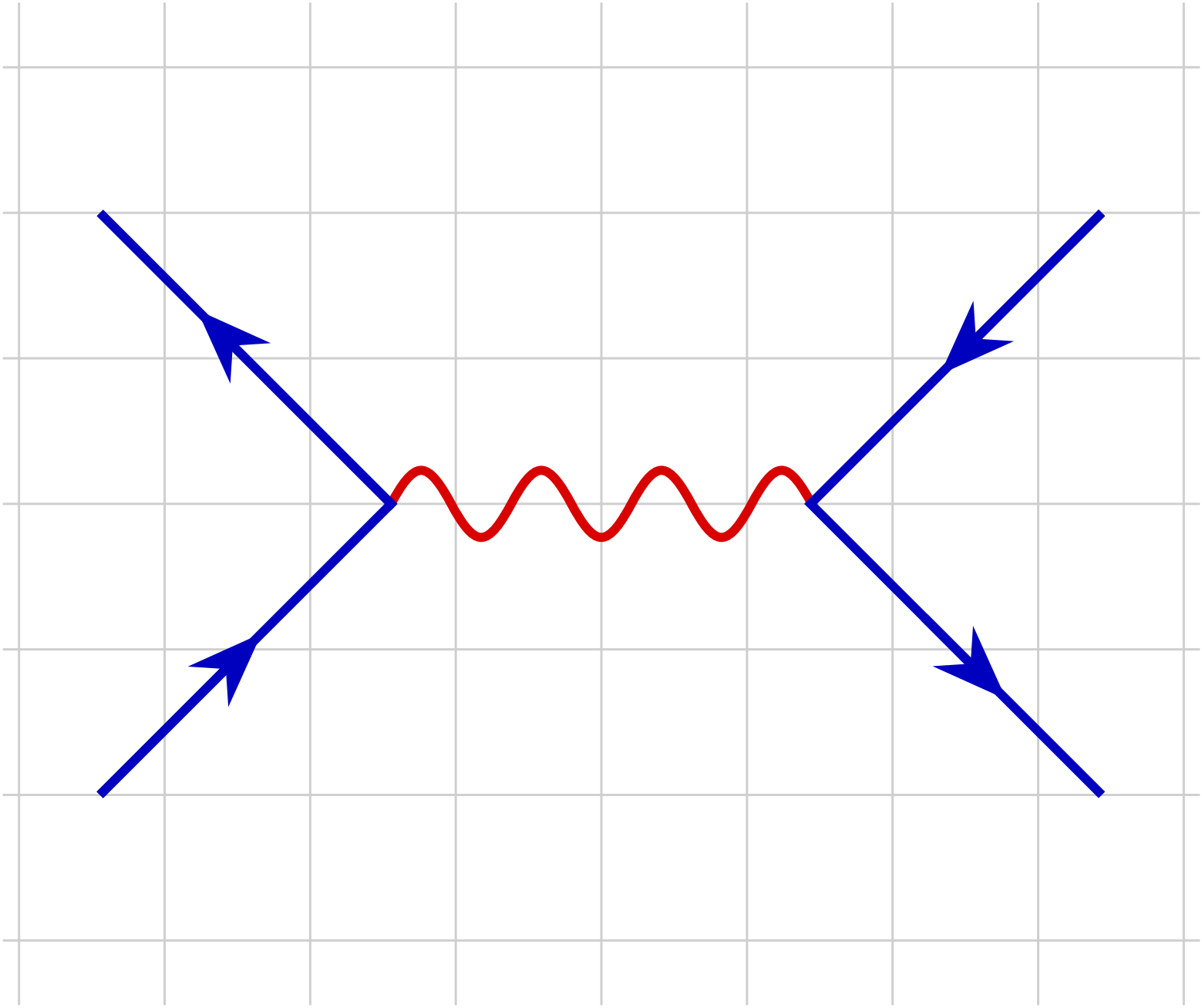
量子场論引論

程國均　楊守智　編譯



四川大學出版社

量子场論引論

程國均　楊守智　編譯

四川大學出版社
1989 年 · 成都

内容提要

本书根据英国曼彻斯特大学物理系 F. Mandl 教授所著《Quantum Field Theory》(1984 年) 和《Introduction to Quantum Field Theory》(1959 年) 两书编译而成，原著是作者在英、美几所大学讲课的讲稿基础上修改完善后成书的，它取材精炼，物理图像清晰，数学描述简练，是一本受欢迎的教材。

编译本保持了原书内容的完整，某些章节又作了适当的改写，内容着重强调量子场论的基本概念和现代微扰理论方法。为了方便自学，补充了书中各重要公式的推导和全部习题的解答。本书起点不高，凡具有经典力学、非相对论量子力学和电动力学基础知识的读者，都能顺利阅读。本书是一本较好的量子场论入门读物。

本书可作为大学高年级的选修课教材、研究生基础课教材或教学参考书。也可供科技人员参考，还适合初学者自学。

INTRODUCTION TO QUANTUM FIELD THEORY

Translated from F. Mandl's two books by
Cheng Guojun with Yang Shouzhi
Edited and Supplemented by
Cheng Guojun

COPYRIGHT 1989, BY Sichuan University Press.

量子场论引论

程國均　楊守智　編譯

责任编辑 樊程方　封面设计 蒋仲文

四川大学出版社出版发行　四川省新华书店经销
郫县犀浦印刷厂印刷
开本 787 × 1092 1/16　印张 17　字数 340 千
1989 年 10 月第 1 版　1989 年 10 月第 1 次印刷
印数：1–1400 册

ISBN　7–5614–0131–0/O.26

定价：3.40 元

序言

英国曼彻斯特大学物理系 F. Mandl 教授所著《量子场论引论》（Introduction to Quantum Field Theory，1959 年出版）是一本专为大学高年级学生、研究生和一般科技人员编写的介绍量子场论基本理论的基础教材。该书着重阐述量子场论的基本概念和现代协变微扰理论方法，对物理概念的讲解深入浅出，同时注意介绍量子场论的基本运算技巧，再加上在讲述书中的内容时注意循序渐进，文字简洁易懂，使具有理论物理一般基础知识的初学者易于掌握该书基本内容，是一本很好的介绍量子场论的基础教材，在国际上深受欢迎。

1984 年，F. Mandl 教授扩充了原书《量子场论引论》的内容，出版了新著《量子场论》（Quantum Field Theory），新著对量子场论基本理论的阐述更加系统深入，并反映了它的近年来发展动向。但在对量子场论基本概念和现代协变微扰理论方法的阐述上，和原书的内容相比基本上没有改变。新著增加的规范场理论及弱电统一模型等内容一般可安排在量子场论以外的其他专门选修课内。

四川大学程国均与杨守智两同志编译的 F. Mandl 教授著《量子场论引论》一书，是同时参照他的原著《量子场论引论》和新著《量子场论》而编译出来的。在编译过程中，除了注意保持原书内容的完整性和文字的简洁流畅，还在必要的地方作了适当的改写与补充。编译本还对书中所有的重要公式补充了必要的推导，并对原书的习题作了解答，以便于初学者自学。原书《量子场论引论》曾作为四川大学核物理及核技术专业硕士研究生的《量子场论》课基础教材多次试用过，并取得了很好的效果。他们编译的这本《量子场论引论》，是一本较好的适用于国内高等院校理工科类专业本科高年级学生和研究生的量子场论课基础教材或教学参考书，也是一本对一般的科技工作者和青年自学量子场论的有用的参考书。我们高兴地看到这本《量子场论引论》编译本的出版，并希望这本书的出版对量子场论的教材建设，起着促进和交流的作用。

胡诗可

1988 年 2 月

前言

F. Mandl 教授著的《量子场论引论》(Introduction to Quantum Field Theory) 一书，是他精心总结了多年的教学经验，根据在美国罗切斯特大学，英国牛津大学及曼彻斯特大学等校授课的讲稿修改完善而成的。该书着重在阐明量子场论的基本概念和现代微扰理论方法，内容比较全面而又容易读懂，是一本专为大学高年级学生、研究生和一般科技人员编写的介绍量子场论基本理论的优秀入门书。凡具有经典力学、非相对论量子力学和电动力学基础知识的读者，都能通过阅读该书而熟练掌握场论的基本物理概念和基本理论方法。

F. Mandl 教授是国际上著名的学者，他的《量子场论引论》一书，文笔优美，行文生动，语言简洁，除着重在阐明基本物理概念外，对运算技巧和方法也给予了足够的重视。全书各章都配备了习题，便于读者练习，以检查阅读效果和熟练运算技巧，从而加深对内容的理解。

1984 年，F. Mandl 教授出版了他的新著《量子场论》(Quantum Field Theory)。和他的旧作《量子场论引论》相比，新著主要增加了规范理论及弱电统一模型的内容，篇幅也相应地增加了近一倍。但在量子场论的基本概念及现代微扰理论方法两大内容上，新著和旧作大体上是一致的。这说明了，尽管旧作《量子场论引论》出版于 1959 年，但并未影响该书对基本物理概念论述的正确性。

四川大学核物理及核技术专业曾用 F. Mandl 教授的《量子场论引论》一书作为硕士生量子场论基础阶段课程的教材，在使用中，我们深感该书确是一本好书。所以，我们根据 F. Mandl 教授的 “Introduction to Quantum Field Theory” (1959 年版) 一书，并参照他的新著 “Quantum Field Theory’’ (1984 年版)，编译出了本书。和原书不同的是，编译本给出了书中所有公式的推导和习题解答，并在必要的地方作了适当改写和补充。本书可作为理工类专业本科生和研究生的教材或教学参考书，也是物理学工作者和一般工程技术人员很有用的参考书，还适合正在自修大学课程的广大青年自学。

本书的习题解答及书中公式的推导曾由何启智教授审阅。中国科学院理论物理研究所安瑛教授和中国原子能科学研究院苏宗涤教授、萨本豪教授及四川大学龙先灌教授曾就书中一些专题与编译者作过多次讨论，并提供了建设性的意见。重庆大学讲师胡炳全，华中师范大学讲师罗来奇，四川大学讲师王乔等学者也提供过很好的意见。四川大学胡诗可教授在百忙中为本书撰写了序言并提供了建设性的意见。借此机会，编译者向上面各位学者致最衷心的感谢。

本书第一章至第七章的译稿由杨守智同志提供的。此外，书稿的撰写及制图还得到四川大学计算机系毛志芳同志的大力帮助，谨以致谢。

编译者

1988 年 5 月

目录

序言 **v**

前言 **vii**

第一章　多粒子表象 **1**
习题与解答 6

第二章　经典场 **9**
习题与解答 12

第三章　场算符 **19**
习题与解答 24

第四章　简单示例 **29**
习题与解答 33

第五章　相互作用绘景 **35**
习题与解答 39

第六章　不变量 Δ 数 **41**
习题与解答 46

第七章　荷电介子 **49**
习题与解答 55

第八章　费米子 **59**
习题与解答 60

第九章　光子（一） **61**
习题与解答 61

第十章　光子（二） **63**
习题与解答 63

第十一章　相互作用 **65**
习题与解答 65

第十二章 散射矩阵 **67**
习题与解答 67

第十三章 S 阵展开式 **69**
习题与解答 70

第十四章 费曼图 **71**
习题与解答 73

第十五章 康普顿散射 **75**
习题与解答 75

第十六章 库伦散射 **77**
习题与解答 77

第十七章 辐射修正 **79**
习题与解答 79

第十八章 费米子自能 **81**
习题与解答 81

第十九章 真空极化 **83**
习题与解答 83

第二十章 顶角修正 **85**
习题与解答 85

第二十一章 电子的反常磁矩 **87**
习题与解答 87

第二十二章 重正化 **89**
习题与解答 89

附录 A 狄拉克方程 **91**

附录 B 费曼规则 **93**

第一章　多粒子表象

本书所要研究的主要问题是两个或两个粒子系统之间的相互作用，例如，介子和核子之间的相互作用；光子和电子之间的相互作用。我们将要考虑光子在电子上的散射（即康普顿散射）或 π 介子在核子上的散射过程，以及韧致辐射和电子对湮没等荷电粒子的非弹性散射过程。因此，我们必须发展一种适当的机制，来描述这些过程，包括那些有粒子产生或消失的过程（如韧致辐射）。

让我们来考查一个这样的典型过程：康普顿散射。当然，我们将使用波包来描述这个过程。但是，正如在非相对论散射理论中那样，我们将只考虑数学上比较理想的情况，并且使用平面波。因此，我们有时将稍微不严格地使用 '波包' 的概念来使问题更为形象化一些，当光子和电子相距很远还没有开始相互作用时，我们用电子的动量 $\boldsymbol{p}$ 及自旋 $\boldsymbol{s}$，光子的动量 $\boldsymbol{k}$ 及偏振矢量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 来确定体系的初态。在散射发生后，光子和电子再一次分开很远，这时，我们用相应的量 $\boldsymbol{p}'$、$\boldsymbol{s}'$、$\boldsymbol{k}'$、$\boldsymbol{\varepsilon}'$ 来确定体系的终态。这种描述是典型的微扰理论处理方式，也就是本书的基本处理方式。在这种处理方式中，体系的总哈密顿量假定可分成三部分：两个无相互作用体系的哈密顿量以及它们的一个相互作用哈密顿量。体系的初态和终态可根据哈密顿量中无相互作用部分的本征态来确定，总哈密顿量中的相互作用项仅仅引起散射或者使体系从初态变化到终态。

现在，确定一个态的方法是很明显的。首先，我们列举出单粒子态的完全集，然后，我们来确定这些单粒子态的占有数，这就给出了多粒子体系的完全描述。如果没有相互作用，则占有数保持恒定。否则，由于相互作用的结果，占有数将相应于散射、粒子产生等过程而随时间变化。

我们来考虑一个质量为 m，自旋为 0，电荷为 0 的无相互作用的介子系统。这时，根据介子的动量 $\boldsymbol{k}$，就足以确定它的态了。介子的能量 $\omega_{\boldsymbol{k}}$ 是相对论性的，由下式给出：

$$\omega_{\boldsymbol{k}}^2 = m^2 + \boldsymbol{k}^2 \tag{1.1}$$

（在本书中，我们总是使用自然单位：$\hbar = c = 1$。）把 $\omega_{\boldsymbol{k}}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 视为作用在波函数 $\phi(x)$ 上的算符，使用通常的方法就可从(1.1)式导出相对论波动方程。于是我们得到 Klein–Gordon 方程：

$$\left(\Box^2 - m^2\right)\phi(x) = 0 \tag{1.2}$$

(1.2)式的导出：将(1.1)式的两边同时作用于 $\phi(x)$, 则由 $\omega_{\boldsymbol{k}} \to i\dfrac{\partial}{\partial t}$ 和 $\boldsymbol{k} \to \dfrac{1}{i}\boldsymbol{\nabla}$ 可得

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(x) = \left(m^2 - \boldsymbol{\nabla}^2\right)\phi(x) \tag{1.2.1}$$

即有

$$\left(\boldsymbol{\nabla}^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi(x) = m^2\phi(x) \tag{1.2.2}$$

于是可得

$$\Box^2\phi(x) = m^2\phi(x) \tag{1.2.3}$$

移项即得(1.2)式。

我们将要使用下列记号来标记矢量。符号 x_μ，$\mu=1$，2，3，4，标记一个四度矢量，它有空间分量 x_1，x_2，x_3 和虚的类时分量 $x_4=ix_0=it$。三度空间矢量 $\boldsymbol{x}$ 的分量将用拉丁字母 i，j，k，$\cdots$ 等作为下标来标记，同时用希腊字母 λ，μ，ν，$\cdots$ 等作为下标来标记四度矢量。标积

$$\sum_{\mu=1}^{4} k_\mu x_\mu$$

将简写成 $k_\mu x_\mu$，此即表示遍及于标量积中所有重复的希腊文下标求和，也就是采用爱因斯坦惯例。在不引起混乱时，我们也将略去四度矢量 x_μ 的下标而简单地写成 x（例如在(1.2)式中）。同时把标积 $k_\mu x_\mu$ 简写成 kx。此外，在(1.2)式中

$$\Box^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\mu} \tag{1.3}$$

为了得到 Klein–Gordon 方程的本征解的完全集，我们必须确定边界条件。为方便起见，我们在这里规定系统限制在一个体积为 $V=L^3$ 的立方箱中，并在立方箱的表面施予周期性边界条件的限制。于是，我们得到一个完全正交的本征函数系：

$$\phi_{\boldsymbol{k}}(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\,e^{ikx} \tag{1.4}$$

(1.4)式的导出：由(1.2)式，我们有

$$\boldsymbol{\nabla}^2\phi(\boldsymbol{x},\,t)-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(\boldsymbol{x},\,t)=m^2\phi(\boldsymbol{x},\,t) \tag{1.4.1}$$

设上式的解 $\phi(\boldsymbol{x},\,t)$ 为：

$$\phi(\boldsymbol{x},\,t)=A(\boldsymbol{x})\,T(t) \tag{1.4.2}$$

将(1.4.2)代入(1.4.1)式，即得

$$\frac{\boldsymbol{\nabla}^2 A(\boldsymbol{x})}{A(\boldsymbol{x})}=\frac{T''(t)}{T(t)}+m^2=-\boldsymbol{k}^2 \tag{1.4.3}$$

因此，我们可得：

$$\boldsymbol{\nabla}^2 A(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{k}^2 A(\boldsymbol{x})=0 \tag{1.4.4a}$$

$$T''(t)+\left(m^2+\boldsymbol{k}^2\right)T(t)=0 \tag{1.4.4b}$$

令

$$k_0^2=\omega_{\boldsymbol{k}}^2=m^2+\boldsymbol{k}^2 \tag{1.4.5}$$

于是可得

$$\phi(\boldsymbol{x},\,t)=C\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\,e^{-i\omega_{\boldsymbol{k}}t} \tag{1.4.6}$$

式中，归一化常数 C 可求出为

$$C=\frac{1}{\sqrt{V}} \tag{1.4.7}$$

把上式和 $kx=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+ik_0\cdot(it)=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-k_0t=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega_{\boldsymbol{k}}t$ 代入(1.4.6)式，即得

$$\phi(x)=\phi(\boldsymbol{x},\,t)=\frac{1}{\sqrt{V}}\,e^{ikx} \tag{1.4}$$

式中，由于周期性边界条件的限制，矢量 $\boldsymbol{k}$ 必须取下列值：

$$\boldsymbol{k}=\frac{2\pi}{L}\left(n_1,\,n_2,\,n_3\right) \tag{1.5}$$

这里，n_1，n_2，n_3 是整数。我们将把(1.5)式所确定的动量 $\boldsymbol{k}$ 称为容许动量（the allowed momenta）。对每个容许动量 $\boldsymbol{k}$ 而言，出现在(1.4)式中的 k_0，是根据能量-动量关系(1.1)式确定的：

$$k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}\equiv+\sqrt{m^2+\boldsymbol{k}^2} \tag{1.6}$$

因此，我们有时也将四度矢量 k 写成 $k\equiv(\boldsymbol{k},\,ik_0)$。下面，我们来考虑一个容许动量 $\boldsymbol{k}$ 以及通过能量关系 (1.6)式和它相关的 k_0.

现在，我们能按一定的顺序列举出容许动量 $\boldsymbol{k}_1$，$\boldsymbol{k}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{k}_i$，$\cdots$ 和相应的单粒子态 $\phi_i(x)$，$i=1,\,2,\,\cdots$. 因此，我们可以通过如下的描述来完全确定由许多个无相互作用粒子组成的一个系统：n_1 个介子处于单粒子态 ϕ_1，n_2 个介子处于单粒子态 ϕ_2，$\cdots$，n_i 个介子处于单粒子态 ϕ_i，$\cdots$. 我们用态矢量（state vector）来描述多粒子态：

$$\left|\,n_1,\,n_2,\,\cdots n_i,\,\cdots\right\rangle\equiv\Phi\left(n_1,\,n_2,\,\cdots n_i,\,\cdots\right) \tag{1.7}$$

由上式可见，态矢量类似于单粒子理论中的波函数。当我们假定态矢量(1.7)提供了多粒子系统的完全描述时，我们已作了一个量子力学假定，即全同粒子是不可区别的。在这一点上，态矢量似乎是一个相当抽象的概念。我们将在不久以后就来讨论它的意义以及如何应用它。不过应该了解，在写下(1.7)式时，我们的意思也不过就是上面所说的那些。特别要注意的是，(1.7)式中的 $\Phi\left(n_1,\,n_2,\,\cdots n_i,\,\cdots\right)$ 不应该被认为是粒子的位置矢量或粒子的动量等变量的函数。

我们将取态矢量(1.7)的集合建立无限维矢量空间的一个正交基底 [1]，定义任意两个态矢量的标量积为：

$$\begin{aligned}&\left\langle n_1,\,n_2,\,\cdots n_i,\,\cdots\right|\left.n_1',\,n_2',\cdots n_i',\cdots\right\rangle\\&=\left(\Phi\left(n_1,\,n_2,\,\cdots n_i,\,\cdots\right),\,\Phi\left(n_1',\,n_2',\,\cdots n_i',\,\cdots\right)\right)=\prod_{i=1}^{\infty}\delta\left(n_i,\,n_i'\right)\end{aligned} \tag{1.8}$$

式中，$\delta(a,\,b)$ 即是 Kronecker δ 符号 δ_{ab}.

现在，我们用态矢量 $\Phi(t)$ 来表示与时间有关的一般的态，$\Phi(t)$ 是基底矢量(1.7)式的线性组合，组合系数是时间的函数：

$$\Phi(t)=\sum_{n_1,\,\cdots,\,n_i,\,\cdots}C_{n_1\,\cdots\,n_i\,\cdots}(t)\,\Phi\left(n_1,\,\cdots n_i,\,\cdots\right) \tag{1.9}$$

$\left|C_{n_1\,\cdots\,n_i\,\cdots}(t)\right|^2$ 是在时刻 t 有 n_i 个粒子处于态 ϕ_i 的几率，$(i=1,\,2,\,\cdots)$。在写下(1.9)式时，我们已用了薛定谔绘景（Schrödinger picture）[2] 这个绘景用态矢量来描述系统随时间的变化。

一般说来，系统的占有数将随时间变化；例如，如果一个处于动量态 $\boldsymbol{k}_1$ 的介子在散射后处于动量态 $\boldsymbol{k}_2$，则 n_1 将减少一个单位，而 n_2 将增加一个单位。（为了能够发生这种变化，我们当然需要一个散射中心，也就是相互作用）。现在，我们来考虑在这个矢量空间中的算符相应于占有数的变化，这些算符将把一个态矢量变换成另一个态矢量。基本算符（fundamental operators）就是使独态的占有数改变一个单位的算符，所有其他算符都是依据这些基本算符建造的。对于每一个容许动量 $\boldsymbol{k}_i$ 而言，通过说明如何使一个一般的基底矢量发生变换，我们定义吸收算符（absorption operator）$a(\boldsymbol{k}_i)$ 如下（亦称湮灭算符（annihilation operator））：

$$a(\boldsymbol{k}_i)\,\Phi\left(n_1,\,\cdots,\,n_i,\,\cdots\right)=\sqrt{n_i}\,\Phi\left(n_1,\,\cdots,\,n_i-1,\,\cdots\right) \tag{1.10}$$

[1] 这样的一个矢量空间也称为 Hilbert 空间或函数空间，在 F. Mandl 所著的《量子力学》第一章中，对 Hilbert 空间作了不严格的简单讨论。*Quantum Mechanics, 2nd ed.*, London, Academic Press, 1957. 以下将把这本书简称为 QM.

[2] 参见 QM，§23。

这样，$a(\boldsymbol{k}_i)$ 就使第 i 态的占有数减少了一个单位，剩下的所有其他占有数则不变。(1.10)式中的因子 $\sqrt{n_i}$ 是物理解释所要求的。

根据(1.10)式，我们立刻可得到吸收算符 $a(\boldsymbol{k}_i)$ 的矩阵表示，由此，可知伴算符符 $a^\dagger(\boldsymbol{k}_i)$ 满足

$$a^\dagger(\boldsymbol{k}_i)\,\Phi\left(n_1,\cdots,n_i,\cdots\right)=\sqrt{n_i+1}\,\Phi\left(n_1,\cdots n_i+1,\cdots\right) \tag{1.11}$$

这样，$a^\dagger(\boldsymbol{k}_i)$ 是一个产生算符（creation operator），它使第 i 态的占有数增加一个单位，而剩下的所有其他占有数则不变。

根据吸收算符 $a(\boldsymbol{k}_i)$ 和产生算符 $a^\dagger(\boldsymbol{k}_i)$ 的定义（(1.10)—(1.11)）式（或根据相应的矩阵表示），我们能直接证明两个很重要的结果：

(i) 第 i 态的占有数算符为

$$a^\dagger(\boldsymbol{k}_i)\,a(\boldsymbol{k}_i)\,\Phi\left(n_1,\cdots,n_i,\cdots\right)=n_i\,\Phi\left(n_1,\cdots,n_i,\cdots\right) \tag{1.12}$$

上式表明，基底矢量 $\Phi\left(n_1,\cdots,n_i,\cdots\right)$ 是算符 $a^\dagger(\boldsymbol{k}_i)\,a(\boldsymbol{k}_i)$ 的属于本征值 n_i 的本征函数，n_i 是第 i 态的占有数。由此，我们称算符 $a^\dagger(\boldsymbol{k}_i)\,a(\boldsymbol{k}_i)$ 为第 i 态的占有数算符（the occupation number operator）。这种本征态的线性叠加，例如(1.9)式，当然就不再是本征态。

(ii) 产生算符和湮灭算符满足下列对易关系：

$$\left[a(\boldsymbol{k}_i),\,a(\boldsymbol{k}_j)\right]=\left[a^\dagger(\boldsymbol{k}_i),\,a^\dagger(\boldsymbol{k}_j)\right]=0 \tag{1.13a}$$

$$\left[a(\boldsymbol{k}_i),\,a^\dagger(\boldsymbol{k}_j)\right]=\delta\left(\boldsymbol{k}_i,\,\boldsymbol{k}_j\right) \tag{1.13b}$$

若把矢量 $\boldsymbol{k}_i$ 的分量写为 k_{im} $(m=1,\ 2,\ 3)$，则上面第二等式中的 δ 符号当然就可以写为 $\prod\limits_m \delta\left(k_{im},\,k_{jm}\right)$.

现在，我们来定义在理论中起重要作用的真空态（vacuum state），我们用 Φ_0 来表示它。在真空态中，所有的单粒子态都是空的，即所有 $n_i=0$：

$$\Phi_0=\Phi\left(0,\,0,\cdots,\,0,\cdots\right)$$

因此，要从真空态吸收粒子是不可能的，这在数学上可以表示为：

$$a(\boldsymbol{k}_i)\,\Phi_0=0 \tag{1.14}$$

对于所有容许动量 $\boldsymbol{k}_i$ 而言，上式和湮灭算符的定义式(1.10)式显然是自洽的，并且事实上也是必要的。(1.10)式没有定义 $a(\boldsymbol{k}_i)\,\Phi_0$，这是因为在这种情况下，(1.10)式的右边显然是无意义的。

连续应用适当的产生算符，我们能够从真空态产生所有其他的基底矢量 $\Phi\left(n_1,\cdots,n_i,\cdots\right)$。这样，仅存在一个动量为 $\boldsymbol{k}_i$ 的介子的态，就用 $a^\dagger(\boldsymbol{k}_i)\,\Phi_0$ 来表示。根据对易关系(1.13a)、(1.13b)式，我们能够证明态 $a^\dagger(\boldsymbol{k}_i)\,\Phi_0$ 是正确地归一化了的。

证明:

$$\begin{aligned}\int\left(a^\dagger(\boldsymbol{k}_i)\,\Phi_0\right)^*a^\dagger(\boldsymbol{k}_i)\,\Phi_0\,\mathrm{d}\tau&=\int\left(a(\boldsymbol{k}_i)\,a^\dagger(\boldsymbol{k}_i)\,\Phi_0\right)^*\Phi_0\,\mathrm{d}\tau\\&=\int\left(1-a^\dagger(\boldsymbol{k}_i)\,a(\boldsymbol{k}_i)\,\Phi_0\right)^*\Phi_0\,\mathrm{d}\tau\qquad\text{（代入(1.13}b\text{)式）}\\&=\int\Phi_0^*\,\Phi_0\,\mathrm{d}\tau=1\end{aligned}$$

同样，我们可以用 $a^\dagger(\boldsymbol{k}_i)\,a^\dagger(\boldsymbol{k}_j)\,\Phi_0$ 来表示任一两介子态。根据对易关系(1.13a)、(1.13b)式，我们可以断定，在粒子互换下，即 $\boldsymbol{k}_i\leftrightarrow\boldsymbol{k}_j$，这个态是对称的。这样，上面的机制描述了满足 Bose–Einstein 统计的粒子（即玻色

子）体系。显然，玻色子的占有数可以取所有的值 0，1，2，$\cdots$．费米子（即满足 Fermi–Dirac 统计的粒子）满足泡利不相容原理，在任何态中至多只能有一个粒子，因而占有数只能取 0 和 1。要把上面的机制应用于费米子，还必须从根本上加以修改。

既然处于态 $\boldsymbol{k}_i$ 的一个粒子的能量为

$$\omega\left(\boldsymbol{k}_i\right)=+\sqrt{m^2+\boldsymbol{k}_i^2} \tag{1.15}$$

那么，处于态 $\Phi\left(n_1, \cdots, n_i, \cdots\right)$ 的一个多粒子体系的能量就是

$$\sum_i n_i\,\omega\left(\boldsymbol{k}_i\right) \tag{1.16}$$

这是因为介子之间没有相互作用。于是根据(1.12)式，我们预期多粒子体系的哈密顿算符为

$$H=\sum_i a^{\dagger}(\boldsymbol{k}_i)\,a(\boldsymbol{k}_i)\,\omega(\boldsymbol{k}_i) \tag{1.17}$$

$\Phi\left(n_1, \cdots, n_i, \cdots\right)$ 则是 H 的属于本征值 $\sum_i n_i\,\omega(\boldsymbol{k}_i)$ 的本征函数。

