讲义 v1.03

量子规范场论

2008 年春季

郑汉青

北京大学物理学院

2006 年版引言

公元 2007 年位于瑞士日内瓦湖畔的大型强子对撞机 (LHC) 就要开始运行了。标准模型所预言的粒子谱中最后一个未找到的而又有关键意义的粒子、Higgs 粒子是否存在？如果存在质量又为多少？这些重要问题的答案就要得出，**审判日就要来临**。很快我们就会检验到理论物理学家的头脑里到底装的什么？是具有智慧，还是更多的是狂妄与无知？为此我们适当地增加了一些 Higgs 物理的介绍，如等价定理、弱作用规范粒子散射振幅的幺正性与 Higgs 粒子的质量限等。

此文是作者在北京大学物理学院 2004 及 2005 年春季研究生课程《量子规范场论》的授课讲义的基础上改进而成。由于作者水平有限，加上时间仓促，文中的缺陷和错误一定很多。这里要感谢前两届听课的同学发现并帮助我找出了前一版讲义中的一些错误和问题。欢迎读者对本讲义内容的批评指正和建议，请联系 zhenghq@pku.edu.cn 。

标题中加了 * 的章节可以不作为基本要求。

主要参考文献

正则量子场论的系统的论述可以参考

1. J. D. Bjorken, S. D. Drell , *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill Book Company,1965.

更为现代的规范场理论的参考书可见

1. M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley Publishing Company, 1995.
2. T. P. Cheng and L. F. Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Oxford University Press Inc., New York 1994.
3. 戴元本，《相互作用的规范理论》，科学出版社， 1987 。
4. 汪容，《量子规范理论》，科学普及出版社， 1986 。
5. F. J. Yndurain, *The Theory of Quark and Gluon Interactions*, Springer-Verlag New York Inc. 1983.

专门讨论标准模型重整化的书籍

1. D. Bardin, G. Passarino, *The Standard Model in the Making*, CLARENDON PRESS, OXFORD 1999

量子场论的系统的介绍可参见

1. S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Cambridge University Press, 2000.

关于色散关系的介绍及其在核物理及粒子物理中的应用

1. G. Barton, *Introduction to Dispersion Techniques in Field Theory*, W. A. Benjamin Inc., New York 1965.

关于 S 矩阵的解析性质的讨论可以参见，

1. R. J. Eden, P. V. Landshoff, D. I. Olive, J. C. Polkinghorne, *The Analitic S-Matrix*, Cambridge University Press, 1966.

关于 $\pi\pi$ 散射的分波振幅的解析性质的研究的专著见

1. A. Martin and F. Cheung, *Analyticity Properties and Bounds of the Scattering Amplitudes*. Gordon and Breach, 1969, New York.

关于路径积分量子化的介绍

1. R. P. Feynman and A. R. Hibbs， *Quantum Mechanics and Path Integrals*，McGraw-Hill, New York, 1965 。
2. M. S. Swanson， *Path Integrals and Quantum Processes*, Academic Press Inc.，San Diego， 1992 。

关于线性 σ 模型的经典文献

1. B. W. Lee, *Chiral Dynamics*

很多量子场论内容的经典阐述见

1. S. Coleman, *Aspects of Symmetry*, Cambridge University Press 1985.

目　录

第一章　场的正则量子化回顾 **2**

§1.1　从经典力学到量子力学 2

§1.1.1　最小作用量原理、运动方程与运动积分以及正则方程 2

§1.1.2　含时间高阶导数的 Lagrange 系统 4

§1.2　连续对称变换、 Noether 定理与守恒流 6

§1.3　从经典场论到量子场论 10

§1.3.1　自由场的正则量子化 10

§1.3.2　有相互作用的情形 12

§1.4　正则量子场论的一些一般结果 14

§1.4.1　Lehmann–Symanzik–Zimmermann 约化公式 14

§1.4.2　真空涨落图 15

第二章　散射的 S 矩阵 * **18**

§2.1　粒子的场的假说、散射的 S 矩阵 18

§2.1.1　入态、出态和 S 矩阵 18

§2.1.2　Interpolating 场和渐近条件 20

§2.1.3　对易关系、微观因果性 22

§2.2　LSZ 约化公式与交叉对称性 24

§2.3　Källen–Lehmann 表示 27

§2.4　色散关系简介 29

§2.4.1　因果性与解析性之间的关系 31

第三章　路径积分量子化 **33**

§3.1　量子力学中的路径积分 33

§3.1.1　一维量子力学系统 33

§3.1.2　关于路径积分的一些讨论 38

§3.1.3　有外源时的运动 40

§3.1.4　基态间的跃迁矩阵元， Green 函数的生成泛函 44

§3.2　场量子化的路径积分表述 47

§3.2.1　生成泛函 47

§3.2.2　连通格林函数的生成范函 49

§3.3　费米场的路径积分量子化 49

§3.3.1　费米场的路径积分表述 49
§3.3.2　Grassmann 代数 50
§3.4　正规顶角的生成泛函 52
§3.5　泛函方法中的对称性 54
§3.5.1　运动方程及 Dyson–Schwinger 方程 54
§3.5.2　守恒律与 Ward–Takahashi 恒等式 55
§3.6　路径积分与量子电动力学 56
§3.6.1　量子电动力学的生成泛函表示 56
§3.6.2　运动方程、守恒律与 Ward 等式 57

第四章　$\lambda\phi^4$ 理论，紫外发散与重整化　60
§4.1　紫外发散与重整化 60
§4.1.1　$\lambda\phi^4$ 理论中的单圈发散与重整化 60
§4.1.2　BPHZ 重整化方法 65
§4.1.3　费曼图的表观发散 67
§4.2　正规化与重整化 69
§4.2.1　Pauli–Villars 正规化方法 69
§4.2.2　中间重整化与质壳重整化 73
§4.2.3　维数正规化 74

第五章　重整化群方程　79
§5.1　固定动量减除方案中的重整化群方程 79
§5.2　重整化群方程的渐近解 82
§5.3　变化的标度 85
§5.3.1　任意动量减除方案下的重整化群方程 85
§5.3.2　重整化质量与任意动量减除点的关系 87
§5.4　质量无关重整化方案中的重整化群方程 88

第六章　自发破缺的 $\lambda\phi^4$ 理论和有效势　93
§6.1　有效势 93
§6.2　自发破缺的 $\lambda\phi^4$ 理论 95
§6.3　按圈图展开、有效势的单圈修正 * 98
§6.4　具有 $O(N)$ 对称性的 $\lambda\phi^4$ 理论 * 100
§6.4.1　有效作用量与有效势 100
§6.4.2　完全散射振幅、共振态以及“快子”解 ** 104

第七章 规范对称性与非 Abel 规范场的量子化 108
§7.1 非 Abel 群对称性与非 Abel 规范场 . . . 108
§7.2 规范场的路径积分量子化 . . . 111
§7.2.1 Fadeev–Popov 方案 . . . 111
§7.2.2 Gribov 拷贝 * . . . 116
§7.2.3 协变规范中的 Feymann 规则 . . . 117
§7.3 解析性与幺正性的 Feynman 图分析, Cutkosky 规则 . . . 120
§7.4 规范理论中的幺正性 . . . 123
§7.4.1 Ward 恒等式与幺正性 . . . 124
§7.4.2 BRS 变换和 Ward 恒等式 . . . 127
§7.5 S 矩阵元的规范无关性 . . . 130

第八章 手征对称性与 σ 模型 132
§8.1 强相互作用的手征对称性 . . . 132
§8.2 流代数 . . . 133
§8.3 对称性的自发破缺和 Goldstone 定理 . . . 135
§8.3.1 Nambu–Jona-Lasinio 模型 . . . 135
§8.3.2 Goldstone 定理 . . . 136
§8.3.3 部分轴失流守恒（ PCAC ） . . . 138
§8.4 $\pi\pi$ 散射与交叉对称性 . . . 139
§8.5 线形 σ 模型 . . . 140
§8.6 有费米子的情形 . . . 146
§8.7 微商耦合理论 . . . 147
§8.8 手征对称性的非线性实现 . . . 148

第九章 部分子模型与标度性 151
§9.1 轻子与强子的深度非弹实验和部分子模型 . . . 151
§9.2 Bjorken 无标度性 . . . 153
§9.3 部分子模型 . . . 154
§9.4 求和规则和夸克 - 部分子模型的应用 . . . 157
§9.5 部分子模型与 e^+e^- 湮灭 . . . 159

第十章 微扰 QCD 162
§10.1 QCD 的拉氏量 . . . 162
§10.2 单圈重整化、渐近自由 . . . 164
§10.2.1 QCD 的单圈重整化 . . . 164

§10.2.2　重整化群方程与跑动耦合常数、渐近自由 169
§10.3　对标度律的修正 170
§10.3.1　$e^+e^- \to$ 强子 过程 170
§10.3.2　红外与共线发散的消除 174
§10.4　大 N_c 极限下的 QCD 174
§10.4.1　大 N_c 展开 174
§10.4.2　大 N_c 极限下的谱 179

第十一章　量子反常 **180**
§11.1　$\pi^0 \to 2\gamma$ 衰变与 Adler–Bell–Jakiw 反常 180
§11.2　量子反常的其它计算方法 187
§11.2.1　利用背景场方法计算反常 187
§11.2.2　反常的路径积分表述 188
§11.2.3　Atiya–Singer 指标定理 * 191

第十二章　从四费米子模型到弱电统一规范理论 **193**
§12.1　四费米子相互作用 193
§12.2　幺正性的改进与中间玻色子假说 195
§12.3　$SU(2) \times U(1)$ 规范群的选择 195
§12.4　费米子与规范场的耦合 199
§12.5　反常相消 201
§12.6　自发破缺与 Higgs 机制 202
§12.7　量子化后的拉氏量与 R_ξ 规范 204
§12.8　幺正性与 Higgs 粒子的质量上限 206
§12.9　等价定理 208
§12.10　CKM 矩阵与 CP 破坏 209
§12.11　$K^0 - \bar{K}^0$ 系统中的 CP 破坏 * 211

第十三章　标准模型的重整化 **212**
§13.1　自发破缺 $\lambda\phi^4$ 理论的单圈重整化 215
§13.2　Higgs 场部分的单圈重整化 (R_ξ 规范) 220
§13.2.1　Tadpole 的相消条件 220
§13.2.2　Higgs 场的波函数及质量重整化 221
§13.2.3　单圈的 Higgs 场的传播子 * 223
§13.2.4　ϕ_1^3 顶角的重整化 225
§13.3　规范场部分的单圈重整化 (R_ξ 规范) 226

§13.3.1　Z 规范玻色子的自能重整化 226
§13.3.2　Z 规范玻色子与光子场的混合项的重整化 227
§13.4　标准模型中跑动耦合常数所满足的重整化群方程 228
§13.4.1　有效势的单圈修正与真空稳定性 * 229

附录一　标准模型中 R_ξ 规范下的 Feynman 规则 **233**

附录二　分波 S 矩阵元的性质 **237**
§B.1　运动学、光学定理和分波振幅 237
§B.2　有自旋时的分波展开 240
§B.2.1　螺旋度振幅的分波展开 240
§B.2.2　按轨道角动量和自旋的分波展开 242

第一章　场的正则量子化回顾

§1.1　从经典力学到量子力学

§1.1.1　最小作用量原理、运动方程与运动积分以及正则方程

描述一个力学系统的规律的最一般的方法是所谓的 最小作用量原理 或 Hamilton 原理 。这一原理所说的是，对于由坐标 q_1 和 q_2 定义的 t_1 和 t_2 时刻，系统在两时刻之间的运动使作用量

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) \tag{1.1}$$

取极值 (更严格的说，取最小值) 。其中 $L(q, \dot{q})$ 是刻画力学系统运动规律的函数，叫做 Lagrange 量，而 q 是广义坐标。值得指出的是 L 仅含有 q 和它对时间的 一阶 微商。对于后者，教科书中标准的解释是，系统的运动由出始时刻的位置和速度唯一决定。 [1] 但是对于它存在着更细致和深奥的理解。我们将稍后专门讨论这一点。由 $\delta q_1 = \delta q_2 = 0$ ，最小作用量原理导致了 Lagrange 运动方程，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0。 \tag{1.2}$$

根据 Landau 和 Lifshitz 的书中的讨论，对于一个孤立系统，时间与空间是均匀和各项同性的。对于前者反映了出始时刻的选取对于描写一个孤立系统的任意性在拉氏量上它表示为拉氏量不显含时间， $\partial L/\partial t = 0$ 。这一特征导致了系统的一个重要的守恒量或运动积分。利用运动方程，我们有

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \\ &= \sum_i \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \end{aligned} \tag{1.3}$$

或者

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right) = 0。 \tag{1.4}$$

所以我们看到存在一个随时间不变的量，

$$E \equiv \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \ , \tag{1.5}$$

它是一个运动积分，叫做系统的能量。

[1] 参见 L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics*, 3rd edition, Reed Educational and Professional Publishing Ltd., 1976, Oxford 。

拉氏量对空间的平移不变性导致了动量守恒。对坐标作平移变换，$\mathbf{r} \to \mathbf{r}+\epsilon$，有

$$\delta L = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \cdot \delta \mathbf{r}_a = \epsilon \cdot \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \ , \tag{1.6}$$

其中求和是对各个粒子进行的。由于 ϵ 是任意的，所以 $\delta L = 0$ 等价于

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = 0。 \tag{1.7}$$

又利用运动方程 1.2 式得出

$$\mathbf{P} \equiv \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \right) \tag{1.8}$$

是守恒量，即系统的动量。

由 1.8 式引伸出广义动量的概念，

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{1.9}$$

和广义力的概念，$F \equiv \partial L/\partial q = \dot{p}_i$。由前面的讨论可以得出（利用了运动方程）

$$\begin{aligned} dL &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \\ &= \sum \dot{p}_i dq_i + \sum p_i d\dot{q}_i。 \end{aligned} \tag{1.10}$$

得到

$$d(\sum p_i \dot{q}_i - L) = -\sum \dot{p}_i dq_i + \sum \dot{q}_i dp_i。 \tag{1.11}$$

此式左边被微分的函数即由 1.5 式定义的量用广义坐标 q_i 和广义动量 p_i 来表示时，叫做 Hamilton 量，

$$H(p_i, q_i) \equiv \sum_i p_i \dot{q}_i - L。 \tag{1.12}$$

对哈密顿量作微分并与 1.11 作比较得出

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \ , \ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}。 \tag{1.13}$$

这是关于 p 和 q 的一阶微分方程组，叫做 Hamilton 方程，或正则方程。其中 Hamilton 量满足如下关系，

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}。 \tag{1.14}$$

如果哈密顿量不显含时间，则 $dH/dt = 0$，即得到了能量守恒定律。

经典力学系统的正则形式提供了量子化的方便的方法，即只要把经典的 Poisson 括号改为量子的 Poisson 括号即可，这里不再累述。

§1.1.2 含时间高阶导数的 Lagrange 系统

上一小节回顾了经典力学中关于最小作用量原理的概念以及 Lagrange 运动方程的导出，以及由时间和空间的平移不变性导出了能量动量守恒。并且指出了能量与哈密顿量之间的关系，并建立了关于后者的正则方程。在这一本书里作这些讨论并不显得重复和枯燥，因为正如我们从上面的讨论中发现的那样，哈密顿量和正则形式的建立依赖于 Lagrange 函数的具体形式的细节，即 Lagrange 函数仅仅依赖于广义坐标对时间的一阶导数。这一细节之处使人隐隐感到不安。而未知的未来物理学的新理论是否仍然依赖于这一细节仍是需要研究的。幸运的是，这一问题很早就被 Oströgradski 研究过了。 [2]

假设拉氏量 $L = L(q, \dot{q}, \ddot{q})$ 含有对时间的二阶导数，且假设含时间二阶导数的项不能被分部积分移去（非退耦情形）。在非退耦假设下，由最小作用量原理导致的 Euler-Lagrange 方程具有如下形式，

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} = 0。 \tag{1.15}$$

这是一个四阶微分方程，为了决定系统的运动，初始值不得不加倍。按照 Ostrogradski 的构造，这导致了一组新的正则坐标变量

$$Q_1 \equiv q \ , Q_2 \equiv \dot{q}。 \tag{1.16}$$

且与之相应的共扼动量是，

$$P_1 \equiv \frac{\partial L(q, \dot{q}, \ddot{q})}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L(q, \dot{q}, \ddot{q})}{\partial \ddot{q}} \ , \ P_2 \equiv \frac{\partial L(q, \dot{q}, \ddot{q})}{\partial \ddot{q}}。 \tag{1.17}$$

其中关于 P_2 的方程可以被用来反解出 $\ddot{q}$，它可仅用 Q_1 、 Q_2 和 P_2 来表达，而 P_1 仅在表达 $\frac{d^3}{dt^3}q$ 时用到。 Ostrogradski 的哈密顿量是，

$$\begin{aligned} H &\equiv \sum_i P_i \dot{Q}_i - L \\ &= P_1 Q_2 + P_2 \ddot{q}(Q_1, Q_2, P_2) - L(Q_1, Q_2, \ddot{q}(Q_1, Q_2, P_2))。 \end{aligned} \tag{1.18}$$

而正则方程是

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i} \ , \ \dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i}。 \tag{1.19}$$

很容易验证，关于 Q_1 、 Q_2 和 P_2 的正则方程仅仅是重复了 Q_2 、 P_2 和 P_1 的定义，而关于 P_1 的正则方程给出了 Euler-Lagrange 方程 1.15 式。由 1.18 式可以很

[2] M. Oströgradski, *Mem. Ac. St. Petersbourg*, **VI 4**(1850)385.

容易看出含时间高阶导数系统的问题：由于哈密顿量对于 P_1 是线性依赖的，这样的哈密顿量（或能量）没有下界，因而是物理上不允许的。[3]

练习：证明 1.19 式。

在历史上，人们对含有高阶导数的相对论性系统下的运动方程曾作过认真的研究，主要动机之一是要克服经典 Maxwell 理论中的电子自能发散的问题：如果首先能够在经典水平上修改 Maxwell 方程以使得电子的库仑场自能不再发散，那么在此基础上再进行量子化将有助于克服在量子电动力学中的类似的困难。以下我们对这些研究作一些简单的回顾。首先我们写出任何一种介子场（包括电磁场）所满足的运动方程：

$$(\Box + m^2)\psi = \eta \ , \tag{1.20}$$

其中 η 是产生场 ψ 的源， $m = 0$ 对应于电磁场而 $m \neq 0$ 对应于介子场。作为运动方程 1.20 的尝试性的推广，我们可以将其改写为，

$$F(\Box)\psi = \eta, \tag{1.21}$$

其中

$$F(\Box) = \prod_{i=1}^{N}(\Box + m_i^2) \, .$$

方程 1.21 的好处是它的解在源附近不再象 1.20 那么奇异。比如取 η 为点源的形式， $\eta = e\delta(\mathbf{x})$ 。则由方程 1.21 给出的静场的势满足方程

$$F(\triangle)\psi = e\delta(\mathbf{x}) \, . \tag{1.22}$$

且其解为

$$\psi(r) = \frac{e}{2\pi^2 r}\int_0^\infty kdk\frac{\sin kr}{F(-k^2)} \, , \tag{1.23}$$

其中 r 是到源的距离。在 k 增大时 $F(k^2)$ 增强很快，导致在 $r \to 0$ 时 $\psi(r)$ 变弱。例如取两个粒子的情形且 $0 = m_1 \neq m_2$ 作为例子，则有

$$\psi(r) = \frac{e}{4\pi r}\left[1 - e^{-m_2 r}\right] \ . \tag{1.24}$$

上面的这个解实际上在源点处并没有奇异性。 Feynman 曾仔细研究了这个例子，[4] 结论是虽然它具有如上所述的好处，但是这样修正过的电动力学会辐射出质量为 m_2 的负能量的量子，因而导致新的困难。

[3] 在经典电子论我们见过一个很著名的含高阶导数的例子。辐射阻尼力正比于带电粒子坐标对于时间的三阶导数。在这个理论中带电粒子运动方程具有一个非物理的解，即所谓的“奔离解”。根据奔离解，电子在没有外力的情况下会自加速，导致不存在稳定的电子运动状态，因而是非物理的。

[4] R. Feynman, Phys. Rev. **76**(1948)939 。

在忽略外源时，方程 1.21 可由如下的拉格朗日量给出，

$$L = \int d^4x \psi F(\Box)\psi \,。 \tag{1.25}$$

另一种等价的表述方式是，

$$L = \int \mathcal{L}(x) d^4x \ , \ \ \mathcal{L}(x) = \int \psi(x)\tilde{F}(x-x')\psi(x')d^4x' \,。 \tag{1.26}$$

其中 $\tilde{F}$ 是 F 的 Fourier 变换，

$$\tilde{F}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k e^{ikx} F(-k^2) \,。 \tag{1.27}$$

从方程 1.26 可以看出，在一般的 F 的情况下拉格朗日密度 $\mathcal{L}(x)$ 将会依赖于任意有限远（ $x-x'$ ）处的场。也就是说方程 1.26 给出的是非定域的作用量。对于非定域的作用量， Bopp ， 张宗遂 等人证明了，相对论不变性保证了可以构造出不发散的、对称的 4 维（同样是非定域的）能动量张量。 Pais 和 Uhlenbeck 研究了这样的含高阶导数（或更一般的非定域）的系统后指出， [5] 一般的来说，在这样的系统中很难同时保证自能的有限性、（自由场）能量的正定性以及严格的微观因果性。

上面的结论仅适用于玻色场。对于费米场并不存在负度规的困难，原因是可以通过电荷共轭变换将哈密顿量中的引起能量没有下界的谐振子项变换为具有正确的符号。另外， Pais 和 Uhlenbeck 的工作并不是最终定性的，事实上一直有文献出于各种理由（其中一个重要的动机是对引力的量子化的研究）研究含有高阶导数甚至是非定域的量子场论。但到目前为止还没有取得任何普适的结论。

练习：证明 1.23 至 1.27 式。

§1.2 连续对称变换、 Noether 定理与守恒流

根据 1.1 节中的结论，拉氏量密度是场量 ϕ 和其 对时间 一阶微商的泛函。 [6] 而作用量为

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(x) \,。 \tag{1.28}$$

由变分原理可推出 Euler–Lagrange 方程。

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu})}\right) = 0。 \tag{1.29}$$

[5] A. Pais and G.E. Uhulenbeck, Phys. Rev. 79 (1950)145 。

[6] 从另一个角度看，加入高阶导数项会与 Källen–Lehmann 表示的推论发生冲突并导致几率正定性的破坏。

在经典场论中，每一种使作用量不变的连续对称变换均会导致存在一个守恒流和运动常数。这一结论叫做 Noether 定理。事实上在场论中经常碰到的连续对称变换具有使拉氏密度（ Lagrangian density ）保持不变的特性。比如场量的与内部对称性群自由度有关的转动，就使拉氏密度保持不变。我们首先来看一看这种简化了的情形。设使拉氏密度不变的一个依赖于无穷小参量 ϵ 的场变换为如下形式：

$$\delta\phi = i\epsilon\psi(x) \ , \tag{1.30}$$

其中 ψ 依赖于 $\phi(x)$ 和（或）它对 x 的微商。现在假设 ϵ 依赖于 x ，即 $\epsilon = \epsilon(x)$ 。拉氏密度的变化为，

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(x)}\delta\phi(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu})}\delta(\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}) \\ &= i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(x)}\epsilon(x)\psi(x) + i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu})}\partial_\mu(\epsilon(x)\psi(x)) \ , \end{aligned} \tag{1.31}$$

根据定义当 ϵ 与 x 无关时 $\delta\mathcal{L} = 0$ 。也就是说，

$$\delta\mathcal{L} = i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu})}\psi(x)\partial_\mu\epsilon(x) \ 。 \tag{1.32}$$

注意上述结论对任意的场量 $\phi(x)$ 都成立，而并不要求 $\phi(x)$ 是场运动方程的解。现在假设 $\phi(x)$ 满足 Euler–Lagrange 运动方程。即作用量 S 在驻点取值。由于在驻点附近作任意无穷小扰动比如 1.30 式都有 $\delta S = 0$ ，于是我们有，

$$0 = \delta S = \int d^4x\delta\mathcal{L} = i\int d^4x\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu})}\psi(x)\partial_\mu\epsilon(x) \ . \tag{1.33}$$

利用分部微商我们得到，

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0 \ , \tag{1.34}$$

其中流的定义为，

$$J^\mu \equiv -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu})}\psi(x) \ , \tag{1.35}$$

每一个守恒流对应着一个守恒荷，

$$Q \equiv \int_{V\to\infty} J^0(x)d^3\vec{x}。 \tag{1.36}$$

我们有

$$\frac{dQ}{dt} = \int_{V\to\infty}\frac{\partial}{\partial t}J^0(x)d^3\vec{x} = -\int_{V\to\infty}\nabla\cdot\vec{J}d^3\vec{x} = -\oint_{S\to\infty}\vec{J}\cdot d\vec{S} = 0。 \tag{1.37}$$

事实上，可以更为简单地进行上述推导，在 1.31 式中，如果不考虑 ϵ 对 x 的依赖，直接利用 Euler–Lagrange 运动方程，可得到 $-i\epsilon\partial_\mu J^\mu = \delta\mathcal{L}$. 从中得知如果 $\delta\mathcal{L} = 0$ 则有流守恒条件，否则可以得到流散度的方程

$$\partial_\mu J^\mu = i\delta\mathcal{L}/\epsilon \text{ 。} \tag{1.38}$$

然而，有时候需要讨论的对称性并不具有拉氏密度的不变性，并且由于涉及到坐标的变换，场的变换形式比 1.30 式更复杂。只要作用量在变换下不变则可以得到相应的守恒律。一般的变换形式是，

$$x^\mu \to x^{\mu\prime} = x^\mu + \delta x^\mu \ , \tag{1.39}$$

$$\phi(x) \to \phi'(x') = \phi(x) + \delta\phi(x) \ . \tag{1.40}$$

由于变换可能同时包括场量和坐标，因此变分与偏导数并不一定对易，$\delta(\partial_\mu\phi) \neq \partial_\mu(\delta\phi)$ 。所以有必要分出仅与场的变换而不是坐标的变换有关的变分，

$$\bar{\delta}\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) \ , \tag{1.41}$$

对此我们有

$$\bar{\delta}\partial_\mu\phi(x) = \partial_\mu\bar{\delta}\phi(x) \ . \tag{1.42}$$

两种不同的变分之间的联系为，

$$\begin{aligned} &\phi'(x') = \phi'(x) + \delta x^\mu\partial_\mu\phi(x) \\ &\Longrightarrow \bar{\delta}\phi(x) = \delta\phi(x) - \delta x^\mu\partial_\mu\phi(x) \ . \end{aligned} \tag{1.43}$$

作用在拉氏密度上有，

$$\delta\mathcal{L}(x) = \bar{\delta}\mathcal{L}(x) + \delta x^\mu\partial_\mu\mathcal{L}(x) \ , \tag{1.44}$$

且

$$\bar{\delta}\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\bar{\delta}\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\bar{\delta}(\partial_\nu\phi) \ . \tag{1.45}$$

利用 1.42 式，并把 1.43 式和 1.45 式带入 1.44 式，得到：

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} \ = \ & \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}(\partial_\nu\phi)\delta x^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\partial_\nu\delta\phi \\ & - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\partial_\nu(\partial_\mu\phi\delta x^\mu) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu \ . \end{aligned} \tag{1.46}$$

而作用量 S 变为，

$$S = \int d^4x\mathcal{L}(x) \to S' = \int d^4x'\mathcal{L}'(x') \text{ 。} \tag{1.47}$$

由于有坐标变换， Jacobian 也有变化，即

$$S' = \int [d^4x + \delta(d^4x)][\mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}(x)] \ . \tag{1.48}$$

又由

$$\delta(d^4x) = d^4x\partial_\mu\delta x^\mu \tag{1.49}$$

推出

$$\delta S = \int d^4x(\mathcal{L}\partial_\mu\delta x^\mu + \delta\mathcal{L}) \ , \tag{1.50}$$

所以

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x\partial_\mu \left[(g^\mu_\nu\mathcal{L} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\nu\phi)\delta x^\nu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right] \\ &\quad + \int d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\nu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\right](\delta\phi - \delta x^\mu\partial_\mu\phi) \ 。 \end{aligned} \tag{1.51}$$

对于对称变换 $\delta S = 0$ ，利用 Euler–Lagrange 方程从上式可得出流守恒条件 $\partial_\mu J^\mu = 0$ ，其中

$$J^\mu = (g^\mu_\nu\mathcal{L} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\nu\phi)\delta x^\nu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi \tag{1.52}$$

平移不变性

作为一个例子，我们下面来看一下如何由系统的平移不变性导出能 - 动量守恒的。如果作用量中没有不具有平移不变性的函数，则作用量在所有场 $\phi(x)$ 变为 $\phi(x-\epsilon)$ 时不变。因为此时场的变化可以由坐标的变化来补偿。无穷小平移变换是指如下的变换，

$$\begin{aligned} x^{\mu\prime} &= x^\mu - \epsilon^\mu \ , \\ \phi'(x) &= \phi(x) + \epsilon^\mu\partial_\mu\phi(x)。 \end{aligned} \tag{1.53}$$

也就是说，

$$\phi'(x') = \phi'(x-a) = \phi(x) \ . \tag{1.54}$$

这个变换具有 $\delta\phi = 0$ ， $\delta x^\mu = -\epsilon^\mu$ 的形式。于是

$$J^\mu = (\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\nu\phi - g^\mu_\nu\mathcal{L})\epsilon^\nu \equiv T^\mu_\nu\epsilon^\nu \ 。 \tag{1.55}$$

由此式定义的 T^μ_ν 叫做能量动量张量。注意此能 – 动量张量并不是一个对称张量，因此并不能直接用于广义相对论中，还要对其对称化。详见 Weinberg 书中的讨论。T^ν_μ 的守恒荷是 4- 动量，

$$P^\nu = \int d^3\vec{x}T^{0\nu} \ , \ \frac{d}{dt}P^\nu = 0。 \tag{1.56}$$

其中 3 维动量的表达式是,

$$\vec{P} = \int d^3\vec{x}\Pi(x)\vec{\nabla}\phi(x) \ , \tag{1.57}$$

而 $\Pi(x)$ 是正则动量。

§1.3 从经典场论到量子场论

§1.3.1 自由场的正则量子化

对于场的量子化, 其手续与经典力学系统的量子化类似。只需对场的正则变量规定如下的 **等时** 对易关系:

$$\begin{aligned} [\pi(\mathbf{x},t),\phi(\mathbf{x}',t)] &= -i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \, , \\ [\pi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{x}',t)] &= [\phi(\mathbf{x},t),\phi(\mathbf{x}',t)] = 0 \, 。 \end{aligned} \tag{1.58}$$

其中正则动量的定义为,

$$\pi(x) = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_0\phi)} \ , \tag{1.59}$$

而哈密顿量

$$H = \int d^3x[\pi(x)\partial_0\phi(x) - \mathcal{L}(x)] \tag{1.60}$$

则决定了系统的动力学:

$$\begin{aligned} \partial_0\phi(\mathbf{x},t) &= i[H,\phi(\mathbf{x},t)] \, , \\ \partial_0\pi(\mathbf{x},t) &= i[H,\pi(\mathbf{x},t)] \, 。 \end{aligned} \tag{1.61}$$

下面我们举一个例子:自由实标量场的正则量子化。其拉氏密度为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[(\partial_\lambda\phi)(\partial^\lambda\phi) - \mu^2\phi^2] \ , \tag{1.62}$$

其 Euler–Lagrange 运动方程为 $(\partial^2 + \mu^2)\phi = 0$, 正则动量为 $\pi(x) = \partial_0\phi(x)$, 而 Hamiltonian 为

$$H = \int d^3x \, \frac{1}{2}[(\partial_0\phi)^2 + (\triangle\phi)^2 + \mu^2\phi^2] \ 。 \tag{1.63}$$

由等时对易关系和运动方程得出自由场解:

$$\phi(\mathbf{x},t) = \int \frac{d^3k}{[(2\pi)^3 2\omega_k]^{1/2}}[a_\mathbf{k}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega\mathbf{t})} + a_\mathbf{k}^+e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega\mathbf{t})}] \, , \tag{1.64}$$

其中 $\omega_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2}$ 。产生与湮灭算符满足

$$\begin{aligned}[a_{\mathbf{k}}, a^+_{\mathbf{k}}] &= \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \ , \\ [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] &= [a^+_{\mathbf{k}}, a^+_{\mathbf{k}'}] = 0 \ 。\end{aligned} \tag{1.65}$$

Hamiltonian 可以写成,

$$H_0 = \int d^3k \, \omega_k a^+(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) \ . \tag{1.66}$$

单粒子态由产生算符作用到真空上得出：

$$|\mathbf{k}> = [(2\pi)^3 2\omega_k]^{1/2} a^+(\mathbf{k})|0> \ . \tag{1.67}$$

态的归一化如下：

$$< \mathbf{k}'|\mathbf{k}> = (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \ . \tag{1.68}$$

由方程 1.64 、 1.65 可以很容易地算出传播子 $i\triangle(x-y) \equiv [\phi(x), \phi(y)]$ ：

$$\begin{aligned}[\phi(x), \phi(y)] &= \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_k \omega_{k'}}} \{[a(\mathbf{k}), a^+(\mathbf{k}')] e^{-ikx + ik'y} \\ &+ [a^+(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] e^{ikx - ik'y}\} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} (e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)}) \equiv i\triangle(x-y) \ .\end{aligned} \tag{1.69}$$

传播子 $i\triangle(x-y)$ 有如下性质：

1. $i\triangle(x-y)$ 是 Lorentz 不变的标量函数。
2. $\triangle(x-y) = -\triangle(y-x)$ 。
3. $\triangle(x-y)|_{x^0=y^0} = 0$ ， $\frac{\partial}{\partial x_0}\triangle(x-y)|_{x^0=y^0} = -\delta^3(\vec{x} - \vec{y})$ 。并由此可得出 $\triangle(x-y)|_{(x-y)^2<0} = 0$ 。这就是 **微观因果性条件** ，即 x 、 y 类空时， $\phi(x)$ 、 $\phi(y)$ 可同时测量。

也可以讨论如

$$D(x,y) =< 0|\phi(x)\phi(y)|0> \tag{1.70}$$

的函数。它在类空区域并不为零但是随着空间距离指数衰减，而在类时区域是一个震荡函数。详细讨论可以参见 Peskin 和 Schroder 的书。另外一个重要的关联函数是 Feynman 传播子：

$$\begin{aligned}i\triangle_F(x_1 - x_2) &\equiv < 0|T(\phi(x_1)\phi(x_2))|0> \\ &= \theta(t_1 - t_2) < 0|\phi(x_1)\phi(x_2)|0> + \theta(t_2 - t_1) < 0|\phi(x_2)\phi(x_1)|0> \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} e^{i\,k\cdot(x_1 - x_2)} \ .\end{aligned} \tag{1.71}$$

Feynman 传播子是场方程所对应的 Green 函数, 即 $(\Box+\mu^2)\triangle_F(x_1-x_2)=-\delta^4(x_1-x_2)$ 。

练习：证明 1.71 式。

§1.3.2 有相互作用的情形

以 $\lambda\phi^4$ 理论为例，相互作用拉氏量密度为,

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}[(\partial_\lambda\phi)(\partial^\lambda\phi)-\mu^2\phi^2]-\frac{\lambda}{4!}\phi^4 \ 。 \tag{1.72}$$

由其可导出运动方程,

$$(\partial^2+\mu^2)\phi=-\frac{\lambda}{3!}\phi^3 \ . \tag{1.73}$$

正则动量与正则对易关系与上一节中自由场的情形相同。 Hamiltonian 的形式为

$$H=H_0+H' \ , \tag{1.74}$$

其中 $H'=\int d^3x\mathcal{H}'$ 为相互作用拉氏量且

$$\mathcal{H}'=\frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

为相互作用拉氏密度。

在 Heisenberg 表象中算符是与时间有关的，其随时间的演化由系统的哈密顿量来决定：

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x},t) &= e^{iHt}\phi(x,0)e^{-iHt} \ ,\\ \pi(\mathbf{x},t) &= e^{iHt}\pi(x,0)e^{-iHt} \ ,\end{aligned} \tag{1.75}$$

而态矢量 $|a>$ 是与时间无关的。在 Schrödinger 表象中算符是与时间无关的但是态失含时，其与 Heisenberg 表象的关系是,

$$\begin{aligned}\phi^S(\mathbf{x}) &= e^{-iHt}\phi(\mathbf{x},t)e^{iHt} \ ,\\ \pi^S(\mathbf{x}) &= e^{-iHt}\pi(\mathbf{x},t)e^{iHt} \ ,\\ |a,t>^S &= e^{-iHt}|a> \ .\end{aligned} \tag{1.76}$$

在微扰论中我们采用的是相互作用表象：

$$\begin{aligned}\phi^I(\mathbf{x},t) &\equiv e^{iH_0t}\phi^S(\mathbf{x})e^{-iH_0t}\\ &= e^{iH_0t}e^{-iHt}\phi(\mathbf{x},t)e^{iHt}e^{-iH_0t}\\ &= U(t,0)\phi(\mathbf{x},t)U^{-1}(t,0) \ .\end{aligned} \tag{1.77}$$

选择相互作用表象的好处是明显的。如果在 Heisenberg 表象中讨论，对于任意时刻 t_0 ，总可以写出场 $\phi(t_0,\vec{x})$ 的付立叶分解：

$$\phi(t_0,\vec{x})=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}\left(a_{\vec{p}}\,e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}+a^+_{\vec{p}}\,e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}\right)$$

并定义其中的 $a^+_{\vec{p}}$ 和 $a_{\vec{p}}$ 等同于 1.65 式中的的产生和消灭算符的意义但是我们并不能够给出这些算符随时间的演化规律。而如果采用相互作用表象，由 1.77 式，

$$\phi^I(t,\vec{x})=e^{iH_0t}\phi(0,\vec{x})e^{-iH_0t}\ 。$$

由于 H_0 很容易对角化，所以 ϕ^I 可以按自由场方程处理。所以我们将把 Heisenberg 场算符改写为相互作用场算符来进行计算。至少可以在微扰论的意义下进行计算。[7] 对于 $\pi(\mathbf{x},t)$ 有类似于 1.77 式的表达式。另有

$$\begin{aligned}|a,t>^I &\equiv e^{iH_0t}|a,t>^S\\ &= U(t,0)|a>\end{aligned}\tag{1.78}$$

其中

$$U(t,0)=e^{iH_0t}e^{-iHt}\ .\tag{1.79}$$

可以把演化算符 U 的定义稍加推广，

$$|a,t>^I\equiv U(t,t_0)|a,t_0>^I\tag{1.80}$$

其中 $U(t_0,t_0)=1$ 且，

$$\begin{aligned}&U(t,t')U(t',t_0)=U(t,t_0)\ ,\\ &U(t,0)U^{-1}(t_0,0)=U(t,t_0)\ .\end{aligned}\tag{1.81}$$

可以得到 U 算符所满足的方程：

$$i\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0)=H'^I(t)U(t,t_0)\ ,\tag{1.82}$$

其中

$$H'^I=e^{iH_0t}H'e^{-iH_0t}$$

是相互作用表象中的相互作用哈密顿量，即

$$H'_I=H'(\phi^I)\ 。\tag{1.83}$$

[7]在这里形式上把 H 分为 H_0 和相互作用哈密吨量 H' 具有一定成度的任意性，但是一般来说须要求 H 和 H_0 具有同样的谱，否则可能会导致由 1.87 式给出的 S 矩阵没有定义，在李正道先生著的《粒子物理与量子场论》中对此有简略的讨论。

方程 1.82 等价于如下形式的积分方程：

$$U(t,t_0)=1-i\int_{t_0}^{t}d\tau H'_I(\tau)U(\tau,t_0)\ . \tag{1.84}$$

形式上可以对其进行迭代求解，得到一个无穷级数，利用公式，

$$\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}}dt_nH'_I(t_1)\cdots H'_I(t_n)=\frac{1}{n!}\int_{t_0}^{t}dt_1\cdots dt_nT\{H'_I(t_1)\cdots H'_I(t_n)\}\ . \tag{1.85}$$

得知 $U(t,t_0)$ 有如下形式的解，

$$\begin{aligned}U(t,t_0) &= T\ \exp[-i\int_{t_0}^{t}dt_1H'^I(t_1)]\\ &= T\ \exp[-i\int_{t_0}^{t}dt_1\int d^3x_1\mathcal{H}'^I(x_1,t_1)]\\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{t_0}^{t}d^4x_1\int_{t_0}^{t}d^4x_2\cdots\int_{t_0}^{t}d^4x_n\\ &\times\ T[\mathcal{H}'^I(x_1)\mathcal{H}'^I(x_2)\cdots\mathcal{H}'^I(x_n)]\ .\end{aligned} \tag{1.86}$$

散射的 S 矩阵的定义是，

$$S=\lim_{\substack{t'\to+\infty\\ t\to-\infty}}U(t',t)\ 。 \tag{1.87}$$

§1.4 正则量子场论的一些一般结果

§1.4.1 Lehmann–Symanzik–Zimmermann 约化公式

这里我们仅仅介绍一下 Lehmann–Symanzik–Zimmermann（ LSZ ）约化公式，详尽的讨论在 2 章中给出。首先定义所谓的 “入态”（ in 态 ）和 “出态”（ out 态 ）。在 $t\to-\infty$ 时，散射的粒子由于彼此远离，可以认为没有除了自作用以外的相互作用。自作用仅仅会改变粒子的质量，所以入态（和相应的入场 ϕ_{in} ）由自由场的拉氏量描述。并且假设入态构成 Hilbert 空间的完备集。同样的，对于出态有类似的定义，但是是在 $t\to+\infty$ 时。入场和出场与相互作用场由如下的渐近条件相联系：

$$\lim_{t\to\pm\infty}\left(\int d^3xf(x)\overleftrightarrow{\partial_0}\{\phi(x)-\sqrt{Z}\phi_{\mathrm{out,in}}(x)\}\right)=0\ , \tag{1.88}$$

其中 Z 是波函数重整化常数，$A\overleftrightarrow{\partial}B\equiv A\partial B-B\partial A$ ，f 是自由 Klein–Gordon 场方程的任意一个可归一化的的解。另外值得指出的是上面等式仅仅在矩阵元的意义下才成立而并不是一个算符等式。物理的散射矩阵 S 矩阵把 in 态和 out 态之间联系起来。由渐近条件和如下等式（还有 out 态的相应等式）：

$$\begin{aligned}&|\mathbf{p},\alpha>_{in}=a^+_{in}(\mathbf{p})|\alpha>_{in}\\ &=-\frac{i}{\sqrt{Z}}\lim_{t\to-\infty}\int d^3xf_p\overleftrightarrow{\partial_0}\phi(x)|\alpha>_{in}\ .\end{aligned} \tag{1.89}$$

可以推导出 S 矩阵元和编时格林函数之间的关系。比如考虑一个标量粒子之间的散射矩阵元，$< p_1, \cdots, p_n|S|k_1, \cdots, k_m >$，LSZ 约化公式是：

$$\begin{aligned}
&< p_1, \cdots, p_n|S|k_1, \cdots, k_m > \\
&= \left(\frac{-i}{\sqrt{Z}}\right)^{n+m} \prod_{i=1}^{n}(p_i^2 - m^2 + i\epsilon) \prod_{j=1}^{m}(k_j^2 - m^2 + i\epsilon) \prod_{1}^{n} \int d^4x_i e^{ip_i\cdot x_i} \prod_{1}^{m} \int d^4y_j e^{-ik_j\cdot y_j} \\
&\times < 0|T\{\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\phi(y_1)\cdots\phi(y_m)\}|0 > 。
\end{aligned} \tag{1.90}$$

上式中 Z 表示波函数的重整化常数。在 1.90 式中的等式右边要取质壳条件，$p_i^2 = k_j^2 = m^2$。LSZ 约化公式的表述是清楚的：为了计算一个物理的散射矩阵元，首先计算相对应的 Green 函数，然后把外腿截掉并把外腿上粒子的 4– 动量放到质壳上。虽然 1.90 式是对在壳出、入态粒子所建立的，但是等式右边对于不在壳的 4– 动量也是可以定义的，因此 1.90 式可以作为当粒子的 4– 动量不在壳时的 S 矩阵元的解析延拓的定义。

§1.4.2 真空涨落图

根据 1.4.1 一节的讨论，在场论中我们对计算格林函数，

$$G^{(n)}(x_1, \cdots x_n) =< 0|T(\phi(x_1)\cdots\phi(x_n))|0 > \tag{1.91}$$

感兴趣，从其结果可以直接得出 S 矩阵元（利用 LSZ 约化公式）。利用编时乘积的性质我们得到，

$$\begin{aligned}
G^{(n)}(x_1, \cdots x_n) &= < 0|T\{U^{-1}(t_1,0)\phi^I(x_1)U(t_1,0)\cdots U^{-1}(t_n,0)\phi^I(x_n)U(t_n,0)\}|0 > \\
&= < 0|U^{-1}(t,0)T(\phi^I(x_1)\cdots\phi^I(x_n) \\
&\times \exp[-i\int_{-t}^{t} dt' H'^I(t')])U(-t,0)|0 >
\end{aligned} \tag{1.92}$$

其中 t 是一个时间参数，最终让其趋于 ∞。在这个极限下真空成为 U 算符的本征态。为了看清这一点，我们注意到对任意态 $|n>$，由于湮灭算符湮灭真空，所以有

$$\begin{aligned}
0 = \sqrt{Z} < n|a_{in}(\mathbf{p})|0 > &= i \lim_{t\to-\infty} \int d^3x f_p \overleftrightarrow{\partial_0} < n|\phi(x)|0 > \\
&= i \lim_{t\to-\infty} \int d^3x f_p \overleftrightarrow{\partial_0} < n|U^{-1}(t,0)\phi_I(x)U(t,0)|0 > .
\end{aligned} \tag{1.93}$$

由上式中最后的式子我们知道 $U(t,0)|0 >$ 必须是正比于 $|0 >$ 即 $U(t,0)|0 >= \lambda_-|0 >$（其中 λ_- 是一常数因子）。否则的话 ϕ_{in} 中的湮灭算符作用到右边不会

为零。同理我们有 $<0|U^{-1}(-t,0)=\lambda_+<0|$， 所以 1.92 式中第二个等式右边的 U 算符的作用产生了一个因子,

$$\frac{1}{<0|T\left(\exp\left[-i\int_{-\infty}^{\infty}dt'H'^I(t')\right]\right)|0>}, \tag{1.94}$$

于是

$$G^{(n)}(x_1,\cdots x_n)=\frac{<0|T(\phi^I(x_1)\cdots\phi^I(x_n)\exp[-i\int_{-\infty}^{\infty}dt'H'^I(t')])|0>}{<0|T\left(\exp\left[-i\int_{-\infty}^{\infty}dt'H'^I(t')\right]\right)|0>}。 \tag{1.95}$$

我们可以把分子按耦合常数展开得到,

$$\begin{aligned}\text{numerator} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}d^4y_1\cdots d^4y_n<0|T(\phi^I(x_1)\cdots\phi^I(x_n)\\ &\times\ \mathcal{H}'(\phi^I(y_1))\cdots\mathcal{H}'(\phi^I(y_n))|0>\ 。\end{aligned} \tag{1.96}$$

利用上述表示重复的使用 Wick 收缩技巧，我们即可以到微扰论的每一阶计算连通格林函数。 1.95 式中分母的作用是抹掉真空涨落图的贡献。分子所产生的图的贡献与分母所产生的图的贡献的区别在于前者具有外腿。我们把 1.95 式分子所产生的图中的那些不与任意外腿以某种方式相连接的子图叫作真空涨落图。一个去掉任何真空涨落部分的格林函数这里用下标 $\mathcal{C}$ 表示（注意它与后面所说的连通格林函数之间的区别）。如图 1.1 所示。 1.95 式右可以重新改写为

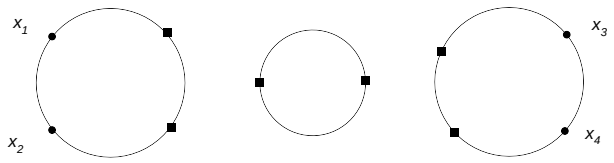


图 1.1: 黑的圆点表示的顶点代表与外腿相连。左右两侧的代表去掉真空涨落图部分。方块表示内部指标收缩产生的顶点。图中间的小圈表示真空涨落图。

$$\begin{aligned}&\text{numerator}\\ &=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-i)^p}{p!}\sum_{m<p}\int_{-\infty}^{\infty}d^4y_1\cdots d^4y_p<0|T(\phi^I(x_1)\cdots\phi^I(x_n)\mathcal{H}'(\phi^I(y_1))\cdots\mathcal{H}'(\phi^I(y_m))|0>_{\mathcal{C}}\\ &\times\frac{p!}{m!(p-m)!}<0|T\mathcal{H}'(\phi^I(y_{m+1})\cdots\mathcal{H}'(\phi^I(y_p)|0>\ 。\end{aligned} \tag{1.97}$$

其中的组合数 $\frac{p!}{m!(p-m)!}$ 表示由 p 个 H' 中挑出 m 个来构成 disconnected 图的可能性。下上式可以进一步改写成

$$
\begin{aligned}
&\text{numerator} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-i)^r}{r!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4y_1 \cdots d^4y_r < 0|T(\phi^I(x_1) \cdots \phi^I(x_n)\mathcal{H}'(\phi^I(y_1)) \cdots \mathcal{H}'(\phi^I(y_r))|0>_{\mathcal{C}} \\
&\times \sum_{s=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4y_1 \cdots d^4y_s \frac{(-i)^s}{s!} < 0|T\mathcal{H}'(\phi^I(y_1) \cdots \mathcal{H}'(\phi^I(y_s)|0> \quad 。
\end{aligned} \tag{1.98}
$$

从中可以看出 1.95 式中分母的作用仅仅是消掉了分子中的所有真空涨落部分的贡献。

第二章　散射的 S 矩阵 *

在本章中我们将简单介绍 S 矩阵理论的一些基础知识。它们也是公理化的正则量子场论和公理化 S 矩阵理论的基础。它们也是色散关系理论的基础。我们使用的语言较为形式化，但一般我们不给出严格的证明或详细的讨论，有兴趣进行进一步研究的读者可以研究在本章末给出的参考文献或其他的专著。

§2.1　粒子的场的假说、散射的 S 矩阵

§2.1.1　入态、出态和 S 矩阵

公理化场论试图从一些基本的对称性和一些合理的假设出发研究散射问题（关于这些假设的详细讨论，可以参阅 Bjorken 和 Drell 的书 [1] ），或 S- 矩阵理论。在这里我们以中性标量场为例作一下简单讨论。

首先定义了入态和出态以及入场 $\Phi_{\rm in}$ 和出场 $\Phi_{\rm out}$ 。入态和出态是用来描述在 $t \to -\infty$ 和 $t \to +\infty$ 情况下的具有物理质量的物理粒子态，这时，系统内参加散射的粒子 (对于入场) 或散射后的粒子互相没有发生作用而只是在自作用的影响下传播。 [1] 我们要求入态和出态具有如下性质：

1. 在 $t \to -\infty$ 时所有的态（ in 态）构成了 Hilbert 空间中的完备集。（ I ）
2. 在 $t \to +\infty$ 时所有的态（ out 态）构成了 Hilbert 空间中的完备集。（ II ）

它们构成了形式散射理论中的两个公理。定义出场和入场则是产生独立的这些粒子态的场算符（也统称为辅助场或渐近场）。它们满足如下性质：

1. 入场、出场和入态、出态满足在洛伦兹变换下的自由场，自由态的变换性质。

   对于单粒子态，相对应的有产生算符 $a^+_{\rm in}(\vec{k})$ 和湮灭算符 $a_{\rm in}(\vec{k})$ 。它们满足如下的熟知的关系，

$$\begin{aligned} \left[a_{\rm in}(\vec{k}), a^+_{\rm in}(\vec{k})\right] &= \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \ , \\ \left[a_{\rm in}(\vec{k}), a_{\rm in}(\vec{k})\right] &= 0_{\circ} \end{aligned} \tag{2.1}$$

   对于 out 态存在着平行的一套算符和它们之间的关系。 in 态和 out 态算符满足同样的代数。 在非相对论性的量子力学中，这意味着两种不同的算符之间满足一个幺正变换。而在相对论性量子场论中这一点并不是显然满足的。

[1] 上述对于入态和出态的描述看起来是显然的。然而这些描述并不是严格的。因为我们忽略了一个基本的事实：即如果入射粒子被看成将要碰撞到一起，那么它们必须被看成在空间上是定域的。而测不准关系告述我们他们的动量不能被精确的描述。而对我们的描述的合理性的论证远不是简单和平庸的。参见 M. L. Goldberger and K. M. Watson, *Collision Theory*, Wiley, New York, 1964 。

2. 入场，出场满足具有物理质量的自由场方程。于是我们有，

$$\phi_{in}(\mathbf{x},t)=\int\frac{d^3k}{[(2\pi)^3 2\omega_k]^{1/2}}[a_{in}(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega\mathbf{t})}+a^+_{in}(\mathbf{k})\mathbf{e}^{-\mathbf{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega\mathbf{t})}]\,。\tag{2.2}$$

由其可以证明

$$\begin{aligned}a_{in} &= \frac{i}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3\vec{x}\frac{e^{ik\cdot x}}{(2\omega_k)^{1/2}}\overleftrightarrow{\partial_0}\,\phi_{in}(x)\ ,\\ a^+_{in} &= -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3\vec{x}\frac{e^{-ik\cdot x}}{(2\omega_k)^{1/2}}\overleftrightarrow{\partial_0}\,\phi_{in}(x)\ 。\end{aligned}\tag{2.3}$$

这些关系式在推导约化公式时会起到重要作用。其中 $A\overleftrightarrow{\partial}B\equiv A\partial B-B\partial A$ 。

3. 对应于一切可能的粒子数和动量的这些入态和出态分别构成态的完全集合。[2]

这样就可以定义 S - 矩阵：从 n 个无相互作用的物理粒子系统的初态出发，系统状态有量子数 $p_1,\cdots,p_n$, 表示为 $|p_1,\cdots,p_n,\text{in}\rangle=|\alpha,\text{in}\rangle$ 跃迁到 m 个粒子的末态，量子数为 $p'_1,\cdots,p'_n$ 表示为 $|p'_1,\cdots,p'_n,\text{out}\rangle=|\beta\,\text{out}\rangle$ 。由于入态和初态分别构成完全集合， S - 矩阵定义为把出态变成入态的算符：

$$\begin{aligned}<\beta,\text{out}| &= <\beta,\text{in}|S\ ,\\ S^+|\alpha,\text{in}> &= |\alpha,\text{out}>\ ,\\ |\alpha,\text{in}> &= S|\alpha,\text{out}>\ 。\end{aligned}\tag{2.4}$$

形式上 S 矩阵可以写成

$$S=\sum_\alpha|\alpha,\text{in}><\alpha,\text{out}|。\tag{2.5}$$

显然， in 态与 in 态之间的对易子（或 out 态与 out 态之间的对易子）是简单的。但 in 态和 out 态之间的关系，除非已经解出了整个的 S 矩阵，是完全不知道的。综上所述 S 矩阵更具有如下性质：

1. S 把入场变成出场，即 $\phi_{in}(x)=S\phi_{\text{out}}(x)S^{-1}$ 。
2. S - 矩阵是幺正的，即 $SS^\dagger=S^\dagger S=1$ 。

为完整的定义一个 S 矩阵，我们还需要定义一个真空态。真空态的稳定性要求

$$\langle0,\text{in}|S=\langle0,\text{out}|=e^{i\phi_0}\langle0,\text{in}|\ ,\tag{2.6}$$

假定真空唯一时，相因子可以令之为 0 。则

$$\langle0,\text{out}|=\langle0,\text{in}|=\langle0|,S_{00}=1。\tag{2.7}$$

[2] 评注：在对于入态和出态的定义中的一个很明显的的事实是，入态和出态都是由稳定粒子构成的。在这一体系中如何处理粒子的衰变变成为一个复杂的问题。另外值得指出的是在这里没有关于‘复合’粒子与‘基本’粒子的区别，所有的稳定粒子都有他们自己的 in 和 out 算符。

真空态对于不管 in 场和 out 场来说，都是一个“无粒子”的态，也即

$$a_{\text{in}}(\vec{k})|0>=0=a_{\text{out}}(\vec{k})|0>。\tag{2.8}$$

与此类似但独立的另一个条件是，

$$|\vec{k};\text{in}>\equiv a^{+}_{\text{in}}(\vec{k})|0>=|\vec{k};\text{out}>\equiv a^{+}_{\text{out}}(\vec{k})|0>\equiv|\vec{k}>。\tag{2.9}$$

其中的等式来自于单粒子态的稳定性要求：

$$\langle p,\text{in}|S|p,\text{in}\rangle=\langle p,\text{out}|p,\text{in}\rangle=\langle p,\text{in}|p,\text{in}\rangle=1。\tag{2.10}$$

现在，关于 in 态和 out 态的完备性假设意味着所有 Hilbert 空间的态矢量可以写成如下基失的线性组合：$\{\alpha^{+}_{\text{in}}(\vec{k}_1)\cdots\alpha^{+}_{\text{in}}(\vec{k}_n)\}|0>$（或等价的用 out 态算符表示）。[3]

S 矩阵还必须有平移不变性和洛伦兹不变性，这里也不再讨论了。

§2.1.2 Interpolating 场和渐近条件

在上一节中我们引入了辅助场以及入态、出态的概念。虽然这些讨论并没有引入任何新的物理，因为入场和出场满足自由场的方程，即除了自作用外并不参与任何相互作用。但是上述的讨论仍然是有意义的。因为首先我们建立了粒子的场的对应与表述，而且使我们可以进一步引入如下的远非平庸的公理 III，即所谓的 **渐近条件**：

存在着一个场算符 $\phi(x)$，叫做 interpolating field 满足如下性质：

$$\lim_{t\to\pm\infty}\int d\vec{x}f(x)\overleftrightarrow{\partial_0}<A|\{\phi(x)-\phi_{\text{out,in}}(x)\}|B>=0\,,\tag{2.11}$$

*其中态 A 和 B 是任意实验上可观测的态（即入或出态），而 $f(x)$ 是任意可归一的自由 Klein–Gordon 场的解。*值得注意的是，和辅助场一样，有多少稳定粒子就有多少 interpolating field。在最简单的情况下，这种场与在拉格朗日理论中的重整化后的场算符一致。

对 *2.11* 式可以如下理解：设拉格朗日理论中的相互作用场 $\phi(x)$ 满足如下运动方程

$$(\Box+m_0^2)\phi(x)=j(x)。$$

而 *in* 态（*out* 态）所对应的场算符满足，

$$(\Box+m^2)\phi_{in}(x)=0。$$

[3]这一假设看起来是平庸的，但实际上确是非常大胆的假设。在量子电动力学里面，所谓的 Gupta–Bleuler 方案在 Hilbert 空间中引入了负度规的态。对于这样的理论，我们这里的讨论至少是不能直接应用的。

定义 $\eta(x) = j(x) + \delta m^2\phi(x) = j(x) + (m^2 - m_0^2)\phi(x)$ 。那么 $\phi(x)$ 场方程可以改写为 $(\Box + m^2)\phi(x) = \eta(x)$ 。也即 $\eta(x)$ 可以被认为是仅仅对于散射波有贡献的源，把它移去后可以把 $\phi(x)$ 看成仅是 $\phi_{in}(x)$ 。于是我们可以尝试地写出

$$\sqrt{Z}\phi_{in}(x) = \phi(x) - \int d^4y \triangle_{ret}(x - y; m)\eta(y) \ 。$$

其中 $\triangle_{ret}(x - y; m)$ 是推迟格林函数，即当 $x_0 < y_0$ 时 $\triangle_{ret}(x - y; m) = 0$ 。通过 2.3 节中对 *Källen–Lehmann* 表示的研究表明，在有相互作用的情形的确 $Z \neq 1$ 。

值得对公理 III 做一些进一步的讨论。首先上述关系式是算符的矩阵元之间的关系、而不是算符本身之间的关系。第二，矩阵元需要用一个可归一的函数 $f(x)$ 来做平均。这两点都是必需的，否则继续推导下去总会碰到矛盾。算符的矩阵元之间的这种收敛叫做 “弱” 收敛，而算符之间的逼近叫做 “强” 收敛。但是 $f(x)$ 常常可以用不可归一的平面波来代替而不引起任何问题，除非得到明显无意义的结果。更进一步的讨论可以参照 Goldberger 和 Watson 的书。

对于场 $\phi(x)$ 的一个标准的假设是它与 4- 动量算符（或平移变换的产生子）之间的关系：

$$\begin{aligned} [\phi(x), P_\mu] &= i\partial_\mu\phi(x) \ , \\ \phi(x) &= e^{iPx}\phi(0)e^{-iPx} 。 \end{aligned} \tag{2.12}$$

对于辅助场也有上述关系，但是后者是构造出来的。从 2.12 式出发我们可以得到两个重要的公式。第一个公式是由单粒子态的稳定性条件，即 $|k_{\text{in}} >= |k_{\text{out}} >$ 得出的。首先利用公式 2.12 式，我们得知矩阵元 $< 0|\phi(x)|k^{\text{in}}_{\text{out}} >$ 是自由 Klein–Gordon 场的解，唯一待定的是其系数，而这可以由渐近条件 2.11 唯一的定出，结果是，

$$\begin{aligned} < 0|\phi(x)|k, \text{in} > &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}e^{-ikx} =< 0|\phi(x)|k, \text{out} > \\ &= < 0|\phi^{\text{in}}_{\text{out}}(x)|k^{\text{in}}_{\text{out}} >=< 0|\phi^{\text{in}}_{\text{out}}(x)|k^{\text{out}}_{\text{in}} > \ 。 \end{aligned} \tag{2.13}$$

第二个公式是与源有关的。与一个场所对应的源、 $\eta(x)$ 的定义为：

$$(\Box + m^2)\phi(x) = \eta(x) \ 。 \tag{2.14}$$

取上述等式两边在真空和单粒子态之间的矩阵元我们得到：

$$< 0|\eta(x)|k >= 0 \ 。 \tag{2.15}$$

此方程是在讨论色散关系时经常要用到的重要的等式。

在拉格朗日理论中，我们直接处理的是场方程。在那里动力学的细节，即源 $\eta(x)$ 可以通过 interpolating field 表示出来。然而，在色散理论中，我们一般并不需要知

道这种细节。需要的基本假设只是 $\eta(x)$ 是一个定域的场算符，即它只依赖于在 x 处的 interpolating field 。比如我们不去考虑形如 $\int d^4x' G(x-x')\phi^n(x')$ 的源的表达式。

这里还需要讨论的关于 interpolating field 的一个重要性质是关于它的完备性。关于这一性质的详细讨论需要作许多精心的论证，在这里我们不准备进行这样的讨论，而仅仅满足于接受关于 $\phi(x)$ 的完备性的假设。注意辅助场具有完备性的性质，通过渐近条件，我们有理由期待 interpolating field 具有相同性质。

§2.1.3 对易关系、微观因果性

对易关系在场论中当然具有非常重要的意义。不依赖于理论的任何细节，我们要求 *interpolating field* 的对易子在类空条件下等于零：

$$[\phi(x),\phi(y)]=0\ ,\quad (\text{当}(x-y)^2<0)。\tag{2.16}$$

这个公理（公理 IV ），叫做 **微观因果性条件** 。在上一节中我们谈到了源 $\eta(x)$ 的定域性假设，这一假设和公理（ IV ）在一起，给出了下面的关系：

$$[\eta(x),\phi(y)]=0\ ,\quad (\text{当}(x-y)^2<0)。\tag{2.17}$$

由公理 IV 所定义的微观因果性和常识中的因果性的概念的关系，值得做进一步的讨论。首先我们必须记住，根据场的假设，在每一个时空点上的 $\phi(x)$ 构成了算符的完全集。换句话说，任何一个可观测量都可以表述为场 $\phi(x)$ 的函数。因此公理 IV 保证了：如果一个测量在某一个时空区域进行，而另一个测量是在另一个时空区域进行的，如果这两个区域中的任意两点都是类空的话，那么这两个测量不可能有干涉。另一方面，在狭义相对论中，因果性的精确含义是没有联接类空区间的信号传递过程。因此公理 IV 是一个充分条件，它保证了由量子力学的基本规律所定义的测量不违反狭义相对论所要求的因果性条件。然而反过来，很难证明公理 IV 也是一个宏观因果性必要条件。显然地，如果对易关系在光锥之外被允许不为零，一定会导致产生无穷大的速度。但是这种速度是否会一定导致超光速的 **信号** 传递速度还是完全不清楚的。因此，公理 IV 是否也是一个必要条件基本上还是一个完全没有答案的问题。

评注：在经典场论中，确实存在着例子，表明虽然因果性在微观尺度上遭到破坏，但却很难在宏观上观测到。经典电子论中的关于辐射阻尼力的微分 - 积分方程，就导致这样的物理后果。在那里，因果性的破坏仅仅发生在 $\tau\sim 10^{-22}s$ 的时间尺度上，仅相当于光传播了电子经典半径大小的距离。另一方面，在量子场论中，微观因果性条件确实可以至少在原则上受到实验检验。 但是这样的检验对于充分必要

性的讨论来说，在我们知道如何导出公理 IV 不满足的后续结论之前，并不具有决定性的意义。

为了得到对色散关系的证明，我们仅仅需要公理 IV 所提供的信息。这在一方面来说是幸运的，因为它是我们仅能提供的对其有信心的关系。然而在另一方面，我们又需要超越它。因为这种超越是与拉格朗日理论建立更进一步的联系的唯一途径。公理 IV 所提供的信息过于普遍，从而不可能从中获得区分不同粒子理论的任何有用信息。而自然界明确地告诉我们，不同的相互作用确是由不同的拉格朗日理论来描述的。因此在下面的讨论中，我们将试图在公理 IV 的基础上，尝试在对易关系中提供更多的信息。

方程 2.16 式的局限性在于，它没有提供在光锥上和光锥内所发生的情况的任何信息。明显的是，除非完全能够解出关于 $\phi(x)$ 的场方程，我们不可能得到在光锥内的对易关系的完全信息。然而，如果我们能够解场方程，我们也就得到了 S 矩阵的完全的结果，也就不会再对一个复杂的对易关系产生兴趣了。所以我们现在唯一能够做进一步讨论之处是在光锥上（ $(x-y)^2=0$ ）。在此时， 通常的量子力学建议 正则、等时对易关系 $[\phi(t,\vec{x}),\dot{\phi}(t,\vec{y})]$ 具有重要的价值，并且甚至可能是一个 c-数。在拉格朗日场论中作类比，我们假设对于那些独立的 $\phi(x)$ 场来说，正则等时对易关系实际上是一个 c- 数。由于必须与公理 IV 一致，在有限的 $|\vec{x}-\vec{y}|$ 时它必须等于零，所以正则等时对易关系必须只能是正比于 δ 函数 $\delta(\vec{x}-\vec{y})$ ，或其有限阶导数（如果有无限阶导数，那么可以是对应于一个在 $|\vec{x}-\vec{y}|\neq 0$ 有限的函数的 Taylor 展开）。 如果我们做最简单的假设 ，在仅有一个独立的场的情况下，正则等时对易关系就被写成，

$$\begin{aligned}\left[\phi(t,\vec{x}),\dot{\phi}(t,\vec{y})\right] &= i\hbar\delta(\vec{x}-\vec{y})Z_3^{-1}\\ [\phi(t,\vec{x}),\phi(t,\vec{y})] &= 0\ 。\end{aligned}\tag{2.18}$$

这个关系可以看成是决定我们所讨论的理论的性质的方程。由于 $\phi(x)$ 场与 $\phi_{\rm in}(x)$ 场的关系，这个方程中的常数因子不是随意的。而 $\phi_{\rm in}(x)$ 由于是自由场，当然满足正则等时对易关系：

$$\left[\phi_{\rm in}(t,\vec{x}),\dot{\phi}_{\rm in}(t,\vec{y})\right] = i\hbar\delta(\vec{x}-\vec{y})\ 。\tag{2.19}$$

如果有几个不同的粒子时，根据定义，我们就有几个不同的渐近场。从唯像上考虑，可能有理由把一些场看成是由另一些场组成的，而另一些场则看起来更“基本”。然而根据我们这里的讨论，不管是“复合”的场或“基本”的场算符都满足正则等时对易关系。对于它们的不同也许可以如下区分：即基本场之间的混合的对易关系为零，这样保证了这些场是理论的独立自由度，而且组成了算符的完备集。而基本和复合场之间的对易关系则一般不为零，甚至不一定是一个 c- 数。另一方面，

也可以设想另一种完全相反的情形。即某个基本的场自由度是不稳定的，从而没有相应的渐近场算符。而此时理论中的 interpolating field 算符是否需要另外引入一个代表不稳定场的算符才能够构成完全集仍是一个不清楚的问题。在这里的这些带有猜测性的讨论还完全是没有定论的。

§2.2 LSZ 约化公式与交叉对称性

在场论中的绝大多数计算需要把矩阵元表示成 interpolating field 的矩阵元，下面要讨论的方案是与 Lehmann 、 Symanzik 和 Zimmermann 的工作所建立的。其中渐近条件（ III ）和微观因果性条件（ IV ）要起到至关重要的作用。为简单起见，我们仍然仅讨论自耦合的中性标量场理论。

考虑矩阵元：

$$S_{fi} =< cd, \text{out}|ab, \text{in} >=< cd, \text{in}|S|ab, \text{in} > \ 。 \tag{2.20}$$

在下面的讨论中，要用到的渐近条件中的函数 f_a 在原则上是可归一，但几乎是单色的。它的平面波极限是：

$$f_a \to \frac{1}{\sqrt{2\omega_a}} e^{-ik_a x} \ 。 \tag{2.21}$$

下面的讨论将直接使用平面波的形式而不再做严格的论证 。利用 $< cd, \text{out}| =< c|a_d(\text{out})$ 和 2.3 式我们可以把 2.20 式改写成：

$$S_{fi} = i \int d\vec{x} f_d^*(x) \overleftrightarrow{\partial_0} < c|\phi_{\text{out}}(x)|ab, \text{in} > 。 \tag{2.22}$$

再由公理（ III ）推出，

$$S_{fi} = \lim_{x_0 \to \infty} i \int d\vec{x} f_d^*(x) \overleftrightarrow{\partial_0} < c|\phi(x)|ab, \text{in} > 。 \tag{2.23}$$

利用，

$$\lim_{x_0 \to \infty} \int d\vec{x} \equiv \int d^4x \frac{\partial}{\partial x_0} + \lim_{x_0 \to -\infty} \int d\vec{x} \ , \tag{2.24}$$

我们得到，

$$\begin{aligned} S_{fi} \ = \ & i \int d^4x \frac{\partial}{\partial x_0} \{ f_d^*(x) \overleftrightarrow{\partial_0} < c|\phi(x)|ab, \text{in} > \} \\ & + i \lim_{x_0 \to -\infty} \int d\vec{x} f_d^*(x) \overleftrightarrow{\partial_0} < c|\phi(x)|ab, \text{in} > 。 \end{aligned} \tag{2.25}$$

上式中的第二项实际上是 $< c|a_d(\text{in})|ab, \text{in} >=< cd, \text{in}|ab, \text{in} >= \delta_{da}\delta_{cb} + \delta_{db}\delta_{ca}$ 。而第一项中，利用 f_d^* 是自由场 Klein–Gordon 方程的解，且 f_d^* 是可归一的性质（在空间距离趋于无穷大时 $f_d \to 0$ ），容易证明：

$$S_{fi} =< cd, \text{in}|ab, \text{in} > + i \int d^4x f_d^*(x)(\Box_x + m^2) < c|\phi(x)|ab, \text{in} > , \tag{2.26}$$

或

$$S_{fi} =< cd, \text{in}|ab, \text{in} > +i \int d^4x f_d^*(x) < c|\eta(x)|ab, \text{in} > 。 \tag{2.27}$$

为进行下一步的约化，比如抽出 in 态 b ，首先定义： $N(x) =< c|\phi(x)|ab, \text{in} >$ 。于是，

$$\begin{aligned} N(x) &= < c|\phi(x)a_b^+(\text{in})|a > \\ &= -i \int d\vec{y} f_b(y) \overleftrightarrow{\partial_{y_0}} < c|\phi(x)\phi_{\text{in}}(y)|a > \\ &= -i \lim_{y_0 \to -\infty} \int d\vec{y} f_b(y) \overleftrightarrow{\partial_{y_0}} < c|\phi(x)\phi(y)|a > 。 \end{aligned} \tag{2.28}$$

进一步的推导需要把两个场算符的乘积改写成编时乘积关系。为此注意到，

$$\phi(x)\phi(y) = T\phi(x)\phi(y) + \theta(y_0 - x_0)[\phi(x), \phi(y)]。 \tag{2.29}$$

在上式中需要注意的是， $\theta(y_0 - x_0)$ 仅仅在 x 、 y 之间的间隔是类时或在光锥上时，才是协变的，而这就要求与阶梯函数乘在一起的函数在类空时消失才行，而后者由微观因果性条件保障。上式中的第二项不但是协变的，而且事实上在带回到 2.28 式时可以扔掉，因为在 $y_0 \to -\infty$ 时，显然有 $\theta(y_0 - x_0) = 0$ 。于是我们有，

$$\begin{aligned} N(x) &= -i \lim_{y_0 \to -\infty} \int d\vec{y} f_b(y) \overleftrightarrow{\partial_{y_0}} < c|T\{\phi(x)\phi(y)\}|a > \\ &= i \int d^4y f_b(y) \partial_{y_0} \{ f_b(y) \overleftrightarrow{\partial_{y_0}} < c|T\{\phi(x)\phi(y)\}|a > \} \\ &\quad -i \lim_{y_0 \to \infty} \int d\vec{y} f_b(y) \overleftrightarrow{\partial_{y_0}} < c|\phi(y)\phi(x)|a > 。 \end{aligned} \tag{2.30}$$

上式中的第二个等式用到了 2.24 式。注意在上式的最后一项中我们已经利用到了编时乘积的性质而把场的排序改了过来。这一点是重要的，也是要使用编时乘积的益处所在，原因是此时上式中的第二项贡献为零：

$$\begin{aligned} &-i \lim_{y_0 \to \infty} \int d\vec{y} f_b(y) \overleftrightarrow{\partial_{y_0}} < c|\phi(y)\phi(x)|a > \\ &= -i \lim_{y_0 \to \infty} \int d\vec{y} f_b(y) \overleftrightarrow{\partial_{y_0}} < c|\phi_{\text{out}}(y)\phi(x)|a > \\ &=< c|a_b^+(\text{out})\phi(x)|a >= \delta_{c,b} < 0|\phi(x)|a > 。 \end{aligned} \tag{2.31}$$

注意在计算上式对 S_{fi} 的贡献时前面还要乘上 Klein–Gordon 算符，即此项的贡献正比于 $< 0|\eta(x)|a >$ ，而根据公式 2.15 此项贡献必为零。所剩下的仅仅是重复在推导 2.26 式时的手续而得到，

$$\begin{aligned} &S_{fi} =< cd, \text{in}|ab, \text{in} > \\ &+i^2 \int \int d^4x d^4y f_d^*(x) f_b(y) (\Box_x + m^2)(\Box_y + m^2) < c|T\{\phi(x)\phi(y)\}|a > , \end{aligned} \tag{2.32}$$

或者在函数 f 的平面波极限下，

$$S_{fi} =< cd, \text{in}|ab, \text{in} > \\ +\frac{i^2}{[2\omega_d 2\omega_b]^{1/2}} \int\int d^4x d^4y e^{idx-iby}(\Box_x + m^2)(\Box_y + m^2) < c|T\{\phi(x)\phi(y)\}|a > 。 \tag{2.33}$$

重复上述方法，可以进一步地进行收缩而得出所谓的 Lehmann–Symanzik–Zimmermann （ LSZ ）约化公式。在一般的情况下，比如考虑一个标量粒子之间的散射矩阵元，$< p_1, \cdots, p_n|S|k_1, \cdots, k_m >$ ，著名的 LSZ 约化公式建立起了它和有 $n+m$ 个外腿的 Green 函数之间的关系，

$$< p_1, \cdots, p_n|S|k_1, \cdots, k_m > \\ = \left(\frac{-i}{\sqrt{Z}}\right)^{n+m} \prod_{i=1}^{n}(p_i^2 - m^2 + i\epsilon) \prod_{j=1}^{m}(k_j^2 - m^2 + i\epsilon) \prod_{1}^{n} \int d^4x_i e^{ip_i \cdot x_i} \prod_{1}^{m} \int d^4y_j e^{-ik_j \cdot y_j} \\ \times < 0|T\{\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\phi(y_1) \cdots \phi(y_m)\}|0 > 。 \tag{2.34}$$

上式中 Z 表示波函数的重整化常数。 在 2.34 式中的等式右边要取质壳条件， $p_i^2 = k_j^2 = m^2$ 。 LSZ 约化公式的表述是清楚的：为了计算一个物理的散射矩阵元，首先计算相对应的 Green 函数，然后把外腿截掉并把外腿上粒子的 4– 动量放到质壳上。虽然 2.34 式是对在壳出、入态粒子所建立的，但是等式右边对于不在壳的 4– 动量也是可以定义的，因此 2.34 式可以作为当粒子的 4– 动量不在壳时的 S 矩阵元的解析延拓的定义。这一点在量子场论中有十分重要的意义。

除了建立 T- 乘积的矩阵元与 S 矩阵元的关系外，也可以建立 S 矩阵元与推迟对易子之间的约化公式。比如，代替 2.32 式，我们有，

$$S_{fi} =< cd, \text{in}|ab, \text{in} > \\ +i^2 \int\int d^4x d^4y f_d^*(x) f_b(y)(\Box_x + m^2)(\Box_y + m^2) < c|\theta(x_0 - y_0)[\phi(x), \phi(y)]|a > 。 \tag{2.35}$$

关于一般情况下的更多个场的这类（叫做 R- 乘积）约化公式的讨论，请参考文献 [5] 。

约化公式也同样可以应用于不稳定粒子的衰变，如果引起衰变的作用是“弱”的并且可以用微扰论来处理。比如对于 $K \to 3\pi$ 的衰变，它是一个由弱相互作用拉氏量密度 $\mathcal{L}_w$ 诱导的衰变。到领头阶其矩阵元可以写成 $< \pi_1, \pi_2, \pi_3, \text{out}|\mathcal{L}_w(0)|K >$ 。此时的 K 粒子可以被看成是稳定的，因为导致其不稳定的作用已经被分出来了。

交叉对称性

约化方案的最奥妙的结果可能是所谓的交叉对称性。比如考虑 2.33 式右的非平庸项，记为

$$P(c,d|a,b)=\frac{i^2}{[2\omega_d 2\omega_b]^{1/2}}\int\int d^4xd^4y e^{idx-iby}(\Box_x+m^2)(\Box_y+m^2)<c|T\{\phi(x)\phi(y)\}|a>。\tag{2.36}$$

它的自变量为 4 个 4- 矢量，满足质壳条件和正能条件，即：

$$p_a^2=p_b^2=p_c^2=p_d^2=m^2\ ,\ \ p_a^0,\,p_b^0,\,p_c^0,\,p_d^0\geq m\ .\tag{2.37}$$

然而由 2.33 式得知 b 和 d 仅仅出现在被积函数中的指数上，如果把 P 的定义域拓广到任意的 b 和 d，在这样的定义下的函数 P 在 d 与 $-b$ 、 b 与 $-d$ 的交换下不变，即：

$$P(c,d|a,b)=P(c,-b|a,-d)。\tag{2.38}$$

这就是所谓的交叉关系式。更一般地说， 交叉对称性说的是当把入射（出射）粒子变成出射（入射）粒子，并且把相应粒子的 4- 动量反转符号时，矩阵元不变 。这里应该注意的是在实验上并不可能直接验证 2.38 式，因为两边的动量不可能同时满足物理上的质壳条件。但是交叉对称性是极端重要的，因为它与解析延拓这一概念紧紧地联系在一起：当振幅的自变量从正能变到负能时，振幅的变化规律必须满足交叉对称性。振幅的交叉对称性这一性质的在色散关系理论中有很多应用。

§2.3 Källen–Lehmann 表示

这里我们首先讨论如下的两点关联函数，

$$\triangle^{(+)}(x-y)\equiv<0|\phi(x)\phi(y)|0>\ ,\tag{2.39}$$

其中 $\phi(x)$ 、$\phi(y)$ 是 interpolating 场。等式右边已经意味着式左仅仅能是 $x-y$ 的函数。作为公理化量子场论的一条基本假设，interpolating 场具有 Lorentz 协变性，即式左仅能够是由 $x-y$ 所构成的 Lorentz 不变量的函数（ $(x-y)^2$ 或者 $\theta(x_0-y_0)$ ）。

现在在上式右边插入一组自由态的完备集（可以或者是入态或出态）我们有

$$\triangle^{(+)}(x-y)=\sum_n<0|\phi(x)|n><n|\phi(y)|0>。\tag{2.40}$$

由于 4- 动量算符是平移变换的产生算符， interpolating 场具有如下性质，

$$\begin{aligned}[\phi(x),P_\mu] &= i\partial_\mu\phi(x)\ ,\\ \phi(x) &= e^{i\hat{P}x}\phi(0)e^{-i\hat{P}x}。\end{aligned}\tag{2.41}$$

这导致,

$$< 0|\phi(x)|n >=< 0|\phi(0)|n > e^{-ip_n x} \ , \tag{2.42}$$

其中 p_n 是 $|n>$ 的总动量。我们发现

$$\triangle^{(+)}(x-y) = \sum_n | < 0|\phi(0)|n > |^2 e^{-ip_n(x-y)}。 \tag{2.43}$$

现在引入恒等式

$$\sum_n = \int d^4p \sum_n \delta^{(4)}(p-p_n)\theta(p^0) \ , \tag{2.44}$$

并且定义

$$\rho(p^2) \equiv (2\pi)^3 \sum_n \delta^{(4)}(p-p_n)| < 0|\phi(0)|n > |^2 \theta(p^0)。 \tag{2.45}$$

我们得到,

$$\triangle^{(+)}(x-y) = (2\pi)^{-3} \int d^4p \rho(p^2)\theta(p^0) e^{-ip(x-y)}。 \tag{2.46}$$

利用

$$\rho(p^2) = \int_0^\infty dM^2 \rho(M^2)\delta(M^2-p^2) \ ,$$

$$\triangle^{(+)}(x-y) = (2\pi)^{-3} \int d^4p \int_0^\infty dM^2 \rho(M^2)\delta(M^2-p^2)\theta(p^0)e^{-ip(x-y)}。 \tag{2.47}$$

假设可以交换积分次序（一般来说总是可以的，除非结果明显的是无意义的），我们得出

$$\triangle^{(+)}(x-y) = \int_0^\infty dM^2 \rho(M^2) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} \delta(M^2-p^2)\theta(p^0)e^{-ip(x-y)}。 \tag{2.48}$$

而后一个积分就表示了质量为 M^2 的自由场的 $\triangle^{(+)}(x-y)$，记为 $\triangle^{(+)}(x-y;M^2)$。于是

$$\triangle^{(+)}(x-y) = \int_0^\infty dM^2 \rho(M^2) \triangle^{(+)}(x-y;M^2)。 \tag{2.49}$$

而这一个结论是一般的，即对任意的两点函数都有类似的表达式，比如由对易子所得到的两点函数 $\triangle(x-y) \equiv < 0|[\phi(x),\phi(y)]|0 >$ 我们有

$$\triangle(x-y) = \int_0^\infty dM^2 \rho(M^2) \triangle(x-y;M^2)。 \tag{2.50}$$

而对于由编时乘积给出 Feynman 传播子（在动量空间）

$$\triangle_F(p^2) = \int_0^\infty dM^2 \rho(M^2) \frac{1}{p^2-M^2+i\epsilon}。 \tag{2.51}$$

由 interpolating 场性质 (或基本假设)，

$$< 0|[\phi(t,\vec{x}),\dot{\phi}(t,\vec{y})]|0 > \equiv iZ_3^{-1}\delta(\vec{x}-\vec{y}) \ , \tag{2.52}$$

可证明,

$$Z_3^{-1} = \int_0^\infty dM^2 \rho(M^2)。 \tag{2.53}$$

由 2.45 式知谱函数是正定的。下面我们来简单分析一下谱函数的定性的行为。

单粒子态对谱函数的贡献

首先来看一下单粒子态 $|k>$ 对 $\rho(p^2)$ 的贡献， $\rho_{S.P.}(p^2)$ 。利用 interpolating 场的性质， $<0|\phi(x)|k>=<0|\phi_{in}(x)|k>=e^{-ikx}$ 不难得出,

$$\rho_{S.P.}(p^2) = \delta(\mu^2 - p^2) \ , \tag{2.54}$$

其中 μ^2 是单粒子态的质量。所以我们有

$$Z_3^{-1} = 1 + \int_{th.}^\infty dM^2 \sigma(M^2) \ , \tag{2.55}$$

其中 σ 是连续态对谱函数的贡献，也当然是正定的,

$$\rho(p^2) = \delta(\mu^2 - p^2) + \sigma(p^2)。 \tag{2.56}$$

由此推出了一个基本的不等式,

$$0 \leq Z_3 \leq 1。 \tag{2.57}$$

仅仅当 ϕ 与多粒子态没有耦合时才可以有 $Z_3 = 1$ ，此时所对应的是一个自由场论。对于一个有耦合的理论不可能有 $Z_3 = 1$ 。

这里不再详细讨论连续态对谱函数的贡献， $\sigma(p^2)$ 。读者可以参阅本章后所列的参考书籍。

§2.4 色散关系简介

在讨论强相互作用时, 由于耦合常数很大, 一般的微扰论将失去其作用。我们必须利用一些非微扰的方法来研究它们。色散关系这种方法就是一种非微扰的方法。此方法由 Gell-Mann, Goldberger 和 Thirring 于 1954 年提出。 此方法在研究强相互作用的过程中起了相当重要的的作用。色散关系的理论基础是公理化场论和 S-矩阵理论。 色散关系的数学基础是柯西积分公式。如果 $f(z)$ 在除割线以外的全平面上是解析的，如图 2.1 ，则

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C dz' \frac{f(z')}{z' - z} \tag{2.58}$$

如果在无穷远的围道上积分为 0, 且此函数为实解析的，则

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{z_R}^\infty dz' \frac{\mathrm{Im} f(z')}{z' - z} \tag{2.59}$$

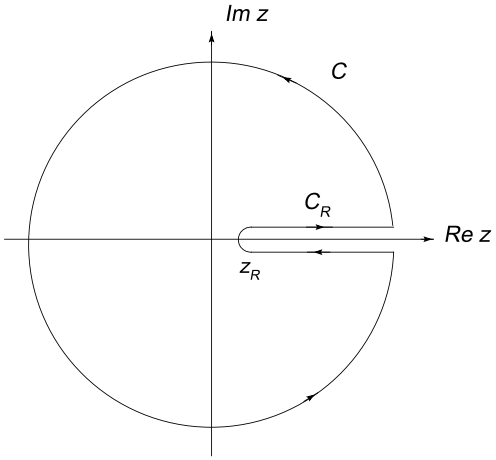


图 2.1:

当散射振幅满足上述关系，即将散射振幅和它的割线上的虚部建立起的一个关系，这个关系就叫色散关系．在不同的情况下， z 可以代表能量，运动学不变量 s,t,u, 等等.

如果在围道上的积分不为 0, 而

$$|\frac{f(z)}{z}| \to 0 \qquad \text{当} |z| \to \infty. \tag{2.60}$$

此时，对函数 $\frac{f(s)-f(z_0)}{z-z_0}$ 做色散关系得到

$$f(z) = f(z_0) + \frac{(z-z_0)}{\pi} \int_{z_R}^{\infty} dz' \frac{\mathrm{Im} f(z')}{(z'-z_0)(z'-z)} \ , \tag{2.61}$$

其中， z_0 为复平面上任意一点．此时，上式叫做一次减除的色散关系．当 $f(z)$ 在 $z \to \infty$ 时以更高幂次趋近于 ∞ 时，则需要进行更高次减除，在色散关系式中会出现更高阶多项式.

