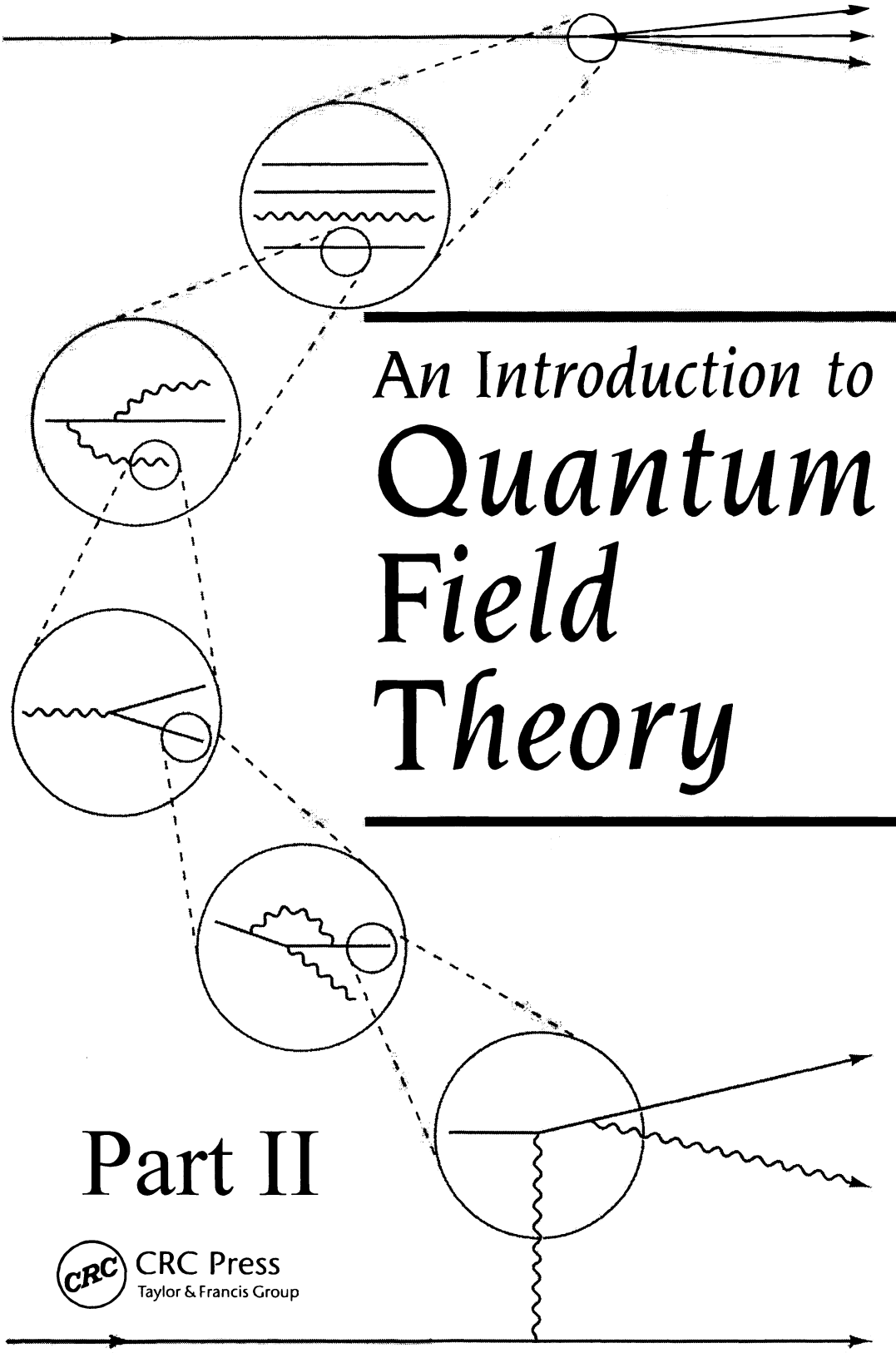


An Introduction to Quantum Field Theory

Part II

CRC Press
Taylor & Francis Group

Michael E. Peskin ♦ Daniel V. Schroeder

Made By. Minrusen

目 录

8. Invitation：紫外截断和临界涨落 265
正式的和物理的截断 266
朗道相变理论 269
临界指数 272
9. 泛函方法 275
9.1 量子力学中的路径积分 275
9.2 标量场的泛函量子化 282
关联函数 283
费曼规则 284
泛函导数和生成函数 289
9.3 量子场论与统计力学的类比 292
9.4 电磁场的量子化 294
9.5 旋量场的泛函量子化 298
反对易数 299
狄拉克传播子 301
狄拉克场的生成泛函 302
QED 303
泛函行列式 304
9.6 泛函形式理论中的对称性 306
运动方程 306
守恒定律 308
Ward-Takahashi 等式 311
10. 重整化的系统学 315
10.1 紫外发散的计数 315

10.2 重整化微扰论 323
ϕ^4理论的单圈结构 326
10.3 量子电动力学的重整化 330
QED 的单圈结构 333
10.4 高于领头阶的重整化 335
10.5 双圈的一个例子 338
11. 重整化和对称性 347
11.1 自发对称性破缺 348
线性 Sigma 模型 349
Goldstone 定理 351
11.2 重整化与对称性：一个明确的例子 352
重整化条件 355
顶点抵消项 356
两点和一点振幅 360
11.3 有效作用量 364
11.4 有效作用量的计算 370
线性 Sigma 模型中的有效作用量 373
11.5 有效作用量作为生成泛函 379
11.6 重整化与对称性：一般分析 383
Goldstone 定理重新审视 388
12. 重整化群 393
12.1 重整化理论的 Wilson 方法 394
对单个动量壳进行积分 395
重整化群流 399
12.2 Callan-Symanzik 方程 406
重整化条件 407
Callan-Symanzik 方程 410

计算β和γ 411
β和γ的含义 416
12.3 耦合常数的演化 418
Callan-Symanzik 方程的解 418
QED 的一个应用 423
跑动耦合常数的替代方案 424
12.4 局域算符的重整化 428
12.5 质量参数的演化 432
临界指数：初识 435
13. 临界指数和标量场论 439
13.1 临界指数理论 440
自旋关联函数的指数 442
热力学函数的指数 444
临界指数的值 447
13.2 四维的临界行为 451
13.3 非线性 Sigma 模型 454
$d = 2$ 的非线性 Sigma 模型 454
$2 < d < 4$ 的非线性 Sigma 模型 461
大 N 的精确解 463
Final Project: Coleman-Weinberg 势 467

Part II

Renormalization

Chapter 8

Invitation：紫外截断和临界涨落

本书第二部分的主要目的是发展重整化的一般理论。这一理论将解释场论中紫外发散的起源，并指出何时可以系统地消除这些发散。它还将提供一种方法，将费曼图的发散从一个问题转换成一个工具。我们将用这个工具来研究场论振幅在渐近大动量或小动量下的行为

当我们在 6.3 节的单圈顶点修正计算中第一次遇到紫外发散时，它似乎是一种反常现象，应该在引起我们太多的不适之前消失。在第 7 章中，我们看到了更多的紫外发散图的例子，足以让我们相信这种发散在费曼图计算中无处不在。因此，任何研究场论的人都有必要对这些发散提出自己的观点。大多数人开始认为任何包含发散的理论都是无意义的。但这种观点过于局限，因为它不仅排斥量子场论，甚至排斥点粒子的经典电动力学。

有了一些经验之后，人们可能会采取一种与发散和平共存的更为宽容的态度：人们可以接受一个有发散的理论，只要它们不出现在物理预测中。在第 7 章中，电子被重靶散射，我们看到，通过一致的消除电子的质量与电荷的裸值，使用它们的物理测量值，可以消除在单圈辐射修正中出现的所有发散。在第 10 章我们将讨论到，在微扰理论的所有阶中，QED 的所有紫外发散都可以用这种方法消除。因此，只要我们愿意把电子的质量和电荷作为测量参数，QED 微扰理论的预测就永远不会有发散。在第 10 章中，我们还将说明 QED 属于场论中被明确定义的一类：在该类理论中，在从实验得到少量固定的物理参数后，所有的紫外发散都能被消除。这些理论被称为**可重整化**的量子场论，是唯一由微扰理论给出

了明确预测的理论。

然而，理想情况下，我们应该进一步尝试从物理上理解发散的产生原因，以及为什么它们在某些理论中的影响比在其他理论中更为严重。这种直接解决发散问题的方法是 Kenneth Wilson 在 20 世纪 60 年代提出的。解决这一问题所需要的关键性见解来自 Wilson 等人发现的，量子场论与磁体、流体的统计物理之间的对应关系。Wilson 的重整化方法是第 12 章的主题。本章简要介绍了凝聚态物理中的一些问题，这些问题为理解紫外发散问题提供了一些思路。

正式的和物理的截断

紫外发散表明量子场中计算的量依赖于某个非常大的动量尺度——紫外截断。等价地，在位置空间中，发散量依赖于某个非常小的距离尺度。

系统连续描述中的小距离截断的概念同样也出现在经典场论。通常，截断点在原子距离的尺度上，这时连续描述不再适用。然而，截断的大小在连续理论的某些参数中表现出来。例如，在流体动力学中，粘度和声速等参数的大小，正好符合人们通过结合典型的原子半径和速度所期望的大小。同样的，在磁铁中，通过假设翻转一个电子自旋的能量损耗是一个 eV 的十分之一，磁化率也可以被估计出来，正如我们从原子物理学中所期望的那样。在这些系统中，每一个系统都在原子尺度上有一个自然的紫外截断；通过理解原子尺度上的物理，我们能够计算出一些参数，它们能在更大尺度上决定物理。

然而，在量子场论中，我们对非常短距离尺度下的基本物理没有精确的知识。因此，我们只能测量诸如电子的物理电荷和质量之类的参数，而不能根据基本原理计算它们。这些物理参数与它们的裸值之间的紫外发散的存在，表明这些参数受到未知的短距离物理控制。

无论我们是否了解小距离尺度的基本物理，为了给大距离的现象写下一个有效的理论，我们都需要两种信息。首先，我们必须知道有多少小距离尺度的参数与大距离物理有关。其次，也是更重要的是，我们必须知道来自基本理论的哪些自由度出现在大距离中。

在流体力学中，从原子的角度来看，任何大距离自由度的存在都是一个奇迹。不过，那些表达了能量和质量在大距离下传输的方程，确实有平滑、一致的解。

大距离的自由度是传输这些守恒量的流，和波长较长的声波。

在量子场论中，大距离物理只涉及那些与基本截断尺度相比质量非常小的粒子。这些粒子及其动力学是流体力学中大尺度流的量子类比。自然地安排这些粒子出现的最简单方法，是利用那些自然地质量为零的粒子。到目前为止，在这本书中，我们已经遇到了两种质量恰好为零的粒子，光子和手征费米子(在第 11 章中，我们将进一步见到一种自然地无质量的粒子，Goldstone 玻色子)。我们可能会说 QED 作为一种其尺度比它的截断值大得多的理论而存在，因为光子是自然无质量的，而且左手和右手电子非常接近于手征费米子。

存在另一种方法能让质量为零或几乎为零的粒子出现在量子场论中：我们可以简单地调整标量场论的参数，使得标量粒子拥有相对于截断值来说较小的质量。这种引入小质量粒子的方法似乎有点随意和不自然。尽管如此，它在统计力学中有一个类比，该类比在那门学科中是非常有趣的，并且可以教会我们一些重要的东西。

通常，在凝聚态系统中，热涨落只与原子距离有关。然而，在特殊情况下，它们可以有更长的范围。这种现象最明显的例子发生在铁磁体中。在高温下，磁体中的电子自旋是无序且涨落的；但是在低温下，这些自旋向一个固定的方向排列*。让我们考虑一下，当磁铁的温度降低时，这种排列是如何形成的。当磁铁从高温冷却时，关联自旋的团簇变得越来越大。当处于一个确定的点——磁化温度——整个样本变成一个单一的大团簇，有着明确的宏观方向。在稍稍高于这个温度时，磁铁含有大量有着共同方向的自旋大团簇，而这些自旋团簇又属于更大的自旋团簇，因此在最大的尺度上看，它们在整个样本的方向仍然是随机的。图 8.1 显示了这种情况。类似的行为发生在任何其他二阶相变附近，例如二元合金中的有序无序相变、流体中的临界点或氦四中的超流体相变。

对这些波长很长的涨落的自然描述是使用涨落的连续场，在最低的直觉水平上，我们可以用量子来代替统计涨落，并试图用量子场论来描述这个系统。在 9.3 节中，我们将推导出一种更为微妙的关系，这种关系在统计系统和量子系统之间

*在实铁磁中，长程磁偶极子-偶极子相互作用使均匀磁化状态分解为一系列磁畴。在这本书中，我们将忽略这种相互作用，把磁自旋看作是一个纯方向。正是这个理想化的系统直接类似于量子场论。

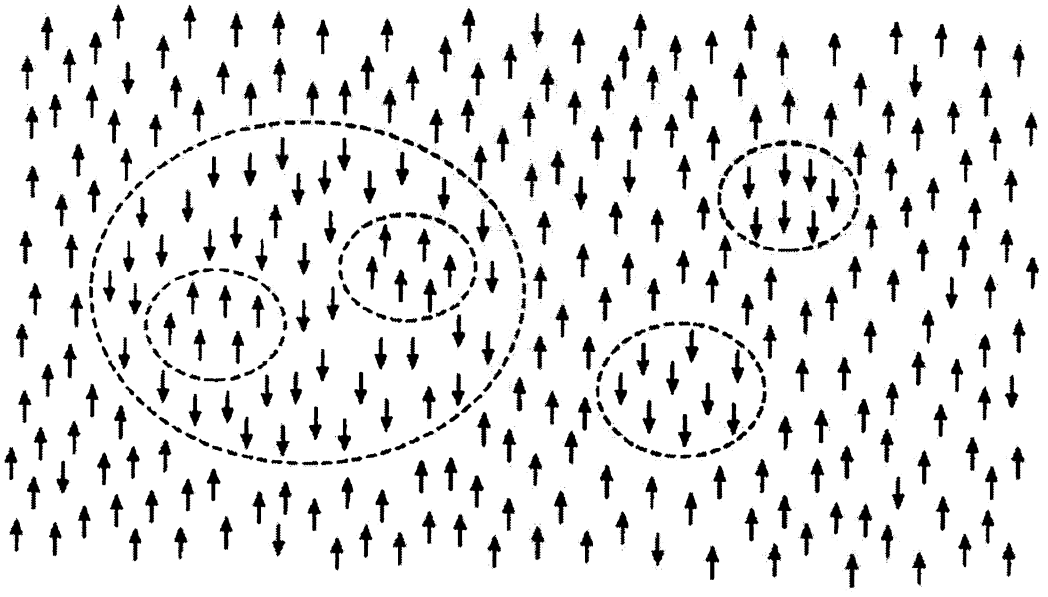


图 8.1 铁磁体临界点附近的方向自旋的团簇。

建立了精确的联系。通过这种联系，静态系统的任何接近二阶相变的行为都可以转化为一个特殊量子场论的行为。这个量子场论有一个场，其质量与基本原子尺度相比非常小，并在相变处精确地趋于零。

但这种联系似乎对量子场论中的紫外发散问题进行了妥协：如果自然中观察到的丰富相变产生了同样丰富的量子场论，那么我们怎么可能这样去定义一个量子场论，而在没有去仔细参考它在紫外截断尺度处的物理起源？因此，说一个量子场论做出的预测是与截断无关，将会等价于说临界点附近的统计涨落与系统是磁铁、流体还是合金无关。但这个陈述是不是明显不正确？通过颠倒逻辑，我们会发现量子场论对凝聚态系统做出了非常强大的预测，预测了临界点附近的统计涨落的**普适性**。事实上。实验验证了这一预测。

本书第二部分的一个主要主题是，这两个概念——量子场论中的截断独立性和临界现象理论中的普适性——很自然地是相同的概念，理解这两个概念中的任何一个都能洞察另一个。

朗道相变理论

什么在相变现象中是普适的？为得到第一个概念，让我们来研究最简单的二阶相变连续理论。

首先，我们应该复习一点热力学知识，阐明一下热力学的术语。在热力学中，**一阶相变**是一个点，某个热力学变量(流体的密度，或铁磁体的磁化)在经过该点时不连续地变化。在相变点，两种截然不同的热力学状态(液体和气体，或与一个给定轴平行和反平行的磁化)处于平衡状态。在经过相变时不连续地变化，且表征两个竞争相的差异的热力学量，称为**序参量**。在大多数情况下，有可能改变另一个热力学参数，以使得这两个竞争状态在热力学空间中移动得更近，于是在这个参数的某个值下，这两个状态变得相同，序参量中的不连续性消失。一阶相变线的端点称为**二阶相变**，或者更确切地说，称为**临界点**。从另一个方向看，临界点是一个单一热力学状态分叉为两个宏观上不同的状态的点。正是这种分叉导致了上一节所讨论的长程的热涨落。

铁磁体就是这种行为的一个具体例子。为了简单起见，让我们假设我们正在讨论的材料有一个优先磁化轴，这样在低温下，系统的自旋就会与这个轴平行或反平行。沿这个轴的总磁化强度M是序参量。在低温下，外加磁场H的作用会有利于这两种可能状态中的其中一种或另一种。$H=0$时，两种状态处于平衡状态；如果H从一个小的负值变成一个小的正值，热力学状态和M的值会不连续地变化。因此，对于任何固定(低)的温度，在$H=0$处都存在一阶相变。现在考虑提高温度的影响：自旋的涨落增加，$|M|$值减小。在某一温度T_C时，系统在$H=0$处停止磁化。在这个点，一阶相变消失，而两个相互竞争的热力学态合并。因此，系统在$T=T_C$处有一个临界点。这些不同跃变在H-T平面上的位置如图 8.2 所示。

朗道用吉布斯自由能G描述了这种行为；这是依赖于M和T的热力学势，这样：

$$\left.\frac{\partial G}{\partial M}\right|_T = H. \tag{8.1}$$

他建议我们把注意力集中在临界点：$T \approx T_C, M \approx 0$。那么将$G(M)$展开为$M$的

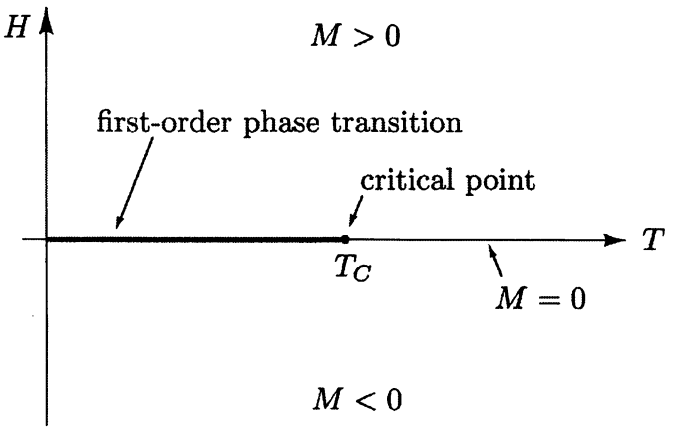


图 8.2 单轴的铁磁体在H-T平面上的相图

泰勒级数是合理的。对于$H = 0$，我们可以写：

$$G(M) = A(T) + B(T)M^2 + C(T)M^4 + \cdots. \tag{8.2}$$

由于系统在$M \to -M$下具有对称性，$G(M)$只能包含M的偶数次幂。由于M很小，我们将忽略展开式中较高的项。给定式(8.2)，通过以下求解可以得到M在$H = 0$时的可能值

$$0 = \frac{\partial G}{\partial M} = 2B(T)M + 4C(T)M^3. \tag{8.3}$$

如果B和C是正数，唯一的解是$M = 0$。然而，如果$C > 0$但是B在某个温度T_C以下为负，则$T < T_C$有一个非平凡解，如图 8.3 所示。更具体点，近似为$T \approx T_C$：

$$B(T) = b(T - T_C), \qquad C(T) = c. \tag{8.4}$$

则式(8.3)的解为

$$M = \begin{cases} 0 & \text{for } T > T_C; \\ \pm\left[(b/2c)(T_C - T)\right]^{1/2} & \text{for } T < T_C. \end{cases} \tag{8.5}$$

这只是我们在临界点上期望的定性行为。

为了求出M在非零外场处的值，我们可以用(8.2)给出的左侧来求解方程(8.1)。一个等价的过程是使一个与(8.2)相关的新函数最小化。定义

$$G(M, H) = A(T) + B(T)M^2 + C(T)M^4 - HM. \tag{8.6}$$

然后在固定H处，关于M的$G(M, H)$的最小值给出了满足式(8.1)的M的值。最小值是唯一的，除了$H = 0$和$T < T_C$时，我们在(8.5)的第二行中找到了两个最小值。这与图 8.2 所示的相图是一致的。

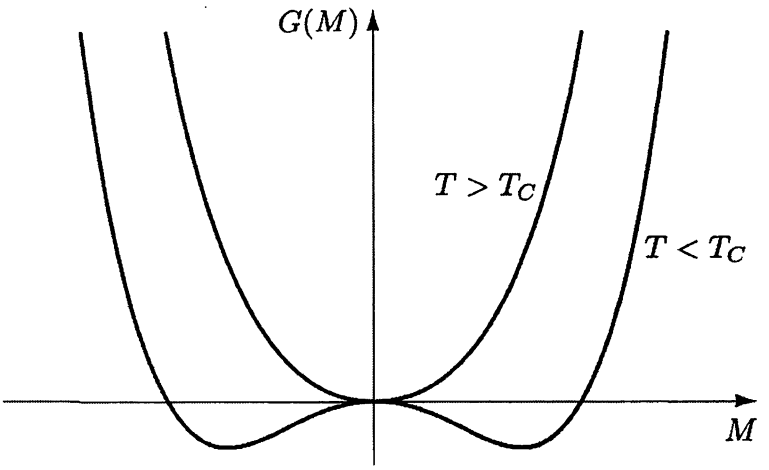


图 8.3 朗道理论中吉布斯自由能$G(M)$在临界温度上下的行为

为了研究相变附近的关联性，朗道通过将磁化强度M考虑为局域自旋密度的积分，进一步推广了这一描述：

$$M = \int d^3x\, s(\mathbf{x}). \tag{8.7}$$

然后吉布斯自由能(8.6)就变成了局域函数$s(\mathbf{x})$的积分，

$$G = \int d^3x \Big[\tfrac{1}{2}(\nabla s)^2 + b(T - T_C)s^2 + cs^4 - Hs\Big], \tag{8.8}$$

它必须能够通过场位形$s(\mathbf{x})$被最小化。第一项是最简单的方法，通过引入自旋附近的趋势，使它们彼此对齐。我们重新调整了$s(\mathbf{x})$，所以这一项的系数设置为$1/2$。在写自由能积分时，我们甚至可以考虑H随位置变化。事实上，这样做很有用；我们可以在$x = 0$附近打开$H(\mathbf{x})$看看在另一点会得到什么响应。

自由能关于$s(\mathbf{x})$的表达式(8.8)的最小值，可以由变分方程的解得到

$$0 = \delta G[s(\mathbf{x})] = -\nabla^2 s + 2b(T - T_C)s + 4cs^3 - H(\mathbf{x}). \tag{8.9}$$

对于$T > T_C$，宏观磁化消失，因此$s(\mathbf{x})$应该很小，我们可以通过忽略s^3项来发现定性行为。然后$s(\mathbf{x})$服从线性方程，

$$\big(-\nabla^2 + 2b(T - T_C)\big)s(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x}). \tag{8.10}$$

为了研究自旋的关联性，我们将设置

$$H(\mathbf{x}) = H_0\delta^{(3)}(\mathbf{x}). \tag{8.11}$$

由此得到的位形$s(\mathbf{x})$是式(8.10)中的微分算符的格林函数，我们称之为$D(\mathbf{x})$：

$$\left(-\nabla^2 + 2b(T - T_C)\right) D(\mathbf{x}) = H_0 \delta^{(3)}(\mathbf{x}). \tag{8.12}$$

这个格林函数告诉我们，当$\mathbf{x} = 0$处的自旋被迫与H对齐时，$\mathbf{x}$处的响应。在 9.2 和 9.3 节中，我们将看到$D(\mathbf{x})$也与热学系综中的零场自旋-自旋关联函数成正比：

$$D(\mathbf{x}) \propto \langle s(\mathbf{x}) s(0) \rangle \equiv \sum_{\text{all } s(\mathbf{x})} s(\mathbf{x}) s(0) e^{-\mathbf{H}/kT}, \tag{8.13}$$

H是磁系统的哈密顿量

式(8.12)的解可以通过傅里叶变换得到：

$$D(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{H_0\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{|\mathbf{k}|^2 + 2b(T - T_C)}. \tag{8.14}$$

这正是我们在讨论汤川势时所遇到的积分，式(4.126)。用同样的方法计算，我们发现

$$D(\mathbf{x}) = \frac{H_0}{4\pi} \frac{1}{r} e^{-r/\xi}, \tag{8.15}$$

where

$$\xi = \left[2b(T - T_C)\right]^{-1/2} \tag{8.16}$$

为**关联长度**，为关联自旋涨落的范围。注意，这个长度在$T \to T_C$时发散。

本分析的主要结果，式(8.5)和(8.16)，包含未知常数b和c，它们依赖于原子尺度上的物理。另一方面，这些公式对$(T - T_C)$的幂律依赖关系，简单的遵循了朗道方程的结构，与微观物理的任何细节无关。事实上，我们对这种依赖关系的推导甚至没有用到G描述了铁磁体这个事实；我们只假设G可以按一个序参量的幂进行展开，并且G尊重镜像对称性$M \to -M$。这些假设同样适用于许多其他类型的系统：二元合金、超流体，甚至(尽管这里的镜像对称性不那么明显)液气转变。朗道理论预测，在临界点附近，这些系统表现出一种普适的行为，即M、ξ和其他热力学量对$(T - T_C)$的依赖性。

临界指数

对相变的朗道理论的处理强调了它与经典场论的相似性。通过对经典变分方程的求解，我们建立了合适的自由能，得到了热力学最优位形。这只给出了对完全统计问题的近似，类似于场论中用经典动力学代替量子的近似。在第 13 章，我们

将使用量子场论的方法来适当地解释关于优选朗道热力学状态的涨落。这些修正被证明是深刻的，相当不可思议的。

为了描述这些修正的形式，让我们将式(8.15)更一般地写成

$$\langle s(\mathbf{x})s(0)\rangle = A\frac{1}{r^{1+\eta}}f(r/\xi), \tag{8.17}$$

其中A为常数，$f(y)$为满足$f(0)=1$且在$y\to\infty$时$f(y)\to 0$的函数。朗道理论预测$\eta=0$，$f(y)$是一个简单的指数。这个表达式的形式与量子场论中的格林函数有很强的相似性。常数A可以被吸收到场$s(\mathbf{x})$的场强重整化中。关联长度ξ通常是原子参数的一个复杂函数，但是，在连续描述中，我们可以简单地将这些参数换成ξ。由于ξ控制着物理关联性的长距离行为，因此将它看作一个独立于截断的物理参数是合适的。事实上，式(8.15)和 Yukawa 势之间的类比表明，我们应该在相关的量子场论中将ξ^{-1}与物理质量相区别。然后，式(8.17)给出了统计系统的一个与截断无关的连续表示。

如果我们研究的是量子场论，我们将得到方程(8.17)的修正，作为参数c的微扰级数并乘以(8.9)中的非线性项。这将把朗道结果推广到

$$\langle s(\mathbf{x})s(0)\rangle = \frac{1}{r}F(r/\xi, c). \tag{8.18}$$

微扰修正依赖于连续场论的性质。例如，$F(y,c)$将依赖于场$s(\mathbf{x})$的组分的数量，并且它的级数展开将依赖于磁化而不同，即磁化是沿着在最优平面上的最优轴形成的，亦或是各向同性的。对于有许多分量的序参量，展开也依赖于问题中更高的离散对称性。然而我们期望，由相同朗道自由能描述的系统(例如，单轴铁磁系统和液-气系统)应该具有相同的微扰展开——当这个展开是用物理的质量和耦合来写的时候。因此，朗道理论的完全普适性变成一个更为有限的概念，在这个概念中，如果系统的序参量具有相同的对称性，则系统具有相同的长距离关联性。我们可以说，统计系统分为了不同的**普适性类**，每个类都有一个特征性的大尺度行为。

如果这是系统在二阶相变附近的真实行为，将极好地确认了之前的想法，这正是对建立与截断无关的量子场论所需要的。然而，统计系统的真实行为仍然是另一个更微妙的层次。实验中发现的是式(8.17)的形式的依赖性，其中函数$F(y)$在每个普适性类中都是相同的，不需要辅助参数c。另一方面，指数η在每个普适

性类都取一个特定的非零值。朗道理论的其他幂律关系，对每个普适性类都以一个特定的方式得到了修改。例如，对于$T < T_C$，将式(8.5)改为

$$M \propto (T_C - T)^{\beta}, \tag{8.19}$$

其中，对于一个给定的普适性类中的所有系统，指数β取一个固定的值。对于三维单轴磁体和流体，$\beta = 0.313$。这些非平凡标度关系中的幂被称为**临界指数**。

从式(8.18)到式(8.17)的修正并没有危及这样一种观点，即在二阶相变附近的凝聚态系统，具有明确定义的、与截断无关的连续行为。然而，我们想要理解为什么式(8.17)应该被期望为正确的表示。这个问题的答案将来自于对相应的量子场论的紫外发散的深入分析。在第 12 章，当我们最终结束我们对紫外发散的解释时，我们会发现我们手中不仅有证明式(8.17)的工具，而且有使用费曼图计算临界指数值的工具。通过这种方式，我们将发现量子场论在原子物理学领域的一个美丽的应用。在第三部分中，这一应用的成功将指导我们使用甚至更强大的工具，它们是我们将在基本粒子的相对论领域中需要的。

Chapter 9

泛函方法

费曼曾经说过*：“每一个优秀的理论物理学家对于完全相同的物理都知道 6 到 7 种的不同理论表示。”按照他的建议，我们在这一章中介绍了一种推导相互作用量子场论的费曼规则的替代方法：泛函积分法。

除费曼的一般性原理，我们还有几个具体的原因引入这种形式理论。它将为我们提供一个相对容易的对我们的光子传播子表达式的推导，完成第4.8节给出的QED费曼规则的证明。泛函方法更易于推广其他相互作用的理论，如标量QED(问题9.1)，尤其是非阿贝尔规范理论(第三部分)。由于泛函形式理论使用拉格朗日量而不是哈密顿量作为其基本量，因此它明确地保留了理论的所有对称性。最后，泛函方法揭示了量子场论与统计力学之间的密切相似性。利用这个类比，我们将把费曼的建议颠倒过来，把同样的理论表述应用到两个完全不同的物理领域。

9.1 量子力学中的路径积分

我们首先将泛函积分(或路径积分)方法应用于最简单的可想象系统：一个在一维运动的非相对论量子力学粒子。这个系统的哈密顿量是：

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x).$$

假设我们想计算这个粒子在给定时间(T)内从一个点(x_a)移动到另一个点(x_b)的振幅，我们称这个振幅为$U(x_a, x_b; T)$；它是薛定谔时间演化算符的位置表示。在正则哈密顿形式中，U是：

$$U(x_a, x_b; T) = \langle x_b | e^{-iHT/\hbar} | x_a \rangle . \tag{9.1}$$

*The Character of Physical Law (MIT Press, 1965), p168

(在接下来的几页中，我们将显式地显示出所有的$\hbar$因子)。

在路径积分形式中，U是由一个非常不同的表达式给出的。我们将首先尝试激发这个表达式，然后证明它等价于(9.1)。

回想一下，在量子力学中有一个**叠加原理**:当一个过程可以以多种方式发生时，它的总振幅是每种方式振幅的相干和。一个简单但非平凡的例子是著名的双缝实验，如图 9.1 所示。电子到达探测器的总振幅是所示两条路径的振幅之和。由于路径的长度不同，这两个振幅通常不同，造成干涉。

对于一般的系统，我们可以因此把从x_a运动到x_b总振幅写成

$$U(x_a, x_b; T) = \sum_{\text{all paths}} e^{i\cdot(\text{phase})} = \int \mathcal{D}x(t)\, e^{i\cdot(\text{phase})}. \tag{9.2}$$

为了体现民主性，我们把每一条特定路径的振幅写成纯相位，这样就没有任何路径比任何其他路径更重要了。符号$\int \mathcal{D}x(t)$只是“对所有路径求和”的另一种写法；因为每个函数$x(t)$都有一条从x_a开始到x_b结束的路径，所以求和实际上是在这个函数的连续空间上求积分

我们可以把这个积分定义为对函数空间计算的自然推广的一部分。将函数映射到数字的函数称为**泛函**。被积函数(9.2)是一个泛函，因为它把任何函数$x(t)$与一个复振幅联系起来。泛函$F[x(t)]$的参数通常用方括号而不是圆括号来写。就像一个普通的函数$y(x)$可以在一组点x上积分，一个泛函$F[x(t)]$可以在一组函数$x(t)$上积分；这种**泛函积分**的测度通常用手写体大写字母$\mathcal{D}$表示，如(9.2)。泛函也可以对它的参数(函数)求导，这个泛函的导数用$\delta F/\delta x(t)$表示。在这一节和下一节的过程中，我们将对这个新的积分和导数给出更精确的定义。

对于式(9.2)中的“相位”我们应该使用什么？在经典极限下，我们应该发现只有一条路径，经典路径，对总振幅有贡献。因此，我们可能希望用稳定相位法求(9.2)中的积分，用稳定条件确定经典路径$x_{cl}(t)$，

$$\frac{\delta}{\delta x(t)}\Big(\text{phase}[x(t)]\Big)\Big|_{x_{\text{cl}}} = 0.$$

但经典路径是满足最小作用量原理的，

$$\frac{\delta}{\delta x(t)}\Big(S[x(t)]\Big)\Big|_{x_{\text{cl}}} = 0,$$

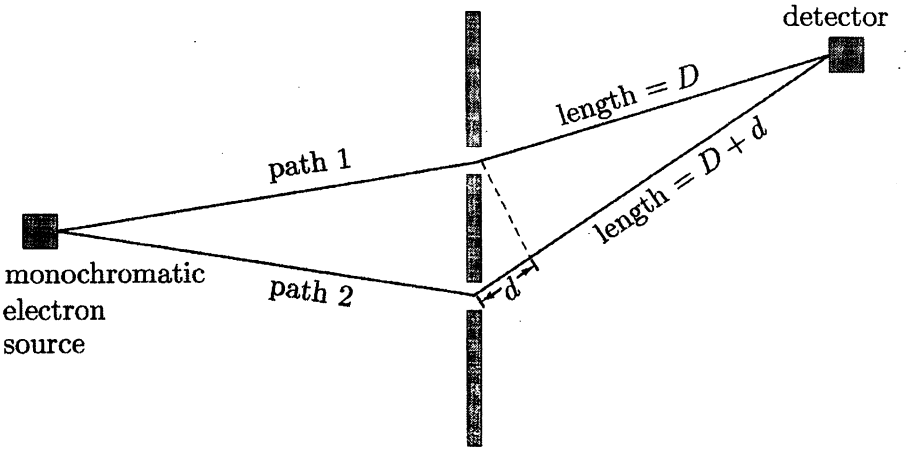


图 9.1 双缝干涉实验。路径 2 比路径 1 长一个数量d，因此相位比路径 1 大了$2\pi d/\lambda$，其中$\lambda = 2\pi\hbar/p$是粒子的德布罗意波长。当$d = 0, \lambda, ...$时发生相长干涉，而相消干涉发生在$d = \lambda/2, 3\lambda/2, ...$。

其中$S = \int L dt$是经典作用量。因此，在常数范围内用S来标记相位是很吸引人的。由于稳定相位近似在经典极限下应该是有效的——即，当$S \gg \hbar$时——我们将使用$S/\hbar$作为相位。于是，我们关于传播振幅的最终公式是：

$$\langle x_b | \, e^{-iHT/\hbar} \, | x_a \rangle = U(x_a, x_b; T) = \int \mathcal{D}x(t) \, e^{iS[x(t)]/\hbar}. \tag{9.3}$$

在双缝实验中，我们可以很容易地证明该公式给出了正确的干涉图样。图 9.1 中任意一条路径的作用量都仅是$(1/2)mv^2 t$，动能乘以时间。对于路径 1，速度是$v_1 = D/t$，所以相位是$mD^2/2\hbar t$。对于路径 2，我们有$v_2 = (D+d)/t$，所以相位是$m(D+d)^2/2\hbar t$。我们必须假设$d \ll D$，所以$v_1 \approx v_2$(即，电子有一个明确的速度)。路径 2 的过剩相位为$mDd/\hbar t \approx pd/\hbar$，其中$p$为动量。这正是我们从德布罗意关系$p = h/\lambda$期望的结果，所以我们一定在做正确的事。

为了更一般地计算泛函积分，我们必须在路径数$x(t)$大于 2 的情况下(事实上是连续无穷大)，定义符号$\int \mathcal{D}x(t)$。我们将通过离散化来强行定义。将 0 到T的时间间隔分解成许多小的持续时长为ϵ的片段，如图 9.2 所示。将路径$x(t)$近似为一系列的直线，每个时间片段对应一条直线。这个离散路径的作用量是

$$S = \int_0^T dt \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x) \right) \longrightarrow \sum_k \left[\frac{m}{2} \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{\epsilon} - \epsilon V\left(\frac{x_{k+1} + x_k}{2} \right) \right].$$

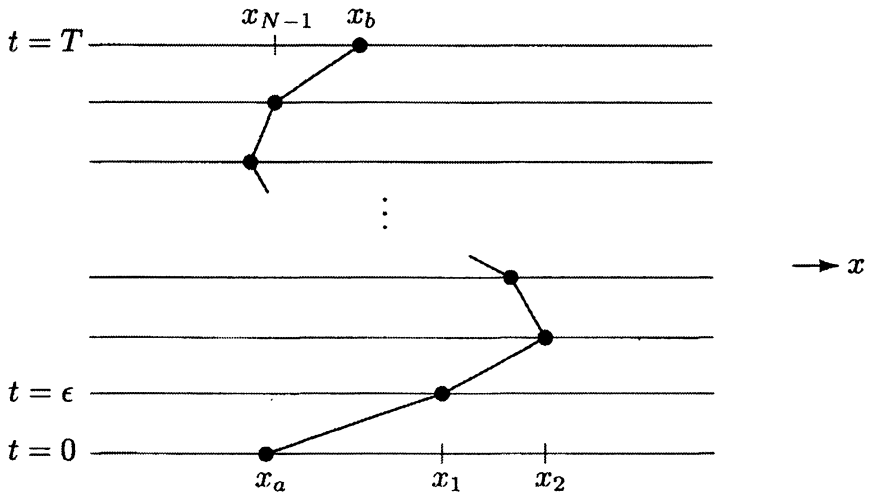


图 9.2 我们将时间间隔划分为持续时间为ϵ的小片段，然后对每片段的坐标x_k进行积分，从而对路径积分进行定义。

然后定义路径积分：

$$\int \mathcal{D}x(t) \equiv \frac{1}{C(\epsilon)} \int \frac{dx_1}{C(\epsilon)} \int \frac{dx_2}{C(\epsilon)} \cdots \int \frac{dx_{N-1}}{C(\epsilon)} = \frac{1}{C(\epsilon)} \prod_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_k}{C(\epsilon)}, \quad (9.4)$$

其中，$C(\epsilon)$为常数，待确定(我们为N个时间片段中的每一个都包含了一个因子$C(\epsilon)$，原因下面会澄清)。在计算结束时，我们取极限$\epsilon \to 0$(与第 4.5 节和 6.2 节一样，$\prod$符号是一条指令，来为每个k写下相同的项)。

使用(9.4)作为(9.3)的右边的定义，我们现在将针对一个一般的单粒子势问题来证明(9.3)的有效性。为此，我们将证明(9.3)的左右两边是通过对相同的微分方程进行积分得到的，初始条件也相同。在这个过程中，我们将确定常数$C(\epsilon)$。

为了得到满足(9.4)的微分方程，考虑图 9.2 中对最后一个时间片段的添加。根据(9.3)和定义(9.4)，我们应该有

$$U(x_a, x_b; T) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{C(\epsilon)} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \frac{m(x_b - x')^2}{2\epsilon} - \frac{i}{\hbar} \epsilon V\left(\frac{x_b + x'}{2}\right)\right] U(x_a, x'; T - \epsilon).$$

x'上的积分就是最后一个时间片段对$\int \mathcal{D}x$的贡献，而指数因子就是该片段对$e^{iS/\hbar}$的贡献。来自于之前的片段的所有贡献都包含在$U(x_a, x'; T - \epsilon)$。

当我们令$\epsilon \to 0$时，指数的第一项的快速振荡将x'限制为非常接近x_b。因此，

我们可以用$(x'-x_b)$的幂展开上述表达式：

$$U(x_a,x_b;T)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx'}{C}\,\exp\Big(\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2\epsilon}(x_b-x')^2\Big)\Big[1-\frac{i\epsilon}{\hbar}V(x_b)+\cdots\Big]$$
$$\times\Big[1+(x'-x_b)\frac{\partial}{\partial x_b}+\frac{1}{2}(x'-x_b)^2\frac{\partial^2}{\partial x_b^2}+\cdots\Big]U(x_a,x_b;T-\epsilon). \tag{9.5}$$

我们现在可以把指数因子当作高斯函数来执行x'积分(适当地，为了收敛，我们应该在指数中引入一个较小的实项；在下一节使用泛函方法推导费曼规则之前，我们将忽略这一项)。回想一下高斯积分公式

$$\int d\xi\, e^{-b\xi^2}=\sqrt{\frac{\pi}{b}},\qquad \int d\xi\,\xi\, e^{-b\xi^2}=0,\qquad \int d\xi\,\xi^2\, e^{-b\xi^2}=\frac{1}{2b}\sqrt{\frac{\pi}{b}}.$$

将这些等式应用到(9.5)中，我们发现

$$U(x_a,x_b;T)=\left(\frac{1}{C}\sqrt{\frac{2\pi\hbar\epsilon}{-im}}\right)\Big[1-\frac{i\epsilon}{\hbar}V(x_b)+\frac{i\epsilon\hbar}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x_b^2}+\mathcal{O}(\epsilon^2)\Big]U(x_a,x_b,T-\epsilon).$$

这个表达式在极限$\epsilon\to 0$下没有意义，除非圆括号中的因子等于 1。因此，我们可以确定C的正确定义：

$$C(\epsilon)=\sqrt{\frac{2\pi\hbar\epsilon}{-im}}. \tag{9.6}$$

根据这个定义，我们可以比较ϵ阶的项，然后乘以$i\hbar$来得到

$$\begin{aligned}i\hbar\frac{\partial}{\partial T}U(x_a,x_b;T)&=\Big[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x_b^2}+V(x_b)\Big]U(x_a,x_b;T)\\&=HU(x_a,x_b,T).\end{aligned} \tag{9.7}$$

这就是薛定谔方程。但是很容易证明时间演化算符U，就像(9.1)中最初定义的那样，满足相同的方程。

当$T\to 0$时，(9.3)的左边趋于$\delta(x_a-x_b)$。将此值对比(9.4)在一个时间片段情况下的值:

$$\frac{1}{C(\epsilon)}\exp\Big[\frac{i}{\hbar}\frac{m(x_b-x_a)^2}{2\epsilon}+\mathcal{O}(\epsilon)\Big].$$

它只是(9.5)的峰值指数，当$\epsilon\to 0$时，它也趋于$\delta(x_a-x_b)$，因此(9.3)的左右两边满足相同的微分方程，初始条件也相同。我们的结论是，时间演化算符的哈密顿量定义(9.1)和路径积分定义(9.3)是等价的，至少对于这个简单的一维系统是等价的。

为了结束这一节，让我们把我们的路径积分公式推广到更复杂的量子系统。考虑一个非常一般的量子系统，由任意一组坐标q^i，共轭动量p^i和哈密顿量$H(q,p)$描述。我们将直接证明该系统中跃迁振幅的路径积分公式。

我们要计算的跃迁振幅是

$$U(q_a,q_b;T)=\langle q_b|\,e^{-iHT}\,|q_a\rangle\,. \tag{9.8}$$

(当q或p没有上标出现时，它将表示所有坐标$\{q^i\}$或动量$\{p^i\}$的集合。同样，为了方便起见，我们现在令$\hbar=1$)。为了把这个振幅写成泛函积分，我们首先把时间间隔分成N个持续时间为ϵ的短片段，于是我们可以写：

$$e^{-iHT}=e^{-iH\epsilon}\,e^{-iH\epsilon}\,e^{-iH\epsilon}\,\cdots\,e^{-iH\epsilon}\qquad(N\text{ factors}).$$

诀窍是在这些因子的每一个之间插入一组完备的中间态，形式为

$$\mathbf{1}=\left(\prod_i\int dq_k^i\right)\,|q_k\rangle\,\langle q_k|\,.$$

其中$k=1\ldots(N-1)$，插入这样的因子，我们就只剩下了以下形式的因子的乘积

$$\langle q_{k+1}|\,e^{-iH\epsilon}\,|q_k\rangle\underset{\epsilon\to0}{\longrightarrow}\langle q_{k+1}|\,(1-iH\epsilon+\cdots)\,|q_k\rangle\,. \tag{9.9}$$

为了用这种形式表示第一个和最后一个因子，我们定义$q_0=q_a$和$q_N=q_b$。

现在我们必须研究H的内部并考虑它可能包含哪些项。要计算的最简单的一类项，是一个仅仅是坐标而不是动量的函数。这样的项的矩阵元是

$$\langle q_{k+1}|\,f(q)\,|q_k\rangle=f(q_k)\,\prod_i\delta(q_k^i-q_{k+1}^i).$$

可以很方便地把它改写成

$$\langle q_{k+1}|\,f(q)\,|q_k\rangle=f\Big(\tfrac{q_{k+1}+q_k}{2}\Big)\left(\prod_i\int\frac{dp_k^i}{2\pi}\right)\exp\Big[i\sum_i p_k^i(q_{k+1}^i-q_k^i)\Big],$$

原因很快就会明了。

接下来考虑哈密顿函数中完全是动量的函数的一个项。我们引入了一组完备的动量本征态，来得到：

$$\langle q_{k+1}|\,f(p)\,|q_k\rangle=\left(\prod_i\int\frac{dp_k^i}{2\pi}\right)f(p_k)\,\exp\Big[i\sum_i p_k^i(q_{k+1}^i-q_k^i)\Big].$$

这样，如果H只包含形式为$f(q)$和$f(p)$的项，则它的矩阵元可以写为

$$\langle q_{k+1}|\,H(q,p)\,|q_k\rangle=\left(\prod_i\int\frac{dp_k^i}{2\pi}\right)H\Big(\tfrac{q_{k+1}+q_k}{2},p_k\Big)\,\exp\Big[i\sum_i p_k^i(q_{k+1}^i-q_k^i)\Big]. \tag{9.10}$$

如果即使H包含p和q的乘积，(9.10)式依然成立就好了。一般来说，这个公式一定是错的，因为乘积pq的顺序影响到左边(其中，H是一个算符)，但不影响右边(其中H只是一个数p_k和q_k的函数)不重要。但是对于一个特定的顺序，我们可以维持(9.10)。例如，组合

$$\langle q_{k+1}|\,\tfrac{1}{4}\left(q^2p^2+2qp^2q+p^2q^2\right)|q_k\rangle=\left(\tfrac{q_{k+1}+q_k}{2}\right)^2\langle q_{k+1}|\,p^2\,|q_k\rangle$$

如期望的那样工作，因为q以正确的方式对称地出现在左边和右边。当这种情况发生时，哈密顿函数称为被 **Weyl 排序**了。任何哈密顿量都可以通过交换p和q被放进Weyl排序中；一般来说，这个过程会引入一些额外的项，这些额外的项必须出现在(9.10)的右边。

假设从现在起H是Weyl排序的，我们来自于(9.9)的典型矩阵元可以表示为

$$\begin{aligned}\langle q_{k+1}|\,e^{-i\epsilon H}\,|q_k\rangle=\left(\prod_i\int\frac{dp_k^i}{2\pi}\right)\exp\Big[-i\epsilon H\Big(\tfrac{q_{k+1}+q_k}{2},p_k\Big)\Big]\\ \times\exp\Big[i\textstyle\sum_i p_k^i(q_{k+1}^i-q_k^i)\Big].\end{aligned}$$

(我们再次使用ϵ很小的事实，将$1-i\epsilon H$写成$e^{-i\epsilon H}$)。为了得到$U(q_a,q_b;T)$，我们将N个这样的因子相乘，每个k对应一个因子，然后在中间坐标q_k上积分：

$$\begin{aligned}U(q_0,q_N;T)=\left(\prod_{i,k}\int dq_k^i\int\frac{dp_k^i}{2\pi}\right)\\ \times\exp\left[i\sum_k\left(\sum_i p_k^i(q_{k+1}^i-q_k^i)-\epsilon H\big(\tfrac{q_{k+1}+q_k}{2},p_k\big)\right)\right].\end{aligned}\tag{9.11}$$

从 1 到N的每个k都有一个动量积分，从 1 到$N-1$的每个k有一个坐标积分。因此，这个表达式就是以下表达式的离散形式：

$$U(q_a,q_b;T)=\left(\prod_i\int\mathcal{D}q(t)\,\mathcal{D}p(t)\right)\exp\left[i\int_0^T dt\Big(\sum_i p^i\dot{q}^i-H(q^i,p^i)\Big)\right],\tag{9.12}$$

其中函数$q(t)$在端点处受约束，而函数$p(t)$不受约束。注意，积分测度$\mathcal{D}q$不包含任何特殊的常数，而它在(9.4)是包含的。(9.12)中的泛函测度仅仅是对相空间的标准积分：

$$\prod_i\int\frac{dq^i\,dp^i}{2\pi\hbar}$$

每个时间点上的乘积。式(9.12)是利用泛函积分计算跃迁振幅的最一般公式。

对于非相对论粒子，哈密顿量简单地是$H = p^2/2m + V(q)$。在这种情况下，我们可以通过完成指数中的平方项来计算p积分：

$$\int \frac{dp_k}{2\pi} \exp\Big[i\big(p_k(q_{k+1}-q_k) - \epsilon p_k^2/2m\big)\Big] = \frac{1}{C(\epsilon)} \exp\Big[\frac{im}{2\epsilon}(q_{k+1}-q_k)^2\Big],$$

其中$C(\epsilon)$仅仅是因子(9.6)。注意，每个时间片段都有一个这样的因子。因此，我们重新得到了包含适当的C因子的、离散形式下的表达式(9.3)：

$$U(q_a, q_b; T) = \left(\frac{1}{C(\epsilon)} \prod_k \int \frac{dq_k}{C(\epsilon)}\right) \exp\left[i \sum_k \left(\frac{m}{2} \frac{(q_{k+1}-q_k)^2}{\epsilon} - \epsilon V\Big(\frac{q_{k+1}+q_k}{2}\Big)\right)\right]. \tag{9.13}$$

9.2 标量场的泛函量子化

在本节中，我们将把泛函积分形式应用于实标量场$\phi(x)$的量子理论。我们的目标是直接从泛函积分表达式推导出这种理论的费曼规则。

上一节推导出的一般的泛函积分公式(9.12)适用于任何量子系统，因此它应该适用于量子场论。对于一个实标量场，坐标q^i是场的振幅中$\phi(\mathbf{x})$，哈密顿量是

$$H = \int d^3x \left[\tfrac{1}{2}\pi^2 + \tfrac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi)\right].$$

因此我们的公式变成

$$\langle \phi_b(\mathbf{x}) | \, e^{-iHT} \, | \phi_a(\mathbf{x}) \rangle = \int \mathcal{D}\phi \, \mathcal{D}\pi \, \exp\left[i \int_0^T d^4x \Big(\pi\dot{\phi} - \tfrac{1}{2}\pi^2 - \tfrac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - V(\phi) \Big) \right],$$

其中我们所积分的函数$\phi(x)$被约束到特定的位形$\phi_a(\mathbf{x})$($x^0 = 0$时)和$\phi_b(\mathbf{x})$($x^0 = T$时)，因为指数是π的二次方，我们可以完成平方并计算$\mathcal{D}\pi$积分，得到

$$\langle \phi_b(\mathbf{x}) | \, e^{-iHT} \, | \phi_a(\mathbf{x}) \rangle = \int \mathcal{D}\phi \, \exp\left[i \int_0^T d^4x \, \mathcal{L} \right], \tag{9.14}$$

where

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi)$$

为拉格朗日量密度。(9.14)中的积分测度$\mathcal{D}\phi$再次涉及一个尴尬的常数，我们不会明确地写出来。

(9.14)的指数上的时间积分从 0 积到T，这是由我们选择要计算的跃迁函数决定的；在所有其他方面，这个公式显然是洛伦兹不变量。拉格朗日量可能有的

任何其他对称性，也可以由泛函积分显式地保持。随着我们对量子场论的研究，对称性及其对应的守恒定律将发挥越来越重要的作用。因此，我们建议采取一个轻率的步骤：放弃哈密顿形式，用公式(9.14)来定义哈密顿动力学。任何这样的公式都对应于一些哈密顿量；要找到它，我们总是可以对T进行区分，并像前一节那样推导薛定谔方程。因此我们认为拉格朗日量$\mathcal{L}$是量子场论最基本的规范。接下来我们将看到，可以使用泛函积分直接从$\mathcal{L}$计算，而不需要调用哈密顿量。

关联函数

为了直接利用泛函积分，我们需要一个计算关联函数的泛函公式。要找到这样的表达式，考虑对象

$$\int \mathcal{D}\phi(x)\,\phi(x_1)\phi(x_2)\,\exp\left[i\int_{-T}^{T} d^4x\,\mathcal{L}(\phi)\right], \tag{9.15}$$

在这里，路径积分的边界条件是$\phi(-T,\mathbf{x})=\phi_a(\mathbf{x})$和$\phi(T,\mathbf{x})=\phi_b(\mathbf{x})$，对于一些$\phi_a,\phi_b$。我们想把这个量和两点关联函数$\langle\Omega|T\phi_H(x_1)\phi_H(x_2)|\Omega\rangle$联系起来(为了区分算符和普通数，我们用显式下标将海森堡绘景的算符写为：$\phi_H(x)$。同样，我们将会把薛定谔绘景算符写为$\phi_S(\mathbf{x})$)。

首先，我们将(9.15)中的泛函积分分解如下

$$\int \mathcal{D}\phi(x) = \int \mathcal{D}\phi_1(\mathbf{x}) \int \mathcal{D}\phi_2(\mathbf{x}) \int\limits_{\substack{\phi(x_1^0,\mathbf{x})=\phi_1(\mathbf{x})\\ \phi(x_2^0,\mathbf{x})=\phi_2(\mathbf{x})}} \mathcal{D}\phi(x). \tag{9.16}$$

现在，主泛函积分$\int\mathcal{D}\phi(x)$在x_1^0和x_2^0(以及端点$-T$和T)处受到约束，但我们必须对中间位形$\phi_1(\mathbf{x})$和$\phi_2(\mathbf{x})$上分别进行积分。在这个分解后，(9.15)中的额外因子$\phi(x_1)$和$\phi(x_2)$变成$\phi_1(\mathbf{x}_1)$和$\phi_2(\mathbf{x}_2)$，并且可以取出到主积分之外。然后，主积分被分解成三个部分，每个部分根据(9.14)都是一个简单的跃迁振幅，时间x_1^0和x_2^0自动按降序排列；例如，如果$x_1^0<x_2^0$，则(9.15)变为

$$\int \mathcal{D}\phi_1(\mathbf{x}) \int \mathcal{D}\phi_2(\mathbf{x})\ \phi_1(\mathbf{x}_1)\phi_2(\mathbf{x}_2)\ \langle\phi_b|\,e^{-iH(T-x_2^0)}\,|\phi_2\rangle \\ \times\langle\phi_2|\,e^{-iH(x_2^0-x_1^0)}\,|\phi_1\rangle\,\langle\phi_1|\,e^{-iH(x_1^0+T)}\,|\phi_a\rangle\,.$$

我们可以使用$\phi_S(\mathbf{x}_1)|\phi_1\rangle = \phi_1(\mathbf{x}_1)|\phi_1\rangle$将场$\phi_1(\mathbf{x}_1)$转换成薛定谔算符。完备性关系$\int \mathcal{D}\phi_1 |\phi_1\rangle\langle\phi_1| = \mathbf{1}$允许我们消除中间状态$|\phi_1\rangle$。类似的操作对$\phi_2$也有效，从而得到表达式

$$\langle\phi_b| e^{-iH(T-x_2^0)}\, \phi_S(\mathbf{x}_2)\, e^{-iH(x_2^0-x_1^0)}\, \phi_S(\mathbf{x}_1)\, e^{-iH(x_1^0+T)}\, |\phi_a\rangle\,.$$

大多数指数因子与薛定谔算符结合形成海森堡算符。在$x_1^0 > x_2^0$的情况下，x_1^0和x_2^0的顺序可以简单地互换。于是式(9.15)等于

$$\langle\phi_b| e^{-iHT}\, T\{\phi_H(x_1)\phi_H(x_2)\}\, e^{-iHT}\, |\phi_a\rangle\,. \tag{9.17}$$

这个表达式几乎等于两点关联函数。为了使它更接近相等，我们取极限$T \to \infty(1-i\epsilon)$。如4.2节，这个技巧从$|\phi_a\rangle$和$|\phi_b\rangle$投影出真空态$|\Omega\rangle$(前提是我们假设这些态与$|\Omega\rangle$有一些重叠)。例如，将$|\phi_a\rangle$分解成$H$的特征态$|n\rangle$，我们有

$$e^{-iHT}\,|\phi_a\rangle = \sum_n e^{-iE_nT}\,|n\rangle\,\langle n|\phi_a\rangle \underset{T\to\infty(1-i\epsilon)}{\longrightarrow} \langle\Omega|\phi_a\rangle\, e^{-iE_0\cdot\infty(1-i\epsilon)}\,|\Omega\rangle\,.$$

如第4.2节所述，我们得到了一些尴尬的相位和重叠因子。但是，如果我们使用与(9.15)相同、但没有额外的两个场$\phi(x_1)$和$\phi(x_2)$的量去除，这些因子就被抵消了，因此我们得到了简单的公式：

$$\langle\Omega|\, T\phi_H(x_1)\phi_H(x_2)\,|\Omega\rangle = \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} \frac{\int \mathcal{D}\phi\, \phi(x_1)\phi(x_2) \exp\left[i\int_{-T}^{T} d^4x\, \mathcal{L}\right]}{\int \mathcal{D}\phi\, \exp\left[i\int_{-T}^{T} d^4x\, \mathcal{L}\right]}. \tag{9.18}$$

这是我们想要的、泛函积分表示下的两点关联函数公式。对于更高的关联函数，只需在等式两边插入额外的ϕ因子。

费曼规则

我们的下一个任务是直接从公式(9.18)的右边计算各种关联函数。换句话说，我们现在将使用(9.18)推导标量场论的费曼规则。我们将首先计算自由Klein-Gordon理论中的两点函数，然后推广到自由理论中更高的关联函数。最后，我们将考虑ϕ^4理论，在ϕ^4理论中，我们可以进行微扰展开来获得与第4.4节相同的费曼规则。

首先考虑一个非相互作用实标量场：

$$S_0 = \int d^4x\, \mathcal{L}_0 = \int d^4x \left[\tfrac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \tfrac{1}{2}m^2\phi^2\right]. \tag{9.19}$$

由于$\mathcal{L}_0$是ϕ的二次型，因此(9.18)中的泛函积分采用广义的无限维高斯积分形式。因此，我们可以精确地计算泛函积分。

因为这是我们的第一个泛函积分计算，我们将以一种非常明确但丑陋的方式进行计算。我们必须首先定义场位形上的积分$\mathcal{D}\phi$。为了做到这一点，我们使用等式(9.4)的方法将连续积分看作是一个大量但有限个积分的极限。因此，我们使用在方形格点x_i上定义的变量$\phi(x_i)$，替换在点的连续上定义的变量$\phi(x)$。让格点间距为ϵ，让四维时空体积为L^4，并定义

$$\mathcal{D}\phi = \prod_i d\phi(x_i), \tag{9.20}$$

乘上一个不相关的整体常数。

场值$\phi(x_i)$可以用离散傅里叶级数表示：

$$\phi(x_i) = \frac{1}{V}\sum_n e^{-ik_n\cdot x_i}\phi(k_n), \tag{9.21}$$

这里$k_n^\mu = 2\pi n^\mu/L$，其中n^μ为整数，$|k^\mu| < \pi/\epsilon$，$V = L^4$。傅立叶系数$\phi(k)$是复的。但是，$\phi(x)$是实的，因此这些系数必须服从约束$\phi^*(k) = \phi(-k)$。我们把$k_n^0 > 0$的$\phi(k_n)$的实部和虚部看作自变量。从$\phi(x_i)$到这些新变量$\phi(k_n)$的变量的变化是一个幺正变换，所以我们可以把积分改写为：

$$\mathcal{D}\phi(x) = \prod_{k_n^0>0} d\,\mathrm{Re}\,\phi(k_n)\, d\,\mathrm{Im}\,\phi(k_n).$$

稍后，我们将取极限$L\to\infty, \epsilon\to 0$。这个极限的作用是将对$k_n$的离散、有限的求和转化为对$k$的连续积分：

$$\frac{1}{V}\sum_n \to \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}. \tag{9.22}$$

在下面的讨论中，这个极限将产生费曼微扰理论，其形式在第一部分得到。我们不会去消除我们在第六章中遇到的费曼图的红外和紫外发散，但至少泛函积分没有引入新类型的奇点行为。

定义了积分测度，现计算ϕ的泛函积分。作用量(9.19)可用傅里叶系数重写

$$\begin{aligned}\int d^4x\left[\tfrac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \tfrac{1}{2}m^2\phi^2\right] &= -\frac{1}{V}\sum_n \tfrac{1}{2}\left(m^2-k_n^2\right)|\phi(k_n)|^2 \\ &= -\frac{1}{V}\sum_{k_n^0>0}\left(m^2-k_n^2\right)\left[(\mathrm{Re}\,\phi_n)^2 + (\mathrm{Im}\,\phi_n)^2\right],\end{aligned}$$

其中，我们在第二行将$\phi(k_n)$缩写为ϕ_n。只要k_n^0不太大，那么$(m^2-k_n^2)=(m^2+|\mathbf{k}_n|^2-k_n^{02})$这个量就是正的。在下面的讨论中，我们将把这个量视为正的。更准确地说，我们通过从$|\mathbf{k}_n|>k_n^0$的区域开始进行解析延拓来计算它。