通过和单粒子量子力学类比，我们可以得到体系的运动方程为

$$i\,\frac{\partial}{\partial t}\,\Phi(t)=H\,\Phi(t) \tag{1.18}$$

其哈密顿量 H 则由(1.17)式给出。上式给出了体系随时间的变化。体系的能量本征态可通过把

$$\Phi(t)=\Phi\left(n_1, \cdots, n_i, \cdots\right)\,e^{-iEt} \tag{1.19}$$

代入(1.18)式而得到，即有

$$(H-E)\,\Phi\left(n_1, \cdots, n_i, \cdots\right)=0 \tag{1.20}$$

$$E=\sum_i n_i\,\omega(\boldsymbol{k}_i) \tag{1.21}$$

正如所预期的那样，在没有相互作用时，占有数是运动常数。这一点，根据占有数算符

$$a^{\dagger}(\boldsymbol{k}_i)\,a(\boldsymbol{k}_i) \tag{1.22}$$

的性质也可推出，因为根据(1.17)式，哈密顿量和占有数算符相互对易。

上面对具有给定性质（如给定动量）的分立“单位”（如粒子或光子）系统的描述仅仅是可能的描述模式之一。例如，在对电磁场作经典描述时，我们就没有使用上面的模式，而是用随时空点 x 变化的矢量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$，或用四维矢势 $A_\alpha(x)$，$\alpha=1$，2，3，4 来描述电磁场。这里，四维矢势 $A_\alpha(x)$ 就是矢势 $\boldsymbol{A}(x)$ 和 $A_4(x)=i\,V(x)$，$V(x)$ 是标量势。这样，一个电子周围环绕有它自己的电磁场；使用“粒子”语言，我们就说电子周围环绕有光子云。类似地，在麦克斯韦理论中，两电子的相互作用是通过场作为媒介物发生的，现在则认为两电子的相互作用是通过在它们的电子云之间交换光子引起的。这里所涉及到的，正是我们在普通量子力学中已经熟悉了的波粒二象性。

波粒二象性当然也存在于自旋为零的介子情况中（迄今为止，本章所讨论的都是这种情况）。仅有的差别就是介子的情况是相当简单的（没有自旋，没有规范不变性等），和光子场需要两个矢量场 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 来描述不同，一个单场（single field）$\phi(x)$ 就足以对介子系统作出完全的描述了。这个介子场所起的作用完全类似于光子场，这样，类似于把两电子的相互作用归因于光子场，我们可以把核力归因于介子场。使用粒子语言，我们就说核力是通过在环绕每个核子的介子云之间交换介子引起的。核子之间的力是短程力，其力程是 π 介子康普顿波长（Compton

wave-length）的数量级（康普顿波长为 $1.4\times10^{-13}\,\mathrm{cm}$），这个事实可以看成是上述假定的一个惊人示例。实际上，正是为了解释核力的短程性，汤川秀树（Yukawa）才假定存在一种适当质量的粒子，以上面所说的方式起作用。

具有上述波粒二象性的这种理论，必须是一个量子化场的理论。这样一个理论可通过几种方式得到。这儿所用的方法具有几个缺点，特别是它选出了和空间坐标比较的时间，这就隐藏了理论的相对论不变性，并且长时期地阻碍了理论的进一步发展。尽管如此，我们仍将遵循上面所述方法来开始介绍我们的理论。这是因为这种方法和普通量子力学中所用方法非常类似，这就使读者能更加容易地了解理论的真谛。根据这个方法，我们首先用哈密顿形式论导出经典场论；然后再根据哈密顿体系的通常假定使这个理论量子化。在下面的两章中，我们将导出经典场论和使经典场论量子化。

习题与解答

1. 根据(1.10)式导出(1.11)式。

解： 为方便起见，我们采用狄拉克符号。根据(1.10)式，我们有

$$a(\boldsymbol{k}_i)\left|n_1,n_2,\cdots,m_i,\cdots\right\rangle=\sqrt{m_i}\left|n_1,n_2,\cdots,m_i-1,\cdots\right\rangle \tag{1}$$

在(1)式左右两边取厄密共轭，即得

$$\left\langle n_1,n_2,\cdots,m_i,\cdots\right|a^\dagger(\boldsymbol{k}_i)=\left\langle n_1,n_2,\cdots,m_i-1,\cdots\right|\sqrt{m_i} \tag{2}$$

在(2)式中，令 $m_i=n_i+1$，则有

$$\left\langle n_1,n_2,\cdots,n_i+1,\cdots\right|a^\dagger(\boldsymbol{k}_i)=\left\langle n_1,n_2,\cdots n_i,\cdots\right|\sqrt{n_i+1} \tag{3}$$

在(3)式两边右乘右矢 $\left|n_1,n_2,\cdots,n_i,\cdots\right\rangle$，则得

$$\begin{aligned}&\left\langle n_1,n_2,\cdots n_i+1,\cdots\right|a^\dagger(\boldsymbol{k}_i)\left|n_1,n_2,\cdots,n_i,\cdots\right\rangle\\&=\sqrt{n_i+1}\left\langle n_1,n_2,\cdots,n_i,\cdots\right|\left.n_1,n_2,\cdots,n_i,\cdots\right\rangle\\&=\sqrt{n_i+1}\end{aligned} \tag{4}$$

(4)式中的最后一步是根据态矢的正交归一得出的。因(4)式右边不等于零，所以必有

$$a^\dagger(\boldsymbol{k}_i)\left|n_1,n_2,\cdots,n_i,\cdots\right\rangle=C\left|n_1,n_2,\cdots,n_i+1,\cdots\right\rangle \tag{5}$$

把(5)代入(4)式，根据态矢的正交归一条件，即有

$$C=\sqrt{n_i+1} \tag{6}$$

把(6)代入(5)，即得

$$a^\dagger(\boldsymbol{k}_i)\left|n_1,n_2,\cdots,n_i,\cdots\right\rangle=\sqrt{n_i+1}\left|n_1,n_2,\cdots,n_i+1,\cdots\right\rangle \tag{7}$$

此即(1.11)式。

2. 根据(1.10)—(1.11)式导出(1.12)式。

解：

$$\begin{aligned}&a^\dagger(\boldsymbol{k}_i)\,a(\boldsymbol{k}_i)\left|n_1,n_2,\cdots,n_i,\cdots\right\rangle\\&=a^\dagger(\boldsymbol{k}_i)\,\sqrt{n_i}\left|n_1,n_2,\cdots,n_i-1,\cdots\right\rangle\end{aligned}\qquad\text{（代入(1.10)式）}$$

$$= \sqrt{n_i}\sqrt{(n_i-1)+1}\left|n_1, n_2, \cdots, (n_i-1)+1, \cdots\right\rangle \qquad \text{(代入(1.11)式)}$$
$$= n_i\left|n_1, n_2, \cdots, n_i, \cdots\right\rangle$$

即为所求。

3. 根据(1.10)—(1.11)式导出对易关系(1.13a)、(1.13b)式。

解： 玻色子体系的波函数具有交换对称性，即由(1.11)式可得：

$$a^\dagger(\boldsymbol{k}_i)\,a^\dagger(\boldsymbol{k}_j)\left|n_1, \cdots, n_i, \cdots, n_j, \cdots\right\rangle = \sqrt{n_i+1}\sqrt{n_j+1}\left|n_1, \cdots n_i+1, \cdots, n_j+1, \cdots\right\rangle \tag{1}$$

$$a^\dagger(\boldsymbol{k}_j)\,a^\dagger(\boldsymbol{k}_i)\left|n_1, \cdots, n_i, \cdots, n_j, \cdots\right\rangle = \sqrt{n_j+1}\sqrt{n_i+1}\left|n_1, \cdots, n_i+1, \cdots, n_j+1, \cdots\right\rangle \tag{2}$$

将(1)和(2)式的两边分别相减，即得：

$$\left\{a^\dagger(\boldsymbol{k}_i)\,a^\dagger(\boldsymbol{k}_j) - a^\dagger(\boldsymbol{k}_j)\,a^\dagger(\boldsymbol{k}_i)\right\}\left|n_1, \cdots, n_i, \cdots, n_j, \cdots\right\rangle = 0 \tag{3}$$

在(3)式中，$\left|n_1, \cdots, n_i, \cdots, n_j, \cdots\right\rangle$ 是任意的，故有：

$$a^\dagger(\boldsymbol{k}_i)\,a^\dagger(\boldsymbol{k}_j) - a^\dagger(\boldsymbol{k}_j)\,a^\dagger(\boldsymbol{k}_i) = \left[a^\dagger(\boldsymbol{k}_i),\, a^\dagger(\boldsymbol{k}_j)\right] = 0 \tag{4}$$

同样，由(1.10)式可得：

$$a(\boldsymbol{k}_i)\,a(\boldsymbol{k}_j)\left|n_1, \cdots, n_i, \cdots, n_j, \cdots\right\rangle = \sqrt{n_i}\sqrt{n_j}\left|n_1, \cdots, n_i-1, \cdots, n_j-1, \cdots\right\rangle \tag{5}$$

$$a(\boldsymbol{k}_j)\,a(\boldsymbol{k}_i)\left|n_1, \cdots, n_i, \cdots, n_j, \cdots\right\rangle = \sqrt{n_j}\sqrt{n_i}\left|n_1, \cdots, n_i-1, \cdots, n_j-1, \cdots\right\rangle \tag{6}$$

将(5)式和(6)式两边分别相减，并考虑到在上面两式中的 $\left|n_1, \cdots, n_i, \cdots, n_j, \cdots\right\rangle$ 是任意的，即得：

$$a(\boldsymbol{k}_i)\,a(\boldsymbol{k}_j) - a(\boldsymbol{k}_j)\,a(\boldsymbol{k}_i) = \left[a(\boldsymbol{k}_i),\, a(\boldsymbol{k}_j)\right] = 0 \tag{7}$$

设 $i \neq j$，同样可得

$$a(\boldsymbol{k}_i)\,a^\dagger(\boldsymbol{k}_j) - a^\dagger(\boldsymbol{k}_j)\,a(\boldsymbol{k}_i) = \left[a(\boldsymbol{k}_i),\, a^\dagger(\boldsymbol{k}_j)\right] = 0 \tag{8}$$

根据(1.10)—(1.11)式，我们有

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{k}_i)\,a^\dagger(\boldsymbol{k}_i)\left|n_1, \cdots, n_i, \cdots\right\rangle &= a(\boldsymbol{k}_i)\sqrt{n_i+1}\left|n_1, \cdots, n_i+1, \cdots\right\rangle \\ &= \sqrt{n_i+1}\sqrt{n_i+1}\left|n_1, \cdots, (n_i+1)-1, \cdots\right\rangle \\ &= (n_i+1)\left|n_1, \cdots, n_i, \cdots\right\rangle \end{aligned} \tag{9}$$

根据(1.12)式，我们有

$$a^\dagger(\boldsymbol{k}_i)\,a(\boldsymbol{k}_i)\left|n_1, \cdots, n_i, \cdots\right\rangle = n_i\left|n_1, \cdots, n_i, \cdots\right\rangle \tag{10}$$

将(9)式和(10)式的两边分别相减，并考虑到在上面两式中的 $\left|n_1, \cdots, n_i, \cdots\right\rangle$ 是任意的，即得：

$$a(\boldsymbol{k}_i)\,a^\dagger(\boldsymbol{k}_i) - a^\dagger(\boldsymbol{k}_i)\,a(\boldsymbol{k}_i) = \left[a(\boldsymbol{k}_i),\, a^\dagger(\boldsymbol{k}_i)\right] = 1 \tag{11}$$

于是由(4)，(7)，(8)，(11) 式可得

$$\left[a(\boldsymbol{k}_i),\, a(\boldsymbol{k}_j)\right] = \left[a^\dagger(\boldsymbol{k}_i),\, a^\dagger(\boldsymbol{k}_j)\right] = 0 \tag{12a}$$

$$\left[a(\boldsymbol{k}_i),\, a^\dagger(\boldsymbol{k}_j)\right] = \delta\left(\boldsymbol{k}_i,\, \boldsymbol{k}_j\right) \tag{12b}$$

即为所求。

第二章　经典场

在本章中，我们要发展一个哈密顿形式的经典理论。不过，我们将只导出这个理论的一小部分，即在第三章的量子化过程中所需要的那一部分。因此，我们将仅仅涉及到获得共轭变量的一个完全集合。所用的方法则严格地遵从经典力学。设存在有一拉氏函数，借助于变分原理，我们就可以从作用量积分中导出场方程。由拉氏函数，我们可得到与场变量相共轭的动量，然后，假定在场变量和共轭动量之间有一定的对易法则成立，我们就能从经典理论过渡到量子化理论。和经典粒子力学相比较，这里需要注意的新奇的特色，就是我们所处理的是一个具有不可数自由度的系统。

在上一章中，我们考虑了和满足 Klein–Gordon 方程的一个单场有关的粒子。现在，我们来考虑几个场 $\phi^\alpha(x)$，$\alpha = 1,\ 2,\ \cdots,\ N$ 的一般情况。这 N 个场是为确定系统所需要的。这个推广符合在实际中发生的多数情况，也不会使分析复杂化。指标 α 标记的场可能是一个场的不同分量，(例如，对于用四维矢势 $A_\alpha(x)$ 描述的光子场而言，α 从 1 到 4；而我们在第一章中讨论过的标量场 $\phi(x)$，则只有一个分量) 也可能是不同的完全独立的场。我们假定场 ϕ^α 是实数场，如果有复数场出现，它们必须被分解成一对实数场。

现在，我们把讨论严格地限于经典场论，借助于变分原理，我们可以从作用量积分导出经典场论。设有拉格朗日密度

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}\left(\phi^\alpha,\, \partial_\mu \phi^\alpha\right) \tag{2.1}$$

式中，我们使用了简写符号

$$\partial_\mu \phi^\alpha \equiv \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x_\mu} \tag{2.2}$$

(2.1)式所给出的拉格朗日密度，仅仅取决于场量及其一阶导数，当然不代表能够将理论加以发展的最一般情况，但是它处理了有实际意义的全部情况，并且使理论得到极大的简化。

对于四维时空连续区的任意一个区域 Ω，我们定义作用量积分 $I(\Omega)$ 为：

$$I(\Omega) = \int_\Omega \mathrm{d}^4x\, \mathscr{L}\left(\phi^\alpha,\, \partial_\nu \phi^\alpha\right) \tag{2.3}$$

式中，d^4x 代表四维积分元 $\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_4 = \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}t$.

现在，我们假定系统的运动方程，即场方程，可根据和经典力学中的哈密顿原理非常类似的变分原理获得。设对一任意区域 Ω，使场量 ϕ^α 这样变换，即

$$\phi^\alpha(x) \longrightarrow \phi^\alpha(x) + \delta\phi^\alpha(x)$$

场量的上述变化在区域 Ω 的边界面上所引起的作用量积分 $I(\Omega)$ 的变化为零，于是作用量积分 $I(\Omega)$ 取驻定值 (stationary value)，即有

$$\delta I(\Omega) = 0 \tag{2.4}$$

根据(2.3)式，我们可算出 $\delta I(\Omega)$ 为[1]

$$\begin{aligned}\delta I(\Omega) &= \int_\Omega \mathrm{d}^4x \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi^\alpha}\,\delta\phi^\alpha + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\nu \phi^\alpha}\,\delta\partial^\nu\phi^\alpha \right\} \\ &= \int_\Omega \mathrm{d}^4x \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi^\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\nu \phi^\alpha} \right) \right\} \delta\phi^\alpha + \int_\Omega \mathrm{d}^4x \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\nu \phi^\alpha}\,\delta\phi^\alpha \right\} \end{aligned} \tag{2.5}$$

式中，记住

$$\delta\partial_\nu\phi^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\,\delta\phi^\alpha \tag{2.6}$$

利用分部积分即可得到(2.5)式的最后一步。(2.5)式的最后一项是四维散度的四维体积分，根据高斯定理，我们可以把它变换成遍及于表面 Γ 的面积分，即有：

$$\int_\Omega \mathrm{d}^4x \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\nu \phi^\alpha}\,\delta\phi^\alpha \right\} = \int_\Gamma \mathrm{d}S_\nu \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\nu \phi^\alpha}\,\delta\phi^\alpha \right\} \tag{2.7}$$

式中，$\mathrm{d}S_\nu$ 是表面 Γ 上的面积分元。因为在表面 Γ 上 $\delta\phi^\alpha = 0$，所以(2.7)式中的面积分为 0. 如果对于任意变量 $\delta\phi^\alpha(x)$，(2.4)式都成立，即 $\delta I(\Omega)$ 都为 0，则从(2.5)式，可知下列方程必定成立：

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi^\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\nu \phi^\alpha} \right) = 0 \qquad\qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, N) \tag{2.8}$$

这些方程就是场量 $\phi(x)$ 所需要满足的微分方程。我们称它们为变分问题(2.4)的欧拉方程，这些方程和经典力学中的拉氏方程相对应。理论的相对论不变性要求作用量积分在洛伦兹变换下是不变的；由此根据(2.3)式即可断定拉格朗日量密度必须是一个标量，即在洛伦兹变换下保持不变。

为了能够用普通量子力学的方法把这个经典场理论量子化，我们首先必须转向哈密顿形式论。对于具有可数自由度的系统，哈密顿形式论已被人们作了详细的论述。我们正在处理的系统具有不可数的无限多自由度，这些自由度与作为时间函数的场 ϕ^α 在空间每一点 $\boldsymbol{x}$ 的值相对应。因此，我们必须使用若干极限过程。

设在某一瞬刻 t 有一系统，用平直的类空曲面 $t =$ 常数把三维空间分解成小体积元 $\delta\boldsymbol{x}^{(s)}$，这些小体积元用指标 $s = 1, 2, \cdots$ 来标记。这样，我们所处理的具有不可数无限多自由度的系统，现在能够用下列可数个变量来确定：

$$q_s^\alpha = \phi^\alpha(s, t) \qquad\qquad (\alpha = 1, \cdots, N;\ s = 1, 2, \cdots) \tag{2.9}$$

这些变量给出了适当定义的在每个小体积元中的场值。当然，我们最终将令小体积元趋于零而过渡到连续区的极限情况。现在，我们用邻近体元之间的差商置换对空间坐标的微商，并且定义系统的拉氏函数为：

$$L(t) = \sum_s \delta\boldsymbol{x}^{(s)}\,\mathscr{L}^{(s)} \tag{2.10}$$

式中，$\mathscr{L}^{(s)}$ 是第 s 个体元的拉氏函数密度(2.1)的值。于是，我们能够定义与 q_s^α 共轭的动量 p_s^α 为：

$$p_s^\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^\alpha(s, t)} = \frac{\partial \mathscr{L}^{(s)}}{\partial \dot{\phi}^\alpha(s, t)}\,\delta\boldsymbol{x}^{(s)} \tag{2.11}$$

式中，字母顶上的点 "$\cdot$" 表示对时间求导[2]。现在，我们可以用通常的形式定义哈密顿函数 $H(t)$ 为

$$H = \sum_s p_s^\alpha\,\dot{q}_s^\alpha - L \tag{2.12}$$

---

[1] 在(2.5)式中，出现在乘积中的重复指标意味着求和，以后不再说明。

[2] 根据(2.1)式所给出的拉氏函数密度，在(2.11)式的最后一步中，$\dot{\phi}^\alpha(s, t)$ 仅仅出现在 $\mathscr{L}^{(s)}$ 中。

为了更方便地过渡到极限情况 $\delta\boldsymbol{x}^{(s)}\to 0$，我们定义场量 $\phi^\alpha(x)$ 的共轭场为：

$$\pi^\alpha(x)\equiv\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}^\alpha} \tag{2.13}$$

于是(2.11)式变成

$$p_s^\alpha=\pi^\alpha(s,\,t)\,\delta\boldsymbol{x}^{(s)} \tag{2.14}$$

哈密顿函数(2.12)式则变成：

$$H=\sum_s\delta\boldsymbol{x}^{(s)}\left\{\pi^\alpha(s,\,t)\,\dot{\phi}^\alpha(s,\,t)-\mathscr{L}^{(s)}\right\} \tag{2.15}$$

如果我们现在过渡到极限情况 $\delta\boldsymbol{x}^{(s)}\to 0$，我们就能把哈密顿函数写成为：

$$H(t)=\int\mathrm{d}^3x\,\mathscr{H}(\boldsymbol{x},\,t) \tag{2.16}$$

而哈密顿函数密度则为

$$\mathscr{H}(x)=\pi^\alpha(x)\,\dot{\phi}^\alpha(x)-\mathscr{L}(x) \tag{2.17}$$

作为例子，考虑拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}(\phi,\,\partial_\nu\phi)=-\frac{1}{2}\left\{\partial_\nu\phi\,\partial_\nu\phi+m^2\phi^2\right\} \tag{2.18}$$

的系统，其拉格朗日方程就是 Klein–Gordon 方程(1.2)，这就意味着，(2.18)所给出的拉格朗日密度描述了质量为 m 的自旋为 0 的介子。把(2.18)式代入(2.13)式中，即得相应的共轭场为

$$\pi(x)=\dot{\phi}(x) \tag{2.19}$$

由此，根据(2.17)式，可得哈密顿量密度为

$$\mathscr{H}(x)=\frac{1}{2}\left\{\pi^2+\sum_i\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)^2+m^2\phi^2\right\} \tag{2.20}$$

(2.20)式的导出：由(2.18)式，我们有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\phi,\,\partial_\nu\phi)&=-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{1}{i}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2+m^2\phi^2\right\}\\&=-\frac{1}{2}\left\{\sum_i\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)^2-\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2+m^2\phi^2\right\}\end{aligned} \tag{2.20.1}$$

由(2.13)式，可得

$$\pi(x)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}(x)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{i^2}\cdot 2\cdot\frac{\partial\phi}{\partial t}=\frac{\partial\phi}{\partial t}=\dot{\phi}(x) \tag{2.20.2}$$

此即(2.19)式。把(2.20.1)和(2.20.2)式代入(2.17)式，即得

$$\begin{aligned}\mathscr{H}(x)&=\dot{\phi}(x)\,\dot{\phi}(x)+\frac{1}{2}\left\{\sum_i\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)^2-\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2+m^2\phi^2\right\}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{2}\left\{\sum_i\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)^2+m^2\phi^2\right\}=\frac{1}{2}\left\{\pi^2+\sum_i\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)^2+m^2\phi^2\right\}\end{aligned}$$

现在，从共轭变量 q_s^α 和 p_s^α 的分立集的哈密顿方程出发，我们能得到共轭场量 $\phi^\alpha(\boldsymbol{x},\,t)$ 和 $\pi^\alpha(\boldsymbol{x},\,t)$ 的哈密顿方程，但由于我们不需要这些方程，所以它们的导出将被略去。在下一章中，我们将从共轭坐标 q_s^α 和 p_s^α 出发，使经典共轭场 ϕ^α 和 π^α 量子化。用这种方法，我们将重新得到第一章中的粒子描述。

习题与解答

1. 设有四维场 $A_\mu(x)$，$\mu=1,\cdots,4$，拉格朗日密度 $\mathscr{L}(x)$ 为

$$\mathscr{L}(x)=-\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \tag{1}$$

导出四维场 $A_\mu(x)$ 的欧拉方程。

解：将(1)式代入(2.8)式，即得

$$-\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial\mathscr{L}(x)}{\partial\left(\dfrac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu}\right)}=0 \tag{2}$$

于是有

$$-\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right)=\sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial x_\nu^2}A_\mu=\Box^2A_\mu(x)=0\qquad\qquad\mu=1,\cdots,4 \tag{3}$$

(3)式实际上就是自由电磁场的达朗贝尔方程，$A_\mu(x)=(\boldsymbol{A},iV)$，加上洛伦兹条件 $\dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}=0$ 后，即等价于麦克斯韦方程。

即为所求。

2. 设 $\Lambda_1,\cdots,\Lambda_4$ 是场 $\phi^\alpha(x)$ 的函数，证明：如果用

$$\mathscr{L}'=\mathscr{L}+\frac{\partial\Lambda_\nu}{\partial x_\nu}\qquad\qquad(\nu=1,\cdots,4) \tag{1}$$

代替(2.1)式所给出的拉格朗日密度，不会使场方程发生改变。

证：把(1)式代入(2.3)式，即得

$$\begin{aligned}I'(\Omega)&=\int_\Omega \mathrm{d}^4x\,\mathscr{L}'=\int_\Omega \mathrm{d}^4x\,\mathscr{L}+\int_\Omega \mathrm{d}^4x\,\frac{\partial\Lambda_\nu(\phi^\alpha)}{\partial x_\nu}\\&=I(\Omega)+\int_\Omega \mathrm{d}^4x\,\frac{\partial\Lambda_\nu(\phi^\alpha)}{\partial x_\nu}\end{aligned} \tag{2}$$

设在任意区域 Ω 中，场量 ϕ^α 作一微小改变：

$$\phi^\alpha(x)\longrightarrow\phi^\alpha(x)+\delta\phi^\alpha(x) \tag{3}$$

并假定在积分区域 Ω 的边界 Γ 上

$$\delta\phi^\alpha(x)=0 \tag{4}$$

则 $I'(\Omega)$ 的变分为

$$\begin{aligned}\delta I'(\Omega)&=\delta I(\Omega)+\int_\Omega \mathrm{d}^4x\,\frac{\partial}{\partial x_\nu}\delta\Lambda_\nu(\phi^\alpha)\\&=\delta I(\Omega)+\int_\Gamma \mathrm{d}S_\nu\,\delta\Lambda_\nu\qquad\qquad\text{（利用高斯定理）}\\&=\delta I(\Omega)+\int_\Gamma \mathrm{d}S_\nu\left(\frac{\partial\Lambda_\nu(\phi^\alpha)}{\partial\phi^\alpha}\,\delta\phi^\alpha\right)\end{aligned} \tag{5}$$

由于在边界上 $\delta\phi^\alpha$ 等于 0，故有

$$\int_\Gamma \mathrm{d}S_\nu \left(\frac{\partial \Lambda_\nu(\phi^\alpha)}{\partial \phi^\alpha} \delta\phi^\alpha \right) = 0 \tag{6}$$

把(6)式代入(5)式，即得

$$\delta I'(\Omega) = \delta I(\Omega) \tag{7}$$

(7)式表明，$\mathscr{L}$ 的微小改变(1)式并不改变作用量积分的变分，因而由变分原理必定得到同样的场方程。这就是说，在变换 $\mathscr{L} \to \mathscr{L}'$ 下，场方程具有不变性。

3. 根据场方程(2.8)式，证明张量

$$T_{\mu\nu} = -\partial_\nu \phi^\alpha \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \phi^\alpha} + \mathscr{L}\,\delta_{\mu\nu} \tag{1}$$

满足方程

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = 0 \qquad\qquad (\nu = 1, \cdots, 4) \tag{2}$$

拉格朗日密度 $\mathscr{L}$ 为

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(\phi^\alpha, \partial_\nu \phi^\alpha) \tag{3}$$

证：由场方程(2.8)式，我们可得

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\nu \phi^\alpha} \right) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi^\alpha} \tag{4}$$

于是由(1)式，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} &= -\frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x_\nu} \right) \cdot \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \left(\dfrac{\partial \phi^\alpha}{\partial x_\mu} \right)} - \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x_\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \left(\dfrac{\partial \phi^\alpha}{\partial x_\mu} \right)} + \delta_{\mu\nu} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_\mu} \\
&= -\frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x_\nu} \right) \cdot \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \left(\dfrac{\partial \phi^\alpha}{\partial x_\mu} \right)} - \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x_\nu} \cdot \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi^\alpha} + \delta_{\mu\nu} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_\mu} \\
&= -\frac{\partial \mathscr{L} \left(\phi^\alpha, \dfrac{\partial \phi^\alpha}{\partial x_\nu} \right)}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \mathscr{L} \left(\phi^\alpha, \dfrac{\partial \phi^\alpha}{\partial x_\nu} \right)}{\partial x_\nu} = 0
\end{aligned}$$

即为所求。

4. 设一介子场的拉格朗日密度由(2.18)式确定，即为

$$\mathscr{L}(\phi, \partial_\nu \phi) = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x_\nu} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_\nu} + m^2 \phi\phi \right\} \tag{1}$$

导出由习题 (2.3) 所定义的张量 $T_{\mu\nu}$，并证明

$$-T_{44} = \mathscr{H}(x) \tag{2}$$

这里，$\mathscr{H}(x)$ 即是由(2.20)式确定的哈密顿量密度：

$$\mathscr{H}(x) = \frac{1}{2} \left\{ \pi^2 + \sum_i \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)^2 + m^2 \phi^2 \right\} \tag{3}$$

解： 习题 (2.3) 所定义的张量 $T_{\mu\nu}$ 为

$$T_{\mu\nu}=-\frac{\partial\phi}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\right)}+\mathscr{L}\,\delta_{\mu\nu} \tag{4}$$

把(1)代入(4)，即得

$$T_{\mu\nu}=-\frac{\partial\phi}{\partial x_\nu}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}+\mathscr{L}\,\delta_{\mu\nu}=\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x_\nu}+\mathscr{L}\,\delta_{\mu\nu} \tag{5}$$

由(5)式可得：

$$-T_{44}=-\frac{\partial\phi}{\partial x_4}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x_4}-\mathscr{L}=\frac{\partial\phi}{\partial t}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial t}-\mathscr{L} \tag{6}$$

根据(2.13)式，我们可得 ϕ 的共轭场 $\pi(x)$ 为

$$\begin{aligned}\pi(x)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}}&=\frac{\partial}{\partial\dot{\phi}}\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_3}\right)^2-\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2+m^2\phi^2\right]\right\}\\&=\frac{\partial\phi}{\partial t}\end{aligned} \tag{7}$$

把(1)代入(6)式，并考虑到(7)式，即得

$$\begin{aligned}-T_{44}&=\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_3}\right)^2-\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2+m^2\phi^2\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2+m^2\phi^2\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{\pi^2+\sum_i\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)^2+m^2\phi^2\right\}=\mathscr{H}(x)\end{aligned}$$

即为所求。

5. 定义

$$P_\lambda(t)=-i\int\mathrm{d}^3x\,T_{4\lambda} \tag{1}$$

式中，$T_{\mu\nu}$ 是由习题 (2.3) 的(1)式和(2)式所确定的张量，积分在时刻 t 遍及于全部三维空间。证明：当 $|\boldsymbol{x}|\to\infty$ 时，如果场 $\phi^\alpha(x,t)$ 足够快地趋近于零，则 $P_\lambda(t)$ 是守恒量。解释这个结果。

证： 由习题 (2.3) 的(2)式，我们有

$$\frac{\partial T_{1\lambda}}{\partial x_1}+\frac{\partial T_{2\lambda}}{\partial x_2}+\frac{\partial T_{3\lambda}}{\partial x_3}+\frac{\partial T_{4\lambda}}{\partial x_4}=0 \tag{2}$$

由(2)式可得：

$$-\frac{\partial T_{4\lambda}}{\partial x_4}=-\frac{1}{i}\frac{\partial T_{4\lambda}}{\partial t}=\frac{\partial T_{1\lambda}}{\partial x_1}+\frac{\partial T_{2\lambda}}{\partial x_2}+\frac{\partial T_{3\lambda}}{\partial x_3} \tag{3}$$

根据(1)式，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P_\lambda(t)}{\mathrm{d}t}&=\frac{1}{i}\int\mathrm{d}^3x\,\frac{\partial T_{4\lambda}}{\partial t}=\int\mathrm{d}^3x\,\frac{\partial T_{4\lambda}}{\partial x_4}\\&=-\int\mathrm{d}^3x\left(\frac{\partial T_{1\lambda}}{\partial x_1}+\frac{\partial T_{2\lambda}}{\partial x_2}+\frac{\partial T_{3\lambda}}{\partial x_3}\right)\end{aligned}$$

$$= -\int \mathrm{d}^3x\, \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T}_\lambda \tag{4}$$