事实上，在 2.3 节中讨论的 Källen–Lehmann 表示给出了第一个色散关系的表达式。由 2.51 式和 2.56 式我们可以写出，

$$\triangle_F(z) = \frac{1}{z-\mu^2} + \int_{th.}^{\infty} ds' \frac{\sigma(s')}{s'-z}。 \tag{2.62}$$

即 Feynman 传播子的 Kallen–Lehmann 表示可以用来定义一个复变量的函数。除了在从 $th.$ 到 ∞ 的一条割线和在 $z = \mu^2$ 的一个孤立奇点以外， $\triangle_F(z)$ 在整个复平面上解析。真实的函数 $\triangle_F(k^2)$ 的值是 $\triangle_F(z)$ 从复平面的 上方 趋于实轴时得到的。

§2.4.1 因果性与解析性之间的关系

在前面的讨论中我们经常涉及到解析性这一概念。一般人们相信因果性的性质要求物理振幅是一个复变量的解析函数的边界值，通常都认为散射振幅色散关系的有效性是因果律的结果。当然，在普遍的表述中，量子场论由于场算符在类空时的对易性而满足因果律。但是建立一个直接的因果律与 S 矩阵解析性的关系则要困难的多。虽然很难严格地证明这一点，通过考虑经典色散关系或通过简单的模型，我们有理由期待这样一个关系。下面我们就将讨论两个这样的经典的例子。

经典理论中的因果性与解析性

最著名的经典例子是考虑光在介质中的传播。对于线性各向同性介质(使用 I.E. 单位制)，由于色散和耗散的存在，我们有熟知的关系

$$\vec{D}(\vec{x},\omega)=\varepsilon(\omega)\vec{E}(\vec{x},\omega)\ . \tag{2.63}$$

由 $\varepsilon(\omega)$ 对频率的依赖关系可推出 $\vec{D}(\vec{x},t)$ 与 $\vec{E}(\vec{x},t)$ 之间的关于时间的非定域关系。为看清这一点，我们由

$$\vec{D}(\vec{x},t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{D}(\vec{x},\omega)e^{-i\omega t}d\omega \tag{2.64}$$

及其反变换，

$$\vec{D}(\vec{x},\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{D}(\vec{x},t')e^{-i\omega t'}dt' \tag{2.65}$$

以及电场 $\vec{E}$ 类似的关系推出，

$$\begin{aligned}\vec{D}(\vec{x},t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon(\omega)\vec{E}(\vec{x},\omega)e^{-i\omega t}d\omega\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\varepsilon(\omega)e^{-i\omega t}\int_{-\infty}^{+\infty}dt'\vec{E}(\vec{x},t')e^{-i\omega t'}\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dt'\vec{E}(\vec{x},t')\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon(\omega)e^{-i\omega(t-t')}d\omega\ .\end{aligned} \tag{2.66}$$

实际上在这里是重复了傅立叶变换的卷积公式。我们进一步得出，

$$\vec{D}(\vec{x},t)=\varepsilon_0\vec{E}(\vec{x},t)+\int_{-\infty}^{+\infty}d\tau\,G(\tau)\,\varepsilon_0\vec{E}(\vec{x},t-\tau)\ . \tag{2.67}$$

其中

$$G(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega e^{-i\omega t}(\varepsilon_r(\omega)-1) \tag{2.68}$$

叫做线性相应因子。 2.67 式给出了 $\vec{D}$ 和 $\vec{E}$ 之间的非定域关系。在 2.67 式中，电场 $\vec{E}$ 是基本量，或是 “因”，而电位移矢量 $\vec{D}$ 是导出量，或是 “果”。因果性的基本要求告述我们，线性响应因子 $G(\tau)$ 具有如下特点，即

$$G(\tau)=0\ ,\ \ (\tau<0)\ . \tag{2.69}$$

$G(\tau)$ 的傅立叶变换，即介电系数的表示式可写为

$$\varepsilon(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\tau\,G(\tau)\,e^{i\tau\omega}=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}d\tau\,G(\tau)\,e^{i\tau\omega}\ . \tag{2.70}$$

当把电场频率 ω 延拓到复平面上时，由上式中的第二个等式可得知，在上半平面（ $\mathrm{Im}\omega>0$ ）介电系数是 ω 的解析函数。利用此性质对上半平面作围道积分，即得到了著名的 Kammers–Krönig 关系，也就是光学中的色散关系。

第二个例子是，考虑一个波包 $A(z,t)$ 沿着 z 轴以速度 v 移动，则有

$$A(z,t)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega a(\omega)\exp[i\omega(\frac{z}{v}-t)]\ , \tag{2.71}$$

其中 $a(\omega)$ 是 Fourier 展开的分量振幅。如果这个波包在原点被散射，则被散射波在朝前的方向上可以写成

$$B(r,t)=r^{-1}(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega f(\omega)a(\omega)\exp[i\omega(\frac{z}{v}-t)]\ , \tag{2.72}$$

式中 $f(\omega)$ 是散射分波振幅， r 是离开原点的距离。由 2.71 式做反变换得到

$$a(\omega)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}dtA(0,t)\exp(i\omega t)。 \tag{2.73}$$

如果入射波在 $t=0$ 以前没有达到原点，即：

$$A(0,t)=0,\ \ t<0, \tag{2.74}$$

则 $a(\omega)$ 在上半平面是解析的。因果律在这个模型下要求在 r 处只有当 $t>r/v$ 才能有散射波，因此

$$B(r,t)=0,\ \ vt-r<0. \tag{2.75}$$

现在利用 2.72 式的反变换和 2.74 ，我们得出 $a(\omega)f(\omega)$ 在当 $\mathrm{Im}\omega>0$ 时是一个解析函数。因此散射振幅 $f(\omega)$ 本身在 $\mathrm{Im}\omega>0$ 时是一个解析函数（除了 $a(\omega)$ 的零点）。

类似于上述的讨论在经典理论中经常可以看到。在量子场论中把以上论证严格化的主要障碍是 2.74 式。该式意味着对入射波包的时间在微观上要求严格的定域化。而在 S 矩阵理论中我们希望精确知道的量是能量，而由测不准原理意味着两者的冲突。如果我们对时间的精确确定和能量的精确确定两者之间按测不准原理作一妥协，那么这也意味着对解析性质的确定也变的不再精确。所以有的时候独立于公理 IV ，在文献中也有单独对于解析性提出的公理 V ，也叫做 **最大解析性假定**：作为 $s_{ijk...}$ 为复变量时的解析函数，散射振幅是当 $s_{ijk...}$ 趋于实轴时的边界值。其在（实）边界上的奇异性由幺正性方程决定。

第三章　路径积分量子化

§3.1　量子力学中的路径积分

在路径积分表述中最感兴趣的物理量是跃迁矩阵元。如果系统在 t_a 时刻所处的状态是 Schrodinger 表象中的态 $|\phi, t_a>$，那么它到 t_b 时刻的态 $|\psi, t_b>$ 的跃迁矩阵元定义为,

$$Z(\psi,\phi) =< \psi, t_b|\phi, t_a > \ , \tag{3.1}$$

而跃迁几率为 $P = |Z|^2$。下面我们将给出跃迁振幅的路径积分表达式。

§3.1.1　一维量子力学系统

我们首先讨论一个简单的一维量子力学系统的路径积分表述。在推导路径积分表达式时，第一步是构造一个 Heisenberg 表象中算符 $Q(t)$ 、 $P(t)$ 的 “瞬时” 本征态

$$|q, t >= e^{iHt}|q > \ , \ \ |p, t >= e^{iHt}|p > \ \ 。 \tag{3.2}$$

需要指出的是它们并不是 Schrödinger 表象中的态。而是说 $|q, t >$ 是 Heisenberg 表象中的本征态：

$$Q(t)|q, t >= q|q, t > \ \ 。 \tag{3.3}$$

必须指出的是这些态仍然构成一个完备集：

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq|q, t >< q, t| = e^{iHt}\left(\int_{-\infty}^{\infty} dq|q >< q|\right)e^{-iHt} = 1\,。 \tag{3.4}$$

这种新定义的态具有一个很有用的性质：假设 $|\psi, t >$ 是一个 Schrödinger 表象中的态，则

$$< q, -t|\psi, t >=< q|\psi >= \psi(q)\ 。 \tag{3.5}$$

这些态可以用来推导出 Schrödinger 表象中的不同态之间的跃迁矩阵元。首先我们来计算 “瞬时” 本征态之间的跃迁矩阵元：

$$< q', t'|q, t >=< q'|e^{-iH(t'-t)}|q > \ , \tag{3.6}$$

其中假设了 $t' > t$。在得到了 $< q', t'|q, t >$ 的知识后, 可以利用它来计算 Schrödinger 表象中态之间的跃迁矩阵元：

$$\begin{aligned}
&< \psi, -t'|\phi, -t > \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dq\, dq' < \psi, -t'|q', t' >< q', t'|q, t >< q, t|\phi, -t > \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dq\, dq'\psi^*(q')\phi(q) < q', t'|q, t > \ \ 。
\end{aligned} \tag{3.7}$$

在路径积分表述中跃迁矩阵元 $< q', t'|q, t >$ 常常可以写为,

$$< q', t'|q, t >= N \int [dq] \exp\{i \int_t^{t'} L(q, \dot{q}) d\tau\} \ , \tag{3.8}$$

其中 N 仅是一个归一化因子， $L(q, \dot{q})$ 是拉氏量。积分是在 $q(t)$ 所构成的函数空间中进行的，它表示了对所有连接 (q, t) 和 (q', t') 的路径进行求和。下面我们来更清楚地讨论上式的意义。

我们首先将时间间隔分为 n 段， $\delta t = (t' - t)/n$ 。于是有

$$\begin{aligned} < q'|e^{-iH(t'-t)}|q > &= \int dq_1 \cdots dq_{n-1} < q'|e^{-iH\delta t}|q_{n-1} >< q_{n-1}|e^{-iH\delta t}|q_{n-2} > \\ &\times \cdots < q_1|e^{-iH\delta t}|q > \end{aligned} \tag{3.9}$$

对于充分小的 δt ,

$$< q'|e^{-iH\delta t}|q >=< q'|1 - iH(P, Q)\delta t|q > +O(\delta t)^2 \ . \tag{3.10}$$

如果哈密顿量具有如下形式,

$$H(P, Q) = \frac{P^2}{2m} + V(Q) \ , \tag{3.11}$$

那么

$$\begin{aligned} < q'|H(P, Q)|q > &= < q'|\frac{P^2}{2m}|q > +V(\frac{q + q'}{2})\delta(q - q') \\ &= \int \frac{dp}{2\pi} < q'|p >< p|\frac{P^2}{2m}|q > +V(\frac{q + q'}{2}) \int \frac{dp}{2\pi} e^{ip(q'-q)} \\ &= \int \frac{dp}{2\pi} e^{ip(q'-q)} [\frac{p^2}{2m} + V(\frac{q + q'}{2})] \ . \end{aligned} \tag{3.12}$$

其中我们利用到了 $< q'|q >= \delta(q' - q)$ 和 $< q|p >= e^{ipq}$ 。所以

$$\begin{aligned} < q'|e^{-iH\delta t}|q > &\simeq \int \frac{dp}{2\pi} e^{ip(q'-q)} \{1 - i\delta t[\frac{p^2}{2m} + V(\frac{q + q'}{2})]\} \\ &\simeq \int \frac{dp}{2\pi} e^{ip(q'-q)} e^{-i\delta t H(p, \frac{q+q'}{2})} \ . \end{aligned} \tag{3.13}$$

这样我们推出,

$$\begin{aligned} < q'|e^{-iH(t'-t)}|q > &= \int \frac{dp_1}{2\pi} \cdots \frac{dp_n}{2\pi} \int dq_1 \cdots dq_{n-1} \\ &\times \exp\{i \sum_{i=1}^{n} [p_i(q_i - q_{i-1}) - \delta t H(p_i, \frac{q_i + q_{i-1}}{2})]\} \end{aligned} \tag{3.14}$$

跃迁矩阵元因此可以写成,

$$\begin{aligned} < q'|e^{-iH(t'-t)}|q > &= \int \left[\frac{dpdq}{2\pi}\right] \exp\{i\int_t^{t'} dt[p\dot{q} - H(p,q)]\} \\ &\equiv \lim_{n\to\infty} \int \frac{dp_1}{2\pi}\cdots\frac{dp_n}{2\pi}\int dq_1\cdots dq_{n-1} \\ &\times \exp\{i\sum_{i=1}^{n}\delta t[p_i(\frac{q_i - q_{i-1}}{\delta t}) - H(p_i, \frac{q_i+q_{i-1}}{2})]\} \ . \end{aligned} \tag{3.15}$$

最后一个等式可以看成路径积分的定义。其中 $q_0 = q$ ， $q_n = q'$ 。在上式中可以把 dp 的积分积掉，因为由 H 的形式，被积函数在 e 指数上关于 p 仅仅是平方依赖的，即 Gauss 形积分。为此需要做解析延拓，把 $i\delta t$ 看成实的（ 如何做解析延拓参见本节末的附注 ）。结果如下，

$$\int \frac{dp_i}{2\pi}\exp[\frac{-i\delta t}{2m}p_i^2 + ip_i(q_i - q_{i-1})] = \left(\frac{m}{2\pi i\delta t}\right)^{1/2}\exp\left[\frac{im(q_i-q_{i-1})^2}{2\delta t}\right] \ . \tag{3.16}$$

这样我们最终可以得到,

$$\begin{aligned} < q'|e^{-iH(t'-t)}|q > &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{2\pi i\delta t}\right)^{n/2}\int\prod_{i=1}^{n-1}dq_i \\ &\times \exp\{i\sum_{i=1}^{n}\delta t[\frac{m}{2}(\frac{q_i-q_{i-1}}{\delta t})^2 - V]\} \\ &\to N\int[dq]\exp\{i\int_t^{t'}d\tau[\frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)]\} \\ &= N\int[dq]\exp\{i\int_t^{t'}d\tau[\mathcal{L}(q,\dot{q})]\} \ . \end{aligned} \tag{3.17}$$

值得一提的是， 3.17 式中的最后一个等式与 3.15 式一般来说并不等价。仅当在 Hamiltonian 具有 3.11 的形式时才等价。为了看清楚这一点，举一个例子如下，

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 f(q) \ . \tag{3.18}$$

其正则动量为 $p = \dot{q}f(q)$, 反解出 $\dot{q} = p/f(q)$ 并得到 $H(p,q) = p\dot{q} - L = \frac{1}{2}p^2 f^{-1}(q)$ 。由于哈密顿量对 p 仅为平方依赖， 3.15 式中对动量的路径积分可以积出，并且可以写成 3.17 中最后一个等式右边的形式，只是要把 $L \to L^{eff}$ 。

练习：证明 $L^{eff} = L - \frac{i}{2}\delta(0)\log f(q)$ 。

一般来说，相互作用项含有微商耦合时，就会出现这种有效拉氏量。

下面我们来用刚刚建立起来的路径积分 (PI) 表述来讨论一个简单的例子，自由粒子的情形的跃迁矩阵元。此时的拉氏量为 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2$. 相应的哈密顿量为 $H(p,q) = \frac{p^2}{2m}$ 。利用态 $|p>$ 的完备性，跃迁矩阵元可以写为，

$$Z(q',t';q,t) = < q'|e^{-iH(t'-t)}|q >$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \exp[-i\frac{p^2}{2m}(t'-t)] < q'|p >< p|q >$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \exp[-i\frac{p^2}{2m}(t'-t) + ip(q'-q)] \ . \tag{3.19}$$

这是一个 Gauss 型的积分，可以积出来。结果是

$$Z(q',t';q,t) = \left[\frac{m}{2\pi i(t'-t)}\right]^{1/2} \exp\left[i\frac{m(q'-q)^2}{2(t'-t)}\right] \ 。 \tag{3.20}$$

另一方面由 3.17 式，我们有，

$$\begin{aligned} Z(q',t';q,t) &= < q'|e^{-iH(t'-t)}|q > \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{m}{2\pi i\delta t}\right)^{n/2} \int \prod_{i=1}^{n-1} dq_i \exp\{i\sum_{i=1}^{n} \delta t[\frac{m}{2}(\frac{q_i - q_{i-1}}{\delta t})^2]\} \end{aligned} \tag{3.21}$$

根据 Feynman 和 Hibbs 的推导，[1] 上述积分按顺序依次积出。第一个积分对 q_1 进行：

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \exp\{i\frac{m}{2\delta t}[(q_2-q_1)^2 + (q_1-q)^2]\} \\ = & \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \exp\{i[\frac{m}{4\delta t}(q_2-q)^2 + \frac{m}{\delta t}(q_1 - \frac{q_2}{2} - \frac{q}{2})^2]\} \\ = & \sqrt{\frac{\pi i\delta t}{m}} \exp[i\frac{m}{4\delta t}(q_2-q)^2] \ . \end{aligned} \tag{3.22}$$

也就是说，对一个正则变量积分后得到了另一个 Gauss 积分。可以证明对于 q_l 积分时的形势如下，

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dq_l \exp\{i[\frac{m}{2l\delta t}(q_l-q)^2 + \frac{m}{2\delta t}(q_{l+1}-q_l)^2]\} \\ = & \sqrt{\frac{2\pi il\delta t}{(l+1)m}} \exp\left[i\frac{m}{2(l+1)\delta t}(q_{l+1}-q)^2\right] \ . \end{aligned} \tag{3.23}$$

依次类推，在进行了 $n-1$ 次积分后，并且记住有 $q_n = q'$ ，路径积分的最后结果为，

$$\begin{aligned} Z(q',t';q,t) &= \exp[i\frac{m(q'-q)^2}{2n\delta t}](\frac{m}{2\pi i\delta t})^{n/2} \prod_{l=1}^{n-1} \sqrt{\frac{2\pi il\delta t}{l+1}m} \\ &= (\frac{m}{2\pi in\delta t})^{1/2} \exp[i\frac{m(q'-q)^2}{2n\delta t}] \ . \end{aligned} \tag{3.24}$$

[1] R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, New York, 1965 。

由于有 $n\delta t = t' - t$ ， $n \to \infty$ 时的结果与 3.20 时的一样。通过这个例子看出，仅仅从计算的角度来讲，路径积分表述形式很难被认为是简化了对跃迁矩阵元的计算。但是路径积分表述有在理论上的好处，比如格林函数与传播子之间存在紧凑的关系，这将在下面的讨论中看清。最后我们讨论一下经典作用量在 3.17 式中的作用。具有边界条件 $q(t_a) = q_a, q(t_b) = q_b$ 的经典运动方程 $\ddot{q} = 0$ 的解很容易解出，

$$q_c(t) = q_a + (\frac{q_b - q_a}{t_b - t_a})(t - t_a) \ . \tag{3.25}$$

对应于经典路径的作用量的值为，

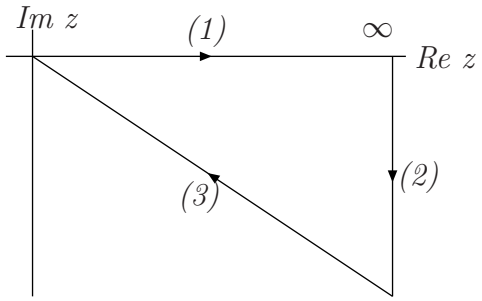
$$S_c = \int_{t_a}^{t_b} dt \frac{1}{2} m \dot{q}_c^2 = \frac{m(q_b - q_a)^2}{2(t_b - t_a)} \ . \tag{3.26}$$

与 3.20 式比较得知，在 3.20 式中的指数上的值就是 $\frac{i}{\hbar} S_c$ 。事实上可以证明这一结论对于所有具有二次型依赖关系的作用量都是对的。

附注：首先我们给出 *Gauss* 型积分公式，

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \ . \tag{3.27}$$

其中 α 是正实数。然而在路径积分表达式中 α 经常是纯虚数。这一积分可以通过作解析延拓得到。方法是考虑函数 $e^{-i\alpha z^2}$ 。根据所谓 *Cauchy–Riemann* 条件容易得出这一函数在复平面上处处解析。在实轴上它回到我们要考虑的函数 $e^{-i\alpha x^2}$ 。如果 α 是正的，则被积函数可在如下图所示的围道上进行积分。



其中路径(*1*)在正实轴上并一直到无穷远，路径(*3*)为 $y = -x$ 。在路径(*1*)上，$\exp(-i\alpha z^2) = \exp(-i\alpha x^2)$ 并且 $dz = dx$ ，在路径(*3*)上 $\exp(-i\alpha z^2) = \exp(-2\alpha x^2)$ 并且 $dz = (1 - i)dx = (2/i)^{1/2} dx$ 。路径 (*2*) 对围道积分不贡献，因为此时被积函数有因子 $\exp(-2\alpha x|y|)$ ，而 $x \to \infty$ 。由于被积函数在围道上和围道内处处解析，根据 *Goursat* 定理被积函数沿闭合围道的积分为零。因此得出，

$$\int_0^{\infty} dx e^{-i\alpha x^2} = \sqrt{\frac{2}{i}} \int_0^{\infty} dx e^{-2\alpha x^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{i\alpha}} \ .$$

推广到对整个实轴的积分，得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{i\alpha}} \ . \tag{3.28}$$

如果 α 是负的则围道必须取在上半平面上，而结论与上式相同。把以上的结果稍加推广，从

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2 \pm \beta x} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) \ , \tag{3.29}$$

可得，

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\alpha x^2 \pm i\beta x} = \sqrt{\frac{\pi}{i\alpha}} \exp\left(\frac{i\beta^2}{4\alpha}\right) \ 。 \tag{3.30}$$

§3.1.2 关于路径积分的一些讨论

§3.1.2.1 路径积分：对历史的求和

在上面的推导中我们利用量子力学的算符形式给出了路径积分量子化的表述形式。一种新的量子化方法，可能对于更好地理解传统方法不好处理的量子系统有所帮助。为此需要更好地理解这种新的表述形式。在 3.17 式中，如果我们把对 q_j 的积分改为求和，

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq_j \to \sum_{n_j=-\infty}^{\infty} \epsilon_q \ . \tag{3.31}$$

其中 ϵ_q 是所有 q_j 积分所对应的无穷小测度。路径积分公式 3.17 式因此改写为，

$$\begin{aligned} < q', t' | q, t > \ \to \ & (\frac{m}{2\pi i \delta t})^{N/2} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \epsilon_q \cdots \sum_{n_{N-1}=-\infty}^{\infty} \epsilon_q \\ & \times \exp\left[i \sum_{j=0}^{N-1} \delta t \mathcal{L}([n_{j+1} - n_j]\frac{\epsilon_q}{\epsilon}, n_j \epsilon_q) \right] \ . \end{aligned} \tag{3.32}$$

其中 n_0 和 n_N 的定义为 $q = n_0 \epsilon_q$ ， $q' = n_N \epsilon_q$ 。按照这样的形式路径积分表示对于所有可能的集合 $\{n_j\}$ 求和，并且求和时有一个指数权重因子。注意每一个集合 $\{n_j\}$ 对应于一个 $\{q_j\}$ 的集合，而每一个 q_j 表示粒子从 q 到 q' 在 t_j 时刻的中间值。因此路径积分表示表述的是对所有可能路径按照一定的权重因子求和。因此路径积分可以理解为，

$$Z = \sum_{paths} e^{iS/\hbar} \ . \tag{3.33}$$

这个发现是我们对先前所得到的路径积分表示式的意义进行推广的基础。这种推广使得我们可以利用路径积分方法对利用传统方法不好处理的量子系统进行量子化。3.33 式最大的好处之一是其直观性。在这里 Newton 力学的经典路径重新回到了量

子跃迁振幅的表达式中。从直觉上人们可以认为经典路径对 3.33 式中跃迁矩阵元的求和式的贡献是最主要的。然而， 3.33 式也带来了很多 subtle 的问题。比如一个经典系统在作了量子化后并不能够简单地回到其经典极限。如何从路径积分量子化的角度来理解这些问题并不是很清楚的。

§3.1.2.2 关于路径积分的一些数学讨论， Wick 转动以及欧氏空间中的路径积分

从数学上讲路径积分的严格的定义至也今还未研究清楚。带来这些数学困难的主要原因是由于路径的选取是任意的，并不一定需要是可微、甚至是分段连续的。为此在所有路径所构成的空间中定义积分测度并不是一个简单的事情 (积分必须在 Lebesgue 意义下才可以定义) 。与此相关联的是被积函数或权重因子 (积分测度的定义依赖于它)。由于指数上的 i 因子，这些权重因子可以是高度振荡的因而使得它们具有“分布” (distribution) 的性质，而不是普通的可积函数。 [2] 由于权重因子具有振荡的特性导致了被积函数是一些 distribution ，那么如果消除了这些振荡行为则有可能给与积分测度一个适当的定义。因此严格的路径积分表述可以在欧氏空间中得到。从闵氏空间到欧氏空间可以通过 Wick 转动 $t \to -i\tau$ 得到。也就是说，路径积分可以被解析延拓到虚的时间，作计算，再延拓回来 ($\tau \to it$) 以得到最后结果。我们前一节的附注中讨论过这样一个例子。在做了 Wick 转动后 3.17 式的路径积分表述改写为，

$$Z = \int_q^{q'} [dq] e^{-S_E} \ . \tag{3.34}$$

其中 Euclidean 作用量 S_E 形式为，

$$S_E = \int_t^{t'} d\tau \{ \frac{1}{2} m \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 + V(q) \} \ , \tag{3.35}$$

并且

$$[dq] = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{m}{2\pi\delta\tau} \right)^{N/2} dq_1 \cdots dq_{N-1} \ . \tag{3.36}$$

[2] 比如说，由

$$\lim_{t\to\infty} \sin(\alpha t) = \int_0^\infty dt \frac{d}{dt} \sin(\alpha t) = \frac{\alpha}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\alpha t} = \pi\alpha\delta(\alpha)$$

和

$$\lim_{t\to\infty} \cos(\alpha t) = 0$$

推出，

$$\lim_{t\to\infty} e^{i\alpha t} = i\pi\alpha\delta(\alpha) \ 。$$

这个公式说明了一个高度振荡的函数实际上是一个分布。也说明了一个高度振荡的函数与一个可积函数在一起进行积分结果可以为零。它带来的启发是严重偏离经典路径的那些路径对跃迁矩阵元的贡献可以忽略。

从 3.35 式可以看出，除非势函数没有下界，否则那些与经典解偏离的路径，尤其是那些无规则的路径，的确是被指数压低的。 Wick 转动同时也使得路径积分在欧氏区的积分测度有一个好的定义。虽然没有确定的证明，上述这些性质的确支持了一点：即在估算路径积分时的一个很可能是好的近似是只考虑哪些连续甚至可微的路径，尤其是经典路径具有最大的权重。

§3.1.3 有外源时的运动

假设一维粒子在除了势场 $V(q)$ 外，一个任意的、与时间有关的外力 $J(t)$ 作用下运动。于是我们有

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q) + J(t)q \ , \tag{3.37}$$

$$Z[J] = \int [dq] \exp\{i\int_t^{t'} d\tau [L(q,\dot{q}) + J(t)q]\} \ 。 \tag{3.38}$$

为简单起见，先假设 $V(q) = 0$ 。拉氏量于是可写为，

$$\mathcal{L}(p,q) = p\dot{q} - H(p,q) = p\dot{q} - \frac{p^2}{2m} + J(t)q \ 。 \tag{3.39}$$

而跃迁矩阵元可写成，

$$\begin{aligned} Z(q_b,t_b;q_a,t_a) &= \int_{q_a}^{q_b} dq_1\cdots dq_{n-1}\int \frac{dp_0}{2\pi}\cdots\frac{dp_{n-1}}{2\pi} \\ &\times \exp\{i\sum_{i=0}^{n-1}[p_i(q_{i+1}-q_i) - \epsilon\frac{p_i^2}{2m} + \epsilon J(t_i)q_i]\} \ 。 \end{aligned} \tag{3.40}$$

对此式首先将坐标 q_i 积掉更为容易。结果是，

$$\begin{aligned} &Z(q_b,t_b;q_a,t_a) = \\ &\frac{1}{2\pi}\int dp_0\cdots dp_{N-1}\delta(\epsilon J(t_1) + p_0 - p_1)\cdots\delta(\epsilon J(t_{N-1}) + p_{N-2} - p_{N-1}) \\ &\times \exp\{i[p_{N-1}q_b - p_0q_a + \epsilon J(t_a)q_a]\}\exp\{-\frac{i\epsilon}{2m}\sum_{j=0}^{N-1}p_j^2\} \ . \end{aligned} \tag{3.41}$$

前 $N-1$ 个积分很容易积掉，结果为

$$\begin{aligned} Z(q_b,t_b;q_a,t_a) &= \exp[iq_a\sum_{j=0}^{N-1}\epsilon J(t_j)]\int\frac{dp_{N-1}}{2\pi}\exp\{ip_{N-1}(q_b-q_a) \\ &-i\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\epsilon}{2m}[p_{N-1} - \sum_{k=j+1}^{N-1}\epsilon J(t_k)]^2 \ . \end{aligned} \tag{3.42}$$

定义

$$I(t) = \int_t^{t_b} d\tau J(\tau) = \int_{t_a}^{t_b} d\tau\theta(\tau - t)J(\tau) \ , \tag{3.43}$$

令 $p_{N-1}=p$，取 $\epsilon\to 0$ 的极限，则可以把 3.42 式改写为连续的形式，

$$\begin{aligned} Z(q_b,t_b;q_a,t_a) &= \exp[iq_aI(t_a)]\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{2\pi}\exp\{ip(q_b-q_a) \\ &\quad -i\int_{t_a}^{t_b}dt[\frac{p^2}{2m}-\frac{p}{m}I(t)+\frac{1}{2m}I^2(t)]\}\ . \end{aligned} \tag{3.44}$$

经过整理得到，

$$\begin{aligned} &Z(q_b,t_b;q_a,t_a)=\left[\frac{m}{2\pi i(t_b-t_a)}\right]^{1/2}\exp\{i[\frac{m(q_b-q_a)^2}{2(t_b-t_a)} \\ &+\frac{(q_b-q_a)}{(t_b-t_a)}\int_{t_a}^{t_b}dt\,I(t)+\frac{1}{2m(t_b-t_a)}[\int_{t_a}^{t_b}dtI(t)]^2+q_aI(t_a)-\frac{1}{2m}\int_{t_a}^{t_b}dt\,I^2(t)]\}\ 。 \end{aligned} \tag{3.45}$$

这个表达式比较复杂。如果令外源等于常数，则表达式可以得到简化，其物理意义也更加清楚。令 $J(t)=f$，则

$$\begin{aligned} &Z(q_b,t_b;q_a,t_a)=\left[\frac{m}{2\pi i(t_b-t_a)}\right]^{1/2}\exp\{i[\frac{m(q_b-q_a)^2}{2(t_b-t_a)} \\ &+\frac{1}{2}(q_a+q_b)(t_b-t_a)f-\frac{(t_b-t_a)^3f^2}{24m}]\}\ . \end{aligned} \tag{3.46}$$

可以证明上式中的指数因子正好是 $J(t)=f$ 时经典路径所对应的作用量的值（乘以因子 $i/\hbar$ ）。

练习：证明上述陈述。

利用 3.46 式，也可以证明两个瞬时动量本征态之间的跃迁矩阵元 $<p_b,t_b|p_a,t_a>$，仅在 $p_b=p_a+f(t_b-t_a)$ 时不为零。由

$$\begin{aligned} &<p_b,t_b|p_a,t_a>=\int dq\,dq'<p_b,t_b|q',t_b><q',t_b|q,t_a><q,t_a|p_a,t_a> \\ &=\int dq\,dq'e^{-ip_bq'+ip_aq}\left[\frac{m}{2\pi i(t_b-t_a)}\right]^{1/2}\exp\{i[\frac{m(q'-q)^2}{2(t_b-t_a)} \\ &+\frac{1}{2}(q+q')(t_b-t_a)f-\frac{(t_b-t_a)^3f^2}{24m}]\}\ . \end{aligned} \tag{3.47}$$

容易看出，对 $q+q'$ 的积分正比于 $\delta(p_b-p_a-(t_b-t_a)f)$ 。

以上我们讨论了态之间的跃迁矩阵元。有时还需要讨论算符在态之间的期望值。比如我们来计算

$$<q',t'|T(Q^H(t_1)Q^H(t_2))|q,t>\ 。$$

设 $t' > t_1 > t_2 > t$ 我们有

$$\begin{aligned}
&< q', t'|T(Q^H(t_1)Q^H(t_2))|q, t >=< q'|e^{-iH(t'-t_1)}Q^S e^{-iH(t_1-t_2)}Q^S e^{-iH(t_2-t)}|q > \\
&= \int dq_1 dq_2 < q'|e^{-iH(t'-t_1)}|q_1 >< q_1|Q^S e^{-iH(t_1-t_2)}|q_2 >< q_2|Q^S e^{-iH(t_2-t)}|q > \ . \\
&= \int dq_1 dq_2\, q(t_1)q(t_2) < q'|e^{-iH(t'-t_1)}|q_1 >< q_1|e^{-iH(t_1-t_2)}|q_2 >< q_2|e^{-iH(t_2-t)}|q > \ .
\end{aligned} \tag{3.48}$$

利用路径积分的一般公式， 3.17 式，可以得出，

$$< q', t'|T(Q^H(t_1)Q^H(t_2))|q, t >= \int [\frac{dpdq}{2\pi}] q(t_1)q(t_2) \exp\{i \int_t^{t'} d\tau [p\dot{q} - H(p, q)]\} \ . \tag{3.49}$$

不难看出上面的结论具有一般性，即对于 $t_2 > t_1$ 也有同样结论成立。根据构造，3.45 式中的矩阵元是 $J(t)$ 的泛函，计为 $Z[J]$ 。这个泛函具有非常重要的性质：

$$\begin{aligned}
-i\frac{\delta}{\delta J(t)} Z[J] &= \int_{q_a}^{q_b} [dpdq]\, q(t) \exp\{\int_{t_a}^{t_b} dt\, L(p, q)\} \\
&= < q_b, t_b|Q(t)|q_a, t_a >_J \ ,
\end{aligned} \tag{3.50}$$

即 $Z[J]$ 的泛函导数给出了 Heisenberg 场算符 $Q(t)$ 的矩阵元。利用关系式

$$\frac{\delta I(t')}{\delta J(t)} = \theta(t - t') \ , \tag{3.51}$$

和泛函微商的法则可以得到，对于自由粒子

$$\begin{aligned}
< q_b, t_b|Q(t)|q_a, t_a >_{J=0} &= -i\frac{\delta Z[J]}{\delta J(t)}|_{J=0} \\
&= (q_a + \frac{(q_b - q_a)}{(t_b - t_a)}(t - t_a))Z[0] \ .
\end{aligned} \tag{3.52}$$

继续作泛函微商可以证明，

$$-\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(t_1)\delta J(t_2)} =< q_b, t_b|T\{Q(t_1)Q(t_2)\}|q_a, t_a > \ 。 \tag{3.53}$$

在自由粒子情形，直接推导可得出，

$$\begin{aligned}
&< q_b, t_b|T\{Q(t_1)Q(t_2)\}|q_a, t_a >_{J=0}= -\hbar^2 \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(t_1)\delta J(t_2)}|_{J=0} \\
&= \{i\hbar\theta(t_2 - t_1)\frac{(t_b - t_2)(t_1 - t_a)}{m(t_b - t_a)} + i\hbar\theta(t_1 - t_2)\frac{(t_b - t_1)(t_2 - t_a)}{m(t_b - t_a)} \\
&+[q_a + \frac{q_b - q_a}{t_b - t_a}(t_1 - t_a)][q_a + \frac{q_b - q_a}{t_b - t_a}(t_2 - t_a)]\}Z[0] \ 。
\end{aligned} \tag{3.54}$$

在上面的表达式中，与 $\not{h}$ 无关的项是 $Q(t_1)$ 与 $Q(t_2)$ 的期望值的简单的乘积。而正比于 $\not{h}$ 一项才真正反映了系统的量子特性：即使是对于自由粒子，算符 $Q(t_1)$ 与 $Q(t_2)$ 也是不可对易的。为了消除那些不感兴趣的项而只保留量子效应，可以定义一个新的生成泛函，

$$W[J] = -i \ln Z[J] \ 。 \tag{3.55}$$

很容易证明

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(t)} = -i \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(t)} =< Q(t) >_J \ 。 \tag{3.56}$$

和

$$-i \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(t_1) \delta J(t_2)} =< T\{Q(t_1)Q(t_2)\} >_J - < Q(t_1) >_J < Q(t_2) >_J \ 。 \tag{3.57}$$

的确，编时乘积的振幅中只有连通部分保留了下来。

最后再来讨论一下由势场 $V(q)$ 时的跃迁矩阵元 $Z[J]$ 。

$$Z[J] = \int_{q_a}^{q_b} [dp\, dq] \exp\{i \int_{t_a}^{t_b} dt [p\dot{q} - \frac{p^2}{2m} - V(q) + J(t)q]\} \ . \tag{3.58}$$

形式上可以写出，

$$\begin{aligned} Z[J] &= \exp\{-i \int_{t_a}^{t_b} dt V(-i \frac{\delta}{\delta J(t)})\} \\ &\quad \times \int_{q_a}^{q_b} [dp\, dq] \exp\{i \int_{t_a}^{t_b} dt [p\dot{q} - \frac{p^2}{2m} + J(t)q]\} \\ &= \exp\{-i \int_{t_a}^{t_b} dt V(-i \frac{\delta}{\delta J(t)})\} Z^0[J] \ 。 \end{aligned} \tag{3.59}$$

上面我们给出了路径积分表述中算符 Q 的矩阵元的一些讨论。为了讨论的完整性，我们再给出算符 P^H 的矩阵元：

$$< q_b, t_b | P^H(t) | q_a, t_a >= \int [dp\, dq] \{-i \frac{\partial}{\partial q(t)}\} \exp\{i \int_{t_a}^{t_b} [p\dot{q} - H(p,q)]\} \ 。 \tag{3.60}$$

练习：证明 3.60 式。

量子力学中的态 $|\psi>$ 在薛定谔表象中的波函数可表示为 $\psi(q,t) =< q|\psi, t >=< q, t|\psi >$ ，它满足 Schrödinger 方程：

$$i \frac{d}{dt} \psi(q,t) = H\psi(q,t) \ 。 \tag{3.61}$$

波函数随时间的演化有路径积分表达式，

$$\begin{aligned} \psi(q',t') &= \int dq < q', t' | q, t >< q, t | \psi > \\ &= \int dq Z(q', t'; q, t) \psi(q,t) \ . \end{aligned} \tag{3.62}$$

由此可以看出跃迁矩阵元 $Z(q',t';q,t)$ 决定了波函数 $\psi(q,t)$ 演化，上述表述类似于光传播的 Huygens 原理。可以证明，在 3.62 式中的给出波函数满足 Schrödinger 方程：

$$\begin{aligned}
\psi(q,t+\triangle t) &= \int dq_0 < q|e^{-i\triangle tH}|q_0 > \psi(q_0,t) \\
&= \psi(q,t) - i\triangle t \int dq_0 < q|H|q_0 > \psi(q_0,t) + O((\triangle t)^2) \\
&= \psi(q,t) - i\triangle t \int \frac{dq_0dp}{2\pi} < q|p >< p|H|q_0 > \psi(q_0,t) \\
&= \psi(q,t) - i\triangle t \int \frac{dq_0dp}{2\pi} H(p,q_0)e^{ip\cdot(q-q_0)}\psi(q_0,t) \\
&= \psi(q,t) - i\triangle t \int \frac{dq_0dp}{2\pi} H(-i\frac{\partial}{\partial q},q_0)e^{ip\cdot(q-q_0)}\psi(q_0,t) \\
&= \psi(q,t) - i\triangle t \int dq_0 H(-i\frac{\partial}{\partial q},q_0)\delta(q-q_0)\psi(q_0,t) \\
&= \psi(q,t) - i\triangle t H(-i\frac{\partial}{\partial q},q)\psi(q,t) \ 。
\end{aligned} \tag{3.63}$$

经过整理即得到了 3.61 式。

§3.1.4 基态间的跃迁矩阵元， Green 函数的生成泛函

在 3.38 式中我们引入了有外源时跃迁矩阵元的概念，并且由其后的讨论得知可以由对外源的泛函微商给出场算符的编时乘积在态 $|q,t>$ 和 $|q',t'>$ 之间的矩阵元。事实上， $|q,t>$ 和 $|q',t'>$ 分别是 Heisenberg 场算符 $Q^H(t)$ 和 $Q^H(t')$ 的本征态，但在量子力学中更为感兴趣的是算符在能量的本征态、特别是基态之间的矩阵元：

$$G(t_1,t_2) =< 0|T(Q^H(t_1)Q^H(t_2))|0 > \ . \tag{3.64}$$

其中 $|0>$ 表示系统的基态。在 3.64 式中插入态的完备集，

$$G(t_1,t_2) = \int dqdq' < 0|q',t' >< q',t'|T(Q^H(t_1)Q^H(t_2))|q,t >< q,t|0 > \ . \tag{3.65}$$

矩阵元 $< q,t|0 >= \phi_0(q)e^{-iE_0t} = \phi_0(q,t)$ 是基态波函数。进一步我们得到，

$$\begin{aligned}
G(t_1,t_2) &= \int [\frac{dqdp}{2\pi}]\phi_0^*(q',t')\phi_0(q,t)q(t_1)q(t_2) \\
&\quad \times \exp\{i\int_t^{t'} d\tau[p\dot{q} - H(p,q)]\} \ 。
\end{aligned} \tag{3.66}$$

可是这一个表达式并不好用，原因是常常是并不知道如何得到基态波函数。为此可以在上面的表达式中将基态波函数 $\phi_0^*(q',t')$ 和 $\phi_0(q,t)$ 消去。为此我们首先在形式上给出一个在有外源时的真空态到真空态之间的跃迁矩阵元，

$$\overline{Z}[J] =< 0|0 >^J \equiv \lim_{\substack{t'\to+\infty \\ t\to-\infty}} < 0|T\{\exp[i\int_t^{t'} J(\tau)Q(\tau)d\tau]\}|0 > \ 。 \tag{3.67}$$

容易证明 $\overline{Z}[J]$ 的确是算符编时乘积在真空态之间的矩阵元的生成泛函，

$$\frac{\delta^n \overline{Z}[J]}{i^n \delta J(t_1)\cdots\delta J(t_n)}|_{J=0} =< 0|T\{Q(t_1)\cdots Q(t_n)\}|0> \ , \tag{3.68}$$

利用路径积分方法，与 3.66 式比较不难把 3.67 式改写为 [3]

$$\begin{aligned}\overline{Z}[J] &= \lim_{\substack{t'\to+\infty\\ t\to-\infty}} \int dqdq' \int_q^{q'} [dp][dq]\phi_0^*(q')\phi_0(q) \\ &\quad \times \exp\{i\int_t^{t'} d\tau[p\dot{q} - H(p,q) + Jq]\}e^{-iE_0(t-t')} \ 。\end{aligned} \tag{3.70}$$

3.70 式的计算涉及到计算基态波函数，我们希望得到一个更方便的生成泛函表示。为此我们引入另一个辅助的泛函

$$F(z;q',t';q,t) \equiv< q'|T\{\exp\{-iH(P,Q)z(t'-t)+iz\int_t^{t'} d\tau J(\tau)Q(\tau)\}\}|q> \ 。 \tag{3.71}$$

我们设 $J(\tau)$ 仅在 $|\tau| < T$ 的有限大的时间间隔内不为零（在 $J(t)$ 加上和除去后 H 的基态 $|0>$ 是定态）。对于充分大（绝对值）的 $t' > t''' > T$ 和 $-t > -t'' > T$ ，

$$\begin{aligned}F(z;q',t';q,t) &= \int dq''dq''' < q'|\exp\{-iHz(t'-t''')\}|q''' > \\ &\times F(z;q''',t''';q'',t'') < q''|\exp\{-iHz(t''-t)\}|q> \ 。\end{aligned} \tag{3.72}$$

利用能量本征态 $|n>$ 的完备性，有

$$< q'|\exp\{-iHz(t'-t''')\}|q''' >= \sum_n \phi_n(q')\phi_n^*(q''')\exp\{-iE_nz(t-t''')\} \ , \tag{3.73}$$

这里不妨取 $E_0 = 0$ 。设 $\mathrm{Im}z < 0$ 。将上式代入 3.72 式，两端除以 $\phi_0(q')\phi_0^*(q)$ ，先令 $t' \to \infty, t \to -\infty$ ，然后再令 $t''' \to \infty, t'' \to -\infty$ 。这时 $n \neq 0$ 的项消失，得到

$$\lim_{\substack{t\to-\infty\\ t'\to\infty}} \frac{F(z;q',t';q,t)}{\phi_0(q')\phi_0^*(q)} = \lim_{\substack{t''\to-\infty\\ t'''\to\infty}} \int dq'''dq''\phi_0^*(q''')\phi_0(q'')F(z;q''',t''';q'',t'') \ 。 \tag{3.74}$$

比较等式两边，发现上式左方与 q ， q' 实际上无关，也即 q ， q' 可取任何值。在上式中，令 $z = 1 - i\epsilon$ ， $\epsilon \to 0_+$ 的极限时，右边回到了 3.70 式中的 $\overline{Z}[J]$ 。

[3]引入外源项形式上等价于设想在 Hamiltonian 中附加上一个外场项，

$$H^J(P,Q) \equiv H(P,Q) - J(t)Q(t) \, 。 \tag{3.69}$$

这是一个含时的哈密顿量。由于不同时刻的哈密顿量可以不对易，因此在推导路径积分表达式时要多加一些小心。然而利用编时乘积的性质可以证明仍然可以得到类似于 3.38 式的表达式。

而除去一个常数因子外左方可以用泛函积分来表示，只需要把 $H(P,Q)(t'-t)$ 换成 $(1-i\epsilon)[H(P,Q)(t'-t)-\int_t^{t'}J(\tau)Q(\tau)d\tau]$ 。完全类似于 3.1.1 节中的推导可得，

$$\overline{Z}[J]=\lim_{\epsilon\to 0_+}\int[dq]\exp\{i\int_{-\infty}^{+\infty}d\tau(1-i\epsilon)\times[L(q,(1+i\epsilon/2)\frac{dq}{d\tau})+J(\tau)q(\tau)]\}\text{。}(3.75)$$

如果 $F(z;q',+\infty;q,-\infty)$ 是复 z（ II 、IV 象限）平面上的解析函数，上式表示 $\overline{Z}[J]$ 是在 $z\to 1-i\epsilon$ 时它的边界值。

函数 $F(z;q',+\infty;q,-\infty)$ 也给出了欧氏空间中路径积分形式上的适当的定义，

$$\overline{Z}_E[J]\equiv\lim_{z\to -i}\frac{F(z;q',+\infty;q,-\infty)}{\phi_0(q')\phi_0^*(q)}\text{。}\tag{3.76}$$

由类似于 3.75 式的证明可以给出，

$$\overline{Z}_E[J]=N\int[dq]\exp\{\int_{-\infty}^{+\infty}d\tau[-L_E(q,\frac{dq}{d\tau})+J(\tau)q(\tau)]\}\text{ ,}\tag{3.77}$$

其中

$$L_E(q,\frac{dq}{d\tau})=-L(q,i\frac{dq}{dt})\text{。}\tag{3.78}$$

将 3.75 与 3.77 式比较后得到，

$$\frac{\delta^n\overline{Z}[J]}{i^n\delta J(t_1)\cdots\delta J(t_n)}|_{J=0}=\frac{\delta^n\overline{Z}_E[J]}{\delta J(\tau_1)\cdots\delta J(\tau_n)}|_{J=0,\tau_k=it_k}\text{。}\tag{3.79}$$

这里需要强调的是，路径积分的生成泛函仅仅在欧氏空间才有很好的定义。也就是说，从原则上讲，为了计算闵氏空间中的矩阵元，首先要延拓到欧氏空间中去（ $t\to -i\tau$ ）进行计算，计算完了以后再延拓回来。在实际计算中，正如在 3.1 节中所演示的那样，至少在微扰论中可以直接在闵氏空间中计算而可以得到正确结果。[4] 另外，从此以后我们只关心真空态之间的跃迁矩阵元，所以我们把生成泛函 $\overline{Z}$ 改回用 Z 来标记。

上面我们较为详尽地给出了一维量子力学系统的路径积分量子化的程序。这些讨论可以很容易地推广到多自由度的量子力学系统。我们下面把上述讨论直接推广到场论的情形。

[4]在一定的条件下可以证明，可以从欧氏的路径积分表达式出发来重建在闵氏空间中的费曼振幅： K. Osterwalder and R. Schrader, Phys. Rev. Lett **29**(1972)1423; Commun. Math. Phys. **31**(1973)83; **42**(1975)281 。

§3.2 场量子化的路径积分表述

§3.2.1 生成泛函

我们可以把量子场论看成是具有无穷多自由度的量子力学系统。形式上我们作如下表述：

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}[dq_i dp_i] &\rightarrow [d\phi(x)d\pi(x)] \\ L(q_i,\dot{q}_i), H(q_i,p_i) &\rightarrow \int d^3x\mathcal{L}(\phi,\partial\phi)\ , \int d^3x\mathcal{H}(\phi,\pi)\ .\end{aligned} \tag{3.80}$$

而 Green 函数生成泛函的场论推广可写成，

$$Z[J]=\int[d\phi d\pi]\exp\{i\int d^4x[\pi(x)\partial_0\phi(x)-\mathcal{H}(\pi,\phi)+J(x)\phi(x)]\} \tag{3.81}$$

或者

$$Z[J]=\int[d\phi]\exp\{i\int d^4x[\mathcal{L}(\phi)+J(x)\phi(x)]\}\ . \tag{3.82}$$

这里值得指出的是，根据 LSZ 约化公式在场论中我们感兴趣的是算符的编时乘积夹在真空中的矩阵元，其生成泛函的定义是在有外源时真空态到真空态之间的跃迁矩阵元，

$$Z[J]=<0|0>_J \quad 。 \tag{3.83}$$

根据 1.4.2 节的讨论不难理解 $Z[J]/Z[0]$ 表示了去掉真空涨落图贡献后格林函数的生成范函：

$$\begin{aligned}\frac{1}{i^n}\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}|_{J=0} &= <0|T\{\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\}|0> \\ \frac{1}{Z[J]}\frac{1}{i^n}\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}|_{J=0} &= <0|T\{\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\}|0>_{\mathcal{C}}\end{aligned} \tag{3.84}$$

回到 3.82 式。以 $\lambda\phi^4$ 理论为例，

$$\mathcal{L}(\phi)=\mathcal{L}_0(\phi)+\mathcal{L}_I(\phi)\ , \tag{3.85}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0(\phi) &= \frac{1}{2}(\partial_\lambda\phi)(\partial^\lambda\phi)-\frac{1}{2}\mu^2\phi^2\ , \\ \mathcal{L}_I(\phi) &= -\frac{\lambda}{4!}\phi^4\ .\end{aligned} \tag{3.86}$$

生成泛函的表达式是,

$$Z[J] = \int [d\phi] \exp\{i \int d^4x [\frac{1}{2}\partial_\lambda \phi \partial^\lambda \phi - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + J\phi]\} \ . \tag{3.87}$$

它可以改写为

$$Z[J] = \left[\exp\{i \int d^4x \mathcal{L}_I(\frac{\delta}{\delta J})\}\right] Z_0[J] \ , \tag{3.88}$$

其中 $Z_0[J]$ 是有外源时的自由场的生成泛函。在 3.87 式中的 $\partial_\lambda \phi \partial^\lambda \phi$ 可以被改写为 $-\phi\partial^2\phi$ 所以有,

$$Z_0[J] = \int [d\phi] \exp\left[-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y \phi(x) K(x,y) \phi(y) + i\int d^4z J(z)\phi(z)\right] \ , \tag{3.89}$$

其中

$$K(x,y) = \delta^4(x-y)(\Box + \mu^2) \ . \tag{3.90}$$

由于 x, y 可以被看成连续的指标，上面关于 $Z_0[J]$ 的积分可以看成是一个无穷维的 Gauss 型积分：

$$\begin{aligned} &\int d\phi_1 \cdots d\phi_n \exp\left[-\frac{i}{2}\sum_{i,j}\phi_i K_{ij}\phi_j + i\sum_k J_k\phi_k\right] \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{\det K}} \exp\{\frac{i}{2}\sum_{i,j} J_i (K^{-1})_{i,j} J_j\} \ . \end{aligned} \tag{3.91}$$

由此可以积出 $Z_0[J]$,

$$Z_0[J] = \exp\{\frac{i}{2}\int d^4x d^4y J(x) \triangle(x,y) J(y)\} \ . \tag{3.92}$$

其中 $\triangle(x,y)$ 是无穷维矩阵 $K(x,y)$ 的逆，即

$$\int d^4y K(x,y)\triangle(y,z) = \delta^4(x-z) \ . \tag{3.93}$$

不难证明,

$$\triangle(x,y) = -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik\cdot(x-y)}}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \ , \tag{3.94}$$

即正比于 Feynman 传播子。注意 Feynman 传播子中的 $i\epsilon$ 保证矩阵了闵氏空间中矩阵 $K(x,y)$ 有逆。正如前一节中所讨论的，严格地来讲，从 3.87 式开始应该把路径积分延拓到欧氏空间中进行处理，完后再延拓回闵氏空间中，其结果与上面得到的一致。

对于自由场传播子在欧氏空间中作计算并验证 3.79 式

§3.2.2 连通格林函数的生成范函

假设可以对 $\mathcal{L}_I$ 作微扰展开，利用 3.88 式和 3.92 式可以计算 n 点格林函数到微扰论的每一阶。但是由 $Z[J]$ 给出的格林函数包含不连通图，对此我们兴趣不大。连通图的格林函数生成泛函由下式给出，

$$W[J] = \ln Z[J] \ . \tag{3.95}$$

而 n 点连通格林函数有如下表达式，

$$G_c^{(n)}(x_1, \cdots, x_n) = \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)}|_{J=0} \ . \tag{3.96}$$

为什么上式给出的是连通格林函数？我们在 3.57 式中给出了理解这一点的一个最简单的例子。读者利用上面的 $G_c^{(n)}$ 的定义可以继续自行验证这一点。细心的读者也可以在 汪荣 所著的书中找到详细的证明。

§3.3 费米场的路径积分量子化

§3.3.1 费米场的路径积分表述

费米场的拉氏量为

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(x)(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi(x) \ . \tag{3.97}$$

费米场满足的方程为 Dirac 方程：

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi(x) = 0 \ . \tag{3.98}$$

在量子理论中费米场算符满足反对易关系，

$$\begin{aligned} &\{\psi(\mathbf{x}, t), \psi^+(\mathbf{x}', t)\} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \ , \\ &\{\psi(\mathbf{x}, t), \psi(\mathbf{x}', t)\} = \{\psi^+(\mathbf{x}, t), \psi^+(\mathbf{x}', t)\} = 0 \ . \end{aligned} \tag{3.99}$$

费米场的 Feynman 传播子为，

$$\begin{aligned} iS_F(x_1 - x_2)_{\alpha\beta} &\equiv < 0|T\{\psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2)\}|0 > \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{i}{\not{k} - m + i\varepsilon} \right)_{\alpha\beta} e^{-ik(x_1 - x_2)} \ . \end{aligned} \tag{3.100}$$

类似于玻色场的路径积分量子化，对于费米场我们同样可以把跃迁振幅表达为对所有连接初态与末态的世界线（ world line ）的带权重的求和。生成泛函可以写为，

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \int [d\psi(x)][d\bar{\psi}(x)] \exp\{i \int d^4x [\mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}) + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi]\} \ , \tag{3.101}$$

其中 $\psi(x)(\bar{\psi}(x))$ 和 $\eta(x)(\bar{\eta}(x))$ 分别是 **经典** 的源和场。与玻色场不同的是，它们必须是反对易的 c–（函）数，即它们之间满足如下关系：

$$\begin{aligned}&\{\psi(x),\psi(x')\}=\{\psi(x),\bar{\psi}(x')\}=\{\bar{\psi}(x),\bar{\psi}(x')\}=0\ ,\\&\{\eta(x),\eta(x')\}=\{\eta(x),\bar{\eta}(x')\}=\{\bar{\eta}(x),\bar{\eta}(x')\}=0\ .\end{aligned}\tag{3.102}$$

由于 x ， x' 等可以看成是连续的角标。因此经典的费米场与源构成了一个无穷维的 Grassmann 代数。下面我们来简单地介绍一下后者。

§3.3.2 Grassmann 代数

一个 n 维的 Grassmann 代数由 n 个生成元 θ_1 ， $\cdots$ ， θ_n 组成。他们之间满足反对易关系：

$$\{\theta_i,\theta_j\}=0\ \ i,j=1,2,\cdots,n\ .\tag{3.103}$$

由上述 Grassmann 代数生成元所构成的线性空间一定只能是有限维的，

$$p(\theta)=P_0+P^{(1)}_{i_1}\theta_{i_1}+P^{(2)}_{i_1i_2}\theta_{i_1}\theta_{i_2}+\cdots+P^{(n)}_{i_1\cdots i_n}\theta_{i_1}\cdots\theta_{i_n}\ 。\tag{3.104}$$

在上面表达式中由于 3.103 式的原因，各 Grassmann 数的下标不能重复且上面的展开式中止在有限阶。对于 Grassmann 数可以定义微分运算。其微分算符分为左导数和右导数： $\frac{d}{d\theta_i}$ 和 $\frac{\overleftarrow{d}}{d\theta_i}$ 。其运算规则如下：

$$\frac{d}{d\theta_i}(\theta_i)=(\theta_i)\frac{\overleftarrow{d}}{d\theta_i}=1$$

如果 $i\neq j$ ，则 $\frac{d}{d\theta_i}$ 或 $\frac{\overleftarrow{d}}{d\theta_i}$ 与 θ_j 交换位置时出一负号（反对易）。同样的可以定义 Grassmann 数的积分运算。它有如下规则：

$$\{d\theta_i,d\theta_j\}=0\ ,\ \int d\theta_i=0\ ,\ \int d\theta_i\theta_j=\delta_{ij}\ 。\tag{3.105}$$

在对 Grassmann 代数进行积分运算时最值得注意的特性是，在做了积分变量替换 $\tilde{\theta}_i=b_{ij}\theta_j$ 后我们有

$$\int d\tilde{\theta}_n\cdots d\tilde{\theta}_1p(\tilde{\theta})=\int d\theta_n\cdots d\theta_1[\det(b_{ij})]^{-1}p(\tilde{\theta}(\theta))\ .\tag{3.106}$$

注意在做积分变换后出现在上式右边被积函数中的不是通常积分变量变换时出现的 Jacobian ，而是其逆。很容易看清这一点。首先在 3.104 式中，对积分有贡献的只能是有 n 个 θ 的，在经过变换后，

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_1\cdots\tilde{\theta}_n&=b_{1i_1}\cdots b_{ni_n}\theta_{i_1}\cdots\theta_{i_n}\\&=b_{1i_1}\cdots b_{ni_n}\varepsilon_{i_1\cdots i_n}\theta_1\cdots\theta_n\\&=\det(b_{ij})\theta_1\cdots\theta_n\ .\end{aligned}\tag{3.107}$$

为了保证 3.105 式中第三项（积分归一化条件）的成立我们不得不设，

$$d\tilde{\theta}_1 \cdots d\tilde{\theta}_n = \det(b_{ij})^{-1} d\theta_1 \cdots d\theta_n \ 。 \tag{3.108}$$

正如我们在前面所看到的， Gauss 型积分在路径积分表述中起着重要的作用。因此我们给出如下积分公式，

$$\int d\theta_n \cdots d\theta_1 \exp\{\frac{1}{2}\sum_{i,j}\theta_i A_{i,j}\theta_j\} = \sqrt{\det A}\ . \tag{3.109}$$

其中 A 是一个反对称的矩阵。此公式的证明在这里不再给出，细心的读者可以在 Cheng 和 Li 的书中找到详细的证明。与 3.109 式对照的是对于普通变量的积分公式：

$$\int \frac{dx_1}{\sqrt{2\pi}} \cdots \frac{dx_n}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i,j} x_i A_{i,j} x_j\} = \frac{1}{\sqrt{\det A}} \tag{3.110}$$

对于复积分变量 dz （ $z = x + iy$ ）的积分我们有类似的对应，

$$\int \frac{dz_1}{\sqrt{\pi}} \cdots \frac{dz_n}{\sqrt{\pi}} \frac{dz_1^*}{\sqrt{\pi}} \cdots \frac{dz_n^*}{\sqrt{\pi}} \exp\{-\sum_{i,j} z_i^* A_{i,j} z_j\} = \frac{1}{\det A}\ , \tag{3.111}$$

$$\int d\theta_1 \cdots d\theta_n d\bar{\theta}_1 \cdots d\bar{\theta}_n \exp\{\sum_{i,j}\bar{\theta}_i A_{i,j}\theta_j\} = \det A \ 。 \tag{3.112}$$

注意在第二式中 θ_i 和 $\bar{\theta}_i$ 虽然看起来是互为厄米，但实际上应理解为相互独立的 Grassmann 数。因为从纯粹数学上讲，引入 Grassmann 数的所有意义在于得到上面的等式。参照 3.105 式，对于复 Grassman 数的积分我们要求：

$$\int d\theta d\bar{\theta}\ \bar{\theta}\theta = 1 \tag{3.113}$$

而其余的情况都为零。因此为计算 3.112 式需要把 e 指数展开到第 n 阶。不难看出 3.112 式不仅对于厄米矩阵，而且对于任意的矩阵 A 都是对的。为了看清这一点，考虑到任意一个矩阵都可以分解为

$$A = U^T D V\ , \tag{3.114}$$

其中 U, V 是幺正矩阵， D 是一个实对角矩阵。做变换 $\theta_i' = V_{ij}\theta_j$, $\bar{\theta}_i' = U_{ij}\bar{\theta}_j$ (注意此时 θ ， $\bar{\theta}$ 做的是完全独立的变换) ， 3.112 式写为，

$$\begin{aligned}
&\int d\theta_1 \cdots d\theta_n d\bar{\theta}_1 \cdots d\bar{\theta}_n \exp\{\sum_{i,j}\bar{\theta}_i A_{i,j}\theta_j\} \\
&= \int d\theta_1' \cdots d\theta_n' d\bar{\theta}_1' \cdots d\bar{\theta}_n' \det U \det V \exp\{\sum_i \bar{\theta}_i' D_{ii}\theta_i'\} \\
&= \det U \det V \det D = \det A \ 。
\end{aligned} \tag{3.115}$$

也就是说， 3.112 式对于任意矩阵 A 都是对的，且 θ_i 和 $\bar{\theta}_i$ 完全可以看成独立的 Grassman 变量。对于一个任意的实矩阵 A ，不难理解 $\det A$ 完全也可以用 $2n$ 个实的 Grassman 变量的积分来表示 (可能差一些常数因子):

$$\int d\rho_1 \cdots d\rho_n d\sigma_1 \cdots d\sigma_n \exp\{\sum_{i,j} \bar{\rho}_i A_{i,j} \sigma_j\} = \det A \ 。 \tag{3.116}$$

由方程 3.112 可以得到对我们有用的表达式,

$$Z = \int [d\psi(x)][d\bar{\psi}(x)] \exp\{\int d^4x \bar{\psi} A \psi\} = \det A \ 。 \tag{3.117}$$

方程 3.117 中出现的是 $\det A$ 而不是 $(\det A)^{-1}$ 事实上有着明显的物理解释。 $\ln Z$ 实际上是 (连通的) 真空到真空的矩阵元。它表示了一系列 单个 闭合的费米子圈的求和。 $\ln Z$ 的负号正表示了有费米子圈时出现的负号。

§3.4 正规顶角的生成泛函

生成泛函的路径积分表达式可以写为,

$$Z[J] = \int [d\phi] \exp\{i \int d^4x [\mathcal{L}(\phi(x)) + J(x)\phi(x)]\} \ 。 \tag{3.118}$$

它表示在有外源时的真空到真空的跃迁矩阵元。定义 $W[J] = \ln Z[J]$ 则 $W[J]$ 表示的是连通格林函数的生成泛函:

$$W[J] = \sum_n \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n G_c^{(n)}(x_1, \cdots, x_n) J(x_1) \cdots J(x_n) \ 。 \tag{3.119}$$

我们定义一个经典场量 ϕ_c 为场算符 ϕ 在有外源时的真空期望值:

$$\phi_c(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \left[\frac{< 0|\phi(x)|0 >}{< 0|0 >} \right]_J \ 。 \tag{3.120}$$

有效作用量 $\Gamma(\phi_c)$ 的定义是 $W[J]$ 的泛函的 Legendre 变换:

$$\Gamma(\phi_c) = W[J] - \int d^4x J(x) \phi_c(x) \ , \tag{3.121}$$

其中的 $J(x)$ 理解为由 3.120 式反解出来。由 3.121 式得出

$$\frac{\delta \Gamma(\phi_c)}{\delta \phi_c(x)} = \int d^4y \frac{\delta W[J]}{\delta J(y)} \frac{\delta J[y]}{\delta \phi_c(x)} - \int d^4y \frac{\delta J(y)}{\delta \phi_c(x)} \phi_c(y) - J(x) = -J(x) \ 。 \tag{3.122}$$

我们同样可以将 $\Gamma(\phi_c)$ 按 ϕ_c 作展开,

$$\Gamma(\phi_c(x)) = \sum_n \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \Gamma^{(n)}(x_1, \cdots, x_n) \phi_c(x_1) \cdots \phi_c(x_n) \ 。 \tag{3.123}$$

可以从 3.122 式出发来得出 $\Gamma^{(n)}$ 与连通格林函数之间的关系：

$$\begin{aligned}\delta^4(x_1-x_2) &= \frac{\delta J(x_1)}{\delta J(x_2)} = \int d^4y \frac{\delta J(x_1)}{\delta\phi_c(y)}\frac{\delta\phi_c(y)}{\delta J(x_2)} \\ &= -\int d^4y \frac{\delta^2\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x_1)\delta\phi_c(y)} G_c(y,x_2) \ 。\end{aligned} \tag{3.124}$$

也就是说， $\Gamma^{(2)}$ 是 $G_c^{(2)}$ 的泛函到数。类似地有，

$$\begin{aligned}0 &= \int d^4y_1 d^4y_2 \Gamma(x_1,y_1,y_2) G_c(y_2,x_2) G_c(y_1,x_3) \\ &\quad + \int d^4y_1 \Gamma(x_1,y_1) G_c(y_1,x_2,x_3) \ 。\end{aligned} \tag{3.125}$$

由 3.124 得到

$$G_c(x_1,x_2,x_3) = \int d^4y_1 d^4y_2 d^4y_3 \Gamma(y_1,y_2,y_3) G_c(y_1,x_1) G_c(y_2,x_2) G_c(y_3,x_3) \ 。 \tag{3.126}$$

以图形表示，见图 3.1 。 类似地可以得出四点函数的结果，见图 3.2 。

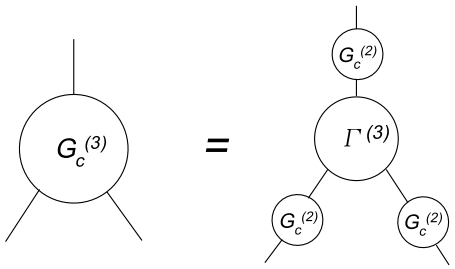


图 3.1:

练习：证明图 3.2 的表达式

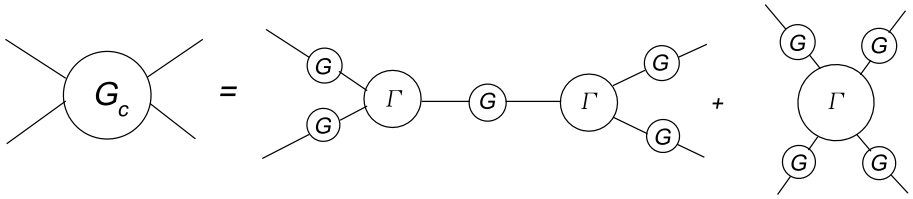


图 3.2:

上面的分析指出了 $\Gamma^{(n)}$ 表示的是单粒子不可约的（因而也是截腿的和连通的）格林函数，也叫做 n 点正规顶角，而由 3.123 式给出的有效作用量 Γ 也叫做 正规顶角的生成泛函 。在动量空间中 n 点正规顶角的定义为，

$$(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+\cdots+p_n)\Gamma^{(n)}(p_1+\cdots+p_n) \equiv \int d^4x_1\cdots d^4x_n e^{-i\sum x_i p_i}\Gamma^{(n)}(x_1,\cdots,x_n) \ 。 \tag{3.127}$$

即其定义中抹去了由于平移不变性导致的刻画四动量守恒的 δ 函数. 显然在动量空间中 $\Gamma^{(n)}$ 的量纲为 4-n.

§3.5 泛函方法中的对称性

§3.5.1 运动方程及 Dyson–Schwinger 方程

考虑一个带外源时的 **自由** 实标量场的生成泛函，

$$Z[J] = \int [d\phi] \exp\{i \int d^4x [\mathcal{L}(\phi) + J(x)\phi(x)]\} \ . \tag{3.128}$$

在经典力学中运动方程是由对正则坐标作变分且要求作用量不变而得到的，这在 1.1 节中已有讨论。那么在上面的公式中作变换

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x) + \epsilon(x) \tag{3.129}$$

后会怎样呢？显然积分变量的变换不会改变积分值，并且由于是平移变换，积分的体积元也不变： $[d\phi(x)] = [d\phi'(x)]$ 。所以我们有

$$\begin{aligned} 0 &= \delta Z[J] \\ &= \int [d\phi] \exp\{i \int d^4x [\mathcal{L}(\phi) + J(x)\phi(x)]\} \{i \int d^4x \epsilon(x) [-(\Box + \mu^2)\phi + J(x)]\} \ . \end{aligned} \tag{3.130}$$

由于式右对于任意的变分 $\epsilon(x)$ 都为零，所以我们得到，

$$\int [d\phi] \exp\{i \int d^4x [\mathcal{L}(\phi) + J(x)\phi(x)]\} [-(\Box + \mu^2)\phi(x) + J(x)] = 0 \ . \tag{3.131}$$

此式的更为紧凑的表示是，

$$\frac{1}{Z[J]} < (\Box + \mu^2)\phi(x) >_J = J(x) \ , \tag{3.132}$$

它即是有外源 $J(x)$ 时的场所满足的运动方程。对 3.132 式两边关于 $J(y)$ 做泛函微商，再令外源项为零，即得到

$$(\Box_x + \mu^2) < T\{\phi(x)\phi(y)\} >= -i\delta^4(x-y) \ . \tag{3.133}$$

此即我们已熟知的 Feynman 传播子所满足的方程。如果对方程 3.132 式关于外源做多次泛函微商，则不难推出

$$(\Box_x + \mu^2) < T\{\phi(x)\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\} >= \sum_{i=1}^{n} < T\{\phi(x_1)\cdots(-i\delta^4(x-x_i))\cdots\phi(x_n)\} > \ . \tag{3.134}$$

此方程说的是插在任何矩阵元中的 ϕ 场都满足 Klein–Gordon 方程，除非有不同的场定义在同一个时空点上时产生的奇异性。

对于有相互作用的场也很容易得到类似的结论，

$$
\begin{aligned}
&< \frac{\delta}{\delta\phi(x)}[\int d^4x'\mathcal{L}(\phi(x')]\phi(x_1)\cdots\phi(x_n) > \\
&= \sum_{i=1}^{n} < T\{\phi(x_1)\cdots(-i\delta^4(x-x_i))\cdots\phi(x_n)\} > \ 。
\end{aligned} \tag{3.135}
$$

注意在上式中有，

$$
\frac{\delta}{\delta\phi(x)}[\int d^4x'\mathcal{L}(\phi(x')] = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(x)} - \partial_\mu(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}) \ 。 \tag{3.136}
$$

这一类的与场运动方程有关的格林函数之间的关系叫做 Dyson–Schwinger 方程。

§3.5.2 守恒律与 Ward–Takahashi 恒等式

考虑一组场量 $\phi_a(x)$，拉氏量为 $\mathcal{L}[\phi]$。现对场量 ϕ_a 作一无穷小变换，

$$
\phi_a(x) \to \phi_a(x) + \epsilon\triangle\phi_a(x) \ , \tag{3.137}
$$

并假设当 ϵ 是一常量时，作用量在变换下是不变的。也就是说在 3.137 式的变换下拉氏密度 $\mathcal{L}$ 最多变化一个全导数，

$$
\mathcal{L}[\phi] \to \mathcal{L}[\phi] + \epsilon\partial_\mu J^\mu \ . \tag{3.138}
$$

现在令 ϵ 与 x 有关，则拉氏密度的变化为，

$$
\mathcal{L}[\phi] \to \mathcal{L}[\phi] + \partial_\mu\epsilon(x)\triangle\phi_a\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a(x))} + \epsilon(x)\partial_\mu\mathcal{J}^\mu \ . \tag{3.139}
$$

于是

$$
\frac{\delta}{\delta\epsilon(x)}\int d^4x\mathcal{L}[\phi+\epsilon\triangle\phi] = -\partial_\mu j^\mu \ , \tag{3.140}
$$

其中

$$
j^\mu = \triangle\phi_a\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a(x))} - \mathcal{J}^\mu \tag{3.141}
$$

是 Noether 流。重复 3.5.1 一节的推导我们得，（ 注意微商是取在矩阵元外面的 ）

$$
\partial_\mu < j^\mu >_J = < \triangle\phi_a J^a >_J \ . \tag{3.142}
$$

对 J 重复做泛函微商可以得到和 $\partial_\mu j^\mu$ 有关的 Dyson–Schwinger 方程。比如，

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu < j^\mu(x)\phi_a(x_1)\phi_b(x_2) > \ &= \ -i < \triangle\phi_a(x_1)\delta^4(x-x_1)\phi_b(x_2) > \\
&\quad -i < \phi_a(x_1)\triangle\phi_b(x_2)\delta^4(x-x_2) > \ .
\end{aligned} \tag{3.143}
$$

作为一个例子，我们来推导与 QED 的规范对称性有关的 Ward–Takahashi 恒等式。令

$$\psi(x) \to \psi(x) + ie\alpha(x)\psi(x) \tag{3.144}$$

而 $A_\mu(x)$ 不变。此时拉氏密度变换为，

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} - e(\partial_\mu \alpha)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{3.145}$$

且流为 $j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ 。我们可以得出，

$$\begin{aligned} i\partial_\mu < T\{j^\mu(x)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\} > \;\; &= \;\; -ie\delta^4(x-x_1) < T\{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\} > \\ &\quad +ie\delta^4(x-x_2) < T\{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\} > \end{aligned} \tag{3.146}$$

此方程就是我们在 QED 中见过的 Ward–Takahashi 恒等式。也请参考 3.6 节的讨论。

§3.6 路径积分与量子电动力学

§3.6.1 量子电动力学的生成泛函表示

Maxwell 场的经典场方程是，

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \;\; \nabla\times\mathbf{B} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\mathbf{E} = \rho, \;\; \nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \; . \end{aligned} \tag{3.147}$$

其中 ρ 荷密度而 $\mathbf{J}$ 是三维流密度。它们满足流守恒条件，

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{J} = 0 \; . \tag{3.148}$$

在引入势 ϕ ， $\mathbf{A}$ 后，

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \; , \;\; \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} \; , \tag{3.149}$$

则式 3.147 式中两个不含流的方程会自动满足，而两个有源的方程可以改写成协变形式，

$$\Box A_\mu = j_\mu + \partial_\mu(\partial_\nu A^\nu) \; . \tag{3.150}$$

其中 $j_\mu = (\rho, \vec{j})$ ，它满足流守恒条件 $\partial_\mu j^\mu = 0$ 。为了把以上经典系统作量子化，需要引进作用量，定义

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \; , \tag{3.151}$$

则

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu \ . \tag{3.152}$$

练习：证明由 3.152 式可以导出 3.150 式。

另一方面与光子场耦合的守恒流由物质场构成：费密子场满足 Dirac 方程。那么可以写出 QED 的拉氏量，

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m - e\gamma_\mu A^\mu)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \ . \tag{3.153}$$

Maxwell 方程具有一个重要的性质，即所谓的规范不变性。它说的是在变换

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \partial_\mu\theta(x) \tag{3.154}$$

和如下的费米场的规范变换下不变，

$$\psi(x) \to e^{ie\theta(x)}\psi(x) \ , \ \ \bar{\psi}(x) \to e^{-ie\theta(x)}\bar{\psi}(x) \ 。 \tag{3.155}$$

Noether 流的表达式是，

$$j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \ 。 \tag{3.156}$$

规范势是比起电场和磁场更为基本的物理量，因此适合于作为正则变量。但由于规范势 A_μ 含有臃余的自由度，电磁场的协变量子化必须作特殊处理。利用 Gupta–Bleuler 方案引入了规范固定项。这样 QED 的量子化的拉氏量（在 Lorentz 规范下）为，

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m - e\gamma_\mu A^\mu)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 \ 。 \tag{3.157}$$

QED 的路径积分表述可以直接写出：

$$Z[J,\bar{\eta},\eta]_{QED} = \int [d\psi d\bar{\psi}][dA]\exp\{i\int d^4x\mathcal{L}_{QED}(x) + i\int d^4x(\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + A_\mu J^\mu)\} \ 。 \tag{3.158}$$

在这里我们满足于直接写出 3.158 式的表达式。在第 7 章中我们将会对如何得到此式有进一步的了解。下面我们将利用 3.158 式来讨论量子电动力学的运动方程和各种守恒律。

§3.6.2 运动方程、守恒律与 Ward 等式

利用 3.158 式可以推导出规范场和物质场所满足的运动方程。令 $\bar{\psi} \to \bar{\psi} + \delta\bar{\psi}$，其余场量不变。对于 3.158 是来说这个变换是某一个积分变量的平移，积分测度不

变，生成泛函更是不变。于是得到

$$\begin{aligned} 0 &= \delta Z[J,\bar{\eta},\eta] \\ &= \int [d\psi d\bar{\psi}][dA]\exp\{i\int d^4x\mathcal{L}_{QED}(x)+i\int d^4x(\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta+A_\mu J^\mu)\} \\ &\times\ i\int d^4x\,\delta\bar{\psi}(x)\left[(i\not{D}-m)\psi(x)+\eta(x)\right] \ 。 \end{aligned} \tag{3.159}$$

由于 $\delta\bar{\psi}$ 是任意的无穷小变换，所以推出

$$< [(i\not{D}-m)\psi(x)+\eta(x)] >_J = 0 \ 。 \tag{3.160}$$

再令 $\eta=0$ 即得到物质场算符所满足的运动方程。类似地，做无穷小场平移变换 $A_\mu \to A_\mu+\delta A_\mu(x)$ ，其余不变，即得到

$$\begin{aligned} 0 &= \delta Z[J,\bar{\eta},\eta] \\ &= \int [d\psi d\bar{\psi}][dA]\exp\{i\int d^4x\mathcal{L}_{QED}(x)+i\int d^4x(\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta+A_\mu J^\mu)\} \\ &\times\ i\int d^4x\,\delta A_\mu(x)\left[\partial_\nu F^{\nu\mu}(x)+\frac{1}{\xi}\partial_\mu(\partial_\nu A^\nu(x))+J^\mu(x)-e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right] \ 。 \end{aligned} \tag{3.161}$$

这推出

$$< \left[\partial_\nu F^{\nu\mu}(x)+\frac{1}{\xi}\partial_\mu(\partial_\nu A^\nu(x))+J^\mu(x)-e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right] >_J = 0 \tag{3.162}$$

令外源等于零得到规范场所满足的运动方程：

$$< \left[\partial_\nu F^{\nu\mu}(x)+\frac{1}{\xi}\partial^\mu(\partial_\nu A^\nu(x))-e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\right] >_{J=0,\eta,\bar{\eta}\neq 0} = 0 \ , \tag{3.163}$$

或者

$$\left[\Box g^{\mu\nu}-(1-\frac{1}{\xi})\partial^\mu\partial^\nu\right] < A_\nu(x) >_{J=0,\eta,\bar{\eta}\neq 0} = < e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) >_{J=0,\eta,\bar{\eta}\neq 0} \ 。 \tag{3.164}$$

注意到上式中的 $\left[\Box g^{\mu\nu}-(1-\frac{1}{\xi})\partial^\mu\partial^\nu\right]$ 实际上是 自由 光子传播子

$$D^{\mu\nu}_{free}(x-y) = -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik\cdot(x-y)}\,\frac{g^{\mu\nu}-(1-\xi)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}}{k^2+i\epsilon}$$

的逆，即

$$\left[\Box g^{\mu\nu}-(1-\frac{1}{\xi})\partial^\mu\partial^\nu\right] D^{free}_{\nu\rho}(x-y) = g^\mu_\rho\delta^4(x-y) \ 。 \tag{3.165}$$

对完全传播子，方程 3.165 式要改写为

$$\left[\Box g^{\mu\nu} - (1-\frac{1}{\xi})\partial^\mu\partial^\nu\right]_x < T\{A_\nu(x)A_\rho(y)\} >$$
$$=< T\{e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\rho(y)\} > + ig^\mu_\rho\delta^4(x-y) \ 。 \tag{3.166}$$

上面方程两边同时作用 ∂^μ_x 利用流守恒条件和 Ward 等式 3.146 式可得完全传播子所满足的方程

$$\frac{i}{\xi}\partial^\mu_x\Box_x D_{\mu\nu}(x-y) = -i\partial_{x,\nu}\delta^4(x-y) \ 。 \tag{3.167}$$

它与自由场所满足的方程是一致的。于是我们得到结论： 光子传播子的纵向分量不需要重整 。

在上面的生成泛函的表达式 3.158 中，作如 3.154 、3.155 式的定域规范变换，用得到 3.160 、 3.162 式相同的方法得到，

$$< e\,\bar{\psi}(x)\eta(x) - e\,\bar{\eta}(x)\psi(x) + i\partial^\mu J_\mu(x) + \frac{i}{\xi}\partial_\mu\Box A^\mu(x) >_{J,\eta,\bar{\eta}} = 0 \ 。 \tag{3.168}$$

令 $J=0$ ，并对上式继续作用 $\frac{\delta^2}{\delta\eta(x_1)\delta\bar{\eta}(x_2)}$ 得

$$ie\delta^4(x-x_2) < T\bar{\psi}(x_1)\psi(x_2) > -ie\delta^4(x-x_1) < T\bar{\psi}(x_1)\psi(x_2) >$$
$$+\frac{i}{\xi}\partial^\mu_x\Box_x < T\{A_\mu(x)\bar{\psi}(x_1)\psi(x_2)\} >= 0 \ 。 \tag{3.169}$$

在 3.164 式两边作用上 ∂^μ_x 比较与上式的不同，不难推出 QED 的 Ward 等式 3.146 式，

练习：证明上面陈述。

和 3.167 式。利用上面结果我们可以建立 QED（对光子外线截腿的）格林函数的一些关系。比如对于动量空间中 $A_\mu\bar{\psi}\psi$ 三点正规顶角，我们有

$$k^\mu\Gamma_\mu(k=p_1-p_2,p_1,p_2) = eS^{-1}(p_2) - eS^{-1}(p_1) \ 。 \tag{3.170}$$

练习：证明并在单圈水平上验证 3.170 式。

第四章　$\lambda\phi^4$ 理论，紫外发散与重整化

这一章中我们以 $\lambda\phi^4$ 理论为例讨论量子场论中出现的紫外发散以及如何从一个发散的理论中得到有物理意义的结果。

§4.1　紫外发散与重整化

§4.1.1　$\lambda\phi^4$ 理论中的单圈发散与重整化

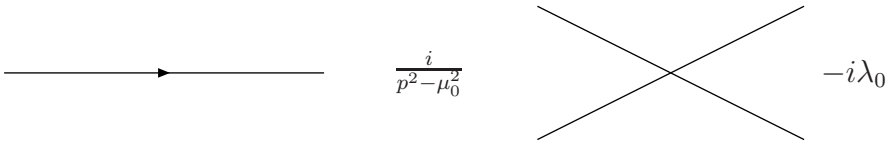
可以把 $\lambda\phi^4$ 理论为的拉氏量分为自由与与相互作用部分：

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I \ , \tag{4.1}$$

其中

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}[\partial_\mu\phi_0\partial^\mu\phi_0 - \mu_0^2\phi_0^2] \ , \ \ \mathcal{L}_I = -\frac{\lambda_0}{4!}\phi_0^4 \ 。 \tag{4.2}$$

这个理论的传播子与相互作用顶角由下图给出，



一个有用的概念是所谓的单粒子不可约（ one particle irreducible 或 1PI ）的格林函数： $\Gamma^{(n)}(p_1,\cdots,p_n)$ 。（ 举例说明 ）它的意义在于任何单粒子可约的连通格林函数都可以分解为 1PI 的图而不需要考虑圈积分。因此只要能够处理好 1PI 格林函数的发散，对单粒子可约图就不会有任何困难。例如两点格林函数（即传播子）就可以利用其 1PI 部分来表示出来（图 4.1 ）：

$$\begin{aligned} i\triangle(p) &= \frac{i}{p^2-\mu_0^2} + \frac{i}{p^2-\mu_0^2}(-i\Sigma(p^2))\frac{i}{p^2-\mu_0^2} + \cdots \\ &= \frac{i}{p^2-\mu_0^2-\Sigma(p^2)} \ 。 \end{aligned} \tag{4.3}$$

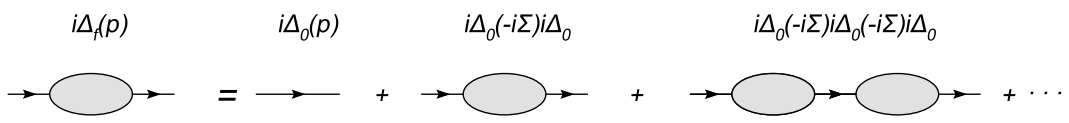


图 4.1: 完全传播子与自能的求和关系

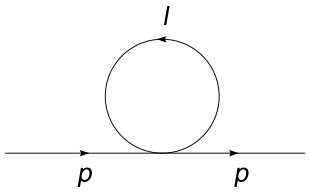


图 4.2: $\lambda\phi^4$ 理论中的单圈自能贡献。

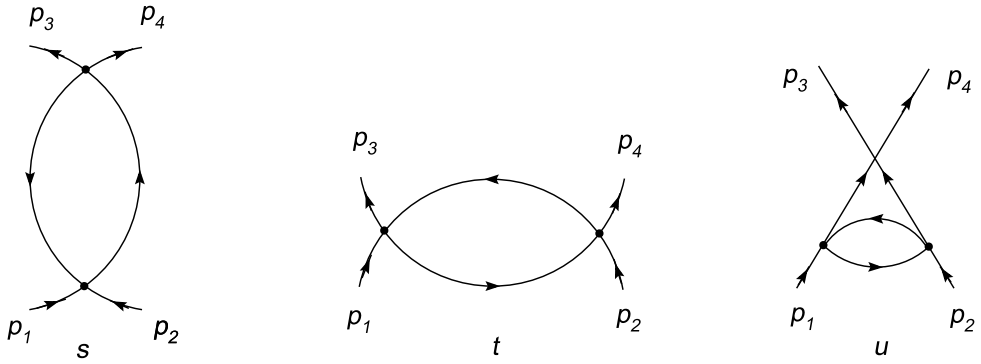


图 4.3: $\lambda\phi^4$ 理论中的单圈 4 点顶角。

显然如果能够使传播子的自能函数 $\Sigma(p^2)$ 有限，则传播子也变为有限。因此我们下面将集中讨论 1PI 图的发散问题。首先，在单圈水平，自能图的表达式为，

$$-i\Sigma(p^2) = -\frac{i\lambda_0}{2}\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{i}{l^2-\mu_0^2+i\epsilon} \ . \tag{4.4}$$

其中 $1/2$ 是来自费曼图的对称因子。显然 $\Sigma(p^2)$ 是平方发散的（图 4.2 ）。 而相互作用顶角可写为

$$\Gamma^{(4)}_{1-loop} = \Gamma(s)+\Gamma(t)+\Gamma(u) \ . \tag{4.5}$$

其中

$$\Gamma(s) = \frac{(-i\lambda_0)^2}{2}\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{i}{(l-p)^2-\mu_0^2}\frac{i}{l^2-\mu_0^2} \ , \tag{4.6}$$

且 $s=(p_1+p_2)^2$ ， $t=(p_1-p_3)^2$ ， $u=(p_1-p_4)^2$ 是通常的 Mandelstam 变量。显然 $\Gamma(s)$ 是对数发散的。

从对 4.4 式和 4.6 式的分析可知，如果我们对一个发散的费曼振幅关于外动量作微商，则会降低其发散度。当作了足够次微商后，表达式将会变为有限的。因此，**发散部分最多是一个外动量的多项式** 。比如我们可以写出，

$$\Gamma(s) = \Gamma(0)+\tilde{\Gamma}(s) \ , \tag{4.7}$$

其中 $\Gamma(0)$ 是发散的部分， $\Gamma(s)$ 是有限部分且 $\tilde{\Gamma}(0)=0$ 。 $\tilde{\Gamma}(s)$ 相当于把 $\Gamma(s)$ 中的在 $s=0$ 处的发散部分减除掉。

重整化的精神是将费曼图的发散部分以一种自恰的、系统的方式分出来，并把其归于场算符、耦合常数、质量的重新定义中去，对于后者我们把它等同于观测到的相应的物理量。因而得到一个有限的、有预言性的物理振幅的表达式。

§4.1.1.1 质量、波函数的重整化

对于传播子的自能部分，由于其是平方发散，因此可将其展开为

$$\Sigma(p^2) = \Sigma(\mu^2) + (p^2-\mu^2)\Sigma'(\mu^2) + \tilde{\Sigma}(p^2)\ , \tag{4.8}$$

其中 μ^2 的选取是任意的。注意对于 $\lambda\phi^4$ 理论在单圈时 $\Sigma(p^2)$ 与 p^2 无关，上述表达式可被理解为在更一般情况下的展开式。上式中的 $\Sigma(\mu^2)$ 是平方发散， $\Sigma'(\mu^2)$ 对数发散，而 $\tilde{\Sigma}(p^2)$ 有限。将 4.8 式带回 4.3 式得到，

$$i\triangle(p^2) = \frac{i}{p^2-\mu_0^2-\Sigma(\mu^2)-(p^2-\mu^2)\Sigma'(\mu^2)-\tilde{\Sigma}(p^2)}\ 。 \tag{4.9}$$

物理质量的定义是传播子的极点。在上式中由于 μ^2 是任意的可以选取其满足

$$\mu_0^2 + \Sigma(\mu^2) = \mu^2\ 。 \tag{4.10}$$

注意 $\Sigma(\mu^2)$ 是发散的，所以 μ_0^2 也是发散的。两者相消得到一个有限的质量 μ^2 。于是有

$$i\triangle(p^2) = \frac{i}{(p^2-\mu^2)[1-\Sigma'(\mu^2)]-\tilde{\Sigma}(p^2)}\ 。 \tag{4.11}$$

由于 $\tilde{\Sigma}(\mu^2) = \tilde{\Sigma}'(\mu^2) = 0$ ，从上式知在 $p^2=\mu^2$ 处传播子有一极点，即 μ^2 是物理质量。同时可以把传播子改写为，

$$i\triangle(p^2) = \frac{iZ_\phi}{p^2-\mu^2-\tilde{\Sigma}(p^2)} + O(\lambda_0^2)\ , \tag{4.12}$$

其中

$$Z_\phi = [1-\Sigma'(\mu^2)]^{-1} = 1+\Sigma'(\mu^2)+O(\lambda_0^2) \tag{4.13}$$

发散量 Z_ϕ 是一个乘积因子，叫做波函数重整化常数。可以由重新定义场量来消除。定义重整化后的场 ϕ 为：

$$\phi = Z_\phi^{-1/2}\phi_0\ 。 \tag{4.14}$$

于是

$$\begin{aligned} i\triangle_r(p^2) &= \int d^4x e^{-ip\cdot x} < 0|T(\phi(x)\phi(0))|0> \\ &= Z_\phi^{-1}\int d^4x e^{-ip\cdot x} < 0|T(\phi_0(x)\phi_0(0))|0> \\ &= \frac{i}{p^2-\mu^2-\tilde{\Sigma}(p^2)} = iZ_\phi^{-1}\triangle_b(p^2) \end{aligned} \tag{4.15}$$

