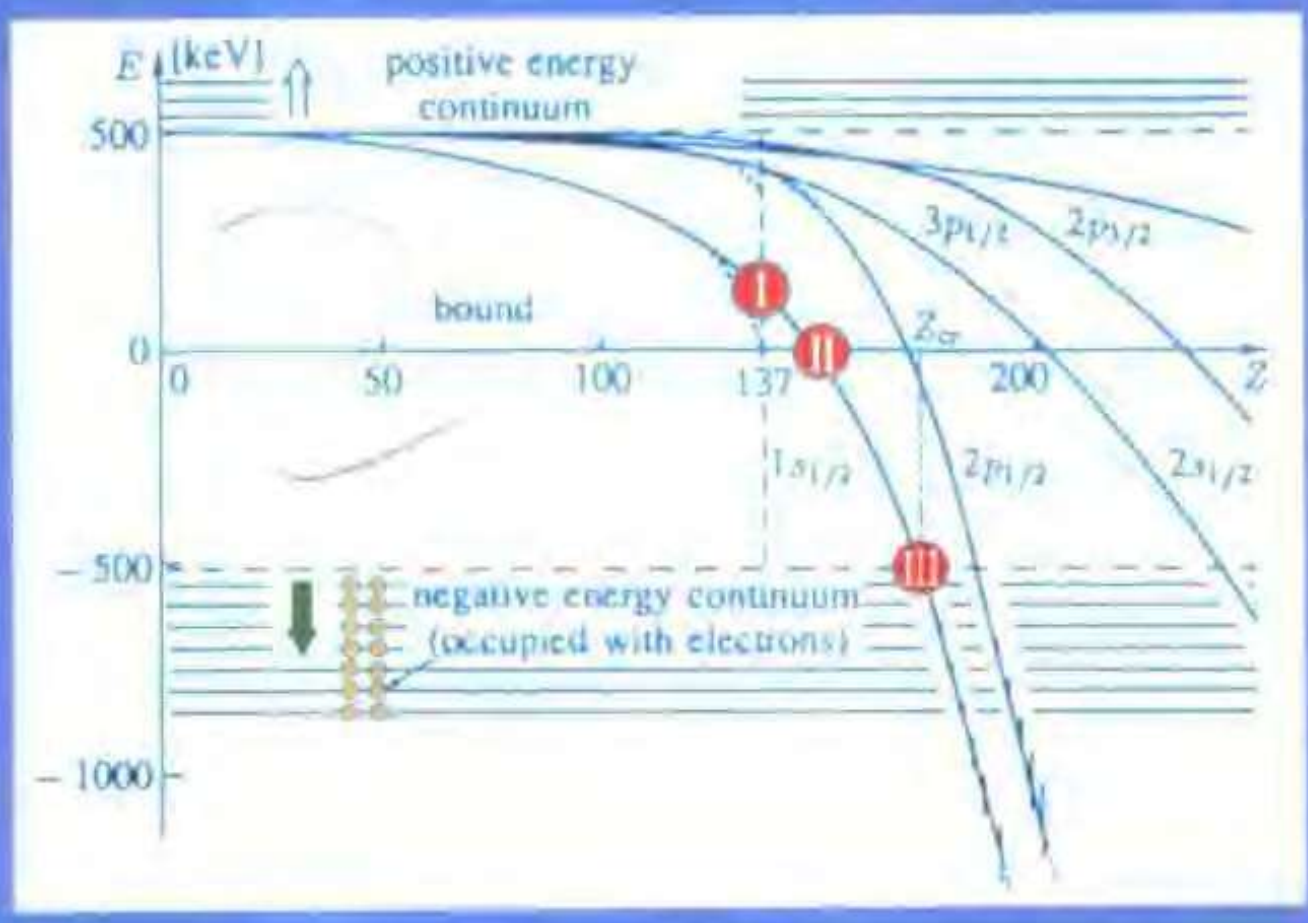
W.Greiner, J.Reinhardt 著

QUANTUM ELECTRODYNAMICS

量子电动力学

马伯强 杨建军
徐德之 沈洪清 译 张启仁 审校



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS
Springer

O4826-87

责任编辑：郭佑民
封面设计：张 虹

QUANTUM ELECTRODYNAMICS

量子电动力学

本书作为一本量子电动力学全面的导论性教程，通过很多例子和有关问题的解决，介绍了所有必需的数学工具。作者采用传播子理论体系，以一种数学的逻辑来表述整个课程。本书的前两章分别介绍了传播子理论的非相对论性和相对论性表述。其后，引入了大量与电子，正电子和光子有关的散射和辐射过程，并详细介绍了其理论处理，其中包括高阶过程和重整化。本书还讨论了二粒子态和无自旋玻色子的相互作用。另外，场论的量子电动力学也得到介绍。

ISBN 7-301-04826-2

9 787301 048269 >

ISBN 7-301-04826-2/O·0500 定价：45.00元

量子电动力学

W. Greiner, J. Reinhardt 著

马伯强 杨建军 译
徐德之 沈洪清

张启仁 审校

北京大学出版社
北京

内 容 提 要

本书作为一本量子电动力学全面的导论性教程，通过很多例子和有关问题的解决，介绍了所有必需的数学工具。作者采用传播子理论体系，以一种教学的逻辑来表述整个课程。本书的前两章分别介绍了传播子理论的非相对论性和相对论性表述。其后，引入了大量与电子、正电子和光子有关的散射和辐射过程，并详细介绍了其理论处理，其中包括高阶过程和重整化。本书还讨论了二粒子态和无自旋玻色子的相互作用。另外，强场的量子电动力学也得到介绍。

Originally published in German under the title:
"Theoretische Physik. Band 7:Quantenelektrodynamik" by Walter Greiner and Joachim Reinhardt
Copyright ©Verlag Harri Deutsch, Thun and Frankfurt am Main 1984, 1994
Translated from the English edition: "Quantum Electrodynamics"
Copyright ©Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1992, 1994
All Rights Reserved

图书在版编目(CIP)数据

量子电动力学/马伯强编著. —北京：北京大学出版社，2000

ISBN 7-301-04826-2

Ⅰ. 量… Ⅱ. 马… Ⅲ. 量子电动力学 Ⅳ. 0413.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 80356 号

著作权合同登记 图字:01-2001-0346 号

书　　名：量子电动力学

著作责任者：马伯强　杨建军　徐德之　沈洪清　译

责 任 编 辑：郭佑民

标 准 书 号：ISBN 7-301-04826-2/O・0500

出　版　者：北京大学出版社

地　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871

网　　址：http://ebs.pku.edu.cn

电　　话：出版部 62752015　发行部 62754140　编辑部 62752037

电 子 信 箱：zpup@pup.pku.edu.cn

排　版　者：兴盛达打字服务社　62549189

印　刷　者：北京大学印刷厂印刷

发　行　者：北京大学出版社

经　销　者：新华书店

787 毫米 x 1000 毫米　16 开本　23 印张　550 千字

2001 年 4 月第一版　2001 年 4 月第一次印刷

定　　价：45.00 元

英译本前言(节译)

全世界不止一代说德语的学生正是用瓦尔特·顾莱纳的教材为引导了解和欣赏了现代理论物理以及作为科学根基的数学的力量和美。

用一系列密切相关的教科书连贯而完整地表达科学的一个整领域并不是新想法。许多老物理学家怀着愉悦的心情回忆他们通过索末菲的,普朗克的,以及朗道和栗弗席兹的经典丛书开拓自己的道路,进行探索和发现时的感受。从学生的观点看,用一致的符号,逻辑地组织题材和连贯的表达有许多明显优点;此外,对科学的完整概括给作者以难得的机会来表达对自己学科的热爱。

顾莱纳丛书的完备性使它对学生和教授都特别有益。他排除了常用语"于是……",这种表述背后往往隐藏着好几页的数学推导,而使学生莫名其妙。他常用实验数据解说理论观点,这些数据像理论内容一样在不断改进和扩充讲稿的过程中一再更新。丛书就在这种讲稿的基础上形成。

还有,顾莱纳在每卷中收入成百完全做出的例题而大大增加了丛书的价值。对学生来说没有什么比详细看到物理学家感兴趣的问题如何由所学的理论概念和方法解决更加重要。最后,顾莱纳在每一章加入了对所表述的理论概念和(或)实验数据有贡献的人的传略。奥古斯特·孔德(1798—1857 年)在他的《实证哲学》中曾指出:"要了解一门科学必须知道它的历史。"这是现代物理教学中经常被忘却的。顾莱纳架设的通向我们科学先驱者的桥梁值得欢迎。我们的工作正是建筑在他们工作的基础上。

此外,丛书对训练有素的物理学家也颇有益。读者会一再发现,当他深入某一卷去检视某一特别课题时,会从浏览而进一步被他原先不熟悉且常常是迷人的新见解和发展所吸引。

我在耶鲁的教学和研究工作中用过几卷顾莱纳教程的德文原版。我欢迎这套新的改进的英文译本,愿热情地将它们推荐给每一个寻求对物理学有一连贯纵览的人。

D. A. Bromley
Henry Ford Ⅱ 物理教授
耶鲁大学
New Haven, CT USA

中 译 本 序

这套理论物理丛书的目的在于由浅入深地引导学生，最终获得本领域的渊博知识。当然，它们也可用作科学研究人员的参考书或帮助准备讲演的资料。它们是由作者在美因河畔法兰克福哥德大学理论物理研究所的教学讲义的基础上发展而成。丛书开始是经过多年改进的德文版。许多次德文版后，整套丛书被译为英文，且正在出法文版和日文版。

作者特别高兴中文版即将问世。希望丛书能像在世界其他地方那样也有益于中国学生和科学工作者。作者非常感谢中文版的问世，并且特别引以自豪，因为这里有中国和德国物理学家的长期合作。来自中国(北京、上海、兰州、……)不同大学和研究所的教授、博士后和学生访问过法兰克福的理论物理研究所，并在此作过研究工作。

我们很高兴亲身体验到来自中国的年轻科学家的出色教育并希望中国的学生和教授们同样喜欢这套丛书，希望在这个伟大的国度里找到许多朋友。

法兰克福哥德大学的理论物理课程包括：理论力学 I（第一学期），理论力学 II（第二学期），经典电动力学(第三学期)，量子力学 I（第四学期），量子力学 II——对称性和相对论量子力学(第五学期)，和热力学与统计力学(第五或第六学期)。研究生课程自量子力学 II 和热力学与统计开始，继以量子电动力学，规范理论与弱作用，量子色动力学，和其他关于核和固体理论以及宇宙学等更为专门的课程。

这套丛书现在已到德文第四版。许多年来不少学生和合作者作出习题和例题。我们欣赏 Steffen A. Bass，Adrian Dumitru，Dirk Rischke(现在哥伦比亚大学)和 Thomas Schönfeld 的热心奉献。Astrid Steidl 为本丛书作图。对此我们表示衷心的感谢。我们还要感谢丹麦 Aarhus 大学 Jes Madsen 教授和挪威 Bergen 大学 Laszlo Csernai 教授对正文和例题提出的宝贵意见。我们特别感谢 Fort Collins 科罗拉多州立大学的 Martin Gelfand 教授和他的学生们提醒我们注意一些物理问题。

最后我们要感谢纽约斯普林格出版社，特别是 Hans-Ulrich Daniel 博士和 Thomas von Foerster博士的鼓励和耐心，以及 Margaret Marynowski 女士的熟练编辑。我们特别要感谢张启仁教授(北京大学)和潘欧嘉博士(北京大学出版社)组织翻译和编辑中文版。

顾莱纳

1998 年 1 月 14 日于美因河畔的法兰克福

中译本审校者序

顾莱纳教授及其同事们所著的理论物理丛书中文版即将问世。这是中德文化交流的一件大事，对我国理论物理的教学和研究必将有所促进。

瓦尔特·顾莱纳教授是世界知名的理论物理学家，在原子核物理、原子物理、场论和粒子物理的广大领域都有独特的、首创的和系统的贡献。他领导下的法兰克福哥德大学理论物理研究所是一个出成果、出人材、具有世界影响的研究集体。在这个集体的长期努力下，相对论量子力学中的克莱恩(Klein)佯谬及其影响终于得到彻底的理解。在此基础上他们对巨核(Giant Nuclei)超临界电荷可能引起的真空衰变作了系统的理论研究，并提出了用重离子碰撞中形成的短暂的巨核分子态对真空衰变进行实验研究的方法。虽然由于实际的复杂性，这方面的研究仍在继续进行中，他们的理论贡献无疑为此问题的最终解决奠定了基础。在壳效应可能导致超重核的问题上，顾莱纳和他所领导的集体也是最早和最系统的研究者之一。他们还首先预言了集团放射性，这种新型放射性正被实验证实。他们还对重离子碰撞中骇波的形成和发展作过系统研究，指出这是压缩和加热核物质的关键机制。这也被实验所证实。在这些具体的研究中他们还建立了一些理论模型，如广义集体模型，被称为格诺埃斯-顾莱纳(Gneuss-Greiner)模型，和双中心壳模型；也发展了一些独特的计算方法，如双中心狄喇克方程的数值解法等。以下数字可能说明一些问题。这个集体有顾莱纳署名的论文在600篇以上，会议报告和评述论文150篇以上，讲演300篇以上。

顾莱纳还是一个教育家，在指导众多的研究生和年轻的研究工作者的同时长期坚持讲授基础理论课。在他指导下获得博士学位的超过150人，其中39人在世界各地的大学中已成为教授和学术领导。他与合作者所著的教材和专著超过10本，这些书在更大范围内发挥着培养年轻人的作用。

用经验丰富、硕果累累来形容顾莱纳的科学研究和教育工作实不为过。这使我们相信将他和其同事们所著的理论物理从书翻译成中文将有益于我国年轻物理学家的培养。

顾莱纳教授还是中国人民的朋友。多年来他特别支持中德合作。许多中国学者和学生曾到他领导的研究所工作，他也曾多次来华访问讲学，并被聘为北京大学客座教授。在这套丛书的翻译过程中他还把最近教学中作的一些修改寄来。这意味着中译本将是这套丛书的最新版本。

张启仁

1998年4月8日于承泽园

前　言

理论物理学已经成为一个多方向的科学。对于一个年轻学生，要在对全学科有比较清楚掌握的基础上跟踪巨量的新学科信息，确实不是一件容易的事情。这个全学科包括从力学到电动力学、量子力学、场论、原子核与重离子科学、统计力学、热力学、固体物理、以及粒子物理等。这些知识要在 8～10 个学期内学完，同时还要完成学位论文和有关考试。要实现这样的目标，大学教师应尽早地帮助引导学生进入新的学科，以激发学生的兴趣和兴奋，从而调动他们学习的激情和活力。当然，所有非基本的材料不得不有所忽略。

在法兰克福大学(The Johann Wolfgang Goethe University in Frankfurt)的教学中，我们从第一学期就开设理论物理课程。理论力学 I 和 II、电动力学、量子力学 I—— 导论是头两年的基本课程。这些课程以很多的数学解释和支持材料为补充。在第 4 学期后，学生就要开始学习量子力学 II- —对称、统计力学和热力学、相对论量子力学、量子电动力学、弱相互作用的规范理论、量子色动力学这些必修课。除此之外，还提供一些专题课程作为补充，例如：流体力学、经典场论、狭义和广义相对论、多体理论、原子核模型、粒子物理模型、以及固体物理。有些学生还把要在两个学期才能修完的理论核物理或理论固体物理作为必修课。

在本卷量子电动力学课程中，我们试图以一种使学生感到有趣和易懂的方式来组织材料。因此，我们安插了很多具有详细讲解的练习和例子。这对那些愿以自学的方式学习本课程的学生也会特别有帮助。

可选择两种迥然不同的方案中的一种来进行量子电动力学的教学。其一是以量子场理论为基础。用经典的 Lagrangian 场论作为起点引进非对易的场算符，建立 Fock 空间描述粒子系统，介绍构建和计算矩阵元及其他可观测物理量的技术。这种方案可以用正则量子化方法或路径积分来实现。量子电动力学理论在这种方案中可被看做一种广泛理论的特例。在本卷中，我们并不采取这种比较广泛但费时较多的途径；相反，我们采取一种可用较少力气得到同样结果、同时又很直观的“捷径”。这就是由 Feynman(以及并不很著名的 E. C. G. Stückelberg)引入的传播子理论，用 Green 函数来描述电子和光子在时空中的传播。

当然，一个学物理的学生应该同时熟悉这两种量子电动力学的方案(在本系列教材的德文版中，有一卷专门讲授场的量子化)。然而，为了尽快地了解量子电动力学引人入胜的过程和性质、以及它的计算技术，采用传播子理论是较为理想的。

本卷的第一章包含了对非相对论性传播子理论和物理学中 Green 函数应用的介绍。第二章推广到相对论情形，介绍了电子和正电子的 Stückelberg-Feynman 传播子。这是推导微扰量子电动力学的基本工具。第三章组成本卷的最多部分，包含了相对论性传播子理论的应用。这包括从电子的简单 Coulomb 散射、在原子核上的散射(Rosenbluth 公式)到电子-电子(Møller)、电子-正电子(Bhabha)散射。同时，有关光子发射和吸收的过程也得到处理，比如 Compton 散射、韧致辐

射和电子正电子对湮灭。较短的第四章提供了对 Feynman 规则的总结、以及有关电动力学测量单位和规范选择的说明。

第五章以对真空极化、自能和顶角修正的最低级圈图的计算为例，对重整化进行了基本的讨论。这也包括对电子奇异磁矩和 Lamb 位移的计算。第六章介绍了描述相对论性两体系统的 Bethe-Salpeter 方程。

第七章是为了使读者熟悉强场的量子电动力学，这在最近的二十多年中引起了广泛的关注。这里较详细介绍了有关电子的超临界态和中性真空的衰变，同时强调了其数学描述和物理涵义。最后，也就在第七章，微扰量子电动力学被推广到对带电荷无自旋 Bose 子的处理。

附录简单介绍了有关文献，同时介绍了更详细的量子电动力学书籍以及与本书表述相关的量子场论的现代处理。我们需要指出，在本书较前几章的准备中较多地参考了 J. D. Bjorken 和 S. D. Drell 的教材《Relativistic Quantum Mechanics》(McGraw-Hill, New York 1964)。

我们感谢诸多同事和学生在本书的出版中所提供的帮助和建议。

Walter Greiner
Joachim Reinhardt
1992 年 3 月于法兰克福

目　录

第一章　传播子与散射理论 …… (1)

1.1　引言 …… (1)

1.2　非相对论传播子 …… (2)

1.3　Green 函数和传播子 …… (3)

1.4　ψ 的一个积分方程 …… (5)

1.5　散射问题的应用 …… (10)

1.6　S 矩阵的幺正性 …… (17)

1.7　S 矩阵的对称性质 …… (18)

1.8　动量表象中的 Green 函数和它的性质 …… (20)

1.9　对相互作用粒子 Green 函数的其他考虑 …… (25)

1.10　传记 …… (32)

第二章　电子和正电子的传播子 …… (34)

第三章　量子电动力学过程 …… (68)

3.1　电子的 Coulomb 散射 …… (68)

3.2　电子在自由质子上的散射:反冲效应 …… (85)

3.3　全同 Fermi 子上的散射 …… (115)

3.4　电子-正电子散射:Bhabha 散射和 μ 子对产生 …… (122)

3.5　极化的 Dirac 粒子的散射 …… (133)

3.6　韧致辐射 …… (139)

3.7　Compton 散射——Klein-Nishina 公式 …… (156)

3.8　粒子和反粒子的湮灭 …… (167)

3.9　传记 …… (196)

第四章　总结:QED 的 Feynman 规则 …… (199)

4.1　动量空间中 QED 的 Feynman 规则 …… (200)

4.2　不同规范下的光子传播子 …… (204)

4.3　传记 …… (207)

第五章　高阶散射矩阵 …… (208)

5.1　电子-正电子的四阶散射 …… (208)

5.2　真空极化 …… (211)

5.3　电子自能 …… (238)

5.4　顶角修正 …… (243)

5.5 传记 …… (265)
第六章 双粒子体系 …… (267)
6.1 Bethe-Salpeter 方程 …… (267)
6.2 传记 …… (294)
第七章 强场的量子电动力学 …… (295)
7.1 原子中的强场 …… (298)
7.2 在重离子碰撞中的强场 …… (319)
7.3 电磁场的等效 Lagrange 量 …… (327)
7.4 传记 …… (341)
第八章 无自旋 Bose 子的量子电动力学 …… (342)
8.1 Klein-Gordon 方程 …… (342)
8.2 标量粒子的 Feynman 传播子 …… (344)
8.3 0 自旋 Bose 子的散射 …… (345)
8.4 标量电动力学的 Feynman 规则 …… (350)
附录 …… (357)

第一章　传播子与散射理论

1.1　引　　言

本书论述了量子电动力学(QED)理论，它是物理学中最成功、最精确的理论之一。QED 是关于电子、正电子(电子-正电子场)和光子(电磁场或辐射场)的量子场论。该理论也适用于已知的重轻子(μ 和 τ)。通常，它也能用来描述其他荷电基本粒子间的电磁相互作用。然而，这些粒子也受到非电磁力的作用，即强作用和弱作用。强作用粒子(强子)已被证实是由其他粒子即夸克组成，由此使新的自由度(色，味)变得重要。人们认为，在这一层次上，强和弱相互作用能由“非 Abel”规范理论来描述，它是仿照“Abel”规范理论的原型 QED 而来的。这些是描述强相互作用的量子色动力学(QCD)和描述弱相互作用的量子味动力学。本书将完全集中于对 QED 基本理论形式的阐述。量子电动力学不仅是所有近代场论的原型，就它本身而言也是极为重要的，因为它提供了原子物理的理论基础。

研究 QED 有两大途径。较正规的一种途径是依赖于通常的波动场量子化工具，另一种更直观的方法是用传播子形式来表示，它是由 Stückelberg 和 Feynman 提出的。现在，一个物理专业的学生二者都应知晓，不过若能较早知道为什么要发展一种理论，以及它有什么应用，则从物理上和教学上看都更好。几乎所有人都希望尽早地看看不同的过程是如何被精确地计算出来的，Feynman 的传播子形式是达到这一目的最好方法。因此，Feynman 的传播子形式将成为本书的中心话题，而那个不直观但基于量子场论方法的对 QED 比较系统的处理我们将作为参考放在附录里介绍。

现在，我们开始对散射过程进行讨论。首先是在 Dirac 正负电子理论框架中，计算跃迁几率和散射截面。这些计算原则上是严格的，而在实际计算中是按小的相互作用参数展开的微扰理论进行的。由于我们必须描述正负电子对的产生、湮灭过程，故我们必须从相对论形式出发。

按照 Feynman 传播子方法，散射过程是用积分方程来描述的。主导思想是，正电子被视作携带负能量沿着时间轴逆向运动的电子。这种想法首先由 E. C. G. Stüeckelberg 提出，尔后又被 R. Feynman 广泛利用[①]。由于 Feynman 建立了量子电动力学的理论，他与 J. Schwinger 及 S. Tomonaga 一起于 1965 年荣获诺贝尔奖。后者给出了 QED 的另一种形式，那是与 Feynman 相互等价的形式。下面我们要让自己确信 Feynman 的理论形式。这种具有直观性规则的形式完全与依赖于量子场理论得到的形式等价。

---

① 参见 R. P. Feynman: Phys. Rev. **76**, 749 (1949).

1.2 非相对论传播子

首先，让我们回顾一下非相对论量子力学中Green函数的定义。其定义中所采用的概念和方法很容易转换为相对论量子力学的形式。

我们将着重考虑在三维空间中的量子力学散射过程。该过程中，一个粒子与一个固定势场或另一个粒子相碰。散射过程按照图1.1而发生。实际上，通过准直仪D，入射粒子可以被调焦成很确定的粒子束流。这种准直的束流一般不是一个延伸到无穷远的波(即$\exp(ikz)$形式)，而是许多彼此邻近的波矢为k的平面波的叠加(即一个波包)。不管怎样。为简单起见，在散射理论的定态形式中，人们通常将入射波包表示成一个平面波，然后只需确保入射波包和散射波包在远离散射中心的探测器处不发生相互干涉。若在计算中采用这种平面波近似，人们必须明白地排除这种相干性①。

在散射过程中，我们考虑这样一些波包，它们按无穷远过去为确定的初始条件进行演化。通常，我们不考虑稳定的能量本征态(即定态波)。这样，散射问题中一个典型的问题就成为在无穷远过去代表着一个粒子的波包，在它接近散射中心(一个势场或另一个粒子)时将会变成什么?在无穷远未来，这种波又将成什么模样?

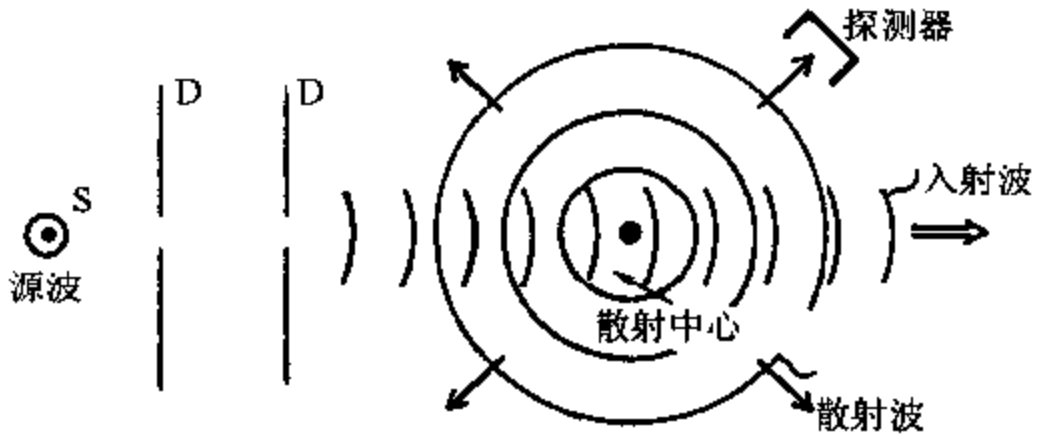


图1.1 测量散射过程的实验示意图
准直仪D保证了在探测器处入射波和散射波不发生相互干涉

这儿推广的Huygens原理能帮助我们回答这些问题。若一个波函数$\psi(\boldsymbol{x},t)$在某一确定时刻t是已知的话，那么，它在以后任意时刻t'的形式，可以把每一空间点$\boldsymbol{x}$在时刻t的波动视作从$\boldsymbol{x}$点发出的球面波来推算获得。不妨假设在$\boldsymbol{x}$处发出的在t'时刻到达$\boldsymbol{x}'$的波的波幅* 与初始激发波幅$\psi(\boldsymbol{x},t)$成正比。我们称比例常数为

① 波包描述的一个更详细的讨论参见M. L. Goldberger和K. M. Watson: Collosion Theory (Wiley, New York 1964) Chap. 3, 或R. G. Newton: Scattering Theory of Wave and Particles (McGraw-Hill, New York 1966), Chap 6.

* 译者注:原文为波强(*intensity*)，这里实际为波幅。

$$iG(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t). \tag{1.1}$$

这样推广的 Huygens 原理可被表示为下式

$$\psi(\boldsymbol{x}',t') = i\int d^3x G(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x},t), \quad t' > t. \tag{1.2}$$

这里 $\psi(\boldsymbol{x}',t')$ 为 t' 时刻到达 $\boldsymbol{x}'$ 处的波。量 $G(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)$ 被称之为 Green 函数或传播子，它描述在过去时刻(时刻 $t<t'$)点 $\boldsymbol{x}$ 处的波 $\psi(\boldsymbol{x},t)$ 对在稍后时刻 t' 点 $\boldsymbol{x}'$ 处的波 $\psi(\boldsymbol{x}',t')$ 的影响。若 Green 函数 $G(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)$ 是已知的，那么，从一个给定初态 $\psi(\boldsymbol{x},t)$ 演变而来的物理末态 $\psi(\boldsymbol{x}',t')$ 能用(1.2)式计算出来。所以求出 G 就求解了整个散射问题。换句话说，求出 G 就等价于给出了 Schrödinger 方程的完整解。不过，首先我们需要了解一些数学知识，并对各种 Green 函数的定义方式进行讨论。

1.3 Green 函数和传播子

要理解 Green 函数的数学涵义，最好还是从 Schrödinger 方程出发

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = \hat{H}\psi(\boldsymbol{x},t) = (\hat{H}_0 + V(\boldsymbol{x},t))\psi(\boldsymbol{x},t),$$

$$\hat{H}_0 = \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2. \tag{1.3}$$

该方程描述一个质量为 m 的粒子与确定空间的一个势源的相互作用。若用约化质量 $\mu = m_1m_2/(m_1+m_2)$ 取代 m，(1.3)式仍适用于(非相对论性)两体问题。微分方程(1.3)是关于时间的一阶方程，即不含更高阶的时间导数。所以，对时间的一阶导数 $\partial\psi(\boldsymbol{x},t)/\partial t$，总能用 $\psi(\boldsymbol{x},t)$ 来表示，这就是(1.3)式的确切含意。接下来我们要做的事是：若已知某一确定时刻(例如 t_0)在所有空间点的 $\psi(\boldsymbol{x},t)$ 的值，即已知 $\psi(\boldsymbol{x},t_0)$，我们可以计算出所有空间任何时刻(稍早时刻($t<t_0$)及稍晚时刻($t>t_0$))的波函数 $\psi(\boldsymbol{x},t)$。而且，由于 Schrödinger 方程是 ψ 的线性方程，所以叠加原理成立。即，所有解可以线性叠加，且不同时刻的波函数($\psi(\boldsymbol{x},t)$ 和 $\psi(\boldsymbol{x}',t')$)间成线性关系。这意味着 $\psi(\boldsymbol{x},t)$ 必须满足线性齐次积分方程

$$\psi(\boldsymbol{x}',t') = i\int d^3x G(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x},t). \tag{1.4}$$

式中积分范围遍及整个空间。这个关系也给出了 G 函数的定义。它被称之为相应 Hamilton 量 $\hat{H}$ 的 Green 函数。重要的一点是要注意，与(1.2)不同，关系式(1.4)不区分在时间($t'>t$)上向前传播的 ψ 或($t'<t$)向后传播的 ψ。然而，在大多数情况下，又需要区别这两种情况。对朝前传播的情况，我们可定义推迟的 Green 函数或传播子为：

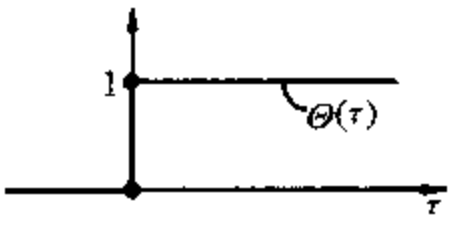


图 1.2 单位跃阶函数

$$G^+(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t) = \begin{cases} G(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t) & t' > t; \\ 0 & t' < t. \end{cases} \tag{1.5}$$

引用阶跃函数 $\Theta(\tau)$(图 1.2)

$$\Theta(\tau)=\begin{cases}1 & \tau>0;\\ 0 & \tau<0.\end{cases} \tag{1.6}$$

因此,对 $t'>t$,由 $\psi(\boldsymbol{x},t)$到 $\psi(\boldsymbol{x}',t')$的因果演化,能用下列公式表达

$$\Theta(t'-t)\psi(\boldsymbol{x}',t)=\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x G^+(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x},t)\,. \tag{1.7}$$

对于 $t'<t$,由于(1.5)和(1.6)一起给出 0=0,(1.7)式是不重要的;对于 $t'>t$,(1.7)式和(1.4)式相同。方程(1.7)式保证 $\psi(\boldsymbol{x},t)$的初态波包演变为后来的 $t'>t$ 时的 $\psi(\boldsymbol{x}',t')$。因而,这就存在着 $\psi(\boldsymbol{x}',t')$与 $\psi(\boldsymbol{x},t)$间的因果关系。我们将在 1.6 节及练习 1.1 中再讨论这一问题。若要描述逆时间轴演变的波包,引进下列超前 Green 函数 G^-是方便的:

$$G^-(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)=\begin{cases}-G(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t) & t'<t;\\ 0 & t'>t.\end{cases} \tag{1.8}$$

因此,用当前的一个波包 $\psi(\boldsymbol{x},t)$($t'<t$)确定较早的波包 $\psi(\boldsymbol{x}',t')$,可按照下列公式进行

$$\Theta(t-t')\psi(\boldsymbol{x}',t')=-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x G^-(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x},t)\,. \tag{1.9}$$

对于 $t'>t$,由于(1.6)和(1.8),(1.9)式仍为不重要的;对于 $t'<t$,(1.9)式和(1.4)式相同。

练　习

1.1　G 的性质

问题:证明下列关系式成立

a) 若 $t'>t_1>t$:

$$G^+(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)=\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x_1 G^+(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x}_1,t_1)G^+(\boldsymbol{x}_1,t_1;\boldsymbol{x},t),$$

b) 若 $t'<t_1<t$:

$$G^-(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)=-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x_1 G^-(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x}_1,t_1)G^-(\boldsymbol{x}_1,t_1;\boldsymbol{x},t),$$

c) 若 $t>t_1$:

$$\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')=\int \mathrm{d}^3x_1 G^+(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x}_1,t_1)G^-(\boldsymbol{x}_1,t_1;\boldsymbol{x},t),$$

d) 若 $t<t_1$:

$$\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')=\int \mathrm{d}^3x_1 G^-(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x}_1,t_1)G^+(\boldsymbol{x}_1,t_1;\boldsymbol{x},t).$$

解答:a)分别考虑(1.7)和(1.9)式前两个结论(a)及(b)是不难理解的。若我们考虑任一个波包 $\psi(\boldsymbol{x},t)$向未来传播,我们可得结论:

$$\psi(\boldsymbol{x}',t')=\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x G^+(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x},t). \tag{1}$$

若 $t'>t$，则在任意时刻 t 可以选定 $\psi(\boldsymbol{x},t)$，从而我们也能插入一个中间过程：

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{x}',t') &= \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x_1 G^+(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x}_1,t_1)\psi(\boldsymbol{x}_1,t_1)\\ &= \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x_1 G^+(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x}_1,t_1)\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x G^+(\boldsymbol{x}_1,t_1;\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x},t)\\ &= \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x_1 G^+(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x}_1,t_1)G^+(\boldsymbol{x}_1,t_1;\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x},t).\end{aligned}\tag{2}$$

比较(1)和(2)式，(a)成立 。

b) (b)的证明可用类似的方法进行：

$$\psi(\boldsymbol{x}',t') = -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x G^-(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x},t).\tag{3}$$

若 $t'<t$，我们再插入一个中间过程

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{x}',t') &= -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x_1 G^-(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x}_1,t_1)\psi(\boldsymbol{x}_1,t_1)\\ &= -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x_1 G^-(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x}_1,t_1)(-\mathrm{i})\int \mathrm{d}^3x G^-(\boldsymbol{x}_1,t_1;\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x},t)\\ &= -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x(-\mathrm{i})\int \mathrm{d}^3x_1 G^-(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x}_1,t_1)G^-(\boldsymbol{x}_1,t_1;\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x},t).\end{aligned}\tag{4}$$

若 $t'<t_1<t$，比较(3)和(4)，(b)成立

c) 类似地可证明(c)与(d)也成立。首先，我们对 $t>t_1$ 写出

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{x}',t) &= \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x_1 G^+(\boldsymbol{x}',t;\boldsymbol{x}_1,t_1)\psi(\boldsymbol{x}_1,t_1)\\ &= \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x_1 G^+(\boldsymbol{x}',t;\boldsymbol{x}_1,t_1)(-\mathrm{i})\int \mathrm{d}^3x G^-(\boldsymbol{x}_1,t_1;\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x},t)\\ &= \int \mathrm{d}^3x\int \mathrm{d}^3x_1 G^+(\boldsymbol{x}',t;\boldsymbol{x}_1,t_1)G^-(\boldsymbol{x}_1,t_1;\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x},t).\end{aligned}\tag{5}$$

对一个不变时刻 t，借助 δ 函数 $\psi(\boldsymbol{x},t)$能被表达为 ：

$$\psi(\boldsymbol{x}',t) = \int \mathrm{d}^3x\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\psi(\boldsymbol{x},t).\tag{6}$$

比较关系式(5)和(6)即得(c)。

d) 对 $t<t_1$，我们可完全照抄(c)的证明：

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{x}',t) &= -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x_1 G^-(\boldsymbol{x}',t;\boldsymbol{x}_1,t_1)\psi(\boldsymbol{x}_1,t_1)\\ &= \int \mathrm{d}^3x\int \mathrm{d}^3x_1 G^-(\boldsymbol{x}',t;\boldsymbol{x}_1,t_1)G^+(\boldsymbol{x}_1,t_1;\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x},t).\end{aligned}\tag{7}$$

比较(7)和积分示(6)即得(d)。

1.4　ψ 的一个积分方程

现在，我们的目的是给出 Green 函数形式的定义。为此，我们仍从物理上用直观的方法来理

解传播子方法。因为自由粒子运动是完全已知的，所以自由 Green 函数 $G_0(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)$能明显地被构造出来(参见 1.3 例)。然而，若我们加进势 $V(\boldsymbol{x},t)$，则 G_0 被修改为 $G(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)$，同时问题就变成怎样从自由 Green 函数 $G_0(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)$计算出 Green 函数 $G(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)$(包括相互作用)。

为回答这一问题，我们假定在 t_1 时的相互作用势 $V(\boldsymbol{x},t)$作用一小段时间间隔 Δt_1，在该小段时间间隔内的势为 $V(\boldsymbol{x}_1,t_1)$。在时刻 t_1 之前，波函数是自由粒子函数，即对 $t<t_1$，粒子按照自由传播子 G_0 传播。在 $t=t_1$ 时，$V(\boldsymbol{x}_1,t_1)$发生作用，并产生散射波，这能从 Schrödinger 方程计算出。

$$\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t_1}-\hat{H}_0\right)\psi(\boldsymbol{x}_1,t_1)=V(\boldsymbol{x}_1,t_1)\psi(\boldsymbol{x}_1,t_1)\,. \tag{1.10}$$

正如已经指出的，$V(\boldsymbol{x}_1,t_1)$仅在时间间隔 Δt_1 内作用。我们用自由波 ϕ 表示生成的波：

$$\psi(\boldsymbol{x}_1,t_1)=\phi(\boldsymbol{x}_1,t_1)+\Delta\psi(\boldsymbol{x}_1,t_1), \tag{1.11}$$

式中 ϕ 为自由 Schrödinger 方程的解。

$$\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t_1}-\hat{H}_0\right)\phi(\boldsymbol{x}_1,t_1)=0. \tag{1.12}$$

而散射波 $\Delta\psi(\boldsymbol{x}_1,t_1)$在 $t<t_1$ 时为零。将(1.11)代入(1.10)并考虑(1.12)，我们发现：

$$\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t_1}-\hat{H}_0\right)\Delta\psi(\boldsymbol{x}_1,t_1)=V(\boldsymbol{x}_1,t_1)(\phi(\boldsymbol{x}_1,t_1)+\Delta\psi(\boldsymbol{x}_1,t_1)). \tag{1.13}$$

略去上式右端的小项 $V\Delta\psi$，

$$\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t_1}-\hat{H}_0\right)\Delta\psi(\boldsymbol{x}_1,t_1)=V(\boldsymbol{x}_1,t_1)\phi(\boldsymbol{x}_1,t_1). \tag{1.14}$$

这个微分方程能在时间间隔 t_1 到 $t_1+\Delta t_1$ 内积分。考虑到 $\Delta\psi(\boldsymbol{x}_1,t_1)=0$，我们得到：

$$\mathrm{i}\hbar\,\Delta\psi(\boldsymbol{x}_1,t_1+\Delta t_1)=\int_{t_1}^{t_1+\Delta t_1}\mathrm{d}t'(\hat{H}_0\Delta\psi(\boldsymbol{x}_1,t')+V(\boldsymbol{x}_1,t')\phi(\boldsymbol{x}_1,t')). \tag{1.15}$$

上式右边第一项是关于小量 $\Delta\psi$ 和 Δt_1 的二阶小量。所以，在一级近似下，散射波可写成

$$\Delta\psi(\boldsymbol{x}_1,t_1+\Delta t_1)=\frac{-\mathrm{i}}{\hbar}V(\boldsymbol{x}_1,t_1)\phi(\boldsymbol{x}_1,t_1)\Delta t_1. \tag{1.16}$$

因为势 $V(\boldsymbol{x}_1,t_1)$被假设为在时间间隔 Δt_1 后消失，散射波在此之后也按自由传播子 G_0 传播。我们得到在稍后时间 $t'>t_1$

$$\begin{aligned}\Delta\psi(\boldsymbol{x}',t')&=\mathrm{i}\int\mathrm{d}^3x_1G_0(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x}_1,t_1)\Delta\psi(\boldsymbol{x}_1,t_1)\\&=\int\mathrm{d}^3x_1G_0(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x}_1,t_1)\,\frac{1}{\hbar}V(\boldsymbol{x}_1,t_1)\phi(\boldsymbol{x}_1,t_1)\Delta t_1.\end{aligned} \tag{1.17}$$

这儿，我们已用 t_1 取代了 $t_1+\Delta t_1$，这在无穷小时间间隔内是正确的。注意到 $\phi(\boldsymbol{x}_1,t_1)$是在势 $V(\boldsymbol{x}_1,t_1)$散射之前到达时空点$(\boldsymbol{x}_1,t_1)$的波。然后，势 $V(\boldsymbol{x}_1,t_1)$在短时间间隔 Δt_1 内作用，它将入射波修改成 $1/\hbar\,V(\boldsymbol{x}_1,t_1)\phi(\boldsymbol{x}_1,t_1)\Delta t_1$，同时这个“被扰动”的波自由地传播。这能用从$(\boldsymbol{x}_1,t_1)$到$(\boldsymbol{x}',t')$的传播子 $G_0(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)$描述。从一个无穷远处的任意波包 ϕ 在时间间隔 Δt_1 内由 $V(\boldsymbol{x}_1,t_1)$势散射一次而形成的总波 $\psi(\boldsymbol{x}',t')$由下式给出

$$\begin{aligned}\psi(x',t') &= \phi(x',t') + \Delta\psi(x',t') \\ &= \phi(x',t') + \int \mathrm{d}^3x_1 G_0(x',t';x_1,t_1)\,\frac{1}{\hbar}V(x_1,t_1)\phi(x_1,t_1)\Delta t_1 \\ &= \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\,(G_0(x',t';x,t) \\ &\quad + \int \mathrm{d}^3x_1\Delta t_1 G_0(x',t';x_1,t_1)\,\frac{1}{\hbar}V(x_1,t_1)G_0(x_1,t_1;x,t))\phi(x,t)\,. \qquad (1.18)\end{aligned}$$

将此式与(1.2)或(1.4)比较，我们能将括号内的表达式定义成传播子 $G(x',t';x,t)$：

$$\begin{aligned}G(x',t';x,t) &= G_0(x',t';x,t) \\ &\quad + \int \mathrm{d}^3x_1\Delta t_1 G_0(x',t';x_1,t_1)\,\frac{1}{\hbar}V(x_1,t_1)G_0(x_1,t_1;x,t)\,. \qquad (1.19)\end{aligned}$$

现在我们已达到从自由传播子 G_0 计算传播子 G 的目的，至少对于在这种短时间间隔 Δt_1 内才起作用的相互作用势 $V(x_1,t_1)$的简单情况。(1.19)式中各项能用图 1.3 的时空图表示。(1.19)式的第一项相应于波包从时空点(x,t)到(x',t')的自由传播，这可用图 1.3a 来表示。(1.19)式第二项表示从时空点(x,t)到(x_1,t_1)的自由传播；在(x_1,t_1)处，粒子在时间间隔 Δt_1 内经受势$V(x_1,t_1)$的散射。此后，它又自由传播到时空点(x',t')。这个过程可用图 1.3b 来表示。

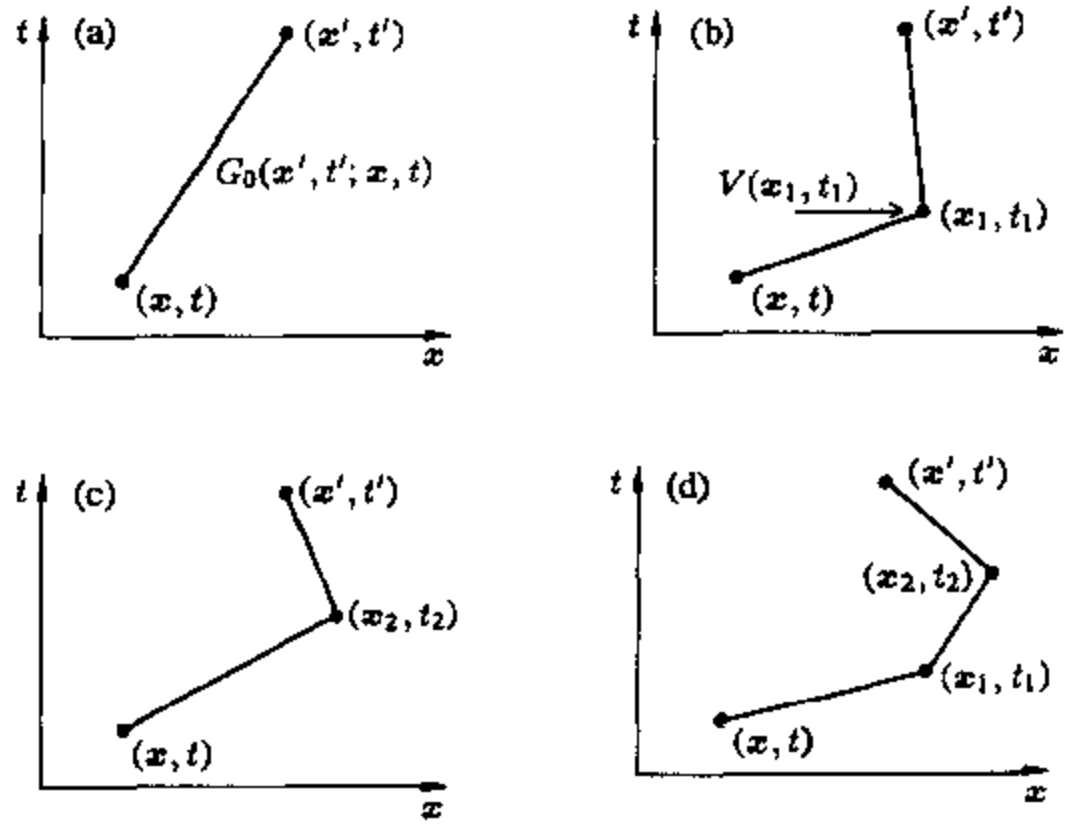


图 1.3(a)～(d)　图示说明散射过程。(a) 一个粒子从时空点(x,t)到(x',t)的自由传播。(b) 粒子从(x,t)经过点(x_1,t_1)一次散射到(x',t')。(c) 现在位于点(x_2,t_2)并与图(b)作相同的散射。最后(d)表示粒子在点(x_1,t_1)和(x_2,t_2)的双重散射。

若我们在时刻 $t_2>t_1$ 时加进第二个势 $V(x_2,t_2)$作用一段，时间间隔为 Δt_2，那么，又会产生另一个散射波，它对总波 $\psi(x',t')$在时刻 $t'>t_2$ 时的贡献 $\Delta\psi(x',t')$，可立即根据 1.17 式表示成下式

$$\Delta\psi(x') = \int \mathrm{d}^3x_2 G_0(x';x_2)V(x_2)\psi(x_2)\Delta t_2$$

$$= \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x_2\Delta t_2 G_0(x';x_2)V(x_2)$$

$$\times\left\{G_0(x_2;x) + \int \mathrm{d}^3x_1\Delta t_1 G_0(x_2;x_1)V(x_1)G_0(x_1;x)\right\}\phi(x)\,. \tag{1.20}$$

从(1.18)式,我们已代入了到达时空点$(\boldsymbol{x}_2,t_2)$的散射波$\psi(2)$。此外,我们已引入明显缩写记号

$$(\boldsymbol{x},t) = x,$$

$$\frac{1}{\hbar}V(\boldsymbol{x}_i,t_i) = V(x_i). \tag{1.21}$$

注意,我们已经将$1/\hbar$因子吸收到势中去。因为根据(1.16)式知,它们总是一道出现。(1.20)式中与$G_0(x';x_2)V(x_2)G_0(x_2;x)\phi(x)$成正比的第一项代表着在时空点2处的单散射。它可用图1.3c来描述。(1.20)式的第二项正比于

$$G_0(x';x_2)V(x_2)G_0(x_2;x_1)V(x_1)G_0(x_1;x)\phi(x).$$

它表示在时空点x_1和x_2处在势上的双重散射,该过程由图1.3d来表示。

至此,在经过自由传播和单、双散射后达到时空点$(\boldsymbol{x}',t')$的总波就成为(1.18)式分波(这个波来自于自由传播和在$(\boldsymbol{x}_1,t_1)$处的单散射)和(1.20)式分波(这个波来自在$(\boldsymbol{x}_2,t_2)$的单散射及$(\boldsymbol{x}_1,t_1)$和$(\boldsymbol{x}_2,t_2)$的双散射)之和。这样导得

$$\psi(x') = \phi(x') + \int \mathrm{d}^3x_1\Delta t_1 G_0(x';x_1)V(x_1)\phi(x_1)$$

$$+ \int \mathrm{d}^3x_2\Delta t_2 G_0(x';x_2)V(x_2)\phi(x_2)$$

$$+ \int \mathrm{d}^3x_1\Delta t_1\mathrm{d}^3x_2\Delta t_2 G_0(x';x_2)V(x_2)G_0(x_2;x_1)V(x_1)\phi(x_1)\,. \tag{1.22}$$

若我们在n个时刻$t_1<t_2<t_3<\cdots<t_n$加进势V作用,时间间隔分别为$\Delta t_1,\Delta t_2,\cdots$,那么显然地,(1.22)必被推广为

$$\psi(x') = \phi(x') + \sum_i \int \mathrm{d}^3x_i\Delta t_i G_0(x';x_i)V(x_i)\phi(x_i)$$

$$+ \sum_{i,j;t_i>t_j} \int \mathrm{d}^3x_i\Delta t_i\mathrm{d}^3x_j\Delta t_j G_0(x';x_i)V(x_i)G_0(x_i;x_j)V(x_j)\phi(x_j)$$

$$+ \sum_{i,j,k;t_i>t_j>t_k} \int \mathrm{d}^3x_i\Delta t_i\mathrm{d}^3x_j\Delta t_j\mathrm{d}^3x_k\Delta t_k G_0(x';x_i)V(x_i)$$

$$\times G_0(x_i;x_j)V(x_j)G_0(x_j;x_k)V(x_k)\phi(x_k)$$

$$+ \cdots\,. \tag{1.23}$$

注意:式(1.22)和(1.33)式中积分是在三维空间上进行的,即$\int \mathrm{d}^3x_i$。求和是对一系列时间值t_i作的,$\sum_i \int \mathrm{d}^3x_i\,\Delta t_i = \sum_i \Delta t_i \int \mathrm{d}^3x_i$。下面,我们取极限$\Delta t_i \to 0$和$n\to\infty$时,$\sum_i \int \mathrm{d}^3x_i\Delta t_i$就变

成一个四维体积分 $\int d^4x_i$。若我们将(1.23)中 $\phi(x')$和 $\phi(x_i)$表示成

$$\begin{aligned}\phi(x') &= i\int d^3x G_0(x';x)\phi(x),\\ \phi(x_i) &= i\int d^3x G_0(x_i;x)\phi(x).\end{aligned} \tag{1.24}$$

我们最后得到

$$\begin{aligned}\phi(x') =& i\int d^3x\Big[G_0(x';x)+\sum_i\int d^3x_i\Delta t_i G_0(x';x_i)V(x_i)G_0(x_i;x)\\ &+\sum_{i,j;t_i>t_j}\int d^3x_1\Delta t_i d^3x_j\Delta t_j G_0(x';x_i)V(x_i)G_0(x_i;x_j)V(x_j)G_0(x_j,x)\\ &+\sum_{i,j,k;t_i>t_j>t_k}\int d^3x_i\Delta t_i d^3x_j\Delta t_j d^3x_k\Delta t_k G_0(x';x_i)V(x_i)\\ &\times G_0(x_i;x_j)V(x_j)G_0(x_j;x_k)V(x_k)G_0(x_k;x)+\cdots\Big]\phi(x)\\ \equiv& i\int d^3x G(x';x)\phi(x).\end{aligned} \tag{1.25}$$

比较(1.25)式与(1.2)或(1.4)式，便可得出包括相互作用的 Green 函数 $G(x',x)$的完整表达式。按照自由 Green 函数 $G_0(x';x)$作展开，完全 Green 函数为

$$\begin{aligned}G(x';x) =& G_0(x';x)+\sum_i\int d^3x_i\Delta t_i G_0(x';x_i)V(x_i)G_0(x_i;x)\\ &+\sum_{i,j;t_i>t_j}\int d^3x_1\Delta t_i d^3x_j\Delta t_j G_0(x';x_i)V(x_i)G_0(x_i;x_j)V(x_j)G_0(x_j,x)\\ &+\sum_{i,j,k;t_i>t_j>t_k}\int d^3x_i\Delta t_i d^3x_j\Delta t_j d^3x_k\Delta t_k G_0(x';x_i)V(x_i)\\ &\times G_0(x_i;x_j)V(x_j)G_0(x_j;x_k)V(x_k)G_0(x_k;x)+\cdots.\end{aligned} \tag{1.26}$$

我们已注意到上式的严格时序。然而，如果我们引入下列推迟的 Green 函数 $G^+(x',x)$(参见(1.5))就可避免作多重求和的限制

$$\begin{aligned}G_0^+(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t) &= \begin{cases}0 & t'<t,\\ G_0(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t) & t'>t,\end{cases}\\ G^+(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t) &= \begin{cases}0 & t'<t,\\ G(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t) & t'>t.\end{cases}\end{aligned} \tag{1.27}$$

而且，在取连续极限 $\Delta t_i\to 0$ 时，(1.25)和(1.26)式对时间间隔求和可用对时间积分 $\int dt\cdots$来取代。这将导出下面推迟的相互作用 Green 函数的级数展开式

$$\begin{aligned}G^+(x';x) =& G_0^+(x';x)+\int d^4x_1 G_0^+(x';x_1)V(x_1)G_0^+(x_1;x)\\ &+\int d^4x_1 d^4x_2 G_0^+(x';x_1)V(x_1)G_0^+(x_1;x_2)V(x_2)G_0^+(x_2;x)+\cdots.\end{aligned} \tag{1.28}$$

这儿，我们已用到缩写

$$d^4x = d^3x dt = d^3x dx_0. \tag{1.29}$$

在(1.28)中，含相互作用的 Green 函数 G 被展开成多重散射事件的级数形式，其中单散射事件间传播是由自由 Green 函数 G_0 来确定的。我们将假定这一多重散射级数是收敛的，同时也略去来自可能的势 V 中的束缚态所引起的复杂性。

相互作用 Green 函数有可能被表示成封闭形式。这可通过对级数(1.28)式作形式求和而获得。

$$G^+(x';x) = G_0^+(x';x) + \int d^4x_1 G_0^+(x';x_1)V(x_1)G^+(x_1;x). \tag{1.30}$$

这是一个关于 G^+ 的积分方程，它通常被称之为 Lippmann-Schwinger 方程。显而易见，多重散射级数(1.28)可由(1.30)积分方程作迭代获得。类似地，对关于波函数 $\psi(x')$ 的级数(1.25)作求和便得：

$$\begin{aligned}
\psi(x') &= \lim_{t\to-\infty} i\int d^3x G^+(x';x)\phi(x) \\
&= \lim_{t\to-\infty} i\int d^3x\left(G_0^+(x';x) + \int d^4x_1 G_0^+(x',x_1)V(x_1)G^+(x_1;x)\right)\phi(x) \\
&= \phi(x') + \lim_{t\to-\infty}\int d^4x_1 G_0^+(x',x_1)V(x_1) i\int d^3x G^+(x_1;x)\phi(x) \\
&= \phi(x') + \underbrace{\int d^4x_1 G_0^+(x',x_1)V(x_1)\psi(x_1)}_{\text{散射波}}.
\end{aligned} \tag{1.31}$$

这是一个关于 $\psi(x')$ 的积分方程。我们会意识到，到目前为止，我们还没有解决什么问题，因为我们必须要对一个仍未知的波函数 ψ 积分。在某种意义上，积分方程式(1.30,1.31)比原始的微分方程(1.3)更有用。它允许我们在弱微扰(那就是一个小扰动势 V)情况下作系统的近似，而且，我们可以很方便地加一些正确的边界条件(参见 1.5 节中的讨论)。

应该注意到不仅 $G_0^+(x',x)$ 在 $t'<t$ 消失，而且 $G^+(x',x)$ 也消失。这种推迟 Green 函数的性质表达了贯穿于(1.31) 和(1.25)基本过程中的因果性原理。例如，展开式(1.26)表明，仅当这些附加作用在迟后时刻($t_k<t_i,t_j$)发生，t_k 时刻与势 V 的相互作用才能影响附加的散射相互作用。

让我们转到散射展开式(1.28)。如果无穷级数(1.28)在有限项之后截断，我们就可以计算 G^+ 作为 V 和 G_0^+ 的泛函形式。给定 G^+ 我们便能立即解出初值问题。如果波函数在某稍早时刻是已知的话，那么根据(1.31)式，我们只要作简单积分便可获得波函数 $\psi(x',t')$。

1.5 散射问题的应用

让我们考虑一个散射问题。我们已知入射波包 $\phi(x,t)$，它描述一个在无限远过去向散射中心运动的一粒子。我们要构造与势 $V(x,t)$ 相互作用后产生的波，它出现在无穷远未来。我们把散射问题理想化为在初始时刻无相互作用，即

$$V(\boldsymbol{x},t)\to 0 \quad 当 \quad t\to-\infty,$$

从而初态波 ϕ 是满足一定初始条件的自由粒子 Schrödinger 方程的解[①]。精确的波 $\psi(\boldsymbol{x},t)$ 在 $t\to-\infty$ 极限下接近于入射波 $\phi(\boldsymbol{x},t)$

$$\lim_{t\to-\infty}\psi(\boldsymbol{x},t)=\phi(\boldsymbol{x},t)\,. \tag{1.32}$$

根据(1.25,1.31)在无穷远未来精确的波 $\psi^{(-)}$ 由下式给出

$$\begin{aligned}\psi^{(+)}(\boldsymbol{x}',t')&=\lim_{t\to-\infty}\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x G^{+}(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)\phi(\boldsymbol{x},t)\\&=\phi(x')+\underbrace{\int \mathrm{d}^4x_1 G_0^{+}(x';x_1)V(x_1)\psi^{(+)}(x_1)}_{\text{散射波}}.\end{aligned} \tag{1.33}$$

方程中 $\psi^{(-)}(x_1)$ 是自由(1.32)初态波包产生的精确波。ψ 的上标(+)表示我们所处理的波是传向未来的。正如所指出的,(1.33)中的第二项代表着散射波。它包括所有单重和多重散射。现在,我们假定势 $V(\boldsymbol{x},t)$ 在某一确定时刻后消失,即

$$\lim_{t'\to\infty}V(\boldsymbol{x}',t')=0\,. \tag{1.34}$$

若相互作用势具有短程性,这一条件将被满足。例如,考虑两粒子间的相互散射,当它们相接近时,相互作用从零开始增加,随着它们的分离,相互作用逐渐减为零(图 1.4)。若这条件不满足,我们可以采用绝热截断方案。这意味着强行使势渐近消失,例如,通过作替换

$$V(\boldsymbol{x},t)\to \mathrm{e}^{-\lambda|t|}V(\boldsymbol{x},t).$$

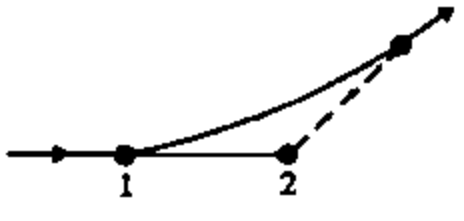


图 1.4　粒子的散射:当它们接近时相互作用增加,当它们分离时相互作用减弱

截断参数 λ 必须选得足够小,以确保截断不引起伪瞬激发态。

现在,我们可以考虑在无穷远未来,即极限 $t'\to\infty$ 时的精确波 $\psi^{(+)}(\boldsymbol{x}',t')$。所有关于散射波的信息都概括在几率幅中。几率幅的平方代表一个粒子从一个给定的、自由的初态 ϕ_i 将被散射到极限 $t'\to+\infty$ 时的各种终态 ϕ_f 的几率。由于在 $t\to-\infty$ 和 $t\to+\infty$ 时,势被假定是消失的,我们就可以考虑 ϕ 为平面波。

$$\phi_f(\boldsymbol{x}',t')=\frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}}\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_f\cdot\boldsymbol{x}'-\omega_f t')]\,. \tag{1.35}$$

平面波(1.35)取了连续归一化(或 δ 函数归一化)。或者,我们可以采用箱归一化,粒子被限在一

---

① 文中所定义的绝热近似是假设 Schrödinger 方程的解能近似成一个瞬时 Hamilton 量的定态本征解,从而在时刻 t_1 的某一本征函数连续转变成在滞后一个时刻相应的本征函数。如果我们能解任意时刻的方程:

$$H(t)\phi_n(t)=E_n(t)\phi_n(t)$$

那么我们希望有这样一个的体系:只要 $H(t)$ 随时间缓慢变化,假设该体系在时刻 $t=0$ 具有能量 $E_m(0)$ 的不连续的非简并态 $\phi_m(t)$,它在 t 时刻将变成能量 $E_m(t)$ 的 $\phi_m(t)$ 态。然而,这意味着不论有没有 $H(t)$ 都不能引起到其他态 $\phi_k(t)$ $(k\neq m)$ 的激发!绝热近似的可靠性能很容易受到检验:如果一个系统的典型的激发能量是 $\Delta E\approx E_m-E_k$,那么,其相应的时间标度量级为 $\Delta t\approx\hbar/\Delta E$。作用时间必须大到可与 Δt 相当!

个体积为 V 的箱内。从而动量变量为不连续的，这时我们必须作替代

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \to \frac{1}{\sqrt{V}} . \tag{1.36}$$

取代 Dirac δ 函数 $\delta^3(k_f-k_i)$的是 Kronecker δ 符号

$$\delta_{k_f,k_i} = \begin{cases} 1 & \boldsymbol{k}_f = \boldsymbol{k}_i , \\ 0 & \boldsymbol{k}_f \neq \boldsymbol{k}_i . \end{cases}$$

几率幅是 Heisenberg 散射矩阵元或 S 矩阵元①

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \lim_{t'\to\infty} \langle \phi_f(\boldsymbol{x}',t') | \psi_i^{(+)}(\boldsymbol{x}',t') \rangle \\ &= \lim_{t'\to\infty} \int \mathrm{d}^3x' \, \phi_f^*(\boldsymbol{x}',t') \psi_i^{(+)}(\boldsymbol{x}',t') \\ &= \lim_{t'\to\infty} \lim_{t\to-\infty} \mathrm{i} \int \mathrm{d}^3x' \mathrm{d}^3x \int \phi_f^*(\boldsymbol{x}',t') G^+(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t) \phi_i(\boldsymbol{x},t) \\ &= \lim_{t'\to\infty} \int \mathrm{d}^3x' \, \phi_f^*(\boldsymbol{x}',t') \left(\phi_i(\boldsymbol{x}',t') + \int \mathrm{d}^4x G_0^+(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t) V(\boldsymbol{x},t) \psi_i^{(+)}(\boldsymbol{x},t) \right) \\ &= \delta^3(\boldsymbol{k}_f - \boldsymbol{k}_i) + \lim_{t'\to\infty} \int \mathrm{d}^3x' \mathrm{d}^4x \phi_f^*(\boldsymbol{x}',t') G_0^+(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t) V(\boldsymbol{x},t) \psi_i^{(+)}(\boldsymbol{x},t) . \end{aligned} \tag{1.37}$$

$\psi_i^{(+)}$ 为波动方程的解(1.33)，它是在 $t\to-\infty$时从产生的平面波演变面来，并在散射过程中携带动量 k_i。极限 $t\to\pm\infty$总意味着

$t\to$大的有限的时间 T

此刻，粒子停止作用。例如，典型的时间有粒子碰撞时间、产生时间或探测时间。

最终，若我们从迭代方程(1.33)中插入 $\psi_i^{(+)}$，我们得到用多重散射过程表示的 S 矩阵的展开形式，即

$$\begin{aligned} S_{fi} = {} & \delta^3(\boldsymbol{k}_f - \boldsymbol{k}_i) + \lim_{t'\to\infty} \int \mathrm{d}^3x' \mathrm{d}^4x \phi_f^*(\boldsymbol{x}',t') G_0^+(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t) V(\boldsymbol{x},t) \phi_i(\boldsymbol{x},t) \\ & + \lim_{t'\to\infty} \int \mathrm{d}^3x' \mathrm{d}^4x_1 \mathrm{d}^4x \phi_f^*(\boldsymbol{x}',t') \\ & \times G_0^+(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x}_1,t_1) V(\boldsymbol{x}_1,t_1) G_0^+(\boldsymbol{x}_1,t_1;\boldsymbol{x},t) V(\boldsymbol{x},t) \phi_i(\boldsymbol{x},t) \\ & + \cdots . \end{aligned} \tag{1.38}$$

第一项(δ 函数)不描述散射，但表征着没有散射的粒子通量。第二项代表着单散射，第三项为双重散射，等等。这些对 S 矩阵的贡献在图 1.3 中表示，它们的相干叠加便得到总的 S 矩阵元。

若我们用超前 Green 函数 G_0^- 和 G^-(参见(1.8)和(1.9))，采用与上述完全类似的步骤，我们能获得 S 矩阵的另一种表达式。例如，态 $\phi_f(\boldsymbol{x},t)$对应着波函数 $\phi_f^{(-)}(\boldsymbol{x},t)$，在相互作用势 $V(\boldsymbol{x},t)$消失后，它会在无穷远未来($t\to\infty$)变为 $\phi_f(\boldsymbol{x},t)$

---

① W. Heisenberg: Zeitschrift f. Naturforschung **1**, 608 (1946)，也可参见 C. Møller: Kgl. Danske Videnskab Selskab, Mat.-Fys. Medd. **23**, 1(1948) 和 J. A. Wheeler: Phys. Rev. **52**, 1107 (1937).

$$\lim_{t\to\infty}\phi_f^{(-)}(\boldsymbol{x},t)=\phi_f(\boldsymbol{x},t)\,. \tag{1.39}$$

从(1.9)式出发，我们能准确地表达这边界条件(现在带撇的$(\boldsymbol{x}',t')$和不带撇的$(\boldsymbol{x},t)$相交换)

$$\phi_f^{(-)}(\boldsymbol{x},t)=\lim_{t'\to\infty}-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x G^-(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x}',t')\phi_f(\boldsymbol{x}',t')\,. \tag{1.40}$$

我们希望跃迁$i\to f$的S矩阵元即S_{fi}能用在无穷远过去($\lim_{t\to-\infty}$)某时刻t计算的$\phi_f^{(-)}(\boldsymbol{x},t)$和$\phi(\boldsymbol{x},t)$的标积给出，

$$\begin{aligned}S_{fi}&=\lim_{t\to-\infty}\langle\phi_f^{(-)}(\boldsymbol{x},t)|\phi_i(\boldsymbol{x},t)\rangle\\&=\lim_{t\to-\infty}\lim_{t'\to\infty}\mathrm{i}\int\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3x' G^{-*}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x}',t')\phi_f^*(\boldsymbol{x}',t')\phi_i(\boldsymbol{x},t)\,.\end{aligned} \tag{1.41}$$

借助下式可立即证明它与先前定义的S矩阵的等价性

$$G^+(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)=G^{-*}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x}',t') \tag{1.42}$$

(参见练习1.2)，从而(1.41)变为

$$\begin{aligned}S_{fi}&=\lim_{t\to-\infty}\lim_{t'\to\infty}\mathrm{i}\int\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3x' G^+(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)\phi_f^*(\boldsymbol{x}',t')\phi_i(\boldsymbol{x},t)\\&=\lim_{t'\to\infty}\langle\phi_f(\boldsymbol{x}',t')|\phi_i^{(+)}(\boldsymbol{x}',t')\rangle\,.\end{aligned} \tag{1.43}$$

这与(1.37)第一行一致。这里势为实的是至关重要的，它将在练习1.2的推导中用到。(1.41)与(1.37)在复势V的情况下不相等，这在物理上是不难理解的，因为吸收势(存在$V(\boldsymbol{x},t)$的负虚部)会导致在一定态中发现粒子的几率降低。这就意味着$t'\to\infty$时的$|\phi_i^{(+)}(\boldsymbol{x}',t')|^2$通常比$t\to-\infty$时的$|\phi_i(\boldsymbol{x},t)|^2$要小，这儿$\phi_i$是产生$\phi_i^{(+)}$的态。另一方面，$t\to-\infty$时，$|\phi_f^{(-)}(\boldsymbol{x},t)|^2$通常比$t'\to\infty$时的$|\phi_f(\boldsymbol{x}',t')|^2$要大。这儿$\phi_f$是$t\to\infty$时$\phi_i^{(-)}(\boldsymbol{x},t)$转变成的态。由此，我们预料，对吸收势(1.41)比(1.37)大。

最后我们要指出S矩阵可用以下对称方式表示，而不是用(1.37)式或(1.43)式

$$S_{fi}=\langle\phi_f^{(-)}(\boldsymbol{x},t)|\phi_i^{(+)}(\boldsymbol{x},t)\rangle\,. \tag{1.44}$$

S_{fi}代表满足入射边界条件的解$\phi_i^{(+)}$和满足出射边界条件的解$\phi_f^{(-)}$间的重叠。结果与计算重叠的时刻t无关。

练　习

1.2　G^+和G^-间的关系

问题 a) 试证关系式

$$G^+(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)=G^{-*}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x}',t').$$

b) 证明(1.44)式成立。

解答：a) 我们从G^+的积分方程(1.30)出发，与由Schrödinger方程出发进行推导完全类似(参见(1.10－19))，考虑(1.8)和(1.9)的定义，可得与(1.30)相对应的G^-的积分方程

$$G^{-}(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)=G_0^{-}(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)+\int \mathrm{d}^4x_1 G_0^{-}(x';x_1)V(x_1)G^{-}(x_1,x)\,. \tag{1}$$

与(1.30)式对照,显然 Green 函数 G^{+}和 G_0^{+} 已被 G^{-}和 G_0^{-} 所取代。在例 1.3 中我们将证明自由 Green 函数的关系式成立。

$$G_0^{\dagger}(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)=G_0^{-*}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x}',t') \tag{2}$$

如果,我们迭代积分方程(1),即

$$G^{-}(x';x)=G_0^{-}(x';x)+\int \mathrm{d}^4x_1 G_0^{-}(x';x_1)V(x_1)G_0^{-}(x_1;x)$$

$$+\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2 G_0^{-}(x';x_1)V(x_1)G_0^{-}(x_1;x_2)V(x_2)G_0^{-}(x_2;x)+\cdots, \tag{3}$$

显然对(3)取复共轭就导出下式成立:

$$\begin{aligned}G^{-*}(x';x)&=G_0^{\dagger}(x;x')+\int \mathrm{d}^4x_1 G_0^{+}(x_1;x')V(x_1)G_0^{+}(x;x_1)\\&\quad+\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2 G_0^{+}(x_1;x')V(x_1)G_0^{+}(x_2;x_1)V(x_2)G_0^{+}(x;x_2)+\cdots\\&=G_0^{+}(x;x')+\int \mathrm{d}^4x_1 G_0^{\dagger}(x;x_1)V(x_1)G_0^{+}(x_1;x')\\&\quad+\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2 G_0^{+}(x;x_2)V(x_2)G_0^{+}(x_2;x_1)V(x_1)G_0^{+}(x_1;x')+\cdots\\&=G^{+}(x;x')\,.\end{aligned} \tag{4}$$

这儿,我们假定势 V 为实的:$V(x)=V^{*}(x)$。这就证明了假设的正确性。

b)F 要求的 S 矩阵元的表达式可用超前和推迟传播子表示为

$$\begin{aligned}S_{fi}=\int \mathrm{d}^3x\Big[\lim_{t'\to+\infty}\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x' G^{-*}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x}',t')\phi_f^{*}(\boldsymbol{x}',t')\Big]\\\times\Big[\lim_{t\to-\infty}\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x'' G^{+}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x}'',t'')\phi_i(\boldsymbol{x}'',t'')\Big]\,.\end{aligned} \tag{5}$$

利用(4)和练习 1.1(a),我们可求解对 d^3x 的空间积分

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^3x G^{-*}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x}',t')G^{+}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x}'',t'')&=\int \mathrm{d}^3x G^{+}(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)G^{+}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x}'',t'')\\&=-\mathrm{i}G^{+}(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x}'',t'').\end{aligned} \tag{6}$$

从而(5)变为

$$S_{fi}=\lim_{t'\to+\infty}\lim_{t''\to-\infty}\mathrm{i}\int\int \mathrm{d}^3x'\mathrm{d}^3x''\phi_f^{*}(\boldsymbol{x}',t')G^{+}(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x}'',t'')\phi_i(\boldsymbol{x}'',t''). \tag{7}$$

这与(1.37)式的第三行一致。

例　子

1.3　自由 Green 函数及其性质

我们能给出自由 Green 函数(即 $V=0$ 的情况)的显式。

正如上面那样,我们把自由 Green 函数表示为 $G_0(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)$,并注意到根据定义关系(1.2)式,任意波包 $\psi(\boldsymbol{x},t)$按照相应的势为零的量子力学运动规律在时空中变化。

$$\psi(\boldsymbol{x}',t') = \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x G_0(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x},t)\ . \tag{1}$$

最初,我们要导出在任一个时间无关势 $V(x)$情况下 Green 函数 $G(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)$的一般表达式。让我们考虑下面稳定 Schrödinger 方程本征解的正交归一完备集$(U_E(\boldsymbol{x}'))$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla'^2 + V(\boldsymbol{x}')\right)U_E(\boldsymbol{x}') = EU_E(\boldsymbol{x}')\ . \tag{2}$$

如果势 $V(\boldsymbol{x}')$与时间无关,并假定我们已知下列在某一时刻 t 的时间有关的 Schrödinger 方程的解

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi(\boldsymbol{x}',t')}{\partial t'} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla'^2 + V(\boldsymbol{x}')\right)\psi(\boldsymbol{x}',t'). \tag{3}$$

那么,我们也就能写出任意时刻 t'的解 $\psi(\boldsymbol{x}',t')$的形式表达式。为此,我们利用封闭关系把 t'时刻的 $\psi(\boldsymbol{x}',t')$按能量本征函数基 $U_E(\boldsymbol{x}')$进行展开

$$\psi(\boldsymbol{x}',t') = \sum_E A_E(t')U_E(\boldsymbol{x}')\,, \tag{4a}$$

$$A_E(t') = \int \mathrm{d}^3x' U_E^*(\boldsymbol{x}')\psi(\boldsymbol{x}',t')\ . \tag{4b}$$

当然,展开系数 $A_E(t')$是与时间相关的。若我们将展开式(4)代入式(3)并考虑到式(2),我们求得

$$\mathrm{i}\hbar\sum_E U_E(\boldsymbol{x}')\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}A_E(t') = \sum_E A_E(t')EU_E(\boldsymbol{x}')\,,$$

因为波函数 $U_E(\boldsymbol{x}')$的正交归一性,

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}A_E(t') = EA_E(t').$$

这方程解为

$$A_E(t') = A_E(t)\exp[-\mathrm{i}E(t'-t)/\hbar]\ . \tag{5}$$

众所周知,态 $U_E(\boldsymbol{x}')$作为 $\psi(\boldsymbol{x}',t')$的一部分,发现其几率 $P(E)=|A_E(t)|^2$ 是与时间无关的。

因此,若 $\psi(\boldsymbol{x}',t')$在时刻 $t'=t$ 已知,则根据(4b)我们便可定出混合系数。而它的时间依赖性可由(5)式给出。这样就得知在任意时刻 t'的 $\psi(\boldsymbol{x}',t')$,我们得到

$$\psi(\boldsymbol{x}',t') = \sum_E A_E(t')U_E(\boldsymbol{x}')$$

$$= \sum_E A_E(t)\exp[-\mathrm{i}E(t'-t)/\hbar]U_E(\boldsymbol{x}')$$

$$= \int d^3r\left(\sum_E U_E^*(\boldsymbol{x})U_E(\boldsymbol{x}')\right)\exp[-\mathrm{i}E(t'-t)/\hbar]\psi(\boldsymbol{x},t)\,. \tag{6}$$

比较(6)与(1)式,便可得到 Green 函数的本征模式展开

$$G(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x}.t) = -\mathrm{i}\sum_E U_E^*(\boldsymbol{x})U_E(\boldsymbol{x}')\exp[-\mathrm{i}E(t'-t)/\hbar]\,. \tag{7}$$

根据态 U_E 的完备关系,$t'=t$ 时右边变成 $-\mathrm{i}\delta^3(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})$。注意,我们导出的是完全 Green 函数 G,而不是 G_0,因为如果任何一个与时间无关势 $V(\boldsymbol{x})$存在时上述表达式总是成立的。作为特例 $V=0$,若我们代入自由定态解(即 U_E 的平面波解)我们便获得自由 Green 函数 G_0。利用非相对论平面波 $U_E(\boldsymbol{x})$,即波矢 $k=p/\hbar$和 $E=p^2/2m$ 的平面波

$$U_E(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}). \tag{8}$$

便可导出

$$G_0(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t) = -\frac{\mathrm{i}}{(2\pi\hbar)^3}\int\exp[\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})]\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E(t'-t)\right]\mathrm{d}^3p$$

$$= -\frac{\mathrm{i}}{(2\pi\hbar)^3}\int\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[p_x(x'-x)+p_y(y'-y)+p_z(z'-z)]\right.$$

$$\left.-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\frac{(p_x^2+p_y^2+p_z^2)}{2m}(t'-t)\right\}\mathrm{d}p_x\,\mathrm{d}p_y\,\mathrm{d}p_z, \tag{9}$$

式中,我们已经采纳了 d^3p 积分的 Cartesian 表示。进一步计算还需要基本的 Gauss 积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\exp(-\mathrm{i}ax^2) = \sqrt{\frac{\pi}{\mathrm{i}a}}\,. \tag{10}$$

首先我们考虑对 p_x 的积分并将指数配成完全平方

$$-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[\frac{p_x^2(t'-t)}{2m}-p_x(x'-x)\right]$$

$$= -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[\frac{p_x\sqrt{t'-t}}{\sqrt{2m}}-\frac{\sqrt{2m}(x'-x)}{2\sqrt{t'-t}}\right]^2+\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\frac{m(x'-x)^2}{2(t'-t)}$$

$$= -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\frac{t'-t}{2m}\xi^2+\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\frac{m(x'-x)^2}{2(t'-t)}, \tag{11}$$

式中

$$\xi = p_x-\frac{m(x'-x)}{t'-t}\,. \tag{12}$$

利用 $a=(t'-t)/2m\hbar$,我们得到第一个积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p_x\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[p_x(x'-x)-\frac{p_x^2}{2m}(t'-t)\right]\right\}$$

$$= \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\frac{m(x'-x)^2}{2(t'-t)}\right]\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\frac{(t'-t)}{2m}\xi^2\right]$$

$$= \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\frac{m(x'-x)^2}{2(t'-t)}\right]\sqrt{\frac{2\pi m\hbar}{\mathrm{i}(t'-t)}}\,. \tag{13}$$

最后,三次利用积分公式(10)后,得

$$G_0(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t) = \frac{-\mathrm{i}}{(2\pi\hbar)^3}\left[\frac{2\pi m\hbar}{\mathrm{i}(t'-t)}\right]^{3/2}\exp\left[\frac{\mathrm{i}|x'-x|^2 2m\hbar}{4\hbar^2(t'-t)}\right]$$

$$= -\mathrm{i}\left(\frac{m}{2\pi\mathrm{i}\hbar\,(t'-t)}\right)^{3/2}\exp\left[\frac{\mathrm{i}m|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|^2}{2\hbar\,(t'-t)}\right]. \tag{14}$$

这是一个不受限制的、自由 Green 函数 G_0,它既描述向未来传播,又描述反向过去传播。从式(14),容易导出推迟 Green 函数和超前 Green 函数

$$G_0^+(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t) = +\,G_0(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)\Theta(t'-t)$$

$$= -\,\mathrm{i}\left[\frac{m}{2\pi\mathrm{i}\hbar\,(t'-t)}\right]^{3/2}\exp\left[\frac{\mathrm{i}m|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|^2}{2\hbar\,(t'-t)}\right]\Theta(t'-t). \tag{15}$$

和

$$G_0^-(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t) = -\,G_0(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)\Theta(t-t')$$

$$= +\,\mathrm{i}\left[\frac{m}{2\pi\mathrm{i}\hbar\,(t'-t)}\right]^{3/2}\exp\left[\frac{\mathrm{i}m|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|^2}{2\hbar\,(t'-t)}\right]\Theta(t-t'). \tag{16}$$

由(15)与(16)式直接得到关系式

$$G_0^+(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t) = G_0^{-*}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x}',t') \tag{17}$$

顺便指出,练习 1.2 关于完全 Green 函数的结果可直接从展开式(7)得到。

在例 1.5 中我们将着手了解扩散 Green 函数,并注意若作 $t'\to -it'$,$t\to -it$ 替代,这一函数等价于上述量子粒子自由运动的 Green 函数(14)。这一结果似乎是合理的,因为扩散方程与 Schrödinger 方程相类似。

1.6 S 矩阵的幺正性

只要 Hamilton 算符是厄密的,S 矩阵的幺正性是一个重要性质。为证明这一点,我们必须证明

$$\hat{S}\ \hat{S}^{+} = 1 = \hat{S}^{+}\hat{S}\,, \tag{1.45}$$

式中 $\hat{S} = \langle S_{ik}\rangle$ 表示完全的 S 矩阵。我们可以采用上面讨论的 S 矩阵的矩阵元 $S_{fi} = \langle f|\hat{S}\ |i\rangle$ 的任何形式。特别地,我们可以(1.41)式作为证明的基础,(1.41)式是借助超前 Green 函数 G^- 建立起来的,但我们将利用(1.37)式(那里出现了推迟 Green 函数 G^+)。插入 $1 = |\gamma\rangle\langle\gamma|$,则 $\hat{S}\ \hat{S}^{+}$ 的任意矩阵元为

$$\langle\beta|\ \hat{S}\ \hat{S}^{+}\ |\alpha\rangle = \sum_{\gamma}\langle\beta|\ \hat{S}\ |\gamma\rangle\langle\gamma|\ \hat{S}^{+}\ |\alpha\rangle$$

$$= \sum_{\gamma} \langle \beta | \hat{S} | \gamma \rangle \langle \alpha | \hat{S} | \gamma \rangle^*$$

$$= \lim_{t' \to \infty} \lim_{t \to -\infty} \sum_{\gamma} \int \int \mathrm{d}^3x \mathrm{d}^3x' \phi_\beta^* (\boldsymbol{x}', t') G^+ (\boldsymbol{x}', t'; \boldsymbol{x}, t) \phi_\gamma (\boldsymbol{x}, t)$$

$$\times \int \int \mathrm{d}^3x'' \mathrm{d}^3x''' \phi_\alpha (\boldsymbol{x}'', t') G^{+*} (\boldsymbol{x}'', t'; \boldsymbol{x}''', t) \phi_\gamma^* (\boldsymbol{x}''', t) .$$

这里在$\hat{S}$和$\hat{S}^+$的矩阵元中分别采用相同的时间变量t'和t是极有利的。正如前面所指出的，在极限$t' \to +\infty, t \to -\infty$下，$S$矩阵元不依赖于这些时间，因为它假定势衰减得足够快。由于ϕ_γ形成了一个态的完备集

$$\sum_{\gamma} \phi_\gamma (\boldsymbol{x}, t) \phi_\gamma^* (\boldsymbol{x}''', t) = \delta^3 (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'''), \tag{1.46}$$

(1.45)式变换成

$$\langle \beta | \hat{S} \ \hat{S}^+ | \alpha \rangle = \lim_{t' \to +\infty} \lim_{t \to -\infty} \int \int \int \mathrm{d}^3x \mathrm{d}^3x' \mathrm{d}^3x''$$

$$\times \phi_\beta^* (\boldsymbol{x}', t') G^+ (\boldsymbol{x}', t'; \boldsymbol{x}, t) G^- (\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}'', t') \phi_\alpha (\boldsymbol{x}'', t'). \tag{1.47}$$

这里我们已利用了(1.42)，因为

$$\int \mathrm{d}^3x_1 G^+ (\boldsymbol{x}', t'; \boldsymbol{x}_1, t_1) G^- (\boldsymbol{x}_1, t_1; \boldsymbol{x}'', t') = \delta^3 (\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}'')$$

(见练习 1.1)，这导致

$$\langle \beta | \hat{S} \ \hat{S}^+ | \alpha \rangle = \lim_{t' \to +\infty} \int \int \mathrm{d}^3x' \mathrm{d}^3x'' \phi_\beta^* (\boldsymbol{x}', t') \delta^3 (\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}'') \phi_\alpha (\boldsymbol{x}'', t')$$

$$= \lim_{t' \to +\infty} \int \mathrm{d}^3x' \phi_\beta^* (\boldsymbol{x}', t') \phi_\alpha (\boldsymbol{x}', t')$$

$$= \delta_{\beta\alpha}. \tag{1.48}$$

类似地可以证明$\hat{S}^\dagger \hat{S} = 1$，这就是$S$矩阵的幺正性①。

1.7 S矩阵的对称性质

S矩阵具有反映相应 Hamilton 算符对称性质的对称性。本节我们参考了 W. Greiner, B. Müller 著《量子力学对称性》(第二版)(Springer, Berlin, Heidelberg 1994)中的详细讨论。我们认识到对称操作能由作用在 Hilbert 空间态上的幺正算符$\hat{U}$来表示。令$\hat{U}$为一个这样的算符，它将

① S矩阵幺正性的这种证明依赖于势$V(x)$在无限远过去加入而在无限远未来切断的假设。如果$V(x)$完全不随时间改变，则情况将变得更复杂。在此情况下，我们必须处理波包。势的加进或切断是由下述事实引起的：当势处在无限远过去和无限远未来时，波包是在势的影响范围之外。因为 Hamilton 量可能具有束缚态，更进一步的复杂性将会产生。在此情况下，我们可以证明波包和这些束缚态正交且波包的集合并不封闭。虽然如此，我们仍能证明对于实势S矩阵的幺正性，因为由于能量守恒不能处于束缚态(因而称这些束缚态为"闭道")。在散射形式理论的教科书中讨论这些问题，见 M. L. Goldberger 和 K. M. Watson, Scattering Theory of Waves and Particles(McGraw-Hill, New York 1966)

粒子的一个态 $\phi_\beta(x,t)$变换成另一个态

$$\phi_{\beta'}(x,t) = \hat{U}\,\phi_\beta(x,t). \tag{1.49}$$

这样因为 $\hat{U}$ 与 $\hat{H}_0$ 对易，$\phi_{\beta'}$也必须是描述系统中粒子的一个可能的自由运动态。另外，如果 $\hat{U}$ 也与 $\hat{H}$对易，则 $\psi_\alpha^{(+)}$ 是通过 $\hat{U}$ 变换成 $\psi_{\alpha'}^{(+)}$：

$$\psi_{\alpha'}{}^{(+)}(x,t) = \hat{U}\,\psi_\alpha{}^{(+)}(x,t), \tag{1.50}$$

式中 $\psi_{\alpha'}^{(+)}$也是包含相互作用 $V(x,t)$的系统的可能态，这可利用(1.49)直接从迭代方程(1.31)得到，(+)号表示朝向未来的态。现在我们得到了这种变换态间 S 矩阵元，根据(1.37)得

$$\begin{aligned}\langle\beta'|\,\hat{S}\,|\alpha'\rangle &= \langle\phi'_\beta|\psi_\alpha{}^{(+)}\rangle = \langle\hat{U}\,\phi_\beta|\hat{U}\,\psi_\alpha{}^{(+)}\rangle \\ &= \langle\phi_\beta|\hat{U}^\dagger\hat{U}\,\psi_\alpha{}^{(+)}\rangle = \langle\phi_\beta|\psi_\alpha{}^{(+)}\rangle = \langle\beta|\,\hat{S}\,|\alpha\rangle\,.\end{aligned} \tag{1.51}$$

这些矩阵元中隐含着极限 $t'\to\infty$。此方程意味着诸如由球对称势引起的任意一对态 ϕ_α,ϕ_β 间的散射幅数值上与“转动”态 $\phi_{\alpha'}=\hat{U}\,\phi_\alpha$ 和 $\phi_{\beta'}=\hat{U}\,\phi_\beta$ 间的散射幅相等。不言而喻，这两个态必须转过相同的量。若我们在(1.51)式左边直接插入转动的态，我们得到

$$\langle\beta'|\,\hat{S}\,|\alpha'\rangle = \langle\hat{U}\,\phi_\beta|\,\hat{S}\,|\hat{U}\,\phi_\alpha\rangle = \langle\beta|\hat{U}^\dagger\,\hat{S}\,\hat{U}\,|\alpha\rangle = \langle\beta|\,\hat{S}\,|\alpha\rangle, \tag{1.52}$$

即

$$\hat{U}^\dagger\hat{S}\,\hat{U} = \hat{S} \quad \text{或} \quad [\hat{U},\hat{S}\,]_- = 0 \tag{1.53}$$

必须成立。所以，我们获得重要论述：如果对称变换算符 $\hat{U}$ 与 $\hat{H}$ 对易，则 $\hat{U}$ 也与$\hat{S}$ 算符对易。

对于时间反演[①]的反幺正算符$\hat{T}$，情况更为复杂。时间反演算符$\hat{T}$能被表示为$\hat{T}=\hat{U}\,\hat{K}$。其中 $\hat{U}$ 是一个幺正算符，$\hat{K}$表示复共轭。$\hat{T}$将一个自由态 $\phi_\beta(x,t)$变换成另一个具有反向动量及反向角动量的态。时间反演态可用符号 $\phi_{-\beta}$来表示。然而，必须注意到这样一个事实，算符$\hat{T}$也改变了时间方向，取代(1.49)式的变换为

$$\hat{T}\phi_\beta(x,t) = \phi_{-\beta}(x,-t)\,. \tag{1.54}$$

例如，若

$$\phi_\beta(x,t) = N\exp[\mathrm{i}(k_\beta\cdot x - \omega_\beta t)]$$

为零自旋粒子平面波，则根据(1.54)式，态 $\phi_{-\beta}(x,t)$为

$$\phi_{-\beta}(x,t) = N^*\exp[\mathrm{i}(-k_\beta\cdot x - \omega_\beta t)]\,.$$

注意 $\phi_{-\beta}(x,t)\neq\hat{T}\phi_\beta(x,t)$，而 $\phi_{-\beta}(x,t)=\hat{T}\phi_\beta(x,-t)$。这可从(1.54)直接得到。现在让我们考虑和 Hamilton 算符对易的时间反演算符，即

$$[\hat{T},\hat{H}\,]_- = 0\,. \tag{1.55}$$

此时我们称它为时间反演不变系统。一个简单的例子：有一个势 $V(x)$，它是不随时间变化的常

---

① 见 W. Greiner, B. Müller: Quantum Mechanics-Symmetries 第三修正版 (Springer, Berlin, Heidelberg 1994)，第 11 章，以及 Theoretical Physics，卷 3 W. Greiner: Relativistic Quantum Mechanics-Wave Equations (Springer, Berlin, Heidlberg 1990) 第 12 章。

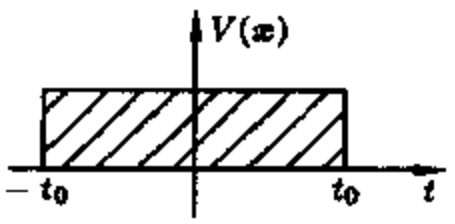


图 1.5 一个不随时间变化的势

数，但是它分别在时刻 $-t_0$ 和 t_0 处以时间对称的方式出现和消失，(参见图 1.5)。时间反演算符 $\hat{T}$ 将态 $\psi_\alpha^{(+)}(x,t)$ 变换成该系统的另一个可能态(因为时间反演不变)。与态 $\psi_\alpha^{(+)}$ 相比，该态具有相反的动量和相反的角动量。在遥远的未来，它收敛于 $\phi_{-\alpha}(x,-t)$，而与 $\psi_\alpha^{(+)}(x,t)$ 不同，后者来自于遥远过去态 $\phi_\alpha(x,t)$，故我们称这种态为时间反演态 $\psi_\alpha^{(-)}(x,-t)$。由(1.54)式，我们可以写出

$$\hat{T}\psi_\alpha^{(+)}(x,t)=\psi_{-\alpha}^{(-)}(x,-t)\,. \tag{1.56}$$

正如我们已从(1.54)中所获知的，时间反演算符 $\hat{T}$ 反转了时间演化方向($t\to -t$)。对于一个在时间反演下不变并具有厄密 Hamilton 量的系统，从(1.41)有

$$\begin{aligned}\langle-\alpha|\,\hat{S}\,|-\beta\rangle&=\lim_{t\to-\infty}\langle\psi_{-\alpha}^{(-)}(x,t)|\phi_{-\beta}(x,t)\rangle\\&=\lim_{t\to+\infty}\langle\psi_{-\alpha}^{(-)}(x,-t)|\phi_{-\beta}(x,-t)\rangle\\&=\lim_{t\to\infty}\langle\hat{T}\psi_\alpha^{(+)}(x,t)|\,\hat{T}\phi_\beta(x,t)\rangle,\end{aligned}$$

由(1.54)和(1.56)，并利用 $\hat{T}=\hat{U}\hat{K}$，得

$$\begin{aligned}\langle-\alpha|\,\hat{S}\,|-\beta\rangle&=\lim_{t\to\infty}\langle\hat{U}\hat{K}\psi_\alpha^{(+)}(x,t)|\hat{U}\hat{K}\phi_\beta(x,t)\rangle\\&=\lim_{t\to\infty}\langle\hat{K}\psi_\alpha^{(+)}(x,t)|\hat{K}\phi_\beta(x,t)\rangle\\&=\lim_{t\to\infty}\langle\phi_\beta(x,t)|\psi_\alpha^{(+)}(x,t)\rangle=\langle\beta|\,\hat{S}\,|\alpha\rangle.\end{aligned}\tag{1.57}$$

方程(1.57)表明，从初态 $|\alpha>$ 到末态 $|\beta>$ 的散射幅 $S_{\beta\alpha}$ 在数值上等同于从态 $|-\beta>$(具有与 $|\beta>$ 态的反向动量)到态 $|-\alpha>$(具有与 $|\alpha>$ 态反向动量)间的散射幅。当然，这仅对时间反演不变系统才成立，因为仅在这时态 $\hat{T}\psi_\alpha$ 才为系统的可能态。令人感兴趣的关系式(1.57)被称之为倒易定理。我们甚至还可以证明，这对复势 $V(x,t)$ 也成立①。

1.8 动量表象中的 Green 函数和它的性质

到现在为止，我们已强调了 Green 函数在物理上的应用。现在，我们要逐步发展实际计算的数学工具。首先是 Green 函数的微分方程。我们从定义关系式(1.7)式开始讨论：

$$\Theta(t'-t)\psi(x')=\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x G^+(x';x)\psi(x)\,, \tag{1.58}$$

这儿 $x=\{x_0,x\}$ 为四维位置矢缩写，$\Theta(t'-t)$ 为(1.6)式中引入的阶跃函数。为进一步分析，有必要了解下面阶跃函数的积分表示

① 参见 L. Schiff: Quantum Mechanics，第 3 版 (McGraw-Hill, New York, 1968)，第 20 章。

$$\Theta(\tau) = -\frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega + i\varepsilon}. \tag{1.59}$$

我们将在练习 1.4 中给予证明。

练　习

1.4　阶跃函数的积分表示

问题：证明

$$\Theta(\tau) = -\frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega + i\varepsilon}. \tag{1}$$

是 Heaviside 的阶跃函数的积分表示。

解答：我们把对 ω 的积分视为 ω 复平面上的回路积分(图 1.6)。其中有一阶极点 $\omega=-i\varepsilon$。对 $\tau<0$，我们选择上半平面的回路，因为在这种情况下，上半平面无穷大半圆上的贡献为零。$\omega=\rho e^{i\phi}$ 时被积函数为

$$f(\rho,\phi) = \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega} = \frac{e^{-i\rho\tau(\cos\phi + i\sin\phi)}}{\rho e^{i\phi}} = e^{-i\rho\tau\cos\phi}\frac{e^{\rho\tau\sin\phi}}{\rho e^{i\phi}}.$$

$\tau<0$ 时上半圆周对积分贡献则小于

$$\pi\rho|f(\rho,\phi)| = \frac{\pi\rho e^{-\rho|\tau|\sin\phi}}{\rho} \to 0 \quad (\rho\to\infty).$$

根据 Cauchy 积分定理，绕上半平面封闭回路的总积分为零，因为极点处于积分边界区域之外。类似地，$\tau>0$ 时可借助实轴下的无限大半圆周构成封闭回路。Cauchy 积分定理表明被积函数在极点的留数决定了积分值，顺时针方向积分带有一个负号。所以，我们得到