式中，三维矢量 $\boldsymbol{T}_\lambda$ 为

$$\boldsymbol{T}_\lambda = \boldsymbol{e}_1 T_{1\lambda} + \boldsymbol{e}_2 T_{2\lambda} + \boldsymbol{e}_3 T_{3\lambda} \tag{5}$$

利用高斯定理，从(4)式可得

$$\frac{\mathrm{d}P_\lambda(t)}{\mathrm{d}t} = \oiint \boldsymbol{T}_\lambda \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{6}$$

根据题设条件，在无限远处场量为零，即有

$$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} \phi^\alpha(\boldsymbol{x},\, t) = 0 \tag{7}$$

$$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} \partial_\nu \phi^\alpha(\boldsymbol{x},\, t) = 0 \tag{8}$$

由(7)式和(8)式，我们有

$$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} \mathscr{L}\left(\phi^\alpha,\, \partial_\nu\phi^\alpha\right) = 0 \tag{9}$$

把(9)代入习题 (2.3) 的(1)式，即得

$$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} T_\lambda = 0 \tag{10}$$

把(10)式代入(6)式右边，即得

$$\oiint \boldsymbol{T}_\lambda \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{11}$$

由此可得

$$\frac{\mathrm{d}P_\lambda(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{12}$$

这就证明了 $P_\lambda(t)$ 是守恒量。

由习题 (2.4) 可知

$$-T_{44} = \mathscr{H} \tag{13}$$

于是由(1)式可得

$$P_4(t) = -i\int \mathrm{d}^3x\, T_{44} = i\int \mathrm{d}^3x\, \mathscr{H}(\boldsymbol{x},\, t) = i\, H(t) \tag{14}$$

$H(t)$ 是场 $\phi^\alpha(\boldsymbol{x},\, t)$ 的总能量，因此根据(14)式，$P_4(t)$ 守恒就是说能量守恒。当 $\lambda = 4$ 时，(12)式就是能量守恒定律。

定义三维矢量 ζ_r 为

$$\zeta_r = -i\, T_{r4} \qquad\qquad (r = 1,\, 2,\, 3) \tag{15}$$

令 $\nu = 4$，则可把习题 (2.3) 的(2)式写成

$$\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial t} + \sum_{r=1}^{3}\left(\frac{\partial\zeta_r}{\partial x_r}\right) = 0 \tag{16}$$

上式表明，三维矢量 ζ_r （$r=1$，2，3）能够被解释成场的能通量。

定义三维矢量 $\mathscr{G}_r$ 为

$$\mathscr{G}_r = -i\,T_{4r} \qquad (r=1,\,2,\,3) \tag{17}$$

令 $\nu=1$，2，3，则可把习题 (2.3) 的(2)式分别写成：

$$\frac{\partial \mathscr{G}_1}{\partial t} + \sum_{r=1}^{3} \frac{\partial T_{r1}}{\partial x_r} = 0 \tag{18a}$$

$$\frac{\partial \mathscr{G}_2}{\partial t} + \sum_{r=1}^{3} \frac{\partial T_{r2}}{\partial x_r} = 0 \tag{18b}$$

$$\frac{\partial \mathscr{G}_3}{\partial t} + \sum_{r=1}^{3} \frac{\partial T_{r3}}{\partial x_r} = 0 \tag{18c}$$

类似于(16)式，我们可把 $\mathscr{G}_1$，$\mathscr{G}_2$，$\mathscr{G}_3$ 解释成场的动量密度，(18a)—(18c)式就是场的动量守恒定律。

综上所述，我们可把习题 (2.3) 的(1)式所定义的 $T_{\mu\nu}$ 称为正则能量 – 动量密度张量。(13)式所确定的 T_{44} 是场的哈密顿量密度；(17)式所确定的 $\mathscr{G}_r$ （$r=1$，2，3）是场的动量密度；(15)式所确定的 ζ_r （$r=1$，2，3）则是场的能通量；(18a)—(18c)式所确定的 T_{rs} （r，$s=1$，2，3）则是场的胁强张量（stress tensor）。这样，根据(1)式，我们有

$$P_1(t) = -i\int \mathrm{d}^3x\,T_{41} = \int \mathrm{d}^3x\,\mathscr{G}_1 \tag{19a}$$

$$P_2(t) = -i\int \mathrm{d}^3x\,T_{42} = \int \mathrm{d}^3x\,\mathscr{G}_2 \tag{19b}$$

$$P_3(t) = -i\int \mathrm{d}^3x\,T_{43} = \int \mathrm{d}^3x\,\mathscr{G}_3 \tag{19c}$$

(19a)—(19c)式表明，$P_1(t)$，$P_2(t)$，$P_3(t)$ 分别是四维能量 – 动量矢量 $p_\mu=$（p_x，p_y，p_z，iH）的第一、二、三分量，(14)式确定的 $P_4(t)$ 则是 p_μ 的第四分量。

6. 证明：如果能量-动量张量 $T_{\mu\nu}$ 是对称的，

$$\frac{\partial \mathscr{M}_{\lambda\mu\nu}}{\partial x_\lambda} = 0 \tag{1}$$

这里

$$\mathscr{M}_{\lambda\mu\nu} = T_{\lambda\mu}\,x_\nu - T_{\lambda\nu}\,x_\mu \tag{2}$$

则场的总角动量守恒。

证： 由(2)式，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{M}_{\lambda\mu\nu}}{\partial x_\lambda} &= \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left(T_{\lambda\mu}\,x_\nu - T_{\lambda\nu}\,x_\mu\right) \\
&= \frac{\partial T_{\lambda\mu}}{\partial x_\lambda}\,x_\nu + T_{\lambda\mu}\frac{\partial x_\nu}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial T_{\lambda\nu}}{\partial x_\lambda}\,x_\mu - T_{\lambda\nu}\frac{\partial x_\mu}{\partial x_\lambda} \\
&= T_{\lambda\mu}\,\delta_{\nu\lambda} - T_{\lambda\nu}\,\delta_{\mu\lambda} \\
&= T_{\nu\mu} - T_{\mu\nu} = 0
\end{aligned} \tag{3}$$

这里，我们用到了习题 (2.3) 的(2)式，且考虑到 $T_{\mu\nu}$ 是对称的。

由(3)式，我们可得

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^3x\,\frac{\partial \mathscr{M}_{\lambda\mu\nu}}{\partial x_\lambda} &= \int \mathrm{d}^3x \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \mathscr{M}_{i\mu\nu}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_4}\int \mathrm{d}^3x\,\mathscr{M}_{4\mu\nu} \\ &= \oiint \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\left(\boldsymbol{e}_1\,\mathscr{M}_{1\mu\nu} + \boldsymbol{e}_2\,\mathscr{M}_{2\mu\nu} + \boldsymbol{e}_3\,\mathscr{M}_{3\mu\nu}\right) + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathrm{d}^3x\,\mathscr{M}_{4\mu\nu} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

在上式中，我们用了高斯定理，积分遍及于无穷大空间的整个表面，由于场在无穷远处趋于零，故(4)式中的第一项为零，所以我们有

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathrm{d}^3x\,\mathscr{M}_{4\mu\nu} = 0 \tag{5}$$

于是我们有

$$\frac{1}{i}\int \mathrm{d}^3x\,\mathscr{M}_{4\mu\nu} = \text{常数} \tag{6}$$

由(2)式，我们有

$$\frac{1}{i}\,\mathscr{M}_{4\mu\nu} = \frac{1}{i}\left(T_{4\mu}\,x_\nu - T_{4\nu}\,x_\mu\right) = \mathscr{G}_\mu\,x_\nu - \mathscr{G}_\nu\,x_\mu = \mathscr{M}_{\mu\nu} \tag{7}$$

式中，我们用到了习题 (2.5) 的(17)式，与力学中类比，可知

$$\mathscr{M}_{\mu\nu} = -\mathscr{M}_{\nu\mu} = \mathscr{G}_\mu\,x_\nu - \mathscr{G}_\nu\,x_\mu \tag{8}$$

能够被解释为场的角动量密度，由(8)式

$$\mathscr{M} = \int \mathrm{d}^3x\,\mathscr{M}_{\mu\nu} = \frac{1}{i}\int \mathrm{d}^3x\,\mathscr{M}_{4\mu\nu} \tag{9}$$

则是场的总角动量，即为所求。

第三章　场算符

通过把共轭坐标 q_s^α，p_s^α 解释成满足通常的正则对易关系的算符，我们就能很容易地把已在第二章详述过的经典哈密顿场论加以量子化。根据(2.9)式和(2.14)式，我们有，

$$\left[\phi^\alpha(s,\,t),\,\phi^\beta(s',\,t)\right]=0 \qquad (\alpha,\,\beta=1,\,\cdots,\,n) \tag{3.1a}$$

$$\left[\pi^\alpha(s,\,t),\,\pi^\beta(s',\,t)\right]=0 \qquad (s,\,s'=1,\,2,\,\cdots) \tag{3.1b}$$

$$\left[\phi^\alpha(s,\,t),\,\pi^\beta(s',\,t)\right]=i\,\delta_{\alpha\beta}\,\frac{\delta_{ss'}}{\delta\boldsymbol{x}^{(s)}} \tag{3.1c}$$

(3.1c)式的推导：根据正则对易关系，我们有

$$\begin{aligned}\left[q_s^\alpha,\,p_{s'}^\alpha\right]&=\left[\phi^\alpha(s,\,t),\,\pi^\beta(s',\,t)\,\delta\boldsymbol{x}^{(s')}\right]\\&=\delta\boldsymbol{x}^{(s')}\left[\phi^\alpha(s,\,t),\,\pi^\beta(s',\,t)\right]\\&=i\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta_{ss'}\end{aligned}$$

于是移项即可得

$$\left[\phi^\alpha(s,\,t),\,\pi^\beta(s',\,t)\right]=i\,\delta_{\alpha\beta}\,\frac{\delta_{ss'}}{\delta\boldsymbol{x}^{(s)}}$$

现在，如果我们让小格的体积趋于零，即令 $\delta\boldsymbol{x}^{(s)}\to 0$，那么我们就能得到在 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{x}'$ 点的场在同一个时刻 t 的对易关系。迄今为止，我们还没有规定如何描述系统随时间的变化。比如，我们是使用薛定谔绘景呢，还是使用海森堡绘景。由于我们仅仅考虑系统在某一时刻 t 的情况，所以我们再次使用薛定谔绘景，在这种绘景中，算符不随时间变化，因此，我们能够取定时刻 $t=0$，并且把 $\phi^\alpha(\boldsymbol{x},\,0)$ 写成 $\phi^\alpha(\boldsymbol{x})$ 等。于是在特定的 $t=0$ 时刻，场的对易关系变成：

$$\left[\phi^\alpha(\boldsymbol{x}),\,\phi^\beta(\boldsymbol{x}')\right]=\left[\pi^\alpha(\boldsymbol{x}),\,\pi^\beta(\boldsymbol{x}')\right]=0 \tag{3.2a}$$

$$\left[\phi^\alpha(\boldsymbol{x}),\,\pi^\beta(\boldsymbol{x}')\right]=i\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{3.2b}$$

$$(\alpha,\,\beta=1,\,\cdots,\,n)$$

(3.2b)式的推导如下：

(i) 当 $s=s'$，即 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{(s')}$，这时若 $\delta\boldsymbol{x}^{(s)}=\delta\boldsymbol{x}^{(s')}\to 0$，则可得

$$\frac{\delta_{ss'}}{\delta\boldsymbol{x}^{(s')}}\to\infty$$

(ii) 当 $s\neq s'$，即 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{x}^{(s')}$，这时 $\delta_{ss'}=0$，于是可得

$$\frac{\delta_{ss'}}{\delta\boldsymbol{x}^{(s')}}\to 0$$

(iii) 整个空间的体积为 1，即有

$$\lim_{\delta\boldsymbol{x}^{(s)}\to 0}\sum_{s}\frac{\delta_{ss'}}{\delta\boldsymbol{x}^{(s')}}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta_{ss'}}{\delta\boldsymbol{x}^{(s')}}\,\mathrm{d}^3x=1=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}^3x$$

于是根据 δ 函数的定义，可得

$$\frac{\delta_{ss'}}{\delta\boldsymbol{x}^{(s')}}\to\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

显而易见，当 $\delta\boldsymbol{x}^{(s)}\to 0$，$\dfrac{\delta_{ss'}}{\delta\boldsymbol{x}^{(s)}}$ 就变成三维狄拉克 δ 函数 $\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$，这里，$\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{x}'$ 分别是第 s 个小格和第 s' 个小格内的点。

为了和第一章给出的粒子解释建立联系，我们要对场算符 $\phi(x)$ 和 $\pi(x)$ 进行傅里叶分析。这里，我们每次仅限于讨论满足 Klein–Gordon 方程的实单场的情况，也就是仅限于讨论用(2.18)—(2.20)式描述的场。我们再次从经典场出发，并把这些经典场展开为傅里叶级数[1]

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{1}{2k_0}}\left\{a(\boldsymbol{k})\,e^{ikx}+a^*(\boldsymbol{k})\,e^{-ikx}\right\}\tag{3.3a}$$

根据(2.19)式，$\pi(x)=\dfrac{d\phi(x)}{dt}$，于是有

$$\pi(x)=\frac{i}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{k_0}{2}}\left\{-a(\boldsymbol{k})\,e^{ikx}+a^*(\boldsymbol{k})\,e^{-ikx}\right\}\tag{3.3b}$$

式中的求和遍及于所有可容许的动量 $\boldsymbol{k}$（我们现在略去以前常用来标记动量的下标 i），k_0 是和动量 $\boldsymbol{k}$ 相应的能量，其值由(1.6)式确定，k_0 也出现在指数因子的标积 $kx=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-k_0t$ 中。在目前，我们不应该将傅里叶级数(3.3a)、(3.3b)中的展开系数 $a(\boldsymbol{k})$ 和 $a^*(\boldsymbol{k})$ 与第一章中引进的吸收算符和产生算符混为一谈。实际上，过一会儿我们就将看到，由于(3.3a)式中的 $\sqrt{\dfrac{1}{2k_0}}$ 等因子，在量子化理论中，我们将能得到这个同一性。现在，在量子化理论的薛定谔绘景（取 $t=0$）中，我们把 $\phi(\boldsymbol{x})$ 和 $\pi(\boldsymbol{x})$ 解释为算符，于是对这些算符而言，(3.3a)和(3.3b)式变成：

$$\phi(\boldsymbol{x})=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{1}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}}\left\{a(\boldsymbol{k})\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}+a^\dagger(\boldsymbol{k})\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right\}\tag{3.4a}$$

$$\pi(\boldsymbol{x})=\frac{i}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{2}}\left\{-a(\boldsymbol{k})\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}+a^\dagger(\boldsymbol{k})\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right\}\tag{3.4b}$$

式中，我们已根据(1.6)式把动量 $\boldsymbol{k}$ 的介子的能量写成 $\omega_{\boldsymbol{k}}$。实际上，$\phi(\boldsymbol{x})$ 和 $\pi(\boldsymbol{x})$ 的算符特征就反映在我们把经典振幅 $a(\boldsymbol{k})$ 和 $a^*(\boldsymbol{k})$ 解释成算符这一点上。相应地我们已用伴随算符 $a^\dagger$ 置换了复数共轭 a^*。这就确保了场算符 $\phi(\boldsymbol{x})$ 和 $\pi(\boldsymbol{x})$ 是厄密算符，正如我们在原始定义(3.3a)式中确保了经典场量是实数一样。

把(3.4a)、(3.4b)式代入场的对易关系 (3.2a)、(3.2b)式，我们就能得到算符 $a(\boldsymbol{k})$ 和 $a^\dagger(\boldsymbol{k})$ 的对易关系：

$$\begin{cases}\left[a(\boldsymbol{k}),\,a(\boldsymbol{k}')\right]=\left[a^\dagger(\boldsymbol{k}),\,a^\dagger(\boldsymbol{k}')\right]=0\\ \left[a(\boldsymbol{k}),\,a^\dagger(\boldsymbol{k}')\right]=\delta\left(\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}'\right)\end{cases}\tag{3.5}$$

上式表明，我们已重新导出了对易关系(1.13a)、(1.13b)式，这说明我们在把对易关系及其解释应用于上面引进的算符 $a(\boldsymbol{k})$ 和 $a^\dagger(\boldsymbol{k})$ 时是正确的。反之，我们容易证明，(3.5)式包含了由 (3.4a)、(3.4b)式定义的算符 ϕ 和 π 的对易关系 (3.2a)、(3.2b)式。

[1] 场函数可以用任一组“力学量完全集合”的本征函数去展开，在最简单的具有一定能量和动量的自由粒子的情形，能量动量就是对易力学量，而相应的本征函数就是平面波解。其物理图像就是将自由粒子的连续运动表达为无穷多个简谐振动的叠加。(3.3a)式右边的括号中之所以引入两个相加的复数共轭项，乃是为了保证 $\phi(x)$ 是实数。这是因为中性 π 介子的场是实场，即有 $\phi^*(x)=\phi(x)$。当然，若 $\phi(x)$ 是复数，就无须引入复数共轭项了。

(3.5)式的推导如下：

因

$$\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{k}} \longrightarrow \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3k \tag{1}$$

故由(3.4a)、(3.4b)式，可得

$$\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{1}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}}\left\{a(\boldsymbol{k})\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}+a^{\dagger}(\boldsymbol{k})\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right\}\\
&= \frac{\sqrt{V}}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}}\left\{a(\boldsymbol{k})\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}+a^{\dagger}(\boldsymbol{k})\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right\}\mathrm{d}^3k\\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{V}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}}\,a(\boldsymbol{k})\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}^3k+\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\infty}^{-\infty}\sqrt{\frac{V}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}}\,a^{\dagger}(-\boldsymbol{k}')\,e^{i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}^3(-k')\\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{V}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}}\,a(\boldsymbol{k})\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}^3k+\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{V}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}}\,a^{\dagger}(-\boldsymbol{k})\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}^3k\\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{V}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}}\left\{a(\boldsymbol{k})+a^{\dagger}(-\boldsymbol{k})\right\}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}^3k
\end{aligned} \tag{2}$$

由傅里叶变换公式，可知

$$\sqrt{\frac{V}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}}\left\{a(\boldsymbol{k})+a^{\dagger}(-\boldsymbol{k})\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\boldsymbol{x})\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}^3x \tag{3}$$

式中，$\mathrm{d}^3x=\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3$.

同理可得

$$\begin{aligned}
\pi(\boldsymbol{x}) &= \frac{i}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{2}}\left\{-a(\boldsymbol{k})\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}+a^{\dagger}(\boldsymbol{k})\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right\}\\
&= \frac{i\sqrt{V}}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{2}}\left\{-a(\boldsymbol{k})\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}+a^{\dagger}(\boldsymbol{k})\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right\}\mathrm{d}^3k\\
&\qquad\qquad\qquad

把(6)式和(7)式的两边分别相加，即得

$$a^{\dagger}(-\boldsymbol{k}) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\sqrt{\frac{2\omega_{\boldsymbol{k}}}{V}}\,\phi(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{i}\sqrt{\frac{2}{V\omega_{\boldsymbol{k}}}}\,\pi(\boldsymbol{x})\right\}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}^3x$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\Big\{A\phi(\boldsymbol{x}) - iB\pi(\boldsymbol{x})\Big\}\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}^3x \tag{8}$$

式中，$A = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\omega_{\boldsymbol{k}}}{V}}$ ，$B = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{V\omega_{\boldsymbol{k}}}}$

把(6)式和(7)式的两边分别相减，即得

$$a(\boldsymbol{k}) = \int_{-\infty}^{\infty}\Big\{A\phi(\boldsymbol{x}) + iB\pi(\boldsymbol{x})\Big\}\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}^3x \tag{9}$$

由(8)式和(9)式，我们有

$$\begin{aligned}
\Big[a(\boldsymbol{k}),\,a(\boldsymbol{k}')\Big] &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3x'\,e^{-i\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}'\right)}\Big[A\phi(\boldsymbol{x}) + iB\pi(\boldsymbol{x}),\,A'\phi(\boldsymbol{x}') + iB'\pi(\boldsymbol{x}')\Big] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3x'\,e^{-i\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}'\right)} \\
&\quad\times\Big\{AA'\Big[\phi(\boldsymbol{x}),\,\phi(\boldsymbol{x}')\Big] - iBA'\Big[\phi(\boldsymbol{x}'),\,\pi(\boldsymbol{x})\Big] + iAB'\Big[\phi(\boldsymbol{x}),\,\pi(\boldsymbol{x}')\Big] - BB'\Big[\pi(\boldsymbol{x}),\,\pi(\boldsymbol{x}')\Big]\Big\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3x'\,e^{-i\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}'\right)}\Big\{AA'\cdot 0 - iBA'\cdot i\delta(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}) + iAB'\cdot i\delta(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}) - BB'\cdot 0\Big\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3x'\,e^{-i\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}'\right)}\Big\{BA'\,\delta(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}) - AB'\,\delta(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})\Big\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3x\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3x'\,e^{-i\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}'\right)}\Big(BA' - AB'\Big)\,\delta(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})\right\} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{(把}A\text{、}B\text{、}A'\text{、}B'\text{代入)} \\
&= \frac{1}{2V}\,\frac{\omega_{\boldsymbol{k}'}-\omega_{\boldsymbol{k}}}{\sqrt{\omega_{\boldsymbol{k}}\,\omega_{\boldsymbol{k}'}}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\left(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'\right)\cdot\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}^3x \\
&= \frac{1}{2V}\,\frac{\omega_{\boldsymbol{k}'}-\omega_{\boldsymbol{k}}}{\sqrt{\omega_{\boldsymbol{k}}\,\omega_{\boldsymbol{k}'}}}\,\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\,(2\pi)^3
\end{aligned} \tag{10}$$

因为

$$\omega_{\boldsymbol{k}'} = \sqrt{m^2 + \boldsymbol{k}'^{\,2}} \tag{11a}$$

$$\omega_{\boldsymbol{k}} = \sqrt{m^2 + \boldsymbol{k}^2} \tag{11b}$$

把(11a)、(11b)代入(10)式，即得

$$\Big[a(\boldsymbol{k}),\,a(\boldsymbol{k}')\Big] = \frac{1}{2V}\,\frac{\sqrt{m^2+\boldsymbol{k}'^{\,2}} - \sqrt{m^2+\boldsymbol{k}^2}}{\sqrt[4]{\left(m^2+\boldsymbol{k}'^{\,2}\right)\left(m^2+\boldsymbol{k}^2\right)}}\,\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\,(2\pi)^3 \tag{12}$$

当 $\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{k}'$ 时，因 $(-\boldsymbol{k}')^2 = \boldsymbol{k}'^{\,2}$，故 $\omega_{\boldsymbol{k}'} - \omega_{\boldsymbol{k}} = 0$，于是我们有

$$\frac{1}{2V}\,\frac{\omega_{\boldsymbol{k}'}-\omega_{\boldsymbol{k}}}{\sqrt{\omega_{\boldsymbol{k}}\,\omega_{\boldsymbol{k}'}}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}^3x = 0 \tag{13}$$

当 $\boldsymbol{k} \neq -\boldsymbol{k}'$ 时，由于 $\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')=0$，故有

$$\frac{1}{2V}\frac{\sqrt{m^2+\boldsymbol{k}'^2}-\sqrt{m^2+\boldsymbol{k}^2}}{\sqrt[4]{\left(m^2+\boldsymbol{k}'^2\right)\left(m^2+\boldsymbol{k}^2\right)}}\,\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\,(2\pi)^3=0 \tag{14}$$

于是根据(13)—(14)式，可知不论 $\boldsymbol{k}$ 为何值，均有

$$\Big[a(\boldsymbol{k}),\,a(\boldsymbol{k}')\Big]=0$$

类似地，我们可得：

$$\begin{aligned}
\Big[a^\dagger(\boldsymbol{k}'),\,a^\dagger(\boldsymbol{k})\Big] &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3x'\,e^{i\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}'\right)}\Big[A'\phi(\boldsymbol{x}')-iB'\pi(\boldsymbol{x}'),\,A\phi(\boldsymbol{x})-iB\pi(\boldsymbol{x})\Big]\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3x'\,e^{i\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}'\right)}\\
&\quad\times\Big\{AA'\Big[\phi(\boldsymbol{x}'),\,\phi(\boldsymbol{x})\Big]-BB'\Big[\pi(\boldsymbol{x}'),\,\pi(\boldsymbol{x})\Big]-iA'B\Big[\phi(\boldsymbol{x}'),\,\pi(\boldsymbol{x})\Big]+iB'A\Big[\phi(\boldsymbol{x}),\,\pi(\boldsymbol{x}')\Big]\Big\}\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3x'\,e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}')}\Big\{iB'A\cdot i\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')+iA'B\cdot i\delta(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})\Big\}\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3x\left(A'B-AB'\right)e^{i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}}\\
&= \frac{1}{2V}\frac{\omega_{\boldsymbol{k}'}-\omega_{\boldsymbol{k}}}{\sqrt{\omega_{\boldsymbol{k}}\,\omega_{\boldsymbol{k}'}}}\,\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\,(2\pi)^3\\
&= \begin{cases} 0 & \boldsymbol{k}\neq-\boldsymbol{k}' \\ 0 & \boldsymbol{k}=-\boldsymbol{k}' \qquad (\text{因这时}\omega_{\boldsymbol{k}'}-\omega_{\boldsymbol{k}}=0)\end{cases}
\end{aligned} \tag{15}$$

同样，我们有

$$\begin{aligned}
\Big[a(\boldsymbol{k}),\,a^\dagger(\boldsymbol{k}')\Big] &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3x'\,e^{i(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})}\\
&\quad\times\Big\{AA'\Big[\phi(\boldsymbol{x}),\,\phi(\boldsymbol{x}')\Big]+iBA'\Big[\pi(\boldsymbol{x}),\,\phi(\boldsymbol{x}')\Big]+iAB'\Big[\pi(\boldsymbol{x}'),\,\phi(\boldsymbol{x})\Big]+BB'\Big[\pi(\boldsymbol{x}),\,\pi(\boldsymbol{x}')\Big]\Big\}\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3x'\,e^{i\left(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}\right)}\Big\{-iBA'\cdot i\delta(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})-iAB'\cdot i\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\Big\}\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3x'\,e^{i(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})}\left(BA'+AB'\right)\delta(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})\\
&= \frac{1}{2V}\frac{\omega_{\boldsymbol{k}'}+\omega_{\boldsymbol{k}}}{\sqrt{\omega_{\boldsymbol{k}}\,\omega_{\boldsymbol{k}'}}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}^3x\\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{2V}\dfrac{2\omega_{\boldsymbol{k}}}{\omega_{\boldsymbol{k}}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3x=1 & (\text{当}\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{k}') \\ \dfrac{1}{2V}\dfrac{\omega_{\boldsymbol{k}'}+\omega_{\boldsymbol{k}}}{\sqrt{\omega_{\boldsymbol{k}}\,\omega_{\boldsymbol{k}'}}}(2\pi)^3\,\delta(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k})=0 & (\text{当}\boldsymbol{k}\neq-\boldsymbol{k}')\end{cases}\\
&= \delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}=\delta\left(\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}'\right)
\end{aligned}$$

这样，我们就推出了(3.5)式。

(3.5)式的导出意味着我们重新获得了产生算符和湮灭算符的对易关系(1.13a)、(1.13b)式，这说明我们把对易关系这个术语及其解释应用于上面引进的算符 $a(\boldsymbol{k})$ 和 $a^\dagger(\boldsymbol{k})$ 时是正确的。反之，我们容易证明，(3.5)式就包含了由 (3.4a)、(3.4b)式定义的算符 $\phi(\boldsymbol{x})$ 和 $\pi(\boldsymbol{x})$ 的对易关系 (3.2a)、(3.2b)式。

现在，我们来简要地概括一下上述很重要的结果，并且把它们和普通量子力学中的相应概念加以比较。

在量子场论中，场的傅里叶振幅（a 和 $a^\dagger$）被解释为吸收和产生算符，它们满足对易关系(3.5)式。这样，场 $\phi(\boldsymbol{x})$ 和 $\pi(\boldsymbol{x})$ 当然也是算符。由(3.4a)、(3.4b)式，根据产生算符和湮灭算符可给出场算符 $\phi(\boldsymbol{x})$ 和 $\pi(\boldsymbol{x})$，$\phi(\boldsymbol{x})$ 和 $\pi(\boldsymbol{x})$ 满足对易关系 (3.2a)、(3.2b)式。这样，在场论中，$\phi(\boldsymbol{x})$ 是算符，也就是说，$\phi(\boldsymbol{x})$ 是 a 和 $a^\dagger$ 的函数，而 $\boldsymbol{x}$ 则不过是一个参数（C 数）。与此相比较，在单粒子量子理论中，$\phi(\boldsymbol{x})$ 是确定系统状态的波函数，而位置坐标 $\boldsymbol{x}$ 则是算符。另一方面，在场论中，用态矢量 $\Phi(n_1, \cdots, n_i, \cdots)$ 来规定系统的态，而 $\Phi(n_1, \cdots, n_i, \cdots)$ 是占有数的函数。什么量是算符，什么量是波函数的这些区别，对于数学程式（mathematical formalism）解释来说是很重要的。为此，在下一章中，我们将给出几个很简单的例子，说明我们如何用这些量来进行计算。同时，我们也将更清楚地看到，物理解释是如何从数学符号得出的。当我们初次接触这些数学符号时，它们可能是相当抽象的。不过，现在我们还是首先来说明其他两个小问题。

在第一章中，我们写下了无相互作用、无自旋介子的哈密顿算符之表示式(1.17)。既然哈密顿量 H 现在被解释成薛定谔绘景中的算符，于是在(2.6)式中令 $t=0$，我们就能够从(2.16)、(2.20)和(3.4a)、(3.4b)式来计算这个哈密顿量。由此我们得到

$$H=\sum_{\boldsymbol{k}}\left(a^\dagger(\boldsymbol{k})\,a(\boldsymbol{k})+\frac{1}{2}\right)\omega_{\boldsymbol{k}} \tag{3.6}$$

上式推导见习题 (3.2) 解答。

(3.6)式由于第二项的存在而不同于(1.17)式。即使当所有占有数为 0，即系统处于真空态时，(3.6)式中的第二项仍存在。这样，(3.6)式中的第二项就代表零点能（实际上是无穷大）。不过，通过改变能量标度的零点，我们可以完全消除掉这个零点能；这种能量标度的改变不会在物理上导致任何观察结果。通过计算介子场的动量（见习题 (3.3)），再一次说明了把 $a(\boldsymbol{k})$ 和 $a^\dagger(\boldsymbol{k})$ 解释为动量是 $\boldsymbol{k}$ 的介子的吸收算符和产生算符是正确的。

我们将总是在一个有限的很大体积 V 内使系统归一化。凡是有物理意义的量，例如截面，当然是和这个归一化体积无关的。根据下列众所周知的对应关系，用积分代替遍及所允许动量值的求和，常常是方便的：

$$\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{k}}\longrightarrow\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3k \tag{3.7}$$