变为有限的。

§4.1.1.2 耦合常数的重整化

下面我们来讨论耦合常数的重整化。为此我们来研究截腿的（ amputated ）1PI 格林函数： $\Gamma^{(4)}(p_1,p_2,p_3,p_4)$ 。单圈的裸的四点函数可表示为：

$$\Gamma_0^{(4)}(s,t,u) = -i\lambda_0 + \Gamma(s) + \Gamma(t) + \Gamma(u) \text{ 。} \tag{4.16}$$

$\Gamma^{(4)}$ 的值依赖于变量 s 、 t 、 u ，那么如何定义在 $\lambda\phi^4$ 理论中 “测量” 到的耦合常数？在 QED 中电荷 e 的定义是在交换光子动量趋于 0 的极限下得到的。在这里为了理论计算的简洁，更为方便的是在对称点

$$s_0 = t_0 = u_0 = \frac{4}{3}\mu^2$$

上定义（重整化的）耦合常数。于是

$$\Gamma_r^{(4)}(s_0,t_0,u_0) \equiv -i\lambda \text{ 。} \tag{4.17}$$

可以把裸的四点函数展开成为，

$$\Gamma_0^{(4)}(s,t,u) = -i\lambda_0 + 3\Gamma(s_0) + \tilde{\Gamma}(s) + \tilde{\Gamma}(t) + \tilde{\Gamma}(u) \text{ ,} \tag{4.18}$$

其中 $\tilde{\Gamma}(s)$ 是有限的并且满足

$$\tilde{\Gamma}(s_0) = 0 \text{ 。} \tag{4.19}$$

定义顶角重整化常数为

$$-iZ_\lambda^{-1}\lambda_0 = -i\lambda_0 + 3\Gamma(s_0) \text{ 。} \tag{4.20}$$

于是

$$\Gamma_0^{(4)}(s,t,u) = -iZ_\lambda^{-1}\lambda_0 + \tilde{\Gamma}(s) + \tilde{\Gamma}(t) + \tilde{\Gamma}(u) \text{ 。} \tag{4.21}$$

从其可以得到

$$\Gamma_0^{(4)}(s_0,t_0,u_0) = -iZ_\lambda^{-1}\lambda_0 \text{ 。} \tag{4.22}$$

由于 $\Gamma^{(4)}$ 是截腿的格林函数，我们有

$$\Gamma_r^{(4)}(s,t,u) = Z_\phi^2\Gamma_0^{(4)}(s,t,u) \text{ 。} \tag{4.23}$$

这样，由 4.17 式和 4.22 式，我们得到重整化后的耦合常数与裸的耦合常数之间的关系：

$$\lambda = Z_\phi^2 Z_\lambda^{-1}\lambda_0 \text{ 。} \tag{4.24}$$

很容易证明重整化后的正规顶角是有限的：

$$\begin{aligned}\Gamma_r^{(4)}(p_1,\cdots,p_4) &= Z_\phi^2\Gamma_0^{(4)}(p_1,\cdots,p_4)\\ &= -iZ_\phi^2Z_\lambda^{-1}\lambda_0+Z_\phi^2[\tilde\Gamma(s)+\tilde\Gamma(t)+\tilde\Gamma(u)]\\ &= -i\lambda+Z_\phi^2[\tilde\Gamma(s)+\tilde\Gamma(t)+\tilde\Gamma(u)]\\ &= -i\lambda+[\tilde\Gamma(s)+\tilde\Gamma(t)+\tilde\Gamma(u)]+O(\lambda^3)\end{aligned}\tag{4.25}$$

为讨论连通格林函数的重整化，还必须考虑那些连通的但不是 1PI 的图。利用

$$G_0^{(4)}(p_1,\cdots,p_4)=\left[\prod_{j=1}^4 i\triangle(p_j)\right]\Gamma_0^{(4)}(p_1,\cdots,p_4)\tag{4.26}$$

和

$$G_r^{(4)}(p_1,\cdots,p_4)=Z_\phi^{-2}G_0^{(4)}(p_1,\cdots,p_4)\tag{4.27}$$

不难证明，

$$G_r^{(4)}(p_1,\cdots,p_4)=\left[\prod_{j=1}^4 i\triangle_r(p_j)\right]\Gamma_r^{(4)}(p_1,\cdots,p_4)\ 。\tag{4.28}$$

可以总结以上讨论如下：如果我们在格林函数中利用如下规律对裸量作替换，

$$\begin{aligned}\phi_0 &= Z_\phi^{+1/2}\phi\ ,\\ \lambda_0 &= Z_\lambda Z_\phi^{-2}\lambda\ ,\\ \mu_0^2 &= \mu^2-\delta\mu^2\ ,\end{aligned}\tag{4.29}$$

其中

$$\delta\mu^2=\Sigma(\mu^2)\ 。\tag{4.30}$$

则可以在进一步移去一些乘积因子后，得到完全有限的格林函数：

$$G_r^{(n)}(p_1,\cdots,p_n;\lambda,\mu)=Z_\phi^{-n/2}G_0^{(n)}(p_1,\cdots,p_n;\lambda_0,\mu_0,\Lambda)\ ;\tag{4.31}$$

同样的， 1PI 的格林函数也是有限的，

$$\Gamma_r^{(n)}(p_1,\cdots,p_n;\lambda,\mu)=Z_\phi^{n/2}\Gamma_0^{(n)}(p_1,\cdots,p_n;\lambda_0,\mu_0,\Lambda)\ 。\tag{4.32}$$

其中必须引入动量截断 Λ 以定义发散的积分。

对于散射的 S 矩阵元的重整化，由 1.90 式， S 矩阵元正比于连通截腿格林函数， $S_{m\to n}\sim Z_\phi^{-(m+n)/2}G_0^{m+n}$ 。由 4.31 式知重整化后 S 矩阵元是有限的： $S_{m\to n}\sim G_r^{m+n}$ ，但此时的重整化应取质壳重整化方案。以我们这里讨论的 $\lambda\phi^4$ 理论的两两散射为例， $T_4\sim G_0^{(4)}/(G_r^{(2)})^4/Z_\phi^2\sim G_r^{(4)}/(G_r^{(2)})^4\sim\Gamma_r^{(4)}$ 。

以上所描述的重整化程序较为直观，叫做 conventional renormalization scheme 。最早的重整化方案就是这样得到的。下面我们讨论所谓的 BPHZ 重整化，它们是完全等价的。

§4.1.2 BPHZ 重整化方法

对于未重整的拉氏量 $\mathcal{L}^{bare}$ 可以形式上拆成两项：

$$\mathcal{L}^b = \mathcal{L}^r + \triangle\mathcal{L} \ , \tag{4.33}$$

其中 $\mathcal{L}^r$ 和 $\mathcal{L}^b$ 具有相同的形式。

BPHZ 重整化步骤：

1. 从重整化拉氏量 $\mathcal{L}^r$ 出发写出传播子和顶角。
2. 单圈 1PI 图的发散部分由 Taylor 展式分离出来，然后构造抵消项 $\triangle\mathcal{L}^{(1)}$ 使之消除单圈图所含的发散。
3. 用新的拉氏量 $\mathcal{L}^r + \triangle\mathcal{L}^{(1)}$ 来产生两圈图，并且构造消去发散的两圈图的抵消项 $\triangle\mathcal{L}^{(2)}$，依此类推逐阶构造抵消项进而得到 n 圈图的抵消项。 每一阶的抵消项都应满足两个性质： 1 ）实的。 2 ）定域的。

对于单圈情形，以 $\lambda\phi^4$ 理论为例，裸的拉氏量为

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}[\partial_\mu\phi_0\partial^\mu\phi_0 - \mu_0^2\phi_0^2] - \frac{\lambda_0}{4!}\phi_0^4 \ . \tag{4.34}$$

根据 BPHZ 重整化方案， $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L} + \triangle\mathcal{L}^{(1)}$ ， $\mathcal{L}$ 是由重整化的拉氏量表示的，

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \mu^2\phi^2] - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \ . \tag{4.35}$$

于是得到 $\triangle\mathcal{L}^{(1)}$ 的表达式，

$$\triangle\mathcal{L}^{(1)} = \frac{Z_\phi - 1}{2}[\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \mu^2\phi^2] + \frac{\delta\mu^2}{2}Z_\phi\phi^2 - \frac{\lambda(Z_\lambda - 1)}{4!}\phi^4 \ . \tag{4.36}$$

注意 $Z_\phi - 1$ 、 $Z_\lambda - 1$ 和 $\delta\mu^2$ 均为 $O(\lambda)$ 。 以自能发散的计算为例，由于图 4.2 是平方发散， Taylor 展开为

$$\Sigma(p^2) = \Sigma(0) + p^2\Sigma'(0) + \tilde{\Sigma}(p^2) \ , \tag{4.37}$$

抵消项拉氏量写为 $\frac{1}{2}\Sigma(0)\phi^2 + \frac{1}{2}\Sigma'(0)(\partial_\mu\phi)^2$ 。四点正规顶角图 4.3 是对数发散，其 Taylor 展开是

$$\Gamma^{(4)}(p_i) = \Gamma^{(4)}(0) + \tilde{\Gamma}^{(4)}(p_i) \tag{4.38}$$

相应的抵消项拉氏量是 $(i\Gamma^{(4)}(0)/4!)\phi^4$ 。所以总的单圈抵消项拉氏量的形式是：

$$\triangle\mathcal{L} = \frac{\Sigma(0)}{2}\phi^2 + \frac{\Sigma'(0)}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{i}{4!}\Gamma^{(4)}(0)\phi^4 \ . \tag{4.39}$$

它产生如图 4.4 的抵消项顶角费曼图。 与 4.36 式比较可得各种重整化常数与发散

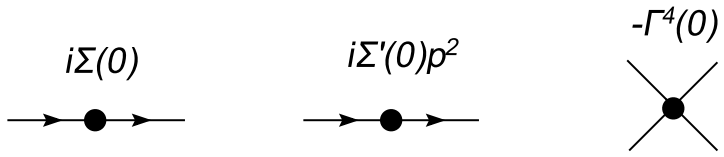


图 4.4: 抵消项拉氏量 4.39 式产生的费曼顶角

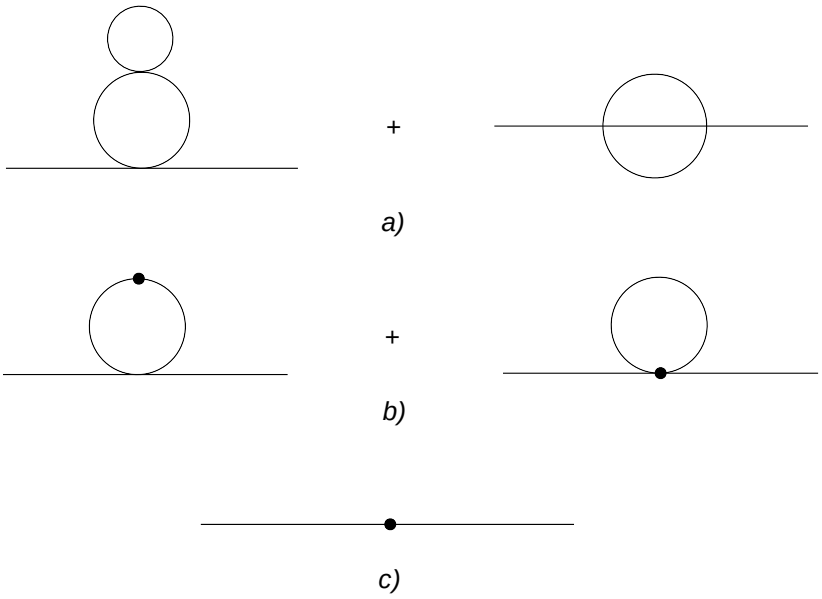


图 4.5: 二阶自能发散的费曼图。 a) $\mathcal{L}^r$ 所产生的两阶图； b) $\triangle\mathcal{L}^{(1)}$ 所产生的新的两阶图； c) 抵消项拉氏量 $\triangle\mathcal{L}^{(2)}$ 所产生的图。

项的关系：

$$\begin{aligned}\Sigma'(0) &= Z_\phi - 1\ ,\\ \Sigma(0) &= -(Z_\phi-1)\mu^2+\delta\mu^2 = -\Sigma'(0)\mu^2+\delta\mu^2\ ,\\ \Gamma^{(4)}(0) &= -i\lambda(1-Z_\lambda)\ 。\end{aligned}\tag{4.40}$$

在固定了单圈抵消项拉氏量的形式后，单圈的抵消项拉氏量 4.39 式与 $\mathcal{L}^r$ 一起产生出下一阶（两圈）的费曼图。以自能发散为例，见图 4.5 。由于自能是平方发散的，图 4.5b) 并不能抵消光图 4.5a) 的发散，还需要在更高阶水平上引入一个新的抵消项拉氏量 $\triangle\mathcal{L}^{(2)}$ 来消除剩余的发散，在 $\triangle\mathcal{L}^{(2)}$ 中 $Z_\phi-1$ 、 $Z_\lambda-1$ 和 $\delta\mu^2$ 等均为 $O(\lambda^2)$ 。

为了证明上述重整化方案可行，还需要证明抵消项拉氏量（ counterterm Lagrangian ）到任意阶 $\mathcal{L}^{(n)}$ 都与 4.36 式有相同的结构。为此需要对费曼图的发散度作量纲分析。

§4.1.3 费曼图的表观发散

首先回顾一下重整化的一些基本方法和步骤。重整化的目的是系统地分离和消除在费曼图中逐阶出现的发散。量子场论中的发散至少有三种（场量子化时相应于真空能量的发散、紫外发散和红外发散），这里只讨论紫外发散的消除。

一个有用的概念是所谓的表观发散度。其定义为，

$$d_G = D\,l + \sum_v \delta_v - 2n_B - n_f \ , \tag{4.41}$$

其中前两项表示费曼积分表达式中分子动量幂次，后两项表示分母的动量幂次。l 表示圈的数量，δ_v 表示在图 G 中顶角 v 处的动量因子的幂次。n_B 表示图中玻色子内线数，n_F 表示费米子内线数。当 $d \geq 0$ 时费曼图是表观发散的，特别的 $d = 0$ 叫对数发散，$d = 1$ 叫线性发散，$d = 2$ 叫平方发散。当 $d < 0$ 时，我们一般不能简单地说该费曼图是收敛的。只有当该图及其所有子图的 d 都小于零时才可以断言该图是有限的。另由于对称性的原因某些图的实际发散度比表观发散度要低。（举例、光子自能、电子自能、光子、光子散射等）

下面讨论一下可重整化的必要条件。首先考虑拉氏量 $\mathcal{L}$ 中只含有一种如下相互作用顶点的情形：

$$\mathcal{L}_1 \sim g(\partial)^\delta(\phi)^b(\psi)^f \ . \tag{4.42}$$

其中 b 为 $\mathcal{L}_1$ 中的玻色场的个数，其中 f 为 $\mathcal{L}_1$ 中的费米场的个数，δ 为顶角的动量幂次。同时定义一个任意的费曼图 G 中的有关量：

1. n 为图 G 中来自 $\mathcal{L}_1$ 的顶点数。
2. N_B 为图 G 中的玻色子外线数，n_B 为图 G 中的玻色子内线数。
3. N_F 为图 G 中的费米子外线数，n_F 为图 G 中的费米子内线数。

显然上述量之间有如下关系式，

$$\begin{aligned} 2n_B + N_B &= n\,b \\ 2n_F + N_F &= n\,f \\ l &= n_B + n_F - (n-1) \\ \sum_v \delta_v &= n\delta \end{aligned} \tag{4.43}$$

由上述等式可推出，

$$l = (\frac{b+f}{2} - 1)n - \frac{N_B + N_F}{2} + 1 \ , \tag{4.44}$$

一起带回 4.41 式得，

$$d = r\,n - \frac{D-2}{2}N_B - \frac{D-1}{2}N_F + D \ , \tag{4.45}$$

其中

$$r = \frac{D-2}{2}b + \frac{D-1}{2}f + \delta - D \ , \tag{4.46}$$

刻画了顶角 $\mathcal{L}_1$ 的的特性，与图 G 并无关系。事实上 r 恰好等于耦合常数 g 的质量量纲。因为

$$D = dim[g] + \frac{D-2}{2}b + \frac{D-1}{2}f + \delta \ . \tag{4.47}$$

由其得知

$$dim[g] = -r \ . \tag{4.48}$$

推广到一般情形：用下标 i 来表示不同的相互作用，

$$d = \sum_i r_i n_i - \frac{D-2}{2}N_B - \frac{D-1}{2}N_F + D \ , \tag{4.49}$$

其中

$$r_i = \frac{D-2}{2}b_i + \frac{D-1}{2}f_i + \delta_i - D = -dim[g_i] \ . \tag{4.50}$$

我们可以利用表观发散度的上述公式来给出可重整性的一般判据（必要条件）：

1. 只要有一个 $r_i > 0$，则随着 n_i 的增加，d 将越来越大，随着阶数增加发散顶角类型越来越多，微扰计算的阶数增加，所需要的抵消项也随之增加。这种理论叫做不可重整的。

   四费米子理论就不是通常意义下的可重整理论。可重整性并不是建立一个正确的物理理论的必要条件，而是一个物理后果。一个物理的拉氏量是否可重整依赖于在拉氏量所刻画的物理能标和其背后的更深层次的物理能标之间是否存在着一个大的间距（ *hierarchy* ）。
2. 如所有的 $r_i \leq 0$，则可能的发散图类型有限。可以通过消去仅仅有限种类的发散使得理论为有限，所有的 $r_i \leq 0$ 是理论可重整的必要条件。
3. 如果所有的 $r_i < 0$ 则理论本身只含有有限个发散图，此类理论叫做超可重整理论。

对于我们这里讨论的 $\lambda\phi^4$ 理论，根据上面的讨论，知道它是一个可重整的理论，其发散子图种类有限，为自能和四点正规顶角。通过 BPHZ 定理 [1] 一般地可以证明，对于一个任意的可重整理论，到微扰论的任意阶，所有的发散可以通过引入对应于表观发散振幅的抵消项来移去 。Peskin 和 Schroder 的书中讨论了一个两圈图的粒子，从中可以看到对 BPHZ 定理的验证。

[1] N. N. Bogliubov and O. S. Parasiuk, Acta Math. 97, 227(1957); K. Hepp, Comm. Math. Phys. 2, 301(1966); W. Zimmerman In *Lectures on elementary particles and quantum field theory*, MIT press, Cambridge, 1970 。较详细的讨论可以参见 Itzykson 和 Zuber 的书。

§4.2 正规化与重整化

常用的正规化方法： Pauli–Villas ， cut-off ， dimensional regularization ， lattice ，等等。下面我们介绍最常用的两种方法， Pauli–Villars 正规化方法和维数正规化方法。

§4.2.1 Pauli–Villars 正规化方法

Pauli-Villars 方法中的振幅与紫外截断的幂次依赖关系与动量截断方法一致，好处是能够保证振幅的 Lorentz 协变性。在 Pauli–Villars 方法中传播子被改写为

$$\frac{1}{l^2-\mu^2+i\epsilon}\to\frac{1}{l^2-\mu^2+i\epsilon}+\sum_i\frac{a_i}{l^2-\Lambda_i^2+i\epsilon}\ , \tag{4.51}$$

其中 $\Lambda_i^2>>\mu^2$ 是动量截断。其余参数的选取是任意的，只要能够保证对跑动动量的积分是收敛的。作为一个例子我们来计算一下四点正规顶角 4.16 式中的函数 Γ ：

$$\Gamma(p^2)=\frac{(-i\lambda)^2}{2}\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{i}{(l-p)^2-\mu^2}\frac{i}{l^2-\mu^2} \tag{4.52}$$

在上式中作如下替换

$$\frac{1}{l^2-\mu^2}\to\frac{1}{l^2-\mu^2}-\frac{1}{l^2-\Lambda^2}=\frac{\mu^2-\Lambda^2}{(l^2-\mu^2)(l^2-\Lambda^2)}$$

就可以使积分收敛：

$$\Gamma(p^2)=\frac{-\lambda^2\Lambda^2}{2}\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{1}{((l-p)^2-\mu^2)(l^2-\mu^2)(l^2-\Lambda^2)}\ 。 \tag{4.53}$$

可以选择在 $p^2=0$ 处作减除，

$$\Gamma(p^2)=\Gamma(0)+\tilde{\Gamma}(p^2)\ , \tag{4.54}$$

于是

$$\begin{aligned}\Gamma(0) &= \frac{-\lambda^2\Lambda^2}{2}\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{1}{(l^2-\mu^2)^2(l^2-\Lambda^2)}\\ \tilde{\Gamma}(p^2) &= -\frac{\lambda^2\Lambda^2}{2}\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{1}{(l^2-\mu^2)(l^2-\Lambda^2)}\left[\frac{1}{(l-p)^2-\mu^2}-\frac{1}{l^2-\mu^2}\right]\\ &= \frac{\lambda^2}{2}\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{2l\cdot p-p^2}{(l^2-\mu^2+i\epsilon)^2((l-p)^2-\mu^2)}\end{aligned} \tag{4.55}$$

其中最后一个等式由于 $\tilde{\Gamma}$ 是有限的，取了 $\Lambda\to\infty$ 的极限。计算这些积分的标准办法是通过费曼参数积分方法把所有分母收集到一起：

$$\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}=(n-1)!\int_0^1\frac{dz_1dz_2\cdots dz_n}{(a_1z_1+a_2z_2\cdots a_nz_n)^n}\delta(1-\sum_{i=1}^n z_i)\ , \tag{4.56}$$

其中 z_i 叫做费曼参数。在上式中我们可以对 a_1 作微分而得到，

$$\frac{1}{a_1^2 a_2\cdots a_n} = n!\int_0^1 \frac{z_1 dz_1 dz_2\cdots dz_n}{(a_1 z_1 + a_2 z_2\cdots a_n z_n)^{n+1}}\delta(1-\sum_{i=1}^n z_i) \ 。 \tag{4.57}$$

顺便给出几个常用的费曼参数积分公式的另一种表达式：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{A^\alpha B^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 dx \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\{xA+(1-x)B\}^{\alpha+\beta}} \ , \\
&\frac{1}{A^\alpha B^\beta C^\gamma} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\int_0^1 xdx\int_0^1 dy \frac{u_1^{\alpha-1}u_2^{\beta-1}u_3^{\gamma-1}}{\{u_1 A+u_2 B+u_3 C\}^{\alpha+\beta+\gamma}} \\
&(u_1 = xy \ , u_2 = x(1-y) \ , u_3 = 1-x) \ , \\
&\frac{1}{A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\delta)} \\
&\times\int_0^1 x^2 dx\int_0^1 ydy\int_0^1 dz \frac{u_1^{\alpha-1}u_2^{\beta-1}u_3^{\gamma-1}u_4^{\delta-1}}{\{u_1 A+u_2 B+u_3 C+u_4 D\}^{\alpha+\beta+\gamma+\delta}} \ , \\
&(u_1 = 1-x \ , u_2 = xyz \ , u_3 = x(1-y) \ , u_4 = xy(1-z)) \ 。
\end{aligned} \tag{4.58}$$

利用费曼参数积分公式，我们把 $\tilde{\Gamma}(p^2)$ 的表达式改写为，

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}(p^2) &= \lambda^2\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\int_0^1(1-x)dx\frac{2l\cdot p - p^2}{((l-xp)^2-\triangle+i\epsilon)^3} \\
&= \lambda^2\int(1-x)dx\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{(2x-1)p^2}{(l^2-\triangle+i\epsilon)^3} \ 。
\end{aligned} \tag{4.59}$$

其中 $\triangle = \mu^2 - x(1-x)p^2$ 。上式中对动量空间的积分可以通过作 Wick 转动转到欧氏空间得到（ 注意 $i\epsilon$ prescription of Feynman propagators 和转动方向 ）。首先有

$$\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{1}{(l^2-\triangle+i\epsilon)^3} = -i\int\frac{d^4L}{(2\pi)^4}\frac{1}{(L^2+\triangle)^3} \ 。 \tag{4.60}$$

对于 D 维欧氏空间可定义 $L_0 = L\cos\theta_1$ ， $L_1 = L\cos\theta_2\sin\theta_1$ ， $\cdots$ ， $L_{D-1} = L\sin\theta_{D-1}\cdots\sin\theta_1$ 。 D 维空间中的积分体积元为

$$d^D L = L^{D-1}dL\,d\Omega \ , \tag{4.61}$$

且

$$d\Omega_D = (\sin\theta_1)^{D-2}d\theta_1(\sin\theta_3)^{D-3}\cdots\sin\theta_{D-2}d\theta_{D-2}d\theta_{D-1} \ 。 \tag{4.62}$$

其中角变量的变化范围是，对于 $j\neq 1$ ， $0\leq\theta_j<\pi$ ，且 $0\leq\theta_1<2\pi$ 。利用积分公式

$$\int_0^\pi(\sin\theta)^m d\theta = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m+2}{2})} \ , \tag{4.63}$$

得

$$\int d\Omega_D = \frac{2(\sqrt{\pi})^D}{\Gamma(D/2)} \ . \tag{4.64}$$

再利用 β 函数的公式，

$$\int_0^\infty \frac{t^{m-1}dt}{(t+a^2)^n} = \frac{1}{(a^2)^{n-m}} \frac{\Gamma(m)\Gamma(n-m)}{\Gamma(n)} \ , \tag{4.65}$$

得到，

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2+\triangle)^3} = \frac{1}{32\pi^2\triangle} \ . \tag{4.66}$$

所以

$$\tilde{\Gamma}(p^2) = \frac{-i\lambda^2 p^2}{32\pi^2} \int_0^1 \frac{(1-x)(2x-1)dx}{\mu^2 - x(1-x)p^2 - i\epsilon} \ . \tag{4.67}$$

直接对 x 积分得到，

$$\tilde{\Gamma}(s) = \frac{i\lambda^2}{32\pi^2}\{2+\rho(s)\left(\log\left[\frac{1-\rho(s)}{1+\rho(s)}\right]+i\pi\right)\} \ , \tag{4.68}$$

其中

$$\rho = \sqrt{\frac{s-4\mu^2}{s}} \ . \tag{4.69}$$

4.68 式对 $s > 4\mu^2$ 时成立，但利用费曼振幅的解析性，不难得到它在 $0 < s < 4\mu^2$ 和 $s < 0$ 时的表达式。

由 *4.68* 式所对应的不变振幅为

$$\mathcal{M}(s+i\epsilon) = \frac{\lambda^2}{32\pi^2}\{2+\rho(s)\left(\log\left[\frac{1-\rho(s)}{1+\rho(s)}\right]+i\pi\right)\} \ .$$

根据 *7.3* 一节中的讨论， $\mathcal{M}$ 是实解析的： $\mathcal{M}(s+i\epsilon) = \mathcal{M}^*(s-i\epsilon)$ ；并且具有一个从 $s = 4\mu^2$ 开始到 ∞ 的割线，在割线上有不连续性且满足 $\mathrm{disc}\mathcal{M} = 2i\mathrm{Im}\mathcal{M}$ 。

练习：通过 4.68 式验证 $\mathcal{M}$ 所具有的这些解析性质。

事实上可以通过 $\mathcal{M}$ 的虚部（ $\propto \rho(s)$ ）直接计算出 $\mathcal{M}$ ：

$$\mathcal{M}(s+i\epsilon) = \mathcal{M}(s_0) + \frac{s-s_0}{\pi} \int_{4\mu^2}^\infty ds' \frac{\mathrm{Im}\mathcal{M}(s')}{(s'-s_0)(s'-s-i\epsilon)} \ , \tag{4.70}$$

其中 s_0 是一任意的减除点。

利用费曼参数积分的办法也不难得出 $\Gamma(0)$ 的表达式：

$$\Gamma(0) = \frac{i\lambda^2\Lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 \frac{xdx}{x(\mu^2-\Lambda^2)+\Lambda^2} \ . \tag{4.71}$$

对于大的 Λ^2 它给出，

$$\Gamma(0)=\frac{i\lambda^2}{32\pi^2}(\log\frac{\Lambda^2}{\mu^2}-1)\ 。 \tag{4.72}$$

裸的四点函数的单圈贡献为，

$$\Gamma^{(4)}_{1-\text{loop}}(s,t,u)=3\Gamma(0)+\tilde{\Gamma}(s)+\tilde{\Gamma}(t)+\tilde{\Gamma}(u)\ 。 \tag{4.73}$$

根据 4.20 式我们得到，

$$Z_\lambda^{-1}=1+\frac{3i\Gamma(0)}{\lambda}=1-\frac{3\lambda}{32\pi^2}(\log\frac{\Lambda^2}{\mu^2}-1)\ 。 \tag{4.74}$$

于是，

$$\Gamma^{(4)}_r(s,t,u)=-i\lambda+\tilde{\Gamma}(s)+\tilde{\Gamma}(t)+\tilde{\Gamma}(u)\ 。 \tag{4.75}$$

对于自能两点函数，我们有

$$-i\Sigma(p^2)=\frac{-i\lambda}{2}\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{i}{l^2-\mu^2+i\epsilon}\ 。 \tag{4.76}$$

对其中的传播子可以作如下的 Pauli–Villars 正规化：

$$\frac{1}{l^2-\mu^2}\to\frac{1}{l^2-\mu^2}+\frac{a_1}{l^2-\Lambda_1^2}+\frac{a_2}{l^2-\Lambda_2^2}\to\frac{1}{l^6}\ \ (\text{当}l\to\infty) \tag{4.77}$$

为达到此目的，可取

$$a_1=\frac{\mu^2-\Lambda_2^2}{\Lambda_2^2-\Lambda_1^2}\ ,\ \ a_2=\frac{\Lambda_1^2-\mu^2}{\Lambda_2^2-\Lambda_1^2}\ 。 \tag{4.78}$$

这样可以得到（ $\Lambda_1,\Lambda_2\to\Lambda$ ），

$$\begin{aligned}&\frac{1}{l^2-\mu^2}+\frac{a_1}{l^2-\Lambda_1^2}+\frac{a_2}{l^2-\Lambda_2^2}=\frac{(\Lambda_1^2-\mu^2)(\Lambda_2^2-\mu^2)}{(l^2-\mu^2)(l^2-\Lambda_1^2)(l^2-\Lambda_2^2)}\\&\to\frac{(\Lambda^2-\mu^2)^2}{(l^2-\mu^2)(l^2-\Lambda^2)^2}\end{aligned} \tag{4.79}$$

于是正规化后的自能表达式为，

$$\begin{aligned}-i\Sigma(p^2)&=\frac{\lambda}{2}\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{(\Lambda^2-\mu^2)^2}{(l^2-\mu^2+i\epsilon)(l^2-\Lambda^2+i\epsilon)^2}\\&=\frac{-i\lambda(\Lambda^2-\mu^2)^2}{32\pi^2}\int_0^1\frac{xdx}{x\Lambda^2+(1-x)\mu^2}\\&=\frac{-i\lambda}{32\pi^2}[\Lambda^2-\mu^2-\mu^2\log\frac{\Lambda^2}{\mu^2}]\ ,\end{aligned} \tag{4.80}$$

即

$$\Sigma(p^2)=\Sigma(0)=\frac{\lambda}{32\pi^2}[\Lambda^2-\mu^2-\mu^2\log\frac{\Lambda^2}{\mu^2}]\ 。 \tag{4.81}$$

由此推出（利用 4.13 式和 4.30 式），

$$Z_\phi=1\ \ (\Sigma'(0)=0)\ ,\ \ \delta\mu^2=\frac{\lambda}{32\pi^2}(\Lambda^2-\mu^2-\mu^2\log\frac{\Lambda^2}{\mu^2})\ 。 \tag{4.82}$$

§4.2.2 中间重整化与质壳重整化

在 4.2.1 节所讨论的重整化手续中，减除是定义在外动量 $p_i = 0$ 处的。在这一方案中自能函数的有限部分具有如下性质：

$$\tilde{\Sigma}(p^2)|_{p^2=0} = 0 \ , \quad \frac{\partial\tilde{\Sigma}(p^2)}{\partial p^2}|_{p^2=0} = 0 \ 。 \tag{4.83}$$

这意味着完全传播子

$$\triangle_r(p^2) = \frac{1}{p^2 - \mu^2 - \tilde{\Sigma}(p^2) + i\epsilon} \tag{4.84}$$

满足如下的归一化条件：

$$\triangle_r^{-1}(p^2)|_{p^2=0} = -\mu^2 \ , \quad \frac{\partial\triangle_r^{-1}(p^2)}{\partial p^2}|_{p^2=0} = 1 \ 。 \tag{4.85}$$

值得指出的是，由于物理质量的定义是传播子的极点，在这里质量参数 μ^2 并不是物理质量！这样的质量参数叫做重整化质量（ renormalized mass ）。[2] 与之相反，在 4.1.1.1 节中所进行的减除是定义在物理质壳 $p^2 = \mu^2$ 上的（这里可以指责我们所用记号的贫乏）。对于自能函数这意味着

$$\Sigma(p^2) = \Sigma(\mu^2) + (p^2 - \mu^2)\Sigma'(\mu^2) + \tilde{\Sigma}(p^2) \ , \tag{4.86}$$

也即

$$\tilde{\Sigma}(\mu^2) = 0 \ , \quad \frac{\partial\tilde{\Sigma}(p^2)}{\partial p^2}|_{p^2=\mu^2} = 0 \ 。 \tag{4.87}$$

其对应的传播子的归一化条件如下：

$$\triangle_r^{-1}(p^2)|_{p^2=\mu^2} = 0 \ , \quad \frac{\partial\triangle_r^{-1}(p^2)}{\partial p^2}|_{p^2=\mu^2} = 1 \ 。 \tag{4.88}$$

不同的重整化方案之间只差一个有限的重整化常数。

同时值得指出的是，在 4.17 式中“物理”的耦合常数的定义是在 $s = t = u = 4\mu^2/3$ 上的，即

$$\Gamma_r^{(4)}(s_0, t_0, u_0) = -i\lambda \ 。 \tag{4.89}$$

而 4.74 式所对应的耦合常数是定义在 $p_i = 0$ 处的：

$$\Gamma_r^{(4)}(s = 0, t = 0, u = 0) = -i\lambda \ 。 \tag{4.90}$$

[2]关于重整化质量的进一步讨论可以在 5.3.2 一节中找到。

也就是说，在不同的地方作 Taylor 展开导致了对耦合常数的不同的定义。这将导致一个非常重要的“跑动”耦合常数的概念。显然，物理量不应该依赖于减除点的选取。以 $\lambda\phi^4$ 理论的两两散射过程为例，

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2}\frac{1}{s}|\Gamma_r^{(4)}|^2 \ 。 \tag{4.91}$$

形式上对耦合常数的不同的定义将导致微分散射截面在形式上有所不同（差一个为高阶小量的常数），但由于在不同的表达式中耦合常数的取值也不同，散射截面表示式的不同只是表面上的，而不具有实际意义。

从上面的讨论可以得知，减除点的选取是完全任意的。

§4.2.3 维数正规化

假设我们在 D 维的 Minkowski 空间中，度规张量为 $g_{\mu\nu}$，其中 $\mu,\nu = 0,\cdots D-1$ 。 Dirac 代数在 D 维中的性质如下：

$$\begin{aligned}
&g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = D \ , \ \{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \ , \\
&\gamma_\mu\gamma^\mu = D \ , \\
&\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\mu = (2-D)\gamma^\nu \ , \\
&\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu = 4g^{\nu\rho} - (4-D)\gamma^\nu\gamma^\rho \\
&\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu = -2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu + (4-D)\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma \ .
\end{aligned} \tag{4.92}$$

求迹时的公式与 4 维时的一致（ 见 Peskin 的书， p808 ）。但是在维数正规化中 γ_5 的定义有一定的含混之处。在 D=4 时 γ_5 的定义如下：

$$\gamma_5 \equiv \frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma \tag{4.93}$$

在 $D \neq 4$ 维时并不成立，因为 4 阶全反对称张量仅仅是 4 维空间的特殊性质，并不能推广到高维空间中去。 文献中一种关于 γ_5 的定义是 ，

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\cdots\gamma^{D-1} \ . \tag{4.94}$$

它具有如下性质，

$$\begin{aligned}
&\gamma_5^+ = \gamma_5 \ , \gamma_5^2 = 1 \ , \{\gamma_5,\gamma_\mu\} = 0 \ , \\
&tr\{\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\} = 0 \ , \ tr\{\gamma_5\text{奇数个}\gamma\text{之积}\} = 0 \ .
\end{aligned} \tag{4.95}$$

解析延拓（偏 P 程序）

在 D 维时空中考虑如下积分，

$$I = \int d^D k \frac{k_0^{\lambda_0} k_1^{\lambda_1} \cdots k_{D-1}^{\lambda_{D-1}}}{[k^2 - 2p\cdot k - \triangle]^n} \ , \tag{4.96}$$

其中 $\lambda_i > -1$ 。如果 $D + \sum_i \lambda_i < 2n$ 则该积分是收敛的。对上述积分应用恒等式：

$$\frac{1}{D}\sum_i^{D-1} (\frac{\partial}{\partial k_i}) k_i \equiv 1 \ ,$$

得到

$$\begin{aligned} I &= \int d^D k \frac{1}{D} \sum_{i=0}^{D-1} (\frac{\partial}{\partial k_i} k_i) \frac{k_0^{\lambda_0} k_1^{\lambda_1} \cdots k_{D-1}^{\lambda_{D-1}}}{[k^2 - 2p\cdot k - \triangle]^n} \\ &= -\frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1} \int d^D k \, k_i \frac{\partial}{\partial k_i} \{ \frac{k_0^{\lambda_0} k_1^{\lambda_1} \cdots k_{D-1}^{\lambda_{D-1}}}{[k^2 - 2p\cdot k - \triangle]^n} \} \\ &= \frac{1}{D}\{-(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_{D-1}) + 2n\} I + \frac{2n}{D} \int d^D k \frac{k_0^{\lambda_0} k_1^{\lambda_1} \cdots k_{D-1}^{\lambda_{D-1}} (k\cdot p + \triangle)}{[k^2 - 2p\cdot k - \triangle]^{n+1}} \end{aligned} \tag{4.97}$$

由此可解出，

$$I = \frac{2n}{D + \lambda_0 + \cdots + \lambda_{D-1} - 2n} \int d^D k \frac{k_0^{\lambda^0} \cdots k_{D-1}^{\lambda_{D-1}} (k\cdot p + \triangle)}{[k^2 - 2p\cdot k - \triangle]^{n+1}} \ . \tag{4.98}$$

这个表达式右边的积分收敛区域为 $D + \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_{D-1} < 2n + 1$ 。重复应用上述 “偏 P ” 操作可进一步扩展积分 I 的收敛区域，从而我们将任意的形如 4.96 式的积分表为对任意给定的 D 是收敛的积分的线性组合。换句话说，上式的右边是对左边作为 D 的函数的解析延拓。如果原积分是发散的则其解析延拓表达式在 D 平面上有极点，这些极点正好是使积分 4.96 式发散的维数。 平方发散： D=2

有了上述准备后，我们可以计算积分

$$I(p, \triangle) = \int d^D l \frac{1}{(l^2 - 2l\cdot p - \triangle)^n} \ , \tag{4.99}$$

根据前面的 “偏 P ” 程序，该积分总是可以化为收敛的积分。因此可以做变量替换：$l \to l + p$ 。因此上述积分可以改写为，

$$I(p, \triangle) = \int d^D l \frac{1}{(l^2 - (\triangle + p^2))^n} \ . \tag{4.100}$$

作 Wick 转动，用 iL_0 代替 l_0 ，从而将积分化为欧氏空间积分：

$$I(p, \triangle) = i(-1)^n \int d^D L \frac{1}{(L^2 + (\triangle + p^2))^n} \ . \tag{4.101}$$

此积分可以在 D 维球坐标空间中求出。 得

$$I(p,\triangle)=i(-1)^n(\sqrt{\pi})^D\frac{\Gamma(n-D/2)}{\Gamma(n)}\frac{1}{(\triangle+p^2)^{n-D/2}}\ . \tag{4.102}$$

由其可导出一些常用的维数正规化公式:

$$\begin{aligned}
&\int\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\frac{1}{[\triangle+2p\cdot q-q^2]^n}=\frac{i}{(4\pi)^{D/2}}\frac{\Gamma(n-D/2)}{\Gamma(n)}\frac{1}{[\triangle+p^2]^{n-D/2}}\ ,\\
&\int\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\frac{q_\mu}{[\triangle+2p\cdot q-q^2]^n}=\frac{i}{(4\pi)^{D/2}}\frac{\Gamma(n-D/2)}{\Gamma(n)}\frac{p_\mu}{[\triangle+p^2]^{n-D/2}}\ ,\\
&\int\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\frac{q_\mu q_\nu}{[\triangle+2p\cdot q-q^2]^n}=\frac{i}{(4\pi)^{D/2}}[\frac{\Gamma(n-D/2)}{\Gamma(n)}\frac{p_\mu p_\nu}{[\triangle+p^2]^{n-D/2}}\\
&-\frac{\Gamma(n-1-D/2)}{2\Gamma(n)}\frac{g_{\mu\nu}}{[\triangle+p^2]^{n-1-D/2}}]\ ,\\
&\int\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\frac{q_\mu q_\nu q_\rho}{[\triangle+2p\cdot q-q^2]^n}=\frac{i}{(4\pi)^{D/2}}[\frac{\Gamma(n-D/2)}{\Gamma(n)}\frac{p_\mu p_\nu p_\rho}{[\triangle+p^2]^{n-D/2}}\\
&-\frac{\Gamma(n-1-D/2)}{2\Gamma(n)}\frac{g_{\mu\nu}p_\rho+g_{\nu\rho}p_\mu+g_{\rho\mu}p_\nu}{[\triangle+p^2]^{n-1-D/2}}]\ .
\end{aligned}\tag{4.103}$$

以下列出一些在圈图计算中有用的辅助公式:

$$\begin{aligned}
&\Gamma(x)\equiv\int_0^\infty e^{-y}y^{x-1}dy\ ,\ \ (x>0)\\
&\Gamma(n+1)=n!\ ,\ \ (\text{n 为整数})\\
&\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x)\ ,\\
&\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}\ ,\\
&\Gamma(1+\varepsilon)=1-\gamma_E\,\varepsilon+O(\varepsilon^2)\ ,\\
&\Gamma(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}-\gamma_E+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-\epsilon)^{n-1}}{n!}\zeta(n)\ ,
\end{aligned}\tag{4.104}$$

其中 $\gamma_E=0.5572157\cdots$ 为 Euler 常数。在实际计算中常用 $R^\varepsilon\simeq 1+\varepsilon\ln R+O(\varepsilon^2)$ 。维数正规化中规定形如

$$\int d^Dl\frac{1}{(l^2)^n}$$

的积分为零（它或者有红外或者有紫外发散，在维数正规化方案中无法定义）。

有了以上准备我们来计算 $\lambda\phi^4$ 理论中单圈时的 4 点顶角发散和自能发散。由维数正规化的方法和利用费曼参数积分， 4.6 式被改写为

$$\begin{aligned}
\Gamma(s) &= \frac{\lambda^2}{2}\int\frac{d^Dl}{(2\pi)^D}\frac{1}{(l-p)^2-\mu^2}\frac{1}{l^2-\mu^2}\\
&= \frac{\lambda^2}{2}\int_0^1 dx\int\frac{d^Dl}{(2\pi)^D}\frac{1}{[(l-xp)^2-\triangle]^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\lambda^2}{2}\int_0^1 dx \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D}\frac{1}{[l^2-\triangle]^2} \\
&\cdots \\
&= \frac{i\lambda^2}{32\pi^2}\{\Gamma(\epsilon)(4\pi)^\epsilon - \int_0^1 dx\ \ln[\mu^2 - x(1-x)s]\}\ 。
\end{aligned} \tag{4.105}
$$

在上式中 $\triangle = \mu^2 - x(1-x)s$ ， $\epsilon = 2 - D/2$ 。由于其中对动量的积分是有限的所以可以作平移并利用 4.102 式得出最后结果。于是我们得到，

$$
\Gamma(0) = \frac{i\lambda^2}{32\pi^2}(\Gamma(\epsilon) + \ln 4\pi - \ln\mu^2)\ 。 \tag{4.106}
$$

而有限的部分

$$
\tilde{\Gamma}(p^2) = \frac{-i\lambda^2}{32\pi^2}\int_0^1 dx \ln\left[\frac{\mu^2 - x(1-x)p^2}{\mu^2}\right]\ , \tag{4.107}
$$

与 4.67 式一致，即其不依赖于不同的正规化方案。但发散部分的表达式与 Pauli–Villars 正规化的结果形式上很不一样，这里的发散 $\Gamma(\epsilon)$ 对应着对数发散 $\ln\Lambda^2$ 。

对于自能项，在维数正规化方案中我们有，

$$
\begin{aligned}
-i\Sigma(p^2) &= \frac{\lambda}{2}\int \frac{d^D l}{(2\pi)^D}\frac{1}{l^2-\mu^2+i\epsilon} \\
&= \frac{-i\lambda\pi^{D/2}\Gamma(1-\frac{D}{2})}{2(2\pi)^D(\mu^2)^{1-D/2}}\ 。
\end{aligned} \tag{4.108}
$$

另一方面我们有，

$$
\Gamma(1-\frac{D}{2}) = \frac{\Gamma(3-\frac{D}{2})}{(1-\frac{D}{2})(2-\frac{D}{2})} \tag{4.109}
$$

我们注意到 4.81 式中的 **平方发散在这里对应着 $D=2$ 的极点**，由于最终有 $D\to 4$ ，所以平方发散在维数正规化中是有限的。另一方面，与正规顶角的情形完全一样， 对数发散在这里对应着 $D=4$ 的极点。

最小减除方案

在 4.2.1 节所讨论的动量减除方案中，所引入的任意的质量标度是显然的（减除点）。在维数正规化方案中同样会出现一个任意的质量标度。原因是在 D 维空间中原来的 4 维空间中的耦合常数 λ 不再是无量纲的，需要做变换 $\lambda\to\lambda\nu^{4-D} = \lambda\nu^{2\epsilon}$ 。这样 4.108 式变成，

$$
-i\Sigma(p^2) \to \frac{i\lambda\mu^2}{32\pi^2}[\Gamma(\epsilon) + 1 + \ln 4\pi\nu^2 - \ln\mu^2 + O(\epsilon)]\ 。 \tag{4.110}
$$

而 4.106 式变为

$$
\Gamma(0) = \frac{i\lambda^2\nu^{2\epsilon}}{32\pi^2}(\Gamma(\epsilon) + \ln 4\pi\nu^2 - \ln\mu^2)\ 。 \tag{4.111}
$$

可以把上式给出的 $\Gamma(0)$ 从四点正规顶角中减掉，则等价于在零动量处减除。而最小减除方案 (minimal subtraction scheme ，或 MS 方案) 说的是仅仅减除掉正比于 $1/\epsilon$ 的项。或是说在构造抵消项拉氏量时只考虑正比于 $1/\epsilon$ 的项。比如由 4.39 式知

$$\triangle\mathcal{L}_{\phi^2} = -\frac{\lambda\mu^2}{64\pi^2}\frac{1}{\epsilon}\phi^2 \ 。 \tag{4.112}$$

从其可以得知各种裸参数与任意参数 ν 以及质量参数 μ 无关。因此最小减除方案也叫做质量无关的重整化方案。由于发散总是以 $\frac{1}{\epsilon}+\ln 4\pi-\gamma_E$ 的形式合并出现，所以人们也把 $\frac{1}{\epsilon}+\ln 4\pi-\gamma_E$ 项整体减除掉，这一方案叫做 $\overline{MS}$ 方案。在 MS方案中，裸参量与重整化后的参量之间的关系如下：

$$\lambda_0 = \nu^{2\epsilon}[\lambda+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\lambda)\epsilon^{-n}] \ , \tag{4.113}$$

$$\mu_0 = \mu[1+\sum_{n=1}^{\infty}b_n(\lambda)\epsilon^{-n}] \ , \tag{4.114}$$

$$\phi_0 = \phi[1+\sum_{n=1}^{\infty}c_n(\lambda)\epsilon^{-n}] \equiv \phi Z_\phi^{1/2} \ 。 \tag{4.115}$$

在 MS 方案中 $\bar{Z}_\lambda = Z_\phi^{-2}Z_\lambda = 1+\frac{3\lambda}{32\pi^2}\frac{1}{\epsilon}$ 。在 $\bar{M}S$ 方案中 $\bar{Z}_\lambda = 1+\frac{3\lambda}{32\pi^2}\Gamma(\epsilon)(4\pi)^\epsilon$ 。且都有 $\lambda_0 = \nu^{2\epsilon}\bar{Z}_\lambda\lambda$ 。

在进行了正规化从而把发散分离开出来后，还需要做重整化以把发散消去。常用的重整化方案有，

1. 质壳重整化（ on-shell 重整化 ）
2. MS 或 $\overline{\text{MS}}$ 重整化方案
3. μ 重整化 (off-shell 重整化)

在 4.2.2 节中我们已简单地讨论了质壳重整化和中间重整化，后者是所谓 μ- 重整化的一种特例。在第 10 章中将对各种不同的重整化方案做进一步的讨论。

第五章　重整化群方程

§5.1　固定动量减除方案中的重整化群方程

首先我们指出对一个未重整的格林函数作微商 $\partial/\partial\mu_0^2$ 等价于在格林函数中插入一个携带零动量的复合算符 $\Omega = \frac{1}{2}\phi_0^2$：

$$\frac{\partial\Gamma^{(n)}(p_i)}{\partial\mu_0^2} = -i\Gamma^{(n)}_{\phi^2}(0,p_i)\ , \tag{5.1}$$

其相应的复合算符的格林函数为，

$$G^{(n)}_{\phi^2}(x;x_1,\cdots,x_n) =< 0|T\{\frac{1}{2}\phi^2(x)\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\}|0>\ , \tag{5.2}$$

或者是在动量空间中

$$\begin{aligned}&(2\pi)^4\delta^4(p+p_1+\cdots+p_n)G^{(n)}_{\phi^2}(p;p_1,\cdots,p_n)\\ &=\int d^4x e^{-ip\cdot x}\int\prod_{i=1}^{n}d^4x_i e^{-ip_i\cdot x_i}G^{(n)}_{\phi^2}(x;x_1,\cdots,x_n)\ 。\end{aligned} \tag{5.3}$$

原因是 $\Gamma^{(n)}(p_i)$ 仅仅是通过传播子 $\frac{i}{p^2-\mu_0^2+i\epsilon}$ 依赖于 μ_0^2 的，而且有

$$\frac{\partial}{\partial\mu_0^2}\left(\frac{i}{p^2-\mu_0^2+i\epsilon}\right) = \frac{i}{p^2-\mu_0^2+i\epsilon}(-i)\frac{i}{p^2-\mu_0^2+i\epsilon}\ 。 \tag{5.4}$$

对于重整化的 1PI 格林函数，可以写出

$$\begin{aligned}\Gamma^{(n)}_r(p_i,\lambda,\mu) &= Z_\phi^{n/2}\Gamma^{(n)}(p_i,\lambda_0,\mu_0)\\ \Gamma^{(n)}_{\phi^2,r}(p;p_i,\lambda,\mu) &= Z_{\phi^2}^{-1}Z_\phi^{n/2}\Gamma^{(n)}_{\phi^2}(p;p_i,\lambda_0,\mu_0)\ ,\end{aligned} \tag{5.5}$$

其中 Z_{ϕ^2} 对应于复合算符的重整化常数。由于 λ，μ 是 λ_0，μ_0 和动量截断 Λ 的函数，利用微商的链式法则和 5.1 式得到，

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta\frac{\partial}{\partial\lambda}-n\gamma\right]\Gamma^{(n)}_r(p_i,\lambda,\mu) = -i\mu^2\alpha\Gamma^{(n)}_{\phi^2,r}(0;p_i,\lambda,\mu)\ , \tag{5.6}$$

其中

$$\begin{aligned}\beta &= 2\mu^2\frac{\partial\lambda/\partial\mu_0^2}{\partial\mu^2/\partial\mu_0^2}\ ,\\ \gamma &= \mu^2\frac{\partial\ln Z_\phi/\partial\mu_0^2}{\partial\mu^2/\partial\mu_0^2}\ ,\\ \alpha &= \frac{2Z_{\phi^2}}{\partial\mu^2/\partial\mu_0^2}\ 。\end{aligned} \tag{5.7}$$

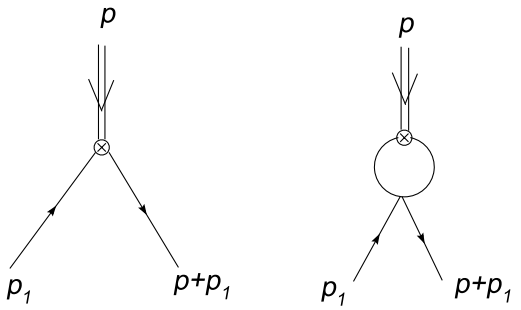


图 5.1: 树图及单圈水平上 $\Gamma^{(2)}_{\phi^2}$ 。

利用归一化条件

$$\Gamma^{(2)}_r(0,\lambda,\mu) = -i\mu^2 \ , \ \ \Gamma^{(2)}_{\phi^2,r}(0;0,\lambda,\mu) = 1 \ 。 \tag{5.8}$$

推出

$$\alpha = 2(1-\gamma) \ 。 \tag{5.9}$$

是一个有限的量。为了看清这一点，我们在 5.6 式中令 $n=2$ 并且对 p^2 求导得

$$[\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta\frac{\partial}{\partial\lambda} - 2\gamma]\frac{\partial}{\partial p^2}\Gamma^{(2)}_r(p;\lambda,\mu) = -i\mu^2\alpha\frac{\partial}{\partial p^2}\Gamma^{(2)}_{\phi^2,r}(0,p;\lambda,\mu) \ 。 \tag{5.10}$$

利用归一化条件

$$\frac{\partial\Gamma^{(2)}_r(p^2;\lambda,\mu)}{\partial p^2}|_{p^2=0} = -1 \ , \tag{5.11}$$

得

$$\gamma = \mu^2(1-\gamma)\left[\frac{\partial}{\partial p^2}\Gamma^{(2)}_{\phi^2,r}(0,p^2,\lambda,\mu)\right]|_{p^2=0} \ 。 \tag{5.12}$$

这证明了 γ（同时 α ）不依赖于动量截断。这样除了 β 外方程 5.6 式中所有的函数都不显含 Λ ，所以 β 也不明显依赖于 Λ 。

很容易在单圈水平上验证 *5.9* 式。首先由

$$Z_{\phi^2} = 1 + \Gamma^{(2)}_{\phi^2}(0;0,0) \ ,$$

和 *(见图 5.1)*

$$\Gamma^{(2)}_{\phi^2}(p;p_1,-p-p_1) = \frac{-i\lambda}{2}\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{i}{l^2-\mu^2+i\epsilon}\frac{i}{(l-p)^2-\mu^2+i\epsilon} \ 。 \tag{5.13}$$

得知，

$$Z_{\phi^2} = 1 - \frac{\lambda}{32\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \ 。 \tag{5.14}$$

另一方面，由

$$\mu_0^2 = \mu^2 - \delta\mu^2 = \mu^2 - \frac{\lambda}{32\pi^2}(\Lambda^2 - \mu^2 - \mu^2 \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2})$$

推出

$$\frac{\partial \mu_0^2}{\partial \mu^2} = 1 + \frac{\lambda}{32\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} + O(\lambda^2)$$

也即 $\alpha = 2(1-\gamma) + O(\lambda^2)$ 。（ 注意符号 ）

这里得到的教训是，在计算诸如 $\partial\mu_0^2/\partial\mu^2$ 一类的量时，必须小心的考虑如 *4.80* 一类的式子中的常数项。但是在计算 β 和 γ 函数时，正如我们下面将看到的，只需要考虑重整化常数的发散部分。

上面的讨论指出了，由于重整化后的 $\Gamma_r^{(n)}$ 和 $\Gamma_{r,\phi^2}^{(n)}$ 到微扰展开的任意阶均不依赖于动量截断 Λ，容易证明 β， γ 和 α 都不依赖于 Λ 。由于这些函数都是无量纲的，它们既不依赖于 Λ，也就不依赖于 μ 。于是我们有 $\beta = \beta(\lambda)$， $\alpha = \alpha(\lambda)$ 以及 $\gamma = \gamma(\lambda)$ 。为计算各类 β 函数我们首先指出重整化后的量 λ， μ 是 λ_0， μ_0 和 Λ 的函数。由量纲上的考虑 λ 和 Z_i 只能是 λ_0 和 Λ/μ_0 的函数，如果我们进一步用 μ 代替 μ_0： $\mu = \mu(\lambda_0, \mu_0, \Lambda)$ 可以得到 $\lambda = \lambda(\lambda_0, \Lambda/\mu)$ 以及 $Z_i = Z_i(\lambda_0, \Lambda/\mu)$ 。利用链式法则

$$\frac{\partial}{\partial \mu_0^2}\lambda(\lambda_0, \Lambda/\mu) = \frac{\partial \mu^2}{\partial \mu_0^2}\frac{\partial}{\partial \mu^2}\lambda(\lambda_0, \Lambda/\mu) \tag{5.15}$$

我们得到（ $\bar{Z} = Z_\lambda^{-1} Z_\phi^2$ ），

$$\begin{aligned} \beta &= \mu\frac{\partial}{\partial \mu}\lambda(\lambda_0, \Lambda/\mu) \\ &= -\lambda\frac{\partial}{\partial \ln \Lambda}[\ln \bar{Z}(\lambda_0, \Lambda/\mu)] \ 。 \end{aligned} \tag{5.16}$$

类似的可得出

$$\gamma = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \ln \Lambda}[\ln Z_\phi(\lambda_0, \Lambda/\mu)] \ 。 \tag{5.17}$$

这意味着为计算 β， γ 等函数我们只需考虑 Z_i 中 $\ln \Lambda$ 的项。利用单圈结果

$$\begin{aligned} \bar{Z}_\lambda &= 1 + \frac{3\lambda_0}{32\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} + O(\lambda_0^2) \\ Z_\phi &= 1 + O(\lambda_0^2) \ , \end{aligned} \tag{5.18}$$

得到

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} + O(\lambda^3) \ , \\ \gamma(\lambda) &= O(\lambda^2) \ 。 \end{aligned} \tag{5.19}$$

这里我们顺便指出，对应于不同的跑动耦合常数的定义（如选取不同的规范或减除点等）β 函数的具体形式可以不一样。但是 β 函数按耦合常数展开的头两阶是不变的。

在重整化群方程 5.6 式中含有非齐次项。然而在大动量时非齐次项不是主要贡献因而可以被扔掉。这里要用到 Weinberg 给出的一个定理：*如果动量是非例外的*[1]，*并且有如下参数化：* $p_i = \sigma k_i$，*则到微扰论的任意阶，在深度欧氏区间（对应着* $\sigma \to \infty$ *且* k_i *固定），* $\Gamma_r^{(n)}$ *具有* σ^{4-n} *的渐近行为（可以有* $\ln\sigma$ *的幂次的因子的修正）。而* $\Gamma_{r,\phi^2}^{(n)}$ *的渐近行为是* σ^{2-n} *乘以* $\ln\sigma$ *的多项式。*注意到 $4-n$ 和 $2-n$ 正好是相应格林函数的表观发散度，也正好是其所相应的（朴素的）量纲。Weinberg 定理告诉我们在微扰论中的格林函数在 $\sigma \to \infty$ 时具有如下渐近形式：

$$\Gamma^{(n)}(\sigma p_i, \lambda, \mu) \to \sigma^{4-n}[a_0(\ln\sigma)^{b_0} + a_1(\ln\sigma)^{b_1}\lambda + \cdots] \ 。 \tag{5.20}$$

其中 a_i ， b_i 未定。在对所有对数项求和后，如果这导致了 σ 的某个幂次 σ^γ ，则最终 Γ 对 σ 的幂次依赖关系为 $\sigma^{4-n-\gamma}$ 而不是 σ^{4-n} 。因此 γ 也叫做反常量纲。

§5.2 重整化群方程的渐近解

由 Weinberg 定理知在大动量极限下，到微扰论的任意有限阶我们都有 $\Gamma_r^{(n)} >> \mu^2\Gamma_{\phi^2,r}^{(n)}$ 。在这里 μ^2 可以看成重整化质量或物理质量。于是在深度欧氏区域，方程 5.6 式中右边的非齐次项可以扔掉而得到一个齐次方程：

$$[\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda} - n\gamma(\lambda)]\Gamma_{as}^{(n)}(p_i, \lambda, \mu) = 0 \ 。 \tag{5.21}$$

在 5.21 式中我们注意到，质量参数的变化可以转换到标度参数的变化上。从量纲分析可以得出，

$$\Gamma_{as}^{(n)} = \mu^{4-n}\bar{\Gamma}_r^{(n)}(p_i/\mu, \lambda) \tag{5.22}$$

其中 $\bar{\Gamma}_r^{(n)}$ 是无量纲的且满足，

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \sigma\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)\bar{\Gamma}(\sigma p_i/\mu, \lambda) = 0 \tag{5.23}$$

于是可以推出 Callan–Symanzik 方程的渐近形式

$$[\sigma\frac{\partial}{\partial\sigma} - \beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda} + n\gamma(\lambda) + (n-4)]\Gamma_{as}^{(n)}(\sigma p_i, \lambda, \mu) = 0 \ 。 \tag{5.24}$$

[1] 一组动量 $p_1, \cdots p_n$ 被认为是非例外的，如果没有哪一个部分求和 $p_{i_1} + \cdots p_{i_k} = 0$ ，其中 $k < n$ 。

为了解出这个方程我们首先作如下变换以去掉非微商项：

$$\Gamma_{as}^{(n)}(\sigma p_i,\lambda,\mu)=\sigma^{4-n}\exp\left[n\int_0^{\lambda}\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}dx\right]F^{(n)}(\sigma p_i,\lambda,\mu)\ 。 \tag{5.25}$$

于是，

$$[\sigma\frac{\partial}{\partial\sigma}-\beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}]F^{(n)}(\sigma p_i,\lambda,\mu)=0\ 。 \tag{5.26}$$

为方便起见，定义 $t=\ln\sigma$ 。于是上述方程变为，

$$[\frac{\partial}{\partial t}-\beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}]F^{(n)}(e^t p_i,\lambda,\mu)=0\ 。 \tag{5.27}$$

进一步我们定义一个“跑动”的耦合常数 $\bar{\lambda}(t,\lambda)$ ，它满足如下方程，

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{\lambda}(t,\lambda)=\beta(\bar{\lambda})\ , \tag{5.28}$$

且有边条件 $\bar{\lambda}(0,\lambda)=\lambda$ 。对方程 5.28 作一下变换，

$$t=\int_{\lambda}^{\bar{\lambda}(t,\lambda)}\frac{dx}{\beta(x)}\ 。$$

两边对 λ 作微商，得

$$0=\frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial\lambda}\frac{1}{\beta(\bar{\lambda})}-\frac{1}{\beta(\lambda)}\ 。 \tag{5.29}$$

于是 5.28 式可改写为，

$$[\frac{\partial}{\partial t}-\beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}]\bar{\lambda}(t,\lambda)=0\ 。 \tag{5.30}$$

于是，如果 $F^{(n)}$ 仅仅是通过 $\bar{\lambda}(t,\lambda)$ 而依赖于 t 和 λ 的，则 $F^{(n)}$ 就是方程 5.27 式的解。于是 $\Gamma_{as}^{(n)}$ 的解具有如下形式：

$$\Gamma_{as}^{(n)}(\sigma p_i,\lambda,\mu)=\sigma^{4-n}\exp\left[n\int_0^{\lambda}\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}dx\right]F^{(n)}(p_i,\bar{\lambda}(t,\lambda),\mu)\ 。 \tag{5.31}$$

由

$$\begin{aligned}\exp\left[n\int_0^{\lambda}\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}dx\right]&=\exp\left[n\int_0^{\bar{\lambda}}\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}dx+n\int_{\bar{\lambda}}^{\lambda}\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}dx\right]\\&=H(\bar{\lambda})\exp\left[-n\int_{\lambda}^{\bar{\lambda}}\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}dx\right]\\&=H(\bar{\lambda})\exp\left[-n\int_0^{t}\gamma(\bar{\lambda}(t',\lambda))dt'\right]\ ,\end{aligned} \tag{5.32}$$

其中

$$H(\bar{\lambda})=\exp\left[n\int_0^{\bar{\lambda}}\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}dx\right]\ 。 \tag{5.33}$$

于是我们得出

$$\Gamma^{(n)}_{as}(\sigma p_i,\lambda,\mu)=\sigma^{4-n}\exp\left[-n\int_0^t\gamma(\bar{\lambda}(t',\lambda))dt'\right]H(\bar{\lambda}(t,\lambda))F^{(n)}(p_i,\bar{\lambda}(t,\lambda),\mu)\ 。 \tag{5.34}$$

如果我们令 $t=0$（ $\sigma=1$ ）则 $H(\bar{\lambda})F^{(n)}(\bar{\lambda})$ 正好是 $\Gamma^{(n)}_{as}$ 。因此，

$$\Gamma^{(n)}_{as}(\sigma p_i,\lambda,\mu)=\sigma^{4-n}\exp\left[-n\int_0^t\gamma(\bar{\lambda}(t',\lambda))dt'\right]\Gamma^{(n)}_{as}(p_i,\bar{\lambda}(t,\lambda),\mu)\ 。 \tag{5.35}$$

令上式中的 $\int_0^t\gamma(\bar{\lambda}(t',\lambda))dt'=\bar{\gamma}t$ 则指数项可以改写为 $\sigma^{-n\bar{\gamma}}$, 这就是为什么 γ 被叫做反常量纲的原因.

作为一个简单的例子, 我们在单圈 $\lambda\phi^4$ 理论中对 5.35 式做一下讨论。由 4.67 、4.72 以及 4.107 诸式的结果，裸的 4 点正规顶角为：

$$\begin{aligned}i\Gamma^{(4)}(p_i,\lambda_0,\mu_0,\Lambda)&=\lambda_0-\frac{\lambda_0^2}{32\pi^2}\int_0^1dx[\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2-x(1-x)\,s}\right)\\&+\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2-x(1-x)\,t}\right)+\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2-x(1-x)\,u}\right)-3]+O(\lambda_0^3)\ 。\end{aligned} \tag{5.36}$$

为使其有限将 $\lambda_0=Z_\lambda Z_\phi^{-2}\lambda$ 带入上面的表达式中并乘以 $Z_\phi^{n/2}$ （ $n=2$ ），得到重整化后的 4 点正规顶角：

$$\begin{aligned}i\Gamma^{(4)}_r(p_i,\lambda,\mu)&=Z_\lambda\lambda-\frac{\lambda^2}{32\pi^2}\int_0^1dx[\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2-x(1-x)\,s}\right)\\&+\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2-x(1-x)\,t}\right)+\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2-x(1-x)\,u}\right)-3]+O(\lambda^3)\ 。\end{aligned} \tag{5.37}$$

不难理解上述表达式实际上并没有任何对具体的减除点的依赖。可以做比如零动量点的减除 $i\Gamma^{(4)}_r(0)\equiv\lambda$ 以确定裸耦合常数及重整化耦合常数之间的关系

$$\lambda=\lambda_0-\frac{3\lambda_0^2}{32\pi^2}(\ln\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2}-1)\ , \tag{5.38}$$

以及 Z_λ

$$Z_\lambda=1+\frac{3\lambda}{32\pi^2}(\ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2}-1)\ ,$$

并由此移去 5.37 式中的明显的 Λ 依赖：

$$\begin{aligned}i\Gamma^{(4)}_r(p_i,\lambda,\mu)&=\lambda+\frac{\lambda^2}{32\pi^2}\int_0^1dx[\ln\left(\frac{\mu^2-x(1-x)\,s}{\mu^2}\right)\\&+\ln\left(\frac{\mu^2-x(1-x)\,t}{\mu^2}\right)+\ln\left(\frac{\mu^2-x(1-x)\,u}{\mu^2}\right)]+O(\lambda^3)\ 。\end{aligned} \tag{5.39}$$

在深度欧氏动量区间 $s,t,u<0$ 且趋于无穷，我们有渐近表达式，

$$\begin{aligned} i\Gamma_r^{(4)}(\sigma p_i,\lambda,\mu) \;\;\rightarrow\;\; & \lambda+\frac{\lambda^2}{32\pi^2}\left[\ln\left(\frac{-s\sigma^2}{\mu^2}\right)+\ln\left(\frac{-t\sigma^2}{\mu^2}\right)+\ln\left(\frac{-u\sigma^2}{\mu^2}\right)\right] \\ & +O(\lambda^2(\frac{\mu^2}{-s\sigma^2})\ln(\frac{\mu^2}{-s\sigma^2}))+\cdots \end{aligned} \tag{5.40}$$

另一方面由跑动耦合常数所满足的重整化群方程 5.28 式的微扰解（ $t=\ln\sigma$ ）

$$\bar{\lambda}(t,\lambda)=\lambda+\frac{3\lambda^2}{16\pi^2}t+O(\lambda^3) \tag{5.41}$$

发现 5.40 式的右边在大 σ 的极限下的确满足 5.35 式：

$$\begin{aligned} i\Gamma^{(4)}(\sigma p_i,\lambda,\mu) \;\;\rightarrow\;\; & \bar{\lambda}(\ln\sigma,\lambda)+\frac{\bar{\lambda}^2(\ln\sigma,\lambda)}{32\pi^2}\left[\ln\left(\frac{-s}{\mu^2}\right)+\ln\left(\frac{-t}{\mu^2}\right)+\ln\left(\frac{-u}{\mu^2}\right)\right]+O(\lambda^3) \\ = \;\; & i\Gamma_r^{(4)}(p_i,\bar{\lambda}(\ln\sigma,\lambda),\mu)+O(\lambda^3)\ . \end{aligned} \tag{5.42}$$

由 5.35 式得知，这个式子两边都应理解为 $p_i^2>>\mu^2$ 时的渐近格林函数。

§5.3 变化的标度

§5.3.1 任意动量减除方案下的重整化群方程

在 5.1 节中给出的重整化群方程是对于固定减除点后的重整化正规顶角建立的。然而从 4.2.2 一节的讨论我们得知，减除点的选取完全可以是任意的，这在重整化后的格林函数中引入了一个任意的标度 ν 。重整化后的耦合常数和质量依赖于 ν 。从这个观察出发我们可以建立另一个版本的重整化群方程。

考虑到用 ν 来表示的减除点的存在，重整化前和后的正规顶角之间的关系是：

$$\Gamma^{(n)}(p_i;\lambda_0,\mu_0,\Lambda)=Z_\phi^{-n/2}(\nu)\Gamma_r^{(n)}(p_i;\lambda(\nu),\mu(\nu),\nu)\ . \tag{5.43}$$

等式的右边明显的依赖于 ν ，也通过 λ ， μ 依赖于 ν 。由于左边裸的正规顶角与 ν 无关，我们得出，

$$[\nu\frac{\partial}{\partial\nu}+\beta\frac{\partial}{\partial\lambda}+\gamma_m\mu\frac{\partial}{\partial\mu}-n\gamma]\Gamma_r^{(n)}=0\ , \tag{5.44}$$

对于一般的减除方案来说，

$$\begin{aligned} \beta(\lambda,\mu/\nu) &= \nu\frac{\partial}{\partial\nu}\lambda\ , \\ \gamma_m(\lambda,\mu/\nu) &= \nu\frac{\partial}{\partial\nu}\ln\mu\ , \\ \gamma(\lambda,\mu/\nu) &= \frac{1}{2}\nu\frac{\partial}{\partial\nu}\ln\ Z_\phi\ , \end{aligned} \tag{5.45}$$

其中的 β 函数是两个自变量的函数，求解一般来说不容易。但是如果选取标度 $\nu >> \mu$ 则可以忽略 β 函数对质量的依赖性。下面我们仍以单圈的 $\lambda\phi^4$ 理论为例来讨论有关的问题。

在 5.39 式中的重整化耦合常数 λ 是定义在零减除动量处的。但是正如我们曾反复强调过的，耦合常数可以在任意动量标度定义。比如，由 5.37 式可以在 $s = t = u = -\nu^2$ 处定义耦合常数：

$$Z_\lambda = 1 + \frac{3\lambda_\nu}{32\pi^2}[\int_0^1 dx \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2 + x(1-x)\nu^2}\right) - 1] \ .$$

带回 5.37 式得重整化后的 4 点正规顶角为：

$$\begin{aligned} i\Gamma_r^{(4)}(p_i, \lambda, \mu, \nu) = \lambda_\nu + \frac{\lambda_\nu^2}{32\pi^2}\int_0^1 dx[\ln\left(\frac{\mu^2 - x(1-x)\,s}{\mu^2 + x(1-x)\nu^2}\right) \\ + \ln\left(\frac{\mu^2 - x(1-x)\,t}{\mu^2 + x(1-x)\nu^2}\right) + \ln\left(\frac{\mu^2 - x(1-x)\,u}{\mu^2 + x(1-x)\nu^2}\right)] + O(\lambda^3) \end{aligned} \tag{5.46}$$

而 λ_ν 与裸的耦合常数之间的关系是

$$\lambda_\nu = \lambda_0 - \frac{3\lambda_0^2}{32\pi^2}[\int_0^1 dx \ \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2 + \nu^2 x(1-x)}\right) - 1] \ , \tag{5.47}$$

与普通的重整化常数（ 5.38 式）之间的关系是

$$\lambda_\nu = \lambda + \frac{3\lambda^2}{32\pi^2}\int_0^1 dx \ \ln\left(\frac{\mu^2 + \nu^2 x(1-x)}{\mu^2}\right) + O(\lambda^3) \ . \tag{5.48}$$

类似的从随标度变化的重整化耦合常数的定义式出发可以得到

$$\lambda_{\nu'} = \lambda_\nu + \frac{3\lambda_\nu^2}{32\pi^2}\int_0^1 dx \ \ln\left(\frac{\mu^2 + \nu'^2 x(1-x)}{\mu^2 + \nu^2 x(1-x)}\right) + O(\lambda_\nu^3) \ . \tag{5.49}$$

更一般的考虑，利用量纲分析可以把不同标度之间的重整化常数之间的关系写成：

$$\lambda_{\nu'} = G(\lambda_\nu, \frac{\nu'}{\nu}, \frac{\mu}{\nu}) \ . \tag{5.50}$$

在上式中对 ν' 作微商后令 $\nu' = \nu$ 。

$$\nu\frac{d}{d\nu}\lambda(\nu) = \beta(\lambda_\nu, \frac{\mu}{\nu}) = \frac{\partial}{\partial z}[G(\lambda_\nu, z, \frac{\mu}{\nu})]|_{z=1} \tag{5.51}$$

从 5.49 出发可以计算出 $\beta(\lambda, \mu/\nu)$

$$\beta(\lambda, \frac{\mu}{\nu}) = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2}\int_0^1 dx \frac{\nu^2 x(1-x)}{\mu^2 + \nu^2 x(1-x)} + O(\lambda^3) \ . \tag{5.52}$$

在 $\mu/\nu \to 0$ 时，

$$\beta(\lambda, 0) = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} + O(\lambda^3) \tag{5.53}$$

与 5.19 式的结果一致。

利用最小减除方案， β 函数的明显的质量依赖关系可以去掉。在 5.4 节中我们将讨论这一方法。

§5.3.2 重整化质量与任意动量减除点的关系

在上一小节中我们指出在动量减除方案中，重整化质量一般来说依赖于动量减除点，后者由一个标度 ν 来标记。在维数正规化和最小减除方案中，重整化质量与重整化标度有依赖关系这一点是较为清楚地。然而对于动量减除方案，在第 4 章中我们的讨论一般是在固定的减除点（比如说是在 $p^2 = 0$ 处）进行的。因此有必要对重整化质量对任意减除点的依赖关系作进一步的说明。

首先，出现在拉氏量中的裸质量参数， μ_0^2 与重整化质量 μ^2 的关系是

$$\mu_0^2 = \mu^2 - \delta\mu^2 \ , \tag{5.54}$$

这对于任意的动量减除点都是对的。把它带入重整化的传播子中，有

$$\triangle_r(p^2) = Z_\phi^{-1} \frac{1}{p^2 - \mu^2 + \delta\mu^2 - \Sigma(p^2, \mu^2)} \ , \tag{5.55}$$

这里我们写出了（裸的）自能函数与重整化质量的依赖关系 $\Sigma = \Sigma(p^2, \mu^2)$ ，因为 μ^2 出现在自能函数中出现的传播子中。现在我们写出 5.55 式在任意减除动量处的重整化条件：

$$\triangle_r^{-1}(p^2)|_{p^2=\nu^2} = -\mu^2 \ , \ \frac{\partial \triangle_r^{-1}(p^2)}{\partial p^2}|_{p^2=\nu^2} = -1 \ , \tag{5.56}$$

并把 $\Sigma(p^2)$ 在 $p^2 = \nu^2$ 处展开：

$$\Sigma(p^2) = \Sigma(\nu^2) + \Sigma'(\nu^2)(p^2 - \nu^2) + \tilde{\Sigma}(p^2) \ , \tag{5.57}$$

其中 $\tilde{\Sigma}(p^2)$ 是 p^2, μ^2, ν^2 的函数且 $\tilde{\Sigma}(p^2 = \nu^2) = 0$ 。将 5.57 式代入 5.55 式，由条件 5.56 式得出

$$\begin{aligned} \delta\mu^2 &= -\nu^2 + \Sigma(\nu^2) + \mu^2\Sigma'(\nu^2) \ , \\ Z_\phi^{-1} &= 1 - \Sigma'(\nu^2) \ 。 \end{aligned} \tag{5.58}$$

这导致

$$i\triangle_r = \frac{i}{p^2 - \mu^2 - \nu^2 - \tilde{\Sigma}(p^2)} \ 。 \tag{5.59}$$

现在来讨论 μ^2 和 ν^2 的关系。表面上看起来在上式中的 μ^2 和 ν^2 似乎都是不相关的参数，但实际上它们由物理质量 m^2 而相关连。后者是理论本身不能确定的，也不依赖于 μ^2 或 ν^2 的不同选取而改变，只能作为实验值输入。物理质量由于是传播子的极点，满足如下的方程：[2]

$$m^2 - \mu^2 - \nu^2 - \tilde{\Sigma}(m^2, \mu^2, \nu^2) = 0 \ 。 \tag{5.60}$$

这个方程决定了 $\mu^2 = \mu^2(m^2, \nu^2)$，即重整化质量对于动量减除点的依赖关系。方程 5.60 式代入 5.59 式，可得

$$i\triangle_r = \frac{i}{(p^2 - m^2)(1 - \Sigma'(m^2) + \Sigma'(\nu^2))} \ 。 \tag{5.61}$$

即任意动量减除点的重整化与质壳重整化之间只差一个有限的波函数重整化因子 $Z'_\phi = Z_\phi(\nu^2)/Z_\phi(m^2)$ 。

§5.4 质量无关重整化方案中的重整化群方程

在维数正规化的最小减除方案中，重整化群方程中各项系数的对于质量量纲的依赖性消失。由 4.107 、 4.111 式得到

$$\begin{aligned} i\Gamma^{(4)}(p_i, \lambda_0, \mu_0) &= \lambda_0 - \frac{\lambda_0^2}{32\pi^2}\{3\Gamma(\epsilon)(4\pi)^\epsilon - \int_0^1 dx\{\ln\left(\mu^2 - x(1-x)s\right) \\ &\quad + \ln\left(\mu^2 - x(1-x)t\right) + \ln\left(\mu^2 - x(1-x)u\right)\} \ 。 \end{aligned} \tag{5.62}$$

利用关系式

$$\lambda_0 = \nu^{2\epsilon}[\lambda + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\lambda)\epsilon^{-n}] \ , \tag{5.63}$$

$$\mu_0 = \mu[1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\lambda)\epsilon^{-n}] \ , \tag{5.64}$$

$$\phi_0 = \phi[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\lambda)\epsilon^{-n}] \equiv \phi Z_\phi^{1/2} \ 。 \tag{5.65}$$

中的第一式即

$$\lambda_0 = \nu^{2\epsilon}\bar{Z}_\lambda\lambda = \nu^{2\epsilon}(1 + \frac{3\lambda}{32\pi^2}\frac{1}{\epsilon})\lambda = \nu^{2\epsilon}(\lambda + \frac{3\lambda^2}{32\pi^2}\frac{1}{\epsilon})$$

[2]这里为了简化讨论起见假设物理极点不落在复平面上。否则可以用 line shape 质量来讨论，方程中相应的 $\tilde{\Sigma}$ 应换为 $\mathrm{Re}\tilde{\Sigma}$ 。

带回到 5.62 式，到 $O(\lambda^2)$ 阶，有（为简化表达式起见，这里借用了 $\overline{MS}$ 方案的表达式）

$$\begin{aligned} i\Gamma_r^{(4)}(p_i,\lambda,\mu,\nu) &= \lambda+\frac{\lambda^2}{32\pi^2}\{\int_0^1 dx\{\ln\left(\frac{\mu^2-x(1-x)s}{\nu^2}\right) \\ &\quad +\ln\left(\frac{\mu^2-x(1-x)t}{\nu^2}\right)+\ln\left(\frac{\mu^2-x(1-x)u}{\nu^2}\right)\}\ 。 \end{aligned} \tag{5.66}$$

回到 5.63 式，由于裸的耦合常数 λ_0 与 ν（或减除动量）无关，对 5.63 式两边作微商得到，

$$\epsilon\lambda+(a_1+\nu^2\frac{\partial\lambda}{\partial\nu^2})+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\epsilon^n}[\frac{\partial a_n}{\partial\lambda}\nu^2\frac{\partial\lambda}{\partial\nu^2}+a_{n+1}]=0\ 。 \tag{5.67}$$

裸耦合常数 $\lambda_0(d)$ 和空间维数的依赖关系可以是任意的，唯一的要求是要把物理振幅中 $d=4$ 处的极点消掉。我们可以要求重整化耦合常数 $\lambda=\lambda(\nu,d)$ 不仅仅对于 $d=4$，而且对任意的维数 d 都是解析的。比如可取为 ϵ 的有限阶多项式而限制住对 d 的任意依赖性。 5.67 式可以看成是关于 λ 和 ϵ 的二重级数展开。把 $\nu^2\frac{\partial\lambda}{\partial\nu^2}$ 在 $\epsilon=0$ 附近作展开，

$$\nu^2\frac{\partial\lambda}{\partial\nu^2}=d_0+d_1\epsilon+d_2\epsilon^2+\cdots\ 。 \tag{5.68}$$

显然对于 $n>1$ 可以取所有的 $d_n=0$。将上式带入 5.67 式得到

$$\epsilon(\lambda+d_1)+(a_1+d_0+d_1\frac{da_1}{d\lambda})+\sum_n[a_{n+1}+d_0\frac{da_n}{d\lambda}+d_1\frac{da_{n+1}}{d\lambda}]\frac{1}{\epsilon^n}=0\ , \tag{5.69}$$

即

$$\begin{aligned} &\lambda+d_1=0 \\ &a_1+d_1\frac{da_1}{d\lambda}=-d_0 \\ &(1+d_1\frac{d}{d\lambda})a_{n+1}=-d_0\frac{da_n}{d\lambda}\ 。 \end{aligned} \tag{5.70}$$

于是

$$\nu^2\frac{\partial\lambda}{\partial\nu^2}=-a_1+\lambda\frac{da_1}{d\lambda}-\lambda\epsilon\ , \tag{5.71}$$

或者

$$\beta(\lambda)=-2a_1+2\lambda\frac{da_1}{d\lambda}\ 。 \tag{5.72}$$

类似地从 5.64 式得出，

$$\gamma_m = \nu\frac{\partial\ln\mu}{\partial\nu}=2\lambda\frac{db_1}{d\lambda} \tag{5.73}$$

$$\lambda\frac{db_{n+1}}{d\lambda} = b_n\lambda\frac{db_1}{d\lambda}-\frac{db_n}{d\lambda}(1-\lambda\frac{d}{d\lambda})a_1(\lambda)\ ; \tag{5.74}$$

从 5.65 式得到,

$$\gamma = \frac{1}{2}\nu\frac{d\ln Z_\phi}{\partial\nu} = 2\lambda\frac{dc_1}{d\lambda} \tag{5.75}$$

$$\lambda\frac{dc_{n+1}}{d\lambda} = c_n\lambda\frac{dc_1}{d\lambda} - \frac{dc_n}{d\lambda}(1-\lambda\frac{d}{d\lambda})a_1(\lambda)\ 。 \tag{5.76}$$

上面这些方程使得我们可以仅仅从单极点的留数来计算 β， γ_m 和 γ。同时利用递推关系可以从单极点的留数得到高阶极点的留数。利用 $\lambda_0 = Z_\phi^{-2}Z_\lambda\lambda$， $Z_\phi = 1$ 以及 $Z_\lambda\lambda = \lambda - 3i\Gamma(0) = \lambda + \frac{3\lambda^2}{32\pi^2}\frac{1}{\epsilon}$ 得到 $a_1 = \frac{3\lambda^2}{32\pi^2}$， $\lambda\frac{d}{d\lambda}a_1 = 2a_1$ 于是

$$\beta(\lambda) = 2a_1 = \frac{3}{16\pi^2}\lambda^2\ 。 \tag{5.77}$$

类似的，由 4.110 式得到， $\mu_0^2 = \mu^2 - \delta\mu^2 = \mu^2 - \Sigma(0) = \mu^2(1+\frac{\lambda}{32\pi^2}\frac{1}{\epsilon})$。所以有,

$$\gamma_m = \frac{\lambda}{32\pi^2}\ 。 \tag{5.78}$$

而 $\gamma = O(\lambda^2)$。

从上面的讨论得知，为计算 β、 γ_m 和 γ 只需计算 $\frac{1}{\epsilon}$ 极点的流数 a_1、 b_1 和 c_1 即可。更进一步由 $a_1 \sim \frac{3}{32\pi^2}\lambda^2 + O(\lambda^3)$，利用递推关系 5.70 式等，还可以算出比如 $1/\epsilon^n$ 阶极点的系数 $a_n \sim c\lambda^{n+1} + O(\lambda^{n+2})$。那么这些计算的意义是什么呢？我们这里仅仅简单的指出这种计算相应于在作辐射修正时对于领头的对数项 $(\lambda\ln(p^2/\mu^2))^n$ 进行求和。详细的讨论请参阅有关文献。

由于 β， γ， γ_m 在质量无关的重整化方案中只依赖于 λ，这使得方程 5.44 式的解变得容易。可以把方程 5.44 式改写为,

$$[\sigma\frac{\partial}{\partial\sigma} - \beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda} - (\gamma_m - 1)\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + n\gamma(\lambda) + (n-4)]\Gamma_r^{(n)}(\sigma p_i, \mu, \lambda, \nu) = 0\ 。 \tag{5.79}$$

在这里我们除了引入跑动耦合常数以外，还引进跑动质量的概念:

$$\frac{d\bar\lambda(t)}{dt} = \beta(\bar\lambda)\ ,$$
$$\frac{d\bar\mu(t)}{dt} = [\gamma_m - 1]\bar\mu(t)\ 。 \tag{5.80}$$

其边界条件是,

$$\bar\lambda(t=0) = \lambda\ ,$$
$$\bar\mu(t=0) = \mu\ 。 \tag{5.81}$$

形式上关于跑动质量的方程的解为,

$$\bar\mu(t) = \mu e^{-t}\exp\{\int_0^t dt'\gamma_m(\bar\lambda(t'))\}\ 。 \tag{5.82}$$

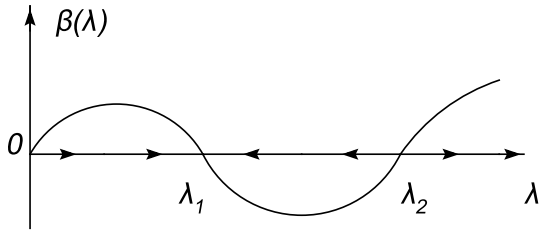


图 5.2: 跑动耦合常数的红外（ 0 ， λ_2 ）与紫外（ λ_1 ）固定点，箭头方向表示当动量增加时 λ 的值的趋向。

方程 5.79 式的解如下，

$$\Gamma_r^{(n)}(\sigma p_i, \mu, \lambda, \nu) = \sigma^{4-n} \exp\left[-n \int_0^t \gamma(\bar{\lambda}(t'))dt'\right] \Gamma_r^{(n)}(p_i, \bar{\mu}(t), \lambda(t), \nu) \ 。 \tag{5.83}$$

有效或者跑动耦合常数是一个重要的概念。$\bar{\lambda}$ 的随能量的变化由 β 函数决定。以图 5.2 为例， β 函数为零的点 0 、 λ_1 、 λ_2 叫做固定点，且 λ_1 是紫外固定点，0 、 λ_2 是红外固定点。

可以利用 β 函数的性质来研究 Callan–Symanzik 方程的渐近行为。假设 $0 < \lambda < \lambda_2$ 。于是

$$\lim_{t\to\infty} \bar{\lambda}(t, \lambda) = \lambda_1$$

并且在 $t \to \infty$ 时

$$\Gamma_{as}^{(n)}(p_i, \bar{\lambda}(t, \lambda), \mu) \to \Gamma_{as}^{(n)}(p_i, \lambda_1, \mu) \ 。 \tag{5.84}$$

假设 β 在 $\lambda = \lambda_1$ 时是一个简单零点。于是在 λ_1 附近 $\beta(\lambda) \simeq a(\lambda_1 - \lambda)$ 且 $a > 0$ 。由 $d\bar{\lambda}/dt = a(\lambda_1 - \lambda)$ 推出 $\bar{\lambda} = \lambda_1 + (\lambda - \lambda_1)e^{-at}$ 。于是

$$\begin{aligned} \int_0^t \gamma(\bar{\lambda}(x, \lambda))dx &= \int_\lambda^{\bar{\lambda}} \frac{\gamma(y)dy}{\beta(y)} \simeq \frac{-\gamma(\lambda_1)}{a} \ln\left(\frac{\bar{\lambda} - \lambda_1}{\lambda - \lambda_1}\right) \\ &= \gamma(\lambda_1)t = \gamma(\lambda_1) \ln \sigma \ 。 \end{aligned} \tag{5.85}$$