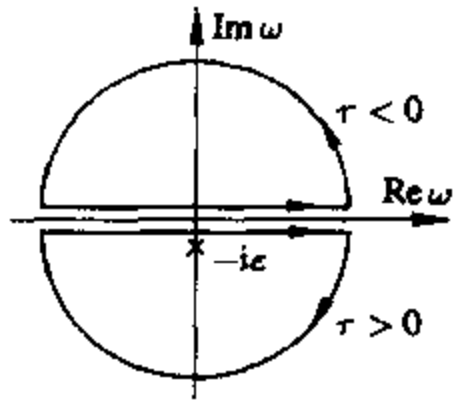


图 1.6　$\tau<0$ 和 $\tau>0$ 时的积分回路

$$\Theta(\tau>0) = -\frac{1}{2\pi i}(-1)2\pi i\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{Res}_{\omega=-i\varepsilon}\left[\frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega+i\varepsilon}\right] = e^{-i\omega\tau}|_{\omega=0} = 1. \tag{2}$$

由此，通过微分我们直接得到

$$\frac{d\Theta(\tau)}{d\tau} = -\frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\tau}\frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega+i\varepsilon}d\omega = -\frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-i\omega}{\omega+i\varepsilon}e^{-i\omega\tau}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau}d\omega = \delta(\tau). \tag{1.60}$$

所以对阶跃函数的微商得 Dirac δ 函数。借助这一关系，我们能从(1.58)得到推迟 Green 函数 $G^+(x';x)$的微分方程以及导出一些具有其他形式性质的表达式。我们知道 $\phi(x')$满足 Schrödinger 方程：

$$\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t'}-\hat{H}(x')\right)\psi(x')=0\,. \tag{1.61}$$

所以，我们将算符$(\mathrm{i}\hbar(\partial/\partial t')-\hat{H}(x'))$从左边作用到(1.58)式，得：

$$\begin{aligned}&\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t'}-\hat{H}(x')\right)\Theta(t'-t)\psi(x')\\&=\mathrm{i}\int\mathrm{d}^3x\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t'}-\hat{H}(x')\right)G^{+}(x';x)\psi(x)\,.\end{aligned} \tag{1.62}$$

展开左边，得：

$$\begin{aligned}&\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t'}\Theta(t'-t)\right)\psi(x')+\Theta(t'-t)\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t'}-\hat{H}(x')\right)\psi(x')\\&=\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t'}\Theta(t'-t)\right)\psi(x')=\mathrm{i}\hbar\,\delta(t'-t)\psi(x').\end{aligned} \tag{1.63}$$

因此，(1.62)式变为

$$\mathrm{i}\int\mathrm{d}^3x\left[\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t'}-\hat{H}(x')\right)G^{+}(x';x)-\hbar\,\delta^3(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})\delta(t'-t)\right]\psi(x)=0\,.$$

由于该方程必须使任意解$\psi(x)$均成立，故方括号中的项必须为零，即

$$\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t'}-\hat{H}(x')\right)G^{1}(x';x)=\hbar\,\delta^4(x'-x), \tag{1.64}$$

式中我们已用4维δ函数取代了$\delta^3(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})\delta(t'-t)$。这个微分方程与朝前传播的边界条件一同确定了推迟Green函数$G^{+}(x',x)$：

$$G^{+}(x';x)=0\quad\text{for}\quad t'<t. \tag{1.65}$$

显然Green函数正是来自类点时空源发出的发散波，其点源的强度为

$$\hbar\,\delta^4(x'-x)=\hbar\,\delta^3(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})\delta(t'-t).$$

方程(1.64)很清楚地说明了如何利用Green函数技巧去求解非齐次线性微分方程。给定含源项$\rho(x)$的Schrödinger方程：

$$\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\hat{H}(x)\right)\psi(x)=\rho(x), \tag{1.66}$$

我们立即能写下一个解

$$\psi(x)=\psi_0(x)+\frac{1}{\hbar}\int\mathrm{d}^4x'G^{+}(x,x')\rho(x')\quad\text{for}\quad t>t'\,. \tag{1.67}$$

这儿$\psi_0(x)$是齐次微分方程的解。现再让我们计算一下自由粒子的传播子，不过这次是借助于微分方程(1.64)及边界条件(1.65)。对非相对论的自由粒子，Hamilton量为：

$$\hat{H}_0(x')=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla'^2. \tag{1.68}$$

此外，我们注意到$G_0^{+}(x',x)$将仅依赖于坐标差，$x'-x=\{\boldsymbol{x}',t'\}-\{\boldsymbol{x},t\}$。这是因为在$t$时刻从$\boldsymbol{x}$处波源发，在$t'$时刻到达$\boldsymbol{x}'$处的波仅依赖于距离$\{\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x},t'-t\}$。然而，Green函数正是这种波。因此，我们可写成：

$$G_0^+(x';x)=G_0^+(x'-x)\,. \tag{1.69}$$

数学上，Hamilton 算符 $\hat{H}_0$ 是空间和时间坐标的齐次形式，自由传播子能很容易地被重写成与(1.64)式相类似的含有相对坐标 $z=x'-x=\{\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x},t'-t\}$ 的另一微分方程式，因此，人们很重视自由传播子的这一事实。

为了求自由粒子方程(1.64)的解，我们考虑 Fourier 表示

$$G_0^+(x'-x)=\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}\mathrm{d}E}{(2\pi\hbar)^4}\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})\right]\times\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E(t'-t)\right]G_0^+(\boldsymbol{p};E). \tag{1.70}$$

并用(1.68)及(1.64)来确定 $G_0^+(\boldsymbol{p};E)$ 的 Fourier 变换关系

$$\begin{aligned}&\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t'}+\frac{\hbar^2}{2m}\nabla'^2\right)G_0^+(x'-x)\\&=\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}\mathrm{d}E}{(2\pi\hbar)^4}\left(E-\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}\right)G_0^+(\boldsymbol{p};E)\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E(t'-t)\right]\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})\right]\\&\overset{!}{=}\hbar\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}\mathrm{d}E}{(2\pi\hbar)^4}\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E(t'-t)\right]\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})\right].\end{aligned} \tag{1.71}$$

最后一项是(1.64)式右边，即 $\hbar\delta^4(x'-x)$ 在能动量表象中的表示。显然，在 Fourier 表示中，我们能立即得到微分方程(1.64)的解。对 $E\neq\boldsymbol{p}^2/2m$，可得到

$$G_0^+(\boldsymbol{p};E)=\frac{\hbar}{E-\dfrac{\boldsymbol{p}^2}{2m}}\,. \tag{1.72}$$

这个表式仍不完全，因为在 $E=\boldsymbol{p}^2/2m$ 处奇点的处理还是不确定的。这可利用推迟条件(1.65)来解决这个问题。如同练习1.4中那样，我们从阶跃函数的 Fourier 表示入手，在(1.72)式分母上加上一个无穷小的、正的虚部 $\mathrm{i}\varepsilon$，并首先对(1.70)式的 E 积分。如图 1.7 所示，奇点位于实 E 轴下方，我们得到

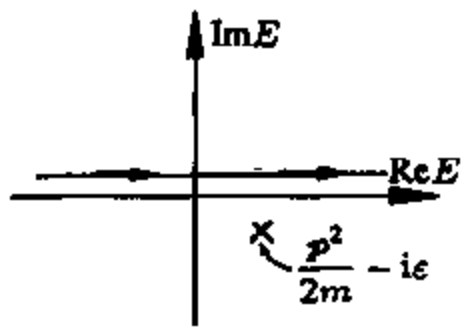


图 1.7　$G^+(\boldsymbol{p};E)$的奇点位置和沿 E 轴的积分回路

$$G_0^+(x'-x)=\hbar\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi\hbar)^3}\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})\right]\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}E}{2\pi\hbar}\frac{\exp\left[-\dfrac{\mathrm{i}}{\hbar}E(t'-t)\right]}{E-\boldsymbol{p}^2/2m+\mathrm{i}\varepsilon}\,. \tag{1.73}$$

作替代 $E'=E-\boldsymbol{p}^2/2m$，上述积分变为

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}E'}{2\pi\hbar}\frac{\exp\left[-\dfrac{\mathrm{i}}{\hbar}(E'+\boldsymbol{p}^2/2m)(t'-t)\right]}{E'+\mathrm{i}\varepsilon}\\&=\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}(t'-t)\right]\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}E'}{2\pi\hbar}\frac{\exp\left[-\dfrac{\mathrm{i}}{\hbar}E'(t'-t)\right]}{E'+\mathrm{i}\varepsilon}\end{aligned}$$

$$= \exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}(t'-t)\right]\left[-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\Theta\left(\frac{t'-t}{\hbar}\right)\right]$$

$$= -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}(t'-t)\right]\Theta(t'-t)\,.$$

在最后两步中，我们利用了(1.59)和阶跃函数性质，即对正的 α，$\Theta(\alpha x)=\Theta(x)$。现在(1.73)变为

$$G_0^+(x'-x) = -\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi\hbar)^3}\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})-\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}(t'-t)\right]\right\}\Theta(t'-t)$$

$$= -\mathrm{i}\Theta(t'-t)\int\mathrm{d}^3p\phi_p(\boldsymbol{x}',t')\phi_p^*(\boldsymbol{x},t). \tag{1.74}$$

这里，我们已将自由 Hamilton 量 $\hat{H}$ 的本征函数，即平面波写为：

$$\phi_p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}}\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}t\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}}\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)],\hbar\omega=\boldsymbol{p}^2/2m,\hbar\boldsymbol{k}=\boldsymbol{p}. \tag{1.75}$$

方程(1.74)与例 1.3，(9)和(15)的结果等同。对(1.74)式的下一步积分如上述那样进行。

由这个例子可知，将 Green 函数表达成相应 Schrödinger 方程本征函数的完备集之和是非常有用的。对这组函数 $\psi_n(\boldsymbol{x},t)$，其完备性写为：

$$\sum_n\psi_n(\boldsymbol{x}',t)\psi_n^*(\boldsymbol{x},t)=\delta^3(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})\,. \tag{1.76}$$

注意出现在 $\psi_n(\boldsymbol{x}',t)$和 $\psi_n^*(\boldsymbol{x},t)$中的时间 t 相同。

现在，容易证明，在边界条件(1.65)下，(1.64)的解为

$$G^+(x';x) = -\mathrm{i}\Theta(t'-t)\sum_n\psi_n^*(x)\psi_n(x')\,, \tag{1.77}$$

因为

$$\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t'}-\hat{H}(x')\right)G^+(x';x) = \hbar\,\delta(t'-t)\sum_n\psi_n(x',t)\psi_n^*(x,t)$$

$$-\mathrm{i}\Theta(t'-t)\sum_n\underbrace{\left[\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t'}-\hat{H}(x')\right)\psi_n(x')\right]}_{=0}\psi_n^*(x)$$

$$= \hbar\,\delta(t'-t)\delta^3(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})$$

$$= \hbar\,\delta^4(x'-x)\,. \tag{1.78}$$

下一步，我们指出另一个重要的关系：相同的 Green 函数 $G^+(x';x)$既能描述 Schrödinger 方程解$\psi_n(\boldsymbol{x},t)$的朝前演化，又能描述复共轭解 $\psi_n^*(\boldsymbol{x},t)$的朝后传播。从(1.77)式，一方面我们得到

$$\mathrm{i}\int\mathrm{d}^3xG^+(x';x)\psi_n(x) = \Theta(t'-t)\sum_m\psi_m(x')\int\underbrace{\mathrm{d}^3x\psi_m^*(x)\psi_n(x)}_{\delta_{nm}} \tag{1.79a}$$

$$= \Theta(t'-t)\psi_n(x').$$

另一方面，我们得到

$$\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x'\ \psi_n^*(x')G^+(x';x)=\Theta(t'-t)\sum_m{}'\int \underbrace{\mathrm{d}^3x'\psi_m(x')\psi_n^*(x')}_{\delta_{nm}}\psi_m^*(x) \tag{1.79b}$$

$$=\Theta(t'-t)\psi_n^*(x)\ .$$

如上所述，(1.79a)表示波函数$\psi_n(x)$的朝前传播，而(1.79b)为相应的$\psi_n^*(x')$朝后传播。后一个结论也可通过对(1.9)求复共轭并利用练习 1.2 获得。相反地，从(1.9)和(1.79b)出发，我们容易证明，在练习 1.2 中所列出的G^+和G^-之间的关系。

1.9　对相互作用粒子 Green 函数的其他考虑

这儿，我们要从稍不同的观点重新考虑 Green 函数$G^+(x';x)$(参见(1.28))的迭代方法。现在讨论的出发点是$G^+(x';x)$的微分方程(1.64)，用$\hat{H}=\hat{H}_0+V$，该方程可写为

$$\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t'}-\hat{H}_0(x')\right)G^+(x';x)=\hbar\,\delta^4(x'-x)+V(x')G^+(x';x)\ . \tag{1.80}$$

就像(1.66)式中那样，右边能被理解为非齐次 Schrödinger 方程的源项。

$$\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t'}-\hat{H}_0(x')\right)\psi(x')=\rho(x')\ . \tag{1.81}$$

利用自由的 Green 函数G_0，(1.81)的解由下式给出

$$\psi(x')=\frac{1}{\hbar}\int \mathrm{d}^4x_1G_0^+(x';x_1)\rho(x_1)\ . \tag{1.82}$$

用$G^+(x';x)$取代$\psi(x')$，可立即导出下列相互作用 Green 函数的积分方程

$$G^+(x';x)=\int \mathrm{d}^4x_1G_0^+(x';x_1)(\delta^4(x_1-x)+V(x_1)G^+(x_1;x))$$

$$=G_0^+(x';x)+\int \mathrm{d}^4x_1G_0^+(x';x_1)V(x_1)G^+(x_1;x). \tag{1.83}$$

像(1.21)式一样，这里我们再作替代$V(x)/\hbar\to V(x)$，方程(1.83)与早期结果(1.30)等同。将(1.82)式迭代，便得到 Green 函数的多重散射展开式(1.28)。这可用来构造S矩阵(1.37)。

$$S_{fi}=\lim_{t\to-\infty}\lim_{t'\to+\infty}\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x'\mathrm{d}^3x\phi_f^*(x')G^+(x';x)\phi_i(x)\ . \tag{1.84}$$

利用自由粒子方程(1.79a,b)，

$$\int \mathrm{d}^3xG_0^+(x_1,x)\phi_i(x)=-\mathrm{i}\phi_i(x_1)\quad\text{for}\quad t_1>t, \tag{1.85a}$$

$$\int \mathrm{d}^3x'\phi_f^*(x')G_0^+(x',x_1)=-\mathrm{i}\phi_f^*(x_1)\quad\text{for}\quad t'>t_1, \tag{1.85b}$$

x和x'能被积掉，(1.84)式变为

$$S_{fi}=\delta_{fi}-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x_1\phi_f^*(x_1)V(x_1)\phi_i(x_1)$$

$$-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\phi_f^*(x_1)V(x_1)G_0^+(x_1;x_2)V(x_2)\phi_i(x_2)$$

$$-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\mathrm{d}^4x_3\phi_f^*(x_1)V(x_1)G_0^+(x_1;x_2)V(x_2)G_0^+(x_2;x_3)V(x_3)\phi_i(x_3)$$

$$+\cdots . \tag{1.86}$$

这是按多重散射过程对 S 矩阵的展开，δ_{fi}表示不存在散射。V 出现一次的第二项表示单散射，下面的项表示双重散射，等等。

练　习

1.5 扩散 Green 函数

典型的扩散现象，例如热传导，或两个相互渗透的流体，是仅由密度梯度决定的。例如，密度为 $\rho(x,t)$的流体倾向从密度高的点流向密度低的点。因此，流 J 被假设成正比于密度梯度

$$\boldsymbol{J} = -D\nabla\rho, \tag{1}$$

式中常数 D 称为扩散常数。若我们将(1)式与连续性方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\nabla\cdot\boldsymbol{J}, \tag{2}$$

相联系，我们得到扩散方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = D\nabla^2\rho. \tag{3}$$

在热传导情况下，ρ 为单位体积内的“热函”，它正比于温度：$\rho=CT$。常数 C 称为材料的比热容。为进一步讨论，我们注意到变换 $t\to -\mathrm{i}t$ 就把扩散方程(3)转为 Schrödinger 微分方程型。

现在，我们构造无限三维区域内扩散 Green 函数 $G^+(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)$的明显表达式，我们再次从定义微分方程开始

$$\nabla'^2G - a^2\frac{\partial G}{\partial t'} = -4\pi\delta^3(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})\delta(t'-t), \tag{4}$$

式中常数 $a^2=1/D$。右边因子 4π(不是(1.64)中的 $\hbar$)是一种约定，它仅是使 Green 函数改变一个因子 $4\pi/\hbar$。因为 Green 函数仅依赖于时间差 $t'-t$ 和空间差 $\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}$，我们引入下列缩写

$$\begin{aligned}\tau &= t'-t,\\ \boldsymbol{R} &= \boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}.\end{aligned} \tag{5}$$

作为 Green 函数假设，我们写下 Fourier 变换

$$G(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3p\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})}g(\boldsymbol{p},\tau), \tag{6}$$

式中函数 $g(\boldsymbol{p},\tau)$仍是未知的。我们将(6)式代入定义方程式(4)式，且再次利用下面 δ 函数的 Fourier 表示

$$\delta^3(\boldsymbol{R}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3 p \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{R}}. \tag{7}$$

(4)式左边变为

$$\nabla'^2 G - a^2\frac{\partial G}{\partial \tau} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3 p\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{R}}\left(-p^2 g - a^2\frac{\partial g}{\partial \tau}\right). \tag{8}$$

这导出 g 的关于时间的微分方程

$$a^2\frac{\partial g}{\partial \tau} + p^2 g = 4\pi\delta(\tau). \tag{9}$$

该微分方程有下列特解

$$g = \frac{4\pi}{a^2}\mathrm{e}^{-(p^2\tau/a^2)}\Theta(\tau). \tag{10}$$

我们将解(10)式代入(9)式并利用阶跃函数 Θ 和 δ-函数之间的关系：

$$\frac{\mathrm{d}\Theta(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \delta(\tau) \tag{11}$$

就证明了(10)式为(9)式的解

$$a^2\frac{4\pi}{a^2}\left(\frac{-p^2}{a^2}\right)\mathrm{e}^{-(p^2\tau/a^2)}\Theta(\tau) + a^2\frac{4\pi}{a^2}\mathrm{e}^{-(p^2\tau/a^2)}\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\tau}$$

$$+ p^2\frac{4\pi}{a^2}\mathrm{e}^{-(p^2\tau/a^2)}\Theta(\tau) = 4\pi\delta(\tau), \tag{12}$$

综合上述结果，我们得到

$$G(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t) = \left(\frac{4\pi}{(2\pi)^3 a^2}\right)\Theta(\tau)\int \mathrm{d}^3 p\ \exp(\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{R})\exp\left(-\frac{p^2\tau}{a^2}\right). \tag{13}$$

或用 Cartesian 坐标明显表示为

$$G(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t) = \left(\frac{4\pi}{(2\pi)^3 a^2}\right)\Theta(\tau)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p_x \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_x(x'-x)}\mathrm{e}^{-(p_x^2/a^2)\tau}$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p_y \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_y(y'-y)}\mathrm{e}^{-(p_y^2/a^2)\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p_z \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_z(z'-z)}\mathrm{e}^{-(p_z^2/a^2)\tau}. \tag{14}$$

我们考虑第一个积分中指数

$$\mathrm{i}p_x R_x - \frac{p_x^2}{a^2}\tau = -\left(\frac{p_x}{a}\sqrt{\tau} - \frac{\mathrm{i}aR_x}{2\sqrt{\tau}}\right)^2 - \frac{a^2R_x^2}{4\tau}$$

$$= -\frac{\tau}{a^2}\xi^2 - \frac{a^2R_x^2}{4\tau}, \tag{15}$$

其中

$$\xi = p_x - \frac{\mathrm{i}a^2R_x}{2\tau}. \tag{16}$$

借助这一变换，(14)式中第一个积分能被重写成

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p_x \exp\left(-\frac{\tau\xi^2}{a^2}-\frac{a^2R_x^2}{4\tau}\right)\mathrm{d}p_x = \exp\left(-\frac{a^2R_x^2}{4\tau}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi\exp\left(-\frac{\tau\xi^2}{a^2}\right)$$
$$= \exp\left(-\frac{a^2R_x^2}{4\tau}\right)a\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\,. \tag{17}$$

在推导(17)式结果时,我们已利用了下列基本 Gauss 积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\exp(-p^2x^2)=\frac{\sqrt{\pi}}{p}\,. \tag{18}$$

完成(14)式的三个积分后,便得到扩散 Green 函数

$$G(x',t';x,t)=\frac{1}{2\pi^2a^2}\Theta(\tau)\left(a\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\right)^3\exp\left(-\frac{a^2R^2}{4\tau}\right)$$
$$=\frac{a}{2\tau^{3/2}\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{a^2R^2}{4\tau}\right)\Theta(\tau)\,. \tag{19}$$

变换 $t'\to it'$ 和 $t\to it$ 就将(19)式的 Green 函数转换成 Schrödinger 方程的自由 Green 函数。这正是根据两个微分方程间的关系所期望的。

扩散 Green 函数是在 $R-0$ 处为极大值的 Gauss 型,分布宽度随着 τ 增大而增加。量 $\sqrt{4\tau/a^2}$ 是这个宽度的量度。在 $\tau=0$ 处,宽度仍为 0。在热传导情形,这意味着所有的热都集中于一点,只要 τ 大于零,则 $R>0$ 时,温度增加;而在 $R=0$ 处温度连续降低。最后(在 $\tau\to\infty$ 时),热均匀分布在整个空间。

例　　子

1.6　作为电动力学中 Huygens 原理的一个例子的 Kirchhoff 积分

我们从检查经典电动力学中波动方程的解和相应 Green 函数的推导出发。势的定义方程是由 Maxwell 非齐次方程而来:

$$\nabla^2\Phi+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{A}=-4\pi\rho, \tag{1}$$

和

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}-\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)=-\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}. \tag{2}$$

这里 Φ 代表标量势,$\boldsymbol{A}$ 为矢量势,ρ 为给定的电荷分布,$\boldsymbol{J}$ 为电流密度。在 Lorentz 规范($\nabla\cdot\boldsymbol{A}+(1/c)(\partial\Phi/\partial t)=0$)中,这些微分方程变成非耦合的。

$$\nabla^2\Phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=-4\pi\rho\,, \tag{3}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}\,. \tag{4}$$

另一方面，在 Coulomb 规范下（$\nabla \cdot \boldsymbol{A}=0$），我们得到

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi\rho, \tag{5}$$

其解为

$$\Phi(\boldsymbol{x},t) = \int \mathrm{d}^3x' \frac{\rho(\boldsymbol{x}',t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}, \tag{6}$$

和

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J} + \frac{1}{c}\nabla\frac{\partial \Phi}{\partial t}. \tag{7}$$

所有波动方程(3)，(4)和(7)具有形式

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi = -4\pi f(\boldsymbol{x},t), \tag{8}$$

式中，$f(\boldsymbol{x},t)$是给定源分布。为求解(8)，引入下式定义的波动方程的 Green 函数 G 是有用的。

$$\left(\nabla_x^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x}',t') = -4\pi\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\delta(t-t'). \tag{9}$$

Green 函数仅依赖于坐标差$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$和时间差$(t-t')$。在下列计算中，我们利用 δ 函数的 Fourier 表示

$$\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\delta(t-t') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^3k \int \mathrm{d}\omega\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t')}. \tag{10}$$

首先，作为对 G 的一个假设，我们引进 Fourier 变换

$$G(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x}',t') = \int \mathrm{d}^3k \int \mathrm{d}\omega\, g(\boldsymbol{k},\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t')}. \tag{11}$$

式中 $g(\boldsymbol{k},\omega)$仍是未知的。我们将(11)代入定义方程(9)便得

$$\begin{aligned}\left(\nabla_x^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\int \mathrm{d}^3k \int \mathrm{d}\omega\, g(\boldsymbol{k},\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t')} \\ = -4\pi\frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^3k \int \mathrm{d}\omega\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t')}.\end{aligned} \tag{12}$$

微分算符的作用得

$$\begin{aligned}-\int \mathrm{d}^3k \int \mathrm{d}\omega\left(\boldsymbol{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)g(\boldsymbol{k},\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t')} \\ = -\frac{1}{4\pi^3}\int \mathrm{d}^3k \int \mathrm{d}\omega\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t')}.\end{aligned} \tag{13}$$

从而，确定 $g(\boldsymbol{k},\omega)$为

$$g(\boldsymbol{k},\omega) = \frac{1}{4\pi^3}\frac{1}{\boldsymbol{k}^2 - \omega^2/c^2 - \mathrm{i}\varepsilon}, \tag{14}$$

我们能将 Green 函数表示成

$$G(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x}',t') = \int \mathrm{d}^3k \int \mathrm{d}\omega \frac{1}{4\pi^3}\frac{1}{\boldsymbol{k}^2 - \omega^2/c^2 - \mathrm{i}\varepsilon}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t')}. \tag{15}$$

利用 Cauchy 定理，做完积分便得结果

$$G(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x}',t')=\frac{\delta(t'-t+|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|/c)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\ . \tag{16}$$

这是一个推迟 Green 函数，它描述一个在时间 $t>t'$ 的在光锥 $|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|=c(t-t')$ * 上的朝前波。通过在(14)式中引入负虚部 $-i\epsilon$ 而实施因果律。波动方程(8)的解现可写成

$$\Psi(\boldsymbol{x},t)=\int \mathrm{d}^3x'\mathrm{d}t'G(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x}',t')f(\boldsymbol{x}',t')\ . \tag{17}$$

的确，它得到

$$\begin{aligned}\nabla\Psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}&=\int\left(\nabla_x^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x}',t')f(\boldsymbol{x}',t')\mathrm{d}^3x'\mathrm{d}t'\\&=-\int 4\pi\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\delta(t-t')f(\boldsymbol{x}',t')\mathrm{d}^3x'\mathrm{d}t'\\&=-4\pi f(\boldsymbol{x},t)\ .\end{aligned} \tag{18}$$

借助 Green 函数(16)，我们得到关于 Ψ 的方程

$$\Psi(\boldsymbol{x},t)=\int\frac{\delta(t'+|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|/c-t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}f(\boldsymbol{x}',t')\mathrm{d}^3x'\mathrm{d}t'\ . \tag{19}$$

可对 t' 作积分，结果为推迟解。

$$\Psi(\boldsymbol{x},t)=\int\mathrm{d}^3x'\frac{[f(\boldsymbol{x}',t')]_{\mathrm{ret}}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\ , \tag{20}$$

式中，$[\,]_{\mathrm{ret}}$ 意思是 $t'=t-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|/c$。从而我们可将势 $\boldsymbol{A}$ 和 Φ 表达成封闭形式。

为深入讨论，我们用第二 Green 定理，对时间从 $t'=t_0$ 到 $t'=t_1$ 积分：

$$\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t'\int_V\mathrm{d}^3x'(\Phi\nabla'^2\Psi-\Psi\nabla'^2\Phi)=\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t'\oint_S\mathrm{d}a'\left(\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial n'}-\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n'}\right)\ , \tag{21}$$

式中，Φ 和 Ψ 现在为任意标量场，$\partial\Psi/\partial n'$ 是表面 S 上的 Ψ 的法向导数。对 Ψ，代入关系式(20)；对 Φ，代入 Green 函数(16)，则(21)式左边重写为

$$\begin{aligned}L&=\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t'\int_V\mathrm{d}^3x'(G\nabla'^2\Psi-\Psi\nabla'^2G)\\&=\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t'\int_V\mathrm{d}^3x'\left[G\left(-4\pi f(\boldsymbol{x}',t')+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t'^2}\right)\right.\\&\quad\left.-\Psi\left(-4\pi\delta^3(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})\delta(t'-t)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2G}{\partial t'^2}\right)\right]\\&=\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t'\int_V\mathrm{d}^3x'\left[4\pi\Psi(\boldsymbol{x}',t')\delta^3(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})\delta(t'-t)-4\pi f(\boldsymbol{x}',t')G\right.\end{aligned}$$

---

* 原文为 $c(t'-t)$ 有误，应改为 $c(t-t')$

$$+\frac{1}{c^2}\left(G\frac{\partial^2\Psi}{\partial t'^2}-\Psi\frac{\partial^2 G}{\partial t'^2}\right)\Big]. \tag{22}$$

式中我们已经用到了定义方程(8)和(9)。第一项产生 $4\pi\Psi(\boldsymbol{x},t)$，第二项将保留，最后两项对时间进行分部积分，得

$$\begin{aligned}L=&4\pi\Psi(\boldsymbol{x},t)-4\pi\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t'\int_V \mathrm{d}^3x' f(\boldsymbol{x}',t')G\\&+\frac{1}{c^2}\int_V \mathrm{d}^3x'\left(G\frac{\partial\Psi}{\partial t'}-\Psi\frac{\partial G}{\partial t'}\right)\Big|_{t'=t_0}^{t'=t_1}\\&-\frac{1}{c^2}\int_V \mathrm{d}^3x'\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t'\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t'}\frac{\partial G}{\partial t'}-\frac{\partial G}{\partial t'}\frac{\partial\Psi}{\partial t'}\right).\end{aligned} \tag{23}$$

(23)中最后一项为零。因为推迟 Green 函数在 $t'=t_1>t$ 时消失，故(23)式中第三项积分上限时消失。现结合(21)和(23)便得

$$\begin{aligned}\Psi(x,t)=&\frac{1}{4\pi c^2}\int \mathrm{d}^3x'\left(G\frac{\partial\Psi}{\partial t'}-\Psi\frac{\partial G}{\partial t'}\right)\Big|_{t'=t_0}\\&+\frac{1}{4\pi}\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t'\oint_S \mathrm{d}a'\left(G\frac{\partial\Psi}{\partial n'}-\Psi\frac{\partial G}{\partial n'}\right)\\&+\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t'\int_V \mathrm{d}^3x' f(\boldsymbol{x}',t')\frac{\delta(t'+|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|/c-t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\\=&\int_V \mathrm{d}^3x'\frac{[f(\boldsymbol{x}',t')]_{\mathrm{ret}}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}+\frac{1}{4\pi c^2}\int_V \mathrm{d}^3x'\left(G\frac{\partial\Psi}{\partial t'}-\Psi\frac{\partial G}{\partial t'}\right)\Big|_{t'=t_0}\\&+\frac{1}{4\pi}\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t'\oint_S \mathrm{d}a'\left(G\frac{\partial\Psi}{\partial n'}-\Psi\frac{\partial G}{\partial n'}\right).\end{aligned} \tag{24}$$

让我们考虑所谓场的 Kirchhoff 表示。它由表面 S 上 Ψ 和 $\partial\Psi/\partial n'$ 的值来表示。为此我们假定在体积 V 内没有源以及 Ψ 和 $\partial\Psi/\partial t'$ 在初始时刻 $t'=t_0$ 的值为零。根据(24)，场由下式给出

$$\Psi(x,t)=\frac{1}{4\pi}\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t'\oint_S \mathrm{d}a'\left(G\frac{\partial\Psi}{\partial n'}-\Psi\frac{\partial G}{\partial n'}\right). \tag{25}$$

我们设

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'. \tag{26}$$

而

$$\nabla' R=-\frac{\boldsymbol{R}}{R}. \tag{27}$$

我们利用 Green 函数(16)的明显表达式得

$$\frac{\partial}{\partial n'}=\boldsymbol{n}\cdot\nabla', \tag{28}$$

$$\nabla' G=\frac{\partial G}{\partial R}\nabla' R=-\frac{\boldsymbol{R}}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{\delta(t'+R/c-t)}{R}\right)$$

$$=-\frac{\boldsymbol{R}}{R}\left(-\frac{\delta(t'+R/c-t)}{R^2}+\frac{\delta'(t'+R/c-t)}{cR}\right). \tag{29}$$

$\boldsymbol{n}$ 为面 S 的法向单位矢。这儿，我们已利用了下列关系

$$\frac{\partial}{\partial R}\delta\left(t'+\frac{R}{c}-t\right)=\frac{1}{c}\delta'\left(t'+\frac{R}{c}-t\right), \tag{30}$$

其中带撇表示 δ 函数对其宗量的导数。而且，我们利用 δ 函数的导数性质

$$\int f(x)\delta'(x-a)\mathrm{d}x=-f'(a), \tag{31}$$

这对给出部分结果是有帮助的。

$$\oint_S \mathrm{d}a'\,\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{R}}{cR^2}\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t'\,\Psi\delta'\left(t'+\frac{R}{c}-t\right)=-\oint_S \mathrm{d}a'\,\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{R}}{cR^2}\Psi'\left(\boldsymbol{x}',t'=t-\frac{R}{c}\right)$$

$$=\left[\oint_S \mathrm{d}a'\,\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{R}}{cR^2}\Psi'(\boldsymbol{x}',t')\right]_{\mathrm{ret}}. \tag{32}$$

从而得到结论

$$\Psi(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{4\pi}\oint_S \mathrm{d}a'\,\boldsymbol{n}\cdot\left[\frac{\nabla'\Psi(\boldsymbol{x}',t')}{R}-\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\Psi(\boldsymbol{x}',t')-\frac{\boldsymbol{R}}{cR^2}\frac{\partial\Psi(\boldsymbol{x}',t')}{\partial t'}\right]_{\mathrm{ret}}. \tag{33}$$

我们强调指出这不是场 Ψ 的解，它仅是 Ψ 的积分表示，即用 Ψ 和它在 S 面上相应的对空间和时间的导数来表示。然而，这些量不可独立选定。

Kirchhoff 积分(33)是 Huygens 原理的数学表达，该原理假设位于波前上的任何一点，就像一个发射以光速运动的球面波的类点源。于是在一给定点稍后时刻的场是发自这些源的所有场的叠加。所有这些波的包络面，构成了下一个波前。Kirchhoff 积分(33)式实际上就是作为光学衍射相关问题讨论的出发点。

1.10 传　　记

费曼(R. P. Feynman)，美国物理学家，1918 年 5 月 11 日生于纽约，1988 年 2 月 15 日卒于帕塞登那。费曼在麻省理工学院学习物理，并于 1942 年在卡尔特许(普林斯顿大学)取得博士学位。他在曼哈顿工程(洛斯阿拉莫斯)工作之后，于 1946 年在康奈尔大学成为物理学教授，随后他为加州理工学院的物理学教授(1951 年起)。费曼对量子电动力学理论的建立进行首创性的工作，为此他荣获 1965 年诺贝尔物理学奖(与许温格和朝永振一郎分享)。他解释了液氦的超流性并在弱作用领域进行基础性工作。费曼推进了路径积分方法在物理学中的应用。在往后年代里，

费曼提出部分子图像以描述强子碰撞，从而促进了夸克模型的建立。

许温格(J. S. Schwinger)，美国物理学家，1918 年 2 月 12 日生于纽约，1994 年 7 月 16 日去世。许温格在哥伦比亚大学(纽约)学习物理，并于 1939 年在那里取得博士学位。随后他先后在伯克利加州大学、剑桥大学(马萨诸塞)、芝加哥大学和波士顿大学工作，并于 1947 年成为哈佛大学物理学教授。1972 年他去洛杉矶加利福尼亚大学工作。在 1948～1949 年期间，费曼发展了量子电动力学的协变形式理论。他引入电荷重整化和质量重整化，从而能够解释电子的反常磁矩和兰姆移动。由于这项工作，他荣获 1965 年诺贝尔物理学奖(与费曼和朝永振一郎分享)。许温格还对量子场论、多体物理和引力理论等方面作出了许多重要贡献。

斯图克贝格(E. C. G. Stückelberg)，恩斯特·卡尔·格尔拉赫·斯图克贝格，瑞士物理学家，1905 年 2 月 1 日生于巴塞尔，1984 年 9 月 4 日卒于日内瓦。斯图克贝格在巴塞尔大学和慕尼黑大学(与埃·索末菲一起)学习物理，并于 1927 年在巴塞尔大学取得博士学位。他先在普林斯顿大学(1927～1932)当研究助理，后来当教授，1935 年起当苏黎士大学和日内瓦大学教授。此外，在 1942～1957 年间，他担任洛桑大学和联邦理工学院的联合教授。斯图克贝格第一个理论工作在分子物理学领域，后来他对量子场论作出了首创性贡献。1942 年，他首先提出了将正电子解释为时间上向后运动的电子构想，应用因果传播子计算散射矩阵元是在 1949 年由费曼和斯图克贝格(与他的学生列维)独立地引入的。往后，斯图克贝格(与彼特曼)发展了重整化群思想。再往后几年，斯图克贝格将他的主要兴趣转向热力学的基础工作。1976 年，斯图克贝格荣获德国物理学会马·普朗克奖章。

朝永振一郎(S. I. Tomonaga)，日本物理学家，1906 年 3 月 31 日生于京都，1979 年 7 月 8 日去世。朝永振一郎在京都帝国大学学习物理，于 1929 年毕业。往后他在东京物理化学研究所仁科实验室工作。1937 年他去莱比锡大学参加海森堡研究组的工作，1941 年，朝永振一郎成为东京教育大学的物理学教授。后来，他专心致力于科学管理工作，担任东京教育大学校长和日本科学委员会主任。朝永振一郎的早期工作涉及正电子的产生和湮灭、宇宙线介子在物质中的停止，以及核液滴模型。后来他转向量子场论研究，发展了含重整化的明显协变的理论形式。朝永振一郎由于对量子场论做出的贡献，荣获 1965 年诺贝尔物理学奖(与费曼和许温格分享)。

第二章　电子和正电子的传播子

下面我们把上一章导出的非相对论传播子理论推广到电子和正电子的相对论理论。我们以非相对论图像作为引导，那儿，传播子 $G^+(x',x)$ 被解释为一个产生于时-空点 x 的粒子波传播到时-空点 x' 的几率幅，如同(1.28)式，这几率幅能被分解成分波幅之和，n 阶这种分波幅为图 2.1 所示的因子之乘积。根据(1.28)式，几率幅是由数个因子组成的，这些因子描述了特定散射(相互作用 $V(x)$ 所引起)粒子间的传播，当对相互作用时空点进行积分时，这些因子又代表着粒子的 n 阶散射过程。

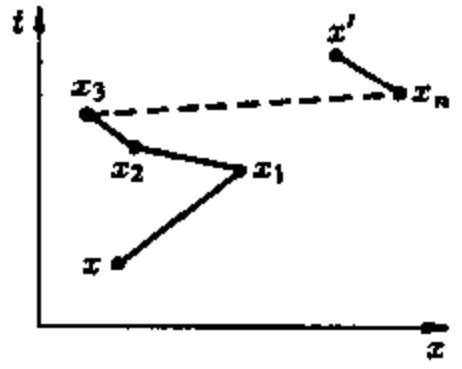


图 2.1　对描述粒子多次散射几率幅的 Green 函数
$G^+(x';x)$ 的 n 阶贡献的示意图

图 2.1 中每根线代表一个 Green 函数，例如，线 $\overline{x_{i-1}\ x_i}$ 代表 Green 函数 $G_0^+(x_i,x_{i-1})$，即在时空点 x_{i-1} 产生的粒子波自由传播到时空点 x_i 的几率幅。相互作用发生的时空点用一个小圆点(·)表示。在点 x_i 处，粒子波被散射的单位时空体积的几率幅为 $V(x_i)$。几率幅为 $G_0^+(x_{i+1};x_i)$ 的散射波又从时空点 x_i 自由传播到点 x_{i+1}，在点 x_{i+1}，又会发生下一个相互作用，如此等等。总几率幅就由相互作用发生的所有时空点贡献总和给出。粒子波受到相互作用的特定时空点被称为顶角。我们也可以把每一个散射过程说成自由传播到 x_i 的粒子在第 i 个顶角处湮灭，并产生下一个向 x_{i+1} 传播的粒子，且 $t_{i+1}\geqslant t_i$。

那种对散射事件的后一种解释很适合于向相对论空穴理论的推广。因为这包含了散射过程和相互作用的整个时空结构。

我们现在的目的是要像非相对论传播子理论那样，寻找一种在 Dirac 空穴理论框架中描述和计算散射过程的数学方法。我们特别要注意对产生和湮灭过程的新特征，它存在于我们现有的相对论散射过程的图像中。我们将采用与 Dirac 动力学相一致的计算规则。这些规则的严格数学证明可以用量子场论方法给出。有关这方面的参考文献列在附录中。下面，我们主要的是给出启发式的论断。

现在让我们来看一下在相对论理论中必须描述的典型过程。这些过程可用图形表示出来(见

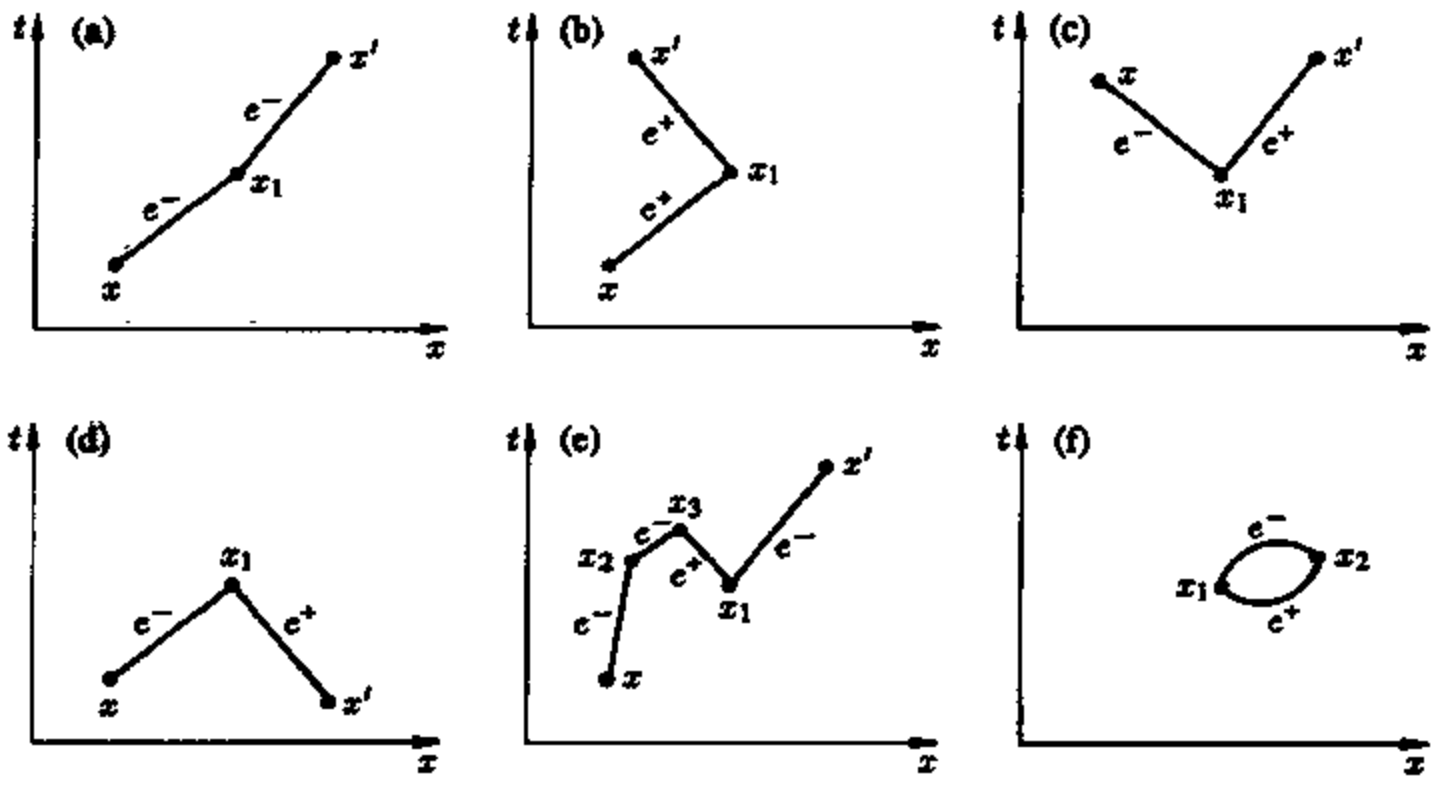


图 2.2(a)～(f)　电子-正电子理论中遇到的一些过程的例子

a. 电子散射；b. 正电子散射；c. 电子-正电子对产生；

d. 电子-正电子对湮灭；e. 包含电子-正电子产生的电子散射；

f. 描写真空极化的闭合圈

图 2.2)。下面，我们要学会如何去理解它们。

除了电子(图 2.2a)或正电子(图 2.2b)的普通散射过程外，还存在对产生和对湮灭过程(图 2.2c～f)。让我们首先来看图 2.2c 中的对产生过程，电子-正电子对是由势作用在空-时点 x_1 而产生的，然后两个粒子沿正时间方向向前传播，正电子到达 x'，而电子到达 x。类似地，图 2.2d 标出了分别来自于点 x 和 x' 的电子和正电子的轨迹，它们在 x_1 处相遇而湮灭。

图 2.2e 代表一个产生于 x 的电子沿着正时间方向向前运动，经过多次散射，最终到达 x'。在从 x 到 x' 的途中，在 x_1 点处的势作用下产生了一对粒子；这对粒子沿正时间方向传播，并与原先的电子汇交于 x_3 处而湮灭。接着，电子对中残存的电子传播到 x' 处。

图 2.2f 表示在 x_1 处产生的对，传播到 x_2 而又在那里的场中湮灭，它仅在短的中间时间间隔内虚存一会儿。下面我们将把这过程称作真空极化。

这些简单的考虑已经表明相对论电子-正电子理论比起非相对论理论来含有更丰富的内容。我们不但需要描述一个粒子(电子)从 x_1 传播到 x_2 的几率幅，而且我们还要描述从一个时空点到另一个时-空点传播的正电子产生又湮灭的几率幅。这就是我们必须首先构造的正电子幅，接着通过对所有对图 2.2 所示各种过程有贡献的中间点(相互作用事件)求和或积分，我们就能找出所有过程的总几率幅。在一种散射事件(如图 2.2e)中通常电子和正电子幅都会对散射事件作出贡献。

Dirac 空穴理论(见《理论物理》，第 3 卷，W. Greiner：《相对论量子力学——波动方程》。以后

我们称之为《RQM》)把正电子解释为 Dirac 海中的空穴,即在填满的海中缺少一个负能量的电子。因此我们也可把在某一时空点正电子的湮灭等价视为该点一个负能量电子的产生。这就暗示着这样一种可能性,例如图 2.2e 在 x_1 产生的正电子在 x_3 又被湮灭的几率幅与在 x_3 处产生的负能电子而又在 x_1 处湮灭的几率幅有关(这儿 $t_1<t_3$)。因此如图 2.2e,c 中对产生过程的图像导致下列正电子的定义:在时空中朝前运动的带有正能的正电子,在传播子理论中可被看做带负能的电子在时空中朝后运动。

这是Stuckelberg-Feynman 对正电子的定义。我们在讨论时间反演和 PCT-对称时已经遇到过(参见《RQM》第 12 章)。电子被描述成时空中向前传播的具有正能的粒子波。所以,就像图2.3 所示的过程能用两种不同的而又等价的语言表达如下。

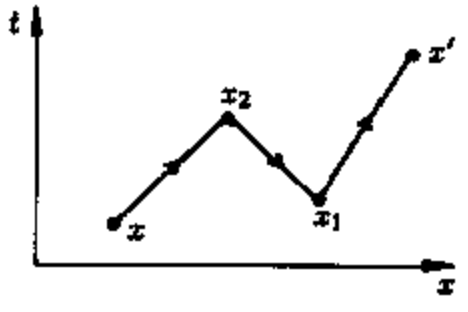


图 2.3 包含中间对产生过程的电子散射

一个始于 x 处的电子沿正时间轴方向向前传播,被 x_2 处相互作用 $V(x_2)$散射成一个负能态,沿负时间轴朝后传播到 x_1,那儿它又一次被散射成正能态,最后沿时间正方向传播到 x'。另一种说法则是,始于 x 的电子沿正时间轴运动到 x_2,那儿,它与在 x_1 处 $V(x_1)$势产生的 e^+-e^- 对中的正电子一道湮灭,而 e^+-e^-对中的电子沿时间轴向前传播到 x'。

图 2.4 所示的闭合圈表示的过程被解释为 x_1 处 $V(x_1)$作用产生的 e^+-e^-对沿正时间轴传播到 x_2,那儿它又被 $V(x_2)$所湮灭。显然,在空穴理论的图像中,我们可等价地说成:在 x_1 的势 $V(x_1)$将来自负能态海的电子散射成正能态而留下一个空穴;接着,它又被散射回到海中,在 $V(x_2)$作用下与 x_2 处的空穴相结合。或用传播子语言来说,产生于 x_1 处的电子在 x_2 处被散射回来而自身在 x_1 处湮灭。

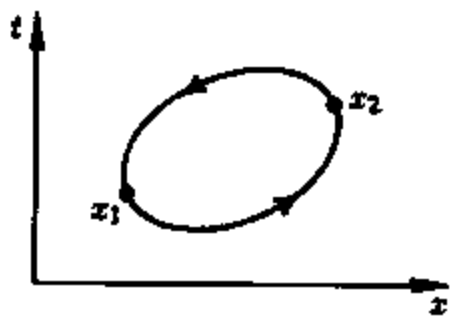


图 2.4 圈图

我们下一个目标是利用相对论传播子形式来寻找一个对各种过程的统一数学描述。首先

步是构造电子和正电子的 Green 函数。这又称为相对论传播子[①]。

$$S_F(x',x;A) \tag{2.1}$$

与非相对论传播子(1.64)类似,要求它满足下列微分方程

$$\sum_{\lambda=1}^{4}\left[\gamma_\mu\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x'_\mu}-\frac{\mathrm{e}}{c}A^\mu(x')\right)-m_0c\right]_{\alpha\lambda}(S_F)_{\lambda\beta}(x',x;A)=\hbar\,\delta_{\alpha\beta}\delta^4(x'-x)\,. \tag{2.2}$$

根据这种定义,相应于 γ 矩阵的维数,传播子 $S_F(x',x;A)$ 是一个 4×4 矩阵。S_F 的第三个宗量告诉人们由(2.2)式定义的传播子依赖于电磁场 A_μ。

在相对论量子理论中,人们通常采用"自然单位制"和设 $\hbar=c=1$,这意味着需作替代

$$\frac{\mathrm{e}}{\hbar\,c}\to\mathrm{e},\quad \frac{m_0c}{\hbar}\to m_0. \tag{2.3}$$

从而,用去掉指数的矩阵记号,(2.2)式变为

$$(\mathrm{i}\not\partial'-e\not A'-m_0)S_F(x',x;A)=\delta^4(x'-x)\,\mathbb{1}. \tag{2.4}$$

注意相对论传播子(2.2,2.4)的定义与非相对论传播子(1.64)不同:(1.64)中出现的微分算符 $\mathrm{i}\partial/\partial t'-\hat H(x')$ 在(2.2,2.4)中已乘上 γ^0 而构成协变算符$(\mathrm{i}\not\partial'-e\not A'-m_0)$。

(2.4)右边旋量空间的单位矩阵通常被删掉,即

$$(\mathrm{i}\not\partial'-\mathrm{e}\not A'-m_0)S_F(x',x;A)=\delta^4(x'-x)\,. \tag{2.5}$$

然而必须记住(2.5)式是一个矩阵方程,因此式中 δ 函数意指乘以 $\mathbb{1}$。

自由粒子传播子必须满足(2.5),不过相互作用项 $e\not A'$ 不存在,即

$$(\mathrm{i}\not\partial'-m_0)S_F(x',x)=\delta^4(x'-x)\,. \tag{2.6}$$

与非相对论中情况一样,由于 $S_F(x',x)$ 仅依赖于距离矢量 $x'-x$,我们在动量空间中计算 $S_F(x',x)$。这一性质是空间和时间为均匀的一种体现。一般地,这种性质对相互作用传播子 $S_F(x',x,A)$ 不再成立。到四维动量空间的 Fourier 变换就导出了自由传播子。

$$S_F(x',x)=S_F(x'-x)=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\exp[-\mathrm{i}p\cdot(x'-x)]S_F(p)\,. \tag{2.7}$$

将(2.7)代入(2.6),我们得到确定 Fourier 幅 $S_F(p)$ 的一个方程,即

$$\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}(\not p-m_0)S_F(p)\exp[-\mathrm{i}p\cdot(x'-x)]=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\exp[-\mathrm{i}p\cdot(x'-x)],$$

这意味着

$$(\not p-m_0)S_F(p)=\mathbb{1} \tag{2.8}$$

或更详细地恢复一些指标

$$\sum_{\lambda=1}^{4}(\not p\quad m_0)_{\alpha\lambda}(S_F(p))_{\lambda\beta}=\delta_{\alpha\beta}. \tag{2.9}$$

---

① 恰当地选用记号 S_F,记住相对论传播子的创始人是 Stückelberg 和 Feynman:传播子通常称为 Feynman 传播子。原始文献是 E. G. Stückelberg 和 D. Rivier: Helv. Phys. Acta **22**, 215(1949)和 R. P. Feynman: Phys. Rev. **76**, 749(1949)

用$(\not p+m_0)$左乘(2.8),我们便能从(2.8)解出 Fourier 幅 $S_F(p)$

$$(\not p + m_0)(\not p - m_0)S_F(p) = (\not p + m_0)\ . \tag{2.10}$$

由于

$$\not p\not p = \gamma_\mu\gamma_\nu p^\mu p^\nu = \frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu)p^\mu p^\nu = g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = p_\mu p^\mu = p^2, \tag{2.11}$$

(2.10)变为

$$(p^2 - m_0^2)S_F(p) = (\not p + m_0) \tag{2.12}$$

或

$$S_F(p) = \frac{\not p + m_0}{p^2 - m_0^2} \quad \text{for} \quad p^2 \neq m_0^2. \tag{2.13}$$

为了完成对 $S_F(p)$的定义,我们必须给出对 $p^2=m_0^2$ 时的奇点处理方案。该奇点正好就是质壳条件 $p_0^2-\boldsymbol{p}^2=m_0^2$ 或 $p_0=\pm\sqrt{m_0^2+\boldsymbol{p}^2}=\pm E_p$,在前面的非相对论传播子形式的讨论中,我们已知道这一附加的信息来自于在 $S_F(x'-x)$加上的边界条件。现在我们来做件事,就是把正电子解释成负能的且沿反时间轴向后运动的电子。为实现这种概念,我们转向(2.7)式的 Fourier 表示以及(2.13)的 Fourier 幅并沿图 2.5 所示的特定的回路 C 对能量积分(dp_0 积分)。我们得到

$$\begin{aligned} S_F(x'-x) &= \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}S_F(p)\exp[-\mathrm{i}p\cdot(x'-x)] \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}S_F(p)\exp\{-\mathrm{i}[p_0(t'-t) - \boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})]\} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\exp[\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})] \\ &\quad \times \int_{C_F} \frac{\mathrm{d}p_0}{2\pi}\frac{\exp[-\mathrm{i}p_0(t'-t)]}{p^2-m_0^2}(\not p + m_0)\ . \end{aligned} \tag{2.14}$$

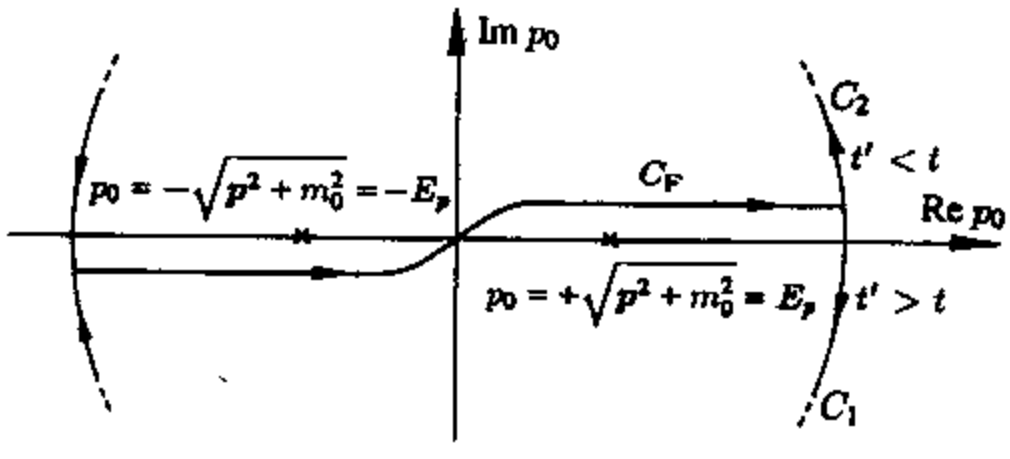


图 2.5 定义 Feynman 传播子的积分回路 C_F,奇点处在实 $p_0=-E_p$ 和 $p_0=+E_p$

对 $t'>t$,我们在下半平面封闭积分回路,因为这种情况下,沿着参数化为 $p_0=\rho e^{i\phi}$的下半圆周的积分对 $\rho\to\infty$贡献为零。那么利用留数定理,只有正能极点

$$p_0 = E_p = +\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m_0^2}$$

对 p_0 积分有贡献，从而我们得到

$$\int_{C_F}\frac{\mathrm{d}p_0}{2\pi}\frac{\exp[-\mathrm{i}p_0(t'-t)]}{p_0^2-\boldsymbol{p}^2-m_0^2}(\not{p}+m_0)$$

$$-\int_{C_F+C_1}\frac{\mathrm{d}p_0}{2\pi}\frac{\exp[-\mathrm{i}p_0(t'-t)]}{(p_0-E_p)(p_0+E_p)}(p_0\gamma^0+p_i\gamma^i+m_0)$$

$$=-2\pi\mathrm{i}\frac{\exp[-\mathrm{i}E_p(t'-t)]}{2\pi 2E_p}(E_p\gamma^0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m_0)\,, \tag{2.15}$$

故(2.14)成为

$$S_F(x'-x)=-\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\exp[\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})]\exp[-\mathrm{i}E_p(t'-t)]$$

$$\times\frac{(E_p\gamma^0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m_0)}{2E_p}\quad\text{for}\quad t'>t\,. \tag{2.16}$$

(2.15)式中的负号来自于沿数学上负方向(顺时针)的回路积分。此传播子描述从 x 到 x' 并沿正时间 $t'>t$ 轴向的粒子向前运动。在 $x'=(\boldsymbol{x}',t')S_F$ 只含正能分量，因为在指数 $\exp(-\mathrm{i}E_p(t'-t))$ 上能量因子被定义为正，$E_p=+\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m_0^2}$。

另一方面，考虑到粒子沿负时间轴传播则意味着 $t'-t$ 为负，从而对 p_0 的积分必须沿上半平面的闭合回路进行，以确保沿上半圆周的积分在 $\rho\to\infty$ 贡献为 0。故只有负能极点

$$p_0=-E_p=-\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m_0^2}$$

有贡献(图 2.5)，这导致

$$\int_{C_F+C_2}\frac{\mathrm{d}p_0}{2\pi}\frac{\exp[-\mathrm{i}p_0(t'-t)]}{(p_0-E_p)(p_0+E_p)}(p_0\gamma^0+p_i\gamma^i+m_0)$$

$$=2\pi\mathrm{i}\frac{\exp[-\mathrm{i}(-E_p)(t'-t)]}{2\pi(-2E_p)}(-E_p\gamma^0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m_0)\,. \tag{2.17}$$

从而对 $t'<t$ 情况，传播子(2.14)成为

$$S_F(x'-x)=-\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\exp[\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})]\exp[+\mathrm{i}E_p(t'-t)]$$

$$\times\frac{(-E_p\gamma^0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m_0)}{2E_p}\quad\text{for}\quad t'<t\,. \tag{2.18}$$

此传播子描述了负能粒子波沿负时间轴方向传播，正如能从指数 $\exp(-\mathrm{i}(-E_p)(t'-t))$ 上可看到的那样。这些负能波在非相对论理论中是不存在的，因为不存在能量-动量关系 $p_0=-E_p=-\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m_0^2}$ 的解。这儿，在相对论情况下，由于能-动量色散关系的平方形式，这些负能波是不可避免的。

我们注意到其他积分回路 C 的选择，比如像图 2.6 那样，这将会导致向未来传播的负能波(情形 a)或向过去传播的正能波(情况 b)有贡献。正如我们可以看到的，根据图 2.5 选择的积分

回路 C_F 就会产生沿正时间轴向前运动的正能波和沿反时间轴向后运动的负能波，而这正是我们所需要的。我们就把这些沿负时间轴向后传播的负能波等同于正电子。

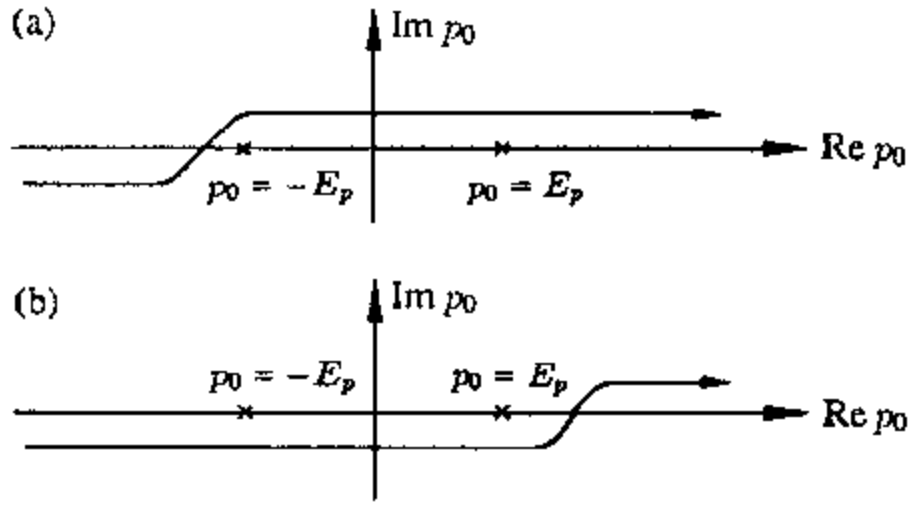


图 2.6 积分回路的另一种可能选择导致错误渐近行为的传播子

回忆一下空穴理论，我们就会发现对真空(Fermi 面 E_F 位置所确定的)的定义就是描述什么样的粒子波态被解释为电子，什么样的粒子波态被解释为正电子。假设 $E<E_F$ 的粒子态被占据，而空出这样一个粒子态就被解释为正电子，传播子的选择是以这种真空的定义为基础的，它决定了积分回路 C 的选择，即 C 从 p_0 复平面的下半部转变为上半部。例如，在超临界场中，真空带电荷，因此，一些负能态被解释为沿正时间轴向前传播的电子。对于原子，Fermi 面通常位于一个束缚态上。因而，在这种情况下，传播子要求沿着这样一个积分回路而导出，即它从比最高占据束缚态的能量略高处的下半平面跨到上半平面。另一个修正基态的例子(从而为一个修正的传播子)是电子的 Fermi 气体，这将在下面例 2.2 中引入。

确定传播子的积分回路 C_F，$S_F(x'-x)$ 也可通过另一种方法来表征，那就是在(2.14)式的分母上加一个小的正的虚部 $+i\varepsilon$，计算终了时取极限 $\varepsilon\to 0$：

$$S_F(x'-x)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{\exp[-ip\cdot(x'-x)]}{p^2-m_0^2+i\varepsilon}(\not p+m_0)\,. \tag{2.19}$$

从而与正能态相对应的奇点

$$p_0=+\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m_0^2-i\varepsilon}=+\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m_0^2}-i\eta(\varepsilon), \tag{2.20a}$$

处在 p_0 实轴下方，而与负能态相对应的极点

$$p_0=-\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m_0^2-i\varepsilon}=-\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m_0^2}+i\eta(\varepsilon)\,, \tag{2.20b}$$

处在 p_0 实轴上方。这正是回路 C_F 所要求的。最容易记住(2.19)的方法还是通过这样一种规则形式：为确保正确的边界条件，质量必须给出一个小的负虚部。描述(2.16)式的正能粒子波和(2.18)式的负能粒子波分别沿正负时间轴(向前和向后)传播的两个传播子能通过引入能量投影算符 $\hat\Lambda_+(p)$(参见《RQM》，第七章)而结合在一起。

$$\hat\Lambda_r(p)=\frac{\epsilon_r\not p+m_0}{2m_0},$$

$$\varepsilon_r = \begin{cases} +1 & \text{对正能波} \\ -1 & \text{对负能波} \end{cases}. \tag{2.21}$$

然后，将(2.18)式的负能波传播子中的三维动量 $\boldsymbol{p}$ 改为 $-\boldsymbol{p}$，这不改变结果，因为积分 $\int \mathrm{d}^3p$ 包含三维动量的所有方向。我们可以写成

$$\begin{aligned}
S_{\mathrm{F}}(x'-x) = &-\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\Big\{\exp[-\mathrm{i}(+E_p)(t'-t)]\exp[+\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})] \\
&\times\frac{(+E_p\gamma^0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m_0)}{2E_p}\Theta(t'-t) \\
&+\exp[-\mathrm{i}(-E_p)(t'-t)]\exp[-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})] \\
&\times\frac{(-E_p\gamma^0+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m_0)}{2E_p}\Theta(t-t')\Big\} \\
=&-\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{m_0}{E_p} \\
&\times\Big(\frac{p_0\gamma^0+p_i\gamma^i+m_0}{2m_0}\exp\{-\mathrm{i}[p_0(t'-t)-\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})]\}\Theta(t'-t) \\
&+\frac{-p_0\gamma^0-p_i\gamma^i+m_0}{2m_0}\exp\{+\mathrm{i}[p_0(t'-t)-\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})]\}\Theta(t-t')\Big) \\
=&-\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{m_0}{E_p}\Big\{\frac{\not{p}+m_0}{2m_0}\exp[-\mathrm{i}p\cdot(x'-x)]\Theta(t'-t) \\
&+\frac{-\not{p}+m_0}{2m_0}\exp[+\mathrm{i}p\cdot(x'-x)]\Theta(t-t')\Big\} \\
=&-\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{m_0}{E_p}\{\hat{\Lambda}_+(p)\exp[\ \ \mathrm{i}p\cdot(x'-x)]\Theta(t'-t) \\
&+\hat{\Lambda}_-(p)\exp[+\mathrm{i}p\cdot(x'-x)]\Theta(t-t')\}\,.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

等价地，借助于归一化的 Dirac 平面波(参见《RQM》，第 6 章)

$$\psi_p(x) = \sqrt{\frac{m_0}{E_p}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\omega^r(\boldsymbol{p})\exp(-\mathrm{i}\varepsilon_r p\cdot x)\,, \tag{2.23}$$

$S_{\mathrm{F}}(x'-x)$也可被改写成下列形式(对照练习 2.1)

$$\begin{aligned}
S_{\mathrm{F}}(x'-x) = &-\mathrm{i}\Theta(t'-t)\int\mathrm{d}^3p\sum_{r=1}^{2}\psi_p(x')\bar{\psi}_p(x) \\
&+\mathrm{i}\Theta(t-t')\int\mathrm{d}^3p\sum_{r=3}^{4}\psi_p(x')\bar{\psi}_p(x)\,.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

这结果是非相对论 Green 函数(1.77)式的相对论推广。现在传播子 S_{F} 由两部分组成：前部分是描述正能态沿正时间轴的传播，后一部分是描述负能态沿反时间轴向后传播，借助于(2.24)，容易论证下列正能解($\psi^{(+E)}$)和负能解($\psi^{(-E)}$)的关系。

$$\Theta(t'-t)\psi^{(+E)}(x') = \mathrm{i}\int\mathrm{d}^3x S_{\mathrm{F}}(x'-x)\gamma_0\psi^{(+E)}(x)\,, \tag{2.25}$$

$$\Theta(t-t')\psi^{(-E)}(x')=-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x S_{\mathrm{F}}(x'-x)\gamma_0\psi^{(-E)}(x)\,. \tag{2.26}$$

与非相对论传播子理论(对照(1.7)和(1.9))相类似,在(2.26)中附加负号出现是因为分别对应的传播方向不同引起的,即正能解沿正时间轴方向(见(2.25)式),负能解沿负时间轴方向(见(2.26)式)。(2.25)式的正确性由下式即可看出

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x S_{\mathrm{F}}(x'-x)\gamma_0\psi^{(+E)}(x)\\&=\Theta(t'-t)\int \mathrm{d}^3p\sum_{r=1}^{2}\psi_p^r(x')\int \mathrm{d}^3x\psi_p^{r\dagger}(x)\psi^{(+E)}(x)\\&\quad-\Theta(t-t')\int \mathrm{d}^3p\sum_{r=3}^{4}\psi_p^r(x')\int \mathrm{d}^3x\psi_p^{r\dagger}(x)\psi^{(+E)}(x)\end{aligned} \tag{2.27}$$

将一般正能解 $\psi^{(+E)}(x)$ 按 Dirac 平面波展开

$$\psi^{(+E)}(x)=\int \mathrm{d}^3p\sum_{r=1}^{4}a_r(p)\psi_p^r(x)\,. \tag{2.28}$$

除 $r=1,2$ 外。系数 $a_r(p)$ 为零。因为按照定义,$\psi^{(+E_p)}$ 描述一个只含正能或"正频"的波包。由 $\psi_p^r(x)$ 的正交归一化性关系

$$a_r(p)=\int \mathrm{d}^3x\psi^{(+E)}(x)\psi_p^{r\dagger}(x)\neq 0\quad(r=1,2), \tag{2.29}$$

$$a_r(p)=\int \mathrm{d}^3x\psi^{(+E)}(x)\psi_p^{r\dagger}(x)=0\quad(r=3,4)\,, \tag{2.30}$$

(2.27)式中第二项为零,而第一项为

$$\Theta(t'-t)\int \mathrm{d}^3p\sum_{r=1}^{2}a_r(p)\psi_p^r(x')=\Theta(t'-t)\psi^{(+E)}(x')\,. \tag{2.31}$$

从而关系式(2.25)得证

类似方法可以证明(2.26)式。分别用沿正时间轴传播的正能解和沿负时间轴传播的负能解,方程(2.25)和(2.26)分别明显地给出了电子和正电子的解释。

练　习

2.1 Feynman 传播子的平面波分解

问题:证明 Stuckelberg-Feynman 传播子

$$\begin{aligned}S_{\mathrm{F}}(x'\quad x)=-\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{m_0}{E_p}\{&\hat{\Lambda}_+(p)\exp[-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})]\Theta(t'-t)\\&+\hat{\Lambda}_-(p)\exp[\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})]\Theta(t-t')\}\end{aligned}$$

可等价地表述为

$$S_{\mathrm{F}}(x'-x)=-\mathrm{i}\Theta(t'-t)\int \mathrm{d}^3p\sum_{r=1}^{2}\psi_p^r(x')\bar{\psi}_p^r(x)$$

$$+\mathrm{i}\Theta(t-t')\int \mathrm{d}^3p\sum_{r=3}^{4}\psi_p^r(x')\bar{\psi}_p^r(x)\ .$$

解答：我们回忆一下《RQM》第 6 章，Dirac 平面波满足下列关系

$$(\not{p}-m_0)\psi_p(x)=0, \tag{1}$$

$$(\varepsilon_r\not{p}-m_0)\omega^r(\boldsymbol{p})=0 \quad \text{or} \quad (\not{p} \quad \varepsilon_r m_0)\omega^r(\boldsymbol{p})=0, \tag{2}$$

$$\bar{\omega}^r(\boldsymbol{p})(\not{p}-\varepsilon_r m_0)=0 \quad \text{where} \quad \bar{\omega}^r(\boldsymbol{p})=\omega^r(\boldsymbol{p})^{+}\gamma^0, \tag{3}$$

$$\bar{\omega}^r(\boldsymbol{p})\omega^{r'}(\boldsymbol{p})=\delta_{rr'}\varepsilon_r, \tag{4}$$

$$\sum_{r=1}^{4}\varepsilon_r\omega_\alpha^r(\boldsymbol{p})\bar{\omega}_\beta^r(\boldsymbol{p})=\delta_{\alpha\beta}, \tag{5}$$

$$\omega^{r+}(\varepsilon_r\boldsymbol{p})\omega^{r'}(\varepsilon_{r'}\boldsymbol{p})=\frac{E_p}{m_0}\delta_{rr'}. \tag{6}$$

这儿 r 和 r' 的可能取值为 1，2，3，4。借助(2.23)式，我们发现(记住 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=+1,\varepsilon_3=\varepsilon_4=-1$)

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{2}\psi_p^r(x')\bar{\psi}_p^r(x)&=\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{m_0}{E_p}\exp[-\mathrm{i}p\cdot(x'-x)]\sum_{r=1}^{2}\omega^r(\boldsymbol{p})\bar{\omega}^r(\boldsymbol{p})\\
&=\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{m_0}{E_p}\exp[-\mathrm{i}p\cdot(x'-x)]\sum_{r=1}^{4}\omega^r(\boldsymbol{p})\bar{\omega}^r(\boldsymbol{p})\frac{\not{p}+m_0}{2m_0}\\
&=\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{m_0}{E_p}\exp[-\mathrm{i}p\cdot(x'-x)]\underbrace{\sum_{r=1}^{4}\varepsilon_r\omega^r(\boldsymbol{p})\bar{\omega}^r(\boldsymbol{p})}_{=1(\text{由于(5)})}\frac{\not{p}+m_0}{2m_0}\\
&=\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{m_0}{E_p}\exp[-\mathrm{i}p\cdot(x'-x)]\frac{\not{p}+m_0}{2m_0}\\
&=\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{m_0}{E_p}\exp[-\mathrm{i}p\cdot(x'-x)]\,\hat{\Lambda}_+(p).
\end{aligned}$$

这结果恰好是用投影算符 $\hat{\Lambda}_+$ 表示 $S_F(x'-x)$ 所表达的传播子的第一项。类似地，对第二项，我们得到

$$\begin{aligned}
\sum_{r=3}^{4}\psi_p^r(x')\bar{\psi}_p^r(x)&=\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{m_0}{E_p}\exp[\mathrm{i}p\cdot(x'-x)]\sum_{r=3}^{4}\omega^r(\boldsymbol{p})\bar{\omega}(\boldsymbol{p})\\
&=\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{m_0}{E_p}\exp[+\mathrm{i}p\cdot(x'-x)]\sum_{r=1}^{4}\frac{-(\not{p}-m_0)}{2m_0}\omega^r(\boldsymbol{p})\bar{\omega}^r(\boldsymbol{p})\\
&=\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{m_0}{E_p}\exp[+\mathrm{i}p\cdot(x'-x)]\sum_{r=1}^{4}\frac{(-\not{p}+m_0)}{2m_0}(-\varepsilon_r)\omega^r(\boldsymbol{p})\bar{\omega}^r(\boldsymbol{p})\\
&=-\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{m_0}{E_p}\exp[\mathrm{i}p\cdot(x'-x)]\frac{(-\not{p}+m_0)}{2m_0}\\
&=-\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{m_0}{E_p}\frac{\exp[\mathrm{i}p\cdot(x'-x)]}{(2\pi)^3}\hat{\Lambda}_-(p)\ .
\end{aligned}$$

从而，我们就证明了所假设的 $S_F(x'-x)$ 的两种表达式间的关系。

方程(2.22)或(2.24)确定了电子-正电子理论中自由粒子的传播子。和(1.83)和(1.86)类似,我们现在可在形式上分别构造出与电磁场势 A 相互作用的电子-正电子的完全 Green 函数和 S 矩阵。这样,我们就能计算出电子和正电子在外场存在时的各种散射过程,这将在下章给出描述。为了构造出精确的传播子 $S_F(x',x;A)$,我们从决定 $S_F(x',x;A)$的微分方程(2.5)出发,改写方程为如下形式,并解释非相对论处理的含意(参见(1.80)):

$$(\mathrm{i}\not\nabla' - m_0)S_F(x',x;A) = \delta^4(x'-x) + e\not A(x')S_F(x',x;A)\ . \tag{2.32}$$

这能被视为一个非齐次 Dirac 方程形式。

$$(\mathrm{i}\not\nabla - m_0)\Psi(x) = \rho(x)\ , \tag{2.33}$$

它能通过 Green 函数技巧被求解如下

$$\Psi(x) = \Psi_0(x) + \int \mathrm{d}^4y S_F(x-y)\rho(y)\ . \tag{2.34}$$

这样,(2.32)导出一个 Stückelberg-Feynman 传播子所满足的积分方程。

$$\begin{aligned} S_F(x',x;A) &= \int \mathrm{d}^4y S_F(x'-y)[\delta^4(y-x) + e\not A(y)S_F(y,x;A)] \\ &= S_F(x'-x) + e\int \mathrm{d}^4y S_F(x',y)\not A(y)S_F(y,x;A)\ . \end{aligned} \tag{2.35}$$

这是一个与 Lippmann-Schwinger 方程(1.83)相对应的相对论方程。该积分方程可根据自由粒子传播子 $S_F(x',x)$来确定完全传播子 $S_F(x',x;A)$,与非相对论处理(参见(1.28))类似,积分方程的迭代会导致下列多重散射展开。

$$\begin{aligned} S_F(x',x;A) =& S_F(x'-x) + e\int \mathrm{d}^4x_1 S_F(x'-x_1)\not A(x_1)S_F(x_1-x) \\ &+ e^2\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2 S_F(x'-x_1)\not A(x_1)S_F(x_1-x_2)\not A(x_2)S_F(x_2-x) \\ &+ \cdots . \end{aligned} \tag{2.36}$$

类似于(1.31),Dirac 方程

$$(\mathrm{i}\not\nabla_x - m_0)\Psi(x) = e\not A(x)\Psi(x) \tag{2.37}$$

的精确解是完全能根据 S_F 而定出,只要我们加上 Feynman 和 Stückelberg 边界条件,即

$$\Psi(x) = \psi(x) + \int \mathrm{d}^4y S_F(x-y)e\not A(y)\Psi(y)\ . \tag{2.38}$$

这儿 $\psi(x)$是自由 Dirac 方程,即(2.37)的齐次形式的一个解。出现在(1.31)中的势 $V(x)$被 $e\not A(x)$所取代。(2.38)式的右边第二项代表散射波。与 Stückelberg-Feynman 传播子(2.24)的性质相一致,此散射波在遥远未来仅包含正频,而在遥远过去仅包含负频。因为

$$\Psi(x) - \psi(x) \Rightarrow \int \mathrm{d}^3p \sum_{r=1}^{2} \psi_p^r(x)\left(-\mathrm{i}e\int \mathrm{d}^4y\bar{\psi}_p^r(y)\not A(y)\Psi(y)\right) \quad t\to+\infty \text{ 时} \tag{2.39}$$

和

$$\Psi(x) - \psi(x) \Rightarrow \int \mathrm{d}^3p \sum_{r=3}^{4} \psi_p^r(x)\left(+\mathrm{i}e\int \mathrm{d}^4y\bar{\psi}_p^r(y)\not A(y)\Psi(y)\right) \quad t\to-\infty \text{ 时} \tag{2.40}$$

注意这儿的 x 和 y 分别与(2.24)中的 x' 和 x 等同，(2.37,2.38)中的 t 对应着(2.24)中的 t'。

结果(2.39)表达了相对论散射问题的形式，它与空穴理论的要求相一致。这些要求本质上已通过选取特定的积分回路，考虑了 Fermi 边界(参见图 2.5 和练习 2.2)的位置，进而被融进 Stückelberg-Feynman 传播子中去了。而且，根据(2.39)，一个电子在被一个外场 $A(y)$ 散射之后，不可能"掉进"(占据的)负能态的海中。因为只有未被占据的正能态是空的；相反，根据(2.40)，被理解为沿负时间轴方向运动的负能电子的正电子是被散射回到较早时刻的其他负能态。

S 矩阵元是与非相对论情况(1.37)相同方式定义的。以 $\psi_f(x)$ 表示量子数为 f 的末态自由波，它是散射过程结束后被观察到的。借助(2.24)，我们从(2.38-40)可推断出

$$S_{fi}=\lim_{t\to\pm\infty}\langle\psi_f(x)|\Psi_i(x)\rangle$$

$$=\lim_{t\to\pm\infty}\left\langle\psi_f(x)\left|\psi_i(x)+\int \mathrm{d}^4y S_F(x-y)e\not{A}(y)\Psi_i(y)\right.\right\rangle . \tag{2.41}$$

这儿极限 $t\to+\infty$，表示 $\psi_f(x)$ 描述一个电子；而极限 $t\to-\infty$，表示 $\psi_i(x)$ 描述一个正电子。因为后者被认为是沿负时间轴方向运动的负能电子。对电子散射，我们有

$$S_{fi}=\delta_{fi}-\mathrm{i}e\lim_{t\to-\infty}\left\langle\psi_f(x)\left|\int \mathrm{d}^3p\sum_{r=1}^{2}\psi_p^r(x)\int \mathrm{d}^4y\bar{\psi}_p^r(y)\not{A}(y)\Psi_i(y)\right.\right\rangle , \tag{2.41a}$$

而正电子散射被描述为

$$S_{fi}=\delta_{fi}+\mathrm{i}e\lim_{t\to-\infty}\left\langle\psi_f(x)\left|\int \mathrm{d}^3p\sum_{r=3}^{4}\psi_p^r(x)\int \mathrm{d}^4y\bar{\psi}_p^r(y)\not{A}(y)\Psi_i(y)\right.\right\rangle . \tag{2.41b}$$

括号所隐含的积分 $\int \mathrm{d}^4x$ 把那些与 $\psi_f(x)$ 量子数相同的态 $\psi_p^r(x)$ 正好投影出来。积分求和，$\int \mathrm{d}^4p\sum_r$ 的所有其他项均无贡献，则(2.41a)产生

$$S_{fi}=\delta_{fi}-\mathrm{i}e\int \mathrm{d}^4y\bar{\psi}_f(y)\not{A}(y)\Psi_i(y)$$

和一个类似的正电子散射表达式。两个结果能被合二为一地写成(对未来的正能波 $\varepsilon_f=+1$ 以及对过去的负能波 $\varepsilon_f=-1$)

$$S_{fi}=\delta_{fi}-\mathrm{i}e\varepsilon_f\int \mathrm{d}^4y\bar{\psi}_f(y)\not{A}(y)\Psi_i(y) . \tag{2.42}$$

由于 $\psi_f(x)$ 或是代表一个电子，或是代表一个正电子，所以第一项和第二项不同时为零。在(2.42)中，$\Psi_i(x)$ 代表入射波，根据 Stückelberg-Feynman 边界条件，它或者在 $y_0\to-\infty$ 时退化成携带量子数 i 的入射正频波 $\psi_i(x)$，或者在 $y_0\to+\infty$ 退化为一个向过去传播携带量子数 i 的一个入射负频波。

为了阐明(2.42)式是如何包括了各种散射过程，我们首先考虑电子的"普通"散射，在这种情况下

$$\Psi_i(y)\overset{y_0\to-\infty}{\Longrightarrow}\psi_i^{(+E)}(y)=\sqrt{\frac{m_0}{E_-}}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}u(p_-,s_-)\exp(\mathrm{i}p_-\cdot y) \tag{2.43}$$

退化为具有正能 E_-、动量 p_-和自旋 s 的入射电子波。这里的负号系指电子带负电荷。对 S 矩阵元(2.42)的 n 阶贡献为

$$S_{fi}^{(n)} = -\mathrm{i}e^n\int \mathrm{d}^4y_1\cdots\mathrm{d}^4y_n\bar{\psi}_f^{(+E)}(y_n)A(y_n)S_F(y_n-y_{n-1})A(y_{n-1})\cdots \times S_F(y_2-y_1)A(y_1)\psi_i^{(+E)}(y_1)\,. \tag{2.44}$$

这个表达式包含图 2.7 所示的两类图:即,除普通散射之外,在级数中也包含了中间的对产生和对湮灭,因为各种 d^4y 积分也允许时序的颠倒,$y_{n+1}^0<y_n^0$。因此,我们认为传播子(2.24)的第二部分也必然有贡献。



图 2.7 两个三阶电子散射图。下面的图包含中间电子-正电子对

下一步,我们考虑对产生的过程。按照已建成的理论,在这种情况下,$\Psi_i(y)$在 $y_0\to+\infty$退化为负能平面波。该粒子沿负时间轴向传播,从而它代表着正电子。我们用符号 $\mathbf{p}_-,s_-$代表物理电子的三维动量和自旋,$\mathbf{p}_+,\mathbf{s}_+$代表物理正电子的三维动量和自旋,这里 $p_+^0>0$。物理正电子态在 $t\to\infty$时被描述为携带量子数$-\boldsymbol{p}_+,-s_+,\varepsilon=-1$ 的负能平面波,此波沿负时间轴向向后传播到顶角,即

$$\Psi_i(x)\overset{y_0\to\infty}{\Longrightarrow}\psi_i^{(-E)}(y)=\sqrt{\frac{m_0}{E_+}}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}v(p_+,s_+)\exp(\mathrm{i}p_+\cdot y)\,. \tag{2.45}$$

这种形式的波函数明显地表示了粒子波的负能和负三维动量。(2.45)式中指数中的正号就明确表达了这一性质,因为正能量和正三维动量的波总带一个位相因子 $\exp(-\mathrm{i}p_-,y)$。自旋方向反转,即$-s_+$,是通过定义旋量 $v(p_+,s_+)$来考虑的。回忆一下《RQM》的第 6 章,旋量已定义成下式

$$v(p_+,+1/2)=\omega^4(p_+)\quad 和\quad v(p_+,-1/2)=\omega^3(p_+)\,,$$

其中 ω^4 是自旋向上的一个负能电子的旋量;ω^3 为自旋向下的负能电子的旋量。

在对产生过程中的末态波函数 ψ_f 是一个正能解,它携带量子 $\boldsymbol{p}_-,s_-,\varepsilon=+1$ 并描述一个电子。

为了继续我们先前的一些考虑。由空穴理论(参见《RQM》,第 12 章)我们知道,缺少一个四

维动量为$-p_+$和自旋为$-s_+$的负能电子，被解释为四维动量为$+p_+$和极化为$+s_+$的正电子。在传播子理论框架中，x处产生时空中向前传播的正电子，并从相互作用范围出射到x'的自由终态(p_1, s_+)的几率幅能通过计算一个负能电子(四维动量$-p_-$，自旋$-s_+$)沿反时间轴向传入相互作用范围的几率幅而得到。于是，受到势场的散射时，它作为一个沿正时间轴向传播的一个正能态从相互作用范围发射出来。对产生的图由图 2.8 所示。我们强调指出，二阶散射幅包含两个图，它们对应着正电子的第二次散射。这两个二阶图的差别在于两个散射过程的时序不同。

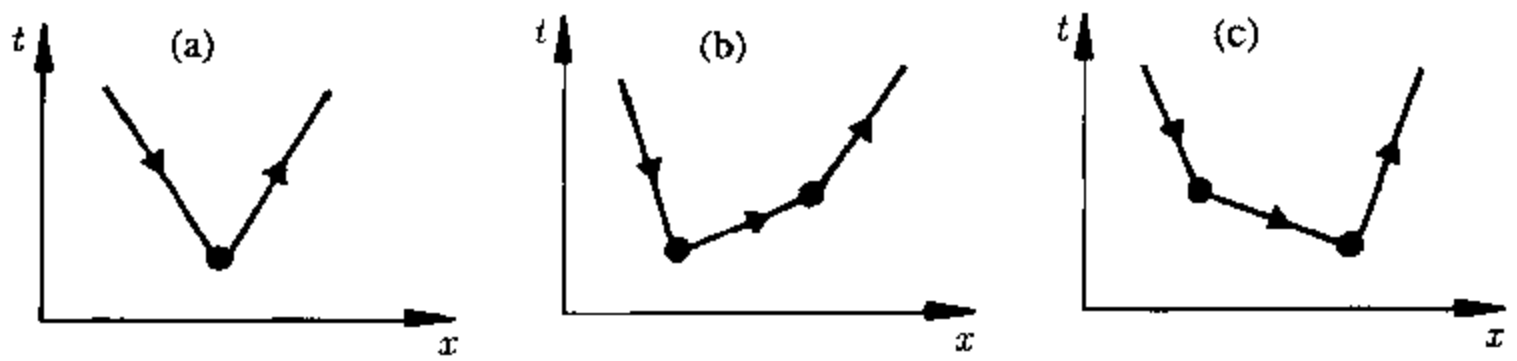


图 2.8a～c　电子正电对产生的一阶和二阶 Feynman 图

根据(2.24)，由于 Feynman 传播子由两部分构成，在计算任何过程时，就没必要去明显处理时序。S 矩阵的公式自动包含了这一切。

现在让我们来考虑*对湮灭*。该过程的最低级图由图 2.9 表示。在此情况下，对$\Psi_i(y)$，我们写入(2.38)的解，它在$t\to-\infty$退化为$\psi_i^{(+E)}(y)$。这个正能解代表这样一个电子，它沿时间轴方向向前传播到相互作用范围内，然后沿负时间轴向后散射而成为一个负能态。按照(2.42)，电子被散射成一个给定的末态$\psi_f^{(-E)}$，其物理量子数为$p_+, s_+, \varepsilon_f=-1$(而含在波函数中相应的量子数为$-p_+, -s_+$，参照(2.45)式下面的讨论)，其 n 阶几率幅由下式给出

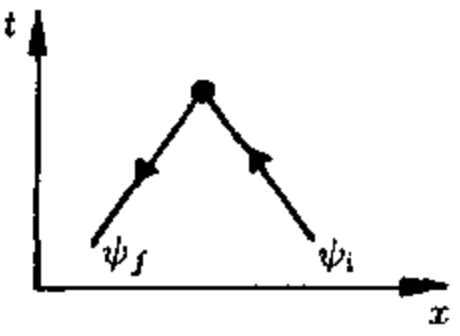


图 2.9　对湮灭的 Feynman 图

$$S_{fi}^{(n)} = ie^n\int d^4y_1\cdots\int d^4y_n\bar{\psi}_f^{(-E)}(y_n)A(y_n)S_F(y_n-y_{n-1})\cdots A(y_1)\psi_i^{(+E)}(y_1)\,. \tag{2.46}$$

用空穴理论的语言来说，这是一个正能电子被散射成具有负能、负三维动量$-p_+$和自旋$-s_+$的电子态的 n 阶振幅。这个态在$t\to-\infty$时当然已不存在。即必须已经存在一个空穴或一个四维动量为 p_+和自旋或极化为 s_+的正电子。

最后，让我们转向正电子散射，它(在最低级)由图 2.10 中两个等价图之一来表示。入射波是一个负频(负能量)，量子数为$-p_+, -s_+, \varepsilon_f=-1$ 的电子。末态(出射波)也被表示成一个负能电子。注意，入射负能电子表征一个正能的出射正电子。类似地，入射正电子也表示一个出射的负能电子。在第三、四章中我们将对此作出详细明了的描述。

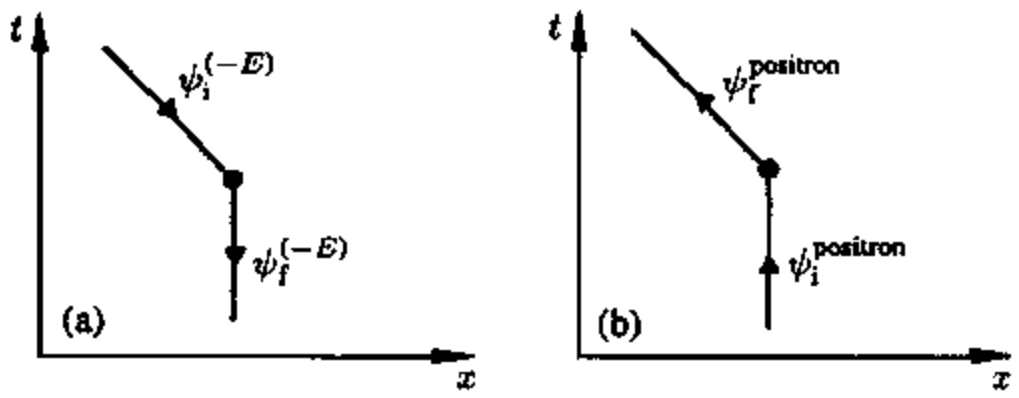


图 2.10a,b 最低阶正电子散射,出射的正电子((b)中的 $\psi_f^{positron}$)相应于入射的负能电子((a)中的 $\psi^{(-E)}$),类似地,入射的正电子((b)中的 $\psi_i^{positron}$)用出射的负能电子((a)中的 $\psi^{(-E)}$)表示。换句话说,(a)是按我们的计算技巧描述散射过程,而(b)解释正电子散射的真实物理图像。

练 习

2.2 Fermi 气体的 Feynman 传播子

问题:假设在我们理论中,用具有 Fermi 动量为 k_F 电子的非相互作用 Fermi 气体来取代真空。如何修正 Stückelberg-Feynman 传播子? 试在低密度极限下估算 S_F。

解答:在简并的 Fermi 气体中,正能电子连续能谱的能级一直被占据到 Fermi 动量 k_F。这些被占据的态被认为是 Dirac 海的负能态。即 Feynman 传播子被修正为

$$\begin{aligned} iS_F^G(x'-x) = &\Theta(t'-t)\sum_{\substack{\kappa \\ r=1,2}}\psi_\kappa(x')\bar{\psi}_\kappa(x)\Theta(k-k_F) \\ &-\Theta(t-t')\sum_{\kappa}\Big(\sum_{r=3,4}\psi_\kappa(x')\bar{\psi}_\kappa(x)+\sum_{r=1,2}\psi_\kappa(x')\bar{\psi}_\kappa(x)\Theta(k_F-k)\Big)\ , \end{aligned} \tag{1}$$

式中

$$\psi_\kappa(x) = (m_0/E_k)^{1/2}(2\pi)^{-3/2}\omega^r(k)\exp(-i\varepsilon_r k\cdot x), \tag{2}$$

其中 $k_0=E_k=\sqrt{k^2+m_0^2}$ 为归一化的 Dirac 平面波。对 $k_F=0$ 的特殊情况,该表达式被约化为普通的 Feynman 传播子。我们回忆一下下列 Θ 函数的表示:

$$\Theta(t'-t) = i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp'_0}{2\pi}\exp[-ip'_0(t'-t)]\frac{1}{p'_0+i\varepsilon}\ , \tag{3a}$$

$$\Theta(t-t') = -i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp'_0}{2\pi}\exp[-ip'_0(t'-t)]\frac{1}{p'_0-i\varepsilon}\ , \tag{3b}$$

式中第二个表达式由第一个表达式的复共轭求得。而且,我们需要关系式

$$\sum_{r=1,2}\omega^r(\kappa)\bar{\omega}^r(\kappa) = \frac{k+m_0}{2m_0} = \hat{\Lambda}_+(k),$$

$$\sum_{r=3,4}\omega^r(\kappa)\bar{\omega}^r(\kappa)=\frac{k\!\!\!/+m_0}{2m_0}=-\hat{\Lambda}_-(k). \tag{4}$$

借助于式(4),(1)变成为

$$\begin{aligned}iS_F^c(x'-x)=&\Theta(t'-t)\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{m_0}{E_k}\hat{\Lambda}_+(k)\exp[-ik\cdot(x'-x)]\Theta(k-k_F)\\&+\Theta(t-t')\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{m_0}{E_k}\hat{\Lambda}_-(k)\exp[ik\cdot(x'-x)]\\&-\Theta(t-t')\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{m_0}{E_k}\hat{\Lambda}_+(k)\exp[-ik\cdot(x'-x)]\Theta(k_f-k)\\\equiv&I_1+I_2+I_3.\end{aligned} \tag{5}$$

代入(3a)的 Θ 函数表达式,我们求得

$$\begin{aligned}I_1=&i\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{m_0}{E_k}\hat{\Lambda}_+(k)\exp\{-i[E_k(t'-t)-\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})]\}\\&\times\int\frac{dk_0'}{2\pi}\exp\{-i[k_0'(t'-t)]\}\frac{1}{k_0'+i\varepsilon}\Theta(k-k_F)\\=&i\int\frac{d^3kdk_0'}{(2\pi)^4}\frac{1}{2E_k}\exp\{-i[(E_k+k_0')(t'-t)-\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})]\}\\&\times\frac{E_k\gamma_0-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m_0}{k_0'+i\varepsilon}\Theta(k-k_F).\end{aligned} \tag{6a}$$

类似地,利用(3b),我们得到

$$\begin{aligned}I_2=&-i\int\frac{d^3kdk_0'}{(2\pi)^4}\frac{1}{2E_k}\exp\{i[(E_k-k_0')(t'-t)-\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})]\}\\&\times\frac{-E_k\gamma_0+\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m_0}{k_0'-i\varepsilon},\end{aligned} \tag{6b}$$

$$\begin{aligned}I_3=&i\int\frac{d^3kdk_0'}{(2\pi)^4}\frac{1}{2E_k}\exp\{-i[E_k+k_0')(t'-t)-\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})]\}\\&\times\frac{E_k\gamma_0-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m_0}{k_0'-i\varepsilon}\Theta(k_F-k).\end{aligned} \tag{6c}$$

为计算这些积分,我们引进下列代换

在 I_1 和 I_3 中,　　$k_0=k_0'+E_k$, (7a)

在 I_2 中,　　$k_0=k_0'-E_k$　及　$k\to-k$. (7b)

此外,对积分 I_2,我们利用了恒等式

$$1=\Theta(k-k_F)+\Theta(k_F-k) \tag{8}$$

从而(6)变为

$$I_1=i\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{2E_k}\exp[-ik\cdot(x'-x)]\frac{E_k\gamma_0-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m_0}{k_0-E_k+i\varepsilon}\Theta(k-k_F),$$

$$I_2=-\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{2E_k}\exp[-\mathrm{i}k\cdot(x'-x)]\frac{-E_k\gamma_0-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m_0}{k_0+E_k-i\varepsilon}$$
$$\times[\Theta(k-k_F)+\Theta(k_F-k)],$$
$$I_3=\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{2E_k}\exp[-\mathrm{i}k\cdot(x'-x)]\frac{E_k\gamma_0-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m_0}{k_0-E_k-i\varepsilon}\Theta(k_F-k)\,. \tag{9}$$