式中，d^3k 是动量空间 $\mathrm{d}k_1\,\mathrm{d}k_2\,\mathrm{d}k_3$ 中的体积元。在作(3.7)式表明的代换时，将出现小的误差，然而，当我们最终令体积 V 趋于无限大时，这个误差将趋于零。

习题与解答

1. 根据场的对易关系(3.2a)、(3.2b)式，导出(3.5)式。

   解：（本题解答见本书第三章(3.5)式之后的推导部分）。

2. 导出(3.6)式。

   解：

$$H=\int \mathscr{H}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}^3x \tag{1}$$

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}\left\{\pi^2+\sum_i\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)^2+m^2\phi^2\right\} \tag{2}$$

$$\phi(\boldsymbol{x})=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{1}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}}\left\{a(\boldsymbol{k})\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}+a^\dagger(\boldsymbol{k})\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right\} \tag{3}$$

$$\pi(\boldsymbol{x}) = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{\boldsymbol{k}'} \sqrt{\frac{\omega_{\boldsymbol{k}'}}{2}} \left\{ - a(\boldsymbol{k}')\, e^{i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}} + a^\dagger(\boldsymbol{k}')\, e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}} \right\} \tag{4}$$

把(3)和(4)代入(2)，得:

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}(\boldsymbol{x}) = {} & \frac{1}{4V} \sum_{\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}'} \left(- \sqrt{\omega_{\boldsymbol{k}}\,\omega_{\boldsymbol{k}'}} - \frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}'}{\sqrt{\omega_{\boldsymbol{k}}\,\omega_{\boldsymbol{k}'}}} \right) \\
& \times \left\{ a(\boldsymbol{k})\, a(\boldsymbol{k}')\, e^{i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}} + a^\dagger(\boldsymbol{k})\, a^\dagger(\boldsymbol{k}')\, e^{-i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}} - a^\dagger(\boldsymbol{k})\, a(\boldsymbol{k}')\, e^{-i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}} - a(\boldsymbol{k})\, a^\dagger(\boldsymbol{k}')\, e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}} \right\} \\
& + \frac{m^2}{4V} \sum_{\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}'} \frac{1}{\sqrt{\omega_{\boldsymbol{k}}\,\omega_{\boldsymbol{k}'}}} \\
& \times \left\{ a(\boldsymbol{k})\, a(\boldsymbol{k}')\, e^{i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}} + a^\dagger(\boldsymbol{k})\, a^\dagger(\boldsymbol{k}')\, e^{-i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}} + a^\dagger(\boldsymbol{k})\, a(\boldsymbol{k}')\, e^{-i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}} + a(\boldsymbol{k})\, a^\dagger(\boldsymbol{k}')\, e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}} \right\}
\end{aligned} \tag{5}$$

把(5)代入(1)得:

$$\begin{aligned}
H = {} & \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{H}(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}^3 x \\
= {} & \frac{1}{4V} \sum_{\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}'} \left(\frac{-\omega_{\boldsymbol{k}}\,\omega_{\boldsymbol{k}'} - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}'}{\sqrt{\omega_{\boldsymbol{k}}\,\omega_{\boldsymbol{k}'}}} \right) \\
& \times \left\{ \left[a(\boldsymbol{k})\, a(\boldsymbol{k}') + a^\dagger(\boldsymbol{k})\, a^\dagger(\boldsymbol{k}') \right] (2\pi)^3\, \delta\left(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'\right) - \left[a^\dagger(\boldsymbol{k})\, a(\boldsymbol{k}') + a(\boldsymbol{k})\, a^\dagger(\boldsymbol{k}') \right] (2\pi)^3\, \delta\left(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'\right) \right\} \\
& + \frac{m^2}{4V} \sum_{\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}'} \frac{1}{\sqrt{\omega_{\boldsymbol{k}}\,\omega_{\boldsymbol{k}'}}} \\
& \times \left\{ \left[a(\boldsymbol{k})\, a(\boldsymbol{k}') + a^\dagger(\boldsymbol{k})\, a^\dagger(\boldsymbol{k}') \right] (2\pi)^3\, \delta\left(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'\right) + \left[a^\dagger(\boldsymbol{k})\, a(\boldsymbol{k}') + a(\boldsymbol{k})\, a^\dagger(\boldsymbol{k}') \right] (2\pi)^3\, \delta\left(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'\right) \right\} \\
= {} & \frac{1}{4} \sum_{\boldsymbol{k}} \int \mathrm{d}^3 k' \left(\frac{-\omega_{\boldsymbol{k}}\,\omega_{\boldsymbol{k}'} - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}'}{\sqrt{\omega_{\boldsymbol{k}}\,\omega_{\boldsymbol{k}'}}} \right) \\
& \times \left\{ \left[a(\boldsymbol{k})\, a(\boldsymbol{k}') + a^\dagger(\boldsymbol{k})\, a^\dagger(\boldsymbol{k}') \right] \delta\left(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'\right) - \left[a^\dagger(\boldsymbol{k})\, a(\boldsymbol{k}') + a(\boldsymbol{k})\, a^\dagger(\boldsymbol{k}') \right] \delta\left(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'\right) \right\} \\
& + \frac{m^2}{4} \sum_{\boldsymbol{k}} \int \mathrm{d}^3 k' \frac{1}{\sqrt{\omega_{\boldsymbol{k}}\,\omega_{\boldsymbol{k}'}}} \\
& \times \left\{ \left[a(\boldsymbol{k})\, a(\boldsymbol{k}') + a^\dagger(\boldsymbol{k})\, a^\dagger(\boldsymbol{k}') \right] \delta\left(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'\right) + \left[a^\dagger(\boldsymbol{k})\, a(\boldsymbol{k}') + a(\boldsymbol{k})\, a^\dagger(\boldsymbol{k}') \right] \delta\left(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'\right) \right\} \\
= {} & \frac{1}{4} \sum_{\boldsymbol{k}} \left\{ \left(\frac{-\omega_{\boldsymbol{k}}^2 + \boldsymbol{k}^2}{\omega_{\boldsymbol{k}}} \right) \left[a(\boldsymbol{k})\, a(-\boldsymbol{k}) + a^\dagger(\boldsymbol{k})\, a^\dagger(-\boldsymbol{k}) \right] - \left(\frac{-\omega_{\boldsymbol{k}}^2 - \boldsymbol{k}^2}{\omega_{\boldsymbol{k}}} \right) \left[a^\dagger(\boldsymbol{k})\, a(\boldsymbol{k}) + a(\boldsymbol{k})\, a^\dagger(\boldsymbol{k}) \right] \right. \\
& \left. + \frac{m^2}{\omega_{\boldsymbol{k}}} \left[a(\boldsymbol{k})\, a(-\boldsymbol{k}) + a^\dagger(\boldsymbol{k})\, a^\dagger(-\boldsymbol{k}) + a^\dagger(\boldsymbol{k})\, a(\boldsymbol{k}) + a(\boldsymbol{k})\, a^\dagger(\boldsymbol{k}) \right] \right\} \\
= {} & \frac{1}{4} \sum_{\boldsymbol{k}} \left\{ \frac{-\omega_{\boldsymbol{k}}^2 + \boldsymbol{k}^2 + m^2}{\omega_{\boldsymbol{k}}} \left[a(\boldsymbol{k})\, a(-\boldsymbol{k}) + a^\dagger(\boldsymbol{k})\, a^\dagger(-\boldsymbol{k}) \right] + \frac{\omega_{\boldsymbol{k}}^2 + \boldsymbol{k}^2 + m^2}{\omega_{\boldsymbol{k}}} \left[a^\dagger(\boldsymbol{k})\, a(\boldsymbol{k}) + a(\boldsymbol{k})\, a^\dagger(\boldsymbol{k}) \right] \right\} \\
= {} & \frac{1}{4} \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{2\,\omega_{\boldsymbol{k}}^2}{\omega_{\boldsymbol{k}}} \left\{ a^\dagger(\boldsymbol{k})\, a(\boldsymbol{k}) + a^\dagger(\boldsymbol{k})\, a(\boldsymbol{k}) + 1 \right\} \\
= {} & \sum_{\boldsymbol{k}} \left\{ a^\dagger(\boldsymbol{k})\, a(\boldsymbol{k}) + \frac{1}{2} \right\} \omega_{\boldsymbol{k}}
\end{aligned}$$

即为所求。

3. 设量子化介子场的能量 – 动量张量由算符 $T_{\mu\nu}$ 给出：

$$T_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x_\nu}+\frac{\partial\phi}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\right\}+\mathscr{L}\,\delta_{\mu\nu} \tag{1}$$

式中，$\mathscr{L}$ 由(2.18)式给出。证明场的动量 $\boldsymbol{p}$ 为

$$\boldsymbol{p}=\sum_{\boldsymbol{k}}a^\dagger(\boldsymbol{k})\,a(\boldsymbol{k})\,\boldsymbol{k} \tag{2}$$

证：

$$\boldsymbol{p}=\sum_j p_j\,\boldsymbol{e}_j \qquad (j=1,\,2,\,3) \tag{3}$$

场的动量密度为

$$\mathscr{G}_j=-i\,T_{4j} \qquad (j=1,\,2,\,3) \tag{4}$$

于是我们可得场动量 p_j 为

$$\begin{aligned}
p_j&=\int \mathrm{d}^3x\,\mathscr{G}_j=-i\int \mathrm{d}^3x\,T_{4j}\\
&=-i\int \mathrm{d}^3x\,\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial\phi}{\partial x_4}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x_j}+\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x_4}\right\}=-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\left\{\pi\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x_j}+\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\cdot\pi\right\}\\
&=-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\left\{\frac{i}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{2}}\left[-a(\boldsymbol{k})\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}+a^\dagger(\boldsymbol{k})\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right]\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}'}\frac{ik'_j}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{k}'}}}\left[a(\boldsymbol{k}')\,e^{i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}}-a^\dagger(\boldsymbol{k}')\,e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}}\right]\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}'}\frac{ik'_j}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{k}'}}}\left[a(\boldsymbol{k}')\,e^{i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}}-a^\dagger(\boldsymbol{k}')\,e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}}\right]\frac{i}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{2}}\left[-a(\boldsymbol{k})\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}+a^\dagger(\boldsymbol{k})\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right]\right\}\\
&=\frac{1}{4V}\int \mathrm{d}^3x\sum_{\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}'}\sqrt{\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{\omega_{\boldsymbol{k}'}}}\,k'_j\left\{\left[-a(\boldsymbol{k})\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}+a^\dagger(\boldsymbol{k})\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right]\left[a(\boldsymbol{k}')\,e^{i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}}-a^\dagger(\boldsymbol{k}')\,e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}}\right]\right.\\
&\quad\left.+\left[a(\boldsymbol{k}')\,e^{i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}}-a^\dagger(\boldsymbol{k}')\,e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}}\right]\left[-a(\boldsymbol{k})\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}+a^\dagger(\boldsymbol{k})\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right]\right\}\\
&=\frac{1}{4V}\sum_{\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}'}\sqrt{\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{\omega_{\boldsymbol{k}'}}}\,k'_j\int \mathrm{d}^3x\left\{-e^{i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}}\left[a(\boldsymbol{k})\,a(\boldsymbol{k}')+a(\boldsymbol{k}')\,a(\boldsymbol{k})\right]+e^{-i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}}\left[a^\dagger(\boldsymbol{k})\,a(\boldsymbol{k}')+a(\boldsymbol{k}')\,a^\dagger(\boldsymbol{k})\right]\right.\\
&\quad\left.+e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}}\left[a(\boldsymbol{k})\,a^\dagger(\boldsymbol{k}')+a^\dagger(\boldsymbol{k}')\,a(\boldsymbol{k})\right]-e^{-i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}}\left[a^\dagger(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k}')+a^\dagger(\boldsymbol{k}')a^\dagger(\boldsymbol{k})\right]\right\}\\
&=\frac{1}{4V}\sum_{\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}'}\sqrt{\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{\omega_{\boldsymbol{k}'}}}\,k'_j\left\{-\left[a(\boldsymbol{k})\,a(\boldsymbol{k}')+a(\boldsymbol{k}')\,a(\boldsymbol{k})\right](2\pi)^3\,\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\right.\\
&\quad+\left[a^\dagger(\boldsymbol{k})\,a(\boldsymbol{k}')+a(\boldsymbol{k}')\,a^\dagger(\boldsymbol{k})\right](2\pi)^3\,\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\\
&\quad+\left[a(\boldsymbol{k})\,a^\dagger(\boldsymbol{k}')+a^\dagger(\boldsymbol{k}')\,a(\boldsymbol{k})\right](2\pi)^3\,\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\\
&\quad\left.-\left[a^\dagger(\boldsymbol{k})\,a^\dagger(\boldsymbol{k}')+a^\dagger(\boldsymbol{k}')\,a^\dagger(\boldsymbol{k})\right](2\pi)^3\,\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\right\}\\
&=\frac{1}{4}\sum_{\boldsymbol{k}}\int \mathrm{d}^3k'\sqrt{\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{\omega_{\boldsymbol{k}'}}}\,k'_j\left\{-\left[a(\boldsymbol{k})\,a(\boldsymbol{k}')+a(\boldsymbol{k}')\,a(\boldsymbol{k})\right]\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\right.\\
&\quad+\left[a^\dagger(\boldsymbol{k})\,a(\boldsymbol{k}')+a(\boldsymbol{k}')\,a^\dagger(\boldsymbol{k})\right]\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\\
&\quad+\left[a(\boldsymbol{k})\,a^\dagger(\boldsymbol{k}')+a^\dagger(\boldsymbol{k}')\,a(\boldsymbol{k})\right]\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\\
&\quad\left.-\left[a^\dagger(\boldsymbol{k})\,a^\dagger(\boldsymbol{k}')+a^\dagger(\boldsymbol{k}')\,a^\dagger(\boldsymbol{k})\right]\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\sum_{\boldsymbol{k}}\Big\{(-k_j)(-1)\Big[a(\boldsymbol{k})\,a(-\boldsymbol{k})+a(-\boldsymbol{k})\,a(\boldsymbol{k})\Big]+(-k_j)(-1)\Big[a^\dagger(\boldsymbol{k})\,a^\dagger(-\boldsymbol{k})+a^\dagger(-\boldsymbol{k})\,a^\dagger(\boldsymbol{k})\Big]\\
&\quad + k_j\Big[a^\dagger(\boldsymbol{k})\,a(\boldsymbol{k})+a(\boldsymbol{k})\,a^\dagger(\boldsymbol{k})\Big]+k_j\Big[a(\boldsymbol{k})\,a^\dagger(\boldsymbol{k})+a^\dagger(\boldsymbol{k})\,a(\boldsymbol{k})\Big]\Big\}\\
&= \frac{1}{4}\sum_{\boldsymbol{k}}k_j\Big\{2\Big[2a^\dagger(\boldsymbol{k})\,a(\boldsymbol{k})+1\Big]+2\Big[a(\boldsymbol{k})\,a(-\boldsymbol{k})+a^\dagger(\boldsymbol{k})\,a^\dagger(-\boldsymbol{k})\Big]\Big\}\\
&= \sum_{\boldsymbol{k}}k_j\,a^\dagger(\boldsymbol{k})\,a(\boldsymbol{k})+\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{k_j}{2}+\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{k_j}{2}\Big[a(\boldsymbol{k})\,a(-\boldsymbol{k})+a^\dagger(\boldsymbol{k})\,a^\dagger(-\boldsymbol{k})\Big]\\
&= \sum_{\boldsymbol{k}}k_j\,a^\dagger(\boldsymbol{k})\,a(\boldsymbol{k}) \qquad (5)
\end{aligned}
$$

在上式的最后一步中，我们用到了

$$\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{k_j}{2}=\sum_{\boldsymbol{k}=-\infty}^{\infty}\frac{k_j}{2}=0 \qquad (6)$$

现在我们来证明，在导出(5)式的最后一步中，第三项为零。为方便起见，我们把 $\boldsymbol{k}$ 的求和上下限写出。于是有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{k_j}{2}\Big\{a(\boldsymbol{k})\,a(-\boldsymbol{k})+a^\dagger(\boldsymbol{k})\,a^\dagger(-\boldsymbol{k})\Big\}\\
&= \frac{1}{4}\left(\sum_{\boldsymbol{k}=-\infty}^{\infty}+\sum_{-\boldsymbol{k}=\infty}^{-\infty}\right)k_j\Big\{a(\boldsymbol{k})\,a(-\boldsymbol{k})+a^\dagger(\boldsymbol{k})\,a^\dagger(-\boldsymbol{k})\Big\}\\
&= \frac{1}{4}\left\{\sum_{\boldsymbol{k}=-\infty}^{\infty}k_j\Big[a(\boldsymbol{k})\,a(-\boldsymbol{k})+a^\dagger(\boldsymbol{k})\,a^\dagger(-\boldsymbol{k})\Big]+\sum_{\boldsymbol{k}=-\infty}^{\infty}(-k_j)\Big[a(-\boldsymbol{k})\,a(\boldsymbol{k})+a^\dagger(-\boldsymbol{k})\,a^\dagger(\boldsymbol{k})\Big]\right\}\\
&= \frac{1}{4}\sum_{\boldsymbol{k}=-\infty}^{\infty}k_j\Big\{\Big[a(\boldsymbol{k}),\,a(-\boldsymbol{k})\Big]+\Big[a^\dagger(\boldsymbol{k}),\,a^\dagger(-\boldsymbol{k})\Big]\Big\}\\
&= 0 \qquad (7)
\end{aligned}
$$

在上式的最后一步中，我们用到了

$$\Big[a(\boldsymbol{k}),\,a(-\boldsymbol{k})\Big]=0 \qquad (8a)$$

$$\Big[a^\dagger(\boldsymbol{k}),\,a^\dagger(-\boldsymbol{k})\Big]=0 \qquad (8b)$$

把(5)代入(3)式，即得

$$\boldsymbol{p}=\sum_{\boldsymbol{k}}a^\dagger(\boldsymbol{k})\,a(\boldsymbol{k})\,\boldsymbol{k} \qquad (9)$$

第四章　简单示例

现在，我们来考虑几个很简单的例子以阐明我们在前几章中引进的概念。当然，我们现在还不能处理实际问题，因此，在后面的章节中，我们将把下面示例中表述的许多概念继续发展成更复杂的系统方法。

我们考虑中性 π 介子和核子的相互作用，设相互作用哈密顿量密度为

$$\mathscr{H}_I(\boldsymbol{x}) = g\rho(\boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x}) \tag{4.1}$$

$\mathscr{H}_I(\boldsymbol{x})$ 是加到介子场的哈密顿量密度 (2.20)式上去的。式中，$\rho(\boldsymbol{x})$ 是在 $\boldsymbol{x}$ 点的核子密度，$\phi(\boldsymbol{x})$ 是由(3.4a)式给出的介子场的场量，g 是表明相互作用强的耦合常数。这个表示式和电动力学中的相互作用哈密顿量密度非常类似。对电荷-电流密度（即四维电流密度）— $eJ_\mu(\boldsymbol{x})$ 而言 [1]，它和电磁场 $A_\mu(\boldsymbol{x})$ 的相互作用哈密顿量密度为：

$$\mathscr{H}_I(\boldsymbol{x}) = eJ_\mu(\boldsymbol{x})A_\mu(\boldsymbol{x}) \tag{4.2}$$

现在，我们把核子看成是具有无穷大质量的点粒子，所以我们可以把它们看成是固定在点 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$ 上。于是我们可把密度函数写成

$$\rho(\boldsymbol{x}) = \sum_n \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n) \tag{4.3}$$

在散射过程中，这样固定在点上的核子不可能经历一个反冲过程，表明了这种类型的相互作用只有很有限的用处。

根据(2.16)式，(4.1)式和(4.3)式，我们可得相互作用哈密顿量为

$$H_I = \frac{g}{\sqrt{V}} \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_n \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{k}}}} \left\{ a(\boldsymbol{k})\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_n} + a^\dagger(\boldsymbol{k})\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_n} \right\} \tag{4.4}$$

(4.4)式的推导如下：

$$\begin{aligned} H_I &= \int \mathscr{H}_I(\boldsymbol{x}, t)\, \mathrm{d}^3x \\ &= \int g \sum_n \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n)\, \phi(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}^3x \\ &= g \sum_n \phi(\boldsymbol{x}_n) && \text{(代入(3.4}a\text{)式)} \\ &= \frac{g}{\sqrt{V}} \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_n \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{k}}}} \left\{ a(\boldsymbol{k})\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_n} + a^\dagger(\boldsymbol{k})\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_n} \right\} \end{aligned}$$

(4.4)式所给出的哈密顿量是吸收算符和产生算符的线性组合。(4.4)式花括号中的每一项都将吸收或产生一个动量为 $\boldsymbol{k}$ 的介子。因此，仅有的非零矩阵元是：

$$\left.\begin{matrix} \Big(\Phi(\cdots, n_k + 1, \cdots),\, H_I\, \Phi(\cdots, n_k, \cdots)\Big) \\ \Big(\Phi(\cdots, n_k, \cdots),\, H_I\, \Phi(\cdots, n_k + 1, \cdots)\Big)^* \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{n_k + 1}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}} \sum_n e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_n} \tag{4.5}$$

[1] 复刻者注：后续我们将采用通用的记法 J 来表示四维电流密度，以替代原书中的 S 符号。

(4.5)式的推导如下：

$$H_I\,\Phi(\cdots,n_k,\cdots)=\frac{g}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{n}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{k}}}}\left\{a(\boldsymbol{k})\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_n}+a^{\dagger}(\boldsymbol{k})\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_n}\right\}\cdot\Phi(\cdots,n_k,\cdots)$$
$$=\frac{g}{\sqrt{V}}\sum_{n}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{k}}}}\left\{\sqrt{n_k}\,\Phi(\cdots,n_k-1,\cdots)\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_n}+\sqrt{n_k+1}\,\Phi(\cdots,n_k+1,\cdots)\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_n}\right\}$$

把上式代入(4.5)式左边，即得第一式成立。同理可得第二式成立。

(4.5)式中的占有数表明了处于动量态 $\boldsymbol{k}$ 的介子数目，在这些跃迁中，所有其他占有数保持不变；这就是说，唯一所允许的跃迁就是那些使独态的占有数改变一个单位的跃迁。

应当指出，核子和介子在这里是以相当不同的方式处理的。只有介子场被量子化，使介子的产生和湮灭成为可能，而核子则是以经典方式处理的。在这里，核子只不过是介子的源和漏。这样，在一个特定问题中，核子数 N 和它们的位置 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$ $\boldsymbol{x}_N$ 是固定的，不变的，所以，描述系统的态矢量将仅仅是介子占有数的函数。例如，真空态 Φ_0 现在将仅仅是有 N 个核子存在而没有任何介子存在。

在下面的应用中，我们使用了与时间无关的微扰理论。这种理论仅仅对弱相互作用 H_I 即小耦合常数 g 是有用的。因此，它适用于电动力学但不适用于耦合常数很大的介子。

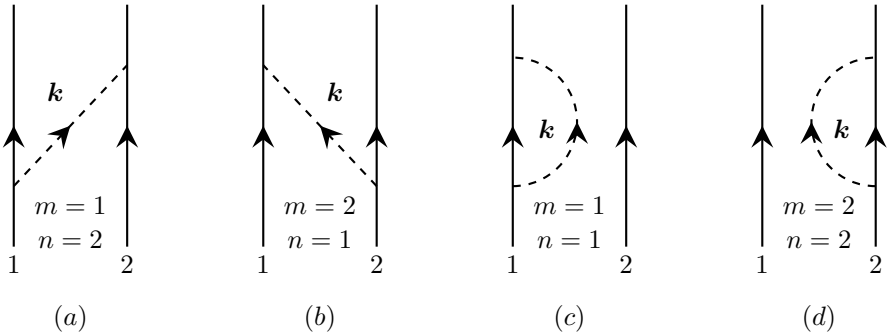


图 4.1: 核子 – 核子相互作用

作为第一个例子，我们来考虑核力问题。这就是说，我们将计算位于 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 的两个核子，由于通过介子场相互作用而在能量上产生的变化 ΔE，未微扰波函数现在是真空态 Φ_0(有两个核子存在，但没有介子存在)。在一级微扰理论中

$$\Delta E=(\Phi_0,\,H_I\,\Phi_0) \tag{4.6}$$

根据(4.5)式，$\Delta E=0$. 然而，在二级微扰理论中，ΔE 将不为 0. 有贡献的中间态是只存在有一个动量为 $\boldsymbol{k}$ 的介子的态 $\Phi(\boldsymbol{k})$，这时，ΔE 为：

$$\Delta E=\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{\Big(\Phi_0,\,H_I\,\Phi(\boldsymbol{k})\Big)\Big(\Phi(\boldsymbol{k}),\,H_I\,\Phi_0\Big)}{(-\omega_{\boldsymbol{k}})} \tag{4.7}$$

式中，分母就是二级微扰理论中的普通能量差：用初态 Φ_0 的能量 $(E_0=0)$ 减去中间态 $\Phi(\boldsymbol{k})$ 的能量 $(E_{\boldsymbol{k}}=\omega_{\boldsymbol{k}})$。把(4.5)式代入(4.7)式，考虑到核子数为 2, 即得：

$$\Delta E=-\frac{g^2}{V}\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{2\omega_{\boldsymbol{k}}^2}\sum_{n=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}_m)} \tag{4.8}$$

上式遍及于 m，n 的求和产生了四项：m，$n=1$，2，分别和介子被两个核子发射和重吸收的各种方式相对应。在图4.1中，我们简略地描述了这些方式。标记 1 和 2 的实线代表核子，虚线代表介子。图4.1 (a) 表示介子被位于 $\boldsymbol{x}_1$ 的核子 1 发射，然后被位于 $\boldsymbol{x}_2$ 的核子 2 吸收。

图 (c) 和图 (d) 与核子相互之间的作用无关，因此，在这里我们将略掉它们。它们代表核子的自能效应：核子和它自己的介子云相互作用。这个效应将修正核子的性质。我们在上面考虑的是没有介子云的裸核子。图 (c) 代表了把裸核子转换成物理核子的整个一族虚过程中最简单的情况。根据(3.7)式，(4.8)式中的自能项 $(n=m)$，通过取极限 $V\to\infty$，将给出一个线性发散贡献。于是由(4.8)式，可得自能项引起的能量修正为

$$-\frac{g^2}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{m^2+\boldsymbol{k}^2}=-\frac{g^2}{(2\pi)^2}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}^2x}{m^2+\boldsymbol{x}^2}\tag{4.9}$$

式中，$x=|\boldsymbol{k}|$，上式在 $x\to\infty$ 时线性发散。以后我们将看到如何通过把这些发散自能效应合并在物理核子的性质中而消去它们。这就是质量重正化过程。

(4.9)式的推导如下：

首先，注意到这时只有 $n=m=1$ 和 $n=m=2$ 两种情况，于是由(4.8)式，可得

$$\Delta E=-\frac{g^2}{V}\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{2\omega_{\boldsymbol{k}}^2}\left\{e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_1)}+e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_2)}\right\}=-\frac{g^2}{V}\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{\omega_{\boldsymbol{k}}^2}$$

由(3.7)式，并注意到 $x=|\boldsymbol{k}|$，得

$$\begin{aligned}\Delta E&=-\frac{g^2}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^3k}{m^2+\boldsymbol{k}^2}\\&=-\frac{g^2}{(2\pi)^3}\int_0^\infty x^2\,\mathrm{d}x\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^\pi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\frac{1}{m^2+x^2}\\&=-\frac{g^2}{(2\pi)^2}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}^2x}{m^2+\boldsymbol{x}^2}\end{aligned}$$

对于核子 – 核子相互作用而言，(4.8)式中 $m\neq n$ 的项给出的二级能量修正为：

$$\Delta E=-\frac{g^2}{2(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{\omega_{\boldsymbol{k}}^2}\left\{e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}+e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right\}\tag{4.10a}$$

$$=-\frac{g^2}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}^3k\,\frac{e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}}{m^2+|\boldsymbol{k}|^2}\tag{4.10b}$$

$$=-g^2\,\frac{e^{-mr}}{4\pi r}\tag{4.10c}$$

式中，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2$，$r=|\boldsymbol{x}|$ 是核子之间的距离。通过把(4.10a)的第二个积分中的积分变量从 k 变为 $-k$，我们就可得到(4.10b)式。

(4.10c)式的推导如下：

由于 k 是积分变量，$\boldsymbol{x}$ 是定数，所以我们取极轴沿 $\boldsymbol{x}$ 方向，这样，在球极坐标系中，

$$\mathrm{d}^3k=k^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}k\tag{1}$$

令 $r=|\boldsymbol{x}|$，于是由(4.10b)可得

$$\begin{aligned}\Delta E&=-\frac{g^2}{(2\pi)^3}\int_0^\infty k^2\,\mathrm{d}k\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^\pi\frac{e^{ikr\cos\theta}}{m^2+k^2}\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\\&=-\frac{g^2}{4\pi^2}\int_0^\infty\frac{k^2}{m^2+k^2}\,\frac{e^{ikr}-e^{-ikr}}{ikr}\,\mathrm{d}k\\&=-\frac{g^2}{2\pi^2r}\int_0^\infty\frac{\sin kr}{m^2+k^2}\,k\,\mathrm{d}k\end{aligned}\tag{2}$$

我们来考虑积分 I：

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikr}}{m^2+k^2}\,k\,\mathrm{d}k$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kr}{m^2+k^2}\, k\,\mathrm{d}k + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin kr}{m^2+k^2}\, k\,\mathrm{d}k$$
$$= i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin kr}{m^2+k^2}\, k\,\mathrm{d}k \tag{3}$$

式中最后一步中的第一项积分为零，是因为 k 是奇函数，而 $\cos kr$ 是偶函数。由(3)式即得

$$i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin kr}{m^2+k^2}\, k\,\mathrm{d}k = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikr}}{m^2+k^2}\, k\,\mathrm{d}k \qquad \text{（由 Jordan 引理和留数定理）}$$
$$= 2\pi i\, \frac{e^{-mr}\cdot im}{2mi} = i\pi e^{-mr} \tag{4}$$

注意 $\sin kr$ 和 k 是奇函数，于是由(4)式即可得

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin kr}{m^2+k^2}\, k\,\mathrm{d}k = \frac{1}{2i}\, i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin kr}{m^2+k^2}\, k\,\mathrm{d}k = \frac{1}{2i}\, i\pi e^{-mr} = \frac{\pi}{2}\, e^{-mr} \tag{5}$$

把(5)式代入(2)，即得

$$\Delta E = -g^2\, \frac{e^{-mr}}{4\pi r} \tag{4.10c}$$

(4.10b)式就是著名的汤川势：它是相距 r 的两个核子之间的势。它和两电荷之间的库伦势类似，但是和库伦势不同，它是短程的。它的力程是介子康普顿波长 $\dfrac{1}{m}$ 的数量级，π 介子的康普顿波长约为 $1.4\times10^{-13}\,\mathrm{cm}$. 这样一个势既不能重现我们所观察到的核力，也不能从这样一个粗糙的理论导出来。我们应当使用容许核子反冲的相对论性理论，来描述作为赝标量粒子的 π 介子和考虑带电的 π 介子及中性的 π 介子。最后，我们还要指出，相互作用是强的，微扰理论的应用似乎还没有被证实是恰当的[2]。



(a) (b)

图 4.2: 介子 – 核子散射

作为第二个例子，根据同样的相互作用哈密顿量(4.4)，我们来考虑 π 介子 – 核子散射。现在，我们仅有一个固定在点 $\boldsymbol{x}$ 的核子。考虑从一个单介子态 $\Phi(\boldsymbol{k})$（动量为 $\boldsymbol{k}$，能量为 $\omega_{\boldsymbol{k}}$ 的介子）到另一个单介子态 $\Phi(\boldsymbol{k}')$（动量为 $\boldsymbol{k}'$，$|\boldsymbol{k}'|=|\boldsymbol{k}|$，能量为 $\omega_{\boldsymbol{k}'}=\omega_{\boldsymbol{k}}$）的弹性散射。由于在这种跃迁中，两个占有数都变化了，因而最低级的跃迁矩阵元为零：

$$\left(\Phi\left(\boldsymbol{k}'\right),\, H_I\,\Phi\left(\boldsymbol{k}\right)\right) = 0 \tag{4.12}$$

在二级微扰理论中，有贡献的两个中间态是：

[2] 事实上，我们能够证明，上面所得到的二级能量修正结果是精确的。这只不过是没有反冲的自旋为零的中性标量场理论的特殊情况。根据这个理论，Wentzel 证明了，借助于规范变换，总哈密顿量能够被写为

$$\sum_{\boldsymbol{k}} \omega_{\boldsymbol{k}}\, a^{\dagger}(\boldsymbol{k})\, a(\boldsymbol{k}) - g^2\, \frac{e^{-mr}}{4\pi r} \tag{4.11}$$

请参见 Wentzel, G. *Quantum Theory of Fields*, P. 47, New York, Interscience, 1949.