公式(918)的分母现在是高斯积分的乘积的形式

$$\begin{aligned}\int \mathcal{D}\phi\, e^{iS_0} &= \Big(\prod_{k_n^0>0}\int d\,\mathrm{Re}\,\phi_n\, d\,\mathrm{Im}\,\phi_n\Big)\exp\Big[-\frac{i}{V}\sum_{n|k_n^0>0}(m^2-k_n^2)|\phi_n|^2\Big]\\ &= \prod_{k_n^0>0}\Big(\int d\,\mathrm{Re}\,\phi_n\,\exp\Big[-\frac{i}{V}(m^2-k_n^2)(\mathrm{Re}\,\phi_n)^2\Big]\Big)\\ &\qquad\times\Big(\int d\,\mathrm{Im}\,\phi_n\,\exp\Big[-\frac{i}{V}(m^2-k_n^2)(\mathrm{Im}\,\phi_n)^2\Big]\Big)\\ &= \prod_{k_n^0>0}\sqrt{\frac{-i\pi V}{m^2-k_n^2}}\sqrt{\frac{-i\pi V}{m^2-k_n^2}}\\ &= \prod_{\text{all }k_n}\sqrt{\frac{-i\pi V}{m^2-k_n^2}}.\end{aligned}\tag{9.23}$$

当指数看起来是纯虚数时，为了证明使用高斯积分公式的合理性，回想一下(9.18)中的时间积分沿着复平面顺时针旋转的围道：$t\to t(1-i\epsilon)$。这意味着我们应该在(9.21)和之后所有的方程中做出改变：$k^0\to k^0(1+i\epsilon)$；特别是，我们应该替换$(k^2-m^2)\to(k^2-m^2+i\epsilon)$。$i\epsilon$项给出了高斯积分必要的收敛因子。它还定义了解析延拓的方向，这在(9.23)定义平方根时可能需要用到。

为了理解(9.23)的结果，将一般的高斯积分作为类比

$$\Big(\prod_k\int d\xi_k\Big)\exp\big[-\xi_i B_{ij}\xi_j\big],$$

其中B是一个本征值为b_i的对称矩阵。为了计算这个积分，我们写$\xi_i=O_{ij}x_j$，O是能够将B对角化的本征矢的正交矩阵，把变量从ξ_i变成系数x_i，我们有：

$$\begin{aligned}\Big(\prod_k\int d\xi_k\Big)\exp\big[-\xi_i B_{ij}\xi_j\big] &= \Big(\prod_k\int dx_k\Big)\exp\Big[-\sum_i b_i x_i^2\Big]\\ &= \prod_i\Big(\int dx_i\,\exp\big[-b_i x_i^2\big]\Big)\end{aligned}$$

$$= \prod_i \sqrt{\frac{\pi}{b_i}}$$

$$= \text{const} \times \left[\det B\right]^{-1/2}. \tag{9.24}$$

这个类比可以更清楚，如果我们执行分部积分，将 Klein-Gordon 作用量写成

$$S_0 = \tfrac{1}{2}\int d^4x\, \phi\,(-\partial^2 - m^2)\,\phi \;+\; (\text{surface term}).$$

因此，矩阵B对应于算符$(m^2+\partial^2)$，我们可以把结果正式写成

$$\int \mathcal{D}\phi\, e^{iS_0} = \text{const} \times \left[\det(m^2+\partial^2)\right]^{-1/2}. \tag{9.25}$$

这个对象叫做泛函行列式。实际的结果(9.23)看起来定义得很不清楚，事实上，所有这些因子将在式(9.18)中抵消。然而，在许多情况下，泛函行列式本身具有物理意义。我们将在 9.5 节和 11.4 节中看到这方面的例子。

现在考虑公式(9.18)的分子。我们需要傅里叶展开ϕ的两个额外因子：

$$\phi(x_1)\phi(x_2) = \frac{1}{V}\sum_m e^{-ik_m\cdot x_1}\phi_m \,\frac{1}{V}\sum_l e^{-ik_l\cdot x_2}\phi_l.$$

于是分子是：

$$\begin{aligned}\frac{1}{V^2}\sum_{m,l} e^{-i(k_m\cdot x_1 + k_l\cdot x_2)} &\left(\prod_{n|k_n^0>0}\int d\,\mathrm{Re}\,\phi_n\, d\,\mathrm{Im}\,\phi_n\right) \\ &\times (\mathrm{Re}\,\phi_m + i\,\mathrm{Im}\,\phi_m)(\mathrm{Re}\,\phi_l + i\,\mathrm{Im}\,\phi_l) \\ &\times \exp\Big[-\frac{i}{V}\sum_{n|k_n^0>0}(m^2-k_n^2)\left[(\mathrm{Re}\,\phi_n)^2 + (\mathrm{Im}\,\phi_n)^2\right]\Big].\end{aligned} \tag{9.26}$$

对于k_m和k_l的大多数值，此表达式为零。因为ϕ的额外因子使被积函数为奇。当$k_m = \pm k_l$时，情况更复杂。例如，假设$k_m^0 > 0$。那么如果$k_l = +k_m$，包含$(\mathrm{Re}\phi_m)^2$的项是非零的，但它被包含$(\mathrm{Im}\phi_m)^2$的项精确地抵消。但是如果$k_l = -k_m$，关系$\phi(-k) = \phi^*(k)$在$(\mathrm{Im}\phi_m)^2$项上给出了一个额外的负号，所以这两个项可以相加。当$k_m^0 < 0$时，我们得到相同的表达式。所以分子是：

$$\text{Numerator} = \frac{1}{V^2}\sum_m e^{-ik_m\cdot(x_1-x_2)}\left(\prod_{k_n^0>0}\frac{-i\pi V}{m^2-k_n^2}\right)\frac{-iV}{m^2-k_m^2-i\epsilon}.$$

括号中的因子与分母(9.23)相同，而这个表达式的其余部分是费曼传播子的

离散形式。采取连续极限(9.22)，我们发现：

$$\langle 0|\, T\phi(x_1)\phi(x_2)\,|0\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i\,e^{-ik\cdot(x_1-x_2)}}{k^2-m^2+i\epsilon} = D_F(x_1-x_2). \tag{9.27}$$

这是完全正确的，包括$+i\epsilon$。

接下来我们要在自由 Klein-Gordon 理论中计算更高的关联函数。

在(9.18)中插入的一个额外因子ϕ，我们发现由于分子的被积函数是奇数，所以三点函数为零。因为同样的原因，所有其他的奇关联函数都为零。

四点函数在分子上有4个ϕ的因子。把场傅里叶展开，我们得到了一个类似于式(9.26)的表达式，但是有四个求和指标，我们称之为m, l, p和q。被积函数包含乘积

$$(\mathrm{Re}\,\phi_m + i\,\mathrm{Im}\,\phi_m)(\mathrm{Re}\,\phi_l + i\,\mathrm{Im}\,\phi_l)(\mathrm{Re}\,\phi_p + i\,\mathrm{Im}\,\phi_p)(\mathrm{Re}\,\phi_q + i\,\mathrm{Im}\,\phi_q).$$

再次，大部分项因为积分是奇的，所以都为零。其中一个不为零项出现在$k_l = -k_m$和$k_q = -k_p$时。经过高斯积分后，分子的这一项是

$$\frac{1}{V^4}\sum_{m,p} e^{-ik_m\cdot(x_1-x_2)}e^{-ik_p\cdot(x_3-x_4)}\left(\prod_{n|k_n^0>0}\frac{-i\pi V}{m^2-k_n^2}\right)\frac{-iV}{m^2-k_m^2-i\epsilon}\frac{-iV}{m^2-k_p^2-i\epsilon}$$

$$\xrightarrow[V\to\infty]{} \left(\prod_{n|k_n^0>0}\frac{-i\pi V}{m^2-k_n^2}\right) D_F(x_1-x_2)D_F(x_3-x_4).$$

括号中的因子再次被分母抵消了。对于把四个动量成对地分组的另外两种方法我们都得到了相似的项。为了跟踪分组，让我们将两个场的**收缩**定义为：

$$\overbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)} = \frac{\int \mathcal{D}\phi\, e^{iS_0}\phi(x_1)\phi(x_2)}{\int \mathcal{D}\phi\, e^{iS_0}} = D_F(x_1-x_2). \tag{9.28}$$

于是四点函数很简单地是

$$\begin{aligned}\langle 0|\, T\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\,|0\rangle &= \text{sum of all full contractions}\\ &= D_F(x_1-x_2)D_F(x_3-x_4)\\ &\quad + D_F(x_1-x_3)D_F(x_2-x_4)\\ &\quad + D_F(x_1-x_4)D_F(x_2-x_3),\end{aligned} \tag{9.29}$$

与我们在式(4.40)中用 Wick 定理得到的表达式相同。

同样的方法允许我们计算更高的关联函数。在每种情况下，答案都是场所有可能的完全收缩的和。这个结果与第 4.3 节中的 Wick 定理得到的结果相同，在这里是由高斯积分的简单规则产生的。

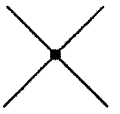
现在我们准备好从自由的 Klein-Gordon 理论转向ϕ^4理论。为$\mathcal{L}_0$添加ϕ^4相互作用项：

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4.$$

假设λ很小，我们可以展开

$$\exp\left[i\int d^4x\,\mathcal{L}\right] = \exp\left[i\int d^4x\,\mathcal{L}_0\right]\left(1 - i\int d^4x\,\frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \cdots\right).$$

对(9.18)的分子和分母同时实施这个展开，我们看到它们每个(除了常数因子(9.23)，它再次抵消了)都可以用自由场的关联函数完全地表示出来。此外，由于$i\int d^3x\mathcal{L}_{\text{int}} = -iH_{\text{int}}$，我们得到与式(4.31)完全相同的展开式。我们可以用费曼图来表示分子和分母，其中基本的相互作用再次由以下的顶点给出：



$$= -i\lambda\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(\textstyle\sum p). \tag{9.30}$$

所有组合数学的工作原理都与第 4.4 节相同。特别是，不连接真空泡泡图的指数化和来自(9.18)分子的因子，以及它们被分母抵消，就和式(4.31)一样。

ϕ^4理论的顶点规则以一种极其简单的方式从拉格朗日量得到，这个简单的过程对其他量子场论也是有效的。一旦恰当地理解了拉格朗日量中的二次项，并计算了理论的传播子，顶点可以作为三次项和高阶项的系数直接从拉格朗日量中读取出来。

泛函导数和生成函数

作为本节的结尾，我们现在将介绍一种更巧妙、更形式化的方法来计算关联函数。该方法基于一个称为**生成泛函**的对象，避免了前面推导中笨拙的傅里叶展开式。

首先我们定义**泛函导数**，$\delta/\delta J(x)$，如下。泛函导数服从基本公理(在四维中)：

$$\frac{\delta}{\delta J(x)}\,J(y) = \delta^{(4)}(x-y) \qquad \text{or} \qquad \frac{\delta}{\delta J(x)}\int d^4y\,J(y)\phi(y) = \phi(x). \tag{9.31}$$

这个定义是对连续函数(作为离散向量的规则)的自然推广：

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\,x_j = \delta_{ij} \qquad \text{or} \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_j x_j k_j = k_i.$$

要对更复杂的函数求导，我们只需用复合函数求导的一般规则。例如，

$$\frac{\delta}{\delta J(x)}\exp\Big[i\int d^4y\,J(y)\phi(y)\Big]=i\phi(x)\exp\Big[i\int d^4y\,J(y)\phi(y)\Big]. \tag{9.32}$$

当泛函依赖于J的导数时，我们在应用泛函导数之前先分部积分：

$$\frac{\delta}{\delta J(x)}\int d^4y\,\partial_\mu J(y)V^\mu(y)=-\partial_\mu V^\mu(x). \tag{9.33}$$

这种形式的基本对象是关联函数的**生成泛函**，$Z[J]$(一些作者称之为$W[J]$)。在标量场论中，$Z[J]$定义为

$$Z[J]\equiv\int\mathcal{D}\phi\,\exp\Big[i\int d^4x\big[\mathcal{L}+J(x)\phi(x)\big]\Big]. \tag{9.34}$$

这是一个对ϕ的泛函积分，我们在指数中为$\mathcal{L}$添加了**源项**，$J(x)\phi(x)$。

通过对生成泛函求泛函导数，可以简单地计算 Klein-Gordon 场论的关联函数。例如，两点函数是

$$\langle 0|\,T\phi(x_1)\phi(x_2)\,|0\rangle=\frac{1}{Z_0}\left(-i\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\right)\left(-i\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\right)Z[J]\Big|_{J=0}, \tag{9.35}$$

其中$Z_0=Z[J=0]$。每个泛函导数都把$Z[J]$的分子上的一个ϕ因子带下来。设置$J=0$，我们重新得到表达式(9.18)。为了计算更高的关联函数，我们只需求更多的泛函导数。

公式(9.35)是有用的，因为在自由场论中，$Z[J]$可以用非常明确的形式重写。在自由 Klein-Gordon 理论中考虑(9.34)的指数。通过分部积分，得到

$$\int d^4x\big[\mathcal{L}_0(\phi)+J\phi\big]=\int d^4x\big[\tfrac{1}{2}\phi(-\partial^2-m^2+i\epsilon)\phi+J\phi\big]. \tag{9.36}$$

($i\epsilon$是泛函积分的收敛因子，如我们在式(9.23)下面所讨论的)。我们可以通过引入一个移动的场来完成平方，

$$\phi'(x)\equiv\phi(x)-i\int d^4y\,D_F(x-y)J(y).$$

做这个替换，并利用D_F是 Klein-Gordon 算符的格林函数这个事实，我们发现(9.36)变成

$$\begin{aligned}\int d^4x\big[\mathcal{L}_0(\phi)+J\phi\big]=&\int d^4x\big[\tfrac{1}{2}\phi'(-\partial^2-m^2+i\epsilon)\phi'\big]\\&-\int d^4x\,d^4y\,\tfrac{1}{2}J(x)(-iD_F)(x,y)J(y).\end{aligned}$$

更有象征意义的是，我们可以把变量替换成

$$\phi' \equiv \phi + (-\partial^2 - m^2 + i\epsilon)^{-1} J, \tag{9.37}$$

以及结果是

$$\int d^4x \left[\mathcal{L}_0(\phi) + J\phi\right] = \int d^4x \left[\tfrac{1}{2}\phi'(-\partial^2 - m^2 + i\epsilon)\phi' - \tfrac{1}{2} J(-\partial^2 - m^2 + i\epsilon)^{-1} J\right]. \tag{9.38}$$

现在在(9.34)的泛函积分中改变变量$\phi \to \phi'$。这只是一个移动，所以这个变换的雅可比矩阵是1。结果是

$$\int \mathcal{D}\phi' \, \exp\left[i\int d^4x \, \mathcal{L}_0(\phi')\right] \exp\left[-i\int d^4x \, d^4y \, \tfrac{1}{2} J(x)[-iD_F(x-y)]J(y)\right].$$

第二个指数因子独立于ϕ'，而剩下的对ϕ'的积分恰好是Z_0。因此，自由 Klein-Gordon 理论的生成函数简单地是

$$Z[J] = Z_0 \, \exp\left[-\tfrac{1}{2}\int d^4x \, d^4y \, J(x) D_F(x-y) J(y)\right]. \tag{9.39}$$

让我们用公式(9.39)和(9.35)来计算一些关联函数。两点函数是

$$\begin{aligned}
&\langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)\,|0\rangle \\
&\quad = -\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \exp\left[-\tfrac{1}{2}\int d^4x \, d^4y \, J(x) D_F(x-y) J(y)\right]\Big|_{J=0} \\
&\quad = -\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left[-\tfrac{1}{2}\int d^4y \, D_F(x_2-y)J(y) - \tfrac{1}{2}\int d^4x \, J(x) D_F(x-x_2)\right] \frac{Z[J]}{Z_0}\Big|_{J=0} \\
&\quad = D_F(x_1 - x_2).
\end{aligned} \tag{9.40}$$

取一次导数带下来两个相同的项；第二次求导给出了一些项，但只有当它作用在外面的因子时，我们才得到一个在$J = 0$时仍然能保留的项。

用这种方法求出四点函数也具有一定的指导意义。为了在合理的空间内进行计算，让我们将函数的参数缩写为下标：$\phi_1 \equiv \phi(x_1)$，$J_x \equiv J(x)$，$D_{x4} \equiv D_F(x - x_4)$等等。重复的下标将被隐式地积分。那么四点函数是

$$\begin{aligned}
\langle 0|\, T\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 \,|0\rangle &= \frac{\delta}{\delta J_1}\frac{\delta}{\delta J_2}\frac{\delta}{\delta J_3}\left[-J_x D_{x4}\right] e^{-\frac{1}{2}J_x D_{xy} J_y}\Big|_{J=0} \\
&= \frac{\delta}{\delta J_1}\frac{\delta}{\delta J_2}\left[-D_{34} + J_x D_{x4} J_y D_{y3}\right] e^{-\frac{1}{2}J_x D_{xy} J_y}\Big|_{J=0} \\
&= \frac{\delta}{\delta J_1}\left[D_{34} J_x D_{x2} + D_{24} J_y D_{y3} + J_x D_{x4} D_{23}\right] e^{-\frac{1}{2}J_x D_{xy} J_y}\Big|_{J=0} \\
&= D_{34}D_{12} + D_{24}D_{13} + D_{14}D_{23},
\end{aligned} \tag{9.41}$$

与(9.29)一致。对指数求导的规则产生了同样熟悉的模式:成对地收缩四个点的每一个可能的方法对应于我们得到的一项，对于每一个收缩得到一个D_F因子。

上述用来构造自由场论的关联的生成泛函方法也可以用来表示相互作用场论的关联函数。式(9.35)与理论是自由的还是相互作用的无关。因子$Z[J=0]$在相互作用场论的情况下是非平凡的，但它只是给出了式(9.18)的分母，即真空图的和。从这个方法出发，关联函数计算中的组合问题再次与第 4.4 节相同。

9.3 量子场论与统计力学的类比

现在让我们从这一讨论的技术方面暂停一下，考虑一下我们推导的公式的一些含义。首先，让我们用以下方式总结上一节的正式结论：对于一个由拉格朗日量$\mathcal{L}$支配的场， 关联函数的生成泛函是

$$Z[J]=\int \mathcal{D}\phi\, \exp\Big[i\int d^4x\,(\mathcal{L}+J\phi)\Big]. \tag{9.42}$$

指数的积分中的时间变量从$-T$积到T, $T\to\infty(1-i\epsilon)$。通过写出以下式子，一个类似(9.18)的关联函数可以被重现：

$$\langle 0|\,T\phi(x_1)\phi(x_2)\,|0\rangle = Z[J]^{-1}\left(-i\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\right)\left(-i\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\right)Z[J]\Big|_{J=0}. \tag{9.43}$$

生成泛函(9.42)使人想起统计力学的配分函数。它具有相同的一般结构，即对一个指数形式的统计权重的所有可能位形进行积分。源$J(x)$充当一个外场的角色。事实上，我们的通过对$J(x)$求导来计算关联函数的方法，模仿了统计力学中常用的技巧，即对压强或磁场等变量求导来计算关联函数。

操作(9.42)的积分中的时间变量，可以使这个类比更加精确。泛函积分公式的推导表明，时间积分略微倾斜到复平面上，它沿着的方向刚好允许围道顺时针旋转到虚轴上。我们已经注意到(在(9.23)的下面)，原本的无穷小旋转给出了正确的$i\epsilon$方案，产生了费曼传播子。这个有限旋转是动量时间分量的 Wick 旋转在位形空间中的类比，如图 6.1 所示。就像动量积分中 Wick 旋转，时间坐标的这个 Wick 旋转$t\to -ix^0$生成一个欧几里德的 4 矢量积：

$$x^2 = t^2 - |\mathbf{x}|^2 \to -(x^0)^2 - |\mathbf{x}|^2 = -|x_E|^2. \tag{9.44}$$

通过操作每一个费曼图的表达式，我们有可能证明，在四维欧氏空间的旋转对称下，量子场论的任意格林函数中时间变量的解析延拓会产生一个关联函数，它在四维欧式空间的旋转对称性下保持不变。泛函积分内的这个Wick旋转以更一般的方式证明了同样的结论。

要理解我们通过这种旋转所取得的成就，考虑ϕ^4理论的例子。ϕ^4理论作用量耦合到源：

$$\int d^4x\,(\mathcal{L} + J\phi) = \int d^4x\left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + J\phi\right]. \tag{9.45}$$

在 Wick 旋转(9.44)之后，这个表达式的这种形式为

$$i\int d^4x_E(\mathcal{L}_E - J\phi) = i\int d^4x_E\left[\frac{1}{2}(\partial_{E\mu}\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 - J\phi\right]. \tag{9.46}$$

这个表达式的形式与朗道理论中铁磁体的吉布斯自由能的表达式(8.8)相同。场$\phi(x_E)$扮演着涨落自旋场$s(\mathbf{x})$的角色，源$J(\mathbf{x})$起着一个外部磁场的作用。注意，这个新的铁磁体生活在四维，而不是三维空间中。

Wick 旋转后的生成泛函$Z[J]$变为

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi\,\exp\left[-\int d^4x_E\,(\mathcal{L}_E - J\phi)\right]. \tag{9.47}$$

泛函$\mathcal{L}_E[\phi]$具有能量的形式：它在下面有界，当场ϕ有大振幅或大梯度时，它就会变大。于是指数是ϕ涨落的一个合理的统计权重。在这个新形式中，$Z[J]$恰好是描述宏观系统的统计力学的配分函数，通过将涨落变量看作一个连续场，该宏观系统可以被近似地描述。

Wick 旋转后$\phi(x_E)$的格林函数可以从泛函积分(9.47)中计算出来，和我们在上一节计算Minkowski格林函数是一样的。对于自由理论($\lambda = 0$)，类似于产生了(9.27)或(9.40)的一组操作，给出了ϕ的关联函数

$$\langle\phi(x_{E1})\phi(x_{E2})\rangle = \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4}\frac{e^{ik_E\cdot(x_{E1}-x_{E2})}}{k_E^2 + m^2}. \tag{9.48}$$

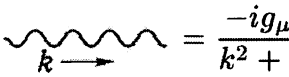
这仅仅只是在类空区域中计算的费曼传播子；根据式(2.52)，这个函数应该像$\exp(-m|x_{E1} - x_{E2}|)$一样下降。这种行为是自旋关联函数(8.15)在四维类比。我们看到，在场论格林函数的欧氏延拓中，量子的康普顿波长m^{-1}成为了统计涨落

的关联长度。

量子场论与统计力学之间的这种对应关系将在今后几章的发展中发挥重要作用。本质上，它为我们的知识储备增加了一个全新的直觉来源，关于场论的期望值应该如何表现。这种直觉将有助于想象圈图的一般性质，正如我们在第 8 章中已经讨论过的，它将提供重要的见解，帮助我们正确理解紫外发散在场论计算中的作用。在第13章，我们将看到场论也可以通过费曼图的性质，对热系统的行为作出深刻的预测，从而对统计力学作出贡献。

9.4 电磁场的量子化

在第 4.8 节中，我们在没有证明的情况下陈述了光子传播子的费曼规则：



$$= \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}. \tag{9.49}$$

现在我们有了泛函积分量子化的方法可以使用，让我们把它应用到这个表达式的推导中。

考虑泛函积分

$$\int \mathcal{D}A\, e^{iS[A]}, \tag{9.50}$$

其中$S[A]$是自由电磁场的作用量(泛函积分是对四个分量中的每一个进行积分：$\mathcal{D}A \equiv \mathcal{D}A^0\mathcal{D}A^1\mathcal{D}A^2\mathcal{D}A^3$)。分部积分并把场展开为傅里叶积分，我们可以把作用量写成

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \left[-\tfrac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\int d^4x\, A_\mu(x)\left(\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu\right)A_\nu(x) \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \widetilde{A}_\mu(k)\left(-k^2 g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu\right)\widetilde{A}_\nu(-k). \end{aligned} \tag{9.51}$$

对于任意标量函数$\alpha(k)$，当$\tilde{A}_\mu(k) = k_\mu\alpha(k)$时，该表达式将消失。对于这一大类的场位形，(9.50)的被积函数为 1，因此泛函积分是严重发散的(没有高斯衰减)，等价地，方程

$$\begin{aligned} &\left(\partial^2 g_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu\right)D_F^{\nu\rho}(x-y) = i\delta_\mu{}^\rho\,\delta^{(4)}(x-y) \\ \text{or}\qquad &\left(-k^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu\right)\widetilde{D}_F^{\nu\rho}(k) = i\delta_\mu{}^\rho, \end{aligned} \tag{9.52}$$

将定义费曼传播子$D_F^{\nu\rho}$，没有解，因为4×4矩阵$(-k^2 g_{\mu\nu}+k_\mu k_\nu)$是奇异的。

这个困难是由于规范不变性。因此回想起$F_{\mu\nu}$和$\mathcal{L}$在以下形式的一般的规范变换下是不变的

$$A_\mu(x)\to A_\mu(x)+\frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x).$$

麻烦的模式是$A_\mu(x)=\frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)$的模式，即那些与$A_\mu(x)=0$规范等价的模式。泛函积分的定义很糟糕，因为我们是在物理上等价的场位形的一个连续无穷大上进行了冗余的积分。为了解决这个问题，我们想要分离出泛函积分中有趣的部分，它只对每个物理位形计算一次。

由于 Faddeev 和 Popov*，我们可以通过一个小技巧来实现这一点。将$G(A)$作为规范固定条件，是我们希望设为零的一些函数；例如，$G(A)=\partial^\mu A_\mu$对应于洛伦兹规范。我们可以通过插入一个泛函delta函数$\delta(G(A))$来约束泛函积分，使其只覆盖$G(A)=0$的位形(将这个对象看作是无穷个delta函数的乘积，每一点x对应一个)。为了合法地做出来，我们在(9.50)的积分下插入 1，形式如下：

$$1=\int\mathcal{D}\alpha(x)\,\delta\big(G(A^\alpha)\big)\,\det\Big(\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta\alpha}\Big),\tag{9.53}$$

式中A^α表示被规范变换的场，

$$A_\mu^\alpha(x)=A_\mu(x)+\frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x).$$

式(9.53)为以下等式的连续推广：

$$1=\left(\prod_i\int da_i\right)\delta^{(n)}\big(\mathbf{g}(\mathbf{a})\big)\,\det\Big(\frac{\partial g_i}{\partial a_j}\Big)$$

这对应离散的n维向量。在洛伦兹规范中我们有$G(A^\alpha)=\partial^\mu A_\mu+(1/e)\partial^2\alpha$，所以泛函行列式$\det(\delta G(A^\alpha)/\delta\alpha)$等于$\det(\partial^2/e)$。在目前的讨论中，这个行列式唯一相关的性质是它独立于A，所以我们可以把它当作泛函积分中的常数。

插入(9.53)后，泛函积分(9.50)变为

$$\det\Big(\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta\alpha}\Big)\int\mathcal{D}\alpha\int\mathcal{D}A\,e^{iS[A]}\,\delta\big(G(A^\alpha)\big).$$

现在把变量从A换成A^α，这是一个简单的移动，所以$\mathcal{D}A=\mathcal{D}A^\alpha$。同时，根据规范不变性，$S[A]=S[A^\alpha]$。因为$A^\alpha$现在只是一个哑的积分变量，我们可以把它

*D. Faddeev and V. N. Popov, Phys. Lett. **25B**, 29(1967)

重命名为A，得到

$$\int \mathcal{D}A\, e^{iS[A]} = \det\Big(\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta\alpha}\Big) \int \mathcal{D}\alpha \int \mathcal{D}A\, e^{iS[A]}\, \delta\big(G(A)\big). \tag{9.54}$$

关于A的泛函积分现在像期望的一样，被 delta 函数限制为物理上的不等价的场位形。关于$\alpha(x)$的发散积分只是给出了一个无限大的乘法因子

要想更进一步，我们必须指定一个规范固定的函数$G(A)$。我们选择函数的一般类：

$$G(A) = \partial^\mu A_\mu(x) - \omega(x), \tag{9.55}$$

其中$\omega(x)$可以是任意标量函数。将$G(A)$设为零，可以给出洛伦兹规范条件的推广。泛函行列式和在洛伦兹规范下一样，$\det(\delta G(A^\alpha)/\delta\alpha) = \det(\partial^2/e)$。这样泛函积分就变成

$$\int \mathcal{D}A\, e^{iS[A]} = \det\Big(\frac{1}{e}\partial^2\Big)\Big(\int \mathcal{D}\alpha\Big) \int \mathcal{D}A\, e^{iS[A]}\, \delta\big(\partial^\mu A_\mu - \omega(x)\big).$$

这个等式对任何$\omega(x)$都成立，所以如果我们将右边替换为被适当归一化的、包含了不同函数$\omega(x)$的任何线性组合，公式将仍然成立。我们这个最后的技巧，将使用以$\omega = 0$为中心的高斯加权函数，对所有$\omega(x)$积分。因此上面的表达式等于

$$\begin{aligned} &N(\xi)\int \mathcal{D}\omega \exp\Big[-i\int d^4x\, \frac{\omega^2}{2\xi}\Big] \det\Big(\frac{1}{e}\partial^2\Big)\Big(\int \mathcal{D}\alpha\Big) \int \mathcal{D}A\, e^{iS[A]}\, \delta\big(\partial^\mu A_\mu - \omega(x)\big) \\ &\quad = N(\xi)\det\Big(\frac{1}{e}\partial^2\Big)\Big(\int \mathcal{D}\alpha\Big) \int \mathcal{D}A\, e^{iS[A]} \exp\Big[-i\int d^4x\, \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2\Big], \end{aligned} \tag{9.56}$$

其中$N(\xi)$是一个不重要的归一化常数，我们已经用 delta 函数来执行对ω的积分。我们可以选择ξ为任意有限的常数。很有效地，我们在拉格朗日量中增加了一个新项$-(\partial^\mu A_\mu)^2/2\xi$。

到目前为止，我们只处理了关联函数公式的分母，

$$\langle\Omega|\, T\, \mathcal{O}(A)\, |\Omega\rangle = \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} \frac{\int \mathcal{D}A\, \mathcal{O}(A) \exp\Big[i\int_{-T}^{T} d^4x\, \mathcal{L}\Big]}{\int \mathcal{D}A\, \exp\Big[i\int_{-T}^{T} d^4x\, \mathcal{L}\Big]}.$$

如果算符$\mathcal{O}(A)$是规范不变的话，同样的操作也可以在分子上执行(如果不是，则变量从A变为A^α的前面公式(9.54)行不通)。假设$\mathcal{O}(A)$为规范不变的，我们要找

它的关联函数：

$$\langle\Omega|\,T\,\mathcal{O}(A)\,|\Omega\rangle = \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} \frac{\int \mathcal{D}A\,\mathcal{O}(A)\exp\left[i\int_{-T}^{T} d^4x\,\left[\mathcal{L}-\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2\right]\right]}{\int \mathcal{D}A\,\exp\left[i\int_{-T}^{T} d^4x\,\left[\mathcal{L}-\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2\right]\right]}. \tag{9.57}$$

(9.56)中的尴尬常数因子被抵消了；整个过程留下的惟一痕迹是添加到作用量中的额外ξ项。

在本节的开始，在公式(9.52)中，我们看到我们不能从作用量$S[A]$中获得一个可合理的光子传播子。然而，有了新的ξ项，这个等式就变成了

$$\left(-k^2 g_{\mu\nu} + (1-\frac{1}{\xi})k_\mu k_\nu\right)\tilde{D}_F^{\nu\rho}(k) = i\delta_\mu{}^\rho,$$

它有解为

$$\tilde{D}_F^{\mu\nu}(k) = \frac{-i}{k^2+i\epsilon}\left(g^{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right). \tag{9.58}$$

这是我们想要的光子传播子表达式。分母中的$i\epsilon$项与Klein-Gordon的情况完全一样。注意相对于Klein-Gordon传播子的整体负号，这在公式(9.52)中已经很明显。

在实践中，人们在进行计算时通常选择一个特定的ξ值。通常比较方便的两种选择是

$$\xi = 0 \qquad \text{Landau gauge;}$$
$$\xi = 1 \qquad \text{Feynman gauge.}$$

到这本书的目前为止，我们一直使用费曼规范*。

Faddeev-Popov 过程保证由费曼图计算的任何规范不变的算符的关联函数的值将独立于计算中使用的ξ值(只要一致地使用相同的ξ值)。在 QED 的情况中，直接证明这种ξ独立性并不困难。注意，在式(9.58)中，ξ乘以光子传播子中正比于$k^\mu k^\nu$的一项。根据 Ward-Takahashi 恒等式(7.68)，在任何光子传播子的一个格林函数中用$k^\mu k^\nu$做替换都给出零，除了那些包含了外部不在壳费米子的项之外。这些项对于粒子和反粒子是相等和相反的，当费米子被分组成规范不变的组合时，它们就变为零了。

为了完成我们对电磁场量子化的处理，我们需要一个额外的组成成分。在第

---

*ξ的其他选择可能在特定的应用中有用；例如，在 QED 中的某些束缚态问题中，**Yennie 规范**，$\xi = 3$，产生了一个很难明确表示的抵消。见 H. M. Fried and D. R. Yennie, *Phys. Rev.* **112**, 1391 (1958)。

五章和第六章中，我们用非规范不变的算符$\psi(x), \bar{\psi}(x)$和$A_\mu(x)$的关联函数计算了QED 的S矩阵元。我们现在要讨论的是，这个过程正确地给出了S矩阵元。由于S矩阵是在渐近状态之间定义的，所以我们可以在这样一个形式理论中计算S矩阵元，其中耦合常数在过去和将来都是绝热地关闭的。在零耦合极限下，规范不变的态和规范可变的态被清晰的分开。包含了一个电子、一个正电子或一个横向极化光子的单粒子态是规范不变的，而包含类时和纵向光子极化的态在规范运动下会发生变换。因此我们可以用以下方式定义一个规范不变的S矩阵：让S_{FP}是一般的渐近状态之间的S矩阵，由Faddeev-Popov程序计算。这个矩阵是幺正的，但不是规范不变的。设P_0是在渐近态的空间的子空间上的投影，其中所有粒子都是电子、正电子或横向光子。然后让

$$S \;=\; P_0\, S_{\rm FP}\, P_0\,. \tag{9.59}$$

通过构造，这个S矩阵是规范不变的，因为它被投影到规范不变的态上。它是幺正的，但并不明显。然而，我们在第 5.5 节中处理了这个问题。我们在那里证明了对于光子发射的任何矩阵元$\mathcal{M}^\mu \epsilon_\mu^*$满足

$$\sum_{i=1,2} \epsilon_{i\mu}^* \epsilon_{i\nu} \mathcal{M}^\mu \mathcal{M}^{*\nu} = (-g_{\mu\nu}) \mathcal{M}^\mu \mathcal{M}^{*\nu}, \tag{9.60}$$

其中左边的求和只针对横向极化。如果$\mathcal{M}^\mu$和$\mathcal{M}^{\mu *}$是不同的振幅，只要它们满足Ward 恒等式，同样的结论也适用。这正是我们需要看到的信息：

$$S S^\dagger \;=\; P_0\, S_{\rm FP}\, P_0\, S_{\rm FP}^\dagger\, P_0 \;=\; P_0\, S_{\rm FP}\, S_{\rm FP}^\dagger\, P_0. \tag{9.61}$$

现在我们可以用S_{FP}的幺正性来证明S是幺正的，$SS^\dagger = 1$，在规范不变的态的子空间上。很容易明确地检验出S矩阵的公式(9.59)是独立于ξ的：Ward等式意味着，如果我们向光子传播子$D^{\mu\nu}(q)$添加任何与q^μ成正比的项，那么所有外部费米子都在壳的任何QED矩阵元，都是不变的。

9.5 旋量场的泛函量子化

到目前为止，我们所使用的泛函方法允许我们使用公式(9.18)或(9.35)，去计算了遵循正则对易关系的场的关联函数。为了将这些方法推广以包括旋量场——它们遵循正则反对易关系，我们必须做一些不同的事情：我们甚至必须用反对易的数来表示经典场。

反对易数

我们将通过给出操作反对易数的代数规则，来定义反对易数(也称为**格拉斯曼数**)。这些规则是正式的，可能看起来是特别设置的。我们将通过表明它们会引出我们熟悉的狄拉克方程的量子理论，来证明它们是正确的。

反对易数的基本特征是反对易的。对于任意两个这样的数字θ和η，

$$\theta\eta = -\eta\theta. \tag{9.62}$$

特别地，任何格拉斯曼数的平方都为零：

$$\theta^2 = 0.$$

(这个事实使代数变得极其简单)。两个格拉斯曼数的乘积($\theta\eta$)与其他格拉斯曼数对易。我们还希望用普通数加上和乘上格拉斯曼数；这些运算具有任意向量空间中加法和标量乘法的所有性质。

我们主要想做的是对反对易数积分。为了定义泛函积分，我们不需要这些参数的一般的定积分，只需要与$\int_{-\infty}^{\infty} dx$类似。因此，让我们对作为格拉斯曼变量$\theta$的一般函数$f$的积分进行定义，积分域在$\theta$的完全范围内：

$$\int d\theta\, f(\theta) = \int d\theta\, \big(A + B\theta\big).$$

一般情况下，$f(\theta)$可以展开成泰勒级数，它在两项之后终止，因为$\theta^2 = 0$。积分应该对f是线性的；因此，它必须是A和B的线性函数。它的值由一个额外的性质确定：在我们分析玻色子泛函积分时(例如，在(9.38)和(9.54)中)，我们充分利用了积分对积分变量移动的不变性。我们将在第 9.6 节中看到，泛函积分的这种移动不变性在量子力学运动方程和守恒定律的推导中起着核心作用，因此必须被视为形式理论的一个基本方面。那么，我们必须对θ的积分要求同样的性质。在移动$\theta \to \theta + \eta$下的不变性得到了条件：

$$\int d\theta\, \big(A + B\theta\big) = \int d\theta\, \big((A + B\eta) + B\theta\big).$$

移动改变了常数项，但保留了线性项不变。具有这个性质的A和B唯一线性函数

是一个常数(通常取 1)乘以B，于是我们定义*：

$$\int d\theta \left(A + B\theta\right) = B. \tag{9.63}$$

当我们对一个以上的格拉斯曼变量进行多重积分时，符号会产生歧义；我们采取约定：

$$\int d\theta \int d\eta \; \eta\theta = +1, \tag{9.64}$$

即先做最里面的积分。

由于狄拉克场是复值的，我们将主要使用复的格拉斯曼数，它可以用通常的方法由实部和虚部组成。可以方便地定义复共轭，来反转乘积的顺序，就像算符的厄米共轭一样：

$$(\theta\eta)^* \equiv \eta^*\theta^* = -\theta^*\eta^*. \tag{9.65}$$

为了对复杂格拉斯曼数进行积分，让我们定义

$$\theta = \frac{\theta_1 + i\theta_2}{\sqrt{2}}, \qquad \theta^* = \frac{\theta_1 - i\theta_2}{\sqrt{2}}.$$

我们现在可以将θ和θ^*作为独立的格拉斯曼数，并采用约定的$\int d\theta^* d\theta(\theta\theta^*) = 1$。

让我们对一个复格拉斯曼变量求高斯积分：

$$\int d\theta^* \, d\theta \, e^{-\theta^* b\theta} = \int d\theta^* \, d\theta \left(1 - \theta^* b\theta\right) = \int d\theta^* \, d\theta \left(1 + \theta\theta^* b\right) = b. \tag{9.66}$$

如果θ是一个普通的复数，这个积分等于$2\pi/b$。2π的因子不重要；与反对易数的主要区别是b出现在分子而不是分母上。然而，如果被积函数中有一个额外的因子$\theta\theta^*$，我们得到

$$\int d\theta^* \, d\theta \; \theta\theta^* \, e^{-\theta^* b\theta} = 1 = \frac{1}{b} \cdot b. \tag{9.67}$$

额外的$\theta\theta^*$引入一个$(1/b)$的因子，就像在普通高斯积分中一样。

为了在高维空间中执行一般的高斯积分，我们必须首先证明对复格拉斯曼变量的积分在幺正变换下是不变的。考虑一组n个复数格拉斯曼变量θ_i和一个幺正矩阵U，如果$\theta_i' = U_{ij}\theta_j$，则

$$\prod_i \theta_i' = \frac{1}{n!}\epsilon^{ij\ldots l}\theta_i'\theta_j' \ldots \theta_l'$$

---

*这个定义是由 F. A. Berezin, *The Method of Second Quantization*, Academic Press, New York, 1966。

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n!}\epsilon^{ij\ldots l}U_{ii'}\theta_{i'}U_{jj'}\theta_{j'}\ldots U_{ll'}\theta_{l'} \\
&= \frac{1}{n!}\epsilon^{ij\ldots l}U_{ii'}U_{jj'}\ldots U_{ll'}\epsilon^{i'j'\ldots l'}\Big(\prod_i \theta_i\Big) \\
&= (\det U)\Big(\prod_i \theta_i\Big). \qquad (9.68)
\end{aligned}
$$

在一般的积分中

$$\Big(\prod_i \int d\theta_i^*\, d\theta_i\Big) f(\theta),$$

幸存的$f(\theta)$的唯一一项，对每个θ_i和θ_i^*都正好有一个因子，它与$(\prod \theta_i)(\prod \theta_i^*)$成正比。如果我们用$U\theta$替换$\theta$，这一项要求一个因子是$(\det U)(\det U)^* = 1$，所以积分在幺正变换下不变。

我们现在可以来计算包含了特征值为b_i的厄米矩阵B的一般高斯积分：

$$\Big(\prod_i \int d\theta_i^*\, d\theta_i\Big) e^{-\theta_i^* B_{ij}\theta_j} = \Big(\prod_i \int d\theta_i^*\, d\theta_i\Big) e^{-\Sigma_i \theta_i^* b_i \theta_i} = \prod_i b_i = \det B. \quad (9.69)$$

(如果θ是一个普通的数，我们就得到$(2\pi)^n/(\det B)$)。类似的，你可以证明：

$$\Big(\prod_i \int d\theta_i^*\, d\theta_i\Big)\, \theta_k \theta_l^*\, e^{-\theta_i^* B_{ij}\theta_j} = (\det B)(B^{-1})_{kl}. \qquad (9.70)$$

在被积函数中插入另一对$\theta_m\theta_n^*$将产生第二个因子$(B^{-1})_{mn}$以及指标l和n互换的第二个项(所有可能配对的和)。一般来说，除了行列式在分子上而不是分母上，对格拉斯曼变量的高斯积分表现得和对普通变量的高斯积分完全一样。

狄拉克传播子

格拉斯曼场是时空的函数，它的值是反对易数。更精确地说，我们可以用任意一组正交基函数定义格拉斯曼场$\psi(x)$：

$$\psi(x) = \sum_i \psi_i \phi_i(x). \qquad (9.71)$$

基函数$\phi_i(x)$是普通的c数函数，而系数ψ_i是格拉斯曼数。为了描述狄拉克场，我们将ϕ_i作为四分量旋量的一个基矢。

现在我们已经有了需要的所有机制，来计算包含了费米子的泛函积分和关联函数。比如狄拉克两点函数可以给出为：

$$\langle 0|\, T\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\,|0\rangle = \frac{\int \mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi\, \exp\Big[i\int d^4x\,\bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi\Big]\,\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)}{\int \mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi\, \exp\Big[i\int d^4x\,\bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi\Big]}.$$

(为了方便，我们用$\mathcal{D}\bar{\psi}$代替$\mathcal{D}\psi^*$；这两个是幺正等价的。我们还将时间积分的极限保留为隐式；它们与式(9.18)中相同，并且会像往常一样在传播子中产生一个$i\epsilon$项)。根据(9.69)，这个表达式的分母是$\det(i\partial\!\!\!/ - m)$。根据(9.70)，分子是这个行列式乘以算符$-i(i\partial\!\!\!/ - m)$的逆。在傅里叶空间中计算这个逆，我们得到了费曼传播子的近似结果：

$$\langle 0|\, T\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\,|0\rangle = S_F(x_1 - x_2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{ie^{-ik\cdot(x_1-x_2)}}{k\!\!\!/ - m + i\epsilon}. \tag{9.72}$$

自由狄拉克场的更高的关联函数可以用类似的方法求出。答案总是算符所有可能的完全收缩的和，每个收缩都有一个S_F因子，就像我们在第 4 章中从 Wick 定理中发现的那样。

狄拉克场的生成泛函

与 Klein-Gordon 场一样，我们也可以通过一个生成泛函来推导自由狄拉克理论的费曼规则。与(9.34)类似，我们将狄拉克生成泛函定义为

$$Z[\bar{\eta},\eta] = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi\, \exp\Big[i\int d^4x\,\big[\bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta\big]\Big], \tag{9.73}$$

其中$\eta(x)$为格拉斯曼值的源场。你可以很容易地移动$\psi(x)$来完成这个平方，从而得到更简单的表达式

$$Z[\bar{\eta},\eta] = Z_0 \cdot \exp\Big[-\int d^4x\,d^4y\,\bar{\eta}(x)S_F(x-y)\eta(y)\Big], \tag{9.74}$$

和前面一样，Z_0是生成泛函在外源为零时的值。

为了得到关联函数，我们将Z对η和$\bar{\eta}$求导。然而，首先，我们必须给格拉斯曼数的导数采用一种符号约定。如果θ和η是反对易数，让我们定义

$$\frac{d}{d\eta}\theta\eta = -\frac{d}{d\eta}\eta\theta = -\theta. \tag{9.75}$$

然后参照Z的定义(9.73)，例如，我们看到以两点函数由以下公式给出

$$\langle 0|\, T\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\,|0\rangle = Z_0^{-1}\left(-i\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x_1)}\right)\left(+i\frac{\delta}{\delta\eta(x_2)}\right) Z[\bar{\eta},\eta]\Big|_{\bar{\eta},\eta=0}.$$

代入公式(9.74)的$Z[\eta,\bar{\eta}]$，仔细跟踪符号，我们发现这个表达式等于费曼传播子，$S_F(x_1-x_2)$。较高的关联函数可以用类似的方法求值。

QED

正如我们在 9.2 节中看到的标量场的情况，泛函积分方法允许我们从相互作用场论的拉格朗日量中直接读取顶点的费曼规则。对于量子电动力学理论，完全的拉格朗日量为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{QED}} &= \bar{\psi}(i\not{D}-m)\psi - \tfrac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 \\ &= \bar{\psi}(i\not{\partial}-m)\psi - \tfrac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \\ &= \mathcal{L}_0 - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu,\end{aligned}$$

其中$D_\mu=\partial_\mu+ieA_\mu$是规范协变导数。

为了计算关联函数，我们将指数的相互作用项展开：

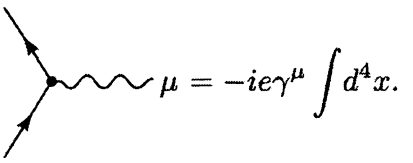
$$\exp\left[i\int\mathcal{L}\right]=\exp\left[i\int\mathcal{L}_0\right]\left[1-ie\int d^4x\,\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu+\cdots\right].$$

自由拉格朗日量的两项产生了本节和上一节推导出的狄拉克和电磁传播子：

$$\underset{p}{\longrightarrow} = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{i\,e^{-ip\cdot(x-y)}}{\not{p}-m+i\epsilon};$$

$$\underset{q\longrightarrow}{\sim\!\sim\!\sim} = \int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\,\frac{-i\,g_{\mu\nu}\,e^{-iq\cdot(x-y)}}{q^2+i\epsilon}\qquad\text{(Feynman gauge).}$$

相互作用项给出了 QED 顶点，



$$= -ie\gamma^\mu\int d^4x.$$

像第 4 章一样，我们可以重新安排这些规则，对顶点的位置进行积分来得到动量守恒 delta 函数，并使用这些 delta 函数来执行大多数的传播子动量积分。

QED 费曼规则唯一剩下的方面是各种负号的位置。这些符号也包含在泛函积分中；例如，在式(9.70)中交换θ_k和θ_l^*会引入一个-1的因子，我们将在接下来的计算中看到费米子负号的另一个例子。

泛函行列式

在这一章中，我们遇到了一些表达式并将它们从形式上写成泛函行列式。为了结束本节，让我们更仔细地研究其中一个对象。我们会发现，至少在这种情况下，我们可以明确的把行列式写成费曼图的和。

考虑以下对象

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi\,\exp\Big[i\int d^4x\,\bar{\psi}(i\not{D}-m)\psi\Big], \tag{9.76}$$

其中$D_\mu=\partial_\mu+ieA_\mu$，$A_\mu(x)$是给定的外部背景场。从形式上讲，这个表达式是一个泛函行列式：

$$\begin{aligned}&=\det(i\not{D}-m)=\det(i\not{\partial}-m-e\not{A})\\&=\det(i\not{\partial}-m)\cdot\det\Big(1-\frac{i}{i\not{\partial}-m}(-ie\not{A})\Big).\end{aligned}$$

在最后一种形式中，第一项是无穷大常数。第二项包含了对外场A的行列式的依赖性，我们现在要证明，这个依赖性定义得很好，事实上，它完全等价于真空图的和。

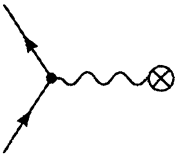
为了证明这一点，我们只需要应用线性代数中的标准等式。首先注意，如果矩阵B有特征值b_i，我们可以把它的行列式写成

$$\det B=\prod_i b_i=\exp\Big[\sum_i\log b_i\Big]=\exp\Big[\mathrm{Tr}(\log B)\Big], \tag{9.77}$$

其中一个矩阵的对数被定义为它的幂级数。把这个等式应用到我们的行列式上，并写出对数的幂级数，我们就得到*

$$\det\Big(1-\frac{i}{i\not{\partial}-m}(-ie\not{A})\Big)=\exp\Big[\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}\Big[\Big(\frac{i}{i\not{\partial}-m}(-ie\not{A})\Big)^n\Big]\Big]. \tag{9.78}$$

或者，我们可以通过返回到表达式(9.76)并使用费曼图来求这个行列式。展开相互作用项，我们得到顶点规则

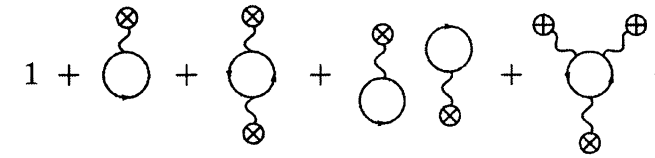


$$=-ie\gamma^\mu\int d^4x\,A_\mu(x).$$

*我们使用 Tr()表示算符的迹，使用 tr()表示狄拉克的迹

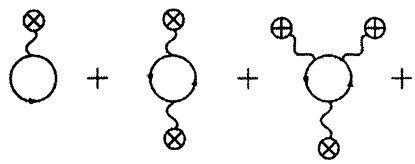
我们的行列式等于费曼图的和，

$$\det\left(1-\frac{i(-ie\not{A})}{i\not{\partial}-m}\right) = 1 +$$



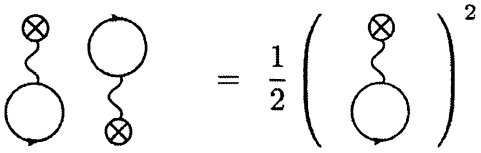
$$+\cdots$$

$$= \exp\Bigg[$$

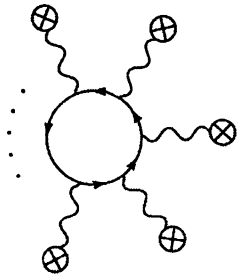


$$+\cdots\Bigg]. \qquad (9.79)$$

级数指数化了，因为不连接图是连接部分的乘积(当一个部分重复时，它会带着适当的对称因子)。例如，



现在我们来计算(9.79)的指数中的第n个图。有一个-1的系数来自费米子环，对称系数是$1/n$因为我们可以在不改变图的情况下，围绕图旋转最多n次相互作用(因子不是$1/n!$，因为相互作用点的循环顺序是重要的)。因此这个图是



$$= -\frac{1}{n}\int dx_1\cdots dx_n\ \mathrm{tr}\Big[\big(-ie\not{A}(x_1)\big)S_F(x_2-x_1)\cdots \big(-ie\not{A}(x_n)\big)S_F(x_1-x_n)\Big]$$

$$= -\frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}\left[\left(\frac{i}{i\not{\partial}-m}(-ie\not{A})\right)^n\right], \qquad (9.80)$$

与(9.78)完全一致，包括负号和对称因子。

使用费曼图计算泛函行列式是一个重要的工具，我们将在第 11 章中看到。

9.6 泛函形式理论中的对称性

我们现在已经看到，标量场、矢量场和旋量场的量子场论关联函数可以从泛函积分中计算出来，完全绕过了哈密顿量、态的希尔伯特空间和运动方程的构造。泛函积分的形式理论使问题的对称性得以体现；拉格朗日量的任何不变性都将是量子动力学的不变性*。然而，我们也希望能够得到来源于量子运动方程的守恒定律，或者这些运动方程本身。例如，Ward 等式，它在 QED(第 5.5 节)中我们讨论光子时发挥了重要作用，其本质上是电荷流的守恒定律。正如我们在 2.2 节中看到的，因为守恒定律来源于拉格朗日量的对称性，人们可能会猜测，从泛函积分推导出这些守恒定律并不难。在本节中，我们将看到如何做到这一点。我们会看到泛函积分以最直接的方式给出了诺特定理的量子推广。对于一个一般量子场论的任何对称性，这一结果将导致类似于 Ward-Takahashi 等式的产物。

运动方程

为这个讨论做准备，我们应该确定量子运动方程是如何从泛函积分形式得到的。作为第一个要研究的问题，我们来研究自由标量场的格林函数。具体地，考虑三点函数：

$$\langle\Omega|\,T\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\,|\Omega\rangle = Z^{-1}\int \mathcal{D}\phi\, e^{i\int d^4x\,\mathcal{L}[\phi]}\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3), \quad (9.81)$$

其中$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2-\frac{1}{2}m^2\phi^2$, Z是$Z[J=0]$的简写，是对指数的泛函积分。在经典力学中，我们通过坚持作用量在如下的无穷小变化下是固定的，来推导运动方程，

$$\phi(x)\to\phi'(x)=\phi(x)+\epsilon(x). \quad (9.82)$$

适当的推广是将(9.82)视为变量的无穷小变化。变量的变化不会改变积分的值。积分变量的移动也不会改变测度：$\mathcal{D}\phi'=\mathcal{D}\phi$。于是，我们可以写出：

$$\int \mathcal{D}\phi\, e^{i\int d^4x\,\mathcal{L}[\phi]}\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) = \int \mathcal{D}\phi\, e^{i\int d^4x\,\mathcal{L}[\phi']}\phi'(x_1)\phi'(x_2)\phi'(x_3),$$

*这个规则有一些细微的例外，我们将在第 19 章中讨论。

这里$\phi' = \phi + \epsilon$。把这个方程展开到ϵ的第一阶，我们发现

$$0 = \int \mathcal{D}\phi\, e^{i\int d^4x\,\mathcal{L}} \left\{ \left(i\int d^4x\, \epsilon(x) \Big[(-\partial^2 - m^2)\phi(x) \Big] \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) \right) + \epsilon(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) + \phi(x_1)\epsilon(x_2)\phi(x_3) + \phi(x_1)\phi(x_2)\epsilon(x_3) \right\}. \tag{9.83}$$

后三项可以与第一项相结合，例如，写下$\epsilon(x_1) = \int d^4x\ \epsilon(x)\delta(x - x_1)$。注意到对于$\epsilon(x)$任何可能的变化右边必须消失，然后我们得到

$$0 = \int \mathcal{D}\phi\, e^{i\int d^4x\,\mathcal{L}} \Big[(\partial^2 + m^2)\phi(x)\, \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) + i\delta(x - x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) + i\phi(x_1)\delta(x - x_2)\phi(x_3) + i\phi(x_1)\phi(x_2)\delta(x - x_3) \Big]. \tag{9.84}$$

类似的方程适用于任意数量的场$\phi(x_1)$。

为了看到(9.84)的含义，让我们将(9.81)特殊化到只有一个场$\phi(x_1)$的情况。注意作用于$\phi(x)$的微分可以拉出泛函积分之外。然后，将(9.84)除以Z得到等式：

$$(\partial^2 + m^2) \langle \Omega | T\phi(x)\phi(x_1) | \Omega \rangle = -i\delta(x - x_1). \tag{9.85}$$

这个关系的左边是Klein-Gordon算符作用在$\phi(x)$的关联函数上。右边为零，除非$x = x_i$；即，除了两个ϕ场的参数重合的点外，关联函数满足Klein-Gordon方程。Klein-Gordon方程在这个点的修正称为**接触项**。在这个简单的例子中，这个修正对我们来说并不陌生；式(9.85)仅仅说了费曼传播子是Klein-Gordon算符的一个格林函数，正如我们在2.4节最初所示。我们在那里看到当∂^2中的时间求导作用于编时符号时，delta函数就出现了。我们将在下面看到，在量子场论中十分普遍的是，场的所有量子关联函数都满足那些场的经典运动方程，并加上接触项。

例如，考虑由(9.84)得到的标量场的$(n+1)$点关联函数的等式：

$$(\partial^2 + m^2) \langle \Omega | T\phi(x)\phi(x_1)\cdots\phi(x_n) | \Omega \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \Omega | T\phi(x_1)\cdots\big(-i\delta(x - x_i)\big)\cdots\phi(x_n) | \Omega \rangle . \tag{9.86}$$

这个恒等式表示，$\phi(x)$在任何期望值内都服从Klein-Gordon方程，并加上与编时相关的接触项。该结果也可以用2.4节的方法从哈密顿形式理论中推导出来，或者利用自由场理论的特殊性质，通过使用Wick定理来对方程两边进行计算得到。

只要泛函测度在积分变量的移动下不变，我们就可以重复这个论证，得到标量场、矢量场和旋量场的任意理论的格林函数的量子运动方程。这就是为什么在公式(9.63)中，我们把移动不变性作为基础，定义了格拉斯曼积分的性质。

对于由拉格朗日量$\mathcal{L}[\varphi]$支配的场$\varphi(x)$的一般场论，导致了(9.83)的一系列操作给出了以下等式：

$$0 = \int \mathcal{D}\phi\, e^{i\int d^4x\,\mathcal{L}} \left\{ i\int d^4x\, \epsilon(x) \frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \Big(\int d^4x' \mathcal{L} \Big) \cdot \varphi(x_1)\varphi(x_2) + \epsilon(x_1)\varphi(x_2) + \varphi(x_1)\epsilon(x_2) \right\}, \tag{9.87}$$

以及n个场的关联函数的相似等式。根据泛函微分法则(9.31)，作用量的导数为

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \Big(\int d^4x' \mathcal{L} \Big) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \Big);$$

这正是根据φ的欧拉-拉格朗日运动方程(2.3)而等于零的量。式(9.87)及其推广得到了一组等式：

$$\left\langle \Big(\frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \int d^4x' \mathcal{L} \Big) \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \varphi(x_1) \cdots \big(i\delta(x - x_i) \big) \cdots \varphi(x_n) \right\rangle . \tag{9.88}$$

在这个方程中，角括号表示一个编时的关联函数，其中对$\varphi(x)$的求导放在编时符号之外，如(9.86)一样。关系式(9.88)指出，φ的所有格林函数均服从φ场的经典欧拉-拉格朗日方程，并加上由场算符的非平凡对易关系产生的接触项。这些格林函数的量子运动方程，包括适当的接触项，称为 **Schwinger-Dyson 方程**。

守恒定律

在经典场论中，诺特定理指出，对于定域拉格朗日量的每一个对称性，存在一个对应的守恒流。在第 2.2 节中，通过使拉格朗日量服从无穷小的对称变化，我们证明了诺特定理。根据上述讨论运动方程的精神，我们应该通过使泛函积分服从变量沿对称方向的的无限小变化，来找到这个定理的量子类比。

同样，从一个例子开始将是最有意义的。让我们来考虑一个自由的复标量场的理论，使用拉格朗日量：

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \phi|^2 - m^2 |\phi|^2 . \tag{9.89}$$

这个拉格朗日量在$\phi \to e^{i\alpha}\phi$的变换下是不变的。这种不变性的经典结果在2.2节的式(2.14)下面被讨论过了。要找到量子公式，考虑变量的无穷小变化

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x) + i\alpha(x)\phi(x). \tag{9.90}$$

注意，我们把无穷小的旋转角看成x的函数；原因一会儿就会清楚了。

泛函积分的测度在(9.90)的变换下是不变的，因为这是变量$\phi(x)$的一个幺正变换。因此，对于两个场的情况，

$$\int \mathcal{D}\phi\, e^{i\int d^4x\, \mathcal{L}[\phi]} \phi(x_1)\phi^*(x_2) = \int \mathcal{D}\phi\, e^{i\int d^4x\, \mathcal{L}[\phi']} \phi'(x_1)\phi'^*(x_2)\Big|_{\phi'=(1+i\alpha)\phi}.$$

把这个方程展开到α的第一阶，我们发现

$$\begin{aligned} 0 = \int \mathcal{D}\phi\, e^{i\int d^4x\, \mathcal{L}} \Big\{ & i\int d^4x \Big[(\partial_\mu \alpha)\cdot i(\phi\partial^\mu\phi^* - \phi^*\partial^\mu\phi)\Big]\phi(x_1)\phi^*(x_2) \\ & + \big[i\alpha(x_1)\phi(x_1)\big]\phi^*(x_2) + \phi(x_1)\big[-i\alpha(x_2)\phi^*(x_2)\big]\Big\}. \end{aligned}$$

注意拉格朗日量的变化只包含正比于$\partial_\mu\alpha$的项，因为用一个常数α替换(9.90)会使得拉格朗日量不变。要将这种关系转化为熟悉的形式，对包含$\partial_\mu\alpha$的项分部积分。然后取$\alpha(x)$的系数并除以Z，给出

$$\begin{aligned} \big\langle \partial_\mu j^\mu(x)\phi(x_1)\phi^*(x_2)\big\rangle = (-i)\Big\langle & \big(i\phi(x_1)\delta(x-x_1)\big)\phi^*(x_2) \\ & + \phi(x_1)\big(-i\phi^*(x_2)\delta(x-x_2)\big)\Big\rangle, \end{aligned} \tag{9.91}$$

where

$$j^\mu = i(\phi\partial^\mu\phi^* - \phi^*\partial^\mu\phi) \tag{9.92}$$

它为式(2.16)确定的诺特流。像(9.88)中一样，关联函数表示一个编时乘积，其中对$j^\mu(x)$的求导位于编时符号之外。关系式(9.91)是经典守恒律加上接触项，即与流守恒相关的Schwinger-Dyson方程。

在更一般的情况下讨论流守恒并不困难。考虑一组场$\varphi_a(x)$的一个局域场论，这些场由拉格朗日量$\mathcal{L}[\varphi]$支配。场φ_a的无穷小对称变换将是以下的一般形式：

$$\varphi_a(x) \to \varphi_a(x) + \epsilon\Delta\varphi_a(x). \tag{9.93}$$

我们假设作用量在这个变换下是不变的。那么，像(2.10)一样，如果取参数ϵ为常数，则拉格朗日量必须是不变的并加上一个全散度：

$$\mathcal{L}[\varphi] \to \mathcal{L}[\varphi] + \epsilon\partial_\mu\mathcal{J}^\mu. \tag{9.94}$$

如果对称参数ϵ依赖于x，如前文的分析一样，拉格朗日量的变化会稍微复杂一

点：

$$\mathcal{L}[\varphi] \to \mathcal{L}[\varphi] + (\partial_\mu \epsilon)\Delta\varphi_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} + \epsilon \partial_\mu \mathcal{J}^\mu.$$

对指标a求和是隐含的。然后

$$\frac{\delta}{\delta\epsilon(x)} \int d^4x\, \mathcal{L}[\varphi + \epsilon\Delta\varphi] = -\partial_\mu j^\mu(x), \tag{9.95}$$

式中j^μ为式(2.12)的诺特流，

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)}\Delta\varphi_a - \mathcal{J}^\mu. \tag{9.96}$$

利用结果(9.95)，并执行导致了(9.91)的一系列步骤，我们得到Schwinger-Dyson方程：

$$\begin{aligned}\langle \partial_\mu j^\mu(x)\varphi_a(x_1)\varphi_b(x_2)\rangle = (-i)\Big\langle &(\Delta\varphi_a(x_1)\delta(x-x_1))\varphi_b(x_2) \\ &+ \varphi_a(x_1)(\Delta\varphi_b(x_2)\delta(x-x_2))\Big\rangle.\end{aligned} \tag{9.97}$$

$\partial_\mu j^\mu$带着n个场$\varphi(x)$的关联子的一个类似方程也可以得到。这些给出了与经典诺特定理相关的，Schwinger-Dyson方程的完整集。

用这种变分程序可以获得诺特流，作为一个例子，考虑拉格朗日量在时空变换下的对称性。在以下变换下：

$$\varphi_a \to \varphi_a + a^\mu(x)\partial_\mu \varphi_a \tag{9.98}$$

拉格朗日量的变换为

$$\mathcal{L} \to \partial_\nu a^\mu \partial_\mu \varphi_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi_a)} + a^\mu \partial_\mu \mathcal{L}.$$

$\int d^4x\mathcal{L}$对a^μ的变分，得到了能动量张量的守恒方程，$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$，其中

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi_a)}\partial^\mu \varphi_a - g^{\mu\nu}\mathcal{L}, \tag{9.99}$$

与式(2.17)一致。

我们在本节中使用的技巧，即考虑这样一个对称变换，其参数是时空的一个函数，这让人想起我们很早前讨论到的引入 QED 的拉格朗日量的一个技术特性。在式(4.6)，我们注意到将光子耦合到带荷场的最小耦合方案，产生了一个不仅在整体对称变换下(ϵ是常数)而且在局域变换下(其对称参数依赖于x)都是不变的拉格朗日量。在 15 章，针对带有**局域**对称性的场论的一般讨论中，我们将把这两种思想结合在一起。

Ward-Takahashi 等式

作为本节的方法的最后一个应用，让我们推导出与 QED 的整体对称性相关的 Schwinger-Dyson 方程。考虑在 QED 泛函积分中做出变量的改变

$$\psi(x) \to (1 + ie\alpha(x))\psi(x), \tag{9.100}$$

没有与A_μ的变换律对应的项(它会使拉格朗日量在变换下不变)。然后QED拉格朗日量(4.3)的变换为：

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} - e\partial_\mu \alpha \bar{\psi}\gamma^\mu \psi. \tag{9.101}$$

因此，变换(9.100)导致了以下等式——在两个费米子场上的泛函积分：

$$\begin{aligned} 0 = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}A\, e^{i\int d^4x\,\mathcal{L}} \Big\{ -i\int d^4x\, \partial_\mu \alpha(x) \Big[j^\mu(x)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2) \Big] \\ + (ie\alpha(x_1)\psi(x_1))\bar{\psi}(x_2) + \psi(x_1)(-ie\alpha(x_2)\bar{\psi}(x_2)) \Big\}, \end{aligned} \tag{9.102}$$

其中$j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$。和我们的其他例子一样，一个类似的方程对于任意数量的费米子场也成立。

要理解这组方程的含义，首先考虑特定的情况(9.102)。将这个关系除以Z，我们发现

$$\begin{aligned} i\partial_\mu \langle 0|\, T j^\mu(x)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\,|0\rangle = &- ie\delta(x - x_1)\, \langle 0|\, T\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\,|0\rangle \\ &+ ie\delta(x - x_2)\, \langle 0|\, T\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\,|0\rangle\,. \end{aligned} \tag{9.103}$$

为了把这个方程变成一个更熟悉的形式，通过以下积分计算它的傅里叶变换：

$$\int d^4x\, e^{-ik\cdot x} \int d^4x_1\, e^{+iq\cdot x_1} \int d^4x_2\, e^{-ip\cdot x_2}. \tag{9.104}$$

于是(9.103)中振幅被转换为振幅$\mathcal{M}(k;p;q)$和$\mathcal{M}(p;q)$，它们在我们讨论Ward-Takahashi等式时的(7.67)下面被定义。事实上，(9.103)直接变成了以下形式：

$$-ik_\mu \mathcal{M}^\mu(k;p;q) = -ie\mathcal{M}_0(p;q-k) + ie\mathcal{M}_0(p+k;q). \tag{9.105}$$

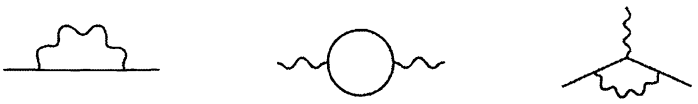
这正是两个外部费米子的Ward-Takahashi恒等式，我们在7.4节给出了其的图解。可以很容易去核查，包含了n个费米子场的更一般的关系导致了(7.68)所述的一般的Ward-Takahashi等式。由于这个关系，与任意对称性(9.93)相关的公式(9.97)，通常也被称为Ward-Takahashi等式，它与对称性及其诺特流相关。

现在我们已经对Ward-Takahashi等式右边的项有了更全面的理解。当我们把经典运动方程转换成量子格林函数的Schwinger-Dyson方程时，这些项是我们现在希望能找到的接触项。泛函积分的形式理论允许对这些量子力学项进行简单而优雅的推导。

Chapter 10

重整化的系统学

在第6章和第7章计算辐射修正时，我们遇到了三个具有紫外发散的QED图：



在每种情况下，我们都看到发散可以被正规化和抵消，从而得到可观测量的有限表达式。在第 8 章中，我们指出这种紫外发散现象在量子场论计算中普遍存在，实际上是自然存在的。我们通过这些发散在量子场论和相变统计理论中的含义，概述了它们的一个物理解释。在接下来的几章中，我们将把这种粗略图像转换成一个允许精确计算的定量理论。

在这一章中，我们首先对量子场论中可能出现的紫外发散进行分类。现在，我们不再是一个接一个地偶然遇到这些发散，然后逐个解决它们，而是要彻底确定哪些图是发散的，哪些理论可以系统地消除这些发散。作为例子，我们将考虑 QED 和标量场论。

10.1 紫外发散的计数

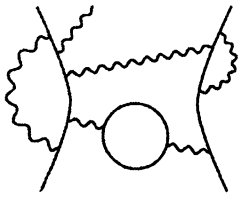
在本节中，我们将使用基本参数来暂时确定费曼图何时包含紫外发散。我们从分析量子电动力学开始。

首先，我们引入以下符号来表示 QED 中一个典型的图：

N_e=外部电子线数;
N_γ=外部光子线数;
P_e=电子传播子数;
P_γ=光子传播子数;
V=顶点数;
L=圈数.