于是

$$\lim_{\sigma\to\infty} \Gamma_{as}^{(n)}(\sigma p_i, \lambda, \mu) = \sigma^{4-n[1+\gamma(\lambda_1)]} \Gamma_{as}^{(n)}(p_i, \lambda_1, \mu) \ 。 \tag{5.86}$$

这指出在深度欧氏区域场具有反常量纲 $\gamma(\lambda_1)$ 。并且格林函数中 λ 变为 λ_1 。

轻子与质子的深度非弹实验揭示出在深度欧氏区间强相互作用变得很弱。也就是说， $\lambda = 0$ 应该是强作用理论的紫外固定点，这要求当 $\lambda > 0$ 时 $\beta < 0$ 。这样的理论叫做渐近自由的。显然 $\lambda\phi^4$ 理论不是渐近自由的。事实上由

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \ , \tag{5.87}$$

得到解

$$\lambda(\nu) = \frac{\lambda(\nu_0)}{1 - \frac{3\lambda(\nu_0)}{16\pi^2} \ln \frac{\nu}{\nu_0}} \text{。} \tag{5.88}$$

如果这一方程的解在任意标度都对，则我们得出在 $t = \frac{16\pi^2}{3\lambda}$ 时耦合常数发散。这一现象叫做 Landau 奇点。

第六章　自发破缺的 $\lambda\phi^4$ 理论和有效势

§6.1　有效势

在 3.4 节中我们引入了正规顶角的概念。对于连通格林函数的生成泛函：

$$W[J]=\sum_n\frac{1}{n!}\int d^4x_1\cdots d^4x_nG_c^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)J(x_1)\cdots J(x_n)\ 。\tag{6.1}$$

我们定义一个经典场量 ϕ_c 为场算符 ϕ 在有外源时的真空期望值：

$$\phi_c(x)=\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}=\left[\frac{<0|\phi(x)|0>}{<0|0>}\right]_J\ 。\tag{6.2}$$

如果在外源 $J=0$ 时 ϕ 场的真空期望值不为零则利用 S 矩阵元与格林函数的关系可知真空态可以辐射出一个单粒子态。因此真空是不稳定的。此时，正如我们在 6.2 节中所讨论的，需要重新定义真空。为此我们需要重新审视有效作用量并引入有效势的概念。

有效作用量 $\Gamma(\phi_c)$ 的定义是 $W[J]$ 的泛函的 Legendre 变换：

$$\Gamma(\phi_c)=W[J]-\int d^4xJ(x)\phi_c(x)\ ,\tag{6.3}$$

其中的 $J(x)$ 理解为由 6.2 式反解出来。由 6.3 式得出

$$\frac{\delta\Gamma(\phi_c)}{\delta\phi_c(x)}=\int d^4y\frac{\delta W[J]}{\delta J(y)}\frac{\delta J[y]}{\delta\phi_c(x)}-\int d^4y\frac{\delta J(y)}{\delta\phi_c(x)}\phi_c(y)-J(x)=-J(x)\ 。\tag{6.4}$$

我们可以将有效作用量 $\Gamma(\phi_c)$ 按 ϕ_c 作展开，

$$\Gamma(\phi_c(x))=\sum_n\frac{1}{n!}\int d^4x_1\cdots d^4x_n\Gamma^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)\phi_c(x_1)\cdots\phi_c(x_n)\ 。\tag{6.5}$$

由 6.5 式定义的 **有效作用量**（ effective action ） $\Gamma(\phi_c)$ 是 $\phi_c(x)$ 的泛函。利用平移不变性得，

$$\begin{aligned}\Gamma^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)\ &=\ \int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\cdots\frac{d^4k_n}{(2\pi)^4}(2\pi)^4\delta^4(k_1+\cdots+k_n)\\&\quad\times e^{ik_1\cdot x_1+\cdots ik_n\cdot x_n}\tilde{\Gamma}^{(n)}(k_1,\cdots,k_n)\ 。\end{aligned}\tag{6.6}$$

6.5 式可以在动量空间中写出来，

$$\begin{aligned}\Gamma(\tilde{\phi}_c(k))\ &=\ \sum_n\frac{1}{n!}\int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\cdots\frac{d^4k_n}{(2\pi)^4}(2\pi)^4\delta^4(k_1+\cdots+k_n)\tilde{\Gamma}^{(n)}(k_1,\cdots,k_n)\\&\quad\times\tilde{\phi}_c(k_1)\cdots\tilde{\phi}_c(k_n)\ ,\end{aligned}\tag{6.7}$$

其中

$$\tilde{\phi_c}(k) = \int d^4x e^{ik\cdot x}\phi_c(x) \ 。 \tag{6.8}$$

如果取 $\phi_c(x)$ 为一常数，则泛函关系 $\Gamma(\phi(x))$ 退化为一函数关系。由 6.6 式可以得到

$$\int d^4x_1 \cdots \int d^4x_n \Gamma^{(n)}(x_1, \cdots, x_n) = (2\pi)^4\delta^4(0)\tilde{\Gamma}^{(n)}(0, \cdots, 0) \ , \tag{6.9}$$

将其带入 6.5 式得到

$$\Gamma(\phi_c) = (2\pi)^4\delta^4(0)\sum_n \frac{1}{n!}\Gamma^{(n)}(0, \cdots, 0)\phi_c^n \equiv -(2\pi)^4\delta^4(0)V(\phi_c) \ 。 \tag{6.10}$$

其中给出了 有效势（ effective potential ）的定义：

$$V(\phi_c) = -\sum_n \frac{1}{n!}\Gamma^{(n)}(0, \cdots, 0)\phi_c^n \ 。 \tag{6.11}$$

即有效势为零动量正规顶角的生成函数。其重整化由微扰论中的重整化条件决定。比如在普通的 $\lambda\phi^4$ 理论中我们可以定义重整化质量为

$$\Gamma^{(2)}(0) = -\mu^2 \ , \tag{6.12}$$

于是有

$$\mu^2 = \frac{d^2V(\phi_c)}{d\phi_c^2}|_{\phi_c=0} \tag{6.13}$$

又比如可以如下定义重整化后的耦合常数：

$$\Gamma^{(4)}(0) = -\lambda \ 。 \tag{6.14}$$

于是

$$\lambda = \frac{d^4V}{d\phi_c^4}|_{\phi_c=0} \ 。 \tag{6.15}$$

类似地，标准的波函数重整化条件可写为

$$Z(\phi_c)|_{\phi_c=0} = 1 \tag{6.16}$$

考虑自发破缺的理论。自发破缺是由于在外源为零时场 ϕ 具有非零的 真空期望值（ VEV ），即

$$\frac{\delta\Gamma(\phi_c)}{\delta\phi_c} = 0 \tag{6.17}$$

具有 $\phi_c \neq 0$ 的解。一般地我们仅对具有平移不变性的 ϕ_c 的解感兴趣，上一个方程与

$$\frac{dV(\phi_c)}{d\phi_c} = 0 \ 。 \ (\phi_c \neq 0) \tag{6.18}$$

完全等价。与经典力学类比， 6.18 式中的 $V(\phi_c)$ 具有势函数的性质，这就是其叫做有效势的原因。

§6.2 自发破缺的 $\lambda\phi^4$ 理论

在 8.3 节中我们已经讨论了（连续的）对称性自发破缺的概念。对应着这一概念存在着所谓的 Goldstone 定理。为简单起见我们下面首先讨论一个实标量场的 $\lambda\phi^4$ 理论：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4 \ 。 \tag{6.19}$$

这个拉氏量具有一个分离对称性： $\phi \leftrightarrow -\phi$ 。但如果 $\mu^2 > 0$ 则此对称性自发破缺，因为 ϕ 场产生一个 VEV ，

$$< 0|\phi|0 >= v \ , \ \ v = \left(\frac{\mu^2}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \ 。 \tag{6.20}$$

在这个真空附近作微扰我们把场做平移 $\phi' = \phi - v$ ，于是势 $V(\phi)$ 变为

$$V(\phi) = \mu^2\phi'^2 + \lambda v\phi'^3 + \frac{\lambda}{4}\phi'^4 \ 。 \tag{6.21}$$

它对应着一个质量为 $m^2 = 2\mu^2$ 的场并且有三点相互作用顶角 $-6i\lambda v$ 和四点顶角 $-6i\lambda$ 。下面我们讨论在单圈水平上这样的一个理论的重整化。

1 ）一点函数，又叫做蝌蚪（ tadpole ）图，见图 6.1 。

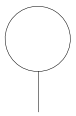


图 6.1:

$$\begin{aligned} T &= (-6i\lambda v)\frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2 - 2\mu^2} \\ &\equiv -3i\lambda v I_2 \ 。 \end{aligned} \tag{6.22}$$

为了消除这一发散我们需要在抵消项拉氏量中引入一项 $-D\phi$ ，且 $D = -3\lambda v I_2$ 。

2 ）两点函数（图 6.2 ）



图 6.2:

$$\begin{aligned}\Sigma_a(0) &= (-6i\lambda)\frac{1}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2-2\mu^2} = -3i\lambda I_2\\ \Sigma_b(0) &= (-6i\lambda)^2\frac{1}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(\frac{i}{k^2-2\mu^2}\right)^2 \equiv 18i\lambda^2v^2I_4\ ,\end{aligned}\tag{6.23}$$

其中

$$I_4 = i\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(\frac{i}{k^2-2\mu^2}\right)^2\ 。\tag{6.24}$$

于是

$$\Sigma(0) = \Sigma_a(0)+\Sigma_b(0) = -3i\lambda I_2 + 18i\lambda^2v^2I_4\ 。\tag{6.25}$$

这导致一个抵消项 $-A\phi^2$ 且

$$A = -\frac{3}{2}\lambda I_2 + 9\lambda^2v^2I_4\ 。\tag{6.26}$$

3 ）三点函数（图 6.3 ）

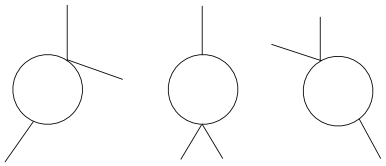


图 6.3:

$$\begin{aligned}\Gamma_3(0) &= 3(-6i\lambda v)(-6i\lambda)\frac{1}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(\frac{i}{k^2-2\mu^2}\right)^2\\ &= 54i\lambda^2vI_4\ 。\end{aligned}\tag{6.27}$$

于是需要一个抵消项 $-B\phi^3$ 且

$$B = -\frac{i}{3!}54i\lambda^2vI_4 = 9\lambda^2vI_4\ 。\tag{6.28}$$

4 ）四点函数（图 6.4 ）

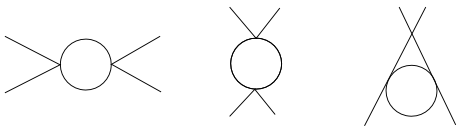


图 6.4:

$$\Gamma_4(0) = 3(-6i\lambda)^2\frac{1}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(\frac{i}{k^2-2\mu^2}\right)^2 = 54i\lambda^2I_4\ 。\tag{6.29}$$

这产生抵消项 $-\frac{1}{4}C\phi^4$ 且

$$C = 9\lambda^2 I_4 \ 。 \tag{6.30}$$

因此单圈抵消项为

$$\delta V(\phi) = A\phi^2 + B\phi^3 + \frac{C}{4}\phi^4 + D\phi \ 。 \tag{6.31}$$

且单圈时的有效势为

$$V_{1--loop}(\phi') = V(\phi') + \delta V(\phi') = (\mu^2 + A)\phi'^2 + (\lambda v + B)\phi'^3 + \frac{1}{4}(\lambda + C)\phi'^4 + D\phi' \ 。 \tag{6.32}$$

在单圈时 VEV 也会有移动 $v \to v + \delta v$ ，由方程

$$\frac{\delta V(\phi')}{\delta \phi'}|_{\phi'=\delta v} = 0 \tag{6.33}$$

决定。忽略掉 δv 的高阶项我们得到 $2(\mu^2 + A)\delta v + D = 0$ 。也就是说

$$\delta v = -\frac{D}{2(\mu^2 + A)} \simeq -\frac{D}{2\mu^2} \ 。$$

可以通过继续对 ϕ 场作平移来重新定义场

$$\phi'' = \phi' - \delta v \tag{6.34}$$

以保持在单圈水平上场的 VEV 仍为零：

$$< \phi'' >= 0 \ 。 \tag{6.35}$$

用 ϕ'' 场来表示的有效势为

$$V_1(\phi'' + \delta v) = a\phi''^2 + b\phi''^3 + \frac{c}{4}\phi''^4 \ 。 \tag{6.36}$$

很容易将 a 、 b 、 c 的具体表达式写出来，并且证明（只保留 δv 的最低阶）

$$b^2 - ac = 0 \ 。 \tag{6.37}$$

最后这个方程的意义是，

$$V_1(\phi') = V_1(\phi'' + \delta v) = \frac{1}{4}\frac{a^2}{c} - \frac{a}{2}(\phi'' + \sqrt{\frac{a}{c}})^2 + \frac{c}{4}(\phi'' + \sqrt{\frac{a}{c}})^4 \ 。 \tag{6.38}$$

也就是说，虽然从表面上看 6.36 式似乎没有，但 6.38 式却揭示了在做了重整化后，原始拉氏量的反演对称性，即使有抵消项 6.31 式，对于场 $\phi = \phi'' + \sqrt{\frac{a}{c}}$ 仍然保持。这一结论是重要的且具有一般性： *自发破缺的理论仍然具有对称理论的对称性* 。这一性质在保证自发破缺理论的可重整性方面具有重要意义。

在上面的模型中自发破缺的只是一个分离对称性 $\phi \to -\phi$ 。更有物理意义的例子是一个连续对称性自发破缺的例子。比如在 8.57 节中讨论的线性 σ 模型。可以在单圈水平上很容易看出，由 tadpole 方程 6.35 式决定的 VEV 可以保证 π 介子仍然保持无质量： $m_\pi^2 = 0$ ，而后者一般地由 Goldstone 定理所保证的。

§6.3 按圈图展开、有效势的单圈修正 *

这一节我们讨论有效势的量子修正。一般来说，量子修正是按照耦合常数的展开进行的。在这里我们将按照圈图展开来做量子修正的计算。圈图展开等价于按照 *Planck* 常数 $\hbar$ 进行展开。为看清这一点，对于任意一个费曼图，我们首先给出如下关系：

$$L = I - (V - 1) \ , \tag{6.39}$$

其中 L 是圈数， I 是内线数目， V 是顶角数目。由于每一个内线对应着一个传播子，由正则对易关系知，它提供一个 $\hbar$ 因子，而每一个相互作用顶点提供一个 $\hbar^{-1}$ 因子。所以一个费曼图所对应的 $\hbar$ 的幂次 P 为

$$P = I - V = L - 1 \ 。 \tag{6.40}$$

这就证明了按圈图展开等价于按 Planck 常数的展开。如果拉氏量仅有一种顶角，则对于固定外腿数的费曼图，按圈图展开和按耦合常数展开都等价于按 Planck 常数进行展开。比如对于 $\lambda\phi^4$ 理论，我们有

$$4V = E + 2I$$

由其给出

$$V = \frac{1}{2}E - L + 1 \ 。 \tag{6.41}$$

下面我们讨论 $\lambda\phi^4$ 理论中有效势的单圈修正，如图 6.5 所示。首先讨论 $\mu^2 > 0$

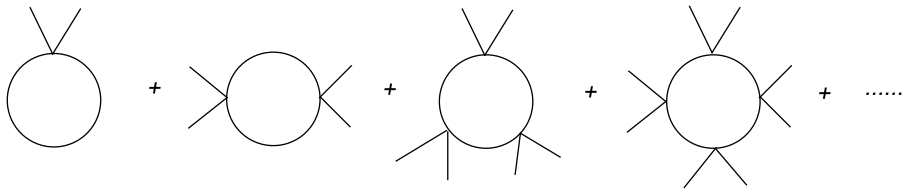


图 6.5:

的情况。 1PI 格林函数为

$$\Gamma^{(2n)}(0, \cdots, 0) = iS_n \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[(-i\lambda) \frac{i}{k^2 - \mu^2} \right]^n \ , \tag{6.42}$$

其中 S_n 是对称因子，

$$S_n = \frac{(2n)!}{2^n 2n} \ 。 \tag{6.43}$$

对 S_n 可以如下理解：

1. 首先，对于标号为 1, 2, $\cdots$,2n 个外腿，它可以有任意排列 $i_1, i_2, \cdots, i_{2n}$ ，这一共有 $(2n)!$ 种可能性。
2. 但是在上面的排列中每一对 $i_{2k-1}i_{2k}$ 变为 $i_{2k}i_{2k-1}$ 时不变，所以给出因子 $1/2^n$ 。
3. 轮换对称性给出因子 $1/n$ 。
4. 反射对称性给出因子 $1/2$ ，所以推出 $S_n = \frac{(2n)!}{2^n 2n}$ 。

到单圈的有效势因此为，

$$\begin{aligned} V(\phi_c) &= \frac{1}{2}\mu^2\phi_c^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi_c^4 + i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\left[\frac{(\lambda/2)\phi_c^2}{k^2-\mu^2+i\epsilon}\right]^n \\ &= \frac{1}{2}\mu^2\phi_c^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi_c^4 + \frac{i}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ln\left[1+\frac{\lambda\phi^2/2}{k^2-\mu^2+i\epsilon}\right] 。 \end{aligned} \tag{6.44}$$

这个积分是发散的，为了使其有限，把积分动量截断。得到，

$$\begin{aligned} V(\phi_c) &= \frac{1}{2}\mu^2\phi_c^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi_c^4 + \frac{\Lambda^2}{32\pi^2}(\mu^2+\frac{\lambda}{2}\phi_c^2) \\ &\quad + \frac{1}{64\pi^2}(\mu^2+\frac{\lambda}{2}\phi_c^2)^2\left[\ln\left(\frac{\mu^2+\lambda\phi_c^2/2+i\epsilon}{\Lambda^2}\right)-\frac{1}{2}\right] \end{aligned} \tag{6.45}$$

在上式中出现的 $\mu^2+\lambda\phi_c^2/2$ 是从如下的求和得来的：

$$\frac{1}{k^2-\mu^2} + \frac{1}{k^2-\mu^2}\frac{1}{2}\lambda\phi_c^2\frac{1}{k^2-\mu^2} + \cdots = \frac{1}{k^2-(\mu^2+\lambda\phi_c^2/2)} 。 \tag{6.46}$$

为了消去 6.45 式对截断的依赖我们引入如下的抵消项：

$$V_{c.t.}(\phi_c) = \frac{A}{2}\phi_c^2 + \frac{B}{4!}\phi_c^4 , \tag{6.47}$$

以使重整化后的有效势

$$V_r(\phi_c) = V(\phi_c) + V_{c.t.}(\phi_c) , \tag{6.48}$$

成为有限的并且不依赖于截断。系数 A ， B 由重整化条件 6.13–6.16 式确定。可得

$$\begin{aligned} V_r &= \frac{1}{2}\mu^2\phi_c^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi_c^4 + \frac{1}{64\pi^2}[(\mu^2+\frac{\lambda}{2}\phi_c^2)^2\ln\left(\frac{\mu^2+\lambda\phi_c^2/2}{\mu^2}\right) \\ &\quad -\frac{\lambda\mu^2}{2}\phi_c^2 - \frac{3}{8}\lambda^2\phi_c^4] 。 \end{aligned} \tag{6.49}$$

我们看到有效势在大 ϕ_c^2 时的行为受到了量子修正。

下面再讨论自发破缺时的有效势， $\mu^2 < 0$ 。为了方便计算我们把拉氏量改写为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - U(\phi) , \tag{6.50}$$

其中

$$U(\phi)=\frac{1}{2}\mu^2\phi^2+\frac{\lambda}{4!}\phi^4 \ 。$$

我们把 $U(\phi)$ 作为微扰论处理的对象。它包含了两个顶点： μ^2 和 $\frac{1}{2}\lambda\phi^2$ 。定义

$$m_s^2(\phi)=\mu^2+\frac{1}{2}\lambda\phi^2 \ 。 \tag{6.51}$$

按照图 6.6 式的方式计算有效势的单圈图。得到：

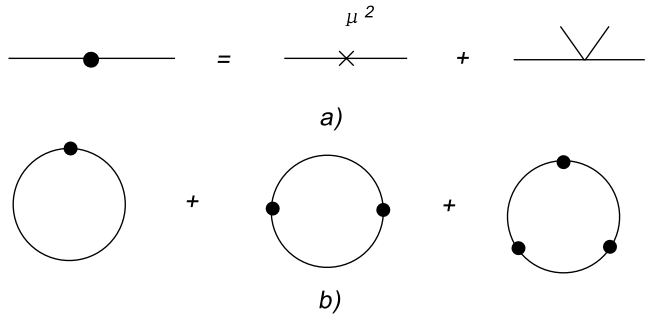


图 6.6:

$$\begin{aligned} V(\phi_c) &= \frac{1}{2}\mu^2\phi_c^2+\frac{\lambda}{4!}\phi_c^4+i\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\left[\frac{m_s^2(\phi_c)}{k^2+i\epsilon}\right]^n \\ &= \frac{1}{2}\mu^2\phi_c^2+\frac{\lambda}{4!}\phi_c^4+\frac{i}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ln\left[1+\frac{m_s^2(\phi_c)}{k^2+i\epsilon}\right] \\ &= \frac{1}{2}\mu^2\phi_c^2+\frac{\lambda}{4!}\phi_c^4+\frac{m_s^4(\phi_c)}{64\pi^2}\left[\ln\frac{m_s^2(\phi_c)}{\mu^2}+\cdots\right] \ 。 \end{aligned} \tag{6.52}$$

除了一个无关紧要的常数因子，它的形式与 $\mu^2>0$ 的情形一样，因而可以选取同样的重整化条件。最后的形式就是 6.49 式。

还可以讨论 $\mu^2=0$ 的情形，辐射修正在一定条件下也可以导致自发破缺。这最早是 Coleman 和 E. Weinberg 研究的。在 13.4.1 节中我们将简要介绍标准模型的有效势的单圈修正并且讨论其物理意义。

§6.4 具有 $O(N)$ 对称性的 $\lambda\phi^4$ 理论 *

§6.4.1 有效作用量与有效势

前面我们讨论了具有对称性自发破缺的一个实标量场的 $\lambda\phi^4$ 理论，下面我们讨论 N 个实标量场所组成的具有 $O(N)$ 对称性的介子场论。

具有 $O(N)$ 对称性的介子场论的拉格朗日量如下,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_a\partial^\mu\phi_a - \frac{1}{2}\mu_0^2\phi_a\phi_a - \frac{\lambda_0}{8N}(\phi_a\phi_a)^2 \ , \tag{6.53}$$

其中 $a = 1, \cdots, N$ ， ϕ^4 相互作用的耦合常数反比于 N 。原因是为得到在 $N \to \infty$ 时有意义的极限。如果 μ_0^2 是负的，那么场 ϕ_a 将在某个方向上获得非零的真空期望值，而拉氏量所具有对称性也由 $O(N) \to O(N-1)$ ，同时产生 $N-1$ 个无质量的 π 场。

大 N 极限下 $O(N)$ 模型中存在着一个破缺相，但 *Coleman* ， *Jackiw* 和 *Politzer* 等人首先注意到，此时在 *Higgs* 场的传播子中存在着“快子”解，因而认为破缺相是不稳定的。现在的一般看法是，一个基本的标量粒子场是平庸的，即当把截断参量 Λ 推至无穷大时，重整化耦合常数趋于零。然而，如果我们把标量场理论仅仅看成是一个有效理论，即仅仅在某个标度 Λ 下才成立，那么一个非平庸的重整化耦合常数仍然是存在的。

如果要考虑 π 场具有非零的质量的情形，则需要在原始的拉氏量方程 6.53 式中一开始就破坏 $O(N)$ 对称性。 [1] 最简单的方法是在 6.53 中加上一项,

$$\mathcal{L}_{SB} = \alpha\phi_N \ . \tag{6.54}$$

6.53 式所刻画的真空自发破缺的方向是任意的，加上这一项后， **自发破缺的方向不再任意，而是沿着 ϕ_N 方向** （ vacuum alignment ）。由于系统仍然具有一个严格的 $O(N-1)$ 对称性， $N-1$ 个 π 介子的质量简并。 6.54 式这一破缺项并不被重整，因为在拉氏量中没有 1PI “蝌蚪图”的贡献。

在一般的情况下，我们所讨论的系统并不能严格求解，但是有一个简单的技巧可以得出对于大 N 展开的领头项。 [2] 这一技巧是引入一个辅助场 χ,

$$\begin{aligned} Z &= \int [d\phi] \exp\{i\int d^4x[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_a\partial^\mu\phi_a + \alpha\phi_N - \frac{1}{2}\mu_0^2\phi_a\phi_a - \frac{\lambda_0}{8N}(\phi_a\phi_a)^2]\} \\ &= \int [d\phi][d\chi] \exp\{i\int d^4x[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_a\partial^\mu\phi_a + \alpha\phi_N + \frac{N}{2\lambda_0}\chi^2 - \frac{1}{2}\chi\phi_a\phi_a - \frac{N\mu_0^2}{\lambda_0}\chi]\} \ . \end{aligned} \tag{6.55}$$

在由 ϕ 、 χ 表示的拉氏量中，唯一的相互作用项是 $\chi\phi_a\phi_a$ 项。这个表达式的好处是从中可以看出， $1/N$ 项的唯一来源是 χ 场的传播子。因此对于任何过程到 $1/N$ 领头项的计算，只需考虑那些具有最少的 χ 的传播子的图。也就是说， χ 场不出现在圈中。

[1] 缺少经验的读者可以先参看 8.5 章。

[2] S. Coleman, R. Jakiw and H. D. Politzer, Phys. Rev. **D10**(1974)2491 。

可以很容易的利用 6.55 式来计算到 $1/N$ 展开领头阶的有效作用量。由于 χ 场在任何的圈中均不出现，仅剩下的 1PI 的图是那些由树图的拉氏量产生的图，以及由含有任意多个 χ 的外腿的单个 ϕ 圈所组成的图（见图 6.7 ）。 于是，

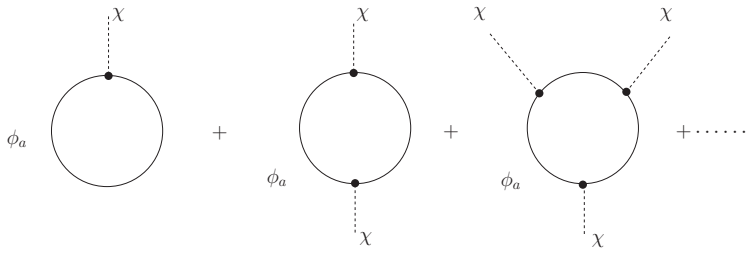


图 6.7:

$$(2\pi)^4\delta^4(\sum_i k_i)\tilde{\Gamma}_n(k_1,\cdots,k_n)=\frac{n!}{2n}(2\pi)^4\delta^4(\sum_i k_i)\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\prod_{i=1}^{n}\frac{i}{q_i^2+i\epsilon}(-i)\ 。\quad (6.56)$$

将此表达式和 6.8 式代入 6.7 式得，

$$\begin{aligned}
i\Gamma^{1\text{–loop}}(\phi_c) &= N\sum_n\frac{N}{2n}\int\prod_i\frac{d^4k_i}{(2\pi)^4}(2\pi)^4\delta^4(\sum_i k_i)\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\int\prod_i d^4x_i\prod_{i=1}^{n}\frac{\chi(x_i)e^{ik_i\cdot x_i}}{q_i^2+i\epsilon}\\
&=\sum_n\frac{N}{2n}\int\prod_i\frac{d^4k_i}{(2\pi)^4}\int d^4x\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\int\prod_i d^4x_i\prod_{j=1}^{n}\frac{\chi(x_j)e^{ik_j\cdot(x_j+x)}}{(q-k_1-\cdots-k_j)^2+i\epsilon}\\
&=\sum_n\frac{N}{2n}\int\prod_i\frac{d^4k_i}{(2\pi)^4}\int d^4x\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\int\prod_i d^4x_i\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{(q+i\partial_x)^2+i\epsilon}\chi(x_j)e^{ik_j\cdot(x_j+x)}\\
&=\sum_n\frac{N}{2n}\int d^4x\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{(q+i\partial_x)^2+i\epsilon}\chi(x)\\
&=\sum_n\frac{N}{2n}\int d^4x\lim_{y\to x}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}e^{-iq\cdot(x-y)}\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{(q+i\partial_x)^2+i\epsilon}\chi(x)\\
&=\int d^4x\lim_{y\to x}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\sum_n\frac{N}{2n}\left[\frac{1}{(i\partial_x)^2+i\epsilon}\chi(x)\right]^n e^{-iq\cdot(x-y)}\\
&=\int d^4x\lim_{y\to x}\sum_n\frac{N}{2n}\left[\frac{-1}{\Box-i\epsilon}\chi(x)\right]^n\delta^4(x-y)\\
&=-\frac{N}{2}\int d^4x\lim_{y\to x}\log\left[\Box-i\epsilon+\chi(x)\right]\delta^4(x-y)\\
&=-\frac{N}{2}\mathrm{Tr}\log\left[\Box-i\epsilon+\chi(x)\right]\ 。
\end{aligned}\quad (6.57)$$

上面等式中最后两个差一个无关紧要的常数因子。于是有效作用量到大 N 展开的领头项可以写成，[3]

$$\Gamma\ =\ \int d^4x\{\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_a\partial^\mu\phi_a+\alpha\phi_N+\frac{N}{2\lambda_0}\chi^2-\frac{1}{2}\chi\phi_a\phi_a-\frac{N\mu_0^2}{\lambda_0}\chi\}$$

[3]S. Coleman and E. Weinberg, Phys. Rev. **D7**(1973)1888 。

$$+\frac{i}{2}N\,\mathrm{Tr}[\log(\Box-i\epsilon+\chi)]\,。 \tag{6.58}$$

其中 $\mathrm{Tr}[\log(\Box-i\epsilon+\chi)]$ 是对 Minkowski 空间求迹，理解为 6.57 式中倒数第二个等式。

利用 6.11 中有效势的定义，给出（ ϕ 、 χ 均为常数）

$$\begin{aligned} V(\phi,\chi) &= -\alpha\phi_n-\frac{1}{2}\frac{N}{\lambda_0}\chi^2+\frac{1}{2}\chi\phi_a\phi_a+\frac{N\mu_0^2}{\lambda_0}\chi \\ &\quad -\frac{i}{2}N\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\log(-l^2-i\epsilon+\chi)\,。 \end{aligned} \tag{6.59}$$

真空态对应着有效势的极小值，

$$\frac{\partial V}{\partial\phi}=0\ ,\ \ \frac{\partial V}{\partial\chi}=0\,。 \tag{6.60}$$

其中第一个方程很简单，

$$\begin{aligned} &\chi\phi_a=0\ ,\ \ (a<N) \\ &\chi\phi_N-\alpha=0\,。 \end{aligned} \tag{6.61}$$

上面方程指出 ϕ 场的 VEV 沿着 ϕ_N 方向，而且 $\chi\neq0$ 。 6.60 式中对 χ 的导数项要复杂一些，

$$-\frac{N}{\lambda_0}\chi+\frac{1}{2}\phi_N^2+\frac{N\mu_0^2}{\lambda_0}+\frac{i}{2}N\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{1}{q^2-\chi+i\epsilon}=0\,。 \tag{6.62}$$

这个方程是发散的，我们可以把出现的发散吸收到 λ 和 μ^2 中去。这可以通过如下方式实现，

$$\frac{1}{\lambda(M)}=\frac{1}{\lambda_0}-\frac{i}{2}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{1}{(q^2+i\epsilon)(q^2-M^2+i\epsilon)}\ , \tag{6.63}$$

及

$$\frac{\mu^2(M)}{\lambda(M)}=\frac{\mu_0^2}{\lambda_0}+\frac{i}{2}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{1}{(q^2+i\epsilon)}\ , \tag{6.64}$$

其中的 M 是一个任意的重整化标度。从上面两式可以发现，虽然 λ 是依赖于重整化标度的，但 μ^2/λ 确不依赖于重整化标度。由于理论是可重整的， λ 和 μ^2 的重整化保证了整个理论的有限性。 6.62 式可以写成

$$-\frac{N}{\lambda(M)}\chi+\frac{1}{2}\phi_N^2+\frac{N\mu^2(M)}{\lambda(M)}-\frac{N}{32\pi^2}\chi\log\frac{\chi}{M^2}=0\,。 \tag{6.65}$$

这个方程和 6.61 式一起可以把 χ 和 ϕ 用参数 λ 、 μ 和 α 表示出来。由于后者并不直接具有物理意义，我们也可以用物理参数来进行讨论。由 6.58 式可以看出

$$\chi = m_\pi^2 \ 。 \tag{6.66}$$

对于 ϕ_N ，利用 Noether 流的表达式，

$$J_a^\nu = \frac{i}{2}\Phi^T \overleftrightarrow{\partial^\nu}\, T^a \Phi \ 。 \tag{6.67}$$

其中 $\mathrm{tr}(T^a T^b) = 2\delta^{ab}$ 。当 ϕ_N 获得非零的 VEV 时，流变为

$$J_a^\nu = i < \phi_N > \partial^\nu \phi_a + \cdots (a < N) \ 。 \tag{6.68}$$

所以我们有 $< \phi_N >= f_\pi$ 。 [4] 在 6.58 式中我们做如下的替换：

$$\pi_a \equiv \phi_a \ , \ \ \chi \equiv \tau + m_\pi^2 \ , \ \ \sigma = \phi_N - f_\pi \ 。 \tag{6.69}$$

于是 6.58 式可以改写为（只差一个常数），

$$\begin{aligned} \Gamma \ = \ & \int d^4x \{ \frac{1}{2}\partial_\mu \pi_a \partial^\mu \pi_a + \frac{1}{2}\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{N}{2\lambda_0}\tau^2 - \frac{1}{2}m_\pi^2 \pi_a \pi_a - \frac{1}{2}\tau \pi_a \pi_a \\ & - \frac{1}{2}m_\pi^2 \sigma^2 - \frac{1}{2}\tau\sigma^2 - f\tau\sigma + \left(\frac{N}{\lambda_0}m_\pi^2 - \frac{N}{\lambda_0}\mu_0^2 - \frac{1}{2}f^2 \right) \tau \} \\ & + \frac{i}{2} N \, \mathrm{Tr}[\log(\Box - i\epsilon + \tau + m_\pi^2)] \, 。 \end{aligned} \tag{6.70}$$

注意在上式中， τ 的 tadpole 项与 log 项中的关于 τ 的线性项相互抵消。

§6.4.2 完全散射振幅、共振态以及“快子”解 **

利用有效作用量 6.70 式， Goldstone 玻色子的两两散射振幅可以写为，

$$T(\pi_a \pi_b \to \pi_c \pi_d) = iD_{\tau\tau}(s)\delta_{ab}\delta_{cd} + iD_{\tau\tau}(t)\delta_{ac}\delta_{bd} + iD_{\tau\tau}(u)\delta_{ad}\delta_{bc} \ , \tag{6.71}$$

其中 $D_{\tau\tau}$ 是 τ 的传播子。由于 τ 与 σ 有混合，所以要考虑传播子矩阵，

$$D^{-1}(p^2) = -i \begin{pmatrix} p^2 - m_\pi^2 & -f \\ -f & N/\lambda_0 + N\tilde{B}_0(p^2; m_\pi) \end{pmatrix} \ , \tag{6.72}$$

其中

$$\tilde{B}_0(p^2; m_\pi) = \frac{-i}{2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 - m_\pi^2 + i\epsilon)((q+p)^2 - m_\pi^2 + i\epsilon)} \tag{6.73}$$

[4] 请参阅关于部分轴矢流守恒 8.3.3 一节中的讨论。

是发散的，但 τ 的传播子是有限的。利用关系式

$$\frac{1}{\lambda(M)}+\tilde{B}(p^2;m_\pi,M)=\frac{1}{\lambda_0}+\tilde{B}_0(p^2;m_\pi) \tag{6.74}$$

可以消去发散。可得到，

$$\tilde{B}(s;m_\pi,M)=\frac{1}{32\pi^2}\left[1+\rho(s)\log\frac{\rho(s)-1}{\rho(s)+1}-\log\frac{m_\pi^2}{M^2}\right]\ 。 \tag{6.75}$$

$O(N)$ 模型提供了一个场论的可解模型的例子，对其分析可以增加我们对量子场论的更深刻的认识。在第 4 章中，我们讨论了在微扰论意义下量子场论的重整化并引进了重整化耦合常数的概念。我们发现重整化耦合常数的定义依赖于一个任意的标度。并且我们论证了物理振幅或物理量并不依赖于重整化标度的选取。在这里我们在把散射振幅“严格”求解后发现，

1. 量子场论的紫外发散，一般来说，并不是微扰论所带来的 *artifacts* 。即使能够严格求解量子场论中的散射振幅，一般来说仍然需要做重整化。
2. 正如我们以前所声称的那样，为定义重整化耦合常数需要引入一个任意标度。然而物理量却与此任意标度无关。
3. 从 6.74 式可以得到重整化耦合常数 $\lambda(M^2)$ 所满足的微分方程：

$$M^2\frac{d\lambda}{dM^2}=\frac{\lambda^2(M^2)}{32\pi^2}\ 。 \tag{6.76}$$

这个方程与第 5 章中所讨论的单圈微扰论中得到的重整化群方程类似，但是这里的方程到大 N 展开的领头阶是严格的，即包括了所有圈的贡献。

考虑角动量为零的 $O(N)$ 单态道，到大 N 展开的领头阶，其散射振幅为 $T_{00}(s)=iND_{\tau\tau}(s)/32\pi$ 。利用费曼振幅的解析性质不难证明当 $s>4m_\pi^2$ 时 T 矩阵元的幺正性，

$$\mathrm{Im}\,T_{00}(s)=\rho(s)|T_{00}(s)|^2\ 。 \tag{6.77}$$

散射振幅 T_{00} 的极点，或共振态的位置可由 6.72 式中的矩阵的行列式为零得到，即

$$(s-m_\pi^2)(\frac{1}{\lambda(M)}+\tilde{B}(s;m_\pi^2,M))-f^2/N=0\ 。 \tag{6.78}$$

重新定义 $f/\sqrt{N}$ 为质量量纲并且令

$$\frac{1}{\lambda(M)}=0 \tag{6.79}$$

可以使方程 6.78 得到简化： [5]

$$G(s;m_\pi^2,M)=\frac{s-m_\pi^2}{32\pi^2}\{1+\rho(s)\log\frac{\rho(s)-1}{\rho(s)+1}-\log\frac{m_\pi^2}{M^2}\}-1=0\ 。 \tag{6.80}$$

[5] R. S. Chivukula and M. Golden, Nucl. Phys. **B372**(1992)61 。

这里首先要声明的是方程 6.79 式中定义的 M 已经不是 6.63 、 6.74 、 6.75 以及 6.76 等公式中的 M 了，后者表示一个任意的重整化标度，而方程 6.79 式中的 M 定义了使重整化耦合常数“爆炸”的标度。这一点不难理解方程，原因是 6.74 式的右边需要仔细地定义和赋值。换句话说，*正规化和重整化赋予理论一个内禀的标度。在这里 6.75 式中的 M 即是内禀标度。而在量子色动力学中这个内禀标度是 Λ_{QCD}* 。方程 6.79 式使人联想到 $\lambda\phi^4$ 理论的平庸性。但是微扰论中耦合常数的“爆炸”并不能说明理论在这里是坏掉了，而仅仅只能说明微扰论不再适用。而在非微扰的情况下理论在标度 M 处，正如从方程 6.72 式中可看到的，仍然可以很好的定义。

然而，理论虽然不在标度 M 处出问题，但却会在另外一个地方出问题。原因是 6.80 式中存在着一个“快子”（ tachyon ）解，即质量平方 m_t^2 为负的解。[6] 快子解对应着出现超光速传播的粒子因而是理论病态的表现。可以验证，在这里出现的快子是一个粒子，而不是一个鬼粒子（即出现在散射矩阵元中的极点留数为正而不是为负）。我们知道，由于 $\lambda\phi^4$ 理论的平庸性问题，这个理论不可能在任意标度下都是正确的。因此即使 M 在非微扰情形下不适于作为一个定义理论可适用范围的标度，那么 m_t^2 一定适合用来作为这样一个标度。即理论本身仅在 $s << |m_t^2|$ 时才适用。[7] 对于弱耦合的理论（ M 很大）， m_t^2 与 M^2 同量级。这时无论把 M 还是 m_t 作为截断参量都是等价的。然而对于 $m_\pi^2 << m_t^2 << 32\pi^2$ ，也即 $M << 1$ 且 m_π 很小时， m_t 却并不小，

$$m_t^2 \simeq \frac{32\pi^2}{-\log M^2} \ . \tag{6.81}$$

从物理上看，要把这个理论看成在低能下有物理意义的，需要满足条件 $m_t^2 >> 1$ 。这对于小的 m_π 来说是容易满足的条件。

共振态解 **

把散射振幅中的不变质量平方 s 看成是复变量，我们即说把散射振幅解析延拓到复平面上了。根据 2.4.1 节与 7.3 节的讨论，我们知道分波振幅 $T(s)$ 是复 s 平面上（去掉割线后）的解析函数。而共振极点又相当于 S 矩阵元的极点。这两者之间并不矛盾，原因是幺正性要求物理区域是处在幺正割线的上沿，而幺正割线由一个相空间因子所给出，它具有典型的平方根割线的行为。因此复平面实际上是一个多

[6] S. Coleman, R. Jakiw and H. D. Politzer, Phys. Rev. **D10**(1974)2491; L. Abbott, J. Kang and H. Schnitzer, Phys. Rev. **D3**(1976)2212; R. Haymaker, Phys. Rev. **D10**(1974)968; W. Bardeen and M. Moshe, Phys. Rev. **D28**(1983)1372.

[7] 至于快子的出现是和不存在一个基本标量场这一问题有关联，还是仅仅是大 N 展开本身带来的毛病，还不是彻底清楚的。事实上可以利用别的（比如 Pauli–Villars 或动量截断）重整化方案来消除 tachyon ，但是此时会带来别的问题。一般认为，这样或那样的问题出现与 $\lambda\phi^4$ 理论的平庸性问题有关。

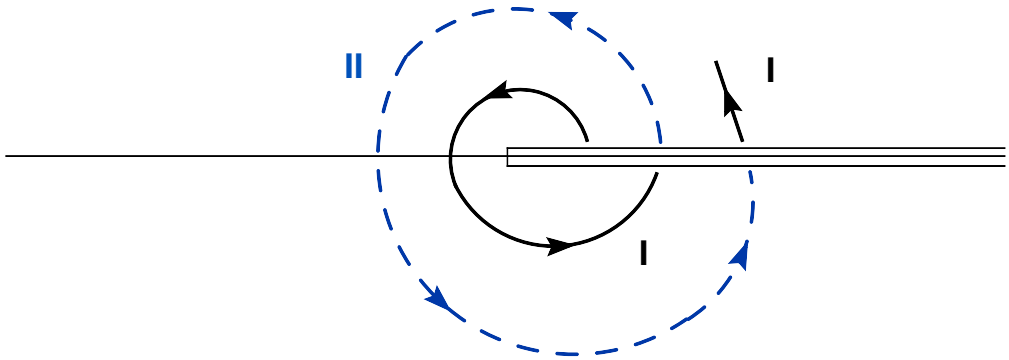


图 6.8: 两个叶的 Riemann 面，其中实线表示在第一叶上，虚线表示在第二叶上。

页的 Riemann 面，而共振极点所处的位置是在非物理叶上。也就是说，方程 6.80 式的复根在 $\rho(s+i\epsilon)$ 为 $-$ 号的叶上存在，而在 $\rho(s+i\epsilon)$ 为 $+$ 号的叶上不存在解，否则会破坏微观因果性。数值分析的确验证了这些陈述。

为更清楚地了解以上的讨论，我们对方程 6.80 式中定义的解析函数 $G(s)$ 做一个更为详细的讨论。在物理区间（ $s \geq 4m_\pi^2$ ） $G(s)$ 可以分为实部和虚部两部分，

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\, G(s) &= \frac{s-m_\pi^2}{32\pi^2}\{1+\rho(s)\log\frac{1-\rho(s)}{1+\rho(s)}-\log\frac{m_\pi^2}{M^2}\}-1 \\ \mathrm{Im}\, G(s) &= \frac{s-m_\pi^2}{32\pi^2}i\pi\rho(s)\ 。 \end{aligned} \tag{6.82}$$

不难看出， $\mathrm{Re}G(s)$ 和 $\mathrm{Im}G(s)$ 本身也都是复平面上的（实）解析函数函数 G 是定义在物理叶上的，即 $G^I(s)\equiv \mathrm{Re}G(s)+i\mathrm{Im}G(s)$ 。当 s 沿枝点（或岐点， branch point ） $4m_\pi^2$ 绕一圈回到实轴的下方时， $\rho(s)$ 要变一符号。即当继续穿过割线的下沿进入第二叶 Riemann 面的上半平面时 $\mathrm{Im}G(s)$ 变一符号，所以当 s 在第二叶上时 $G^{II}(s)\equiv \mathrm{Re}G(s)-i\mathrm{Im}G(s)$ 。方程 6.80 式的真正含义是 $G^{II}(s)=0$ 。图 6.8 画出了两个叶的 Riemann 面的示意图。

第七章　规范对称性与非 Abel 规范场的量子化

§7.1　非 Abel 群对称性与非 Abel 规范场

在量子电动力学中，费米场由于是复场，可以做一个任意的相角转动。在把相角转动定域化以后，为了保持定域的转动不变性，导致了 $U(1)$ 规范场（电磁场）的引入。从这个角度理解量子电动力学，具有重要的意义。 1954 年杨振宁和 Mills 把规范对称性的观点推广到了具有更复杂的内禀对称性的系统。最终导致了量子非 Abel 规范场理论的建立。这一发展对于人类对微观世界的认识产生了巨大的作用。

Yang–Mills 理论最早是建立在强子之间的同位旋 $SU(2)$ 对称性之上的。为建立具有 $SU(2)$ 对称性的场论首先构造一个费米子场的二重态，

$$\psi = (\psi_1, \psi_2)^T \ . \tag{7.1}$$

在一个 $SU(2)$ 变换下，

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \exp\{\frac{-i\tau\cdot\theta}{2}\}\psi(x) \tag{7.2}$$

其中 $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ 是 $SU(2)$ 的变换矩阵。 $\tau = (\tau_{\mathbf{1}}, \tau_{\mathbf{2}}, \tau_{\mathbf{3}})$ 是熟知的 Pauli 矩阵，满足

$$\left[\frac{\tau_i}{2}, \frac{\tau_j}{2}\right] = i\epsilon_{ijk}\frac{\tau_k}{2} \ , \ \ (i,j,k = 1,2,3) \tag{7.3}$$

自由的费米场拉氏量

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(x)\left(i\gamma_\mu\partial^\mu - m\right)\psi(x) \tag{7.4}$$

在整体 $SU(2)$ 转动下不变。然而在定域的转动下，

$$\psi(x) \to \psi'(x) = U(\theta(x))\psi(x) \ , \tag{7.5}$$

自由场拉氏量不再是不变的，

$$\bar{\psi}(x)\partial_\mu\psi(x) \to \bar{\psi}'(x)\partial_\mu\psi'(x) = \bar{\psi}(x)\partial_\mu\psi(x) + \bar{\psi}(x)U^{-1}(\theta)[\partial_\mu U(\theta)]\psi(x) \ 。 \tag{7.6}$$

为了恢复（定域的）规范不变性，受 $U(1)$ 规范场的情形的启发，引入一个矢量规范场 A^i_μ ，并且构造如下的协变导数：

$$D_\mu\psi = (\partial_\mu - ig\frac{\tau^i}{2}A^i_\mu)\psi \ . \tag{7.7}$$

定义 $\mathrm{A}_\mu \equiv \frac{\tau^i}{2}A^i_\mu$ ，并要求 $D_\mu\psi$ 在定域规范变换下与 ψ 具有同样的变换性质：

$$D_\mu\psi \to (D_\mu\psi)' = U(\theta)D_\mu\psi \tag{7.8}$$

即导致

$$\mathrm{A}_\mu{}' = U(\theta)\mathrm{A}_\mu U^{-1}(\theta) - \frac{i}{g}[\partial_\mu U(\theta)]U^{-1}(\theta) \ . \tag{7.9}$$

这就给出了规范场的变换规律。在无穷小规范变换下,

$$U(\theta) \simeq 1 - i\frac{\tau\cdot\theta(\mathbf{x})}{2} \ . \tag{7.10}$$

这导致

$$A_\mu^{i\,\prime} = A_\mu^i + \epsilon^{ijk}\theta^j A_\mu^k - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^i \tag{7.11}$$

且

$$\psi \to \psi' = \psi - i\frac{\tau\cdot\theta}{2}\psi \ . \tag{7.12}$$

规范场的二阶反对称张量可由如下方式引入,

$$(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu) \equiv -ig\mathbf{F}_{\mu\nu} = -ig\{\frac{\tau^i}{2}F_{\mu\nu}^i\} \tag{7.13}$$

$\mathbf{F}_{\mu\nu}$ 是一个二阶矩阵, 它在规范变换下如下变换,

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} \to U(\theta)\mathbf{F}_{\mu\nu}U^{-1}(\theta) \ . \tag{7.14}$$

无穷小变换时,

$$F_{\mu\nu}^{i\ \prime} = F_{\mu\nu}^i + \epsilon^{ijk}\theta^j F_{\mu\nu}^k \ . \tag{7.15}$$

这一点与电磁场不同, 规范场张量自己不是不变的, 它按照 $SU(2)$ 群的伴随表示变化。规范不变量是

$$\mathrm{tr}(\mathbf{F}_{\mu\nu}\mathbf{F}^{\mu\nu}) = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu} \ 。 \tag{7.16}$$

由上面的讨论, 规范不变的拉氏量可以写成,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F^{i,\mu\nu} + \bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \ , \tag{7.17}$$

其中

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^i &= \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g\epsilon^{ijk}A_\mu^j A_\nu^k \ , \\ D_\mu\psi &= \left(\partial_\mu - ig\frac{\tau\cdot\mathbf{A}_\mu}{2}\right)\psi \ . \end{aligned} \tag{7.18}$$

很容易将上述讨论推广到任意的规范对称性群和群表示。设单 Lie 群 G 的生成元 F^a 满足 Lie 代数:

$$[F^a, F^b] = if^{abc}F^c \ , \tag{7.19}$$

其中 f^{abc} 是对所有指标全反对称的结构常数。又设 ψ 属于某种表示，其表示矩阵为 T^a 。于是

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c \ , \tag{7.20}$$

且协变导数为

$$D_\mu\psi = (\partial_\mu - igT^aA^a_\mu)\psi \ 。 \tag{7.21}$$

规范场的二阶反对称张量是，

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu \ , \tag{7.22}$$

$$(\mathbf{T}\cdot\mathbf{F})_{\mu\nu} = \partial_\mu(\mathbf{T}\cdot\mathbf{A}_\nu) - \partial_\nu(\mathbf{T}\cdot\mathbf{A}_\mu) - ig[\mathbf{T}\cdot\mathbf{A}_\mu, \mathbf{T}\cdot\mathbf{A}_\nu] \ 。 \tag{7.23}$$

规范场与物质场的拉氏量是

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu,a} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \ . \tag{7.24}$$

这样构造的拉氏量在如下规范变换下不变：

$$\psi(x) \to \psi'(x) = U(\theta(x))\psi(x) \ , \tag{7.25}$$

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{A}(x)_\mu \to \mathbf{T}\cdot\mathbf{A}'(x)_\mu = U(\theta)\mathbf{T}\cdot\mathbf{A}_\mu U^{-1}(\theta) - \frac{i}{g}[\partial_\mu U(\theta)]U^{-1}(\theta) \ . \tag{7.26}$$

由 7.24 式可以给出运动方程。在没有物质场时，运动方程是

$$\partial_\mu F^{a\mu\nu} + gf^{abc}A^b_\mu F^{c,\mu\nu} = 0 \ 。 \tag{7.27}$$

可以定义一个协变导数

$$D^{ab}_\mu \equiv \delta^{ab}\partial_\mu + gf^{acb}A^c_\mu \tag{7.28}$$

而把 7.27 式改写为：

$$D^{ab}_\mu F^{b,\mu\nu} = 0 \ 。 \tag{7.29}$$

还有更为紧凑的形式：对于任意协变函数 $G \equiv G^aT^a$ ，上述协变导数的作用规则是，

$$D_\mu G \equiv \partial_\mu G - ig[A_\mu, G] \ 。 \tag{7.30}$$

于是方程 7.29 式可进一步改写成，

$$D_\mu F^{\mu\nu} = 0 \ 。 \tag{7.31}$$

有物质场时，物质场所构成的流为，

$$j^a_\mu \equiv \bar{\psi}^j T^a_{jk}\gamma_\mu\psi^k \ 。 \tag{7.32}$$

而规范场所构成的运动方程为,

$$D_\mu^{ab}F^{b,\mu\nu} = -gj^{\nu,a} \ \ (D_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu) \ 。 \tag{7.33}$$

这里必须指出的是，流 $j^{a,\mu}$ 并不是守恒流。利用运动方程 7.33 容易理解真正的守恒流是

$$J^{a,\mu} = -gf^{abc}A_\nu^b F^{c\nu\mu} - gj^{a\mu} = \partial_\nu F^{a,\nu\mu} \ , \tag{7.34}$$

它满足 $\partial_\mu J^{a\mu} = 0$ 。然而 $J^{a,\mu}$ 虽然守恒但却不是规范协变的。相反，虽然 $j^{a,\mu}$ 并不是守恒流，但它却是规范协变的流：

$$j'_\nu = Uj_\nu U^{-1} \ , \tag{7.35}$$

并且满足守恒率的规范协变的推广：

$$D_\mu j^\mu = 0 \ 。 \tag{7.36}$$

对比一下 QED , 我们发现非 Abel 规范场有着一些显著的不同。首先, 很容易理解为什么 j_μ^a 不是守恒流。电磁场并不带电荷, 所有的荷都由物质场携带。而非 Abel 规范场则不然, 由于存在着自相互作用, 规范场本身也携带荷。因此物质场和非 Abel 场的组合才能反映规范流的守恒。自作用项可以在 Yang–Mills 场的运动学项 $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu,a}$ 中看出, 它包含着的自作用项为：$-gf^{abc}\partial_\mu A_\nu^a A^{b\mu}A^{c\nu}$ 和 $-\frac{g^2}{4}f^{abc}f^{ade}A_\mu^b A_\nu^c A^{d\mu}A^{e\nu}$, 非别对应于非 Abel 规范场的三点和四点自相互作用。这一现象会对规范场的动力学产生本质的影响。另一点值得指出的是规范粒子的无质量性仍然得以保持。对于非 Abel 规范场来说，还有一个重要的特性，即规范场的自耦合以及与物质场的耦合受到了很强的限制，叫做 gauge coupling universality 。而在 QED 中不同的物质场可以和规范粒子有不同的耦合。

对于经典规范场的解有很多讨论，包括类似于 QED 中的关于磁单极解的讨论（电荷量子化）等等。经典规范理论的几何图像也有许多讨论。这里我们不再介绍了，有兴趣的读者可以研究各种专著以及文献。

练习：利用无穷小规范变换的表达式，证明 J_μ^a 是规范不变性所导致的 Noether 流。

§7.2 规范场的路径积分量子化

§7.2.1 Fadeev–Popov 方案

以 $SU(2)$ 规范场为例,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu} \ , \ \ a = 1,2,3 \\ F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\epsilon^{abc}A_\mu^b A_\nu^c \ . \end{aligned} \tag{7.37}$$

我们尝试把生成泛函写成,

$$Z[J] = \int [dA_\mu] \exp\{i \int d^4x [\mathcal{L}(x) + J^\mu(x) A_\mu(x)]\} \ , \tag{7.38}$$

其自由场部分是,

$$Z_0[J] = \int [dA_\mu] \exp\{i \int d^4x [\mathcal{L}_0(x) + J^\mu(x) A_\mu(x)]\} \ , \tag{7.39}$$

其中

$$\int d^4x \mathcal{L}_0(x) = \frac{1}{2} \int d^4x A^a_\mu(x) (g^{\mu\nu}\partial^2 - \partial^\mu\partial^\nu) A^a_\nu(x) \ , \tag{7.40}$$

这是一个 Gauss 积分,

$$\int [d\phi] \exp[-\frac{1}{2} < \phi K \phi > + < J\phi >] \sim \frac{1}{\sqrt{\det K}} \exp\{JK^{-1}J\} \ . \tag{7.41}$$

可以积掉，但是

$$K_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu \tag{7.42}$$

没有逆。为了看清这一点，假设有逆

$$(g_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu) G^{\nu\lambda}(x-y) = \delta^\lambda_\nu \delta^4(x-y) \ . \tag{7.43}$$

转换到动量空间,

$$(-k^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu) G^{\nu\lambda}(k) = g^\lambda_\mu \ 。 \tag{7.44}$$

把 $G^{\nu\lambda}(k)$ 作如下分解,

$$G^{\nu\lambda}(k) = a(k^2) g^{\nu\lambda} + b(k^2) k^\nu k^\lambda \ ,$$

得到

$$-a(k^2)(k^2 g^\lambda_\mu - k_\mu k^\lambda) = g^\lambda_\mu \ ,$$

而这一方程不可能有解。另一个角度来看 $K_{\mu\nu}$ 没有逆的问题是注意到 $K_{\mu\nu}$ 只含有横向部分，是一个投影算符： $K_{\mu\nu}K^\nu_\lambda = K_{\mu\lambda}$ 。由于 $K_{\mu\nu}$ 算符没有逆，这导致了路径积分表达式发散。造成这一发散的原因，根据 Fadeev 和 Popov 的观察，是由于理论的规范不变性造成的。在 7.39 式中对规范场做路径积分时，实际上我们对很多等价的路径进行了积分。因为任何一条路径在做了规范变换后，变成了另一条路径，所有这样的由规范变换联系在一起的路径叫做一个规范等价类。在一个规范等价类内，每一条路径对泛函积分的贡献由于作用量的规范不变性都是相同的。而由于一个规范等价类内有无穷多条路径，因而对泛函积分的贡献发散。为了克服这一困难必须想办法使得在 7.39 式中对规范场做路径积分时，只对不同的规范等价类进行积分。

对于规范变换

$$A_\mu \to A_\mu^{\theta(x)} \ , \tag{7.45}$$

其中 A_μ^θ 由 7.9 式给出。随着 $\theta(x)$ 的变化，在由任意一个 A_μ 张出的、在群元 $\theta(x)$ 变化时 A_μ^θ 构成的轨道上，作用量都是不变的。而一个恰当的量子化方法应该保证所有的这些等价的路径仅对积分贡献一次。我们假设存在着这样的、由方程

$$f_a(A_\mu) = 0 \tag{7.46}$$

所定义的超曲面。根据要求，对于任意给定的 A_μ ，它只能和 A_μ^θ 相交一次。也就是说，方程

$$f_a(A_\mu^\theta) = 0 \tag{7.47}$$

对于任意给定的 A_μ 只能有关于 θ 的唯一解。方程 7.46 即是所谓的规范条件。

方程 7.47 的解的唯一性这一要求仅仅对于微扰论适用，对于大的规范场和耦合常数，存在着所谓的 Gribov 拷贝，方程 7.47 的解并不唯一。但是一般认为这种解的不唯一性并不影响微扰论。这一不确定性与规范场的自相互作用有关：在规范固定时，即使没有物质场存在，场的经典构形也存在非平庸解。更多的讨论请参见 7.2.2 一节。

下一步我们需要定义在群空间上的积分，

$$[d\theta] = \prod_{a,x} d\theta_a(x) \ , \tag{7.48}$$

其中 $U(\theta)$ 是 $SU(2)$ 群的群元。对于无穷小的 θ 我们有

$$U(\theta) = 1 + i\theta \cdot \tau/2 + O(\theta^2) \ . \tag{7.49}$$

定义

$$U(\theta)U(\theta') = U(\theta\theta') \tag{7.50}$$

则群空间的体积元在群空间的转动下具有不变性：

$$d(\theta\theta') = d\theta' \ 。 \tag{7.51}$$

更为准确地说，群空间的积分需要利用所谓的 *Haar* 测度 $[d\mu(g)]$，其中 g 是群元。需要引进一个权重因子来使得积分测度对群元转动不变，在 $SU(2)$ 情形：

$$[d\mu(g)] = W(\theta) d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \ , \tag{7.52}$$

其中

$$W(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \epsilon_{ijk} \mathrm{Tr} \left[g^{-1} \frac{\partial g}{\partial \theta_1} g^{-1} \frac{\partial g}{\partial \theta_2} g^{-1} \frac{\partial g}{\partial \theta_3} \right] \ 。 \tag{7.53}$$

假设作转动 $g \to g' = \tilde{g}g$ ，则利用微商的链式法则容易证明

$$W[\theta'] = \det\left(\frac{\partial\theta}{\partial\theta'}\right) W[\theta] \ , \tag{7.54}$$

即出现了 *Jacobian* 的到数，它正好消掉了 $d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3$ 因子中出现 *Jacobian* ，因而保证了积分测度不变。对于无穷小的 $SU(2)$*Haar* 测度，可以证明在 $W = 1$ 附近 $W \simeq 1$ 。

有了前面的准备，现在我们可以来抽出前面提到过的多余的体积因子。定义

$$\triangle_f^{-1}[A_\mu] = \int [d\theta(x)]\delta[f_a(A_\mu^\theta)] \ , \tag{7.55}$$

也就是说

$$\triangle_f[A_\mu] = \det M_f \tag{7.56}$$

且

$$(M_f)_{ab} = \frac{\delta f_a}{\delta\theta_b} \ . \tag{7.57}$$

函数 M_f 的具体形式可以由上述表示得出，由 7.49 式，对于无穷小规范变换有

$$A_\mu^{a\theta'} = A_\mu^a + \epsilon^{abc}\theta^b A_\mu^c - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a \ , \tag{7.58}$$

$$f_a[A_\mu^\theta(x)] = f_a[A_\mu(x)] + \int d^4y [M_f(x,y)]_{ab}\theta_b(y) + O(\theta^2) \ 。 \tag{7.59}$$

由于要求 7.47 式有唯一解， $\det M_f \neq 0$ 。函数 $\triangle_f[A_\mu]$ 本身具有一个重要的性质，即它本身具有规范不变性：

$$\begin{aligned} \triangle_f^{-1}[A_\mu^\theta] &= \int [d\theta'(x)]\delta[f_a(A_\mu^{\theta\theta'})] \\ &= \int [d(\theta\theta')]\delta[f_a(A_\mu^{\theta\theta'})] \\ &= \triangle_f^{-1}[A_\mu] \ 。 \end{aligned} \tag{7.60}$$

现在我们把 7.55 式带入路径积分表达式中，

$$\begin{aligned} &\int [dA_\mu]\exp\{i\int d^4x\mathcal{L}(x)\} = \int [d\theta(x)][dA_\mu(x)]\triangle_f[A_\mu]\delta[f_a(A_\mu^\theta)]\exp\{i\int d^4x\mathcal{L}(x)\} \\ = &\int [d\theta(x)]\int [dA_\mu(x)]\triangle_f[A_\mu]\delta[f_a(A_\mu)]\exp\{i\int d^4x\mathcal{L}(x)\} \ 。 \end{aligned} \tag{7.61}$$

最后一步我们用到了 $\triangle_f[A_\mu]$ 和作用量都是规范不变的事实。而又由 7.58 式（ 7.26 式）得知规范场的积分测度 $[dA_\mu] = \prod_x \prod_{a,\mu}[dA_\mu^a(x)]$ 也是规范不变的，因为规范变

换 7.26 式无外乎只是一个线性平移加上一个群空间的幺正转动。这样我们就分离出了一个臃余的无穷大因子。于是规范场的路径积分量子化可以写为

$$Z_f[J] = \int [dA_\mu] \det M_f \delta[f_a(A_\mu)] \exp\{i \int d^4x[\mathcal{L}(x) + J_\mu A^\mu]\} \ . \tag{7.62}$$

这就是规范场路径积分量子化的 Fadeev–Popov 方案。它形式上依赖于规范固定项的选择，实际上处理的是一个有约束系统的量子化问题。但是可以一般的证明物理可观测量并不依赖于规范的选取（详细讨论可以参见 7.5 一节）。

在得到了一般的规范理论的路径积分表述后，我们回过头来看一下 Abel 规范场。对于 QED 中的 $U(1)$ 规范变换，

$$A^\theta_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta \ . \tag{7.63}$$

这样 7.59 式中的 M_f 只是一个与规范场无关的场量因而可以略去。对于非 Abel 规范场如果采用轴规范（ axial gauge ）

$$f_a = A^a_3 = 0 \tag{7.64}$$

有同样的好处。但是此时明显的 Lorentz 不变性被破坏了。实际计算中经常采用的是协变规范或 Lorentz 规范：

$$f_a = \partial^\mu A^a_\mu = 0 \ . \tag{7.65}$$

可以把 7.62 式改写为更方便的形式。对于 $\det M_f$ ，可以引入 **反对易** 的标量场 $C^a(x)$ 并利用 Grassman 数的性质， 3.112 式而给出：

$$\det M_f \sim \int [dC][dC^+] \exp\{i \int d^4x d^4y \sum_{a,b} C^+_a(x)[M_f(x,y)]_{ab} C^b(y)\} \ . \tag{7.66}$$

值得强调的是标量场 C^a 满足反对易关系或 Fermi-Dirac 统计，一个闭合圈会有一个额外的负号。这样的标量场是辅助场并不出现在入态、出态中。它的存在是必要的 – 为了保证物理态之间的跃迁矩阵元所张成的 S 矩阵的幺正性。这样的具有错误的统计规律的标量场叫做 Fadeev–Popov 鬼场。

对于出现在泛函路径积分中的规范固定项 $\delta[f_a(A_\mu)]$ 可以作如下处理：首先对规范条件 7.47 式作稍许推广：

$$f_a(A^\theta_\mu) = B^a(x) \tag{7.67}$$

其中 $B^a(x)$ 是一个任意的、与规范场无关的辅助函数。由此规范条件 7.55 变为

$$1 = \int [d\theta(x)] \triangle_f[A_\mu] \delta[f_a(A^\theta_\mu) - B^a(x)] \ , \tag{7.68}$$

且 7.62 式也要作相应的改动。在做了相应的改动后对 $Z[J]$ 作泛函积分 $\int[d\mathbf{B}]$，有

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int [dA_\mu][dB]\det M_f \delta[f_a(A_\mu) - B^a] \\ &\quad \times \exp\{i\int d^4x[\mathcal{L}(x) + J_\mu A^\mu + \frac{1}{2\xi}\mathbf{B}^2]\}\ , \end{aligned} \tag{7.69}$$

其中的 ξ 叫做规范参数（ gauge parameter ）。可以很容易的把上面公式中的辅助函数 B 积掉，再由 7.66 式，即得到

$$Z[J] = \int [dA][dC][dC^+]\exp\{iS_{eff}[J]\}\ 。 \tag{7.70}$$

其中 $S_{eff}[J] = S_[J] + S_{g.f.} + S_{ghost}$，而

$$\begin{aligned} S_{g.f.} &= -\frac{1}{2\xi}\int d^4x\{f_a[A_\mu(x)]\}^2\ , \\ S_{ghost} &= \int d^4xd^4y\sum_{a,b} C_a^+(x)[M_f(x,y)]_{ab}C_b(y)\ 。 \end{aligned} \tag{7.71}$$

在 7.2.3 节中我们将详细讨论协变规范下的 Feynman 规则。

§7.2.2 Gribov 拷贝 *

在前面一节中我们提起过，方程 7.47 的解的唯一性这一要求仅仅对于微扰论才适用。而对于大的规范场和耦合常数，解的唯一性并不满足，即存在着所谓的 Gribov 拷贝。[1]

我们来检查一下库仑规范，看是否可能存在规范变换 θ，满足无穷远处边界条件

$$\partial_j\theta = 0\ ,\quad (j = 1,2,3)$$

且

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \nabla\cdot\mathbf{A}^\theta = 0\ , \tag{7.72}$$

即使得库仑规范不能唯一地固定规范场。首先注意到的是对于 Abel 规范场，不存在非平庸的 θ 解。由于 Abel 规范场的规范变换是 $A_\mu^\theta = A_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta$，这导致了 $\nabla^2\theta = 0$（在这里可以不考虑时间变量 t 的作用）。求解这个方程很像证明静电问题的唯一性定理。不难得到 $\theta =$ 常数 。

对于非 Abel 规范场，θ 的不唯一性则是可能的。这一不确定性与规范场的自相互作用有关：在规范固定时，即使没有物质场存在，场的经典构形也存在非平庸解。为了理解这一点，考虑无穷小规范变换：

$$A_\mu^{a\prime} = A_\mu^a + f^{abc}\theta^b A_\mu^c - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a\ , \tag{7.73}$$

[1] V. N. Gribov, Nucl. Phys. **B139**(1978)1 。

在库仑规范下其中的 θ 满足

$$\nabla^2\theta^a - gf^{abc}\nabla\cdot(\theta^b\mathbf{A}^c) = 0 \text{ 。} \tag{7.74}$$

这又分两种情况，gA_μ 很小和 gA_μ 不能看成小量。对于前一种情况可以证明 $\theta = 0$ 。把 θ 写成微扰展开的形式， $\theta = \theta^{(0)} + \theta^{(1)} + \cdots$ ，带回上式得

$$\begin{aligned} &\nabla^2\theta_a^{(0)} = 0 \text{ ,} \\ &\nabla^2\theta_a^{(1)} - gf^{abc}\nabla\cdot(\theta_b^{(0)}\mathbf{A}^c) = 0 \text{ ,} \\ &\cdots \text{ 。} \end{aligned} \tag{7.75}$$

从第一式知 $\theta^{(0)} = 0$ ，又从第二式推出 $\theta^{(1)} = 0$ ，等等。对于大的 gA ，不能对 θ 作微扰展开。此时需要对 7.74 式求解。注意到它很像一个薛定锷方程：

$$\nabla^2\theta^a - gf^{abc}\nabla\cdot(\theta^b\mathbf{A}^c) = E\theta^a \text{ 。} \tag{7.76}$$

在上式中 θ 是一个在势场 $g\vec{A}$ 中运动的粒子的波函数。 Gribov 研究了这种方程，发现对于足够大的 $g\vec{A}$ ，不但可以有 $E = 0$ 的解，甚至可以有 $E < 0$ 的束缚态解。

一般认为，对应着 Gribov 不确定性的现象并不影响微扰论，因为它对应着大的 gA 。后者远离微扰展开的区间（远离平庸的经典解路径）因而对路径积分的微扰计算的贡献可忽略。有猜测认为 Gribov 拷贝与色禁闭有关联，但是在这一方向上仍然有许多不清楚的地方。

§7.2.3 协变规范中的 Feymann 规则

所谓协变规范是指

$$f_a[A_\mu] = \partial^\mu A_\mu^a = 0 \text{ 。} \tag{7.77}$$

利用无穷小规范变换的表示

$$A_\mu^{i\,\prime} = A_\mu^i + \epsilon^{ijk}\theta^j A_\mu^k - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^i \tag{7.78}$$

得到

$$\begin{aligned} f_a[A_\mu^\theta] &= f_a[A_\mu] + \int d^4y[M_f(x,y)]_{ab}\theta_b(y) + O(\theta^2) \\ &= f_a[A_\mu] + \partial^\mu\left[\epsilon^{abc}\theta^b(x)A_\mu^c(x) - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a(x)\right], \end{aligned} \tag{7.79}$$

即

$$\begin{aligned} M_f[x,y] &= -\frac{1}{g}\partial^\mu[\delta^{ab}\partial_\mu - g\epsilon^{abc}A_\mu^c]\delta^4(x-y) \\ &= -\frac{1}{g}\partial^\mu D_\mu^{ab}\delta^4(x-y) \text{ 。} \end{aligned} \tag{7.80}$$

可以重新定义 C 场以吸收上面多余的因子，于是完整的量子化的规范场生成泛函可以写为：

$$W[J,\eta,\eta^+]=\int[dA_\mu dCdC^+]\exp\{i\int d^4x[\mathcal{L}(x)-\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A^a_\mu)^2 \\ +C^{a+}(-\partial^\mu D^{ab}_\mu)C^b+J^a_\mu A^{\mu a}+\eta^{a+}C^a+C^{a+}\eta^a]\}\ 。 \tag{7.81}$$

注意到鬼场的拉氏量并不是厄米的 。把 $W[J,\eta,\eta^+]$ 分为运动学的部分和相互作用部分，利用 3.88 式即可以作微扰展开。而由双线性项可以得到传播子。

为计算规范场的传播子，由

$$\begin{aligned} W^A_0[J] &= \int[dA_\mu]\exp\{i\int d^4x[\frac{1}{2}A^a_\mu(g^{\mu\nu}\partial^2 \\ &\quad -(1-\xi^{-1})\partial^\mu\partial^\nu)\delta^{ab}A^b_\nu+J^a_\mu A^{a\mu}]\} \\ &= \int[dA_\mu]\exp\{i\int d^4x[\frac{1}{2}A^a_\mu K^{\mu\nu}_{ab}A^b_\nu+J^a_\mu A^{a\nu}]\} \end{aligned} \tag{7.82}$$

其中

$$K^{\mu\nu}_{ab}=[g^{\mu\nu}\partial^2-(1-\xi^{-1})\partial^\mu\partial^\nu]\delta_{ab}\ 。 \tag{7.83}$$

由 $K^{\mu\nu}_{ab}(x-y)=\delta^4(x-y)K^{\mu\nu}_{ab}$ ，且比较 3.89–3.92 式可得出

$$W^A_0[J]=\exp\{-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ^a_\mu(x)G^{\mu\nu}_{ab}(x-y)J^b_\nu(y)\} \tag{7.84}$$

其中

$$\begin{aligned} G^{\mu\nu}_{ab}(x-y) &= \delta^{ab}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik(x-y)}[-(g^{\mu\nu}-\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}) \\ &\quad -\xi\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}]\frac{1}{k^2+i\epsilon}\ 。 \end{aligned} \tag{7.85}$$

不难证明 $G^{ab}_{\mu\nu}$ 的确为 $K^{\mu\nu}_{ab}$ 的逆：

$$\int d^4yK^{\mu\nu}_{ab}(x-y)G^{bc}_{\nu\lambda}(y-z)=g^\mu_\lambda\delta^c_a\delta^4(x-z)\ 。 \tag{7.86}$$

类似地，

$$W^C_0[\eta,\eta^+]=\exp\{-i\int d^4xd^4y\eta^{a+}G^{ab}(x-y)\eta^b(y)\}\ , \tag{7.87}$$

且

$$G^{ab}(x-y)=-\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2+i\epsilon}\delta^{ab}\ 。 \tag{7.88}$$

于是我们可以得到动量空间中的 Feynman 传播子的 Feynman 规则(注意正负号)：

1. 规范粒子的传播子：

$$i\triangle^{ab}_{\mu\nu}(k) = -i\frac{g_{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}}{k^2 + i\epsilon}\delta^{ab} \ ; \tag{7.89}$$

2. 鬼场的传播子：

$$i\triangle^{ab}(k) = -i\delta^{ab}\frac{1}{k^2 + i\epsilon} \ 。 \tag{7.90}$$

同样可以求出各种相互作用顶点的 Feynman 规则（规定动量向外流动）。

1. 规范场的三点正规顶角：

$$i\Gamma^{abc}_{\mu\nu\lambda} = ig\epsilon^{abc}[(k_1 - k_2)_\lambda g_{\mu\nu} + (k_2 - k_3)_\mu g_{\nu\lambda} + (k_3 - k_1)_\nu g_{\lambda\mu}] \ ; \tag{7.91}$$

2. 规范场的四点正规顶角：

$$\begin{aligned} i\Gamma^{abcd}_{\mu\nu\lambda\rho} \ = \ & ig^2[\epsilon^{abe}\epsilon^{cde}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\nu\lambda}g_{\mu\rho}) \\ & +\epsilon^{ace}\epsilon^{bde}(g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho} - g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho}) \\ & +\epsilon^{ade}\epsilon^{cbe}(g_{\mu\lambda}g_{\rho\nu} - g_{\rho\lambda}g_{\mu\nu})] \ ; \end{aligned} \tag{7.92}$$

3. 规范场与鬼场的相互作用顶角：

$$i\Gamma^{abc}_{\mu} = g\epsilon^{abc}k_{1\mu} \ , \tag{7.93}$$

其中 k_1 是入射鬼场的 4- 动量。

练习：证明方程式 7.91–7.93 。

加入费米子的相互作用后，有

1. 费米子传播子：

$$i\triangle_F = \frac{i}{\not{k} - m + i\epsilon} \ ; \tag{7.94}$$

2. 规范场 – 费米子相互作用顶角：

$$i\Gamma_\mu = igT^a\gamma_\mu \ 。 \tag{7.95}$$

这一节我们讨论了协变规范，其中引入了一个任意的规范参数 ξ 。然而物理上的可观测量是规范不变的量，如 S 矩阵元，应该与 ξ 的选取无关。利用 BRS 对称性和 Ward 等式可以证明，到微扰论的所有阶这一结论（规范无关性）都是正确的。在给出一般的形式化的证明之前，下面的讨论中我们首先在单圈水平上将研究在存在鬼场时理论是如何保持幺正性的。为此我们首先对幺正性作一下一般的讨论。

§7.3 解析性与幺正性的 Feynman 图分析， Cutkosky 规则

首先我们来看一看对 S 矩阵元的一般表述。在入态和出态以平面波为基失表述时， S 矩阵与 T 矩阵的关系是,

$$S = \mathbf{1} + i\mathcal{T}。 \tag{7.96}$$

以 $2 \to n$ 体反应为例，对于 $\mathcal{T}$ 我们还可以定义不变矩阵元 $\mathcal{M}$,

$$< p_f|i\mathcal{T}|p_1, p_2 >= i(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - \sum p_f)\mathcal{M}(p_1, p_2 \to p_f)。 \tag{7.97}$$

其中 $\mathcal{M}$ 是 Lorentz 不变振幅。由于几率守恒， $S^+S = \mathbf{1}$ ，而光学定理是几率守恒的直接结果：

$$-i(\mathcal{T} - \mathcal{T}^+) = \mathcal{T}^+\mathcal{T}。 \tag{7.98}$$

考虑上式 $2 \to 2$ 散射的矩阵元。首先在上式右边插入一组中间态的完备集，导出，

$$< p_3p_4|\mathcal{T}^+\mathcal{T}|p_1p_2 >= \sum_n \prod_{i=1}^n \int \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_i} < p_3p_4|\mathcal{T}^+|n >< n|\mathcal{T}|p_1p_2 > 。 \tag{7.99}$$

利用 T（时间）反演不变性，再利用 7.97 式，导出（用符号 T 来代替 $\mathcal{M}$ ）

$$\begin{aligned} &2\mathrm{Im}T(p_1p_2 \to p_3p_4) = \\ &\sum_n \prod_{i=1}^n \int \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_i}T^*(p_3p_4 \to n)T(p_1p_2 \to n) \times (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - \sum_i k_i)。 \end{aligned} \tag{7.100}$$

[2] 式 7.100 可以简写为,

$$2\mathrm{Im}T(i \to f) = \sum_n \int d\Pi_n T^*(i \to n)T(f \to n)。 \tag{7.102}$$

当 $i = f$ 时，上式就给出了光学定理。

$$\mathrm{Im}T(p_1p_2 \to p_1p_2) = 2k_{cm}\sqrt{s}\sigma_{tot}(p_1p_2 \to \text{anything})。 \tag{7.103}$$

[2]其中包括了 n 体相空间的积分：

$$\prod_{i=1}^n \int \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_i}(2\pi)^4\delta^{(4)}(P - \sum_i k_i) = \prod_{i=1}^n \int \frac{d^4k_i}{(2\pi)^3}\delta^4(k_i^2 - m_i^2)\theta(p_i^0)(2\pi)^4\delta^{(4)}(P - \sum_i k_i) \tag{7.101}$$

这个公式一般情况下积不出来，但对于 n 个无质量粒子，有公式

$$= \frac{16\pi^{5/2}}{(2\pi)^{2n}}\frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(n-1)\Gamma(2n)}\theta(P_0)\theta(P^2)(P^2)^{n-2} 。$$

其中 k_{cm} 是质心系中某入射粒子的动量（比如对于相同质量粒子的散射，$2k_{cm}=\sqrt{s-4m^2}$），$\sqrt{s}$ 是质心系中的总能量。如果时间反演不变性不再成立，则 7.100 式的形式不再是对的，但光学定理 7.103 式仍然成立。

光学定理把散射矩阵元的虚部与散射截面联系在了一起。下面我们来看一看在 Feynman 图中振幅的虚部是如何出现的。一般的来说，Feynman 振幅总是实的，除非中间态粒子出现在质壳上。此时传播子 $\frac{1}{p^2-m^2+i\epsilon}$ 中的 $i\epsilon$ 因子开始起作用，贡献出一个虚部。这可以由如下公式看出，

$$\frac{1}{x\mp i\epsilon}=\mathrm{P}\frac{1}{x}\pm i\pi\delta(x)\ , \tag{7.104}$$

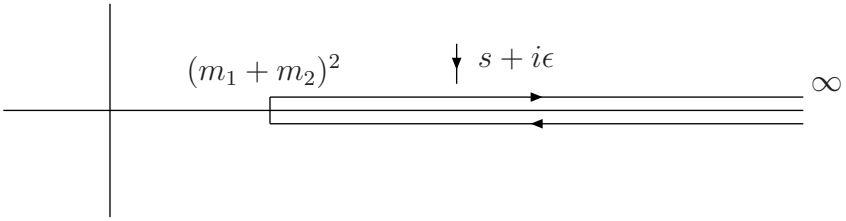
其中 P 表示取主值。为了更清楚的认识虚部的来源，考虑一个简化了的，只有一个运动学变量的不变矩阵元 $\mathcal{M}(s)$。对于物理的 S 矩阵元，变量 s 是实的而且是取在运动学允许的区间，但是正如我们以前提到过的由 LSZ 约化公式可以对变量 s 作解析延拓。（事实上物理振幅的严格的定义是：物理振幅是一个复平面上的解析函数从上半平面趋于实轴时的边界值，即关于 $\mathcal{M}$ 的变量依赖关系的正确写法是 $\mathcal{M}(s+i\epsilon)$。与其相联系的是一个著名的由 *Kallen* 和 *Wightman* 给出的 *Hedge of Wedge* 定理，对其严肃的讨论远远超出了本讲义的内容。）以有相同质量的粒子两两弹性散射为例，首先当 s 小于两粒子的产生阈 $4m^2$ 时 $\mathcal{M}$ 是实的，因为此时中间态粒子不可能在壳。由于在实轴上 $\mathcal{M}$ 可以是实的，由复变函数中的 Schwarz 反射原理知，解析函数 $\mathcal{M}(s)$ 具有一个重要的性质，叫做实解析性。即

$$\mathcal{M}(z)=\mathcal{M}^*(z^*)\ , \tag{7.105}$$

其中 z 在复平面上。由 $\mathcal{M}(z)$ 的实解析性我们得到一个结论，即 $\mathcal{M}(z)$ 在 z（在阈上）跨越实轴时存在着不连续性，因而不可能是全平面解析的。其不连续性正比于 $\mathcal{M}$ 的虚部：

$$\mathrm{disc}\,\mathcal{M}(s)=\mathcal{M}(s+i\epsilon)-\mathcal{M}(s-i\epsilon)=\mathcal{M}(s+i\epsilon)-\mathcal{M}(s+i\epsilon)^*=2i\mathrm{Im}\,\mathcal{M}\ 。 \tag{7.106}$$

可以用如下示意图来说明这一现象：



以 $\lambda\phi^4$ 理论为例，下面我们通过对图 7.1 的具体分析来验证 7.102 式。对于 $2\to 2$

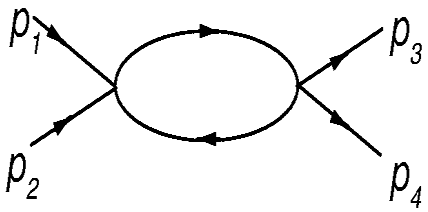


图 7.1:

的散射过程可以一般的定义如下三个运动学变量,

$$s=(p_1+p_2)^2\ ,\ \ t=(p_1-p_3)^2\ ,\ \ u=(p_1-p_4)^2\ , \tag{7.107}$$

其中只有两个是独立的,

$$s+t+u=m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2\ 。 \tag{7.108}$$

对于图 7.1 所表示的 Feynman 振幅可以很容易的证明，只有 s 道才会出现割线。

$$i\mathcal{M}=\frac{\lambda^2}{2}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{1}{(k/2-q)^2-m^2+i\epsilon}\frac{1}{(k/2+q)^2-m^2+i\epsilon}\ , \tag{7.109}$$

其中 $k=p_1+p_2=p_3+p_4$ 是 s 道的总 4- 动量。7.109 式是一个对数发散的积分，需要做重整化。但是在可重整理论中可以一般的证明发散子图的吸收部分一定是有限的，也就是说正规化和重整化的手续不会影响我们计算 7.109 式的吸收部分。所以我们假设对 7.109 式已经作了某种正规化手续以使积分有定义，从而可以在其基础上继续讨论。为方便计算，不失一般性的可以在质心系中进行计算， $k=(k^0,0)$ 。首先在 7.109 式中利用围道积分的方法对 q^0 进行积分。不难分析出在复 q^0 平面上一共有 4 个极点：

$$q^0=\frac{1}{2}k^0\pm(E_q-i\epsilon)\ ,\ \ q^0=-\frac{1}{2}k^0\pm(E_q-i\epsilon)\ 。 \tag{7.110}$$

其中两个在上半平面两个在下半平面（由 ϵ 前面的符号所决定）。我们在下半平面取大园作积分，得出

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M}&=\frac{\lambda^2}{2}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{1}{(k/2-q)^2-m^2+i\epsilon}\frac{1}{(k/2+q)^2-m^2+i\epsilon}\\
&=-2\pi i\frac{\lambda^2}{2}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^4}\frac{1}{2E_q}\left(\frac{1}{k^0(k^0-2E_q)}\Big|_{q^0=-\frac{k^0}{2}+E_q}-\frac{1}{k^0(k^0+2E_q)}\Big|_{q^0=\frac{k^0}{2}+E_q}\right)\\
&=-2\pi i\frac{\lambda^2}{2}\frac{4\pi}{(2\pi)^4}\int_m^\infty dE_qE_q|q|\frac{1}{2E_q}\left(\frac{1}{k^0(k^0-2E_q)}-\frac{1}{k^0(k^0+2E_q)}\right)\\
&=-2\pi i\frac{\lambda^2}{2}\frac{4\pi}{(2\pi)^4}\int_m^\infty dE_qE_q|q|\frac{1}{2E_q}\frac{1}{k^0(k^0-2E_q)}
\end{aligned} \tag{7.111}$$

很显然，对于下半平面的极点取留数相当于在第一个等式右边的被积函数中作替换，

$$\frac{1}{(k/2+q)^2-m^2+i\epsilon}\to -2\pi i\delta((k/2+q)^2-m^2)\theta(\frac{k^0}{2}+q^0)\ ,$$

并且在 7.111 式中第三个等式右边的括号中的第二项对 $\mathcal{M}$ 的吸收部分没有贡献，所以在最后把它略去。从 7.111 式可以看出，对 E_q 的积分的被积函数由一个极点：$E_q=k^0/2$ 。如果 $k^0<2m$ 则 $\mathcal{M}$ 明显是实的，但是当 $k^0>2m$ 时，对 E_q 的积分会产生一个虚部，且其符号依赖于我们给与 k^0 一个正的无穷小虚部或负的无穷小虚部。于是积分 $s=k^2$ 平面上的上半平面与下半平面之间产生了一个不连续性。利用

$$\frac{1}{k^0-2E_q\pm i\epsilon}=P\frac{1}{k^0-2E_q}\mp i\pi\delta(k^0-2E_q)\ , \tag{7.112}$$

得知计算不连续性等价于在原积分中将传播子替换为与其相应的 δ 函数，

$$\frac{1}{(k/2-q)^2-m^2+i\epsilon}\to -2\pi i\delta((k/2-q)^2-m^2)\theta(\frac{k^0}{2}-q^0)\ .$$

上式中可以插入 $\theta(\frac{k^0}{2}-q^0)$ 是因为由第一个 δ 函数知 $q_0=-\frac{k^0}{2}+E_q$ ，即 $\frac{k^0}{2}-q^0=k^0-E_q$ 由 7.112 式知其自动地大于零。现在让我们来分析一下我们证明了什么。为了得到 Feynman 振幅的虚部，我们作了如下替换，

$$\frac{1}{k_i^2-m^2+i\epsilon}\to -2\pi i\delta(k_i^2-m^2)\theta(k_i^0)\ . \tag{7.113}$$

另一方面，对于圈动量的积分可以理解为，

$$\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}=\int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4k_2}{(2\pi)^4}(2\pi)^4\delta(k_1+k_2-k) \tag{7.114}$$

带回到 7.109 式中可以看出，我们实际上证明了到 $O(\lambda^2)$ 阶光学定理的正确性，即

$$\begin{aligned}&\mathrm{disc}\mathcal{M}(k)=2i\mathrm{Im}\mathcal{M}(k)\\&=\frac{i}{2}\int\frac{d^3k_1}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_1}\int\frac{d^3k_1}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_1}|\mathcal{M}(k)|^2(2\pi)^4\delta(k_1+k_2-k)\ .\end{aligned} \tag{7.115}$$

在我们讨论的这个简单例子中，我们看到了物理区间的奇异性可以利用规则 7.113 得到。Cutkosky 证明了这一规则是完全普遍的。并且利用这一规则可以证明到微扰论的任意阶光学定理都是成立的。

§7.4 规范理论中的幺正性

鬼场的存在使得非 Abel 规范理论具有与以往我们碰到的理论非常不同的性质。首先要碰到的困惑是如何理解物理振幅的幺正性问题，以及如何理解鬼场在保

证理论的幺正性方面起的作用。我们将看到 Ward 恒等式在保证几率守恒与可重整性方面的重要作用。

§7.4.1 Ward 恒等式与幺正性

Ward 恒等式，在非 Abel 规范理论中也叫做 Slavnov–Taylor 恒等式，在规范理论中起到了非常重要的作用。它保证了规范理论的可重整性和微扰振幅的幺正性。一般的讨论可以见 Abers 和 Lee 的著名文献。这里我们并不给出严格的论证，只是给出介绍性的讨论。

考虑一个与费米子耦合的 $SU(2)$ 规范理论，其中费米子填充基础表示。几率守恒要求散射的 S 矩阵必须是幺正的，即

$$S^+S = SS^+ = 1 \text{ 。} \tag{7.116}$$

或者，对于任意入态 i 、出态 f，

$$\sum_n S_{in}S^*_{fn} = \delta_{if} \text{ 。} \tag{7.117}$$

由

$$S_{if} = \delta_{if} + i(2\pi)^4\delta^4(p_i - p_f)T_{if} \text{ ,} \tag{7.118}$$

得出，

$$\mathrm{Im}T_{if} = \frac{1}{2}\sum_n T_{in}T^*_{fn}(2\pi)^4\delta^4(p_i - p_f) \text{ 。} \tag{7.119}$$

这里我们指出对于存在鬼场的规范，对于 7.119 和 7.103 式的理解存在着困惑，到底非物理的态起着什么样的作用？值得指出的是 7.119 式是严格的非微扰的表达式。但假设理论可以做微扰展开，那么 7.119 式到微扰论的每一阶都是对的。讨论 $2 \to 2$ 过程 $\bar{f}f \to \bar{f}f$ 。到微扰论的最低阶（ $O(g^2)$ ），7.119 式中的中间态可以是两个规范粒子或两个鬼粒子，见图 7.2 （一个规范粒子的中间态不可能保持 4- 动量的守恒因而对 7.119 式的右边不贡献）。而 7.119 式的左边的最低阶贡献只能在 $O(g^4)$ 阶。见图 7.3 ， 这表面上看起来需要做圈图计算，但是仅仅考虑吸收部分的的话，在 $O(g^4)$ 阶并不需要做圈图计算。吸收部分的贡献来源于中间态在物理质壳时的贡献（ Cutkosky rule ）。在这里我们不考虑如图 7.4 所示的中间态是费米子的过程，不难理解除了一些非 Abel 群因子外对它们的分析与 QED 时的情况相同，即这些图单独满足微扰幺正性.