（a）无介子存在的态 Φ_0，其能量为 0；

（b）有两个介子存在的态 $\Phi(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')$，其能量为 $\omega_{\boldsymbol{k}}+\omega_{\boldsymbol{k}'}=2\omega_{\boldsymbol{k}}$

上述两种跃迁如图4.2所示，它们相应于在介子 $\boldsymbol{k}'$ 被发射之前，介子 $\boldsymbol{k}$ 被吸收；或者在介子 $\boldsymbol{k}$ 被吸收前，介子 $\boldsymbol{k}'$ 被发射。

由上所述，我们可得跃迁矩阵元为

$$M=\frac{\Big(\Phi(\boldsymbol{k}'),\,H_I\,\Phi_0\Big)\Big(\Phi_0,\,H_I\,\Phi(\boldsymbol{k})\Big)}{\omega_{\boldsymbol{k}}-0}+\frac{\Big(\Phi(\boldsymbol{k}'),\,H_I\,\Phi(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')\Big)\Big(\Phi(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'),\,H_I\,\Phi(\boldsymbol{k})\Big)}{\omega_{\boldsymbol{k}}-2\omega_{\boldsymbol{k}}}$$

把(4.5)式代入上式，即得

$$M=\frac{g^2}{V}\frac{1}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}\,e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}}\left\{\frac{1}{\omega_{\boldsymbol{k}}}+\frac{1}{-\omega_{\boldsymbol{k}}}\right\}=0 \tag{4.13}$$

这样，在这个理论中，一直到 g^2 级都没有散射发生。这是由于图4.2中的（a）和（b）的贡献精确地相互抵消。如果我们允许反冲效应发生或考虑带电介子，就不会有这个相互抵消发生。在这一点上，中性标量无反冲理论又是特殊的，它不仅到 g^2 级是正确的，而且代表了代表了精确结果。根据(4.11)式所给出的哈密顿量，这个结论是明显的。(4.11)式所给出的哈密顿量是两项之和：一项不仅包含了介子变量，另一项仅包含了核子变量；但是恰恰没有相互作用项，这样，就不可能有任何散射发生。

习题与解答

1. 试推导(4.12)和(4.13)式。

   解： (4.12)和(4.13)式的推导如下：

   设有一个动量为 $\boldsymbol{k}$ 的介子存在，而动量为 $\boldsymbol{k}'$ 的介子不存在的初态 $\Phi(\boldsymbol{k})$ 为

   $$\Phi(\boldsymbol{k})=\Big|1\,0\Big\rangle \tag{1}$$

   设有一个动量为 $\boldsymbol{k}'$ 的介子存在，而动量为 $\boldsymbol{k}$ 的介子不存在的终态 $\Phi(\boldsymbol{k}')$ 为

   $$\Phi(\boldsymbol{k}')=\Big|0\,1\Big\rangle \tag{2}$$

   设动量为 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{k}'$ 的介子都不存在的中间态 $\Phi(0)$ 为

   $$\Phi(0)=\Big|0\,0\Big\rangle \tag{3}$$

   设存在一个动量为 $\boldsymbol{k}$ 的介子和一个动量为 $\boldsymbol{k}'$ 的介子的中间态 $\Phi(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')$ 为

   $$\Phi(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')=\Big|1\,1\Big\rangle \tag{4}$$

   由此可得：

   $$a(\boldsymbol{k})\Big|1\,0\Big\rangle=\Big|0\,0\Big\rangle\qquad a(\boldsymbol{k})\Big|0\,1\Big\rangle=0\qquad a(\boldsymbol{k})\Big|0\,0\Big\rangle=0\qquad a(\boldsymbol{k})\Big|1\,1\Big\rangle=\Big|0\,1\Big\rangle \tag{5}$$

   $$a^\dagger(\boldsymbol{k})\Big|1\,0\Big\rangle=\sqrt{2}\Big|2\,0\Big\rangle\quad a^\dagger(\boldsymbol{k})\Big|0\,1\Big\rangle=\Big|1\,1\Big\rangle\quad a^\dagger(\boldsymbol{k})\Big|0\,0\Big\rangle=\Big|1\,0\Big\rangle\quad a^\dagger(\boldsymbol{k})\Big|1\,1\Big\rangle=\sqrt{2}\Big|2\,1\Big\rangle \tag{6}$$

   $$a(\boldsymbol{k}')\Big|1\,0\Big\rangle=0\qquad a(\boldsymbol{k}')\Big|0\,1\Big\rangle=\Big|0\,0\Big\rangle\qquad a(\boldsymbol{k}')\Big|0\,0\Big\rangle=0\qquad a(\boldsymbol{k}')\Big|1\,1\Big\rangle=\Big|1\,0\Big\rangle \tag{7}$$

   $$a^\dagger(\boldsymbol{k}')\Big|1\,0\Big\rangle=\Big|1\,1\Big\rangle\quad a^\dagger(\boldsymbol{k}')\Big|0\,1\Big\rangle=\sqrt{2}\Big|0\,2\Big\rangle\quad a^\dagger(\boldsymbol{k}')\Big|0\,0\Big\rangle=\Big|0\,1\Big\rangle\quad a^\dagger(\boldsymbol{k}')\Big|1\,1\Big\rangle=\sqrt{2}\Big|1\,1\Big\rangle \tag{8}$$

   于是由(4.4)式，我们有

   $$H_I\,\Phi(\boldsymbol{k})=H_I\Big|1\,0\Big\rangle=\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{g}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{k}}}}\Big\{a(\boldsymbol{k})\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}+a^\dagger(\boldsymbol{k})\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\Big\}\Big|1\,0\Big\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{g}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{k}}}} \left\{ a(\boldsymbol{k})\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + a^{\dagger}(\boldsymbol{k})\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + a(\boldsymbol{k}')\, e^{i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}} + a^{\dagger}(\boldsymbol{k}')\, e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}} \right\} \left| 1\,0 \right\rangle \\
&= \frac{g}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{k}}}} \left\{ e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \left| 0\,0 \right\rangle + e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \sqrt{2} \left| 2\,0 \right\rangle + e^{i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}} \cdot 0 + e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}} \left| 1\,1 \right\rangle \right\} \\
&= \frac{g}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{k}}}} \left\{ e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \left| 0\,0 \right\rangle + e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \sqrt{2} \left| 2\,0 \right\rangle + e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}} \left| 1\,1 \right\rangle \right\}
\end{aligned} \tag{9}
$$

同理可得

$$
H_I\, \Phi(\boldsymbol{k}') = H_I \left| 0\,1 \right\rangle = \frac{g}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{k}}}} \left\{ e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \left| 1\,1 \right\rangle + e^{i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}} \left| 0\,0 \right\rangle + e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}} \sqrt{2} \left| 2\,0 \right\rangle \right\} \tag{10}
$$

$$
H_I\, \Phi(0) = H_I \left| 0\,0 \right\rangle = \frac{g}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{k}}}} \left\{ e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \left| 1\,0 \right\rangle + e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}} \left| 0\,1 \right\rangle \right\} \tag{11}
$$

$$
H_I\, \Phi(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = H_I \left| 1\,1 \right\rangle = \frac{g}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{k}}}} \left\{ e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \left| 0\,1 \right\rangle + e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \sqrt{2} \left| 2\,1 \right\rangle + e^{i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}} \left| 1\,0 \right\rangle + e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}} \sqrt{2} \left| 1\,2 \right\rangle \right\} \tag{12}
$$

于是，我们有

$$
\begin{aligned}
\left(\Phi\left(\boldsymbol{k}'\right),\, H_I\, \Phi\left(\boldsymbol{k}\right) \right) &= \left\langle 0\,1 \right| H_I \left| 1\,0 \right\rangle \\
&= \frac{g}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{k}}}} \left\{ e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \left\langle 0\,1 \middle| 0\,1 \right\rangle + e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \sqrt{2} \left\langle 0\,1 \middle| 2\,0 \right\rangle + e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}} \left\langle 0\,1 \middle| 1\,1 \right\rangle \right\} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{13}
$$

这就是(4.12)式。

同样可得:

$$
\left(\Phi\left(\boldsymbol{k}'\right),\, H_I\, \Phi\left(0\right) \right) = \left\langle 0\,1 \right| H_I \left| 0\,0 \right\rangle = \frac{g}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{k}}}} e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}} \tag{14}
$$

$$
\left(\Phi\left(0\right),\, H_I\, \Phi\left(\boldsymbol{k}\right) \right) = \left\langle 0\,0 \right| H_I \left| 1\,0 \right\rangle = \frac{g}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{k}}}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{15}
$$

$$
\left(\Phi\left(\boldsymbol{k}'\right),\, H_I\, \Phi\left(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}'\right) \right) = \left\langle 0\,1 \right| H_I \left| 1\,1 \right\rangle = \frac{g}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{k}}}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{16}
$$

$$
\left(\Phi\left(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}'\right),\, H_I\, \Phi\left(\boldsymbol{k}\right) \right) = \left\langle 1\,1 \right| H_I \left| 1\,0 \right\rangle = \frac{g}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{k}}}} e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}} \tag{17}
$$

于是我们有

$$
\begin{aligned}
M &= \frac{1}{\omega_{\boldsymbol{k}}} \frac{g}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{k}}}} e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}} \cdot \frac{g}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{k}}}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + \frac{1}{-\omega_{\boldsymbol{k}}} \frac{g}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{k}}}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \cdot \frac{g}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{k}}}} e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}} \\
&= \frac{g^2}{V} \frac{1}{2\omega_{\boldsymbol{k}}} e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}} \left\{ \frac{1}{\omega_{\boldsymbol{k}}} + \frac{1}{-\omega_{\boldsymbol{k}}} \right\} = 0
\end{aligned} \tag{18}
$$

这就是(4.13)式。

第五章　相互作用绘景

迄今为止，我们都是用薛定谔绘景（S. P.）来描述与时间有关的系统，现在，我们将引进相互作用绘景（I. P.）来代替薛定谔绘景。相互作用绘景特别适用于微扰动理论来处理两个相互作用着的系统（如介子和核子）。相互作用绘景使得我们能够用相对论协变的方式作计算。

在 S. P. 中，体系的运动方程是含时薛定谔方程

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi^S(t)=H^S\,\Phi^S(t) \tag{5.1}$$

式中，上标 S 是 S. P. 中物理量的标记，H^S 是体系的总哈密顿量。我们假定体系的总哈密顿量可分解成与相互作用无关的部分 H_0^S 和相互作用部分 H_I^S，即有

$$H_0^S=H_0^S(A)+H_0^S(B) \tag{5.2}$$

$$H_I^S=H_I^S(A,\,B) \tag{5.3}$$

$$H^S=H_0^S+H_I^S \tag{5.4}$$

I. P. 中的态矢量 $\Phi(t)$ 和算符 $O(t)$，可通过幺正变换从 S. P. 中的相应物理量获得：

$$\Phi(t)=e^{iH_0^St}\,\Phi^S(t) \tag{5.5}$$

$$O(t)=e^{iH_0^St}\,O^S\,e^{-iH_0^St} \tag{5.6}$$

根据(5.5)—(5.6)式，我们可得出在时刻 $t=0$ 时，两种描述是等价的。若令 $O^S=H_0^S$，则有

$$H_0=H_0^S \tag{5.7}$$

式中，没有上标 S 的态矢量和算符是 I. P. 中的物理量。这个约定将贯彻全书始终，下面不再说明。根据(5.1)式，我们可导出 I. P. 中态矢量的运动方程。利用(5.5)—(5.7)式，我们容易推出：

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t)=H_I\,\Phi(t) \tag{5.8}$$

这样，由于用相互作用哈密顿量 H_I 代替总哈密顿量，I. P. 中的态矢量就具有 S. P. 的时间相关性。

把(5.6)式改写为：

$$O(t)=e^{iH_0t}\,O(0)\,e^{-iH_0t} \tag{5.9}$$

这就是算符 $O(t)$ 在 I. P. 中的运动方程。然而，我们也能把(5.9)式给出的算符 $O(t)$ 解释成是用与相互作用无关的哈密顿量 H_0 置换总哈密顿量 H 后的 H. P. （海森堡绘景）中的算符。这样，相互作用系统在 I. P. 中的算符就等价于无相互作用系统在 H. P. 中的算符。因此，I. P. 中的运动方程和算符对易子就是无相互作用情况下的运动方程和算符对易子。这些结果的导出是很容易的。对于介子场来说，我们已在第三章中导出了这些结果。在处理相互作用系统时，我们将能立刻利用它们。另一方面，在 H. P. 中，运动方程和对易子都将由于相互作用的存在而需要加以修正。根据(5.9)式，我们可以得到运动方程的微分形式为

$$i\frac{\partial}{\partial t}O(t)=\Big[O(t),\,H_0\Big] \tag{5.10}$$

(5.10)式可推导如下：

将(5.9)式两边对时间求微商，即得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}O(t) &= i\,H_0\,e^{iH_0t}\,O(0)\,e^{-iH_0t} - i\,e^{iH_0t}\,O(0)\,e^{-iH_0t}\,H_0 \\ &= i\left\{H_0\,O(t) - O(t)\,H_0\right\}\end{aligned} \tag{1}$$

由(1)式即得

$$i\,\frac{\partial}{\partial t}O(t) = \left\{O(t)\,H_0 - H_0\,O(t)\right\} = \left[O(t),\,H_0\right] \tag{2}$$

现在，我们来导出在 I. P. 中介子场的对易关系，我们将看到这些对易关系是协变的。在 I. P. 中的薛定谔方程(5.8)式当然不是协变的，这是因为在我们的特殊洛伦兹框架内，时间导数仅仅挑选出了 t = 常数的平面。然而，我们能够用广义的类空曲面来置换这些类空平面，所导出的代替(5.8)式的态矢量随时间变化的方程式协变的[1]。不过，我们将不讨论理论的这种更一般的程式。

下面，我们将把在 S. P. 中已得出的介子场有关结果转换到 I. P. 中去。把吸收算符 $a(\boldsymbol{k})$ 写成 $a_{\boldsymbol{k}}$，产生算符 $a^\dagger(\boldsymbol{k})$ 写成 $a^\dagger_{\boldsymbol{k}}$，于是可得相应的 I. P. 算符为：

$$a_{\boldsymbol{k}}(t) = e^{iH_0t}\,a_{\boldsymbol{k}}\,e^{-iH_0t} \tag{5.11a}$$

同理，可得 $a^\dagger_{\boldsymbol{k}}(t)$ 的相应定义为

$$a^\dagger_{\boldsymbol{k}}(t) = e^{iH_0t}\,a^\dagger_{\boldsymbol{k}}\,e^{-iH_0t} \tag{5.11b}$$

于是，介子场的傅里叶展开式(3.4a)在 I. P. 中变成：

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{k}}}}\left\{a_{\boldsymbol{k}}(t)\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + a^\dagger_{\boldsymbol{k}}(t)\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right\} \tag{5.12}$$

(5.11a)的求解是很容易的。首先，我们只需要考虑介子场哈密顿量 H_0 [(1.17)式] 中的项 $\omega_{\boldsymbol{k}}a^\dagger_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k}}$，因为 H_0 中的所有其他项都和 $a_{\boldsymbol{k}}$ 对易，这样，它们就从(5.11a)式中消失了。根据 S. S. Schweber 等著的 "*Mesons and Fields*" 一书第一卷 §15 的结果，我们考虑

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}a_{\boldsymbol{k}}(\lambda t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left\{e^{iH_0\lambda t}\,a_{\boldsymbol{k}}(\lambda t)\,e^{-iH_0\lambda t}\right\} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left\{e^{i\omega_{\boldsymbol{k}}\lambda t a^\dagger_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k}}}\,a_{\boldsymbol{k}}\,e^{-i\omega_{\boldsymbol{k}}\lambda t a^\dagger_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k}}}\right\} \\ &= i\,\omega_{\boldsymbol{k}}\,t\,e^{i\omega_{\boldsymbol{k}}\lambda t a^\dagger_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k}}}\left[a^\dagger_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k}},\,a_{\boldsymbol{k}}\right]e^{-i\omega_{\boldsymbol{k}}\lambda t a^\dagger_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k}}} \\ &= -i\,\omega_{\boldsymbol{k}}\,t\,e^{i\omega_{\boldsymbol{k}}\lambda t a^\dagger_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k}}}\,a_{\boldsymbol{k}}\,e^{-i\omega_{\boldsymbol{k}}\lambda t a^\dagger_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k}}}\end{aligned}$$

式中，我们用到了对易关系(3.5)式。由此可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}a_{\boldsymbol{k}}(\lambda t) = -i\,\omega_{\boldsymbol{k}}\,t\,a_{\boldsymbol{k}}(\lambda t)$$

对上式积分，然后令 $\lambda = 1$，即得

$$a_{\boldsymbol{k}}(t) = a_{\boldsymbol{k}}\,e^{-i\omega_{\boldsymbol{k}}t} \tag{5.13a}$$

同理，可得

$$a^\dagger_{\boldsymbol{k}}(t) = a^\dagger_{\boldsymbol{k}}\,e^{i\omega_{\boldsymbol{k}}t} \tag{5.13b}$$

[1] 参见 Schweber, S. S., *et al.* "*Field*", in *Mesons and Fields*, Vol. I, Evanston, III., Row. Peterson, 1955.

把(5.13a)、(5.13b)式代入(5.12)式，并且把指数写成四维矢量的标积 $kx=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-k_0\,t$，最后，我们就得到在 I. P. 中的介子场为

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}\left\{a(\boldsymbol{k})\,e^{ikx}+a^{\dagger}(\boldsymbol{k})\,e^{-ikx}\right\}\tag{5.14}$$

式中，求和遍及于所有可容许的动量 $\boldsymbol{k}$，k_0 则由相应的能量 $\omega_{\boldsymbol{k}}$ 给出，如求和号下面所表明的那样。

(5.14)式的说明：

式中求和号下面对 k_0 的限制条件

$$k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}=\sqrt{m^2+\boldsymbol{k}^2}$$

意味着介子的能量和动量要满足相对论粒子所应满足的质量壳层关系 $m^2+\boldsymbol{k}^2=\omega_{\boldsymbol{k}}^2$，以后凡是求和号下面有这样的限制条件，其意义都是这样。

$\omega_{\boldsymbol{k}}^2=m^2+\boldsymbol{k}^2$ 是四维时空中的一个曲面，凡是满足质量壳层关系的粒子称为在壳（on shell），我们把这样的粒子称为实粒子，即我们能实际观测到的粒子。凡是不满足质量壳层关系的粒子称为离壳（off shell），我们把这样的粒子称为虚粒子，即我们实际观测不到的粒子。

为方便起见，我们常把 $\phi(x)$ 分解为

$$\phi(x)=\phi^{+}(x)+\phi^{-}(x)\tag{5.15}$$

式中，$\phi^{+}(x)$ 和 $\phi^{-}(x)$ 分别是仅含有吸收算符和产生算符的部分。于是，我们现在能把真空定义(1.14)式用下式代替：

$$\phi^{+}\Phi_0=0\tag{5.16}$$

算符 ϕ^{+} 和 ϕ^{-} 分别被称为场的正频部分和负频部分。根据(5.14)和(5.15)式，我们有

$$\phi^{+}(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}\,a(\boldsymbol{k})\,e^{ikx}\tag{5.17a}$$

$$\phi^{-}(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}\,a^{\dagger}(\boldsymbol{k})\,e^{-ikx}\tag{5.17b}$$

$$\left(\phi^{+}\right)^{\dagger}=\phi^{-}\tag{5.17c}$$

根据展开式(5.14)式和对易关系(3.5)式，我们能容易地计算出场量在两个任意的时空点 x 和 x' 的对易关系 $\left[\phi(x),\,\phi(x')\right]$。由于两个产生算符相互对易，两个吸收算符也相互对易，于是只有交叉项才有贡献，这样，我们有

$$\begin{aligned}\left[\phi(x),\,\phi(x')\right]&=\frac{1}{V}\sum_{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}}\sum_{k_0'=\omega_{\boldsymbol{k}'}}\frac{1}{\sqrt{2k_0\,k_0'}}\left\{\left[a_{\boldsymbol{k}},\,a_{\boldsymbol{k}'}^{\dagger}\right]e^{i(kx-k'x')}+\left[a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger},\,a_{\boldsymbol{k}'}\right]e^{-i(kx-k'x')}\right\}\\&=\frac{1}{2(2\pi)^3}\int_{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}}\frac{\mathrm{d}^3k}{k_0}\left\{e^{ik(x-x')}-e^{-ik(x-x')}\right\}\\&=i\,\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}}\frac{\mathrm{d}^3k}{k_0}\,\sin k(x-x')\end{aligned}$$

式中，考虑到要取极限 $V\to\infty$，所以我们已根据(3.7)式用动量积分来代替了求和。定义函数 $\Delta(x)$ 为

$$\Delta(x)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}}\frac{\mathrm{d}^3k}{k_0}\,\sin kx\tag{5.18}$$

由此，我们最后可得

$$\left[\phi(x),\,\phi(x')\right]=i\,\Delta(x-x')\tag{5.19}$$

关于(5.19)式的说明：

由(5.19)式，我们有

$$\phi(x)\,\phi(x') - \phi(x')\,\phi(x) = i\,\Delta(x-x') \tag{1}$$

$$(1)\text{式的左边} = -\phi(x')\,\phi(x) + \phi(x)\,\phi(x') = -\Big\{\phi(x')\,\phi(x) - \phi(x)\,\phi(x')\Big\} \tag{2}$$

$$(1)\text{式的右边} = i\,\Delta(x-x') = \begin{cases} -\,i\,\Delta(x'-x) & \text{若}\Delta(x)\text{是}x\text{的奇函数} \quad (3a) \\ i\,\Delta(x'-x) & \text{若}\Delta(x)\text{是}x\text{的偶函数} \quad (3b) \end{cases}$$

当 $\Delta(x)$ 是 x 的奇函数时，由(2)和(3a)式，(5.19)式保持自洽；当 $\Delta(x)$ 是 x 的偶函数时，则(5.19)式不成立。

根据(5.18)式，$\Delta(x)$ 是 x 的一个实的奇函数，考虑到(5.19)式的左边是两个厄密算符的对易子，这对于(5.19)式自洽是必要的。而且，既然场量 ϕ 本身是一个标量，Δ 函数也必须是不变的。我们将在下一章中直接证明这一点。这样，(5.19)式是一个协变的对易关系式。

根据(5.18)式，我们可得：

$$\Delta(\boldsymbol{x},\,t=0) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{\mathrm{d}^3k}{\omega_{\boldsymbol{k}}}\,\sin \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} = 0 \tag{5.20}$$

上式右边等于 0 是因为被积函数是矢量 $\boldsymbol{k}$ 的奇函数，而积分是整个空间进行。于是，我们可得等时对易关系：

$$\Big[\phi(\boldsymbol{x},\,t),\,\phi(\boldsymbol{x}',\,t)\Big] = i\,\Delta\big\{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),\,(t-t)=0\big\} = 0 \tag{5.21}$$

和(3.2a)、(3.2b)式一致。然而，我们能对这个结果给出一个更广泛的解释。既然 Δ 函数是一个不变量，那末就有

$$\Delta(x) = 0 \qquad \text{如果}\ x^2 = \boldsymbol{x}^2 - t^2 > 0 \tag{5.22}$$

上式表明，不但对特殊的类空矢量 $\boldsymbol{x},0$，而且对任何类空矢量 x，都有 $\Delta(x)=0$。实际上，通过一个适当的洛伦兹变换，任何类空矢量都能被转换成 $\boldsymbol{x},0$ 这种形式。这样，不变量 $\Delta(x)$ 函数在光锥 $|\boldsymbol{x}| = t$ 外面等于 0。相应地，如图5.1所示，对于任何两个具有类空间隔 $(x-x')^2 > 0$ 的点 x 和 x'，对易子(5.19)式都为 0。这正好是特殊相对论和量子力学的基本假定所要求的。两个厄密算符的对易子(5.19)式不为 0，意味着在时空点 x 和 x' 的相应可观测场的测量相互干涉。但如果 $(x-x')$ 是类空的，这样的干涉就不可能发生；因为如果要发生干涉，则信号必须用大于光速的速度在 x 和 x' 之间传播，这和特殊相对论正好相反。这样，对易子(5.19)式对类空的 $(x-x')$ 而言为 0，就代表了量子力学和特殊相对论的更满意的衔接。

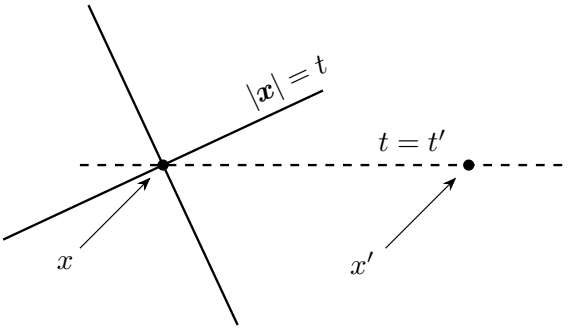


图 5.1:

习题与解答

1. 试推导(5.8)式。

   解： (5.8)式可推导如下：

   根据(5.5)式，我们有

$$\Phi^S(t) = e^{-H_0^S}\,\Phi(t) \tag{1}$$

   把(1)式和(5.4)式代入(5.1)式，可得

$$i\frac{\partial}{\partial t}\left\{e^{-H_0^S t}\,\Phi(t)\right\} = H_I^S\,\Phi^S(t) + H_0^S\,\Phi^S(t) \tag{2}$$

   由于 H_0^S 和 $e^{-iH_0^S}$ 对易，所以对(2)式右边求导后即可得

$$e^{-iH_0^S t}\cdot i\,\frac{\partial}{\partial t}\,\Phi(t) = H_I^S\,\Phi(t) \tag{3}$$

   把(1)式代入(3)式，然后在两边左乘 $e^{iH_0^S t}$，即得

$$i\,\frac{\partial}{\partial t}\,\Phi(t) = e^{iH_0^S t}\,H_I^S\,e^{-iH_0^S t}\,\Phi(t) \tag{4}$$

   根据(5.6)式，我们有:

$$H_I(t) = e^{iH_0^S t}\,H_I^S\,e^{-iH_0^S t} \tag{5}$$

   把(5)式代入(4)式，即得(5.8)式。

第六章　不变量 Δ 数

在这一章中，我们将对 Δ 函数以及有关函数的性质作进一步的研究 [1]。在本章末尾，我们将把这些结果用来计算场算符的一定组合的真空平均值。这些场算符的组合是我们以后要用到的。对这些纯数学推导没有多少兴趣的读者可以略去这一章，或者是仅仅浏览一下，在需要时再来阅读有关部分。

不变量 Δ 函数(5.18)式可以被写为：

$$\Delta(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_C \mathrm{d}^4k\,\frac{e^{ikx}}{k^2+m^2} \tag{6.1}$$

式中，$\mathrm{d}^4k=\mathrm{d}^3k\,\mathrm{d}k_0$，关于 d^3k 的积分遍及于所有动量 $\boldsymbol{k}$，k_0 不再被限制到能量 $\omega_{\boldsymbol{k}}$，而仅仅是一个积分变量。(6.1)式中被积函数的分母可改写为

$$k^2+m^2=-\left(k_0^2-\omega_{\boldsymbol{k}}^2\right) \tag{6.2}$$

(6.2)式可推导如下：

$$k^2+m^2=\left(\boldsymbol{k}^2-k_0^2\right)+m^2=\left(\boldsymbol{k}^2+m^2\right)-k_0^2=\omega_{\boldsymbol{k}}^2-k_0^2=-\left(k_0^2-\omega_{\boldsymbol{k}}^2\right)$$

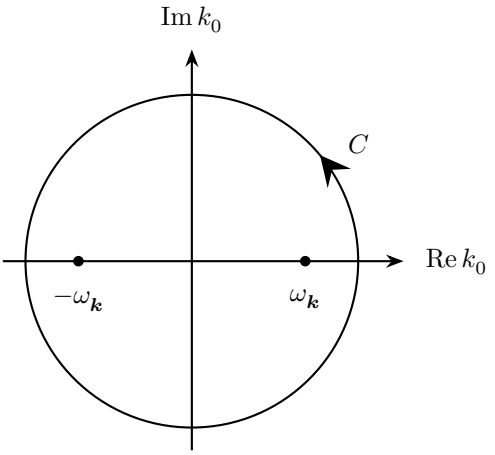


图 6.1: $\Delta(x)$ 的围道 C

由(6.2)式可知，在 $k_0=\pm\omega_{\boldsymbol{k}}$ 处，(6.1)式中被积函数有两个一阶极点。因此，对 k_0 的积分必须被解释成是在复 k_0 平面上沿特定围道 C 的围道积分。如图6.1所示，若取围道 C 为沿反时针方向且包围了两个极点的封闭曲线，则(6.1)式和 $\Delta(x)$ 的定义(5.18)式是等价的。根据留数定理计算围道积分，则由(6.1)式可得：

$$\Delta(x)=-\frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^3k\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\int_C \mathrm{d}k_0\,\frac{e^{ik_0x_0}}{k_0^2-\omega_{\boldsymbol{k}}^2}=-\frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^3k\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\,2\pi i\left\{\frac{e^{-i\omega_{\boldsymbol{k}}x_0}}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}+\frac{e^{i\omega_{\boldsymbol{k}}x_0}}{-2\omega_{\boldsymbol{k}}}\right\} \tag{6.1a}$$

