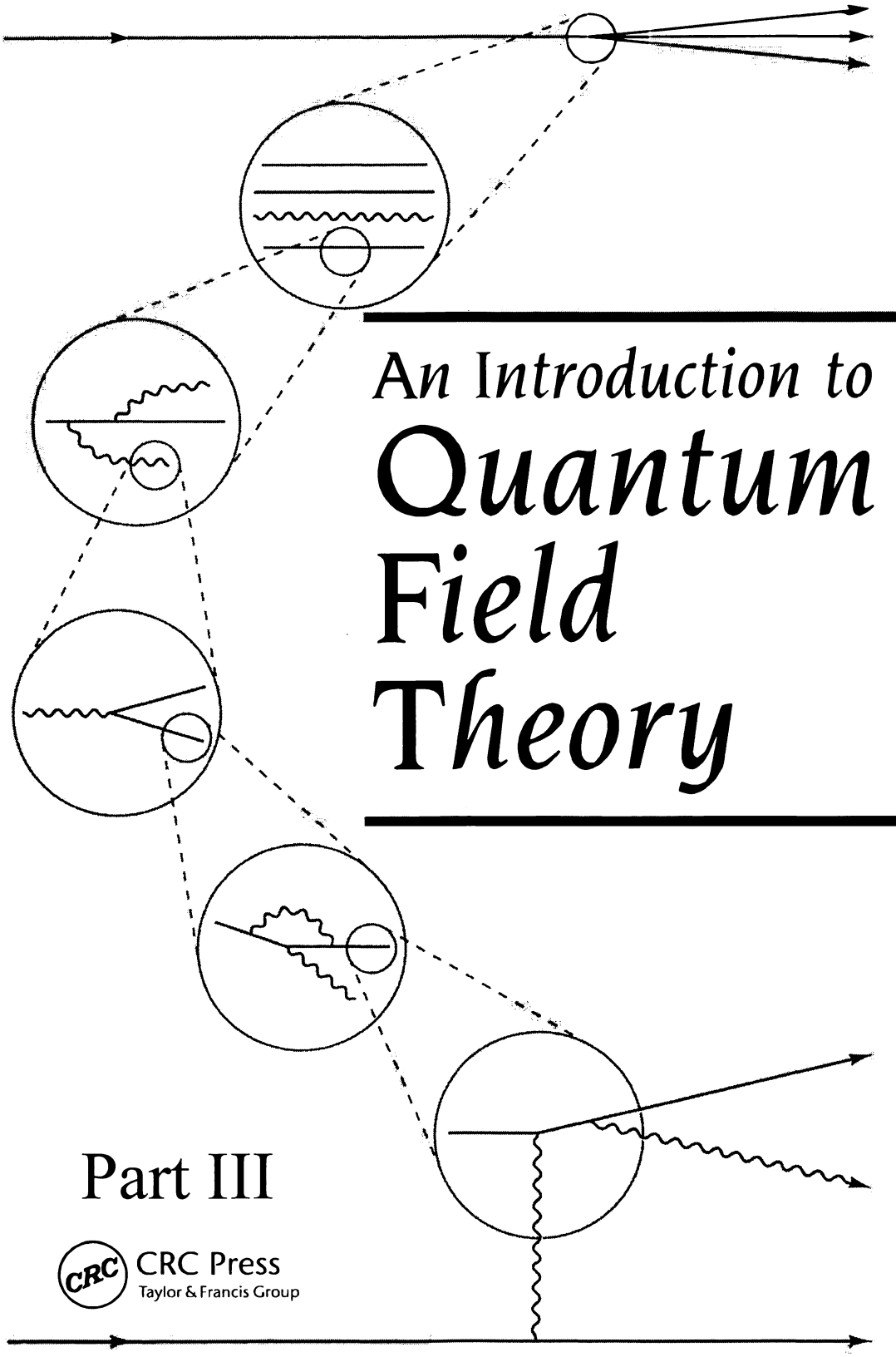


An Introduction to Quantum Field Theory

Part III

CRC Press
Taylor & Francis Group

Michael E. Peskin ◆ Daniel V. Schroeder

Made By. Minrusen

目 录

14 Invitation:强子结构的部分子模型 473
近乎自由的部分子 475
渐近自由部分子 479
15 非阿贝尔规范不变性 481
15.1 规范不变性几何 482
15.2 Yang-Mills 拉格朗日量 486
15.3 规范不变的 Wilson 圈 492
15.4 李代数的基本事实 495
李代数的分类 496
表示 498
卡西米尔算符 500
16 非阿贝尔规范理论的量子化 505
16.1 非阿贝尔规范玻色子的相互作用 506
费米子和规范玻色子的费曼规则 506
耦合常数等价性 508
论证中的一个缺陷 511
16.2 Faddeev-Popov 拉格朗日量 512
16.3 鬼场和幺正性 516
16.4 BRST 对称 518
16.5 非阿贝尔规范理论的单圈发散 522
规范玻色子的自能 522
β函数 527
抵消项之间的关系 532
16.6 渐近自由：背景场方法 534

背景场微扰理论 534
有效作用量的单圈修正 536
计算泛函行列式 539
16.7 渐近自由：定性解释 542
17 量子色动力学 545
17.1 从夸克到 QCD 546
17.2 e^+e^-湮没成强子 549
总截面 550
α_s的跑动 551
胶子发射和喷注产生 554
17.3 深度非弹性散射 556
深度非弹性中微子散射 559
部分子分布函数 563
17.4 强子碰撞的硬散射过程 564
轻子对产生 565
对产生的一般运动学 567
喷注对的产生 569
17.5 部分子演化 575
电子分裂的矩阵元 577
等价光子近似 579
电子分布 580
多重分裂 583
光子分裂为对 585
QED 的演化方程 587
Altarelli-Parisi 方程 588
17.6 α_s的测量 594
18 算符乘积和有效顶点 599
18.1 夸克质量参数的重正化 600
18.2 弱相互作用的 QCD 重正化 605
18.3 算符乘积展开 612

18.4 e^+e^-湮没的算符分析 616
18.5 深度非弹性散射的算符分析 622
深度非弹性散射的运动学 624
算符乘积展开 628
色散积分 633
算符重标度 636
算符混合 639
与 Altarelli-Parisi 方程的关系 644
19 微扰论反常 651
19.1 二维轴流 652
真空极化图 653
轴矢流算符方程 655
一个关于费米子数不守恒的例子 657
19.2 四维的轴流 660
轴矢流算符方程 660
三角图 662
泛函积分的手征变换 664
19.3 QCD 中的 Goldstone 玻色子与手征对称性 668
手征对称性的自发破缺 669
手征流的反常 673
19.4 手征反常与手征规范理论 677
19.5 标度不变性的反常破坏 682
20 自发对称性破缺的规范理论 689
20.1 希格斯机制 690
一个阿贝尔的例子 690
希格斯机制的系统学 693
非阿贝尔的例子 694
对希格斯机制的正式描述 698
20.2 弱相互作用的 Glashow-Weinberg-Salam 理论 701
规范玻色子的质量 701

与费米子耦合.....704
反常的抵消.....706
GWS 理论的实验结果.....708
费米子质量项.....713
希格斯玻色子.....715
希格斯区(Higgs sector)?.....717
20.3 夸克和轻子的理论的对称性.....720
21 自发破缺规范理论的量子化.....731
21.1 R_ξ规范.....732
一个阿贝尔的例子.....732
微扰论中的ξ依赖性.....735
非阿贝尔分析.....739
21.2 Goldstone 玻色子等价定理.....744
Goldstone 玻色子等价的正式方面.....745
顶夸克衰变.....748
$e^+e^- \to W^+W^-$.....751
21.3 弱相互作用规范理论的单圈修正.....759
理论定位和具体问题.....759
重夸克修正的影响.....762
真空极化振幅的计算.....767
m_t的效应.....771
Final Project 希格斯玻色子的衰变.....774
22 量子场论前沿.....781
22.1 强强相互作用.....782
22.2 大统一及其悖论.....786
22.3 量子场论中的精确解.....791
22.4 超对称性.....795
22.5 走向自然的终极理论.....798

Chapter 14

Invitation:强子结构的部分子模型

在这本书的第二部分，我们正式地探讨了量子场论的结构。我们开发了复杂的计算算法(第10章)，推导出一个用来提取标度律和渐近行为的形式理论(第12章)，并做出一些自发破缺对称性的推论(第11章)。结果证明，这种形式理论在统计力学中有许多意想不到的应用。然而，我们还没有研究它在基本粒子物理学中的含义。要做到这一点，我们必须首先问哪一种特定的量子场论描述了基本粒子间的相互作用。

自1970年中期以来，大多数高能物理学家都认为构成物质的基本粒子是一组费米子，它们主要通过交换矢量玻色子相互作用。基本的费米子包括**轻子**(电子，它的重的相应物μ和τ，以及这几种粒子分别对应一个中性的，几乎没有质量的中微子)和**夸克**，夸克的束缚态形成了参与原子核相互作用的粒子，介子和重子(统称强子)。这些费米子通过三种力而相互作用：强相互作用、弱相互作用和电磁相互作用。其中，**强相互作用**负责核束缚和原子核的组分间的相互作用，而**弱相互作用**负责放射性β衰变过程。**电磁相互作用**就是我们熟悉的量子电动力学，它与所有带电夸克和轻子最小耦合在一起。目前还不清楚这三种力是否足以解释基本费米子最微妙的性质——我们将在第20章讨论这个问题——但这三种力肯定是最显著的。所有这三种现在都被认为是由矢量玻色子的交换作为介导。描述电磁相互作用的方程由麦克斯韦发现，它们的量子力学含义在第一部分已经详细讨论过了。关于弱相互作用和强相互作用的正确理论是在很久以后才发现的。

到20世纪50年代末，对弱相互作用截面的螺旋度依赖性和衰变率的研究表明，

弱相互作用包括了由夸克场和轻子场构成的矢量流的耦合*。因此，很自然地假设弱相互作用来源于非常重的矢量玻色子的交换，而实际上，这样的玻色子，即W和Z粒子，是1982年在CERN的实验中发现的。但一个完整的弱相互作用理论不仅必须包括玻色子与费米子的正确耦合，而且还必须包括玻色子场本身的运动方程，即麦克斯韦方程的W和Z的类比。找到这些方程的正确形式并不简单，因为麦克斯韦方程禁止矢量粒子的质量产生。要使广义麦克斯韦方程组与W和Z的非零质量适当的协调，结果表明需要将自发破缺对称性纳入到理论中。第20章和第21章详细讨论了这个问题，描述了带有自发破缺的对称性的矢量场论的相互作用。这种相互作用导致了新的扭度(twists)和新的现象，超出了我们在第11章中处理自发对称性破缺的那些讨论。一个完整的弱相互作用理论也需要同时结合电磁相互作用，形成一个统一的结构，这是Glashow、Weinberg和Salam首先提出的假设。

另一方面，在很长一段时间里，人们对交换矢量玻色子的理论能否正确地描述强相互作用完全不清楚。部分原因在于夸克并非作为孤立物体存在。它们的存在，以及它们的量子数，必须从可观测的强相互作用粒子的谱中推断出来。但是，除此之外，由于强相互作用是强的这一事实，还存在一些复杂性。费曼图展开假设耦合常数很小；当耦合变强时，大量的图是重要的(如果级数收敛的话)，并且不可能辨别出基本相互作用顶点的贡献。强相互作用具有矢量特性的关键线索，来自于乍一看来似乎是另一个谜团的事实，即当动量转移很大时，观察到强相互作用会自行消失，这一点我们现在将会讲到。

近乎自由的部分子

在第5.1节中，我们计算了QED过程$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$的截面。然后我们注意到，使用一个简单的模型，e^+e^-湮灭成强子的相应截面可以用同样的方法计算，在这个模型中夸克被视为不相互作用的费米子。这种方法给出了一个惊人的精确的横截面公式，捕捉了它最重要的定性特征。但是我们推迟了对这个谜团的解释：在其他情况下，一个不相互作用的夸克模型该如何表现出一个极强的力的行为呢?

*弱相互作用唯象学概述，参见Perkins(1987)，第七章，或任何其他现代粒子物理学文本。

事实上，在研究高能强相互作用时，这种力的作用在很多情况下会出乎意料地微弱。从历史上看，第一次情况出现在质子-质子碰撞中。在高能下(在质心有10 GeV以上)，质子(或任何其他强子)的碰撞会产生大量的π介子。人们可能会想象这些π介子会填满所有允许的相空间，但事实上，它们主要是在动量几乎与碰撞轴共线的方向下产生的。产生一个其动量有着很大的分量与碰撞轴横向的π介子的概率，在这个横动量的值上呈指数衰减，当横动量大于几百MeV时会大幅地抑制其产生。

这种横动量有限的现象导致的图像是强子是一个由众多成分松散地束缚在一起的结合物。在这幅图像中，一个质子被另一个质子撞击后会被撕成一团碎片。这些碎片的动量将与质子的原始动量大致共线，并最终重组为沿着碰撞轴运动的强子。根据假设，这些碎片不能吸收大动量转移。我们可以如下地用数学来描述这个假设：在高能碰撞中，两个初始强子的动量几乎是类光的。沿着碰撞轴排列的强子碎片也具有与原始动量矢量平行的类光动量。这种末态可以通过在各碎片之间交换动量q来产生，这样一来，尽管q的分量可能很大，但不变的q^2总是很小。一个大横动量强子的出射需要大的(类空的)q^2，但这样的过程非常罕见。因此，强子被假设为松散的成分云团，像果冻一样，不能吸收大的q^2。

强子结构的这个图像在20世纪60年代后期的SLAC-MIT深度非弹性散射实验中得到了关键性的检验。在这些实验中，一束20 GeV的电子束从氢靶上散射，测量了大偏转角度下的散射率，对应于从电子到靶中质子的大的不变动量转移。大动量转移是通过电磁而不是强相互作用传递的，所以转移动量的数值可以根据散射电子的动量计算出来。在这个强子是复杂且软束缚的模型中，预期会有非常低的散射率。

相反，SLAC-MIT的实验观察到在电子对质子的散射中，硬散射占相当高的比率。如果质子是一个基本粒子并根据QED最简单的预期进行散射，那么该预期就与总反应率是相当的。然而，只有在极少数情况下，散射过程中才会出现单

---

*有关这些实验及其分支实验的描述，见J I. Friedman, H W. Kendall, and R E. Taylor, *Rev. Mod. Phys.* **63**, 573(1991)

个质子。反应率中最大的那部分来自于相空间的**深度非弹性**区域，在那里电磁脉冲击碎了质子，并产生了一个带有大量强子的系统。

如何对电磁硬散射过程的存在与强相互作用过程中硬散射的实际缺失进行协调?为了回答这个问题，比约肯和费曼提出了以下简单的模型，称为**部分子模型**：假设质子是一个由称为**部分子**的少量组分松散束缚而成的结合物。这些部分子包括夸克(和反夸克)，它们是携带电荷的费米子，可能还有其他中性粒子负责它们的结合。假设这些组分不能通过强相互作用交换大动量q^2。然而，夸克具有基本费米子的电磁相互作用，因此对夸克的电子散射可以把它从质子中撞出来。然后被击中的夸克与质子的其余部分很软地交换动量，使质子的碎片实体化为强子喷注。所产生的强子应与初始被撞部分子的方向共线。

尽管部分子模型是不完整的，但它对深度非弹性电子散射的截面施加了很强的约束。要推导出这个约束条件，首先要考虑单个夸克的电子散射截面。我们在第5.4节讨论了电子-μ子散射的相关过程，我们可以借鉴这一结果。因为我们假设反应的能量很高，所以我们忽略了所有的质量。无质量极限下不变矩阵元的平方用(5.71)式的简单形式表示为：

$$\frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2=\frac{8e^4Q_i^2}{\hat{t}^2}\left(\frac{\hat{s}^2+\hat{u}^2}{4}\right), \tag{14.1}$$

其中$\hat{s},\hat{t},\hat{u}$是轻子-夸克碰撞的Mandelstam变量，和Q_i是夸克的电荷，单位是$|e|$。回想起式(5.73)，对于包含无质量粒子的碰撞，$\hat{s}+\hat{t}+\hat{u}=0$，于是质心系的微分截面为

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\cos\theta_{\text{CM}}}&=\frac{1}{2\hat{s}}\frac{1}{16\pi}\frac{8e^4Q_i^2}{\hat{t}^2}\left(\frac{\hat{s}^2+\hat{u}^2}{4}\right)\\&=\frac{\pi\alpha^2Q_i^2}{\hat{s}}\left(\frac{\hat{s}^2+(\hat{s}+\hat{t})^2}{\hat{t}^2}\right).\end{aligned} \tag{14.2}$$

或者，因为$\hat{t}=-\hat{s}(1-\cos\theta_{\text{CM}})/2$

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}=\frac{2\pi\alpha^2Q_i^2}{\hat{s}^2}\left(\frac{\hat{s}^2+(\hat{s}+\hat{t})^2}{\hat{t}^2}\right). \tag{14.3}$$

为了利用这个结果,我们必须将$\hat{s}$和$\hat{t}$与轻子-夸克碰撞实验的可观测量联系起来。运动学变量如图14.1所示。来自电子的动量转移q可以通过测量电子的末态

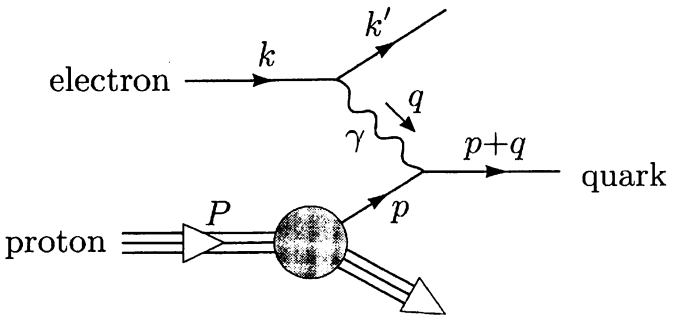


图14.1 部分子模型中深度非弹电子散射的运动学

动量和能量来测量，而不需要使用来自强子产生的任何信息。因为q^μ是类空矢量，我们习惯上将它的不变平方表示为一个正的量Q：

$$Q^2 \equiv -q^2. \tag{14.4}$$

于是不变的$\hat{t}$简单地就是$-Q^2$。

用可观测量表达$\hat{s}$更加困难。如果从电子-质子的质心系来观察碰撞，并且我们将质子看作是一个松散束缚的部分子结合物(并继续忽略质量)，我们可以通过质子所携带的总动量的分数来描述给定的部分子。我们用参数ξ表示这个**纵向分数**，其中$0 < \xi < 1$。对于部分子的每个种类i，例如，带电荷$Q_i = +2/3$的上夸克，将有一个函数$f_i(\xi)$来表达质子包含一个类型为i和纵向分数为ξ的部分子的概率。电子-质子非弹性散射的总截面表达式将包含一个被撞部分子的ξ值积分。部分子的动量矢量是$p = \xi P$，其中P是质子的总动量。因此，如果k是初始电子动量，

$$\hat{s} = (p+k)^2 = 2p \cdot k = 2\xi P \cdot k = \xi s, \tag{14.5}$$

其中s为电子-质子质心能的平方。

值得注意的是，如果我们假设电子-部分子散射是弹性的，也可以仅通过测量电子动量来确定ξ。由于散射的部分子的质量比s和Q^2小

$$0 \approx (p+q)^2 = 2p \cdot q + q^2 = 2\xi P \cdot q - Q^2. \tag{14.6}$$

Thus

$$\xi = x, \qquad \text{where} \quad x \equiv \frac{Q^2}{2P \cdot q}. \tag{14.7}$$

我们可以从每个散射电子来确定散射过程的Q^2和x的值。于是部分子模型预测了在x-Q^2平面上的事件分布。利用在$\xi = x$处取值的部分子分布函数$f_i(\xi)$，根

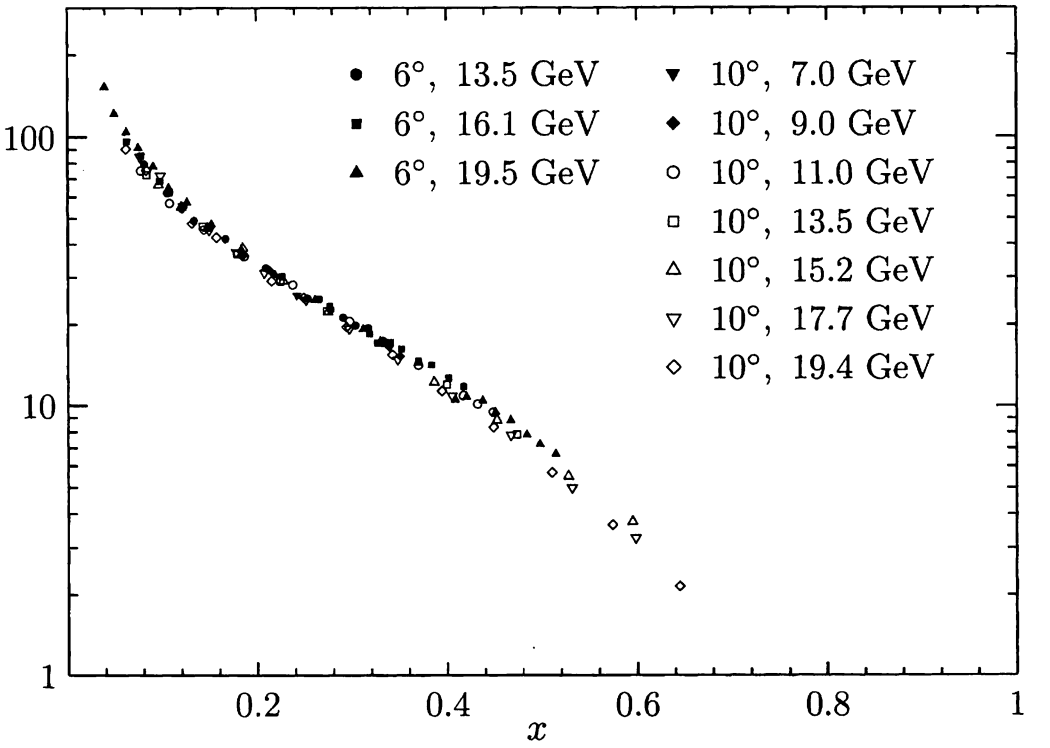


图14.2 利用SLAC-MIT实验测量的e^-p深度非弹散射截面进行比约肯标度的测试。J. S. Poucher, et. al.,*Phys. Rev. Lett.* **32**, 118(1974)。我们把$d^2\sigma/dxdQ^2$对x除以因子(14.9)并画出，其表示不同的初始电子能量和散射角。数据范围为1 GeV^2 $< Q^2 <$ 8 GeV^2。

据截面公式(14.3)，我们得到分布

$$\frac{d^2\sigma}{dxdQ^2} = \sum_i f_i(x)Q_i^2 \cdot \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4}\left[1+\left(1-\frac{Q^2}{xs}\right)^2\right]. \tag{14.8}$$

分布函数$f_i(x)$取决于质子结构的细节，目前还不知道如何从第一性原理计算它们。但公式(14.8)仍然有一个惊人的预测，即当深度非弹散射截面除以因子

$$\frac{1+(1-Q^2/xs)^2}{Q^4} \tag{14.9}$$

以消除QED截面的运动学依赖性时，给出了一个仅依赖于x且与Q^2无关的量。这种行为被称为**比约肯标度**。事实上，对于大于1 GeV的Q值，SLAC-MIT实验的数据在约为10%的精度上显示了比约肯标度，如图14.2所示

比约肯标度本质上是这样一种表述：无论质子受到多大的撞击，在电磁探测器看来，质子的结构看起来是一样的。在质子的参考系内，交换的虚光子的能量

是

$$q^0 = \frac{P \cdot q}{m} = \frac{Q^2}{2xm}, \tag{14.10}$$

其中m是质子质量。这个能量转移的倒数，大致上，是质子组分所看到的散射过程的持续时间。这个时间应该与质子质量的倒数相当，即各部分子相互作用的特征时间。当$q^0 \ll m$时，就会发生深度非弹机制，即散射与质子的正常时间标度相比非常快时。比约肯标度表明，在这种快速的散射过程中，质子组分之间的相互作用可以忽略不计。我们可以想象，部分子在极短的时间标度上是近似的自由粒子，该时间标度对应的能量转移为GeV或更多，尽管它们在更长的时间标度上有很强的相互作用。

渐近自由部分子

比约肯标度变换所暗示的质子结构的图像非常简单，但它提出了新的基本问题。在量子场论中，费米子通过交换虚粒子相互作用。这些虚粒子可以具有任意高的动量，因此与它们相关的涨落可以发生在任意短的时间标度上。量子场论过程不会在短的时间内自我关闭来展现自由粒子方程。因此，比约肯标度的发现表明了，对近乎自由部分子的观测与量子场论的基本原理之间的冲突。

这一悖论的解决来自重整化群。在第12章中，我们看到耦合常数随着距离的变化而变化。在QED和ϕ^4理论中，我们发现耦合在大动量变强，在小动量变弱。然而，我们注意到一种可能性，在某些理论中，耦合常数可能具有相反的行为，在小动量或大的时间变强，而在大动量或短的时间变弱。我们把这种行为称为**渐近自由**。第13.3节讨论了渐近自由量子场论的一个例子，即二维非线性sigma模型。如果在四维中存在一种适当的渐近自由的量子场论来描述夸克的相互作用和结合，就可以解决前面所提出的问题。然后，至少在某种程度上，该理论所描述的强相互作用会在大动量转移或短时间的过程中消失。

在发现比约肯标度的时候，还没有人知道四维中渐近自由的场论。然后，在20世纪70年代早期，t'Hooft, Politzer, Gross和Wilczek发现了这样的一类理论。这些是**非阿贝尔规范理论**：是相互作用矢量玻色子的理论，可以被构造为量子电

动力学的推广。后来表明，这些是在四维空间下唯一的渐近自由场论。这一发现为强相互作用基本理论的建立提供了重要的线索。显然，夸克是由这种相互作用的矢量玻色子(称为胶子)结合在一起的。

然而，这些规范理论不能精确地再现出严格的比约肯标度的期望。当对深度非弹性散射的测量和其他涉及大动量转移的强相互作用过程的精度达到较高水平时，自由部分子模型和具有渐近自由的量子场论模型之间就会出现差异。在渐近自由的量子场论中，耦合在任何有限动量的转移下仍然是非零的。事实上，耦合最终演化到零是很慢的，是动量的对数。因此，在某些水平上，人们必须找到比约肯标度的小修正，与高动量胶子的交换或发射有关。同样，对于强子物理在高动量转移时的其他定性简化——例如，强子与强子碰撞时有限的横动量现象——应该都只是近似的，由于胶子的交换和发射而得到修正。因此，强相互作用的渐近自由理论的预测是双重的。一方面，这种理论预测了在高动量下行为的定性简化。但是另一方面，这样的理论预测了对这种行为的明确的修正模式。

事实上，20世纪70年代的粒子物理学实验恰恰揭示了这一图景。比约肯标度被发现只是一个近似的关系，显示的破坏对应的是在Q^2的对数标度上部分子分布$f_i(x)$的缓慢演变。强子-强子碰撞中粒子产生速率在很大的横动量值下，被发现只是作为幂而不是指数地下降，而大横动量下粒子的产生被表明与强子的喷注(由硬散射的夸克或胶子的软演化产生)有关。最显著的是，这些(和其他)与标度的偏差的截面形式，最终为强相互作用间介导的基本场的矢量特征提供了直接的证据。

当我们学习描述强相互作用的特殊规范理论时，我们将在第17章回顾所有这些现象。然而，首先，我们必须学习如何构建非阿贝尔规范理论，以及如何使用费曼图计算出它们的预测。在我们分析这些理论的过程中，重整化群将扮演一个重要的角色。非阿贝尔规范理论研究中一个非常美妙的方面是，量子场论中最强大的普遍概念在与这些特定的、构建复杂的模型的具体特征交织在一起时，会获得了更多的力量。一般原则和规范理论的具体特征之间的相互影响将是本书第三部分的主要主题。

Chapter 15

非阿贝尔规范不变性

到目前为止，在这本书中，我们已经研究了相当有限的一类量子场和相互作用，将我们的注意力限制在标量场论、汤川理论和量子电动力学。不足为奇的是，这些理论不足以描述所有已知的基本粒子之间的相互作用。但是考虑到可重正化理论的拉格朗日量不包含质量量纲大于4的项，还有什么其他理论是可能的呢?

接下来要尝试的最自然的理论是矢量场之间的相互作用，如$A^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu$或$A^4$。然而，由于矢量场算符的时间分量$A^0$产生的负模态，这类的合理理论很难构建。在第5.5节中，我们看到这些负模态在QED中没有造成任何困难：它们通过Ward恒等式被纵向极化态有效地抵消了。Ward恒等式，反过来，从QED拉格朗日量在局域规范变换下的不变性得到。也许，如果我们能推广局域规范不变性的原理，它将会引导我们构建其他关于矢量粒子的合理理论。

本章的目标就是这样做。首先，我们将简要地回到QED的研究上，这一次我们将规范对称性作为基础，并从这一原理推导出理论的其余部分。然后，在第15.2节中，我们将看到电动力学的规范不变性只是无限参数对称性的最平凡的例子，更多普遍的例子导致了其他有趣的拉格朗日量。这些场论中，其中第一个是由Yang和Mills构建的*，其深刻地概括了电动力学。它们是多矢量粒子的理论，它们的相互作用受到对称性原理的强烈约束。在以后的章节中，我们将研究这些理论的量子化以及它们在真实世界中的基本粒子物理的应用。

*C. N.Yang and R. Mills. *Phys. Rev.* **96**, 191(1954)

15.1 规范不变性几何

在第4.1节中，我们写下了量子电动力学的拉格朗日量，并注意到一个奇怪的事实，即它在非常大一组的变换(4.6)下是不变的，使得在时空的每一点都可以进行独立的对称变换。这种不变性是量子电动力学中著名的**规范对称性**。然而，从现代的观点来看，规范对称性并不是偶然的好奇心，而是确定拉格朗日量形式的基本原则。现在让我们从现代的观点来回顾一下这个理论的要素。

我们从复的狄拉克场$\psi(x)$开始，并规定我们的理论在如下变换下应是不变的

$$\psi(x) \to e^{i\alpha(x)}\psi(x). \tag{15.1}$$

这是一个相位旋转，其角度$\alpha(x)$在点与点之间是任意不同的。我们如何写出在这个变换下不变的拉格朗日量?只要我们考虑拉格朗日量中没有导数的项，这就很简单：我们简单地写出对整体相位旋转不变的相同项。例如，费米子质量项

$$m\bar{\psi}\psi(x)$$

是整体相位不变性允许的，而局域不变性不作进一步限制。

当我们试图写出包含导数的项时，困难就出现了。$\psi(x)$在矢量n^μ方向上的导数由极限程序定义

$$n^\mu\partial_\mu\psi = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\big[\psi(x+\epsilon n) - \psi(x)\big]. \tag{15.2}$$

然而，在具有局域相位不变性的理论中，这个定义不是很合理，因为相减的两个场$\psi(x+\epsilon n)$和$\psi(x)$在对称性(15.1)下有完全不同的变换。换句话说，$\partial_\mu\psi$这个量没有简单的变换律，也没有有用的几何解释。

为了使相邻点上的$\psi(x)$值相减，我们必须引入一个因子来补偿点与点之间相位变换的差异。这样做的最简单的方法是定义一个标量$U(y,x)$，它依赖于两点并且在(15.1)的同时有变换律：

$$U(y,x) \to e^{i\alpha(y)}U(y,x)e^{-i\alpha(x)} \tag{15.3}$$

在间隔为0时，令$U(y,y)=1$；一般来说，我们可以要求$U(y,x)$为一个纯相位：$U(y,x)=\exp[i\phi(y,x)]$。根据这个定义，对象$\psi(y)$和$U(y,x)\psi(x)$有相同的变换定律，我们可以用一种有意义的方式令它们相减，尽管有局域对称性。因此，我们

可以定义一个合理的导数，称为**协变导数**，如下:

$$n^\mu D_\mu \psi = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \big[\psi(x+\epsilon n) - U(x+\epsilon n, x)\psi(x)\big]. \tag{15.4}$$

为了令这个定义明确，我们需要得到比较子(comparator)$U(y,x)$在无穷小间隔的点上的一个表达式。如果$U(y,x)$的相位是位置y和x的连续函数，则$U(y,x)$可以以两点的间隔展开：

$$U(x+\epsilon n, x) = 1 - ie\,\epsilon n^\mu A_\mu(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{15.5}$$

这里我们任意提取了一个常数e，位移ϵn^μ的系数是一个新的矢量场$A_\mu(x)$。这种作为局域对称变换比较子的无穷小极限而出现的场称为**联络场(connection)**。于是协变导数的形式为

$$D_\mu \psi(x) = \partial_\mu \psi(x) + ieA_\mu \psi(x). \tag{15.6}$$

将(15.5)插入(15.3)，可以发现A_μ在此局域规范变换下的变换为

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x). \tag{15.7}$$

为了检查所有的这些表达式是一致的,我们可以根据方程式(15.1)和(15.7)来变换$D_\mu \psi(x)$:

$$\begin{aligned} D_\mu \psi(x) &\to \Big[\partial_\mu + ie\big(A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha\big)\Big] e^{i\alpha(x)} \psi(x) \\ &= e^{i\alpha(x)} \big(\partial_\mu + ieA_\mu\big)\psi(x) = e^{i\alpha(x)} D_\mu \psi(x). \end{aligned} \tag{15.8}$$

因此，协变导数的变换方式与场ψ相同，与我们在原始定义(15.4)中构造它的方式完全相同。

我们现在已经恢复了QED拉格朗日量的大部分常见的组分。然而，从我们目前的观点来看，协变导数的定义和联络场A_μ的变换律遵循了局域相位旋转对称性的假设。即使是矢量场A_μ的存在本身也是局域对称的结果：没有它，我们就不能写出包含ψ的导数的不变拉格朗日量。

更一般地，我们现在的分析给我们提供了一种方法来构造所有在局域对称下不变的可能的拉格朗日量。对带有ψ的导数的任意项，代替它们为协变导数。根据式(15.8)，这些项变换的方式与ψ自身完全相同。因此，在整体相位旋转下不变的ψ及其协变导数的任何组合也将(且只有这些组合)是局域不变的。

为了完成局域不变拉格朗日量的构造，我们必须找到场A_μ的一个动能项：一个依赖于A_μ和它的导数、但不依赖于ψ的局域不变项。这些项可以根据比较子

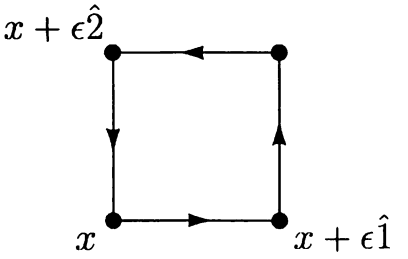


图15.1 通过(1,2)平面上一个小正方形周围的比较子来构造场强。

$U(y,x)$来整体地构造，或者根据协变导数来无穷小地构造。

从$U(y,x)$开始，我们需要将显式公式(15.5)扩展到ϵ展开下的下一项，利用$U(y,x)$是一个纯相位的假设，以及$\big(U(x,y)\big)^\dagger = U(y,x)$的限制，可以推出

$$U(x+\epsilon n,x) = \exp\big[-ie\epsilon n^\mu A_\mu(x+\tfrac{\epsilon}{2}n) + \mathcal{O}(\epsilon^3)\big]. \tag{15.9}$$

(放宽这些限制会在理论中引入额外的矢量场；这是一个不必要的麻烦)利用$U(y,x)$的这种展开，我们将时空中沿着一个小方块的相位方向的比较子联系在一起。为了明确一点，我们将这个方块取在(1,2)平面，由单位矢量$\hat{1},\hat{2}$的定义(见图15.1)。定义$\mathbf{U}(x)$为圈的角上四个比较子的乘积:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}(x) \equiv\ & U(x,x+\epsilon\hat{2})U(x+\epsilon\hat{2},x+\epsilon\hat{1}+\epsilon\hat{2}) \\ & \times U(x+\epsilon\hat{1}+\epsilon\hat{2},x+\epsilon\hat{1})U(x+\epsilon\hat{1},x).\end{aligned} \tag{15.10}$$

U的变换律(15.3)表明$\mathbf{U}(x)$是局域不变的。在极限$\epsilon\to 0$时，它将给出A_μ的一个局域不变的函数。要找到这个函数的形式，插入展开式(15.9)即可得到

$$\begin{aligned}\mathbf{U}(x) = \exp\Big\{ & -i\epsilon e\big[-A_2(x+\tfrac{\epsilon}{2}\hat{2}) - A_1(x+\tfrac{\epsilon}{2}\hat{1}+\epsilon\hat{2}) \\ & + A_2(x+\epsilon\hat{1}+\tfrac{\epsilon}{2}\hat{2}) + A_1(x+\tfrac{\epsilon}{2}\hat{1})\big] + \mathcal{O}(\epsilon^3)\Big\}.\end{aligned} \tag{15.11}$$

当我们以ϵ为幂展开指数时，这个就变成了

$$\mathbf{U}(x) = 1 - i\epsilon^2 e\big[\partial_1 A_2(x) - \partial_2 A_1(x)\big] + \mathcal{O}(\epsilon^3). \tag{15.12}$$

因此，结构

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{15.13}$$

是局域不变的。当然，$F_{\mu\nu}$是我们熟悉的电磁场张量，它在(15.7)下的不变性是可以直接检验的。然而，上述构造向我们展示了$F_{\mu\nu}$结构的几何起源。任何只通过$F_{\mu\nu}$及其导数才依赖于A_μ的函数都是局域不变的。更一般的函数，比如矢量场质

量项$A^\mu A_\mu$，在(15.7)下以无法被补偿的方式进行变换，因此不能出现在不变的拉格朗日量中。

$F_{\mu\nu}$的不变性的相关证明可以用协变导数来做。我们在上面已经看到，如果一个场有局域变换律(15.1)，那么它的协变导数也有相同的变换律。因此，ψ的二阶协变导数也根据(15.1)进行变换，同样的结论对于协变导数的对易子也成立：

$$[D_\mu, D_\nu]\psi(x) \to e^{i\alpha(x)}[D_\mu, D_\nu]\psi(x). \tag{15.14}$$

然而，对易子本身并不是一个导数：

$$\begin{aligned}[D_\mu, D_\nu]\psi &= [\partial_\mu, \partial_\nu]\psi + ie\big([\partial_\mu, A_\nu] - [\partial_\nu, A_\mu]\big)\psi - e^2[A_\mu, A_\nu]\psi \\ &= ie\big(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\big)\cdot\psi.\end{aligned} \tag{15.15}$$

That is,

$$[D_\mu, D_\nu] = ieF_{\mu\nu}. \tag{15.16}$$

在式(15.14)的右边，因子$\psi(x)$占据了整个变换律，所以乘法因子$F_{\mu\nu}$必须是不变的。我们可以把协变导数的对易子想象成经过一个小正方形的比较子的比较；因此，这一论点基本上与前一段等价。

无论用什么方法来证明$F_{\mu\nu}$的不变性，我们现在都已经集结了所有需要的成分，来写出关于电子场ψ及其相关的联络A_μ的最一般的局域不变的拉格朗日量。这个拉格朗日量必须是ψ及其协变导数的函数，以及$F_{\mu\nu}$及其导数的函数，并且必须是整体相位变变换下不变的。量纲低于4的算符，只有4个可能的项：

$$\mathcal{L}_4 = \bar\psi(i\not{D})\psi - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 - c\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu} - m\bar\psi\psi. \tag{15.17}$$

通过调整场ψ和A_μ的归一化，我们将前两项的系数设置为它们的标准值。A_μ的这种归一化需要A_μ的原始定义(15.5)中的任意比例因子e。第三项违反了分立对称P和T，所以如果我们假设了这些对称性，我们可以排除它*。那么$\mathcal{L}_4$只包含两个自由参数，比例因子e和系数m。

通过使用量纲为5和6的算符，我们可以形成许多额外的规范不变的组合：

$$\mathcal{L}_6 = ic_1\bar\psi\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\psi + c_2(\bar\psi\psi)^2 + c_3(\bar\psi\gamma^5\psi)^2 + \cdots. \tag{15.18}$$

在质量量纲的每一个更高阶上都出现了更多的允许项。但是所有这些项都是不可重整化的相互作用。在12.1节的语言中，它们在截断取为无穷大的极限下与四维的物理无关。

---

*在第20.3节中讨论了P、C和T破坏的一般系统学。

我们现在得出了一个非凡的结论。我们首先假设电子场服从局域对称性(15.1)。根据这个假设，我们证明了一定存在一个电磁矢量势。此外对称性原理还表明，在四维最一般的可重正化的(或在Wilson看来，是相关的)拉格朗日量是一般形式$\mathcal{L}_4$。如果我们坚持认为这个拉格朗日量在时间反演或宇称下也是不变的，那么我们就唯一地得到作为量子电动力学基础的Maxwell-Dirac拉格朗日量。

15.2 Yang-Mills 拉格朗日量

如果前一节简单的几何结构产生了麦克斯韦的电动力学理论，那么肯定有可能通过更一般的几何原理来构建其他有趣的理论。Yang和Mills提出，上一节的论证可以由局域相位旋转不变性推广到在任意连续对称群下的不变性。在这一节中，我们将介绍局域对称性的这种推广。在大多数讨论中，我们将考虑我们的局域对称性为三维旋转群，$O(3)$或$SU(2)$，因为在这种情况下必要的群论应该是熟悉的。在本节的最后，我们将进一步推广到任意局域对称性的情况。

那么，考虑以下对相位旋转(15.1)的推广：我们从狄拉克场的二重态开始，而不是单个费米子场，

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}, \tag{15.19}$$

它们和二分量旋量一样，在抽象的三维旋转下相互变换:

$$\psi \to \exp\Big(i\alpha^i \frac{\sigma^i}{2}\Big)\psi. \tag{15.20}$$

这里σ^i是泡利-sigma矩阵，和往常一样，这里隐含了对重复指标的求和。重要的是要把这种抽象的变换与物理的三维空间中的旋转区别开来；在杨和米尔斯的原始论文中，他们认为(ψ_1, ψ_2)是质子-中子的二重态，因为它在同位旋下变换。和相位旋转的情况一样，不难为ψ构造一个拉格朗日量，它在(15.20)作为整体对称性下是不变的。

我们现在推广(15.20)到局域对称性，通过坚持拉格朗日量在α^i是x的任意函数的变换下是不变的。将这个变换写成

$$\psi(x) \to V(x)\psi(x), \qquad \text{where } V(x) = \exp\Big(i\alpha^i(x)\frac{\sigma^i}{2}\Big). \tag{15.21}$$

应用前一节的方法，我们可以构造一个合适的拉格朗日量。然而，我们会遇到一些额外的复杂情况，因为现在有三个正交的对称运动，它们彼此不对易。这一特征非常重要，以至于有这个特征的理论会有一个特别的名字：我们说电动力学是**阿贝尔**对称群，而更一般的理论是**非阿贝尔**对称群。与不对易局域对称性相关的场论称为**非阿贝尔规范理论**。

为了构造在这新的变换群下不变的拉格朗日量，我们必须再次定义一个协变导数，它以一种简单的方式变换。我们再次使用了定义(15.4)，但是由于ψ现在是二分量对象，比较子$U(y,x)$必须是一个2×2的矩阵。$U(y,x)$的变换律是

$$U(y,x) \to V(y)\,U(y,x)\,V^\dagger(x), \tag{15.22}$$

其中$V(x)$与(15.21)相同，我们再次令$U(y,y)=1$。在点$x\neq y$，我们可以一致地限制$U(y,x)$为幺正矩阵。在$U=1$附近，任何这样的矩阵都可以用$SU(2)$的厄米生成元来展开；因此，对于无穷小的间隔，我们可以这样写

$$U(x+\epsilon n,x) = 1 + ig\epsilon n^\mu A^i_\mu \frac{\sigma^i}{2} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{15.23}$$

这里g是一个常数，提取它是为以后的方便。将这个展开式插入到协变导数的定义(15.4)中，我们得到与局域$SU(2)$对称性相关的协变导数的表达式如下:

$$D_\mu = \partial_\mu - igA^i_\mu \frac{\sigma^i}{2}. \tag{15.24}$$

这个协变导数需要三个矢量场，每个矢量场对应变换群的一个生成元。

将展开式(15.23)代入到变换律(15.22)中，我们可以得到联络A^i_μ的规范变换律:

$$1 + ig\epsilon n^\mu A^i_\mu \frac{\sigma^i}{2} \to V(x+\epsilon n)\Big(1 + ig\epsilon n^\mu A^i_\mu \frac{\sigma^i}{2}\Big)V^\dagger(x). \tag{15.25}$$

我们必须把右边展开到ϵ阶，注意不同的泡利矩阵不能互相对易。利用如下恒等式，很方便得到$V(x+\epsilon n)$的展开：

$$\begin{aligned} V(x+\epsilon n)V^\dagger(x) &= \Big[\Big(1+\epsilon n^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \mathcal{O}(\epsilon^2)\Big)V(x)\Big]V^\dagger(x) \\ &= 1 + \epsilon n^\mu \Big(\frac{\partial}{\partial x^\mu}V(x)\Big)V^\dagger(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= 1 + \epsilon n^\mu V(x)\Big(-\frac{\partial}{\partial x^\mu}V^\dagger(x)\Big) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \tag{15.26}$$

然后在(15.25)中与ϵn^μ成正比的项给出了变换

$$A^i_\mu(x)\frac{\sigma^i}{2} \to V(x)\Big(A^i_\mu(x)\frac{\sigma^i}{2} + \frac{i}{g}\partial_\mu\Big)V^\dagger(x). \tag{15.27}$$

导数作用于$V^\dagger(x) = \exp(-i\alpha^i\sigma^i/2)$；显式地计算这个导数并不容易，因为指数不一定与导数对易。对于无穷小的变换，我们可以把$V(x)$展开到α的一阶，在这种情况下我们得到

$$A^i_\mu\frac{\sigma^i}{2} \to A^i_\mu\frac{\sigma^i}{2} + \frac{1}{g}(\partial_\mu\alpha^i)\frac{\sigma^i}{2} + i\big[\alpha^i\frac{\sigma^i}{2}, A^j_\mu\frac{\sigma^j}{2}\big] + \cdots. \tag{15.28}$$

这个变换律的最后一项是新的，它是由局域变换的不对易性引起的。通过将这种关系与费米子变换的无穷小形式结合起来，

$$\psi \to \Big(1 + i\alpha^i\frac{\sigma^i}{2}\Big)\psi + \cdots, \tag{15.29}$$

我们可以检查协变导数的无穷小变换:

$$\begin{aligned} D_\mu\psi &\to \Big(\partial_\mu - igA^i_\mu\frac{\sigma^i}{2} - i(\partial_\mu\alpha^i)\frac{\sigma^i}{2} + g\big[\alpha^i\frac{\sigma^i}{2}, A^j_\mu\frac{\sigma^j}{2}\big]\Big)\Big(1 + i\alpha^k\frac{\sigma^k}{2}\Big)\psi \\ &= \Big(1 + i\alpha^i\frac{\sigma^i}{2}\Big)D_\mu\psi, \end{aligned} \tag{15.30}$$

在项低于α^2阶下。利用(15.27)和(15.21)不难看出，即使在有限变换中，协变导数与它作用的场具有相同的变换规律。

利用协变导数，我们可以建立涉及ψ的最一般的规范不变拉格朗日量，但要写出一个完整的拉格朗日量，我们还必须找到仅依赖于A^i_μ的规范不变项。为此，我们构造了电磁场张量的类比。我们将使用上一节的第二种方法，从协变导数的对易子开始。协变导数的变换律意味着

$$[D_\mu, D_\nu]\psi(x) \to V(x)[D_\mu, D_\nu]\psi(x). \tag{15.31}$$

同时，通过使用公式(15.24)写出对易子，我们可以证明就像在阿贝尔情形中那样，$[D_\mu, D_\nu]$不是微分算符，只是作用于ψ的一个乘法因子(现在是一个矩阵)。然而这一次有一个新特性：对易子展开中的最后一项不再消失。反而，我们发现

$$[D_\mu, D_\nu] = -igF^i_{\mu\nu}\frac{\sigma^i}{2}, \tag{15.32}$$

with

$$F^i_{\mu\nu}\frac{\sigma^i}{2} = \partial_\mu A^i_\nu\frac{\sigma^i}{2} - \partial_\nu A^i_\mu\frac{\sigma^i}{2} - ig\big[A^i_\mu\frac{\sigma^i}{2}, A^j_\nu\frac{\sigma^j}{2}\big]. \tag{15.33}$$

我们可以通过应用泡利矩阵的标准对易关系来简化这个关系:

$$[\frac{\sigma^i}{2}, \frac{\sigma^j}{2}] = i\epsilon^{ijk}\frac{\sigma^k}{2}. \tag{15.34}$$

Then

$$F^i_{\mu\nu} = \partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu + g\epsilon^{ijk}A^j_\mu A^k_\nu. \tag{15.35}$$

场强的变换律来源于方程(15.21)和(15.31):

$$F^i_{\mu\nu}\frac{\sigma^i}{2} \to V(x)F^j_{\mu\nu}\frac{\sigma^j}{2}V^\dagger(x). \tag{15.36}$$

无穷小形式是

$$F^i_{\mu\nu}\frac{\sigma^i}{2} \to F^i_{\mu\nu}\frac{\sigma^i}{2} + [i\alpha^i\frac{\sigma^i}{2}, F^j_{\mu\nu}\frac{\sigma^j}{2}]. \tag{15.37}$$

注意，场强不再是一个规范不变的量。它不能是，因为现在有三种场强，每种场强都与抽象空间中给定的旋转方向相关。然而，很容易地形成规范不变的场强的组合。例如,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\Big[\big(F^i_{\mu\nu}\frac{\sigma^i}{2}\big)^2\Big] = -\frac{1}{4}\big(F^i_{\mu\nu}\big)^2 \tag{15.38}$$

是A^i_μ的规范不变的动能项。注意，相对于电动力学的情况，这个拉格朗日量包含A^i_μ的三次项和四次项。因此，这个拉格朗日量描述了一个非平凡的、相互作用的场论，称为**杨-米尔斯理论**。这是非阿贝尔规范理论最简单的例子。

为了建立一个杨-米尔斯矢量场与费米子相互作用的理论，我们简单地将规范场拉格朗日量(15.38)加入到我们熟悉的狄拉克拉格朗日量中，将ψ的普通导数替换为协变导数。结果看起来几乎和QED拉格朗日量一样:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D})\psi - \frac{1}{4}(F^i_{\mu\nu})^2 - m\bar{\psi}\psi. \tag{15.39}$$

这就是著名的杨-米尔斯拉格朗日量。和QED一样，它依赖于两个参数：比例因子g(类似于电子电荷)和费米子质量m。通过拉格朗日量的变分，我们找到了规范理论的经典运动方程。这些方程是费米子场的狄拉克方程，和矢量场的以下方程

$$\partial^\mu F^i_{\mu\nu} + g\epsilon^{ijk}A^{j\mu}F^k_{\mu\nu} = -g\bar{\psi}\gamma_\nu\frac{\sigma^i}{2}\psi \tag{15.40}$$

我们为$SU(2)$对称变换(15.20)所做的一切都可以很容易地推广到任何其他连续的对称群。第15.4节列举并分类了全范围内可能的对称群。然而，对于任何

这样的群，拉格朗日量的元素的一般表达式是非常相似的。考虑任意的连续变换群，由一组$n \times n$的幺正矩阵V表示，那么基本场$\psi(x)$将形成一个n重态，并根据如下方式去变换

$$\psi(x) \to V(x)\psi(x), \tag{15.41}$$

V对x的依赖性使得变换是局域的。在无穷小形式下，$V(x)$可以用对称群的一组基本生成元展开，它们可以表示为厄米矩阵t^a:

$$V(x) = 1 + i\alpha^a(x)t^a + \mathcal{O}(\alpha^2). \tag{15.42}$$

现在对于一般的局域对称群，我们可以进行从式(15.22)到式(15.33)的整个分析，只需在分析的每一步进行如下的替换即可，

$$\frac{\sigma^i}{2} \to t^a \tag{15.43}$$

为了推广场张量的显式表达式(15.35)，我们需要知道矩阵t^a的对易关系。通常把它们写成标准形式

$$[t^a, t^b] = if^{abc}t^c, \tag{15.44}$$

其中f^{abc}是一组称为**结构常数**的数。这个对象代替式(15.34)中的ϵ^{ijk}。传统的方法是选择矩阵t^a的一组基，使得f^{abc}完全反对称；我们将在第15.4节中证明这总是可能的。

我们现在可以概括我们所有结果如下。与一般变换(15.41)相关的协变导数为

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a t^a; \tag{15.45}$$

它包含的每个矢量场对应局域对称性的每个独立的生成元。ψ和A_μ^a的无穷小变换律为

$$\begin{aligned} \psi &\to (1 + i\alpha^a t^a)\psi; \\ A_\mu^a &\to A_\mu^a + \frac{1}{g}\partial_\mu \alpha^a + f^{abc}A_\mu^b \alpha^c. \end{aligned} \tag{15.46}$$

A_μ^a的有限变换有着(15.27)的精确形式:

$$A_\mu^a(x)t^a \to V(x)\Big(A_\mu^a(x)t^a + \frac{i}{g}\partial_\mu\Big)V^\dagger(x). \tag{15.47}$$

这些变换律表明，ψ的协变导数与ψ自身具有相同的变换律。场张量定义为

$$[D_\mu, D_\nu] = -igF_{\mu\nu}^a t^a, \tag{15.48}$$

或者更明确地，

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu. \tag{15.49}$$

这个量的无穷小变换为

$$F^a_{\mu\nu} \to F^a_{\mu\nu} - f^{abc}\alpha^b F^c_{\mu\nu}. \tag{15.50}$$

从方程式(15.46)和(15.50)可以证明，ψ和$F^a_{\mu\nu}$和它们的协变导数的任意整体对称函数，也是局域对称的，因此是规范不变的拉格朗日量的一个候选项。然而，在量纲低于4下，几乎没有允许项。公式(15.39)再次给出了可重正化且保护P和T的最一般的规范不变的拉格朗日量。相应的经典运动方程为

$$\partial^\mu F^a_{\mu\nu} + g f^{abc} A^{b\mu} F^c_{\mu\nu} = -g j^a_\nu, \tag{15.51}$$

where

$$j^a_\nu = \bar{\psi}\gamma_\nu t^a \psi \tag{15.52}$$

是费米子场的整体对称性流。

注意，杨-米尔斯拉格朗日量(15.39)中的非线性项出现在协变导数中，它们与t^a成正比，也出现在场张量中，它们与f^{abc}成正比。因此，非阿贝尔规范理论中相互作用的形式是由局域对称性决定的。矢量场与自身的非线性相互作用与对称性生成元的对易子成正比，因此明确要求了对称群的非阿贝尔本质。

15.3 规范不变的 Wilson 圈

在前面的两个小节中，我们使用了比较子$U(y,x)$，它将x点处的费米子规范变换律转换为y点处的费米子规范变换律。到目前为止，在为这个对象写表达式时，假设x和y是无限小的间隔就足够了。但是，在x和y相距很远的情况下，值得进一步考虑比较子。这一讨论将使我们对规范不变性几何有进一步的了解，并将揭示出规范场的一些额外的有用的函数，我们将在第19章研究它们。

我们首先回到阿贝尔理论，并在此基础上展开对$U(y,x)$的讨论。在式(15.10)中，我们构建了一个比较子的乘积，它的路径围绕着一个小正方形。我们证明了这个乘积$\mathbf{U}(x)$不是平凡的，即使我们最终回到了起点；相反，我们发现$\mathbf{U}(x)$与1之间的差异与电磁场强和正方形面积成正比。这是一个普遍结论的典型例子：两点x和y之间有限间隔的比较子取决于从x到y的路径。

为了解释这一说法，有必要将第15.1节的一些逻辑颠倒过来。从联络A_μ开始，我们假设它有变换律(15.7)，并把$U(z,y)$构造成A_μ的函数，它根据(15.3)变换。不难验证，表达式

$$U_P(z,y)=\exp\Big[-ie\int_P dx^\mu A_\mu(x)\Big] \tag{15.53}$$

满足这条件，如果积分沿着从z到y的任意路径P进行。这个对象$U_P(z,y)$叫做**Wilson线***。式(15.53)给出了有限间隔点的抽象比较子$U(z,y)$的显式实现。

Wilson线的一个重要性质是它依赖于路径P。如果P是返回到y的闭合路径，我们就得到了**Wilson圈**

$$U_P(y,y)=\exp\Big[-ie\oint_P dx^\mu A_\mu(x)\Big]. \tag{15.54}$$

这个量是A_μ的一个非平凡函数，且(通过构造)是局域规范不变的。事实上，A_μ的所有规范不变函数都可以被认为是Wilson圈在路径P的不同选择下的组合。为这一声明给出理由，我们使用Stokes定理将Wilson圈重新写为

$$U_P(y,y)=\exp\Big[-i\frac{e}{2}\int_\Sigma d\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\Big], \tag{15.55}$$

式中Σ为闭环P张开的曲面，$d\sigma^{\mu\nu}$为该曲面上的面积元，$F_{\mu\nu}$为场张量(15.13)。Wilson圈与场强之间的这种关系如图15.2所示。由于Wilson圈是规范不变的，这个论证给出了另一种使场强的规范不变性可视化的方法。相反地，由于A_μ的(几乎)所有规范不变函数都可以由$F_{\mu\nu}$建立，所以这个表达式强调了$U_P(y,y)$是最一般的规范不变量。

Wilson线和Wilson圈都可以推广到非阿贝尔情形。然而，在这里，当我们考虑不可对易矩阵的指数时，会产生一些额外的微妙之处。让我们首先构造Wilson线，它现在根据式(15.22)变换。将(15.53)直接重写为在指数中对$A^a_\mu t^a$积分是不正确的，因为这些矩阵不一定在不同的点上对易。相反，我们必须以一种特殊的方式对这些矩阵排序。我们现在给出正确的排序方案，然后证明它的变换律。

设s为路径P的一个参数，从$x=y$的0跑动到$x=z$的1，然后将Wilson线定义

早在Wilson的研究之前，这种依赖路径的相位就被使用了，在施温格早期关于QED的论文中，以及Y. Aharonov and D. Bohm, Phvs. Rev. 115, 485(1959)。

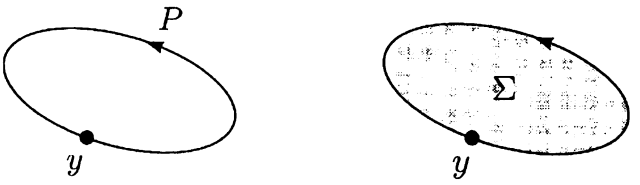


图15.2 Wilson圈积分是围绕一个任意的圈进行的。它也可以表示为场强在由圈张成的曲面上的一个通量积分。

为指数的幂级数展开式，其中每项的矩阵被排序使得较大的s值排到左边。这种方案称为**路径排序(path-ordering)**，用符号$P\{\}$表示。于是Wilson线被写为

$$U_P(z,y) = P\left\{\exp\left[ig\int_0^1 ds\frac{dx^\mu}{ds}A_\mu^a(x(s))t^a\right]\right\}. \tag{15.56}$$

这个表达式类似于我们在式(4.23)中为相互作用绘景传播子写下的编时指数。通过这个类比，可以看出，U_P的表达式是类似于(4.24)的微分方程的解:

$$\frac{d}{ds}U_P(x(s),y) = \left(ig\frac{dx^\mu}{ds}A_\mu^a(x(s))t^a\right)U_P(x(s),y). \tag{15.57}$$

(这里我们认为U_P是参数s的连续函数，而不是在端点处固定为$s=1$)。

为了证明表达式(15.56)是Wilson线的正确推广，我们必须证明它满足正确的规范变换律(15.22)。这是从微分方程(15.57)得到的，它可以被改写为

$$\frac{dx^\mu}{ds}\,D_\mu U_P(x,y) = 0. \tag{15.58}$$

现在，让A^V表示场位形A的规范变换，并使用这些参数去显式地表示规范函数对规范场的依赖性。我们想证明

$$U_P(z,y,A^V) = V(z)U_P(z,y,A)V^\dagger(y), \tag{15.59}$$

其等价于(15.22)。在(15.30)中，我们在无穷小形式下证明了如下关系

$$D_\mu(A^V)\,V(x) = V(x)\,D_\mu(A). \tag{15.60}$$

这个关系式表明如果$U_P(z,y,A)$满足规范场A的方程(15.58)，则(15.59)的右边满足规范场A^V的(15.58)。但具有固定边界条件的一阶微分方程的解是唯一的。因此，如果$U_P(z,y)$被定义为(15.57)或(15.58)的解，那么它确实具有(15.59)的变换律。

和返回到y的闭合路径相关的Wilson线只随y处的规范参数下变换；但是，它不是一个规范不变量:

$$U_P(y,y) \to V(y)U_P(y,y)V^\dagger(y). \tag{15.61}$$

为了更好地理解这种变换，可以计算出$U_P(x,x)$的表达式，其中路径是图15.1所示的(1,2)平面中的小正方形。除了式(15.11)中的项外，还有额外的ϵ^2阶修正，来自领边的$(A_\mu^a t^a)$因子乘积，它们加起来就是这些因子的一个对易子。我们发现

$$U_P(x,x) = 1 + ig\epsilon^2 F_{12}^a(x)t^a + \mathcal{O}(\epsilon^3), \tag{15.62}$$

其中$F_{\mu\nu}^a$由(15.49)中的完整表达式给出。如果我们以ϵ为幂展开变换律(15.61)，则ϵ^2阶的项就是式(15.36)中$F_{\mu\nu}^a$的变换律。

为将封闭路径的Wilson线转换为真正的规范不变量，就取迹。通过循环不变性，(15.61)意味着

$$\operatorname{tr} U_P(x,x) \to \operatorname{tr} U_P(x,x). \tag{15.63}$$

因此，对于一个非阿贝尔规范理论，我们将Wilson圈定义为在一个闭合路径上的Wilson线的迹。

让我们在$SU(2)$规范群的情况下更明确地计算$\operatorname{tr}U_P(x,x)$。如果$U(\epsilon)$是在$\epsilon \to 0$时趋近于1的任意$2\times 2$幺正矩阵，我们可以以$\epsilon$展开如下:

$$\begin{aligned} U(\epsilon) &= \exp\Big[i(\epsilon\beta^i + \epsilon^2\gamma^i + \cdots)\frac{\sigma^i}{2}\Big] \\ &= 1 + i(\epsilon\beta^i + \epsilon^2\gamma^i + \cdots)\frac{\sigma^i}{2} - \frac{1}{2}(\epsilon\beta^i\cdot\epsilon\beta^j + \cdots)\frac{\sigma^i}{2}\frac{\sigma^j}{2} + \cdots. \end{aligned} \tag{15.64}$$

于是，由于泡利矩阵是无迹的并且满足$\operatorname{tr}[\sigma^i\sigma^j] = 2\delta^{ij}$

$$\operatorname{tr} U(\epsilon) = 2 - \frac{1}{4}\epsilon^2(\beta^i)^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3). \tag{15.65}$$

将此公式应用于式(15.62)，我们发现

$$\operatorname{tr} U_P(x,x) = 2 - \frac{1}{4}g^2\epsilon^4(F_{12}^i)^2 + \mathcal{O}(\epsilon^5). \tag{15.66}$$

因此，$(F_{\mu\nu}^i)^2$的规范不变性可以由一个几何证明导出，就像阿贝尔情形一样。使用将在下一节中引入的符号，可以看到对于任何规范群都可以使用相同的论证。

15.4 李代数的基本事实

在第15.2节的结尾，我们看到非阿贝尔规范理论的种类是非常多的。为了最有效地研究这些理论，有必要停下来思考一下它们所基于的连续群的一般性质。在本节中，我们将列举出所有可以用来构建非阿贝尔规范理论的可能的群。然后我们将计算一些数值因子，它们由群变换矩阵构成，在量子化的规范理论中执行显式计算时会需要*。

对于数学家来说，群是由遵守某些代数规则的抽象实体组成的。然而，在量子力学中，我们特别感兴趣的是作用于量子态矢量空间的幺正算符群。我们将注意力集中在连续生成群上，即群包含了任意靠近恒等元的元素，以便通过这些无穷小元素的重复作用来得到一般元素。然后任何的无穷小的群元素g可以写为

$$g(\alpha) = 1 + i\alpha^a T^a + \mathcal{O}(\alpha^2). \tag{15.67}$$

无穷小群参数α^a的系数T^a为厄米矩阵，称为对称群的**生成元**。具有这种结构的连续群称为**李群**。

生成元T^a的集合必须覆盖无穷小群变换的空间，因此生成元T^a的对易子必须是生成元的线性组合。从而可以写出算符T^a的对易关系

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c; \tag{15.68}$$

数字f^{abc}被称为**结构常数**。由生成元张成的矢量空间，再加上对易的运算，称为**李代数**。

对易关系(15.68)与恒等式

$$[T^a,[T^b,T^c]] + [T^b,[T^c,T^a]] + [T^c,[T^a,T^b]] = 0 \tag{15.69}$$

暗示结构常数服从

$$f^{ade}f^{bcd} + f^{bde}f^{cad} + f^{cde}f^{abd} = 0, \tag{15.70}$$

叫做**雅可比恒等式**。从数学家的观点来看(考虑到生成元是抽象的实体而不是厄米算符)，雅可比恒等式是一个必须满足的公理，以便在一组给定的对易规则下

*在这一节中，我们将陈述连续群论的一些一般结果，没有证明。有许多优秀的书籍系统地回顾了这些数学结果。其中，我们特别推荐Cahn(1984)作简短而深刻的讨论，和S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces* (Academic Press, 1978)给出了优雅而严谨的解释。R. Slansky, *Phy. Rets.* **79**, 1(1981)编制了一套特别有用的与非阿贝尔规范理论的构建相关的群理论恒等式的表。

定义一个李代数。

李代数的对易关系完全决定了相关李群在充分接近于恒等元时的的群乘法律。对于足够大的变换，额外的整体问题开始发挥作用；举一个大家熟悉的例子，$SU(2)$和$O(3)$具有相同的对易关系但不同的整体结构。然而非阿贝尔规范理论的拉式量仅依赖于局域对称群的李代数，因此我们将从这里开始忽略这些整体问题。

李代数的分类

为了应用于规范理论，局域对称性通常是一组场的幺正变换。因此，我们主要对具有有限维厄米表示的李代数感兴趣，从而得到相应李群的有限维幺正表示。我们还将假设生成元的数量是有限的。这种李代数被称为**紧致的**，因为这些条件意味着李群是一个有限维的紧致流形。

如果其中一个生成元与其他所有生成元对易，它就生成一个独立的连续的阿贝尔群。这样一个群，具有相位旋转群的结构

$$\psi \to e^{i\alpha}\psi, \tag{15.71}$$

我们称之为$U(1)$。如果代数不包含这样的对易元素，使得这个群不包含$U(1)$因子，那么我们称代数为**半单**。另外，如果李代数不能被分成两组相互对易的生成元，那么这个代数就是**单纯**的。一般的李代数是非阿贝尔单纯分量和另外的阿贝尔生成元的直和。

令人惊讶的是，一个李代数是紧致的和单纯的基本条件是非常严格的。在19世纪数学的一次胜利中，Killing和Cartan将所有可能的紧致单纯李代数分类。几乎所有这些代数都属于三个无限族中的一个，只有五个例外。这三个无限族是与所谓的**典型群**相对应的代数，它们的结构是根据特定的矩阵表示来方便地进行定义的。典型群的三个族的定义如下:

1. **N维矢量的幺正变换**。设ξ和η为复的N矢量。于是一个一般的线性变换的形式为

$$\eta_a \to U_{ab}\eta_b, \qquad \xi_a \to U_{ab}\xi_b. \tag{15.72}$$

如果它保持内积$\eta_a^*\xi_a$，我们说这个变换是**幺正**的。纯相位变换

$$\xi_a \to e^{i\alpha}\xi_a \tag{15.73}$$

形成一个$U(1)$子群，它与其他所有幺正变换对易；我们去掉这个子群以形成一个单纯李群，称为$SU(N)$；它包含所有满足$\det(U)=1$的$N\times N$的幺正变换。$SU(N)$的生成式由$N\times N$厄米矩阵t^a表示，其限制的条件是它们与(15.73)的生成元正交：

$$\mathrm{tr}[t^a]=0. \tag{15.74}$$

有N^2-1个独立的矩阵满足这些条件。

2. **N维矢量的正交变换**。这是幺正$N\times N$变换的子群，保持对称的内积

$$\eta_a E_{ab}\xi_b, \qquad \text{with } E_{ab}=\delta_{ab}. \tag{15.75}$$

这是通常的矢量积，所以这个群是N维的旋转群，$SO(N)$(添加反演得到群$O(N)$)在N维空间中，每个平面都有一个独立的旋转，$SO(N)$有$N(N-1)/2$个生成元。

3. **N维矢量的辛变换**。这是幺正$N\times N$变换的子群，对于偶数N，保持反对称的内积

$$\eta_a E_{ab}\xi_b, \qquad \text{with } E_{ab}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \tag{15.76}$$

其中矩阵元是$N/2\times N/2$块。这个群叫做$Sp(N)$；它有$N(N+1)/2$个生成元。

除了这三个族外，还有五个**例外**李代数，在Cartan的分类系统中分别表示为G_2、F_4、E_6、E_7和E_8。其中，E_6和E_8在有趣的基本相互作用统一模型中被用作局域对称群。然而，我们不会在本书中进一步考虑这些特殊群。事实上，我们的大多数例子都只涉及$SU(N)$群。

表示

一旦我们指定了局域对称群，在拉格朗日量中出现的场最自然地根据这个群的有限维幺正表示变换。因此，我们接下来可能会问，如何系统地找到任意给定李群的所有这些表示。回想一下，对于$SU(2)$群，表示可以直接从对易关系构建，使用升和降算符J_+和J_-。这种构造可以推广到任何紧致李代数的有限维表示。然而，在这本书中，我们将使用相对简单的表示来工作，我们可以用不那么正式的方法计算出它的结构。

在讨论李代数的表示之前，我们应该回顾一下群表示的一些一般方面。给定一个对称群G，群的李代数的有限维幺正表示是一组满足对易关系(15.68)的$d \times d$厄米矩阵t^a。大小d是表示的**维数**。一个任意的表示通常可以通过找到一组基来分解，在该基下所有表示矩阵是同时块对角的。通过基的这个改变，我们可以把这个表示写成**不可约**表示的直和。我们用t_r^a代表不可约表示r的表示矩阵。

对矩阵t_r^a采用的归一化约定是标准的练习(根据它们的积的迹)。如果李代数是半单的，则矩阵t_r^a本身是无迹的。但是，考虑两个生成元矩阵乘积的迹：

$$\mathrm{tr}[t_r^a t_r^b] \equiv D^{ab}. \tag{15.77}$$

只要生成元矩阵是厄米矩阵，矩阵D^{ab}就是正定的。让我们选择生成元T^a的一个基使得这个矩阵正比于单位矩阵。可以证明，一旦对一个不可约表示这样做，它对所有不可约表示都是正确的。因此，在这个基上，

$$\mathrm{tr}[t_r^a t_r^b] = C(r)\delta^{ab}, \tag{15.78}$$

其中对每个表示r，$C(r)$是常数。式(15.78)和对易关系(15.68)产生了结构常数的如下表示

$$f^{abc} = -\frac{i}{C(r)}\,\mathrm{tr}\left\{[t_r^a, t_r^b]t_r^c\right\}. \tag{15.79}$$

这个方程表明f^{abc}是完全反对称的。

对于G的每一个不可约表示r，都有一个相关的**共轭**表示$\bar{r}$，表示r产生了无穷小变换

$$\phi \to (1 + i\alpha^a t_r^a)\phi. \tag{15.80}$$

这个变换的复共轭，

$$\phi^* \to (1 - i\alpha^a (t_r^a)^*)\phi^*, \tag{15.81}$$

也必须是G的一个表示的无穷小元素。因此r的共轭表示的表示矩阵为

$$t_{\bar{r}}^a = -(t_r^a)^* = -(t_r^a)^T. \tag{15.82}$$

由于$\phi^*\phi$对幺正变换是不变的，所以有可能把在表示r和$\bar{r}$中变换的场组合成一个群的不变量。

如果存在令$t_{\bar{r}}^a = U t_r^a U^\dagger$的幺正变换$U$，则表示$\bar{r}$可以等价于$r$。如果是，则表示$r$是**实**的。在这种情况下，存在这样一个矩阵$G_{ab}$，如果$\eta$和$\xi$属于表示$r$，则组

合$G_{ab}\eta_a\xi_b$是一个不变量。有时，对G_{ab}是对称的情形和G_{ab}是反对称的情形进行区分是有用的。在前一种情况下，表示是**严格实的**；在后一种情况下，它是**伪实的**。这两种情况在$SU(2)$中已经出现了：两个矢量的不变组合是$v_a w_a$，因此矢量是实表示；两个旋量的不变组合是$\epsilon^{\alpha\beta}\eta_\alpha\xi_\beta$，所以旋量是伪实表示。

用这种语言，我们可以讨论经典群的最简单表示。在$SU(N)$中，基本的不可约表示(通常称为**基础表示**)是N维复矢量。对于$N>2$，这个表示是复的，所以有第二个，不等价的，表示$\bar{N}$(在$SU(2)$中，这个表示是伪实旋量表示)。在$SO(N)$中，基本的N维矢量是一个(严格的)实表示。在$Sp(N)$中，N维矢量是一个伪实表示。

对于任何单纯李代数，另一个不可约表示是代数的生成元所属的表示。这种表示称为**伴随表示**，用$r=G$表示。表示矩阵由结构常数给出:

$$(t_G^b)_{ac}=if^{abc}. \tag{15.83}$$

根据这个定义，t_G^a满足李代数

$$\left([t_G^b,t_G^c]\right)_{ae}=if^{bcd}(t_G^d)_{ae} \tag{15.84}$$

只是雅可比矩阵(15.70)的重写。由于结构常数是实的和反对称的，所以$t_G^a=-(t_G^a)^*$；因此伴随表示始终是实表示。由上面给出的李群的描述，对于典型群，伴随表示的维数$d(G)$被给出为

$$d(G)=\begin{cases}N^2-1 & \text{for } SU(N),\\ N(N-1)/2 & \text{for } SO(N),\\ N(N+1)/2 & \text{for } Sp(N).\end{cases} \tag{15.85}$$

将f^{abc}标识为一个表示矩阵使我们能够进一步了解第15.2节中引入的一些量。作用于伴随表示中的场的协变导数为

$$\begin{aligned}(D_\mu\phi)_a&=\partial_\mu\phi_a-igA_\mu^b(t_G^b)_{ac}\phi_c\\&=\partial_\mu\phi_a+gf^{abc}A_\mu^b\phi_c.\end{aligned} \tag{15.86}$$

因此，我们可以把(15.46)中的矢量场的规范变换的无穷小形式看作是移动：

$$A_\mu^a\to A_\mu^a+\frac{1}{g}(D_\mu\alpha)^a. \tag{15.87}$$

规范场运动方程(15.51)可改写为

$$(D^\mu F_{\mu\nu})^a = -g j^a_\nu. \tag{15.88}$$

在这两个表达式中，包含f^{abc}的看起来任意的项自然地作为协变导数的一部分出现。另一个恒等式来自于考虑协变导数的反对称的二重对易子，

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}[D_\nu, [D_\lambda, D_\sigma]].$$

这个量由于它的完全反对称性而消失，和(15.69)的方式一样。这个结果可以简化为恒等式

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}(D_\nu F_{\lambda\sigma})^a = 0. \tag{15.89}$$

这个方程被称为非阿贝尔规范理论的**Bianchi恒等式**，是电动力学中齐次麦克斯韦方程的类比

卡西米尔算符

在$SU(2)$中，我们用总自旋J^2的本征值来表征表示。事实上，对于任何单纯李代数，算符

$$T^2 = T^a T^a \tag{15.90}$$

(重复指标和往常一样求和)与所有的群生成元对易：

$$\begin{aligned}[T^b, T^a T^a] &= (if^{bac}T^c)T^a + T^a(if^{bac}T^c) \\ &= if^{bac}\{T^c, T^a\},\end{aligned} \tag{15.91}$$

它会因为f^{abc}的反对称性而消失。也就是说，T^2是代数的不变量；这意味着T^2在每个不可约表示上取一个常数值。因此，T^2的矩阵表示与单位矩阵成正比:

$$t^a_r t^a_r = C_2(r) \cdot \mathbf{1}, \tag{15.92}$$

其中$\mathbf{1}$是$d(r) \times d(r)$单位矩阵，$C_2(r)$是一个常数，称为**二次卡西米尔算符**。对于伴随表示，式(15.92)更方便地写成

$$f^{acd}f^{bcd} = C_2(G)\delta^{ab}. \tag{15.93}$$

卡西米尔算符在非阿贝尔规范理论的计算中经常出现。此外，(15.78)给出的相关的不变量$C(r)$与卡西米尔算符有联系：如果我们用δ^{ab}将(15.78)缩并，并使用(15.92)对左边求值，我们就会发现

$$d(r)C_2(r) = d(G)C(r). \tag{15.94}$$

因此，它对于我们计算最简单的$SU(N)$表示的$C_2(r)$是很有用的

对于$SU(2)$，基础二维表示是旋量表示，它是由泡利矩阵给出的

$$t_2^a = \frac{\sigma^a}{2}. \tag{15.95}$$

这些满足$\mathrm{tr}[t_2^a t_2^b] = \frac{1}{2}\delta^{ab}$。我们将选择$SU(N)$的生成元，使其中的三个是生成元(15.95)，作用于N矢量ξ的前两个分量，然后，对于基础表示的任何矩阵，

$$\mathrm{tr}[t_N^a t_N^b] = \tfrac{1}{2}\delta^{ab}. \tag{15.96}$$

这个约定确定了$SU(N)$的所有不可约表示的$C(r)$和$C_2(r)$的值。对于基础表示N和$\bar{N}$，$C(N)$由(15.96)直接给出，$C_2(N)$由(15.94)推出。我们发现

$$C(N) = \frac{1}{2}, \qquad C_2(N) = \frac{N^2-1}{2N}. \tag{15.97}$$

为了计算伴随表示的卡西米尔算符，我们由N和$\bar{N}$的乘积来建立这个表示。让我们先更一般地讨论不可约表示的乘积。两个表示r_1和r_2的直乘是$d(r_1)\cdot d(r_2)$维的表示。根据这个表示变换的对象可以写成一个张量Ξ_{pq}，其中第一个指标根据r_1变换，第二个指标根据r_2变换。一般来说，这样的乘积可以分解成不可约表示的直和；象征性地，我们写

$$r_1 \times r_2 = \sum r_i. \tag{15.98}$$

表示$r_1 \times r_2$中的表示矩阵为

$$t^a_{r_1\times r_2} = t^a_{r_1}\otimes 1 + 1\otimes t^a_{r_2}, \tag{15.99}$$

其中每个乘积的第一个矩阵作用于Ξ_{pq}的第一个指标，第二个矩阵作用于第二个指标。

乘积表示中的卡西米尔算符为

$$(t^a_{r_1\times r_2})^2 = (t^a_{r_1})^2\otimes 1 + 2t^a_{r_1}\otimes t^a_{r_2} + 1\otimes (t^a_{r_2})^2.$$

取迹；由于矩阵t^a_r是无迹的，右边第二项的迹是零。然后

$$\mathrm{tr}(t^a_{r_1\times r_2})^2 = \big(C_2(r_1)+C_2(r_2)\big)d(r_1)d(r_2). \tag{15.100}$$

另一方面，分解式(15.98)意味着

$$\mathrm{tr}(t^a_{r_1\times r_2})^2 = \sum C_2(r_i)d(r_i). \tag{15.101}$$

令(15.100)和(15.101)相等，我们得到了$C_2(r)$的一个有用等式。

现在把这个等式应用到$SU(N)$的N和$\bar{N}$表示的乘积上。在这种情况下，张量Ξ_{pq}可以包含一个与不变量δ_{pq}成正比的项。Ξ_{pq}的其余(N^2-1)个独立分量像一般

的无迹$N \times N$张量一样变换；影响这些变换的矩阵构成了$SU(N)$的伴随表示。在这种情况下，式(15.98)明确地变为

$$N \times \overline{N} = 1 + (N^2 - 1). \tag{15.102}$$

对于这个分解，式(15.100)和(15.101)意味着等式

$$\left(2 \cdot \frac{N^2 - 1}{2N}\right) N^2 = 0 + C_2(G) \cdot (N^2 - 1). \tag{15.103}$$

因此，对于$SU(N)$

$$C_2(G) = C(G) = N. \tag{15.104}$$

二次卡西米尔算符的计算的另外一些例子在第15.5题中给出。然而，我们在本节中讨论的例子，结合我们复习过的基本群论概念，已经提供了足够的材料来进行非阿贝尔规范理论中最重要的物理计算。

Chapter 16

非阿贝尔规范理论的量子化

前一章讨论了如何构造非阿贝尔规范对称性的拉格朗日量。然而，这只是将非阿贝尔规范不变性的概念与粒子物理的实际相互作用联系起来的第一步。接下来，我们必须计算出包含非阿贝尔规范矢量粒子的费曼图的规则，然后使用这些规则来计算散射振幅和截面。本章将开发出这种计算所需的技术。

在对此技术讨论的同时，我们将研究规范对称性如何影响费曼振幅。在任何具有局域对称性的理论中，拉格朗日量中出现的一些自由度是**非物理的**，因为它们可以通过规范变换来任意调整。在电动力学中，场$A_\mu(k)$中与k^μ成正比的分量沿着对称方向。我们在 9.4 节中看到，这个事实有两个重要的后果。首先，场A_μ的传播子是意义不明确的；传播子有多个表达式，它们同样遵循 QED 拉格朗日量。其次，电动力学的顶点是这样的，这种不明确性对截面的计算没有影响。例如，式(9.58)显示了一个连续的光子传播子族(family)，每个传播子对应连续参数ξ的一个值;但是我们马上看到，所有依赖于ξ的S矩阵元都被 Ward 恒等式消除了。非阿贝尔规范理论也包含类似的不明确性和抵消，但是，正如我们将在本章看到的，抵消的结构更加复杂。

本章的另一个目标是计算 Callan-Symanzik β函数，从而确定非阿贝尔规范理论的跑动耦合常数的行为。如第 14 章所讨论的，这些理论实际上是渐近自由的：耦合常数在大动量时变得很弱。这一结果表明非阿贝尔规范理论对强相互作用模型的适用性。一旦我们确定了非阿贝尔规范理论的正确的费曼规则，我们就能够推导出这个结果。

16.1 非阿贝尔规范玻色子的相互作用

非阿贝尔规范理论的费曼规则的大部分可以直接从杨-米尔斯拉格朗日量中读取，遵循 9.2 节的方法。然而，当我们在 9.4 节中量子化电磁场时，我们看到规范场上的泛函积分必须被仔细定义，而且这种构造的细微之处可以将新的成分引入量子理论。在这一节中，我们将看看忽略这些微妙之处后，我们可以在非阿贝尔理论中走多远。在第 16.2 节中，我们将通过对泛函积分的仔细分析，对费曼规则进行更适当的推导。

费米子和规范玻色子的费曼规则

前一章推导出的杨-米尔斯拉格朗日量是

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F^a_{\mu\nu})^2 + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi, \tag{16.1}$$

其中指标a是对规范群G的生成元求和，费米子多重态ψ属于G的一个不可约表示r，场强是

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu, \tag{16.2}$$

其中f^{abc}是G的结构常数，协变导数可以用表示矩阵t^a_r定义

$$D_\mu = \partial_\mu - igA^a_\mu t^a_r. \tag{16.3}$$

从现在起，我们将删除下标r，除了需要清楚表明的情况。

这个拉格朗日量的费曼规则可以从一个对场ψ, $\bar{\psi}$和A^a_μ的泛函积分推导出来。想象一下在微扰论中展开泛函积分，从自由拉格朗日量$g = 0$开始。自由理论包含的自由费米子的数量等于表示r的维数$d(r)$，包含的自由矢量玻色子数等于G的生成元的数目$d(G)$。使用 9.5 节的方法，可以直接推导出费米子传播子

$$\langle \psi_{i\alpha}(x)\bar{\psi}_{j\beta}(y)\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(\frac{i}{\not{k} - m}\right)_{\alpha\beta} \delta_{ij}\, e^{-ik\cdot(x-y)}, \tag{16.4}$$

其中α, β是狄拉克指标，i, j是对称群的指标：$i, j = 1, \ldots, d(r)$。与电动力学相似，我们可以猜测矢量场的传播子是

$$\langle A^a_\mu(x) A^b_\nu(y)\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2}\right)\delta^{ab}\, e^{-ik\cdot(x-y)}, \tag{16.5}$$

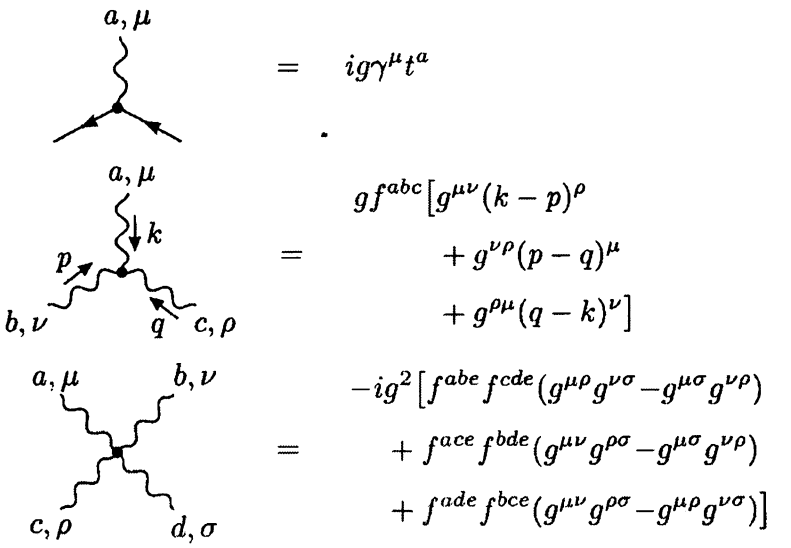


图 16.1 非阿贝尔规范理论的费曼规则和规范玻色子顶点。

其中$a, b = 1, \ldots, d(G)$。我们将在下一节中推导这个公式。

为了找到顶点，我们把(16.1)中的非线性项写出来。如果$\mathcal{L}_0$是自由场拉格朗日量，则

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + gA^a_\lambda \bar{\psi}\gamma^\lambda t^a \psi - gf^{abc}(\partial_\kappa A^a_\lambda)A^{\kappa b}A^{\lambda c} \\ - \tfrac{1}{4}g^2(f^{eab}A^a_\kappa A^b_\lambda)(f^{ecd}A^{\kappa c}A^{\lambda d}).\end{aligned} \tag{16.6}$$

三个非线性项中的第一项给出了费米子-规范玻色子的顶点

$$igγ^\mu t^a; \tag{16.7}$$

这是一个作用于费米子的狄拉克和规范指标的矩阵。第二个非线性项导致了一个三规范玻色子顶点。为了求出这个顶点，我们首先要确定外动量、洛伦兹和规范指标的约定。一个合适的约定如图 16.1 所示，所有动量都指向内。考虑首先将动量为k的外部规范粒子与第一个A^a_μ因子收缩，动量为p的规范粒子与第二个因子收缩，动量为q的规范粒子与第三个因子收缩。如果动量指向图内，则导数贡献一个因子$(-ik_\kappa)$。那么这个贡献是

$$-igf^{abc}(-ik^\nu)g^{\mu\rho}. \tag{16.8}$$

总共有 3!个可能的收缩，它们根据f^{abc}的完全反对称性而在符号上轮换。这些收缩的和如图 16.1 所示。最后，(16.6)的最后一项得到一个四规范玻色子顶点。根据图 16.1 的约定，一个可能的收缩给出了贡献

$$-ig^2 f^{eab}f^{ecd}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}. \tag{16.9}$$

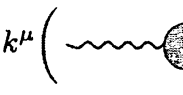
有 4!个可能的收缩，其中有 4 组彼此相等。这些贡献的总和如图 16.1 所示。

注意，所有这些顶点都包含相同的耦合常数g。我们从非阿贝尔规范不变性的原理出发，作为构造拉格朗日量的一部分，推导出了顶点，以及耦合常数的等价性。然而我们也可以从费曼振幅的性质中，来后验地看出这种等价性的必要性。

耦合常数等价性

非阿贝尔规范理论中的费曼振幅的一个性质是，它们应该满足与 QED 相似的 Ward 恒等式。这些 Ward 恒等式表达了对称性流的守恒。在 QED 中，Ward 恒等式最简单的形式是由令外部的电子和正电子在壳而得到的。在非阿贝尔规范理论中，规范玻色子也携带荷，因此也必须令这些粒子在壳以消除接触项。当所有外部粒子都在壳时，规范玻色子的产生振幅必须服从

$$k^\mu \Big(\quad \Big) = 0. \tag{16.10}$$



这个恒等式不仅是局域规范对称性的一个标志，而且其本身在物理上也很重要。与光子一样，非阿贝尔规范玻色子只有两种物理极化态。在 QED，在壳 Ward 恒等式表达的事实是散射过程中正交的非物理的极化态不会产生。在壳 Ward 恒等式将在非阿贝尔情况中扮演类似的角色。

让我们在一个简单的例子中检验一下 Ward 恒等式，即对费米子-反费米子湮灭成一对规范玻色子有贡献的最低阶图。在g^2阶，有三个图，如图 16.2 所示。前两个图类似于我们在第 5.5 节中学习的 QED 图；他们加起来是

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}^{\mu\nu}_{1,2}\epsilon^*_\mu(k_1)\epsilon^*_\nu(k_2) = (ig)^2\bar{v}(p_+)\Big\{&\gamma^\mu t^a \frac{i}{\not{p} - \not{k}_2 - m}\gamma^\nu t^b \\ &+ \gamma^\nu t^b \frac{i}{\not{k}_2 - \not{p}_+ - m}\gamma^\mu t^a\Big\}u(p)\,\epsilon^*_\mu(k_1)\epsilon^*_\nu(k_2). \end{aligned} \tag{16.11}$$

矢量$\epsilon(k_i)$为规范玻色子极化矢量；对于物理极化，这些满足$k_i^\mu \epsilon_\mu(k_i) = 0$。为检查 Ward 恒等式(16.10)，我们将式(16.11)中的$\epsilon^*_\nu(k_2)$用$k_{2\nu}$代替。这给出

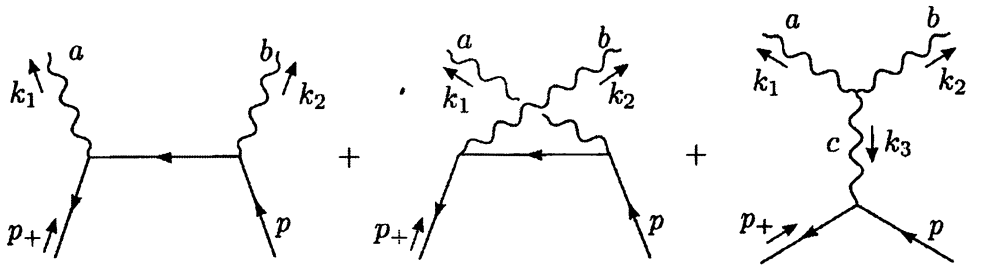


图 16.2 贡献于费米子-反费米子湮灭到两个规范玻色子的图

$$i\mathcal{M}^{\mu\nu}_{1,2}\epsilon^*_{1\mu}k_{2\nu} = (ig)^2\bar{v}(p_+)\Big\{\gamma^\mu t^a \frac{i}{\not p - \not k_2 - m}\not k_2 t^b + \not k_2 t^b \frac{i}{\not k_2 - \not p_+ - m}\gamma^\mu t^a\Big\}u(p)\,\epsilon^*_{1\mu}. \tag{16.12}$$

Since

$$(\not p - m)u(p) = 0 \qquad \text{and} \qquad \bar{v}(p_+)(-\not p_+ - m) = 0, \tag{16.13}$$

我们可以把这些量和(16.12)的第一项和第二项中的$\not k_2$加起来，从而消去分母。这给出了

$$i\mathcal{M}^{\mu\nu}_{1,2}\epsilon^*_{1\mu}k_{2\nu} = (ig)^2\bar{v}(p_+)\Big\{-i\gamma^\mu[t^a,t^b]\Big\}u(p)\,\epsilon^*_{1\mu}. \tag{16.14}$$

在阿贝尔的情况下，这个表达式会消失。然而，在非阿贝尔的情况下，剩余项是非零的，并依赖于规范群生成元的对易子:

$$i\mathcal{M}^{\mu\nu}_{1,2}\epsilon^*_{1\mu}k_{2\nu} = -g^2\bar{v}(p_+)\gamma^\mu u(p)\,\epsilon^*_{1\mu}\cdot f^{abc}t^c. \tag{16.15}$$

我们需要找到另一项贡献来抵消这一项。然而，请注意，这一项具有费米子规范玻色子顶点$(g\gamma^\mu t^c)$乘以三规范玻色子顶点(gf^{abc})的群指标结构。这就是图 16.2 中第三个图的结构。

为了检查抵消确实有效，让我们对第三个图求值：

$$i\mathcal{M}^{\mu\nu}_3\epsilon^*_{1\mu}\epsilon^*_{2\nu} = ig\bar{v}(p_+)\gamma_\rho t^c u(p)\,\frac{-i}{k_3^2}\,\epsilon^*_\mu(k_1)\epsilon^*_\nu(k_2) \times gf^{abc}\big[g^{\mu\nu}(k_2-k_1)^\rho + g^{\nu\rho}(k_3-k_2)^\mu + g^{\rho\mu}(k_1-k_3)^\nu\big],$$

其中$k_3 = -k_1 - k_2$。将$\epsilon_\nu(k_2)$代替为$k_{2\nu}$，利用动量守恒消去k_2，括号内表达式简化为：

$$\begin{aligned}&\epsilon^*_\nu(k_2)\big[g^{\mu\nu}(k_2-k_1)^\rho + g^{\nu\rho}(k_3-k_2)^\mu + g^{\rho\mu}(k_1-k_3)^\nu\big]\\ &\quad\to k_2^\mu(k_2-k_1)^\rho + k_2^\rho(k_3-k_2)^\mu + g^{\rho\mu}(k_1-k_3)\cdot k_2\\ &\quad= g^{\rho\mu}k_3^2 - k_3^\rho k_3^\mu - g^{\rho\mu}k_1^2 + k_1^\rho k_1^\mu.\end{aligned} \tag{16.16}$$

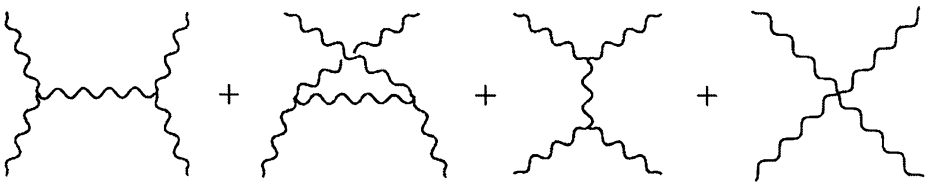


图 16.3 贡献于规范玻色子-规范玻色子散射的图

让我们假设另一个动量为k_1的规范玻色子是在壳的$(k_1^2=0)$，它有横向极化$(k_1^\mu \epsilon_\mu(k_1)=0)$，则最后一行的第三项和第四项消失。此外，$k_3^\rho k_3^\mu$项在与费米子流收缩时消失了。在剩下的项中，因子$k_3^2$消去了规范玻色子传播子，剩下的是

$$i\mathcal{M}_3^{\mu\nu}\epsilon_{1\mu}^* k_{2\nu} = +g^2\bar{v}(p_+)\gamma^\mu u(p)\,\epsilon_{1\mu}^* \cdot f^{abc}t^c, \tag{16.17}$$

它正好抵消了(16.15)。

请注意，只有当三玻色子顶点的耦合常数与费米子-玻色子顶点的耦合常数相等时，才会发生这种抵消。同样地，对于图 16.3 所示的玻色子-玻色子散射图，除非四玻色子顶点的耦合常数g与三玻色子顶点中的相同，否则 Ward 恒等式也不能得到满足。因此，为了保持 Ward 恒等式，避免产生具有非物理极化态的玻色子，杨-米尔斯拉格朗日量中三个非线性项的耦合常数必须相等。相反，非阿贝尔规范对称性保证这些耦合是相等的。因此，对称性完全实现了我们在第 15 章开始讨论时所希望的，给了我们一个物理的矢量粒子相互作用的一致理论。

论证中的一个缺陷

前面的论证有一个严重的缺陷。在最后阶段，我们需要假设第二个规范玻色子是横向的。然而，人们可能会期望这些信息来自于论证，而不是必须去输入的。在 QED 中，费曼图预测，当一个电子和一个正电子湮灭成两个光子时，只产生光子的物理横向极化态。正如我们在公式(5.80)中所看到的那样，产生其他光子极化的振幅会相互抵消，给出零。对于我们目前使用的非阿贝尔规范理论费曼规则，这种论证是不正确的。

为了更具体地说明这种差异，我们引入了一些符号。设$k^\mu=(k^0,\mathbf{k})$为类光矢量：$k^2=0$。然后有两个与$\mathbf{k}$正交的纯空间矢量，如果k是一个矢量玻色子的动量，这些就是两个横向极化。为了构造一个正交基，还必须包含进其极化矢量平行于$\mathbf{k}$的的纵向极化态，和类时极化态。用两个类光的、这些态的线性组合来工作是

最方便的，其极化矢量平行于矢量k^μ和$\tilde{k}^\mu = (k^0, -\mathbf{k})$。无质量矢量粒子的这两个非物理极化态可以表示为：

$$\epsilon_\mu^+(k) = \left(\frac{k^0}{\sqrt{2}|\mathbf{k}|}, \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{2}|\mathbf{k}|}\right); \qquad \epsilon_\mu^-(k) = \left(\frac{k^0}{\sqrt{2}|\mathbf{k}|}, -\frac{\mathbf{k}}{\sqrt{2}|\mathbf{k}|}\right). \tag{16.18}$$

我们称$\epsilon^+(k)$和$\epsilon^-(k)$为**向前**和**向后**类光极化矢量。两个横向极化态表示为$\epsilon_{i\mu}^T(k)$，其中$i = 1,2$。这四个极化矢量服从正交关系

$$\begin{aligned} \epsilon_i^T \cdot \epsilon_j^{*T} = -\delta_{ij}, \qquad \epsilon^+ \cdot \epsilon_i^T = \epsilon^- \cdot \epsilon_i^T = 0, \\ (\epsilon^+)^2 = (\epsilon^-)^2 = 0, \qquad \epsilon^+ \cdot \epsilon^- = 1. \end{aligned} \tag{16.19}$$

它们也满足完备性关系

$$g_{\mu\nu} = \epsilon_\mu^- \epsilon_\nu^{+*} + \epsilon_\mu^+ \epsilon_\nu^{-*} - \sum_i \epsilon_{i\mu}^T \epsilon_{i\nu}^{T*}. \tag{16.20}$$

利用这个符号，我们可以具体地表示出 Ward 恒等式论证中的缺陷。图 16.2 的费曼图显然预测说，存在非零的振幅来产生向前极化规范玻色子和向后极化规范玻色子。在这种情况下，我们用$\epsilon_\mu^{-*}(k_1)$和$\epsilon_\nu^{+*}(k_2)$代替两个极化矢量。在式(16.16)中与$k_1^\rho k_1^\mu$成正比的项不再消失；它现在产生了

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= ig\bar{v}(p_+)\gamma_\rho t^c u(p)\, \frac{-i}{k_3^2}\, \epsilon_\mu^{-*}(k_1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{k_2}|} \cdot g f^{abc}\left[-k_1^\rho k_1^\mu\right] \\ &= ig\bar{v}(p_+)\gamma_\rho t^c u(p)\, \frac{-i}{k_3^2} \cdot (-g) f^{abc} k_1^\rho \cdot \frac{|\mathbf{k_1}|}{|\mathbf{k_2}|}. \end{aligned} \tag{16.21}$$

我们能简单地忽略这个完全非物理的过程吗?我们可以在领头阶振幅的计算中这样做，但是在圈图中这个过程将会回来困扰我们。还记得在 7.3 节中光学定理(7.49)是如何将圈图的虚部与相应的散射振幅的平方联系起来的吗?如果我们把光学定理应用到图 16.4 所示的图上，我们得到一个悖论。在规范玻色子圈的左手边，我们对四个极化矢量(16.20)求和来代替传播子中的$g_{\mu\nu}$因子。因此，这个定理意味着所有四种极化，甚至非物理的极化，都应该包括在右边的末态规范玻色子中。我们面临一个选择，是允许产生非物理态，还是违反光学定理。第三种选择，同样不吸引人，将抛弃我们的规范玻色子传播子表达式(16.5)。很明显，我们忽略了非阿贝尔规范理论的量子力学结构中的一些关键元素。

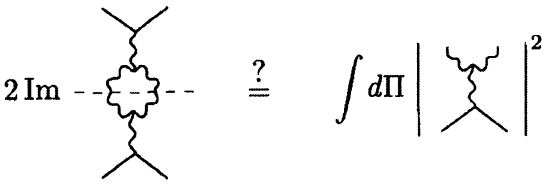


图 16.4 规范理论中光学定理的悖论。

16.2 Faddeev-Popov 拉格朗日量

我们发现非阿贝尔规范理论的费曼规则有问题并不奇怪，因为我们在推导它们时不够仔细。特别地，我们实际上没有推导出规范场传播子的表达式(16.5)。在本节中，我们将通过对这个表达式进行形式推导来纠正它。我们会发现，虽然表达式(16.5)确实是正确的，但它是不完整的：它必须由一种全新类型的另外的规则来补充。

为了定义非阿贝尔规范不变性理论的泛函积分，我们将使用 Faddeev-Popov 方法，如 9.4 节为量子化电磁场所介绍的。我们现在的讨论将严格遵循 9.4 节。然而，正如我们现在所期望的那样，非阿贝尔局域对称性的情况带来了新的技巧和惊喜。

首先考虑没有费米子的纯规范理论的量子化。为了推导费曼规则，我们必须定义泛函积分

$$\int \mathcal{D}A \, \exp\Big[i\int d^4x\Big(-\tfrac{1}{4}(F^a_{\mu\nu})^2\Big)\Big]. \tag{16.22}$$

与阿贝尔情形一样，沿着场位形空间中对应于局域规范变换的无数个方向，拉格朗日量是不变的。为了计算泛函积分，我们必须将沿这些方向的积分因子提出，把剩下的积分限制在更小的空间内。

与电动力学中一样，我们将通过在每一点x处应用固定规范条件$G(A)=0$来约束规范方向。遵循着 Faddeev 和 Popov，我们可以通过在泛函积分中插入恒等式(9.53)来引入这个约束:

$$1 = \int \mathcal{D}\alpha(x)\, \delta\big(G(A^\alpha)\big)\, \det\Big(\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta\alpha}\Big). \tag{16.23}$$

其中A^α是规范场A通过(15.47)中的有限规范变换后变换得到的:

$$(A^\alpha)^a_\mu t^a = e^{i\alpha^a t^a}\big[A^b_\mu t^b + \frac{i}{g}\partial_\mu\big]e^{-i\alpha^c t^c}. \tag{16.24}$$

在计算行列式时，这个变换的无穷小形式会更有用:

$$(A^\alpha)^a_\mu = A^a_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu \alpha^a + f^{abc}A^b_\mu \alpha^c = A^a_\mu + \frac{1}{g}D_\mu \alpha^a, \tag{16.25}$$

其中D_μ是作用在伴随表示中的场上的协变导数(15.86)。注意，只要规范固定函数$G(A)$是线性的，其泛函导数$\delta G(A^\alpha)/\delta\alpha$与$\alpha$无关。

由于拉格朗日量是规范不变量，我们可以在(16.22)的指数中用A^α代替A。然后，和阿贝尔情况一样，我们可以交换泛函积分对A和α的顺序，然后改变内积分中的变量，从A到$A' = A^\alpha$。变换(16.24)看起来比阿贝尔的情况更复杂，但它只不过是A^a_μ的一个线性移动，接着是在每个点上对称性多重态$A^a_\mu(x)$的不同分量之间的一个幺正旋转。这两种操作都保持了测度

$$\mathcal{D}A = \prod_x \prod_{a,\mu} dA^a_\mu. \tag{16.26}$$

因此在对α的积分下$\mathcal{D}A = \mathcal{D}A'$。就像阿贝尔的情形，对规范运动$\alpha$的积分可以因子化，从泛函积分中提出来，成为一个整体的归一化，留给我们的是

$$\int \mathcal{D}A\, e^{iS[A]} = \left(\int \mathcal{D}\alpha\right) \int \mathcal{D}A\, e^{iS[A]}\, \delta\big(G(A)\big)\, \det\Big(\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta\alpha}\Big). \tag{16.27}$$

这个归一化因子可以在计算规范不变算符的关联函数时被抵消掉。

从这一点出发，对规范玻色子传播子的推导就像对光子传播子的推导一样。我们选择广义洛伦兹规范条件

$$G(A) = \partial^\mu A^a_\mu(x) - \omega^a(x), \tag{16.28}$$

带着高斯权重ω^a，与式(9.56)一样。然后 9.4 节的操作导致了一类规范场传播子

$$\big\langle A^a_\mu(x) A^b_\nu(y)\big\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-i}{k^2 + i\epsilon}\left(g_{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\delta^{ab} e^{-ik\cdot(x-y)}, \tag{16.29}$$

带有可自由调节的规范参数ξ。我们的猜测(16.5)对应于$\xi = 1$的选择，称为 **Feynman-'t Hooft 规范**。

到目前为止，整个推导过程与电动力学的情况相似。然而，这里还有一个非平凡的成分。在 QED，式(16.23)中的行列式与A无关，因此这个量可以看作是对归一化因子的另一个贡献。在非阿贝尔的情况下，这不再正确。利用规范变换的无穷小形式(16.25)，我们可以求值

$$\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta\alpha} = \frac{1}{g}\partial^\mu D_\mu, \tag{16.30}$$

它作用在伴随表示中的场；这个算符依赖于A。因此，(16.30)的泛函行列式为拉格朗日量贡献了新的项。

Faddeev和Popov选择将这个行列式表示为一个在一组新反对易场(属于伴随表示的)上的泛函积分:

$$\det\Big(\frac{1}{g}\partial^\mu D_\mu\Big) = \int \mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\,\exp\Big[i\int d^4x\,\bar{c}\big(-\partial^\mu D_\mu\big)c\Big]. \tag{16.31}$$

利用费米子泛函积分的规则，我们在公式(9.69)中推导出了这个正式恒等式($1/g$的因子被场c和$\bar{c}$的归一化所吸收)。但是为了给出正确的恒等式，c和$\bar{c}$必须是反对易场，且洛伦兹变换下是标量。这些场的量子激发态在自旋和统计之间有错误的关系，而不认为是物理粒子。然而，在费曼图的计算中，我们仍然可以把这些激发态看作是附加的粒子。这些新的场及其粒子激发被称为**Faddeev-Popov鬼场**。

如果我们暂时抑制住对鬼场的物理解释的好奇心，我们可以找出它们的费曼规则。我们把鬼场拉格朗日量更明确地写成

$$\mathcal{L}_{\text{ghost}} = \bar{c}^a\big(-\partial^2\delta^{ac} - g\partial^\mu f^{abc}A^b_\mu\big)c^c. \tag{16.32}$$

第一项给出了鬼场传播子，

$$\big\langle c^a(x)\bar{c}^b(y)\big\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2}\delta^{ab}e^{-ik\cdot(x-y)}. \tag{16.33}$$

在图中，这个传播子携带一个箭头，显示了鬼粒子数的流动，如图16.5所示。在相互作用项(16.32)中，导数位于规范场的左侧；这意味着这个导数求出的动量是沿着鬼场线从顶点出来的动量。显式费曼规则如图16.5所示。与我们遇到的其他顶点一样，出现在这个顶点上的耦合常数g必须等于三玻色子顶点上的耦合常数g，以避免破坏Ward恒等式。

对于非阿贝尔规范理论，在微扰论的构造上没有更细微的差别。特别是，包含进费米子是很简单的。包括了Faddeev-Popov规范固定的所有效应后，最后的拉格朗日量是

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F^a_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A^a_\mu)^2 + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi + \bar{c}^a(-\partial^\mu D^{ac}_\mu)c^c. \tag{16.34}$$

这个拉格朗日量导致了传播子(16.29)，并导致了图16.1和16.5中所示的顶点的一组费曼规则。

我们刚刚完成的论证足以推导出在非阿贝尔规范理论中是规范不变的算符

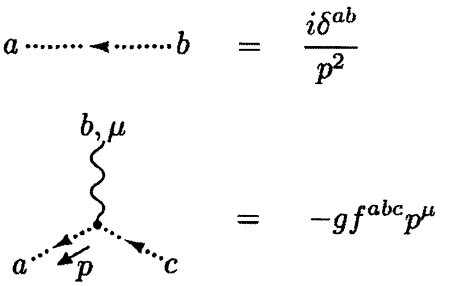


图 16.5 Faddeev-Popov 鬼场的费曼规则。

的任何关联函数的费曼图展开。在9.4节的最后，我们解释了Faddeev-Popov规范固定技术也为S矩阵元给出了正确的规范不变的表达式。这在非阿贝尔情形下仍然成立。然而，第9.4节给出的论证依赖于QED中类时和纵向光子的发射概率的抵消，我们已经发现这种抵消在非阿贝尔情形中不存在。在第16.4节中，我们将构建一个更复杂的论证，Faddeev-Popov鬼场在其中扮演一个重要的角色，它将把我们之前的论证正确地推广到非阿贝尔规范理论。

16.3 鬼场和幺正性

我们现在可能会问，我们在前一节中发现的新成分——Faddeev-Popov鬼场，是否能够解决我们在第16.1节末尾提到的悖论。在那里，我们看到图16.6中的第一个图包含的一个对虚部的非零贡献，它不对应于有着物理规范玻色子极化的可能末态。现在我们将更仔细地计算这个贡献。然后，我们必须添加一个来自鬼场的新的潜在贡献，如图16.6中的第二个图所示。

我们考虑费米子-费米子湮灭为规范玻色子的振幅，这我们在第 16.1 节中研究过，

$$i\mathcal{M}^{\mu\nu}\epsilon^*_\mu(k_1)\epsilon^*_\nu(k_2); \tag{16.35}$$

两个规范玻色子转化成费米子-反费米子对的振幅将相应地为，$\mathcal{M}'$。然后，根据 7.3 节中的 Cutkosky 规则，我们通过将动量为k_i的被切的规范玻色子传播子代替为如下表达式，得到图 16.6 中第一个图的虚部；

$$-ig_{\mu\nu}\cdot(-2\pi i)\delta(k_i^2). \tag{16.36}$$

替换两个传播子给出两个delta函数，将规范玻色子动量上的四维积分转换为三维相空间积分，如第 7.3 节中的示例所示。这样，我们就剩下表达式

$$\tfrac{1}{2}(i\mathcal{M}^{\mu\nu})g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}(i\mathcal{M}'^{\rho\sigma}), \tag{16.37}$$

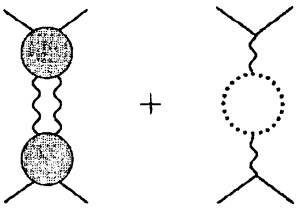


图 16.6 左边的图中，每个圆代表了图 16.2 中三个贡献的和，这给光学定理带来了一个可能的问题。右边的鬼场图抵消了反常项

并对两个无质量粒子的相空间进行积分。因子 $1/2$ 是费曼图的对称因子，或者等价地，是对相同粒子的相空间积分的修正。

现在引入$g_{\mu\rho}$和$g_{\nu\sigma}$的表示(16.20)。只涉及横向极化的部分对应于满足光学定理所需的期望的虚部。我们不必进一步考虑这些项。物理极化和非物理极化之间的交叉项消失了：我们在第 16.1 节中说明了

$$i\mathcal{M}^{\mu\nu}\epsilon_\mu^{T*}(k_1)\epsilon_\nu^{+*}(k_2)=0. \tag{16.38}$$

如果$\mathcal{M}$被$\mathcal{M}'$代替，以及如果ϵ^+被ϵ^-代替，相同的恒等式同样成立。此外，如果两个极化矢量都是向前或向后的，振幅也会消失。仅存的是前向极化和后向极化之间的交叉项，这产生了表达式

$$\tfrac{1}{2}\left[(i\mathcal{M}^{\mu\nu}\epsilon_\mu^{-*}\epsilon_\nu^{+*})(i\mathcal{M}'^{\rho\sigma}\epsilon_\rho^{+}\epsilon_\sigma^{-})+(i\mathcal{M}^{\mu\nu}\epsilon_\mu^{+*}\epsilon_\nu^{-*})(i\mathcal{M}'^{\rho\sigma}\epsilon_\rho^{-}\epsilon_\sigma^{+})\right], \tag{16.39}$$

对相空间积分。我们在式(16.21)计算出了第一个因子的值，与$\mathcal{M}'$收缩是非常相似的。将这些结果代入，表达式(16.39)变成

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}&\left(ig\bar{v}(p_+)\gamma_\mu t^c u(p)\cdot\frac{-i}{(k_1+k_2)^2}\cdot(-gf^{abc}k_1^\mu)\right)\\&\times\left(ig\bar{u}(p')\gamma_\rho t^d v(p'_+)\cdot\frac{-i}{(k_1+k_2)^2}\cdot(-gf^{abd}(-k_2)^\rho)\right)+(k_1\leftrightarrow k_2).\end{aligned} \tag{16.40}$$

使用等式

$$\bar{v}(p_+)\gamma_\mu(k_1+k_2)^\mu u(p)=\bar{v}(p_+)\gamma_\mu(p+p_+)^\mu u(p)=0, \tag{16.41}$$

我们看到(16.40)中增加的两项是相等的。

现在添加 Faddeev-Popov 鬼场的贡献。利用图 16.5 中的费曼规则，我们可以将费米子-反费米子湮灭成一对鬼场的振幅整合成：

$$i\mathcal{M}_{\text{ghost}}=ig\bar{v}(p_+)\gamma_\mu t^c u(p)\cdot\frac{-i}{(k_1+k_2)^2}\cdot(-gf^{abc}k_1^\mu). \tag{16.42}$$

这正是表达式(16.40)的前半部分。同样地，鬼粒子-反鬼粒子对湮灭成费米子的振幅等于(16.40)的后半部分。最后，由于Faddeev-Popov鬼场反对易，我们必须为每个鬼圈提供一个−1因子。因此，鬼场的贡献正好抵消了非物理的规范玻色子极化对图16.6中图的Cutkosky切割的贡献。

此示例演示了Faddeev-Popov鬼场的一般物理解释。这些“粒子”作为负自由度来抵消规范玻色子的非物理的类时和纵向极化态的效应。鬼场最简单的效应已经可以从行列式中看到，这些行列式出现在你对Faddeev-Popov拉格朗日量(16.34)中的规范场和鬼场进行积分时。对一般维度d，为了简单起见，在费曼规范和零耦合下工作，对(16.34)中的规范和鬼场进行泛函积分，得到

$$\left(\det[-\partial^2]\right)^{-d/2}\cdot\left(\det[-\partial^2]\right)^{+1}. \tag{16.43}$$

第二个行列式，它以正指数出现，因为鬼场反对易，抵消了A_μ场的两个分量对第一个行列式的贡献。问题 9.2 用第 9.4 节的语言说明了这种物理效应。

16.4 BRST 对称

为了说明这种抵消如何扩展到完整的相互作用理论，Becchi、Rouet、Stora和Tyutin为规范固定的拉格朗日量(16.34)引入了一种的新对称性，作为一种漂亮的形式工具，它以一种本质的方式包含了鬼场*。这种**BRST对称性**有一个连续的参数，它是一个反对易数。为了把对称性写成最简单的形式，让我们通过引入一个新的(对易的)标量场B^a来重写Faddeev-Popov拉格朗日量:

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}(F^a_{\mu\nu})^2+\bar{\psi}(i\not{D}-m)\psi-\frac{\xi}{2}(B^a)^2+B^a\partial^\mu A^a_\mu+\bar{c}^a(-\partial^\mu D^{ac}_\mu)c^c. \tag{16.44}$$

新的场B^a有一个(不含导数的)二次项，所以它不是一个正规的传播场。通过完成式(16.44)中的平方，可以完成对B^a的泛函积分；这个过程把我们精确地带回式(16.34)。这种类型的场出现在泛函积分中，但没有独立的动力学性质，称为**辅助场**。

---

*C. Becchi, A. Rouet, and R. Stora, *Ann. Phys.* **98**, 287(1976); I. V. TyutinLebedev Institute preprint(1975, unpublished); M. Z. lofa and I. V. Tyutin, *Theor. Math. Phys.* **27**, 316(1976)

现在设ϵ为无穷小的反对易参数，考虑(16.44)中场的如下无穷小变换:

$$\begin{aligned}\delta A_\mu^a &= \epsilon D_\mu^{ac} c^c \\ \delta\psi &= ig\epsilon c^a t^a \psi \\ \delta c^a &= -\tfrac{1}{2} g\epsilon f^{abc} c^b c^c \\ \delta \bar{c}^a &= \epsilon B^a \\ \delta B^a &= 0.\end{aligned} \tag{16.45}$$

场A_μ^a和ψ的变换是一个局域规范变换，其参数与鬼场成正比：$\alpha^a(x) = g\epsilon c^a(x)$。因此(16.44)的前两项对于(16.45)是不变的。第三项是平凡的不变的。第四项中的A_μ^a的变换抵消了最后一项中$\bar{c}^a$的变换。最后，我们必须检查(16.44)中最后一个组分的变换：

$$\begin{aligned}\delta(D_\mu^{ac} c^c) &= D_\mu^{ac}\delta c^c + g f^{abc}\delta A_\mu^b c^c \\ &= -\tfrac{1}{2} g\epsilon \partial_\mu (f^{abc} c^b c^c) - \tfrac{1}{2} g^2 \epsilon f^{abc} f^{cde} A_\mu^b c^d c^e \\ &\qquad + g\epsilon f^{abc} (\partial_\mu c^b) c^c + g^2 \epsilon f^{abc} f^{bde} A_\mu^d c^e c^c.\end{aligned} \tag{16.46}$$

g阶的两项显然抵消了。通过使用鬼场的反对易特性和交换指标的名称，我们可以将剩下的两项写成

$$-\tfrac{1}{2} g^2 f^{abc} f^{cde} \left(A_\mu^b c^d c^e + A_\mu^d c^e c^b + A_\mu^e c^b c^d\right), \tag{16.47}$$

它由雅可比恒等式(15.70)可消去。显然，BRST 变换(16.45)是规范固定拉格朗日量(16.44)的一个整体对称性，对于规范参数ξ的任何值。

BRST 变换还有一个显著的特征，这是其反对易性质的自然结果。让$Q\phi$为场ϕ的 BRST 变换：$\delta\phi = \epsilon Q\phi$。例如，$QA_\mu^a = D_\mu^{ac} c^c$。然后对于任何场，$Q\phi$的 BRST 变分消失了：

$$Q^2 \phi = 0. \tag{16.48}$$

(16.46)的消失证明了规范场的第二次 BRST 变分下的这个等式。对于鬼场，

$$Q^2 c^a = \tfrac{1}{2} g^2 f^{abc} f^{bde} c^c c^d c^e, \tag{16.49}$$

它因雅可比等式而消失了。可以直接检查(16.44)中其他场的第二次 BRST 变分也消失了.