(本分析适用于关联函数和散射振幅。在前一种情况下，连接到外部点的传播子应被视为外线，而不是传播子)。

与典型图对应的表达式如下：



$$\sim \int \frac{d^4k_1\, d^4k_2 \cdots d^4k_L}{(\not{k}_i - m)\cdots(k_j^2)\cdots(k_n^2)}.$$

对于每个圈，都有一个潜在的发散的 4 动量积分，但是每个传播子通过把动量的一次或两次幂放入分母来帮助这个积分收敛。粗略地说，除非分母上动量的幂大于分子上动量的幂，否则图是发散的。因此，让我们把**表观发散度**D定义为差：

$$\begin{aligned} D &\equiv (\text{power of } k \text{ in numerator}) - (\text{power of } k \text{ in denominator}) \\ &= 4L - P_e - 2P_\gamma. \end{aligned} \tag{10.1}$$

我们天真地期望当$D > 0$时，图有一个正比于Λ^D的发散，其中Λ是动量截断。我们期望当$D = 0$时出现$\log\Lambda$形式的发散，当$D < 0$时没有发散。

这种天真的期望通常是错误的，原因有三(见图10.1)。当一个图包含发散的子图时，它的实际发散度可能比D所表示的发散度要糟糕。当对称性(如Ward等式)导致某些项抵消时，图的发散度可能会减小甚至消除。最后，一个没有传播子和圈的平凡图具有$D = 0$但没有发散。

尽管存在这些复杂性，D仍然是一个有用的量。为了看到为什么，让我们用外线数(N_e,N_γ)和顶点数(V)来重写它。注意，图中圈积分的数目为

$$L = P_e + P_\gamma - V + 1, \tag{10.2}$$

这是因为在我们原始费曼规则中每个传播子都有一个动量积分，每个顶点都有一个delta函数，还有一个仅仅加强了整体动量守恒的delta函数。此外，顶点数为

$$V = 2P_\gamma + N_\gamma = \tfrac{1}{2}(2P_e + N_e), \tag{10.3}$$

因为每个顶点都精确地包含一条光子线和两条电子线(传播子计了两次数，因为它们有两个端点在顶点上)把这些关系放在一起，我们发现D可以表示为

$$\begin{aligned} D &= 4(P_e + P_\gamma - V + 1) - P_e - 2P_\gamma \\ &= 4 - N_\gamma - \tfrac{3}{2}N_e, \end{aligned} \tag{10.4}$$

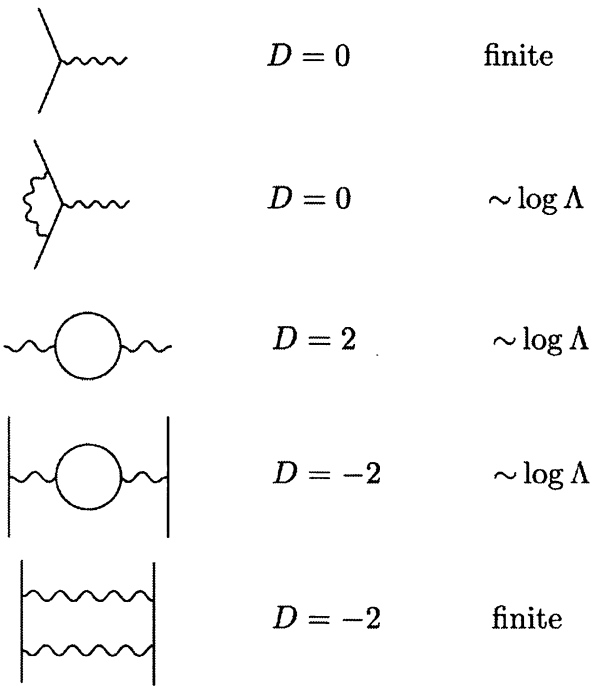


图 10.1 一些简单的 QED 图，说明了表观发散度。第一个图是有限的，即使 $D = 0$。第三个图有 $D = 2$，但由于 Ward 等式(见 7.5 节)，只有对数发散。第四个图是发散的，即使 $D < 0$，因为它包含一个发散的子图。只有在第二和第五图中，表观发散度才与实际的发散度一致。

与顶点数无关。一个QED图的表观发散度仅取决于每种类型的外腿的数目。

由结果(10.4)可知，只有外腿数较少的图具有$D \geq 0$；这七种类型的图如图 10.2 所示。由于外腿没有进入潜在发散的积分，我们可以将注意力限制在截腿图上。我们也可以把我们的注意力限制在单粒子不可约图上，因为可约图是其不可约的部分所对应的积分的简单乘积。因此，枚举所有发散 QED 图的任务简化为分析图 10.2 中所示的七种类型的截腿的单粒子不可约振幅。其他图可能会发散，但只有当它们包含这七个图中的一个作为子图时才会发散。因此，让我们依次考虑这七个振幅中的每一个。

零点函数(图.10.2a)的发散度非常差。但是这个对象仅仅引起真空能量的不可观测的移动；它从不贡献于S矩阵元。

要分析光子一点函数(图 10.2b)，请注意，外部光子必须连接到一个 QED

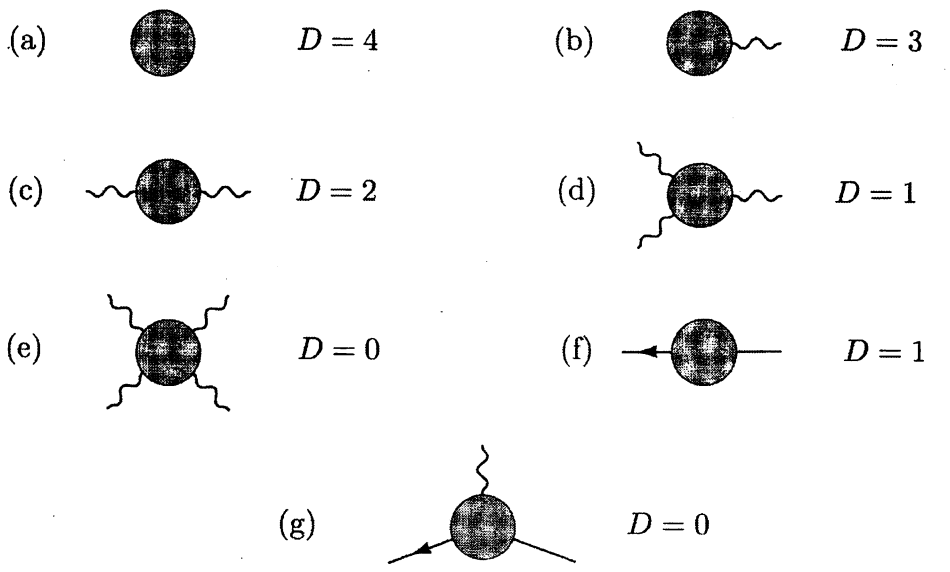


图 10.2 表观发散度(D) ≥ 0的 7 个 QED 振幅(每个圆圈表示所有可能的 QED 图的和)。如文中所述，振幅(a)与散射过程无关，而振幅(b)和(d)由于对称性而消失。振幅(e)是非零的，但由于 Ward 恒等式，它的发散部分抵消了。其余的振幅(c、f 和 g)都是对数发散的，即使对于(c)和(f) $D > 0$。

顶点。忽略外部光子传播子，因此这个振幅是：



$$= -ie \int d^4x\, e^{-iq\cdot x} \langle \Omega | T\, j_\mu(x) | \Omega \rangle , \qquad (10.5)$$

其中$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$为电磁流算符。但是根据洛伦兹不变性，$j^\mu$的真空期望值必须为零，否则它将是一个优势(preferred)四矢量。

光子一点函数因为第二个原因也为零：电荷共轭不变性。回想一下，C 是 QED 的一个对称性，所以$C|\Omega\rangle = |\Omega\rangle$。但$j^\mu(x)$在电荷共轭下改变符号，$Cj^\mu(x)C^\dagger = -j^\mu(x)$，故其真空期望值必须为零。

$$\langle \Omega | T j^\mu(x) | \Omega \rangle = \langle \Omega | C^\dagger C j^\mu(x) C^\dagger C | \Omega \rangle = - \langle \Omega | T j^\mu(x) | \Omega \rangle = 0.$$

同样的道理也适用于任意奇数个电磁流的真空期望值。特别是，光子三点函数(图 10.2d)为零(这个结果被称为Furry定理)。不难明确地检查光子的一和三点函数在微扰论的领头阶中为零(见第 10.1 题)。

图 10.2 中剩余的振幅都是非零的，因此我们必须更详细地分析它们的结构。例如，考虑电子的自能(图 10.2f)。这个振幅是电子动量p的函数，让我们把它展

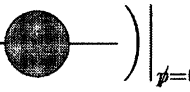
开成关于$p=0$的泰勒级数：



$$= A_0 + A_1 \not{p} + A_2 p^2 + \cdots ,$$

其中各系数与p无关：

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\not{p}^n}\left(\quad \right)\Big|_{\not{p}=0}.$$



(这些系数是红外发散的；为了明确地计算它们，我们需要一个红外正规子，如第6章所述)。对电子自能有贡献的图通过传播子的分母而依赖于p。为计算系数A_n，我们求这些传播子的微分，给出的表达式如下

$$\frac{d}{d\not{p}}\left(\frac{1}{\not{k}+\not{p}-m}\right) = -\frac{1}{(\not{k}+\not{p}-m)^2}.$$

也就是说，对外部动量p的每一个导数都会使表观发散度下降1。由于常数项A_0(表观地)有一个线性发散，所以A_1只能有对数发散；其余的A_n都是有限的(当发散是在子图中时，这个论点就不适用了，因为那时并不是所有的传播子都包含大动量k。我们将在 10.4 节中面对这个问题)。

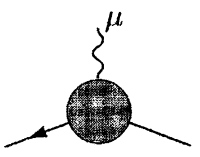
电子自能振幅还有一个微妙之处。如果常数项A_0正比于Λ(紫外截断)，那么根据 7.1 节的分析，电子质量移动也会有一个与Λ成正比的项，但电子质量移动实际上必须正比于m，因为如果m为零，手征对称性会禁止质量移动。在最坏的情况下，常数项可以正比于$m\log\Lambda$。因此我们期望整个自能振幅具有以下形式



$$= a_0 m \log\Lambda + a_1 \not{p} \log\Lambda + (\text{finite terms}), \tag{10.6}$$

这和我们在方程(7.19)中找到的α阶项是一样的。

让我们用同样的方法分析电子-光子的精确顶点，图 10.2g(再一次，我们隐含地假设红外发散已经被正规化)。把三个外部动量按幂展开，因为对任何外部动量求微分都会使发散度降低 1，我们立刻看到只有常数项是发散的。因此，这个振幅只包含一个发散常数：



$$\propto -ie\gamma^\mu \log\Lambda + \text{finite terms}. \tag{10.7}$$

正如第7.5节所讨论的，光子自能(图10.2c)由Ward等式所约束而形成的形式为：

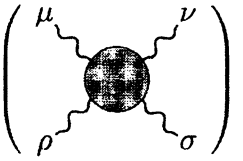


$$= (g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)\Pi(q^2). \tag{10.8}$$

把这个表达式看成q的泰勒级数，我们看到常数项和线性项都为零，使得表观发散度从 2 降到 0。因此，唯一的发散是$\Pi(q^2)$的常数项，这种发散仅仅是对数的。这个结果精确地是我们在(7.90)式发现的对$\Pi(q^2)$的最低阶贡献。

最后，考虑光子-光子散射振幅，图 10.2e。Ward 等式要求，对于任何外部光子，如果我们用它的动量矢量来替换它，振幅就会消失：

k^μ



$$= 0. \tag{10.9}$$

穷尽各种情况可以看出，只有当振幅与$(g^{\mu\nu}k^\sigma - g^{\mu\sigma}k^\nu)$成正比时，这种情况才会得到满足，其他三条腿的每一条都有一个类似的因子。每一个因子都包含动量的一次幂，所以在这个振幅的泰勒级数中，动量的幂小于四次的所有项都必须为零。第一个不为零项是$D = 0 - 4 = -4$，因此这个振幅是有限的。

综上所述，我们发现 QED 中只有三个“原始的”发散振幅：我们已经在第 6 章和第 7 章中找到的三个(其他振幅也可能是发散的，但只是因为图中包含这些原始振幅并作为其的一部分)此外，这些发散振幅对外部动量的依赖极其简单。如果我们把每个振幅对它的外动量展开成幂级数，在展开过程中总共只有四个发散的系数。换句话说，QED 只包含四个发散的数。在下一节中，我们将看到这些数如何被吸收到不可观测的拉格朗日量参数中，从而使可观测的散射振幅总是有限的。

对于本节的其余部分，让我们试着从更一般的观点来理解这种表观发散度。四维时空 QED 理论比较特殊，我们先把它推广到 d 维 QED。在这种情况下，D 由下列式子给出

$$D \equiv dL - P_e - 2P_\gamma, \tag{10.10}$$

因为每个圈都有一个d维动量积分。关系(10.2)和(10.3)仍然成立，所以我们可以

用V, N_e, N_γ重写 D，这次的结果是

$$D = d + \left(\frac{d-4}{2}\right)V - \left(\frac{d-2}{2}\right)N_\gamma - \left(\frac{d-1}{2}\right)N_e. \tag{10.11}$$

这个表达式中V的消去在$d = 4$的情况下是特殊的。对于$d < 4$。顶点越多的图发散度越低，因此发散图的总数是有限的。对于$d > 4$，顶点较多的图具有较高的发散度，因此每一个振幅在微扰论的足够高的阶数上都变得表观发散。

这三种可能的紫外行为的类型也将出现在其他量子场论中。我们将如下去称呼它们：

超可重整理论: 只有有限数目的费曼图是表观发散的。

可重整理论: 只有有限数目的振幅是表观发散的；然而，发散发生在微扰论的所有阶中。

不可重整理论: 所有振幅在微扰论的一个足够高的阶上都是发散的。

用这个命名法，我们可以说 QED 在四维中是可重整的，在四维以下是超重整的，在四维以上是不可重整的。

这些表观判据为大多数已经被详细研究过的例子，给出了理论真实发散结构的正确图像。已知一些例子，当强大的对称性将一些或所有的表观发散振幅设置为零时，其真实行为要优于这个图像所建议的*。另一方面，正如我们将在第 10.4 节中解释的那样，表观可重整理论的发散总是可以被吸收到有限数量的拉格朗日量参数。对于包含了自旋为 1 及更高自旋的场的理论，圈图会产生额外的问题，包括幺正性的违反；我们将在第 16 章讨论这个困难。

作为计算紫外发散的另一个例子，考虑一个纯标量场论，在 d 维中，有一个ϕ^n相互作用项

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{n!}\phi^n. \tag{10.12}$$

设N为图中外线的个数，P为传播子的个数，V为顶点的个数。图中圈的个数是$L = P - V + 1$。每个顶点有n条线相交，所以$nV = N + 2P$。结合这些关系，

*一些奇异的四维场论实际上没有发散；例如，看 P. West 文章 *In Shelter Island II.* R. Jackiw. N. N. Khuri. SWeinberg, and E. Witten, eds (MIT Press, Cambridge, 1985)

我们发现图的表观发散度为

$$\begin{aligned} D &= dL - 2P \\ &= d + \Big[n\Big(\frac{d-2}{2}\Big) - d\Big]V - \Big(\frac{d-2}{2}\Big)N. \end{aligned} \tag{10.13}$$

在四维中，ϕ^4耦合是可重整的，而更高的幂是不可重整的。在三维中，ϕ^6耦合变为可重整化的，而ϕ^4是超可重整化的的。在二维时空中，ϕ^n形式的任何耦合都是超可重整的。

表达式(10.13)也可以用量纲分析以稍微不同的方式导出。在任何量子场论中，作用量$S = \int d^d x \mathcal{L}$必须是无量纲的，因为我们的单位是$\hbar = 1$。在这个单位系统中，积分$d^d x$有单位$(\text{mass})^{-d}$，因此拉格朗日量有单位$(\text{mass})^d$。由于所有的单位都可以表示为质量的幂，所以简单地说拉格朗日量“量纲为d”就很明确了。利用这一结果，我们可以从(10.12)的显式形式推断出场ϕ和耦合常数λ的量纲。从$\mathcal{L}$的动力学项我们看到ϕ量纲为$(d-2)/2$。注意参数m始终具有质量的量纲，从相互作用项和ϕ的量纲我们推断λ量纲为$d - n(d-2)/2$。

现在考虑一个有N条外线的任意图。产生这种图的一种方法是来自拉格朗日量中非相互作用项$\eta\phi^N$。那么η的量纲就是$d - N(d-2)/2$，因此我们认为任何(截腿的)带有N条外线的图的量纲就是$d - N(d-2)/2$。在我们只有顶点$\lambda\phi^n$的理论中，如果图中有V个顶点，它的发散部分与$\lambda^V \Lambda^D$成正比，其中Λ是一个高动量的截断，D是表观发散度(这是“一般”的情况；上述所有例外情况也适用于此)。应用量纲分析，我们发现

$$d - N\Big(\frac{d-2}{2}\Big) = V\Big[d - n\Big(\frac{d-2}{2}\Big)\Big] + D,$$

与(10.13)相同。

注意，这个表达式中乘以V的量仅仅是耦合常数λ的量纲。对于QED和其他场论也可以进行这个分析，结果是一样的。因此，我们可以用第二种方式来表征三种可重整性的程度：

超可重整化：耦合常数具有正的质量量纲

可重整化：耦合常数是无量纲的。

不可重整化：耦合常数具有负的质量量纲。

这正是我们在没有证明的情况下在4.1节中所陈述的结论。在QED中，耦合常数

e是无量纲的；因此，QED(至少在表观上)是可重整的。

10.2 重整化微扰论

在前一节中，我们看到一个可重整的量子场论只包含少量表观发散的振幅。例如在 QED 中，有三个这样的振幅，包含了四个无穷大常数。在第 6 章和第 7 章这些无穷大在我们的计算结束时消失了：顶点修正图的无穷大被电子场强重整化抵消了，而真空极化图中的无穷大仅引起了电子电荷的一个不可观测的移动。事实上，一般来说可重整的量子场论中的发散从来没有出现在可观测量中。

为了获得包含了发散图的振幅的一个有限结果，到目前为止我们已经使用了以下程序：使用一个正规子来计算图，以获得一个依赖于裸质量(m_0)、裸耦合常数(e_0),和一些紫外线截断(Λ)的表达式。然后计算物理质量(m)和物理耦合常数(e)，以至于在任意阶与其余计算一致；这些量也将依赖于m_0、e_0和Λ。为了计算S矩阵元(而不是关联函数)，你还必须计算场强重整化Z(根据(7.45)式)。将所有这些表达式结合起来，去掉m_0和e_0，代之以m和e；这一步是“重整化”。得到的振幅表达式应在$\Lambda \to \infty$的极限下是有限的。

上述过程在可重整量子场论中总是有效的。然而，它常常很麻烦，特别是在微扰论的高阶上。在本节中，我们将发展一个能更自动工作的可替代程序。我们将首先在ϕ^4理论下做这个，在下一节中回到 QED。

ϕ^4理论的拉格朗日量是

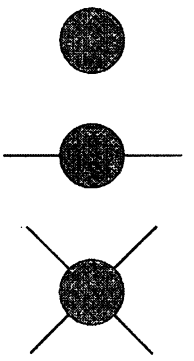
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m_0^2\phi^2 - \frac{\lambda_0}{4!}\phi^4.$$

我们现在写m_0和λ_0，以强调这都是质量和耦合常数的裸值，而不是实验测量值。

根据(10.13)，一个具有N个外腿的图的表观发散度为

$$D = 4 - N.$$

由于理论在$\phi \to -\phi$下是不变的，所以，所有带有奇数个外腿的振幅都为零。因此，唯一发散的振幅是



(unobservable vacuum energy shift);

$\sim\Lambda^2 + p^2 \log\Lambda + (\text{finite terms})$;

$\sim \log\Lambda + (\text{finite terms})$.

忽略真空图，这些振幅包含三个无穷大常数。我们的目标是把这些常数吸收到理论的三个不可观测的参数中：裸质量、裸耦合常数和场强。为了实现这一目标，可以很方便地重新构造微扰展开，使这些不可观测量不会显式出现在费曼规则中。

首先我们将消除场强中的移动。回想 7.1 节，精确的两点函数有以下形式

$$\int d^4x\, \langle\Omega|\, T\phi(x)\phi(0)\,|\Omega\rangle\, e^{ip\cdot x} = \frac{iZ}{p^2 - m^2} + (\text{terms regular at } p^2 = m^2), \tag{10.14}$$

其中m是物理质量。我们可以将场重标度，以从这个方程中消除尴尬的留数Z：

$$\phi = Z^{1/2}\phi_r. \tag{10.15}$$

对于每个场，这个变换将关联函数的值改变了一个因子$Z^{-1/2}$。因此，在计算 S 矩阵元时，我们在式(7.45)中不再需要Z因子；散射振幅仅仅是所有连通的、截腿的图的和，正如我们最初在公式(4.103)中猜测的那样。

重标度后的拉格朗日量更加丑陋：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}Z(\partial_\mu\phi_r)^2 - \frac{1}{2}m_0^2 Z\phi_r^2 - \frac{\lambda_0}{4!}Z^2\phi_r^4. \tag{10.16}$$

裸的质量和耦合常数仍然出现在$\mathcal{L}$中，但它们可以像下面这样被消除，定义：

$$\delta_Z = Z - 1, \qquad \delta_m = m_0^2 Z - m^2, \qquad \delta_\lambda = \lambda_0 Z^2 - \lambda, \tag{10.17}$$

其中m和λ是物理上测量的质量和耦合常数。于是拉格朗日量变成

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = {} & \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_r)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi_r^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi_r^4 \\ & + \frac{1}{2}\delta_Z(\partial_\mu\phi_r)^2 - \frac{1}{2}\delta_m\phi_r^2 - \frac{\delta_\lambda}{4!}\phi_r^4.\end{aligned} \tag{10.18}$$

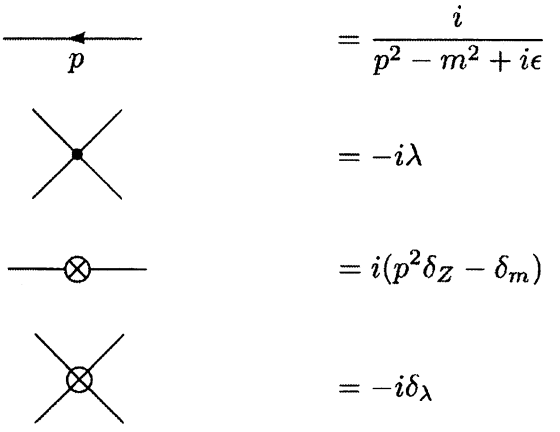
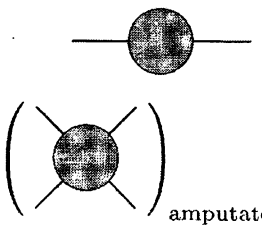


图 10.3 重整化微扰论中，ϕ^4理论的费曼规则。

第一行现在看起来像熟悉的ϕ^4理论的拉格朗日量，但是是用物理的质量和耦合来表示的。第二行中的项称为**抵消项**(*counterterms*)，它们已经吸收了裸参数和物理参数之间的无穷大的但不可观测的移动。很容易说，我们把这些抵消项“加”到拉格朗日量中去了，但事实上，我们只是把(10.16)的每一项分成两部分。

除非我们对物理质量和耦合常数给出精确的定义，否则(10.17)中的定义是没有用的。式(10.14)将m^2定义为传播子中的极点位置。对λ没有一个明显的最佳定义，但是通过使λ等于散射振幅在零动量时的大小，可以得到一个完美的定义。因此我们有两个定义关系，



$$= \frac{i}{p^2 - m^2} + (\text{terms regular at } p^2 = m^2);$$

$$= -i\lambda \qquad \text{at } s = 4m^2,\ t = u = 0. \tag{10.19}$$

这些方程称为**重整化条件**(第一个方程实际上包含两个条件，指定了极点的位置及其留数)。

我们新的拉格朗日量(10.18)给出了一组新的费曼规则，如图 10.3 所示。传播子和第一个顶点来自(10.18)的第一行，这与旧规则相同，只是物理的质量和耦合的出现代替了裸值。(10.18)的第二行中的抵消项给出了两个新的顶点(也称为抵消项)。

我们可以用这些新的费曼规则来计算ϕ^4理论中的任何振幅。这个程序如下。

将所需振幅看作由图 10.3 所示传播子和顶点产生的所有可能图的和来计算。图中的圈积分经常发散，因此必须引入正规子。这个计算的结果将是三个未知参数δ_Z、δ_m和δ_λ的一个函数。根据需要调整(或“重整”)这三个参数，以维持重整化条件(10.19)。在这个调整后，振幅的表达式应该是有限的，并独立于正规子。

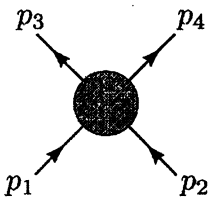
使用带有抵消项的费曼规则的这个程序被称为**重整化的微扰论**。它应该与我们在第 1 部分中使用的程序形成对比，它在本节开始已被概述了，被称为**裸微扰论**(因为费曼规则包含裸的质量和耦合常数)。这两种方法是完全相同的。他们之间的差异纯粹是“管账”(bookkeeping)的问题。使用这两种方法都可以得到相同的答案，所以你可以选择你认为更方便的方法。一般来说，重整化微扰论在技术上更容易使用，特别是对于多圈图；然而，对于复杂的单圈计算，裸微扰论有时更简单。在本书的其余部分，我们将使用重整化的微扰论。

ϕ^4理论的单圈结构

为了更好地理解重整化过程，让我们在单圈水平上显式地执行它。

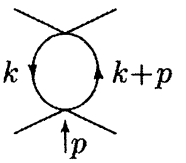
首先考虑基本的二粒子散射振幅

$$i\mathcal{M}(p_1p_2 \to p_3p_4) =$$



$$= \quad + \left(\quad + \quad + \quad \right) + \quad + \cdots .$$

如果我们定义$p = p_1 + p_2$，那么第二个图是



$$= \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{(k+p)^2 - m^2}$$

$$\equiv (-i\lambda)^2 \cdot iV(p^2). \tag{10.20}$$

注意p^2等于Mandelstam变量s。接下来的两个图是相同的，只是s将被t和u替换。因此整个振幅是

$$i\mathcal{M} = -i\lambda + (-i\lambda)^2 \left[iV(s) + iV(t) + iV(u) \right] - i\delta_\lambda. \tag{10.21}$$

根据我们的重整化条件(10.19)，这个振幅应该在$s = 4m^2$和$t = u = 0$处等于$-i\lambda$。因此，我们必须设置

$$\delta_\lambda = -\lambda^2 \big[V(4m^2) + 2V(0)\big]. \tag{10.22}$$

(在更高阶，δ_λ将收到额外的贡献)。

我们可以使用维数正规化显式地计算$V(p^2)$。步骤与第7.5节完全相同：引入费曼参数，移动积分变量，旋转到欧氏空间，执行动量积分。我们获得

$$\begin{aligned}
V(p^2) &= \frac{i}{2}\int_0^1 dx \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{\big[k^2 + 2xk\cdot p + xp^2 - m^2\big]^2} \\
&= \frac{i}{2}\int_0^1 dx \int \frac{d^d\ell}{(2\pi)^d} \frac{1}{\big[\ell^2 + x(1-x)p^2 - m^2\big]^2} \qquad (\ell = k + xp) \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1 dx \int \frac{d^d\ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{\big[\ell_E^2 - x(1-x)p^2 + m^2\big]^2} \qquad (\ell_E^0 = -i\ell^0) \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1 dx \, \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{\big[m^2 - x(1-x)p^2\big]^{2-d/2}} \\
&\xrightarrow[d\to 4]{} -\frac{1}{32\pi^2}\int_0^1 dx \Big(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log(4\pi) - \log\big[m^2 - x(1-x)p^2\big]\Big),
\end{aligned} \tag{10.23}$$

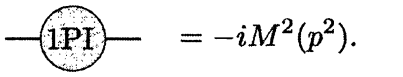
其中$\epsilon = 4 - d$。因此耦合常数(10.22)的移动为

$$\begin{aligned}
\delta_\lambda &= \frac{\lambda^2}{2}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}}\int_0^1 dx \Big(\frac{1}{[m^2 - x(1-x)4m^2]^{2-d/2}} + \frac{2}{[m^2]^{2-d/2}}\Big) \\
&\xrightarrow[d\to 4]{} \frac{\lambda^2}{32\pi^2}\int_0^1 dx \Big(\frac{6}{\epsilon} - 3\gamma + 3\log(4\pi) - \log\big[m^2 - x(1-x)4m^2\big] - 2\log\big[m^2\big]\Big).
\end{aligned} \tag{10.24}$$

这些表达式在$d \to 4$时发散。但是如果我们根据(10.21)把它们结合起来，我们得到有限的(或许相当复杂的)结果，

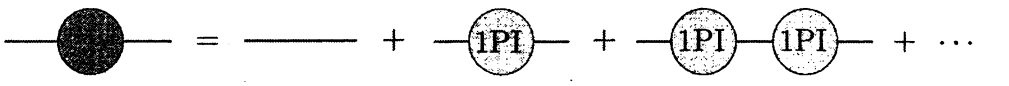
$$\begin{aligned}
i\mathcal{M} = -i\lambda - \frac{i\lambda^2}{32\pi^2}\int_0^1 dx \Big[&\log\Big(\frac{m^2 - x(1-x)s}{m^2 - x(1-x)4m^2}\Big) + \log\Big(\frac{m^2 - x(1-x)t}{m^2}\Big) \\
&+ \log\Big(\frac{m^2 - x(1-x)u}{m^2}\Big)\Big].
\end{aligned} \tag{10.25}$$

为确定δ_Z和δ_m，我们必须计算两点函数。如第 7.2 节，让我们将$-iM^2(p^2)$定义为插入到传播子的所有单粒子不可约插入的和：



$$= -iM^2(p^2). \tag{10.26}$$

然后完全的两点函数由几何级数给出，



$$= \frac{i}{p^2 - m^2 - M^2(p^2)}. \tag{10.27}$$

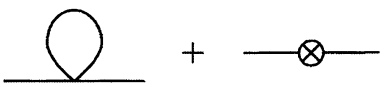
重整化条件(10.19)要求该完全传播子中的极点出现在$p^2 = m^2$处，且有留数 1。这两个条件分别等于

$$M^2(p^2)\big|_{p^2=m^2} = 0 \qquad \text{and} \qquad \frac{d}{dp^2}M^2(p^2)\big|_{p^2=m^2} = 0. \tag{10.28}$$

(为了检验后一种条件，在式(10.27)中将M^2在约$p^2 = m^2$处展开)。

明显地，对于单圈阶，

$$-iM^2(p^2) =$$



$$= -i\lambda \cdot \frac{1}{2} \cdot \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{i}{k^2 - m^2} + i(p^2\delta_Z - \delta_m)$$

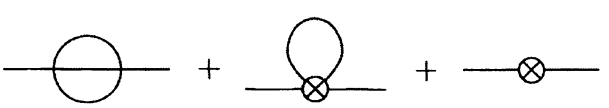
$$= -\frac{i\lambda}{2} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{(m^2)^{1-d/2}} + i(p^2\delta_Z - \delta_m). \tag{10.29}$$

由于第一项独立于p^2，所以结果相当平凡的：设置

$$\delta_Z = 0 \qquad \text{and} \qquad \delta_m = -\frac{\lambda}{2(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{(m^2)^{1-d/2}} \tag{10.30}$$

对于所有p^2，产生$M^2(p^2) = 0$，同时满足(10.28)中的两个条件。

$M^2(p^2)$和δ_Z的第一个非零贡献与λ^2成正比，这来自于图



(10.31)

第二张图包含了δ_λ抵消项，我们已经计算过了。它抵消了第一个图中的紫外发散——它发生在其中一个圈动量很大而其他的都很小的时候。第三个图同样是

$(p^2\delta_Z-\delta_m)$抵消项，通过要求剩余的发散(当两个圈动量都变大时)都消除，它被确定到λ^2阶。在第 10.4 节中，我们将看到在双圈计算中各种抵消项的相互作用的一个明确例子。

δ_Z在单圈阶上为零是ϕ^4理论的一个特殊特征，这在更一般的标量场的理论中是不会发生的。在4.7节描述的Yukawa理论给出了一个明确的单圈修正的例子，对此这个抵消项是必需的。

在Yukawa理论中，标量场传播子从费米子圈图和二传播子抵消项中得到g^2阶的修正。利用第118页上的费曼规则计算圈图，我们发现

$$-iM^2(p^2) = \quad \underset{p}{\overset{k+p}{\overset{\curvearrowleft}{\bigcirc}}}\!\!\!

$$\delta_Z = -\frac{4g^2(d-1)}{(4\pi)^{d/2}}\int_0^1 dx\,\frac{x(1-x)\Gamma(2-\frac{d}{2})}{[m_f^2 - x(1-x)m^2]^{2-d/2}}$$

$$\xrightarrow[d\to 4]{} -\frac{3g^2}{4\pi^2}\int_0^1 dx\,x(1-x)\left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma - \frac{2}{3} + \log(4\pi) - \log\left[m_f^2 - x(1-x)m^2\right]\right). \tag{10.35}$$

因此，在 Yukawa 理论中，传播子在单圈阶的修正需要一个二次发散的质量重整化和一个对数发散的场强重整化。这是标量场论中的一般情况。

10.3 量子电动力学的重整化

我们在上一节中遵循的程序，得到了一个用物理上可观测的参数表示的“重整化”微扰论，可以总结为如下：

1. 通过将场重新标度，把场强重整化吸收到拉格朗日量中
2. 把拉格朗日量的每一项分成两部分，把无穷大的、不可观测的移动吸收到抵消项中去。
3. 指定重整化条件，它定义物理的质量和耦合常数并保持场强重整化等于 1。
4. 用新的费曼规则计算振幅，根据需要调整抵消项以维持重整化条件。

现在让我们用这个程序来构造量子电动力学重整化微扰论。

原始的QED拉格朗日量是

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m_0)\psi - e_0\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu.$$

用这个拉格朗日量计算电子和光子传播子，可以得到一般形式的表达式



$$= \frac{iZ_2}{p\!\!\!/ - m} + \cdots; \qquad = \frac{-iZ_3 g_{\mu\nu}}{q^2} + \cdots.$$

(我们在第七章的显式单圈计算中发现了这样的表达式)。为了将Z_2和Z_3吸收到$\mathcal{L}$中，从而将它们从S矩阵的公式(7.45)中消去，我们做替代$\psi = Z_2^{1/2}\psi_r$和$A^\mu = Z_3^{1/2}A_r^\mu$。然后拉格朗日量变成

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{4}Z_3(F_r^{\mu\nu})^2 + Z_2\bar{\psi}_r(i\partial\!\!\!/ - m_0)\psi_r - e_0 Z_2 Z_3^{1/2}\bar{\psi}_r\gamma^\mu\psi_r A_{r\mu}. \tag{10.36}$$

我们可以引入物理电荷e，它是在大距离测量的($q=0$)，通过定义一个标度因子Z_1如下*：

$$e_0 Z_2 Z_3^{1/2} = e Z_1. \tag{10.37}$$

如果我们令m为物理质量(电子传播子中极点的位置)，那么我们可以将拉格朗日量的每一项分解为如下两部分：

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &-\tfrac{1}{4}(F_r^{\mu\nu})^2 + \bar{\psi}_r(i\partial\!\!\!/ - m)\psi_r - e\bar{\psi}_r\gamma^\mu\psi_r A_{r\mu} \\ &- \tfrac{1}{4}\delta_3(F_r^{\mu\nu})^2 + \bar{\psi}_r(i\delta_2\partial\!\!\!/ - \delta_m)\psi_r - e\delta_1\bar{\psi}_r\gamma^\mu\psi_r A_{r\mu},\end{aligned} \tag{10.38}$$

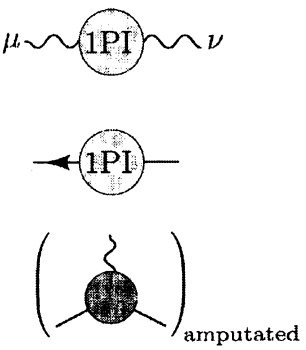
where

$$\delta_3 = Z_3 - 1, \qquad \delta_2 = Z_2 - 1,$$

$$\delta_m = Z_2 m_0 - m, \qquad \text{and} \qquad \delta_1 = Z_1 - 1 = (e_0/e)Z_2 Z_3^{1/2} - 1.$$

重整化的 QED 的费曼规则如图 10.4 所示。除了熟悉的传播子和顶点外，还有三个抵消项顶点。ee和$ee\gamma$抵消项顶点可以直接从拉氏量(10.38)中读取。为了推导双光子的抵消项，将$-\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2$分部积分来得到$-\frac{1}{2}A_\mu(-\partial^2 g^{\mu\nu} + \partial^\mu\partial^\nu)A_\nu$；这给出了如图所示的表达式。在本书的其余部分，当我们建立重整化微扰论时，我们将删除下标r，它在这里用来区分重标度的场。

四个抵消项系数中的每一个都必须由重整化条件确定。我们需要的四个条件已经被隐式地陈述过了：其中两个条件将电子和光子场强重整化固定为 1，而另外两个条件定义了物理的电子质量和电荷。要更明确地写出这些条件，请回忆一下第 6 章和第 7 章中的符号：



$$= i\Pi^{\mu\nu}(q) = i(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)\Pi(q^2),$$

$$= -i\Sigma(\not{p}), \tag{10.39}$$

$$= -ie\Gamma^\mu(p', p).$$

*由于e是由重整化条件$\Gamma^\mu(q=0) = \gamma^\mu$定义的，拉格朗日量中的$Z_1$因子必须抵消由圈修正产生的乘上的修正因子。因此，$Z_1$的这个定义和式(7.47)给出的定义等价。

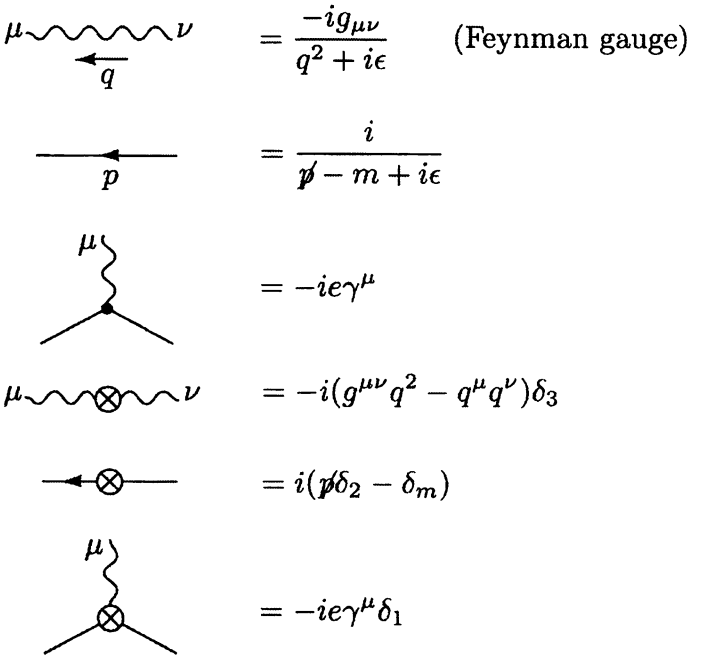


图10.4 重整化微扰论中的量子电动力学费曼规则。

这些振幅现在要用重整化微扰论来计算；也就是说，我们现在重新定义$\Pi(q^2)$、$\Sigma(\not{p})$和$\Gamma(p',p)$以包含抵消项顶点。此外，Γ的新定义包含物理的电子电荷。在这个符号下，四个条件是

$$\begin{aligned}\Sigma(\not{p}=m)&=0;\\ \frac{d}{d\not{p}}\Sigma(\not{p})\Big|_{\not{p}=m}&=0;\\ \Pi(q^2=0)&=0;\\ -ie\Gamma^\mu(p'-p=0)&=-ie\gamma^\mu.\end{aligned}\tag{10.40}$$

第一个条件将电子质量固定在m处，而接下来的两个条件将电子和光子传播子的留数固定在1处。给出这些条件后，最后一个条件将电子的电荷固定为e。

QED的单圈结构

(10.40)的这四个条件允许我们根据圈图的值来确定(10.38)中的四个抵消项。在第6章和第7章中，我们给出了对单圈阶执行此计算的所需的所有图。现在我们将收集这些结果，并找到QED的重整化常数在α阶下的显式表达式。为了整体一致

性，我们将用维数正规化控制紫外发散，用光子质量μ控制红外发散。在第一部分中，在引入维数正规化之前，我们使用 Pauli-Villars 正规化方案计算了顶点和自能图。现在我们有机会引用使用维数正规化计算的这些图的值。

前两个条件涉及到电子的自能。在第7.1节中，我们使用Pauli-Villars正规子计算了对$\Sigma(p)$有贡献的单圈图；结果由式(7.19)给出。如果我们在维数正规化中重新计算这个图，我们会从修正的收缩恒等式(7.89)的Dirac代数中发现的一些附加项。考虑到这些项，我们发现对于这个图($\epsilon = 4 - d$)

$$-i\Sigma_2(p) = -i\frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}}\int_0^1 dx\,\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{((1-x)m^2 + x\mu^2 - x(1-x)p^2)^{2-d/2}} \times ((4-\epsilon)m - (2-\epsilon)x\not{p}). \tag{10.41}$$

因此，根据条件(10.40)的第一个，

$$m\delta_2 - \delta_m = \Sigma_2(m) = \frac{e^2 m}{(4\pi)^{d/2}}\int_0^1 dx\,\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})\cdot(4-2x-\epsilon(1-x))}{((1-x)^2m^2 + x\mu^2)^{2-d/2}}. \tag{10.42}$$

同样，条件(10.40)的第二个确定了δ_2：

$$\begin{aligned}\delta_2 &= \frac{d}{d\not{p}}\Sigma_2(m)\\ &= -\frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}}\int_0^1 dx\,\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{((1-x)^2m^2 + x\mu^2)^{2-d/2}}\\ &\quad\times\left[(2-\epsilon)x - \frac{\epsilon}{2}\frac{2x(1-x)m^2}{(1-x)^2m^2 + x\mu^2}(4-2x-\epsilon(1-x))\right].\end{aligned} \tag{10.43}$$

注意，在$\epsilon \to 0$时括号中第二项给出了有限的结果，因为它乘以了发散的Γ函数。

(10.40)的第三个条件要求了光子自能图的值(7.90)：

$$\Pi_2(q^2) = -\frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}}\int_0^1 dx\,\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(m^2 - x(1-x)q^2)^{2-d/2}}\big(8x(1-x)\big).$$

Then

$$\delta_3 = \Pi_2(0) = -\frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}}\int_0^1 dx\,\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(m^2)^{2-d/2}}\big(8x(1-x)\big). \tag{10.44}$$

最后一个条件要求了电子顶点函数的值，如第 6.3 节所计算的。同样，我们将在维数正规化中重新计算这个图。然后，形状因子$F_1(q^2)$(6.56)中的移动变为

$$\delta F_1(q^2) = \frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int dx\, dy\, dz\, \delta(x+y+z-1) \left[\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}} \frac{(2-\epsilon)^2}{2} + \frac{\Gamma(3-\frac{d}{2})}{\Delta^{3-d/2}} \left(q^2[2(1-x)(1-y) - \epsilon xy] + m^2[2(1-4z+z^2) - \epsilon(1-z)^2] \right) \right], \tag{10.45}$$

其中$\Delta = (1-z)^2 m^2 + z\mu^2 - xyq^2$，和之前一样。然后第四个重整化条件确定

$$\delta_1 = -\delta F_1(0) = -\frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int dz\, (1-z) \left[\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{((1-z)^2 m^2 + z\mu^2)^{2-d/2}} \frac{(2-\epsilon)^2}{2} + \frac{\Gamma(3-\frac{d}{2})}{((1-z)^2 m^2 + z\mu^2)^{3-d/2}} [2(1-4z+z^2) - \epsilon(1-z)^2] m^2 \right]. \tag{10.46}$$

使用类似于式(7.32)下面的分部积分，从式(10.46)和式(10.43)你可以显式地表明$\delta_1 = \delta_2$，即在α阶下$Z_1 = Z_2$。与前面的推导一样，这个公式遵从 Ward 恒等式。拉格朗日量(10.38)，其抵消项设为零时，是规范不变的。如果正规法也是规范不变的(我们确实使用了维数正规化)，这意味着对于没有抵消项顶点的图，Ward 等式成立。特别是，这意味着$\delta F_1(0) = -d\Sigma_2/d\not{p}|_m$。于是被拿来抵消这两个因子的抵消项$\delta_1$和$\delta_2$，将被设为相等的。

继续这个论证，使用我们在第 7.4 节应用的在裸微扰论中证明了 Ward-Takahashi 恒等式的方法，可以直接构造一个完全的图解的证明，证明在重整化微扰论的所有阶下成立$\delta_1 = \delta_2$。通过对那里给出的论证进行推广，可以表明，对于在圈中包含抵消项顶点的图，图解恒等式(7.68)也保持。于是，如果抵消项δ_1和δ_2被确定到α^n阶，则$q^2 = 0$处未重整化的顶点图，等于在壳的未重整化的在α^{n+1}阶自能图的导数。为了满足重整条件(10.40)，我们必须设置抵消项δ_1和δ_2在α^{n+1}阶相等。目前，这个递归的论证给出了在 QED 微扰论的所有阶下$Z_1 = Z_2$的另一个证明。

裸电荷与重整化电荷之间的关系(10.37)

$$e = \frac{Z_2}{Z_1} Z_3^{1/2}\, e_0 \tag{10.47}$$

对恒等式$Z_1 = Z_2$给出了进一步的物理解释。使用恒等式，我们可以将(10.47)重写为

$$e = \sqrt{Z_3} e_0,$$

这就是我们在 7.5 节中通过图解论证得到的关系(7.76)。这表明，裸电荷与重整化电荷之间的关系只依赖于光子场强重整化，而与电子特有的物理量无关。要了解这一观察的重要性，可以考虑用两种带电粒子(比如电子和μ子)来写重整化的量子电动力学。那么，除了(10.37)，我们将得到光子-μ子顶点的一个关系：

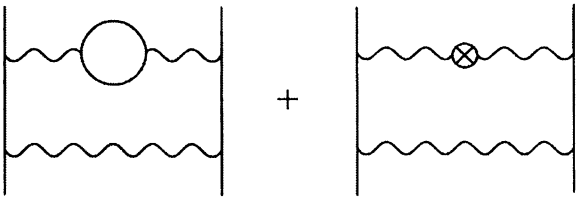
$$e Z_2'^{-1} Z_3^{-1/2} = e_0 Z_1'^{-1}, \tag{10.48}$$

其中Z_1'和Z_2'是μ子的顶点和场强重整化。这两个常数都依赖于μ子的质量，因此(10.48)有可能使e_0和e之间的关系与(10.47)中的关系有所不同。然而，Ward 恒等式迫使因子Z_1'和Z_2'从这个关系中消去，留下一个普遍的电荷，其值对所有种类都是相同的。

10.4 高于领头阶的重整化

在前两节中，我们发展了一种算法，计算可重整场论在任意阶下的散射振幅。我们已经明确地看到，该算法在ϕ^4理论和 QED 中的单圈水平上产生有限的结果。根据第 10.1 节天真的分析，算法也应该在更高阶下工作。但那个分析忽略了许多错综复杂的多圈图；具体地说，它忽略了图可以包含发散的子图这一事实。

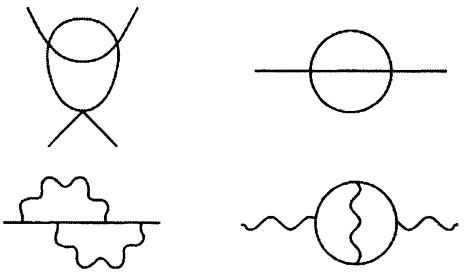
当一个原本有限的图包含一个发散的子图时，对发散的处理相对直接。例如，图的和



(10.49)

是有限的：光子传播子中的发散抵消了，就像这个传播子出现在树图中一样。这两个传播子图的有限和给出了一个外圈的被积函数，它下降得足够快以至于这个积分仍然收敛。

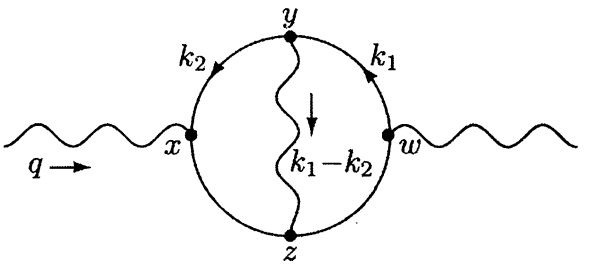
当我们将发散**嵌套**或**重叠**时，即两个发散的圈共享一个传播子时，就会出现更困难的情况。具有重叠的发散的图的一些例子是



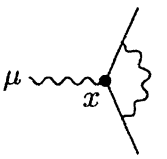
in ϕ^4 theory;

in QED.