下一步，我们将 I_1 加到 I_2 含 $\Theta(k-k_F)$的那部分中去，两被积函数的分母结合在一起为

$$(k_0-E_k+\mathrm{i}\varepsilon)(k_0+E_k-\mathrm{i}\varepsilon)=k_0^2-E_k^2+2\mathrm{i}\varepsilon E_k+\varepsilon^2$$
$$=k_0^2-E_k^2+\mathrm{i}\varepsilon'=k^2-m_0^2+\mathrm{i}\varepsilon', \tag{10}$$

因为 ε 是一个无穷小量，且 $E_k>0$，这导致

$$\frac{E_k\gamma_0-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m_0}{k_0-E_k+\mathrm{i}\varepsilon}-\frac{-E_k\gamma_0-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m_0}{k_0+E_k-\mathrm{i}\varepsilon}$$
$$=\frac{(E_k\gamma_0-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m_0)(k_0+E_k)-(-E_k\gamma_0-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m_0)(k_0-E_k)}{k^2-m_0^2+\mathrm{i}\varepsilon'}$$
$$=\frac{2E_k(k_0\gamma_0-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m_0)}{k^2-m_0^2+\mathrm{i}\varepsilon'}$$
$$=\frac{2E_k(k\cdot\gamma+m_0)}{k^2-m_0^2+\mathrm{i}\varepsilon'}\,. \tag{11}$$

类似地，将 I_2 的第二部分加到 I_3 中去，此种情况下的公分母为

$$(k_0+E_k-\mathrm{i}\varepsilon)(k_0-E_k-\mathrm{i}\varepsilon)=k_0^2-E_k^2-2\mathrm{i}\varepsilon k_0$$
$$=k^2-m_0^2-\mathrm{i}\varepsilon' k_0. \tag{12}$$

与(11)式做同样的处理，我们求得

$$\frac{E_k\gamma_0-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m_0}{k_0-E_k-\mathrm{i}\varepsilon}-\frac{-E_k\gamma_0-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m_0}{k_0+E_k-\mathrm{i}\varepsilon}$$
$$=\frac{(E_k\gamma_0-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m_0)(k_0+E_k)-(-E_k\gamma_0-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m_0)(k_0-E_k)}{k^2-m_0^2-\mathrm{i}\varepsilon' k_0}$$
$$=\frac{2E_k(k\cdot\gamma+m_0)}{k^2-m_0^2-\mathrm{i}\varepsilon' k_0}\,. \tag{13}$$

我们将这些表达式代入(5)中得

$$S_F^G(x'-x)=\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\gamma\cdot k+m_0}{k^2-m_0^2+\mathrm{i}\varepsilon}\exp[-\mathrm{i}k\cdot(x'-x)]\Theta(k-k_F)$$
$$+\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\gamma\cdot k+m_0}{k^2-m_0^2-\mathrm{i}\varepsilon k_0}\exp[-\mathrm{i}k\cdot(x'-x)]\Theta(k_F-k) \tag{14}$$

我们可以不用在传播子(14)的分母中加一个无穷小量 $\mathrm{i}\varepsilon$，而是用另一种方法沿图 2.11 所示的 k_0 复平面上的回路进行积分，得

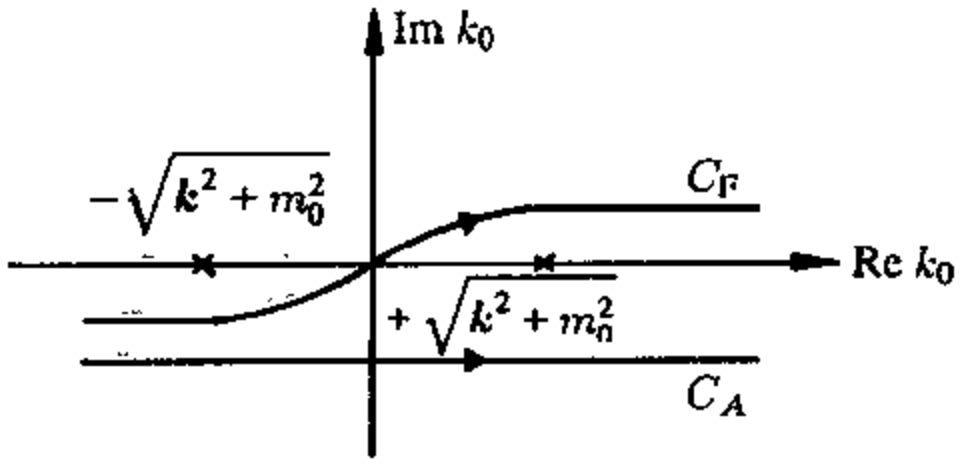


图 2.11　定义 Feynman 传播子(C_F)和超前传播子(C_A)的积分回路

$$S_F^G(x'-x)=\int_{C_F}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\exp[-ik\cdot(x'-x)]}{k\cdot\gamma-m_0}\Theta(k-k_F)$$
$$+\int_{C_A}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\exp[-ik\cdot(x'-x)]}{k\cdot\gamma-m_0}\Theta(k_F-k)\,, \tag{15}$$

式中,我们引入了符号

$$\frac{\gamma\cdot k+m_0}{k^2-m_0^2}=\frac{\gamma\cdot k+m_0}{(\gamma\cdot k+m_0)(\gamma\cdot k-m_0)}=\frac{1}{\gamma\cdot k-m_0}\,. \tag{16}$$

对 $t'>t$,(15)式中第二个积分

$$\int_{C_A}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\exp\{-i[k_0(t'-t)-k\cdot(x'-x)]\}}{k\cdot\gamma-m_0}\Theta(k_F-k) \tag{17}$$

是沿在下半平面封闭的回环 C_A 进行的,从而它为零。这个步骤导致了超前传播子,它将所有在 Fermi 面($k<k_F$)以下的解变换为逆时间方向,图 2.11 中的积分路径 C_F 是真空中的普通回路,因为旧的真空在 Fermi 动量 k_F 之上保持不变。相应的"因果"传播子将粒子(正能解)变换成沿时间轴向前传播,在图 2.12 中,我们已标明了这些性质。

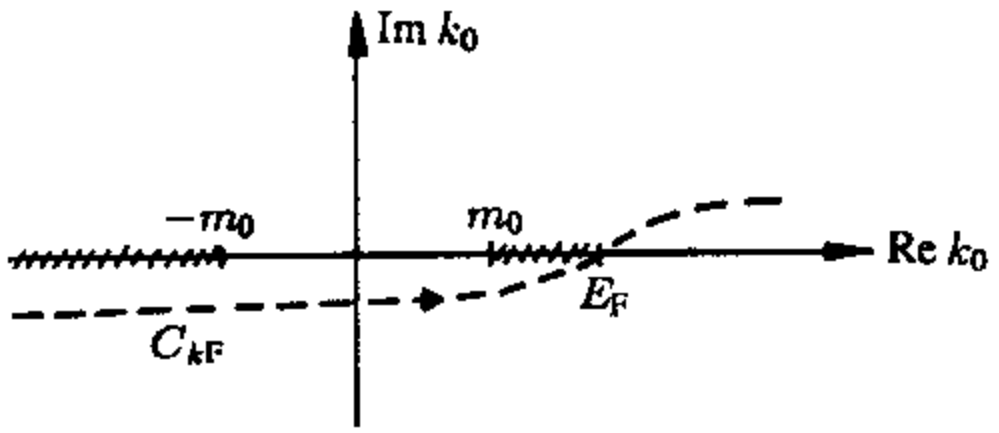


图 2.12　积分路在占据态和空态之间的边界处穿过实 k_0 轴

具有动量 $k<k_F$ 的解(即低于相应 Fermi 能量 $E_F=\sqrt{k_F^2+m_0^2}$ 的能量)的解沿时间轴向后传播,并被描述成空穴(画阴影线区)。另一方面,粒子拥有比 E_F 大的能量,它沿时间轴向前传播。

我们总结一下导致这一结果的步骤。对一个 Fermi 气体的粒子,积分回路正好在 Fermi 能 E_F 上方将实轴 k_0 割断。在普通真空中,仅有负能态被占据。这种情况下,可以选择 $k_F=0$。也就是说,对所有 k,$E_F\leqslant|E_k|$,积分回路将实轴 k_0 割断的点是位于区间$[-E_k,E_k]$内某个点,其准确位置在哪儿是没关系的。对 Fermi 气体($k_F>0$)情况,我们必须区分两种选择之间的差别。对 $k>K_F$,因为 $E_F<|E_k|$,积分回路通过相同区间,两种情况的回路都是 C_F。另一方面,在低动量 $k<k_F$ 区,它意味着 $E_F>|E_k|$,即 $E_F>E_k>-E_k$,积分必须沿着与 C_A 等价的虚线进行! 这可用下式来描述

$$S_F^G(x'-x)=\int_{C_{KF}}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\exp[-ik\cdot(x'-x)]}{k\cdot\gamma-m_0}, \tag{18}$$

式中回路 C_{KF}在 $k_0=E_F$ 处跨过实轴。

该方法可直接推广到有外场 $A_\mu(x)$存在下的 Feynman 传播子情况。例如,考虑一个具有束缚态(位子$-m_0<E<m_0$之间)的原子,这种情况的 k_0 复平面上的积分回路必须这样选择,使它经过占据态下方和未占据态上方。

实际上,我们可以很容易地把传播子分解成自由部分和密度相关部分,在动量空间中结果可采取简单的形式

$$S_F^G(k)=S_F(k)+(\gamma\cdot k+m_0)\delta(k_0-E_k)\Theta(k_F-k). \tag{19}$$

这容易从(14)导出,其中需利用恒等式

$$\frac{1}{z-i\varepsilon}=\frac{1}{z+i\varepsilon}+2\pi i\delta(z). \tag{20}$$

在低密度极限下,Fermi 动量 k_F 与电子气体的密度直接相关,即在体积为 V 的箱归一化条件下,粒子数由下式给出

$$N=\sum_{r=1}^{2}\sum_{\kappa}\Theta(k_F-k)\to 2V\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\Theta(k_F-k)=\frac{V}{3\pi^2}k_F^3, \tag{21}$$

式中因子 2 为自旋简并度。从而,在低密度极限下,$\rho=N/V=k_F^3/3\pi^3\to 0$,Fermi 动量 k_F 趋于 0。因此,传播子 S_F^G 简化为 S_F。

增补:*有限温度*。(14)的结果能被推广到有限温度 T 时的自由电子气体情况。从统计力学知道,量子力学中一个能量为 E 的态不能确定地被说成被占据或空着的。而要引进一个*占有几率*函数 $f(E)$,这种函数的明显表达式取决于所考虑粒子的类型;对于带半整数自旋的粒子,Fermi-Dirac 统计要求 $f(E)$的形式为

$$f(E)\equiv f(E,T,\mu)=\frac{1}{\exp[(E-\mu)/k_BT+1]}, \tag{22}$$

式中 k_B 为 Bolzmann 常数 $k_B=8.62\times10^{-11}$MeV/K。Fermi 函数含有两个自由参数,温度 T 和化学势 μ。后者是 Fermi 能量 $E_F=\sqrt{k_F^2+m_0^2}$ 的推广形式,当在极限 $T\to 0$ 时这变得很明显,这时

Fermi 函数趋于 Θ 函数，

$$f(E,T,\mu)\to\Theta(\mu-E)\,. \tag{23}$$

即在化学势 μ 之下，所有态都被占据，而化学势 μ 之上的态均空着。

为将(1)式推广到有限温度情况，我们用占据函数(23)取代 Θ 函数 $\Theta(k-k_F)=\Theta(E_k-E_F)$ 和 $\Theta(k_F-k)=\Theta(E_F-E_k)$。然而，我们必须区分四个不同的贡献：沿时间正方向传播的自由电子态($r=1,2$)和占据的正电子态($r=3,4$)，以及沿时间反方向传播的被占据的电子态和自由正电子态。与(1)不同，那儿所有正电子态被设为空，由于热激发，电子气体中也含正电子，正如 Fermi 函数(22)所表达的那样，见图示 2.13。然而，温度对这些贡献就变得非常重要，即，在 $k_BT\simeq 2m_0c^2$ 时温度变得相当大，$T\simeq 10^{10}\mathrm{K}$。

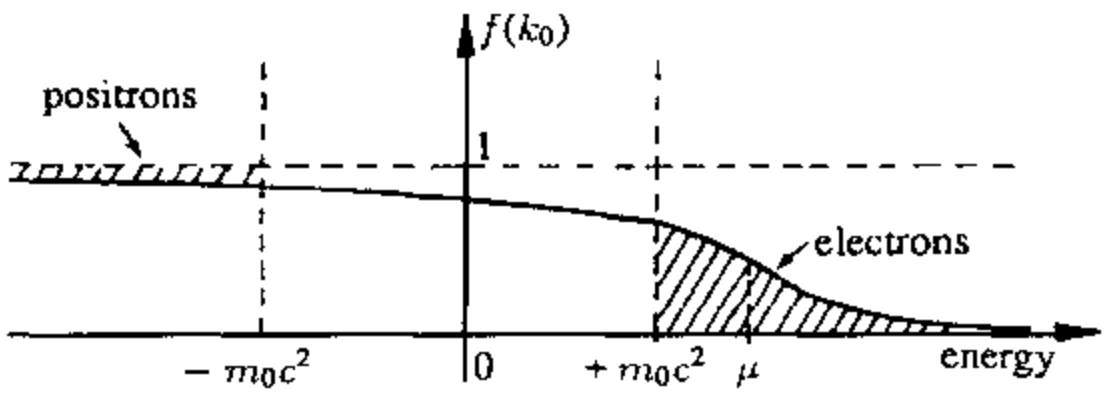


图 2.13　热电子气的占有几率，带阴影的区域标记占有的电子态和正电子态

根据这些考虑，与温度有关的 Feynman 传播子必须为下面这种形式

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}S_F^G(x'-x)=&\Big[\sum_\kappa\sum_{r=1,2}(1-f(E_k))\psi_\kappa^r(x')\bar\psi_\kappa^r(x)\\
&+\sum_\kappa\sum_{r=3,4}(1-f(-E_k))\psi_\kappa^r(x')\bar\psi_\kappa^r(x)\Big]\Theta(t'-t)\\
&-\Big[\sum_\kappa\sum_{r=3,4}f(-E_k)\psi_\kappa^r(x')\bar\psi_\kappa^r(x)\\
&+\sum_\kappa\sum_{r=1,2}f(E_k)\psi_\kappa^r(x')\bar\psi_\kappa^r(x)\Big]\Theta(t-t')\,.
\end{aligned}\tag{24}$$

借助于 Θ 函数(3)的积分表示并利用(2)和(4)式，(24)式变为

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}S_F^G(x'-x)=&\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}k_0'}{(2\pi)}\frac{1}{k_0'+\mathrm{i}\varepsilon}\exp[-\mathrm{i}k_0'(t'-t)]\\
&\times\Big\{\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}(1-f(E_k))\frac{m_0}{E_k}\frac{\not k+m_0}{2m_0}\exp[-\mathrm{i}k\cdot(x'-x)]\\
&-\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}(1-f(-E_k))\frac{m_0}{E_k}\frac{-\not k+m_0}{2m_0}\exp[+\mathrm{i}k\cdot(x'-x)]\Big\}\\
&+\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}k_0'}{(2\pi)}\frac{1}{k_0'-\mathrm{i}\varepsilon}\exp[-\mathrm{i}k_0'(t'-t)]
\end{aligned}$$

$$\times\left\{-\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}f(-E_k)\frac{m_0}{E_k}\frac{-\not k+m_0}{2m_0}\exp[-\mathrm{i}k\cdot(x'-x)]\right.$$
$$\left.+\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}f(E_k)\frac{m_0}{E_k}\frac{\not k+m_0}{2m_0}\exp[-\mathrm{i}k\cdot(x'-x)]\right\}, \tag{25}$$

为了计算四个积分，我们如以前那样，将频率变量作平移，动量变量作反号，即，在第一和最后一个积分中进行替换(7a)；在第二，三个积分中作替换(7b)。这就给出

$$S_{\mathrm{F}}^{G}(x'-x)=\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}S_{\mathrm{F}}^{G}(k)\exp[-\mathrm{i}k\cdot(x'-x)], \tag{26}$$

式中

$$S_{\mathrm{F}}^{G}(k)=\frac{1}{2E_k}\left[(1-f(E_k))\frac{E_k\gamma_0-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m_0}{k_0-E_k+\mathrm{i}\varepsilon}\right.$$
$$-(1-f(-E_k))\frac{-E_k\gamma_0-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m_0}{k_0+E_k+\mathrm{i}\varepsilon}$$
$$\left.-f(-E_k)\frac{-E_k\gamma_0-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m_0}{k_0+E_k-\mathrm{i}\varepsilon}+f(E_k)\frac{E_k\gamma_0-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m_0}{k_0-E_k+\mathrm{i}\varepsilon}\right]. \tag{27}$$

利用下列恒等式

$$\frac{1}{x-\mathrm{i}\varepsilon}=\frac{1}{x+\mathrm{i}\varepsilon}+2\pi\mathrm{i}\delta(x) \tag{28}$$

我们把四项合并成两项，而得到

$$S_{\mathrm{F}}^{G}(k)=\frac{\not k+m_0}{k^2-m_0^2+\mathrm{i}\varepsilon k_0}+\frac{1}{2E_k}(\not k+m_0)2\pi\mathrm{i}[f(E_k)\delta(k_0-E_k)$$
$$-f(-E_k)\delta(k_0+E_k)]. \tag{29}$$

最后，利用关系式

$$\Theta(k_0)\delta(k^2-m_0^2)=\frac{1}{2E_k}\delta(k_0-E_k),$$
$$\Theta(-k_0)\delta(k^2-m_0^2)=\frac{1}{2E_k}\delta(k_0+E_k) \tag{30}$$

我们求得

$$S_{\mathrm{F}}^{G}(k)=\frac{\not k+m_0}{k^2-m_0^2+\mathrm{i}\varepsilon k_0}+2\pi\mathrm{i}(\not k+m_0)\delta(k^2-m_0^2)$$
$$\times[f(E_k)\Theta(k_0)-f(-E_k)\Theta(-k_0)]. \tag{31}$$

这表达式可以根据下列恒等式分离出自由 Feynman 传播子而被表达成更为对称的形式。

$$\frac{\not k+m_0}{k^2-m_0^2+\mathrm{i}\varepsilon k_0}=\frac{\not k+m_0}{k^2-m_0^2+\mathrm{i}\varepsilon}+2\pi\mathrm{i}(\not k+m_0)\delta(k^2-m_0^2)\Theta(-k_0). \tag{32}$$

从而，我们得到最后结果

$$S_{\mathrm{F}}^{G}(k)=S_{\mathrm{F}}(k)+2\pi\mathrm{i}(\not k+m_0)\delta(k^2-m_0^2)$$
$$\times\left\{\frac{\Theta(k_0)}{\exp[(E_k-\mu)/k_BT+1]}+\frac{\Theta(-k_0)}{\exp[(E_k+\mu)/k_BT]+1}\right\}. \tag{33}$$

在低温极限 $T\to 0$ 和 $\mu=E_F>0$ 时，(33)式约化为前面电子气体的表达式(14)。这很容易通过将(32)代入(14)式而给予证明。

练　习

2.3　Feynman 传播子的非相对论极限

问题：证明 $S_F(x',x)$ 在非相对论极限下，约化为 Schrödinger 方程的推迟的自由传播子。

解答：为解决这一问题，方便的方法是转换到动量表象中去。于是，在组态空间中传播子表示由 Fourier 变换来得到。但是，为惟一确定传播子，我们需要提出一个方案来处理好奇点。Feynman 传播子为

$$S_F(x'-x)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp[-ip(x'-x)]S_F(p) \tag{1}$$

非相对论推迟传播子为

$$G_0^+(x'-x)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\exp[ip\cdot(x'-x)]\times\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\exp[-i\omega(t'-t)]G_0^+(p,\omega)\,. \tag{2}$$

从前面对 Feynman 传播子的讨论，我们已经知道，恰当的边界条件就相当于通过加一个无穷小虚常数而将极点移动，使得

$$S_F(p)=\frac{\not p+m_0}{p^2-m_0^2+i\varepsilon}\,. \tag{3}$$

这一形式隐含着沿时间轴向前传播的正能解和沿时间轴反向传播的负能解。为了能找出 S_F 的非相对论极限，我们在近似 $|\boldsymbol{p}|/m_0\ll 1$ 下考虑(3)式和研究极点的附近。我们写出

$$\frac{\not p+m_0}{p_0^2-\boldsymbol{p}^2-m_0^2+i\varepsilon}=\frac{p_0\gamma_0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m_0}{\left(p_0-\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m_0^2}\right)\left(p_0+\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m_0^2}\right)+i\varepsilon} \tag{4}$$

利用近似 $\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m_0}=m_0+\boldsymbol{p}^2/2m_0+o(\boldsymbol{p}^4/m_0^4)$，得到

$$S_F(p)\approx\frac{p_0\gamma_0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m_0}{\left(p_0-m_0-\dfrac{\boldsymbol{p}^2}{2m_0}\right)\left(p_0+m_0+\dfrac{\boldsymbol{p}^2}{2m_0}\right)+i\varepsilon}\,. \tag{5}$$

现在我们在它的正频极点的附近来研究传播子的行为。引进 $\omega=p_0-m_0$，我们能将(5)约化为

$$S_F(p)\approx\frac{(\omega+m_0)\gamma_0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m_0}{\left(\omega-\dfrac{\boldsymbol{p}^2}{2m_0}\right)\left(\omega+2m_0+\dfrac{\boldsymbol{p}^2}{2m_0}\right)+i\varepsilon}\,. \tag{6}$$

对正频极点，ω 处于 $\boldsymbol{p}^2/2m_0$ 的附近。因此，我们有 $\omega>0$ 和 $(\omega+2m_0+\boldsymbol{p}^2/2m_0)\simeq 2m_0>0$。因此，在小动量的近似下，(5)式能被变换成

$$S_F(p)\approx \frac{1}{2m_0}\frac{m_0(\gamma_0+1)-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}}{\left(\omega-\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m_0}\right)+\frac{i\epsilon}{2m_0}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(\gamma_0+1)-\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}}{2m_0}}{\left(\omega-\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m_0}\right)+i\epsilon'}, \tag{7}$$

式中，ϵ'也是一个小的虚常数。第一项

$$\frac{1}{2}(\gamma_0+1)=\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 0\end{pmatrix}$$

选出了一个给定双旋量的两个上分量。我们已经通过选取正能极点而局限于考虑正能解，所以两个大旋量分量就被抽取出。第二个矩阵

$$-\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}}{2m_0}=\begin{pmatrix}0 & -\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2m_0}\\ \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2m_0} & 0\end{pmatrix}$$

将双旋量的上、下分量混在一道 $\Psi=\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}$，因为$|\chi|\ll|\phi|$，这项的贡献是 $\boldsymbol{p}/m_0$ 的二次方，然而，在我们现在的小动量近似下，这可以被略去不计。因此，(7)式分子约化为 1(或更确切地说，为自旋空间的单位矩阵)。所以我们得到结果

$$S_F(p)\to\frac{1}{\omega-\boldsymbol{p}^2/2m_0+i\epsilon}=G_0^+(\boldsymbol{p},\omega)\ , \tag{8}$$

将(8)作 Fourier 变换回到坐标表象中去，便得到 Schrödinger 理论中的推迟传播子。

附注：在极点 $p_0=-\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m_0^2}$ 附近，如上所述的步骤，作代换 $\omega=-p_0-m_0$，将导出(8)式相同的结果。不过，当用 Fourier 变换变回到坐标表象中时，能量依赖因子 $\exp(ip_0(t'-t))=\exp(im(t'-t))\exp(+i\omega(t'-t))$将导致一个时间依赖因子 $\Theta(t-t')$。从而对反粒子，Feynman 传播子约化为非相对论极限下的超前 Green 函数。

练　习

2.4 Dirac 波方程的时间演化

问题：证明下列恒等式

$$\Theta(t'-t)\psi^{(+E)}(x')=i\int d^3x S_F(x'-x)\gamma_0\psi^{(+E)}(x)\ , \tag{1}$$

$$\Theta(t-t')\psi^{(-E)}(x')=-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x S_{\mathrm{F}}(x'-x)\gamma_0\psi^{(-E)}(x)\ , \tag{2}$$

对共轭解 $\bar{\psi}^{(-E)}$ 和 $\bar{\psi}^{(-E)}$ 导出类似关系。

解答：一个正能的波包可以表示成归一化平面波的叠加。

$$\psi^{(+E)}(x)=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m_0}{E_p}}\sum_{r=1}^{2}b(p,r)\omega^r(\boldsymbol{p})\exp(-\mathrm{i}\varepsilon_r p\cdot x)\ , \tag{3}$$

式中 $E_p=\sqrt{p^2+m_0^2}$ 及 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=+1$。类似地，对负能波包，我们写出 $\varepsilon_3=\varepsilon_4=-1$

$$\psi^{(-E)}(x)=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m_0}{E_p}}\sum_{r=3}^{4}\mathrm{d}^*(p,r)\omega^r(\boldsymbol{p})\exp(-\mathrm{i}\varepsilon_r p\cdot x)\ . \tag{4}$$

为了利用旋量的正交条件，

$$\omega^{r^*}(\varepsilon_r\boldsymbol{p})\omega^{r'}(\varepsilon_{r'}\boldsymbol{p})=\frac{E_p}{m_0}\delta_{rr'} \tag{5}$$

我们利用 Feynman 传播子的平面波表示

$$\begin{aligned}S_{\mathrm{F}}(x'-x)=&-\mathrm{i}\Theta(t'-t)\int\mathrm{d}^3p\sum_{r=1}^{2}\psi_p^r(x')\bar{\psi}_p^r(x)\\&+\mathrm{i}\Theta(t-t')\int\mathrm{d}^3p\sum_{r=3}^{4}\psi_p^r(x')\bar{\psi}_p^r(x)\ ,\end{aligned} \tag{6}$$

式中 $\psi_p^r(x)$ 为

$$\psi_p^r=\sqrt{\frac{m_0}{E_p}}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\omega^r(\boldsymbol{p})\exp(-\mathrm{i}\varepsilon_r p\cdot x)\ . \tag{7}$$

将(3)(6)和(7)代入(1)式右边，我们得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}\int\mathrm{d}^3x S_{\mathrm{F}}(x'-x)\gamma_0\psi^{(+E)}\\&=\Theta(t'-t)\int\mathrm{d}^3x\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{m_0}{E_p}\\&\quad\times\sum_{r=1}^{2}\omega^r(\boldsymbol{p})\bar{\omega}^r(\boldsymbol{p})\gamma_0\exp[-\mathrm{i}\varepsilon_r p\cdot(x'-x)]\int\frac{\mathrm{d}^3p'}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m_0}{E_{p'}}}\\&\quad\times\sum_{r'=1}^{2}b(p',r')\omega^{r'}(\boldsymbol{p}')\exp(-\mathrm{i}\varepsilon_{r'}p'\cdot x)\\&\quad-\Theta(t-t')\int\mathrm{d}^3x\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{m_0}{E_p}\sum_{r=3}^{4}\omega^r(\boldsymbol{p})\bar{\omega}^r(\boldsymbol{p})\gamma_0\exp[-\mathrm{i}\varepsilon_r p\cdot(x'-x)]\\&\quad\times\int\frac{\mathrm{d}^3p'}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m_0}{E_{p'}}}\sum_{r'=1}^{2}b(p',r')\omega^{r'}(\boldsymbol{p}')\exp(-\mathrm{i}\varepsilon_{r'}p'\cdot x)\\&=\Theta(t'-t)\int\frac{\mathrm{d}^3p\mathrm{d}^3p'}{(2\pi)^{3/2}}\frac{m_0}{E_p}\sqrt{\frac{m_0}{E_{p'}}}\end{aligned}$$

$$\times \sum_{\substack{r=1,2\\r'=1,2}} \omega^r(\boldsymbol{p})\omega^{r\dagger}(\boldsymbol{p})\omega^{r'}(\boldsymbol{p}')b(p',r')\exp(-\mathrm{i}\varepsilon_r p\cdot x')$$

$$\times \int \frac{\mathrm{d}^3x}{(2\pi)^3}\exp[\mathrm{i}(\varepsilon_r p-\varepsilon_{r'}p')\cdot x]-\Theta(t-t')\int \frac{\mathrm{d}^3p\mathrm{d}^3p'}{(2\pi)^{3/2}}\frac{m_0}{E_p}\sqrt{\frac{m_0}{E_{p'}}}$$

$$\times \sum_{\substack{r=3,4\\r'=1,2}} \omega^r(\boldsymbol{p})\omega^{r\dagger}(\boldsymbol{p})\omega^{r'}(\boldsymbol{p}')b(p',r')\exp(-\mathrm{i}\varepsilon_r p\cdot x')$$

$$\times \int \frac{\mathrm{d}^3x}{(2\pi)^3}\exp[\mathrm{i}(\varepsilon_r p-\varepsilon_{r'}p')\cdot x]. \tag{8}$$

在 $\Theta(t'-t)$项中对 x 积分得

$$\exp[\mathrm{i}(E_p-E_{p'})t]\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'), \tag{9}$$

由于 $r,r'=1,2$,因此在这儿我们已利用了 $\varepsilon_r=\varepsilon_{r'}=1$;另一方面,在(8)的最后一行的 $\Theta(t-t')$项又产生一个因子

$$\exp[-\mathrm{i}(E_p+E_{p'})t]\delta^3(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}'), \tag{10}$$

因为在这情况下,$\varepsilon_r=-1(r=3,4)$和 $\varepsilon_{r'}=+1(r'=1,2)$。对 d^3p 积分,把 $\boldsymbol{p}'$ 重新记作 $\boldsymbol{p}$,我们得到

$$\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x S_{\mathrm{F}}(x'-x)\gamma_0\psi^{(+E)}(x)$$

$$=\Theta(t'-t)\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^{3/2}}\left(\frac{m_0}{E_p}\right)^{3/2}$$

$$\times \sum_{\substack{r=1,2\\r'=1,2}} \omega^r(\boldsymbol{p})\omega^{r\dagger}(\boldsymbol{p})\omega^{r'}(\boldsymbol{p})b(p,r')\exp(-\mathrm{i}\varepsilon_r p\cdot x')$$

$$-\Theta(t-t')\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^{3/2}}\left(\frac{m_0}{E_p}\right)^{3/2}\sum_{\substack{r=3,4\\r'=1,2}} \omega^r(-\boldsymbol{p})\omega^{r\dagger}(-\boldsymbol{p})\omega^{r'}(+\boldsymbol{p})b(p,r')$$

$$\times \exp(-\mathrm{i}\,\varepsilon_r\tilde{p}\cdot x')\exp(-\mathrm{i}2E_p t) \tag{11}$$

其中 $\tilde{p}=(p_0,-\boldsymbol{p})$。现在,对 $r,r'=1,2$,我们利用正交关系式(5),得

$$\omega^{r\dagger}(\boldsymbol{p})\omega^{r'}(\boldsymbol{p})=\omega^{r\dagger}(\varepsilon_r\boldsymbol{p})\omega^{r'}(\varepsilon_{r'}\boldsymbol{p})=\frac{E_p}{m_0}\delta_{rr'} \tag{12}$$

对 $r=3,4$ 和 $r'=1,2$,得

$$\omega^{r\dagger}(-\boldsymbol{p})\omega^{r'}(\boldsymbol{p})=\omega^{r\dagger}(\varepsilon_r\boldsymbol{p})\omega^{r'}(\varepsilon_{r'}\boldsymbol{p})=0, \tag{13}$$

即(11)式的第二项消失,剩下来的第一项为

$$\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x S_{\mathrm{F}}(x'-x)\gamma_0\psi^{(+E)}(x)$$

$$=\Theta(t'-t)\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m_0}{E_p}}\sum_{r=1}^{2} b(p,r)\omega^r(\boldsymbol{p})\exp(-\mathrm{i}\varepsilon_r p\cdot x')$$

$$=\Theta(t'-t)\psi^{(+E)}(x'), \tag{14}$$

这就完成(1)的证明。关系式(2)的证明也类似,在这种情况下,$\psi^{(-E)}$仅包含 $r=3,4$ 的旋量,

$S_F(x'-x)$的第二部分有贡献，而第一部分消失，从而导致$-\Theta(t-t')\psi^{(-E)}(x')$。

对共轭旋量$\bar{\psi}^{(+E)}(x)$,$\bar{\psi}^{(-E)}$的传播子，我们可以导出极为类似的关系式。既然作厄米共轭操作时，算符的次序要颠倒，现在传播子S_F应该位于$\bar{\psi}$的右边。因此，我们研究如下积分

$$\begin{aligned}
&\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\bar{\psi}^{(+E)}(x)\gamma_0 S_F(x-x')\\
&=\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\int\frac{\mathrm{d}^3p'}{(2\pi)^{3/2}}\frac{m_0}{E_p}\sqrt{\frac{m_0}{E_{p'}}}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\\
&\quad\times\sum_{r=1}^{2}b^*(p',r')\bar{\omega}^r(p')\exp(\mathrm{i}p'x)\gamma_0\\
&\quad\times\Big\{-\mathrm{i}\Theta(t-t')\sum_{r=1}^{2}\omega^r(p)\bar{\omega}^r(p)\exp[-\mathrm{i}p\cdot(x-x')]\\
&\quad+\mathrm{i}\Theta(t'-t)\sum_{r=3}^{4}\omega^r(p)\bar{\omega}^r(p)\exp[+\mathrm{i}p\cdot(x-x')]\Big\}.
\end{aligned}\tag{15}$$

现我们可重复(8)到(14)的计算，即，可作x积分和利用单位旋量的正交关系，因而(15)简化为简单表达式：

$$\Theta(t-t')\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m_0}{E_p}}\sum_{r=1}^{2}b^*(p,r)\bar{\omega}^r(p)\exp(\mathrm{i}p\cdot x).\tag{16}$$

这是共轭旋量$\bar{\psi}^{(+E)}(x')$的展开式，从而(15)的设想确实导出共轭波函数的传播方程，即

$$\Theta(t-t')\bar{\psi}^{(+E)}(x')=\mathrm{i}\int\mathrm{d}^3x\bar{\psi}^{(+E)}(x)\gamma_0 S_F(x-x').\tag{17}$$

用类似的方法，我们导出关系式

$$\Theta(t'-t)\bar{\psi}^{(-E)}(x')=-\mathrm{i}\int\mathrm{d}^3x\bar{\psi}^{(-E)}(x)\gamma_0 S_F(x-x').\tag{18}$$

式(17,18)与(1,2)的比较表明时间变量t和t'的次序发生了交换。这是不足为奇的，因为$\psi(x)$描述一个入射波，而$\bar{\psi}(x)$为一个出射波。

练　习

2.5　在坐标空间中的$S_F(x)$的明显表达式

问题：试导出组态空间中 Feynman 传播子的封闭表达式。它在光锥$x^2\to 0$和大的类空或类时间隔$x^2\to\pm\infty$下的行为如何？

解答：我们的出发点是 Dirac 方程的 Feynman 传播子的积分表达式。积分能通过因子化 Dirac 微分算符而得以简化。

$$S_F(x)=\int_{C_F}\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}}{p^2-m^2}(\not{p}+m)$$

$$= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i\partial_\mu \gamma^\mu + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip\cdot x}$$

$$= (i\gamma \cdot \partial + m) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip\cdot x}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$= (i\gamma \cdot \partial + m)\Delta_F(x) \ . \tag{1}$$

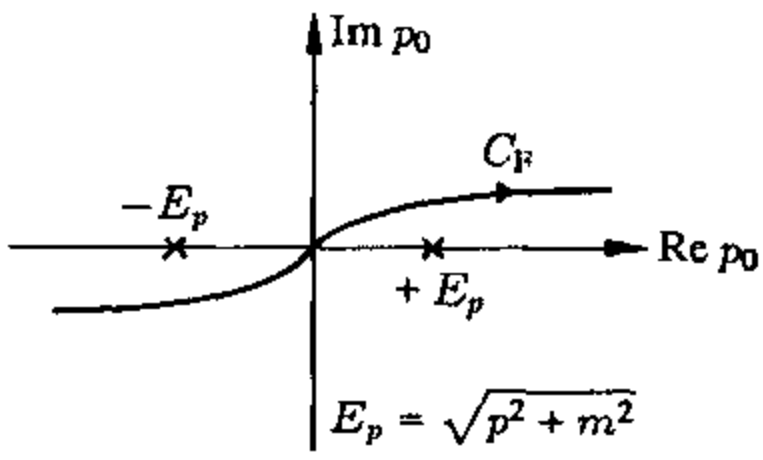


图 2.14 积分回路 C_F

图 2.14 标明了积分回路 C_F。另外，我们也可通过加一个无穷小常数 $i\epsilon$ 移动极点来作积分。积分

$$\Delta_F(x) \equiv \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip\cdot x}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \int_{C_F} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip\cdot x}}{p^2 - m^2} \ , \tag{2}$$

我们引进它是为了简化数学表达和使它具有物理含义。它正是 Klein-Gordon 场的 Feynman 传播子。

在 $\Delta_F(x)$中的 p_0 积分能利用留数定理计算出，留数定理确定了复平面上沿一个闭合回路的积分值。因为被积函数带有因子 $\exp(-ip_0x_0+ip\cdot x)$，显然对 $x_0>0$ 被积函数在下半平面上对大 $|p_0|$ 渐近地消失；而对 $x_0>0$，在下半平面可在路径 C_F 上加一个“无穷”半圆周而不影响积分值。因为被积函数在除两极点之外任何地方都是正则的，故积分路径能被收缩一个回路 C^+，它包围着点 $p_0=+E_p$，如图 2.15 所示。相反地，对 $x_0<0$，C_F 回路需要在上半平面上封闭，我们可以沿回路 $-C^-$ 积分(积分方向是重要的)。从而，我们得到

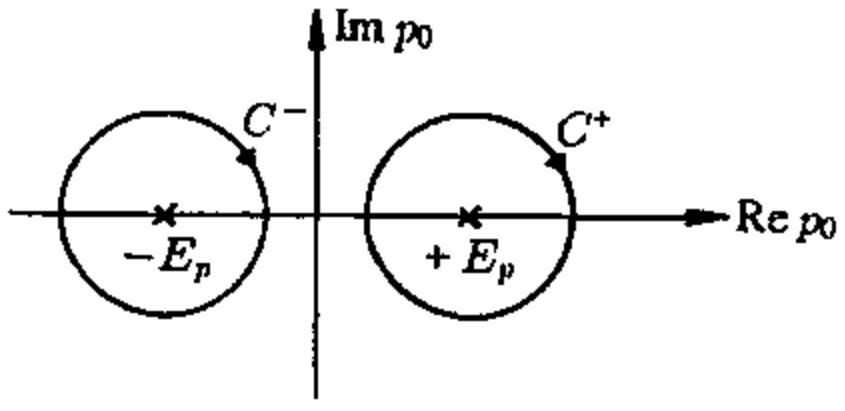


图 2.15 积分回路 C^- 和 C^+ 的定义

$$\Delta_F(x) = \Theta(x_0)\Delta^+(x) - \Theta(-x_0)\Delta^-(x)\ , \tag{3}$$

式中

$$\Delta^{\pm}(x) = \oint_{C^{\pm}} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip\cdot x}}{p^2 - m^2}\ . \tag{4}$$

我们进一步将分母改写为

$$\frac{1}{p^2 - m^2} = \frac{1}{2E_p}\left(\frac{1}{p_0 - E_p} - \frac{1}{p_0 + E_p}\right) \tag{5}$$

其中 $E_p = +\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$，(5)式把两极点分开，而得到

$$\Delta^{\pm}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\exp(i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}) \frac{1}{2E_p} \oint_{C^{\pm}} \frac{dp_0}{2\pi}\exp(-ip_0x_0)\left(\frac{1}{p_0 - E_p} - \frac{1}{p_0 + E_p}\right)$$

$$= \mp i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p}\exp[-i(\pm E_p x_0 - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})]\ . \tag{6}$$

注意，回路 C_+ 的指向是数学负方向(顺时针方向，译者注)

利用这一结果，对(3)式中 $\Delta_F(x)$ 的两部分贡献能合为单一的表达式

$$\Delta_F(x) = -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p}\exp(-iE_p|x_0| + i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})\ . \tag{7}$$

为求出这三维积分，我们引入球极坐标。角度积分可立即进行，

$$\Delta_F(x) = -\frac{i}{(2\pi)^3}\int_0^{\infty} dp \int_{-1}^{-1} d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{p^2}{2E_p}\exp(-iE_p|x_0| + ipr\cos\theta)$$

$$= -\frac{i}{(2\pi)^3}2\pi \int_0^{\infty} dp \frac{p^2}{2E_p}\frac{1}{ipr}\exp(-iE_p|x_0|)(\exp(ipr) - \exp(-ipr))$$

$$= -\frac{1}{8\pi^2 r}\int_0^{\infty} dp \frac{p}{E_p}\exp(-iE_p|x_0|)(\exp(ipr) - \exp(-ipr))\ , \tag{8}$$

式中我们已经写成 $|p| = p$ 及 $|x| = r$。(8)式中第二项作替换 $p \to -p$，(8)式中的两个贡献能被结合成一个单一表达式。而且，在积分下的因子 p 能被对参数 r 的微分所取代。

$$\Delta_F(x) = -\frac{1}{8\pi^2 r}\int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{p}{E_p}\exp(-iE_p|x_0|)\exp(ipr)$$

$$= \frac{i}{8\pi^2 r}\frac{\partial}{\partial r}\int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{\exp[-i(E_p|x_0| - pr)]}{E_p}\ . \tag{9}$$

利用替换

$$E_p = m\cosh\eta, p = m\sinh\eta\ , \tag{10}$$

这显然满足相对论能动量关系 $E_p^2 - \boldsymbol{p}^2 = m^2$。积分(9)能被表示成更为方便的形式，现(9)式取为

$$\Delta_F(x) = \frac{i}{8\pi^2 r}\frac{\partial}{\partial r}\int_{-\infty}^{\infty} d\eta \frac{dp}{d\eta}\frac{\exp[-im(\cosh\eta|x_0| - \sinh\eta r)]}{m\cosh\eta}$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{8\pi^2 r}\frac{\partial}{\partial r}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\eta \exp[-\mathrm{i}m(|x_0|\cosh\eta - r\sinh\eta)]. \tag{11}$$

这种积分的进一步计算，取决于时间和空间变量$|x_0|$及r的相对大小。我们将分别讨论三种可能情形。

情况1：类时间隔$x^2 > 0$，即$|x_0| > r$，我们作替换

$$\begin{aligned} |x_0| &= \sqrt{x_0^2 - r^2}\cosh\theta\ , \\ r &= \sqrt{x_0^2 - r^2}\sinh\theta\ , \end{aligned} \tag{12}$$

并利用双曲函数的一个加法定理，

$$\begin{aligned} |x_0|\cosh\eta - r\sinh\eta &= \sqrt{x_0^2 - r^2}\,(\cosh\theta\cosh\eta - \sinh\theta\sinh\eta) \\ &= \sqrt{x_0^2 - r^2}\cosh(\eta - \theta)\ . \end{aligned} \tag{13}$$

从而，我们有

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathrm{F}}(x) &= \frac{\mathrm{i}}{8\pi^2 r}\frac{\partial}{\partial r}\int_{\infty}^{\infty} \mathrm{d}\eta \exp\left(-\mathrm{i}m\sqrt{x_0^2 - r^2}\cosh(\eta - \theta)\right) \\ &= \frac{\mathrm{i}}{8\pi^2 r}\frac{\partial}{\partial r}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\eta \exp\left(-\mathrm{i}m\sqrt{x_0^2 - r^2}\cosh\eta\right)\ . \end{aligned} \tag{14}$$

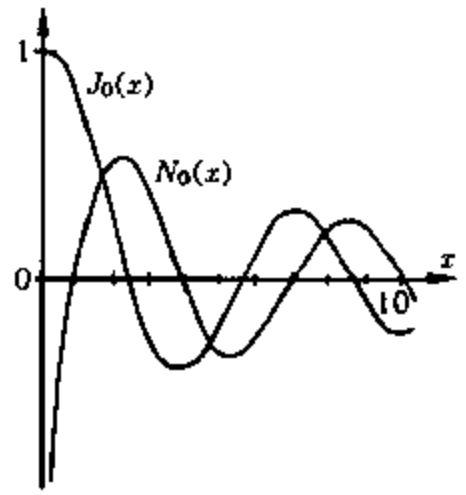


图 2.16 零阶 Bessel 函数 J_0 和零阶 Neumann 函数 N_0

这个积分能用零阶 Bessel 函数[①]求解

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\eta \exp(-\mathrm{i}z\cosh\eta) &= 2\int_0^{\infty} \mathrm{d}\eta\cos(z\cosh\eta) \\ &\quad - 2\mathrm{i}\int_0^{\infty} \mathrm{d}\eta\sin(z\cosh\eta) \\ &= -\mathrm{i}\pi J_0(z) - \pi N_0(z) \\ &= -\mathrm{i}\pi H_0^{(2)}(z)\ . \end{aligned} \tag{15}$$

J_0和N_0为第一类 Bessel 函数(通常简称为 Bessel 函数)和第二类 Bessel 函数(也称为 Neumann 函数)，两者结合进来便成为复的 Hankel 函数$H_0^2(z)$(第三类 Bessel 函数)。函数$J_0(z)$和$N_0(z)$如图 2.16 所示。在$z \to 0$，$J_0(z)$趋于1，而$N_0(z)$有一个对数型奇点。利用恒等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}H_0^{(2)}(z) = -H_1^{(2)}(z) \tag{16}$$

我们得到$|x_0| > r$的标量 Feynman 传播子

① 见 M. Abramowitz, I. A. Stegun: *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York, 1965), Chap. 9.

$$\Delta_F(x)=\frac{1}{8\pi r}\frac{\mathrm{d}\left(m\sqrt{x_0^2-r^2}\right)}{\mathrm{d}r}\left[-H_1^{(2)}\left(m\sqrt{x_0^2-r^2}\right)\right]$$

$$=\frac{m}{8\pi\sqrt{x_0^2-r^2}}H_1^{(2)}\left(m\sqrt{x_0^2-r^2}\right)\ . \tag{17}$$

情况 2：类空间隔 $x^2<0$，即 $|x_0|<r$，这儿我们引进变换

$$|x_0|=\sqrt{r^2-x_0^2}\sinh\theta\ ,$$

$$r=\sqrt{r^2-x_0^2}\cosh\theta\ , \tag{18}$$

利用加法定理

$$\sinh\theta\cosh\eta-\cosh\theta\sinh\eta=-\sinh(\eta-\theta)\ . \tag{19}$$

这导致

$$\Delta_F(x)=\frac{\mathrm{i}}{8\pi^2 r}\frac{\partial}{\partial r}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\eta\exp\left(\mathrm{i}m\sqrt{r^2-x_0^2}\sinh\eta\right)$$

$$=\frac{\mathrm{i}}{8\pi^2 r}\frac{\partial}{\partial r}2\int_0^{\infty}\mathrm{d}\eta\cos\left(m\sqrt{r^2-x_0^2}\sinh\eta\right)\ . \tag{20}$$

sin 项不贡献，因为它为 η 的奇函数。这儿我们遇到修正的 Bessel 函数的 $K_0(z)$（也称之为 MacDonald 函数）的积分表达式，这将与虚宗量的 Hankel 函数相关。

$$2\int_0^{\infty}\mathrm{d}\eta\cos(z\sinh\eta)=2K_0(z)$$

$$=-\mathrm{i}\pi H_0^{(2)}(-\mathrm{i}z)\ . \tag{21}$$

MacDonald 函数在 $z\to 0$ 处存在对数型奇点，在 $z\to\infty$ 时，它与 $\sqrt{\pi/2z}\exp(-z)$ 有相同的下降趋势，参见图 2.17，利用(21)，我们得到 $r>|x_0|$ 的结果。

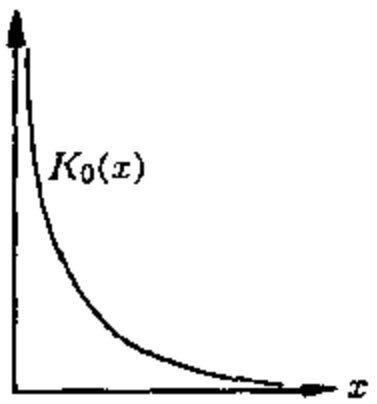


图 2.17　变形零阶 Bessel 函数

$$\Delta_F(x)=\frac{1}{8\pi r}\frac{\mathrm{d}\left(-m\mathrm{i}\sqrt{r^2-x_0^2}\right)}{\mathrm{d}r}\left[-H_1^{(2)}\left(-\mathrm{i}m\sqrt{r^2-x_0^2}\right)\right]$$

$$=\frac{\mathrm{i}m}{8\pi\sqrt{r^2-x_0^2}}H_1^{(2)}\left(-\mathrm{i}m\sqrt{r^2-x_0^2}\right)\ . \tag{22}$$

显然，这是情况 1 的结果(17)式的解析延拓，

情况 3：类光间隔，$x^2=0$ 即 $|x_0|=r$，这种情况必须处理得特别小心，因为积分(8)是发散的。对大的 p 值，被积函数趋于

$$\lim_{p\to\infty}\frac{p}{E_p}\exp(-\mathrm{i}E_p r)(\exp(\mathrm{i}pr)-\exp(\mathrm{i}pr))$$

$$=\lim_{p\to\infty}(1-\exp(-2\mathrm{i}pr))\ . \tag{23}$$

因为第一项趋于一个常数（而不是振荡，这对 $|x_0|\neq r$ 就是振荡的），积分将发散。当结果(17)或

(22)连续到变量$|x_0|\to r$时，$S_F(x)$的确定的奇异行为已经出现。另外，一个奇异的分布或许有贡献，这只在光锥$|x_0|=r$上有贡献，而在我们研究上面极限时没有贡献。

容易看出，情况确实如此。让我们透彻地研究积分(8)的发散部分。这种情况，可以作替换$E_p\to p$，从而我们求得

$$\Delta_F(x)|_{x_0\to r}\simeq-\frac{1}{8\pi^2 r}\int_0^\infty dp\{\exp[-ip(|x_0|-r)]-\exp[-ip(|x_0|+r)]\}$$

$$\simeq-\frac{1}{8\pi^2 r}\left(\frac{1}{2}2\pi\delta(|x_0|-r)-\frac{1}{2}2\pi\delta(|x_0|+r)\right). \tag{24}$$

这个计算仅考虑了 delta 函数的贡献。(24)中的两项能被合并为

$$\Delta_F(x)|_{x_0\to r}\simeq-\frac{1}{4\pi}\delta(x_0^2-r^2). \tag{25}$$

我们必须把这奇异的贡献加到我们前面的结果中去。Klein-Gordon 场的 Feynman 传播子 Δ_F 的最终结果为(用 $x^2=x_0^2-r^2$)

$$\Delta_F(x)=-\frac{1}{4\pi}\delta(x^2)+\frac{m\Theta(x^2)}{8\pi\sqrt{x^2}}H_1^{(2)}(m\sqrt{x^2})$$

$$+\frac{im\Theta(-x^2)}{8\pi\sqrt{-x^2}}H_1^{(2)}(-im\sqrt{-x^2}). \tag{26}$$

作为 $\Delta_F(x)$的一个重要的特殊情况，让我们考虑极限 $m\to 0$ 情况。因为在 $z\to 0$ 时 $H_1^{(2)}(z)\sim 2i/\pi z$(Abramowitz, Stegun, p. 360, No. 9. 1. 9)，因此，

$$D_F(x)\equiv\lim_{m\to 0}\Delta_F(x)$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\delta(x^2)+\lim_{m\to 0}\left(\frac{\Theta(x^2)2im}{8\pi^2 mx^2}+\frac{\Theta(-x^2)2imi}{8\pi^2 imx^2}\right)$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\delta(x^2)+\frac{i}{4\pi^2}\frac{1}{x^2}$$

$$=\frac{i}{4\pi^2}\frac{1}{x^2-i\varepsilon}. \tag{27}$$

除有一个常数因子外，这与光子传播子相一致，这将在 3. 2 节中讨论。

让我们回到 Dirac 方程 Feynman 传播子 $S_F(x)$，它通过(1)式与 $\Delta_F(x)$相联系，

$$S_F(x)=(i\gamma\cdot\partial+m)\Delta_F(x)=m\Delta_F(x)+i\gamma\cdot\partial\Delta_F(x), \tag{28}$$

式中第一项隐含着旋量空间的单位矩阵，通常使用这种传播子的表达式就足够了。然而，为了完整起见，我们将导出 $S_F(x)$的明显表达式，这就要求求出(26)式所给的 $\Delta_F(x)$的导数。我们利用下列恒等式来进行。

$$\partial_\mu\Theta(x^2)=2x_\mu\delta(x^2)=-\partial_\mu\Theta(-x^2), \tag{29}$$

$$\partial_\mu(x^2)^{1/2}=x_\mu(x^2)^{-1/2},$$

$$\partial_\mu(x^2)^{-1/2}=-x_\mu(x^2)^{-3/2}, \tag{30}$$

以及(Abramowitz, Stegun, p. 361, No. 9. 1. 27)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}H_1^{(2)}(z)=\frac{1}{2}(H_0^{(2)}(z)-H_2^{(2)}(z))\,. \tag{31}$$

(28)式最后一项具有如下形式。

$$\mathrm{i}\gamma\cdot\partial\Delta_{\mathrm{F}}(x)=-\mathrm{i}\frac{1}{4\pi}\gamma\cdot\partial\delta(x^2)+\frac{m}{8\pi}\mathrm{i}\gamma\cdot\partial\left[\frac{\Theta(x^2)}{\sqrt{x^2}}H_1^{(2)}(m\sqrt{x^2})+\frac{\mathrm{i}\Theta(-x^2)}{\sqrt{-x^2}}H_1^{(2)}(-\mathrm{i}m\sqrt{-x^2})\right]. \tag{32}$$

利用(29-31)式,我们计算在方括号中项的导数,得到

$$\begin{aligned}&\frac{m}{8\pi}\mathrm{i}\gamma^\mu x_\mu\Big\{2\frac{\delta(x^2)}{(x^2)^{1/2}}H_1^{(2)}(m\sqrt{x^2})-\frac{\Theta(x^2)}{(x^2)^{3/2}}H_1^{(2)}(m\sqrt{x^2})\\&+\frac{m\Theta(x^2)}{2x^2}\left[H_0^{(2)}(m\sqrt{x^2})-H_2^{(2)}(m\sqrt{x^2})\right]\\&-2\mathrm{i}\frac{\delta(x^2)}{(-x^2)^{1/2}}H_1^{(2)}(-\mathrm{i}m\sqrt{-x^2})+\frac{\mathrm{i}\Theta(-x^2)}{(-x^2)^{3/2}}H_1^{(2)}(-\mathrm{i}m\sqrt{-x^2})\\&+\frac{m\Theta(-x^2)}{2x^2}\left[H_0^{(2)}(-\mathrm{i}m\sqrt{-x^2})-H_2^{(2)}(-\mathrm{i}m\sqrt{-x^2})\right]\Big\}\,.\end{aligned} \tag{33}$$

乘有 $\delta(x^2)$的两个因子能合并,这样,我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{|x^2|\to0}\left[\frac{H_1^{(2)}(m\sqrt{|x^2|})}{\sqrt{|x^2|}}-\mathrm{i}\frac{H_1^{(2)}(-\mathrm{i}m\sqrt{|x^2|})}{\sqrt{|x^2|}}\right]\\&=\lim_{x^2\to0}\left[\frac{\mathrm{i}}{\pi}\frac{2}{m(\sqrt{|x^2|})^2}-\frac{\mathrm{i}}{\pi}\frac{2\mathrm{i}}{(-\mathrm{i}m)(\sqrt{|x^2|})^2}\right]\\&=\lim_{|x^2|\to0}\left[\frac{4\mathrm{i}}{\pi m}\frac{1}{|x^2|}\right],\end{aligned} \tag{34}$$

其中,我们已经利用了 Hankel 函数对小宗量的渐近展开式。

$$H_\nu^{(2)}(z)\sim\frac{\mathrm{i}}{\pi}\Gamma(\nu)\left(\frac{2}{z}\right)^\nu,\quad \nu>0\,. \tag{35}$$

这样,坐标空间中 Feynman 传播子的显式为

$$\begin{aligned}S_{\mathrm{F}\alpha\beta}(x)=&m\delta_{\alpha\beta}\Delta_{\mathrm{F}}(x)-\frac{\mathrm{i}}{4\pi}\gamma^\mu_{\alpha\beta}\partial_\mu\delta(x^2)-\frac{1}{\pi^2}\gamma^\mu_{\alpha\beta}x_\mu\frac{\delta(x^2)}{|x^2|}\\&+\frac{\mathrm{i}m}{8\pi}\gamma^\mu_{\alpha\beta}x_\mu\Big\{\Theta(x^2)\Big[-\frac{1}{(x^2)^{3/2}}H_1^{(2)}(m\sqrt{x^2})\\&+\frac{m}{2x^2}(H_0^{(2)}(m\sqrt{x^2})-H_2^{(2)}(m\sqrt{x^2}))\Big]\\&+i\Theta(-x^2)\Big[\frac{1}{(-x^2)^{(3/2)}}H_1^{(2)}(-\mathrm{i}m\sqrt{-x^2})\\&-\mathrm{i}\frac{m}{2x^2}(H_0^{(2)}(-\mathrm{i}m\sqrt{-x^2})-H_2^{(2)}(-\mathrm{i}m\sqrt{-x^2}))\Big]\Big\}\,,\end{aligned} \tag{36}$$

式中 $\Delta_{\mathrm{F}}(x)$由(26)式所给出。我们强调指出,像 $\Delta_{\mathrm{F}}(x)$和 $S_{\mathrm{F}}(x)$那样的传播子,从数学上看是些分

布，即仅当它们乘以合适的“行为良好”的测试函数时，才在积分中有意义。

渐近行为。1）小 x^2。$\Delta_F(x)$，甚或是 $S_F(x)$，在光锥 $x^2\to 0$ 上显示出几种奇异性。(26)式标量 Feynman 传播子的渐近行为的研究导得

$$\Delta_F(x)\approx -\frac{1}{4}\delta(x^2)-\frac{i}{4\pi^2}\frac{1}{x^2}-\frac{im^2}{8\pi^2}\ln\left(\frac{m\sqrt{x^2}}{2}\right)-\frac{m^2}{16\pi^2}\Theta(x^2)\,. \tag{37}$$

在前两项中包含领头的奇异性，即

$$\Delta_F(x)\approx\frac{i}{4\pi^2}\frac{1}{x^2-i\varepsilon}+O(m^2)\,. \tag{38}$$

注意这一结果与(27)式所给的无质量的传播子 $\Delta_F(x)$相一致。这种一致性是很有道理的，因为动量空间中 $x^2\to 0$ 的奇异性是与 $p\to\infty$时积分的发散有关的，在该区域中，质量能被忽略不计。在必须计算包含数个传播子之积的积分时，就必须对传播子的奇异性引起足够重视。通常奇异性的“冲突”将再现积分的发散。这需要用到重整化理论中的巧妙方法，从这些无穷大量中提取出有意义的结果，参见第 5 章。然而若采用动量空间中的传播子 $\Delta_F(p)$，这些计算就容易实现。

2）大 x^2。对大宗量 $|z|$，Hankel 函数的行为是

$$H_\nu^{(2)}(z)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\exp\left[-i\left(z-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{1}{4}\pi\right)\right]\quad\text{for}\quad|z|\to\infty\,. \tag{39}$$

将此关系运用到(26)式中去，我们推出下面标量 Feynman 传播子的渐近行为，

$$\Delta_F(x)\to\text{const}\,(x^2)^{-\frac{3}{4}}\exp\left(-im\sqrt{x^2}\right)\quad\text{for}\quad x^2\to\infty, \tag{40a}$$

$$\Delta_F(x)\to\text{const}\,|x^2|^{-\frac{3}{4}}\exp\left(-m\sqrt{|x^2|}\right)\quad\text{for}\quad x^2\to-\infty\,. \tag{40b}$$

这样，对大的类时间隔($x^2\to+\infty$)，传播子是一个振荡函数，由于指数律因子的存在，其振幅慢慢衰减。另一方面，对大类空间隔($x^2\to-\infty$)，传播子按照(40b)中指数函数，很快衰减为零，标度由粒子质量的倒数，即其 Compton 波长来设定。这个结论对(36)所给的自旋 1/2 粒子的传播子 $S_F(x)$仍然成立。

图 2.18 刻画了传播子的定性行为。若我们想到有一个波 $\psi(x)\to\psi(x')$按照 Huggens 原理传播，这个结果是很容易被理解的。就经典而言，对每一点 x 元波发出后又能以最高能达到光速的速度，即在朝前光锥内$(x'-x)^2\geqslant 0$ 向前传播，传播子在类时间隔的区间也不为零(虽然快速衰减)的事实，是量子力学中的隧道效应。它是由无法将一个粒子定位在一个比其 Compton 波长还小的标度范围内引起的。这种因果律的明显背离，在经典极限 $m\to\infty$(或者，形式上表示为 $\hbar\to 0$)下将消失。

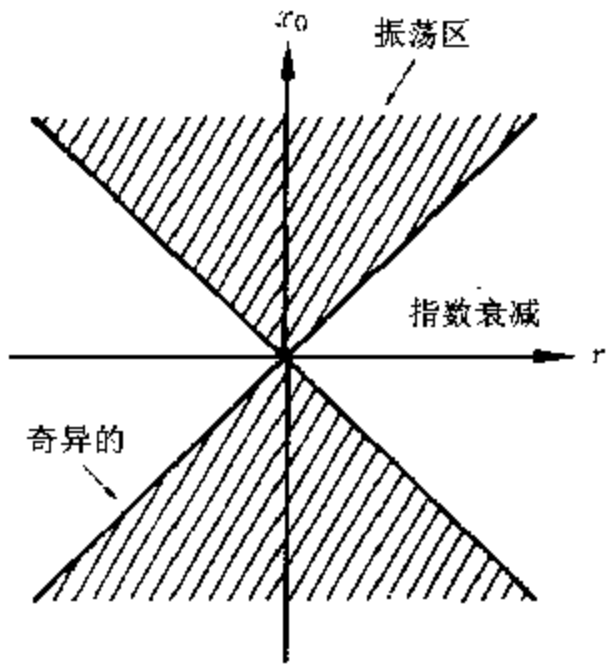


图 2.18　传播子 $\Delta_F(x)$和 $S_F(x)$在光锥内为振荡函数，而在光锥外下降。在光锥上它们为奇异分布。

第三章　量子电动力学过程

在这一章中，我们将在计算各种有趣的而非常重要的量子电动力学过程中，获得一些实际本领。所以下面章节主要由例子和问题构成。我们首先从把传播子形式应用到与电子-正电子散射有关的过程开始。继而我们考虑包括光子和其他粒子在内的更复杂的过程。正如在 Feynman 的原始著作中那样[1]，我们将对包括电子、正电子和光子的任何过程的跃迁几率和散射截面的实际计算导出一般规则。尽管这些规则是以不严格的方式推出的，但它提供了对 QED 过程的一个正确和完整的描述。在量子场论框架中的系统处理可获得同样一套“Feynman 规则”。

3.1　电子的 Coulomb 散射

我们计算一个电子在一定固定的 Coulomb 势上的 Rutherford 散射。正确的 S 矩阵元由(2.41a)和(2.42)所给出且能直接被使用。对 $f\neq i$ 作积分变量代换 $y\to x$，得

$$S_{fi}=-\mathrm{i}e\int \mathrm{d}^4x\bar{\psi}_f(x)\mathcal{A}(x)\Psi_i(x)\quad(f\neq i)\,. \tag{3.1}$$

式中 $e<0$ 是电子的电荷。为了能在一个实际可解的近似下讨论(3.1)，我们在最低级微扰下计算这一过程。从而 $\Psi_i(x)$ 被近似为一个具有动量 p_i 和自旋 s_i 的电子的入射平面波 $\psi_i(x)$

$$\psi_i(x)=\sqrt{\frac{m_0}{E_iV}}u(p_i,s_i)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_i\cdot x}. \tag{3.2}$$

V 表示归一化体积，即 ψ_i 归一成在体积 V 的箱内几率为 1，类似地，$\bar{\psi}_f(x)$ 为

$$\bar{\psi}_f(x)=\sqrt{\frac{m_0}{E_fV}}\bar{u}(p_f,s_f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_f\cdot x}. \tag{3.3}$$

Coulomb 势 $A_0(x)$ 由一个静点电荷 $-Ze$ 产生，从而我们有

$$A_0(x)=A_0(\boldsymbol{x})=-\frac{Ze}{|\boldsymbol{x}|},\boldsymbol{A}(x)=0\,. \tag{3.4}$$

在此假设下，S 矩阵元(3.1)就成为

$$S_{fi}=\mathrm{i}Ze^2\frac{1}{V}\sqrt{\frac{m_0^2}{E_fE_i}}\bar{u}(p_f,s_f)\gamma^0u(p_i,s_i)\int \mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_f-p_i)\cdot x}\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\,. \tag{3.5}$$

可分离出对时间的积分

---

[1] 参见 R. P. Feynman; Phys. Rev. **76**, 749, 769(1949).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_f-E_i)x_0} = 2\pi\delta(E_f - E_i)\ . \tag{3.6}$$

这结果表明在时间无关势上的散射是能量守恒的。剩下 Coulomb 势(3.4)的三维 Fourier 变换

$$A_0(\boldsymbol{q}) = -Ze\int \mathrm{d}^3x \frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}},$$

其中动量转移 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}_f-\boldsymbol{p}_i$，能借助下面的分部积分技巧求出

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^3x \frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}} &= -\frac{1}{\boldsymbol{q}^2}\int \mathrm{d}^3x \frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\Delta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}} \\ &= -\frac{1}{\boldsymbol{q}^2}\int \mathrm{d}^3x\left(\Delta\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} \\ &= -\frac{1}{\boldsymbol{q}^2}\int \mathrm{d}^3x(-4\pi\delta^3(\boldsymbol{x}))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}} = \frac{4\pi}{\boldsymbol{q}^2}\ .\end{aligned} \tag{3.7}$$

从而 S 矩阵元(3.5)为

$$S_{fi} = \mathrm{i}Ze^2\frac{1}{V}\sqrt{\frac{m_0^2}{E_fE_i}}\bar{u}(p_f,s_f)\gamma^0u(p_i,s_i)\frac{4\pi}{\boldsymbol{q}^2}2\pi\delta(E_f-E_i)\ . \tag{3.8}$$

现在我们需要求出在动量范围 d^3p_f 内的末态数 $\mathrm{d}N_f$，它由下式给出

$$\mathrm{d}N_f = V\frac{\mathrm{d}^3p_f}{(2\pi)^3}\ . \tag{3.9}$$

这在考虑下面插入内容后就能理解。

在体积 $V=L^3$(图 3.1)的立方体箱中驻波需要满足

$$\begin{aligned}k_xL &= n_x2\pi,\\ k_yL &= n_y2\pi,\\ k_zL &= n_z2\pi,\end{aligned}$$

其中 n_x,n_y,n_z 为整数，对大 L，分立的一组 k 值趋于连续。态数为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}N &= \mathrm{d}n_x\mathrm{d}n_y\mathrm{d}n_z\\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}L^3\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\mathrm{d}k_z\\ &= \frac{V}{(2\pi)^3}\mathrm{d}^3k = \frac{V}{(2\pi)^3}\mathrm{d}^3p\end{aligned}$$

($\hbar$设为 1)

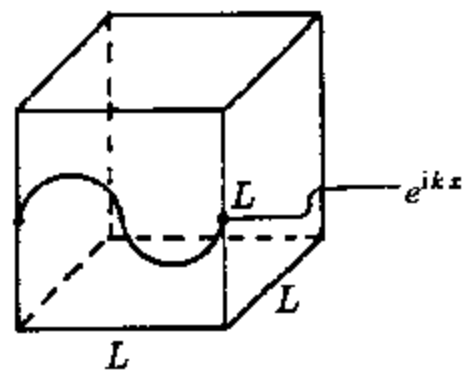


图 3.1　波函数在边长为 L 的立方体内归一化

现在，我们已能表述每个粒子到这些末态的跃迁几率，它就是把 S 矩阵元平方乘上末态密度。

$$\mathrm{d}W = |S_{fi}|^2\frac{V\mathrm{d}^3p_f}{(2\pi)^3}$$

$$= \frac{Z^2(4\pi\alpha)^2 m_0^2}{E_i V} \frac{|\bar{u}(p_f,s_f)\gamma^0 u(p_i,s_i)|^2}{|\boldsymbol{q}|^4} \frac{\mathrm{d}^3 p_f}{(2\pi)^3 E_f} (2\pi\delta(E_f - E_i))^2. \tag{3.10}$$

这里我们令 $\mathrm{e}^2 = \mathrm{e}^2/\hbar c = \alpha$，$\alpha \sim 1/137$ 为精细结构常数。在 4.2 节中，我们将对所用的单位制作详细讨论。

在(3.10)中有 δ 函数的平方。这是一个数学上没有很好定义的发散量，它必须用极限处理来给予说明。代替采用无限时间间隔 $-\infty \leqslant t \leqslant \infty$ 的(3.6)，我们假定跃迁仅发生在有限时间间隔 $-T/2 \leqslant t \leqslant T/2$ 内，从而替代 δ 函数后，我们获得一个能量"弥散"的函数

$$2\pi\delta(E_f - E_i) \Rightarrow \int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{d}t\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_f - E_i)t}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{i}(E_f - E_i)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_f - E_i)t} \Big|_{-T/2}^{T/2} = \frac{2\sin(E_f - E_i)T/2}{E_f - E_i}. \tag{3.11}$$

这样 δ 函数的平方被下式取代

$$(2\pi\delta(E_f - E_i))^2 \Rightarrow 4 \frac{\sin^2(E_f - E_i)T/2}{(E_f - E_i)^2}. \tag{3.12}$$

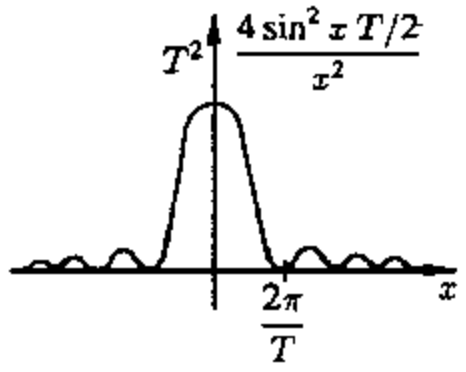


图 3.2 (3.13)积分内的函数

在练习 3.1 中，我们证明该函数下方的面积为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}E_f 4 \frac{\sin^2(E_f - E_i)T/2}{(E_f - E_i)^2} = 2\pi T. \tag{3.13}$$

这结果可通过考察函数 $4\sin^2(xT/2)/x^2$(见图 3.2)的图形来理解. 面积可被近似为一个高为 T^2，底边长为 $4\pi/T$ 的三角形

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{\sin^2(xT/2)}{x^2} \simeq \frac{1}{2} T^2 \frac{4\pi}{T} = 2\pi T, \tag{3.14}$$

这恰好给出精确的结果。T 增大时，函数 $4\sin^2(xT/2)/x^2$ 的形状趋于一个 δ 函数，在函数下方的面积为 $2\pi T$。因此我们可以给出能量守恒 δ-函数的平方的含义，

$$(2\pi\delta(E_f - E_i))^2 = 2\pi\delta(0)2\pi\delta(E_f - E_i)$$

$$\overset{!}{=} 2\pi T\delta(E_f - E_i). \tag{3.15a}$$

根据(3.13)此等式确保了对 $\mathrm{d}E_f$ 积分值为 $2\pi T$，我们就导出了如下替换规则

$$2\pi\delta(0) \Rightarrow T. \tag{3.15b}$$

这结果可以用其他方法获得，即

$$2\pi\delta(E_f - E_i) = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{d}t\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_f - E_i)t}.$$

对 $E_f = E_i$，它就成为

$$2\pi\delta(0) = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} T. \tag{3.16}$$

将(3.15)代入每个粒子跃迁几率的表达式(3.10)中，我们现在能表述每个粒子在单位时间内到动量范围为 d^3p_f 的末态内的跃迁几率。

我们把这一比率记作 dR

$$dR = \frac{dW}{T} = \frac{4Z^2\alpha^2 m_0^2}{E_i V} \frac{|\bar{u}(p_f,s_f)\gamma^0 u(p_i,s_i)|^2}{|q|^4} \frac{d^3p_f}{E_f}\delta(E_f - E_i) . \tag{3.17}$$

散射截面被定义为每粒子单位时间的跃迁几率除以入射粒子流

$$J^a_{inc.} = c\bar{\psi}_i(x)\gamma^a\psi_i(x) . \tag{3.18}$$

上指标"a"决定了沿入射粒子速度方向的流矢量分量

$$v_i = \frac{p_i}{E_i} . \tag{3.19}$$

取沿 z 轴自旋极化的旋量(3.2)和利用《RQM》中的(6.30)我们能确定流

$$J^a_{inc.} = c\bar{\psi}_i(x)\gamma^a\psi_i(x) = c\frac{m_0c^2}{E_iV}\bar{u}(p_i,s_i)\gamma^4 u(p_i,s_i)$$

$$= c\frac{m_0c^2}{E_iV}\frac{(E_i - m_0c^2)}{2m_0c^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{p_ic}{E_i + m_0c^2} & 0 \end{pmatrix}\gamma^0\gamma^3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_ic}{E_i + m_0c^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= c\frac{m_0c^2}{E_iV}\frac{(E_i + m_0c^2)}{2m_0c^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{p_ic}{E_i + m_0c^2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_ic}{E_i + m_0c^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= c\frac{m_0c^2}{E_iV}\frac{(E_i + m_0c^2)}{2m_0c^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{p_ic}{E_i + m_0c^2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{p_ic}{E_i + m_0c^2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{p_ic^2}{E_i}\frac{1}{V} . \tag{3.20}$$

(3.20)正是速度与体积之比

$$|J_{inc.}| = \frac{|v_i|}{V} . \tag{3.21}$$

在(3.20)的运算过程中，为不失一般性，我们假定了速度方向与 Z 轴平行。进一步我们利用了关系 $\gamma^0\gamma^3 = \alpha^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ \sigma^3 & 0 \end{pmatrix}$。(3.21)的结果似乎是合理的，并且不作任何计算也能写出来。对方向不平行于 z 轴的速度而言，这也能由简单方法导出。在这种情况下，我们就得取更普遍的旋量

(《RQM》中(6.32))。微分截面 $d\sigma$ 可借助于(3.21)和(3.17)确定。

$$d\sigma = \frac{dR}{J_{inc.}} = \frac{4Z^2\alpha^2 m_0^2}{E_i V \frac{|\boldsymbol{v}_i|}{V}} \frac{|\bar{u}(p_f,s_f)\gamma^0 u(p_i,s_i)|^2}{|\boldsymbol{q}|^4} \frac{\boldsymbol{p}_f^2 d|\boldsymbol{p}_f|}{E_f} d\Omega_f \delta(E_f - E_i) . \tag{3.22}$$

散射粒子在单位立体角 $d\Omega_f$ 内的微分截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \int_{\Delta p_f} \frac{4Z^2\alpha^2 m_0^2}{E_i|\boldsymbol{v}_i|} \frac{|\bar{u}(p_f,s_f)\gamma^0 u(p_i,s_i)|^2}{|\boldsymbol{q}|^4} \frac{\boldsymbol{p}_f^2 d|\boldsymbol{p}_f|}{E_f} \delta(E_f - E_i) . \tag{3.23}$$

这里已用到动量空间的体积元 $d^3p_f = \boldsymbol{p}_f^2 d|\boldsymbol{p}_f| d\Omega_f$。由于在每一实际情况中,必须在小间隔 Δp_f (测量的不确定性)上进行积分,我们引进了一个积分。这积分的效果是使起源于 $\delta(E_f - E_i)$ 函数(对 $E_i = E_f$ 为无穷大)的明显奇异行为消失。因为

$$E_f^2 = \boldsymbol{p}_f^2 + m_0^2$$

我们得到

$$E_f dE_f = |\boldsymbol{p}_f| d|\boldsymbol{p}_f|$$

从而

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \frac{4Z^2\alpha^2 m_0^2}{|\boldsymbol{q}|^4} |\bar{u}(p_f,s_f)\gamma^0 u(p_i,s_i)|^2 \int_{\Delta p_f} \frac{|\boldsymbol{p}_f| E_f \delta(E_f - E_i)}{E_i|\boldsymbol{v}_i| E_f} dE_f$$

$$= \frac{4Z^2\alpha^2 m_0^2}{|\boldsymbol{q}|^4} |\bar{u}(p_f,s_f)\gamma^0 u(p_i,s_i)|^2 . \tag{3.24}$$

这儿我们用到(3.19)所导致的关系 $|\boldsymbol{p}_f|/E_i|\boldsymbol{v}_i| = |\boldsymbol{p}_i/E_i|\boldsymbol{v}_i| = |\boldsymbol{v}_i|/|\boldsymbol{v}_i| = 1$ 及 δ 函数。在非相对论极限下,下式成立:

$$|\bar{u}(p_f,s_f)\gamma^0 u(p_i,s_i)|^2 \to \left| (1\ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 = 1 ,$$

而(3.24)式约化成有名的 Rutherford 散射截面。

微分截面(3.24)原则上可应用到一个从初始极化(s_i)到末态(s_f)的粒子散射的计算。这将在 3.5 节中处理。然而,在大多数实验中,无论是散射粒子的末态极化 s_f 还是初态极化 s_i 均不测量。所以,各种可能的初始极化态几率等同。即,实际测量的散射截面是对(3.24)式的末态极化 s_F 的求和和对初态极化 s_i 的平均。从而非极化散射截面为

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} = \frac{4Z^2\alpha^2 m_0^2}{|\boldsymbol{q}|^4} \frac{1}{2} \sum_{s_f,s_i} |\bar{u}(p_f,s_f)\gamma^0 u(p_i,s_i)|^2 . \tag{3.25}$$

这种对极化求和的问题在处理包含 Dirac 粒子的过程中是常有的事。幸运的是,已有一个完善的数学技巧,我们不必再对单位旋量 $u(p,s)$ 作明显的计算处理。对极化(自旋)的双重求和可写成

$$\sum_{s_f,s_i} \bar{u}_\alpha(p_f,s_f)\gamma^0_{\alpha\beta} u_\beta(p_i,s_i) u^\dagger_\lambda(p_i,s_i)\gamma^{0\dagger}_{\lambda\delta}\gamma^{0\dagger}_{\delta\alpha} u_\alpha(p_f,s_f)$$

$$= \sum_{s_f,s_i} \bar{u}_\alpha(p_f,s_f)\gamma^0_{\alpha\beta}u_\beta(p_i,s_i)\bar{u}_\delta(p_i,s_i)\gamma^0_{\delta\sigma}u_\sigma(p_f,s_f), \tag{3.26}$$

式中利用了厄米性 $\gamma^{0\dagger}=\gamma^0$，这儿隐含对两次出现的 Dirac 指标的求和。对任意一个算符 $\hat{\Gamma}$，我们有普遍规则

$$|\bar{u}(f)\hat{\Gamma}u(i)|^2 = (\bar{u}(f)\hat{\Gamma}u(i))\quad(\bar{u}(i)\hat{\bar{\Gamma}}u(f)), \tag{3.27}$$

其中"带横线"算符为

$$\hat{\bar{\Gamma}} = \gamma^0\hat{\Gamma}^\dagger\gamma^0. \tag{3.28}$$

这是容易证明的：

$$\begin{aligned}&(\bar{u}_\alpha(f)\hat{\Gamma}_{\alpha\beta}u_\beta(i))(u^\dagger_\gamma(i)\hat{\Gamma}^\dagger_{\gamma\delta}\gamma^{0\dagger}_{\delta\tau}u_\tau(f))\\ &\quad=(\bar{u}_\alpha(f)\hat{\Gamma}_{\alpha\beta}u_\beta(i))(u^\dagger_\gamma(i)\gamma^0_{\gamma\epsilon}\gamma^0_{\epsilon\mu}\hat{\Gamma}^\dagger_{\mu\beta}\gamma^{0\dagger}_{\delta\tau}u_\tau(f))\\ &\quad=(\bar{u}(f)\hat{\Gamma}u(i))(\bar{u}(i)\hat{\bar{\Gamma}}u(f)).\end{aligned}$$

这儿，我们利用了 $\gamma^{0\dagger}=\gamma^0$，$(\gamma^0)^2=1$，以及数(矩阵元)的复共轭和厄米共轭相同，$(\bar{u}(f)\hat{\Gamma}u(i))^*=(\bar{u}(f)\hat{\Gamma}u(i))^\dagger$。带横线矩阵 $\hat{\bar{\Gamma}}$ 能直接从几个算符 $\hat{\Gamma}$ 算出，例如

$$\overline{\gamma^\mu} = \gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 = \gamma^\mu \tag{3.29a}$$

因为 $\gamma^0\gamma^{0\dagger}\gamma^0=\gamma^0\gamma^0\gamma^0=\gamma^0$ 和 $\gamma^0\gamma^{i\dagger}\gamma^0=-\gamma^0\gamma^i\gamma^0=\gamma^i\gamma^0\gamma^0=\gamma^i$，由于 γ^0 厄米和 γ^i 为反厄米。对 γ^5 矩阵，我们求得

$$\overline{i\gamma^5} = i\gamma^5, \tag{3.29b}$$

因为

$$i\gamma^5 = -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

和

$$\overline{i\gamma^5} = -\gamma^0\gamma^{3\dagger}\gamma^{2\dagger}\gamma^{1\dagger}\gamma^{0\dagger}\gamma^0 = +\gamma^0\gamma^3\gamma^2\gamma^1 = -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = i\gamma^5.$$

类似地，我们得到

$$\overline{\gamma^\mu\gamma^5} = \gamma^\mu\gamma^5 \tag{3.29c}$$

从(3.29a)得：

$$\overline{\not a\not b\not c\cdots\not p} = \not p\cdots\not c\not b\not a. \tag{3.29d}$$

为了用直接而又简单的方法计算像(3.26)或(3.27)式表达式中对旋量求和，我们必须掌握一些新的计算技巧。这些求和能约化为计算求迹[①]。这儿我们用了能量投影算符(见《RQM》第 7 章)

$$\Lambda_\pm = \frac{\pm\not p + m_0}{2m_0} \quad 或 \quad \Lambda_r = \frac{\epsilon_r\not p + m_0}{2m_0}. \tag{3.30}$$

作为一个例子，我们计算

$$\sum_{s_i}\mu_\beta(p_i,s_i)\bar{u}_\delta(p_i,s_i) = \sum_{\gamma,r=1}^{4}\epsilon_r\omega^r_\beta(\boldsymbol{p}_i)\bar{\omega}^r_\gamma(\boldsymbol{p}_i)\left(\frac{\not p_i + m_0}{2m_0}\right)_{\gamma\delta}$$

① 这个优美的技巧引自：H. B. G. Casimir, Helv. Phys. Acta **6**, 287(1933).

$$= \left\{ \frac{\not p_i + m_0}{2m_0} \right\}_{\beta\delta} = \left\{ \Lambda_+(p_i) \right\}_{\beta\delta}. \tag{3.31}$$

这儿我们已用了关系(参见《RQM》(6.33))

$$\overline{\omega}^r(\not p - \epsilon, m_0) = 0 \tag{3.32a}$$

将求和范围推到 $r=1,\cdots,4$，随后，我们利用了

$$\sum_{r=1}^{4} \epsilon_r \omega_\beta^r(\boldsymbol{p}_i)\overline{\omega}_\gamma^r(\boldsymbol{p}_i) = \delta_{\beta\gamma}. \tag{3.32b}$$

上式是一个完备关系(《RQM》,(6.41)),类似地,我们计算(3.26)中自旋求和。我们明显地写出

$$\sum_{\alpha,\sigma,\beta,\delta} \sum_{s_f} \overline{u}_\alpha(p_f,s_f)\gamma^0_{\alpha\beta} \underbrace{\left| \sum_{s_i} u_\beta(p_i,s_i)\overline{u}_\delta(p_i,s_i) \right|}_{\left\{\frac{\not p_i + m_0}{2m_0}\right\}_{\beta\delta} \text{ 因为 (3.31)}} \gamma^0_{\delta\sigma} u_\sigma(p_f,s_f)$$

$$= \sum_{\alpha,\sigma} \sum_{s_f} \overline{u}_\alpha(p_f,s_f) \left\{ \gamma^0 \frac{\not p_i + m_0}{2m_0} \gamma^0 \right\}_{\alpha\sigma} u_\sigma(p_f,s_f)$$

$$= \sum_{\alpha,\sigma} \sum_{r=1}^{2} \overline{\omega}_\alpha^r(\boldsymbol{p}_f) \left\{ \gamma^0 \frac{\not p_i + m_0}{2m_0} \gamma^0 \right\}_{\alpha\sigma} \omega_\sigma^r(\boldsymbol{p}_f)$$

$$= \sum_{\alpha,\sigma,\tau} \sum_{r=1}^{4} \epsilon_r \overline{\omega}_\alpha^r(\boldsymbol{p}_f) \left\{ \gamma^0 \frac{\not p_i + m_0}{2m_0} \gamma^0 \right\}_{\alpha\sigma} \left\{ \frac{\not p_f + m_0}{2m_0} \right\}_{\sigma\tau} \omega_\tau^r(\boldsymbol{p}_f)$$

$$= \sum_{\alpha,\sigma} \left(\gamma^0 \frac{\not p_i + m_0}{2m_0} \gamma^0 \right)_{\alpha\sigma} \left(\frac{\not p_f + m_0}{2m_0} \right)_{\sigma\alpha}$$

$$= \mathrm{Tr}\left[\gamma^0 \frac{\not p_i + m_0}{2m_0} \gamma^0 \frac{\not p_f + m_0}{2m_0} \right]. \tag{3.33a}$$

在倒数第三行,我们已用到关系(参见《RQM》,(6.33))

$$(\not p - \epsilon, m_0)\omega^r(\boldsymbol{p}) = 0\,. \tag{3.32c}$$

导得(3.33a)的过程同样适合于一般的矩阵元平方(3.27)的自旋求和,结果是

$$\sum_{s_f,s_i} |\overline{u}(p_f,s_f)\,\hat{\Gamma}\,u(p_i,s_i)|^2 = \mathrm{Tr}\left[\hat{\Gamma} \frac{\not p_i + m_0}{2m_0} \bar{\hat{\Gamma}} \frac{\not p_f + m_0}{2m_0} \right], \tag{3.33b}$$

其中,带横线算符 $\bar{\hat{\Gamma}}$ 已在(3.28)中引入。利用这一结果,非极化的微分截面(3.25)能被完美地写成如下形式

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega_f} = \frac{4Z^2\alpha^2 m_0^2}{2|\boldsymbol{q}|^4} \mathrm{Tr}\left[\gamma^0 \frac{\not p_i + m_0}{2m_0} \gamma^0 \frac{\not p_f + m_0}{2m_0} \right]. \tag{3.34}$$

为了进行计算,我们现使用几个将在数学附注 3.3 中讨论的几个关系式。因为奇数个 γ 矩阵的迹为零(数学附注 3.3,定理 1),(3.34)能被化成

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega_f} = \frac{Z^2\alpha^2}{2\,\boldsymbol{q}^4}\left[\mathrm{Tr}\,(\gamma^0 \not p_i \gamma^0 \not p_f) + m_0^2\,\mathrm{Tr}\,(\gamma^0)^2 \right]. \tag{3.35}$$

利用 $\mathrm{Tr}\,(\gamma^0)^2 = \mathrm{Tr}\,1 = 4$ 及对 $a=(1,0,0,0)$ 有 $\mathrm{Tr}\,(\gamma^0 \not p_i \gamma^0 \not p_f) = \mathrm{Tr}\,(\not a \not p_i \not a \not p_f)$,并进一步利用数

学附注 3.3 中定理 3.我们得到

$$\mathrm{Tr}\,(\gamma\cdot p_i\gamma\cdot p_f)=a\cdot p_i\,\mathrm{Tr}\,a\cdot p_f-a\cdot a\,\mathrm{Tr}\,p_i p_f-a\cdot p_f\,\mathrm{Tr}\,p_i a\,.$$

利用 $\mathrm{Tr}\,a\,b=4a\cdot b$(数学附注 3.3,定理 2)我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\,(\gamma\cdot p_i\gamma\cdot p_f)&=4(a\cdot p_i)(a\cdot p_f)-(a\cdot a)4(p_i\cdot p_f)+4(a\cdot p_f)(a\cdot p_i)\\&=4E_iE_f-4(E_iE_f-\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{p}_f)+4E_iE_f\\&=8E_iE_f-4p_i\cdot p_f=4E_iE_f+4\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{p}_f.\end{aligned}\tag{3.36}$$

(3.23)中 $\delta(E_i-E_f)$函数确保能量守恒 $E_i=E_f$,从而 $E_i^2=E_f^2$.导致

$$m_0^2+\boldsymbol{p}_i^2=m_0^2+\boldsymbol{p}_f^2\quad\text{或}\quad|\boldsymbol{p}_i|=|\boldsymbol{p}_f|=|\boldsymbol{p}|\,.$$

作为一个散射角 θ 的函数,我们能写出初末态动量的标量积

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{p}_f&=|\boldsymbol{p}|^2\cos\theta=|\boldsymbol{p}|^2\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)=|\boldsymbol{p}|^2\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\\&=\beta^2E^2\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right).\end{aligned}\tag{3.37}$$

其中,$|\boldsymbol{p}|=|\boldsymbol{v}|E=\beta E$.

采用这一结果和动量转换(见图 3.3)

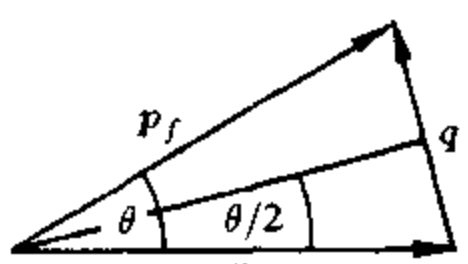


图 3.3　动量转移的示意图

$$|\boldsymbol{q}|=|\boldsymbol{p}_f-\boldsymbol{p}_i|=2|\boldsymbol{p}|\sin\frac{\theta}{2}\,.\tag{3.38}$$

微分截面(3.35)能被重新改写成下列形式

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega_f}&=\frac{Z^2\alpha^2}{2(q^2)^2}\left[8E_iE_f-4p_i\cdot p_f+4m_0^2\right]\\&=\frac{Z^2\alpha^2}{2\times16|\boldsymbol{p}|^4\sin^4\frac{\theta}{2}}\left[8E_iE_f-4p_i\cdot p_f+4m_0^2\right]\\&=\frac{Z^2\alpha^2}{32|\boldsymbol{p}|^4\sin^4\frac{\theta}{2}}\left[4E_iE_f+4\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{p}_f+4m_0^2\right]\\&=\frac{Z^2\alpha^2}{8|\boldsymbol{p}|^4\sin^4\frac{\theta}{2}}\left[E^2+|\boldsymbol{p}|^2\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+m_0^2\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{Z^2\alpha^2\left[E^2 - \beta^2E^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right]}{4\beta^4E^4\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{Z^2\alpha^2\left(1 - \beta^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{4\beta^4E^2\sin^4\frac{\theta}{2}} = \frac{Z^2\alpha^2\left(1 - \beta^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{4\beta^2|\boldsymbol{p}|^2\sin^4\frac{\theta}{2}}. \tag{3.39}$$

这儿我们用到 $\beta^2E^2=m^2c^2v^2=c^2|\boldsymbol{p}|^2$，其中 $\beta-v/c$。对 $c=1$，则 $\beta^2E^2=|\boldsymbol{p}|^2$。方程(3.39)正是有名的 Mott 散射公式，它在极限 $\beta\to0$(低速)下退化为 Rutherford 散射公式。

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_f} = \frac{Z^2\alpha^2}{4\beta^2|\boldsymbol{p}|^2\sin^4\frac{\theta}{2}}. \tag{3.40}$$

除了相对论运动学的正确处理外，(3.39)有别于 Rutherford 公式还有别的原因：Dirac 电子与散射中心处磁场(在电子的静止系中看)间存在磁矩相互作用。在低速情形下这种效应是可被略去的。

练　习

3.1　有用积分的计算

问题：证明

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dE_f \frac{4\sin^2(E_f - E_i)T/2}{(E_f - E_i)^2} = 2\pi T.$$

解答：首先引入变量 $x=(E_f-E_i)T/2$，于是

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx 4\frac{\sin^2x}{\frac{4}{T^2}x^2}\frac{2}{T} = 2T\int_{-\infty}^{\infty} dx\frac{\sin^2x}{x^2}. \tag{1}$$

因为 $\sin^2x/x^2|_{x=0}=1$，被积函数处处连续有限。分部积分将此表达式简化为

$$I = 2T\left[-\sin^2x\frac{1}{x}\right]_{-\infty}^{\infty} + 2T\int_{-\infty}^{\infty} dx\frac{2\sin x\cos x}{x}$$

$$= 2T\int_{-\infty}^{\infty} dx\frac{\sin2x}{x} = 2T\int_{-\infty}^{\infty} dy\frac{\sin y}{y}. \tag{2}$$

这就是所谓的“Dirichlet 积分”。应用留数定理，它可容易计算的。由于 $\sin y/y|_{y=0}=1$，函数 $\sin y/y$ 在有限平面上是解析的，若积分路径在原点附近变形到路径 C(图 3.4 中虚线)积分 I 的值不变。这就导致：

$$I = 2T\left(\int_C \mathrm{d}z\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}z} - \int_{\bar{C}} \mathrm{d}z\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}z}\right). \tag{3}$$

第一个积分可通过使上半平面内积分路径封闭积出，而对第二个积分可将下半平面上封闭积分路径。

$$I = 2T\left(\int_{C_1} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}z}\mathrm{d}z - \int_{C_2} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}z}\mathrm{d}z\right). \tag{4}$$

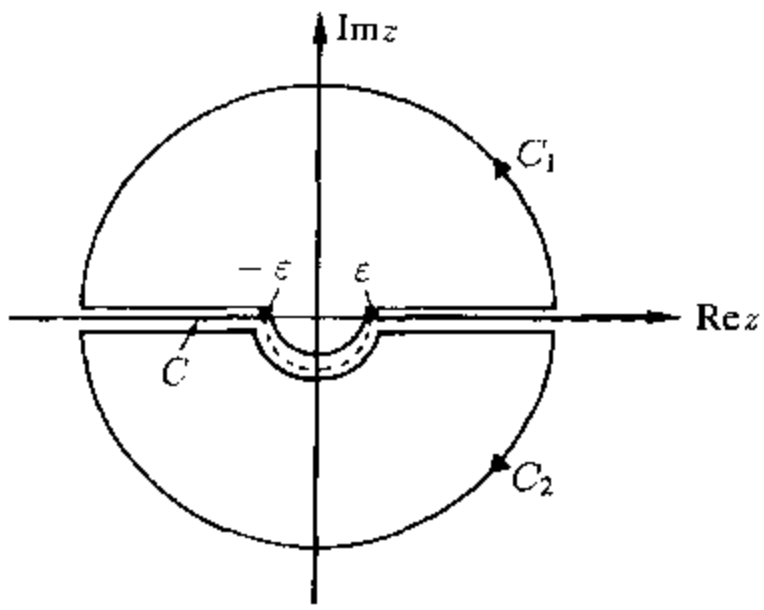


图 3.4　复平面上的积分路径

由留数定理得

$$I = 2T\,2\pi\mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{e}^{0}}{2\mathrm{i}} - 0\right) = 2\pi T. \tag{5}$$

练　习

3.2　平面波的 Lorentz 变换

问题：箱归一化的平面波为

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{m_0}{EV}}u(p,s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x},$$
$$\bar{\psi}(x) = \sqrt{\frac{m_0}{EV}}\bar{u}(p,s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{1}$$

V 为归一化体积

$$u(p,s) = \sqrt{\frac{E+m_0}{2m_0}}\begin{pmatrix}\chi_s \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m_0}\chi_s\end{pmatrix},$$
$$\chi_{1/2} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \chi_{-1/2} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \tag{2}$$

证明 $\psi(x)$ 在 Lorentz 变换下有正确性质，即双线性量 $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ 为 Lorentz 标量和 $\psi^{+}(x)\psi(x)$ 为四矢量的时间分量。

解答：必须考虑 Lorentz 变换对箱体积 V 的作用。长度缩短是 Lorentz 变换的运动学后果，它引起了对观察体积的修正。

首先，在电子的静止系 S' 的测量单位是由 z 轴坐标上的端点 z_1' 和 z_2' 给定的：单位长度是 $l_0=z_2'-z_1'$。一个在参照系 S 上的观察者在时刻 t 测量其长度。不失一般性，我们在相对于 S' 以速度 $-v$ 的 S 系上选取 z 轴与 z' 轴向重合。

用 $\gamma=(1-v^2)^{-1/2}$ 得

$$z_2'=\gamma(z_2-vt), \tag{3a}$$

$$z_1'=\gamma(z_1-vt), \tag{3b}$$

从而

$$l_0=z_2'-z_1'=\gamma(z_2-z_1)=\gamma l\ , \tag{4}$$

它给出了观测者的 S 系中的测量得的长度 l 为

$$l=\frac{1}{\gamma}l_0 \tag{5}$$

（长度收缩），电子在它静止坐标系中所"看"到的不变体积 V_0 在观测者参照系中成为

$$V=\frac{1}{\gamma}V_0. \tag{6}$$

它依赖于观测者与电子间相对速度。

波函数(1)的坐标 x 是相对于特定的坐标原点选择的——这儿由观测者位置的给出。观测者所看到的归一化体积为

$$V=\int \mathrm{d}^3x\ , \tag{7}$$

依赖于电子的速度。然而，

$$V_0=V\gamma \tag{8}$$

是与速度无关，是一个不变量。

利用(1)和(2)对标量密度，我们得到：

$$\bar{\psi}(x)\psi(x)=\frac{E+m_0}{2EV}\left[\chi_s^{+}\chi_s-\chi_s^{+}\frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})^{+}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})}{(E+m_0)^2}\chi_s\right]. \tag{9}$$

我们明显地写出

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})^{+}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})&=\begin{pmatrix} p_3 & p_1-ip_2 \\ p_1+ip_2 & -p_3\end{pmatrix}^{+}\begin{pmatrix} p_3 & p_1-ip_2 \\ p_1+ip_2 & -p_3\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} p_3^2+p_1^2+p_2^2 & 0 \\ 0 & p_1^2+p_2^2+p_3^2\end{pmatrix}=\boldsymbol{p}^2\,\mathbb{1},\end{aligned} \tag{10}$$

用它可将(9)简化成下面结果

$$\bar{\psi}(x)\psi(x)=\frac{E+m_0}{2EV}\left[1-\frac{\boldsymbol{p}^2}{(E+m_0)^2}\right]$$
$$=\frac{1}{2EV}\frac{E^2+2Em_0+m_0^2-E^2+m_0^2}{E+m_0}$$
$$=\frac{2m_0(E+m_0)}{2EV(E+m_0)}=\frac{m_0}{E}\frac{1}{V}. \tag{11}$$

因为 E/m_0 正好是 Lorentz 因子 γ，我们求得

$$\psi(x)\psi(x)=\frac{1}{\gamma V}=\frac{1}{V_0}, \tag{12}$$

它是 Lorentz 不变表达式。另一方面，四维流密度的零分量为

$$\psi^+(x)\psi(x)=\frac{E+m_0}{2EV}\left[\chi_s^+\chi_s+\chi_s^+\frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})^+(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})}{(E+m_0)^2}\chi_s\right]$$
$$=\frac{E+m_0}{2EV}\left[1+\frac{\boldsymbol{p}^2}{(E+m_0)^2}\right]$$
$$=\frac{1}{2EV}\frac{E^2+2Em_0+m_0^2-E^2-m_0^2}{E+m_0}$$
$$=\frac{2E(E+m_0)}{2EV(E+m_0)}=\frac{1}{V}=\frac{\gamma}{V_0}. \tag{13}$$

因为 γ 为四维速度的时间分量，结果的变换性质是显见的。

数学附注

3.3　含有 γ 矩阵的求迹和恒等式

当我们计算 Feynman 图和导出物理上可测量的截面时，我们面临着对特定组合的 γ 矩阵求迹的任务。在 3.1 节中，求迹计算的重要性已被讨论，在下面的例子中，这也将成为一个再次重复的主题，已发展了非常有用的技巧去简化这些计算。它不必采用 γ 矩阵的明显形式，通常使用一下 γ 矩阵的对易子代数就足够了。我们以几个定理的形式集中了这些性质。

定理 1. 奇数个 γ 矩阵之迹为零

证明：我们利用 γ_5 矩阵，它与所有其他 γ 矩阵都反对易，且满足 $\gamma_5\gamma_5=1$。对任意四维矢量 $a_1,\ldots,a_n$，我们有

$$\mathrm{Tr}\ \not{a}_1\cdots\not{a}_n=\mathrm{Tr}\ \not{a}_1\cdots\not{a}_n\gamma_5\gamma_5=\mathrm{Tr}\ \gamma_5\not{a}_1\cdots\not{a}_n\gamma_5$$

由于在求迹内的循环置换，即 $\mathrm{Tr}\ AB=\mathrm{Tr}\ BA$。我们利用关系 $\gamma_\mu\gamma_5+\gamma_5\gamma_\mu=0$，将第一个 γ_5 置换到右边，产生 n 个负符号，从而我们得到

$$\mathrm{Tr}\ \not{a}_1\cdots\not{a}_n=(-1)^n\mathrm{Tr}\ \not{a}_1\cdots\not{a}_n\gamma_5\gamma_5$$
$$=(-1)^n\mathrm{Tr}\ \not{a}_1\cdots\not{a}_n.$$

显然对奇数 n 的迹为零。

定理 2. $\mathrm{Tr}\ \not{a}\not{b}=4a\cdot b$.