为了描述等式(16.48)的含义，我们现在考虑在正则量子化后的哈密顿图像下

研究有效理论(16.44)。因为拉格朗日量有连续对称性(16.45)，理论将有一个守恒流，对这个流的时间分量的积分将是一个与H对易的守恒荷Q。Q对场位形的作用将刚好是前一段描述的。关系(16.48)等价于算符恒等式

$$Q^2 = 0. \tag{16.50}$$

我们说 BRST 算符Q是**幂零的**。

一个与H对易的幂零的算符把H的本征态分成三个子空间。H的许多本征态必须被Q湮灭，这样(16.50)才能满足。设$\mathcal{H}_1$是不被Q湮没的态的子空间。设$\mathcal{H}_2$是如下形式的态的子空间

$$|\psi_2\rangle = Q\,|\psi_1\rangle\,, \tag{16.51}$$

其中$|\psi_1\rangle$在$\mathcal{H}_1$中。根据(16.50)，再次作用Q于这些态给出零。最后，令$\mathcal{H}_0$是满足$Q|\psi_0\rangle = 0$但不能写成(16.51)形式的态$|\psi_0\rangle$的子空间。子空间$\mathcal{H}_2$很特殊，因为根据(16.50)，在这个子空间中的任意两个态的内积为零：

$$\langle\psi_{2a}|\psi_{2b}\rangle = \langle\psi_{1a}|\,Q\,|\psi_{2b}\rangle = 0 \tag{16.52}$$

同理，$\mathcal{H}_2$的态与$\mathcal{H}_0$的态的内积为零。

这些考虑似乎非常抽象，但它们有一个直接的物理对应*。要看到这一点，考虑在零耦合极限下的非阿贝尔规范理论的单粒子态。根据变换(16.45)，Q将A^a_μ的向前分量转换为鬼场；等价地，Q将一个向前极化的规范玻色子转化为一个鬼粒子。在$g = 0$时，Q湮灭了单个鬼粒子态。同时，Q将反鬼粒子态转换为B^a的一个量子。要识别这种态，请注意拉格朗日量(16.44)暗示了经典场方程

$$\xi B^a = \partial^\mu A^a_\mu. \tag{16.53}$$

因此，场B^a的量子就是极化矢量有着$k^\mu\epsilon_\mu(k) \neq 0$的$A^a_\mu$的量子；这些是向后极化的规范玻色子。

我们现在已经看到，在规范理论的单粒子态中，向前规范玻色子和反鬼粒子属于$\mathcal{H}_1$，鬼粒子和向后规范玻色子属于$\mathcal{H}_2$，横向规范玻色子属于$\mathcal{H}_0$。更一般地，可以表明，包含鬼粒子、反鬼粒子，或非物理极化的规范玻色子的渐近态，通常

---

*下面的论证只是在直观的层次上提出的。要进行严格的讨论，请参见 T. Kugo and I. Ojima, *Prog. Theor. Phys.* **66**, 1(1979)。

属于$\mathcal{H}_1$或$\mathcal{H}_2$，而$\mathcal{H}_0$中的渐近态是仅具有横向极化的规范玻色子。因此，BRST算符给出了非物理规范玻色子极化态与鬼粒子和反鬼粒子之间的精确关系，它们作为正和负的自由度。

在第9.4节中，我们讨论的Faddeev-Popov方案给出了S矩阵元的某一子类的正确的、规范不变的结果，由此我们可以计算横向极化规范玻色子的物理散射截面。这些S矩阵元是通过把算符放到遥远的过去来产生横向极化的规范玻色子，绝热地打开规范耦合，绝热地关闭规范耦合，然后把算符放到遥远的将来以湮灭横向极化的规范玻色子。然而，这个论点有一个可能的问题：如果在遥远的过去产生的态是横向极化玻色子的集合，可以在遥远将来中演化成包含其他极化的规范玻色子的态，那么在横向规范玻色子态之间投影的S矩阵就不是幺正的。这个问题也会导致前一节讨论的技术问题：对S矩阵元有贡献的图的Cutkosky切割会有来自非物理极化的非零贡献。在9.4节中，我们使用了一个阿贝尔案例的特殊论证来证明这些问题不会在QED中出现。在非阿贝尔的情况下，非物理规范玻色子极化的去除更加微妙，我们已经看到它在本质上涉及鬼场。为了解决这个微妙的问题，我们来应用BRST对称性原理。

让$|A;\mathrm{tr}\rangle$是一个不包含鬼粒子或反鬼粒子、只包含横向极化规范玻色子的外部态。我们希望证明投影到这些态上的S矩阵是幺正的：

$$\sum_C \langle A;\mathrm{tr}|\, S^\dagger\, |C;\mathrm{tr}\rangle \langle C;\mathrm{tr}|\, S\, |B;\mathrm{tr}\rangle = \langle A;\mathrm{tr}|\, \mathbf{1}\, |B;\mathrm{tr}\rangle\,. \tag{16.54}$$

如前所述，物理态$|A;\mathrm{tr}\rangle$它们属于——事实上，是扩展在——由 BRST 算符定义的子空间$\mathcal{H}_0$。特别地，所有这些态都能被Q湮没，因为Q与哈密顿量对易，任何这种态的时间演化也必然产生一个会被Q湮没的态，因此，

$$Q\cdot S\,|A;\mathrm{tr}\rangle = 0. \tag{16.55}$$

这意味着状态$S|A;\mathrm{tr}\rangle$必须是$\mathcal{H}_0$和$\mathcal{H}_2$的态的线性组合。然而，$\mathcal{H}_2$中的态彼此之间以及和$\mathcal{H}_0$中的态之间的内积为零。因此，形式为$S|A;\mathrm{tr}\rangle$的任意两个态的内积只来自于$\mathcal{H}_0$中的分量的重叠，所以我们可以写

$$\langle A;\mathrm{tr}|\, S^\dagger\cdot S\, |B;\mathrm{tr}\rangle = \sum_C \langle A;\mathrm{tr}|\, S^\dagger\, |C;\mathrm{tr}\rangle \langle C;\mathrm{tr}|\, S\, |B;\mathrm{tr}\rangle\,. \tag{16.56}$$

由于整个S矩阵是幺正的，这个关系意味着受限的S矩阵也是幺正的，即式(16.54)。此外，(16.56)表明，对给定阶下的S矩阵有贡献的图的 Cutkosky 切割之和，等于仅包含横向规范玻色子的切割之和。因此，产生非物理极化的规范玻色子对的图与产生鬼粒子的图之间的相互抵消是普遍特性，在微扰理论中所有阶都保持。

由于 BRST 变换产生了一个连续对称性，所以它生成了一组 Ward 恒等式。这些恒等式在结构上与非阿贝尔规范对称性的 Ward 恒等式相似，因为 BRST 对称性包含一个规范变换，其参数为鬼场。然而，来源于 BRST 对称性的恒等式更简单。在本书中，我们将不再进一步研究非阿贝尔规范理论的 Ward 恒等式。然而，当我们在更高的层次上讨论规范理论的重整化时，由 Ward 恒等式得到的重整化常数之间的重要恒等式最容易使用 BRST 对称性导出*。

16.5 非阿贝尔规范理论的单圈发散

既然我们已经讨论了非阿贝尔规范理论中树图的一般性质，我们现在把注意力转移到带圈的图上。在量子场论中，有些圈图是发散的，我们必须注意正确地处理发散积分。

非阿贝尔规范理论的拉格朗日量(15.39)不包含量纲大于 4 的相互作用。因此，根据第 10 章的一般论证，这个拉格朗日量是可重整化的，在这个意义上说，可以用有限数量的抵消项来消除发散。然而，在非阿贝尔规范理论中，如 QED 中，该理论的规范对称性意味着对发散的结构有更强的限制。在 QED 中，我们使用了一种规范不变的正规子，只有四个可能的发散系数，这些发散系数被电磁顶点(δ_1)、电子和光子场强(δ_2和δ_3)和电子质量(δ_m)的抵消项减除。特别是，规范不变性排除了光子质量重正化的可能性。此外，δ_1和δ_2这两个抵消项是相等的，并且在电子-光子顶点函数的计算中由于 Ward 恒等式而相互抵消。非阿贝尔规范对称性意味着对费曼图的发散有类似的限制。在本节中，我们将通过单圈图的例子来说明这些限制。

---

*泰勒 1970 对 BRST 对称性的 Ward 恒等式作了介绍。

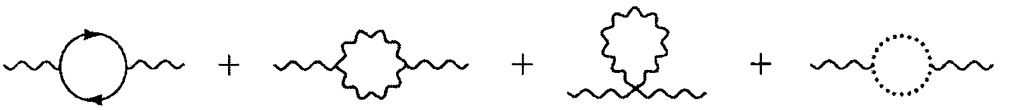


图 16.7 g^2阶中对规范玻色子自能的贡献。

规范玻色子的自能

在 QED 中，规范不变性的最大限制来自于光子自能的计算。Ward 恒等式意味着如下关系

$$q^\mu \left(\quad \right) = 0, \tag{16.57}$$

这反过来又意味着光子自能图具有如下结构

$$= i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)\Pi(q^2). \tag{16.58}$$

唯一的发散可能是$\Pi(q^2)$的一个对数发散贡献。在非阿贝尔规范理论中(16.57)仍然成立，因此自能再次具有洛伦兹结构(16.58)。然而，导致这种结构的抵消要复杂得多。在这里，我们将通过在单圈水平上详细计算规范玻色子自能，来展示这些抵消。为了保持规范不变性，我们将使用维数正规化。

对规范玻色子自能的g^2阶贡献如图 16.7 所示(除了这些 1PI 图外，还有三个“蝌蚪”图；但和 QED 中一样，根据(10.5)式下面给出的论证，这些会自动消失)。费米子圈图可以与其他图分开考虑，因为原则上我们可以在理论里包含任意数量的费米子。我们将在下面看到剩下的三个图的贡献以一种基本的方式相互关联。

我们先来计算费米子圈图。图中顶点的费曼规则与 QED 费曼规则相同，除了添加了群矩阵t^a，作用于费米子规范群指标。因此，该图的值与 QED 中一样，式(7.90)，乘以对群矩阵求的迹

$$= \mathrm{tr}[t^a t^b]\, i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \times \frac{-g^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx\, 8x(1-x) \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(m^2 - x(1-x)q^2)^{2-d/2}}.$$

迹值由式(15.78)给出：$\mathrm{tr}[t^a t^b] = C(r)\delta^{ab}$。在一个有几种费米子的理论中，每种

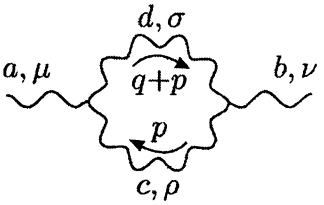
费米子都有一个这样的图。我们主要对这个图的发散部分感兴趣，它与费米子质量无关。如果存在n_f种费米子，都在相同的表示r中，那么费米子圈图的总贡献的形式就是

$$\sum_{\text{fermions}} \left(\quad \right) \qquad (16.59)$$

$$= i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)\delta^{ab}\Big(\frac{-g^2}{(4\pi)^2}\cdot\frac{4}{3}n_f C(r)\Gamma(2-\tfrac{d}{2}) + \cdots\Big).$$

现在考虑来自纯规范部分的三个图。这些图的贡献依赖于规范；我们将使用Feynman-'t Hooft 规范，$\xi = 1$。

利用图 16.1 中的三规范玻色子顶点，我们可以写出三个图中的第一个为



$$= \frac{1}{2}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{-i}{p^2}\,\frac{-i}{(p+q)^2}\,g^2 f^{acd}f^{bcd}N^{\mu\nu}, \qquad (16.60)$$

其中分子的结构是

$$N^{\mu\nu} = \left[g^{\mu\rho}(q-p)^\sigma + g^{\rho\sigma}(2p+q)^\mu + g^{\sigma\mu}(-p-2q)^\rho\right] \times \left[\delta^\nu{}_\rho(p-q)_\sigma + g_{\rho\sigma}(-2p-q)^\nu + \delta^\nu{}_\sigma(p+2q)_\rho\right].$$

整体因子1/2是一个对称因子。结构常数的收缩可以用式(15.93)计算：$f^{acd}f^{bcd} = C_2(G)\delta^{ab}$。

为了进一步简化表达式，以标准方式合并分母:

$$\frac{1}{p^2}\frac{1}{(p+q)^2} = \int_0^1 dx\,\frac{1}{((1-x)p^2 + x(p+q)^2)^2} = \int_0^1 dx\,\frac{1}{(P^2-\Delta)^2}, \qquad (16.61)$$

其中$P = p + xq$, $\Delta = -x(1-x)q^2$。然后(16.60)可以重写为


$$= -\frac{g^2}{2}C_2(G)\delta^{ab}\int_0^1 dx\int\frac{d^4P}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{(P^2-\Delta)^2}\,N^{\mu\nu}.$$

通过消除p而代之以P，可以简化分子结构，抛弃P^μ的线性项(它们在对称的积分

下为零)并用$g^{\mu\nu}P^2/d$代替$P^\mu P^\nu$(同样是对称的):

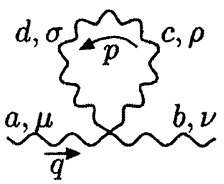
$$\begin{aligned}N^{\mu\nu} &= -g^{\mu\nu}\left[(2q+p)^2+(q-p)^2\right] - d(q+2p)^\mu(q+2p)^\nu \\ &\quad + \left[(2q+p)^\mu(q+2p)^\nu + (q-p)^\mu(2q+p)^\nu - (q+2p)^\mu(q-p)^\nu\right. \\ &\quad\quad \left. + (\mu\leftrightarrow\nu)\right] \\ &\to -g^{\mu\nu}P^2\cdot 6(1-\tfrac{1}{d}) - g^{\mu\nu}q^2\left[(2-x)^2+(1+x)^2\right] \\ &\quad + q^\mu q^\nu\left[(2-d)(1-2x)^2 + 2(1+x)(2-x)\right].\end{aligned}$$

计算的最后一步是 Wick 旋转并应用积分公式(7.85)和(7.86)。这就把图变成了下面的形式:



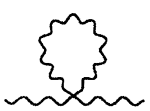
$$\begin{aligned}&= \frac{ig^2}{(4\pi)^{d/2}}C_2(G)\delta^{ab}\int_0^1 dx\,\frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \\ &\quad\times\Big(\Gamma(1-\tfrac{d}{2})\,g^{\mu\nu}q^2\left[\tfrac{3}{2}(d-1)x(1-x)\right] \\ &\quad\quad + \Gamma(2-\tfrac{d}{2})\,g^{\mu\nu}q^2\left[\tfrac{1}{2}(2-x)^2+\tfrac{1}{2}(1+x)^2\right] \\ &\quad\quad - \Gamma(2-\tfrac{d}{2})\,q^\mu q^\nu\left[(1-\tfrac{d}{2})(1-2x)^2+(1+x)(2-x)\right]\Big).\end{aligned} \tag{16.62}$$

接下来考虑一个四规范玻色子顶点的图。利用图 16.1 中的顶点费曼规则，我们可以得到



$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{-ig_{\rho\sigma}}{p^2}\delta^{cd}(-ig^2) \\ &\quad\times\left[f^{abe}f^{cde}(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}-g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})\right. \\ &\quad\quad + f^{ace}f^{bde}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}-g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \\ &\quad\quad \left. + f^{ade}f^{bce}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}-g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})\right].\end{aligned} \tag{16.63}$$

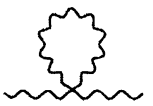
第一行中的 $1/2$ 是一个对称因子。顶点因子中结构常数的第一个组合因反对称性而消失；利用式(15.93)可以化简第二项和第三项。然后我们发现



$$= -g^2C_2(G)\delta^{ab}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{p^2}\cdot g^{\mu\nu}(d-1). \tag{16.64}$$

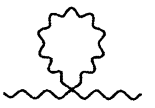
在维数正规化中，对p的积分给出一个$d=2$处的极点，但在$d\to 4$时得到零。我们可以简单地丢弃这个图并相信$d=2$处的极点被其他两个图消去了。然而，显式地演示这抵消是有意义的，而且也不难。为了做到这一点，我们可以使积分看起来像之前的图，以$(q+p)^2/(q+p)^2$的形式将被积函数乘以 1。然后我们像以前一样合并分母，去掉p，代之以移动变量$P=p+xq$。去掉P中的线性项后，我

们得到



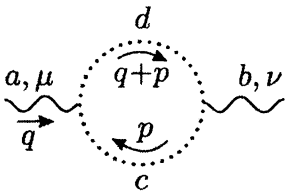
$$= -g^2 C_2(G)\delta^{ab} \int_0^1 dx \int \frac{d^4P}{(2\pi)^4} \frac{1}{(P^2-\Delta)^2} g^{\mu\nu}(d-1)[P^2+(1-x)^2q^2].$$

我们现在可以 Wick 旋转并对P积分得到



$$\begin{aligned} &= \frac{ig^2}{(4\pi)^{d/2}} C_2(G)\delta^{ab} \int_0^1 dx \, \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \\ &\quad \times \Big(-\Gamma(1-\tfrac{d}{2})\, g^{\mu\nu} q^2 \, [\tfrac{1}{2} d(d-1)x(1-x)] \\ &\qquad - \Gamma(2-\tfrac{d}{2})\, g^{\mu\nu} q^2 \, [(d-1)(1-x)^2] \Big). \end{aligned} \tag{16.65}$$

表达式(16.62)和(16.65)本身并没有增加任何有意义的值：$d = 2$处的极点没有消去，而且和也没有横向洛伦兹结构。为了使规范玻色子的自能达到它的期望形式，我们必须包括进带有一个鬼圈的图。根据图 16.5 所示的规则，此图为



$$= (-1) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2} \frac{i}{(p+q)^2} g^2 f^{dac} (p+q)^\mu f^{cbd} p^\nu. \tag{16.66}$$

在这种情况下不存在对称因子，但是有一个系数-1，因为鬼场是反对易的。使用一组与前两个图相同的技巧可以简化鬼图：合并分母，将积分移动到P. Wick 旋转，并使用维数正规化对P进行积分。结果是



$$\begin{aligned} &= \frac{ig^2}{(4\pi)^{d/2}} C_2(G)\delta^{ab} \int_0^1 dx \, \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \\ &\quad \times \Big(-\Gamma(1-\tfrac{d}{2})\, g^{\mu\nu} q^2 \, [\tfrac{1}{2} x(1-x)] \\ &\qquad + \Gamma(2-\tfrac{d}{2})\, q^\mu q^\nu \, [x(1-x)] \Big). \end{aligned} \tag{16.67}$$

现在我们准备把这些结果放在一起。在三个图的和中，$\Gamma(1-\frac{d}{2})g^{\mu\nu}q^2x(1-x)$的系数为

$$\tfrac{1}{2}(3d - 3 - d^2 + d - 1) = (1 - \tfrac{d}{2})(d-2). \tag{16.68}$$

第一个因子抵消了Γ函数在$d = 2$处的极点。因此，这三个图的和没有二次发散，也没有规范玻色子质量重正化。请注意，鬼场图在这种抵消中起着重要的作用。

当$d=2$处的极点消去后，$\Gamma(1-\frac{d}{2})$变成$\Gamma(2-\frac{d}{2})$。因此，这一项和正比于$\Gamma(2-\frac{d}{2})g^{\mu\nu}q^2$的其他项结合起来，得到的总系数为

$$(d{-}2)x(1{-}x)+\tfrac{1}{2}(2{-}x)^2+\tfrac{1}{2}(1{+}x)^2-(d{-}1)(1{-}x)^2. \tag{16.69}$$

由于简化这个表达式的最佳方法不是很明显，我们先把它放在一边，先计算$\Gamma(2-\frac{d}{2})q^\mu q^\nu$的系数:

$$-(1{-}\tfrac{d}{2})(1{-}2x)^2-(1{+}x)(2{-}x)+x(1{-}x)=-(1{-}\tfrac{d}{2})(1{-}2x)^2-2.$$

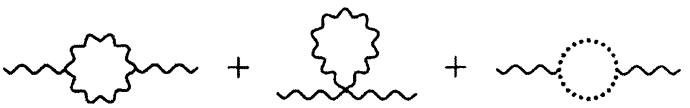
如果总自能与$(g^{\mu\nu}q^2-q^\mu q^\nu)$成正比，则必须能够将表达式(16.69)简化为这种形式(乘以-1)。要这样做，注意，Δ关于$x\leftrightarrow(1-x)$是对称的，因此我们可以在分子的任何项中，用$(1-x)$来代替x。特别是x的线性项可以变换为:

$$x\to\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}(1{-}x)=\tfrac{1}{2}.$$

最后，三个纯规范图的总和简化为

$$\frac{ig^2}{(4\pi)^{d/2}}C_2(G)\delta^{ab}\int_0^1 dx\,\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}}(g^{\mu\nu}q^2-q^\mu q^\nu)\big[(1{-}\tfrac{d}{2})(1{-}2x)^2+2\big]. \tag{16.70}$$

这个表达式显然是横向的，正如非阿贝尔规范理论的 Ward 恒等式所要求的那样。(16.70)的紫外发散部分记录如下，供以后参考：



$$=i(q^2g^{\mu\nu}-q^\mu q^\nu)\delta^{ab}\Big(\frac{-g^2}{(4\pi)^2}\cdot\Big(-\frac{5}{3}\Big)C_2(G)\Gamma(2{-}\tfrac{d}{2})+\cdots\Big). \tag{16.71}$$

如上所述，结果(16.70)依赖于计算中使用的规范。在任何规范中，玻色子的自能都是横向的，没有二次发散。然而，横向洛伦兹结构的系数可能依赖于ξ。结果表明，对于一般的ξ值，(16.71)中的紫外发散系数被修正为

$$-\frac{5}{3}\to-\Big(\frac{13}{6}-\frac{\xi}{2}\Big). \tag{16.72}$$

玻色子的自能依赖于规范的事实与S矩阵元不依赖于ξ的一般定理不矛盾。对规范理论S矩阵元的一组完整单圈修正，总是涉及到一些对顶点和传播子的不同的辐射修正；在这些不同的项之间的规范依赖性以一种复杂的方式相互抵消。

β函数

包含了辐射修正的规范不变组合的最简单的计算是计算非阿贝尔规范理论的 Callan-Symanzik β函数的领头项。β领头项的不变性可以这样直观地论证：通过说当规范理论的耦合常数在一种计算方案中保持小值时，它在另一种计算方案中不应该演化成大值。在第 17.2 节中，我们将更清楚地说明这一结果，即β函数的领头系数可以从一个物理截面中提取出来，因此必须是与规范无关的(令人惊讶的是，这个结论实际上适用于β的前**两**个系数，被写成g的幂级数)。

回想一下第 12.2 节，β函数给出了重整化耦合常数随重整化标度M增大而改变的速率。由于格林函数通过减除了紫外发散的抵消项而依赖于M，所有根据进入到适当选择的格林函数的抵消项可以计算出β。例如，在公式(12.58)中，我们可以从电子-光子顶点、电子自能和光子自能的抵消项中计算出 QED 的β函数。同样的推导也适用于非阿贝尔规范理论。因此，在最低阶

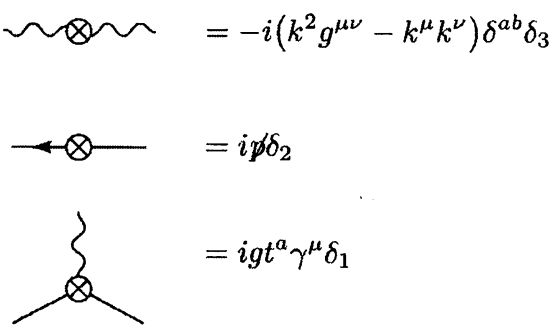
$$\beta(g) = gM\frac{\partial}{\partial M}\big(-\delta_1 + \delta_2 + \tfrac{1}{2}\delta_3\big), \tag{16.73}$$

其中图 16.8 显示了抵消项顶点的约定。在 QED，前两项由于 Ward 等式而抵消，所以β只依赖于δ_3。在非阿贝尔的情况下，所有三个项都有贡献。最难计算的是δ_3，但我们已经通过计算规范玻色子的自能图几乎做完了。现在让我们完成非阿贝尔规范理论的β函数的计算。

为了抵消项δ_3能抵消式(16.59)及(16.71)的发散。它的形式必须是

$$\delta_3 = \frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(M^2)^{2-d/2}}\Big[\frac{5}{3}C_2(G) - \frac{4}{3}n_f C(r)\Big], \tag{16.74}$$

其中M为重整化标度。根据所使用的精确的重整化条件，可能会存在对δ_3额外的有限贡献，但这些贡献不会对β函数(单圈阶)有贡献。同样，δ_2和δ_1的有限部分将取决于重整化方案的细节。然而，正如我们在第 12.2 节中所看到的，对β函数的单圈贡献在任何方案中都是相同的，在这些方案中振幅在一个点被重整化，在该点所有动量不变量都是相同的M^2阶。在维数正规化中，对数发散的形式通常是$\Gamma(2-\frac{d}{2})/\Delta^{2-d/2}$，其中$\Delta$是动量不变量的组合。因此。为了计算$\beta$函数，我们可以简单地在这样的表达式中设置$\Delta = M^2$。



$$= -i\left(k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu\right)\delta^{ab}\delta_3$$

$$= i\not{p}\delta_2$$

$$= igt^a\gamma^\mu\delta_1$$

图 16.8 非阿贝尔规范理论中计算费米子相互作用所需的抵消项。

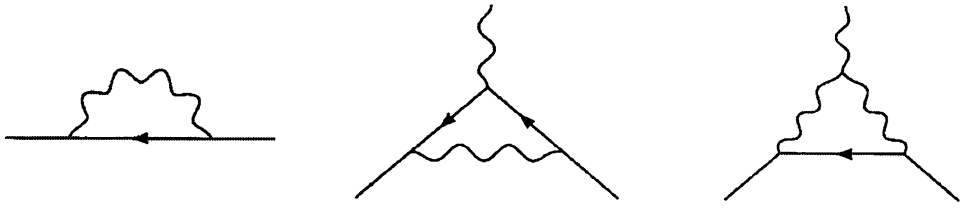
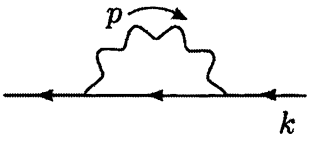


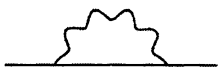
图 16.9 其发散被抵消项δ_2和δ_1减除的图。

为了完成β函数的计算，我们必须将δ_2和δ_1计算到相同水平的近似。费米子自能抵消项δ_2与图 16.9 的第一个图中正比于 $\not{k}$ 的发散相抵消。在 Feynman-'t Hooft 规范中，该图的值为



$$= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}(ig)^2\gamma^\mu t^a \frac{i(\not{p}+\not{k})}{(p+k)^2}\gamma_\mu t^a \frac{-i}{p^2}. \qquad (16.75)$$

由于场强重正化的发散与费米子质量无关，我们已经通过将质量设为零来简化(16.75)。根据定义(15.92)，群矩阵的乘积等于二次卡西米尔算符。狄拉克矩阵结构可以用收缩恒等式(7.89)来简化。其余的计算与玻色子自能图的步骤相同：



$$= g^2 C_2(r)(d-2)\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{(\not{p}+\not{k})}{(p+k)^2p^2}$$

$$= g^2 C_2(r)(d-2)\int_0^1 dx \int \frac{d^4P}{(2\pi)^4}\frac{(1-x)\not{k}}{(P^2-\Delta)^2}$$

$$= \frac{ig^2}{(4\pi)^{d/2}}C_2(r)\not{k}\int_0^1 dx\,(1-x)(d-2)\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}}$$

$$= \frac{ig^2}{(4\pi)^2} \not{k} C_2(r) \Gamma(2-\tfrac{d}{2}) + \cdots . \tag{16.76}$$

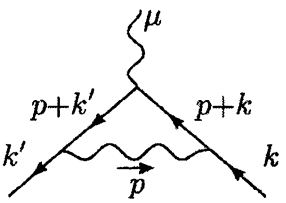
(这里$P = p + xk$和$\Delta = -x(1-x)k^2$)。

这个表达式的发散部分必须被图 16.8 的第二个抵消项图所消去。因此，如果重整化标度为M，抵消项必须为

$$\delta_2 = -\frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(M^2)^{2-d/2}} \cdot C_2(r), \tag{16.77}$$

加上有限项。我们注意到，像δ_3那样，δ_2依赖于规范；例如，δ_2在朗道规范($\xi = 0$)中没有单圈发散。

为确定δ_1，我们必须计算图 16.9 的第二和第三个图。第二个图，在 Feynman-'t Hooft 规范和无质量费米子下计算，是



$$= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} g^3 t^b t^a t^b \frac{\gamma^\nu (\not{p} + \not{k}') \gamma^\mu (\not{p} + \not{k}) \gamma_\nu}{(p+k')^2 (p+k)^2 p^2}. \tag{16.78}$$

规范群矩阵可以根据如下式子简化

$$\begin{aligned} t^b t^a t^b &= t^b t^b t^a + t^b [t^a, t^b] \\ &= C_2(r) t^a + i t^b f^{abc} t^c \\ &= C_2(r) t^a + \tfrac{1}{2} i f^{abc} \cdot i f^{bcd} t^d \\ &= [C_2(r) - \tfrac{1}{2} C_2(G)] t^a . \end{aligned} \tag{16.79}$$

在第三行，我们利用f^{abc}的反对称性将矩阵乘积重写为一个对易子；在最后一行中，我们使用了式(15.93)。

本节前面计算的图具有正的表观发散度，因此我们需要仔细提取它们的对数发散。但是，(16.78)中的积分，表观上是对数发散的，因此，通过考虑积分变量p远远大于任何外部动量的极限，可以很容易地求出这个发散系数。在此极限下，图的计算如下:



$$\sim g^3 [C_2(r) - \tfrac{1}{2} C_2(G)] t^a \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\nu \not{p} \gamma^\mu \not{p} \gamma_\nu}{p^2 \cdot p^2 \cdot p^2}. \tag{16.80}$$

如果我们将(16.80)分子中的$p^\rho p^\sigma$代替为$g^{\rho\sigma} p^2/d$，这个表达式很容易简化:

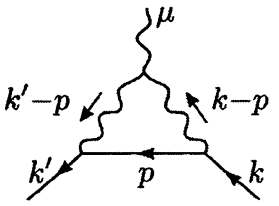


$$\sim g^3[C_2(r)-\tfrac{1}{2}C_2(G)]t^a(2-d)^2\frac{1}{d}\gamma^\mu\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{(p^2)^2} \tag{16.81}$$

$$\sim \frac{ig^3}{(4\pi)^2}[C_2(r)-\tfrac{1}{2}C_2(G)]t^a\gamma^\mu\big(\Gamma(2-\tfrac{d}{2})+\cdots\big).$$

这个计算给出了发散项的正确系数。它完全丢掉了顶点函数中的有限项，但我们不需要这些来计算β函数。

图 16.9 的第三个图也可以用同样的方法进行分析。它的值，在 Feynman-'t Hooft 规范和无质量费米子下，是

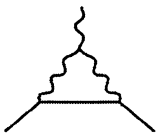


$$\begin{aligned}=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}(ig\gamma_\nu t^b)\frac{i\not p}{p^2}(ig\gamma_\rho t^c)\frac{-i}{(k'-p)^2}\frac{-i}{(k-p)^2}\\ \times gf^{abc}\big[g^{\mu\nu}(2k'-k-p)^\rho+g^{\nu\rho}(-k'-k+2p)^\mu\\ +g^{\rho\mu}(2k-k'-p)^\nu\big].\end{aligned} \tag{16.82}$$

规范矩阵乘积可简化为:

$$f^{abc}t^bt^c=\frac{1}{2}f^{abc}\cdot if^{bcd}t^d=\frac{i}{2}C_2(G)t^a.$$

同样，我们可以通过忽略所有与p相比下的外部动量，来确定这个图的对数发散，于是一个直接的计算给出了：



$$\begin{aligned}&\sim\frac{g^3}{2}C_2(G)t^a\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\gamma_\nu\not p\gamma_\rho\frac{g^{\mu\nu}p^\rho-2g^{\nu\rho}p^\mu+g^{\rho\mu}p^\nu}{(p^2)^3}\\ &\sim\frac{g^3}{2}C_2(G)t^a\frac{1}{d}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{(p^2)^2}\left[\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma_\rho-2\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma_\rho+\gamma^\sigma\gamma_\sigma\gamma^\mu\right]\\ &\sim\frac{ig^3}{(4\pi)^2}\frac{3}{2}C_2(G)\,t^a\gamma^\mu\big(\Gamma(2-\tfrac{d}{2})+\cdots\big).\end{aligned} \tag{16.83}$$

在第二行，我们再次将$p^\rho p^\sigma$替换为$g^{\rho\sigma}p^2/d$。

结果(16.81)和(16.83)的发散之和必须被图 16.8 中的第三个抵消项图消除。在M的重整化标度下，我们发现

$$\delta_1=-\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(M^2)^{2-d/2}}\big[C_2(r)+C_2(G)\big]. \tag{16.84}$$

注意δ_1不等于δ_2，在阿贝尔的情况下这是相等的；这里δ_1有一个额外的项，与$C_2(G)$成正比。

现在我们可以计算β函数了。将三个抵消项(16.74)，(16.77)，(16.84)代入我们的公式(16.73)，我们得到

$$\beta(g)=(-2)\frac{g^3}{(4\pi)^2}\Big[\big(C_2(r)+C_2(G)\big)-C_2(r)+\frac{1}{2}\Big(\frac{5}{3}C_2(G)-\frac{4}{3}n_fC(r)\Big)\Big];$$

即是

$$\beta(g)=-\frac{g^3}{(4\pi)^2}\Big[\frac{11}{3}C_2(G)-\frac{4}{3}n_fC(r)\Big]. \tag{16.85}$$

注意，至少对于小的n_f值，β函数是负的，因此非阿贝尔规范理论是渐近自由的。这是由't Hooft, Politzer, Gross 和 Wilczek 最先发现的，具有期待的物理重要性的结果。我们将在第 16.7 节和接下来的几章中讨论这个结果的物理解释。然而，在本节的其余部分，我们将抵制住追求物理的诱惑，而去完成我们对非阿贝尔规范理论发散的技术分析。

抵消项之间的关系

在刚刚完成的分析中，我们根据费米子顶点和场强重正化的发散计算了非阿贝尔规范理论的β函数。你可以想象为我们在计算费米子-规范玻色子顶点的耦合常数的跑动。或者，我们可以研究三玻色子顶点或四玻色子顶点的发散，从而计算出这些耦合常数的跑动情况。然而，我们已经在第 16.1 节中看到，非阿贝尔规范不变性将这些独立的耦合常数交织在一起，并要求了它们的等价性。因此，我们可以期望这些不同的计算应该得到相同的β函数值。

为了指明这个问题，让我们仔细地列举出非阿贝尔规范理论中出现的所有抵消项。我们从拉格朗日量(16.34)开始，它被认为是裸场和裸耦合常数的组合。在下面的讨论中，我们用下标 0 表示裸量。然后

$$\begin{aligned}\mathcal{L}=&-\frac{1}{4}(\partial_\mu A^a_{0\nu}-\partial_\nu A^a_{0\mu})^2+\bar\psi_0(i\not\partial-m_0)\psi_0-\bar c^a_0\partial^2c^a_0\\&+g_0A^a_{0\mu}\bar\psi_0\gamma^\mu t^a\psi_0-g_0f^{abc}(\partial_\mu A^a_{0\nu})A^b_{0\mu}A^c_{0\nu}\\&-\frac{1}{4}g^2(f^{eab}A^a_{0\mu}A^b_{0\nu})(f^{ecd}A^c_{0\mu}A^d_{0\nu})-g\bar c^a_0f^{abc}\partial^\mu A^0_{b\mu}c^c_0.\end{aligned} \tag{16.86}$$

为了简单起见，我们选择$\xi=\infty$。现在，我们通过提取费米子、规范玻色子、鬼

*G 't Hooft, unpublished; H. D. Politzer, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1346(1973); D. JGross and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1343(1973)

粒子的Z_2, Z_3, Z_2^c等因子来重标度场，以重整化场强，并将耦合移动为重整化耦合g。拉格朗日量的形式为

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{ren}} + \mathcal{L}_{\text{c.t.}},$$

其中$\mathcal{L}_{\text{ren}}$是拉格朗日量(16.34)，$\mathcal{L}_{\text{c.t.}}$的形式是

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{c.t.}} = &-\frac{1}{4}\delta_3(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 + \bar{\psi}(i\delta_2 \not{\partial} - \delta_m)\psi - \delta_2^c \bar{c}^a \partial^2 c^a \\ &+ g\delta_1 A_\mu^a \bar{\psi}\gamma^\mu \psi - g\delta_1^{3g} f^{abc}(\partial_\mu A_\nu^a) A_\mu^b A_\nu^c \\ &- g^2 \delta_1^{4g}(f^{eab} A_\mu^a A_\nu^b)(f^{ecd} A_\mu^c A_\nu^d) - g\delta_1^c \bar{c}^a f^{abc} \partial^\mu A_\mu^b c^c,\end{aligned} \tag{16.87}$$

其中抵消项定义为

$$\begin{aligned}&\delta_2 = Z_2 - 1, \qquad \delta_3 = Z_3 - 1, \qquad \delta_2^c = Z_2^c - 1, \qquad \delta_m = Z_2 m_0 - m, \\ &\delta_1 = \frac{g_0}{g} Z_2 (Z_3)^{1/2} - 1, \qquad \delta_1^{3g} = \frac{g_0}{g}(Z_3)^{3/2} - 1, \\ &\delta_1^{4g} = \frac{g_0^2}{g^2}(Z_3)^2 - 1, \qquad \delta_1^c = \frac{g_0}{g} Z_2^c (Z_3)^{1/2} - 1.\end{aligned} \tag{16.88}$$

请注意，这 8 个抵消项依赖于 5 个基本参数；因此，它们之间有三个关系。这种情况与我们在第 11 章中研究的对称性自发破缺的标量理论非常相似。理论的基本对称性——此处为局域规范不变性——意味着该理论的发散振幅之间的关系，以及抵消这些振幅所需的抵消项之间的关系。在本例中，一组五个重正化条件唯一地指定了所有抵消项，消除了理论的所有发散。

这个程序在单圈阶时特别简单。在这种情况下，我们可以将g_0/g和各种Z因子在 1 下展开，只保留对每个抵消项的领头阶贡献。这样就可以写出抵消项之间的三个关系

$$\delta_1 - \delta_2 = \delta_1^{3g} - \delta_3 = \tfrac{1}{2}(\delta_1^{4g} - \delta_3) = \delta_1^c - \delta_2^c. \tag{16.89}$$

明确地检查从(16.89)得到的δ_1^{3g}、δ_1^{4g}和δ_1^c的值是否确实消除了相应顶点图的发散是有意义的；这是问题16.3的主题。使用(16.89)的关系，很容易看出，无论你在计算中使用哪个规范玻色子顶点，β函数的单圈计算都将得到相同的值。更一般地，考虑一个非阿贝尔规范理论，它包含许多不同种类的粒子，玻色子和费米子，它们耦合到规范场。然后，对单圈阶，如下量将取一个普遍值

$$\delta_1^i - \delta_2^i,$$

其中δ_1^i为种类i的顶点抵消项，δ_2^i为对应的场强抵消项。该值为规范依赖的，因此在计算β函数时，该值的发散部分的规范依赖与δ_3的规范依赖相互抵消。

在10.3节的末尾我们讨论QED的抵消项，我们说，δ_1和δ_2之间的关系保证了所有带电的种类都看到共同的普遍的耦合常数值e。在非阿贝尔规范理论，关系(16.89)和他们的更高圈的推广，保护了非阿贝尔耦合的普遍性。在QED中，我们可以得到一个更强的关系，$\delta_1 = \delta_2$或者$Z_1 = Z_2$，由矢量流矩阵元的绝对归一化得到。而在非阿贝尔规范理论中，相应的矢量流$j^{\mu a} = \bar{\psi}\gamma^\mu t^a \psi$在伴随表示的局域规范变换下进行变换。因此，不能明确地使用Faddeev-Popov方案计算这个流的矩阵元，因此这些矩阵元的归一化没有被微扰理论所保持。

16.6 渐近自由：背景场方法

在前一节中，我们看到非阿贝尔规范理论在有足够少的费米子时，β函数是负的。这个结果很重要，值得去推导两次。前面的推导很简单，但不是很有启发性。在本节中，我们给出了相同结果的第二个推导，它更抽象，但更干净、更透明。

这一节的方法体现了 Wilson 思想的精神，在保持规范不变性的同时，对高动量自由度积分。我们将计算在一个固定的、缓慢变化的、经典的背景规范场$A_\mu^a(x)$下的非阿贝尔规范理论的有效作用量。通过采用该场的正则归一化，我们可以把有效作用量的系数解释为跑动耦合常数。该方法类似于计算非线性 sigma 模型的β函数用的 Polyakov 方法，见第 13.3 节。

背景场微扰理论

为了建立起计算，重标度规范场$gA_\mu^a \to A_\mu^a$。在这个归一化中，规范耦合被从协变导数中移除，并移动到规范场动能项的系数中。因此我们从拉格朗日量出发

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4g^2}(F_{\mu\nu}^a)^2 + \bar{\psi}(i\not{D})\psi, \tag{16.90}$$

其中

$$
\begin{aligned}
D_\mu &= \partial_\mu - iA_\mu^a t^a, \\
F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c,
\end{aligned}
\tag{16.91}
$$

为了简单，费米子的质量设为零。A_μ^a和ψ的变换律也与耦合常数无关:

$$
\delta A_\mu^a = \partial_\mu \alpha^a + f^{abc} A_\mu^b \alpha^c, \qquad \delta\psi = i\alpha^a t^a \psi. \tag{16.92}
$$

另一方面，耦合常数g将出现在规范场传播子中。

接下来，将规范场分为经典背景场和涨落量子场:

$$
A_\mu^a \to A_\mu^a + \mathcal{A}_\mu^a. \tag{16.93}
$$

我们将经典的A_μ^a部分作为一个固定的场位形，而涨落的$\mathcal{A}_\mu^a$部分作为泛函积分的积分变量。从这里开始，我们将使用符号D_μ来表示关于背景场的协变导数: $D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu^a t^a$。然后

$$
\bar{\psi}(i\not{D})\psi \to \bar{\psi}(i\not{D})\psi + \mathcal{A}_\mu^a \bar{\psi}\gamma^\mu t^a \psi. \tag{16.94}
$$

杨-米尔斯场强分解如下:

$$
\begin{aligned}
F_{\mu\nu}^a \to\ & \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \\
& + \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^a - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^a + f^{abc}(A_\mu^b \mathcal{A}_\nu^c - A_\nu^b \mathcal{A}_\mu^c) + f^{abc} \mathcal{A}_\mu^b \mathcal{A}_\nu^c \\
=\ & F_{\mu\nu}^a + D_\mu \mathcal{A}_\nu^a - D_\nu \mathcal{A}_\mu^a + f^{abc} \mathcal{A}_\mu^b \mathcal{A}_\nu^c,
\end{aligned}
\tag{16.95}
$$

其中，最后一行，$F_{\mu\nu}^a$为经典场的场强，D_μ为伴随表示中的协变导数(15.86)。注意，在(16.94)和(16.95)中，导数∂_μ只作为关于背景场的协变导数的一部分。

如果背景场A_μ^a是固定的，则拉格朗日量具有的局域规范对称性，通过对$\mathcal{A}_\mu^a$的变换实现：

$$
\mathcal{A}_\mu^a \to \mathcal{A}_\mu^a + D_\mu \alpha^a + f^{abc} \mathcal{A}_\mu^b \alpha^c. \tag{16.96}
$$

为了定义泛函积分，我们必须使用 Faddeev-Popov 过程来固定规范。我们选择与背景规范场相关的协变的规范固定条件：

$$
G(A) = D^\mu \mathcal{A}_\mu^a - \omega^a, \tag{16.97}
$$

而不是(16.28)。Faddeev-Popov行列式包含了对这个算符的变分，对应于规范变换(16.96)。如16.2节所述，我们可以将规范固定项提升到指数，在背景场中类似

于 Feynman-'t Hooft 规范下将理论量子化。那么规范固定拉格朗日量就是

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{FP}} = -\frac{1}{4g^2}\left(F^a_{\mu\nu} + D_\mu \mathcal{A}^a_\nu - D_\nu \mathcal{A}^a_\mu + f^{abc}\mathcal{A}^b_\mu \mathcal{A}^c_\nu\right)^2 - \frac{1}{2g^2}(D^\mu \mathcal{A}^a_\mu)^2 \\ + \bar{\psi}(i\not{D} + \mathcal{A}^a_\mu \gamma^\mu t^a)\psi + \bar{c}^a(-D^2 - D^\mu f^{abc}\mathcal{A}^b_\mu)c^c.\end{aligned} \tag{16.98}$$

拉格朗日量(16.98)是规范固定的，但它在$\mathcal{A}^a_\mu$和背景场A^a_μ同时变换的局域对称性下是不变的：

$$\begin{aligned}A^a_\mu &\to A^a_\mu + D_\mu \beta^a \\ \mathcal{A}^a_\mu &\to \mathcal{A}^a_\mu - f^{abc}\beta^b \mathcal{A}^c_\mu \\ \psi &\to \psi + i\beta^a t^a \psi \\ c^a &\to c^a - f^{abc}\beta^b c^c.\end{aligned} \tag{16.99}$$

在这个变换下，$\mathcal{A}^a_\mu$作为一个物质场在伴随表示中变换，而A^a_μ携带着正比于$\partial_\mu \beta^a$的局域规范变换的一部分。为了证明(16.99)是(16.98)的对称性，我们只需注意(16.98)是整体不变的，并且(16.98)中的A^a_μ只是协变导数和场强的一部分。变换(16.99)也是泛函测度的对称性。因此，如果我们对$\mathcal{A}^a_\mu$, ψ和c^a进行泛函积分来计算有效作用量，那么结果必须在A^a_μ的局域规范变换下不变。这个观察大大简化了有效作用量的分析。

有效作用量的单圈修正

现在让我们使用 11.4 节的方法计算有效作用量。为了在单圈阶计算$\Gamma[A^a_\mu]$，我们去掉了涨落场$\mathcal{A}^a_\mu$中的线性项，然后对$\mathcal{A}^a_\mu$的二次项以及费米子和鬼场进行积分。这就产生了泛函行列式，我们可以将其计算为有效作用量的近似形式。

为了执行这个程序，我们必须计算出(16.98)中在各个场的二次项。$\mathcal{A}^a_\mu$的二次项是：

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}} = -\frac{1}{2g^2}\left\{\tfrac{1}{2}(D_\mu \mathcal{A}^a_\nu - D_\nu \mathcal{A}^a_\mu)^2 + F^{a\mu\nu} f^{abc}\mathcal{A}^b_\mu \mathcal{A}^b_\nu + (D^\mu \mathcal{A}^a_\mu)^2\right\}. \tag{16.100}$$

分部积分后，我们可以把它重写成

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}} = -\frac{1}{2g^2}\left\{\mathcal{A}^a_\mu[-(D^2)^{ab}g^{\mu\nu} + (D^\nu D^\mu)^{ab} - (D^\mu D^\nu)^{ab}]\mathcal{A}^b_\nu - \mathcal{A}^a_\mu f^{abc}F^{b\mu\nu}\mathcal{A}^c_\nu\right\}. \tag{16.101}$$

括号中的项包含协变导数的对易子。这可以使用(15.48)简化；结果与最后一项相结合给出

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}} = -\frac{1}{2g^2}\left\{\mathcal{A}^a_\mu[-(D^2)^{ac}g^{\mu\nu} - 2f^{abc}F^{b\mu\nu}]\mathcal{A}^c_\nu\right\}. \tag{16.102}$$

第一项是协变达朗贝尔算符的一部分。第二项看起来很特别，但是我们可以把它写成一个以后方便的形式，如下所示：首先，我们认识到$F^b_{\mu\nu}$与在伴随表示中的一个群生成元收缩。接下来，我们引进矩阵(3.18)，它是四矢量的洛伦兹变换的生成元：

$$(\mathcal{J}^{\rho\sigma})_{\alpha\beta} = i(\delta^\rho_\alpha \delta^\sigma_\beta - \delta^\sigma_\alpha \delta^\rho_\beta). \tag{16.103}$$

有了这些替换，我们可以将(16.102)写为如下形式

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}} = -\frac{1}{2g^2}\{\mathcal{A}^a_\mu[-(D^2)^{ac}g^{\mu\nu} + 2(\tfrac{1}{2}F^b_{\rho\sigma}\mathcal{J}^{\rho\sigma})^{\mu\nu}(t^b_G)^{ac}]\mathcal{A}^c_\nu\}. \tag{16.104}$$

方括号中的对象可以看作是背景场上的涨落的广义达朗贝尔算符。

接下来，我们用类似的方法来减少费米场的二次项。费米子场的二次拉格朗日量是

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi}(i\not{D})\psi. \tag{16.105}$$

对费米场积分，我们得到了算符$(i\not{D})$的行列式。这被方便地表示为如下算符的行列式的平方根

$$\begin{aligned}(i\not{D})^2 &= -\gamma^\mu\gamma^\nu D_\mu D_\nu \\ &= \big(-\tfrac{1}{2}\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} - \tfrac{1}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\big)D_\mu D_\nu \\ &= -D^2 + 2i\big(\frac{i}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\big)D_\mu D_\nu.\end{aligned} \tag{16.106}$$

在最后一行中，狄拉克矩阵的对易子构成了旋量表示中洛伦兹变换的生成元，$S^{\mu\nu}$(3.23)。因为这个对象它的指标是反对称的，与它缩并的乘积$D_\mu D_\nu$可以被它们的对易子的一半所替换。然后(16.106)采用如下形式

$$(i\not{D})^2 = -D^2 + 2(\tfrac{1}{2}F^b_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma})t^b, \tag{16.107}$$

其中现在给出的t^a处于费米子的表示中。这只是(16.104)中的达朗贝尔算符，不过被重写为一组新的自旋和规范量子数。如果该理论包含了n_f种的费米子，费米子泛函积分给出的是(16.107)的行列式的$n_f/2$次方。

鬼场的二次项很简单

$$\mathcal{L}_c = \bar{c}^a[-(D^2)^{ab}]c^b; \tag{16.108}$$

这包含了相同的达朗贝尔算符，是在自旋为零的情况下写出的。

为了总结所有这些结果，我们定义了普遍的、协变的背景场达朗贝尔算符

$$\Delta_{r,j} = -D^2 + 2(\tfrac{1}{2}F^b_{\rho\sigma}\mathcal{J}^{\rho\sigma}), \tag{16.109}$$

作用在表示r和自旋为j的场上。协变导数的平方给出了通常的、传递的、最小的、粒子与规范场的耦合，而粒子由$\Delta_{r,j}$所描述。附加项是与规范场的磁矩相互作用，其强度对应的g因子为$g=2$。利用这个普遍表达式，我们可以把单圈阶的经典场A^a_μ的有效作用量写成

$$\begin{aligned} e^{i\Gamma[A]} &= \int \mathcal{D}\mathcal{A}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}c\,\exp\Big[i\int d^4x\,(\mathcal{L}_{\rm FP}+\mathcal{L}_{\rm c.t.})\Big] \\ &= \exp\Big[i\int d^4x\big(-\frac{1}{4g^2}(F^a_{\mu\nu})^2+\mathcal{L}_{\rm c.t.}\big)\Big] \\ &\qquad\cdot\big(\det\Delta_{G,1}\big)^{-1/2}\big(\det\Delta_{r,1/2}\big)^{+n_f/2}\,\big(\det\Delta_{G,0}\big)^{+1}, \end{aligned} \tag{16.110}$$

其中$\mathcal{L}_{\rm c.t.}$是抵消项拉格朗日量，三个行列式是计算规范场、费米场和鬼场泛函积分的结果。对有效作用量的附加的圈修正被另一个g^2因子所抑制。

由于贡献于(16.110)的每一个积分对于(16.99)都是不变的，所以每个行列式都是A^a_μ的一个规范不变的泛函。如果我们以背景场为幂来展开行列式，接着应该能找到一个级数，其项开始于

$$\log\det\Delta_{r,j}=i\int d^4x\,\Big(\frac{1}{4}\mathbf{C}_{r,j}(F^a_{\mu\nu})^2+\cdots\Big), \tag{16.111}$$

其中后续项包含更高量纲的规范不变的算符。系数$\mathbf{C}_{r,j}$可以依赖于表示r和自旋j。展开的这个第一项修正了零阶有效作用量，根据

$$\frac{1}{4g^2}(F^a_{\mu\nu})^2\to\frac{1}{4}\Big(\frac{1}{g^2}+\frac{1}{2}\mathbf{C}_{G,1}-\mathbf{C}_{G,0}-\frac{n_f}{2}\mathbf{C}_{r,1/2}\Big)(F^a_{\mu\nu})^2. \tag{16.112}$$

因子$\mathbf{C}_{r,j}$是无量纲的，但是，由于它们来自于一个单圈的计算，我们应该期望它们是对数发散的:

$$\mathbf{C}_{r,j}=c_{r,j}\log\frac{\Lambda^2}{k^2}+\cdots, \tag{16.113}$$

其中 k 是表征背景场的变化的动量。抵消项δ_3去除了发散；如果我们在标度M上施加一个重整化条件，那么(16.113)和它的抵消项的加法给出了结果(16.112)并做了替换：

$$\mathbf{C}_{r,j}=c_{r,j}\log\frac{M^2}{k^2}+\cdots. \tag{16.114}$$

有效作用量中初始固定的耦合常数被替换为跑动耦合常数

$$\frac{1}{g^2(k^2)} = \frac{1}{g^2} + \Big(\frac{1}{2}c_{G,1} - c_{G,0} - \frac{n_f}{2}c_{r,1/2}\Big)\log\frac{M^2}{k^2}, \tag{16.115}$$

or

$$g^2(k^2) = \frac{g^2}{1 - (\frac{1}{2}c_{G,1} - c_{G,0} - \frac{n_f}{2}c_{r,1/2})g^2\log k^2/M^2}. \tag{16.116}$$

通过将这种形式与式(12.88)比较，我们可以看出，这个跑动耦合常数是如下β函数的重正化群方程的解

$$\beta(g) = \Big(\frac{1}{2}c_{G,1} - c_{G,0} - \frac{n_f}{2}c_{r,1/2}\Big)g^3. \tag{16.117}$$

因此，通过计算$c_{r,j}$，我们可以直接得到β函数的领头系数。

计算泛函行列式

为了计算$c_{r,j}$，我们必须计算出以外场为幂的行列式展开式的第一项。为了展开这个行列式，我们按照 9.5 节中的例子进行。写

$$\Delta_{r,j} = -\partial^2 + \Delta^{(1)} + \Delta^{(2)} + \Delta^{(\mathcal{J})}, \tag{16.118}$$

where

$$\begin{aligned}\Delta^{(1)} &= i[\partial^\mu A^a_\mu t^a + A^a_\mu t^a \partial^\mu]\\ \Delta^{(2)} &= A^{a\mu}t^a A^b_\mu t^b\\ \Delta^{(\mathcal{J})} &= 2(\tfrac{1}{2}F^b_{\rho\sigma}\mathcal{J}^{\rho\sigma}).\end{aligned} \tag{16.119}$$

$\Delta^{(1)}$和$\Delta^{(\mathcal{J})}$部分包含外场的一次幂；$\Delta^{(2)}$包含A^a_μ的两次幂，将这些项看做微扰，我们写

$$\begin{aligned}\log\det\Delta_{r,j} &= \log\det[-\partial^2 + (\Delta^{(1)} + \Delta^{(2)} + \Delta^{(\mathcal{J})})]\\ &= \log\det[-\partial^2] + \log\det[1 + (-\partial^2)^{-1}(\Delta^{(1)} + \Delta^{(2)} + \Delta^{(\mathcal{J})})]\\ &= \log\det[-\partial^2] + \mathrm{tr}\log[1 + (-\partial^2)^{-1}(\Delta^{(1)} + \Delta^{(2)} + \Delta^{(\mathcal{J})})]\\ &= \log\det[-\partial^2] + \mathrm{tr}[(-\partial^2)^{-1}(\Delta^{(1)} + \Delta^{(2)} + \Delta^{(\mathcal{J})}) + \cdots].\end{aligned} \tag{16.120}$$

(16.120)中右边的第一项是一个无关常数。在这个展开式中，A^a_μ的线性项由于规范不变性而消失(或者，更明确地说，因为$\mathrm{tr}[t^a] = 0$)。A^a_μ中的二次项必须被组织成(16.111)的结构，加上具有更高导数的项。



图 16.10 在log $\det\Delta_{r,j}$的展开中外场的二次项。
特殊的顶点来自$F^{\rho\sigma}J_{\rho\sigma}$耦合。

(16.111)中A^a_μ的二次项可以在傅里叶空间中写成

$$\log\det\Delta_{r,j}=\frac{i}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}A^a_\mu(-k)A^b_\nu(k)(k^2g^{\mu\nu}-k^\mu k^\nu)\cdot\left[\mathbf{C}_{r,j}+\mathcal{O}(k^2)\right]. \tag{16.121}$$

现在我们将明确地从(16.120)计算出这些项，并把它们化成(16.121)的形式。展开式(16.120)中是A^a_μ的二次的项，是含有一次幂的$\Delta^{(2)}$或二次幂的$\Delta^{(1)}$或$\Delta^{(\mathcal{J})}$的项。此外，$\Delta^{(\mathcal{J})}$中的线性项正比于$\mathrm{tr}[\mathcal{J}^{\rho\sigma}]=0$，因此这两个结构之间的交叉项消失了。其余三个贡献对应于图 16.10 所示的费曼图。

包含$\Delta^{(1)}$的二次幂的项为

$$-\tfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[(-\partial^2)^{-1}\Delta^{(1)}(-\partial^2)^{-1}\Delta^{(1)}\right]=$$



$$=-\tfrac{1}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}A^a_\mu A^b_\nu\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\mathrm{tr}\,\frac{1}{p^2}(2p+k)^\mu t^a\frac{1}{(p+k)^2}(2p+k)^\nu t^b, \tag{16.122}$$

其中迹现在只是对规范和自旋指标求迹。1/2 来自于对数的展开式。包含$\Delta^{(2)}$的一次幂的项是

$$\mathrm{tr}\left[(-\partial^2)^{-1}\Delta^{(2)}\right]=$$



$$=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}A^a_\mu A^b_\nu\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\mathrm{tr}\,\frac{1}{p^2}g^{\mu\nu}t^at^b. \tag{16.123}$$

从图 16.10 可以看出，这两个贡献与标量粒子对 QED 真空极化的贡献是精确地成正比的，乘以如下因子

$$\mathrm{tr}[t^at^b]=C(r)d(j)\delta^{ab}, \tag{16.124}$$

其中$d(j)$为自旋分量的个数。图的值可以使用上一节中的方法来计算(或者简单地回忆问题 9.1)。我们发现这两个图加在一起成了规范不变的形式(16.121)，给出了

$$\tfrac{1}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}A^a_\mu(-k)A^b_\nu(k)(k^2g^{\mu\nu}-k^\mu k^\nu)\cdot\left[i\frac{C(r)d(j)}{3(4\pi)^2}\Gamma(2-\tfrac{d}{2})+\cdots\right]. \tag{16.125}$$

包含$\Delta^{(\mathcal{J})}$的二次幂的项是

$$-\tfrac{1}{2}\operatorname{tr}\big[(-\partial^2)^{-1}\Delta^{(\mathcal{J})}(-\partial^2)^{-1}\Delta^{(\mathcal{J})}\big] = \quad$$



$$= -\tfrac{1}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}A^a_\mu A^b_\nu\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\operatorname{tr}\frac{1}{p^2}(2ik_\rho g_{\mu\sigma}\mathcal{J}^{\rho\sigma})t^a\frac{1}{(p+k)^2}(-2ik_\alpha g_{\nu\beta}\mathcal{J}^{\alpha\beta})t^b. \tag{16.126}$$

为了计算这个，将$C(j)$定义为对自旋指标求迹

$$\operatorname{tr}[\mathcal{J}^{\rho\sigma}\mathcal{J}^{\alpha\beta}] = (g^{\rho\alpha}g^{\sigma\beta} - g^{\rho\beta}g^{\sigma\alpha})C(j). \tag{16.127}$$

从显式表达式直接算出

$$C(j) = \begin{cases} 0 & \text{scalars;} \\ 1 & \text{Dirac spinors;} \\ 2 & \text{4-vectors.} \end{cases} \tag{16.128}$$

则(16.126)可以计算为

$$-\frac{1}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}A^a_\mu A^b_\nu\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{p^2}\frac{1}{(p+k)^2}(k^2g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu)4C(r)C(j)$$
$$= \frac{1}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}A^a_\mu(-k)A^b_\nu(k)(k^2g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu)\Big(-i\frac{4C(r)C(j)}{(4\pi)^2}\Gamma(2-\tfrac{d}{2}) + \cdots\Big). \tag{16.129}$$

将(16.125)和(16.129)相加，我们发现(16.111)中的系数$\mathbf{C}_{r,j}$被给出为

$$\mathbf{C}_{r,j} = \frac{1}{(4\pi)^2}\big[\tfrac{1}{3}d(j) - 4C(j)\big]C(r)\Gamma(2-\tfrac{d}{2}). \tag{16.130}$$

Thus,

$$c_{r,j} = \frac{1}{(4\pi)^2}\big[\tfrac{1}{3}d(j) - 4C(j)\big]C(r), \tag{16.131}$$

或明确地，

$$c_{r,j} = \frac{C(r)}{(4\pi)^2}\cdot\begin{cases} +1/3 & \text{scalars;} \\ -8/3 & \text{Dirac spinors;} \\ -20/3 & \text{4-vectors.} \end{cases} \tag{16.132}$$

注意，每当磁矩项为非零时，它就占主导，且它的系数与传递项在符号上相反。

将(16.132)中的值插入(16.117)中，我们发现

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{(4\pi)^2}\Big(\frac{11}{3}C_2(G) - \frac{4}{3}n_fC(r)\Big). \tag{16.133}$$

因此，我们证实了上一节的结论，即具有足够少的费米子的非阿贝尔规范理论是渐近自由的。

16.7 渐近自由：定性解释

在前两节中*，我们两次计算了非阿贝尔规范理论中的β函数:

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{(4\pi)^2}\Big(\frac{11}{3}C_2(G) - \frac{4}{3}n_f C(r)\Big). \tag{16.134}$$

其中n_f为表示r中的费米子种类数。$C(r)$为表示矩阵的正交关系(15.78)中出现的常数，而$C_2(G)$为公式(15.92)中定义的、群的伴随表示的二次卡西米尔算符。在$SU(N)$规范理论且费米子在基础表示中，这一结果成为

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{(4\pi)^2}\Big(\frac{11}{3}N - \frac{2}{3}n_f\Big). \tag{16.135}$$

整体负号意味着，对于足够小的n_f，非阿贝尔规范理论是渐近自由的。在这种情况下，根据式(12.92)，跑动耦合常数在大动量时趋于零：

$$g^2(k) = \frac{g^2}{1 + \frac{g^2}{(4\pi)^2}(\frac{11}{3}N - \frac{2}{3}n_f)\log(k^2/M^2)}. \tag{16.136}$$

非阿贝尔规范理论的渐近自由是一个令人惊讶的结论。当我们在 7.5 节中第一次遇到电磁耦合的跑动，我们发现很容易理解耦合常数流的方向：真空获得了介电特性是由于虚的正负电子对产生，导致有效的电荷在大距离处减少。在非阿贝尔规范理论中，根据公式(16.134)，费米子仍然产生这样的效应。此外，由于非阿贝尔规范玻色子是带荷的，它们应该产生额外的屏蔽效应。但根据式(16.134)，非阿贝尔规范玻色子的净效应在符号上是**相反的**。显然，一定有其他的相互竞争的效应，克服了屏蔽效应，改变了β函数的符号。

这些效应的精确形式依赖于规范。他们在库仑规范中描述起来是最简单的，其中规范固定条件是

$$\partial_i A^{ai} = 0. \tag{16.137}$$

我们不会为这个规范计算出完整的量子化；相反，我们将只描述它的定性特征。和电动力学中一样，库仑规范中的场量子以一种非洛伦兹协变的方式被描述为横向极化光子。没有类时和纵向的光子，以及没有传播的鬼场。然而，有一个库仑

---

*16.7 节借鉴了 16.5 和 16.6 的主要结果，但不依赖于这些较早的章节。但是，即使您没有读过第 16.5 节，希望您也可能浏览 522 到 531 页，以了解如何计算β函数。

势，由场A^{a0}描述，它服从一个类似于高斯定律的约束方程。不足为奇的是，在非阿贝尔的情况下，高斯定律采用规范协变的形式

$$D_i E^{ai} = g\rho^a, \tag{16.138}$$

其中$E^{ai} = F^{a0i}$和ρ^a为费米子的整体对称性流的电荷密度。由式(15.86)可知，作用于伴随表示中的场的协变导数为

$$(D_\mu \phi)^a = \partial_\mu \phi^a + g f^{abc} A^b_\mu \phi^c.$$

为了分析式(16.138)的结果，我们将选择一个尽可能简单和明确的例子。设规范群为$SU(2)$，则$a = 1,2,3$, $f^{abc} = \epsilon^{abc}$。我们来计算方向为$a = 1$，大小为+1的点电荷的库仑势。我们将使用迭代过程求解E^{ai}，将协变导数的规范场项放在方程的右边:

$$\partial_i E^{ai} = g\delta^{(3)}(\mathbf{x})\delta^{a1} + g\epsilon^{abc} A^{bi} E^{ci}. \tag{16.139}$$

右边第二项表明，在非阿贝尔规范理论中，一个包含矢量势和电场的区域，如果在物理空间是平行且在群空间是垂直的，则它是电场的源。

式(16.139)的含义如图 16.11 所示。(16.139)右边的领头项意味着一个类型为$a = 1$的$1/r^2$的电场从$\mathbf{x} = 0$开始辐射。在空间的某个地方，这个电场会和一些来源于真空涨落的矢量势A^{ai}交叉。为了明确起见，我们假设该涨落有$a = 2$，且指向某个对角线方向，如图 16.11(a)所示。于是式(16.139)右手边的第二项为负，且$a = 3$：在此处会有一个场E^{3i}的汇，如图 16.11(b)所示。这些新的场，会在两个位置平行或反平行于原来的A^{ai}场涨落。再看一下式(16.139)的第二项，我们看到有一个$a = 1$的电场的源离原点更近，有一个$a = 1$的电场的汇离原点更远。这是一个真空中的感应电偶极子，如图 16.11(c)所示。但是看看这些符号：这个偶极子是指向原始荷的，因此是用来放大而不是屏蔽它的！因此，距离越远，原荷的效应就越强。

这种反屏蔽效应与虚的规范玻色子对所引起的屏蔽效应之间的竞争必须定量地加以解决。当这样做时*，你会发现反屏蔽效应是其 12 倍。

在这个论证中，非阿贝尔规范理论所特有的一组动力学特征使得耦合常数在远距离是增强而不是屏蔽。这表明渐近自由可能是非阿贝尔规范理论的一个特殊

*FT. Appelquist, M. Dine, and I. Muzinich, *Phys. Lett.* 69B, 231(1977)

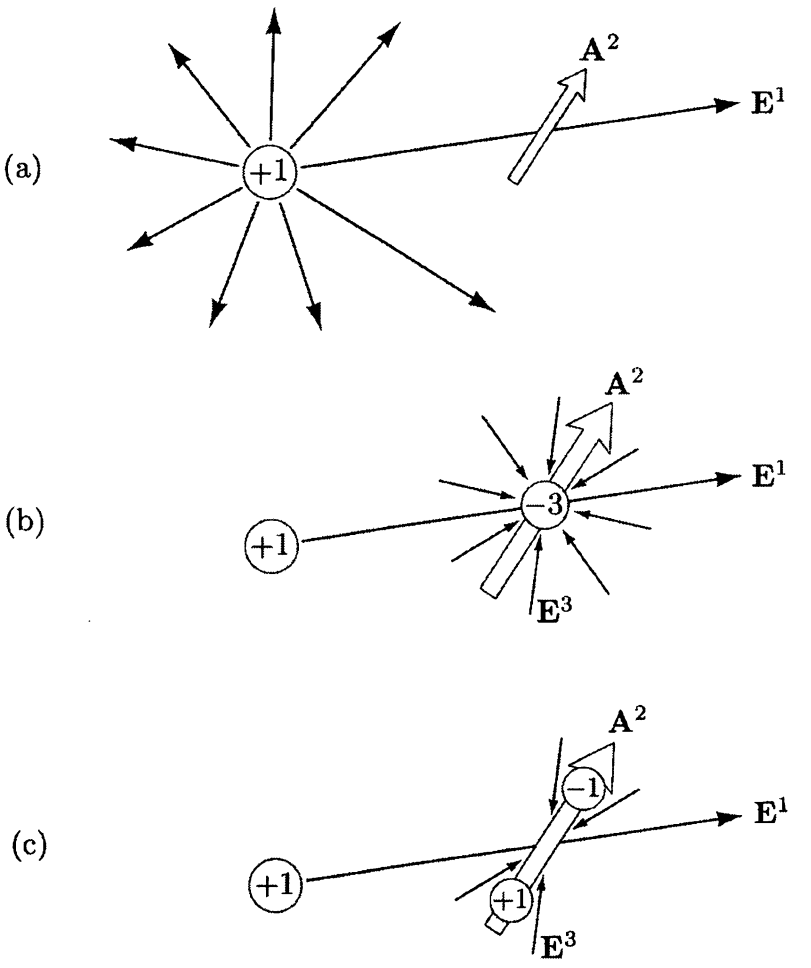


图 16.11 $SU(2)$规范理论的库仑场上的真空涨落效应。在(a)中，涨落$\mathbf{A}^2$发生在$1/r^2$场$\mathbf{E}^1$上。如(b)所示，这些结合的场产生了$\mathbf{E}^3$场的一个汇。而$\mathbf{E}^3$场又与$\mathbf{A}^2$场结合以产生一个有效电偶极子$\mathbf{E}^1$，如(c)所示。电偶极子指向原始的荷，在大距离处增强了它的场。

性质。虽然这一结论只有在穷尽其他情况下才能得到证明，但它确实是正确的:在四种可重正化的时空量子场论中，只有非阿贝尔规范理论是渐近自由的。*我们已经在第 14 章中看到，渐近自由作为强相互作用的一个性质被从实验上提出。在下一章，我们将从非阿贝尔规范理论出发，建立强相互作用的模型，并详细探讨其性质。

*S. Coleman and D. J. Gross , *Phys. Rev. Lett* . **31** 851 (1973)

Chapter 17

量子色动力学

建立强相互作用的真实模型的关键是渐近自由现象。第 14 章描述了这一现象的实验发现，第 16 章给出了非阿贝尔规范理论渐近自由的理论证明。我们现在准备探索这些发现的结果。

我们将首先讨论强相互作用模型最自然的候选者是有着规范群$SU(3)$的非阿贝尔规范理论，耦合到基础表示中的费米子(夸克)。这个理论被称为量子色动力学，或 QCD。在第 17.1 节中对 QCD 进行了一些一般性讨论之后，我们将在第 17.2 至 17.4 节中研究一些特定的 QCD 散射过程。然而，QCD 最有趣的应用属于更复杂的本质；它来自于在第 14 章中讨论的比约肯标度关系的缓慢破坏的模式的预测。第 17.5 节需要发展额外的理论工具，以了解这些破坏。

虽然这一章包含了许多关于实验的参考，但是我们要提醒读者，对于 QCD，以及对于 QED 或临界现象，这本书主要是一本理论方法的教科书，而不是一本综述和对实验数据的解释。关于强相互作用物理学的实验技术和结果的细节在一些优秀的文章中被回顾(见参考书目)。我们希望本章能够为阐明和解释这些结果提供必要的理论基础。

17.1 从夸克到 QCD

我们目前对强相互作用的理论图像始于对组成质子和其他强子的基本费米子的识别。随着这些费米子的性质得到更好的理解，它们相互作用的本质受到了严格的限制，甚至最终形成了一个独特的候选理论。为了欣赏这一理论的独特性，我们通过它如何产生的简化历史来开始这一章。

在1963年。Gell-Mann和Zweig提出了一个模型，该模型使用称为**夸克**的基

本组分来解释强相互作用粒子的谱。介子被认为是夸克-反夸克束缚态。事实上，最轻的介子正好有正确的量子数，证明了这种解释；它们是奇宇称的自旋0和自旋1的态，正如我们在第三章中发现的轨道角动量为零的费米子-反费米子束缚态。重子被解释为三个夸克的束缚态。为了解释强子的电荷和其他量子数，Gell-Mann和Zweig需要假设三种夸克，上(u)，下(d)和奇异(s)。从那时起发现的额外强子需要另外三种的存在：粲(c)，底(b)和顶(t)。为了使重子具有整数电荷。夸克需要被分配为分数电荷：u, c, t有$+2/3$，d, s, b有$-1/3$。例如，质子是uud的束缚态，中子是udd的束缚态。这六种夸克通常被称为**味道**。

夸克模型在预测新的强子态、解释电磁强度和不同强子之间的弱相互作用跃迁方面取得了巨大的成功。特别是，夸克模型自然地包含了强相互作用粒子之间最重要的对称性关系。如果我们假设u夸克和d夸克有相同的质量和相互作用，$SU(2)$群作为幺正旋转而作用于u和d态：

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \to U \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \tag{17.1}$$

它应该是强相互作用的一个对称性。事实上，在原子核和基本粒子物理学中，量子态形成了这种$SU(2)$对称性的多重态，称为**同位素自旋**或**同位旋**。同样，由于奇异夸克只比u和d夸克重了一点点，可以考虑三重态(u, d, s)的幺正变换的对称性。Gell-Man和Ne'eman证明了基本粒子自然地填充了这个$SU(3)$对称性的不可约表示。

尽管最初的夸克模型在唯象学上取得了成功，但它有两个严重的问题。首先，尽管付出了相当大的努力，还是找不到带分数电荷的自由粒子。第二，重子谱需要假设三个夸克的波函数在夸克自旋和味道量子数的交换下是完全对称的，这与期望的夸克(必须有1/2自旋)应该服从费米-狄拉克统计相矛盾。对这种对称性的需求在如下事实中得到最清楚的说明：核子的最轻激发态之一Δ^{++}，是一个电荷$+2$、自旋3/2的粒子。这个粒子很简单被解释为一个具有零轨道角动量且三个夸克自旋平行的uuu束缚态。

为了使重子谱与自旋统计定理相一致，Han 和 Nambu, Greenberg 和 Gell-Mann 提出夸克携带一个额外的，未观察到的量子数，称为**颜色**。他们提出了一个特别的假设，即重子波函数在色量子数上必须是完全反对称的。然后，如果夸

克波函数在自旋和味道上是完全对称的，它们在整体上是完全反对称的，这与费米-狄拉克统计一致。最简单的颜色模型是将夸克分配给一种新的、内部$SU(3)$整体对称性的基础表示。暂时不考虑自旋和味道量子数，我们可以将夸克表示为q_i，其中$i=1,2,3$是色指标。因此夸克在色$SU(3)$对称性的基础表示或“3”表示下变换。反夸克$\bar{q}^i$在$\bar{3}$表示下变换。一个3和一个$\bar{3}$的内积是$SU(3)$的不变量。我们也可以使用三个 3 的完全反对称组合来形成一个不变量ϵ_{ijk}：该对象在幺正变换下根据如下方式变换

$$\epsilon_{ijk} \to U_{ii'}U_{jj'}U_{kk'}\epsilon_{i'j'k'} = (\det U)\epsilon_{ijk}, \tag{17.2}$$

所以在$SU(3)$变换下是不变的，其中$\det U = 1$。假设所有强子波函数在$SU(3)$对称变换下都是不变的，这两种组合是唯一允许的简单组合：

$$\bar{q}^i q_i, \qquad \epsilon^{ijk}q_i q_j q_k, \qquad \epsilon_{ijk}\bar{q}^i\bar{q}^j\bar{q}^k. \tag{17.3}$$

也就是说，物理的强子是颜色上的单态的假设意味着唯一可能的轻强子是介子、重子和反重子。

和最初的夸克模型一样，颜色假说在唯象上是成功的，但也提出了其他的问题：为什么夸克会有这个看似多余的性质？什么机制保证了所有强子的波函数是色单态？这些问题的答案不是来自强子谱，而是来自第 14 章描述的深度非弹性散射实验，以及随后对具有渐近自由性质的部分子结合的理论的探索。当人们发现非阿贝尔规范理论具有这种性质时，剩下的工作就是识别正确的规范群和费米子表示。由于色对称性没有其他明显的物理角色，所以很自然地把这种对称性与规范群联系起来，用颜色表示夸克的规范量子数。这种推理导致了一个强相互作用的模型，它是一个夸克系统，有各种各样的味道，每一种都被分配给局域规范群$SU(3)$的基础表示。$SU(3)$规范场的量子被称为**胶子**，该理论被称为量子色动力学或 QCD。

在这本书中，我们将主要研究 QCD 在高能区下的特性，其中耦合常数已经变小。然而，我们应该指出，你也可以在强耦合区域中研究 QCD，使用 Wilson 提出的近似方案，其中连续规范理论被一个在四维欧几里得晶格上的离散统计力学系统所取代。利用这一近似，Wilson 表明，对于足够强的耦合，QCD 表现出**色禁闭**：理论唯一的能量有限的渐近态是那些色$SU(3)$的单态。于是，解释了强

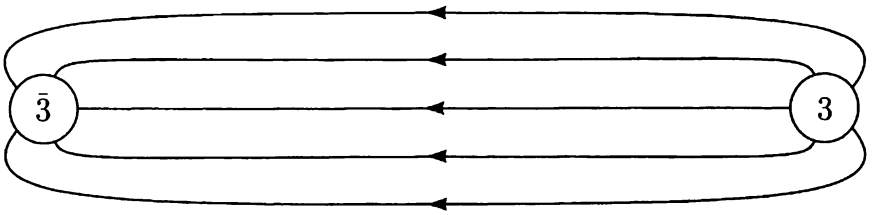


图 17.1 在强耦合规范理论中，与色源间隔有关的规范电场位形

子谱的特殊假设成为了非阿贝尔规范理论的色耦合的结果。如果一个人试图将一个色单态分解成带色的组分——例如，将一个介子分解成一个夸克和一个反夸克——那么在两个源之间就会形成一个规范场的管，如图 17.1 所示。在具有足够强耦合的非阿贝尔规范理论中，该管具有固定的半径和能量密度，因此分离色源所花费的能量与间隔成正比。这种类型的力定律在短距离时总是弱的，在长距离时总是强的，这就解释了为什么没有观察到孤立的夸克。在结语中，我们将进一步讨论规范理论的大距离强耦合极限。

量子色动力学的短距离极限可以很容易地用我们在前几章中开发的费曼图技术来研究。这里渐近自由使耦合变弱，有一个合理的图解微扰理论，可以从自由夸克和胶子的模型出发。下面几节讨论在高能实验中可以观察到的夸克和胶子之间的基本相互作用。

17.2 e^+e^-湮没成强子

涉及夸克的最简单的反应是在e^+e^-湮灭过程中产生夸克对，这个过程我们已经在5.1节中讨论过了。在那里，我们只在最基本的水平上分析这个过程，把它看作是一个纯QED反应，在这个反应中，自由夸克是由一个虚光子产生的。图17.2(a)显示了这个最低阶过程的图。总截面的计算包括夸克场的各种颜色态的求和，从而确认了允许的颜色数量为3。结合色因子和夸克电荷的平方，我们发现(式(5.16))

$$\sigma(e^+e^- \to \text{hadrons}) = \sigma_0 \cdot 3 \cdot \sum_f Q_f^2, \tag{17.4}$$

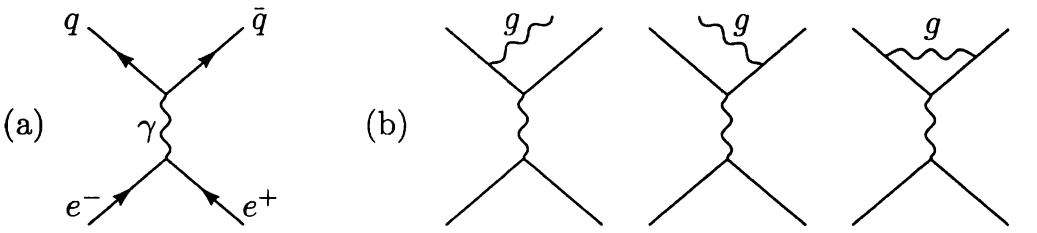


图 17.2 QCD 中对过程e^+e^- →强子有贡献的图:(a)领头阶图;(b)α_s阶的修正。

其中σ_0是$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$的 QED 截面

$$\sigma_0 = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}, \tag{17.5}$$

(17.4)中为对夸克的味道求和。这个公式假设质心能足够高，我们可以忽略夸克质量。

当我们将夸克与$SU(3)$规范理论结合起来时，我们添加了许多重要的过程，这些过程既影响这个截面的值，也影响它所包含的末态。一些最重要的效应不能在微扰理论的背景下讨论。特别是，尽管领头图中包含自由夸克，但从反应中产生的粒子是色单态的介子和重子。然而，我们将会发现夸克和胶子的 QCD 微扰理论确实对e^+e^-湮灭成强子做出了一些重要的预测。我们在做出这些预测时所发展出来的思想也将适用于许多其他的强相互作用过程。

总截面

由胶子交换和发射导致的e^+e^-湮没速率的领头修正如图 17.2(b)所示。这些就是在第一部分的最终项目中计算出来的图。前两个图给出了g^2阶的截面，其中g是$SU(3)$规范耦合，除了夸克和反夸克外，还产生了胶子。第三张图必须与领头阶图的振幅相加，从而在没有胶子发射的情况下对$q\bar{q}$的产生进行修正。在第一部分中，我们假设强相互作用是一个阿贝尔规范理论并计算这两个贡献。要得到 QCD 中相应的表达式，只需将阿贝尔的公式乘以群论因子即可

$$\mathrm{tr}[t^a t^a] = C_2(r) \cdot \mathrm{tr}[1] = \frac{4}{3} \cdot 3, \tag{17.6}$$

其中，我们使用式(15.97)求出在$SU(3)$基础表示下的$C_2(r)$，其中因子 3 是式(17.4)中出现的相同的色求和。因此，我们可以得到 QCD 的正确公式，通过对最终项

目中的那些量作替换：

$$g^2 \to \frac{4}{3}g^2, \qquad \text{or} \qquad \alpha_g \to \frac{4}{3}\alpha_s, \tag{17.7}$$

where

$$\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi} \tag{17.8}$$

是精细结构常数的强相互作用类比。

第一部分的最终项目的最后结果是，在e^+e^-湮灭中产生强子的总截面的公式。如果我们用$(4/3)\alpha_s$代替α_g，结果变成

$$\sigma(e^+e^- \to \text{hadrons}) = \sigma_0 \cdot \left(3\sum_f Q_f^2\right) \cdot \left[1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + \mathcal{O}(\alpha_s^2)\right]. \tag{17.9}$$

这实际上是两个基本过程的速率之和，$e^+e^- \to q\bar{q}$(包括图17.2(b)第三个图的修正)和$e^+e^- \to q\bar{q}g$,。虽然随着胶子质量趋近于0，这些过程的速率是发散的，但当它们结合时，发散就会抵消。这是我们在6.4节和6.5节中以电子散射为例研究的红外发散抵消现象的另一个例子。在那里，我们证明了通过软的且共线的光子的发射来修饰末态并不影响整体的散射率。在这里我们再次看到，总速率中红外发散抵消了，虽然对实和虚胶子修正的求和留下了一个简单的数值修正。

直观地理解红外对数的抵消是不难的。最初的过程$e^+e^- \to q\bar{q}$是非常快的：因为虚光子不在壳的程度是$q^2 = s$，所以夸克是在$1/\sqrt{s}$的时间内产生的。然而，共线胶子的发射，以及与软胶子交换相关的虚修正，发生的时间标度要长得多。在有胶子发射的图中，虚夸克或反夸克不在质壳的程度为$p_{\perp g}^2$，其中$p_{\perp g}$是胶子相对于$q\bar{q}$系统的横动量。因此，这个虚态在衰变之前可以存活的时间为$1/p_{\perp g}$。这样一个缓慢的过程不会影响$q\bar{q}$对产生的概率；它只会影响$q\bar{q}$系统演化成的末态的性质。根据这种逻辑，唯一能影响总截面的微扰修正是那些$p_{\perp g} \sim \sqrt{s}$的修正。另一种表达这一结论的方法是，来自红外敏感区域的贡献被抵消后，剩下的贡献来自于实或虚胶子的大动量区域。无论哪种论证，公式(17.9)都应该是 QCD 微扰理论的一个有意义的预测，即使它涉及到在软胶子发射的区域上的积分。

α_s的跑动

式(17.9)依赖于 QCD 耦合常数α_s，它必须在某个重正化点M处定义。这与我们通过在壳的重正化来以自然方式定义的 QED 耦合常数形成对比。在 QCD 中，我们希望避免讨论在壳的夸克，因为它们是相互作用很强的粒子，受到非微扰力的显著影响。使用任意重正化点M可以避免这个问题。我们将通过在大动量标度M下施加重正化条件，来定义α_s，这里耦合很小；这个α_s值可以用来预测任何大动量转移的散射过程的结果。

然而在涉及P^2阶的动量不变量的计算中，当P^2和M^2非常不同时，使用M标度的重正化会包含一些微妙之处。我们在 12.3 节的讨论中看到，在这种情况下，具有n个圈的费曼图通常包含与$\left(\alpha_s \log(P^2/M^2)\right)^n$成正比的修正项。幸运的是，我们可以通过使用重正化群将固定的重正化耦合替换为跑动耦合常数，来将这些修正吸收到最低阶项中。

为了说明这种分析适用于QCD，让我们检查e^+e^-湮没的总截面σ的Callan-Svmanzik方程的含意，将σ视为s、重正化标度M和在重正化标度处的α_s值的函数。像QED势(12.87)一样，e^+e^-总截面是一个可观测量，因此它的归一化不依赖于任何约定。因此，它遵循$\gamma = 0$的Callan-Symanzik方程:

$$\left[M\frac{\partial}{\partial M} + \beta(g)\frac{\partial}{\partial g}\right]\sigma(s, M, \alpha_s) = 0. \tag{17.10}$$

通过量纲分析，我们可以写出

$$\sigma = \frac{c}{s} f(\frac{s}{M^2}, \alpha_s), \tag{17.11}$$

c是无量纲常数。于是Callan-Symanzik方程表明，f对其参数的依赖性仅通过跑动耦合常数$\alpha_s(Q) = \bar{g}^2/4\pi$(在$Q^2 = s$处计算)。定义耦合常数$\bar{g}$满足重正化群方程

$$\frac{d}{d\log(Q/M)}\bar{g} = \beta(\bar{g}), \tag{17.12}$$

初始条件为$\alpha_s(M) = \alpha_s$。对于三种色和n_f个近似无质量的夸克的QCD，β函数由式(16.135)给出：

$$\beta(g) = -\frac{b_0}{(4\pi)^2}, \qquad \text{with } b_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f. \tag{17.13}$$

则重正化群方程的解为

$$\alpha_s(Q) = \frac{\alpha_s}{1 + (b_0\alpha_s/2\pi)\log(Q/M)}. \tag{17.14}$$

通过将$f(\alpha_s(\sqrt{s}))$展开式中的连续项与微扰展开中的项进行匹配，可以得到σ对α_s的显式依赖。对于第一个修正的阶，我们很简单地发现

$$\sigma = \sigma_0 \cdot \left(3\sum_f Q_f^2\right) \cdot \left[1 + \frac{\alpha_s(\sqrt{s})}{\pi} + +\mathcal{O}(\alpha_s^2(\sqrt{s}))\right]. \tag{17.15}$$

因此，Callan-Symanzik 方程指示我们用在$Q^2 = s$处计算的跑动耦合常数$\alpha_s(Q)$代替固定的重正化耦合α_s。

由于固定耦合α_s依赖于任意重正化点M，因此有时将其完全从公式中去除是有用的。为了做到这一点，我们定义了一个习惯上称为Λ(不要与紫外截断混淆!)的质量标度以满足

$$1 = g^2(b_0/8\pi^2)\log(M/\Lambda). \tag{17.16}$$

然后将式(17.14)重新排列成如下形式

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{2\pi}{b_0\log(Q/\Lambda)}. \tag{17.17}$$

这个公式是对大Q时$\alpha_s(Q)$以$\big(\log(Q)\big)^{-1}$变小的表述最清晰的表达式。动量标度Λ是这样的：在Q^2减小时α_s在这个标度处会变得很强。

该反应和其它反应的速率的实验测量产生的值为$\Lambda \approx 200$ MeV。只有当Q稍微大于这个时QCD微扰理论才有效，比如大于$Q = 1$ GeV时，$\alpha_s(Q) \approx 0.4$。当距离大于$\sim 1/\Lambda$时，强相互作用增强，而$1/\Lambda$大约是轻强子的大小。

虽然e^+e^-湮灭截面的例子特别简单，因为它只依赖于一个动量不变量，类似的结论也适用于其他 QCD 的预测。在分析对夸克和胶子亚结构敏感的强相互作用过程时，我们将发现反应截面的领头阶公式依赖于重正化耦合α_s。为了使这些表达式满足 Callan-Symanzik 方程，我们必须用跑动耦合常数$\alpha_s(Q)$来代替这个固定耦合，$\alpha_s(Q)$是在反应的动量不变量的阶Q下计算的。由于跑动耦合常数仅对数依赖于Q，我们不必担心如何精确地选择Q。如果我们把正确的标度猜错了两倍，就会产生一个$\alpha_s(Q)$的误差，是$\big(\log(Q)\big)^{-2} \sim \alpha_s^2(Q)$阶。相对地，这种意义不明的情况可以通过计算到$\alpha_s$的下一阶来解决。