如果我们在上式的第二项中把积分变量从 $\boldsymbol{k}$ 改为 $-\boldsymbol{k}$，则可以得到和(5.18)式一致的结果。

[1] 在这些函数的精确定义方面有若干任意性，如负号等等。所以，在使用文献所刊出的结果时要特别小心。

下面给出从(6.1a)式得出(5.18)式的推导：

$$\begin{aligned}
\Delta(x) &= -\frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^3k\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\, 2\pi i\left\{\frac{e^{-i\omega_{\boldsymbol{k}}x_0}}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}+\frac{e^{i\omega_{\boldsymbol{k}}x_0}}{-2\omega_{\boldsymbol{k}}}\right\}\\
&= -\frac{i}{(2\pi)^3}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3k\,\frac{e^{ikx}}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}+\int_{\infty}^{-\infty}\mathrm{d}^3(-k)\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\,\frac{e^{i\omega_{\boldsymbol{k}}x_0}}{-2\omega_{\boldsymbol{k}}}\right\}\\
&= -\frac{i}{(2\pi)^3}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3k\,\frac{e^{ikx}}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}+\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3k\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\,\frac{e^{i\omega_{\boldsymbol{k}}x_0}}{-2\omega_{\boldsymbol{k}}}\right\}\\
&= -\frac{i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3k\,\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}\\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3k\,\frac{\sin kx}{\omega_{\boldsymbol{k}}}\\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}}\mathrm{d}^3k\,\frac{\sin kx}{k_0}
\end{aligned}$$

此即(5.18)式。

使用狄拉克 δ 函数，我们也能用四重完全实积分来表示 $\Delta(x)$（即 k_0 积分也是沿实轴遍及于 $-\infty<k_0<\infty$ 的实积分）：

$$\Delta(x)=\frac{-i}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^4k\, e^{ikx}\,\varepsilon(k)\,\delta(k^2+m^2) \tag{6.3}$$

式中，

$$\varepsilon(k)=\frac{k_0}{|k_0|}=\begin{cases}+1 & \text{若 } k_0>0\\ -1 & \text{若 } k_0<0\end{cases} \tag{6.4}$$

容易看出，(6.3)式是正确的；例如，把(6.3)式中的 δ 函数写为：

$$\delta(k^2+m^2)=\delta(k_0^2-\omega_{\boldsymbol{k}}^2)=\frac{1}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}\Big\{\delta\left(k_0+\omega_{\boldsymbol{k}}\right)+\delta\left(k_0-\omega_{\boldsymbol{k}}\right)\Big\}$$

然后对 k_0 积分，于是可得出 $\Delta(x)$ 的原始定义(5.18)式。

下面给出从(6.3)式得出(5.18)式的推导：

$$\begin{aligned}
\Delta(x) &= \frac{-i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4k\, e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-k_0x_0)}\,\varepsilon(k)\,\frac{1}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}\Big\{\delta\big(k_0+\omega_{\boldsymbol{k}}\big)+\delta\big(k_0-\omega_{\boldsymbol{k}}\big)\Big\}\\
&= -\frac{i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3k\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_0\, e^{-ik_0x_0}\,\varepsilon(k)\,\frac{\delta\big(k_0+\omega_{\boldsymbol{k}}\big)}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}\\
&\quad -\frac{i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3k\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_0\, e^{-ik_0x_0}\,\varepsilon(k)\,\frac{\delta\big(k_0-\omega_{\boldsymbol{k}}\big)}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}\\
&= \frac{-i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3k\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\,\frac{e^{-i(-\omega_{\boldsymbol{k}})x_0}}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}\cdot(-1)+\frac{-i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3k\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\,\frac{e^{-i\omega_{\boldsymbol{k}}x_0}}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}\cdot(+1)\\
&= \frac{i}{(2\pi)^3}\int_{\infty}^{-\infty}\mathrm{d}^3(-k)\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\, e^{i\omega_{\boldsymbol{k}}x_0}\,\frac{1}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}-\frac{i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3k\, e^{ikx}\,\frac{1}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}\\
&= \frac{i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3k\left\{e^{-ikx}-e^{ikx}\right\}\frac{1}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}}\mathrm{d}^3k\,\frac{\sin kx}{k_0}
\end{aligned}$$

此即(5.18)式。

因为 k_0 在正洛伦兹变换下不变号，所有 $\varepsilon(k)$ 在正洛伦兹变换下是不变的。这样，我们可以看到，在正洛伦兹变换下，(6.3)式中的每个因子都是不变的。因此，根据(6.3)式，我们可以推出 $\Delta(x)$ 在正洛伦兹变换下的不变性。

很清楚，通过修改围道 C，我们能够从(6.1)式进一步得到有关的 Δ 函数。这些 Δ 函数都可以从下面两个特殊情况导出：

$$\Delta^{\pm}(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C^{\pm}}\mathrm{d}^4k\,\frac{e^{ikx}}{k^2+m^2} \tag{6.5}$$

式中，围道 $C^{\pm}$ 如图6.2所示，它们在 $k_0=\pm\omega_{\boldsymbol{k}}$ 处分别包围了一个极点，并且都是沿反时针方向。

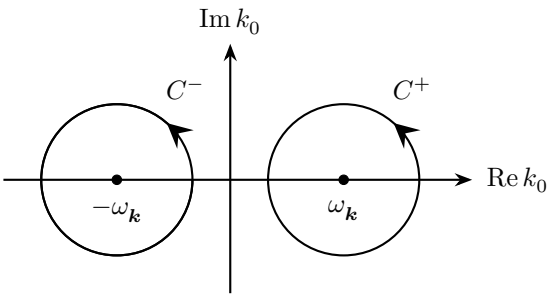


图 6.2: $\Delta^{\pm}(x)$ 的围道 $C^{\pm}$

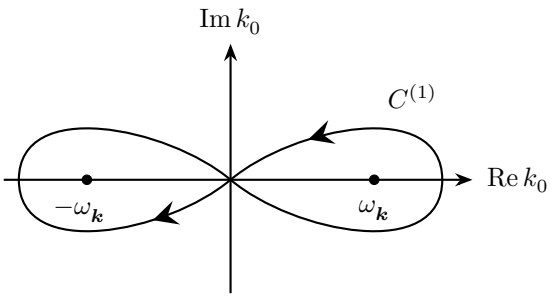


图 6.3: $\Delta^{(1)}(x)$ 的围道 $C^{(1)}$

由此，我们可得

$$\Delta(x)=\Delta^{+}(x)+\Delta^{-}(x) \tag{6.6}$$

上式的导出是十分简单的，只须将(6.1a)式的围道的形状加以适当改变，就立刻可以得到。Δ 函数 $\{-i\,\Delta^{(1)}(x)\}$ 则可以由下式定义：

$$\{-i\,\Delta^{(1)}(x)\}=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C^{(1)}}\mathrm{d}^4k\,\frac{e^{ikx}}{k^2+m^2} \tag{6.7}$$

式中，围道 $C^{(1)}$ 如图6.3所示。类似于(6.6)式，我们同样可得

$$-i\,\Delta^{(1)}(x)=\Delta^{+}(x)-\Delta^{-}(x) \tag{6.8}$$

根据上面给出的 $\Delta(x)$ 的这些定义，我们容易得出 Δ 函数的其他表示式以及这些 Δ 函数的性质，例如：

$$\Delta^{\pm}(x)=\mp\frac{i}{2(2\pi)^3}\int\limits_{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}}\frac{\mathrm{d}^3k}{k_0}\,e^{\pm ikx} \tag{6.9}$$

根据(6.9)式，我们容易得出

$$\Delta^{+}(x)=-\Delta^{-}(-x) \tag{6.10}$$

(6.9)式的推导如下：

根据(6.5)式，我们有

$$\begin{aligned}\Delta^{+}(x)&=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C^{+}}\mathrm{d}^4k\,\frac{e^{ikx}}{m^2+k^2}\\&=-\frac{1}{(2\pi)^4}\int\mathrm{d}^3k\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\int_{C^{+}}\mathrm{d}k_0\,\frac{e^{-ik_0x_0}}{k_0^2-\omega_{\boldsymbol{k}}^2}\end{aligned}$$

（代入 (6.2) 式）

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^3k\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\left\{2\pi i\cdot\frac{e^{-i\omega_{\boldsymbol{k}}x_0}}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}\right\} && \text{（应用留数定理）}\\
&= -\frac{i}{2(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3k\, e^{ikx}\cdot\frac{1}{\omega_{\boldsymbol{k}}}\\
&= -\frac{i}{2(2\pi)^3}\int\limits_{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}} \mathrm{d}^3k\,\frac{e^{ikx}}{k_0}
\end{aligned}
$$

同理，可求 $\Delta^-(x)$。

实际上，在(5.19)式的推导中已出现了 Δ 函数，在那里，我们事实上已经证明了

$$\left[\phi^+(x),\,\phi^+(x')\right] = \left[\phi^-(x),\,\phi^-(x')\right] = 0 \tag{6.11a}$$

$$\left[\phi^\pm(x),\,\phi^\mp(x')\right] = i\,\Delta^\pm(x-x') \tag{6.11b}$$

在上式得证明中，我们使用了对易关系(3.5)式。由此，我们导出了(5.18)—(5.19)式。

下面，我们来考虑场算符乘积的真空态期待值。具有代表性的项是 $\left(\Phi_0,\,\phi^+(x)\,\phi^-(x')\,\Phi_0\right)$，它的值容易根据(5.14)式和(5.15)式计算出来。因为这是一个从真空态到真空态的跃迁，只有项 $\left(\Phi_0,\,\phi^+(x)\,\phi^-(x')\,\Phi_0\right)$ 对跃迁矩阵元的贡献不为零（ϕ^- 能产生一个粒子而 ϕ^+ 能重新吸收这个粒子）。因此

$$\left(\Phi_0,\,\phi(x)\,\phi(x')\,\Phi_0\right) = \frac{1}{V}\sum_{\substack{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}\\ k_0'=\omega_{\boldsymbol{k}'}}}\frac{1}{2\sqrt{k_0\,k_0'}}\,e^{i(kx-k'x')}\left(\Phi_0,\,a_{\boldsymbol{k}}\,a_{\boldsymbol{k}}^\dagger\,\Phi_0\right)$$

由于 $a_{\boldsymbol{k}}\,\Phi_0 = 0$，所以，根据对易关系(3.5)式，考虑到(3.7)式，即可得出：

$$\left(\Phi_0,\,\phi(x)\,\phi(x')\,\Phi_0\right) = \frac{1}{2(2\pi)^3}\int\limits_{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}}\frac{\mathrm{d}^3k}{k_0}\,e^{ik(x-x')} = i\,\Delta^+(x-x') \tag{6.12}$$

(6.12)式的推导如下：

首先，由(5.14)和(5.15)式，我们可得出场算符的乘积为：

$$\phi(x)\,\phi(x') = \frac{1}{V}\sum_{\substack{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}\\ k_0'=\omega_{\boldsymbol{k}'}}}\frac{1}{2\sqrt{k_0\,k_0'}}\left\{a(\boldsymbol{k})\,e^{ikx}+a^\dagger(\boldsymbol{k})\,e^{-ikx}\right\}\left\{a(\boldsymbol{k}')\,e^{ik'x'}+a^\dagger(\boldsymbol{k}')\,e^{-ik'x'}\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{V}\sum_{\substack{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}\\ k_0'=\omega_{\boldsymbol{k}'}}}\frac{1}{2\sqrt{k_0\,k_0'}}\\
&\quad\times\left\{a(\boldsymbol{k})\,a(\boldsymbol{k}')\,e^{i(kx+k'x')}+a^\dagger(\boldsymbol{k})\,a(\boldsymbol{k}')\,e^{-i(kx-k'x')}+a(\boldsymbol{k})\,a^\dagger(\boldsymbol{k}')\,e^{i(kx-k'x')}+a^\dagger(\boldsymbol{k})\,a(\boldsymbol{k}')\,e^{-i(kx+k'x')}\right\} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

由于矩阵元 $\left(\Phi_0,\,\phi(x)\,\phi(x')\,\Phi_0\right)$ 是一个从真空态到真空态的跃迁，故(1)式中只有第三项对矩阵元的贡献不为 0，于是我们有：

$$
\begin{aligned}
\left(\Phi_0,\,\phi(x)\,\phi(x')\,\Phi_0\right) &= \frac{1}{V}\sum_{\substack{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}\\ k_0'=\omega_{\boldsymbol{k}'}}}\frac{1}{2\sqrt{k_0\,k_0'}}\,e^{i(kx-k'x')}\left(\Phi_0,\,a(\boldsymbol{k})\,a^\dagger(\boldsymbol{k}')\,\Phi_0\right)\\
&= \frac{1}{V}\sum_{\substack{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}\\ k_0'=\omega_{\boldsymbol{k}'}}}\frac{1}{2\sqrt{k_0\,k_0'}}\,e^{i(kx-k'x')}\left(\Phi_0,\,\left\{a^\dagger(\boldsymbol{k}')\,a(\boldsymbol{k})+\delta(\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}')\right\}\Phi_0\right)\\
&= \frac{1}{V}\sum_{\substack{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}\\ k_0'=\omega_{\boldsymbol{k}'}}}\frac{1}{2\sqrt{k_0\,k_0'}}\,e^{i(kx-k'x')}\left(\Phi_0,\,\delta(\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}')\,\Phi_0\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{V}\sum_{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}} \frac{1}{2k_0}\, e^{ik(x-x')} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}} \mathrm{d}^3k\, \frac{e^{ik(x-x')}}{2k_0} \\
&= i\,\Delta^+(x-x')
\end{aligned}
$$

这就是(6.12)式。

算符 $\phi(x)$ 和 $\phi(x')$ 的戴森（Dyson）编时乘积定义为：

$$
P\Big\{\phi(x)\,\phi(x')\Big\} = \begin{cases} \phi(x)\,\phi(x') & \text{若 } x_0 > x_0' \\ \phi(x')\,\phi(x) & \text{若 } x_0' > x_0 \end{cases} \tag{6.13}
$$

也就是依照时间流逝的年代次序从右到左写下算符，使得“较早”的算符“较早”作用。使用(6.4)式定义的 ε 符号，我们可以把(6.13)式写成：

$$
P\Big\{\phi(x)\,\phi(x')\Big\} = \frac{1+\varepsilon(x-x')}{2}\,\phi(x)\,\phi(x') + \frac{1-\varepsilon(x-x')}{2}\,\phi(x')\,\phi(x) \tag{6.14}
$$

于是，根据(6.12)和(6.10)式，我们可得

$$
\begin{aligned}
\Big(\Phi_0,\, P\Big\{\phi(x)\,\phi(x')\Big\}\,\Phi_0\Big) &= \frac{1+\varepsilon(x-x')}{2}\, i\,\Delta^+(x-x') - \frac{1-\varepsilon(x-x')}{2}\, i\,\Delta^-(x-x') \\
&= \frac{1}{2}\,\Delta_F(x-x')
\end{aligned} \tag{6.15}
$$

上式给出了 Δ_F 函数的定义：

$$
\Delta_F(x) = \Big\{1+\varepsilon(x)\Big\}\, i\,\Delta^+(x) - \Big\{1-\varepsilon(x)\Big\}\, i\,\Delta^-(x) \tag{6.16}
$$

于是，我们可得：

$$
\frac{1}{2i}\,\Delta_F(x) = \begin{cases} \Delta^+(x) & \text{若 } x_0 > 0 \\ -\Delta^-(x) & \text{若 } x_0 < 0 \end{cases} \tag{6.17}
$$

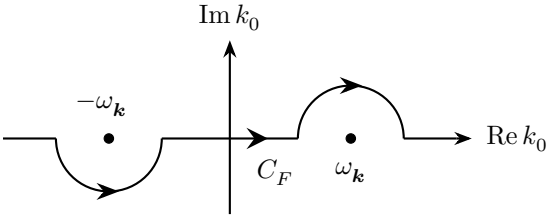


图 6.4: $\Delta_F(x)$ 的围道 C_F

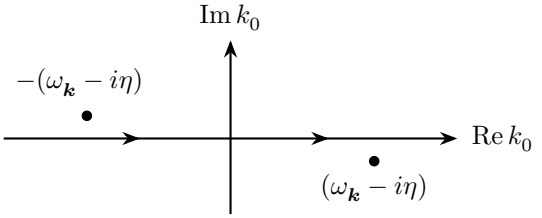


图 6.5:

根据 $\Delta^{\pm}(x)$ 的积分表示式(6.5)式，我们可以立刻推出：

$$
\Delta_F(x) = -\frac{2i}{(2\pi)^4}\int_{C_F} \mathrm{d}^4k\, \frac{e^{ikx}}{k^2+m^2} \tag{6.18}
$$

式中，围道 C_F 在极点 $k_0 = -\omega_{\boldsymbol{k}}$ 处从下面绕过，而在极点 $k_0 = \omega_{\boldsymbol{k}}$ 处则从上面绕过，如图6.4所示。

容易看出，(6.18)式和(6.17)式是等价的。当 $x_0 > 0$ 时，我们可以借助于在 $\mathrm{Im}\,k_0 < 0$ 的下半平面上的一个半径为 ∞ 的半圆，使围道 C_F 闭合；这样，当 $|k_0| \to \infty$ 时，由于 $e^{-ik_0x_0} \to 0$，所以沿这个半圆的积分对

$\Delta_F(x)$ 没有贡献。所得到的沿顺时针方向的闭合围道仅仅包围了位于 $k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}$ 处的一个极点。这样，根据(6.5)式和(6.18)式，当 $x_0>0$ 时，我们有

$$\Delta_F(x)=-2i\left\{-\Delta^+(x)\right\}$$

这和(6.17)式一致。类似地，借助于在上半平面 $\operatorname{Im}k_0>0$ 内的一个半径为 ∞ 的半圆，使围道 C_F 闭合，就可以得到 $x_0<0$ 时的结果。

代替图(6.4)中使围道变形的方法，我们可以把极点移离开实轴一无穷小距离 η（参看图6.5），然后沿实轴积分，于是(6.18)式就变成：

$$\begin{aligned}\Delta_F(x)&=-\frac{2i}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4k\,\frac{e^{ikx}}{-\left\{k_0^2-(\omega_{\boldsymbol{k}}-i\eta)^2\right\}}\\&=-\frac{2i}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4k\,\frac{e^{ikx}}{k^2+m^2-i\varepsilon}\end{aligned}\tag{6.19}$$

式中，$\varepsilon=2\eta\omega_{\boldsymbol{k}}$ 是一个很小的正数，在积分后我们将让它趋于零（这也是为什么 η^2 可以被忽略的理由）。在(6.19)式中，对四个变量 k_0，k_1，k_2，k_3 中每个变量的积分现在都是沿整个实轴（$-\infty$，∞）进行。

习题与解答

1. 导出(6.3)式。

解： 由 $\Delta(x)$ 的原始定义(5.18)式，我们有

$$\begin{aligned}\Delta(x)&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}}\mathrm{d}^3k\,\frac{\sin kx}{k_0}=\frac{i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3k\,\frac{1}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}\left\{e^{-ikx}-e^{ikx}\right\}\\&=\frac{i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3k\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\,e^{i\omega_{\boldsymbol{k}}x_0}\,\frac{1}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}-\frac{i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3k\,e^{ikx}\,\frac{1}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}\\&=\frac{i}{(2\pi)^3}\int_{\infty}^{-\infty}\mathrm{d}^3(-k)\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\,e^{i\omega_{\boldsymbol{k}}x_0}\,\frac{1}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}-\frac{i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3k\,e^{ikx}\,\frac{1}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}\\&=\frac{i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3k\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\,e^{i\omega_{\boldsymbol{k}}x_0}\,\frac{1}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}-\frac{i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3k\,e^{ikx}\,\frac{1}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}\\&=\frac{-i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3k\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\,\frac{e^{-i(-\omega_{\boldsymbol{k}})x_0}}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}\cdot(-1)+\frac{-i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3k\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\,\frac{e^{-i\omega_{\boldsymbol{k}}x_0}}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}\cdot(+1)\\&=-\frac{i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3k\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_0\,e^{-ik_0x_0}\,\varepsilon(k)\,\frac{\delta\left(k_0+\omega_{\boldsymbol{k}}\right)}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}\\&\quad-\frac{i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3k\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_0\,e^{-ik_0x_0}\,\varepsilon(k)\,\frac{\delta\left(k_0-\omega_{\boldsymbol{k}}\right)}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}\\&=-\frac{i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4k\,e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-k_0x_0)}\,\varepsilon(k)\,\frac{1}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}\,\delta\left(k_0+\omega_{\boldsymbol{k}}\right)\\&\quad-\frac{i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4k\,e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-k_0x_0)}\,\varepsilon(k)\,\frac{1}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}\,\delta\left(k_0-\omega_{\boldsymbol{k}}\right)\\&=-\frac{i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4k\,e^{ikx}\,\varepsilon(k)\,\frac{1}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}\left\{\delta\left(k_0+\omega_{\boldsymbol{k}}\right)+\delta\left(k_0-\omega_{\boldsymbol{k}}\right)\right\}\\&=-\frac{i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4k\,e^{ikx}\,\varepsilon(k)\,\delta\left(k_0^2-\omega_{\boldsymbol{k}}^2\right)\\&=-\frac{i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4k\,e^{ikx}\,\varepsilon(k)\,\delta\left(k^2+m^2\right)\end{aligned}$$

这就是(6.3)式。

2. 导出(6.11a)、(6.11b)式。

解： 由(5.14)式和(5.15)式，有

$$\phi^+(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}\,a(\boldsymbol{k})\,e^{ikx} \tag{1}$$

$$\phi^-(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}\,a^\dagger(\boldsymbol{k})\,e^{-ikx} \tag{2}$$

根据(1)、(2)、(3.5)式，我们可得

$$\Big[\phi^+(x),\,\phi^+(x')\Big]=\frac{1}{V}\sum_{\substack{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}\\ k_0'=\omega_{\boldsymbol{k}'}}}\frac{1}{2\sqrt{k_0\,k_0'}}\Big[a(\boldsymbol{k}),\,a(\boldsymbol{k}')\Big]\,e^{i(kx+k'x')}=0 \tag{3}$$

同理可得

$$\Big[\phi^-(x),\,\phi^-(x')\Big]=\frac{1}{V}\sum_{\substack{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}\\ k_0'=\omega_{\boldsymbol{k}'}}}\frac{1}{2\sqrt{k_0\,k_0'}}\Big[a^\dagger(\boldsymbol{k}),\,a^\dagger(\boldsymbol{k}')\Big]\,e^{-i(kx+k'x')}=0 \tag{4}$$

由(3)和(4)式，有

$$\Big[\phi^+(x),\,\phi^+(x')\Big]=\Big[\phi^-(x),\,\phi^-(x')\Big]=0$$

这就是(6.11a)式。

$$\begin{aligned}\Big[\phi^+(x),\,\phi^-(x')\Big]&=\frac{1}{V}\sum_{\substack{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}\\ k_0'=\omega_{\boldsymbol{k}'}}}\frac{1}{2\sqrt{k_0\,k_0'}}\,e^{i(kx-k'x')}\Big[a(\boldsymbol{k}),\,a^\dagger(\boldsymbol{k}')\Big]\\&=\frac{1}{V}\sum_{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}}\sum_{k_0'=\omega_{\boldsymbol{k}'}}\frac{1}{2\sqrt{k_0k_0'}}\,e^{i(kx-k'x')}\,\delta\big(\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}'\big)\\&=\frac{1}{V}\sum_{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{2\sqrt{k_0\,k_0'}}\,e^{ik(x-x')}\\&=\frac{1}{2(2\pi)^3}\int_{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}}\mathrm{d}^3k\,\frac{1}{k_0}\,e^{ik(x-x')}\\&=i\cdot\frac{-i}{2(2\pi)^3}\int_{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}}\mathrm{d}^3k\,\frac{1}{k_0}\,e^{ik(x-x')}\\&=i\,\Delta^+(x-x')\end{aligned} \tag{5}$$

同理可得

$$\begin{aligned}\Big[\phi^-(x),\,\phi^+(x')\Big]&=\frac{1}{V}\sum_{\substack{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}\\ k_0'=\omega_{\boldsymbol{k}'}}}\frac{1}{2\sqrt{k_0\,k_0'}}\,e^{i(k'x'-kx)}\Big[a^\dagger(\boldsymbol{k}),\,a(\boldsymbol{k}')\Big]\\&=\frac{1}{V}\sum_{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}}\sum_{k_0'=\omega_{\boldsymbol{k}'}}\frac{1}{2\sqrt{k_0\,k_0'}}\,e^{-i(kx-k'x')}\Big\{-\delta\big(\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}'\big)\Big\}\\&=\frac{-1}{V}\sum_{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{2k_0}\,e^{-ik(x-x')}\\&=i\cdot\frac{i}{2(2\pi)^3}\int_{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}}\mathrm{d}^3k\,\frac{1}{k_0}\,e^{-ik(x-x')}\end{aligned}$$

$$= i\,\Delta^{-}(x-x') \tag{6}$$

由(5)式和(6)式得

$$\left[\phi^{\pm}(x),\,\phi^{\mp}(x')\right] = i\,\Delta^{\pm}(x-x')$$

这就是(6.11*b*)式。

3. 证明 $\Delta(x)$ 是 Klein–Gordon 方程的解。

证： 由(6.1)式，我们有

$$\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_C \mathrm{d}^4k\,\frac{e^{ikx}}{k^2+m^2} \tag{1}$$

把(1)式代入 Klein–Gordon 方程，即得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi)^4}\int_C \mathrm{d}^4k\,\frac{1}{k^2+m^2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\mu} - m^2\right\}e^{ikx}\\
=\;&\frac{1}{(2\pi)^4}\int_C \mathrm{d}^4k\,\frac{1}{k^2+m^2}\left\{-\left(k_1^2+k_2^2+k_3^2-k_0^2\right)-m^2\right\}e^{ikx}\\
=\;&-\frac{1}{(2\pi)^4}\int_C \mathrm{d}^4k\,e^{ikx}\\
=\;&-\frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^3k\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\int_C \mathrm{d}k_0\,e^{-ik_0x_0}\\
=\;&0
\end{aligned}$$

上面的最后一步是根据柯西定理得出的，因为 $e^{-ik_0x_0}$ 是复平面的解析函数。

第七章　荷电介子

迄今为止，我们研究的都是实场，现在，我们来考虑复场 $\phi(x)$。我们将看到，和这样一个场相联系的粒子能够被解释成是荷电粒子。

首先，我们的讨论将是经典的。因为一个复场 $\phi(x)$ 可以被分解成两个实场 $\phi_1(x)$ 和 $\phi_2(x)$：

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big\{ \phi_1(x) - i\,\phi_2(x) \Big\} \tag{7.1}$$

第二章的方法可以立刻运用到上述情况。然而，代替把拉格朗日量密度 $\mathscr{L}$ 考虑为 $\phi_\jmath$ 和 $\dfrac{\partial}{\partial x_\nu}\phi_\jmath$ （$\jmath = 1,\ 2$）的函数，我们把拉格朗日量密度 $\mathscr{L}$ 写为下式，则可以更清楚地显示出复场的物理意义：

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}\big(\phi,\, \phi^*,\, \phi_{,\nu},\, \phi^*_{,\nu}\big) \tag{7.2}$$

式中，$\phi_{,\nu} \equiv \dfrac{\partial \phi}{\partial x_\nu}$ 等 [1]。把 $\delta\phi$ 和 $\delta\phi^*$ 而不是 $\delta\phi_1$ 和 $\delta\phi_2$ 作为独立变分，于是可得到代替(2.8)式的场方程：

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial_\nu \phi}\right) = 0 \tag{7.3a}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi^*} - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial_\nu \phi^*}\right) = 0 \tag{7.3b}$$

为了使场量 ϕ_1 和 ϕ_2 始终保持为实数，拉格朗日量密度 $\mathscr{L}$ 必须为实数，因此，(7.3a)、(7.3b)式的两个场方程是相互复共轭的。现在，我们将对拉格朗日量施加进一步的限制，即它在场的下列变换中必须保持不变：

$$\phi \longrightarrow \phi\, e^{i\alpha} \tag{7.4a}$$

$$\phi^* \longrightarrow \phi^*\, e^{-i\alpha} \tag{7.4b}$$

式中，α 是一个任意实常数。这个变换被称为第一种规范变换。$\mathscr{L}$ 在这些规范变换下的不变性使我们能够把 ϕ 和 ϕ^* 解释为能产生满足连续性方程的电荷和电流密度，在量子化理论中，ϕ 和 ϕ^* 就代表荷电粒子。

作为一个特殊例子，考虑拉格朗日量密度

$$\mathscr{L} = -\Big\{ \partial_\nu \phi\, \partial_\nu \phi^* + m^2 \phi\, \phi^* \Big\} \tag{7.5}$$

这是实场的拉格朗日量密度的自然推广。场方程(7.3a)、(7.3b)式现在变成：

$$\big(\Box^2 - m^2\big)\,\phi = 0 \tag{7.6a}$$

$$\big(\Box^2 - m^2\big)\,\phi^* = 0 \tag{7.6b}$$

既然 ϕ_1 和 ϕ_2 分别满足 Klein–Gordon 方程，所以(7.6a)和(7.6b)式的导出是必然的。同时，我们还能把拉格朗日量密度(7.5)式写成为：

$$\mathscr{L} = \sum_{\jmath=1}^{2} \left\{ -\frac{1}{2}\,\frac{\partial \phi_\jmath}{\partial x_\nu}\,\frac{\partial \phi_\jmath}{\partial x_\nu} + m^2 \phi_\jmath^2 \right\} \tag{7.7}$$

[1] 复刻者注：后续我们将采用通用的记法 $\partial_\mu \phi$ 来表示场量 ϕ 对时空的微分，以替代原书中相应的 $\phi_{,\nu}$ 符号。

(7.5)式所给出的拉格朗日量密度，仅含有 ϕ 和 ϕ^* 的乘积以及它们的导数的乘积，所以在 (7.4a)、(7.4b) 所给出的变换下，显然保持不变。

(7.7)式的导出如下：

由(7.5)式可得

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x_\nu} - i\,\frac{\partial\phi_2}{\partial x_\nu}\right)\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x_\nu} + i\,\frac{\partial\phi_2}{\partial x_\nu}\right) - \frac{m^2}{2}\left(\phi_1 - i\,\phi_2\right)\left(\phi_1 + i\,\phi_2\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial\phi_1}{\partial x_\nu} + \frac{\partial\phi_2}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial\phi_2}{\partial x_\nu}\right) - \frac{m^2}{2}\left(\phi_1\phi_1 + \phi_2\phi_2\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial\phi_1}{\partial x_\nu} + m^2\phi_1\phi_1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial\phi_2}{\partial x_\nu} + m^2\phi_2\phi_2\right)\\ &= \sum_{\jmath=1}^{2} -\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial\phi_\jmath}{\partial x_\nu}\,\frac{\partial\phi_\jmath}{\partial x_\nu} + m^2\phi_\jmath^2\right\}\end{aligned}$$