要看到困难之处，考虑光子自能图：

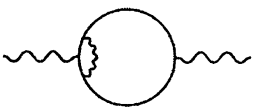


这个图的一个贡献来自于k_2非常大的动量空间区域。这意味着，在位置空间中，x、y和z非常接近，而ω可以离得更远。在这个区域，我们可以认为虚光子为x处的顶点给出了一个修正。我们在6.3节中看到这个顶点修正是对数发散的，其形式为



$$\sim -ie\gamma^\mu \cdot \alpha \log \Lambda^2$$

在极限$\Lambda \to \infty$时。将这个顶点插入到图的其余部分并对k_1积分，我们得到了一个与单圈光子自能修正$\Pi_2(q^2)$相同的表达式，显示在(7.90)，乘以额外的对数发散：



$$\begin{aligned} &\sim \alpha(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)\Pi_2(q^2) \cdot \alpha \log \Lambda^2 \\ &\sim \alpha(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)(\log \Lambda^2 + \log q^2) \cdot \alpha \log \Lambda^2. \end{aligned} \tag{10.50}$$

$\log^2\Lambda^2$项来自k_1和k_2都很大的区域，而$\log q^2\log\Lambda^2$项来自k_2很大但k_1很小的区域。另一个这样的项来自k_1很大但k_2很小的区域。

双圈真空极化图中正比于$\Pi_2(q^2)\cdot\log\Lambda^2$的项的出现，与我们天真的论点相矛盾，根据表观发散度判据，费曼积分的发散项总是q^2的简单多项式。我们将那些乘的仅仅是q^2的多项式的发散称为**局域发散**，因为它们返回到位置空间的傅里叶变换是 delta 函数或 delta 函数的导数。我们将会把这个新的非多项式的项称为**非局域**发散。幸运的是，我们对非局域发散项的推导给了这个项一个物理解释：它是一个由普通的、非发散的量子场论过程包围的局域发散。

如果这个图像准确地描述了双圈图的所有发散项，我们应该期望这些发散被两种类型的抵消项图所抵消。首先，我们可以通过将α阶的抵消项顶点插入到单圈真空极化图中来构建α^2阶的图：



这些图应该可以抵消(10.50)中的非局域发散，以及抵消来自k_1较大和k_2较小的区域对应的贡献。事实上，一个详细的分析表明，原始图与这两个抵消项图的和只包含局域发散。一旦把这些图加上，剩下的唯一发散就是一个局域发散，它能被下图消去



也就是说，给δ_3加上一个α^2阶的项。

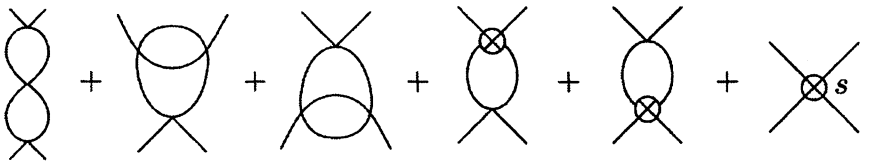
我们可以将这个例子的经验扩展到一个一般的图像，关于高圈费曼图的发散及它们的消除。一个给定的图可能包含局域发散，正如 10.1 节的分析所预测的那样。由于发散的子图被嵌入到带着小动量的圈中，它也可能包含非局域发散。当发散的子图被它们的抵消项顶点所替换时，这些发散就被这种图所抵消。人们可能仍然会问两个问题：首先，这个程序是否消除了所有非局域发散？第二，这一程序是否保留了振幅的有限性，如(10.49)，即根据 10.1 节的表观判据这些振幅预计不会发散？要回答这些问题，需要对嵌套的费曼积分进行复杂的研究。一般的分析开始于Bogoliubov和Parasiuk，由Hepp完成，并由Zimmermann优雅地精炼*；他们证明这两个问题的答案都是肯定的。他们的结果被称为 BPHZ 定理，

它表明，对于一般的可重整的量子场论，在微扰论的任意阶，所有的发散都被那些对应于表观发散振幅的抵消项顶点所移除。换句话说，当一个人用一组完整的抵消项执行重整化微扰时，任何表观可重整的量子场论实际上都是有限的。

BPHZ 定理的证明相当技术性，我们不会在这本书中包括它。代替地，我们将研究双圈计算的一个详细示例，它显式地演示了非局域发散的出现和消除。

10.5 双圈的一个例子

为了说明上一节讨论的问题，让我们在ϕ^4理论上考虑双圈对四点函数的贡献。有 16 个相关图，如图 10.5 所示(还有几个图涉及到对传播子的单圈修正。但是，正如我们在(10.29)式所看到的，这些图的每一个被它的抵消项精确地抵消，所以我们可以忽略它们)。幸运的是，许多图只是彼此简单地关联。交叉对称性将不同图的数量减少到只有 6 个：

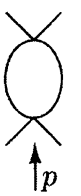


(10.51)

其中，最后一个图只表示二阶顶点抵消项的s道部分。如果图的这个和是有限的，那么简单地用t或u替换s将对剩下的图给出一个有限的结果。

(10.51)的最后一个图仅是一个常数，我们可以自由地做调整，以吸收与外部动量无关的任何发散项。因此，我们的目标是证明所有依赖于动量的发散项在剩下的 5 个图之间相互抵消。

(10.51)中的第 4 和第 5 个图涉及到单圈顶点抵消项，我们在式(10.24)中计算了它。让我们简短地回顾该计算。我们将$iV(p^2)$定义为基本的圈积分：



$$= (-i\lambda)^2 \cdot iV(p^2) = (-i\lambda)^2 \left[-\frac{i}{2} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{1}{\left[m^2 - x(1-x)p^2\right]^{2-d/2}} \right]. \tag{10.52}$$

*N. N. Bogoliubov and O. S. Parasiuk, *Acta Math.* **97**, 227(1957)； K. Hepp, *Comm. Math. Phys.* **2**, 301 (1966)； W. Zimmermann, in Deser, et al. (1970)

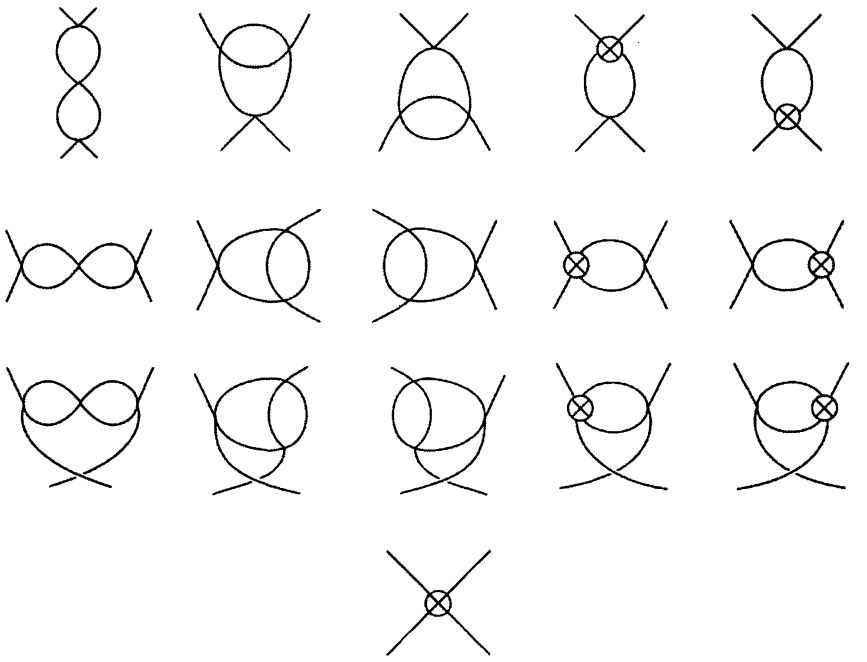
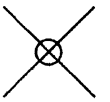


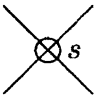
图 10.5 ϕ^4理论中对四点函数的双圈贡献。注意，前三行中的图通过交叉相互关联，分别位于s、t和u道中。每一行的最后两个图都涉及到$\mathcal{O}(\lambda^2)$顶点抵消项。而最后的图是顶点抵消项的$\mathcal{O}(\lambda^3)$的贡献。

根据重整化条件(10.19)，抵消项必须在阈值$(s = 4m^2, t = u = 0)$处抵消三个单圈图(每个道一个)；因此我们发现

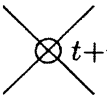


$$= -i\delta_\lambda = (-i\lambda)^2\big[-iV(4m^2) - 2iV(0)\big].$$

就我们目前的目的而言，把这个表达式的分为两项比较方便。因此让我们定义



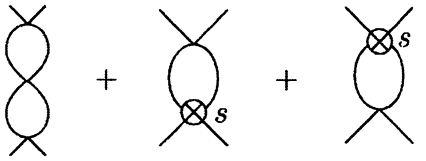
$$= (-i\lambda)^2 \cdot -iV(4m^2);$$



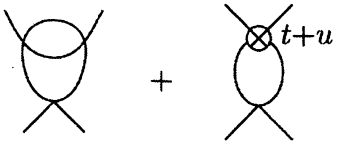
$$= (-i\lambda)^2 \cdot -2iV(0).$$

现在，我们可以将(10.51)中的前五个图分成三组，如下：

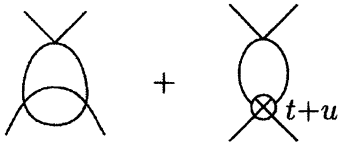
Group I:



Group II:



Group III:

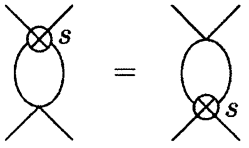


我们将发现，在每一组内，所有依赖于动量的发散项都能分别消去。由于组 II 和组 III 可以通过初动量和末动量的简单交换而联系在一起，因此证明组 I 和组 II 的抵消便足以。

实际上，组 I 相当简单，因为在对象的乘积中，每个图因子我们都已经计算过。参照(10.52)式，我们有



$$= (-i\lambda)^3 \cdot \left[iV(p^2)\right]^2;$$



$$= (-i\lambda)^3 \cdot iV(p^2) \cdot -iV(4m^2).$$

因此，这三个图的和是

$$\begin{aligned}(-i\lambda)^3 &\Big(\left[iV(p^2)\right]^2 - 2iV(p^2)iV(4m^2)\Big) \\ &= (-i\lambda)^3\Big(-\left[V(p^2) - V(4m^2)\right]^2 + \left[V(4m^2)\right]^2\Big).\end{aligned} \tag{10.53}$$

但差值$V(p^2) - V(4m^2)$是有限的，这和在单圈计算中消除发散所需的一样：

$$V(p^2) - V(4m^2) = \frac{1}{32\pi^2}\int_0^1 dx\, \log\left(\frac{m^2 - x(1-x)p^2}{m^2 - x(1-x)4m^2}\right).$$

剩下的唯一发散在$[V(4m^2)]^2$项中，它与动量无关，因此可以被吸收到(10.51)中的二阶抵消项中。

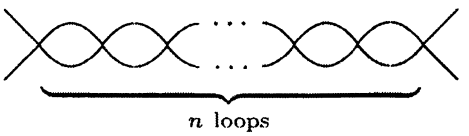
结果(10.53)的两个一般性质值得注意。首先，发散部分(以及$\mathcal{O}(\lambda^3)$顶点抵消项)正比于

$$\left[V(4m^2)\right]^2 \propto \left[\Gamma(2-\tfrac{d}{2})\right]^2 \underset{d\to 4}{\longrightarrow} \left(\frac{2}{\epsilon}\right)^2 \qquad \text{for } d=4-\epsilon.$$

这是一个二阶极点，与我们发现的单圈抵消项的单极点形成对比。高圈图将类似地具有高阶极点，但在所有情况下发散项都是与动量无关的常数。第二，考虑大动量极限，

$$V(p^2)-V(4m^2) \underset{p^2\to\infty}{\sim} \log\frac{p^2}{m^2}.$$

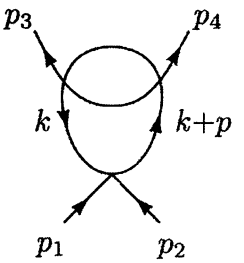
双圈顶点与$\log^2(p^2/m^2)$成正比。一个带有 n 个圈的这种结构的图将具有形式



$$\sim \lambda^{n+1}\left(\log\frac{p^2}{m^2}\right)^n.$$

这种渐近行为实际上是多圈图的一个通用的性质，我们将在第 12 章中更详细地探讨。

现在考虑来自第二组的更困难的图：



$$= (-i\lambda)^3 \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\,\frac{i}{k^2-m^2}\,\frac{i}{(k+p)^2-m^2}\,iV\big((k+p_3)^2\big). \tag{10.54}$$

在计算此图时，我们将以最直接的方式组合分母以提取出发散项，代价是使有限部分的计算变得复杂化。问题 10.4 中讨论了计算该图的另一种方法。

为了开始计算(10.54)，把显式地显示的两个分母组合起来，用表达式(10.52)替换$V(p^2)$。这给出了表达式

$$-\frac{\lambda^3}{2}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}}\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{\left[k^2+2yk\cdot p+yp^2-m^2\right]^2}$$

$$\times\,\frac{1}{\left[m^2-x(1-x)(k+p_3)^2\right]^{2-\frac{d}{2}}}. \tag{10.55}$$

可以使用以下恒等式组合这对分母：

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta} = \int_0^1 dw \, \frac{w^{\alpha-1}(1-w)^{\beta-1}}{\big[wA+(1-w)B\big]^{\alpha+\beta}} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}. \tag{10.56}$$

这是第 6.3 节所引用公式(6.42)的特殊情况。为了证明它，改变积分中的变量：

$$z \equiv \frac{wA}{wA+(1-w)B}, \quad (1-z) = \frac{(1-w)B}{wA+(1-w)B}, \quad dz = \frac{AB\,dw}{\big[wA+(1-w)B\big]^2},$$

so that

$$\int_0^1 dw \, \frac{w^{\alpha-1}(1-w)^{\beta-1}}{\big[wA+(1-w)B\big]^{\alpha+\beta}} = \frac{1}{A^\alpha B^\beta} \int_0^1 dz \, z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1} = \frac{1}{A^\alpha B^\beta} B(\alpha,\beta),$$

其中$B(\alpha,\beta)$为 beta 函数，式(7.82)。更一般的等式(6.42)可以用归纳法证明。

将等式(10.56)应用于(10.55)，得到

$$\begin{aligned} &= -\frac{\lambda^3}{2} \frac{\Gamma(4-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dw \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \\ &\qquad \times \frac{w^{1-\frac{d}{2}}(1-w)}{\big(w\big[m^2-x(1-x)(k+p_3)^2\big] + (1-w)\big[m^2-k^2-2yk\cdot p-yp^2\big]\big)^{4-\frac{d}{2}}}. \end{aligned} \tag{10.57}$$

完成分母的平方就得到了以下形式的多项式

$$-\big[(1-w)+wx(1-x)\big]\ell^2 - P^2 + m^2, \tag{10.58}$$

其中ℓ是一个移动的动量变量，P^2是p, p_3和各种费曼参数的一个相当复杂的函数。在$\omega \to 0$时，对于这个分析来说，比较重要的情况将只有：

$$P^2(w) = y(1-y)p^2 + \mathcal{O}(w), \tag{10.59}$$

这很容易从(10.57)看出。将变量变为ℓ，Wick 旋转，执行积分，我们最终得到

$$= -\frac{i\lambda^3}{2(4\pi)^d} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dw \, \frac{w^{1-\frac{d}{2}}(1-w)}{\big[1-w+wx(1-x)\big]^{d/2}} \frac{\Gamma(4-d)}{(m^2-P^2)^{4-d}}. \tag{10.60}$$

这个表达式在$d \to 4$时有一个明显的极点，来自Γ函数。然而，它也有一个不

那么明显的极点，来自于ω积分的零端点。让我们把(10.60)写成：

$$\int_0^1 dw\; w^{1-\frac{d}{2}}\, f(w),$$

其中$f(\omega)$包含所有未显式地显示的因子。为了孤立出$\omega=0$处的极点，我们可以加上和减去$f(0)$：

$$\int_0^1 dw\; w^{1-\frac{d}{2}}\, f(w) = \int_0^1 dw\, w^{1-\frac{d}{2}}\, f(0) + \int_0^1 dw\, w^{1-\frac{d}{2}}\, \big[f(w)-f(0)\big]. \quad (10.61)$$

第二部分是

$$-\frac{i\lambda^3\Gamma(4-d)}{2(4\pi)^d}\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 dw\; w^{1-\frac{d}{2}} \times\left(\frac{(1-w)}{\big[1-w+wx(1-x)\big]^{d/2}}\,\frac{1}{\big[m^2-P^2(w)\big]^{4-d}}-\frac{1}{\big[m^2-P^2(0)\big]^{4-d}}\right).$$

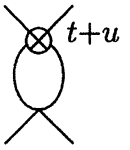
这一项在$d\to 4$时只有一个单极点；这个极点的留数是一个与动量无关的常数，它可以通过在所有地方(除了$\Gamma(4-d)$外)都设置$d=4$来得到。因此我们可以把这个发散吸收到$\mathcal{O}(\lambda^3)$顶点抵消项中(这个表达式的有限部分对动量有一个非常复杂的依赖关系，但我们不需要把它求出来以完成我们的论证)。

我们只剩下(10.61)的第一项。这个表达式只包含$P^2(0)$，由(10.59)给出。这个项的ω积分是直接的，x积分是平凡的。对于$\epsilon=4-d$，我们剩下的表达式是

$$\begin{aligned}&-\frac{i\lambda^3}{2(4\pi)^d}\left(\frac{2}{\epsilon}\right)\int_0^1 dy\,\frac{\Gamma(\epsilon)}{\big[m^2-y(1-y)p^2\big]^{\epsilon}}\\ &\xrightarrow[d\to 4]{} -\frac{i\lambda^3}{2(4\pi)^4}\left(\frac{2}{\epsilon}\right)\int_0^1 dy\,\Big(\frac{1}{\epsilon}-\gamma-\log\big[m^2-y(1-y)p^2\big]\Big),\end{aligned} \quad (10.62)$$

其中，我们在第二行只保留了发散项。乘以极点$2/\epsilon$的这个对数是我们在 10.4 节所担心的非局域发散。

幸运的是，我们还必须为它加上组 II 的“$t+u$”抵消项图。这个图的计算现在已经是一个很简单的过程了：



$$= (-i\lambda)^3 \cdot -2iV(0) \cdot iV(p^2)$$

$$= \frac{i\lambda^3}{2(4\pi)^d} \int_0^1 dy \, \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\left[m^2\right]^{2-d/2}} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\left[m^2 - y(1-y)p^2\right]^{2-d/2}}$$

$$\xrightarrow[d\to 4]{} \frac{i\lambda^3}{2(4\pi)^4} \int_0^1 dy \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log(4\pi) - \log m^2\right)$$

$$\times \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log(4\pi) - \log\left[m^2 - y(1-y)p^2\right]\right). \quad (10.63)$$

(我们再一次在最后一行去掉了有限项)这个表达式还包含一个非局域发散，由第一个极点乘以第二个对数给出。它精确抵消了(10.62)中的非局域发散。剩下的项要么是有限的，要么是与动量无关的发散。这就完成了证明，即双圈对四点函数的贡献是有限的。

组 I 图的两个特性也出现在组 II 中。(10.62)和(10.63)的发散部分包含了没有抵消的二次极点，因此我们再次发现二阶顶点抵消项必须包含一个二次极点。(10.62)和(10.63)的有限部分包含双对数，因此我们再次发现当$p \to \infty$时双圈振幅的表现为$\lambda^3 \log^2 p^2$。

Chapter 11

重整化和对称性

既然现在我们已经确定了量子场论的紫外发散的一般结构，那么继续研究这些发散在费曼图计算中的意义似乎是很自然的。然而，我们现在将在 12 章之前把这个问题放在一边，并开始一个似乎不相关的方向。在第 8 章和第 9.3 节中，我们注意到了量子场论和统计力学之间的形式关系。与标量场论最接近的形式类比，被认为是关于铁磁体或其他一些允许二阶相变的系统的连续统描述。这个类比提出了这样一种可能性，即在量子场论中，场也有可能具有非零的整体值。和在磁体中一样，这个整体场可能具有方向性，从而违反拉格朗日量的对称性。在这种情况下，我们说场论有着**隐藏**或**自发破缺**的对称性。我们用这一章来分析对称性违反的机制。

自发破缺的对称性是量子场论研究的核心概念，原因有二。首先，它在量子场论应用到自然界中起着重要作用。在这本书中，我们将看到两种截然不同的应用实例：第 13 章将把隐藏对称性的理论应用到统计力学中，特别是应用于热力学变量在二阶相变附近的行为。稍后，在第 20 章，我们将看到，隐藏对称性是弱相互作用理论的一个重要组成部分。自发对称性破缺在强相互作用理论和基础物理统一模型的探索中也有应用。

但从理论的角度来看，自发对称性破缺也很有趣。带有自发破缺对称性的量子场论包含紫外发散。因此，很自然地要问是否这些发散受到理论的内在对称性的约束。Benjamin Lee*首先给出了这个问题的答案，将使我们进一步了解紫外线发散的性质和重整化的意义。

*Lee 的分析在他的讲义卷《B.Lee, *Chiral Dynamics*》(Gordon and Breach, New York, 1972)中有一个漂亮的总结。

11.1 自发对称性破缺

我们从分析经典场论中的自发对称性破缺开始。首先考虑熟悉的ϕ^4理论的拉格朗日量，

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4,$$

但m^2被一个负参数$-\mu^2$代替：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4. \tag{11.1}$$

这个拉格朗日量有一个分立对称性：它在$\phi \to -\phi$操作下是不变的。对应的哈密顿量是

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4\right].$$

最低能量的经典位形是一个归一化场$\phi(x) = \phi_0$，ϕ_0被选择为将如下势最小化：

$$V(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

(见图 11.1)。这个势有两个极小值，由下式给出

$$\phi_0 = \pm v = \pm\sqrt{\frac{6}{\lambda}}\,\mu. \tag{11.2}$$

常数v称为ϕ的**真空期待值**。

为了解释这个理论，假设系统接近其中一个极小值(如正的那个)。于是很方便地去定义：

$$\phi(x) = v + \sigma(x), \tag{11.3}$$

然后用$\sigma(x)$重写$\mathcal{L}$。把(11.3)代入(11.1)，我们发现σ的线性项消失了(这是必须的，因为势的最小值在$\sigma = 0$处)。同时去掉常数项，我们得到拉格朗日量

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 - \frac{1}{2}(2\mu^2)\sigma^2 - \sqrt{\frac{\lambda}{6}}\,\mu\sigma^3 - \frac{\lambda}{4!}\sigma^4. \tag{11.4}$$

这个拉格朗日量描述了一个质量为$\sqrt{2}\mu$的单标量场，带着σ^3和σ^4的相互作用。对称性$\phi \to -\phi$不再明显；它的唯一表现是(11.4)中三个系数之间的关系，这种关系以一种特殊的方式依赖于仅仅两个参数。这是自发破缺的对称性的最简单例子。

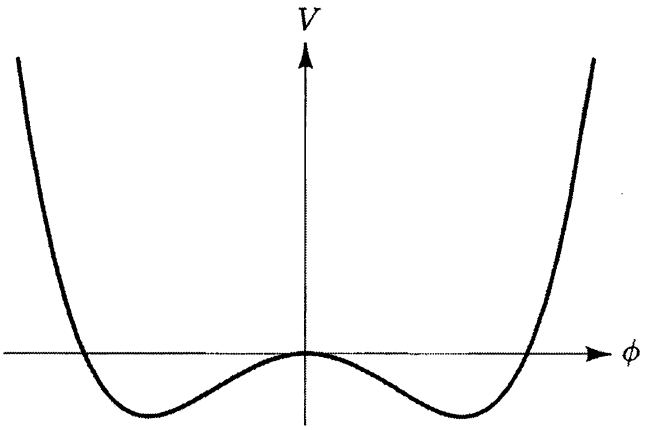


图 11.1 在分立情况下自发对称性破缺的势

线性 Sigma 模型

当破缺的对称性是连续的而不是分立的时候，一个更有趣的理论就出现了。最重要的例子是对前面理论的一个推广，称为**线性 sigma 模型**，我们在问题 4.3 中简要考虑过。我们将在本章中详细研究这个模型。

线性 sigma 模型的拉格朗日量包含一组N个实标量场$\phi^i(x)$：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi^i)^2 + \frac{1}{2}\mu^2(\phi^i)^2 - \frac{\lambda}{4}\left[(\phi^i)^2\right]^2, \tag{11.5}$$

其中在每个因子$(\phi^i)^2$对i隐式求和。注意，我们在ϕ^4理论拉格朗日量中重标度了耦合λ，以消除上面分析中的尴尬因子 6。拉氏量(11.5)在以下对称下不变

$$\phi^i \longrightarrow R^{ij}\phi^j \tag{11.6}$$

对于任意$N \times N$正交矩阵R，变换群(11.6)仅仅是N维中的旋转群，也称为N维**正交群**或简称$O(N)$。

同样，能量最低的经典位形是一个常量场ϕ_0^i，其值被选择为将如下势最小化：

$$V(\phi^i) = -\frac{1}{2}\mu^2(\phi^i)^2 + \frac{\lambda}{4}\left[(\phi^i)^2\right]^2$$

(见图 11.2)。任何满足以下条件的ϕ_0^i，这个势能是最小的：

$$(\phi_0^i)^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}.$$

这个条件只决定了向量ϕ_0^i的长度；它的方向是任意的。传统的做法是选择坐标系，

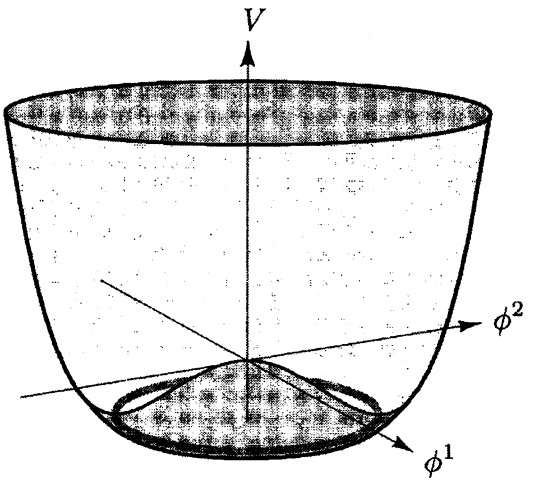


图 11.2 连续$O(N)$对称的自发破缺的势，在 $N = 2$ 的情况下画出。沿势槽的振荡对应于无质量的π场。

使ϕ_0^i指向第 N 个方向：

$$\phi_0^i = (0, 0, \ldots, 0, v), \qquad \text{where } v = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}. \tag{11.7}$$

现在我们可以定义一组移动的场，通过写

$$\phi^i(x) = \big(\pi^k(x), v + \sigma(x)\big), \qquad k = 1, \ldots, N-1. \tag{11.8}$$

(这个表示法，如第 4.3 题所示，来自于将这种形式应用于 $N = 4$ 的情况)。

现在可以直接用π和σ场重写拉格朗日量(11.5)。结果是

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = {} & \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi^k)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 - \frac{1}{2}(2\mu^2)\sigma^2 \\ & - \sqrt{\lambda}\mu\sigma^3 - \sqrt{\lambda}\mu(\pi^k)^2\sigma - \frac{\lambda}{4}\sigma^4 - \frac{\lambda}{2}(\pi^k)^2\sigma^2 - \frac{\lambda}{4}\big[(\pi^k)^2\big]^2.\end{aligned} \tag{11.9}$$

我们得到了有质量的σ场，就像(11.4)，以及一组$N-1$个无质量的π场。最初的$O(N)$对称性被隐藏了，只留下子群$O(N-1)$，它在π场之间旋转它们。参考图11.2，我们注意到有质量的σ场描述了ϕ^i在径向上的振荡，其中势具有不为零的二阶导数。无质量的π场描述了ϕ^i沿势槽即沿切向的振荡。槽是一个$(N-1)$维的曲面，所有的$N-1$个方向都是等价的，反映了不破缺的$O(N-1)$对称性。

Goldstone 定理

当一个连续对称性是自发破缺的时候，无质量粒子的出现是一个普遍的结果，称为 **Goldstone 定理**。为了精确地表述这个定理，我们必须计算出线性无关的连续对称变换的数目。在线性 sigma 模型中，$N=1$不存在连续对称性，而对于$N=2$，有一个旋转方向。一个在N维的旋转可以发生在$N(N-1)/2$个平面中的任意一个，所以$O(N)$对称理论有$N(N-1)/2$个连续对称性。自发对称性破缺后，还有$(N-1)(N-2)/2$个剩余对称，对应于$(N-1)$个π场的旋转。**破缺的**对称性的数目是差值$N-1$。

Goldstone 定理指出，对于每一个自发破缺的连续对称性，该理论必须包含一个无质量粒子*。我们刚刚看到这个定理在线性 sigma 模型中成立，至少在经典水平上成立。通过自发对称性破缺而产生的无质量场称为 **Goldstone 玻色子**。物理学中发现的许多轻玻色子，如介子，可以被解释为(至少近似地)Goldstone 玻色子。我们用经典标量场论的 Goldstone 定理的一般证明来结束本节。本章的其余部分将专门讨论带有隐藏对称性的理论的量子力学分析。在本章的最后，我们将看到 Goldstone 玻色子不能从量子修正的任何阶中获得质量。

考虑一个理论涉及几个场$\phi^a(x)$，拉格朗日量形式为

$$\mathcal{L} = (\text{terms with derivatives}) - V(\phi). \tag{11.10}$$

设ϕ_0^a是一个使V最小化的常数场，于是

$$\frac{\partial}{\partial \phi^a} V\Big|_{\phi^a(x)=\phi_0^a} = 0.$$

在这个最小值处展开V，我们发现

$$V(\phi) = V(\phi_0) + \frac{1}{2}(\phi-\phi_0)^a(\phi-\phi_0)^b\left(\frac{\partial^2}{\partial\phi^a\partial\phi^b}V\right)_{\phi_0} + \cdots .$$

二次项的系数，

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\phi^a\partial\phi^b}V\right)_{\phi_0} = m_{ab}^2, \tag{11.11}$$

*J. Goldstone, *Nuovo Cim.* **19**, 154(1961). J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg 的一篇四页长的论文 *Phys. Rev.* **127**, 965(1962)给出了该定理的三个不同证明。

是一个对称矩阵，它的本征值给出了场的质量。这些本征值不能是负的，因为ϕ_0^a是最小的。为了证明 Goldstone 定理，我们必须证明，拉格朗日量(11.10)中不是ϕ_0的对称性的每一个连续对称性，都会导致这个质量矩阵的一个零本征值。

一个一般的连续对称性变换具有以下形式

$$\phi^a \longrightarrow \phi^a + \alpha\Delta^a(\phi), \tag{11.12}$$

其中α是一个无穷小的参数，Δ^α是所有ϕ的某个函数。特殊化为常量场；那么$\mathcal{L}$的导数项就消失了，剩下的势必须在(11.12)下是不变的。这个条件可以写为

$$V(\phi^a) = V\left(\phi^a + \alpha\Delta^a(\phi)\right) \qquad \text{or} \qquad \Delta^a(\phi)\frac{\partial}{\partial\phi^a}V(\phi) = 0.$$

现在对ϕ^b求导，设置$\phi = \phi_0$：

$$0 = \left(\frac{\partial\Delta^a}{\partial\phi^b}\right)_{\phi_0}\left(\frac{\partial V}{\partial\phi^a}\right)_{\phi_0} + \Delta^a(\phi_0)\left(\frac{\partial^2}{\partial\phi^a\partial\phi^b}V\right)_{\phi_0}. \tag{11.13}$$

第一项消失了，因为ϕ_0是V的最小值，所以第二项也必须消失。如果变换保持ϕ_0不变(即，如果对称性被基态遵从)，则$\Delta^\alpha(\phi_0) = 0$，这个关系是平凡的。一个自发破缺的对称性恰好是一个$\Delta^\alpha(\phi_0) \neq 0$的对称；在这种情况下$\Delta^\alpha(\phi_0)$是我们所期望的本征值为零的向量，所以 Goldstone 定理被证明了。

11.2 重整化与对称性：一个明确的例子

现在让我们来研究具有自发破缺对称性的理论的量子力学。我们将再次使用线性 sigma 模型作为我们的例子，用移动场表示的这个理论的拉格朗日量，由(11.9)给出。从这个表达式，我们可以读出费曼规则；如图 11.3 所示。

利用这些费曼规则，我们可以很容易地计算出树级振幅。然而，带圈的图经常会发散。对于具有N_e个外腿的振幅，其表观发散度为

$$D = 4 - N_e,$$

就像在10.2节对ϕ^4理论的讨论一样(包含三点顶点的图的发散度将小于这个表达式所表示的发散度，因为这个顶点的系数具有质量量纲)。然而，对称性对振幅的约束比早期的分析要弱得多。线性sigma模型有8个不同的表观上发散的振幅

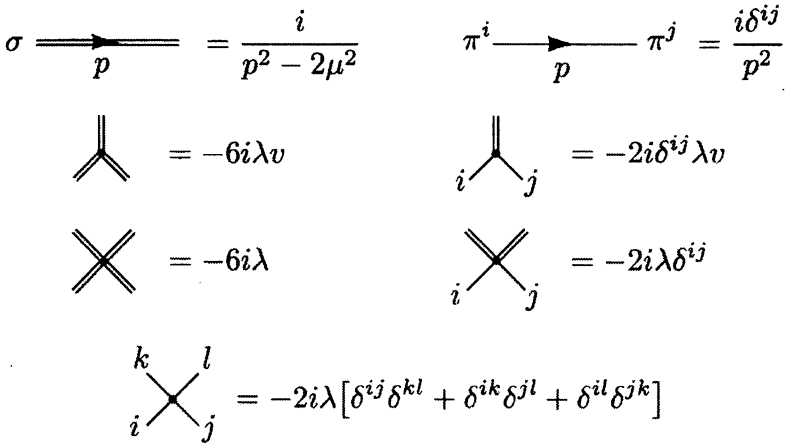


图 11.3 线性 sigma 模型的费曼规则。

(见图 11.4)；其中一些具有$D > 0$，因此可以包含不止一个无穷大常数。然而，能够吸收这些无穷大的裸参数的数量要少得多。如果我们按照 10.2 节的步骤用物理参数和抵消项来重写原始拉格朗日量，我们会发现只有三个抵消项：

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi^i)^2 + \frac{1}{2}\mu^2(\phi^i)^2 - \frac{\lambda}{4}\left[(\phi^i)^2\right]^2 \\ &+ \frac{1}{2}\delta_Z(\partial_\mu\phi^i)^2 - \frac{1}{2}\delta_\mu(\phi^i)^2 - \frac{\delta_\lambda}{4}\left[(\phi^i)^2\right]^2.\end{aligned} \tag{11.14}$$

用π和σ场表示，第二行采用以下形式

$$\begin{aligned}&\frac{\delta_Z}{2}(\partial_\mu\pi^k)^2 - \frac{1}{2}(\delta_\mu + \delta_\lambda v^2)(\pi^k)^2 + \frac{\delta_Z}{2}(\partial_\mu\sigma)^2 - \frac{1}{2}(\delta_\mu + 3\delta_\lambda v^2)\sigma^2 \\ &\quad - (\delta_\mu v + \delta_\lambda v^3)\sigma - \delta_\lambda v\sigma(\pi^k)^2 - \delta_\lambda v\sigma^3 \\ &\quad - \frac{\delta_\lambda}{4}\left[(\pi^k)^2\right]^2 - \frac{\delta_\lambda}{2}\sigma^2(\pi^k)^2 - \frac{\delta_\lambda}{4}\sigma^4.\end{aligned} \tag{11.15}$$

与这些抵消项有关的费曼规则由 11.5 图所示。现在有很多抵消项，但他们仍然只依赖于三个重整化参数：$\delta_Z, \delta_\mu, \delta_\lambda$。如果这三个参数能够吸收所有由图 11.4 所示的发散振幅引起的无穷大，这将是一个奇迹。

如果这个奇迹没有发生，也就是说，如果(11.15)的抵消项没有吸收所有的无穷大，我们仍然可以通过在拉格朗日量中引入新的对称破缺的项，来使这个理论可重整。这将导致额外的抵消项，它们可以被调整，以使所有的振幅有限。如果需要，我们可以将对称破缺的耦合常数的物理值设置为零。然而这些常数的裸值将仍然是非零的，因此拉格朗日量本身在$O(N)$对称性下不再是不变的。我们必须得出这样的结论：对称性与量子力学是不一致的。

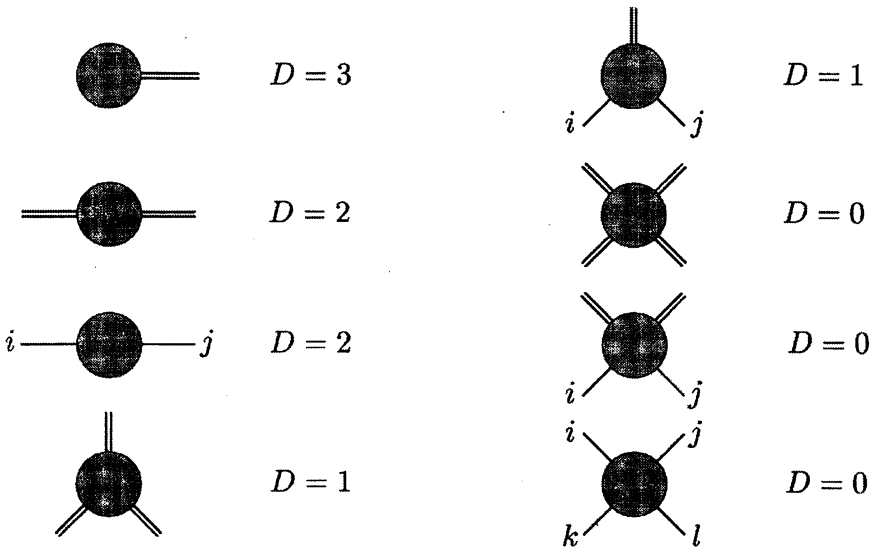


图 11.4 线性 sigma 模型的发散振幅。

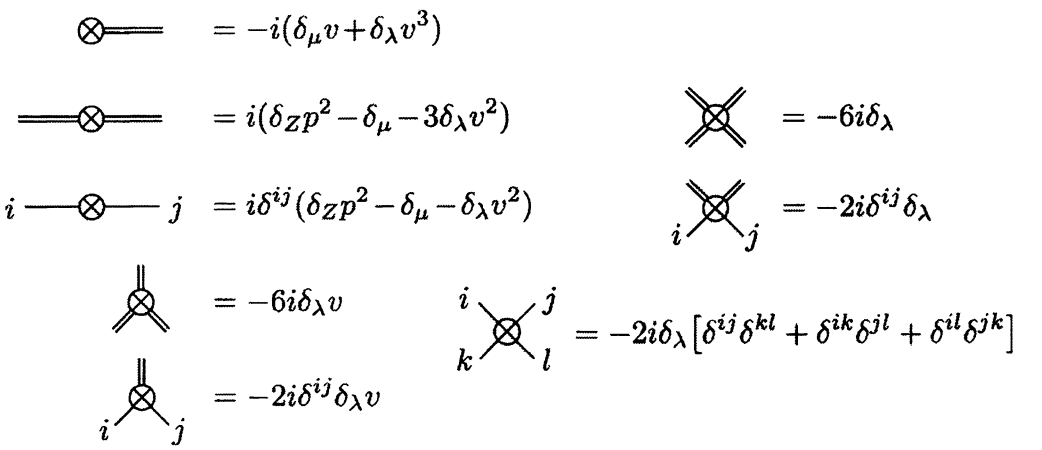


图 11.5 线性 sigma 模型中抵消项顶点的费曼规则

幸运的是，奇迹确实发生了。下面我们将看到，抵消项(11.15)，即使只包含三个可调参数，也确实足以抵消这个理论中出现的所有无穷大。在这一节中，我们将在单圈水平下显式地说明这种抵消。本章的其余部分将对这些问题进行更一般的讨论。

重整化条件

在接下来的讨论中，我们将只跟踪费曼图的发散部分。但是，记忆一组重整化条件是有用的，这些条件原则上也可以用来确定抵消项的有限部分。由于抵消项包含三个可调参数，我们需要三个条件。我们可以将这些条件取为条件(10.19)(根

据(10.28)实现)，以指定σ场的物理质量m、场强和阈值处的散射振幅。然而，技术上更容易做的是，使用如下的一个对σ的单点振幅的约束(蝌蚪图的和)来代替这些条件中的一个：

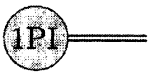


在 QED 中蝌蚪图会自动为零，就像我们在(10.5)式中看到的那样。然而，在线性 sigma 模型中，没有对称性禁止非零单σ振幅的出现。这个振幅产生了σ的真空期望值，因此会移动ϕ的真空期望值，因为$\phi^N = v + \sigma$。在对振幅的计算中适当地加入抵消项后，只要这种移动是有限的，它就可以被接受。然而，它将为建立我们的约定而简化了计算(bookkeeping)，于是关系

$$\langle \phi^N \rangle = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \tag{11.16}$$

在微扰论的所有阶都得到满足。我们将定义λ为阈值处的散射振幅，和(10.19)一样。于是式(11.16)定义了参数μ，因此σ场的质量m将与经典方程的结果$m^2 = 2\mu^2 = 2\lambda v^2$相差$(\lambda\mu^2)$阶的项。如果我们确实可以通过调整三个抵消项来消除理论上的发散，这些修正将是有限的，并构成量子场论的一个预测。

综上所述，我们将使用以下重整化条件：

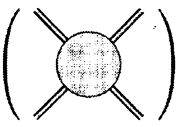


$$= 0;$$

$$\frac{d}{dp^2}\left(\quad \right) = 0 \qquad \text{at } p^2 = m^2; \tag{11.17}$$



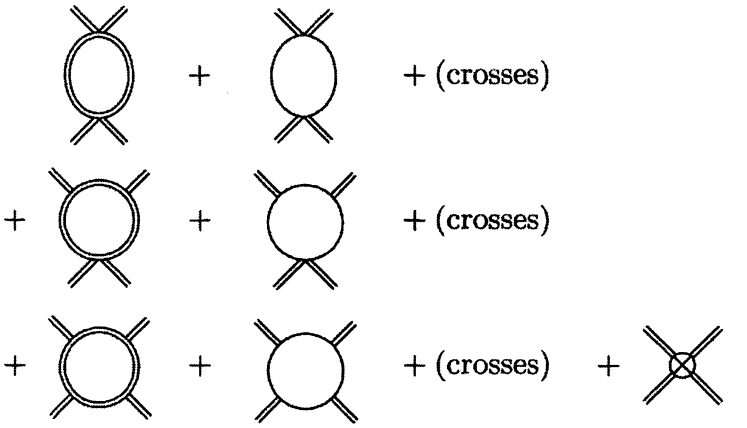
$$\mathrm{Im}\left(\quad \right) = -6i\lambda \quad \text{at } s = 4m^2,\ t = u = 0.$$



在最后一个条件中，圆是截腿四点振幅。注意后两个条件取决于σ粒子的物理质量m。现在我们必须证明这三个条件足以使线性 sigma 模型的所有单圈振幅都是有限的。

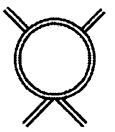
顶点抵消项

我们首先通过计算4σ振幅来确定抵消项δ_λ。树级项来自于4σ顶点，并且正好满足(11.17)。对这个振幅的单圈贡献是以下图的和：



(11.18)

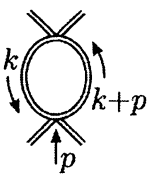
根据(11.17)，我们必须调整δ_λ，使图的这个和在阈值处为零。在这个计算中，我们只跟踪紫外发散。这大大简化了分析，因为(11.18)中的大多数图都是有限的。所有由三个或三个以上的传播子组成的带圈图都是有限的，因为它们的分母上至少有圈动量的六次幂；例如，



$$\sim \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{k^2}\,\frac{1}{k^2}\,\frac{1}{k^2}.$$

或者，我们可以从以下方式看到这个图是有限的：每个三点顶点都携带一个μ因子，它具有质量量纲。根据第10.1节的量纲分析论证，每一个这样的因子都会使图的发散度降低1。由于4σ振幅已经有$D=0$，所以任何包含三点顶点的图都必须是有限的。

我们只剩下(11.18)的前两个图和通过交叉与之相关的四个图。让我们用维数正规化计算第一个图：



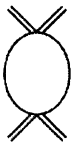
$$= \frac{1}{2}\cdot(-6i\lambda)^2\cdot\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\,\frac{i}{k^2-2\mu^2}\,\frac{i}{(k+p)^2-2\mu^2}$$

$$= 18\lambda^2\int_0^1 dx\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{[k^2-\Delta]^2}$$

$$= 18\lambda^2 \int_0^1 dx \, \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(2-\tfrac{d}{2}) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}}$$

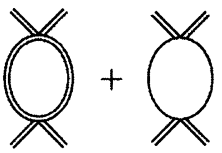
$$= 18i\lambda^2 \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2} + (\text{finite terms}). \tag{11.19}$$

这里Δ是p和μ的函数，它的确切形式与我们无关。由于我们的目标只是演示如何消除发散，所以我们将在这里和本节的其余部分忽略有限项。(11.18)的第二个图(内部线用π代替σ)是相同的，只是每个顶点因子从$-6i\lambda$变为$-2i\lambda\delta^{ij}$(罗马指标i, j...从1到$N-1$)因此，我们有



$$= 2i\lambda^2(N-1) \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2} + (\text{finite terms}). \tag{11.20}$$

由于这些图中每个图的的无穷大部分都只是一个动量无关的常数，所以相应的t和u道图的无穷大部分必须相同。因此，4σ顶点的无穷大部分就是(11.19)和(11.20)之和的三倍：

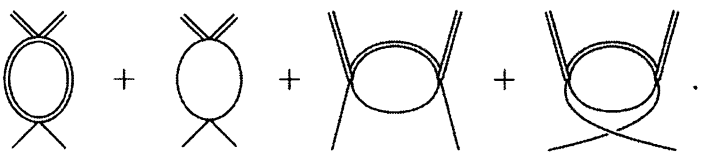


$$+ \ (\text{crosses}) \quad \sim 6i\lambda^2(N+8)\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2}. \tag{11.21}$$

(在本节中，我们使用$\sim$符号表示加上省略的有限修正后是相等的)。应用(11.17)的第三个条件，我们发现抵消项δ_λ由下式给出

$$\delta_\lambda \sim \lambda^2(N+8)\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2}. \tag{11.22}$$

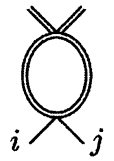
一旦我们确定了δ_λ的值，我们就固定了另外两个四点振幅的抵消项，这些振幅也是有限的吗？考虑带着两个σ和两个π的振幅，其得到的单圈修正来自下图



(11.23)

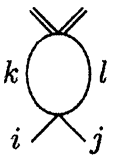
以及来自一些带着三点顶点的图——其明显是有限的，如前所述。(11.23)的每个图包含一个类似于(11.19)中的圈积分，其无限部分始终为$-i\Gamma(2-d/2)/(4\pi)^2$。

唯一的区别在于顶点和对称因子。例如，(11.23)的第一个图的无限部分是



$$\sim \frac{1}{2}\cdot(-6i\lambda)(-2i\lambda\delta^{ij})\cdot\frac{-i}{(4\pi)^2}\Gamma(2-\tfrac{d}{2}) = 6i\lambda^2\delta^{ij}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2}.$$

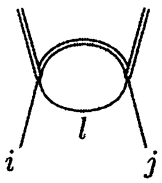
第二个图有点复杂



$$\sim \frac{1}{2}\cdot(-2i\lambda\delta^{kl})\big(-2i\lambda(\delta^{ij}\delta^{kl}+\delta^{ik}\delta^{jl}+\delta^{il}\delta^{jk})\big)\cdot\frac{-i}{(4\pi)^2}\Gamma(2-\tfrac{d}{2})$$

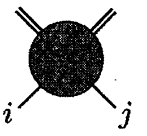
$$= 2i\lambda^2(N{+}1)\delta^{ij}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2}.$$

在第三个图中没有对称因子



$$\sim (-2i\lambda\delta^{il})(-2i\lambda\delta^{jl})\cdot\frac{-i}{(4\pi)^2}\Gamma(2-\tfrac{d}{2}) = 4i\lambda^2\delta^{ij}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2}.$$

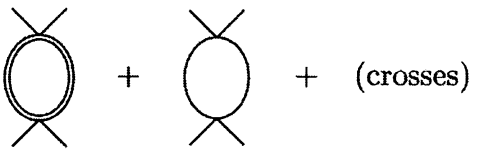
(11.23)的第四个图给出了一个相等的表达式，因为它与第三个图相同，但i和j互换。因此对于$\sigma\sigma\pi\pi$顶点的无限部分，四个图之和给出



$$\sim 2i\lambda^2\,\delta^{ij}\,(N{+}8)\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2}. \qquad (11.24)$$

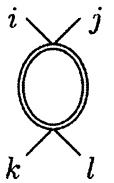
用(11.22)给出的δ_λ值，这个发散项确实被$\sigma\sigma\pi\pi$抵消项所抵消。

其余四点振幅有四个外部π场。发散的单圈图是



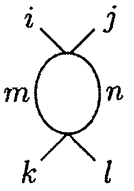
(11.25)

这些图都有相同的熟悉形式。第一个是



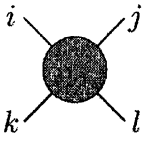
$$\sim \frac{1}{2}\cdot(-2i\lambda\delta^{ij})(-2i\lambda\delta^{kl})\cdot\frac{-i}{(4\pi)^2}\Gamma(2-\tfrac{d}{2}) = 2i\lambda^2\delta^{ij}\delta^{kl}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2}.$$

第二个图更复杂



$$\sim \frac{1}{2}\cdot\left(-2i\lambda(\delta^{ij}\delta^{mn}+\delta^{im}\delta^{jn}+\delta^{in}\delta^{jm})\right)$$
$$\cdot\left(-2i\lambda(\delta^{kl}\delta^{mn}+\delta^{km}\delta^{ln}+\delta^{kn}\delta^{lm})\right)\cdot\frac{-i}{(4\pi)^2}\Gamma(2-\tfrac{d}{2})$$
$$=2i\lambda^2\big((N+3)\delta^{ij}\delta^{kl}+2\delta^{ik}\delta^{jl}+2\delta^{il}\delta^{jk}\big)\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2}.$$

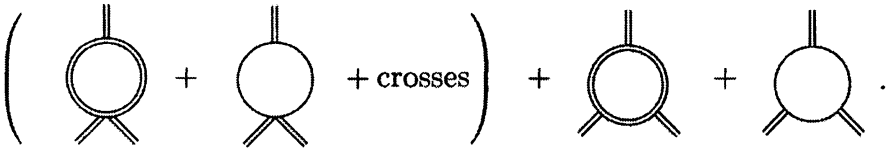
对于这些图中的每一个，都有两个相应的交叉道的图，它们之间的区别仅取决于外部指标$ijkl$成对的方式。例如，t通道图与s通道图相同，但j与k互换。加上这六个图，我们发现4π顶点



$$\sim 2i\lambda^2\left(\delta^{ij}\delta^{kl}+\delta^{ik}\delta^{jl}+\delta^{il}\delta^{jk}\right)(N+8)\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2}. \tag{11.26}$$

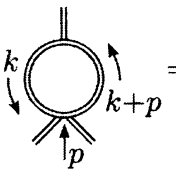
同样，(11.22)的δ_λ值，给出了一个具有正确的值和指标结构的抵消项，消除了这个发散。

我们已经确定的δ_λ值也固定了三点振幅的抵消项。因此，我们没有更多的自由来消除三点振幅中的发散；我们只能交叉手指，希望这些振幅也能得到有限的结果。3σ振幅由下图给出



(11.27)

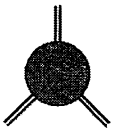
由三个三点顶点组成的图是有限的，在对发散的抵消中没有作用。在(11.27)的发散图中，第一个图的形式是



$$=\frac{1}{2}\cdot(-6i\lambda)(-6i\lambda v)\cdot\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\,\frac{i}{k^2-2\mu^2}\,\frac{i}{(k+p)^2-2\mu^2}$$
$$\sim 18i\lambda^2 v\,\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2}.$$

除了额外的因子v，这与4σ顶点的相应图(11.19)完全相同。这种相同对其他五个

发散图也同样正确；于是

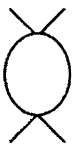


$$\sim 6i\lambda^2 v(N+8)\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2}. \tag{11.28}$$

用(11.22)给出的δ_λ，它被图 11.5 中的3σ抵消项顶点精确地抵消了。

$\sigma\pi\pi$振幅和$\sigma\sigma\pi\pi$振幅之间有类似的对应关系。除了每个图都有一个外σ腿被一个v因子替换之外，$\sigma\pi\pi$振幅中的四个发散图与(11.23)中的那些图相同。参考图11.5中的$\sigma\pi\pi$抵消项顶点，我们可以看到发散的抵消也将发生在这里。

发生了什么？到目前为止，我们看到的所有发散都是以下基本图的表现

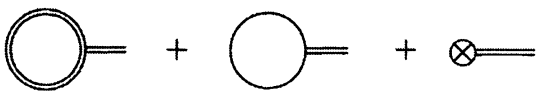


(11.29)

无论该图是带有四个外部粒子，还是其中一条腿设置为零动量并与ϕ的真空期望值相关联。由于$O(N)$对称性是破缺的，此图以许多不同的方式显示自身。但很明显，图的发散部分不受对称性破缺的影响。

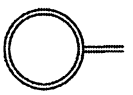
两点和一点振幅

要完成对这一理论的单圈结构的研究，我们必须计算两点和一点振幅。我们首先应用(11.17)中的第一个重整化条件以确定抵消项δ_μ。在单圈阶，此条件为



(11.30)

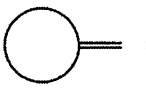
稍后我们将需要用到抵消项的有限部分，因此在计算(11.30)时我们将注意有限项。第一个图是



$$= \frac{1}{2}(-6i\lambda v)\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\,\frac{i}{k^2-2\mu^2} = -3i\lambda v\,\frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}}\left(\frac{1}{2\mu^2}\right)^{1-\frac{d}{2}}. \tag{11.31}$$

第二个图包含了无质量传播子上的一个发散积分。为了确保我们理解如何去处理

这个项，我们会为π场加一个小质量ζ，作为红外正规子。然后第二个图是

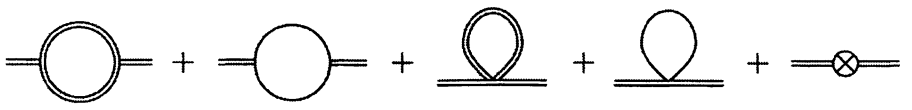


$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(-2i\lambda v)\delta^{ij}\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\,\frac{i\delta^{ij}}{k^2-\zeta^2} \\ &= -i(N-1)\lambda v\,\frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}}\Big(\frac{1}{\zeta^2}\Big)^{1-\frac{d}{2}}. \end{aligned} \tag{11.32}$$

注意，对于$d>2$，图在$\zeta\to 0$的极限下为零；然而，它在$d=2$处有一个极点。尽管有这些奇怪特性，我们仍然可以将(11.32)加到(11.31)中并强加一个条件——蝌蚪图被图 11.5 中的抵消项所抵消。这个条件给出

$$(\delta_\mu + v^2\delta_\lambda) = -\lambda\,\frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}}\Big(\frac{3}{(2\mu^2)^{1-d/2}}+\frac{N-1}{(\zeta^2)^{1-d/2}}\Big). \tag{11.33}$$

现在考虑2σ振幅。单粒子不可约振幅获得了来自四个单圈图和一个抵消项的贡献：

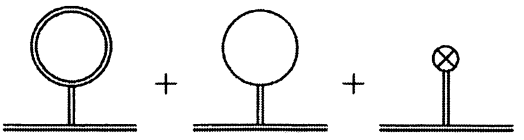


(11.34)

可以很方便地把抵消项顶点写成

$$-i(2v^2\delta_\lambda) - i(\delta_\mu + v^2\delta_\lambda) - ip^2\delta_Z. \tag{11.35}$$

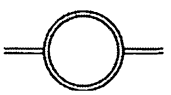
在一般的重整化方案中，σ质量也会被如下的蝌蚪图(及其抵消项)所移动：



(11.36)

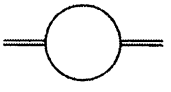
然而，(11.17)中的第一个重整化条件强制这些图精确地抵消。这是这个重整化条件的一个特别简单的例子。

前两个图再一次是通用的四点图(11.29)的表现，现在用ϕ的真空期待值替换了两个外腿。与前面的计算类似，我们发现对于第一个图



$$\sim 18i\lambda^2v^2\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2},$$

对于第二个图

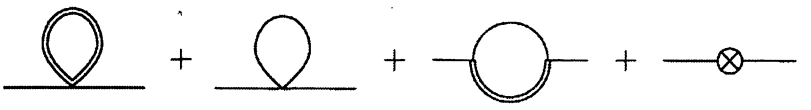


$$\sim 2i\lambda^2v^2(N-1)\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2}.$$

使用(11.22)，我们看到这两个贡献被(11.35)的第一项抵消了。(11.34)的第三和

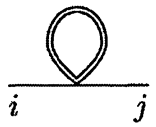
第四个图精确地包含了与(11.30)的蝌蚪图相同的积分。关系(11.33)暗示它们被(11.35)中的第二项所抵消。注意，在(11.34)的任何单圈图中，都没有发散项是正比于p^2的。因此重整化常数δ_Z在单圈水平上是有限的，就像在普通的ϕ^4理论中一样。

只剩下一个潜在发散的振幅——$\pi\pi$振幅：



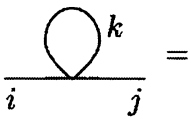
(11.37)

与(11.31)类似，第一个图是



$$= \frac{1}{2}(-2i\lambda\delta^{ij})\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\,\frac{i}{k^2-2\mu^2} = -i\lambda\delta^{ij}\,\frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}}\Big(\frac{1}{2\mu^2}\Big)^{1-\frac{d}{2}}.$$

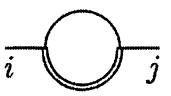
第二个图非常相似。和(11.32)一样，引入一个小π质量作为红外正规子是有用的



$$= \frac{1}{2}\big(-2i\lambda(\delta^{ij}\delta^{kk}+\delta^{ik}\delta^{jk}+\delta^{ik}\delta^{jk})\big)\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{k^2-\zeta^2}$$

$$= -i\lambda(N+1)\delta^{ij}\,\frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}}\Big(\frac{1}{\zeta^2}\Big)^{1-\frac{d}{2}}.$$

第三个图由下式给出



$$= (-2i\lambda v\delta^{ik})(-2i\lambda v\delta^{kj})\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\,\frac{i}{k^2-\zeta^2}\,\frac{i}{(k+p)^2-2\mu^2}$$

$$= 4i\lambda^2v^2\delta^{ij}\,\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}}\int_0^1 dx\Big(\frac{1}{2\mu^2x+(1-x)\zeta^2-p^2x(1-x)}\Big)^{2-\frac{d}{2}}.$$

这个表达式的发散部分与p无关，所以为了检验发散的抵消，只要令$p=0$就足够了。对$p=0$且包括有限项的完整振幅进行计算具有一定的指导意义。将三个圈图和抵消项(其值由(11.33)给出)加起来，我们发现：



$$\Big|_{p=0} = (-i\lambda\delta^{ij})\Big\{\frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}}\Big(\frac{1}{(2\mu^2)^{1-d/2}}+\frac{N+1}{(\zeta^2)^{1-d/2}}\Big)$$
$$-4\lambda v^2\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}}\int_0^1 dx\Big(\frac{1}{2\mu^2x+\zeta^2(1-x)}\Big)^{2-\frac{d}{2}}$$
$$-\frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}}\Big(\frac{3}{(2\mu^2)^{1-d/2}}+\frac{N-1}{(\zeta^2)^{1-d/2}}\Big)\Big\}. \tag{11.38}$$

简化这个表达式并不难。第一行和第三行可以组合起来，给出

$$2\lambda\delta^{ij}\frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}}\Big[\frac{1}{(\zeta^2)^{1-d/2}}-\frac{1}{(2\mu^2)^{1-d/2}}\Big].$$

在$d=2$附近，括号中的量与$1-d/2$成正比，这个因子抵消了Γ函数中的极点。因此最坏的发散抵消了，只留下$d=4$处的一个极点。我们使用恒等式$\Gamma(x)=\Gamma(x+1)/x$，可以将上面的表达式重写为

$$2\lambda\delta^{ij}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}}\frac{1}{1-d/2}\Big[\frac{\zeta^2}{(\zeta^2)^{2-d/2}}-\frac{2\mu^2}{(2\mu^2)^{2-d/2}}\Big]. \tag{11.39}$$

对于$d>2$和$\zeta\to 0$，第一项为零，可以被忽略。与此同时。表达式(11.38)的第二行涉及到初等积分

$$\int_0^1 dx\,(2\mu^2x+(1-x)\zeta^2)^{\frac{d}{2}-2}=\frac{1}{d/2-1}\cdot\frac{(2\mu^2)^{d/2-1}-(\zeta^2)^{d/2-1}}{2\mu^2-\zeta^2}.$$

这个表达式在$d=2$处也是非奇异的，并且对于$d>2$和$\zeta\to 0$，其化简为

$$\frac{1}{d/2-1}(2\mu^2)^{d/2-2}$$

将这一行与(11.39)中剩下的项进行比较，并回想$\lambda v^2=\mu^2$，我们发现$\pi\pi$振幅不仅是有限的，而且在$p=0$时完全为零。

这个结果是非常吸引人的。$\pi\pi$振幅在$p=0$时恰好是π场的质量移动δm_π^2。我们已经知道π粒子在树级上是无质量的——它们是Goldstone定理所要求的$N-1$个无质量玻色子。我们现在已经证实了这些玻色子在线性sigma模型的单圈级别上仍然是无质量的；换句话说，线性sigma模型的第一个量子修正也遵从Goldstone定理。在本章的最后，我们将给出一个一般的证明——Goldstone定理在微扰理论的所有阶上都被满足。

11.3 有效作用量

在本章的第一节，我们分析了经典场论中的自发对称性破缺。这种分析是几何的：我们通过在一个势能曲面上寻找最深的势阱来寻找真空态，并通过表明对称性要求势阱的底部存在一条退化的极小值线，我们证明了 Goldstone 定理。但是在 11.2 节的单圈计算中，这个几何图像丢失了，或者至少被掩盖了。我们似乎有必要发展一种形式理论，以允许我们对量子层面上的自发对称性破缺，也能使用几何的论证方法。

为了更好地定义我们的目标，考虑量子场ϕ的真空期望值的确定问题。这个期望值应该被确定为拉格朗日量的参数的一个函数。在经典的层面上，很容易计算$\langle\phi\rangle$；它使势能最小化。然而，正如我们在前一节中所看到的，这个经典值可以被微扰的圈修正改变。事实上，我们看到$\langle\phi\rangle$可以被一个潜在发散的量移动，我们需要通过重整化来控制它。

如果在完全量子场论中存在一个函数，其最小值给出了$\langle\phi\rangle$的精确值，那就太好了。这个函数在微扰论的最低阶与经典势能一致，但在更高阶会被量子修正所修正。总的来说，这些修正需要重整化来消除无穷大。然而，在重整化之后，这个量给出的$\langle\phi\rangle$和粒子质量与耦合之间的关系，应该与我们通过直接的费曼图计算找到的关系相同。在本节中，我们将展示具有这些性质的一个函数，称为**有效势**。在第11.4节中，我们将解释如何在微扰论中计算有效势，使用重整化的质量和耦合。然后我们将继续，并把它作为一个工具，以分析带有隐藏对称性的理论的重整性。

要确定有效势，考虑第9.3节中陈述的量子场论和统计力学之间的类比。在那一节中，我们推导了量子场的关联函数与相关的统计系统(其中量子涨落被热涨落所取代)的关联函数之间的对应关系。在零温度下，热力学基态是能量最低的状态，但在非零温度下，我们仍然有一个优势(preferred)热力学状态的几何图像：它是使吉布斯自由能最小的状态。更明确地，以磁系统为例，它通过下式定义了亥姆霍兹自由能$F(H)$

$$Z(H) = e^{-\beta F(H)} = \int \mathcal{D}s \, \exp\Big[-\beta \int dx \, \big(\mathcal{H}[s] - Hs(x)\big)\Big], \tag{11.40}$$

其中H为外磁场，$\mathcal{H}[s]$为自旋能量密度，$\beta = 1/kT$。我们可以通过对$F(H)$求导

以求出系统的磁化强度：

$$\begin{aligned} -\left.\frac{\partial F}{\partial H}\right|_{\beta \text{ fixed}} &= \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial H}\log Z \\ &= \frac{1}{Z}\int dx \int \mathcal{D}s\, s(x) \exp\Big[-\beta \int dx \left(\mathcal{H}[s] - Hs\right)\Big] \\ &= \int dx \left\langle s(x)\right\rangle \equiv M. \end{aligned} \tag{11.41}$$

吉布斯自由能G由勒让德变换定义：

$$G = F + MH,$$

所以它满足

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial M} &= \frac{\partial F}{\partial M} + M\frac{\partial H}{\partial M} + H \\ &= \frac{\partial H}{\partial M}\frac{\partial F}{\partial H} + M\frac{\partial H}{\partial M} + H \\ &= H \end{aligned} \tag{11.42}$$

(其中所有偏导数都是以β为固定的)如果$H = 0$，吉布斯自由能在M的相应值处达到极值，热力学上最稳定的状态是$G(M)$的最小值。因此，函数$G(M)$给出的优势热力学状态的图像是几何的，并且同时包含了热涨落的所有效应。

通过类比，我们可以在量子场论中构造一个类似的量。为了简单起见，在本节，我们将在仅仅包含单标量场的理论下工作。所有的结果都直接推广到包含多个标量场、旋量场和矢量场的系统。

考虑一个标量场ϕ的量子场论，并存在外源J。和第 9 章一样，令外源依赖于x是有用的。因此，我们通过下式定义能量泛函$E[J]$：

$$Z[J] = e^{-iE[J]} = \int \mathcal{D}\phi \exp\Big[i\int d^4x \left(\mathcal{L}[\phi] + J\phi\right)\Big]. \tag{11.43}$$

这个方程的右边是振幅$\langle\Omega|e^{-iHT}|\Omega\rangle$的泛函积分表示，其中$T$为源$J$存在时的泛函积分的时间范围，因此$E[J]$仅仅是真空能，作为外源的一个函数。泛函$E[J]$是亥姆霍兹自由能的类比，$J$是外磁场的类比。

原则上，我们现在可以相对源的一个常数值将$E[J]$勒让德变换。然而，由于我们已经为泛函积分和求导发展了一个形式理论，所以在一个以任意方式依赖于x的外源$J(x)$下工作就不那么困难了。我们将看到，这种推广产生了额外的关系，它将这个形式理论与我们对重整化理论的一般研究联系起来*。

然后，考虑$E[J]$对$J(x)$的泛函求导：

$$\frac{\delta}{\delta J(x)}E[J] = i\frac{\delta}{\delta J(x)}\log Z = -\frac{\int \mathcal{D}\phi\, e^{i\int(\mathcal{L}+J\phi)}\phi(x)}{\int \mathcal{D}\phi\, e^{i\int(\mathcal{L}+J\phi)}}. \tag{11.44}$$

我们把这种关系简称为

$$\frac{\delta}{\delta J(x)}E[J] = -\langle\Omega|\,\phi(x)\,|\Omega\rangle_J\,; \tag{11.45}$$

右边是非零源$J(x)$存在时的真空期望值。这种关系是(11.41)式的泛函类比：$E[J]$的泛函导数给出了存在空间变化的源时ϕ的期望值。我们应该把这个期望值看作是与$J(x)$共轭的热力学变量。因此，我们通过下式定义量$\phi_{\rm cl}(x)$，称为**经典场**

$$\phi_{\rm cl}(x) = \langle\Omega|\,\phi(x)\,|\Omega\rangle_J\,. \tag{11.46}$$

经典场与$\phi(x)$联系的方式，和磁化强度M与局域自旋场$s(x)$的联系方式是相同的：这是对所有可能涨落的一个加权平均。注意，$\phi_{\rm cl}(x)$依赖于外源$J(x)$，正如M依赖于H。

现在，类比于吉布斯自由能的构造，定义$E[J]$的勒让德变换

$$\Gamma[\phi_{\rm cl}] \equiv -E[J] - \int d^4y\, J(y)\phi_{\rm cl}(y). \tag{11.47}$$

这个量称为**有效作用量**。与式(11.42)类似，我们现在可以计算

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta\phi_{\rm cl}(x)}\Gamma[\phi_{\rm cl}] &= -\frac{\delta}{\delta\phi_{\rm cl}(x)}E[J] - \int d^4y\,\frac{\delta J(y)}{\delta\phi_{\rm cl}(x)}\phi_{\rm cl}(y) - J(x)\\ &= -\int d^4y\,\frac{\delta J(y)}{\delta\phi_{\rm cl}(x)}\frac{\delta E[J]}{\delta J(y)} - \int d^4y\,\frac{\delta J(y)}{\delta\phi_{\rm cl}(x)}\phi_{\rm cl}(y) - J(x)\\ &= -J(x).\end{aligned} \tag{11.48}$$

在最后一步中，我们使用了(11.45)式。

对于在本节开头讨论的每一个热力学量，我们现在都已经在量子场论中定义了一个类比量。表 11.1 总结了这些类比。

---

*热力学的这个泛函推广是 C. Dedominicis 和 P. Martin, *J. Math. Phys.* **5**, 14(1964), 并且 G. Jona-lasinio 在相对论场论中得到了表述 *Nuovo Cim.* **34A**, 1790(1964)

Magnetic System	Quantum Field Theory
$\mathbf{x}$	$x=(t,\mathbf{x})$
$s(\mathbf{x})$	$\phi(x)$
H	$J(x)$
$\mathcal{H}(s)$	$\mathcal{L}(\phi)$
$Z(H)$	$Z[J]$
$F(H)$	$E[J]$
M	$\phi_{\rm cl}(x)$
$G(M)$	$-\Gamma[\phi_{\rm cl}]$