在结束这种关于e^+e^-湮灭截面的正式处理之前，我们应该增加一个限定条件。在第12.2节的开头。我们注意到重正化群的预测可能会因为物理阈值及其相关的奇异性的出现而变得复杂，所以我们只在相关的动量不变量P^2较大且类空时才陈述这些预测。在本章中，我们将讨论夸克和胶子反应的截面，在在壳处计算。这引入了原理的额外复杂性。例如，为了将Callan-Symanzik方程应用于$\sigma(s)$，我们需要知道这个量不包含红外发散，其正规子可能提供另一个带量纲的参数。在这一章中，我们将假设与软胶子和共线胶子有关的发散在我们感兴趣的过程中也会发生类似的抵消。QCD中关于这些抵消的完整证明可以完成，但它是相当技术性的*。在某些情况下，另一种观点是可能的；我们可以证明重正化群的使用，将在壳振幅与在类空区域中计算的格林函数联系起来，以此来分析在壳振幅。这种分析方法，带来了自己的见解，将是第18章的主要主题。

胶子发射和喷注产生

第一部分的最终项目的第二个结果是有胶子发射的$q\bar{q}$产生的微分截面的一个公式。用(17.7)将这个公式转换成 QCD，得到如下结果:令x_1、x_2、x_3为夸克、反夸克和胶子的能量与电子束能量的比值。这些满足$0 < x_i < 1$和$x_1 + x_2 + x_3 = 2$。然后给出$e^+e^- \to q\bar{q}g$的截面

$$\frac{d\sigma}{dx_1 dx_2}(e^+e^- \to q\bar{q}g) = \sigma_0 \cdot \left(3\sum_f Q_f^2\right) \cdot \frac{2\alpha_s}{3\pi} \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)}. \qquad (17.18)$$

当x_1或x_2接近 1 时，这个截面是奇异的。$x_1 \to 1$的极限对应于夸克具有最大可能能量的位形，而反夸克和胶子以相反的方向离开，分享剩余的能量。于是反夸克和胶子有几乎共线的类光动量矢量，因此形成了一个不变质量非常小的系统。类似地，极限$x_2 \to 1$对应于夸克和胶子共线的位形。在胶子质量为零的极限下，这些奇异性导致了积分截面的发散。

我们该如何解释这些奇异性呢？在我们第 6.1 节对韧致辐射的一般处理中，

*关于证明微扰 QCD 公式的定理的综述，见 J. C. Collins and D. E Soper, *Ann. Rev. Nucl Sci.* **37**, 383(1987)

我们看到对于共线辐射，散射电子的光子发射是增强的，增强了$\log(q^2/m^2)$阶的因子，其中m为电子的质量。因此共线光子的总发射速率在零质量的极限下是正式发散的。同样的结论也适用于夸克发射胶子。在零质量极限下共线辐射出现的发散称为**质量奇异性**。在 QED 中，我们发现质量奇异性在q^2较大时反映了一种是强共线辐射的真实物理效应。在 QCD 中，我们可能期望在这个极限中有很强的胶子辐射，但是我们必须仔细考虑这个辐射如何在实验中出现。无论共线胶子是否被辐射了，从反应中产生的夸克和反夸克都会与其他产物发生进一步的软相互作用。这些过程必须继续下去，产生夸克-反夸克对，发射和吸收胶子，直到所有的有色粒子都被收集成色单态强子。因此一个或多个共线胶子的存在对末态没有明显的影响，末态由两个背靠背的强子喷注组成。因为这个原因，当胶子横动量小于软胶子相互作用的典型标度，约为 1 GeV 时，公式(17.18)是没有用的。

然而，当发射出相对于$q\bar{q}$轴有很大横动量的胶子时，后续的软交换不可能取消或翻转这个横动量。在这种情况下，$q\bar{q}g$系统发展成一个有三个不同的强子喷注的系统。因此，在离共线区域足够远的地方，我们可以将式(17.18)解释为产生具有能量为x_1、x_2、x_3乘以电子束能量的三强子喷注事件的截面。

通过一个类似于上面给出的总截面的分析，我们可以通过将固定耦合常数α_s代替为跑动的$\alpha_s(Q)$来改进式(17.18)。Q的合理选择是胶子的横动量$p_{\perp g}$，如式(17.9)所述。但是如果横动量太小，则$\alpha_s(Q)$会很大，我们的领头阶公式就会失效。这就是为什么当胶子的横动量小于1 GeV时不能使用公式(17.18)的第二个原因。

另一方面，当胶子横动量远远大于 1 GeV 时，就没有理由不相信 QCD 微扰理论。软过程不能干扰强子态的三喷注本质，且渐进自由保证了耦合常数很小，因此微扰理论的领头阶将是一个很好的近似。

三喷注截面(17.18)是使用QCD微扰论所能得到的预测类型中一个很好的例子。我们通过不变动量转移Q(转移给强子的组分)描述了一个强相互作用的过程。QCD微扰论对这种反应中的能量流和动量流(流向强子喷注的末态系统)做出了预测。如果Q很小，微扰理论是无效的，我们得不到有用的预测。然而，如果Q很大，QCD的渐近自由意味着夸克和胶子的费曼图将正确地预测强子喷注的末态系统的行为。

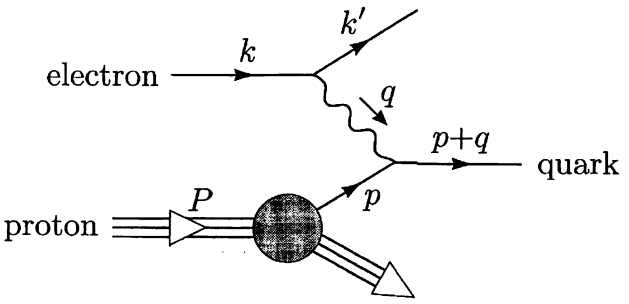


图 17.3 QCD中的深度非弹性散射。该图显示了高能电子被从质子波函数中取出的夸克所散射时的动量流。

17.3 深度非弹性散射

e^+e^-湮灭成强子后，涉及强相互作用粒子的下一个最简单的反应是电子被质子或其它强子散射。在最基本的水平上，这个反应可以被看作是质子内部夸克对电子的电磁散射*。将这一过程可视化的方法如图 17.3 所示。称质子动量为P，称初始夸克动量为p。称电子的初始和最终动量为k和k'。如果测量末态电子动量，我们可以推导出虚光子传递到强子系统的动量$q = k - k'$。矢量q是类空的，通常写成$q^2 = -Q^2$。

如果不变动量转移Q^2很大，夸克就会从质子中被弹出，它无法被随后的软过程平衡。然而，这些软过程会产生胶子和夸克-反夸克对，它们最终会中和颜色，并使被击中的夸克变成强子喷注，朝着来自电子的动量转移的方向。通常，末态强子系统的总不变质量是很大的，因为被击中的夸克相对于其他“旁观者”夸克携带很大的动量。在这种情况下，这个过程被称为**深度非弹性散射**。

为了推导出电子-质子散射截面的第一个近似，我们从电子和质子相向快速运动的参考系来考虑这个反应，例如，电子-质子质心系。我们假设质心能足够大，所以我们可以忽略质子的质量来计算运动学。然后质子沿着碰撞轴上有一个近乎类光的动量。质子的组分也有类光的动量，几乎与质子的动量共线。这是因为一

*电子也可以是介子;所有相同的公式都适用于这种情况。轻子也可以通过中性流弱相互作用被夸克散射，我们将在第 20 章看到这一点。

个组分只有通过一个硬胶子的交换才能获得一个大的横动量，这个过程被在大动量标度处的α_s的小值所抑制。因此，对于 QCD 微扰理论的领头阶，我们可以这样写

$$p = \xi P, \tag{17.19}$$

其中ξ是 0 到 1 之间的一个数，称为组分的**纵向分数**。在α_s的领头阶我们也可以忽略碰撞过程中的胶子发射或交换。电子-质子散射的截面由给定纵向分数ξ下的电子-夸克散射的截面给出，乘以质子包含一个在ξ值的夸克的概率，对ξ积分。

但是，质子包含具有一定动量分数的某种组分的概率不能用 QCD 微扰理论来计算，因为它依赖于软过程，其确定了作为夸克和胶子的束缚态的质子的结构。因此，我们认为这个概率是一个未知的函数，由实验来决定。最终，我们将需要利用这样一个可以在质子的波函数中找到的每种夸克、反夸克和胶子的概率函数。这些成分统称为**部分子**。对于每个部分子种类f，我们把在纵向分数ξ处找到种类为f的质子组分的概率写成

$$\begin{pmatrix}\text{找到纵向分数为}\xi\text{的}\\ \text{组分}f\text{的概率}\end{pmatrix} = f_f(\xi)d\xi \tag{17.20}$$

函数$f_f(\xi)$称为**部分子分布函数**。利用这种标记，给出了α_s阶电子-质子非弹性散射的截面的表达式

$$\begin{aligned}&\sigma\big(e^-(k)p(P)\to e^-(k')+X\big)\\ &\qquad=\int_0^1 d\xi\sum_f f_f(\xi)\,\sigma\big(e^-(k)q_f(\xi P)\to e^-(k')+q_f(p')\big),\end{aligned} \tag{17.21}$$

其中X表示任意强子末态。(17.21)中的和包含了组分反夸克和组分夸克的贡献。

方程(17.21)相当于我们在第 14 章中为这个反应构造的公式(14.8)。现在我们看到，这个公式被大动量标度处的小的 QCD 耦合常数所调整。但是，必须记住，(17.21)并不是 QCD 的完整预测，而只是α_s的展开式的第一项；这种水平的近似称为**部分子模型**。对式(17.21)的高阶 QCD 修正将涉及对电子-夸克散射截面和对部分子分布函数的修正。其中最重要的修正将在第 17.5 节中讨论。

同样地，所有其他涉及大动量转移的质子的反应也都有部分子模型描述。在QCD 中，所有这些反应截面都是由夸克和胶子的散射振幅计算出来的。任何过程中部分子的初始运动都是由在深度非弹性散射中出现的相同的部分子分布函数$f_f(\xi)$来描述的。

现在，让我们在回顾第 14 章分析的基础上，推导出深度非弹性散射截面的显式领头阶公式。在式(14.3)中，我们写出了部分子水平过程的领头阶微分截面，

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(e^-q \to e^-q) = \frac{2\pi\alpha^2 Q_f^2}{\hat{s}^2}\left[\frac{\hat{s}^2+\hat{u}^2}{\hat{t}^2}\right]. \tag{17.22}$$

一般，我们将使用符号$\hat{s},\hat{t},\hat{u}$来表示部分子水平的二体散射过程的Mandelstam变量。这些变量一定与强子系统或散射电子的可观测性质有关。对于无质量的初始和末态粒子，

$$\hat{s}+\hat{t}+\hat{u}=0.$$

在深度非弹性散射的情况下，

$$\hat{t} = -Q^2$$

and

$$\hat{s} = 2p\cdot k = 2\xi P\cdot k = \xi s.$$

因此，在固定的Q^2时的深度非弹性散射截面为

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \int_0^1 d\xi \sum_f f_f(\xi) Q_f^2 \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4}\left[1+\left(1-\frac{Q^2}{\xi s}\right)^2\right]\theta(\xi s - Q^2). \tag{17.23}$$

最后一个因子表达了运动学约束$\hat{s} \geq |\hat{t}|$。当Q^2较大时，表达式(17.23)应该是深度非弹性散射截面的精确一阶近似。在这种情况下，由硬胶子发射和交换对这个公式的修正将是$\alpha_s(Q^2)$阶的。

我们还在第 14 章中展示了散射电子动量k'的测量，从而动量转移q唯一地决定了弹性电子-夸克散射的容许值ξ。该值由式(14.7)给出:

$$\xi = x, \qquad \text{where} \quad x \equiv \frac{Q^2}{2P\cdot q}. \tag{17.24}$$

当(17.23)被表达为一个对x和Q^2的二次微分的截面时，它就变成了一个由部分子水平截面与在$\xi = x$处计算的部分子分布函数的和的简单乘积。在文献中。符号x经常与ξ互换使用，我们将从这里开始遵循这种做法。

用运动学变量的无量纲组合表示截面特别方便。其中一个应该是x；对另一个不错的选择是

$$y \equiv \frac{2P\cdot q}{2P\cdot k} = \frac{2P\cdot q}{s}. \tag{17.25}$$

在质子静止的参考系中，

$$y = \frac{q^0}{k^0}, \tag{17.26}$$

也就是说，y是入射电子转移到强子系统的能量的分数。另一方面，由于$p=\xi P$，我们可以用部分子变量来表示y:

$$y = \frac{2p\cdot(k-k')}{2p\cdot k} = \frac{\hat{s}+\hat{u}}{\hat{s}}, \tag{17.27}$$

so that

$$\frac{\hat{u}}{\hat{s}} = -(1-y). \tag{17.28}$$

由式(17.26)或(17.28)可知，$y\le 1$。(x,y)平面上的运动学允许区域是

$$0\le x\le 1, \qquad 0\le y\le 1.$$

为了用x和y表示式(17.23)，我们需要公式

$$Q^2 = xys, \tag{17.29}$$

这是由式(17.24)和(17.25)得出的，以及变量的变化

$$d\xi\, dQ^2 = dx\, dQ^2 = \frac{dQ^2}{dy}dx\, dy = xs\, dx\, dy.$$

然后微分截面变成

$$\frac{d^2\sigma}{dxdy}(e^-p\to e^-X) = \left(\sum_f x f_f(x) Q_f^2\right)\frac{2\pi\alpha^2 s}{Q^4}\left[1+(1-y)^2\right]. \tag{17.30}$$

因子$1/Q^4$来自虚光子传播子的平方。一旦这个因子被移除，对x和y的依赖性就完全因子化了。这种关系的每一半都包含物理信息。部分子分布$f_f(x)$只依赖于x并且独立于Q^2，这个事实是比约肯标度的表述。这告诉我们，粒子的初始分布与硬散射的细节无关。截面的y依赖性来自潜在的部分子截面。在第 5 章，我们看到基本的 QED 截面，在高能极限下，反映了相互作用粒子的螺旋度。在(17.30)中$[1+(1-y)^2]$的行为称为Callan-Gross关系;这是电子被无质量费米子散射的

特殊行为。这种关系证明了参与深度非弹性散射的部分子是费米子，而在那个时候，部分子和夸克之间的关系还不清楚。

深度非弹性中微子散射

由于夸克味道的求和在式(17.30)中因子化了，因此不能仅从电子散射实验中确定单个部分子分布函数$f_f(x)$。然而，人们可以通过深度非弹性**中微子**散射获得关于质子结构的更详细的信息。

中微子不带电荷，因此不受光子交换的影响，但它们通过弱相互作用与夸克相互作用。我们将在第 20 章详细讨论弱相互作用；现在，让我们采用一种简化描述，集中于图 17.4 所示的基本过程。在这个过程中，中微子转化为对应的带电轻子*，交换了一个虚的有质量矢量玻色子W^+。这个玻色子和夸克流耦合，把d夸克转换成u夸克。这种交换过程的效应是提供一种不同但完全特征化的注入硬动量转移q的方法。这个过程的振幅由如下有效拉格朗日量描述

$$\Delta\mathcal{L}=\frac{g^2}{2}\frac{1}{m_W^2}\left[\bar{\ell}\gamma^\mu\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\nu\right]\left[\bar{u}\gamma_\mu\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)d\right]+\text{h.c.}, \tag{17.31}$$

其中ℓ,ν,d,u是与带电轻子，中微子，d和u夸克相关的费米场，g是弱相互作用耦合常数。因子$1/m_W^2$来自W玻色子传播子，在$q^2\ll m_W^2$的极限下考虑的。前两个因子常常写成**费米常数**G_F，定义为

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}}=\frac{g^2}{8m_W^2}. \tag{17.32}$$

这个常数给出了能量远小于m_W时弱相互作用的强度。弱相互作用的关键性质，如(17.31)中明确指出的，是W玻色子只与相对论费米子的左手螺旋度态耦合。这个性质的深层意义将在第 20 章中讨论。

由于技术上的原因，利用μ中微子最容易进行中微子深度非弹性散射，它在发射出W玻色子后转换成μ子。将反μ中微子在核靶上散射也是可行的，我们将看到，比较中微子和反中微子的效应是很有趣的。由于质子中含有少量较重的夸克(s,c)的混合物，所以它们对中微子深度非弹性散射也给出小贡献。然而，我们在讨论中将忽略这些贡献。

*还有一种**中性流**弱相互作用，其中中微子仍然是中微子；看到问题 20.4。

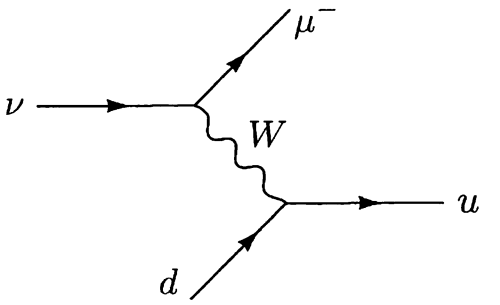


图 17.4 由弱相互作用介导的基本中微子散射过程

中微子深度非弹性散射的截面由类似于(17.21)的公式给出，其中光子交换的截面代替为W交换得到的截面。直接算出这个截面是很简单的。然而，如果我们回顾第 5 章，回想一下这个方程的结构是如何从各种螺旋度的贡献中产生的，我们也可以从公式(17.22)中得到结果。在(17.22)中，分母中的$\hat{t}^2$因子来自光子传播子；在弱相互作用的情况下，这个因子被m_W^4代替。因子$[\hat{s}^2+\hat{u}^2]$来自 Dirac 矩阵代数。我们在 5.2 节中看到，第一项是左手电子被左手费米子散射或右手电子被右手费米子散射的贡献，而第二项来自于其他螺旋度的组合。对于中微子-夸克散射，相互作用(17.31)只允许左手中微子被左手夸克散射，所以只出现了$\hat{s}^2$项。为了确定截面的整体归一化，我们注意到，由于中微子是在弱相互作用中产生的，它们总是有左手极化，所以不应该做极化平均。另一方面，我们必须对初始夸克的极化做平均。总之，我们发现

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(\nu d\to\mu^- u)=\frac{\pi g^4}{2(4\pi)^2\hat{s}^2}\left[\frac{\hat{s}^2}{m_W^4}\right]=\frac{G_F^2}{\pi}. \tag{17.33}$$

从式(17.31)开始通过显式计算可以方便地检验该公式。

用同样的方法可以求出夸克-反中微子散射的截面。注意这个反应涉及到W^-的交换，从而将u夸克转化为d夸克。然而，u夸克必须仍然是左旋的。对前一段的唯一修改是，耦合到相互作用(17.31)的反中微子是右手的，所以截面来自于(17.22)中与$\hat{u}^2$成正比的项:

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(\bar{\nu}u\to\mu^+ d)=\frac{\pi g^4}{2(4\pi)^2\hat{s}^2}\left[\frac{\hat{u}^2}{m_W^4}\right]=\frac{G_F^2}{\pi}(1-y)^2. \tag{17.34}$$

同样，直接验证这个公式也很容易。将$\bar{u}$转化为$\bar{d}$的中微子-反夸克散射截面也由式(17.34)给出，将$\bar{d}$转换成$\bar{u}$的反中微子-反夸克散射截面由式(17.33)给出。

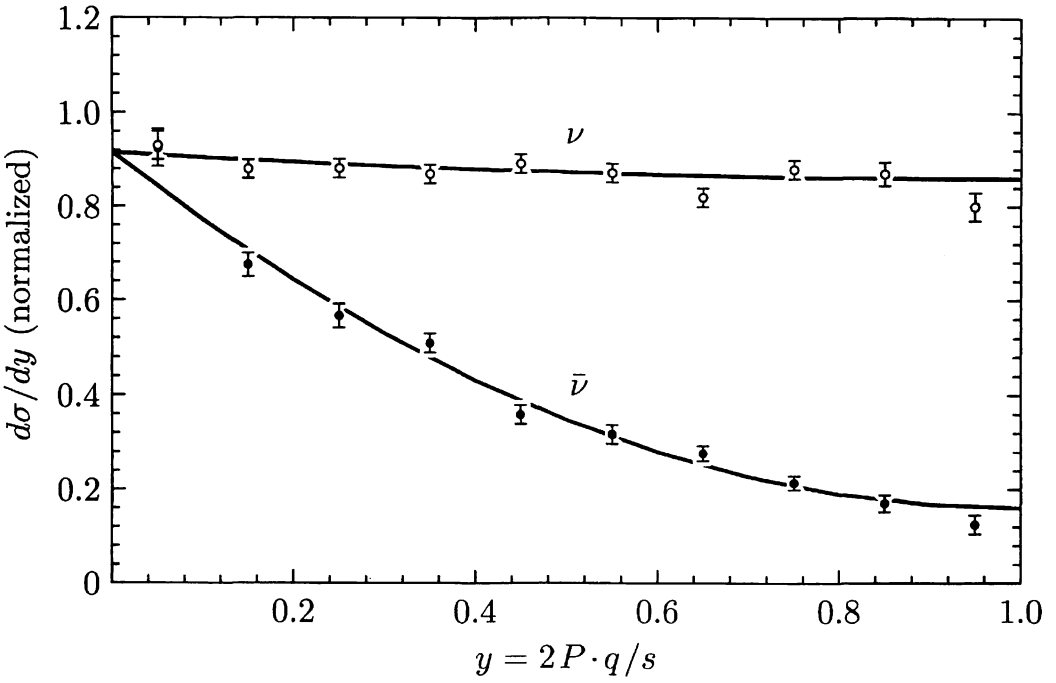


图 17.5 中微子和反中微子与铁靶非弹性散射的y分布，由CDHS 实验测量，J. G. H. de Groot, et. al., *Z. Phys.* **C1**, 143 (1979)。实曲线符合$A + B(1-y)^2$的形式

为了将这些部分子水平的截面转换成物理的截面，我们将它们与部分子分布函数结合起来。运动学和电子散射完全一样。因此，根据导致了式(17.30)的论证，我们得到了表达式

$$\begin{aligned}\frac{d^2\sigma}{dxdy}(\nu p \to \mu^- X) &= \frac{G_F^2 s}{\pi}\left[x f_d(x) + x f_{\bar{u}}(x)\cdot(1-y)^2\right],\\ \frac{d^2\sigma}{dxdy}(\bar{\nu} p \to \mu^+ X) &= \frac{G_F^2 s}{\pi}\left[x f_u(x)\cdot(1-y)^2 + x f_{\bar{d}}(x)\right].\end{aligned} \tag{17.35}$$

根据这些关系，深度非弹性中微子散射允许我们分别绘制出质子中u夸克和d夸克以及反夸克的部分子分布函数。

此外，式(17.35)做了一个引人注目的定性预测：在某种程度上，一个质子或中子是由夸克以及额外的很少的夸克-反夸克对组成的，深度非弹性中微子散射截面应该是y的常数，而反中微子散射截面应该以$(1-y)^2$下降。图 17.5 显示了这些深度非弹性截面测量的y依赖关系。部分子描述所预测的定性行为是明显的；与严格预测的差异可以解释为核子波函数中小的反夸克分量导致的。

部分子分布函数

考虑到电子和中微子深度非弹性散射的部分子模型预测确实符合数据，我们可以利用这些关系提取部分子分布函数，从而了解质子的结构*。被选出的一组分布函数拟合了所有得到的数据，如图17.6所示。由于所有这些分布，特别是反夸克的分布，在小x处达到峰值，我们已经绘出了每个种类的$xf_f(x)$。正如我们在第14章中所述，实验中观察到比约肯标度的一个小破坏，因此这些分布函数随着Q^2缓慢变化。图显示了在$Q^2 = 4\ \text{GeV}^2$的这些函数。我们将在第17.5节中看到，这种破坏比约肯标度的现象是QCD中高阶修正的结果；我们还将讨论，这种标度破坏的测量可以让我们确定胶子的部分子分布函数，$f_g(x)$。预先得到这个结果后，我们也在图中绘制了这个函数。不出所料，人们发现，u夸克和d夸克最有可能携带了质子动量的相当大一部分，而反夸克和胶子往往具有较小的纵向分数。

由于部分子分布是找到各种质子成分的概率，它们必须以反映质子量子数的方式进行归一化。质子是uud的束缚态，加上一些夸克-反夸克对的混合物。因此它包含的夸克应该比对应的反夸克多两个u夸克和一个d夸克。这些考虑暗示了约束条件

$$\int_0^1 dx\big[f_u(x) - f_{\bar{u}}(x)\big] = 2, \qquad \int_0^1 dx\big[f_d(x) - f_{\bar{d}}(x)\big] = 1. \tag{17.36}$$

到目前为止，我们只讨论了质子的部分子分布。然而，类似的考虑适用于任何其他强子。每一个强子都有自己的一组部分子分布函数;它们遵循类似于(17.36)的求和规则，但反映了强子的特定量子数。部分子分布函数也应反映出连接不同强子的对称性。例如，精确到百分之几，由于中子可以通过质子中u和d夸克的角色交换而产生，其分布函数服从

$$f_u^n(x) = f_d(x), \qquad f_d^n(x) = f_u(x), \qquad f_{\bar{u}}^n(x) = f_{\bar{d}}, \qquad \text{etc.} \tag{17.37}$$

在这些方程式中，从此以后，不带特殊标记的分布函数指的是质子的分布函数。反质子的部分子分布函数通过如下的精确关系给出

$$f_u^{\bar{p}}(x) = f_{\bar{u}}(x), \qquad f_{\bar{u}}^{\bar{p}}(x) = f_u(x), \qquad etc. \tag{17.38}$$

---

*关于从数据中提取部分子分布函数的详细讨论见 G. Sterman, et. al., *Rev. Mod. Phys.* **67**, 157(1995)。

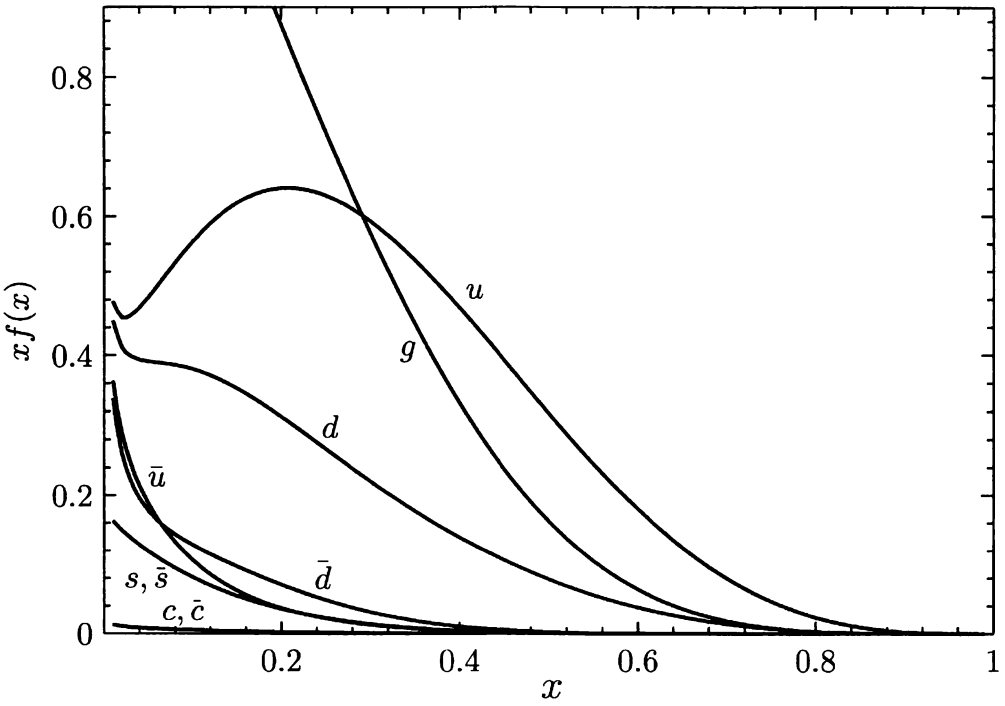


图 17.6 质子中的夸克、反夸克和胶子的部分子分布函数$xf_f(x)$，在 $Q^2 = 4$ GeV^2。这些分布由 CTEQ 合作组(CTEQ2L)对深度非弹性散射数据进行拟合得到的，J. Botts, et. al., *Phys. Lett.* **B304**. 159(1993)

无论如何，部分子所携带的动量加起来必须是强子的总动量。这意味着

$$\int_0^1 dx\, x\big[f_u(x) + f_d(x) + f_{\bar{u}}(x) + f_{\bar{d}}(x) + f_g(x)\big] = 1. \tag{17.39}$$

从深度非弹性散射数据中提取的质子中的夸克和反夸克的分布函数，仅贡献了这个积分所需的总数值的一半左右。剩下的能量-动量必须由胶子携带。

17.4 强子碰撞的硬散射过程

如果一个强子与另一个强子以极高的能量碰撞，大多数碰撞将只涉及组分夸克和胶子的软相互作用。这种相互作用不能用微扰 QCD 来处理，因为当动量转移很小时α_s很大。然而在某些碰撞中，两个夸克或胶子将交换垂直于碰撞轴的大动量$p_\perp$。然后，就像在深度非弹性散射中一样，与强子波函数的内部时间标度相比，基本相互作用发生得非常快，因此最低阶 QCD 预测应该能准确描述这个过程。再次，我们应该找到一个部分子模型的公式，由领头阶的子过程截面建立，与部

分子分布函数一起积分。在质子-质子散射的情况下，这些函数将与在轻子-质子深度非弹性散射中测量的函数相同。

例如，如果硬的部分子水平过程涉及到夸克-反夸克散射到末态Y，则领头阶QCD 预测的形式取为

$$\begin{aligned}&\sigma(p(P_1)+p(P_2)\to Y+X)\\&\quad=\int_0^1 dx_1\int_0^1 dx_2\sum_f f_f(x_1)f_{\bar f}(x_2)\cdot\sigma(q_f(x_1P)+\bar q_f(x_2P)\to Y),\end{aligned}\tag{17.40}$$

其中对所有种类的夸克和反夸克求和——$u,d,\bar u,\bar d,....$(这里，X表示任何强子末态)。同样的公式，加上适当修正的分布函数，适用于任何其他强子-强子碰撞。根据一些不变测度，如果在$q\bar q$反应中有大动量转移，这个公式将首先是一个很好的一级近似。在本节中，我们将讨论这类过程的几个示例。

轻子对产生

分析的最简单的例子是在质子-质子碰撞中，大质量轻子对$\ell^+\ell^-$从$q\bar q$湮灭中产生的反应。这种反应称为 Drell-Yan 过程，如图 17.7 所示。在这种情况下，基本的$q\bar q$反应是由一个基本的 QED 截面来描述的，在 QCD 的领头阶，我们需要的截面，$\sigma(q\bar q\to\ell^+\ell^-)$，简单地与(17.4)中的截面$\sigma(e^+e^-\to q\bar q)$有关。这两种计算的唯一区别是我们必须对夸克和反夸克的颜色方向进行平均而不是求和。这就得到了两个额外的因子 1/3。因此,

$$\sigma(q_f\bar q_f\to\ell^+\ell^-)=\frac{1}{3}Q_f^2\cdot\frac{4\pi\alpha^2}{3\hat s}.\tag{17.41}$$

如果末态轻子动量都被观测到，就有可能重构虚光子的总 4 动量q。我们也可以确定初始夸克和反夸克的纵向分数，现在我们就来证明。让

$$M^2=q^2\tag{17.42}$$

为 Drell-Yan 对的不变质量的平方(不要把这个量M和重正化标度混淆了)。如果初始部分子的横动量很小，虚光子的横向动量也会很小。然而，它的纵向动量通

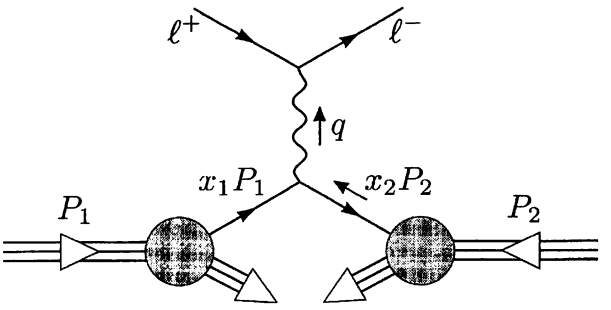


图 17.7 Drell-Yan 过程：$pp \to \ell^+\ell^-$ +任何东西。

常是很大的。我们使用虚光子的**快度**Y来参数化它，如式(3.48)所定义:

$$q^0 = M\cosh Y, \tag{17.43}$$

其中q^0在pp质心系中测量。我们将用可观测的M^2和Y来表示夸克的纵向分数，从而表示 Drell-Yan 截面。

在pp质心系中，质子动量取为显式的形式

$$P_1 = (E,0,0,E), \qquad P_2 = (E,0,0,-E),$$

其中E满足$s = 4E^2$。忽略它们的小横动量，我们可以把组分夸克和反夸克动量写成x_1和x_2乘以这些矢量，于是

$$q = x_1P_1 + x_2P_2 = \big((x_1{+}x_2)E,0,0,(x_1{-}x_2)E\big). \tag{17.44}$$

通过计算这个矢量的不变平方就，我们发现

$$M^2 = x_1x_2s. \tag{17.45}$$

同样，比较(17.43)和(17.44)，我们发现

$$\cosh Y = \frac{x_1+x_2}{2\sqrt{x_1x_2}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}\right),$$

这意味着

$$\exp Y = \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}. \tag{17.46}$$

可以将这些方程反过来确定x_1和x_2:

$$x_1 = \frac{M}{\sqrt{s}}e^Y, \qquad x_2 = \frac{M}{\sqrt{s}}e^{-Y}. \tag{17.47}$$

关系(17.45)和(17.46)让我们将式(17.40)中的积分转化为对产生的轻子的参数M^2, Y的积分。变量改变的雅可比矩阵是

$$\frac{\partial(M^2,Y)}{\partial(x_1,x_2)} = \begin{vmatrix} x_2s & x_1s \\ 1/2x_1 & -1/2x_2 \end{vmatrix} = s = \frac{M^2}{x_1x_2}.$$

因此轻子对产生的截面为

$$\frac{d^2\sigma}{dM^2dY}(pp\to e^+e^-+X)=\sum_f x_1 f_f(x_1)\,x_2 f_{\bar{f}}(x_2)\cdot\frac{1}{3}Q_f^2\cdot\frac{4\pi\alpha^2}{3M^4},\quad(17.48)$$

其中x_1和x_2由式(17.47)给出。值得注意的是，Drell-Yan 过程的截面是根据深度非弹性散射导出的信息逐点确定的。不幸的是，(17.48)中所暗示的两个过程之间的关系会得到$\alpha_s(M)$阶的修正，其结果在数值上是很大的，必须将其包括在内，以便与实验对比验证这个预测。

对产生的一般运动学

在推导式(17.48)中，我们使用了部分子水平过程的总截面(17.41)，对出射轻子的角度分布进行了积分。原则上，我们可以保留角度信息并导出一个三重微分的分布。这是对可能的二体部分子水平反应最完整的预测。从更一般的观点出发，计算出这些反应的运动学将是有用的。在一般情况下，来自质子 1 的 1 型部分子被来自质子 2 的 2 型部分子散射，产生 3 型和 4 型的部分子，其动量转移平方为$\hat{t}$，这一一般过程如图 17.8 所示。在 Drell-Yan 过程中。部分子 3 和 4 是轻子。但这些部分子也可以是夸克或胶子。它们实现为了强子喷注。我们假设所有的部分子都可以看作是无质量的。在部分子变量中，这个过程的截面是

$$\frac{d^3\sigma}{dx_1dx_2d\hat{t}}(pp\to 3+4+X)=f_1(x_1)f_2(x_2)\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(1+2\to 3+4).\quad(17.49)$$

现在让我们把这个公式转换成末态的可观测参数。

在 QCD 的领头阶，部分子 3 和 4 的横动量必须相等且相反，但其纵向动量不受约束。我们取末态的 3 个参数分别为部分子横向动量$p_\perp$和为末态部分子的**纵向快度**y_3，y_4，由如下公式定义

$$E_i=p_\perp\cosh y_i;\qquad p_{i\|}=p_\perp\sinh y_i.\quad(17.50)$$

纵向快度y_i给出了粒子i从其纵向动量为零的参考系中得到的平动(boost)。回想3.3节，快度在共线的平动下简单地相加。纵向平动下横动量不变。因此，在沿着碰撞轴的平动下，$(y_3,\ y_4,p_\perp)$是一组具有方便的洛伦兹变换性质的变量。现在我

*在关于强子碰撞的文献中，y_i通常被简单地称为快度，而应理解为限制在了纵向平动。

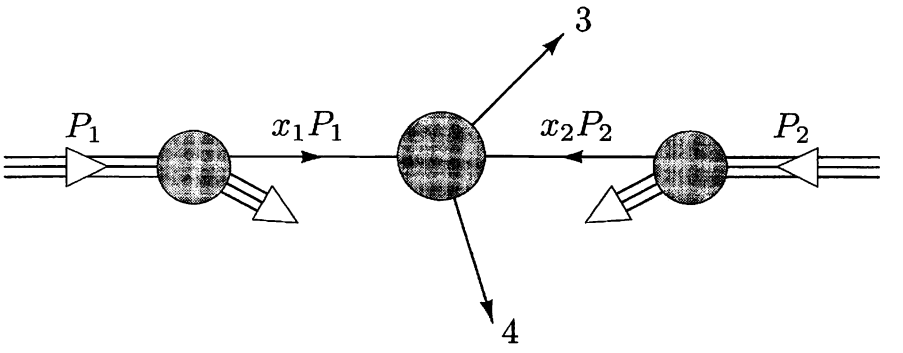


图 17.8 一个通用的二体部散射过程。

们将看到这三个参数以直接的方式与基本变量$x_1, x_2, \hat{t}$相关。

考虑碰撞部分子的质心系。这个系中的总能量是$\sqrt{\hat{s}}$，我们用下标$*$来表示在这个坐标系中测量的其他物理量，例如，θ_*表示部分子散射角。然后

$$p_{3\|*} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\hat{s}}\cos\theta_*, \qquad p_{3\perp *} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\hat{s}}\sin\theta_*, \tag{17.51}$$

而p_{4*}的方向正好相反。这个系也是部分子 3 和 4 的质心系

$$y_{3*} = -y_{4*} \equiv y_*. \tag{17.52}$$

由于快度通过移动进行变换，我们可以求出y_*和快度Y(必须通过它来平动，以到达这个参考系)：

$$y_* = \tfrac{1}{2}(y_3 - y_4), \qquad Y = \tfrac{1}{2}(y_3 + y_4). \tag{17.53}$$

散射角θ_*由y_*确定，通过将(17.51)与关系$E_* = p_\perp \cosh y_*$结合:

$$\frac{1}{\sin\theta_*} = \cosh y_*. \tag{17.54}$$

然后是 Mandelstam 变量

$$\hat{s} = \frac{4p_\perp^2}{\sin^2\theta_*}, \qquad \hat{t} = -\tfrac{1}{2}\hat{s}(1-\cos\theta_*) \tag{17.55}$$

可以表示为

$$\hat{s} = 4p_\perp^2\cosh^2 y_*, \qquad \hat{t} = -2p_\perp^2\cosh y_*\, e^{-y_*}. \tag{17.56}$$

我们可以将第一个表达式与(17.47)结合起来确定x_1和x_2:

$$x_1 = \frac{2p_\perp}{\sqrt{s}}\cosh y_*\, e^{Y}, \qquad x_2 = \frac{2p_\perp}{\sqrt{s}}\cosh y_*\, e^{-Y}. \tag{17.57}$$

要把截面(17.49)转换成末态部分子的可观测量，我们需要雅可比矩阵

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \hat{t})}{\partial(y_3, y_4, p_\perp)} = \frac{8p_\perp^3}{s}\cosh^2 y_* = \frac{2p_\perp\hat{s}}{s}. \tag{17.58}$$

将式(17.49)乘以这个因子得到

$$\frac{d^3\sigma}{dy_3 dy_4 dp_\perp} = f_1(x_1) f_2(x_2) \frac{2p_\perp \hat{s}}{s} \frac{d\sigma}{d\hat{t}}(1+2\to 3+4). \tag{17.59}$$

可以使用关系式$\hat{s} = x_1 x_2 s$和$p_\perp dp_\perp = d^2p_\perp/2\pi$对其进行简化，得到最终结果:

$$\frac{d^4\sigma}{dy_3 dy_4 d^2p_\perp} = x_1 f_1(x_1)\, x_2 f_2(x_2) \frac{1}{\pi} \frac{d\sigma}{d\hat{t}}(1+2\to 3+4). \tag{17.60}$$

在这公式，部分子子过程的x_1, x_2和Mandelstam变量由式(17.57)和(17.56)给出。

这一结果为我们提供了在任何的部分子二体反应中，末态轻子或喷注的完整分布。例如，为了找到 Drell-Yan 过程中的末态轻子的分布，我们将把夸克湮灭成轻子的微分截面插入到这个公式中，

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(q_f \bar{q}_f \to \ell^+\ell^-) = \frac{1}{3} Q_f^2 \cdot \frac{2\pi\alpha^2}{\hat{s}^2} \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2}. \tag{17.61}$$

该公式同样很好的适用于其它二体部分子反应，如果我们知道相关的部分子水平的微分截面。

喷注对的产生

最常见的二体部分子反应是那些包括夸克、胶子或两者的 QCD 反应。不幸的是，很难区分由胶子引起的强子喷注和由夸克引起的强子喷注。更困难的是通过实验来确定在硬散射过程中初始部分子是夸克还是胶子。因此，QCD 对硬散射过程的预测最常被引用为强子碰撞中喷注产生的截面，求和了夸克、反夸克和胶子的所有可能反应。无论如何，为了得到这些预测，我们必须计算出基本的部分子-部分子的截面。

夸克、反夸克和胶子的简单二体散射过程是 QCD 微扰理论的基本过程，同样，第五章研究的反应也是 QED 微扰理论的基本过程。它们是 QCD 的α_s的领头阶中出现的基本的强子硬散射反应。在本节的其余部分，我们将写下各种可能的夸克和胶子的子过程的截面公式。所有这些截面将是α_s^2阶的。特别是，这个α_s应该在反应的典型动量转移处计算，例如，在$Q^2 = \hat{t}$。

最简单的子过程是不同种类夸克的散射，如$u + d \to u + d$。在α_s^2阶，这一过程通过图 17.9 所示的费曼图进行。这个过程类似于 QED 中的电子-μ子的散射，

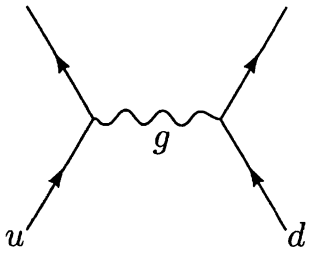


图 17.9 对$ud \to ud$有贡献的费曼图

我们在公式(17.22)中写出了截面:

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(e^-\mu \to e^-\mu) = \frac{2\pi\alpha^2}{\hat{s}^2}\left[\frac{\hat{s}^2+\hat{u}^2}{\hat{t}^2}\right]. \tag{17.62}$$

为了将其转化为 QCD 中夸克散射的截面，我们只需要用g^2乘以一个$SU(3)$群论因子来代替 QED 耦合e^2。QCD 图包含因子

$$(t^a)_{i'i}(t^a)_{j'j},$$

其中i, i'是u夸克的初始和末态颜色，j, j'是d夸克的初始和末态颜色。为了计算截面，我们必须对这个因子平方，对末态颜色求和，对初始颜色求平均。这给出了因子

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot \mathrm{tr}[t^b t^a]\cdot \mathrm{tr}[t^b t^a] = \frac{1}{9}\big[C(r)\big]^2\delta^{ab}\delta^{ab} = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{4}\cdot 8 = \frac{2}{9}, \tag{17.63}$$

其中我们使用了式(15.78)和$SU(3)$基础表示的$C(r) = 1/2$。于是对于ud散射，

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(ud \to ud) = \frac{4\pi\alpha_s^2}{9\hat{s}^2}\left[\frac{\hat{s}^2+\hat{u}^2}{\hat{t}^2}\right]. \tag{17.64}$$

同样的公式适用于任意两个不同夸克的散射，或者通过交叉，适用于不同种类的夸克和反夸克的散射。从t道交叉到s道，得到了$q\bar{q}$湮灭成不同种类的截面：

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(u\bar{u} \to d\bar{d}) = \frac{4\pi\alpha_s^2}{9\hat{s}^2}\left[\frac{\hat{t}^2+\hat{u}^2}{\hat{s}^2}\right]. \tag{17.65}$$

夸克与同种的反夸克的散射更加复杂，因为现在有两个费曼图，如图 17.10 所示。它们相互干涉。类似的 QED 过程是 Bhabha 散射，$e^+e^- \to e^+e^-$，我们在问题 5.2 计算出了该过程的截面:

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(e^+e^- \to e^+e^-) = \frac{2\pi\alpha^2}{\hat{s}^2}\left[\left(\frac{\hat{s}}{\hat{t}}\right)^2 + \left(\frac{\hat{t}}{\hat{s}}\right)^2 + \hat{u}^2\left(\frac{1}{\hat{s}}+\frac{1}{\hat{t}}\right)^2\right]. \tag{17.66}$$

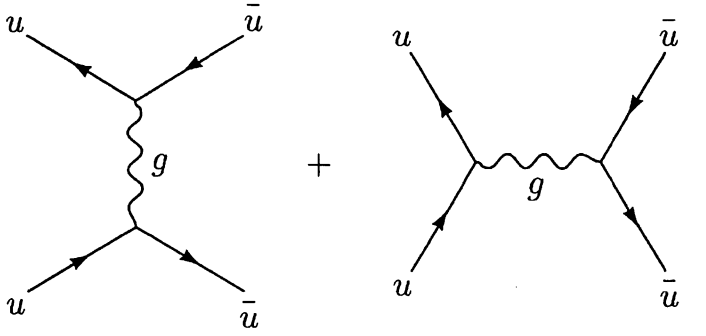


图 17.10 对$u\bar{u} \to u\bar{u}$有贡献的费曼图

然而，不能很直接将它转写成 QCD，因为不同的项得到不同的色因子。

这个过程使用有确定螺旋度的初态和末态最容易分析。对于无质量费米子，螺旋度是守恒的，所以反应$e_R^+e_L^- \to e_L^+e_R^-$只能从$s$道图中得到贡献，而$e_R^+e_R^- \to e_R^+e_R^-$只能从$t$道图中得到贡献。对应的截面为

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(e_R^+e_L^- \to e_L^+e_R^-) &= \frac{4\pi\alpha^2}{\hat{s}^2}\left(\frac{\hat{t}}{\hat{s}}\right)^2,\\ \frac{d\sigma}{d\hat{t}}(e_R^+e_R^- \to e_R^+e_R^-) &= \frac{4\pi\alpha^2}{\hat{s}^2}\left(\frac{\hat{s}}{\hat{t}}\right)^2.\end{aligned} \tag{17.67}$$

$e_R^+e_L^- \to e_L^+e_L^-$的截面必须消失。涉及$e_R^+$的第四个可能的过程接收来自$s$和$t$道图的贡献。明确地计算这个贡献，你会发现

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(e_R^+e_L^- \to e_R^+e_L^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{\hat{s}^2}\hat{u}^2\left(\frac{1}{\hat{t}}+\frac{1}{\hat{s}}\right)^2; \tag{17.68}$$

平方中的交叉项是两个图之间的干涉项。宇称下 QED 的不变性意味着当所有的螺旋度都相反时，所有这些截面的值都是相同的。很容易检查自旋平均截面确实是由(17.66)给出的。

为了将式(17.66)转换成在颜色上求平均的 QCD 截面，我们可以将色因子(17.63)分配给任意单个图的平方。然而，图 17.10 中两个图之间的交叉项得到了一个不同的色因子：

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot (t^a)_{i'i}(t^a)_{jj'} \cdot (t^b)_{j'i'}(t^b)_{ij} = \frac{1}{9}\,\mathrm{tr}[t^at^bt^at^b]. \tag{17.69}$$

为了计算这个因子，我们可以利用公式(16.79):

$$t^at^bt^at^b = \left(C_2(r) - \frac{1}{2}C_2(G)\right)t^at^a = \left(\frac{4}{3}-\frac{3}{2}\right)\frac{4}{3} = -\frac{2}{9}.$$

所以色因子(17.69)等于$-2/27$。

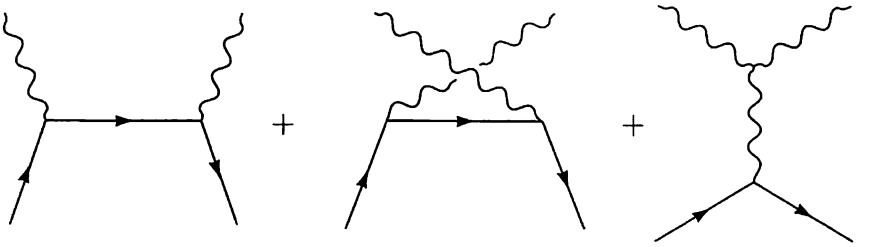


图 17.11 对$q\bar{q} \to gg$有贡献的费曼图

结合色因子和螺旋度截面，我们得到了如下$u\bar{u}$散射截面的结果:

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(u\bar{u} \to u\bar{u}) = \frac{4\pi\alpha_s^2}{9\hat{s}^2}\left[\frac{\hat{s}^2+\hat{u}^2}{\hat{t}^2} + \frac{\hat{t}^2+\hat{u}^2}{\hat{s}^2} - \frac{2}{3}\frac{\hat{u}^2}{\hat{s}\hat{t}}\right]. \tag{17.70}$$

通过s道和u道的交叉，得到$uu \to uu$的对应截面:

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(uu \to uu) = \frac{4\pi\alpha_s^2}{9\hat{s}^2}\left[\frac{\hat{u}^2+\hat{s}^2}{\hat{t}^2} + \frac{\hat{t}^2+\hat{s}^2}{\hat{u}^2} - \frac{2}{3}\frac{\hat{s}^2}{\hat{u}\hat{t}}\right]. \tag{17.71}$$

$\bar{u}\bar{u} \to \bar{u}\bar{u}$过程具有相同的截面。这就完成我们关于夸克和反夸克散射截面的目录。

我们接着讲同时涉及夸克和胶子的过程。我们将从$q\bar{q} \to gg$的反应开始。这与第 5.5 节讨论的e^+e^-到$\gamma\gamma$的 QED 湮灭相似。QED 的截面是

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(e^+e^- \to \gamma\gamma) = \frac{2\pi\alpha^2}{\hat{s}^2}\left[\frac{\hat{u}}{\hat{t}} + \frac{\hat{t}}{\hat{u}}\right]. \tag{17.72}$$

因为光子是全同粒子，这个表达式应该只对4π立体角的一半进行积分。

QCD 反应要复杂得多。正如我们在第 16.1 节中看到的，这个过程接收了图 17.11 中所示的三个费曼图的贡献。这些贡献必须对胶子的横向极化态求和。如果你选择用如下的替代来计算胶子极化的求和

$$\sum_{\epsilon} \epsilon^{\mu}\epsilon^{*\nu} \to -g^{\mu\nu}, \tag{17.73}$$

我们在第 16.3 节中看到，你还必须包括进$q\bar{q}$湮没到鬼粒子-反鬼粒子对的(负的)截面。

$q\bar{q} \to gg$截面在$\hat{t}$或$\hat{u} \to 0$时的领头行为就没有这么难计算。在每个情况下，都只有包含相应的运动学奇异性的单个图有贡献。与这些图的每个的平方相关的色因子是如下的平方

$$(t^a)_{ij}(t^b)_{jk},$$

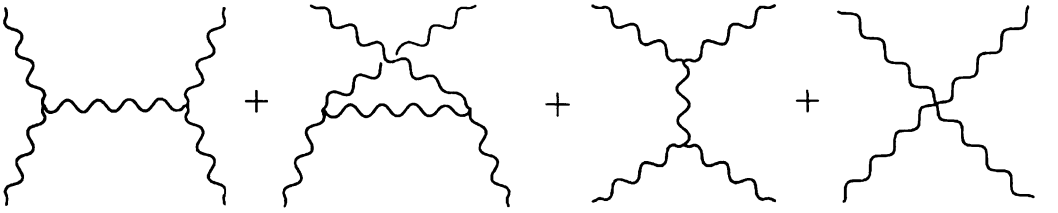


图 17.12 对$gg \to gg$有贡献的费曼图

对胶子颜色a, b求和然后对q和$\bar{q}$的颜色i, k求平均。这给出了

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \mathrm{tr}[t^a t^b t^b t^a] = \frac{1}{9} \cdot 3\big(C_2(r)\big)^2 = \frac{16}{27}. \tag{17.74}$$

因此，最奇异的项由 QED 结果给出，用α_s代替α，乘以 16/27。截面的完整计算留给 17.3 题；结果是

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(q\bar{q} \to gg) = \frac{32\pi\alpha_s^2}{27\hat{s}^2}\left[\frac{\hat{u}}{\hat{t}} + \frac{\hat{t}}{\hat{u}} - \frac{9}{4}\Big(\frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2}\Big)\right]. \tag{17.75}$$

剩下的夸克-胶子过程的截面可以通过交叉得到。相反的反应$gg \to q\bar{q}$的结果与(17.75)的平方矩阵元相同；唯一的区别是，我们平均了胶子的色，而不是夸克的色，给出了一个相对因子$(3/8)^2$。因此,

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(gg \to q\bar{q}) = \frac{\pi\alpha_s^2}{6\hat{s}^2}\left[\frac{\hat{u}}{\hat{t}} + \frac{\hat{t}}{\hat{u}} - \frac{9}{4}\Big(\frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2}\Big)\right]. \tag{17.76}$$

对于反应$qg \to qg$，在式(17.75)中交叉s和t道，再乘以 3/8，因为有一个胶子色平均。这给出

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(qg \to qg) = \frac{4\pi\alpha_s^2}{9\hat{s}^2}\left[-\frac{\hat{u}}{\hat{s}} - \frac{\hat{s}}{\hat{u}} + \frac{9}{4}\Big(\frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2}\Big)\right]. \tag{17.77}$$

$\bar{q}g \to \bar{q}g$的截面是相同的。

QCD 的最后一个基本过程是胶子-胶子散射。它没有 QED 的类似物，而且计算起来相当繁琐。有四个领头阶图，如图 17.12 所示。在问题 17.3，我们也讨论了这个过程。自旋和颜色平均截面的最终结果是

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(gg \to gg) = \frac{9\pi\alpha_s^2}{2\hat{s}^2}\left[3 - \frac{\hat{t}\hat{u}}{\hat{s}^2} - \frac{\hat{s}\hat{u}}{\hat{t}^2} - \frac{\hat{s}\hat{t}}{\hat{u}^2}\right]. \tag{17.78}$$

本节所列部分子截面可以与部分子分布函数结合来预测强子-强子碰撞中喷注产生的截面。作为一个例子，我们在图17.13中展示了在高能pp碰撞中观察到的双喷注事件的不变质量$(\hat{s})$分布与部分子-部分子散射预测的不变质量分布的比较。

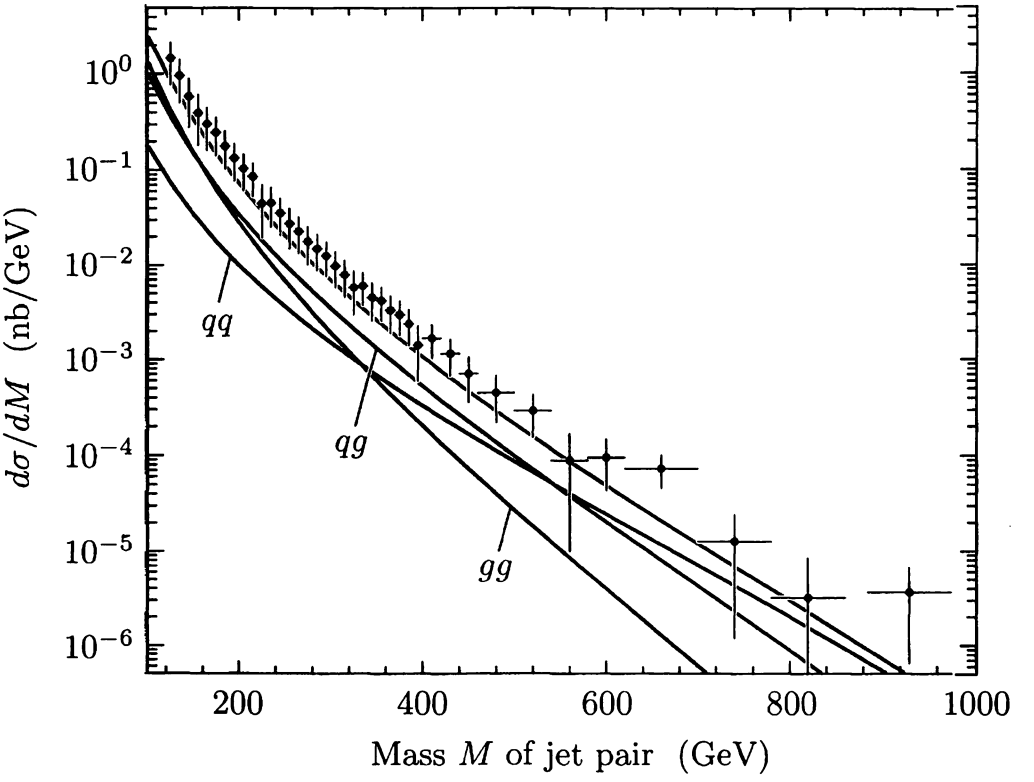


图 17.13 在$E_{\rm cm} = 1.8$ TeV时pp碰撞的双喷注不变质量分布，CDF 合作组测量，F. Abe, et. al., *Phys. Rev.* D48, 998 (1993)。将测量结果与使用图 17.6 中描述的 CTEQ 结构函数计算的领头阶 QCD 进行比较。下面的三条曲线展示了理论预测的三种组成：夸克-夸克(和反夸克)散射、夸克-胶子散射和胶子-胶子散射的不变质量分布。

理论预测的整体归一化是不确定的(约为因子 2)，这是由于在部分子截面中用来计算$\alpha_s(Q^2)$的Q^2的选择的不明确性，以及由深度非弹性散射截面导出部分子分布时相似的不明确性。当包括进α_s阶的修正时，不确定度降低到 30%左右。尽管如此，仍然值得注意的是，最低阶 QCD 预测跟踪到了观测到的分布——它作为双喷注不变质量的函数下降了 6 个数量级。因此，对于喷注产生的截面，以及涉及到轻子的硬过程，QCD 确实给出了一个合理的、对大动量转移时强相互作用的行为的描述。

17.5 部分子演化

既然我们已经研究了几个强相互作用过程中 QCD 的领头阶预测，我们应该研究这些预测的α_s的下一阶修正。我们在第 17.2 节中看到，个别图的修正可能包含质量奇异性，奇异性与共线发射过程相关，在零质量极限下出现。在e^+e^-湮没到强子的过程中，我们看到这些质量奇异性，和来自软胶子发射的红外发散，在总截面的表达式中消去了。可以证明，这是在轻子或光子碰撞中产生了夸克和胶子的过程的普遍特征。然而，当夸克或胶子出现在部分子子过程的初态时，对过程的修正通常会存在不会被抵消的质量奇异性。在这一节中，我们将证明这种效应并得出它的物理解释。我们会发现，这些奇异的项预示着比约肯标度的破坏(通过一些依赖于动量标度的对数的项)。事实上，它们导致了一组精确的微分方程，来支配着部分子分布的动量依赖性。

QCD 中与质量奇异性相关的基本现象已经在高能 QED 中共线光子发射的物理学中出现了，因此从研究这种情况开始是最直接的。在这一节中，我们将展示共线光子发射导致了一个电子的部分子分布函数的类似物。我们将推导一个描述这个分布函数的微分方程，该方程首先由 Gribov 和 Lipatov 建立。最后，我们遵循 Altarelli 和 Parisi 的构造*，将这个方程推广到 QCD。

在第 5 章和第 6 章中，我们研究了几个涉及t或u道奇异性的图的 QED 过程的例子。在这些情况下，我们发现总截面在高能极限下通常被一个额外的因子$\log(s/m^2)$所增强。例如，在式(5.95)中，我们看到康普顿散射中的u道交换图，如图 17.14(a)所示，导致了一个积分，在高能极限下的形式为：

$$\int \frac{d\cos\theta}{(1+\cos\theta)}.$$

$\cos\theta \to -1$的奇异性被电子质量截断，导致对数增强因子。因此，共线光子发射的代价是一个因子，不是α而是$\alpha\log(s/m^2)$。多重共线光子的发射，如图 17.14(b)所示，给出了$\left(\alpha\log(s/m^2)\right)^n$阶的贡献。为了提高微扰论的准确性，寻找一个程序在$\alpha$的所有阶将这些项加起来是很有用的。在 QCD 中，共线胶子发射的对应

V. N. Gribov and L. Lipatov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **15, 438 (1972); G. Altarelli and G. Parisi. *Nucl. Phys.* **B126**, 298 (1977)。我们也强烈推荐阅读论文 J. Kogut and L. Susskind, *Phys. Rev.* **D9**, 697, 3391(1974)。

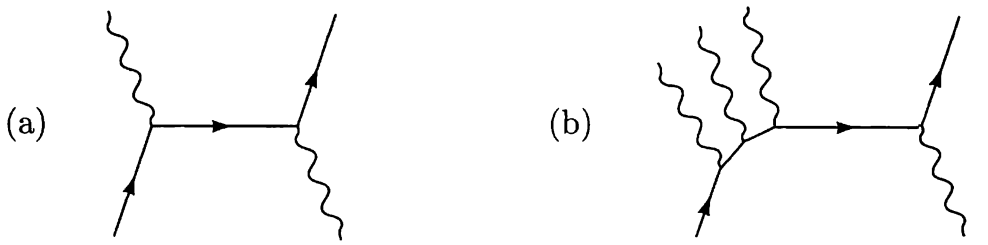


图 17.14 与共线光子发射相关的质量奇异性图:(a)领头阶; (b)高阶。

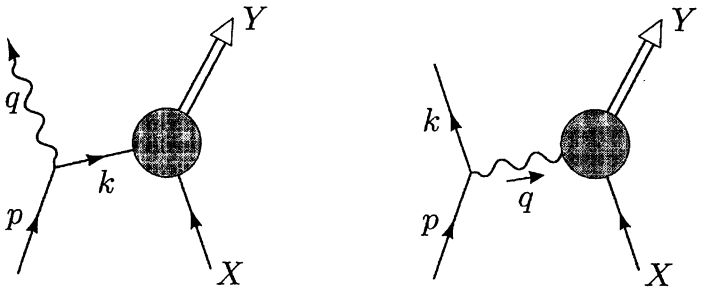


图 17.15 QED 中具有质量奇异性的图的一般形式。

因子是

$$\alpha_s(Q^2)\log\frac{Q^2}{\mu^2},$$

其中μ为非微扰 QCD 效应变得重要时的动量标度。与式(17.17)对比可知，这个乘积的阶为 1。因此，在这种情况下，如果我们要进行任何定量预测，大对数的重求和是很重要的。

在 QED 中，与一个共线发射相关的质量奇异性图是图 17.15 所示的形式之一。在每种情况下，圆表示具有大动量转移的散射过程。当中间传播子的分母为零时，即中间态几乎在壳时，质量奇异性出现。因此。很自然地，我们可以把图 17.15 中的第一个图看作是一个跃迁到实光子和几乎是实电子的过程，接着是电子和振幅上其余粒子的相互作用。第二个图应该有相似的解释，其中中间态是几乎为实的光子。

唯一的微妙之处在于中间态粒子的极化的定义。对于中间态是电子的情况，传播子的分子是

$$\not{k}=\sum_s u^s(k)\bar{u}^s(k). \tag{17.79}$$

因此，当$k^2\to 0$时，光子发射顶点和振幅的剩余部分与无质量电子的在壳的极化旋量进行收缩。对于中间态是光子的图，类似的说法是，电子发射顶点和剩余的

光子振幅应该与中间态光子的物理横向极化矢量进行收缩。由于光子传播子的分子是$g^{\mu\nu}$，所以光子传播子以这种方式化简并不明显。但这是对的。为看到这一点，可以使用式(16.20)中给出的无质量极化矢量来展开$g^{\mu\nu}$：

$$g^{\mu\nu} = \epsilon_+^\mu \epsilon_-^{\nu *} + \epsilon_-^\mu \epsilon_+^{\nu *} - \sum_i \epsilon_{Ti}^\mu \epsilon_{Ti}^{\nu *}. \tag{17.80}$$

这里ϵ_{Ti}^μ为横向极化矢量。向前极化矢量ϵ_+^μ与光子动量q^μ成正比。当我们将ϵ_+^μ与右边的 QED 散射振幅收缩时，根据 Ward 恒等式我们将得到 0，而$\epsilon_+^{*\nu}$与电子发射顶点的收缩同样得到 0。因此。为了计算光子动量q趋于在壳时的奇异项，我们可以做替换

$$\frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} \to \frac{+i}{q^2} \sum_i \epsilon_{Ti}^\mu \epsilon_{Ti}^{\nu *} \tag{17.81}$$

并用横向极化矢量计算光子的发射和吸收振幅。

电子分裂的矩阵元

通过将中间传播子的分子替换为极化矢量的和，我们将光子或电子发射顶点从图的其余部分中解耦出来。我们现在将在无质量粒子的物理极化态之间显式地计算这个顶点。运动学如图 17.16 所示。两个末态粒子应该几乎是共线的，具有一个小的相对横动量。我们可以选择入射的电子动量沿着$\hat{3}$轴，而出射的动量在$\hat{1}$-$\hat{3}$平面上。设z是初始电子能量分数，被光子携带走。那么这三个 4 动量可以写成

$$\begin{aligned} p &= (p, 0, 0, p), \\ q &\approx (zp, p_\perp, 0, zp), \\ k &\approx ((1-z)p, -p_\perp, 0, (1-z)p). \end{aligned} \tag{17.82}$$

这三个矢量满足$p^2 = q^2 = k^2 = 0$，在低于$p_\perp^2$阶的项下。

在发射实光子的过程中，我们应该有p^2和q^2精确为零，而k^2稍微地离壳，为$p_\perp^2$阶的程度。我们将需要知道k^2的值，它出现在虚电子传播子中。所以让我们来修改一下方程(17.82)，使得在低于$p_\perp^4$阶的项下满足条件$q^2 = 0$，把q和k写成

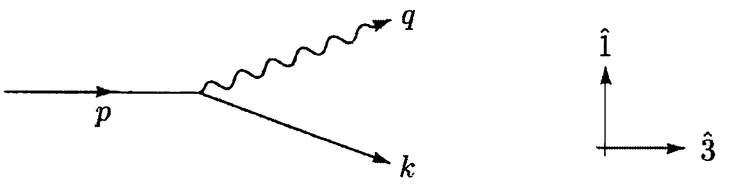


图 17.16 共线电子或光子发射的顶点的运动学。

$$\begin{aligned} q &= (zp, p_\perp, 0, zp - \frac{p_\perp^2}{2zp}), \\ k &= ((1-z)p, -p_\perp, 0, (1-z)p + \frac{p_\perp^2}{2zp}). \end{aligned} \tag{17.83}$$

在这一修改下，

$$k^2 = -p_\perp^2 - 2(1-z)\frac{p_\perp^2}{2z} + \mathcal{O}(p_\perp^4).$$

因此，如果光子是实的，电子是虚的，我们就得到了

$$q^2 = 0, \qquad k^2 = -\frac{p_\perp^2}{z}. \tag{17.84}$$

反过来，在一个实电子和一个虚光子的过程中，

$$k^2 = 0, \qquad q^2 = -\frac{p_\perp^2}{(1-z)}. \tag{17.85}$$

只有在虚粒子的传播子中才需要这些更精确的表达式。电子-光子顶点的矩阵元以$p_\perp$阶开始，所以(17.82)到(17.83)的修改对它的影响不明显，并且无论哪个粒子是虚的都一样(在最低阶)。

我们现在计算螺旋度确定的无质量态之间的 QED 顶点的矩阵元。根据螺旋度守恒，如果初始电子是左旋的，那么末态电子也一定是左旋的。然后给出光子发射顶点

$$i\mathcal{M} = \bar{u}_L(k)(-ie\gamma_\mu)u_L(p)\epsilon_T^{*\mu}(q), \tag{17.86}$$

其中光子极化矢量可以是左旋的，也可以是右旋的。回忆螺旋度基矢的表达式

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \bar{\sigma}_\mu & 0 \end{pmatrix}, \qquad u_L(p) = \sqrt{2p^0}\begin{pmatrix} \xi(p) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{for } m = 0),$$

我们可以写得更明确一些

$$i\mathcal{M} = -ie\sqrt{2(1-z)p}\sqrt{2p}\,\xi^\dagger(k)\sigma^i\xi(p)\,\epsilon_T^{*i}(q). \tag{17.87}$$

在$p_\perp$阶，左手旋量是

$$\xi(p)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\qquad \xi(k)=\begin{pmatrix}p_\perp/2(1-z)p\\1\end{pmatrix}. \tag{17.88}$$

光子的极化矢量为

$$\epsilon_L^{*i}(q)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,i,-\frac{p_\perp}{zp}),\qquad \epsilon_R^{*i}(q)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-i,-\frac{p_\perp}{zp}). \tag{17.89}$$

注意，当这些矢量与式(17.87)中的泡利矩阵缩并时，右手极化矢量的前两个分量给出$(\sigma^1-i\sigma^2)=2\sigma^-$，它湮没了$\xi(p)$。仅剩的项来自于$i=3$的分量，我们发现

$$i\mathcal{M}(e_L^-\to e_L^-\gamma_R)=ie\frac{\sqrt{2(1-z)}}{z}p_\perp. \tag{17.90}$$

对于左手光子极化，ϵ_L^*的前两个分量有额外的贡献，这些加起来为

$$i\mathcal{M}(e_L^-\to e_L^-\gamma_L)=ie\frac{\sqrt{2(1-z)}}{z(1-z)}p_\perp. \tag{17.91}$$

宇称不变性意味着如果所有的螺旋度都翻转，则矩阵元的值是不变的；这立即给出了初始为ϵ_R^-的情况所需的矩阵元。因此，矩阵元平方对初始螺旋度求平均得

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{pols.}}|\mathcal{M}|^2=\frac{2e^2p_\perp^2}{z(1-z)}\left[\frac{1+(1-z)^2}{z}\right]. \tag{17.92}$$

括号中的第一项来自一个自旋平行于电子自旋的光子；第二项来自一个自旋方向与电子自旋相反的光子。

等价光子近似

现在我们已经有了计算图 17.15 中所示过程的截面所需的所有部件。我们首先考虑有一个虚光子的过程。称图的右手边的初态为X和末态为Y,让$\mathcal{M}_{\gamma X}$代表光子被X散射的矩阵元。为简单起见我们假设X是未极化的，所以散射截面并不依赖于虚光子的极化。然后完整的图给出了一个截面

$$\sigma=\frac{1}{(1+v_X)2p2E_X}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2k^0}\int d\Pi_Y\left[\frac{1}{2}\sum|\mathcal{M}|^2\right]\left(\frac{1}{q^2}\right)^2|\mathcal{M}_{\gamma X}|^2, \tag{17.93}$$

其中v_X是X的速度，$\int d\Pi_Y$是对Y的相空间积分。

当k与入射电子动量p共线时，积分有一个奇异性。为了分离出奇异性，将k^0

和q^2从方程(17.82)和(17.85)中代入，把k的积分重写为

$$d^3k = dk^3 d^2k_\perp = pdz \cdot \pi dp_\perp^2. \tag{17.94}$$

那么截面可以表示为

$$\begin{aligned}\sigma &= \int \frac{pdzdp_\perp^2}{16\pi^2(1-z)p}\left[\frac{1}{2}\sum|\mathcal{M}|^2\right]\frac{(1-z)^2}{p_\perp^4}\frac{z}{(1+v_X)2zp2E_X}\int d\Pi_Y|\mathcal{M}_{\gamma X}|^2 \\ &= \int \frac{dzdp_\perp^2}{16\pi^2(1-z)}\left[\frac{1}{2}\sum|\mathcal{M}|^2\right]\frac{z(1-z)^2}{p_\perp^4}\cdot\sigma(\gamma X\to Y).\end{aligned} \tag{17.95}$$

最后，插入自旋平均的电子发射顶点(17.92)，得到

$$\begin{aligned}\sigma &= \int \frac{dzdp_\perp^2}{16\pi^2}\frac{z(1-z)}{p_\perp^4}\frac{2e^2p_\perp^2}{z(1-z)}\left[\frac{1+(1-z)^2}{z}\right]\cdot\sigma(\gamma X\to Y) \\ &= \int_0^1 dz\int\frac{dp_\perp^2}{p_\perp^2}\frac{\alpha}{2\pi}\left[\frac{1+(1-z)^2}{z}\right]\cdot\sigma(\gamma X\to Y).\end{aligned} \tag{17.96}$$

$p_\perp^2$的积分从s阶的动量转移向下积到电子质量m^2，它截断了奇异性。因此，我们的最终结果是

$$\sigma(e^-X\to e^-Y) = \int_0^1 dz\,\frac{\alpha}{2\pi}\log\frac{s}{m^2}\left[\frac{1+(1-z)^2}{z}\right]\cdot\sigma(\gamma X\to Y). \tag{17.97}$$

右边的截面是计算的是一个动量为zp的实的、横向极化的光子。因子$\log(s/m^2)$表示质量奇异性。这个公式就是我们在前面的问题5.5和6.2中遇到的Weizsacker-Williams**等价光子近似**。

当公式(17.97)与前两节的QCD预测进行并列时，则具有新的意义。这个QED公式与部分子模型表达式的形式相同，带有Weizsacker-Williams分布函数

$$f_\gamma(z) = \frac{\alpha}{2\pi}\log\frac{s}{m^2}\left[\frac{1+(1-z)^2}{z}\right] \tag{17.98}$$

其扮演的角色是在入射电子中找到纵向分数为z的光子的概率。

电子分布

图 17.15 的第一个图，有一个发射的光子和一个虚电子，可以用同样的方法处理。(17.93)的类比为

$$\sigma = \frac{1}{(1+v_X)2p2E_X}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2q^0}\int d\Pi_Y\left[\frac{1}{2}\sum|\mathcal{M}|^2\right]\left(\frac{1}{k^2}\right)^2|\mathcal{M}_{e^-X}|^2.$$

按照导致了(17.97)的步骤，我们发现

$$\begin{aligned}\sigma(e^-X\to\gamma Y)&=\int\frac{dzdp_\perp^2}{16\pi^2z}\Big[\frac{1}{2}\sum|\mathcal{M}|^2\Big]\frac{z^2}{p_\perp^4}\cdot(1-z)\sigma(e^-X\to Y)\\&=\int\frac{dzdp_\perp^2}{16\pi^2}\frac{z(1-z)}{p_\perp^4}\frac{2e^2p_\perp^2}{z(1-z)}\left[\frac{1+(1-z)^2}{z}\right]\cdot\sigma(e^-X\to Y)\\&=\int_0^1dz\int\frac{dp_\perp^2}{p_\perp^2}\frac{\alpha}{2\pi}\left[\frac{1+(1-z)^2}{z}\right]\cdot\sigma(e^-X\to Y),\end{aligned}\tag{17.99}$$

其中中间电子携带纵向分数$(1-z)$。

很容易做代替$x=(1-z)$，并把(17.99)积分中截面相乘的因子解释为在电子中找到电子部分子的部分子分布。这将给出

$$f_e^{(1)}(x)=\frac{\alpha}{2\pi}\log\frac{s}{m^2}\left[\frac{1+x^2}{1-x}\right].\tag{17.100}$$

然而，这个表达式是不够的。最明显的是，它没有考虑到不含辐射的过程，在这个过程中，电子保持电子的完全能量。这很容易弥补，只要把(17.100)看作是对如下的最天真期望的α阶修正，

$$f_e^{(0)}(x)=\delta(1-x),\tag{17.101}$$

其中我们认为电子只包含一个处于完全能量的电子。不幸的是，(17.101)和(17.100)的和仍然不能充分描述电子的分布，原因有二。首先，式(17.100)在$x=1$附近发散，我们需要一个处理这个奇异性的方案。其次，虽然式(17.100)考虑到了虚电子通过辐射从$x=1$移动到纵向分数x，但没有考虑到来自 delta 函数峰值(在$x=1$)的电子同时伴随的损失。

$x=1$时(17.100)的发散对应于软光子的发射。我们在 6.5 节中看到，软光子的发射并不影响 QED 反应的速率。在α的逐阶中，人们发现来自软光子发射的红外发散对总速率的正贡献，与来自带有软的虚光子的图的负贡献相平衡。在目前的例子中，负贡献必须使无光子发射的过程的权重减少。因此，在α阶，电子中电子的部分子分布应该是这种形式

$$f_e(x)=\delta(1-x)+\frac{\alpha}{2\pi}\log\frac{s}{m^2}\left(\frac{1+x^2}{(1-x)}-A\delta(1-x)\right).\tag{17.102}$$

系数A来自我们没有计算过的带有虚光子的图。然而，这些图的效应很容易理解；它们从 delta 函数中减去了由于辐射已经被移动到低x的概率，因此对α阶的完整

项的积分为零。另一种表达这个判据的方式是，A是由电子精确地包含一个电子部分子的条件决定的，

$$\int_0^1 dx\, f_e(x) = 1. \tag{17.103}$$

(这个等式将在下面进行修改，当我们包括进对产生过程时)。

如何对(17.100)中的奇异分母进行积分以明确地确定A，这不是很清楚。传统上定义一个可以被积分的分布，通过从奇异项中减去一个 delta 函数。定义一个分布

$$\frac{1}{(1-x)_+} \tag{17.104}$$

使得所有小于 1 的x值与函数$1/(1-x)$一致，并且在$x=1$处有一个奇异性，使得该分布与任何光滑函数$f(x)$的积分为

$$\int_0^1 dx\, \frac{f(x)}{(1-x)_+} = \int_0^1 dx\, \frac{f(x)-f(1)}{(1-x)}. \tag{17.105}$$

不那么正式地，

$$\frac{1}{(1-x)_+} = \lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{1}{(1-x)}\theta(1-x-\epsilon) - \delta(1-x)\int_0^{1-\epsilon} dx' \frac{1}{(1-x')}\right]. \tag{17.106}$$

更正式的定义(17.105)在实践中更容易使用。

利用这个定义，通过将分母$(1-x)$变成$(1-x)_+$，我们可以将一个 delta 函数带入(17.102)的奇异项。然后，为了归一化(17.102)我们需要积分

$$\int_0^1 dx\, \frac{1+x^2}{(1-x)_+} = \int_0^1 dx\, \frac{x^2-1}{(1-x)} = -\frac{3}{2}.$$

我们的电子分布的最终形式，在α阶，是

$$f_e(x) = \delta(1-x) + \frac{\alpha}{2\pi}\log\frac{s}{m^2}\left[\frac{1+x^2}{(1-x)_+} + \frac{3}{2}\delta(1-x)\right]. \tag{17.107}$$

这个分布现在被正确地归一化了，但是它在$x=1$附近仍然是高度奇异的。因此，我们应该期望电子分布函数的高阶修正在这个区域是重要的。因此，我们必须考虑如何处理许多共线光子的发射。

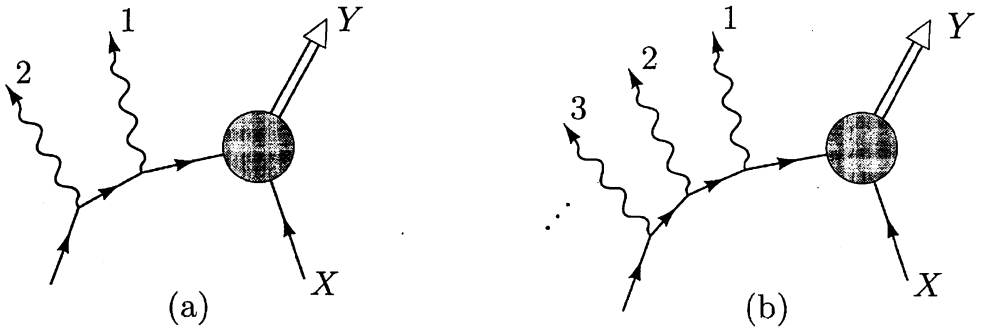


图 17.17 共线光子发射的高阶图:(a)两个共线光子;(b)许多共线光子。

多重分裂

事实上，扩展我们刚刚完成的分析来解释许多共线光子的发射并不困难。考虑图17.17(a)所示的过程。其中光子1以横动量$p_{1\perp}$辐射，光子2以横动量$p_{2\perp}$辐射。光子2的发射可以像我们上面做的那样计算出来。如果$p_{2\perp} \ll p_{1\perp}$，第一个虚电子(与$p_{1\perp}^2$相比)非常接近质量壳，所以我们可以在计算光子1的发射时忽略它的虚性。双光子发射给出了一个如下阶数的贡献

$$\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \int_{m^2}^{s} \frac{dp_{1\perp}^2}{p_{1\perp}^2} \int_{m^2}^{p_{1\perp}^2} \frac{dp_{2\perp}^2}{p_{2\perp}^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \log^2 \frac{s}{m^2}.$$

在相反的极限$p_{2\perp} \gg p_{1\perp}$中，没有$p_{1\perp}^2$阶的分母，所以我们没有找到一个双对数。只有当$p_{2\perp} \ll p_{1\perp}$时，$\alpha^2$阶的贡献才能与$\alpha$阶的贡献相竞争。

这个论证扩展到任意多共线光子的发射，图 17.17(b)。光子相空间上的积分区域对应如下的顺序

$$p_{1\perp} \gg p_{2\perp} \gg p_{3\perp} \gg \cdots \tag{17.108}$$

给出的贡献包含因子

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \log^n \frac{s}{m^2}. \tag{17.109}$$

如果以任何其他方式排序光子横向动量，在α的相同阶处，来自那个区域的贡献包含的大对数的幂至少要再低一次。如果条件(17.108)成立，当你从图的外部出发朝着硬碰撞前进时，虚电子动量越来越远离质壳。在这种情况下，电子动量被称为是**强排序的**。

这组结论有一个有趣的物理解释。由于当我们进入图时中间电子越来越虚，所以很自然地把它们解释为物理电子的组成部分，当这个粒子在连续地变小的距离标度上被分析时。$k^2 \sim p_\perp^2$的中间电子可以被认为是电子的一个组分，它变得可见是当物理电子的波函数被$\Delta r \sim (p_\perp)^{-1}$的分辨率探测到时。在这个图像中，在一个分辨率下看到的电子可以在更精细的标度下被分辨成一个更加虚的电子和若干光子。

无论是从计算费曼图的角度，还是从更宏观的电子结构的角度，将电子分裂成一个虚电子加光子的过程想象成一个连续的演化过程(作为电子组分的横动量的函数)是有用的。为了从数学上描述这个过程，我们引入了电子和光子分布函数的显式$p_\perp$依赖关系。我们定义函数$f_\gamma(x,Q)$和$f_e(x,Q)$以给出在物理电子中找到一个纵向分数为x的光子或电子的概率，考虑横动量$p_\perp < Q$的共线光子的发射。如果Q稍微增加到$Q+\Delta Q$，我们必须考虑$f_e(x,Q)$中一个电子组分将会辐射出一个$Q < p_\perp < Q+\Delta Q$的光子的概率。一个电子分裂出一个光子并带走其能量的分数为z的概率是

$$\frac{\alpha}{2\pi}\frac{dp_\perp^2}{p_\perp^2}\frac{1+(1-z)^2}{z}. \tag{17.110}$$

因此，新的光子分布可以计算如下:

$$\begin{aligned} & f_\gamma(x,Q+\Delta Q) \\ & \quad = f_\gamma(x,Q) + \int_0^1 dx' \int_0^1 dz \left[\frac{\alpha}{2\pi}\frac{\Delta Q^2}{Q^2}\frac{1+(1-z)^2}{z}\right] f_e(x',p_\perp)\delta(x-zx') \\ & \quad = f_\gamma(x,Q) + \frac{\Delta Q}{Q}\int_x^1 \frac{dz}{z}\left[\frac{\alpha}{\pi}\frac{1+(1-z)^2}{z}\right] f_e(\frac{x}{z},p_\perp). \end{aligned} \tag{17.111}$$

转到一个连续的演化，我们发现函数$f_\gamma(x,Q)$是由如下积分-微分方程所确定的

$$\frac{d}{d\log Q} f_\gamma(x,Q) = \int_x^1 \frac{dz}{z}\left[\frac{\alpha}{\pi}\frac{1+(1-z)^2}{z}\right] f_e(\frac{x}{z},Q). \tag{17.112}$$

同样，在物理电子中组分电子的分布也会随着Q演化，反映为由于光子辐射在x值较低时电子的出现，和x值较高时这些电子的消失。式(17.107)括号内的项给出了有单光子辐射时这两种效应的正确的描述。因此，电子分布根据如下方程进行演化:

$$\frac{d}{d\log Q}f_e(x,Q)=\int_x^1\frac{dz}{z}\left[\frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{1+z^2}{(1-z)_+}+\frac{3}{2}\delta(1-z)\right)\right]f_e(\frac{x}{z},Q). \qquad (17.113)$$

通过使用适当的初始条件对这些积分-微分方程进行积分，我们将所有形式为(17.109)的对数增强项进行了求和。初始条件应该在这样一点上固定，该点将重新产生式(17.98)和(17.107)中对数的正确分母。因此，我们应该设置

$$f_e(x,Q)=\delta(1-x), \qquad f_\gamma(x,Q)=0, \qquad (17.114)$$

在$Q^2\sim m^2$。

所得到的分布函数可用于计算任意靶的电子硬散射截面。然后式(17.97)及(17.99)应改为

$$\begin{aligned}\sigma(e^-X\to e^-+n\gamma+Y)&=\int_0^1 dx\, f_\gamma(x,Q)\sigma(\gamma X\to Y),\\ \sigma(e^-X\to n\gamma+Y)&=\int_0^1 dx\, f_e(x,Q)\sigma(e^-X\to Y),\end{aligned} \qquad (17.115)$$

其中积分中的截面是在光子或电子携带原始电子动量的分数为x的情况下计算的，函数$f_\gamma(x,Q)$，$f_e(x,Q)$是式(17.112)和(17.113)的解，选择动量Q作为γX或e^-X子过程的特征动量转移。

光子分裂为对

$f_\gamma(x)$和$f_e(x)$的演化方程还需要进一步的修正才能被认为是完整的。如前所述，这些方程说明了在所有阶下电子的光子辐射。然而，他们忽略了同样是α阶的另一个过程：一个光子分裂成电子-正电子对。我们必须把这个过程包括在我们的演化方程中，因为例如，图 17.18 所示的过程与图 17.17(a)所示的过程具有相同的对数增强。

我们可以用计算光子辐射效应的相同方法来计算光子分裂的效应。过程的基本运动学非常相似，如图 17.19 所示；唯一不同的是，光子现在处于初态，而末态由一个几乎共线的电子-正电子对组成。我们需要计算出这个过程的类似式(17.92)。

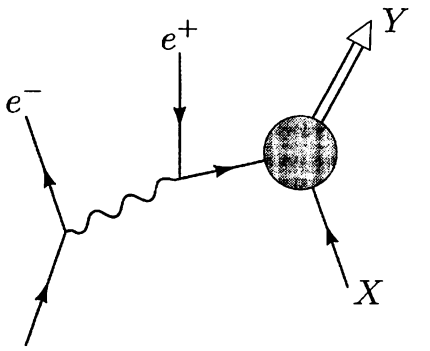


图 17.18 由共线质量奇异性增强的包含e^+e^-对产生的过程

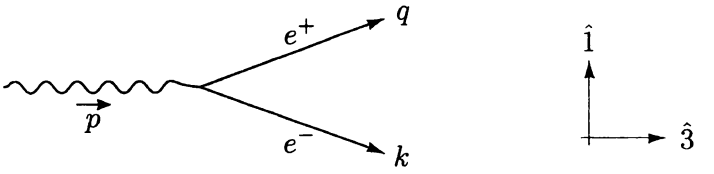


图 17.19 光子转变为共线电子-正电子对的顶点的运动学

考虑出射电子是左手的情况。根据螺旋度守恒，出射正电子必须是右手的；其自旋波函数将包含一个左手旋量。设电子动量为k，由式(17.82)给出，正电子动量为q。然后顶点给出矩阵元

$$i\mathcal{M} = -ie\bar{u}_L(k)\gamma_\mu v_L(q)\epsilon_T^\mu(p), \tag{17.116}$$

光子极化矢量可以是左手的，也可以是右手的。当我们插入无质量旋量的显式形式时，我们得到

$$i\mathcal{M} = ie\sqrt{2(1-z)p}\sqrt{2zp}\,\xi^\dagger(k)\sigma^i\xi(q)\cdot\epsilon_T^i(p),$$

其中$p_\perp$阶的电子和正电子的旋量被给为

$$\xi(q) = \begin{pmatrix} -p_\perp/2zp \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \xi(k) = \begin{pmatrix} p_\perp/2(1-z)p \\ 1 \end{pmatrix}.$$

光子的极化矢量为

$$\epsilon_L^i(p) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-i,0), \qquad \epsilon_R^i(p) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,i,0).$$

将这些矢量与σ^i点乘，我们就得到了极化矩阵元

$$i\mathcal{M}(\gamma_L \to e_L^- e_R^+) = -ie\frac{\sqrt{2z(1-z)}}{z}p_\perp,$$

and

$$i\mathcal{M}(\gamma_R \to e_L^- e_R^+) = +ie\frac{\sqrt{2z(1-z)}}{(1-z)}p_\perp.$$

同样，如果所有的螺旋度都翻转，矩阵元不变。因此矩阵元平方，对初始光子极化求平均，是

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{pols.}}|\mathcal{M}|^2 = \frac{2e^2p_\perp^2}{z(1-z)}\left[z^2+(1-z)^2\right], \tag{17.117}$$

其中z是正电子携带的动量分数。括号中的第一项来自于正电子的自旋与光子的自旋平行的过程；第二项来自于电子自旋与光子自旋平行的过程。

矩阵元平方(17.117)产生了组分光子向电子和正电子的演化。演化方程的形式与(17.113)相似，但右手边是光子分布，且其括号中的表达式替换为

$$\left(z^2+(1-z)^2\right). \tag{17.118}$$

当我们产生一个电子-正电子对时，我们必须去除一个光子；这要求在光子分布(17.112)的演化方程中有一个负项，该项包含一个delta函数并乘以(17.118)的归一化：

$$\int_0^1 dz\left(z^2+(1-z)^2\right) = \frac{2}{3}. \tag{17.119}$$

QED的演化方程

包括进对产生效应，我们找到在 QED 中电子、正电子和光子分布的完整演化方程。这些方程最初是由 Gribov 和 Lipatov 推导出来的，在α的所有阶中将来自共线奇异性的领头对数加起来，演化方程的形式为

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\log Q}f_\gamma(x,Q) &= \frac{\alpha}{\pi}\int_x^1\frac{dz}{z}\Big\{P_{\gamma\leftarrow e}(z)\left[f_e(\frac{x}{z},Q)+f_{\bar{e}}(\frac{x}{z},Q)\right] \\
&\qquad + P_{\gamma\leftarrow\gamma}(z)f_\gamma(\frac{x}{z},Q)\Big\}, \\
\frac{d}{d\log Q}f_e(x,Q) &= \frac{\alpha}{\pi}\int_x^1\frac{dz}{z}\Big\{P_{e\leftarrow e}(z)f_e(\frac{x}{z},Q)+P_{e\leftarrow\gamma}(z)f_\gamma(\frac{x}{z},Q)\Big\}, \\
\frac{d}{d\log Q}f_{\bar{e}}(x,Q) &= \frac{\alpha}{\pi}\int_x^1\frac{dz}{z}\Big\{P_{e\leftarrow e}(z)f_{\bar{e}}(\frac{x}{z},Q)+P_{e\leftarrow\gamma}(z)f_\gamma(\frac{x}{z},Q)\Big\}.
\end{aligned} \tag{17.120}$$

其中**分裂函数**$P_{i\leftarrow j}(z)$被给出为

$$\begin{aligned} P_{e\leftarrow e}(z) &= \frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2}\delta(1-z), \\ P_{\gamma\leftarrow e}(z) &= \frac{1+(1-z)^2}{z}, \\ P_{e\leftarrow\gamma}(z) &= z^2+(1-z)^2, \\ P_{\gamma\leftarrow\gamma}(z) &= -\frac{2}{3}\delta(1-z). \end{aligned} \tag{17.121}$$

为了得到与给定的动量转移Q相关的电子分布函数，我们应该把这些方程与如下在$Q=m$处的初始条件结合起来

$$f_e(x,Q)=\delta(1-x), \qquad f_{\bar{e}}(x,Q)=0, \qquad f_\gamma(x,Q)=0, \tag{17.122}$$

在不同的初始条件下，相同的方程给出了物理正电子或光子的分布函数。如式(17.115)所示，这些方程的解被用于计算由电子、正电子或光子引起的涉及大动量转移的过程的截面。

演化方程(17.120)的构造的方式是为了保护电子数和纵向动量。因此，强子的部分子分布所满足的基本求和规则(17.36)和(17.39)也适用于QED分布函数。具体地说，电子的分布函数包含一个净的电子组分，

$$\int_0^1 dx\big[f_e(x,Q)-f_{\bar{e}}(x,Q)\big]=1, \tag{17.123}$$

考虑到物理电子的总动量，

$$\int_0^1 dx\,x\big[f_e(x,Q)+f_{\bar{e}}(x,Q)+f_\gamma(x,Q)\big]=1. \tag{17.124}$$

利用式(17.120)明确地验证这些积分的值不依赖于Q是一个有益的练习。

Altarelli-Parisi 方程

如果我们在 QED 中遇到与共线光子发射相关的质量奇异性，我们也必须在 QCD 中遇到与共线胶子和夸克发射相关的质量奇异性。如果我们使用无质量夸克和胶子计算 17.3 和 17.4 节中讨论的领头阶部分子截面的α_s阶修正，我们将发

现当我们对共线位形积分时这些修正项会发散。因此，部分子模型表达式(至少在它们最简单的形式中)，在α_s的次领头阶中已经失效了。

然而，假设 QCD 的奇异性并不比 QED 的奇异性差，上一节的考虑告诉我们如何处理这些奇异项。在 QED 中，我们发现很自然地将与质量奇异性相关的大修正包含在部分子分布中，而不是硬散射截面中。从这个角度看，部分子分布作为动量标度对数的函数，奇异项提供了其演化方程的核心。动量转移为Q的硬散射在Q^{-1}阶的距离探测到了电子。当电子波函数在非常小的尺度下被分辨时，它表现为组分电子，只携带总纵向动量的一小部分，还要加上一些组分光子和电子-正电子对。这些组分中的任何一个如果占总电子动量的很大一部分，都可以引发硬散射过程。

同样的逻辑也适用于 QCD 截面的计算。共线胶子或夸克发射区域的贡献应该与部分子分布函数有关，而不是与硬散射截面有关。如果我们把它们联系起来，我们会发现，部分子分布不再独立于动量Q(而动量Q描述了硬散射过程的特征)；相反，它们现在以对数方式随Q演化。例如深度非弹性散射的基本方程(17.30)将变成

$$\frac{d^2\sigma}{dxdy}(e^-p \to e^-X) = \left(\sum_f x f_f(x,Q) Q_f^2\right) \cdot \frac{2\pi\alpha^2 s}{Q^4}\left[1+(1-y)^2\right], \quad (17.125)$$

所以比约肯标度会被破坏。由于这种破坏仅仅发生在Q^2的对数标度上，它将是一个微妙的效应，**近似的**比约肯标度仍然是 QCD 的预测。但是比约肯标度的破坏是不可避免的，因为 QCD 是一个在所有动量标度上都有自由度的量子场论。当我们在越来越短的距离上探测质子波函数时，我们激发了高动量自由度，并把波函数分解成越来越多的夸克、反夸克和胶子。

QED部分子分布的演化由式(17.120)支配，以参数α/π为特征，因此当Q变化10倍时，部分子分布变化约1%。在QCD中，支配演化速率的相应因子应该为$\alpha_s(Q)/\pi$。因此，当Q很小时，演化速度较快，微扰论的高阶贡献很重要。最终，演化的初始条件由大距离标度下质子波函数的形式决定，而这不能用费曼图来计算。另一方面，当Q较大时，在实际中远远大于1 GeV时，演化速度变慢，并受微扰论的领头阶的支配。在这种情况下，QCD微扰论对部分子分布的演化形式

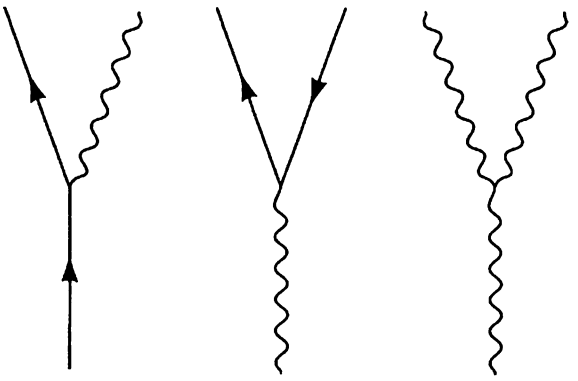


图 17.20 QCD 中对部分子的演化有贡献的三个顶点

做出了精确的预测，这些预测可以通过实验进行验证。

为了推导出 QCD 中部分子分布的演化方程，我们可以使用与 QED 相同的技术和逻辑。这里有一个微妙之处，即胶子传播子在$q^2 \to 0$的极限下还原为横向极化态，即式(17.81)，不能像 QED 那样简单地证明。然而，在非阿贝尔情形下结果也是正确的*。一旦解决了这个技术点，共线发射的运动学与 QED 完全相同。因此，我们找到了与 QED 有相同形式的演化方程，只是用α_s替换 α，插入适当的色因子，并考虑了三胶子顶点的效应。

共线发射过程涉及图 17.20 所示的三个顶点。其中，前两个具有与图 17.16 和 17.19 所示相同的洛伦兹结构。除了耦合常数的强度外，唯一的区别在于色指标。我们将处理色，就像我们在前面的分析中处理自旋一样：我们对初始颜色进行平均，对末态颜色进行求和。然后图 17.20 的第一个顶点，表示夸克分裂成夸克和胶子，得到色因子

$$\tfrac{1}{3}\,\mathrm{tr}[t^a t^a] = C_2(r) = \tfrac{4}{3}. \tag{17.126}$$

第二个顶点，代表胶子分裂成夸克-反夸克对，得到了因子

$$\tfrac{1}{8}\,\mathrm{tr}[t^a t^a] = \tfrac{1}{2}. \tag{17.127}$$

图 17.20 中的第三个顶点表示一个胶子分裂为两个胶子，这是一种非阿贝尔情形下的新效应。通过取具有确定螺旋度的横向胶子态之间的顶点矩阵元，可以直接计算出这个顶点对演化方程的贡献。这个计算是问题 17.4 的项目。

---

*参见，例如，J. Collins and D. Soper, A. Mueller, *Quantun Chromodynamics* (World Scientific, Singapore, 1991)。

通过考虑所有这些效应，我们可以将 QED 演化方程(17.120)修改为 QCD 中一组正确的部分子分布的演化方程。这些被称为 **Altarelli-Parisi 方程组**。它们描述了在标度Q上可以被视为无质量的夸克和反夸克的每个味道的部分子分布$f_f(x,Q)$、$f_{\bar{f}}(x,Q)$的耦合演化，再加上胶子的部分子分布$f_g(x,Q)$，明确写为

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\log Q}f_g(x,Q) &= \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi}\int_x^1 \frac{dz}{z}\Big\{P_{g\leftarrow q}(z)\sum_f[f_f(\frac{x}{z},Q)+f_{\bar{f}}(\frac{x}{z},Q)] \\
&\qquad + P_{g\leftarrow g}(z)f_g(\frac{x}{z},Q)\Big\}, \\
\frac{d}{d\log Q}f_f(x,Q) &= \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi}\int_x^1 \frac{dz}{z}\Big\{P_{q\leftarrow q}(z)f_f(\frac{x}{z},Q)+P_{q\leftarrow g}(z)f_g(\frac{x}{z},Q)\Big\}, \\
\frac{d}{d\log Q}f_{\bar{f}}(x,Q) &= \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi}\int_x^1 \frac{dz}{z}\Big\{P_{q\leftarrow q}(z)f_{\bar{f}}(\frac{x}{z},Q)+P_{q\leftarrow g}(z)f_g(\frac{x}{z},Q)\Big\}.
\end{aligned} \tag{17.128}$$

前三个分裂函数可以从式(17.121)中获得，再乘以式(17.126)和(17.127)中计算的色因子:

$$\begin{aligned}
P_{q\leftarrow q}(z) &= \frac{4}{3}\Big[\frac{1+z^2}{(1-z)_+}+\frac{3}{2}\delta(1-z)\Big], \\
P_{g\leftarrow q}(z) &= \frac{4}{3}\Big[\frac{1+(1-z)^2}{z}\Big], \\
P_{q\leftarrow g}(z) &= \frac{1}{2}[z^2+(1-z)^2].
\end{aligned} \tag{17.129}$$

第四个分裂函数也需要 17.4 题的计算；结果是

$$P_{g\leftarrow g}(z) = 6\Big[\frac{(1-z)}{z}+\frac{z}{(1-z)_+}+z(1-z)+\Big(\frac{11}{12}-\frac{n_f}{18}\Big)\delta(1-z)\Big]. \tag{17.130}$$

这个表达式的最后一项，与轻夸克味道的数量n_f成正比，是与胶子分裂成$q\bar{q}$对相关联的减除项。Altarelli-Parisi 方程组描述了任意的强子或强子组分的部分子分布的演化，在不含没有被大对数增强的α_s阶修正的情况下。

我们推导的 Altarelli-Parisi 方程组遵守 QCD 中夸克数和纵向动量的守恒定律。因此，方程组必须遵守部分子模型求和规则(17.36)和(17.39)。和在 QED 下一样，明确地验证这些积分独立于Q是很有意义的。

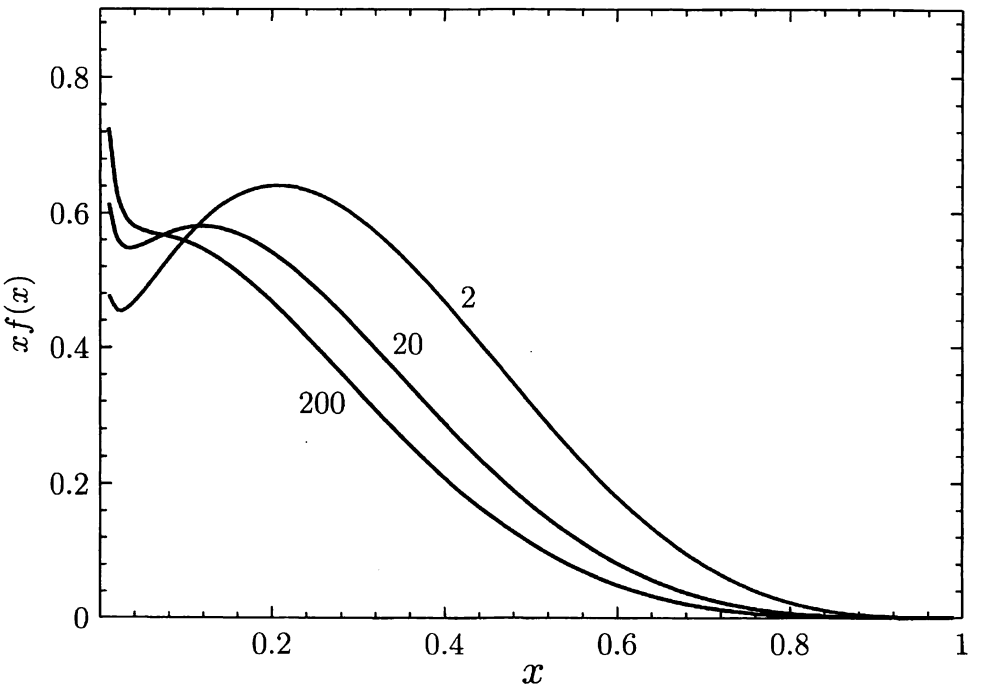


图 17.21 u夸克部分子分布函数$xf_u(x,Q)$，在$Q=2,20$,和200 GeV 时，显示了部分子按照 Altarelli-Parisi 方程组演化的效应。这些曲线取自 CTEQ 对图 17.6 所示的深度非弹性散射数据的拟合