下面我们在 Feynman 规范（ $\xi = 1$ 的协变规范）中来研究规范理论中的幺正性问题。 Feynman 规范下规范粒子的传播子为 $\triangle^{ab}_{\mu\nu} = \delta^{ab}(-g_{\mu\nu})/(k^2 + i\epsilon)$ 。利用公式

$$\frac{1}{x \mp i\epsilon} = \mathrm{P}\frac{1}{x} \pm i\pi\delta(x) \text{ ,} \tag{7.120}$$

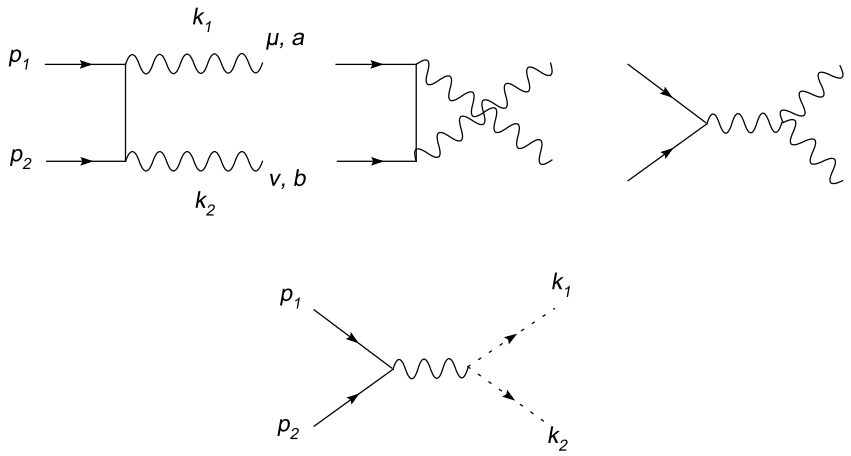


图 7.2: 第一排的三个图给出了 $f\bar{f} \to$ 两个规范粒子的物理过程的费曼图.

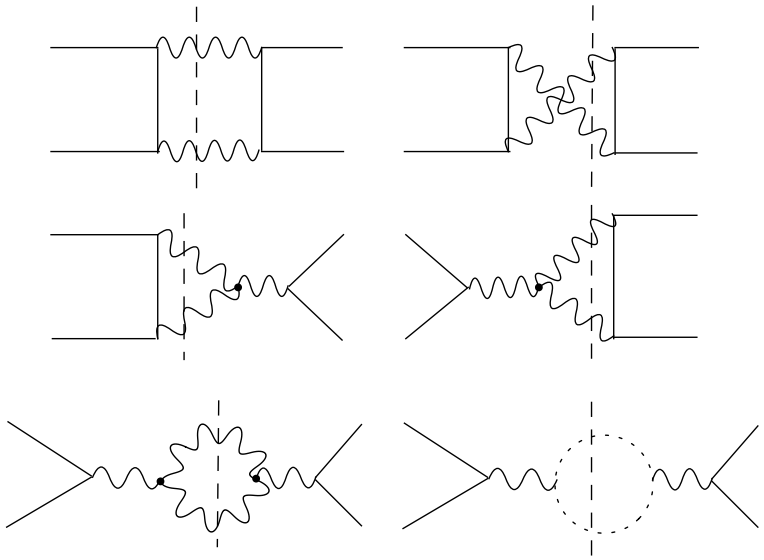


图 7.3: $f\bar{f} \to f\bar{f}$ 单圈过程：中间态是规范场和鬼场的过程.

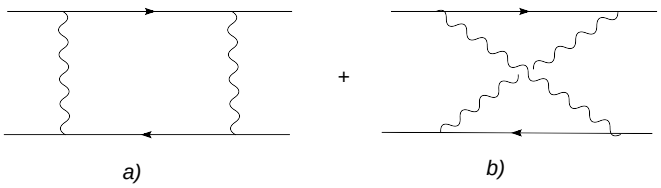


图 7.4: a) 对 s 道贡献的吸收部分有贡献； b) 对 s 道不贡献吸收部分，但在 t 道物理区间贡献吸收部分.

其中 P 表示取主值，得知传播子的虚部正比于 $\pi\delta^{ab}g_{\mu\nu}\delta(k^2)\theta(\omega)$ 。同样对于鬼态传播子有虚部 $\pi\delta^{ab}\delta(k^2)\theta(\omega)$ 。由此虚部的表达式得知它们正好描述了中间态在质壳时的贡献，因此在计算 Feynman 图的吸收部分时，只需要把相应的传播子替换成传相应的 δ 函数即可，详细讨论参见 7.3 一节和 7.113 式。做了这个替换后，对圈动量的积分被简化为一个对中间态粒子的相空间的积分。幺正性条件 7.119 式被简化为，

$$\int d\rho_2[\frac{1}{2}T^{ab}_{\mu\nu}T^{ab*}_{\mu'\nu'}g^{\mu\mu'}g^{\nu\nu'}-S^{ab}S^{ab*}]=\frac{1}{2}\int d\rho_2 T^{ab}_{\mu\nu}T^{ab*}_{\mu'\nu'}P^{\mu\mu'}(k_1)P^{\nu\nu'}(k_2)\ , \tag{7.121}$$

其中 $T^{ab}_{\mu\nu}$ 和 S^{ab} 分别是 $f\bar{f}\to A^a_\mu A^b_\nu$ 以及 $f\bar{f}\to C^{a+}C^b$ 的振幅。式左对应着 7.119 的左边，式右对应着 7.119 式的右边，且

$$\begin{aligned} P^{\mu\mu'}(k_1) &= \sum_{\sigma=1,2}\epsilon^\mu_1(k_1,\sigma)\epsilon^{\mu'*}_1(k_1,\sigma) \\ P^{\nu\nu'}(k_2) &= \sum_{\sigma=1,2}\epsilon^\mu_2(k_2,\sigma)\epsilon^{\mu'*}_2(k_2,\sigma)\ 。 \end{aligned} \tag{7.122}$$

上式中的 ϵ 是末态物理的规范粒子的极化矢量（仅有两个独立分量）。引入矢量 η 与 k 、 $\epsilon(k,1)$ 、 $\epsilon(k,2)$ 一起张成 4 维空间的基失。 η 与 $\epsilon_{1,2}$ 正交但 $\eta\cdot k\neq 0$ ，且可令 $\eta^2=0$ 。不难证明，

$$P_{\mu\nu}=-g_{\mu\nu}+Q_{\mu\nu}\ , \tag{7.123}$$

其中

$$Q_{\mu\nu}=(k_\mu\eta_\nu+k_\nu\eta_\mu)/k\cdot\eta\ 。 \tag{7.124}$$

显然它的作用是为了消去非横向极化的部分。不难证明费曼振幅之间存在着如下关系：

$$k^\mu_1 T^{ab}_{\mu\nu}=-iS^{ab}k_{2\nu}\ ,\ \ k^\nu_2 T^{ab}_{\mu\nu}=-iS^{ab}k_{1\mu}\ 。 \tag{7.125}$$

并从其可以推出关系： $k_{1\mu}T^{ab}_{\mu\nu}k_{2\nu}=0$ 。较为详细的利用费曼图的分析在 Cheng 和 Li 的书中可以找到。事实上这些式子是我们下面要讨论的 Ward 恒等式的特例。由这些 Ward 等式不难一般的证明 7.121 式。

练习：对于最低阶的微扰振幅，证明 7.125 式 。

从以上讨论我们可以看出，鬼场的作用是消除中间态规范场中的非物理自由度。对于 Abel 规范理论，规范对称性导致的 Ward 等式 $k^\mu T_{\mu\nu}=0$ 已经足以保证微扰幺正性的成立而并不出现鬼场。对于非 Abel 规范场则必须有鬼场的存在来保证微扰幺正性的成立。

§7.4.2 BRS 变换和 Ward 恒等式

在非 Abel 规范理论中，是利用所谓的 Becchi， Rouet 和 Stora 发现的推广的规范变换来建立 Ward 等式的。下面我们以 $SU(2)$ 规范变换为例介绍这一方法。拉式量可以写为，

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a} + \bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \ , \tag{7.126}$$

其中

$$\begin{aligned} D_\mu\psi &= (\partial_\mu - igA^a_\mu T^a)\psi \\ F^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\epsilon^{abc}A^b_\mu A^c_\nu \ 。 \end{aligned} \tag{7.127}$$

7.126 式在如下规范变换下不变：

$$\begin{aligned} \delta\psi &= -iT^a\theta^a \ , \\ \delta A^a_\mu &= \epsilon^{abc}\theta^b A^c_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a \ 。 \end{aligned} \tag{7.128}$$

在做了量子化以后，有效的拉式量还要加上规范固定项和鬼场的部分：

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{g.f.} + \mathcal{L}_{ghost} \ , \tag{7.129}$$

其中

$$\mathcal{L}_{g.f.} = -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A^a_\mu)^2 \ , \tag{7.130}$$

$$\mathcal{L}_{ghost} = C^+_a\partial^\mu[\delta_{ab}\partial_\mu - g\epsilon_{abc}A^c_\mu]C^b \ 。 \tag{7.131}$$

根据 3.116 式及之前的讨论，也可以把鬼场的拉氏量改写为： [3]

$$\mathcal{L}_{ghost} = -\partial^\mu\rho_a(D_\mu\sigma_a) \ , \tag{7.134}$$

[3]在 7.130 式中对鬼场作如下变换，

$$C_a = (\rho_a + i\sigma_a)/\sqrt{2} \ , \ C^+_a = (\rho_a - i\sigma_a)/\sqrt{2} \ 。 \tag{7.132}$$

利用 Grassman 数的反对易性质 $\rho^2 = \sigma^2 = 0$ 和 $\rho\sigma = -\sigma\rho$ ，可以得到

$$\mathcal{L}_{ghost} = -i\partial^\mu\rho_a(D_\mu\sigma_a) + \frac{1}{2}g\epsilon^{abc}(\partial^\mu A^c_\mu)C_aC^+_b \ 。 \tag{7.133}$$

与 7.134 式所产生的费曼顶角相比，除了一个无关紧要的常数因子，多了一项正比于规范粒子的动量 k_μ 项。如果这一多余的顶角耦合到规范粒子外线，那么由横向规范条件 $\epsilon_\mu \cdot k^\mu = 0$, 知道它没有贡献。如果耦合到规范粒子内线，那么这一顶角总是与规范粒子的传播子乘在一起：$k^\mu D_{\mu\nu} \propto \xi k_\nu$ 。但是规范场的纵向部分对物理振幅并不贡献。

其中

$$D_\mu\sigma^a = \partial_\mu\sigma^a - g\epsilon^{abc}\sigma^b A^c_\mu \ 。 \tag{7.135}$$

值得注意的是 S_{eff} 在规范变换 7.128 式下并不是不变的。但是它在如下的 BRS 变换下是不变的：

$$\begin{aligned}
\delta A^a_\mu &= \omega D_\mu\sigma^a \\
\delta\psi &= ig\omega(T^a\sigma^a)\psi \\
\delta\rho^a &= \omega\partial^\mu A^a_\mu/\xi \\
\delta\sigma^a &= -g\omega\epsilon^{abc}\sigma^b\sigma^c/2 \ 。
\end{aligned} \tag{7.136}$$

其中 ω 是一个与时空坐标无关的无穷小 Grassman 数。可以证明有效拉式量 $\mathcal{L}_{eff}$ 在 7.136 式的变换下是不变的。首先对于 $\mathcal{L}$， 7.136 式相当于进行了一个普通的规范变换： $\theta^a = -g\omega\sigma^a$ ，因此是不变的。需要考虑的仅仅是 $\mathcal{L}_{g.f.} + \mathcal{L}_{ghost}$:

$$\begin{aligned}
\delta\left[\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A^a_\mu)^2 + \partial^\mu\rho^a(D_\mu\sigma^a)\right] &= \frac{1}{\xi}(\partial^\lambda A^a_\lambda)\partial^\mu(\delta A^a_\mu) + \partial^\mu(\delta\rho^a)(D_\mu\sigma^a) \\
&\quad +\partial^\mu\rho^a\delta(D_\mu\sigma^a) \ 。
\end{aligned} \tag{7.137}$$

首先很容易看出等式右边的第一项和第二项合在一起仅贡献一个全导数项。其次

$$\begin{aligned}
\delta(D_\mu\sigma^a) &= \delta(\partial_\mu\sigma^a - g\epsilon^{abc}\sigma^b A^c_\mu) \\
&= -g\omega\epsilon^{abc}\partial_\mu(\sigma^b\sigma^c)/2 \\
&\quad +g\epsilon^{abc}(\omega D_\mu\sigma^b)\sigma^c + g\epsilon A^b_\mu(-g\omega\epsilon^{cde}\sigma^d\sigma^e) \ 。
\end{aligned} \tag{7.138}$$

不难验证，其中正比于 g 和 g^2 的项分别相消，

$$-g\omega\epsilon^{abc}(\partial_\mu\sigma^b)\sigma^c + g\omega\epsilon^{abc}(\partial_\mu\sigma^b)\sigma^c = 0 \ ,$$

$$g^2\omega\sigma^c\sigma^d A^e_\mu(\epsilon^{abc}\epsilon^{bde} - \epsilon^{cbd}\epsilon^{bea} - \epsilon^{dbe}\epsilon^{bac}) = 0 \ 。$$

其中第二项等式的成立是由于 Jocobi 恒等式：

$$[[T^a,T^b],T^c] + [[T^b,T^c],T^a] + [[T^c,T^a],T^b] = 0 \ 。 \tag{7.139}$$

利用 S_{eff} 的 BRS 不变性，可以推导广义的 Ward 恒等式。首先写出如下的生成泛函，

$$\begin{aligned}
&Z[J,\alpha,\beta,\chi,\bar\chi,\kappa,\nu,\lambda,\bar\lambda] \\
&= \int[dA_\mu][d\rho][d\sigma][d\psi][d\bar\psi]\exp\{i\int d^4x(\mathcal{L}_{eff} + \Sigma)\} \ ,
\end{aligned} \tag{7.140}$$

其中

$$\begin{aligned}\Sigma &= J_\mu A^\mu + \alpha\cdot\rho + \beta\cdot\sigma + \bar\chi\psi + \bar\psi\chi + \kappa_\mu\cdot D^\mu\sigma \\ &\quad + \frac{1}{2}\nu\cdot(\sigma\times\sigma) + \bar\lambda T\cdot\sigma\psi + \bar\psi T\cdot\sigma\lambda \ 。\end{aligned} \tag{7.141}$$

利用 BRS 不变性得到,

$$\int d^4x\int[dA_\mu][d\rho][d\sigma][d\psi][d\bar\psi](\delta\Sigma)\exp\{i\int d^4x'[\mathcal{L}(x')+\Sigma(x')]\}=0 \ 。 \tag{7.142}$$

而

$$\begin{aligned}\delta\Sigma &= J_\mu\cdot\delta A^\mu + \alpha\cdot\delta\rho + \beta\cdot\delta\sigma + \bar\chi\delta\psi + \delta\bar\psi\chi \\ &\quad + \kappa_\mu\cdot\delta(D^\mu\sigma) + \frac{\nu}{2}\cdot\delta(\sigma\times\sigma) + \bar\lambda\delta(T\cdot\sigma\psi) + \delta(\bar\psi T\cdot\sigma)\lambda \ 。\end{aligned} \tag{7.143}$$

除了 $D_\mu\sigma$ 式以外，不难证明上式中其余所有复合算符的变分也为零,

$$\begin{aligned}&\delta(\sigma^a\sigma^b-\sigma^b\sigma^a) \\ &=(-g\omega/2)(\epsilon^{acd}\sigma^c\sigma^d\sigma^b+\epsilon^{bcd}\sigma^c\sigma^d\sigma^a-\epsilon^{bcd}\sigma^c\sigma^d\sigma^a-\epsilon^{acd}\sigma^b\sigma^c\sigma^d) \\ &=0 \ ,\end{aligned} \tag{7.144}$$

$$\begin{aligned}\delta(T\cdot\sigma\psi) &= T\cdot\sigma\psi + T\cdot\sigma\delta\psi \\ &= T\cdot(-\frac{g}{2}\omega\sigma\times\sigma)\psi - ig\omega(T\cdot\sigma)(T\cdot\sigma)\psi = 0 \ ,\end{aligned} \tag{7.145}$$

因为

$$\begin{aligned}T\cdot\sigma T\cdot\sigma &= T^aT^b\sigma^a\sigma^b = \frac{1}{2}(T^aT^b-T^bT^a)\sigma^a\sigma^b \\ &= \frac{i}{2}\epsilon^{abc}T^c\sigma^a\sigma^b = \frac{i}{2}T\cdot(\sigma\times\sigma) \ 。\end{aligned} \tag{7.146}$$

于是 Ward 等式可以写为

$$\begin{aligned}\omega\int d^4x\int[dA_\mu][d\rho][d\sigma][d\psi][d\bar\psi](J_\mu\cdot D^\mu\sigma+\alpha\cdot\partial^\mu A_\mu/\xi-g\beta\cdot\sigma\times\sigma/2 \\ +ig\bar\chi T\cdot\sigma\psi-ig\bar\psi T\cdot\sigma\chi)\exp\{i\int d^4x[\mathcal{L}_{eff}+\Sigma]\}=0 \ ,\end{aligned} \tag{7.147}$$

或者

$$\int d^4x\left(J^a_\mu\frac{\delta}{\delta\kappa^a_\mu}+\frac{\alpha^a}{\xi}\partial^\mu\frac{\delta}{\delta J^a_\mu}-\frac{g}{2}\beta^a\frac{\delta}{\delta\nu^a}+ig\bar\chi\frac{\delta}{\delta\lambda}-ig\frac{\delta}{\delta\bar\lambda}\chi\right)W[J,\cdots,\lambda]=0 \ 。 \tag{7.148}$$

这就是非 Abel 规范变换中的 Ward 等式。它在规范场的可重整性的形式化的证明起到非常重要的作用，这里我们就不再介绍了。比起利用 7.148 式，有些时候更为直接的推导方式是利用格林函数本身在 BRS 变换下的不变性，比如

$$\delta < 0|T(A^a_\mu(x)A^b_\nu(0))|0 >= 0 \ , \tag{7.149}$$

这意味着

$$< 0|T(\delta A^a_\mu(x)A^b_\nu(0))|0 > + < 0|T(A^a_\mu(x)\delta A^b_\nu(0))|0 >= 0 \ , \tag{7.150}$$

或者

$$\omega < 0|T(D_\mu\sigma^a(x)A^b_\nu(0))|0 > +\omega < 0|T(A^a_\mu(x)D_\nu\sigma^b(0))|0 >= 0 \ 。 \tag{7.151}$$

此式也可以由对 7.148 式对于 $J^a_\mu(x)$ ， $J^b_\nu(0)$ 作泛函微商得到。下面作为一个练习我们利用 7.148 式来推出 7.125 式。

考虑四点函数 $< 0|T(\rho A_\nu\bar{\psi}\psi)|0 >$ ，利用其 BRS 变换下的不变性得出，

$$\begin{aligned} &< 0|T(\delta\rho A_\nu\bar{\psi}\psi)|0 > + < 0|T(\rho\delta A_\nu\bar{\psi}\psi)|0 > \\ &+ < 0|T(\rho A_\nu\delta\bar{\psi}\psi)|0 > + < 0|T(\rho A_\nu\bar{\psi}\delta\psi)|0 >= 0 \ 。 \end{aligned} \tag{7.152}$$

由 7.136 式得知 $\delta\psi$ 与 $\delta\bar{\psi}$ 给出的是定义在同一个时空点的场算符的乘积，反映到格林函数中就有比如

$$\begin{aligned} &< 0|T(\rho(x_1)A_\nu(x_2)\bar{\psi}(x_3)\delta\psi(x_4))|0 > \\ &= ig\omega < 0|T(\rho(x_1)A_\nu(x_2)\bar{\psi}(x_3)T\cdot\sigma(x_4)\psi(x_4))|0 > \ 。 \end{aligned} \tag{7.153}$$

这样的格林函数涉及到定义在同一个时空点的场算符的乘积，不是很好处理。但是为了证明 7.125 式只需要考虑的是 on-shell T 矩阵元之间，而不是格林函数之间的关系。为得到前者需要将格林函数乘以费米子传播子的倒数（ $\not{k}_4 - m$ ）并且把费米子送到质壳上（ $\not{k}_4 = m$ ）。从示意图 7.5 很容易理解由 7.153 式给出的贡献 外腿的费米子在质壳上时 消失。 以此类推所有的复合算符的格林函数均没有贡献。于是，

$$\frac{1}{\xi} < 0|T(\partial^\mu A^a_\mu A^b_\nu\bar{\psi}\psi)|0 > + < 0|T(\rho^a\partial_\nu\sigma^b\bar{\psi}\psi|0 >= 0 \ 。 \tag{7.154}$$

在 Feynman–'t Hooft 规范中（ $\xi = 1$ ）它相应于

$$k^\mu_1 T^{ab}_{\mu\nu} = -iS^{ab}k_{2\nu} \ , \tag{7.155}$$

即 7.125 式。

§7.5 S 矩阵元的规范无关性

这里的讨论主要参考的是 Abers 和 B. W. Lee 的著名文献。

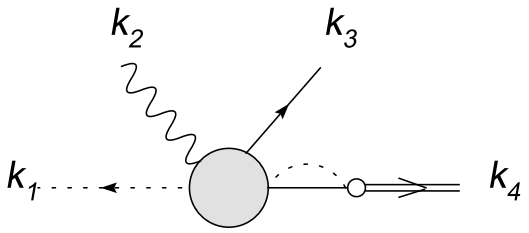


图 7.5:

第八章　手征对称性与 σ 模型

§8.1　强相互作用的手征对称性

强相互作用是由量子色动力学 (QCD) 来描述的。QCD 的拉氏量 (Lagrangian) 可以表述为,

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu,a} + \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m)q - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^{\mu a})^2 + \bar{C}^a\partial^\mu D^{ab}_\mu C^b \ , \tag{8.1}$$

其中 q 表示夸克场，m 是夸克质量矩阵，$m = diag(m_u, m_d, m_s, ...)$,

$$q(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \\ s(x) \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix} \ ; \tag{8.2}$$

在夸克场所满足的拉氏量中，可以按如下方式定义夸克的左手部分和右手部分,

$$\begin{aligned} q_R &= \frac{1}{2}(1+\gamma_5)q \ , \\ q_L &= \frac{1}{2}(1-\gamma_5)q \ , \end{aligned} \tag{8.3}$$

而 8.1 式改为,

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu\,a} + \bar{q}_L i\gamma^\mu D_\mu q_L + \bar{q}_R i\gamma^\mu D_\mu q_R + \bar{q}_L m q_R + \bar{q}_R m q_L 。 \tag{8.4}$$

如果拉氏量中没有质量，则拉氏量中不包含夸克场的左手和右手部分的混合，那么夸克的拉氏量在如下的 $SU_L(N_f) \times SU_R(N_f)$ 手征变换下保持不变。

$$q_R \to V_R q_R \ , \quad q_L \to V_L q_L \ , \quad V_R \ , V_L \in U(N_f) \ , \tag{8.5}$$

其中 N_f 是夸克味的数目。此时我们说 QCD 的拉氏量具有手征对称性，且下面的矢量流和轴矢流守恒,

$$\begin{aligned} V^\mu_a &= \bar{q}\gamma^\mu \frac{1}{2}\lambda_a q \ , \\ A^\mu_a &= \bar{q}\gamma^\mu\gamma_5 \frac{1}{2}\lambda_a q \ , \quad a = 1, ..., N_f^2 - 1 。 \end{aligned} \tag{8.6}$$

但是实际上， QCD 的拉氏量还有夸克质量项，破坏手征对称性，所以矢量流和轴矢流并不严格守恒,

$$\begin{aligned}\partial_\mu V_a^\mu &= \frac{1}{2}i\bar{q}(m\lambda_a - \lambda_a m)q \ , \\ \partial_\mu A_a^\mu &= \frac{1}{2}i\bar{q}(m\lambda_a + \lambda_a m)q。\end{aligned} \tag{8.7}$$

不过由于 u,d,s 的质量很轻, 矢量流和轴矢流的散度近似为零, 因而 $SU_L(3)\times SU_R(3)$ 对称群近似成立。对于 $SU_L(2)\times SU_R(2)$, 因为 $m_u, m_u \ll m_s$, 所以 $SU_L(2)\times SU_R(2)$ 对称群近似成立程度要比 $SU_L(3)\times SU_R(3)$ 好的多。因此我们可以把夸克的质量项作为对无质量的 QCD 的拉氏量的微扰来处理。我们可以粗略的估计一下手征破坏的微扰的效应，比较夸克质量

$$\hat{m} = \frac{1}{2}(m_u + m_d) \tag{8.8}$$

($\hat{m} \simeq 7\text{MeV}$) 和参与低能过程的强子的典型质量 $M_\rho \simeq 770\text{MeV}$, 可知对于 $SU_L(2)\times SU_R(2)$ 对称群，夸克质量项对低能定理有百分之几的修正。

§8.2 流代数

讨论 $SU_f(3)$ 的情形,

$$q(x) = \begin{pmatrix} q_1(x) \\ q_2(x) \\ q_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \\ s(x) \end{pmatrix}。 \tag{8.9}$$

对其可以进行如下无穷小 $SU_f(3)$ 变换:

$$q_i \to q_i' = q_i + i\alpha^a(\lambda^a/2)_{ij}q_j \ , \tag{8.10}$$

其中 λ^a 是 $SU(3)$ 群的八个 Gellman 矩阵。下面先给出 $SU(3)$ 群的一些性质。

$$\begin{gathered}\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},\end{gathered} \tag{8.11}$$

$$\begin{aligned}
[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2}] &= if_{abc}\frac{\lambda_c}{2}, \\
\{\lambda_a, \lambda_b\} &= \frac{4}{3}\delta_{ab} + 2d_{abc}\lambda_c, \\
Tr(\lambda_a\lambda_b) &= 2\delta_{ab}, \\
Tr(\lambda_a\lambda_b\lambda_c) &= 2d_{abc} + 2if_{abc}.
\end{aligned} \tag{8.12}$$

其中， f_{abc} 关于下标反对称， d_{abc} 关于下标全对称。

$$\begin{aligned}
f_{123} = f_{147} = f_{246} &= f_{257} = f_{345} = 1, \\
f_{156} = f_{367} = -\frac{1}{2}, &\qquad f_{458} = f_{678} = \sqrt{\frac{3}{2}},
\end{aligned} \tag{8.13}$$

$$\begin{aligned}
d_{146} = d_{157} = -d_{247} = d_{256} = d_{344} &= d_{355} = -d_{366} = -d_{377} = \frac{1}{2}, \\
d_{118} = d_{228} = d_{338} &= -d_{888} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\
d_{448} = d_{558} = d_{668} &= d_{778} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}.
\end{aligned} \tag{8.14}$$

由 8.9 所定义的流为 8.6 式中的第一项。 相对应的荷为，

$$Q^a(t) = \int V_0^a(x)d^3x \ , \tag{8.15}$$

它满足 $SU(3)$ 的代数，

$$[Q^a(t), Q^b(t)] = if^{abc}Q^c(t)。 \tag{8.16}$$

上式是如下正则对易关系的结果：

$$\{q_{\alpha i}(\mathbf{x}, t), q^+_{\beta j}(\mathbf{y}, t)\} = \delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})。 \tag{8.17}$$

类似的，对于如下的无穷小轴变换，

$$q_i \to q_i' = q_i + i\beta^a(\lambda^a/2)_{ij}\gamma_5 q_j \ , \tag{8.18}$$

与之相应的流是 8.6 式中的第二项，且相应的荷是，

$$Q^{5a}(t) = \int A_0^a(x)d^3x。 \tag{8.19}$$

轴失流的荷和矢量流的荷一起构成了如下对易关系，叫做 $SU_L(3) \times SU_R(3)$ 手征代数，

$$\begin{aligned}
\left[Q^a(t), Q^b(t)\right] &= if^{abc}Q^c(t) \ , \\
\left[Q^a(t), Q^{5b}(t)\right] &= if^{abc}Q^{5c}(t) \ , \\
\left[Q^{5a}(t), Q^{5b}(t)\right] &= if^{abc}Q^c(t)。
\end{aligned} \tag{8.20}$$

同样地，利用 8.17 式，我们可以导出荷与流以及流与流之间的对易关系，

$$\begin{aligned}\left[V_a^0(\mathbf{x},t),V_b^0(\mathbf{y},t)\right]&=if^{abc}V_c^0(\mathbf{x},t)\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\ ,\\ \left[V_a^0(\mathbf{x},t),A_b^0(\mathbf{y},t)\right]&=if^{abc}A_c^0(\mathbf{x},t)\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\ ,\\ \left[A_a^0(\mathbf{x},t),A_b^0(\mathbf{y},t)\right]&=if^{abc}V_c^0(\mathbf{x},t)\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})。\end{aligned}\tag{8.21}$$

也可以研究流的时间分量与空间分量之间的对易关系，此时对易关系的右边除了普通的项以外，会出现一个 δ 函数的梯度，叫做 Schwinger 项。在这里我们不再作讨论了，有兴趣的读者可以参阅有关文献。

§8.3 对称性的自发破缺和 Goldstone 定理

QCD 的拉氏量具有近似的手征对称性，但是南部 (Nambu)于 1961 年 通过与超导的 BCS 理论的对比指出， QCD 的真空态，即能量的最低态并不满足这一对称性，这一重要的观察对于我们对强相互作用的理解具有重要而深远的意义。

§8.3.1 Nambu–Jona-Lasinio 模型

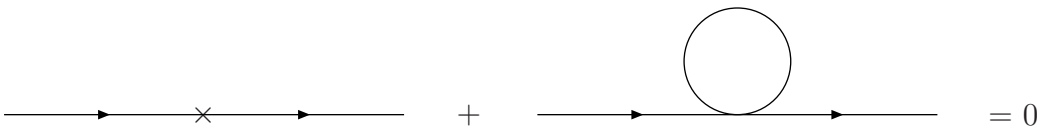
在目前人们还不能从第一原理出发证明 QCD 的拉氏量具有手征对称性自发破缺的性质。在这里我们利用所谓的 Nambu–Jona-Lasinio 模型来做一下有启发性的讨论，这也是遵从 Nambu 的原始的想法进行的讨论。我们来看一下下面的 4– 费米子拉氏量：

$$\mathcal{L}=\bar\psi i\partial\!\!\!/\psi+\frac{G}{\Lambda^2}\left[(\bar\psi\psi)^2-(\bar\psi\gamma_5\psi)^2\right]\ ,\tag{8.22}$$

式中第一项记为 $\mathcal{L}_0$ ，第二项记为 $\mathcal{L}_I$ 。这个模型具有 $U_L(1)\times U_R(1)$ 的手征对称性，并且朴素地看费米子是无质量的。但是我们可以假设质量通过动力学产生，即在拉氏量中由于动力学的原因产生出一项新的动力学项 $\mathcal{L}_m=-m\bar\psi\psi$ 这样我们可以把上述拉氏量改写成，

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_I=\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_m+(\mathcal{L}_I-\mathcal{L}_m)\ ,\tag{8.23}$$

即重新定义了拉氏量的运动学部分和相互作用部分。在用微扰论处理这个新的拉氏量时，新的相互作用项不应再产生任何新的对自能的贡献了。用图形表示如下，



上图的数学表示，叫做 “Gap equation” ，写为

$$\begin{aligned} 0 &= -i\Sigma(p) \\ &= im + 2i\frac{G}{\Lambda^2}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}[-\mathrm{tr}(iS_F(p)) + iS_F(p) - \gamma_5 iS_F(p)\gamma_5 + \gamma_5\mathrm{tr}(iS_F\gamma_5)]。 \end{aligned} \tag{8.24}$$

其中 $iS_F(p) = 1/(\not{p} - m)$ 。上式中等式右边积分发散，但我们在欧氏空间中用 cut-off 正规化的办法使其有意义， cut-off 或积分截断参量当然取为 Λ ，即出现在拉氏量中的带量纲的参数。简单的推导得出，

$$\frac{2\pi^2}{G} = 1 - \frac{m^2}{\Lambda^2}\ln(\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1)。 \tag{8.25}$$

即只要耦合常数 G 足够大，也即只要相互作用足够强，就会有非零的质量解。也就是说，产生了动力学的手征对称性的自发破缺。 $G = 2\pi^2$ 是相变的临界点，并且是二阶相变。

手征对称性可以自发破缺。而对于同位旋的对称性存在着所谓的 ***Vafa–Witten* 定理：同位旋的对称性不可能由 *CP* 对称的类矢量型 *(vector-like)* 规范理论破缺**。换句话说， QCD 本身不能给出对 $m_u - m_d$ 的质量差的解释。[1]

§8.3.2 Goldstone 定理

一般来说，对称性的实现有两种方式：

1. Wigner–Weyl 方式： $\mathcal{L}$ 不变、真空不变，即存在一个 Hilbert 空间的使拉氏量不变的算符 $\mathcal{U}$ 使得 $\mathcal{U}|0>=|0>$. 对于可观测量 A,

$$A \to A^g = \mathcal{U}(g)A\mathcal{U}^{-1}(g)。 \tag{8.26}$$

   态是按相应于不可约表示的多重态来分类的，真空态或基态满足 $\mathcal{U}|0>=|0>$, 对称性破缺通过 $\epsilon\mathcal{L}'$ 来实现。
2. Nambu–Goldstone 方式：对称性仅反映在动力学中而真空不是不变的。此时我们说对称性发生自发破缺且此时粒子不再按不可约表示分类。

为了更清楚地讨论 Nambu–Goldstone 机制，考虑一个在某种连续 (内部) 变换下转动不变的拉氏量， $\mathcal{L}$ 满足

$$\mathcal{U}\mathcal{L}\mathcal{U}^+ = \mathcal{L}。 \tag{8.27}$$

[1] C. Vafa and E. Witten, Phys. Rev. Lett. **53**(1984)535; Nucl. Phys. **B**234(1984)173.

$\mathcal{U}$ 把在同一不可约表示中的态联系起来,

$$\mathcal{U}|A>=|B>\ , \tag{8.28}$$

且

$$E_A =< A|H_0|A >=< B|H_0|B >= E_B。 \tag{8.29}$$

但是 $|A>=\phi_A|0>$, $|B>=\phi_B|0>$, 其中 ϕ_A, ϕ_B 为适当的产生算符。在变换下拉氏量不变实际上只是导致 $\mathcal{U}\phi_A\mathcal{U}^+=\phi_B$, 所以 Eq. (8.28) 当且仅当

$$\mathcal{U}|0>=|0> \tag{8.30}$$

时才成立。当此式破坏时即说对称性自发破缺。$\mathcal{U}$ 是一个幺正算符, 由 $\mathcal{U}=e^{i\epsilon^\alpha\hat{Q}^\alpha}$ 推出,

$$\mathcal{U}\hat{\phi}(x)\mathcal{U}^+=e^{i\epsilon^\alpha t^\alpha}\hat{\phi}(x)。 \tag{8.31}$$

即

$$[Q^\alpha,\phi_i]=it^\alpha_{ij}\phi_j。 \tag{8.32}$$

所以 $\mathcal{U}|0>\neq|0>$ 意味着 $\exists$ 某个荷 Q^α 使得

$$Q^\alpha|0>\neq 0\ , \tag{8.33}$$

即 Q^α 不湮灭真空。[2] 而反过来, $Q^\alpha|0>\neq 0$ 或 $\mathcal{U}|0>\neq|0>$ 等价于 $\exists$ 某个场算符满足,

$$<0|\phi_j|0>\neq 0。 \tag{8.34}$$

因为由 Eq. (8.32),

$$\begin{aligned}&<0|[Q^\alpha,\phi_i]|0>=<0|Q^\alpha\phi_i-\phi_iQ^\alpha|0>\\&=\sum_n<0|Q^\alpha|n><n|\phi_i|0>-<0|\phi_i|n><n|Q^\alpha|0>\ 。\end{aligned} \tag{8.35}$$

如 $<0|\phi_j|0>\neq 0$, 则至少存在一个 Q^α 使得 $Q^\alpha|0>\neq 0$. 而反过来, 若 $Q^\alpha|0>\neq 0$ 则意味着至少 $\exists$ 一些 ϕ_j 使得 $<0|\phi_j|0>\neq 0$.

Goldstone 定理: 如果对称性自发破缺, 则存在零质量的 Goldstone 玻色子。

证明如下:

由流守恒 $\partial_\mu J^\mu=0$ 得到,

$$\begin{aligned}0 &= \int d^3\vec{x}[\partial_\mu J^\mu(x),\phi(0)]\\&= \partial_0\int d^3\vec{x}[J^0((\vec{x},t),\phi(0)]+\oint d\vec{S}\cdot[\vec{J}(\vec{x},t),\phi(0)]\\&= \frac{d}{dt}[Q(t),\phi(0)]\ ,\end{aligned} \tag{8.36}$$

[2]在微扰论里作不到这一点, 因为 Q^α 也取正规乘积。

证明了最后一个对易子是运动常数。在上面的证明中，面积分等于零是由于当面元趋于无穷远时，被积函数中的对易子成为类空的。如果

$$< 0|[Q(t), \phi(0)]|0 >= \eta \neq 0 \ , \tag{8.37}$$

我们则说真空自发破缺，且有

$$\begin{aligned} & < 0|[Q(t), \phi(0)]|0 >= \int d^3\vec{x} < 0|[J^0(\vec{x}, t), \phi(0)]|0 > \\ = & \int d^3\vec{x}\{< 0|J_0(\vec{x}, t)|n >< n|\phi(0)|0 > - < 0|\phi(0)|n >< n|J_0(\vec{x}, t)|0 >\} \\ = & \int d^3\vec{x}\{< 0|e^{iPx}J_0(0)e^{-iPx}|n >< n|\phi(0)|0 > - < 0|\phi(0)|n >< n|e^{iPx}J_0(0)e^{-iPx}|0 >\} \\ = & (2\pi)^3\delta(\vec{p}_n)\{< 0|J_0(0)|n >< n|\phi(0)|0 > e^{-iE_nt} - < 0|\phi(0)|n >< n|J_0(0)|0 > e^{iE_nt}\} \\ = & \ \eta \neq 0。 \end{aligned} \tag{8.38}$$

我们得到结论，即至少 $\exists$ 有一个 $|n >$ 使得 $< 0|J^0(0)|n >$ ， $< 0|\phi(0)|n >\neq 0$. 由于 η 与时间无关，这样的态必须有 $E_n = 0$ 。对 8.38 式两边对时间作微分，得出 $E_n\delta(\vec{p}_n) = 0$， 即 $|n >$ 一定是无质量的。这就证明了 Goldstone 定理。其中 $|n >$ 具有与 J^0 、 ϕ^0 同样的量子数。

§8.3.3 部分轴失流守恒（ PCAC ）

在 QCD 中， $\bar{\psi}\psi$ 具有真空的量子数并且其真空期望值 $< \bar{\psi}\psi >\neq 0$ ，相应于轴失流 $A^a_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\frac{\tau^a}{2}\psi$ 的荷是破缺的。即存在一 Goldstone 粒子，标记为 π^a ，使得

$$< 0|A^a_\mu(0)|\pi^a > \ \neq \ 0。 \tag{8.39}$$

如果同位旋是好量子数，则

$$< 0|A^a_\mu(0)|\pi^b >= f_\pi\delta^{ab}p_\mu \ , \tag{8.40}$$

f_π 是 π 的衰变常数，由 $\pi \to l\nu$ 衰变定出，

$$< 0|\partial^\mu A^a_\mu(0)|\pi^b >= f_\pi\delta^{ab}m^2_\pi。 \tag{8.41}$$

如果有严格的 $SU(2) \times SU(2)$ 手征对称性，则 $\partial_\mu A^\mu = 0$, $m^2_\pi = 0$, 而 $f_\pi \neq 0$ 与 Goldstone 定理的要求一致。如果对称性破缺，则

$$< 0|\partial^\mu A^a_\mu(0)|\pi^b >= f_\pi m^2_\pi < 0|\phi^a|\pi^b > 。 \tag{8.42}$$

推广到算符形式，则有

$$\partial^\mu A^a_\mu(0) = f_\pi m^2_\pi\phi^a。 \tag{8.43}$$

这就是 PCAC 。 PCAC 在粒子物理中有很多重要的应用，给出所谓的 '软' π 和低能定理。我们这里不作更多的讨论了。

§8.4 $\pi\pi$ 散射与交叉对称性

根据交叉对称性给出一个 $\pi\pi \to \pi\pi$ 过程的散射振幅，它将同时描述 s 、 t 、 u 道的 $\pi\pi$ 散射过程。按照一般的约定定义 s 、 t 道和 u 道的过程如下：

$$\begin{aligned}
\pi_\alpha(p_1)+\pi_\beta(p_2) &\to \pi_\gamma(p_3)+\pi_\delta(p_4)\,, \quad (s-channel)\\
\pi_\alpha(p_1)+\pi_\gamma(-p_3) &\to \pi_\beta(-p_2)+\pi_\delta(p_4)\,, \quad (t-channel)\\
\pi_\alpha(p_1)+\pi_\delta(-p_4) &\to \pi_\beta(-p_2)+\pi_\gamma(p_3)\,, \quad (u-channel)
\end{aligned} \tag{8.44}$$

α ， β ， γ 和 δ 是 π 的同位旋指标。交叉对称性是指 s,t,u 道的散射振幅可以用同一个解析函数 $T(s,t,u)$ 来表达。 s 道的散射振幅与 $T(s,t,u)$ 的关系是：

$$T_s(s,t,u) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0} T_s(s+i\varepsilon,t,u)\,, \tag{8.45}$$

s, t, u 的取值范围为 $s \geq 4m_\pi^2, 4m_\pi^2 - s \leq t \leq 0, u = 4m_\pi^2 - s - t$ ，这就是 s 道的物理区。同理 t 道的散射振幅为：

$$T_t(s,t,u) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0} T_t(s,t+i\varepsilon,u)\,, \tag{8.46}$$

s, t, u 的取值范围为 $t \geq 4m_\pi^2, 4m_\pi^2 - t \leq s \leq 0, u = 4m_\pi^2 - s - t$ ，它规定了 t 道的物理区； u 道的散射振幅为：

$$T_u(s,t,u) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0} T_u(s,t,u+i\varepsilon)\,, \tag{8.47}$$

s, t, u 的取值范围为 $u \geq 4m_\pi^2, 4m_\pi^2 - t \leq u \leq 0, s = 4m_\pi^2 - u - t$ ，它规定了 u 道的物理区。即对任意一个道由它的物理区对 s, t, u 的整个复平面做解析延拓都得到相同的函数形式 $T(s,t,u)$ 。 $T(s,,t,u)$ 可以表达成，

$$T(s,t,u) = A(s,t,u)\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + B(s,t,u)\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + C(s,t,u)\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}\,, \tag{8.48}$$

$A(s,t,u)$ ， $B(s,t,u)$ 和 $C(s,t,u)$ 是洛伦兹不变的。对上式做同位旋分解就得到同位旋散射振幅 (Isospin Amplitudes) ，下面只写出 s 道的同位旋散射振幅

$$\begin{aligned}
T_s^0(s,t,u) &= 3A(s,t,u) + B(s,t,u) + C(s,t,u)\,,\\
T_s^1(s,t,u) &= B(s,t,u) - C(s,t,u)\,,\\
T_s^2(s,t,u) &= B(s,t,u) + C(s,t,u)。
\end{aligned} \tag{8.49}$$

由全同粒子的广义玻色对称性有

$$T_s^I(s,t,u) = (-1)^I T_s^I(s,u,t), \tag{8.50}$$

该条件等价于

$$\begin{aligned} A(s,t,u) &= A(s,u,t)\ , \\ B(s,t,u) &= C(s,u,t)。 \end{aligned} \tag{8.51}$$

根据交叉对称性我们有

$$\begin{aligned} T_t^I(s,t,u) &= \sum_{I'=0}^{2} C_{II'}^{(ts)} T_s^{I'}(s,t,u)\ , \\ T_u^I(s,t,u) &= \sum_{I'=0}^{2} C_{II'}^{(us)} T_s^{I'}(s,t,u)\ , \end{aligned} \tag{8.52}$$

$C_{II'}^{(ts)}$, $C_{II'}^{(us)}$ 是（幺正的）常数矩阵,

$$\begin{aligned} C_{II'}^{(ts)} &= C_{II'}^{(st)} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 & 5/3 \\ 1/3 & 1/2 & -5/6 \\ 1/3 & -1/2 & 1/6 \end{pmatrix}\ , \\ C_{II'}^{(us)} &= C_{II'}^{(su)} = (-1)^{I+I'} C_{II'}^{(st)}。 \end{aligned} \tag{8.53}$$

同样的 t 道和 u 道也有广义的玻色对称性,

$$\begin{aligned} T_t^I(s,t,u) &= (-1)^I T_t^I(u,t,s)\ , \\ T_u^I(s,t,u) &= (-1)^I T_u^I(t,s,u)。 \end{aligned} \tag{8.54}$$

它们等价于,

$$\begin{aligned} B(s,t,u) &= B(u,t,s)\ , \\ A(s,t,u) &= C(u,t,s)。 \end{aligned} \tag{8.55}$$

$$\begin{aligned} C(s,t,u) &= C(t,s,u)\ , \\ A(s,t,u) &= B(t,s,u)。 \end{aligned} \tag{8.56}$$

§8.5 线形 σ 模型

在量子场论中，线性 σ 模型最初被 Gell-Mann 和 Lévy 在 60 年代引入的一个理论模型，是研究手征对称性自发破缺和部分守恒流 (PCAC) 假设的一个重要的工具，并且可以很好地实现 $SU(2) \times SU(2)$ 流代数，本章我们先介绍一下线性 σ 模型，然后讨论它在 $\pi\pi$ 散射中的简单应用。

对于线性 σ 模型，基本场有标量场 π 是同位旋的三重态 (π_1, π_2, π_3) 和标量场 σ 单态。相应的拉氏量定义为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_s + c\sigma \ , \\ \mathcal{L}_s &= \frac{1}{2}[(\partial_\mu \sigma)^2 + (\partial_\mu \pi)^2] - \frac{m^2}{2}[\sigma^2 + \pi^2] - \frac{\lambda}{4}[\sigma^2 + \pi^2]^2 \ , \end{aligned} \tag{8.57}$$

其中最后一项是线性破缺项，如果 $c \to 0$ ，即没有显式破缺项，则拉氏量在下列 $SU_L(2) \times SU_R(2)$ 手征变换下保持不变。

$$\begin{aligned} &\vec{\pi} \to \vec{\pi} + \vec{\alpha} \times \vec{\pi} - \vec{\beta}\sigma \ , \\ &\sigma \to \sigma + \vec{\beta} \cdot \vec{\pi}。 \end{aligned} \tag{8.58}$$

由上述变换可以给出两个 Noether 流。由于同位旋的对称性矢量流守恒, 如果 $c = 0$ 则轴矢流守恒,

$$\begin{aligned} V_\mu^a &= \varepsilon^{abc} \pi^b \partial_\mu \pi^c \ , \\ A_\mu^a &= \pi^a \partial_\mu \sigma - \sigma \partial_\mu \pi^a。 \end{aligned} \tag{8.59}$$

当 $m^2 < 0$ 时，对称性自发破缺。势能的极小值取在 $< \sigma > \neq 0$ 处，且

$$[Q^{5\alpha}, \pi^\beta] = -i\sigma g^{\alpha\beta}。 \tag{8.60}$$

$< \sigma > \neq 0$ 意味着 $Q^{5\alpha}$ 不湮灭真空,

$$< 0 | A_\mu^\alpha | \pi^\alpha > \neq 0。 \tag{8.61}$$

先看一下 $c = 0$ 时的情形，见图 8.1 ，势能的极值点在

$$\sigma^2 + \pi^2 = v^2 \ , \quad v^2 = -\frac{m^2}{\lambda}。 \tag{8.62}$$

在一般情况下 $(c \neq 0)$ ，见图 8.2, 我们可以选取

$$< 0 | \sigma | 0 > = v \ , \quad < 0 | \pi | 0 > = 0。 \tag{8.63}$$

于是定义另外一个场 s, 其真空期望值为 0 ，

$$\sigma = s + v \ , \quad < s >_0 = 0。 \tag{8.64}$$

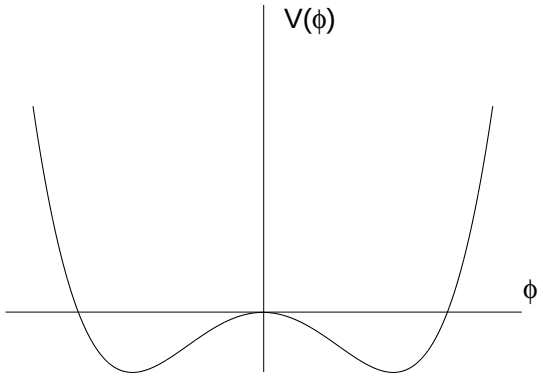


图 8.1: 在 $c = 0$ 时有效势的行为

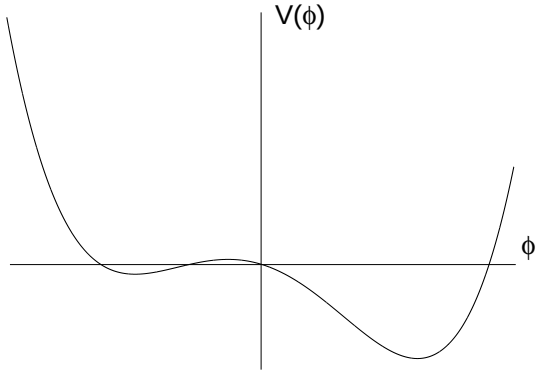


图 8.2: 在 $c \neq 0$ 时有效势的行为

重新用 s 场表达拉氏量的形式,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}[(\partial_\mu\pi)^2 - {m_\pi}^2\pi^2] + \frac{1}{2}[(\partial_\mu s)^2 - {m_\sigma}^2 s^2] - \lambda v s(s^2+\pi^2) - \frac{\lambda}{4}[s^2+\pi^2]^2 \\ &\quad + s(c - m^2 v - \lambda v^3)\ ,\end{aligned} \tag{8.65}$$

上式中,

$$\begin{aligned}{m_\pi}^2 &= m^2 + \lambda v^2\ , \\ {m_\sigma}^2 &= m^2 + 3\lambda v^2。\end{aligned} \tag{8.66}$$

很容易看出, $c=0$ 时,

$$m_\pi^2 = m^2 + \lambda v^2 = 0\ , \tag{8.67}$$

即 π 粒子就是无质量的 Goldstone 玻色子。线性破缺项的存在使得 $SU(2)$ 对称性遭到破坏, 对称性显式破缺, 矢量流仍然保持守恒, 但轴矢流却获得一个不为零的散度。

$$\partial^\mu A_\mu^a = c\pi^a。 \tag{8.68}$$

因为 s 的真空期望值为零, 由拉氏量可以看出

$$c - m^2 v - \lambda v^3 = 0。 \tag{8.69}$$

由它可以定出 $v = v(m^2, \lambda, c)$ 。而由 PCAC 假设:

$$\partial^\mu A_\mu^a(x) = m_\pi^2 f_\pi \pi^a(x)\ , \tag{8.70}$$

可以得到,

$$f_\pi m_\pi^2 = c = v(m^2 + \lambda v^2) = v m_\pi^2。 \tag{8.71}$$

因此有

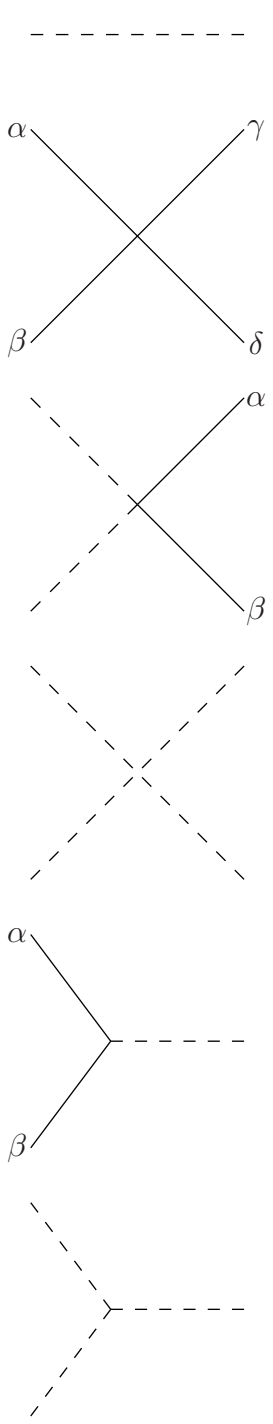
$$v = f_\pi。 \tag{8.72}$$

另外, 我们得到了 $\sigma\pi\pi$ 顶点, 由拉氏量的表达式, 可以得到 $\sigma\pi\pi$ 顶点的耦合常数

$$g_{\sigma\pi^+\pi^-} = \frac{m_\sigma^2 - m_\pi^2}{f_\pi} = 2\lambda f_\pi。 \tag{8.73}$$

由线性 σ 模型的拉氏量, 可以利用泛函的方法得到费曼规则, 结果如下图所示;

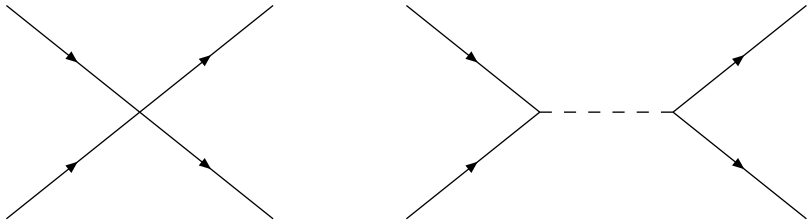
α ———————— β $\quad$ π propagator $\qquad\qquad$ $D_F^\pi \delta_{\alpha\beta} = \frac{i}{p^2 - {m_\pi}^2}\delta_{\alpha\beta}$



σ propagator	$D_F^\sigma = \frac{i}{p^2 - {m_\sigma}^2}$
π^4 vertex	$-2i\lambda(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})$
$\sigma^2\pi^2$ vertex	$-2i\lambda\delta_{\alpha\beta}$
σ^4 vertex	$-6i\lambda$
$\sigma\pi^2$ vertex	$-2i\lambda v\delta_{\alpha\beta}$
σ^3 vertex	$-6i\lambda v$

图 3.1: Feynman rules of Linear σ Model

将线性 σ 模型应用到 $\pi\pi$ 散射中去，可以计算 $\pi\pi$ 的散射矩阵元，我们只计算到树图，需要计算的费曼图有两个，



(a) (b)

图 3.2: First-order Feynman graphs of Linear σ Model, one has to take the contributions of each graph in s,t,u channels

由上图可以看出，图 (a) 是 $\lambda\phi^4$ 顶点相互作用，图 (b) 是 σ 共振态的贡献。 $\pi\pi$ 散射振幅的计算结果如下： [3]

$$A(s,t,u) = -2\lambda(1+\frac{2\lambda v^2}{s-{m_\sigma}^2}) = -\frac{{m_\sigma}^2-{m_\pi}^2}{s-{m_\sigma}^2}\frac{s-{m_\pi}^2}{{f_\pi}^2}\ , \tag{8.74}$$

上式中，第一个等式后的第一项是 $\lambda\phi^4$ 的相互作用，可以称之为背景贡献 (background contribution) 。由于为保持真空能量的正定性， λ 必须为正，所以 $\lambda\phi^4$ 的贡献是排斥相互作用。第二项是 σ 共振态的贡献。 利用

$$\begin{aligned} T^{I=0}(s,t,u) &= 3A(s,t,u)+A(t,u,s)+A(u,s,t)\ , \\ T^{I=1}(s,t,u) &= A(t,u,s)-A(u,s,t)\ , \\ T^{I=2}(s,t,u) &= A(t,u,s)+A(u,s,t)\ , \end{aligned} \tag{8.75}$$

和分波投影的公式，

$$T_J^I(s) = \frac{1}{32\pi(s-4m_\pi^2)}\int_{4m_\pi^2-s}^{0} dt\, P_J(1+\frac{2t}{s-4m_\pi^2})T^I(s,t,u) \tag{8.76}$$

可以得到分波矩阵元的表达式，具体结果如下，

$$\begin{aligned} T_0^0 &= \frac{\lambda}{16\pi}\left(\frac{3(m_\sigma^2-m_\pi^2)}{m_\sigma^2-s}+\frac{2(m_\sigma^2-m_\pi^2)\log[\frac{m_\sigma^2+s-4m_\pi^2}{m_\sigma^2}]}{s-4m_\pi^2}-5\right)\ , \\ T_0^2 &= -\frac{\lambda}{8\pi}\left(1-\frac{2\lambda v^2}{s-4m_\pi^2}\log[\frac{m_\sigma^2+s-4m_\pi^2}{m_\sigma^2}]\right)\ , \\ T_1^1 &= \frac{\lambda^2v^2(16m_\pi^2-4s-2(4m_\pi^2-2m_\sigma^2-s)\log[\frac{m_\sigma^2+s-4m_\pi^2}{m_\sigma^2}])}{8\pi(s-4m_\pi^2)^2}。 \end{aligned} \tag{8.77}$$

可以验证把 8.74 式代入 8.75 式得到的树图下的同位旋振幅满足 Adler 零点条件，即 $\mathrm{T}^I(m_\pi^2,m_\pi^2,m_\pi^2)=0$ 。而由 8.77 式给出的分波振幅所满足的 Adler 零点并不容

[3]关于 A 的定义，请参见 8.4 一节。

易看出。仅当取 $m_\sigma \to \infty$ 极限（保持 λ 不变）时， IJ=00 、 11 和 20 的分波 T 矩阵元分别在 $s = m_\pi^2/2$ 、 $4m_\pi^2$ 和 $2m_\pi^2$ 处为零，且形式为，

$$\begin{aligned} T_0^0 &= \frac{2s - m_\pi^2}{32\pi f_\pi^2} , \\ T_0^2 &= \frac{2m_\pi^2 - s}{32\pi f_\pi^2} , \\ T_1^1 &= \frac{s - 4m_\pi^2}{96\pi f_\pi^2} 。 \end{aligned} \tag{8.78}$$

其结果与我们下面所要看到的非线性 σ 模型在树图水平上的结果一致，事实上它们是与模型无关的流代数的结果。

更为经常讨论的是非线性 σ 模型。非线性 σ 模型起源于手征对称群的非线性实现（ Coleman et al. ），由手征对称性自发破缺得到

$$\sigma^2(x) + \pi^2(x) = f_\pi^2 。 \tag{8.79}$$

我们可以用 π 场来表示 σ 场，即 $\sigma(x) = \sqrt{f_\pi^2 - \pi^2(x)}$ ，因而拉氏量可以写为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi)^2 + \frac{1}{2}\frac{(\pi \partial_\mu \pi)^2}{f_\pi^2 - \pi^2} + ... \tag{8.80}$$

在树图水平上， $\pi\pi$ 散射振幅为

$$A(s,t,u) = \frac{s - m_\pi^2}{f_\pi^2} 。 \tag{8.81}$$

与线性 σ 模型的结果比较可以看出，当 $m_\sigma \to \infty$ ，即 $g_{\sigma\pi\pi} \to \infty$ 时，两种结果完全一样。

§8.6 有费米子的情形

可以在 σ 模型中引入费米子，

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\sigma + \bar{N} i \gamma_\mu \partial^\mu N + g \bar{N}(\sigma + i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}\gamma_5) N 。 \tag{8.82}$$

上述拉氏量在如下 $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 变换下不变：

$$\begin{aligned} &\vec{\pi} \to \vec{\pi} + \vec{\alpha} \times \vec{\pi} - \vec{\beta}\sigma , \\ &\sigma \to \sigma + \vec{\beta} \cdot \vec{\pi} , \\ &N \to N - i\vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2} N + i\vec{\beta}\frac{\vec{\tau}}{2}\gamma_5 N 。 \end{aligned} \tag{8.83}$$

因此可以给出两个 Noether 流。由于同位旋的对称性矢量流守恒，如果 $c=0$ 则轴矢流也守恒，

$$V_\mu^a = \bar{N}\gamma_\mu\frac{\tau^\alpha}{2}N + \varepsilon^{abc}\pi^b\partial_\mu\pi^c \ ,$$
$$A_\mu^a = \bar{N}\gamma_\mu\gamma_5\frac{\tau^\alpha}{2}N + \pi^a\partial_\mu\sigma - \sigma\partial_\mu\pi^a 。 \tag{8.84}$$

由于手征对称性的自发破缺， $SU_L(2)\times SU_R(2)\to SU_V(2)$ ，核子通过 Yukawa 耦合获得质量，

$$g\bar{N}(\sigma + i\vec{\tau}\cdot\vec{\pi})N \to gv\bar{N}N + g\bar{N}(\sigma' + i\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}\gamma_5)N \ , \tag{8.85}$$

也即

$$M_N = gv 。 \tag{8.86}$$

此方程实际上是树图水平上的 Goldberger–Treiman 关系。

§8.7 微商耦合理论

我们把方程 8.82 改写成，

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{4}tr\left[\partial_\mu\Sigma\partial^\mu\Sigma^+\right] - V(\sigma^2+\vec{\pi}^2) \\ &\quad +\overline{N_L}i\partial\!\!\!/N_L + \overline{N}_R i\partial\!\!\!/N_R + g\overline{N}_R\Sigma^+N_L + g\overline{N}_L\Sigma N_R \ ,\end{aligned} \tag{8.87}$$

其中 $\Sigma=\sigma+i\vec{\pi}\cdot\vec{\tau}$, $N=N_L+N_R=\frac{1-\gamma_5}{2}N+\frac{1+\gamma_5}{2}N$ 。显然 8.87 式在如下的手征变换下不变：

$$N_L\to LN_L \ , \quad N_R\to RN_R \ , \quad \Sigma\to L\Sigma R^+ \ , \tag{8.88}$$

其中 L,R 是任意的整体 $SU(2)$ 矩阵。我们可以改写场 Σ ：

$$\Sigma = \sqrt{\sigma^2+\vec{\pi}^2}U \to \sigma U = \sigma e^{i\vec{\pi}\cdot\vec{\tau}/f_\pi} 。 \tag{8.89}$$

这样定义的 σ 在 $SU(2)_L\times SU_R(2)$ 变换下不变，且 $U\to LUR^+$ 。 注意物理结果并不因为场的重新定义而改变 ，虽然拉氏量 8.87 式在形式上可以改变：

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + \frac{1}{4}\sigma tr(\partial_\mu U\partial^\mu U^+) - V(\sigma) \\ &\quad +\overline{N}i\partial\!\!\!/N + g\sigma(\overline{N}_R U^+N_L + \overline{N}_L UN_R) 。\end{aligned} \tag{8.90}$$

非线性 σ 模型可以在上式中取 $\sigma=<\sigma>=f_\pi$, $m_\sigma\to\infty$ 得到，即

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{f_\pi^2}{4}tr(\partial_\mu U\partial^\mu U^+) + \frac{1}{2}trB\left[M_q(U+U^+)\right] \\ &\quad +\overline{N}i\partial\!\!\!/N + gf_\pi(\overline{N}_R U^+N_L + \overline{N}_L UN_R) 。\end{aligned} \tag{8.91}$$

定义 $U=u^2$ ，则在 $SU_L(2)\times SU_R(2)$ 变换下我们有，

$$u\to Lu\xi^+=\xi uR^+。\tag{8.92}$$

注意这里的 ξ 场是非定域的，且依赖于 Goldstone 场。重新定义 8.91 式中的费米子场， $\psi_R\equiv uN_R$, $\psi_L\equiv u^+N_L$ ，则在手征变换下我们有，

$$\psi_L\to\xi\psi_L\ ,\ \ \psi_R\to\xi\psi_R。\tag{8.93}$$

回到 8.91 式我们得到，

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{f_\pi^2}{4}\mathrm{tr}(\partial_\mu U\partial^\mu U^+)+\overline{\psi}(i\not{D}-m)\psi\ ,\\ i\not{D} &= i\not{\partial}+ui\not{\partial}u\frac{1-\gamma_5}{2}+u^+i\not{\partial}u^+\frac{1+\gamma_5}{2}\\ &= i\not{\partial}+\frac{1}{2}(ui\partial^\mu u+u^+i\partial^\mu u^+)\gamma_\mu-\frac{1}{2}(ui\partial^\mu u-u^+i\partial^\mu u^+)\gamma_\mu\gamma_5。\end{aligned}\tag{8.94}$$

在上面的协变导数 $i\not{D}$ 的表达式中，可以证明最后一个等式右边的前两项合起来是协变的，而最后一项单独是协变的。所以可以把协变导数推广到更一般的表述形式：

$$i\not{D}\equiv i\not{\partial}+iv_\mu\gamma^\mu+a_\mu\gamma^\mu\gamma_5\to i\not{\partial}+iv_\mu\gamma^\mu+g_Aa_\mu\gamma^\mu\gamma_5。\tag{8.95}$$

其中 g_A 既是费米子的轴失量耦合常数。

在微商耦合理论中， π 介子与核子的相互作用的拉氏量到最低阶具有如下形式：

$$\mathcal{L}_{int}\propto\frac{g_A}{f_\pi}\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\vec{\tau}\psi\cdot\partial_\mu\vec{\pi}。\tag{8.96}$$

从中可以得出在质壳上的等效 πNN 耦合常数， $g_{\pi NN}=\frac{g_A}{f_\pi}M_N$ ，即相互作用等价于 $g_{\pi NN}\vec{\pi}\cdot\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi$ 。

§8.8 手征对称性的非线性实现

60 年代对部分守恒流和流代数的研究使物理学家相信现实物理世界中存在近似手征对称性 (approximate chiral symmetry) 。对 QCD 和手征对称性的研究产生了手征微扰论。手征微扰论是一个低能有效场论，它的主要思想是把 QCD 拉氏量的对称性 (自发破缺的手征对称性) 包含到有效拉氏量中去。手征微扰论不象通常的微扰论那样按照耦合常数做微扰展开。由于研究的是低能强子物理，手征微扰展开是按照轻夸克的质量和粒子的外动量幂次展开。在通常意义下，手征微扰论是一个不可重整的理论，但是微扰论的任意阶都可以通过引进有限适当的抵消项使振幅有限。

手征微扰论是一种有效场论, 在 $SU_L(2)\times SU_R(2)$ 对称群下, 把 π 场作为基本场变量。由于 Goldstone 玻色子不携带自旋, 我们可以用标量场表示, 标记为 $\pi_a(x)$ 。在手征变换下, π 场以一种非线性的形式变化, 由线性 σ 模型到非线性 σ 模型的过渡可以由下面的讨论清楚的给出。令

$$\Sigma = \sigma + i\vec{\pi}\cdot\vec{\tau}\ , \tag{8.97}$$

其中 τ 是 Pauli 矩阵,

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ ,\quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}。 \tag{8.98}$$

这样 8.57 式中的 $\mathcal{L}_s$ 可以改造为,

$$\mathcal{L}_s = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}[\partial_\mu\Sigma\partial_\mu\Sigma^+] - \frac{m^2}{4}\mathrm{Tr}[\Sigma\Sigma^+] - \frac{\lambda}{16}\mathrm{Tr}[\Sigma\Sigma^+]^2。 \tag{8.99}$$

我们知道, **物理的 S 矩阵元是不依赖于场的重新定义而改变的**, 因此我们可以重新分解 Σ 场, 用极坐标分解 (polar decomposition),

$$\Sigma \equiv \sigma U\ , \tag{8.100}$$

其中

$$U = e^{i\vec{\pi}\cdot\vec{\tau}/v}\ , \tag{8.101}$$

式中 v 是一个待定常数。在 $SU(2)_L\times SU(2)_R$ 转动下 U 的变换性质为

$$U(x)\to U'(x) = V_R U(x) V_L^+\ , \tag{8.102}$$

其变化形式是线性的, 但是 π 场变化是非线性的。而 σ 场是不变的且 $<\sigma>=f_\pi$ 。由于 σ 粒子很重, 在低能时我们可以冻结住这一自由度, 即令 $\sigma = v$ 。代回到 8.99 可以定出 $v = f_\pi$ 且 8.99 式变为,

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{4}f_\pi^2\mathrm{tr}(\partial_\mu U\partial^\mu U^\dagger)。 \tag{8.103}$$

可以在上式中加入 π 介子的质量项, 即

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{4}f_\pi^2\mathrm{tr}(\partial_\mu U\partial^\mu U^\dagger + 2Bm(U+U^\dagger))。 \tag{8.104}$$

这就是非线性 σ 模型, 其中后面一项记为

$$\mathcal{L}_{sb} = \frac{1}{2}f_\pi^2 B\mathrm{tr}(m(U+U^\dagger))\ , \tag{8.105}$$

且其中的质量参数对应于夸克质量项， $m = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix}$ 。假设同位旋对称性守恒，即 $m_u = m_d$ ，于是可以把 $U(x)$ 按照 π 场的幂次展开，则

$$\mathcal{L}_{sb} = (m_u + m_d)B(f_\pi^2 - \frac{1}{2}\pi_a\pi_a + \frac{1}{24}f_\pi^{-2}\pi_a\pi_a\pi_b\pi_b + ...)。 \tag{8.106}$$

上式第一项对应于对称性自发破缺的真空能量。 因而可得到夸克凝聚

$$< 0|\bar{u}u|0 >=< 0|\bar{d}d|0 >= -f_\pi^2 B + ... \tag{8.107}$$

第二项对应于 π 的质量项，我们可以得到 π 粒子的质量

$$m_\pi^2 = (m_u + m_d)B + ... \tag{8.108}$$

上式后面的项是由夸克质量项导出的 $\pi\pi$ 相互作用项。

由线性的 σ 模型向非线性的 σ 模型过渡导致的一个重要后果是拉氏量不再可重整。事实上，既然（在正统意义下的）可重整性并不是物理理论正确的一个必要条件。有效拉氏量 $\mathcal{L}_{eff}$ 可以按动量的幂次展开，

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_6 ...。 \tag{8.109}$$

其中 $\mathcal{L}_2$ 就是上面提到的非线性 σ 模型。而 $\mathcal{L}_4 \propto O(p^4)$ 、 $\mathcal{L}_6 \propto O(p^6)$ ，等。在这里的按动量幂次的展开中，我们规定 $m_\pi^2 \sim O(p^2)$ 。写出各阶相互作用拉氏量的规则是直接的：即写出在 8.102 式变换下的所有不变的项。此时在形式上规定

$$m \to V_R m V_L^+ \ , \ m^+ \to V_L m^+ V_R。 \tag{8.110}$$

由拉氏量 $\mathcal{L}_2$ 我们可以计算树图，但这只是微扰论最低阶 $O(p^2)$ 的结果。如果要考虑高级项，例如 $O(p^4)$ ，有效拉氏量需要展开到 $\mathcal{L}_4$ ，这时，需要计算 $\mathcal{L}_2$ 的单圈图和 $\mathcal{L}_4$ 的树图。其中 $SU_L(3) \times SU_R(3)$ 的 $\mathcal{L}_4$ 的形式如下：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 \ = \ & L_1 < \partial_\mu U^+ \partial^\mu U >^2 + L_2 < \partial_\mu U^+ \partial_\nu U >< \partial^\mu U^+ \partial^\nu U > \\ & + L_3 < \partial_\mu U^+ \partial^\mu U \partial_\nu U^+ \partial^\nu U > \\ & + L_4 < \partial_\mu U^+ \partial^\mu U >< \chi^+ U + \chi U^+ > \\ & + L_5 < \partial_\mu U^+ \partial^\mu U (\chi^+ U + \chi U^+) > \\ & + L_6 < \chi^+ U + \chi U^+ >^2 + L_7 < \chi^+ U - \chi U^+ > \\ & + L_8 < \chi^+ U \chi^+ U + \chi U^+ \chi U^+ > , \end{aligned} \tag{8.111}$$

其中 $\chi = 2Bm$ 。在通常意义下，手征微扰论是不可重整的。例如， $\mathcal{L}_2$ 的单圈图发散不能用 $\mathcal{L}_2$ 形式的抵消项全部抵消掉。但是可以通过引进与 $\mathcal{L}_4$ 形式相同的抵消项得到有限的结果。

第九章　部分子模型与标度性

§9.1　轻子与强子的深度非弹实验和部分子模型

讨论电子与核子的如下反应：

$$e(k)+N(p)\to e(k')+X(p_\mu)。\tag{9.1}$$

令 $q=k-k'$ ，　$\nu=p\cdot q/M=q_0$ ，　$W^2=(p+q)^2=p_n^2$ 。其中（在实验室系）

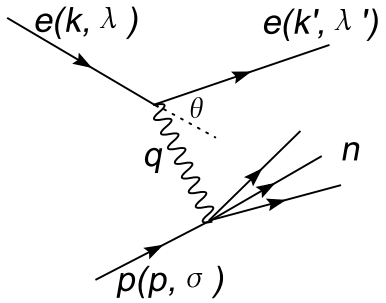


图 9.1:

$p_\mu=(M,0,0,0)$ ，　$k_\mu=(E,\vec{k})$ ，　$k'_\mu=(E',\vec{k'})$ 。这给出 $\nu=E-E'$ 是能量转移。当可以忽略轻子质量时，　$m_l\sim 0$ ，　$q^2=(k-k')^2=-2(EE'-kk'\cos\theta)=-4EE'\sin^2\frac{\theta}{2}\le 0$ ，　$Q^2=-q^2$ 。其中 θ 是轻子的散射角。利用约化公式，散射振幅可以表示为：

$$T_n=e^2\bar{u}(k',\lambda')\gamma^\mu u(k,\lambda)\frac{1}{q^2}<n|J_\mu^{em}(0)|p,\sigma>。\tag{9.2}$$

对初态极化求平均、末态极化求和后得到微分散射截面：

$$d\sigma_n=\frac{1}{|\vec{v}|}\frac{1}{2M}\frac{1}{2E}\frac{d^3\vec{k'}}{(2\pi)^3 2k'_0}\prod_{i=1}^{n}\frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2p_{i0}}\times\frac{1}{4}\sum_{\sigma,\lambda,\lambda'}|T_n|^2(2\pi)^4\delta^4(p+k-k'-p_n)\ ,\tag{9.3}$$

其中

$$p_n=\sum_{i=1}^{n}p_i。$$

对于 inclusive 过程，

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'}=\frac{\alpha^2}{q^4}\left(\frac{E'}{E}\right)l^{\mu\nu}W_{\mu\nu}。\tag{9.4}$$

其中 (忽略轻子质量，　$m_l=0$)

$$l_{\mu\nu}=2(k_\mu k'_\nu+k'_\mu k_\nu+\frac{q^2}{2}g_{\mu\nu})\tag{9.5}$$

且

$$
\begin{aligned}
W_{\mu\nu}(p,q) &= \frac{1}{4M}\sum_{\sigma}\sum_{n}\int\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2p_{i0}}\right]\times \\
&< p,\sigma|J^{em}_{\mu}(0)|n >< n|J^{em}_{\nu}(0)|p,\sigma > (2\pi)^3\delta^4(p_n-p-q) \\
&= \frac{1}{4M}\sum_{\sigma}\int\frac{d^4x}{2\pi}e^{iqx} < p,\sigma|J^{em}_{\mu}(x)J^{em}_{\nu}(0)|p,\sigma > 。
\end{aligned}
\tag{9.6}
$$

为得到上面第二个等式利用了如下技巧：

$$
\begin{aligned}
\delta^4(p_n-p-q) &= \int\frac{d^4x}{(2\pi)^4}e^{-i(p_n-p-q)\cdot x}\ , \\
< p,\sigma|J^{em}_{\mu}|n > &= < p,\sigma|J^{em}_{\mu}(0)|n > e^{-i(p_n-p)\cdot x}\ ,
\end{aligned}
\tag{9.7}
$$

和恒等式

$$
\mathbf{1} = \sum_{n}\int\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2p_{i0}}\right]|n >< n|\ 。 \tag{9.8}
$$

我们又发现

$$
\begin{aligned}
&\int\frac{d^4x}{2\pi}e^{iqx} < p,\sigma|J^{em}_{\nu}(0)J^{em}_{\mu}(x)|p,\sigma > \\
=\ &\sum_{n}\int\frac{d^4x}{2\pi}e^{i(p_n-p+q)x} < p,\sigma|J_{\nu}(0)|n >< n|J_{\mu}(0)|p,\sigma > \\
=\ &(2\pi)^3\sum_{n}\delta^4(p_n-p+q) < p,\sigma|J_{\nu}(0)|n >< n|J_{\mu}(0)|p,\sigma > 。
\end{aligned}
\tag{9.9}
$$

在实验室系中，因为 $p^0_n > p^0$ 知 $q_0 = \nu > 0$ 。而能量 $= M-\nu \le M$ 的中间态不可能存在，即上面的项必为零。所以我们得到，

$$
W_{\mu\nu}(p,q) = \frac{1}{4M}\sum_{\sigma}\int\frac{d^4x}{2\pi}e^{iqx} < p,\sigma|[J^{em}_{\mu}(x),J^{em}_{\nu}(0)]|p,\sigma > 。 \tag{9.10}
$$

由 $\partial_{\mu}J^{\mu,em}=0$ ，即 $q^{\mu} < p,\sigma|J^{em}_{\mu}|n >= 0$ 得到，

$$
q^{\mu}W_{\mu\nu} = q^{\nu}W_{\mu\nu} = 0。 \tag{9.11}
$$

由此我们可以写出，

$$
W_{\mu\nu}(p,q) = \left[-W_1(g_{\mu\nu}-\frac{q_{\mu}q_{\nu}}{q^2}) + \frac{W_2}{M^2}(p_{\mu}-\frac{p\cdot q}{q^2}q_{\mu})(p_{\nu}-\frac{p\cdot q}{q^2}q_{\nu})\right]。 \tag{9.12}
$$

其中 $W_{1,2}$ 是 Lorentz 不变的靶核子结构函数，它们依赖于 q^2 和 ν 。这样，我们可以把 9.4 式改写成，

$$
\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{\alpha^2}{4E^2\sin^4\frac{\theta}{2}}(2W_1\sin^2\frac{\theta}{2} + W_2\cos^2\frac{\theta}{2})\ , \tag{9.13}
$$

其中 θ 是轻子的散射角，利用此式就可以测量 $W_{1,2}(q^2,\nu)$ 。下面我们从弹性散射来看一看 $W_{1,2}$ 的结构，

$$< N(p')|J_\mu^{em}(0)|N(p) >= \bar{u}(p')\left[\gamma_\mu F_1(q^2) + i\sigma_{\mu\nu}q^\nu \frac{F_2(q^2)}{2M}\right] u(p)。 \tag{9.14}$$

我们有

$$\begin{aligned} F_1^p(0) = 1\ ,\quad F_2^p(0) = 1.79\ , \\ F_1^n(0) = 0\ ,\quad F_2^n(0) = -1.91\ , \end{aligned} \tag{9.15}$$

其中上式中第一列代表电荷，第二列代表 (反常) 磁矩。利用 9.14 式， 我们即得到弹性散射对结构函数的贡献，

$$\begin{aligned} W_1^{el} &= \delta(q^2+2M\nu)\frac{q^2}{2M}G_M(q^2)\ , \\ W_2^{el}(q^2,\nu) &= \delta(q^2+2M\nu)\frac{2M}{1-q^2/4M^2}\left[G_E^2(q^2) - \frac{q^2}{4M^2}G_M^2(q^2)\right]\ , \\ G_E(q^2) &= F_1(q^2) + \frac{q^2}{4M^2}F_2(q^2)\ , \\ G_M(q^2) &= F_1(q^2) + F_2(q^2)。 \end{aligned} \tag{9.16}$$

其中 G_E 叫做电形状因子， G_M 叫做磁形状因子。在实验上发现它们可以很好的用如下的 dipole 形式描述：

$$G_E(q^2) \simeq \frac{G_M(q^2)}{\kappa_p} \simeq \frac{1}{(1-q^2/0.7\mathrm{GeV}^2)^2}。 \tag{9.17}$$

$k_p = 2.79$ 是质子磁矩。若质子无结构则应有 $G_E(q^2) = G_M(q^2) = 1$ ， 而 9.17 式指出了质子是有结构的。当 $q^2 \to \infty$ ， $G_E, G_M \sim \frac{1}{q^4}$ 。另外在实验上，如果所有的非弹性散射均有类似的 q^2 依赖性则总截面也应有类似的 q^2 依赖性但是实验上发现对于大的末态不变质量 $w >> M$ ，发现 q^2 依赖性缓和的多。这一发现在历史上导致了部分子模型 (parton model) 的发现。 因为形状因子可以看成是是大小尺度的傅里叶变换 。

§9.2 Bjorken 无标度性

定义

$$x = -\frac{q^2}{2M\nu} = \frac{Q^2}{2M\nu}\ ,\quad (0 \le x \le 1)。 \tag{9.18}$$

x 的取值限制是因为 $w^2 = (p+q)^2 = q^2 + 2M\nu + M^2 \geq M^2$ 。弹性散射对应于 $x = 1$ 。还可以定义另外一个运动学变量：

$$y = \frac{\nu}{E} = 1 - \frac{E'}{E}。 \tag{9.19}$$

由 $0 \leq E' \leq E$ 推出 $0 \leq y \leq 1$ 。我们有，

$$\begin{aligned} dxdy &= \frac{E'}{E}\frac{d\Omega dE'}{2\pi y M}\ , \\ MW_1(q^2,\nu) &\equiv G_1(x, \frac{q^2}{M^2})\ , \\ \nu W_2(q^2,\nu) &\equiv G_2(x, \frac{q^2}{M^2})。 \end{aligned} \tag{9.20}$$

这导致，

$$\frac{d^2\sigma}{dxdy} = \frac{8\pi\alpha^2}{MEx^2y^2}\left[xy^2G_1 + (1 - y - \frac{M}{2E}xy)G_2\right]。 \tag{9.21}$$

Bjorken 无标度性是说，在大 Q^2 极限下，当 x 固定时， G_1 ， G_2 仅是 x 的函数与 Q^2 无关。即

$$\lim_{Q^2\to\infty, x \text{ fixed}} G_i(x, \frac{Q^2}{M^2}) = F_i(x)。 \tag{9.22}$$

$F_i(x)$ 成为无量纲的结构函数，与任何标度无关。 Bjorken 无标度性仅仅出现在 $Q^2 \geq 2\text{GeV}^2$ 时（对于 ep 散射）。从中微子散射实验也可以得到与上述情况类似的情形。

§9.3 部分子模型

假定：

1. 核子由点状的部分子组成，而把它们束缚在一起的力是弱的。这样遍举散射过程可以看成对部分子的弹性散射的非相干叠加。
2. 在流与部分子相互作用的时间内，可以忽略部分子之间的相互作用
3. 部分子的末态相互作用（由部分子碎裂成强子）所需时间较长因此在计算遍举截面时可以被忽略。
4. 部分子是在壳的，自旋为 $1/2$ ，并携带部分核子的动量 ξp ， $0 \leq \xi \leq 1$ 。而部分子所携带的横动量可以被忽略。

对于散射过程 $e + p \to e + X$（图 9.2 ），把它看成电子、部分子的弹性散射的非相干的求和。首先计算电子与某一个部分子的弹性散射，我们有

$$K_{\mu\nu}(\xi) = \frac{1}{4\xi M}\sum_{spin}\int\frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2p'_0} < \xi p,\sigma|J^{em}_\mu(0)|p',\sigma' >< p',\sigma'|J^{em}_\nu(0)|\xi p,\sigma >$$

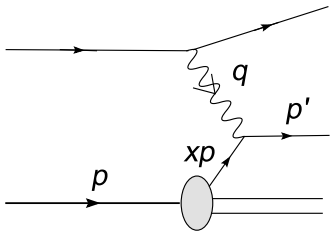


图 9.2: 轻子与核子中的部分子散射

$$\begin{aligned} & \times(2\pi)^3\delta^4(p'-\xi p-q) \\ = \quad & \frac{1}{4\xi M}\sum_{spin}\bar{u}(\xi p)\gamma_\mu u(p')\bar{u}(p')\gamma_\nu u(\xi p)\delta(p'_0-\xi p_0-q_0)/2p'_0。 \end{aligned} \tag{9.23}$$

由 $\delta(p'_0-\xi p_0-q_0)/2p'_0 = \theta(p'_0)\delta\left[p'^2_0-(\xi p_0+q_0)^2\right] = \theta(p'_0)\delta\left[p'^2-(\xi p+q)^2\right] = \theta(\xi p_0+q_0)\delta(2M\nu\xi+q^2) = \theta(\xi p_0+q_0)\delta(\xi-x)/(2M\nu)$（假定了在核子内，部分子是在壳的）。而

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\sum_{spin}\bar{u}(\xi p)\gamma_\mu u(\xi p+q)\bar{u}(\xi p+q)\gamma_\nu u(\xi p) \\ & = \frac{\xi}{2}\mathrm{tr}\left[\not{p}\gamma_\mu(\xi\not{p}+\not{q})\gamma_\nu\right] \\ & = 4M^2\xi^2(\frac{p_\mu p_\nu}{M^2})-2M\nu\xi g_{\mu\nu}+\cdots. \end{aligned}$$

在上面的运算中已忽略了部分子的质量，由其导致

$$K_{\mu\nu}(\xi)=\delta(\xi-x)(\frac{\xi}{\nu}\frac{p_\mu p_\nu}{M^2}-\frac{1}{2M}g_{\mu\nu}+\cdots)。 \tag{9.24}$$

令 $f(\xi)d\xi$ 表示在 ξ 和 $\xi+d\xi$ 之间的部分子数目。则

$$W_{\mu\nu}=\int_0^1 f(\xi)K_{\mu\nu}(\xi)d\xi=\frac{xf(x)}{\nu}\frac{p_\mu p_\nu}{M^2}-\frac{f(x)}{2M}g_{\mu\nu}+\cdots \tag{9.25}$$

δ- 函数使部分子被限制在质壳上，使得结构函数仅依赖于 x：

$$\begin{aligned} & MW_1\to F_1(x)=\frac{1}{2}f(x) \\ & \nu W_2\to F_2(x)=xf(x)\ , \end{aligned} \tag{9.26}$$

给出 $2xF_1(x)=F_2(x)$，这个关系叫做 Callan–Gross 关系。它是部分子带自旋 $1/2$ 所导致的。如果假设自旋为零，则 $K_{\mu\nu}\propto<xp|J_\mu|xp+q><xp+q|J_\nu|xp>\propto(2xp+q)_\mu(2xp+q)_\nu$。由于没有正比于 $g_{\mu\nu}$ 的项可知 $F_1=0$(此时仍然有 $q_\mu K^{\mu\nu}=0$。对于 $2xF_1(x)=F_2(x)$ 和 $F_1(x)=0$ 有物理解释。即对于自旋 $1/2$ 的部分子，只有