表 11.1 磁系统和标量量子场论中的类比量。

关系式(11.48)表明，如果外源设为零，有效作用量满足方程

$$\frac{\delta}{\delta\phi_{\rm cl}(x)}\Gamma[\phi_{\rm cl}]=0. \tag{11.49}$$

这个方程的解是在理论的稳定量子态下的$\langle\phi(x)\rangle$的值。对于平移不变的真空态，我们会找到一个解，其中$\phi_{\rm cl}$独立于x。有时，(11.49)式将会有额外的解，对应于通过自相互作用而聚集在一起的局域的场块。在这些被称为**孤子**的状态中，解$\phi_{\rm cl}(x)$依赖于x。

从这里开始，我们将假设，对于我们考虑的场论，可能的真空态在平移和洛伦兹变换下是不变的*。然后，对于每一个可能的真空态，相应的解$\phi_{\rm cl}$将是一个常数，独立于x，求解(11.49)式的过程降低为求解一个只有一个变量($\phi_{\rm cl}$)的普通方程。此外，我们知道Γ在热力学上是一个广延量：它与泛函积分所取的时空区域的体积成正比。如果T是这个区域的时间范围，V是它的三维体积，我们可以写

$$\Gamma[\phi_{\rm cl}]=-(VT)\cdot V_{\rm eff}(\phi_{\rm cl}). \tag{11.50}$$

系数$V_{\rm eff}$称为**有效势**。$\Gamma[\phi_{\rm cl}]$有一个极值的条件可降低为一个简单的方程

$$\frac{\partial}{\partial\phi_{\rm cl}}V_{\rm eff}(\phi_{\rm cl})=0. \tag{11.51}$$

*某些凝聚态系统的基态具有优势取向，例如 P.G.de Gennes, *The Physics of Liquid Crystals* (Oxford University Press, 1974)。

式(11.51)的每个解都是一个 $J=0$ 且平移不变的态。(11.47)式意味着在这种情况下$\Gamma=-E$，因此由(11.51)的一个解计算的$V_{\text{eff}}(\phi_{\text{cl}})$仅仅是对应态的能量密度。

图 11.6 展示了函数$V_{\text{eff}}(\phi)$一个可能的形状。局域极大值(或者对于含有多个场ϕ^i的系统，可能的鞍点)是不稳定的位形，不能被看作是稳定态。图中还包含了V_{eff}的一个局域最小值但不是绝对最小值；这是一种亚稳的真空态，它可以通过量子力学隧穿衰变为真实的真空。V_{eff}的绝对最小值是理论中能量最低的状态，因此是真实的、稳定的真空态。一个有着自发破缺对称性的系统，会有几个V_{eff}的极小值，它们由于对称性的特点都具有相同的能量。在这些真空中选择一个便是自发对称性破缺。

在画图11.6时，我们已经假设我们计算的是在固定的常数背景值ϕ下的有效势。在一些情况下，对于有着给定的ϕ期待值的状态，这个态并没有给出真正的最低能量位形。这种匹配不当可通过以下方式发生：对于一个系统，其常数背景场的有效势由图11.6给出，考虑选择一个介于局域稳定真空态ϕ_1和ϕ_3之间的ϕ_{cl}值：

$$\phi_{\text{cl}}=x\phi_1+(1-x)\phi_3, \qquad 0<x<1. \tag{11.52}$$

如图所示，常数背景场的假设给出了一个有效势的大值。通过考虑如下的态，我们可以获得一个更低能量的位形：该态在宏观的区域有$\langle\phi\rangle=\phi_1$和在其他区域有$\langle\phi\rangle=\phi_3$，以这样一种方式，$\langle\phi\rangle$在整个系统的平均值是$\phi_{\text{cl}}$。对于这样一个位形，平均真空能被给出为

$$V_{\text{eff}}(\phi_{\text{cl}})=xV_{\text{eff}}(\phi_1)+(1-x)V_{\text{eff}}(\phi_3), \tag{11.53}$$

如图11.7所示。我们将这个等式的左边称为$V_{\text{eff}}(\phi_{\text{cl}})$，因为结果(11.53)将是由$V_{\text{eff}}$的泛函积分定义的精确计算得到的结果，其中$\phi_{\text{cl}}$的值满足(11.52)。插值(11.53)是热力学自由能的麦克斯韦结构的场论类比。一般来说，对于满足(11.52)的任何$\phi_{\text{cl}},\phi_1,\phi_3$，(11.53)的估值将是有效势的一个上界；我们说有效势是ϕ_{cl}的一个凸函数*。

就像在热力学中一样，计算有效势的直接方案没有考虑到相分离的可能性，因此导致了如图11.6所示不稳定和亚稳定的位形类型的结构。麦克斯韦结构必

*吉布斯自由能的凸性是统计力学中一个众所周知的精确结果；参见，例如，D. Ruelle，*Statistical Mechanics* (W. A. Benjamin, Reading, Mass, 1969)。

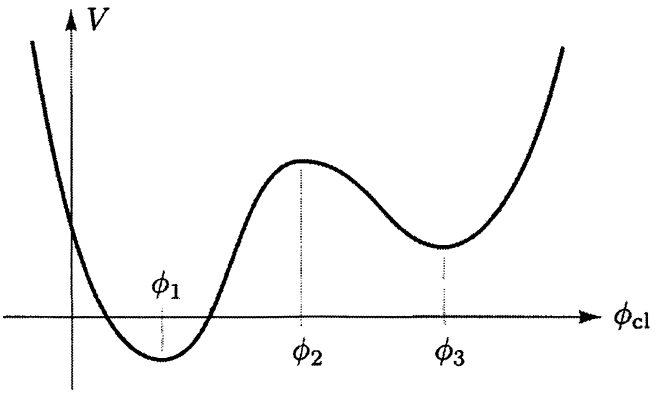


图 11.6 标量场中有效势的一种可能形式。有效势的极值发生在点$\phi_{\rm cl} = \phi_1, \phi_2, \phi_3$。真实的真空态对应$\phi_1$的态。状态$\phi_2$是不稳定的。$\phi_3$是亚稳状态，但它可以由量子力学隧穿衰变到$\phi_1$。

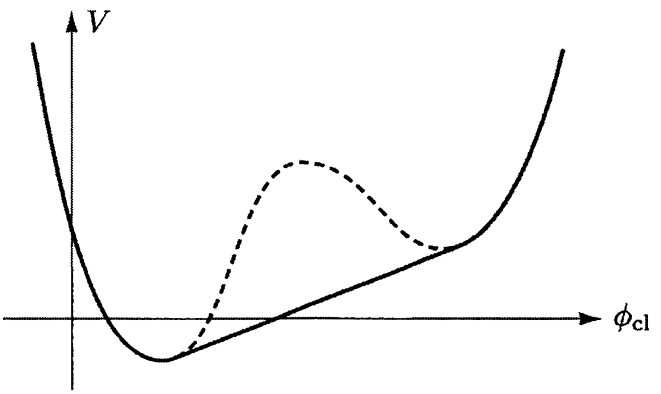


图 11.7 图 11.6 的系统的有效势的精确凸形式。

须被手动执行，才能得到$V_{\rm eff}(\phi_{\rm cl})$的最终形式。幸运的是，$V_{\rm eff}$的绝对最小值不受这种细微之处的影响。

我们现在已经解决了本节开始时提出的问题：由(11.47)和(11.50)式定义的有效势给出了一个简单直观的函数，该函数的最小化定义了量子场论的精确真空态，包括了量子修正的所有效应。根据这些定义如何计算$V_{\rm eff}(\phi_{\rm cl})$并不是很明显。在下一节中，我们将通过直接计算泛函积分来了解如何做到这一点。

11.4 有效作用量的计算

既然我们已经定义了一个对象，它的最小化给出了量子场论的精确真空态，我们必须学习如何计算它。这可以通过多种方式实现。我们将在这里使用的最简单的方法，要求我们有足够的勇气直接从它的泛函积分定义出发来计算完整的有效作用量Γ。计算Γ后，我们可以通过将$\phi_{\rm cl}$特殊化为常数值来得到$V_{\rm eff}$*。

我们的计划是为生成泛函Z找到一个微扰展开式，从它的泛函积分定义(11.43)开始。然后我们将取对数以获得能量泛函E，最后根据(11.47)式进行勒让德变换来得到Γ。我们将使用重整化微扰论，于是像我们在式(10.18)做的那样，将拉格朗日量分为依赖于重整化参数的部分和包含抵消项的部分是很方便的：

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \delta\mathcal{L}. \tag{11.54}$$

我们希望计算作为$\phi_{\rm cl}$的函数的Γ。但泛函$Z[J]$通过依赖于J而依赖于$\phi_{\rm cl}$。因此，我们必须(至少隐式地)找到$J(x)$和$\phi_{\rm cl}(x)$的关系。在微扰论的最低阶，这种关系仅仅是经典的场方程：

$$\left.\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi}\right|_{\phi=\phi_{\rm cl}} + J(x) = 0 \qquad \text{(to lowest order)}.$$

让我们将$J_1(x)$定义为当$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1$时精确满足该方程的任意函数：

$$\left.\frac{\delta\mathcal{L}_1}{\delta\phi}\right|_{\phi=\phi_{\rm cl}} + J_1(x) = 0 \qquad \text{(exactly)}. \tag{11.55}$$

我们将把J和J_1之差看作是一个抵消项，类似于$\delta\mathcal{L}$，所以我们写

$$J(x) = J_1(x) + \delta J(x), \tag{11.56}$$

其中，通过$\phi_{\rm cl}$的原始定义(11.46)，即$\langle\phi(x)\rangle_J = \phi_{\rm cl}(x)$，$\delta J$在微扰论中被逐阶地确定。

使用这个符号,我们重写式(11.43)为

$$e^{-iE[J]} = \int \mathcal{D}\phi\, e^{i\int d^4x(\mathcal{L}_1[\phi]+J_1\phi)} e^{i\int d^4x(\delta\mathcal{L}[\phi]+\delta J\phi)}. \tag{11.57}$$

第二个指数包含抵消项；先把这个放在一边。在第一个指数中，对$\phi_{\rm cl}$展开指数，

*这个方法是 R. Jackiw, *Phys. Rev.* D9, 1686(1974)。

通过替换$\phi(x)=\phi_{\rm cl}(x)+\eta(x)$。然后这个指数的形式为

$$\begin{aligned}\int d^4x(\mathcal{L}_1+J_1\phi)=&\int d^4x(\mathcal{L}_1[\phi_{\rm cl}]+J_1\phi_{\rm cl})+\int d^4x\,\eta(x)\Big(\frac{\delta\mathcal{L}_1}{\delta\phi}+J_1\Big)\\&+\frac{1}{2}\int d^4x\,d^4y\,\eta(x)\eta(y)\frac{\delta^2\mathcal{L}_1}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)}\\&+\frac{1}{3!}\int d^4x\,d^4y\,d^4z\,\eta(x)\eta(y)\eta(z)\frac{\delta^3\mathcal{L}_1}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)\delta\phi(z)}+\cdots,\end{aligned}\tag{11.58}$$

其中$\mathcal{L}_1$的各种泛函导数在$\phi_{\rm cl}(x)$处取值。注意，通过使用公式(11.55)，η的线性项为零。因此，对η的积分是高斯积分，三次及以上的项给出了微扰修正。

我们将遵循 9.2 节的方案，为这个积分描述一个正式的计算。这次计算的成分将是式(11.58)的系数，即$\mathcal{L}_1$的连续泛函导数。目前，请接受已给出的这些定义良好的算符。在给出了$\Gamma[\phi_{\rm cl}]$的一般表达式之后，我们将在一个标量场论的例子中显式地进行这个计算。我们将在这个例子中看到，正式的算符对应于费曼图微扰论中熟悉的表达式。

那么，让我们考虑用展开式(11.58)对$\eta(x)$执行积分。仅仅保留到η的二次阶的项，忽略抵消项，我们得到了一个纯高斯积分，它可以用泛函行列式来表示：

$$\begin{aligned}&\int\mathcal{D}\eta\,\exp\Big[i\Big(\int(\mathcal{L}_1[\phi_{\rm cl}]+J_1\phi_{\rm cl})+\frac{1}{2}\int\eta\frac{\delta^2\mathcal{L}_1}{\delta\phi\delta\phi}\eta\Big)\Big]\\&\qquad=\exp\Big[i\int(\mathcal{L}_1[\phi_{\rm cl}]+J_1\phi_{\rm cl})\Big]\cdot\Big(\det\Big[-\frac{\delta^2\mathcal{L}_1}{\delta\phi\delta\phi}\Big]\Big)^{-1/2}.\end{aligned}\tag{11.59}$$

这个泛函行列式将为我们给出有效作用量的最低阶的量子修正，在很多情况下，没有必要在展开式(11.58)上更进一步。稍后我们将看到，如果我们包含η的三次或更高项，这些项将产生出泛函积分(11.57)的费曼图展开式，其中传播子是以下的逆算符：

$$-i\Big(\frac{\delta^2\mathcal{L}_1}{\delta\phi\delta\phi}\Big)^{-1}\tag{11.60}$$

并且顶点是对$\mathcal{L}_1$的第三阶和更高阶的泛函导数。

最后，让我们把式(11.57)中的第二个指数的影响放回去，也就是抵消项拉格朗日量。在$\phi=\phi_{\rm cl}$附近把这一项展开是有用的，将它写为

$$\big(\delta\mathcal{L}[\phi_{\rm cl}]+\delta J\phi_{\rm cl}\big)+\big(\delta\mathcal{L}[\phi_{\rm cl}+\eta]-\delta\mathcal{L}[\phi_{\rm cl}]+\delta J\eta\big).\tag{11.61}$$

(11.61)的第二项可展开为η的泰勒级数；连续项给出抵消项顶点，它们可以被包含在前面提到的费曼图中。第一项对于η的泛函积分来说是常数，因此在式(11.59)的指数中给出了附加项。

将积分(11.59)与高阶顶点和抵消项的贡献相结合，可以得到泛函积分(11.57)的完整表达式。在下面的例子中，我们将看到代表高阶项的费曼图可以被安排来给出连通图的和的指数。由此得到$E[J]$的以下表达式：

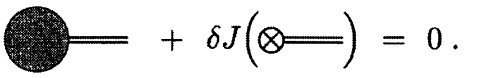
$$\begin{aligned} -iE[J] = i\int d^4x(\mathcal{L}_1[\phi_{\rm cl}] + J_1\phi_{\rm cl}) - \frac{1}{2}\log\det\Big[-\frac{\delta^2\mathcal{L}_1}{\delta\phi\delta\phi}\Big] \\ + (\text{connected diagrams}) + i\int d^4x(\delta\mathcal{L}[\phi_{\rm cl}] + \delta J\phi_{\rm cl}). \end{aligned} \tag{11.62}$$

根据这个方程，Γ直接得到：使用$J_1 + \delta J = J$和勒让德变换(11.47)，我们发现

$$\begin{aligned} \Gamma[\phi_{\rm cl}] = \int d^4x\,\mathcal{L}_1[\phi_{\rm cl}] + \frac{i}{2}\log\det\Big[-\frac{\delta^2\mathcal{L}_1}{\delta\phi\delta\phi}\Big] \\ - i\cdot(\text{connected diagrams}) + \int d^4x\,\delta\mathcal{L}[\phi_{\rm cl}]. \end{aligned} \tag{11.63}$$

注意，显式地依赖于J的项没有剩下来；因此，Γ被表示为$\phi_{\rm cl}$的一个函数，这是应该的。对$\Gamma[\phi_{\rm cl}]$有贡献的费曼图没有外线，最简单的图有两个圈。Γ的最低阶的量子修正由泛函行列式给出，且这一项就是我们在本书中唯一要用到的。

(11.63)的最后一项提供了一组抵消项，这些抵消项可用于满足在Γ上的重整化条件，并在此过程中，抵消掉在对泛函行列式和图求值时出现的发散。我们将在下面的示例中展示这种抵消是如何工作的。重整化条件将确定$\delta\mathcal{L}$中的所有抵消项，而我们构造的形式理论包含了一个新的抵消项δJ。该系数由以下特殊判据确定：在(11.55)式，我们以这样一种方式建立起我们的分析，即在领头阶$\langle\phi\rangle = \phi_{\rm cl}$。然而，可能这个关系在更高阶可能潜在地不适用：量$\langle\phi\rangle$可以从费曼图获得额外的贡献，这可能会移动它的值$\phi_{\rm cl}$。如果存在对$\langle\eta\rangle$有贡献的非零蝌蚪图，这将会发生。但这个振幅也从(11.61)的抵消项$(\delta J\eta)$中获得一个贡献。因此，通过调整δJ以满足如下的图解方程，我们可以保持$\langle\eta\rangle = 0$，并在此过程中，在任意阶下确定δJ：



(11.64)

在实践中，我们将通过简单地忽略任何单粒子不可约的单点图来满足这个条件，因为任何这样的图都会被δJ的调整所抵消。因此，这些蝌蚪图的移除(在 11.2 节我们需要一些努力来安排)在这里被构建为形式理论的一个自然的部分。

线性 Sigma 模型中的有效作用量

在式(11.63)中，我们给出了一个$\Gamma[\phi_{\rm cl}]$的完整计算，虽然不是完全透明。现在让我们通过在线性 sigma 模型中计算$\Gamma[\phi_{\rm cl}]$，来澄清这个方程的含义，并好好的使用一下它。我们将看到，我们在 11.2 节通过微扰论强行得到的结果将从式(11.63)中更自然地出现。

我们从拉格朗日量(11.5)开始：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi^i)^2 + \frac{1}{2}\mu^2(\phi^i)^2 - \frac{\lambda}{4}\big[(\phi^i)^2\big]^2. \tag{11.65}$$

展开经典场：$\phi^i = \phi^i_{\rm cl} + \eta^i$。因为我们希望找到一个平移不变的真空态，所以我们将研究**常数**经典场的特殊情况。这将简化下面计算中的一些元素。特别是，根据(11.50)式，最终的结果将与泛函积分的四维体积(VT)成正比。当这种依赖关系被作为因子提出时，我们将得到有效势的一个定义良好的强化表达式。无论如何，在这种简化之后，(11.65)就形成了

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = {} & \frac{1}{2}\mu^2(\phi^i_{\rm cl})^2 - \frac{\lambda}{4}\big[(\phi^i_{\rm cl})^2\big]^2 + (\mu^2 - \lambda(\phi^i_{\rm cl})^2)\phi^i_{\rm cl}\eta^i \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta^i)^2 + \frac{1}{2}\mu^2(\eta^i)^2 - \frac{\lambda}{2}\big[(\phi^i_{\rm cl})^2(\eta^i)^2 + 2(\phi^i_{\rm cl}\eta^i)^2\big] + \cdots.\end{aligned} \tag{11.66}$$

根据(11.63)，我们应该丢掉η的线性项。

从η的二次项，我们可以读出

$$\frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta\phi^i \delta\phi^j} = -\partial^2\delta^{ij} + \mu^2\delta^{ij} - \lambda\big[(\phi^k_{\rm cl})^2\delta^{ij} + 2\phi^i_{\rm cl}\phi^j_{\rm cl}\big]. \tag{11.67}$$

注意，这个对象具有Klein-Gordon算符的一般形式。为了阐明这种关系，让我们确定坐标的方向，使$\phi^i_{\rm cl}$指向第N个方向。

$$\phi^i_{\rm cl} = (0, 0, \ldots, 0, \phi_{\rm cl}), \tag{11.68}$$

如我们在式(11.7)做的。然后算符(11.67)刚好等于 Klein-Gordon 算符$(-\partial^2 - m_i^2)$，其中

$$m_i^2 = \begin{cases} \lambda\phi_{\rm cl}^2 - \mu^2 & \text{acting on } \eta^1, \ldots, \eta^{N-1}; \\ 3\lambda\phi_{\rm cl}^2 - \mu^2 & \text{acting on } \eta^N. \end{cases} \tag{11.69}$$

式(11.63)的泛函行列式是这些 Klein-Gordon 算符行列式的乘积：

$$\det \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta\phi\delta\phi} = \left[\det(\partial^2 + (\lambda\phi_{\rm cl}^2 - \mu^2))\right]^{N-1} \left[\det(\partial^2 + (3\lambda\phi_{\rm cl}^2 - \mu^2))\right]. \tag{11.70}$$

得到 Klein-Gordon 算符的行列式的显式形式并不难。首先，使用式(9.77)的技巧来写出

$$\log\det(\partial^2 + m^2) = \mathrm{Tr}\log(\partial^2 + m^2).$$

现在，计算算符的迹等于其本征值之和：

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\log(\partial^2 + m^2) &= \sum_k \log(-k^2 + m^2) \\ &= (VT)\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \log(-k^2 + m^2). \end{aligned} \tag{11.71}$$

在第二行，我们把动量的和转换成一个积分。因子(VT)是泛函积分的四维体积；我们已经注意到，这是预期出现的$\Gamma[\phi_{\rm cl}]$的一个整体因子，这一操作给出了一个积分， 在 Wick 旋转之后可以用维数正规化计算：

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \log(-k^2 + m^2) &= i\int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \log(k_E^2 + m^2) \\ &= -i\frac{\partial}{\partial\alpha}\int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k_E^2 + m^2)^\alpha}\bigg|_{\alpha=0} \\ &= -i\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(m^2)^{\alpha - d/2}}\right)\bigg|_{\alpha=0} \\ &= -i\frac{\Gamma(-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{(m^2)^{-d/2}}. \end{aligned} \tag{11.72}$$

在最后一行中，我们使用了在$\alpha \to 0$时$\Gamma(\alpha) \to 1/\alpha$。因此，

$$\frac{1}{(VT)} \log\det(\partial^2 + m^2) = -i\frac{\Gamma(-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} (m^2)^{d/2}. \tag{11.73}$$

利用此结果求出(11.63)式中的行列式，并将抵消项拉格朗日量选择为和(11.14)

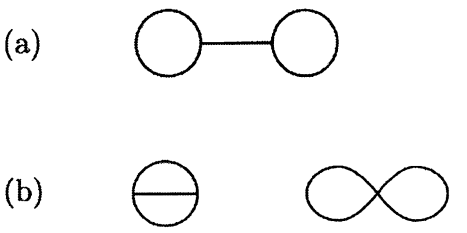


图 11.8 对$O(N)$线性 sigma 模型的有效势的计算有贡献的费曼图：
(a)被(11.64)去掉的图；(b)第一个非零的图修正。

式一样，我们发现

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}(\phi) &= -\frac{1}{(VT)}\Gamma[\phi_{\text{cl}}] \\ &= -\frac{1}{2}\mu^2\phi_{\text{cl}}^2 + \frac{\lambda}{4}\phi_{\text{cl}}^4 \\ &\quad - \frac{1}{2}\frac{\Gamma(-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}}\left[(N-1)(\lambda\phi_{\text{cl}}^2-\mu^2)^{d/2} + (3\lambda\phi_{\text{cl}}^2-\mu^2)^{d/2}\right] \\ &\quad + \frac{1}{2}\delta_\mu\phi_{\text{cl}}^2 + \frac{1}{4}\delta_\lambda\phi_{\text{cl}}^4. \end{aligned} \tag{11.74}$$

这里我们将$(\phi_{\text{cl}}^i)^2$简写为ϕ_{cl}^2。由于这一结果的第二行是领头辐射修正，我们可能期望该结果具有单圈费曼图的结构。实际上，我们看到这个表达式包含Γ函数和紫外发散，与我们在11.2节的单圈计算中发现的那些类似。我们将在下面证明这一项实际上与我们在11.2节发现的紫外发散完全相同。这些发散将被式(11.74)最后一行的抵消项所抵消。

由于式(11.63)的行列式的计算给出了单圈修正的效应，我们可能期望对公式(11.63)有贡献的费曼图以双圈阶开始。我们可以在$O(N)$sigma模型的情况下明确地看到这一点。式(11.60)下面描述的微扰展开包含的传播子是式(11.67)的逆：

$$\left\langle \eta^i(k)\eta^j(-k)\right\rangle = \frac{i}{k^2-m_i^2}\delta^{ij}, \tag{11.75}$$

其中m_i^2由(11.69)给出。顶点由拉格朗日量展开式中的η^3和η^4阶的项给出。结合这些成分，我们发现对真空能有贡献的领头费曼图的形式如图 11.8 所示。图11.8(a)实际上被抵消项δJ的作用所抵消，如式(11.64)所示。因此，有效势的领头图解贡献来自于图 11.8(b)的双圈图。

结果(11.74)明显是$O(N)$对称的。根据我们在 11.2 节开头提出的问题，当我们计算一个对称性自发破缺的状态的辐射修正时，我们可能担心这个性质会被破坏。但是$V_{\text{eff}}(\phi_{\text{cl}})$是一个我们通过最小化来求真空态的函数，所以它应该是恰当地对称的，即使最低能的真空是不对称的。在我们已经在这里构建的形式理论中，没有必要担心。在拉格朗日量的原始$O(N)$对称性下，式(11.63)是逐项地明显不变的。因此我们必定得到一个$V_{\text{eff}}(\phi_{\text{cl}})$的$O(N)$对称的结果。

在继续准确地确定δ_μ和δ_λ之前，我们可能首先检查下式(11.74)中的抵消项足以让$\Gamma[\phi_{\text{cl}}]$的表达式有限。因子$\Gamma(-d/2)$在$d = 0,2,4$处有极点。$d = 0$的极点是一个常数，与ϕ_{cl}无关，因此没有物理意义。$d = 2$处的极点是ϕ_{cl}的偶二次多项式。$d = 4$处的极点是ϕ_{cl}的偶四次多项式。因此，如果我们做以下设置，式(11.74)将在极限$d \to 2$下成为一个有限的表达式，

$$\delta_\mu = -\lambda(N+2)\frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{(4\pi)} \; + \; \text{finite.}$$

而如果我们做以下设置，表达式将在极限$d \to 4$下是有限的，

$$\begin{aligned}
\delta_\mu &= -\lambda\mu^2(N+2)\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2} \; + \; \text{finite;} \\
\delta_\lambda &= \lambda^2(N+8)\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2} \; + \; \text{finite.}
\end{aligned} \tag{11.76}$$

这些表达式与我们之前从 11.2 节得到的结果一致，即式(11.33)和(11.22)，分别在$d \to 2$和$d \to 4$的极限下。

δ_μ和δ_λ的有限部分，依赖于所施加的重整化条件的精确形式。例如，在第 11.2 节我们施加了条件(11.16)，即ϕ的真空期望值等于$\mu/\sqrt{\lambda}$，以及对散射振幅和σ的场强施加的附加条件(11.17)。条件(11.16)很容易用有效势表达为：

$$\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \phi_{\text{cl}}}(\phi_{\text{cl}} = \mu/\sqrt{\lambda}) = 0.$$

利用Γ的导数与单粒子不可约振幅之间的联系，我们可以把另外两个条件写为，到$\Gamma[\phi_{\text{cl}}]$的泛函导数的动量空间的傅里叶变换。用这种方法，对 11.2 节所使用的特殊重整化方案进行重新构造，这在原则上是可行的。

然而，如果我们想要将由量子修正引起的结果的最低阶修正可视化，我们可以应用一个更容易实现的重整化方案。一个这样的方案，被称为**最小减除**(MS)，

就是简单地移除潜在发散量中的$(1/\epsilon)$极点(对于$\epsilon = 4 - d$)。然而，这些$(1/\epsilon)$极点通常与包含γ和$\log(4\pi)$的项相伴。同时减去这些项很方便，而且没有更多的任意性。在这个被称为**修正的最小减除**或$\overline{MS}$ ("em-ess-bar")的方案中，替换了：

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}(m^2)^{2-d/2}} &= \frac{1}{(4\pi)^2}\Big(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log(4\pi) - \log(m^2)\Big) \\ &\longrightarrow \frac{1}{(4\pi)^2}\big(-\log(m^2/M^2)\big),\end{aligned} \tag{11.77}$$

其中M是一个任意的质量参数，我们引入它是为了使最后的式子在量纲上正确。你应该把M看作是对一系列可能的重整化条件进行参数化。$\overline{MS}$重整化方案通常以一种特别简单的形式进行单圈修正。这种简单性的代价是，通常需要付出一些努力，才能用$\overline{MS}$表达式的参数来表示物理可观测量。

为了将$\overline{MS}$重整化方案应用于(11.74)，我们需要在ϵ的幂次下将方程中发散项展开。作为一个例子，考虑表达式(11.73)的$\overline{MS}$正规化：

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}}(m^2)^{d/2} &= \frac{1}{\frac{d}{2}(\frac{d}{2}-1)}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}}(m^2)^{d/2} \\ &= \frac{m^4}{2(4\pi)^2}\Big(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log(4\pi) - \log(m^2) + \frac{3}{2}\Big) \\ &\longrightarrow \frac{m^4}{2(4\pi)^2}\Big(-\log(m^2/M^2) + \frac{3}{2}\Big).\end{aligned} \tag{11.78}$$

用这种方法修改结果(11.74)，我们发现

$$\begin{aligned}V_{\text{eff}} = &-\frac{1}{2}\mu^2\phi_{\text{cl}}^2 + \frac{\lambda}{4}\phi_{\text{cl}}^4 \\ &+ \frac{1}{4}\frac{1}{(4\pi)^2}\Big((N-1)(\lambda\phi_{\text{cl}}^2 - \mu^2)^2\big(\log\big[(\lambda\phi_{\text{cl}}^2 - \mu^2)/M^2\big] - \tfrac{3}{2}\big) \\ &\qquad + (3\lambda\phi_{\text{cl}}^2 - \mu^2)^2\big(\log\big[(3\lambda\phi_{\text{cl}}^2 - \mu^2)/M^2\big] - \tfrac{3}{2}\big)\Big).\end{aligned} \tag{11.79}$$

因此，有效势被修正为在较大值时略微更陡，在较小值时更负，如图 11.9 所示。对于μ、λ和M的每一组值，我们可以通过根据ϕ_{cl}将$V_{\text{eff}}(\phi)$最小化来确定优势(preferred)真空态。当对数中的参数变为负数时，V_{eff}的修正没有定义，但幸运的是，V_{eff}的最小值出现在该区域之外，如图所示。

在继续之前，我们想提出两个关于有效势的这个表达式的问题。我们将提出的问题一般发生在量子场论计算中，但表达式(11.79)为这些困难提供了一个具

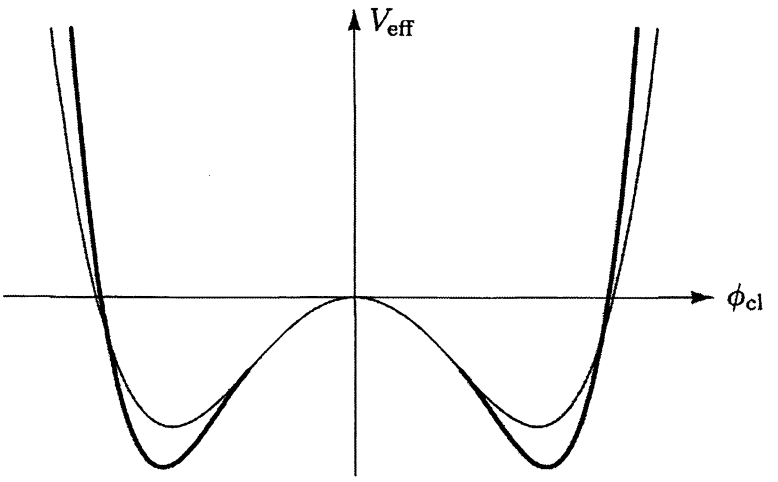


图 11.9　ϕ^4理论的有效势($N=1$)，包含如式(11.79)的量子修正。较细的曲线显示了经典势能，以便比较。

体的说明。在接下来的两章中，我们的大部分讨论将致力于建立一种能够回答这些问题的形式理论。

第一，当我们经典的拉格朗日量只包含两个参数μ和λ时，结果(11.79)依赖于三个参数是令人不安的，这个参数就是任意的质量标度M。对这个问题的一个粗略回复可以按如下给出：考虑$V_{\text{eff}}(\phi_{\text{cl}})$的变化来源于$M^2$的值变为$M^2+\delta M^2$。从式(11.79)的显式形式可以看出，通过移动$\mu$和$\lambda$的值，可以完全补偿这一变化

$$\begin{aligned}\lambda &\to \lambda + \frac{\lambda^2}{(4\pi)^2}(N+8)\cdot\frac{\delta M^2}{M^2},\\ \mu^2 &\to \mu^2 - \frac{\lambda\mu^2}{(4\pi)^2}(N+2)\cdot\frac{\delta M^2}{M^2}.\end{aligned} \tag{11.80}$$

因此，M^2的变化完全等价于参数μ和λ的变化。但是，还不清楚为什么这个应该是对的，或者这个事实是如何帮助我们理解公式对M^2的依赖性的。

第二个问题源自于这样一个事实：式(11.79)的单圈修正包含了一个对数，它可以变得足够大以补偿小耦合常数λ。在极限$\mu^2\to 0$下问题特别明显；然后式(11.79)采取以下形式

$$\begin{aligned}V_{\text{eff}} &= \frac{\lambda}{4}\phi_{\text{cl}}^4 + \frac{1}{4}\frac{\lambda^2}{(4\pi)^2}\phi_{\text{cl}}^4\Big((N+8)\big(\log(\lambda\phi_{\text{cl}}^2/M^2)-\tfrac{3}{2}\big)+9\log 3\Big)\\ &= \frac{1}{4}\phi_{\text{cl}}^4\Big[\lambda+\frac{\lambda^2}{(4\pi)^2}\Big((N+8)\big(\log(\lambda\phi_{\text{cl}}^2/M^2)-\tfrac{3}{2}\big)+9\log 3\Big)\Big].\end{aligned} \tag{11.81}$$

这个势的最小值在哪里？如果我们取这个表达式的表面值，我们发现当$\phi_{\rm cl}$达到一个非常小的值时$V_{\rm eff}(\phi_{\rm cl})$经过了零，该值的阶为

$$\phi_{\rm cl}^2 \sim \frac{M^2}{\lambda}\cdot\exp\left[-\frac{(4\pi)^2}{(N+8)\lambda}\right],$$

在这一点附近，在一个非零的$\phi_{\rm cl}$下，$V_{\rm eff}(\phi_{\rm cl})$达到了极小值。但是零值的发生是由于领头项与量子修正之间的抵消。换句话说，对于$\mu^2=0$下$V_{\rm eff}(\phi_{\rm cl})$是否具有一个对称性破缺的最小值这个问题，在我们能够解决它之前，微扰论就完全失效了。看来我们目前的工具还不足以解决这个问题。

这两个问题虽然远不明显，但结果却是相互关联。我们在第 12 章的主要结果之一将是对式(11.80)所示的M^2、λ和μ^2之间的相互关系进行解释。然后，在第 13 章，我们将利用我们从这一分析所获得的洞察力来彻底解决第二个问题中大对数的出现。然而，在开始这项研究之前，有一些问题我们还必须去讨论，在更正式的方面——带有自发破缺对称性的理论的重整化。

11.5 有效作用量作为生成泛函

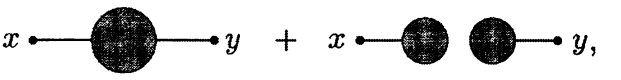
现在我们已经定义了有效作用量并在一个特别理论下计算了它，让我们回到我们的目标，即理解带有隐藏对称性的理论的重整化。在第11.6节中，我们将使用有效作用量作为实现这一目标的工具。然而，首先我们必须更详细地研究有效作用量与费曼图之间的关系。

我们在 9.2 节中看到$Z[J]$对$J(x)$的泛函导数产生了标量场的关联函数(如式(9.35))。即$Z[J]$是关联函数的**生成泛函**。现在的目标是证明$\Gamma[\phi_{\rm cl}]$也是一个生成泛函；具体点，它是单粒子不可约(1PI)关联函数的生成泛函。由于 1PI 关联函数在重整化理论中占有重要地位，所以这一结果将是下节讨论重整化的核心。

首先，我们不考虑$\Gamma[\phi_{\rm cl}]$的泛函导数，而是考虑$E[J]=i\log Z[J]$的泛函导数。(11.44)式给出的一阶导数，正是$-\langle\phi(x)\rangle$。二阶导数是

$$\begin{aligned}\frac{\delta^2 E[J]}{\delta J(x)\delta J(y)} &= -\frac{i}{Z}\int\mathcal{D}\phi\, e^{i\int(\mathcal{L}+J\phi)}\phi(x)\phi(y)\\ &\qquad + \frac{i}{Z^2}\int\mathcal{D}\phi\, e^{i\int(\mathcal{L}+J\phi)}\phi(x)\cdot\int\mathcal{D}\phi\, e^{i\int(\mathcal{L}+J\phi)}\phi(y)\\ &= -i\Big[\langle\phi(x)\phi(y)\rangle - \langle\phi(x)\rangle\langle\phi(y)\rangle\Big].\end{aligned}\tag{11.82}$$

如果我们要计算来自费曼图的项$\langle\phi(x)\phi(y)\rangle$，会有两种类型的贡献：



(11.83)

其中每个圆对应于**连通**图的和。式(11.82)最后一行的第二项与(11.83)的第二个、不连通的项相消。于是$E[J]$的二阶导数只包含$\langle\phi(x)\phi(y)\rangle$的那些来自连通费曼图的贡献。让我们将这个对象称为**连通的关联子**：

$$\frac{\delta^2 E[J]}{\delta J(x)\delta J(y)} = -i\,\langle\phi(x)\phi(y)\rangle_{\text{conn}}\,. \tag{11.84}$$

类似的，$E[J]$的三阶泛函导数为

$$\begin{aligned}\frac{\delta^3 E[J]}{\delta J(x)\delta J(y)\delta J(z)} &= \Big[\langle\phi(x)\phi(y)\phi(z)\rangle - \langle\phi(x)\phi(y)\rangle\,\langle\phi(z)\rangle - \langle\phi(x)\phi(z)\rangle\,\langle\phi(y)\rangle \\ &\qquad - \langle\phi(y)\phi(z)\rangle\,\langle\phi(x)\rangle + 2\,\langle\phi(x)\rangle\,\langle\phi(y)\rangle\,\langle\phi(z)\rangle\Big] \\ &= \langle\phi(x)\phi(y)\phi(z)\rangle_{\text{conn}}\,. \end{aligned} \tag{11.85}$$

在$E[J]$的每一阶连续导数中，除了那些来自完全连通图的贡献，其他所有的贡献都抵消了。n阶导数的一般公式是

$$\frac{\delta^n E[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)} = (i)^{n+1}\,\langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle_{\text{conn}}\,. \tag{11.86}$$

因此，我们将$E[J]$称为**连通关联函数的生成泛函**。

$E[J]$就讲到这里。那么有效作用量的泛函导数呢？首先考虑式(11.48)对$J(y)$求导：

$$\frac{\delta}{\delta J(y)}\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_{\text{cl}}(x)} = -\delta(x-y).$$

我们可以用链式法则重写这个方程的左边，得到

$$\begin{aligned}\delta(x-y) &= -\int d^4z\,\frac{\delta\phi_{\text{cl}}(z)}{\delta J(y)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_{\text{cl}}(z)\delta\phi_{\text{cl}}(x)} \\ &= \int d^4z\,\frac{\delta^2 E}{\delta J(y)\delta J(z)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_{\text{cl}}(z)\delta\phi_{\text{cl}}(x)} \\ &= \left(\frac{\delta^2 E}{\delta J\delta J}\right)_{yz}\left(\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_{\text{cl}}\delta\phi_{\text{cl}}}\right)_{zx}. \end{aligned} \tag{11.87}$$

在第二行中，我们使用了式(11.44)。最后一行是对第二行的抽象表示，我们把每一个二阶导数看成一个无限维矩阵，对z的积分用矩阵乘法表示。我们已经证明

了这两个矩阵是互为逆矩阵：

$$\left(\frac{\delta^2 E}{\delta J \delta J}\right) = \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta\phi_{\rm cl}\delta\phi_{\rm cl}}\right)^{-1}. \tag{11.88}$$

现在根据式(11.84)，第一个矩阵是$-i$乘以连通的两点函数，即场ϕ的精确传播子。我们称这个传播子为$D(x,y)$：

$$\left(\frac{\delta^2 E}{\delta J(x)\delta J(y)}\right) = -i\left\langle\phi(x)\phi(y)\right\rangle_{\rm conn} \equiv -iD(x,y). \tag{11.89}$$

因此，我们将另一个矩阵(乘以$-i$)称为**逆传播子**：

$$\left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta\phi_{\rm cl}(x)\delta\phi_{\rm cl}(y)}\right) = iD^{-1}(x,y). \tag{11.90}$$

这为有效作用量的二阶导数提供了一种解释。如果我们去到动量空间，这个解释会更具体。在一个平移不变的真空态上(其$\phi_{\rm cl}$为常数)，矩阵$D(x,y)$在动量下必须是对角的：

$$D(x,y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot(x-y)}\widetilde{D}(p). \tag{11.91}$$

我们在式(7.43)证明了动量空间传播子$\widetilde{D}(p)$是单粒子不可约费曼图的一个几何级数。然后$D^{-1}(x,y)$的傅里叶变换给出了逆传播子：

$$\widetilde{D}^{-1}(p) = -i(p^2 - m^2 - M^2(p^2)), \tag{11.92}$$

其中$M^2(p)$为单粒子不可约的两点图之和。

为了计算有效作用量的高阶导数，我们再次使用链式法则，

$$\frac{\delta}{\delta J(z)} = \int d^4w\, \frac{\delta\phi_{\rm cl}(w)}{\delta J(z)}\frac{\delta}{\delta\phi_{\rm cl}(w)} = i\int d^4w\, D(z,w)\frac{\delta}{\delta\phi_{\rm cl}(w)}, \tag{11.93}$$

以及对逆矩阵求导的标准规则：

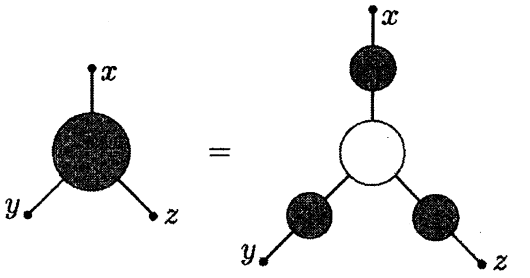
$$\frac{\partial}{\partial\alpha}M^{-1}(\alpha) = -M^{-1}\frac{\partial M}{\partial\alpha}M^{-1}. \tag{11.94}$$

将这些恒等式应用于式(11.88)，我们发现(带着一些简短的符号)：

$$\begin{aligned}\frac{\delta^3 E[J]}{\delta J_x \delta J_y \delta J_z} &= i\int d^4w\, D(z,w)\,\frac{\delta}{\delta\phi_w^{\rm cl}}\left(\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_x^{\rm cl}\delta\phi_y^{\rm cl}}\right)^{-1}\\ &= i\int d^4w\, D_{zw}\,(-1)\int d^4u\int d^4v\,(-iD_{xu})\,\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\phi_u^{\rm cl}\delta\phi_v^{\rm cl}\delta\phi_w^{\rm cl}}\,(-iD_{vy})\end{aligned}$$

$$= i \int d^4u\, d^4v\, d^4w\, D_{xu} D_{yv} D_{zw} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \phi_u^{\rm cl} \delta \phi_v^{\rm cl} \delta \phi_w^{\rm cl}}. \tag{11.95}$$

这个关系用图能表达得更清楚。左边是连通的三点函数。如果我们如(11.95)所示提取出精确传播子，则它分解为



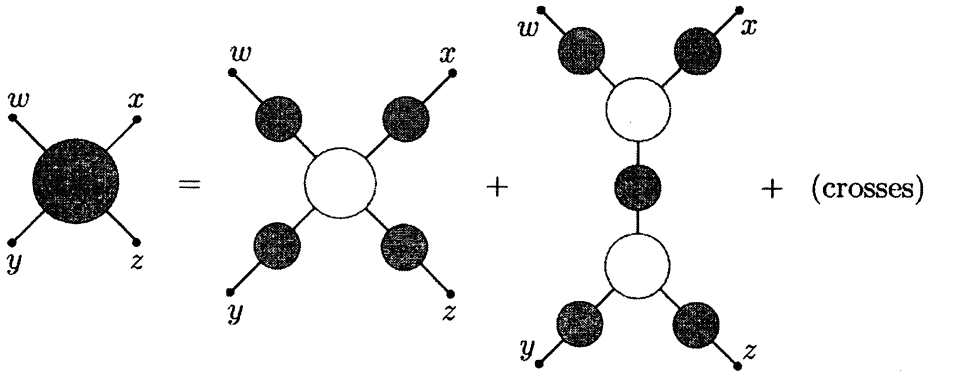
在这幅图中，每个深灰色的圆圈表示连通图的和，而右边的浅灰色圆圈表示$i\Gamma[\phi_{\rm cl}]$的三阶导数。我们看到$i\Gamma[\phi_{\rm cl}]$的三阶导数仅仅是连通的关联函数被去掉了三个完全传播子，即**单粒子不可约**三点函数：

$$\frac{i\delta^3 \Gamma}{\delta \phi_{\rm cl}(x) \phi_{\rm cl}(y) \phi_{\rm cl}(z)} = \langle \phi(x) \phi(y) \phi(z) \rangle_{\rm 1PI}.$$

通过类似的，或许越来越复杂的操作，我们可以推导出Γ的每一阶连续导数的相同关系。例如，对式(11.95)微分，我们最终发现(使用矩阵符号，其中重复的指示都被隐式地积分)

$$\begin{aligned} \frac{-i\delta^4 E}{\delta J_w \delta J_x \delta J_y \delta J_z} = D_{sw} D_{xt} D_{yu} D_{zv} \Bigg[& \frac{i\delta^4 \Gamma}{\delta \phi_s^{\rm cl} \delta \phi_t^{\rm cl} \delta \phi_u^{\rm cl} \delta \phi_v^{\rm cl}} \\ & + \frac{i\delta^3 \Gamma}{\delta \phi_s^{\rm cl} \delta \phi_t^{\rm cl} \delta \phi_r^{\rm cl}} D_{qr} \frac{i\delta^3 \Gamma}{\delta \phi_q^{\rm cl} \delta \phi_u^{\rm cl} \delta \phi_v^{\rm cl}} + (t \leftrightarrow u) + (t \leftrightarrow v) \Bigg]. \end{aligned}$$

由于这个方程的左边是连通的四点函数，我们可以把它画成



如上所述，暗灰色圆圈表示连通图的和，而浅灰色圆圈表示i乘以Γ的各阶求导。两边减去最后三项，这移除了连通四点函数的所有单粒子可约的部分，因此将$i\Gamma$的四阶导数标识为单粒子不可约的四点函数。一般的关系(对于$n>3$)为

$$\frac{\delta^n\Gamma[\phi_{\rm cl}]}{\delta\phi_{\rm cl}(x_1)\cdots\delta\phi_{\rm cl}(x_n)} = -i\,\langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle_{\rm 1PI}\,. \tag{11.96}$$

换句话说，有效作用量是单粒子不可约关联函数的生成泛函。

这一结论意味着Γ中包含了量子场论的一组完整的物理预测。让我们回顾一下这个信息是如何被翻译出来的。场论的真空态被确定为有效势的最小值。最小值的位置决定了拉格朗日量的对称性是被保留的还是自发破缺的。Γ的二阶导数是逆传播子。传播子的极点，或者逆传播子的零点，给出粒子质量的值。因此，粒子质量m^2被确定为解出了如下方程的p^2的值：

$$\widetilde{D}^{-1}(p^2) = \int d^4x\, e^{ip\cdot(x-y)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi\delta\phi}(x,y) = 0. \tag{11.97}$$

Γ的高阶导数是单粒子不可约振幅。这些振幅可以通过完全传播子连接起来，并结合在一起以构成四点和更高点的连通振幅，从而得到 S 矩阵元。因此，根据Γ中包含的知识，我们可以重构出量子场论的定性行为，它的对称性破缺的模式，以及它的粒子及其相互作用的定量的细节。

11.6 重整化与对称性：一般分析

在我们分析量子场论的发散时(特别是式(10.4)下面的一段)，我们注意到费曼积分的基本发散与单粒子不可约图有关。因此，在讨论量子场论的可重整性时，特别是讨论那些具有自发破缺对称性的量子场论时，我们将期待有效作用量是一个有用的对象。在本节中，我们将精确地以这种方式使用有效作用量。

在第 11.4 节中，我们在一个特殊的例子中看到，计算有效作用量的形式理论提供了消除紫外发散所需的抵消项，至少在单圈水平上是这样。这些抵消项正是那些原始的拉格朗日量的抵消项。现在，我们将通过将第 10.1 节的幂次计数的证明直接应用于有效作用量的计算，证明这组抵消项——在任何可重整化场

论的所有阶下——总是足够的。我们将使用标量场论的语言，但这些证明可以推广到旋量场和矢量场的理论.

首先在一个具有任意数量场ϕ^i的场论下，考虑常数(与x无关)经典场的有效势的计算。有效势的质量量纲为4，所以我们希望$V_{\text{eff}}(\phi_{\text{cl}})$将会有达到$\Lambda^4$的发散项。为理解这些发散， 将$V_{\text{eff}}(\phi_{\text{cl}})$展开为泰勒级数：

$$V_{\text{eff}}(\phi_{\text{cl}}) = A_0 + A_2^{ij}\phi_{\text{cl}}^i\phi_{\text{cl}}^j + A_4^{ijk\ell}\phi_{\text{cl}}^i\phi_{\text{cl}}^j\phi_{\text{cl}}^k\phi_{\text{cl}}^\ell + \cdots.$$

在没有$\phi^i \to -\phi^i$对称性的理论中，也可能存在ϕ^i的线性项和立方项；为了简单起见，我们省略了这些。系数A_0, A_2, A_4的质量量纲分别为$4, 2, 0$；因此，我们期望它们分别包含Λ^4, Λ^2和 $\log\Lambda$的发散。幂次计数的分析预测，泰勒级数展开中的所有更高项都是有限的。常数项A_0独立于ϕ_{cl}；它没有物理意义。然而，A_2, A_4中的发散出现在物理量上，因为这些系数进入了逆传播子(11.90)和不可约四点函数(11.96)，因此它们出现在 S 矩阵元的计算中。通过幂次计数，有效作用量中还有一个系数具有非负的质量量纲；这就是$\partial_\mu\phi_{\text{cl}}^i$的二次项的系数，它出现在我们计算非常数背景场的有效作用量的时候：

$$\Delta\Gamma[\phi_{\text{cl}}] = \int d^4x\, B_2^{ij}\partial_\mu\phi_{\text{cl}}^i\partial^\mu\phi_{\text{cl}}^j. \tag{11.98}$$

通过幂次计数可以知道，在有效作用量的以ϕ_{cl}^i为幂的泰勒展开式中，所有其他的系数都是有限的。

我们现在可以说，原始拉格朗日量的抵消项足以消除在$\Gamma[\phi_{\text{cl}}]$的计算中可能出现的发散。证明分两步进行。首先，我们使用 BPHZ 定理来证明格林函数的发散可以通过调整一组抵消项来消除，而这些抵消项对应于，可以被添加到拉格朗日量中的、系数的质量量纲大于或等于零的可能的算符。这些抵消项的系数与有效作用量的系数A_2, A_4, B_2是一一对应的。接下来，我们利用有效作用量在模型的原始对称性群下是明显不变的这个事实。即使模型的真空态有自发对称性破缺，这也是正确的。有效作用量的这种对称性遵循第 11.4 节的分析，因为我们在那里提出的计算有效作用量的方法明显不改变拉格朗日量的原始对称性。结合这两个结果，我们得出结论：有效作用量总是可以通过调整一组抵消项而变得有限，这些抵消项在理论的原始对称性下是不变的，即使这个对称性是自发破缺的。

通过利用第 11.5 节的结果——其解释了如何从有效作用量的泛函导数出发构造理论的格林函数——这一可重整性的结论扩展到了理论的所有格林函数。

为了使这个抽象的证明更加具体，我们将在一个简单的例子中演示有效作用量的泛函导数如何产生一组费曼图，这些图的发散对应于对称的抵消项。那么，让我们再次回到$O(N)$不变的线性 sigma 模型并计算$\Gamma[\phi_{\rm cl}]$的二阶泛函导数。如果我们所构造的整个形式理论是联系在一起的，那么我们应该能够把结果看作是逆传播子的费曼图展开，其发散对应于$O(N)$对称的标量场论的抵消项。

首先，我们为这个模型显式地写出表达式(11.63)：

$$\Gamma[\phi_{\rm cl}] = \int d^4x \Big(\frac{1}{2}(\partial_\mu^2 \phi^i_{\rm cl})^2 + \frac{1}{2}\mu^2(\phi^i_{\rm cl})^2 - \frac{\lambda}{4}((\phi^i_{\rm cl})^2)^2 + \frac{i}{2}\log\det[-i\mathcal{D}^{ij}] + \cdots \Big), \tag{11.99}$$

where

$$-i\mathcal{D}^{ij} = -\frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta\phi^i \delta\phi^j} = \partial^2 \delta^{ij} + \big(\lambda(\phi^k_{\rm cl}(x))^2 - \mu^2\big)\delta^{ij} + 2\lambda\phi^i_{\rm cl}(x)\phi^j_{\rm cl}(x). \tag{11.100}$$

对于常数$\phi^i_{\rm cl}$，$\mathcal{D}^{ij}$是作用于标量场给定分量的算符，等于 Klein-Gordon 算符，其中质量平方由式(11.69)给出。这是线性 sigma 模型的逆传播子的领头阶近似。

为了找到逆传播子高阶修正，我们必须计算$\Gamma[\phi_{\rm cl}]$中量子修正项的二阶泛函导数。从(11.99)，我们发现

$$\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi^i_{\rm cl}(x)\delta\phi^j_{\rm cl}(y)} = \frac{\delta^2\mathcal{L}}{\delta\phi^i_{\rm cl}(x)\delta\phi^j_{\rm cl}(y)} + \frac{i}{2}\frac{\delta^2}{\delta\phi^i_{\rm cl}(x)\delta\phi^j_{\rm cl}(y)}\log\det[-i\mathcal{D}] + \cdots.$$

第一项仅仅是 Klein-Gordon 算符$i\mathcal{D}^{ij}\delta(x-y)$。要计算第二项，对矩阵行列式使用恒等式(9.77)：

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\log\det M(\alpha) = \frac{\partial}{\partial\alpha}\operatorname{tr}\log M(\alpha) = \operatorname{tr} M^{-1}\frac{\partial M}{\partial\alpha}. \tag{11.101}$$

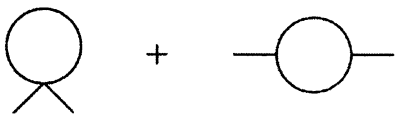
利用这个等式，我们发现

$$\begin{aligned}
&\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta\phi^k_{\rm cl}(z)}\log\det[-i\mathcal{D}] \\
&\qquad = i\operatorname{Tr}\Big[\lambda\Big(\phi^k_{\rm cl}(z)\delta^{ij} + \phi^i_{\rm cl}(z)\delta^{jk} + \phi^j_{\rm cl}(z)\delta^{ik}\Big)(i\mathcal{D}^{-1})^{ij}(z,z)\Big] \\
&\qquad = -\lambda\Big(\phi^k_{\rm cl}(z)\delta^{ij} + \phi^i_{\rm cl}(z)\delta^{jk} + \phi^j_{\rm cl}(z)\delta^{ik}\Big)(\mathcal{D}^{-1})^{ij}(z,z).
\end{aligned} \tag{11.102}$$

量是$(\mathcal{D}^{-1})^{ij}(x,y)$Klein-Gordon 传播子。为了求第二次导，我们可以用恒等式(11.94)；这产生了

$$\begin{aligned}
&\frac{i}{2}\frac{\delta^2}{\delta\phi^k_{\mathrm{cl}}(z)\delta\phi^\ell_{\mathrm{cl}}(w)}\log\det[-i\mathcal{D}] \\
&\quad=-\lambda(\delta^{k\ell}\delta^{ij}+\delta^{ik}\delta^{j\ell}+\delta^{i\ell}\delta^{jk})(\mathcal{D}^{-1})^{ij}(z,z)\delta(z-w) \\
&\qquad+2i\lambda^2(\phi^k_{\mathrm{cl}}(z)\delta^{ij}+\phi^i_{\mathrm{cl}}(z)\delta^{jk}+\phi^j_{\mathrm{cl}}(z)\delta^{ik})(\mathcal{D}^{-1})^{im}(z,w) \\
&\qquad\cdot(\phi^\ell_{\mathrm{cl}}(z)\delta^{mn}+\phi^m_{\mathrm{cl}}(z)\delta^{n\ell}+\phi^n_{\mathrm{cl}}(z)\delta^{m\ell})(\mathcal{D}^{-1})^{nj}(w,z). \quad (11.103)
\end{aligned}$$

这被期待为逆传播子在单圈阶上的正式修正，实际上我们可以在(11.103)中识别出以下的单圈图的值



注意，在这个推导中，$\mathcal{D}^{-1}$上的每一阶泛函导数都向图中添加了另一个传播子，从而降低了发散度，这与我们在第 10.1 节中的一般证明一致。

这个例子说明了$\Gamma[\phi_{\mathrm{cl}}]$的连续泛函导数是由费曼图的展开来计算的，其中的传播子和顶点依赖于经典场。当经典场为一个常数时，传播子简化为普通的Klein-Gordon传播子，从而BPHZ定理得以应用。通过使用最一般的一组质量、顶点和场强重整化，由求导$\Gamma[\phi_{\mathrm{cl}}]$而得到的所有振幅的所有的紫外发散都可以被移除。与此同时，微扰论在原始拉格朗日量的对称性下是明显不变的，所以出现的唯一发散——因此，需要的唯一抵消项——都是那些遵从这种对称性的。于是，一般来说，在对称性群下不变的可重整化的标量场论的所有振幅都可以被变为有限，只要使用一组在对称下不变的抵消项。这为11.2节开头提出的问题给出了一个完整且相当令人满意的答案。

我们还没有在BPHZ定理的证明的严格程度上，对空间变化背景场下有效作用量的计算进行分析。然而，预期在这种情况下，对称性理论的一组标准的抵消项也是应该足够了。我们可以利用费曼图的紫外发散是局域在时空的这一事实，直观地论证这一点。因此，在ϕ_{cl}是平滑地变化的背景下，要理解一个计算中的发散，我们将时空划分为小箱子，在每个小箱子中$\phi_{\mathrm{cl}}(x)$近似是常数，并以导数$\partial_\mu\phi_{\mathrm{cl}}(x)$作展开。在以$\partial_\mu\phi_{\mathrm{cl}}(x)$为幂的这个展开中，泰勒级数的系数是在常数背景下的$\Gamma$的泛函导数，我们知道这可以被重整。这个直观证明的结论已经对一些非

平凡背景场位形在双圈水平上进行了检查。

我们关于具有自发破缺对称性的理论的重整化的一般结果，对这些理论的物理预测具有重要的意义。在可重整化场论中，理论的最基本量不能被预测，因为它们是那些必须作为理论定义的一部分而被指定的量。例如，在QED中，为了定义理论，电子的质量和电荷必须从外部进行调整。QED预测的是一些没有出现在基本拉格朗日量中的量，例如电子的异常磁矩。然而，在具有自发破缺对称性的可重整化理论中，对称性的破缺会产生大量不同的质量和耦合，它们依赖于原始对称理论中数目相对较少的参数。在固定了理论的原始参数后，就可以清楚地预测理论任何附加的可观测量。例如，在本章研究的线性 sigma 模型中，我们取四点耦合λ的值和真空期望值$\langle\phi\rangle$作为输入参数；然后我们用这些参数以一种明确的方式计算了σ粒子的质量。

有一个一般的证明意味着，一旦我们确定了拉格朗日量的参数，我们就必须为ϕ^4理论中σ的质量寻找一个明确且有限的公式，或者更普遍地说，为可重整量子场论的任何附加参数都要寻找。一般来说，这个参数在经典水平上将被用拉格朗日量中的耦合来确定。对线性 sigma 模型中σ质量的例子，这个经典关系是

$$m - \sqrt{2}\lambda \langle\phi\rangle = 0, \tag{11.104}$$

其中m是σ的质量，λ给出了四ϕ在阈值的散射振幅。一般来说，圈修正会修正这个关系，在这个等式的右边贡献一些非零的表达式。然而，由于无论拉格朗日量的参数如何修改，式(11.104)在经典水平上都是有效的，当我们向拉格朗日量添加抵消项，然后逐阶调整这些抵消项时，它同样很好地适用。因此，抵消项必须对式(11.104)的右边没有贡献。因此，对式(11.104)的微扰修正必须自动地是紫外有限的。这种类型的关系，在经典水平上对拉格朗日量中所有耦合值都成立，但被圈效应修正，称为**零阶自然关系**。我们给出的论证表明，对于任何这样的关系，圈修正都是有限的，并构成了量子场论的预测。我们将在问题 11.2 中看到这种关系的另一个例子。

Goldstone定理重新审视

作为有效作用量的形式理论的最后一个应用，让我们回到问题，即Goldstone定理在量子修正存在时是否有效。回想一下，我们在第11.1节末尾的经典水平上证明了这个定理：我们在(11.13)中表明，如果拉格朗日量具有自发破缺的连续对称性，那么经典势$V(\phi)$的二阶导数矩阵具有相应的零本征值。根据式(11.11)，这意味着经典理论包含一个无质量标量粒子，与自发破缺对称性有关。

在完全量子场论中，利用有效作用量形式理论，这一证明几乎可以被最逐字逐句地重复。有效势$V_{\text{eff}}(\phi_{\text{cl}})$封装了理论的完整解，包括所有阶的量子修正。同时，它满足经典势的一般性质：它在理论的对称性不变，它的最小值给出了ϕ的真空期望值。这意味着，对于V_{eff}，我们在(11.13)给的证明也以完全相同的方式工作，和对V一样：如果原始拉格朗日量的连续性对称由$\langle\phi\rangle$导致了自发破缺，$V_{\text{eff}}(\phi_{\text{cl}})$的二阶导数的矩阵沿着对称方向有一个零本征值。

我们现在认为，就像在经典水平上一样，这种零本征值的存在意味着无质量标量粒子的存在。在讨论有效作用量的一般性质时，我们证明了它的二阶泛函导数是逆传播子，通过式(11.97)，这个导数得到了量子理论中的质量谱。对于一个包含多个标量场的理论，我们重写式(11.97)：

$$\int d^4x\, e^{-ip\cdot(x-y)} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi^i\delta\phi^j}(x,y) = 0. \tag{11.105}$$

一个质量为m的粒子对应于这个矩阵方程在$p^2 = m^2$处的零本征值。现在设置$p = 0$。这意味着我们取$\Gamma[\phi_{\text{cl}}]$对常数场的导数。因此，我们可以将$\Gamma[\phi_{\text{cl}}]$代替为它在常数经典场下的值，这就是有效势。我们发现，当如下的二阶求导矩阵

$$\frac{\partial^2 V_{\text{eff}}}{\partial\phi^i_{\text{cl}}\partial\phi^j_{\text{cl}}},$$

有一个零本征值时，量子场论包含一个质量为零的标量粒子。这就完成了Goldstone定理的证明。

Goldstone定理的论证说明了有效作用量形式理论的力量。这种形式理论给出了一种自发对称性破缺的几何图像，它适用于量子修正中的任何阶。作为额外的好处，构成它的对象可以以简单的方式重整化。这种形式理论将被证明有助于理解自发破破缺对称性的应用，它们发生在本书其余部分的几个不同内容中。