证明：

$$\mathrm{Tr}\ \not{a}\not{b}=\mathrm{Tr}\ \not{b}\not{a}=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ (\not{a}\not{b}+\not{b}\not{a})$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ (\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu)a_\mu b_\nu$$

$$=a_\mu b_\nu\,\mathrm{Tr}\ g^{\mu\nu}\mathbb{1}$$

$$=a\cdot b\,\mathrm{Tr}\ \mathbb{1}=4a\cdot b\,.$$

定理 3.

$$\mathrm{Tr}\ \not{a}_1\cdots\not{a}_n=a_1\cdot a_2\,\mathrm{Tr}\ \not{a}_3\cdots\not{a}_n-a_1\cdot a_3\,\mathrm{Tr}\ \not{a}_2\not{a}_4\cdots\not{a}_n+\cdots$$
$$+a_1\cdot a_n\,\mathrm{Tr}\ \not{a}_2\cdots\not{a}_{n-1}\,.$$

这个定理在计算含有多 γ 矩阵的求迹计算中非常有用，特殊情况是

$$\mathrm{Tr}\ \not{a}_1\not{a}_2\not{a}_3\not{a}_4=4(a_1\cdot a_2a_3\cdot a_4-a_1\cdot a_3a_2\cdot a_4+a_1\cdot a_4a_2\cdot a_3)\,.$$

证明：利用 $\not{a}_1\not{a}_2=-\not{a}_2\not{a}_1+2a_1\cdot a_2\mathbb{1}$ 我们将 $\not{a}_1$ 移到 $\not{a}_2$ 的右边，即

$$\mathrm{Tr}\ \not{a}_1\cdots\not{a}_n=2a_1\cdot a_2\,\mathrm{Tr}\ \not{a}_3\cdots\not{a}_n-\mathrm{Tr}\ \not{a}_2\not{a}_1\not{a}_3\cdots\not{a}_n.$$

重复这种步骤，我们得到（记住，按照定理 1，n 必须是偶数）

$$\mathrm{Tr}\ \not{a}_1\cdots\not{a}_n=2a_1\cdot a_2\,\mathrm{Tr}\ \not{a}_3\cdots\not{a}_n-\cdots+2a_1\cdot a_n\,\mathrm{Tr}\ \not{a}_2\cdots\not{a}_{n-1}$$
$$-\mathrm{Tr}\ \not{a}_2\cdots\not{a}_n\not{a}_1.$$

最后利用迹中在循环置换下不变的性质，将 $\not{a}_1$ 移回到式的左端，这便得到我们的定理，特别地，我们得到

$$\mathrm{Tr}\ \not{a}_1\not{a}_2\not{a}_3\not{a}_4=a_1\cdot a_2\,\mathrm{Tr}\ \not{a}_3\not{a}_4-a_3\cdot a_1\,\mathrm{Tr}\ \not{a}_2\not{a}_4+a_1\cdot a_4\,\mathrm{Tr}\ \not{a}_2\not{a}_3$$
$$=4a_1\cdot a_2a_3\cdot a_4-4a_1\cdot a_3a_2\cdot a_4+4a_1\cdot a_4a_2\cdot a_3.$$

这儿我们已应用了定理 2.

定理 4. $\mathrm{Tr}\ \gamma^5=0$.

证明：在我们的表示中，矩阵

$$\gamma_5=\gamma^5=\mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

有显式

$$\gamma_5=\begin{pmatrix}0 & \mathbb{1}\\ \mathbb{1} & 0\end{pmatrix},$$

显然它是无迹的。

不需用到特定的表示，从 γ 矩阵代数也能导出相同结果，利用 $\gamma^\mu\gamma^5+\gamma^5\gamma^\mu=0$，特别地 $\gamma^0\gamma^5=-\gamma^5\gamma^0$，从而

$$\mathrm{Tr}\ \gamma^5=\mathrm{Tr}\ \gamma^5(\gamma^0)^2=-\mathrm{Tr}\ \gamma^0\gamma^5\gamma^0$$
$$=-\mathrm{Tr}\ \gamma^5(\gamma^0)^2=-\mathrm{Tr}\ \gamma^5=0\,.$$

我们再次用到迹中矩阵的循环置换。

定理 5.　　$\mathrm{Tr}\ \gamma^5 \not a \not b = 0$.

证明：我们必须证明 $\mathrm{Tr}\ (\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu)=0$。若指标相同 $\mu=\nu$ 从定理 4 就获得结论。因为 $(\gamma^\mu)^2 = g^{\mu\mu}\mathbf{1}$。当 $\mu\neq\nu$ 时，我们选择一个有别于 μ 和 ν 的指标 λ，得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\ \gamma^5\gamma_\mu\gamma_\nu &= \mathrm{Tr}\ \gamma^5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda^{-1}\gamma_\lambda = \mathrm{Tr}\ \gamma_\lambda\gamma^5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda^{-1}\\ &= (-1)^3\,\mathrm{Tr}\ \gamma^5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\lambda^{-1}\\ &= -\,\mathrm{Tr}\ \gamma^5\gamma_\mu\gamma_\nu = 0\ .\end{aligned}$$

定理 6.　　$\mathrm{Tr}\ \gamma^5 \not a \not b \not c \not d = -4\mathrm{i}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}a_\alpha b_\beta c_\gamma d_\delta$.

这里，ε 是完全反对称张量：如果 $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ 是 $(0,1,2,3)$ 的偶置换，则 $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}=+1$，对奇置换，$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}=-1$，若任两指标相同，$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}=0$。

证明：我们必须导出

$$\mathrm{Tr}\ \gamma^5 \not a \not b \not c \not d = a_\alpha b_\beta c_\gamma d_\delta\ \mathrm{Tr}\ \gamma^5\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta,$$

这儿隐含着对重复指标的求和，在 $4^4=256$ 项中的大部分项无贡献。的确，若 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 中任两个指标取作相同值，则迹为零。譬如说，让第一和第三个指标相同，利用对易关系，在迹中的 γ 矩阵数目可缩少到两个，利用定理 5，

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\ \gamma^5\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\alpha\gamma^\delta &= \mathrm{Tr}\ \gamma^5\gamma^\alpha(-\gamma^\alpha\gamma^\beta + 2g^{\alpha\beta}\mathbb{1})\gamma^\delta\\ &= \mathrm{Tr}\ \gamma^5(-\gamma^\alpha\gamma^\alpha\gamma^\beta + 2\gamma^\alpha g^{\alpha\beta}\mathbb{1})\gamma^\delta\\ &= -\,g^{\alpha\alpha}\,\mathrm{Tr}\ \gamma^5\gamma^\beta\gamma^\delta + 2g^{\alpha\beta}\,\mathrm{Tr}\ \gamma^5\gamma^\alpha\gamma^\delta\\ &= 0\end{aligned}$$

从而，仅指标 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 是数字 $(0,1,2,3)$ 的一种置换时才能有贡献。我们只需计算迹

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\ \gamma^5\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 &= \mathrm{Tr}\ \gamma^5(-\mathrm{i}\gamma^5) = -\,\mathrm{i}\,\mathrm{Tr}\ \mathbb{1}\\ &= -\,4\mathrm{i} = -\,4\mathrm{i}\varepsilon^{0123}.\end{aligned}$$

因为四个 γ^μ 矩阵是相互反对易的，指标 $(0,1,2,3)$ 的奇置换就额外引进一个负号，这样就完成了定理的证明。

定理 7.　　$\mathrm{Tr}\ \not a_1 \not a_2\cdots\not a_{2n} = \mathrm{Tr}\ \not a_{2n}\cdots\not a_1$.

证明：我们利用矩阵 $\hat{C}$ 的优点，它是被引作讨论电荷共轭的。$\hat{C}$ 具有性质 $\hat{C}\ \gamma_\mu\hat{C}^{-1} = -\gamma_\mu^T$，这就导致

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\ \not a_1 \not a_2\cdots\not a_{2n} &= \mathrm{Tr}\ \hat{C}\ \not a_1\ \hat{C}^{-1}\hat{C}\ \not a_2\ \hat{C}^{-1}\cdots\hat{C}\ \not a_{2n}\ \hat{C}^{-1}\\ &= (-1)^{2n}\,\mathrm{Tr}\ \not a_1^T\ \not a_2^T\cdots\not a_{2n}^T\\ &= \mathrm{Tr}\ [\not a_{2n}\cdots\not a_1]^T\\ &= \mathrm{Tr}\ \not a_{2n}\cdots\not a_1.\end{aligned}$$

定理 8.　对 γ 矩阵的缩并乘积存在下列有用的恒等式

a)　　$\gamma_\mu\gamma^\mu = 4\,\mathbf{1}$,

b)　　$\gamma_\mu \not a\ \gamma^\mu = -2\not a$,

c)　　$\gamma_\mu \not a\ \not b\ \gamma^\mu = 4a\cdot b\,\mathbf{1}$,

d) $$\gamma_\mu \not a \not b \not c \gamma^\mu = -2 \not c \not b \not a,$$

e) $$\gamma_\mu \not a \not b \not c \not d \gamma^\mu = 2 \not d \not a \not b \not c + 2 \not c \not b \not a \not d.$$

证明:这些恒等式都来自于 γ 矩阵的反对易关系

a) $\gamma_\mu \gamma^\mu = \frac{1}{2}(\gamma_\mu \gamma^\mu + \gamma_\mu \gamma^\mu) = \frac{1}{2} 2 g^\mu_\mu \mathbb{1} = 4 \mathbb{1}$,

b) $$\begin{aligned}\gamma_\mu \not a \gamma^\mu &= \gamma_\mu \gamma^\nu a_\nu \gamma^\mu = a_\nu \gamma_\mu (2 g^{\nu\mu} \mathbb{1} - \gamma^\mu \gamma^\nu) \\ &= 2 \not a - 4 \not a = -2 \not a.\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}\gamma_\mu \not a \not b \gamma^\mu &= \gamma_\mu \gamma^\nu a_\nu \gamma^\lambda b_\lambda \gamma^\mu \\ &= \gamma_\mu \not a 2 g^{\lambda\mu} b_\lambda - \gamma_\mu \not a \gamma^\mu \not b = 2 \not b \not a + 2 \not a \not b \\ &= 4 a \cdot b \mathbb{1} - 2 \not a \not b + 2 \not a \not b = 4 a \cdot b \mathbb{1},\end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned}\gamma_\mu \not a \not b \not c \gamma^\mu &= \gamma_\mu \not a \not b 2 g^{\nu\mu} c_\nu - \gamma_\mu \not a \not b \gamma^\mu \not c \\ &= 2 \not c \not a \not b - 4 a \cdot b \not c \\ &= 4 \not c a \cdot b - 2 \not c \not b \not a - 4 a \cdot b \not c \\ &= -2 \not c \not b \not a,\end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned}\gamma_\mu \not a \not b \not c \not d \gamma^\mu &= \gamma_\mu \not a \not b \not c 2 g^{\nu\mu} d_\nu - \gamma_\mu \not a \not b \not c \gamma^\mu \not d \\ &= 2 \not d \not a \not b \not c + 2 \not c \not b \not a \not d.\end{aligned}$$

例　子

3.4 正电子的 Coulomb 散射

在讨论电子在 Coulomb 势上散射时,我们已发现,散射矩阵元依赖于 e 的平方,所以我们预料在 e 的那级近似下,对正电子的 Coulomb 散射,我们能获得相同的结果。这能从写出的矩阵元明显地看出

$$S_{fi} = ie \int d^4x \bar{\psi}_f(x) \not A(x) \Psi_i^{(-E)}(x). \tag{1}$$

这里,整个符号为正,这是因为我们散射带有负频的波(参见(2.39)和(2.40))。与未来相对应的入射态被认为具有负能和四动量 $-p_f$ 的一个电子。这电子沿时间向后传播。散射过程见图 3.5 所示。若作为最低级近似,我们代入平面波解,对应的波函数(负能量入射电子)为

$$\psi_i^{(\text{电子})}(-p_f, -s_f) = \sqrt{\frac{m_0}{E_f V}} v(p_f, s_f) e^{+ip_f \cdot x}. \tag{2a}$$

对出射态,我们等价地写出(负能出射电子)

$$\psi_f^{(\text{电子})}(-p_i, -s_i) = \sqrt{\frac{m_0}{E_i V}} v(p_i, s_i) e^{+ip_i \cdot x}. \tag{2b}$$

这里在左边使用了电子的语言而右边使用正电子的语言。入射负能电子沿时间向后运动对应着出射正能正电子沿时间向前运动 $\psi^{\text{电子}}(-p_f, -s_f) \longleftrightarrow v(p_f, s_f)$。类似地一个出射负能电子沿时

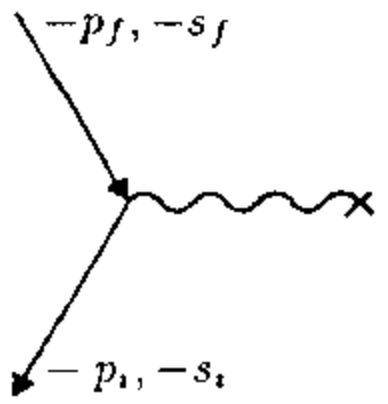


图 3.5　正电子受外场势(x)散射的最低阶图，动量为 p_i 自旋为 s_i 的入射正电子用动量为 $-p_i$ 自旋为 $-s_i$ 的负能出射电子描述，对出射正电子的处理是类似的。

同向后运动相应于入射正能电子沿时间向前运动。

利用旋量 $v(p,s)$，我们就已考虑到这样一个事实，负能电子的自旋为 $-s$，这儿 s 表示正电子的自旋。这种重新定义，我们曾在《RQM》第六章中做的，现在一目了然了。根据空穴理论，一个正电子被描写成负能量，负动量和负自旋的电子。负动量是自动包含在旋量 $\omega^r(\boldsymbol{p})$ 中 $r=3,4$，因为这些解属于平面波 $\psi^r(x)=\omega^r(\boldsymbol{p})\exp(-i\varepsilon_r p\cdot x)$。(对进一步的信息请参见《RQM》，第六章)。我们总是按照电子画出适当的图。通过这种办法，保证我们的计算清晰明了而且获得一个很明确的方案去处理正能和负能电子以避免可能的差错。

作为结论，我们考虑获得完全类同于电子散射的结果。

$$S_{fi}=-iZe^2\frac{1}{V}\sqrt{\frac{m_0^2}{E_f E_i}}\bar{v}(p_i,s_i)\gamma^0 v(p_f,s_f)\int d^4x\, e^{i(p_f-p_i)\cdot x}\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}. \tag{3}$$

差别仅在于整个符号和旋量 v，我们不必重复推导正电子散射截面的所有步骤。因为它们已在电子散射情况中给出。非极化的微分截面如下

$$\frac{d\bar{\sigma}_{e+}}{d\Omega}=\frac{2Z^2\alpha^2 m_0^2}{|\boldsymbol{q}|^4}\sum_{s_f s_i}|\bar{v}(p_i,s_i)\gamma^0 v(p_f,s_f)|^2. \tag{4}$$

对自旋的求和又能化为求迹，我们写出

$$\sum_{s_i}v_\alpha(p_i,s_i)\bar{v}_\beta(p_i,s_i)=\sum_{r=1}^{4}\varepsilon_r\omega_\alpha^r(\boldsymbol{p}_i)\bar{\omega}_\beta^r(p_i)(-)\left\{\frac{-\not{p}_i+m_0}{2m_0}\right\}_{\alpha\beta}. \tag{5}$$

这可从共轭旋量的 Dirac 方程 $\bar{\omega}^r(p_i)(\not{p}-\varepsilon_r m_0)=0$ 得来，该方程对 $r=1,2$ 给出

$$\bar{\omega}^r(\boldsymbol{p}_i)(\not{p}_i-m_0)=0, \tag{6}$$

而对 $r=3,4$，我们有

$$\varepsilon_r\bar{\omega}^r(\boldsymbol{p}_i)\left\{\frac{\not{p}_i-m_0}{2m_0}\right\}=\bar{\omega}^r(\boldsymbol{p}_i). \tag{7}$$

我们利用下列封闭关系式

$$\sum_{r=1}^{4}\varepsilon_r\omega_\alpha^r(\boldsymbol{p})\bar{\omega}_\beta^r(\boldsymbol{p})=\delta_{\alpha\beta} \tag{8}$$

并导出结果

$$\sum_{s_i} v_\alpha(p_i,s_i)\bar{v}_\beta(p_i,s_i) = -\delta_{\alpha\gamma}\left(\frac{-\not{p}_i + m_0}{2m_0}\right)_{\gamma\beta}$$

$$= \left(\frac{\not{p}_i - m_0}{2m_0}\right)_{\alpha\beta}$$

$$= (\Lambda_-(p_i))_{\alpha\beta}. \tag{9}$$

从而，我们最终得到散射截面

$$\frac{d\bar{\sigma}_{e+}}{d\Omega} = \frac{Z^2\alpha^2}{2|q|^4}\,\mathrm{Tr}\left[\gamma^0(\not{p}_i - m_0)\gamma^0(\not{p}_f - m_0)\right]$$

$$= \frac{Z^2\alpha^2}{2|q|^4}(\mathrm{Tr}\left[\gamma^0\not{p}_i\gamma^0\not{p}_f\right] + m_0^2\,\mathrm{Tr}\,(\gamma^0)^2). \tag{10}$$

这结果与电子散射公式(3.31)相同，并由此导出相同的角分布。正如在经典理论中的情形一样，Coulomb 散射截面与电荷的符号无关。

然而，若我们处理 S 矩阵的展开式中更高阶项，这种说法不再成立。对跃迁幅一阶(与 $e(-Ze)$ 成正比)和二阶(与 $e^2(-Ze)^2$ 成正比)的贡献对电子和正电子散射过程有不同的符号，这导致不同的截面。相干项对截面的贡献正比于 $e^3(-Ze)^3$，其起因如图 3.6 示意说明。

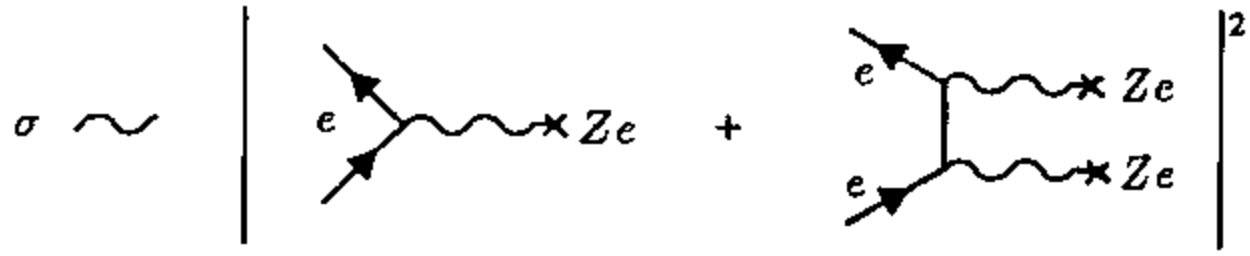


图 3.6 一阶和二阶散射幅可以相干

由于 Coulomb 相互作用具有无限作用范围，有必要作更复杂的计算，因为对 S 矩阵的更高阶贡献发散。尽管透彻的分析[①]已弄明白怎样把发散的部分收集到一个物理上无关的位相因子中，此相因子在将 S 矩阵元平方时就消失了。我们能用 Coulomb 波代替平面波来描述带电粒子，它包括了 $1/r$ 势引起的扭曲，这一扭曲波的渐近形式为

$$e^{-ip\cdot r + i\eta\ln(pr - p\cdot r)} = e^{-ipr\cos\theta + i\eta\ln(2pr\sin^2\theta/2)}, \tag{11}$$

式中 $\eta = Z\alpha/\beta$。原则上讲，用 Coulomb 波来作计算是严格的，即它等价于各级微扰级数的求和，然面，没有完整的散射截面解析表达式。

在非相对论极限 $\beta \to 0$ 下，严格的截面(各阶)又化为 Rutherford 公式。研究 $Z\alpha$ 中的下一阶展开形式是有意思的。我们不给出冗长的计算，仅引用结果[②]

---

① 参见 R. H. Dalitz: Proc. Roy. Soc. **A206**, 509(1951).

② 参见 W. A. Mckinley and H. Feshbach: Rhys. Rev. **74**, 1759(1948).

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}_{e\mp}}{\mathrm{d}\Omega_f}=\frac{Z^2\alpha^2}{4|\boldsymbol{p}|^2\beta^2}\frac{1}{\sin^4\theta/2}\left[1-\beta^2\sin^2\frac{\theta}{2}\pm\pi Z\alpha\beta\sin\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\right)\right]. \tag{12}$$

相干项效应能立即看出来。它引起电子在带正电的原子核(上符号)上散射截面的一个增量，而对正电子散射则提供一个减量。正如所预料的，该项含有因子 $e(Ze)e^2(Ze)^2=(Z\alpha)^3$。作为一个对(12)式的说明，图 3.7 表示电子散射(左图)和正电子散射(右图)的微分截面除以 Rutherford 散射。截面电荷数 $Z=40$，对再大些的电荷，$Z\alpha$ 中级数展开的截断变得可观；即(12)式可观地偏离严格结果。

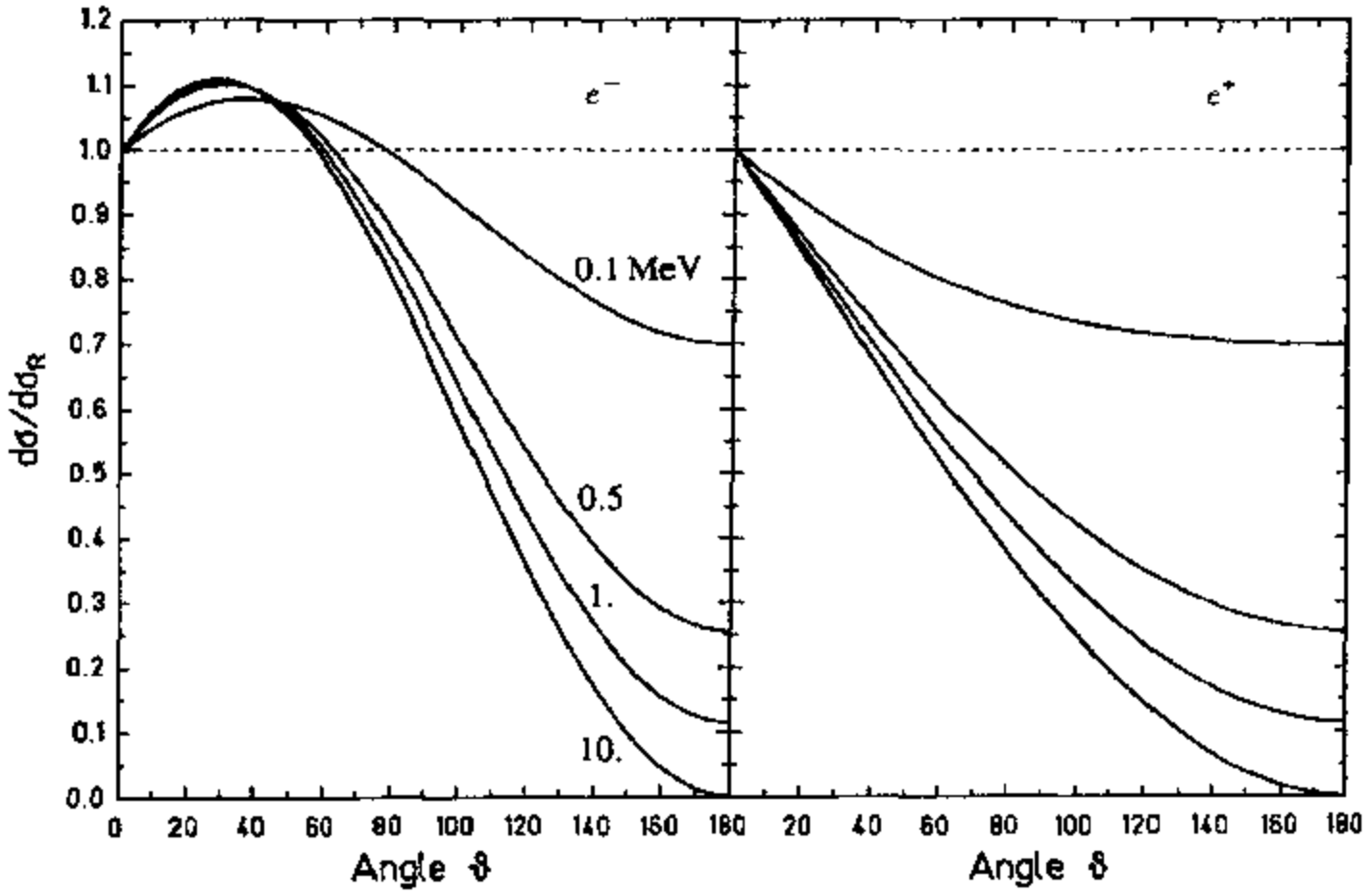


图 3.7　在电荷 $Z=40$ 的核上，电子(左图)和正电子(右图)的散射截面(12)，它被规一化到 Rutherford 截面。入射动能为 $E_{kin}=0.1,0.5,1,10$Mev

3.2　电子在自由质子上的散射：反冲效应

与散射中心为固定的 3.1 不同，现在我们考虑电子在自由运动的原子核上的散射，具体地说，我们选质子为靶，即一个自旋 1/2 的粒子为靶。在一级近似下，这将被认为无结构的 Dirac 粒子。我们应该预料到结果会不同于 3.1 节中所推得的那样，因为现在还有反冲效应存在。

为解决这一问题，我们分两步走：让我们假定质子流 $J^\mu(x)$ 是已知的。然后借助于 Maxwell 方程，我们就能定出该流所产生的电磁场 $A^\mu(x)$，这个场 $A^\mu(x)$ 能被代到矩阵(3.1)中去

$$S_{fi}=-\mathrm{i}e\int\mathrm{d}^4x\bar{\psi}_f(x)\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{\Psi}_i(x)\,. \tag{3.41}$$

若我们用(3.2)的平面 Dirac 波取代 Ψ_i 和 Ψ_f 在 α 的最低级近似下，我们就已构出了电子在质子产生的场中散射幅，与 3.1 节类似，这结果导出最低阶跃迁幅及散射截面。

首先一步，我们计算 Dirac 粒子质子所产生四维势 $A^\mu(x)$。这可通过求解质子流 $J^\mu(x)$ 为源项的非齐次波方程而得到。

$$\Box A^\mu(x) = 4\pi J^\mu(x) \tag{3.42a}$$

其中波算符 $\Box = \partial_\mu \partial^\mu = \partial^2/\partial t^2 - \nabla^2$。必须牢记该方程必须在选择 Lorentz 规范 $\partial_\mu A^\mu(x) = 0$ 下才成立。从经典电动力学中，我们已获知，若不取 Lorentz 规范，微分算符将变得更加复杂，

$$\Box A^\mu(x) - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu(x) = 4\pi J^\mu(x)\ . \tag{3.42b}$$

因为我们可自由选择最方便的规范，下面计算中我们将基于(3.42a)式[1]。该方程的解通过应用适当 Green 函数(传播子)$D_F(x-y)$能最清楚而系统地表达。正如电子情形一样，光子传播子由下列方程定义

$$\Box D_F(x-y) = 4\pi\delta^4(x-y)\ . \tag{3.43}$$

Fourier 变换的传播子被定义为

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \exp[-iq\cdot(x-y)] D_F(q^2)\ . \tag{3.44}$$

利用

$$\delta^4(x-y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \exp[-iq\cdot(x-y)] \tag{3.45}$$

我们明显地得到

$$D_F(q^2) = -\frac{4\pi}{q^2} \quad \text{for} \quad q^2 \neq 0\ . \tag{3.46}$$

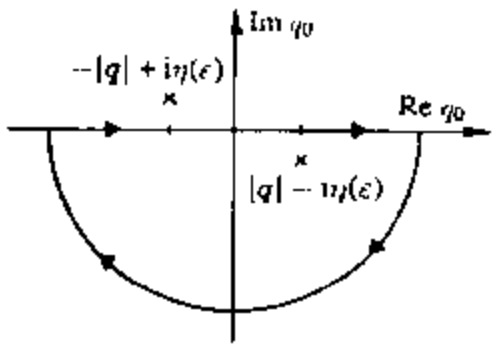


图 3.8 在 $x_0 > y_0$ 情形用于计算 Feynman 传播子的 q_0 复平面上的积分回路

正如 Fermi 子情形(参见(2.9--2.19))一样，我们必须认真处理 $D_F(q^2)$ 在 $q^2=0$ 的极点。如同以前一样，我们加上无穷小正的虚数 $i\varepsilon$，即，我们写出[2]

$$D_F(q^2) = -\frac{4\pi}{q^2 + i\varepsilon}\ . \tag{3.47}$$

我们也可以说，我们提供给光子一个小的负虚质量。这种处理极点的方案保证了因果律原理。正频(即正能)光子仅能沿时间轴向前传播。对具有负频 A^μ 场的贡献沿负时间轴向后运动。因为光子(与电子不同)不带电荷并且其反粒子为其本身，这两条在物理上是等同的。没有需要讲负能光子。

(3.47)的 $D_F(q^2)$ 因果行为能从数学上通过将(3.47)代入(3.44)而看出。这导致

---

[1] 其他规范将在第四章中简单地讨论。

[2] 因子 4π 出采用 Gauss 单位制而产生的。当利用"合理化"单位时，(3.47)的分子用 1 取代，见 1.2 节。

$$D_F(x-y)=\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int d^3q\exp[+i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})]\int\frac{dq_0}{(2\pi)}\frac{\exp[-iq_0(x_0-y_0)]}{q_0^2-\boldsymbol{q}^2+i\varepsilon}. \tag{3.48}$$

在 q_0 复平面上的积分路径(见图 3.8),对 $x_0>y_0$ 必须在下半平面上封闭起来,这将在点

$$q_0=+|\boldsymbol{q}|. \tag{3.49a}$$

处有贡献。这结果简略地说明仅有正能($q_0>0$)的波向未来运动(从 y_0 到 x_0),类似地对 $y_0>x_0$ 极点在

$$q_0=-|\boldsymbol{q}| \tag{3.49b}$$

处,对光子传播子有贡献。这能解释为一个正能光子($-q_0>0$)从 x_0 运动到 y_0。

借助光子的 Feynman 传播子

$$D_F(x-y)=\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\exp[-iq\cdot(x-y)]\left(\frac{-4\pi}{q^2+i\varepsilon}\right), \tag{3.50}$$

求解(3.42a)的四维势 $A^\mu(x)$ 为

$$A^\mu(x)=\int d^4yD_F(x-y)J^\mu(y). \tag{3.51a}$$

注意在采用更一般的规范时,(3.51a)将被下式取代

$$A^\mu(x)=\int d^4yD_F^{\mu\nu}(x-y)J_\nu(y). \tag{3.51b}$$

在我们讨论的情况下,$D_F^{\mu\nu}$ 恰好正比于 $g^{\mu\nu}$。所以,为方便起见,张量指标可被丢掉,$D_F^{\mu\nu}=g^{\mu\nu}D_F$。

利用(3.51a),在最低阶近似下,S 矩阵元(3.41)由下式给出

$$S_{fi}=-i\int d^4xd^4y[e\bar{\psi}_f(x)\gamma_\mu\psi_i(x)]D_F(x-y)J^\mu(y). \tag{3.52}$$

在方括号中的项代表着电子的流。它是流算符在初态和终态间的矩阵元,从而它被称之为跃迁流[①]。到目前为止,我们对质子流一无所知。然而,既然电子和质子在散射过程中扮演着地位同等的角色,那么,质子流必须与电子流有相同的形式。所以我们作替换

$$J^\mu(y)\to J_n^\mu(y)=e_p\bar{\psi}_f^p(y)\gamma^\mu\psi_i^p(y). \tag{3.53}$$

$e_p=-e>0$ 为质子的电荷,$\psi_f^p(y)$ 和 $\psi_i^p(y)$ 为自由质子终态和初态(即平面 Dirac 波)。它们与电子波(3.2)和(3.3)具有相同的形式。

$$\begin{aligned}\psi_i^p(y)&=\sqrt{\frac{M_0}{E_i^pV}}u(P_i,S_i)\exp(-iP_i\cdot y),\\ \psi_f^p(y)&=\sqrt{\frac{M_0}{E_f^pV}}u(P_f,S_f)\exp(-iP_f\cdot y).\end{aligned} \tag{3.54}$$

这里 P_i 和 P_f 表示质子的四动量,S_i,S_f 和 E_i^p,E_f^p 分别表示质子的自旋和能量,M_0 为质子的静质量。从而质子的跃迁流能被表示成下列形式

① 作为历史的注释,我们注意到,发展非相对论量子力学形式的 Heisenberg 已采用流的跃迁矩阵元作为 $A^\mu(x)$ 的源。特别是,在矩阵力学框架内他采用这种描述电子跃迁的方案引入到计算原子光谱。

$$J^{\mu}_{fi}(y) = -\sqrt{\frac{M_0^2}{E_f^p E_i^p}}\frac{e}{V}\exp[\mathrm{i}(P_f - P_i)\cdot y]\bar{u}(P_f,S_f)\gamma^{\mu}u(P_i,S_i)\,. \tag{3.55}$$

将跃迁流(3.53)或(3.55)代入方程(3.41)就定义了所谓 Dirac 质子的 Møller 势[①]。现在,我们将式(3.55)式及电子流的类似表达式代入(3.52)得

$$\begin{aligned} S_{fi} = &+\mathrm{i}\frac{e^2}{V^2}\sqrt{\frac{m_0^2}{E_f E_i}}\sqrt{\frac{M_0^2}{E_f^p E_i^p}}[\bar{u}(p_f,s_f)\gamma_{\mu}u(p_i,s_i)] \\ &\times\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\,\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}\exp[-\mathrm{i}q\cdot(x-y)]\exp[\mathrm{i}(p_f-p_i)\cdot x]\exp[\mathrm{i}(P_f-P_i)\cdot y] \\ &\times\left(-\frac{4\pi}{q^2+\mathrm{i}\varepsilon}\right)[\bar{u}(P_f,S_f)\gamma^{\mu}u(P_i,S_i)]\,. \end{aligned} \tag{3.56}$$

对 x 和 y 进行积分立即导得

$$\begin{aligned} &\int \mathrm{d}^4x\,\exp(\mathrm{i}(p_f - p_i - q)\cdot x) = (2\pi)^4\delta^4(p_f - p_i - q), \\ &\int \mathrm{d}^4y\,\exp(\mathrm{i}(P_f - P_i + q)\cdot y) = (2\pi)^4\delta^4(P_f - P_i + q)\,. \end{aligned} \tag{3.57}$$

现在对 q 的积分是容易进行的

$$\begin{aligned} &\int\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}(2\pi)^4\delta^4(p_f - p_i - q)(2\pi)^4\delta^4(P_f - P_i + q)\left[-\frac{4\pi}{q^2+\mathrm{i}\varepsilon}\right] \\ &= (2\pi)^4\delta^4(P_f - P_i + p_f - p_i)\left(-\frac{4\pi}{(p_f-p_i)^2+\mathrm{i}\varepsilon}\right), \end{aligned} \tag{3.58}$$

总 S 矩阵元 (3.56)为

$$\begin{aligned} S_{fi} = &\frac{-\mathrm{i}e^2}{V^2}(2\pi)^4\delta^4(P_f - P_i + p_f - p_i)\sqrt{\frac{m_0^2}{E_f E_i}}\sqrt{\frac{M_0^2}{E_f^p E_i^p}} \\ &\times[\bar{u}(p_f,s_f)\gamma_{\mu}u(p_i,s_i)]\frac{4\pi}{(p_f-p_i)^2+\mathrm{i}\varepsilon}[\bar{u}(P_f,S_f)\gamma^{\mu}u(P_i,S_i)]. \end{aligned} \tag{3.59}$$

我们注意电子和质子以完全对称方式引进此方程的。这一对称是必要的,因为,电子在质子场上的散射和质子在电子流产生的场上的散射没有任何物理差异。

若我们将这一表达式与 3.1 节中(3.8)结果相比较,我们看出了电子在外 Coulomb 场上的散射和它在质子上的散射间的差别。这能由下列替换给出

$$\frac{Z\gamma^0}{|\boldsymbol{q}|^2}\Rightarrow\gamma_{\mu}\left(\frac{-1}{q^2+\mathrm{i}\varepsilon}\right)\sqrt{\frac{M_0^2}{E_f^p E_i^p}}\bar{u}(P_f,S_f)\gamma^{\mu}u(P_i,S_i) \tag{3.60a}$$

和

$$V\Rightarrow(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{P}_f - \boldsymbol{P}_i + \boldsymbol{p}_f - \boldsymbol{p}_i)\,. \tag{3.60b}$$

---

① 参见 C. Møller: Ann Phys **14**, 531(1932).

最后一个替换保证了动量守恒，这在前面的计算中没有说明。

S 矩阵元(3.59)描述了最低阶的电子-质子散射；对更高阶情形，(3.59)中的流将发生变化。图 3.9 示意了(3.50)的过程。电磁相互作用用波浪线描述。它以转移动量平方的倒数 $1/q^2=1/(p_f-p_i)^2$ 形式进入(3.59)的矩阵元中。这可以看做(3.42)的$\square$算符的倒数在动量表象中的形式，应注意波浪线代表着在电子和质子间交换的虚光子，光子的四维动量为

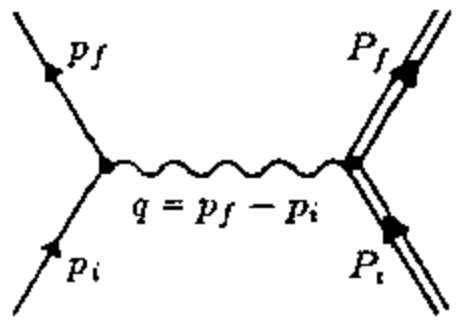


图 3.9　最低阶电子-质子散射图。细线表示电子，双线表示质子，波纹线表示交换的光子

$$q = p_f - p_i = P_i - P_f \tag{3.61}$$

(对照(3.58)中的 δ 函数)，因子

$$-\frac{4\pi}{q^2+\mathrm{i}\varepsilon} \tag{3.62}$$

在某种程度上代表着动量为 q 的光子的传播幅，光子的起点和终点称为顶角。根据(3.59)因子 $e\gamma_\mu$ 在这些点上作用，它处于形式为 $\sqrt{m_0/E}\,u(p,s)$ 的旋量之间。旋量描述自由的、入射和出射的 Dirac 粒子，它们是可观测的实粒子。正如我们所发现的，图形上的每根线和每个顶角对应着 S 矩阵元的特定的因子。此外，S 矩阵元(3.59)包含四维 δ 函数，这保证了散射过程中总能量和总动量的守恒。

现在，我们从每单位体积的跃迁速率出发，计算散射截面。为此，我们用观测的时间间隔 T 和反应的空间体积(Dirac 波的归一化体积)去除便得到

$$W_{fi}=\frac{|S_{fi}|^2}{VT}=\frac{[(2\pi)^4\delta^4(P_f+p_f-P_i-p_i)]^2}{VT}\frac{1}{V^4}\frac{m_0^2}{E_fE_i}\frac{M_0^2}{E_f^pE_i^p}|M_{fi}|^2. \tag{3.63}$$

这里

$$M_{fi}=[\bar{u}(p_f,s_f)\gamma_\mu u(p_i,s_i)]\frac{4\pi e e_p}{q^2+\mathrm{i}\varepsilon}[\bar{u}(P_f,S_f)\gamma^\mu u(P_i,S_i)] \tag{3.64}$$

称之为不变振幅。该名称的选取是十分自然的，因为矩阵元(3.64)是由 4 矢量的标量积所组成，它是 Lorentz 不变量。像 3.1 节中一样，我们必须考虑 δ^4 函数的平方，再利用关系式(3.15a)

$$(2\pi\delta(E_f-E_i))^2=2\pi\delta(0)\,2\pi\delta(E_f-E_i)\Rightarrow T\,2\pi\,\delta(E_f-E_i)\,. \tag{3.65}$$

这对一维 δ 函数是成立的。四维 δ 函数正好是 4 个一维 δ 函数之积。

$$\delta^4(x-y)=\delta(x_0-y_0)\delta(x_1-y_1)\delta(x_2-y_2)\delta(x_3-y_3) \tag{3.66}$$

用 T 和 L 或 $L^3=V$ 分别表示时间和空间间隔，下列(3.65)的四维推广式是自明的

$$[(2\pi)^4\delta^4(p_f-p_i)]^2=(2\pi)^4\delta^4(0)(2\pi)^4\delta^4(p_f-p_i)=(2\pi)^4T\,L^3\,\delta^4(p_f-p_i)$$
$$\Rightarrow TV\,(2\pi)^4\delta^4(p_f-p_i)\,. \tag{3.67}$$

对(3.63)中出现的四维 δ 函数我们得到

$$[(2\pi)^4\delta^4(P_f+p_f-P_i-p_i)]^2=(2\pi)^4\delta^4(0)(2\pi)^4\delta^4(P_f+p_f-P_i-p_i)$$
$$\Rightarrow TV(2\pi)^4\delta^4(P_f+p_f-P_i-p_i)\,. \tag{3.68}$$

借助此结果，单位体积的跃迁速率(3.63)为

$$W_{fi} = (2\pi)^4\delta^4(P_f + p_f - P_i - p_i)\frac{1}{V^4}\frac{m_0^2}{E_fE_i}\frac{M_0^2}{E_f^pE_i^p}|M_{fi}|^2. \tag{3.69}$$

为定出散射截面，我们必须将 W_{fi} 除以入射粒子的通量 $|\boldsymbol{J}_{inc}|$ 和每单位体积内靶粒子数。

后者为 $1/V$，因为波函数是这样进行归一化，使得归一化体积 V 内正好只有一个粒子。而且为求得截面，我们还得对电子和质子的所有可能的终态求和(积分)。对给定的自旋，在动量间隔 $d^3p_f\,d^3P_f$ 内的终态数目为

$$V^2\frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}\frac{d^3P_f}{(2\pi)^3} \tag{3.70}$$

(参见 3.1 节，(3.9)式讨论)到此，我们能写下六重微分散射截面

$$\begin{aligned} d\sigma &= V^2\frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}\frac{d^3P_f}{(2\pi)^3}\frac{1}{|\boldsymbol{J}_{inc.}|}\frac{1}{1/V}W_{fi} \\ &= \left(\frac{m_0}{E_i}\frac{M_0}{E_i^p}\frac{1}{|\boldsymbol{J}_{inc.}|V}\right)|M_{fi}|^2(2\pi)^4\delta^4(P_f + p_f - P_i - p_i) \\ &\quad\times\frac{m_0}{E_f}\frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}\frac{M_0}{E_f^p}\frac{d^3P_f}{(2\pi)^3}. \end{aligned} \tag{3.71}$$

为与实测量值作比较，(3.71)式还得在由实验装置所限定的动量变量范围上作积分，例如，若仅观测散射电子，就得对所有的质子动量值 d^3p_f 作积分。在(3.71)截面中，散射粒子的初态和终态极化(自旋取向)是固定的。这能直接从不变幅(3.64)看出。若不测量极化，即若使用非极化束流和对极化不灵敏的探测器来确定截面，我们就得对终态自旋求和初态粒子的自旋求平均。截面的表达式(3.71)显示了一些普遍特征，这些是值得讨论的。这些普遍特征是所有散射过程共有的。

不变幅的平方体现了过程的本质物理内涵，总能量和动量守恒由因子 $(2\pi)^4\delta^4(p_f+p_f-p_i-p_i)$ 来保证。此外严格存在类型为 m_0/E 的四个因子。一般地，相应于反应过程的图形上每条外部 Fermi 子线就出现一个因子 m_0/E。因为这些因子起因于参与散射过程的 Dirac 粒子(例如，比较(3.54))，每一个逼近和远离相互作用的 Dirac 粒子在截面中产生一个这类因子。此外，每个粒子也给出一个相空间因子 $d^3p_f/(2\pi)^3$。我们能说每一个远离散射的粒子对截面贡献一个因子

$$\frac{m_0}{E_f}\frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}. \tag{3.72}$$

这因子是 Lorentz 不变量。这正好是动量空间中三维 Lorentz 不变体积，它能被写成为四维形式

$$\frac{d^3p}{2E} = \int_0^\infty dp_0\delta(p^2 - m_0^2)d^3p. \tag{3.73}$$

这可作推导如下：

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dp_0\delta(p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 - m_0^2)d^3p &= \int_0^\infty dp_0\delta(p_0^2 - E^2)d^3p \\ &= \int_0^\infty dp_0\delta[(p_0 - E)(p_0 + E)]d^3p = \frac{d^3p}{2E}. \end{aligned}$$

这里，我们用到有名的公式 $\int \mathrm{d}x\ \delta(f(x)) = \sum_k 1 \Big/ \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x_k}$，$x_k$ 为 $f(x)$ 在积分区间内的根，(3.73)式的右边能进一步被转换成

$$\frac{\mathrm{d}^3 p}{2E} = \int \mathrm{d}^4 p\ \delta(p^2 - m_0^2)\Theta(p_0)\ , \tag{3.74}$$

其中

$$\Theta(p_0) = \begin{cases} 1 & \text{对} \quad p_0 > 0 \\ 0 & \text{对} \quad p_0 < 0 \end{cases}$$

是对能量的 Lorentz 不变阶跃函数。$\Theta(p_0)$ 是 Lorentz 不变的，因为 Lorentz 变换总是将类时的四维矢量(如 p^μ)变换成类时矢量，对类空矢量也是类似。在我们的情况中，p 是一个朝前光锥内的类时四维矢量(因为 $p^2 = m_0^2$ 及从而 $p_0^2 > \boldsymbol{p}^2$)，它与特定的 Lorentz 参照系无关。从而，由于(3.74)，$\mathrm{d}^3 p/2E$ 显然是一个 Lorentz 不变的因子。

现在，我们得考虑(3.71)式中括号中的因子。通量由每单位时间穿过单位面积上的粒子数给出。用 $\boldsymbol{v}_i$ 和 $\boldsymbol{V}_i$ 分别表示电子和质子的速度，我们看到(参见图 3.10)

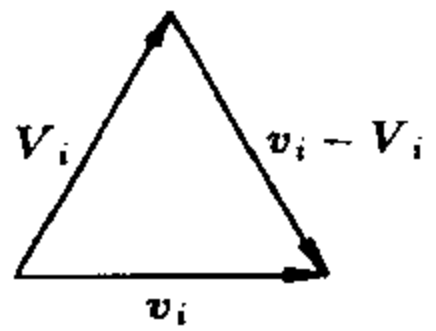


图 3.10　相对速度 $v_i - V_i$ 是确定入射粒子流的相关量

$$|\boldsymbol{J}_{\text{inc.}}| = \frac{1}{V}|\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{V}_i| = \text{粒子密度} \times \text{相对速度} \tag{3.75}$$

我们现在证明因子 $1/V|\boldsymbol{J}_{\text{inc.}}|$，当它与其他两因子 $m_0/E_0, M_0/E_i^p$ 结合在一起时将近似为　但不严格——Lorentz 不变量。然而，正确的 Lorentz 不变的通量因子能容易地被猜出。借助

$$\boldsymbol{v}_i = \frac{\boldsymbol{p}_i}{E_i} \quad \text{和} \quad \boldsymbol{V}_i = \frac{\boldsymbol{P}_i}{E_i^p}$$

直观表达式(3.75)成为

$$\frac{m_0}{E_i}\frac{M_0}{E_i^p}\frac{1}{V|\boldsymbol{J}_{\text{inc.}}|} = \frac{m_0 M_0}{E_i E_i^p |\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{V}_i|} = \frac{m_0 M_0}{E_i E_i^p \sqrt{v_i^2 + V_i^2 - 2\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{V}_i}}$$

$$= \frac{m_0 M_0}{\sqrt{\boldsymbol{p}_i^2 E_i^{p2} + \boldsymbol{P}_i^2 E_i^2 \quad 2\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{P}_i E_i E_i^p}}\ . \tag{3.76}$$

正如下面我们将看到的这结果近乎为一个 Lorentz 标量

$$\frac{m_0 M_0}{\sqrt{(p_i \cdot P_i)^2 - m_0^2 M_0^2}},$$

因为

$$\frac{m_0 M_0}{\sqrt{(p_i \cdot P_i)^2 - m_0^2 M_0^2}} = \frac{m_0 M_0}{\sqrt{(E_i E_i^p - \boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{P}_i)^2 - m_0^2 M_0^2}}$$

$$= \frac{m_0 M_0}{\sqrt{E_i^2 E_i^{p2} - 2E_i E_i^p\, \boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{P}_i + (\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{P}_i)^2 - m_0^2 M_0^2}}$$

$$= \frac{m_0 M_0}{\sqrt{(m_0^2 + \boldsymbol{p}_i^2)(M_0^2 + \boldsymbol{P}_i^2) - 2E_i E_i^{\mathrm{p}}\, \boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{P}_i + (\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{P}_i)^2 - m_0^2 M_0^2}}$$

$$= \frac{m_0 M_0}{\sqrt{p_i^2\, E_i^{\mathrm{p}2} + m_0^2 \boldsymbol{P}_i^2 - 2E_i E_i^{\mathrm{p}}\, \boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{P}_i + (\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{P}_i)^2}}$$

$$\approx \frac{m_0 M_0}{\sqrt{p_i^2\, E_i^{\mathrm{p}2} + m_0^2 \boldsymbol{P}_i^2 - 2E_i E_i^{\mathrm{p}}\, \boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{P}_i + \boldsymbol{p}_i^2 \cdot \boldsymbol{P}_i^2}}$$

$$= \frac{m_0 M_0}{\sqrt{p_i^2 E_i^{\mathrm{p}2} + \boldsymbol{P}_i^2 E_i^2 - 2E_i E_i^{\mathrm{p}}\, \boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{P}_i}}\,. \tag{3.77}$$

在倒数第二步中，我们不得不假定$(\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{P}_i)^2 = \boldsymbol{p}_i^2 \boldsymbol{P}_i^2$，这要求速度矢量共线，从而我们已推得关系

$$\frac{m_0 M_0}{E_i E_i^{\mathrm{p}} |\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{V}_i|} = \frac{m_0 M_0}{\sqrt{(p_i \cdot P_i)^2 - m_0^2 M_0^2}} \tag{3.78}$$

这仅对共线散射成立。然而，Lorentz 不变有更高的优先权。从而，在截面(3.71)式中的原始通量因子(3.76)必须一般地被 Lorentz 不变通量因子(3.77)所取代。在共线碰撞中，两结果等同。

用刚刚导出的 Lorentz 不变通量因子，总截面(3.71)变为 Lorentz 不变。我们将它写成不变形式

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{m_0 M_0}{\sqrt{(p_i \cdot P_i)^2 - m_0^2 M_0^2}} |M_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^4 (P_f - P_i + p_f - p_i) \frac{m_0 \mathrm{d}^3 p_f}{(2\pi)^3 E_f} \frac{M_0 \mathrm{d}^3 P_f}{(2\pi)^3 E_f^{\mathrm{p}}}\,. \tag{3.79}$$

每一个所出现的因子有一个普遍的含义，而且它必须总是以这种方式出现。第一个因子代表每单位面积和单位时间内入射粒子通量的倒数，第二个因子为不变振幅的平方(它描述纯粹运动处包含的物理)，第三个因子体现能量和动量守恒，最后一个因子描述末态密度。注意，归一化体积 V 在最终结果(3.79)中消失，这应该如此。

暂且偏离一下我们的主题。我们将讨论怎样去处理非共线碰撞，例如，发生在等离子中的散射过程。这种情况下，直接计算每单位时间的事例数目 $\mathrm{d}N/\mathrm{d}t$ 是最方便的，利用(3.69)我们得到

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \int \mathrm{d}^3 x \rho_e(\boldsymbol{x}, t) \rho_p(\boldsymbol{x}, t) \times \int \frac{m_0}{E_i} \frac{M_0}{E_i^{\mathrm{p}}} |M_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^4 (P_f - P_i + p_f - p_i) \frac{m_0 \mathrm{d}^3 p_f}{(2\pi)^3 E_f} \frac{M_0 \mathrm{d}^3 P_f}{(2\pi)^3 E_f^{\mathrm{p}}}\,. \tag{3.80}$$

$\rho_e(\boldsymbol{x}, t)$ 和 $\rho_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{x}, t)$ 分别表示电子和质子的密度。两者均含一个因子 $1/V$，而 $1/V$ 的两个额外幂次在与末态密度(3.70)相乘后就被消去。

正如前面提到的，若我们不考虑极化效应的话，我们就得对终态求和，对初态求平均。因为在(3.79)中自旋量子数只在平方不变幅中出现。我们定义平均平方不变振幅

$$\overline{|M_{fi}|^2} = \frac{1}{4} \sum_{s_f, S_f, s_i, S_i} \left| \bar{u}(p_f, s_f) \gamma^{\mu} u(p_i, s_i) \frac{e e_{\mathrm{p}} (4\pi)}{q^2 + \mathrm{i}\epsilon} \bar{u}(P_f, S_f) \gamma_{\mu} u(P_i, S_i) \right|^2\,. \tag{3.81}$$

这个表达式能用 3.1 节中(3.25)式同样的方法计算。然而我们必须考虑，按照 Einstein 求和约

定，(3.81)式含对 μ 的求和，所以我们不能直接把(3.33)拿来。我们通过明显区分所出现的各项更详细地讨论(3.81)式的右端。含有共轭旋量×矩阵×旋量形式的项是复数，对此作复共轭运算和伴随(厄米共轭)运算是相同的。

$$[\bar{u}(p_f,s_f)\gamma^\mu u(p_i,s_i)]^* = [\bar{u}(p_f,s_f)\gamma^\mu u(p_i,s_i)]^\dagger = [u^\dagger(p_f,s_f)\gamma^0\gamma^\mu u(p_i,s_i)]^\dagger$$
$$= u^\dagger(p_i,s_i)\gamma^{\mu\dagger}\gamma^{0\dagger}u^{\dagger\dagger}(p_f,s_f) = \bar{u}(p_i,s_i)\gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 u(p_f,s_f)$$
$$= \bar{u}(p_i,s_i)\gamma^\mu u(p_f,s_f) = \sum_{\delta,\epsilon=1}^{4}\bar{u}_\delta(p_i,s_i)\gamma^\mu_{\delta\epsilon}u_\epsilon(p_f,s_f)\,. \tag{3.82}$$

对(3.18)自旋求和，就得到

$$\sum_{S_f,S_i,s_f,s_i}\left|\sum_{\mu=0}^{3}[\bar{u}(p_f,s_f)\gamma^\mu u(p_i,s_i)][\bar{u}(P_f,S_f)\gamma_\mu u(P_i,S_i)]\right|^2$$
$$= \sum_{S_f,S_i,s_f,s_i}\left\{\sum_{\mu=0}^{3}[\bar{u}(p_f,s_f)\gamma^\mu u(p_i,s_i)][\bar{u}(P_f,S_f)\gamma_\mu u(P_i,S_i)]\right\}$$
$$\times\left\{\sum_{\nu=0}^{3}[\bar{u}(p_f,s_f)\gamma^\nu u(p_i,s_i)]^*[\bar{u}(P_f,S_f)\gamma_\nu u(P_i,S_i)]^*\right\}$$
$$= \sum_{\mu,\nu=0}^{3}\sum_{S_f,S_i,s_f,s_i}[\bar{u}(p_f,s_f)\gamma^\mu u(p_i,s_i)][\bar{u}(p_f,s_f)\gamma^\nu u(p_i,s_i)]^\dagger$$
$$\times[\bar{u}(P_f,S_f)\gamma_\mu u(P_i,S_i)][\bar{u}(P_f,S_f)\gamma_\nu u(P_i,S_i)]^\dagger$$
$$= \sum_{\mu,\nu=0}^{3}\sum_{S_f,S_i,s_f,s_i}\sum_{\alpha,\beta,\delta,\epsilon=1}^{4}\bar{u}_\alpha(p_f,s_f)\gamma^\mu_{\alpha\beta}u_\beta(p_i,s_i)\bar{u}_\delta(p_i,s_i)\gamma^\nu_{\delta\epsilon}u_\epsilon(p_f,s_f)$$
$$\times\sum_{\rho,\sigma,\tau,\lambda=1}^{4}\bar{u}_\rho(P_f,S_f)\gamma_{\mu\rho\sigma}u_\sigma(P_i,S_i)\bar{u}_\tau(P_i,S_i)\gamma_{\nu\tau\lambda}u_\lambda(P_f,S_f)$$
$$= \sum_{\mu,\nu=0}^{3}\sum_{\alpha,\beta,\delta,\epsilon=1}^{4}\sum_{s_f}\bar{u}_\alpha(p_f,s_f)\gamma^\mu_{\alpha\beta}\underbrace{\sum_{s_i}u_\beta(p_i,s_i)\bar{u}_\delta(p_i,s_i)}_{\left(\frac{\not p_i+m_0}{2m_0}\right)_{\beta\delta}}\gamma^\nu_{\delta\epsilon}u_\epsilon(p_f,s_f)$$
$$\times\sum_{\rho,\sigma,\tau,\lambda=1}^{4}\sum_{S_f}\bar{u}_\rho(P_f,S_f)\gamma_{\mu\rho\sigma}\underbrace{\sum_{s_i}u_\sigma(P_i,S_i)\bar{u}_\tau(P_i,S_i)}_{\left(\frac{\not P_i+m_0}{2m_0}\right)_{\sigma\tau}}\gamma_{\nu\tau\lambda}u_\lambda(P_f,S_f)$$
$$= \sum_{\mu,\nu=0}^{3}\sum_{\alpha,\epsilon=1}^{4}\sum_{s_f}\bar{u}_\alpha(p_f,s_f)u_\epsilon(p_f,s_f)\left(\gamma^\mu\frac{\not p_i+m_0}{2m_0}\gamma^\nu\right)_{\alpha\epsilon}$$
$$\times\sum_{\rho,\lambda=1}^{4}\sum_{S_f}\bar{u}_\rho(P_f,S_f)u_\lambda(P_f,S_f)\left(\gamma_\mu\frac{\not P_i+M_0}{2M_0}\gamma_\nu\right)_{\rho\lambda}$$
$$= \sum_{\mu,\nu=0}^{3}\sum_{\alpha,\epsilon=1}^{4}\left(\frac{\not p_f+m_0}{2m_0}\right)_{\epsilon\alpha}$$

$$\times \left\{ \gamma^{\mu} \frac{\not p_i + m_0}{2m_0} \gamma^{\nu} \right\} \sum_{\sigma_f, \lambda = 1}^{4} \left\{ \frac{\not P_f + M_0}{2M_0} \right\}_{\lambda\rho} \left\{ \gamma_{\mu} \frac{\not P_i + M_0}{2M_0} \gamma_{\nu} \right\}_{\rho\lambda}$$

$$= \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \mathrm{Tr} \left[\frac{\not p_f + m_0}{2m_0} \gamma^{\mu} \frac{\not p_i + m_0}{2m_0} \gamma^{\nu} \right] \mathrm{Tr} \left[\frac{\not P_f + M_0}{2M_0} \gamma_{\mu} \frac{\not P_i + M_0}{2M_0} \gamma_{\nu} \right]. \tag{3.83}$$

于是我们已表示得极为详细的这种计算导出了下面对矩阵元平方平均的结果

$$\overline{|M_{fi}|^2} = \frac{1}{4} \frac{e^2 e_p^2 (4\pi)^2}{(q^2)^2} \mathrm{Tr} \left[\frac{\not p_f + m_0}{2m_0} \gamma^{\mu} \frac{\not p_i - m_0}{2m_0} \gamma^{\nu} \right]$$

$$\times \mathrm{Tr} \left[\frac{\not P_f + M_0}{2M_0} \gamma_{\mu} \frac{\not P_i + M_0}{2M_0} \gamma_{\nu} \right]. \tag{3.84}$$

注意，包含两 Lorentz 标量的标量积的幅的平方运算必然引起了两个张量间的缩并，即，一个双重求和；这常被简记为

$$\overline{|M_{fi}|^2} = \frac{e^2 e_p^2 (4\pi)^2}{(q^2)^2} L^{\mu\nu} H_{\mu\nu}, \tag{3.85}$$

式中 $L^{\mu\nu}$ 是轻子(即电子)张量而 $H_{\mu\nu}$ 为强子(即质子)张量

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{s_i s_f} \bar{u}(p_f, s_f) \gamma^{\mu} u(p_i, s_i) \bar{u}(p_i, s_i) \gamma^{\nu} u(p_f, s_f)$$

$$= \frac{1}{2} \mathrm{Tr} \left[\frac{\not p_f + m_0}{2m_0} \gamma^{\mu} \frac{\not p_i + m_0}{2m_0} \gamma^{\nu} \right], \tag{3.86a}$$

类似地，

$$H_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathrm{Tr} \left[\frac{\not P_f + M_0}{2M_0} \gamma_{\mu} \frac{\not P_i + M_0}{2M_0} \gamma_{\nu} \right]. \tag{3.86b}$$

只要散射过程为单个虚光子交换，(3.85)式的因子化形式仍有意义，即使跃迁流变成比(3.86)中所使用的更复杂。应用在数学附注 3.3 中所导出的定理，我们可非常容易地计算出轻子张量(3.86a)，因为奇数个 γ 矩阵之迹为零，它立即被简化为

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \frac{1}{4m_0^2} \mathrm{Tr} \left[\not p_f \gamma^{\mu} \not p_i \gamma^{\nu} + m_0^2 \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \right]. \tag{3.87}$$

这结果能被写作上述定理中所使用的带“斜道”记号形式。我们用引入两个单位四维-矢量，它们的 μ,ν 中只有一个 1 分量，其余分量为 0。

$$A = (0, \underbrace{1}_{\text{分量}\mu}, 0, 0) \text{ 和 } B = (0, 0, \underbrace{1}_{\text{分量}\nu}, 0)$$

我们现在能写

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\ \not p_f \gamma^{\mu} \not p_i \gamma^{\nu} &= \mathrm{Tr}\ \not p_f \not A \not p_i \not B \\ &= p_f \cdot A\ \mathrm{Tr}\ \not p_i \not B - p_f \cdot p_i\ \mathrm{Tr}\ \not A \not B + p_f \cdot B\ \mathrm{Tr}\ \not A \not p_i \\ &= 4 p_f \cdot A p_i \cdot B - 4 p_f \cdot p_i A \cdot B + 4 p_f \cdot B\ A \cdot p_i \\ &= 4 p_f^{\mu} p_i^{\nu} - 4 p_f \cdot p_i g^{\mu\nu} + 4 p_f^{\nu} p_i^{\mu}, \end{aligned} \tag{3.88}$$

和

$$\mathrm{Tr}\ \gamma^{\mu}\gamma^{\nu} = \mathrm{Tr}\ \not{A}\not{B} = 4A\cdot B = 4g^{\mu\nu}. \tag{3.89}$$

从而，轻子张量(3.87)为

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\frac{1}{m_0^2}[p_f^{\mu}p_i^{\nu} + p_i^{\mu}p_f^{\nu} - g^{\mu\nu}(p_f\cdot p_i - m_0^2)] \tag{3.90}$$

对于强子张量 $H_{\mu\nu}$(3.86b) 也有类似的式子。这时我们只需将小写字母换成大写字母，并交换协变和逆变指标。将两者相乘并对 μ 和 ν 求和得到平方不变幅(见(3.85))

$$\begin{aligned}
\overline{|M_{fi}|^2} &= \frac{e^2e_p^2(4\pi)^2}{4m_0^2M_0^2(q^2)^2}[p_f^{\mu}p_i^{\nu} + p_i^{\mu}p_f^{\nu} - g^{\mu\nu}(p_f\cdot p_i - m_0^2)] \\
&\quad\times[P_{f\mu}P_{i\nu} + P_{i\mu}P_{f\nu} - g_{\mu\nu}(P_f\cdot P_i - M_0^2)] \\
&= \frac{e^2e_p^2(4\pi)^2}{4m_0^2M_0^2(q^2)^2}[(p_f\cdot P_f)(p_i\cdot P_i) + (p_f\cdot P_i)(p_i\cdot P_f) \\
&\quad + (p_f\cdot P_i)(p_i\cdot P_f) + (p_i\cdot P_i)(p_f\cdot P_f) - 2(p_i\cdot p_f)(P_f\cdot P_i - M_0^2) \\
&\quad - 2(P_i,P_f)(p_f\cdot p_i - m_0^2) + 4(p_f\cdot p_i - m_0^2)(P_f\cdot P_i - M_0^2)] \\
&= \frac{e^2e_p^2(4\pi)^2}{4m_0^2M_0^2(q^2)^2}[2(p_i\cdot P_i)(p_f\cdot P_f) + 2(p_i\cdot P_f)(p_f\cdot P_i) \\
&\quad - 4(p_i\cdot p_f)(P_i\cdot P_f) + 2(p_i\cdot p_f)M_0^2 + 2(P_i,P_f)m_0^2 + 4(p_i\cdot p_f)(P_i\cdot P_f) \\
&\quad + 4m_0^2M_0^2 - 4(p_i\cdot p_f)M_0^2 - 4(P_i\cdot P_f)m_0^2] \\
&= \frac{e^2e_p^2(4\pi)^2}{2m_0^2M_0^2(q^2)^2}[(p_i\cdot P_i)(p_f\cdot P_f) + (p_i\cdot P_f)(p_f\cdot P_i) \\
&\quad - (p_i\cdot p_f)M_0^2 - (P_i\cdot P_f)m_0^2 + 2m_0^2M_0^2].
\end{aligned} \tag{3.91}$$

这个平均平方不变幅必须代到(3.79)式中。为导出散射截面，必须指定任一参照系。通常在质心系中计算形式最简单。然而，电子-质子散射实验绝大部分是在实验室系中用固定靶来完成的，

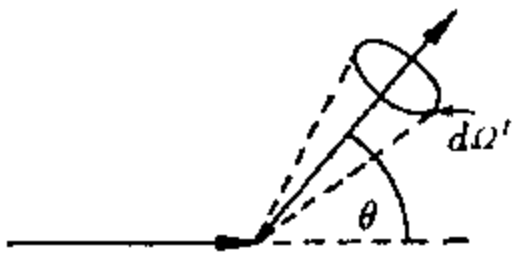


图 3.11　电子散射到立体角 $d\Omega'$ 内

所以我们将在入射质子的静止系中计算(3.79)式。我们定义

$$\begin{aligned}
p_f &= (E',\boldsymbol{p}') \equiv p', \\
p_i &= (E,\boldsymbol{p}) \equiv p, \\
P_i &= (M_0,\boldsymbol{0}).
\end{aligned} \tag{3.92}$$

我们要计算电子散射到散射角为 θ (参见图 3.11)周围给定立体角元 $d\Omega'$ 内的微分截面。所以微分量(3.79)要对除 $\boldsymbol{p}_f$ 的方向的所有动址变量积分。体积元能被写成

$$d^3p_f = d^3p' = |\boldsymbol{p}'|^2 d|\boldsymbol{p}'|d\Omega' = |\boldsymbol{p}'|E'\,dE'\,d\Omega' \tag{3.93}$$

因为 $E'^2=\boldsymbol{p}'^2+m_0^2$从而$|\boldsymbol{p}'|\mathrm{d}|\boldsymbol{p}'|=E'\mathrm{d}E'$。利用(3.92)不变通量因子简化为

$$\frac{m_0M_0}{\sqrt{(p_i\cdot P_i)^2-m_i^2M_i^2}}=\frac{m_0M_0}{\sqrt{E^2M_0^2-m_0^2M_0^2}}=\frac{m_0}{\sqrt{E^2-m_0^2}}=\frac{m_0}{|\boldsymbol{p}|}\,, \tag{3.94}$$

借助(3.74)我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\bar{\sigma}=&\frac{m_0}{|\boldsymbol{p}|}\overline{|M_{fi}|}^2(2\pi)^4\delta^4(P_f+p'-P_i-p)\\&\times\frac{m_0}{(2\pi)^3}|\boldsymbol{p}'|\mathrm{d}E'\mathrm{d}\Omega'\,\frac{2M_0}{(2\pi)^3}\mathrm{d}^4P_f\delta(P_f^2-M_0^2)\Theta(P_f^0)\,.\end{aligned} \tag{3.95}$$

对 $\mathrm{d}E'$和 d^4P_f 积分,微分截面变为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega'}&=\frac{2}{|\boldsymbol{p}|}\int\frac{m_0^2M_0|\boldsymbol{p}'|\mathrm{d}E'}{(2\pi)^2}\overline{|M_{fi}|}^2\mathrm{d}^4P_f\delta(P_f^2-M_0^2)\Theta(P_f^0)\delta^4(P_f+p'-P_i-p)\\&=\frac{2m_0^2M_0}{|\boldsymbol{p}|4\pi^2}\int|\boldsymbol{p}'|\mathrm{d}E'\,\overline{|M_{fi}|}^2\delta((p'-P_i-p)^2-M_0^2)\Theta(P_f^0+E-E')\\&=\frac{m_0^2M_0}{|\boldsymbol{p}|2\pi^2}\int_{m_0}^{M_0+E}|\boldsymbol{p}'|\mathrm{d}E'\,\overline{|M_{fi}|}^2\delta(2m_0^2-2(E'-E)M_0-2E'E+2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{p}'|\cos\theta)\,.\end{aligned} \tag{3.96}$$

在最后一步,我们利用了这样一个事实:由于阶跃函数,散射电子的能量 E'受约束 $E'\leqslant M_0+E$,阶跃函数的宗量必须大于零,否则被积函数为零,即 $E'\leqslant P_i^0+E=M_0+E_0$,当然 E'也必须大于或等于 m_0,而且(3.96)式中 δ 函数的宗量可表示成实验室系中运动学变量

$$\begin{aligned}(p'-P_i-p)^2-M_0^2&=p'^2+P_i^2+p^2-2p'\cdot P_i-2p'\cdot p+2P_i\cdot p-M_0^2\\&=m_0^2+M_0^2+m_0^2-2E'M_0-2(E'E-\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{p})+2M_0E-M_0^2\\&=2m_0^2-2M_0(E'-E)-2E'E+2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{p}'|\cos\theta\,.\end{aligned} \tag{3.97}$$

(3.96)式中剩下来的对 E'的积分利用熟知的公式

$$\delta(f(x))=\sum_k\frac{\delta(x-x_k)}{\left|\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x_k}}, \tag{3.98}$$

求解,x_i 是位于积分区间内 $f(x)$的根,从而,我们得到

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega'}=\frac{m_0^2M_0}{4\pi^2}\frac{|\boldsymbol{p}'|}{|\boldsymbol{p}|}\frac{\overline{|M_{fi}|^2}}{M_0+E-|\boldsymbol{p}|(E'/|\boldsymbol{p}'|)\cos\theta}\,, \tag{3.99}$$

式中,我们已用到$|\boldsymbol{p}'|\mathrm{d}|\boldsymbol{p}'|=E'\mathrm{d}E'$。(3.96)式中 δ 函数的宗量导致了下面能量守恒条件:

$$E'(M_0+E)-|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{p}'|\cos\theta=EM_0+m_0^2\,. \tag{3.100}$$

对一个给定的散射角 Θ,电子的终态能量能利用(3.100)关于 E'的二次方程确定成 E 和 θ 的函数形式。导出 E'以及相应的$|\boldsymbol{p}|^2=E'^2-m_0^2$必须代入(3.99)。为理解散射公式(3.99),我们检查极限 $E/M_0\ll1$,这里电子能量与质子的静质量相比较为一个小量。在这种极限下,我们将获得在一个固定 Coulomb 势(见 3.1 节)上散射的极限情况。利用这一近似,我们把(3.100)简化为

$$E'M_0 = EM_0, \quad \text{则} \quad E' = E\ , \tag{3.101}$$

这意味着电子的完全弹性散射。因为 $E^2=|\boldsymbol{p}|^2+m_0^2= E'^2=|\boldsymbol{p}'|^2+m_0^2$，由此得 $|\boldsymbol{p}|=|\boldsymbol{p}'|$，并且(3.99)导致

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega'} = \frac{m_0^2}{4\pi^2}\overline{|M_{fi}|^2} \quad \text{for} \quad \frac{E}{M_0} \ll 1\ . \tag{3.102}$$

这结果对应着在 3.1 节(3.25)，式已经知道的 Mott 散射截面。为看出完全的一致性，我们在相同近似下考虑不变幅(3.91)的平方。在实验室系中所导出的严格表达式为

$$\begin{aligned}\overline{|M_{fi}|^2} =& \frac{e^2e_p^2(4\pi)^2}{2m_0^2M_0^2(q^2)^2}\{(M_0E)[p_f\cdot(P_i+p_i-p_f)]+[p_i\cdot(P_i+p_i-p_f)(E'M_0)]\\ &-(p_i\cdot p_f)M_0^2-M_0(M_0+E-E')m_0^2+2m_0^2M_0^2\}\\ =& \frac{e^2e_p^2(4\pi)^2}{2m_0^2M_0^2(q^2)^2}\{M_0E[M_0E'+p_f\cdot p_i-m_0^2]+M_0E'[M_0E+m_0^2-p_f\cdot p_i]\\ &-M_0^2p_f\cdot p_i-M_0^2m_0^2-M_0Em_0^2+M_0E'm_0^2+2m_0^2M_0^2\}\\ =& \frac{e^2e_p^2(4\pi)^2}{2m_0^2M_0^2(q^2)^2}\{2M_0^2EE'-p_f\cdot p_i[M_0^2+M_0(E'-E)]+m_0^2M_0^2\}\ .\end{aligned} \tag{3.103}$$

在极限 $E/M_0\ll1$ 下，仅有与 M_0^2 成比例的项必须保留。用 $E=E'$ 这导致

$$\overline{|M_{fi}|^2} \approx \frac{e^2e_p^2(4\pi)^2}{2m_0^2(q^2)^2}(2E^2-p_f\cdot p_i+m_0^2), \quad \text{for} \quad \frac{E}{M_0}\ll1\ . \tag{3.104}$$

将此结果代入(3.101)并考虑到在所采用的极限下，动量转移 q 没有零分量，即 $q^2=-\boldsymbol{q}^2$，最终，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega'} = \frac{2\alpha^2}{(\boldsymbol{q}^2)^2}(2E^2-p_f\cdot p_i+m_0^2), \ \frac{E}{M_0}\ll1\ . \tag{3.105}$$

这恰好是我们已在 3.1 节(3.39)式中已推出的预期结果。在那极限下，质子不反冲，它能被认作是一个静态外场的源。切记，我们是选择了这样单位制，使 $\hbar=c=1$，$e^2=e^2/\hbar c=\alpha$。

另一种能使散射截面十分复杂的一般表达式得以简化的极限是电子的极端相对论情况。该情况中，$m_0/E\ll1$，质子的反冲应对散射公式有可观的修正。在考查(3.99)时，我们注意

$$\frac{|\boldsymbol{p}'|}{|\boldsymbol{p}|} = \frac{\sqrt{E'^2-m_0^2}}{\sqrt{E^2-m_0^2}} \to \frac{E'}{E} \quad \text{for} \quad \frac{m_0}{E}, \frac{m_0}{E'} \ll 1,$$

从而(3.99)变成

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega'} \approx& \frac{m_0^2}{4\pi^2}\frac{\dfrac{E'}{E}}{1+\dfrac{E}{M_0}-\dfrac{E}{M_0}\cos\theta}\overline{|M_{fi}|^2}\\ =& \frac{m_0^2}{4\pi^2}\frac{\dfrac{E'}{E}}{1+\dfrac{2E}{M_0}\sin^2\dfrac{\theta}{2}}\overline{|M_{fi}|^2}, \frac{m_0}{E}\ll1\ .\end{aligned} \tag{3.106}$$

为计算$\overline{|M_{fi}|^2}$,我们考虑(3.103)并把标量积 $p_f \cdot p_i$ 用动量转移平方表示

$$q^2 = (p_f - p_i)^2 = p_f^2 + p_i^2 - 2p_f \cdot p_i = 2[m_0^2 - (p_f \cdot p_i)]. \tag{3.107}$$

这导致

$$\overline{|M_{fi}|^2} = \frac{(4\pi)^2\alpha^2}{2m_0^2M_0^2(q^2)^2}\left\{2M_0^2EE' + \frac{q^2}{2}[M_0^2 + M_0(E' - E)] + m_0^2M_0(E' - E)\right\}$$

$$= \frac{(4\pi)^2\alpha^2EE'}{m_0^2(q^2)^2}\left\{1 + \frac{q^2}{4EE'}\left(1 + \frac{E' - E}{M_0}\right) + \frac{m_0^2}{2EE'}\frac{(E' - E)}{M_0}\right\}, \tag{3.108}$$

这仍然是严格的。在极端相对论极限 E/m_0; $E'/m_0 \gg 1$ 下,能量和动量变为相等,动量转移平方(3.107)与散射角以下列简单方式相关联

$$q^2 = 2(m_0^2 - EE' + \boldsymbol{p}' \cdot \boldsymbol{p}) = 2(m_0^2 - EE' + |\boldsymbol{p}'||\boldsymbol{p}|\cos\theta)$$

$$\approx -2EE'(1 - \cos\theta) = -4EE'\sin^2\frac{\theta}{2}. \tag{3.109}$$

而且,能量守恒条件(3.100)简化成

$$M_0(E - E') = E'E - |\boldsymbol{p}||\boldsymbol{p}'|\cos\theta - m_0^2$$

$$\approx EE'(1 - \cos\theta) = 2EE'\sin^2\frac{\theta}{2} \tag{3.110}$$

或用(3.109)

$$\frac{E' - E}{M_0} \approx -\frac{2EE'}{M_0^2}\sin^2\frac{\theta}{2} \approx \frac{q^2}{2M_0^2}. \tag{3.111}$$

从而(3.108)能被化简成

$$\overline{|M_{fi}|^2} \approx \frac{\pi^2\alpha^2}{m_0^2EE'\sin^4\frac{\theta}{2}}\left\{\underbrace{1 + \frac{q^2}{4EE'}}_{1-\sin^2(\theta/2)} - \frac{q^2}{4EE'}\frac{2EE'}{M_0^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right\}$$

$$= \frac{\pi^2\alpha^2}{m_0^2EE'\sin^4\frac{\theta}{2}}\left\{\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M_0^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right\}, \quad E, E' \gg m_0. \tag{3.112}$$

我们将此结果代入(3.106)而得

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega'} = \frac{\alpha^2}{4E^2}\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}\frac{\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M_0^2}\sin^2\frac{\theta}{2}}{1 + \frac{2E}{M_0}\sin^2\frac{\theta}{2}} \quad \text{对于} \quad E, E' \gg m_0. \tag{3.113}$$

这公式决定了极端相对论情况下的散射截面,其中已假定质子行为就如质量为 M_0 的重电子。方程(3.113)能与在极限 $\beta \to 1$ 时的 Mott 散射公式(3.39)作比较。两者差异是可看出的。(3.113式的分母是起源于靶的反冲,我们从可以写成下式的式(3.110)看出,

$$E' = E\frac{1}{1 + \frac{2E}{M_0}\sin^2\frac{\theta}{2}}. \tag{3.114}$$

而且,(3.113)式分子中角度关系与 Mott 散射相比较包含更多。依赖于 q^2 的第二项起因于靶

一个自旋 1/2 粒子的事实。该项在考虑电子与自旋为 0 的粒子碰撞时就消失。

最后我们注意到(3.113)式不能用来描述高能电子-质子间碰撞，因为电子的德波罗意波长如此之小以至于能窥探到质子的内部结构。这一事实在(3.113)中未曾考虑。那儿我们假定质子是无内部结构的类点 Dirac 粒子。此外，那种情况中，质子的反常磁矩还得被考虑进来。从而在对极高能量(几个 100MeV)的完整处理公式(3.113)必须通过引进代表质子内部结构的电磁形状因子来修正。这就导致了所谓的 Rosenbluth 公式(见练习 3.5)。然而，方程(3.113)用到电子和 μ 子这两个无结构 Dirac 粒子的散射却很精确。

练　习

3.5　Rosenbluth 公式

对电子在一个自旋为 1/2 强子上散射的真实描述就得考虑强子的内部结构和反常磁矩，为此来自于 Dirac 方程动量空间的跃迁流必须被一个更一般的双线性表达式所取代

$$\bar{u}(P')\gamma_\mu u(P) \to \bar{u}(P')\,\Gamma_\mu(P',P)u(P)\,. \tag{1}$$

问题：(a) 证明满足 Lorentz 协变条件，厄密和规范不变的跃迁流的最一般表达式能被写成

$$\bar{u}(P')\Gamma_\mu(P',P)u(P) = \bar{u}(P')\left(\gamma_\mu F_1(q^2) + \mathrm{i}\frac{1}{2M_0}F_2(q^2)q^\nu\sigma_{\mu\nu}\right)u(P)\,. \tag{2}$$

这里 $q=P'-P$ 为动量转移，$F_1(q^2)$和 $F_2(q^2)$是未指定的实函数(形状因子)，参见图 3.12。

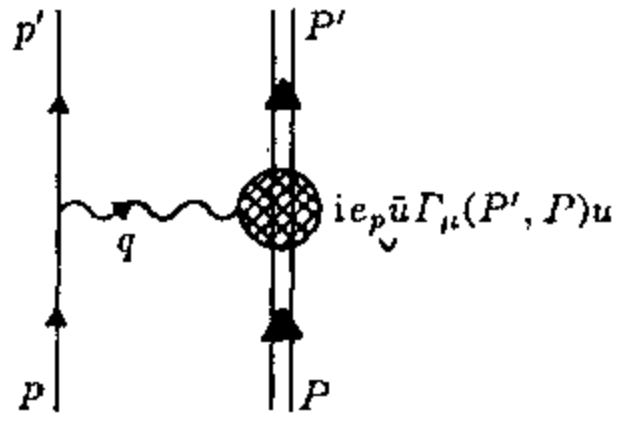


图 3.12　类点 Dirac 粒子在用网格线圆泡表示的靶上散射的 Feyman 图

(b) $F_1(0)$和 $F_2(0)$的物理意义是什么？这能通过借助非相对论极限下静态电磁场来研究相互作用能而导出。

(c) 在极端相对论极限下，用顶角函数(2)计算电子在强子上散射的非极化截面。

解答：(a)为了构造顶角函数 $\Gamma_\mu(P',P)$，我们可以自由处理的，有两个运动学量 P^μ 和 P'^μ。既然质子在碰撞前后自由运动(它是在质壳的)，那么，就只有一个独立标量变数，因为 $P^2=P'^2=M_p^2$，我们选该变数为动量转移平方 $q^2=(P'-P)^2$。因为 $\Gamma_\mu(P',P)$必须是一个 Lorentz 顶角，借助于 Dirac 理论中已知的双线协变量(参见《RQM》，第 5 章)，我们能直接指出最一般的假定

形式为

$$\bar{u}(P')\Gamma_\mu(P',P)u(P) = \bar{u}(P')(A(q^2)\gamma_\mu + B(q^2)P'_\mu + C(q^2)P_\mu + \mathrm{i}D(q^2)P'^\nu\sigma_{\mu\nu} + \mathrm{i}E(q^2)P^\nu\sigma_{\mu\nu})u(P)\ . \tag{3}$$

式中 $A(q^2),\cdots,E(q^2)$ 是变量 q^2 的未知标量函数，$\sigma_{\nu\mu}=\mathrm{i}/2(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu)$。因为我们要求厄米性，它们都是实函数。规范不变要求中所带来的限制条件可写成如下形式

$$q^\mu\bar{u}(P')\Gamma_\mu(P',P)u(P) = 0\ . \tag{4}$$

这是流守恒条件应用到强子的电磁跃迁流的结果，即，$\partial_\mu J^\mu_{P'P}(x)=0$。在动量空间中，算符 ∂_μ 当分别作用到终态(初态)波函数上时可被因子 $-\mathrm{i}P'_\mu$ 或 $\mathrm{i}P_\mu$ 取代，这就导致条件(4)。

有关规范条件和流守恒的一个简短提示：规范不变隐含着

$$\int \mathrm{d}^4x j_\mu(x)A^\mu(x) = \int \mathrm{d}^4x j_\mu(x)(A^\mu(x) - \partial^\mu\chi(x))$$

这意味着 $\int \mathrm{d}^4x\, J_\mu(x)\,\partial^\mu\chi(x) = 0$。假定表面项无贡献(函数 $\chi(x)$ 能被恰当选取)，后一个条件能被改写成 $\int \mathrm{d}^4x\,\partial^\mu j_\mu\chi\,(x) = 0$。因为 $\chi\,(x)$ 是一个任意函数，这意味着 $\partial^\mu j_\mu(x) = 0$。

(3)式中第一项是通常的 Dirac 流，它显然满足条件(4)。这能借助 Dirac 方程容易得到证明。对后面项，我们得到

$$(P'^\mu - P^\mu)(BP'_\mu + CP_\mu) = (B-C)(M_0^2 - P'\cdot P) = 0 \tag{5}$$

和

$$\begin{aligned}\mathrm{i}(P'^\mu - P^\mu)(DP'^\nu + EP^\nu)\sigma_{\mu\nu} &= -\mathrm{i}DP'^\mu P'^\nu\sigma_{\mu\nu} + \mathrm{i}EP'^\mu P^\nu\sigma_{\mu\nu}\\ &= \mathrm{i}(D+E)P'^\mu P^\nu\sigma_{\mu\nu} = 0\ ,\end{aligned} \tag{6}$$

式(6)考虑了张量 $\sigma_{\mu\nu}$ 的反称性，从而我们导出 $C=B$ 以及 $E=-D$，即

$$\bar{u}(P')\Gamma_\mu(P',P)u(P) = \bar{u}(P')[A(q^2)\gamma_\mu + B(q^2)(P'+P)_\mu + \mathrm{i}D(q^2)(P'-P)^\nu\sigma_{\mu\nu}]u(P)\ . \tag{7}$$

因为哥登分解(参见《RQM》第 8 章)

$$\bar{u}\gamma_\mu u = \frac{1}{2M_0}(P'+P)_\mu\bar{u}u + \frac{\mathrm{i}}{2M_0}q^\nu\bar{u}\sigma_{\mu\nu}u \tag{8}$$

(7)中的三项不是线性独立的。从而这些项之一，例如 $B(q^2)\,(P'+P)_\mu$ 能被消去，这就导出(2)。

(b) 为理解形状因子 $F_1(0)$ 和 $F_2(0)$ 的意义，我们考虑在静态外电磁场 $A^\mu(x)$ 中的一个荷电 e_P 的非相对论强子的能量

$$\begin{aligned}W &= e_P\int \mathrm{d}^3x A^\mu(\boldsymbol{x})J_\mu(\boldsymbol{x})\\ &= e_P\int \mathrm{d}^3x A^\mu(\boldsymbol{x})\bar{\psi}_{P'}(\boldsymbol{x})\Gamma_\mu(P',P)\psi_P(\boldsymbol{x})\\ &= \frac{e_P}{V}\sqrt{\frac{M_0^2}{E'E}}\int \mathrm{d}^3x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(P'-P)\cdot x}A^\mu(\boldsymbol{x})\bar{u}(P')\Gamma_\mu(P',P)u(P)\ .\end{aligned} \tag{9}$$

在纯粹静电场 $A^0(\boldsymbol{x})$ 情况，利用 Gordon 分解(8)重写一下顶角函数 $\Gamma_\mu(P',P)$ 是有益的。

$$\Gamma_\mu(P',P)=\gamma_\mu(F_1(q^2)+F_2(q^2))-\frac{1}{2M_0}(P'+P)_\mu F_2(q^2)\,. \tag{10}$$

在给定的强子的静参照系中,这就导出了(9)式中被积函数的表达式。

$$\begin{aligned}&A^0(\boldsymbol{x})\bar{u}(P')\Gamma_0(P',P)u(P)\\&=A^0(\boldsymbol{x})\bar{u}(P')\Big[\gamma_0(F_1(q^2)+F_2(q^2))-\frac{1}{2M_0}(P'+P)_0F_2(q^2)\Big]u(P)\\&=A^0(\boldsymbol{x})\bar{u}(P')\Big[\gamma_0F_1(q^2)+\frac{2M_0\gamma_0-E'-M_0}{2M_0}F_2(q^2)\Big]u(P)\,.\end{aligned}\tag{11}$$

在非相对论极限下,Dirac 旋量的下分量能被略去,从而 $\bar{u}u\approx\bar{u}\gamma^0u\approx1$。这导致

$$A^0(\boldsymbol{x})\bar{u}(P')\Gamma_0(P',P)u(P)\approx A^0(\boldsymbol{x})\Big(F_1(q^2)+\frac{q^2}{4M_0^2}F_2(q^2)\Big)\,. \tag{12}$$

这里应用了恒等式

$$q^2=(P'-P)^2=2M_0^2-2P'\cdot P=2M_0(M_0-E') \tag{13}$$

在静态极限 $q^2\to0$(考虑一个不变的或缓慢变化的外势)下,相互作用能量简单被给成

$$\begin{aligned}W&\simeq e_pF_1(0)\frac{1}{V}\int\mathrm{d}^3x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}A^0(\boldsymbol{x})\\&\simeq e_pF_1(0)A^0.\end{aligned}\tag{14}$$

这结果显然是荷电为 $e_pF_1(0)$的一个粒子处在势 A^0 中的静电能量,由此,对质子,我们得出结论

$$F_1(0)=1\,. \tag{15}$$

对由势场 $A^k(\boldsymbol{x})$所给定的磁场情况,我们利用(2)而得到

$$\begin{aligned}&A^k(\boldsymbol{x})\bar{u}(P')\Gamma_k(P',P)u(P)\\&=A^k(\boldsymbol{x})\bar{u}(P')\Big[\frac{1}{2M_0}(P'_k+P_k)F_1(q^2)+\frac{\mathrm{i}}{2M_0}(F_1(q^2)+F_2(q^2))q^l\sigma_{kl}\Big]u(P)\\&\simeq-\bar{u}(P')\Big[\boldsymbol{A}\cdot\frac{\boldsymbol{P}}{M_0}F_1(q^2)+\frac{\mathrm{i}}{2M_0}(F_1(q^2)+F_1(q^2))\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\Sigma}\Big]u(P)\,,\end{aligned}\tag{16}$$

因为

$$\sigma_{kl}=\varepsilon_{klm}\Sigma^m\quad\text{with}\quad\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma}&0\\0&\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}\,.$$

(16)式中的第一项恰好描述一个运动电荷与磁场间的相互作用 $W\approx-e_PF_1(0)\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{A}\bar{u}u$。第二项导致(再次考虑极限 $q\to0$)

$$\begin{aligned}W&\simeq\frac{e^p}{V}\int\mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\frac{1}{2M_0}(F_1(q^2)+F_2(q^2))(-\mathrm{i}\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}))\cdot\bar{u}(p')\boldsymbol{\Sigma}u(P)\\&\simeq-e_P\frac{1}{2M_0}(F_1(0)+F_2(0))(\bar{u}\boldsymbol{\Sigma}u)\frac{1}{V}\int\mathrm{d}^3x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\\&\simeq-\frac{e_P}{2M_0}(1+F_2(0))2\langle\boldsymbol{s}\rangle\cdot\boldsymbol{B}.\end{aligned}\tag{17}$$

这是一个自旋 1/2 具有回转磁比率 $g=2(1+F_2(0))$的粒子在均匀磁场中的能量。从而数$F_2(0)$

描述了粒子的反常磁矩。对质子和中子情况，实验上给出了下列零动量转移时的形状因子

$$\begin{aligned} &F_1^p(0) = 1, \qquad F_1^n - 0, \\ &F_2^p(0) = 1.79284, \qquad F_2^n(0) = -1.91304. \end{aligned} \tag{18}$$

(c) 我们能像 3.2 节那样计算出电子-强子截面；我们仅需要代入更复杂的顶角算符(2)。实际上，若我们利用等价的表达式(10)计算可得以简单化。自旋平均的跃迁矩阵元的平方为

$$\begin{aligned} \overline{|M_{fi}|^2} = &\frac{1}{4}\sum_{\text{spin}} \left| \bar{u}(p',s')\gamma^\mu u(p,s)\frac{4\pi e e_p}{q^2} \right. \\ &\left. \times \bar{u}(P',S')\left[\gamma_\mu(F_1+F_2) - \frac{1}{2M_0}(P'+P)_\mu F_2\right]u(P,S)\right|^2 \\ = &\frac{(4\pi)^2 e^2 e_p^2}{(q^2)^2}\frac{1}{4}\sum_{\text{spin}} u^\dagger(P,S)\left[\gamma_\mu^\dagger(F_1+F_2)\right. \\ &\left. - \frac{1}{2M_0}(P'+P)_\mu F_2\right]\gamma_0 u(P',S') \\ &\times u^\dagger(p,s)\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 u(p',s')\bar{u}(p',s')\gamma^\nu u(p,s) \\ &\times \bar{u}(P',S')\left[\gamma_\nu(F_1+F_2) - \frac{1}{2M_0}(P'+P)_\nu F_2\right]u(P,S). \end{aligned} \tag{19}$$

借助 3.1 节式(3.29)和(3.31)，式(17)能重新写成二个迹的乘积。正如 3.2 节式(3.85)那样，我们给出

$$\overline{|M_{fi}|^2} = \frac{(4\pi)^2 e^2 e_p^2}{(q^2)^2} L^{\mu\nu} H_{\mu\nu}, \tag{20}$$

其中轻子张量为

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu \frac{\not p + m_0}{2m_0}\gamma^\nu \frac{\not p' + m_0}{2m_0}\right] \tag{21}$$

强子张量为

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu} = &\frac{1}{4M_0^2}\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left[(\not P + M_0)\left(\gamma_\mu(F_1+F_2) - \frac{F_2}{2M_0}(P'_\mu + P_\mu)\right)\right. \\ &\left. \times (\not P' + M_0)\left(\gamma_\nu(F_1+F_2) - \frac{F_2}{2M_0}(P'_\nu + P_\nu)\right)\right]. \end{aligned} \tag{22}$$

将乘积展开，我们得到 16 个迹，其中 8 个为零，因为它们含有奇数个 γ 矩阵。剩下的项为：

$$\begin{aligned} 8M_0^2 H_{\mu\nu} = &(F_1+F_2)^2\,\mathrm{Tr}\,[\not P\gamma_\mu \not P'\gamma_\nu] - (F_1+F_2)M_0\frac{F_2}{2M_0}(P'_\nu + P_\nu)\,\mathrm{Tr}\,[\not P\gamma_\mu] \\ &+ \frac{F_2}{2M_0}(P'_\mu + P_\mu)\frac{F_2}{2M_0}(P'_\nu + P_\nu)\,\mathrm{Tr}\,[\not P \not P'] \\ &- \frac{F_2}{2M_0}(P'_\mu + P_\mu)M_0(F_1+F_2)\,\mathrm{Tr}\,[\not P\gamma_\nu] \\ &- M_0(F_1+F_2)\frac{F_2}{2M_0}(P'_\nu + P_\nu)\,\mathrm{Tr}\,[\gamma_\mu \not P'] \end{aligned}$$

$$+ M_0(F_1 + F_2)M_0(F_1 + F_2)\,\mathrm{Tr}\,[\gamma_\mu\gamma_\nu]$$
$$- M_0\frac{F_2}{2M_0}(P'_\mu + P_\mu)(F_1 + F_2)\,\mathrm{Tr}\,[\not{P}'\gamma_\nu]$$
$$+ M_0\frac{F_2}{2M_0}(P'_\mu + P_\mu)M_0\frac{F_2}{2M_0}(P'_\nu + P_\nu)\,\mathrm{Tr}\,[\mathbb{1}]. \tag{23}$$

代入所有这些迹的值之后，我们把这些结果加在一起成为

$$H_{\mu\nu} = \frac{1}{8M_0^2}\{4(F_1 + F_2)^2[P_\mu P'_\nu + P'_\mu P_\nu - (P\cdot P' - M_0^2)g_{\mu\nu}]$$
$$+ [-4(F_1 + F_2)F_2 + F_2^2(P\cdot P'/M_0^2 + 1)](P_\mu + P'_\mu)(P_\nu + P'_\nu)\}$$
$$\equiv H_{\mu\nu}^{(1)} + H_{\mu\nu}^{(2)}. \tag{24}$$

从前面的讨论，除了一个因子$(F_1 + F_2)^2$外，$H_{\mu\nu}^{(1)}$是已知的，当将它代入(20)式时，它又给出(3.113)的截面，此外，我们得到

$$\overline{|M_{fi}(2)|^2} = \frac{(4\pi)^2e^2e_p^2}{(q^2)^2}\frac{1}{16M_0^2m_0^2}[p''^\mu p'^\nu + p'^\mu p^\nu - (p\cdot p' - m_0^2)g^{\mu\nu}]$$
$$\times[(P_\mu + P'_\mu)(P_\nu + P'_\nu)][-4(F_1 + F_2)F_2 + F_2^2(P\cdot P'/M_0^2 + 1)], \tag{25}$$

式中我们已取(3.90)式的轻子张量形式。利用能动量守恒

$$p + P = p' + P', \tag{26}$$

现在我们将消除强子的终态动量并将(25)式中动量依赖项并在一起。在极端相对论近似下(略去电子静质量)我们在实验室系中简单地得到

$$[\cdots][\cdots] = 2p'\cdot(P + P')p\cdot(P + P') - (P + P')\cdot(P + P')(p\cdot p' - m_0^2)$$
$$\approx 4(2p'\cdot P\ p\cdot P - M_0^2p\cdot p')$$
$$\approx 4[2E'M_0EM_0 - M_0^2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{p}'|(1 - \cos\theta)]$$
$$\approx 8M_0^2E'E\cos^2\frac{\theta}{2} \tag{27}$$

进一步，用(3.111)式，(23)中乘积$P\cdot P'$能按动量转移q表示成

$$P\cdot P' = P\cdot(P + p - p') = M_0^2 + M_0(E - E') \simeq M_0^2\left(1 - \frac{q^2}{2M_0^2}\right). \tag{28}$$

q^2与散射角间关系通过(3.109)得

$$q^2 \approx -4EE'\sin^2\frac{\theta}{2}. \tag{29}$$

加进(3.112)的$\overline{|M_{fi}(1)|^2}$，我们最终获得

$$\overline{|M_{fi}|^2} = \frac{(4\pi)^2e^2e_p^2}{(q^2)^2}\frac{E'E}{m_0^2}\left\{(F_1 + F_2)^2\left[1 - \sin^2\frac{\theta}{2}\left(1 + \frac{q^2}{2M_0^2}\right)\right]\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\left[\cdots 4(F_1 + F_2)F_2 + 2F_2^2\left(1 - \frac{q^2}{4M_0^2}\right)\right]\right\}$$
$$= \frac{(4\pi)^2e^2e_p^2}{(q^2)^2}\frac{E'E}{m_0^2}\left[\left(F_1^2 - \frac{q^2}{4M_0^2}F_2^2\right)\cos^2\frac{\theta}{2}\right.$$

$$- (F_1 + F_2)^2 \frac{q^2}{2M_0}\sin^2\frac{\theta}{2}\Big]. \tag{30}$$

借助(3.106)在实验室系中,自旋平均的散射截面为

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} = \frac{e^2 e_p^2}{4E^2\sin^4\frac{\theta}{2}\left(1 - \frac{2E}{M_0}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\times\left[\left(F_1^2 - \frac{q^2}{4M_0^2}F_2^2\right)\cos^2\frac{\theta}{2} - (F_1 + F_2)^2\frac{q^2}{2M_0^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]. \tag{31}$$

该结果称之为 Rosenbluth 公式①。

附注:代替函数 $F_1(q^2)$ 和 $F_2(q^2)$,人们常常引进所谓电和磁 Sachs 形状因子

$$G_E(q^2) = F_1(q^2) + \frac{q^2}{4M_0^2}F_2(q^2),$$

$$G_M(q^2) = F_1(q^2) + F_2(q^2). \tag{32}$$

从与电场和磁场的相互作用能(12)和(17),这些组合是很自然产生的。按照 Sachs 形状因子,公式(31)变成

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} = \left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}}\left[\frac{G_E^2(q^2) + \tau G_M^2(q^2)}{1+\tau} + 2\tau G_M^2(q^2)\tan^2\frac{\theta}{2}\right]. \tag{33}$$

其中缩写 $\tau = -q^2/(4M_0^2) > 0$。实验上两形状因子可通过在给定的动量转移下,改变 E 和 θ 来定出。

$$q^2 = -4EE'\sin^2\frac{\theta}{2} = -4E^2\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{1 + \frac{2E}{M_0}\sin^2\frac{\theta}{2}}. \tag{34}$$

图 3.13 给出了质子的形状因子 $G_E(q^2)$ 和 $G_M(q^2)$ 的一些实验数据②。已经发现,在 q^2不太大时,无论是 G_E还是 $1/\kappa\, G_M$(κ 为质子的磁矩)都能用所谓"偶极拟合"公式给以很好描述。

$$G_D(q^2) = \frac{1}{\left(1 + \frac{|q^2|}{Q^2}\right)^2}, \tag{35}$$

其中经验参数(记住单位选取 $\hbar c \equiv 0.197\ \text{GeV}fm = 1$)为

$$Q^2 = 0.71\text{GeV}^2 = 18.2\text{fm}^{-2}. \tag{36}$$

在非相对论量子力学散射理论中,所引进的形状因子 $F(q)$ 与在扩展靶和类点的靶上的散射有关

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{extended}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{point}}|F(q)|^2. \tag{37}$$

---

① 参见 M. N. Rosenbluth: Phys. Rev. **79**, 615(1950).