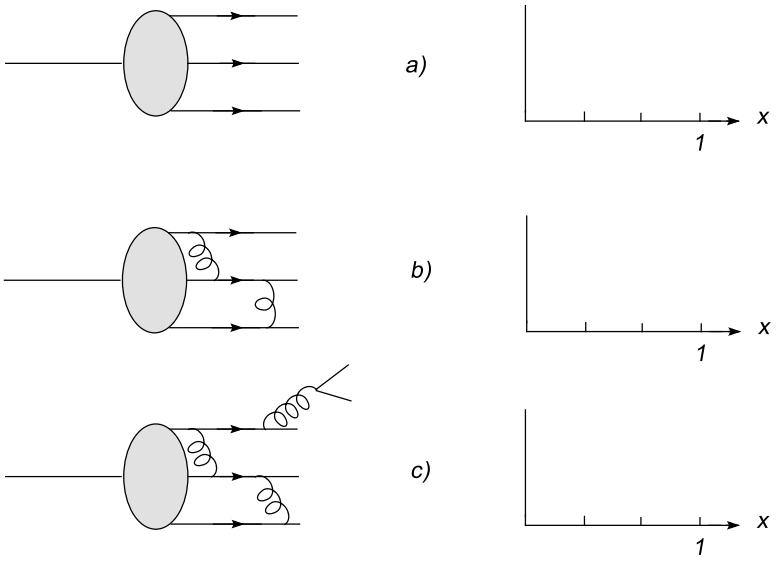


图 9.3: 部分子分布函数随 x 的变化规律

$h = \pm 1$ 的光子有贡献。（详见 Cheng–Li 的书）定义螺旋度结构函数 [1]

$$\begin{aligned} F_s &= \frac{1}{x}F_2 - 2F_1 \\ F_T &= F_L + F_R = 2F_1。 \end{aligned} \tag{9.28}$$

则

$$\begin{aligned} F_s &= 0\ ,\ 1/2\ \text{parton} \\ F_T &= 0\ ,\ 0\ \text{parton}。 \end{aligned} \tag{9.29}$$

标量光子的极化是 $\epsilon^s = \frac{1}{\sqrt{-q^2}}(q_3, 0, 0, q_0)$。而横向光子的极化是 $\epsilon_\mu^{R,L} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, \pm i, 0)$。

可以定性地从夸克模型和夸克胶子相互作用出发，来定性地理解分布 $f(x)$。见图 9.3，首先，从朴素的夸克模型出发，每个（组分）夸克携带质子动量的三分之一，所以 $f(x) \sim \delta(x - 1/3)$（图 9.3a）。夸克之间可以交换胶子使得夸克动量具有一定分布，而不仅局限于 $x = 1/3$ 处（图 9.3b）。最后，夸克还可以辐射虚胶子，虚胶子又可以变成 $\bar{q}q$ 对。这种韧致辐射产生的虚胶子的谱具有典型的特征，即其

[1] $$W_S(q^2, \nu) = \epsilon_\mu^{(S)} W^{\mu\nu} \epsilon_\nu^{(S)} = (1 - \nu^2/q^2)W_2 - W_1\ 。 \tag{9.27}$$

相应的左手、右手结构函数也可类似地定义。

辐射的胶子数密度反比于辐射出的胶子的动量 [2]

$$N(k)dk \sim dk/k。 \tag{9.30}$$

因此部分子分布函数在小 x 处由此机制得到了增强（图 9.3c ）。

§9.4 求和规则和夸克 - 部分子模型的应用

夸克这一概念首先是为解释强子谱引进的假设，我们需要检验的是高能深度非弹实验中引入的部分子的概念与谱学中的一致。研究核子的内部结构我们可利用的探针有光子和弱作用的规范玻色子，前者与电磁流耦合，（图）
电磁流的定义是：

$$J_\mu^{em} = \frac{2}{3}\bar{u}\gamma_\mu u - \frac{1}{3}\bar{d}\gamma_\mu d - \frac{1}{3}\bar{s}\gamma_\mu s \ , \tag{9.31}$$

后者与弱流耦合，弱流是

$$J_\mu^{h} \simeq \bar{u}\gamma_\mu(1-\gamma_5)d \ , \tag{9.32}$$

其中忽略了 θ_C 。于是我们有，

$$\begin{aligned} F_T^{ep} &= f_p(x) = \frac{4}{9}(u_p+\bar{u}_p) + \frac{1}{9}(d_p+\bar{d}_p) + \frac{1}{9}(s_p+\bar{s}_p) \ , \\ F_T^{en} &= f_n(x) = \frac{4}{9}(u_n+\bar{u}_n) + \frac{1}{9}(d_n+\bar{d}_n) + \frac{1}{9}(s_n+\bar{s}_n) \ , \end{aligned} \tag{9.33}$$

其中 q_N 表示在 N 中找到一个动量为 x ，电荷为 q 的部分子的几率。可以得到如下关系：

1. 同位旋：

$$\frac{1}{2}\int_0^1 dx\{[u_p(x)-\bar{u}_p(x)] - \left[d_p(x)-\bar{d}_p(x)\right]\} = \frac{1}{2}。 \tag{9.34}$$

2. 奇异数：

$$\int_0^1 [s(x)-\bar{s}(x)]\,dx = 0。 \tag{9.35}$$

3. 电荷：

$$\frac{2}{3}\int_0^1 dx\,[u_p(x)-\bar{u}_p(x)] - \frac{1}{3}\int_0^1 dx\left[d_p(x)-\bar{d}_p(x)\right] - \frac{1}{3}\int_0^1 dx\,[s_p(x)-\bar{s}_p(x)] = 1。 \tag{9.36}$$

又由以上三式经简单运算可得，

$$\int_0^1 dx\,[u_p(x)-\bar{u}_p(x)] = 2 \ , \quad \int_0^1 dx\left[d_p(x)-\bar{d}_p(x)\right] = 1。 \tag{9.37}$$

[2]可以从经典理论中很容易得到这一规律。比如经典的电子理论中可以很容易地利用李纳 - 维谢尔势求出电子韧致辐射的波数谱，它具有 9.30 式的行为。

假设同位旋对称性,

$$\begin{aligned} u_p(x) &= d_n(x) \equiv u(x) \ , \\ d_p(x) &= u_n(x) \equiv d(x) \ , \\ s_p(x) &= s_n(x) \equiv s(x)。 \end{aligned} \tag{9.38}$$

可得

$$\begin{aligned} F_T^{ep} &= f_p(x) = \frac{4}{9}(u+\bar{u}) + \frac{1}{9}(d+\bar{d}) + \frac{1}{9}(s+\bar{s}) \ , \\ F_T^{en} &= f_n(x) = \frac{4}{9}(d+\bar{d}) + \frac{1}{9}(u+\bar{u}) + \frac{1}{9}(s+\bar{s}) \ , \end{aligned} \tag{9.39}$$

及

$$\frac{F_T^{ep}(x)}{F_T^{en}(x)} = \frac{4(u+\bar{u}) + d + \bar{d} + s + \bar{s}}{u + \bar{u} + 4(d+\bar{d}) + s + \bar{s}}。 \tag{9.40}$$

由于所有的 q 为正，推出

$$\frac{1}{4} \leq \frac{F_T^{ep}(x)}{F_T^{en}(x)} \leq 4。 \tag{9.41}$$

在夸克模型中，$q(x) = q_v(x) + q_s(x)$。假定 1 ）价夸克由夸克模型决定，$p = uud$，$n = ddu$； 2 ）海夸克由胶子产生，分布在小 x 区。而对于质子来说（假设“海”是 $SU(3)$ 对称的且胶子是味道无关的），可以得到,

$$\begin{aligned} & u_v(x) = 2d_v(x) \ , \\ & s_v(x) = \bar{u}_v(x) = \bar{d}_v(x) = \bar{s}_v(x) = 0 \ , \\ & u_s(x) = \bar{u}_s(x) = d_s(x) = \bar{d}_s(x) = s_s(x) = \bar{s}_s(x) = G(x) \ , \end{aligned} \tag{9.42}$$

并进一步得出,

$$\begin{aligned} F_T^{ep}(x) &= \frac{1}{2}u_v(x) + \frac{4}{3}G(x) \ , \\ F_T^{en}(x) &= \frac{1}{3}u_v(x) + \frac{4}{3}G(x) \ , \end{aligned} \tag{9.43}$$

和 $F_T^{ep} - F_T^{en} = 1/6 u_v(x)$。由于在 $x \to 0$ 时 $G(x)$ 重要，在 $x \to 1$ 时价夸克重要，我们预期 $F_T^{ep}(x)/F_T^{en}(x) \to 1 \ (x \to 0)$， $F_T^{ep}(x)/F_T^{en}(x) \to 3/2 \ (x \to 1)$，这与实验结果相吻合。

利用电子 – 核子散射以及中微子 – 核子散射的知识可以对各种结构函数进行研究。下面介绍一些有趣的、与前面的讨论有关的求和规则。

Adler 求和规则:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} \left[F_2^{\bar{\nu}p}(x) - F_2^{\nu p}(x) \right] = 2 \ , \tag{9.44}$$

可以利用流代数的结果得到。利用 $F_2^{(\nu p)} = x(F_L + F_R + F_s) = 2x(u(x) + \bar{d}(x))$ 、$F_2^{(\bar{\nu}p)} = 2x(d(x) + \bar{u}(x))$ ，我们得到;

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}\left[F_2^{(\bar{\nu}p)}(x) - F_2^{(\nu p)}(x)\right] = \int 2\left[(u-\bar{u}) - (d-\bar{d})\right]dx = 4\int T_3(x)dx = 2。 \tag{9.45}$$

其中 $T_3(x)$ 是同位旋密度的第三分量。

重子数守恒与 Gross–Llewellyn-Smith 求和规则:

$$1 = N(q) - N(\bar{q}) = \int_0^1 \left[(u+d+s) - (\bar{u}+\bar{d}+\bar{s})\right]dx。 \tag{9.46}$$

$$S = \int_0^1 [s(x) - \bar{s}(x)] = 0。 \tag{9.47}$$

$$\int_0^1 \left[u + d - \bar{u} - \bar{d}\right] = 3。 \tag{9.48}$$

The Momentum Sum Rule

夸克携带核子的部分动量，即

$$\int_0^1 \left[u + d + s + \bar{u} + \bar{d} + \bar{s}\right] xdx = 1 - \epsilon。 \tag{9.49}$$

利用结构函数改写上式，有

$$\int_0^1 (\frac{9}{2}F_2^{ep+en} - \frac{3}{4}F_2^{\nu p+\nu n}) = 1 - \epsilon。 \tag{9.50}$$

由实验知 $\epsilon \simeq 0.5$ ，即大约核子一半的动量是由胶子携带的。这是一个很有意思的现象。

§9.5 部分子模型与 e^+e^- 湮灭

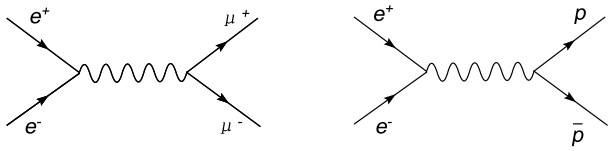


图 9.4:

$$\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3q^4}(1 - \frac{4m_\mu^2}{q^2})^{1/2}(2m_\mu^2 + q^2)。 \tag{9.51}$$

$$\sigma(e^+e^- \to p\bar{p}) = \frac{4\pi\alpha^2}{3q^4}(1 - \frac{4m_p^2}{q^2})^{1/2}(2m_p^2 G_E^2(q^2) + q^2 G_M^2(q^2))。 \tag{9.52}$$

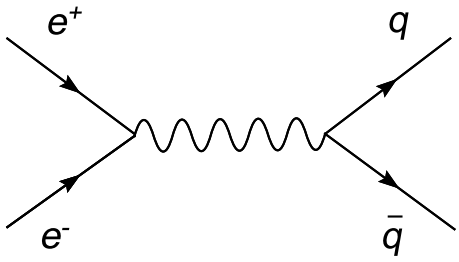


图 9.5:

其中 G_E 、G_M 分别是 $q^2 \geq 0$ 时的电、磁形状因子。对于大的 q^2 , $G_E(q^2) \propto G_M(q^2) \sim q^{-4}$ 。所以当 $s >> M_p^2$ 时， $\sigma(e^+e^- \to p\bar{p}) \sim s^{-5}$ 。对于 $e^+e^- \to hadrons$ ：

$$\sigma(e^+e^- \to hadrons) = \sum_{i=colors\&flavors} \sigma(e^+e^- \to q_i\bar{q}_i)。 \tag{9.53}$$

可以定义一个重要的物理量,

$$R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \to hadrons)}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} = \sum e_i^2。 \tag{9.54}$$

比如,

$$\begin{aligned} R &= 3(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}) = 2 \ , \ (\sqrt{s} < 2m_c) \\ R &= 2 + 3(\frac{4}{9} + \frac{1}{9}) = \frac{11}{3} \ , \ (\sqrt{s} > 2m_b)。 \end{aligned} \tag{9.55}$$

在 $e^+e^- \to hadrons$ 的过程中的喷注结构与部分子 1/2 的假设是一致的：当 4GeV< $\sqrt{s} < 7.5$GeV 时 $d\sigma/d\Omega \propto 1 + \cos^2\theta$ ，当 $\sqrt{s}$ 更大时，则要出现 3 喷注事例。

Drell–Yan 过程： $pp \to \mu^+\mu^- X$

考虑 $s \equiv (p_1 + p_2)^2 \to \infty$ ， $q^2 \to \infty$ ， q^2/s 固定的极限。在质心系中， $p_1^\mu = (p, 0, 0, p)$ ， $p_2^\mu = (p, 0, 0, -p)$ ， $s = 4p^2$ 。忽略部分子质量和横动量，于是 $k_1^\mu = x_1 p_1^\mu$ ， $k_2^\mu = x_2 p_2^\mu$ ， $q^\mu = ((x_1+x_2)p, 0, 0, (x_1-x_2)p)$ ， $q^2 = 4x_1x_2p^2 = x_1x_2s$ 。在质子初态中，找到第 i 个夸克 - 反夸克对、并带动量分布 x_1 、 x_2 的几率为,

$$q_i(x_1)\bar{q}_i(x_2)dx_1dx_2 + \bar{q}_i(x_1)q_i(x_2)dx_1dx_2。$$

再乘上

$$\frac{d\sigma}{dq^2}(q_i\bar{q}_i \to \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3q^2}e_i^2\delta(q^2 - x_1x_2s) \ , \tag{9.56}$$

得出,

$$\frac{d\sigma}{dq^2}(pp \to \mu^+\mu^- X) = \frac{4\pi\alpha^2}{3q^2}\sum_i e_i^2 \int_0^1 [q_i(x_1)\bar{q}_i(x_2) + \bar{q}_i(x_1)q_i(x_2)] \frac{dx_1dx_2}{x_1x_2}\delta(\frac{1}{x_1x_2} - \frac{s}{q^2})。 \tag{9.57}$$

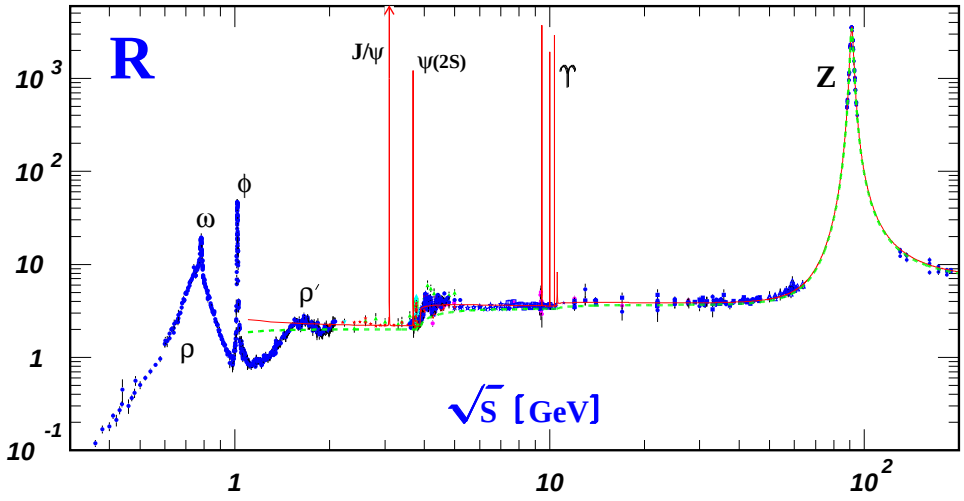


图 9.6: R 值的实验测量。

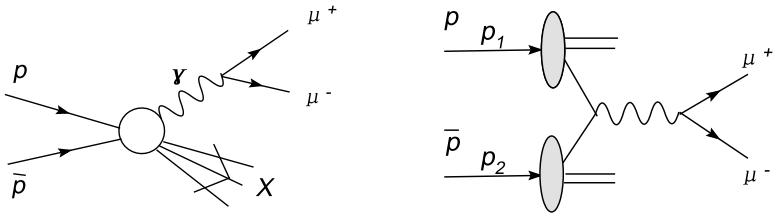


图 9.7: Drell–Yan 过程。

所以可以推出

$$q^4 \frac{d\sigma}{dq^2} \propto q^2/s。 \tag{9.58}$$

与实验一致。

可以在场论的框架内讨论 Bjorken 无标度性，因而把部分子模型放到一个更严格的场论的框架内。这里我们不再讨论，需要的读者可以参考 Cheng 和 Li 的书。

第十章　微扰 QCD

§10.1　QCD 的拉氏量

我们知道强相互作用是由量子色动力学 (QCD) 来描述的。 QCD 的拉氏量 (Lagrangian) 可以表述为,

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu,a} + \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m)q - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^{\mu a})^2 + \bar{C}^a\partial^\mu D^{ab}_\mu C^b \ , \tag{10.1}$$

其中 q 表示夸克场， m 是夸克质量矩阵， $m = diag(m_u, m_d, m_s, ...)$,

$$q(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \\ s(x) \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix} \ ; \tag{10.2}$$

对于 u 、 d 夸克它们的质量比起 QCD 的能标 1GeV 很小，因而在 QCD 的拉氏量中的质量项对于大多数物理过程是一个很小的量，可以作微扰处理。因此 u 、 d 夸克之间有一个近似的 SU(2) 转动不变性，即同位旋对称性。 s 夸克的质量较大, $\sim$150MeV 所以常常忽略 s 夸克质量的近似不是很好。 $F_{\mu\nu}$ 是胶子场的场强,

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu \ ; \tag{10.3}$$

D_μ 、 D^{ab}_μ 表示协变微分,

$$D_\mu = \partial_\mu - igT^c A^c_\mu, \tag{10.4}$$

$$D^{ab}_\mu = \delta^{ab}\partial_\mu - g f^{abc} A^c_\mu \ . \tag{10.5}$$

在伴随表示中， $T^c_{ab} = -if^{abc}$ 。 $SU(3)$ 群的基础表示的八个生成元 ($T^a \equiv \lambda^a/2$) 可以写成,

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \tag{10.6}$$

一般地对于 $SU(N)$ 群我们都有，

$$
\begin{aligned}
&[\frac{\lambda_a}{2},\frac{\lambda_b}{2}]=if_{abc}\frac{\lambda_c}{2},\ \ \{\frac{\lambda_a}{2},\frac{\lambda_b}{2}\}=\frac{1}{3}\delta_{ab}+\frac{\lambda_c}{2}d_{abc},\\
&Tr(\frac{\lambda_a}{2}\frac{\lambda_b}{2})=\delta_{ab}T_F=\frac{1}{2}\delta_{ab},\ \ Tr(\frac{\lambda_a}{2}\frac{\lambda_b}{2}\frac{\lambda_c}{2})=\frac{1}{4}d_{abc}+\frac{1}{4}if_{abc},\\
&\delta_{ij}C_F=(\sum_a\frac{\lambda^a}{2}\frac{\lambda^a}{2})_{ij}\ ,\ \ \delta_{ab}C_A=\sum_{cc'}f^{acc'}f^{bcc'}\\
&C_A=N,\ \ C_F=\frac{N^2-1}{2N},\ \ T_F=\frac{1}{2}\ .
\end{aligned}
\tag{10.7}
$$

其中， f_{abc} 关于下标反对称， d_{abc} 关于下标全对称。另一个十分有用的公式是

$$
\sum_a T^a_{ij}T^a_{kl}=\frac{1}{2}(\delta_{il}\delta_{kj}-\frac{1}{N}\delta_{ij}\delta_{kl}) \tag{10.8}
$$

对于 $SU(3)$ 群我们有

$$
\begin{aligned}
f_{123}=f_{147}=f_{246}&=f_{257}=f_{345}=1,\\
f_{156}=f_{367}=-\frac{1}{2},&\qquad f_{458}=f_{678}=\sqrt{\frac{3}{2}},
\end{aligned}
\tag{10.9}
$$

$$
\begin{aligned}
d_{146}=d_{157}=-d_{247}=d_{256}=d_{344}&=d_{355}=-d_{366}=-d_{377}=\frac{1}{2},\\
d_{118}=d_{228}=d_{338}&=-d_{888}=\frac{1}{\sqrt{3}},\\
d_{448}=d_{558}=d_{668}&=d_{778}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\ ,
\end{aligned}
\tag{10.10}
$$

其余项为零且

$$
\sum_{abc}d^2_{abc}=\frac{40}{3}\ ,\ \ \sum_{abc}f^2_{abc}=24\ ,\ \ \sum_{rka}\epsilon_{irk}T^a_{jr}T^a_{kl}=-\frac{1}{6}\epsilon_{ijl}\ . \tag{10.11}
$$

QCD 的拉氏量展开如下：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\ =\ &\bar\psi(i\partial-m)\psi-\frac{1}{4}(\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu)^2-\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^{\mu a})^2\\
&+gA^a_\mu\bar\psi\gamma^\mu\frac{\lambda^a}{2}\psi-gf^{abc}(\partial_\mu A^a_\nu)A^{\mu b}A^{\nu c}-g^2f^{eab}f^{ecd}A^a_\mu A^b_\nu A^{\mu c}A^{\nu d}\\
&+\bar C^a\partial^\mu(\delta^{ab}\partial_\mu-gf^{abc}A^c_\mu)C^b
\end{aligned}
\tag{10.12}
$$

由此可以得到传播子和费曼规则。（略，推导详见 Cheng and Li p259-p263 ）比如对于胶子传播子，我们有

$$
i\triangle^{ab}_{\mu\nu}=-i\delta^{ab}\,\frac{g_{\mu\nu}-(1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}}{k^2+i\varepsilon}\ . \tag{10.13}
$$

$\xi = 1$ 叫做't Hooft–Feyman 规范， $\xi = 0$ 叫做 Landau 规范。对于鬼场的传播子有，

$$i\triangle^{ab}(k) = -i\delta^{ab}\frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \ . \tag{10.14}$$

鬼场线带有方向性以区分鬼粒子和反鬼粒子。

§10.2 单圈重整化、渐近自由

§10.2.1 QCD 的单圈重整化

设出现在拉氏量 10.12 中的场量和参数全为裸量，标以角标 0 作为记号。裸量与重整化后的量之间的关系是，

$$A_{0\mu} \equiv Z_3^{1/2} A_\mu \ , \ \ \psi_0 \equiv Z_F^{1/2}\psi \ , \ \ g_0 \equiv Z_g\, g \ , \ \ m_0 \equiv Z_m\, m \equiv (1+\delta_m)m \ . \tag{10.15}$$

我们下面首先在 R_ξ 规范下来计算一下费米子的波函数与质量重整化：

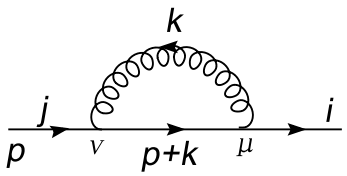


图 10.1:

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{d^D k \nu^{2\epsilon}}{(2\pi)^D} ig\gamma_\mu t^a_{il} \frac{i}{(\not p + \not k) - m} ig\gamma_\nu t^a_{lj} (-i) \frac{g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}(1-\xi)}{k^2} \\
&= -\delta_{ij} C_F g^2 \int \frac{d^n k \nu^{2\epsilon}}{(2\pi)^n} \gamma_\mu \frac{1}{(\not p + \not k) - m} \gamma_\nu \frac{g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}(1-\xi)}{k^2} \\
&\equiv i\delta_{ij} C_F g^2 \Sigma^{(2)}_\xi(p) \ .
\end{aligned} \tag{10.16}$$

令

$$\Sigma^{(2)}_\xi(p) \equiv (\not p - m) A_\xi(p^2) + m B_\xi(p^2) \ , \tag{10.17}$$

则

$$\begin{aligned}
A_\xi = \frac{1}{16\pi^2}\{&\xi N_\epsilon - 1 - \int_0^1 dx (1+\xi-2x) \log \frac{xm^2 - x(1-x)p^2}{\nu^2} \\
&-(1-\xi)(p^2 - m^2)\int_0^1 dx \frac{x}{m^2 - xp^2}\} \ ,
\end{aligned} \tag{10.18}$$

$$B_\xi = \frac{1}{16\pi^2}\{-3N_\epsilon + 1 + 2\int_0^1 dx(1+x)\log\frac{xm^2 - x(1-x)p^2}{\nu^2}$$
$$-(1-\xi)(p^2-m^2)\int_0^1 dx\frac{x}{m^2-xp^2}\}\ , \tag{10.19}$$

其中 $\epsilon = 2 - D/2$

$$N_\epsilon = \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \log 4\pi\ ,\ \ C_F = \frac{N^2-1}{2N} = \frac{4}{3}\ . \tag{10.20}$$

且 ν 是一个任意的标度，注意它仅仅出现在组合 $N_\epsilon + \log\nu^2$ 中（为方便书写起见，本章以后定义 N_ϵ 为包括 $\log\nu^2$ 项）。所以裸的传播子

$$\begin{aligned} S_\xi^0(p) &= \frac{i}{\not p - m + g^2 C_F \Sigma^{(2)}(p)} \\ &= i\frac{1 - C_F g^2 A_\xi(p^2)}{\not p - m(1 - C_F g^2 B_\xi(p^2))} + \text{高阶项} \end{aligned} \tag{10.21}$$

得到了正规化以后的裸的传播子后，下一步的手续是做重整化。注意在上式中 m 、g 实际上均为裸量 m_0 、 g_0 。记住传播子是两点格林函数，所以有

$$S^r(p) = Z_F^{-1} S^0(p, Z_m\, m, Z_g\, g)\ . \tag{10.22}$$

带入 10.15 式后即可得到重整化以后的传播子

$$S^r(p) = iZ_F^{-1}\frac{1 - C_F g^2 A_\xi(p^2)}{\not p - Z_m\, m(1 - C_F g^2 B_\xi(p^2))} \tag{10.23}$$

重整化常数的选取有如下几种方案：

1. **质壳重整化（ on-shell 重整化 ）:** 要求在粒子的 4 动量趋于质壳时，即 $\not p \to m$ 时，

   $$S^r \to \frac{i}{\not p - m}\ . \tag{10.24}$$

   这导致

   $$\delta_m = C_F g^2 B_\xi(m^2) \tag{10.25}$$

   和

   $$Z_F = 1 - C_F g^2 A_\xi(m^2)\ . \tag{10.26}$$

   即质壳重整化条件完全地决定了减除常数。把上两式带回 10.23 式，发现重整化后的传播子对任意 scale ν 的依赖完全消去了。显然质壳重整化条件是物理的重整化条件。 但是对于 QCD 中的夸克场，由于其并不存在所谓的 “质壳条件”。 [1] 我们往往也采用 μ- 重整化或 $\overline{\text{MS}}$ 重整化条件。

[1]对于一个稳定的夸克极点位置到微扰论的任意有限阶都有定义。（ R. Tarrach, Nucl. Phys. B183,384(1981) ）然而当把某一类图到所有阶进行求和后（ Infrared renormalons ），发现极点质量的定义有一定的不确定性，正比于 Λ_{QCD} 。（ I. Bigi, M. Shifman, N. Uraltsev and A. Vainshtein, Phys. Rev. D50, 2234(1994) 。）

2. μ **重整化 (off-shell 重整化)**：所谓的 μ 重整化方案一般是指不取质壳条件而是取在一个任意的质量量纲上，即 $p^2=\mu^2$，甚至取在类空区间以避开物理区域的复杂的奇异行为。并且有类似于 10.24 式的条件。类似地我们有，

$$\delta_m = C_F g^2 B_\xi(\mu^2) \tag{10.27}$$

和

$$Z_F = 1 - C_F g^2 A_\xi(\mu^2)\ . \tag{10.28}$$

重整化后的传播子依赖于任意标度 μ^2

3. **MS 或 $\overline{\rm MS}$ 重整化方案**：MS 重整化方案特指对于维数正规化而言，仅仅减除掉正比于 $1/\epsilon$ 的发散项。$\overline{\rm MS}$ 重整化方案是指 (仅仅) 减除掉组合 N_ϵ。注意此时仍然有一个任意的标度依赖性 ν。此时

$$Z_F = 1 - C_F g^2 \frac{\xi}{16\pi^2} N_\epsilon\ ,\ \delta_m = -C_F \frac{3g^2}{16\pi^2} N_\epsilon\ . \tag{10.29}$$

在 $\overline{MS}$ 方案中，质量重整化常数是 (到所有阶) 规范无关的。

下面再讨论胶子、费米子的顶角耦合 (取 $\xi=1$ 的规范)，

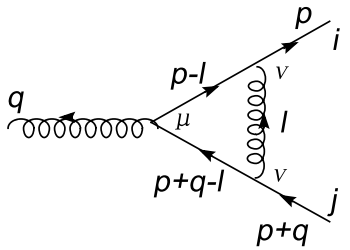


图 10.2:

$$\begin{aligned} A_1 &= \int \frac{d^D l \mu^{2\epsilon}}{(2\pi)^D} (ig T^b_{ii'}\gamma^\nu) \frac{i}{\not p - \not l - m} (ig\gamma_\mu T^a_{i'j'}) \frac{i}{\not p + \not q - \not l - m} (ig\gamma_\nu T^b_{j'j}) \cdot \frac{-i}{l^2} \\ &= g^3 \int \frac{d^D l\, \mu^{2\epsilon}}{(2\pi)^D} \frac{\gamma^\nu(\not p - \not l + m)\gamma^\mu(\not p + \not q - \not l + m)\gamma_\nu}{[(p-l)^2-m^2][(p+q-l)^2-m^2]l^2} \{T^b T^a T^b\}_{ij}\ . \end{aligned} \tag{10.30}$$

利用 $T^bT^aT^b = T^b[T^a,T^b] + T^bT^bT^a = if^{abc}T^bT^c + C_FT^a = C_FT^a - \frac{1}{2}f^{abc}f^{bcd}T^d = (C_F - \frac{1}{2}C_A)T^a$，给出

$$A_1 = g^3\{C_F - \frac{1}{2}C_A\}T^a_{ij}\Gamma^{(2)}_\mu\ , \tag{10.31}$$

其中 $\Gamma^{(2)}_\mu$ 是 10.30 式中最后一个等式右边的积分项。它的发散可以很容易的计算出来：

$$A_1 \doteq g^3\{C_F - \frac{1}{2}C_A\}T^a_{ij}\,\Gamma(3)\int_0^1 x dx dy$$

$$
\begin{aligned}
& \int \frac{d^D l\,\nu^{2\epsilon}}{(2\pi)^D} \frac{\gamma_\nu \not{l} \gamma^\mu \not{l} \gamma^\nu}{\{[(p-l)^2-m^2]\,x(1-y)+[(p-q-l)^2-m^2]\,xy+l^2(1-x)\}^3} \\
= \;& 2g^3\{C_F-\frac{1}{2}C_A\}T^a_{ij}\int_0^1 xdxdy \\
& \int \frac{d^D l\,\nu^{2\epsilon}}{(2\pi)^D} \frac{\gamma_\nu(2l^\mu \not{l}-l^2\gamma^\mu)\gamma^\nu}{\{l^2-2l\cdot(xp+qxy)-xm^2+xp^2+2xyp\cdot q+xyq^2\}^3} \\
= \;& 2g^3\{C_F-\frac{1}{2}C_A\}T^a_{ij}\int_0^1 xdxdy\int \frac{d^D l\,\nu^{2\epsilon}}{(2\pi)^D}\frac{(2-D)(2l^\mu \not{l}-l^2\gamma^\mu)}{[l^2-2lx(p+qy)-\triangle]^3} \\
\doteq \;& 2g^3\{C_F-\frac{1}{2}C_A\}T^a_{ij}\int_0^1 xdxdy\,(2-D) \\
& \times\frac{i\nu^{2\epsilon}}{(4\pi)^{D/2}}(-1)^3(-\frac{\Gamma(2-\frac{D}{2})}{2\Gamma(3)})\frac{(2-D)\gamma_\mu}{[\triangle+x^2(p+yq)^2]^{2-D/2}} \\
= \;& igT^a_{ij}\gamma^\mu\times\{C_F-\frac{1}{2}C_A\}\frac{g^2}{16\pi^2}\Gamma(\epsilon)(4\pi\nu^2)^\epsilon+\text{有限项} \\
\doteq \;& igT^a_{ij}\gamma_\mu\times\frac{g^2}{16\pi^2}\{C_F-\frac{1}{2}C_A\}N_\epsilon\,. \qquad (10.32)
\end{aligned}
$$

类似地可以证明

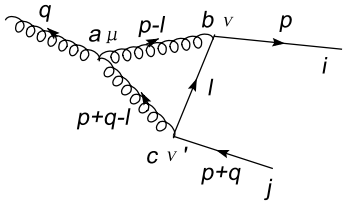


图 10.3:

$$
\begin{aligned}
A_2 \;=\; & gf^{acb}\int\frac{d^D l\,\nu^{2\epsilon}}{(2\pi)^D}[(2q+p-l)_\nu g_{\mu\nu'}+(2l-2p-q)_\mu g_{\nu\nu'}+(p-l-q)_{\nu'}g_{\mu\nu}] \\
& \frac{-i}{(p-l)^2}\frac{-i}{(p+q-l)^2}(ig\gamma^\nu T^b_{ik})\frac{i}{\not{l}-m}ig\gamma^{\nu'}T^c_{kj} \\
\doteq \;& \frac{C_A}{2}T^a_{ij}g^3\int\frac{d^D l\,\nu^{2\epsilon}}{(2\pi)^D}\;\frac{-2l^2-4l^\mu \not{l}}{[\cdots]^3} \\
\doteq \;& \frac{C_A}{4}g^3T^a_{ij}(D+2)\gamma^\mu N_\epsilon\frac{i}{(4\pi)^2} \\
\doteq \;& igT^a_{ij}\gamma_\mu\times\frac{g^2}{16\pi^2}\{\frac{3}{2}C_A\}N_\epsilon\,. \qquad (10.33)
\end{aligned}
$$

即

$$A_1+A_2\doteq igT^a_{ij}\gamma^\mu\frac{g^2}{16\pi^2}\{C_A+C_F\}N_\epsilon\,. \qquad (10.34)$$

也就是说,

$$Z_{1F}=Z_F^{-1}Z_3^{-1/2}Z_g=1+\frac{\alpha_g}{4\pi}(C_A+C_F)N_\epsilon\,. \qquad (10.35)$$

下面计算规范场传播子的单圈自能修正。首先计算费米子圈图：

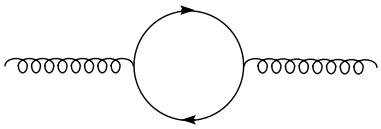


图 10.4:

$$i\Pi^{ab,f}_{\mu\nu}(q^2) = i(q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu)\delta^{ab}\Pi^f(q^2) \doteq i(q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu)\delta^{ab}(-\frac{g^2}{16\pi^2}\,\frac{4}{3}N_f T_F N_\epsilon + \cdots)\ . \tag{10.36}$$

还有三个图： 它们的贡献是与 ξ 有关的，我们取 $\xi = 1$ 的't Hooft–Feyman 规范作

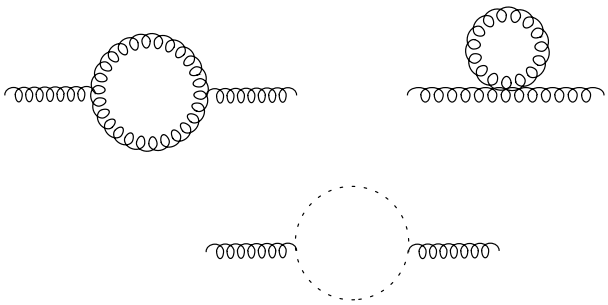


图 10.5:

演示。首先看一看规范场的两个圈图 (其中含有四胶子顶点的圈图的贡献在维数正规化中为零，不予考虑)：

$$\begin{aligned}\Pi^{\mu\nu,\text{gauge}}_{aa'}(q) &= -i\frac{g^2}{2}f^{abc}f^{a'bc}\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\frac{1}{k^2(k+q)^2}\\ &\quad\times[-(2k+q)^\mu g_{\alpha\beta} + (k-q)_\beta g^\mu_\alpha + (2q+k)_\alpha g^\mu_\beta]\\ &\quad\times[-(2k+q)^\nu g^{\alpha\beta} + (k-q)^\beta g^{\nu\alpha} + (2q+k)^\alpha g^{\nu\beta}]\end{aligned} \tag{10.37}$$

利用 $f^{abc}f^{a'bc} = \delta^{aa'}C_A$ ，和维数正规化方法，结果如下：

$$\begin{aligned}\Pi^{\mu\nu}_{aa'}(q) &= \delta_{aa'}C_A\frac{g^2}{32\pi^2}\\ &\quad\times\{[\frac{19}{6}N_\epsilon - \frac{1}{2} - \int_0^1 dx\,(11x^2-11x+5)\log(-x(1-x)q^2)]q^2 g^{\mu\nu}\\ &\quad-[\frac{11}{3}N_\epsilon + \frac{2}{3} - \int_0^1 dx\,(-10x^2+10x+2)\log(-x(1-x)q^2)]q^\mu q^\nu\}\end{aligned} \tag{10.38}$$

很容易检查出上述结果不满足横向规范条件： $q_\mu\Pi^{\mu\nu}(q^2) \neq 0$ 。比如

$$\text{Im}\Pi^{\mu\nu}_{aa'}(q) = \delta_{aa'}C_A\frac{g^2}{32\pi}\theta(q^2)[-\frac{19}{6}q^2 g^{\mu\nu} + \frac{22}{6}q^\mu q^\nu]。 \tag{10.39}$$

事实上，这一结果还破坏了物理 S 矩阵应满足的幺正性。其原因是不考虑鬼场时的相互作用的拉氏量会把物理态变到含有非物理极化的态。解决这一问题的方案是引入鬼场使其与胶子场的非物理自由度的贡献相消：

$$\begin{aligned}\Pi^{\mu\nu,\text{ghost}}_{aa'} &= \delta_{aa'}C_A ig^2\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\frac{k^\mu(k+q)^\nu}{k^2(k+q)^2}\\ &= \delta_{aa'}\frac{g^2}{32\pi^2}C_A\{[\frac{1}{6}N_\epsilon+\frac{1}{6}-\int_0^1 dx\,x(1-x)\log(-x(1-x)q^2)]q^2g^{\mu\nu}\\ &\quad -[-\frac{1}{3}N_\epsilon+2\int_0^1 dx\,x(1-x)\log(-x(1-x)q^2)]q^\mu q^\nu\}\ . \end{aligned}\tag{10.40}$$

把规范场贡献与鬼场贡献相加得到总的结果如下：

$$\Pi^{\mu\nu}=\delta_{aa'}\frac{g^2}{32\pi^2}C_A(-g^{\mu\nu}q^2+q^\mu q^\nu)\{-\frac{10}{3}N_\epsilon-\frac{62}{9}+\frac{10}{3}\log(-q^2)\}\ ,\tag{10.41}$$

满足横向规范条件和幺正性条件。下面再给出在 R_ξ 规范下胶子自能的发散项的贡献：

$$i\Pi^{ab}_{\mu\nu}(q^2)=i(q^2g_{\mu\nu}-q_\mu q_\nu)\delta^{ab}\Pi(q^2)\doteq i(q^2g_{\mu\nu}-q_\mu q_\nu)\delta^{ab}(-\frac{g^2}{16\pi^2}(-\frac{13}{6}+\frac{\xi}{2})C_AN_\epsilon+\cdots)\ .\tag{10.42}$$

由于规范场的传播子可以写成：

$$i\triangle^{ab}_{\mu\nu}(q)=\frac{-ig_{\mu\nu}\delta^{ab}}{q^2(1-\Pi(q^2))}\ ,\tag{10.43}$$

也即胶子场的波函数重整化常数可以写成

$$\begin{aligned}Z_3 &\equiv \frac{1}{1-\Pi^{div}(q^2)}=1+\Pi^{div}(q^2)\ \text{(单圈时)}\\ &= 1-\frac{g^2}{16\pi^2}(\frac{4}{3}N_fT_F+(-\frac{13}{6}+\frac{\xi}{2})C_A)N_\epsilon\ .\end{aligned}\tag{10.44}$$

Peskin 的书中采用的是另一种算法，结果是等价的。

§10.2.2 重整化群方程与跑动耦合常数、渐近自由

有了各种重整化常数的计算结果，我们可以来计算单圈时的重整化群方程，来研究各种耦合常数和质量在不同的能量标度下的演化规律。由于 $g_0=Z_gg$ 我们有

$$\nu\frac{d}{d\nu}g=\nu\frac{d}{d\nu}(Z_g^{-1}g_0)=-g_0Z_g^{-2}\nu\frac{d}{d\nu}Z_g=-g\frac{\nu\frac{d}{d\nu}Z_g}{Z_g}\ .\tag{10.45}$$

在单圈时上式中最后一项可以化简为 $-g\nu\frac{d}{d\nu}Z_g$ 。由于 ν 仅出现在

$$N_\epsilon=\frac{2}{4-n}-\gamma_E+\log 4\pi+\log\nu^2$$

即 $(4\pi)^\epsilon\Gamma(\epsilon)(\nu^2)^\epsilon$ 的组合中，且 $\nu\frac{d}{d\nu}N_\epsilon = \nu\frac{d}{d\nu}\log\nu^2 = 2$，所以对于 QCD，由

$$Z_g = Z_{1F}Z_F Z_3^{1/2} = 1 + \frac{\alpha_g}{4\pi}\{\frac{11}{6}C_A - \frac{2}{3}T_f N_f\}N_\epsilon$$

推出

$$\mu\frac{d}{d\mu}g = \beta(g) = -\frac{g^3}{16\pi^2}\{\frac{11}{3}C_A - \frac{4}{3}T_f N_f\}\ . \tag{10.46}$$

可以证明一直到 β 函数的第二阶都是 ξ 无关的。

* 关于重整化常数之间的关系的讨论。 Slavnov–Taylor 恒等式。

§10.3 对标度律的修正

§10.3.1 $e^+e^-\to$ 强子 过程

考虑非极化的过程 $e^+(p_1)e^-(p_2)\to n$，(图) 只考虑电磁作用到最低阶我们有，

$$\begin{aligned}&< n|S_{QCD+em}|e^+e^- >=\\ &\frac{(ie)^2}{2!} < n|\int d^4x_1 d^4x_2 T\{\mathcal{L}^{em}_{int}(x_1)\mathcal{L}^{em}_{int}(x_2)\times\exp i\int d^4x\mathcal{L}^{QCD}_{int}(x)\}|e^+e^- > \ .\end{aligned} \tag{10.47}$$

利用 QED 的 Feynman 规则可得，

$$\mathcal{T}(e^+e^-\to n) = \frac{2\pi e^2}{q^2}\bar v(p_1,\sigma_1)\gamma_\mu u(p_2,\sigma_2) < n|J^\mu(0)|0 > \ . \tag{10.48}$$

其中 J^μ 是夸克场组成的电磁流。所以截面可以写为，

$$\begin{aligned}\sigma^{tot} &= \sum_n \sigma(e^+e^-\to n)\\ &= \frac{2\alpha^2}{s^3}4\pi^2 l_{\mu\nu}\sum_n(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_n) < n|J^\nu(0)|0 >< n|J^\mu(0)|0 >^*\end{aligned} \tag{10.49}$$

注意这里的对末态的求和符号包括了对末态动量的积分（参见 9.1 节）。上式中 $l_{\mu\nu}$ 为 (忽略电子质量)，

$$\begin{aligned}l_{\mu\nu} &= \frac{1}{4}\sum_{\sigma_1\sigma_2}\bar v(p_1,\sigma_1)\gamma_\mu u(p_2,\sigma_2)[\bar v(p_1,\sigma_1)\gamma_\nu u(p_2,\sigma_2)]^*\\ &= \frac{1}{2}\{q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu} - (p_1-p_2)_\mu(p_1-p_2)_\nu\}\ .\end{aligned} \tag{10.50}$$

利用类似于 9.1 节中的技巧，我们可以得到

$$\begin{aligned}\triangle^{\mu\nu} &= \sum_n(2\pi)^4\delta(p_1+p_2-p_n) < 0|J^\mu(0)|n >< n|J^\nu(0)|0 >\\ &= \int d^4x e^{iq\cdot x} < 0|[J^\mu(x),\ J^\nu(0)]|0 > \ .\end{aligned} \tag{10.51}$$

另一方面两个流的关联函数（光子自能）的定义为，

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = i\int d^4x e^{iq\cdot x} < 0|TJ^{\mu}(x)J^{\nu}(0)|0 > \ . \tag{10.52}$$

利用光学定理 B.7 式可以证明

$$\triangle^{\mu\nu} = 2\mathrm{Im}\Pi^{\mu\nu} \ , \tag{10.53}$$

即 e^+e^- 的总截面与光子传播子的吸收部分有关。证明时仅保留到 $O(\alpha_e^2)$ 阶（从本节上面给出的推导可以看出 10.53 式仅在电磁作用的最低阶下才是成立的）。所以计算 e^+e^- 湮灭的总截面到 α_e^2 级只需计算光子自能的虚部即可。光子自能图到 QCD 的最低阶修正 是一个两圈图的计算，可以利用 QED 的计算结果得到。（忽略夸克质量项，其贡献 $\sim m^2/s$ ）根据 R 值的定义：

$$R^0(s) = \frac{\sigma(e^+e^- \to \mathrm{hadrons})}{\sigma^{(0)}(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} (\text{最低阶} = N_c\textstyle\sum_f Q_f^2) \ . \tag{10.54}$$

其中 $\sigma^{(0)}$ 是到 α_e 的最低阶的贡献： $\sigma^{(0)}(e^+e^- \to \mu^+\mu^-) = 4\pi^2\alpha_e/(3s)$ 。（忽略了夸克的质量）。计算到第二阶，

$$R^{(1)} = N_c\sum_f Q_f^2(1+\frac{\alpha_s}{\pi}) \ . \tag{10.55}$$

从重整化的知识得知，上式中的 α_s 依赖于一个任意的重整化标度 ν 。但是散射截面是一个物理量，当然不应该依赖于一个人为的参数。根据重整化群方程的基本理论，解决这一问题的方案是将 $\alpha_s(\nu) \to \alpha_s(\sqrt{s})$ 。在这里我们重温一下重整化群方程解决这一问题的基本思路。首先，利用 10.52 式和规范不变条件给出的关系 $\Pi^{\mu\nu} = (q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu}q^2)\Pi(q^2)$ 得知，标量函数 $\mathrm{Im}\Pi(s)$ 的量纲为零，是一个物理量。一般的来说我们有 $\mathrm{Im}\Pi(s) = \mathrm{Im}\Pi(s, g(\nu), \nu)$ 于是它满足如下的重整化群方程：

$$[\nu\frac{\partial}{\partial\nu} + \beta(g)\frac{\partial}{\partial g}]\mathrm{Im}\Pi(s, g(\nu), \nu) = 0 \ . \tag{10.56}$$

注意在上式中不出现任何反常量纲，原因是 10.52 式给出的 Π 函数是两个守恒流的乘积。流守恒保证了在作算符重整化时不需要引入额外的重整化常数。

注：为了看清楚这一点我们作如下考虑：定义关联函数

$$G_\mu(p,q) \equiv \int d^4xd^4y e^{-iqx-ipy} < 0|T(J_\mu(x)\psi(y)\psi^+(0))|0 > \ . \tag{10.57}$$

利用流代数（ 等时对易关系 ）可以很容易证明，

$$-iq^\mu G_\mu(p,q) = \triangle(p+q) - \triangle(p) \ , \tag{10.58}$$

其中

$$\triangle(p) \equiv \int d^4x e^{-ipx} < 0|T(\psi(x)\psi^+(0))|0 > \ . \tag{10.59}$$

在考虑重整化时，由于 10.57 式中除场算符以外还包含有定域的复合算符 J_μ 。所以其裸量和重整化后的量之间的关系为

$$G^R_\mu(p,q) = Z_\psi^{-1} Z_J^{-1} G_\mu(p,q) \ . \tag{10.60}$$

而传播子的形式依旧：

$$\triangle^R(p) = Z_\psi^{-1} \triangle(p) \ . \tag{10.61}$$

所以重整化以后的 *Ward* 等式可以写为，

$$-iZ_J q^\mu G^R_\mu(p,q) = \triangle^R(p+q) - \triangle^R(p) \ . \tag{10.62}$$

显然有上式可以看出 Z_J 不可能含有发散项，也就是说我们并不需要对守恒流作重整。

根据量纲分析我们有 $\mathrm{Im}\Pi(s, g(\nu), \nu) = \mathrm{Im}\Pi(s/\nu^2, g(\nu))$ ，因此在 10.56 式中对 ν 的偏导数可以换为对 s 的偏导数：

$$[\frac{\partial}{\partial t} - \beta(g)\frac{\partial}{\partial g}]\mathrm{Im}\Pi(s, g(\nu), \nu) = 0 \ . \tag{10.63}$$

其中 $t = \log\sqrt{s}$ 。我们发现上式与跑动耦合常数所满足的重整化群方程是一样的，仅仅是边条件不一样。也就是说只要把由微扰计算得出的 $\mathrm{Im}\Pi(s)$ 中的 $\alpha_s(\nu)$ 替换为 $\alpha_s(\sqrt{s})$ 即可。所以最终我们有，

$$R^{(1)} = N_c \sum_f Q_f^2 (1 + \frac{\alpha_s(\sqrt{s})}{\pi} + O(\alpha_s^2)) \ . \tag{10.64}$$

这个式子保证了物理结果与重整化标度的无关。回头看一看著名的跑动耦合常数的表达式，

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + 4\pi b \alpha_s(\mu^2)\log(Q^2/\mu^2)} \ , \quad b = \frac{1}{16\pi^2}(11 - \frac{2}{3}n_f) \ . \tag{10.65}$$

它指出了所谓的重整化群改进的微扰计算的结果实际上是收进了到微扰论所有级的领头对数项的贡献。

为更好地理解重整化群的概念与其应用，我们再从另一个角度来分析一下 $e^+e^- \to hadrons$ 这一过程。根据光学定理， $e^+e^- \to hadrons$ 的截面可以用 $\mathrm{Im}T(e^+e^- \to e^+e^-)$ 来表示，而 $T(e^+e^- \to e^+e^-)$ 到 α_e 的最低阶显然正比于光子的传播子：

$$D^{\mu\nu}(q) = D(q^2)(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}) + \cdots \ , \tag{10.66}$$

其中被忽略的项依赖于规范的选取, 对物理过程没有任何贡献。两点关联函数 $D(Q^2)$ $(Q^2 = -q^2)$ 满足重整化群方程:

$$\left[\nu\frac{\partial}{\partial\nu} + \beta_g\frac{\partial}{\partial g} + 2\gamma_A\right] D(Q^2) = 0 \ , \tag{10.67}$$

其中 γ_A 是光子场的反常量纲,

$$\gamma_A = \frac{1}{2}\nu\frac{\partial}{\partial\nu}\log Z_A(e,g,\nu) \ . \tag{10.68}$$

到两圈的计算给出,

$$\gamma_A = C(3\sum_f e_f^2)[1 + \frac{3}{16\pi^2}C_F\, g^2 + \cdots] \ , \tag{10.69}$$

其中 C 是一个对我们考虑的过程无关紧要的常数因子。 $D(Q^2)$ 的量纲为 -2 , 所以它有如下的形式,

$$D(Q^2) = D(Q^2, g(\nu), \nu) = Q^{-2}\Lambda(\frac{Q}{\nu}, g(\nu)) \ . \tag{10.70}$$

也就是说, 10.67 式可改写为,

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \beta_g\frac{\partial}{\partial g} - 2\gamma_A + 2\right] D(Q^2) = 0 \ , \tag{10.71}$$

其中 $t = \frac{1}{2}\log Q^2/\nu^2$ 。根据重整化群方程的一般解的理论, 我们有

$$\begin{aligned}
D(Q^2) &= Q^{-2}\exp\left[2\int_0^t \gamma_A(g(t'))dt'\right] \\
&= Q^{-2}[1 + 2C(3\sum_f e_f^2)\int_0^t (1 + \frac{3}{16\pi^2}C_F\, g^2(t'))dt'] \\
&= Q^{-2}[1 + 2C(3\sum_f e_f^2)\left(t - \frac{3}{16\pi^2\, 2b}C_F\log\left[\frac{g^2(Q^2)}{g^2(\nu^2)}\right]\right)] \quad (\frac{dg}{dt} = -bg^3) \\
&\simeq Q^{-2}[1 + 2C(3\sum_f e_f^2)\left(t + \frac{3}{16\pi^2\, 2b}C_F 4\pi b\alpha_s(Q^2)\log Q^2/\nu^2\right)] \\
&\simeq Q^{-2}[1 + 2C(3\sum_f e_f^2)\left(t + \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi}t\right)]
\end{aligned} \tag{10.72}$$

在上式中取吸收部分 (上式可看成在欧氏动量空间得出的, 再解析延拓到闵氏空间, t 于是出现一个虚部。其中 $\alpha_s(q^2)$ 与 $\alpha_s(Q^2)$ 的差别 $\propto \alpha^2$ 可忽略, 即 $\alpha_s(q^2)$ 可看成实的), 推出,

$$R^{(1)} = N_c\sum_f Q_f^2(1 + \frac{\alpha_s(\sqrt{s})}{\pi} + O(\alpha_s^2)) \ . \tag{10.73}$$

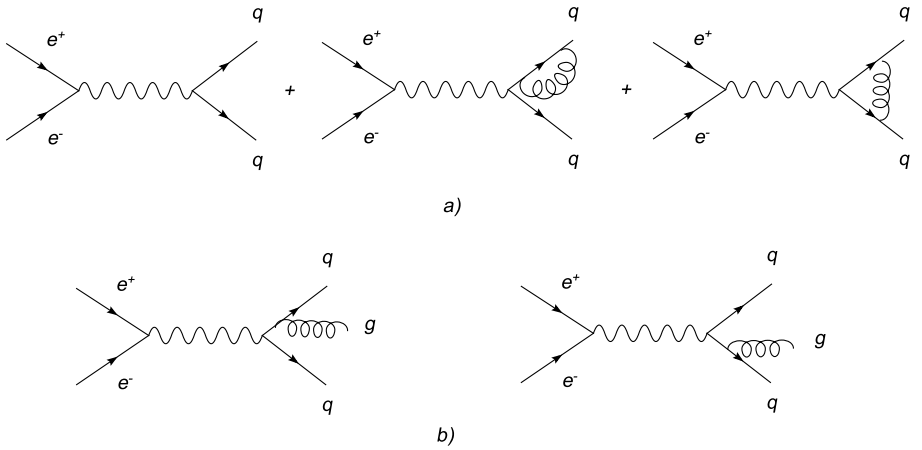


图 10.6:

§10.3.2 红外与共线发散的消除

当然 R 值也可直接利用费曼图计算散射截面得出。见图 10.6 注意此时要计算 $e^+e^- \to \bar{q}q$ 和 $e^+e^- \to \bar{q}qg$ 两个图。在这里出现了红外与共线发散的问题，

$$\sigma(e^+e^- \to g\bar{q}q) = C_F \frac{\alpha_s}{2\pi} \sigma^{Born}(\bar{q}q) \int_{-1}^{+1} d\cos\theta \frac{dl_0}{l_0} \frac{4}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)} , \quad (10.74)$$

其中 l_0 是（在 e^+e^- 的质心系）辐射胶子的能量， θ 是辐射胶子与夸克的夹角。所以我们得知当辐射胶子很软 $(l_0 \to 0)$ 时出现红外发散，当发射胶子与 q 或 $\bar{q}$ 平行时出现共线发散。可以证明图 10.6a 与图 10.6b 所产生的红外与共线发散合在一起互相抵消掉了。

详细讨论可参见比如 T. D. Lee 的书。

§10.4 大 N_c 极限下的 QCD

§10.4.1 大 N_c 展开

考虑 QCD 在大 N_c 极限下的行为，是最早由't Hooft 建议的。它的精神是把 $SU(3)_c \to SU(N_c)$ 。相应地， $SU(3)$ 的三维表示 $\underline{3}$ 和八维表示 $\underline{8}$ 变为 $\underline{N_c}$（基础表示）和 $\underline{N_c^2-1}$（伴随表示），即

$$\begin{aligned} &quark: \quad q^j \ , \quad (j=1,...N_c) \\ &gluon: \quad A_\mu^a \ , \quad a=1,\cdots,N^2-1。 \end{aligned} \quad (10.75)$$

Witten 随后证明了大 N_cQCD 等价于一个具有无穷多自由介子的场论。在 $SU(N_c)$

群下，胶子场为 $N\times N$ 无迹 Hermitian 矩阵 $A_\mu=A_\mu^aT^a$ ，因此协变微商为

$$D_\mu=\partial_\mu+i\frac{g}{\sqrt{N_c}}A_\mu. \tag{10.76}$$

T^A 的归一化为：

$$\mathrm{Tr}\,T^\alpha T^\beta=\frac{1}{2}\delta^{\alpha\beta}. \tag{10.77}$$

在这里耦合常数取为 $g\to\frac{g}{\sqrt{N_c}}$ ，这是做是为避免耦合常数在 $N_c\to\infty$ 爆炸。我们下面将要回到这一点。这样我们得到的规范场胶子的场强，

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu+i\frac{g}{\sqrt{N}}\left[A_\mu,A_\nu\right], \tag{10.78}$$

和相应的拉式量：

$$L=-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\sum_{k=1}^{N_F}\bar{\psi}_k\left(i\not{D}-m_k\right)\psi_k\ . \tag{10.79}$$

通常所说的大 N_c 极限就是 N_F 固定下， N_c 趋向无穷. 为避免微扰图爆炸，把耦合常数 $g\to g/\sqrt{N_c}$ 。这样 β 函数由头两项确定（ g^2N_c 固定），保持 β 函数与 $N_c=3$ 时一致（都有渐近自由）。如果用通常的耦合常数，

$$\mu\frac{dg}{d\mu}=-b_0\frac{g^3}{16\pi^2}+\mathcal{O}\left(g^5\right),\qquad b_0=\frac{11}{3}N-\frac{2}{3}N_F, \tag{10.80}$$

这里 b_0 是 $O(N_c)$, 这个式子在大 N_c 极限下，失去了意义。因此我们用 $g/\sqrt{N}$ 替换 g ，因此得到

$$\mu\frac{dg}{d\mu}=-\left(\frac{11}{3}-\frac{2}{3}\frac{N_F}{N}\right)\frac{g^3}{16\pi^2}+\mathcal{O}\left(g^5\right)\ .$$

现在 β 函数在 $N\to\infty$ 极限下是一个有意义的式子了。在这里 N_F 项是 $1/N_c$ 压低的，以后我们也将要看到，有费米子圈的费曼图的确是 $1/N_c$ 压低的。

我们接下来要讨论在大 N_c 极限下的 QCD 的费曼规则。夸克场的传播子为：

$$<\psi^i(x)\,\bar{\psi}^j(y)>=\delta^{ij}S(x-y). \tag{10.81}$$

胶子的传播子：

$$<A_\mu^a(x)\,A_\nu^b(y)>=\delta^{ab}D_{\mu\nu}(x-y),$$

其中 a 和 b 是伴随表示的指标。我们按基础表示的色指标重新定义胶子场：$\left(A_\mu\right)_j^i\equiv A_\mu^a\left(T^a\right)_j^i$ ，则夸克 - 胶子耦合顶角为：

$$\frac{g}{\sqrt{N_c}}\bar{\psi}^j\gamma_\mu\psi_kA_{\mu j}^k。 \tag{10.82}$$

胶子传播子是,

$$\int d^4x e^{iqx} < 0|T(A^i_{\mu j}(x)A^k_{\nu l}(0))0 >= \frac{1}{2}(\delta^i_l\delta^k_j - N_c^{-1}\delta^i_j\delta^k_l)iD_{\mu\nu}(q) \tag{10.83}$$

其中正比于 $1/N_c$ 的第二项必须存在以保证 $A^j_j = 0$ (如果是 U(N) 群则没有后面一项)。在上式中我们应用了

$$\left(T^A\right)^a{}_b \left(T^A\right)^c{}_d = \frac{1}{2}\delta^a_d\,\delta^c_b - \frac{1}{2N}\delta^a_b\,\delta^c_d \qquad (SU(N)) \ . \tag{10.84}$$

按照上面的规则写出的 Feynman 图使得每一个胶子看起来象一个正反 $\bar{q}q$ 对。如图,



看夸克夸克散射图 10.7， 按胶子场的双线表示夸克线色指标在流动中是不变的。

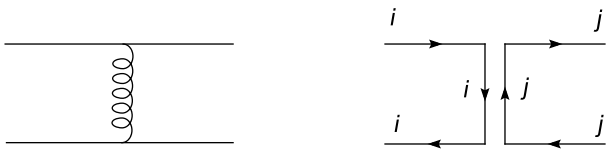


图 10.7:

下面我们得到大 N_c 极限下 QCD 的 N_c counting rule. 得到如图 1 的费曼图表示. 首先，我们想要得到在't Hooft 双线表示的费曼图。我们已经知道了了耦合常数是 $g \to g/\sqrt{N_c}$ 。接下来，我们推导出相互作用顶点的双线表示。从 $TrF_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ 可以得到三胶子耦合项

$$TrA_\mu A_\nu \partial_\mu A_\nu = A^a_{\mu b}A^b_{\nu c}\partial_\mu A^c_{\nu a}, \tag{10.85}$$

我们可以用如图 10.8d 来表示. 第一个胶子的下指标为的二个胶子的上指标，第二个胶子的下指标是第三个胶子的上指标，第三个胶子的下指标是第一个胶子的上指标，每一个胶子场的出夸克场 (反夸克) 的指标与接下来的入夸克场 (夸克) 的指标收缩。换句话说，色守恒保证进入费曼图中的带色指标的夸克线一旦进入，就必定离开。另外要注意的是由对称性可以得到不同的双线表示。例如：三胶子顶点应当除了上面的式子讨论的情况以外还应当有，在 $A_\mu \leftrightarrow A_\nu$ 替换下的三胶子作用. 因此，我们得到的完全的三胶子顶点将如图 10.9 。 以此类推，可以画出图 10.8c ，10.8e 的夸克胶子作用顶点和四胶子作用顶点. 用双线表示，我们不难得到大 N_c

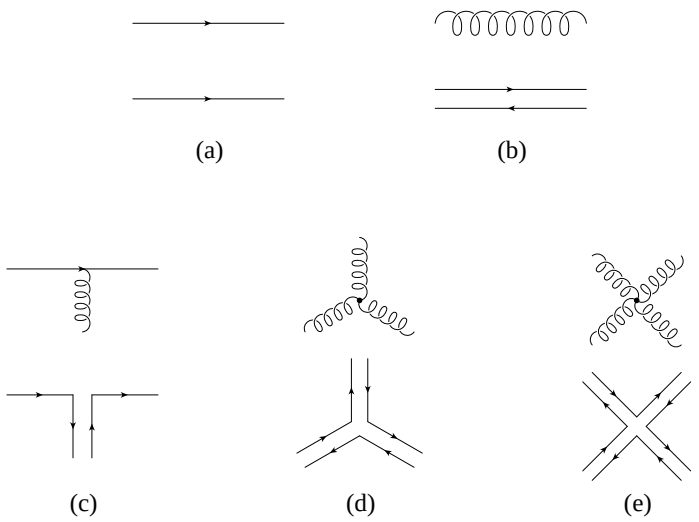


图 10.8: 't Hooft's double line notation. The lower diagram shows each QCD propagator or interaction vertex in the double line notation.

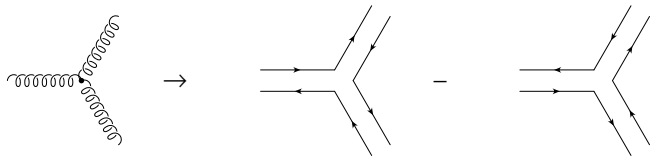


图 10.9: The complete three-gluon vertex in double line notation.

QCD 的计算 N_c 阶数的规则。比如考虑由胶子圈给出的胶子真空极化，图 10.10 ，可以通过双线表示来求胶子真空极化的 N_c 阶数。由前文知道，每个耦合常数 g 是

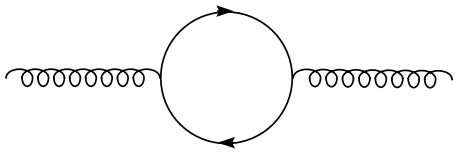


图 10.10:

$O(\frac{1}{\sqrt{N_c}})$ 。其中对于夸克内圈，要对色指标求和， $k = 1 \cdots N$ 。因此单圈圈的胶子真空极化给出的是 $O(1)$ 。与此同时，我们也可以看到有任意胶子线的平面图（ 平面图的定义 ），都在大 N_c 下给出同价的贡献。我们可以这样来看这个问题：在平面费曼图中每增加一条胶子线，若费曼图仍然保持平面，这样只是增加了两个顶点，和一个闭合的夸克圈，因此得到的因子为 $(1/\sqrt{N_c})^2 \times N_c = 1$ 。因此，可以看到给出同样的贡献。接下来，我们看非平面图 10.11 ： 计算 10.11 图的 N_c 的阶数，我



图 10.11:

们可以得到是 $(1/\sqrt{N_c})^6 N_c = 1/N_c^2$ 。通过拓扑学的方法我们可以证明， 非平面图是 $1/N_c^2$ 压低的。 接下来，我们注意到夸克线和胶子线不同，它和 N_c 相关的只有顶点。和只含有胶子线的图比较起来，每个内夸克圈给出一个 $1/N_c$ 因子。我们看看图 10.12 ， 和相对应的胶子真空极化比较起来，含有费米子内圈的胶子自能图，

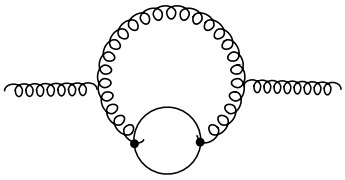


图 10.12:

用't Hooft 的双线表示，少了胶子真空极化中的一个色指标求和的费米子圈。

综上所述，我们可以得到大 N_cQCD 的规则如下：

1. **领头阶的贡献由含有最少夸克圈的平面 (planar) 图给出。**
2. **每个夸克圈给出一个 $1/N_c$ 因子。**
3. **非平面图是 $1/N_c^2$ 压低的。**

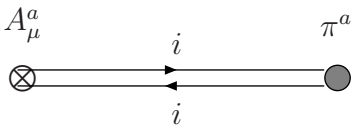
§10.4.2 大 N_c 极限下的谱

为了保证大 N_c 极限下的 QCD 有唯像学上的意义需要以下两点假设：1)禁闭仍然成立，2)仍有 $S\chi SB$ 。Coleman–Witten 定理使两个假设变为一个，在此定理的证明中用到了反常的存在和大 N_c 极限下禁闭存在的假设，并且用到 Goldstone 定理的逆定理来证明存在着手征对称性的自发破缺。[2] [3]

介子的波函数由 N_c 个 $\bar{Q}_iQ_i$ 组成，并需要适当的归一化：

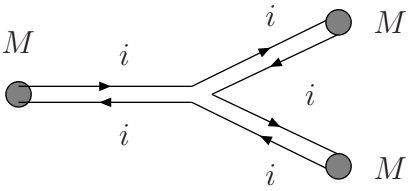
$$\frac{1}{\sqrt{N_c}}b_i^{(\alpha)+}d_i^{(\beta)+}|0> \tag{10.86}$$

其中 α 、 β 是味道指标。这样 π 介子的衰变常数为 $f_\pi \propto \sqrt{N_c}$ ，



$$\propto \; N_c \times 1/\sqrt{N_c} \propto f_\pi.$$

介子的传播子是 $O(1)$ 。而衰变顶角是



$$\propto \quad N_c \times (\tfrac{1}{\sqrt{N_c}})^3 \propto \tfrac{1}{\sqrt{N_c}}.$$

这导致当 $N_c \to \infty$ 时，$\Gamma/M \to 0$ 。在现实中大多数介子的实验值 $\Gamma/M \sim 0.1-0.2$ 。以此类推，四个介子的顶角的行为是 $\propto 1/N_c$ 。

胶球的波函数的归一化因子为 $1/N_c$ ，传播子仍为 $O(1)$ 。胶球到两胶球的衰变顶角为 $O(1/N_c)$ ，胶球到两介子的衰变顶角也为 $O(1/N_c)$ 。在大 N 极限下，重子的性质较为复杂。重子由 N 个夸克组成 (构成一个全反对称的色波函数)，它的质量因此正比于 N 。进一步的讨论可见相关文献。

问题：证明胶球到两胶球的衰变顶角在大 N_c 极限下为 $O(1/N_c)$ ，胶球到两介子的衰变顶角也为 $O(1/N_c)$ 。

[2] S. Coleman and E. Witten, Phys. Rev. Lett. **45**(1980)100.

[3] 另外，假设存在禁闭，'t Hooft 指出，由于有效理论必须给出和基本理论相同的的反常，这导致了在一般情况下有效理论中必须存在着自发破缺。 G. 't Hooft (ed), *Under the spell of gauge principle* p.352–374.

第十一章　量子反常

§11.1　$\pi^0 \to 2\gamma$ 衰变与 Adler–Bell–Jakiw 反常

$\pi^0 \to 2\gamma$ 的衰变可以由如下有效拉氏量来描述,

$$\mathcal{L}_{\pi^0\to 2\gamma} = g\pi^0 \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} F_{\mu\nu} F_{\rho\lambda} \ , \tag{11.1}$$

其中 g 的量纲为 $[M]^{-1}$ 。由此有效拉氏量可以得出宽度,

$$\Gamma(\pi^0 \to 2\gamma) = \frac{m_\pi^3 g^2}{\pi} \ , \tag{11.2}$$

而朴素的估计给出的 g 的大小是,

$$g \simeq \frac{e^2}{16\pi^2 f_\pi}。 \tag{11.3}$$

为得到上式考虑了如下事实,即首先这个过程至少是一圈图,第二利用了 Goldberger–Treiman 关系 $g_{\pi NN}/M_N \simeq g_A/f_\pi$ 和 $g_A \simeq 1$ 这一事实。但是流代数告诉我们上述估计不是对的，因为 $T(\pi^0 \to 2\gamma) \propto k_\mu A^\mu$ ，在软 π 极限下它 $\to 0$ （核子只出现在圈图上）。因此

$$g \simeq \frac{e^2}{16\pi^2 f_\pi} \left(\frac{m_\pi^2}{M_N^2}\right)。 \tag{11.4}$$

然而由 11.4 式估算出的宽度是 $\Gamma \simeq 1.9 \times 10^{13} s^{-1}$ （由 11.3 式则得 $\Gamma \simeq 4.4 \times 10^{16} s^{-1}$ ），而实验上测得的值是,

$$\Gamma_{\pi^0\to 2\gamma} = (1.19 \pm 0.08) \times 10^{16} s^{-1}。 \tag{11.5}$$

这一明显的悖论最早是由 Bell 和 Jakiw 在利用线性 σ 模型研究 $\pi^0 \to 2\gamma$ 衰变时得到的。

为了更深一步地研究到底是哪里出了问题，我们首先引入两个关联函数,

$$T_{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2, q) = i \int d^4x_1 d^4x_2 e^{i(k_1x_1 + k_2x_2)} < 0|T(V_\mu(x_1)V_\nu(x_2)A_\lambda(0))|0> \ , \tag{11.6}$$

和

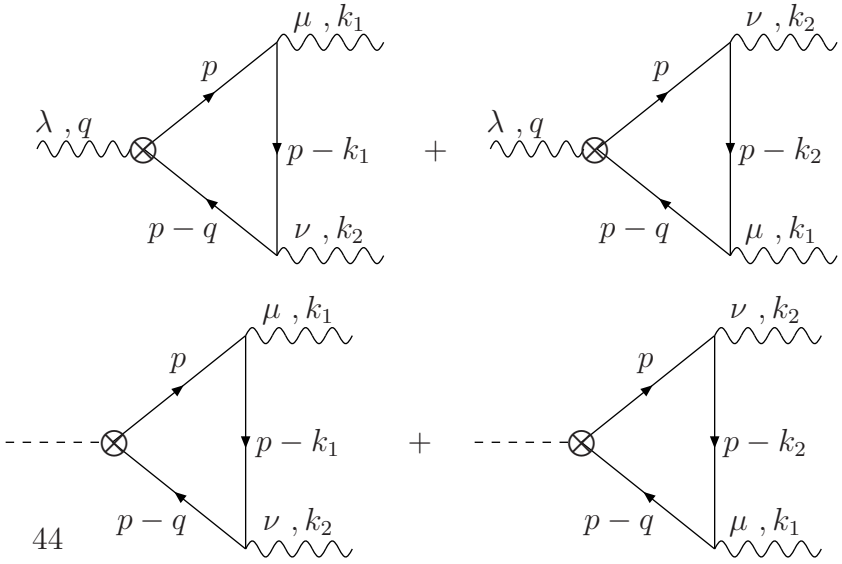
$$T_{\mu\nu}(k_1, k_2, q) = i \int d^4x_1 d^4x_2 e^{i(k_1x_1 + k_2x_2)} < 0|T(V_\mu(x_1)V_\nu(x_2)P(0))|0> \ , \tag{11.7}$$

其中， $V_\mu(x) = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$, $A_\mu(x) = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$, $P(x) = \bar{\psi}\gamma_5\psi$ 。且 $q = k_1 + k_2$ 。流守恒条件是 $\partial_\mu V^\mu = 0$ ， $\partial_\mu A^\mu = 2imP$ 。利用 $\partial_x^\mu T(J_\mu(x)O(y)) = T(\partial^\mu J_\mu(x)O(y)) +$

$[J_0(x), O(y)]\delta(x^0-y^0)$ 和 $[V_0(x), A_0(y)]\delta(x_0-y_0) = 0$ (由 $[q^+\Gamma^a q, q^+\Gamma^b q] = q^+[\Gamma^a, \Gamma^b]q$, 这里所讨论的流的 Γ^a 均对易) , 推出

$$k_1^\mu T_{\mu\nu\lambda} = k_2^\nu T_{\mu\nu\lambda} = 0 \ ,$$
$$q^\lambda T_{\mu\nu\lambda} = 2mT_{\mu\nu}。 \tag{11.8}$$

然而进一步的分析指出，上面给出的看起来很自然的表达式是有问题的。事实上重整化效应将破坏上面的和轴失流有关的 Ward 等式。我们考虑如下的 Feynman 图



44

得出

$$T_{\mu\nu\lambda} = i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}(-1)\mathrm{tr}\{\frac{i}{\not p - m}\gamma_\lambda\gamma_5\frac{i}{\not p - \not q - m}\gamma_\nu\frac{i}{\not p - \not k_1 - m}\gamma_\mu + (\mu, k_1 \longleftrightarrow \nu, k_2)\} \ , \tag{11.9}$$

$$T_{\mu\nu} = i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}(-1)\mathrm{tr}\{\frac{i}{\not p - m}\gamma_5\frac{i}{\not p - \not q - m}\gamma_\nu\frac{i}{\not p - \not k_1 - m}\gamma_\mu + (\mu, k_1 \longleftrightarrow \nu, k_2)\} \ , \tag{11.10}$$

并假设作了适当的正规化使上述积分有限。计算 $q^\lambda T_{\mu\nu\lambda}$ 并利用 $\not q\gamma_5 = \gamma_5(\not p - \not q - m) + (\not p - m)\gamma_5 + 2m\gamma_5$ 得出,

$$q^\lambda T_{\mu\nu\lambda} = 2mT_{\mu\nu} + \triangle^{(1)}_{\mu\nu} + \triangle^{(2)}_{\mu\nu}。$$

其中

$$\triangle^{(1)}_{\mu\nu} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{tr}\{\frac{i}{\not p - m}\gamma_5\gamma_\nu\frac{i}{\not p - \not k_1 - m}\gamma_\mu - \frac{i}{\not p - \not k_2 - m}\gamma_5\gamma_\nu\frac{i}{\not p - \not q - m}\gamma_\mu\} \ , \tag{11.11}$$

$$\triangle^{(2)}_{\mu\nu} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{tr}\{\frac{i}{\not p - m}\gamma_5\gamma_\mu\frac{i}{\not p - \not k_2 - m}\gamma_\nu - \frac{i}{\not p - \not k_1 - m}\gamma_5\gamma_\mu\frac{i}{\not p - \not q - m}\gamma_\nu\}。 \tag{11.12}$$

在上两式中，如能做积分平移 $p \to p - k_2$ 或 $p \to p - k_1$ 则消掉为零。但是 $\triangle^{(1)}_{\mu\nu}$ 和 $\triangle^{(2)}_{\mu\nu}$ 是线性发散的因而积分变量不能作平移。比如 $\triangle^{(1)}_{\mu\nu}$ 的表达式中的第一项可以写为，

$$= -4i\epsilon_{\alpha\nu\beta\mu}k_1^\beta \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{p^\alpha}{(p^2-m^2)((p-k_1)^2-m^2)}。$$

即 $\triangle^{(1)}_{\mu\nu}$ 是两个线性发散的积分之差。至于线性发散的积分不能作平移可由下面的讨论看出来，

$$\begin{aligned}\triangle(a) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx[f(x+a) - f(x)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx[af'(x) + \frac{a^2}{2}f''(x) + \cdots] \\ &= a[f(\infty) - f(-\infty)] + \frac{a^2}{2}[f'(\infty) - f'(-\infty)] + \cdots\end{aligned}$$

如果 $\int_{-\infty}^{+\infty}$ 收敛或者最多是对数发散，则 $0 = f(\pm\infty) = f'(\pm\infty) = \cdots = \triangle(a)$ 。但是对于线性发散 $f(\pm\infty) \neq 0$ 所以 $\triangle(a) = a[f(+\infty) - f(-\infty)]$ 一般不为零。对于 n 维积分，

$$\begin{aligned}\triangle(a) &= \int d^nr[f(\vec r + \vec a) - f(\vec r)] \\ &= \int d^nr[a_i\frac{\partial}{\partial r_i}f(\vec r) + \frac{1}{2}(a_i\partial_i)(a_j\partial_j)f(\vec r) + \cdots] \\ &= \vec a \cdot \oint_{S_n} f(R)d\vec S\ ,\end{aligned} \tag{11.13}$$

其中 $S_n(R)$ 是半径为 R 的 $n-1$ 维球面的面积，$\int d\Omega_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ 。对于 4 维 Minkowski 空间 $S_4(R) = 2\pi^2R^3$ ，

$$\triangle(a) = a^\tau \int d^4r\partial_\tau f(\vec r) = 2i\pi^2a^j \lim_{R\to\infty} R^2R_jf(R)。 \tag{11.14}$$

所以由于 $T_{\mu\nu\lambda}$ 是线性发散，它的取值与跑动动量的取值有关。一般地，令 $p \to p+a$ ，且 a 是 k_1 和 k_2 的任意线性组合：

$$a = \alpha k_1 + (\alpha - \beta)k_2\ ,$$

且令

$$\triangle_{\mu\nu\lambda}(a) \equiv T_{\mu\nu\lambda}(a) - T_{\mu\nu\lambda}(0) \equiv \triangle^{(1)}_{\mu\nu\lambda} + \triangle^{(2)}_{\mu\nu\lambda}\ , \tag{11.15}$$

其中 $\triangle^{(2)}_{\mu\nu\lambda} = \triangle^{(1)}_{\nu\mu\lambda}(k_1 \leftrightarrow k_2)$ 。则

$$\begin{aligned}
\triangle^{(1)}_{\mu\nu\lambda} &= (-1)\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} a_\tau \frac{\partial}{\partial p_\tau} \mathrm{tr}[\frac{1}{\not p - m}\gamma_\lambda\gamma_5\frac{1}{\not p - \not q - m}\gamma_\nu\frac{1}{\not p - \not k_1 - m}\gamma_\mu] \\
&= -i\frac{2\pi^2 a^\tau}{(2\pi)^4}\lim_{p\to\infty} p^2 p_\tau \mathrm{tr}\{\gamma_\alpha\gamma_\lambda\gamma_5\gamma_\beta\gamma_\nu\gamma_\delta\gamma_\mu\}p^\alpha p^\beta p^\delta/p^6 \\
&= i\frac{2\pi^2 a_\sigma}{(2\pi)^4}\lim_{p\to\infty}\frac{p^\sigma p^\rho}{p^2}4i\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}。.
\end{aligned}$$

上面推导中的第二个等式后只取了最奇异的项。由于是面积分，对所有的方向取平均， $p^\sigma p^\rho/p^2 \to 1/4\delta^{\sigma\rho}$ 。上面的推导最后给出 $= \frac{a^\rho}{8\pi^2}\epsilon_{\rho\mu\nu\lambda}$ ，即

$$\begin{aligned}
\triangle_{\mu\nu\lambda} &= \frac{1}{8\pi^2}\epsilon_{\rho\mu\nu\lambda}(\alpha k_1 + (\alpha-\beta)k_2)^\rho + (k_1, \mu \longleftrightarrow k_2, \nu) \\
&= \frac{\beta}{8\pi^2}\epsilon_{\rho\mu\nu\lambda}(k_1 - k_2)^\rho \ , \qquad (11.16)
\end{aligned}$$

即

$$T_{\mu\nu\lambda}(a) = T_{\mu\nu\lambda}(0) - \frac{\beta}{8\pi^2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}(k_1-k_2)^\rho。 \qquad (11.17)$$

由 11.11 式知， $\triangle^{(1)}_{\mu\nu}$ 是两项之差，所以得出，

$$\begin{aligned}
\triangle^{(1)}_{\mu\nu} &= -k_2^\tau\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{\partial}{\partial p^\tau}\left[\frac{\mathrm{tr}\{(\not p + m)\gamma_5\gamma_\nu(\not p - \not k_1 + m)\gamma_\mu\}}{(p^2-m^2)((p-k_1)^2-m^2)}\right] \\
&= -k_2^\tau\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{\partial}{\partial p^\tau}\left[\frac{-\mathrm{tr}\{\not p\gamma_5\gamma_\nu\not k_1\gamma_\mu\}}{(p^2-m^2)((p-k_1)^2-m^2)}\right] \\
&= +\frac{k_2^\tau}{(2\pi)^4}2i\pi^2\lim_{p\to\infty}\frac{p^\tau}{p^2}\mathrm{tr}\{\gamma_\alpha\gamma_5\gamma_\nu\gamma_\beta\gamma_\mu p^\alpha k_1^\beta\} \\
&= -\frac{1}{8\pi^2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}k_1^\alpha k_2^\beta \ , \qquad (11.18)
\end{aligned}$$

且 $\triangle^{(2)}_{\mu\nu} = \triangle^{(1)}_{\mu\nu}$ 。所以由

$$q^\lambda T_{\mu\nu\lambda} = 2mT_{\mu\nu} + \triangle^{(1)}_{\mu\nu} + \triangle^{(2)}_{\mu\nu} \qquad (11.19)$$

（注意后两项是有限的）得出，

$$q^\lambda T_{\mu\nu\lambda(\beta)} = 2mT_{\mu\nu}(0) - \frac{1-\beta}{4\pi^2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}k_1^\alpha k_2^\beta。 \qquad (11.20)$$

由此得出的一个（匆忙的）结论是，只要选取 $\beta = 1$ 即保持轴失流的 Ward 等式。但是这样对于积分变量的选取却破坏了矢量流的 Ward 等式，这可由下面讨论看出，

$$k_1^\mu T_{\mu\nu\lambda}(0) = (-1)\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\{\mathrm{tr}\left[\frac{1}{\not p - m}\gamma_\lambda\gamma_5\frac{1}{\not p - \not q - m}\gamma_\nu\frac{1}{\not p - \not k_1 - m}\not k_1\right]$$

$$+\mathrm{tr}\left[\frac{1}{\not p-m}\gamma_\lambda\gamma_5\frac{1}{\not p-\not q-m}\not k_1\frac{1}{\not p-\not k_2-m}\gamma_\nu\right]\}$$
$$=(-1)\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{tr}\left[\gamma_\lambda\gamma_5\frac{1}{\not p-\not q-m}\gamma_\nu\frac{1}{\not p-\not k_1-m}-\gamma_\lambda\gamma_5\frac{1}{\not p-\not k_2-m}\gamma_\nu\frac{1}{\not p-m}\right]。\tag{11.21}$$

我们再一次发现这是一个表面项，所以

$$\begin{aligned}k_1^\mu T_{\mu\nu\lambda}(0) &= k_1^\tau\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{\partial}{\partial p^\tau}\left(\frac{\mathrm{tr}\left[\gamma_\lambda\gamma_5(\not p-\not k_2+m)\gamma_\nu(\not p+m)\right]}{((p-k_2)^2-m^2)(p^2-m^2)}\right)\\ &= \frac{k_1^\tau}{(2\pi)^4}2i\pi^2\lim_{p\to\infty}\frac{p_\tau}{p^2}\mathrm{tr}(\gamma_5\gamma_\lambda\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta)k_2^\alpha p^\beta\\ &= -\frac{1}{8\pi^2}\epsilon_{\lambda\sigma\nu\rho}k_1^\rho k_2^\sigma。\end{aligned}\tag{11.22}$$

或者，

$$k_1^\mu T_{\mu\nu\lambda}(\beta)=k_1^\mu[\triangle_{\mu\nu\lambda}+T_{\mu\nu\lambda}(0)]=\frac{1+\beta}{8\pi^2}\epsilon_{\nu\lambda\sigma\rho}k_1^\sigma k_2^\rho。\tag{11.23}$$

矢量流的守恒应该是更基本的物理要求，因此必须选取 $\beta=-1$ 以保证矢量流的 Ward 等式。这样就不可避免的导致轴失流 Ward 等式的破坏：

$$q^\lambda T_{\mu\nu\lambda}=2mT_{\mu\nu}-\frac{1}{2\pi^2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}k_1^\sigma k_2^\rho。\tag{11.24}$$

在 $m=0$ 时，轴失流 Ward 等式不再成立，即 $q^\lambda T_{\mu\nu\lambda}\neq 0$ 说明手征对称性被破坏，在第 8 章中所讨论的软 π 定理在这里不再适用。事实上在 $m=0$ 并且 $q\to 0$ 时，

$$T_{\mu\nu\lambda}(q)\to\frac{i}{2\pi^2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}k_1^\sigma k_\rho^2\frac{q^\lambda}{q^2+i\epsilon}。\tag{11.25}$$

即在手征极限下轴失流的矩阵元存在着一个反常的极点项（ Anomalous pole ）。通过上面对量子反常的推导过程可以看出， 反常与费米子的质量存在与否无关 。我们只讨论了单圈图对反常的贡献，但 Adler 和 Bardeen 证明了 高圈图对反常项无贡献 。在坐标空间 11.24 式的算符形式写成

$$\partial_\lambda A^\lambda(x)=2im\bar\psi\gamma_5\psi(x)+\frac{1}{4\pi^2}\tilde F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}。\tag{11.26}$$

对于非 Abel 流的关联函数的计算，设

$$\begin{aligned}&V_\mu^a\equiv\bar\psi T^a\gamma_\mu\psi\ ,\quad A_\mu^b\equiv\bar\psi T^b\gamma_\mu\gamma_5\psi\ ,\\ &P^c\equiv\bar\psi T^c\gamma_5\psi\ ,\end{aligned}\tag{11.27}$$

其中 a, b, c 为味道指标。令

$$T^{abc}_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2,q)=i\int d^4x_1d^4x_2e^{i(k_1x_1+k_2x_2)}<0|T(V^a_\mu(x_1)V^b_\nu(x_2)A^c_\lambda(0))|0>,$$
$$T^{abc}_{\mu\nu}(k_1,k_2,q)=i\int d^4x_1d^4x_2e^{i(k_1x_1+k_2x_2)}<0|T(V^a_\mu(x_1)V^b_\nu(x_2)P^c(0))|0>。\tag{11.28}$$

则有

$$q^\lambda T^{abc}_{\mu\nu\lambda}=2mT^{abc}_{\mu\nu}-\frac{1}{2\pi^2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}k_1^\rho k_2^\sigma D^{abc}\ ,\tag{11.29}$$

其中 $D^{abc}=\frac{1}{2}\mathrm{tr}[\{T^a,T^b\}T^c]$ 。

在得到反常的表达式后，现在我们回过头来讨论如何正确的估算 $\pi^0\to 2\gamma$ 的衰变,

$$<\gamma(k_1,\epsilon_1)\gamma(k_2,\epsilon_2)|\pi^0(q)>=i(2\pi)^4\delta^4(q-k_1-k_2)\epsilon_1^\mu(k_1)\epsilon_2^\nu(k_2)T_{\mu\nu}(k_1,k_2,q)。\tag{11.30}$$

其中

$$T_{\mu\nu}(k_1,k_2,q)=e^2\int d^4z\int d^4ye^{ik_1z+ik_2y}<0|T(J^{em}_\mu(z)J^{em}_\nu(y))|\pi^0(q)>,\tag{11.31}$$

且 $J^{em}_\mu=\bar q\gamma_\mu Qq(x)$ ， $A^3_\mu(x)=\bar q\gamma_\mu\gamma_5\frac{\lambda^3}{2}q(x)$ ， $Q=diag(2/3,-1/3,-1/3)$ 。考虑

$$T_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2,q)=\int d^4xd^4ye^{ik_2y-iqx}<0|T(A^3_\lambda(x)J^{em}_\nu(y)J^{em}_\mu(0))|0>\tag{11.32}$$

它满足 Ward 等式,

$$q^\lambda T_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2,q)=-i\int d^4xd^4ye^{ik_2y-iqx}\{<0|T(\partial^\lambda A^3_\lambda(x)J^{em}_\nu(y)J^{em}_\mu(0))|0>$$
$$+<0|T(\delta(x^0-y^0)[A^3_0(x),J^{em}_\nu(y)]J^{em}_\mu(0))|0>+<0|T(\delta(x_0)[A^3_0(x),J^{em}_\mu(0)]J^{em}_\nu(y))|0>\}\tag{11.33}$$

因为 Q 是 λ_3 和 λ_8 的线性组合， λ_3 和 λ_8 均为对角, 对易关系为零, 即 $f_{38a}=0$ ，也即上式中的对易关系均为零。对 PCAC 的朴素的应用导致,

$$T_{\mu\nu}(k_1,k_2,q)=\frac{-ie^2(-q^2+m_\pi^2)}{f_\pi m_\pi^2}\int d^4xd^4ye^{ik_2y-iqx}<0|T\{\partial_\lambda A^\lambda(x)J^{em}_\nu(y)J^{em}_\mu(0)\}|0>。\tag{11.34}$$