这就是(7.7)式

定义四维矢量 $J_\mu(x)$ 为

$$eJ_\mu(x) = -ie\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\,\phi - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi^*}\,\phi^*\right\} \tag{7.8}$$

式中，e 是一个未定常数。根据运动方程(7.3a)、(7.3b)式和拉格朗日量密度 $\mathscr{L}$ 的规范不变性，我们可以推出：

$$\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \tag{7.9}$$

这就是通常的连续性方程，由此我们可以把 $e\boldsymbol{J}(x)$ 解释为电流密度矢量，把第 4 个分量 $e\rho(x) = \dfrac{eJ_4}{i}$ 解释为电荷密度。在习题 (2.5) 中，我们证明了像(7.9)式那样的连续性方程就对应着一个守恒定律。对于实场 ϕ 而言，电流也同样为零。因为根据(7.8)式，这时 $J_\mu(x) = 0$。

对于拉格朗日量密度(7.5)，我们有

$$eJ_\mu(x) = ie\left\{\partial_\mu\phi^*\,\phi - \partial_\mu\phi\,\phi^*\right\} \tag{7.10}$$

由场方程(7.6a)、(7.6b)式，我们可以直接证实连续性方程(7.9)式。

由(7.10)式，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_\mu(x)}{\partial x_\mu} &= i\left\{\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\,\frac{\partial\phi^*}{\partial x_\mu} + \phi\,\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\phi^*}{\partial x_\mu}\right) - \phi^*\,\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\right) - \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\,\frac{\partial\phi^*}{\partial x_\mu}\right\}\\ &= i\left\{\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\,\frac{\partial\phi^*}{\partial x_\mu} + m^2\phi\,\phi^* - m^2\phi^*\phi - \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\,\frac{\partial\phi^*}{\partial x_\mu}\right\} = 0\end{aligned}$$

这就证明了(7.10)式的四维矢量 $J_\mu(x)$ 满足连续性方程(7.9)式。在推导中用到了(7.6a)、(7.6b)式。

为了更一般地证明(7.9)式，考虑一个无穷小规范变换（即 α 很小，所以 $e^{i\alpha} \approx 1 + i\alpha$ 等）：

$$\phi \longrightarrow \phi\left(1 + i\alpha\right) \tag{7.11a}$$

$$\phi^* \longrightarrow \phi^*\left(1 - i\alpha\right) \tag{7.11b}$$

一个简单的计算表明，(7.11a)、(7.11b)式的变换将导致拉格朗日量密度 (7.2)的变化 $\delta\mathscr{L}$：

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{L} &= \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\,\delta\phi + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\,\delta\partial_\mu\phi + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^*}\,\delta\phi^* + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi^*}\,\delta\partial_\mu\phi^*\\ &= i\alpha\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\,\phi + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\,\partial_\mu\phi\right\} - i\alpha\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^*}\,\phi^* + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi^*}\,\partial_\mu\phi^*\right\}\end{aligned} \tag{7.12}$$

根据(7.8)式计算散度(7.9)式，利用场方程(7.3a)式、(7.3b)式和(7.12)式，我们可得

$$\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} = -\frac{1}{\alpha}\,\delta\mathscr{L} = 0 \tag{7.13}$$

式中，最后一步的导出是根据拉格朗日量密度 $\mathscr{L}$ 在第一型规范变换下的不变性得出的。这样，我们就证明了连续性方程(7.9)式。(另一种推导参见习题 (7.1))。

(7.13)式的推导如下：

根据(7.8)式，我们有：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} &= -i\left\{\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi} + \phi\cdot\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\right) - \frac{\partial\phi^*}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi^*} - \phi^*\cdot\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi^*}\right)\right\} \\
&= -i\left\{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi} + \phi\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\right) - \left(\frac{\partial\phi^*}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi^*} + \phi^*\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^*}\right)\right\} \\
&= -i\,\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\,\phi - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi^*}\,\phi^*\right\} = -\frac{1}{\alpha}\,\delta\mathscr{L} = 0
\end{aligned}$$

这就是(7.13)式。证明中用到了(7.3a)式、(7.3b)式和(7.12)式。

对复场 ϕ 和 ϕ^*（它们现在是非厄密算符）来说，到量子化理论的过渡或者通过第三章的方法直接实现，或者通过使用(7.1)式和量子化场 ϕ_1 和 ϕ_2 的性质来实现。我们将采用后一种方法。由于所有这些考虑都是实场 ϕ 相应结果的推广，我们将简略地列举对我们特别有意义的若干要点，并且将立刻使用相互作用绘景 I. P. （因为考虑的是自由场，所以也就是海森堡绘景 H. P. ）。

现在，我们再次仅限于考虑满足 Klein–Gordon 方程的场，也就是从拉格朗日量密度(7.5)式导出的场。类似于(5.14)式，我们把每种场 $\phi_\jmath(x)$ 展开为：

$$\phi_\jmath(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}\left\{a_\jmath(\boldsymbol{k})\,e^{ikx} + a_\jmath^\dagger(\boldsymbol{k})\,e^{-ikx}\right\} \tag{7.14}$$

每种场 $\phi_\jmath(\boldsymbol{k})$ ($\jmath = 1$，2) 的产生和吸收算符 $a_\jmath^\dagger(\boldsymbol{k})$ 和 $a_\jmath(\boldsymbol{k})$ 满足和 (3.5)式类似的对易关系：

$$\left[a_\imath(\boldsymbol{k}),\, a_\jmath^\dagger(\boldsymbol{k}')\right] = \delta_{\imath\jmath}\,\delta(\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}') \tag{7.15}$$

所有其他对易子通通为 0.

定义算符

$$a(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{a_1(\boldsymbol{k}) - i\,a_2(\boldsymbol{k})\right\} \tag{7.16a}$$

$$b^\dagger(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{a_1^\dagger(\boldsymbol{k}) - i\,a_2^\dagger(\boldsymbol{k})\right\} \tag{7.16b}$$

根据(7.14)和

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 - i\,\phi_2\right) \tag{7.17a}$$

$$\phi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 + i\,\phi_2\right) \tag{7.17b}$$

我们可以推出

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}\left\{a(\boldsymbol{k})\,e^{ikx} + b^\dagger(\boldsymbol{k})\,e^{-ikx}\right\} \tag{7.18a}$$

$$\phi^\dagger(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}\left\{a^\dagger(\boldsymbol{k})\,e^{-ikx} + b(\boldsymbol{k})\,e^{ikx}\right\} \tag{7.18b}$$

(7.18a)和(7.18b)式的推导如下：

由(7.17a)、(7.17b)和(7.14)式，我们有

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 - i\,\phi_2\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}\left\{a_1(\boldsymbol{k})\,e^{ikx} + a_1^\dagger(\boldsymbol{k})\,e^{-ikx}\right\} - \frac{i}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}\left\{a_2(\boldsymbol{k})\,e^{ikx} + a_2^\dagger(\boldsymbol{k})\,e^{-ikx}\right\}\\ &= \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_1(\boldsymbol{k}) - i\,a_2(\boldsymbol{k})\right)e^{ikx} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_1^\dagger(\boldsymbol{k}) - i\,a_2^\dagger(\boldsymbol{k})\right)e^{-ikx}\right\}\\ &= \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}}}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}\left\{a(\boldsymbol{k})\,e^{ikx} + b^\dagger(\boldsymbol{k})\,e^{-ikx}\right\}\end{aligned}$$

这就是(7.18a)式，同理可得(7.18b)式。

根据(7.14)—(7.18b)式，容易得出 ϕ_1 和 ϕ_2；ϕ 和 $\phi^\dagger$；$a(\boldsymbol{k})$，$b(\boldsymbol{k})$ 和 $a^\dagger(\boldsymbol{k})$，$b^\dagger(\boldsymbol{k})$ 的对易关系。例如，根据(7.15)—(7.16b)式，我们有

$$\left[a(\boldsymbol{k}),\, a^\dagger(\boldsymbol{k}')\right] = \left[b(\boldsymbol{k}),\, b^\dagger(\boldsymbol{k}')\right] = \delta(\boldsymbol{k},\, \boldsymbol{k}') \tag{7.19}$$

$a(\boldsymbol{k})$，$b(\boldsymbol{k})$ 和 $a^\dagger(\boldsymbol{k})$，$b^\dagger(\boldsymbol{k})$ 的所有其他对易关系都为零。

(7.19)式的推导如下：

$$\begin{aligned}\left[a(\boldsymbol{k}),\, a^\dagger(\boldsymbol{k}')\right] &= \frac{1}{2}\left\{a_1(\boldsymbol{k}) - i\,a_2(\boldsymbol{k})\right\}\left\{a_1^\dagger(\boldsymbol{k}') + i\,a_2^\dagger(\boldsymbol{k}')\right\} - \frac{1}{2}\left\{a_1^\dagger(\boldsymbol{k}') + i\,a_2^\dagger(\boldsymbol{k}')\right\}\left\{a_1(\boldsymbol{k}) - i\,a_2(\boldsymbol{k})\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left\{\delta(\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}') - i\left(a_2(\boldsymbol{k})\,a_1^\dagger(\boldsymbol{k}') - a_1^\dagger(\boldsymbol{k}')\,a_2(\boldsymbol{k})\right) + i\left(a_1(\boldsymbol{k})\,a_2^\dagger(\boldsymbol{k}') - a_2^\dagger(\boldsymbol{k}')\,a_1(\boldsymbol{k})\right) + \delta(\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}')\right\}\\ &= \delta(\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}')\end{aligned}$$

式中，我们用到了(7.15)式。同理可得 $\left[b(\boldsymbol{k}),\, b^\dagger(\boldsymbol{k}')\right] = \delta(\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}')$。

下面，我们来考虑(7.16a)、(7.16b)式定义的算符 $a(\boldsymbol{k})$，$b^\dagger(\boldsymbol{k})$ 和它们的厄密共轭算符 $a^\dagger(\boldsymbol{k})$，$b(\boldsymbol{k})$ 的解释。算符 a_j 和 $a_j^\dagger$ 是和实场 ϕ_j 有关的介子吸收算符和介子产生算符。但是我们将看到，ϕ_j 以及 a_j 和 $a_j^\dagger$ 的特定线性组合(7.16a)—(7.17b)式包含着一个简单的物理解释。

$a(\boldsymbol{k})$ 和 $a^\dagger(\boldsymbol{k})$，$b(\boldsymbol{k})$ 和 $b^\dagger(\boldsymbol{k})$ 满足同样的对易关系 (7.19)式，就像实场的吸收算符和产生算符那样 ((7.19)式)；并且，这四个算符之间的对易子，除(7.19)式外，通通为零。由此，我们可以把 $a(\boldsymbol{k})$ 和 $a^\dagger(\boldsymbol{k})$，$b(\boldsymbol{k})$ 和 $b^\dagger(\boldsymbol{k})$ 解释成动量为 $\boldsymbol{k}$ 的两种不同类型的介子的吸收算符和产生算符。我们马上就会看到，这两种介子仅仅在电荷上不同。特别是根据(7.19)式，我们可以得出

$$N^+(\boldsymbol{k}) = a^\dagger(\boldsymbol{k})\,a(\boldsymbol{k}) \tag{7.20a}$$

$$N^-(\boldsymbol{k}) = b^\dagger(\boldsymbol{k})\,b(\boldsymbol{k}) \tag{7.20b}$$

$N^+(\boldsymbol{k})$ 和 $N^-(\boldsymbol{k})$ 就是这两种介子的占有数算符，其本征值为 0，1，2，$\cdots$.

如果我们计算系统的总能量，就能证实上面的解释是正确的。根据拉格朗日量密度(7.7)，可以导出类似于(3.6)式的哈密顿量。略掉零点能，我们得到

$$H = \sum_{\boldsymbol{k}}\omega_{\boldsymbol{k}}\sum_{j=1}^{2}a_j^\dagger(\boldsymbol{k})\,a_j(\boldsymbol{k}) = \sum_{\boldsymbol{k}}\omega_{\boldsymbol{k}}\left\{N^+(\boldsymbol{k}) + N^-(\boldsymbol{k})\right\} \tag{7.21}$$

式中，我们用到了(7.16a)、(7.16b)和(7.20a)、(7.20b)式。

(7.21)式的推导如下：

根据(2.16)式，我们有

$$H=\int \mathscr{H}(x)\,\mathrm{d}^3x \tag{1}$$

根据(7.7)式、(7.14)式和(2.17)式，可得哈密顿量密度 $\mathscr{H}(x)$ 为：

$$\mathscr{H}(x)=\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{2}\left\{\pi_j^2(\boldsymbol{x})+\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\phi_j}{\partial x_i}\right)^2+m^2\phi_j^2\right\} \tag{2}$$

由(7.14)式，可得 $\phi_j(\boldsymbol{x})$ 为

$$\phi_j(\boldsymbol{x})=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{k}}}}\left\{a_j(\boldsymbol{k})\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}+a_j^\dagger(\boldsymbol{k})\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right\} \tag{3}$$

由(2.13)式，可得 $\pi_j(\boldsymbol{x})$ 为

$$\pi_j(\boldsymbol{x})=\frac{i}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{2}}\left\{-a_j(\boldsymbol{k})\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}+a_j^\dagger(\boldsymbol{k})\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right\} \tag{4}$$

把(3)和(4)代入(2)式，即得

$$\begin{aligned}\mathscr{H}(\boldsymbol{x})=&\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{4V}\sum_{\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}'}\left(-\sqrt{\omega_{\boldsymbol{k}}\,\omega_{\boldsymbol{k}'}}-\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}'}{\sqrt{\omega_{\boldsymbol{k}}\,\omega_{\boldsymbol{k}'}}}\right)\\&\times\left\{a_j(\boldsymbol{k})\,a_j(\boldsymbol{k}')\,e^{i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}}+a_j^\dagger(\boldsymbol{k})\,a_j^\dagger(\boldsymbol{k}')\,e^{-i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}}-a_j^\dagger(\boldsymbol{k})\,a_j(\boldsymbol{k}')\,e^{-i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}}-a_j(\boldsymbol{k})\,a_j^\dagger(\boldsymbol{k}')\,e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}}\right\}\\&+\sum_{j=1}^{2}\frac{m^2}{4V}\sum_{\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}'}\frac{1}{\sqrt{\omega_{\boldsymbol{k}}\,\omega_{\boldsymbol{k}'}}}\\&\times\left\{a_j(\boldsymbol{k})\,a_j(\boldsymbol{k}')\,e^{i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}}+a_j^\dagger(\boldsymbol{k})\,a_j^\dagger(\boldsymbol{k}')\,e^{-i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}}+a_j^\dagger(\boldsymbol{k})\,a_j(\boldsymbol{k}')\,e^{-i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}}+a_j(\boldsymbol{k})\,a_j^\dagger(\boldsymbol{k}')\,e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}}\right\}\end{aligned} \tag{5}$$

把(5)式代入(1)式，即得

$$\begin{aligned}H=&\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{H}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}^3x\\=&\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{4V}\sum_{\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}'}\left(\frac{-\omega_{\boldsymbol{k}}\,\omega_{\boldsymbol{k}'}-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}'}{\sqrt{\omega_{\boldsymbol{k}}\,\omega_{\boldsymbol{k}'}}}\right)\\&\times\left\{\left[a_j(\boldsymbol{k})\,a_j(\boldsymbol{k}')+a_j^\dagger(\boldsymbol{k})\,a_j^\dagger(\boldsymbol{k}')\right](2\pi)^3\delta\left(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'\right)-\left[a_j^\dagger(\boldsymbol{k})\,a_j(\boldsymbol{k}')+a_j(\boldsymbol{k})\,a_j^\dagger(\boldsymbol{k}')\right](2\pi)^3\delta\left(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'\right)\right\}\\&+\sum_{j=1}^{2}\frac{m^2}{4V}\sum_{\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}'}\frac{1}{\sqrt{\omega_{\boldsymbol{k}}\,\omega_{\boldsymbol{k}'}}}\\&\times\left\{\left[a_j(\boldsymbol{k})\,a_j(\boldsymbol{k}')+a_j^\dagger(\boldsymbol{k})\,a_j^\dagger(\boldsymbol{k}')\right](2\pi)^3\delta\left(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'\right)+\left[a_j^\dagger(\boldsymbol{k})\,a_j(\boldsymbol{k}')+a_j(\boldsymbol{k})\,a_j^\dagger(\boldsymbol{k}')\right](2\pi)^3\delta\left(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'\right)\right\}\\=&\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{4}\sum_{\boldsymbol{k}}\int\mathrm{d}^3k'\left(\frac{-\omega_{\boldsymbol{k}}\,\omega_{\boldsymbol{k}'}-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}'}{\sqrt{\omega_{\boldsymbol{k}}\,\omega_{\boldsymbol{k}'}}}\right)\\&\times\left\{\left[a_j(\boldsymbol{k})\,a_j(\boldsymbol{k}')+a_j^\dagger(\boldsymbol{k})\,a_j^\dagger(\boldsymbol{k}')\right]\delta\left(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'\right)-\left[a_j^\dagger(\boldsymbol{k})\,a_j(\boldsymbol{k}')+a_j(\boldsymbol{k})\,a_j^\dagger(\boldsymbol{k}')\right]\delta\left(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'\right)\right\}\\&+\sum_{j=1}^{2}\frac{m^2}{4}\sum_{\boldsymbol{k}}\int\mathrm{d}^3k'\,\frac{1}{\sqrt{\omega_{\boldsymbol{k}}\,\omega_{\boldsymbol{k}'}}}\\&\times\left\{\left[a_j(\boldsymbol{k})\,a_j(\boldsymbol{k}')+a_j^\dagger(\boldsymbol{k})\,a_j^\dagger(\boldsymbol{k}')\right]\delta\left(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'\right)+\left[a_j^\dagger(\boldsymbol{k})\,a_j(\boldsymbol{k}')+a_j(\boldsymbol{k})\,a_j^\dagger(\boldsymbol{k}')\right]\delta\left(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'\right)\right\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{4} \sum_{\boldsymbol{k}} \left\{ \frac{-\omega_{\boldsymbol{k}}^2 + \boldsymbol{k}^2}{\omega_{\boldsymbol{k}}} \left[a_j(\boldsymbol{k})\, a_j(-\boldsymbol{k}) + a_j^\dagger(\boldsymbol{k})\, a_j^\dagger(-\boldsymbol{k}) \right] - \frac{-\omega_{\boldsymbol{k}}^2 - \boldsymbol{k}^2}{\omega_{\boldsymbol{k}}} \left[a_j^\dagger(\boldsymbol{k})\, a_j(\boldsymbol{k}) + a_j(\boldsymbol{k})\, a_j^\dagger(\boldsymbol{k}) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{m^2}{\omega_{\boldsymbol{k}}} \left[\left(a_j(\boldsymbol{k})\, a_j(-\boldsymbol{k}) + a_j^\dagger(\boldsymbol{k})\, a_j^\dagger(-\boldsymbol{k}) \right) + \left(a_j^\dagger(\boldsymbol{k})\, a_j(\boldsymbol{k}) + a_j(\boldsymbol{k})\, a_j^\dagger(\boldsymbol{k}) \right) \right] \right\} \\
&= \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{4} \sum_{\boldsymbol{k}} \left\{ \frac{-\omega_{\boldsymbol{k}}^2 + \boldsymbol{k}^2 + m^2}{\omega_{\boldsymbol{k}}} \left[a_j(\boldsymbol{k})\, a_j(-\boldsymbol{k}) + a_j^\dagger(\boldsymbol{k})\, a_j^\dagger(-\boldsymbol{k}) \right] + \frac{\omega_{\boldsymbol{k}}^2 + \boldsymbol{k}^2 + m^2}{\omega_{\boldsymbol{k}}} \left[a_j^\dagger(\boldsymbol{k})\, a_j(\boldsymbol{k}) + a_j(\boldsymbol{k})\, a_j^\dagger(\boldsymbol{k}) \right] \right\} \\
&= \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{4} \sum_{\boldsymbol{k}} 2\omega_{\boldsymbol{k}} \left\{ a_j^\dagger(\boldsymbol{k})\, a_j(\boldsymbol{k}) + a_j^\dagger(\boldsymbol{k})\, a_j(\boldsymbol{k}) + 1 \right\} \qquad \text{（略掉零点能）} \\
&= \sum_{\boldsymbol{k}} \omega_{\boldsymbol{k}} \sum_{j=1}^{2} a_j^\dagger(\boldsymbol{k})\, a_j(\boldsymbol{k}) = \sum_{\boldsymbol{k}} \omega_{\boldsymbol{k}} \left\{ N^+(\boldsymbol{k}) + N^-(\boldsymbol{k}) \right\}
\end{aligned}
$$

这就是(7.21)式。

下面考虑算符

$$
Q = \int \mathrm{d}^3x\, e\rho(x) = \int \mathrm{d}^3x\, \frac{eJ_4(x)}{i} \tag{7.22}
$$

Q 给出系统在时刻 $x_0 = t$ 时的总电荷，三维积分遍及全部 $\boldsymbol{x}$ 空间。由(7.10)式和(7.18a)—(7.19)式，经过简短的计算后即可得出

$$
Q = e \sum_{\boldsymbol{k}} \left\{ N^+(\boldsymbol{k}) - N^-(\boldsymbol{k}) \right\} \tag{7.23}
$$

这样，如我们所预期的，总电荷是一个运动常数。根据(7.23)式，可知算符 $a(\boldsymbol{k})$、$a^\dagger(\boldsymbol{k})$ 和 $N^+(\boldsymbol{k})$ 是动量为 $\boldsymbol{k}$、电荷为 $+e$ 的介子的吸收、产生和占有数算符；而算符 $b(\boldsymbol{k})$、$b^\dagger(\boldsymbol{k})$ 和 $N^-(\boldsymbol{k})$ 是动量为 $\boldsymbol{k}$、电荷为 $-e$ 的介子的吸收、产生和占有数算符。取 $e > 0$，则 $a^\dagger(\boldsymbol{k})$ 等算符和正介子相关，而 $b^\dagger(\boldsymbol{k})$ 等算符和负介子相关。从(7.23)式，我们可以看到，量子场论自然地导致电荷的量子化，系统的电荷仅仅是基本单位电荷 e 的倍数。根据(7.18a)、(7.18b)式，算符 ϕ 吸收一个正介子或产生一个负介子，从而使系统的电荷增加 e。

这里所阐述的理论对正介子和负介子来说是完全对称的。变换 $e \to -e$ 的唯一效果就是使正、负介子相互交换。这个算符被称为电荷共轭算符。由此可知上面的理论相对于电荷共轭而言是完全对称的，我们可以用不同的方式来说明这一点。假设我们称正介子为粒子，称负介子为反粒子（同样，我们可以称负介子为粒子，而称正介子为反粒子），则电荷共轭就是交换粒子和反粒子的运算。根据场量(7.18a)、(7.18b)式，电荷共轭使场 ϕ 和它的厄密共轭 $\phi^\dagger$ 相互交换。对于在前面几章中所讨论过的厄密场 ϕ 而言，$\phi = \phi^\dagger$，我们现在可以看到，ϕ 和电中性介子相对应；因此我们可以认为，中性介子的反粒子就是它自身。粒子成对出现（如粒子和反粒子）似乎是相对论性量子场论的基本结果。所有实验证据似乎都证实了这个结论。

最后，我们来更一般地证明场的正频部分和负频部分是分别和吸收算符及产生算符相关的。这也是我们在(5.14)—(5.15)式和 (7.18a)、(7.18b)式中已得到过的结果。这个关系可以仅仅根据海森堡绘景中算符的运动方程(5.10)式得出。设 Φ_1 和 Φ_2 是系统哈密顿量 H 具有本征值 E_1 和 E_2 的本征态，如果我们把(5.10)式运用到出现在(7.18a)式所给出的场量 ϕ 中的算符 $a(\boldsymbol{k})\, e^{ikx}$ 上，并取(5.10)式在态 Φ_1 和 Φ_2 间的矩阵元，则有

$$
\left(\omega_{\boldsymbol{k}} + E_2 - E_1 \right) \left(\Phi_2,\, a(\boldsymbol{k})\, e^{ikx}\, \Phi_1 \right) = 0 \tag{7.24}
$$

(7.24)式的推导如下：

由(5.10)式可得

$$
i \frac{\partial}{\partial t} \left(a(\boldsymbol{k})\, e^{ikx} \right) = \left[a(\boldsymbol{k})\, e^{ikx},\, H_0 \right] \tag{1}
$$

由(1)式可得

$$\omega_{\boldsymbol{k}}\, a(\boldsymbol{k})\, e^{ikx} = a(\boldsymbol{k})\, e^{ikx}\, H_0 - H_0\, a(\boldsymbol{k})\, e^{ikx} \tag{2}$$

在(2)式两边右乘 Φ_1，左乘 Φ_2^*，然后对整个空间积分，即得

$$\int \Phi_2^*\, \omega_{\boldsymbol{k}}\, a(\boldsymbol{k})\, e^{ikx}\, \Phi_1\, \mathrm{d}\tau = \int \Phi_2^*\, a(\boldsymbol{k})\, e^{ikx}\, H_0\, \Phi_1\, \mathrm{d}\tau - \int \Phi_2^*\, H_0\, a(\boldsymbol{k})\, e^{ikx}\, \Phi_1\, \mathrm{d}\tau \tag{3}$$

由(3)式得

$$\omega_{\boldsymbol{k}} \left(\Phi_2,\, a(\boldsymbol{k})\, e^{ikx}\, \Phi_1\right) = E_1 \left(\Phi_2,\, a(\boldsymbol{k})\, e^{ikx}\, \Phi_1\right) - E_2 \left(\Phi_2,\, a(\boldsymbol{k})\, e^{ikx}\, \Phi_1\right) \tag{4}$$

由(4)式得

$$\left(\omega_{\boldsymbol{k}} + E_2 - E_1\right)\left(\Phi_2,\, a(\boldsymbol{k})\, e^{ikx}\, \Phi_1\right) = 0$$

这就是(4)式。

从(7.24)式可知，只有当

$$\omega_{\boldsymbol{k}} + E_2 - E_1 = 0 \tag{7.25}$$

时，(7.24)式中的矩阵元才不等于 0，这就是说算符 $a(\boldsymbol{k})\, e^{ikx}$ 这时才影响从 Φ_1 态到 Φ_2 态的跃迁。由于 $\omega_{\boldsymbol{k}} > 0$，这就意味着 $E_1 > E_2$：在 Φ_1 到 Φ_2 的跃迁中，系统的能量减少了 $\omega_{\boldsymbol{k}}$，这就是说，$a(\boldsymbol{k})\, e^{ikx}$ 是吸收算符。相应地，具有负频部分的算符是产生算符，这就是说，它们使系统的能力增加，这在机制的明显解释中必定相当于发射粒子。

习题与解答

1. 设拉格朗日量密度 $\mathscr{L}\left(\phi^\alpha,\, \partial_\mu \phi^\alpha\right)$ 在变换

$$\phi^\alpha \longrightarrow \phi^\alpha + \delta\phi^\alpha$$

下保持不变，证明由此得到的作用量积分(2.8)式的不变性将导致守恒方程

$$\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \tag{1}$$

式中

$$J_\mu = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \phi^\alpha}\, \delta\phi^\alpha \tag{2}$$

这里，ϕ^α 是场方程的解。

证： 由(2.3)式，我们有

$$\delta I(\Omega) = \int_\Omega \mathrm{d}^4 x\, \delta\mathscr{L}\left(\phi^\alpha,\, \partial_\mu \phi^\alpha\right) \tag{3}$$

在变换 $\phi^\alpha \longrightarrow \phi^\alpha + \delta\phi^\alpha$ 下，$\delta\mathscr{L} = 0$，故有

$$\begin{aligned}
\delta I(\Omega) &= \int_\Omega \mathrm{d}^4 x \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi^\alpha}\, \delta\phi^\alpha + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \phi^\alpha}\, \delta\partial_\mu \phi^\alpha \right\} \\
&= \int_\Omega \mathrm{d}^4 x \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi^\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \phi^\alpha} \right) \right\} \delta\phi^\alpha + \int_\Omega \mathrm{d}^4 x\, \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \phi^\alpha}\, \delta\phi^\alpha \right\} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4}$$

利用场方程(2.8)式，可知(4)式最后一步中第一项积分为零。于是有

$$\delta I(\Omega)=\int_{\Omega}\mathrm{d}^4x\,\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi^\alpha}\,\delta\phi^\alpha\right\}=0 \tag{5}$$

四维体元 Ω 是任意的，于是有

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi^\alpha}\,\delta\phi^\alpha\right\}=\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu}=0 \tag{6}$$

这就是我们所要求的守恒方程。

2. 设(7.2)式所给出的拉格朗日量密度在规范变换(7.11a)、(7.11b)式下是不变的，证明由此得到的作用量积分(2.3)式的不变性将导致四维电荷－电流矢量的连续性方程。

证：当拉格朗日量密度为 $\mathscr{L}=\mathscr{L}\left(\phi,\,\phi^*,\,\partial_\mu,\,\partial_\mu^*\right)$ 时，场方程为

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial_\mu\phi}\right)=0 \tag{1a}$$

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^*}-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial_\mu\phi^*}\right)=0 \tag{1b}$$

设有第一种规范变换：

$$\phi^\alpha\longrightarrow\phi^\alpha\,e^{i\theta} \tag{2a}$$

$$\phi^{\alpha*}\longrightarrow\phi^{\alpha*}\,e^{-i\theta} \tag{2b}$$

由此可得

$$\delta\phi^\alpha=\phi^\alpha\,e^{i\theta}-\phi^\alpha\approx\phi^\alpha\,(1+i\theta)-\phi^\alpha=i\theta\,\phi^\alpha \tag{3a}$$

$$\phi^{\alpha*}=-i\theta\,\phi^{\alpha*} \tag{3b}$$

$$\delta\partial_\mu\phi^\alpha=\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\delta\phi^\alpha\right)=i\theta\,\frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x_\mu}=i\theta\,\partial_\mu\phi^\alpha \tag{3c}$$

$$\delta\partial_\mu\phi^{\alpha*}=-i\theta\,\partial_\mu\phi^{\alpha*} \tag{3d}$$

在变换(2a)、(2b)下，我们有

$$\delta I(\Omega)=\int_{\Omega}\mathrm{d}^4x\,\delta\mathscr{L}\left(\phi^\alpha,\,\phi^{\alpha*},\,\partial_\mu\phi^\alpha,\,\partial_\mu\phi^{\alpha*}\right)=0 \tag{4}$$