② 参见 G. Simon, Ch. Schmitt, F. Borkowski, V. H. Walther: Nucl. Phys. **A333**, 381(1980).

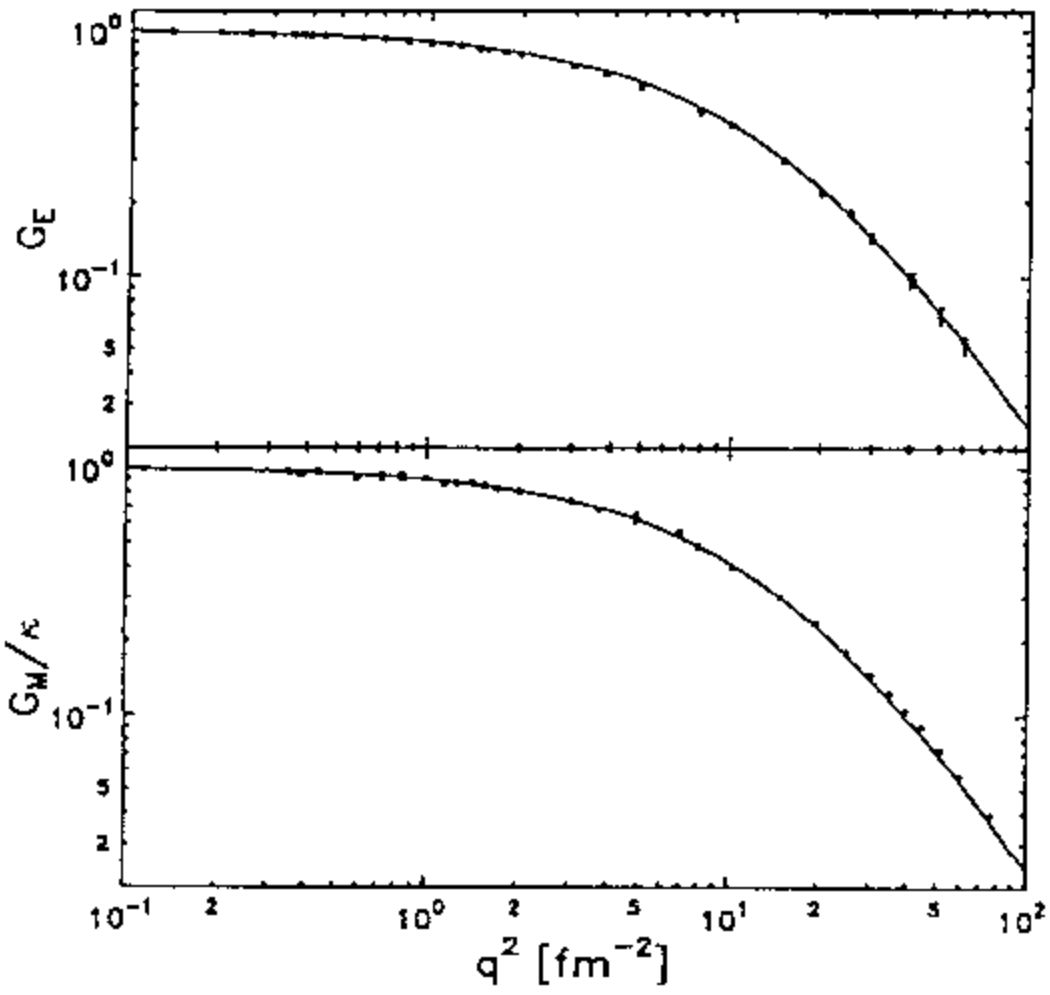


图 3.13　作为动量转移平方 q^2 函数的质子的电和规一化磁形状因子。实验数可很好地被“偶极拟合”来描述

$F(q)$具有简单解释[①]：它是扩展的散射中心密度分布 $\rho(x)$的空间 Fourier 变换

$$F(q) = \int \mathrm{d}^3x \rho(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}. \tag{38}$$

类似地，我们可以把 $G_E(q^2)$ 和 $G_M(q^2)$ 与强子的电荷和磁矩密度分布的 Fourier 变换等同。在相对论能量下，这种解释是成问题的，因为它依赖于参照系的选取。这在所谓的“Breit-系”中成立，那儿，没有能量转移给核子，$q_0=0$。这意味着 $P=(E, \boldsymbol{P})$，$P' = (E, -\boldsymbol{P})$。

借助这一说明，从偶极公式(35)中所导出的质子电荷的密度分布，通过 Fourier 逆变换化为：

$$\rho_p(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3} G_{\mathrm{D}}(-q^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} = \frac{Q^3}{8\pi}\mathrm{e}^{-Q|x|}. \tag{39}$$

核子的大小可通过这一分布的二阶矩定义

$$\langle R^2\rangle = \int \mathrm{d}^3x |\boldsymbol{x}|^2 \rho_p(x) = \frac{12}{Q^2}. \tag{40}$$

这给出了质子平均半径。

① 参见 R. Hofstadter, Ann. Rev. Nucl. Sci. **7**, 231(1957).

$$R_p = \sqrt{\langle R^2 \rangle} = \sqrt{\frac{12}{18.2\text{fm}^{-2}}} = 0.81\ \text{fm}\ . \tag{41}$$

有关强子内部结构更详细的信息，能从电子在它上的非弹性散射获取。这种途径可显示出强子中类点组分(部分子)的存在。

例　　子

3.6 更高阶电子-质子散射

在 3.2 节中，我们计算了 $\alpha=e^2$ 最低阶电子-质子散射。现在我们将讨论微扰展开项高一阶的修正。为此，我们参看(2.44)电子散射矩阵元的第 n 阶贡献的一般表达式。二阶电子-质子相互作用幅为

$$S_{fi}^{(2)} = -\,\mathrm{i}e^2\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\bar{\psi}_f(x)A(x)S_F(x-y)A(y)\psi_i(y)\ . \tag{1}$$

如同 3.2 节，电磁势 $A(x)$是由质子流产生。然而，为了一致性，质子流也必须为二阶的。为此，我们再考虑(1)，它描述了电子流与 $A_\mu(x)$ $A_\lambda(y)$ 场相互作用的二阶形式。又一次，我们要求 $S_{fi}^{(2)}$的完整表达式对电子和质子流是对称的。从(1)，显然二阶电子流为

$$J_{\mu\nu}^{(2)}(x,y) = \mathrm{i}e^2\bar{\psi}_f(x)\gamma_\mu S_F(x-y)\gamma_\nu\psi_i(y)\ . \tag{2}$$

这里因子 i 是为了方便引入的。也就是说，明显地代入电子传播子 $S_F(x-y)$，这就成为

$$J_{\mu\nu}^{(2)}(x,y) = e^2\bar{\psi}_f(x)\gamma_\mu\Big(\sum_{n;p_0>0}\Theta(x_0-y_0)\psi_n(x)\bar{\psi}_n(y) - \sum_{n;p_0<0}\Theta(y_0-x_0)\psi_n(x)\bar{\psi}_n(y)\Big)\gamma_\nu\psi_i(y)\ . \tag{3}$$

两个指标(和两个宗量 x，y)表明了跃迁流的二阶结构。这里我们已用了(2.24)式的 Stückelberg-Feynman 传播子。在(2)中引入的因子 i 与传播子 $S_F(x-y)$ 中所包含的因子 i 相抵消掉，这就使我们能将二阶流 $J^{\mu\nu}(x,y)$ 表示成一个由一阶跃迁流

$$(J_\mu(x))_{fn} = e\bar{\psi}_f(x)\gamma_\mu\psi_n(x)\ , \tag{4}$$

所构成的乘积之和$\left(\sum_n\right)$形式，这导致

$$J_{\mu\nu}^{(2)}(x,y) = \sum_{n;p_0>0}(J_\mu(x))_{fn}(J_\nu(y))_{ni}\Theta(x_0-y_0) - \sum_{n;p_0<0}(J_\mu(x))_{fn}(J_\nu(y))_{ni}\Theta(y_0-x_0)\ . \tag{5}$$

单个指标和单个宗量表示了这些跃迁流 $J_\mu(x)$的一阶结构。根据 3.2 节(3.51)式，每一个第一阶跃迁流产生一个矢量势

$$A^\mu(x) = \int \mathrm{d}^4y D_F(x-y)J^\mu(y)\ .$$

推广这一关系，我们能推测下列表达式描述了质子所产生的电磁场：

$$
\begin{aligned}
&A_\mu(x)A_\nu(y)\\
&=\int \mathrm{d}^4X\mathrm{d}^4Y D_{\mathrm{F}}(x-X)D_{\mathrm{F}}(y-Y)J_{\mu\nu}^{\mathrm{p}(2)}(X,Y)\\
&=\sum_{n,p_0>0}\int \mathrm{d}^4X\mathrm{d}^4Y D_{\mathrm{F}}(x-X)D_{\mathrm{F}}(y-Y)(J_\mu^{\mathrm{p}}(X))_{fn}(J_\nu^{\mathrm{p}}(Y))_{nf}\Theta(Y_0-X_0)\\
&\quad-\sum_{n,p_0<0}\int \mathrm{d}^4X\mathrm{d}^4Y D_{\mathrm{F}}(x-X)D_{\mathrm{F}}(y-Y)(J_\mu^{\mathrm{p}}(X))_{fn}(J_\nu^{\mathrm{p}}(Y))_{nf}\Theta(Y_0-X_0)\\
&=e_{\mathrm{p}}^2\int \mathrm{d}^4X\mathrm{d}^4Y D_{\mathrm{F}}(x-X)D_{\mathrm{F}}(y-Y)\\
&\quad\times\bar{\psi}_f^{\mathrm{p}}(X)\gamma_\mu\Big(\sum_{n,p_0>0}\Theta(Y_0-X_0)\psi_n^{\mathrm{p}}(X)\bar{\psi}_n^{\mathrm{p}}(Y)\\
&\quad-\sum_{n,p_0<0}\Theta(Y_0-X_0)\psi_n^{\mathrm{p}}(X)\bar{\psi}_n^{\mathrm{p}}(Y)\Big)\gamma_\nu\psi_i^{\mathrm{p}}(Y)\\
&=\mathrm{i}e_{\mathrm{p}}^2\int \mathrm{d}^4X\mathrm{d}^4Y D_{\mathrm{F}}(x-X)D_{\mathrm{F}}(y-Y)\bar{\psi}_f^{\mathrm{p}}(X)\gamma_\mu S_{\mathrm{F}}^{\mathrm{p}}(X-Y)\gamma_\nu\psi_i^{\mathrm{p}}(Y)\,.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

出现在乘积(5)中每个单个一阶跃迁流产生一个像(3.51)中跃迁流所产生的光子场。注意，出现在最后一步中的因子$+i$与质子传播子$S_{\mathrm{F}}^{p}(X-Y)$中所含的$-i$相消。方程(6)的证明可通过考虑两光子场$A_{\mu\nu}(x,y)$的微分方程进行：

$$
\Box_x\Box_y A_{\mu\nu}(x,y)=(4\pi)^2J_{\mu\nu}^{\mathrm{p}(2)}(x,y)\,,
\tag{7}
$$

这与(3.42)类似。表达式(6)显然满足这一微分方程。这结果可用图3.14中的图形加以说明。

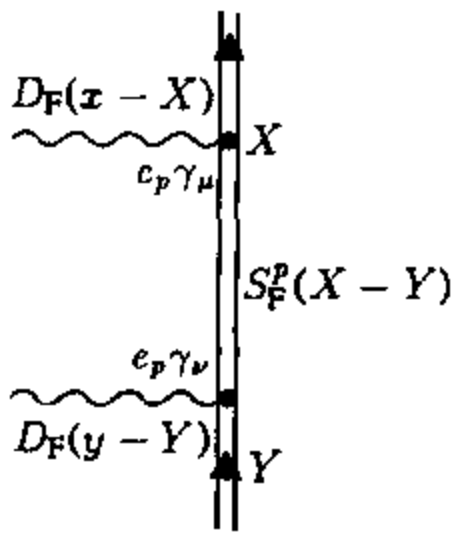


图3.14　二阶质子跃迁流包含二个光子。一个光子在时空点x和X之间传播；第二个光子在时空点y和Y之间传播，依赖于$D_{\mathrm{F}}(x-X)$和$D_{\mathrm{F}}(y-Y)$的宗量的时序，光子或者被吸收，或者被发射。质子在顶角X和Y之间的传播由Feynman传播子$S_{\mathrm{F}}^{0}(X-Y)$描写。

两光子在空-时点Y，X处发射。在每一顶角，分别有一个因子$e_p\gamma_\nu$或$e_p\gamma_\mu$进入场的计算中。在Y与X之间的质子线称为内质子线。它代表着(根据质子的传播子$S_{\mathrm{F}}(X-Y)$)在与光子相互

作用点之间质子的传播。在 Y 和 X 处质子发射的光子传到电子处，电子在空-时点 y 和 x 吸收了光子。该过程如图 3.15 所示。它代表着将(6)代入(1)而所得的二阶 S 矩阵元，即

$$S_{fi}^{(2)}(\mathrm{dir.}) = e^2 e_p^2 \int \mathrm{d}^4x \mathrm{d}^4y \mathrm{d}^4X \mathrm{d}^4Y [\bar{\psi}_f(x)\gamma^\mu S_F(x-y)\gamma^\nu \psi_i(y)]$$
$$\times D_F(x-X) D_F(y-Y) [\bar{\psi}_f^p(X)\gamma_\mu S_F^p(X-Y)\gamma_\nu \psi_i^p(Y)], \tag{8}$$

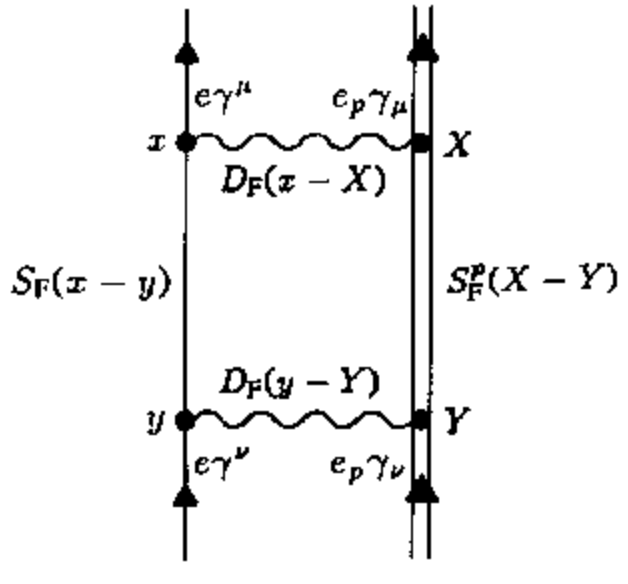


图 3.15 二阶电子-质子散射幅的图形

为使其原因不久变得清楚，(8)式被称作为直接幅。这里，与(1)相比较，没出现因子 $(-i)$，因为它被(6)中最后表达式中的因子 $+i$ 抵消掉了。

我们很清楚地看出，图中各种线是怎样直接转换成数学表达式的。然而(8)式还不代表着完整的二阶散射幅，因为不能区分质子流所发出的两个光子。在 x 处的电子不"知道"它在那点所吸收的光子是发自在时空点 Y 还是 X。光子的不可区分意味着第二个二阶图(见图 3.16)的贡献。根据量子力学原理，完整的电子-质子散射幅应把图 3.16 所示的交换图贡献相干地加进来。这就导致

$$S_{fi}^{(2)} = S_{fi}^{(2)}(\mathrm{dir.}) + S_{fi}^{(2)}(\mathrm{exch.})$$
$$= e^2 e_p^2 \int \mathrm{d}^4x \mathrm{d}^4y \mathrm{d}^4X \mathrm{d}^4Y [\bar{\psi}_f(x)\gamma^\mu S_F(x-y)\gamma^\nu \psi_i(y)]$$
$$\times \{D_F(x-X) D_F(y-Y) [\bar{\psi}_f^p(X)\gamma_\mu S_F^p(X-Y)\gamma_\nu \psi_i^p(Y)]$$
$$+ D_F(x-Y) D_F(y-X) [\bar{\psi}_f^p(X)\gamma_\nu S_F^p(X-Y)\gamma_\mu \psi_i^p(Y)]\}. \tag{9}$$

花括号中的第二项为交换项。我们也注意到相对子直接项，指标 μ 和 ν 发生了交换。这点是容易理解的，因为 Y 处的光子传到 x，从而在 x 处的 γ^μ 必须有一个在 Y 处的 γ_μ 相对应。流-流相互作用实现了这一结构。这一点也可通过将交换项加到(6)式两光子场的直接项中来加以理解：

$$A_\mu(x)A_\nu(y) = A_\mu(x)A_\nu(y)|_{\mathrm{dir}} + A_\mu(x)A_\nu(y)|_{\mathrm{exch}}, \tag{10}$$

这里第一项贡献与(6)式相同。第二项贡献来自于这种可能性，矢量势 $A_\mu(x)$ 所描述的光子是由 Y 点的质子发出，点 Y 早于产生场 $A_\nu(y)$ 的第二光子相互作用点 X。当然，赋予坐标 X 和 Y 的名称是不重要的，而且它们可以交换，因为这些是积分变量。然而，要紧的是两个相互作用顶角的次

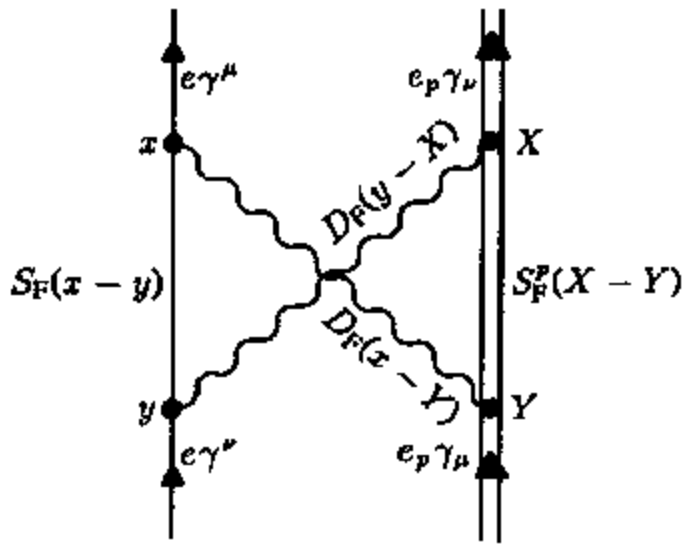


图 3.16　相应于图 3.15 的交换图。光子线是交叉的

序。所以交换贡献

$$A_\mu(x)A_\nu(x)\,|_{\text{exch}} -ie_p^2\int d^4X d^4Y\ D_F(x-X)D_F(y-Y)$$
$$\times\ \bar{\psi}_\beta^p(X)\gamma_\nu S_F^p(X-Y)\gamma_\mu\psi_\alpha^p(Y) \qquad (11)$$

与(6)式直接贡献的差别也就在于矩阵 γ_μ 和 γ_ν 被交换了。两个贡献在(9)被加在一起。

注意，(9)中含有一个对四个时间变量 x_0，y_0，X_0，Y_0 的积分，每个积分范围延伸到整个实轴。这就意味着允许所有 4！＝24 种可能的时序存在，它们都将对幅有贡献。利用能描述相关时间的两个方向传播的协变 Feynman 传播子 S_F 和 D_F，这些就能自动被考虑到。

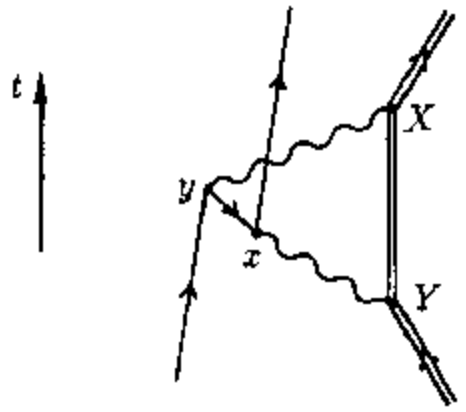


图 3.17　图 3.16 所画的一般交换图的一种时序，与 Feynman 图的通常约定不同，这里顶角的相对位置已被假定且具有物理意义。

作为一个例子，让我们看一下指定的时序 $X_0 > y_0 > x_0 > Y_0$。相应的交换图画在图 3.17 中。第一个光子在 Y 处从质子发出，它传到 x 处，在那儿它产生了 e^+e^- 对[①]。第二个光子在点 y 处由对湮灭而产生，然后在 X 处被质子吸收。或许你能画出总共 $2\cdot 24 = 48$ 个不同的图，但我们能将它们缩合成两个图，一个是直接图，一个是交换图。这能清楚表明当在坐标空间画一个 Feyn-

① 包含质子-反质子对的虚产生可能出现。然而，这隐含着在能量上并不能证明将质子作为基本 Dirac 粒子是正确的。

man 图时，顶角的绝对位置并不意味着一个特定的时序。所有这些都是图形的拓扑结构。

为了形成通用的规则，我们现将考虑出现在 S 矩阵元中的因子 i，非对角 S-矩阵元一般地含有一个因子 $-\mathrm{i}$（参见 6(1.86)和(2.42)）。为了二阶跃迁流的因子化，我们在(3)式的电子传播子的表达式中引进因子 i，写作 $\mathrm{i}S_{\mathrm{F}}(x-y)$。对质子传播子也一样，即，$S_{\mathrm{F}}^{\mathrm{p}}(x-y)\to\mathrm{i}S_{\mathrm{F}}^{\mathrm{p}}(x-y)$。为满足对称性需要，我们对每一个 Fermi 子传播子都作这样的处理。若我们同时用 $\mathrm{i}S_f(x-y)$ 取代每一个电子内线，利用 $(-\mathrm{i}A)$ 取代每个光子场 A，这在实际上是能够做到的。从而总的第 n 阶散射幅不变，因为（参见：例子(1)或(2.44)）沿着 Feynman 图上的一根电子线，我们可以写出

$$-\mathrm{i}e\not{A}S_{\mathrm{F}}\,e\not{A}S_{\mathrm{F}}\cdots e\not{A}=(-\mathrm{i}e\not{A})\mathrm{i}S_{\mathrm{F}}(-\mathrm{i}e\not{A})\cdots(-\mathrm{i}e\not{A})\,. \tag{12}$$

注意，整个因子 $(-\mathrm{i})$ 被含进散射幅的第一位位置的额外因子 A 中去了。另外，我们可以说在每一个电子顶角（产生或吸收一个光子 A 的点），我们除 γ_μ 外再写上一个因子 $-\mathrm{i}$。因为对称性的原因，我们也必须在每个质子顶角添上因子 $-\mathrm{i}$ 和在每一个质子传播子 $S_{\mathrm{F}}^{\mathrm{p}}$ 上添上因子 i。如果在每个光子传播子 D_{F} 上也加上因子 i，我们将会得到协调的描述。我们容易验证这种处理确实能给出(6)式的两光子场的正确的总体因子：

$$\begin{aligned}A_\mu(x)A_\nu(y)\big|_{\mathrm{dir}}=&\int\mathrm{d}^4X\mathrm{d}^4Y\;\mathrm{i}D_{\mathrm{F}}(x-Y)\mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\mathrm{p}}(y-Y)\\&\times\bar{\psi}_f(X)(\quad\mathrm{i}e_p)\gamma_\mu\mathrm{i}S_{\mathrm{F}}^{\mathrm{p}}(X-Y)(-\mathrm{i}e_p)\gamma_\nu\psi_i^{\mathrm{p}}(Y)\,.\end{aligned}\tag{13}$$

推广这一结果，我们得到 i 因子的一般规则：图上每一个顶角处（电子或质子顶角）有个因子 $(-\mathrm{i})$，每根线（无论是电子、质子，还是光子线）有 $(+\mathrm{i})$ 因子。容易发现，这规则不改变(9)式中幅 $S_{fi}^{(2)}$。

下面计算中，我们将应用这一规则，因而，我们不必再担心 i 因子，从而也就不要操心图的位相了。

实际上，在动量空间中计算是方便的。所以我们定出(8)表达式的 Fourier 变换。外粒子（即入射和出射的电子和质子）用平面波描述，这正像我们以前所做的一样（参见(3.2)、(3.3)和(3.54)）。(9)式的第一项变为

$$\begin{aligned}S_{fi}^{(2)}(\mathrm{dir.})=&\frac{(4\pi)^2e^4}{V^2}\int\mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\mathrm{d}^4X\mathrm{d}^4Y\\&\times\sqrt{\frac{m_0^2}{E_fE_i}}\sqrt{\frac{M_0^2}{E_f^{\mathrm{p}}E_i^{\mathrm{p}}}}\int\frac{\mathrm{d}^4q_1}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4q_2}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4P}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_1\cdot(x-X)}}{q_1^2+\mathrm{i}\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_2\cdot(y-Y)}}{q_2^2+\mathrm{i}\varepsilon}\\&\times\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_f\cdot x}\bar{u}(p_f,s_f)\gamma^\mu\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{\not{p}-m_0+\mathrm{i}\varepsilon}\gamma^\nu u(p_i,s_i)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_i\cdot y}\right]\\&\times\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}P_f\cdot X}\bar{u}(P_f,S_f)\gamma_\mu\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}P\cdot(X-Y)}}{\not{P}-M_0+\mathrm{i}\varepsilon}\gamma_\nu u(P_i,S_i)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}P_i\cdot Y}\right].\end{aligned}\tag{14}$$

这里我们已用到来自于(2.7)、(2.13)和(2.19)式的电子和质子传播子的表达式以及(3.50)式的光子传播子的 Fourier 表达式。我们容易进行对空间坐标积分

$$\int\mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\mathrm{d}^4X\mathrm{d}^4Y\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_1\cdot(x-X)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_2\cdot(y-Y)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_f\cdot x}$$

$$\times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_i\cdot y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}P_f\cdot X}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}P\cdot(X-Y)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}P_i\cdot Y}$$

$$= (2\pi)^4\delta^4(q_1 + p - p_f)(2\pi)^4\delta^4(q_2 - p + p_i)$$

$$\times (2\pi)^4\delta^4(-q_2 - P + P_i)(2\pi)^4\delta^4(-q_1 + P - P_f)\,. \tag{15}$$

每一个 δ^4 函数表示一个四顶角处的能量-动量守恒。现在，我们能对(12)式中出现的动量变量 q_2，p 和 P 进行积分

$$\int \frac{\mathrm{d}^4q_1}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4q_2}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4P}{(2\pi)^4}(2\pi)^4\delta^4(q_1 + p - p_f)$$

$$\times (2\pi)^4\delta^4(q_2 - p + p_i)(2\pi)^4\delta^4(-q_2 - P + P_i)$$

$$\times (2\pi)^4\delta^4(-q_1 + P - P_f)\frac{1}{q_1^2 + \mathrm{i}\varepsilon}\frac{1}{q_2^2 + \mathrm{i}\varepsilon}$$

$$\times \left[\bar{u}(p_f,s_f)\gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - m_0 + \mathrm{i}\varepsilon}\gamma^\nu u(p_i,s_i)\right]$$

$$\times \left[\bar{u}(P_f,S_f)\gamma_\mu \frac{1}{\not{P} - M_0 + \mathrm{i}\varepsilon}\gamma_\nu u(P_i,S_i)\right]$$

$$= (2\pi)^4\delta^4(P_f + p_f - P_i - p_i)\int \frac{\mathrm{d}^4q_1}{(2\pi)^4}\frac{1}{q_1^2 + \mathrm{i}\varepsilon}\frac{1}{(q - q_1)^2 + \mathrm{i}\varepsilon}$$

$$\times \left[\bar{u}(p_f,s_f)\gamma^\mu \frac{1}{\not{p}_f - \not{p}_1 - m_0 + \mathrm{i}\varepsilon}\gamma^\nu u(p_i,s_i)\right]$$

$$\times \left[\bar{u}(P_f,S_f)\gamma_\mu \frac{1}{\not{P}_f + \not{p}_1 - M_0 + \mathrm{i}\varepsilon}\gamma_\nu u(P_i,S_i)\right], \tag{16}$$

其中

$$q \equiv p_f - p_i = -(P_f - P_i) \tag{17}$$

为给电子固定的动量转移。按照(14)，在直接散射图中对二阶 S-矩阵元的贡献为

$$S_{fi}^{(2)}(\mathrm{dir.}) = \frac{(4\pi)^2e^4}{V^2}\sqrt{\frac{m_0^2}{E_fE_i}}\sqrt{\frac{M_0^2}{E_f^pE_i^p}}(2\pi)^4\delta^4(P_f + p_f - P_i - p_i)$$

$$\times \int \frac{\mathrm{d}^4q_1}{(2\pi)^4}\frac{1}{q_1^2 + \mathrm{i}\varepsilon}\frac{1}{(q - q_1)^2 + \mathrm{i}\varepsilon}$$

$$\times \left[\bar{u}(p_f,s_f)\gamma^\mu \frac{1}{\not{p}_f - \not{p}_1 - m_0 + \mathrm{i}\varepsilon}\gamma^\nu u(p_i,s_i)\right]$$

$$\times \left[\bar{u}(P_f,S_f)\gamma_\mu \frac{1}{\not{P}_f + \not{p}_1 - M_0 + \mathrm{i}\varepsilon}\gamma_\nu u(P_i,S_i)\right]. \tag{18}$$

$\delta^4(P_f + p_f - P_i - p_i)$ 确保了能量-动量守恒。考虑到这些守恒定律自动得以保证，这是十分令人满意的。我们必须进一步考虑对四动量 q_1 的积分 $\int \mathrm{d}^4q_1/(2\pi)^4\cdots$，$q_1$ 代表图中(见图 3.18)闭合回路圈中“环绕”的四动量，它与 Fourier 空间的过程(18)对应。正如我们已在(15)中所发现的，在每个顶角能量-动量守恒自动满足，例如右上角的顶角有

$$P_f + q_1 - q_1 = P_f,$$

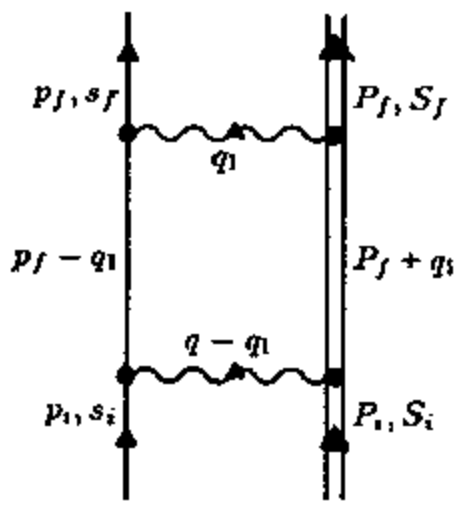


图 3.18 在动量空间中电子-正电子散射的二阶直接图

左上角有

$$p_f - q_1 + q_1 = p_f,$$

右下角有

$$p_i + (q - q_1) = p_f - q_1,$$

及最后，右下角有

$$P_i - (q - q_1) = P_f + q_1.$$

根据(18)式，我们必须对所有的中间动量 q_1 积分。图 3.18 的圈中的中间动量正好具有恰当的值使满足总动量关系。

$$P_f + p_f = P_i + p_i$$

此外，每个顶角对(18)式贡献一个形式为 $-ie\gamma_\mu$ 的因子，而每个外线粒子给出一个因子 $\sqrt{m_0/E}$。注意，(18)式中矩阵因子

$$\frac{i}{\not p - m + i\varepsilon}$$

为插在代表顶角的 γ 矩阵之间。这些因子代表了虚 Fermi 子内线的传播子。

我们不久就会具备足够实践经历能直接写下给定 Feynman 图相对应的正确数学表达式。例如，我们容易画出与直接图(图 3.18)相对应的交换图，并将其表达成动量空间形式(它被画在图 3.19中)，它对一个与直接图的同样的振幅有贡献。我们又一次在每个顶角上有各自的能动量守恒，它导致了总的能量-动量守恒。根据我们刚刚推得的规则，我们能立刻写出该图对幅 $S_{fi}^{(2)}$ 的贡献。

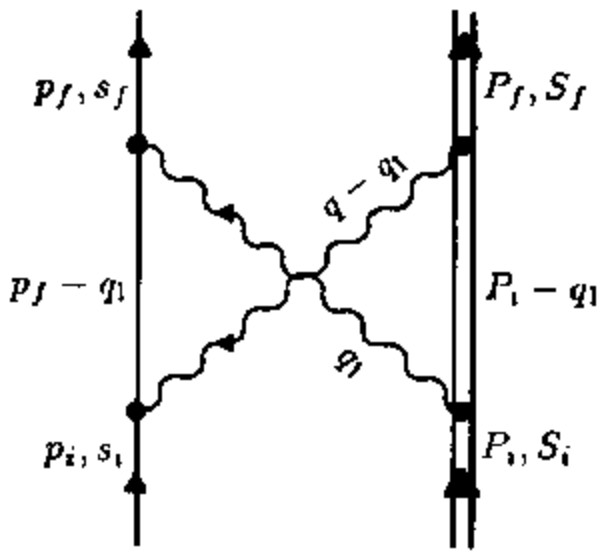


图 3.19 动量空间的交换图

$$S_{fi}^{(2)}(\text{exch.}) = \frac{(4\pi)^2 e^4}{V^2}\sqrt{\frac{m_0^2}{E_f E_i}}\sqrt{\frac{M_0^2}{E_f^p E_i^p}}(2\pi)^4\delta^4(P_f + p_f - P_i - p_i)$$

$$\times \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4}\frac{1}{q_1^2 + i\varepsilon}\frac{1}{(q - q_1)^2 + i\varepsilon}$$

$$\times \left[\bar{u}(p_f,s_f)\gamma^\mu \frac{1}{\not p_f - \not p_1 - m_0 + \mathrm{i}\epsilon}\gamma^\nu u(p_i,s_i)\right]$$

$$\times \left[\bar{u}(P_f,S_f)\gamma_\nu \frac{1}{\not P_i - \not p_1 - M_0 + \mathrm{i}\epsilon}\gamma_\mu u(P_i,S_i)\right]. \tag{19}$$

进行(18)和(19)式中的 4 维积分是件艰巨的任务。在静的类点荷电质子极限下，这首先由 Dalitz 完成[①]。我们将在练习 3.7 中深入讨论这一问题。但是我们在此提醒的是尽管在这个特殊情况下，由于 Coulomb 势的无限范围还会引起一些麻烦。

练　习

3.7　两光子交换的静态极限

问题：写出对应图 3.20 两个图形中电子和质子间双光子交换散射幅。证明在静态极限下(质子有无限大质量)结果与电子在一个 Coulomb 势上散射的二阶 Born 近似幅相一致。

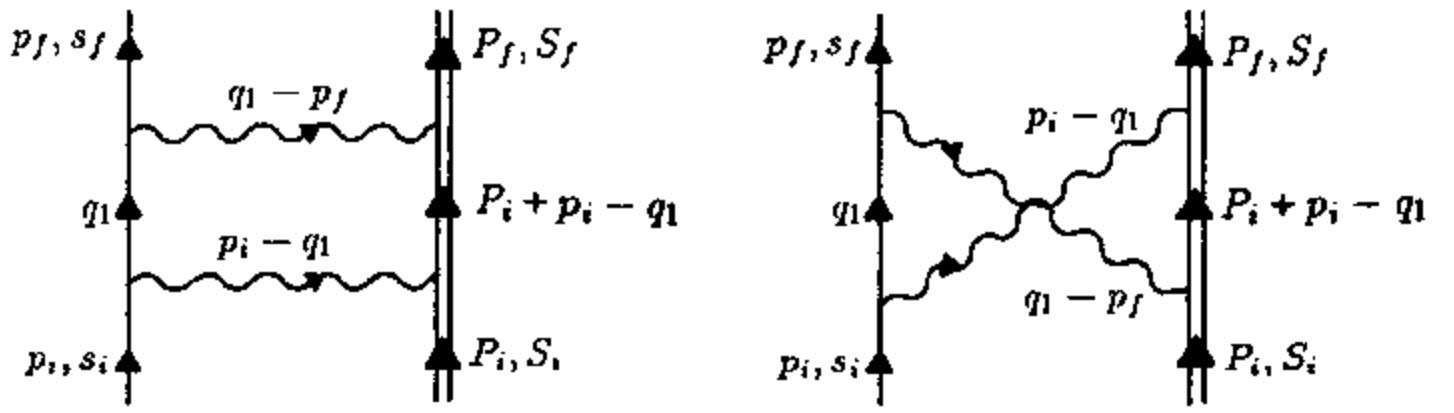


图 3.20　直接和交换二光子散射图

解答：利用 Feynman 规则，两个图之和能被写成(四个内线和四个顶角所引起的位相因子为 $(\mathrm{i})^4(-\mathrm{i})^4=+1$)

$$S_{fi}^{(2)} = \frac{e^4}{V^2}\sqrt{\frac{m_0^2}{E_f E_i}}\sqrt{\frac{M_0^2}{E_f^p E_i^p}}(2\pi)^4\delta^4(P_f + p_f - P_i - p_i)$$

$$\times \int \frac{\mathrm{d}^4 q_1}{(2\pi)^4}\frac{4\pi}{(q_1 - p_f)^2 + \mathrm{i}\epsilon}\frac{4\pi}{(p_i - q_1)^2 + \mathrm{i}\epsilon}$$

$$\times \left[\bar{u}(p_f,s_f)\gamma_\mu \frac{1}{\not p_1 - m_0 + \mathrm{i}\epsilon}\gamma_\nu u(p_i,s_i)\right]$$

$$\times \bar{u}(P_f,S_f)\left[\gamma^\mu \frac{1}{\not P_i + \not p_i - \not p_1 - M_0 + \mathrm{i}\epsilon}\gamma^\nu\right.$$

① 参见 R. H. Dalitz: Proc. Roy. Soc. (London) **A206**, 509(1951).

$$+\gamma^{\nu}\frac{1}{\not P_f-\not p_i+\not p_1-M_0+\mathrm{i}\epsilon}\gamma^{\mu}\Big]u(P_i,S_i)\ , \tag{1}$$

式中大写字母是对质子而言，小写字母对应电子。在动量变量的标注法上，(1)式与例 3.6 中相应表达式(16)和(17)不同。如果 q_1 被 p_f-q_1 所取代，两结果一致，这是容许的，因为 q_1 只是一个中间变量。在非常大质子质量 ($M_0\gg E_i$, E_f) 极限下，反冲能量变得可忽略不计，即

$$E_f^p\approx E_i^p\to M_0,$$

$$\frac{M_0^2}{E_f^pE_i^p}\to 1,$$

$$\delta(E_f^p+E_f-E_i^p-E_i)\to\delta(E_f-E_i),$$

$$u(P_f,S_f)\to u(0,S_f),$$

$$u(P_i,S_i)\to u(0,S_i).$$

仅取 M_0 的领头级时，包含质子旋量(1)的矩阵元化为

$$\begin{aligned}
&P^{\mu\nu}\\
&\to\bar u(0,S_f)\Big[\gamma^{\mu}\frac{M_0\gamma_0+\not p_i-\not p_1+M_0}{(P_i+p_i-q_1)^2-M_0^2+\mathrm{i}\epsilon}\gamma^{\nu}+\\
&\quad+\gamma^{\nu}\frac{M_0\gamma_0-\not p_i+\not p_1+M_0}{(P_f-p_i+q_1)^2-M_0^2+\mathrm{i}\epsilon}\gamma^{\mu}\Big]u(0,S_i)\\
&\to\bar u(0,S_f)\Big[\gamma^{\mu}\frac{M_0(\gamma_0+1)}{M_0^2+2M_0(E_i-q_1^0)-M_0^2+\mathrm{i}\epsilon}\gamma^{\nu}\\
&\quad+\gamma^{\nu}\frac{M_0(\gamma_0+1)}{M_0^2-2M_0(E_i-q_1^0)-M_0^2+\mathrm{i}\epsilon}\gamma^{\mu}\Big]u(0,S_i)\\
&=\bar u(0,S_f)\Big[\gamma^{\mu}\frac{\gamma_0+1}{2(E_i-q_1^0)+\mathrm{i}\epsilon}\gamma^{\nu}+\gamma^{\nu}\frac{\gamma_0+1}{-2(E_i-q_1^0)+\mathrm{i}\epsilon}\gamma^{\mu}\Big]u(0,S_i)\ .
\end{aligned}\tag{2}$$

现在我们有

$$\gamma_0+1=2\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\ ,$$

以及 $u(0,s)$ 仅有上分量，因此

$$u(0,S)=\begin{pmatrix}\chi_s\\0\end{pmatrix},\gamma_0u(0,S)=u(0,S)\ .$$

另一方面

$$\gamma u(0,S)=\begin{pmatrix}0\\-\sigma\chi_s\end{pmatrix}$$

仅有下分量不为零，从而

$$(\gamma_0+1)\gamma u(0,S)=0\ .$$

所以，$P^{\mu\nu}$ 中仅有的非零项是

$$P^{\mu\nu}=g^{\mu0}g^{\nu0}u^{\dagger}(0,S_f)u(0,S_i)\left(\frac{1}{E_i-q_1^0+\mathrm{i}\epsilon}-\frac{1}{E_i-q_1^0-\mathrm{i}\epsilon}\right)\ . \tag{3}$$

两个极点项能合并成一个 δ 函数，这能从下面恒等式得到：

$$\frac{1}{x \pm \mathrm{i}\varepsilon} = P\left(\frac{1}{x}\right) \mp \mathrm{i}\pi\delta(x) . \tag{4}$$

从面，最终我们得到

$$P^{\mu\nu} = -2\pi\mathrm{i}\, g^{\mu 0} g^{\nu 0} \delta_{s_f s_i} \delta(E_i - q_1^0) . \tag{5}$$

把 P 代入 S_{fi} 中，考虑到质子的自由度（自旋，动量）是不被观测的。从而在散射截面中能被求和（终态值 $\boldsymbol{P}_f$, S_f）或平均（初态自旋 S_i），我们能作代换

$$\begin{aligned} &(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{P}_f + \boldsymbol{p}_f - \boldsymbol{P}_i - \boldsymbol{p}_i) \to V , \\ &\delta_{S_f S_i} \to 1 . \end{aligned} \tag{6}$$

通过把直观导出的关系 $(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{0}) \to V$（3.2 节）应用到确定散射截面，我们就能理解这一点。也就是说，自旋平均和动量积分导出：

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\sum_{S_i S_f}\int V \frac{\mathrm{d}^3 P_f}{(2\pi)^3}[(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{P}_f + \boldsymbol{p}_f - \boldsymbol{P}_i - \boldsymbol{p}_i)]^2 \delta_{S_i S_f} \\ &= \frac{1}{2} 2\int V \frac{\mathrm{d}^3 P_f}{(2\pi)^3}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{P}_f + \boldsymbol{p}_f - \boldsymbol{P}_i - \boldsymbol{p}_i)[\underbrace{(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{0})}_{V}] \to V^2 . \end{aligned}$$

如果我们在散射矩阵元中作替换(6)并完全不管质子，则可获得相同的效果。在对 $q_1{}^0$ 积分后，我们得到

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(2)} \to &\frac{-\mathrm{i}e^4}{V}\sqrt{\frac{m_0^2}{E_f E_i}} 2\pi\delta(E_f - E_i)\int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}_f|^2} \frac{4\pi}{|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}_i|^2} \\ &\times \left[\bar{u}(p_f, s_f) \frac{E_i\gamma_0 + \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\gamma} + m_0}{|\boldsymbol{p}|^2 - |\boldsymbol{q}|^2 + \mathrm{i}\varepsilon} u(p_i, s_i)\right] , \end{aligned} \tag{7}$$

这在 $M_0 \to \infty$ 极限下成立。(7)式恰好是电子在荷电为 e 的 Coulomb 势上散射二阶 Born 近似的散射幅。正如例 3.4 中所提到的，由于 Coulomb 相互作用的长程特性，积分是发散的。

3.3　全同 Fermi 子上的散射

利用电子-电子和电子-正电子散射这些例子，我们将讨论全同 Fermi 子散射和粒子-反粒子散射的一般情况。为此，我们能把电子-质子散射（3.2 节）中的许多结果拿来。然而，散射粒子同类型会使问题稍复杂些。无法分辨出两个出现的电子哪一个是“入射”粒子，哪一个是“靶”粒子。正如图 3.21 所示，这种不定性在经典力学中就已存在。然而，经典上，你可跟踪粒子轨迹而区别它们。在量子物理中，这是不再可能了，从而两个过程相互干涉。所以，两个不可区分的过程的幅必须作相干叠加，这两个过程的区别在于动量和自旋变量 (p'_1, s'_1) 和 (p'_2, s'_2) 与出射电子线的匹配不同。

图 3.22 给出了电子-电子散射的两个最低阶 Feynman 图。该图也标明了这种散射的运动学

条件。我们注意到电子-电子散射幅在动量空间中直接可写为(比较 3.2 节中(3.59)式)

$$S_{fi}=S_{fi}(\text{dir.})+S_{fi}(\text{exch.})$$

$$=-e^2\frac{1}{V^2}\sqrt{\frac{m_0^2}{E_1E_2}}\sqrt{\frac{m_0^2}{E_1'E_2'}}(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_1'-p_2')$$

$$\times\left\{+[\bar{u}(p_1',s_1')(-\mathrm{i}\gamma_\mu)u(p_1,s_1)]\frac{\mathrm{i}4\pi}{(p_1-p_1')^2}[\bar{u}(p_2',s_2')(-\mathrm{i}\gamma^\mu)u(p_2,s_2)]\right.$$

$$\left.-[\bar{u}(p_2',s_2')(-\mathrm{i}\gamma_\mu)u(p_1,s_1)]\frac{\mathrm{i}4\pi}{(p_1-p_2')^2}[\bar{u}(p_1',s_1')(-\mathrm{i}\gamma^\mu)u(p_2,s_2)]\right\}. \quad (3.115)$$

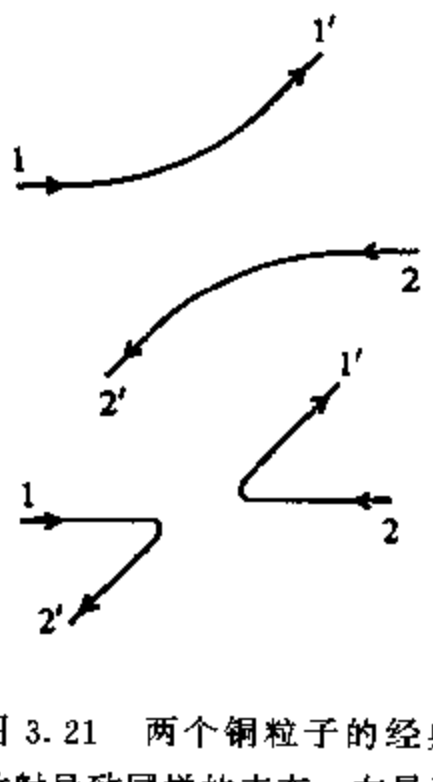


图 3.21 两个铜粒子的经典散射导致同样的末态。在量子理论中两个过程就不可区分

因为电子服从 Fermi 统计,交换图有一个负号。就电子在终态中交换($p_1'\longleftrightarrow p_2'$)或在初态中交换($p_1\longleftrightarrow p_2$)而言,这就给出了反对称的散射幅。假如我们计算全同 Bose 粒子的散射,就这些全同 Bose 子间交换而言,总散射幅将是对称的。3.7 节中,我们将阐述这一点。因为那里,Compton 散射幅对子交换光子是对称的,光子当然是 Bose 子。

重要评注:

(i) 矩阵元 $\bar{u}\gamma_\mu u$ 是数(每一个 μ 有这样一个数),从而它的顺序能交换:

$$\bar{u}(1)\gamma_\mu u(1)\bar{u}(2)\gamma_\mu u(2)=\bar{u}(2)\gamma_\mu u(2)\bar{u}(1)\gamma^\mu u(1),$$

(ii) (1)式中没有额外归一化因子。原则上,可以考虑诸如 $1/\sqrt{2}$ 或 1/2 的因子……这儿没有。计算微分截面的规则在出现全同粒子时,也没有改变。我们仅需在计算总散射截面时考虑引进一个 1/2 因子以避免末态中全同粒子的重复计数(double-counting)。

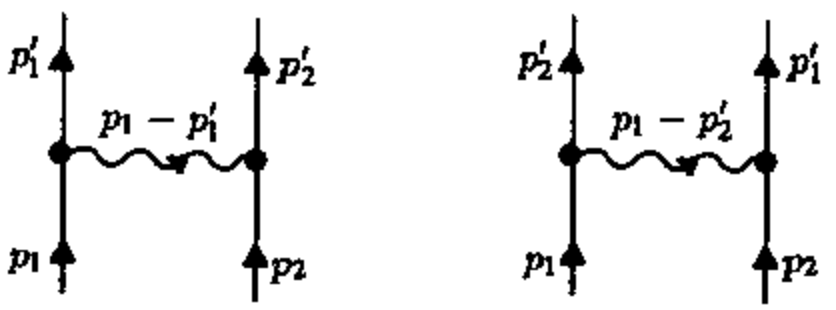


图 3.22 两个电子的低阶散射的直接图和交换图

另一方面再也不会因为初态中全同粒子的存在而需进一步引入因子,因为不管是否有全同粒子的存在,入射通量不变。我们可通过考虑向前散射的散射幅(1)来检查我们对电子-电子散射情况中的考虑是否正确。向前散射意味着小动量转移$(p_1-p_1')^2$。所以在(1)式直接项与交换项相比是大的,从而交换项能被略去。在这种情况下,(1)就化为已在 3.2 节式(3.59)中导出的电子-质子散射幅(最低阶)。

现在我们确定非极化电子散射微分截面。我们从下式出发

$$\mathrm{d}\sigma = \int \frac{|S_{fi}|^2}{T \cdot V \cdot \frac{1}{V}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{V} v_{\mathrm{rel}}} \frac{V\mathrm{d}^3 p_1'}{(2\pi)^3} \frac{V\mathrm{d}^3 p_2'}{(2\pi)^3} . \tag{3.116}$$

第一个因子表示每单位体积和时间内每电子$(1/V)^{-1}$的跃迁速率，第二个因子表示除以入射电子通量，最后两个因子给出了位相空间内末态数。我们将在入射电子的质心坐标系中计算 $\mathrm{d}\sigma$。这个坐标系中，两粒子有相同能量 $E_1 = E_2 = E$。在碰撞中，质心能量不变，即，它是 $E_1' = E_2' = E$，在质心坐标系中，动量守恒给出

$$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1' + \boldsymbol{p}_2' = 0, \quad \text{于是} \quad \boldsymbol{p}_1' = -\boldsymbol{p}_2'.$$

由此得到能量

$$E_1' = \sqrt{m_0^2 + \boldsymbol{p}_1'^2} = E_2' = \sqrt{m_0^2 + \boldsymbol{p}_2'^2} .$$

能量守恒要求

$$E_1 + E_2 = E_1' + E_2',$$

它给出

$$E_1 = E_2 = E_1' = E_2' = E .$$

β 为电子在质心系的速度，在质心系中相互碰撞的电子的相对速度为

$$v_{\mathrm{rel}} = 2\beta . \tag{3.117}$$

在相对论能量下，这相对速度趋于光速的两倍。初看，这似乎与狭义相对论相矛盾，其实不然，因为另一个电子所看到的一个电子速度 v 是由有名的速度相加方程给出的

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2} = \frac{\beta + \beta}{1 + \beta \cdot \beta^C} ,$$

对 $\beta \to 1$，这最多能达到光速$(v \to c)$。然而，从质心系中观察电子，它们的相对速度正好是它们在该坐标系中速度之差，这由(3.117)所表达。这也可从(3.77)式中所引进的协变通量因子得到：

$$\frac{m_0}{E_1}\frac{m_0}{E_2}\frac{1}{|v_{\mathrm{rel}}|} = \frac{m_0^2}{\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_0^4}} = \frac{m_0^2}{\sqrt{(E^2 + \boldsymbol{p}^2)^2 - m_0^4}}$$

$$= \frac{m_0^2}{E^2}\frac{1}{2|\boldsymbol{p}|/E} . \tag{3.118}$$

从(3.115)和(3.116)，我们得到自旋平均的散射微分截面

$$\mathrm{d}\bar{\sigma} = \frac{m_0^4}{(2\pi)^2 E^4 2\beta} \int \overline{|M_{fi}|^2} \delta^4(p_1' + p_2' - p_1 - p_2)\mathrm{d}^3 p_1' \mathrm{d}^3 p_2', \tag{3.119}$$

其中，不变平方矩阵元为

$$\overline{|M_{fi}|^2} = e^4 (4\pi)^2 \frac{1}{4} \sum_{s_1' s_1} \sum_{s_2' s_2} \left| \bar{u}(p_1', s_1')\gamma_\mu u(p_1, s_1) \frac{1}{(p_1 - p_1')^2} \bar{u}(p_2', s_2')\gamma^\mu u(p_2, s_2) \right.$$

$$\left. - \bar{u}(p_2', s_2')\gamma_\mu u(p_1, s_1) \frac{1}{(p_1 - p_2')^2} \bar{u}(p_1', s_1')\gamma^\mu u(p_2, s_2) \right|^2 . \tag{3.120}$$

对初态自旋 s_1和 s_2的平均导致因子 1/4。我们能容易地确定对自旋的求和，并借助于 3.1 节中恒

等式 (3.33)将它们转换成求迹。因为 $\bar{\gamma}_\mu = \gamma_\mu$(3.29a)，我们得到

$$\begin{aligned}\overline{|M_{fi}|^2} = e^4(4\pi)^2 \frac{1}{4}\Big\{ & \frac{1}{(p_1-p_1')^4}\,\mathrm{Tr}\left[\frac{\not p_1'+m_0}{2m_0}\gamma_\mu\frac{\not p_1+m_0}{2m_0}\gamma_\nu\right] \\ & \times \mathrm{Tr}\left[\frac{\not p_2'+m_0}{2m_0}\gamma^\mu\frac{\not p_2+m_0}{2m_0}\gamma^\nu\right] \\ & - \frac{1}{(p_1-p_1')^2(p_1-p_2')^2}\,\mathrm{Tr}\left[\frac{\not p_1'+m_0}{2m_0}\gamma_\mu\frac{\not p_1+m_0}{2m_0}\gamma_\nu\frac{\not p_2'+m_0}{2m_0}\gamma^\mu\frac{\not p_2+m_0}{2m_0}\gamma^\nu\right] \\ & + (p_1' \longleftrightarrow p_2')\Big\}\,. \end{aligned} \tag{3.121}$$

我们已经把能从已写下的表达式中作 p_1' 和 p_2' 间的置换就能将得到的项简写成 $(p_1' \longleftrightarrow p_2')$。(3.121)包含了一个对 4 个求迹项的求和。这些项是对含两项的振幅取平方而来。让我们来考虑这些迹，它们的来源以及对它们的详细的计算。我们从(3.121)式中的第一个求迹入手，它已在 3.2 节(3.33)式中遇到过。我们将在这儿重复计算以便熟悉求迹技巧，能得到(3.121)式第一项贡献的自旋求和显然是

$$\begin{aligned} & \sum_{s_1's_1}\sum_{s_2's_2}(\bar{u}(p_1',s_1')\gamma_\mu u(p_1,s_1)\bar{u}(p_2',s_2')\gamma^\mu u(p_2,s_2)) \\ & \quad \times (\bar{u}(p_1',s_1')\gamma_\nu u(p_1,s_1)\bar{u}(p_2',s_2')\gamma^\nu u(p_2,s_2))^* \\ = & \Big[\sum_{s_1's_1}(\bar{u}(p_1',s_1')\gamma_\mu u(p_1,s_1))(\bar{u}(p_1',s_1')\gamma_\nu u(p_1,s_1))^*\Big] \\ & \times\Big[\sum_{s_2's_2}(\bar{u}(p_2',s_2')\gamma^\mu u(p_2,s_2))(\bar{u}(p_2',s_2')\gamma^\nu u(p_2,s_2))^*\Big]\,. \end{aligned} \tag{3.122}$$

只考虑第一个对 s_1'，s_1的求和就足够了，因为第二个对 s_2'，s_2 的求和有相同的结构。旋量积的复共轭能被改写成

$$\begin{aligned}(\bar{u}(p_2',s_2')\gamma_\nu u(p_2,s_2))^\dagger &= u^\dagger(p_2,s_2)\gamma_\nu^\dagger\gamma_0^\dagger u(p_2',s_2') \\ &= \bar{u}(p_2,s_2)\gamma_0\gamma_\nu^\dagger\gamma_0 u(p_2',s_2') \\ &= \bar{u}(p_2,s_2)\bar{\gamma}_\nu u(p_2',s_2')\,, \end{aligned} \tag{3.123}$$

其中带杠的 γ 矩阵 $\bar{\gamma}_\nu = \gamma_\nu$(见(3.29a))，通常自旋求和的推导要用到投影算符(3.31)

$$\sum_{s_1}u_\beta(p_1,s_1)\bar{u}_\lambda(p_1,s_1) = \left(\frac{\not p_1+m_0}{2m_0}\right)_{\beta\lambda}. \tag{3.124}$$

用这种方法对 s_1 和 s_1' 求和得

$$\begin{aligned} & \sum_{s_1's_1}(\bar{u}(p_1',s_1')\gamma_\mu u(p_1,s_1))(\bar{u}(p_1',s_1')\gamma_\nu u(p_1,s_1))^* \\ & \quad = \sum_{s_1's_1}(\bar{u}(p_1',s_1')\gamma_\mu u(p_1,s_1))(\bar{u}(p_1,s_1)\bar{\gamma}_\nu u(p_1',s_1')) \\ & \quad = \sum_{s_1'}\bar{u}(p_1',s_1')\gamma_\mu\left(\frac{\not p_1+m_0}{2m_0}\right)\bar{\gamma}_\nu u(p_1',s_1') \end{aligned}$$

$$= \sum_{\alpha\beta}\left(\gamma_\mu \frac{\not p_1 + m_0}{2m_0}\bar\gamma_\nu\right)_{\alpha\beta}\sum_{s_1'} u_\beta(p_1', s_1')\bar u_\alpha(p_1', s_1')$$

$$= \mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu \frac{\not p_1 + m_0}{2m_0}\bar\gamma_\nu \frac{\not p_1' + m_0}{2m_0}\right]. \tag{3.125}$$

类似地(3.122)中求和 $\sum_{s_2's_2}$ 能被算出，这样便给出总结果。

$$\sum_{s_1's_1}\sum_{s_2's_2}|(\bar u(p_1', s_1')\gamma_\mu u(p_1, s_1))(\bar u(p_2', s_2')\gamma^\mu u(p_2, s_2))|^2$$

$$= \mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu \frac{\not p_1 + m_0}{2m_0}\bar\gamma_\nu \frac{\not p_1' + m_0}{2m_0}\right]\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu \frac{\not p_2 + m_0}{2m_0}\bar\gamma^\nu \frac{\not p_2' + m_0}{2m_0}\right]. \tag{3.126}$$

因为 $\bar\gamma_\nu = \gamma_\nu$，这正好是(3.121)中的结果。现在我们考虑(3.120)中平方 $|\cdots|^2$ 中更复杂的混合项。这些项的第一项为

$$\sum_{s_1's_1}\sum_{s_2's_2}[(\bar u(p_1', s_1')\gamma_\mu u(p_1, s_1))(\bar u(p_2', s_2')\gamma^\mu u(p_2, s_2))]$$
$$\times[(\bar u(p_2', s_2')\gamma_\nu u(p_1, s_1))(\bar u(p_1', s_1')\gamma^\nu u(p_2, s_2))]^*$$
$$= \sum_{s_1's_1}\sum_{s_2's_2}(\bar u(p_1', s_1')\gamma_\mu u(p_1, s_1))(\bar u(p_1, s_1)\bar\gamma_\nu u(p_2', s_2'))$$
$$\times(\bar u(p_2', s_2')\gamma^\mu u(p_2, s_2))(\bar u(p_2, s_2)\bar\gamma^\nu u(p_1', s_1'))$$
$$= \sum_{s_1'}\sum_{s_2'}\left(\bar u(p_1', s_1')\gamma_\mu \frac{\not p_1 + m_0}{2m_0}\bar\gamma_\nu u(p_2', s_2')\right)$$
$$\times\left(\bar u(p_2', s_2')\gamma^\mu \frac{\not p_2 + m_0}{2m_0}\gamma^\nu u(p_1', s_1')\right)$$
$$= \sum_{s_1'}\bar u(p_1', s_1')\gamma_\mu \frac{\not p_1 + m_0}{2m_0}\bar\gamma_\nu \frac{\not p_2' + m_0}{2m_0}\gamma^\mu \frac{\not p_2 + m_0}{2m_0}\bar\gamma^\nu u(p_1', s_1')$$
$$= \mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu \frac{\not p_1 + m_0}{2m_0}\bar\gamma_\nu \frac{\not p_2' + m_0}{2m_0}\gamma^\mu \frac{\not p_2 + m_0}{2m_0}\bar\gamma^\nu \frac{\not p_1' + m_0}{2m_0}\right]. \tag{3.127}$$

在此推导过程中，利用恒等式(3.124)四次。借助 $\bar\gamma_\nu = \gamma_\nu$，我们发现这个求迹与(3.121)中第二个迹等同，它代表着直接与交换散射的干涉项。

为求出迹，我们参照数学附注 3.3 中证明的定理。让我们考虑来自于(3.121)相干项的含有 8 个 γ 矩阵的迹。为省事起见，这里我们仅考虑极端相对论极限 $E \gg m_0$(完整结果在练习 3.8 中导出)，从而，我们可以将正比于 m_0^2 的项略去，这样(3.127)中仅保留一项。用 $\gamma^\nu \not p_1' \gamma_\mu \not p_1 \gamma_\nu = -2\not p_1 \gamma_\mu \not p_1'$(参见数学附注 3.3 定理(8.2))，这个迹变成

$$\mathrm{Tr}\left[\not p_1' \gamma_\mu \not p_1 \gamma_\nu \not p_2' \gamma^\mu \not p_2 \gamma^\nu\right] = -2\,\mathrm{Tr}\left[\not p_1 \gamma_\mu \not p_1' \not p_2' \gamma^\mu \not p_2\right]$$
$$= -8 p_1' \cdot p_2'\,\mathrm{Tr}\left[\not p_1 \not p_2\right]$$
$$= -32(p_1' \cdot p_2')(p_1 \cdot p_2), \tag{3.128}$$

其中，我们在最后一步中已用到定理(8c)和(2)。在同样的极端相对论近似下，在直接项(3.121)

中出现的迹能被简化为

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\,[\not p_1'\gamma_\mu \not p_1\gamma_\nu]\,\mathrm{Tr}\,[\not p_2'\gamma^\mu \not p_2\gamma^\nu]\\&=4[(p_1')_\mu(p_1)_\nu+(p_1')_\nu(p_1)_\mu+p_1'\cdot p_1 g_{\mu\nu}]\\&\quad\times 4[(p_2')^\mu(p_2)^\nu+(p_2')^\nu(p_2)^\mu+p_2'\cdot p_2 g^{\mu\nu}]\\&=32[(p_1'\cdot p_2')(p_1\cdot p_2)+(p_1'\cdot p_2)(p_1\cdot p_2')]\,.\end{aligned}\tag{3.129}$$

这是3.2节(3.91)式计算的重复。引进两个单位矢量 $A^\sigma=g^\sigma_\mu$ 和 $B^\sigma=g^\sigma_\nu$，从而 $\gamma_\mu=A$和 $\gamma_\nu=B$，迹被转换成用"斜道"符号表达的形式。这给出 $p_1'\cdot A=(p_1')_\sigma A^\sigma=(p_1')_\mu$等，以及 $A\cdot B=A^\sigma B_\sigma=g_{\mu\nu}$。而且，在(3.129)的计算中，我们利用了数学附注3.3中定理2和定理3。

将(3.128)和(3.129)并在一起，不变矩阵元平方(3.121)在极端相对论极限下为

$$\begin{aligned}&\overline{|M_{fi}|^2_{\mathrm{UR}}}\\&=e^4(4\pi)^2\,\frac{1}{4}\left\{\frac{32[(p_1'\cdot p_2')(p_1\cdot p_2)+(p_1'\cdot p_2)(p_1\cdot p_2')]}{(p_1-p_1')^4(2m_0)^4}\right.\\&-\frac{[-32(p_1'\cdot p_2')(p_1\cdot p_2)]}{(p_1-p_2')^2(p_1-p_1')^2(2m_0)^4}+\frac{32[(p_1'\cdot p_2')(p_1\cdot p_2)+(p_2'\cdot p_2)(p_1'\cdot p_1)]}{(p_1-p_2')^4(2m_0)^4}\\&\left.-\frac{[-32(p_1'\cdot p_2')(p_1\cdot p_2)]}{(p_1-p_2')^2(p_1-p_1')^2(2m_0)^4}\right\}.\end{aligned}\tag{3.130}$$

且发现互为复共轭，又同时为实值的两相干项一致。在质心坐标系中，散射截面由(3.119)给出

$$\mathrm{d}\bar\sigma_{\mathrm{UR}}=\frac{m_0^4}{(2\pi)^2E^4 2\beta}\int\overline{|M_{fi}|^2_{\mathrm{UR}}}\delta^4(p_1'+p_2'-p_1-p_2)4E_1'E_2'\frac{\mathrm{d}^3p_1'}{2E_1'}\frac{\mathrm{d}^3p_2'}{2E_2'}\,.\tag{3.131}$$

积分中引进的因子 $4E_1'E_2'$是为了得到通常的不变位相因子 $\mathrm{d}^3p'/2E'$。

在质心坐标系中，我们有

$$\begin{aligned}&p_1=(E_1,\boldsymbol{p}_1)=(E,\boldsymbol{p}),\quad p_2=(E_2,\boldsymbol{p}_2)=(E,-\boldsymbol{p}),\\&p_1'=(E_1',\boldsymbol{p}_1')=(E',\boldsymbol{p}'),\quad p_2'=(E_2',\boldsymbol{p}_2')=(E',-\boldsymbol{p}')\,.\end{aligned}\tag{3.132}$$

在第二行，我们已用到给出 $\boldsymbol{p}_1'=-\boldsymbol{p}_2'$ 的动量守恒。在极端相对论极限 $E\gg m_0$，即 $\boldsymbol{p}^2=E^2-m_0^2\approx E^2$ 时，(3.130)中所需的标量积为

$$\begin{aligned}&p_1\cdot p_2=E^2-\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2=E^2+\boldsymbol{p}^2\approx E^2+E^2=2E^2,\\&p_1'\cdot p_2'=E'^2-\boldsymbol{p}_1'\cdot\boldsymbol{p}_2'=E'^2+\boldsymbol{p}'^2\approx E'^2+E'^2=2E'^2,\\&p_1\cdot p_2'=EE'-\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2'=EE'+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}'=EE'+|\boldsymbol{p}|\cdot|\boldsymbol{p}'|\cos\theta\\&\qquad\approx EE'(1+\cos\theta)=2EE'\cos^2\frac{\theta}{2}\,,\\&p_1'\cdot p_2=EE'-\boldsymbol{p}_1'\cdot\boldsymbol{p}_2=EE'+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}'\approx 2EE'\cos^2\frac{\theta}{2}\,,\\&p_1\cdot p_1'=EE'-\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_1'=EE'-|\boldsymbol{p}|\cdot|\boldsymbol{p}'|\cos\theta\approx 2EE'\sin^2\frac{\theta}{2}\,,\end{aligned}\tag{3.133}$$

式中 θ 表示散射角(参见图3.23)。(17)式中积分具有结构

$$I=\int\frac{\mathrm{d}^3p_1'}{2E'}\frac{\mathrm{d}^3p_2'}{2E'}\delta^4(p_1'+p_2'-p_1-p_2)f(p_1',p_2')\ , \tag{3.134}$$

其中，$f(p_1',p_2')$ 包含不变矩阵元平方(3.130)以及因子 $4E'^2$。根据3.2节(3.74)式对 p_2' 的积分能从三维推广到四维：

$$\int\frac{\mathrm{d}^3p_2'}{2E'}=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4p_2'\delta(p_2'\cdot p_2'-m_0^2)\Theta((p_2')_0)\ . \tag{3.135}$$

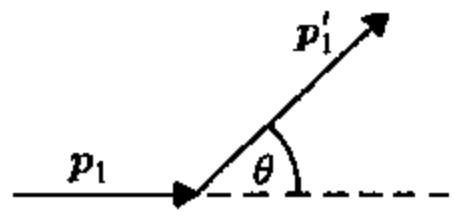


图 3.23　散射角 θ 的定义

这积分"耗掉"(3.134)中四维 δ 函数而得到

$$\begin{aligned}I=&\int\frac{|\boldsymbol{p}_1'|^2\mathrm{d}|\boldsymbol{p}_1'|\mathrm{d}\Omega_1'}{2E'}\delta[(p_1+p_2-p_1')^2-m_0^2]\\&\times\Theta(2E-E')f(p_1',p_2'=p_1+p_2-p_1')\\=&\int_0^{2E}\frac{1}{2}|\boldsymbol{p}_1'|\mathrm{d}E'\mathrm{d}\Omega_1'\delta[(p_1+p_2)^2-2(p_1+p_2)\cdot p_1']f(p_1',p_2'=p_1+p_2-p_1')\\=&\frac{\mathrm{d}\Omega_1'}{2}\int_0^{2E}|\boldsymbol{p}_1'|\mathrm{d}E'\delta[(2E)^2-2(2E)E']f(p_1',p_2'=p_1+p_2-p_1')\\=&\frac{\mathrm{d}\Omega_1'}{2}\frac{|\boldsymbol{p}_1'|}{|-4E|}f(p_1',p_2'=p_1+p_2-p_1')|_{E'=E}.\end{aligned} \tag{3.136}$$

如果我们将这一中间结果代入(3.131)，我们得到微分截面在极端相对论极限下为

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}\bar\sigma}{\mathrm{d}\Omega_1'}\right)_{\mathrm{UR}}=&\frac{m_0^4}{4\pi^2E^4 2\beta}\frac{|\boldsymbol{p}_1'|}{E}\frac{1}{8}4E^2\overline{|M_{\mathrm{fi}}|^2_{\mathrm{UR}}}\\=&\frac{e^4(4\pi)^2}{4\pi^2E^4 2}\frac{1}{16}\frac{1}{8}E^2 32\Big[\frac{(p_1'\cdot p_2')(p_1\cdot p_2)+(p_1'\cdot p_2)(p_1\cdot p_2')}{(p_1-p_1')^4}\\&+\frac{(p_1'\cdot p_2')(p_1\cdot p_2)+(p_2'\cdot p_2)(p_1'\cdot p_1)}{(p_1-p_2')^4}\\&+2\frac{(p_1'\cdot p_2')(p_1\cdot p_2)}{(p_1-p_2')^2(p_1-p_1')^2}\Big]\Big|_{p_2'=p_1+p_2-p_1',E'=E}\end{aligned} \tag{3.137}$$

为按照散射角明显计算出这一结果，我们代入(3.133)中的标量积而且在多处略去正比于电子质量 $m_0\ll E$ 的项。特别地，动量转移分母由下式给出

$$\begin{aligned}(p_1-p_1')^2=&p_1^2+p_1'^2-2p_1\cdot p_1'\\=&2m_0^2-2(E^2-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}')\approx-4E^2\sin^2\frac{\theta}{2},\\(p_1-p_2')^2=&p_1^2+p_2'^2-2p_1\cdot p_2'\\=&2m_0^2-2(E^2+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}')\approx-4E^2\cos^2\frac{\theta}{2}\ .\end{aligned} \tag{3.138}$$

这导出了最终表达式

$$\left(\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega_1'}\right)_{\mathrm{UR}}=\frac{(4\pi)^2e^4}{(4\pi)^2E^2 2}\left[\frac{2E^2 2E^2+\left(2E^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^2}{\left(4E^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{2E^2 2E^2+\left(2E^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^2}{\left(4E^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^2}+2\frac{2E^2 2E^2}{4E^2\cos^2\frac{\theta}{2}4E^2\sin^2\frac{\theta}{2}}\right]$$

$$=\frac{\alpha^2}{8E^2}\left(\frac{1+\cos^4\frac{\theta}{2}}{\sin^4\frac{\theta}{2}}+\frac{1+\sin^4\frac{\theta}{2}}{\cos^4\frac{\theta}{2}}+\frac{2}{\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}\right). \tag{3.139}$$

头两项分别来自于直接矩阵元平方和交换矩阵元平方，而最后一项是相干项贡献。电子弹性散射被称为 Møller 散射，这是据第一个用 Dirac 方程正确处理这一过程的作者命名的[①]。从而(3.139)代表在质心系中 Møller 散射公式的极端相对论极限。

3.4 电子-正电子散射：Bhabha 散射和 μ 子对产生

粒子和反粒子散射是与粒子-粒子散射密切相关的。事实上，我们将发现，一个过程的散射截面的了解就足以导出相应其他散射截面。

在例 3.4 中我们已得到正电子在一个 Coulomb 势上的散射幅。它与相应的电子散射过程相联系，只要把入射电子旋量 $u(p_i, s_i)$ 换成一个出射正电子旋量 $\bar{v}(p_f, s_f)$，反之亦然。同样，也能构造电子-正电子散射幅。在动量空间中写出的直接幅(对照前一节中的(3.115))成为

$$S_{fi}(\mathrm{dir.})=+e^2\frac{1}{V^2}\sqrt{\frac{m_0^2}{E_1\bar{E}_2'}}\sqrt{\frac{m_0^2}{E_1'\bar{E}_2}}(2\pi)^4\delta^4(p_1-\bar{p}_2'-p_1'+\bar{p}_2)$$

$$\times[\bar{u}(p_1',s_1')(-\mathrm{i}\gamma_\mu)u(p_1,s_1)]\frac{\mathrm{i}4\pi}{(p_1-p_1')^2}[\bar{v}(\bar{p}_2,\bar{s}_2)(-\mathrm{i}\gamma^\mu)v(\bar{p}_2',\bar{s}_2')], \tag{3.140}$$

式中在变量上方的杠意指这个量是对反粒子而言的。即，$(\bar{p}_2, \bar{s}_2)$，$(\bar{p}_2', \bar{s}_2')$为入射(出射)正电子的动量和自旋。相应的 Feynman 图(图 3.24a) 在正电子线处标以$-\bar{p}_2'$和$-\bar{s}_2$，正电子线与图3.22比较画成相反方向的。正如电子-电子散射情况那样，也存在交换幅，相应的 Feynman 图见图3.24b所示。

这里，出射正能电子 (p_1') 与出射负能电子$(-\bar{p}_2)$交换。图(b)也能画成图(c)那样。从而，它能被解释成代表一个入射正能电子(p_1) 通过发射一个光子被散射成一个沿时间向后运动的负能电子$(-\bar{p}_2)$。光子被一个沿着时间反向传播的负能电子$(-\bar{p}_2')$吸收。这个电子被散射成一个沿时间向前运动的正能态。这是纯粹按电子的解释。采用既包含电子又含正电子的图像，我们可以

① 参见 C. Møller: Ann. Phys. **14**, 531(1932).

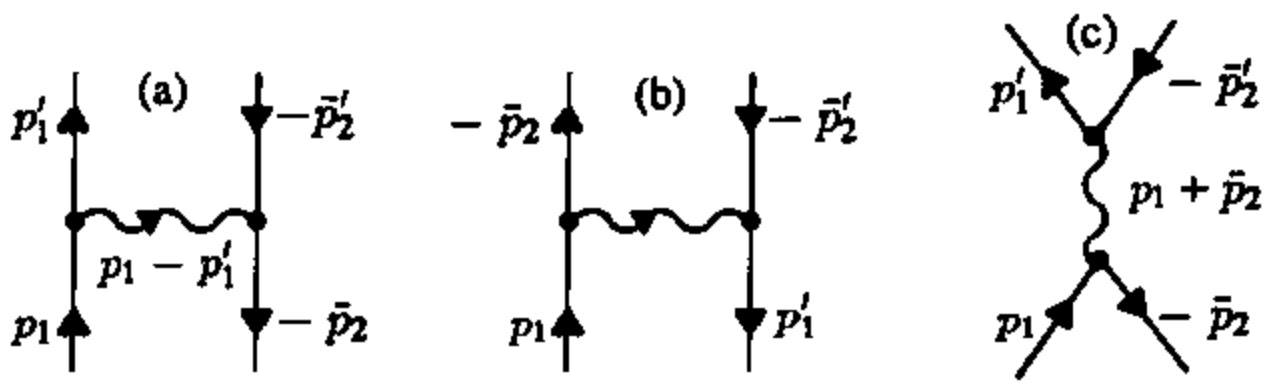


图 3.24　描写电子-正电子散射("Bhabha 散射")的直接图(a)和交换图(b)。正电子线的指标 $-\bar{p}'_2$ 和 $-\bar{p}_2$ 表明我们是按电子语言处理的。正电子是具有负四动量，特别是具有负能量的电子。通常交换图画成(c)

说成一个入射电子 (p_1)和一个入射正电子 ($\bar{p}_2$) 湮灭成光子，光子又通过产生一个电子(p_1')-正电子 ($\bar{p}_2'$) 对被湮灭(轻子化)。两套术语，一套是用正能和负能电子，另一套是用电子和正电子，它们是等价的。

在动量空间中，交换图转换成下列"湮灭幅"

$$S_{fi}(\text{exch.}) = -e^2 \frac{1}{V^2} \sqrt{\frac{m_0^2}{E_1 \bar{E}_2'}} \sqrt{\frac{m_0^2}{E_1' \bar{E}_2}} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - \bar{p}_2' - p_1' + \bar{p}_2)$$
$$\times [\bar{v}(\bar{p}_2, \bar{s}_2)(-\mathrm{i}\gamma_\mu) u(p_1, s_1)] \frac{\mathrm{i}4\pi}{(p_1 + \bar{p}_2)^2} [\bar{u}(p_1', s_1')(-\mathrm{i}\gamma^\mu) v(\bar{p}_2', \bar{s}_2')] , \tag{3.141}$$

它与直接幅(3.140)相比较，差一个负号。这能用下列方法来理解。初态(作用之前)是由一个正能电子和一个含有一个四动量为 $-\bar{p}_2$的空穴的负能电子海构成。被占据的 Dirac 海包含一个带四动量 $-\bar{p}_2'$ 的电子。按照 Fermi 统计，包含动量为 p_1 和 $-\bar{p}_2$ 的电子的初态必须关于 $p_1 \longleftrightarrow -\bar{p}_2'$ 交换是反对称的。终态有类似的关于 $p_1' \longleftrightarrow -\bar{p}_2$的反称性。换句话来说，在我们采用的"电子语言"内，图 3.24a 中带有动量为 p_1'和 $-\bar{p}_2$ 的两出射电子必须反称。我们能立即可以验证出(3.14)所给的幅满足这一反称性。当然，对 Dirac 海中所有其他的粒子也有反称性，但这些不在散射过程中表现出，从而我们能在考虑中略去它们。这个讨论再次表明了电子图像的优越和清晰。

除了交换旋量之外，对应于图 3.24c 的湮灭幅与到目前为止我们所讨论的散射过程有一个定性差别：虚光子是类时的，即其四动量具有性质 $q^2>0$。这是最易在质心坐标系中看清的，那里 $p_1=(E,p)$，$p_2=(E,-p)$，$q=(2E,0)$。在普通散射过程中，交换的光子是类空的，$q^2<0$，尽管它们彼此密切相关，但含类时和类空光子的过程可能有不同的性质。

为了计算电子-正电子弹性散射的截面，我们可严格地按 3.3 节那样去做。方程(3.118)仍成立，而自旋平均的不变矩阵元平方变成

$$\overline{|M_{fi}|^2} = e^4(4\pi)^2 \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{(p_1-p_1')^4}\right.$$
$$\times \mathrm{Tr}\left[\frac{\not p_1'+m_0}{2m_0}\gamma_\mu \frac{\not p_1+m_0}{2m_0}\gamma_\nu\right]\mathrm{Tr}\left[\frac{-\not p_2+m_0}{2m_0}\gamma^\mu \frac{-\not p_2'+m_0}{2m_0}\gamma^\nu\right]$$
$$-\frac{1}{(p_1-p_1')^2(p_1+\bar{p}_2)^2}$$
$$\times \mathrm{Tr}\left[\frac{\not p_1'+m_0}{2m_0}\gamma_\mu \frac{\not p_1+m_0}{2m_0}\gamma_\nu \frac{-\not p_2+m_0}{2m_0}\gamma^\mu \frac{-\not p_2'+m_0}{2m_0}\gamma^\nu\right]$$
$$\left.+(p_1' \longleftrightarrow -\bar{p}_2)\right\}. \tag{3.142}$$

表 3.1 电子-电子散射和电子-正电子散射由交叉对称相联系

e^-+e^-	e^-+e^+
p_1	p_1
p_1'	p_1'
p_2	$-\bar{p}_2'$
p_2'	$-\bar{p}_2$

这里我们能做一个极为重要的观察，(3.142)式结果能从相应的电子-电子散射表达式(3.120)用表 3.1 所示的动量变量变换得来。这一替换规则具有普适性，它是交叉对称定律的特殊情况。这告诉我们，互相之间能通过一次交换入射粒子和出射反粒子而相联系的过程的 S 矩阵元实质上是等同的。我们仅需对 S 矩阵元表达式中相应动量变量作代换即可。例如，从两体反应 $A+B\to C+D$的幅，我们能获得包含反粒子如 $A+\bar{D}\to C+\bar{B}$(见图 3.25)幅的相应表达式，这只需作动量变量间简单代换 $p_B\to -p_D$，$p_D\to -p_B$这个规则对严格幅成立，对微扰论任意阶幅也成立。在入射和出射粒子分组上有差异的过程也相互关联。例如，三体衰变 $A\to\bar{B}+C+D$ 的矩阵元能从两体散射过程的矩阵元中导出①。

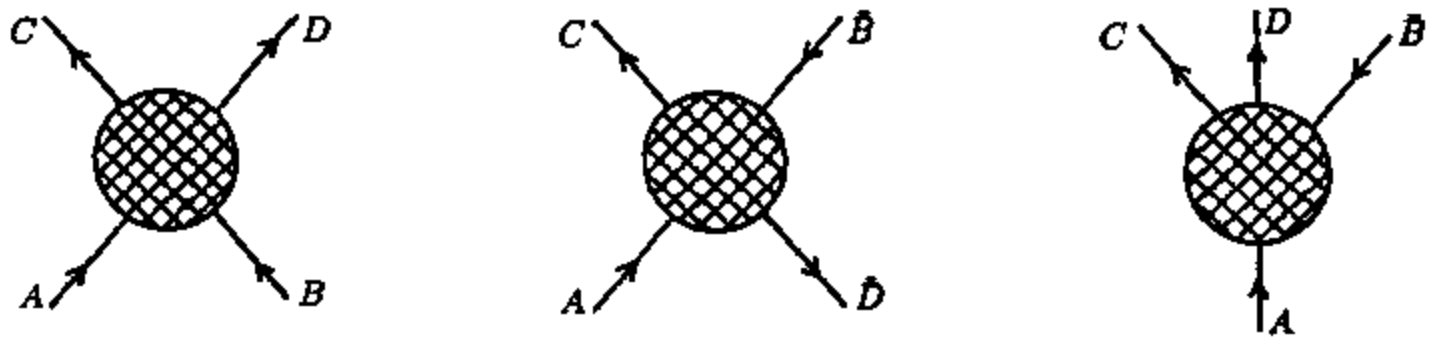


图 3.25 以交叉对称相关联的三个过程

如果我们已获得矩阵元之一的表达式，我们就得到由自由的交叉对称，即动量变量中的解析

① 然而，注意由能量-动量守恒所禁戒的过程，即幅平方相乘以给出截面(或衰变率)的 δ-函数可能为零。

延拓，相关联的其他过程的相应结果。

用代换规则（$p_2 \to -\bar{p}_2'$，$p_2' \to -\bar{p}_2$）电子-电子散射的结果能立即被转换到电子-正电子散射的情况中去。从而对非极化弹性 e^+e 散射的截面在极端相对论极限下（见(3.137)）变成

$$\left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_1'}\right)_{UR} = \frac{e^4}{2E^2}\left[\frac{(p_1'\cdot\bar{p}_2)(p_1\cdot\bar{p}_2') + (p_1'\cdot\bar{p}_2')(p_1\cdot\bar{p}_2)}{(p_1-p_1')^4}\right.$$
$$+\frac{(p_1'\cdot\bar{p}_2)(p_1\cdot\bar{p}_2') + (\bar{p}_2\cdot\bar{p}_2')(p_1'\cdot p_1)}{(p_1+\bar{p}_2)^4}$$
$$\left.+2\frac{(p_1'\cdot\bar{p}_2)(p_1\cdot\bar{p}_2')}{(p_1+\bar{p}_2)^2(p_1-p_1')^2}\right]\Bigg|_{\bar{p}_2'=p_1+\bar{p}_2-p_1',E'=E}$$
$$=\frac{\alpha^2}{8E^2}\left(\frac{1+\cos^4\frac{\theta}{2}}{\sin^4\frac{\theta}{2}}+\frac{1+\cos^2\theta}{2}-\frac{2\cos^4\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\right). \tag{3.143}$$

我们已经用到 $p_1\cdot\bar{p}_2 = p_1'\cdot\bar{p}_2' = 2E^2$，$p_1\cdot\bar{p}_2' = p_1'\cdot\bar{p}_2 = 2E^2\cos^2\frac{\theta}{2}$，以及 $p_1\cdot p_1' = \bar{p}_2\cdot\bar{p}_2' = 2E^2\sin^2\frac{\theta}{2}$。对任意能量均成立的完整结果[①]将在练习 3.8 中导出。

电子-正电子的弹性散射过程也称为 Bhabha 散射。Bhabha 公式的正确性已被许多实验，主要是高能实验所证实。它描述了在电子-正电子相碰的所有实验中的“弹性背景”。图 3.26 中给出了一个例子[②]。为获得与实验测量上的一致，本质上讲应包含所有 3 种贡献（直接项、湮灭项和相干项）。

然而，存在一些仅有湮灭图贡献的过程。如果初态和末态中是由不同类型的粒子-反粒子组成就属于这种情况。最简单的例子是 μ 对产生过程 $e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-$。因为 μ 子有别于电子，正由于它有大得多的质量（$m_\mu = 105.6584$ MeV 和 $m_e = 0.510999$MeV 比较），我们能简单地取 Bhabha 公式中来源于湮灭图的那部分。于是在极端相对论极限（$E \gg m_\mu$）下，μ 子对产生的微分截面成为

$$\left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_1'}\right)_{e^++e^-\to\mu^++\mu^-} = \frac{\alpha^2}{16E^2}(1+\cos^2\theta)\,. \tag{3.144}$$

对立体角积分便得总截面

$$\bar{\sigma}_{e^++e^-\to\mu^++\mu^-} = \frac{\pi}{3}\frac{\alpha^2}{E^2}\,. \tag{3.145}$$

最后，我们注意，如果能达到的能量接近中性中间矢量 Bose 子 Z，其质量 $m_Z = 91.16$GeV，那么，量子电动力学再也不能给出对诸如 $e^- + e^- \to l^+ + l^-$ 类型（其中 l 代表任意轻子）湮灭过程的正确描述。Z 粒子能被“在质壳上”产生为一共振态（宽度 $\Gamma_Z = 2.53$GeV），从而完全掩盖了

① 参见 H. J. Bhabha: Proc. Roy. Soc. (London) **A154**, 195(1936).

② 参见 TASSO Collaboration, W. Braunschweig et al.: Z. Physik **C37**, 171(1988).