Chapter12

重整化群

在过去的两章中，我们的主要目标是确定量子场论中紫外发散的消除是何时以及如何发生的。我们已经看到，在一大类的场论中，发散只出现在几个参数值上：裸的质量和耦合常数，或者重整化微扰论中的抵消项。除了这些参数的移动，携带大动量的虚粒子对这些理论的计算没有影响。

如果一个理论要产生定量的物理预测，消除紫外发散是至关重要的。但是，在更深的层次上，高动量虚量子对理论的影响如此之小的事实是相当令人惊讶的。量子场论的一个基本特征是局域性，即不同时空点上的场具有独立的自由度和独立的量子涨落。在任意短距离处的量子涨落在费曼图计算中表现为具有任意高动量的虚量子。在可重整的理论中，虚粒子动量上的圈积分总是由与外部粒子有限动量大小相当的值所主导。但是为什么呢？很难理解与极短距离相关的量子涨落怎么会如此无害，以至于仅通过它的几个参数值就能影响理论。

本章以一幅 Kenneth-Wilson 的物理图像开始，它解释了这种不寻常且违反直觉的简化。这幅图像推广了第 7 章末尾介绍的电荷依赖于距离或标度的概念，并建议，一个可重整的场论的所有参数都可以被有效地看作是依赖于标度(scale)的实体。我们将看到这种标度依赖性是由简单的微分方程描述的，称为**重整化群**方程。这些方程的解将导致全新类型的物理预测：它预测，在特定情况下，量子场的关联函数作为它们的坐标的函数，将表现出不寻常但可计算的标度律。

12.1 重整化理论的 Wilson 方法

Wilson 的方法基于场论的泛函积分法，其中量子场的自由度是积分变量。在这种方法中，我们可通过将泛函积分对场的短距离自由度的依赖性分离出来，以研究紫外发散的起源*。在本节，我们将用ϕ^4理论中最简单的例子来说明这个概念。

为了使我们的分析更加具体，我们将在本节中放弃优雅但有些神秘的维数正规化方法，而是使用一个尖锐的动量截断。因为我们将只在ϕ^4理论中工作，所以我们不会担心这种截断会导致难以满足 Ward 恒等式。Wilson 的分析还可以适用于QED和其他情况，在这些情况下这个微妙之处是很重要的，但ϕ^4理论的情况足以给出我们这种方法的基本的定性结果。

在 9.2 节，我们根据生成泛函$Z[J]$的泛函积分表示，构造了ϕ^4理论的格林函数。基本积分变量是场的傅里叶分量$\phi(k)$，因此$Z[J]$被具体地给出为表达式

$$Z[J]=\int \mathcal{D}\phi\, e^{i\int[\mathcal{L}+J\phi]}=\left(\prod_k \int d\phi(k)\right) e^{i\int[\mathcal{L}+J\phi]}. \tag{12.1}$$

为了施加一个尖锐的紫外截断Λ，我们限制了(12.1)显示的积分变量的数量。即，我们只在$|k|\leq\Lambda$时对$\phi(k)$积分，并在$|k|>\Lambda$时设置$\phi(k)=0$。

这种对泛函积分的修改提出了一种方法来对非常短距离或非常大动量处的量子涨落的影响进行估计。在泛函积分表示中，这些涨落是由动量在截断值附近的ϕ的傅里叶分量的积分来表示的。为什么不显式地对这些变量执行积分呢?然后我们可以将结果与原始的泛函积分进行比较，并精确地确定这些高动量模式对理论的物理预测的影响。

然而在开始分析之前，我们必须引入一个修改。乍一看， 在Minkowski空间下定义紫外截断似乎是最自然的。然而，截断$k^2\leq\Lambda^2$并不能完全有效地控制大动量，因为在类光的方向上，k的分量可以非常大而k^2仍然很小。因此，我们将考虑截断是施加在Wick旋转后得到的欧几里得动量上的。同样地，我们考虑的是9.3节给出的泛函积分的欧几里得形式，并将其变量$\phi(k)$(其中k为欧几里得的)限制为$|k|\leq\Lambda$。

---

*Wilson 的思想在 K. G. Wilson and J. Kogut, *Phys. Repts.* **12C**, 75(1974)中进行了综述

向欧几里得空间的过渡也使我们更接近第 8 章所述的重整化理论和统计力学之间的联系。正如我们在 9.3 节中看到的，ϕ^4理论的欧几里得泛函积分形式与磁体统计力学的连续描述形式完全相同。场$\phi(x)$被解释为涨落自旋场$s(x)$。真正的磁铁是由原子构成的，原子间距提供了一个物理截断，即涨落能够发生的最短距离。这个截断泛函积分以一种粗略的方式模拟了这个原子大小的效应。

通过执行这个类比，我们可以得到一些关于场论中紫外截断效应的物理直觉。在磁铁中，在原子尺度上很容易看到自旋的统计涨落。事实上，对于远离临界点的温度值，统计涨落被限制在这个尺度；在超过数十个原子间距的距离上，磁体已经表现出其均匀的宏观行为。我们在第 8 章已经看到，我们可以将自旋场的关联函数近似为欧几里得ϕ^4理论的传播子。在这种近似下，

$$\langle s(x)s(0)\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{ik\cdot x}}{k^2+m^2} \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4\pi^2|x|^2}e^{-m|x|}. \tag{12.2}$$

只要温度远离临界温度，“质量”m的大小就取决于问题中的一个自然的尺度，即原子间距。因此，我们期望$m \approx \Lambda$。在我们的场论计算中，我们对$m \ll \Lambda$的情况特别感兴趣，我们调整了理论的参数来满足这个条件。在描述磁铁时，似乎没有必要进行这种调整。

然而，我们在第八章中看到，有一个情况是自旋场的关联性比原子间距长得多，即，事实上，$m \ll \Lambda$。当自旋系统刚好在临界点附近并开始磁化时，涨落的自旋尝试选择最终的磁化方向，这时自旋在任意长的距离下变得关联起来。要研究磁体中的这些长程关联性，必须小心地调整温度，使系统接近相变。同样地，我们可以想象对ϕ^4理论的参数m做一个精细的调整，从而将量子场论带到一个参数区域，在那里我们确实发现场$\phi(x)$的关联性在距离上远大于$1/\Lambda$。

对单个动量壳进行积分

有了这个介绍，我们现在将对ϕ的高动量自由度进行积分。我们首先将泛函积分(12.1)在ϕ^4理论情况下更明确地写出来。我们应用之前描述的截断方案，并且为简便起见设置$J=0$。于是

$$Z = \int [\mathcal{D}\phi]_\Lambda \, \exp\Big(-\int d^dx \Big[\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4\Big]\Big), \tag{12.3}$$

where

$$[\mathcal{D}\phi]_\Lambda = \prod_{|k|<\Lambda} d\phi(k). \tag{12.4}$$

在拉格朗日量(12.3)式中，m和λ是裸参数，所以没有抵消项。就像我们研究表观发散度一样，在任意时空维度d中进行这种分析将是有用的。

我们现在把积分变量$\phi(k)$分成两组。选择一个分数$b < 1$。$b\Lambda \le |k| < \Lambda$的变量$\phi(k)$是我们要积分的高动量自由度。为了标记这些自由度，让我们定义

$$\hat{\phi}(k) = \begin{cases} \phi(k) & \text{for } b\Lambda \le |k| < \Lambda; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

接下来，让我们定义一个新的$\phi(k)$，它在$|k| < b\Lambda$下和旧的相同，而在$|k| > b\Lambda$下等于零。然后我们可以用$\phi + \hat{\phi}$取代拉格朗日量中旧的ϕ，并重写(12.3)式为

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\hat{\phi} \, \exp\Big(-\int d^dx \Big[\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi + \partial_\mu\hat{\phi})^2 + \frac{1}{2}m^2(\phi+\hat{\phi})^2 + \frac{\lambda}{4!}(\phi+\hat{\phi})^4\Big]\Big) \\ &= \int \mathcal{D}\phi \, e^{-\int \mathcal{L}(\phi)} \int \mathcal{D}\hat{\phi} \, \exp\Big(-\int d^dx \Big[\frac{1}{2}(\partial_\mu\hat{\phi})^2 + \frac{1}{2}m^2\hat{\phi}^2 \\ &\qquad + \lambda\Big(\frac{1}{6}\phi^3\hat{\phi} + \frac{1}{4}\phi^2\hat{\phi}^2 + \frac{1}{6}\phi\hat{\phi}^3 + \frac{1}{4!}\hat{\phi}^4\Big)\Big]\Big). \end{aligned} \tag{12.5}$$

在最后表达式我们将所有与$\hat{\phi}$无关的项收集到$\mathcal{L}(\phi)$。注意形式为$\phi\hat{\phi}$的二次项消失了，因为不同波长的傅里叶分量是正交的。

接下来的几个段落将解释如何执行$\hat{\phi}$积分，这种积分将(12.5)转换成如下形式的一个表达式

$$Z = \int [\mathcal{D}\phi]_{b\Lambda} \, \exp\Big(-\int d^dx \, \mathcal{L}_{\text{eff}}\Big), \tag{12.6}$$

其中$\mathcal{L}_{\text{eff}}(\phi)$只包含$|k| < b\Lambda$的傅里叶分量$\phi(k)$，我们会看到$\mathcal{L}_{\text{eff}}(\phi) = \mathcal{L}(\phi) + ($一些正比于$\lambda$的幂的修正)。这些修正项对大$k$的傅里叶分量$\hat{\phi}$的移除进行了补偿，通过在剩余$\phi(k)$之间提供相互作用(在这之前由$\hat{\phi}$的涨落作为媒介传导)。

为了执行$\hat{\phi}(k)$积分，我们使用 9.2 节推导费曼规则时应用的相同方法。事实上，我们将在下面看到$\mathcal{L}_{\text{eff}}$中的新项可以被写为图的形式。在这个分析中，我们

把(12.5)中的四次项(全都正比于λ)当作微扰。因为我们主要关心$m^2 \ll \Lambda^2$的情况，也将质量项$\frac{1}{2}m^2\hat{\phi}^2$作为微扰。则包含$\hat{\phi}$的那部分拉格朗日量的领头项为

$$\int \mathcal{L}_0 = \int\limits_{b\Lambda \le |k| < \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\, \hat{\phi}^*(k) k^2 \hat{\phi}(k). \tag{12.7}$$

这一项导致一个传播子

$$\overbrace{\hat{\phi}(k)\hat{\phi}(p)} = \frac{\int \mathcal{D}\hat{\phi}\, e^{-\int \mathcal{L}_0} \hat{\phi}(k)\hat{\phi}(p)}{\int \mathcal{D}\hat{\phi}\, e^{-\int \mathcal{L}_0}} = \frac{1}{k^2}(2\pi)^d \delta^{(d)}(k+p)\Theta(k), \tag{12.8}$$

where

$$\Theta(k) = \begin{cases} 1 & \text{if } b\Lambda \le |k| < \Lambda; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{12.9}$$

我们将把式(12.5)中的其余$\hat{\phi}$项作为微扰，并展开指数。将(12.8)作为传播子并利用 Wick 定理，可以计算出这些微扰的各种贡献。

首先考虑由(12.5)的指数展开到$\phi^2\hat{\phi}^2$项的一次幂而得到的项。我们发现

$$-\int d^d x\, \frac{\lambda}{4}\phi^2 \overbrace{\hat{\phi}\hat{\phi}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d}\, \mu\, \phi(k_1)\phi(-k_1), \tag{12.10}$$

其中系数μ为将两个$\hat{\phi}$场缩并的结果：

$$\mu = \frac{\lambda}{2} \int\limits_{b\Lambda \le |k| < \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2} = \frac{\lambda}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(\frac{d}{2})} \frac{1 - b^{d-2}}{d-2} \Lambda^{d-2}. \tag{12.11}$$

(12.10)项也可以来源于如下指数的展开

$$\exp\Big(-\int d^d x\, \frac{1}{2}\mu\phi^2 + \cdots\Big). \tag{12.12}$$

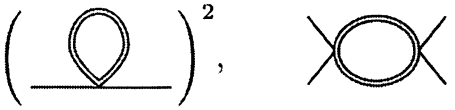
我们很快就会看到，微扰级数的其余部分也将它们自己组织成这种形式。因此系数μ对$\mathcal{L}$中的m^2项给出了正的修正。

修正项中的微扰论更高阶可以用类似的方法求出。在我们推导ϕ^4理论的标准微扰论时，采用图解表示是有用的。用双线表示传播子(12.8)。这个传播子将会把不同的四次相互作用中的$\hat{\phi}$场成对地连接起来。将这些相互作用中未被积分的

场ϕ表示为单外线。于是，例如，(12.10)的贡献对应如下图：



在λ^2阶，除了其他贡献外，我们还将有一些项，包含了两个相互作用项$\lambda\phi^2\hat{\phi}^2$的收缩。每一项对应一个连接了两条单线和两条双线的顶点。有两种可能的收缩：



(12.13)

其中，第一个图是一个不连通图，它提供了指数(12.12)中的λ^2阶项。第二个图是一个新的贡献，它将成为对$\mathcal{L}(\phi)$中ϕ^4相互作用的修正。

现在让我们计算这第二个贡献。为简便起见，我们考虑了因子ϕ所携带的外部动量与$b\Lambda$相比非常小的极限，因此我们可以忽略它们。那么这个图的值为

$$-\frac{1}{4!}\int d^dx\,\zeta\,\phi^4, \tag{12.14}$$

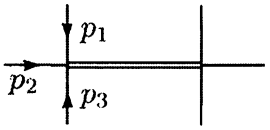
where

$$\zeta = -4!\frac{2}{2!}\Big(\frac{\lambda}{4}\Big)^2 \int\limits_{b\Lambda\le|k|<\Lambda} \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\Big(\frac{1}{k^2}\Big)^2 = \frac{-3\lambda^2}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(\frac{d}{2})}\frac{(1-b^{d-4})}{d-4}\Lambda^{d-4}$$

$$\xrightarrow[d\to 4]{} -\frac{3\lambda^2}{16\pi^2}\log\frac{1}{b}. \tag{12.15}$$

分子中的2表示两种可能的收缩；没有来自于对外腿或顶点计数的额外组合因子。在10.2节ϕ^4理论的分析中，我们遇到了一个类似的图，对动量从0到Λ的范围内积分，产生对数的紫外发散。在 Wilson 的处理中，这种发散并不是一种异常，而仅仅是一个信号，表明图正在接受来自所有动量标度的贡献。事实上，它从动量标度m到Λ之间的每个对数区间得到了相等的贡献。下面我们将看到，由每个动量区间得到的对该图的(有限)贡献具有自然的物理重要性。

我们所描述的图解微扰论不仅产生了正比于ϕ^2和ϕ^4的贡献，还产生了ϕ更高幂次的贡献。例如，下图产生了一个ϕ^6相互作用的贡献：



$$\propto \frac{\lambda^2}{(p_1+p_2+p_3)^2}\Theta(p_1+p_2+p_3). \tag{12.16}$$

当我们不再忽略图的外动量时，还会有导数相互作用。一个更精确的处理是对这些动量泰勒展开；例如，除了表达式(12.14)，我们还可以得到带有一些外动量二次方的项，我们可以重写为

$$-\frac{1}{4}\int d^dx\,\eta\,\phi^2(\partial_\mu\phi)^2. \tag{12.17}$$

我们还可以找到ϕ携带动量的四次方，六次方，以及更多次方的项。一般来说，对$\hat{\phi}$积分的过程会产生场ϕ及其导数之间所有可能的相互作用。

图修正可以被稍微地简化，即将它重求和为指数形式。我们已经在(12.13)中看到，我们的图展开产生了不连通图。根据我们在式(4.52)使用过的相同的组合学论证，我们可以将级数的和重写为连通图的和的指数。这精确地导致了表达式(12.6)，其中

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2+\frac{1}{2}m^2\phi^2+\frac{1}{4!}\lambda\phi^4+(\text{sum of connected diagrams}). \tag{12.18}$$

图的贡献包括了对m^2和λ，以及所有可能的更高维算符的修正。我们现在可以使用新的拉格朗日量$\mathcal{L}_{\text{eff}}(\phi)$来计算$\phi(k)$的关联函数，或计算$S$矩阵元。由于$\phi(k)$包含的动量只到$b\Lambda$，圈图在这样的计算中只会被积分到这个更低的截断处。(12.18)中的修正项精确地补偿了这一改变。

人们很可能会对公式(12.18)中更高维算符的出现感到困惑。我们选择ϕ^4理论的原始拉格朗日量只包含可重整的相互作用。乍一看，当我们对变量$\hat{\phi}$进行积分时，所有可能的不可重整相互作用都出现了，这令人不安。但是，我们将在下面看到，我们的过程实际上控制住了这些不可重整相互作用的贡献。事实上。我们的分析将意味着，原始拉格朗日量中不可重整相互作用的存在，是被定义为在非常大的截断Λ下使用的，而在比Λ小得多的标度上其物理效应可以忽略不计。

重整化群流

现在让我们更仔细地比较新的泛函积分(12.6)和我们开头的泛函积分(12.3)。最方便的方法是将(12.6)的距离和动量重标度

$$k'=k/b,\qquad x'=xb, \tag{12.19}$$

因此，变量k'在$|k'|<\Lambda$上被积分。让我们按照图来示意地将(12.18)的显式形式

表达为

$$\int d^d x\, \mathcal{L}_{\text{eff}} = \int d^d x \left[\frac{1}{2}(1+\Delta Z)(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}(m^2+\Delta m^2)\phi^2 + \frac{1}{4}(\lambda+\Delta\lambda)\phi^4 + \Delta C(\partial_\mu\phi)^4 + \Delta D\phi^6 + \cdots \right]. \tag{12.20}$$

使用重标度的变量x'，它变成

$$\int d^d x\, \mathcal{L}_{\text{eff}} = \int d^d x'\, b^{-d} \left[\frac{1}{2}(1+\Delta Z)b^2(\partial'_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}(m^2+\Delta m^2)\phi^2 + \frac{1}{4}(\lambda+\Delta\lambda)\phi^4 + \Delta C b^4(\partial'_\mu\phi)^4 + \Delta D\phi^6 + \cdots \right]. \tag{12.21}$$

在整个分析中，我们都把第一项以外的所有项都看作小微扰。只要原来的耦合很小，这在处理(12.21)时仍然是一个有效的近似。

原始的泛函积分得到传播子(12.8)。新作用量(12.21)也将产生完全相同的传播子，如果我们将场ϕ重标度：

$$\phi' = \left[b^{2-d}(1+\Delta Z) \right]^{1/2} \phi. \tag{12.22}$$

重新标度后，非微扰的作用量回到它的初始形式，而各种微扰经历了变换：

$$\int d^d x\, \mathcal{L}_{\text{eff}} = \int d^d x' \left[\frac{1}{2}(\partial'_\mu \phi')^2 + \frac{1}{2} m'^2 \phi'^2 + \frac{1}{4}\lambda' \phi'^4 + C'(\partial'_\mu \phi')^4 + D'\phi'^6 + \cdots \right]. \tag{12.23}$$

拉格朗日量的新参数是

$$\begin{aligned} m'^2 &= (m^2+\Delta m^2)(1+\Delta Z)^{-1} b^{-2}, \\ \lambda' &= (\lambda+\Delta\lambda)(1+\Delta Z)^{-2} b^{d-4}, \\ C' &= (C+\Delta C)(1+\Delta Z)^{-2} b^{d}, \\ D' &= (D+\Delta D)(1+\Delta Z)^{-3} b^{2d-6}, \end{aligned} \tag{12.24}$$

等等(原始的拉格朗日量有$C = D = 0$，但如果C和D的初值不为零，同样的方程也适用)。所有的修正，如$\Delta m^2, \Delta\lambda$，等等，都来自于图并且相比领头项会非常小，如果微扰论是合理的话。

通过将高动量自由度的积分操作与重标度(12.19)结合起来，我们已经把这个操作重写为拉格朗日量的变换。继续这个过程，我们可以对另一个动量空间壳层进行积分并进一步变换拉格朗日量。连续的积分产生了变换(12.24)的进一步迭代。

如果我们取参数b接近于1，使得动量空间壳层无限薄，那么这个变换就变成连续的。于是，我们可以把对场论的高动量自由度的积分结果描述为在所有可能拉格朗日量空间中的一个轨迹或一个流(flow)。

由于历史原因，拉格朗日量的这些连续生成变换被称为**重整化群**。它们没有在正式的意义上构成群，因为对自由度积分的操作是不可逆的。另一方面，它们肯定与重整化有联系，我们现在就会看到。

假设我们要计算场的关联函数，该场的动量p_i比Λ小得多。我们可以微扰地计算这个关联函数，用原始拉格朗日量函数$\mathcal{L}$，或者用有效拉格朗日量函数$\mathcal{L}_{\text{eff}}$(将所有动量壳往下积分到外动量p_i的标度后得到)。这两个过程最终必须产生相同的结果。但在第一种情况下，在我们计算圈图之前，场的高动量涨落效应都不会显现出来。在第二种情况下，这些效应已经被吸收到新的耦合常数中(m', λ'等)，所以它们的影响可以直接从拉格朗日量中看出。在第一个过程中，原始(裸)参数与适用于低动量过程的值之间的大移动，在单圈图中突然出现，并且似乎使微扰论的使用失效(见 7.27 及讨论)。第二种方法中，这些修正被缓慢而系统地引入。只要有效耦合常数(如λ')保持较小，微扰处理在每一步都是有效的。

然而，有效拉格朗日量的参数可能与原始拉格朗日量的参数非常不同，因为我们必须将变换(12.24)多次迭代，才能从大动量Λ达到典型实验的动量标度。因此，让我们更仔细地看看拉格朗日量在重整化群变换下是如何变化的。

最简单的情况是考虑在点$m^2 = \lambda = C = D = \cdots = 0$附近的拉格朗日量，此时所有的微扰都消失了。我们已经定义了我们的变换，它使得这个点保持不变；我们说自由场拉格朗日量

$$\mathcal{L}_0 = \tfrac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 \tag{12.25}$$

是重整化群变换的一个**不动点**(fixed point)。

在$\mathcal{L}_0$附近，我们可以忽略迭代方程(12.24)中的$\Delta m^2, \Delta\lambda$等项，只保留那些在微扰中是线性的项。这给出了一个特别简单的变换律：

$$m'^2 = m^2 b^{-2}, \quad \lambda' = \lambda b^{d-4}, \quad C' = C b^d, \quad D' = D b^{2d-6}, \quad \text{etc.} \tag{12.26}$$

因为$b < 1$，那些乘以b的负幂次的参数增大了，而那些乘以b的正幂次的参数会减小。如果拉格朗日量包含不断增大的系数，这些系数最终会将它带离$\mathcal{L}_0$。

传统上把有效拉格朗日量中的各种项称为一组局域算符，它们可以作为微扰被添加到$\mathcal{L}_0$中。我们将在递归过程中系数增大的算符称为**相关**(relevant)算符。而系数逐渐减小的被称为**无关**(irrelevant)算符。例如，标量场质量算符ϕ^2总是相关的，而ϕ^4算符在$d<4$时是相关的。如果某个算符的系数乘以b^0(例如$d=4$中的ϕ^4算符)，我们称这个算符为**边缘的**(marginal)；为了找出它的系数是增大还是减小，我们必须考虑更高阶的修正效应。

一般来说，一个带有ϕ的N次幂和M阶导数的算符，其系数变换为

$$C'_{N,M}=b^{N(d/2-1)+M-d}C_{N,M}. \tag{12.27}$$

注意系数仅仅是$(d_{N,M}-d)$，其中$d_{N,M}$是第10.1节末尾计算的算符的质量量纲。换句话说，自由理论$\mathcal{L}_0$的相关算符和边缘算符与 10.1 节幂次计算分析中的超可重整化和可重整化相互作用项是精确对应的。

我们也可以用简单的量纲分析来理解自由场不动点附近的系数演化。质量量纲为d_i的算符，其系数具有量纲$\left(\text{质量}\right)^{d-d_i}$。这个质量的自然的数量级是截断$\Lambda$。因此，如果$d_i<d$，在低动量时微扰会变得越来越重要。另一方面，如果$d_i>d$，这一项的相对大小在动量$p\to 0$时就像$(p/\Lambda)^{d_i-d}$一样减小；因此这个项实际是无关的。

我们现在已经证明，一个在截断的标度下是任意复杂的拉格朗日量，至少在零耦合不动点附近，会退化为一个仅包含有限数量的可重整相互作用的拉格朗日量。将这一结果与第 10 章的结论进行比较是具有指导性意义的。在那里，我们采用了一种哲学，即通过尽可能快地取极限$\Lambda\to\infty$来处理截断Λ。我们发现，只有当拉格朗日量不包含具有负质量量纲的参数时，这个极限才能给出明确的预测。从这个观点来看，QED(例如)没有包含这样的参数，这似乎是非常幸运的，否则这个理论将不会产生定义良好(well-defined)的预测。

Wilson 的分析持刚好相反的观点，即任何量子场论都是使用一个具有某些物理意义的截断Λ来从根本上定义的。在统计力学应用中，动量标度是原子间距的倒数。在QED和其他适用于基本粒子物理学的量子场论中，截断必须与时空的某些基本颗粒性有关，可能是引力下量子涨落的结果。我们在结尾处讨论了关

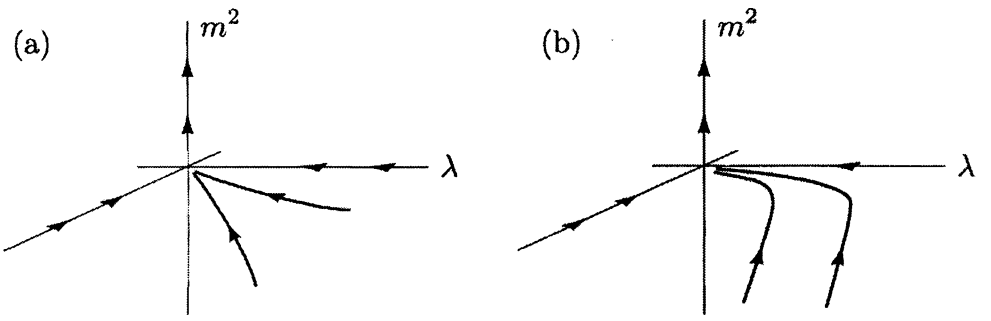


图 12.1 标量场论在自由场不动点附近的重整化群流：(a) $d > 4$；(b) $d = 4$。

于这个截断的本质的一些猜测。但无论这个标度是什么，它都远远超出了当今实验的范围。我们刚才给出的论证表明，这个情况**解释**了QED和粒子相互作用的其他量子场论的重整性。无论QED的拉格朗日量在它的基本标度上是什么，只要它的耦合足够弱，它就必须能够在我们实验的能量下被一个可重整的有效拉格朗日量所描述。

另一方面，我们应该强调，这些简单的结论可以被足够强的场论相互作用所改变。远离自由场不动点时，简单变换律(12.26)接受的修正正比于耦合常数的更高次幂。如果这些修正足够大，它们可以停止或逆转重整化群流。他们甚至可以创造新的不动点，这个点将给出新类型的$\Lambda \to \infty$极限。

为了在一个相对简单的背景下说明相互作用的可能影响，让我们在ϕ^4理论的特殊情况下讨论$\mathcal{L}_0$附近的重整化群流。依次考虑$d > 4$、$d = 4$和$d < 4$这三种情况是有指导意义的。当$d > 4$时，唯一的相关算符是标量场质量项。然后$\mathcal{L}_0$附近的重整化群流的形式如图12.1(a)所示。ϕ^4相互作用和可能的高阶相互作用渐渐消失，而质量项的重要性在增加。

在前几章中，我们一直在质量相对于截断较小的极限下讨论ϕ^4理论。让我们花点时间用重整化群流的语言重写这个条件。在流的过程中，有效质量项m'^2变大并最终等于当前截断。例如，在自由场不动点附近，经过n次迭代，$m'^2 = m^2 b^{-2n}$，最终有一个n使得$m'^2 \sim \Lambda^2$。在这个点，我们已经对原始Λ和标量场有效质量之间整个动量区域进行了积分。于是质量项抑制了剩余的量子涨落。一般来说，标量场质量相对于截断较小的判据，等价于声明：只有经过了重整化群变换的大量迭代后，有$m'^2 \sim \Lambda^2$。

无论怎样，只要重整化群流的初始条件能被调整到使得轨迹非常接近不动点，这个判据就可以满足。原则上，流可以从很远的地方开始，沿着一个无关算符的方向。m^2的原始值不必特别小，只要这个原始值被贡献于$\mathcal{L}_{\text{eff}}$的图所产生的修正所消去。因此我们可以想象，通过写下一个复杂的非线性拉格朗日量，可以在$d > 4$下构造一个标量场论，但调整原始的m^2，使得从这个拉格朗日量开始的轨迹最终会接近自由场不动点$\mathcal{L}_0$。在这种情况下，在相对于截断很小的动量下的有效理论应该极其简单：这将是一个自由场论，其非线性相互作用可以忽略不计。和在下一章将讨论的一样，这一显著的预测已在大于四维的磁体系统的数学模型中得到验证：即使原始模型是高度非线性的，在相变附近的自旋关联函数也具有自由场形式——由式(12.2)的高维类比给出。

接下来考虑$d = 4$的情况。在这种情况下，式(12.26)没有给出足够的信息来告诉我们ϕ^4相互作用在长距离上是重要的还是不重要的。所以我们必须回到完整的变换律(12.24)。式(12.15)给出了对$\Delta\lambda$的领头贡献。对ΔZ的领头贡献为λ^2阶，可以忽略不计(这正是 10.2 节中δ_Z的第一个修正)。这样我们就得到了变换

$$\lambda' = \lambda - \frac{3\lambda^2}{16\pi^2}\log(1/b). \tag{12.28}$$

这说明当我们对高动量的自由度积分时λ慢慢减小。

对$\Delta\lambda$有贡献的图与10.2节中计算的单圈图具有相同的结构。实际上，这些图本质上是相同的，不同的地方只在于积分是迭代执行还是全部一起执行的。然而，尽管10.2节的图有紫外发散，但Wilson方法对应的图却定义良好，并给出了耦合常数的简单演化方程的系数。这个变换给出了我们要在本章重新解释的紫外发散的第一个例子。

变换律(12.28)意味着$\mathcal{L}_0$附近的重整化群流的形式如图 12.1(b)所示，有一个缓慢衰减的方向。如果我们沿着流走得足够远，其行为就应该再次是自由场的行为。这幅图像有一个令人费解的含义，即四维相互作用ϕ^4理论在截断趋于无穷大的极限中不存在。我们将在第 12.3 节中进一步讨论这个结果，并解释为什么使用ϕ^4理论作为模型场论是有意义的。

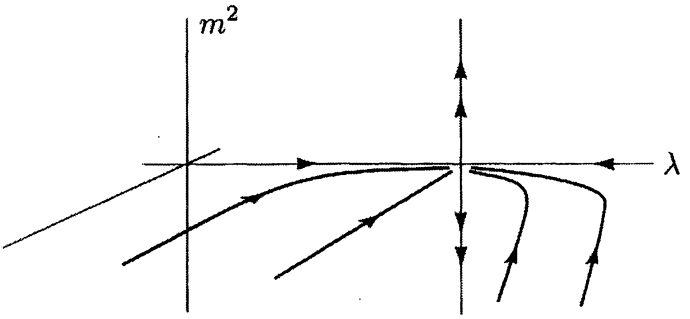


图 12.2 在标量场论中在自由场不动点附近的重整化群流: $d < 4$。

最后考虑情形$d < 4$。现在λ变成了一个相关参数。因此，当我们把自由度积分时，这个理论就流得远离了自由理论$\mathcal{L}_0$；在长距离，ϕ^4相互作用变得越来越重要。然而，当λ变大时，还必须考虑如式(12.28)所示的非线性修正。如果我们在$d < 4$中包含这个特殊的效应，我们就会得到递归公式

$$\lambda' = \left[\lambda - \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(\frac{d}{2})}\frac{b^{d-4}-1}{4-d}\Lambda^{d-4}\right]b^{d-4}. \tag{12.29}$$

该方程表明，存在一个λ值，在这个值上，重标度引起的增量被非线性效应引起的增量所补偿。在这个值上，当我们对自由度积分时，λ是不变的。相应的拉格朗日量是重整化群流的第二个不动点。在极限$d \to 4$处，流(12.29)趋于(12.28)，因此新不动点与自由场不动点合并。当d足够接近4时，新不动点与$\mathcal{L}_0$都具有质量参数m^2随迭代而增加的性质。那么质量算符在新不动点附近将是相关算符，于是重整化群流的形式如图 12.2 所示。

在这个例子中，重整化群的新不动点处有一个拉格朗日量，其耦合足够弱以至于可以用微扰论计算变换方程。理论上，也可以找到拉格朗日量是强耦合的不动点，从而使重整化群变换不能被费曼图分析所理解。这种不动点有许多例子在二维精确可解的模型场论中是已知的*。然而，到现在为止，对于物理应用很重要的量子场论的所有例子，它们都被发现或者被自由场不动点所控制，或者被我们在前几段描述的不动点(其在一个特别的极限下会接近自由场不动点)所控制。没人明白为什么会这样。这个观察意味着费曼图分析在计算量子场论的物理结果时有着意想不到的力量。

*在结尾中，我们提到了其中的一些例子，并讨论了量子场论的其他非微扰方法。

ϕ^4理论的另一个方面值得评论。由于质量项$m^2\phi^2$是一个相关算符，其系数在重整化群流下迅速发散。我们在上面已经看到，为了在低动量时达到期望的m^2值，我们必须想象原始拉格朗日量中的m^2值已经被非常微妙地调整了。这种调整在磁体系统中有一个自然的解释，因为需要灵敏地调整温度，使其非常接近临界点。然而，当它被应用于——被称为自然的基本理论的——基本粒子的量子场论时，它似乎是相当人为的。这个问题只出现在标量场中，因为对于费米子，质量的重整化与裸质量成正比，而不是一个任意的相加性常数。也许这就是为什么在自然界中似乎没有基本标量场的原因。我们将在结语中回到这个问题。

12.2 Callan-Symanzik 方程

重整化的 Wilson 图像，是可能的拉格朗日量空间中的一个流，它非常直观，并让我们深刻理解为什么自然应该用可重整的量子场论来描述。此外，这一观点还可以应用于从这些理论中提取出更多的定量预测。在本章的其余部分中，我们将发展一种用于提取这些预测的形式理论。具体来说，我们将看到 Wilson 的图像导致我们预测了关联函数的高动量和低动量行为的形式。在最简单的情况下，关联函数的标度成为它们的外部动量的幂，其幂律不出现在微扰论的任何固定阶。

正如 Wilson 最初所做的那样，有可能根据 Wilson 程序(对动量空间的片段进行积分)直接推导出这些预测。然而，既然我们已经理解了重整化群流的基本概念，那么在更熟悉的普通重整化微扰论的背景下工作的话，从技术上来说就更容易了。上一节的讨论是物理上的，但是技术上比较复杂。它涉及到有限域上的笨拙的积分，并使用了人工参数b——它在任何的最终结果中都必须被去除。此外，我们从 7.5 节中得知，截断正规子在QED中甚至会导致出现更多的问题，因为它与 Ward 等式相冲突。本节的讨论将更加严格和正式，但它将消除这些技术问题。在本节和下一节中，我们将推导耦合常数的流方程，类似于我们在第 12.1 节中推导的方程。为了获得最一般拉格朗日量的流，我们需要一些额外的工具，它们将在 12.4 和 12.5 小节中进行开发。

我们怎样才能从重整化格林函数的表达式中(其中截断已经被取为无穷大)得到重整化群流的信息呢?我们必须首先认识到，重整化的量子场论对应于一组完整的可能的拉格朗日量中受限的一类(我们在前一节中考虑过)。在 Wilson 的语言中，一个截断为任意大的重整化场论对应一个轨迹，该轨迹需要任意长的时间来演化，以得到一个大的质量参数值。于是，这样的轨迹必须任意地接近一个不动点，我们将假设它是弱耦合不动点。在接近这个不动点的缓慢演化过程中，原始拉格朗日量中无关算符逐渐消失，只剩下相关和边缘算符。这些算符的系数与可重整场论的参数是一一对应的。因此，当我们在重整化场论下工作时，我们正在抛弃无关微扰的演化信息，而在保留相关微扰和边缘微扰的流的信息。

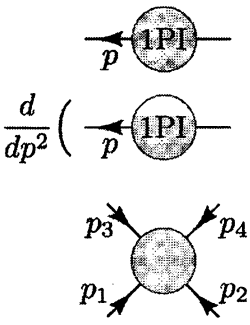
这些参数的流不能从截断依赖性确定，因为在这个框架中，截断已经被取为无穷大。然而，我们有一个可选方案，尽管更加抽象。重整化场论的参数由一组重整化条件决定，这些条件应用于一个确定的动量标度处(称为**重整化标度**)。通过观察该理论的参数如何依赖于重整化标度，我们可以恢复上一节重整化群流中包含的信息。

我们首先考虑的特殊情况是在四维下的ϕ^4理论，其中耦合常数λ是无量纲的，对应的算符是边缘的。为了简单起见，我们还假设质量项m^2被调整为零，因此该理论正好处于临界点。我们将在闵可夫斯基空间中执行这种分析，使用类空参考动量。然而如果在欧几里得空间中进行，这种分析本质上是相同的。如果我们想在类时动量下考虑重整化群的预测，我们必须考虑新奇异性的可能性，这使得分析更加复杂。这些奇异性包括了物理阈值和 6.4 节讨论的 Sudakov 双对数。我们把对这些复杂情况的讨论推迟到第 17 章和第 18 章

重整化条件

要正确地定义该理论，必须明确重整化条件。在第 10 章中，我们为ϕ^4理论使用了一组自然的重整化条件(10.19)，用物理质量m来定义。然而，在$m = 0$的理论中，这些条件不能使用，因为它们导致抵消项中的奇异性(例如，考虑式(10.24)的极限$m^2 \to 0$)。为了避免这种奇异性，我们选择了一个任意动量标度M，并将

重整化条件施加在类空动量p处：$p^2 = -M^2$：



(12.30)

参数M称为**重整化标度**。这些条件定义了两点和四点格林函数在一确定点的值，并在此过程中消除了所有的紫外发散。粗略地说，我们是“在标度M上定义了理论”。

这些新的重整化条件需要一些时间来适应。特别是第二个条件，意味着在非物理动量$p^2 = -M^2$处，而不是在壳($p^2 = 0$)，两点格林函数的系数为 1：

$$\langle\Omega|\,\phi(p)\phi(-p)\,|\Omega\rangle = \frac{i}{p^2} \qquad \text{at } p^2 = -M^2.$$

这里ϕ是重整化的场，由一个标度因子与裸场ϕ_0相联系，我们再次称之为Z：

$$\phi = Z^{-1/2}\phi_0. \tag{12.31}$$

然而，这个Z并不是在第 7 章和第 10 章中所述的裸场的两点格林函数中物理极点的留数。相反，我们现在有

$$\langle\Omega|\,\phi_0(p)\phi_0(-p)\,|\Omega\rangle = \frac{iZ}{p^2} \qquad \text{at } p^2 = -M^2.$$

重整化微扰论的费曼规则与第 10 章相同，其中Z与抵消项δ_Z的关系相同，

$$\delta_Z = Z - 1.$$

然而，现在必须调整抵消项δ_Z和δ_λ以保持新的条件(12.30)。

(12.30)中的第一个重整化条件保持标量场的物理质量固定为零。我们在第 10 章看到，在ϕ^4理论中，单圈传播子修正是与动量无关的，完全被质量重整化抵消项所抵消。然而，在双圈的情况下，情况变得更加复杂，传播子修正同时需要质量和场强重整化。在更一般的标量场论中，如第 10.2 节末尾考虑的 Yukawa 理论的例子，这种复杂性在单圈阶就已经出现了。因为场强重整化抵消项在下面的讨论中将发挥重要作用，简要讨论一下如何处理这种双重的减除将会很有帮助。

我们在这里考虑的无质量标量场的情况，传播子修正的计算会有一些特殊的简化，特别是使用维数正规化。例如，考虑 Yukawa 理论中的单圈传播子修正。在第 10.2 节中，我们找到了如下形式的表达式



$$\sim \frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{\Delta^{1-d/2}}, \tag{12.32}$$

其中Δ是费米子质量m_f和p^2的线性组合。如果我们只使用无质量传播子来计算这个图，Δ与p^2成正比。表达式(12.32)在$d=2$处有一个极点，对应于二次发散的质量重整化。然而，这个极点的留数与p^2无关所以我们可以用质量抵消项δ_m完全抵消这个极点。这允许我们将(12.32)解析延拓到$d=4$。然后这个表达式的形式为

$$-p^2\Big(\frac{1}{2-d/2}+\log\frac{1}{-p^2}+C\Big), \tag{12.33}$$

并没有给出额外的质量移动，但给出了一个场强重整化。剩下的发散被抵消项δ_Z抵消了。如果我们采用规则：即应该简单地将表达式的形式(12.32)延拓到$d=4$，那么我们可以完全忘记抵消项δ_m。

在一个带着动量截断的正规化方案中，δ_m和δ_Z的贡献相互纠缠在一起。那么定义无质量极限就更困难了。在接下来的讨论中，我们将假设使用维数正规化。但是，为了强调截断的物理作用，我们将把形式为(12.33)的表达式写成

$$-p^2\Big(\log\frac{\Lambda^2}{-p^2}+C\Big). \tag{12.34}$$

这里，正比于p^2的对数发散项将与使用动量截断得到的发散一致；常数项将会不一致，但这些项会从最终结果中去掉。

在ϕ^4理论中，单圈传播子修正与动量无关，通过这个方案，单圈图简单地设置为零。然后前面的分析适用于双圈和更高的修正项。

将本节的分析推广到有质量的标量场论需要一些额外的形式理论，我们将其推迟到 12.5 节。

Callan-Symanzik方程

在重整化条件(12.30)下，重整化标度M是任意的。我们也可以用不同的M'来定义相同的理论。所谓"相同的理论"，我们指的是这样一个理论，其裸格林函数

$$\langle\Omega|\,T\phi_0(x_1)\phi_0(x_2)\cdots\phi_0(x_n)\,|\Omega\rangle\,,$$

是由裸耦合常数λ_0和截断Λ的相同函数给出的。这些函数不涉及M。只有当我们通过重新标度场和使用重整化耦合λ来消除λ_0，以此来移除截断的依赖性时，对M的依赖性才会进入。重整化的格林函数在数值上与裸格林函数相等，相差一个由场强重整化Z的幂带来的重标度：

$$\langle\Omega|\,T\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\,|\Omega\rangle = Z^{-n/2}\,\langle\Omega|\,T\phi_0(x_1)\phi_0(x_2)\cdots\phi_0(x_n)\,|\Omega\rangle\,. \tag{12.35}$$

使用一个新的重整化耦合λ'和一个新的重标度因子Z'，重整化的格林函数可以在另一个标度M'上定义得同样好。

让我们更明确地写出M的无穷小移动的效应。让$G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)$为连通的n点函数，用重整化微扰论计算：

$$G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n) = \langle\Omega|\,T\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\,|\Omega\rangle_{\text{connected}}\,. \tag{12.36}$$

现在假设我们将M移动δM。在耦合常数和场强上有相应的移动，使得裸格林函数保持不变

$$\begin{aligned} M &\to M+\delta M,\\ \lambda &\to \lambda+\delta\lambda,\\ \phi &\to (1+\delta\eta)\phi. \end{aligned} \tag{12.37}$$

那么任何重整化的格林函数的变化仅仅是由场的重标度引起的，

$$G^{(n)} \to (1+n\delta\eta)G^{(n)}.$$

如果我们把$G^{(n)}$看成M和λ的函数，我们可以把这个变换写成

$$dG^{(n)} = \frac{\partial G^{(n)}}{\partial M}\delta M + \frac{\partial G^{(n)}}{\partial\lambda}\delta\lambda = n\delta\eta G^{(n)}. \tag{12.38}$$

不用$\delta\lambda$和$\delta\eta$来写这种关系的话，定义以下的无量纲参数是一个惯例：

$$\beta \equiv \frac{M}{\delta M}\delta\lambda; \qquad \gamma \equiv -\frac{M}{\delta M}\delta\eta. \tag{12.39}$$

将这些代入式(12.38)并乘以$M/\delta M$，我们得到

$$\Big[M\frac{\partial}{\partial M} + \beta\frac{\partial}{\partial\lambda} + n\gamma\Big]G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n;M,\lambda) = 0. \tag{12.40}$$

参数β和γ对于每个n是相同的，且必须与x_i无关。因为格林函数$G^{(n)}$是重整的，β和γ不能依赖于截断，以及通过量纲分析，这些函数不能依赖于M。因此，它们只能是无量纲变量λ的函数。我们的结论是：无质量ϕ^4理论的任何格林函数都必须满足

$$\left[M\frac{\partial}{\partial M}+\beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}+n\gamma(\lambda)\right]G^{(n)}(\{x_i\};M,\lambda)=0. \tag{12.41}$$

这种关系称为Callan-Symanzik 方程*。它断言存在两个普遍的函数$\beta(\lambda)$和$\gamma(\lambda)$，与耦合常数和场强的移动有关——它们补偿了重整化标度M的移动。

前面的论证可以很容易地推广到其他带有无量纲耦合的无质量理论。在带有多个场和耦合的理论中，每个场有一个γ项，每个耦合有一个β项。例如，通过和式(12.30)一样引入一个重整化标度，我们可以定义出零电子质量的QED。传播子的重整化条件被应用于$p^2=-M^2$，而顶点重整化条件被应用于这样一个点，其中所有三个不变量均为$-M^2$阶。于是该理论的重整化格林函数满足Callan-Symanzik 方程

$$\left[M\frac{\partial}{\partial M}+\beta(e)\frac{\partial}{\partial e}+n\gamma_2(e)+m\gamma_3(e)\right]G^{(n,m)}(\{x_i\};M,e)=0, \tag{12.42}$$

其中格林函数$G^{(n,m)}$中的n和m分别是电子场和光子场的个数，γ_2和γ_3分别是电子场和光子场的重标度函数。

计算β和γ

在得到 Callan-Symanzik 方程的含义之前，让我们更仔细地研究一下其中出现的函数β和γ。从它们的定义(12.39)可以看出，当重整化标度M增大时，它们分别与耦合常数的移动和归一化场的移动成正比。耦合常数作为M的函数，其行为具有特殊的意义，因为它决定了相互作用的强度和微扰论成立的条件。在下一节我们将看到，场强的移动也直接反映在格林函数的值上。

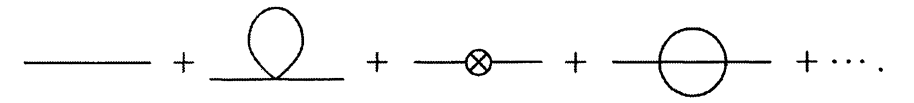
计算Callan-Symanzik函数的最简单方法，始于一些为方便而选出来的格林函数的显式微扰表达式。如果我们坚持这些表达式满足Callan-Symanzik方程，我们将得到可用来求解β和γ的方程。因为重整化格林函数的M依赖性来源于抵

*C. G. Callan, *Phys. Rev.* **D2**, 1541(1970), K. Symanzik, *Comm.Math.Phys.*18, 227(1970).

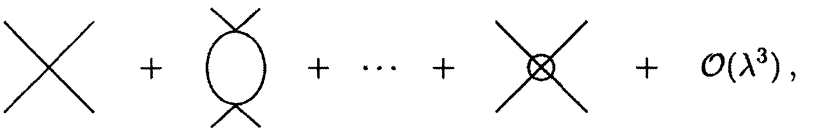
消了其对数发散的抵消项，我们将发现β和γ函数与这些抵消项简单地相关，或者等价地，与发散对数的系数相关。将β和γ与抵消项联系起来的精确公式将取决于特殊的重整化方案和计算方案的其他细节。然而，在单圈阶下，β和γ的表达式是简单且清楚的。

作为第一个例子，让我们在无质量ϕ^4理论中计算$\beta(\lambda)$和$\gamma(\lambda)$的单圈贡献。我们可以通过在动量空间工作而不是在坐标空间来简化分析。我们的策略是将Callan-Symanzik方程应用于两点和四点格林函数的图解表达式。

两点函数由下式给出

$G^{(2)}(p) =$  $+\cdots.$

在无质量ϕ^4理论中，单圈传播子修正完全可以用质量抵消项来抵消。于是对传播子的第一个非平凡修正来自于双圈图及其抵消项，其阶为λ^2。同时，四点函数由下面给出

$G^{(4)} =$  $+\ \mathcal{O}(\lambda^3),$

在这里我们省略了对外腿的被抵消了的单圈传播子修正。λ^3阶的图包括了对外腿的未消失的双圈传播子修正。

为了计算β，我们将 Callan-Symanzik 方程应用于四点函数：

$$\Big[M\frac{\partial}{\partial M}+\beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}+4\gamma(\lambda)\Big]G^{(4)}(p_1,\dots,p_4)=0. \tag{12.43}$$

借用第 10.2 节的结果(10.21)，我们可以把$G^{(4)}$写成

$$G^{(4)}=\big[-i\lambda+(-i\lambda)^2\big[iV(s)+iV(t)+iV(u)\big]-i\delta_\lambda\big]\cdot\prod_{i=1,\dots,4}\frac{i}{p_i^2},$$

其中$V(s)$表示(10.20)的圈积分。我们的重整化条件(12.30)要求修正项在$s=t=u=-M^2$处相消。因此，λ^2阶顶点抵消项是

$$\delta_\lambda=(-i\lambda)^2\cdot 3V(-M^2)=\frac{3\lambda^2}{2(4\pi)^{d/2}}\int_0^1 dx\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(x(1-x)M^2)^{2-d/2}}. \tag{12.44}$$

在$V(p^2)$的式(10.23)中设置$m=0$和$p^2=-M^2$，得到最后一个表达式。在$d\to 4$的极限下，式(12.44)变为

$$\delta_\lambda = \frac{3\lambda^2}{2(4\pi)^2}\Big[\frac{1}{2-d/2} - \log M^2 + \text{finite}\Big], \tag{12.45}$$

其中有限项与M无关，这个抵消项给出了$G^{(4)}$的M依赖性：

$$M\frac{\partial}{\partial M}G^{(4)} = \frac{3i\lambda^2}{(4\pi)^2}\prod_i \frac{i}{p_i^2}.$$

让我们暂时假设$\gamma(\lambda)$没有λ阶的项；我们将在下一段中证明这一点。于是，Callan-Symanzik方程(12.43)可以在λ^2阶被满足，仅当ϕ^4理论的β函数被给出为：

$$\beta(\lambda) = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} + \mathcal{O}(\lambda^3). \tag{12.46}$$

接下来，考虑两点函数的Callan-Symanzik方程：

$$\Big[M\frac{\partial}{\partial M} + \beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda} + 2\gamma(\lambda)\Big]G^{(2)}(p) = 0. \tag{12.47}$$

因为，在单圈阶，对$G^{(2)}$没有传播子修正，在λ阶对M或λ的依赖性被没有引入。因此，γ函数在这个阶上为零：

$$\gamma = 0 + \mathcal{O}(\lambda^2). \tag{12.48}$$

这证明了上一段所作的假设是正确的。双圈传播子修正是发散的，它的抵消项包含一个依赖于M的λ^2阶项。这对公式(12.47)中的第一项有贡献。由于β是λ^2阶的，$G^{(2)}$的修正是λ^2阶的，因此(12.47)第二项的领头贡献是λ^3阶。于是γ在λ^2阶获得非零贡献。对γ的这个领头贡献在问题 13.2 得到了计算。

上面的例子说明了如何在带着无量纲耦合的更一般的理论中计算β和γ。在这类理论中，格林函数的M依赖性是通过场强和顶点抵消项进入的，这些抵消项被用来减除发散对数。β和γ的最低阶表达式可以直接从这些抵消项，或从发散对数的系数中计算出来。

在任何可重整的无质量标量场论中，两点格林函数都具有一般形式

$$G^{(2)}(p) = \quad\text{———}\quad + \quad(\text{loop diagrams})\quad + \quad\text{——}\otimes\text{——}\quad + \cdots$$
$$= \frac{i}{p^2} + \frac{i}{p^2}\Big(A\log\frac{\Lambda^2}{-p^2} + \text{finite}\Big) + \frac{i}{p^2}(ip^2\delta_Z)\frac{i}{p^2} + \cdots. \tag{12.49}$$

在最低阶，这个表达式的M依赖性，完全来自抵消项δ_Z。将 Callan-Symanzik

方程应用于$G^{(2)}(p)$，忽略β项(它总是更小，并至少耦合常数的一次方)，我们发现

$$-\frac{i}{p^2}M\frac{\partial}{\partial M}\delta_Z + 2\gamma\frac{i}{p^2} = 0,$$

or

$$\gamma = \frac{1}{2}M\frac{\partial}{\partial M}\delta_Z \qquad \text{(to lowest order)}. \tag{12.50}$$

为了使这个结果更加明确，请注意抵消项必须是

$$\delta_Z = A\log\frac{\Lambda^2}{M^2} + \text{finite}$$

这是为了消去$G^{(2)}$中的发散对数。因此，γ简单地只是对数的系数：

$$\gamma = -A \qquad \text{(to lowest order)}. \tag{12.51}$$

在大多数理论(如Yukawa理论或QED)中，δ_Z的第一个对数发散发生在单圈水平。然而，即使是ϕ^4理论，对δ_Z的第一个不为零项，公式(12.50)和(12.51)都是正确的，在这个例子中是双圈贡献*。将标量场传播子(i/p^2)替换为费米子传播子$(i/\not{p})$，我们可以逐行地重复这个论证，用费米子场的场强抵消项δ_Z计算它的γ函数。

我们可以推导出通用无量纲耦合常数g(对应n点顶点)的β函数的类似表达式。考虑传播子修正，单圈阶下的完全连通格林函数具有一般形式：

$$\begin{aligned} G^{(n)} &= \begin{pmatrix}\text{tree-level}\\ \text{diagram}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{1PI loop}\\ \text{diagrams}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{vertex}\\ \text{counterterm}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{external leg}\\ \text{corrections}\end{pmatrix} \\ &= \Big(\prod_i \frac{i}{p_i^2}\Big)\Big[-ig - iB\log\frac{\Lambda^2}{-p^2} - i\delta_g + (-ig)\sum_i\Big(A_i\log\frac{\Lambda^2}{-p_i^2} - \delta_{Zi}\Big)\Big] \\ &\qquad + \text{finite terms}. \end{aligned} \tag{12.52}$$

在这表达式中，p_i是外腿上的动量，p^2是由这些动量构建的一个典型不变量。我们假设将重整化条件应用到这样一个点，其中所有此类不变量都是类空的且为$-M^2$阶。这个表达式的M依赖性来自于抵消项δ_g和δ_{Zi}。应用Callan-Symanzik方程，我们得到

$$M\frac{\partial}{\partial M}\Big(\delta_g - g\sum_i \delta_{Zi}\Big) + \beta(g) + g\sum_i \frac{1}{2}M\frac{\partial}{\partial M}\delta_{Zi} = 0,$$

---

*在单圈中，公式(12.33)表明，我们也可以将A确定为1PI自能在极限$d \to 4$下$2/(4-d)$的系数。这种关系在更高的圈中发生变化。但是，公式(12.50)仍然是正确的。

or

$$\beta(g) = M\frac{\partial}{\partial M}\Big(-\delta_g + \frac{1}{2}g\sum_i \delta_{Zi}\Big) \qquad \text{(to lowest order)}. \tag{12.53}$$

为了更明确一点，我们注意到

$$\delta_g = -B\log\frac{\Lambda^2}{M^2} + \text{finite}.$$

因此，β函数只是发散对数的系数的一个组合：

$$\beta(g) = -2B - g\sum_i A_i \qquad \text{(to lowest order)}. \tag{12.54}$$

注意到抵消项的有限部分是独立于M的，因此不会对β或γ有贡献。这意味着，为计算Callan-Symanzik函数的领头项，我们不必太精确地指定重整化条件：M^2阶的任何动量标度将产生相同的结果。通过将对数中的所有不变量设置为等于M^2，抵消项的发散部分可以被简单地估计，正如我们在上面的n点格林函数表达式中所做的那样。

和在γ的计算中一样，几乎在不改变这个论证的情况下，可以将该论证应用于带自旋的场的耦合常数。例如，在Yukawa理论中，我们考虑三点函数，一个入射费米子，一个出射费米子，一个标量粒子，动量分别为p_1, p_2, p_3。于是三点函数的树级表达式为

$$\frac{i}{\not{p}_1}\frac{i}{\not{p}_2}\frac{1}{p_3^2}(-ig). \tag{12.55}$$

单圈修正将量$(-ig)$替换为式(12.52)中括号中的表达式。那么(12.53)和(12.54)式也适用于这个理论的β函数。

类似的表达式也适用于QED，尽管有一些小复杂。首先是计算光子传播子的γ函数。由式(7.74)可知，费曼规范中光子传播子的一般形式为

$$D^{\mu\nu}(q) = D(q)\Big(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\Big) + \frac{-i}{q^2}\frac{q^\mu q^\nu}{q^2}. \tag{12.56}$$

(12.56)中最后一项的系数取决于规范。幸运的是，这一项从所有规范不变的可观测量中去掉了。因此，专注于第一项是有意义的，它将所有外光子投影到它们的横向分量上。投影光子传播子之后，我们看到$D(q)$满足Callan-Symanzik方程。由于这个函数的修正的形式为(12.49)，因此该公式后面的论证对于光子以及电子和标量粒子都是有效的。因此，在领头阶，

$$\gamma_2 = \frac{1}{2}M\frac{\partial}{\partial M}\delta_2, \qquad \gamma_3 = \frac{1}{2}M\frac{\partial}{\partial M}\delta_3, \tag{12.57}$$

其中δ_2和δ_3是第 10.3 节中定义的抵消项。

同样，我们可以考虑被投影到光子横向分量上的三点连通格林函数$\langle\bar{\psi}(p_1)\psi(p_2)A_\mu(q)\rangle$。在领头阶，这个函数等于

$$\frac{i}{\not{p}_1}(-ie\gamma^\mu)\frac{i}{\not{p}_2}\frac{-i}{q^2}\Big(g^{\mu\nu}-\frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\Big).$$

发散的单圈修正具有相同的形式，其中用对数发散项替换$(-ie)$。因此，式(12.53)给出了β函数的最低阶表达式：

$$\beta(e)=M\frac{\partial}{\partial M}\big(-e\delta_1+e\delta_2+\frac{e}{2}\delta_3\big). \tag{12.58}$$

要找到QED的Callan-Symanzik函数的显式表达式，必须写出抵消项δ_1,δ_2和δ_3的表达式。在10.3节中，我们使用有质量费米子的在壳的重整化条件对这些抵消项进行了计算。我们现在必须在无质量费米子下，和在$-M^2$处的重整化下，重新计算这些项。幸运的是，我们只需要计算这些抵消项的对数发散部分，它们在这两种情况下是相同的。观察(10.43)和(10.44)式，我们发现

$$\begin{aligned}\delta_1=\delta_2&=-\frac{e^2}{(4\pi)^2}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(M^2)^{2-d/2}}\ +\ \text{finite},\\ \delta_3&=-\frac{e^2}{(4\pi)^2}\frac{4}{3}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(M^2)^{2-d/2}}\ +\ \text{finite}.\end{aligned} \tag{12.59}$$

利用式(12.57)和(12.59)，我们在领头阶得到了

$$\gamma_2(e)=\frac{e^2}{16\pi^2},\qquad \gamma_3(e)=\frac{e^2}{12\pi^2}. \tag{12.60}$$

以及由式(12.58)，我们得到

$$\beta(e)=\frac{e^3}{12\pi^2}. \tag{12.61}$$

重要的是要记住，我们使用的δ_2的表达式明确假设使用了费曼规范。实际上γ_2依赖于规范参数，这是合理的，因为单独的ψ和$\bar{\psi}$场的格林函数不是规范不变的。另一方面，QED 真空极化是规范不变的，因此γ_3和β也是规范不变的。

β和γ的含义

我们可以对β和γ的本质获得更深入的见解，只要使用裸微扰论的参数表达它们：ϕ^4理论的情况下是Z,λ_0和Λ。

首先回忆一下，裸场和重整化场之间的以下联系

$$\phi(p) = Z(M)^{-1/2}\phi_0(p). \tag{12.62}$$

该方程表达了重标度场对M的依赖性，当M增加δM，重整化场发生移动

$$\delta\eta = \frac{Z(M+\delta M)^{-1/2}}{Z(M)^{-1/2}} - 1.$$

因此我们最初的γ的定义(12.39)立即为我们给出

$$\gamma(\lambda) = \frac{1}{2}\frac{M}{Z}\frac{\partial}{\partial M}Z. \tag{12.63}$$

由于$\delta_Z = Z - 1$(式(10.17))，所以该公式与(12.50)在领头阶一致。然而公式(12.63)是一个精确的关系式。这个表达式阐明了γ与场强重标度的关系。然而，它模糊了γ独立于截断Λ的事实。要理解γ的这一方面，我们必须使用重整化的格林函数来回到这个函数的初始定义，格林函数的截断无关性来源于理论的重整性。

同样地，我们可以使用裸微扰论的参数找到β的一个有指导意义的表达式。我们最初在(12.39)式对β的定义中利用了量$\delta\lambda$，它被定义为当重整化点发生无穷小移动时，重整化耦合λ的移动，以此保持裸格林函数的值。由于裸格林函数依赖于裸耦合λ_0和截断，所以这个定义可以重写为

$$\beta(\lambda) = M\frac{\partial}{\partial M}\lambda\Big|_{\lambda_0,\Lambda}. \tag{12.64}$$

因此，β函数是标度M处对应于固定裸耦合的重整化耦合的变化率。回忆我们在12.1节的分析，将$\lambda(M)$与耦合常数λ'(通过将自由度向下积分到标度M处得到的)联系起来是很吸引人的。在这个对应下，β函数仅仅是耦合常数λ的重整化群流的速度。β函数的正符号表示一个在大动量时增强，在小动量时减弱的重整化耦合。我们可以明确看到，通过比较式(12.28)和(12.46)，这个关系适用于ϕ^4理论的λ的领头阶。我们将在下一节进一步证明这种对应。

精确公式(12.64)与第一阶公式(12.53)的等价性同样遵循抵消项定义(10.17)。与(12.63)一样，$\beta(\lambda)$的这个公式独立于Λ这一点并不明显，但这一事实同样来源于重整性。相反地，则有可能通过在微扰论中逐阶地证明表达式(12.63)和(12.64)独立于Λ，从而证明ϕ^4理论的重整性*。

12.3 耦合常数的演化

既然我们已经讨论了 Callan-Symanzik 方程的所有组成部分，现在让我们研究一下它的含义。首先，我们要为最简单的情况，即标量场论的两点格林函数，找到 Callan-Symanzik 方程的显式解。这个解将阐明方程的物理含义。特别地，它将巩固上一节末尾提出的关系，即用β函数标记耦合常数的重整化群流的速率。然后我们将用这个关系来讨论可重整场论中的重整化群流的定性特征。