在 QED 中，我们可以用演化方程来明确地计算电子的结构函数。在 QCD 中，这不再是可能的，因为对方程进行积分所需的初始条件是由 QCD 的强耦合区域决定的，因此不是先验知道的。然而，我们可以通过测量给定Q^2值时的深度非弹性散射截面，通过实验确定质子结构的初始条件。于是我们可以在Q^2值更高时，预测结构函数，从而预测深度非弹性截面。这个分析中有一个微妙之处：胶子的分布不是用深度非弹性散射来直接测量的，但它确实进入了夸克分布的演化方程。因此，深度非弹性散射的Q^2依赖性的一些信息简单地被用来确定胶子的分布。然而，胶子分布是被动量求和规则(17.39)来绝对地归一化的，所以演化方程有预测能力，即使这个分布必须从数据拟合出来。

Altarelli-Parisi 方程组预测了部分子分布函数的演化的特征形式，如图 17.21 所示。处于高x的部分子有辐射和下降到较低x值的趋势。与此同时，新的部分子作为这种辐射的产物在低x处形成了。因此，随着Q^2的增加，部分子分布在大x处减少，在小x处增加得快得多。当质子的波函数在越来越精细的距离标度

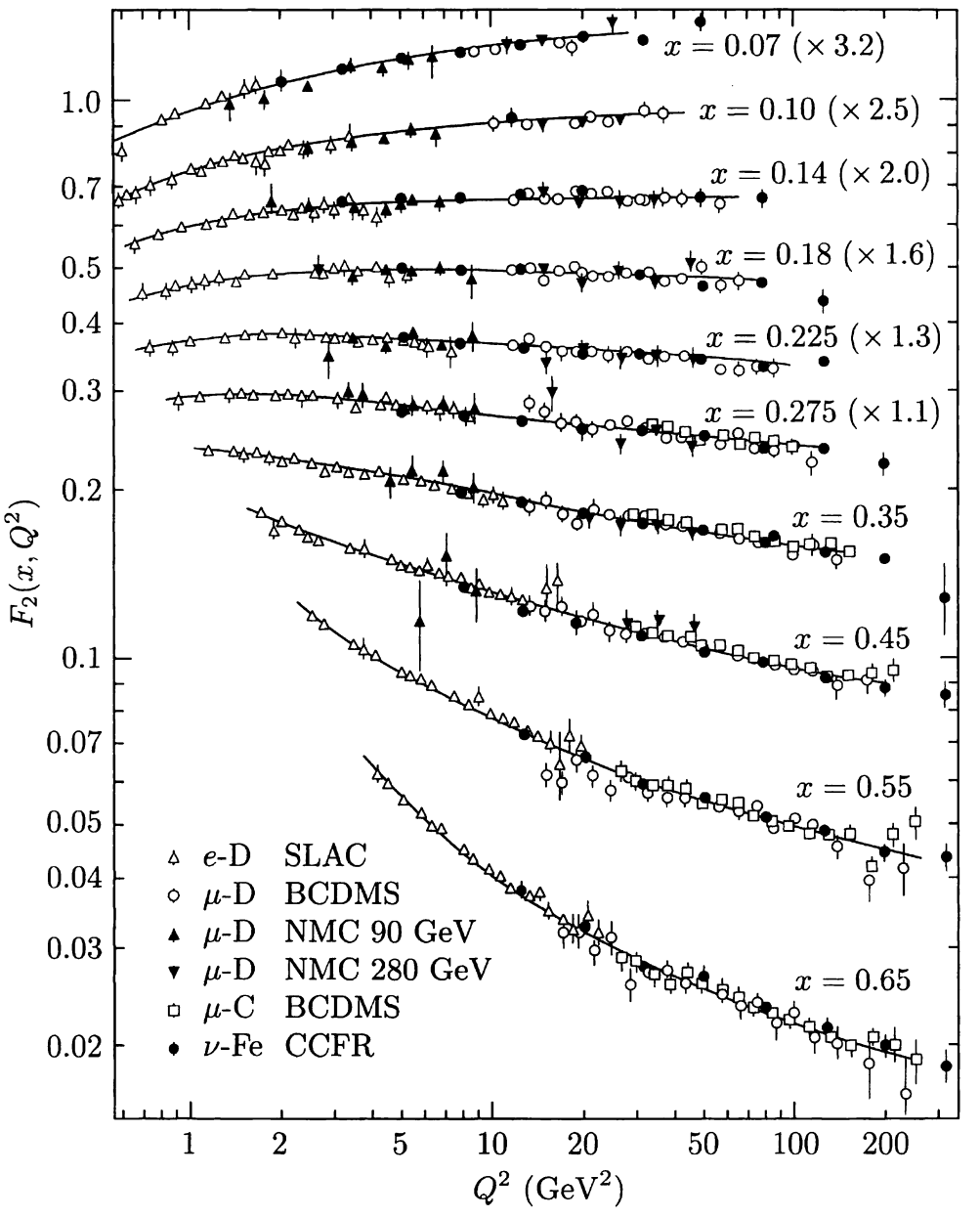


图 17.22 在深度非弹性电子-质子散射中测量的夸克分布函数组合$F_2 = \sum_f xQ_f^2 f_f(x, Q^2)$对$Q^2$的依赖关系。不同的曲线显示了$F_2$在$x$的固定值下的变化，并将这种变化与随着Altarelli-Parisi方程组演化的模型进行了比较。上面的6个数据集已经被乘上了表示出的因子，从而在图上分离它们。数据的编成是由M. Virchaux and R. Vossfor the Particle Data Group, *Phys. Rev.* **D50**, 1173(1994), 图32.2。原始实验的完整参考在那里给出了。

上被探测时，我们可以想象质子会有越来越多的组分，它们共享着它的总动量。

图 17.22 显示了深度非弹性散射中测量的分布函数组合的演化，作为Q^2的函数。我们可以看到分布函数在大x处的特征性下降和在小x处的上升。数据被拿来和根据 Altarelli-Parisi 方程组演化的模型进行对比；这个模型显然很好地描述了数据。

17.6 α_s的测量

在结束我们对 QCD 的介绍性概论之前，我们应该总结一下理论的定量验证。我们在第 6.3 节中讨论了 QED 的精度测试，带来了耦合α的各种测量；最佳测定值达到 8 个有效数字。由于 QCD 微扰论只适用于硬散射过程，其不确定性由于软过程而难以估计，这个理论还没有经过如此极端的精度测试。尽管如此，将现有的最佳α_s测定值汇集在一起，看看它们的一致性如何，还是很有趣的。

为了比较α_s的值，有必要使用一组通用的约定来表示这些值。第一。必须设定重正化标度：一个有用的选择是中性弱玻色子Z^0的质量：$m_Z = 91.19$ GeV。其次，我们必须修正重正化方案并在这个标度上定义 QCD 耦合常数的。将被修正的最小减除(11.77)正规化后的裸耦合作为标准已经成为一种惯例。得到的标准耦合常数称为$\alpha_{s\overline{\rm MS}}(m_Z^2)$。

表 17.1 总结了许多类型实验中α_s的测量值。在第 17.2 节中我们看到，我们可以通过测量e^+e^-湮灭到强子的总截面，或者同样地，通过观测到的强子和轻子事件的数量之比R，得到α_s的值。一个独立的α_s测量可以根据e^+e^-湮灭事件中具有三喷注末态的分数来获得，或者等效地，从产生的强子相对于喷注轴的横动量分布中获得。在“Event shapes”标题下收集并平均了这类的一些测量值。在高能$p\bar{p}$对撞机上对夸克-反夸克湮灭产生的W玻色子的横动量谱进行测量，得到了类似的α_s的测量结果。在深度非弹性中微子散射中，顶点的胶子辐射修正也可以被用于提取α_s。由于深度非弹性散射中比约肯标度破坏率受α_s控制，因此这种效应为α_s测量提供了另一种方法。最轻的$b\bar{b}$束缚态Υ和$c\bar{c}$束缚态ψ的衰变由 QCD 支配并产生了α_s的一个测量值。最后，$c\bar{c}$和$b\bar{b}$束缚态的谱可以用 QCD 耦合常数在数值上计算出来，与实验结果的比较也给出了α_s的确定值。

Table 17.1. Values of $\alpha_s(m_Z)$ Obtained from QCD Experiments

Process:	$\alpha_s(m_Z)$	Q (GeV)
Deep inelastic scattering	0.118 (6)	1.7
R in τ lepton decay	0.123 (4)	1.8
ψ, Υ spectroscopy	0.110 (6)	2.3
Transverse momentum of W production	0.121 (24)	4.
Deep inelastic scattering (evolution)	0.112 (4)	5.
Event shapes in e^+e^- annihilation	0.121 (6)	5.8,9.1
Rate for ψ, Υ decay	0.108 (10)	9.5
R in e^+e^- annihilation (20–65 GeV)	0.124 (21)	35.
R in Z^0 decay	0.124 (7)	91.2

本表所示的$\alpha_s(m_Z)$值是将实验结果与微扰 QCD 用最小减除给出的理论表达式拟合得到的。已经利用重正化群方程将α_s的值演化到$Q = m_Z$。R是指强子与轻子的截面或分宽度之比。最后显示数字的括号中的数字是的标准误差。标记为“Q”的列意思是进行测量时的Q值(通常，这些测量值在Q的一个范围内进行平均，而那样的平均在引用的α_s值中被考虑到了)。这个表是基于 I. Hinchliffe 在他为 Particle Data Group. *Phys. Rev.* **D50**,1297(1994)撰写的文章中的编辑结果。该文包含了一组完整的参考文献，并讨论了这些确定值的不确定性来源。

表中显示了从每一项测量中提取的α_s的值，用参考惯例的值$\alpha_{s\overline{\rm MS}}(m_Z^2)$表示。我们看到，有几个实验对$\alpha_s$的确定达到了 5%的精确度，而且在这个水平上各种不同的确定值之间是一致的。在图 17.23 中，我们已经绘制了表 17.1 中所示的α_s的原始值(在转换到一个公共标度之前)，与得到每个α_s的动量标度Q对应。这种比较对α_s的跑动给出了一个惊人的直接验证。

在这一章的开始，我们只使用几个简单的原理就写下一个强相互作用的候选基本理论：夸克的存在和它们的量子数识别，并认为夸克相互作用的理论应该是渐进自由的规范理论。值得注意的是，这些简单的考虑引导我们得到了强相互作用的描述，这种描述对于硬散射区域中很大范围的现象，在定量上都是正确的，在这个区域，渐近自由可以被用作为计算的工具。

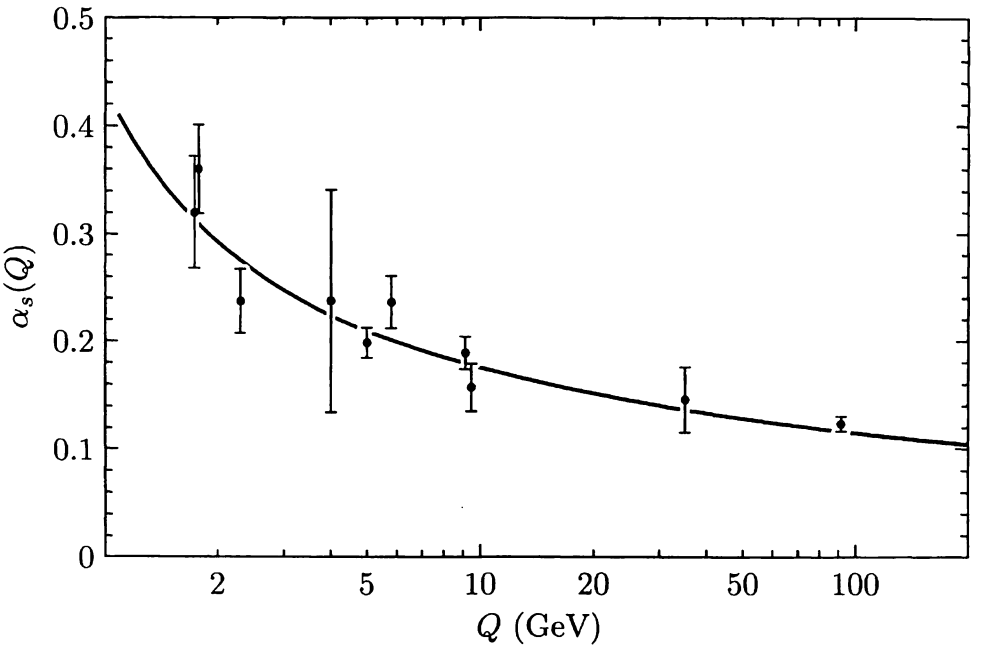


图 17.23 对α_s的测量，对应动量标度Q处所做的实验来绘制的。通过对表 17.1 中列出的$\alpha_s(m_Z)$的值进化反向演化到表中所示的Q值来构建此图。e^+e^-事件形状的值被分成两个点，分别对应于 TRISTAN 和 LEP 加速器上的实验。将这些值与初始条件为$\alpha_s(m_Z) = 0.117$时的重正化群演化的理论期望值进行比较。

Chapter 18

算符乘积和有效顶点

我们在第17章对QCD的分析是建立在渐近自由的原理上的。这说明弱耦合微扰理论可以可靠地处理具有大动量转移的强相互作用过程。然而，到目前为止，我们很少在QCD中使用更强大的工具——重正化群。在本章中，我们将研究QCD中Callan-Symanzik方程的一些含义。我们将看到，渐近自由理论有自己的特征标度行为，其修正的形式是动量标度的对数的反常幂次。尽管这些修正普遍比第13章中研究的标量场论的修正要弱，然而它们在强相互作用中有重要的定性效应。

我们首先考虑QCD中质量项的标度律，直接使用我们在第12.4和12.5节中用来描述ϕ^4质量项的形式理论。然而，其他的应用需要一个更强大的理论工具，即**算符乘积展开**。第18.3节介绍了量子场论中算符的乘积的一般描述，并举例说明了这种算符乘积如何受到Callan-Symanzik方程的限制。最后两节利用这个工具对QCD中的深度非弹性散射和其他硬过程发展了一个新的观点。

18.1 夸克质量参数的重正化

到目前为止，我们一直认为夸克的质量足够小，在高能过程中可以忽略不计。即使对于轻夸克u, d, s，这也不总是一个充分的假设；对于较重的夸克c, b, t，质量会有非常重要的效应。然而，由于孤立的夸克不存在，所以不可能清楚地定义夸克的质量。在接下来的讨论中，我们将把夸克质量看作是QCD微扰理论的一个参数，由在某个重正化标度M下的重正化方案来定义。

因为我们像定义耦合常数一样定义夸克质量，通过重正化约定，我们应该期望这个参数会根据重正化群的演化而跑动，所以不同的质量参数值应用于不同的

过程。我们说，我们的原始方案导致了一个**有效的**夸克质量，它依赖于它被求值时的动量标度。在这一节中，我们将计算出这个有效质量对动量标度的领头依赖关系。

有效质量项的基本形式见第12.5节。为了添加质量项到QCD拉格朗日量,我们必须首先用标度为M的重正化方案来定义质量算符$(\bar{q}q)$。然后我们可以定义夸克质量，通过在拉格朗日量添加如下项

$$\Delta\mathcal{L}_m = -m(\bar{q}q)_M. \tag{18.1}$$

在这个讨论中，我们将假设夸克质量m足够小，所以我们只需要保留m的领头项。为了简单起见，我们还假设只有一个夸克味道的质量项。

在零质量极限下，夸克场的算符$(\bar{q}q)$的格林函数是

$$\begin{aligned} G^{(n,k)}(x_1,\ldots,x_n,&y_1,\ldots,y_n,z_1,\ldots,z_k) \\ &= \langle q(x_1)\cdots q(x_n)\bar{q}(y_1)\cdots\bar{q}(y_n)\bar{q}q(z_1)\cdots\bar{q}q(z_k)\rangle\,, \end{aligned} \tag{18.2}$$

遵守Callan-Symanzik方程

$$\left[M\frac{\partial}{\partial M}+\beta\frac{\partial}{\partial g}+2n\gamma+k\gamma_{\bar{q}q}\right]G^{(n,k)}(\{x_i\},\{y_i\},\{z_j\},g,M)=0, \tag{18.3}$$

其中γ是夸克场的反常量纲，$\gamma_{\bar{q}q}$是算符$\bar{q}q$的反常量纲。如果根据式(18.1)将质量项包含在拉格朗日量中，n个夸克场和n个反夸克场的格林函数满足

$$\left[M\frac{\partial}{\partial M}+\beta\frac{\partial}{\partial g}+2n\gamma+\gamma_{\bar{q}q}m\frac{\partial}{\partial m}\right]G^{(n)}(\{x_i\},\{y_i\},g,m,M)=0. \tag{18.4}$$

对m的导数算出了质量算符被使用的次数。在第12.5节中，我们用带质量量纲的变量m替换了无量纲变量。而在QCD中，将有量纲的参数m考虑为耦合常数同样方便。Callan-Symanzik方程的解将会包含一个跑动质量参数$\overline{m}(Q)$，它依赖于格林函数的典型动量Q。该参数被定义为类似于式(12.126)的重正化群方程的解。对于这个情况，方程是

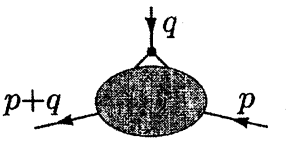
$$\frac{d}{d\log(Q/M)}\overline{m}=\gamma_{\bar{q}q}(\bar{g})\cdot\overline{m}, \tag{18.5}$$

其中初始条件为

$$\overline{m}(M)=m. \tag{18.6}$$

量$\overline{m}(Q)$是**有效质量**，应该用它来计算在夸克产生中或者动量转移为Q的散射过程中质量的效应。

为显式计算$\overline{m}(Q)$，我们需要找出质量算符的反常量纲$\gamma_{\bar{q}q}$。如12.4节所解释的，这是可以完成的。我们显式地定义算符的归一化，其方案是处于重正化夸克场之间的$(\bar{q}q)$的顶点函数应满足：



$$= 1 \tag{18.7}$$

其中$p^2 = q^2 = (p+q)^2 = -M^2$。为了保持(18.7)，我们需要一个具有算符插入结构的抵消项顶点$\delta_{\bar{q}q}$。然后，和式(12.112)一样，反常量纲在单圈阶被给出为

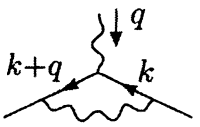
$$\gamma_{\bar{q}q} = M\frac{\partial}{\partial M}\left(-\delta_{\bar{q}q} + \delta_2\right), \tag{18.8}$$

其中δ_2是夸克场强重正化的抵消项，在图16.8中定义。规范不变算符$(\bar{q}q)$的关联函数是规范不变的，因此该函数的Callan-Symanzik方程中的各项加起来必须是一个规范不变的结果。由于$\beta(g)$的领头系数与规范和其他约定无关，由式(18.3)可知，$\gamma_{\bar{q}q}$的领头系数也与约定无关。抵消项δ_2和$\delta_{\bar{q}q}$都依赖于规范。这个论证表明，在(18.8)中规范依赖性必须消去。在接下来的计算中，以及在本章的其他反常量纲的计算中，我们将始终如一地使用Feynman-'t Hooft规范。

我们已经在第16.4节的Feynman-'t Hooft规范下计算了抵消项δ_2的发散部分。在QCD下对结果(16.77)中的群论因子进行计算，我们发现

$$\delta_2 = -\frac{4}{3}\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(M^2)^{2-d/2}}. \tag{18.9}$$

为计算$\delta_{\bar{q}q}$，我们必须算出顶点(18.7)的单圈修正。这是由下图给出的



$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}(ig)^2 t^a \gamma^\mu \frac{i(\not{k}+\not{q})}{(k+q)^2}\cdot 1 \cdot \frac{i\not{k}}{k^2} t^a \gamma_\mu \frac{-i}{(k-p)^2}. \tag{18.10}$$

在这个图的表达式中，因子1表示$\bar{q}q$算符插入。在夸克数流$j^\nu = \bar{q}\gamma^\nu q$的重正化的对应图中，这个因子将被$\gamma^\nu$代替。由于我们只需要顶点重正化(18.10)的发散部分，我们可以用大k值下的被积函数来近似它，那么这个图就变成了



$$\begin{aligned}
&\sim \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}(ig)^2 t^a \gamma^\mu \frac{i\not{k}}{k^2}\cdot 1 \cdot \frac{i\not{k}}{k^2} t^a \gamma_\mu \frac{-i}{k^2} \\
&\sim -i\frac{4}{3}g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{d\cdot k^2}{(k^2)^3} \\
&\sim \frac{4}{3}g^2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{(4\pi)^2}\Gamma(2-\tfrac{d}{2}).
\end{aligned} \tag{18.11}$$

为了保持归一化条件(18.7)，我们必须加上抵消项

$$\delta_{\bar{q}q} = -4 \cdot \frac{4}{3}\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(M^2)^{2-d/2}}. \tag{18.12}$$

组合(18.8),(18,9),(18,12)，我们发现

$$\gamma_{\bar{q}q} = -8\frac{g^2}{(4\pi)^2}. \tag{18.13}$$

正如我们在前一段所指出的，夸克数流的反常量纲γ_j可以通过非常相似的计算得到。这将很好地检验我们的形式理论，因为，正如我们在式(12.110)的上面所讨论的，守恒流被其积分——守恒荷——来明确地归一化，所以反常量纲必须为零。如果我们将(18.10)中的1代为γ^ν并使用相同的一组近似来化简积分，我们会在分子中发现有狄拉克矩阵结构为

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu \not{k}\gamma^\nu \not{k}\gamma_\mu &= \frac{1}{d}k^2\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma_\lambda\gamma_\mu \\
&= \frac{1}{4}(-2)^2 k^2\gamma^\nu.
\end{aligned} \tag{18.14}$$

然后，代替(18.12)，我们需要抵消项

$$\delta_j = -\frac{4}{3}\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(M^2)^{2-d/2}}. \tag{18.15}$$

将这个结果和(18.9)结合，我们发现

$$\gamma_j = 0, \tag{18.16}$$

与我们的普遍论点一致。

如果我们用显式因子$\log(\Lambda^2/Q^2)$代替(18.11)中的Γ函数，然后用抵消项(18.12)减除发散，我们发现顶点图的行为如下



$$= \frac{4}{3}\cdot 4\frac{g^2}{(4\pi)^2}\log\frac{M^2}{Q^2}. \tag{18.17}$$

在小的外动量时这个图给出了增强。这个增强中的一些与外部夸克场(规范依赖的)重标度相关；关系式(18.8)告诉我们如何在这个对数中提取出规范不变的与



图18.1 对夸克有效质量的动量依赖性给出了领头对数贡献的图

有效质量的增强相关联的部分。因此，对于α_s阶，

$$\overline{m}(Q) = m \cdot \left(1 + 8\frac{g^2}{(4\pi)^2}\log\frac{M^2}{Q^2}\right). \tag{18.18}$$

为了更精确地计算有效质量的动量依赖关系，我们必须将计算中的另外两个特点加以考虑。首先，量$(\alpha_s \log(M^2/Q^2))$可能会变成1阶，在这种情况下，我们必须考虑形式为$(\alpha_s \log(M^2/Q^2))^n$的所有领头对数项。这种类型的贡献来自图18.1中所示的所有图。其次，耦合常数α_s本身是动量标度的函数，进一步给出了来自小Q贡献的增强。这两种效应都可以通过求解重正化群方程(18.5)得到。在g^2的领头阶，该方程取为显式形式

$$\frac{d}{d\log(Q/M)}\overline{m} = -8\frac{\bar{g}^2}{(4\pi)^2}m = -2\frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi}\overline{m}. \tag{18.19}$$

以(17.17)的形式将$\bar{g}$的重正化群方程的解插入，得到

$$\frac{d}{d\log(Q/M)}\overline{m} = -\frac{8}{b_0\log(Q^2/\Lambda^2)}\overline{m}, \tag{18.20}$$

其中b_0为QCD β函数的第一个系数，Λ现在为(17.16)中定义的QCD标度参数。满足初始条件(18.6)的这个方程的积分是

$$\overline{m}(Q^2) = \left(\frac{\log(M^2/\Lambda^2)}{\log(Q^2/\Lambda^2)}\right)^{4/b_0} m. \tag{18.21}$$

回想一下，在QCD中$b_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f$。另一种方式表达(18.21)是写为

$$\overline{m}(Q^2) = \left(\frac{\alpha_s(Q^2)}{\alpha_s(M^2)}\right)^{4/b_0} m. \tag{18.22}$$

举个例子，取$n_f = 4$和$\Lambda = 150$ MeV；然后从$Q = 100$ GeV到$Q = 1$ GeV，轻夸克的有效质量大约增加了2倍。

我们刚才用来计算夸克质量算符的QCD增强的方法同样适用于任何其他的规范不变算符的矩阵元。让我们在本节结束时，以更一般的形式概括了该论证的结论。

设$\mathcal{O}(x)$为QCD中的任何规范不变算符。正如我们看到的质量项，这个算符的矩阵元的单圈修正可能包含与$\alpha_s \log(M^2/Q^2)$成正比的增强或抑制项。其中Q是由$\mathcal{O}(x)$介导的QCD过程的动量标度，M是用来定义算符归一化的重正化标度。这些与单圈修正中算符归一化具体相关的部分由反常量纲$\gamma_{\mathcal{O}}$给出。对于一个包含n个夸克或反夸克场和k个胶子场的算符

$$\gamma_{\mathcal{O}} = M\frac{\partial}{\partial M}\left(-\delta_{\mathcal{O}} + \frac{n}{2}\delta_2 + \frac{k}{2}\delta_3\right), \tag{18.23}$$

其中$\delta_{\mathcal{O}}$是保持算符归一化条件所需的抵消项，δ_2和δ_3是图16.8中定义的夸克和胶子场强重正化的抵消项。从式(18.23)中，我们可以得到$\gamma_{\mathcal{O}}$的显式单圈表达式

$$\gamma_{\mathcal{O}} = -a_{\mathcal{O}}\frac{g^2}{(4\pi)^2}. \tag{18.24}$$

利用这一结果，我们可以求解$\mathcal{O}(x)$的系数的重正化群方程，得到QCD重正化因子

$$\left(\frac{\log(M^2/\Lambda^2)}{\log(Q^2/\Lambda^2)}\right)^{a_{\mathcal{O}}/2b_0}, \tag{18.25}$$

其中b_0为QCDβ函数的第一个系数，

$$b_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f. \tag{18.26}$$

QCD的重正化(18.25)在小动量处是一个增强，如果$a_{\mathcal{O}} > 0$

在本章的其余部分，关于QCD对数带来的这种增强或抑制，我们将提供更多的例子。在许多情况下，我们会看到这些因子会导致显著的和重要的物理效应。

18.2 弱相互作用的 QCD 重正化

我们关于QCD增强因子出现的下一个例子出现在强子的弱相互作用理论中。在17.3节。我们引入了夸克和轻子的弱相互作用耦合，我们用一个有效的拉格朗日量来描述它。为了在这里进行分析，我们需要了解更多关于弱相互作用结构的细节，因此我们在本节开始时将介绍这些事实。第20章将系统地讨论夸克和轻子的弱相互作用的完整结构。

正如我们在第17.3节中所讨论的，夸克和轻子之间的弱相互作用是由一个虚W矢量玻色子交换产生的有效拉格朗日量来描述的。在(17.31)中，我们写出了夸克和轻子耦合的有效顶点:

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{g^2}{2m_W^2}\bar{\ell}\gamma^\mu\frac{(1-\gamma^5)}{2}\nu\bar{u}\gamma_\mu\frac{(1-\gamma^5)}{2}d + \text{h.c.} \tag{18.27}$$

在这一章我们将主要关注这种相互作用在动量标度远远大于1 GeV下的效应。因此，我们忽略夸克质量。弱相互作用顶点中出现的所有费米子场乘以左手投影子$\frac{1}{2}(1-\gamma^5)$。在本节其余部分，我们不会显式写出这个投影子；相反，我们将用下标L来表示投影。我们还将引入(17.32)给出的费米常数。然后(18.27)可以改写为

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}}\left(\bar{\ell}_L\gamma^\mu\nu_L\right)\left(\bar{u}_L\gamma_\mu d_L\right) + \text{h.c.} \tag{18.28}$$

有一个类似的顶点表示夸克对之间的W交换；其形式是

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}}\left(\bar{d}_L\gamma^\mu u_L\right)\left(\bar{u}_L\gamma_\mu d_L\right) + \text{h.c.} \tag{18.29}$$

然而，为了讨论这一章，我们需要写一个修正的、较少近似的表达式。当我们在20章详细讨论弱相互作用理论时，我们将学习到电荷+2/3的夸克(u,c,t)通过经幺正旋转的弱相互作用与电荷$-1/3$的夸克(d,s,b)耦合。例如，u耦合到组合

$$\cos\theta_c\, d + \sin\theta_c\, s, \tag{18.30}$$

再加上b的小混合，本节我们将忽略。混合角θ_c，叫做**Cabibbo角**。由于这种旋转，弱相互作用有效拉格朗日量将夸克和夸克耦合，实际上包含许多项，其中一个特别重要的项是

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}}\cos\theta_c\sin\theta_c(\bar{d}_L\gamma^\mu u_L)(\bar{u}_L\gamma_\mu s_L). \tag{18.31}$$

这一项允许s夸克通过$s \to u\bar{u}d$过程而衰变。同理，(18.28)的旋转产生有效相互作用

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \sin\theta_c (\bar{\ell}_L \gamma^\mu \nu_L)(\bar{u}_L \gamma_\mu s_L), \tag{18.32}$$

这导致了衰变$s \to u\bar{\nu}\ell$。这些弱相互作用过程分别被描述为**非轻子**和**半轻子**衰变过程。类似的表达式也适用于其他重夸克。

鉴于(18.31)和(18.32)在基本层面上描述了s夸克的弱相互作用耦合，我们现在讨论QCD对数对这些耦合的修正。我们在前一节已经看到，QCD修正对基本拉格朗日量中夸克质量项的强度的增强，有深远的影响。现在我们将研究弱相互作用的强度是否可以得到类似的增强。

我们首先考虑半轻子弱相互作用算符(18.32)。轻子的费米子双线性量不受QCD的影响，因此该算符的QCD增强与它如下夸克分量的QCD增强是一样的

$$\bar{u}_L \gamma_\mu s_L. \tag{18.33}$$

但是，这个算符是一个流，所以有$\gamma = 0$。用图表示，则来源于图18.2所示的图的对数增强，被夸克场强重正化所抵消，正如我们在18.1节讨论流顶点时已经看到的。左手投影子$\frac{1}{2}(1-\gamma^5)$可以由对易来穿过图而对最终结果没有影响。同样的结论也适用于连接u和d夸克的半轻子弱相互作用。这意味着(17.35)中给出的深度非弹性中微子散射截面的归一化不受QCD对数的影响。

然而，在非轻子弱相互作用的情况下，QCD的效应就不那么简单了。让我们首先计算Feynman图——弱相互作用顶点(18.31)的重正化给出了领头修正，然后在后面的阶段，为这些结果建立起重正化群解释。

在α_s阶，非轻子弱相互作用顶点从图18.3中的图得到修正。注意，第一个图正是在半轻子情况下发现的流重正化。第二图给出了第二个夸克流的类似重正化。在γ的计算中，这两个贡献抵消了四个夸克场的场强重正化的贡献。图18.3的其余四个图是新的贡献，它们贡献了潜在的较大的重标度因子。

我们现在计算这些图，从图18.3中的第三个图开始。在第18.1节的计算中，我们感兴趣的是对数发散贡献，与圈动量k的值远大于外部动量的情况相关，

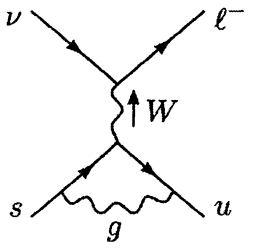


图18.2 半轻子的弱相互作用顶点强度的QCD修正。

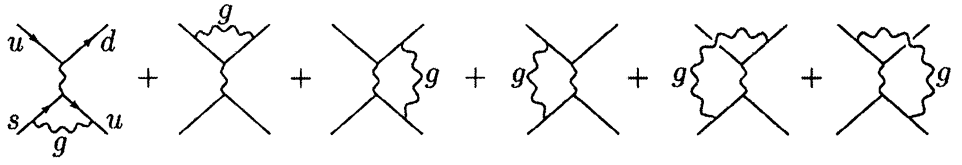


图18.3 非轻子弱相互作用顶点强度的QCD修正。

提取这个贡献最简单的方法在于，在零外动量近似下计算每个图。在写这些图的表达式时，我们将省略前置因子

$$\frac{4G_F}{\sqrt{2}}\cos\theta_c\sin\theta_c. \tag{18.34}$$

我们将保留夸克场来表示外部状态，这样我们的最终表达式将具有重标度算符的形式。

使用这个符号，图18.3中的第三个图的值是



$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}(ig)^2\frac{-i}{k^2}\left(\bar{d}_L\gamma^\nu t^a\frac{i\not{k}}{k^2}\gamma^\mu u_L\right)\left(\bar{u}_L\gamma_\nu t^a\frac{-i\not{k}}{k^2}\gamma_\mu s_L\right). \tag{18.35}$$

利用k积分的对称性，我们提取出发散的部分:



$$\begin{aligned} &= ig^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{k^2/d}{(k^2)^3}\left(\bar{d}_L\gamma^\nu t^a\gamma^\lambda\gamma^\mu u_L\right)\left(\bar{u}_L\gamma_\nu t^a\gamma_\lambda\gamma_\mu s_L\right)\\ &= -\frac{g^2}{4}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2}\left(\bar{d}_L\gamma^\nu t^a\gamma^\lambda\gamma^\mu u_L\right)\left(\bar{u}_L\gamma_\nu t^a\gamma_\lambda\gamma_\mu s_L\right). \end{aligned} \tag{18.36}$$

为了把夸克场的乘积转换成更熟悉的形式，我们应用3.4节最后讨论的Fierz变换。如果不存在颜色矩阵t^a，那么费米子场的乘积就正好是(3.82)中出现的那个，我们就会发现

$$\left(\bar{d}_L\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\mu u_L\right)\left(\bar{u}_L\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\mu s_L\right) = 16\bar{d}_L\gamma^\nu u_L\bar{u}_L\gamma_\nu s_L. \tag{18.37}$$

矩阵t^a重定向(redirect)了夸克场的色量子数。为澄清这一点，我们需要关

于颜色的等式(3.77)的类比。为找到这个等式，考虑颜色不变量

$$(t^a)_{ij}(t^a)_{k\ell}. \tag{18.38}$$

指标i,k根据颜色的表示3进行变换；指标j,ℓ根据$\bar{3}$变换。因此，(18.38)一定是对这些指标进行缩并的两种可能方法的线性组合，

$$A\delta_{i\ell}\delta_{kj} + B\delta_{ij}\delta_{k\ell}. \tag{18.39}$$

常数A和B可以确定，通过用δ_{ij}和δ_{jk}来缩并(18.38)和(18.39)并调整A和B来使(18.39)的缩并遵循等式

$$\mathrm{tr}[t^a](t^a)_{k\ell} = 0; \qquad (t^at^a)_{i\ell} = \tfrac{4}{3}\delta_{i\ell}. \tag{18.40}$$

这给出了等式

$$(t^a)_{ij}(t^a)_{k\ell} = \tfrac{1}{2}\big(\delta_{i\ell}\delta_{kj} - \tfrac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{k\ell}\big). \tag{18.41}$$

$SU(N)$的生成元在基础表示中也存在类似的关系，在这种情况下，$(1/3)$被$(1/N)$取代。

将(18.41)代入(18.36)我们发现等式的第一项产生了一个新的四费米子算符

$$\big(\bar{d}_{Li}\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\mu u_{Lj}\big)\big(\bar{u}_{Lj}\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\mu s_{Li}\big), \tag{18.42}$$

其中i,j是颜色指标。应用(18.37)中的Fierz重排列，然后再应用另外的重排(3.79)，我们可以将该算符转换为形式

$$16(\bar{d}_{Li}\gamma^\nu u_{Lj})(\bar{u}_{Lj}\gamma_\nu s_{Li}) = 16(\bar{u}_{Lj}\gamma^\nu u_{Lj})(\bar{d}_{Li}\gamma_\nu s_{Li}). \tag{18.43}$$

(3.79)中的负号由交换费米场的顺序的负号来补偿。最终的结果是色单态夸克流的乘积；然而，这些流中的场的关联方式不同于初始算符。

我们对这个图的最终计算结果是



$$= -4g^2\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2}\big[\tfrac{1}{2}\bar{u}_L\gamma^\mu u_L\bar{d}_L\gamma_\mu s_L - \tfrac{1}{6}\bar{d}_L\gamma^\mu u_L\bar{u}_L\gamma_\mu s_L\big]. \tag{18.44}$$

图18.3的第四个图给出了完全相同的贡献。

图18.3中最后两个图的计算非常相似。第五个图给出了



$$\begin{aligned}
&= \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}(ig)^2\frac{-i}{k^2}\Big(\bar{d}_L\gamma^\nu t^a\frac{i\not{k}}{k^2}\gamma^\mu u_L\Big)\Big(\bar{u}_L\gamma_\mu t^a\frac{i\not{k}}{k^2}\gamma_\nu s_L\Big)\\
&= -ig^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{k^2/d}{(k^2)^3}\big(\bar{d}_L\gamma^\nu t^a\gamma^\lambda\gamma^\mu u_L\big)\big(\bar{u}_L\gamma_\mu t^a\gamma_\lambda\gamma_\nu s_L\big)\\
&= +\frac{g^2}{4}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2}\big(\bar{d}_L\gamma^\nu t^a\gamma^\lambda\gamma^\mu u_L\big)\big(\bar{u}_L\gamma_\mu t^a\gamma_\lambda\gamma_\nu s_L\big).
\end{aligned} \tag{18.45}$$

利用Fierz等式(3.79)可将四费米子算符简化为:

$$\begin{aligned}(\bar{d}_L\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\mu u_L)(\bar{u}_L\gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\nu s_L) &= +(\bar{d}_L\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma_\lambda\gamma_\nu s_L)(\bar{u}_L\gamma_\mu u_L)\\ &= +(-2)^2(\bar{d}_L\gamma^\mu s_L)(\bar{u}_L\gamma_\mu u_L)\\ &= 4(\bar{d}_L\gamma^\mu u_L)(\bar{u}_L\gamma_\mu s_L).\end{aligned} \tag{18.46}$$

同样，我们必须使用等式(18.41)来减少颜色矩阵的乘积。同样，这个等式的第一项需要一个额外的Fierz变换。最终结果是


$$= +g^2\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2}\left[\tfrac{1}{2}\bar{u}_L\gamma^\mu u_L\bar{d}_L\gamma_\mu s_L - \tfrac{1}{6}\bar{d}_L\gamma^\mu u_L\bar{u}_L\gamma_\mu s_L\right]. \tag{18.47}$$

图18.3中的最后一个图给出了相同的贡献。这四个图的贡献的总和是

$$-3g^2\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2}\left[\bar{u}_L\gamma^\mu u_L\bar{d}_L\gamma_\mu s_L - \tfrac{1}{3}\bar{d}_L\gamma^\mu u_L\bar{u}_L\gamma_\mu s_L\right]. \tag{18.48}$$

提取图18.3的紫外发散部分，是我们用来计算弱相互作用顶点的Callan-Symanzik γ函数的正式方案的一部分。然而，在这时停下来，问问这种发散的物理意义是有益的。如果我们在有W玻色子的基本理论中计算它们，图18.3中的图就不会发散。在把弱相互作用写成有效的局域顶点时，我们用一个常数近似W玻色子传播子，假设它携带的动量k远远小于m_W:

$$\frac{1}{k^2-m_W^2}\to\frac{-1}{m_W^2}. \tag{18.49}$$

我们用来计算有效顶点QCD修正的近似，只在$k^2\ll m_W^2$的积分区域有效。在这个区域之外，我们必须使用完整的W传播子；这在分母中引入了一个额外的因子k^2，使积分收敛。因此，在直接计算QCD修正时，对图18.3求值时紫外发散项将被m_W处截断的对数项所取代。对数的下限是由外部动量确定的。在K介子——包含s夸克的最轻强子——的衰变中，这些是m_K阶的。因此，(18.48)中给出的修正应该是通过如下替换来计算的

$$g^2\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2}\to\frac{\alpha_s}{4\pi}\log\frac{m_W^2}{m_K^2}. \tag{18.50}$$

根据这种解释，我们可以把(18.48)重写成是对领头阶弱相互作用顶点的α_s阶修正。这个修正的效应是弱相互作用算符的重标度和修改:

$$\bar{d}_L\gamma^\mu u_L\bar{u}_L\gamma_\mu s_L \to$$
$$\Big(1+\frac{\alpha_s}{4\pi}\log\frac{m_W^2}{m_K^2}\Big)\bar{d}_L\gamma^\mu u_L\bar{u}_L\gamma_\mu s_L - 3\Big(\frac{\alpha_s}{4\pi}\log\frac{m_W^2}{m_K^2}\Big)\bar{u}_L\gamma^\mu u_L\bar{d}_L\gamma_\mu s_L. \tag{18.51}$$

注意，QCD修正不仅重标度了原始算符的归一化，而且引入了一个具有不同结构的新算符。这种计算使第12.4节中介绍的思想具体化，即改变局域算符的归一化的图也可以混合进具有相同量纲和量子数的不同算符。

因为(18.50)中的对数值大约是10。领头QCD修正的大小为1阶，因此高阶修正是重要的。为了对领头对数修正求和，我们回到重正化群分析。为了清晰起见，定义

$$\mathcal{O}^1 = \bar{d}_L\gamma^\mu u_L\bar{u}_L\gamma_\mu s_L; \qquad \mathcal{O}^2 = \bar{u}_L\gamma^\mu u_L\bar{d}_L\gamma_\mu s_L. \tag{18.52}$$

我们将使用下标0表示裸算符，而下标M表示的是算符服从重正化条件。从图18.3中我们已经发现，在标度M处适当归一化的有$\mathcal{O}^1$的夸克结构的算符矩阵元，被给出为

$$\mathcal{O}^1_M = \mathcal{O}^1_0 + \delta^{11}\mathcal{O}^1_0 + \delta^{12}\mathcal{O}^2_0, \tag{18.53}$$

其中δ^{ij}是抵消项，

$$\delta^{11} = -\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(M^2)^{2-d/2}}; \qquad \delta^{12} = +3\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(M^2)^{2-d/2}}. \tag{18.54}$$

反向的计算给出了用裸算符表示的$\mathcal{O}^2_M$：

$$\mathcal{O}^2_M = \mathcal{O}^2_0 + \delta^{21}\mathcal{O}^1_0 + \delta^{22}\mathcal{O}^2_0, \tag{18.55}$$

with

$$\delta^{21} = \delta^{12}, \qquad \delta^{22} = \delta^{11}.$$

然后，按照我们在式(12.109)中讨论的方式，在Callan-Symanzik方程中，$\mathcal{O}^1$和$\mathcal{O}^2$的算符重标度由一个连接这两个算符的矩阵γ^{ij}描述。将这个方程展开到g^2的第一阶，我们看到这个矩阵在单圈阶被给出为

$$\gamma^{ij} = M\frac{\partial}{\partial M}\big[-\delta^{ij}\big]. \tag{18.56}$$

因此我们发现

$$\gamma = \frac{g^2}{(4\pi)^2}\begin{pmatrix}-2 & 6\\ 6 & -2\end{pmatrix}, \tag{18.57}$$

作用在算符$\mathcal{O}^1$和$\mathcal{O}^2$的空间上。

推导出(18.57)所描述的重标度的物理效应的最简单方法是对角化该矩阵，从而找到算符的新基，其被重标度时不会混合。对于矩阵(18.57)，本征算符很容易看出为

$$\begin{aligned}\mathcal{O}^{1/2} &= \tfrac{1}{2}\left[\bar{d}_L\gamma^\mu u_L\bar{u}_L\gamma_\mu s_L - \bar{u}_L\gamma^\mu u_L\bar{d}_L\gamma_\mu s_L\right],\\ \mathcal{O}^{3/2} &= \tfrac{1}{2}\left[\bar{d}_L\gamma^\mu u_L\bar{u}_L\gamma_\mu s_L + \bar{u}_L\gamma^\mu u_L\bar{d}_L\gamma_\mu s_L\right].\end{aligned} \tag{18.58}$$

这些算符的上标是它们的同位旋量子数。算符$\mathcal{O}^{1/2}$在标签$\bar{d}$和$\bar{u}$的交换下是反对称的；因此，这两个同位旋1/2的场被结合为总同位旋为零，因此整个算符是同位旋1/2。该算符可以介导K介子的衰变，使其同位旋改变1/2个单位，如$K^0 \to \pi^+\pi^-$，但不能介导同位旋改变3/2个单位的过程，如$K^+ \to \pi^+\pi^0$。从实验上看，前一个类型的过程的发生几乎快了1000倍(这个观察称为$\Delta I = 1/2$规则)。因此，有趣的是，硬QCD修正已经区分了这些算符。

由(18.57)的本征值，得到本征算符(18.58)的Callan-Symanzik γ函数:

$$\gamma_{1/2} = -8\frac{g^2}{(4\pi)^2}; \qquad \gamma_{3/2} = +4\frac{g^2}{(4\pi)^2}. \tag{18.59}$$

根据式(18.24)和(18.25)，这意味着算符$\mathcal{O}^{1/2}$从硬QCD对数得到增强，而算符$\mathcal{O}^{3/2}$得到抑制。更明确地，我们可以把出现在原始非轻子弱相互作用顶点(18.31)中的算符写成

$$\left[\bar{d}_L\gamma^\mu u_L\bar{u}_L\gamma_\mu s_L\right]\Big|_{m_W} = \left[\mathcal{O}^{1/2}\right]\Big|_{m_W} + \left[\mathcal{O}^{3/2}\right]\Big|_{m_W}. \tag{18.60}$$

如上所述，下标是指算符被归一化处的质量标度。我们现在考虑与在较低的动量标度m_K下计算这个算符矩阵元时相关的QCD对数，将(18.60)右边的算符替换为在m_K处重新归一化的算符，并带着重标度因子(18.25)。这给出

$$\begin{aligned}\left[\bar{d}_L\gamma^\mu u_L\bar{u}_L\gamma_\mu s_L\right]\Big|_{m_W} = &\left(\frac{\log(m_W^2/\Lambda^2)}{\log(m_K^2/\Lambda^2)}\right)^{4/b_0}\left[\mathcal{O}^{1/2}\right]\Big|_{m_K}\\ &+\left(\frac{\log(m_W^2/\Lambda^2)}{\log(m_K^2/\Lambda^2)}\right)^{-2/b_0}\left[\mathcal{O}^{3/2}\right]\Big|_{m_K},\end{aligned} \tag{18.61}$$

其中，再次有$b_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f$。这个方程表明，与半轻子弱相互作用的情况不同，非轻子弱相互作用的有效拉格朗日量的整体归一化被QCD对数改变了。此外，有效拉格朗日量的夸克结构也发生了变化。

定量地，我们以$n_f = 4$和$\Lambda = 150$ MeV为例，发现

$$\left[\bar{d}_L\gamma^\mu u_L\bar{u}_L\gamma_\mu s_L\right]\Big|_{m_W} = 2.1\left[\mathcal{O}^{1/2}\right]\Big|_{m_K} + 0.7\left[\mathcal{O}^{3/2}\right]\Big|_{m_K}. \tag{18.62}$$

因此，从m_W到m_K的QCD对数修正给出了有效顶点的$\Delta I = 1/2$部分一个约3倍的增强*。在K衰变中观察到的$\Delta I = 1/2$规则需要20倍的增强因子。然而，这个增强的一部分被认为是来源于算符$\mathcal{O}^{1/2}_{m_K}$和$\mathcal{O}^{3/2}_{m_K}$的矩阵元在物理强子态之间的比例，这是由QCD动力学中软的、非微扰的部分决定的。

18.3 算符乘积展开

对上一节的发展进行描述的一种方式是说，我们研究了一种本质上是流乘积的相互作用，通过用一个局域算符代替这个算符乘积。然后我们通过算出这个算符的QCD重标度，导出了原始的复合相互作用的物理结果。在量子场论的许多情况下，用单个有效顶点代替算符的乘积的程序是有用的。因此，在这一节中，我们将暂停对QCD的研究，写出支配这一过程的一般形式理论。

让我们把上一节所描述的情况抽象如下：考虑一个量子场论过程，它包括两个算符$\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$，它们之间相隔一个小的距离$x$，以及其他位置远得多的场$\phi(y_i)$，或者还包含外部的物理态。在上面的例子中。这两个算符是出现在弱相互作用顶点上的夸克流，它们的间隔x是m_W^{-1}阶的距离，即W传播子的范围。包含K和π介子的外部态可以由产生和湮灭这些粒子的算符来描述。K通过弱相互作用而衰变的振幅，或任何这类的一般过程，可以从如下格林函数中提取出来

$$G_{12}(x; y_1, \cdots, y_m) = \langle \mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(0)\phi(y_1)\cdots\phi(y_m)\rangle\,, \tag{18.63}$$

考虑极限$x \to 0$，并固定y_i为远离原点。在这里和下面的讨论中，算符的乘积将被认为是编时的，就像我们在泛函积分下写场的乘积时发现的一样。

算符的乘积$\mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(0)$可能在0点附近产生最一般的局域扰动。但是，任何这样的扰动都可以被描述为被放置在0处的局域算符的效应。这局域算符必须具

---

*M. K. Gaillard and B W. Lee, Phys. Rev. Lett. 33, 108(1974); G. Altarelli andMaiani, Phys. Lett. 52B, 351(1974)

有乘积$\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2$的整体对称性量子数。但除此之外，它是不受限制的。把这个算符写成来自标准基的算符的线性组合是有用的。这个线性组合中的系数可以依赖于间隔x。一般情况下，量子场论中算符乘积是奇异的，所以当$x \to 0$时，某些系数可能具有奇异性。结合这些观察。Wilson提出通过用局域算符的线性组合来代替(18.63)中得算符乘积，来计算算符乘积的效应

$$\mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(0) \to \sum_n {C_{12}}^n(x)\mathcal{O}_n(0), \tag{18.64}$$

其中系数${C_{12}}^n(x)$为c数函数。这个**算符乘积展开**(OPE)将只依赖于$\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$算符和它们的间隔，并且与格林函数中出现的其他场的标识和位置无关。

由式(18.64)可知，对于小x，格林函数(18.63)可以展开为:

$$G_{12}(x; y_1, \cdots, y_m) = \sum_n {C_{12}}^n(x) G_n(y_1, \cdots y_m), \tag{18.65}$$

where

$$G_n(y_1, \cdots, y_m) = \langle \mathcal{O}_n(0)\phi(y_1)\cdots\phi(y_m)\rangle\,, \tag{18.66}$$

所有对x的依赖性现在都由OPE系数函数携带。在前一节的例子中，通过(18.61)中系数对m_W的依赖性，最终振幅以一种相当复杂的方式依赖于两个算符之间的小间隔。从算符乘积展开的观点来看，这种依赖性由系数函数携带，并对所有矩阵元都能确定，当这些矩阵元被计算时。

在第18.1和18.2节中，我们使用重正化群来计算算符矩阵元的增强或抑制因子。因此，很自然地，期望算符乘积系数的形式也由重正化群决定。现在我们来求出这个关系式。首先，我们更精确地重写展开式(18.64)。这种关系中出现的算符必须在某个重正化标度M下定义，则算符乘积展开为:

$$\left[\mathcal{O}_1(x)\right]_M \left[\mathcal{O}_2(0)\right]_M = \sum_n {C_{12}}^n(x; M)\left[\mathcal{O}_n(0)\right]_M. \tag{18.67}$$

注意，系数函数可以依赖于M，因为它们必须吸收进M相关的算符重标度。如果我们使用(18.67)的左边来计算(18.63)，则该函数遵循Callan-Symanzik方程

$$\left[M\frac{\partial}{\partial M} + \beta\frac{\partial}{\partial g} + m\gamma + \gamma_1 + \gamma_2\right] G_{12}(x; y_1, \cdots, y_m; M) = 0. \tag{18.68}$$

类似地，对于在M处归一化的算符$\mathcal{O}_n$，格林函数(18.66)服从

$$\Big[M\frac{\partial}{\partial M}+\beta\frac{\partial}{\partial g}+m\gamma+\gamma_n\Big]G_n(y_1,\cdots,y_m;M)=0. \tag{18.69}$$

通过将(18.68)应用到(18.65)的右边，我们发现只有当OPE系数函数服从Callan Symanzik方程时，这些结果才是一致的

$$\Big[M\frac{\partial}{\partial M}+\beta\frac{\partial}{\partial g}+\gamma_1+\gamma_2-\gamma_n\Big]C_{12}{}^n(x;M)=0. \tag{18.70}$$

我们现在用我们标准方法解这个方程。首先，让我们应用量纲分析。如果算符$\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2,\mathcal{O}_n$的量纲为$d_1,d_2,d_n$，系数函数$C_{12}{}^n(x)$的量纲必须为$\big(\text{质量}\big)^{d_1+d_2-d_n}$，因此，

$$C_{12}{}^n(x)=\Big(\frac{1}{|x|}\Big)^{d_1+d_2-d_n}\widetilde{C}(xM), \tag{18.71}$$

其中$\tilde{C}(xM)$为无量纲函数。根据第12.3节的方法这个函数由(18.70)确定。因此，

$$C_{12}{}^n(x)=\Big(\frac{1}{|x|}\Big)^{d_1+d_2-d_n}c(\bar{g}(1/x))\exp\Big[\int\limits_{1/x}^{M}d\log M'\big(\gamma_n-\gamma_1-\gamma_2\big)\Big], \tag{18.72}$$

其中$c(\bar{g})$是跑动耦合常数处于间隔标度$1/x$处的无量纲函数。

在重正化群的不动点上，γ函数将取确定的值$\gamma_{j*}=\gamma_j(g_*)$。于是，解(18.72)可以被计算为

$$C_{12}{}^n(x)=\Big(\frac{1}{|x|}\Big)^{d_1+d_2-d_n}c(g_*)\exp\Big[\log(xM)\big(\gamma_{n*}-\gamma_{1*}-\gamma_{2*}\big)\Big]. \tag{18.73}$$

因此，在这种情况下，

$$C_{12}{}^n(x)\sim\Big(\frac{1}{|x|}\Big)^{d_1^*+d_2^*-d_n^*}, \tag{18.74}$$

where

$$d_j^*=d_j+\gamma_j(g_*) \tag{18.75}$$

为算符$\mathcal{O}_j$在不动点处真实的标度量纲。

对于渐近自由理论的情况，我们在第18.1节中计算出的标度关系很复杂。在微扰理论的领头阶中，三个γ函数取的形式为(18.24)。然后，解(18.72)取的形式为

$$C_{12}{}^n(x)\sim\Big(\frac{1}{|x|}\Big)^{d_1+d_2-d_n}\Big(\frac{\log(1/|x|^2\Lambda^2)}{\log(M^2/\Lambda^2)}\Big)^{(a_n-a_1-a_2)/2b_0}. \tag{18.76}$$

在第18.2节的例子中，原始的算符在间隔m_W^{-1}处是量纲为3和$\gamma = 0$的流，而最终的局域算符是量纲为6的流。因此。(18.76)正确地再现了(18.61)对m_W的依赖关系。注意，对于一个流乘积，重正化群依赖性不那么复杂，它有一个固定的归一化，独立于标度。这种特殊情况在算符乘积展开的应用中经常发生。

我们在没有考虑算符混合的情况下写出了式(18.70)。然而，正如我们已经看到的，算符混合通常是OPE应用的一个重要部分。通过使用γ函数的矩阵值，重写出导致了(18.70)的分析，可以很直接地包含进这种效应。例如，有了算符混合，G_n的Callan-Symanzik方程将修改为

$$\Big[\delta_{np}\Big(M\frac{\partial}{\partial M}+\beta\frac{\partial}{\partial g}+m\gamma\Big)+\gamma_{np}\Big]G_p(y_1,\cdots,y_m;M)=0. \tag{18.77}$$

有了这些变化，(18.70)就变成了

$$\begin{aligned}\Big[M\frac{\partial}{\partial M}+\beta\frac{\partial}{\partial g}\Big]C_{12}{}^n(x;M)+\gamma_{1k}C_{k2}{}^n(x;M)\\ +\gamma_{2k}C_{1k}{}^n(x;M)-\gamma_{kn}C_{12}{}^k(x;M)=0.\end{aligned} \tag{18.78}$$

注意，前两个γ矩阵从左边作用于OPE系数，而第三个矩阵从右边作用。在流乘积的情况下，前两个γ矩阵消失，(18.78)简化为

$$\Big[M\frac{\partial}{\partial M}+\beta\frac{\partial}{\partial g}\Big]C_{12}{}^n(x;M)-C_{12}{}^k(x;M)\gamma_{kn}=0. \tag{18.79}$$

该方程将在18.5节的分析中发挥重要作用。

18.4 e^+e^-湮没的算符分析

不难想象，流彼此放置相距很近的矩阵元，和流彼此传递硬动量转移的矩阵元之间存在着联系。因此，我们可以期待算符乘积展开的思想将为我们理解QCD中的硬散射过程理论提供一个新的观点。在这一节和下一节，我们将计算出算符乘积展开与第17章微扰QCD分析之间的关系。

我们从讨论e^+e^-湮灭成强子的总截面开始。在式(17.9)下，我们认为这个总截面可以用QCD微扰理论来计算，使用的α_s值对应于总质心能的标度。然而，这个论证是纯粹直觉的，有许多逻辑上的跳跃。在本节中，我们将对同样的结论进行更严谨的论证。

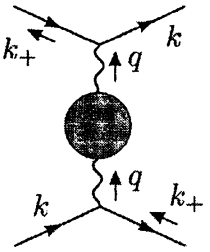


图18.4 其虚部产生了$e^+e^- \to$ 强子的总截面的图

为了得到算符乘积展开，我们必须把e^+e^-湮没到强子的总截面写成流乘积的矩阵元。为此，我们利用光学定理将总e^+e^-散射截面与向前散射$e^+e^- \to e^+e^-$的振幅联系起来。忽略电子的质量，我们从式(7.49)中可以看出

$$\sigma(e^+e^-) = \frac{1}{2s} \operatorname{Im} \mathcal{M}(e^+e^- \to e^+e^-). \tag{18.80}$$

为了计算$e^+e^- \to$ 强子的截面，我们在虚部的计算中只考虑了强子中间态的贡献。对于α的领头阶，但是对于强相互作用中的所有阶，这些贡献来自于只考虑图18.4的形式的图，并取真空极化中的强子贡献的虚部。

图18.4所示的图的值为

$$i\mathcal{M} = (-ie)^2 \bar{u}(k)\gamma_\mu v(k_+) \frac{-i}{s} \left(i\Pi_h^{\mu\nu}(q)\right) \frac{-i}{s} \bar{v}(k_+)\gamma_\nu u(k), \tag{18.81}$$

其中$s = q^2$, $\Pi_h^{\mu\nu}(q)$为真空极化的强子部分。根据Ward等式，这可以被写为

$$\Pi_h^{\mu\nu}(q) = (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)\Pi_h(q^2). \tag{18.82}$$

当$q^\mu q^\nu$项与外部电子流收缩时，给出零，因此只有$g^{\mu\nu}$项存在。为了计算(18.81)的电子旋量部分，我们利用了这样一个事实：在向前散射振幅中，初始和末态的动量与自旋是相等的。然后，对初始自旋求平均给出

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sum_{\text{spins}} \bar{u}(k)\gamma^\mu v(k_+)\bar{v}(k_+)\gamma_\mu u(k) &= \frac{1}{4} \operatorname{tr}\left[\not{k}\gamma^\mu \not{k}_+ \gamma_\mu\right] \\ &= \frac{1}{4} \cdot (-2) \cdot 4(k \cdot \mathbf{k}_+) \\ &= -s. \end{aligned} \tag{18.83}$$

因此,我们发现

$$\sigma(e^+e^- \to \text{hadrons}) = -\frac{4\pi\alpha}{s} \operatorname{Im} \Pi_h(s). \tag{18.84}$$

为了检验这个结果，我们可以回顾在QED(7.91)中Π的单圈值，或者看看式(7.92)中给出的这个表达式的虚部：

$$\operatorname{Im}\Pi(s+i\epsilon)=-\frac{\alpha}{3}\sqrt{1-\frac{4m^2}{s}}\left(1+\frac{2m^2}{s}\right). \tag{18.85}$$

结合(18.85)和(18.84)，我们得到了在e^+e^-湮灭中产生一个新的重轻子的正确领头阶截面，

$$\sigma(e^+e^-\to L^+L^-)=\frac{4\pi\alpha^2}{3s}\sqrt{1-\frac{4m^2}{s}}\left(1+\frac{2m^2}{s}\right). \tag{18.86}$$

如果我们将(18.86)乘以色因子3，并带上夸克电荷的平方对夸克味道求和，我们就得到了QCD的领头阶预测。

现在我们有了关系(18.84)，通过注意到强子真空极化仅仅是流乘积的一个矩阵元，我们来完成我们想要证明的联系。设J^μ为夸克的电磁流，

$$J^\mu=\sum_f Q_f\bar{q}_f\gamma^\mu q_f. \tag{18.87}$$

Then

$$i\Pi_h^{\mu\nu}(q)=-e^2\int d^4x\,e^{iq\cdot x}\left\langle 0\right|T\left\{J^\mu(x)J^\nu(0)\right\}\left|0\right\rangle. \tag{18.88}$$

在x趋向0的极限下，我们可以通过应用算符乘积展开来化简流乘积。因为我们要取乘积的真空期望值，我们只需要列出是规范不变的洛伦兹标量的算符贡献。因此，

$$J_\mu(x)J_\nu(0)\sim C_{\mu\nu}{}^{1}(x)\cdot 1+C_{\mu\nu}{}^{\bar{q}q}(x)\bar{q}q(0)+C_{\mu\nu}{}^{F^2}(x)(F^a_{\alpha\beta})^2(0)+\cdots. \tag{18.89}$$

注意，我们在右边包含了算符1，以及QCD中量纲为3和4的接下来可能的算符。因为算符$\bar{q}q$违反手征对称性，其系数函数必须有一个夸克质量的显式因子。因此，通过量纲分析，

$$C_{\mu\nu}{}^{1}\sim x^{-6},\qquad C_{\mu\nu}{}^{\bar{q}q}\sim mx^{-2},\qquad C_{\mu\nu}{}^{F^2}\sim x^{-2}, \tag{18.90}$$

当$x\to 0$时，级数中较高的项奇异性较小。

为了计算$\Pi_h^{\mu\nu}(q)$，我们需要对流乘积进行傅里叶变换。假设这个傅里叶变换确实是由短距离的极限主导的，我们可以通过对单个OPE系数进行傅里叶变换来计算它。因为流是守恒的，在OPE中该单个项和q^μ点乘时必须给出零，因此

变换的OPE取为形式

$$
\begin{aligned}
&-e^2\int d^4x\, e^{iq\cdot x}\, J^\mu(x)J^\nu(0)\\
&\quad = -ie^2(q^2g^{\mu\nu}-q^\mu q^\nu)\left[c^1(q^2)\cdot 1 + c^{\bar{q}q}(q^2)\cdot m\bar{q}q + c^{F^2}(q^2)\cdot (F^a_{\alpha\beta})^2 + \cdots\right],
\end{aligned}
\tag{18.91}
$$

其中c^i是洛伦兹不变且为c数的q^2的函数，插入第二行开头的因子i作为方便的约定。通过量纲分析，我们发现

$$
c^1 \sim (q^2)^0, \qquad c^{\bar{q}q} \sim (q^2)^{-2}, \qquad c^{F^2} \sim (q^2)^{-2}, \tag{18.92}
$$

更高的项在大q下是更加无关的。

OPE系数$c^i(q^2)$可以从费曼图计算出来。如图18.5所示，算符1的系数是除了流插入之外没有外腿的图的和。领头的QCD图只是简单的真空极化图，乘以色因子3和夸克电荷的平方和。将这些因子与式(7.91)结合，我们得到

$$
c^1(q^2) = -\left(3\sum_f Q_f^2\right)\cdot\frac{\alpha}{3\pi}\log(-q^2). \tag{18.93}
$$

对这个结果的修正是$\alpha_s(q^2)$阶的。更高的系数函数是从具有更多外腿的图中提取出来的。例如，$(F^a_{\alpha\beta})^2$的系数函数是由带有两个外胶子腿的图来确定的。

仍然假设流乘积的傅里叶变换可以从大的类时q^2区域的OPE中计算出来，我们可以完成对$e^+e^-\to$ 强子的截面计算，通过取(18.91)的真空期望值，提取系数函数的虚部，将结果代入式(18.84)。我们发现

$$
\begin{aligned}
\sigma(e^+e^-\to\text{hadrons}) = \frac{4\pi\alpha^2}{s}\big[&\operatorname{Im}c^1(q^2) + \operatorname{Im}c^{\bar{q}q}(q^2)\,\langle 0|\,m\bar{q}q\,|0\rangle\\
&+\operatorname{Im}c^{F^2}(q^2)\,\langle 0|\,(F^a_{\alpha\beta})^2\,|0\rangle + \cdots\big].
\end{aligned}
\tag{18.94}
$$

这个级数的第一项仅仅是对e^+e^-总截面的微扰QCD图求和的结果。附加项给出了这一结果的修正，它依赖于软强子矩阵元，但这些修正在高能时被因子$(q^2)^{-2}$显式地抑制(顺便提一句，这种展开，同样适用于没有QCD相互作用的情况，还解释了为什么(18.86)在对大s时展开不包含s^{-2}阶的项)。如果我们在(18.94)中插入领头阶表达式(18.93)，我们会得到相似的结果

$$
\sigma(e^+e^-\to\text{hadrons}) = \frac{4\pi\alpha^2}{s}\sum_f Q_f^2. \tag{18.95}
$$

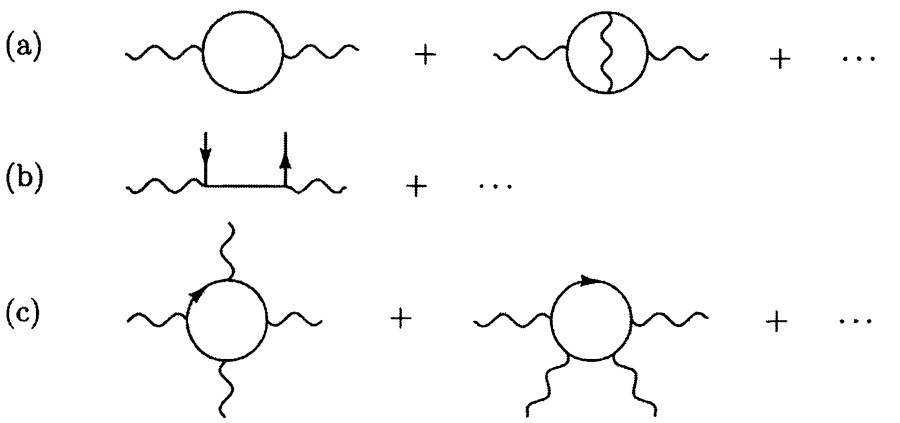


图18.5 在流乘积的展开中，对如下算符贡献算符乘积系数的费曼图，(a)1; (b)$\bar{q}q$; (c)$(F^a_{\alpha\beta})^2$。

我们的结果(18.94)是令人满意的，但是导致我们得出这个结果的逻辑是不正确的。为了计算e^+e^-总截面，我们必须在大的**类时**动量q的区域计算$\Pi_h(q^2)$，在这里流乘积的期望值由高能中间态主导，包含大量物理强子。因此，我们需要$\Pi_h(q^2)$精确地位于不受夸克和胶子场短程微扰控制的区域。为计算短程展开时的流乘积，我们选择的运动学条件是，进入到流乘积计算的中间态是远离质壳的，因此它们不能传播到远离收敛点x和0的地方。这种条件在大的**类空**动量时满足，或者等价的，在小的类空间隔时。然而，乍一看，在这个区域的计算对于确定e^+e^-截面是无用的。

幸运的是，有一个奇妙的技巧可以将两个分离良好的运动区域中的量子场论振幅的值联系起来。这个技巧叫做**色散关系**法，它利用了振幅的一般解析性质。由于(18.88)是两点关联函数的傅里叶变换，从第7.1节的分析可知，$\Pi_h(q^2)$中有一个Kallen-Lehmann谱表示。因此，$\Pi_h(q^2)$是q^2的解析函数，在正q^2轴上有一个分支割线，在复q^2平面上没有其他奇异性。这个解析结构如图18.6所示。$\Pi_h(q^2)$在分支割线上的不连续性等于$(2i)$乘以Π_h的虚部，因此与总的e^+e^-湮灭截面直接相关。

有了这些关于$\Pi_h(q^2)$的额外知识，我们可以进行如下讨论。设$q^2=-Q_0^2$是距离q的类空间区域足够远的值，使得流乘积的傅里叶变换可以由算符乘积展开计算出来。现在考虑积分

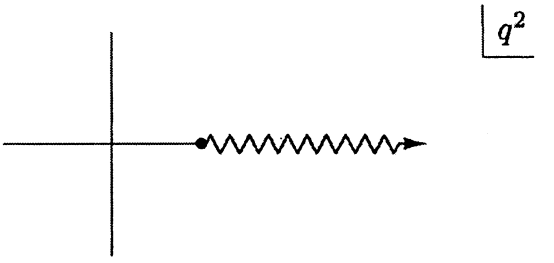


图18.6 复q^2平面上$\Pi_h(q^2)$的解析奇异性

$$I_n = -4\pi\alpha \oint \frac{dq^2}{2\pi i} \frac{1}{(q^2+Q_0^2)^{n+1}} \Pi_h(q^2), \tag{18.96}$$

对于$n \geq 1$，在绕着$q^2 = -Q_0^2$的围道上求值。如果我们把围道缩小到极点，我们就会发现

$$I_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d(q^2)^n} \Pi_h \Big|_{q^2=-Q_0^2}, \tag{18.97}$$

通过算符乘积关系(18.91)对Π_h求值可以计算出上式，

$$\Pi_h(q^2) = -e^2 \left[c^1(q^2) + c^{\bar{q}q}(q^2) \langle 0| m\bar{q}q |0\rangle + c^{F^2}(q^2) \langle 0| (F^a_{\alpha\beta})^2 |0\rangle + \cdots \right]. \tag{18.98}$$

另一方面，我们可以通过将围道变形为图18.7的形式来求积分。由于$q^2 \to \infty$时，系数函数的增长速度均不大于$(q^2)^0$乘以对数，因此对于$n \geq 1$，可以忽略无穷远处的围道。环绕着分支割线的围道部分给出

$$\begin{aligned} I_n &= -4\pi\alpha \int \frac{dq^2}{2\pi i} \frac{1}{(q^2+Q_0^2)^n} \operatorname{Disc} \Pi_h(q^2) \\ &= -4\pi\alpha \int \frac{dq^2}{2\pi} \frac{1}{(q^2+Q_0^2)^{n+1}} \frac{1}{i} 2i \operatorname{Im} \Pi_h(q^2) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds \, \frac{s}{(s+Q_0^2)^{n+1}} \sigma(s). \end{aligned} \tag{18.99}$$

这是对$e^+e^- \to$ 强子的总截面的积分。通过令(18.97)和(18.99)相等，我们得到了用QCD微扰理论计算的各OPE系数和可观测截面之间的一系列积分关系。这些关系是由Novikov, Shifman, Voloshin, Vainshtein, and Zakharov首先建立的，被称为**ITEP求和规则***。

---

*这些求和规则的理论在V. A. Novikov, L. B. Okun, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, M. B. Voloshin, and V. I. Zakharov, *Phys. Repts.* **41**, 1(1978)中得到回顾.

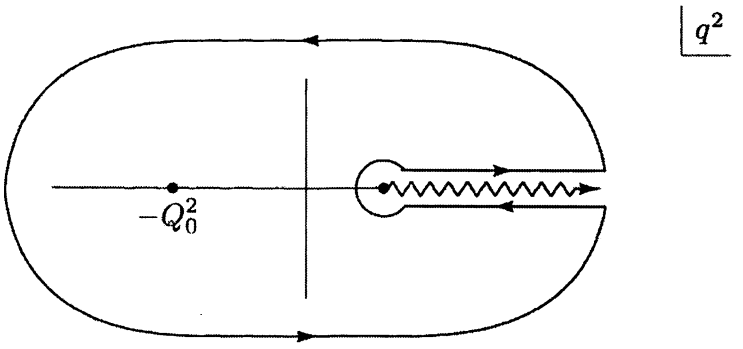


图18.7 涉及$\sigma(e^+e^- \to$ 强子)的ITEP求和规则的推导的积分围道

仅仅用$c^1(q^2)$的领头QCD表达式来计算求和规则，我们发现

$$\int_0^\infty ds \frac{s}{(s+Q_0^2)^{n+1}}\sigma(s) = \frac{4\pi\alpha^2}{n(Q_0^2)^n}\sum_f Q_f^2 + \mathcal{O}(\alpha_s(Q_0^2)) + \mathcal{O}((Q_0^2)^{-2}). \quad (18.100)$$

领头阶关系与式(18.95)中给出的最低阶截面一致。修正来自于QCD微扰理论的高阶，其中α_s是在标度Q_0^2取的，修正还来自于OPE中更高的算符项。

如果(18.100)中的修正项对n能一致收敛于0，我们可以颠倒求和规则，并从它们中得出我们的结果(18.94)。然而，真实的情况更加微妙。由于(18.97)中的求导强调了q^2变化更强的项，因此随着n的增加，ITEP求和规则中的修正项越来越重要。因此，截面与QCD微扰理论预测的最重要偏差是关于该预测的振荡，这些振荡在低n的求和规则中被平均掉了。理论与实验的比较如图18.8所示。对大s，(18.94)是相当准确的。然而，当s变小时，振荡的大小也随之变大。最终。它们成为与夸克-反夸克束缚态相关的共振态，主导了总截面。

18.5 深度非弹性散射的算符分析

我们现在把算符乘积展开应用到另一个QCD硬散射过程的例子，即深度非弹性电子散射。在第17章中，我们发现QCD对深度非弹性散射的预测是精确的，但在结构上也是复杂的。在第一级，QCD意味着深度非弹性散射是由部分子模型描述的，在该模型中，入射电子被夸克和反夸克散射，它们携带质子总动量的分数。这些分数是由部分子分布函数决定的，其反映了质子波函数的形式并且由

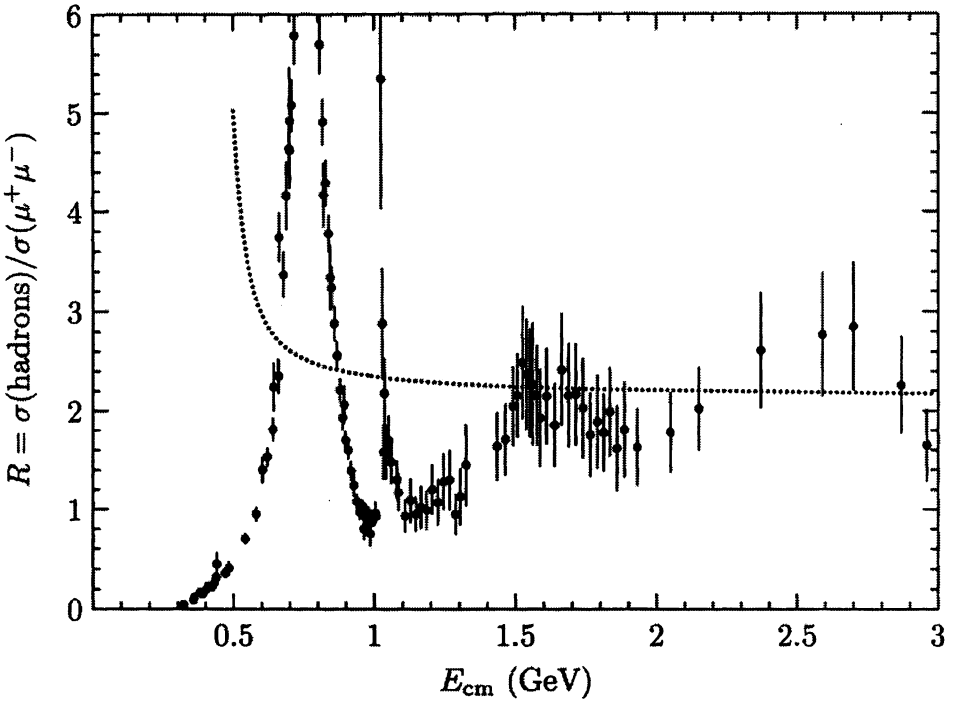


图18.8 在能量低于3 GeV下，对反应$e^+e^- \to$ 强子的总截面的实验测量，并与3个夸克味道的微扰QCD的预测进行了比较。数据取自M. Swartz, *Phys. Rev.* D53, 5268 (1996).的汇编。各种不同的结果的完整参考在那里给出了。

软QCD动力学确定。然而，我们在第17.5节中看到，QCD微扰理论的效应导致了部分子分布作为动量转移Q^2的函数而改变它们的形式。现在，我们将展示这幅图像的大部分内容可以从我们的新视角重新构建，使用算符乘积展开。

在前一节中，我们用三步推导出了e^+e^-湮灭截面的OPE关系。首先，我们用光学定理把这个截面与流乘积的矩阵元联系起来。其次，我们将算符乘积展开应用于流乘积。不幸的是，这种展开只能用于非物理运动学区域。然而，在第三步中，我们使用了色散关系的方法，将这个非物理结果转化为我们希望预测的截面上的积分。在我们讨论深度非弹性散射时，我们将经历同样的三个步骤。为了得到最终的结果，我们需要添加第四个步骤，涉及QCD算符重标度。

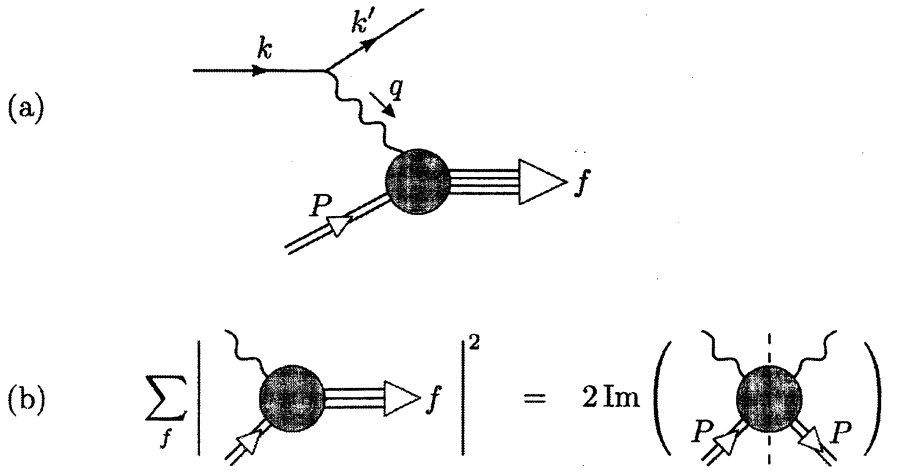


图18.9 深度非弹性电子散射截面的计算:
(a)振幅的一般结构;(b)光学定理的应用

深度非弹性散射的运动学

我们首先写一个关于深度非弹性散射截面的一般表达式。深度非弹性电子散射到末态f的矩阵元的计算如图18.9(a)所示:

$$i\mathcal{M}(ep \to ef) = (-ie)\bar{u}(k')\gamma_\mu u(k)\frac{-i}{q^2}(ie)\int d^4x\, e^{iq\cdot x}\,\langle f|\, J^\mu(x)\,|P\rangle\,, \quad (18.101)$$

其中$J^\mu(x)$为夸克电磁流(18.87)。该表达式的核心是处于质子与某些高能强子态之间的流的强子矩阵元。这个矩阵元必须平方并对可能的末态求和。利用光学定理，将这个求和与质子态中两个流的向前矩阵元相联系，可以计算出该求和，如图18.9(b)所示。定义

$$W^{\mu\nu} = i\int d^4x\, e^{iq\cdot x}\,\langle P|\, T\{J^\mu(x)J^\nu(0)\}\,|P\rangle\,, \quad (18.102)$$

对质子的自旋平均。这个对象被称为**向前康普顿振幅**，因为如果它在$q^2 = 0$处取值并与物理极化矢量收缩，它就给出了光子-质子散射的向前振幅:

$$i\mathcal{M}(\gamma p \to \gamma p) = (ie)^2\epsilon^*_\mu(q)\epsilon_\nu(q)\big(-iW^{\mu\nu}(P,q)\big). \quad (18.103)$$

然而，在接下来的讨论中，我们需要在一般类空q和一般极化态下分析(18.102)。

质子的康普顿散射的光学定理是

$$2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{M}(\gamma p \to \gamma p) = \sum_f \int d\Pi_f \big|\mathcal{M}(\gamma p \to f)\big|^2. \quad (18.104)$$

在(7.49)中给出的推广中，这个结果扩展到更一般的情况，在这种情况下，初始光子极化和末态光子极化通常是不同的。将(18.104)转换到$W^{\mu\nu}$，我们发现

$$2\,\mathrm{Im}\,W^{\mu\nu}(P,q)=\sum_f\int d\Pi_f\,\langle P|\,J^\mu(-q)\,|f\rangle\,\langle f|\,J^\nu(q)\,|P\rangle\,, \tag{18.105}$$

其中$J^\mu(q)$是流的傅里叶变换。

现在我们可以用$W^{\mu\nu}$来计算深度非弹性截面，用(18.105)表示最后一个因子的平方。截面应该对初始电子自旋求平均，并对末态电子自旋求和。因此,

$$\begin{aligned}\sigma(ep\to eX)=\frac{1}{2s}\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\frac{1}{2k'}e^4\frac{1}{2}\sum_{\text{spins}}\left[\bar u(k)\gamma_\mu u(k')\bar u(k')\gamma_\nu u(k)\right]\\ \cdot\left(\frac{1}{Q^2}\right)^2\cdot 2\,\mathrm{Im}\,W^{\mu\nu}(P,q).\end{aligned} \tag{18.106}$$

电子旋量积可求为

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\sum_{\text{spins}}\left[\bar u(k)\gamma_\mu u(k')\bar u(k')\gamma_\nu u(k)\right]&=\tfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[\not k\gamma_\mu\not k'\gamma_\nu\right]\\ &=2\left(k_\mu k'_\nu+k_\nu k'_\mu-g_{\mu\nu}k\cdot k'\right).\end{aligned} \tag{18.107}$$

将末态电子动量k'和散射角θ的积分转换成我们在17.3节中介绍的无量纲变量x和y的积分是有用的。这些变量是用初始和末态电子的能量k和k'表示为

$$x=\frac{Q^2}{2P\cdot q}=\frac{2kk'(1-\cos\theta)}{2m(k-k')},\qquad y=\frac{2P\cdot q}{2P\cdot k}=\frac{k-k'}{k}. \tag{18.108}$$

Then

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(k',\cos\theta)}\right|=\frac{2k'}{2m(k-k')}=\frac{2k'}{ys}, \tag{18.109}$$

and so

$$\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\frac{1}{2k'}=\int\frac{2\pi dk'k'd\cos\theta}{(2\pi)^3\cdot 2}=\int dxdy\frac{ys}{(4\pi)^2}. \tag{18.110}$$

用(18.107)和(18.110)化简(18.106)，我们发现

$$\frac{d^2\sigma}{dxdy}(ep\to eX)=\frac{2\alpha^2y}{(Q^2)^2}\left(k_\mu k'_\nu+k_\nu k'_\mu-g_{\mu\nu}k\cdot k'\right)\mathrm{Im}\,W^{\mu\nu}(P,q). \tag{18.111}$$

更进一步，我们需要知道一些关于$W^{\mu\nu}$的结构。在前一节中，我们使用流守恒将流的矩阵元写成单个标量函数$\Pi_h(q^2)$的形式，如式(18.82)所示。在向前康普顿

振幅的情况下，Ward恒等式再次要求

$$q_\mu W^{\mu\nu} = q_\nu W^{\mu\nu} = 0, \tag{18.112}$$

但是现在有两个可能的由P和q构成的张量满足这些约束条件。因此，向前康普顿振幅被写成包含两个标量形状因子的表达式:

$$W^{\mu\nu} = \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right) W_1 + \left(P^\mu - q^\mu \frac{P\cdot q}{q^2}\right)\left(P^\nu - q^\nu \frac{P\cdot q}{q^2}\right) W_2. \tag{18.113}$$

标量函数W_1, W_2依赖于问题的两个不变量，$(P\cdot q)$和q^2，或者，x和Q^2。如果我们把(18.113)插入(18.111)并利用q^μ与轻子张量的点积为0的事实，我们会发现

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dxdy}(ep\to eX) &= \frac{2\alpha^2 y}{(Q^2)^2}\left[2k\cdot Pk'\cdot P\,\mathrm{Im}\,W_2 + 2k\cdot k'\,\mathrm{Im}\,W_1\right] \\ &= \frac{\alpha^2 y}{Q^4}\left[s^2(1-y)\,\mathrm{Im}\,W_2 + 2xys\,\mathrm{Im}\,W_1\right]. \end{aligned} \tag{18.114}$$

表达式(18.114)是完全一般化的，对强相互作用的性质没有任何假设。它也相当正式。然而，通过对部分子模型中的$W^{\mu\nu}$进行计算，并计算出W_1和W_2的部分子表达式，我们可以很容易地了解这个公式与我们早前分析的关系。在部分子模型中，我们将(18.102)中的质子矩阵元替换为一组夸克矩阵元的和，用部分子分布函数进行加权。因此，

$$W^{\mu\nu} \approx i\int d^4x\, e^{iq\cdot x} \int_0^1 d\xi \sum_f f_f(\xi)\cdot\frac{1}{\xi}\left\langle q_f(p)\right| T\left\{J^\mu(x)J^\nu(0)\right\}\left|q_f(p)\right\rangle\Big|_{p=\xi P}. \tag{18.115}$$

矩阵元前面的因子$(1/\xi)$给出了以夸克态表示的质子态的适当归一化。理解这个因子最简单的方法是注意到，在(18.106)和其他涉及初始态质子的其他表达式中，运动学前置因子$(1/2s)$在部分子模型的ξ积分下变成了$(1/2\xi s)$。

我们现在用不相互作用的费米子来计算(18.115)中的矩阵元。有两个费曼图，如图18.10所示。图18.10中右边的第一个图具有的值为

$$i\int_0^1 d\xi \sum_f f_f(\xi)\frac{1}{\xi}Q_f^2\bar{u}(p)\gamma^\mu \frac{i(\not{p}+\not{q})}{(p+q)^2+i\epsilon}\gamma^\nu u(p); \tag{18.116}$$

第二个图在交换了q,μ与$(-q),\nu$之后，给出了一个与这个相同的贡献，为了计算

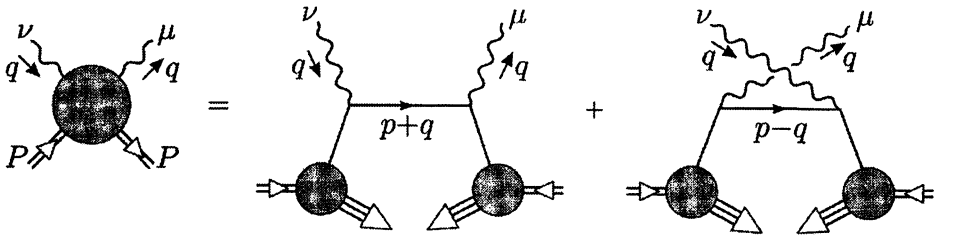


图18.10 部分子模型中$W^{\mu\nu}$的计算

(18.116)，我们对夸克自旋取平均以找到

$$\int_0^1 d\xi \sum_f f_f(\xi)\frac{1}{\xi}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[\not{p}\gamma^\mu(\not{p}+\not{q})\gamma^\nu\right]\frac{-1}{2p\cdot q+q^2+i\epsilon}$$

$$=\int_0^1 d\xi\sum_f f_f(\xi)\frac{1}{\xi}\cdot 2\big(p^\mu(p+q)^\nu+p^\nu(p+q)^\mu-g^{\mu\nu}p\cdot(p+q)\big)$$

$$\cdot\frac{-1}{2\xi P\cdot q-Q^2+i\epsilon}. \tag{18.117}$$

我们需要计算(18.114)，而这个表达式的虚部来自(18.117)中的最后一个因子：

$$\mathrm{Im}\Big(\frac{-1}{2\xi P\cdot q-Q^2+i\epsilon}\Big)=\pi\delta(2\xi P\cdot q-Q^2)=\frac{\pi}{ys}\delta(\xi-x). \tag{18.118}$$

在图18.10的第二个图中，分母中的两个因子有一个相对的+号，所以该图在深度非弹性散射的物理区域中没有虚部。因此，我们发现在部分子模型中，

$$\mathrm{Im}\,W^{\mu\nu}=\sum Q_f^2 f_f(x)\frac{1}{x}\frac{\pi}{ys}\big(4x^2P^\mu P^\nu+2x(P^\mu q^\nu+P^\nu q^\mu)-g^{\mu\nu}xys\big). \tag{18.119}$$

通过加上和减去与$q^\mu q^\nu$成正比的项，我们可以看到这个表达式是(18.113)的形式，

$$\mathrm{Im}\,W_1=\pi\sum_f Q_f^2 f_f(x),\qquad \mathrm{Im}\,W_2=\frac{4\pi}{ys}\sum_f Q_f^2 x f_f(x). \tag{18.120}$$

W_1和W_2的部分子模型表达式服从如下关系

$$\mathrm{Im}\,W_1=\frac{ys}{4x}\,\mathrm{Im}\,W_2. \tag{18.121}$$

这是Callan-Gross关系式的另一种形式，因为把(18.121)代入(18.114)得到

$$\frac{d^2\sigma}{dxdy}(ep\to eX)=\frac{\alpha^2 ys^2}{2Q^4}\left[1+(1-y)^2\right]\mathrm{Im}\,W_2, \tag{18.122}$$

其中自由费米子的y依赖特性，和式(17.125)一样，最后将(18.120)代入W_2的虚部，我们精确地重新获得该部分子模型表达式：

$$\frac{d^2\sigma}{dxdy}(ep \to eX) = \frac{2\pi\alpha^2 s}{Q^4}\Big(\sum_f Q_f^2 x f_f(x)\Big)\big[1+(1-y)^2\big]. \tag{18.123}$$

这个方程将为我们提供一个参考点，以便与我们继续分析后即将得到的更一般表达式进行比较。

算符乘积展开

由于向前康普顿振幅是流乘积的矩阵元，另一种计算$W^{\mu\nu}$的策略是将该乘积展开为一系列局域算符。与部分子模型计算一样，该方法利用了渐近自由。然而，在这种情况下，这个假设的应用更加直接。算符乘积系数的计算将明确地在$1/Q$阶的小距离内进行，因此我们可以在耦合常数为$\alpha_s(Q^2)$的微扰论中计算这些系数。

在前一节中，我们通过考虑流乘积中夸克场的各种收缩方式，计算了对流乘积的真空期望值有贡献的算符的系数。这里我们应该注意到算符1对康普顿散射振幅没有贡献。最主要的贡献来自于能在质子波函数中产生和湮灭夸克的算符。

两个流J^μ的算符乘积中最重要的项来自于两个具有相同味道夸克的夸克流$\bar{q}_f\gamma^\mu q_f$的乘积。因此，我们将从研究单个夸克流的OPE开始。在α_s的零阶，夸克流的算符乘积的领头项被给出为

$$\begin{aligned}&\bar{q}\gamma^\mu q(x)\,\bar{q}\gamma^\nu q(0)\\ &\quad = \bar{q}(x)\gamma^\mu \overbrace{q(x)\bar{q}}(0)\gamma^\nu q(0) + \overbrace{\bar{q}(x)\gamma^\mu q(x)\bar{q}(0)\gamma^\nu q}(0) + \cdots,\end{aligned} \tag{18.124}$$

这里的收缩应该被计算为夸克场的费曼传播子。有着显式收缩的项在$x \to 0$时是奇异的；其余的项是非奇异的，因此在短距离极限中不那么重要。在不同味道夸克流的OPE中，没有相应的奇异项；我们将在下面讨论到，这个结论甚至在超过α_s的领头阶也是有效的。

为了计算$W^{\mu\nu}$，我们必须对(18.124)中的项进行傅里叶变换，如(18.102)中所示。当我们这样做的时候，我们应该记住传播子不仅携带着傅里叶变换的动量q还携带着通过夸克场携带进来的任何动量。考虑到这个，如下的表示是方便的

$$\int d^4x\, e^{iq\cdot x}\,\bar{q}(x)\gamma^\mu \overbrace{q(x)\bar{q}}(0)\gamma^\nu q(0) = \bar{q}\gamma^\mu \frac{i(i\not{\partial}+\not{q})}{(i\partial+q)^2}\gamma^\nu q(0), \tag{18.125}$$

这里的导数∂作用在夸克场的右边。注意，这个贡献具有图18.10中右侧第一个图的结构。同样，(18.124)中表示的第二个收缩具有图18.10中第二个图的形式。

在短距离极限下，动量q将大于任何进入夸克场的外部动量。因此我们应该展开

$$\frac{1}{(i\partial+q)^2} = \frac{-1}{Q^2 - 2iq\cdot\partial + \partial^2} = -\frac{1}{Q^2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{2iq\cdot\partial - \partial^2}{Q^2}\Big)^n. \tag{18.126}$$

下面我们将论证，分子上带有∂^2的项是不重要的，可以去掉。但是，我们应该保留比率$(2iq\cdot\partial/Q^2)$的所有幂。这个比的分母上有Q^2，所以在短距离极限下它是被正式抑制的。然而，在部分子模型中

$$\frac{2iq\cdot\partial}{Q^2} \to \frac{2q\cdot\xi P}{Q^2} = 1, \tag{18.127}$$

因此，最后，所有这些项必须是同等重要的。稍后我们将看到它是如何工作的。

将算符乘积(18.124)简化为有用形式所需的最后一步是将狄拉克矩阵的乘积简化。由(18.113)可知，当我们对质子自旋进行平均后，在μ和ν的交换下，$W^{\mu\nu}$是对称的，因此，使OPE对称化没有害处。然后我们可以利用如下等式把三个狄拉克矩阵的乘积化简为一个

$$\tfrac{1}{2}\big(\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\mu\big) = g^{\mu\alpha}\gamma^\nu + \gamma^\mu g^{\alpha\nu} - g^{\mu\nu}\gamma^\alpha, \tag{18.128}$$

这很容易由反对易关系得到证明。利用(18.126)和(18.128)，我们可以把(18.125)写成

$$-i\bar{q}\Big(\gamma^\mu(i\partial^\nu) + \gamma^\nu(i\partial^\mu) - ig^{\mu\nu}\not{\partial} + \gamma^\mu q^\nu + \gamma^\nu q^\mu - g^{\mu\nu}\not{q}\Big)\frac{1}{Q^2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{2iq\cdot\partial}{Q^2}\Big)^n q. \tag{18.129}$$

我们可以移除项$(i\not{\partial})q$，因为夸克场服从狄拉克方程，它在α_s的领头阶中消失了。为了计算W_1和W_2，我们还可以去掉含有q^μ的显式因子的项，因为这些项最终会被组织成一般形式(18.113)。于是，最后，(18.125)的形式取为

$$\begin{aligned}&\int d^4x\, e^{iq\cdot x}\bar{q}(x)\gamma^\mu q(x)q(0)\gamma^\nu q(0)\\ &\qquad = -i\bar{q}\big(2\gamma^\mu(i\partial^\nu) - g^{\mu\nu}\not{q}\big)\frac{1}{Q^2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{2iq\cdot\partial}{Q^2}\Big)^n q,\end{aligned} \tag{18.130}$$

在$\mu \leftrightarrow \nu$下是对称的。

(18.124)中的第二项与第一项的不同之处在于点x和0的交换以及指标μ和ν的交换。其傅里叶变换由(18.130)中替换$q \to -q$得到。因此，完整的算符乘积只包含q的偶次项。来自算符乘积的奇异项的所有剩余贡献都包含算符

$$\bar{q}\gamma^{\mu_1}(i\partial^{\mu_2})\cdots(i\partial^{\mu_k})q, \tag{18.131}$$

带着偶数个指标，这些指标要么与μ或ν相等，要么与q的幂缩并。为了写出算符乘积展开的相关项，我们将用两种方式修改这个算符。首先，由于(18.131)中的算符有n个矢量指标，它包含的分量是在洛伦兹群的许多不同不可约表示下变换的。在重正化条件下，各分量具有不同的重标度律。然而，我们将在下面看到，只有(18.131)中有着最高自旋的分量与我们的分析相关。该分量由指标$\mu_1, \ldots, \mu_n$的完全对称化并减去与$g^{\mu_i\mu_j}$成正比的项得到，使得算符在所有的指标对下都是无迹的。当我们写出流的算符乘积时，我们将只保留这个分量。其次，算符(18.131)不只是在规范变换下进行变换。由于原始的流J^μ是色规范变换的不变量，所以两个流的算符乘积必须是规范不变算符之和。我们可以将每个$(i\partial^\mu)$因子替换为协变导数(iD^μ)，从而使(18.131)规范不变。这种修正只增加了与强耦合常数g成正比的项，因此对算符乘积系数的推导没有影响。

结合这些变化，让我们定义一个夸克味道为f、自旋为n的算符如下:

$$\mathcal{O}_f^{(n)\mu_1\cdots\mu_n} = \bar{q}_f\gamma^{\{\mu_1}(iD^{\mu_2})\cdots(iD^{\mu_n\}})q_f - \text{traces}, \tag{18.132}$$

其中指标是对称的并有适当的减除。我们可以使用这些算符来写出两个流J^μ的OPE的最奇异部分的最终表达式。这个算符乘积的领头项来自(18.130)和对应$q \leftrightarrow -q$下的收缩。提取这些表达式中包含最高自旋算符(18.132)的部分，我们发现

$$\begin{aligned} & i\int d^4x\, e^{iq\cdot x} J^\mu(x)J^\nu(0) \\ &\quad = \sum_f Q_f^2\Bigg[4\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2q^{\mu_1})\cdots(2q^{\mu_{n-2}})}{(Q^2)^{n-1}}\mathcal{O}_f^{(n)\mu\nu\mu_1\cdots\mu_{n-2}} \\ &\qquad - g^{\mu\nu}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2q^{\mu_1})\cdots(2q^{\mu_n})}{(Q^2)^n}\mathcal{O}_f^{(n)\mu_1\cdots\mu_n}\Bigg] + \cdots, \end{aligned} \tag{18.133}$$

其中对n求和只针对偶数。

表达式(18.133)是在α_s的领头阶中得到。高阶费曼图将贡献出系数函数的$\alpha_s(Q^2)$阶修正。这些修正只有在乘以大对数时才重要。如果我们考虑出现在右边的算符$\mathcal{O}_f^{(n)}$在重正化标度Q处被归一化，那么就得不到大的动量比率可以用来对系数函数的QCD修正进行增强。当我们计算算符$\mathcal{O}_f^{(n)}$的矩阵元时，在计算的后期仍可能出现大对数修正。

从展开式(18.133)可以直接计算出$W^{\mu\nu}$的展开，通过取它在质子态中的期望值。为了进行这项计算，我们需要知道算符$\mathcal{O}_f^{(n)}$的质子矩阵元。注意，这些矩阵元不能依赖于动量q^μ的方向，因为这种依赖性已经在系数函数中分离出来了。这意味着只有质子动量P^μ可以携带矩阵元的矢量指标。因此，我们可以把$\mathcal{O}_f^{(n)}$的自旋平均矩阵元写成

$$\langle P|\,\mathcal{O}_f^{(n)\mu_1\cdots\mu_n}\,|P\rangle = A_f^n \cdot 2P^{\mu_1}\cdots P^{\mu_n} - \text{traces.} \tag{18.134}$$

系数A_f^n是无量纲的。它们不是纯数字，因为它们依赖于算符的重正化标度，但在接下来的几段中，我们将把它们当作常数。

对于$n=1$的情况，算符$\mathcal{O}_f^{(1)}$简单地简化为夸克味道流$\bar{q}\gamma^\mu q$；在这种情况下，算符是独立于任何标度进行归一化的，系数A_f^1是真正的常数。从我们在6.2节中对形状因子的一般性讨论中，我们知道零动量转移下的守恒味道流的质子矩阵元被给出为

$$\langle P|\,\bar{q}_f\gamma^\mu q_f\,|P\rangle = \bar{u}(P)\gamma^\mu u(P)F_{f1}(0), \tag{18.135}$$

其中$F_{f1}(0)$等于质子态中对应的守恒荷的值。对于夸克流，这个荷仅仅是在$|P\rangle$状态下味道为f的夸克(减去反夸克)的数目，我们将称之为N_f。对(18.135)求质子自旋的平均，我们发现

$$\langle P|\,\bar{q}_f\gamma^\mu q_f\,|P\rangle = 2P^\mu \cdot N_f. \tag{18.136}$$

因此，对于$n=1$，

$$A_f^1 = N_f = \begin{cases} 2 & f=u, \\ 1 & f=d. \end{cases} \tag{18.137}$$

类似的，$\mathcal{O}_f^{(2)}$是夸克味道f对QCD的能量动量张量的贡献：

$$\left(T^{\mu\nu}\right)_f = \bar{q}_f\gamma^{\{\mu}(iD^{\nu\}})q_f. \tag{18.138}$$

因此，A_f^2是由夸克味道f携带的质子的总能动量的分数。

当我们使用(18.133)和算符矩阵元的表达式(18.134)计算$W^{\mu\nu}$的级数时，我们发现

$$W^{\mu\nu}=\sum_f Q_f^2\left[8\sum_n P^\mu P^\nu\frac{(2q\cdot P)^{n-2}}{(Q^2)^{n-1}}A_f^n-2g^{\mu\nu}\sum_n\frac{(2q\cdot P)^n}{(Q^2)^n}A_f^n\right]+\cdots, \tag{18.139}$$

其中对n的求和是从2到∞的偶数。除了(18.133)中省略的OPE的修正外，我们还丢掉了(18.134)中的迹项的贡献。这是相当合适的：这些项的每一个，质子动量$P^\alpha P^\beta$这两个因子被$g^{\alpha\beta}m_p^2$取代，其中$m_p^2=P^2$是质子质量。当指标与q的幂缩并时，我们得到了一个如下阶的项

$$m_p^2Q^2\ll(2q\cdot P)^2. \tag{18.140}$$

由于$(Q^2/2P\cdot g)=x$，其在Q^2变大的深度非弹性散射中固定不变，所以迹项的贡献被一个m_p^2/Q^2因子所抑制，乘以x的幂。

一般情况下，量纲d的算符在流的算符乘积展开中的系数函数是量纲为$\left(\text{质量}\right)^{6-d}$；在OPE的傅里叶变换中，这个系数函数将带有一个抑制因子

$$\left(\frac{1}{Q}\right)^{d-2}. \tag{18.141}$$

然而，如果算符有自旋s，则算符矩阵元将贡献矢量P^μ的s因子，因此，在深度非弹性散射的运动学区域，该贡献将是如下阶的

$$\left(\frac{2P\cdot q}{Q^2}\right)^s\left(\frac{1}{Q}\right)^{d-s-2}. \tag{18.142}$$

因此，OPE对深度非弹性散射的贡献的相对大小，不是完全由算符的量纲控制的，而是由**扭度**(twist)控制的，其定义为

$$t=d-s. \tag{18.143}$$

在选择流的算符乘积展开中的领头项时，我们始终保持了领头自旋对每个量纲(或对系数中Q^{-1}的每个幂次)的贡献。算符$\mathcal{O}_f^{(n)}$都有扭度$t=2$。这是QCD算符(而不是算符1)最小的可能值。

在两个不同味道流的算符乘积中，如$\bar{u}\gamma^\mu u$和$\bar{d}\gamma^\nu d$，OPE中的领头项具有夸克结构$(\bar{u}\Gamma u\bar{d}\Gamma d)$，因此具有扭度$t\geq 4$。因此在$\alpha_s$的所有阶，流$J^\mu$的算符乘积的交叉项相对于(18.133)中显示的领头扭度项，被抑制至少一个$(1/Q^2)$因子。如果

我们忽略这些被抑制项，$W^{\mu\nu}$的表达式，在所有阶，就会分隔成如下的贡献的和

$$W^{\mu\nu} = \sum_f Q_f^2 W_f^{\mu\nu}, \tag{18.144}$$

其中$W_f^{\mu\nu}$为两个夸克味道流$\bar{q}_f \gamma^\mu q_f$的矩阵元。

我们可以从(18.139)中读出以下W_1和W_2的表达式:

$$\begin{aligned} W_1 &= \sum_f Q_f^2 \sum_n 2 \frac{(2q\cdot P)^n}{(Q^2)^n} A_f^n, \\ W_2 &= \sum_f Q_f^2 \sum_n \frac{8}{Q^2} \frac{(2q\cdot P)^{n-2}}{(Q^2)^{n-2}} A_f^n, \end{aligned} \tag{18.145}$$