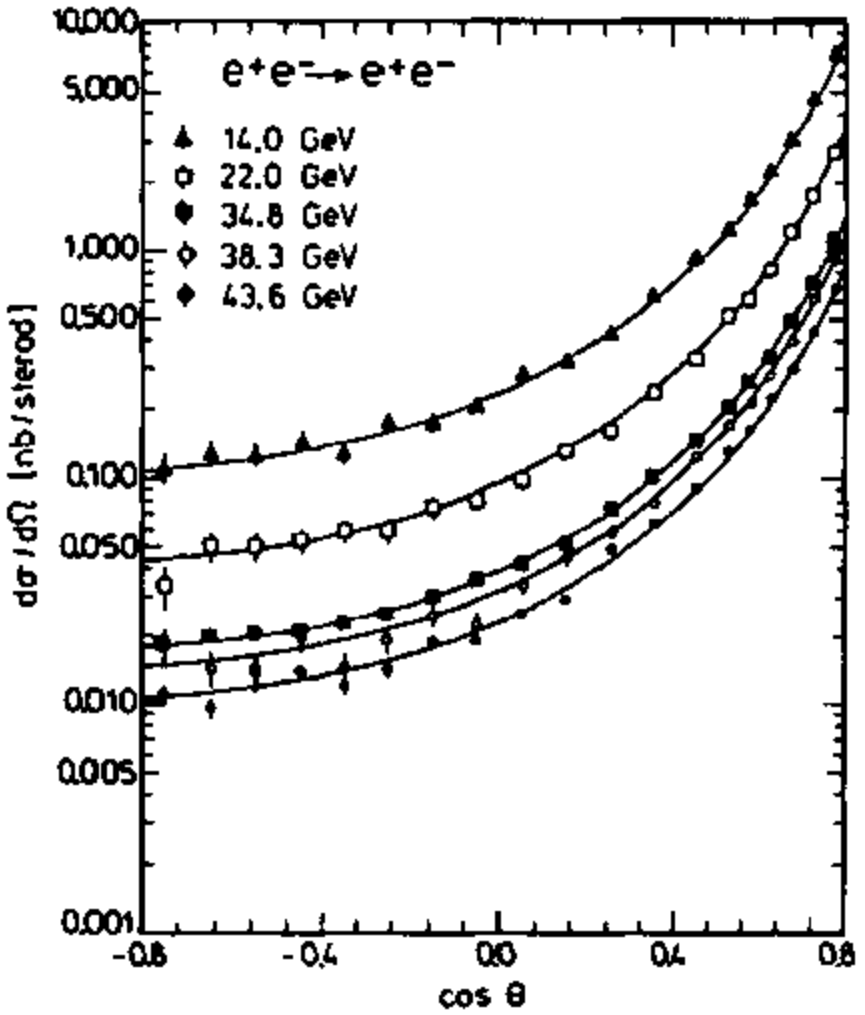


图 3.26 作为散射角余弦函数的 Bhabha 散射微分截面。测量是在 14GeV 和 43.6GeV 之间的 5 个不同能量点 $\sqrt{S} = \sqrt{(P_1+P_2)^2} = 2E$ 上完成的。实曲线是 *QED* 的预言，(3.143)

虚光子贡献而起主导作用①。电弱理论给出两者贡献的统一描述(参见 W. Greiner，和 B，Müller《理论物理》第 5 卷，《弱相互作用的规范理论》(Springer，Berlin，Heidelberg，New York 1993))。

图 3.27 给出了测量的总 μ 子对产生截面②，它与(3.145)式的预言相一致。但远在 Z-共振能量下面，测得的角分布③表明了明显偏离于纯粹 QED(虚线)的预言。

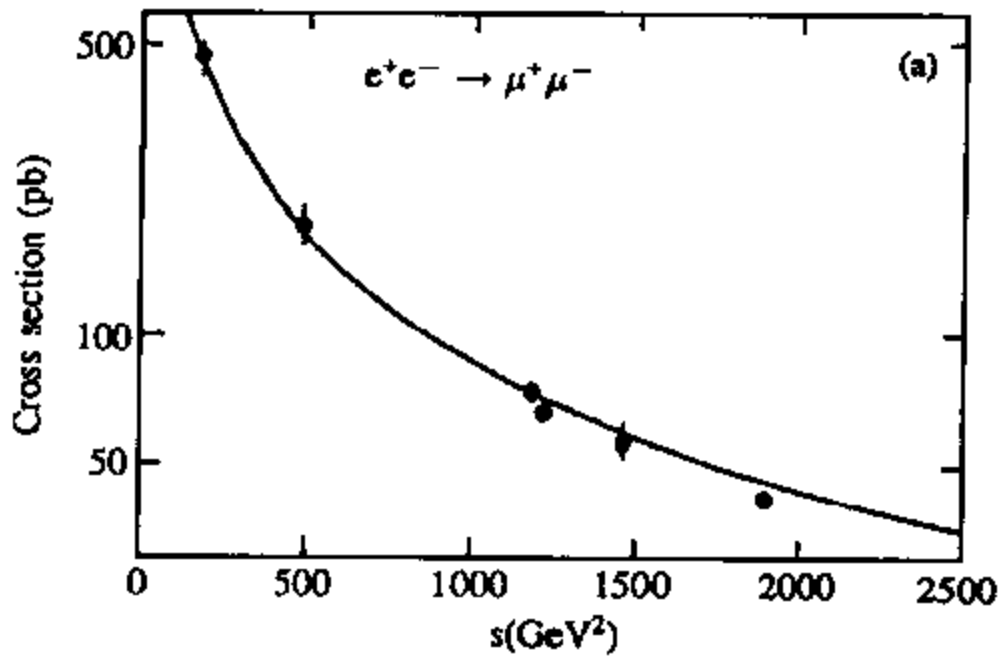
若理论上将已熟知的弱相互作用贡献包括进来，则 QED 的预言与实验数据比较符合甚好(为了获得定量上的一致，必须考虑 α^3 阶辐射修正)。我们由此断定电子是类点的基本粒子。推广的复合粒子应该由一个动量依赖的形状因子 $F(q^2)$ 来描述，这如同在练习 3.5 中对电子-核子散射的讨论那样。实验告诉我们，对电子，直到动量转移高达几百 GeV，$F(q^2)=F(0)$ 都成立。这就意味着电子是一个小到尺度 $\gamma_e < 10^{-16}$cm 的类点物体！这结论对重轻子 μ 和 τ 也成立。

---

① 近来，已有兴趣通过以 MeV 能区 Bhabha 散射的共振态为信号寻找新粒子，见评论 A. Scherdin，J. Reinhardt，W. Greiner，B. Müller：Rep. Prog. Phys. **54**，1 (1991).

② TASSO Collaboration，W. Brauhschweig et al.；Z. Physik **C40**，163 (1988).

③ JADE Collaboration，W. Bartel et al.；Z. Physik **C30**，371(1986).



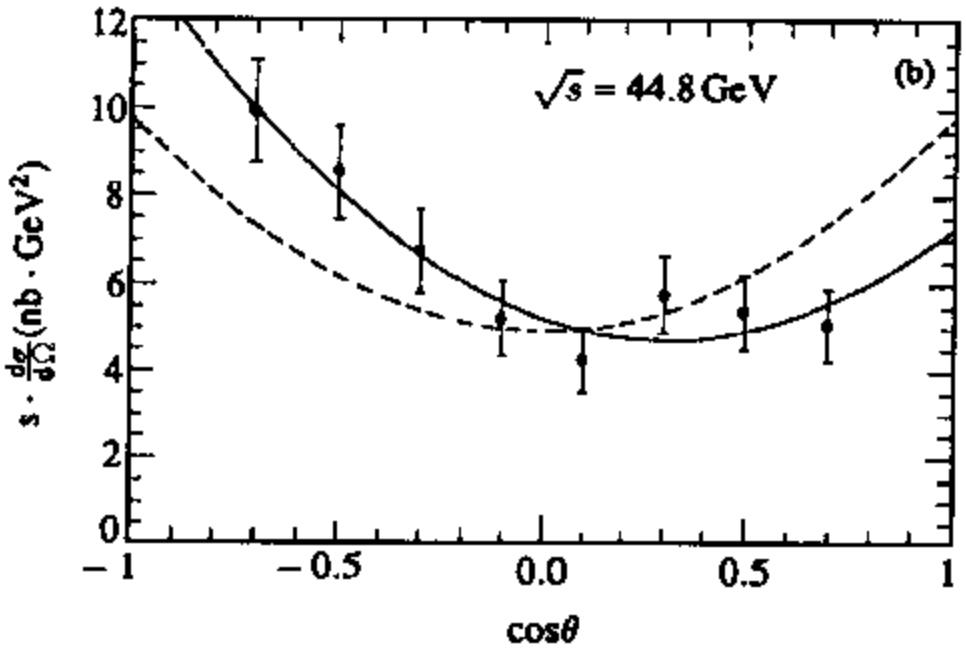


图 3.27　(a)$e^+ + e^- \to \mu^- + \mu^-$过程的截面作为质心能量平方 $s=(2E)^2$ 的函数，与(3.145)式预言比较。(b) 在质心能量$\sqrt{s}=44.8$GeV 时 μ 子对产生的微分截面。角分布偏离于(3.144)的预言(虚线)，与实验数据拟合(实线)表明由弱作用引起的不对称性。

练　习

3.8　应用到Møller散射和 Bhabha 散射的 Mandelstam 变量

问题 (a)证明任何一个两体散射过程 $A+B \to C+D$ 的运动学量能按照下列三个 Lorentz 不变的 Mandelstam 变量来表示

$$s = (p_a + p_b)^2 = (p_c + p_d)^2,$$
$$t = (p_c - p_a)^2 = (p_d - p_b)^2, \tag{1}$$
$$u = (p_c - p_b)^2 = (p_d - p_a)^2.$$

证明恒等式

$$s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2. \tag{2}$$

(b) 按照 Mandelstam 变量,导出电子-电子和电子-正电子散射微分截面。在此计算中不要将电子质量略去。

(c) 在质心系和实验室系中,写下 Møller 截面和 Bhabha 截面的明显结果。

解答:(a) 两体散射过程由 16 个四维动量变量 p_a, p_b, p_c, p_d 来描述。狭义相对论的等价原理要求可观测量按照 Lorentz 不变量来表示。四个 Lorentz 矢量 $p_i (i=a,b,c,d)$ 可以构造出 10 个标量积 $p_i \cdot p_j$,其中 $j \geqslant i$。其中 4 个受相对论能量动量关系所约束。

$$p_i^2 = m_i^2, \quad (i = a,b,c,d). \tag{3}$$

剩下来的 6 个自由度仍相互依赖的,因为任何散射过程必须服从能量动量守恒,

$$p_a + p_b = p_c + p_d. \tag{4}$$

这就给出 4 个额外的约束条件,从而得出结论,两个独立运动学变量就足以描述两体散射过程(若不包括极化)。从(1)显见,6 个标量积 $p_i \cdot p_j$ 中任何一个都能按照一个 Mandelstam 变量来表示,例如,$p_a \cdot p_b = (1/2)(s - m_a^2 - m_b^2)$,等等(图 3.28)。对每个 Mandelstam 变量(1)给出的两种表达式之间的等价关系是(4)式的直接推论 。于是就得 s,t 和 u 之间的关系(2)

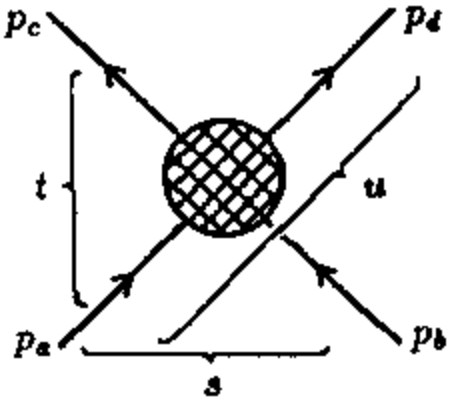


图 3.28 在二体散射过程中 Mandelstam 变量 s,t,u 的定义

$$\begin{aligned} s + t + u &= (p_a + p_b)^2 + (p_c - p_a)^2 + (p_d - p_a)^2 \\ &= 3p_a^2 + p_b^2 + p_c^2 + p_d^2 + 2p_a \cdot (p_b - p_c - p_d) \\ &= 3p_a^2 + p_b^2 + p_c^2 + p_d^2 - 2p_a^2 \\ &= m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2 . \end{aligned} \tag{5}$$

尽管第三个变量能通过(2)式消去,若同时采用 s,t 和 u,常常使结果具有更好的对称性。

(b) 在两个相等质量粒子的质心系中(例如,$e^- + e^- \to e^- + e^-$)动量为 $p_1 = (E, \boldsymbol{p})$,$p_2 = (E, -\boldsymbol{p})$,$p_1' = (E, \boldsymbol{p}')$,$p_2' = (E, -\boldsymbol{p}')$ 从而 Mandelstam 变量具有值

$$s = (p_1 + p_2)^2 = 4E^2, \tag{6a}$$
$$t = (p_1' - p_1)^2 = -(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p})^2$$
$$= -2|p|^2(1 - \cos\theta) = -4|\boldsymbol{p}|^2 \sin^2\frac{\theta}{2}, \tag{6b}$$
$$u = (p_2' - p_1)^2 = -(-\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p})^2$$
$$= -2|\boldsymbol{p}|^2(1 + \cos\theta) = -4|\boldsymbol{p}|^2 \cos^2\frac{\theta}{2}, \tag{6c}$$

这显然满足(2)式

按照 3.3 节中(3.137)式，在质心坐标系中，Møller 散射截面为(这对任意速度成立)

$$\left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega}\right)_{cm}=\frac{m_0^4}{16\pi^2E^2}\overline{|M_{fi}|^2}=\frac{m_0^4}{4\pi^2s}\overline{|M_{fi}|^2}\ . \tag{7}$$

若将 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_1'$ 之间夹角(散射角 θ_1')按照动量转移平方 $t=q^2$ 表示，我们便能定义出一个 Lorentz 不变的微分散射截面 $d\bar{\sigma}/dt$。在质心系中，变换为(写成 $\theta'=\pi-\theta_2'=\theta$)

$$\frac{d\cos\theta}{dt}=\left(\frac{dt}{d\cos\theta}\right)^{-1}=(2|\boldsymbol{p}|^2)^{-1}=\frac{2}{s-4m_0^2} \tag{8}$$

从而(7)变成

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{\sigma}}{dt}&=\frac{d\cos\theta}{dt}\left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\cos\theta}\right)_{cm}=\frac{2}{s-4m_0^2}2\pi\left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega}\right)_{cm}\\&=\frac{m_0^4}{\pi(s-4m_0^2)s}\overline{|M_{fi}|^2}\ .\end{aligned} \tag{9}$$

我们已利用了这样一个事实，自旋平均了的散射截面不依赖于方位角 φ。在极化散射情况下，这一般是不对的。尽管(9)式是在质心系中推出的，结果是仅用 Lorentz 不变量来表达的，从而它对任意坐标系均成立。

让我们明显地按照 Mandelstam 变量，给出电子-电子散射的不变矩阵元 $\overline{|M_{fi}|^2}$。按照 3.3 节中(3.121)，我们有

$$\overline{|M_{fi}|^2}_{\text{Møller}}=e^4(4\pi)^2\frac{1}{4}\frac{1}{2m_0^2}\left(\frac{1}{t^2}A_{dir}+\frac{1}{u^2}A_{ex}-\frac{2}{tu}A_{int}\right)\ , \tag{10}$$

式中直接项、交换项和相干项 A_{dir}，A_{ex}，A_{int} 为变量 s，t 和 u 的函数。它们用迹给出(见(3.121))

$$\begin{aligned}A_{dir}&=\frac{1}{8}\,\mathrm{Tr}\,[(\not{p}_1'+m_0)\gamma_\mu(\not{p}_1+m_0)\gamma_\nu]\,\mathrm{Tr}\,[(\not{p}_2'+m_0)\gamma^\mu(\not{p}_2+m_0)\gamma^\nu],\\A_{ex}&=\frac{1}{8}\,\mathrm{Tr}\,[(\not{p}_2'+m_0)\gamma_\mu(\not{p}_1+m_0)\gamma_\nu]\,\mathrm{Tr}\,[(\not{p}_1'+m_0)\gamma^\mu(\not{p}_2+m_0)\gamma^\nu],\\A_{int}&=\frac{1}{8}\mathrm{Tr}[(\not{p}_1'+m_0)\gamma_\mu(\not{p}_1+m_0)\gamma_\nu(\not{p}_2'+m_0)\gamma^\mu(\not{p}_2+m_0)\gamma^\nu].\end{aligned} \tag{11}$$

对直接项，根据(3.90)我们求得

$$\begin{aligned}A_{dir}&=\frac{1}{8}4[p_{1\mu}'p_{1\nu}+p_{1\mu}p_{1\nu}'-g_{\mu\nu}(p_1\cdot p_1'-m_0^2)]\\&\quad\times4[p_2'^\mu p_2^\nu+p_2^\mu p_2'^\nu-g^{\mu\nu}(p_2\cdot p_2'-m_0^2)]\\&=4[(p_1\cdot p_2)^2+(p_1\cdot p_2')^2-2m_0^2p_1\cdot p_1'+2m_0^4]\ .\end{aligned} \tag{12}$$

标量积能按照 Mandelstam 变量表示成

$$\begin{aligned}p_1\cdot p_2&=p_1'\cdot p_2'=\frac{1}{2}(s-2m_0^2),\\p_1\cdot p_1'&=p_2\cdot p_2'=-\frac{1}{2}(t-2m_0^2),\\p_1\cdot p_2'&=p_1'\cdot p_2=-\frac{1}{2}(u-2m_0^2).\end{aligned} \tag{13}$$

因此

$$A_{\mathrm{dir}} = (s - 2m_0^2)^2 + (u - 2m_0^2)^2 + 4m_0^2 t \ . \tag{14a}$$

交换项来自于 $p_1' \longleftrightarrow p_2'$ 的代换，这对应着变量间交换 $\mu \longleftrightarrow t$，即

$$A_{\mathrm{ex}} = (s - 2m_0^2)^2 + (t - 2m_0^2)^2 + 4m_0^2 u \ . \tag{14b}$$

相干项由一个长的迹所组成(包含 8 个 γ 矩阵)，这可应用数学附注 3.3 中的定理进行计算。没有写出所有的中间步骤，其结果是

$$\begin{aligned} A_{\mathrm{int}} = & \frac{1}{8}[-32(p_1 \cdot p_2)(p_1' \cdot p_2') - 32m_0^4 \\ & + 16m_0^2(p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot p_1' + p_1 \cdot p_2' + p_1' \cdot p_2 + p_1' \cdot p_2' + p_2 \cdot p_2')] \\ = & -(s^2 - 8m_0^2 s + 12m_0^4) \\ = & -(s - 2m_0^2)(s - 6m_0^2) \ . \end{aligned} \tag{14c}$$

利用交叉对称，这可十分简单地得到电子-正电子散射的相应结果。我们必须做的一切是作代换 $p_2 \to -\bar{p}_2'$，$p_2' \to -\bar{p}_2$。对 Mandelstam 变量，这意味着

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 \to (p_1 - \bar{p}_2')^2 = u, \\ t &= (p_1' - p_1)^2 \quad \text{不变}, \\ u &= (p_2' - p_1)^2 \to (\bar{p}_2 + p_1)^2 = s. \end{aligned} \tag{15}$$

式子右边的 Mandelstam 变量是对“反粒子语言”而言的，其中 $\bar{p}_2$ 为入射正电子的物理四动量，从而，在 Bhabha 散射中，质心能量变量 s 的定义为：$s=(p_1+\bar{p}_2)^2$，从而根据(15)式，从粒子-粒子散射到粒子-反粒子散射的变换简单地等价于变量 s 和 u 间的交换，人们常常把这些过程称之为“s 道”(Møller)散射和“u 道 ”(Bhabha)散射。

因此，不变矩阵元成为(杠表示 Bhabha 散射)

$$\overline{|M_{fi}|^2}_{\mathrm{Bhabha}} = e^4(4\pi)^2 \frac{1}{4} \frac{1}{2m_0^2}\left(\frac{1}{t^2}\bar{A}_{\mathrm{dir}} + \frac{1}{s^2}\bar{A}_{\mathrm{ex}} - \frac{2}{st}\bar{A}_{\mathrm{int}}\right), \tag{16}$$

其中

$$\bar{A}_{\mathrm{dir}} = (u - 2m_0^2)^2 + (s - 2m_0^2)^2 + 4m_0^2 t = A_{\mathrm{dir}}, \tag{17a}$$

$$\bar{A}_{\mathrm{ex}} = (u - 2m_0^2)^2 + (t - 2m_0^2)^2 + 4m_0^2 s, \tag{17b}$$

$$\bar{A}_{\mathrm{int}} = -(u - 2m_0^2)(u - 6m_0^2) \ . \tag{17c}$$

利用(15)式的重新定义，s,t,u 和变量 E 以及 θ 之间关系得以恢复，即，(6$a-c$)对粒子-粒子和粒子-反粒子两种散射均正确。注意表示截面与不变矩阵元间关系的公式在 $s \longleftrightarrow u$ 交换下不变，即(8)式保持不变。

(c) 利用(6)(7)和(14)，在质心坐标系中，完整的 Møller 散射截面为

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{cm}} &= \frac{\alpha^2}{8E^2}\left(\frac{1}{t^2}A_{\mathrm{dir}} + \frac{1}{u^2}A_{\mathrm{ex}} - \frac{2}{tu}A_{\mathrm{int}}\right) \\ &= \frac{\alpha^2}{8E^2 p^4} \end{aligned}$$

$$\times\left\{\frac{1}{(1-\cos\theta)^2}[(2E^2-m_0^2)^2+(\boldsymbol{p}^2(1+\cos\theta)+m_0^2)^2-2m_0^2\boldsymbol{p}^2(1-\cos\theta)]\right.$$

$$+\frac{1}{(1+\cos\theta)^2}[(2E^2-m_0^2)^2+(\boldsymbol{p}^2(1-\cos\theta)+m_0^2)^2-2m_0^2\boldsymbol{p}^2(1+\cos\theta)]$$

$$\left.+\frac{2}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}(2E^2-m_0^2)(2E^2-3m_0^2)\right\}. \tag{18}$$

借助几个基本的三角变换式，我们能得到一个更紧凑的表达式：

$$\left(\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{cm}}=\frac{\alpha^2}{4E^2}\frac{1}{(E^2-m_0^2)^2}\left[\frac{4(2E^2-m_0^2)^2}{\sin^4\theta}\right.$$

$$\left.-\frac{8E^4-4E^2m_0^2-m_0^4}{\sin^2\theta}+(E^2-m_0^2)^2\right]. \tag{19}$$

在极端相对论极限 $E\gg m_0$ 下，这能被证明是接近 3.3 节(3.139)式的结果。在非相对论极限 $E\approx m_0$，$\boldsymbol{p}^2\ll m_0^2$ 下，(18)式趋于

$$\left(\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{nr}}=\frac{\alpha^2}{m_0^2}\frac{1}{16\beta^4}\left(\frac{1}{\sin^4\theta/2}+\frac{1}{\cos^4\theta/2}-\frac{1}{\sin^2\theta/2\cos^2\theta/2}\right). \tag{20}$$

这是包括相干项的对称化了的 Rutherford 截面。

质心系中 Bhabha 散射截面由(16)，(17)式得来。与(19)式不同，它不能用 $1/\sin^2\theta$ 的幂指数形式来表示。这似乎是合理的，因为现在有可能区分向前散射($\theta<\pi/2$)和向后散射($\theta>\pi/2$)，从而截面在 $\theta\to\pi-\theta$ 交换下将不是对称的，Bhabha 截面能被写成

$$\left(\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{cm}}=\frac{\alpha^2}{16E^2}\left\{\frac{1}{p^4\sin^4\theta/2}\left[m_0^4+4\boldsymbol{p}^2m_0^2\cos^2\frac{\theta}{2}+2p^4\left(1+\cos^4\frac{\theta}{2}\right)\right]\right.$$

$$+\frac{1}{E^4}[3m_0^4+4\boldsymbol{p}^2m_0^2+\boldsymbol{p}^4(1+\cos^2\theta)]$$

$$\left.-\frac{1}{E^2\boldsymbol{p}^2\sin^2\theta/2}\left(3m_0^4+8\boldsymbol{p}^2m_0^2\cos^2\frac{\theta}{2}+4\boldsymbol{p}^4\cos^4\frac{\theta}{2}\right)\right\}. \tag{21}$$

极端相对论极限(3.4 节(3.143))下结果能直接看出。非相对论极限结果是

$$\left(\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{nr}}=\frac{\alpha^2}{m_0^2}\frac{1}{16\beta^4}\frac{1}{\sin^4\theta/2}, \tag{22}$$

它正好与 Rutherford 截面相同。在低能时，湮灭图贡献受到因子 $O(\beta^2)$ 的压低。

在实验室系，靶粒子初态静止，即

$$\begin{aligned}&p_1=(E,\boldsymbol{p}),p_2=(m_0,\boldsymbol{0}),\\&p_1'=(E_1',\boldsymbol{p}_1'),p_2'=(E_2',\boldsymbol{p}_2').\end{aligned} \tag{23}$$

Mandelstam 不变量采取形式

$$s=(p_1+p_2)^2=2m_0^2+2p_1\cdot p_2=2m_0(E+m_0), \tag{24a}$$

$$t=(p_1'-p_1)^2=2m_0^2-2p_1'\cdot p_1=2m_0^2-2E_1'E+2|p_1'||p|\cos\theta_1', \tag{24b}$$

$$u=(p_1'-p_2)^2=2m_0^2-2p_1'\cdot p_2=-2m_0(E_1'-m_0). \tag{24c}$$

因为固定入射能量 E 和散射角 θ_1' 就惟一确定了散射过程，变量 E_1' 是多余的，它能被表示成 E 和

θ_1' 的函数。我们利用能解出 E' 的关系式(2)

$$\begin{aligned} 0 &= s + t + u - 4m_0^2 \\ &= -2(E + m_0)(E_1' - m_0) + \sqrt{E_1'^2 - m_0^2}\sqrt{E^2 - m_0^2}\cos\theta_1', \end{aligned} \tag{25}$$

得到结果：

$$E_1' = m_0 \frac{E + m_0 + (E - m_0)\cos^2\theta_1'}{E + m_0 - (E - m_0)\cos^2\theta_1'} \tag{26}$$

因而

$$|\boldsymbol{p}_1'| = \frac{2|\boldsymbol{p}|m_0\cos\theta_1'}{E + m_0 - (E - m_0)\cos^2\theta_1'}. \tag{27}$$

这导出 Mandelstam 变量的下列显式

$$t = -\frac{2m_0(E^2 - m_0^2)\sin^2\theta_1'}{E + m_0 - (E - m_0)\cos^2\theta_1'}, \tag{28a}$$

$$u = -\frac{4m_0^2(E - m_0)\cos^2\theta_1'}{E + m_0 - (E - m_0)\cos^2\theta_1'}. \tag{28b}$$

我们也能在质心系中导出散射角的另一种明显表达式，现在用 θ^* 来表示散射角。用(6)式我们得到

$$\cos\theta^* = \frac{t - u}{4\sqrt{E^{*2} - m_0^2}}, \tag{29}$$

代入(28)式后，这变成

$$\cos\theta^* = \frac{-(E + m_0) + (E + 3m_0)\cos^2\theta_1'}{E + m_0 - (E - m_0)\cos^2\theta_1'}. \tag{30}$$

质心能量 E^* 和实验室能量 E 存在关系(使 s 的表达式相等)

$$E^* = \sqrt{\frac{1}{2}m_0(E + m_0)}. \tag{31}$$

在实验室系中的散射截面由不变截面得到

$$\left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega}\right)_{lab} = \frac{1}{2\pi}\frac{dt}{d\cos\theta_1'}\frac{d\bar{\sigma}}{dt}. \tag{32}$$

将(28a)式对 $\cos\theta_1'$ 求微分得

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\cos\theta_1'} &= 2\cos\theta_1'\frac{dt}{d\cos^2\theta_1'} \\ &= \frac{8m_0^2(E^2 - m_0^2)\cos\theta_1'}{[E + m_0 - (E - m_0)\cos^2\theta_1']^2}. \end{aligned} \tag{33}$$

利用(9)式，这就导致

$$\left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega}\right)_{lab} = \frac{m_0^4}{\pi^2}\frac{\cos\theta_1'}{[E + m_0 - (E - m_0)\cos^2\theta_1']^2}\overline{|M_{fi}|^2}. \tag{34}$$

不变矩阵元已预先按照 Mandelstam 变量被构造出，这同样也就被表述成实验室变量 E 和 θ' 的形式。Møller 散射的结果(10)和(14)和 Bhabha 散射(16)以及(17)是十分复杂的表达，当用实验室变量时，也不能有明显的简化。

3.5　极化的 Dirac 粒子的散射

到现在为止，我们所做的所有计算都是基于这样一条假设进行的，即电子(或正电子)的自旋是不被观测的。在这个例子中，我们将学会计算极化 Fermi 子上散射的技巧。这将用于最简单的一种可能情况，即，如 3.1 节所讨论的电子的 Coulomb 散射。

首先让我们复习一下对自旋极化的描述(详见《RQM》中第 6,7 章)。动量为 p 自旋为 s 的自由电子用旋量 $u(p,s)$来描述。s^μ 是一个 Lorentz 矢量，它恰当地被定义在一个粒子的静止系中，那里，它化为一个空间单位矢

$$(s^\mu)_{\mathrm{R.S.}} = (0,s')\,. \tag{3.146}$$

s^μ 在一个粒子以动量 $\boldsymbol{p}$ 运动的坐标系中的分量可根据 Lorentz 加速而获得

$$s^\mu = \left(\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{s}'}{m_0}, s' + \frac{\boldsymbol{s}'\cdot\boldsymbol{p}}{m_0(E+m_0)}\boldsymbol{p}\right)\,. \tag{3.147}$$

容易验证(3.147)式满足归一化正交关系

$$s^2 = -1, p\cdot s = 0\,, \tag{3.148}$$

这在静止坐标系中当然满足。在静止系中，单位旋量是算符 $\boldsymbol{\Sigma}\cdot s'$ 的本征态：

$$\boldsymbol{\Sigma}\cdot s' u(\boldsymbol{0}, \pm s') = \pm u(\boldsymbol{0}, \pm s')\,. \tag{3.149}$$

这里 $\boldsymbol{\Sigma}=\gamma_5\gamma^0\boldsymbol{\gamma}$ 在标准表示中为“双”泡利矩阵

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}\,. \tag{3.150}$$

条件(3.149)具有协变推广式

$$\gamma_5 \not{s} u(p, \pm s) = \pm u(p, \pm s)\,. \tag{3.151}$$

这里，额外因子 γ^0 是为使(3.151)对正电子旋量 $v(p,\pm s)$ 也成立。利用(3.151)，引入自旋投影算符

$$\hat{\Sigma}(s) = \frac{1}{2}(1+\gamma_5\not{s}) \tag{3.152}$$

它具有性质

$$\hat{\Sigma}(s)u(p,+s) = u(p,+s), \hat{\Sigma}(s)u(p,-s) = 0\,. \tag{3.153}$$

这形式也能用到螺旋态上去，此态中自旋指向动量方向。这里，我们必须选择

$$s_\lambda' = \lambda\frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}, \text{其中}\quad \lambda = \pm 1\,, \tag{3.154}$$

根据(3.147),可得自旋 4-矢量

$$s_i^\mu = \lambda\left(\frac{|\boldsymbol{p}|}{m_0}, \frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|} + \frac{\boldsymbol{p}^2}{m_0(E+m_0)}\frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}\right) = \lambda\left(\frac{|\boldsymbol{p}|}{m_0}, \frac{E}{m_0}\frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}\right). \tag{3.155}$$

我们把自旋 s 与平行于 p 的电子称作右手的,相反自旋指向与 p 反向的电子则称为左手的。换种说法,称为正螺旋度和负螺旋度($\lambda=+1$ 或 $\lambda=-1$)。

在这些基本论述之后,我们来考虑动量为 p_i 和初自旋 s_i 的电子的 Coulomb 散射截面。若测量终态自旋 s_f,则结果为(见 3.1 节(3.25)式)

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(s_i, s_f) = \frac{4Z^2\alpha^2 m_0^2}{|\boldsymbol{q}|^4}|\bar{u}(p_f, s_f)\gamma^0 u(p_i, s_i)|^2. \tag{3.156}$$

此表达式原则上可通过选取一个 Dirac 矩阵的特定表示,将相应旋量 $u(p,s)$ 的明显表达式代入而进行计算。然而,存在一个更巧妙方法完成此事。我们能引入对自旋取向 s_i 和 s_f 的辅助求和并利用上节中所形成的求迹技巧。这可借用自旋投影算子 $\Sigma(s)$,根据(3.153)能消除"错"自旋态 $u(p,-s)$。利用这些算符,Coulomb 散射截面(3.156)能被表示成下列形式:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega}(s_i, s_f) &= \frac{4Z^2\alpha^2 m_0^2}{|\boldsymbol{q}|^4}(\bar{u}(p_f, s_f)\gamma_0 u(p_i, s_i))(u^\dagger(p_i, s_i)\gamma_0^\dagger \gamma_0^\dagger u(p_f, s_f)) \\ &= \frac{4Z^2\alpha^2 m_0^2}{|\boldsymbol{q}|^4}\sum_{s_f' s_i'}(\bar{u}(p_f, s_f')\gamma_0 \hat{\Sigma}(s_i)u(p_i, s_i'))(\bar{u}(p_i, s_i')\gamma_0 \hat{\Sigma}(s_f)u(p_f, s_f)).\end{aligned} \tag{3.157}$$

投影 $\hat{\Sigma}(s_i)u(p_i, s_i') = \delta_{s_i s_i'}u(p_i, s_i)$ 确保了对 s_i' 求和时正好提供 $s_i' = s_i$ 的项。对 s_f' 的求和也是这样。在两矩阵元之一中引入投影算符显然是足够了。(3.157)中双重求和能像 3.1 节(3.33)那样被转成求迹。从而我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(s_i, s_f) &= \frac{4Z^2\alpha^2 m_0^2}{|\boldsymbol{q}|^4}\,\mathrm{Tr}\left[\gamma_0 \hat{\Sigma}(s_i)\frac{\not{p}_i + m_0}{2m_0}\gamma_0 \hat{\Sigma}(s_f)\frac{\not{p}_f + m_0}{2m_0}\right] \\ &= \frac{4Z^2\alpha^2 m_0^2}{|\boldsymbol{q}|^4}\,\mathrm{Tr}\left[\gamma_0 \frac{1+\gamma_5 \not{s}_i}{2}\frac{\not{p}_i + m_0}{2m_0}\gamma_0 \frac{1+\gamma_5 \not{s}_f}{2}\frac{\not{p}_f + m_0}{2m_0}\right],\end{aligned} \tag{3.158}$$

在讨论这一结果之前,让我们先考查一个散射过程,其中或者入射粒子束流是非极化的,或者不观测出射粒子的极化。这样,就只有一个投影算符出现在迹中。例如,若入射粒子束是非极化的,(3.158)必须被下式取代

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(s_f) = \frac{1}{2}\frac{4Z^2\alpha^2 m_0^2}{|\boldsymbol{q}|^4}\,\mathrm{Tr}\left[\frac{1+\gamma_5 \not{s}_f}{2}\gamma_0 \frac{\not{p}_i + m_0}{2m_0}\gamma_0 \frac{\not{p}_f + m_0}{2m_0}\right]. \tag{3.159}$$

因子 1/2 来自于对初态自旋平均。

最后一步中,含有 $\gamma_5 \not{s}_f$ 的迹为零。从数学附注 3.3 中的定理 1 知,γ_5 和奇数个 $\not{a}$ 矩阵元积的迹为零:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\,[\gamma_5 \not{a}_1 \cdots \not{a}_n] &= (-1)^n\,\mathrm{Tr}\,[\not{a}_1 \cdots \not{a}_n \gamma_5] \\ &= (-1)^n\,\mathrm{Tr}\,[\gamma_5 \not{a}_1 \cdots \not{a}_n] = 0 \quad \text{对奇数 } n.\end{aligned} \tag{3.160}$$

展开(3.159)后,含有 γ_5 的迹只剩下两个,利用矩阵 γ_0 的反对易关系,它们易被转换成下列形式的项:

$$\mathrm{Tr}\,[\gamma_5 \not a \not b] = 0\,. \tag{3.161}$$

从而，截面(3.159)与末态自旋无关，它是与 3.1 节中非极化 Mott 散射截面(3.39)的一半相同。

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(s_f) = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega}\,. \tag{3.162}$$

从而，表面上看，电子的 Coulomb 散射不引起束流的极化。然而，不得不强调，这仅在最低级微扰论正确！若使用 Coulomb-Dirac 波函数去取代平面波，我们发现出射粒子将沿散射面的法向极化。极化度量级为 $Z\alpha$，这对重核言变得很大。

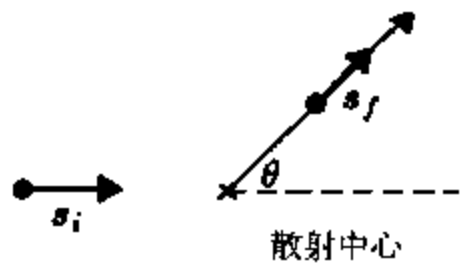


图 3.29　初态和末态中螺旋度为正的散射过程

在一阶计算中，我们可期待一个入射的极化电子脱离散射过程后处于依赖于散射角的末态极化中。现在，我们将计算这些末态极化。假设入射电子自旋平行于其运动方向，即我们从一个确定的螺旋态 $\lambda_i = +1$ 出发，在末态中，粒子的自旋将以确定的几率平行或反平行于其运动方向(螺旋度 $\lambda \pm 1$)(见图 3.29)。从面(3.158)的推导中需插入极化四维-矢量。

$$\begin{aligned} s_{i\lambda_i} &= \lambda_i\left(\frac{|\boldsymbol{p}|}{m_0}, \frac{E}{m_0}\,\frac{\boldsymbol{p}_i}{|\boldsymbol{p}|}\right) \equiv \lambda_i s_i\,, \\ s_{f\lambda_f} &= \lambda_f\left(\frac{|\boldsymbol{p}|}{m_0}, \frac{E}{m_0}\,\frac{\boldsymbol{p}_f}{|\boldsymbol{p}|}\right) \equiv \lambda_f s_f\,. \end{aligned} \tag{3.163}$$

极化散射截面具有如下形式：

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\lambda_f, \lambda_i) &= \frac{4Z^2\alpha^2 m_0^2}{|\boldsymbol{q}|^4}\,\mathrm{Tr}\left[\gamma_0\,\frac{1+\lambda_i\gamma_5 \not s_i}{2}\,\frac{\not p_i + m_0}{2m_0}\gamma_0\,\frac{1+\lambda_f\gamma_5 \not s_f}{2}\,\frac{\not p_f + m_0}{2m_0}\right] \\ &= \frac{4Z^2\alpha^2 m_0^2}{|\boldsymbol{q}|^4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{(2m_0)^2}\{\mathrm{Tr}\,[\gamma_0(\not p_i + m_0)\gamma_0(\not p_f + m_0)] \\ &\quad + \lambda_i\lambda_f\,\mathrm{Tr}\,[\gamma_0\gamma_5 \not s_i(\not p_i + m_0)\gamma_0\gamma_5 \not s_f(\not p_f + m_0)]\}\,. \end{aligned} \tag{3.164}$$

这里，我们已去掉了仅含一个 $\gamma_5 \not s$ 因子的项，因为其迹为零，参见(3.159) ～(3.162)。所以，散射截而依赖于螺旋度 $\lambda_i\lambda_f$。许多实验是对散射粒子的极化度进行测量的，它被定义为正螺旋度和负螺旋度的计数率的差。归一化成总计数率，

$$P = \frac{\mathrm{d}\sigma(\lambda_f = +1) - \mathrm{d}\sigma(\lambda_f = -1)}{\mathrm{d}\sigma(\lambda_f = +1) + \mathrm{d}\sigma(\lambda_f = -1)}\,. \tag{3.165}$$

则若初态是完全极化的，即 $\lambda_i = +1$，利用(3.164)末态极化度就变成

$$P = \frac{\mathrm{Tr}\,[\gamma_0\gamma_5 \not s_i(\not p_i + m_0)\gamma_0\gamma_5 \not s_f(\not p_f + m_0)]}{\mathrm{Tr}\,[\gamma_0(\not p_i + m_0)\gamma_0(\not p_f + m_0)]}\,. \tag{3.166}$$

求出迹(见练习 3.9)就得出结果

$$P = 1 - \frac{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\left(\dfrac{E}{m_0}\right)^2\cos^2\dfrac{\theta}{2} + \sin^2\dfrac{\theta}{2}}\,. \tag{3.167}$$

在非相对论极限 $E \to m_0$ 下，这简化为

$$P \simeq 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} = \cos\theta\,. \tag{3.168}$$

这正好是初态和末态量子轴的几何重叠，$\cos\theta = \boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{p}_f/|\boldsymbol{p}|$，且表明，当从固定系看时，自旋根本不受碰撞影响。当碰撞变成相对论性的时候，极化度对角度依赖的强度变弱，随 $E\to\infty$，它趋于一个常数值 $P=1$。如图 3.30 所示。

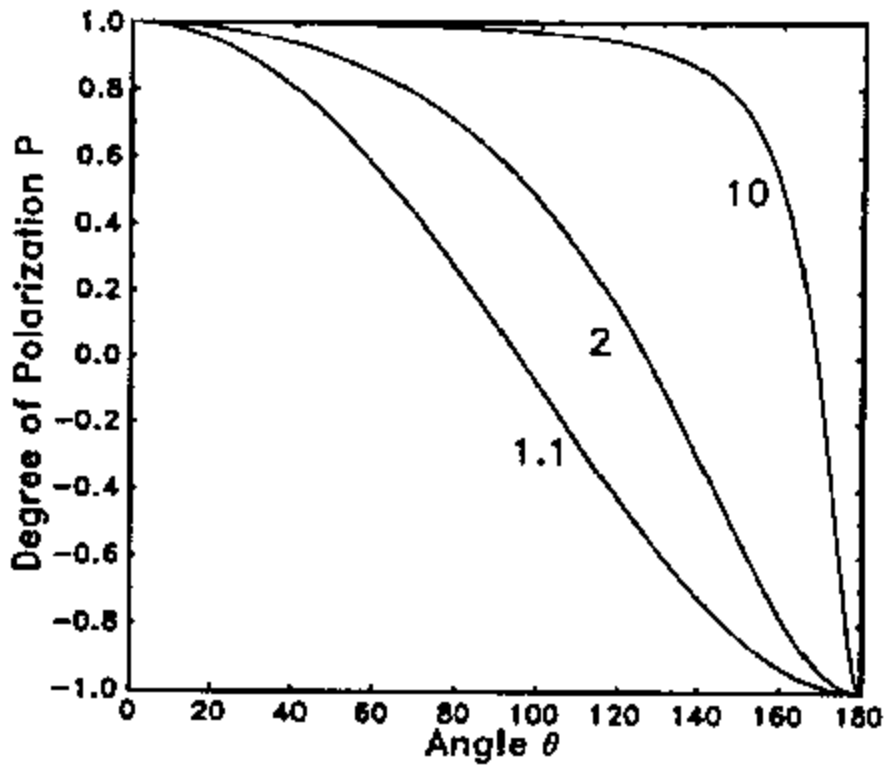


图 3.30 对电子的各种入射动能 E/m_0，相应于(3.167)的极化度

练 习

3.9 极化度

问题：计算纵向极化电子 Coulomb 散射的微分截面 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega(\lambda_f,\lambda_i)$。导出极化度作为散射角的函数形式。

解答：根据 3.5 节(3.164)式，极化的 Coulomb 散射截面为

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega}(\lambda_f,\lambda_i) = \frac{4Z^2\alpha^2m_0^2}{|\boldsymbol{q}|^4}\,\frac{1}{16m_0^2}(T_1 + \lambda_i\lambda_f T_2)\,, \tag{1}$$

其中迹为

$$\begin{aligned} T_1 &= \mathrm{Tr}\,[\gamma_0(\not{p}_i + m_0)\gamma_0(\not{p}_f + m_0)]\,,\\ T_2 &= \mathrm{Tr}\,[\gamma_0\gamma_5\not{s}_i(\not{p}_i + m_0)\gamma_0\gamma_5\not{s}_f(\not{p}_f + m_0)]\,. \end{aligned} \tag{2}$$

第一个迹是容易确定的(参见 3.1 节(3.36))

$$\begin{aligned} T_1 &= \mathrm{Tr}\,[\gamma_0\not{p}_i\gamma_0\not{p}_f] + m_0^2\,\mathrm{Tr}\,[\gamma_0\gamma_0]\\ &= 4E_iE_f + 4E_fE_i - 4(p_i\cdot p_f) + 4m_0^2 \end{aligned}$$

$$= 4(E^2 + \boldsymbol{p}^2\cos\theta + m^2)$$
$$= 4(E^2(1 + \cos\theta) + m_0^2(1 - \cos\theta))$$
$$= 8\left(E^2\cos^2\frac{\theta}{2} + m_0^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right), \tag{3}$$

式中，我们已考虑了 Mott 散射中的能量守恒，即 $E_i = E_f = E$ 以及 $|\boldsymbol{p}_i| = |\boldsymbol{p}_f| = |\boldsymbol{p}|$。因为 γ_5 与所有 γ 矩阵 γ^μ 反对易，且 $\gamma_5^2 = 1$，可以将第二个迹写成下列形式：

$$T_2 = \mathrm{Tr}\,[\gamma_0 \not{s}_i(-\not{p}_i + m_0)\gamma_0 \not{s}_f(\not{p}_f + m_0)]$$
$$= -\mathrm{Tr}\,[\gamma_0 \not{s}_i \not{p}_i \gamma_0 \not{s}_f \not{p}_f] + \mathrm{Tr}\,[\gamma_0 \not{s}_i \gamma_0 \not{s}_f]m_0^2 . \tag{4}$$

所有其他迹又均为零。因为它们含奇数个 γ-矩阵。数学附注 3.3 中定理 3 意味着

$$\mathrm{Tr}\,[\not{a}_1 \not{a}_2 \not{a}_3 \not{a}_4 \not{a}_5 \not{a}_6]$$
$$= 4[(12)(34)(56) + (12)(36)(45) - (12)(35)(46)$$
$$- (13)(24)(56) - (13)(26)(45) + (13)(25)(46)$$
$$+ (14)(23)(56) + (14)(26)(35) - (14)(25)(36)$$
$$- (15)(23)(46) - (15)(26)(34) + (15)(24)(36)$$
$$+ (16)(23)(45) + (16)(25)(34) - (16)(24)(35)], \tag{5}$$

(ij)代表 $a_i \cdot a_f$。正螺旋的 4 维矢量为(见 3.5 节(3.163))

$$s_i = \left(\frac{|\boldsymbol{p}|}{m_0}, \frac{E}{m_0}\frac{\boldsymbol{p}_i}{|\boldsymbol{p}|}\right),$$
$$s_f = \left(\frac{|\boldsymbol{p}|}{m_0}, \frac{E}{m_0}\frac{\boldsymbol{p}_f}{|\boldsymbol{p}|}\right). \tag{6}$$

(5)式需要用到下列标量积

$$p_i \cdot s_i = p_f \cdot s_f = 0, \tag{7a}$$
$$p_i \cdot s_f = p_f \cdot s_i = \frac{|\boldsymbol{p}|}{m_0}(1 - \cos\theta), \tag{7b}$$
$$s_i \cdot s_f = \frac{1}{m_0^2}(\boldsymbol{p}^2 - E^2\cos\theta), \tag{7c}$$
$$p_i \cdot p_f = E^2 - \boldsymbol{p}^2\cos\theta . \tag{7d}$$

代入矢量 $a_1 = a_4 = (1,0,0,0)$，$a_2 = s_i$，$a_3 = p_i$，$a_5 = s_f$，$a_6 = p_f$，(4)式第一项是

$$\mathrm{Tr}\,[\gamma_0 \not{s}_i \not{p}_i \gamma_0 \not{s}_f \not{p}_f]$$
$$= 4[s_i^0 E_i(s_f \cdot p_f) + s_i^0(p_i \cdot p_f)s_f^0 - s_i^0(p_i \cdot s_f)E_f$$
$$- E_i s_i^0(s_f \cdot p_f) - E_i(s_i \cdot p_f)s_f^0 + E_i(s_i \cdot s_f)E_f$$
$$+ (s_i \cdot p_i)(s_f \cdot p_f) + (s_i \cdot p_f)(p_i \cdot s_f) - (s_i \cdot s_f)(p_i \cdot p_f)$$
$$- s_f^0(s_i \cdot p_i)E_f - s_f^0(s_i \cdot p_f)E_i + s_f^0 s_i^0(p_i \cdot p_f)$$
$$+ E_f(s_i \cdot p_i)s_f^0 + E_f(s_i \cdot s_f)E_i - E_f s_i^0(p_i \cdot s_f)]. \tag{8}$$

因为 $s_f \cdot p_f = s_i \cdot p_i = 0$，求和的每行第一项为零。代入(7)式的标积，剩下来的部分结果为

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\,[\gamma_0 \not{s}_i \not{p}_i \gamma_0 \not{s}_f \not{p}_f] &= 4\Big[\frac{\boldsymbol{p}^2}{m_0^2}(E^2 - \boldsymbol{p}^2\cos\theta) - \frac{\boldsymbol{p}^2E^2}{m_0^2}(1-\cos\theta) \\ &\quad - \frac{\boldsymbol{p}^2E^2}{m_0^2}(1-\cos\theta) + \frac{E^2}{m_0^2}(\boldsymbol{p}^2 - E^2\cos\theta) + \frac{\boldsymbol{p}^2E^2}{m_0^2}(1-\cos\theta)^2 \\ &\quad - \frac{1}{m_0^2}(\boldsymbol{p}^2 - E^2\cos\theta)(E^2 - \boldsymbol{p}^2\cos\theta) - \frac{\boldsymbol{p}^2E^2}{m_0^2}(1-\cos\theta) \\ &\quad + \frac{\boldsymbol{p}^2}{m_0^2}(E^2 - p^2\cos\theta) + \frac{E^2}{m_0^2}(\boldsymbol{p}^2 - E^2\cos\theta) - \frac{\boldsymbol{p}^2E^2}{m_0^2}(1-\cos\theta)\Big] \\ &= 4\Big[\frac{2\boldsymbol{p}^2}{m_0^2}(E^2 - p^2\cos\theta) - \frac{4\boldsymbol{p}^2E^2}{m_0^2}(1-\cos\theta) + \frac{2E^2}{m_0^2}(\boldsymbol{p}^2 - E^2\cos\theta) \\ &\quad + \frac{\boldsymbol{p}^2E^2}{m_0^2}(1-\cos\theta)^2 - \frac{1}{m_0^2}(\boldsymbol{p}^2 - E^2\cos\theta)(E^2 - \boldsymbol{p}^2\cos\theta)\Big] \\ &= \frac{4}{m_0^2}(-\boldsymbol{p}^4\cos\theta - E^4\cos\theta + 2\boldsymbol{p}^2E^2\cos\theta) \\ &= -\frac{4}{m_0^2}(\boldsymbol{p}^2 - E^2)^2\cos\theta = -4m_0^2\cos\theta. \end{aligned} \tag{9}$$

借助缩写 $\tilde{s}_i=(s_i^0,-\boldsymbol{s}_i)$，(4)中第二个迹为

$$\mathrm{Tr}\,[\gamma_0 \not{s}_i \gamma_0 \not{s}_f] m_0^2 = m_0^2\,\mathrm{Tr}\,[\tilde{\not{s}}_i \not{s}_f] = 4m_0^2(\tilde{s}_i \cdot s_f) = 4(\boldsymbol{p}^2 + E^2\cos\theta)\,. \tag{10}$$

从而(4)式迹的和是

$$\begin{aligned} T_2 &= 4m_0^2\cos\theta + 4(\boldsymbol{p}^2 - E^2\cos\theta) = 4E^2(1+\cos\theta) - 4m_0^2(1-\cos\theta) \\ &= 8\Big(E^2\cos^2\frac{\theta}{2} - m_0^2\sin^2\frac{\theta}{2}\Big)\,. \end{aligned} \tag{11}$$

极化散射截面(1)变成

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\lambda_f,\lambda_i) &= \frac{4Z^2\alpha^2m_0^2}{|\boldsymbol{q}|^4}\frac{1}{2}\Big[E^2\cos^2\frac{\theta}{2} + m_0^2\sin^2\frac{\theta}{2} \\ &\quad + \lambda_i\lambda_f\Big(E^2\cos^2\frac{\theta}{2} - m_0^2\sin^2\frac{\theta}{2}\Big)\Big]\,. \end{aligned} \tag{12}$$

特殊情况是螺旋度翻转的截面($\lambda_f=-\lambda_i$)

$$\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\Big)_{\mathrm{flip}} = \Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\Big)_{\mathrm{Ruth}}\frac{m_0^2}{E^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\,, \tag{13}$$

和非翻转截面($\lambda_f=+\lambda_i$)

$$\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\Big)_{\mathrm{non-flip}} = \Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\Big)_{\mathrm{Ruth}}\cos^2\frac{\theta}{2}\,. \tag{14}$$

我们已把 Rutherford 截面因子化出来

$$\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\Big)_{\mathrm{Ruth}} = \frac{4Z^2\alpha^2E^2}{|\boldsymbol{q}|^4} = \frac{Z^2\alpha^2}{4\boldsymbol{p}^2\beta^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\,. \tag{15}$$

3.1 节(3.39)式的非极化 Mott 截面是(13)与(14)之和

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott}=\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{flip}+\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{non-flip}$$
$$=\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruth}\left(1-\beta^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right). \tag{16}$$

修正因子显然来自于(13)式中高能时对螺旋度翻转跃迁的压低。

最后极化度可由螺旋度非翻转和翻转截面之差除以这两截面之和求出。这导得结果

$$P=\frac{E^2\cos^2\theta/2-m_0^2\sin^2\theta/2}{E^2\cos^2\theta/2+m_0^2\sin^2\theta/2}$$
$$=1-\frac{2m_0^2\sin^2\theta/2}{E^2\cos^2\theta/2+m_0^2\sin^2\theta/2}. \tag{17}$$

3.6　韧致辐射

当电子在质子上散射或在一个原子核的场上散射时，它们能发射实光子。该过程被称之为韧致辐射。因为它包含对入射粒子的加速或减速(德语："bremsen")，发射的实光子满足 Einstein 关系

$$q^2=0. \tag{3.169}$$

类似于我们已经碰到的过程。韧致辐射能用 Feynman 图来表示，所不同的是，现在的光子线不再终止在一个顶角处。在这种情况下，相应的粒子或者是传向未来作为一个光子(发射)，或者是从过去出现(吸收)。通常地，实粒子与虚粒子间的差别在于这样一个事实，前者的图线存在一个开端，这标记着发射或吸收过程，而后者的图线无论是始端还是终端均在顶角处(见图 3.31)。

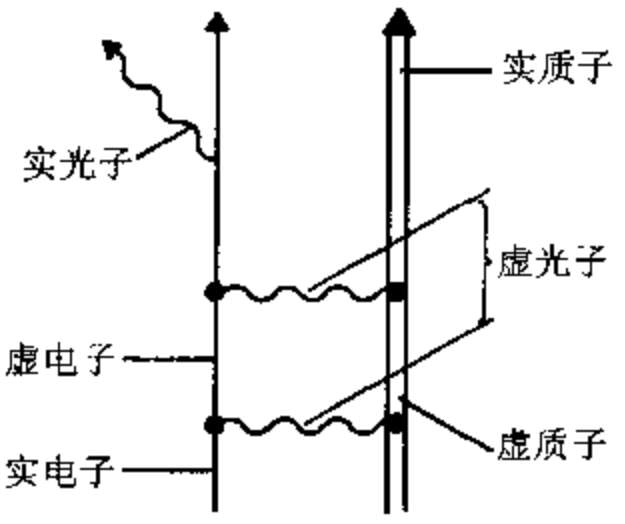


图 3.31　包含几个实和虚粒子的 Feynman 图

为研究韧致辐射情况中粒子与电磁场间相互作用，我们从具有动量 $k^\mu=(\omega/c,\boldsymbol{k})$ 和极化 ϵ_μ 的"一个"光子的四维-势出发，矢量势 A_μ 由平面波给出，

$$A^\mu(x,k)=\epsilon^\mu N_k(e^{-ik\cdot x}+e^{ik\cdot x}), \tag{3.170}$$

式中归一化常数 N_k 将在以后定出。用 $\hbar=c=1$，我们有 $\omega=|\boldsymbol{k}|$ 及色散关系为

$$k_\mu k^\mu = 0\ . \tag{3.171}$$

为理解极化矢 $\epsilon_\mu(\boldsymbol{k},\lambda)$，我们必须更完整地研究 A_μ 场的规范依赖性。在任意规范下，自由电磁场的矢势满足波动方程

$$\Box A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = 0\ , \tag{3.172}$$

这是 Maxwell 方程的结果。A_μ 是四维矢量场，从而似乎有四个自由度。然而，所有观测量在带有一个任意函数 $\Lambda(x)$ 的规范变换 $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \Lambda(x)$ 下不变。总能找到一个函数使得变换了的势满足 Lorentz 规范

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{3.173}$$

从而(3.172)中第二项为零。甚至在这一约束集的范围内，仍有可能继续作规范变换，只要 $\Lambda(x)$ 满足达朗贝尔方程 $\Box\Lambda(x)=0$。一种可能的选择是令

$$A^0 = 0, \nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0, \tag{3.174}$$

这称之为“辐射规范”。以这种方法，通过对 A_μ 场加附加条件使其自由度降了两次，从而我们已获得一个众所周知的事实，那就是光子只能有两个极化态 $\lambda=1,2$，它们都是横向极化的。条件(3.174)当然不是协变的，它仅在特定的 Lorentz 参照系中成立。这坐标系中，极化矢量纯粹是类空的。

$$\varepsilon^\mu = (0,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},\lambda)),\ \lambda = 1,2, \tag{3.175}$$

它具有两个横向三维矢

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},\lambda) = 0, \tag{3.176}$$

它归一为一个单位长度

$$\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 1. \tag{3.177}$$

通过一个 Lorentz 加速变换，三维-矢量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 能被推广成四维矢 ϵ^μ，它满足协变条件，

$$\epsilon^\mu \epsilon_\mu = -1, \tag{3.178}$$

$$k^\mu \epsilon_\mu = 0. \tag{3.179}$$

让我们讨论(3.170)中光子场的归一化。常数 N_k 将是这样定出的，使得波 A^μ 的能量恰好等于 ω ($\hbar=1$!)，即它等于一个单光子的能量。Gauss 单位制中电磁场的能量为

$$E_{\text{photon}} = \frac{1}{8\pi}\int \mathrm{d}^3x < \boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2 > = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3x < \boldsymbol{B}^2 >, \tag{3.180}$$

因为平均地有 $\boldsymbol{E}^2=\boldsymbol{B}^2$。由于

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \mathrm{i}N_k \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{\epsilon}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}) = 2N_k \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{\epsilon}\sin(\boldsymbol{k}\cdot x). \tag{3.181}$$

叉积的平方变成

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\epsilon})\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\epsilon}) &= \boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} - (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\varepsilon})^2 = (\varepsilon_0^2 - \boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{k}^2 - (k_0\varepsilon_0 - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\varepsilon})^2 \\ &= \varepsilon_0^2\boldsymbol{k}^2 + \boldsymbol{k}^2 - \varepsilon_0^2 k_0^2 = \boldsymbol{k}^2 = \omega^2,\end{aligned} \tag{3.182}$$

式中，已用到条件(3.178)和(3.179)。我们发现能量(3.180)将成为

$$E_{\text{photon}} = \frac{4\omega^2}{4\pi} N_k^2 \int \mathrm{d}^3x < \sin^2(\omega \cdot t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x}) > = \frac{2\omega^2}{4\pi} N_k^2 V. \tag{3.183}$$

条件 $E_{\text{photon}} = \omega$ 定出了归一化常数。①

$$N_k = \sqrt{\frac{4\pi}{2\omega V}}. \tag{3.184}$$

现在，我们的任务是确定在电子散射中发射这种光子的散射幅。为使问题简化，像 3.1 节那样，我们首先考虑电子在一个外(静)Coulomb 场上的散射。在最低阶散射近似下，发射一个光子的相应 Feynman 图如图 3.32 所示。

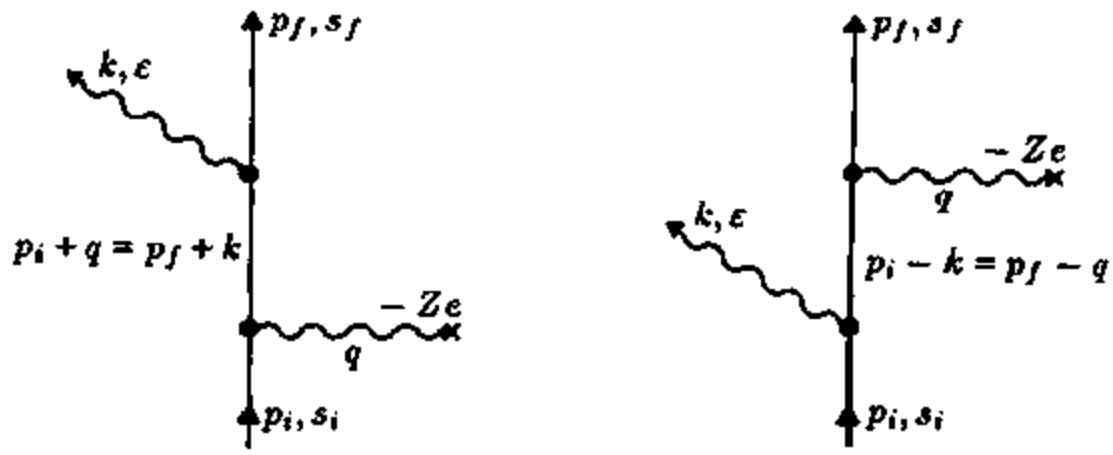


图 3.32　描写电子在静 Coulomb 场上最低阶散射而发射一个光子的二个 Feynman 图(韧致辐射)

正如我们能看出的，韧致辐射是一个二阶过程。在外场中一个自由电子发射光子的一级过程不存在。因为在那种情况下，能量和动量不能同时守恒。这个禁戒过程的图如图 3.33 所示。守恒定律在这种情况下应要求

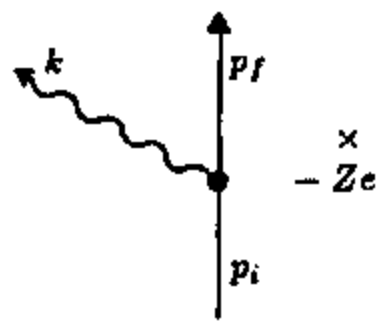


图 3.33　一阶韧致辐射的虚拟图是禁戒的，相应的幅为零，因为不能同时满足能量守恒和动量守恒。

$$k = p_f - p_i, \text{ 即 } \quad k^2 = (p_f - p_i)^2. \tag{3.185}$$

对实光子 $k^2 = 0$，另一方面，它得出

$$\begin{aligned}(p_f - p_i)^2 &= p_f^2 + p_i^2 - 2p_f \cdot p_i = 2m_0^2 - 2E_f E_i + 2\boldsymbol{p}_f \cdot \boldsymbol{p}_i \\ &= 2\left(m_0^2 + \boldsymbol{p}_f \cdot \boldsymbol{p}_i - \sqrt{m_0^2 + \boldsymbol{p}_f^2}\sqrt{m_0^2 + \boldsymbol{p}_i^2}\right) < 0.\end{aligned} \tag{3.186}$$

从而(3.185)引起矛盾。

如图 3.32 所示的二阶过程的 S 矩阵元，能根据我们以前导出的规则直接写出

$$S_{fi} = e^2 \int \mathrm{d}^4x \mathrm{d}^4y \bar{\psi}_f(x) [(-\mathrm{i}\, \boldsymbol{A}(x,k)) \mathrm{i} S_F(x - y)(-\mathrm{i}\gamma^0) A_0^{\text{coul}}(y)$$

① 当不使用 Gauss 单位而用合理化单位时，(3.184)中的因子 4π 不存在。

$$+(-\mathrm{i}\gamma^0)A_0^{\mathrm{coul}}(x)\mathrm{i}S_F(x-y)(-\mathrm{i}\not{A}(y,k))]\psi_i(y), \tag{3.187}$$

其中

$$A_0^{\mathrm{coul}}(x)=-\frac{Ze}{|x|} \tag{3.188}$$

是从 3.1 节中已获知的 Coulomb 势。由于无法区分光子是由入射还是出射电子发射的，故两个散射幅已在(3.187)中作了相干相加。

如同以前那样，将(3.187)式的 S 矩阵元变到动量空间中去是便利的。我们利用取自 3.1 节(3.7)式 Coulomb 势的 Fourier 表示

$$-\frac{Ze}{|x|}=-Ze\,4\pi\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{|q|^2}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}q\cdot x} \tag{3.189}$$

借助此式我们得到

$$\begin{aligned}
S_{fi}=&-\frac{Ze^3 4\pi}{V^{3/2}}\sqrt{\frac{4\pi}{2\omega}}\sqrt{\frac{m_0^2}{E_fE_i}}\int\mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\,\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\\
&\times\bar{u}(p_f,s_f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_f\cdot x}\Big[-\mathrm{i}\not{\varepsilon}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}+\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k\cdot x})\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{\not{p}-m_0+\mathrm{i}\varepsilon}(-\mathrm{i}\gamma^0)\frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{i}q\cdot y}}{|q|^2}\\
&-\mathrm{i}\gamma^0\frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{i}q\cdot x}}{|q|^2}\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{\not{p}-m_0+\mathrm{i}\varepsilon}(-\mathrm{i}\not{\varepsilon})(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot y}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot y})\Big]u(p_i,s_i)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_i\cdot y}\\
=&-\frac{Ze^3 4\pi}{V^{3/2}}\sqrt{\frac{4\pi}{2\omega}}\sqrt{\frac{m_0^2}{E_fE_i}}\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\\
&\times\Big\{[(2\pi)^4\delta^4(p_f-k-p)+(2\pi)^4\delta^4(p_f+k-p)](2\pi)^4\delta^4(p-q-p_i)\\
&\times\bar{u}(p_f,s_f)(-\mathrm{i}\not{\varepsilon})\frac{\mathrm{i}}{\not{p}-m_0+\mathrm{i}\varepsilon}(-\mathrm{i}\gamma^0)\frac{1}{|q|^2}u(p_i,s_i)\\
&+[(2\pi)^4\delta^4(p-k-p_i)+(2\pi)^4\delta^4(p+k-p_i)](2\pi)^4\delta^4(p_f-q-p)\\
&\times\bar{u}(p_f,s_f)(-\mathrm{i}\gamma^0)\frac{1}{|q|^2}\frac{\mathrm{i}}{\not{p}-m_0+\mathrm{i}\varepsilon}(-\mathrm{i}\not{\varepsilon})u(p_i,s_i)\Big\}\,.
\end{aligned} \tag{3.190}$$

这里，我们已将四维矢量 $q=(0,\boldsymbol{q})$引入到一些 δ 函数的宗量中去了。我们认识到无论是在直接项还是在交换项中，两贡献看来是来自于光子场(3.170)中因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}$和 $\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k\cdot x}$。让我们首先考虑直接项。对 d^4p 和 d^3q 积分截断就得

$$\begin{aligned}
&\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}(2\pi)^4\delta^4(p_f\pm k-p)(2\pi)^4\delta^4(p-q-p_i)f(p,|q|)\\
&=\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}(2\pi)^4\delta^4(p_f\pm k-q-p_i)f(p,|q|)\\
&=2\pi\delta(E_f-E_i\pm\omega)f(p,|q|),
\end{aligned} \tag{3.191}$$

式中 $q=p_f\pm k-p_i$ 和 $p=p_f\pm k$。

方程(3.190)包含具有动量 k 或动量 $-k$ 的两类光子贡献之和。

然而，对一个给定的过程，能量 E_f 和 E_i 是确定的，从而(3.191)中，两个 δ 函数项只有其中之一有贡献。因为我们要描述光子发射，电子丢失能量，$E_f<E_i$，从而相应于 $E_f=E_i-\omega$，(3.91)中必须取正号。另一种可能性 $E_f=E_i+\omega$ 对应着电子在散射过程中从辐射场获得能量。这一光子吸收过程能由图 3.34 的 Feynman 图来表示。

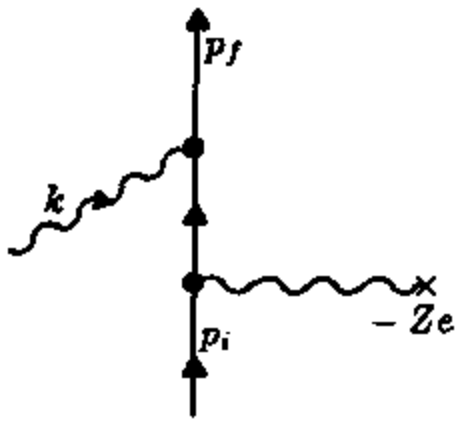


图 3.34　散射时实光子的吸收

在一个韧致辐射型过程中，不存在入射光子，而发射的光子被探测到。所以，我们仅考虑散射幅中这些部分。方程(3.190)给出

$$S_{fi}=-Ze^3 2\pi\delta(E_f+\omega-E_i)\sqrt{\frac{4\pi}{2\omega V}}\sqrt{\frac{m_0^2}{E_fE_iV^2}}\frac{4\pi}{|\boldsymbol{q}|^2}\bar{u}(p_f,s_f)$$
$$\times\left[(-\mathrm{i}\not{\epsilon})\frac{\mathrm{i}}{\not{p}_f+\not{k}-m_0}(-\mathrm{i}\gamma_0)+(-\mathrm{i}\gamma_0)\frac{\mathrm{i}}{\not{p}_i-\not{k}-m_0}(-\mathrm{i}\not{\epsilon})\right]u(p_i,s_i)\,. \tag{3.192}$$

这里 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}_f+\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}_i$ 是转移到原子核上的动量。因为矢量 $\boldsymbol{p}_i,\boldsymbol{p}_f$ 以及 $\boldsymbol{k}$ 是实验上固定的，$\boldsymbol{q}$ 也是确定的矢量。不存在到原子核的能量转移，因为原子核被假设成无限重的。

受到韧致辐射幅(3.192)的引导，我们采用如下普遍规则：在每个发射一个极化矢为 ϵ_μ 的自由光子的顶角处，出现一个因子$(-\mathrm{i}\not{\epsilon})$和光子的归一化因子(3.184)，即引进$\sqrt{4\pi/2\omega V}$。

为使记号简化些，我们按照

$$S_{fi}=\mathrm{i}Ze^3 2\pi\delta(E_f+\omega-E_i)\sqrt{\frac{4\pi}{2\omega V}}\sqrt{\frac{m_0^2}{E_fE_iV^2}}\frac{4\pi}{|\boldsymbol{q}|^2}\epsilon^\mu M_\mu(k)\,, \tag{3.193}$$

将(3.192)中归一化因子和运动学因子分出来，其中矩阵元为

$$M_\mu(k)=\bar{u}(p_f,s_f)\left[\gamma_\mu\frac{1}{\not{p}_f+\not{k}-m_0+\mathrm{i}\epsilon}\gamma_0+\gamma_0\frac{1}{\not{p}_i-\not{k}-m_0+\mathrm{i}\epsilon}\gamma_\mu\right]u(p_i,s_i)\,. \tag{3.194}$$

利用能量-动量关系 $p_i^2=p_f^2=m_0^2,k^2=0$，这能改写成

$$M_\mu(k)=\bar{u}(p_f,s_f)\left[\gamma_\mu\frac{\not{p}_f+\not{k}+m_0}{2p_f\cdot k+\mathrm{i}\epsilon}\gamma_0+\gamma_0\frac{\not{p}_i-\not{k}+m_0}{-2p_i\cdot k+\mathrm{i}\epsilon}\gamma_\mu\right]u(p_i,s_i)\,. \tag{3.195}$$

韧致辐射的截面由每个入射电子通量(v_i/V)单位时间 $(T=2\pi\delta(0))$上的散射幅平方 $|S_{fi}|^2$ 求得(参见(3.16))，而且我们必须对光子终态$(V\mathrm{d}^3k/(2\pi)^3)$和电于终态$(V\mathrm{d}^3p_f/(2\pi)^3$ 求和。这就得到总的位相因子

$$V^2\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}^3p_f}{(2\pi)^3}\,. \tag{3.196}$$

从而韧致辐射截面为

$$\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{\frac{|v_i|}{V}T}|S_{fi}|^2\frac{V\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{V\mathrm{d}^2p_f}{(2\pi)^3}$$
$$=\frac{Z^2e^6}{|v_i|}\frac{4\pi}{2\omega}\frac{m_0^2}{E_fE_i}\frac{(4\pi)^2}{|\boldsymbol{q}|^4}|\epsilon^\mu M_\mu(k)|^2\,2\pi\delta(E_f+\omega-E_i)\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}^3p_f}{(2\pi)^3}\,. \tag{3.197}$$

下面我们要计算出这一表达式。我们局限于 $k\to 0$ 情况，即我们考虑非常软的光子的发射。一般情况下的被称之为 Bethe-Heitler 的公式[①]我们将在例 3.11 中讨论。

在极限 $k\to 0$ 下，(3.193)中矩阵元 $\varepsilon^\mu M_\mu$ 能用下列方式作近似

$$\varepsilon^\mu M_\mu(k) \simeq \bar{u}(p_f,s_f)\left[\frac{2\varepsilon\cdot p_f-(\not p_f-m_0)\not\varepsilon}{2k\cdot p_f+\mathrm{i}\epsilon}\gamma_0 + \gamma_0\frac{2\varepsilon\cdot p_i-\not\varepsilon(\not p_i-m_0)}{-2k\cdot p_i+\mathrm{i}\epsilon}\right]u(p_i,s_i). \tag{3.198}$$

这里我们已将分子上 k 的线性项删掉了。而且 $\not p$ 和 $\not\varepsilon$ 因子的次序利用下列反对易关系作了对换。

$$\not\varepsilon\not p=\varepsilon_\mu\gamma^\mu p_\nu\gamma^\nu=\varepsilon_\mu p_\nu(2g^{\mu\nu}\mathbb{1}-\gamma^\nu\gamma^\mu)=2\varepsilon\cdot p-\not p\not\varepsilon. \tag{3.199}$$

这就有可能简化(3.198)，因为单位旋量满足自由 Dirac 方程

$$\bar{u}(p_f,s_f)(\not p_f-m_0)=0 \text{ 和 } (\not p_i-m_0)u(p_i,s_i)=0. \tag{3.200}$$

从而出现在(3.198)中方括号内的项能被化为

$$\varepsilon^\mu M_\mu \simeq \bar{u}(p_f,s_f)\gamma_0 u(p_i,s_i)\left(\frac{\varepsilon\cdot p_f}{k\cdot p_f}-\frac{\varepsilon\cdot p_i}{k\cdot p_i}\right). \tag{3.201}$$

第一个因子正好是弹性散射幅(见(3.8))。从而在极限 $k\to 0$ 下，我们得到可被接受的结果。那就是描述软韧致辐射的矩阵元与弹性散射幅成正比。利用(3.197)和(3.201)韧致辐射截面变成

$$\mathrm{d}\sigma=\frac{Z^2e^6(4\pi)^3m_0^2}{2\omega|v_i|E_fE_i}\left(\frac{\varepsilon\cdot p_f}{k\cdot p_f}-\frac{\varepsilon\cdot p_i}{k\cdot p_i}\right)^2\frac{|\bar{u}(p_f,s_f)\gamma_0u(p_i,s_i)|^2}{|\boldsymbol{q}|^4} \times 2\pi\delta(E_f+\omega-E_i)\frac{\mathrm{d}^3k\mathrm{d}^3p_f}{(2\pi)^6}. \tag{3.202}$$

该结果能与电子弹性散射截面(3.1 节，(3.23))比较

$$\mathrm{d}\sigma_{\text{elastic}}=\frac{4Z^2e^4m_0^2}{|v_i|E_fE_i}\frac{|\bar{u}(p_f,s_f)\gamma_0u(p_i,s_i)|^2}{|\boldsymbol{q}|^4}\delta(E_f-E_i)\mathrm{d}^3p_f, \tag{3.203}$$

这显然是作为一个因子包含在(3.202)中，略去(3.202)式中软光子的能量和动量效应，$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}_f-\boldsymbol{p}_i+\boldsymbol{k}\approx\boldsymbol{p}_f-\boldsymbol{p}_i$，$E_f=E_i-\omega\approx E_i$，韧致辐射的散射截面能被写成

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_f\mathrm{d}\Omega_k\mathrm{d}\omega}=\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_f}\right)_{\text{elastic}}\frac{e^2\omega}{(2\pi)^2}\left(\frac{\varepsilon\cdot p_f}{k\cdot p_f}-\frac{\varepsilon\cdot p_i}{k\cdot pi}\right)^2\Theta(E_i-m_0-\omega). \tag{3.204}$$

这是电子被散射到立体角 $\mathrm{d}\Omega_f$ 内的韧致辐散射截面。极化为 ε 和动量为 k 的软光子($k\to 0$)在 $\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\Omega_k$ 内被观测到。很自然地，软光子韧致辐射截面与相同能量和相同散射角的减速电子的散射截面成比例。的确，被光子所带走的能量和动量是如此之小，以至于电子的“轨迹”几乎不受到影响。

若要计算出非极化电子的截面，我们就得对电子的终态自旋求和与对初态自旋求平均。由于(3.204)的因子化性质是容易做到的，我们仅需用 3.1 节(3.39)所给出的非极化表达式$(\mathrm{d}\bar{\sigma}/\mathrm{d}\Omega_f)_{\text{elastic}}$取代弹性散射截面。

---

① 见 Walter Heitler: *The Quautum Theory of Radiation* (Oxford Univerdity Press, Oxford 1957).

(3.204)的结果比所预料到的更普遍。已经证明，在极限 $k\to 0$ 下，任何引起光子发射的过程，其散射幅能被因子化成

$$\lim_{k\to 0} M(k) = \sqrt{4\pi}e\left(\frac{\varepsilon\cdot p_f}{k\cdot p_f} - \frac{\varepsilon\cdot p_i}{k\cdot p_i}\right) M_0, \tag{3.205}$$

式中 M_0 是没有光子发射的相同过程的幅。这结果对任何种类过程均正确，不管荷电粒子的自旋或内部结构是怎样，表达式(3.205)在 $k\to 0$ 极限下发散。它能被视作按 k 的幂次展开的领头项。根据软光子定理[①]，这个展开的头两项是仅依赖于粒子的电荷、质量和磁矩的通用表达式。粗略地说，那就是长波长的光子不能分辨出辐射源的详细内部结构。类似地，低能定理也适用于其他 Bose 子场量子的发射，尤其对原子核碰撞中 π 介子发射。

让我们更详细地考虑按照(3.204)所发射的光子的能谱。软量子被发射的几率正比于

$$\frac{dW_{\text{photon}}}{d\Omega_k} \sim \frac{d|k|}{|k|}, \tag{3.206}$$

当 $k\to 0$ 时，它趋于无限。这种行为被称为红外灾难。下面，我们将讨论如何通过对韧致辐射测量过程的详细检查来补救这一非物理的发散问题。认清电子和光子探测器仅有有限能量大小的分辨力是重要的。所以，若是测量动量为 $|k|\approx 0$ 的光子，不仅非弹性而且弹性散射的电子($|k|=0$)均被探测到。在将理论与实验作比较时，我们理所当然必须考虑弹性和非弹性散射截面，两者均达 e^2 阶。换句话说，因为对电子的弹性散射截面而言，韧致辐射的截面(3.204)是 e^2 阶，我们必须包括到相同阶的所谓的对 $(d\sigma/d\Omega)_{\text{elastic}}$ 的辐射修正。存在图 3.35 所示的两种类型的修正。

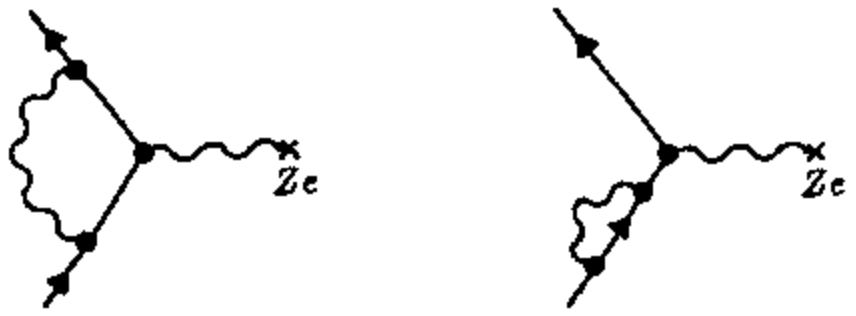


图 3.35　电子 Coulomb 散射时出现的二种类型 e^2 阶辐射修正

两图都包含了同一个电子上发射和吸收的虚光子，这不同于我们在例 3.6 中所考虑的双光子交换。那边两个光子电子发射而两者被质子吸收。相反，图 3.35 情况中，电子通过辐射场自相互作用。在后面例 5.7 对这一过程(很复杂的)计算中，我们将会发现，这些图所提供的发散贡献正好抵消了红外发散(3.206)。

暂且我们继续计算发射软韧致辐射的截面，并略去红外发散。首先，我们对光子的不同极化求和。若利用电磁场规范不变性质，这可做得十分巧妙[②]。任何电磁流 $J_\mu(x)$ 与矢势 $A_\mu(x)$ 的相互

① F. E. Low: Phys. Rev. **96**, 1428(1954) 及 Phys. Rev. **110**, 974(1958).

② R. P. Feynman: Phys. Rev. **76**, 769(1949).

作用为 $\int \mathrm{d}^4x J_\mu(x)A^\mu(x)$。该积分在下列规范变换下必定不变

$$A^\mu(x) \to A^\mu(x) + \frac{\partial \Lambda(x)}{\partial x_\mu}. \tag{3.207}$$

分部积分，这就隐含这样的条件

$$\int \mathrm{d}^4x J_\mu(x) \frac{\partial \Lambda(x)}{\partial x_\mu} = 0 = \int \mathrm{d}^4x \frac{\partial J_\mu(x)}{\partial x_\mu}\Lambda(x). \tag{3.208}$$

既然 $\Lambda(x)$为任意函数，这就导致流守恒

$$\frac{\partial J_\mu(x)}{\partial x_\mu} = 0, \tag{3.209}$$

这在动量空间中能被写成

$$k_\mu J^\mu(k) = 0, \tag{3.210}$$

因为 $J_\mu(x) = \int \mathrm{d}^4x J_\mu(k)\mathrm{e}^{-ik\cdot x}$。量子力学中跃迁流也具有这一性质。从而，我们能料想到(3.194)中所引入的矩阵元满足

$$k^\mu M_\mu(k) = 0, \tag{3.211}$$

因为直到一个数值因子，$M_\mu(x)$是最低阶微论中轫致辐射的跃迁流。利用 $\not{k}\not{p} = -\not{p}\not{k} + 2p\cdot k$ 以及 Dirac 方程(3.200)这易被明显验证

$$\begin{aligned}
k^\mu M_\mu(k) &= \bar{u}(p_f,s_f)\left[\not{k}\frac{\not{p}_f + \not{k} + m_0}{2p_f\cdot k + \mathrm{i}\varepsilon}\gamma_0 + \gamma_0\frac{\not{p}_i - \not{k} + m_0}{-2p_i\cdot k + \mathrm{i}\varepsilon}\not{k}\right]u(p_i,s_i)\\
&= \bar{u}(p_f,s_f)\left[\frac{-(\not{p}_f - m_0)\not{k} + 2p_f\cdot k + k^2}{2p_f\cdot k + \mathrm{i}\varepsilon}\gamma_0\right.\\
&\quad \left. + \gamma_0\frac{-\not{k}(\not{p}_i - m_0) + 2p_i\cdot k - k^2}{-2p_i\cdot k + \mathrm{i}\varepsilon}\right]u(p_i,s_i)\\
&= \bar{u}(p_f,s_f)\left[\frac{2p_f\cdot k}{2p_f\cdot k + \mathrm{i}\varepsilon}\gamma_0 + \gamma_0\frac{2p_i\cdot k}{-2p_i\cdot k + \mathrm{i}\varepsilon}\right]u(p_i,s_i)\\
&= 0\,.
\end{aligned} \tag{3.212}$$

现在我们已能对由极化矢 $\varepsilon_\mu(k,\lambda)$且 $\lambda=1,2$ 来表征的光子极化求和。感兴趣的量是

$$\begin{aligned}
\overline{|\varepsilon\cdot M|^2} &= \sum_{\lambda=1,2}|\varepsilon_\mu(k,\lambda)M^\mu(k)|^2\\
&= \sum_{\lambda=1,2}\varepsilon_\mu(k,\lambda)\varepsilon_\nu^*(k,\lambda)M^\mu(k)M^{*\nu}(k).
\end{aligned} \tag{3.213}$$

为简化下列计算，坐标系选成使动量矢 k 沿 z 轴取向。

$$k^\mu = \omega(1,0,0,1). \tag{3.214}$$

两个横向极化的矢量必须满足(3.178)和(3.179)，我们把它们选作纯粹空间的实单位矢

$$\begin{aligned}
\varepsilon(k,1) &= (0,1,0,0),\\
\varepsilon(k,2) &= (0,0,1,0)\,.
\end{aligned} \tag{3.215}$$

当然，这种选择仅在特定的 Lorentz 坐标系中有效，而且它也意味着对矢势的一个特定的规范即

“辐射规范”

$$A^0(x)=0. \tag{3.216}$$

然而，这并非属严重缺陷，因为最终结果是 Lorentz 和规范不变的。利用(3.215)我们获得

$$\overline{|\varepsilon\cdot M|^2}=M^1M^{*1}+M^2M^{*2}. \tag{3.217}$$

现我们用流守恒条件(3.210)，它化为

$$k_\mu M^\mu=\omega(M^0-M^3)=0, \tag{3.218}$$

从而意味着 $M^0=M^3$。然后，我们能将(3.217)转换成一个四维标量积，这需加入一个零贡献项：

$$\overline{|\varepsilon\cdot M|^2}=M^1M^{*1}+M^2M^{*2}+M^3M^{*3}-M^0M^{*0}=-M_\mu M^{*\mu}. \tag{3.219}$$

显然，该结果是协变的。将此与(3.123)作比较，我们发现，数学上我们已证明的是极化矢量的完备关系，它能写成

$$\sum_{\lambda=1,2}\varepsilon_\mu(\boldsymbol{k},\lambda)\varepsilon_\nu(\boldsymbol{k},\lambda)=-g_{\mu\nu}+\text{规范项}. \tag{3.220}$$

附加规范项无需详细给定。它们正比于 k_μ 或 k_ν，从而对任何可观察量不贡献，因为(3.220)将乘以满足 $k\cdot J=0$ 的守恒流，无论怎样，这些项必须在(3.220)中出现，因为 Lorentz 矢量的四维空间的完备基必须含有 4 个元素。纵向光子 $\varepsilon_\mu(\boldsymbol{k},3)$和标量光子 $\varepsilon_\mu(\boldsymbol{k},0)$对完备关系的贡献使得它们在(3.220)式右端出现。然而它们不相应于物理光子。

我们将完备关系(3.220)用到韧致辐射截面(3.204)上去，在那里我们对光子的角度和能量积分，能量积分范围是

$$0<\omega_{\min}\leqslant\omega\leqslant\omega_{\max}\ll E_i \tag{3.221}$$

这是为补救红外灾难所采取的措施。对光子的极化态求和得

$$\sum_{\lambda=1,2}\left(\frac{\varepsilon\cdot p_f}{k\cdot p_f}-\frac{\varepsilon\cdot p_i}{k\cdot p_i}\right)^2=-\left(\frac{p_f}{k\cdot p_f}-\frac{p_i}{k\cdot p_i}\right)^2. \tag{3.222}$$

这导致

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega_f}&=\left(\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega_f}\right)_{\text{elastic}}\frac{4\pi\alpha}{2\cdot(2\pi)^3}\int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}}\omega\mathrm{d}\omega\int\mathrm{d}\Omega_k\\&\quad\times\left[\frac{2p_f\cdot p_i}{(k\cdot p_f)(k\cdot p_i)}-\frac{m_0^2}{(k\cdot p_f)^2}-\frac{m_0^2}{(k\cdot p_i)^2}\right]\\&=\left(\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega_f}\right)_{\text{elastic}}\frac{4\pi\alpha}{(2\pi)^2}\ln\left(\frac{\omega_{\max}}{\omega_{\min}}\right)\int\frac{\mathrm{d}\Omega_k}{4\pi}\\&\quad\times\left[\frac{2(1-\boldsymbol{\beta}_f\cdot\boldsymbol{\beta}_i)}{(1-\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{\beta}_f)(1-\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{\beta}_i)}-\frac{m_0^2}{E_f^2(1-\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{\beta}_f)^2}-\frac{m_0^2}{E_i^2(1-\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{\beta}_i)^2}\right].\end{aligned} \tag{3.223}$$

我们有(记住 $c=1$)

$$\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{v}_i=\frac{\boldsymbol{p}_i}{E_i}\quad\text{和}\quad\boldsymbol{\beta}_f=\boldsymbol{v}_f=\frac{\boldsymbol{p}_f}{E_f}, \tag{3.224}$$

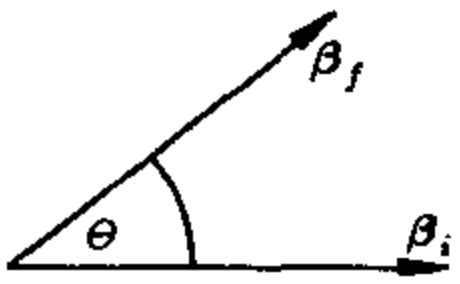


图 3.36 θ 是电子初始方向和终态方向之间夹角

它们是电子的初速度和末速度，$\hat{\boldsymbol{k}}=\boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|$ 为光子动量方向的单位矢。若韧致辐射的光子很软，电子的初态和终态能量几乎相同，我们得到

$$|\boldsymbol{\beta}_i| = |\boldsymbol{\beta}_f| = \beta \tag{3.225}$$

从而

$$\boldsymbol{\beta}_i \cdot \boldsymbol{\beta}_f = \beta^2 \cos\Theta, \tag{3.226}$$

其中散射角为 Θ（见图 3.36）。(3.223)中最后两项的角度积分可根据基本方法进行

$$\int \frac{\mathrm{d}\Omega_k}{4\pi} \frac{m_0^2}{E^2(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\hat{\boldsymbol{k}})^2} = \frac{m_0^2}{E^2}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}\cos\theta}{2(1-\beta\cos\theta)^2} = \frac{m_0^2}{E^2}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}z}{2(1-\beta z)^2}$$

$$= \frac{m_0^2}{E^2}\left(-\frac{1}{\beta}\right)\int_{1+\beta}^{1-\beta}\frac{\mathrm{d}x}{2x^2} = -\frac{m_0^2}{\beta E^2}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{1+\beta}^{1-\beta}$$

$$= \frac{m_0^2}{1-\beta^2}\frac{1}{E^2} = 1. \tag{3.227}$$

θ 为电子和光子间的夹角。(3.223)中第一项积分的计算是更困难些。它能借助仍是由 Feynman 提出的技巧来完成。在被积函数的分母中两因子能通过引入下列辅助积分结合在一起。

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{[ax+b(1-x)]^2} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{[(a-b)x+b]^2} = \frac{1}{a-b}\int_b^a \frac{\mathrm{d}z}{z^2}$$

$$= \frac{1}{a-b}\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = \frac{1}{ab}. \tag{3.228}$$

通过此恒等式来表达分母，我们发现(3.223)中第一个积分为

$$I = \int \frac{\mathrm{d}\Omega_k}{4\pi}\frac{1}{(1-\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{\beta}_f)(1-\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{\beta}_i)}$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \int \frac{\mathrm{d}\Omega_k}{4\pi}\frac{1}{[(1-\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{\beta}_f)x+(1-\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{\beta}_i)(1-x)]^2}$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \int \frac{\mathrm{d}\Omega_k}{4\pi}\frac{1}{[1-\hat{\boldsymbol{k}}\cdot(\boldsymbol{\beta}_f x+\boldsymbol{\beta}_i(1-x))]^2}$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\cos\theta}{4\pi}\frac{1}{[1-|\boldsymbol{\beta}_f x+\boldsymbol{\beta}_i(1-x)|\cos\theta]^2}$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x\,\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{u}\right)\int_{1+u}^{1-u}\frac{\mathrm{d}z}{z^2} \quad (\text{其中 } u = |\boldsymbol{\beta}_f x+\boldsymbol{\beta}_i(1-x)|)$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x\,\frac{1}{1-u^2} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1-|\boldsymbol{\beta}_f x+\boldsymbol{\beta}_i(1-x)|^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1-\beta^2+4\beta^2 x(1-x)\sin^2(\Theta/2)}. \tag{3.229}$$

分母中的一个二次多项式的积分能被完整地积出，其结果为

$$I=\frac{1}{2\beta\sin(\Theta/2)\sqrt{1-\beta^2\cos^2(\Theta/2)}}\ln\left(\frac{\sqrt{1-\beta^2\cos^2(\Theta/2)}+\beta\sin(\Theta/2)}{\sqrt{1-\beta^2\cos^2(\Theta/2)}-\beta\sin(\Theta/2)}\right). \tag{3.230}$$

该表达式在非相对论极限下($\beta\ll1$)能被简化，此时，Taylor 级数的头几项为

$$I_{\mathrm{NR}}\approx 1+\beta^2-\frac{2}{3}\beta^2\sin^2\frac{\Theta}{2}+O(\beta^4). \tag{3.231}$$

相反在极端相对论极限($\beta=1-\delta,\delta\ll1$)下，对小参数 δ 的 Taylor 级数展开为

$$I_{\mathrm{UR}}\approx\frac{1}{2\sin^2\frac{\Theta}{2}}\ln\left(\frac{2\sin^2\frac{\Theta}{2}}{\delta}\right)(1+O(\delta)). \tag{3.232}$$

用 $E=m_0\gamma=m_0(1-\beta^2)^{-1/2}\approx m_0/\sqrt{2\delta}$，对数的宗量能用动量转移来表示(见 3.2 节中(3.109))，

$$q^2=(p_f-p_i)^2\simeq-4E^2\sin^2\frac{\Theta}{2}=-m_0^2\left(\frac{2\sin^2\frac{\Theta}{2}}{\delta}\right). \tag{3.233}$$

利用这些结果，由(3.223)式可导出下列软韧致辐射截面在非相对论和极端相对论极限下的结果

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega_f}&=\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_f}\right)_{\mathrm{elastic}}\frac{\alpha}{\pi}\ln\frac{\omega_{\max}}{\omega_{\min}}[2(1-\beta^2\cos\theta)I-2]\\&=\left(\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega_f}\right)_{\mathrm{elastic}}\frac{2\alpha}{\pi}\ln\frac{\omega_{\max}}{\omega_{\min}}\begin{cases}\frac{4}{3}\beta^2\sin^2\frac{\Theta}{2} & \text{非相对论极限}\\ \ln\left(\frac{-q^2}{m_0^2}\right)-1 & \text{极端相对论极限}\end{cases}.\end{aligned} \tag{3.234}$$

正如上面所解释的，通过取 $\omega_{\min}$ 作为动量积分变量的下限，红外发散已截断。

在极限 $\omega_{\min}\to0$ 下，为了获得有限的结果，我们必须在电子散射即 $(\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega_f)_{\mathrm{elastic}}$ 的计算中引进辐射修正。

练　习

3.10　韧致辐射的静态极限

问题：将靶视为一个具有有限质量的 Dirac 粒子，导出电子-质子碰撞中韧致辐射的 S 矩阵元。证明在静态极限下，它能被化成(3.192)中所给的幅。

$$\begin{aligned}S_{fi}=&\frac{\mathrm{i}e^3}{V^{3/2}}2\pi\delta(E_f+\omega-E_i)\sqrt{\frac{4\pi}{2\omega}}\sqrt{\frac{m_0^2}{E_iE_f}}\frac{4\pi}{|\boldsymbol{p}_f+\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}_i|^2}\\&\times\bar{u}(p_f,s_f)\left[\not{\varepsilon}\frac{1}{\not{p}_f+\not{k}-m_0}\gamma_0+\gamma_0\frac{1}{\not{p}_i-\not{k}-m_0}\not{\varepsilon}\right]u(p_i,s_i),\end{aligned} \tag{1}$$

它描述电子在外 Coulomb 场中的韧致辐射。进一步证明，在弹性散射情况下，上述两问题之间关

系成立，即证明在静态极限下必须做替换

$$\gamma^{\mu}\left(\frac{-1}{q^2+\mathrm{i}\varepsilon}\right)\sqrt{\frac{M_0^2}{E_fE_i}}\bar{u}(p_f,s_f)\gamma_{\mu}u(p_i,s_i)\to\gamma_0\frac{1}{|\boldsymbol{q}|^2}, \tag{2a}$$

式中 $q=p_f+k-p_i$，并且在静态极限下必须取

$$(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{P}_f+\boldsymbol{p}_f+\boldsymbol{k}-\boldsymbol{P}_i-\boldsymbol{p}_i)\to V \tag{2b}$$

解答：待确定的幅由如图 3.37 中两个图形所示。图(a)给出

$$\begin{aligned}S_{fi}^{(a)}=&\frac{1}{V^2}\sqrt{\frac{m_0^2}{E_iE_f}}\sqrt{\frac{M_0^2}{E_i^{\mathrm{p}}E_f^{\mathrm{p}}}}(2\pi)^4\delta^4(P_f+p_f+k-P_i-p_i)\\&\times\left[\bar{u}(p_f,s_f)(-\mathrm{i}e\gamma^{\rho})\frac{\mathrm{i}}{\not p_f+\not k-m_0+\mathrm{i}\varepsilon}(-\mathrm{i}e\gamma^{\nu})u(p_i,s_i)\right]\\&\times[\bar{u}(P_f,S_f)(+\mathrm{i}e\gamma^{\mu})u(P_i,S_i)]\frac{(-\mathrm{i}g_{\mu\rho})4\pi}{(P_f-P_i)^2+\mathrm{i}\varepsilon}\sqrt{\frac{4\pi}{2\omega V}}\varepsilon_{\rho}(\boldsymbol{k},\lambda)\end{aligned} \tag{3a}$$

和图(b)给出

$$\begin{aligned}S_{fi}^{(b)}=&\frac{1}{V^2}\sqrt{\frac{m_0^2}{E_iE_f}}\sqrt{\frac{M_0^2}{E_i^{\mathrm{p}}E_f^{\mathrm{p}}}}(2\pi)^4\delta^4(P_f+p_f+k-P_i-p_i)\\&\times\left[\bar{u}(p_f,s_f)(-\mathrm{i}e\gamma^{\rho})\frac{\mathrm{i}}{\not p_i-\not k-m_0+\mathrm{i}\varepsilon}(-\mathrm{i}e\gamma^{\nu})u(p_i,s_i)\right]\\&\times[\bar{u}(P_f,S_f)(+\mathrm{i}e\gamma^{\mu})u(P_i,S_i)]\frac{(-\mathrm{i}g_{\mu\rho})4\pi}{(P_f-P_i)^2+\mathrm{i}\varepsilon}\sqrt{\frac{4\pi}{2\omega V}}\varepsilon_{\rho}(\boldsymbol{k},\lambda).\end{aligned} \tag{3b}$$