Callan-Symanzik 方程的解

我们想在一个单标量场的理论中求解两点格林函数$G^{(2)}(p)$的Callan-Symanzik方程。由于$G^{(2)}(p)$的量纲为$\left(\text{质量}\right)^{-2}$，我们可以把它对$p$和$M$的依赖性表示为

$$G^{(2)}(p) = \frac{i}{p^2} g(-p^2/M^2). \tag{12.65}$$

这个方程允许我们将对M的导数换成对p^2的导数。在本章的其余部分，我们将使用变量p来表示类空动量的大小：$p = (-p^2)^{1/2}$。然后我们可以将 Callan-Symanzik 方程重写为

$$\left[p\frac{\partial}{\partial p} - \beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial \lambda} + 2 - 2\gamma(\lambda)\right] G^{(2)}(p) = 0. \tag{12.66}$$

在自由场论中，β和γ为零，我们得到平凡的结果

$$G^{(2)}(p) = \frac{i}{p^2}. \tag{12.67}$$

在相互作用理论中，β和γ是λ的非零函数。但是，仍然有可能使用特征线方法为Callan-Symanzik方程写出明确的解。等价的是(对于那些不精通偏微分方程理论的人)，我们将应用Sidney Coleman提出的一个可爱的流体动力学-细菌学类比**。想象一个狭窄的管道在x方向上运行，其中包含一个流速为$v(x)$的流体，

*Callan 在他的文章 *Methods in Field Theory*, R. Balian and J. Zinn-Justin, eds. (North Holland, Amsterdam, 1976.)中，在证明了 Callan-Symanzik 方程在λ阶逐阶成立的基础上，给出了ϕ^4理论重整性的一个漂亮证明。

** Coleman(1985)，第 3 章。

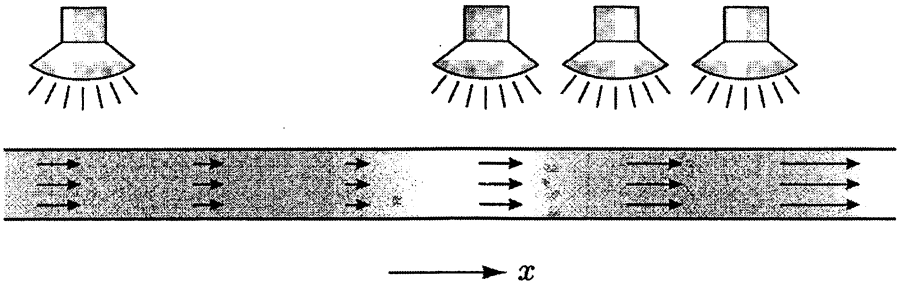


图 12.3 Coleman 对 Callan-Symanzik 方程的细菌学类比。管道中居住着具有给定初始密度$D_i(x)$的细菌。生长速率(由光照决定)和流速是x的给定函数，问题是确定在所有随后的时间下的密度$D(t,x)$。

如图 12.3 所示。管道内居住有细菌，细菌的密度为$D(t,x)$，生长速度为$\rho(x)$。然后函数$D(t,x)$的未来行为由如下的微分方程决定

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+v(x)\frac{\partial}{\partial x}-\rho(x)\right]D(t,x)=0. \tag{12.68}$$

第二项考虑到细菌是随液体流动的事实，所以它们此时此处的密度决定的它们的未来密度不在此处，而是在前面的某个距离。这个方程与式(12.66)相同，只是进行了替换

$$\begin{aligned}\log(p/M)&\leftrightarrow t,\\ \lambda&\leftrightarrow x,\\ -\beta(\lambda)&\leftrightarrow v(x),\\ 2\gamma(\lambda)-2&\leftrightarrow \rho(x),\\ G^{(2)}(p,\lambda)&\leftrightarrow D(t,x).\end{aligned} \tag{12.69}$$

现在假设我们知道细菌的初始浓度：在$t=0$时$D(t,x)=D_i(x)$。于是我们就可以确定在x点和之后任意时间的流体元的细菌浓度，只要计算该流体元的历史，并沿着这条路径对生长速度进行积分。考虑在t时刻和x点的流体元，我们可以通过对它的逆时运动进行积分，来找出它在时间为0时的位置。该元在$t=0$时的位置由$\bar{x}(t;x)$给出，它满足如下微分方程：

$$\frac{d}{dt'}\bar{x}(t';x)=-v(\bar{x}),\qquad \text{with}\qquad \bar{x}(0;x)=x. \tag{12.70}$$

然后，立即有，

$$\begin{aligned} D(t,x) &= D_i\big(\bar{x}(t;x)\big)\cdot\exp\Big(\int_0^t dt'\,\rho\big(\bar{x}(t';x)\big)\Big) \\ &= D_i\big(\bar{x}(t;x)\big)\cdot\exp\Big(\int_{\bar{x}(t)}^{x} dx'\,\frac{\rho(x')}{v(x')}\Big). \end{aligned} \tag{12.71}$$

现在把这个解带回我们的场论问题上，将每个细菌学参数替换为它对应的场论参数。时间$t=0$对应$-p^2=M^2$，初始浓度$D_i(x)$变成一个未知的函数$\hat{\mathcal{G}}(\lambda)$。然后

$$G^{(2)}(p,\lambda)=\hat{\mathcal{G}}\big(\bar{\lambda}(p;\lambda)\big)\cdot\exp\Big(-\int_{p'=M}^{p'=p} d\log(p'/M)\cdot 2\big[1-\gamma\big(\bar{\lambda}(p';\lambda)\big)\big]\Big), \tag{12.72}$$

where $\bar{\lambda}(p;\lambda)$ solves

$$\frac{d}{d\log(p/M)}\bar{\lambda}(p;\lambda)=\beta(\bar{\lambda}),\qquad \bar{\lambda}(M;\lambda)=\lambda. \tag{12.73}$$

该微分方程描述了修正的耦合常数$\bar{\lambda}(p;\lambda)$的流，它作为动量的函数。这个流的速率就是β函数，因此，这个流让人强烈地想起式(12.64)给出的重整化耦合对重整化标度的依赖性。我们将$\bar{\lambda}(p)$称为**跑动耦合常数**。它的方程(12.73)常称为**重整化群方程**。

可以直接检查出(12.72)求解了 Callan-Symanzik 方程，通过使用如下等式

$$\int_{\lambda}^{\bar{\lambda}}\frac{d\lambda'}{\beta(\lambda')}=\int_{p'=M}^{p'=p} d\log(p'/M), \tag{12.74}$$

由此推出

$$\Big(p\frac{\partial}{\partial p}-\beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big)\bar{\lambda}=0. \tag{12.75}$$

解(12.72)的一种方便写法是

$$G^{(2)}(p,\lambda)=\frac{i}{p^2}\mathcal{G}\big(\bar{\lambda}(p;\lambda)\big)\cdot\exp\Big(2\int_M^p d\log(p'/M)\,\gamma\big(\bar{\lambda}(p';\lambda)\big)\Big), \tag{12.76}$$

其中$\mathcal{G}(\bar{\lambda})$是一个必须确定的函数。这个函数不能由重整化理论的一般原理来确定。反而，我们必须计算$G^{(2)}(p)$在λ下的微扰级数，并和(12.76)在同一参数下的级数

展开的项进行匹配。对于ϕ^4理论中的两点函数，这种匹配是相当平凡的：$\mathcal{G}(\bar{\lambda}) = 1 + \mathcal{O}(\bar{\lambda}^2)$。

前面的分析可以应用于格林函数的任意族，它们通过动量统一的重标度来关联。例如，考虑ϕ^4理论的连通四点函数是在类空动量p_i处计算的，如$p_i^2 = -P^2$，$p_i \cdot p_j = 0$，所以s, t, u的阶是$-P^2$。对于微扰论的领头阶，该函数被给出为

$$G^{(4)}(P) = \left(\frac{i}{P^2}\right)^4 (-i\lambda). \tag{12.77}$$

利用$G^{(4)}$的量纲为$\left(\text{质量}\right)^{-8}$的事实，我们可以把 Callan-Symanzik 方程中的M替换成P，并把这个方程写成

$$\left[P\frac{\partial}{\partial P} - \beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial \lambda} + 8 - 4\gamma(\lambda)\right] G^{(4)}(P;\lambda) = 0. \tag{12.78}$$

这个方程的解是

$$G^{(4)}(P;\lambda) = \frac{1}{P^8}\mathcal{G}^{(4)}\left(\bar{\lambda}(p;\lambda)\right) \cdot \exp\left(4\int_M^p d\log(p'/M)\,\gamma(\bar{\lambda}(p';\lambda))\right). \tag{12.79}$$

该公式必须与(12.77)在λ的领头阶上一致；这个匹配要求

$$\mathcal{G}^{(4)}\left(\bar{\lambda}(p;\lambda)\right) = -i\bar{\lambda} + \mathcal{O}(\bar{\lambda}^2). \tag{12.80}$$

我们现在可以看到 Callan-Symanzik 方程的物理含义。格林函数原始的费曼微扰级数依赖于耦合常数λ和无量纲参数$\log(-p^2/M^2)$。如果比值p^2/M^2很大，即使λ很小，微扰论也会表现得很差。解(12.76)和(12.79)将这种依赖性重新组织为一个关于跑动耦合常数和指数的标度因子的函数。我们依次考虑这两部分。

(12.76)和(12.79)式的第一个因子是跑动耦合常数的函数，在动量标度p处取值。如果p的阶为M——重整化标度，这个函数本质上是格林函数的普通的微扰计算。结果(12.76)和(12.79)指示我们在标度p上使用相同的表达式，但要用一个适用于该标度的新的耦合常数$\bar{\lambda}$来替换λ。因此，跑动耦合常数$\bar{\lambda}(p)$正是重整化群流的有效耦合常数。这个解释在$G^{(4)}(p)$的解(12.79)中特别清楚，因为这个函数直接测量了ϕ^4耦合常数的强度。

(12.76)和(12.79)式的指数因子有一个同样简单的解释：它是关联函数从参考点M到实际动量p(格林函数是在该点被计算的)的累积的场强重标度。这个因

子从M和p之间的每一个中间标度都获得一个乘法贡献。这些贡献中的每一个都是使用在那个特定标度上的跑动耦合常数，适当地计算出来的。

为了检验这些正式的证明，我们可以用式(12.46)找到的ϕ^4理论β函数的显式形式和重整化群方程(12.73)，来计算ϕ^4理论的跑动耦合常数。这个跑动耦合常数满足微分方程

$$\frac{d}{d\log(p/M)}\bar{\lambda} = \frac{3\bar{\lambda}^2}{16\pi^2}, \qquad \text{with} \qquad \bar{\lambda}(M;\lambda) = \lambda. \tag{12.81}$$

积分，我们发现

$$\left(\frac{3}{16\pi^2}\right)^{-1}\left[\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\bar{\lambda}}\right] = \log\frac{p}{M},$$

and thus,

$$\bar{\lambda}(p) = \frac{\lambda}{1 - (3\lambda/16\pi^2)\log(p/M)}. \tag{12.82}$$

Callan-Symanzik方程解的许多性质在这种关系中是可见的。首先，$\bar{\lambda}$的这个公式展开到λ^2阶，与式(12.28)——Wilson方法得到的重整化群流的速率——完全一致。其次，当$p \to 0$时，跑动耦合常数的这个表达式以对数的速率趋于零。这与我们的预期一致，即β函数的正值应该意味着这样一个有效耦合，它在大动量时变得更强，在小动量时变得更弱。

如果我们把跑动耦合常数$\bar{\lambda}(p)$展开为λ的幂，我们发现耦合常数的连续幂被乘上了对数的幂，

$$\lambda^{n+1}(\log p/M)^n,$$

当p比M大得多或小得多时，它变得很大，并使得这个简单的微扰展开无效。我们在图的计算中曾多次遇到这种大对数问题，在式(11.81)下面的讨论中，我们特别将其作为一个问题加以讨论。现在我们看到重整化群给出了这个问题的部分解。在这个例子中，以及我们将要学习的其他许多例子中，Callan-Symanzik方程告诉我们如何将这些大对数求和，并放到跑动耦合常数和乘以的重标度中。如果跑动耦合常数变大，就像ϕ^4理论在$p \to \infty$时所发生的那样，微扰展开无论如何都会失效，我们将需要更先进的方法。但是，如果跑动耦合常数变小，如$p \to 0$的ϕ^4理论，我们将成功地把对数的幂组织成一个有意义且可控的表达式。第11.4节末尾提出的具体问题将在第13.2节中用这种方法显式地进行解决。

QED 的一个应用

对于Callan-Symanzik方程更具体的应用，我们可以再次考虑静电荷之间的电磁势，$V(\mathbf{x})$，我们在7.5节中研究过。在很短的距离或很大的动量下，我们可以在QED对这个势的修正计算中忽略电子质量。在这种近似下，势应服从无质量QED的Callan-Symanzik方程。我们可以为$V(\mathbf{x})$本身或者它的傅里叶变换写出这个方程；我们选择在傅里叶空间中工作以便更容易地与7.5节的结果相联系。

我们通过指定一个重整化标度M，并在该处定义重整化耦合e_r，来定义QED的无质量极限。如果M接近电子质量m，则在无质量近似刚刚有效的一个点，e_r的值将接近物理的电子电荷e。静电荷之间的势是可观测的能量，所以它的归一化是明确的，而不会从一个重整化点移动到另一个点。因此，势的傅里叶变换的Callan-Symanzik方程没有γ项，简单地是

$$\Big[M\frac{\partial}{\partial M}+\beta(e_r)\frac{\partial}{\partial e_r}\Big]V(q;M,e_r)=0. \tag{12.83}$$

势的傅里叶变换的量纲是$\big(\text{质量}\big)^{-2}$，所以我们可以将对M的依赖性换成对q的依赖性，就像前面讨论的标量场论那样。这给出了

$$\Big[q\frac{\partial}{\partial q}-\beta(e_r)\frac{\partial}{\partial e_r}+2\Big]V(q;M,e_r)=0. \tag{12.84}$$

式(12.84)与式(12.66)基本相同，所以我们可以立即把解写成(12.76)的特殊情况

$$V(q,e_r)=\frac{1}{q^2}\mathcal{V}\big(\bar{e}(q;e_r)\big), \tag{12.85}$$

其中$\bar{e}(q)$是如下的重整化群方程的解

$$\frac{d}{d\log(q/M)}\bar{e}(q;e_r)=\beta(\bar{e}),\qquad \bar{e}(M;e_r)=e_r. \tag{12.86}$$

将$V(q)$的这个公式与领头阶结果进行比较

$$V(q)\approx\frac{e^2}{q^2},$$

我们可以确定$\mathcal{V}(\bar{e})=\bar{e}^2+\mathcal{O}(\bar{e}^4)$。然后

$$V(q,e_r)=\frac{\bar{e}^2(q;e_r)}{q^2}, \tag{12.87}$$

加上被e_r^2的幂所抑制的修正，并且不包含补偿的q/M的大对数。

为了将式(12.87)转化为一个完全显式的公式，我们只需求解重整化群方程(12.86)。利用QEDβ函数(12.61)，我们可以对(12.86)积分来得到

$$\frac{12\pi^2}{2}\Big(\frac{1}{e_r^2}-\frac{1}{\bar{e}^2}\Big)=\log\frac{q}{M}.$$

这简化为

$$\bar{e}^2(q)=\frac{e_r^2}{1-(e_r^2/6\pi^2)\log(q/M)}. \tag{12.88}$$

这个结果与我们在式(7.96)中发现的有效电荷公式几乎相同。为了巩固相互的关联，设M为电子质量阶，$M^2=Am^2$，在这个点将e_r近似为e，其中$\alpha=e^2/4\pi$。然后式(12.88)采用如下形式

$$\bar{\alpha}(q)=\frac{\alpha}{1-(\alpha/3\pi)\log(-q^2/Am^2)}. \tag{12.89}$$

特殊的选择$A=\exp(5/3)$重现了(7.96)式。当然，如果没有7.5节中详细的单圈计算，我们就无法找到这种精确的对应关系。然而，我们目前的分析给出了有效电荷的正确的渐近公式。此外，我们目前的形式理论可以应用于任何可重整化的量子场论；它不依赖于我们在 7.5 节中使用的QED的特殊对称性。

跑动耦合常数的替代方案

既然我们已经在两个特定的量子场论中计算了跑动耦合常数的行为，那么让我们更一般地考虑跑动耦合常数在原则上有哪些可能的行为。我们继续把我们的讨论限制在带有无量纲的耦合常数λ的、无质量极限下的可重整化理论。

根据上一节的讨论，在任何这类理论的格林函数都遵循 Callan-Symanzik 方程。这个方程的解依赖于跑动耦合常数，$\bar{\lambda}(p)$，它满足如下微分方程

$$\frac{\partial}{\partial\log(p/M)}\bar{\lambda}=\beta(\bar{\lambda}), \tag{12.90}$$

其中函数$\beta(\lambda)$可以作为耦合常数的幂级数而计算。在我们刚刚讨论的例子中，这个幂级数的领头系数是正的。但是从原则上讲，在小λ区域有三种可能的行为：

(1) $\beta(\lambda)>0$;
(2) $\beta(\lambda)=0$;
(3) $\beta(\lambda)<0$.

已知的量子场的例子展示了每一个这样的行为。

我们已经看到，在第一类理论中，跑动耦合常数在红外中趋近于零，从而对理论的小动量行为做出了明确的预测。然而，在高动量区域，跑动耦合常数变大。因此，该理论的短距离行为不能用费曼图微扰理论来计算。事实上，在上面研究的例子中，在动量很大但有限的区域，耦合常数在形式上趋于无穷大；因此，我们甚至不清楚这些理论是否具有一个非平凡的极限$\Lambda \to \infty$。如果一个人主要对长距离或宏观行为感兴趣，那么费曼图分析在这类理论中是有用的。在第 13 章中，我们将使用这种观察来解决系统在临界点的统计力学问题。

在第二类理论中，耦合常数是不流动的。在这些理论中，跑动耦合常数与动量标度无关，因此等于裸耦合。这意味着在耦合常数的关系中不存在紫外发散。在这些理论中，唯一可能的紫外发散是那些与场重标度有关的发散，这种发散在计算S矩阵元时自动消除。这种理论被称为**有限量子场论**。在我们关于重整化的现代的理解出现之前，这些理论被信奉为是解决紫外无穷大问题的办法，但事实上已知的有限场论在四维中是非常特殊的构造——所谓的广义超对称规范理论——但没有已知的物理应用。

在第三类理论中，跑动耦合常数在长距离时变大，在大动量或短距离时变小。例如，想象一下QEDβ函数的符号颠倒了：

$$\beta(e) = -\tfrac{1}{2}Ce^3. \tag{12.91}$$

然后，根据我们之前的分析，我们会得到

$$\bar{e}^2(p) = \frac{e^2}{1 + Ce^2 \log(p/M)}. \tag{12.92}$$

随着动量标度的增大，耦合常数以对数的速率趋于零。这种理论称为**渐近自由**。在这类理论中，短距离行为完全可以用费曼图方法求解。虽然紫外发散出现在微扰论的每一个阶中，重整化群告诉我们，这些发散的和是完全无害的。如果我们用裸耦合e_b和有限截断Λ来解释这些理论，当Λ趋于无穷时，结果(12.92)表明存在一个光滑极限，e_b趋于零。因此，渐近自由理论为紫外发散问题给出了另一种更精细的解。在第 17 章，我们会看到渐近自由在一个描述基本粒子物理的强相互作用的场论的表述中起着至关重要的作用。

既然我们已经列举了弱耦合区域中重整化群流的可能性，那么让我们把注意力转向强耦合区域。这里我们不能定量地计算β函数，但我们至少可以用重整化群方程定性地讨论耦合常数流的可能性。跑动耦合常数的所有显式解——式(12.82)、(12.88)和(12.92)——预测跑动耦合在动量p的有限值处变得无穷大。例如，根据式(12.82)，ϕ^4理论的跑动耦合常数应在

$$p \sim M \exp\Big(\frac{16\pi^2}{3\lambda}\Big). \tag{12.93}$$

发散。这可能是量子场论的真实行为，但我们还没有证明它，因为当跑动耦合常数变大时，我们所做的近似——忽略β函数中的高阶项——不再有效。有一种逻辑上的可能性是，β函数的更高项是负的，因此β函数的形式如图12.4(a)所示。在这种情况下，β函数在非零值λ_*处有一个零点。当λ接近这个值时，重整化群流会减慢到停止：$\lambda = \lambda_*$将是重整化群的一个非平凡不动点。在这个模型中，跑动耦合常数$\bar{\lambda}$在大动量极限下趋于λ_*。

对于四维ϕ^4理论的特殊情况，我们从数值研究中得到了强有力的证据，证明不存在这种非平凡不动点。然而，我们很快就会证明在$d < 4$的ϕ^4理论以及已知的更多例子中，存在有一个非平凡不动点。因此，研究重整化群流中不动点的含义是值得的。

对于图 12.4(a)形式的β函数，β函数在不动点附近的行为是

$$\beta \approx -B(\lambda - \lambda_*), \tag{12.94}$$

其中B是一个正的常数。对于λ_*附近的$\bar{\lambda}$，

$$\frac{d}{d\log p}\bar{\lambda} \approx -B(\bar{\lambda} - \lambda_*). \tag{12.95}$$

这个方程的解是

$$\bar{\lambda}(p) = \lambda_* + C\Big(\frac{M}{p}\Big)^B. \tag{12.96}$$

因此，当$p \to \infty$时，$\bar{\lambda}$确实趋于λ_*，且趋近率由β函数在不动点的斜率决定。这种行为对$G(p)$的 Callan-Symanzik 方程的精确解(12.72)有显著的影响。对于足够大的p，这个方程中指数因子里的积分由$\bar{\lambda}(p)$接近λ_*的p值占主导。于是

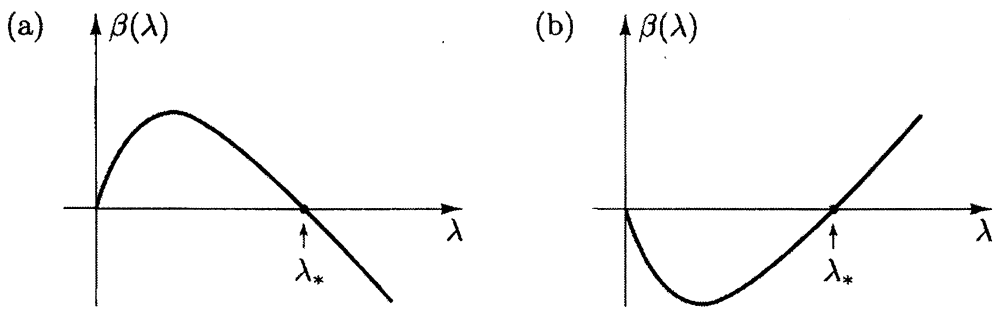


图 12.4 具有非平凡零点的β函数的可能形式：

(a)紫外稳定不动点；(b)红外稳定不动点。

$$\begin{aligned} G(p) &\approx \mathcal{G}(\lambda_*)\exp\Big[-\Big(\log\frac{p}{M}\Big)\cdot 2\big(1-\gamma(\lambda_*)\big)\Big] \\ &\approx C\cdot\Big(\frac{1}{p^2}\Big)^{1-\gamma(\lambda_*)}. \end{aligned} \tag{12.97}$$

因此，两点关联函数回归到一个简单的标度律形式，但其幂次律不同于量纲分析所期望的那样。在不动点处，我们有一个标度不变的量子场论，其中理论的相互作用影响着重标度律。指数的移动$\gamma(\lambda_*)$被称为标量场的**反常量纲**。根据惯例，即使在理论中没有不动点，函数$\gamma(\lambda)$也常被称为反常量纲。

在渐近自由理论中，类似的行为是可能的。如果β函数的形式如图12.4(b)所示，则跑动耦合常数在$p \to 0$时趋于一个不动点λ_*。对于渐近小动量，场的两点关联函数$G(p)$将趋向于(12.97)中的幂律。图12.4(a)和(b)所示的两种情况分别称为**紫外稳定**不动点和**红外稳定**不动点。

在上一节中，我们看到 Callan-Symanzik 函数β和γ的领头阶表达式以一种简单的方式与单圈抵消项的紫外发散部分相关联。然而，我们注意到，在高阶微扰论中，β和γ依赖于用来定义格林函数的特定的重整化约定。不过，这些函数的一些性质是独立于任何约定的。如表达式(12.82)或(12.89)中的分母中对数的系数，可以在测量该耦合常数的实验中被明确地确定。这证实了第一个β函数系数的约定独立性。对耦合常数敏感的实验也可以确定β函数在强耦合下是否存在零点，以及接近这条渐近线的速率。因此β函数的零点的存在性(但不一定是λ_*的值)、零点处的斜率B和不动点处的反常量纲的值，都应该独立于用来计算β和γ的约定。

12.4 局域算符的重整化

前两节的分析限于仅包含无量纲系数的量子场论，即在无质量极限下严格可重整的场论。将这一形式理论推广到包含质量项和其他的系数具有质量量纲的算符的理论并不难。然而，首先值得注意的是一个中间步骤，即分析局域算符的矩阵元的重整化群性质。这本身就是一个有趣的问题，我们将在第 18 章中花相当大的篇幅来讨论这种形式理论的应用。

量子场论计算中经常出现局域算符的矩阵元。通常，我们考虑的是一组相互作用的粒子，它们弱耦合到一个附加粒子上，其介导(mediate)了新的作用力。例如，考虑强相互作用的夸克理论，受到弱衰变过程的效应所微扰。弱相互作用是由一个有质量的矢量玻色子W来介导的，我们把夸克和W的相互作用非常示意性地写成

$$\delta\mathcal{L} = \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi, \tag{12.98}$$

并为W玻色子分配传播子：

$$\frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2 - m_W^2 + i\epsilon}. \tag{12.99}$$

我们将在第 18.2 节和第 20 章中更正确地讨论这种相互作用。W玻色子的交换导致如图 12.5 所示的相互作用。对于动量交换比m_W小的情况，我们可以忽略W传播子中的q^2，并把这种相互作用写成如下的算符矩阵元

$$\frac{g^2}{2m_W^2}\mathcal{O}(x), \quad \text{where} \quad \mathcal{O}(x) = \bar{\psi}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi\,\bar{\psi}\gamma_\mu(1-\gamma^5)\psi. \tag{12.100}$$

根据 Wilson 的重整化群程序的精神，我们可以说，在距离标度大于m_W^{-1}时，W玻色子可以被积出来，剩下相互作用(12.100)。

我们要怎么分析算符(12.100)对由夸克和反夸克组成的强相互作用粒子的影响呢？一种有用的方法是，计算出算符$\mathcal{O}$再加上产生和湮灭夸克的场的格林函数。如果我们用自由费米子理论来近似夸克理论，就很容易计算出这些格林函数；例

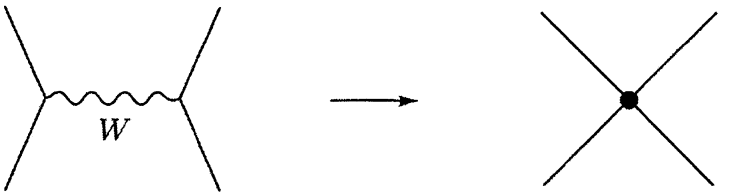


图 12.5 由W玻色子交换产生的夸克之间的相互作用。

如

$$\begin{aligned}&\left\langle\psi(p_1)\bar{\psi}(-p_2)\psi(p_3)\bar{\psi}(-p_4)\mathcal{O}(0)\right\rangle\\&\quad=S_F(p_1)\gamma^\mu(1-\gamma^5)S_F(p_2)\,S_F(p_3)\gamma_\mu(1-\gamma^5)S_F(p_4).\end{aligned}\tag{12.101}$$

然而，在一个相互作用场论中，答案会更加复杂。其中一些复杂的问题将涉及到低能夸克的相互作用，我们将把它们排除在目前的讨论之外。然而，在夸克相互作用的可重整化理论中，我们也将会发现，包含$\mathcal{O}$的格林函数有新的紫外发散。对(12.101)的单圈修正将包含一些图，计算出来是(12.101)右边乘以一个发散积分。这些图可以解释为算符$\mathcal{O}$的场强重整化。和基本场的关联函数一样，只有建立起局域算符归一化的约定，在微扰论中逐阶地以抵消项的形式引入算符的重标度，以保持这些约定，才能得到局域算符的有限且定义良好的矩阵元。更具体地说，在无质量、可重整化的费米子ψ的场论中，我们应该做出约定：即在一些类空的归一化点$p_1^2=p_2^2=p_3^2=p_4^2=-M^2$上，式(12.101)是精确的。然后，我们应该添加一个形式为$\delta_{\mathcal{O}}\mathcal{O}(x)$的抵消项，并在微扰论的每一阶上调整这个抵消项，以确保这些关系得到保留。我们把在M^2处满足归一化条件(12.101)的算符称为$\mathcal{O}_M$。

重整化的算符$\mathcal{O}_M$是由裸场构建的算符$\mathcal{O}_0$的重标度版本，

$$\mathcal{O}_0(x)=\bar{\psi}_0\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi_0\bar{\psi}_0\gamma_\mu(1-\gamma^5)\psi_0.\tag{12.102}$$

和我们在基本场下做的一样，我们可以把这个关系写成

$$\mathcal{O}_0=Z_{\mathcal{O}}(M)\mathcal{O}_M.\tag{12.103}$$

这使得我们可以写出裸场的和重整化场的格林函数之间的关系(12.35)的推广。让我们回到标量场论的语言，把$\mathcal{O}(x)$看作标量场论中的一个局域算符。定义

$$G^{(n;1)}(p_1,\cdots,p_n;k)=\left\langle\phi(p_1)\cdots\phi(p_n)\mathcal{O}_M(k)\right\rangle.\tag{12.104}$$

则$G^{(n;1)}$与裸场的格林函数有关：

$$G^{(n)}(p_1,\cdots,p_n;k)=Z(M)^{-n/2}Z_{\mathcal{O}}(M)^{-1}\left\langle\phi_0(p_1)\cdots\phi_0(p_n)\mathcal{O}_0(k)\right\rangle. \tag{12.105}$$

重复(12.63)和(12.64)的推导，我们发现包含有局域算符的格林函数服从Callan-Symanzik方程

$$\left[M\frac{\partial}{\partial M}+\beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}+n\gamma(\lambda)+\gamma_{\mathcal{O}}(\lambda)\right]G^{(n)}=0, \tag{12.106}$$

where

$$\gamma_{\mathcal{O}}=M\frac{\partial}{\partial M}\log Z_{\mathcal{O}}(M). \tag{12.107}$$

通常一个量子场论包含几个具有相同量子数的算符。例如，在量子电动力学中，算符$\bar{\psi}[\gamma^\mu D^\nu+\gamma^\nu D^\mu]\psi$和$F^{\mu\lambda}F^{\nu}_{\lambda}$都是带着零电荷的对称张量；此外，两个算符的质量量纲都是4。这样的算符，具有相同的量子数和相同的质量量纲，可以通过量子修正混合在一起*。对于这样一组算符$\{\mathcal{O}^i\}$，必须将重整化算符和裸算符的关系推广为

$$\mathcal{O}_0^i=Z_{\mathcal{O}}^{ij}(M)\mathcal{O}_M^j. \tag{12.108}$$

这种关系反过来又意味着，Callan-Symanzik 方程中的反常量纲函数$\gamma_{\mathcal{O}}$必须被推广到矩阵中，

$$\gamma_{\mathcal{O}}^{ij}=[Z_{\mathcal{O}}^{-1}(M)]^{ik}M\frac{\partial}{\partial M}[Z_{\mathcal{O}}(M)]^{kj}. \tag{12.109}$$

在第 18 章中，(12.106)的大多数应用都需要这样的推广。

另一方面，有一些算符的重标度和反常量纲特别简单。如果$\mathcal{O}$是夸克数流$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$，它的归一化是彻底地固定的，因为相关的荷

$$Q=\int d^3x\,\bar{\psi}\gamma^0\psi$$

仅仅是在给定状态下夸克数减去反夸克数的守恒的整数。更一般地，对于任何守恒流J^μ，$Z_J(M)=1$，$\gamma_J=0$。同样的论证也适用于能动量张量。因此，在上面的QED例子中，特定的线性组合

$$T^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\bar{\psi}[\gamma^\mu D^\nu+\gamma^\nu D^\mu]\psi+\frac{1}{4}F^{\mu\lambda}F^{\nu}{}_{\lambda} \tag{12.110}$$

没有获得重标度和反常量纲。算符的这个线性组合必须是矩阵γ^{ij}的本征值为零的本征向量。

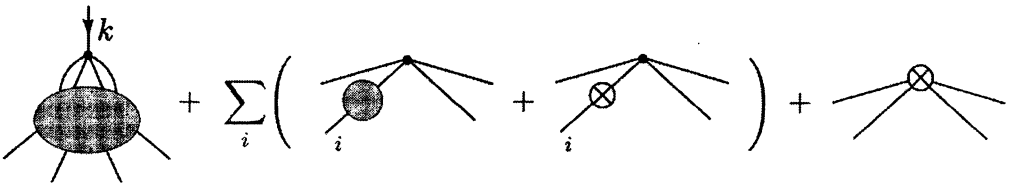
*我们在无质量场论中工作的假设限制了算符混合的可能性。在有质量场论中，给定量纲的算符也可以与较低量纲的算符混合。

到目前为止，我们对算符矩阵元的讨论还比较抽象。为了使它更具体，我们将构造一个公式来根据单圈抵消项计算$\gamma_{\mathcal{O}}$的领头阶，然后将这个公式应用到ϕ^4理论的一个简单例子上。

为了找到一个关于$\gamma_{\mathcal{O}}$的简单公式，我们遵循从(12.52)到β函数的公式(12.53)的相同路径。考虑一个算符，其归一化条件是基于一个含有m个标量场的格林函数：

$$G^{(m;1)} = \langle \phi(p_1) \cdots \phi(p_m) \mathcal{O}_M(k) \rangle \,. \tag{12.111}$$

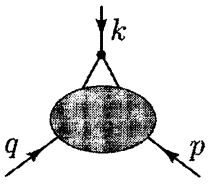
在单圈阶上计算格林函数，我们得到了一组图：



最后一个图是保持重整化条件所需要的抵消项$\delta_{\mathcal{O}}$。注意，抵消项δ_Z也出现了。如果我们坚持图的这个和在λ的领头阶上满足 Callan-Symanzik 方程(12.106)，我们就会发现类似于(12.53)的关系

$$\gamma_{\mathcal{O}}(\lambda) = M \frac{\partial}{\partial M} \Big(-\delta_{\mathcal{O}} + \frac{m}{2} \delta_Z \Big). \tag{12.112}$$

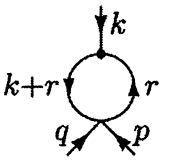
作为应用该公式的一个特殊例子，让我们来计算ϕ^4理论中质量算符ϕ^2的反常量纲$\gamma_{\mathcal{O}}$。这个计算有一点微妙之处。ϕ^4理论的费曼图产生了一个附加的质量重整化，它在微扰论的每一阶都要被质量抵消项移除。我们想把质量算符定义为一个微扰，而我们可以把它加到以这种方式定义的无质量理论上。为了明确基本质量(它被重整化为零)和显式质量微扰之间的区别，我们将分析ϕ^2的格林函数，其中，该算符携带特定的非零动量。因此，我们选择根据如下约定来定义ϕ^2的归一化



$$= \big\langle \phi(p)\phi(q)\phi^2(k) \big\rangle = \frac{i}{p^2} \frac{i}{q^2} \cdot 2 \tag{12.113}$$

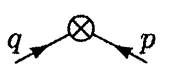
at $p^2 = q^2 = k^2 = -M^2$.

对(12.113)的单粒子不可约单圈修正为



$$= \frac{i}{p^2}\frac{i}{q^2}\int \frac{d^d r}{(2\pi)^d}(-i\lambda)\frac{i}{r^2}\frac{i}{(k+r)^2}$$
$$= \frac{i}{p^2}\frac{i}{q^2}\Big[-\frac{\lambda}{(4\pi)^2}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}}\Big], \tag{12.114}$$

其中Δ是外部动量的一个函数。在$-M^2$处，这个贡献必须用如下抵消项图来抵消



$$= \frac{i}{p^2}\frac{i}{q^2}2\delta_{\phi^2}. \tag{12.115}$$

因此，抵消项必须是

$$\delta_{\phi^2} = \frac{\lambda}{2(4\pi)^2}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(M^2)^{2-d/2}}. \tag{12.116}$$

因为δ_Z在λ阶是有限的，所以这是对(12.112)的唯一贡献，则我们发现

$$\gamma_{\phi^2} = \frac{\lambda}{16\pi^2}. \tag{12.117}$$

该函数可以与纯无质量ϕ^4理论的γ和β函数一起，被用来讨论包含了质量算符的格林函数的标度。

12.5 质量参数的演化

最后，我们讨论具有质量的理论的重整化群。我们注意到，尽管我们把这些质量当作任意参数。我们将继续使用与质量无关的重整化约定，并且还将经常把质量视为小参数。这种方法在动量标度比质量标度小得多的时候不适用，但对于重整化群的大多数实用的应用来说，它是足够的，而且比其他可选的方法更简单。

在上一节中，我们计算了包含质量算符一次幂的格林函数的标度。将这个讨论推广到包含任意数量ℓ的质量算符是一个小步骤；我们简单地得到方程(12.106)，在项$\gamma_{\mathcal{O}}$前面带着系数ℓ。现在考虑一下，如果我们把质量算符直接加到无质量ϕ^4理论的拉格朗日量中并把这个算符当作微扰，会发生什么。如果$\mathcal{L}_M$是在标度M上重整化的无质量拉格朗日量，则新的拉格朗日量将会是

$$\mathcal{L}_M + \tfrac{1}{2}m^2\phi_M^2. \tag{12.118}$$

理论(12.118)中的n个标量场的格林函数，可以被表达为以质量参数m^2展开的微扰级数。$(m^2)^\ell$的系数将是带着ϕ_M^2的ℓ次幂和n个标量场的联合关联函数，因此满足 Callan-Symanzik 方程(12.106)——带着上面提到的额外因子ℓ。通常，我们可以使用算符$m^2(\partial/\partial m^2)$来计算$\phi^2$的插入$\ell$的数目。然后，根据质量无关方案来重整化的、有质量$\phi^4$理论的格林函数，满足如下方程

$$\Big[M\frac{\partial}{\partial M}+\beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}+n\gamma(\lambda)+\gamma_{\phi^2}m^2\frac{\partial}{\partial m^2}\Big]G^{(n)}(\{p_i\};M,\lambda,m^2)=0. \quad (12.119)$$

将这个论证延续到无质量ϕ^4理论的任何微扰。一般情况下

$$\mathcal{L}(C_i)=\mathcal{L}_M+C_i\mathcal{O}_M^i(x), \quad (12.120)$$

这个微扰的理论的格林函数满足

$$\Big[M\frac{\partial}{\partial M}+\beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}+n\gamma(\lambda)+\sum_i\gamma_i(\lambda)C_i\frac{\partial}{\partial C_i}\Big]G^{(n)}(\{p_i\};M,\lambda,\{C_i\})=0. \quad (12.121)$$

为了解释这个方程，稍做改变以使得符号符合我们的新观点将是有用的。设d_i为算符$\mathcal{O}^i$的质量量纲。然后通过将每个系数C_i表示为M的幂和无量纲系数ρ_i，重写(12.120)：

$$\mathcal{L}(\rho_i)=\mathcal{L}_M+\rho_iM^{4-d_i}\mathcal{O}_M^i(x). \quad (12.122)$$

每个ρ_i的大小表示相应的算符在标度M上的重要性。这个新约定进一步将M的依赖性显式地引入到格林函数中，格林函数通过ρ_i的重标度得到补偿。因此(12.121)必须修改为

$$\Big[M\frac{\partial}{\partial M}+\beta\frac{\partial}{\partial\lambda}+n\gamma+\sum_i[\gamma_i(\lambda)+d_i-4]\rho_i\frac{\partial}{\partial\rho_i}\Big]G^{(n)}(\{p_i\};M,\lambda,\{\rho_i\})=0. \quad (12.123)$$

这个方程的意义可以变得更清楚，如果我们定义

$$\beta_i=(d_i-4+\gamma_i)\rho_i. \quad (12.124)$$

Then

$$\Big[M\frac{\partial}{\partial M}+\beta\frac{\partial}{\partial\lambda}+\sum_i\beta_i\frac{\partial}{\partial\rho_i}+n\gamma\Big]G^{(n)}(\{p_i\};M,\lambda,\{\rho_i\})=0. \quad (12.125)$$

现在所有的耦合常数ρ_i出现的地位都与λ相同。我们可以使用与12.3节相同的方法来求解这个广义的Callan-Symanzik方程，通过引入生活在多维空间中速度场

(β, β_i)的细菌。解将依赖于一组跑动耦合常数，这些常数服从方程

$$\frac{d}{d\log(p/M)}\bar{\rho}_i = \beta_i(\bar{\rho}, \bar{\lambda}). \tag{12.126}$$

在所有的无量纲参数λ，ρ_i都很小的情况下，我们很接近自由的标量场拉格朗日量，来检查耦合常数的这个流是有趣的。在这种情况下，我们可以忽略γ_i对β_i的贡献；然后

$$\frac{d}{d\log(p/M)}\bar{\rho}_i = [d_i - 4 + \cdots]\bar{\rho}_i. \tag{12.127}$$

这个方程的解是

$$\bar{\rho}_i = \rho_i\Big(\frac{p}{M}\Big)^{d_i-4}. \tag{12.128}$$

质量量纲大于4的算符，对应于不可重整相互作用，它作为p的幂在$p \to 0$下，变得不那么重要了。这正是我们使用Wilson方法在式(12.27)中发现的行为。由于我们现在已经推广了Callan-Symanzik方程，在自由场拉格朗日量中囊括了最一般的微扰，所以很高兴我们重新获得了耦合常数的Wilson流的完整结构。此外，这个更正式的方法为我们提供了一种途径，使用费曼图，按λ阶逐阶地计算$\lambda\phi^4$相互作用对Wilson流的修正。

我们可以从四维移动到任意维度d，从而更接近第12.1节的推广。我们只需要在形式理论有两个小改变。首先，当$d \neq 4$时，算符ϕ^4获得一个带量纲的系数，我们必须考虑到这一点。我们在式(10.13)下面的讨论中已经看到，标量场具有质量量纲$(d-2)/2$。因此，算符ϕ^4具有质量量纲$(2d-4)$，所以其系数具有量纲$4-d$。为了实现重整化群，我们重新定义λ以使得这个系数在d维依然是无量纲的。我们类似地处理质量项，替换$m^2 \to \rho_m M^2$。因此，拉格朗日量关于自由标量场论$\mathcal{L}_0$的展开式为：

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \frac{1}{2}\rho_m M^2 \phi_M^2 - \frac{1}{4}\lambda M^{4-d}\phi_M^4 + \cdots. \tag{12.129}$$

形式理论的第二个必要变化是在新维度中重新计算β和γ函数。在λ阶，结果出人意料地是无害的。例如考虑γ_{ϕ^2}的计算，式(12.114)。这种以维数正规化执行的计算基本没有变化。对于d的一般值，抵消项δ_{ϕ^2}对$\log M$的导数仍然包含因子

$$M\frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(M^2)^{2-d/2}}\right) = -2 + \mathcal{O}(4-d). \tag{12.130}$$

这个观察对所有的γ_i都成立，而β函数只被λ的质量量纲的贡献所移动。因此，对于d接近 4，

$$\begin{aligned}\beta &= (d-4)\lambda + \beta^{(4)}(\lambda) + \cdots, \\ \beta_m &= [-2 + \gamma_{\phi^2}^{(4)}]\rho_m + \cdots, \\ \beta_i &= [d_i - d + \gamma_i^{(4)}]\rho_i + \cdots,\end{aligned} \tag{12.131}$$

其中带有上标(4)的函数是本节前面得到的四维结果，省略的修正项是$\lambda \cdot (d-4)$阶的。这些修正的精确形式依赖于重整化方案*。

利用β的显式四维结果(12.46)，我们现在发现

$$\beta = -(4-d)\lambda + \frac{3\lambda^2}{16\pi^2}. \tag{12.132}$$

对于$d \geq 4$，该函数为正，并预测耦合常数在大距离下平滑地流向零。但是，当$d < 4$时，这个$\beta(\lambda)$的形式如图12.4(b)所示。因此，它产生的耦合常数流正如我们在式(12.29)下面从Wilson的观点上讨论过。在小的λ值下，耦合常数随着距离的增加而增加，和量纲分析预测一样。然而，在较大的λ处，耦合常数减小，是其自身的非线性效应的结果。这两种趋势在如下β函数的零点处趋于平衡，

$$\lambda_* = \frac{16\pi^2}{3}(4-d), \tag{12.133}$$

这给出了$d < 4$时标量场论中重整化群流的一个非平凡不动点。如果我们正式地考虑d接近4的值，这个不动点发生在耦合常数很小的区域，我们可以使用费曼图来研究它的性质。这个不动点是由Wilson和Fisher发现的**，它对统计力学有着重要的影响，我们将在第 13 章讨论。

临界指数：初识

作为本节形式理论的一个应用，我们来计算在ϕ^4理论中质量算符的系数的重整化群流。这是通过对式(12.126)积分得到的，利用(12.131)的β_m值

$$\frac{d}{d\log p}\bar{\rho}_m = [-2 + \gamma_{\phi^2}(\bar{\lambda})]\bar{\rho}_m. \tag{12.134}$$

---

*更高阶的展开显示在 E. Brezin, J. C. Le Gillouand J Zinn-justin, *Phys. Rev.* D9, 1121(1974)中。

K. G. Wilson and M. E Fisher. *Phys. Rev. Lett.* **28, 240(1972)

对于$\lambda = 0$，这个方程给出了平凡关系

$$\bar{\rho}_m = \rho_m \Big(\frac{M}{p}\Big)^2. \tag{12.135}$$

如果我们回忆一下我们最初定义的$\rho_m = m^2/M^2$，这不过是用一种复杂的方式来说明当p变成m阶时，质量项变成拉格朗日量中一个重要的项。此时，ϕ场中的关联性开始以指数形式消失。关联性的特征范围——在统计力学中称为关联长度ξ——被给出为

$$\xi \sim p_0^{-1}, \qquad \text{where } \bar{\rho}_m(p_0) = 1. \tag{12.136}$$

如果我们对这个判据求值，我们会发现$\xi \sim (M^2\rho_m)^{-1/2}$，即$\xi \sim m^{-1}$，正如我们所期望的那样。

然而，该判据在不动点λ_*的应用得到了一个有趣得多的结果。如果我们设$\bar{\lambda} = \lambda_*$，则式(12.134)有解为

$$\bar{\rho}_m = \rho_m \Big(\frac{M}{p}\Big)^{2-\gamma_{\phi^2}(\lambda_*)}. \tag{12.137}$$

这给出了一个非平凡关系

$$\xi \sim \rho_m^{-\nu}, \tag{12.138}$$

其中指数ν是由如下表达式正式地给出的

$$\nu = \frac{1}{2 - \gamma_{\phi^2}(\lambda_*)}. \tag{12.139}$$

利用结果(12.133)和(12.117)，我们可以对d在4附近的值进行显式计算：

$$\nu^{-1} = 2 - \frac{1}{3}(4 - d). \tag{12.140}$$

Wilson和Fisher证明了这个表达式可以展开为以$\epsilon = 4 - d$为幂的ν的系统展开式。

由于指数ν在统计力学中有解释，所以它在三维的实际情况下是可以直接测量的。在标量场论的统计力学解释中，ρ_m仅仅是使系统达到临界温度必须精细调整的参数。因此ρ_m正比于与临界温度的偏差，$(T - T_C)$。我们的场论分析表明，根据标度关系，磁体中的关联长度在$T \to T_C$时的增长为

$$\xi \sim (T - T_C)^{-\nu}. \tag{12.141}$$

它还对ν的值给出了一个明确的、有点不寻常的预测。它预测ν接近1/2，正是第8章((8.16)式)中研究的朗道近似法所建议的值，但是ν与这个值之间存在一些系统的修正。

在磁体中可以观察到(12.141)类型的标度行为，并且已知，出现的若干确定的标度律，依赖于自旋序的对称性。磁体可以用涨落的自旋分量的数目来表征：具有优势(preferred)轴的磁体为$N=1$，具有优势面的磁体为$N=2$，三维空间各向同性磁体为$N=3$。ν的实验值依赖于这个参数。本章讨论的ϕ^4场论只包含一个涨落场；这是有单自旋分量的磁铁的类比。在第11章中，我们考虑将ϕ^4理论推广到具有$O(N)$对称性的N个场的理论。我们可能猜想这个系统类比了一般N的磁铁。

如果这种对应关系是正确的，式(12.140)给出了具有优势轴的磁体中ν值的预测。在第13.1节中，我们将在$O(N)$对称的ϕ^4理论中重复这个导致了该方程的分析，并推导出公式

$$\nu^{-1}=2-\frac{N+2}{N+8}(4-d), \tag{12.142}$$

它对于一般的N在$(4-d)$下的第一阶下是有效的。对于$N=1,2,3$和$d=3$的情况，这个公式预测

$$\nu=0.60,\ 0.63,\ 0.65. \tag{12.143}$$

为便于比较，下面给出磁系统中ν的最佳电流实验测定值*

$$\nu=0.64,\ 0.67,\ 0.71 \tag{12.144}$$

对于$N=1,2,3$。预测(12.143)对实验结果给出了合理的一阶近似。

量子场论预测临界指数的能力，是量子场论和统计力学之间的形式联系以及重整化群预测耦合常数流的一个具体应用。然而，临界行为的另一个实验方面甚至更引人注目，更有说服力。临界行为不仅可以在磁体中研究，而且可以在流体、二元合金、超流氦和许多其他系统中研究。长期以来，人们都知道，对于具有这种微观动力学差异的系统，临界点处的标度指数只依赖于涨落变量的量纲N，而不依赖于原子结构的任何其他细节。例如，流体、二元合金和单轴磁体具有相同的临界指数。在没有受过教育的人看来，这似乎是个奇迹。但是对于量子场论家来说，这个结论是重整化群思想的自然结果，在重整化群思想中，场论相互作用的大部分细节都是由这样一些算符描述的，当场论找到它的正确的、简单的、大距离的行为时，这些算符就会变成无关算符。

*详情见表 13.1 及其讨论。

Chapter 13

临界指数和标量场论

跑动耦合常数和重整化群流的思想为讨论标量场论的定性行为提供了一种新的语言。在我们对ϕ^4理论的刚开始的讨论中，耦合的每一个值——更普遍地说，势的每一种形式和每一个时空维数——都给出了一个被探索的单独问题。但是在第12章中，我们看到了不同耦合值的ϕ^4理论是由重整化群流连接起来的，这些流的模式随着时空维数连续地变化。在这种背景下，问一个非常普遍的问题是有意义的：ϕ^4理论作为维数的函数是如何表现的？这一章将对这个问题作出详细的回答。

我们分析的核心内容将是第 12.5 节中讨论的Wilson-Fisher不动点。这个不动点存在于$d<4$的时空维数d中；在这些维数上，它控制了无质量ϕ^4理论的重整化群流。根据质量参数m^2的符号，标量场论具有明显的或自发破缺的对称性。在$m^2=0$附近，该理论表现出了带有反常量纲的标度行为，反常量纲的值由重整化群方程确定。对于$d>4$，Wilson-Fisher不动点消失了，只有自由场不动点剩下。这一理论再次显示出两个不同的相，但是现在，相变处的行为是由自由场不动点附近的重整化群流决定的，所以标度律是从简单的量纲分析得出的。

将这些结果推广到欧几里得空间，对于磁体和流体中的相变理论具有重要的应用价值。正如我们在前一章所讨论的，重整化群的思想充分证明了在欧几里得ϕ^4理论中，热力学量在相变点附近的幂律行为是由关联函数的行为决定的。对于空间维数$d>4$的统计系统，其标度律仅是由简单的量纲分析得到的。这些预测正是我们在第8章中讨论过的朗道理论的预测。另一方面，对于$d<4$，临界标度律被修正了，使我们可以利用重整化群来进行计算。

在$d=4$时，我们处于两种标度行为的边界上。这对应于ϕ^4理论是精确地可重整化的情况。在这种情况下，量纲分析的预测被修正了，但只被对数修正了。我们将在第 13.2 节中具体分析这种情况，

虽然不是很明显，但是$d=2$提供了另一种边界。在这里，向自发对称性破缺的转变可以被一个不同的量子场论描述，它在二维中变得可重整化。在第 13.3 节中，我们将介绍这个理论，称为**非线性 sigma 模型**，并展示其重整化群行为如何与ϕ^4理论顺利融合。通过结合本章的所有结果，我们将对整个时空维数的范围内，ϕ^4理论行为以及临界现象，有一个定量的理解。

13.1 临界指数理论

在第 12 章的最后，我们利用标量场论重整化群的性质对热力学系统临界点附近的关联行为进行了预测。我们认为，根据标度律(12.141)，当我们接近临界点时，关联性的范围，即关联长度ξ，应该增加到无穷大。这个方程的指数，称为ν，应该只依赖于序参量的对称性。我们进一步论证，这个指数与ϕ^4理论中局域算符的反常量纲有关，它可以从费曼图中计算出来。在本节中，我们将证明，类似的结论可以更广泛地应用于与临界点相关的大量标度律。

首先，我们将系统地定义一组**临界指数**，即描述临界点附近热力学行为的标度律的指数。然后，我们将用Callan-Symanzik方程证明，所有这些指数都可以归结为两个基本的反常量纲，最后，我们将把量子场论的这一显著预测与实验进行比较。

在提出一组临界标度律时，我们首先从有序场的涨落的关联函数行为入手。为明确起见，我们将使用适合磁体的语言，和第 8 章一样。我们将把经典的热学期望值作为欧几里得量子场论中的关联函数来计算，如 9.3 节所述。涨落场将被称为自旋场$s(x)$，其积分将是磁化强度M，和$s(x)$耦合的外部场将被称为磁场H(为与磁化强度区别，在这一节我们将Callan-Symanzik方程的重整化标度表示为μ)。

用下式来定义两点关联函数

$$G(x)=\langle s(x)s(0)\rangle\,, \tag{13.1}$$

或者如果我们处于磁化相$\langle s(x)\rangle\neq 0$，可以用连通的期望值来定义。远离临界点

时，$G(x)$应该根据下式地呈指数衰减，

$$G(x) \sim \exp[-|x|/\xi]. \tag{13.2}$$

对临界点的逼近可以由如下参数描述

$$t = \frac{T - T_C}{T_C}. \tag{13.3}$$

然后我们期望，当$t \to 0$时，关联长度应该增加到无穷大。根据如下公式定义指数ν，(12.141)：

$$\xi \sim |t|^{-\nu}. \tag{13.4}$$

当$t = 0$时，关联函数应该仅仅会按幂律衰减。用如下公式定义指数η

$$G(x) \sim \frac{1}{|x|^{d-2+\eta}}, \tag{13.5}$$

其中d为欧几里得空间维数。

临界点附近的热力学量的行为定义了许多额外的指数。一般情况下，热力学系统的比热在$t \to 0$时发散；由固定外磁场$H = 0$时的比热公式定义指数α：

$$C_H \sim |t|^{-\alpha}. \tag{13.6}$$

由于序是在$t = 0$处设置的，因此在零场下的磁化强度在t从下面趋于零。如下地定义指数β(不要与Callan-Symanzik函数混淆)

$$M \sim |t|^{\beta}. \tag{13.7}$$

在非零磁场下，即使在$t = 0$的情况下，也有非零磁化。我们将$H \to 0$时磁化强度趋向于零的规律写为如下关系

$$M \sim H^{1/\delta}. \tag{13.8}$$

最后，磁化率在临界点处发散；我们把这个发散写成关系式

$$\chi \sim |t|^{-\gamma}. \tag{13.9}$$

式(13.4) – (13.9)定义了一组临界指数$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \nu, \eta$，它们可以用不同的热力学系统进行实验测量。*

在第 12 章中，我们跟随Wilson的观点，认为在临界点附近的热动力学系统可以用欧几里得量子场论来描述。在原子标度的层面上，这个量子场论的拉格朗日量可能是复杂的；然而，当我们积出小标度的自由度时，这个拉格朗日

*各种进一步的临界指数和关系被给出在 M. E. Fisher, *Repts. Prog. Phys.* **30**, 615(1967)

量会被简化。如果我们调整理论的一个参数以确保长程关联性的存在，拉格朗日量必须接近重整化群的一个不动点。一般情况下，拉格朗日量将以一个不稳定或相关的方向逼近不动点，对应于ϕ^4理论的质量参数。在$d<4$中，这是 Wilson-Fisher 不动点。在$d>4$中，它是自由场不动点。为了明确起见，我们将在接下来的讨论中假设$d<4$。

自旋关联函数的指数

在这种情况下，我们可以研究自旋-自旋关联函数$G(x)$的行为。根据刚才讨论的论点，$G(x)$与欧几里得标量场论的两点关联函数成正比。上一章介绍的技术可以直接应用。关联函数服从 Callan-Symanzik 方程(12.125)，

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\sum_i\beta_i\frac{\partial}{\partial\rho_i}+2\gamma\right]G(x;\mu,\{\rho_i\})=0. \tag{13.10}$$

这里，我们在广义耦合ρ_i中包括了ϕ^4耦合λ。

通过量纲分析，在 d 维中，

$$G(x)=\frac{1}{|x|^{d-2}}g(\mu|x|,\{\rho_i\}), \tag{13.11}$$

其中g是无量纲参数的一个任意函数(这是$G(p)\sim p^{-2}$乘以一个无量纲函数的陈述的傅里叶变换)。在此基础上，利用第12.3节的方法求解 Callan-Symanzik 方程(13.10)，得到

$$G(x)=\frac{1}{|x|^{d-2}}h(\{\bar\rho_i(x)\})\cdot\exp\left[-2\int_{1/\mu}^{|x|}d\log(|x'|)\,\gamma(\{\bar\rho(x')\})\right], \tag{13.12}$$

其中h是一个无量纲初始条件。跑动耦合常数$\bar\rho_i$服从微分方程

$$\frac{d}{d\log(1/\mu|x|)}\bar\rho_i=\beta_i(\{\rho_j\}). \tag{13.13}$$

我们在 12.5 节中研究了这个方程的解。我们看到，对于接近 Wilson-Fisher 不动点的流，质量算符的无量纲系数随着我们向大距离移动而增大，而其他无量纲参数变小。设λ_*为不动点的位置。然后我们可以写得更明确

$$\begin{aligned}\bar\rho_m&=\rho_m(\mu|x|)^{2-\gamma_{\phi^2}(\lambda_*)},\\ \bar\rho_i&=\rho_i(\mu|x|)^{-A_i},\end{aligned} \tag{13.14}$$

其中对于$i \neq m$，$A_i > 0$。如果λ与不动点的偏差被认为ρ_i的其中一个，通过定义

$$\rho_\lambda = \lambda - \lambda_*, \tag{13.15}$$

正如我们在式(12.96)演示的那样，这个参数的重要性也随着$|x|$的幂次而降低。如果使用 12.1 节的语言，所有的参数ρ_i都乘以了无关算符，除了ρ_m，它乘以了一个相关算符。

为了接近临界点，我们调节了基础理论的参数，使在原子标度附近的某个标度$(1/\mu)$处，$\rho_m \ll 1$。如果通过调节热力学系统的温度来调节ρ_m，则$\rho_m \sim t$。如果存在一个$\bar{\rho}_m$仍然很小但其他$\bar{\rho}_i$可以忽略的距离标度区域，则临界标度定律成立。然后，通过求 Callan-Symanzik 方程的解，其中$\bar{\rho}_m$由(13.14)给出而其他$\bar{\rho}_i$被设为零，可以计算标度律。对这个近似的修正可以被证明与t的正幂次成正比。

在这个近似中，我们应该在$\bar{\rho}_\lambda = 0$ 处计算(13.12)中的函数$\gamma(\lambda)$，也就是在不动点处的值。利用这个值和$\bar{\rho}_m$的解，式(13.12)变为

$$G(x) = \frac{1}{|x|^{d-2}} \cdot \frac{1}{(\mu|x|)^{2\gamma(\lambda_*)}} \cdot h\big(t(\mu|x|)^{2-\gamma_{\phi^2}(\lambda_*)}\big). \tag{13.16}$$

这个方程包含标度律(13.5)和(13.4)：对于 h 的参数足够小，$G(x)$服从式(13.5)

$$\eta = 2\gamma(\lambda_*). \tag{13.17}$$

在大距离下，h 必须呈指数衰减，因为这个函数是由标量场传播子导出的。从 h 的参数，我们推断这个指数一定是如下形式的

$$\exp[-|x|(\mu t^\nu)], \tag{13.18}$$

其中(12.139)，

$$\nu = \frac{1}{2 - \gamma_{\phi^2}(\lambda_*)}. \tag{13.19}$$

这正是标度律(13.2)，(13.4)，用算符ϕ^2的反常量纲来识别ν。

热力学函数的指数

通过研究宏观热力学变量的标度行为，可以得到类似的热力学临界标度律。这些都是从吉布斯自由能推导出来的，或者用量子场的语言，从标量场理论的有效势推导出来的。因为有效势，更普遍地说，有效作用量，是由关联函数构成的，这些量应该满足 Callan-Symanzik 方程。现在我们将构造这些方程，然后用它们来识别热力学临界指数。

在式(11.96)中，我们证明了有效作用量Γ依赖于经典场$\phi_{\rm cl}$，使得Γ对$\phi_{\rm cl}$的n阶导数给出了场论的单粒子不可约n点函数。因此，我们可以通过写出泰勒级数，用1PI函数中重新构造Γ

$$\Gamma[\phi_{\rm cl}] = i\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{n!}\int dx_1\cdots dx_n\,\phi_{\rm cl}(x_1)\cdots\phi_{\rm cl}(x_n)\,\Gamma^{(n)}(x_1,\ldots,x_n), \quad (13.20)$$

其中$\Gamma^{(n)}$是1PI振幅。

要找到$\Gamma[\phi_{\rm cl}]$所满足的Callan-Symanzik方程，最简单的方法是先求出$\Gamma^{(n)}$所满足的方程

$$\Gamma^{(3)}(p_1,p_2,p_3) = \frac{1}{G^{(2)}(p_1)G^{(2)}(p_2)G^{(2)}(p_3)}G^{(3)}(p_1,p_2,p_3). \quad (13.21)$$

用因子$Z(\mu)$来重标度，可以看出$\Gamma^{(3)}$与裸场的不可约三点函数的联系为

$$\Gamma^{(3)}(p_1,p_2,p_3) = Z(\mu)^{+3/2}\Gamma_0^{(3)}(p_1,p_2,p_3).$$

类似地，不可约n点函数与相应的裸场函数有关：

$$\Gamma^{(n)} = Z(\mu)^{n/2}\Gamma_0^{(n)}. \quad (13.22)$$

除了指数符号的变化外，这种关系的形式与完全格林函数的对应关系(12.35)相同。从这一点出发，我们可以遵循推导格林函数的Callan-Symanzik方程(式(12.41))的逻辑；唯一的区别是$n\gamma$项是以相反的符号进入的。因此我们发现

$$\Big[\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda} - n\gamma(\lambda)\Big]\Gamma^{(n)}(\{p_i\};\mu,\lambda) = 0. \quad (13.23)$$

