДАН СССР, **94**, 437.

Kramers, H. A. (1927), *Atti. Congr. Intern. Fisici. Como.*, **2**, 545.

Kronig, R. (1926), *J. Opt. Soc. Am.*, **12**, 547.

Kronig, R. (1946), *Physica*, **12**, 543.

Ландау, Л. Д., Абрикосов, А. А. и Халатников, И. М. (1954), ДАН СССР, **95**, 497, 773, 1177; **96**, 261.

Landau, L. D. (1955), Niels Bohr and the development of physics, 52.

Силин, В. П. и Файнберг, В. Я. (1955), УФН, **56**, 569.

Tamm, N. E. (1945), *Journ. of Phys.* U.S.S.R., **9**, 449.

Titchmarsh, E. C. (1937), Introduction to the Theory of Fourier Integrals, Oxford.

Ширков, Д. В. (1955), ДАН СССР, **105**, 972.

量子場論勘誤表

頁	行	誤	正
31	(3.12)式	$\pi^*=\frac{2\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}^*}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}$,	$\pi^*=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}^*}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}$,
56	5	……处，	……外，
60	10—13	$\left.\begin{aligned}\left[\vec{T}^3,\ a\frac{(j)}{\vec{k}}\right]&=2a\frac{(j)}{\vec{k}},\\ \left[\vec{T}^3,\ a^*\frac{(j)}{\vec{k}}\right]&=2a^*\frac{(j)}{\vec{k}}.\end{aligned}\right\}$(3.165)	$\left.\begin{aligned}\left[\vec{T}^3,\ a\frac{(j)}{\vec{k}}\right]\rangle_0&=2a\frac{(j)}{\vec{k}}\rangle_0,\\ \left[\vec{T}^3,\ a^*\frac{(j)}{\vec{k}}\right]\rangle_0&=2a^*\frac{(j)}{\vec{k}}\rangle_0,\end{aligned}\right\}$(3.165)
		为了便于写下波函数，我們引进 $\rangle_0$ 代表什么粒子也不存在的情态的波函数，亦即真空状态的波函数。那末，存在着……	在上式中，$\rangle_0$ 代表什么粒子也不存在的情态的波函数，亦即真空状态的波函数。显然地，存在着……
71	倒5	……相互正变的……	……相互正交的……
76	7	……正变的性质……	……正交的性质……
88	倒6	……引近了……	……引进了……
95	(5.37)式	$\cdots\cdots e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}-iEt}$,	$\cdots\cdots e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}'-iEt'}$,
97	(5.44)式	$\cdots\cdots e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}-iEt}$	$\cdots\cdots e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}'-iEt'}$,
114	(5.137)式	$\begin{cases}I_n=\begin{pmatrix}1&\\&1\end{pmatrix}_n,\ \sigma_{nx}=\begin{pmatrix}&1\\1&\end{pmatrix}_n,\\ \sigma_{ny}=\begin{pmatrix}&-i\\i&\end{pmatrix}_n,\ \sigma_{nz}=\begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix}_n.\end{cases}$	$\begin{cases}I_n=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}_n,\ \sigma_{nx}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}_n,\\ \sigma_{ny}=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}_n,\ \sigma_{nz}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}_n.\end{cases}$
119	倒5	$Z\{'\psi(\xi'),'\overline{\psi}(\xi)\}Z^{-1}=\cdots$	$Z\{'\overbrace{\psi(\xi')},'\overline{\psi}(\xi)\}Z^{-1}=\cdots$
124	(5.186)式	$i\frac{\partial\overrightarrow{\psi}}{\partial t}=-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\psi$.	$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\psi$.
133	(6.9)式	$\cdots+\frac{i}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu)F_{\mu\nu}$.	$\cdots+\frac{ie}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu)F_{\mu\nu}$.
	(6.10)式	$\cdots+\frac{i}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu)F_{\nu\nu}\}\psi$.	$\cdots+\frac{ie}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu)F_{\mu\nu}\}\psi$.
155	倒13	消灭	消失
156	12	宇称在弱相互作用不守恒，	宇称在弱相互作用中不守恒，
158	2	$\Delta(Q/e)-\Delta S$;	$\Delta(Q/e)=\Delta S$;
	4	$\Delta(Q/e)=\Delta S$.	$\Delta(Q/e)=\Delta S$.
164	11	致于……	至于……
165	倒2	……本微値的几率.	……本征値的几率.
188	5	消灭	消失
192	6	消灭	消失
203	倒6—7	消灭	消失
207	倒3	消灭	消失

頁	行	誤	正
216	9	产子	产生
302	9	消灭	消失
306	倒 1	用推导……	在推导……
355	倒 1	……能消去……	这样才能消去……
358	8	…在时間中的变化中相互作用…	…在时間中的变化由相互作用…
369	倒 1	消灭	消失
378	8	消灭	消失
401	(13.189)式	$\left(\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{matrix}\right) \equiv \cdots$	$A \equiv \left(\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{matrix}\right) \equiv \cdots$
405	11	在来分析……	在分析……

頁	行	誤	正
216	9	产子	产生
302	9	消灭	消失
306	倒 1	用推导……	在推导……
355	倒 1	……能消去……	这样才能消去……
358	8	…在时間中的变化中相互作用…	…在时間中的变化由相互作用…
369	倒 1	消灭	消失
378	8	消灭	消失
401	(13.189)式	$\left(\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{matrix}\right) \equiv \cdots$	$A \equiv \left(\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{matrix}\right) \equiv \cdots$
405	11	在来分析……	在分析……