两项之和为

$$\begin{aligned}S_{fi}=&\frac{-\mathrm{i}e^3}{V^{5/2}}\sqrt{\frac{m_0^2}{E_iE_f}}\sqrt{\frac{M_0^2}{E_i^{\mathrm{p}}E_f^{\mathrm{p}}}}\sqrt{\frac{4\pi}{2\omega}}(2\pi)^4\\&\times\delta^4(P_f+p_f+k-P_i-p_i)[\bar{u}(P_f,S_f)\gamma^{\mu}u(P_i,S_i)]\\&\times\left[\bar{u}(p_f,s_f)\left(\not\varepsilon\frac{1}{\not p_f+\not k-m_0+\mathrm{i}\varepsilon}\gamma_{\mu}+\gamma_{\mu}\frac{1}{\not p_i-\not k-m_0+\mathrm{i}\varepsilon}\not\varepsilon\right)u(p_i,s_i)\right]\\&\times\frac{4\pi}{(p_f+k-p_i)^2+\mathrm{i}\varepsilon}.\end{aligned} \tag{4}$$

若我们将(4)式与(1)式作比较，因子间的关系是显见的。

注意，原则上存在另外两个轫致辐射图，其中光子由质子发出，而不是由电子发出。然而，相应的散射幅包含质子传播子，从而由于分母上大的质子质量而被压低掉。这对应着经典上这样一个事实，反冲质子的加速度要比电子加速度小一个因子 m_0/M_0。

现在，我们假定质子质量 M_0 与动能相比是大量，在质子的静止系中，我们有 $P_i=(M_0,\boldsymbol{o})$ 以及 $P_f^0\approx M_0$，即 $M_0=E_i^{\mathrm{p}}\approx E_f^{\mathrm{p}}$。从而

$$\sqrt{\frac{M_0^2}{E_i^{\mathrm{p}}E_f^{\mathrm{p}}}}\approx 1. \tag{5}$$

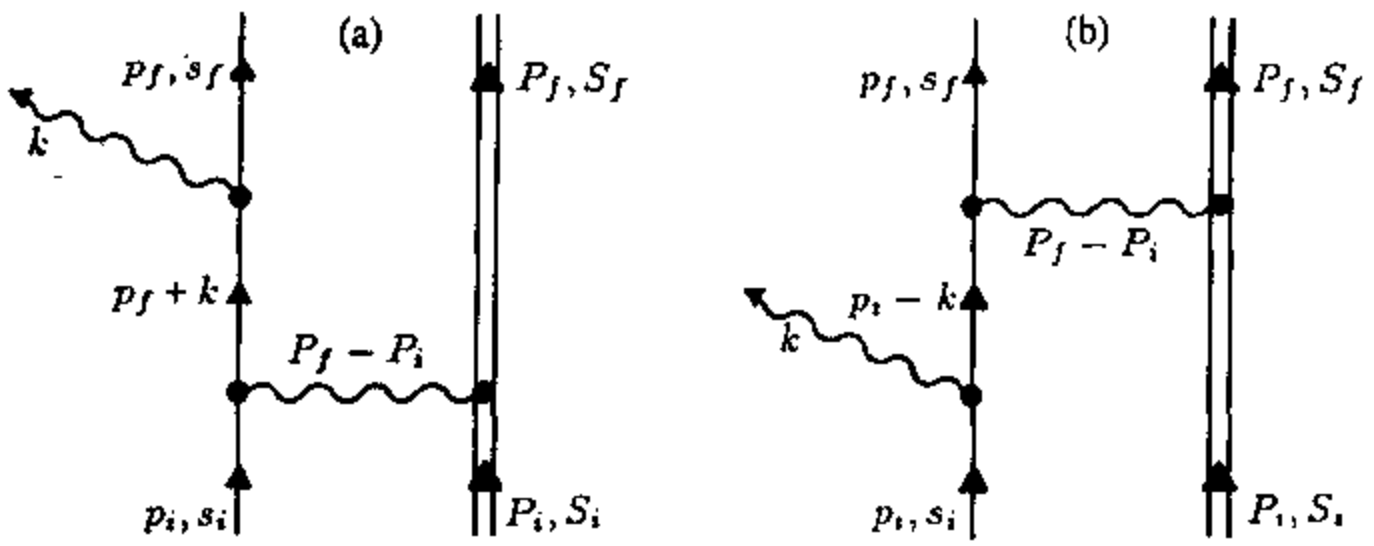


图 3.37a,b　在电子-质子碰撞中描写韧致辐射的两个 Feynman 图

而且

$$(2\pi)^4\delta^4(P_f + p_f + k - p_i - P_i) = (2\pi)\delta(E_f + \omega - E_i)(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{P}_f + \boldsymbol{p}_f + \boldsymbol{k} - \boldsymbol{p}_i), \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{P}_f$ 为质子的终态动量。δ 函数仅对 $\boldsymbol{P}_f+\boldsymbol{p}_f+\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}_i=0$ 时有贡献。若质子是无限重的，它能在不违反能量守恒时获得任意高的动量，从而动量平衡 $\boldsymbol{P}_f=\boldsymbol{p}_i-\boldsymbol{p}_f-\boldsymbol{k}$ 对矢量 $\boldsymbol{p}_i$，$\boldsymbol{p}_f$ 和 $\boldsymbol{k}$ 无任何约束。在这种情况下，我们能作代换

$$(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{P}_f + \boldsymbol{p}_f + \boldsymbol{k} - \boldsymbol{p}_i) = (2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{0}) = V. \tag{7}$$

正像练习 3.7 中无限大质量极限一样，质子的内部自由度，例如自旋翻转跃迁，能被忽略，这导得

$$\lim_{M_0\to\infty} \bar{u}(P_f, S_f)\gamma^\mu u(P_i, S_i) = \bar{u}(0, S)\gamma^\mu u(0, S) = g^{\mu 0}. \tag{8}$$

把(5)(6)(7)和(8)代入(4)中得

$$S_{fi} = \frac{-\mathrm{i}e^3}{V^{3/2}}\sqrt{\frac{m_0^2}{E_iE_f}}\sqrt{\frac{4\pi}{2\omega}}(2\pi)\delta(E_f + \omega - E_i)$$
$$\times \frac{4\pi}{(E_f + \omega - E_i)^2 - |\boldsymbol{p}_f + \boldsymbol{k} - \boldsymbol{p}_i|^2 + \mathrm{i}\epsilon}$$
$$\times \bar{u}(p_f, s_f)\left[\not{\epsilon}\frac{1}{\not{p}_f + \not{k} - m_0 + \mathrm{i}\epsilon}\gamma_0 + \gamma_0\frac{1}{\not{p}_i - \not{k} - m_0 + \mathrm{i}\epsilon}\not{\epsilon}\right]u(p_i, s_i). \tag{9}$$

δ 函数使光子传播子的能量部分为零。其结果与(1)相同。

例　　子

3.11　韧致辐射的 Bethe-Heitler 公式

我们将在近似到 $\alpha(Z\alpha)^2$ 阶上，定出电子在固定 Coulomb 势上散射的韧致辐射的非极化微

分散射截面。根据 3.6 节(3.197)式,非极化轫致辐射截面是

$$\mathrm{d}\bar{\sigma}=\frac{Z^2e^6(4\pi)^3m_0^2}{2\omega(\boldsymbol{v}_i)E_fE_i}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}^3p_f}{(2\pi)^3}2\pi\delta(E_f+\omega-E_i)\frac{1}{|\boldsymbol{q}|^4}F(p_i,p_f;k),\tag{1}$$

其中的缩写为

$$F=\frac{1}{2}\sum_{\lambda}\sum_{s_i,s_f}\left|\bar{u}(p_f,s_f)\left[\not{\epsilon}\frac{\not{p}_f+\not{k}+m_0}{(p_f+k)^2-m_0^2}\gamma_0+\gamma_0\frac{\not{p}_i-\not{k}+m_0}{(p_i-k)^2-m_0^2}\not{\epsilon}\right]u(p_i,s_i)\right|^2.\tag{2}$$

关于散射电子立体角及光子能量和立体角的微分截面能通过对 $\mathrm{d}E_f$ 积分得来

$$\mathrm{d}\bar{\sigma}=\frac{Z^2e^6m_0^2}{\pi^2}\frac{|\boldsymbol{p}_f|}{|\boldsymbol{p}_i|}\omega\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\Omega_k\mathrm{d}\Omega_e\Theta(E_i-m_0-\omega)\frac{1}{|\boldsymbol{q}|^4}F(p_i,p_f;k).\tag{3}$$

对初态自旋 s_i 的平均和对末态电子自旋 s_f 的求和能用常规方法化为迹的计算。为了对光子的两个极化求和,我们利用光子极化矢量 $\epsilon_\mu(\boldsymbol{k},\lambda)$的完备关系(3.220)。由此获得

$$F=-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\left(\gamma^\mu\frac{\not{p}_f+\not{k}+m_0}{2p_f\cdot k}\gamma^0+\gamma^0\frac{\not{p}_i-\not{k}+m_0}{-2p_i\cdot k}\gamma^\mu\right)\left(\frac{\not{p}_i+m_0}{2m_0}\right)\right.$$
$$\left.\times\left(\gamma^0\frac{\not{p}_f+\not{k}+m_0}{2p_f\cdot k}\gamma_\mu+\gamma_\mu\frac{\not{p}_i-\not{k}+m_0}{-2p_i\cdot k}\gamma^0\right)\left(\frac{\not{p}_f+m_0}{2m_0}\right)\right].\tag{4}$$

我们引入更方便的记号

$$F=-\frac{1}{32m_0^2}\left(\frac{1}{(p_f\cdot k)^2}F_1+\frac{1}{(p_i\cdot k)^2}F_2+\frac{1}{-(p_i\cdot k)(p_f\cdot k)}(F_3+F_4)\right).\tag{5}$$

其中

$$\begin{aligned}
F_1&=\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu(\not{p}_f+\not{k}+m_0)\gamma^0(\not{p}_i+m_0)\gamma^0(\not{p}_f+\not{k}+m_0)\gamma_\mu(\not{p}_f+m_0)\right],\\
F_2&=\mathrm{Tr}\left[\gamma^0(\not{p}_i-\not{k}+m_0)\gamma^\mu(\not{p}_i+m_0)\gamma_\mu(\not{p}_i-\not{k}+m_0)\gamma^0(\not{p}_f+m_0)\right],\\
F_3&=\mathrm{Tr}\left[\gamma^0(\not{p}_i-\not{k}+m_0)\gamma^\mu(\not{p}_i+m_0)\gamma^0(\not{p}_f+\not{k}+m_0)\gamma_\mu(\not{p}_f+m_0)\right],\\
F_4&=\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu(\not{p}_f+\not{k}+m_0)\gamma^0(\not{p}_i+m_0)\gamma_\mu(\not{p}_i-\not{k}+m_0)\gamma^0(\not{p}_f+m_0)\right].
\end{aligned}\tag{6}$$

只要计算这些复杂迹中两个就够了。即通过在迹中替换 $p_i\leftrightarrow-p_f$ 和循环置换,我们得到

$$\begin{aligned}
F_1(p_i\leftrightarrow-p_f)&=\mathrm{Tr}\left[\gamma^0(-\not{p}_i+\not{k}+m_0)\gamma_\mu(-\not{p}_i+m_0)\right.\\
&\quad\left.\times\gamma^\mu(-\not{p}_i+\not{k}+m_0)\gamma^0(-\not{p}_f+m_0)\right]\\
&=\mathrm{Tr}\left[\gamma^0(\not{p}_i-\not{k}-m_0)\gamma^\mu(\not{p}_i-m_0)\right.\\
&\quad\left.\times\gamma_\mu(\not{p}_i-\not{k}-m_0)\gamma^0(\not{p}_f-m_0)\right]\\
&=F_2.
\end{aligned}\tag{7}$$

这里,我们已利用了这样一个事实,F_1 必须为 m_0 的偶函数。容易发现,迹中 m_0 和 m_0^3 的贡献项包含奇数个 γ 矩阵,从而迹为零。类似地,我们求得

$$F_3(p_i\leftrightarrow-p_f)=F_4\tag{8}$$

这里我们应用了数学附注 3.3 中定理 7,它将迹中 γ 矩阵作倒序置换

$$\mathrm{Tr}\,[\not a_1 \ldots \not a_n] = \mathrm{Tr}\,[\not a_n \ldots \not a_1].$$

为确定 F_1，我们引入

$$\gamma^0 \not a \gamma^0 = \not{\tilde a} \quad \text{其中} \quad \not{\tilde a} = a_0\gamma_0 + a\cdot\gamma = 2a_0\gamma^0 - \not a \tag{9}$$

并利用

$$\gamma^\mu\gamma_\mu = 4, \tag{10}$$

$$\gamma^\mu \not a\, \gamma_\mu = -2\not a, \tag{11}$$

得

$$F_1 = \mathrm{Tr}\,[(\not p_f + \not k + m_0)(\not{\tilde p}_i + m_0)(\not p_f + \not k + m_0)(-2\not p_f + 4m_0)]. \tag{12}$$

该表达式能被分解成为分别含有 0,2,和 4 个 γ 矩阵迹之和，用

$$\mathrm{Tr}\,\{\not a \not b\} = 4\,a\cdot b, \tag{13}$$

$$\mathrm{Tr}\,\{\not a \not b \not c \not d\} = 4[a\cdot b\, c\cdot d - a\cdot c\, b\cdot d + a\cdot d\, b\cdot c] \tag{14}$$

我们最终得到

$$F_1 = 16(m_0^2 p_i\cdot\tilde p_f - k\cdot\tilde p_i k\cdot p_f + m_0^2 k\cdot\tilde p_i + m_0^2 k\cdot p_f + m_0^4). \tag{15}$$

相干项 F_3 的计算更复杂些。借助(11)和

$$\gamma^\mu \not a \not b \gamma_\mu = 4a\cdot b \tag{16}$$

以及

$$\gamma^\mu \not a \not b \not c\, \gamma_\mu = -2\not c\, \not b\, \not a \tag{17}$$

我们求得

$$\begin{aligned}&\gamma^\mu(\not p_i + m_0)\gamma^0(\not p_f + \not k + m_0)\gamma_\mu\\ &= -2(\not p_f + \not k)\gamma^0\not p_i + 4m_0(p_i^0 + p_f^0 + k^0) - 2m_0^2\gamma^0.\end{aligned}$$

利用(9)我们能消除 γ^0 因子而给出

$$\begin{aligned}F_3 =& \mathrm{Tr}\,\{(\not p_i - \not k + m_0)[-2(\not p_f + \not k)\not{\tilde p}_i\\ &+ 4m_0(p_i^0 + p_f^0 + k^0)\gamma^0 - 2m_0^2](\not{\tilde p}_f + m_0)\}.\end{aligned} \tag{18}$$

这一表达式展开成迹的和形式。这些迹中最多含 4 个 γ 矩阵，这能利用(13)和(14)来计算。其结果是

$$\begin{aligned}F_3 =& 8[-(p_i\cdot p_f)^2 + k\cdot p_f p_i\cdot p_f - k\cdot p_i p_i\cdot p_f\\ &+ p_i\cdot\tilde p_i\, p_f\cdot\tilde p_f - 2E_f^2 k\cdot\tilde p_i + 2E_i^2 k\cdot\tilde p_f\\ &- (p_i\cdot\tilde p_f)^2 + k\cdot\tilde p_f p_i\cdot\tilde p_f - p_i\cdot\tilde p_f k\cdot\tilde p_i\\ &- 2p_i\cdot\tilde p_f m_0^2 - m_0^4 + 2m_0^2((E_i + E_f)^2 - \omega^2)].\end{aligned} \tag{19}$$

这个表达式在交换 $p_i \leftrightarrow -p_f$ 下不变(注意 $a\cdot\tilde b = \tilde a\cdot b$)。从(8)便得到 $F_4 = F_3$。

现在我们可根据(5)将各种贡献加在一起得到完整的迹 $\mathrm{Tr}\,F$。进一步我们注意到由子能量守恒(Coulomb 中心不吸收能量)关系

$$\omega \equiv k^0 = E_i - E_f \tag{20}$$

是成立的，以及我们引入动量转移

$$q = p_f + k - p_i, \tag{21}$$

其平方

$$q^2 = 2(m_0^2 + p_f \cdot k - p_i \cdot k - p_i \cdot p_f) = - |\boldsymbol{q}|^2. \tag{22}$$

作一些冗长的改写后我们获得

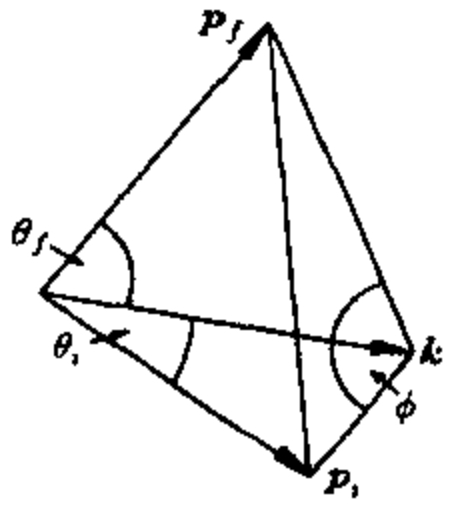


图 3.38 球面三角中三个动量矢量 $\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{p}_f, \boldsymbol{k}$

$$\begin{aligned} F = & -\frac{1}{4m_0^2}\frac{1}{(p_i \cdot k)^2(p_f \cdot k)^2}\left[4m_0^2(p_f \cdot k\, E_f - p_i \cdot k\, E_i)^2\right. \\ & + ((p_f \cdot k)^2 + (p_i \cdot k)^2)(2p_i \cdot k\, p_f \cdot k + q^2 m_0^2) \\ & \left. + 2p_i \cdot k\, p_f \cdot k\, q^2(E_i^2 + E_f^2 - p_i \cdot p_f)\right]. \end{aligned} \tag{23}$$

将此结果代入(3)式便得韧致辐射截面。为便于与实验数据作比较，代入四维矢量标积结果。我们就使用诸如下述一些变量，散射发生前后电子和光子的动量(或能量)绝对值，$\boldsymbol{p}_i$ 和 $\boldsymbol{p}_f$ 相对于光子的运动方向 $\boldsymbol{k}$ 的极角以及平面$(\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{k})$和$(\boldsymbol{p}_f, \boldsymbol{k})$之间的夹角 ϕ(见图 3.38)。从球面几何的一个公式知，$\boldsymbol{p}_i$ 和 $\boldsymbol{p}_f$ 间夹角为

$$\cos(\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{p}_f) = \cos\theta_i \cos\theta_f + \sin\theta_i \sin\theta_f \cos\phi.$$

从而动量转移平方为

$$\begin{aligned} q^2 &= - \boldsymbol{q}^2 \\ &= - \boldsymbol{p}_i^2 - \boldsymbol{p}_f^2 - \omega^2 - 2\omega|\boldsymbol{p}_f| \cos\theta_f + 2\omega|\boldsymbol{p}_i| \cos\theta_i \\ &\quad + 2|\boldsymbol{p}_i||\boldsymbol{p}_f|(\cos\theta_i \cos\theta_f + \sin\theta_i \sin\theta_f \cos\phi). \end{aligned} \tag{24}$$

而且

$$\begin{aligned} p_i \cdot k &= \omega(E_i - |\boldsymbol{p}_i| \cos\theta_i), \\ p_f \cdot k &= \omega(E_f - |\boldsymbol{p}_f| \cos\theta_f). \end{aligned} \tag{25}$$

与(3)和(23)一道，最后导出韧致辐射截面的 Bethe-Heitler 公式[①]

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\bar{\sigma} = & \frac{Z^2\alpha^3}{(2\pi)^2}\frac{|\boldsymbol{p}_f|}{|\boldsymbol{p}_i|}\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega}\frac{\mathrm{d}\Omega_e \mathrm{d}\Omega_k}{|\boldsymbol{q}|^4}\Theta(E_i - m_0 - \omega) \\ & \times \left[\frac{p_f^2 \sin^2\theta_f}{(E_f - |\boldsymbol{p}_f| \cos\theta_f)^2}(4E_i^2 - \boldsymbol{q}^2) + \frac{p_i^2 \sin^2\theta_i}{(E_i - |\boldsymbol{p}_i| \cos\theta_i)^2}(4E_f^2 - \boldsymbol{q}^2)\right. \\ & + 2\omega^2 \frac{\boldsymbol{p}_i^2 \sin^2\theta_i + \boldsymbol{p}_f^2 \sin^2\theta_f}{(E_i - |\boldsymbol{p}_i| \cos\theta_i)(E_f - |\boldsymbol{p}_f| \cos\theta_f)} \\ & \left. - 2\frac{|\boldsymbol{p}_i||\boldsymbol{p}_f| \sin\theta_i \sin\theta_f \cos\phi}{(E_i - |\boldsymbol{p}_i| \cos\theta_i)(E_f - |\boldsymbol{p}_f| \cos\theta_f)}(2E_i^2 + 2E_f^2 - \boldsymbol{q}^2)\right]. \end{aligned} \tag{26}$$

验证这个公式的正确性的最简便的方法是由它出发追踪到(23)式。对(26)式广泛的讨论请

① H. Bethe and W. Heiter: Proc. Roy. Soc. **A146**, 83(1934).

参见 Heitler 的书[①]。那里面也有关于对电子和光子角度 Ω_e 和 Ω_k 积分后的解析表达式。

在练习 3.16 中，我们将证明稍作一些修改的 Bethe-Heitler 公式也能用作描述电子-正电子对产生。

尽管由基本 S 矩阵元到 Bethe-Heitler 公式的步骤已是严格的了，但是，我们应该牢记在与实验比较前结果有其局限性[②]。

(i)推导是基于微扰论并用了电子的平面波，若玻恩近似成立的判别式

$$\frac{Ze^2}{\hbar\ |v|} \ll 1 \tag{27}$$

对初态和(或者)末态速度被破坏的话，这时就该用 Coulomb 波函数而不该用平面波函数。

(ii)中性原子核中核 Coulomb 势受电子云屏蔽。在诸如主要贡献是来自于比原子半径大的距离情况下，这种屏蔽将引起韧致辐射截面的减小。这在高电子能量时发生，这能从下列定性论证来看这一点。在动量空间中，对辐射截面最大的贡献来自于动量转移 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}_f+\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}_i$ 最小的区域。这发生在

$$|\boldsymbol{q}_{\min}| = |\boldsymbol{p}_i| - |\boldsymbol{p}_f| - |\boldsymbol{k}|. \tag{28}$$

在极限 $E_i/m_0 \gg 1$，$E_f/m_0 \gg 1$ 下，当代入相对论能量-动量关系就导得

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{q}_{\min}| &= \sqrt{E_i^2 - m_0^2} - \sqrt{E_f^2 - m_0^2} - \omega \\ &\approx E_i\left(1 - \frac{m_0^2}{2E_i^2}\right) - E_f\left(1 - \frac{m_0^2}{2E_f^2}\right) - \omega \\ &= \frac{m_0^2}{2}\left(\frac{1}{E_f} - \frac{1}{E_i}\right) = \frac{m_0^2\omega}{2E_fE_i}. \end{aligned} \tag{29}$$

在坐标空间中，这对应着离开原子核的距离的量级为

$$R = \frac{1}{|\boldsymbol{q}_{\min}|} = \frac{2E_fE_i}{m_0^2\omega}. \tag{30}$$

这个值必须与原子的壳的延伸 $a(Z)$作比较。根据 Thomas-Fermi 模型，$a(Z)$为 $Z^{-1/3}$与氢原子 Bohr 半径之积的量级

$$a(Z) = \frac{1}{m_0\alpha}Z^{-\frac{1}{3}}. \tag{31}$$

从(30)和(31)可以推断出原子屏蔽在能量超过下式中的能量时，将明显削减辐射强度

$$E > \frac{m_0}{Z^{\frac{1}{3}}\alpha} \tag{32}$$

其中取 $E_i \sim E_f \sim \omega$。

---

① 参见 W. Heitler: *The Quantum Theory of Radiation*, (Oxford University Press, Oxford 1957)；也可参见 H. W. Kock, J. W. , Motz: Rev. Mod. Phys. **31**, 920(1959).

② 近来的评述参见 R.H. Pratt and I. J. Feng in *Atomic inner-shell Physics*, Ed. B. Craseman (Plenum Publishing Corporation, New York 1985).

3.7 Compton 散射——Klein-Nishina 公式

Compton 散射是指光子在自由电子上的散射。用量子电动力学的语言来说，一个四动量为 k 和极化矢为 ε 的入射光子被一个电子(或另一个荷电粒子)所吸收，并发射出第二个四动量为 k' 极化为 ε' 的光子。相应 Feynman 图如图 3.39 所示。

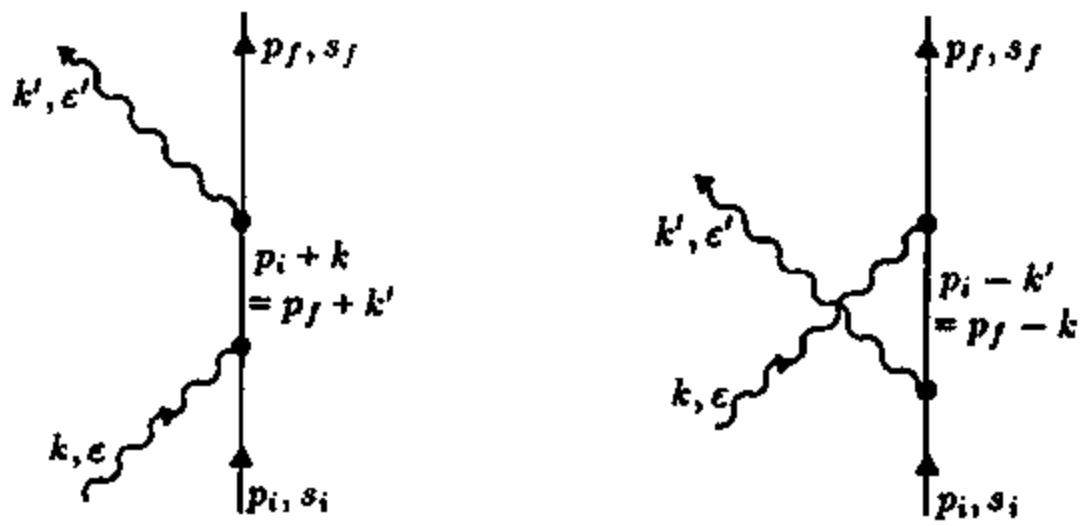


图 3.39 描述 Compton 散射的直接图和交换图

我们把入射光子描述成一个平面波(见 3,6 节,(3.170))：

$$A_\mu(x,k) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\omega V}}\varepsilon_\mu(k,\lambda)(e^{-ik\cdot x} + e^{ik\cdot x}), \tag{3.235}$$

而出射(散射)光子由下式描述

$$A'_\mu(x',k') = \sqrt{\frac{4\pi}{2\omega' V}}\varepsilon_\mu(k',\lambda')(e^{-ik'\cdot x'} + e^{ik'\cdot x'}). \tag{3.236}$$

图 3.39 表明 Compton 散射过程是二阶过程，它与轫致辐射的不同在于这样一个事实：这里，我们有一个入射实光子而不是与反冲荷电粒子交换的虚光子。从而，Compton 散射辐能从轫致辐中(3.6 节，(3.187))作代换 $\gamma_0 A_0(y)\to\gamma^\mu A_\mu(y,k')$ 而得到。所以在坐标空间中，Compton 散射的矩阵元为

$$\begin{aligned} S_{fi} = e^2\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\psi_f(x)[&(-\mathrm{i}\not{A}(x,k'))\mathrm{i}S_F(x-y)(-\mathrm{i}\not{A}(y,k)) \\ &+(-\mathrm{i}\not{A}(x,k))\mathrm{i}S_F(x-y)(-\mathrm{i}\not{A}(y,k'))]\psi_i(y). \end{aligned} \tag{3.237}$$

在动量空间中，Compton 散射幅也能借助 Feynman 规则直接写下，

$$\begin{aligned} S_{fi} = &\frac{e^2}{V^2}\sqrt{\frac{m_0^2}{E_iE_f}}\sqrt{\frac{(4\pi)^2}{2\omega 2\omega'}}(2\pi)^4\delta^4(p_f + k' - p_i - k) \\ &\times \bar{u}(p_f,s_f)\left[(-\mathrm{i}\not{\varepsilon}')\frac{\mathrm{i}}{\not{p}_i + \not{k} - m_0}(-\mathrm{i}\not{\varepsilon})\right. \end{aligned}$$

$$+(-\mathrm{i}\not{\epsilon})\frac{\mathrm{i}}{\not{p}_i-\not{k}'-m_0}(-\mathrm{i}\not{\epsilon}')\Big]u(p_i,s_i). \tag{3.238}$$

这里我们已选定恰当的光子场 的边界条件。由于(3.235)(3.236)中平面波因子 $\exp(\pm\mathrm{i}k\cdot x)$和 $\exp(\pm\mathrm{i}\,k'\cdot x')$,因此,当从(3.237)到(3.238)过渡时存在四种可能的符号组合。它们中每一个引起一个 δ-函数,这约束着粒子的四动量

$$+k+p_i=+k'+p_f, \tag{3.239a}$$

$$-k+p_i=+k'+p_f, \tag{3.239b}$$

$$+k+p_i=-k'+p_f, \tag{3.239c}$$

$$-k+p_i=-k'+p_f. \tag{3.239d}$$

(3.239a)描述了 Compton 散射中正确的能量和动量守恒关系。过程(b)和(c)的能量—动量守恒条件不能被满足;所以它们的贡献为零(参见问题 3.12,那儿对(c)情况作了证明;对(b)的论证是类似的)。物理上说,(3.239b)和(3.239c)描述了两个光子被自由电子发射或吸收,这是运动学上不可能发生的。(d)过程中是这里所讨论的(a)过程光子动量 k 和 k'作交换的情况。这对应着动量为 k'的入射光子和动量为 k 的散射(出射)光子。实验上所确定的运动学条件就是(3.239a)所给的那些。从而关系(3.239d)式与规定的实验条件不相容,即不必考虑(3.239d)的过程。

这里,对韧致辐射情况(参见 3.6 节中(3.191)讨论)也有类似情形。散射幅中不是每项都是与所考虑过程在物理上相关的。在 Compton 散射中保留下来的项来自于描述在 x 处被电子吸收的四动量光子 k_μ 的(2.235)式中光子场的部分$\exp(-\mathrm{i}k\cdot x)$及(2.236)式中光子场的 $\exp(+\mathrm{i}k'\cdot x')$部分。后者描述在 x'被电子发射的四动量 k'_μ 光子。

考察一下(3.238)式,我们发现散射幅具有对称性质:在变换

$$k,\epsilon\longleftrightarrow -k',\epsilon'\ . \tag{3.240}$$

下显然不变。这是交叉对称的一个新例子,面交叉对称是我们曾在 3.4 节中首次碰到的。在我们的情况中,交叉对称意味着吸收光子 k,ϵ 和发射光子 k',ϵ'的幅是与吸收光子 k',ϵ'和发射光子 k,ϵ 的幅相同的。通常地,交叉就是将入射粒子和出射反粒子相联系,反之亦然。对光子情况,不存在这种区别,因为光子的"反粒子是其本身"。

将(3.238)中 S 矩阵元分成两部分是有用的:

$$S_{fi}=-\mathrm{i}\frac{e^2}{V^2}\sqrt{\frac{m_0^2}{E_iE_f}}\sqrt{\frac{(4\pi)^2}{2\omega 2\omega'}}(2\pi)^4\delta^4(p_f+k'-p_i-k)$$

$$\times\epsilon^\mu(k',\lambda')\epsilon^\nu(k,\lambda)M_{\mu\nu}. \tag{3.241}$$

这里,我们已引进了 Compton 张量

$$M_{\mu\nu}=\bar{u}(p_f,s_f)\Big[\gamma_\mu\frac{1}{\not{p}_i+\not{k}-m_0}\gamma_\nu+\gamma_\nu\frac{1}{\not{p}_i+\not{k}'-m_0}\gamma_\mu\Big]u(p_i,s_i), \tag{3.242}$$

它是满足条件 $k+p_i=k'+p_f$ 的四动量 p_i,p_f,k,k'的函数。利用动量矢量质壳条件,(3.242)式能被写成

$$M_{\mu\nu}=\bar{u}(p_f,s_f)\Big[\gamma_\mu\frac{\not{p}_i+\not{k}+m_0}{2p_i\cdot k}\gamma_\nu+\gamma_\nu\frac{\not{p}_i-\not{k}'+m_0}{-2p_i\cdot k'}\gamma_\mu\Big]u(p_i,s_i). \tag{3.243}$$

张量 $M_{\mu\nu}$是矩阵元 M_μ 的明显推广式，M_μ 是我们在 3.6 节，(3.194)引来讨论轫致辐射的。两量间的关系为

$$M_{\mu 0}(p_i,p_f;k,k')=M_\mu(p_i,p_f;k'). \tag{3.244}$$

由于两个光子均与守恒流相互作用，Compton 张量是一个规范不变的，由下列性质来表征

$$k'^\mu M_{\mu\nu}=k^\nu M_{\mu\nu}=0. \tag{3.245}$$

这两个关系的证明可完全照搬轫致辐射(3.212)情况中的类似内容，这儿不再重复。

现利用我们已推得的规则来计算光子散射截面；比前一个例子中稍为更复杂的无非是旋量代数。截面结果是

$$\mathrm{d}\sigma=\int\frac{|S_{fi}|^2}{T|v_{\mathrm{rel}}|/V}V\frac{\mathrm{d}^3p_f}{(2\pi)^3}V\frac{\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3},$$

其中

$$\frac{|S_{fi}|^2}{T}=\frac{|S_{fi}|^2}{VT/V}=\frac{|S_{fi}|^2}{(2\pi)^4\delta^4(0)1/V} \tag{3.246}$$

是每单位体积的跃迁率，而归一成单位体积内为一个电子(参见(3.63—3.71))。$|v_{\mathrm{rel}}|/V$ 是入射光子通量。$v_{\mathrm{rel}}=c-v_e$ 为光子相对于电子的速度，而 $1/V$ 是每单位内电子数。额外因子 $1/V$ 来自于每单位体积内光子数。(3.246)式中末态电子和末态光子的位相体积元为 $V\,\mathrm{d}^3p_f/(2\pi)^3$ 和 $V\mathrm{d}^3k'/(2\pi)^3$。这导致

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\sigma=&\frac{e^4}{V^4}\frac{m_0^2}{E_iE_f}\frac{1}{(|v_{\mathrm{rel}}|/V)(1/V)}\\&\times\int(2\pi)^4\delta^4(p_f+k'-p_i-k)\frac{(4\pi)^2}{2\omega 2\omega'}|\varepsilon'^\mu M_{\mu\nu}\varepsilon^\nu|^2V^2\frac{\mathrm{d}^3p_f}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3}\\=&\frac{e^4}{(2\pi)^2}\frac{m_0(4\pi)^2}{E_i|v_{\mathrm{rel}}|2\omega}\\&\times\int\delta^4(p_f+k'-p_i-k)|\varepsilon'^\mu M_{\mu\nu}\varepsilon^\nu|^2\frac{m_0\mathrm{d}^3p_f}{E_f}\frac{\mathrm{d}^3k'}{2\omega'}.\end{aligned} \tag{3.247}$$

在下面，我们将在实验室系中导出这一表达式，那里，电子原先是静止的，$p_i=(m_0,\mathbf{0})$从而在该坐标系中，我们有 $E_i=m_0$，同时 $|v_{\mathrm{rel}}|=|c-v_e|=|c|=1$。现在我们利用 3.2 节(3.74)式获知的末态的密度协变表达式

$$\frac{\mathrm{d}^3p}{2E}=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4p\;\delta(p^2-m_0^2)\Theta(p_0), \tag{3.248}$$

对反冲电子(d^3p_f)和光子动量绝对值 $|k'|=\omega'$ 进行积分

$$\begin{aligned}&\int\frac{|k'|^2\mathrm{d}|k'|}{2|k'|}\int\frac{m_0\mathrm{d}^3p_f}{E_f}\delta^4(p_f+k'-p_i-k)\\&=m_0\int_0^\infty|k'|\mathrm{d}|k'|\int\mathrm{d}^4p_f\delta(p_f^2-m_0^2)\Theta(p_{f0})\delta^4(p_f+k'-p_i-k)\end{aligned}$$

$$= m_0\int_0^{\infty}\omega' d\omega'\,\delta((p_i + k - k')^2 - m_0^2)\Theta(m_0 + \omega - \omega')$$

$$= m_0\int_0^{\omega+m_0}\omega' d\omega'\,\delta(2m_0(\omega - \omega') - 2\omega\omega'(1 - \cos\theta))$$

$$- m_0\left|-2m_0 - 2\omega(1 - \cos\theta)\right| = \frac{\omega'}{2\left|1 + \frac{\omega}{m_0}(1 - \cos\theta)\right|}$$

$$= \frac{\omega'^2}{2\omega}. \tag{3.249}$$

这里，我们已用到

$$\begin{aligned}(k + p_i - k')^2 &= k^2 + k'^2 + p_i^2 + 2k\cdot p_i - 2k\cdot k' - 2k'\cdot p_i\\ &= m_0^2 + 2m_0(\omega - \omega') - 2\omega\omega'(1 - \cos\theta)\end{aligned} \tag{3.250}$$

并且，我们应用了熟悉的公式

$$\int dx\,\delta(f(x))g(x) = \sum\left.\frac{g(x)}{\left|\frac{df}{dx}\right|}\right|_{\text{zero of } f(x)} \tag{3.251}$$



图 3.40　出射光子在与入射光子构成角 θ 的方向被散射到立体角 $d\Omega_{k'}$

θ 为光子的散射角，见图 3.40。入射和散射光子的能量间关系如下：

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m_0}(1 - \cos\theta)}. \tag{3.252}$$

这关系来自于(3.249)式推导中 δ 函数的平方根，从而是能量和动量守恒定律的简单推论。若我们考虑到波长 $\lambda = 2\pi/\omega$，方程(3.252)则成为一个特别简单形式。这导致了 Compton 公式：

$$\lambda' = \lambda + 2\pi\frac{1}{m_0}(1 - \cos\theta). \tag{3.253}$$

散射光子的波长出现了一个量级为 $1/m_0$ 的增量。它当然是 Compton 波长 $\hbar/m_0c$。

从(3.243)和(3.247)光子微分散射截面结果为

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega_{k'}} &= \alpha^2\frac{\omega'^2}{\omega^2}\left|\varepsilon'^{\mu}M_{\mu\nu}\varepsilon^{\nu}\right|^2\\ &= \alpha^2\frac{\omega'^2}{\omega^2}\left|\bar{u}(p_f,s_f)\left\{\frac{\not\varepsilon'(\not p_i + \not k + m_0)\not\varepsilon}{2p_i\cdot k}\right.\right.\\ &\quad\left.\left. + \frac{\not\varepsilon(\not p_i - \not k' + m_0)\not\varepsilon'}{-2p_i\cdot k'}\right\}u(p_i,s_i)\right|^2.\end{aligned} \tag{3.254}$$

下面我们将把兴趣放在非极化电子[①] 情况，但暂时保留光子极化 λ 和 λ'。从而(3.254)必须对电子的初态自旋平均和末态自旋求和：

① Compton 散射的极化效应已被 F. W. Lipps 和 H. A. Tolhoek 所讨论：Physica **20**, 85(1954)。

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_{k'}}(\lambda',\lambda)=\frac{1}{2}\sum_{s_i,s_f}\frac{d\sigma}{d\Omega_{k'}}(s_f,s_i;\lambda',\lambda). \tag{3.255}$$

利用熟知的求迹技巧，消去电子旋量，导致

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_{k'}}(\lambda',\lambda)=\alpha^2\frac{\omega'^2}{\omega^2}\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left[\frac{\not p_f+m_0}{2m_0}\Gamma\frac{\not p_i+m_0}{2m_0}\overline{\Gamma}\right], \tag{3.256}$$

式中

$$\Gamma=\frac{\not\varepsilon'(\not p_i+\not k+m_0)\not\varepsilon}{2p_i\cdot k}+\frac{\not\varepsilon(\not p_i-\not k'+m_0)\not\varepsilon'}{-2p_i\cdot k'} \tag{3.257}$$

及

$$\overline{\Gamma}=\gamma^0\Gamma^\dagger\gamma^0=\Gamma(\varepsilon\longleftrightarrow\varepsilon') \tag{3.258}$$

利用 $\overline{\gamma}^\mu=\gamma^\mu$，$\Gamma$ 的表达式能通过把因子 $\not p$ 反对易到右边而得以简化：

$$\Gamma=\frac{2p_i\cdot\varepsilon\not\varepsilon'+\not\varepsilon'\not k\not\varepsilon-\not\varepsilon'\not\varepsilon(\not p_i-m_0)}{2p_i\cdot k}+\frac{2p_i\cdot\varepsilon'\not\varepsilon-\not\varepsilon\not k'\not\varepsilon'-\not\varepsilon\not\varepsilon'(\not p_i-m_0)}{-2p_i\cdot k'} \tag{3.259}$$

分子中最后一项能被丢掉，因为它与(3.256)式中能量投影算符正交：

$$(\not p_i-m_0)(\not p_i+m_0)=p_i^2-m_0^2=0. \tag{3.260}$$

从而我们将用下式取代(3.257)

$$\Gamma\to\frac{2p_i\cdot\varepsilon\not\varepsilon'+\not\varepsilon'\not k\not\varepsilon}{2p_i\cdot k}+\frac{2p_i\cdot\varepsilon'\not\varepsilon-\not\varepsilon\not k'\not\varepsilon'}{-2p_i\cdot k'} \tag{3.261a}$$

类似地(将 $\not p$ 对易到左边)有

$$\overline{\Gamma}\to\frac{2p_i\cdot\varepsilon\not\varepsilon'+\not\varepsilon\not k\not\varepsilon'}{2p_i\cdot k}+\frac{2p_i\cdot\varepsilon'\not\varepsilon-\not\varepsilon'\not k'\not\varepsilon}{-2p_i\cdot k'} \tag{3.261b}$$

Dirac 矩阵(3.261)仍是很复杂的表达式。然而，下列计算将大大简化，假如我们选取这样一个适当的规范，其中极化矢量与初态电子动量 p_i 正交

$$\varepsilon\cdot p_i=0,\quad \varepsilon'\cdot p_i=0. \tag{3.262}$$

在实验室系中，$p_i^\mu=(m_0,o)$，这等同于辐射规范，其中电磁势没有 o-分量，即，$\varepsilon^\mu=(o,\varepsilon)$。然而条件(3.262)能加在任一给定参照系上。从任一组极化矢量 ε,ε' 出发，我们能作规范变换

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}^\mu&=\varepsilon^\mu-\frac{p_i\cdot\varepsilon}{p_i\cdot k}k^\mu,\\ \tilde{\varepsilon}'^\mu&=\varepsilon'^\mu-\frac{p_i\cdot\varepsilon'}{p_i\cdot k'}k'^\mu,\end{aligned} \tag{3.263}$$

从而，新极化矢 $\tilde{\varepsilon}$ 正交于 p_i。归一化和横向条件(3.178)，(3.179)不受变换(3.263)的影响：

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}\cdot\tilde{\varepsilon}&=\tilde{\varepsilon}'\cdot\tilde{\varepsilon}'=-1,\\ \tilde{\varepsilon}\cdot k&=\tilde{\varepsilon}'\cdot k'=0,\end{aligned} \tag{3.264}$$

这直接来自于 $k^2=k'^2=0$。因此，为不失一般性，我们将加上条件(3.262)。在本节的下面讨论中，为简单起见，我们将继续写 ε，而不是 $\tilde{\varepsilon}$。

利用(3.262)，我们最终必须求出(3.256)中的迹，其中

$$\Gamma = \frac{\not\varepsilon' \not k \not\varepsilon}{2k\cdot p_i} + \frac{\not\varepsilon \not k' \not\varepsilon'}{2k'\cdot p_i} \tag{3.265a}$$

以及

$$\bar{\Gamma} = \frac{\not\varepsilon \not k \not\varepsilon'}{2k\cdot p_i} + \frac{\not\varepsilon' \not k' \not\varepsilon}{2k'\cdot p_i}. \tag{3.265b}$$

(3.256)中迹的计算不易做出，因为多达 8 个 γ 矩阵的乘积含在其中。两项是相同的，即就是带有与$(k\cdot p_i)(k'\cdot p_i)$成比例的分母的混合项

$$\begin{aligned}&\frac{1}{16m_0^2(k\cdot p_i)(k'\cdot p_i)}\,\mathrm{Tr}\,[(\not p_f + m_0)(\not\varepsilon' \not k \not\varepsilon(\not p_i + m_0)\not\varepsilon' \not k' \not\varepsilon\\ &\quad + \not\varepsilon \not k' \not\varepsilon'(\not p_i + m_0)\not\varepsilon \not k \not\varepsilon')]\\ &= \frac{2}{16m_0^2(k\cdot p_i)(k'\cdot p_i)}\,\mathrm{Tr}\,[(\not p_f + m_0)\not\varepsilon' \not k \not\varepsilon\,(\not p_i + m_0)\not\varepsilon' \not k' \not\varepsilon].\end{aligned} \tag{3.266}$$

这可据数学附注 3.3 中定理 7 得来。根据这一定理，当迹中因子的次序倒排后其迹的值保持不变。

我们必须计算

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_{k'}}(\lambda',\lambda) &= \alpha^2\frac{\omega'^2}{\omega^2}\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left[\frac{\not p_f + m_0}{2m_0}\left(\frac{\not\varepsilon'\not\varepsilon\not k}{2k\cdot p_i} + \frac{\not\varepsilon\not\varepsilon'\not k'}{2k'\cdot p_i}\right)\right.\\ &\quad\left.\times\frac{\not p_i + m_0}{2m_0}\left(\frac{\not k\not\varepsilon\not\varepsilon'}{2k\cdot p_i} + \frac{\not k'\not\varepsilon'\not\varepsilon}{2k'\cdot p_i}\right)\right]\\ &= \alpha^2\frac{\omega'^2}{\omega^2}\frac{1}{2}\frac{1}{4m_0^2}\left(\frac{S_1}{(2k\cdot p_i)^2} + \frac{S_2}{(2k'\cdot p_i)^2} + \frac{2S_3}{(2k\cdot p_i)(2k'\cdot p_i)}\right)\end{aligned} \tag{3.267}$$

注意在(3.267)中，因子已利用 $\not k\not\varepsilon = -\not\varepsilon\not k$，$\not k'\not\varepsilon' = -\not\varepsilon'\not k'$被稍作重排。$S_1, S_2, S_3$ 项的每一个中含一个包含 8 个 γ 矩阵的迹[①]。不作进一步化简的话，每个迹将导出一个 $3\cdot 5\cdot 7 = 105$ 项和式，其每一项含一个 4 个标量积的积。这是根据数学附注中 3.3 中定义了的，迹的展开规则得来的。庆幸的是，计算的最后结果很简单，因为在我们的情形中，许多标量积为零

$$k\cdot k = k'\cdot k' = \varepsilon\cdot k = \varepsilon'\cdot k' = \varepsilon\cdot p_i = \varepsilon'\cdot p_i = 0 \tag{3.268a}$$

或者是简单的

$$\varepsilon\cdot\varepsilon = \varepsilon'\cdot\varepsilon' = -1. \tag{3.268b}$$

从而，我们可以写下完全展开的迹，然后借助(3.268)简化一般表达式。然而，我们利用迹的宗量中含有重复的因子(像(3.266)中 $\not\varepsilon$)这样一个事实，便可避免这种冗长的计算。我们将反对易这些因子，直至它们相靠在一起。这样两个 γ 矩阵就被消除了，因为 $\not a\not a = a\cdot a$ 与单位矩阵成正比。让我们把这一技巧用到(3.267)中三个迹的计算中去。

(a) 第一个迹能被表述为

---

① QED 和其他场论中复杂迹的计算，现在可以用计算机程序计算，例如用记号代数程序 REDUCE，MACSYMA，FORM，Mathematica 等。

$$\begin{aligned}
S_1 &= \mathrm{Tr}\left[(\not p_f + m_0)\not\epsilon'\not\epsilon\not k(\not p_i + m_0)\not k\not\epsilon\not\epsilon'\right] \\
&= \mathrm{Tr}\left[\not p_f\not\epsilon'\not\epsilon\not k\not p_i\not k\not\epsilon\not\epsilon'\right] + m_0^2\,\mathrm{Tr}\left[\not\epsilon'\not\epsilon\not k\not k\not\epsilon\not\epsilon'\right] \\
&= 2k\cdot p_i\,\mathrm{Tr}\left[\not p_f\not\epsilon'\not\epsilon\not k\not\epsilon\not\epsilon'\right] - \mathrm{Tr}\left[\not p_f\not\epsilon'\not\epsilon\not p_i\not k\not k'\not\epsilon\not\epsilon'\right] \\
&= -2k\cdot p_i\,\mathrm{Tr}\left[\not p_f\not\epsilon'\not k\not\epsilon\not\epsilon\not\epsilon'\right] = 2k\cdot p_i\,\mathrm{Tr}\left[\not p_f\not\epsilon'\not k\not\epsilon'\right] \\
&= 2k\cdot p_i\{2(k\cdot\epsilon')\mathrm{Tr}[\not p_f\not\epsilon'] - \mathrm{Tr}[\not p_f\not\epsilon'\not\epsilon'\not k]\} \\
&= 2k\cdot p_i[2(k\cdot\epsilon')4(p_f\cdot\epsilon') + 4p_f\cdot k] \\
&= 8(k\cdot p_i)[k\cdot p_f + 2(k\cdot\epsilon')(p_f\cdot\epsilon')].
\end{aligned} \tag{3.269}$$

在这些变换过程中，我们已用到 $k^2=0,\epsilon^2=\epsilon'^2=-1,\epsilon\cdot k=0$。为消除对末态动量 p_f 的依赖性，我们用

$$k\cdot p_f = k'\cdot p_i,\quad \epsilon'\cdot p_f = \epsilon'\cdot k. \tag{3.270}$$

第一个恒等式来自于对四维动量守恒关系 $p_f-k=p_i-k'$ 的平方和利用了 $p_i^2=p_f^2=m_0^2$ 和 $k^2=k'^2=0$。类似地，(3.270)中第二个恒等式是通过将能量-动量关系乘以 ϵ' 且利用 $\epsilon'\cdot p_i=\epsilon'\cdot k'=0$ 而得到。从而对第一个迹，最终结果是

$$S_1 = 8(k\cdot p_i)[k'\cdot p_i + 2(k\cdot\epsilon')^2]. \tag{3.271}$$

(b) 现在计算(3.267)中第二个迹

$$S_2 = \mathrm{Tr}\left[(\not p_f + m_0)\not\epsilon\not\epsilon'\not k'(\not p_i + m_0)\not k'\not\epsilon'\not\epsilon\right]. \tag{3.272}$$

与(3.269)式作比较表明，若我们作代换 $\epsilon\longleftrightarrow\epsilon'$ 和 $k\longleftrightarrow k'$，S_2 来自于 S_1，从而从(3.271)，结果是

$$S_2 = 8(k'\cdot p_i)[k\cdot p_i - 2(k'\cdot\epsilon)^2]. \tag{3.273}$$

(c) 最后，我们计算迹 S_3：

$$\begin{aligned}
S_3 &= \mathrm{Tr}\left[(\not p_f + m_0)\not\epsilon'\not\epsilon\not k(\not p_i + m_0)\not k'\not\epsilon'\not\epsilon\right] \\
&= \mathrm{Tr}\left[(\not p_i + m_0)\not\epsilon'\not\epsilon\not k(\not p_i + m_0)\not k'\not\epsilon'\not\epsilon\right] + \mathrm{Tr}\left[(\not k - \not k')\not\epsilon'\not\epsilon\not k\not p_i\not k'\not\epsilon'\not\epsilon\right] \\
&\equiv S_3^a + S_3^b
\end{aligned} \tag{3.274}$$

(因为 $p_f=p_i+k-k'$)。

在第一个迹中，S_3^a，我们能把因子$(\not p_i+m_0)$反对易到右边。这导致

$$(\not p_i + m_0)\not\epsilon'\not\epsilon\not k = \not\epsilon'\not\epsilon(\not p_i + m_0)\not k = 2p_i\cdot k\,\not\epsilon'\not\epsilon + \not\epsilon'\not\epsilon\not k(-\not p_i + m_0).$$

第二项消失，因为$(-\not p_i+m_0)(\not p_i+m_0)=p_i^2-m_0^2=0$，从而剩下来的是

$$\begin{aligned}
S_3^a &= 2p_i\cdot k\,\mathrm{Tr}\left[\not\epsilon'\not\epsilon\not p_i\not k'\not\epsilon'\not\epsilon\right] \\
&= 2p_i\cdot k\{2\epsilon\cdot\epsilon'\,\mathrm{Tr}\left[\not p_i\not k'\not\epsilon'\not\epsilon\right] - \mathrm{Tr}\left[\not\epsilon\not\epsilon'\not p_i\not k'\not\epsilon'\not\epsilon\right]\} \\
&= 2p_i\cdot k\{2\epsilon\cdot\epsilon'\,\mathrm{Tr}\left[\not p_i\not k'\not\epsilon'\not\epsilon\right] - \mathrm{Tr}\left[\not p_i\not k'\right]\}.
\end{aligned} \tag{3.275}$$

(3.274)中第二项能作下列化简

$$\begin{aligned}
S_3^b &= \mathrm{Tr}\left[(\not k - \not k')\not\epsilon'\not\epsilon\not k\not p_i\not k'\not\epsilon'\not\epsilon\right] \\
&= 2\epsilon'\cdot k\,\mathrm{Tr}\left[\not\epsilon\not k\not p_i\not k'\not\epsilon'\not\epsilon\right] - \mathrm{Tr}\left[\not\epsilon'(\not k - \not k')\not\epsilon\not k\not p_i\not k'\not\epsilon'\not\epsilon\right] \\
&= 2\epsilon'\cdot k\,\mathrm{Tr}\left[\not\epsilon\not\epsilon\not k\not p_i\not k'\not\epsilon'\right] - \mathrm{Tr}\left[\not\epsilon'(-\not\epsilon\not k - \not k'\not\epsilon)\not k\not p_i\not k'\not\epsilon'\not\epsilon\right] \\
&= -2\epsilon'\cdot k\,\mathrm{Tr}\left[\not k\not p_i\not k'\not\epsilon'\right] + \mathrm{Tr}\left[\not\epsilon'\not k'\not\epsilon\not k\not p_i\not k'\not\epsilon'\not\epsilon\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -2\varepsilon' \cdot k \,\mathrm{Tr}\,[\not k \not p_i \not k' \not\varepsilon'] + \mathrm{Tr}[\not k' \not\varepsilon' \not\varepsilon \not k \not p_i \not\varepsilon' \not k' \not\varepsilon] \\
&= -2\varepsilon' \cdot k \,\mathrm{Tr}\,[\not k \not p_i \not k' \not\varepsilon'] + 2k' \cdot \varepsilon \,\mathrm{Tr}\,[\not k' \not\varepsilon' \not\varepsilon \not k \not p_i \not\varepsilon'] - \mathrm{Tr}\,[\not k' \not\varepsilon' \not\varepsilon \not k \not p_i \not\varepsilon' \not\varepsilon \not k'] \\
&= -2\varepsilon' \cdot k \,\mathrm{Tr}\,[\not k \not p_i \not k' \not\varepsilon'] - 2k' \cdot \varepsilon \,\mathrm{Tr}\,[\not\varepsilon' \not k' \not\varepsilon \not k \not p_i \not\varepsilon'] \\
&= -2\varepsilon' \cdot k \,\mathrm{Tr}\,[\not k \not p_i \not k' \not\varepsilon'] + 2k' \cdot \varepsilon \,\mathrm{Tr}\,[\not k' \not\varepsilon \not k \not p_i]. \qquad (3.276)
\end{aligned}
$$

在(3.275)和(3.276)中剩下来的迹不能再被简化了，而必须显式地作展开。这就导致

$$
\begin{aligned}
S_3 = {} & 8p_i \cdot k[2\varepsilon \cdot \varepsilon'((p_i \cdot k')(\varepsilon' \cdot \varepsilon) - (p_i \cdot \varepsilon')(k' \cdot \varepsilon) \\
& + (p_i \cdot \varepsilon)(k' \cdot \varepsilon)) - p_i \cdot k'] \\
& - 8k \cdot \varepsilon'[(k \cdot p_i)(k' \cdot \varepsilon') - (k \cdot k')(p_i \cdot \varepsilon') + (k \cdot \varepsilon')(p_i \cdot k)] \\
& + 8k' \cdot \varepsilon[(k' \cdot \varepsilon)(k \cdot p_i) - (k' \cdot k)(\varepsilon \cdot p_i) + (k' \cdot p_i)(\varepsilon \cdot k)] \\
= {} & 8(k \cdot p_i)(k' \cdot p_i)[2(\varepsilon' \cdot \varepsilon)^2 - 1] - 8(k \cdot \varepsilon')^2 \\
& \cdot (p_i \cdot k') + 8(k' \cdot \varepsilon)^2 (p_i \cdot k). \qquad (3.277)
\end{aligned}
$$

式中，我们又用到 $k \cdot \varepsilon = k' \cdot \varepsilon' = \varepsilon \cdot p_i = \varepsilon' \cdot p_i = 0$。

现在利用刚刚计算的三个迹，即 S_1(3.271)，S_2(3.273)和 S_3(3.277)，我们能最终构造出光散射微分截面。我们得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega_k}(\lambda', \lambda) = {} & \frac{1}{2}\alpha^2 \frac{\omega'^2}{\omega^2} \frac{1}{4m_0^2}\Big\{ \frac{8(k \cdot p_i)[k' \cdot p_i + 2(k \cdot \varepsilon')^2]}{4(k \cdot p_i)^2} \\
& + \frac{8(k' \cdot p_i)[k \cdot p_i - 2(k' \cdot \varepsilon)^2]}{4(k' \cdot p_i)^2} \\
& + 2\{8(k \cdot p_i)(k' \cdot p_i)[2(\varepsilon' \cdot \varepsilon)^2 - 1] \\
& - 8(k \cdot \varepsilon')^2 (p_i \cdot k') + 8(k' \cdot \varepsilon)^2 (p_i \cdot k)\}/4(k \cdot p_i)(k' \cdot p_i)\Big\} \\
= {} & \frac{1}{2}\alpha^2 \frac{\omega'^2}{\omega^2} \frac{1}{4m_0^2} 2\Big[\frac{k' \cdot p_i}{k \cdot p_i} + \frac{k \cdot p_i}{k' \cdot p_i} + 4(\varepsilon' \cdot \varepsilon)^2 - 2\Big], \qquad (3.278)
\end{aligned}
$$

其中，有些项已成对相互抵消了。当迹的结果已是完全协变的时候，我们现在代入实验室系中运动学量，即 $k \cdot p_i = \omega m_0$，$k' \cdot p_i = \omega' m_0$。这就导出了著名的描述光子 Compton 散射的 Klein-Nishina 公式[①]：

$$
\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega_k}(\lambda, \lambda') = \alpha^2 \frac{1}{4m_0^2} \frac{\omega'^2}{\omega^2}\Big[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} + 4(\varepsilon \cdot \varepsilon')^2 - 2\Big]. \qquad (3.279)
$$

根据(3.252)，ω' 依赖于 ω 和光子散射角。对小的能量($\omega \to 0$)，我们有 $\omega' = \omega$，光子散射截面(3.279)简化为 Thomson 散射截面公式：

$$
\Big(\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega_k}(\lambda', \lambda)\Big)_{\omega \to 0} = \alpha^2 \frac{1}{m_0^2}(\varepsilon \cdot \varepsilon')^2. \qquad (3.280)
$$

这结果不含量子效应，它能从经典电动力学推得。截面(3.280)的经典本质是明显的，因为它不依

① O. Klein and Y. Nishina: Z. Phys. **52**, 853(1929).

赖于 Planck 常数 $\hbar$。写出常数 $\hbar$ 和 c，我们发现截面是与长度平方成正比，

$$r_0 = \alpha \frac{1}{m_0} = \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\hbar}{m_0 c} = \frac{e^2}{m_0 c^2} \simeq 2.8 \times 10^{-13}\,\mathrm{cm}. \tag{3.281}$$

这个量有时被称为“电子的经典半径”。这名字起源于这样一个(不正确)想法，那就是电子的静质量能被解释成扩展荷电球的静电能。方程(3.280)能被写成形式

$$\left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_{k'}}(\lambda',\lambda)\right)_{\omega\to 0} = r_0^2(\varepsilon\cdot\varepsilon')^2. \tag{3.282}$$

方程(3.252)表明，若光子正散射角变小，经典极限下 $\omega=\omega'$ 也能用。所以，在向前散射($\theta\to 0$)时，严格的 Compton 截面化成汤姆逊截面(3.282)。

最后，我们将对散射光子的极化 λ' 求和，并对入射光子极化 λ 求平均，从而获得非极化截而：

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_{k'}} = \frac{1}{2}\sum_{\lambda,\lambda'=1}^{2} \frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_{k'}}(\lambda',\lambda). \tag{3.283}$$

我们从一开始就该作这些求和计算，即将光子极化矢的完备关系(3.220)用到矩阵元平方(3.254)中去。这就消除了对 ε 矢量的依赖性，从面稍简化了求迹计算。

我们将从极化依赖的结果(3.279)出发，并直接对 λ 和 λ' 求和。我们将采用辐射规范，那里极化矢是纯类空的，$\varepsilon=(0,\boldsymbol{\varepsilon})$，从而，

$$\varepsilon\cdot\varepsilon' = \varepsilon^{\mu}(k,\lambda)\varepsilon_{\mu}(k',\lambda') = -\,\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(k',\lambda'). \tag{3.284}$$

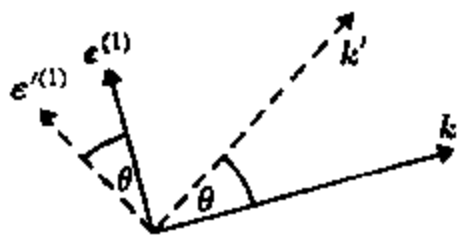


图 3.41 极化矢量 $\varepsilon^{(1)}$ 和 $\varepsilon'^{(1)}$ 之间的夹角与 k 和 k' 之间的夹角相同。所有矢量 $\varepsilon^{(1)}$、$\varepsilon'^{(1)}$、k 和 k' 选在同一平面内，$\varepsilon^{(2)}=\varepsilon'^{(2)}$ 是与平面垂直

空间矢量 $\varepsilon(k,1)$，$\varepsilon(k,2)$，k 构成一个正交系统，对相应带撇的量也是这样。现在不失一般性，我们能选 $\varepsilon(k,1)$ 和 $\varepsilon'(k,1)$ 位于 k 和 k' 组成的平面上，参见图 3.41。于是 $\varepsilon(k,2)$ 和 $\varepsilon'(k',2)$ 与该平面垂直，从而相同，我们有

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{(1)}\cdot\varepsilon'^{(1)} = \cos\theta,\\
&\varepsilon^{(2)}\cdot\varepsilon'^{(2)} = 1,\\
&\varepsilon^{(1)}\cdot\varepsilon'^{(2)} = \varepsilon^{(2)}\cdot\varepsilon'^{(1)} = 0.
\end{aligned} \tag{3.285}$$

对(3.279)中极化依赖的项求平均变成

$$\frac{1}{2}\sum_{\lambda,\lambda'=1}^{2} |\varepsilon^{(\lambda)}\cdot\varepsilon'^{(\lambda')}|^2 = \frac{1}{2}(\cos^2\theta + 1). \tag{3.286}$$

利用此结果和(3.279)式，Compton 散射非极化截面成为

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_{k'}} = \alpha^2 \frac{1}{2m_0^2}\frac{\omega'^2}{\omega^2}\left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta\right). \tag{3.287}$$

该结果的经典极限($\omega\to 0$ 或 $\theta\to 0$)为非极化的 Thomson 截面

$$\left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_{k'}}\right)_{\mathrm{class}} = r_0^2\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta). \tag{3.288}$$

在极端相对论极限 $\omega,\omega'\gg m_0$ 下，Compton 公式(3.252)简化为

$$\omega' = \frac{\omega}{1+\frac{\omega}{m_0}(1-\cos\theta)} \simeq \frac{m_0}{1-\cos\theta} = \frac{m_0}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}, \tag{3.289}$$

它对不太小的散射角 $\theta^2 \gg 2m_0/\omega$ 成立。在这一极限下，Klein-Nishina 截面趋于

$$\left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_k}\right)_{DK} = r_0^2 \frac{m_0}{\omega}\frac{1}{4}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}} \quad 对 \quad \theta^2 \gg \frac{2m_0}{\omega}. \tag{3.290}$$

图 3.42 给出了具有(3.252)的严格结果(3.287)如何插入极限情况(3.288)和(3.290)之间。在高能时，角分布集中到向前方向的尖锥中。

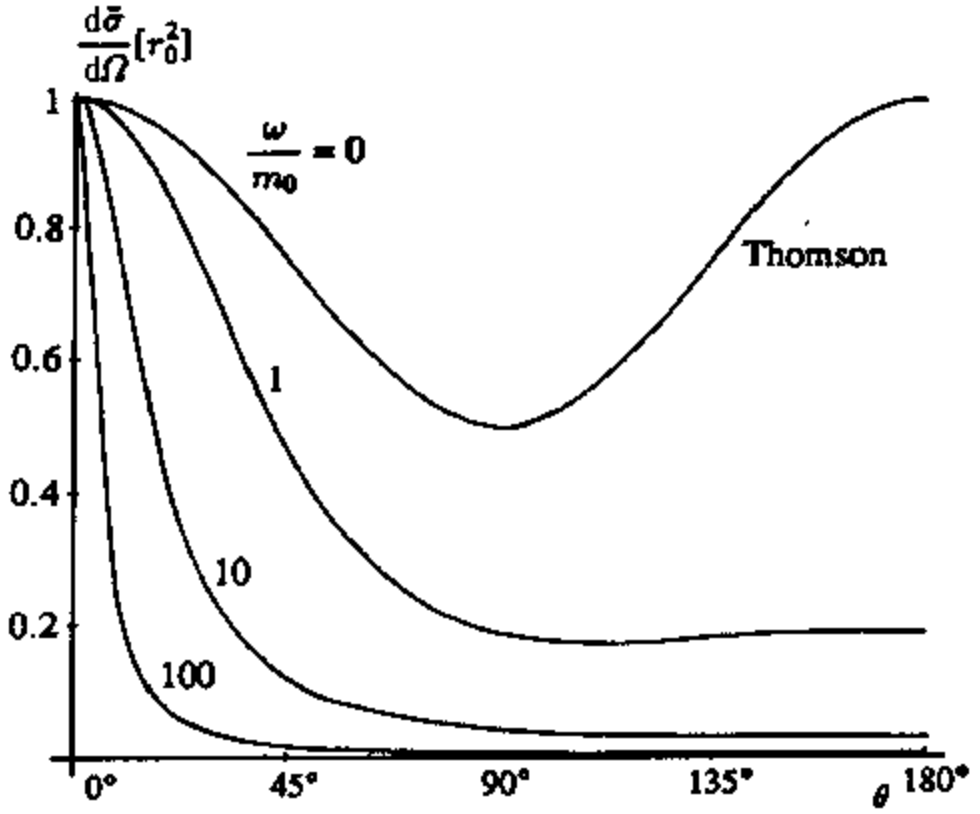


图 3.42　对各种光子能量 ω，非极化 Compton 散射微分截面为散射角 θ 的函数

最后，为导出总截面，我们对光子立体角 $d\Omega_k$ 积分。这儿，我们必须考虑关系(3.252)，因为对光子散射角的依赖性也隐含在 ω' 中，这导致

$$\begin{aligned}\bar{\sigma} &= \alpha^2 \frac{1}{2m_0^2}\int \sin\theta d\theta d\phi \frac{1}{\left(1+\frac{\omega}{m_0}(1-\cos\theta)\right)^2}\left\{\frac{1}{1+\frac{\omega}{m_0}(1-\cos\theta)}\right.\\ &\quad \left.+\left[1+\frac{\omega}{m_0}(1-\cos\theta)\right]-\sin^2\theta\right\}\\ &= \alpha^2\frac{\pi}{m_0^2}\int_{-1}^{1} dz\left\{\frac{1}{\left[1+\frac{\omega}{m_0}(1-z)\right]^3}+\frac{1}{\left[1+\frac{\omega}{m_0}(1-z)\right]}\right.\\ &\quad \left.-\frac{(1-z^2)}{\left[1+\frac{\omega}{m_0}(1-z)\right]^2}\right\},\end{aligned} \tag{3.291}$$

式中我们已经令 $z=\cos\theta$，该积分可完全计算成闭合形式。对高和低的光子能量，可以获得简单表达式。

(a) 小光子能量($\omega \ll m_0$)：

$$\bar{\sigma} \simeq \alpha^2 \frac{\pi}{m_0^2}\left[z + z - \left(z - \frac{z^3}{3}\right)\right]_{-1}^{1} = \alpha^2 \frac{8\pi}{3}\frac{1}{m_0^2} = \frac{8\pi}{3} r_0^2. \tag{3.292}$$

这正是经典汤姆逊截面。

(b) 高光子能量($\omega \gg m_0$)：

$$\bar{\sigma} \simeq \alpha^2 \frac{\pi}{m_0^2}\int_{-1}^{1-m_0/\omega} \mathrm{d}z \left[\frac{1}{\left(\frac{\omega}{m_0}\right)^3 (1-z)^3} + \frac{1}{\frac{\omega}{m_0}(1-z)} - \frac{(1-z^2)}{\left(\frac{\omega}{m_0}\right)^2 (1-z)^2}\right]$$

$$\simeq \alpha^2 \frac{\pi}{\omega m_0}\left[\ln \frac{2\omega}{m_0} + \frac{1}{2} + O\left(\frac{m_0}{\omega}\ln \frac{\omega}{m_0}\right)\right]. \tag{3.293}$$

为估出积分值，(3.291)式分母中的 1 与$(\omega/m_0)(1-z)$相比可略去，这在 $z<1-m_0/\omega$ 时成立。这被归结于降低积分上限。(3.293)中起主导作用的对数项来自于被积函数中第二项。

为完整起见，我们也引用了对(3.291)式严格角向积分的结果。这就导致了总的 Klein-Nishina 截面，它对 ω 的所有值均成立。

$$\bar{\sigma} = 2\pi \frac{\alpha^2}{m_0^2}\left[\frac{1+\gamma}{\gamma^3}\left(\frac{2\gamma(1+\gamma)}{1+2\gamma} - \ln(1+2\gamma)\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\gamma}\ln(1+2\gamma) - \frac{1+3\gamma}{(1+2\gamma)^2}\right], \tag{3.294}$$

其中缩写 $\gamma = \omega/m_0$。

练　习

3.12 能量与动量的关系

问题：假设电子四动量 p_i, p_f 和光子四动量 k, k' 满足关系

$$p_f = p_i + k + k'. \tag{1}$$

证明若动量在质量壳上时，仅存在平庸解

$$p_f = p_i \quad 和 \quad k = k' = 0 \tag{2}$$

解答：方程(1)等价于 $p_f - p_i = k + k'$。取这一关系的平方，并分成空间和时间两部分，我们得到

$$\omega\omega' + E_i E_f - m_0^2 = \boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{p}_f + \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k}', \tag{3}$$

其中，我们用到质壳条件

$$p_i^2 = p_f^2 = m_0^2, \quad k^2 = k'^2 = 0. \tag{4}$$

(3) 右端的绝对值受下列不等式限制

$$|\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{p}_f + \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k}'| \leqslant |\boldsymbol{p}_i||\boldsymbol{p}_f| + |\boldsymbol{k}||\boldsymbol{k}'| = \sqrt{E_i^2 - m_0^2}\sqrt{E_f^2 - m_0^2} + \omega\omega'. \tag{5}$$

我们将此结果代入(3)式

$$E_iE_f - m_0^2 \leqslant \sqrt{E_i^2 - m_0^2}\sqrt{E_f^2 - m_0^2}. \tag{6}$$

平方后得(因 $E_iE_f - m_0^2 \geqslant 0$)

$$E_i^2E_f^2 - 2m_0^2E_iE_f + m_0^4 \leqslant E_i^2E_f^2 - m_0^2(E_i^2 + E_f^2) + m_0^4. \tag{7}$$

它可改写成

$$(E_i - E_f)^2 \leqslant 0. \tag{8}$$

这意味着

$$E_i = E_f \tag{9}$$

且从(1)的时间分量得

$$\omega = -\omega', \tag{10}$$

这意味着 $\omega = \omega' = 0$。因为 $\omega = |\boldsymbol{k}|$ 和 $\omega' = |\boldsymbol{k}'|$，光子动量四维矢为零，从而(2)得证。

3.8　粒子和反粒子的湮灭

物质和反物质的湮灭是概念上极有趣的过程。我们将通过考虑电子-正电子对湮灭成双光子这样一个例子来研究该过程。相应 Feynman 图如图 3.43 所示。

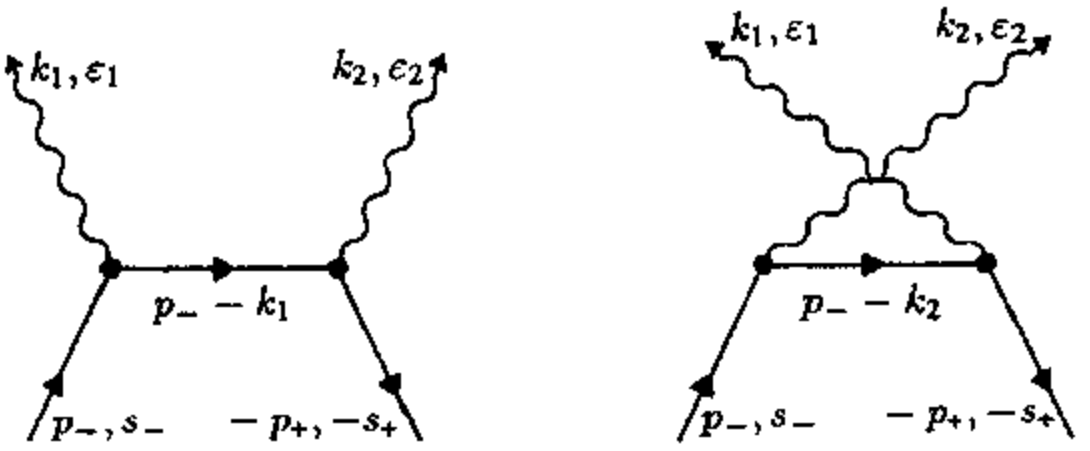


图 3.43　电子-正电子对湮灭成双光子的直接图和交换图

我们立刻注意到，这些图与描述 Compton 散射的图极为类似。事实上，若时间轴的方向旋转 90°，图 3.43 与 3.7 节中图 3.39 等同！当然，实验上两过程将以完全不同形式出现。在对湮灭中发射出两个光子而在 Compton 散射中，一个光子被电子吸收，又有一个光子从电子上发射出。

对应图 3.43 所示过程的 S-矩阵元能够利用通常规则容易地写出。我们必须考虑正确的运动学：两个粒子(电子和正电子)进来和两个光子离开。在坐标空间中，S 矩阵元为

$$S_{fi}=e^2\int \mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3y\bar{\psi}_+(x)[(-\mathrm{i}\not{A}(x,k_2))\mathrm{i}S_F(x-y)(-\mathrm{i}\not{A}(y,k_1))$$
$$+(-\mathrm{i}\not{A}(x,k_1))\mathrm{i}S_F(x-y)(-\mathrm{i}\not{A}(y,k_2))]\psi_-(y), \tag{3.295}$$

这导致下列动量空间中矩阵元

$$S_{fi}=\frac{e^2}{V^2}\sqrt{\frac{m_0^2}{E_+E_-}}\sqrt{\frac{(4\pi)^2}{2\omega_1\omega_2}}(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2-p_+-p_-)$$
$$\times\bar{v}(p_1,s_1)\left[(-\mathrm{i}\not{\varepsilon}_2)\frac{\mathrm{i}}{\not{p}_--\not{k}_1-m_0}(-\mathrm{i}\not{\varepsilon}_1)\right.$$
$$\left.+(-\mathrm{i}\not{\varepsilon}_1)\frac{\mathrm{i}}{\not{p}_--\not{k}_2-m_0}(-\mathrm{i}\not{\varepsilon}_2)\right]u(p_-,s_-). \tag{3.296}$$

这儿,我们已用出射平面波来描述两光子。显然,S 矩阵元对光子交换是对称的,按照 Bose 统计,它就应该是这样。为确保这一对称性两个图贡献必须相干加在一起。我们将首先对此过程作解释。

一个动量和自旋为(p_-,s_-)的正能电子在过去产生,并沿时间轴向前运动。它被散射成四动量$-p_+$沿负时间轴向后运动的负能态。动量$-p_+$的负能电子的波函数为$v(p_+,s_+)\exp(\mathrm{i}p_+\cdot x)$(参见《RQM》第六章),在散射过程中,它将其能量通过发射两光子转换成辐射能。

与通常一样,(3.296)中 δ^4 函数表示入射和出射粒子间能量-动量守恒。只有电子进入反应区:两个光子和正电子退出反应区。然而正电子有四动量$-p_+$,因为它是被负能电子所代表。所以

$$p_-=k_1+k_2+(-p_+)=k_1+k_2-p_+. \tag{3.297}$$

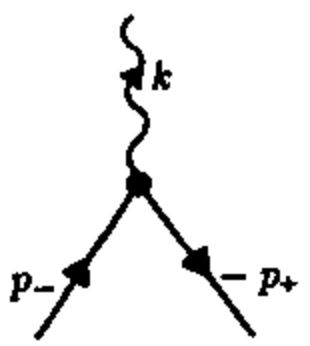


图 3.44 电子-正电子对湮灭成单个光子运动学上是禁戒的

一个电子-正电子对湮灭成单独一个光子在运动学上是被禁的,这是容易理解的。这种假想的过程如图 3.44 所示,它给出 $p_-=k+(-p_+)$或 $p_-+p_+=k$ 以及最后$(p_-+p_+)^2=k^2=0$。然而这是不可能的,最容易的就是放到质心系中去理解,那里 $\boldsymbol{p}_++\boldsymbol{p}_-=0$。注意,该论断仅对电子是自由粒子时适用。湮灭正电子与束缚在原子核中的电子成单光子是可能的。在这种情况下,第二个光子被原子核所吸收。

在着手计算湮灭散射截面之前,我们回到湮灭和 Compton 散射间的密切关系(表 3.2)。两个过程通过交叉对称相关联,而交叉对称是 3.4 节中当我们把电子-电子散射和电子-正电子散射作比较时首次碰到的。那里,我们注意到 $A+B\to C+D$ 类型的过程与 $A+\bar{D}\to C+\bar{B}$ 类型过程之间通过一个代换规则互相关联,即通过交换动量变量 $p_B\to -p_D$ 和 $p_D\to -p_B$。在对湮灭情况 $e^++e^-\to\gamma+\gamma$ 中,我们能把 A 定义成电子,B 为正电子,以及 C,D 为两个光子。交叉就导致 Compton 散射,$e^-+\gamma\to\gamma+e^-$。我们能定义 $D=\bar{D}$,因为光子的反粒子为它本身。

表 3.2　通过交叉关系联系的三个过程

对湮灭 $e^-+e^+\to\gamma+\gamma$	Compton 散射 $e^-+\gamma\to\gamma+e^-$	对产生 $\gamma+\gamma\to e^++e^-$
p_-	p_i	$-p_+$
p_+	$-p_f$	$-p_-$
k_1	$-k$	$-k_1$
k_2	k'	$-k_2$

为给出完整的描述，我们注意到可以第二次应用交叉对称。从而 Compton 过程与表示 $\gamma+\gamma\to e^++e^-$ 的 $\overline{C}+\overline{D}\to\overline{A}+\overline{B}$ 有关。这是一个由双光子产生电子-正电子对的过程(参见练习 3.15)，相应的 Feynman 图如图 3.45 所示。下面表中总结出这三个过程是怎样按照代换规则相互关联的。从而所有这三个过程本质上受到同一物理的支配，仅仅运动学条件不同。我们再次强调交叉对称是严格的，不是局限于微扰论一个特定阶的。

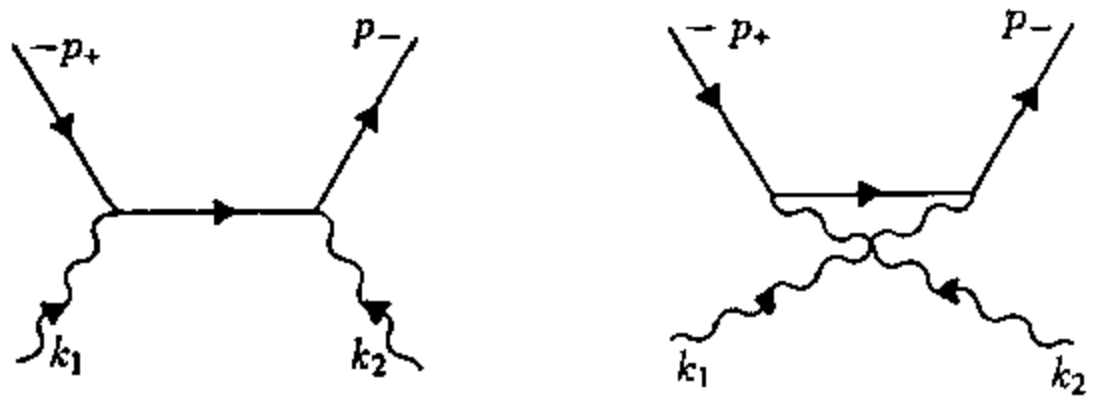


图 3.45　双光子对产生的过程与在双光子对湮灭的过程密切相关

我们现在将确定对湮灭的截面。与通常一样，它与 S 矩阵元间关系为

$$\mathrm{d}\sigma=\int\frac{|S_{fi}|^2}{T\cdot V\cdot\dfrac{|\boldsymbol{v}|}{V}\cdot\dfrac{1}{V}}V\,\frac{\mathrm{d}^3k_1}{(2\pi)^3}V\,\frac{\mathrm{d}^3k_2}{(2\pi)^3}. \tag{3.298}$$

代入(3.296)式得

$$\mathrm{d}\sigma=\frac{e^4}{(2\pi)^2}\,\frac{m_0^2}{E_+E_-}\,\frac{(4\pi)^2}{|\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}|}\int\delta^4(k_1+k_2-p_+-p_-)\,|\varepsilon_2^{\mu}M_{\mu\nu}\varepsilon_1^{\nu}|\,\frac{\mathrm{d}^3k_1}{2\omega_1}\,\frac{\mathrm{d}^3k_2}{2\omega_2}. \tag{3.299}$$

这里我们已引入了张量

$$\begin{aligned}M_{\mu\nu}&=\bar{v}(p_+,s_+)\left[\gamma_\mu\frac{1}{\not p_--\not k_1-m_0}\gamma_\nu+\gamma_\nu\frac{1}{\not p_--\not k_2-m_0}\gamma_\mu\right]u(p_-,s_-)\\&=\bar{v}(p_+,s_+)\left[\gamma_\mu\frac{\not p_--\not k_1+m_0}{-2p_-\cdot k_1}\gamma_\nu+\gamma_\nu\frac{\not p_--\not k_2+m_0}{-2p_-\cdot k_2}\gamma_\mu\right]u(p_-,s_-).\end{aligned} \tag{3.300}$$

按照交叉对称，我们注意到当作表中所示的代换时，这一“湮灭张量”与 3.7 节(3.242)中定义的“Compton 张量”等同。所以 3.7 节中大部分计算能被照搬过来。然而，碰撞的运动学量是不同的，因为现在终态中有两个光子，在入射道中存在两个有质量的粒子。

由于 δ 函数，六维的两体位相空间被减化成两维了。让我们考虑积分

$$I=\int\frac{\mathrm{d}^3k_1}{2\omega_1}\frac{\mathrm{d}^3k_2}{2\omega_2}\delta^4(k_1+k_2-p_+-p_-)f(k_1,k_2), \tag{3.301}$$

式中 $f(k_1,k_2)$ 代表(3.299)的动量依赖的被积函数。我们现在积出变数 k_2，再次利用公式(3.74)式

$$\frac{\mathrm{d}^3k_2}{2\omega_2}=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4k_2\delta(k_2\cdot k_2-0)\Theta(k_{2_0}). \tag{3.302}$$

方程(3.301)变成

$$\begin{aligned}I=&\int_0^\infty\frac{1}{2}\omega_1\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\Omega_{k_1}\delta[(p_++p_--k_1)^2]\\&\times\Theta(E_++E_--\omega_1)f(k_1,k_2=p_++p_--k_1)\\=&\frac{\mathrm{d}\Omega_{k_1}}{2}\int_0^{E_++E_-}\omega_1\mathrm{d}\omega_1\delta[(p_++p_-)^2-2k_1\cdot(p_++p_-)]\\&\times f(k_1,k_2=p_++p_--k_1).\end{aligned} \tag{3.303}$$

为计算此积分，我们必须指明参照系。下列计算将在电子的静止坐标系中进行，那里 $p_-=(m_0,\boldsymbol{o})$。在该参照系中(3.303)变成

$$\begin{aligned}I=&\frac{\mathrm{d}\Omega_{k_1}}{2}\int_0^{E_++m_0}\omega_1\mathrm{d}\omega_1\delta(2m_0^2+2m_0E_+-2\omega_1(m_0+E_+-|\boldsymbol{p}_+|\cos\theta))\\&\times f(k_1,k_2=p_++p_--k_1)\\=&\frac{\mathrm{d}\Omega_{k_1}}{2}\frac{\omega_1 f(k_1,k_2=p_++p_--k_1)}{2|m_0+E_+-|\boldsymbol{p}_+|\cos\theta|}\Big|_{\omega_1}\\=&\frac{\mathrm{d}\Omega_{k_1}}{4}\frac{m_0(m_0+E_+)f(k_1,k_2=p_++p_--k_1)}{[m_0+E_+-|\boldsymbol{p}_+|\cos\theta]^2},\end{aligned} \tag{3.304}$$

式中光子能量 $\omega_1=|\boldsymbol{k}_1|$ 由

$$\omega_1=\frac{m_0(m_0+E_+)}{m_0+E_+-|\boldsymbol{p}_+|\cos\theta}. \tag{3.305}$$

来确定。这里 θ 表示第一个光子动量 $\boldsymbol{k}_1$ 和入射正电子动量 $\boldsymbol{p}_+$(对照图 3.46)间的夹角。在(3.304)中出现在函数 $f(k_1,\ldots)$ 中的每一个光子能量 ω_1 被(3.305)所取代。

在实验室系中，$|\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}|=|\boldsymbol{v}_+|=|\boldsymbol{p}_+|/E_+$，对湮灭微分截面(3.299)变为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_{k_1}}=\alpha^2\frac{\omega_1^2}{m_0(m_0+E_+)}\frac{m_0}{|\boldsymbol{p}_+|}|\varepsilon_2^\mu M_{\mu\nu}\varepsilon_1^\nu|^2, \tag{3.306}$$

其中 ω_1 由(3.305)式给出。当将(3.306)式与对应的 Compton 散射公式(3.254)比较，便能注意到它们在运动学依赖上的差异。

对(3.306)的进一步计算是直接的。对电子和正电子自旋求平均

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_{k_1}}(\lambda_2,\lambda_1)=\frac{1}{4}\sum_{s_-,s_+}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_{k_1}}(s_+,s_-;\lambda_2,\lambda_1) \tag{3.307}$$

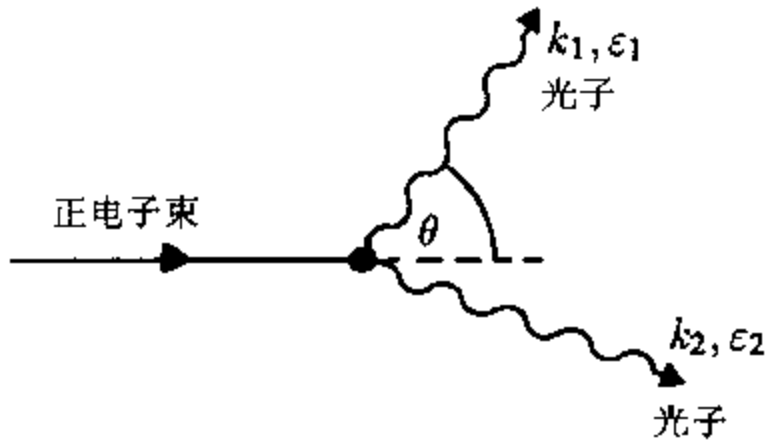


图 3.46　散射角 θ 的定义

它导致

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega_{k_1}}(\lambda_2,\lambda_1)=\frac{1}{4}\alpha^2\frac{\omega_1^2}{m_0(m_0+E_+)}\frac{m_0}{|\boldsymbol{p}_+|}(-)$$
$$\times\ \mathrm{Tr}\left[\frac{-\not{p}_++m_0}{2m_0}\left(\frac{\not{\varepsilon}_2\not{k}_1\not{\varepsilon}_1}{2p_-\cdot k_1}+\frac{\not{\varepsilon}_1\not{k}_2\not{\varepsilon}_2}{2p_-\cdot k_2}\right)\frac{\not{p}_-+m_0}{2m_0}\left(\frac{\not{\varepsilon}_1\not{k}_1\not{\varepsilon}_2}{2p_-\cdot k_1}+\frac{\not{\varepsilon}_2\not{k}_2\not{\varepsilon}_1}{2p_-\cdot k_2}\right)\right]. \tag{3.308}$$

如果按照代换规则作动量变量间的代换，该表达式中迹与 Compton 散射中的结果一致(参见(3.256)和(3.265))。注意(3.308)式额外的负号来自于对正电于旋量的求和。

$$\sum_s v_\alpha(p,s)\bar{v}_\beta(p,s)=-\left(\frac{-\not{p}+m_0}{2m_0}\right)_{\alpha\beta}. \tag{3.309}$$

如同 3.7 节那样，特定的横向规范条件

$$\varepsilon_1\cdot p_-=\varepsilon_2\cdot p_-=0 \tag{3.310}$$

已被用作简化(3.308)式。按照(3.278)式，迹的计算导致

$$\mathrm{Tr}\,[\cdots]=\frac{1}{4m_0^2}2\left[\frac{k_2\cdot p_-}{-k_1\cdot p_-}+\frac{-k_1\cdot p_-}{k_2\cdot p_-}+4(\varepsilon_2\cdot\varepsilon_1)^2-2\right], \tag{3.311}$$

式中已作代换 $p_i\to p_-, k\to -k_1, k'\to k_2$。从而在电子静止系中，对湮灭的截面变成

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_{k_1}}(\lambda_2,\lambda_1)=\frac{1}{8}\frac{\alpha^2}{m_0^2}\frac{\omega_1^2}{m_0(m_0+E_+)}\frac{m_0}{|\boldsymbol{p}_+|}\left[\frac{k_2\cdot p_-}{k_1\cdot p_-}+\frac{k_1\cdot p_-}{k_2\cdot p_-}-4(\varepsilon_2\cdot\varepsilon_1)^2+2\right]$$
$$=\frac{1}{8}\frac{\alpha^2}{m_0^2}\frac{m_0(m_0+E_+)}{(m_0+E_+-|\boldsymbol{p}_+|\cos\theta)^2}\frac{m_0}{|\boldsymbol{p}_+|}\left[\frac{\omega_2}{\omega_1}+\frac{\omega_1}{\omega_2}+2-4(\varepsilon_2\cdot\varepsilon_1)^2\right] \tag{3.312}$$

其中 $p_-=(m_0,\boldsymbol{o})$，按照(3.305)式光子能量 ω_1 依赖于光子出射角 θ，而根据能量守恒，ω_2 为

$$\omega_2=m_0+E_+-\omega_1=m_0+E_+-\frac{m_0(m_0+E_+)}{m_0+E_+-|\boldsymbol{p}_+|\cos\theta}$$
$$=(m_0+E_+)\left(1-\frac{m_0}{m_0+E_+-|\boldsymbol{p}_+|\cos\theta}\right)$$
$$=\frac{E_+-|\boldsymbol{p}_+|\cos\theta}{m_0}\omega_1. \tag{3.313}$$

若不观测光子极化，(3.312)必须对 λ_1,λ_2 求和。利用(3.286)就得到对湮灭的非极化截面

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_{k_1}}=\sum_{\lambda_1,\lambda_2=1}^{2}\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_{k_1}}(\lambda_2,\lambda_1)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{m_0^2}\frac{m_0(m_0+E_+)}{(m_0+E_+-|\boldsymbol{p}_+|\cos\theta)^2}\frac{m_0}{|\boldsymbol{p}_+|}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}+\frac{\omega_1}{\omega_2}+\sin^2\theta\right). \tag{3.314}$$

这里 θ 为两光子的动量矢量 $\boldsymbol{k}_1$ 和 $\boldsymbol{k}_2$ 间的夹角。在 Compton 散射中，θ 碰巧与散射角 θ 等同。

在非相对论极限 $E_+-m_0\ll m_0$ 下产生的光子具有同样的能量 $\omega_1\to m_0,\omega_2\to m_0$。它们被背靠背地发射出 $\theta\to\pi$。既然在该情况中入射正电子动量可忽略，那么，光子的角分布变成各向同向，从而(3.314)式简化成

$$\left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_{k_1}}\right)_{nr}=\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{m_0^2}\frac{1}{\beta_+}, \tag{3.315}$$

式中 $\beta_+=|\boldsymbol{p}_+|/m_0$ 为正电子的速度。若入射正电子具有大的动量，角分布(3.314)就变得在朝前方向形成一个峰。在这种情况下，几乎所有能量 E_+ 由沿束流方向发射的光子所携带。图 3.47 中给出了对应正电子能量的一些典型值的微分截面(3.314)。

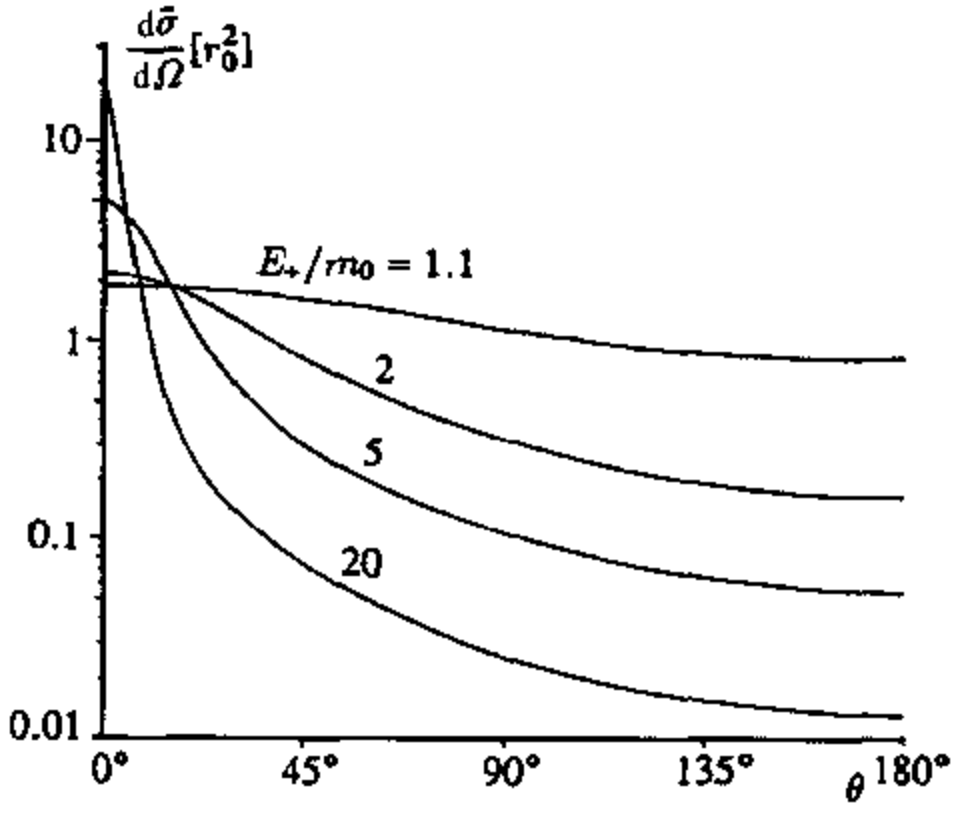


图 3.47 对各种正电子能量时，对湮灭微分截面为光子角度 θ 的函数的对数图(以 α^2/m_0^2 为单位)

在(3.314)中对立体角 $d\Omega_{k_1}$ 积分便得到湮灭总截面。当我们作这一积分时必须记住在终态中有两个全同粒子。这一点在截面公式(3.314)中已得以实现，这利用了散射幅(3.296)对两光子交换($k_1,\varepsilon_1\leftrightarrow k_2,\varepsilon_2$)的对称性。从而(3.314)式给出了其中一个光子被散射到 $d\Omega_{k_1}$ 角内的截面。由于两光子间不可区别，它们中任一个都能受到如此的散射。所以当我们将 $d\bar{\sigma}/d\Omega_{k_1}$ 对整个立体角 4π 上作积分时，我们重复计数了光子；即，我们在每一个散射事例中会计数 4 个——而不是两个

光子。为校正这一双重计数，截面必须乘以因子 1/2。

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\Omega_{k_1}\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega_{k_1}}. \tag{3.316}$$

这个积分将在练习 3.13 中完成。

练　习

3.13　对湮灭的总截面

问题：四动量$(E,\boldsymbol{p})$的非极化正电子撞击同样非极化的静止电子，发生湮灭而产生动量为 $\boldsymbol{k}_1$ 和 $\boldsymbol{k}_2$，极化为 λ_1 和 λ_2 的两个光子。用 θ 表示正电子动量与 $\boldsymbol{k}$ 之间夹角，$\bar{\theta}$ 表示 $\boldsymbol{k}_1$ 和 $\boldsymbol{k}_2$ 间夹角(参见图 3.48)。试确定对湮灭的总截面。

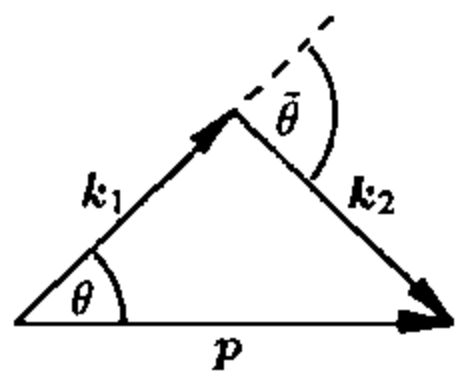


图 3.48　角度 θ 和 $\bar{\theta}$ 的定义

解答：(3.314)中已给出了对湮灭的微分截面

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\alpha^2}{2|p|}\frac{m_0+E}{(x+m_0)^2}\left(\frac{m_0^2+x^2}{m_0 x}+\sin^2\bar{\theta}\right). \tag{1}$$

这里我们已引入依赖光子出射角的变量 x，它被定义为

$$x = \frac{p\cdot k_1}{|\boldsymbol{k}_1|} = E - |\boldsymbol{p}|\cos\theta \quad 或 \quad \cos\theta = \frac{E-x}{|\boldsymbol{p}|}. \tag{2}$$

从运动学分析，我们得到光子能量

$$\omega_1 - m_0\frac{E+m_0}{x+m_0} \quad 和 \quad \omega_2 - \frac{x}{m_0}\omega_1. \tag{3}$$

为导出(1)，我们需要依赖关系式 $\bar{\theta}=\bar{\theta}(\theta)$。将正弦定理用到 $\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2$ 和 $\boldsymbol{p}$ 所组成的三角形中，便得到

$$\frac{\sin\theta}{|\boldsymbol{k}_2|} = \frac{\sin(\pi-\bar{\theta})}{|\boldsymbol{p}|} = \frac{\sin\bar{\theta}}{|\boldsymbol{p}|} \tag{4}$$

从而，利用(3)得

$$\sin\bar{\theta} = \frac{|\boldsymbol{p}|}{E+m_0}\frac{x+m_0}{x}\sin\theta. \tag{5}$$

由

$$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = 1-\frac{(E-x)^2}{|\boldsymbol{p}|^2} = -\frac{x^2-2Ex+m_0^2}{|\boldsymbol{p}|^2} \tag{6}$$

得到

$$\sin^2\bar{\theta} = -\frac{1}{(E+m_0)^2}(x^2-2Ex+m_0^2)\left(\frac{m_0+x}{x}\right)^2. \tag{7}$$

考虑了对终态中二个全同粒子修正的总截面为

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\Omega \frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega}$$

$$= \pi \int_{-1}^{+1} \mathrm{d}\cos\theta \frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\pi}{|\boldsymbol{p}|}\int_{E-|\boldsymbol{p}|}^{E+|\boldsymbol{p}|} \mathrm{d}x \frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega}. \tag{8}$$

我们将(1)和(7)代入(8)得到

$$\bar{\sigma} = \frac{\alpha^2\pi}{2m_0|\boldsymbol{p}|^2}\int_{E-|\boldsymbol{p}|}^{E+|\boldsymbol{p}|} \mathrm{d}x\left[(E+m_0)\frac{m_0^2+x^2}{x(m_0+x)^2}\right.$$

$$\left. - \frac{m_0}{m_0+E}\frac{1}{x^2}(x^2-2Ex+m_0^2)\right]. \tag{9}$$

从此积分,我们能直接导出非相对论极限下的渐近表达式。将积分中每个变数 x 都用常数 $x\sim E\sim m_0$来取代,从而估计出

$$\bar{\sigma}_{\mathrm{nr}} \simeq \frac{\alpha^2\pi}{2m_0|\boldsymbol{p}|^2}2|\boldsymbol{p}|\left[2\frac{2}{2^2} - \frac{1}{2}(1-2+1)\right] = \frac{\alpha^2\pi}{m_0|\boldsymbol{p}|}. \tag{10}$$

这也能被写成

$$\bar{\sigma}_{\mathrm{nr}} \simeq \pi r_0^2 \frac{1}{\beta}, \tag{11}$$

式中 $r_0 = \mathrm{e}^2/m_0\mathrm{c}^2 \approx 2.8fm$ 是"电子的经典半径",$\beta = |\boldsymbol{v}|/\mathrm{c}$ 表示入射正电子速度。越出这一近似而严格求出(9)式中的积分并不困难,我们写出

$$\bar{\sigma} = \frac{\alpha^2\pi}{2m_0|\boldsymbol{p}|^2}(I_1 + I_2), \tag{12}$$

其中

$$I_1 = (E+m_0)\int_{E-|\boldsymbol{p}|}^{E+|\boldsymbol{p}|} \mathrm{d}x \frac{m_0^2+x^2}{x(m_0+x)^2} \tag{13}$$

和

$$I_2 = -\frac{m_0}{m_0+E}\int_{E-|\boldsymbol{p}|}^{E+|\boldsymbol{p}|} \mathrm{d}x\left(1 - \frac{2E}{x} + \frac{m_0^2}{x^2}\right). \tag{14}$$

积分能被解析求出

$$I_1 = (E+m_0)\left(\frac{2m_0}{m_0+x} + \ln\frac{x}{m_0}\right)\Big|_{E-|\boldsymbol{p}|}^{E+|\boldsymbol{p}|}$$

$$= (E+m_0)\left(\frac{2m_0}{m_0+E+|\boldsymbol{p}|} - \frac{2m_0}{m_0+E-|\boldsymbol{p}|} + \ln\frac{E+|\boldsymbol{p}|}{E-|\boldsymbol{p}|}\right)$$

$$= (E+m_0)\left[\frac{2m_0(-2|\boldsymbol{p}|)}{(m_0+E)^2-|\boldsymbol{p}|^2} + \ln\frac{(E+|\boldsymbol{p}|)^2}{E^2-|\boldsymbol{p}|^2}\right]$$

$$= -2|\boldsymbol{p}| + 2(E+m_0)\ln\frac{E+|\boldsymbol{p}|}{m_0} \tag{15}$$

和

$$I_2=\frac{m_0}{m_0+E}\left(-x+2E\ln x+\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{E-|p|}^{E+|p|}$$
$$=\frac{4m_0}{m_0+E}\left(E\ln\frac{E+|p|}{m_0}-|p|\right). \tag{16}$$

这就导出了下面对湮灭总截面的严格表达式①

$$\bar{\sigma}=\frac{\alpha^2\pi}{m_0|p|^2(E+m_0)}\left[(E^2+4m_0E+m_0^2)\ln\frac{E+|p|}{m_0}-(E+3m_0)|p|\right]. \tag{17}$$

现在我们导出两个极限情况：

(a) 非相对论极限($|p|\to 0, E\to m_0$)。在$|p|/m_0\ll 1$情况下，我们有展开式

$$E(|p|)=m_0+O(p^2),$$
$$\frac{m_0}{E+m_0}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\dfrac{E-m_0}{2m_0}}=\frac{1}{2}+O(p^2),$$
$$\ln\frac{E+|p|}{m_0}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+|p|/E}{1-|p|/E}=\frac{|p|}{E}+O(|p|^3)=\frac{|p|}{m_0}+O(|p^3|),$$

导得

$$\bar{\sigma}_{nr}=\frac{\alpha^2\pi}{m_0|p|}(1+O(p^2)) \tag{18}$$

与(11)式一致。

(b) 极端相对论情况$|p|\to\infty, E\to\infty$)。对$E/m_0\gg 1$，我们作近似

$$|p|=E\sqrt{1-\frac{m_0^2}{E^2}}=E+O(E^{-1}),$$
$$\frac{m_0^2}{p^2}=\frac{m_0^2}{E^2}\frac{1}{1-m_0^2/E^2}=\frac{m_0^2}{E^2}+O(E^{-4}),$$
$$\frac{m_0}{m_0+E}=\frac{m_0}{E}\frac{1}{1+m_0/E}=\frac{m_0}{E}+O(E^{-2}).$$

而且，对数的 Taylor 级数展开给出

$$\ln\frac{E+|p|}{m_0}=\ln\frac{2E+(|p|-E)}{m_0}=\ln\frac{2E}{m_0}+O\left(\frac{1}{E}(|p|-E)\right)$$
$$=\ln\frac{2E}{m_0}+O(E^{-2}).$$

从而我们获得了截面的渐近表达式

$$\bar{\sigma}_{ur}=\frac{\alpha^2\pi}{m_0E}\left[\ln\frac{2E}{m_0}-1+O\left(\frac{\ln 2E/m_0}{E/m_0}\right)\right]. \tag{19}$$

---

① P. A. M. Dirac; Proc. Camb. Phil. Soc. **26**, 361(1930).