每一行对n的求和都是从2到∞的偶数。与(18.139)类似，这些表达式根据(18.144)显式地分开。值得注意的是，级数(18.145)满足形式为(18.121)的Callan-Gross关系，没有进一步的部分子模型输入。然而，由于算符乘积系数的下一阶贡献，这个关系在α_s阶会被修正。

因为深度非弹性形状因子的领头贡献可以写成对夸克味道求和。人们很容易颠倒式(18.120)的逻辑，并利用这些方程来定义部分子分布函数。特别地，让我们来定义

$$x f_f^+(x, Q^2) = \frac{ys}{4\pi} \operatorname{Im} W_{2f}(x, Q^2), \tag{18.146}$$

其中W_{2f}是$W_f^{\mu\nu}$的第二个形状因子，$W_f^{\mu\nu}$在(18.144)中定义，忽略了被Q^2的幂抑制的项。在部分子模型的计算中，

$$f_f^+(x) = f_f(x) + f_{\bar{f}}(x). \tag{18.147}$$

根据(18.123)和(18.146)的定义，我们知道$f_f^+(x)$以正确的方式进入了深度非弹性散射截面的公式中，然而，部分子分布函数还有其他重要的性质，包括(17.36)和(17.39)的归一化条件以及(17.6)中讨论的随Q^2的演化。我们现在必须看看我们是否能使用算符乘积展开从(18.146)中得到这些性质。

色散积分

算符乘积分析给出了W_1和W_2的显式表达式，它们是Q^2的逆幂次的级数。在接下来的讨论中，我们将重点分析W_2。我们必须求出它的级数展开式与可观测的深度非弹性散射截面的关系。正如第18.4节所讨论的，OPE分析自然地发生在一个

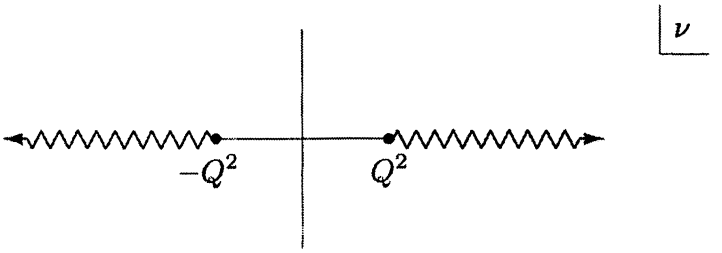


图18.11 对于固定的Q^2，复ν平面上$W_2(\nu, Q^2)$的解析奇异性

非物理运动学区域。为了做算符乘积展开，我们需要考虑比任何其他运动学不变量都大的Q^2。然而，在深度非弹性散射的物理区域，$2P \cdot q \geq Q^2$。我们需要一个公式来连接这两个不同的区域。

要更精确地表述这个问题，定义

$$\nu = 2P \cdot q = ys; \tag{18.148}$$

在质子静止的坐标系中，$\nu = 2m_p q^0$。形状因子W_2可以看作是ν和Q^2的函数。然后，对于固定的Q^2, OPE给出了关于点$\nu = 0$的级数展开，而深度非弹性散射的物理区域是$\nu \geq Q^2$。由于该区域与物理散射过程相关联，$W_2(\nu, Q^2)$被视为固定Q^2下的ν的解析函数，沿着该区域的实ν轴将有一个分支割线。穿过这一分支割线的不连续性将是$(2i)$乘以W_2的虚部，它出现在深度非弹截面的表达式(18.123)中。由于表达式(18.102)在(q, μ)和$(-q, \nu)$的交换下是对称的，以W_2必须服从

$$W_2(-\nu, Q^2) = W_2(\nu, Q^2). \tag{18.149}$$

因此，W_2也必须沿着负实轴有一个分支割线，从$\nu = -Q^2$到$-\infty$。这个割线的不连续性给出了u道过程的截面，在这个过程中，正的能量通过第二个流输入，通过第一个流输出。由于$q^2 = -Q^2 < 0$，不存在可能的物理的t道过程；因此，W_2在复ν平面上不再有奇异性。$W_2(\nu, Q^2)$的解析结构如图18.11所示。

现在考虑围道积分

$$I_n = \int \frac{d\nu}{2\pi i} \frac{1}{\nu^{n-1}} W_2(\nu, Q^2), \tag{18.150}$$

其中n是偶数，取一个围绕原点的小圆。这个积分选出了W_2的级数展开中ν^{n-2}的系数。OPE公式(18.145)给出了大Q^2下这个系数的领头贡献:

$$I_n = \sum_f Q_f^2 \frac{8}{(Q^2)^{n-1}} A_f^n. \tag{18.151}$$

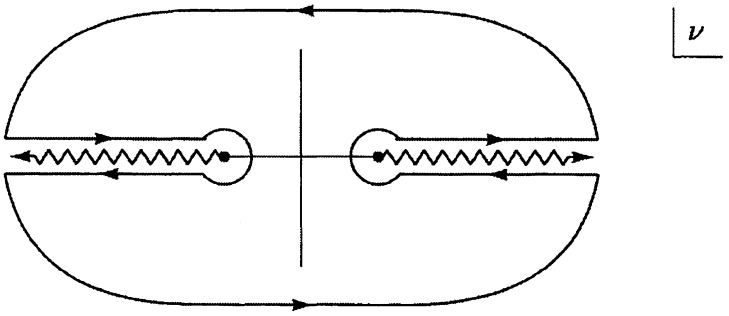


图18.12 W_2的矩求和规则的推导中的积分围道

根据OPE系数函数的计算，这个公式的修正是$\alpha_s(Q^2)$阶的。

另一方面，我们也可以对围道进行变形，如图18.12所示，并对W_2的不连续性进行积分来计算它。根据对称性(18.149)，两个分支割线的贡献相等。因此，

$$I_n = 2\int_{Q^2}^{\infty} \frac{d\nu}{2\pi i}\frac{1}{\nu^{n-1}}(2i)\,\mathrm{Im}\,W_2(\nu, Q^2). \tag{18.152}$$

现在把变量变成$x = Q^2/\nu$。积分变成

$$I_n = \frac{8}{(Q^2)^{n-1}}\int_0^1 dx\, x^{n-2}\frac{\nu}{4\pi}\,\mathrm{Im}\,W_2. \tag{18.153}$$

当我们把(18.151)和(18.153)等同起来，并利用(18.146)把$\mathrm{Im}W_2$和部分子分布$f_f^+(x)$联系起来时，我们推导出的关系就分解成一系列的求和规则，

$$\int_0^1 dx\, x^{n-1} f_f^+(x, Q^2) = A_f^n, \tag{18.154}$$

其中n是偶数。这些关系称为深度非弹性形状因子的**矩(moment)求和规则**。它们把根据式(18.146)定义的部分子分布函数的x矩，与扭度为2的算符的质子矩阵元联系起来。

由于W_2是ν的对称函数，所以矩求和规则只适用于偶数的n，而在深度非弹性中微子散射中，$W^{\mu\nu}$中存在第三个形状因子，与弱相互作用流的矢量和轴矢量部分之间的干涉项有关。在18.2题中，我们证明了这个形状因子可以用来推导出n为奇数的一组求和规则：

$$\int_0^1 dx\, x^{n-1} f_f^-(x, Q^2) = A_f^n, \tag{18.155}$$

其中A_f^n为n为奇数的质子矩阵元(18.134)的系数，$f_f^-(x)$为一个形状因子，它在部分子模型中被计算为

$$f_f^-(x) = f_f(x) - f_{\bar{f}}(x). \tag{18.156}$$

结合这一信息和(18.136)下面给出的论证，我们可以看到，由深度非弹性形状因子定义的部分子分布函数具有正确的归一化。利用(18.137)，我们发现

$$\int_0^1 dx\, f^-(x) = N_f, \tag{18.157}$$

它是质子中味道为f的夸克的(净)数量。同理，(18.154)和(18.138)暗示了

$$\int_0^1 dx\, x f^+(x) = \langle x \rangle_f, \tag{18.158}$$

式中$\langle x \rangle_f$为味道为f的夸克和反夸克携带的质子总能动量的分数。

算符重标度

如果系数A_f^n是真正的常数，关系(18.154)和(18.155)将与满足Bjorker标度的部分子分布函数一致。然而，正如我们在(18.134)下面所提到的，这些因子实际上依赖于Q^2，因为这是算符乘积展开(18.133)中算符的归一化点。由于这种依赖关系只通过算符重标度来实现，所以它只涉及Q^2的对数，因此只对Bjorker标度造成缓慢的破坏。我们可以通过对扭度为2的算符的矩阵元的领头对数修正求和，定量地计算出部分子分布函数对Q^2的依赖关系。

为了解释这些修正，让我们首先假设(不正确地，正如我们将在下面看到的)扭度为2的算符(18.132)在没有算符混合的情况下被重正化了。然后通过把在Q处归一化的算符进行重标度成在标准参考点μ(为1 GeV阶)处归一化的算符，来对算符$\mathcal{O}_f^{(n)}$的矩阵元的领头对数修正进行求和，这些约定之间的关系将是

$$\left[\mathcal{O}_f^{(n)}\right]_Q = \left(\frac{\log(Q^2/\Lambda^2)}{\log(\mu^2/\Lambda^2)}\right)^{a_f^n/2b_0} \left[\mathcal{O}_f^{(n)}\right]_\mu, \tag{18.159}$$

其中a_f^n为$\mathcal{O}_f^{(n)}$的γ函数的第一个系数。于是因子A_f^n将根据如下式子依赖于Q^2

$$A_f^n(Q^2) = \left(\frac{\log(Q^2/\Lambda^2)}{\log(\mu^2/\Lambda^2)}\right)^{a_f^n/2b_0} A_f^n(\mu^2). \tag{18.160}$$

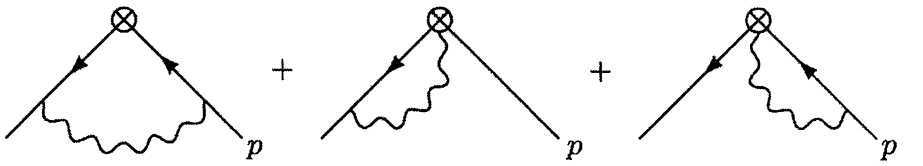


图18.13 对夸克扭度为2的算符的反常量纲有贡献的图

该等式与式(18.76)中的算符乘积系数的标度依赖性一致，对于流算符乘积的特殊情况，$a_1 = a_2 = 0$。为了求出重标度因子的显式形式，我们必须计算a_f^n。

为了计算夸克扭度为2的算符的γ函数，我们必须计算它们的算符重标度的抵消项。这些是由图18.13所示的图确定的。计算这些图——外动量p通过夸克线输入和注入到算符的外动量为零——是足够的。在此条件下，算符$\mathcal{O}_f^{(n)}$的矩阵元，在领头阶，等于



$$= \gamma^{\mu_1} p^{\mu_2} \cdots p^{\mu_n}. \tag{18.161}$$

在这里和以后讨论的所有点上，我们将把$\mathcal{O}_f^{(n)}$的矩阵元当作是对n个指标是对称的，并减去所有可能的迹。我们现在必须对图18.13中的图进行计算，并收集所有重标度了该结构的项。

图18.13的第一个图很容易计算:



$$\begin{aligned} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (ig)^2 \gamma^\lambda t^a \frac{i\not{k}}{k^2} \gamma^{\mu_1} k^{\mu_2} \cdots k^{\mu_n} \frac{i\not{k}}{k^2} \gamma_\lambda t^a \frac{-i}{(k-p)^2} \\ &= -ig^2 C_2(r) \cdot (-2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2)^2 (k-p)^2} \not{k} \gamma^{\mu_1} k^{\mu_2} \cdots k^{\mu_n} \not{k}. \end{aligned} \tag{18.162}$$

我们使用恒等式(6.40)组合分母:

$$\frac{1}{(k^2)^2 (k-p)^2} = \int_0^1 dx \, \frac{2(1-x)}{(\mathbf{k}^2 - \Delta)^3}; \tag{18.163}$$

右边分母中的量是$\mathbf{k} = k - xp$和$\Delta = -x(1-x)p^2$。我们现在必须移动积分，在分子上替代$k = \mathbf{k} + xp$，并选出正比于p的$(n-1)$幂次的项。如果这个项包含因子$g^{\mu_i \mu_j}$,我们可以扔掉它，因为它对更高扭度的算符的系数有贡献，而且在任何情况下，当我们减去迹时它都会被去掉。因此，我们必须仔细选择用$\mathbf{k}$替换k的哪两个因子而用(xp)替换其他因子。下面的选择，利用$\mathbf{k}$积分的转动对称性进行简化，

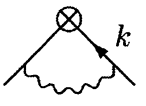
没有给出有用的贡献:

$$\begin{aligned}\mathbf{k}^{\mu_i}\mathbf{k}^{\mu_j} &= \frac{1}{4}\mathbf{k}^2 g^{\mu_i\mu_j},\\ \not{\mathbf{k}}\gamma^{\mu_1}\mathbf{k}^{\mu_j} &\to \frac{1}{4}\mathbf{k}^2\gamma^{\mu_j}\gamma^{\mu_1} = \frac{1}{4}\mathbf{k}^2 g^{\mu_1\mu_j}.\end{aligned} \tag{18.164}$$

在第二行，我们使用了$\mu_1 \leftrightarrow \mu_j$下的对称性，$\mathbf{k}$因子剩下的一个放置是

$$\not{\mathbf{k}}\gamma^{\mu_1}\not{\mathbf{k}} \to \frac{1}{4}\mathbf{k}^2\gamma^{\nu}\gamma^{\mu_1}\gamma_{\nu} = -\frac{1}{2}k^2\gamma^{\mu_1}. \tag{18.165}$$

因此(18.162)具有值



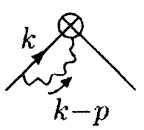
$$\begin{aligned}&= -ig^2\frac{4}{3}\int_0^1 dx\cdot 2(1-x)\int\frac{d^4\mathbf{k}}{(2\pi)^4}\frac{\mathbf{k}^2}{(\mathbf{k}^2-\Delta)^3}\gamma^{\mu_1}(xp^{\mu_2})\cdots(xp^{\mu_n})\\ &= -i\frac{8}{3}g^2\int_0^1 dx(1-x)x^{n-1}\frac{i}{(4\pi)^2}\Gamma(2-\tfrac{d}{2})\gamma^{\mu_1}p^{\mu_2}\cdots p^{\mu_n}\\ &= \frac{4}{3}\frac{2}{n(n+1)}\frac{g^2}{(4\pi)^2}\Gamma(2-\tfrac{d}{2})\gamma^{\mu_1}p^{\mu_2}\cdots p^{\mu_n}.\end{aligned} \tag{18.166}$$

不太明显的是，还存在对算符$\mathcal{O}_f^{(n)}$的重标度的其他贡献。注意，(18.132)中的协变导数包含了规范场的显式因子。

$$iD^{\mu_j} = i\partial^{\mu_j} - gA^{a\mu_j}t^a, \tag{18.167}$$

而这些可能与外腿上的规范场顶点收缩。这些贡献产生了图18.13中的第二个和第三个图。(18.167)中$A^{a\mu}$的两个因子相互缩并的项正比于$G^{\mu_i\mu_j}$，因此对领头扭度的算符的重标度没有贡献。

我们刚才描述的贡献具有对j求和的形式，其中μ_j是包含了收缩的导数的指标。那么图18.13的第二个图是以下积分对j求和：



$$\begin{aligned}&= \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}(ig)\gamma_\lambda t^a\frac{i\not{k}}{k^2}\gamma^{\mu_1}k^{\mu_2}\cdots k^{\mu_{j-1}}\\ &\qquad\cdot(-gt^a g^{\lambda\mu_j})p^{\mu_{j+1}}\cdots p^{\mu_n}\frac{-i}{(k-p)^2}\\ &= ig^2C_2(r)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2(k-p)^2}\gamma^{\mu_j}\not{k}\gamma^{\mu_1}k^{\mu_2}\cdots k^{\mu_{j-1}}p^{\mu_{j+1}}\cdots p^{\mu_n}.\end{aligned} \tag{18.168}$$

因为μ_j和μ_1是对称的，我们可以用(18.128)来重写

$$\begin{aligned}\gamma^{\mu_j}\not{k}\gamma^{\mu_1} &\to k^{\mu_j}\gamma^{\mu_1}+\gamma^{\mu_j}k^{\mu_1}-g^{\mu_j\mu_1}\not{k}\\ &\to 2\gamma^{\mu_1}k^{\mu_j},\end{aligned} \tag{18.169}$$

其中在第二行，隐含着指标对称化和迹的减除。现在组合分母。要得到有p的$(n-1)$个因子的项，我们必须把(18.168)的分子中每个因子k都用(xp)代替。这给出



$$\begin{aligned}&= ig^2\frac{4}{3}\int_0^1 dx\int\frac{d^4\mathbf{k}}{(2\pi)^4}\frac{1}{(\mathbf{k}^2-\Delta)^2}2\gamma^{\mu_1}(xp^{\mu_2})\cdots(xp^{\mu_j})p^{\mu_{j+1}}\cdots p^{\mu_n}\\ &= ig^2\frac{8}{3}\int_0^1 dx\,x^{j-1}\frac{i}{(4\pi)^2}\Gamma(2-\tfrac{d}{2})\gamma^{\mu_1}p^{\mu_2}\cdots p^{\mu_n}\\ &= -\frac{4}{3}\frac{2}{j}\frac{g^2}{(4\pi)^2}\Gamma(2-\tfrac{d}{2})\gamma^{\mu_1}p^{\mu_2}\cdots p^{\mu_n}.\end{aligned} \tag{18.170}$$

这个贡献必须对j求和，从2到n。图18.13的第三个图的贡献相等。

将图18.13三个图中的重标度因子相加，我们发现了$\mathcal{O}_f^{(n)}$的算符重标度抵消项

$$\delta_f=\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{4}{3}\Big[4\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}-\frac{2}{n(n+1)}\Big]\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(M^2)^{2-d/2}}. \tag{18.171}$$

由这一结果，我们可以利用(18.23)和场强重正化抵消项(18.9)来推导出Callan-Symanzik γ函数。我们发现

$$\gamma_f^n=\frac{8}{3}\frac{g^2}{(4\pi)^2}\Big[1+4\sum_{2}^{n}\frac{1}{j}-\frac{2}{n(n+1)}\Big]. \tag{18.172}$$

注意，这个表达式在$n=1$时消失，因此没有包含A_f^1的重标度，如(18.157)所要求的。对于$n>1$，γ_f^n是正的，所以它的系数a_f^n是负的。这意味着当Q^2变大时，夸克分布函数的更高矩是被抑制的。

算符混合

算符$\mathcal{O}_f^{(n)}$的QCD重标度仍然比较复杂，因为QCD包含额外的扭度为2的算符，它可以由胶子场构建的。这些新算符与夸克扭度为2的算符混合在一起，通过图18.14所示的图。

对于n是偶数，图18.14给出了在动量为p的胶子态下的算符$\mathcal{O}_f^{(n)}$矩阵元。这个矩阵元的张量结构包含如下项

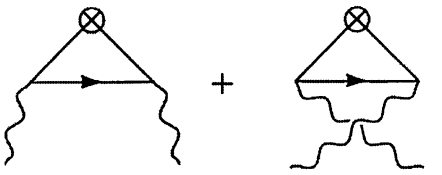


图18.14 在扭度2夸克和胶子算符之间产生算符混合的图

$$g^{\alpha\beta}p^{\mu_1}\cdots p^{\mu_n}, \tag{18.173}$$

其中α, β是外部胶子的极化指标。这种结构来源于如下算符

$$\mathcal{O}_g^{(n)\mu_1\cdots\mu_n} = -\frac{1}{2}F^{\{\mu_1\nu}(iD^{\mu_2})\cdots(iD^{\mu_{n-1}})F^{\mu_n\}}{}_{\nu} - \text{traces}, \tag{18.174}$$

使$\mu_1,\ldots,\mu_n$对称，减去迹。这些算符有量纲$(n+2)$和自旋n，因此扭度为2。

仅对偶数的n，胶子算符(18.174)才是相关的。使用如下操作

$$F^{\mu_1\nu}(iD^{\mu_2})\cdots F^{\mu_n}{}_{\nu} = i\partial^{\mu_2}\left(F^{\mu_1\nu}\cdots F^{\mu_n}{}_{\nu}\right) - (iD^{\mu_2})F^{\mu_1\nu}\cdots F^{\mu_n}{}_{\nu}, \tag{18.175}$$

我们可以把协变导数从$F^{\mu\nu}$的一个因子转移到另一个因子，给出

$$\mathcal{O}_g^{(n)} = (-1)^n\mathcal{O}_g^{(n)} + \partial^{\mu_1}\left(\mathcal{O}'\right). \tag{18.176}$$

因此，对于n是奇数，算符$\mathcal{O}_g^{(n)}$等于全导数。全导数的矩阵元与注入该算符的动量成正比。由于在流的OPE的质子矩阵元的计算中注入的动量为零，所以对于n为奇数，算符$\mathcal{O}_g^{(n)}$对深度非弹性散射截面没有影响。

然而，对于n是偶数，我们必须考虑到$\mathcal{O}_g^{(n)}$和$\mathcal{O}_f^{(n)}$的混合。图18.14的图的计算与我们在这一章中所做的另一个算符的重标度计算很相似，所以我们将计算细节保留到问题18.3。我们发现，图18.14中的图包含一个正比于(18.173)的结构，其系数是

$$\frac{2(n^2+n+2)}{n(n+1)(n+2)}\frac{g^2}{(4\pi)^2}\Gamma(2-\tfrac{d}{2}). \tag{18.177}$$

从这个计算中，我们发现重正化的扭度为2的夸克算符，在标度M下适当地归一化，用裸算符表示被给出为

$$\left[\mathcal{O}_f^{(n)}\right]_M = (1+\delta_f)\left[\mathcal{O}_f^{(n)}\right]_0 + (\delta_g)\left[\mathcal{O}_g^{(n)}\right]_0, \tag{18.178}$$

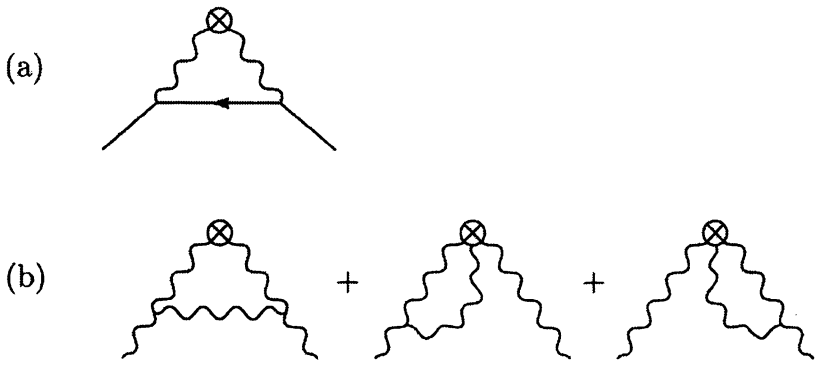


图18.15 对扭度2的胶子算符的算符重标度有贡献的图 (a)对胶子-夸克混合的贡献; (b)对对角的胶子算符重正化的贡献。

其中δ_f由(18.171)给出，以及

$$\delta_g = -\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{2(n^2+n+2)}{n(n+1)(n+2)}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(M^2)^{2-d/2}}. \tag{18.179}$$

该方程给出了扭度为2的算符的反常量纲矩阵的两个矩阵元。

扭度为2的算符的γ矩阵的其余矩阵元由图18.15所示的图生成。图18.15(a)给出了$\mathcal{O}_g^{(n)}$和$\mathcal{O}_f^{(n)}$的混合。图18.15(b)，与胶子场强重标度的抵消项δ_3相结合，给出了对角的反常量纲。抵消项δ_3在Feynman-'t Hooft规范下的(16.74)中被显式地给出。这个反常量纲计算的其余部分在18.3题中讨论

为了描述完整的反常量纲矩阵，我们首先考虑只有一个夸克味道的强相互作用模型。在这种情况下，有一个扭度为2的算符$\mathcal{O}_g^{(n)}$是与$\mathcal{O}_f^{(n)}$混合的。这两个算符通过一个2×2矩阵混合

$$\gamma^n = -\frac{g^2}{(4\pi)^2}\begin{pmatrix} a^n_{ff} & a^n_{fg} \\ a^n_{gf} & a^n_{gg}\end{pmatrix}, \tag{18.180}$$

其中

$$\begin{aligned}
a^n_{ff} &= -\frac{8}{3}\Big[1+4\sum_2^n\frac{1}{j}-\frac{2}{n(n+1)}\Big],\\
a^n_{fg} &= 4\frac{n^2+n+2}{n(n+1)(n+2)},\\
a^n_{gf} &= \frac{16}{3}\frac{n^2+n+2}{n(n^2-1)},\\
a^n_{gg} &= -6\Big[\frac{1}{3}+\frac{2}{9}n_f+4\sum_2^n\frac{1}{j}-\frac{4}{n(n-1)}-\frac{4}{(n+1)(n+2)}\Big].
\end{aligned} \tag{18.181}$$

注意这个矩阵不是对称的。最后一行，n_f是夸克味道的数量，在这里等于1；这一项来自(16.74)。

在现实情况中。QCD包含几种夸克的味道——u, d, s,还有c, b，当我们工作在足够大的动量时，我们可以忽略这些粒子的质量。那么反常量纲矩阵γ^n的大小为$(n_f+1)\times(n_f+1)$，作用于夸克算符上的子矩阵是对角的。所有的对角线元素由(18.181)中的a^n_{ff}给出。夸克-胶子和胶子-夸克项都分别由a^n_{fg}和a^n_{gf}给出，它们是与味道无关的。胶子的对角项由(18.181)中在n_f实际值下的a^n_{gg}给出。这意味着胶子算符只与夸克算符的一个线性组合混合：

$$\sum_f \mathcal{O}^{(n)}_f; \tag{18.182}$$

正交线性组合被简单地重标度，其指数由a^n_{ff}或(18.172)给出。

现在让我们把这种算符混合的分析应用到矩求和规则的计算中。对于奇数的n，没有算符混合，所以(18.155)右边的Q^2依赖性由简单的重标度(18.160)正确地给出。

对于偶数的n，我们必须考虑算符混合。求和规则(18.154)的右边是在标度Q处归一化的扭度为2的算符的质子矩阵元。让我们把这些算符的任意线性组合写为

$$c^n_i\left[\mathcal{O}^{(n)}_i\right]_Q, \tag{18.183}$$

其中指标i在g和不同的味道f上变化。为了将这个算符重标度到一个固定的参考动量μ，我们根据(18.159)，在γ^n的左本征矢的基下重写系数。根据重标度系数的矩阵a^n_{ij}，我们可以把重标度抽象地写成

$$c^n_i\left[\mathcal{O}^{(n)}_i\right]_Q, = c^n_i\left\{\left(\frac{\log(Q^2/\Lambda^2)}{\log(\mu^2/\Lambda^2)}\right)^{a^n/2b_0}\right\}_{ij}\left[\mathcal{O}^{(n)}_j\right]_\mu. \tag{18.184}$$

这个重标度，用c^n_i作用在矩阵(a^n)的左侧，正是式(18.79)所要求的方案。

我们在$n=2$的情况下明确地把这个算出来。矩求和规则(18.154)的右边由$\mathcal{O}^{(2)}_f$的矩阵元给出。我们把它重写成

$$\mathcal{O}^{(2)}_f = \left(\mathcal{O}^{(2)}_f - \frac{1}{n_f}\sum_{f'}\mathcal{O}^{(2)}_{f'}\right) + \frac{1}{n_f}\sum_{f'}\mathcal{O}^{(2)}_{f'}. \tag{18.185}$$

第一项简单地重标度；第二项和胶子算符$\mathcal{O}^{(2)}_g$混合。$n=2$时作用于$(\Sigma_f\mathcal{O}_f, \mathcal{O}_g)$上

的反常量纲矩阵的系数为

$$\begin{pmatrix} a^2_{ff} & a^2_{fg} n_f \\ a^2_{gf} & a^2_{gg} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{64}{9} & \frac{4}{3} n_f \\ \frac{64}{9} & -\frac{4}{3} n_f \end{pmatrix}. \tag{18.186}$$

这个矩阵的左本征矢和它们对应的本征值是

$$\begin{aligned} (1,1) \quad &\to \quad a^2 = 0 \\ (\frac{16}{3}, -n_f) \quad &\to \quad a^2 = -\frac{4}{3}\Big(\frac{16}{3} + n_f\Big). \end{aligned} \tag{18.187}$$

注意，第一个本征矢给出了算符$c_i^2 \mathcal{O}_i^{(2)}$与零反常量纲的线性组合。这个算符实际上就是QCD的总能动量张量。

$$T^{\mu\nu} = \sum_f \mathcal{O}_f^{(2)\mu\nu} + \mathcal{O}_g^{(2)\mu\nu}, \tag{18.188}$$

其中必须有$\gamma = 0$。如果我们把(18.185)中的第二项用(18.187)的分量展开，我们就可以计算出算符重标度的完整形式。我们发现

$$\begin{aligned} \big[\mathcal{O}_f^{(2)}\big]_Q = &\frac{1}{16/3 + n_f} T \\ &+ \frac{1}{n_f(\frac{16}{3} + n_f)} \left(\frac{\log(Q^2/\Lambda^2)}{\log(\mu^2/\Lambda^2)}\right)^{-\frac{4}{3}(\frac{16}{3}+n_f)/2b_0} \Big[\frac{16}{3}\sum_f \mathcal{O}_f^{(2)} - n_f \mathcal{O}_g^{(2)}\Big]_\mu \\ &+ \left(\frac{\log(Q^2/\Lambda^2)}{\log(\mu^2/\Lambda^2)}\right)^{-32/9b_0} \Big[\mathcal{O}_f^{(2)} - \frac{1}{n_f}\sum_{f'} \mathcal{O}_{f'}^{(2)}\Big]_\mu, \end{aligned} \tag{18.189}$$

其中T为能动量张量(18.188)。$n = 2$的矩求和规则的右边由该算符的质子矩阵元的系数给出。为了求出这个系数，我们需要定义A_f^n的胶子类比，类比于(18.134)地写出

$$\langle P| \mathcal{O}_g^{(n)\mu_1\cdots\mu_n} |P\rangle = A_g^n \cdot 2P^{\mu_1}\cdots P^{\mu_n} - \text{traces}. \tag{18.190}$$

对于$n = 2$的情况，我们特别注意到

$$\langle P| T^{\mu\nu} |P\rangle = 2P^\mu P^\nu; \tag{18.191}$$

因此，(18.188)意味着

$$\sum_f A_f^2 + A_g^2 = 1. \tag{18.192}$$

如果我们把(18.189)中的每个算符替换成相应的系数$A_i^2(\mu)$，我们将得到一个$n = 2$矩求和规则的右边的表达式，它使得Q^2依赖性显式化。

表达式(18.189)虽然比较复杂，但在$Q^2 \to \infty$的极限下形式比较简单。在渐近

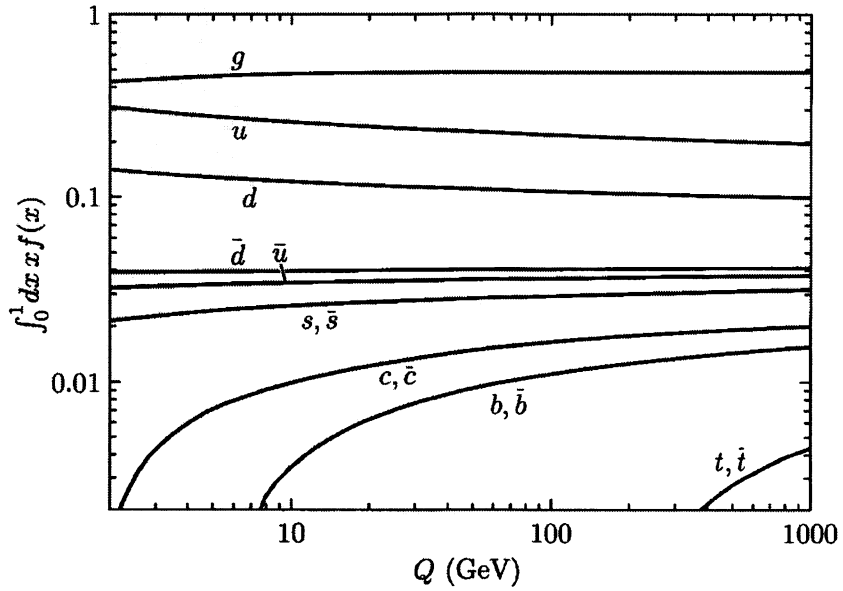


图18.16 作为Q的函数，不同部分子组分携带的质子总能量动量的分数，根据CTEQ来对图17.6中描述的深度非弹性散射数据进行拟合。由QCD演化方程计算的曲线的Q依赖性。

Q^2处，(18.189)的最后两项趋于0，(18.189)的右边变成一个固定的数乘以能动量张量。然后，使用(18.191)，我们可以完全求出$n = 2$矩求和规则：

$$\int_0^1 dx\, x f_f^+(x) \to \frac{1}{16/3 + n_f}. \tag{18.193}$$

在这个极限下，我们发现每种夸克味道都携带着质子能动量的固定分数。根据(18.192)，剩下的部分由胶子携带。举例来说，在$n_f = 4$的理论中，每种夸克的味道携带着质子总动量的3/28，而胶子携带着剩余的4/7。图18.16显示了从实际的部分子分布开始，这些渐近结果的逼近速度有多慢。

与 Altarelli-Parisi 方程的关系

刚才描述的算符混合分析给出了部分子分布的矩的预测，这意味着这些积分是Q^2依赖的。在不涉及算符混合的各种矩积分中，只有$n = 1$的积分给出了质子的味道量子数是Q^2函数的常数。剩下的以$\log Q^2$的幂下降。类似地， $n = 2$扭度为2的算符的矩阵元的一个线性组合在Q^2下保持不变。这种关系是用求和规则

(18.192)表示的。为了把这种关系写得更清楚，让我们引入胶子的部分子分布，作为光滑函数满足如下关系

$$\int_0^1 dx\, x^{n-1} f_g(x,Q^2) = A_g^{(n)}(Q^2). \tag{18.194}$$

然后(18.192)就变成了部分子分布的总的矩求和规则(17.39):

$$\int_0^1 dx\, x\Big[\sum_f f_f^+(x) + f_g(x)\Big] = 1. \tag{18.195}$$

很容易验证，对于$n>2$，反常量纲系数矩阵a_{ij}^n的所有本征值均为负值。因此，受制于味道荷和动量守恒定律，所有更高的矩求和规则都在减小。换句话说，算符重正化分析预测，随着$\log Q^2$的增加，部分子分布向下移动到更小的x值。令人高兴的是，这与我们在第17.5节中得出的结论是一样的，在那里我们推导了Altarelli-Parisi方程来描述部分子分布的这个演化。

既然给出了算符分析和Altarelli-Parisi方程暗示了相同的部分子分布的定性行为，这些分析如何进行定量比较？为了直接比较它们，我们应该计算出Altarelli-Parisi方程对部分子分布函数的矩做出的预测。让我们从一个更简单的例子$f_f^-(x) = f_f(x) - f_{\bar{f}}(x)$开始。

为了得到这个量的Altarelli-Parisi方程，(17.128)的最后两个方程相减。包含胶子分布的项消掉了，我们发现

$$\frac{d}{d\log Q^2} f_f^-(x) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z}\, P_{q\leftarrow q}(z) f_f^-(\frac{x}{z}). \tag{18.196}$$

现在定义

$$M_{fn}^- = \int_0^1 dx\, x^{n-1} f_f^-(x). \tag{18.197}$$

这个量服从微分方程

$$\frac{d}{d\log Q^2} M_{fn}^- = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_0^1 dx\, x^{n-1} \int_x^1 \frac{dz}{z}\, P_{q\leftarrow q}(z) f_f^-(\frac{x}{z}). \tag{18.198}$$

将右边的积分顺序互换，将变量变成$y = x/z$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 dx\, x^{n-1} \int_x^1 \frac{dz}{z} &= \int_0^1 \frac{dz}{z} \int_0^z dx\, x^{n-1} \\ &= \int_0^1 \frac{dz}{z} \int_0^1 dy\, y^{n-1} z^n \\ &= \int_0^1 dz\, z^{n-1} \int_0^1 dy\, y^{n-1}. \end{aligned} \tag{18.199}$$

那么微分方程的右边可以很好地因子化为

$$\frac{d}{d\log Q^2} M_{nf}^- = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \left[\int_0^1 dz\, z^{n-1} P_{q\leftarrow q}(z) \right] \cdot \int_0^1 dy\, y^{n-1} f_f^-(y); \tag{18.200}$$

最后一个因子再次是M_{fn}^-。这个关系中的系数是分裂函数$P_{q\leftarrow q}(z)$的第n阶矩。我们可以从(17.129)中给出这个函数的显式形式来计算它：

$$\int_0^1 dz\, z^{n-1} P_{q\leftarrow q}(z) = \int_0^1 dz\, z^{n-1} \frac{4}{3} \left[\frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2}\delta(1-z) \right]. \tag{18.201}$$

使用定义(17.105)对分布进行积分:

$$\begin{aligned}\int_0^1 dz\, z^{n-1} \frac{1}{(1-z)_+} &= \int_0^1 dz\, \frac{z^{n-1}-1}{(1-z)} \\ &= \int_0^1 dz \left(-1 - z - \cdots - z^{n-2}\right) \\ &= -\sum_1^{n-1} \frac{1}{j}. \end{aligned} \tag{18.202}$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^1 dz\, z^{n-1} P_{q\leftarrow q}(z) &= -\frac{4}{3} \left[\sum_1^{n-1} \frac{1}{j} + \sum_1^{n+1} \frac{1}{j} - \frac{3}{2} \right] \\ &= -\frac{2}{3} \left[1 + 4\sum_2^n \frac{1}{j} - \frac{2}{n(n+1)} \right]. \end{aligned} \tag{18.203}$$

值得注意的是，这正好是$a_f^n/4$，和在(18.172)或(18.181)中给出的反常量纲系数一样。因此，根据Altarelli-Parisi方程，$f_f^-(x)$的第n阶矩服从

$$\frac{d}{d\log Q^2}M_{fn}^- = \frac{\alpha_s(Q^2)}{8\pi}a_f^n \cdot M_{fn}^-. \tag{18.204}$$

要积分这个方程，我们需要$\alpha_s(Q^2)$的显式形式。插入表达式(17.17)，我们发现

$$\frac{d}{d\log Q^2}M_{fn}^- = \frac{a_f^n}{2b_0}\frac{1}{\log(Q^2/\Lambda^2)}M_{fn}^-. \tag{18.205}$$

由Altarelli-Parisi方程导出的这个方程的解，精确地是我们根据f_f^-的矩求和规则的算符分析推出的函数(18.160)。

不难看出，这个结论更为普遍。通过取完全的Altarelli-Parisi方程(17.128)的第n阶矩，我们将这些方程转化为一组矩的常微分方程。夸克分布函数的线性组合

$$\sum_f \big(f_f(x) + f_{\bar{f}}(x)\big) \tag{18.206}$$

会和胶子分布耦合并导致一个2×2的方程组。所有的正交线性组合都与胶子分布分离，因此具有的矩遵循与(18.205)相同的方程。为了分析耦合方程，定义

$$M_n^+ = \int_0^1 dx\, x^{n-1}\sum_f \big(f_f(x) + f_{\bar{f}}(x)\big); \qquad M_{gn} = \int_0^1 dx\, x^{n-1} f_g(x). \tag{18.207}$$

然后我们可以证明，通过导致了(18.205)的操作，Altarelli-Parisi方程组可以为这些矩预测出耦合方程组

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\log Q^2}M_n^+ &= \frac{1}{2b_0}\frac{1}{\log(Q^2/\Lambda^2)}\big[a_{ff}^n M_n^+ + a_{fg}^n M_{gn}\big],\\
\frac{d}{d\log Q^2}M_{gn} &= \frac{1}{2b_0}\frac{1}{\log(Q^2/\Lambda^2)}\big[n_f a_{gf}^n M_n^+ + a_{gg}^n M_{gn}\big],
\end{aligned} \tag{18.208}$$

其中系数a_{ij}^n与(17.129)和(17.130)中给出的分裂函数的n阶矩成正比。在所有情况下，我们可以看到这些系数与(18.181)中的相应系数完全一致。因此，这些方程的解与我们从算符分析中发现的部分子分布函数的矩，有相同的Q^2依赖性。

值得注意的是，第17章中给出的对部分子分裂函数的分析和前面给出的对算符重正化因子的分析已经证明是同一基本现象的两种观点。这两组方程都表达了在动量转移的值连续变高的硬散射过程中，QCD中的强子组分被散射逐层分解

的方式。我们对夸克的理解是，当一个夸克在精细的尺度上被研究时，它被分解成一组夸克、反夸克和胶子，这理解表明我们已经远远超出了单粒子相对论力学的简单概念。我们对这一思想的两个互补的推导强化了它作为量子场论的预测的基本特征。特别令人高兴的是，正如我们在第17.5节末尾所看到的。大自然显然接受了这一预测，并使量子场论的这一结果成为强子结构的重要组成部分。

Chapter 19

微扰论反常

在许多例子中，我们已经看到圈修正对量子场论的预测有重要的效应。我们已经研究了一些例子，在这些例子中，算符间的相对重要性被辐射修正所转移，并且在其中它们所介导的相互作用的形式也被改变。然而，在特定的情况下，辐射修正会产生更重要的效应：它们会破坏经典运动方程的对称性。

这种类型中最重要的效应是无质量费米子的手征对称性理论。在3.4节。我们发现无质量的Dirac拉氏量具有与左手和右手费米子各自的数量守恒有关的、增强的对称性。这种对称性是由轴矢流$j^{\mu 5}=\bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma^{5}\psi$产生的。经典上，对于零质量费米子，

$$\partial_{\mu}j^{\mu 5}=0 \tag{19.1}$$

这个运动方程不仅在自由费米子理论中成立，而且作为经典的场方程，在无质量QED和QCD中也成立。

然而。在这一章中，我们将看到真实的情况并不是那么简单。我们将表明，在规范理论中，轴矢流的守恒实际上与规范不变性不相容，规范理论中的辐射修正提供了一个出现在式(19.1)右侧的非零算符。这个新的轴流(axial current)守恒方程有许多显著的结果，我们将在19.3和19.4节中讨论。

19.1 二维轴流

到最终，我们将会分析无质量QCD中轴流的流守恒方程。然而，这个讨论将涉及一些技术复杂性，所以我们将首先在计算相对简单的情况下研究违反轴流守恒的物理。一个特别简单的模型问题是二维的无质量QED。

二维QED的拉格朗日量是

$$\mathcal{L}=\bar{\psi}(i\not{D})\psi-\tfrac{1}{4}(F_{\mu\nu})^{2}, \tag{19.2}$$

其中$\mu,\nu=0,1$和$D_\mu=\partial_\mu+ieA_\mu$。狄拉克矩阵必须被选为满足狄拉克代数：

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=2g^{\mu\nu}. \tag{19.3}$$

在二维中，这组关系可以用2×2矩阵来表示；我们选择

$$\gamma^0=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\qquad \gamma^1=\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}. \tag{19.4}$$

狄拉克旋量将是二分量场。

与每个γ^μ都反对易的狄拉克矩阵的乘积是

$$\gamma^5=\gamma^0\gamma^1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}. \tag{19.5}$$

然后，就像在四维中一样，有两种可能的流，

$$j^\mu=\bar\psi\gamma^\mu\psi,\qquad j^{\mu 5}=\bar\psi\gamma^\mu\gamma^5\psi, \tag{19.6}$$

如果在拉格朗日量中没有质量项，它们都是守恒的。

为了使守恒律更明确，我们把这个旋量基中的费米场ψ的分量标记为

$$\psi=\begin{pmatrix}\psi_+\\ \psi_-\end{pmatrix}. \tag{19.7}$$

下标表示γ^5的本征值。然后，利用显式的表示(19.4)和(19.7)，我们可以把(19.2)的费米子部分重写为

$$\mathcal{L}=\psi_+^\dagger i(D_0+D_1)\psi_+ +\psi_-^\dagger i(D_0-D_1)\psi_-. \tag{19.8}$$

在自由理论中，ψ_+的场方程为

$$i(\partial_0+\partial_1)\psi_+=0; \tag{19.9}$$

这个方程的解是在一维空间中以光速向右移动的波。因此，我们将与ψ_+有关的粒子称为**右移的**费米子。类似的，与ψ_-相关的量子称为**左移的**。这种区别类似于左手和右手粒子之间的区别，后者给出了γ^5在四维的物理解释。由于拉格朗日量(19.8)不包含混合左移和右移的场的项，所以很明显，这些场的流是分别守恒的。因此。

$$\partial_\mu\left(\bar\psi\gamma^\mu\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\psi\right)=0,\qquad \partial_\mu\left(\bar\psi\gamma^\mu\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)\psi\right)=0. \tag{19.10}$$

二维时空的一个奇怪的性质是，矢量和轴矢量费米子流不是相互独立的。让$\epsilon^{\mu\nu}$为二维中的完全反对称符号，其中$\epsilon^{01}=+1$。那么二维狄拉克矩阵服从如下恒

等式

$$\gamma^\mu\gamma^5 = -\epsilon^{\mu\nu}\gamma_\nu. \tag{19.11}$$

流$j^{\mu 5}$与j^μ具有同样的关系。因此，我们可以利用已得到的矢量流的计算结果来研究轴矢流的性质。

真空极化图

在第7.5节中，我们计算了QED在维数正规化中的最低阶真空极化。在质量为零的极限中，我们发现，在式(7.90)中，

$$i\Pi^{\mu\nu}(q) = -i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)\frac{2e^2}{(4\pi)^{d/2}}\,\mathrm{tr}[1]\int_0^1 dx\, x(1-x)\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(-x(1-x)q^2)^{2-d/2}}, \tag{19.12}$$

其中$\mathrm{tr}[1] = 4$给出了公式(7.88)中对狄拉克矩阵求迹的约定。如果我们令$\mathrm{tr}[1] = 2$来与(19.4)保持一致，然后在(19.12)中令$d = 2$，我们就会得到有限且定义良好的结果

$$\begin{aligned} i\Pi^{\mu\nu}(q) &= i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)\frac{2e^2}{4\pi}\cdot 2\cdot\frac{1}{q^2} \\ &= i\Big(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\Big)\frac{e^2}{\pi}. \end{aligned} \tag{19.13}$$

注意这个表达式有一个光子质量项的结构；光子获得质量

$$m_\gamma^2 = \frac{e^2}{\pi}. \tag{19.14}$$

施温格证明了这个结果是准确的，二维QED光子是一个自由的带质量玻色子*。在下面的(7.72)式的讨论中，我们指出，如果真空极化振幅与Ward恒等式一致，就不可能使光子产生质量，除非振幅它也包含一个$q^2 = 0$处的极点。在二维中，这样的一个极点可以由费米子-反费米子中间态的红外行为产生，我们在(19.13)中明确地看到了这种行为。

一旦得到真空极化的明确表达式，就可以求出背景电磁场引起的流的期望值。该量由图19.1所示的图生成，这给出

$$\int d^2x\, e^{iq\cdot x}\,\langle j^\mu(x)\rangle = \frac{i}{e}\big(i\Pi^{\mu\nu}(q)\big)A_\nu(q) = -\Big(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\Big)\cdot\frac{e}{\pi}A_\nu(q), \tag{19.15}$$

*J. Schwinger, *Phys. Rev.* **128**, 2425(1962)

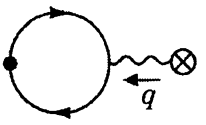


图19.1 背景电磁场中$\langle j^\mu \rangle$的计算

其中$A_\nu(q)$是背景场的傅里叶变换。这个量显然满足流守恒关系$q_\mu \langle j^\mu(q) \rangle = 0$。

矢量流与轴矢流的等式(19.11)使得我们可以从(19.15)得到$j^{\mu 5}$的对应期望值。我们发现

$$\begin{aligned} \left\langle j^{\mu 5}(q) \right\rangle &= -\epsilon^{\mu\nu} \left\langle j_\nu(q) \right\rangle \\ &= \epsilon^{\mu\nu} \frac{e}{\pi} \Big(A_\nu(q) - \frac{q_\nu q^\lambda}{q^2} A_\lambda(q) \Big). \end{aligned} \tag{19.16}$$

如果轴矢流守恒，这个对象将满足Ward恒等式。相反,我们发现

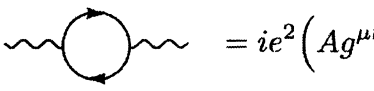
$$q_\mu \left\langle j^{\mu 5}(q) \right\rangle = \frac{e}{\pi} \epsilon^{\mu\nu} q_\mu A_\nu(q). \tag{19.17}$$

这是如下场方程的傅里叶变换

$$\partial_\mu j^{\mu 5} = \frac{e}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \tag{19.18}$$

显然，在电磁场存在时轴矢流并不守恒，这是其真空图的反常行为的结果。

这是怎么发生的呢？费曼图形式地满足矢量流和轴矢流的Ward恒等式。问题必然出在对真空极化图的正规化中。通过量纲分析，我们知道该图的形式为



$$= ie^2 \Big(A g^{\mu\nu} - B \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \Big). \tag{19.19}$$

系数B是一个有限积分，且由于它是q^2中极点的留数，所以在任何情况下它都是由该理论的低能结构明确确定的。然而，积分A是对数发散的，所以它的值取决于正规化。维数正规化自动减除这个积分，来令$A = B$；这样就满足了矢量流的Ward恒等式。然后我们直接得到(19.17)。我们也可以对积分A进行正规化使得$A = 0$。在这个修正下经过前一段的步骤，我们现在发现$q_\mu \langle j^{\mu 5}(q) \rangle = 0$，但是

$$q_\mu \left\langle j^\mu(q) \right\rangle = \frac{e}{\pi} q^\nu A_\nu(q). \tag{19.20}$$

虽然结果(19.17)是不愉快的，但结果(19.20)将是一个完全的灾难，因为它依赖于矢势的非物理规范自由度。我们的结论是，不可能对二维QED的正规化能使

得该理论是规范不变的同时轴矢流又是守恒的。要求规范不变性的代价是(19.18)中所示的轴流的反常不守恒。

轴矢流算符方程

为了从另一个角度理解轴流发生了什么，我们现在研究$j^{\mu 5}$的散度的算符方程。对拉格朗日量(19.2)变分，我们得到费米场的运动方程如下:

$$\not{\partial}\psi = -ie\not{A}\psi, \qquad \partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu = ie\bar{\psi}\not{A}. \tag{19.21}$$

以最直接的方式使用这些运动方程，很容易得出$\partial_\mu j^{\mu 5} = 0$的结论。然而，仔细观察这些操作会发现一些微妙之处，从而改变最终的结论。

轴矢流是由费米场构成的复合算符。在前一章中，我们看到局域算符的乘积通常是奇异的，所以我们将通过把两个费米场放在距离为ϵ的不同点上，然后小心地取这两个场相互靠近的极限来定义流。明确地说，我们定义

$$j^{\mu 5} = \operatorname*{symm}_{\epsilon\to 0} \lim \left\{ \bar{\psi}(x+\tfrac{\epsilon}{2})\gamma^\mu\gamma^5 \exp\Big[-ie\int_{x-\epsilon/2}^{x+\epsilon/2} dz\cdot A(z)\Big]\psi(x-\tfrac{\epsilon}{2}) \right\}. \tag{19.22}$$

注意，由于我们在不同的点放置了ψ和$\bar{\psi}$，我们必须引入一个Wilson线(15.53)以使算符是局域规范不变的。为了使$j^{\mu 5}$在洛伦兹变换下具有正确的变换性质，必须对称地取极限$\epsilon \to 0$，

$$\operatorname*{symm}_{\epsilon\to 0} \lim \left\{ \frac{\epsilon^\mu}{\epsilon^2} \right\} = 0, \qquad \operatorname*{symm}_{\epsilon\to 0} \lim \left\{ \frac{\epsilon^\mu\epsilon^\nu}{\epsilon^2} \right\} = \frac{1}{d} g^{\mu\nu}, \tag{19.23}$$

在这个例子上$d = 2$。

我们现在计算在(19.22)中定义的轴流的散度

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^{\mu 5} = \operatorname*{symm}_{\epsilon\to 0} \lim \Big\{ & \big(\partial_\mu \bar{\psi}(x+\tfrac{\epsilon}{2})\big)\gamma^\mu\gamma^5 \exp\Big[-ie\int_{x-\epsilon/2}^{x+\epsilon/2} dz\cdot A(z)\Big]\psi(x-\tfrac{\epsilon}{2}) \\ & + \bar{\psi}(x+\tfrac{\epsilon}{2})\gamma^\mu\gamma^5 \exp\Big[-ie\int_{x-\epsilon/2}^{x+\epsilon/2} dz\cdot A(z)\Big]\big(\partial_\mu\psi(x-\tfrac{\epsilon}{2})\big) \\ & + \bar{\psi}(x+\tfrac{\epsilon}{2})\gamma^\mu\gamma^5\big[-ie\epsilon^\nu\partial_\mu A_\nu(x)\big]\psi(x-\tfrac{\epsilon}{2}) \Big\}. \end{aligned} \tag{19.24}$$

使用运动方程(19.21)，项保持到ϵ阶，我们可以把它化简为

$$\begin{aligned}\partial_\mu j^{\mu 5} &= \operatorname*{symm}\lim_{\epsilon\to 0}\Big\{\bar\psi(x+\tfrac{\epsilon}{2})\big[ie\not{A}(x+\tfrac{\epsilon}{2})-ie\not{A}(x-\tfrac{\epsilon}{2})\\ &\qquad\qquad -ie\epsilon^\nu\gamma^\mu\partial_\mu A_\nu(x)\big]\gamma^5\psi(x-\tfrac{\epsilon}{2})\Big\}\\ &= \operatorname*{symm}\lim_{\epsilon\to 0}\Big\{\bar\psi(x+\tfrac{\epsilon}{2})\big[-ie\gamma^\mu\epsilon^\nu(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)\big]\gamma^5\psi(x-\tfrac{\epsilon}{2})\Big\}.\end{aligned} \tag{19.25}$$

表达式(19.25)在极限$\epsilon\to 0$下消失。然而，我们必须考虑这样一个事实，即费米算符的乘积是奇异的。在二维中，费米子场的收缩是

$$\begin{aligned}\overbrace{\psi(y)\bar\psi}(z) &= \int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}e^{-ik\cdot(y-z)}\frac{i\not{k}}{k^2}\\ &= -\not{\partial}\Big(\frac{i}{4\pi}\log(y-z)^2\Big)\\ &= \frac{-i}{2\pi}\frac{\gamma^\alpha(y-z)_\alpha}{(y-z)^2}.\end{aligned} \tag{19.26}$$

于是

$$\overbrace{\bar\psi(x+\tfrac{\epsilon}{2})\Gamma\psi}(x-\tfrac{\epsilon}{2}) = \frac{-i}{2\pi}\operatorname{tr}\Big[\frac{\gamma^\alpha\epsilon_\alpha}{\epsilon^2}\Gamma\Big]. \tag{19.27}$$

注意，结果(19.27)包含了一个额外的负号，来自费米子算符的交换。

由于费米子场的收缩在$\epsilon\to 0$时是奇异的，所以(19.25)最后一行的ϵ阶项的贡献是有限的。根据(19.27)取收缩，我们发现

$$\partial_\mu j^{\mu 5} = \operatorname*{symm}\lim_{\epsilon\to 0}\left\{\frac{-i}{2\pi}\operatorname{tr}\Big[\frac{\gamma^\alpha\epsilon_\alpha}{\epsilon^2}\gamma^\mu\gamma^5\Big]\cdot\big(-ie\epsilon^\nu F_{\mu\nu}\big)\right\}. \tag{19.28}$$

在二维，$\operatorname{tr}[\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^5]=2\epsilon^{\alpha\mu}$。因此，

$$\partial_\mu j^{\mu 5} = \frac{e}{2\pi}\operatorname*{symm}\lim_{\epsilon\to 0}\Big\{2\frac{\epsilon_\mu\epsilon^\nu}{\epsilon^2}\Big\}\epsilon^{\mu\alpha}F_{\nu\alpha}. \tag{19.29}$$

现在根据方案(19.23)取对称极限。我们精确地找到了反常非守恒方程(19.18)。在这个推导中，(19.18)是以一个算符关系出现的，而不是一个简单的矩阵元。注意，和我们在这个方程的第一次推导中一样，局域规范不变性的假设起了至关重要的作用。如果我们在(19.22)中通过反转Wilson线的符号来定义轴矢流，方案就会对局域规范不变性造成破坏，我们就会发现在(19.29)的右手边各种贡献相互抵消。

一个关于费米子数不守恒的例子

为了完成对二维轴矢流的讨论，我们将证明不守恒方程(19.18)也具有整体性质。在自由费米子理论中，轴流守恒定律的积分给出了

$$\int d^2x\, \partial_\mu j^{\mu 5} = N_R - N_L = 0. \tag{19.30}$$

这种关系意味着，在任何可能的过程中，右移的费米子和左移的费米子数量的差都不会改变。结合矢量流的守恒定律，我们得出结论：每种类型的费米子的数目是分别守恒的。由(19.8)，我们可以得出这些独立的守恒定律在二维QED中也成立。然而，我们已经发现，我们必须谨慎地作出有关轴流的陈述。

在二维QED中，轴流的守恒方程被反常非守恒方程(19.18)所代替。如果这个方程的右边是一个在无穷远处迅速下降的量的全导数，它的积分将会消失，我们仍然会保护整体守恒定律。事实上，$\epsilon^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$是一个全导数:

$$\epsilon^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2\partial_\mu\big(\epsilon^{\mu\nu}A_\nu\big). \tag{19.31}$$

然而，我们很容易想象出这样的例子：这个量的积分不会消失，例如，在一个有着恒定背景电场的世界里，守恒律(19.30)必须被违反。但这是怎么能发生呢?

让我们来分析这个问题，通过考虑费米子处于一维空间，且在空间中有恒定且具有非常慢的时间依赖性的背景场A^1。我们假设系统将有有限的长度L，具有周期性边界条件。注意，不能通过一个满足周期边界条件的规范变换，来消除常数A^1场。看到这点的一种方法是，注意到系统为如下Wilson线给出了一个非零值

$$\exp\Big[-ie\int_0^L dx\, A_1(x)\Big], \tag{19.32}$$

由于周期边界条件，这形成了一个规范不变的闭环。

遵循着三维哈密顿量(3.84)的推导，我们发现一维系统的哈密顿量为

$$H = \int dx\, \psi^\dagger\big(-i\alpha^1 D_1\big)\psi, \tag{19.33}$$

其中$\alpha = \gamma^0\gamma^1 = \gamma^5$。在分量(19.7)中，

$$H = \int dx \Big\{ -i\psi_+^\dagger \big(\partial_1 - ieA^1\big)\psi_+ + i\psi_-^\dagger \big(\partial_1 - ieA^1\big)\psi_- \Big\}. \tag{19.34}$$

对于一个恒定的A^1场，很容易对角化这个哈密顿量。协变导数的本征态是波函数

$$e^{ik_n x}, \qquad \text{with} \quad k_n = \frac{2\pi n}{L},\ n = -\infty, \ldots, \infty, \tag{19.35}$$

以满足周期边界条件。那么H的单粒子本征态有能量

$$\begin{aligned} \psi_+ : &\qquad E_n = +(k_n - eA^1), \\ \psi_- : &\qquad E_n = -(k_n - eA^1). \end{aligned} \tag{19.36}$$

每一种费米子都有一个无限的等间距高塔。为了找到H的基态，我们把负能级填满，并把这些填满的能级之间的空穴解释为反粒子。

现在绝热地改变A^1的值。费米子能级按照这种关系缓慢地变化(19.36)。如果A^1的变化量是有限的

$$\Delta A^1 = \frac{2\pi}{eL} \tag{19.37}$$

这使得Wilson圈(19.32)回到了它原来的值，H的谱回到了它原来的形式。在这个过程中，ψ_+的每层向下移动到下一个位置，ψ_-的每层向上移动到下一个位置，如图19.2所示。在这个绝热过程中，应保持各层的占有数。因此，引人注目的是，一个右移的费米子从真空中消失了，另一个额外的左移费米子出现了。同时，

$$\begin{aligned} \int d^2x \left(\frac{e}{\pi}\epsilon^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right) &= \int dt\, dx\, \frac{e}{\pi}\partial_0 A_1 \\ &= \frac{e}{\pi}L\big(-\Delta A^1\big) \\ &= -2, \end{aligned} \tag{19.38}$$

我们在最后一行插入了(19.37)。因此，反常非守恒方程(19.18)的积分形式确实满足:

$$N_R - N_L = \int d^2x \left(\frac{e}{2\pi}\epsilon^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right). \tag{19.39}$$

即使在这简单的例子，我们也发现在分析手征守恒定律时，不可能不考虑紫外正规化的问题。右移费米子消失了，左移费米子从费米子谱$E \to -\infty$的深处出现。在计算不同费米子数的改变时，我们已经假设真空在很大的负能量下不能改变它所包含的荷。这一方案是规范不变的，但它导致轴矢流不守恒。

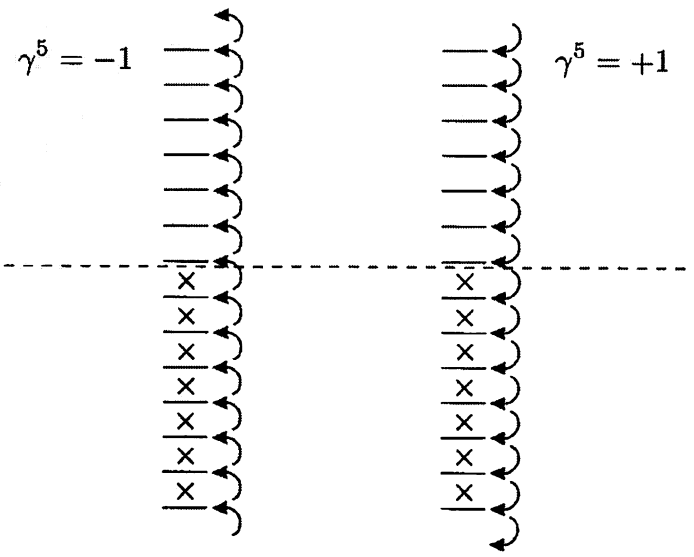


图19.2 背景A^1场的绝热变化对一维QED哈密顿量H的真空态的效应。

19.2 四维的轴流

我们刚才给出的二维轴流的所有推导在四维空间中都有类比。在式(3.40)中，我们证明了，在无质量费米子的情况下，四维狄拉克方程可以整齐地分割成左手费米子和右手费米子的独立方程。如果我们把狄拉克方程与规范场耦合，我们就用协变微分代替微分。这似乎并不会对两个螺旋度分量之间的明显分离有影响。因此很明显，矢量和轴矢流都应该保持守恒。然而，经过我们刚刚完成的对二维情况的分析，我们知道我们不应该把这些守恒律视为理所当然。现在我们将更仔细地分析四维中的轴矢量守恒定律。

轴矢流算符方程

我们从无质量的四维QED开始。有了前一节给出的二维轴流守恒定律的三个参数，算符推导能最容易地推广。在四维情况下，费米场方程(19.21)是相同的。我们可以再次采用轴矢流(19.22)的规范不变定义。当我们取这个流的散度时，所有导致式(19.25)的操作仍然是正确的

从这一点出发，我们必须计算极限$\epsilon \to 0$时两个费米子场的算符乘积中的奇异项。在二维，通过使用自由场传播子来收缩两个算符以得到领头项。这个贡献

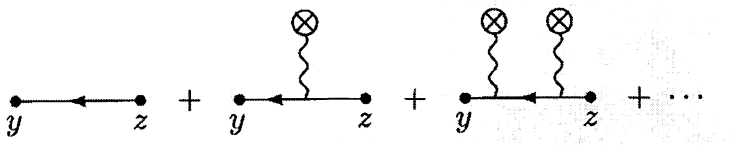


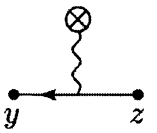
图19.3 在背景规范场存在时$\psi(y)\bar{\psi}(z)$的展开。

给出

$$\begin{aligned}\overbrace{\psi(y)\bar{\psi}(z)} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik\cdot(y-z)} \frac{i\not{k}}{k^2} \\ &= -\not{\partial}\Big(\frac{i}{4\pi^2}\frac{1}{(y-z)^2}\Big) \\ &= \frac{-i}{2\pi^2}\frac{\gamma^\alpha (y-z)_\alpha}{(y-z)^4}. \end{aligned} \tag{19.40}$$

在$(y-z)\to 0$时这是高度奇异的，但当与$\gamma^\mu\gamma^5$求迹时给出0。为了得到一个非零的结果，我们必须考虑算符乘积展开的更高阶的项。

在非零背景规范场中，费米子场的收缩由图19.3所示的一系列图给出。我们在(19.40)中计算出了该级数的领头项。当$(y-z)\to 0$时，更高阶项给出奇异性更低的项。级数的第二项给出为



$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-i(k+p)\cdot y} e^{ik\cdot z} \frac{i(\not{k}+\not{p})}{(k+p)^2}\big(-ie\not{A}(p)\big)\frac{i\not{k}}{k^2}. \tag{19.41}$$

这个贡献导致

$$\begin{aligned}&\big\langle \bar{\psi}(x+\tfrac{\epsilon}{2})\gamma^\mu\gamma^5\psi(x-\tfrac{\epsilon}{2})\big\rangle \\ &\qquad = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ik\cdot\epsilon} e^{-ip\cdot x}\,\mathrm{tr}\Big[(-\gamma^\mu\gamma^5)\frac{i(\not{k}+\not{p})}{(k+p)^2}\big(-ie\not{A}(p)\big)\frac{i\not{k}}{k^2}\Big] \\ &\qquad = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ik\cdot\epsilon} e^{-ip\cdot x}\frac{4e\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}(k+p)_\alpha A_\beta(p) k_\gamma}{k^2(k+p)^2}. \end{aligned} \tag{19.42}$$

为了求出$\epsilon\to 0$的极限，我们可以对较大的k展开被积函数，于是

$$\begin{aligned}\big\langle \bar{\psi}(x+\tfrac{\epsilon}{2})\gamma^\mu\gamma^5\psi(x-\tfrac{\epsilon}{2})\big\rangle &\sim 4e\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip\cdot x}p_\alpha A_\beta(p)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{ik\cdot\epsilon}\frac{k_\gamma}{k^4} \\ &= 4e\epsilon^{\alpha\beta\mu\gamma}\big(\partial_\alpha A_\beta(x)\big)\frac{\partial}{\partial\epsilon^\gamma}\Big(\frac{i}{16\pi^2}\log\frac{1}{\epsilon^2}\Big) \\ &= 2e\epsilon^{\alpha\beta\mu\gamma}F_{\alpha\beta}(x)\Big(\frac{-i}{8\pi^2}\frac{\epsilon_\gamma}{\epsilon^2}\Big). \end{aligned} \tag{19.43}$$

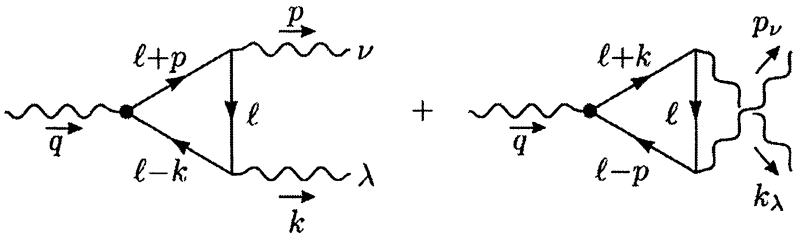


图19.4 对轴矢流的散度的双光子矩阵元有贡献的图

将这个表达式代入(19.25)，我们发现

$$\partial_\mu j^{\mu 5} = \operatorname*{symm}\lim_{\epsilon\to 0}\left\{\frac{e}{4\pi^2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\gamma}F_{\alpha\beta}\left(\frac{-i\epsilon_\gamma}{\epsilon^2}\right)\left(-ie\epsilon^\nu F_{\mu\nu}\right)\right\}. \tag{19.44}$$

现在在四维中取对称极限$\epsilon \to 0$。我们发现

$$\partial_\mu j^{\mu 5} = -\frac{e^2}{16\pi^2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}. \tag{19.45}$$

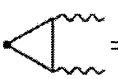
这个表示四维轴流的反常不守恒的方程被称为Adler-Bell-Jackiw反常。Adler和Bardeen证明了这个算符关系对于QED微扰论中的所有阶都是正确的，且没有收到进一步的辐射修正*。

三角图

我们可以在标准微扰论中，通过检查轴矢流的散度拥有产生两个光子的非零矩阵元，从而确认Adler-Bell-Jackiw关系。要做到这一点，我们必须分析矩阵元

$$\int d^4x e^{-iq\cdot x}\left\langle p,k\right|j^{\mu 5}(x)\left|0\right\rangle = (2\pi)^4\delta^{(4)}(p+k-q)\epsilon_\nu^*(p)\epsilon_\lambda^*(k)\mathcal{M}^{\mu\nu\lambda}(p,k). \tag{19.46}$$

对$\mathcal{M}^{\mu\nu\lambda}$有贡献的领头阶图如图19.4所示。第一个图给出了贡献



$$= (-1)(-ie)^2\int\frac{d^4\ell}{(2\pi)^4}\,\mathrm{tr}\left[\gamma^\mu\gamma^5\frac{i(\not\ell-\not k)}{(\ell-k)^2}\gamma^\lambda\frac{i\not\ell}{\ell^2}\gamma^\nu\frac{i(\not\ell+\not p)}{(\ell+p)^2}\right], \tag{19.47}$$

第二个图给出了(p,ν)和(k,λ)交换的相同贡献。

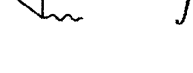
很容易给出一个正式的论证来说明轴流的散度的矩阵元在这个阶消失。取(19.46)中轴流的散度，相当于将这个量与iq_μ点积。现在我们在(19.47)的右边

*S.Adler and W.A.Bardeen,*Phys.Rev.*182,1517(1969); S.Adler, in Deseret.al.(1970)

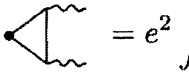
操作，就像证明Ward恒等式一样。替换

$$q_\mu \gamma^\mu \gamma^5 = (\not{\ell} + \not{p} - \not{\ell} + \not{k})\gamma^5 = (\not{\ell} + \not{p})\gamma^5 + \gamma^5(\not{\ell} - \not{k}). \tag{19.48}$$

每个动量因子与相邻的分子结合，从而抵消相应的分母。这使(19.47)的形式变成

$iq_\mu \cdot$  $= e^2 \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \mathrm{tr}\left[\gamma^5 \frac{(\not{\ell} - \not{k})}{(\ell - k)^2}\gamma^\lambda \frac{\not{\ell}}{\ell^2}\gamma^\nu + \gamma^5\gamma^\lambda \frac{\not{\ell}}{\ell^2}\gamma^\nu \frac{(\not{\ell} + \not{p})}{(\ell + p)^2}\right].$ (19.49)

现在在第二项让γ^ν通过γ^5，将对第一项的积分进行移动，按照$\ell \to (\ell + k)$:

$iq_\mu \cdot$  $= e^2 \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \mathrm{tr}\left[\gamma^5 \frac{\not{\ell}}{\ell^2}\gamma^\lambda \frac{(\not{\ell} + \not{k})}{(\ell + k)^2}\gamma^\nu - \gamma^5 \frac{\not{\ell}}{\ell^2}\gamma^\nu \frac{(\not{\ell} + \not{p})}{(\ell + p)^2}\gamma^\lambda\right].$ (19.50)

这个表达式在(p, ν)和(k, λ)的交换下显然是反对称的，因此图19.4中第二幅图的贡献精确抵消了(19.47)。

然而，由于这种推导涉及到积分变量的变化，我们应该仔细考虑这种变化是否被正规化所允许。从(19.47)可以看出，必须被移动的积分是发散的。如果用一个简单的动量截断来正规化这个图，或者甚至用Pauli-Villars正规化，结果是这个移动留下了一个有限的非零项。在第7章中，我们在讨论QED真空极化图时遇到了类似的问题。我们通过使用维数正规化来回避这个问题。图19.4的维数正规化将自动确保光子发射顶点的QED Ward恒等式的有效性，

$$p_\nu \mathcal{M}^{\mu\nu\lambda} = k_\lambda \mathcal{M}^{\mu\nu\lambda} = 0. \tag{19.51}$$

但在分析轴矢流时，甚至连维数正规化都有一个额外的微妙之处，因为γ^5本质上是一个四维对象。在他们原来关于维数正规化的论文中*，'t Hooft和Veltman建议在d维使用如下定义

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{19.52}$$

这个定义的结果是，γ^5与$\mu = 0,1,2,3$的γ^μ反对易，但与其他μ值的γ^μ对易。

在(19.47)的计算中，外部指标和动量p、k、q都存在于四维物理中，但圈动量ℓ在所有维数中都有分量。写

$$\ell = \ell_\parallel + \ell_\perp, \tag{19.53}$$

*G 't Hooft and M. J. G. Veltman, *Nucl. Phys.* **B44**, 189(1972)

其中第一项在维度0,1,2,3中有非零分量，第二项在其他$d-4$个维度中有非零分量。因为在这些额外的维度中，γ^5与γ^μ对易，等式(19.48)被修改为

$$q_\mu\gamma^\mu\gamma^5 = (\not{\ell}+\not{k})\gamma^5 + \gamma^5(\not{\ell}-\not{p}) - 2\gamma^5\not{\ell}_\perp. \tag{19.54}$$

前两项根据上面给出的论证而消去了；通过维数正规化(19.50)中的移动就是正当的。但是，(19.54)第三项有额外的贡献:

$iq_\mu \cdot$  $= e^2\int\frac{d^4\ell}{(2\pi)^4}\,\mathrm{tr}\left[-2\gamma^5\not{\ell}_\perp\frac{(\not{\ell}-\not{k})}{(\ell-k)^2}\gamma^\lambda\frac{\not{\ell}}{\ell^2}\gamma^\nu\frac{(\not{\ell}+\not{p})}{(\ell+p)^2}\right].$ (19.55)

为了计算这个贡献，以标准方式组合分母，并移动积分变量$\ell\to(\ell+P)$，其中$P=xk-yp$。在展开分子时，我们必须保留$\gamma^\nu,\gamma^\lambda,\not{p},\not{k}$的一个因子并与$\gamma^5$一起给出一个非零迹。这就留下了一个$\not{\ell}_\perp$因子和一个$\not{\ell}$因子，其$\not{\ell}$必须用额外维度中的分量来计算才能得到一个非零的积分。因子$\not{\ell}_\perp$与问题中的其他狄拉克矩阵反对易，因此可以移动到相邻的位置。因此我们必须计算积分

$$\int\frac{d^4\ell}{(2\pi)^4}\frac{\not{\ell}_\perp\not{\ell}_\perp}{(\ell^2-\Delta)^3}, \tag{19.56}$$

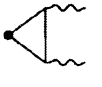
其中Δ是k,p和费曼参数的函数。使用

$$(\not{\ell}_\perp)^2 = \ell_\perp^2 \to \frac{(d-4)}{d}\ell^2 \tag{19.57}$$

在对称积分下，我们可以计算(19.56)为

$$\frac{i}{(4\pi)^{d/2}}\frac{(d-4)}{2}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Gamma(3)\Delta^{2-d/2}} \xrightarrow[d\to4]{} \frac{-i}{2(4\pi)^2}. \tag{19.58}$$

注意，对数发散积分在分母中贡献了一个因子$(d-4)$，并允许一个与$(d-4)$成比例的反常项，它提供有限的贡献。(19.55)的求值中，代数的其余部分很简单。包含动量移动P的项消去了，我们发现

$$\begin{aligned} iq_\mu \cdot \text{} &= e^2\left(\frac{-i}{2(4\pi)^2}\right)\mathrm{tr}\left[2\gamma^5(-\not{k})\gamma^\lambda\not{p}\gamma^\nu\right] \\ &= \frac{e^2}{4\pi^2}\epsilon^{\alpha\lambda\beta\nu}k_\alpha p_\beta. \end{aligned} \tag{19.59}$$

这一项在(p,ν)和(k,λ)的交换下是对称的，因此图19.4的第二张图给出了相同的贡献。因此，

$$\begin{aligned}\langle p,k|\,\partial_\mu j^{\mu 5}(0)\,|0\rangle &= -\frac{e^2}{2\pi^2}\epsilon^{\alpha\nu\beta\lambda}(-ip_\alpha)\epsilon^*_\nu(p)(-ik_\beta)\epsilon^*_\lambda(k)\\ &= -\frac{e^2}{16\pi^2}\,\langle p,k|\,\epsilon^{\alpha\nu\beta\lambda}F_{\alpha\nu}F_{\beta\lambda}(0)\,|0\rangle\,,\end{aligned} \tag{19.60}$$

正如我们从Adler-Bell-Jackiw反常方程中所期望的那样。

泛函积分的手征变换

第三种理解Adler-Bell-Jackiw反常的方法来自于从费米子场的泛函积分出发来分析轴矢流的守恒律。在第9.6节中，我们使用泛函积分推导了与拉格朗日量的任何对称性相关的流守恒方程和Ward恒等式。当我们把这个论证应用于无质量费米子的手征对称性时，看看它是如何崩溃的，这很有启发意义。

我们首先按照第9.6节的方法回顾轴矢量Ward恒等式的标准推导。从费米子泛函积分开始

$$Z=\int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}\exp\Big[i\int d^4x\,\bar{\psi}(i\not{D})\psi\Big], \tag{19.61}$$

进行变量替换

$$\begin{aligned}\psi(x)\to\psi'(x)&=(1+i\alpha(x)\gamma^5)\psi(x),\\ \bar{\psi}(x)\to\bar{\psi}'(x)&=\bar{\psi}(1+i\alpha(x)\gamma^5).\end{aligned} \tag{19.62}$$

由于具有常数α的整体手征旋转是拉格朗日量的一个对称性，拉格朗日量中由(19.62)得到的唯一新项包含α的导数，因此，

$$\begin{aligned}\int d^4x\,\bar{\psi}'(i\not{D})\psi' &= \int d^4x\big[\bar{\psi}(i\not{D})\psi-\partial_\mu\alpha(x)\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi\big]\\ &= \int d^4x\big[\bar{\psi}(i\not{D})\psi+\alpha(x)\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi)\big].\end{aligned} \tag{19.63}$$

然后，针对$\alpha(x)$来对拉格朗日量变分，我们得到了轴流的经典守恒方程。通过对关联函数的泛函表达式进行类似的操作，如式(9.102)，我们可以推导出相关的Ward恒等式。

在刚刚给出的论证中，我们假设当我们将变量从$\psi'(x)$变为ψ时，泛函测度不会改变。这似乎是合理的，因为(19.62)中ψ'和ψ的关系看起来像是一个幺正变换。

* K. Fujikawa, Phys. Rev. Lett. 42, 1195(1979); Phys. Rev. D21, 2848(1980)

然而，我们应该更仔细地研究这一点。首先，我们必须小心定义泛函测度。为此，在$\not{D}$的本征态的基上展开费米子场，定义$\not{D}$的右和左本征矢量

$$(i\not{D})\phi_m = \lambda_m \phi_m, \qquad \hat{\phi}_m(i\not{D}) = -iD_\mu \hat{\phi}_m \gamma^\mu = \lambda_m \hat{\phi}_m. \tag{19.64}$$

对于零背景A_μ场，这些本征态是定动量的狄拉克波函数；本征值满足

$$\lambda_m^2 = k^2 = (k^0)^2 - (\mathbf{k})^2. \tag{19.65}$$

对于一个固定的A_μ场，在大k下这也是本征值的渐近形式，这些本征函数给了我们一个基，我们可以用它来展开ψ和$\bar{\psi}$

$$\psi(x) = \sum_m a_m \phi_m(x), \qquad \bar{\psi}(x) = \sum_m \hat{a}_m \hat{\phi}_m(x), \tag{19.66}$$

其中，a_m, $\hat{a}_m$为反对易系数，再乘上c数本征函数(19.64)。对$\psi, \bar{\psi}$的泛函测度可以定义为

$$\mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} = \prod_m da_m d\hat{a}_m, \tag{19.67}$$

对$\psi', \bar{\psi}'$的泛函测度可以用同样的方法定义。

如果$\psi'(x) = (1 + i\alpha(x)\gamma^5)\psi(x)$,，则$\psi$与$\psi'$的展开系数通过一个无穷小线性变换$(1 + C)$联系起来，计算如下:

$$a'_m = \sum_n \int d^4x \phi_m^\dagger(x)(1 + i\alpha(x)\gamma^5)\phi_n(x) a_n = \sum_n \big(\delta_{mn} + C_{mn}\big) a_n. \tag{19.68}$$

Then

$$\mathcal{D}\psi' \mathcal{D}\bar{\psi}' = \mathcal{J}^{-2} \cdot \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}, \tag{19.69}$$

其中$\mathcal{J}$是变换$(1 + C)$的雅可比行列式，$\mathcal{J}$的逆出现在(19.69)中，这是费米子积分规则(9.63)或(9.69)的结果。为了求$\mathcal{J}$的值，我们写

$$\mathcal{J} = \det\big(1 + C\big) = \exp\big[\mathrm{tr}\log\big(1 + C\big)\big] = \exp\Big[\sum_n C_{nn} + \cdots\Big], \tag{19.70}$$

我们可以忽略最后一行的高阶项因为C是无穷小的。因此,

$$\log \mathcal{J} = i \int d^4x\, \alpha(x) \sum_n \phi_n^\dagger(x)\gamma^5 \phi_n(x). \tag{19.71}$$

$\alpha(x)$的系数看起来是$\mathrm{tr}[\gamma^5] = 0$。然而，我们必须以一种规范不变的方式，对本征态$n$的求和进行正规化。自然的选择是

$$\sum_n \phi_n^\dagger(x)\gamma^5 \phi_n(x) = \lim_{M\to\infty} \sum_n \phi_n^\dagger(x)\gamma^5 \phi_n(x) e^{\lambda_n^2/M^2}. \tag{19.72}$$

如(19.65)所示，在Wick旋转后λ_n^2的符号在大动量时为负；从而正确地给出了收敛因子指数中的符号。我们可以把(19.72)写成算符形式

$$\begin{aligned}\sum_n \phi_n^\dagger(x)\gamma^5\phi_n(x) &= \lim_{M\to\infty}\sum_n \phi_n^\dagger(x)\gamma^5 e^{(i\not{D})^2/M^2}\phi_n(x)\\ &= \lim_{M\to\infty}\langle x|\,\mathrm{tr}\left[\gamma^5 e^{(i\not{D})^2/M^2}\right]|x\rangle\,,\end{aligned} \tag{19.73}$$

其中在第二行，我们对狄拉克指标求迹。

为了计算(19.73)，我们根据(16.107)重写$\left(i\not{D}\right)^2$。在我们目前的惯例中，这个等式是

$$(i\not{D})^2 = -D^2 + \frac{e}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \tag{19.74}$$

其中$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]$。由于我们取$M\to\infty$的极限，我们可以把注意力集中在谱的渐近部分，在那里动量k很大则我们可以以规范场的幂作展开。为了得到γ^5的非零迹，我们必须从指数中取下4个狄拉克矩阵。通过将指数展开为$(\sigma\cdot F)^2$阶，然后在所有其他项中忽略背景A_μ场，就给出了领头项。这给出

$$\begin{aligned}&\lim_{M\to\infty}\langle x|\,\mathrm{tr}\left[\gamma^5 e^{(-\not{D}^2+(e/2)\sigma\cdot F)/M^2}\right]|x\rangle\\ &\qquad=\lim_{M\to\infty}\mathrm{tr}\left[\gamma^5\frac{1}{2!}\left(\frac{e}{2M^2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(x)\right)^2\right]\langle x|\,e^{-\partial^2/M^2}\,|x\rangle\,.\end{aligned} \tag{19.75}$$

(19.75)中的矩阵元可以通过Wick旋转计算出来：

$$\begin{aligned}\langle x|\,e^{-\partial^2/M^2}\,|x\rangle &= \lim_{x\to y}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik\cdot(x-y)}e^{k^2/M^2}\\ &= i\int\frac{d^4k_E}{(2\pi)^4}e^{-k_E^2/M^2}\\ &= i\frac{M^4}{16\pi^2}.\end{aligned} \tag{19.76}$$

然后(19.75)化简为

$$\begin{aligned}&\lim_{M\to\infty}\frac{-ie^2}{8\cdot 16\pi^2}M^4\,\mathrm{tr}\left[\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma\frac{1}{(M^2)^2}F_{\mu\nu}F_{\lambda\sigma}(x)\right]\\ &\qquad=-\frac{e^2}{32\pi^2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}(x).\end{aligned} \tag{19.77}$$

Thus,

$$\mathcal{J} = \exp\left[-i\int d^4x\,\alpha(x)\left(\frac{e^2}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}F_{\mu\nu}F_{\lambda\sigma}(x)\right)\right]. \tag{19.78}$$

综上所述，我们发现在变换变量(19.62)后，泛函积分(19.61)取为如下形式

$$Z=\int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}\exp\left[i\int d^4x\left(\bar{\psi}(i\not{D})\psi+\alpha(x)\left\{\partial_\mu j^{\mu 5}+\frac{e^2}{16\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}F_{\mu\nu}F_{\lambda\sigma}\right\}\right)\right]. \tag{19.79}$$

对指数中的$\alpha(x)$变分，我们得到了精确的Adler-Bell-Jackiw反常方程。

轴矢量反常的这种推导特别有趣，因为它很容易推广到任何偶数维。泛函导数总是在反常方程的右边选出赝标量算符，赝标量算符是由规范场建立的，与流的散度具有相同量纲d。在二维中，这种推导直接导致了(19.18)。只要d是偶的，我们总可以构造一个与所有狄拉克矩阵反对易的矩阵γ^5(通过取狄拉克矩阵的乘积)。然后，泛函导数直接得出了结果

$$\partial_\mu j^{\mu 5}=(-1)^{n+1}\frac{2e^n}{n!(4\pi)^n}\epsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2n}}F_{\mu_1\mu_2}\cdots F_{\mu_{2n-1}\mu_{2n}}, \tag{19.80}$$

式中$n=d/2$。

在上一节的最后，我们讨论了在有着宏观电场的二维系统中，轴矢量反常导致了费米子荷的整体不守恒。以同样的方式，四维反常方程导致背景场中左手和右手费米子数的整体不守恒，其中(19.45)右侧非零。这些是具有平行电场和磁场的场位形。在问题19.1中，我们在这种类型的一个简单情况中算出了四维无质量费米子的例子，表明费米子数的确破坏了，在某种程度上类似于我们在19.1节的末尾所看到的，与Adler-Bell-Jackiw反常一致。

19.3 QCD 中的 Goldstone 玻色子与手征对称性

Adler-Bell-Jackiw反常对QCD有许多重要的意义。为了描述这些，我们必须首先系统地讨论QCD的手征对称性。在这次讨论中，除了最轻的夸克u和d外，我们将忽略其他所有的夸克。这给出的结果很自然地推广到我们将在下面发现的结果。

QCD拉格朗日量的费米子部分是

$$\mathcal{L}=\bar{u}i\not{D}u+\bar{d}i\not{D}d-m_u\bar{u}u-m_d\bar{d}d. \tag{19.81}$$

如果u夸克和d夸克很轻，最后两项就很小，可以忽略不计。让我们研究一下这种近似的含义。如果我们忽略了u和d的质量，拉格朗日量(19.81)当然有同位旋对

称性，即混合了u和d场的$SU(2)$幺正变换的对称性。然而，由于无质量费米子的经典拉格朗日量不包含左手和右手夸克之间的耦合，所以拉格朗日量实际上在独立的幺正变换下是对称的

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \to U_L \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \qquad \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_R \to U_R \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_R. \tag{19.82}$$

将这些变换的$U(1)$和$SU(2)$部分分离开是有用的；那么经典的无质量QCD拉格朗日量的对称群是$SU(2) \times SU(2) \times U(1) \times U(1)$。设$Q$表示夸克多重态，其手征组分是

$$Q_L = \left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \qquad Q_R = \left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}. \tag{19.83}$$

然后我们可以把与这些对称性相关的流写成

$$\begin{aligned} j_L^\mu &= \overline{Q}_L \gamma^\mu Q_L, \qquad j_R^\mu = \overline{Q}_R \gamma^\mu Q_R, \\ j_L^{\mu a} &= \overline{Q}_L \gamma^\mu \tau^a Q_L, \qquad j_R^{\mu a} = \overline{Q}_R \gamma^\mu \tau^a Q_R, \end{aligned} \tag{19.84}$$

其中$\tau^a = \sigma^a/2$表示$SU(2)$的生成元。左手流和右手流的和给出了重子数流和同位旋流

$$j^\mu = \overline{Q}\gamma^\mu Q, \qquad j^{\mu a} = \overline{Q}\gamma^\mu \tau^a Q. \tag{19.85}$$

对应的对称性是$U_L = U_R$的变换(19.82)。而流(19.84)的差则给出了相应的轴矢流$j^{\mu 5}$, $j^{\mu 5a}$:

$$j^{\mu 5} = \overline{Q}\gamma^\mu \gamma^5 Q, \qquad j^{\mu 5a} = \overline{Q}\gamma^\mu \gamma^5 \tau^a Q. \tag{19.86}$$

在接下来的讨论中，我们将通过假设这些流的经典守恒定律不会被反常破坏，从而得出关于强相互作用的结论。我们将在下面表明，这个假设对于同位旋三重态流$j^{\mu 5a}$是正确的，但对$j^{\mu 5}$不是。

矢量$SU(2) \times U(1)$变换是强相互作用的明显的对称性，相关的流导致了我们熟悉的守恒定律。那么正交的轴矢量变换呢？这些变换并不对应强相互作用的任何明显的对称性。在1960年。Nambu和Jona-Lasinio假设这些变换是强相互作用的精确对称性，是自发破缺的*。这一观点对低能下强相互作用的性质进行了正确而又令人惊讶的详细描述。

*Y Nambu and G Jona-lasinio, *Phys. Rev.* **122**, 345(1961)

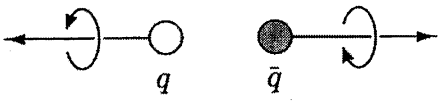


图19.5 总动量和角动量为零的夸克-反夸克对

手征对称性的自发破缺

在我们描述自发破缺手征对称性的后果之前，我们先来问一下为什么会预期手征对称性会自发破缺。在超导理论中，一个电子-电子的小吸引会导致在金属基态出现电子对的凝聚。在QCD中，夸克和反夸克具有强的、吸引的相互作用，而且，如果这些夸克是无质量的，那么产生一个额外的夸克-反夸克对的能量消耗就很小。因此，我们预计QCD的真空将包含夸克-反夸克对的凝聚。这些费米子对的总动量和角动量必须为零。因此，如图19.5所示，它们必须含有净手征荷，左手夸克与右手夸克的反粒子配对。夸克对凝聚的真空态由标量算符的非零真空期望值表征

$$\langle 0|\,\bar{Q}Q\,|0\rangle = \langle 0|\,\bar{Q}_L Q_R + \bar{Q}_R Q_L\,|0\rangle \neq 0, \tag{19.87}$$

它在$U_L \neq U_R$的(19.82)下变换。期望值表明真空混合了两个夸克螺旋度。这使得u夸克和d夸克在穿过真空时获得有效质量。处在夸克-反夸克束缚态中的u夸克和d夸克的移动看起来就像它们有一个相当大的有效质量，即使它们在原始的QCD拉格朗日量中质量为零。

真空期望值(19.87)表示完全对称群(19.82)自发破缺到$U_L = U_R$的矢量对称性的子群。因此，有四个自发破缺的连续对称性，与四个轴矢流有关。在第11.1节的最后，我们证明了Goldstone定理，该定理指出，量子场论中每一个自发破缺的连续对称性都会导致一个带有局域对称旋转的量子数的无质量粒子。这意味着，在无质量的u夸克和d夸克的QCD中，我们应该找到四个自旋为零的粒子，它们有着由四个轴矢流产生的正确量子数。

真实的强相互作用不包含任何无质量粒子，但确实包含一个由相对轻的介子组成的同位旋三重态，即π介子。已知这些粒子具有奇宇称(正如我们所期望的，如果它们是夸克-反夸克束缚态)。因此，它们可以由轴同位旋流产生。我们可以

对处于真空和在壳π介子之间的$j^{\mu 5a}$的矩阵元进行参数化，写成

$$\langle 0|\, j^{\mu 5a}(x)\,|\pi^b(p)\rangle = -ip^\mu f_\pi \delta^{ab} e^{-ip\cdot x}, \tag{19.88}$$

其中a,b为同位旋指标，f_π为量纲为(质量)[1]的常数。我们在19.2题中证明了f_π的值可以通过弱相互作用的π^+衰变速率来确定；我们发现$f_\pi = 93$ MeV。因为这个原因，f_π常被称为**π介子衰变常数**。如果我们将(19.88)与p_μ缩并利用轴流守恒，我们会发现在壳的π介子必须满足$p^2 = 0$，也就是说，它必须是无质量的，正如Goldstone定理所要求的那样。

如果我们现在恢复(19.81)中的夸克质量项，轴流就不再完全守恒了。夸克场的运动方程现在是

$$i\not{D}Q = \mathbf{m}Q, \qquad -iD_\mu \bar{Q}\gamma^\mu = \bar{Q}\mathbf{m}, \tag{19.89}$$

where

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix} \tag{19.90}$$

是夸克质量矩阵。这样就很容易计算

$$\partial_\mu j^{\mu 5a} = i\bar{Q}\{\mathbf{m}, \tau^a\}Q. \tag{19.91}$$

利用这个方程和(19.88)，我们得到

$$\langle 0|\, \partial_\mu j^{\mu 5a}(0)\,|\pi^b(p)\rangle = -p^2 f_\pi \delta^{ab} = \langle 0|\, i\bar{Q}\{\mathbf{m}, \tau^a\}\gamma^5 Q\,|\pi^b(p)\rangle\,. \tag{19.92}$$

最后一个表达式是一个不变量乘以

$$\mathrm{tr}\big[\{\mathbf{m}, \tau^a\}\tau^b\big] = \tfrac{1}{2}\delta^{ab}(m_u + m_d). \tag{19.93}$$

因此，夸克质量项给出了π介子的质量形式

$$m_\pi^2 = (m_u + m_d)\frac{M^2}{f_\pi}. \tag{19.94}$$

质量参数M已经被估计为400 MeV阶左右。因此，要得到观测到的介子质量140 MeV，只需要$(m_u + m_d) \sim 10$ MeV。这在强相互作用中是一个小微扰。

这个论点对强相互作用的同位旋对称性的性质有一个有趣的推论。在u夸克和d夸克在拉格朗日量中质量为零的极限下，这些夸克从具有自发破缺手征对称性的真空中获得很大且相等的有效质量。只要拉格朗日量中的质量m_u和m_d与有效质量相比很小，u和d夸克就会在强子内的表现就近似简并。因此强相互作用的同位旋对称性与连接u和d的基本对称性没有关系；这适用于m_u和m_d之间的任意关系，只要这两个参数都远小于300 MeV。类似地，如果s夸克的基本质量相比

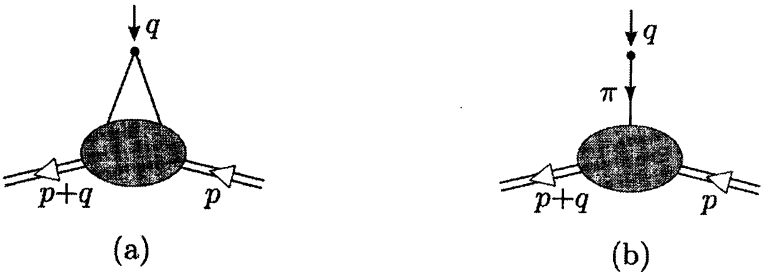


图19.6 核子中轴同位旋流的矩阵元:(a)振幅运动学;(b)导致q^2的极点的贡献

强相互作用标度来说很小，则强相互作用的近似$SU(3)$对称性也随之产生。目前对质量比m_u: m_d: m_s的最好估计实际上是1: 2: 40，因此强相互作用的基本拉格朗日量在夸克质量之间没有表现出味道对称性的迹象。

将π介子鉴定为破缺的手征对称性的Goldstone玻色子，对强子矩阵元有许多含义。这里我们只举一个例子。在下面的论证中，我们将在精确手征对称的极限下工作，忽略u和d质量的小修正。

轴同位旋流在核子中的矩阵元，是进入到中子和原子核的β衰变理论的一个量，可用以下形状因子来表示

$$\langle N|\, j^{\mu 5a}(q)\,|N\rangle = \bar{u}\Big[\gamma^\mu\gamma^5 F_1^5(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}F_2^5(q^2) + q^\mu\gamma^5 F_3^5(q^2)\Big]u. \quad (19.95)$$

顶点的运动学如图19.6所示。注意，除了矢量情况(即公式(6.33))，还有一个可能的形状因子。$q^2 = 0$时F_1^5的值不受任何明显守恒荷的值的限制。通常，人们简单写为

$$F_1^5(0) = g_A. \quad (19.96)$$

然而，我们现在将显示这个量的值是可以计算的。

如果我们忽略夸克质量，(19.95)中的轴矢流是守恒的，因此形状因子满足

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{u}(p')\Big[\not{q}\gamma^5 F_1^5(q^2) + q^2\gamma^5 F_3^5(q^2)\Big]u(p) \\ &= \bar{u}(p')\Big[(\not{p}' - \not{p})\gamma^5 F_1^5(q^2) + q^2\gamma^5 F_3^5(q^2)\Big]u(p) \\ &= \bar{u}(p')\Big[2m_N\gamma^5 F_1^5(q^2) + q^2\gamma^5 F_3^5(q^2)\Big]u(p). \end{aligned} \quad (19.97)$$

*基本夸克质量的测定的回顾是J.Gasserand H.Leutwyler, *Phys. Repts.* 87, 77 (1982).