于是可得

$$\begin{aligned}\delta I(\Omega)&=\int_{\Omega}\mathrm{d}^4x\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^\alpha}\,\delta\phi^\alpha+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi^\alpha}\,\delta\partial_\mu\phi^\alpha+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^{\alpha*}}\,\delta\phi^{\alpha*}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi^{\alpha*}}\,\delta\partial_\mu\phi^{\alpha*}\right\}\\&=i\theta\int_{\Omega}\mathrm{d}^4x\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^\alpha}\,\phi^\alpha+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi^\alpha}\,\partial_\mu\phi^\alpha+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^{\alpha*}}\,\phi^{\alpha*}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi^{\alpha*}}\,\partial_\mu\phi^{\alpha*}\right\}\\&=i\theta\int_{\Omega}\mathrm{d}^4x\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^\alpha}-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi^\alpha}\right)\right\}\phi^\alpha+i\theta\int_{\Omega}\mathrm{d}^4x\,\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi^\alpha}\,\phi^\alpha\right)\\&\quad-i\theta\int_{\Omega}\mathrm{d}^4x\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^{\alpha*}}-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi^{\alpha*}}\right)\right\}\phi^{\alpha*}-i\theta\int_{\Omega}\mathrm{d}^4x\,\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi^{\alpha*}}\,\phi^{\alpha*}\right)\\&=i\theta\int_{\Omega}\mathrm{d}^4x\,\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi^\alpha}\,\phi^\alpha-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi^{\alpha*}}\,\phi^{\alpha*}\right\}=0\end{aligned} \tag{5}$$

因四维体元 Ω 是任意的，故由(5)式可得

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi^\alpha}\,\phi^\alpha-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi^{\alpha*}}\,\phi^{\alpha*}\right\}=0 \tag{6}$$

定义

$$j_\mu = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \phi^\alpha}\,\phi^\alpha - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \phi^{\alpha *}}\,\phi^{\alpha *} \tag{7}$$

则由(6)式可得:

$$\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \tag{8}$$

这就是四维电荷 – 电流矢量的连续性方程。

3. 导出(7.23)式，并证明它和哈密顿量(7.21)式对易。

解： 由(7.10)和(7.18a)、(7.18b)式，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i}\,s_4(x) &= \left\{\partial_4\phi^* \cdot \phi - \partial_4\phi \cdot \phi^*\right\} \\
&= \frac{1}{2V}\sum_{\substack{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}} \\ k_0'=\omega_{\boldsymbol{k}'}}} \sqrt{\frac{k_0}{k_0'}}\left\{\left(a^\dagger(\boldsymbol{k})\,a(\boldsymbol{k}') + a(\boldsymbol{k}')\,a^\dagger(\boldsymbol{k})\right)e^{-i(k-k')x} - \left(b(\boldsymbol{k})\,b^\dagger(\boldsymbol{k}') + b^\dagger(\boldsymbol{k}')\,b(\boldsymbol{k})\right)e^{i(k-k')x}\right\} \\
&= \frac{1}{V}\sum_{\substack{k_0=\omega_{\boldsymbol{k}} \\ k_0'=\omega_{\boldsymbol{k}'}}} \sqrt{\frac{k_0}{k_0'}}\left\{\left(a^\dagger(\boldsymbol{k})\,a(\boldsymbol{k}') + \frac{1}{2}\,\delta(\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}')\right)e^{-i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}}\cdot e^{i(\omega_{\boldsymbol{k}}-\omega_{\boldsymbol{k}'})t}\right. \\
&\qquad\qquad \left. - \left(b^\dagger(\boldsymbol{k}')\,b(\boldsymbol{k}) + \frac{1}{2}\,\delta(\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}')\right)e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}}\cdot e^{-i(\omega_{\boldsymbol{k}}-\omega_{\boldsymbol{k}'})t}\right\} \\
&= \frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}'} \sqrt{\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{\omega_{\boldsymbol{k}'}}}\left\{a^\dagger(\boldsymbol{k})\,a(\boldsymbol{k}')\,e^{-i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}}\cdot e^{i(\omega_{\boldsymbol{k}}-\omega_{\boldsymbol{k}'})t} - b^\dagger(\boldsymbol{k}')\,b(\boldsymbol{k})\,e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}}\cdot e^{-i(\omega_{\boldsymbol{k}}-\omega_{\boldsymbol{k}'})t}\right\}
\end{aligned} \tag{1}$$

把(1)式代入(7.22)式，即得

$$\begin{aligned}
Q &= \int \mathrm{d}^3x\, e\rho(x) = \int \mathrm{d}^3x\, e\cdot s_4(x) \\
&= \frac{1}{V}\,(2\pi)^3\, e\sum_{\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}'} \sqrt{\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{\omega_{\boldsymbol{k}'}}}\left\{a^\dagger(\boldsymbol{k})\,a(\boldsymbol{k}')\,e^{i(\omega_{\boldsymbol{k}}-\omega_{\boldsymbol{k}'})t} - b^\dagger(\boldsymbol{k}')\,b(\boldsymbol{k})\,e^{-i(\omega_{\boldsymbol{k}}-\omega_{\boldsymbol{k}'})t}\right\}\delta\left(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'\right) \\
&= e\sum_{\boldsymbol{k}}\int \mathrm{d}^3k' \sqrt{\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{\omega_{\boldsymbol{k}'}}}\left\{a^\dagger(\boldsymbol{k})\,a(\boldsymbol{k}')\,e^{i(\omega_{\boldsymbol{k}}-\omega_{\boldsymbol{k}'})t} - b^\dagger(\boldsymbol{k}')\,b(\boldsymbol{k})\,e^{-i(\omega_{\boldsymbol{k}}-\omega_{\boldsymbol{k}'})t}\right\}\delta\left(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'\right) \\
&= e\sum_{\boldsymbol{k}}\left\{a^\dagger(\boldsymbol{k})\,a(\boldsymbol{k}) - b^\dagger(\boldsymbol{k})\,b(\boldsymbol{k})\right\} = e\sum_{\boldsymbol{k}}\left\{N^+(\boldsymbol{k}) - N^-(\boldsymbol{k})\right\}
\end{aligned} \tag{2}$$

这就是(7.23)式。

由(2)式和(7.21)式，我们有

$$\begin{aligned}
\left[Q,\,H\right] &= e\sum_{\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}'}\omega_{\boldsymbol{k}'}\left\{N^+(\boldsymbol{k})\,N^+(\boldsymbol{k}') - N^-(\boldsymbol{k})\,N^+(\boldsymbol{k}') + N^+(\boldsymbol{k})\,N^-(\boldsymbol{k}') - N^-(\boldsymbol{k})\,N^-(\boldsymbol{k}')\right\} \\
&\quad - e\sum_{\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}'}\omega_{\boldsymbol{k}'}\left\{N^+(\boldsymbol{k}')\,N^+(\boldsymbol{k}) + N^-(\boldsymbol{k}')\,N^+(\boldsymbol{k}) - N^+(\boldsymbol{k}')\,N^-(\boldsymbol{k}) - N^-(\boldsymbol{k}')\,N^-(\boldsymbol{k})\right\} \\
&= e\sum_{\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}'}\omega_{\boldsymbol{k}'}\left\{\left[N^+(\boldsymbol{k}),\,N^+(\boldsymbol{k}')\right] + \left[N^+(\boldsymbol{k}),\,N^-(\boldsymbol{k}')\right] + \left[N^+(\boldsymbol{k}'),\,N^-(\boldsymbol{k})\right] + \left[N^-(\boldsymbol{k}'),\,N^-(\boldsymbol{k})\right]\right\}
\end{aligned} \tag{3}$$

现在，我们来计算(3)式中的几个对易子，首先有

$$\left[N^+(\boldsymbol{k}),\,N^+(\boldsymbol{k}')\right] = a^\dagger(\boldsymbol{k})\,a(\boldsymbol{k})\,a^\dagger(\boldsymbol{k}')\,a(\boldsymbol{k}') - a^\dagger(\boldsymbol{k}')\,a(\boldsymbol{k}')\,a^\dagger(\boldsymbol{k})\,a(\boldsymbol{k})$$

$$
\begin{aligned}
&= a^{\dagger}(\boldsymbol{k})\left\{a^{\dagger}(\boldsymbol{k}')\,a(\boldsymbol{k})+\delta\left(\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}'\right)\right\}a(\boldsymbol{k}')-a^{\dagger}(\boldsymbol{k}')\left\{a^{\dagger}(\boldsymbol{k})\,a(\boldsymbol{k}')+\delta\left(\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}'\right)\right\}a(\boldsymbol{k})\\
&= a^{\dagger}(\boldsymbol{k})\,a^{\dagger}(\boldsymbol{k}')\,a(\boldsymbol{k})\,a(\boldsymbol{k}')+a^{\dagger}(\boldsymbol{k})\,a(\boldsymbol{k}')\,\delta\left(\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}'\right)-a^{\dagger}(\boldsymbol{k}')\,a^{\dagger}(\boldsymbol{k})\,a(\boldsymbol{k}')\,a(\boldsymbol{k})-a^{\dagger}(\boldsymbol{k}')\,a(\boldsymbol{k})\,\delta\left(\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}'\right)\\
&= 0
\end{aligned}
\tag{4}
$$

式中，我们用到了(7.19)式。同理可得

$$
\left[N^{-}(\boldsymbol{k}'),\,N^{-}(\boldsymbol{k})\right]=0 \tag{5}
$$

显然有

$$
\left[N^{+}(\boldsymbol{k}),\,N^{-}(\boldsymbol{k}')\right]=0 \tag{6}
$$

$$
\left[N^{+}(\boldsymbol{k}'),\,N^{-}(\boldsymbol{k})\right]=0 \tag{7}
$$

把(4)、(5)、(6)、(7)代入 (3)式，即得

$$
\left[Q,\,H\right]=0
$$

这正是我们所要证明的对易子。

第八章　费米子

迄今为止，我们所考虑的粒子都是满足 Klein–Gordon 方程的无自旋粒子，它们的量子化导致 Bose–Einstein 统计。现在，我们来研究电子。电子的自旋为 $\frac{1}{2}$，并且由狄拉克方程来很好地加以描述。对一个电子体系而言，泡利不相容原理成立，这就是说，电子服从 Fermi–Dirac 统计。

这些差别表明，如果要把对玻色子所发展的机制应用来描述费米子的情况，就必须对机制加以修正。不过，由于两种情况非常相似，所以我们将在海森堡绘景中展开论述，这样就可以借重玻色子的相应结果。因为厄密费米子场在自然界中似乎不起任何作用，所以我们将直截了当地考虑非厄密算符。因此，我们的论述将和上一章中阐述荷电介子的机制非常类似。在量子电动力学中，这里所阐述的理论在描述电子和正电子时是极其成功的。对于核子，我们的理论也可以提供一个相当好的描述 [1]。

根据狄拉克理论，电子由下列方程描述：

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)\psi(x) = 0 \tag{8.1}$$

式中，m 是电子的质量，$\psi(x)$ 是 4 分量旋量波函数，γ_μ $(\mu = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ 是 4×4 矩阵，它们满足下列反对易关系：

$$\gamma_\mu\,\gamma_\nu + \gamma_\nu\,\gamma_\mu = 2\,\delta_{\mu\nu} \qquad\qquad (\mu,\,\nu = 1,\,2,\,3,\,4) \tag{8.2}$$

当然，满足(8.2)式的四个反对易矩阵可以有很多种选择方式。对大多数用途来说，由于有关性质可以直接根据反对易法则(8.2)式获得，所以我们并不要求这些 γ 矩阵有一个明显的表示式。不过，在实际中，有时在一个特定表象内工作是特别有益的。文献中最常用的表象具有一个特点，这就是非相对论极限能够以一种特别简单的方式获得 [2]。此外，似乎并不具有任何其他优点。然而，为了更好地理解一般原理和研究理论的对称性质，我们将通过使用一个不同的表象来获得 γ 矩阵的一个更为清楚的图像 [3]。

这个表象的一个特点就是矩阵 γ_1，γ_2，γ_3 是纯实数的，而矩阵 γ_4 则是纯虚数的。我们把具有这些性质的表象称为马约纳拉（Majorana）表象。一个特定的马约纳拉表象为

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{bmatrix} \quad \gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \gamma_4 = \begin{bmatrix} 0 & -i\sigma_1 \\ i\sigma_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \gamma_5 = \begin{bmatrix} 0 & -i\sigma_3 \\ i\sigma_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{8.3}$$

这些 γ 矩阵只不过是常用表象(**??**)式中各 γ 矩阵的一个重新排列，因而它们也满足(8.2)式。四维自旋矩阵 $\boldsymbol{\sigma} \equiv (\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3)$（参见(**??**)）现在是纯虚的：

$$\sigma_\imath^* = -\sigma_\imath \qquad\qquad (\imath = 1,\,2,\,3) \tag{8.4}$$

式中，星号 “$*$” 代表复数共轭，即把 i 换成 $-i$ 但不转置。根据 γ_μ 矩阵的厄密性质，我们可以推出 σ_k 的厄密性质：

$$\sigma_k^\dagger = \sigma_k \qquad\qquad (k = 1,\,2,\,3) \tag{8.5}$$

[1] 我们将看到，自旋为 $\frac{1}{2}$ 的荷电粒子，例如电子和正电子，必定用非厄密场来表示。然而，即使是电中性的粒子，也未必就一定能用厄密场来表示。例如，中子具有内禀磁矩，根据磁矩的符号，我们将再次有两种类型的粒子：粒子（中子）和反粒子（反中子），这些粒子仍然是只能用非厄密场来加以描述。

[2] 在附录A中给出了或导出了狄拉克理论的有关结果。在附录A中的等式都用字母 A 标记，上面所说的表象可参见(**??**)式。

[3] 本章的主要结果将在以后更一般第加以论述，从而使读者能够使用任何表象。

式中，剑号 “†” 代表厄密共轭。

(8.4)—(8.5)式的推导如下：

由(??)式，我们有

$$\sigma_k = -i\,\gamma_\ell\,\gamma_m = i\,\gamma_4\,\gamma_5\,\gamma_k \tag{1}$$

在上式两边取复数共轭，即有

$$\sigma_k^* = i\,\gamma_\ell\,\gamma_m = -i\,\gamma_4\,\gamma_5\,\gamma_k = -\sigma_k \tag{2}$$

由(1)式，我们有

$$\begin{aligned}\sigma_k^\dagger &= -i\,\gamma_k^\dagger\,\gamma_5^\dagger\,\gamma_4^\dagger = -i\,\gamma_k\,\gamma_5\,\gamma_4 = -i\,\gamma_k\,(-\gamma_4\,\gamma_5) = i\,(-\gamma_4\,\gamma_k)\,\gamma_5 \\ &= -i\,\gamma_4\,(-\gamma_5\,\gamma_k) = i\,\gamma_4\,\gamma_5\,\gamma_k = \sigma_k\end{aligned} \tag{3}$$

式中，我们用到了 γ 矩阵的厄密性质和反对易性质。

设狄拉克方程(8.1)式的解为：

$$\psi^{(\jmath)}(\boldsymbol{p}) = u^{(\jmath)}(\boldsymbol{p})\,e^{ipx} \qquad (\jmath = 1,\,2) \tag{8.6}$$

$\psi^{(\jmath)}(\boldsymbol{p})$ 归一化到每单位体积内有 $\dfrac{E_{\boldsymbol{p}}}{m}$ 个粒子，其动量本征值为 $\boldsymbol{p}$，其能量本征值则为

$$E_{\boldsymbol{p}} = +\left(m^2 + \boldsymbol{p}^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{8.7}$$

$\jmath = 1$ 时，其自旋和 $\boldsymbol{p}$ 平行；$\jmath = 2$ 时，其自旋和 $-\boldsymbol{p}$ 平行 [4]。

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}\,u^{(\jmath)}(\boldsymbol{p}) = \pm\,u^{(\jmath)}(\boldsymbol{p}) \quad \begin{cases} \jmath = 1 \\ \jmath = 2 \end{cases} \tag{8.8}$$

在马约纳拉表象中，$\left(\gamma_\mu\,\dfrac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)$ 是实数，由此可知，(8.6)式的复数共轭

$$\psi^{(\jmath+2)}(\boldsymbol{p}) \equiv \psi^{(\jmath)*}(\boldsymbol{p}) = u^{(\jmath)*}(\boldsymbol{p})\,e^{-ipx} \qquad (\jmath = 1,\,2) \tag{8.9}$$

也是狄拉克方程(8.1)式的解，其动量本征值为 $\boldsymbol{p}$，能量本征值为 $-E_{\boldsymbol{p}}$。而且，如果我们取(8.8)式的复数共轭，则根据(8.4)式可知(8.8)式所给出的态是自旋本征态，其自旋在 $\jmath = 1$ 时和 $-\boldsymbol{p}$ 平行，在 $\jmath = 2$ 时和 $\boldsymbol{p}$ 平行。

我们把(8.6)式称为狄拉克方程的正能解，把(8.9)式称为负能解。对于满足周期条件(1.5)的所有可容许动量 $\boldsymbol{p}$ 而言，正能解和负能解构成了狄拉克方程的解的完全集合。类似于(7.18*a*)、(7.18*b*)式，我们可以根据这个集合来展开旋量算符 $\psi(x)$

习题与解答

1.

[4] 这些解已在附录A中作了讨论，参见(??)—(??)。在(8.9)式中，我们引进记号 $\psi^{(\jmath+2)}$ 以便和附录A中所用记号一致。

第九章　光子（一）

习题与解答

1.

第十章　光子（二）

习题与解答

1.

第十一章　相互作用

习题与解答

1.

第十二章　散射矩阵

习题与解答

1.

第十三章　S 阵展开式

000 000 (13.1)

000 000 (13.2)

000 000 (13.3)

000 000 (13.4)

000 000 (13.5)

000 000 (13.6)

000 000 (13.7)

000 000 (13.8)

000 000 (13.9)

000 000 (13.10)

000 000 (13.11)

000 000 (13.12)

000 000 (13.13)

000 000 (13.14)

000 000 (13.15)

000 000 (13.16)

000 000 (13.17)

000 000 (13.18)

000 000 (13.19)

000 000 (13.20)

000 000 (13.21)

000 000 (13.22)

习题与解答

1.

2.

第十四章　费曼图

由于可能发生的散射过程所具有的多样性，把 S 矩阵展开后，我们所得到的关于正规乘积的展开式是相当复杂的。即使当 n 较小时，也是如此。不过，利用在第十一章引进的费曼图，我们容易对展开式中的这些项给出物理解释。下面，我们将采用戴森的方法来阐述这个问题。在本章中，我们将使用(13.1)式中的 $n=2$ 项作为例子，定性地讨论有关的基本概念。在下一章中，我们再来作定量讨论。

根据(13.19)式和(13.22)式，(13.11)式中的二级微扰项是

$$S^{(2)}=\sum_{i=A}^{F}S_i^{(2)}=\frac{e^2}{2!}\iint \mathrm{d}^4x_1\,\mathrm{d}^4x_2\,T\Big\{N\big(\bar\psi \not{A}\psi\big)_{x_2}N\big(\bar\psi \not{A}\psi\big)_{x_1}\Big\} \tag{14.1}$$

式中，

$$S_A^{(2)}=\frac{e^2}{2!}\iint \mathrm{d}^4x_1\,\mathrm{d}^4x_2\,N\Big\{\big(\bar\psi \not{A}\psi\big)_{x_2}\big(\bar\psi \not{A}\psi\big)_{x_1}\Big\} \tag{14.2a}$$

$$S_B^{(2)}=\frac{e^2}{2!}\iint \mathrm{d}^4x_1\,\mathrm{d}^4x_2\,\Big[N\Big\{\big(\bar\psi \not{A}\overbrace{\psi\big)_{x_2}\big(\bar\psi}\not{A}\psi\big)_{x_1}\Big\}+N\Big\{\big(\overbrace{\bar\psi \not{A}\psi\big)_{x_2}\big(\bar\psi}\not{A}\psi\big)_{x_1}\Big\}\Big] \tag{14.2b}$$

$$S_C^{(2)}=\frac{e^2}{2!}\iint \mathrm{d}^4x_1\,\mathrm{d}^4x_2\,N\Big\{\big(\bar\psi\gamma_\nu\overbrace{A_\nu\psi\big)_{x_2}\big(\bar\psi\gamma_\mu}A_\mu\psi\big)_{x_1}\Big\} \tag{14.2c}$$

$$S_{\mathrm{D}}^{(2)}=\frac{e^2}{2!}\iint \mathrm{d}^4x_1\,\mathrm{d}^4x_2\,\Big[N\Big\{\big(\bar\psi\gamma_\nu\overbrace{A_\nu\psi\big)_{x_2}\big(\bar\psi\gamma_\mu}A_\mu\psi\big)_{x_1}\Big\}+N\Big\{\big(\overbrace{\bar\psi\gamma_\nu A_\nu\psi\big)_{x_2}\big(\bar\psi\gamma_\mu}A_\mu\psi\big)_{x_1}\Big\}\Big] \tag{14.2d}$$

$$S_E^{(2)}=\frac{e^2}{2!}\iint \mathrm{d}^4x_1\,\mathrm{d}^4x_2\,N\Big\{\big(\overbrace{\bar\psi \not{A}\psi\big)_{x_2}\big(\bar\psi}\not{A}\psi\big)_{x_1}\Big\} \tag{14.2e}$$

$$S_F^{(2)}=\frac{e^2}{2!}\iint \mathrm{d}^4x_1\,\mathrm{d}^4x_2\,N\Big\{\big(\overbrace{\bar\psi\gamma_\nu A_\nu\psi\big)_{x_2}\big(\bar\psi\gamma_\mu}A_\mu\psi\big)_{x_1}\Big\} \tag{14.2f}$$

在(14.1)、(14.2a)—(14.2f)式中，我们已略去了正规乘积内部各因子的收缩以及不同场的场量的收缩项所产生的项。因为根据上一章的结果，这些项通通为零。

在第十一章中，我们引进了费曼图。我们把费米子线和玻色子线的相交处称为定点。由具有两条费米子线和一条玻色子线的一个顶点构成的图称为基本顶点部分（basic vertex part），它代表不同粒子的相互作用 $\mathscr{H}_I$. S 矩阵中的二级项(14.2a)—(14.2f)可用由适当连起来的两个基本顶点部分构成的费曼图来描述。对一个特定的项 $S_i^{(2)}$ 来说，它所能影响的跃迁，完全取决于它所含有的外场算符。所谓外场算符，就是那些不参加收缩的算符。在散射过程中，吸收初态粒子并产生终态粒子的算符，正是这些外场算符。

(14.2a)式所确定的项 $S_A^{(2)}$，仅包含了外场，所以我们对 $S_A^{(2)}$ 并不特别感兴趣。$S_A^{(2)}$ 相应于两个相互独立地进行的过程，如图**??**所示。

(14.2b)式中的两项是完全等价的，我们只须把算符置换一下就可看成这一点。费米子场量是旋量，并且由于和产生算符及吸收算符相关而不可对易。不过，每个组（$\bar\psi \not{A}\psi$）的旋量指标是自洽的，所以，交换整个组并不会影响这些旋量指标。而且，这种交换总是费米子场算符的偶置换，因此，我们可得

$$N\Big\{\big(\overbrace{\bar\psi \not{A}\psi\big)_{x_2}\big(\bar\psi}\not{A}\psi\big)_{x_1}\Big\}=N\Big\{\big(\bar\psi \not{A}\overbrace{\psi\big)_{x_1}\big(\bar\psi}\not{A}\psi\big)_{x_2}\Big\} \tag{14.3}$$

把(14.2*b*)式中第二项的积分变量 x_1 和 x_2 加以对换，即得：

$$S_B^{(2)} = e^2 \iint \mathrm{d}^4x_1\,\mathrm{d}^4x_2\, N\Big\{ \big(\bar\psi \not{A} \overbrace{\psi}\big)_{x_2} \big(\bar\psi \not{A} \psi\big)_{x_1} \Big\} \tag{14.4}$$

(14.4)式可以更完全地写为

$$\begin{aligned} S_B^{(2)} = e^2 \iint \mathrm{d}^4x_1\,\mathrm{d}^4x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (14.5)\\ \times N\Big\{ \big(\bar\psi^+(x_2)+\bar\psi^-(x_2)\big)\gamma_\nu\big(A_\nu^+(x_2)+A_\nu^-(x_2)\big)\overbrace{\psi(x_2)\bar\psi}(x_1)\gamma_\mu\big(A_\mu^+(x_1)+A_\mu^-(x_1)\big)\big(\psi^+(x_1)+\psi^-(x_1)\big)\Big\} \end{aligned}$$

在(14.5)式所描述的各种过程中，有一个过程就是康普顿散射。在康普顿散射中，入射光子被电子散射，而电子本身则经历一个反冲（$\gamma + e^- \longrightarrow \gamma + e^-$）。算符 $\psi^+(x_1)$ 吸收初态电子，算符 $\bar\psi^-(x_2)$ 发射终态电子。算符 $A_\mu^+(x_1)$ 或算符 $A_\nu^+(x_2)$ 吸收了初态光子，而算符 $A_\nu^-(x_2)$ 或算符 $A_\mu^-(x_1)$ 发射了终态光子。这样，(14.5)式中能引起康普顿散射的部分是

$$S_{\text{C.S.}}^{(2)} = S_A^{(2)} + S_B^{(2)} \tag{14.6}$$

式中

$$S_A^{(2)} = e^2 \iint \mathrm{d}^4x_1\,\mathrm{d}^4x_2\, N\Big\{ \bar\psi^-(x_2)\gamma_\nu A_\nu^-(x_2)\overbrace{\psi(x_2)\bar\psi}(x_1)\gamma_\mu A_\mu^+(x_1)\psi^+(x_1)\Big\} \tag{14.7a}$$

$$S_B^{(2)} = e^2 \iint \mathrm{d}^4x_1\,\mathrm{d}^4x_2\, N\Big\{ \bar\psi^-(x_2)\gamma_\nu A_\nu^+(x_2)\overbrace{\psi(x_2)\bar\psi}(x_1)\gamma_\mu A_\mu^-(x_1)\psi^+(x_1)\Big\} \tag{14.7b}$$

(14.7*a*)和(14.7*b*)的费曼图如图14.1(*a*) 和 (*b*) 所示。在图14.1(*a*) 中，初态光子 i 在 x_1 处被吸收，终态光子 f 在 x_2 处被产生；在图14.1(*b*) 中，终态光子 f 在 x_1 处被产生，初态光子 i 在 x_2 处被吸收。

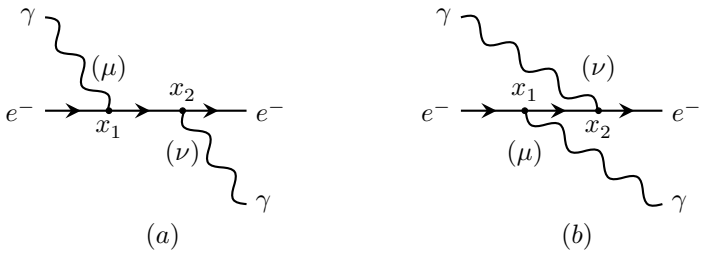


图 14.1: 在电子上的康普顿散射

吸收初态电子的算符 $\psi^+(x_1)$ 用一条指向顶点 x_1 的带箭头的线来代表，产生终态电子的算符 $\bar\psi(x_2)$ 则用一条从 x_2 点出发的带箭头的线来代表。一对费米子算符的收缩 $\overbrace{\psi(x_2)\bar\psi}(x_1)$ 则用一根从顶点 x_1 出发到顶点 x_2 终止的带箭头的线来代表，箭头从 x_1 指向 x_2 . 根据(**??**)式，我们可以对这个收缩作出如下的物理解释。当 $x_{10} < x_{20}$ 时，收缩 $\overbrace{\psi(x_2)\bar\psi}(x_1)$ 描述一个电子先在 x_1 点产生，而后到 x_2 点湮没。当 $x_{20} < x_{10}$ 时，$\overbrace{\psi(x_2)\bar\psi}(x_1)$ 描述一个正电子先在 x_2 点产生，而后到 x_1 点湮没。换言之，当 $x_{20} < x_{10}$ 时，我们可以认为图14.1(*a*) 描述的物理过程是：先在 x_2 点产生一个电子 – 正电子对并发射光子 f，而后正电子传播到 x_1 点和入射电子相遇而湮没，并吸收光子 i. 类似地，当 $x_{20} < x_{10}$ 时，我们可以认为图14.1(*b*) 描述的物理过程是：先在 x_2 点产生一个电子 – 正电子对并吸收光子 i，而后正电子传播到 x_1 点和入射电子相遇而湮没，并发射光子 f. 于是，我们把收缩 $\overbrace{\psi(x_2)\bar\psi}(x_1)$ 称为费米子传播子。费米子传播子描述的是虚的中间态费米子：当 $x_{20} > x_{10}$ 时，$\overbrace{\psi(x_2)\bar\psi}(x_1)$ 描述的是电子传播子；当 $x_{20} < x_{10}$ 时，$\overbrace{\psi(x_2)\bar\psi}(x_1)$ 描述的是正电子传播子。这里需要注意的是，我们在画图14.1的费曼图时，并没有考虑时间顺序。图14.1(*a*) 或 (*b*) 代表了两种类型的中间态过程：一个虚电子和一个虚的电子 – 正电子对。而且，这个传播子已经包含了遍及费米子的所有自旋态的求和。在第十一章中，我们曾规定，用带有向上箭头的线

来代表电子，而用带有向下箭头的线来代表正电子。现在，我们放宽这个限制，只把这个限制运用于外线，而不用于传播子。在传播子 $\psi(x_2)\bar{\psi}(x_1)$ 的费曼图中，箭头是从 x_1 指向 x_2，它代表两种情况。上述直观的物理解释是很有用的。

习题与解答

1.

第十五章　康普顿散射

习题与解答

1.

第十六章　库伦散射

习题与解答

1.

第十七章　辐射修正

习题与解答

1.

第十八章　费米子自能

习题与解答

1.

第十九章　真空极化

习题与解答

1.

第二十章　顶角修正

习题与解答

1.

第二十一章　电子的反常磁矩

习题与解答

1.

第二十二章　重正化

习题与解答

1.

附录 A　狄拉克方程

狄拉克方程可以写为

$$i\,\hbar\,\frac{\partial\psi(x)}{\partial t}=\Big\{c\boldsymbol{\alpha}\cdot\big(-i\hbar\boldsymbol{\nabla}\big)+\beta mc^{2}\Big\}\,\psi(x)\tag{A1a}$$

在 $\hbar=c=1$ 的自然单位制中，我们有

$$\left\{i\,\frac{\partial}{\partial t}+i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}-\beta m\right\}\psi(x)=0\tag{A1b}$$

式中，m 是粒子静质量，$\boldsymbol{\alpha}=$（α_1，α_2，α_3）和 β 是 4×4 厄密矩阵，

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}0&\boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\sigma}&0\end{bmatrix}\qquad\qquad\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}I&0\\ 0&-I\end{bmatrix}\tag{A1c}$$

式中，$\boldsymbol{\sigma}=$（σ_x，σ_y，σ_z）是泡利矩阵，I 是 2×2 单位矩阵。α_1，α_2，α_3 和 β 满足如下对易关系：

附录 B　费曼规则