为了将其转化为有效作用量的方程，请注意，在方程(13.20)的右边，函数$\Gamma^{(n)}$伴随经典场的n次幂。用$\phi_{\rm cl}$的n次幂式对(13.23)积分并对n求和，等价于方程：

$$\Big[\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda} - \gamma(\lambda)\int dx\,\phi_{\rm cl}(x)\frac{\delta}{\delta\phi_{\rm cl}(x)}\Big]\Gamma([\phi_{\rm cl}];\mu,\lambda) = 0. \quad (13.24)$$

乘上$\gamma(\lambda)$的算符计算了泰勒展开式的每一项中$\phi_{\rm cl}$的幂次的数目。通过将式(13.24)特殊化到常数$\phi_{\rm cl}$的情况，我们找到了$V_{\rm eff}$的 Callan-Symanzik 方程

$$\Big[\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda} - \gamma\phi_{\rm cl}\frac{\partial}{\partial\phi_{\rm cl}}\Big]V_{\rm eff}(\phi_{\rm cl},\mu,\lambda) = 0. \quad (13.25)$$

将式(13.25)应用于临界指数问题，我们首先将该方程转换为统计力学的符号，通过用磁化强度M代替$\phi_{\rm cl}$，用H代替共轭源J，用吉布斯自由能$\mathbf{G}(M)$代替有效势$V_{\rm eff}$。同时，我们将λ推广到一组完全的ρ_i耦合。然后(13.25)采取如下形式

$$\Big[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\sum_i\beta_i\frac{\partial}{\partial\rho_i}-\gamma M\frac{\partial}{\partial M}\Big]\mathbf{G}(M,\mu,\{\rho_i\})=0. \tag{13.26}$$

现在我们来求这个方程的解。和前面一样，我们从量纲分析开始。在d维中，有效势具有质量量纲d，标量场具有质量量纲$(d-2)/2$。因此

$$\mathbf{G}(M,\mu,\{\rho_i\})=M^{2d/(d-2)}\hat{g}\big(M\mu^{-(d-2)/2},\{\rho_i\}\big), \tag{13.27}$$

其中$\hat{g}$是一个新的无量纲函数。将(13.27)代入(13.26)，我们看到$\hat{g}$满足

$$\Big[\sum_i\beta_i\frac{\partial}{\partial\rho_i}-\Big(\frac{d-2}{2}+\gamma\Big)M\frac{\partial}{\partial M}-d\frac{2}{d-2}\gamma\Big]\hat{g}\big(M\mu^{-(d-2)/2},\{\rho_i\}\big)=0, \tag{13.28}$$

that is,

$$\Big[M\frac{\partial}{\partial M}-\sum_i\frac{2\beta_i}{(d-2+2\gamma)}\frac{\partial}{\partial\rho_i}+\frac{4d\gamma}{(d-2)(d-2+2\gamma)}\Big]\hat{g}=0. \tag{13.29}$$

解这个方程，我们发现

$$\begin{aligned}\mathbf{G}(M)=M^{2d/(d-2)}&\hat{h}(\{\bar{\rho}_i(M)\})\\&\times\exp\Big[-\int_{\mu^{(d-2)/2}}^{M}d\log(M')\frac{4d\gamma}{(d-2)(d-2+2\gamma)}(\{\bar{\rho}(M')\})\Big],\end{aligned} \tag{13.30}$$

其中跑动耦合常数$\bar{\rho}_i$服从

$$\frac{d}{d\log M}\bar{\rho}_i=\frac{2\beta_i(\{\bar{\rho}_i\})}{d-2+2\gamma(\{\bar{\rho}_i\})}. \tag{13.31}$$

正如我们在讨论自旋关联函数时一样，通过假设我们在一个接近Wilson-Fisher不动点的重整化群流上，我们可以特殊化为临界区域。我们再次忽略了无关算符的影响。然后我们应该设置

$$\begin{aligned}\bar{\rho}_m&=\rho_m\big(M\mu^{-(d-2)/2}\big)^{-2(2-\gamma_{\phi^2}(\lambda_*))/(d-2+2\gamma(\lambda_*))},\\\bar{\rho}_i&=0\qquad\text{for } i\neq m,\end{aligned} \tag{13.32}$$

其中$\rho_m\sim t$。在这个近似中，吉布斯自由能的形式是

$$\begin{aligned}\mathbf{G}(M,t)=M^{2d/(d-2)}&\cdot\big(M\mu^{-(d-2)/2}\big)^{-4d\gamma(\lambda_*)/(d-2)(d-2+2\gamma(\lambda_*))}\\&\cdot\hat{h}\big(t(M\mu^{-(d-2)/2})^{-2(2-\gamma_{\phi^2}(\lambda_*))/(d-2+2\gamma(\lambda_*))}\big),\end{aligned} \tag{13.33}$$

其中$\hat{h}$为一个光滑初始条件。

为了简化这个表达式中指数的形式，我们预期会有下面的一些结果和替换

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{d-2+2\gamma(\lambda_*)}{2(2-\gamma_{\phi^2}(\lambda_*))},\\ \delta &= \frac{2d}{d-2+2\gamma(\lambda_*)} - 1 = \frac{d+2-2\gamma(\lambda_*)}{d-2+2\gamma(\lambda_*)}.\end{aligned} \tag{13.34}$$

我们必须证明这些新的指数确实与我们在(13.7)和(13.8)中定义的指数相对应。用这些替换(从这里开始忽略对μ的依赖关系)，我们找到了$\mathbf{G}$的标度公式

$$\mathbf{G}(M,t) = M^{1+\delta}\hat{h}(tM^{-1/\beta}), \tag{13.35}$$

其中$\hat{h}$在$t \to 0$下有一个光滑极限。表示这个公式的等价方法是

$$\mathbf{G}(M,t) = t^{\beta(1+\delta)}\hat{f}(Mt^{-\beta}). \tag{13.36}$$

热力学量的标度律直接遵循这些关系。沿着线$t=0$，我们从(13.35)得到

$$H = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial M} = \hat{h}(0)M^{\delta}, \tag{13.37}$$

精确地是(13.8)。在临界温度以下，我们通过使$\mathbf{G}$与M的比值最小，得到磁化强度的非零值。在标度区域，这个最小值出现在(13.36)中函数$\hat{f}(m)$的最小m_0处。这导致了关系(13.7)，形式为

$$Mt^{-\beta} = m_0. \tag{13.38}$$

如果我们在$\mathcal{T}_C$以上的零场中工作，$\hat{f}$的最小值必须出现在$M=0$处。然后

$$\mathbf{G}(t) \sim t^{\beta(1+\delta)}. \tag{13.39}$$

要计算比热，对温度求导两次；这给出了标度(13.6)，其中

$$2-\alpha = \beta(1+\delta) = \frac{d}{2-\gamma_{\phi^2}(\lambda_*)}. \tag{13.40}$$

最后，必须建立磁化率的标度律。由(13.36)，H在非零t处的标度律为

$$H = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial M} = t^{\beta\delta}\hat{f}'(Mt^{-\beta}). \tag{13.41}$$

这种关系的逆是标度律

$$M = t^{\beta}\hat{c}(Ht^{-\beta\delta}). \tag{13.42}$$

那么在零场下的磁化率为

$$\chi = \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_t = \hat{c}'(0)t^{-(\delta-1)\beta}. \tag{13.43}$$

因此，我们确认式(13.9)，其中确定了

$$\gamma = (\delta-1)\beta = \frac{2(1-\gamma(\lambda_*))}{2-\gamma_{\phi^2}(\lambda_*)}. \tag{13.44}$$

现在，我们已经找到了用 Callan-Symanzik 函数表示的所有不同临界指数的明确表达式。当维数 d 从下方接近 4 时，不动点λ_*趋于零。然后这六个临界指数趋近于它们通过简单量纲分析得到的值：

$$\begin{aligned} &\eta = 0; \qquad \nu = \tfrac{1}{2}; \qquad \alpha = 0; \qquad \beta = \tfrac{1}{2}; \\ &\qquad\qquad \gamma = 1; \qquad \delta = 3. \end{aligned} \tag{13.45}$$

毫不奇怪，(13.45)中给出的η, ν和β的值是我们在第 8 章从临界现象的朗道理论中推导出来的。其他的数值也可以从朗道理论中得到类似的证明。重整化群分析告诉我们如何系统地修正朗道理论的预测，以正确地考虑自旋场的大标度涨落。

请注意，所有与热力学量相关指数，和与关联函数相关的指数，都是由相同的成分构成的。从场论的角度来看，这是显而易见的，因为场论中的所有标度律最终都来源于算符$\phi(x)$和$\phi^2(x)$的反常量纲，它们精确地是$\gamma(\lambda_*)$和$\gamma_{\phi^2}(\lambda_*)$。然而，这个结果有一个有趣的实验结论：它暗示了临界指数之间的模型无关关系。例如，在任何具有临界点的系统中，这个理论预测

$$\alpha = 2 - d\nu, \qquad \beta = \tfrac{1}{2}(d-2+\eta)\nu. \tag{13.46}$$

这些关系检验了用重整化群流的不动点来确定临界点的一般框架。

此外，临界现象的场论方法预测说临界指数是**普适的**，即是说，不同的凝聚态系统在极限$T \to T_C$下接近了相同的标量场不动点，临界指数取相同的值。

临界指数的值

最后，标量场论根据第12.5节中描述的$\epsilon = 4 - d$的幂次展开式，或β和γ函数以λ为幂的直接展开式，确实预测了值$\gamma(\lambda_*)$和$\gamma_{\phi^2}(\lambda_*)$。我们可以使用这些表达式来得到临界指数的定量预测。我们在12.5节的最后给出了这样的预测一个例子，式(12.143)给出了ν的展开式的前两项。现在我们回到这个问题上来，对所有的临界指数给出场论预测。

在12.5节末尾的讨论中。我们注意到，具有不同数量的涨落自旋分量的磁体，其临界指数的值是不同的。一个乐观的假设是，任何具有N个自旋分量的热力学系统，或者更普遍地说，在临界点具有N个涨落的热力学变量，都可以用带有N个标量场的相同不动点场论来描述。这种不动点的一个自然候选是第11章讨论的$O(N)$对称ϕ^4理论的Wilson-Fisher不动点。现在我们将描述这个理论中一般的N值的临界指数的计算。

作为第一步，我们应该在四维计算$\beta(\lambda)$，$\gamma(\lambda)$和$\gamma_{\phi^2}(\lambda)$函数的值。这个计算与第12章对普通ϕ^4理论所做的分析相一致，所以我们只指出在这种情况下需要做的更改。就像在普通的ϕ^4理论中一样，无质量$O(N)$对称理论的传播子在单圈阶中不受场强的修正，因此$\gamma(\lambda)$中的单圈项再次为零。在问题13.2中，我们计算了在$O(N)$对称ϕ^4理论中对$\gamma(\lambda)$的领头、双圈的贡献：

$$\gamma = (N+2)\frac{\lambda^2}{4(8\pi^2)^2} + \mathcal{O}(\lambda^3). \tag{13.47}$$

在ϕ^4理论中，单圈对β函数的贡献来自于公式(12.44)中给出的单圈顶点抵消项δ_λ。对于$O(N)$对称的情况，我们在第11.2节中计算了对应的顶点抵消项的发散部分；从式(11.22)有，

$$\delta_\lambda = \frac{\lambda^2}{(4\pi)^{d/2}}(N+8)\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(M^2)^{2-d/2}} + \text{finite}. \tag{13.48}$$

根据式(12.46)的逻辑，或使用式(12.54)，我们发现

$$\beta = (N+8)\frac{\lambda^2}{8\pi^2} + \mathcal{O}(\lambda^3). \tag{13.49}$$

如果我们设置$N=1$并代入$\lambda \to \lambda/6$，这可归结为ϕ^4理论的β函数，如(11.5)下面表示的。最后，为了计算γ_{ϕ^2}，我们必须重复第12.4节末尾所做的计算。如果我们不考虑(12.113)，而是考虑格林函数$\langle\phi^i(p)\phi^j(q)\phi^2(k)\rangle$，并将$\phi^4$理论的顶点替换为来自于拉格朗日量(11.5)的四点顶点，于是，(12.114)第一行中的因子$(-i\lambda)$被替换为

$$(-2i\lambda)[\delta^{ij}\delta^{k\ell} + \delta^{ik}\delta^{j\ell} + \delta^{i\ell}\delta^{jk}]\cdot\delta^{k\ell} = -2i\lambda(N+2)\delta^{ij}.$$

Then

$$\gamma_{\phi^2} = (N+2)\frac{\lambda}{8\pi^2} + \mathcal{O}(\lambda^2). \tag{13.50}$$

接下来，我们考虑()$(4-\epsilon)$维中的相同理论。β函数变成

$$\beta = -\epsilon\lambda + (N+8)\frac{\lambda^2}{8\pi^2}, \tag{13.51}$$

所以有一个Wilson-Fisher不动点在

$$\lambda_* = \frac{8\pi^2\epsilon}{N+8}. \tag{13.52}$$

在这个不动点，我们发现

$$\gamma(\lambda_*) = \frac{N+2}{4(N+8)^2}\epsilon^2 + \cdots, \qquad \gamma_{\phi^2}(\lambda_*) = \frac{N+2}{N+8}\epsilon + \cdots. \tag{13.53}$$

从这两个结果中，我们可以计算出整组临界指数在ϵ阶的预测。例如，将(13.53)插入(13.19)，我们发现

$$\nu^{-1} = 2 - \frac{N+2}{N+8}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{13.54}$$

如第 12.5 节末尾所述。

在第 12 章的讨论中，我们声称临界指数的预测与实验数据基本一致。然而，通过更高阶的计算，我们可以得到理论和实验的更精确的比较。临界指数的ϵ展开式现在被计算到了ϵ^5阶。更令人印象深刻的是，在 $d = 3$ 的临界指数的λ展开式被计算到了λ^9阶。通过对这个微扰级数求和，可以得到反常量纲$\gamma(\lambda_*)$和$\gamma_{\phi^2}(\lambda_*)$的非常精确的估计，并通过它们得到临界指数的精确预测。

表13.1给出了这些值与临界指数的直接测定的比较。标记为“QFT”的列给出了用ϕ^4微扰理论进行三维反常量纲计算得到的临界指数值。标记为“Experime-nt”的列给出了各种系统中临界指数的实验测定的选择。这包括Xe、CO_2和其他流体中的液气临界点，液-液相分离的二元流体混合物的临界点，Cu-Zn合金β-黄铜的原子排列中的有序无序转变，^{4}He中的超流体转变和铁磁体(EuO，EuS，Ni)和反铁磁体($RbMnF_3$)中的有序无序转变。在不同系统中指数的实验测定之间的一致性是对普适性的一个直接检验。对于具有单阶参数($N = 1$)的系统，物理系统之间存在显著的多样性，但其特征是具有相同的临界指数。

标记为“Lattice”的列包含了抽象格点统计力学模型对临界指数的估计。对于这些简化模型，统计力学配分函数可以在大温度展开下计算。通过一些努力，这些展开可以被执行到 15 项或更多。通过对这些级数重求和，可以得到临界指

表 13.1 三维统计

系统的临界指数值

Exponent	Landau	QFT	Lattice	Experiment	
$N = 1$ Systems:					
γ	1.0	1.241 (2)	1.239 (3)	1.240 (7)	binary liquid
				1.22 (3)	liquid-gas
				1.24 (2)	β-brass
ν	0.5	0.630 (2)	0.631 (3)	0.625 (5)	binary liquid
				0.65 (2)	β-brass
α	0.0	0.110 (5)	0.103 (6)	0.113 (5)	binary liquid
				0.12 (2)	liquid-gas
β	0.5	0.325 (2)	0.329 (9)	0.325 (5)	binary liquid
				0.34 (1)	liquid-gas
η	0.0	0.032 (3)	0.027(5)	0.016 (7)	binary liquid
				0.04 (2)	β-brass
$N = 2$ Systems:					
γ	1.0	1.316 (3)	1.32 (1)		
ν	0.5	0.670 (3)	0.674 (6)	0.672 (1)	superfluid ^{4}He
α	0.0	−0.007 (6)	0.01 (3)	−0.013 (3)	superfluid ^{4}He
$N = 3$ Systems:					
γ	1.0	1.386 (4)	1.40 (3)	1.40 (3)	EuO, EuS
				1.33 (3)	Ni
				1.40 (3)	$RbMnF_3$
ν	0.5	0.705 (3)	0.711 (8)	0.70 (2)	EuO, EuS
				0.724 (8)	$RbMnF_3$
α	0.0	−0.115 (9)	−0.09 (6)	−0.011 (2)	Ni
β	0.5	0.365 (3)	0.37 (5)	0.37 (2)	EuO, EuS
				0.348 (5)	Ni
				0.316 (8)	$RbMnF_3$
η	0.0	0.033 (4)	0.041 (14)		

通过在三维$O(N)$对称的ϕ^4理论中，对 Wilson-Fisher 不动点处的反常量纲的微扰级数进行重求和，可以得到列“QFT”中临界指数的值。列“Lattice”的数值是基于格点统计模型的高温级数展开的分析得到的。列“Experiment”中的值取自所述系统中临界点的实验。在所有情况下，括号中的数字都是最后一个显示数字的标准误差。这张表是基于 J. C. Le Guillou and J. Zinn-Justin, *Phys. Rev.* B21, 3976(1980)，其中的一些值被 J. Zinn-Justin(1993), Chapter 27 进行了更新。最后两列的完整引用可以在这些资源中找到。

数的直接的理论估计，其精度可与最佳实验的精度相比较。这些数值与实验结果的比较，用简单的哈密顿量检验了实验系统的识别性，而这些哈密顿量是重整化群分析起点。

临界指数的三种测定方法的一致性给出了一幅令人印象深刻的图像。这张图像肯定不完美，仔细检查表13.1可以发现一些明显的差异。但总的来说，这些证据令人信服，即量子场论为广泛的物理系统的热力学临界行为提供了基本解释

13.2 四维的临界行为

既然我们已经讨论了$d<4$的临界指数的一般理论，让我们把注意力集中在$d=4$的情况上。本案例对量子场论在基础物理中的应用具有特殊的意义。此外，我们现在知道$d=4$位于Wilson-Fisher不动点消失的边界上。我们想要理解量子场论的预测在这个边界上的特殊行为。

$d<4$和$d=4$之间最明显的区别是，在前一种情况下，λ与不动点的偏差乘以一个无关算符，而在$d=4$的情况下，λ乘以一个边缘算符。我们已经在式(12.82)看到，在小动量或大距离下，λ的跑动值仍然接近它的不动点，现在位于$\lambda=0$。然而，这种方法是用一个慢得多的函数来描述的，不是幂函数，而是距离标度的对数函数。因此，忽略λ与不动点的偏差通常是不正确的。将这一效应包括进来，我们发现了额外的对数项，类似于关联函数对$\log\ p$的依赖性，而我们已经知道这是可重整化场论的一个特征。

为了对这种对数依赖性给出一个重要的说明，让我们回到我们在第 11 章末尾推迟讨论的一个问题。在式(11.81)中，我们得到了在质量参数为零的极限下，ϕ^4理论在λ的二阶的有效势的表达式：

$$V_{\text{eff}}=\frac{1}{4}\phi_{\text{cl}}^4\Big[\lambda+\frac{\lambda^2}{(4\pi)^2}\Big((N+8)\big(\log(\lambda\phi_{\text{cl}}^2/M^2)-\tfrac{3}{2}\big)+9\log 3\Big)\Big]. \tag{13.55}$$

(注意现在我们回到标准符号，其中M是重整化标度，μ是质量参数。对于非常小的ϕ_{cl}值，这个表达式似乎有一个最小值，但是只有在值非常小的时候才有

$$\big|\lambda\log(\lambda\phi_{\text{cl}}^2/M^2)\big|\sim 1. \tag{13.56}$$

因为，在微扰论的 n 阶，我们发现这个对数的 n 次方，式(13.56)意味着λ的高阶项不一定可以忽略不计。我们需要的是一种对这些项求和的技术。

这个和是由Callan-Symanzik方程提供的。由(13.24)或(13.25)可知，在四维ϕ^4理论的无质量极限下，有效势的Callan-Symanzik方程为

$$\Big[M\frac{\partial}{\partial M}+\beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}-\gamma\phi_{\rm cl}\frac{\partial}{\partial\phi_{\rm cl}}\Big]V_{\rm eff}(\phi_{\rm cl},M,\lambda)=0. \tag{13.57}$$

和前面一样，将该方程与量纲分析的预测相结合，可以求解$V_{\rm eff}$。在 $d=4$ 时，

$$V_{\rm eff}(\phi_{\rm cl},M,\lambda)=\phi_{\rm cl}^4 v(\phi_{\rm cl}/M,\lambda). \tag{13.58}$$

于是v满足

$$\Big[\phi_{\rm cl}\frac{\partial}{\partial\phi_{\rm cl}}-\frac{\beta}{1+\gamma}\frac{\partial}{\partial\lambda}+\frac{4\gamma}{1+\gamma}\Big]v=0. \tag{13.59}$$

v的这个方程可以用我们的标准方法求解，给出

$$v(\phi/M,\lambda)=v_0(\bar\lambda)\exp\Big[-\int_M^{\phi_{\rm cl}}d\log\phi_{\rm cl}\,\frac{4\gamma}{1+\gamma}\big(\bar\lambda(\phi_{\rm cl})\big)\Big], \tag{13.60}$$

其中，$\bar\lambda$满足

$$\frac{d}{d\log(\phi_{\rm cl}/M)}\bar\lambda=\frac{\beta(\bar\lambda)}{1+\gamma(\bar\lambda)}. \tag{13.61}$$

但是，由于我们只处理领头圈修正的阶，而且$\gamma(\lambda)$在这一阶是零，我们可以忽略(13.60)中的指数项。此外，我们可以忽略(13.61)右边的分母，因此，对于跑动耦合常数，这个方程可以简化为更标准的式(12.73)的形式。因此，使用领头阶的Callan-Symanzik函数，我们发现

$$V_{\rm eff}(\phi_{\rm cl})=v_0(\bar\lambda(\phi_{\rm cl}))\phi_{\rm cl}^4. \tag{13.62}$$

(13.62)中的函数v_0不是由Callan-Symanzik方程确定的。为了找到这个函数，我们将(13.62)与通过对有效势的显式单圈计算得到的结果(13.55)进行比较，精确的约束条件如下：在选择了函数$v_0(\bar\lambda)$后，用$\bar\lambda$代替重整化群方程的解(12.82)，

$$\bar\lambda(\phi_{\rm cl})=\frac{\lambda}{1-(\lambda/8\pi^2)(N+8)\log(\phi_{\rm cl}/M)}. \tag{13.63}$$

然后把结果展开成λ的幂，扔掉λ^3及更高阶的项。如果v_0选择正确，结果应该与(13.55)一致。应用该判据，我们得到有效势的结果如下：

$$V_{\rm eff}(\phi_{\rm cl})=\frac{1}{4}\phi_{\rm cl}^4\Big[\bar\lambda+\frac{\bar\lambda^2}{(4\pi)^2}\Big((N+8)\big(\log\bar\lambda-\tfrac{3}{2}\big)+9\log 3\Big)\Big], \tag{13.64}$$

其中$\bar\lambda$由(13.63)给出。

式(13.64)的错误在于将v_0确定为$\bar{\lambda}$的幂级数。因此，这个错误是$\bar{\lambda}^3$阶的。当$\phi_{\mathrm{cl}} \to 0$，$\bar{\lambda} \to 0$时，表示形式(13.64)变得越来越精确。因此，这个公式成功地对危险的对数(13.56)的幂进行了求和。作为ϕ_{cl}的函数，(13.64)在$\phi_{\mathrm{cl}} = 0$处最小。因此，(13.55)的明显破缺对称性的最小值确实是不完全微扰展开的产物，并在更完整的处理中消失。这解决了我们在11.4节中提出的问题。我们应注意，在更复杂的例子中，在微扰论单圈阶找到的，有效势的一个明显对称性破缺的最小值，可以在重整化群分析中幸存下来。在第二部分的最后的项目中给出了一个例子。

我们在这个论证中所遵循的过程叫做微扰论的**重整化群改进**。技术同样可以应用到关联函数和费曼图微扰论的其他预言的计算中：我们将 Callan-Symanzik 方程的解与直接微扰论计算的结果在耦合常数的相同阶上进行比较，用这种方式来选取重整化群解中的待定函数，从而再现微扰论结果。通过这种方法，我们可以找到一个更紧凑的公式，其中如(13.56)中的那些大对数被重新求和为跑动耦合常数。这种重求和产生了关联函数对质量标度的对数的依赖关系，而这种依赖性表征了一个带有边缘微扰或可重整化微扰的场论。

在ϕ^4理论的情况下，跑动耦合常数在小动量时为零，在大动量时变大。由于改进微扰论的误差项是一个$\bar{\lambda}$阶，改进微扰论在小动量下变得精确但在大动量下就失控了。这符合我们的物理直觉：仅当跑动耦合常数保持的很小时我们才能期望微扰论是精确的。

在渐近自由理论中，跑动耦合常数在大动量下变小，利用重整化群改进微扰论，我们可以得到大动量下关联函数的精确表达式。在第 17 章和第 18 章中，我们将使用这个概念作为分析强相互作用的短距离行为的主要工具。

13.3 非线性Sigma模型

为了完成我们对标量场论的研究，我们将讨论一个与ϕ^4理论在结构上有很大不同的标量场非线性理论。这个理论，称为**非线性sigma模型**，最初被提出作为对自发对称性破缺的另一种描述。我们对此感兴趣有三个原因。首先，它提供了一个渐近自由理论的简单显式例子。第二，它会给我们一个二维展开式，我们可以用它来研究 Wilson-Fisher 不动点。然后我们可以看到当维数 d 小于 4 时，Wilson-Fisher 不动点在拉格朗日量空间中的位置。最后，我们将证明非线性sigma模型在一个不同于标准弱耦合极限的极限下是完全可解的。这个解将使我们进一步了解对称性破缺对时空维数的依赖关系。

$d=2$ 的非线性Sigma模型

我们从二维开始研究。$d=2$ 时，标量场是无量纲的；因此，具有如下的拉格朗日量形式的标量场ϕ^i的任何理论，都具有无量纲的耦合，因此可重整化

$$\mathcal{L}=f_{ij}(\{\phi^i\})\partial_\mu\phi^i\partial^\mu\phi^j \tag{13.65}$$

由于任何函数$f(\{\phi^i\})$都会导致一个可重整化的理论，所以这类标量场论包含无穷多个边缘参数。为了限制这些可能的参数，我们必须强加一些对称性在理论上。

一个简单的选择是让标量场ϕ^i形成一个N分量的单位矢量场$n^i(x)$，满足约束条件

$$\sum_{i=1}^{N}\left|n^i(x)\right|^2=1. \tag{13.66}$$

如果我们坚持场论具有$O(N)$对称性，则(13.65)中的函数f只能依赖于$\vec{n}(x)$的不变长度，而不变长度受(13.66)的约束。因此，f最一般的选择是常数。类似地，唯一可能被添加到(13.65)的非导数相互作用$g(\{n^i\})$是一个常数，而这对$\vec{n}$的格林函数没有影响。有了这些限制条件，我们可以使用带着两个导数的$\vec{n}(x)$，以及$O(N)$对称性来构建的最一般的拉格朗日量是

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2g^2}\left|\partial_\mu\vec{n}\right|^2. \tag{13.67}$$

这个理论有一个直接的物理解释。它是一个具有$O(N)$对称性的系统的现象学描述，该对称性被一个像$O(N)$的矢量一样变换的场的真空期望值给自发破缺

了。例如，考虑N分量ϕ^4理论处于它的自发破缺相的情况。场ϕ^i获得一个真空期望值，我们可以用一个由单位矢量进行参数化的大小和方向来写出它

$$\langle \phi^i \rangle = \phi_0 n^i(x). \tag{13.68}$$

ϕ_0的涨落对应于一个有质量的场，这个场在 11 章被称为σ。单位矢量$\vec{n}(x)$的方向的涨落对应于$N-1$个 Goldstone 玻色子。注意，$\vec{n}$的N个分量受一个约束(13.66)，所以包含$N-1$个自由度。形式上，非线性 sigma 模型是ϕ^4理论的极限，即ϕ_0保持不变而σ场的质量取无穷的极限。

尽管有这种暗示性的联系，我们将首先把非线性sigma模型作为一个独立的量子场论来分析它。用$N-1$个 Goldstone 玻色子场π^k来求解受约束和参数化的$\vec{n}$比较方便：

$$n^i = \left(\pi^1, \cdots, \pi^{N-1}, \sigma\right), \tag{13.69}$$

其中，通过定义，

$$\sigma = (1-\pi^2)^{1/2}. \tag{13.70}$$

位形$\pi^k = 0$对应于一个自发对称性破缺的归一态，指向N方向。表示(13.69)意味着

$$\left|\partial_\mu n^i\right|^2 = \left|\partial_\mu \vec{\pi}\right|^2 + \frac{(\vec{\pi}\cdot\partial_\mu\vec{\pi})^2}{1-\pi^2}. \tag{13.71}$$

然后是拉格朗日量(13.67)的形式为

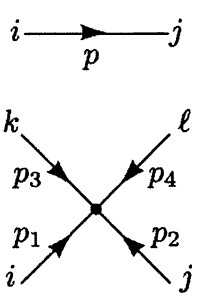
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2}\left[\left|\partial_\mu \vec{\pi}\right|^2 + \frac{(\vec{\pi}\cdot\partial_\mu\vec{\pi})^2}{1-\pi^2}\right]. \tag{13.72}$$

请注意，场$\vec{\pi}$没有质量项，正如 Goldstone 定理要求的一样

用π^k的幂展开拉格朗日量，可以直接读出π^k场的微扰论：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2}\left|\partial_\mu \vec{\pi}\right|^2 + \frac{1}{2g^2}(\vec{\pi}\cdot\partial_\mu\vec{\pi})^2 + \cdots. \tag{13.73}$$

这就导致了图13.1所示的费曼规则，并加上带着所有偶数个π^k场的额外顶点。由于拉格朗日量(13.67)是最一般的$O(N)$对称且带着无量纲系数的拉格朗日量，它可以用这些场建立出来，通过耦合常数g的重整化，以及场π^k和σ的$O(N)$对称重标度，该理论可以变得有限。在重整化微扰论中，每个可能的$2n-\pi$顶点都有发



$$= \frac{ig^2}{p^2}\delta^{ij}$$

$$= -\frac{i}{g^2}\big[(p_1+p_2)\cdot(p_3+p_4)\delta^{ij}\delta^{k\ell} + (p_1+p_3)\cdot(p_2+p_4)\delta^{ik}\delta^{j\ell} + (p_1+p_4)\cdot(p_2+p_3)\delta^{i\ell}\delta^{jk}\big]$$

图 13.1 非线性 sigma 模型的费曼规则。

散项和抵消项；然而，由于裸拉格朗日量要保持$O(N)$对称性的基本要求，这些抵消项相互联系。

我们现在为这个理论计算Callan-Symanzik函数。由于该理论是可重整的，对于某些函数的β和γ，它的格林函数显式地服从Callan-Symanzik方程

$$\left[M\frac{\partial}{\partial M} + \beta(g)\frac{\partial}{\partial g} + n\gamma(g)\right]G^{(n)} = 0, \tag{13.74}$$

其中$G^{(n)}$是n场π^k或σ的一个格林函数。为了在微扰论的领头阶确定β和γ函数，我们在单圈阶计算两个简单的格林函数，然后看看如果Callan-Symanzik方程被满足的话，什么形式是必要的。

我们考虑的第一个格林函数是

$$G^{(1)} = \langle\sigma(x)\rangle\,. \tag{13.75}$$

展开定义(13.70)，我们发现

$$\langle\sigma(0)\rangle = 1 - \tfrac{1}{2}\langle\pi^2(0)\rangle + \cdots \;=\; 1 \;-\; \tfrac{1}{2}\cdot$$



. (13.76)

为了计算这个公式，我们使用图13.1中的传播子来计算

$$\langle\pi^k(0)\pi^\ell(0)\rangle =$$



$$= \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{ig^2}{k^2-\mu^2}\delta^{k\ell}. \tag{13.77}$$

我们增加了一个小质量μ作为红外截断。然后

$$\langle\pi^k(0)\pi^\ell(0)\rangle = \frac{g^2}{(4\pi)^{d/2}}\frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{(\mu^2)^{1-d/2}}\delta^{k\ell}. \tag{13.78}$$

将这个结果应用到$\langle\sigma\rangle$的表达式中，然后在动量标度M处减去，我们发现

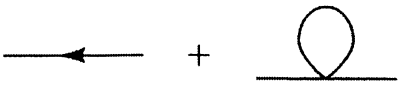
$$\begin{aligned}\langle\sigma\rangle &= 1 - \frac{1}{2}(N-1)\frac{g^2}{(4\pi)^{d/2}}\Gamma(1-\tfrac{d}{2})\left(\frac{1}{(\mu^2)^{1-d/2}} - \frac{1}{(M^2)^{1-d/2}}\right) + \mathcal{O}(g^4)\\ &\xrightarrow[d\to 2]{} 1 - \frac{g^2(N-1)}{8\pi}\log\frac{M^2}{\mu^2} + \mathcal{O}(g^4).\end{aligned} \tag{13.79}$$

这个表达式在g^2阶下满足Callan-Symanzik方程，只要

$$\gamma(g) = \frac{g^2(N-1)}{4\pi} + \mathcal{O}(g^4). \tag{13.80}$$

接下来，考虑π^k的两点函数，

$$\begin{aligned}\langle \pi^k(p)\pi^\ell(-p)\rangle = &\quad + \quad + \quad \cdots \\ &= \frac{ig^2}{p^2}\delta^{k\ell} + \frac{ig^2}{p^2}(-i\Pi^{k\ell})\frac{ig^2}{p^2} + \cdots.\end{aligned} \tag{13.81}$$



在根据图13.1中的费曼规则计算$\Pi^{k\ell}$时，我们再次遇到了积分(13.77)，和积分

$$\begin{aligned}\langle \partial_\mu \pi^k(0)\partial^\mu \pi^\ell(0)\rangle &= \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{ig^2k^2}{k^2-\mu^2}\delta^{k\ell} \\ &= \frac{g^2}{(4\pi)^{d/2}}\frac{\frac{d}{2}\Gamma(-\frac{d}{2})}{(\mu^2)^{-d/2}}\delta^{k\ell}.\end{aligned} \tag{13.82}$$

这个公式在$d=0$处没有极点，对于$d>0$，它正比于μ^2的正幂次；因此，我们可以把这个收缩设为零。然后

$$\Pi^{k\ell}(p) = -\delta^{k\ell}p^2\frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{(\mu^2)^{1-d/2}}. \tag{13.83}$$

和上面一样在M处相减，取$d\to 2$的极限，我们发现

$$\begin{aligned}\langle \pi^k(p)\pi^\ell(-p)\rangle &= \frac{ig^2}{p^2}\delta^{k\ell} + \frac{ig^2}{p^2}\Big(+ip^2\frac{1}{4\pi}\log\frac{M^2}{\mu^2}\Big)\frac{ig^2}{p^2} + \cdots. \\ &= \frac{i}{p^2}\delta^{k\ell}\Big(g^2 - \frac{g^4}{4\pi}\log\frac{M^2}{\mu^2} + \mathcal{O}(g^6)\Big).\end{aligned} \tag{13.84}$$

将Callan-Symanzik方程应用于该结果给出

$$\begin{aligned}\Big[M\frac{\partial}{\partial M} + \beta(g)\frac{\partial}{\partial g} + 2\gamma(g)\Big]\langle \pi^k(p)\pi^\ell(-p)\rangle &= 0, \\ = \frac{i\delta^{k\ell}}{p^2}\big[-\frac{g^4}{2\pi} + \beta(g)\cdot 2g + 2g^2\gamma(g)\big].\end{aligned} \tag{13.85}$$

插入$\gamma(g)$的结果(13.80)，我们发现

$$\beta(g) = -(N-2)\frac{g^3}{4\pi} + \mathcal{O}(g^5). \tag{13.86}$$

$N=2$时，β函数精确地为零。这并非偶然，而是对我们计算的一个非平凡的检验。对于$N=2$，我们可以做变量替换$\pi^1 = \sin\theta$；然后$\sigma = \cos\theta$，拉格朗日量的形式为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2}(\partial_\mu\theta)^2. \tag{13.87}$$

这是场$\theta(x)$的自由场论，因此它可以没有重整群流。

对于 $N>2$，β函数是负的：这个理论是渐近自由的。跑动耦合常数$\bar{g}$在短距离变小，在大距离变大。

在量子电动力学中，我们发现了一幅很有吸引力的物理图像，显示了耦合常数演化的迹象。正如我们在 7.5 节中讨论的，虚粒子对的产生过程使真空成为一种介质，它屏蔽电荷。因此，人们会期望电荷的有效库仑相互作用在大距离时减小，在小距离时增大。不难想象，类似的屏蔽现象可能发生在任何量子场论中。因此，令人惊讶的是，我们通过在这个理论中显式计算，发现耦合常数演化具有相反的符号。对此的物理解释是什么？

事实上，由于 Polyakov*，非线性 sigma 模型的渐近自由的原始推导，为演化的迹象给出了明确的物理论证。现在我们已经通过 Callan-Symanzik 方程的自动方法推导出了β函数，让我们回顾一下 Polyakov 的更多的物理推导。

Polyakov 使用 Wilson 的动量片段技术分析了非线性 sigma 模型，该技术我们在第 12.1 节中讨论过。然后，考虑用动量截断代替维数正规法，来定义非线性 sigma 模型。和第 12.1 节中一样，我们在带着初始截断Λ的欧几里得空间中工作。

原始的积分变量是单位矢量场$n^i(x)$的傅里叶分量。我们希望从泛函积分中积出那些与$b\Lambda \le |k| < \Lambda$范围内的动量$k$相对应的傅里叶分量。如果剩余的分量被傅里叶变换回坐标空间，则它们描述了原始单位矢量场的大粒度的平均值。这个平均场可以重标度，这样它再次在每一点上是一个单位矢量。把这个平均的和重标度的场称为$\tilde{n}^i$。然后我们可以把n^i和$\tilde{n}^i$的关系写成：

$$n^i(x) = \tilde{n}^i(x)\left(1-\phi^2\right)^{1/2} + \sum_{a=1}^{N-1} \phi_a(x) e_a^i(x). \tag{13.88}$$

在这个方程中，矢量$\vec{e}_a(x)$构成了与$\tilde{n}(x)$正交的单位矢量的基。在 Polyakov 的图像中，$\tilde{n}(x)$和$\vec{e}_a(x)$是缓慢变化的。另一方面，系数$\phi_a(x)$只包含$b\Lambda \le |k| < \Lambda$范围内的傅里叶分量。这些是我们要积分的变量，以实现重整化群变换。

---

*A M. Polyakov, *Phys. Lett.* **59B**, 79 (1975)

为建立起ϕ_a的积分，首先

$$\partial_\mu n^i = \partial_\mu \tilde{n}^i (1-\phi^2)^{1/2} - \tilde{n}^i \left(\frac{\phi \cdot \partial_\mu \phi}{(1-\phi^2)^{1/2}} \right) + \partial_\mu \phi_a e_a^i + \phi_a \partial_\mu e_a^i. \quad (13.89)$$

根据$\vec{n}, \vec{e}_a$的定义，这些矢量满足

$$|\tilde{n}|^2 = 1; \qquad \tilde{n} \cdot \vec{e}_a = 0. \quad (13.90)$$

对这些恒等式求导，我们发现

$$\tilde{n} \cdot \partial_\mu \tilde{n} = 0; \qquad \tilde{n} \cdot \partial_\mu \vec{e}_a + \partial_\mu \tilde{n} \cdot \vec{e}_a = 0. \quad (13.91)$$

使用等式(13.90)和(13.91)，我们可以通过ϕ_a的二次项，计算非线性 sigma 模型的拉格朗日量：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2} |\partial_\mu n^i|^2 = \frac{1}{2g^2} \Big[|\partial_\mu \tilde{n}^i|^2 (1-\phi^2) + (\partial_\mu \phi_a)^2 + 2(\phi_a \partial^\mu \phi_b)(\vec{e}_a \cdot \partial_\mu \vec{e}_b) + \partial^\mu \phi_a \partial_\mu \tilde{n} \cdot \vec{e}_a + \phi_a \phi_b \partial^\mu \vec{e}_a \cdot \partial_\mu \vec{e}_b + \cdots \Big]. \quad (13.92)$$

我们将(13.92)的第二项考虑为ϕ_a的第零阶拉格朗日量。因此，

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2g^2} (\partial_\mu \phi_a)^2, \quad (13.93)$$

这给出了传播子

$$\langle \phi_a(p) \phi_b(-p) \rangle = \frac{g^2}{p^2} \delta_{ab}, \quad (13.94)$$

局限于动量区域$b\Lambda \le |p| < \Lambda$。这个传播子可用于对拉格朗日量剩余项的$\phi_a$进行积分。从(13.84)的推导中借用积分，我们可以设

$$\langle \phi_a(0) \partial_\mu \phi_b(0) \rangle = \langle \partial^\mu \phi_a(0) \partial_\mu \phi_b(0) \rangle = 0 \quad (13.95)$$

and

$$\langle \phi_a(0) \phi_b(0) \rangle = \delta_{ab} \frac{g^2}{4\pi} \log \frac{\Lambda^2}{(b\Lambda)^2}. \quad (13.96)$$

于是在ϕ的积分之后，新的拉格朗日量近似给出为

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{2g^2} \Big[|\partial_\mu \tilde{n}|^2 \left(1 - \langle \phi^2 \rangle\right) + \langle \phi_a \phi_b \rangle \, \partial_\mu \vec{e}_a \cdot \partial^\mu \vec{e}_b + \mathcal{O}(g^4) \Big], \quad (13.97)$$

其中ϕ_a的期待值由(13.96)给出。

为了进一步简化，我们必须简化结构$(\partial_\mu \vec{e}_a)^2$，它出现在(13.97)的第二项中。引入矢量的完备基：

$$(\partial_\mu \vec{e}_a)^2 = (\tilde{n} \cdot \partial_\mu \vec{e}_a)^2 + (\vec{e}_c \cdot \partial_\mu \vec{e}_a)^2. \quad (13.98)$$

右边的第二项是一个新的结构，与e_a的坐标系的扭转有关；它的结果是对应于一个由重整化过程引入的无关算符。然而，使用(13.91)的两个恒等式，第一项可以

变成一个熟悉的形式

$$(\tilde{n}\cdot\partial_\mu\vec{e}_a)^2=(\vec{e}_a\cdot\partial_\mu\tilde{n})^2=(\partial_\mu\tilde{n})^2. \tag{13.99}$$

Then

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{eff}}&=\frac{1}{2g^2}\Big[|\partial_\mu\tilde{n}|^2\Big(1-(N-1)\frac{g^2}{4\pi}\log\frac{1}{b^2}+\frac{g^2}{4\pi}\log\frac{1}{b^2}\Big)+\cdots\Big]\\&=\frac{1}{2}\Big(g^2+\frac{g^4}{2\pi}(N-2)\log\frac{1}{b}+\cdots\Big)^{-1}|\partial_\mu\tilde{n}|^2.\end{aligned} \tag{13.100}$$

括号中的量是跑动耦合常数的平方。在我们的计算的阶上，这个量满足

$$\frac{d}{d\log b}\bar{g}=-(N-2)\frac{\bar{g}^3}{4\pi}, \tag{13.101}$$

与(13.86)一致。

在这个计算中，耦合常数重整化的符号来自于单位矢量$\vec{n}$的有效长度被短波长涨落的平均所减小的事实。这使得与一种位形相关的有效作用量被降低了，在这种位形中，$\vec{n}$的方向在位移Δx上发生变化(见图 13.2)。回头看(13.67)，我们发现对于相同的$\vec{n}$位形，$\mathcal{L}$的大小的减小可以解释为有效耦合的**增加**。因此，非线性sigma模型在大距离上耦合得更强，或者从$\vec{n}$场的物理位形来看，更无序。

我们的计算表明，如果任何二维统计系统很明显地有自发破缺对称性和Goldstone玻色子，那么在大距离上，这种有序就消失了。这是一个出乎意料的结论。然而，这一结论与Mermin和Wagner*证明的一个定理是一致的，即具有连续对称性的二维系统不能支持有序状态，其中对称破缺场具有非零真空期望值。这个定理适用于$N=2$和$N>2$的情况。我们在问题 11.1 题中推导了这个定理。

$2<d<4$的非线性 Sigma 模型

现在我们将分析结果扩展到维数 $d>2$。对于一般的 d，我们将继续定义非线性 sigma 模型的作用量

$$\int d^dx\,\mathcal{L}=\int d^dx\,\frac{1}{2g^2}(\partial_\mu\vec{n})^2, \tag{13.102}$$

其中$\vec{n}$仍然是无量纲的，因为它服从约束$|\vec{n}|=1$。因此g的量纲为(质量)$^{(2-d)/2}$。

*N. D Mermin and H. Wagner, *Phys. Rev. Lett.* **17**, 1133(1966)

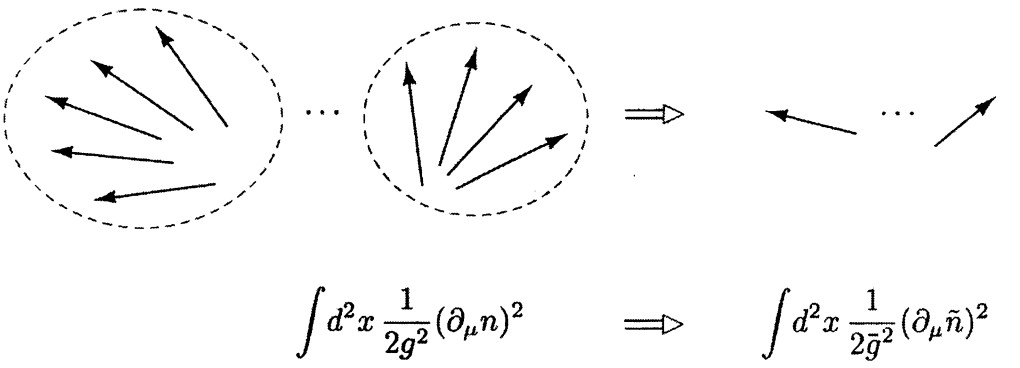


图 13.2 $\vec{n}$方向的平均，并将其解释为跑动耦合常数的增加。

我们定义一个无量纲耦合，通过写出

$$T = g^2 M^{d-2}, \tag{13.103}$$

就像我们在(12.122)中做的一样。如果(13.102)是配分函数的玻尔兹曼权重，则 T 为正比于温度的无量纲变量

由(13.103)，我们可以在 d 维中找到关于 T 的β函数，与式(12.131)类似：

$$\beta(T) = (d-2)T + 2g\beta^{(2)}(g), \tag{13.104}$$

其中，第二项中$2g$因子来自定义$T \sim g^2$，因为$\vec{n}$无量纲，所以当γ函数用无量纲耦合表示时，它与二维的结果没有变化。因此，在$d = 2 + \epsilon$中，

$$\begin{aligned} \beta(T) &= +\epsilon T - (N-2)\frac{T^2}{2\pi}; \\ \gamma(T) &= (N-1)\frac{T}{4\pi}. \end{aligned} \tag{13.105}$$

注意关于 T 的β函数有一个非平凡零点，即$\epsilon \to 0$时趋于 $T = 0$。该零点位于

$$T_* = \frac{2\pi\epsilon}{N-2}. \tag{13.106}$$

β函数的形式如图 13.3 所示。与第 12.5 节中讨论的$d = 4 - \epsilon$中的 Wilson-Fisher 零点相反，这是一个紫外稳定的不动点。红外的流从这个不动点出发。由于 T 与相应统计系统的温度成正比，$t \to 0$为完全有序状态，而$t \gg 1$为完全无序状态。这与 Polyakov 推导β函数时的直觉是一致的。不动点T_*对应于临界温度。因此，根据 Mermin-Wagner 定理，临界温度在$d \to 2$时趋于零。

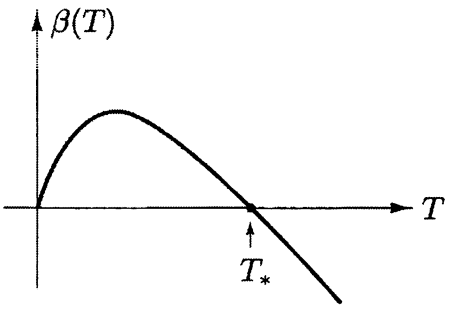


图 13.3 $d>2$ 的非线性 sigma 模型中β函数的形式

我们现在可以在$\epsilon = d-2$的展开式中计算非线性 sigma 模型的临界指数。指数η直接由下式给出

$$\eta = 2\gamma(T_*) = \frac{\epsilon}{N-2}. \tag{13.107}$$

为了求出第二个指数ν，我们需要确定与远离不动点$T \neq T_C$的重整化群流相对应的相关微扰。这就是T和T_*的差

$$\rho_T = T - T_*. \tag{13.108}$$

由重整化群方程求出跑动耦合常数。我们发现跑动ρ_T服从

$$\frac{d}{d\log p}\bar{\rho}_T = \left[\frac{d}{dT}\beta(T)\Big|_{T=T_*}\right]\cdot\bar{\rho}_T. \tag{13.109}$$

括号中的量是负数。如式(12.134)和(12.137)一样，我们可以用$(-1/\nu)$来表示这个量：当动量$p \ll M$时，

$$\bar{\rho}_T(p) = \rho_T\Big(\frac{p}{M}\Big)^{-1/\nu}; \tag{13.110}$$

因此，根据需要，$\bar{\rho}(p)$在动量为$\xi \sim (T-T_*)^{-\nu}$的倒数时为 1 阶。使用(13.105)中的β函数的显式形式，我们发现

$$\nu = \frac{1}{\epsilon}, \tag{13.111}$$

在ϵ的这个阶上与N无关(当然，这些结果只适用于$N>3$)。通过使用13.1节推导的模型无关关系，可以从(13.107)和(13.111)中发现热力学临界指数。当这里发现的ν和η值外推到$d=3$(即$\epsilon=1$)，与实验的一致性并不显得惊人，但结果至少表明，我们在这里发现的不动点可能是 Wilson-Fisher 不动点在两维附近的延拓。

大N的精确解

通过使用另一种方法研究非线性 sigma 模型，可以进一步洞察这个不动点的本质。由于非线性 sigma 模型取决于参数N，单位矢量的分量的数量，有理由去问，这个模型在$N \to \infty$时是如何表现的？我们现在表明，如果我们在保持g^2N固定下取这个极限，我们可以得到模型的非平凡的行为的一个精确解。

如果我们在欧几里得空间中工作，把拉格朗日量看作自旋系统的玻尔兹曼权值，那么得到这个解的操作就会非常清楚。于是我们必须计算泛函积分

$$Z = \int \mathcal{D}n \, \exp\left[-\int d^d x \, \frac{1}{2g_0^2}(\partial_\mu n)^2\right] \cdot \prod_x \delta(n^2(x) - 1). \tag{13.112}$$

这里g_0是耦合常数的裸值，而δ函数的乘积，每个点有一个，则加强了约束。引入δ函数的积分表示；这需要对拉格朗日乘子变量$\alpha(x)$进行第二个泛函积分：

$$Z = \int \mathcal{D}\alpha \mathcal{D}n \, \exp\left[-\int d^d x \, \frac{1}{2g_0^2}(\partial_\mu n)^2 - \frac{i}{2g_0^2}\int d^d x \, \alpha(n^2 - 1)\right]. \tag{13.113}$$

现在变量 n 是无约束的，在指数上只出现二次。因此，我们可以对 n 积分，得到

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}\alpha \left(\det[-\partial^2 + i\alpha(x)]\right)^{-N/2} \exp\left[\frac{i}{2g_0^2}\int d^d x \, \alpha\right]. \\ &= \int \mathcal{D}\alpha \, \exp\left[-\frac{N}{2}\operatorname{tr}\log(-\partial^2 + i\alpha) + \frac{i}{2g_0^2}\int d^d x \, \alpha\right]. \end{aligned} \tag{13.114}$$

由于我们取$N \to \infty$的极限，且$g_0^2 N$保持不变，所以指数中的两项都是N阶的，因此用最陡下降法来计算积分是有意义的。这就需要用函数$\alpha(x)$的值来控制积分，使指数最小化。为了确定这个位形，我们计算指数对$\alpha(x)$的泛函导数。这给出了变分方程

$$\frac{N}{2}\langle x| \frac{1}{-\partial^2 + i\alpha} |x\rangle = \frac{1}{2g_0^2}. \tag{13.115}$$

方程的左边必须是常数和实的；因此，在我们应该寻找的解中，$\alpha(x)$为常数且为纯虚的。写

$$\alpha(x) = -im^2; \tag{13.116}$$

然后m^2遵循

$$N\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 + m^2} = \frac{1}{g_0^2}. \tag{13.117}$$

我们将首先在$d=2$研究这个方程。如果我们在(13.117)中定义一个动量截断的积分，我们可以计算这个积分并找到 m 的方程：

$$\frac{N}{2\pi}\log\frac{\Lambda}{m}=\frac{1}{g_0^2}. \tag{13.118}$$

我们可以通过如下的重整化使这个方程有限：

$$\frac{1}{g_0^2}=\frac{1}{g^2}+\frac{N}{2\pi}\log\frac{\Lambda}{M}, \tag{13.119}$$

这引入了一个任意的重整化标度M，然后我们可以解出m，以找到

$$m=M\exp\Big[-\frac{2\pi}{g^2N}\Big]. \tag{13.120}$$

这是一个非零的，$O(N)$不变的，$\vec{n}$的N个不受约束分量的质量项，在这个解中，对于g^2或T的任何值，$\langle\vec{n}\rangle=0$，对称性是不破缺的。

该理论的解依赖于任意重整化标度M；这种依赖关系仅仅反映了重整化耦合常数定义的任意性。我们说m明确地遵循一个带着固定裸耦合和截断的基本理论，精确等价于说m服从Callan-Symanzik方程且不带有整体重标度：

$$\Big[M\frac{\partial}{\partial M}+\beta(g^2)\frac{\partial}{\partial g}\Big]m(g^2,M)=0. \tag{13.121}$$

使用(13.86)的大N极限，

$$\beta(g)=-\frac{g^3N}{4\pi}, \tag{13.122}$$

很容易检查，这满足了(13.121)。反之，带着(13.122)的(13.121)的有效性告诉我们，式(13.122)是β函数在g^2N的所有阶下的**精确**表示(在大N极限下)。对(13.122)的修正是$(1/N)$阶的，或者等价地，是g^2阶的(且不带有N的补偿因子)。在这个阶下，式(13.122)与我们之前的计算(13.86)一致。

现在让我们在 $d>2$ 中重做这个练习。在这种情况下，(13.117)的积分以截断的幂进行发散。即使通过重整化消除了对Λ的依赖，行为上的这个变化也会导致积分对 m 的依赖性的变化，而这是具有重要物理意义的。

把(13.117)中的积分作为(Λ/m)的展开式来求并不难。我们发现

$$\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{k^2+m^2}=\begin{cases}C_1\Lambda^{d-2}-C_2m^{d-2}+\cdots & \text{for } d<4,\\ C_1\Lambda^{d-2}-\tilde{C}_2m^2\Lambda^{d-4}+\cdots & \text{for } d>4,\end{cases} \tag{13.123}$$

其中$C_1, C_2, \tilde{C}_2$是d的一些函数，特别是

$$C_1 = \left[2^{d-1}\pi^{(d+1)/2}\Gamma\Big(\frac{d-1}{2}\Big)(d-2)\right]^{-1}. \tag{13.124}$$

在$d > 4$中，积分对m^2的一阶导数在$m^2 \to 0$下是光滑的；这就是行为的变化的原因。

在 $d = 2$ 的情况下，(13.117)的左边随 m 的变化覆盖了 0 到∞的整个范围；因此，我们总能找到任意g_0^2值的解。在 $d > 2$ 中，这不再成立。只有当Ng_0^2大于如下的临界值时，式(13.117)才能求解 m:

$$Ng_C^2 = \left(C_1\Lambda^{d-2}\right)^{-1}. \tag{13.125}$$

在边界处，$m = 0$。对于弱于(13.125)的裸耦合，通过给$\vec{n}$的一个分量一个真空期望值，同时保持其他分量无质量，有可能降低有效作用量的值，因此(13.125)是该模型二阶相变的判据。式(13.124)意味着，g_0^2的临界值，正比于临界温度，在$d \to 2$时趋于零，符合我们的重整化群分析。

在非线性sigma模型的对称相中，质量m决定了关联性的指数衰减，因此$\xi = m^{-1}$。于是，通过求出m对g_0^2与临界温度的偏差的依赖性，我们可以确定指数ν。写

$$t = \frac{g_0^2 - g_C^2}{g_C^2}. \tag{13.126}$$

然后在$2 < d < 4$中，对于t的小值，我们可以用(13.123)来求解m的(13.117)，这给出

$$\frac{1}{Ng_C^4}\cdot t = C_2 m^{d-2}, \tag{13.127}$$

这意味着$m \sim t^{\nu}$其中

$$\nu = \frac{1}{d-2}, \qquad 2 < d < 4. \tag{13.128}$$

类似地

$$\nu = \frac{1}{2}, \qquad d \geq 4. \tag{13.129}$$

ν依赖于 d的不连续性与我们通过重整化群分析所预测的完全一致。对于 $d > 4$。ν的值转到天真的量纲分析的预测。(13.128)给出的ν值与(13.111)——在$\epsilon = d-2$下展开式，以及与$N \to \infty$极限下的(12.142)——在$\epsilon = 4-d$下展开式，精确

地一致。显然，我们对临界指数的所有结果以一种非常令人满意的方式吻合。

结合我们所有的结果，我们得到了标量场论作为时空维数函数的一个令人满意的图像。在四维以上，任何标量场的相互作用都是无关的，预期的行为是平凡的。刚刚在四维时，耦合常数在大标度下仅仅是对数地趋近于零，这就产生了一个可重整化的理论，其预测如第 13.2 节所述。在四维以下时，该理论本质上是一个由 Wilson-Fisher 不动点控制的相互作用标量场的理论。在四维附近，耦合在这个不动点处很小，但随着维数的减小而增大。最后(对于$N > 2$)，当$d \to 2$时，不动点理论会接近一个带着相同对称性但完全不同的拉格朗日量的弱耦合极限，即非线性 sigma 模型。

这个模型的行为的演化作为 d 的函数说明了前两章的要点：量子场论的定性行为不是由基本拉格朗日量决定，而是由重整化群流的性质及其不动点决定的。反过来，这些都只依赖于——强加给彼此相互流动的拉格朗日量的族的——基本对称性。这个结论在最深层的意义上表明了对称性原理在确定物理基本定律上的重要性。

Final Project

Coleman-Weinberg 势

在第11章和第13.2节中，我们讨论了$O(N)$对称的ϕ^4理论在四维的有效势。我们计算了这个有效势的微扰修正，并使用重整化群来阐明了标量场质量为小值时的势的行为。然而，经过这些工作之后，我们发现该理论对质量参数的定性依赖没有受到微扰修正的影响。该理论仍然具有二阶相变，其作为质量的函数。圈修正对这幅图像的影响，只是对相变附近的标度行为提供了一些对数修正。

然而，圈修正并不总是那么无害的。对于某些系统，它们可以定性地改变相变的结构。这个最后的项目就处理这样一个系统的最简单的例子，Coleman-Weinberg模型。对该模型的分析借鉴了第二部分中讨论的各种主题；它为有效势形式理论和重整化群方程的使用，提供了一个非常重要的应用。这个练习中展现的现象会重新出现在许多背景中，从固体中的位移相变到早期宇宙的热力学。

这个问题使用了书中星号章节的内容，特别是11.3、11.4和13.2节。然而，(a)和(e)部分只取决于第二部分的未加星号的内容。我们推荐(e)部分作为计算重整化群函数的优秀练习。

Coleman-Weinberg模型是一个标量场在四维中的量子电动力学，考虑了标量场质量是小值。拉格朗日量是

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + (D_\mu\phi)^\dagger D^\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi - \tfrac{\lambda}{6}(\phi^\dagger\phi)^2,$$

其中$\phi(x)$是一个复标量场和$D_\mu\phi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi$。

(a) 假设$m^2 = -\mu^2 < 0$，所以对称$\phi(x) \to e^{-i\alpha}\phi(x)$是自发破缺的。写出$\mathcal{L}$的表达式，在对称破缺态附近展开，通过引入

$$\phi(x) = \phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\big[\sigma(x) + i\,\pi(x)\big],$$

其中$\phi_0.\sigma(x),\pi$为实的。证明A_μ场获得质量。这种矢量场的质量产生机制称为希格斯机制。我们将在第 20 章详细研究它。

(b) 在朗道规范下工作($\partial_\mu A^\mu = 0$)，计算出有效势$V(\phi_{\rm cl})$的单圈修正。证明它被m^2和λ的抵消项重整化了。用最小减除重整化，引入一个重整化标度 M。

(c) 对(b)部分的结果取极限$\mu^2 \to 0$。结果应该是一个有效势，它在加上了包含 M 的对数后是标度不变的。在$(e^2)^2$阶下，分析λ非常小的这个表达式。证明，在选择了这个耦合常数后，在$\phi_{\rm cl}$的一个值处(其中没有大的对数)，$V(\phi_{\rm cl})$有一个对称性破缺的最小值，于是简单的微扰论分析应该是有效的。因此，由于量子修正的影响，耦合常数选择为$\mu^2 = 0$的理论仍然具有自发破缺对称性。

(d) 对于(c)部分选择的耦合常数，在$m^2 = 0$的两侧，绘制$V(\phi_{\rm cl})$作为m^2函数的行为。

(e) 计算e和λ的 Callan-Symanzikβ函数，你应该发现

$$\beta_e = \frac{e^3}{48\pi^2}, \qquad \beta_\lambda = \frac{1}{24\pi^2}\left(5\lambda^2 - 18e^2\lambda + 54e^4\right).$$

在 (λ, e^2)平面上画出重整化群流。表明每个重整化群轨迹都经过了(c)部分考虑的耦合常数的区域。

(f) 通过将(e)部分的结果应用到(c)部分的计算中，在$\mu^2 = 0$处构建重整化群改进有效势。计算$\langle\phi\rangle$和σ粒子的质量，作为λ, e^2, M的函数。对于$\lambda \ll e^2$，在e^2的领头阶计算比率m_σ/m_A。

(g) 在(f)部分的分析中包括非零m^2的影响。证明，当m^2从零增加直到破缺对称态完全消失，m_σ/m_A会取一个最小的非零值。对于$\lambda \ll e^2$，计算这个值作为e^2的函数。

(h) 这个问题的拉格朗日量(在欧几里得形式下)等价于在d维下超导体与电磁场耦合时的朗道自由能。这个表达式被称为朗道-金兹堡自由能。计算该系统的β函数，并画出$d = 4 - \epsilon$时的重整化群流。描述在三维中超导相变的定性行为(对于实际的超导体，e^2的值——在它被以适当的方式变得无量纲后——非常小。你将发现，效应只在$|T - T_C|/T_C < 10^{-5}$时是重要的)。