因此,我们发现

$$g_A = \lim_{q^2 \to 0} \frac{q^2}{2m_N} F_3^5(q^2). \tag{19.98}$$

这个方程意味着$g_A = 0$，除非F_3^5包含一个q^2的极点。这样的一个极点意味着存在一个物理的无质量粒子，但幸运的是，有一个可用的粒子——无质量π介子。流产生一个π介子然后被核子吸收的过程确实导致了$F_3^5(q^2)$中的一个极点，如图19.6(b)所示。

现在我们来计算这个极点项并用它来确定g_A。低能的π介子-核子相互作用通常用如下拉格朗日量来参数化

$$\Delta\mathcal{L} = i g_{\pi NN} \pi^a \bar{N} \gamma^5 \sigma^a N. \tag{19.99}$$

流$j^{\mu 5a}$产生π介子的振幅由(19.88)给出。则图19.6(b)对流顶点的贡献为

$$-g_{\pi NN} \bar{u} (2\tau^a \gamma^5) u \cdot \frac{i}{q^2} \cdot (iq^\mu f_\pi). \tag{19.100}$$

Thus,

$$F_3^5(q^2) = \frac{1}{q^2} \cdot 2 f_\pi g_{\pi NN}. \tag{19.101}$$

我们发现g_A是由f_π、核子质量和π介子-核子耦合常数的组合给出的:

$$g_A = \frac{f_\pi}{m_N} g_{\pi NN}. \tag{19.102}$$

这种奇怪的等式，叫做**Goldberger-Treiman关系**，在实验上以5%的误差被满足。

将π介子鉴别为自发破缺的手征对称性的Goldstone玻色子，导致了对流矩阵元和π介子散射振幅的许多其他预测。特别是，在低能时，π-π和π介子-核子的散射振幅的领头项可以直接用f_π来计算，其论证与刚才给出的类似*。

手征流的反常

到目前为止，我们已经根据经典的流守恒方程讨论了QCD的手征对称性。我们现在必须问一问，这些方程是否受到Adler-Bell-Jackiw反常的影响，以及这种修正的结果是什么。

首先，我们研究由于夸克流与QCD胶子场的耦合而导致的手征守恒律的修正。前一节中所给的论证同样适用无质量费米子与非阿贝尔规范场耦合的情况，

*自发破坏手对称的详细后果在Georgi(1984)中以一种非常清晰的方式得出。

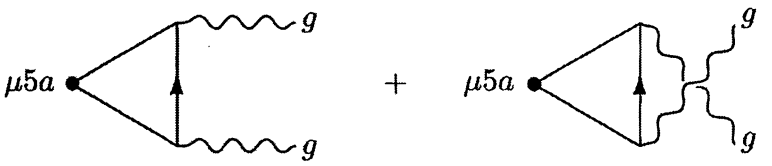


图19.7 导致QCD手征电流轴矢量反常的图表。

因此我们预计轴矢流将从图19.7所示的图中获得反常贡献。反常方程应是阿贝尔的结果，并辅以适当的群论因子。此外。由于轴流是规范不变的，反常也必须是规范不变的。也就是说，它必须包含完全的非阿贝尔场强，包括它的非线性项。这些项实际上包括在19.2节末尾给出的反常的泛函导数中。

对于(19.86)中写的QCD轴流，我们可以从图19.7中读出Adler-Bell-Jackiw反常的群论因子。对于轴同位旋流，

$$\partial_\mu j^{\mu 5a} = -\frac{g^2}{16\pi^2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F^c_{\alpha\beta}F^d_{\mu\nu}\cdot \mathrm{tr}\left[\tau^a t^c t^d\right], \tag{19.103}$$

其中$F^c_{\mu\nu}$是胶子场强，τ^a是同位旋矩阵，t^c是一个颜色矩阵，并对颜色和味道求迹。在这种情况下，我们发现

$$\mathrm{tr}\left[\tau^a t^c t^d\right] = \mathrm{tr}[\tau^a]\,\mathrm{tr}[t^c t^d] = 0, \tag{19.104}$$

因为单个τ^a的迹为零。因此，轴同位旋流的守恒不受QCD的Adler-Bell-Jackiw反常的影响。然而，在同位旋单态轴流的情况下，矩阵τ^a是被味道上的矩阵1所取代，然后我们发现

$$\partial_\mu j^{\mu 5} = -\frac{g^2 n_f}{32\pi^2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F^c_{\alpha\beta}F^c_{\mu\nu}, \tag{19.105}$$

其中n_f为味道数；在我们当前的模型中，$n_f = 2$。

因此，同位旋单态轴流实际上在QCD中并不守恒。这个流的散度等于一个带有非平凡矩阵元(在强子态之间)的胶子算符。关于这个算符的效应仍然存在一些微妙的问题。特别是可以看出，和式(19.31)中的二维轴反常一样，(19.105)的右侧是一个全散度。然而，同样根据我们在二维的经验，存在物理上合理的场位形，使得这一项的四维积分取值不为零。这一主题将在第22.3节末尾进一步讨论。无论如何，式(19.105)确实表明QCD没有同位旋单态轴对称性，也没有相关的Goldstone玻色子。这个方程解释了为什么强相互作用包含没有与π介子的质量相当的、轻的同位旋单态的赝标量介子。

虽然轴同位旋流没有来自QCD相互作用的轴反常，但它们确实有一个与夸克和电磁耦合有关的反常。再次参考图19.7，我们可以看到轴同位旋流的电磁反常被给出为

$$\partial_\mu j^{\mu 5a} = -\frac{e^2}{16\pi^2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}\cdot \mathrm{tr}\left[\tau^a Q^2\right], \tag{19.106}$$

其中$F_{\mu\nu}$为电磁场强，Q为夸克电荷矩阵，

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \tag{19.107}$$

再次对味道和颜色求迹。由于迹中的矩阵不依赖于颜色，所以颜色求和只是给出了一个因子3。味道的迹只有当$a=3$时才非零；在那个情况下，电磁反常是

$$\partial_\mu j^{\mu 53} = -\frac{e^2}{32\pi^2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}. \tag{19.108}$$

由于流$j^{\mu 53}$湮灭了一个π^0介子，式(19.108)表明轴矢量反常对$\pi^0 \to 2\gamma$衰变的矩阵元有贡献。我们现在会证明，实际上，它给出了这个振幅的领头贡献。同样，我们在u夸克和d夸克的无质量极限下进行研究，这样手征对称性就能精确地反映出反常的效应。

考虑真空和双光子态之间的轴流的矩阵元:

$$\langle p,k|\, j^{\mu 53}(q)\,|0\rangle = \epsilon^*_\nu \epsilon^*_\lambda \mathcal{M}^{\mu\nu\lambda}(p,k). \tag{19.109}$$

这是与我们在第19.2节的QED微扰论中研究的相同的矩阵元(19.46)。然而现在，我们通过将这个矩阵元展开为形状因子来研究它的一般性质。一般来说，通过写出所有可能的张量结构并应用源自(p,ν)和(k,λ)交换下的对称性的限制以及QED的Ward恒等式(19.51)，可以对振幅进行分解。这给出了三种可能结构：

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{\mu\nu\lambda} = {} & q^\mu \epsilon^{\nu\lambda\alpha\beta}p_\alpha k_\beta \mathcal{M}_1 + \left(\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}k^\lambda - \epsilon^{\mu\lambda\alpha\beta}p^\nu\right)k_\alpha p_\beta \mathcal{M}_2 \\ & + \left[\left(\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}p^\lambda - \epsilon^{\mu\lambda\alpha\beta}k^\nu\right)k_\alpha p_\beta - \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}(p-k)_\sigma p\cdot k\right]\mathcal{M}_3.\end{aligned} \tag{19.110}$$

通过在壳条件$p^2 = k^2 = 0$的优点，第二项满足(19.51)。

现在将(19.110)与(iq_μ)缩并来得到轴矢流的散度。我们发现

$$iq_\mu \mathcal{M}^{\mu\nu\lambda} = iq^2\epsilon^{\nu\lambda\alpha\beta}p_\alpha k_\beta \mathcal{M}_1 - i\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}q_\mu (p-k)_\sigma p\cdot k\mathcal{M}_3; \tag{19.111}$$

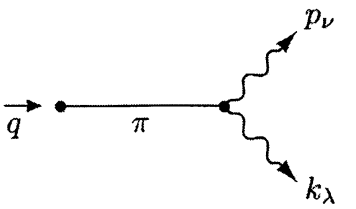


图19.8 导致了轴矢流形状因子$\mathcal{M}_1$中的极点的贡献

其他项自动为零。用$q = p + k, q^2 = 2p \cdot k$，我们可以化简它成

$$iq_\mu \mathcal{M}^{\mu\nu\lambda} = iq^2 \epsilon^{\nu\lambda\alpha\beta} p_\alpha k_\beta (\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_3). \tag{19.112}$$

整个量与q^2成正比，在$q^2 \to 0$时明显消失。这与轴矢量反常的预测形成了对比。取(19.108)右边的矩阵元，我们得到

$$iq_\mu \mathcal{M}^{\mu\nu\lambda} = -\frac{e^2}{4\pi^2} \epsilon^{\nu\lambda\alpha\beta} p_\alpha k_\beta. \tag{19.113}$$

如果出现在(19.112)中的形状因子之一包含q^2中的一个极点，那么冲突就可以解决。这样的极点可以通过图19.8所示的过程产生，其中流产生一个π^0介子，随后衰变为两个光子。流产生介子的振幅由式(19.88)给出。我们把π介子衰变振幅参数化为

$$i\mathcal{M}(\pi^0 \to 2\gamma) = iA\epsilon_\nu^* \epsilon_\lambda^* \epsilon^{\nu\lambda\alpha\beta} p_\alpha k_\beta, \tag{19.114}$$

其中A是待确定的常数。则图19.8的过程对(19.109)中定义的振幅$\mathcal{M}^{\mu\nu\lambda}$的贡献为

$$\left(iq^\mu f_\pi\right) \frac{i}{q^2} \left(iA\epsilon^{\nu\lambda\alpha\beta} p_\alpha k_\beta\right). \tag{19.115}$$

这是对形状因子$\mathcal{M}_1$的贡献，

$$\mathcal{M}_1 = \frac{-i}{q^2} f_\pi \cdot A, \tag{19.116}$$

加上在$q^2 = 0$处正规的项。现在，通过令(19.112)与(19.113)相等，我们根据反常系数来确定A:

$$A = \frac{e^2}{4\pi^2} \frac{1}{f_\pi}. \tag{19.117}$$

从衰变矩阵元(19.114)可以直接计算出π^0的衰变率。请注意，虽然我们已经计算出了在无质量π^0的极限下的衰变矩阵元，我们必须提供物理上正确的运动学，

而这依赖于π^0质量。对于全同粒子的相空间，包含进一个因子$1/2$，我们发现，

$$\begin{aligned}\Gamma(\pi^0 \to 2\gamma) &= \frac{1}{2m_\pi}\frac{1}{8\pi}\frac{1}{2}\sum_{\text{pols.}}\left|\mathcal{M}(\pi^0 \to 2\gamma)\right|^2 \\ &= \frac{1}{32\pi m_\pi}\cdot A^2 \cdot 2(p\cdot k)^2 \\ &= A^2 \cdot \frac{m_\pi^3}{64\pi}.\end{aligned} \tag{19.118}$$

因此，最后，

$$\Gamma(\pi^0 \to 2\gamma) = \frac{\alpha^2}{64\pi^3}\frac{m_\pi^3}{f_\pi^2}. \tag{19.119}$$

这个关系，提供一个对Adler-Bell-Jackiw反常的系数的直接测量，在实验上被满足的这个关系的精度达到了几个百分点。

19.4 手征反常与手征规范理论

到目前为止，我们已经将规范场以宇称上对称的方式耦合到费米子上，将狄拉克方程中的微分替换为协变微分。这个过程把规范场和费米子的矢量流耦合起来。然而，这个过程只给出了费米子与规范玻色子可能耦合的一个子集。在这一节中，我们将构造更一般的、宇称上对称的耦合，并讨论它们与轴矢量反常的相互作用。

我们将主要关注无质量费米子的理论。如果拉格朗日量不包含费米子的质量项，它就没有混合了狄拉克费米子的两种螺旋度态的项。因此。在一个包含无质量狄拉克费米子ψ_i的理论中，我们可以用螺旋度的基(3.36)把动能项写成

$$\mathcal{L} = \psi_{Li}^\dagger i\bar{\sigma}\cdot\partial\psi_{Li} + \psi_{Ri}^\dagger i\sigma\cdot\partial\psi_{Ri}. \tag{19.120}$$

将这个系统耦合到一个规范场没有困难，只要通过将左手场ψ_{Li}分配给一个规范群G的一个表示，并将右手场分配给不同的表示。例如，我们可以将左手场分配给G的一个表示r，并使右手场在G下保持不变，这给出

$$\mathcal{L} = \psi_{Li}^\dagger i\bar{\sigma}\cdot D\psi_{Li} + \psi_{Ri}^\dagger i\sigma\cdot\partial\psi_{Ri}, \tag{19.121}$$

其中$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a t_r^a$。在更传统的表示法中，(19.121)变成

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}i\gamma^\mu\left(\partial_\mu - igA_\mu^a t_r^a\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\right)\psi. \tag{19.122}$$

很直接可以经典拉格朗日量(19.122)对于局域规范变换是不变的

$$\begin{aligned}\psi &\to \Big(1+i\alpha^a t^a\Big(\frac{1-\gamma^5}{2}\Big)\Big)\psi,\\ A^a_\mu &\to A^a_\mu+\frac{1}{g}\partial_\mu\alpha^a+f^{abc}A^b_\mu\alpha^c,\end{aligned}\tag{19.123}$$

这推广了(15.46)。因为右手场是自由场，我们甚至可以消去这些场，为纯左手费米子写出规范不变的拉格朗日量。

规范场只与左手费米子耦合的概念，在弱相互作用理论的构建中扮演了核心角色。(17.31)中描述的W玻色子与夸克和轻子的耦合，可以通过将夸克和轻子的左手分量分配给$SU(2)$规范对称的二重态而得到

$$Q_L=\begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}_L,\qquad L_L=\begin{pmatrix}\nu\\ \ell\end{pmatrix}_L,\tag{19.124}$$

然后确定W玻色子是耦合到这个$SU(2)$群的规范场。在这幅图像中，正是左手场对称性的限制导致了弱相互作用有效拉格朗日量的螺旋度结构。我们将在下一章中结合这个观点，讨论一个完整的、明确的弱相互作用模型。

为了计算出手征耦合的费米子的一般性质，用一个进一步的变换来重写它们的拉格朗日量是有用的。在式(3.38)下面，我们注意到量$\sigma^2\psi^*_R$在洛伦兹变换下是一个左手场。因此，通过如下定义，将(19.120)中的右手分量重写为新的左手费米子是有用的

$$\psi'_{Li}=\sigma^2\psi^*_{Ri},\qquad \psi'^\dagger_{Li}=\psi^T_{Ri}\sigma^2.\tag{19.125}$$

这种变换把右手费米子重新标记为反费米子，并把它们的左手反粒子称为一类新的左手费米子。利用(3.38)，我们可以把右手费米子的拉格朗日量重写为

$$\int d^4x\,\psi^\dagger_{Ri}i\sigma\cdot\partial\psi_{Ri}=\int d^4x\,\psi'^\dagger_{Li}i\bar\sigma\cdot\partial\psi'_{Li}.\tag{19.126}$$

费米子交换中的负号抵消了分部积分中的负号。注意，如果费米子被耦合到表示r中的规范场，这个操作会改变协变导数如下：

$$\begin{aligned}\psi^\dagger_R i\sigma\cdot\big(\partial-igA^a t^a_r\big)\psi_R&=\psi'^\dagger_L i\bar\sigma\cdot\big(\partial+igA^a(t^a_r)^T\big)\psi'_L\\ &=\psi'^\dagger_L i\bar\sigma\cdot\big(\partial-igA^a t^a_{\bar r}\big)\psi'_L.\end{aligned}\tag{19.127}$$

于是新场ψ'_L属于r的共轭表示，其表示矩阵由式(15.82)给出。在这个符号中，带着n_f种味道的无质量费米子的QCD，被重写成一个与$SU(3)$表示3中的n_f个无质量费米子耦合以及与表示$\bar3$中n_f个无质量费米子耦合的$SU(3)$规范理论。无质量

费米子最普遍的规范理论将是简单地将左手费米子分配给规范群G的任意的、可约的表示R。我们刚刚已经看到重写狄拉克费米子的系统将导致$R = r \oplus \bar{r}$，它在(15.82)下面描述的意义上来说，是一个**真实**表示。相反，如果R不是一个真实表示，那么理论就不能用狄拉克费米子来重写，理论本质上是手征的。

重写(19.125)将QCD拉格朗日量的质量项变换为如下:

$$m\bar{\psi}_i\psi_i = m\big(\psi_R^\dagger\psi_L + \text{h.c.}\big) = -m\big(\psi_{Li}'^T\sigma^2\psi_{Li} + \text{h.c.}\big). \tag{19.128}$$

它具有我们在3.4题中遇到的**Majorana**质量项的形式。最一般的质量项，可以完全由左手费米子场来构建得到

$$\Delta\mathcal{L}_M = M_{ij}\psi_{Li}^T\sigma^2\psi_{Lj} + \text{h.c.} \tag{19.129}$$

矩阵M_{ij}在ij下是对称的，因为来自σ^2的反对称的负号被费米子交换的负号所补偿。如果M_{ij}在G下是不变的，则这个质量项是规范不变的。例如，(19.128)中的质量项将3和$\bar{3}$指标耦合成一个$SU(3)$单态的组合。一般，如果以(15.82)下面所述的意义来说，包含费米子的表示是**严格实**的，则存在规范不变的质量项。在一个本质上手征的理论中，不可能存在规范不变的质量项。我们将在下一章看到，在弱相互作用的规范理论中，夸克和轻子的质量项被规范不变性所禁止。我们将在第20.2节中提出这个问题的解决方案。

在经典层次上，对左手费米子的表示R没有限制。然而，在单圈修正的层次，由于轴矢量反常，许多可能的选择变得不一致。在左手无质量费米子的规范理论中，考虑对图19.9中的图计算，其中外部场是非阿贝尔规范玻色子，标记的顶点表示规范对称性流

$$j^{\mu a} = \bar{\psi}\gamma^\mu\Big(\frac{1-\gamma^5}{2}\Big)t^a\psi. \tag{19.130}$$

规范玻色子顶点也包含因子$(1-\gamma^5)/2$。三个投影子可以移动到一起形成单个因子。然后，如果我们像第19.2节那样对这个图进行正规化，那么包含γ^5的项就有一个轴矢量反常，从而导致了如下关系

$$\langle p,\nu,b;k,\lambda,c|\,\partial_\mu j^{\mu a}\,|0\rangle = \frac{g^2}{8\pi^2}\epsilon^{\alpha\nu\beta\lambda}p_\alpha k_\beta\cdot\mathcal{A}^{abc}, \tag{19.131}$$

其中$\mathcal{A}^{abc}$是对表示R中的群矩阵求迹：

$$\mathcal{A}^{abc} = \text{tr}\big[t^a\{t^b,t^c\}\big]. \tag{19.132}$$

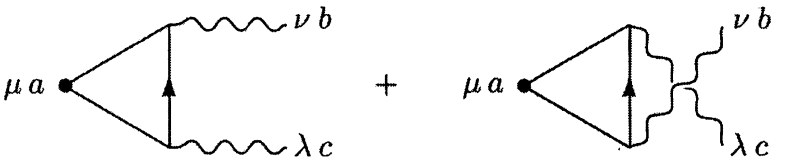


图19.9 对手征规范理论中规范对称流的反常有贡献的图

这个等式意味着，除非$\mathcal{A}^{abc}$消失，否则流$j^{\mu a}$不守恒。因子(19.132)的(a,b,c)是完全对称的，所以这个条件与哪个流被视为外部算符是无关的。正如我们在第19.1和19.2节中所述，我们可以改变图的正规化，使外部流守恒，但代价是破坏图中另外两个流之一的守恒。

由于局域规范不变性理论的整个构造是建立在精确整体对称性的存在上的，因此对$j^{\mu a}$守恒的破坏，也破坏了理论的结构。例如，图19.9的形式的三角图将产生发散的规范玻色子质量项，并将破坏第16章中讨论的三点和四点顶点之间的微妙关系。这些关系，来自于Ward恒等式，是必要的，以确保非物理态的抵消和S矩阵的幺正性。避免这一问题的唯一方法是坚持$\mathcal{A}^{abc}=0$作为手征规范理论的基本的一致性条件*。满足这一条件的规范理论被称为是**反常自由**(anomaly free)的。

作为该条件应用的一个例子，考虑我们在(19.124)中提出的雏形的弱相互作用规范理论。如果图19.9中的两个规范玻色子是$SU(2)$规范玻色子，而流$j^{\mu a}$是$SU(2)$规范流，我们将计算(19.132)，代入$t^a=\tau^a=\sigma^a/2$，利用关系$\{\sigma^b,\sigma^c\}=2\delta^{bc}$。这给出

$$\mathcal{A}^{abc}=\frac{1}{8}\,\mathrm{tr}\big[\sigma^a\cdot 2\delta^{bc}\big]=0, \tag{19.133}$$

所以一致性条件被满足。如果(19.124)中费米子也耦合到电磁，则通过将图19.9中的流取为电磁流我们可以发现另一个一致性条件。这个情况的因子$\mathcal{A}^{abc}$是

$$\mathrm{tr}\big[Q\{\tau^b,\tau^c\}\big], \tag{19.134}$$

其中Q是电荷矩阵。如果我们如(19.133)那样简化，迹(19.134)就变成了

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}\big[Q\big]\delta^{bc}. \tag{19.135}$$

*D J. Gross and R Jackiw, *Phys. Rev.* D6, 477(1972)

这个因子与费米子电荷的和成正比，而夸克或轻子电荷都不为零。然而，如果我们对一个夸克二重态和一个轻子二重态求和，带有颜色因子3，我们发现

$$\mathrm{tr}\big[Q\big] = 3\cdot(\tfrac{2}{3}-\tfrac{1}{3}) + (0-1) = 0. \tag{19.136}$$

值得注意的是，只有当(19.124)所描述的弱相互作用规范理论包含等量的夸克和轻子二重态时，该理论才能与QED一致地结合。

我们通过更一般地推导出手征规范理论反常自由的条件来完成这一节。我们将首先推导出反常因子$\mathcal{A}^{abc}$的一些基本性质，然后将这些性质应用于具有单纯规范群的手征规范理论。

如果费米子表示R是实的，那么R就等于它的共轭表示$\overline{R}$。因此，正如我们在(15.82)下面所描述的，t^a_R由一个幺正变换与$t^a_{\overline{R}} = -(t^a_R)^T$联系起来。由于(19.132)在$t^a$的幺正变换下是不变的，所以我们可以用$t^a_{\overline{R}}$来代替$t^a_R$。于是

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{abc} &= \mathrm{tr}\big[(-t^a)^T\big\{(-t^b)^T,(-t^c)^T\big\}\big]\\ &= -\,\mathrm{tr}\big[\big\{t^c,t^b\big\}t^a\big]\\ &= -\mathcal{A}^{abc}.\end{aligned} \tag{19.137}$$

因此，如果R是实的，规范理论就自动是反常自由的。作为一个特例，狄拉克费米子的任何规范理论都是反常自由的。

在更一般的情况下，我们可以简化$\mathcal{A}^{abc}$的计算，通过注意到它是规范群G的一个不变量，在伴随表示中它的三个指标是全对称的。对于某些可能的群，可能不存在合适的不变量，在那些情况下$\mathcal{A}^{abc}$必须消失。例如在$SU(2)$中伴随表示具有自旋1。两个自旋1的多重态的对称乘积得到自旋0加自旋2，没有自旋1分量。因此不存在对称张量能耦合两个自旋1指标来给出自旋1。于是因子(19.132)在任何$SU(2)$规范理论中必须消失。我们在式(19.133)的一个显式例子中看到了这点。

在$SU(n)$群，$n\geq 3$，有一个惟一的对称不变量d^{abc}是所需的类型。它出现在基础表示的表示矩阵的反对易子中:

$$\big\{t^a_n,t^b_n\big\} = \tfrac{1}{n}\delta^{ab} + d^{abc}t^c_n. \tag{19.138}$$

这个不变量的唯一性意味着，在$SU(n)$规范理论中，(19.132)形式的任何迹都与d^{abc}成正比。对于每一个表示r，我们可以定义一个**反常系数**$A(r)$

$$\mathrm{tr}\big[t^a_r\big\{t^b_r,t^c_r\big\}\big] = \tfrac{1}{2}A(r)d^{abc}. \tag{19.139}$$

对于基础表示，由(19.138)可以看出$A(n)=1$。从(19.137)的论证得出

$$A(\bar{r}) = -A(r). \tag{19.140}$$

对于更高的表示，可以使用类似于15.4节中计算$C_2(r)$的方法来计算反常系数。举个例子，我们在19.3题中证明了，如果a和s是$SU(n)$表示，分别对应于二指标张量是反对称和对称的，那么

$$A(a) = n - 4, \qquad A(s) = n + 4. \tag{19.141}$$

如果费米子多重态R的各不可约分量的反常系数之和为零，则$SU(n)$规范理论是反常自由的。例如，带有如下的表示内容的左手费米子的$SU(n)$规范理论

$$R = a + (n-4)\bar{n} \tag{19.142}$$

是反常自由的。

(15.72)下面列出的各种单纯李群中，只有$SU(n)$、$SO(4n+2)$和E_6具有复的表示。其中，只有$SU(n)$和$SO(6)$——具有与$SU(4)$相同的李代数——具有所需类型的对称不变量来构建反常。基于$SO(4n+2), n \geq 2$的规范理论，和基于E_6的规范理论是自动反常自由的。群$SO(10)$和E_6被认为是粒子物理的**大统**一规范对称性的候选者，我们将在22.2节中讨论。

手征规范理论的表示内容还受到另一个限制，这是考虑到它与引力的耦合。在规范流$j^{\mu a}$和外部引力场下计算时，有可能看出图19.9的图给出了反常贡献。乘以这个图的群论因子是

$$\mathrm{tr}\left[t_R^a\right]. \tag{19.143}$$

如果规范群是非阿贝尔的，则此因子将自动消失。然而，如果理论的规范群包含$U(1)$因子，该理论就不能一致地与引力耦合，除非每个$U(1)$生成元都是无迹的*。

一旦我们建立了一个一致的手征规范理论，我们就有一个额外的问题，即如何找到一个在这个理论中一致地做计算的方案。在类矢量的规范理论中，我们可以用维数正规化来定义紫外发散图。这保证了发散图将以一种遵守局域规范不变性的Ward恒等式的方式被正规化。为了将维数正规化推广到手征规范理论，我们需要引入γ^5的维数延拓。第19.2节中用于定义手征流的't Hooft-Veltman定义并不令人满意，因为该定义不能明显地遵守规范流的守恒。一个有用的替代是将γ^5正式定义为一个与所有γ^μ反对易的对象。这一方案至少在两圈的阶上，给出了振幅的明确且规范不变的结果，且不与$\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$成正比。在21.3节中，我们将用这个

*L. Alvarez-gaume and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B234**, 269(1984)

方案来计算弱相互作用理论中的圈图。万不得已时，人们总是可以用一个非规范不变的正规子来计算，并在理论中加入非规范不变的抵消项，这样规范理论的Ward恒等式就仍然有效。

19.5 标度不变性的反常破坏

还有一个更重要的对称性的例子，它是经典水平上的不变性，被量子修正破坏。这就是带有无量纲耦合常数的无质量场论的经典标度不变性。在第12章中，我们看到一个没有经典量纲参数的量子场论仍然通过紫外发散的正规化而依赖于质量标度，或者，等价地，通过跑动耦合常数。我们已经看到了如何使用Callan-Symanzik方程在重正化标度上分析这种诱导依赖性。在这一节中，我们将展示如何将量子修正对经典标度不变性的破坏描述为流守恒反常。

在这本书中，我们避免了对量子场论的能动量张量进行细致的处理。在2.2节中，我们用诺特定理证明了量子场论在时空平移下的不变性意味着守恒张量$T^{\mu\nu}$的存在。然而，为了讨论标度不变性理论，我们需要一些更详细的能动量张量的性质。现在，我们将简单地陈述这些性质，并在其他地方引用它们的派生*。

由式(2.17)和(9.99)定义的张量$T^{\mu\nu}$被称为**正则能动量张量**。定义这个张量的表达式并不意味着$T^{\mu\nu}$是对称的。事实上，这个张量不需要是对称的，在规范理论中，它也不需要是规范不变量。然而，通过如下加法总是可以把$T^{\mu\nu}$转换成一个对称的、规范不变的张量$\Theta^{\mu\nu}$

$$\Theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\lambda \Sigma^{\mu\nu\lambda}, \tag{19.144}$$

其中，$\Sigma^{\mu\nu\lambda}$在μ与λ交换下是反对称的。增加项的形式意味着，如果$T^{\mu\nu}$是守恒的，且整体能动量四矢量是不变的，则$\Theta^{\mu\nu}$守恒，

$$P^\nu = \int d^3x\, T^{0\nu} = \int d^3x\, \Theta^{0\nu}. \tag{19.145}$$

标量场论的标度变换可以定义为变量的变换

$$\phi(x) \to e^{-D\sigma}\phi(xe^{-\sigma}), \tag{19.146}$$

---

*下文三段所载的结论是C. G. Callan, S. Coleman and R. Jackiw, *Ann. Phys.* 59, 42 (1970)仔细推导出来的。

其中$D=1$，是场的正则质量量纲。标度变换在费米子理论和规范场理论中也有类似的定义。如果这种变换是经典拉格朗日量的不变性，就和没有带量纲的耦合一样，这个理论就会有一个守恒流D^μ，称为**膨胀流**。膨胀流与对称的能动量张量$\Theta^{\mu\nu}$有简单的关系：$D^\mu = \Theta^{\mu\nu}x_\nu$，于是

$$\partial_\mu D^\mu = \Theta^\mu{}_\mu. \tag{19.147}$$

从诺特定理推导出这些结果并不简单。还有一种更简单的派生，但是它使用的形式理论超出了本书的范围。如果考虑的量子场论与引力耦合，那么能动量张量就可以被认为是引力场的源。通过针对时空度规$g_{\mu\nu}(x)$来对物质场的拉格朗日量$\mathcal{L}_m$作变分，可以得到这个能动量张量。这种构造给出了一个明显对称和规范不变的张量，结果是$\Theta^{\mu\nu}$：

$$\Theta^{\mu\nu} = 2\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}(x)}\int d^4x\,\mathcal{L}_m. \tag{19.148}$$

标度变换可以表示为时空度规的变化

$$g_{\mu\nu}(x) \to e^{2\sigma}g_{\mu\nu}(x). \tag{19.149}$$

结合(19.148)和(19.149)可以看出，这种变换引起的拉格朗日量变化只是$\Theta^{\mu\nu}$的迹。根据诺特定理，这将等于相应的流的散度，从而回到公式(19.147)。

在QED中，不难猜测对称的能动量张量的形式：

$$\Theta^{\mu\nu} = -F^{\mu\lambda}F^\nu{}_\lambda + \tfrac{1}{4}g^{\mu\nu}(F_{\lambda\sigma})^2 + \tfrac{1}{2}\bar\psi i(\gamma^\mu D^\nu + \gamma^\nu D^\mu)\psi - g^{\mu\nu}\bar\psi(i\not{D} - m)\psi. \tag{19.150}$$

这是一个规范不变的对称张量，它导出了我们熟悉的总能量的表达式，

$$H = \int d^3x\left\{\tfrac{1}{2}(E^2+B^2) + \psi^\dagger(-i\gamma^0\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} + m)\psi\right\}. \tag{19.151}$$

为了以后做参考，我们注意到这些结果在任何时空维度d的经典水平上都是正确的。在四维，规范场项的迹自动抵消了。利用狄拉克方程后(其作为算符的运动方程是有效的)，我们发现$\Theta^{\mu\nu}$的迹被给出为

$$\Theta^\mu{}_\mu = m\bar\psi\psi \tag{19.152}$$

如果$m=0$，则它在经典上确实为零。

当包含进量子修正时，我们知道标度变换不是理论的对称性，因为在一个较大的标度下同样的理论包含的是一个不同的重正化耦合常数值。重正化耦合的移

动是

$$g \to g + \sigma\beta(g), \tag{19.153}$$

对应的拉格朗日量的变化是

$$\sigma\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}\mathcal{L}. \tag{19.154}$$

因此，当包含量子修正时，经典上标度不变理论中的膨胀流的方程应该是

$$\partial_\mu D^\mu = \Theta^\mu{}_\mu = \beta(g)\frac{\partial}{\partial g}\mathcal{L}. \tag{19.155}$$

在无质量QED中，我们通过重标度规范场来写出这个公式是最有用的，这样耦合常数e就可以从协变导数中去掉：$eA^\mu \to A^\mu$。e只出现在如下项中

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4e^2}(F_{\lambda\sigma})^2 + \cdots, \tag{19.156}$$

式(19.155)为

$$\Theta^\mu{}_\mu = \frac{\beta(e)}{2e^3}(F_{\lambda\sigma})^2. \tag{19.157}$$

这种关系说的是对称能动量张量的迹由于量子修正而取非零值，这种关系被称为**迹反常**。

在微扰论中，我们应该能够直接检验迹反常方程(19.157)。现在我们在单圈阶显式地计算$\Theta^{\mu\nu}$的迹。我们所建立的形式理论与16.6节中对β函数的背景场计算非常相似。和那一节一样，我们将在非零$F_{\mu\nu}$背景场存在的情况下，对量子场的涨落部分进行积分。方程(19.157)预测这种积分将导致如下表达式

$$\langle\Theta^\mu{}_\mu\rangle = C\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}A_\mu(-k)(k^2g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu)A_\nu(k), \tag{19.158}$$

其中A_μ是背景场，常数C等于$\beta(e)/e^3$。

由于我们将使用维数正规化，我们应该从写d维中的$\Theta^{\mu\nu}$的迹开始:

$$\Theta^\mu{}_\mu = -\frac{4-d}{4}(F_{\lambda\sigma})^2 + (1-d)\bar{\psi}i\not{D}\psi. \tag{19.159}$$

这个量的单圈矩阵元与背景场的2次幂成正比，这来自于图19.10所示的三个图。由于(19.159)右边的第二项由于$\psi(x)$的运动方程而为零，人们可能会期待这一项对迹的贡献为零。实际上，很容易检查图19.10中的前两个抵消了：这些图具有

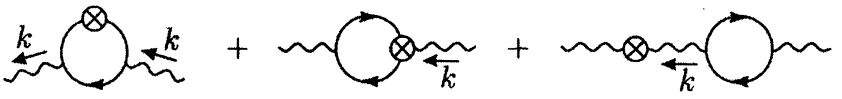


图19.10 $\Theta^{\mu\nu}$的反常迹有贡献的单圈图

相同的结构，因为第一个图有一个额外的传播子和一个额外因子$\not{p}$(来自于算符矩阵元)，并且整体符号相反。

(19.159)左边的第一项出乎意料，因为它显然在四维中消失了。然而，费米子圈图是发散的，在维数正规化中，它引入了一个因子$1/(2-d/2)$。因此，该图对算符矩阵元的贡献是非零的。在无质量QED中，费米子圈图的值为



$$= -i(k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu)\frac{4}{3(4\pi)^2}\big(\Gamma(2-\tfrac{d}{2}) + (\text{finite})\big). \tag{19.160}$$

则图19.10中第三个图的完整表达式为

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} A_\mu(-k)\Big(-2\frac{4-d}{4}\Big)(k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu)\frac{-i}{k^2}\Big(-ik^2\frac{4}{3(4\pi)^2}\frac{1}{2-d/2}\Big)A_\nu(k). \tag{19.161}$$

这是(19.158)的形式，其中

$$C = \frac{1}{12\pi^2}, \tag{19.162}$$

这确实是无质量QED的β函数的第一个系数。

本文的讨论可推广到QCD和其他规范理论。在非阿贝尔规范理论中，$\Theta^{\mu\nu}$由(19.150)的明显推广给出，其中用非阿贝尔表达式$F^a_{\mu\nu}$代替了阿贝尔场强张量$F_{\mu\nu}$。$\Theta^{\mu\nu}$的迹给出为

$$\Theta^\mu{}_\mu = -\frac{4-d}{4}(F^a_{\lambda\sigma})^2, \tag{19.163}$$

加上由于运动方程而消去的项。在背景场规范中，算符$\Theta^\mu{}_\mu$插入到圈中的单圈图如上所示被消去。我们在第16.6节看到，两点函数在这个规范中加起来是



$$= -i(k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu)\Big[\frac{-b_0}{(4\pi)^2}\Big]\big(\Gamma(2-\tfrac{d}{2}) + (\text{finite})\big), \tag{19.164}$$

其中$\beta(g) = -b_0 g^3/(4\pi)^2$。根据前一段的逻辑，我们再次得到了结果(19.158)，其中C被确认为第一个β函数系数。

与轴矢量反常一样，可以通过许多不同的方式发现迹反常。对于每一种可能的正规化量子场论的方法，都存在一种迹反常的推导，其利用了那个特定的正规子可能的问题。例如，如果使用带有重费米子的Pauli-Villars正规子来抵消QED费米子圈图的发散，重费米子Ψ对$\Theta^{\mu\nu}$的迹贡献了一个项$M\overline{\Psi}\Psi$。被插入了这一项的圈图，其结果是在$M \to \infty$下有一个有限的极限，精确地再现了迹反常。这个计算可在第19.4题中算出来。

就像轴矢量反常一样，对不同的正规子分别做出的反常的推导，看起来有点人为，仿佛场论中有一个问题而我们还没有聪明到能够解决。但最终，我们不得不得出这样的结论：量子场论试图告诉我们某些东西。经典理论的反常对称性不能推广到量子理论的对称性。相反地，反常守恒律要求理论从经典到量子水平要有深刻的质的变化。

Chapter 20

自发对称性破缺的规范理论

在这本书中，我们讨论了可以在量子场论中实现对称性的三种不同的方式。最简单的例子是一种明显的整体对称性，它导致了具有受限的相互作用的粒子多重态。第二种可能性是自发破缺的整体对称性。然后，正如第11章所讨论的*，对称流仍然守恒，相互作用也是类似的受限，但真空态不遵守对称性，粒子没有形成明显对称的多重态。代替地，这种理论包含无质量粒子，Goldstone玻色子，每个都对应自发破缺的对称性的一个生成元。第三种情况是局域，或称规范对称性。正如我们在第15章中看到的，这样的对称性要求对于对称性的每个生成元都存在一个无质量的矢量场，而这些场之间的相互作用是高度受限的。

现在很自然地要考虑第四种可能性:如果我们在同一理论中同时包含局域规范不变性和自发对称性破缺会发生什么?在这一章和下一章中，我们将发现组分的这种结合为构建量子场论模型带来了新的可能性。我们将看到，对称性自发破缺要求规范矢量玻色子获得质量。然而，这些有质量玻色子的相互作用仍然受到基本的规范对称性的限制，而这些限制可以产生可观测的结果。

在基本粒子物理学中，自发破缺的局域对称性的主要应用是在目前公认的弱互作用模型中。来源于Glashow、Weinberg和Salam的这个该模型将在第20.2节中介绍。在那里，我们将看到它对弱相互作用现象做出了许多精确和成功的预测。值得注意的是，该模型将电磁与弱相互作用统一在一个更大的规范理论中。

*第11.1节是本章的必要背景，但第11章的其余部分不是。

20.1 希格斯机制

在这一部分，我们分析一些简单的自发对称性破缺的规范理论的例子。我们从阿贝尔规范理论开始，然后研究几个非阿贝尔模型的例子。

一个阿贝尔的例子

作为我们的第一个例子，考虑一个与自身以及与电磁场耦合的复标量场:

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + |D_\mu \phi|^2 - V(\phi), \tag{20.1}$$

其中$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$。这个拉格朗日量在局域$U(1)$变换下是不变的

$$\phi(x) \to e^{i\alpha(x)}\phi(x), \qquad A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x). \tag{20.2}$$

如果我们选择$\mathcal{L}$中的势的形式为

$$V(\phi) = -\mu^2 \phi^* \phi + \frac{\lambda}{2}(\phi^* \phi)^2, \tag{20.3}$$

其中$\mu^2 > 0$时，场ϕ将获得一个真空期望值，$U(1)$整体对称性将自发破缺。这个势的最小值出现在

$$\langle \phi \rangle = \phi_0 = \left(\frac{\mu^2}{\lambda}\right)^{1/2}, \tag{20.4}$$

或由$U(1)$对称性(20.2)相联系的任何其他值。

让我们关于真空态(20.4)来展开拉格朗日量(20.1)。将复场$\phi(x)$分解为

$$\phi(x) = \phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\phi_1(x) + i\phi_2(x)\big). \tag{20.5}$$

势(20.3)被重写

$$V(\phi) = -\frac{1}{2\lambda}\mu^4 + \frac{1}{2}\cdot 2\mu^2 \phi_1^2 + \mathcal{O}(\phi_i^3), \tag{20.6}$$

因此场ϕ_1获得质量$m = \sqrt{2}\mu$, ϕ_2是无质量的Goldstone玻色子。到目前为止，整个分析都遵循了第11.1节的内容。

现在考虑ϕ的动能项是如何变化的。插入展开式(20.5)，我们重写

$$|D_\mu \phi|^2 = \tfrac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)^2 + \tfrac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)^2 + \sqrt{2}e\phi_0 \cdot A_\mu \partial^\mu \phi_2 + e^2 \phi_0^2 A_\mu A^\mu + \cdots, \tag{20.7}$$

其中我们省略了场A_μ, ϕ_1, ϕ_2的三次和四次项。(20.7)明确写出的最后一项是光子质量项

$$\Delta\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}m_A^2 A_\mu A^\mu, \tag{20.8}$$

其中质量

$$m_A^2 = 2e^2\phi_0^2 \tag{20.9}$$

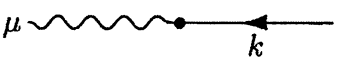
来源于ϕ的不为零的真空期望值。注意这个质量项的符号是正确的；出现在(20.8)的A^μ的物理类空成分为

$$\Delta\mathcal{L} = -\frac{1}{2}m_A^2(A^i)^2$$

带着势能项的正确的符号。

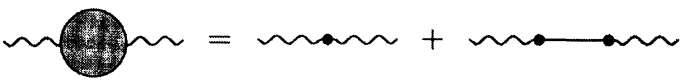
在第7章，和第16章的非阿贝尔情形，我们论证了规范玻色子不能获得质量，除非这个质量项与真空极化振幅中的一个极点有关。这一结果在二维时空中有一个反例；正如我们在19.1节中看到的，由无质量费米子对产生的红外奇异性，可以得到所需形式的极点。然而，在四维中，真空极化振幅中的极点只能由无质量的标量粒子产生。通常，在对称性不破缺的情况下，不存在这样的粒子。

然而，具有自发破缺连续对称性的模型必须具有无质量的Goldstone玻色子。这些标量粒子具有对称性流的量子数，因此恰好具有正确的量子数来作为中间态出现在真空极化中。在我们现在讨论的模型中，我们可以看到这一极点的明确出现方式如下：式(20.7)中的第三项将规范玻色子直接与Goldstone玻色子ϕ_2耦合；这给出了一个如下形式的顶点



$$= i\sqrt{2}e\phi_0(-ik^\mu) = m_A k^\mu. \tag{20.10}$$

如果我们也把质量项(20.8)作为微扰论中的一个顶点，那么对真空极化振幅的领头阶贡献就给出表达式



$$\begin{aligned} &= im_A^2 g^{\mu\nu} + (m_A k^\mu)\frac{i}{k^2}(-m_A k^\nu) \\ &= im_A^2\left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right). \end{aligned} \tag{20.11}$$

Goldstone玻色子正好提供了正确的极点使得真空极化振幅正确地横向。

虽然Goldstone玻色子在这一理论中起着重要的形式作用，但它并不是一个独立的物理粒子。最简单的方法是选择一个特定的规范，称为**幺正规范**。利用局域$U(1)$规范对称性(20.2)，我们可以这样选择$\alpha(x)$，使得$\phi(x)$在每一点x都是实值。有了这个选择，ϕ_2场就从理论中移除了。拉格朗日量(20.1)变成

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + (\partial_\mu\phi)^2 + e^2\phi^2 A_\mu A^\mu - V(\phi). \tag{20.12}$$

如果势$V(\phi)$获得ϕ的非零真空期望值，则规范场获得质量；它还保持与剩下的物理场ϕ_1的耦合。

Higgs、Kibble、Guralnik、Hagen、Brout和Englert对这种机制——自发对称性破缺通过它产生了规范玻色子的质量——进行了探索，并将其推广到非阿贝尔情形，现在被称为**希格斯机制**。然而，这一机制在超导理论中有更早的应用。在第8章中，我们构造了二阶相变的朗道描述。为了描述超导体，朗道和金兹堡将这一理论与外部电磁场耦合起来；他们精确地得到了拉格朗日量(20.1)。由于规范场的质量非零，外界电磁场只能穿透超导体到m_A^{-1}的深度。这解释了**迈斯纳效应**，即观察到的超导体中宏观磁场的排斥现象。

Goldstone玻色子在希格斯机制中的作用是错综复杂的，而且在这个讨论水平上似乎是神秘的。我们首先发现，从原理上讲，为了使规范玻色子获得质量，Goldstone玻色子的参与是必要的。然后我们看到，Goldstone玻色子可以从理论上正式消除。然而，我们可能会争辩说，Goldstone玻色子并没有完全消失。无质量矢量玻色子只有两种物理极化状态；我们在第16章中看到，纵向极化态是不能产生的，它出现在形式理论中只是为了抵消其他的非物理贡献。然而，一个有质量的矢量玻色子必须有三种物理极化态：在它的静止系中，它是一个自旋为1的物体，不能区分横向极化和纵向极化。人们很容易认为规范玻色子是通过吃了Goldstone玻色子而获得了额外的自由度。在21.1节和21.2节中，我们将通过研究自发破缺规范理论的量子化和规范固定来阐明这一图景。

希格斯机制的系统学

希格斯机制直接延伸到具有非阿贝尔规范对称性的系统。推导出一般关系——通过它使得一组标量场真空期望值会导致规范玻色子质量的出现——并不困难。让我们计算出这个关系，然后把它应用到一些例子中。

考虑这样一个系统，标量场ϕ_i出现于在对称群G下不变的拉格朗日量中，由如下变换表示

$$\phi_i \to (1 + i\alpha^a t^a)_{ij}\phi_j. \tag{20.13}$$

将ϕ_i写为实值场很方便；例如，把n个复场写成$2n$个实场。那么群表示矩阵t^a必

须是纯虚的，因为它们是厄米、反对称的。让我们写

$$t^a_{ij} = iT^a_{ij}, \tag{20.14}$$

所以T^a是实的反对称的。

如果我们把对称群G推广到局域规范对称性，ϕ_i上的协变导数是

$$D_\mu\phi = (\partial_\mu - igA^a_\mu t^a)\phi = (\partial_\mu + gA^a_\mu T^a)\phi.$$

ϕ_i动能项是

$$\tfrac{1}{2}(D_\mu\phi_i)^2 = \tfrac{1}{2}(\partial_\mu\phi_i)^2 + gA^a_\mu(\partial_\mu\phi_i T^a_{ij}\phi_j) + \tfrac{1}{2}g^2A^a_\mu A^{b\mu}(T^a\phi)_i(T^b\phi)_i. \tag{20.15}$$

现在让ϕ_i获得真空期望值

$$\langle\phi_i\rangle = (\phi_0)_i, \tag{20.16}$$

然后对这些值展开ϕ_i。式(20.15)中最后一项包含一个规范玻色子质量结构的项，

$$\Delta\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}m^2_{ab}A^a_\mu A^{b\mu}, \tag{20.17}$$

其中质量矩阵

$$m^2_{ab} = g^2(T^a\phi_0)_i(T^b\phi_0)_i. \tag{20.18}$$

这个矩阵是半正定的，因为在任何基上，任何对角元都有如下形式

$$m^2_{aa} = g^2(T^a\phi_0)^2 \geq 0 \qquad \text{(no sum)}.$$

因此，一般来说，所有的规范玻色子都会得到正的质量。然而也可能是，G的一些特定生成元T^a保持了真空不变：

$$T^a\phi_0 = 0.$$

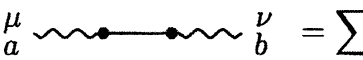
在这种情况下，生成元T^a对(20.18)没有贡献，相应的规范玻色子将保持无质量。

与阿贝尔的情况一样，规范玻色子传播子从Goldstone玻色子那里得到一个贡献，这是使真空极化振幅横向化所必需的。为计算这个贡献，我们需要混合了规范玻色子和Goldstone玻色子的顶点。它来自于拉格朗日量(20.15)的第二个项。当我们插入标量场的真空期望值(20.16)时，这一项变成了

$$\Delta\mathcal{L} = gA^a_\mu\partial_\mu\phi_i(T^a\phi_0)_i. \tag{20.19}$$

这个相互作用项不包括所有ϕ的分量——对于T^a的一些选择，只包含那些平行于矢量$T^a\phi_0$的分量。这些矢量代表了真空的无穷小旋转；因此，出现在(20.19)中的组分ϕ_i正是Goldstone玻色子。利用这些玻色子是无质量的事实，我们可以在

非阿贝尔情形下，计算出式(20.11)中Goldstone玻色子图的对应:



$$= \sum_j \left(gk^\mu (T^a\phi_0)_j\right) \frac{i}{k^2} \left(-gk^\nu (T^b\phi_0)_j\right). \quad (20.20)$$

求和遍历了对$T^a\phi_0$张成的空间有非零投影的那些分量j上，或者等价地，对所有的j。因此，该图与质量矩阵(20.18)成正比。把这个表达式和(20.17)对真空极化的贡献结合起来，我们得到了一个正确的横向的结果，



$$= i m_{ab}^2 \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right), \quad (20.21)$$

式中，m_{ab}^2由式(20.18)给出。

非阿贝尔的例子

现在让我们把这个普遍的形式理论应用到一些非阿贝尔规范理论的具体例子，首先考虑一个模型，其中$SU(2)$规范场耦合到一个标量场ϕ，该场像$SU(2)$的旋量一样变换。作用在ϕ上的协变导数是

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu - igA_\mu^a \tau^a)\phi, \quad (20.22)$$

其中$\tau^a = \sigma^a/2$。这个表达式的平方是标量场动能项。

如果ϕ获得一个真空期望值，我们可以利用$SU(2)$旋转的自由将这个期望值写成如下形式

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (20.23)$$

由此规范玻色子质量来源于

$$|D_\mu \phi|^2 = \frac{1}{2} g^2 \begin{pmatrix} 0 & v \end{pmatrix} \tau^a \tau^b \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} A_\mu^a A^{b\mu} + \cdots. \quad (20.24)$$

在a和b交换下我们可以对矩阵乘积进行对称化，用$\{\tau^a, \tau^b\} = \frac{1}{2}\delta^{ab}$，得到质量项

$$\Delta \mathcal{L} = \frac{g^2 v^2}{8} A_\mu^a A^{a\mu}. \quad (20.25)$$

所有三个规范玻色子都获得质量

$$m_A = \frac{gv}{2}, \quad (20.26)$$

这表示$SU(2)$的所有三个生成元均被(20.23)破缺。

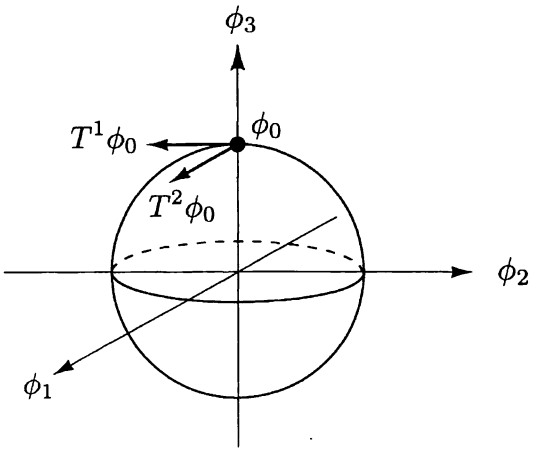


图20.1 $SU(2)$的矢量表示中标量场的位形空间。当$SU(2)$对称性自发破缺时，允许的真空态位于一个球面上。如果真空期望值ϕ_0在3方向，则生成元T^3保持ϕ_0不变，而T^1和T^2沿所示方向旋转ϕ_0。

如果我们令ϕ根据$SU(2)$的矢量表示进行变换呢?如果我们把ϕ取为$SU(2)$下的实值矢量，我们必须给它赋上协变导数

$$(D_\mu\phi)_a = \partial_\mu\phi_a + g\epsilon_{abc}A^b_\mu\phi_c. \tag{20.27}$$

同样，ϕ动能项是这个对象的平方，所以，如果ϕ获得一个真空期望值，我们就能得到规范玻色子质量项

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{1}{2}(D_\mu\phi)^2 = \frac{g^2}{2}\left(\epsilon_{abc}A^b_\mu(\phi_0)_c\right)^2 + \cdots. \tag{20.28}$$

如果一个$SU(2)$的矢量获得一个期望值ϕ_0，我们可以选择我们的坐标，使这个矢量指向内部空间中的任何特定方向。我们将选择它指向3个方向，如图20.1所示:

$$\langle\phi_c\rangle = (\phi_0)_c = V\delta_{c3}. \tag{20.29}$$

将(20.29)代入(20.28)，得到

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{g^2}{2}V^2\left(\epsilon_{ab3}A^b_\mu\right)^2 = \frac{g^2}{2}V^2\left((A^1_\mu)^2 + (A^2_\mu)^2\right). \tag{20.30}$$

与生成元1和2相对应的规范玻色子获得质量

$$m_1 = m_2 = gV, \tag{20.31}$$

而与生成元3相对应的玻色子则保持无质量。只要看一看图20.1，就很容易看出这种区别的原因。ϕ_c的真空期望值破缺了1、2轴旋转的对称性，但保留了3轴旋转的对称性。和在我们的一般分析中看到的一样，与对称性未破缺的生成元相对

应的规范玻色子仍然是无质量的。

有趣的是，这个模型既包含有质量规范玻色子，也包含无质量规范玻色子，这些玻色子之间的区别是由自发对称性破缺造成的。如果我们把有质量玻色子解释为W玻色子，把无质量规范玻色子解释为光子，那么把这个理论解释为弱相互作用和电磁相互作用的统一模型就很有吸引力。Georgi和Glashow将这个模型作为弱相互作用理论的一个重要候选模型提出*。然而，大自然选择了一种不同的模式，我们将在下一节讨论。

我们接着讲一个更复杂的例子。考虑一个$SU(3)$规范理论，包含的标量场在伴随表示中。ϕ的协变导数的形式是

$$D_\mu \phi_a = \partial_\mu \phi_a + g f_{abc} A^b_\mu \phi_c, \tag{20.32}$$

因此规范场质量来源于如下项

$$\Delta \mathcal{L} = \frac{g^2}{2} \left(f_{abc} A^b_\mu \phi_c \right)^2. \tag{20.33}$$

通过定义如下量，我们可以把它写得更清楚

$$\Phi = \phi_c t^c, \tag{20.34}$$

其中t^c为表示了$SU(3)$生成元的3×3无迹厄米矩阵。利用这个记法和结构常数的定义(15.68)，我们可以把质量项(20.33)重写为

$$\Delta \mathcal{L} = -g^2 \operatorname{tr}\left[[t^a, \Phi][t^b, \Phi] \right] A^a_\mu A^{b\mu}. \tag{20.35}$$

现在我们让Φ获得一个真空期望值

$$\langle \Phi \rangle = \Phi_0. \tag{20.36}$$

由于Φ_0是一个无迹的厄米矩阵，我们应该通过对它对角化来分析它的效应。原则上，Φ_0可以有三个任意特征值，只要加起来等于零。然而，当我们最小化显式势能函数时，人们通常发现期望值保持了一些原始对称性。我们将考虑两个例子。

首先，Φ_0可能有方向

$$\Phi_0 = |\phi| \cdot \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}. \tag{20.37}$$

*T H. Georgi and S L. Glashow, *Phys. Rev. Lett.* 28, 1494(1972)

这个矩阵与四个$SU(3)$生成元对易

$$t^a = \begin{pmatrix} \tau^a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad t^8 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}. \tag{20.38}$$

因此，期望值(20.37)将$SU(3)$自发地破缺为$SU(2) \times U(1)$，使得这四个生成元对应的规范玻色子无质量。$SU(3)$的其余四个生成元。

$$\begin{aligned} t^4 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad t^5 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ t^6 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad t^7 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{20.39}$$

获得质量

$$m^2 = \left(3g|\phi|\right)^2, \tag{20.40}$$

将这些矩阵代入式(20.35)即可检验。

Φ_0的另一个可能的方向是

$$\Phi_0 = |\phi| \cdot \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}. \tag{20.41}$$

在本例中，只有t^3和t^8与Φ_0对易，因此原始的$SU(3)$对称性破缺为$U(1) \times U(1)$。通过代入式(20.35)，可以确定$SU(3)$的剩余生成元对应的规范玻色子获得了质量

$$t^1, t^2: \quad m^2 = \left(2g|\phi|\right)^2, \qquad t^4, t^5, t^6, t^7: \quad m^2 = \left(g|\phi|\right)^2. \tag{20.42}$$

更大的对称群提供了更广泛的对称性破缺的模式，和更复杂的质量矩阵。我们在问题20.1中考虑了另一个例子。

对希格斯机制的正式描述

到目前为止，我们对希格斯机制的研究是基于对标量场拉格朗日量耦合到规范场的明确分析。标量场论提供了具有自发对称性破缺的系统的最简单的例子，它们所允许的显式计算对可视化是有用的。但是对称性可以以其他方式破缺。例如，在超导理论中，电磁的阿贝尔规范不变性是由在金属基态下凝聚的电子对引起的破缺。在19.3节中，我们讨论了在夸克质量非常小的近似中，QCD具有由夸克-反夸克对的凝聚引起的自发破缺的整体对称性。在这些例子中，自发对称性破缺

是微扰论之外的强相互作用的结果。我们想要了解这些更一般的自发对称性破缺机制是否也能给予矢量玻色子质量，如果是这样，又如何计算质量。

为了进行这一分析，我们需要从前面的讨论中抽象出几个概念。首先，我们将一般性地讨论规范玻色子、Goldstone玻色子与整体对称性流之间的关系。然后我们将利用这一信息构造规范玻色子的质量矩阵，而不直接利用拉格朗日量。

首先，考虑一个带有整体对称性G的任意的量子场论$\mathcal{L}_0$。在第9.6节中，我们通过一个带有无穷小参数$\alpha^a(x)$的局域规范变换来对拉格朗日量变分，从而导出了与G对称性相对应的诺特流。α^a为常数的变换应该使$\mathcal{L}_0$保持不变。那么$\mathcal{L}_0$的更一般的变化必须采用如下形式

$$\delta\mathcal{L}_0 = -(\partial_\mu\alpha^a)J^{\mu a}, \tag{20.43}$$

其中矢量算符集$J^{\mu a}$由$\mathcal{L}_0$的场构成，于是变分原理告诉我们

$$\partial_\mu J^{\mu a} = 0. \tag{20.44}$$

我们可以把$J^{\mu a}$看作是整体规范对称性的诺特流。

我们现在可以把这个整体对称的理论与非阿贝尔规范场耦合起来，把整体对称性推广到局域对称性。对于g的第一阶，新的拉格朗日量应该采用如下形式

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + gA^a_\mu J^{\mu a} + \mathcal{O}(A^2). \tag{20.45}$$

要检查这一点，请注意在g的领头阶，变换(20.43)补偿了由于A^a_μ的规范变换引起的变分，式(15.46)。一般来说A^2阶以及更高项可以被安排来补偿规范变换中的更高阶项。因此，只包含一个规范场插入的矩阵元，可以使用原始整体对称性理论的诺特流性质来计算。特别注意的是，这些流的守恒律，式(20.44)，保证这些矩阵元的Ward恒等式是满足的。

如果$\mathcal{L}_0$理论的整体对称性是自发破缺的，这个理论将包含Goldstone玻色子，它将与诺特流形成一种特殊的关系。在长波长下，Goldstone玻色子成为了真空的无限小对称性旋转，$Q^a|0\rangle$，其中Q^a是与$J^{\mu a}$有关的整体荷。因此算符$J^{\mu a}$有正确量子数来从真空中产生Goldstone玻色子。让$|\pi_k\rangle$表示一个Goldstone玻色子态。一般来说，会有一个可以产生或消灭这个玻色子的流$J^{\mu a}$；我们可以将对应的矩阵元参数化为

$$\langle 0|\, J^{\mu a}(x)\,|\pi_k(p)\rangle = -ip^\mu F^a{}_k e^{-ip\cdot x}, \tag{20.46}$$

其中p^μ为玻色子的在壳动量，$F^a{}_k$为常数矩阵。当a表示的是未破缺对称性的生成元时，矩阵元$F^a{}_k$消失。然后$F^a{}_k$中不消失的矩阵元，将自发破缺的对称性流联系到相应的Goldstone玻色子上。因为流$J^{\mu a}$是守恒的，我们发现

$$0 = \partial_\mu \langle 0| J^{\mu a}(x) |\pi_k(p)\rangle = -p^2 F^a{}_k e^{-ip\cdot x}, \tag{20.47}$$

这意味着具有非零矩阵元(20.46)的玻色子在壳层上满足$p^2 = 0$，因此是无质量的。这是Goldstone定理的又一个证明*。

由于我们在本节前面讨论的标量场论应该是这种分析的一个特例，我们应该在那里找到式(20.46)给出的这种关系的一个例子。比较式(20.15)和(20.45)，我们看到，对于标量场论，

$$J^{\mu a} = \partial_\mu \phi_i T^a_{ij} \phi_j, \tag{20.48}$$

这确实是对应于整体规范对称性的诺特流。插入真空期望值(20.16)，我们发现

$$J^{\mu a} = \partial_\mu \phi_i (T^a \phi_0)_i, \tag{20.49}$$

它导致了一组矩阵元

$$\langle 0| J^{\mu a}(x) |\phi_i(p)\rangle = -ip^\mu (T^a\phi_0)_i e^{-ip\cdot x}. \tag{20.50}$$

利用这个关系，我们可以确定

$$F^a{}_i = T^a_{ij}\phi_{0j} \tag{20.51}$$

这是在弱耦合标量场论中的希格斯机制下。更精确地说，指标i遍历了标量场ϕ的所有分量。然而我们在式(20.19)下面的讨论中看到，仅仅对于分量ϕ_i是Goldstone玻色子且对称性生成元a是自发破缺的，(20.51)才是非零的。因此，(20.51)的非零分量精确地构成了结构(20.46)。

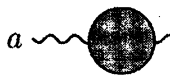
为了对对象$T^a\phi_0$将自发破缺生成元和Goldstone玻色子联系起来的方式作出具体的说明，考虑$SU(2)$对称性被一个矢量表示中的标量场破缺的情况，如式(20.29)和图20.1所示。从图中可以看出，围绕$\hat{1}$轴的旋转使ϕ的真空期望值集中到方向$\hat{2}$，围绕$\hat{2}$轴的旋转使这个期望值集中到方向$\hat{1}$，和围绕$\hat{3}$的旋转保持$\langle\phi\rangle$不变。因此规范生成元T^1和T^2是自发破缺的，标量场分量ϕ^2和ϕ^1为对应的Goldstone玻色子。这符合对$(T^a\phi_0)_i$矩阵元的显式计算的结果：使用$(T^a)_{bc} = \epsilon^{bac}$，我们发现

$$(T^a\phi_0)_b = \epsilon_{bac}\langle\phi^c\rangle = V\epsilon^{ba3}. \tag{20.52}$$

*这个论点的一个特例出现在式(19.88)的讨论中。

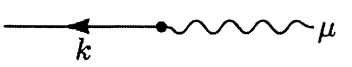
将这一结果插入公式(20.50)，我们可以看到，每个自发对称性破缺的流会产生和消灭它自己的Goldstone玻色子。

现在，我们可以在一般情况下用这种形式理论来研究希格斯机制的运作。考虑原始理论$\mathcal{L}_0$耦合到G的规范玻色子。为了了解希格斯机制是如何运作的，我们必须计算真空极化振幅。这种振幅被Ward等式要求是横向的，所以它必然是如下形式



$$= i\Big(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\Big) \cdot (m^2_{ab} + \mathcal{O}(k^2)). \tag{20.53}$$

在这种一般情况下，计算(20.53)中的非奇异项是不容易的，但是计算奇异项是很简单的，它来自于中间Goldstone玻色子的贡献。结合式(20.45)和(20.46)，我们看到规范玻色子转变为Goldstone玻色子的振幅为



$$= -gk^\mu F^a{}_j. \tag{20.54}$$

那么对真空极化的极点贡献是

$$= (gk^\mu F^a{}_j)\frac{i}{k^2}(-gk^\nu F^b{}_j). \tag{20.55}$$

比较(20.55)和(20.21)，我们得到

$$m^2_{ab} = g^2 F^a{}_j F^b{}_j. \tag{20.56}$$

注意到，在对称性被标量场破缺的情况下，这个结果返回到(20.18)。然而，式(20.56)适用于任何自发破缺对称性的理论，无论对称性破缺是从拉格朗日量明显地看出，还是它需要强相互作用或其他非微扰效应。这是一个普遍的结果，因此，任何规范玻色子耦合到自发破缺对称性的流都会获得质量。

20.2 弱相互作用的 Glashow-Weinberg-Salam 理论

我们现在准备写下自发破缺规范理论，它给出了弱相互作用的正确描述(实验上的)，这是格拉肖、温伯格和萨拉姆(GWS)引入的一个模型。与前一节考虑的第二个$SU(2)$模型一样，该模型对弱相互作用和电磁相互作用给出了统一的描述，其中无质量光子对应于对称性保持不破缺的生成元的一个特定组合。

我们再次从$SU(2)$规范对称性理论开始。为了使对称性自发破缺，我们在引入一个处于$SU(2)$的旋量表示中标量场，如式(20.22)。然而我们知道这个理论导

致了一个没有无质量规范玻色子的系统。因此我们引入一个额外的$U(1)$规范对称性。我们在$U(1)$对称性下给标量场分配电荷为$+1/2$，因此它的完整规范变换是

$$\phi \to e^{i\alpha^a \tau^a} e^{i\beta/2}\phi. \tag{20.57}$$

(这里$\tau^a = \sigma^a/2$)。如果场ϕ获得的真空期望值的形式是

$$\langle\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ v\end{pmatrix}, \tag{20.58}$$

然后当规范变换为

$$\alpha^1 = \alpha^2 = 0, \qquad \alpha^3 = \beta \tag{20.59}$$

将保持$\langle\phi\rangle$不变。因此，该理论将包含一个无质量规范玻色子，它对应于这个特定的生成元组合。剩下的三个规范玻色子将从希格斯机制中获得质量。

规范玻色子的质量

利用上一节的方法可以很容易地求出质量谱的细节。ϕ的协变导数是

$$D_\mu\phi = \left(\partial_\mu - igA^a_\mu\tau^a - i\tfrac{1}{2}g'B_\mu\right)\phi, \tag{20.60}$$

其中A^a_μ和B_μ分别为$SU(2)$和$U(1)$规范玻色子。由于规范群的$SU(2)$和$U(1)$因子是彼此对易的。它们可以有不同的耦合常数，我们称之为g和g'。

规范玻色子质量项来自于式(20.60)的平方，由标量场真空期望值(20.58)来计算。相关项是

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & v\end{pmatrix}\left(gA^a_\mu\tau^a + \frac{1}{2}g'B_\mu\right)\left(gA^{b\mu}\tau^b + \frac{1}{2}g'B^\mu\right)\begin{pmatrix}0\\ v\end{pmatrix}. \tag{20.61}$$

如果我们显式地计算矩阵乘积，用$\tau^a = \sigma^a/2$，我们就会发现

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{1}{2}\frac{v^2}{4}\left[g^2(A^1_\mu)^2 + g^2(A^2_\mu)^2 + (-gA^3_\mu + g'B_\mu)^2\right]. \tag{20.62}$$

这些是三个有质量矢量玻色子，我们将标记为：

$$\begin{aligned} W^\pm_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A^1_\mu \mp iA^2_\mu\right) \qquad \text{with mass} \quad m_W = g\frac{v}{2};\\ Z^0_\mu &= \frac{1}{\sqrt{g^2+g'^2}}\left(gA^3_\mu - g'B_\mu\right) \qquad \text{with mass} \quad m_Z = \sqrt{g^2+g'^2}\frac{v}{2}. \end{aligned} \tag{20.63}$$

与Z^0_μ正交的第四个矢量场保持无质量:

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2+g'^2}}\left(g'A^3_\mu + gB_\mu\right) \qquad \text{with mass} \quad m_A = 0. \tag{20.64}$$

我们将用电磁矢势来标记这个场。

从现在开始，用这些质量本征态场来表示所有的表达式会更方便。例如，考虑矢量场与费米子的耦合。对于属于一般$SU(2)$表示的费米场，带有$U(1)$荷Y，其协变导数采用形式为

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a T^a - ig'YB_\mu. \tag{20.65}$$

根据质量本征态场，它变成

$$\begin{aligned} D_\mu = \partial_\mu - i\frac{g}{\sqrt{2}}\left(W_\mu^+ T^+ + W_\mu^- T^-\right) - i\frac{1}{\sqrt{g^2+g'^2}} Z_\mu \left(g^2 T^3 - g'^2 Y\right) \\ - i\frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}} A_\mu \left(T^3 + Y\right), \end{aligned} \tag{20.66}$$

其中$T^\pm = (T^1 \pm iT^2)$。选择归一化后，在$SU(2)$的旋量表示中，

$$T^\pm = \tfrac{1}{2}(\sigma^1 \pm i\sigma^2) = \sigma^\pm. \tag{20.67}$$

式(20.66)的最后一项清楚表明了无质量规范玻色子A_μ与规范生成元(T^3+Y)的耦合，从而精确地产生了对称性操作(20.59)。

为了把式(20.66)转化成更有用的形式，我们应该把电磁相互作用的系数标记为电子电荷e，

$$e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}}, \tag{20.68}$$

以及电荷量子数标记为

$$Q = T^3 + Y. \tag{20.69}$$

对于电子$Q=-1$，这些替换，给出了电磁场耦合的传统形式。

为了进一步简化表达式(20.66)，我们定义**弱混合角**θ_ω为基底从(A^3, B)变化到(Z^0, A)时的角度：

$$\begin{pmatrix} Z^0 \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_w & -\sin\theta_w \\ \sin\theta_w & \cos\theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^3 \\ B \end{pmatrix},$$

也就是说，

$$\cos\theta_w = \frac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}}, \qquad \sin\theta_w = \frac{g'}{\sqrt{g^2+g'^2}}. \tag{20.70}$$

然后，在Z^0耦合的操作中

$$g^2 T^3 - g'^2 Y = (g^2+g'^2)T^3 - g'^2 Q,$$

我们可以把协变导数(20.66)重写成如下形式

$$D_\mu = \partial_\mu - i\frac{g}{\sqrt{2}}\left(W_\mu^+ T^+ + W_\mu^- T^-\right) - i\frac{g}{\cos\theta_w} Z_\mu \left(T^3 - \sin^2\theta_w Q\right) - ieA_\mu Q, \tag{20.71}$$

where

$$g = \frac{e}{\sin\theta_w}. \tag{20.72}$$

我们在这里看到，所有弱玻色子的耦合由两个参数描述：测量良好的电子电荷e和一个新的参数θ_ω。由于W, Z交换引起的耦合也会涉及到这些粒子的质量。然而，这些质量并不是独立的，因为它来自于公式(20.63),

$$m_W = m_Z \cos\theta_w. \tag{20.73}$$

W和Z交换过程的所有效应，至少在树图水平上，可以用三个基本参数e、θ_ω和m_W来表示。

与费米子耦合

协变导数(20.71)唯一地决定了W场和Z^0场与费米子的耦合，一旦费米场的量子数被指定。为了确定这些量子数，我们必须考虑到17.3节中提到的事实，即W玻色子只耦合到夸克和轻子的左手螺旋度态。

费米场的左手和右手分量以不同的方式来耦合到规范玻色子，在经典拉格朗日量的水平上，这样的理论构建是没有困难的*。我们已经在3.2节中看到，狄拉克费米子的动能项分裂为左手场和右手场的部分：

$$\bar{\psi} i\partial\!\!\!/ \psi = \bar{\psi}_L i\partial\!\!\!/ \psi_L + \bar{\psi}_R i\partial\!\!\!/ \psi_R. \tag{20.74}$$

当我们将ψ耦合到一个规范场时，我们可以将ψ_L, ψ_R分配到规范群的不同表示。那么(20.74)右边的两项将包含两种不同的协变导数，这意味着两组不同的耦合。

在GWS模型中，我们可以使用这种技术来确保只有夸克和轻子场的左手分量与W玻色子耦合。我们将左手费米子场分配给$SU(2)$的二重态，同时令右手费米场成为这个群下的单态。一旦我们为每个费米场指定了T^3值，我们必须分配的Y值就来源于公式(20.69)。这意味着对于夸克和轻子的左手和右手分量，Y的赋

*在第19.4节中，我们讨论了这种策略在量子修正水平上可能存在的问题。我们将在下面检查我们构造的特定模型是否避免了这个问题。

值也会不同。对于右手场，$T^3=0$，所以我们通过让Y等于电荷来重现标准的电荷。例如，对于右手的u夸克场，$Y=+2/3$；对于e_R^-，$Y=-1$。对于左手场，

$$E_L=\begin{pmatrix}\nu_e\\ e^-\end{pmatrix}_L,\qquad Q_L=\begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}_L, \tag{20.75}$$

$Y=-1/2$和$Y=+1/6$的赋值分别与$T^3=\pm 1/2$结合，给出正确的电荷分配。由于左手和右手费米子存在于基础规范群的不同表示中，因此将这些组分看作不同的粒子通常是有用的，它们由于费米子质量项而混合在一起。

事实上，费米子质量项的构造是一个严重的问题，因为所有可能的此类项都被整体规范不变性所禁止。例如，我们不能写出电子质量项为

$$\Delta\mathcal{L}=-m_e\left(\bar{e}_L e_R+\bar{e}_R e_L\right), \tag{20.76}$$

因为场e_L和e_R属于不同的$SU(2)$表示，并且具有不同的$U(1)$荷。在接下来的几页中，我们把所有的费米子场都当作无质量，可以忽略这个问题。这一描述足以分析高能弱相互作用的结构，其中夸克和轻子质量可以忽略不计。在本节的最后，我们将回到这个问题——在GWS理论中写出夸克和轻子质量项。这个问题的解决将强化这样一种观点，即左手和右手费米子场从根本上是独立的实体，通过一些辅助过程来混合以形成有质量的费米子。

如果我们忽略费米子的质量，夸克和轻子之间弱相互作用的拉格朗日量直接来自于上面给出的电荷分配。e,ν,u和d的费米子动能项是

$$\mathcal{L}=\bar{E}_L(i\not{\partial})E_L+\bar{e}_R(i\not{\partial})e_R+\bar{Q}_L(i\not{\partial})Q_L+\bar{u}_R(i\not{\partial})u_R+\bar{d}_R(i\not{\partial})d_R. \tag{20.77}$$

在每一项中，协变导数由式(20.65)给出，其中T^a和Y是在费米场所属的特定表示中计算的。例如，

$$\bar{Q}_L(i\not{\partial})Q_L=\bar{Q}_L i\gamma^\mu\left(\partial_\mu-igA_\mu^a\tau^a-i\tfrac{1}{6}g'B_\mu\right)Q_L. \tag{20.78}$$

一个右手中微子与$SU(2)$和$U(1)$的耦合都为零，所以我们在公式(20.77)中简单地省略了这个场。

要算出费米子-矢量玻色子耦合的物理结果，我们应该用矢量玻色子质量本征态来写出方程(20.77)，使用方程(20.71)中给出的协变导数的形式。于是方程(20.77)的形式为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}=&\bar{E}_L(i\not{\partial})E_L+\bar{e}_R(i\not{\partial})e_R+\bar{Q}_L(i\not{\partial})Q_L+\bar{u}_R(i\not{\partial})u_R+\bar{d}_R(i\not{\partial})d_R\\&+g\left(W_\mu^+J_W^{\mu+}+W_\mu^-J_W^{\mu-}+Z_\mu^0J_Z^\mu\right)+eA_\mu J_{EM}^\mu,\end{aligned} \tag{20.79}$$

其中

$$
\begin{aligned}
J_W^{\mu+} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\bar{\nu}_L\gamma^\mu e_L + \bar{u}_L\gamma^\mu d_L\right);\\
J_W^{\mu-} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\bar{e}_L\gamma^\mu \nu_L + \bar{d}_L\gamma^\mu u_L\right);\\
J_Z^\mu &= \frac{1}{\cos\theta_w}\Big[\bar{\nu}_L\gamma^\mu\left(\tfrac{1}{2}\right)\nu_L + \bar{e}_L\gamma^\mu\left(-\tfrac{1}{2}+\sin^2\theta_w\right)e_L + \bar{e}_R\gamma^\mu\left(\sin^2\theta_w\right)e_R\\
&\qquad + \bar{u}_L\gamma^\mu\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{2}{3}\sin^2\theta_w\right)u_L + +\bar{u}_R\gamma^\mu\left(-\tfrac{2}{3}\sin^2\theta_w\right)u_R\\
&\qquad + \bar{d}_L\gamma^\mu\left(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\sin^2\theta_w\right)d_L + \bar{d}_R\gamma^\mu\left(\tfrac{1}{3}\sin^2\theta_w\right)d_R\Big];\\
J_{EM}^\mu &= \bar{e}\gamma^\mu(-1)e + \bar{u}\gamma^\mu\left(+\tfrac{2}{3}\right)u + \bar{d}\gamma^\mu\left(-\tfrac{1}{3}\right)d. \qquad (20.80)
\end{aligned}
$$

这里我们已经用公式(20.67)简化了W玻色子流。请注意，与光子场相关的流J_{EM}^μ实际上是标准的电磁流。

反常的抵消

正如我们刚才看到的，用手征的方式写出一个拉格朗日量来将GWS规范玻色子与费米子耦合并不困难。然而，这些手征耦合确实存在一个潜在的问题，这出现在单圈修正水平上。在第19.2节中，我们看到，在经典运动方程水平上是守恒的轴流，通过将该流耦合到一对规范玻色子的单圈图，它将获得非零散度。包含了这个反常贡献的费曼图是一个三角图，其顶点带有轴流和两个规范流。在规范玻色子与手征流耦合的规范理论中，危险的三角图出现在三规范玻色子顶点函数的单圈修正中。反常项违反了这个振幅的Ward恒等式。因此，正如我们在第19.4节中所讨论的，只有当反常贡献以某种方式消失时，规范玻色子与手征流耦合的理论才能是规范不变的。幸运的是，正如我们在那里看到的，当对所有可以在这些图中循环传播的可能的费米子种类求和时，反常项可以被抵消*。

在GWS理论中，实验要求弱相互作用流是左手的，这迫使我们选择手征规范耦合。现在，我们必须检查，来源于三角图的反常项如我们需要的那样来抵消了。我们会发现它们确实是的，但只能通过夸克和轻子的量子数之间微妙而神奇的相互作用来实现。

三规范玻色子A_μ^a，A_ν^b，A_λ^c的三角图的反常项正比于群论的不变量

*如果你还没有读过第19章，但你愿意假设费米子三角图包含一个破坏规范不变性的贡献，你应该仍然能够跟随下面的论证。

$$\mathrm{tr}\left[\gamma^5 t^a \left\{t^b, t^c\right\}\right], \tag{20.81}$$

其中是对所有费米子种类求迹。反对易子来自于对两个三角图求和，其中费米子在相反方向上环绕。γ^5因子反映了反常与手征流有关的事实；这个因子对于左手费米子等于-1，对于右手费米子等于$+1$。在诸如QED或QCD等理论中，其中规范玻色子等价地耦合到左手和右手的种类，这种反常就自动抵消了。这种统计(bookkeeping)方法是第19.4节中提出的更一般方法的一个特例。

要计算GWS理论的反常，在混合光子和Z^0质量本征态之前，在$SU(2)\times U(1)$规范玻色子的基下工作最简单。计算无质量的费米子的三角图就足够了，因此，右手费米子和左手费米子有不同的量子数。但是，我们不仅要考虑带有三个$SU(2)\times U(1)$规范玻色子的图的反常，还要考虑带有弱相互作用规范玻色子和QCD的色$SU(3)$规范玻色子的图的反常。如果我们考虑引力对弱相互作用规范理论的影响，还可能存在一个带有一个弱相互作用规范玻色子和两个引力子的反常图。我们可以忽略一些图，例如三个$SU(3)$玻色子的反常，或一个$SU(3)$玻色子和两个引力子的反常，其中所有的耦合都是左-右对称的。然后，图20.2显示了有着可能的反常项的完整一组图。如果要满足$SU(2)\times U(1)$规范理论的Ward恒等式，则所有的可能反常都必须抵消。

三个$SU(2)$规范玻色子的反常总是消失，这是$SU(2)$规范理论的一个特殊性质；这个结果是由泡利sigma矩阵的性质得到的：$\{\sigma^a,\sigma^b\}=2\delta^{ab}$，这表示迹(20.81)消失。包含一个$SU(3)$玻色子或一个$SU(2)$玻色子的反常正比于

$$\mathrm{tr}[t^a]=0 \qquad \text{or} \qquad \mathrm{tr}[\tau^a]=0. \tag{20.82}$$

剩下的非平凡反常是一个$U(1)$玻色子带着两个$SU(2)$玻色子或两个$SU(3)$玻色子的反常，三个$U(1)$玻色子的反常和带有一个$U(1)$规范玻色子的引力反常。

一个$U(1)$玻色子带有两个$SU(3)$玻色子的反常正比于群论因子

$$\mathrm{tr}[t^a t^b Y]=\tfrac{1}{2}\delta^{ab}\cdot\sum_q Y_q, \tag{20.83}$$

其中求和遍历左手夸克和右手夸克，而左手贡献带来一个额外的(-1)。插入上面给出的u_L, d_L, u_R和d_R的电荷分配，我们发现

$$\sum_q Y_q=-2\cdot\tfrac{1}{6}+(\tfrac{2}{3})+(-\tfrac{1}{3})=0. \tag{20.84}$$

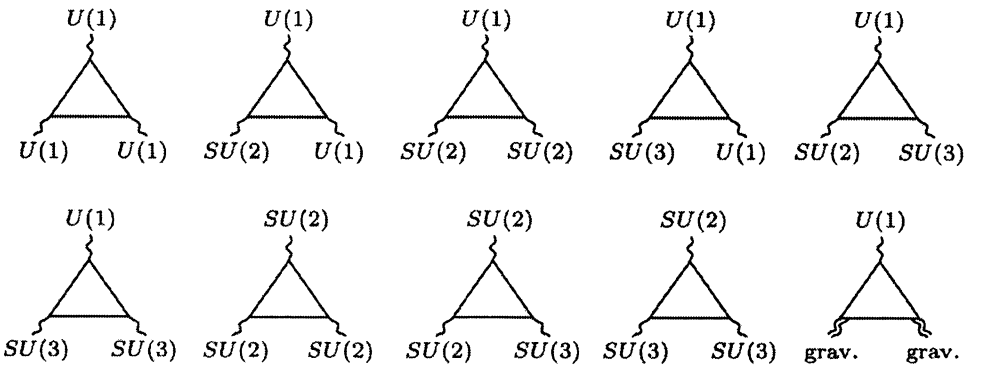


图20.2 弱相互作用理论可能的规范反常。所有这些反常必须消失，以使Glashow-Weinberg-Salam理论保持一致性。

同样，一个$U(1)$玻色子带有两个$SU(2)$玻色子的反常也正比于

$$\mathrm{tr}[\tau^a\tau^b Y] = \tfrac{1}{2}\delta^{ab}\sum_{fL} Y_{fL}, \tag{20.85}$$

其中求和遍历左手费米子E_L和Q_L，因此，

$$\sum_{fL} Y_{fL} = -(-\tfrac{1}{2}) - 3\cdot\tfrac{1}{6} = 0; \tag{20.86}$$

因子3是计数了夸克的颜色态。三个$U(1)$规范玻色子的反常正比于一个求和，包含左手和右手轻子和夸克：

$$\mathrm{tr}[Y^3] = -2(-\tfrac{1}{2})^3 + (-1)^3 - 3\big[2(\tfrac{1}{6})^3 - (\tfrac{2}{3})^3 - (-\tfrac{1}{3})^3\big] = 0. \tag{20.87}$$

最后，带有一个$U(1)$规范玻色子的引力反常正比于

$$\mathrm{tr}[Y] = -2(-\tfrac{1}{2}) + (-1) - 3\big[2(\tfrac{1}{6}) - (\tfrac{2}{3}) - (-\tfrac{1}{3})\big] = 0. \tag{20.88}$$

因此，Glashow-Weinberg-Salam理论是一个完全不受规范流之间的轴矢量反常影响的手征规范理论。然而，反常的消除需要轻子和夸克以完整的多重态出现，其结构为$(E_L, e_R, Q_L\ u_R, d_R)$。这组场通常被称为夸克和轻子的一代。该理论的一致性要求夸克和轻子在自然界中出现的数量相等，并以这种方式把自己组织成连续的代。

GWS 理论的实验结果

现在我们已经有了W和Z玻色子与费米子耦合的基本理论，我们可以算出这个理论对于由弱玻色子介导的可观察过程的结果。这个分析应该再现第17和18章中对弱相互作用的有效拉格朗日量描述，还预测了弱玻色子交换的额外的可观测效

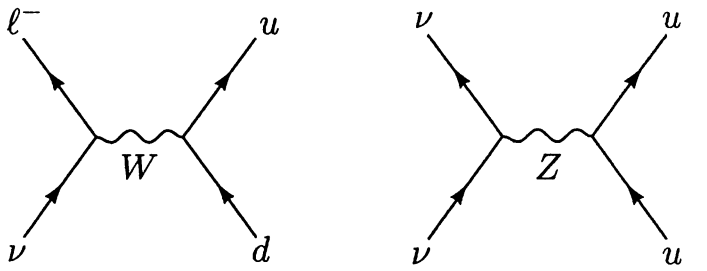


图20.3 有虚W和Z玻色子交换的一些过程。

应，在我们的讨论中，我们将只推导出这个项目中最基本的关系；我们没有空间来系统地研究弱相互作用的唯象学。然而，我们鼓励读者去研究弱相互作用的实验基础，其中包含了许多对量子场论原理的漂亮说明*。

在与矢量玻色子质量相比能量较低的情况下，弱玻色子的耦合主要是通过虚弱玻色子交换来实现的。这些过程如图20.3所示。我们将在第21章推导出有质量玻色子的费曼规则。同时，我们有理由猜测W和Z玻色子的传播子应该给出为

$$\langle W^{\mu+}(p)W^{\nu-}(-p)\rangle = \frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2-m_W^2}, \qquad \langle Z^{\mu}(p)Z^{\nu}(-p)\rangle = \frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2-m_Z^2}. \tag{20.89}$$

我们将在第21.1节中看到，这些传播子给出了W和Z交换图的正确表达式，在差了(m_f/m_W)阶的项下，其中m_f是费米子质量。

首先考虑图20.3中的W交换图，在能量低于W质量的极限下。然后我们可以忽略W传播子(20.89)的分母中的p^2项。从式(20.79)中取W耦合，我们发现图可以用如下有效拉格朗日量来描述

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{L}_W &= \frac{g^2}{m_W^2} J_W^{\mu-} J_{\mu W}^{+} \\ &= \frac{g^2}{2m_W^2}\left(\bar{e}_L\gamma^\mu\nu_L + \bar{d}_L\gamma^\mu u_L\right)\left(\bar{\nu}_L\gamma_\mu e_L + \bar{u}_L\gamma_\mu d_L\right).\end{aligned} \tag{20.90}$$

系数通常写成**费米常数**的形式，

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2}. \tag{20.91}$$

这个有效拉格朗日量中的各种项再现了我们在公式(17.31)、(18.28)及(18.29)中已经写过的表达式。因为轻子和夸克之间的这些相互作用是通过带电荷的矢量玻

*弱相互作用理论的实验成功在Commins and Bucksbaum (1983)一书中进行了回顾。

色子的交换来介导的，它们统称为**带电流**相互作用。有效拉格朗日量(20.90)为带电流弱相互作用的唯象学提供了一个惊人的成功的描述。我们已经描述了它在高能中微子散射中的应用，但它在核β衰变、μ子衰变和其他各种过程中也取得了类似的成功。

用类似的方法，我们可以求出虚Z^0交换所产生的有效拉格朗日量。我们发现

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{L}_Z &= \frac{g^2}{2m_Z^2} J_Z^\mu J_{\mu Z} \\ &= \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \left(\sum_f \bar{f}\gamma^\mu \left(T^3 - \sin^2\theta_w Q\right) f \right)^2 ,\end{aligned} \tag{20.92}$$

其中第二行中的求和遍历所有左手和右手味道，我们使用了关系(20.73)来简化前置因子。我们说有效拉格朗日量(20.92)介导了中性流弱相互作用过程。注意，如果我们定义$SU(2)$规范流为

$$J^{\mu a} = \sum_f \bar{f}\gamma^\mu T^a f, \tag{20.93}$$

然后W和Z交换的有效拉格朗日量可以一起被写成简单形式

$$\Delta\mathcal{L}_W + \Delta\mathcal{L}_Z = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \left[(J^{\mu 1})^2 + (J^{\mu 2})^2 + (J^{\mu 3} - \sin^2\theta_w J_{EM}^\mu)^2 \right]. \tag{20.94}$$

在$g' \to 0$或$\sin^2\theta_\omega \to 0$的极限下，该表达式在未破缺整体$SU(2)$对称性下是明显不变的。我们将在本节的最后进一步讨论这一观察结果。

中性流有效拉格朗日量(20.92)包含了将所有不同种类的夸克和轻子耦起来合的项。这些项违反了宇称，因此将它们与强相互作用和电磁作用的效应区分开来。例如，式(20.92)预测了中性流的深度非弹性中微子散射事件的存在，在这种情况下高能中微子撞击一个核子，但不转变为一个末态的μ子或电子。这个过程在20.4题中分析。同样地，中性流的相互作用预测了电子深度非弹性散射中存在宇称破坏效应。它还预测了一个宇称破坏的电子-核子相互作用(其应该混合了原子能级)，和一个类似的宇称破坏的核子-核子相互作用。在GWS理论中，所有这些不同效应的强度是根据费米常数和一个附加参数——$\sin^2\theta_\omega$的值来预测的。因此，通过观察这些效应的每一个，并询问该参数的单个值是否可以对所有这些不同过程的强度进行说明，可以测试GWS理论。

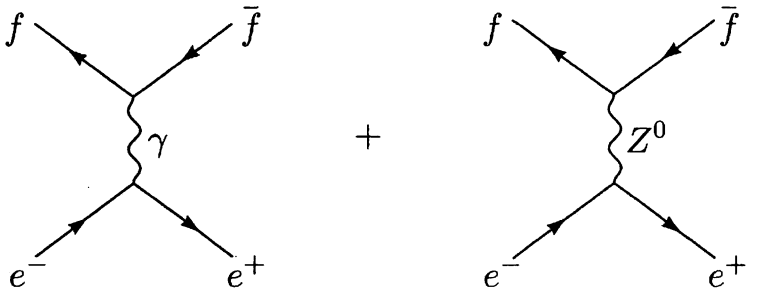


图20.4 在Glashow-Weinberg-Salam理论中对过程$e^+e^- \to f\bar{f}$有贡献的图

对GWS理论的进一步测试可以在更高的能量下进行。过程$e^+e^- \to f\bar{f}$受到了本质上的影响，因为理论中包含了一个有着s道Z^0交换的新图，干涉了标准的光子交换图，如图20.4所示。使用5.2节的方法很容易计算出这种干涉的效应，因此我们把这个分析留到第20.3题。

当质心能接近m_Z时，Z^0作为一个共振态直接出现在e^+e^-湮没截面上。类似的，W和Z都可以被看作是夸克-反夸克湮灭中的共振态，被看作是质子-反质子散射中的一个部分子的子过程。根据公式(20.72)和(20.91)，这些共振态的位置可以由从$G_F, \sin^2\theta_\omega$和e或α的值预测出来。利用这些关系，我们发现

$$m_W^2 = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_F \sin^2\theta_w}, \qquad m_Z^2 = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_F \sin^2\theta_w \cos^2\theta_w}. \tag{20.95}$$

Z^0共振态的详细形状如图20.5所示。所示的实验测量结果与理论曲线进行了比较，并调整了共振位置以获得最佳拟合。然后用GWS理论预测了共振的高度和宽度。电子和正电子在湮灭之前辐射共线光子的过程使共振扩大到更高的能量；这种修正在第5.5题中讨论过。

由于GWS理论的拉格朗日量将左手费米子和右手费米子视为具有完全不同量子数的不同种类，所以Z^0与左手费米子和右手费米子的耦合明显不同。这个的一种表现是**极化不对称**的存在，在衰变$Z^0 \to f\bar{f}$中产生的费米子的净(net)极化，或者在逆过程Z^0产生中的不对称性。这种不对称性可以直接从(20.80)中给出的Z^0流的形式来看:

$$\begin{aligned} A_{LR}^f &= \frac{\Gamma(Z^0 \to f_L\bar{f}_R) - \Gamma(Z^0 \to f_R\bar{f}_L)}{\Gamma(Z^0 \to f_L\bar{f}_R) + \Gamma(Z^0 \to f_R\bar{f}_L)} \\ &= \frac{(\frac{1}{2} - |Q_f|\sin^2\theta_w)^2 - (Q_f \sin^2\theta_w)^2}{(\frac{1}{2} - |Q_f|\sin^2\theta_w)^2 + (Q_f \sin^2\theta_w)^2}. \end{aligned} \tag{20.96}$$

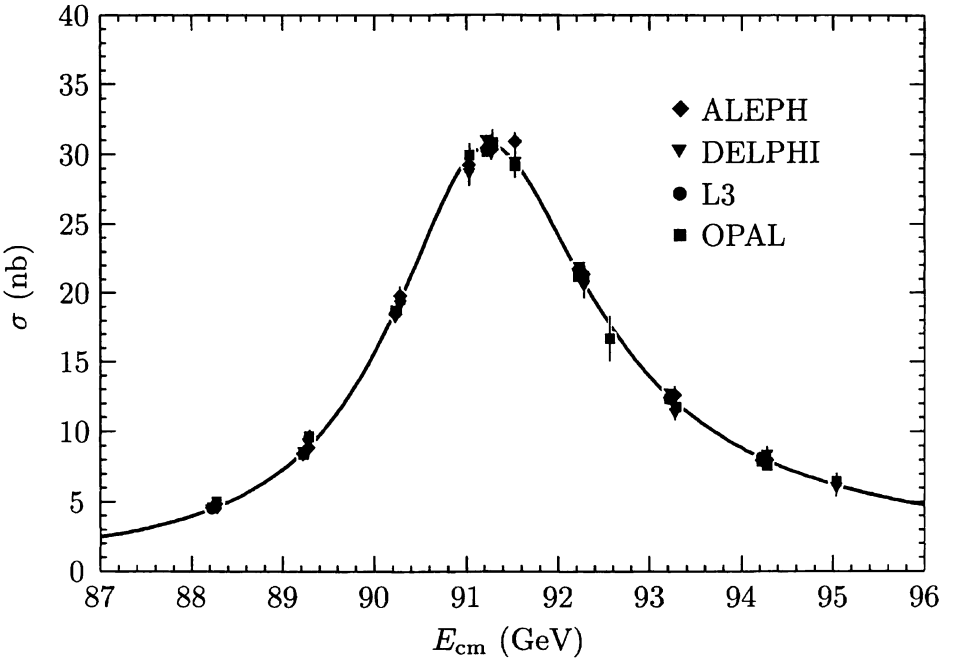


图20.5 用ALEPH、DELPHI、L3和OPAL实验在$E_{\rm cm}$接近Z^0玻色子的质量处测量的e^+e^-湮没到强子的总截面，并由Particle Data Group, Phys. Rev.D50, (1994)编制，图32.14。那里给出了原始文章的参考资料。实线是GWS理论的预测。

对于实际值$\sin^2\theta_\omega = 0.23$，该表达式给出了带电轻子15%的不对称性，以及$d$、$s$和$b$夸克95%的不对称性。轻子的不对称性可以通过实验来检查，通过测量Z^0共振态处τ轻子的极化，或者通过测量出分别使用左手和右手电子来产生共振态的相对横截面。对于夸克，其不对称性可以由共振态的向前-向后产生的不对称性来间接确定，如20.3题所述。

由于弱中性流有如此多不同的表现形式，可以对弱相互作用的GWS理论进行严格的检验，只要通过比较参数$\sin^2\theta_\omega$的值，该参数需要解释其预测的每个效应。表20.1给出了从各种的弱相互作用中性流效应和不对称性中提取的$\sin^2\theta_\omega$的值。在所有情况下，必须包括单圈辐射修正，以便在所需的精度水平上分析实验。这些辐射修正涉及到一些细微之处。首先，必须采用特定的重正化约定来定义$\sin^2\theta_\omega$，并在所有计算中一致地使用它。下表显示了该约定的两种不同选择的结果。在这两种约定中，弱相互作用可观测量的值都被认为是α、G_F和第三个独立参数的函数。在第一列中，这个参数是质量比m_W/m_Z，由于树级表达式(20.73)，

表20.1 来自弱相互作用实验的$\sin^2\theta_\omega$的值

Observed Quantity or Process	s_W^2	$\sin^2\theta_{w\overline{MS}}$
m_Z	0.2247 (21)	0.2320 (6)
m_W	0.2264 (25)	0.2338 (22)
Γ_Z	0.2250(18)	0.2322 (6)
Lepton f-b asymmetries at the Z^0	0.2243 (17)	0.2315 (11)
All pair-production asymmetries at the Z^0	0.2245 (17)	0.2317 (8)
A_{LR}^e at the Z^0	0.2221 (17)	0.2292 (10)
Deep inelastic neutrino scattering	0.2260 (48)	0.233 (5)
Neutrino-proton elastic scattering	0.205 (31)	0.212 (32)
Neutrino-electron elastic scattering	0.224 (9)	0.231 (9)
Atomic parity violation	0.216 (8)	0.223 (8)
Parity violation in inelastic e^- scattering	0.216 (17)	0.223 (18)

这里列出的值是通过调整s_W^2或$\sin^2\theta_{\omega\overline{MS}}$的值，并取$\alpha$和$G_F$为精确已知的参数，来拟合实验观测值而得到的。括号中的数字是最后显示数字的标准误差。从实验测量的量变换成s_W^2或$\sin^2\theta_{\omega\overline{MS}}$取决于顶夸克质量和希格斯玻色子质量的值。这些值假设顶夸克质量为169 GeV，希格斯质量为300 GeV；引用中的误差包括了顶夸克质量的不确定度17 GeV，希格斯质量的不确定度为60 GeV到1000 GeV的范围。两列之间相对误差的差异反映了理论的这种不确定性的重要性。一些观测结果很弱地依赖于α_s，这些值假设为$\alpha_s(m_Z)=0.120\pm.007$。这个表取自文章P. Langacker and J. Erler for the Particle Data Group, *Phys.Rev.* **D50**, 1304 (1994)。这篇文章包含了全部的参考文献，并讨论了这些测定的不确定性来源。

我们考虑用这个比来定义$\sin^2\theta_\omega$的重正化值:

$$s_W^2 \equiv 1-\frac{m_W^2}{m_Z^2}. \tag{20.97}$$

在第二列中，第三个参数是根据弱相互作用耦合常数(由式(11.77)的最小减除定义的)来计算得到$\sin^2\theta_\omega$，$\sin^2\theta_\omega$的不同定义之间的差异，出现在单圈计算的水平上，可以揭示有趣的物理现象；本主题将在第21.3节中讨论。

第二个微妙之处是，对弱中性流过程的单圈修正依赖于t夸克质量的值，该值直到最近才被确定，目前仍知之甚少。对t夸克质量的依赖性相对较强。出于一些有趣的原因，我们将在21.3节中讨论。单圈修正也较弱地依赖于导致自发对称性破缺的粒子的性质。

从表20.1中我们可以看到，由于弱中性流所引起的各种各样的效应已经被观察到，其量级由一个单一的、一致的$\sin^2\theta_\omega$值所解释。这种理论和实验的显著一致性让我们相信，Glashow-Weinberg-Salam理论确实是对弱相互作用和电磁相互作用的正确描述。

费米子质量项

现在我们回到写出夸克和轻子的质量项的问题。回想一下，我们不能把普通的质量项代入拉格朗日量。因为不同费米子场的左手和右手分量有不同的规范量子数，所以简单的质量项违反规范不变性。为了给出夸克和轻子的质量，我们必须再次调用自发对称性破缺机制。

本节开始时，我们假设一个标量场ϕ获得一个真空期望值(20.58)，以便给W和Z玻色子质量。这个标量场需要是$SU(2)$下的旋量，并且有$Y=1/2$才能产生规范玻色子质量的正确模式。用这些量子数，我们还可以写出一个连接e_L、e_R和ϕ的规范不变的耦合，如下所示:

$$\Delta\mathcal{L}_e = -\lambda_e \overline{E}_L \cdot \phi\, e_R + \text{h.c.} \tag{20.98}$$

这里，二重态E_L和ϕ的$SU(2)$指标收缩；还要注意，各个场的荷Y之和为0。参数λ_e是一种新的无量纲耦合常数。如果我们用ϕ的真空期望值(20.58)来代替这个表达式中的ϕ，我们得到

$$\Delta\mathcal{L}_e = -\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_e v\, \bar{e}_L e_R + \text{h.c.} + \cdots. \tag{20.99}$$

这是电子质量项。质量大小由ϕ的真空期望值确定，由新的无量纲耦合来重标度:

$$m_e = \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_e v. \tag{20.100}$$

由于电子质量与v成正比，人们可能会认为电子和W玻色子的质量应该是相同阶的。而事实上，取观测值，$m_e/m_W \sim 6\times 10^{-6}$。由于$\lambda_e$是一个可重正化的耦合，所以它必须作为理论的输入。因此，GWS理论允许电子非常轻，但它不能解释为什么电子比W玻色子轻这么多。

我们可以用同样的方法写出夸克场的质量项。注意到，在下面的表达式中，两项在$SU(2)$下是不变的，且净Y为0:

$$\Delta\mathcal{L}_q = -\lambda_d \overline{Q}_L \cdot \phi\, d_R - \lambda_u \epsilon^{ab} \overline{Q}_{La} \phi_b^\dagger u_R + \text{h.c.} \tag{20.101}$$

将式(20.58)中ϕ的真空期望值代入，这些项成为

$$\Delta\mathcal{L}_q = -\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_d v\,\bar{d}_L d_R - \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_u v\,\bar{u}_L u_R + \text{h.c.} + \cdots, \tag{20.102}$$

d夸克和u夸克的标准质量项。因此，GWS理论给出了如下关系

$$m_d = \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_d v, \qquad m_u = \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_u v. \tag{20.103}$$

与电子一样，该理论参数化了d夸克和u夸克的质量，但无法解释实验观察到的小数值。

当更多代的夸克被引入理论时，可能会有更多的耦合项来使代混合。或者，我们可以通过选择夸克场的新基来对角化希格斯耦合。我们将在第20.3节中说明这总是可能的。然而，希格斯耦合的这种简化导致了规范耦合的复杂性。让

$$u_L^i = (u_L, c_L, t_L)\,, \qquad d_L^i = (d_L, s_L, b_L) \tag{20.104}$$

表示上型夸克和下型夸克的原始基，让$u_L'^i$和d'^i_L表示使希格斯耦合对角化的基中的夸克。后一种基是物理的基，因为它是使质量矩阵对角化的基。这两个基通过幺正变换联系起来:

$$u_L^i = U_u^{ij} u_L'^j, \qquad d_L^i = U_d^{ij} d_L'^j. \tag{20.105}$$

在这个新的基上，W玻色子流的形式取为了

$$J_W^{\mu+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{u}_L^i \gamma^\mu d_L^i = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{u}_L'^i \gamma^\mu (U_u^\dagger U_d)_{ij} d_L'^j. \tag{20.106}$$

这个表达式习惯上写成

$$J_W^{\mu+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{u}_L'^i \gamma^\mu V_{ij} d_L'^j, \tag{20.107}$$

其中V_{ij}是一个称为Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM)矩阵的幺正矩阵。V_{ij}中的非对角项允许在夸克代之间发生弱相互作用跃迁。例如，为简单起见限制为两代，并写出

$$V_{1j} d_L'^j = \cos\theta_c d_L' + \sin\theta_c s_L', \tag{20.108}$$

与$\sin\theta_c$成正比的项使得s夸克衰变为u夸克。我们在第18.2节讨论K介子衰变的有效拉格朗日量时已经利用了这种结构。我们将在第20.3节中更详细地讨论CKM的味道混合及其对称性性质。

值得注意的是，在我们所描述的结构中，并没有赋予中微子质量的项。如果我们想推广式(20.98)来允许中微子质量项，我们必须引入新的费米场ν_R，它在

$SU(2) \times U(1)$下完全中性的。然后我们可以写出希格斯耦合

$$\Delta\mathcal{L}_\nu = -\lambda_\nu \epsilon^{ab} \overline{E}_{La} \phi_b^\dagger \nu_R + \text{h.c.}, \tag{20.109}$$

这将给ν_e一个质量，大概可以和电子的质量相比拟。但是我们从实验中得知中微子的质量非常小:已知ν_e的质量小于10 eV。如果态ν_R不存在，那么中微子质量的这种极端抑制就可以得到自然的解释。我们将在第20.3节中展示，这个假设也意味着不同代的轻子之间没有跃迁；这一结果也和很强的实验限制是一致的。

希格斯玻色子

费米子质量产生的讨论强调了，引起规范对称性自发破缺的标量场是Glashow-Weinberg-Salam理论结构中的一个重要组成部分。因此，我们应该问，它是否有任何更直接的表现。

为了研究这个问题，我们将在**幺正规范**中工作，类似于式(20.12)中的阿贝尔模型使用的那个规范。让我们将标量场ϕ参数化来写出

$$\phi(x) = U(x) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix}. \tag{20.110}$$

右边的二分量旋量有一个任意实值的下分量，被给出为ϕ的真空期望值加上一个涨落实值场$h(x)$，且$\langle h(x) \rangle = 0$。该旋量被一般的$SU(2)$规范变换$U(x)$作用，以产生最一般的复值二分量旋量。我们现在可以做一个规范变换来从拉格朗日量中消去$U(x)$。这将ϕ化简为具有一个物理自由度的一个场。

一个导致了ϕ的真空期望值的、明显可重正化的拉格朗日量是

$$\mathcal{L} = \left| D_\mu \phi \right|^2 + \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2. \tag{20.111}$$

势能的最小值出现在

$$v = \left(\frac{\mu^2}{\lambda} \right)^{1/2}. \tag{20.112}$$

在幺正规范中，式(20.111)中的势能项为形式

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V &= -\mu^2 h^2 - \lambda v h^3 - \frac{1}{4} \lambda h^4 \\ &= -\frac{1}{2} m_h^2 h^2 - \sqrt{\frac{\lambda}{2}} m_h h^3 - \frac{1}{4} \lambda h^4. \end{aligned} \tag{20.113}$$

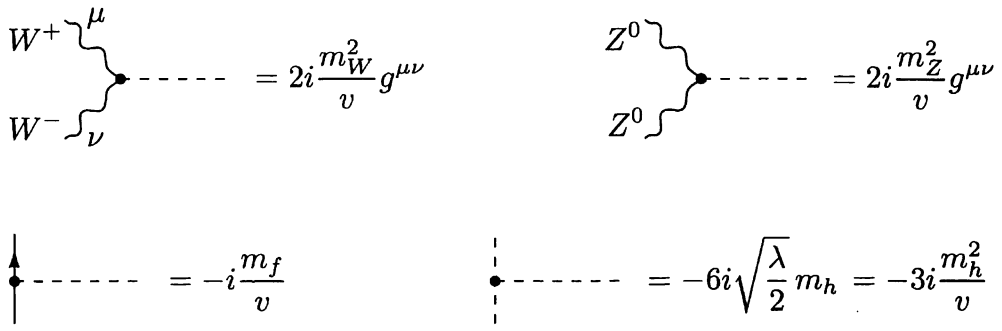


图20.6 希格斯玻色子与矢量玻色子、费米子和自身的耦合的费曼规则

场$h(x)$的量子是一个标量粒子。带质量为

$$m_h = \sqrt{2}\mu^2 = 2\sqrt{\frac{\lambda}{2}}v. \tag{20.114}$$

这种粒子被称为**希格斯玻色子**。相对于GWS理论中的费米子，希格斯玻色子的质量的一般量级由真空期望值v控制，但其精确值由一个新的、未指定的、可重正化的耦合常数决定。

在幺正规范中(20.111)的动能项的展开得到了规范玻色子质量项(20.62)，加上涉及希格斯玻色子场的附加项。显示地写是

$$\mathcal{L}_K = \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 + \left[m_W^2 W^{\mu+}W_\mu^- + \frac{1}{2}m_Z^2 Z^\mu Z_\mu\right]\cdot\left(1+\frac{h}{v}\right)^2, \tag{20.115}$$

其中m_W和m_Z由公式(20.63)给出。

最后，公式(20.98)和(20.101)中的费米子质量项导致希格斯玻色子与费米子的直接耦合。在幺正规范下计算这些项，我们发现，对于任何夸克或轻子的味道，希格斯玻色子的耦合都根据

$$\mathcal{L}_f = -m_f\bar{f}f\left(1+\frac{h}{v}\right). \tag{20.116}$$

公式(20.113)、(20.115)和(20.116)中的希格斯玻色子耦合导致了图20.6所示的费曼规则。

一般来说，希格斯玻色子与弱相互作用理论中的其他粒子的耦合与这些粒子的质量成正比。因此，在实验室中最容易制造的粒子，与Higgs玻色子之间的耦合非常弱，因此很难观察到这种粒子。无论如何，希格斯玻色子尚未被发现。在写这篇文章时，我们刚刚描述的希格斯玻色子已经被搜索并排除了在60 GeV以下的m_h值。然而，如果自耦合λ很大，希格斯玻色子的质量可能达到1000 GeV；因此，有很大的动力学范围仍然有待探索。

希格斯玻色子的唯象学性质在第三部分的最后项目中有更详细的阐述。

希格斯区(Higgs sector)?