这导致 $T_{\mu\nu}(q^2=0)\to 0$ 。而利用经过修正的 PCAC ,

$$q^\lambda T_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2,q)=\frac{f_\pi m_\pi^2}{e^2(m_\pi^2-q^2)}T_{\mu\nu}(k_1,k_2,q)-\frac{iD}{2\pi^2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}k_1^\rho k_2^\sigma。\tag{11.35}$$

这导致

$$\lim_{q\to 0}T_{\mu\nu}(k_1,k_2,q)=\frac{ie^2D}{2\pi^2f_\pi}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}k_1^\rho k_2^\sigma。\tag{11.36}$$

而 $D=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\{\{Q,Q\}\frac{\lambda_3}{2}\}=\frac{1}{6}$ 。最后我们有，

$$\Gamma(\pi^0\to 2\gamma;m_\pi=0)=\frac{N_c e^2 D}{2\pi^2 f_\pi}。\tag{11.37}$$

与实验比较得出 $N_c=3$ 。在历史上这是第一个夸克有三种颜色的证据。

关于重整化程序与反常的关系。我们可以作以下讨论：

1. 经典水平下的对称性被量子修正所破坏导致了反常。反常来自大动量区域（表面项的贡献），但是它导致了在 $q^2=0$ 处的反常极点，所以反常也是一个低能现象。
2. 以前的推导有一点问题，因为为了使所有的推导有意义，必须先作正规化。那么能否找到一种正规化手续使得积分保持有限因而可以随意对积分动量作平移而不会有任何问题？结论是不行的。比如对于 Pauli–Villars 正规化破坏手征不变性。维数正规化也是有问题的，因为 $\gamma_5=i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$ ，而四维反对称张量 $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ 只能定义在 4 维空间。对于 $n-4$ 维中的 γ 矩阵， $[\gamma_5,\gamma^\alpha]=0$ ，导致了反常。
3. 高圈图对反常不贡献。因为高圈图含有光子内线，只需要对光子传播子作正规化（高阶导数正规化）即可使三角图有限而可以作动量平移。而光子传播子的正规化可以以手征不变的形式进行，比如以 QED 为例可以作以下正规化手续，

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\to-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(1+\left(\frac{D_\mu D^\mu}{\Lambda^2}\right))F^{\mu\nu}。\tag{11.38}$$

4. 整体反常（ Global anomaly ）与规范反常。反常流如果与规范场耦合会破坏规范不变性导致的 Ward–Takahashi 等式或 Slavnov–Taylor 等式。而后者是规范理论可重整性（ 与 S 矩阵幺正性 ）的保证。所以与规范场耦合的流的反常必须相消。这一要求在标准模型的构造中得到了应用。

下面我们再简单的介绍一下计算反常的其他方法。其中包括了 Schwinger 利用背景场方法计算反常， Fujikawa 的路径积分计算反常的方法，以及反常与规范场整体拓扑性质关系（ Atiya–Singer 指标定理）的介绍。关于量子反常还有一些其它的美妙的讨论在这里没有介绍。比如反常与 Dirac 海的关系；反常与 Lee – Nauenberg 定理（红外发散）的联系（ A. D. Dolgov, V. I. Zakharov Nucl. Phys. B27: 525-540, 1971. ）等。

§11.2 量子反常的其它计算方法

§11.2.1 利用背景场方法计算反常

背景场方法最早是由 Schwinger 提出的。在这一节的讨论中我们将使用 1 、2 、 3 、 4 度规。在 L. H. Chan 的文章中有关于背景场方法的的应用与讨论。[1]

手征流的反常与流作为定域场算符乘积所产生的奇异性有关，以 QED 为例，我们可以作如下手续

$$J_\mu^5 = i\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5\psi(x) \to i\bar{\psi}(x+\varepsilon)\gamma_\mu\gamma_5\psi(x)$$

来避免由于场算符定义在一点所引起的奇异性（可以看为一种正规化的方法）。但是上述方法破坏了流的定域规范不变性。所以正确的手续是，

$$\begin{aligned} J_\mu(x,\varepsilon)^5 &\equiv i\bar{\psi}(x+\varepsilon)\gamma_\mu\gamma_5\psi(x)e^{ie\int_x^{x+\varepsilon}dy_\mu A^\mu(y)} \\ J^5(x,\varepsilon) &\equiv \bar{\psi}(x+\varepsilon)i\gamma_5\psi(x)e^{ie\int_x^{x+\varepsilon}dy_\mu A^\mu(y)}。 \end{aligned} \tag{11.39}$$

由费米子场的运动方程得到，

$$\partial_\mu J_\mu^5(x,\varepsilon) = 2mJ^5(x,\varepsilon) + J_\mu^5(x,\varepsilon)ieF_{\mu\nu}(x)\varepsilon_\nu。 \tag{11.40}$$

我们将看到 $\varepsilon \to 0$ 时， $J_\mu^5(x,\varepsilon)$ 有 ε^{-1} 的奇异性，

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0} < J_\mu^5(x,\varepsilon) >^A &= \lim_{\varepsilon\to 0} < i\bar{\psi}(x+\varepsilon)\gamma_\mu\gamma_5\psi(x) >^A \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{tr}(\gamma_\mu\gamma_5 S_F^A(x,x+\varepsilon))。 \end{aligned} \tag{11.41}$$

其中 S_F^A 是在坐标空间中费米子在背景场中的传播子。它满足如下的方程：

$$\begin{aligned} &[\partial\!\!\!/ - ieA\!\!\!/ + m]S_F^A(x,y) = \delta^4(x-y)\ , \\ &[\partial\!\!\!/ + m]S_F(x,y) = \delta^4(x-y)。 \end{aligned} \tag{11.42}$$

可以把 S_F^A 以如下方式展开，

$$\begin{aligned} &S_F^A(x'-x) = S_F(x'-x) + \int d^4x_1 S_F(x'-x_1)ieA\!\!\!/(x_1)S_F(x_1-x) \\ &+ \int d^4x_1 d^4x_2 S_F(x'-x_1)ieA\!\!\!/(x_1)S_F(x_1-x_2)ieA\!\!\!/(x_2)S_F(x_1-x) \\ &+ \cdots。 \end{aligned} \tag{11.43}$$

[1] L. H. Chan， Phys. Rev. Lett. **54**(1985)1222 。

转到动量空间,

$$S_F^A(p',p)=\int d^4x'd^4xS_F^A(x',x)e^{-ip'x'+ipx}$$
$$A_\mu(q)=\int d^4xe^{-iqx}A_\mu(x)。 \tag{11.44}$$

则

$$S_F^A(p',p)=(2\pi)^4\delta^4(p'-p)S_F(p)+\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4qS_F(p')ie\not{A}(q)S_F(p)\delta^4(p'-p-q)$$
$$+\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4q_1d^4q_2S_F(p')ie\not{A}(q_1)S_F(p'-q_1)ie\not{A}(q_2)S_F(p)\delta(p'-p-q_1-q_2)$$
$$+\cdots。 \tag{11.45}$$

由此推出,

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\{\gamma_\mu\gamma_5S_F^A(x,x+\varepsilon)\} &= -ie\frac{1}{(2\pi)^8}\int d^4qe^{iqx}\int d^4pe^{-ip\varepsilon}\frac{\mathrm{tr}(\gamma_\mu\gamma_5\not{q}\not{A}\not{p})}{[(p+q^2)+m^2][p^2+m^2]}\\ &\quad +O(1)+\cdots。\end{aligned} \tag{11.46}$$

其中,

$$\int d^4p\frac{p_\nu e^{-ip\cdot\varepsilon}}{[(p+q^2)+m^2][p^2+m^2]}=i\frac{\partial}{\partial\varepsilon_\nu}\int d^4p\frac{e^{-ip\varepsilon}}{[(p+q^2)+m^2][p^2+m^2]} \tag{11.47}$$

等式右边的积分等于

$$=(2\pi)^4\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip\varepsilon}}{(p^2+m^2)^2}+\cdots=(2\pi^4)\frac{\partial}{\partial m^2}\triangle_F(x)|_{x=\varepsilon}+\cdots$$
$$=i\pi^2\ln\varepsilon^2。 \tag{11.48}$$

上式中只保留了在 $\varepsilon\to0$ 时奇异的项。我们得到,

$$\lim_\varepsilon<J_\mu^5(x,\varepsilon)>_A=-\frac{e}{4\pi^2\varepsilon^2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}\varepsilon_\nu。 \tag{11.49}$$

代入流散度方程并对 ε 的可能方向取平均： $\varepsilon_{\mu\nu}\to\frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}\varepsilon^2$ 。即可得到轴失流的散度的反常方程。

§11.2.2 反常的路径积分表述

这里的方法是由 K. Fujikawa 提出的。[2] 考虑一个规范相互作用，其生成泛函为

$$W[J_\mu^a,\eta,\bar\eta]=N\int[d\bar\psi][d\psi][dA_\mu^a]\exp\{i\int d^4x(\mathcal{L}+\bar\eta\psi+\bar\psi\eta+J_\mu^aA^{\mu a})\}。 \tag{11.50}$$

[2]K. Fujikawa, Phys. Rev. Lett. **42**(1979)1195 。

考虑如下定域的场变换,

$$\psi(x) \longrightarrow U(x)\psi(x)\ ,\quad \bar{\psi}(x) \longrightarrow \bar{\psi}(x)\gamma_0 U^+(x)\gamma_0\ 。 \tag{11.51}$$

生成泛函 11.50 式中费米场泛函积分的测度在 11.51 式的变换下的变化为

$$[d\psi][d\bar{\psi}] \longrightarrow ([\det\mathcal{U}][\det\bar{\mathcal{U}}])^{-1}[d\psi d\bar{\psi}]\ , \tag{11.52}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{xn,ym} &\equiv U(x)_{nm}\delta^4(x-y)\ , \\ \bar{\mathcal{U}}_{xn,ym} &\equiv (\gamma_0 U^+(x)\gamma_0)_{nm}\delta^4(x-y)\ 。 \end{aligned} \tag{11.53}$$

其中

$$U(x) = e^{i\gamma_5\alpha(x)t}\ 。 \tag{11.54}$$

注意这里我们仅讨论规范场不与 11.51 式所给出的流耦合的情形： $[t,t^a]=0$ 。且有 $\bar{\mathcal{U}}=\mathcal{U}$ ，所以 $[d\psi d\bar{\psi}] \longrightarrow [\det\mathcal{U}]^{-2}[d\psi d\bar{\psi}]$ 。对于无穷小变换：

$$\mathcal{U} = 1 + i\alpha(x)\gamma_5 t\delta^4(x-y)\ 。$$

利用公式 $\det\mathcal{U} = \exp\mathrm{Tr}\ln\mathcal{U}$ 得

$$[d\psi][d\bar{\psi}] \longrightarrow \exp\{i\int d^4x\alpha(x)\mathcal{A}(x)\}[d\psi][d\bar{\psi}]\ , \tag{11.55}$$

其中

$$\mathcal{A}(x) = -2\mathrm{Tr}\{\gamma_5 t\}\delta^4(x-y)|_{y=x}\ 。 \tag{11.56}$$

也就是说，泛函积分测度在手征变换 11.51 式下要变，且等价于拉氏密度在手征变换下变为： $\mathcal{L}\to\mathcal{L}+\alpha(x)\mathcal{A}(x)$ 。在 11.56 式中， $\mathrm{Tr}\{\gamma_5 t\}=0$ ，而 $\delta^4(x-x)=\infty$ 。为正确计算 $\mathcal{A}(x)$ ，需要做一个规范不变的正规化以使发散的 δ 函数有意义：

$$\mathcal{A}(x) = -2[\mathrm{Tr}\{\gamma_5 t\, f(-\not{D}_x^2/M^2)\}\delta^4(x-y)]_{x\to y}\ , \tag{11.57}$$

其中 D_x 是协变的 Dirac 算子

$$i\not{D}_x = i\not{\partial} - t^\alpha \not{A}^\alpha\ , \tag{11.58}$$

且 f 是任意的光滑的函数，且有边条件

$$\begin{aligned} &f(0)=1\ ,\quad f(\infty)=0\ , \\ &sf'(s)=0\ ,\quad (s=0,\infty)\ 。 \end{aligned} \tag{11.59}$$

于是

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x) &= -2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[\mathrm{Tr}\{\gamma_5 tf(-\frac{\not{D}_x^2}{M^2})\}e^{ik\cdot(x-y)}\right]|_{y\to x}\\ &= -2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\{\gamma_5 tf(-\frac{[i\not{k}+\not{D}_x]^2}{M^2})\\ &= -2M^4\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\{\gamma_5 tf(-[i\not{k}+\frac{\not{D}_x}{M}]^2)\}\ 。\end{aligned}\tag{11.60}$$

其中在最后一个等式中作了变换 $k\to k\,M$ 。由

$$-[i\not{k}+\frac{\not{D}_x}{M}]^2=k^2-\frac{ik\cdot D_x}{M}-(\frac{\not{D}_x}{M})^2$$

得知，在 11.60 式中最后一个等式右边对函数 $f(x)$ 在 $x=k^2$ 处进行展开后，不为零的项必须有： 1 ）至少四个 γ 矩阵； 2 ）$\le M^{-4}\ (M\to\infty)$ 。所以有

$$\mathcal{A}(x)=-\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}f''(k^2)\mathrm{Tr}\{\gamma_5 t\not{D}_x^4\}\ 。\tag{11.61}$$

作欧氏转动 $k_0=ik_4$ ，并利用边条件 11.59 式得

$$\begin{aligned}\int d^4k f''(k^2) &= i\int_0^\infty 2\pi^2k^3dkf''(k^2)=i\pi^2\int_0^\infty ds\,sf''(s)\\ &= -i\pi^2\int_0^\infty ds\,f'(s)=i\pi\ 。\end{aligned}\tag{11.62}$$

又由

$$\begin{aligned}\not{D}_x^2 &= \frac{1}{4}\{D^\mu,D^\nu\}\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\}+\frac{1}{4}[D^\mu,D^\nu][\gamma_\mu,\gamma_\nu]\\ &= D_x^2-\frac{i}{4}t_\alpha F_\alpha^{\mu\nu}[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\ ,\end{aligned}\tag{11.63}$$

推出

$$\mathcal{A}(x)=\frac{1}{16\pi^2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_\alpha^{\mu\nu}F_\beta^{\rho\sigma}\mathrm{tr}\{t^\alpha t^\beta t\}\ 。\tag{11.64}$$

假设拉氏量在相对应的整体变换下不变，则对于定域的无穷小变换，

$$\begin{aligned}&\delta S=\int d^4x J_5^\mu(x)\partial_\mu\alpha(x)\ ,\\ &\delta\int[d\psi\,d\bar\psi]e^{iS}=i\int d^4x\int[d\psi\,d\bar\psi][\mathcal{A}(x)\alpha(x)+J_5^\mu\partial_\mu\alpha(x)]e^{iS}\ 。\end{aligned}\tag{11.65}$$

由于积分变量的替换不引起任何改变，得到

$$<\partial_\mu J_5^\mu(x)>^A=\mathcal{A}(x)\ ,\tag{11.66}$$

其中

$$<\mathcal{O}>^A=\frac{\int[d\psi\,d\bar\psi]\,\mathcal{O}\,e^{iS}}{\int[d\psi\,d\bar\psi]e^{iS}}\ 。\tag{11.67}$$

§11.2.3 Atiya–Singer 指标定理 *

在路径积分表示中作欧氏转动，

$$\begin{aligned} & x^0 \to i x_4 \ , \ \ i\gamma_0 \to \gamma_4 \ , \\ & A_0 \to -i A_4^E \ 。 \end{aligned} \tag{11.68}$$

则

$$\begin{aligned} & i\not{D} - m \to -i\not{\partial}_E + \not{A}_E - m \equiv -\not{D}_E - m \\ & d^4x \to d^4x_E \ , \ \ \not{A}_E = t^\alpha A_\mu^\alpha \gamma_\mu \ 。 \end{aligned} \tag{11.69}$$

算符 $\not{D}_E$ 是反厄密的，也即 $i\not{D}_E$ 是厄密的。利用厄密算符的性质， $i\not{D}_E$ 有本征函数 ϕ_n ，其相应的本征值 λ_n 为实数：

$$\begin{aligned} & i\not{D}_E \phi_n(x) = \lambda_n \phi_n(x) \ , \\ & \int d^4x \phi_m^+(x) \phi_n(x) = \delta_{mn} \\ & \sum_k \phi_k(x) \phi_k(y) = \delta^4(x-y) \mathbf{1} \ , \ \ (\mathbf{1}\text{为 } 4 \text{ 乘 } 4 \text{ 矩阵}) \end{aligned} \tag{11.70}$$

我们这里仅讨论 Abel 反常，即 t 与 $i\not{D}_E$ 对易，所以可以选择 ϕ_k 以使 $t\phi_k = t_k \phi_k$ 。利用以上准备可以把 $\mathcal{A}$ 改写为

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= -2 \lim_{M\to\infty} \mathrm{Tr}\{\gamma_5 t f(-\frac{\not{D}_x^2}{M^2}) \sum_n \phi_n(x) \phi_n^+(y)\}|_{y\to x} \\ &= -2 \lim_{M\to\infty} \sum_n t_n f(\lambda_n^2/M^2) \phi_n^+(x) \gamma_5 \phi_n(x) \end{aligned} \tag{11.71}$$

其中插入了正规子（ regulator ） $f(x)$ 以保证级数收敛。由于 γ_5 与 $i\not{D}_E$ 反对易，对于具有本征值 λ_k 、 t_k 的本征函数 ϕ_k ，有 $\gamma_5 \phi_k = \phi_{-k}$ ，其中 ϕ_{-k} 表示其本征值为 $-\lambda_k$ 、 t_k 。所以由正交条件得出只有 $i\not{D}_E$ 的零模解对积分 $\int d^4x \mathcal{A}(x)$ 有贡献：

$$\int d^4x \mathcal{A}(x) = -2 \int d^4x [\sum_u (t_u \phi_u^+ \phi_u) - \sum_v (t_v \phi_v^+ \phi_v)] \ , \tag{11.72}$$

其中 ϕ_u 、 ϕ_v 分别是具有 $\pm$chirality 的零本征值的态：

$$i\not{D}_E \phi_{u,v} = 0 \ , \ \ \gamma_5 \phi_u = +\phi_u \ , \ \ \gamma_5 \phi_v = -\phi_v \ 。 \tag{11.73}$$

由归一化条件得

$$\int d^4x \mathcal{A}(x) = -2 \int d^4x [\sum_u t_u - \sum_v t_v] \ , \tag{11.74}$$

当 t 为单位矩阵时，得到

$$n_+ - n_- = \frac{1}{32\pi^2}\int d^4x_E \mathrm{tr}\left(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right) \ 。 \tag{11.75}$$

这就是所谓的 Atiya-Singer 指标定理，它指出上式的右边是一个拓扑不变量。其背后的几何意义我们这里不能讲述，有兴趣的读者可以阅读相应的书籍和文献。

最后我们提出，在上述推导 Atiya-Singer 指标定理的讨论中，不用 $i\not{D}$ 而用 $i\not{\partial}$ 如何？它是否会得到矛盾的结果？比如

$$\sum_n d^4x\phi_n\gamma_5\phi_n \neq 0 = \sum_k \int d^4x\phi_k\gamma_5\phi_k \ , \tag{11.76}$$

其中等式右边下标 k 表示平面波基失。这里我们仅简单的指出，当收敛性不好时不同表象之间的变换是不允许的。

第十二章　从四费米子模型到弱电统一规范理论

§12.1　四费米子相互作用

在 Pauli 提出中微子假说后不久，费米即提出了一个描述中子 β 衰变 $n \to p + e^- \bar{\nu}$ 的唯像的拉氏量：

$$\mathcal{L}_F = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{p} \gamma_\lambda n \cdot \bar{e} \gamma^\lambda \nu + \text{h.c.} \ , \tag{12.1}$$

其中 G_F 是费密耦合常数，具有 [质量]$^{-2}$ 的量纲：

$$G_F \simeq 10^{-5} m_p^{-2} \ . \tag{12.2}$$

随后的实验相继发现了 $\pi - \mu$ 和 $\mu - e$ 衰变，且其具有类似的耦合系数。在历史上，这使人们逐渐地认识到了存在着一种新的相互作用，即弱相互作用。李政道和杨振宁以及吴健雄等人对弱作用中宇称破坏的发现，最终导致了所谓 $V - A$ 理论的建立。也即 12.1 式需要改写为，

$$\mathcal{L}_F = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\lambda^+ \cdot J^\lambda + \text{h.c.} \ , \tag{12.3}$$

其中

$$J^\lambda = J_l^\lambda + J_h^\lambda \ . \tag{12.4}$$

其中 J_l^λ 是轻子流，可以很容易地写出，

$$J_l^\lambda = \bar{\nu}_e \gamma^\lambda (1 - \gamma_5) e + \bar{\nu}_\mu \gamma^\lambda (1 - \gamma_5) \mu \ . \tag{12.5}$$

对于强子流 J_h^λ 的问题，在历史上要麻烦一些。原因是已知的夸克还有 s 夸克，具有和 d 夸克相同的电荷数。如果我们把强子流写成，

$$J_h^\lambda = \bar{u} \gamma^\lambda (1 - \gamma_5)(d \cos\theta_C + s \sin\theta_C) \ . \tag{12.6}$$

那么四费米子相互作用 12.3 式会导致味道数改变的中性流过程，比如 $\bar{u}u \to \bar{d}s$ 。而这样的过程在实验上发现是高度压低的，不应该在树图水平上发生。这一问题使得 Glashaw 、 Iliopoulos 和 Maiani 提出了存在一种在当时还是假设的 c 夸克，且强子流的完全的表达式应写成，

$$J_h^\lambda = \bar{u} \gamma^\lambda (1 - \gamma_5)(d \cos\theta_C + s \sin\theta_C) + \bar{c} \gamma^\lambda (1 - \gamma_5)(s \cos\theta_C - d \sin\theta_C) \ . \tag{12.7}$$

其中 θ_C 叫做 Cabibbo 角， $\theta_C \simeq 13^\circ$ 。上面的 4- 费米子拉氏量消除了在树图水平上的味道数改变的中性流。在 1973 年，丁肇中、 Richter 等人发现了 c 夸克存在的直接证据。

在低能时 12.3 式给出了对弱相互作用的很好的描述。然而 12.3 式不可能是故事的全部。一种否定 4- 费米子理论的可能的理由是，因为 4- 费米子相互作用的有效耦合系数具有 [质量]$^{-2}$ 的量纲，它不是一个可重整的理论。在计算单圈图时所引起的发散，不可能由具有树图结构的抵消项来抵消。根据正统的重整化理论，在计算单圈图时，不得不引进新的抵消项，其代价是又要引进新的耦合常数，在计算更高阶图时也会发生类似的情况。因此一个不可重整的理论往往意味着需要无穷多的参数来描述，从而大大地降低了理论的预言能力。可是，如果真的发生了这种情况，只能抱怨我们不够幸运，而不能反过来否定这种不可重整的拉氏量。事实上，我们在讨论手征微扰理论时，已经遇到过类似的物理上存在的例子。我们已经知道，可重整性并不是一个如旧式的教科书中所坚持的，建立正确的物理理论的必要条件。相反，可重整性是一个物理后果。它的物理诠释是一个拉格朗日理论，除了耦合系数、质量等几个有限的物理量外，对高能物理、或场的高频分量不再敏感。这一点可以由带有紫外截断 Λ 参量的有效场论（这样的一个例子是 Nambu–Jona-Lasinio 模型）来很容易地看清楚。在一个带有截断参量的有效场理论中，由于不再有紫外发散，物理振幅是有限的。因此不再需要引入新的抵消项，从而理论的可预言性不会有问题。此时在正统意义下的可重整理论和不可重整理论的主要区别是，前者对截断参量的依赖是最小的和最不敏感的。

虽然从原则上讲， 12.3 式的不可重整性并不是排斥它的根本理由。但是不可重整的理论模型带来了一个严重的物理问题。它对紫外截断的依赖的敏感性导致了 12.3 式并不适用于描述高能区的物理。这可以由 Born 近似对幺正性的破坏来看出：考虑由 12.3 式所描述的 $\nu_\mu e \to \nu_e \mu$ 过程。 在 Born 近似下，散射振幅仅含有 J=1 的分波且其截面为 $\sigma \propto sG_F^2$ 。而分波矩阵元的幺正性告诉我们在大的 s 下应该有 $\sigma \propto \frac{1}{s}$ 。即大约在 $\sqrt{s} \sim G_F^{1/2} \simeq 300\text{GeV}$ 时 Born 近似破坏了分波振幅的幺正性。

需要注意的是，上面所说的对幺正性的破坏仅仅是就 Born 近似而言的，假设我们能够计算振幅到所有阶，幺正性应该是会保持的（记住只要 Hamiltonian 是厄米的，散射振幅就是幺正的）。所以以上的关于 Born 近似幺正性破坏的讨论仅仅说明了一件事，即在高能时（ $\sqrt{s} \sim 300\text{GeV}$ ），高圈图的贡献一定会自动地变得非常重要来满足幺正性的约束。自然界中产生这种强力贡献的最经济的办法也许是由 S 矩阵的极点提供的。换句话说树图水平上幺正性破坏的能标处或之前必然有

新的物理的出现。[1] 为了看清楚这一点，我们可以进行如下的具有启发性的分析：为使 Born 近似下的振幅恢复幺正性的最朴素办法，是利用 K 矩阵幺正化方法。从新得到的振幅中，我们的确在适当的能量附近找到了一个极点，换句话说一个新粒子。所以我们也许可以这样归纳一下：当已知的物理用一个不可重整的拉氏量来描述时，总是隐含着在能量更高一些的标度上存在着新的物理。令人感慨的是，自然界似乎的确是这样安排的其规律的。下一节我们将要讨论的问题将与此紧紧相关。

§12.2 幺正性的改进与中间玻色子假说

由 12.3 式给出的是流 - 流耦合的点相互作用理论，它可能是由于交换一个重的矢量粒子所诱导出的。我们尝试性地把拉氏量写成，

$$\mathcal{L} = g(J_\mu W^\mu + h.c.)。 \tag{12.8}$$

在能量很低的情况下，由于传播子 $1/(M_W^2 - k^2) \to 1/M_W^2$ ，所以的确上述拉氏量把 12.3 式给出的 4- 费米子拉氏量作为低能极限，只要满足关系 $g^2/M_W^2 = G_F/\sqrt{2}$ 。在高能时传播子的动量依赖关系开始起作用以使微扰振幅满足幺正性的限制。与我们关于 QED 的知识进行类比，我们猜测这个传递相互作用的场是一个带有质量的规范场，或有质量的 Yang-Mills 场。自由的相互作用场的拉氏量可以尝试的写为，

$$\mathcal{L}_W = -\frac{1}{4}(\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+)(\partial^\mu W^{\nu-} - \partial^\nu W^{\mu-}) + M_W^2 W_\mu^+ W^{\mu-}。 \tag{12.9}$$

由此可以给出 W^μ 的传播子：

$$i\triangle_{\mu\nu}(k) = -i\frac{g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu/M_W^2}{k^2 - M_W^2 + i\epsilon} \tag{12.10}$$

这样的有质量的矢量场，与光子场不一样的是有三个自由度：两个横向的，一个纵向的。其传播子在 $k \to \infty$ 时趋于常数，因此相互作用仍然不是可以重整的。这可以从过程 $\nu\bar{\nu} \to W_L^+ W_L^-$ 看出，其中 W_L 是纵向极化的。这个过程的讨论我们下面还会涉及到。

综上所述，重整化问题的关键是解决有质量规范场对重整化的破坏。最终这一问题是由自发破缺的规范理论解决的。

§12.3 $SU(2) \times U(1)$ 规范群的选择

到目前为止，我们已知的相互作用可以尝试用 12.8 式来表示。当然还需要包括电磁相互作用

$$\mathcal{L}_{em} = eJ_\lambda^{em} A^\lambda \ , \quad J_\lambda^{em} = -e\bar{\gamma}_\lambda e \ . \tag{12.11}$$

[1] B. Lee and C. Quigg and H. Thacker, Phys. Rev. Lett. 38(1977)883

问题是我们可以把拉氏量 12.8 式和和上式组合起来描述弱电物理吗？现在我们有三个流， J^+ 、 J 和 J_{em} 以及和它们耦合的三个规范场： $W^\pm$ 以及光子场 A_μ 。具有三个生成元的最简单的群是 $SU(2)$ 。但是已知的三个流不可能构成一个封闭的代数。定义弱、电的荷为，

$$\begin{aligned} T_+(t) &= \frac{1}{2}\int d^3x J_0(x) = \frac{1}{2}\int d^3x \nu_e^+(1-\gamma_5)e \ , \\ T_-(t) &= (T_+(t))^+ \ , \\ Q(t) &= \int d^3x J_0^{em}(x) = -\int d^3x e^+ e \ . \end{aligned} \tag{12.12}$$

利用费米场的正则等时对易关系

$$\{\psi_i^+(\vec{x},t), \psi_j(\vec{x}',t)\} = \delta_{ij}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}') \ , \tag{12.13}$$

我们可以很容易的导出，

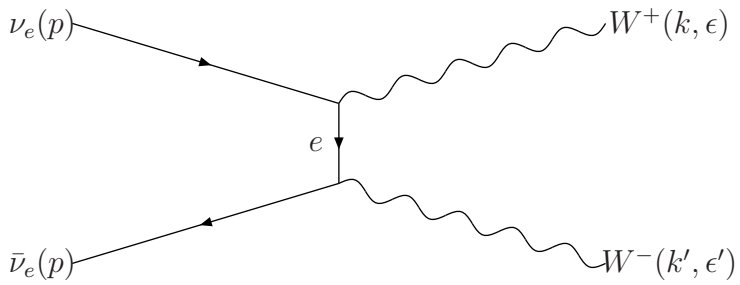
$$[T_+(t), T_-(t)] = 2T_3(t) \ , \tag{12.14}$$

其中

$$T_3(t) = \frac{1}{4}\int d^3x [\nu_e^+(1-\gamma_5)\nu_e - e^+(1-\gamma_5)e] \ . \tag{12.15}$$

由于 $T_3 \neq Q$ 所以 $T_\pm$ 和 Q 并不构成一个封闭的代数。原因很简单，为了使 Q 成为 $SU(2)$ 的生成元，一个 $SU(2)$ 的多重态的电荷之和必须为零，相应于生成元必须是无迹的。而在这里的二重态是 ν_e 和 e 。另外的问题是 $T_\pm(t)$ 具有 $V-A$ 的形式而 Q 却是纯粹的矢量形式。

事实上我们从幺正限的讨论可以论证应该有一个中性的有质量的规范玻色子。考虑过程 $\bar{\nu}\nu \to W^+W^-$ ，其最低阶的费曼图如下：



振幅为，

$$\begin{aligned} T^{tree}(\bar{\nu}\nu \to W^+W_-) &= -i\bar{v}(p')(-ig\not{\epsilon}')(1-\gamma_5)\frac{i}{\not{p}-\not{k}-m_e}(-ig\not{\epsilon})(1-\gamma_5)u(p) \\ &= -2g^2\bar{v}(p')\frac{\not{\epsilon}'(\not{p}-\not{k})\not{\epsilon}(1-\gamma_5)}{(p-k)^2-m_e^2}u(p) \ . \end{aligned} \tag{12.16}$$

式中的极化矢量 $\epsilon^{(1)}$ 、 $\epsilon^{(2)}$ 和 $\epsilon^{(3)}$ 在 W 的静止系中可以这样选取， $\epsilon_0^{(i)}=0$ ， $\epsilon_j^{(i)}=\delta_{ij}$ ，其中角标 3 代表 z 轴。当设 W 沿 z 轴运动时， $p_\mu=(E,0,0,k)$ ，极化矢量可以由静止系中的极化矢量作 Lorentz 变换得到。即 $\epsilon^{(1)}$ 、 $\epsilon^{(2)}$ 不变， $\epsilon^{(3)}=(k,0,0,E)/M_W$ 。不难验证这样的三个极化矢量之间满足正交条件 $\epsilon^{(i)}\cdot\epsilon^{(j)}=-\delta_{ij}$ 和横向极化条件 $\epsilon^{(i)}\cdot p=0$ 。于是，在大动量的极限下，我们有

$$\epsilon_\mu^{(3)}\to k_\mu/M_W+O(M_W/E)\ ,$$

注意这个式子并不依赖于参考系的选取。将其带入 12.16 式我们得到，

$$T^{tree}(\bar\nu\nu\to W^+W_-)\simeq\frac{2g^2}{M_W^2}\bar v(p')\not{k}'(1-\gamma_5)u(p)\ . \tag{12.17}$$

在得到上式时，利用了条件 $(\not{p}-\not{k})\not{k}u(p)=(2p\cdot k-k^2)u(p)$ 。下面我们来证明上式给出的振幅仅含有 $J=1$ 的分波。为此我们如下选择动量的表示式，

$$\begin{aligned}&p=(E,0,0,E)\ ,\ \ p'=(E,0,0,-E)\ ,\\ &k=(E,\vec k)\ ,\ \ k'=(E,-\vec k)\ .\end{aligned} \tag{12.18}$$

其中

$$\vec k/|\vec k|=(\sin\theta,0,\cos\theta)\ . \tag{12.19}$$

由于 ν 和 $\bar\nu$ 有相反的螺旋度，我们有， [2]

$$\begin{aligned}u(p)&=\sqrt{E}\begin{pmatrix}1\\ \frac{\vec\sigma\cdot\vec p}{E}\end{pmatrix}\chi_{-1/2}=\sqrt{E}\begin{pmatrix}1\\ \sigma_z\end{pmatrix}\chi_{-1/2}\\ \bar v(p')&=\sqrt{E}\chi^+_{1/2}\,(\,\tfrac{\vec\sigma\cdot\vec p'}{E},-1\,)=\sqrt{E}\chi^+_{1/2}\,(\,-\sigma_z,-1\,)\ ,\end{aligned} \tag{12.21}$$

其中

$$\chi_{1/2}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\ ,\ \ \chi_{-1/2}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\ .$$

即 $\hat h\,u(p)=-\frac12u(p)$ ， $\hat h\,v(p)=\frac12v(p)$ 于是 12.17 式改为，

$$\begin{aligned}\bar\nu(p')\not{k}'(1-\gamma_5)u(p)&=E\chi^+_{1/2}(-1,-1)\begin{pmatrix}E&\vec\sigma\cdot\vec k\\ -\vec\sigma\cdot\vec k&-E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\chi_{-1/2}\\ &=-4E\chi^+_{1/2}(E-\vec\sigma\cdot\vec k)\chi_{-1/2}=4Ek\sin\theta\ ,\end{aligned} \tag{12.22}$$

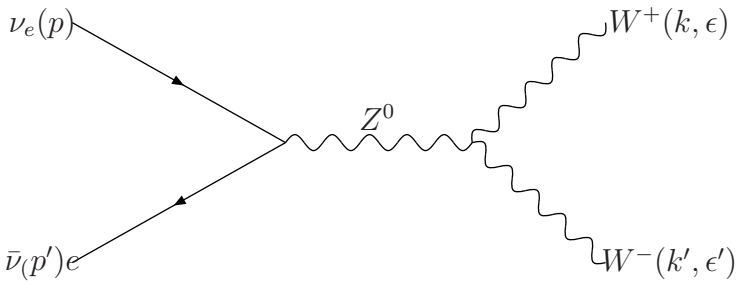
[2]螺旋度的定义为， $h=\frac{\vec p}{|\vec p|}\cdot\vec s$ ， $h=1/2$ 表示右旋， $h=-1/2$ 表示左旋。 $\vec s$ 为自旋矩阵，$s^i=\frac14\epsilon^{ijk}\sigma^{jk}$ ， $i,j,k=1,2,3$, 且 $\sigma_{\mu\nu}=\frac{i}{2}[\gamma_\mu,\gamma_\nu]$. 在 γ 代数的 Dirac 表示中，

$$\gamma^0=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\ \vec\gamma=\begin{pmatrix}0&\vec\sigma\\-\vec\sigma&0\end{pmatrix},\ \gamma_5=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \vec s=\frac12\begin{pmatrix}\vec\sigma&0\\0&\vec\sigma\end{pmatrix}\ . \tag{12.20}$$

于是我们有，当 $E \to \infty$ 时树图的 $\bar{\nu}\nu \to W_s^+ W_s^-$ 散射振幅， $T \simeq G_F E^2 \sin\theta$ 。当初末态粒子具有自旋时的分波展开具有如下形式：

$$T_{\lambda_3\lambda_4,\lambda_1\lambda_2}(E,\theta) = \sum_{J=M}^{\infty}(2J+1)T^J_{\lambda_3\lambda_4,\lambda_1\lambda_2}(E)d^J_{\mu\lambda}(\theta) \ , \tag{12.23}$$

其中 $\lambda_1 = -\lambda_2 = 1/2$ 并且 $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$（纵向极化分量）， $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 = 1$ ， $\mu = \lambda_3 - \lambda_4 = 0$ ， $M = max(\lambda,\mu) = 1$ 。函数 $d^J_{\mu\lambda}$ 是一般的转动矩阵， $d^1_{01}(\theta) = \sin\theta$ 。现在很清楚地发现 T 是一个纯粹的 $J = 1$ 的振幅且破坏幺正限 $T^{J=1}(E) < \text{const}$ 。为了消除这种坏的高能行为可以在 u 或 s 道引入新的图。比如在 s 道引入新的中性矢量粒子所对应的图如下：



假设中性矢量粒子同样具有 $V-A$ 的结构、耦合常数为 f ， 而 ZWW 耦合具有 Yang–Mills 场自耦合的结构：

$$L_{\alpha\mu\nu} = -if'[(k'-k)_\alpha g_{\mu\nu} - (2k'+k)_\nu g_{\alpha\mu} + (2k+k')_\mu g_{\alpha\nu}]$$

则 s 道交换中性矢量粒子的图产生如下贡献，

$$\begin{aligned} &T_s(\bar{\nu}\nu \to W_s^+W_s^-) = -i\bar{v}(p')(-if\gamma_\beta)(1-\gamma_5)u(p)L_{\alpha\mu\nu}\epsilon'^\mu(k')\epsilon^\nu(k) \\ &\times i[-g^{\alpha\beta} + (k+k')^\alpha(k+k')^\beta/M_Z^2][(k+k')^2 - M_Z^2] \ . \end{aligned} \tag{12.24}$$

我们有

$$\begin{aligned} \epsilon'^\mu\epsilon^\nu L_{\alpha\mu\nu} &= -if'[(k'-k)_\alpha \epsilon'\cdot\epsilon - 2k'\cdot\epsilon\epsilon'_\alpha + 2k\cdot\epsilon'\epsilon_\alpha] \\ &\simeq -\frac{-if'}{M_W^2}[(k-k')_\alpha k\cdot k'] \ . \end{aligned} \tag{12.25}$$

于是，

$$T_s \simeq \frac{-ff'}{M_W^2}\bar{v}(p')\not{k}'(1-\gamma_5)u(p) \ . \tag{12.26}$$

如果选取 $ff' = 2g^2$ ， 就可以消掉 12.17 式的贡献。

事实上，如果要求所有过程中破坏幺正性的贡献被消掉，那么我们即可得到一个可重整的理论，与本节开始时用代数方法所得到的结论一致。也就是说，为了改善微扰幺正性的行为而不得不引进新的物理（场自由度）。这一结论将在 12.8 节中再次得到。但是这种有启发性的思考方法并不能唯一的定出新的物理。它唯一能够达到的是扩充理论使其成为一个自恰的封闭的可重整理论，而扩充的方式并不一定唯一。比如可以构造一个树图时没有中性流、可重整的 $SU(2)$ 规范理论并以 12.1 式为其低能极限。

自然 所选择的是具有 $SU(2)\times U(1)$ 的对称性的规范理论。规范场的拉氏量写为，

$$\mathcal{L}_{gauge}=-\frac{1}{4}F^i_{\mu\nu}F^{\mu\nu i}-\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}\ , \tag{12.27}$$

其中

$$F^i_{\mu\nu}=\partial_\mu W^i_\nu-\partial_\nu W^i_\mu+g\epsilon^{ijk}W^j_\mu W^k_\nu\ ,\quad (i,j,k=1,2,3) \tag{12.28}$$

$$B_{\mu\nu}=\partial_\mu B_\nu-\partial_\nu B_\mu\ . \tag{12.29}$$

在这里我们回避了规范粒子的质量问题，如果我们用手加入质量项，它会破坏理论的可重整性，或等价的在 $W_LW_L\to W_LW_L$ 过程中产生对幺正性的破坏（在树图水平上）。这个问题将会由所谓的自发破缺的 Higgs 机制解决。我们将在 12.8 一节中再次讨论这一问题。在讨论 Higgs 机制之前，我们首先对规范场与物质场的耦合方式作进一步的讨论。

§12.4 费米子与规范场的耦合

首先考虑最轻的费米子，它们是 e 、ν_e 和 u 、d 。由于有质量规范场是 $V-A$ 耦合，即与左手费米子耦合，所以左手和右手应该填充不同的表示。于是第一代的费米子一共有 15 个两分量的自由度（每个夸克有三个色自由度），

$$\psi=\nu_{eL},e_L,e_R,u_L,u_R,d_L,d_R\ , \tag{12.30}$$

其中 $e_L=\frac{1}{2}(1-\gamma_5)e$ ，$e_R=\frac{1}{2}(1+\gamma_5)e$ 。下面的工作将是定出它们在 $SU(2)\times U(1)$ 下的量子数。

从以前的讨论我们知道 $SU(2)$ 群的弱荷是，

$$\begin{aligned}T_+&=\int(\nu^+_{eL}e_L+u^+_Ld_L)d^3x\ ,\\ T_-&=(T_+)^+\ ,\\ T_3&=\frac{1}{2}\int(\nu^+_{eL}\nu_{eL}-e_Le^+_L+u^+_Lu_L-d^+_Ld_L)d^3x\ .\end{aligned} \tag{12.31}$$

从这些表达式得知,

$$l_L \equiv \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \ , \ q_L \equiv \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \ , \tag{12.32}$$

是 $SU(2)$ 的二重态且 e_R 、 u_R 和 d_R 是单态。而 $U(1)$ 群的选取应该使得电荷是 $U(1)$ 荷（记为 Y ）与 T_3 的线性组合。电荷的表示式是,

$$\begin{aligned} Q &= \int(-e^+e + \frac{2}{3}u^+u - \frac{1}{3}d^+d)d^3x \\ &= \int(-e_L^+e_L - e_R^+e_R + \frac{2}{3}u_L^+u_L + \frac{2}{3}u_R^+u_R - \frac{1}{3}d_L^+d_L - \frac{1}{3}d_R^+d_R)d^3x \end{aligned} \tag{12.33}$$

我们注意到

$$\begin{aligned} Q - T_3 &= \int[-\frac{1}{2}(\nu_{eL}^+\nu_{eL} + e_L^+e_L) + \frac{1}{6}(u_L^+u_L + d_L^+d_L) \\ &\quad -e_R^+e_R + \frac{2}{3}u_R^+u_R - \frac{1}{3}d_R^+d_R]d^3x \end{aligned} \tag{12.34}$$

给与每一个 $SU(2)$ 二重态的上下分量同样的量子数, 因而与 $SU(2)$ 的生成元对易: $[Q - T_3, T_i] = 0$ (i=1,2,3) 。所以可以选择 $Y/2 = (Q - T_3)$ 作为 $U(1)$ 荷的生成元并且把 Y 叫做弱超荷。为了得到正确的电荷数我们还需要赋予各个场如下的弱超荷:

$$\begin{aligned} &Y(l_L) = -1, \ Y(e_R) = -2 \ , \\ &Y(q_L) = 1/3 \ , \ Y(u_R) = 4/3 \ , \ Y(d_R) = -2/3 \ . \end{aligned} \tag{12.35}$$

于是规范粒子与费米子的耦合可以写成

$$\mathcal{L}_{fermi} = \bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu\psi \ , \tag{12.36}$$

且

$$D_\mu\psi = (\partial_\mu - ig\vec{T}\cdot\vec{W}_\mu - ig'\frac{Y}{2}B_\mu)\psi \ . \tag{12.37}$$

比如,

$$\begin{aligned} D_\mu l_L &= (\partial_\mu - i\frac{g}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{W} + i\frac{g'}{2}B_\mu)l_L \ , \\ D_\mu e_R &= (\partial_\mu + ig'B_\mu)e_R \ . \end{aligned} \tag{12.38}$$

这里需要注意的是不能够给出规范不变的费米子双线性项（即质量项）。质量项要靠 Higgs 场的 Yukawa 耦合给出，我们将在后面讨论这一点。

§12.5 反常相消

在 11 章中我们详细地讨论了三个手征流耦合时产生的反常，在技术上讲这个反常可以由计算三角图的反常得到。如果产生反常的流是整体的那么反常的存在是无害的，现实中的例子即是 $\pi^0 \to 2\gamma$ 衰变。如果流与规范场耦合，如现在这里所发生的那样 那么此时反常是有害的，必须消去。只要使左手流与右手流的反常相等即可以做到这一点。规范场与流的耦合可以一般的写为，

$$\mathcal{L}_{int} = gA^a_\mu(\bar{\psi}_L\gamma^\mu T^a_L + \bar{\psi}_R\gamma^\mu T^a_R) \ . \tag{12.39}$$

正如在弱作用中发生的那样， T^a_L 与 T^a_R 不一定是一样的。由于反常的贡献不会由 L 与 R 的混合给出 (反常的存在与质量项无关， L 、 R 与 γ 矩阵交换位置时变为 R 、 L 且 $L\cdot R=0$) ，所以反常相消条件可以一般的写成，对于任意的 a,b,c ，

$$D^{abc}_L = D^{abc}_R \ , \tag{12.40}$$

其中

$$D^{abc}_L = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\{T^a_L, T^b_L\}T^c_L] \ , \quad D^{abc}_R = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\{T^a_R, T^b_R\}T^c_R] \ . \tag{12.41}$$

对于单群，反常相消的最简单例子是所谓的 “ vector-like ” 规范理论，比如 QCD 。此时对于所有的 a 均有 $T^a_L = T^a_R$ ，于是反常自动相消。即使 $T^a_L \neq T^a_R$ ，如果 D^{abc}_L 和 D^{abc}_R 分别为零 (此时费米子的表示称作安全的)，那么也不会出现问题。当费米子的表示是实表示时，就对应着这种情况。因为一个实表示与它的厄米供厄是等价的：

$$T^a = -U^{-1}T^{a*}U \ , \tag{12.42}$$

其中 U 是一个任意的幺正矩阵。于是有

$$\begin{aligned} D^{abc} &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\{T^a, T^b\}T^c) = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\{T^{a*}, T^{b*}\}T^{c*}) \\ &= -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\{T^a, T^b\}T^c) = -D^{abc} \end{aligned} \tag{12.43}$$

即 $D^{abc}_L = 0$ 和 $D^{abc}_R = 0$ 。例如 $SU(2)$ 群的表示都是实表示或 pseudo-real 表示。即 $SU(2)$ 群的表示都是 “安全” 的。反过来的情形并不一定成立。特殊情况下复表示也可以是安全的 (如 $SU(3)$ 的 $\underline{10}$)。有趣的是单群中只有 $SU(N)$ ($N \geq 3$) 含有不安全的表示。

标准模型的群结构是 $SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$ 。根据上述讨论，只需注意 $SU(3)^2 \times U(1)$ 、 $SU(2)^2 \times U(1)$ 和 $U(1)^3$ 三种情况。利用前面得到的弱超荷的值带入，发现反常全部相消，保证了标准模型的可重整性。事实上也可以反过来思考

这一问题，即利用反常相消的要求和一些别的辅助条件来唯一地决定各种费米子的弱超荷，相关讨论可参见有关文献 [3] 。

§12.6 自发破缺与 Higgs 机制

对称性自发破缺的概念在我们讨论描述强相互作用的线性 σ 模型时已经涉及到过。在这里需要把 $SU_W(2)\times U_Y(1)$ 的对称性破缺到 $U_{em}(1)$，即只保留电磁对称性。为此引入一个复标量场，它是一个 $SU_W(2)$ 和 $U_Y(1)$ 场的表示，选则 $SU(2)$ 最简单的基础表示，由于真空必须有 $U_{em}(1)$ 的对称性，标量的二重态必须要含有一个中性分量，也即

$$\Phi=\begin{pmatrix}\phi^+\\ \phi^0\end{pmatrix}\ , \tag{12.44}$$

它的弱超荷为 $Y=2(Q-T_3)=1$，叫做 Higgs 场。它的 $SU_W(2)\times U_Y(1)$ 变换如下，

$$\Phi\to e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{T}-i\theta\frac{Y}{2}}\Phi=e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{\tau}/2-i\theta/2}\Phi\ . \tag{12.45}$$

描述 Higgs 场部分的拉氏量则为，

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}}=(D_\mu\Phi)^+D^\mu\Phi-V(\Phi^+\Phi)\ . \tag{12.46}$$

其中，

$$\begin{aligned}&D_\mu\Phi=(\partial_\mu-\frac{i}{2}g\vec{\tau}\cdot\vec{W}_\mu-\frac{i}{2}g'B_\mu)\Phi\ ,\\ &V(\Phi^+\Phi)=-\mu^2\Phi^+\Phi+\lambda(\Phi^+\Phi)^2\ .\end{aligned} \tag{12.47}$$

在 12.47 式中，当 $\mu^2,\lambda>0$ 时我们得到了真空的自发破缺，标量场获得一个不为零的真空期望值 (Vacuum expectation value，或简写为 VEV)，

$$<\Phi>_0\equiv<0|\Phi|0>=\begin{pmatrix}0\\ \frac{v}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\ ,\quad v=\left(\frac{\mu^2}{\lambda}\right)^{1/2}\ . \tag{12.48}$$

为了看出标量粒子的自发破缺的确给出 $W^\pm$、Z^0 粒子的质量，我们利用极坐标分解对 Φ 场重新进行参数化（当然物理结果是不依赖于如何进行参数化的），

$$\Phi(x)=U(\xi)^{-1}\begin{pmatrix}0\\ \frac{v+H(x)}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=e^{2i\xi^i(x)T^i/v}\begin{pmatrix}0\\ \frac{v+H(x)}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\ , \tag{12.49}$$

[3] 比如 X. G. He *et al.*, Phys. Rev. **D40**(1989)3146 。

由于我们要构造的理论具有定域的规范不变性我们可以做一个由 12.49 式所定义的定域规范变换:

$$\begin{aligned}
&\Phi(x) \to \Phi'(x) = U\Phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&W_\mu \to W'_\mu = UW_\mu(x)U^{-1} - \frac{1}{ig}U\partial U^{-1} \ , \\
&B'_\mu = B_\mu \ , \\
&\psi'_L = U\psi_L \ , \ \ \psi'_R = \psi_R \ .
\end{aligned} \tag{12.50}$$

这个幺正变换的结果只是在拉氏量中以 $(v+H)/\sqrt{2}$ 代替 $\Phi(x)$，其余的场量变换为带撇的。所以 Higgs 场的拉氏量在幺正变换下可简化为 (为方便书写起见，去掉场量上的一撇)，

$$\mathcal{L}^u_{gauge} = \frac{1}{2}(0, v+H)(\bar{\partial}_\mu + igW^\alpha_\mu T^\alpha + \frac{i}{2}g'B_\mu)(\partial^\mu - igW^{\mu\beta}T^\beta - \frac{i}{2}g'B_\mu)\begin{pmatrix} 0 \\ v+H \end{pmatrix} - V(v+H) \ . \tag{12.51}$$

规范粒子的质量项可以从上面得出:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{MYM} &= \frac{v^2}{2}(0,1)(\frac{g}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{W}_\mu + \frac{g'}{2}B_\mu)(\frac{g}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{W}^\mu + \frac{g'}{2}B^\mu)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{v^2}{8}(0,1)\begin{pmatrix} 2eA_\mu + \frac{g^2-g'^2}{\sqrt{g^2+g'^2}}Z_\mu & \sqrt{2}gW^+_\mu \\ \sqrt{2}gW^-_\mu & -\sqrt{g^2+g'^2}Z_\mu \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}g^2v^2W^+_\mu W^{-\mu} + \frac{g^2+g'^2}{8}v^2Z_\mu Z^\mu \ ,
\end{aligned} \tag{12.52}$$

其中 A_μ 是光子场，是自发破缺后幸存下来的无质量规范场且

$$\begin{aligned}
&W^+_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(W^1_\mu + iW^2_\mu) \ , \ \ W^-_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(W^1_\mu - iW^2_\mu) \ , \\
&Z_\mu = A^3_\mu\cos\theta_W - B_\mu\sin\theta_W \ , \ \ A_\mu = B_\mu\cos\theta_W + A^3_\mu\sin\theta_W \ , \\
&\tan\theta_W \equiv \frac{g'}{g} \ .
\end{aligned} \tag{12.53}$$

其中 θ_W 叫做 Weinberg 角。从 12.52 式得知规范粒子的质量为,

$$M_W = \frac{1}{2}gv \ , \ \ M_Z = \frac{1}{2}\sqrt{g^2+g'^2}v \ , \tag{12.54}$$

且它们满足关系

$$\rho \equiv \frac{M^2_W}{M^2_Z\cos^2\theta_W} = 1 \ . \tag{12.55}$$

这个关系式 (仅在树图水平上满足，在圈图水平上仅近似满足) 是自发破缺后所谓的 剩余 $SU(2)$ 对称性 保证的。值得指出的是，12.51 式中减少的三个 Goldstone 场

自由度被并没有真正的消失，而是通过 12.50 式被规范场“吃”掉了。与此同时，一个无质量的规范场获得了质量，其独立的自由度数由两个增到三个。所以总的规范场的自由度数并没有变化，只是 Goldstone 场现在变成了规范场的纵向分量。

除了使规范场获得质量外，标量场与费米场的 Higgs-Yukawa 耦合在自发破缺时也使费米场获得质量。为看清这一点，首先须指出，由于左手场与右手场具有不同的 $U_Y(1)$ 的量子数，在现有理论中不可能直接写出费米场的质量项。 Higgs 场与费米场耦合的满足 $SU_W(2)\times U_Y(1)$ 不变性的 Yukawa 相互作用的最一般形式的拉氏量可以写成，

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = f^{(e)}\bar{l}_L\Phi e_R + f^{(u)}\bar{q}_L\tilde{\Phi}u_R + f^{(d)}\bar{q}_L\Phi d_R + h.c.\ , \tag{12.56}$$

其中

$$\tilde{\Phi} = i\tau_2\Phi^* = \begin{pmatrix} \bar{\phi}^0 \\ -\phi^- \end{pmatrix}\ . \tag{12.57}$$

也是 $SU_W(2)$ 群的基础表示，且 $Y(\tilde{\Phi}) = -1$ 。如果不引进 $\tilde{\Phi}$ 场不能够给出“上”夸克场（也包括中微子）的质量。在幺正规范下导出费米子的质量项，

$$\mathcal{L}^u_{Yukawa} = \frac{v+H}{\sqrt{2}}[f^e\bar{e}_Le_R + f^u\bar{u}_Lu_R + f^d\bar{d}_Ld_R] + h.c. \tag{12.58}$$

§12.7 量子化后的拉氏量与 R_ξ 规范

前一节中讨论了幺正规范下 Higgs 场是如何给出规范粒子和费米子的质量的。但是幺正规范下理论的可重整性并不明显。在一般的规范条件下并不要消去非物理的标量场。下面我们介绍 R_ξ 规范。它是一个具有普遍性的、很一般的规范形式，在理论和实际计算中都具有重要意义。

由 12.48 式， Higgs 场具有一个非零的真空期望值，我们对 12.46 式中的 Φ 场做一个平移：

$$\Phi(x)\to \mathbf{v}+\Phi(x)\ ,\Phi(x) = \begin{pmatrix}\phi^+\\ \phi^0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\phi^+\\ \frac{\phi_1+i\phi_2}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\ ,\ \mathbf{v} = \begin{pmatrix}0\\ v/\sqrt{2}\end{pmatrix}\ , \tag{12.59}$$

则

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = (D_\mu\Phi)^+D^\mu\Phi - V(\Phi^+\Phi)\\
&(D_\mu\Phi)^+D^\mu\Phi = \partial_\mu\Phi^+\partial^\mu\Phi\\
&-\frac{i}{2}\partial_\mu\Phi^+(g\vec{\tau}\cdot\vec{W}^\mu + g'B^\mu)(\Phi+\mathbf{v}) + \frac{i}{2}(\Phi+\mathbf{v})^+(g\vec{\tau}\cdot\vec{W}^\mu + g'B^\mu)\partial_\mu\Phi\\
&+\frac{1}{4}(\Phi+\mathbf{v})^+(g\vec{\tau}\cdot\vec{W}^\mu + g'B^\mu)(g\vec{\tau}\cdot\vec{W}_\mu + g'B_\mu)(\Phi+\mathbf{v})\ .
\end{aligned} \tag{12.60}$$

上式中第二个等式后的第三行给出了已由 12.52 式给出的规范粒子的质量项，以及形如 $\phi - A - A$ 和 $\phi - \phi - A - A$ 的三点和四点相互作用项。第二行除了给出形如 $\phi - \partial_\mu\phi - A^\mu$ 的三点相互作用外，需要注意的是还给出了 $\partial_\mu\phi \cdot A^\mu$ 的二次项，这表明拉氏量中的规范场和 ϕ 场自由度并不正交、存在着混合。因此需要重新定义场量来消除运动学项中的混合部分。

巧妙的是上述非对角的运动学项可以用 R_ξ 规范下的规范固定项来消去：

$$\mathcal{L}_{g.f.} = -\frac{1}{2\xi}(\vec{F}[W])^2 - \frac{1}{2\xi}(F[B])^2 \ , \tag{12.61}$$

其中

$$\begin{aligned} \vec{F}[W] &= \partial^\mu \vec{W}_\mu + ig\xi\left(\Phi^+\frac{\vec{\tau}}{2}\mathbf{v} - \mathbf{v}^+\frac{\vec{\tau}}{2}\Phi\right) \\ F[B] &= \partial^\mu B_\mu + i\frac{g'}{2}\xi\left(\Phi^+\mathbf{v} - \mathbf{v}^+\Phi\right) \ . \end{aligned} \tag{12.62}$$

规范固定项展开以后会出现非对角的二次项，导致规范场与 Goldstone 场的混合。但是容易证明它与在 $\mathcal{L}_{\text{Higgs}}$ 中出现的非对角的二次项共同构成一个全散度项，因而对作用量没有贡献。

以前的讨论中给出的各项拉氏量还不是完整的。规范场的量子化还需给出鬼场的作用量。 标准的方法给出鬼场的作用量，

$$\begin{aligned} S = \int d^4x\{ & -\overline{C}_+\partial^2 C_+ - \overline{C}_-\partial^2 C_- - \overline{C}_Z\partial^2 C_Z - \overline{C}_\gamma\partial^2 C_\gamma \\ & -\xi(M^2 + \frac{g}{2}M\phi_1)(\overline{C}_+C_+ + \overline{C}_-C_- + \frac{1}{c^2}\overline{C}_Z C_Z) - \frac{i}{2}gM\xi\phi_2(\overline{C}_+C_+ - \overline{C}_-C_-) \\ & +ig(\overline{C}_+\partial^\mu C_+ - \overline{C}_-\partial^\mu C_-)(cZ_\mu + sA_\mu) \\ & +igW_\mu^+(\overline{C}_3\partial_\mu C_- - \overline{C}_+\partial_\mu C_3) - igW_\mu^-(\overline{C}_3\partial_\mu C_+ - \overline{C}_-\partial_\mu C_3) \\ & -\frac{\xi}{2c}Mgs[\phi^+(\overline{C}C_- + \overline{C}_+C) + \phi^-(\overline{C}C_+ + \overline{C}_-C)]\} \ , \end{aligned} \tag{12.63}$$

其中 $c = \cos\theta_W$ ， $s = \sin\theta_W$ ， $C_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(C_1 \pm iC_2)$ ，

$$C_3 = \cos\theta_W C_Z + \sin\theta_W C_\gamma \ , \ \ C = \cos\theta_W C_\gamma - \sin\theta_W C_Z \ .$$

最终 R_ξ 规范下描述弱电相互作用的标准模型的拉氏量写为，

$$\mathcal{L}_{EW} = \mathcal{L}_{gauge} + \mathcal{L}_{fermi} + \mathcal{L}_{Higgs} + \mathcal{L}_{g.f.} + \mathcal{L}_{ghost} \ . \tag{12.64}$$

由此可以得出在 R_ξ 规范下得 Feynman 规则。

§12.8 幺正性与 Higgs 粒子的质量上限

这一节的讨论主要是复述 B. W. Lee 等人的工作。[4]目的将是通过对 $W_LW_L \to W_LW_L$ 散射的分波振幅的幺正性分析给出 Higgs 粒子的质量上限。而这一限制是通过要求标准模型在任意能量标度下都可以作微扰展开而得到的。

我们在幺正规范下讨论树图水平下的 $W_LW_L \to W_LW_L$ 散射。其费曼图如图 12.1 所示。设 q 是质心系中规范粒子的动量, 图 12.1 中每一个具体的图高能量下对散

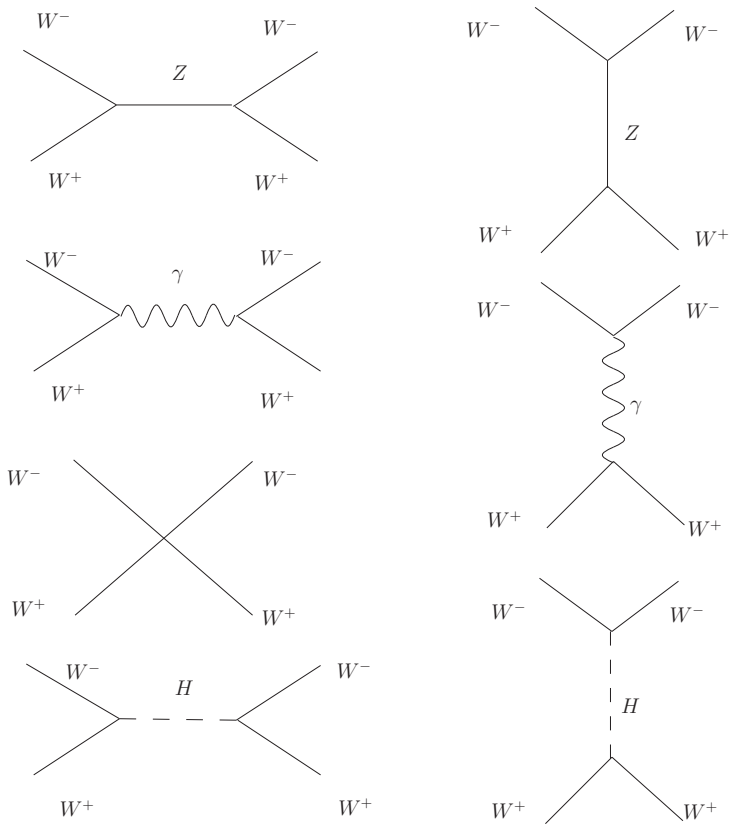


图 12.1:

射振幅的贡献可以按照 q/M_W 的幂次来表示, 其中最坏的高能行为是 $\propto (q/M_W)^4$ 。因此每一个图对 J 分波振幅的贡献可写为,

$$a_J = A(q/M_W)^4 + B(q/M_W)^2 + C \ 。 \tag{12.65}$$

单个的图的坏的高能行为只影响到 $J = 0, 1, 2$ 分波。可以证明在每一种情况下，由于规范对称性导致了点相互作用和 s 、t 道的 $\gamma + Z$ 交换对 A 项的贡献互相抵消。对于 $J = 2$ 的分波， B 项仍然是由纯粹的规范相消给出的。但是对于 $J = 0, 1$ 道

[4]B. W. Lee, C. Guigg and H. R. Thacker, Phys. Rev. **D16**(1977) 1519 。

Higgs 粒子的交换起到了关键的作用，证明这一结论的技术同样类似于 12.3 节中所用的。

上面的讨论指出了 12.65 式中的 A 和 B 项是如何相消掉的。现在仍然留下的有 C 项。 C 项具有可接受的高能渐近行为，但是在数值上并不一定是小量，因此仍然对（树图下）幺正性构成威胁。点相互作用和 $\gamma+Z$ 交换对 C 项的贡献正比于 α_W（ $=G_F M_W^2\sqrt{2}=\alpha/\sin^2\theta$ ），因而在此可忽略（除了在 Z 的极点附近）。Higgs 粒子的交换图在其质量很大时可以产生 $O(1)$ 的贡献从而带来潜在的危险，

$$T(W_L^+W_L^-\to W_L^+W_L^-)=-\sqrt{2}G_F M_H^2\left(\frac{s}{s-M_H^2}+\frac{t}{t-M_H^2}\right)\ 。 \tag{12.66}$$

基于类似的理由，对 $Z_LZ_L\to Z_LZ_L$ 和 $Z_LZ_L\to W_L^+W_L^-$ 的散射振幅可以只考虑 Higgs 粒子交换的贡献，

$$T(Z_LZ_L\to Z_LZ_L)=-\sqrt{2}G_F M_H^2\left(\frac{s}{s-M_H^2}+\frac{t}{t-M_H^2}+\frac{u}{u-M_H^2}\right), \tag{12.67}$$

$$T(Z_LZ_L\to W_L^+W_L^-)=-\sqrt{2}G_F M_H^2\frac{s}{s-M_H^2}\ 。 \tag{12.68}$$

当有 Higgs 粒子在外腿上出现的那些散射振幅我们这里就不再介绍了，有兴趣的读者可以参考 B. Lee 等人的原始文献。事实上， B. Lee 等人更为仔细地分析了各种可能的道。得到的结论是，在树图水平上的幺正性问题最后主要归结为，需要研究的仅是 $W_L^+W_L^-$ 、 Z_LZ_L 和 HH 三个道组成的 3×3 振幅矩阵。对于 $J=0$ 分波，可以把它们列出来：

$$\begin{aligned}
t_0(W_L^+W_L^-\to W_L^+W_L^-)&=-\frac{G_F M_H^2}{8\pi\sqrt{2}}\left[2+\frac{M_H^2}{s-M_H^2}-\frac{M_H^2}{s}\ln(1+\frac{s}{M_H^2})\right]\ ,\\
t_0(Z_LZ_L\to Z_LZ_L)&=-\frac{G_F M_H^2}{8\pi\sqrt{2}}\left[3+\frac{M_H^2}{s-M_H^2}-\frac{2M_H^2}{s}\ln(1+\frac{s}{M_H^2})\right]\ ,\\
t_0(W_L^+W_L^-\to Z_LZ_L)&=-\frac{G_F M_H^2}{8\pi\sqrt{2}}\left[1+\frac{M_H^2}{s-M_H^2}\right]\ 。
\end{aligned} \tag{12.69}$$

我们发现在作了替换

$$\sqrt{2}G_F=1/v^2\ ,\quad \lambda=\frac{G_F M_H^2}{\sqrt{2}} \tag{12.70}$$

和 $W_L^\pm\to\pi^\pm$ 、 $Z_L\to\pi^0$ 后，上面这些振幅与 8.5 章中的 π 介子场的两两散射分波振幅是完全一致的（当然，对于后者要令 $m_\pi=0$ ）。这种一致并非偶然：首先，标准模型中的 Higgs 场部分具有一个 O(4) 对称性，它与描述低能强作用的手征 $SU(2)\times SU(2)$ 群局域上是等价的。这可由忽略了规范场耦合的拉氏量 12.46 式看出，它与 $SU(2)\times SU(2)$ 线性 σ 模型是完全等价的。其次，散射振幅形式上的一致性是我们在 12.9 节中将要介绍的一个普遍定理的一个特例。

分波矩阵的幺正性要求弹性道 $W_L^+W_L^- \to W_L^+W_L^-$ 的散射振幅

$$|t_0(W_L^+W_L^- \to W_L^+W_L^-)| \leq 1\,。 \tag{12.71}$$

在 $s >> M_H^2$ 时,

$$t_0(W_L^+W_L^- \to W_L^+W_L^-) \to -\frac{G_F M_H^2}{4\pi\sqrt{2}}\,。 \tag{12.72}$$

这导致,

$$M_H^2 \leq \frac{4\pi\sqrt{2}}{G_F} \simeq 1\text{TeV}^2\,。 \tag{12.73}$$

对此上限的正确表述是,仅当 $M_H < 1$TeV 时,树图近似下的振幅的幺正性才能得以保持,也就是说微扰论才是可靠的近似。换句话说,对于标准模型,在 $s < 1$TeV 以内必定会出现新的物理,或者是质量小于 1TeV 的 Higgs 粒子,或者由于弱作用在 $O(1)$TeV 变的很强,从而产生丰富的新物理现象。因此我们有理由相信在 LHC 上应该能够发现与弱电对称性破缺机制有关的新物理现象,其中包括一个轻的 Higgs 粒子的可能性。

还可以讨论弱同位旋的本征态之间的散射振幅,在 $J = 0$ 时由 8.77 式中的前两式(令 $m_\pi = 0$ 、 $m_\sigma \to M_H$ 及做 12.70 式的替换)给出。由第 8.5 章的讨论得知,在 $s << M_H^2$ 时, $t_0^0 \propto s$ 是吸引相互作用,而 t_0^2 振幅为负因而是排斥作用并且其强度为 t_0^0 的一半;又由于广义的玻色对称性 $t_0^1 \equiv 0$ 。在 M_H 很大时, B. Lee 等人利用 N/D 方法和树图时的弱同位旋的本征态之间的散射振幅,讨论了恢复幺正性以后的振幅的极点轨迹。发现当 M_H 趋于很大时, Higgs 粒子的极点并不趋向无穷远,而是在复平面上兜了一个圈子,滞留在复平面上 $|\sqrt{s}| \sim O(1)$TeV 的某处。当然在 M_H 远大于一个 TeV 时, N/D 方法本身也并不可靠。所以以上结论最多仅具有定性上的参考价值。

§12.9 等价定理

这里介绍一个有趣的定理, [5] 叫做等价定理。它的数学表述形式是,对于 $s >> M_W^2$,

$$T(V_L, \cdots) = T(\phi, \cdots) + O(M_W/\sqrt{s})\,。 \tag{12.74}$$

这个定理的形式上的证明很简单。首先写出在 Feynman–'t Hooft 规范下的生成泛函的表达式,

$$\begin{aligned} W[J_L] \;\; = \;\; & -i\ln\int [dV_L d\phi\cdots]\exp\{i(S_{eff}[V_\mu,\phi\cdots] + \int d^4x J_L V_L)\}\times \\ & \prod \delta(\partial_\mu V^\mu + iM_W\phi)\;, \end{aligned} \tag{12.75}$$

[5] J. Cornwall, D. N. Levin and G. Tiktopoulos, Phys. Rev. **D 10**(1974)1145 。

其中 S_{eff} 包含了 Fadeev–Popov 鬼项。规范场的纵向分量 V_L 定义为,

$$\tilde{V}_L(k) = \epsilon_L^\mu \tilde{V}_\mu(k) \ , \ \ \epsilon_L^\mu = \frac{1}{M}(|\vec{k}|, k_0 \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}) \, , \tag{12.76}$$

其中 k_μ 是矢量介子的 4– 动量, $\tilde{V}_\mu(k)$ 是 $V_\mu(x)$ 的 Fourier 变换。规范固定项 $\partial_\mu V^\mu + iM_W\phi$ 意味着

$$\frac{k_\mu}{M}\tilde{V}_\mu(k) = \tilde{\phi}(k) \ , \tag{12.77}$$

而 12.76 式导致

$$\tilde{V}_L(k) = \frac{k_\mu}{M}\tilde{V}_\mu(k) + O(\frac{M}{k_0}) = \tilde{\phi}(k) + O(\frac{M}{k_0}) \ 。 \tag{12.78}$$

于是 12.75 式可以改写为,

$$\begin{aligned} W[J_L] \ \ = \ \ & -i \ln \int [dV_L d\phi \cdots] \exp\{i(S_{eff}[V_\mu, \phi \cdots] + \int d^4k \tilde{J}_L(-k)(\tilde{\phi}(k) + O(\frac{M}{k_0}))\} \\ & \times \prod \delta(\partial_\mu V^\mu + iM_W\phi) \ 。 \end{aligned} \tag{12.79}$$

由此出发即可以证明等价定理 12.74 式。

§12.10 CKM 矩阵与 CP 破坏

在前面的讨论中出现的费米子有轻子 e 、 ν_e 和夸克 u 、 d ，它们统称为第一代费米子。作为一个基本的实验事实，我们知道除了第一代以外，还存在着另外两代费米子： μ , ν_μ , c , s (第二代) 和 τ , ν_τ , t , b (第三代) 。除了质量更重以外，它们具有和第一代费米子同样的弱电和强作用性质 (每一代费米子之间都存在反常相消)。至于为什么 **自然** 会选择三代重复的费米子，现在还完全不清楚。不管怎样，由于三代费米子填充同样的规范群表示，具有相同的量子数的不同的费米子之间可以有混合，如我们在讨论 GIM 机制时已经发现的那样。换句话说，弱作用的本征态并不一定与质量本征态一致。定义

$$U \equiv \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix} , \ D \equiv \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} , \ L \equiv \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix} , \ N \equiv \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \ , \tag{12.80}$$

且 V_U , V_D , V_L , V_N 是任意的 3×3 幺正矩阵。设 U 、 D 、 L 、 N 是弱作用的本征态。则一个一般的 $\mathcal{L}_{Yukawa}$ 可以写成,

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = f_{ij}^L \bar{l}_L^i \Phi L_R^j + f_{ij}^U \bar{q}_L^i \tilde{\Phi} U_R^j + f_{ij}^D \bar{q}_L^i \Phi D_R^j + h.c. \ , \tag{12.81}$$

其中 $l_L^i = (N_L^i, L_L^i)^T$ ， $q^i = (U_L^i, D_L^i)^T$ 。在 Higgs 场自发破缺以后，费米子获得质量，形式为

$$-\bar{L}_L^i M_{ij}^L L_R^j - \bar{U}_L^i M_{ij}^U U_R^j - \bar{D}_L^i M_{ij}^D D_R^j + h.c.$$

且 $M_{ij} = -\frac{v}{\sqrt{2}} f_{ij}$ 是一个任意的三乘三的矩阵，这是因为没有任何理由要求 Higgs 场对于不同代之间没有耦合。质量矩阵的对角化可以通过对费米子场作适当的转动得到。根据代数中的一个定理，任意矩阵 M 可以用两个幺正矩阵来对角化：$M = V_L M_d V_R^+$ 其中 M_d 是实的并且是半正定的对角矩阵，也就是费米场的质量矩阵。因此只要做转动，

$$\begin{aligned} &L_L = V_L^L L'_L,\ L_R = V_R^L L'_R\ ; \\ &U_L = V_L^U U'_L,\ U_R = V_R^U U'_R\ ;\ D_L = V_L^D D'_L,\ D_R = V_R^D D'_R, \end{aligned} \tag{12.82}$$

就可以使夸克质量矩阵对角化。 L' 、 U' 和 D' 即为质量本征态，然而弱作用的本征态并不是质量本征态，在存在三代时， 12.36 式可写为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{fermi} \ = \ & \sum_i \{(\bar{U}_L^i, \bar{D}_L^i)(i\partial\!\!\!/ + g\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{W}\!\!\!/ - \frac{g'}{6}B\!\!\!/)\begin{pmatrix} U_L^i \\ D_L^i \end{pmatrix} \\ & + \bar{U}_R^i(i\partial\!\!\!/ + \frac{2}{3}g'B\!\!\!/)U_R^i + \bar{D}_R^i(i\partial\!\!\!/ - \frac{1}{3}g'B\!\!\!/)D_R^i \\ & + (\bar{N}_L^i, \bar{L}_L^i)(i\partial\!\!\!/ + g\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{W}\!\!\!/ - \frac{g'}{2}B\!\!\!/)\begin{pmatrix} N_L^i \\ L_L^i \end{pmatrix} + \bar{L}_R^i(i\partial\!\!\!/ - g'B\!\!\!/)L_R^i\}\ . \end{aligned} \tag{12.83}$$

把上面的表达式改写为由质量本征态来表示的，则需要做 12.82 式的替换。替换的结果是，除了费米子换成相应的代撇的场量外， $W^\pm$ 与左手夸克场的耦合要产生改变，其余所有的项不变：

$$\begin{aligned} &\sum_i (\bar{U}_L^i, \bar{D}_L^i)(g\frac{\tau_1}{2}W\!\!\!/_1 + g\frac{\tau_2}{2}W\!\!\!/_2)\begin{pmatrix} U_L^i \\ D_L^i \end{pmatrix} = \sum_i (\bar{U}_L^i, \bar{D}_L^i)\frac{g}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & W\!\!\!/^- \\ W\!\!\!/^+ & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_L^i \\ D_L^i \end{pmatrix} \\ &= \frac{g}{\sqrt{2}}\sum_i (\bar{U}_L^i W\!\!\!/^+ D_L^i + \bar{D}_L^i W\!\!\!/^- U_L^i) \to \frac{g}{\sqrt{2}}\bar{U}_L'^j V_{L,ji}^{U+} V_{L,ik}^D W\!\!\!/^+ D_L'^k + h.c. \end{aligned} \tag{12.84}$$

其中 $i, j, k = 1, 2, 3$ 是 “代” （ generation ）空间中的指标，在上式中的最后一项重复指标意味着求和。所谓 Cabbibo–Kobayashi–Maskawa 矩阵 U^{CKM} 是一个 “代” 空间中的 3×3 的幺正矩阵，

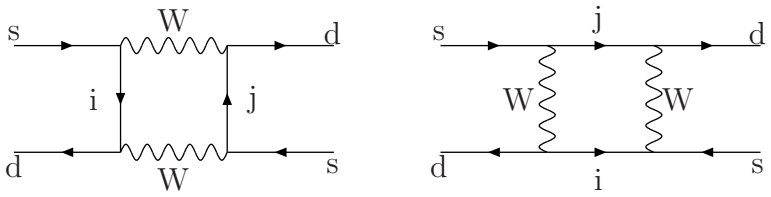
$$U^{CKM} \equiv V_L^{U+} V_L^D\ . \tag{12.85}$$

一个 $n \times n$ 的幺正矩阵由 n^2 个独立参数来描述。但是，在对 U^{CKM} 矩阵元的描述中，真正物理上有意义的参数并没有那么多。原因是每一个 $U_L'^i$ 和 $D_L'^i$ 在定义上还

可以差一个任意的相因子，这些任意的相因子（只有 2n-1=5 个不独立）可以被利用来减少 U^{CKM} 的独立参数个数，所以最终的独立自由度数是 $(n-1)^2=4$ 个。Kobayashi 和 Maskawa 指出，这四个独立的自由度数中有一个用来描述复相角的参数不能够被消掉，它刻画了标准模型的 CP 破坏。除了这个 CP 破坏的机制以外，是否还存在着别的破坏 CP 的物理来源？ CP 破坏的进一步的根源是什么？为探讨这些问题作了许多努力，但答案仍然是不清楚的。

§12.11 $K^0-\bar{K}^0$ 系统中的 CP 破坏 *

为在 GWS 理论中研究 $K^0-\bar{K}^0$ 系统中的 CP 破坏，我们首先诱导出 $\triangle s=2$ 的有效拉氏量。相应的费曼图如下，



其中 $i,j=u,c,t$ 。在 Feynman–'t Hooft($\xi=1$) 规范中，忽略所有的外动量我们有，

$$\begin{aligned} iT(\bar{s}d\to s\bar{d}) &= 2(\frac{g}{\sqrt{2}})^4\sum_{i,j}\xi_i\xi_j\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}(\frac{-i}{k^2-M_W^2})^2 \\ &\quad\times(\bar{d}_L\gamma^\mu\frac{\not{k}+m_i}{k^2-m_i^2}\gamma^\nu s_L)(\bar{d}_L\gamma^\nu\frac{\not{k}+m_j}{k^2-m_j^2}\gamma^\mu s_L)\ . \end{aligned} \tag{12.86}$$

其中 $\xi_i=U_{is}U_{id}^*$ ，且 U_{ij} 表示 CKM 矩阵元。此矩阵元可以积出，得

$$T(\bar{s}d\to s\bar{d})=-\frac{G_F}{\sqrt{2}}\frac{\alpha}{\sin^2\theta_W}(\bar{d}_L\gamma_\mu s_L)(\bar{d}_L\gamma^\mu s_L)\sum_{ij}\xi_i\xi_jA(x_i,x_j)\ , \tag{12.87}$$

其中 $x_i=m_i^2/M_W^2$ 且

$$A(x_i,x_j)=\frac{J(x_i)-J(x_j)}{x_i-x_j}\ ,\quad\left(J(x_i)=\frac{1}{1-x_i}+\frac{x_i^2\ln x_i}{(1-x_i^2)}\right)\ . \tag{12.88}$$

这个振幅可以用以下的低能有效拉氏量给出，

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff}^{\triangle S=2} &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}}\frac{\alpha}{4\pi}\frac{1}{M_W^2\sin^2\theta_W}\lambda(\bar{d}_L\gamma_\mu s_L)(\bar{d}_L\gamma^\mu s_L)\ , \\ \lambda &= M_W^2\sum_{ij}\xi_i\xi_jA(x_i,x_j)\ . \end{aligned} \tag{12.89}$$

这个有效拉氏量加上 $\Delta s=-2$ 的项是厄米的，但由于参数 λ 有复相角，拉氏量在 CP 变换下不是不变的。我们可以从这一有效拉氏量来出发讨论 $K^0-\bar{K}^0$ 系统中的各种物理，尤其是 CP 破坏的物理现象。

第十三章　标准模型的重整化

电弱统一理论含有较多的为理论本身所不能确定的参数，除 CKM 矩阵的四个独立参数外，它们是： g, g'—$SU(2)_L$ 和 $U(1)_Y$ 的耦合常数； μ^2, λ—Higgs 场的势函数中的参数； g_f— 费米子 -Higgs Yukawa 耦合常数（如中微子无质量，则共计有 9 个）。在树图水平上有已知的关系

$$\begin{aligned} & v = \sqrt{\mu^2/\lambda}, \quad M_H = \mu\sqrt{2}, \\ & M_W = \frac{1}{2}gv, \quad M_Z = \frac{1}{2}v\sqrt{g^2+g'^2}, \\ & m_f = g_f v, \\ & e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}} \quad \left(g = \frac{e}{s_W}, g' = \frac{e}{c_W}\right), \end{aligned} \tag{13.1}$$

其中 $c_W \equiv \cos\theta_W$ ， $s_W \equiv \sin\theta_W$ 。利用方程 13.1 式可把弱电标准模型拉氏量中的原始参数用一组物理的参数取代，即

$$(g, g', \mu, \lambda, g_f) \to (e, M_W, M_Z, M_H, m_f) \ . \tag{13.2}$$

这样做的好处在于后者是实验的直接可观测量（对于轻夸克质量采用流代数给出的值）。在作具体的物理矩阵元的计算时，原则上可以用任何一种减除方案，如 MS ，$\overline{MS}$ ，质壳重整化等。由于微扰论只能算到有限阶，用不同的重整化方案对同一物理量做重整化计算可以有不可忽略的差异。因此在电弱理论中一般约定采用质壳重整化方案，并将 e, M_Z, M_W, M_H, m_f 作为独立重整化参数。 注意 s_W 和 $SU(2)$ 耦合常数 g 并非独立参数。在 Z ， W 玻色子质量固定后， s_W 由下式确定

$$s_W^2 \equiv 1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2} \ , \tag{13.3}$$

可以证明这个定义独立于具体过程并适用于微扰论的所有阶。 而 g 由下式确定

$$g = \frac{e}{s_W} \ . \tag{13.4}$$

因此，一旦电荷， W ， Z 玻色子质量被重整化，则 $s_W\,(c_W)$ 和 g 的重整化由下面关系给出，

$$\begin{aligned} s_0 &= s + \delta s \ , \\ c_0 &= c + \delta c \ , \\ g_0 &= g + \delta g \ . \end{aligned} \tag{13.5}$$

其中

$$\begin{aligned}\frac{\delta s}{s} &= \frac{1}{2}\frac{c^2}{s^2}\left(\frac{\delta M_Z^2}{M_Z^2}-\frac{\delta M_W^2}{M_W^2}\right),\\ \frac{\delta c}{c} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\delta M_Z^2}{M_Z^2}-\frac{\delta M_W^2}{M_W^2}\right),\\ \frac{\delta g}{g} &= \frac{\delta e}{e}-\frac{1}{2}\frac{c^2}{s^2}\left(\frac{\delta M_Z^2}{M_Z^2}-\frac{\delta M_W^2}{M_W^2}\right).\end{aligned} \tag{13.6}$$

在上述重整化参数中 α, M_Z, M_W 可由实验测定。而 m_H 值由于 Higgs 粒子还未被实验观测到是一个待定的参数值。为了得到有限的传播子和相互作用顶点，拉氏量中的裸场也必须用重整化场来重新定义，我们把裸拉氏量分解为重整化拉氏量和抵消项两部分：

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}\ . \tag{13.7}$$

从 $\mathcal{L}$ 和 $\delta\mathcal{L}$ 可分别导出树图水平的费曼规则和抵消项费曼规则（含传播子及顶点）。对于标准模型，我们给出如下场的重整化定义，

$$\begin{aligned}\psi_{j0}^L &= \left(Z_L^j\right)^{1/2}\psi_j^L = \left(1+\tfrac{1}{2}\delta Z_L^j\right)\psi_j^L\ ,\\ \psi_{j0}^R &= \left(Z_R^j\right)^{1/2}\psi_j^R = \left(1+\tfrac{1}{2}\delta Z_R^j\right)\psi_j^R\ ,\end{aligned} \tag{13.8}$$

$$\begin{aligned}&\phi_0 = Z_\phi^{1/2}\phi = (1+\delta_\phi)\,\phi\ ,\quad H_0 = Z_\phi^{1/2}(H+v\delta_t)\ ,\\ &W_0^\pm = Z_W^{1/2}W^\pm = (1+\delta_W)\,W^\pm\ ,\\ &Z_0 = (1+\delta_Z)\,Z+\delta_{0A}A\ ,\quad A_0 = (1+\delta_A)\,A+\delta_{A0}Z\ .\end{aligned} \tag{13.9}$$

除了这些条件以外，还需要一个重整化条件：

$$v_0 = (1+\delta_v)v\ . \tag{13.10}$$

在上面引入的重整化常数由重整化条件决定定。我们采用的重整化条件包括电荷重整化条件及质壳条件，前者与 QED 完全相同，而所谓质壳条件是指：

1. 物理的质量等于传播子的极点的实部，即等于重整化的单粒子不可约两点 Green 函数的实部的零点.
2. 在传播子极点处的留数（ residues ）等于 1 。

条件 2 使得我们可略去所有外线含有自能修正的图形，这就大大减少了在微扰论高阶计算中所需考虑的图形 。应用上述条件在单圈水平上可以分别固定各种重整化常数，包括场的重整化常数、质量重整化常数以及电荷重整化常数。标准模型的重整化中要碰到的与 QED 和 QCD 不同的特殊情况有两个，第一个是所谓的 tadpole 图，根据 13.1 节和 13.2.1 节中所讨论的，在实际计算中我们不需要考虑 tadpole 图形。再看规范场的质量重整化常数和波函数重整化常数，定义如下 1PI 两点函数：对于 W 玻色子：

$$-i\Pi_{\mu\nu}^0(q) = -i\Pi_{\mu\nu}(q) + \left(-i\delta\Pi_{\mu\nu}(q)\right) \tag{13.11}$$

其中

$$\Pi_{\mu\nu}(q)=\left(g_{\mu\nu}-\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)\Pi_T\left(q^2\right)+\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\Pi_L\left(q^2\right)\ . \tag{13.12}$$

纵向部分由于对物理矩阵元没有贡献，可以不予讨论，而

$$\Pi_T(q)=\left[-\delta M_W^2+\left(q^2-M_W^2\right)2\delta_W\right]+\tilde{\Pi}(q^2)\ (\text{有限})。 \tag{13.13}$$

由质壳重整化条件 1， 2 我们有，

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\tilde{\Pi}_T\left(M_W^2\right)=0\ ,\\&\mathrm{Re}\frac{\partial\tilde{\Pi}_T\left(q^2\right)}{\partial q^2}|_{q^2=M_W^2}=0\ .\end{aligned} \tag{13.14}$$

对于 Z 玻色子，光子 A 及其混合的重整化 1PI 两点函数，我们有（ 图 ）：

$$=-i\hat{\Pi}_{\mu\nu}^{ab}(q)=-i\Pi_{\mu\nu}^{ab}(q)+\left(-i\delta\Pi_{\mu\nu}^{ab}(q)\right)\ , \tag{13.15}$$

其中

$$\begin{aligned}&\Pi_{\mu\nu}^{ab}(q)=\left(g_{\mu\nu}-\tfrac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)\Pi_T^{ab}(q^2)+\tfrac{q_\mu q_\nu}{q^2}\Pi_L^{ab}(q^2)\\&(a,b=A,Z,\ M_A^2=0),\\&\delta\Pi_{\mu\nu}^{AA}(q)=g_{\mu\nu}\left[2\delta_A q^2\right]\\&\delta\Pi_{\mu\nu}^{ZZ}(q)=g_{\mu\nu}\left[-\delta M_Z^2+\left(q^2-M_Z^2\right)2\delta_Z\right]\\&\delta\Pi_{\mu\nu}^{AZ}(q)=g_{\mu\nu}\left[\left(q^2-M_Z^2\right)\delta_{0A}+q^2\delta_{A0}\right]\end{aligned} \tag{13.16}$$