由于没有实验证据证明GWS模型中包含的简单希格斯玻色子的存在，因此，W和Z玻色子是否可能通过更复杂的机制获得质量是一个值得探讨的问题。这个问题有两个方面。

第一，W玻色子和Z玻色子是否一定是自发破缺的$SU(2)\times U(1)$对称性的规范玻色子?这个观点的证据来自于各种夸克和轻子对弱相互作用的耦合的普适性。费米常数的相同值描述了所有的带电流弱相互作用过程，而这个相同耦合强度与$\sin^2\theta_\omega$单一值的结合，描述了整个弱中性电流现象，这些事实验证了这种普适性。特别在第16章讨论中，我们已经看到局域规范不变性的原则自然地导致了普遍的、不依赖于味道的耦合常数的预测。没有其他原理可以解释这种明显的规律性。因此有令人信服的证据表明，弱相互作用基本理论是自发破缺规范理论。

然而，$SU(2)\times U(1)$的自发破缺机制很可能比我们在式(20.111)中所写的单一标量场的简单模型更为复杂。原则上，$SU(2)\times U(1)$的破缺可能是一组复杂的新粒子和相互作用的动力学结果。我们称之为**希格斯区(sector)**。实验只告诉我们这个新区有三个性质:首先，它必须产生夸克和轻子的质量。第二，它必须产生W和Z玻色子的质量。第三条信息，也是唯一一条非平凡的信息，来自于GWS理论中弱玻色子质量之间的关系(20.73)，

$$m_W = m_Z\cos\theta_w. \tag{20.117}$$

这种关系在实验中得到了满足，其精度超过了1%，即，在单圈辐射修正的水平上。无论我们调用什么复杂的机制来生成$SU(2)\times U(1)$的自发破缺，它都应该以一种自然的方式再现这种关系。

为了理解关系(20.117)的含义，我们必须在没有假设$SU(2)\times U(1)$被标量场期望值破缺的情况下分析规范玻色子质量矩阵，。实际上，利用第20.1节最后给出的论证，可以在限制少得多的假设下计算规范玻色子质量矩阵。在那里，我们用规范流的矩阵元构建了规范玻色子质量矩阵，来产生或消灭Goldstone玻色子。现在我们将证明关系(20.117)来源于一大类的$SU(2)\times U(1)$破缺的模型，其中这些矩阵元满足确定的简单性质。

弱相互作用对称性破缺的任何模型必须包含一些场，负责$SU(2) \times U(1)$的自发破缺。将理论的这个区看做带有整体$SU(2) \times U(1)$对称性的一个场论，它通过与规范玻色子的耦合就提升到局域对称性。在有整体对称性的理论中，这种对称性被自发破缺到$U(1)$。由于三个连续对称性被自发地破缺，这个区必须提供三个Goldstone玻色子，这些玻色子最终会被W^+ W^-和Z^0吃掉。称这三个玻色子为π_a，其中$a = 1,2,3$。设$J^{\mu a}$为新区的$SU(2)$对称流，设$J^{\mu Y}$为$U(1)$对称流。规范玻色子质量矩阵将由矩阵元(20.46)构成，在这里采用的形式为

$$\langle 0| J^{\mu A} |\pi_b(p)\rangle = -ip^\mu F^A{}_b, \tag{20.118}$$

其中$A = 1,2,3,Y$和$b = 1,2,3$。利用式(20.55)，我们发现规范玻色子真空极化包含极点项

$$-\frac{i}{k^2}(g_A F^A{}_c)(g_B F^B{}_c), \tag{20.119}$$

对c求和，其中对于$A = 1,2,3$有$g_A = g$，对于$A = Y$有$g_A = g'$。然后我们可以确定规范玻色子质量矩阵为

$$m^2_{AB} = g_A g_B F^A{}_c F^B{}_c. \tag{20.120}$$

为了再现已知形式的弱规范玻色子质量矩阵，我们现在必须对$F^A{}_b$施加限制。首先，我们必须确保光子保持无质量。如果荷(20.69)的线性组合湮灭了真空，就能得到这个。在式(20.118)的语言中，我们必须坚持认为，相应的流的线性组合不能激发Goldstone玻色子

$$\langle 0| \left(J^{\mu 3} + J^{\mu Y}\right) |\pi^a(p)\rangle = 0. \tag{20.121}$$

利用以下附加假设，我们也可以得到关系式(20.117)：对称性破缺区具有$SU(2)$整体对称性，在这种对称性下，三个Goldstone玻色子和三个$SU(2)$规范流像三重态一样变换，当$SU(2)$规范对称性是自发破缺的时，它仍然是精确的。这种整体$SU(2)$对称性意味着，如果式(20.118)中$A = a = 1,2,3$，则

$$\langle 0| J^{\mu a} \left|\pi^b(p)\right\rangle = -iFp^\mu \delta^{ab}, \tag{20.122}$$

其中F为带质量量纲的参数。合并(20.122)和(20.121)，我们有

$$\langle 0| J^{\mu Y} \left|\pi^3(p)\right\rangle = +iFp^\mu. \tag{20.123}$$

将$F^A{}_b$的这种形式插入(20.120)，我们得到规范玻色子质量矩阵

$$m^2 = F^2 \begin{pmatrix} g^2 & & & \\ & g^2 & & \\ & & g^2 & -gg' \\ & & -gg' & g'^2 \end{pmatrix}, \tag{20.124}$$

其中矩阵作用于规范玻色子$(A_\mu^1, A_\mu^2, A_\mu^3, B_\mu)$，该矩阵的特征矢量精确地为(20.63)和(20.64)。为了重现特征值。我们只需要定义

$$v = 2F. \tag{20.125}$$

我们现在已经证明，W和Z玻色子质量之间的GWS关系并不只局限于规范对称性被单个标量场破缺的情况。这一关系来源于更为普遍的假设，即有未破缺整体$SU(2)$对称性的希格斯区。这种对称性通常被称为**保管(custodial)$SU(2)$对称性***。我们早已经看到过这种对称性了，如弱相互作用有效拉氏量(20.94)的整体$SU(2)$对称性。

对于单个标量场的情况，保管对称性以如下方式出现:如果我们将场ϕ写成它的四个实分量，拉格朗日量(20.111)(忽略规范耦合)具有$O(4)$整体对称性。ϕ的真空期望值将这个对称性破缺为$O(3)$，即$SU(2)$。

然而，也有许多其他的量子场论会自发地破缺$SU(2)$，同时留下另一个整体$SU(2)$对称性不被破缺。一个比较复杂的例子是有两个无质量的味道的QCD，如果我们把规范$SU(2)$识别为由(19.82)中的U_L生成的对称性，而把保管$SU(2)$识别为矢量的同位旋对称性。熟悉的强相互作用的一个副本——其质量标度大到足以给出$F = 125$ GeV，将是一个希格斯区的完全可接受的模型(不幸的是，在这个模型中，为夸克和轻子产生质量并不容易)。

希格斯区的本质问题和$SU(2) \times U(1)$破缺的显式机制问题，可能是基本粒子理论中最紧迫的开放问题。我们将在结语中进一步讨论这个问题。

20.3 夸克和轻子的理论的对称性

把第17章描述的强相互作用理论和前一节描述的弱相互作用和电磁相互作用理论放在一起，我们现在已经构建了基本粒子相互作用的完整描述。研究这一理论的对称性是很有趣的，问自然基本描述的基础对称性是什么也是有趣的。

我们已经看到，在导致式(15.17)的论证中，规范理论的拉格朗日量受到可重正性和规范不变性条件的高度限制。在本节中，我们将构造最一般的可重正的拉格朗日量，且与强、弱和电磁作用的$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$规范对称性一致。

---

*P. Sikivie. L. Susskind. M. Voloshin and V. Zakharov, Nucl. Phys. B173. 189(1980)

然后我们可以问，为了给这个理论赋予我们在自然界中看到的整体对称性，我们必须在这个理论中加入哪些更进一步的整体对称性。

作为第一步，我们将忽略希格斯标量场，和夸克、轻子和规范玻色子的质量项。因此，夸克和轻子理论的拉格朗日量完全由规范不变性和可重正性来确定。我们有

$$\mathcal{L}_K = -\frac{1}{4}\sum_i (F^a_{i\mu\nu})^2 + \sum_J \bar{\psi}_J (i\not{D})\psi_J, \tag{20.126}$$

其中指标i遍历了规范群的三个因子而指标J遍历了手征费米子的不同多重态。

原则上，我们可以在(20.126)中加入以下赝标量纯规范算符:

$$\Delta\mathcal{L}_\theta = \sum_i \frac{\theta_i g_i^2}{64\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F^a_{i\mu\nu} F^a_{i\lambda\sigma}. \tag{20.127}$$

在P和T下这些项显然是奇的。但是我们在第19.2节末尾看到，这种形式的项可以通过在有效作用量中改变变量来生成或抵消。例如，右手电子场的变量改变

$$e_R \to e^{i\alpha} e_R \tag{20.128}$$

根据(19.78)或(19.79)，它产生了对拉格朗日量的修正，包含P和T为奇的$U(1)$规范场的场强的组合

$$\Delta\mathcal{L} = \alpha \cdot \frac{g'^2}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma}. \tag{20.129}$$

(20.129)的系数与(19.79)中对应的系数不同，因为我们只对电子场的右手的手征分量进行变换。如果我们变换另一个超荷为Y的费米场，我们会发现类似的移动，系数与Y^2成正比。如果这个新的场与$SU(2)$或$SU(3)$规范场耦合，我们也会发现与那些场强成正比的项。因此，我们可以通过改变变量(20.128)且$\alpha = \frac{1}{2}\theta_1$来消除(20.127)中涉及$U(1)$场强的项。我们可以通过对三个费米子多重态($e_R$、$E_L$和$Q_L$)进行适当的手征旋转来消除(20.127)中的所有三项。变量的改变(20.128)，它旋转了右手电子场，在宇称下不是对称的，并且实际上，它改变了宇称操作的定义。通过改变变量，我们选择了新的坐标使得整个理论的P和T变换性质尽可能的简单。

现在让我们研究P、C和T下的拉格朗日量(20.126)的性质。QCD规范玻色子的耦合分别对这些对称性的每一个都是不变的。然而，$SU(2)$规范玻色子的耦合以最大的可能破坏了P和C。回忆一下第3.6节，P把一个左手电子变换成一个右

手电子，C把一个左手电子变换成一个左手正电子。这些操作中的每一个都将一个与$SU(2)$规范玻色子耦合的粒子变换成一个不耦合的粒子，然而，这两个操作的组合将左手粒子和右手反粒子互换。因此，组合操作CP是(20.126)的对称性。这个拉格朗日量在时间反转下也是不变的。

因此，我们在一方面看到的C和P分立对称性，在另一方面看到的CP和T，分别处于规范场理论中非常不同的基础上。任何手征规范理论都会自然地破坏C和P。在我们分析中的这个水平上，为什么被观察到的C和P应该是自然的近似对称性还是一个谜。另一方面，每一种规范玻色子和无质量费米子的每个理论都遵守CP和T。实验表明，自然界存在一些破坏CP的相互作用，因为CP选择规则在K^0介子的衰变中被微弱地破坏了。但是要找到这种破坏的来源，我们必须在我们的基本规范理论(20.126)中加入一些项。

首先，我们必须在(20.126)中加入将导致$SU(2)\times U(1)$自发破缺的动力学。我们将从最简单的只有一个希格斯标量场ϕ的模型开始。对于ϕ，最普遍的可重正化的拉格朗日量是

$$\mathcal{L}_\phi = \left|D_\mu\phi\right|^2 + \mu^2\phi^\dagger\phi - \lambda(\phi^\dagger\phi)^2. \tag{20.130}$$

$\mathcal{L}_\phi$的厄密性意味着参数μ^2和λ是实数。因此，这个拉格朗日量遵守P、C和T。正如前一节最后所讨论的，这个拉格朗日量也自动地具有保管$SU(2)$对称性，这是产生质量关系(20.117)所需的。

最后，我们必须加上希格斯场和夸克和轻子的耦合项。在这里，可重正性和规范不变性提供了最弱的限制，有许多允许的相互作用。我们将首先分析ϕ与夸克场的耦合。然后把这个讨论推广到轻子上。

在写希格斯场与夸克的耦合时，我们应该记得，已知有三代夸克和轻子。因此，有三个左手夸克的二重态:

$$Q_L^i = \begin{pmatrix} u^i \\ d^i \end{pmatrix}_L = \left(\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L\right). \tag{20.131}$$

有六个右手夸克，三个带有$Y=\frac{2}{3}$，三个带有$Y=-\frac{1}{3}$:

$$u_R^i = \left(u_R, c_R, t_R\right), \qquad d_R^i = \left(d_R, s_R, b_R\right). \tag{20.132}$$

当我们把规范场和这些夸克耦合起来时，我们用协变导数代替普通的导数。这将自动为所有夸克给出相同的与QCD的耦合，并为所有类型相同的夸克给出相同

的与弱相互作用的耦合。它不允许各种夸克相互混合。然而，希格斯场与夸克的耦合并不遵循规范原理，因此不需要任何这些限制。除非我们通过假设理论有一种新的分立对称性，来要求夸克味道守恒，否则希格斯耦合通常将会混合不同的味道。

如果我们不对该理论施加任何额外对称性，我们必须写出带有公式(20.101)结构的，最普遍的可重正化且规范不变的耦合:

$$\mathcal{L}_m = -\lambda_d^{ij}\bar{Q}_L^i \cdot \phi\, d_R^j - \lambda_u^{ij}\epsilon^{ab}\bar{Q}_{La}^i \phi_b^\dagger u_R^j + \text{h.c.}, \tag{20.133}$$

其中λ_d^{ij}和λ_u^{ij}是普遍的复值矩阵，不一定是对称或厄米的。CP操作将(20.133)中所写的算符与其厄米共轭互换，而不改变其系数；因此，CP等价于替换

$$\lambda_d^{ij} \to (\lambda_d^{ij})^*, \qquad \lambda_u^{ij} \to (\lambda_u^{ij})^*. \tag{20.134}$$

如果矩阵λ^{ij}是实值的，CP就是(20.133)的对称性；然而，没有原则要求这样。如果没有更进一步的对称要求，似乎(20.133)对所有分立的和味道守恒的对称性都有极大的破坏。

然而，正如我们可以通过手征旋转来消除T破坏项(20.127)一样，我们也可以通过适当的手征变换来简化(20.133)的形式。为找到所需的变换，对由λ_d和λ_u的平方得到的厄米矩阵进行对角化。定义幺正矩阵U_u和W_u为

$$\lambda_u\lambda_u^\dagger = U_u D_u^2 U_u^\dagger, \qquad \lambda_u^\dagger\lambda_u = W_u D_u^2 W_u^\dagger, \tag{20.135}$$

其中D_u^2是一个具有正特征值的对角矩阵。然后

$$\lambda_u = U_u D_u W_u^\dagger, \tag{20.136}$$

其中D_u为对角矩阵，其对角元素为(20.135)的特征值的正平方根。我们可以用类似的方法定义幺正矩阵U_d和W_d，并将λ_d分解为

$$\lambda_d = U_d D_d W_d^\dagger. \tag{20.137}$$

现在做变量替换

$$u_R^i \to W_u^{ij} u_R^j, \qquad d_R^i \to W_d^{ij} d_R^j. \tag{20.138}$$

这就从希格斯耦合(20.133)中消除了幺正矩阵W_u和W_d。由于三个u_R^i和三个d_R^i都与规范场有相同的耦合，所以W_u和W_d与相应的协变导数对易。因此，在(20.138)下，

$$\sum_i \left(\bar{u}_R^i (i\not{D}) u_R^i + \bar{d}_R^i (i\not{D}) d_R^i\right) \to \sum_i \left(\bar{u}_R^i (i\not{D}) u_R^i + \bar{d}_R^i (i\not{D}) d_R^i\right), \tag{20.139}$$

于是，W_u和W_d从理论中消失了。

左手场上的类似变换也做了戏剧的简化。进行变量替换

$$u_L^i \to U_u^{ij} u_L^j, \qquad d_L^i \to U_d^{ij} d_L^j. \tag{20.140}$$

这种变换从(20.133)的涉及希格斯场下分量的项中消除了U_u、U_d。在幺正规范中，只有这些项存在。通过将D_u、D_d的对角元与希格斯场的真空期望值相结合，可以将这些矩阵元与夸克质量联系起来:

$$m_u^i = \frac{1}{\sqrt{2}} D_u^{ii} v, \qquad m_d^i = \frac{1}{\sqrt{2}} D_d^{ii} v. \tag{20.141}$$

有了这个替换，(20.133)就形成了如下形式

$$\mathcal{L}_m = -m_d^i \bar{d}_L^i d_R^j \left(1 + \frac{h}{v}\right) - m_u^i \bar{u}_L^i u_R^i \left(1 + \frac{h}{v}\right) + \text{h.c.} \tag{20.142}$$

它有着夸克质量项的标准形式和希格斯玻色子耦合。因此，变换(20.138)和(20.140)将夸克场变换为质量本征态的基。在此基，质量项和希格斯耦合在味道和守恒P、C和T下是对角的。

由于左手u夸克和d夸克与QCD的耦合相同，矩阵U_u和U_d在协变导数中与QCD耦合对易。然而，u_L和d_L是由弱相互作用混合在一起的，因此我们必须更仔细地研究(20.140)对$SU(2) \times U(1)$耦合的影响。这很容易通过参考拉格朗日量(20.79)来实现。矩阵U_u和U_d从(20.79)第一行的纯动力学项中消去了。它们也从电磁流J_{EM}^μ中消去了；例如,

$$\bar{u}_L^i \gamma^\mu u_L^i \to \bar{u}_L^i U_u^{\dagger ij} \gamma^\mu U_u{}^{jk} u_L^k = \bar{u}_L^i \gamma^\mu u_L^i. \tag{20.143}$$

用同样的逻辑，U_u和U_d从Z^0玻色子流中消去了。

然而，在与W玻色子场耦合的流中，我们发现

$$J^{\mu +} = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{u}_L^i \gamma^\mu d_L^i \to \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{u}_L^i \gamma^\mu \left(U_u^\dagger U_d\right)^{ij} d_L^j. \tag{20.144}$$

即，荷改变的弱相互作用将三个u_L^i夸克与d_L^i夸克三重态的幺正旋转联系在一起，这种旋转由如下幺正矩阵给出

$$V = U_u^\dagger U_d. \tag{20.145}$$

矩阵V被称为**Cabibbo-Kobayashi-Maskawa**(CKM)混合矩阵。

矩阵V可以有复元素，但是我们可以通过在不同的夸克场之间进行相位旋转来去除V中的相位。在分析三代的情况之前，考虑两代——u, d, c, s的情况是有用

的。在这种情况下，V是一个2×2的幺正矩阵。这样的矩阵有4个参数；我们可以把它最一般的形式写成

$$V = \begin{pmatrix} \cos\theta_c e^{i\alpha} & \sin\theta_c e^{i\beta} \\ -\sin\theta_c e^{i(\alpha+\gamma)} & \cos\theta_c e^{i(\beta+\gamma)} \end{pmatrix}. \tag{20.146}$$

V的一个参数是旋转角度，其他三个是相位。我们可以通过执行夸克场的变量改变来消除这些相位

$$q_L^i \to \exp[i\alpha^i] q_L^i. \tag{20.147}$$

除了弱带电流(20.144)，这种整体相位旋转对拉格朗日量的其他任何项都没有影响。一个对于所有四个夸克味道都相等的相位旋转会从(20.144)中抵消。然而，其他三个可能的相变正是我们需要的，用来消除α, β, γ。

当我们以这种方式选择了夸克场的相位时，V的形式取为了

$$V = \begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix}. \tag{20.148}$$

然后弱带电流中的夸克项就可以写为

$$J^{\mu+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\theta_c \bar{u}_L \gamma^\mu d_L + \sin\theta_c \bar{u}_L \gamma^\mu s_L - \sin\theta_c \bar{c}_L \gamma^\mu d_L + \cos\theta_c \bar{c}_L \gamma^\mu s_L\right). \tag{20.149}$$

在公式(18.31)和(18.32)中我们已经看到了，这就是s夸克进入到弱相互作用的方式。角θ_c是Cabibbo角，如式(18.30)中定义的那样。

同样的一套论据可以用于有着三个生成元的理论。这里V是一个普遍的幺正3×3矩阵。这样的矩阵有9个参数，其中3个是旋转角度；这是一个$O(3)$旋转的参数的数目。其余6个参数是相位。我们可以通过像(20.147)那样对夸克场进行相位旋转来移除这些相位，但是整体相位是冗余的，所以我们只能移除其中的5个相位。V的最终形式包含3个角，其中一个是Cabibbo角，还包含一个相位。在我们做了所有的变换之后，这一相位使W^+与夸克的一些耦合变成复的，这是唯一一个破坏CP的参数。

我们从夸克-希格斯玻色子耦合的拉格朗日量开始，讨论它似乎破坏了所有可能的味道对称性和所有的分立时空对称性。然而，通过改变费米子场的变量，我们可以显著地简化拉格朗日量的形式。如果我们只保留那些涉及无质量规范玻色子——光子和胶子的项，加上(20.142)中描述的质量项和相互作用，我们会发现这组项保护了P、C、T，而且所有的味道对称性。这种显著的简化之所以发生，

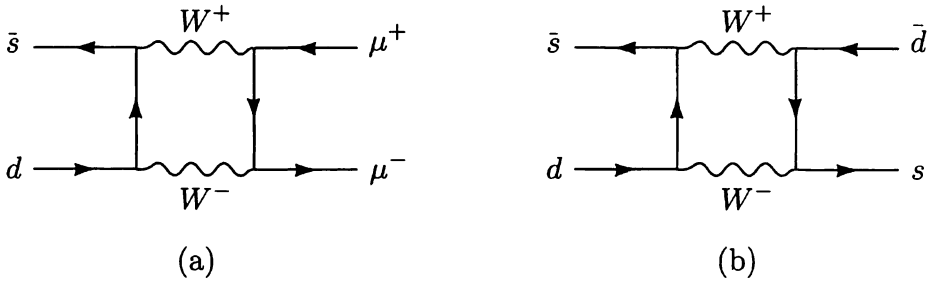


图20.7 给出味道改变弱中性流过程的领头贡献的高阶图:(a)$K^0 \to \mu^+\mu^-$;(b)$K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$

是因为自然界中未破缺的规范对称性，即QCD和QED的规范对称性，是非手征的，可以写成作用于狄拉克费米子。因为我们只省略了有质量W和Z玻色子的介导效应，大量的分析已经保证了自然将似乎会高度近似地遵守三个单独的分立对称性和所有的夸克味道守恒律。注意，我们没有假设任何基本的整体对称性，而只是依赖于$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$规范理论中的规范量子数的分配。

如果我们包括进Z玻色子和弱中性流，我们就得到了一个通过Z交换而破坏P和C但同时又遵守CP的理论。此外，这个理论遵守所有味道守恒律。我们通过说不存在味道改变的弱中性流来描述这种情况。这种说法的实验证据令人印象深刻。最好的测试来自于对中性K^0介子的研究，它是一个$s\bar{d}$束缚态，因此如果这个玻色子与一个味道改变流进行耦合，它可能会通过Z^0交换而衰变。事实上，衰变$K^0 \to \mu^+\mu^-$被高度抑制，在图20.7(a)所示的单圈弱相互作用修正的水平上。同样，如果Z^0能够改变味道，K^0和$\bar{K}^0$之间的相互转化也可以直接进行，但也被抑制到图20.7(b)所示贡献的水平。

另一方面，W玻色子与可以改变夸克味道的流相耦合，其模式由Cabibbo角和CKM矩阵中的其他角给参数化。因此，重夸克味道通过W玻色子交换过程而衰变。由于W与只包含左手夸克的流耦合，它介导的相互作用最大程度地破坏了P和C。这种分立对称性的破坏在我们的日常经验上是隐藏的，因为W交换的振幅很小。然而，这种P和C的破坏是弱衰变的一个显著的定性特征。

由于W与夸克的耦合包含一个不可约相位，这些耦合在原则上可以破坏CP。然而，我们已经看到，这个相位在一个只包含两代的理论中就可以被移除。这意味着CKM矩阵的相位只能在涉及所有三代的过程中，才产生物理结果。通常，这意味着CKM相位只能对弱相互作用圈修正或复杂的遍举(exclusive)衰变过程

有贡献。因此$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$理论可以解释$CP$破坏，并解释了为什么这种效应甚至比弱相互作用还要弱得多。有趣的是，Kobayashi和Maskawa最初提出第三代的存在，就是为了提供一个CP破坏的机制*。

另一方面，目前还没有确凿的证据证明CP破坏的起源确实是CKM矩阵的相位。我们在本节中给出的所有论证都使用了希格斯区的最简单模型，即该区由单个标量场组成。希格斯区的更一般模型可能会给出一组比(20.142)中出现的要更复杂的夸克-希格斯耦合，其中一些可能破坏CP。此外，希格斯区可能存在本身就导致CP破坏的项。观测到的CP破坏的起源仍然是一个有待于理论和实验探索的开放问题。

在结束这个话题之前，我们必须再讨论一下这个仍然神秘的问题的一个方面。为了将夸克规范理论的拉格朗日量简化为最终形式，需要对泛函积分中的变量进行手征变换。我们在第19.2节中已经看到，并且在本节开始时我们已经回顾了，这些变量的改变产生了在公式(20.127)中写入的新的P和T破坏项。利用这些项是全导数的事实，可以表明这些涉及$SU(2)$和$U(1)$场强的项没有可观测效应。然而，涉及QCD场强的项可以引起中子的电偶极矩，它是T破坏效应，在一个惊人的精确度水平上被搜索和排除了。因此，在拉格朗日量中不允许出现破坏P和T的场强组合。另一方面，如果原始的上夸克和下夸克希格斯耦合矩阵是最普遍的可能形式，则似乎这是无法避免的。这个问题被称为强CP问题。要解决这个问题，要么限制希格斯耦合矩阵，破坏我们刚刚总结的论证的精神，要么给希格斯区增加额外的结构**。

最后，让我们讨论希格斯玻色子耦合到轻子的一般形式和简化。当我们在前一节写Glashow-Weinberg-Salam拉氏量时，我们注意到没有规范场耦合到右手中微子上。因此，我们选择从理论中消除这个粒子。我们可能需要中微子的右手分量来构建中微子质量项，但目前没有证据表明中微子有非零质量。因此，在本节的其余部分，我们将假设没有右手中微子，并计算出这个假设的结果***。

---

* M. Kobayashi and T. Maskawa, *Prog. Theor. Phys.* **49**, 652 (1973)

** R. D. Peccei在*CP Violation*, C. Jarlskog, ed. (World Scientific,1989)中回顾了强CP问题及其提出的解和它们意想不到的含义。

***在$SU(2) \times U(1)$模型的推广中，中微子可以获得自然地非常小的Majorana*(见下页)

归纳公式(20.133)，我们可以写出希格斯玻色子与三代轻子之间最普遍的耦合。因为没有右手中微子，唯一可能的耦合是

$$\mathcal{L}_m = -\lambda_\ell^{ij} \overline{E}_L^i \cdot \phi \, e_R^j + \text{h.c.} \tag{20.150}$$

为了对角化此耦合，将λ_ℓ表示为如下形式

$$\lambda_\ell = U_\ell D_\ell W_\ell^\dagger, \tag{20.151}$$

通过如下变量改变消去矩阵U_ℓ和W_ℓ

$$e_L^i \to U_\ell^{ij} e_L^j, \qquad \nu_L^i \to U_\ell^{ij} \nu_L^j, \qquad e_R^i \to W_\ell^{ij} e_R^j. \tag{20.152}$$

因为我们现在对弱二重态E_L^i的两个分量做了相同的变量改变，这个变量的改变与协变导数中的$SU(2)$相互作用是对易的。于是幺正矩阵U_ℓ和W_ℓ就完全从这个理论中消失了。结果是一个关于轻子的理论，它精确地保留了CP同时也保留了每一代的轻子数。这个最后的结果在实验中得到了非常准确的验证。例如，没有证据表明有代改变μ子衰变过程$\mu^- \to e^-\gamma$或$\mu^- \to e^-e^-e^+$；这些过程的分支比已知低于10^{-10}。

那么，我们已经看到，夸克和轻子的$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$规范理论很好地解释了在基本粒子现象中观察到的对称性和守恒律。它可以预测哪些对称性是精确的，哪些是近似的。对于近似对称性，它给出了对称性破缺程度的精确估计。最引人注目的是(除了一个强CP问题)，这些预测都不依赖于基本方程中的任何基本的整体分立或味道对称性。我们在自然界中所观察到的整体对称性，仅仅来自于规范不变性和我们在构建规范理论描述时所做的特殊表示的分配。

质量项。这些模型也遵守下一段所述的轻子味道混合的限制条件。有关中微子质量的这些思想的介绍，请参阅P. Ramond, in *Perspectives in the Standard Model*, R. K. Ellis, C. T. Hill, and J. D. Lykken, eds. (World Scientific, 1992)。

Chapter 21

自发破缺规范理论的量子化

在第20章中，我们看到当一个规范对称性自发破缺时，规范玻色子获得质量。这种现象使我们能够构建一个关于弱相互作用的现实理论。然而，到目前为止，我们只是简单地讨论了自发破缺的规范理论。为了分离物理自由度，我们使用了幺正规范的方法。然而，我们一点也不清楚在这个规范中微扰理论的规则是什么，或者当我们计算费曼图时如何保持幺正规范约束。我们也看到了被有质量规范玻色子吸收的Goldstone玻色子在关于这些理论的正式论证中扮演了重要的角色，所以我们想在一个从一开始就没有消除这些粒子的规范中量子化这些理论。

在这一章中，我们将解决这些问题，通过使用Faddeev-Popov方法，对自发破缺规范对称性理论进行正式的规范固定。我们将定义一类叫做R_ξ的规范，几乎所有这类规范都包含原始自发对称性破缺的Goldstone玻色子。这些粒子抵消了形式理论中其他非物理粒子的效应以保持理论的幺正性。这些抵消是我们在第16章中看到的规范场和鬼场自由度之间的抵消的一个更复杂的版本。但是，我们将在21.2节中看到，理论没有忘记它包含了Goldstone玻色子，并且在某些情况下，在无规范耦合理论中的Goldstone玻色子的性质可以延伸到有质量规范玻色子的理论中。

最后，在定义了微扰理论并阐明了Goldstone玻色子在自发破缺规范理论中的作用之后，我们将在弱相互作用理论中进行一些感兴趣的显式的圈计算。在这里，我们将看到第十一章思想的应用，即一个具有自发破缺对称性的理论可以用对称的拉格朗日量的抵消项来重正化。在第21.3节中，我们将通过一些例子表明，这个结果同样适用于规范理论，并赋予弱相互作用规范理论很强的预测能力。

21.1 R_ξ规范

在讨论弱相互作用的低能有效拉格朗日量时，我们在式(20.89)中提出了如下的有质量玻色子传播子的表达式:

$$\langle A^\mu(p)A^\nu(-p)\rangle \stackrel{?}{=} \frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2-m^2}. \tag{21.1}$$

这个表达式是一个自然的最可能的猜想，推广了Feynman-'t Hooft规范。然而，在许多方面它并不令人满意。

这些缺陷中最重要的是规范玻色子极化态的处理。传播子(21.1)包含四个组分，对应于横向、纵向和类时极化。我们在第5章和第16章中看到，对于无质量规范玻色子，非物理的纵向和类时分量在计算中被抵消。然而，对于一个有质量玻色子，纵向极化态对应于一个真实的物理粒子；我们不希望它被抵消。表达式(21.1)没有考虑到这种变化。

一个阿贝尔的例子

为了理解来源于对称性自发破缺规范理论的这个和其他的形式问题，我们需要仔细地重做这些理论的Faddeev-Popov量子化。首先，我们将对式(20.1)中引入的自发破缺的阿贝尔规范理论进行量子化:

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + \left|D_\mu\phi\right|^2 - V(\phi), \tag{21.2}$$

其中$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$。这里$\phi(x)$是一个复标量场。但是，通过将$\phi$写成它的实分量来分析模型是最方便的，

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi^1 + i\phi^2\right). \tag{21.3}$$

那么无穷小局域对称变换是

$$\delta\phi^1 = -\alpha(x)\phi^2, \qquad \delta\phi^2 = \alpha(x)\phi^1, \qquad \delta A_\mu = -\frac{1}{e}\partial_\mu\alpha. \tag{21.4}$$

让我们假设$V(\phi)$强制标量场获得一个真空期待值：$\langle\phi^1\rangle = v$。那么我们应该改变变量，移动:

$$\phi^1(x) = v + h(x); \qquad \phi^2 = \varphi. \tag{21.5}$$

场ϕ^2或场φ是Goldstone玻色子。拉格朗日量(21.2)现在采用的形式为

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + \tfrac{1}{2}\left(\partial_\mu h - eA_\mu\varphi\right)^2 + \tfrac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi + eA_\mu(v+h)\right)^2 - V(\phi). \tag{21.6}$$

这个拉格朗日量在精确的局域对称性下仍然不变，

$$\delta h = -\alpha(x)\varphi, \qquad \delta\varphi = \alpha(x)(v+h), \qquad \delta A_\mu = -\frac{1}{e}\partial_\mu \alpha. \tag{21.7}$$

因此，为了定义对变量(h, φ, A_μ)的泛函积分，我们必须引入Faddeev-Popov规范固定。

从如下泛函积分开始

$$Z = \int \mathcal{D}A\mathcal{D}h\mathcal{D}\varphi \; e^{i\int \mathcal{L}[A,h,\varphi]}, \tag{21.8}$$

我们可以像在9.4节中那样引入一个规范固定约束。按照从式(9.50)到式(9.54)的步骤，我们发现

$$Z = C \cdot \int \mathcal{D}A\mathcal{D}h\mathcal{D}\varphi \; e^{i\int \mathcal{L}[A,h,\varphi]}\, \delta\big(G(A,h,\varphi)\big)\, \det\Big(\frac{\delta G}{\delta \alpha}\Big), \tag{21.9}$$

其中C是与规范群的体积成正比的常数，$G(A,h,\varphi)$是固定规范的条件。或者，我们可以引入规范固定约束$\delta(G(x)-w(x))$，并对有着高斯权重的$w(x)$进行积分，如式(9.56)的推导。这给出

$$Z = C' \cdot \int \mathcal{D}A\mathcal{D}h\mathcal{D}\varphi \; \exp\Big[i\int d^4x\big(\mathcal{L}[A,h,\varphi] - \tfrac{1}{2}(G)^2\big)\Big]\, \det\Big(\frac{\delta G}{\delta \alpha}\Big). \tag{21.10}$$

规范固定函数G是任意的，但是我们可以通过适当地选择它来简化我们的形式。

一个特别方便的选择的规范固定函数是

$$G = \frac{1}{\sqrt{\xi}}\big(\partial_\mu A^\mu - \xi e v \varphi\big). \tag{21.11}$$

当我们形成G^2时，A_μ的二次项将为规范场作用量提供出如我们在式(9.58)和(16.29)的推导中看到的、相同的规范依赖条件，。此外，A_μ和φ之间的交叉项被设计成去抵消掉形式为$\partial_\mu \varphi A^\mu$的二次项，它来自(21.6)的第三项。有了这个选择，规范固定的拉格朗日量$(\mathcal{L} - \frac{1}{2}G^2)$中的二次项是

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2 = &-\frac{1}{2}A_\mu\Big(-g^{\mu\nu}\partial^2 + \big(1-\frac{1}{\xi}\big)\partial^\mu\partial^\nu - (ev)^2 g^{\mu\nu}\Big)A_\nu \\ &+ \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 - \frac{1}{2}m_h^2 h^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{\xi}{2}(ev)^2\varphi^2.\end{aligned} \tag{21.12}$$

h场的质量项来自于$V(\phi)$的展开，如(20.6)。规范场的质量项来自于希格斯机制，即来自(21.6)的第三项。注意形式理论也为Goldstone玻色子φ产生了质量:

$$m_\varphi^2 = \xi(ev)^2 = \xi m_A^2. \tag{21.13}$$

质量是规范依赖的这个事实表明，Goldstone玻色子是一个虚构的场，它不会在物理过程中产生。

为了完成Faddeev-Popov量子化过程，我们必须推导出鬼场的拉氏量。这个拉氏量取决于G的规范变分，可以通过将(21.7)插入(21.11)来计算。我们发现

$$\frac{\delta G}{\delta \alpha} = \frac{1}{\sqrt{\xi}}\Big(-\frac{1}{e}\partial^2 - \xi e v(v+h)\Big). \tag{21.14}$$

这个算符的行列式可以被解释为一组Faddeev-Popov鬼场的拉氏量，

$$\mathcal{L}_{\text{ghost}} = \bar{c}\Big[-\partial^2 - \xi m_A^2\big(1+\frac{h}{v}\big)\Big]c, \tag{21.15}$$

其中$m_A = ev$，如式(21.13)。由于这是一个阿贝尔规范理论，鬼场不直接耦合到规范场。然而它确实耦合到物理希格斯场，因此不能像QED那样完全忽略它。

从拉格朗日量中关于A_μ, h, φ和鬼场的二次项，我们可以很容易地找到这些场的传播子。四个传播子如图21.1所示。唯一复杂的情况是规范场。(21.12)中涉及A_μ的项包含了一个算符，其傅里叶变换是

$$\begin{aligned} &g^{\mu\nu}k^2 - \big(1-\frac{1}{\xi}\big)k^\mu k^\nu - m_A^2 g^{\mu\nu} \\ &\qquad = \Big(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\Big)(k^2 - m_A^2) + \Big(\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\Big)\frac{1}{\xi}(k^2 - \xi m_A^2). \end{aligned} \tag{21.16}$$

这个矩阵的逆给出了A_μ场传播子:

$$\begin{aligned} \langle A^\mu(k)A^\nu(-k)\rangle &= \frac{-i}{k^2-m_A^2}\Big(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\Big) + \frac{-i\xi}{k^2-\xi m_A^2}\Big(\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\Big) \\ &= \frac{-i}{k^2-m_A^2}\Big(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2-\xi m_A^2}(1-\xi)\Big). \end{aligned} \tag{21.17}$$

注意，A场的横向分量和希格斯场的分量h获得了我们在第20.1节中发现的质量m_A, m_h。A的非物理分量，Goldstone玻色子，和鬼场都获得了同样的规范依赖的质量$\sqrt{\xi}m_A$。

微扰论中的ξ依赖性

由于参数ξ仅在规范固定中引入，我们期望它从规范不变算符和S矩阵元的期望值的所有计算中被消去。利用规范固定拉氏量的BRST对称性*，可以在微扰论的所有阶中证明这种抵消。然而，这里我们将用一个简单的例子来说明ξ的消去。

*参见，例如，Taylor(1976)。

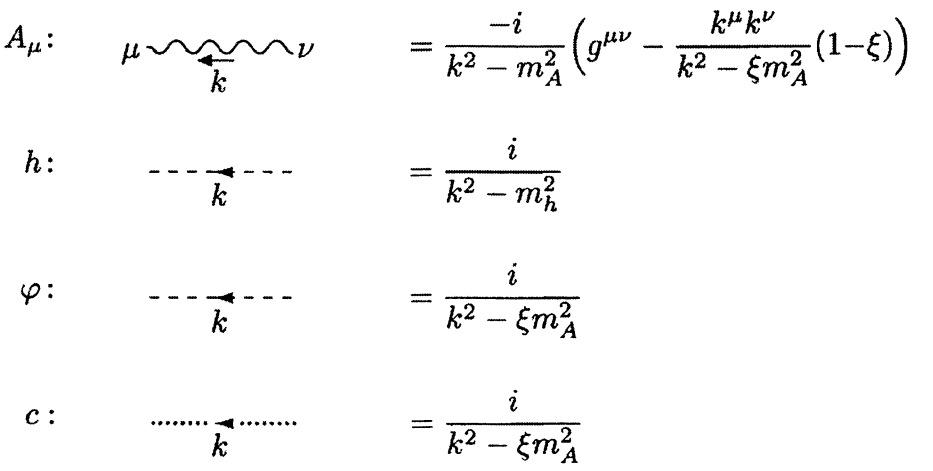


图21.1 规范场、希格斯场和鬼场的传播子，在对称性自发破缺的阿贝尔模型中

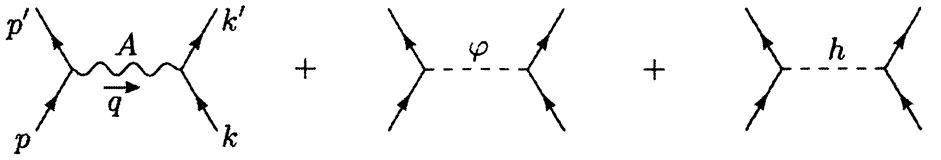


图21.2 在具有自发对称性破缺的阿贝尔模型中，在领头阶的费米子-费米子散射的图

考虑通过手征相互作用将费米子与自发破缺规范理论耦合:

$$\mathcal{L}_f = \bar{\psi}_L(i\not{D})\psi_L + \bar{\psi}_R(i\not{\partial})\psi_R - \lambda_f\left(\bar{\psi}_L\phi\psi_R + \bar{\psi}_R\phi^*\psi_L\right), \tag{21.18}$$

和之前一样$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$。这是费米子与弱相互作用规范理论耦合的简化的阿贝尔版本。费米子ψ获得一个质量

$$m_f = \lambda_f \frac{v}{\sqrt{2}} \tag{21.19}$$

来自对称性自发破缺(这个理论有一个轴矢量反常，会导致圈计算不一致，但是我们只会在树图的水平上分析它)。

在这个理论中，对费米子-费米子散射有贡献的领头阶图如图21.2所示。注意，非物理粒子φ交换的贡献必须包括在内，因为这个粒子出现在费曼规则中。鬼粒子在单圈水平之前不出现在这个过程中。由于物理希格斯粒子h的传播子是独立于ξ的，因此ξ依赖性的抵消必须发生在A_μ的横向和纵向分量以及Goldstone玻色子φ之间。

Goldstone玻色子交换的图的值为

$$i\mathcal{M}_{\varphi}=\Big(\frac{\lambda_f}{\sqrt{2}}\Big)^2\bar{u}(p')\gamma^5u(p)\frac{i}{q^2-\xi m_A^2}\bar{u}(k')\gamma^5u(k). \tag{21.20}$$

这个表达式的ξ依赖性必须由如下的规范玻色子交换图的ξ依赖性来消除，

$$\begin{aligned}i\mathcal{M}_A=&(-ie)^2\bar{u}(p')\gamma_\mu\Big(\frac{1-\gamma^5}{2}\Big)u(p)\\&\times\frac{-i}{q^2-m_A^2}\Big(g^{\mu\nu}-\frac{q^\mu q^\nu}{q^2-\xi m_A^2}(1-\xi)\Big)\bar{u}(k')\gamma_\nu\Big(\frac{1-\gamma^5}{2}\Big)u(k).\end{aligned} \tag{21.21}$$

这一项的ξ依赖性看起来相当复杂。然而，我们可以做一些简化，重写规范玻色子传播子为

$$\begin{aligned}&\frac{-i}{q^2-m_A^2}\Big(g^{\mu\nu}-\frac{q^\mu q^\nu}{m_A^2}+q^\mu q^\nu\Big[\frac{1}{m_A^2}-\frac{1}{q^2-\xi m_A^2}(1-\xi)\Big]\Big)\\&\qquad=\frac{-i}{q^2-m_A^2}\Big(g^{\mu\nu}-\frac{q^\mu q^\nu}{m_A^2}\Big)+\frac{-i}{q^2-\xi m_A^2}\Big(\frac{q^\mu q^\nu}{m_A^2}\Big).\end{aligned} \tag{21.22}$$

(21.22)的第一项是ξ无关的。第二项可以在(21.21)中被如下恒等式化简为

$$\begin{aligned}q^\mu\bar{u}(p')\gamma_\mu\Big(\frac{1-\gamma^5}{2}\Big)u(p)&=\frac{1}{2}\bar{u}(p')\big[(\not{p}-\not{p}')-(\not{p}-\not{p}')\gamma^5\big]u(p)\\&=\frac{1}{2}\bar{u}(p')\big[\not{p}'\gamma^5+\gamma^5\not{p}\big]u(p)\\&=m_f\bar{u}(p')\gamma^5u(p),\end{aligned} \tag{21.23}$$

以及另一条费米线上的类似恒等式。做这些重排列后，插入显式值$m_f=\lambda_f v/\sqrt{2}$和$m_A=ev$，得到规范玻色子交换振幅(21.21)的形式为

$$\begin{aligned}i\mathcal{M}_A=&(-ie)^2\bar{u}(p')\gamma_\mu\Big(\frac{1-\gamma^5}{2}\Big)u(p)\frac{i}{q^2-m_A^2}\Big(g^{\mu\nu}-\frac{q^\mu q^\nu}{m_A^2}\Big)\bar{u}(k')\gamma_\nu\Big(\frac{1-\gamma^5}{2}\Big)u(k)\\&+\Big(\frac{\lambda_f}{\sqrt{2}}\Big)^2\bar{u}(p')\gamma^5u(p)\frac{-i}{q^2-\xi m_A^2}\bar{u}(k')\gamma^5u(k).\end{aligned} \tag{21.24}$$

(21.24)的第二项精确地抵消了Goldstone玻色子交换图(21.20)。费米子-费米子散射振幅中剩下的项是ξ无关的。

这个证明值得两个额外的评论。首先，在这本书中，我们已经习惯于将规范玻色子动量点乘到一个规范玻色子顶点上，并得到零或接触项。然而，在自发破缺规范理论中，我们通常会发现一个不同的结果。费米子流$\bar{\psi}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi$不守恒，其不守恒正比于费米子质量。这允许操作(21.23)贡献出正比于希格斯玻色子真空期望值的项，它与Goldstone玻色子的贡献相互作用。我们将在21.2节中进一

步讨论这一点，并找到它的物理应用。

第二点是关于规范玻色子和Goldstone玻色子交换图的规范不变的和的最终形式。这些所给出的结果，正是我们通过忽略Goldstone玻色子并使用(21.22)的第一项作为传播子来计算规范玻色子交换而得到的结果：

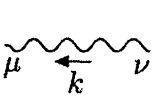
$$\langle A_\mu(q)A_\nu(-q)\rangle = \frac{-i}{q^2-m_A^2}\Big(g^{\mu\nu}-\frac{q^\mu q^\nu}{m_A^2}\Big). \tag{21.25}$$

张量结构表示了规范玻色子极化和。为了确定对哪些矢量求和，请注意，如果玻色子是在壳的，以及如果我们平动到它的静止系，这个结构就精确地变成了在三个纯空间方向上的投影。这些是在壳的有质量矢量粒子的三种极化状态。在一般的坐标系中，q^μ仍然在壳，(21.25)中的张量仍然是在物理极化态上的投影：

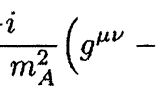
$$\sum_{\epsilon^\mu q_\mu=0}\epsilon^\mu\epsilon^{\nu *} = -\Big(g^{\mu\nu}-\frac{q^\mu q^\nu}{m_A^2}\Big). \tag{21.26}$$

因此，在消除规范玻色子传播子的ξ依赖部分时，我们还发现Goldstone玻色子图抵消了规范玻色子的非物理类时极化状态的贡献，留下了的是需要的三个物理极化。

我们已经建立的微扰论规则对于不同的ξ值具有非常不同的特性。因此，在对称性自发破缺的情况下，通过选择不同的这个规范参数值可以得到不同的特殊化简。对于$\xi=0$，洛伦兹规范，Goldstone玻色子是无质量的，其耦合与它在对称破缺的无规范模型中的耦合完全一样，而规范玻色子传播子是纯横向的：



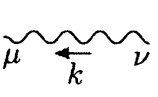
$$= \frac{-i}{k^2-m_A^2}\Big(g^{\mu\nu}-\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\Big); \qquad$$



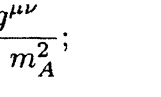
$$= \frac{i}{k^2}. \tag{21.27}$$

该规范对分析对称性破缺模型特别有用。两个传播子在$k^2=0$处都有极点。然而，我们知道没有相应的物理粒子，因为当我们改变ξ时，这些极点会远离$k^2=0$，而S矩阵必须是与ξ无关的。

对于$\xi=1$，我们重新得到了(21.1)中给出的规范玻色子传播子的简单形式。然而，规范玻色子传播子的这个选择是不一致的，除非我们还包括进Goldstone玻色子交换，在这种交换中，Goldstone玻色子的质量也被赋值为m_A：



$$= \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2-m_A^2}; \qquad$$

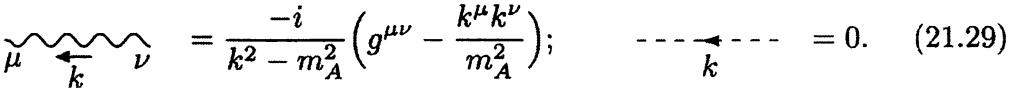


$$= \frac{i}{k^2-m_A^2}. \tag{21.28}$$

这个规范，仍然被称为Feynman-'t Hooft规范，在一般的高阶计算中最方便。

对于任何有限的ξ值，规范玻色子和Goldstone玻色子传播子都像$1/k^2$一样下降，因此符合第10.1节的一般幂次计数分析。因此，在任何一种规范中，微扰论都是可重正的，即通过有限的一组抵消项消除了发散。此外，第11.6节的分析告诉我们，唯一需要的抵消项是那些在理论的原始整体对称性下对称的抵消项。然而，我们应该还需要一个我们的重正化程序的条件:我们应该坚持抵消项保持局域规范不变性，特别是，保持S矩阵元和规范不变算符的矩阵元的性质是ξ无关的。通过't Hooft Veltman和Lee和Zinn-Justin*，这个结果在微扰论的所有阶中得到了证明。因此，由ξ的任意有限值定义的规范中，我们原则上可以直接计算物理量到任意阶。由ξ的可能值定义的规范称为**可重正性规范**，或R_ξ规范。

通过取R_ξ规范的极限$\xi \to \infty$，我们得到一个具有非常不同的简化特性的规范。在这个极限下，质量正比于$\sqrt{\xi}$的非物理自由度就从理论中消失了。规范玻色子和Goldstone玻色子传播子变成:



$$= \frac{-i}{k^2 - m_A^2}\left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{m_A^2}\right); \qquad = 0. \tag{21.29}$$

规范玻色子传播子恰好包含三个类空极化态。在这个规范中，费曼图的唯一奇异性对应于物理中间态的传播。因此，S矩阵的幺正性服从Cutkosky规则，就像7.3节中考虑的整体对称性理论一样，不需要担心非物理态的消除**。因此，R_ξ规范的$\xi \to \infty$极限给出了式(20.12)引入的**幺正**规范(或U规范)的量子力学实现。

直接在U规范上证明可重正性并不简单。在这个规范中，规范玻色子传播子下降的速度在大k时比$1/k^2$慢。这标志着对圈图求值的麻烦。通常，实际上，单个的圈图在$\xi \to \infty$时将像$\log\xi$那样发散，或发散更糟。S矩阵的规范不变性仍然意味着，对给定过程有贡献的所有图求和后，这些发散必须被抵消掉，所以这个求和在$\xi \to \infty$时有一个光滑的极限。我们使用一个规范来证明自发破缺规范理论的可重正性，并使用另一种规范来证明它们的幺正性，这一事实在原则上是没有

---

* G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, *Nucl. Phys.* **B50**, 318 (1972), B. W. Lee and J. Zinn-Justin, *Phys. Rev.* **D5**, 3121, 3137, 3155 (1972), **D7**, 1049 (1973).

**在第16.4节更复杂的语言中，S矩阵的幺正性所要求的关键恒等式(16.54)显然是正确的。

问题的。事实上，这种论证方法很自然地利用了理论的基本对称性。

非阿贝尔分析

现在我们已经彻底地研究了阿贝尔规范理论的R_ξ规范，我们准备推广到非阿贝尔情况。对完全一般的情况是没有什么困难的，所以我们考虑一个具有规范群G的Yang-Mills规范理论，它被标量场的真空期望值自发破缺。

我们将根据式(20.13)建立该系统的经典分析。和那个分析一样，把标量写成实值场的多重态ϕ_i是最方便的。然后ϕ_i的规范变换的形式取为

$$\delta\phi_i = -\alpha^a(x)T^a_{ij}\phi_j, \tag{21.30}$$

其中T^a_{ij}是G的实的、反对称表示矩阵。类似地，规范场的变换是

$$\delta A^a_\mu = \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha^a - f^{abc}\alpha^b A^c_\mu = \frac{1}{g}(D_\mu\alpha)^a. \tag{21.31}$$

(如果规范群不是单纯的，则每个a的耦合g不必相同)。在这些规范变换下不变的的拉格朗日量是

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{4}(F^a_{\mu\nu})^2 + \tfrac{1}{2}(D_\mu\phi)^2 - V(\phi), \tag{21.32}$$

with

$$D_\mu\phi_i = \partial_\mu\phi_i + gA^a_\mu T^a_{ij}\phi_j. \tag{21.33}$$

假设势$V(\phi)$在某一点上最小，此时ϕ的某些分量获得真空期望值。如(20.16)，定义

$$\langle\phi_i\rangle = (\phi_0)_i. \tag{21.34}$$

我们将对这个值展开ϕ_i:

$$\phi_i(x) = \phi_{0i} + \chi_i(x). \tag{21.35}$$

将值χ_i的空间分割成两个子空间会很方便。矢量$T^a\phi_0$对应于ϕ的真空期望值的对称变换。沿着这些方向的场涨落就是Goldstone玻色子。设$\{n_i\}$是该子空间的一组标准正交基；那么单位矢量n_i与Goldstone玻色子是一一对应的。与所有矢量$T^a\phi_0$正交的场涨落对应于自发破缺规范理论的(有质量的)物理标量场。

在接下来的讨论中，矢量$T^a\phi_0$将扮演重要的角色。我们应该回忆一下我们在式(20.51)引入的这些矢量的符号：

$$F^a{}_i = T^a_{ij}\phi_{0j}. \tag{21.36}$$

矩阵$F^a{}_i$一般不是正方的；每个规范生成元对应一行，ϕ的每个分量对应一列。然而，它的许多矩阵元都是零。它的非零元将自发破缺规范生成元和Goldstone玻色子联系起来。在式(20.56)中，我们证明了通过希格斯机制产生的规范玻色子质量可以被写为

$$m_{ab}^2 = g^2 F^a{}_j F^b{}_j. \tag{21.37}$$

为了给出矩阵$F^a{}_j$的一个具体例子，让我们在GWS电弱理论中计算它。按照公式(20.14)中的约定，我们应该将GWS模型中的希格斯场重写为四个实标量场。方便的参数化是

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i(\phi^1 - i\phi^2) \\ v + (h + i\phi^3) \end{pmatrix}. \tag{21.38}$$

ϕ^i场是Goldstone玻色子，h场是有质量希格斯玻色子。真空态很简单是

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}.$$

实表示矩阵是

$$T^a = -i\tau^a = -i\frac{\sigma^a}{2}, \qquad T^Y = -iY = -i\frac{1}{2}.$$

例如，一个简单的计算显示$T^1\phi_0$等于$v/2$乘以ϕ^1方向上的单位矢量。填充$F^a{}_i$的剩余分量，$a = 1,2,3,Y$，$i = 1,2,3$，我们发现

$$gF^a{}_i = \frac{v}{2} \begin{pmatrix} g & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & -g' \end{pmatrix}. \tag{21.39}$$

我们不需要包含$F^a{}_i$沿物理Higgs场h的方向的分量；矢量$T^a\phi_0$都正交于这个方向。

如果我们把(21.35)代入(21.32)作为变量的改变，我们会发现，对于拉格朗日量中的二次项，

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = &-\tfrac{1}{2}A^a_\mu\left(-g^{\mu\nu}\partial^2 + \partial^\mu\partial^\nu\right)A^a_\nu + \tfrac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 \\ &+ g\partial^\mu\chi_i A^a_\mu F^a{}_i + \tfrac{1}{2}(m_A^2)^{ab}A^a_\mu A^{\mu b} - \tfrac{1}{2}M_{ij}\chi_i\chi_j, \end{aligned} \tag{21.40}$$

其中$(m_A^2)^{ab}$为规范玻色子质量矩阵(21.37)，以及

$$M_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial\phi_i\partial\phi_j}V(\phi)\Big|_{\phi_0}. \tag{21.41}$$

我们在式(11.13)中证明了

$$n_i M_{ij} = 0 \tag{21.42}$$

对于$T^a\phi_0$张开的子空间中所有可能的方向n_i，所以Goldstone玻色子是无质量的。

为了研究这个系统的量子理论，我们从泛函积分出发

$$Z = \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\chi\, e^{i\int \mathcal{L}[A,\chi]}. \tag{21.43}$$

使用Faddeev-Popov规范固定程序，我们类似于(21.10)，定义这个积分为

$$Z = C' \cdot \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\chi\, \exp\Big[i\int d^4x\big(\mathcal{L}[A,\chi] - \tfrac{1}{2}(G)^2\big)\Big]\det\Big(\frac{\delta G}{\delta\alpha}\Big), \tag{21.44}$$

对于任意的规范固定函数$G(A,\chi)$， R_ξ规范由如下选择定义

$$G^a = \frac{1}{\sqrt{\xi}}\big(\partial_\mu A^{a\mu} - \xi g F^a{}_i\chi_i\big). \tag{21.45}$$

注意，G只包含了χ的位于Goldstone玻色子的子空间中的分量。

规范固定项使拉格朗日量增加如下一组二次项:

$$(-\tfrac{1}{2}G^2)_2 = \tfrac{1}{2}A^a_\mu\big(\tfrac{1}{\xi}\partial^\mu\partial^\nu\big)A^a_\nu + g\partial_\mu A^{a\mu}F^a{}_i\chi_i - \tfrac{1}{2}\xi g^2\big[F^a{}_i\chi_i\big]^2. \tag{21.46}$$

混合了A^a_μ和χ_i的项被安排来在(21.40)和(21.46)之间抵消。规范和Goldstone玻色子场的最终的二次拉格朗日量是

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{2}A^a_\mu\Big(\Big[-g^{\mu\nu}\partial^2 + \big(1-\frac{1}{\xi}\big)\partial^\mu\partial^\nu\Big]\delta^{ab} - g^2F^a{}_iF^b{}_i\Big)A^b_\nu \\ + \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 - \frac{1}{2}\xi g^2F^a{}_iF^a{}_j\chi_i\chi_j.\end{aligned} \tag{21.47}$$

这个拉氏量中规范玻色子和Goldstone玻色子的质量矩阵是彼此密切相关的。规范玻色子质量矩阵为

$$(m_A^2)^{ab} = g^2F^a{}_iF^b{}_i = g^2(FF^T)^{ab}. \tag{21.48}$$

在R_ξ规范中，规范玻色子的类时组分获得质量矩阵

$$\xi m_A^2 = \xi g^2(FF^T)^{ab}. \tag{21.49}$$

同时，Goldstone玻色子得到了质量矩阵

$$(m_G^2)_{ij} = \xi g^2F^a{}_iF^a{}_j = \xi g^2(F^TF)_{ij}. \tag{21.50}$$

这两个矩阵(21.49)和(21.50)有不同数目的零特征值，但它们的非零特征值是一一对应的。这正是由希格斯机制所诱导的，有质量规范玻色子和Goldstone玻色子(通过吸收它们来获得质量)之间的对应关系。

最后，我们必须构造鬼场拉格朗日量。这是从规范固定项G^a的规范变分中发现的。将(21.30)和(21.31)插入(21.45)，我们发现

$$\frac{\delta G^a}{\delta \alpha^b} = \frac{1}{\sqrt{\xi}}\Big(\frac{1}{g}(\partial_\mu D^\mu)^{ab} + \xi g (T^a\phi_0)\cdot T^b(\phi_0+\chi)\Big). \tag{21.51}$$

因此，鬼场拉格朗日量是

$$\mathcal{L}_{\text{ghost}} = \bar{c}^a\big[-(\partial_\mu D^\mu)^{ab} - \xi g^2 (T^a\phi_0)\cdot T^b(\phi_0+\chi)\big]c^b. \tag{21.52}$$

请注意，鬼场与规范玻色子的非物理组分有着完全相同的质量矩阵(21.49)。这个拉格朗日量还包含鬼场与规范场的熟悉耦合，以及我们在阿贝尔情形(21.15)中发现的鬼场与物理希格斯场的耦合。

我们现在已经在R_ξ规范下计算了规范场、标量场和鬼场的动能项。将这些结果转换为这些场的传播子的计算很简单；计算结果与阿贝尔情形完全相同。我们找到了三个传播子

$$\begin{aligned}
\underset{a}{\overset{\mu}{\sim\!\sim\!\sim}}\underset{k}{\overset{\nu}{\sim\!\sim\!\sim}}\,_b &= \left(\frac{-i}{k^2 - g^2 F F^T}\Big[g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 - \xi g^2 F F^T}(1-\xi)\Big]\right)^{ab}, \\
i \text{ - - - } \underset{k}{\longleftarrow} \text{ - - - } j &= \left(\frac{i}{k^2 - \xi g^2 F^T F - M^2}\right)_{ij}, \\
a \cdots\cdots \underset{k}{\longleftarrow} \cdots\cdots b &= \left(\frac{i}{k^2 - \xi g^2 F F^T}\right)^{ab}.
\end{aligned} \tag{21.53}$$

所有这些方程都包含了式(21.36)中定义的矩阵F；分母中出现矩阵应被解释为矩阵的逆。标量场传播子还包括了物理希格斯玻色子的质量矩阵(21.41)。这个矩阵和Goldstone玻色子的质量矩阵之间没有矛盾，因为它们投影在正交的子空间上。

尽管前面的讨论非常抽象，但特殊化为特定的示例并不困难。再次考虑GWS电弱理论，其矩阵$F^a{}_i$由式(21.39)给出。

GWS理论中的规范玻色子质量矩阵为

$$g^2 F F^T = \frac{v^2}{4}\begin{pmatrix} g^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g^2 & -gg' \\ 0 & 0 & -gg' & g'^2 \end{pmatrix},$$

与式(20.124)一致(左边的g应该被解释为F的第四个分量的g')。对角化这个矩阵得到熟悉的关系(20.62)。因此。在质量本征态的基上，这四个规范玻色子传播子

解耦，简单的给出

$$\mu \sim\!\!\!\!\underset{k}{\longleftarrow}\!\!\!\!\sim \nu \quad = \frac{-i}{k^2 - m^2}\left[g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 - \xi m^2}(1-\xi)\right], \tag{21.54}$$

其中m^2是m_W^2, m_Z^2，或者，对于光子是0。注意，对于光子，这个表达式精确地再现了式(9.58)。

在GWS理论中，Goldstone玻色子的质量矩阵为

$$g^2 F^T F = \frac{v^2}{4}\begin{pmatrix} g^2 & 0 & 0 \\ 0 & g^2 & 0 \\ 0 & 0 & g^2 + g'^2 \end{pmatrix}.$$

因此，这些场具有传播子

$$\text{- - -}\!\!\underset{k}{\longleftarrow}\!\!\text{- - -} \quad = \frac{i}{k^2 - \xi m^2}, \tag{21.55}$$

其中对于ϕ^1和ϕ^2(被$W^\pm$吃掉的玻色子)，$m^2 = m_W^2$，和对于ϕ^3(被Z吃掉的玻色子)，$m^2 = m_Z^2$。场$h(x)$，是物理希格斯场，独立传播，其质量由希格斯势确定(传播子中没有ξ的因子)。

最后，有四个鬼场。根据式(21.53)，这些场有传播子

$$\cdots\!\!\underset{k}{\longleftarrow}\!\!\cdots \quad = \frac{i}{k^2 - \xi m^2}, \tag{21.56}$$

与四个规范玻色子有相同的m^2值。

由于存在大量可能的组合，这些粒子的相互作用顶点的费曼规则写出来很复杂。然而，通过展开弱相互作用的拉格朗日量和逐项读取顶点，生成这些规则是很简单的。我们将在下一节中给出几个例子*。

21.2 Goldstone 玻色子等价定理

从上一节的结果中，我们可以看到，R_ξ规范中的微扰计算涉及到非物理粒子之间复杂的相互抵消。然而，有时这些非物理粒子仍然可以在物理观测中留下它们的足迹。在本节中，我们将看到，在高能极限下，被一个有质量规范玻色子吃掉的非物理的Goldstone玻色子仍然控制着在纵向极化态下的规范玻色子的发射或吸收振幅。

*弱相互作用规范理论的完整费曼规则见Cheng和Li(1984)的附录B。

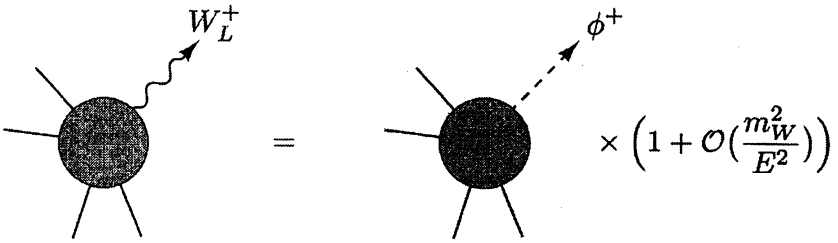


图21.3 Goldstone玻色子等价定理。在高能下，纵向极化的有质量玻色子的发射或吸收振幅等于被规范玻色子吃掉的Goldstone玻色子的发射或吸收振幅。

当我们引入矢量玻色子质量产生的希格斯机制时，我们指出它包含确定的自由度守恒。一个有两个横向极化态的无质量规范玻色子，与一个标量Goldstone玻色子结合产生一个有三个极化态的有质量矢量粒子。当有质量矢量粒子静止时，其三个极化态是完全等价的，但当其相对运动时，横向极化方向与纵向极化方向有明显区别。这表明，一个快速移动的、纵向极化的有质量规范玻色子可能泄露出它的起源是一个Goldstone玻色子。这种想法的最强版本表现在图21.3中：在高能状态下，纵向极化规范玻色子的发射或吸收振幅与被吃掉的Goldstone玻色子的发射或吸收振幅相等。值得注意的是，这种说法是完全正确的，这是根据基本的局域规范不变性得出的结论。这个**Goldstone玻色子等价定理**是由Cornwall, Levin, Tiktopoulos, 和Vayonakis首先证明的*。

Goldstone 玻色子等价的正式方面

Goldstone玻色子等价定理的证明是基于自发破缺规范理论的Ward恒等式。为了给这个定理一个完整的证明，我们必须详细地构造和分析这些Ward恒等式。然而，通过研究该定理的特殊情况来理解证明的思想是可能的，在这种特殊情况下，单个的有质量矢量玻色子在散射过程中被发射或吸收。这种特殊情况的分析只需要相对简单的Ward恒等式，它被在壳态之间的流所满足的**。

---

* J. M. Cornwall, D. N. Levin, and G. Tiktopoulos, *Phys. Rev.* **D10**, 1145 (1974); C. E. Vayonakis, *Lett. Nuov. Cim.* **17**, 383 (1976).。对等价定理的启发式讨论，参见B. W. Lee, C. Quigg, and H. Thacker, *Phys. Rev.* **D16**, 1519 (1977)

**对于等价定理的详细推导，包括涉及有质量矢量玻色子的多重吸收和发射的(见下页)

为准备讨论纵向矢量玻色子，我们需要一些简单的运动学。一个静止矢量玻色子有动量$k^\mu = (m,0,0,0)$和有极化矢量是如下三个正交单位矢量的线性组合

$$(0,1,0,0), \qquad (0,0,1,0), \qquad (0,0,0,1). \tag{21.57}$$

如果我们沿着$\hat{3}$轴平动(boost)这个粒子，它的动量就会平动到$k^\mu = (E_{\mathbf{k}},0,0,k)$。三个可能的极化矢量现在是三个单位矢量且满足

$$\epsilon^\mu k_\mu = 0, \qquad \epsilon^2 = -1. \tag{21.58}$$

这些中的两个是(21.57)的前两个矢量；这些给出是横向极化。满足(21.58)的第三个矢量是纵向极化矢量

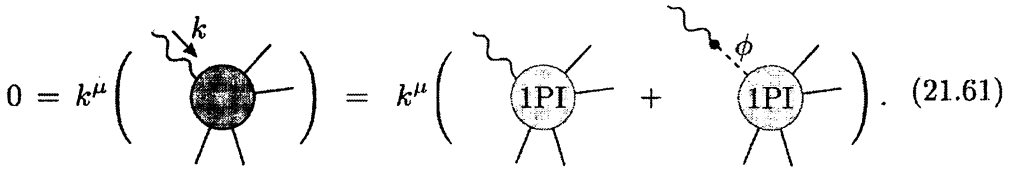
$$\epsilon_L^\mu(k) = (\frac{k}{m},0,0,\frac{E_{\mathbf{k}}}{m}), \tag{21.59}$$

这是(21.57)的第三个矢量的平动。(21.59)的一个重要且有点违反直觉的特性是，当k变大时，它与k^μ越来越平行。事实上，逐个分量地有，

$$\epsilon_L^\mu(k) = \frac{k^\mu}{m} + \mathcal{O}(m/E_{\mathbf{k}}) \tag{21.60}$$

当$k \to \infty$时。由于k^μ的分量是随着k增长的，所以这个表述与要求$\epsilon_L \cdot k = 0$是一致的，因为$k \cdot k = m^2$。

考虑到运动学的情况。我们来分析在壳的态之间的规范流矩阵元所满足的Ward恒等式。在洛伦兹规范($\xi = 0$)下工作是最简单的，其中规范固定项(21.45)不包括Goldstone玻色子场。于是Ward恒等式可以这样写:



(21.61)

在上面表达式中，我们把矩阵元写成了两部分的和。第一个，流可以直接耦合到单粒子不可约顶点函数$\Gamma^\mu(k)$。这给出了一类对规范玻色子被外部态散射有贡献的图。然而，对于自发破缺规范理论，还有一个附加的项，它不是单粒子不可约的，在这个项中，流产生了一个Goldstone玻色子，正是这个粒子通过一个1PI顶点$\Gamma(k)$与外部态耦合。

让我们把规范流和Goldstone玻色子态之间的关系写成

$$\langle 0|\, J^\mu \,|\pi(k)\rangle = -iFk^\mu, \tag{21.62}$$

过程，参见M. S. Chanowitz and M. K. Gaillard, *Nucl Phys.* **B261**, 379 (1985).

如式(20.46)。导致了式(20.56)的论证告诉我们，规范玻色子质量被给出为

$$m = gF, \tag{21.63}$$

其中g为规范玻色子耦合常数。

有了这些恒等式，我们就可以写出Ward恒等式，服从规范流的守恒

$$k_\mu \langle J^\mu \rangle = 0, \tag{21.64}$$

处于在壳态之间。将(21.61)中所示的每一项用适当的单粒子不可约顶点函数来写，我们发现

$$k_\mu \Gamma^\mu(k) + k_\mu \left(igFk^\mu\right) \frac{i}{k^2} \Gamma(k) = 0. \tag{21.65}$$

Thus,

$$k_\mu \Gamma^\mu(k) = m\Gamma(k). \tag{21.66}$$

现在在规范玻色子的大动量极限下使用这个方程。由于规范玻色子顶点是单粒子不可约的，因此在一般情况下，顶点内的传播子动量与k^μ不共线。于是根据(21.60)，我们可以将k^μ/m替换为纵向极化矢量。请注意，这在(21.65)的第二项中是不允许的(但也是不必要的)。我们的最终结果是

$$\epsilon_{L\mu}(k)\Gamma^\mu(k) = \Gamma(k), \tag{21.67}$$

当$k \to \infty$时，其误差为m^2/k^2阶的。也就是说，在高能极限下，纵向规范玻色子的耦合精确地变成与其相关的Goldstone玻色子的耦合。

等价定理可以用另一种方法推导出来，即利用自发破缺规范理论中对物理状态的计数，我们在式(21.26)下面讨论了这一问题。在前一节中，我们看到，至少在树图水平，通过将产生了类时极化规范玻色子的图与产生了Goldstone玻色子的图相抵消，可以在自发破缺规范理论中保持幺正性。

这种情况在Feynman-'t Hooft规范中是最清楚的。在那里，规范玻色子传播子的分子是$-g^{\mu\nu}$。我们可以把它写成极化矢量的形式

$$-g^{\mu\nu} = \sum_{i=1,2,3} \epsilon_i^\mu(k)\epsilon_i^{\nu *}(k) - \frac{k^\mu k^\nu}{m^2}. \tag{21.68}$$

最后一项是非物理类时极化态的贡献。S矩阵的幺正性要求，当对一个图进行Cutkosky切割，并把一个规范玻色子传播子放在壳上时，这部分的贡献必须被

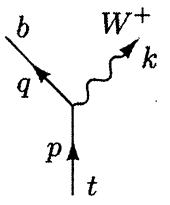
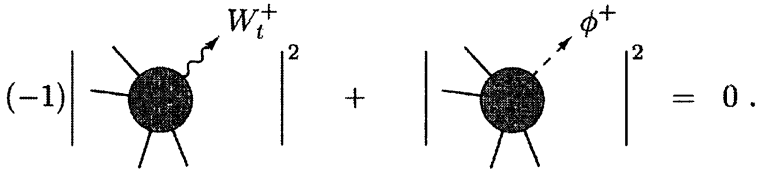


图21.4 t夸克衰变为$W^+ + b$。

一个Goldstone玻色子线上的Cutkosky切割来抵消。需要的抵消是

$$-\left|\frac{k_\mu}{m}\Gamma^\mu(k)\right|^2 + \left|\Gamma(k)\right|^2 = 0, \tag{21.69}$$

或者，用图表示，



再一次，由于$\Gamma^\mu(k)$是一个单粒子不可约顶点，我们可以用(21.60)，用高能规范玻色子的纵向极化矢量$\epsilon_L^\mu(k)$代替(k^μ/m)。然后(21.69)正好变成(21.67)的平方。

通过这些形式的论证，我们可以看到，至少在单个规范玻色子发射过程的树图水平上，等价定理必须是有效的。然而，看到等效定理在有趣物理过程的显式计算中起作用将更有启发性。现在我们将用两个例子来说明它的效应。

顶夸克衰变

第一个例子是顶夸克的弱衰变。这个电荷+2/3的夸克足够重，足以衰变为一个实的W^+，通过$t \to W^+ + b$。这种衰变的图由图21.4中的单个规范顶点给出。

我们先来试着猜猜顶夸克宽度的大小。平方矩阵元将包含一个因子g^2，乘以一些有质量量纲的表达式。因为如果顶夸克质量很大，宽度应该很大，所以第一个猜测可能是

$$\Gamma \sim \frac{g^2}{4\pi} m_t. \tag{21.70}$$

然而，正确的表达式被证明是被一个因子$(m_t/m_W)^2$增强了。

这个衰变的振幅可以从式(20.80)中读出:

$$i\mathcal{M} = \frac{ig}{\sqrt{2}}\bar{u}(q)\gamma^\mu\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)u(p)\epsilon_\mu^*(k). \tag{21.71}$$

(我们设相关CKM因子等于1)。现在我们要把这个振幅变成顶夸克衰变速率的表达式。为了简单起见，我们在计算中忽略了b夸克的质量。

根据我们的标准方法，求振幅(21.71)的平方，然后求初始自旋的平均和末态自旋的和，我们发现

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2=\frac{g^2}{2}\left[q^\mu p^\nu+q^\nu p^\mu-g^{\mu\nu}q\cdot p\right]\sum_{\text{polarizations}}\epsilon_\mu^*(k)\epsilon_\nu(k). \tag{21.72}$$

我们可以通过插入极化和的表达式(21.26)来显式地对物理规范玻色子极化进行求和。这给出

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2&=\frac{g^2}{2}\left[q^\mu p^\nu+q^\nu p^\mu-g^{\mu\nu}q\cdot p\right]\left[-g_{\mu\nu}+\frac{k_\mu k_\nu}{m_W^2}\right]\\&=\frac{g^2}{2}\left[q\cdot p+2\frac{(k\cdot q)(k\cdot p)}{m_W^2}\right].\end{aligned} \tag{21.73}$$

对于$m_b=0$,

$$2q\cdot p=2q\cdot k=m_t^2-m_W^2,\qquad 2k\cdot p=m_t^2+m_W^2. \tag{21.74}$$

Then

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2=\frac{g^2}{4}\frac{m_t^4}{m_W^2}\left(1-\frac{m_W^2}{m_t^2}\right)\left(1+2\frac{m_W^2}{m_t^2}\right). \tag{21.75}$$

乘以相空间后，我们得到

$$\Gamma=\frac{g^2}{64\pi}\frac{m_t^3}{m_W^2}\left(1-\frac{m_W^2}{m_t^2}\right)^2\left(1+2\frac{m_W^2}{m_t^2}\right). \tag{21.76}$$

这比我们最初的估计(21.70)大了一个因子$(m_t/m_W)^2$。

利用Goldstone玻色子等价定理，不难找到这个增强的起源。在弱相互作用规范理论中，顶夸克通过与希格斯区的耦合获得质量。顶-希格斯耦合λ_t与顶夸克质量之间的关系用公式(20.103)表示。只有当λ_t很大时，顶夸克才会很重。但之后顶夸克衰变为Goldstone玻色子的振幅将在(21.70)上面增强如下因子

$$\frac{\lambda_t^2}{g^2}=\frac{m_t^2}{2m_W^2}, \tag{21.77}$$

这实际上是我们在(21.76)中发现的增强。

为了更精确地进行比较，我们现在将计算出等效定理的预测——预测顶夸克衰变到纵向极化的W^+玻色子的衰变率。回想一下(20.101)中把t和b与希格斯场耦合起来的弱相互作用拉格朗日量中的项是

$$\Delta\mathcal{L}=-\lambda_t\epsilon^{ab}\overline{Q}_{La}\phi_b^\dagger t_R+\text{h.c.} \tag{21.78}$$

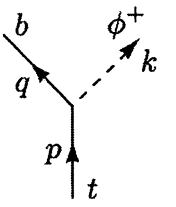


图21.5 一个t夸克衰变为一个Goldstone玻色子和一个b夸克。

如(21.38)所示分解希格斯场，并写

$$\phi^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi^1 \pm i\phi^2). \tag{21.79}$$

这些是被$W^{\pm}$吃掉的带电Goldstone玻色子场。将Goldstone玻色子加入到理论中，增加了一个过程$t \to \phi^+ + b$，如图21.5所示。这个过程由如下拉格朗日量项介导

$$\Delta\mathcal{L} = \lambda_t \bar{b}_L \phi^+ t_R, \tag{21.80}$$

它导致了衰变振幅

$$i\mathcal{M} = i\lambda_t \bar{u}(q)\Big(\frac{1+\gamma^5}{2}\Big)u(p). \tag{21.81}$$

从这个表达式，我们很容易得到

$$\tfrac{1}{2}\sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 = \lambda_t^2\, q\cdot p. \tag{21.82}$$

如果我们现在忽略Goldstone玻色子的质量，或者等价地，考虑极限$m_t \gg m_W$，我们就会得到顶夸克衰变速率

$$\Gamma = \frac{\lambda_t^2}{32\pi} m_t = \frac{g^2}{64\pi}\frac{m_t^3}{m_W^2}, \tag{21.83}$$

与在这个极限下的(21.76)的领头项是一致的。结果表明，只有W^+的纵向极化态的产生得到了增强；通过将显式极化矢量代入式(21.72)，可以很容易地直接检验这一点。

在(21.76)的推导中，我们对发射的W^+的物理极化态求和；有人可能会说，我们使用了U规范的方案来对极化求和。我们也可以用Feynman-'t Hooft规范的方案，做代替

$$\sum_i \epsilon_\mu^*(k)\epsilon_\nu(k) \to -g_{\mu\nu}, \tag{21.84}$$

并加入了Goldstone玻色子发射图的贡献，把Goldstone玻色子当作一个质量为

m_W的有质量粒子。在这些方案下，规范玻色子矩阵元给出了

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2=\frac{g^2}{2}(2q\cdot p)=\frac{g^2}{2}(m_t^2-m_W^2). \tag{21.85}$$

Goldstone玻色子发射图给出为

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2=\lambda_t^2\,q\cdot p=\frac{g^2}{4}\frac{m_t^2}{m_W^2}(m_t^2-m_W^2). \tag{21.86}$$

这些贡献的总和确实产生了(21.75)，因此得到了总衰变率的相同结果(21.76)。在Feynman-'t Hooft规范中，由于顶夸克与希格斯区的大耦合而产生的增强，明确地体现在Goldstone玻色子发射对W^+总产率的贡献中。

$e^+e^-\to W^+W^-$

我们的第二个例子更复杂，但也包含了更有趣的物理。这是反应$e^+e^-\to W^+W^-$。在这个反应中，等价定理并不导致截面的增强，而是导致了费曼图之间的抵消。我们将看到，这种抵消对于理论的内部一致性是至关重要的。

在问题9.1中，我们计算了e^+e^-湮没成一对带电标量粒子的截面，如图21.6(a)所示，并得到了结果

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta}(e^+e^-\to\phi^+\phi^-)=\frac{\pi\alpha^2}{4s} \tag{21.87}$$

在远大于标量质量的能量下。和e^+e^-湮没成费米子对一样，这个截面在高能时像$1/s$一样下降。可以看出，这种行为是由幺正性所要求的：因为电子和正电子通过一个类点的顶点而湮灭，所以湮灭只发生在一个分波中。幺正性对这个分波中的振幅有限制，要求$\mathcal{M}$以一个常数为界，因此在高能时σ以$1/s$为界*。

同样的幺正性论证也适用于e^+e^-湮灭为矢量玻色子。然而，在这里说费曼图产生的截面确实与幺正性一致，是远不够明显的。考虑图21.6(b)的贡献。我们期望这个图的平方应该包含的对截面的一个贡献是，其形式为标量贡献(21.87)乘以极化矢量的点积：

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta}(e^+e^-\to W^+W^-)\sim\frac{\pi\alpha^2}{4s}\cdot\left|\epsilon(k_+)\cdot\epsilon(k_-)\right|^2, \tag{21.88}$$

*相对论碰撞的分波分析在Perkins(1987)的第4章中进行了讨论。

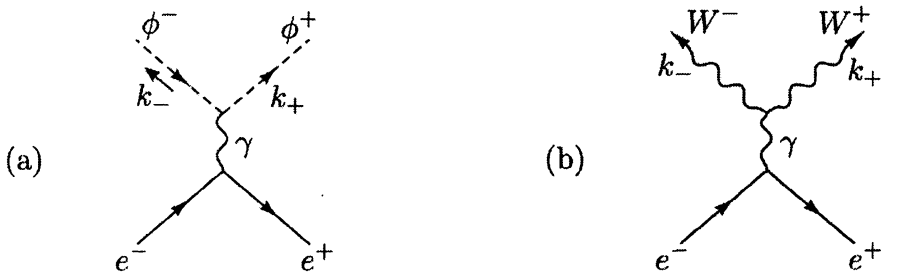


图21.6 电子-正电子通过一个虚光子湮灭(a)到带电标量玻色子(b)到W玻色子

其中k_+和k_-是出射的W玻色子的动量。对于横向极化的W玻色子，这一项表现得很好，但对于纵向极化的W玻色子，这一项就出现了问题。利用纵向极化矢量的近似(21.60)，我们发现

$$\epsilon(k_+)\cdot\epsilon(k_-)\to\frac{k_+\cdot k_-}{m_W^2}\to\frac{s}{4m_W^2} \tag{21.89}$$

对于$s\gg m_W^2$，这导致了一个比幺正性所允许的增长速度要快得多的截面。原则上，通过在微扰论中增加高阶的贡献，可以使截面回归到正确的行为，但这将是一个最令人不快的解决办法。这将意味着W玻色子理论在如下能量下变成强耦合

$$\frac{s}{4m_W^2}\sim\left(\frac{g^2}{4\pi}\right)^{-1}, \tag{21.90}$$

对应于1000 GeV阶的质心能量。但是，如果W玻色子理论在短距离内是强耦合的，那就很难理解为什么在长距离时，它会变成我们所观察到的简单的、弱耦合的理论。

幸运的是，这个问题还有另一种可能的解决方案。在弱相互作用规范理论中，有三个费曼图在树图水平上贡献于$e^+e^-\to W^+W^-$的振幅，如图21.7所示。每个图分别产生一个与(21.88)增长方式相同的截面。然而，在这三个图中表现不好的项可能会被抵消，留下一个更合适的高能行为。如果这种奇迹般的抵消发生了，它将使W玻色子理论到非常高的能量下都能够一致地是弱耦合的。

虽然这种抵消乍一看似乎不太可能，但它实际上是由Goldstone玻色子等价定理所要求的。该定理指出，在高能情况下，产生纵向W玻色子的截面应该等于产生相应标量Goldstone玻色子的截面。但是我们知道标量的截面表现为$1/s$，如

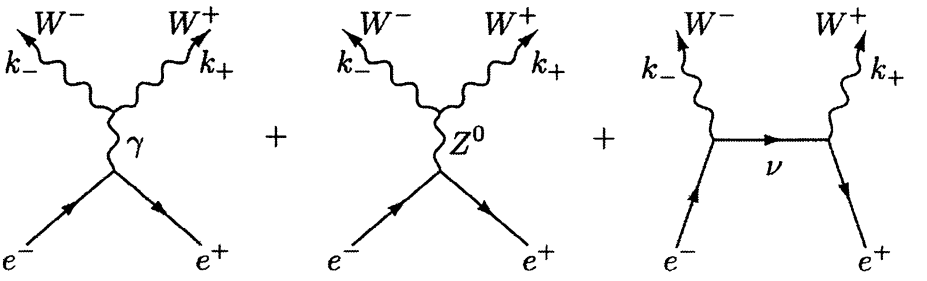


图21.7 在弱相互作用规范理论中对$e^+e^- \to W^+W^-$有贡献的图

(21.87)所示。因此，在某种程度上，规范玻色子截面也必须合力产生这个结果。现在我们将明确地展示这一点。我们将看到所需的抵消是由规范理论的Ward恒等式所控制的。

为了准备这个计算，我们需要图21.8所示的顶点的Feynman规则。电子与W, Z和γ的耦合的费曼规则可以直接从(20.80)中读取。这些耦合的相对强度由电子的左手和右手分量的$SU(2) \times U(1)$量子数所决定。同样可以直接构造Goldstone玻色子与Z和γ的耦合。因为玻色子ϕ^+电荷为1，光子耦合正是问题9.1发现的。Z耦合是由附加信息确定的：ϕ^+有$I^3 = +1/2$。所有这些表达式如图21.8所示。

图21.7中出现的三规范玻色子顶点来自规范场作用量中的三次项。由于$U(1)$场强在规范场中是线性的，因此这些场强仅来自于$SU(2)$规范场的动力学项。为了确定我们需要的具体部分，我们必须在(20.63)和(20.64)给出的质量本征态的基上重写这个三次项。这些可以这样做:

$$\begin{aligned}
-\tfrac{1}{4}(F^a_{\mu\nu})^2 &\to -\tfrac{1}{2}(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu) g\epsilon^{abc} A^{\mu b} A^{\nu c} \\
&= -g(\partial_\mu A^1_\nu - \partial_\nu A^1_\mu) A^{\mu 2} A^{\nu 3} + g(\partial_\mu A^2_\nu - \partial_\nu A^2_\mu) A^{\mu 1} A^{\nu 3} \\
&\quad - g(\partial_\mu A^3_\nu - \partial_\nu A^3_\mu) A^{\mu 1} A^{\nu 2} \\
&= ig\big[(\partial_\mu W^+_\nu - \partial_\nu W^+_\mu) W^{\mu -} A^{\nu 3} - (\partial_\mu W^-_\nu - \partial_\nu W^-_\mu) W^{\mu +} A^{\nu 3} \\
&\quad + \tfrac{1}{2}(\partial_\mu A^3_\nu - \partial_\nu A^3_\mu)(W^{\mu +} W^{\nu -} - W^{\mu -} W^{\nu +})\big]. \qquad (21.91)
\end{aligned}$$

最后，插入$A^3_\mu = \cos\theta_\omega Z_\mu + \sin\theta_\omega A_\mu$, $g = e/\sin\theta_\omega$，我们得到如图21.9所示的费曼规则。

在研究e^+e^-湮灭成矢量玻色子对的振幅之前，我们将首先计算出产生一对带

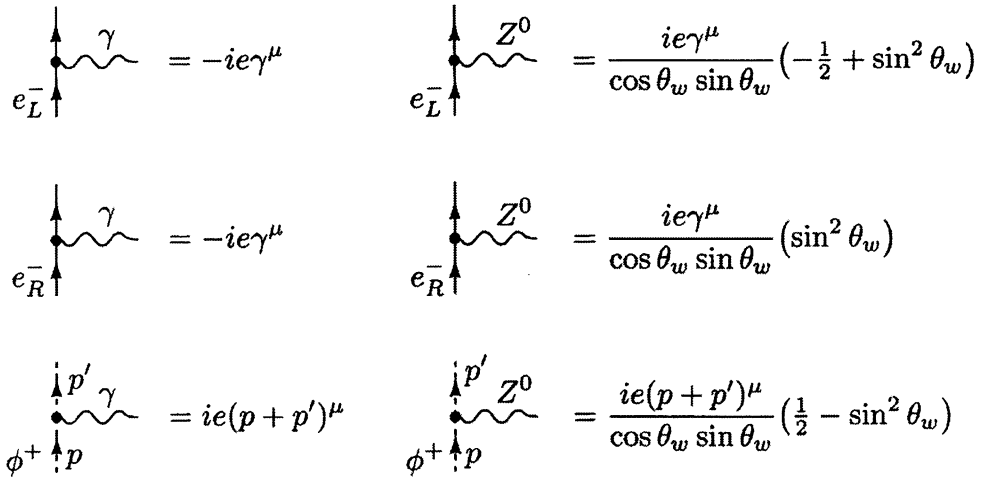


图21.8 电子和标量耦合到光子和Z玻色子的弱相互作用规范理论的费曼规则。

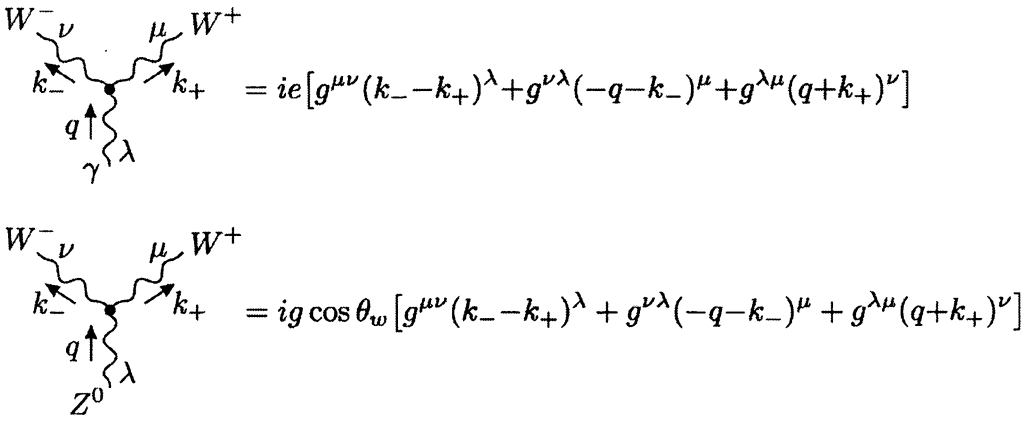


图21.9 $WW\gamma$和WWZ顶点的弱相互作用规范理论的费曼规则。

电标量的振幅。等价定理预测，在高能时两个纵向W玻色子产生的振幅应该等于这个振幅。从图21.8来组合顶点，我们发现，对于任意螺旋度的电子，通过虚光子湮灭到标量的振幅是

$$i\mathcal{M}(ee \to \gamma^* \to \phi^+\phi^-) = ie^2\bar{v}\gamma_\mu u\frac{1}{q^2}(k_+ - k_-)^\mu, \tag{21.92}$$

其中k_+, k_-为标量的动量，$q = k_+ + k_-$。通过虚Z^0湮灭的对应振幅依赖于e^+e^-螺旋度。将这些贡献添加到前面的表达式中，我们发现

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M}(e_L^- e_R^+ \to \phi^+\phi^-) &= ie^2 \bar{v}_L \gamma_\mu u_L \left[\frac{1}{q^2} + \frac{(\frac{1}{2} - \sin^2\theta_w)^2}{\sin^2\theta_w \cos^2\theta_w}\frac{1}{q^2 - m_Z^2}\right](k_+ - k_-)^\mu, \\
i\mathcal{M}(e_R^- e_L^+ \to \phi^+\phi^-) &= ie^2 \bar{v}_R \gamma_\mu u_R \left[\frac{1}{q^2} - \frac{(\frac{1}{2} - \sin^2\theta_w)}{\cos^2\theta_w}\frac{1}{q^2 - m_Z^2}\right](k_+ - k_-)^\mu.
\end{aligned}
\tag{21.93}
$$

注意，在高能极限下，右手电子湮灭的振幅被抵消成了

$$
i\mathcal{M}(e_R^- e_L^+ \to \phi^+\phi^-) \to i\frac{e^2}{2\cos^2\theta_w}\bar{v}_R\gamma_\mu u_R \frac{1}{q^2}(k_+ - k_-)^\mu, \tag{21.94}
$$

这正是$Y = -1$的e_R^-与$Y = 1/2$的ϕ^+的耦合振幅，通过$U(1)$规范玻色子B_μ，耦合常数为$g' = e/\cos\theta_\omega$。这个表达式反映了e_R^-与$SU(2)$规范玻色子没有直接耦合的事实。类似地，左手电子的振幅趋向于

$$
i\mathcal{M}(e_L^- e_R^+ \to \phi^+\phi^-) \to ie^2\left[\frac{1}{4\cos^2\theta_w} + \frac{1}{4\sin^2\theta_w}\right]\bar{v}_L\gamma_\mu u_L \frac{1}{q^2}(k_+ - k_-)^\mu \tag{21.95}
$$

在高能极限下。这个具有B_μ和A_μ^3交换的振幅的相干和的结构。以我们在第11章看到的方式，具有自发破缺对称性的规范理论的对称结构在高能极限中被恢复。

现在让我们将这些结果与弱相互作用规范理论中W^+W^-产生振幅的直接计算进行比较。从一个初始的e_R^-开始。由于电子与W^-的耦合是纯左手的，图21.7的第三个图在这种情况下消失了，所以计算起来比较容易。图21.7的前两个图具有完全相同的结构，以及加起来是

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M}(e_R^- e_L^+ \to W^+W^-) = \bar{v}_R\gamma_\lambda u_R &\left[(-ie)\frac{-i}{q^2}(ie) + \frac{ie\sin\theta_w}{\cos\theta_w}\frac{-i}{q^2 - m_Z^2}\frac{ie\cos\theta_w}{\sin\theta_w}\right] \\
&\cdot \left[g^{\mu\nu}(k_- - k_+)^\lambda + g^{\lambda\nu}(-q - k_-)^\mu + g^{\lambda\mu}(k_+ + q)^\nu\right]\epsilon_\mu^*(k_+)\epsilon_\nu^*(k_-).
\end{aligned}
\tag{21.96}
$$

这个方程适用于任何R_ξ规范，因为，如果我们忽略电子质量，

$$
q^\lambda \bar{v}_R \gamma_\lambda u_R = 0. \tag{21.97}
$$

式(21.96)的第二行包含了上面提到的纵向W玻色子的增强。如果我们将纵向极化矢量近似为(21.60)，并且去掉在$s \to \infty$下不增长的项，这一行就变成了

$$
\left[g^{\mu\nu}(k_- - k_+)^\lambda + g^{\lambda\nu}(-q - k_-)^\mu + g^{\lambda\mu}(k_+ + q)^\nu\right]\frac{k_{+\mu}}{m_W}\frac{k_{-\nu}}{m_W}
$$

$$= \frac{1}{m_W^2}\left[k_+\cdot k_-(k_- - k_+)^\lambda - 2k_-\cdot k_+ k_-^\lambda + 2k_+\cdot k_- k_+^\lambda\right] + \mathcal{O}(1)\cdot(k_- - k_+)^\lambda$$
$$= \frac{s}{2m_W^2}(k_+ - k_-)^\lambda + \cdots. \tag{21.98}$$

另一方面，(21.96)的第一行中括号中的表达式几乎完全抵消，变为

$$-ie^2\Big(\frac{1}{q^2} - \frac{1}{q^2 - m_Z^2}\Big) = +ie^2\frac{m_Z^2}{q^2(q^2 - m_Z^2)}.$$

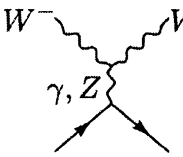
利用这两个简化，我们发现

$$i\mathcal{M}(e_R^- e_L^+ \to W_L^+ W_L^-) = \bar{v}_R\gamma_\lambda u_R\Big[(ie^2)\frac{m_Z^2}{s^2}\Big]\frac{s}{2m_W^2}(k_+ - k_-)^\lambda. \tag{21.99}$$

通过插入关系$m_W = m_Z\cos\theta_\omega$，我们可以看到，这个振幅等于(21.94)，如等价定理所要求的。

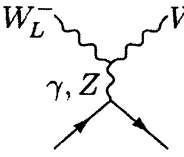
对于初始为e_L^-的振幅，计算要复杂一些。现在，图21.7的三个图都有贡献，由于最后一个图有不同的运动学结构，所以不太清楚图是如何结合在一起的。在下面。我们将演示破坏幺正性的增强项的抵消，并将说明低一个m_W^2/s阶的项如何组合成正确的结构。但是，我们不会严格考虑所有这些较小的项。这些图的完整计算是问题21.2的主题。

对于初始e_L^-的情况，图21.7的前两个图加起来得到表达式



$$= \bar{v}_L\gamma_\lambda u_L\left[(-ie)\frac{-i}{q^2}(ie) + \frac{ie(-\frac{1}{2}+\sin^2\theta_w)}{\sin\theta_w\cos\theta_w}\frac{-i}{q^2 - m_Z^2}\frac{ie\cos\theta_w}{\sin\theta_w}\right]$$
$$\cdot\left[g^{\mu\nu}(k_- - k_+)^\lambda + g^{\lambda\nu}(-q - k_-)^\mu + g^{\lambda\mu}(k_+ + q)^\nu\right]\epsilon_\mu^*(k_+)\epsilon_\nu^*(k_-), \tag{21.100}$$

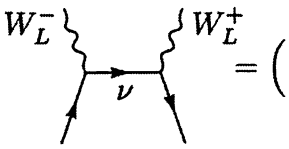
它与(21.96)的区别仅仅在于电子与虚Z^0的耦合。对于纵向W玻色子，我们可以像(21.96)那样简化这个表达式，得到



$$= \bar{v}_L\gamma_\lambda u_L(ie^2)\left[\frac{m_Z^2}{s(s - m_Z^2)} - \frac{1}{2\sin^2\theta_w}\frac{1}{s - m_Z^2}\right]\frac{s}{2m_W^2}(k_+ - k_-)^\lambda. \tag{21.101}$$

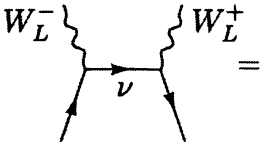
括号中的第二项是一个有潜在危险的贡献，它必须被t道中微子交换的图所抵消。

这图的值是



$$= \left(\frac{ig}{\sqrt{2}}\right)^2 \bar{v}_L \gamma^\mu \frac{i(\not{\ell} - \not{k}_-)}{(\ell - k_-)^2} \gamma^\nu u_L(\ell) \epsilon_\mu^*(k_+) \epsilon_\nu^*(k_-), \tag{21.102}$$

ℓ是初始电子动量。像以前一样近似纵向极化矢量，我们有

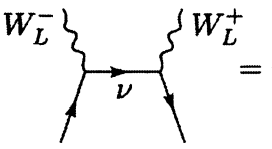


$$= -i\frac{g^2}{2} \bar{v}_L \frac{\not{k}_+}{m_W} \frac{(\not{\ell} - \not{k}_-)}{(\ell - k_-)^2} \frac{\not{k}_-}{m_W} u_L(\ell). \tag{21.103}$$

现在我们像我们证明Ward恒等式一样处理这个表达式。利用$u_L(\ell)$满足狄拉克方程的事实，

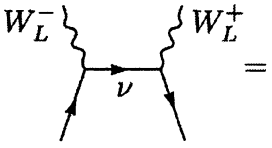
$$(\not{\ell} - \not{k}_-)\not{k}_- u_L(\ell) = -(\not{\ell} - \not{k}_-)^2 u_L(\ell) = -(\ell - k_-)^2 u_L(\ell), \tag{21.104}$$

表达式(21.103)化简为



$$= i\frac{g^2}{2} \bar{v}_L \frac{\not{k}_+}{m_W^2} u_L(\ell). \tag{21.105}$$

最后，使用式(21.97)，我们可以把这个表达式重写为



$$= ie^2 \frac{1}{2\sin^2\theta_w} \frac{1}{2m_W^2} \bar{v}_L \gamma_\lambda u_L(\ell)(k_+ - k_-)^\lambda. \tag{21.106}$$

这一项抵消了(21.101)的危险高能行为。然而，要看到图的和有正确的高能极限，我们所使用的近似是不够的。特别是，对极化矢量的关系(21.60)的修正是m_W^2/s阶的，必须考虑。当考虑进m_W^2/s阶的所有修正后，s道图的和(21.101)保持不变，而中微子交换图的表达式(21.106)则乘以因子$(1 + 2m_W^2/s)$。然后所有三个图的和给出

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}(e_L^- e_R^+ \to W_L^+ W_L^-) &= ie^2 \bar{v}_L \gamma_\lambda u_L (k_+ - k_-)^\lambda \frac{1}{s} \\ &\cdot \left[\frac{1}{2\cos^2\theta_w} - \frac{1}{4\cos^2\theta_w \sin^2\theta_w} + \frac{1}{2\sin^2\theta_w} \right]. \end{aligned} \tag{21.107}$$

括号的中间项抵消了另外两项的一半，从而得到与式(21.95)完全一致的表达式。

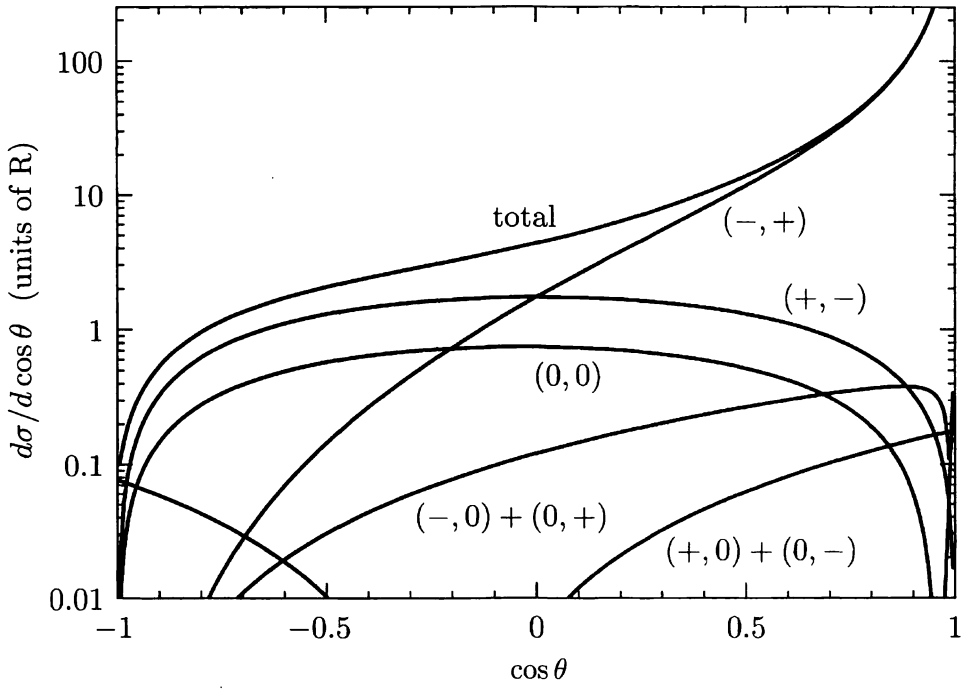


图21.10 $e_L^- e_R^+ \to W^+W^-$的微分截面，单位为R(式(5.15))，在$E_{\rm cm} = 1000$ GeV。不同的曲线显示了W^-和W^+的单个螺旋度态与总的贡献；这些被表示为(h_-, h_+)，其中每个螺旋度取值$(+,-,0)$。来自$(+,+)$和$(-,-)$态的贡献太小而看不见。注意表示为(0,0)的$W_L^- W_L^+$的截面，和$(+,-)$截面在非常高的能量下与$\sin^2\theta$成正比。

问题21.2的计算给出了完整的湮灭振幅

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M}(e_L^- e_R^+ \to W_L^+ W_L^-) = {} & ie^2 \bar{v}_L \gamma_\lambda u_L (k_+ - k_-)^\lambda \frac{1}{s} \\
& \cdot \left[\frac{1}{2\sin^2\theta_w} \left\{ -\frac{s}{s - m_Z^2} \left(\frac{m_Z^2}{2m_W^2} + 1 \right) + \frac{2}{\beta^2} \right.\right. \\
& \left.\left. - \frac{8m_W^2}{s\beta^2(1+\beta^2-2\beta\cos\theta)} \right\} + \frac{m_Z^2}{m_W^2} \left(\frac{\frac{1}{2}s + m_W^2}{s - m_Z^2} \right) \right],
\end{aligned}
\tag{21.108}
$$

其中$\beta = (1 - 4m_W^2/s)^{1/2}$为$W$玻色子速度。这一表达式的高能极限确实重新产生了(21.107)。这个以及其他可能的螺旋度状态对$e_L^- e_R^+ \to W^+W^-$的微分截面的贡献已在图21.10绘制出来。

图21.7中这些图的消去是由规范理论的Ward恒等式引起的。也就是说，它们发生只是因为理论有一个潜在的局域规范不变性。在我们讨论的开始，我们认为这些抵消是必要的，来确保理论以一致的方式，保持弱耦合到任意高的能量。在第20.1节中，我们证明了通过对局域规范不变性进行自发破缺可以为矢量玻色子

产生质量。我们现在讨论的是与此相反的结果：没有剧烈高能行为的有质量矢量玻色子的唯一理论，是那些源自自发破缺规范理论的理论*。

21.3 弱相互作用规范理论的单圈修正

我们对自发破缺规范理论的研究的最终主题，是对弱相互作用规范理论的单圈修正进行计算。正如我们在20.2节中讨论的，树级图产生一些关于Z^0的耦合的复杂预测和中性流反应的截面。通常，这些预测会被单圈图的效应所修正。在本节中，我们将研究这些单圈修正的一些示例。

在任何可重正的场论中，电弱规范理论的单圈图通常是紫外发散的。这些发散可以通过调整理论的基本参数来消除。通过可重正性，这些调整定义的一组抵消项使理论的全部单圈图成为有限的。那些没有被手动调整的振幅就变成了理论的预测。

在第11章中，我们看到这个一般的过程，它适用于任何可重正化的场论，当它应用于具有自发对称性破缺的理论时，会给出特别丰富的信息。在具有自发破缺对称性的理论中，原始对称性的同一多重态中不同粒子的理论振幅有显著差异。然而，理论的抵消项遵守对称性关系。因此，一个粒子振幅的调整导致对其他粒子的明确预测，而这些粒子不由任何明显的对称性所联系。

理论定位和具体问题

在第11.6节的最后，我们提出了一个有用的框架，用于组织具有自发对称性破缺的可重正化理论的预测的计算。我们定义了一个**零阶自然关系**作为理论中可观测量之间的关系，它对拉格朗日量中参数的任何值都是正确的。由于理论的抵消项移动了基础参数的值，在不增加新项的情况下，因此零阶自然关系不会被这些抵消项修正。因此，如果理论是可重正的，则对零阶自然关系的单圈修正是有限的，实际上是场论的量子结构的明确预测。虽然我们最初在具有自发破缺的整体对

*本节开头所引用的Cornwall, Levin, and Tiktopoulos的论文系统地证明了这一观点。

称性的理论中讨论了这个概念，但它同样适用于具有自发破缺规范对称性的理论。在这一节中，我们将应用这一概念来推导弱相互作用规范理论中该关系的有限单圈修正。

在电弱理论中很容易找到零阶自然关系。在第20.2节中给出的领头阶预测涉及的自由参数的数目相对较少。许多这样的预测都是在夸克和轻子质量可以忽略的能量下做出的；然后它们只依赖于耦合常数g和g'以及真空期望值v，v设定了自发对称性破缺的标度。弱相互作用理论的其余组成部分根据这些参数给出；例如，

$$\begin{aligned} m_W &= g\frac{v}{2}, \qquad m_Z = \sqrt{g^2+g'^2}\frac{v}{2}, \\ e &= \frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}}, \qquad \frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2} = \frac{1}{2v^2}. \end{aligned} \tag{21.109}$$

即使在这组量中，我们有四个关系，它们只依赖于三个基本参数，所以可观测量中有一个关系是独立于拉格朗日量的参数的。

由于弱相互作用规范理论的许多预测是由参数$\sin^2\theta_\omega$决定的，因此根据可观测量来定义$\sin^2\theta_\omega$并以此定义为基础构建自然关系是很有用的。我们在20.2节中讨论电弱理论的精度测试时，使用了这个定义

$$s_W^2 \equiv 1 - \frac{m_W^2}{m_Z^2} \tag{21.110}$$

作为不同实验的比较标准。但是，由于已知的三个最精确的弱相互作用可观测量是α、G_F和m_Z，因此构造$\sin^2\theta_\omega$的另一个物理定义是有用的。根据这三个量。这样定义θ_0

$$\sin 2\theta_0 \equiv \left(\frac{4\pi\alpha_*}{\sqrt{2}G_F m_Z^2}\right)^{1/2}, \tag{21.111}$$

其中α_*是在标度$Q^2 = m_Z^2$时计算的QED跑动耦合常数。重正化群坚持认为，在弱相互作用标度处的电荷值才进入了电弱精确预测，而这一观察的证实是通过对包含轻夸克和轻子的辐射修正图进行求和。式(21.111)中的量的当前最佳值给出为

$$s_0^2 \equiv \sin^2\theta_0 = 0.2307 \pm 0.0005. \tag{21.112}$$

因此，这个量提供了一个非常精确的参考标准。

一旦采用式(21.111)来定义$\sin^2\theta_\omega$的参考值，在20.2节将$\sin^2\theta_\omega$同其他可观测量联系在一起的方程就变成了零阶自然关系。例如，树级方程

$$\frac{m_W^2}{m_Z^2}=\cos^2\theta_w, \qquad A_{LR}^e=\frac{(\frac{1}{2}-\sin^2\theta_w)^2-(\sin^2\theta_w)^2}{(\frac{1}{2}-\sin^2\theta_w)^2+(\sin^2\theta_w)^2} \tag{21.113}$$

是联系弱相互作用的四个可观测量的自然关系。对这些关系的修正将是理论的定义良好的预测。

原则上，我们现在可以计算出修正了参数m_W、m_Z、G_F、α和A_{LR}^e的所有单圈图。然而，这是一项非常复杂的工作，需要大量的技术设备*。在这一节中，我们将集中讨论一个可以独立考虑的简单源的辐射修正。除了反常的问题，电弱理论并没有限制夸克或轻子的代的数量。因此，计算由一个夸克或轻子二重态引起的单圈修正是明智的，也是规范不变的。为了明确起见，我们考虑(t,b)夸克二重态的效应。

通过集中在由重夸克引起的辐射修正，我们极大地简化了我们面前的计算任务。弱相互作用规范理论的各种可观测量是从初态和末态是轻费米子(轻子或夸克)的散射振幅的测量中提取出来的。例如，G_F是根据低能弱相互作用过程的强度来测量的，通常选择的是μ子衰变的速率：$\mu\to\nu_\mu e^-\bar{\nu}_e$。对于任何这样的过程，都存在多种类型的单圈修正，如图21.11所示。除了对矢量玻色子传播子的修正外，还有顶点修正、箱图和实光子发射图。一般来说，各类图的贡献不是规范不变的；相反，规范不变性是由图21.11(b)、(c)和(d)中这类图之间的相消所导致的。然而，由于重夸克不直接与轻的轻子耦合，(t,b)二重态只贡献了图21.11中的单个图(f)，它本身必须是规范不变的。这一结论同样适用于(t,b)对其他轻子弱相互作用过程的修正。如果我们忽略掉将t和b与其他种类混合的CKM角，结论也会延伸到包含轻夸克的弱相互作用过程。

类似的情况也发生在其他种类的粒子上，比如希格斯区的粒子。希格斯区粒子与轻夸克或轻子的耦合正比于费米子的质量，这一点我们常常可以忽略。因此，来自希格斯区粒子的最重要贡献是传播子修正。由单个标量场产生的自发对称性

*关于电弱理论的单圈修正的详细理论讨论可以在W. Hollik, Fortscr. *d. Physik* 38, 165 (1990)中找到。

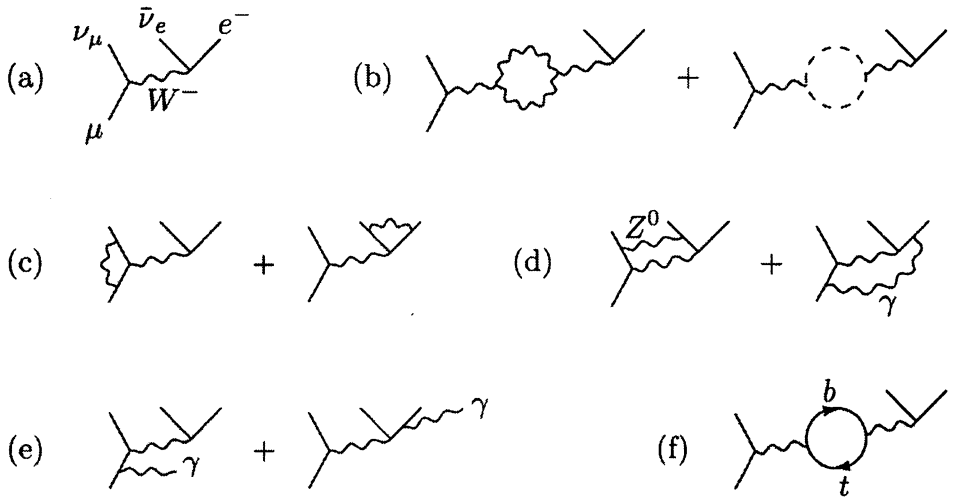


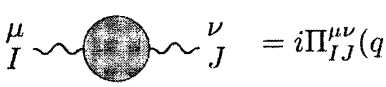
图21.11 弱相互作用规范理论中μ衰变的辐射修正的例子:
(a)最低阶图;(b)传播子修正;(c)顶点图;(d)箱图;
(e)实光子修正;(f) (t,b)二重态的贡献。

破缺的情况特别容易分析: 这是在问题21.4中做的。来自不能直接耦合到外部费米子的粒子的圈修正通常被称为**斜向的**(oblique)，因为它们只能间接地进入低能弱相互作用。

重夸克修正的影响

我们的任务是计算由(t,b)二重态引起的对关系(21.113)的修正。这两个关系依赖于五个可观测量m_W、m_Z、A^e_{LR}、α和G_F，最后两个参数通过θ_ω和式(21.111)而进入。我们将把这五个量表示成裸参数g、g'和v的函数，其修正正比于t和b真空极化图的组合。当我们计算关系(21.113)的修正时，零阶项会自然消去。

我们需要的圈振幅如图21.12所示。为了最直接地处理这些修正，我们为真空极化振幅引入统一的符号。将包含规范玻色子I和J的真空极化振幅表示为



$$= i\Pi^{\mu\nu}_{IJ}(q), \tag{21.114}$$

其中I、J可以是γ、W、Z。当规范玻色子具有质量时，真空极化振幅本身不需要是横向的，因此$\Pi^{\mu\nu}_{IJ}(q)$在$q^2=0$时不需要消失。因此，我们将根据QED的情况改变我们的符号，把$\Pi^{\mu\nu}_{IJ}(q)$的分解写成张量结构

$$\Pi^{\mu\nu}_{IJ}(q) = \Pi_{IJ}(q^2)g^{\mu\nu} - \Delta(q^2)q^\mu q^\nu. \tag{21.115}$$

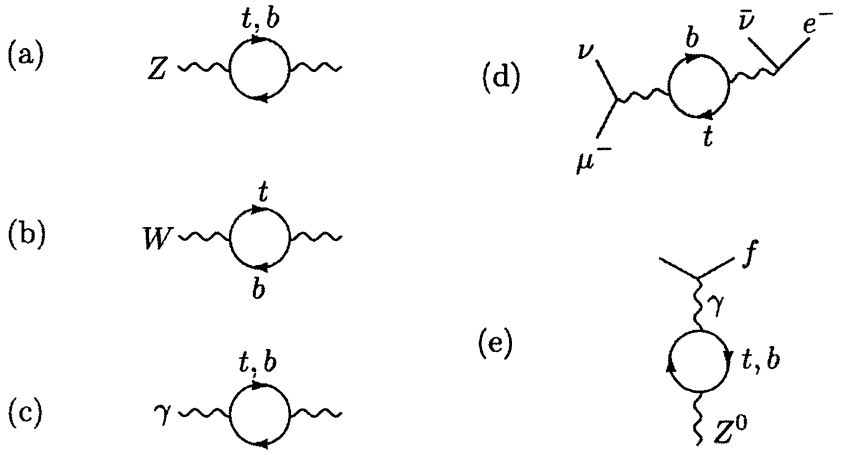


图21.12。t和b对弱相互作用可观测量的单圈修正:
(a)m_Z; (b)m_W; (c)α; (d)G_F; (e) A_{LR}^e.

在接下来的所有例子中，因子q^μ将点乘到轻子流中，和式(21.97)一样给出结果为零。因此，形状因子$\Delta(q^2)$将从我们的计算中去掉。我们之前的结果，即在QED中$\Pi^{\mu\nu}(q)$在$q^2=0$时消失，作为一组限制出现在这个形式理论中

$$\Pi_{\gamma\gamma}(0)=\Pi_{\gamma Z}(0)=0. \tag{21.116}$$

对于其他振幅，我们选择符号约定以使得$\Pi_{IJ}(m^2)$的正值为规范玻色子给出了一个正的质量移动。让我们还定义

$$\Pi'_{\gamma\gamma}(0)=\left.\frac{d\Pi_{\gamma\gamma}}{dq^2}\right|_{q^2=0}; \tag{21.117}$$

这是我们在式(7.73)中称为$\Pi(0)$的量。

现在我们用这个符号来写5个可观测量的圈修正。图21.12中的前两个图是简单的质量修正，因此，直接地，

$$\begin{aligned} m_Z^2&=(g^2+g'^2)\frac{v^2}{4}+\Pi_{ZZ}(m_Z^2),\\ m_W^2&=g^2\frac{v^2}{4}+\Pi_{WW}(m_W^2). \end{aligned} \tag{21.118}$$

注意，这两个真空极化振幅都是在各自的传播子的极点下计算的。为了计算由单圈修正引起的α的移动，我们考虑了图21.12(c)对低能库仑势的效应。领头阶传播子的值和单圈修正结合，给出因子

$$\frac{-ie^2}{q^2}\left(1+i\Pi_{\gamma\gamma}(q^2)\cdot\frac{-i}{q^2}\right), \tag{21.119}$$

在这个式子中，和(21.109)一样e^2是用裸变量表示的。因此在$q^2 \to 0$的极限下，如下关系对α的观测值进行了修正

$$4\pi\alpha = \frac{g^2 g'^2}{g^2 + g'^2}\big(1 + \Pi'_{\gamma\gamma}(0)\big). \tag{21.120}$$

类似的方式，图21.12(d)给出了导致μ衰变的四费米子弱相互作用过程的修正强度。领头图和单圈图之和为

$$\frac{g^2}{q^2 - m_W^2}\Big(1 + i\Pi_{WW}(q^2)\frac{-i}{q^2 - m_W^2}\Big). \tag{21.121}$$

于是弱相互作用顶点在$q^2 = 0$时的有效强度被移动为:

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2v^2}\Big(1 - \frac{\Pi_{WW}(0)}{m_W^2}\Big). \tag{21.122}$$

请注意，在只保留斜向修正的近似下，每一个低能弱相互作用振幅的强度都被同一因子修正了。

最后，根据图21.12(e)，极化不对称A_{LR}^e被(t,b)圈图修正了。带有中间Z^0的反常图被加到Z^0传播子中，并且不影响顶点的形式。在零阶，根据公式(20.71)，Z^0与任何左手或右手轻费米子的耦合被给出为

$$\sqrt{g^2 + g'^2}\Big(T^3 - \frac{g'^2}{g^2 + g'^2}Q\Big). \tag{21.123}$$

Q的系数是$\sin^2\theta_\omega$的裸值。图21.12(e)中的圈图为这项增加了贡献

$$i\Pi_{Z\gamma}(q^2)\frac{-i}{q^2}\cdot(ieQ). \tag{21.124}$$

为了讨论在Z^0共振处的不对称性，我们令$q^2 = m_Z^2$。(21.124)项加上(21.123)中正比于Q的那部分；于是它移动了$\sin^2\theta_\omega$的裸值。当我们包括这个修正时，Z^0耦合的形式就取为

$$\sqrt{g^2 + g'^2}\big(T^3 - s_*^2 Q\big), \tag{21.125}$$

where

$$s_*^2 = \frac{g'^2}{g^2 + g'^2} - \frac{e}{\sqrt{g^2 + g'^2}}\frac{\Pi_{\gamma Z}(m_Z^2)}{m_Z^2}. \tag{21.126}$$

第20.2节中讨论的Z^0共振态的不对称性被计算为这些耦合的比率。因此，为了包括进对A_{LR}^f的斜向辐射修正，对于任何的轻费米子种类f，用s_*^2代替零阶$\sin^2\theta_\omega$，我们要重新计算公式(20.96)。

事实上，我们可以说s_*^2给出了一种由可观测量来定义$\sin^2\theta_\omega$的额外方法，可以与(21.110)中的s_W^2和(21.111)中的s_0^2的定义相比较。严格地说，由Z^0上的不对称性所确定的$\sin^2\theta_\omega$值，会通过上面分析中没有包括的顶点修正，而依赖于夸克或轻子量子数。然而，这些种类依赖的修正很小，可以系统地减除，从而定义一个普遍的s_*^2，它决定了所有费米子种类的弱相互作用不对称性。

$\sin^2\theta_\omega$的三个定义在零阶上一致，但收到了不同的辐射修正。如果我们只考虑斜向修正，就很容易得到这三个量的紧凑公式。从(21.126)开始，我们有

$$s_*^2 = \frac{g'^2}{g^2+g'^2} - \sin\theta_w\cos\theta_w\frac{\Pi_{\gamma Z}}{m_Z^2}. \tag{21.127}$$

在单圈修正的前置因子中，我们可以忽略$\sin^2\theta_\omega$的裸值和重正化值之间的差别。通过取式(21.118)中两个公式的比值，可以得到相似的s_W^2的表达式:

$$s_W^2 = \frac{g'^2}{g^2+g'^2} - \frac{1}{m_Z^2}\left(\Pi_{WW}(m_W^2) - \frac{m_W^2}{m_Z^2}\Pi_{ZZ}(m_Z^2)\right). \tag{21.128}$$

最后，我们可以计算(21.111)定义的$\sin^2\theta_\omega$的斜向修正。这很容易通过写$\delta\theta_0$来表示θ_0的真实值和裸值之间的差值，然后展开(21.111)为如下:

$$2\cos 2\theta_0\,\delta\theta_0 = \frac{1}{2}\sin 2\theta_0\left[\frac{\delta\alpha}{\alpha} - \frac{\delta G_F}{G_F} - \frac{\delta m_Z^2}{m_Z^2}\right]. \tag{21.129}$$

α、G_F和m_Z^2的移动可以从(21.120)、(21.122)和(21.118)中读取。然后我们可以重新构造

$$\sin^2\theta_0 = \frac{g'^2}{g^2+g'^2} + 2\sin\theta_0\cos\theta_0\delta\,\theta_0. \tag{21.130}$$

将各部分组装起来，在零阶计算真空极化图的系数，我们得到

$$\sin^2\theta_0 = \frac{g'^2}{g^2+g'^2} + \frac{\sin^2\theta_w\cos^2\theta_w}{\cos^2\theta_w - \sin^2\theta_w}\left[\Pi'_{\gamma\gamma}(0) + \frac{1}{m_W^2}\Pi_{WW}(0) - \frac{1}{m_Z^2}\Pi_{ZZ}(m_Z^2)\right]. \tag{21.131}$$

不难发现，(21.127)、(21.128)和(21.131)每个式子均存在紫外发散。然而，如果弱相互作用规范理论是可重正的，那么当我们计算对任意的零阶自然关系的

---

*这在D. Kennedy and B. W. Lynn, *Nucl. Phys.* B322, 1(1989)中有清楚的解释。

修正时，这些发散应该相消。在我们所考虑的情形下，可重正性意味着$\sin^2\theta_\omega$的各种不同的定义应该只在紫外有限的表达式上有所不同。

我们现在几乎准备好来明确地检查这个预测了。我们可以通过重造真空极化振幅，以使得与规范玻色子耦合的量子数更明确，从而在我们的关系中对不同物理量$\sin^2\theta_\omega$的紫外发散结构进行阐明。回想起式(20.71)，Z玻色子耦合到$SU(2)$和电磁量子数的组合$(T^3-\sin^2\theta_\omega Q)$。同样地，$W$玻色子耦合到$T^\pm$，或等价地，耦合到$T^1$、$T^2$。将真空极化振幅分解成依赖于这些特定量子数的项是有用的。我们还将提取(20.71)中显示的耦合常数。因此我们替换

$$\begin{aligned}
\Pi_{\gamma\gamma} &= e^2\Pi_{QQ},\\
\Pi_{\gamma Z} &= \left(\frac{e^2}{\sin\theta_w\cos\theta_w}\right)\left[\Pi_{3Q}-\sin^2\theta_w\Pi_{QQ}\right],\\
\Pi_{ZZ} &= \left(\frac{e}{\sin\theta_w\cos\theta_w}\right)^2\left[\Pi_{33}-2\sin^2\theta_w\Pi_{3Q}+\sin^4\theta_w\Pi_{QQ}\right],\\
\Pi_{WW} &= \left(\frac{e}{\sin\theta_w}\right)^2\Pi_{11},
\end{aligned} \tag{21.132}$$

其中Q表示电荷，1,2,3表示的是弱相互作用$SU(2)$的分量。

真空极化振幅总是可以看作是一对流的期望值。从这个观点来看，(21.132)右边的量是具有确定量子数的流期望值。例如，Π_{33}是一对$SU(2)$流$J^{\mu 3}$的期望值。作用在标准费米子上时，J^μ_a是左手流，J^μ_Q是矢量流。

式(21.132)中流期望值的紫外发散具有形式

$$\begin{aligned}
\Pi_{33} &\sim \left(A+Bq^2\right)\log\Lambda^2,\\
\Pi_{11} &\sim \left(A+Bq^2\right)\log\Lambda^2,\\
\Pi_{3Q} &\sim \left(Bq^2\right)\log\Lambda^2,\\
\Pi_{QQ} &\sim \left(Cq^2\right)\log\Lambda^2.
\end{aligned} \tag{21.133}$$

我们将在本节稍后的部分中详细说明这一点。然而，我们可以通过以下粗略的论证来理解这种结构：由于理论的对称性应该在大动量下恢复，因此Π_{33}和Π_{11}的振幅应该具有相同的紫外发散，它们只是在对称空间中的方向不同。Π_{3Q}的斜率的发散应该与Π_{33}的斜率的发散相关，因为$Q=T^3+Y$，以及Π_{3Y}是渐进不重要的(因为$\mathrm{tr}[T^3Y]=0$)。我们在式(21.116)中指出，Π_{3Q}和Π_{QQ}在$q^2=0$时消失；因此，它们没有q^2依赖的发散。

现在我们将改写(21.113)中的两个零阶自然关系，以使得我们就可以应用(21.133)。为了做到这一点，我们取式(21.127)、(21.128)和(21.131)的差来得到

$$s_*^2-\sin^2\theta_0=\frac{\sin^2\theta_w\cos^2\theta_w}{\cos^2\theta_w-\sin^2\theta_w}\left\{\frac{\Pi_{ZZ}(m_Z^2)}{m_Z^2}-\frac{\Pi_{WW}(0)}{m_W^2}-\Pi'_{\gamma\gamma}(0)\right.$$
$$\left.-\frac{\cos^2\theta_w-\sin^2\theta_w}{\sin\theta_w\cos\theta_w}\frac{\Pi_{\gamma Z}(m_Z^2)}{m_Z^2}\right\},$$
$$s_W^2-s_*^2=-\frac{\Pi_{WW}(m_W^2)}{m_Z^2}+\frac{m_W^2}{m_Z^2}\frac{\Pi_{ZZ}(m_Z^2)}{m_Z^2}+\sin\theta_w\cos\theta_w\frac{\Pi_{\gamma Z}(m_Z^2)}{m_Z^2}. \tag{21.134}$$

插入(21.132)，并在已经是单圈阶的项的系数中使用关系$m_W=m_Z\cos\theta_\omega$，经过一些代数运算，我们发现

$$s_*^2-\sin^2\theta_0=\frac{e^2}{(\cos^2\theta_w-\sin^2\theta_w)m_Z^2}\left\{\left[\Pi_{33}(m_Z^2)-\Pi_{11}(0)-\Pi_{3Q}(m_Z^2)\right]\right.$$
$$\left.+\sin^2\theta_w\cos^2\theta_w\left[\Pi_{QQ}(m_Z^2)-m_Z^2\Pi'_{QQ}(0)\right]\right\},$$
$$s_W^2-s_*^2=\frac{e^2}{\sin^2\theta_w m_Z^2}\left[\Pi_{33}(m_Z^2)-\Pi_{11}(m_W^2)-\sin^2\theta_w\Pi_{3Q}(m_Z^2)\right]. \tag{21.135}$$

如果真空极化积分的紫外发散确实具有(21.133)的结构，则(21.135)的括号中各表达式的发散部分会消失，弱相互作用对s_*^2, s_W^2和$\sin^2\theta_0$的差给出了明确、有限的预测。

真空极化振幅的计算

我们可以通过明确计算t夸克和b夸克的真空极化图来验证发散结构(21.133)。与其逐一计算，最简单的方法是一劳永逸地计算最一般的费米子真空极化振幅，然后作为这些振幅的特殊情况，恢复前一段中要求的振幅。

考虑图12.13中所示的两个真空极化振幅。这些图是由两个质量分别为m_1和m_2的费米子传播子来构造成的，它们由左手或右手流连接起来。我们称两个左手流的真空极化振幅称为$\Pi_{LL}^{\mu\nu}(q)$，一个左手和一个右手流的真空极化振幅称为$\Pi_{LR}^{\mu\nu}(q)$。由于真空极化仅依赖于一个动量和两个矢量指标，所以它们不可能包含一个涉及$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$的不变量。因此，流的其他组合的振幅和它们是相关的

$$\Pi_{RR}^{\mu\nu}(q)=\Pi_{LL}^{\mu\nu}(q),\qquad \Pi_{RL}^{\mu\nu}(q)=\Pi_{LR}^{\mu\nu}(q). \tag{21.136}$$

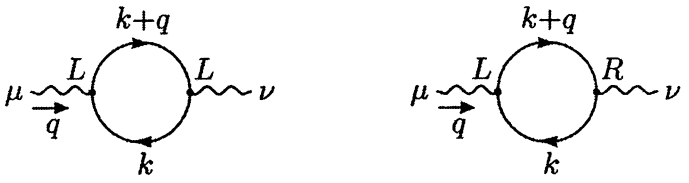


图21.13 费米子流的基本真空极化振幅

此外，使用带有反对易γ^5的维数正规化对这些图进行正规化没有困难，这是我们在第19.4节末尾批注的正规化方案。将矢量流的真空极化重构为

$$\Pi^{\mu\nu}_{VL}(q) = \Pi^{\mu\nu}_{LL}(q) + \Pi^{\mu\nu}_{RL}(q). \tag{21.137}$$

纯左手流的真空极化被给出为



$$\begin{aligned} &= (-1)\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\mathrm{tr}\Big[(i\gamma^\mu)\Big(\frac{1-\gamma^5}{2}\Big)\frac{i(\not k + m_1)}{k^2-m_1^2} \\ &\qquad\qquad \cdot (i\gamma^\nu)\Big(\frac{1-\gamma^5}{2}\Big)\frac{i(\not k + \not q + m_2)}{(k+q)^2-m_2^2}\Big] \\ &= -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\mathrm{tr}\big[\gamma^\mu \not k \gamma^\nu (\not k + \not q)\Big(\frac{1+\gamma^5}{2}\Big)\big]\cdot \frac{1}{(k^2-m_1^2)((k+q)^2-m_2^2)}. \end{aligned} \tag{21.138}$$

前置因子(-1)来自费米子圈。不存在μ和ν是反对称的张量结构，所以我们现在可以去掉这γ^5项。从这里开始，计算的步骤和第7.5节一样。我们用下式组合分母

$$\frac{1}{(k^2-m_1^2)((k+q)^2-m_2^2)} = \int_0^1 dx\,\frac{1}{(\ell^2-\Delta)^2}, \tag{21.139}$$

where

$$\ell = k + xq, \qquad \Delta = xm_2^2 + (1-x)m_1^2 - x(1-x)q^2. \tag{21.140}$$

然后，用维数正规化积分，遵循导致了公式(7.90)的步骤，我们发现



$$\begin{aligned} &= -\frac{4i}{(4\pi)^{d/2}}\int_0^1 dx\,\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}}\big[g^{\mu\nu}\big(x(1-x)q^2 \\ &\qquad\qquad - \tfrac{1}{2}(xm_2^2 + (1-x)m_1^2)\big) - x(1-x)q^\mu q^\nu\big]. \end{aligned} \tag{21.141}$$

注意$\Pi^{\mu\nu}_{LL}$和它对q^2的一阶导数都是对数发散的。

真空极化振幅$\Pi_{LR}^{\mu\nu}$可以用一种非常相似的方法得到。根据费曼规则



$$= (-1)\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ \mathrm{tr}\Big[(i\gamma^\mu)\Big(\frac{1-\gamma^5}{2}\Big)\frac{i(\not{k}+m_1)}{k^2-m_1^2} \cdot (i\gamma^\nu)\Big(\frac{1+\gamma^5}{2}\Big)\frac{i(\not{k}+\not{q}+m_2)}{(k+q)^2-m_2^2}\Big]$$

$$= -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\mathrm{tr}\Big[\gamma^\mu m_1\gamma^\nu m_2\Big(\frac{1+\gamma^5}{2}\Big)\Big]\frac{1}{(k^2-m_1^2)((k+q)^2-m_2^2)}. \tag{21.142}$$

从这里开始，与前一段相同的操作将导致



$$= -\frac{2i}{(4\pi)^{d/2}}\int_0^1 dx\,\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}}\big[g^{\mu\nu}m_1m_2\big]. \tag{21.143}$$

作为检查，我们可以使用(21.141)，(21.143)和(21.136)，令$m_1 = m_2 = m$，来将矢量流的QED真空极化结合起来。我们发现

$$\begin{aligned}\Pi_{VV}^{\mu\nu}(q) &= e^2\big[\Pi_{LL}^{\mu\nu} + \Pi_{LR}^{\mu\nu} + \Pi_{RL}^{\mu\nu} + \Pi_{RR}^{\mu\nu}\big] \\ &= \frac{-8ie^2}{(4\pi)^{d/2}}\int_0^1 dx\,\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}}\big[x(1-x)q^2g^{\mu\nu} - x(1-x)q^\mu q^\nu\big],\end{aligned} \tag{21.144}$$

其中现在有$\Delta = m^2 - x(1-x)q^2$。这与我们从7.5节得到的结果完全一致。

正如我们在(21.115)下面所讨论的，只有真空极化振幅中与$g^{\mu\nu}$成正比的项将进入我们关于弱相互作用辐射修正的表达式。因此，我们可以通过引用这个领头的形式因子的结果，来对基本真空极化振幅的计算进行总结：

$$\Pi_{LL}(q^2) = \Pi_{RR}(q^2) = -\frac{4}{(4\pi)^{d/2}}\int_0^1 dx\,\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}}\big[x(1-x)q^2 - \tfrac{1}{2}(xm_2^2 + (1-x)m_1^2)\big];$$

$$\Pi_{LR}(q^2) = \Pi_{LR}(q^2) = -\frac{2}{(4\pi)^{d/2}}\int_0^1 dx\,\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}}\big[m_1m_2\big]. \tag{21.145}$$

根据这些项，我们可以对弱相互作用规范理论中任何需要的t和b夸克的真空极化进行结合。为了更方便地使用这些表达式，我们将在$d \to 4$的极限中展开物理量(21.145)。如果我们设$\epsilon = 4 - d$，则上述表达式的被积函数根据下式简化

$$\frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}} \to \frac{1}{(4\pi)^2} \Big[\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log(4\pi) - \log \Delta \Big]. \tag{21.146}$$

Let

$$E = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log(4\pi) - \log(M^2), \tag{21.147}$$

其中M是一个任意的减除标度。如下定义是有用的

$$\begin{aligned}
b_0(12X) \equiv b_0(m_1^2, m_2^2, q_X^2) &= \int_0^1 dx \, \log\big(\Delta(m_1^2, m_2^2, q_X^2)/M^2\big), \\
b_1(12X) \equiv b_1(m_1^2, m_2^2, q_X^2) &= \int_0^1 dx \, x \log\big(\Delta(m_1^2, m_2^2, q_X^2)/M^2\big), \\
b_2(12X) \equiv b_2(m_1^2, m_2^2, q_X^2) &= \int_0^1 dx \, x(1-x) \log\big(\Delta(m_1^2, m_2^2, q_X^2)/M^2\big).
\end{aligned} \tag{21.148}$$

下面将证明简记符号是有用的。在(21.148)中，X标记动量标度；我们将会需要$q_X = 0,\ m_W,\ m_Z$。注意，对于相同的质量，

$$b_1(11X) = \tfrac{1}{2} b_0(11X). \tag{21.149}$$

有了这个符号，

$$\begin{aligned}
\Pi_{LL}(q_X^2) = -\frac{4}{(4\pi)^2} \Big[\big(\tfrac{1}{6} q_X^2 - \tfrac{1}{4}(m_1^2 + m_2^2)\big) E - q_X^2 b_2(12X) \\
+ \tfrac{1}{2} \big(m_2^2 b_1(12X) + m_1^2 b_1(21X) \big) \Big]
\end{aligned} \tag{21.150}$$

and

$$\Pi_{LR}(q_X^2) = -\frac{2}{(4\pi)^2} \big[m_1 m_2 E - m_1 m_2 b_0(12X) \big]. \tag{21.151}$$

现在我们可以根据正比于E的发散与正比于b_i的有限部分，重构出式(21.135)中出现的所有特定真空极化振幅。最简单的是电磁流的期待值，用我们现在的符号

给出就是

$$\Pi_{QQ}(q_X^2) = -3 \cdot \frac{8}{(4\pi)^2}\Big[\big(\tfrac{2}{3}\big)^2\big(\tfrac{1}{6}q_X^2 E - q_X^2 b_2(ttX)\big) + \big(\tfrac{1}{3}\big)^2\big(\tfrac{1}{6}q_X^2 E - q_X^2 b_2(bbX)\big)\Big]. \tag{21.152}$$

前置因子3是对颜色求迹。正如我们从QED中所预期的，(21.152)只在一个正比于q_X^2的项中包含一个发散。其他振幅的发散部分是

$$\begin{aligned}
\Pi_{33}(q_X^2) &= -\frac{12}{(4\pi)^2}\cdot\tfrac{1}{2}\big[\tfrac{1}{6}q_X^2 - \tfrac{1}{4}(m_t^2+m_b^2)\big]E + \cdots,\\
\Pi_{11}(q_X^2) &= -\frac{12}{(4\pi)^2}\cdot\tfrac{1}{2}\big[\tfrac{1}{6}q_X^2 - \tfrac{1}{4}(m_t^2+m_b^2)\big]E + \cdots,\\
\Pi_{3Q}(q_X^2) &= -\frac{12}{(4\pi)^2}\cdot\tfrac{1}{2}\big[\tfrac{1}{6}q_X^2\big]E + \cdots.
\end{aligned} \tag{21.153}$$

这些发散确实符合式(21.133)中所述的模式，因此(21.135)中给出的弱相互作用规范理论的预测没有紫外发散。

m_t的效应

使用我们所发展的符号，我们可以把关系式(21.135)的有限部分写成紧凑形式。第一个关系变成

$$\begin{aligned}
s_*^2 - \sin^2\theta_0 = \frac{3\alpha}{\pi(\cos^2\theta_w - \sin^2\theta_w)}\Big\{&\big(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{3}\big)b_2(ttZ) + \big(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{6}\big)b_2(bbZ)\\
&- \tfrac{1}{4}\Big(\frac{m_t^2}{m_Z^2}[b_1(ttZ) - b_1(bt0)] + \frac{m_b^2}{m_Z^2}[b_1(bbZ) - b_1(tb0)]\Big)\\
&+ 2\sin^2\theta_w\cos^2\theta_w\big(\tfrac{4}{9}[b_2(ttZ) - b_2(tt0) - m_Z^2 b_2'(tt0)]\\
&+ \tfrac{1}{9}[b_2(bbZ) - b_2(bb0) - m_Z^2 b_2'(bb0)]\big)\Big\}.
\end{aligned} \tag{21.154}$$

类似地，第二个关系变成

$$\begin{aligned}
s_W^2 - s_*^2 = \frac{3\alpha}{\pi\sin^2\theta_w}\Big\{&\big(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{3}\sin^2\theta_w\big)b_2(ttZ) + \big(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{6}\sin^2\theta_w\big)b_2(bbZ)\\
&- \tfrac{1}{4}\cos^2\theta_w b_2(tbW)\\
&- \tfrac{1}{4}\Big(\frac{m_t^2}{m_Z^2}[b_1(ttZ) - b_1(btW)] + \frac{m_b^2}{m_Z^2}[b_1(bbZ) - b_1(tbW)]\Big)\Big\}.
\end{aligned} \tag{21.155}$$

虽然现在很容易求出关系(21.154)和(21.155)的完整表达式，但是在这里我们只在t夸克质量变得很大的极限中确认出最重要的项就满足了。注意，这些表

达式的每一个，都有一些项的系数与m_t^2/m_Z^2成正比。这些项在真空极化振幅的简单组合中最容易理解

$$\begin{aligned}\Pi_{11}(0)-\Pi_{33}(0) &= \frac{12}{(4\pi)^2}\frac{1}{4}\Big[m_t^2\big(b_1(tt0)-b_1(bt0)\big)+m_b^2\big(b_1(bb0)-b_1(tb0)\big)\Big] \\ &= \frac{3}{16\pi^2}\int_0^1 dx\left\{xm_t^2\log\frac{m_t^2}{M^2}+(1-x)m_b^2\log\frac{m_b^2}{M^2}\right. \\ &\qquad\left.-(xm_t^2+(1-x)m_b^2)\log\frac{xm_t^2+(1-x)m_b^2}{M^2}\right\} \\ &= -\frac{3}{16\pi^2}\int_0^1 dx\left\{xm_t^2\log\frac{xm_t^2+(1-x)m_b^2}{m_t^2}+\mathcal{O}(m_b^2)\right\} \\ &= \frac{3}{16\pi^2}\cdot\frac{1}{4}m_t^2+\mathcal{O}(m_b^2) \qquad (21.156)\end{aligned}$$

对于$m_t \gg m_b$。如果m_t也比m_Z大得多，我们可以在关系(21.154)，(21.155)的每个中找到一个正比于m_t^2/m_Z^2的贡献，方法是将参数$q_X^2=m_Z^2$替换为$q_X^2=0$，并使用(21.156)和忽略所有其他贡献。通过对(21.154)和(21.155)的详细研究可以证明，这个程序给出了m_t的完整的领头项。结果是

$$\begin{aligned}s_*^2-\sin^2\theta_0 &= -\frac{3\alpha}{16\pi(\cos^2\theta_w-\sin^2\theta_w)}\frac{m_t^2}{m_Z^2}+\cdots, \\ s_W^2-s_*^2 &= -\frac{3\alpha}{16\pi\sin^2\theta_w}\frac{m_t^2}{m_Z^2}+\cdots,\end{aligned} \qquad (21.157)$$

其中省略的项是α阶的且没有增强。

增强因子m_t^2/m_Z^2正是我们在21.2节中对顶夸克衰变的研究中发现的。它反映的事实是，顶夸克的一些电弱耦合有效地正比于λ_t——顶夸克与希格斯区的耦合，而不是简单的弱相互作用耦合g。

s_*^2和s_W^2公式的完整数值计算如图21.14所示。为了将本节的结果与实验结果进行比较，我们除了加入顶夸克效应外，还加入m_t无关的单圈修正——来源于包含W和Z玻色子以及轻夸克和轻子的圈。在图中，这些预测与s_*^2值(通过测量Z^0极化和前后不对称性得到)和s_W^2值(通过测量W玻色子质量得到)进行了比较。

根据图，弱相互作用规范理论为了与实验的一致性，需要顶夸克质量辐射修正(或来源于其他重粒子的类似辐射修正)。预测顶夸克的质量约等于170 GeV。

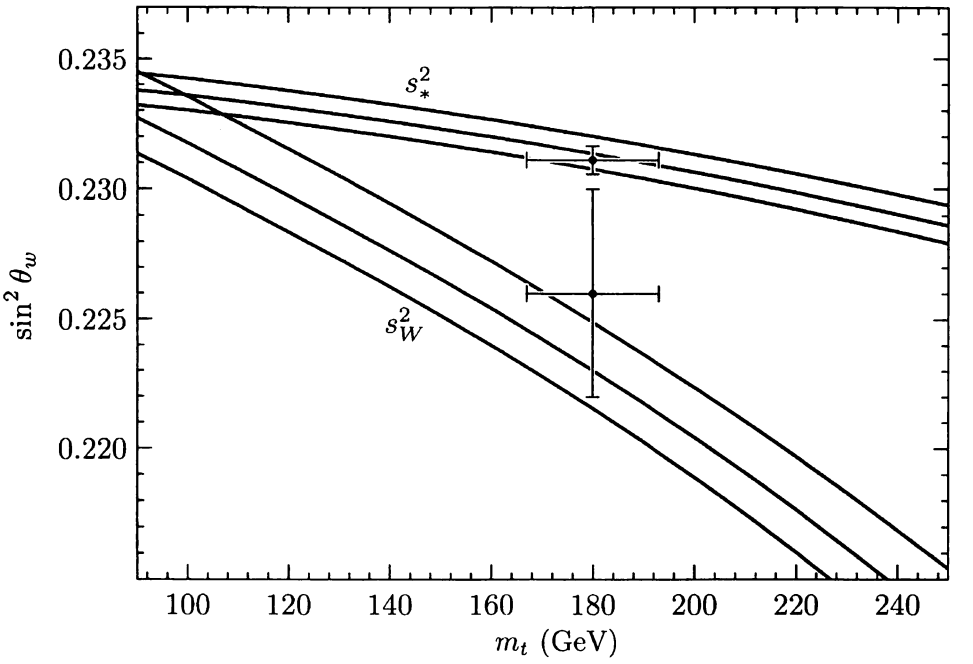


图21.14 对于固定的α, G_F, m_Z, s_*^2和s_W^2对顶夸克质量的依赖性。每组的三条曲线对应于希格斯玻色子质量的三个不同值：100、300、1000 GeV。将这些曲线与s_*^2和s_W^2的值进行比较，它们取自表20.1中引用的Langacker和Erler的文章，还比较了顶夸克质量的CDF/D0值，由式(21.159)中给出。

对所有中性流弱相互作用的数据的最近一项分析已经给出了预测*

$$m_t = 169 \pm 24 \text{ GeV}. \tag{21.158}$$

就在这本书完成的时候，费米实验室的CDF和D0实验宣布了在质子-反质子散射中观察到顶夸克对的产生。根据对被认为包含顶夸克的事件进行运动学拟合，这些实验报道说**

$$m_t = 180 \pm 13 \text{ GeV}. \tag{21.159}$$

发现顶夸克正好在精确电弱测量所要求的范围内是相当了不起的。我们只能得出结论说，在我们前面研究过的弱相互作用和电磁、强、标量相互作用的领域中，量子场论所预测的涨落在大自然的现象中留下了印记。

---

*P. Langacker and J. Erler, in Review of Particle Properties, *Phys. Rev.* **D50**, 1304 (1994).

F. Abe, et. al, *Phys. Rev. Lett.* **74, 2626(1995): S. Abachi, et. al, *Phys. Rev. Let.* **74**, 2632(1995)

Final Project

希格斯玻色子的衰变

在 20.2 节的最后，我们讨论了弱相互作用中自发对称破缺的起源之谜。最简单的假设是弱相互作用的$SU(2) \times U(1)$规范对称性被一个二分量标量场ϕ的期望值破缺。然而，由于我们几乎没有关于这种对称性破缺机制的实验信息，许多其他的可能性也可以提出。

最终，这个问题应该通过与对称性破缺有关的粒子的实验观察来解决。为了形成精确的实验测试，我们应该计算出这些粒子的期望性质。我们在 20.2 节中看到，如果对称性确实被一个单标量场ϕ破缺了，那么这个对称性破缺区只贡献了一个新粒子，一个叫做希格斯玻色子的标量h^0。这个粒子的质量m_h是未知的。然而，h^0与已知费米子和玻色子的耦合完全是由这些粒子的质量和弱相互作用耦合常数决定的。因此，有可能详细地计算出h^0产生和衰变的振幅。$SU(2) \times U(1)$对称性破缺的更复杂模型通常包含一个或多个与h^0共享一些性质的粒子。因此，本研究是一个有用的起点，在对这些模型的实验测试进行更广泛地分析之前。

在这个最后的项目中，你将计算希格斯玻色子h^0衰变为一对夸克、轻子和规范玻色子的振幅。计算结果很好地说明了微扰论在非阿贝尔规范场中的作用。那些涉及夸克和胶子的希格斯玻色子的衰变带到了 QCD 方面。因此，本练习回顾了第三部分中所有重要的技术方法。除了(a)部分末尾提出的疑问外，问题只依赖于第三部分中未加星号的章节材料。第 20 章中的材料起着至关重要的作用。来自 21 章的材料只在(b)和(f)部分才进入分析，而问题的其他部分(除了(h)部分的最后总结)不依赖这章的材料。如果你已经学习了第 19.5 节，你将会对第(c)和(f)部分的结果有一些额外的见解，但是这种见解对于解决这个问题不是必要的。

那么，考虑具有一个希格斯标量场ϕ的 Glashow-Weinberg-Salam 电弱理论的最小形式。这个理论的物理希格斯玻色子h^0在 20.2 节中讨论过，我们在那里

列出了这个粒子与夸克、轻子和规范玻色子的耦合。你现在可以使用那里的信息计算h^0各种可能衰变的振幅，作为它的质量m_h的函数。你会发现衰变模式对希格斯玻色子的质量有一个复杂的依赖性，在不同的质量范围会有不同的衰变模式在支配着。各种衰变率对m_h的依赖性，说明了我们在第三部分讨论过的规范理论的物理的许多方面。

在计算这个练习时，你应该把m_h看作一个自由参数。对于弱相互作用理论的其他参数，可以使用以下值：$m_b = 5\ \text{GeV}, m_t = 175\ \text{GeV}, m_W = 80\ \text{GeV}, m_Z = 91\ \text{GeV}, \sin^2\theta_\omega = 0.23, \alpha_s(m_Z) = 0.12$。

(a) 首先计算$h^0 \to f\bar{f}$的速率，其中f是标准模型中的夸克或轻子。在一个完全平凡的计算之后，你应该会发现

$$\Gamma(h^0 \to f\bar{f}) = \left(\frac{\alpha m_h}{8\sin^2\theta_w}\right) \cdot \frac{m_f^2}{m_W^2}\left(1 - \frac{4m_f^2}{m_h^2}\right)^{3/2} \cdot N_c(f),$$

其中对于夸克$N_c(f) = 1$，对于轻子等于3。如果你已经学习第18章，你可以通过在$m_h \gg m_q$情况下计算领头-log的QCD修正，对费米子f是夸克的情况来改进这个结果。记住夸克质量m_q是在夸克阈值$M^2 \sim m_q^2$处确定的。

(b) 如果$m_h > 2m_W$，希格斯玻色子可以衰变为W^+W^-；如果它稍微重一点，它也可以衰变成Z^0Z^0。计算到这些末态的衰变宽度。你可以通过以下方式来检验你的结果：如果$m_h \gg m_W$，对衰变的主要贡献来自于纵向极化的W或Z玻色子的产生，这种贡献可以估计如下:

$$\Gamma(h^0 \to W^+W^-) \approx \Gamma(h^0 \to \phi^+\phi^-), \quad \Gamma(h^0 \to Z^0Z^0) \approx \Gamma(h^0 \to \phi^3\phi^3),$$

其中$\phi^\pm, \phi^0$为希格斯区的Goldstone玻色子，这些关系右边的量是在无规范希格斯理论中计算。解释为什么这个陈述应该是正确的，并明确地验证它。

(c) 希格斯的第三种重要衰变模式是衰变为两个胶子。这种衰变的振幅是由包含夸克圈的图产生的。计算这些图，使用维数正则化。这些图将是有限的，但其中的微妙贡献显然依赖于正规子。通过验证它是规范不变的来检查你确实正确地计算了振幅。然后将振幅平方，构造衰变率。你应该得到

$$\Gamma(h^0 \to 2g) = \left(\frac{\alpha m_h}{8\sin^2\theta_w}\right) \cdot \frac{m_h^2}{m_W^2} \cdot \frac{\alpha_s^2}{9\pi^2} \cdot \left|\sum_q I\left(\frac{m_h^2}{m_q^2}\right)\right|^2,$$

其中求和遍历所有夸克种类，和$I(m_h^2/m_q^2)$是一个形式因子，其性质为$x \to 0$时$I(x) \to 1$, $x \to \infty$时$I(x) \to 0$。这个性质意味着衰变率的主要贡献来自非常重的夸克。在这个阶段不需要显式地计算$I(x)$；只要把它写成费曼参数积分的形式。

(d) $h^0 \to 2g$过程的存在意味着逆过程$g + g \to h^0$的存在，这是质子与质子碰撞中产生希格斯玻色子的机制。利用部分子模型推导出分宽度$pp \to h^0 + X$与总截面$\Gamma(h^0 \to 2g)$的关系。对质心能为 1-40 TeV(1 TeV = 10^3 GeV)的pp碰撞中一个 30 GeV 希格斯粒子的截面进行数值计算(单位为纳靶)。就本问题集的目的而言(尽管这实际上不是一个很好的近似)，你可以忽略对胶子分布函数Q^2的依赖性，而简单地取

$$f_g(x) = 8 \cdot \frac{1}{x}(1-x)^7.$$

你也可以设置$I(m_h^2/m_t^2) = 1$；在大约 10%上这是正确的。

(e) 你应该考虑的最后的衰变模式是$h^0 \to 2\gamma$。首先考虑包含夸克和轻子的圈图贡献。表明结果是简单地用你在(c)部分推导的形式因子$I(m_h^2/m^2)$表示的。

(f) 接下来，计算出包含W玻色子的圈图对这个衰变振幅的贡献，以及必须添加到这个图中的各种图，以获得一个规范不变的结果。最容易在Feynman-'t Hooft规范下工作。再加上很重的夸克和轻子的贡献——每个都带有电荷Q_f。你的结果在$m_h \ll m_W$的极限下应该化简为以下表达式：

$$\Gamma(h^0 \to 2\gamma) = \left(\frac{\alpha m_h}{8\sin^2\theta_w}\right) \cdot \frac{m_h^2}{m_W^2} \cdot \frac{\alpha^2}{18\pi^2} \cdot \left|\sum_f Q_f^2 \, N_c(f) - \frac{21}{4}\right|^2.$$

(g) 现在计算(c)部分定义的形状因子$I(x)$的详细行为。将(c)部分的表达式简化为一个单参数积分，然后对该积分进行数值计算。在50 GeV $< m_h <$ 500 GeV范围内绘制$I(m_h^2/m_t^2)$,并在此范围内数值(用 keV)计算衰变宽度$\Gamma(h^0 \to 2g)$。第(f)部分的计算引入了一个附加形因子；用同样的方法计算这个函数。

(h) 最后，把所有的部分放在一起。在希格斯玻色子质量为50 GeV - 500 GeV情况下，找到h^0分别到五个主要衰变模式$b\bar{b}, t\bar{t}, gg, W^+W^-, Z^0Z^0$的分支分数。

Final Project

希格斯玻色子的衰变

在 20.2 节的最后，我们讨论了弱相互作用中自发对称破缺的起源之谜。最简单的假设是弱相互作用的$SU(2) \times U(1)$规范对称性被一个二分量标量场ϕ的期望值破缺。然而，由于我们几乎没有关于这种对称性破缺机制的实验信息，许多其他的可能性也可以提出。

最终，这个问题应该通过与对称性破缺有关的粒子的实验观察来解决。为了形成精确的实验测试，我们应该计算出这些粒子的期望性质。我们在 20.2 节中看到，如果对称性确实被一个单标量场ϕ破缺了，那么这个对称性破缺区只贡献了一个新粒子，一个叫做希格斯玻色子的标量h^0。这个粒子的质量m_h是未知的。然而，h^0与已知费米子和玻色子的耦合完全是由这些粒子的质量和弱相互作用耦合常数决定的。因此，有可能详细地计算出h^0产生和衰变的振幅。$SU(2) \times U(1)$对称性破缺的更复杂模型通常包含一个或多个与h^0共享一些性质的粒子。因此，本研究是一个有用的起点，对这些模型的实验测试进行更广泛地分析。

在这个最后的项目中，你将计算希格斯玻色子h^0衰变为一对夸克、轻子和规范玻色子的振幅。计算结果很好地说明了微扰论在非阿贝尔规范场中的作用。那些涉及夸克和胶子的希格斯玻色子的衰变带到了 QCD 方面。因此，本练习回顾了第三部分中所有重要的技术方法。除了(a)部分末尾提出的疑问外，问题只依赖于第三部分中未加星号的章节材料。第 20 章中的材料起着至关重要的作用。来自 21 章的材料只在(b)和(f)部分才进入分析，而问题的其他部分(除了(h)部分的最后总结)不依赖这章的材料。如果你已经学习了第 19.5 节，你将会对第(c)和(f)部分的结果有一些额外的见解，但是这种见解对于解决这个问题是不必要。

那么，考虑具有一个希格斯标量场ϕ的 Glashow-Weinberg-Salam 电弱理论的最小形式。这个理论的物理希格斯玻色子h^0在 20.2 节中讨论过，我们在那里

列出了这个粒子与夸克、轻子和规范玻色子的耦合。你现在可以使用那里的信息计算h^0各种可能衰变的振幅，作为它的质量m_h的函数。你会发现衰变模式对希格斯玻色子的质量有一个复杂的依赖性，在不同的质量范围会有不同的衰变模式在支配着。各种衰变率对m_h的依赖性，说明了我们在第三部分讨论过的规范理论的物理的许多方面。

在计算这个练习时，你应该把m_h看作一个自由参数。对于弱相互作用理论的其他参数，可以使用以下值：$m_b = 5\ \text{GeV}, m_t = 175\ \text{GeV}, m_W = 80\ \text{GeV}, m_Z = 91\ \text{GeV}, \sin^2\theta_\omega = 0.23, \alpha_s(m_Z) = 0.12$。

(a) 首先计算$h^0 \to f\bar{f}$的速率，其中f是标准模型中的夸克或轻子。在一个完全平凡的计算之后，你应该会发现

$$\Gamma(h^0 \to f\bar{f}) = \left(\frac{\alpha m_h}{8\sin^2\theta_w}\right) \cdot \frac{m_f^2}{m_W^2}\left(1 - \frac{4m_f^2}{m_h^2}\right)^{3/2} \cdot N_c(f),$$

其中对于夸克$N_c(f) = 1$，对于轻子等于3。如果你已经学习第18章，你可以通过在$m_h \gg m_q$情况下计算领头-log的QCD修正，对费米子f是夸克的情况来改进这个结果。记住夸克质量m_q是在夸克阈值$M^2 \sim m_q^2$处确定的。

(b) 如果$m_h > 2m_W$，希格斯玻色子可以衰变为W^+W^-；如果它稍微重一点，它也可以衰变成Z^0Z^0。计算到这些末态的衰变宽度。你可以通过以下方式来检验你的结果：如果$m_h \gg m_W$，对衰变的主要贡献来自于纵向极化的W或Z玻色子的产生，这种贡献可以估计如下：

$$\Gamma(h^0 \to W^+W^-) \approx \Gamma(h^0 \to \phi^+\phi^-), \quad \Gamma(h^0 \to Z^0Z^0) \approx \Gamma(h^0 \to \phi^3\phi^3),$$

其中$\phi^\pm, \phi^0$为希格斯区的Goldstone玻色子，这些关系右边的量是在无规范希格斯理论中计算。解释为什么这个陈述应该是正确的，并明确地验证它。

(c) 希格斯的第三种重要衰变模式是衰变为两个胶子。这种衰变的振幅是由包含夸克圈的图产生的。计算这些图，使用维数正则化。这些图将是有限的，但其中的微妙贡献显然依赖于正规子。通过验证它是规范不变的来检查你确实正确地计算了振幅。然后将振幅平方，构造衰变率。你应该得到

$$\Gamma(h^0 \to 2g) = \left(\frac{\alpha m_h}{8\sin^2\theta_w}\right) \cdot \frac{m_h^2}{m_W^2} \cdot \frac{\alpha_s^2}{9\pi^2} \cdot \left|\sum_q I\left(\frac{m_h^2}{m_q^2}\right)\right|^2,$$

其中求和遍历所有夸克种类，和$I(m_h^2/m_q^2)$是一个形式因子，其性质为$x \to 0$时$I(x) \to 1$, $x \to \infty$时$I(x) \to 0$。这个性质意味着衰变率的主要贡献来自非常重的夸克。在这个阶段不需要显式地计算$I(x)$；只要把它写成费曼参数积分的形式。

(d) $h^0 \to 2g$过程的存在意味着逆过程$g + g \to h^0$的存在，这是质子与质子碰撞中产生希格斯玻色子的机制。利用部分子模型推导出分宽度$pp \to h^0 + X$与总截面$\Gamma(h^0 \to 2g)$的关系。对质心能为 1-40 TeV(1 TeV $= 10^3$ GeV)的pp碰撞中一个 30 GeV 希格斯粒子的截面进行数值计算(单位为纳靶)。就本问题集的目的而言(尽管这实际上不是一个很好的近似)，你可以忽略对胶子分布函数Q^2的依赖性，而简单地取

$$f_g(x) = 8 \cdot \frac{1}{x}(1-x)^7.$$

你也可以设置$I(m_h^2/m_t^2) = 1$；在大约是 10%上这是正确的。

(e) 你应该考虑的最后的衰变模式是$h^0 \to 2\gamma$。首先考虑包含夸克和轻子的圈图贡献。表明结果是简单地用你在部分(c)推导的形式因子$I(m_h^2/m^2)$表示的。

(f) 接下来，计算出包含W玻色子的圈图对这个衰变振幅的贡献，以及必须添加到这个图中的各种图，以获得一个规范不变的结果。最容易在Feynman-'t Hooft规范下工作。再加上很重的夸克和轻子的贡献——每个都带有电荷Q_f。你的结果在$m_h \ll m_W$的极限下应该化简为以下表达式：

$$\Gamma(h^0 \to 2\gamma) = \left(\frac{\alpha m_h}{8\sin^2\theta_w}\right) \cdot \frac{m_h^2}{m_W^2} \cdot \frac{\alpha^2}{18\pi^2} \cdot \left|\sum_f Q_f^2 \, N_c(f) - \frac{21}{4}\right|^2.$$

(g) 现在计算(c)部分定义的形状因子$I(x)$的详细行为。将(c)部分的表达式简化为一个单参数积分，然后对该积分进行数值计算。在50 GeV $< m_h <$ 500 GeV范围内绘制$I(m_h^2/m_t^2)$，并在此范围内数值(用 keV)计算衰变宽度$\Gamma(h^0 \to 2g)$。第(f)部分的计算引入了一个附加形因子；用同样的方法计算这个函数。

(h) 最后，把所有的部分放在一起。在希格斯玻色子质量为50 GeV - 500 GeV情况下，找到h^0分别到五个主要衰变模式$b\bar{b}, t\bar{t}, gg, W^+W^-, Z^0Z^0$的分支分数。

Chapter 22

量子场论前沿

在这本教科书中，我们考察了量子场论中最重要的思想。从基本概念——源自相对论、量子力学和场的融合——出发来工作，我们已经建立了一个精细的结构，它包括显著的元素，如耦合常数重正化和非阿贝尔规范场等。我们已经在很多地方看到，这个结构中奇怪和抽象的元素实际上与观测是交织在一起的，甚至产生了对基本粒子行为的意外方面的解释。

在我们的研究过程中，我们对基本粒子的强、弱和电磁相互作用有了一个完整的理论。这个理论的每一个元素都被描述为一个量子场论，这些量子场论被证明具有非常相似的结构，如规范理论耦合到费米子。在我们讨论的不同地方，我们注意到这些理论已经经过了严格的定量实验测试。我们没有足够的空间来描述那些有助于我们相信这些理论的各种各样的实验，但是今天几乎所有的粒子物理学家都认为$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$规范理论已经建立。事实上，这些人中的大多数都把这个理论屈尊地称为“标准模型”。

尽管支持标准模型的最佳数据来自过去5年的实验，但其背后的思想要古老得多。这本书中描述的大多数理论发展都是在20世纪70年代总结出来的，那是远离当前物理学前沿的一代人。但这并不意味着量子场论与前沿毫不相关，就像量子力学和电动力学在多年的探索后失去了与前沿的相关性一样。相反，基本粒子理论——和其他依赖于连续体中的量子涨落的物理学领域一样——仍然有很深的奥秘，而量子场论仍然是探索这些问题的主要工具。

在这最后一章，我们将提前快速来到现在，讨论量子场论与当前基本相互作用物理学中问题的相关性。我们将以我们的观点来描述基本粒子物理学中尚未解

决的突出问题，并描述量子场论是如何被用来面对这些问题的。许多这些应用涉及的量子场论的许多方面超出了这本书的范围。这包括在微扰论所不能及的领域中使用量子场论，以及使用量子场论来探索具有更高自旋和局域对称性的理论的特殊性质。在这些方面，我们的讨论将主要是定性的，但我们将提供参考资料，提供进入这些主题的切入点。

很明显，我们在最后一章的讨论将会表达我们个人的观点，而不是代表量子场论专家的共识。此外，在一个快速发展的研究领域中，任何“当前问题”的集合都应该很快过时。事实上，我们希望这本书的读者能通过解决我们在这里强调的问题，使这一章很快过时。

22.1 强强相互作用

我们讨论强相互作用的一个似是而非的方面是，我们所有的具体结果都是通过假设这些相互作用是弱的而得到的。在大动量转移中，我们认为，由于渐近自由，这个假设实际上是有效的。然而，令人不安的是，我们把那些关于很强地相互作用的粒子的最明显的问题——例如，它们的质量和低能相互作用——留在了一个被我们的分析排除在外的神秘体系中。

要在强相互作用很强的区域研究QCD，我们需要回答三个问题：首先，我们如何描述将夸克结合成强子的力？第二，如何恰当地描述受这些力约束的夸克-反夸克和三夸克系统？最后，我们如何用这些束缚态计算流的散射振幅和矩阵元？

此时，还没有从QCD拉格朗日量推导出夸克之间的完全力。显式计算只能在弱耦合和强耦合的极限下进行。在弱耦合极限下，结果是一个具有渐近自由耦合常数的库仑势。另一方面，强耦合极限给出了一个线性势，它禁闭了颜色，其方式我们在17.1节的结尾描述过，没有推导出来。这个结果的推导很不寻常，并带来了一套新的数学方法。

到目前为止，在这本书中，我们还没有讨论强耦合近似的量子场论。原因很简单:在耦合g^2很大的量子场论中，基本粒子或它们的束缚态通常获得随g^2增长的质量。对于$g^2 \to \infty$，这些质量变得与截断Λ相当，场论不再有局域连续的描述。

Wilson提出用一种激进的方法来解决这个问题，那就是用一个离散间距点构

成的格点来代替时空。为了将欧几里得时空形象化，这样的格点是最简单的，我们可以使用格点上场的泛函积分来近似欧几里得格林函数。这样的理论可以有一个定义良好的强耦合极限。这种类型的理论非常类似于磁系统的格点模型。

事实上，我们可以利用第13章的概念来理解量子场论的构建。一个在每个格点位置具有涨落的自旋变量的格点理论，在大体上由带有基本自旋变量的对称性的标量场量子场论来描述。一般来说，量子场论的强耦合极限对应于磁体的高温极限，其中关联长度远远小于格点间距。降低耦合常数就对应于降低温度。最后，耦合常数趋近于重正化群的一个不动点，我们可以用这个不动点来定义格点泛函积分的极限，即格点间距趋于零。

为了建立强相互作用的格点模型，需要在离散格点上找到一组变量，这些变量大体上对应于非阿贝尔规范场。Wilson提出，这种理论的基本变量应该是一个格点顶点v_1到相邻顶点v_2之间的线性元，

$$U(v_2, v_1) = P \exp\Big[ig \int dx^\mu \, A^a_\mu t^a\Big]. \tag{22.1}$$

要用规范群G来构造格点规范理论，需要对格点每一个连接的有限群变换U进行积分。沿着一个闭合路径取这些U矩阵的乘积，就可以构造规范不变的可观测量，就像我们在第15.3节中做的那样。适当的拉格朗日量也可以被构造成在基本的格点闭圈上的、规范不变的U矩阵乘积的一个和*。

在自旋系统中，高温相的定义性质是关联系数的指数衰减

$$\langle \vec{s}(0) \cdot \vec{s}(\mathbf{x}) \rangle \sim \exp\big[-|\mathbf{x}|/\xi\big] \tag{22.2}$$

当$|\mathbf{x}| \to \infty$时。U矩阵在闭合路径P上的规范不变关联函数的类似性质为

$$\Big\langle \prod_P U \Big\rangle \sim \exp\big[-A/\xi^2\big], \tag{22.3}$$

其中A是由路径张成的区域。这种行为在Wilson格点规范理论的强耦合展开中得到了明确的体现。一对色源在欧几里得时间T内相处距离为R，由一个宽度为R、

---

*这个构造的介绍是K. Wilson, *Phys. Rev.* D10, 2445 (1974)。该构造的教学描述来自M. Creutz, *Quarks, Gluons, and Lattices*(Cambridge University Press, Cambridge, 1983).

长度为T的大矩形圈表示。对于这样一个圈，我们可以将结果(22.3)与欧几里得时间中的激发态的能量表达式进行比较

$$\langle \exp[-H_E T] \rangle \sim \exp[-RT/\xi^2]. \tag{22.4}$$

然后我们看到，在强耦合极限下，规范荷的静态源被另一个源吸引，通过势能

$$V(R) \sim R/\xi^2 \tag{22.5}$$

对足够大的R。同样地，当我们把动力学夸克引入格规理论并研究它们在强耦合极限下的性质时，在欧几里得泛函积分中，色源分离较大的位形被形式为(22.3)的因子所抑制。强耦合极限则预测了夸克被永久禁闭为色单态束缚态。

我们刚才给出的论证同样适用于基于阿贝尔或非阿贝尔对称群的理论。但非阿贝尔规范理论具有渐近自由的重要附加性质。在这种情况下，这意味着短距离弱耦合的理论可以转化为长距离强耦合的理论。如果我们如在12.1节描述的那样来想象积出(integrate out)短程自由度，以及如果重正化群流没有β函数的零点或其他障碍，我们应该最终到达一个有效理论，对此强耦合展开是一个很好的近似。因此，在非阿贝尔规范理论的特殊情况下，渐近自由使我们能够将基于自由夸克和胶子的短距离图像与基于色禁闭的长距离图像连接在一起。

如果我们已经描述的强耦合图像能导致连续时空中的数学方程，来描述永久禁闭的夸克和反夸克的运动，那就太好了。许多作者试图写出这样的方程——通过想象Wilson圈关联函数(22.3)的面积抑制是由张开该圈的物理面引起的。对于与色源相联系的大矩形圈，该表面可以被物理地解释为从一个源到另一个源的色电通量(color electric flux)的线(如图17.1所示)，扫过了欧几里得时间。在欧几里得时间的某一时刻，这个表面可以被理想化为一个抽象的一维激发，通常被称为**弦**。不幸的是，一个理想的弦的量子性质是非常复杂的，因为弦的每一个小元都必须被认为是一个独立的量子自由度。被实际解出的唯一的弦方程的系统具有奇异的特性，包括不需要的无质量粒子。到目前为止，还没有人成功地写出对夸克束缚态的定量计算有用的夸克禁闭弦的方程*。

---

*一种色禁闭方法来自于一个涉及Wilson圈和弦的图像，见A. A. Migdal, *Phys. Repts.* **102** , 199 (1983)。

然而，非阿贝尔规范理论的格点正规化为强相互作用理论的定量计算提供了另一种方法。通过用非零格点间距和有限时空体积的格点规范理论来近似QCD，我们将泛函积分化简为了一个有限数目有界积分，也就是说，对于格点的有限数目的每个连接都有一个对$SU(3)$群矩阵的积分。例如，大小为20^4的格点允许格点间距比强子的尺寸小，而格点的完整尺寸比强子半径大得多。然后利用蒙特卡罗方法，通过数值计算积分来计算关联函数。由于有限格点间距的泛函积分是通过积出短距离自由度而与原来的零格点间距的泛函积分相联系的，格点近似可以被系统地改进——通过微扰地计算短程效应，利用渐近自由证明弱耦合分析的合理性*。

该数值方法现已成为强子物理定量计算的主要理论工具。这种方法目前给出的低能介子和重子的质量的精度为10-20%;它还允许在25%水平下计算强子的弱相互作用矩阵元。随着计算机功能的增强，这种数值方法可以提高精度。

最后，有趣的是这些非微扰数值计算是否与我们对QCD每个微扰区域的精确知识是一致的。在撰写本文时，我们已经进行了第一次这样的比较：我们在表17.1中列出了α_s值(来源于ψ和Υ谱)。在此计算中，将实验确定的$c\bar{c}$和$b\bar{b}$束缚态的质量与使用格点正规化的数值计算的结果进行了比较。这些值的比较给出了格点理论所需的裸耦合常数，该常数可以按照表的约定转换为$\alpha_s(m_Z)$的值。$\alpha_s(m_Z)$的最终估计结果与纯微扰测定相当一致

在强子物理中，非微扰计算的未来是什么?一方面，我们希望看到数值格点方法的进一步发展。这些方法几乎还没有开始解决强子-强子散射和多粒子矩阵元的问题，而这似乎是未来的一个重要方向。此外，这些方法最终将在百分比水平或更高水平上提供对强子的工程(engineering)理解。另一方面，我们也希望看到一种定量的连续体方法来研究强子结构，在其中，动力学夸克与弦自由度的某种适当类型会相互作用。

---

*关于数值格点规范理论的介绍，参见*From Actions to Answers*, T. DeGrand and D. Toussaint, eds. (World Scientific, Singapore, 1990).

22.2 大统一及其悖论

如果我们把关于QCD的低能量非微扰行为的问题放在一边，$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$规范理论显然完整地描述了我们在实验中探索的那些能量下的基本粒子相互作用。但在我们目前的能力范围之外会发生什么呢?这个理论需要修改吗?还是在更高的能量下仍然有效?

$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$规范理论包含三个独立的规范耦合常数，对于规范群中较大的分量，这些耦合的观测值更大。这一模式可以解释为对非常高能量下规范耦合的行为的一个大胆的假设。如果在一些非常大的能量标度下,这三个耦合相等。$SU(3)$和$SU(2)$耦合的值由于其渐近自由重正化群方程，会在较小的动量标度增加，而$U(1)$耦合的值将减小，导致在低能量处观察到的耦合模式。一个更大胆的假设是，三个规范对称性是一个大对称群的子群，它在非常高的能量标度下被自发破缺。这种较大的对称性最简单的选择是$SU(5)$。在该理论中，$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$的耦合常数与$SU(5)$破缺的标度下的基本耦合有如下关系：

$$g_5 = g_3 = g = \sqrt{\frac{5}{3}}\, g'. \tag{22.6}$$

将$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$规范群嵌入到一个更大的单纯群中，这一思想被称为**大统一**；统一群的特殊选择$SU(5)$是来源于Georgi和Glashow*。观察到的夸克和轻子可以被认为是巧妙地融入了$SU(5)$的反常自由的手征表示；这种嵌入导致了对夸克的分数电荷的一种自然的解释**。

在这个框架内，我们可以从m_Z以上的能量标度推断出三个耦合常数的值。这种外推的结果如图22.1中的实线所示。耦合常数在非常高的能量时确实很接近，尽管它们实际上并不相交。图中虚线表示用一组修正的重正化群方程进行的演化，见第22.4节；有了这个选择，这三个耦合在它们当前的不确定度内精确地相遇了。无论如何，耦合常数的演化都是在能量的对数标度上进行的，因此，如果不为对称破缺标度假设一个的巨大的值——10^{16}GeV阶，就不可能实现大统一。

---

* H. Georgi and S. L. Glashow, *Phys. Rev. Lett.*, **32**, 438 (1974)。这篇论文的狂妄自大使它成为每个学生的必读书目。

**关于大统一的教学导论，见Ross(1984)。

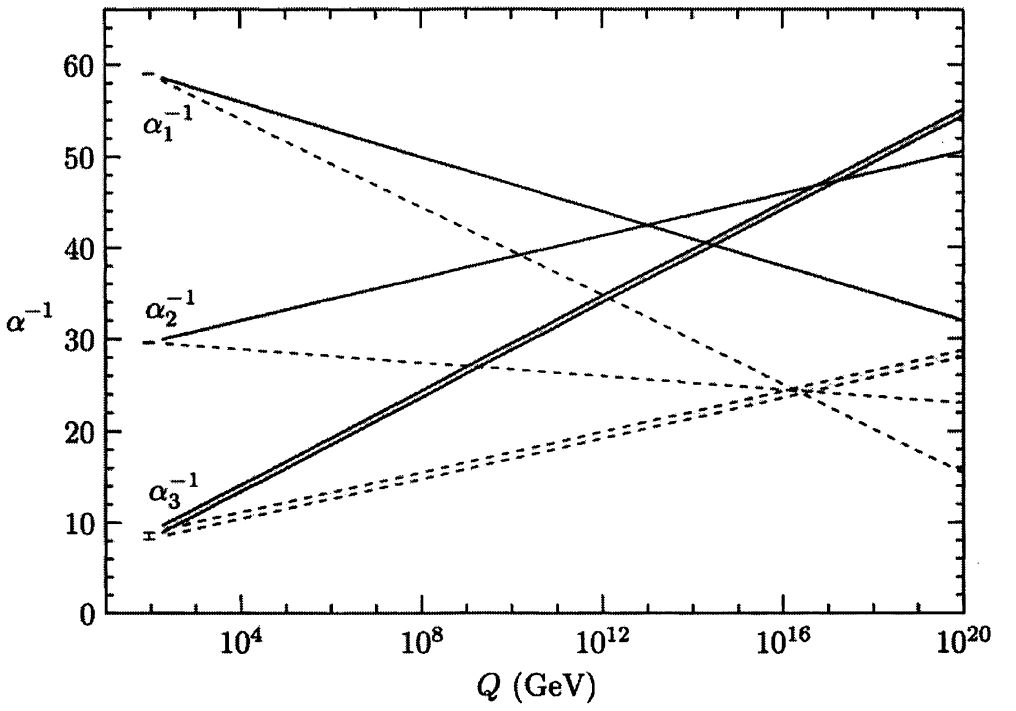


图22.1 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$规范模型中耦合常数$g_3$、$g$和$\sqrt{5/3}g'$的能量外推法。绘制的实线用到的$\beta$函数对应的是一组已知基本粒子；绘制的虚线用到的$\beta$函数对应的是超对称粒子多重态。

在如此巨大的能量下实现大统一的想法提出了许多困难的问题，但它也提供了一个绝佳的机会。在量子场论中还有另一个巨大的能量标度，在这个标度中，基本粒子的引力与它们的强、弱和电磁相互作用变得大小相当。传统上，人们把**普朗克标度**定义为粒子间引力相互作用达到1阶的能量:

$$m_{\text{Planck}} = (G_N/\hbar c)^{-1/2} \sim 10^{19}\ \text{GeV}. \tag{22.7}$$

然而，在能量已经达到10^{18} GeV的情况下，粒子的万有引力与大统一理论中的矢量玻色子的规范力是大小相当的。虽然这个标度仍然略高于标准模型耦合常数相遇的标度，但希望大统一和引力与基本粒子物理力的统一有某种联系的也不是不合理的。

另一方面，在物理学中引入这种大标度的方法导致了许多概念上的问题。第一个问题是希格斯玻色子质量，这个问题是在提出标准模型的这种扩展之后马上会遇到的。在第20.2节最后的讨论中，我们对希格斯玻色子的性质得出了一个有

些模棱两可的结论。作为弱相互作用规范理论的一部分，我们需要一些新的区来引起$SU(2) \times U(1)$的自发破缺。这可能由标量场的真空期望值提供，也可能由粒子的新区中更复杂的动力学提供。目前，我们还不知道哪一种假设更可取。

如果$SU(2) \times U(1)$被一个基本标量场的真空期望值所破缺，那个标量场应该是大统一的一部分。这导致了一个严重的概念问题。为了产生一个合适大小的真空期待值来给出观测到的W和Z玻色子的质量，希格斯标量场必须得到一个负的质量项，大小为

$$-\mu^2 \sim -(100\ \text{GeV})^2. \tag{22.8}$$

不幸的是，标量场的$\left(\text{质量}\right)^2$得到了另外的重正化。在截断标度为Λ的理论中，，只有标量场的裸质量为$-\Lambda^2$阶的，μ^2才能比Λ^2小得多，并且这个值被辐射修正消去到$-\mu^2$。如果我们设想我们的自然理论包含非常大的大统一标度，我们必须严肃对待这个观点，在这个讨论中Λ的适当值是10^{16}GeV或更大。这似乎需要在μ^2的重正化值上存在戏剧性的、甚至奇怪的抵消。

我们在相变理论中遇到了这种情况。在零度下，铁磁体的自旋期望值一般是基本原子参数的阶。当温度升高或系统中其他变量改变时，磁化强度降低。最后，通过对温度的精细调整，我们可以得到系统接近临界点的情况。在离这一点非常近的地方，自旋场的期望值远小于原子参数预测的值，且系统是用近似无质量的连续标量场论描述的。

在统计力学中，轻标量场的这个图像是有意义的，因为有一个实验者在敏感地调整一个刻度盘。在弱相互作用理论中，显然没有人能做出精确的调整，来为希格斯玻色子的$\left(\text{质量}\right)^2$给出一个值——比其自然值低28个数量级或更低。因此，为什么希格斯玻色子的质量与大统一标度相比如此之小，这是一个谜。粒子物理学家把这个问题称为**规范等级问题**。

人们怎么能自然地把希格斯场的质量项安排得比基本相互作用的基本质量标度小得多呢?一种可能的策略是安排一个基本拉格朗日量的对称性，这种对称性禁止希格斯玻色子的质量项，且其破缺非常弱。事实证明，这个想法很难实现。要建立这种类型的理论，人们需要创建的标量场论是，在其中对希格斯玻色子质量加上的辐射修正必须在微扰论中任何可预测的阶上被抵消掉。但是希格斯质量

项的形式很简单，形式为

$$\Delta\mathcal{L} = \mu^2|\phi|^2, \tag{22.9}$$

很难想象有什么原理能阻止辐射修正产生这一项。有一种关于这种性质的对称性的建议，但它需要引入一种叫做**超对称性**的深刻原理，这需要对基础物理学进行深刻的修改。特别是，它需要大量新的基本粒子，其中一些粒子的质量应该在1000 GeV以下，在下一代加速器的能力范围内。我们将在22.4节进一步讨论这种可能性。

在这个讨论中，希格斯质量问题源于希格斯玻色子是一个基本粒子的假设。在第20.2节末尾已经提出的另一种观点是，希格斯玻色子是一种由一组新相互作用所限制的复合态。这一观点也导致了可观察的实验结果，因为这些新粒子质量标度必须接近弱相互作用质量标度。在这种类型最简单理论中，希格斯区(sector)的对称性破缺是建立在强相互作用的动力学手征对称性破缺的基础上的，我们在19.3节讨论了这一问题。理论所要求的新强相互作用导致了质量约1000 GeV的新粒子谱*。因此，关于破缺了$SU(2) \times U(1)$的区的性质的两个矛盾假设，都导致了在未来加速器中甚至在现在加速器中可以观察到的新现象。

关于为什么弱相互作用的对称性$SU(2) \times U(1)$应该自发破缺的问题，就像希格斯区的这两个不同的理论展现了完全不同的答案一样，他们对于夸克和轻子的质量起源这一问题也意味着完全不同的答案。在希格斯场是基本的模型中，夸克和轻子质量来自于费米子与希格斯场的重正化耦合。这些耦合可能是大统一的一部分，可以被明确地参考了大统一标度的理论来预测。原则上，这些耦合的知识可以为我们提供关于大统一的细节的线索。即使希格斯场是复合的，我们也无法避免这样一个事实：夸克和轻子的质量产生需要$SU(2) \times U(1)$的破缺。因此，这些质量项必须由夸克和轻子耦合到相互作用的希格斯区来产生。在这类模型中，导致夸克和轻子质量的相互作用必须出现在与希格斯区强相互作用的标度很接近的能量下，并可能最终在实验中被观测到。

无论从哪一种观点看，为什么夸克和轻子的谱覆盖了5个数量级仍然是个谜，

*希格斯区这些模型的性质，被专家称为**technicolor**模型，其描述是R. Kaul, *Rev. Mod. Phys.* **55**, 449 (1983)和K. D.Lane, in The Building Blocks of Creation, S. Raby, ed. (World Scientific, 1993).

从电子的0.5 MeV到顶夸克的175 GeV。也不理解是什么导致了CKM矩阵中夸克混合的模式和CP破坏的大小。即使对标准模型进行了详细的证实，这些问题在今天看来离解决还很遥远。

大统一的巨大质量标度还可以引入一个新的物理量，这个物理量比希格斯玻色子质量提出了一个更大的悖论。当我们在第2.3节中第一次对一个场进行量子化时，我们发现自由标量场论中真空的能量密度从振荡的各种模式的零点能中得到了无限正的贡献。以Λ为截断标度，这个零点能大致是

$$\langle 0|\, H\, |0\rangle \sim \Lambda^4. \tag{22.10}$$

在我们讨论的许多其他点上，我们也发现了对真空能的类似大贡献。自由费米子理论量子化过程中狄拉克海的填充导致真空能的向下移动，并具有类似的紫外发散。自发对称性破缺使真空能密度发生有限但仍可能很大的移动，

$$\Delta\, \langle 0|\, H\, |0\rangle \sim -cv^4, \tag{22.11}$$

其中对于场真空期望值v，c无量纲。弱相互作用$SU(2)\times U(1)$对称性和强相互作用手征对称性的自发破缺都会以这种方式移动真空能密度。

在基本粒子物理实验中，这种真空能的移动是不可观测的。例如实验测量的粒子质量，是H的真空和某些激发态之间的能量差。在计算这些差时，绝对真空能量可以被抵消。但是，有一种方法可以观察到绝对真空能量，即通过真空能和引力的耦合。根据爱因斯坦的理论，物质的能量-动量张量$\Theta^{\mu\nu}$是引力场的源。真空能量密度$\langle 0|H|0\rangle = \lambda$对这一源贡献出一项是

$$\Theta^{\mu\nu} = N\big(\Theta^{\mu\nu}\big) + \lambda g^{\mu\nu}, \tag{22.12}$$

其中右边第一项是被减除后的，有零的真空期望值。真空能量项具有爱因斯坦的宇宙常数的形式，因此可能影响宇宙的膨胀。

事实上，对宇宙膨胀的测量排除了大的宇宙学常数值。当前的极限是

$$\lambda < 10^{-29}\ \mathrm{g/cm^3} \sim (10^{-11}\ \mathrm{GeV})^4. \tag{22.13}$$

我们不知道为什么λ比已知的粒子物理相变中产生的真空能移动小那么多，又比基本场的零点能小那么多。λ在实验界限(22.13)和朴素直觉之间的差异是120个

数量级!这个问题的解决方案可能来自许多方面。量子场论的形式理论可能要求从爱因斯坦的引力方程出现的能动量张量中减去真空能。可能存在一种新的物理机制，它来自于粒子物理学或引力本身，将总真空能设为零。也可能是，能量-动量的整体标度确实是模糊不清的，并且是由宇宙学的边界条件决定的。此时，所有这些可能性都只是猜测。我们可以肯定的是，量子场论和引力的统一是不可能一蹴而就的，我们目前的认识中还缺少一些重要的概念*。

22.3 量子场论中的精确解

从大统一的概念出发，带着其重大的希望和神秘，我们转向研究模型量子场论，它们是如此简单以至于可以完全解决。在这本书中，我们强调了量子场论的内在复杂性和用微扰论代替精确知识的重要性。但有各种各样的量子场论，其中精确解是已知的。在本节中，我们将描述其中的一些，并回顾我们从中获得的见解。

在寻找量子场论模型的精确解时，我们没有理由把注意力局限在四维时空上。事实上。我们已经看到了二维理论的例子具有与重正化和短距离行为相似的复杂性。同时，这些理论占据了一个一维的空间，它们的自由度可以被想象成一条链中的链接处。这就允许一些强大的简化。

在第19.1节关于二维轴反常的讨论中，我们展示了二维无质量QED的光子变成了一个有质量玻色子。对这一理论的更详细的研究表明，这种玻色子是一种无相互作用的粒子。该理论最初是用库仑力相互作用的费米子来表述的。然而，有可能把这个理论改写成一个产生和湮灭费米子-反费米子对的标量场的理论。直观地说，在一维空间中沿光锥运动的粒子和反粒子不分离，因此构成一个玻色子自由度。在许多模型中，以这种方式重写的玻色子理论是自由场理论。这种类型的一个显著的模型是**Thirring模型**，

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \partial\!\!\!/ \psi - \frac{g}{2} \bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi \bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi, \tag{22.14}$$

*宇宙学常数问题和各种不成功的解在S. Weinberg, *Rev. Mod. Phys.* **61**,1(1989)中进行了综述。

在二维中。在这个模型中，费米场被玻色场所取代，得到了一个自由场论。利用该场论，可以明确地推导出费米子双线性量的关联函数，并直接表明这些算符具有反常量纲。在重正群的语言中，该模型包含一条被耦合常数g参数化的不动点的线*。

一类更一般的二维模型可以通过将其看做是哈密顿绘景中耦合场算符的一维链来求解。这种方法的原型是磁体统计力学中的一个问题，即耦合自旋的一维链。考虑一条有N个离散位点的长链，每个位点上有一个自旋1/2系统。泡利矩阵$\boldsymbol{\sigma}_i$作用于位置i处的二维希尔伯特空间，则自旋链的哈密顿量为

$$H = \sum_i \left(-J\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_{i+1}\right). \tag{22.15}$$

Since

$$\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_{i+1} = 2(\sigma_i^+\sigma_{i+1}^- + \sigma_i^-\sigma_{i+1}^+) + \sigma_i^3\sigma_{i+1}^3, \tag{22.16}$$

这个哈密顿量保护了向上自旋数。所有自旋向下的态是哈密顿量的一个本征态，在有确定动量的态中自旋向上的态是也是本征态。1934年，贝特分析了两个自旋的问题，并计算了它们的S矩阵。然后他发现了一个惊人的事实，通过将二自旋问题的S矩阵相乘，他可以找到任意数目自旋的哈密顿量的确切本征态。通过考虑$N/2$的自旋，他发现了系统的基态。这种技术现在被称为**Bethe's ansatz**，已经被用于解决凝聚态物理和量子场论中各种各样的一维问题。例如，Andrei和Lowenstein已经使用这种技术来解决第11.3题中提出的Gross-Neveu模型，并证明该模型的谱具有渐进自由所期望的性质**。

即使不可能对模型的所有参数值进行求解，有时也可以在包含无质量场的二维模型点上找到精确的信息。众所周知，经典的二维偏微分方程可以利用复变技术来求解。例如，二维拉普拉斯方程$\nabla^2\phi = 0$对于共形映射$z \to w(z)$是不变的，

---

*关于这些模型的介绍，见S. Coleman,*Phys. Rev.* D11, 2088 (1975), *Ann. Phys.* 101, 239 (1976)

**要了解Bethe's ansatz及其概括，见N. Andrei, K. Furuya, and J. H. Lowenstein, *Rev. Mod. Phys.* 55, 331 (1983), L. D. Faddeev, in *Recent Advances in Field Theory and Statistical Mechanics*, J. B. Zuber and R. Stora, eds. (North-Holland, Amsterdam, 1984), 和 R. J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics* (Academic Press, London, 1982).

其中$z = x + iy$。具有无质量粒子的二维量子场理论在经典水平上通常具有这种共形对称性，但一般来说是反常的。然而，在特殊的系统中，这些反常消失了且量子理论对共形变换是不变的。这些理论通常包含具有反常量纲的算符，这表明每一个这样的理论都是重正化群的一个新的、非平凡不动点。理论的共形对称性可以用来计算这些反常量纲。

作为这类理论的一个例子，考虑二维非线性sigma模型，在这个模型中，基本场不是一个单位矢量，就像我们在第13.3节中讨论的那样，而是一个李群G的幺正矩阵

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4g^2}\int d^2x\ \mathrm{tr}\big[\partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U\big]. \tag{22.17}$$

与第13.3节的理论一样，这个模型是渐近自由的。然而，威滕已经证明，在这个拉格朗日量上加上一个由Wess和Zumino首次提出的相当复杂的形式的特殊微扰，就可以找到具有明显的$G \times G$整体对称性的重正化群的不动点。该理论是共形不变的，所有的算符关联函数都可以用共形对称性来计算。

量子场论的非微扰探索的一个结果是，场论可以包含与原始场论的量子无关的粒子态。在量子场论的弱耦合极限中，这种新的态可以作为经典场论方程的新解出现。例如，在对称性破缺的相位下考虑二维的ϕ^4理论。运动方程是

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi - \mu^2\phi + \lambda\phi^3 = 0. \tag{22.18}$$

将该方程作为经典的偏微分方程，可以得到与时间无关的解

$$\phi(x) = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}\tanh\frac{x\mu}{\sqrt{2}}. \tag{22.19}$$

这是一种从$x = -\infty$的势阱穿越到$x \to +\infty$的势阱的场位形。这个解的能量是μ/λ阶，比ϕ量子的质量大一个$1/\lambda$的因子。由于原来的方程(22.18)是洛伦兹协变的，所以这个解的平动也必然是经典偏微分方程的解。很自然地，在ϕ^4量子场论中，这些解形成了一组新的有质量粒子。这样的解，和对应于它们的粒子，通常

---

*关于共形不变的二维量子场的介绍，见P. Ginsparg, in *Fields, Strings, Critical Phenomena*, E. Brezin and J. ZinnJustin, eds. (North-Holland, Amsterdam, 1989)

被称为**孤子**，借用了二维偏微分方程文献中的一个更专业的术语*。

现在已知的许多粒子都是这样与量子场论的经典解相联系的。在具有自发破缺对称性的理论中，这种粒子的出现往往与一组真空态的拓扑结构有关；上面的ϕ^4理论给出了这种关系的一个简单例子。这些例子并不局限于二维，也可能出现在基本现实理论中。这样的解具有神奇的特性。一个有趣的例子是带有矢量表示的希格斯标量场的$SU(2)$规范理论，在20.1节考虑的Georgi-Glashow模型。't Hooft和Polyakov证明了这个理论有一个经典的解，其中希格斯场ϕ_a具有如下形式

$$\phi_a(\mathbf{x}) = f(|\mathbf{x}|)x_a. \tag{22.20}$$

他们指出，当规范理论被解释为弱相互作用和电磁相互作用的统一模型时，这个解就是一个磁单极子！此外，当耦合增加时，在弱耦合极限中以重经典态出现的粒子可能与理论的动力学有更复杂的关系。例如，在二维QED类型的理论中或在费米子可以被玻色子取代的Thirring模型中，通过在理论中加入一个大的费米子质量，可以得到一个弱耦合极限。然后，原始费米子从理论的玻色子表示中恢复为了与(22.19)给出的非常相似的经典解。

在一些理论中，人们可以找到欧几里得场方程的经典解。这些解被称为**瞬子**，它们被局域在欧几里得时间和空间中。因此，它们被解释为量子过程，来修正量子场论的有效哈密顿量。瞬子最著名的例子是在四维非阿贝尔规范理论中发现的。这是由't Hooft表明的，这一场位形导致一个量子过程，破坏了QCD中$U(1)$轴流的守恒。我们在第19.3节中已经解释过，这种对流守恒的破坏恰恰是QCD中需要的，用来解释轻介子谱。

通过深入分析场方程的经典解，以及分析许多完全或部分可解的二维场论之间的相互关系，可能有更多的东西需要学习，特别是规范理论的强耦合行为。

---

*关于在场论问题分析中使用经典场方程解的介绍，见S. Coleman (1985), Chaps. 6 and 7, and R.Rajaraman, *Solitons and Instantons* (North-Holland, Amsterdam, 1982)

22.4 超对称性

在量子场论可能具有的使它更美丽或更易于数学处理的特性中，还有一种更高的对称性具有特别深远的意义。这是一种将费米子和玻色子联系起来的对称性，被称为(毫不夸张)**超对称**。在这一节中，我们将介绍一些超对称的纯数学性质，然后讨论自然界中真实的场方程是否可以是超对称的。

超对称的生成元是一个与哈密顿对易并将玻色子态转化为费米子态的算符。这样的算符必须携带半整数自旋，在最简单的情况下自旋为1/2。设Q_α,$\alpha = 1,2$，为该算符的左手旋量分量。他们的厄米共轭$Q_\beta^\dagger$，形成了一个右手旋量。反对易子$\{Q_\alpha, Q_\beta^\dagger\}$是一个有正对角元的2×2矩阵；因此它不能为零。这矩阵与H对易，但在洛伦兹变换下进行了非平凡的变换。这个反对易子的洛伦兹协变表达式是

$$\{Q_\alpha, Q_\beta^\dagger\} = 2\sigma^\mu_{\alpha\beta} P^\mu, \tag{22.21}$$

其中P^μ是守恒的矢量物理量。这些量受到严格限制；Coleman和Mandula定理指出，如果一个二维以上的量子场论除了能量-动量4矢量外，还有第二个守恒矢量，那么S矩阵等于1且不允许散射。因此，在式(22.21)中，P^μ的唯一可能选择是总能量-动量。Colmann-Mandula定理也排除了任何更高自旋守恒定律。这消除了超对称生成元可以有3/2或更高自旋的可能性。最普遍的可能是一组具有反对易关系的自旋1/2算符

$$\{Q_\alpha^i, Q_\beta^{j\dagger}\} = 2\delta^{ij}\sigma^\mu_{\alpha\beta} P^\mu, \tag{22.22}$$

其中$i, j = 1, \ldots, N$。在接下来的讨论中，我们将主要考虑最简单的情况，$N = 1$*。

守恒量的代数(22.22)对这个理论有深远的影响。由于(22.22)的右边是总能量-动量，它涉及到理论中的每一个场。为了重新产生这个代数，左边必须包含所有的场。这个代数的表示将每一个玻色子态与相同能量的费米子态配对，反之亦然。如果超对称是量子场论的精确对称性，它必须作用于量子场论的每一个场。在现实模型中，即使是引力场也必须有一个费米子伙伴。这意味着爱因斯坦的引力方程必须推广到一组新的包含费米场(自旋3/2)的几何方程组。

---

*对超对称的形式理论的一个很好的介绍是J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity* (Princeton University Press, 1983).

使得量子场论超对称的第一个后果很容易理解的。对于每一个(复)标量场，都必须引入一个手征费米子场。玻色子场的自相互作用与这些场和费米子的相互作用有关；例如，一个可能的带着耦合常数λ的相互作用拉格朗日量为

$$\Delta\mathcal{L} = -\lambda^2|\phi|^2 - \tfrac{1}{2}\lambda\psi^T\sigma^2\psi. \tag{22.23}$$

我们在问题3.5中写了一个更一般的超对称拉格朗日量。类似地，对于每一个规范场，都必须在规范群的伴随表示中引入一个手征费米子。这个费米子被称为**超规范子**，它介导了标量场与其费米子伙伴之间的相互作用，其强度由规范耦合g给出。

玻色子和费米子相互作用之间的特殊关系使超对称理论的重正化得到了极大的简化，其中一些简化是可以预见的。由于超对称性要求每个标量粒子都有相同质量的费米子伙伴，所以这些粒子必须有相同质量的重正化。但我们已经看到，费米子的质量被乘性地重正化，因此只是对数的发散，而一个标量质量项被加性地重正化，因此可以是二次发散的。超对称必然意味着标量质量项的二次发散自动消失。实际上，这些抵消发生在微扰论的每一阶，其中包含玻色子的圈图抵消掉带有虚费米子的图。为看到超对称所要求的另一种简化，取反对易关系(22.21)的真空期待值。真空态有零动量：$P^i|0\rangle = 0$。如果真空态是超对称的，则$Q_\alpha|0\rangle = Q^\dagger_\beta|0\rangle = 0$。则式(22.21)推出

$$\langle 0|\, H\, |0\rangle = 0. \tag{22.24}$$

我们早已经注意到玻色场的零点能对真空能有正的贡献，而费米场对真空能有负的贡献。我们现在看到，在一个超对称模型中，这些贡献完全抵消了，不仅在领头阶上，而且在微扰论的所有阶上。

对超对称理论的深入研究导致了附加的、出乎意料的，重正化理论中的抵消。例如，我们可以证明标量-费米子自相互作用中的耦合常数，如(22.23)中的λ，仅通过场强重正化来重正化。因此，两个不同的标量相互作用的相对大小保持不变，如果一个特定类型的可重正相互作用被省略，它不能被重正化生成，与普通场论的情况相反。最简单的超对称并不会限制规范耦合的重正化，但是更高的超对称会产生深远的影响：在$N = 2$的超对称模型中，如果领头项被安排为零，则β函

数会消失。在$N = 4$个超对称模型中，这个抵消是自动的，精确地有$\beta(g) = 0$。这些模型给出了没有紫外发散的四维量子场论的例子*。

超对称性使量子场论具有了非凡的，甚至是魔术般的性质。但是，真正的自然方程有可能具有如此高度的对称性吗?由于我们确信不存在与电子质量相同的带电玻色子，所以我们知道，超对称性不可能是自然界的精确对称性。但很吸引人的猜测是，它可能是基础方程的对称性自发破缺。

事实上，这个猜想对于我们在22.2节中所讨论的大统一理论有着丰富的结果。我们在那一节中强调的希格斯玻色子质量的问题在超对称模型中有一个优雅的解决方案。在标准模型的超对称版本中，希格斯场是带有各种$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$量子数的大量标量场之一。对于所有这些标量场，质量项只得到一个对数的乘性的重正化。如果超对称性以如下方式被破缺——在观察的费米子夸克和轻子与它们的标量伙伴之间，能给出几百个GeV的质量差——那么人们还会发现一个正确大小的希格斯玻色子(质量)^2。根据该理论更详细的性质，有充分的理由说明为什么是希格斯场而不是其他的标量场获得了真空期望值**。

如果这组想法是正确的，那么夸克和轻子的标量伙伴将足够轻，可以在不久的将来通过实验来发现。在这种情况下，这些标量粒子和规范玻色子的费米子伙伴会影响到目前的理论和大统一标度之间耦合常数的重正化。这可能会潜在地干扰大统一的前景，但是，相反地，它改进了它们：图22.1中的虚线，三个耦合常数有更令人印象深刻的相遇，该虚线通过将传统的β函数替换为包括了超对称伙伴的β函数来生成。

第22.2节讨论的最后一个问题也通过引入超对称性得到了改进。在超对称被破缺的大统一理论中，那些比超对称伙伴间的质量差大得多的动量标度对真空能没有贡献。因此，在这些理论中宇宙学常数的自然大小是$\lambda \sim (100\ \text{GeV})^4$。这将宇宙常数问题缩小到50个数量级的差异，但这还远远不够。

---

* β函数消失的超对称模型的回顾是P. West, in Shelter Island II, R. Jackiw, N. N. Khuri, S. Weinberg, and E. Witten, eds. (MIT Press, Cambridge, 1985).

夸克和轻子的超对称模型及其可观测的结果，回顾是H. P. Nilles, *Phys. Repts.* **110, 1 (1984), and in H. E. Haber and G. L. Kane, *Phys. Repts.* **117**, 75 (1985).

这是一个令人兴奋的前景，标准模型粒子的超对称伙伴可能很快会在实验中看到。无论如何，我们所预期的是，下一代的实验将在希格斯区本质的这一假说和22.2节讨论的其他可能性之间做出明确的选择。不管怎样，我们都将使我们的知识向真正的基本方程迈进了一步。

22.5 走向自然的终极理论

这些基本方程是什么?它们是否涉及量子场论或一些非常不同的组织原理?对这个问题的任何回答都只能是推测性的。然而，有一些原则和一个例子，可以指导这个寻找。

尽管我们在本书中关注了粒子物理学的基本相互作用，但对引力的关注却很少。在某种程度上，这是因为引力的量子理论没有已知的观测结果。但同样真实的是，量子引力理论仍然是病态的和不确定的。如果用费曼图把引力看作弱耦合场，人们很快就会发现，这些图的发散使理论不可重正化。这并不奇怪，因为引力理论的耦合常数具有质量量纲的倒数，质量标度m_{Planck}由(22.7)给出。在我们关于重正化的一般哲学中，这个理论的所有复杂性都应该集中在标度m_{Planck}上。

在引力场的量子涨落是重要的标度上，我们必须期待物理学的深刻变化。如果这些变化发生在量子场论的背景下，它们至少会导致时空几何和拓扑的改变。但似乎同样有可能的是，量子场论实际上会在这个标度上崩溃，用一种新的离散的或非局域的几何取代连续时空。

时空在非常小的距离时的行为有一个特别的模型，那就是**弦理论**。抽象的一维扩展对象的动力学。在第22.1节中，我们提到这些对象似乎很自然地去尝试描述QCD中的夸克禁闭，但这些对象的详细性质使它们不适合强相互作用的唯象学。这些系统令人失望的特性包括弦的无质量自旋为2的态的出现，以及一个限制是时空维度必须增加，否则理论的谱会包含许多无质量自旋为1的态。在1974年，Scherk和Schwarz提出了一个非凡的建议说，弦理论是对一个不同问题的正确数学描述——基本粒子相互作用与引力的统一。他们将自旋为2的量子解释为引力子，自旋为1的量子解释为规范理论中的规范玻色子*。十年后。Green和

*J. Scherk and J. H. Schwarz, *Nucl. Phys.* B81, 118 (1974).

Schwarz将这一猜想建立在一个更坚实的基础上，他们指出，一个特定的弦理论可以被解释为一个在十维时空上的大统一理论，所有的引力和规范Ward恒等式都会自动得到满足，所有的反常现象都会自动消除。从那时起，弦理论的约束方程已经找到了许多其他的解，其中一些对应于规范相互作用和四维引力的统一模型。这些模型可以自然地包含超对称性，并在这种条件下，给出所有散射振幅(包括引力的散射振幅)的紫外有限的结果*。

弦理论否定了基本粒子是具有接触相互作用的点状物体的观点，从而解决了量子场论中的紫外发散问题。相反，在弦理论中，夸克、轻子、规范玻色子和引力子是弦激发态的扩展的圈，因此它们非局域地相互作用。既然粒子不能是明确局域的，时空本身就具有非局域性质。从某种意义上说，比普朗克长度$1/m_{\text{Planck}}$短得多的距离在弦的引力描述中不存在。到目前为止，还不清楚如何直观地理解弦理论所需要的几何形状。这个数学问题现在正在积极研究中。

如果自然界真正的基本几何结构确实是非局域的、离散的或以其他方式不连续的，那么我们在这本书中阐述的关于有趣的基本相互作用的宏大计划必须以一种基本的方式来改变。最基本的自然方程将不是规范不变的量子场论，而是由非常不同的元素构建的理论。即使是模型构建的原理也与我们在这里讨论的基于规范和洛伦兹不变性的原理不同。

另一方面，量子场论仍将在解释这一结构中发挥重要作用。我们现在所观察到的所有过程，包括目前能达到的最高能量的基本粒子过程，在距离上比弦的大小或出现在基本方程中的其他涨落结构大15个数量级。因此，实验观测与这些基本结构之间的关系与宏观观测与物质的基本原子结构之间的关系非常相似。在物质的研究中，我们对原子使用经典的、牛顿式的描述来填补这一缺口，并将气体、液体和固体的性质与基本的原子性质联系起来。我们可以说，原子的量子理论产生了一套在宏观领域非常强大的牛顿方程。特别是在气体理论中，这种牛顿描述也被用来作为一种工具来认识原子的存在并推导它们的性质。

---

*M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten, *Superstring Theory,* 2 vols. (Cambridge University Press, 1987)中对弦理论及其在建立统一模型中的应用进行了技术介绍。

同样地，无论普朗克标度物理学的性质如何，它都会导致一些有效的连续体量子场论。在100个普朗克长度的距离上(相当于10^{17} GeV的动量)这个量子场论很可能已经是基本物理的一个精确的近似了。从这个距离到弱相互作用的标度，再到光的波长，再到宇宙的大小，量子场论都可以被视为物理学方程的基本框架。通过认识到自然界提供给我们的特定一组场方程的对称性，我们可以学会在这一整个巨大的领域中计算物理过程的所有细节。而且，通过思考这些对称性的起源，或许我们也能看到下一个层次，并解开时空的真正结构。