类似的，质壳重整化条件可表为

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\,\tilde{\Pi}_T^{ZZ}\left(M_Z^2\right)=0\ ,\ \ \mathrm{Re}\,\tilde{\Pi}_T^{AA}(0)=0\ ,\\&\mathrm{Re}\,\frac{\partial\tilde{\Pi}_T^{ZZ}\left(q^2\right)}{\partial q^2}|_{q^2=M_Z^2}=0,\ \mathrm{Re}\,\frac{\partial\tilde{\Pi}_T^{AA}\left(q^2\right)}{\partial q^2}|_{q^2=0}=0\ ,\\&\mathrm{Re}\,\tilde{\Pi}_T^{AZ}(0)=0\ ,\ \mathrm{Re}\,\tilde{\Pi}_T^{AZ}\left(M_Z^2\right)=0\ ,\end{aligned} \tag{13.17}$$

下面的讨论将集中在在单圈水平上， R_ξ 规范下计算标准模型各种重整化常数。得到了结果以后就可以推出跑动耦合常数所满足的重整化群方程，为了计算方便起见我们将仅仅局限于 $\overline{MS}$ 方案。[1] 我们将分别讨论标准模型拉氏量的各个部分。 作为复习我们首先回顾一下自发破缺 $\lambda\phi^4$ 理论的单圈重整化，然后我们再加入与规范场的耦合。

[1] 在 D. Bardin 和 G. Passarino 的书中（ "*The Standard Model in the Making*", CLARENDON PRESS, OXFORD 1999 ）给出了最小标准模型在单圈水平上的包含有限项的详细的结果。

§13.1 自发破缺 $\lambda\phi^4$ 理论的单圈重整化

标准模型的单圈计算比起一般的规范理论要更复杂一些。原因有两个：首先它是一个自发破缺的理论，第二是不同的规范场（如 W_3 和 B ）有混合。在树图水平下定义的标量场的 VEV 和规范场的混合角在圈图时要重新定义。下面我们来具体地讨论这些问题。

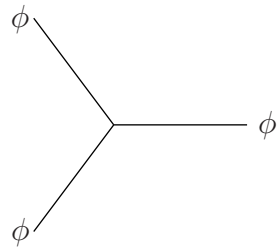
首先，我们来看一个简单一些的例子： $O(N)$ 的 $\lambda\phi^4$ 理论，

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu \Phi^T \partial^\mu \Phi - V(\Phi) \ , \\ V(\Phi) &= \frac{\lambda}{4}(\Phi^T\Phi - \frac{\mu^2}{\lambda})^2 \ . \end{aligned} \tag{13.18}$$

有 $< \Phi^T\Phi >= \mu^2/\lambda = v^2$ 。设它的解为 $< \phi_i >= v_i$ 且 $\sum_{i=1}^N v_i^2 = v^2$ ，于是作变换 $\phi_i \to \phi_i + v_i$ ，这样 $V(\phi) \to \lambda/4(\phi_i^2 + 2v_i\phi_i)^2 = \lambda/4(\phi_i\phi_i)^2 + \lambda v_j\phi_j\phi_i^2 + \lambda v_i v_j \phi_i\phi_j$ 。于是标量粒子的质量矩阵为 $M_{ij} = \lambda v_i v_j$ 。由于 $\mathrm{Rank}(M_{ij} = 1)$ 令 $v_i = \delta_{i1}v$ 使质量矩阵对角化。令 $\Phi^2 = \sum_{i=2}^N \phi_i^2$ ， $\phi_1 = \phi$ ，则

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{m^2}{8v^2}(\phi^4 + 2\phi^2\Phi^T\Phi + (\Phi^T\Phi)^2) + \frac{m^2}{2v}\phi^3 + \frac{m^2}{2v}\phi\Phi^T\Phi \ , \tag{13.19}$$

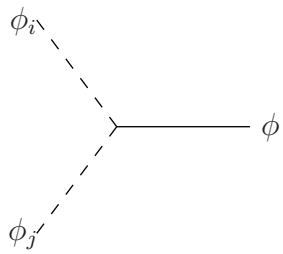
其中 $m^2 = 2\lambda v^2$ 。为使结果更具一般性我们在上式中再加上一项 $\frac{1}{2}M_i^2\phi_i\phi_i$ 。上述理论的 Feynman 规则如下，



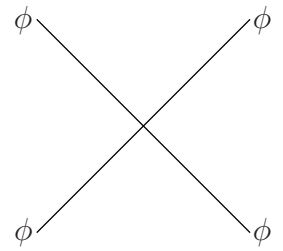
ϕ propagator $\qquad D_\phi = \frac{i}{k^2 - m^2}$

ϕ_i propagator $\qquad D_{\phi_i} = \frac{i}{k^2 - M_i^2}$

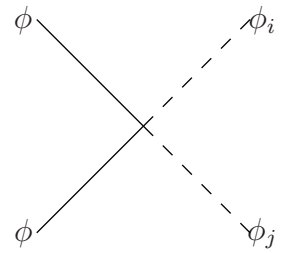
ϕ^3 vertex $\qquad -3im^2/v$



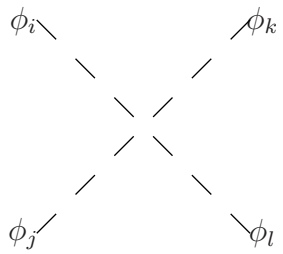
$\phi\phi_i\phi_j$ vertex $\quad -im^2/v\delta_{ij}$



ϕ^4 vertex $\quad -3i\frac{m^2}{v^2}$



$\phi^2\phi_i\phi_j$ vertex $\quad -i\frac{m^2}{v^2}\delta_{ij}$



ϕ_i^4 vertex $\quad -i\frac{m^2}{v^2}(\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})$

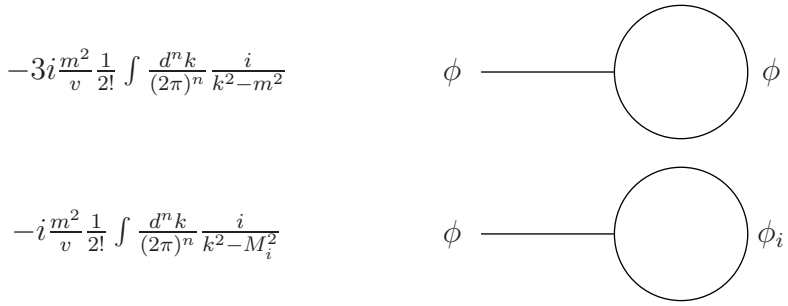
容易得到以上 Feynman 规则。比如对于 $\phi_i\phi_j\phi_k\phi_l$ 顶角，拉氏量中相应的项为 $\frac{m^2}{8v^2}(\Phi^T\Phi)^2$ 。做泛函微商，

$$\frac{\delta^4}{\delta\phi_i\delta\phi_j\delta\phi_k\delta\phi_l}(i\Gamma)=\frac{-i\delta^4}{\delta\phi_i\delta\phi_j\delta\phi_k\delta\phi_l}(\frac{m^2}{8v^2}(\Phi^T\Phi)^2)$$

即可得到相应的顶角的费曼规则。现在考虑单圈修正，在树图水平下，根据定义我们有

$$<\phi>=0。 \tag{13.20}$$

但是在考虑单圈修正后由于有如下图所示的‘蝌蚪’图（ tadpole ）的贡献：



单圈修正对 ϕ 场真空期望值的贡献。

出现蝌蚪图的贡献表明在单圈时真空的位置出现了移动， ϕ 场的 VEV 不再为零。因此需要重新定义 ϕ 场以使其 VEV 保持为零，所以在重整化以后应有，

$$\begin{aligned}
&\phi \to Z_\phi(\phi + v\delta_t) \\
&\Phi \to Z_\phi \Phi \qquad (Z_\phi = 1 + \delta_\phi) \\
&m \to (1+\delta_m)m \\
&v \to (1+\delta_v)v \ .
\end{aligned} \tag{13.21}$$

其中第一式产生一个抵消项来消除蝌蚪图的贡献。为看清这一点我们来看一看在经 13.21 式变换后单圈下的有效势的表达式 (忽略 $O(\delta^2)$ 项) ：

$$\begin{aligned}
V(\phi) \ = \ & \frac{1}{2}m^2(1+2\delta_m+2\delta_\phi)\phi^2 + \frac{m^2}{8v^2}(1+4\delta_\phi+2\delta_m-2\delta_v) \\
& \times(\phi^4 + 2\phi^2\Phi^T\Phi + (\Phi^T\Phi)^2) + \frac{m^2}{2v}(1+3\delta_\phi+2\delta_m-\delta_v)(\phi^3+\phi\Phi^T\Phi) \\
& + m^2 v\phi\delta_t + \frac{m^2}{2v}\delta_t(\phi^3+\phi\Phi^T\Phi) + \frac{3}{2}m^2\delta_t\phi^2 + \frac{m}{2}\delta_t\Phi^T\Phi \ .
\end{aligned} \tag{13.22}$$

上式中第三行第一项会产生如下贡献：



要求单圈修正后 ϕ 场的 VEV 仍然为零即此图与蝌蚪图的贡献必须完全相消，即得到 tadpole 方程：

$$im^2v\delta_t = \frac{m^2}{2v}(3A(m)+A(M_i)) \doteq i\frac{m^2}{2v}(3m^2+\sum M_i^2)\triangle \ , \tag{13.23}$$

并由其得出

$$\delta_t \doteq \triangle(\frac{3m^2}{2v^2}+\sum\frac{M_i^2}{2v^2}) \ , \tag{13.24}$$

其中

$$A(m) \equiv \int\frac{d^nk\,\nu^{2\epsilon}}{(2\pi)^n}\frac{1}{k^2-m^2} = \frac{i}{16\pi^2}m^2(\Gamma(\epsilon)+1)\left(\frac{4\pi\nu^2}{m^2}\right)^\epsilon \ ,$$

$$\doteq im^2\triangle\ ,\quad (\triangle\doteq\frac{1}{16\pi^2}N_\epsilon=\frac{1}{16\pi^2}(\Gamma(\epsilon)+\log 4\pi\nu^2))\ . \tag{13.25}$$

在作了如上抵消后的结果是以后再也不需要考虑 " 蝌蚪图 " 的贡献。

其余的重整化常数可由计算三点顶角和波函数的重整化得到。现讨论如下：

⋆ ϕ^3 **顶角的重整化**：

定义

$$\begin{aligned}B_0(k^2,m_1^2,m_2^2)&=\int\frac{d^nq\,\nu^{2\epsilon}}{(2\pi)^n}\frac{1}{(q^2-m_1^2)((q-k)^2-m_2^2)}\\&=\frac{i\nu^{2\epsilon}}{(4\pi)^{n/2}}\Gamma(\epsilon)\int_0^1dx\left[(1-x)m_1^2+xm_2^2-x(1-x)k^2\right]^{-\epsilon}\\&=\frac{i}{16\pi^2}\left[N(\epsilon)-\int_0^1dx\log[(1-x)m_1^2+xm_2^2-x(1-x)k^2]\right]\\&\doteq i\triangle\ .\end{aligned} \tag{13.26}$$

上式中的积分项可以积出来，

$$\begin{aligned}&\overline{B}_0(s,m_1^2,m_2^2)\equiv\int_0^1dx\log[(1-x)m_1^2+xm_2^2-x(1-x)s]\\&=-2+\ln[m_1m_2]+\frac{m_1^2-m_2^2}{2s}\ln[\frac{m_1^2}{m_2^2}]+\frac{\lambda(s,m_1^2,m_2^2)}{s}\ln\left[\frac{m_1^2+m_2^2-s-\lambda(s,m_1^2,m_2^2)}{2m_1m_2}\right]\end{aligned} \tag{13.27}$$

其中

$$\lambda(s,m_1^2,m_2^2)=\sqrt{s^2+m_1^4+m_2^4-2sm_1^2-2sm_2^2-2m_1^2m_2^2}。 \tag{13.28}$$

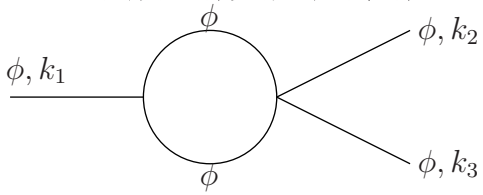
在 $m_1=m_2=m$ 时，上面的表达式得到了简化：$\lambda(s,m^2,m^2)=\sqrt{s(s-4m^2)}$ 且

$$\overline{B}_0(s,m^2,m^2)=-2+\ln\left[m^2\right]+\rho\ln\left[\frac{\rho+1}{\rho-1}\right], \tag{13.29}$$

其中的 $\rho=\sqrt{1-4m^2/s}$ 是熟知的两体相空间因子。函数 $\overline{B}_0$ 的吸收部分为 $\mathrm{Im}\overline{B}_0=\rho$，因此满足一个一次减除的色散关系：

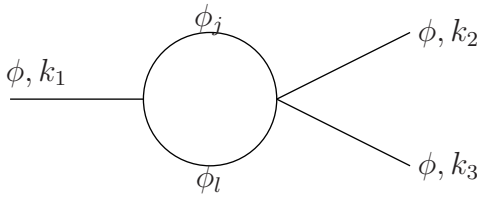
$$\overline{B}_0(s)=\overline{B}_0(s_0)+\frac{s-s_0}{\pi}\int_{4m^2}^\infty\frac{\mathrm{Im}\overline{B}_0(s')}{(s'-s)(s'-s_0)}ds'\ \ 。 \tag{13.30}$$

对三点顶角有发散的贡献有



$+$ permutations

$=\frac{1}{2}(-3i\frac{m^2}{v})(-3i\frac{m^2}{v^2})(i^2B_0(k_i,m,m))=\frac{9m^4}{2v^3}\sum B_0(k_i,m,m)$



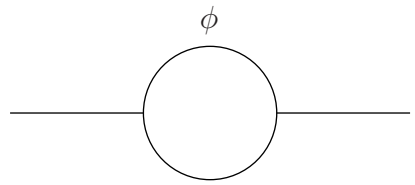
$+$ permutations

$= \frac{1}{2}(-i\frac{m^2}{v}\delta_{jl})(-i\frac{m^2}{v^2}\delta_{jl})(i^2\sum_i B_0(k_i, M_j, M_l)) = \sum_j^{N-1}\frac{m^4}{2v^3}\sum_i B_0(k_i, M_j, M_j)$

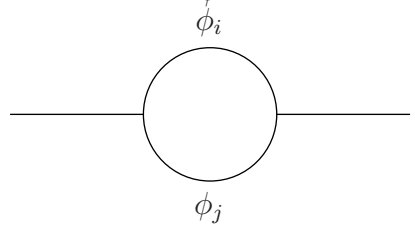
有三个传播子内线的图对发散不贡献，可忽略。要求由 13.22 式给出抵消项抵消上两图导致的发散，给出如下等式，

$$3\delta_\phi + 2\delta_m - \delta_v + \delta_t = \triangle[\frac{9m^2}{2v^2} + \frac{m^2}{2v^2}(N-1)] \tag{13.31}$$

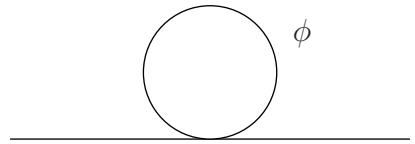
⋆ **波函数重整化：**



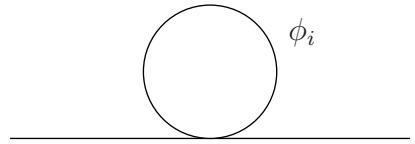
$\frac{1}{2}(-3i\frac{m^2}{v})^2 i^2 B_0(k, m, m)$



$\frac{1}{2}(-i\frac{m^2}{v})^2 i^2 B_0(k, M_i, M_i)$



$\frac{1}{2}(-3i\frac{m^2}{v^2})iA(m)$



$\frac{1}{2}(-i\frac{m^2}{v^2})iA(M_i)$

上面几个图之和

$$\begin{aligned} Sum &= \frac{m^4}{2v^2}(9B_0(k, m, m) + \sum_1^{N-1} B_0(k, M_i, M_i) + 3\frac{A(m^2)}{m^2} + \sum\frac{A(M_i)}{m^2}) \\ &\doteq i\triangle\frac{m^4}{2v^2}(9 + (N-1) + 3 + \sum\frac{M_i^2}{m^2}) \ . \end{aligned} \tag{13.32}$$

注意到上述表达式中的发散项并没有正比于 k^2 的项，而

$$\mathcal{L}^2_{counter} = \delta_\phi \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2(\delta_\phi + \delta_m + \frac{3}{2}\delta_t)\phi^2 \ , \tag{13.33}$$

或者 $i\Gamma^2_{counter} = 2ik^2\delta_\phi - 2im^2(\delta_\phi + \delta_m + \frac{3}{2}\delta_t)$ 。所以

$$\delta_\phi = 0 \ . \tag{13.34}$$

且推出,

$$\delta_m + \frac{3}{2}\delta_t = \triangle\{\frac{11+N}{4}\frac{m^2}{v^2} + \frac{\sum M_i^2}{4v^2}\} \ . \tag{13.35}$$

联立 13.24 、 13.31 和 13.35 式, 如果令 $M_i = 0$ 则有

$$\begin{aligned} &\delta_t = \frac{3m^2}{2v^2}\triangle \ , \ \ \delta_m = \frac{N+2}{4v^2}m^2\triangle \ , \ \ \delta_\phi = 0 \ , \\ &\delta_v = -\frac{3m^2}{2v^2}\triangle \ . \end{aligned} \tag{13.36}$$

有结果 $\delta_t + \delta_v = 0$, 但是当耦合到规范场时这个结果并不再成立。对于 ϕ^4 的顶角 $\lambda = m^2/2v^2$, 有

$$\delta_\lambda = 2(\delta_m - \delta_v) = (N+8)\lambda\triangle \ . \tag{13.37}$$

于是可以得出各种 β 函数。 $N = 1$ 时

$$16\pi^2\beta_\lambda = 18\lambda^2 \ . \tag{13.38}$$

标准模型相当于 $N = 4$ 的情形,

$$16\pi^2\beta_\lambda = 24\lambda^2 \ . \tag{13.39}$$

§13.2 Higgs 场部分的单圈重整化 (R_ξ 规范)

考虑

$$\mathcal{L}_{Higgs} = \frac{1}{2}D_\mu\Phi^+D^\mu\Phi - V(\Phi) \ , \tag{13.40}$$

其中

$$V(\Phi) = -\frac{1}{2}\mu^2\Phi^+\Phi + \lambda(\Phi^+\Phi)^2 \ 。 \tag{13.41}$$

§13.2.1 Tadpole 的相消条件

要求单圈水平上 tadpole 的贡献为零。圈中跑动的粒子可以为费米子 (相互作用顶角为 $-igm_i/(2M_W)$)、 $W^\pm$ $(igM_Wg_{\mu\nu})$ 、 Z 、 ϕ_1 、 ϕ_2 、 $\phi_\pm$ 、 $C_\pm$ 、 C_z 等; 而抵消项的顶角为 $-ig^{-1}Mm_H^2\delta_t\phi_1$ 。要求 $<\phi_1>=0$ 可以定出 δ_t:

$$\begin{aligned} -i\delta_t \ \ = \ \ & -\frac{ng^2m_i^2}{2M^2m_H^2}A(m_i^2) \\ & -\frac{g^2}{4M^2}[2A(\xi M^2) + 3A(m_H^2) + A(\xi\frac{M^2}{c^2})] \end{aligned}$$

$$-\frac{ng^2}{m_H^2}A(M^2)-\frac{ng^2}{2c^2m_H^2}A(\frac{M^2}{c^2})+\frac{g^2}{m_H^2}(A(\xi M^2)+\frac{1}{2c^2}A(\xi\frac{M^2}{c^2}))$$
$$+\frac{g^2}{m_H^2}(1-\xi)[M^2B_0(0,M^2,\xi M^2)+\frac{M^2}{2c^4}B_0(0,\frac{M^2}{c^2},\xi\frac{M^2}{c^2})]\ , \quad (13.42)$$

其中第一行是费米子圈，第二行分别是 ϕ_2 ， ϕ_1 和 $\phi_\pm$ 的贡献；第三行和第四行表示了 $W^\pm$ 、 Z 和鬼场的贡献，其中鬼场的贡献仅仅是将第三行中最后一项中原有的一个乘积因子 $(1-\xi)$ 换为 1 。且其中的

$$A(a^2)\equiv\int\frac{d^nk\nu^{2\epsilon}}{(2\pi)^n}\frac{1}{k^2-a^2}\ ,\ B_0(0,a^2,b^2)\equiv\int\frac{d^nk\nu^{2\epsilon}}{(2\pi)^n}\frac{1}{(k^2-a^2)(k^2-b^2)}\ . \quad (13.43)$$

也即

$$\begin{aligned}A(m^2)&=im^2\triangle+i\frac{m^2}{16\pi^2}-i\frac{m^2}{16\pi^2}\log m^2\\ B_0(0,a^2,b^2)&=i\triangle-i\frac{1}{16\pi^2}\int_0^1dx\log(xa^2+(1-x)b^2)\ .\end{aligned} \quad (13.44)$$

可以看出 δ_t 是依赖于 ξ 的，

$$\delta_t\doteq-[3\frac{M^2}{m^2}+\frac{3}{2c^4}\frac{M^2}{m^2}+\frac{3m^2}{4M^2}+\xi(\frac{1}{2}+\frac{1}{4c^2})]\triangle_g\ 。 \quad (13.45)$$

在计算完 δ_t 后则不再需要考虑关于 Higgs 场 ϕ_1 的 ‘蝌蚪图’ 贡献。在本章后面的讨论中我们也把记号 $-g^2\triangle$ 改写为 $\triangle_g$ 。

§13.2.2 Higgs 场的波函数及质量重整化

由 13.41 式可得

$$V(\phi)=\frac{m^2}{2}(\phi_1+\frac{g}{4M}\bar{\phi}'\phi')^2\ 。 \quad (13.46)$$

利用 13.21 式得

$$\begin{aligned}V_R(\phi)&=\frac{1}{2}m^2(1+2\delta_m+2\delta_\phi+\delta_t)\phi_1^2+\frac{m^2g^2}{32M^2}(\bar{\phi}'\phi')^2(1+2\delta_m+2\delta_g-2\delta_M+4\delta_\phi)\\ &+\frac{gm^2}{4M}(1+\delta_g+2\delta_m-\delta_M+3\delta_\phi+\frac{\delta_t}{2})\phi_1\bar{\phi}'\phi'+\frac{M}{g}m^2\delta_t\phi_1+\frac{m^2}{4}\delta_t\bar{\phi}'\phi'\ ,\end{aligned} \quad (13.47)$$

其中 $\bar{\phi}'\phi'=\phi_1^2+\phi_2^2+\bar{\phi^+}'\phi^{+\prime}$ 且

$$M=gv/2,\ \ v^2=\frac{\mu^2}{4\lambda}=\frac{4}{g^2}M^2\ ,\ \ m^2(m_H^2)=2\mu^2=8\lambda v^2\ 。$$

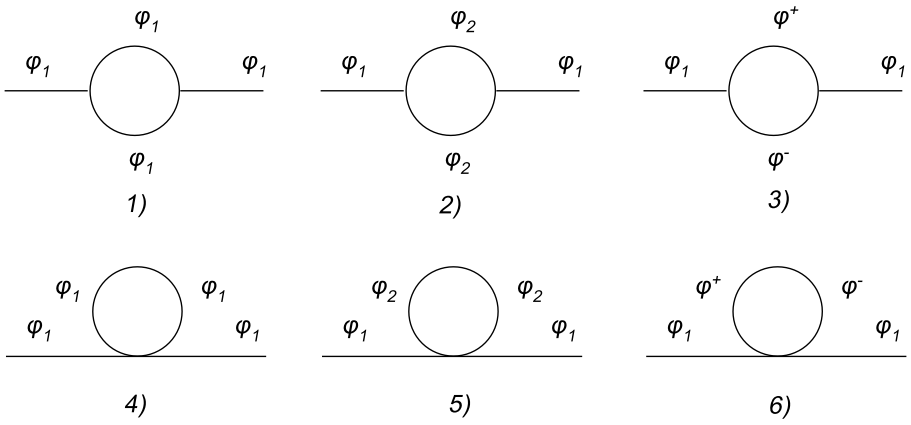


图 13.1:

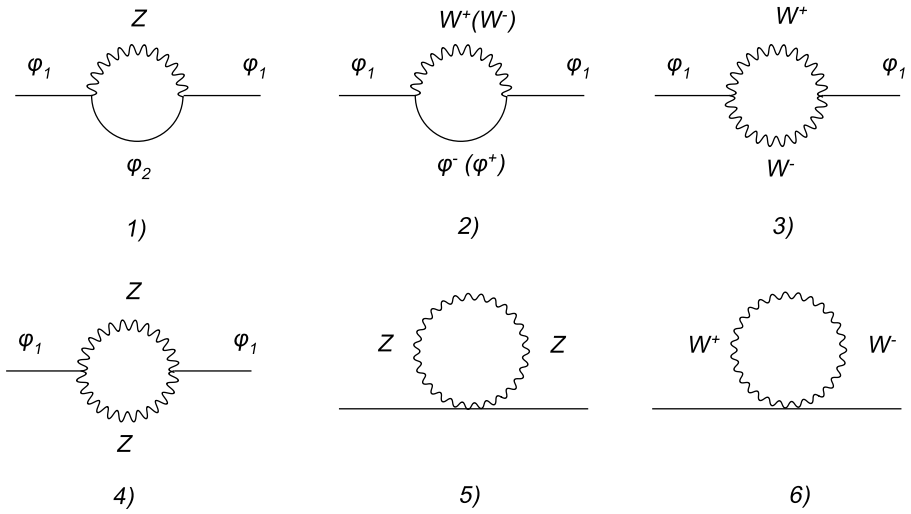


图 13.2:

有关的抵消项的拉氏量为 $\mathcal{L}=\delta_\phi\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1-\frac{m^2}{2}(2\delta_m+2\delta_\phi+\frac{3}{2}\delta_t)\phi_1^2$ 。或者抵消项的费曼顶角为 $i2\delta_\phi(k^2-m^2)-i(2\delta_m+\frac{3}{2}\delta_t)m^2$ 。对 Higgs 场自能的圈图贡献有自作用项六个图 (见图 13.1)。 Higgs 场与规范场的作用项六个图 (见图 13.2)。 Higgs 场与鬼场的作用项共两个图 (见图 13.3), 其中带电鬼场圈图的贡献为,

$$2\times(-1)(-\frac{i}{2}g\xi M)^2\int\frac{d^nq}{(2\pi)^n}\frac{i}{q^2-\xi M^2}\frac{i}{(q-k)^2-\xi M^2}\ ; \tag{13.48}$$

中性鬼场圈图的贡献为,

$$(-1)(-\frac{i}{2c^2}g\xi M)^2\int\frac{d^nq}{(2\pi)^n}\frac{i}{q^2-\xi M^2/c^2}\frac{i}{(q-k)^2-\xi M^2/c^2}\ 。 \tag{13.49}$$

最后相加计算得出,

$$\delta_\phi=-\frac{3-\xi}{2}(\frac{1}{4c^2}+\frac{1}{2})\triangle_g\ ,$$

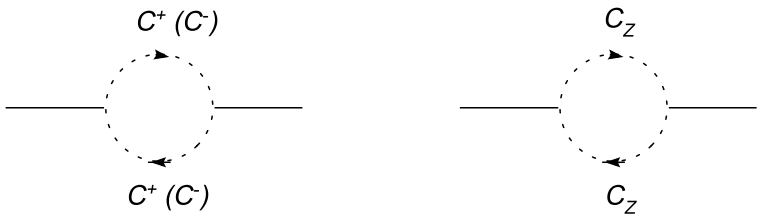


图 13.3:

$$2\delta_m+\frac{3}{2}\delta_t=\{-\frac{15m^2}{8M^2}+\frac{1}{c^2}(\frac{3}{4}-\frac{3}{8}\xi)+(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\xi)-\frac{9M^2}{2m^2}(\frac{1}{2c^4}+1)\}\triangle_g\ . \tag{13.50}$$

由以前得到的 δ_t 值可求出 δ_m ，发现它与 ξ 无关，

$$\delta_m=\left[-\frac{3m^2}{8M^2}+\frac{3}{8c^2}+\frac{3}{4}\right]\triangle_g\ 。 \tag{13.51}$$

它也可以改写为

$$\delta_m=\frac{\triangle}{16\pi^2}\{12\lambda-\frac{9}{8}g^2-\frac{3}{8}g'^2\}\ , \tag{13.52}$$

由其可以得到在 MS 方案中

$$\gamma_m=\frac{1}{16\pi^2}\{24\lambda-\frac{9}{2}g^2-\frac{3}{2}g'^2\}\ 。 \tag{13.53}$$

§13.2.3 单圈的 Higgs 场的传播子 *

上面一节讨论了 Higgs 场的波函数与质量重整化。在这里我们给出包括有限项的计算。通过计算可以验证传播子极点的 ξ 无关性，以及理解质量重整化的基本技巧。

R_ξ 规范：

Higgs 场的自能由 13.1 、 13.2 和 13.3 等图相加给出。首先给出 $\xi=1$ 规范下的未重整时的 Higgs 场自能的表达式：

$$\begin{aligned}-i\tilde{\Sigma}^{\xi=1}_{HH}(k^2) \ = \ & \frac{g^2}{8c^2}\{(\frac{m_h^4}{M_z^4}+4(D-1)-4\frac{k^2}{M_z^2})M_z^2B_0(k^2,M_z,M_z)+9\frac{m_h^4}{M_z^2}B_0(k^2,m_h,m_h)\\ & +2c^2(\frac{m_h^4}{M^4}+4(D-1)-4\frac{k^2}{M^2})M^2B_0(k^2,M,M)+3\frac{m_h^2}{M_z^2}A(m_h)\\ & +2c^2(\frac{m_h^2}{M^2}+2D-2)A(M)+(\frac{m_h^2}{M_z^2}+2D-2)A(M_z)\}\ 。\end{aligned} \tag{13.54}$$

由于 Higgs 场真空期望值在每一圈水平上必须严格为零，所以 tadpole 项对自能的贡献项 $-\frac{3}{2}i\delta_t m_h^2$ 可以在自能函数中加入而不含有任何的（依赖于减除方案的）任意

性。由 13.42 式得出在 $\xi=1$ 时

$$-i\delta\Sigma_{HH}^{\xi=1}(k^2) = -\frac{3}{2}i\delta_t m_h^2 = \frac{g^2}{8c^2}\{A(M)[-6\frac{m_h^2}{M_z^2}-12c^2D+12c^2] +A(M_z)[-3\frac{m_h^2}{M_z^2}-6D+6]+A(m_h)[-9\frac{m_h^2}{M_z^2}]\}\ , \quad (13.55)$$

将其并入 13.54 式得到加入了 tadpole 贡献的 Higgs 场自能函数在 $\xi=1$ 时的表达式：

$$\begin{aligned}-i\Sigma_{HH}^{\xi=1}(k^2) = &\frac{g^2}{8c^2}\{(\frac{m_h^4}{M_z^4}+12-4\frac{k^2}{M_z^2})M_z^2B_0(k^2,M_z,M_z)+9\frac{m_h^4}{M_z^2}B_0(k^2,m_h,m_h)\\ &+2c^2(\frac{m_h^4}{M^4}+12-4\frac{k^2}{M^2})M^2B_0(k^2,M,M)-6\frac{m_h^2}{M_z^2}A(m_h)\\ &-4c^2(\frac{m_h^2}{M^2}+6)A(M)-2(\frac{m_h^2}{M_z^2}+6)A(M_z)\}\ 。\end{aligned} \quad (13.56)$$

对于 R_ξ 规范需要在上面的表达式中补充一项： [2]

$$\begin{aligned}-i\Sigma_{HH}^{add} = &\frac{g^2}{8M^2}(m_h^2-k^2)\{(m_h^2+k^2)[B_d(\xi_z^{\frac{1}{2}}M_z,\xi_z^{\frac{1}{2}}M_z,M_z,M_z)\\ &+2B_d(\xi^{\frac{1}{2}}M,\xi^{\frac{1}{2}}M,M,M)]-2A_d(\xi_z^{\frac{1}{2}}M_z,M_z)-4A_d(\xi^{\frac{1}{2}}M,M)\}\ ,\end{aligned} \quad (13.57)$$

其中

$$\begin{aligned}&B_d(m_1,m_2,m_3,m_4)=B_0(k^2,m_1,m_2)-B_0(k^2,m_3,m_4)\ ,\\ &A_d(m_1,m_2)=A(m_1)-A(m_2)\ 。\end{aligned} \quad (13.58)$$

利用 13.56 、 13.57 式不难证明 13.2.2 一节中 δ_ϕ 与 δ_m 的表达式。另外，从 13.57 式一眼可以看出，在质壳上（对应着裸质量），规范依赖的部分消失。单圈水平下的详细计算指出这一结论具有普遍性，归纳为一个定理： 对应于所有物理粒子的自能函数，在动量取在（裸的）质壳上时，规范依赖完全消失。并且等于 $\xi=1$ 时的值。

重整化后的 Higgs 粒子的传播子为

$$\triangle_H^r(p^2)=\frac{1}{p^2-m^2-\Sigma_{HH}(p^2)+2\delta_\phi(p^2-m^2)-2\delta_m m^2}\ , \quad (13.59)$$

其中的 m 并不表示 Higgs 粒子的物理质量，而是重整化质量。物理质量记为 M_H 是传播子 $\triangle_H^r(p^2)$ 的极点：

$$M_H^2-m^2-\Sigma_{HH}(M_H^2)+2\delta_\phi(M_H^2-m^2)-2\delta_m m^2=0\ 。 \quad (13.60)$$

[2]见 Bardin 和 Passarino 的书

注意这个方程的解 M_H 并不一定为实数。如果 13.60 式有实数解，那么可以取一个简单的质壳重整化条件

$$2\delta_m m^2 = -\Sigma_{HH}(m^2)\ ,\ \ 2\delta_\phi = \Sigma'_{HH}(m^2)\ , \tag{13.61}$$

就可以得到重整化的传播子且 m 就是物理质量，且后者与规范无关。此时把传播子在极点 m 处展开，不难证明传播子的流数也与规范无关，但展开式的高阶项可以与 ξ 有关。

一般的情况下，我们把 Higgs 粒子极点记为 $M_H \equiv M_h - \frac{i}{2}\Gamma_h$ 。除了是束缚态的特殊情形外，它是在非物理平面上的 S 矩阵元的极点。 S 矩阵元的规范无关性保证了 M_H 不依赖于规范参数 ξ 的选取，但传播子 13.59 本身一般来说却是规范依赖的。S 矩阵元的规范无关性体现在如果将其中的传播子在其极点处展开，那么首先其极点位置和流数是规范无关的。剩下的（规范依赖）项只有与 S 矩阵元中的其余部分（比如 1PI 图的贡献）结合在一起后才能保证规范依赖性的相消。

§13.2.4 ϕ_1^3 顶角的重整化

ϕ_1^3 项的 Feynman 顶角是 $-i\frac{3gm^2}{2M}$ 。所有单圈修正加起来以后的发散项为

$$-i\triangle_g\{\frac{3}{2}g^3M(3+\xi^2)(\frac{1}{2c^4}+1)+3\xi\frac{g^3m^2}{4M}(-1-\frac{1}{2c^2})+3\xi^2\frac{g^3M}{2}(-1-\frac{1}{2c^4})\}\ . \tag{13.62}$$

而抵消项为

$$-i\frac{3gm^2}{2M}(\delta_g+2\delta_m-\delta_M+3\delta_\phi+\frac{1}{2}\delta_t)\equiv -i\frac{3gm^2}{2M}\delta_3\ . \tag{13.63}$$

这推出，

$$\begin{aligned}\delta_3 &= \delta_g+2\delta_m-\delta_M+3\delta_\phi+\frac{1}{2}\delta_t \\ &= -\triangle_g\{3\frac{M^2}{m^2}(1+\frac{1}{2c^4})+\frac{3m^2}{2M^2}-\frac{\xi}{4c^2}-\frac{\xi}{2}\}\end{aligned} \tag{13.64}$$

关于 Higgs 场的辐射修正，存在着一个著名的定理 (The screening theorem)，[3] 在单圈水平上，除了具有 *Higgs* 外腿的那些图外，物理可观测量对 *Higgs* 质量仅具有对数依赖关系。正比于 *Higgs* 质量平方的项可以被吸收到参数的重新定义中去因而不能被观测到。

[3] M. Veltman, Acta. Phys. Polon. B8(1977)475.

§13.3 规范场部分的单圈重整化 (R_ξ 规范)

下面列出在 R_ξ 规范中标准模型拉氏量的重整化常数

$$\begin{aligned}
\delta_W &= -\frac{25-6\xi}{12}\triangle_g\ , \\
\delta_Z &= -(\frac{4-\xi}{2}c^2+\frac{1}{6}-\frac{1}{12c^2})\triangle_g\ , \\
\delta_A &= -\frac{4-\xi}{2}s^2\triangle_g\ , \\
\delta_{0A} &= \frac{3+\xi}{2}cs\triangle_g\ ,\ \ \delta_{A0}=-(\frac{11-\xi}{2}cs+\frac{s}{6c})\triangle_g\ , \\
\delta_c &= (\frac{7}{2}s^2+\frac{s^2}{12c^2})\triangle_g\ .
\end{aligned} \tag{13.65}$$

且它们之间有如下关系式,

$$\begin{aligned}
&\delta_c=\frac{s}{2c}(\delta_{0A}-\delta_{A0})\ ,\ \ 2cs(\delta_Z-\delta_A)=(c^2-s^2)(\delta_{0A}+\delta_{A0})\ , \\
&\frac{2s}{c}(\delta_W-\delta_A)=\delta_{0A}+\delta_{A0}\ 。
\end{aligned} \tag{13.66}$$

还有

$$\begin{aligned}
\delta_t &= -[3\frac{M^2}{m^2}+\frac{3}{2c^4}\frac{M^2}{m^2}+\frac{3m^2}{4M^2}+\xi(\frac{1}{2}+\frac{1}{4c^2})]\triangle_g \\
\delta_\phi &= -\frac{3-\xi}{2}(\frac{1}{4c^2}+\frac{1}{2})\triangle_g\ , \\
\delta_m &= (-\frac{3m^2}{8M^2}+\frac{3}{8c^2}+\frac{3}{4})\triangle_g\ , \\
\delta_M &= (\frac{17}{6}-\frac{3}{8c^2}+\frac{3M^2}{2m^2}+\frac{3M^2}{4c^4m^2}+\frac{3m^2}{8M^2})\triangle_g\ , \\
\delta_g &= \frac{43}{12}\triangle_g\ .
\end{aligned} \tag{13.67}$$

其余的重整化常数可以从上面给定的量中导出来

§13.3.1 Z 规范玻色子的自能重整化

相应的抵消项拉氏量为,

$$\mathcal{L}^{c.t.}=\delta_Z Z_\mu(\partial^2 g^{\mu\nu}-\partial^\mu\partial^\nu)Z_\nu+\frac{M^2}{2c^2}Z_\mu Z^\mu(2\delta_W+2\delta_M-2\delta_c+\delta_t) \tag{13.68}$$

抵消相对应的顶角为 $-2i\delta_Z(k^2g^{\mu\nu}-k^\mu k^\nu)+i\frac{M^2}{c^2}g^{\mu\nu}(2\delta_Z+2\delta_M-2\delta_c+\delta_t)$ 。单圈图贡献见图 13.4 , 计算得出,

$$\begin{aligned}
\delta_Z &= -\triangle_g(\frac{4-\xi}{2}c^2+\frac{1}{6}-\frac{1}{12c^2})\ , \\
2\delta_Z+2\delta_M-2\delta_c+\delta_t &= -\triangle_g\left[\frac{1}{4c^2}+\frac{1}{2}-c^2\right](3+\xi)\ .
\end{aligned} \tag{13.69}$$

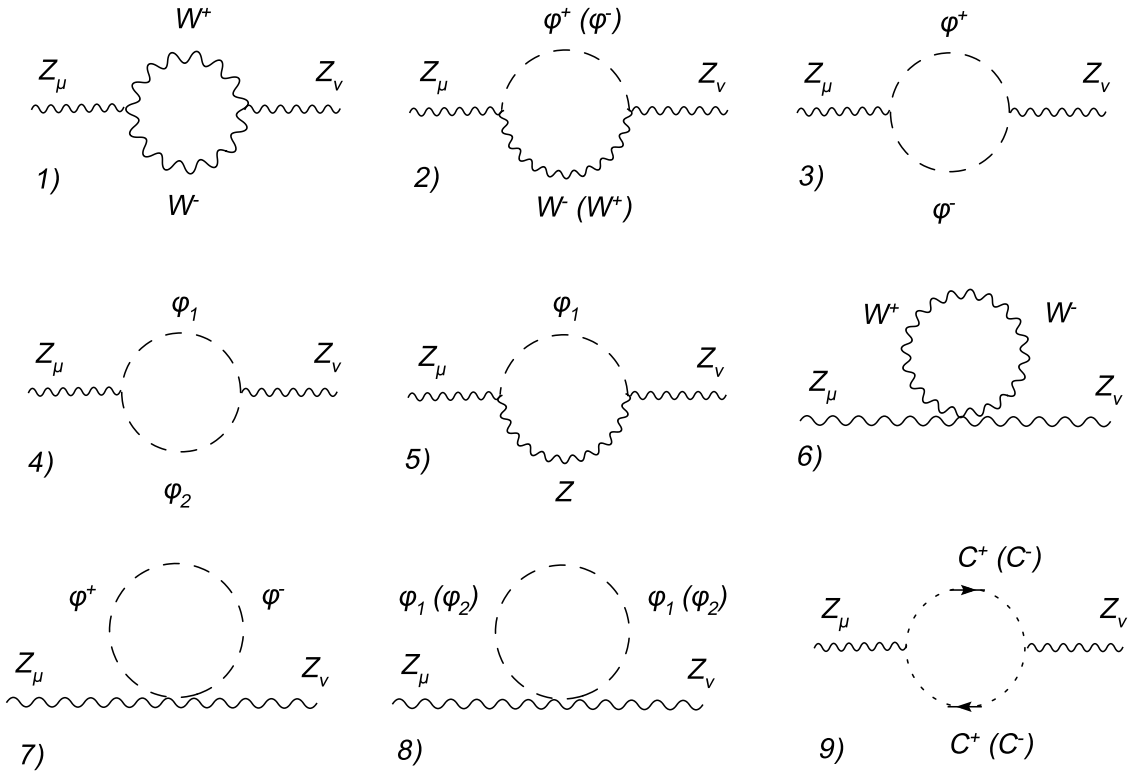


图 13.4:

§13.3.2 Z 规范玻色子与光子场的混合项的重整化

抵消项拉氏量,

$$\mathcal{L}^{c.t.} = (\delta_{A0} + \delta_{0A})Z^{\mu}(\partial^2 g_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu})A^{\nu} + \frac{M^2}{c^2}\delta_{0A}Z_{\mu}A^{\mu} \ , \tag{13.70}$$

其中第一项是从规范粒子的运动学项出来的而第二项是从 Z 的质量项出来的。单圈图修正如图 13.5 所示 计算结果如下,

$$\delta_{0A} = \frac{3+\xi}{2}cs\triangle_g \ , \ \ \delta_{A0} + \delta_{0A} = -[(4-\xi)cs + \frac{s}{6c}]\triangle_g \ , \tag{13.71}$$

推出 $\delta_{A0} = -(\frac{s}{6c} + \frac{11-\xi}{2}cs)\triangle_g$ 。由 13.66 式和 δ_Z 的结果推出 δ_c 、 δ_A 和 δ_W 的表达式而不再需要作圈图计算了，结果已列在 13.65 式中了。并进一步由 13.69 式推出 δ_M 的表达式。结论是 δ_M 、 δ_m 和 δ_c 的表达式是规范无关的，而其余的重整化常数是规范相关的。

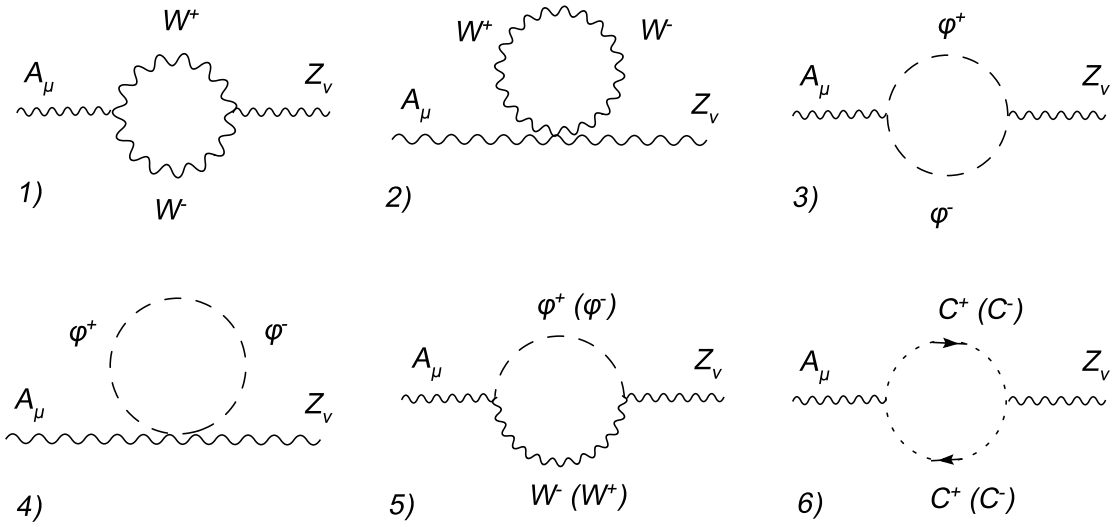


图 13.5:

§13.4 标准模型中跑动耦合常数所满足的重整化群方程

有了各种重整化常数后可以在与质量无关的最小减除方案中计算出标准模型的跑动耦合常数所满足的重整化群方程，结果如下：

$$16\pi^2\frac{d\lambda}{dt} = 24\lambda^2 + 12\lambda g_t^2 - 6g_t^4 - (9g_2^2 + 3g_1^2)\lambda + \frac{9}{8}g_2^4 + \frac{3}{4}g_2^2g_1^2 + \frac{3}{8}g_1^4 \,, \tag{13.72}$$

$$16\pi^2\frac{dg_t}{dt} = \{\frac{9}{2}g_t^2 - 8g_s^2 - \frac{9}{4}g_2^2 - \frac{17}{12}g_1^2\}g_t \,, \tag{13.73}$$

$$16\pi^2\frac{dg_s}{dt} = -7g_s^3 \,, \tag{13.74}$$

$$16\pi^2\frac{dg_2}{dt} = -\frac{19}{6}g_2^3 \,, \tag{13.75}$$

$$16\pi^2\frac{dg_1}{dt} = \frac{41}{6}g_1^3 \,, \tag{13.76}$$

在上述方程中只保留了 t 夸克的 Yukawa 耦合 g_t ($g_t = \sqrt{2}m_t/v$)。注意在上述方程中每一个 Yukawa 耦合都要理解成乘以一个阈因子：$\theta = \theta(t - \ln(M/M_z))$。这里的 θ 函数正确的反映了物理阈效应。这里值得注意的是，在 5.4 节中得到的质量无关的重整化群方程并不能够正确的反映出阈效应。重整化群方程中的质量参数所起的作用可以由 5.3 节中的 5.52 式理解，

$$\beta(\lambda, \frac{\mu}{\nu}) = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2}\int_0^1 dx \frac{\nu^2 x(1-x)}{\mu^2 + \nu^2 x(1-x)} + O(\lambda^3) \tag{13.77}$$

$$\equiv \frac{3\lambda^2}{16\pi^2}\Theta(\frac{\mu}{\nu}) \ . \tag{13.78}$$

当 $\nu >> \mu$，也即能标跑动到远远大于粒子质量时，$\Theta \to 1$。而当 $\nu << \mu$ 时，也即能标跑动到远远小于粒子质量时，$\Theta \to 0$。阶梯函数 θ 虽然简单但是是一个较为精确的近似，反映了物理质量的阈效应。

标准模型重整化群方程的两圈计算在文献中也已给出，但是发现两圈的贡献直到 Planck 能标时都是非常小的。

§13.4.1 有效势的单圈修正与真空稳定性 *

下面我们将讨论有效势的量子修正，并且在此基础上利用重整化群方法来改善其可靠性。我们指出利用标准模型的真空稳定性的要求，以及 $\lambda\phi^4$ 耦合常数的“平庸性”限。可以来讨论对重的费米子或 Higgs 粒子的质量限制。

有效势的单圈水平下的计算最早是由 Coleman 和 Weinberg 给出的，[4]

$$V(\phi) = V_0 + V_1 \tag{13.79}$$

其中

$$V_0 = -\frac{1}{2}\mu^2\phi_c^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi_c^4 \tag{13.80}$$

且

$$V_1 = \frac{1}{64\pi^2}\sum_i (-1)^F \eta_i \mathcal{M}^4(\phi_c)\ln\frac{\mathcal{M}^2(\phi_c)}{M^2} \tag{13.81}$$

其中求和是对模型中的所有粒子进行的，F 是费米子数，η_i 是粒子 i 所具有的自由度数，$\mathcal{M}^2(\phi_c)$ 是当标量场具有真空期望值 ϕ_c 时一个场所具有的质量。在 V_1 的表达式中，我们忽略了那些可以被吸收到 V_0 的项，这些项是由重整化条件决定的。在标准模型中对于 W 玻色子，$\mathcal{M}^2(\phi_c) = \frac{1}{4}g^2\phi_c^2$，对于 Z 玻色子，$\mathcal{M}^2(\phi_c) = \frac{1}{4}(g^2+g'^2)\phi_c^2$，对于 Higgs 玻色子，$\mathcal{M}^2(\phi_c) = -\mu^2 + 3\lambda\phi_c^2$，对于 Goldstone 玻色子，$\mathcal{M}^2(\phi_c) = -\mu^2 + \lambda\phi_c^2$，对于 t 夸克 $\mathcal{M}^2(\phi_c) = \frac{1}{2}h^2\phi_c^2$。当 ϕ 很大时，平方项可忽略且势变为，

$$V = \frac{1}{4}\lambda\phi^4 + B\phi^2\ln(\phi^2/M^2) \tag{13.82}$$

其中

$$B = \frac{3}{64\pi^2}[4\lambda^2 + \frac{1}{16}(3g^4 + 2g^2g'^2 + g'^4) - h^4] \tag{13.83}$$

从中可以得知在 ϕ 很大的地方，如果 B 小于零则势变成没有下界。这就会给出由真空稳定性给出的对粒子质量的限制。

[4] S. Coleman and E. Weinberg, Phys. Rev. D7(1974)1888 。

虽然单圈有效势的表达式是标准的，但是它并不能够正确地用来讨论真空稳定性问题。设 $\alpha = [\max(\lambda, g^2, h^2)]/(4\pi)$ ，按圈图展开实际上是按 α 的幂次展开，但是也同时是按 $\ln(\phi_c^2/M^2)$ 的幂次展开的，因为每一个圈动量积分有一个对数发散，在重整化后变为一个 $\ln(\phi_c^2/M^2)$ 。于是， n 圈时的势具有如下形式的项

$$\alpha^{n+1}[\ln(\phi^2/M^2)]^n \tag{13.84}$$

为使展开有意义，展开参数必须小于 1 。对于任意的 ϕ 值，可以选取 M 以使对数因子保持为小量。但是如果我们对一个很大的能量变化范围 ϕ_1 到 ϕ_2 都感兴趣，那么必须保证要使 $\alpha \ln(\phi_1/\phi_2)$ 是小量。在讨论真空稳定性时，我们必须同时在弱电能标和很大的能标下考察有效势。此时对数项通常会很大。因此单圈结果并不可靠。

更可靠的、不出现大的对数因子的展开是找出有效势的重整化群方程的解。这一方程是由如下观测得出的，即有效势不依赖于任意的重整化质量参数 M ，即 $dV/dM = 0$ 。利用链式法则，

$$[M\frac{\partial}{\partial M} + \beta(g_i)\frac{\partial}{\partial g_i} - \gamma\phi\frac{\partial}{\partial \phi}]V = 0 \tag{13.85}$$

其中 $\beta = M dg_i/dM$ ，并且每一个耦合常数和质量参数都有一个相应的 β 函数。 γ 函数是反常量纲。 13.85 式的重要之处在于它是严格的。如果我们知道严格的 β 函数和反常量纲，那我们就知道 V 到所有能量标度的严格解。 β 和 γ 是按耦合常数展开的，只要耦合常数足够小， $g_i << 1$ 那么 $V(\phi)$ 就可以足够的准确。而并不需要考虑 $g_i \ln(\phi/M) << 1$ 的要求。

比如在无质量的 $\lambda\phi^4$ 中，重整化群方程可以严格求解：

$$V = \frac{1}{4}\lambda'(t,\lambda)G^4(t,\lambda)\phi^4 \tag{13.86}$$

其中 $t = \ln(\phi/M)$ 且 $\lambda'(t,\lambda)$ 是如下方程的解

$$\frac{d\lambda'}{dt} = \frac{\beta(\lambda')}{(1+\gamma(\lambda'))} \tag{13.87}$$

而边界条件由重整化条件决定。$G(t,\lambda)$ 的定义是 $\exp(-4\int_0^t dt'(\gamma(\lambda')/(1+\gamma(\lambda'))))$ 。在 $\gamma = 0$ 且 $\beta =$ 常数时， $G = 1$ 且 $\lambda' = \beta t +$ constant 。由 $t = \ln(\phi/M)$ 给出单圈有效势中的 $\phi^4 \ln(\phi/M)$ 项。

对于有质量的情形，情况要复杂的多，此时的 RGE 为

$$[M\frac{\partial}{\partial M} + \beta_\lambda\frac{\partial}{\partial \lambda} + \beta(g_i)\frac{\partial}{\partial g_i} + \beta_{\mu^2}\mu^2\frac{\partial}{\partial \mu^2} - \gamma\phi\frac{\partial}{\partial \phi}]V = 0 \tag{13.88}$$

也许可以把方程的解尝试写为

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2(t)g^2(t)\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda(t)G^4(t)\phi^4, \tag{13.89}$$

其中各项系数为满足 一阶常微分方程的跑动耦合常数。但是这样的写法是不正确的。原因是对于无质量的理论唯一的标度是 ϕ，所以所有的对数项只可能形式为 $t = \ln(\phi^2/M^2)$。对于有质量的理论存在着另外的一个标度，因而存在着形如 $\ln((-\mu^2 + 3\lambda\phi^2)/M^2)$ 的对数项。因而并不存在着一个对对数项的简单求和。另外此时有效势中的常数项（宇宙学常数项）的标度依赖关系也是不可忽略的。对于大的 ϕ，可以忽略质量项和常数项，但是 有效势在其极小值附近的结构变得重要。13.89 式并不精确。 Bando, et al. 和 Ford, et al.[5]，研究了有额外的对数项的有质量理论的的处理方法。他们得到的一般结论是，如果考虑 L 圈的有效势，利用 $L+1$ 圈的 β 和 γ 函数，那么所有对数项都可以正确的表达，从领头阶一直到 L 阶次的次领头阶。包括所有领头阶及次领头阶的标准模型的有效势 ('t Hooft 规范) 为，

$$\begin{aligned} V(\phi) \quad &= -\tfrac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \tfrac{1}{4}\lambda\phi^4 + \tfrac{1}{16\pi^2}[\tfrac{3}{2}W^2\left(\ln\tfrac{W}{M^2} - \tfrac{5}{6}\right) + \tfrac{3}{4}Z^2\left(\ln\tfrac{Z}{M^2} - \tfrac{5}{6}\right) \\ &\quad + \tfrac{1}{4}H^2\left(\ln\tfrac{H}{M^2} - \tfrac{3}{2}\right) + \tfrac{3}{4}G^2\left(\ln\tfrac{G}{M^2} - \tfrac{3}{2}\right) - 3T^2\left(\ln\tfrac{T}{M^2} - \tfrac{3}{2}\right)] \end{aligned} \tag{13.90}$$

其中 $W \equiv g^2\phi^2/4$, $Z \equiv (g^2 + g'^2)\phi^2/4$, $H \equiv -\mu^2 + 3\lambda\phi^2$, $G \equiv -\mu^2 + \lambda\phi^2$ 和 $T = h^2\phi^2/2$。这个势中所有的耦合常数都依据 $t = \ln\phi/M$ 跑动。利用两圈的 β 和 γ 函数上面的势中所有的领头和次领头阶对数项都被包括进来了。计算表明[6] 势 13.90 式的极小值以及质量等对于 M 的选取并不敏感。

这里值得指出的是有效势是规范依赖的（这最早是由 R. Jakiw 指出的），那么为什么可以从规范依赖的势中得到 Higgs 质量限呢？ $V(\phi)$ 是规范有关的，但可以证明其平方发散的部分至少到单圈是规范无关的。[7] 在 Coleman–Weinberg 模型中对于有效势在 R_ξ 规范中的两圈计算表明 Higgs 质量的 ξ 依赖性最后消掉了。[8] 关于标准模型有效势的一个有趣的应用可见 Altarelli 和 Isidori 的文章，其中讨论了标准模型到何种能量标度下仍然保持有效的必要条件。参见图 13.6。

[5] M. Bando, T. Kugo, N. Maekawa and H. Nakano, Phys. Lett. B301(1993)83; Prog. Theor. Phys. **90,** 405 (1993)。 C. Ford, D.R.T. Jones, P.W. Stephenson and M.B. Einhorn, Nucl. Phys. B395(1993)17。

[6] J.A. Casas, J.R. Espinosa, M. Quiros and A. Riotto, Nucl. Phys. B436(1995)3; (E) Nucl. Phys. B439(1995)466。

[7] R. Fukuda and T. Kugo, Phys. Rev. **D13**,3469(1976)。

[8] J.S. Kang, Phys. Rev. D10(1974)3455。

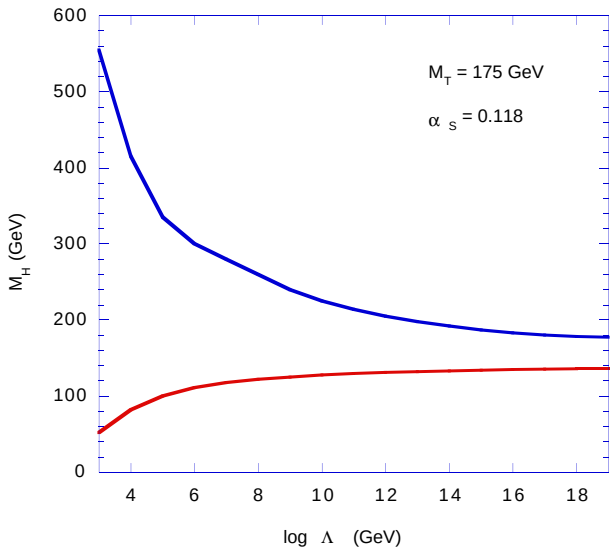


图 13.6: Higgs 质量的 " 平庸性 " 限 (由图中的蓝线表示) 与真空稳定性限 (由红线表示) (P. H. Frampton, P. Q. Hung, M. Sher, Phys. Rept. 330 (2000) 263 。)

附录一　标准模型中 R_ξ 规范下的 Feynman 规则

费米子传播子

$$\psi_i: \qquad iS_f(p)=\frac{i}{\not{p}-m_i} \tag{A.1}$$

规范粒子的传播子

$$\begin{aligned}
&\gamma: \qquad iD_{\mu\nu}(k)=-i\frac{g_{\mu\nu}-(1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}}{k^2}\\
&W^\pm: \qquad iD^\pm_{\mu\nu}(k)=-i\frac{g_{\mu\nu}-(1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2-\xi M_W^2}}{k^2-M_W^2}\\
&Z: \qquad iD^Z_{\mu\nu}(k)=-i\frac{g_{\mu\nu}-(1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2-\xi M_Z^2}}{k^2-M_Z^2}
\end{aligned} \tag{A.2}$$

Higgs 粒子和 Goldstone 粒子的传播子

$$\begin{aligned}
&\phi^\pm: \qquad i\triangle^\pm(k)=\frac{i}{k^2-\xi M_W^2}\\
&\phi_1\ (h): \qquad i\triangle_1(k)=\frac{i}{k^2-2\mu^2}\\
&\phi_2\ : \qquad i\triangle_2(k)=\frac{i}{k^2-\xi M_Z^2}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Fadeev–Popov 鬼粒子的传播子

$$\begin{aligned}
&C^\pm: \qquad i\triangle^\pm_C(k)=\frac{-i}{k^2-\xi M_W^2}\\
&C_Z: \qquad i\triangle_Z(k)=\frac{-i}{k^2-\xi M_Z^2}\\
&C_\gamma: \qquad i\triangle_\gamma(k)=\frac{-i}{k^2}
\end{aligned} \tag{A.4}$$

其中 $C^\pm=\frac{1}{\sqrt{2}}(C_1\pm iC_2)$，$C_Z=C_3\cos\theta_W-C\sin\theta_W$，$C_\gamma=C_3\sin\theta_W+C\cos\theta_W$。

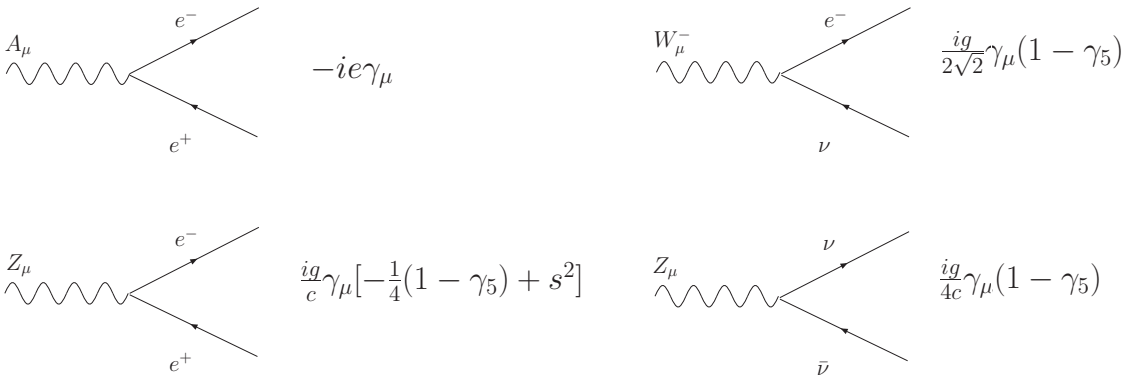


图 A.1: 规范粒子与费米子的耦合

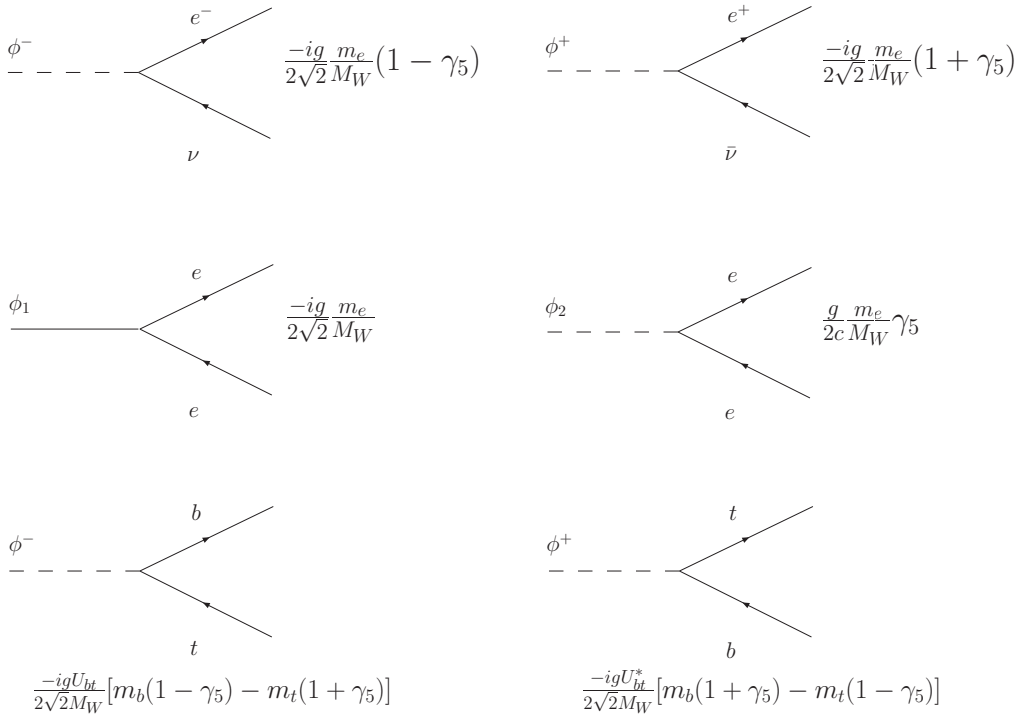


图 A.2: Higgs 粒子和 Goldstone 粒子与费米子的耦合

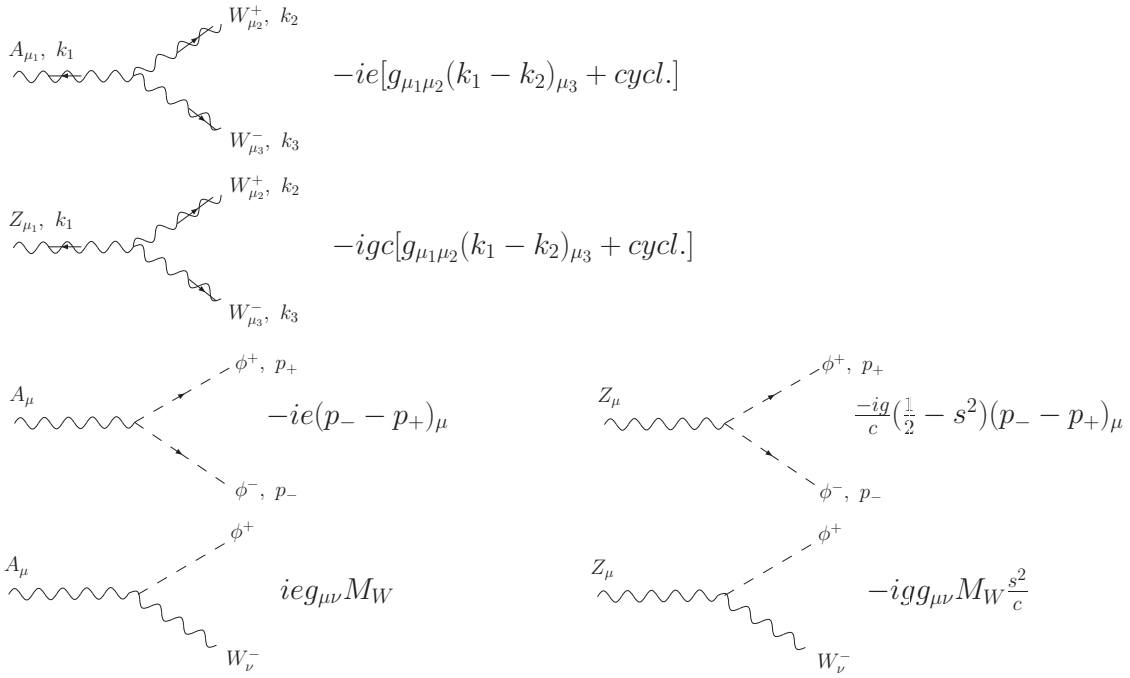


图 A.3: 标准模型中规范场与 Higgs 场部分各种三点耦合顶角（ 1 ）

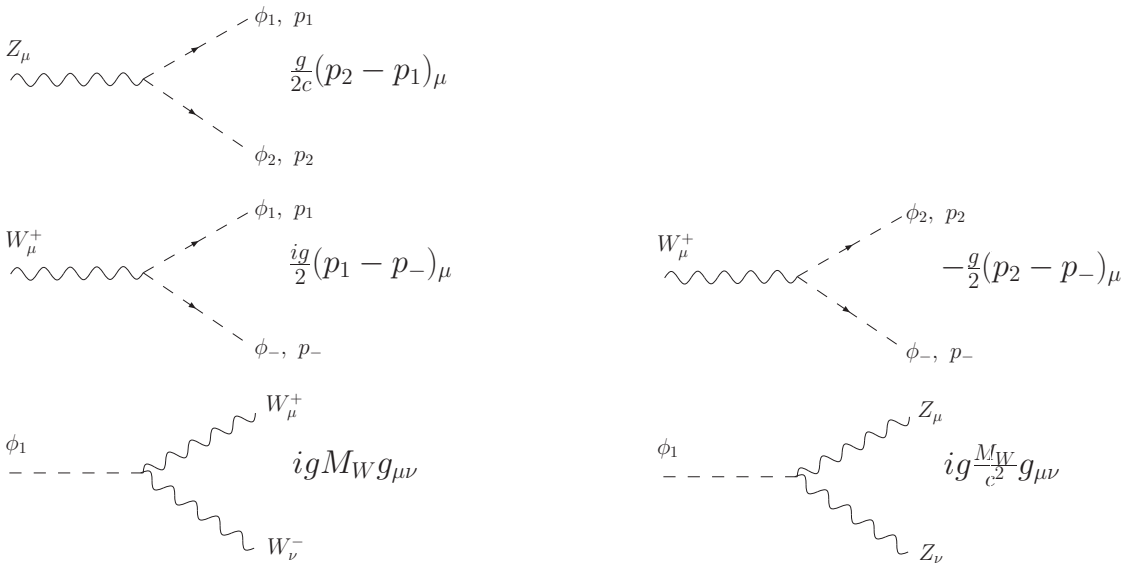


图 A.4: 标准模型中规范场与 Higgs 场部分各种三点耦合顶角（ 2 ）

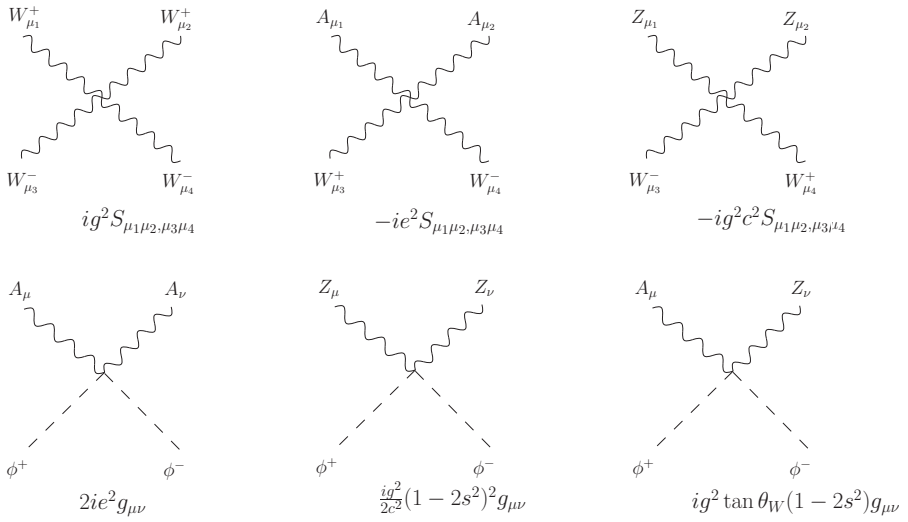


图 A.5: 标准模型中规范场及 Higgs 场部分的四点耦合顶角（ 1 ）

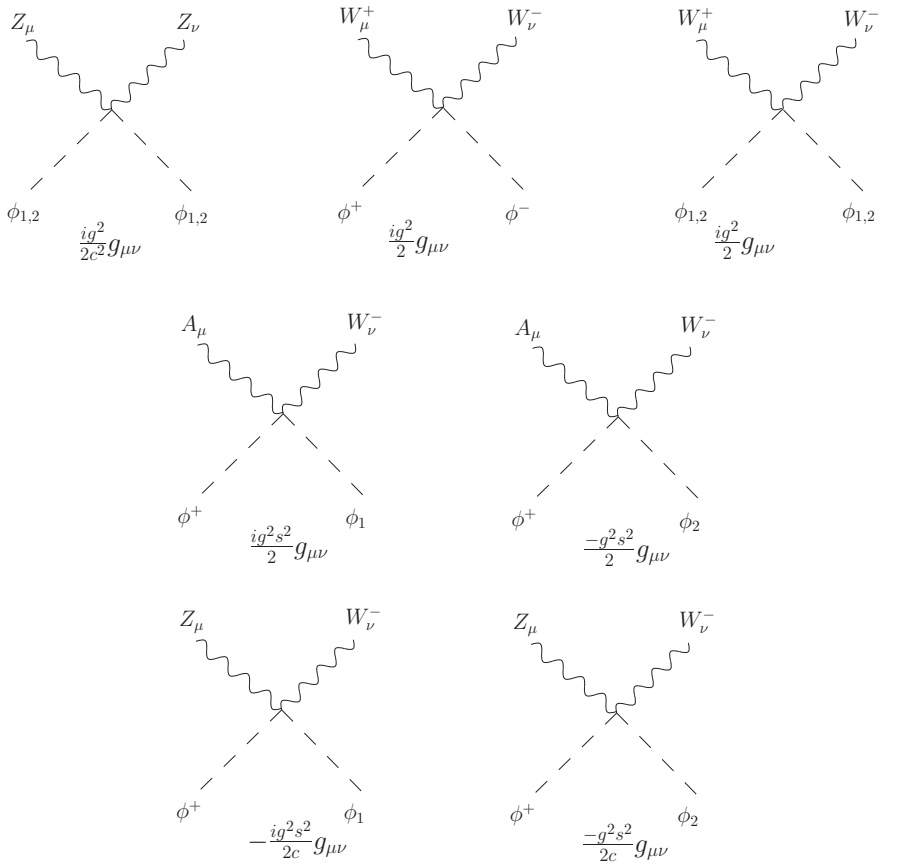


图 A.6: 标准模型中规范场及 Higgs 场部分的四点耦合顶角（ 2 ）

附录二　分波 S 矩阵元的性质

§B.1　运动学、光学定理和分波振幅

在入态和出态以平面波为基失表述时，S 矩阵与 T 矩阵的关系是,

$$S = \mathbf{1} + i\mathcal{T}。 \tag{B.1}$$

以 $2 \to n$ 体反应为例，对于 $\mathcal{T}$ 我们还可以定义不变矩阵元 $\mathcal{M}$,

$$< p_f|i\mathcal{T}|p_1, p_2 >= 1 + i(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - \sum p_f)\mathcal{M}(p_1, p_2 \to p_f)。 \tag{B.2}$$

其中 $\mathcal{M}$ 是 Lorentz 不变振幅。由于几率守恒，$S^+S = \mathbf{1}$，而光学定理是几率守恒的直接结果：

$$-i(\mathcal{T} - \mathcal{T}^+) = \mathcal{T}^+\mathcal{T}。 \tag{B.3}$$

考虑上式 $2 \to 2$ 散射的矩阵元。首先在上式右边插入一组中间态的完备集，导出，

$$< p_3p_4|\mathcal{T}^+\mathcal{T}|p_1p_2 >= \sum_n \prod_{i=1}^n \int \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_i} < p_3p_4|\mathcal{T}^+|n >< n|\mathcal{T}|p_1p_2 > 。 \tag{B.4}$$

利用 T（时间）反演不变性，再利用 B.2 式，导出（用符号 T 来代替 $\mathcal{M}$ ）

$$\begin{aligned}&2\mathrm{Im}T(p_1p_2 \to p_3p_4) = \\ &\sum_n \prod_{i=1}^n \int \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_i}T^*(p_3p_4 \to n)T(p_1p_2 \to n) \times (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - \sum_i k_i)。\end{aligned} \tag{B.5}$$

这个式子可以简写为,

$$2\mathrm{Im}T(i \to f) = \sum_n \int d\Pi_n T^*(i \to n)T(f \to n)。 \tag{B.6}$$

当 $i = f$ 时，上式就给出了光学定理。

$$\mathrm{Im}T(p_1p_2 \to p_1p_2) = 2k_{cm}\sqrt{s}\sigma_{tot}(p_1p_2 \to \text{anything})。 \tag{B.7}$$

其中 k_{cm} 是质心系中某入射粒子的动量（比如对于相同质量粒子的散射，$2k_{cm} = \sqrt{s - 4m^2}$ ），$\sqrt{s}$ 是质心系中的总能量。如果时间反演不变性不再成立，则 B.5 式的形式不再是对的，但光学定理 B.7 式仍然成立。

当质心系能量足够小而落在弹性散射区内时，我们可以作更进一步的讨论。例如在 $4m_\pi^2 < s < 16m_\pi^2$ 时的 $\pi\pi$ 散射。在质心系中，取 $\vec{p}_1$ 的方向为 z 轴，设 $\vec{p}_3$ 的

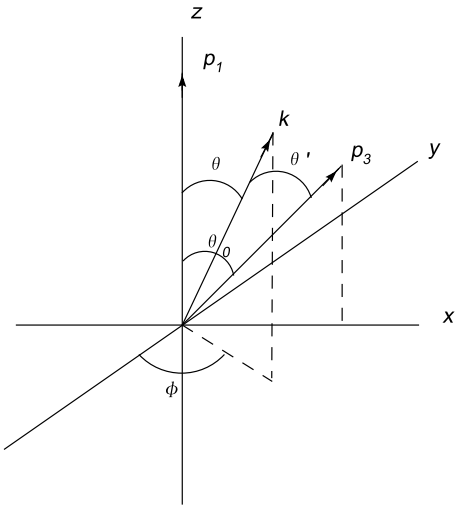


图 B.1:

落在 xz 平面上，与 $\vec{p}_1$ 夹角为 θ_0 。令 $\vec{k}$ 的 polar angle（球坐标下）为 θ 、 ϕ 。另设 θ' 为 $\vec{k}$ 与 $\vec{p}_3$ 之间的夹角。（见图 B.1 ）这样 B.5 式可写为，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}T(s,\cos\theta_0) &= \frac{1}{8\pi^2}\int d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 \frac{\delta(2\omega_k-\sqrt{s})\delta(\vec{k}_1+\vec{k}_2)}{4\omega_k^2} T(s,\cos\theta)T^*(s,\cos\theta') \\
&= \frac{1}{8\pi^2}\int_0^\infty \frac{k^2 dk\delta(\omega_k-\omega)}{8\omega_k^2}\int d\Omega T(s,\cos\theta)T^*(s,\cos\theta') \\
&= \frac{1}{64\pi^2}\frac{k}{\omega}\int d\Omega T(s,\cos\theta)T^*(s,\cos\theta')。
\end{aligned} \tag{B.8}$$

推导中用到了 $kdk=\omega d\omega$ 。现在我们引入分波展开，

$$T(s,\cos\theta)=16\pi\sum_0^\infty(2l+1)P_l(\cos\theta)T_l(s)\ , \tag{B.9}$$

它导致了

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}T(s,\cos\theta_0) &= \frac{1}{4\pi}\frac{k}{\omega}\sum_{l\ ,l'}\int d\Omega P_l(\cos\theta)P_{l'}(\cos\theta') \\
&\quad \times T_l(s)T_{l'}^*(s)(2l+1)(2l'+1)。
\end{aligned} \tag{B.10}$$

由关系式，

$$\cos\theta'=\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos\phi \tag{B.11}$$

再利用公式，

$$\int d\Omega P_l(\cos\theta)P_{l'}(\cos\theta')=\frac{4\pi}{2l+1}\delta_{l,l'}P_l(\cos\theta_0)\ , \tag{B.12}$$

得出

$$\sum_l (2l+1)P_l(\cos\theta_0)\mathrm{Im}T_l(s) = \frac{k}{\omega}\sum_l (2l+1)P_l(\cos\theta_0)|T_l(s)|^2。 \tag{B.13}$$

最终我们得到,

$$\mathrm{Im}T_l(s) = \frac{k}{\omega}|T_l(s)|^2。 \tag{B.14}$$

为简单起见上面的推导假设了入射、出射粒子的质量相同，此时 $k/\omega = \rho(s) = \sqrt{1-4m^2/s}$ 。[1] 此外还假设了中间态两粒子是可区分的。 如果中间态是全同粒子，则 B.8 式等式右边还要乘上一个 1/2 的因子 。[2] 相应地，分波展开的公式 B.9 式要改写成,

$$T(s,\cos\theta) = 32\pi\sum_0^\infty (2l+1)P_l(\cos\theta)T_l(s) \tag{B.15}$$

以使 B.14 式成立。引入分波展开 B.9 式的一个很大的好处是，在低能情况下我们只需考虑几个低角动量的分波的贡献。因为根据经典理论，一个粒子的角动量 $l \geq q_s R$ （ q_s 是粒子动量， R 是相互作用力程) 时，它将错失与靶的碰撞。如果粗略地认为强相互作用的力程是 1fm , 则当 $q_s \leq 200\mathrm{MeV}$ 时，只需考虑 s 波而当 $q_s \leq 400\mathrm{MeV}$ 时仅需考虑 s 和 p 波，等等。

分波 S 矩阵可以定义为

$$S_l = 1 + 2i\rho(s)T_l(s)。 \tag{B.16}$$

首先这个分波 S 矩阵变成了一个数，且我们有分波幺正性条件

$$S_l^+ S_l = 1。 \tag{B.17}$$

所以 S_l 和 $T_l(s)$ 可以参数化为

$$S_l = e^{2i\delta_l(s)} \ , \ T_l(s) = \frac{1}{\rho(s)}\sin\delta_l(s)e^{i\delta_l(s)}。 \tag{B.18}$$

并且有

$$T(s,\cos\theta) = \frac{16\pi}{\rho}\sum_{l=0}^\infty (2l+1)P_l(\cos\theta)e^{i\delta_l}\sin\delta_l。 \tag{B.19}$$

它与散射理论中的表达式一致。注意对于全同粒子上式中的 16π 要改成 32π 。值得指出的是对于不可区分的全同粒子，上面的分波展开的公式中奇数的 l 所对应的项不存在。因为根据 Bose 统计，交换初态或者末态粒子不产生任何变化，但是导

[1] 为简化讨论，这里仅处理等质量粒子的 散射。

[2] 此时 $\sum_n \to \frac{1}{2}\sum_{k_1\ ,k_2}$ 。

致 $t \rightleftharpoons u$ ， s 不变，而这又导致 $\cos\theta \to -\cos\theta$ 。[3] 所以这种交换不变性要求那些 $\cos\theta$ 为奇的项也既是 l 为奇的项消失。

由 B.7 和 B.9 式，可以把总截面用分波弹性散射振幅的吸收部分表达出来，

$$\sigma^{tot}(p_1p_2 \to all) = \frac{8\pi}{k_{cm}\sqrt{s}} \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\mathrm{Im}\, T_l^{el}(s) \ . \tag{B.20}$$

而作为 B.14 式的推广，在一般情况下我们有，

$$\mathrm{Im}\, T_{11}^{(l)}(s) = \sum_i \rho_i |T_{1i}^{(l)}(s)|^2 \ , \tag{B.21}$$

其中下标 1 代表所考虑的弹性道， ρ_i 表示第 i 道的运动学因子。所以弹性散射的总截面可以用分波振幅如下表达：

$$\sigma^{el} = \frac{16\pi}{s} \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)|T_l^{el}(s)|^2 \ . \tag{B.22}$$

由 B.21 式容易证明： $\rho_1 \mathrm{Im}\, T_{11}^{(l)}(s) \le 1$ ， $\rho_1 |T_{11}^{(l)}(s)| \le 1$ ， $\sqrt{\rho_i\rho_j}|T_{ij}^{(l)}(s)| \le 1/2$ $(i \ne j)$ 和 $\rho_1 |\mathrm{Re} T_{11}| \le 1/2$ ，并且很显然朝前散射振幅的虚部还因该是正定的。利用这些幺正性的结果和解析性条件， Froissart(1961) 和 Martin(1964) 严格地证明了在 $s \to \infty$ 时朝前振幅和总截面所满足的 Froissart 限：

$$\begin{aligned} |T(s, \cos\theta = 1)| &< const. \times s(\log s)^2 \ , \\ |T(s, \cos\theta < 1)| &< const. \times \frac{s^{3/4}(\log s)^{3/2}}{(\sin\theta)^{1/2}} \ , \end{aligned} \tag{B.23}$$

和

$$\sigma_{tot} < const. \times (\log s)^2 \ . \tag{B.24}$$

§B.2 有自旋时的分波展开

§B.2.1 螺旋度振幅的分波展开

假设入态的两个粒子分别具有量子数 p_1, σ_1, μ_1 和 p_2, σ_2, μ_2 ，其中 p 代表动量、σ 代表自旋， μ 表示螺旋度。两粒子在 s 道的质心系中沿着 z 轴相对运动，其波函数可以按总角动量 J 的分波进行展开：

$$|p_1, \sigma_1, \mu_1; p_2, \sigma_2, \mu_2 > = (16\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{J=|\mu|}^{\infty} (2J+1)^{\frac{1}{2}} |s, J, \mu, \mu_1, \mu_2 > \ , \tag{B.25}$$

[3] 例如对于 $\pi\pi \to \pi\pi$ 散射， $\cos\theta = 1 + \frac{2t}{s-4m_\pi^2} = \frac{t-u}{s-4m_\pi^2}$ 。

其中 $\mu=\mu_1-\mu_2$ 是 J 的 z 分量， $s=(p_1+p_2)^2$ ， $[(16\pi(2J+1)]^{\frac{1}{2}}$ 是一个适当的归一化因子。对于两粒子系统，其轨道角动量一定垂直于其动量方向，所以 $J_z=\mu$ 。由于显然有 $J\geq J_z$ ，所以在上式中的求和是从 μ 开始的。类似的，末态的两粒子在相对于 z 轴角度为 θ,ϕ 的方向上相对运动，其相应的分解为：

$$\begin{aligned}|p_3,\sigma_3,\mu_3;p_4,\sigma_4,\mu_4> &= (16\pi)^{\frac{1}{2}}\sum_{J=|\mu'|}^{\infty}\sum_{\mu''=-J}^{J}(2J+1)^{\frac{1}{2}}\\ &\times\mathcal{D}^{J}_{\mu''\mu'}(\phi,\theta,-\phi)|s,J,\mu'',\mu_3,\mu_4>\ ,\end{aligned}\tag{B.26}$$

其中 $\mu'=\mu_3-\mu_4$ 是 J 在运动方向上的投影， μ'' 是 J 在 z 轴上的投影。函数 $\mathcal{D}$ 的表达式如下：

$$\mathcal{D}^{J}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma)=e^{im'\alpha}d^{J}_{m'm}(\beta)e^{im\gamma}\ 。\tag{B.27}$$

转动矩阵 $d^{J}_{m'm}$ 的表达式及其性质的讨论可以参见 Collins 的书。 由于角动量守恒我们可以对于每一个 J 定义一个分波振幅：

$$A^{J}_{H}(s)\equiv<s,J,\mu'',\mu_3,\mu_4|A|s,J,\mu,\mu_1,\mu_2>\ ,\ \ H\equiv\{\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4\}\ ,\tag{B.28}$$

其中 $\mu''=\mu$ 以保证 J_z 守恒。所以完全散射振幅可以展开为，

$$\begin{aligned}T_{H_s}(s,t) &= 16\pi\sum_{J=M}^{\infty}(2J+1)T^{J}_{H_s}(s)\mathcal{D}^{J*}_{\mu\mu'}(\phi,\theta,-\phi)\ ,\\ M &\equiv max\{|\mu|,|\mu'|\}\ 。\end{aligned}\tag{B.29}$$

如果我们取散射平面为 $x-z$ 平面，即有 $\phi=0$ ，则上式简化为，

$$T_{H_s}(s,t)=16\pi\sum_{J=M}^{\infty}(2J+1)T^{J}_{H}(s)d^{J}_{\mu\mu'}(z_s)\ ,\ \ (z_s\equiv\cos\theta_s)\ .\tag{B.30}$$

转动矩阵具有如下归一化条件：

$$\int_{-1}^{1}d^{J}_{\lambda\lambda'}(z)d^{J'}_{\lambda\lambda'}(z)dz=\delta_{JJ'}\frac{2}{2J+1}\ ,\tag{B.31}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{J}(2J+1)d^{J}_{\lambda\lambda'}(z)d^{J}_{\lambda\lambda'}(z')=\delta(z-z')\ ,\tag{B.32}$$

$$\sum_{\lambda}d^{J}_{\lambda\lambda'}(z)d^{J'}_{\lambda\lambda''}(z)=\delta_{\lambda'\lambda''}\ .\tag{B.33}$$

由其可以得出分波投影公式：

$$T_{HJ}=\frac{1}{32\pi}\int_{-1}^{1}T_H(s,t)d^{J}_{\mu\mu'}(z_s)dz_s\ .\tag{B.34}$$

有自旋时的分波幺正性与 B.21 式类似，但对中间态求和时要对所有可能的螺旋度求和。对于非极化的实验，要对入射粒子的极化求平均，所以此时的光学定理 B.7 式改写为，

$$\sigma_{12}^{tot}=\frac{1}{2k_{cm}\sqrt{s}}\frac{1}{(2\sigma_1+1)(2\sigma_2+1)}\sum_{\mu_1\mu_2}\mathrm{Im}<\mu_1\mu_2|T^{el}(s,0)|\mu_1\mu_2>\ 。 \tag{B.35}$$

同样也可以把上式进行分波分解：

$$\sigma_{12}^{tot}=\frac{8\pi}{k_{cm}\sqrt{s}}\frac{1}{(2\sigma_1+1)(2\sigma_2+1)}\sum_{\mu_1\mu_2}\sum_{J=|\mu|}(2J+1)\mathrm{Im}T_H^{J,el}(s)\ ,\ \ (\mu=\mu_1-\mu_2)\ . \tag{B.36}$$

§B.2.2 按轨道角动量和自旋的分波展开

另一种有用的展开方式是按总角动量 J 、轨道角动量 l 和总自旋 s 展开。比如非极化的总截面可以表示为，

$$\sigma^{tot}(12\to all)=\frac{8\pi}{k_{cm}\sqrt{s}}\frac{1}{(2\sigma_1+1)(2\sigma_2+1)}\sum_{J,l,s,}(2J+1)\mathrm{Im}T_{l,s}^{J,el}(s)\,。 \tag{B.37}$$

一般来说，l 和 s 并不是守恒的量子数，只有 J 是好量子数。但是在某些情况下，按照上式分解的 S 矩阵元可以是对角的。另外，按轨道角动量展开的一个好处是，利用球谐函数的性质，可以很容易地看出来在阈附近散射矩阵元对动量的依赖关系：$T_{ij}^{(l)}\propto k_i^l k_j^l$ 。详细讨论可以参见 Weinberg 的书。