练　习

3.14　质心系中电子-正电子湮灭

问题：试推导质心坐标系中，对湮灭 $e^+ + e^- \to \gamma + \gamma$ 非极化微分截面和总截面。

解答：对湮灭的微分截面的一般表达式已由(3.299)(3.300)给出

$$\mathrm{d}\bar{\sigma} = \frac{\alpha^2}{|v_{\mathrm{rel}}|}\frac{m_0}{E_+}\frac{m_0}{E_-}\overline{|\varepsilon_2 \cdot M_{fi} \cdot \varepsilon_1|^2} \times (2\pi)^4\delta^4(k_1 + k_2 - p_+ - p_-)\frac{4\pi\mathrm{d}^3k_1}{(2\pi)^3 2\omega_1}\frac{4\pi\mathrm{d}^3k_2}{(2\pi)^3 2\omega_2}. \tag{1}$$

式中

$$\overline{|\varepsilon_2 \cdot M_{fi} \cdot \varepsilon_1|^2} = \frac{1}{4}\sum_{s_+,s_-}\sum_{\lambda_1,\lambda_2}|\varepsilon_2 \cdot M_{fi} \cdot \varepsilon_1|^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{4m_0^2}\sum_{\lambda_1,\lambda_2}\left(\frac{k_2 \cdot p_-}{k_1 \cdot p_-} + \frac{k_1 \cdot p_-}{k_2 \cdot p_-} - 4(\tilde{\varepsilon}_2 \cdot \tilde{\varepsilon}_1)^2 + 2\right). \tag{2}$$

在(2)的推导中，已选特定规范条件 $\tilde{\varepsilon}_1 \cdot p_- = \tilde{\varepsilon}_2 \cdot p_- = 0$，我们用否定号标记这种规范。在 $p_- = (m_0, o)$ 的电子静止坐标系中计算是方便的。这里，极化矢量能被选作纯类空矢 $\varepsilon = (0, \varepsilon)$，它垂直于光子动量 k 且对 λ 的求和是容易做到的。在任意坐标系中，特定的规范条件失去其简单性，必须构造复杂的 $\tilde{\varepsilon}$ 矢量。更有感染力的是利用光子极化矢的一般的完备关系(3.220)

$$\sum_{\lambda=1}^{2}\varepsilon_\mu(k,\lambda)\varepsilon_\nu(k,\lambda) \to -g_{\mu\nu}. \tag{3}$$

然而，这种代换仅适用于规范不变表达式，这一条件(2)式不满足。不过，如果我们重建一下(2)的规范不变性，我们就能用(3)式。这能通过把特殊的极化矢 $\tilde{\varepsilon}$ 换回到一般的 ε，这可借助于下式达到。

$$\tilde{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_1 \cdot p_-}{k_1 \cdot p_-}k_1,$$

$$\tilde{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_2 \cdot p_-}{k_2 \cdot p_-}k_2, \tag{4}$$

参见 3.7 节中(3.263)式。显然，表达式

$$\tilde{\varepsilon}_1 \cdot \tilde{\varepsilon}_2 = \left(\varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_1 \cdot p_-}{k_1 \cdot p_-}k_1\right) \cdot \left(\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_2 \cdot p_-}{k_2 \cdot p_-}k_2\right) \tag{5}$$

在形如 $\varepsilon_1 \to \varepsilon'_1 + f_1(k)k_1$，$\varepsilon_2 \to \varepsilon_2' + f_2(k)k_2$ 的规范变换下不变。从而(2)已是规范不变的，因而能用(3)式。

我们引入简略符号

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2}(\tilde{\varepsilon}_1,\tilde{\varepsilon}_2)^2 = A^{\mu\nu}B_{\mu\nu}, \tag{6}$$

式中

$$A^{\mu\nu}=\sum_{\lambda_1}\left(\varepsilon_1-\frac{\varepsilon_1\cdot p_-}{k_1\cdot p_-}k_1\right)^{\mu}\left(\varepsilon_1-\frac{\varepsilon_1\cdot p_-}{k_1\cdot p_-}k_1\right)^{\nu} \tag{7}$$

$B_{\mu\nu}$的定义类似。用(3)我们得到

$$A^{\mu\nu}=\sum_{\lambda_1}\left(\varepsilon_1^{\mu}\varepsilon_1^{\nu}-\varepsilon_1^{\alpha}\varepsilon_1^{\nu}\frac{p_{-\alpha}k_1^{\mu}}{k_1\cdot p_-}-\varepsilon_1^{\mu}\varepsilon_1^{\alpha}\frac{p_{-\alpha}k_1^{\nu}}{k_1\cdot p_-}+\varepsilon_1^{\alpha}\varepsilon_1^{\beta}\frac{p_{-\alpha}p_{-\beta}k_1^{\mu}k_1^{\nu}}{(k_1\cdot p_-)^2}\right)$$

$$=-g^{\mu\nu}+\frac{k_1^{\mu}p_-^{\nu}+p_-^{\mu}k_1^{\mu}}{k_1\cdot p_-}-\frac{m_0^2k_1^{\mu}k_1^{\nu}}{(k_1\cdot p_-)^2} \tag{8a}$$

和

$$B_{\mu\nu}=-g_{\mu\nu}+\frac{k_{2\mu}p_{-\nu}+p_{-\mu}k_{2\nu}}{k_2\cdot p_-}-\frac{m_0^2k_{2\mu}k_{2\nu}}{(k_2\cdot p_-)^2}\,. \tag{8b}$$

这些张量的收缩得到(用质壳条件 $k_1^2=k_2^2=0$)

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2}(\bar{\varepsilon}_1\cdot\bar{\varepsilon}_2)^2=2-2m_0^2\frac{k_1\cdot k_2}{k_1\cdot p_-\,k_2\cdot p_-}+m_0^4\frac{(k_1\cdot k_2)^2}{(k_1\cdot p_-)^2(k_2\cdot p_-)^2}\,. \tag{9}$$

将此代入(2)便导出非极化的不变矩阵元平方，

$$\overline{|\varepsilon_2\cdot M_{fi}\cdot\varepsilon_1|^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{4m_0^2}4\left(\frac{k_2\cdot p_-}{k_1\cdot p_-}+\frac{k_1\cdot p_-}{k_2\cdot p_-}+2m_0^2\frac{k_1\cdot k_2}{k_1\cdot p_-\,k_2\cdot p_-}\right.$$

$$\left.-m_0^4\frac{(k_1\cdot k_2)^2}{(k_1\cdot p_-)^2(k_2\cdot p_-)^2}\right)\,. \tag{10}$$

将(1)对 d^3k_2 和 $\mathrm{d}\omega_1$ 积分便得到微分截面 $\mathrm{d}\bar{\sigma}/\mathrm{d}\Omega_1$，借助

$$\int\frac{\mathrm{d}^3k_2}{2\omega_2}=\int\mathrm{d}^4k_2\delta(k_2^2)\Theta(k_{20}) \tag{11}$$

作类似于 3.7 节中的简单计算，便得

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega_1}=\frac{\alpha^2}{|v_{\mathrm{rel}}|}\frac{m_0^2}{E_+E_-}2\int_0^{E_++E_-}\mathrm{d}\omega_1\omega_1\delta[(p_++p_--k_1)^2]\,\overline{|\varepsilon_2\cdot M_{fi}\cdot\varepsilon_1|^2} \tag{12}$$

上式是在 $k_2=p_++p_--k_1$ 下计算的。

在(12)仍是完全普遍的情况下，我们现在选 $p_+=(E_1,\boldsymbol{p})$，$p_-=(E,-\boldsymbol{p})$的质心坐标系，从而 δ 函数变成

$$\delta[(p_++p_--k_1)^2]=\delta[(2E-\omega_1)^2-k_1^2]$$

$$=\delta[4E(E-\omega_1)] \tag{13}$$

因此(12)为

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega_1}=\frac{\alpha^2}{|v_{\mathrm{rel}}|}\frac{m_0^2}{E^2}2\frac{E}{4E}\,\overline{|\varepsilon_2\cdot M_{fi}\cdot\varepsilon_1|^2}. \tag{14}$$

(10)式中的标量积在质心系中化为

$$\begin{aligned}k_1\cdot p_-&=E^2(1-v\cos\theta),\\ k_2\cdot p_-&=E^2(1+v\cos\theta),\\ k_1\cdot k_2&=2E^2,\end{aligned} \tag{15}$$

其中速度 $v=|\boldsymbol{p}|/E=\sqrt{E^2-m_0^2}/E_0$。$\theta$ 为入射动量 $\boldsymbol{p}$ 和出射动量 $\boldsymbol{k}$ 间夹角。用 $|\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}|=2v$，质心系中对湮灭的微分截面的结果为

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega_1}=\frac{1}{8}\frac{\alpha^2}{m_0^2}\frac{m_0^2}{E^2}\frac{1}{v}\left(\frac{1+v\cos\theta}{1-v\cos\theta}+\frac{1-v\cos\theta}{1+v\cos\theta}+4\frac{m_0^2}{E^2}\frac{1}{1-v^2\cos^2\theta}-4\frac{m_0^4}{E^4}\frac{1}{(1-v^2\cos^2\theta)^2}\right). \tag{16}$$

利用 $m_0^2/E^2=1-v^2$ 这结果也能被改写成

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega_1}=\frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{m_0^2}\frac{m_0^2}{E^2}\frac{1}{v}\frac{1+2v^2-2v^4-2v^2(1-v^2)\cos^2\theta-v^4\cos^4\theta}{(1-v^2\cos^2\theta)^2} \tag{17}$$

基本任务是将此表达式对 $\mathrm{d}\cos\theta$ 进行积分获得对湮灭的总截面。结果是

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}&=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}\Omega_1\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega_1}\\&=\frac{\pi}{4}\frac{\alpha^2}{m_0^2}\frac{1-v^2}{v^2}\left[(3-v^4)\ln\frac{1+v}{1-v}-2v(2-v^2)\right].\end{aligned} \tag{18}$$

因为总截面在 Lorentz 变换(沿束流方向)下是不变的，(18)式应与练习 3.13 中在电子静止系中推得的结果一致。

$$\bar{\sigma}=\frac{\pi\alpha^2}{m_0|\boldsymbol{p}_L|^2(E_L+m_0)}\left[(E_L^2+4m_0E_L+m_0^2)\ln\frac{E_L+|\boldsymbol{p}_L|}{m_0}-(E_L+3m_0)|\boldsymbol{p}_L|\right], \tag{19}$$

其中下标 L 系指实验室系。为了用质心系速度 v 去表示出 E_L，我们把这两个量与 Mandelstan 不变量 s 联系起来。

$$\begin{aligned}s&=(p_{+L}+p_{-L})^2=(E_L+m_0,\boldsymbol{p}_L)^2\\&=E_L^2+2m_0E_L+m_0^2-\boldsymbol{p}_L^2=2m_0(E_L+m_0)\end{aligned} \tag{20}$$

和

$$s=(p_++p_-)^2=(E+E,\boldsymbol{0})^2=4E^2. \tag{21}$$

速度为

$$v=\frac{|\boldsymbol{p}|}{E}=\sqrt{\frac{s-4m_0^2}{s}},\quad \text{于是}\quad s=\frac{4m_0^2}{1-v^2}. \tag{22}$$

这导致

$$E_L=\frac{s}{2m_0}-m_0=m_0\frac{1+v^2}{1-v^2},\ |\boldsymbol{p}_L|=m_0\frac{2v}{1-v^2}. \tag{23}$$

将(23)代入(19)，就确认了(18)的结果。

最后我们回到(17)式，注意截面的极端相对论极限 $v\to1$ 的结果。

$$\left(\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega_1}\right)_{\mathrm{ur}}\simeq\frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{E^2}\frac{1-\cos^4\theta}{\sin^4\theta}=\frac{\alpha^2}{s}\frac{1+\cos\theta}{\sin^2\theta}. \tag{24}$$

该结果已得到多个电子-正电子储存环加速器上实验的检验。作为一个例子，图 3.49 给出了 PETRA[①]对碰机上用 JADE 探测器所获得的实验数据。在实验精度范围内，QED 的预言是完全被确认的。

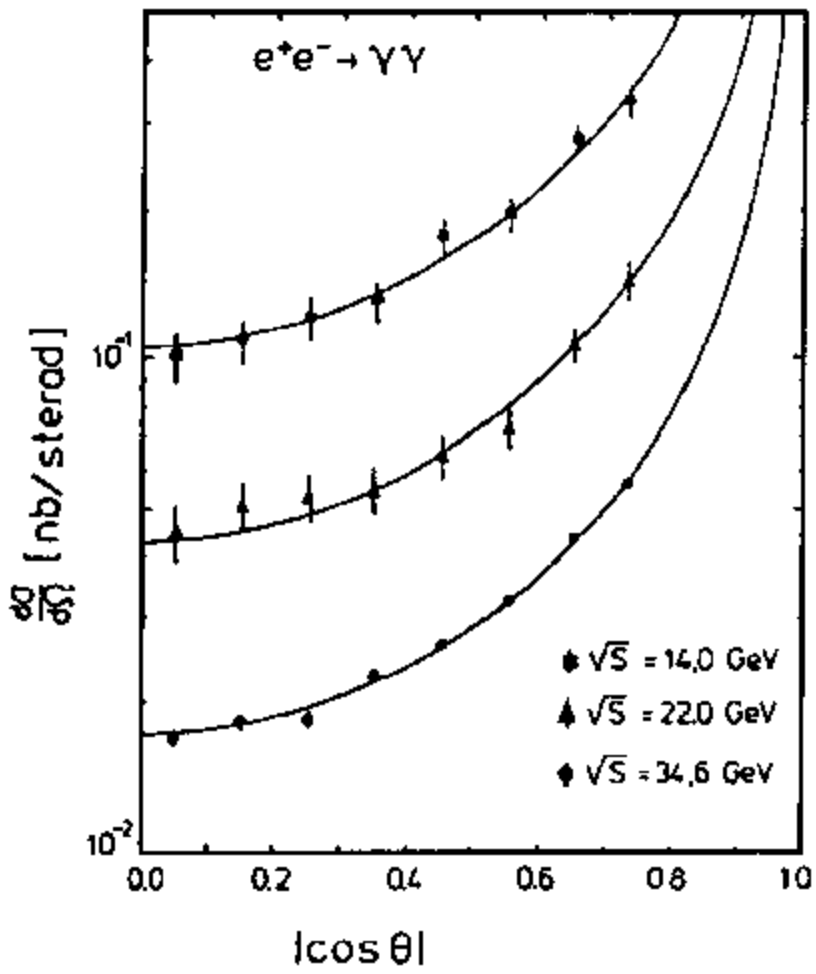


图 3.49　在不同质心能量$\sqrt{s}$时，$e^- + e^- \to \gamma + \gamma$ 的微分截面实验数据与 QED 预言(24)符合很好

练　习

3.15　双光子引起的对产生

问题：导出由两光子对撞 $\gamma+\gamma \to e^+ + e^-$ 产生电子-正电子对的总的非极化截面。用产生的粒子在质心系中速度来表达结果。提示：利用练习 3.13 中对湮灭截面的结果。

解答：根据图 3.45 对产生的微分截面为

$$d\sigma_{pair} = \frac{\alpha^2}{2}\frac{4\pi}{2\omega_1}\frac{4\pi}{2\omega_2}|M_{fi}^{pair}|^2(2\pi)^4\delta^4(p_+ + p_- - k_1 - k_2)\frac{m_0 d^3 p_+}{(2\pi)^3 E_+}\frac{m_0 d^3 p_-}{(2\pi)^3 E_-}, \tag{1}$$

式中因子 1/2 来自于光子通量因子 $1/|v_1 - v_2|$。在任意坐标系中，两共线对撞光子的相对速度为

① W. Bartel et al. (JADE Collaboration): Z. Physik **C19**, 197(1983).

2。不变幅为

$$M_{fi}^{\text{pair}}=\bar{u}(p_-,s_-)\left[\not{\varepsilon}_2\frac{1}{-\not{p}_+-\not{k}_1-m_0}\not{\varepsilon}_1+\not{\varepsilon}_1\frac{1}{-\not{p}_+-\not{k}_2-m_0}\not{\varepsilon}_2\right]v(p_+,s_+). \tag{2}$$

相应的对湮灭 $e^++e^-\to\gamma+\gamma$ 的截面表达式已在 3.8 节中导出：

$$\mathrm{d}\sigma_{\text{anni}}=\frac{\alpha^2}{|v_{\text{rel}}|}\frac{m_0}{E_+}\frac{m_0}{E_-}|M_{fi}^{\text{anni}}|^2(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2-p_++p_-)\frac{4\pi\mathrm{d}^3k_1}{(2\pi)^3 2\omega_1}\frac{4\pi\mathrm{d}^3k_2}{(2\pi)^3 2\omega_1}, \tag{3}$$

其中

$$M_{fi}^{\text{anni}}=\bar{v}(p_+,s_+)\left[\not{\varepsilon}_2\frac{1}{\not{p}_--\not{k}_1-m_0}\not{\varepsilon}_1+\not{\varepsilon}_1\frac{1}{\not{p}_--\not{k}_2-m_0}\not{\varepsilon}_2\right]u(p_-,s_-). \tag{4}$$

根据交叉对称原则，若动量按照 3.8 节中表作替换，即 $k_1\to-k_1,k_2\to-k_2,p_-\to-p_+,p_+\to-p_-$ 不变幅间能互相转换。事实上(2)和(4)在大小上相等。

$$|M_{fi}^{\text{pair}}|=|M_{fi}^{\text{anni}}|. \tag{5}$$

通过计算 $(M_{fi}^{\text{pair}})^*=(M_{fi}^{\text{pair}})^+$ 这是容易被验证的。利用 $\gamma^0\not{a}^\dagger\gamma^0=\not{a}$，$-p_++k_2=p_--k_1$，$-p_++k_1=p_--k_2$ 可知这个量与 M_{fi}^{anni} 一致。从而除位相体积和通量因子外，微分截面(1)和(3)相等。

为获得对产生的总截面，我们将(1)先对 d^3p 然后对 $\mathrm{d}E_+$ 积分。用熟知的恒等式

$$\frac{\mathrm{d}^3p_-}{2E_-}=\int\mathrm{d}^4p_-\,\delta(p_-^2-m_0^2)\Theta(p_{-0}) \tag{6}$$

我们得到

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{pair}}&=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}^3p_+\,\mathrm{d}^3p_-\,\delta^4(p_++p_--k_1-k_2)F\\&=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}^3p_+\,2E_-\,\delta[(k_1+k_2-p_+)^2-m_0^2]F\end{aligned} \tag{7}$$

这是在电子动量 $p_-=k_1+k_2-p_+$ 下推得的。$F\equiv F(p_+,p_-;k_1,k_2)$ 显然是对(1)式和(3)式公用因子的缩写记号。类似地，总的湮灭截面的表达式为

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{anni}}&=\frac{1}{2}\frac{1}{|v_{\text{rel}}|}\int\mathrm{d}^3k_1\mathrm{d}^3k_2\delta[k_1+k_2-p_+-p_-]F\\&=\frac{1}{2}\frac{1}{|v_{\text{rel}}|}\int\mathrm{d}^3k_1 2\omega_2\delta((p_++p_--k_1)^2)F\end{aligned} \tag{8}$$

是在 $k_2=p_++p_--k_1$ 下获得的。(7)中因子的 1/2 引入是考虑到终态中两个全同粒子的存在(参见 3.8 节末的讨论)。

在质心系中，结果(7)和(8)是最容易作比较的。因为总截面是 Lorentz 不变的，故这种选择是不失一般性的。在这坐标系中，我们有 $p_+=(E,\boldsymbol{p})$，$p_-=(E,-\boldsymbol{p})$ 和 $k_1=(\omega,\boldsymbol{k})$，$k_2=(\omega,-\boldsymbol{k})$。其中能量守恒要求 $\omega=E$。(7)中 δ 函数变成

$$\begin{aligned}\delta((k_1+k_2-p_+)^2-m_0^2)&=\delta((2\omega-E_+)^2-\boldsymbol{p}_+^2-m_0^2)\\&=\delta(4\omega(\omega-E_+))\\&=\frac{1}{4\omega}\delta(\omega-E_+)\end{aligned} \tag{9}$$

导致

$$\sigma_{\text{pair}} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\Omega_+ \, 2E_- \frac{1}{4\omega}|\boldsymbol{p}_+| E_+ F$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}E|\boldsymbol{p}|\int \mathrm{d}\Omega_+ F. \tag{10}$$

同样道理导出双光子湮灭的总截面

$$\sigma_{\text{anni}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{|\boldsymbol{v}_{\text{rel}}|}\int \mathrm{d}\Omega_1 2\omega_2 \,\frac{1}{4E}\omega_1^2 F$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{|\boldsymbol{v}_{\text{rel}}|}\,\frac{1}{2}E^2\int \mathrm{d}\Omega_1 F. \tag{11}$$

在(10)和(11)中的角度积分相同，因为两积分均是遍布了 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 的相对角 θ，参见图 3.50。代入 $|\boldsymbol{v}_{\text{rel}}| = |\boldsymbol{v}_+ - \boldsymbol{v}_-| = 2v$，其中 $v = |\boldsymbol{p}|/E$，将(10)式与(11)式作比较导出一个简单关系

$$\sigma_{\text{anni}} = \frac{1}{2v^2}\sigma_{\text{pair}}. \tag{12}$$

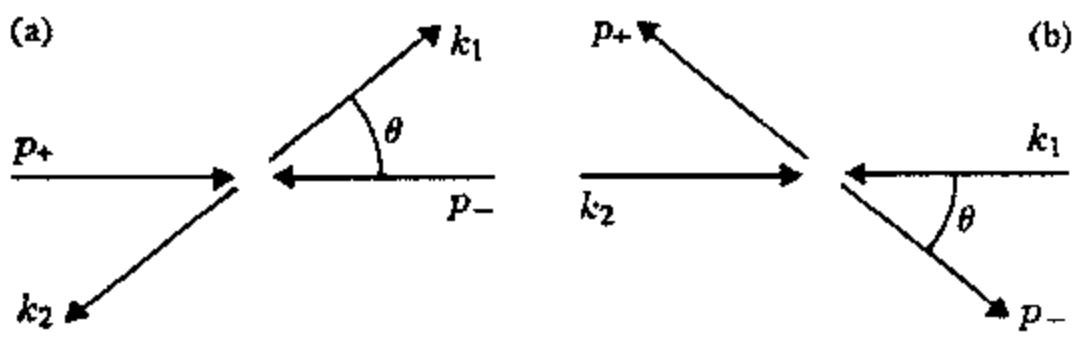


图 3.50　质心系中双光子对产生的动量矢量(a)和双光子引起的对产生的动量矢量(b)

所以我们能利用练习 3.14 中(18)式的对湮灭的总非极化截面而得到对产生的截面。

$$\bar{\sigma}_{\text{pair}} = \frac{\pi}{2}\,\frac{\alpha^2}{m_0^2}(1-v^2)\left[(3-v^4)\ln\frac{1+v}{1-v} - 2v(2-v^2)\right]. \tag{13}$$

这结果被称之为 Breit-Wheeler 公式[①]。非相对论极限($v \ll 1$)是

$$\bar{\sigma}_{\text{pair}}^{\text{nr}} \simeq \pi\,\frac{\alpha^2}{m_0^2}v \tag{14}$$

和极端相对论极限 $v = \sqrt{(E^2 - m_0^2)/E^2} \to 1$ 变成

$$\bar{\sigma}_{\text{pair}}^{\text{ur}} \simeq \pi\,\frac{\alpha^2}{m_0^2}\left(\frac{m_0}{E}\right)^2\left(\ln\frac{2E}{m_0} - 1\right). \tag{15}$$

从而对产生截面在阈限处消失(因为位相体积为零)，然后上升到一个最大值(在 $v \approx 0.701$)，而在高能时按照(15)式又下降。

评注：截面(13)相当地大，量级达到“经典电子半径”，像在 Coulomb 散射情况中那样。然面，

① G. Breit and J. A. Wheeler; Phys. Rev. **46**, 1087(1934).

由两个实光子引起的对产生还未能在实验上作观测，因为难以提供高能光子的两个对撞束流。不过，图 3.45 中的图形过程能在荷电粒子的对撞中得以证实。能将图 3.51a 的图形解释为描述了两虚光子对撞而产生电子-正电子对[①]。注意这过程与图 3.51b 相抗衡，后者那里，轫致辐射的单虚光子能分出 e^+e^- 对，因为其动量是离质量壳的。

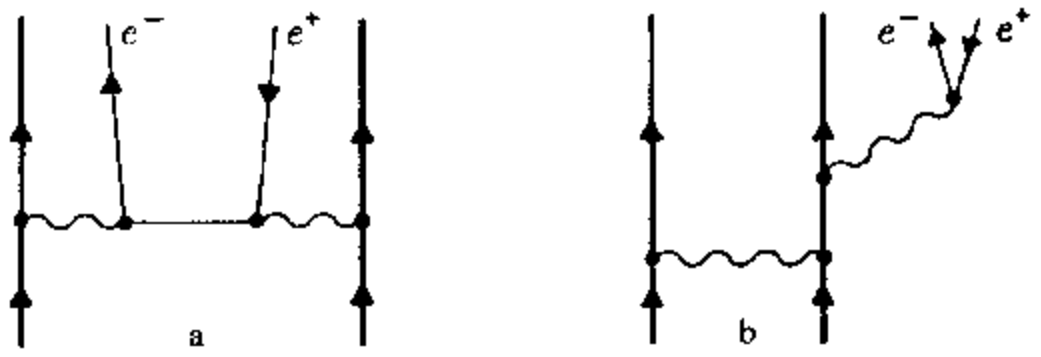


图 3.51 a,b 荷电粒子(粗线)碰撞引起电子-正电子对产生的最低阶 Feynman 图
(a) 二个虚光子碰撞；(b) 轫致辐射的一个虚光子转换成电子-正电子对

练　习

3.16 在原子核场中的对产生

问题：计算一个入射光子在电荷为 $-Ze$ 的一个重原子核的场中产生电子-正电子对的截面。

提示：利用联系对产生和轫致辐射的交叉对称性便能使计算大大简化。作一个简单代换后能利用 3.6 节和例 3.11 中的结果。

解答：最低阶对产生能用图 3.52 来表示。它们与轫致辐射(图 3.32，3.6 节)的差别只在对外线解释上的不同(入射光子↔出射光子，入射电子↔出射正电子)。

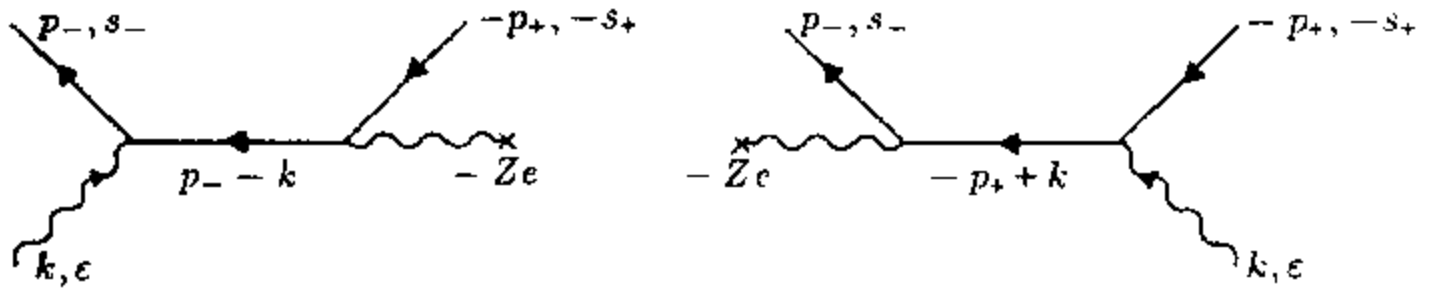


图 3.52 核 Coulomb 场中一个光子引起对产生的 Feynman 图

坐标空间中二阶 S 矩阵元为

---

① 见 V. M. Budnev, I. F. Ginzburg, G. V. Melchin, V. G. Serbo, Phys. Rep. **15**, 181(1975); C. Bottcher, M. R. Strayer: Phys. Rev. **D39**, 1330(1989).

$$S_{fi} = -e^2\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y \sqrt{\frac{m_0^2}{E_+E_-V^2}}\sqrt{\frac{4\pi}{2\omega V}}\bar{u}(p_-,s_-)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_-\cdot x}$$
$$\times\left[(-\mathrm{i}\not{\varepsilon})(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x})\mathrm{i}S_F(x-y)(-\mathrm{i}\gamma^0)A^{\mathrm{coul}}(y)\right.$$
$$\left.+(-\mathrm{i}\gamma^0)A_0^{\mathrm{coul}}(x)\mathrm{i}S_F(x-y)(-\mathrm{i}\not{\varepsilon})(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot y}+\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k\cdot y})\right]v(p_+,s_-)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_+\cdot y}. \tag{1}$$

利用原子核的静 Coulomb 势

$$A_0^{\mathrm{coul}}(x)=\frac{-Ze}{|\boldsymbol{x}|}=-4\pi Ze\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}}{|\boldsymbol{q}|^2} \tag{2}$$

并进行 Fourier 积分，我们得到 S-矩阵元

$$S_{fi}=Ze^3 2\pi\delta(E_-+E_+-\omega)\sqrt{\frac{4\pi}{2\omega V}}\sqrt{\frac{m_0^2}{E_+E_-V^2}}\frac{4\pi}{|\boldsymbol{q}|^2}$$
$$\times\bar{u}(p_-,s_-)\left[(-\mathrm{i}\not{\varepsilon})\frac{\mathrm{i}}{\not{p}_--\not{k}-m_0}(-\mathrm{i}\gamma^0)\right.$$
$$\left.+(-\mathrm{i}\gamma^0)\frac{\mathrm{i}}{-\not{p}_++\not{k}-m_0}(-\mathrm{i}\not{\varepsilon})\right]v(p_+,s_+). \tag{3}$$

这里 $p_+=(E_+,\boldsymbol{p}_+)$，$p_-=(E_-,\boldsymbol{p}_-)$和 $k=(\omega,\boldsymbol{k})$分别表示正电子、电子和光子的四动量。

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}_++\boldsymbol{p}_--\boldsymbol{k} \tag{4}$$

是转移给原子核的动量。

除掉一个正负号差别，(3)和(3.192)是等同的，只要我们作代换

$$p_i,s_i \to -p_+,s_+,$$
$$p_f,s_f \to p_-,s_-,$$
$$k,\lambda \to -k,\lambda, \tag{5}$$

以及用正电子旋量 $v(p_+,s_+)$取代电子旋量 $u(p_i,s_i)$。所有进一步的计算能仿效韧致辐射情况。看一下截面还是稍有差别的。我们必须除以入射光子通量 $c/V\equiv 1/V$，而不是 $|\boldsymbol{v}_i|/V$。此外，位相空间也变了，因为发射的是正电子而不是一个光子。从而我们得到截面

$$\mathrm{d}\sigma=\int\frac{|S_{fi}|^2}{T\dfrac{1}{V}}V\frac{\mathrm{d}^3p_+}{(2\pi)^3}V\frac{\mathrm{d}^3p_-}{(2\pi)^3}. \tag{6}$$

对电子能量 E_-进行积分便得到截面，它是关于正电子能量和立体角 $\mathrm{d}\Omega_+$和 $\mathrm{d}\Omega_-$的五次微分。对光子极化 λ 求平均并对自旋方向 s_+和 s_-求和，我们得到非极化截面

$$\mathrm{d}\bar{\sigma}=\frac{Z^2\alpha^3}{(2\pi)^2}\frac{m_0^2}{\omega E_+E_-}4\frac{1}{|\boldsymbol{q}|^4}|\boldsymbol{p}_+|^2\mathrm{d}|\boldsymbol{p}_+|\mathrm{d}\Omega_+|\boldsymbol{p}_-|E_-\mathrm{d}\Omega_-$$
$$\times\Theta(\omega-E_+-m_0)F'(p_+,p_-;k). \tag{7}$$

这里

$$F'=\frac{1}{2}\sum_{\lambda}\sum_{s_+,s_-}\left|\bar{u}(p_-,s_-)\left[\not{\varepsilon}\frac{1}{\not{p}_--\not{k}-m_0}\gamma_0\right.\right.$$

$$+\gamma_0\frac{1}{-\not p_-+\not k-m_0}\not\varepsilon\Big]v(p_+,s_+)\Big|^2 \tag{8}$$

是引进的函数，它能被表示成含多达 8 个 γ 矩阵的迹的形式。我们不必导出其复杂的表达式，因为 $F'(p_+,p_-;k)$ 与例 3.11(韧致辐射)的(2)中所已知的函数 $F(p_i,p_f;k)$ 相联系，即

$$F'(p_+,p_-,k)=-F(-p_+,p_-;-k), \tag{9}$$

负号来自于对正电子自旋求和，因为

$$\sum_{s_+}v_\alpha(p_+,s_+)\bar v_\beta(p_+,s_+)=-\left(\frac{-\not p_++m_0}{2m_0}\right)_{\alpha\beta}. \tag{10}$$

最终结果又能表示成动量矢量间夹角的一个函数形式。令 $\theta_+(\theta_-)$ 为 $\boldsymbol p_+(\boldsymbol p_-)$ 与 $\boldsymbol k$ 间夹角，ϕ 为两平面$(\boldsymbol p_+,\boldsymbol k)$和$(\boldsymbol p_-,\boldsymbol k)$间夹角，然后我们用代换规则(5)导出关系

$$\theta_i\to\theta_-,\theta_f\to\pi-\theta_-,\phi\to\phi-\pi, \tag{11}$$

其中角度已在例 3.11 中定义。从而由例 3.11 中(26)式(Bethe-Heitler 公式)便能得到对产生截面的明显表达式

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\bar\sigma=&\frac{Z^2\alpha^3}{(2\pi)^2}\frac{|\boldsymbol p_+||\boldsymbol p_-|}{|\boldsymbol q|^4}\frac{\mathrm{d}E_+\,\mathrm{d}\Omega_+\,\mathrm{d}\Omega_-}{\omega_3}\Theta(\omega-E_+-m_0)\\
&\times\Big[-\frac{\boldsymbol p_-^2\sin^2\theta_-}{(E_--|\boldsymbol p_-|\cos\theta_-)^2}(4E_+^2-\boldsymbol q^2)-\frac{\boldsymbol p_+^2\sin^2\theta_+}{(E_+-|\boldsymbol p_+|\cos\theta_+)^2}(4E_-^2-\boldsymbol q^2)\\
&+2\omega^2\frac{\boldsymbol p_+^2\sin^2\theta_+\,\boldsymbol p_-^2\sin^2\theta_-}{(E_+-|\boldsymbol p_+|\cos\theta_+)(E_--|\boldsymbol p_-|\cos\theta_-)}\\
&+2\frac{|\boldsymbol p_+||\boldsymbol p_-|\sin\theta_+\sin\theta_-\cos\phi}{(E_+-|\boldsymbol p_+|\cos\theta_+)(E_--|\boldsymbol p_-|\cos\theta_-)}(2E_+^2+2E_-^2-\boldsymbol q^2)\Big].
\end{aligned} \tag{12}$$

为得到正确的符号，注意代换 $k\to-k$ 意味着 $\omega\to-\omega$，当然也就是 $|k|\to|-k|=+|k|$。所以对(12)式中分母应该作如下处理：$p_f\cdot k=\omega E_f-|k||p_f|\cos\theta_f=\omega(E_f-|p_f|\cos\theta_f)\to-\omega E_--|k||p_-|\cos(\pi-\theta_-)=-\omega(E_--|p_-|\cos\theta_-)=-p_-\cdot k$.

应该提醒的是，基于最低阶图(平面波玻恩近似)的(12)式表示的结果只在一定范围内适用。对大的原子核电荷数 Z 或低速 v_+,v_- 时，产生的荷电粒子与原子核 Coulomb 场间的相互作用变得重要了。这可通过用 Coulomb 扭曲波来取代平面波而考虑这一点。然而，这再也不能作完全的解析计算了。玻恩近似成立的判据是，

$$\frac{Ze^2}{\hbar\,|\boldsymbol v_\pm|}\ll 1.$$

对重核该条件不再满足而截面要作变化。尤其是(12)式对交换 $e^+\leftrightarrow e^-$ 的完全对称性将丢失，因为电子(正电子)受到原子核 Coulomb 势的吸引(排斥)。

附注：尽管微分截面(12)表面上复杂，然而对电子和正电子的立体角 $\mathrm{d}\Omega_-,\mathrm{d}\Omega_+$ 是能被解析积分出来的。因为这个计算长而又缺乏启发性，我们就仅引出 Bethe 和 Heitler 在他们原著中已推导的结果

$$\frac{\mathrm{d}\bar\sigma}{\mathrm{d}E_+}=\frac{Z^2\alpha^3}{m_0^2}\frac{|\boldsymbol p_+||\boldsymbol p_-|}{\omega^3}\Big\{-\frac{4}{3}-2E_+E_-\frac{\boldsymbol p_+^2+\boldsymbol p_-^2}{\boldsymbol p_+^2\,\boldsymbol p_-^2}+\frac{m_0E_+\eta_-}{\boldsymbol p_-^2}$$

$$+\frac{m_0E_-\eta_+}{p_+^2}-\eta_+\eta_-+L\left[\frac{\omega^2}{|p_+|^3|p_-|^3}(E_+^2E_-^2+p_+^2p_-^2)\right.$$
$$-\frac{8}{3}\frac{E_+E_-}{|p_+||p_-|}-\frac{m_0^2\omega}{2|p_+||p_-|}\left(\frac{E_+E_--p_-^2}{p_-^2m_0}\eta_-\right.$$
$$\left.\left.+\frac{E_+E_--p_+^2}{p_+^2m_0}\eta_++\frac{2\omega E_+E_-}{p_+^2p_-^2}\right)\right]\Bigg\}, \tag{13}$$

式中引进了缩写

$$\eta_\pm=2\frac{m_0}{|p_\pm|}\ln\frac{E_\pm+|p_\pm|}{m_0},$$
$$L=2\ln\frac{E_+E_-+|p_+||p_-|+m_0^2}{m_0\omega} \tag{14}$$

图 3.53 中给出了产生的正电子的能量分布而作为动能 E_+-m_0 的函数，动能归一化到能达到的能量 $\omega-2m_0$。截面 $d\bar{\sigma}/dE_+$ 已乘上$(\omega-2m_0)$，从而曲线下方的面积就代表了总截面 $\bar{\sigma}$。后者被发现是随能量升高面缓慢上升的。

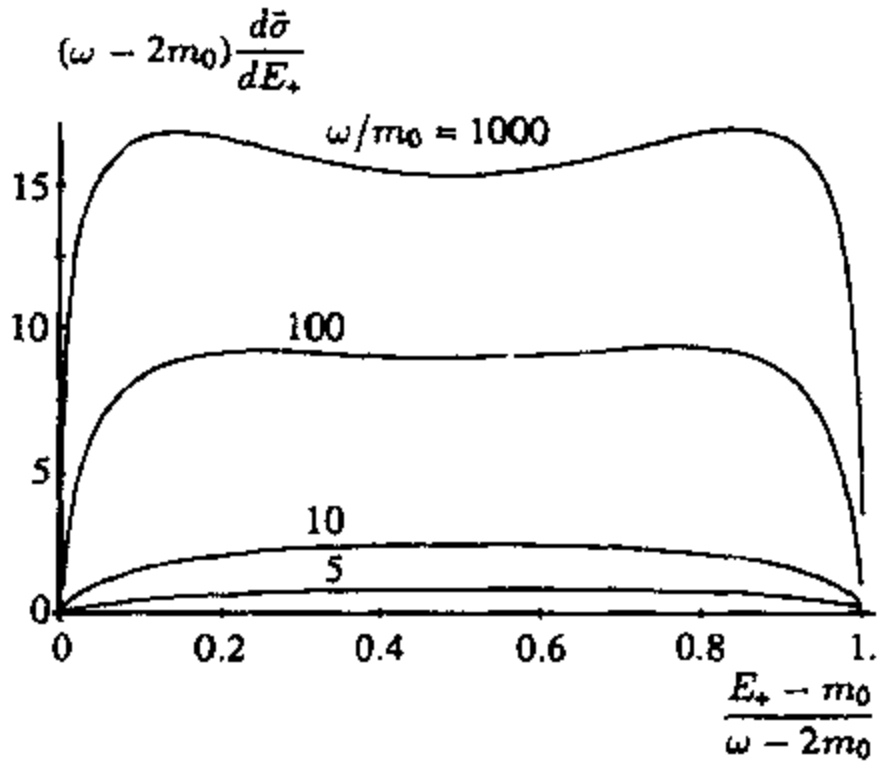


图 3.53　根据 Bethe-Heitler 公式(15)，由能量为 ω 的光子引起的对产生的微分截面

在极端相对论极限 $\omega\gg m_0$ 下，(13)得以简化，而且能将 dE_+ 解析地积分，这将得到一个对数上升的截面

$$\bar{\sigma}_{ur}\simeq\frac{Z^2\alpha^3}{m_0^2}\left(\frac{28}{9}\ln\frac{2\omega}{m_0}-\frac{218}{27}\right). \tag{15}$$

若靶是由中性原子构成，则电子屏蔽将导致对产生截面的饱和；(15)式在高光子能量处的抬高是由在离原子核越来越远处对产生所引起的。电子屏蔽作用是压低这些贡献。

例　子

3.17 等效光子方法

整个这一章中，我们已对荷电粒子通过交换虚光子而相互作用的 QED 过程作了研究。然而，这一术语已有些不自然了，因为我们在这些计算中没有碰到真正的物理光子。尽管如此，我们却能找到一些条件。在这些条件下，虚光子的行为就能很好地被近似认为同实光子一样。在这些条件下，对撞的荷电粒子能被一束入射光子所取代，这束光子具有可计算出来的一定能量分布。作这个近似有两个目的：一是它能用来简化对各种过程的描述，二是它能帮助想像和定性理解高能散射是如何进行的。

一个很有趣的应用已在练习 3.15 的最后提到：通过在高能下对撞荷电粒子，可以研究光子-光子散射过程，尽管实验物理学家还没有获得强的实光子对撞束流。在这例子中，我们导出了等价光子方法，接着用它借助反应 $e^{+}+e^{-}\to e^{+}+e^{-}+\mu^{+}+\mu^{-}$ 来计算 μ 子对产生的截面。我们将发现，在高对撞能量区，该过程与 3.4 节中曾研究的对湮灭反应 $e^{+}+e^{-}\to\mu^{+}+\mu^{-}$ 相比，是占主导地位的。

等效光子谱的推导。首先，我们将研究单个虚光子交换的反应。具有初始动量 $p=(E,\boldsymbol{p})$ 的高能电子发射一个动量为 $k=p-p'$ 的虚光子后被散射到终态 $p'=(E',\boldsymbol{p}')$。这光子撞击靶引起反应而产生一个(或许复杂的)多粒子末态 X，参见图 3.54。该反应的详细情况对我们的研究是不重要的。例如，靶可以是一个重的原子核而终态是在 Coulomb 场中产生的电子-正电子对。

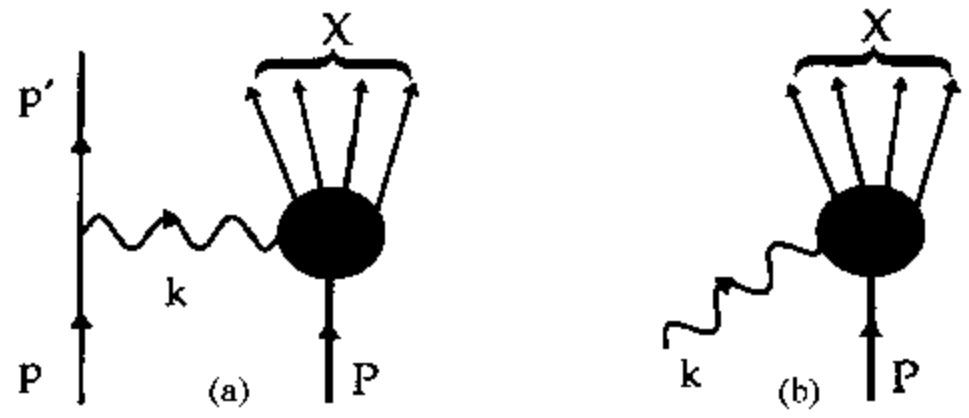


图 3.54a,b　(a)表示虚光子触发而引起的散射过程的 Feynman 图
(b)表示实光子触发而引进的散射过程的 Feynman 图

我们的目标是寻找图 3.54a 所示过程与 3.54b 所示由入射实光子触发的类似反应之间的关系。所以，让我们研究图 3.54a 所示 Feynman 图的非极化截面，它由下式给出

$$\mathrm{d}\bar{\sigma}=\frac{mM}{\sqrt{(p\cdot P)^2-m^2M^2}}\overline{|M_{fi}|^2}$$

$$\times (2\pi)^4\delta^4(P_X + p' - P - p)\frac{m\mathrm{d}^3p'}{(2\pi)^3E'}\prod_{n=1}^{N}\frac{m_n\mathrm{d}P'_n}{(2\pi)^3E'_n}, \tag{1}$$

式中靶被假设成一个质量为 M 的 Fermi 子，终态 X 中包含 N 个 Fermi 子(该假设仅影响归一化因子)，(1)中的不变矩阵元为

$$M_{fi} = j^{\mu}_{fi}(p', p)D_{F\mu\nu}(k)J^{\nu}_{fi}(P'_n, P)$$

$$= \frac{4\pi}{k^2}j^{\mu}_{fi}(p', p)J_{fi\mu}(P'_n, P). \tag{2}$$

这儿 $j_{fi}\mu = e\bar{\mu}\gamma^{\mu}\mu$ 是熟知的电子跃迁流和 J^{μ}_{fi} 是靶的跃迁流，靶或许具有可能细节还不太清楚的内部结构。为计算(1)，我们需要不变矩阵元(2)的平方和对自旋的平均，这已在 3.2 节中被写成形如

$$\overline{|M_{fi}|^2} = (4\pi)^2\frac{e^2}{(k^2)^2}L^{\mu\nu}H_{\mu\nu}. \tag{3}$$

这里 $L^{\mu\nu}$ 是我们在前面已多次遇到的轻子张量

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\mathrm{S_p}\left(\frac{\not{p}' + m}{2m}\gamma^{\mu}\frac{\not{p} + m}{2m}\gamma^{\nu}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{m^2}(p'^{\mu}p^{\nu} + p'^{\nu}p^{\mu} - g^{\mu\nu}(p' \cdot p - m^2)). \tag{4}$$

习惯上，我们称 $H_{\mu\nu}$ 为强子张量，尽管这种叫法有些误导，因为推导对反应中含非强子的情况仍成立。强子张量形式为

$$H^{\mu\nu} = \sum_{\mathrm{Spin}}J^{\mu *}_{fi}(P'_n, P)J^{\nu}_{fi}(P'_n, P). \tag{5}$$

通常对 J^{μ}_{fi} 的了解并不多。然而，我们能依靠隐含电磁流守恒的规范不变性原理。所以，强子张量满足四维横向条件

$$k_{\mu}H^{\mu\nu} = H^{\mu\nu}k_{\nu} = 0. \tag{6}$$

这有助于对轻子张量的表达式(4)作点简化。利用 $p' = p - k$ 和 $k^2 = (p - p')^2 = 2m^2 - 2p \cdot p'$ 就导得

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\frac{1}{m^2}\left(2p^{\mu}p^{\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}k^2\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{m^2}(k^{\mu}p^{\nu} + k^{\nu}p^{\mu}), \tag{7}$$

其中第二项由于(6)式而能被丢掉。对电子的末态积分，散射截面成为

$$\mathrm{d}\bar{\sigma} = \int\frac{\mathrm{d}^3p'}{|\boldsymbol{p}|E'}\frac{\alpha}{2\pi^2}\left(\frac{1}{k^2}\right)^2\left(2p^{\mu}p^{\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}k^2\right)H_{\mu\nu}2\pi\mathrm{d}\Gamma, \tag{8}$$

其中已假设了靶静止，$P = (M, \boldsymbol{o})$，这导致通量因子 $m/|\boldsymbol{p}|$。记号 $\mathrm{d}\Gamma$ 表示靶末态的位相体积元

$$\mathrm{d}\Gamma = (2\pi)^4\delta^4(P_X - P - k)\prod_{n=1}^{N}\frac{m_n\mathrm{d}P'_n}{(2\pi)^3E'_n}. \tag{9}$$

现在让我们研究与此类似的图 3.54b 所示的光子所引起的过程的截面

$$\mathrm{d}\bar{\sigma}_{\gamma} = \frac{2m}{4\sqrt{(k \cdot P)}}\frac{4\pi}{\overline{|\epsilon \cdot J_{fi}|}}(2\pi)^4\delta^4(P_X - P - k)\prod_{n=1}^{N}\frac{m_n\mathrm{d}P'_N}{(2\pi)^3E'_n}$$

$$= \frac{1}{2\omega}4\pi\sum_{\text{Spin}}\frac{1}{2}\sum_{\lambda}\varepsilon_{\mu}^{*}(\boldsymbol{k},\lambda)\varepsilon_{\nu}(\boldsymbol{k},\lambda)J_{\mathrm{fi}}^{\mu *}J_{\mathrm{fi}}^{\nu}\mathrm{d}\Gamma$$

$$= \frac{1}{2\omega}2\pi(-H_{\mu}^{0\mu})\mathrm{d}\Gamma\ , \tag{10}$$

其中我们已用到光子极化矢的完备关系 $\sum_{\lambda}\varepsilon_{\mu}^{*}\varepsilon_{\nu}=-g_{\mu\nu}$。

表达式(10)含对强子张量的求迹。指标 0 意指光子为实的，即它满足质量壳条件 $k^2=\omega^2-\boldsymbol{k}^2=0$。相反，在(5)中光子的频率 ω 和动量 $\boldsymbol{k}$ 间没有固定关系。我们只知道虚光子具有类空动量 $k^2<0$。动量平方 k^2 有时被称作为光子虚度。除了这点上的差别，张量 $H_{\mu\nu}$和 $H_{\mu\nu}^{0}$有完全一样的结构。

现在让我们用光子截面(10)式去表示电子截面(8)[①]。为此，选择能使对应物理光子的横向自由度能最方便地分离出来的恰当规范是有益的。这一点在通过条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ 所定义的库规范中能做到。这种规范的选择也影响了光子传播子，这是我们将在 4.2 节作详细讨论的话题。协变 Feynman 规范传播子

$$D_{\mathrm{F}\mu\nu}=-\frac{4\pi g_{\mu\nu}}{k^2} \tag{11}$$

在此时将被 Coulomb 规范中传播子所取代，它具有分量

$$D_{00}^{\mathrm{C}}=\frac{4\pi}{\boldsymbol{k}^2},D_{ij}^{\mathrm{C}}=\frac{4\pi}{\boldsymbol{k}^2}\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{\boldsymbol{k}^2}\right),D_{0i}^{\mathrm{C}}=D_{i0}^{\mathrm{C}}=0, \tag{12}$$

式中拉丁指标像通常一样取遍空间坐标 $i=1,2,3$。注意：我们对重复的空间指标实行求和约定，但是这种情况下，没有必要区分协变和逆变指标。

在 Coulomb 规范下，光子产生截面(10)变成下列形式

$$\mathrm{d}\bar{\sigma}_{\gamma}=\frac{1}{2\omega}2\pi H_{ii}^{0\perp}\mathrm{d}\Gamma. \tag{13}$$

符号⊥表示着 Coulomb 规范下强子张量是横向的(三维)。

电子截面(8)式变成

$$\mathrm{d}\bar{\sigma}=\int\frac{\mathrm{d}^3p'}{|\boldsymbol{p}|E'}\frac{\alpha}{2\pi^2}\left(2p^{\mu}p^{\nu}+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}k^2\right)\frac{1}{4\pi}D_{\mu\alpha}^{\mathrm{C}}\frac{1}{4\pi}D_{\nu\beta}^{\mathrm{C}}H^{\alpha\beta}2\pi\mathrm{d}\Gamma. \tag{14}$$

现在，我们引入一个关键的近似而将“标量”传播子 D_{00}^{C}的贡献丢掉。做这一步原因在于我们注意到它的贡献不能与横向光子的作用相联系。在这种近似下，我们获得截面

$$\mathrm{d}\bar{\sigma}=\int\frac{\mathrm{d}^3p'}{|\boldsymbol{p}|E'}\frac{\alpha}{2\pi^2}\left(\frac{1}{k^2}\right)^2\left(2p_ip_j-\frac{1}{2}\delta_{ij}k^2\right)H_{ij}^{\perp}2\pi\mathrm{d}\Gamma. \tag{15}$$

横向强子张量的获得是通过应用来自于(12)式光子传播子的两个横向投影算符

$$H_{ij}^{\perp}=\left(\delta_{ik}-\frac{k_ik_k}{\boldsymbol{k}^2}\right)\left(\delta_{jl}-\frac{k_jk_l}{\boldsymbol{k}^2}\right)H_{kl}. \tag{16}$$

① S. J. Brodsky, T. Kinoshita, H. Terazawa: Phys. Rev. **D4**, 1532(1971).

(15)式的被积函数含有一缩并，表面上看它比(13)式中简单的张量迹要复杂。然而，仔细考查表明额外项 $p_i p_j H_{ij}^{\perp}$，在我们对末态电子动量 $\boldsymbol{p}'$ 的方位角积分后，事实上也被化成 $H_{ii}^{\perp}$。在练习3.18中，我们将证明如下关系式

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi p_i p_j H_{ij}^{\perp} \simeq \frac{E^2 E'^2}{2\boldsymbol{k}^2} \sin^2\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi H_{ii}^{\perp}. \tag{17}$$

这里 θ 是 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{p}'$ 间夹角，即电子的散射角。关系式(17)式只适用于向前散射情况(小散射角)，并且下面的结果都局限于这一情况。进一步我们将做极端相对论近似 $E \gg m$，$|\boldsymbol{p}| \approx E$。从而在每一允许的情况下将电子质量略去。

利用(17)式，电子散射截面变成

$$\mathrm{d}\bar{\sigma} = \frac{\alpha}{2\pi^2} \int \frac{\mathrm{d}^3 p'}{EE'} \left(\frac{1}{\boldsymbol{k}^2}\right)^2 \left(-\frac{\boldsymbol{k}^2}{2} + \frac{E^2 E'^2}{\boldsymbol{k}^2} \sin^2\theta\right) H_{ii}^{\perp} 2\pi \mathrm{d}\Gamma. \tag{18}$$

在最后一步近似中，我们取

$$H_{ii}^{\perp} \simeq H_{ii}^{\perp 0}, \tag{19}$$

即，我们采用了光子动量 $\boldsymbol{k}^2 = 0$，从而忽略了这样一个事实，跃迁流 $H_{ii}^{\perp}$ 严格地说必须对质壳外的光子导出。在这一条件下，光子截面(13)就作为一个因子被包含在(18)式中的积分之中：

$$\mathrm{d}\bar{\sigma} = \frac{\alpha}{2\pi^2} \int \frac{\mathrm{d}^3 p'}{EE'} \left(\frac{1}{\boldsymbol{k}^2}\right)^2 \left(-\frac{\boldsymbol{k}^2}{2} + \frac{E^2 E'^2}{\boldsymbol{k}^2} \sin^2\theta\right) 2\omega \mathrm{d}\bar{\sigma}_\gamma. \tag{20}$$

对末态电子动量的积分能被改写成下列形式

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}^3 p &= \int_0^{|\boldsymbol{p}|} \mathrm{d}|\boldsymbol{p}'| |\boldsymbol{p}'|^2 \int_{-1}^{+1} \mathrm{d}\cos\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \simeq 2\pi \int_0^E \mathrm{d}E' E'^2 \int_{-1}^{+1} \mathrm{d}\cos\theta \\ &\simeq 2\pi \int_0^E \mathrm{d}E' E'^2 \frac{1}{2EE'} \int_{k_-^2}^{k_+^2} \mathrm{d}\boldsymbol{k}^2, \end{aligned} \tag{21}$$

其中我们已用了

$$\boldsymbol{k}^2 = (p - p')^2 = 2m^2 - 2p \cdot p' = 2m^2 - 2EE' + 2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{p}'|\cos\theta. \tag{22}$$

在极端相对论极限下，最大的动量转移平方($\theta = \pi$)为

$$\boldsymbol{k}_+^2 = 2m^2 - 2EE' - 2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{p}'| \simeq -4EE'. \tag{23}$$

在同样近似下，最小的动量转移平方($\theta = 0$)将为0。由于光子传播子有极点，这将引起积分的发散。从而我们必须倍加小心和考虑有限电子质量。将 Taylor 展开 $|\boldsymbol{p}| = \sqrt{E^2 - m^2} \simeq E(1 - m^2/(2E^2))$ 代入(22)式得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{k}^2 &= 2m^2 - 2EE' + 2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{p}'|\cos\theta \\ &\simeq 2m^2 - 2EE' + 2EE'\left(1 - \frac{m^2}{2E^2}\right)\left(1 - \frac{m^2}{2E'^2}\right)\cos\theta \\ &\simeq 2m^2 - 2EE'(1 - \cos\theta) - m^2 \frac{E^2 + E'^2}{EE'} \cos\theta. \end{aligned} \tag{24}$$

考虑向前散射 $\theta = 0$，这导出最小的动量转移平方

$$k_-^2 \simeq -\, m^2 \frac{\omega^2}{EE'}, \tag{25}$$

其标度由电子质量方来设定。所以，积分贡献主要来自于接近质壳的小虚度 $k^2 \approx k_-{}^2 = O(m^2)$ 光子。这些光子绝大多数来自于外缘上的碰撞。方程(24)允许我们估计出来自角范围为

$$\theta \sim \frac{m\omega}{EE'} \ll 1. \tag{26}$$

对散射截面的贡献。

利用(21)式，散射截面(20)能被改写如下：

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\bar{\sigma} &= \frac{\alpha}{\pi}\int_0^E \mathrm{d}E'\,E'^2\,\frac{2\omega}{2EE'}\int_{k_+^2}^{k_-^2}\mathrm{d}k^2\left(\frac{1}{k^2}\right)^2\left(-\frac{k^2}{2}+\frac{E^2E'^2}{k^2}\sin^2\theta\right)\mathrm{d}\bar{\sigma}_\gamma(\omega) \\ &= \int_0^E \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega}N(\omega)\mathrm{d}\bar{\sigma}_\gamma(\omega). \end{aligned} \tag{27}$$

积分是对光子的能量 ω 进行的，函数 $N(\omega)/\omega$ 能被解释成散射电子的发射的等效光子的能谱。这方程是等效光子方法的核心内容，也被称作为 Weizsäcker-Williams 近似。[①]原先，等效光子谱 $N'(\omega)$ 经典上是对快速运动电荷所产生电磁场的坡印廷矢量作 Fourier 变换得来的。上面，我们已从量子电动力学中所给的跃迁流导出了 $N(\omega)$ 结果为

$$\begin{aligned} N(\omega) &= \frac{\alpha}{\pi}\frac{\omega^2}{E^2}\int_{k_+^2}^{k_-^2}\mathrm{d}k^2\left(\frac{1}{k^2}\right)^2\left(-\frac{k^2}{2}+\frac{E^2E'^2}{k^2}\sin^2\theta\right) \\ &= \frac{\alpha}{\pi}\frac{\omega^2}{E^2}\int_{k_+^2}^{k_-^2}\mathrm{d}k^2\left(\frac{1}{k^2}\right)^2\left(-\frac{k^2}{2}+\frac{-m^2\omega^2-\frac{1}{4}k^4-k^2EE'}{\omega^2-k^2}\right), \end{aligned} \tag{28}$$

其中已用到关系式(22)。被积函数中第一项导出一个对数

$$\begin{aligned} \int_{k_+^2}^{k_-^2}\mathrm{d}k^2\left(\frac{1}{k^2}\right)^2\left(-\frac{k^2}{2}\right) &= -\frac{1}{2}\ln\frac{k_-^2}{k_+^2} = -\frac{1}{2}\ln\frac{-m^2\omega^2/EE'}{-4EE'} \\ &= \ln\frac{2EE'}{m\omega}. \end{aligned} \tag{29}$$

剩下来的积分也能完全求出。所导出的等效光子谱能写作为

$$\begin{aligned} N(\omega) = \frac{\alpha}{\pi}\frac{1}{E^2}\Big[&(E^2+E'^2)\ln\frac{2E}{m}+\frac{1}{2}(E-E')^2\ln\frac{E'}{E-E'} \\ &+\frac{1}{2}(E+E')^2\ln\frac{E'}{E+E'}-EE'\Big]. \end{aligned} \tag{30}$$

---

① 基本观点是 1924 年 Fermi 已在描述粒子在物质中的能量损失时而提出的 E. Fermi: Z. Physik **29**, 315(1924)。后来 C. F. V. Weizsäcker(Z. Physik **88**, 612(1934))和 E. J. Williams(Phys. Rev. **45**, 29(1934))用普遍的术语提出了这种方法。在 M. Vidović, M. Greiner, C. Best, G. Soff: Phys. Rev. **C47**. 2308(1993)中可以找到特别着重于相对论重离子碰撞的详细推导，有用的评述文章为 C. A. Bertulani, G. Baur: Phys. **Rep.** 161, 299(1988).

在极端相对论极限下，这结果是随能量 E 对数增加占优势。(30)式中剩下来的项仅依赖于 E'/E。即依赖于电子的能量丢失。

光子-光子对撞。若靶不是荷电粒子而来自于跃迁流的二次虚光子，等效光子方法仍能用。这里，我们将不重复与单虚光子情况十分类似的推导，而直接给出似乎合理的结果。与(27)式完全类似，根据图 3.55a 电子-电子散射产生末态 X 的截面为

$$\bar{\sigma}_{ee\to eeX} = \int_0^{E_1} \frac{d\omega_1}{\omega_1} N(\omega_1) \int_0^{E_2} \frac{d\omega_2}{\omega_2} N(\omega_2) \bar{\sigma}_{\gamma\gamma\to X}(\omega_1, \omega_2). \tag{31}$$

这里 $\bar{\sigma}_{\gamma\gamma\to X}$ 为两个能量为 ω_1 和 ω_2 的实光子相撞产生 X 的截面。

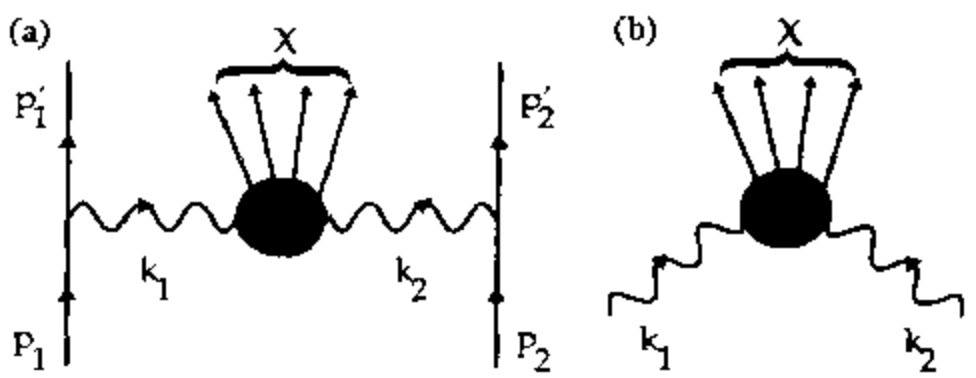


图 3.55a,b　包含二个虚光子(a)或二个实光子(b)散射的 Feynman 图

现在我们将应用(31)式通过过程 $e^+ + e^- \to e^+ + e^- + \mu^+ + \mu^-$ 来计算 μ 子对产生的截面。为此，我们需要双光子对产生 $\gamma+\gamma\to\mu^+ + \mu^-$ 的截面，这已在练习 3.15 中计算出。我们将利用那个练习中所推得的 Breit-Wheeler 公式(13)，并把它用 Mandelstam 变量 $s=(k_1+k_2)^2$，即产生的对的不变质量(不要与整个碰撞中 Mandelstam 变量 $s_0(p_1+p_2)^2$ 混淆)来表示。在练习 3.15 中使用的变量 v 是 μ 子在动量中心系中的速度，它通过下式与 $s=(2E_\mu)^2$ 相联系

$$v = \frac{|\boldsymbol{p}_\mu|}{E_\mu} = \sqrt{\frac{s/4 - M_\mu^2}{s/4}} = \sqrt{\frac{s-4M_\mu^2}{s}}. \tag{32}$$

根据变量 s，Breit-Wheeler 公式取形式

$$\bar{\sigma}_{\gamma\gamma\to\mu^+\mu^-} = \frac{4\pi\alpha^2}{s}\left[\left(2+\frac{8M_\mu^2}{s}-\frac{16M_\mu^4}{s^2}\right)\ln\frac{\sqrt{s}+\sqrt{s-4M_\mu^2}}{2M_\mu} - \sqrt{1-\frac{4M_\mu^2}{s}}\left(1+4\frac{M_\mu^2}{s}\right)\right]. \tag{33}$$

剩下来的任务是求(31)式中的双重积分。为此我们作一组变量变换

$$s = 4\omega_1\omega_2, \omega = \omega_1 + \omega_2, \tag{34}$$

实际上，(34)中所定义的变数 s 只有在散射电子的动量矢 $\boldsymbol{p}_1'$ 和 $\boldsymbol{p}'_2$ 反平行的条件下，才与 Mandelstam变量 s 一致。在电子的动量中心坐标系中 $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}_2=0$，我们有

$$\begin{aligned} s &= (k_1+k_2)^2 = (\omega_1+\omega_2)^2 - (\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_1' + \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_2')^2 \\ &= (\omega_1+\omega_2)^2 - (\boldsymbol{p}_1' + \boldsymbol{p}_2')^2 \simeq (\omega_1+\omega_2)^2 - (|\boldsymbol{p}_1'| - |\boldsymbol{p}_2'|)^2 \end{aligned}$$

$$\simeq (\omega_1+\omega_2)^2-(E_1'-E_2')^2=(\omega_1+\omega_2)^2-(E-\omega_1-E+\omega_2)^2$$
$$=(\omega_1+\omega_2)^2-(\omega_1-\omega_2)^2=4\omega_1\omega_2. \tag{35}$$

因为小散射角 θ_1,θ_2 的边缘碰撞起主导贡献，所以这一近似是十分合理的。

(34)式变换的雅可比行列式为

$$\frac{\partial(s,\omega)}{\partial(\omega_1,\omega_2)}=\begin{vmatrix}4\omega_2 & 4\omega_1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=4|\omega_2-\omega_1|=4\sqrt{\omega^2-s}\,. \tag{36}$$

利用这一结果，对产生截面(31)就取下列形式

$$\bar{\sigma}_{ee\to ee\mu\mu}=2\int_{4M_\mu^2}^{4E^2}\mathrm{d}s\,\frac{1}{s}\int_{\sqrt{s}}^{E+s/4E}\mathrm{d}\omega\,\frac{1}{\sqrt{\omega^2-s}}N(\omega_1)N(\omega_2)\bar{\sigma}_{\gamma\gamma\to\mu\mu}(s), \tag{37}$$

式中 $\omega_{1,2}=1/2(\omega\pm\sqrt{\omega^2-s})$。(36)式中的积分限需作进一步考虑。变换(34)式将 $\omega_1-\omega_2$ 平面上的方形积分范围变换成图 3.56 底部所示的 $s-\omega$ 平面上锐形区域。该区域下边界线为 $\omega(s)=\sqrt{s}$，它对应着相等的光子能量 $\omega_1=\omega_2=\omega/2$。上边界线为一直线 $\omega(s)=E+s/4E$，对应着其中一个电子完全停下来，$\omega_1=E,\omega_2=s/4E$ 或 $\omega_2=E,\omega_1=s/4E$。显然，在 $s-\omega$ 平面上每一个点处能到达两次，对应着 $\omega_1>\omega_2$，或者 $\omega_2>\omega_1$。这就解释了(37)式中额外的 2 因子。两个边界线在总能量转移为 $s=4E^2,\omega=2E$ 处相交。

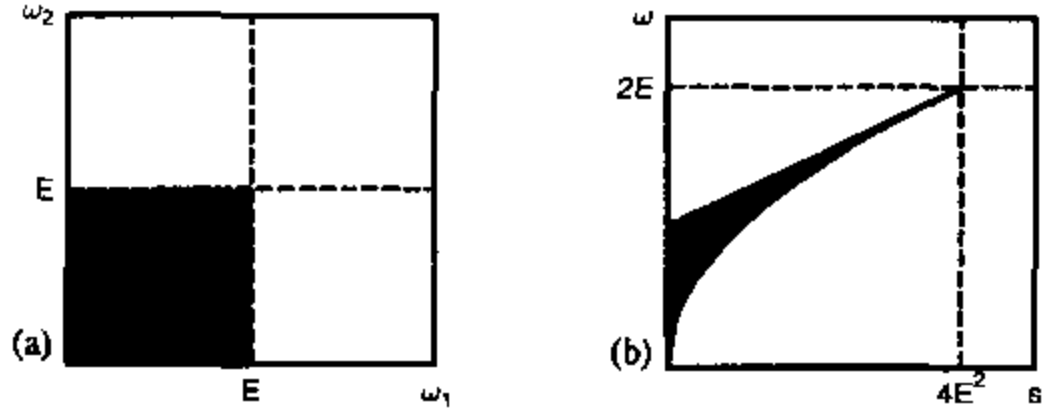


图 3.56a,b　$\omega_1-\omega_2$ 平面(a)和所形成的 $s-\omega$ 平面(b)运动上允许的积分区域

我们现在计算(37)式中的积分，我们注意点集中在(30)式的光子谱中领头对数项

$$\int_{\sqrt{s}}^{E+s/4E}\mathrm{d}\omega\,\frac{1}{\sqrt{\omega^2-s}}N(\omega_1)N(\omega_2)$$
$$\simeq\left(\ln\frac{2E}{m}\right)^2\int_{\sqrt{s}}^{E+s/4E}\mathrm{d}\omega\,\frac{1}{\sqrt{\omega^2-s}}$$
$$\times\frac{E^2+\left(E-\frac{1}{2}(\omega+\sqrt{\omega^2-s})\right)^2}{E^2}\,\frac{E^2+\left(E-\frac{1}{2}(\omega-\sqrt{\omega^2-s})\right)^2}{E^2}$$
$$\cong f\left(\frac{\sqrt{s}}{2E}\right). \tag{38}$$

作一番努力总算能做严格积分。其结果以参数 $\kappa=\sqrt{s}/2E$ 表达为

$$f(\kappa)=(2+\kappa^2)^2\ln\frac{1}{\kappa}-(1-\kappa^2)(3+\kappa^2). \tag{39}$$

最后，我们算出 μ 子对产生的总截面作为对不变质量 s 的函数关系式

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{ee\to ee\mu\mu}&\simeq\frac{\alpha^2}{\pi^2}\left(\ln\frac{2E}{m}\right)^2\int_{4M_\mu^2}^{4E^2}\mathrm{d}s\,\frac{1}{s}f\left(\frac{\sqrt{s}}{2E}\right)\bar{\sigma}_{\gamma\gamma\to\mu\mu}(s)\\&=\frac{2\alpha^4}{\pi}\frac{1}{M_\mu^2}\left(\ln\frac{2E}{m}\right)^2\int_1^{(E/M_\mu)^2}\mathrm{d}x\,f\left(\frac{M_\mu}{E}\sqrt{x}\right)\\&\quad\times\frac{1}{x}\left[\left(2+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})-\sqrt{1-\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right].\end{aligned} \tag{40}$$

最后一步中，我们已转换成无量纲变量 $x=s/4M_\mu^2$，并用了光子诱发下产生过程的公式(33)。通常(40)式中积分只能数值求解，而在极端相对论极限下，能找到一个解析的近似表达式。对被积函数的检查表明，对 $E\gg M_\mu$，函数 $f(\sqrt{(x)}M_\mu/E)$ 比其余因子下降得更慢。所以我们用该函数在下边界上的值 $f(M_\mu/E)\approx 4\ln(E/M_\mu)$ 来取代函数本身。若上边界线延伸到无穷远，则剩下的积分能被完全求出，导出一个数值因子 14/9。

从而高能时电子对撞中 μ 子对产生的总截面为

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{ee\to ee\mu\mu}&\simeq\frac{2\alpha^4}{\pi}\frac{1}{M_\mu^2}\left(\ln\frac{2E}{m}\right)^2 4\ln\frac{E}{M_\mu}\frac{14}{9}\\&=\frac{112\alpha^4}{9\pi}\frac{1}{M_\mu^2}\left(\ln\frac{2E}{m}\right)^2\ln\frac{E}{M_\mu}.\end{aligned} \tag{41}$$

该结果只近似到对数项，即与(41)式中对数相比较，数量级为 1 的项均被忽略掉。注意双光子机制中，是一个电子和一个正电子对撞还是两个电子对撞这是无关紧要的。

截面随入射能量增大而增大是件极为有趣的事。为了作比较，我们参见一下电子-正电子对到 μ 子对的湮灭截面的结果(3.145)：

$$\bar{\sigma}_{e^+e^-\to\mu^+\mu^-}=\frac{\pi}{3}\frac{\alpha^2}{E^2}, \tag{42}$$

它随能量增大面下降。这个在表现上的差别有一个简单的定性解释：反应(42)要求电子和正电子在空间和时间上的同一点相遇并湮灭，这是一个随能量升高而发生几率越来越小的过程。另一方面，按(41)式的对产生主要发生在边缘碰撞；从经典上看，随着入射能量的增高，越来越远的距离(碰撞参数)处的碰撞有贡献，从而截面增大。有趣的结论是，在足够高能量下，(41)式是 μ 子对产生为主的过程，尽管它是来自于四阶图而与湮灭图相比应被一个 α^2 因子压低。

图 3.57 给出了 DESY 的 PETRA 对撞机上所获得的 μ 子对产生截面的实验结果[①]，它很好地显示了截面增大的趋势。数据点是指“未标记”实验的结果，其中散射的电子(正电子)不被探测并且多数残留在束流管中，只偏转一个很小的角度。同时也进行了单标记或双标记条件下的实

① B. Adeva et al. (Mark J Collaboration): Phys. Rev. **D38**, 2655(1988).

验，其中要对有限偏转角内的对撞粒子进行观测。这种情况下，要修正等效光子谱[①]。

我们指出在实验上可以将过程 $e^+ + e^- \to e^+ + e^- + \mu^+ + \mu^-$ 和过程 $e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-$ 清楚地分开，因为在前一个过程中产生的 μ 子对能量很低，而在后一过程中，它们携带着整个对撞能量。

等效光子方法提供高能对撞中截面的相当准确的值。然而，为了对 QED 预言进行精确验证，应该考虑相干项，严格计算 Feynman 图[②]，在从高能实验导出结果的过程中，数值计算所得的预言值用作 Monte-Carlo 模拟的输入，模拟中也考虑到探测系统的响应性能。用此方法便生成了图 3.57 中的理论曲线。

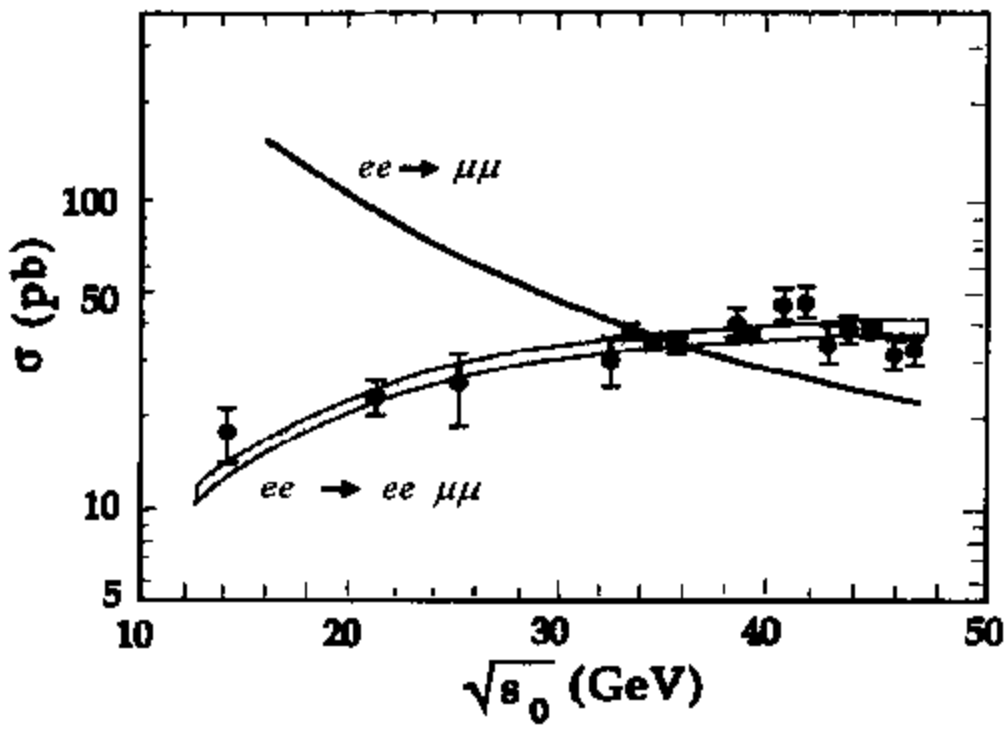


图 3.57 以过程 $e^+ + e^- \to e^+ + e^- + \mu^+ + \mu^-$ 产生 μ 子对的总截面的能量关系。如果考虑探测器响应，实验数据与 QED 预言相符。为了比较，还画出过程 $e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-$ 的截面，它随能量而下降

本练习中所讨论的这种类型的双光子碰撞有几个用途。它们能用作检验量子电动力学和研究对“光子结构函数”的预言。而且它们提供了一个相对“干净”的新粒子产生源，例如，HiggsBose 子，超对称粒子，胶子球，重介子，等等[③]。

---

① J. H. Field: Nucl. Phys. **B168**, 477(1980).

② 双光子过程的先驱性工作有：V. M. Budnev, I. F. Ginzburg, G. V. Meledin, V. G. Serbo: Phys. Rep. **15**, 181(1975); G. Bonneau, M. Gourdin, F. Martin: Nucl. Phys. **B54**, 573(1973).

③ 见 M. Greiner, M. Vidović, G. Soff: Phys. Rev. **C47**, 2288(1993).

练　习

3.18　强子张量的角度积分

问题：证明例 3.17 中(17)

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi}p_ip_jH_{ij}^{\perp}\simeq\frac{\boldsymbol{p}^2\boldsymbol{p}'^2}{2\boldsymbol{k}^2}\sin^2\theta\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi}H_u^{\perp}, \tag{1}$$

式中积分遍取了散射电子的所有方位角。

解答：$H_{ij}^{\perp}$是根据下式应用两个横向投影算符到强子张量而得来的。

$$H_{ij}^{\perp}=\left(\delta_{ik}-\frac{k_ik_k}{\boldsymbol{k}^2}\right)\left(\delta_{jl}-\frac{k_jk_l}{\boldsymbol{k}^2}\right)H_{kl}. \tag{2}$$

H_{kl}是一个能由入射和出射粒子的动量矢量构造的三维张量。现有的矢量有一入射光子的动量 $\boldsymbol{k}$ 和初末态靶的动量。在下面，我们仅使用单个靶的动量矢量 $\boldsymbol{l}$，但是这能被推广到包含更多矢量情况。我们采用下述强子张量的一般形式

$$H_{kl}=A\delta_{kl}+Bk_kl_1+Cl_kk_l+Dl_kl_l+Ek_kk_l. \tag{3}$$

这里 $A,\cdots,E$ 是些未给定的函数，它们能依赖于标量 $\boldsymbol{k}^2,\boldsymbol{l}^2,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l}$。按照(2)式作横向投影后，只剩下 A 和 D 项：

$$H_{ij}^{\perp}=A\left(\delta_{ik}-\frac{k_ik_k}{\boldsymbol{k}^2}\right)+D\left(l_i-\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{k}^2}k_i\right)\left(l_j-\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{k}^2}k_j\right). \tag{4}$$

所以，在(1)式积分中的函数为

$$H_u^{\perp}=2A+D\left(\boldsymbol{l}^2-\frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})^2}{\boldsymbol{k}^2}\right), \tag{5a}$$

$$p_ip_jH_{ij}^{\perp}=A\left(\boldsymbol{p}^2-\frac{(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k})^2}{\boldsymbol{k}^2}\right)+D\left(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{l}-\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{k}^2}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k}\right)^2. \tag{5b}$$

为进行对方位角的积分，我们引进这样的坐标系：z 轴指向入射电子的方向，即矢量 $\boldsymbol{p}$，而方位选得使 $\boldsymbol{l}$ 落在 xz 平面上。用球坐标表示的感兴趣的矢量为

$$\boldsymbol{p}=p(0,0,1), \tag{6a}$$

$$\boldsymbol{l}=l(\sin\beta,0,\cos\beta), \tag{6b}$$

$$\boldsymbol{p}'=p'(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta), \tag{6c}$$

$$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'=(-\boldsymbol{p}'\sin\theta\cos\varphi,\ -p'\sin\theta\sin\varphi,p-p'\cos\theta), \tag{6d}$$

导出标量积

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{l}=pl\cos\beta, \tag{7a}$$

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k}=p(p-p'\cos\theta), \tag{7b}$$

$$\boldsymbol{k}^2=p'^2\sin^2\theta+(p-p'\cos\theta)^2, \tag{7c}$$

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l}=-lp'\sin\theta\cos\varphi\sin\beta+l(p-p'\cos\theta)\cos\beta. \tag{7d}$$

我们注意到依赖于 φ 的量只有 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l}$。因此(5)式 A-项的系数对方位角而言各向同性。利用出现在(5)中的因子(7a—d)为

$$p^2-\frac{(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k})^2}{\boldsymbol{k}^2}=\frac{p^2p'^2}{\boldsymbol{k}^2}\sin^2\theta, \tag{8a}$$

$$l^2-\frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})^2}{\boldsymbol{k}^2}=\frac{l^2}{\boldsymbol{k}^2}[p'^2\sin^2\theta(1-\cos^2\varphi\sin^2\beta)+(p-p'\cos\theta)^2\sin^2\beta$$
$$-2p'(p-p'\cos\theta)\sin\theta\cos\varphi\sin\beta\cos\beta], \tag{8b}$$

$$\left(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{l}-\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{k}^2}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k}\right)^2=\frac{l^2}{\boldsymbol{k}^2}\frac{p^2p'^2}{2\boldsymbol{k}^2}\sin^2\theta[2p'^2\sin^2\theta\cos^2\beta$$
$$+4p'(p-p'\cos\theta)\sin\theta\cos\varphi\sin\beta\cos\beta$$
$$+2(p-p'\cos\theta)^2\cos^2\varphi\sin^2\beta]. \tag{8c}$$

对角度平均就得到$\langle\cos\varphi\rangle=0$ 和$\langle\cos^2\varphi\rangle=1/2$,从而(5a)变成

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi}H_{ll}^{\frac{1}{2}}=2A+D\frac{l^2}{\boldsymbol{k}^2}\left[p'^2\sin^2\theta\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\beta\right)+(p-p'\cos\theta)^2\sin^2\beta\right] \tag{9}$$

而由(5b)导得

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi}p_ip_jH_{ij}^{\frac{1}{2}}=\frac{p^2p'^2}{2\boldsymbol{k}^2}\sin^2\theta 2A+\frac{p^2p'^2}{2\boldsymbol{k}^2}\sin^2\theta D\frac{l^2}{\boldsymbol{k}^2}[2p'^2\sin^2\theta\cos^2\beta$$
$$+(p-p'\cos\theta)^2\sin^2\beta]. \tag{10}$$

比较这两个表达式确实了它们是互成比例的,这正如(1)式中所要求的。这不严格正确,因为方括号中的第一项不一致。然而这些项与 $\sin^2\theta$ 成正比,所以当散射角小时是被压低了。这一论证也适合函数 A 和 D 对 φ 的依赖性。在标量积 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l}$ 中的 $\cos\varphi$ 项,它能引起这些可能的函数的方位角依赖性,受到一个小因子 $\sin\theta$ 的压低。

3.9 传　　记

贝特(H. A. Bethe),美籍德国物理学家,1906 年 7 月 2 日生于斯特拉斯堡。贝特在法兰克福和慕尼黑学习物理。他先后在法兰克福大学(1928)、斯都特卡大学、慕尼黑大学(1930～1932)、曼彻斯特大学和布里斯托尔大学担任研究助理和无薪大学教师。从 1935 起他成为康奈尔大学(Ithaka,NY)物理教授。在第二次世界大战期间,他在洛斯阿拉莫斯担任曼哈顿工程的理论物理部的主任。贝特在诸如核物理、原子结构物理、固态谱学、量子电动力学等许多领域作出了许多重要贡献。贝特由于他对主要系列恒星内部核聚变过程的解释荣获 1967 年诺贝尔物理奖。

巴巴(H. J. Bhabha),印度物理学家,1909 年 10 月 30 日生于孟买,1966 年 1 月 24 日在飞

机失事中卒于勃朗峰。巴巴在孟买大学和剑桥大学学习物理，并于 1932 年在剑桥大学取得博士学位。自 1945 年起，他在孟买担任理论物理教授和坦坦基金研究所所长。他担任印度原子能委员会主席和国际理论与应用物理联合会主席。巴巴首先对电子-正电子散射给出相对论描述。他也在核物理和宇宙辐射领域从事研究工作。

布拉脱(G. Breit)，美国物理学家，1899 年 7 月 14 日生于尼古拉耶夫(俄罗斯)，1981 年 9 月 13 日卒于俄勒冈。布拉脱于 1915 年移居美国。他毕业于约翰霍布斯金大学(巴尔的摩)，并于 1921 年在那里取得电子工程博士学位。他先后在明尼苏达大学、威斯康星大学、纽约大学、耶鲁大学(工作 21 年)，最后在布法罗纽约州立大学担任物理教授。他和土夫(M. Tuve) 一起用反射雷达脉冲证明海维赛层到电离层的距离。他从事分子束相互作用理论(布拉脱-拉比方程)的研究，并提出了光学泵浦的方法(激光辐射的基础)。在核反应领域，布拉脱发展了共振的描述(布拉脱-维格勒公式)，从事核子-核子散射的电荷无关性的研究，并开创了重离子反应的研究。他还发展了各种粒子加速器的基本原理。

台立兹(R. H. Dalitz)，英国物理学家，1925 年 2 月 28 日生于狄姆布拉(澳大利亚)。台立兹在墨尔本大学和剑桥大学学习物理，并于 1950 年在剑桥大学取得博士学位。他在布里斯托尔大学和伯明翰大学担任研究助理和讲师。他在芝加哥大学(1956 年)和牛津大学(1963 年)担任教授。他的主要研究贡献在强子物理，他研究了介子和重子的衰变和反应性质及 Λ 超子的相互作用等。他引入了台立兹图用于分析多粒子相空间。

穆勒(C. Møller)，丹麦物理学家，1904 年 12 月 22 日生于若麦(丹麦)，1980 年 1 月 14 日逝世。他在哥本哈根大学(与尼·玻尔一起)、罗马大学和剑桥大学学习物理。他在哥本哈根大学用尽了他的研究能力(1933～1975)。穆勒从事散射理论(穆勒算符)和 S 矩阵理论的研究。后期他的主要兴趣在于相对论，特别是他研究广义相对论中能量和动量守恒与定域化问题。

莫特(S. N. F. Mott)，英国物理学家，1905 年 9 月 30 日生于利兹。莫特受教育于剑桥大学，并在那里于 1930 年取得硕士学位毕业。他在剑桥大学担任数学讲师，在布里斯托尔大学(1933 年)担任物理教授。1954 年他回到剑桥担任卡文迪许实验室主任。莫特发展了原子碰撞的量子理论，并于 1933 年(与马塞)写了一本有影响的《原子碰撞理论》的专著。他接下来的工作集中在固态物理学，他对许多课题作出了重要贡献。例如，能带结构模型、位错、缺陷、塑性学理论、金属-绝缘体相变(莫特相变)等。他荣获 1977 年诺贝尔物理奖(与 P. W. 安德逊和 J. H. 范弗莱克分享)。

仁科(Y. Nishina)，日本物理学家，1890 年 12 月 6 日生于冈山景，1951 年 1 月 10 日卒于东京。仁科在东京大学学习物理，在欧洲当研究生。在哥本哈根，他是尼·玻尔的同事。回到日本后，他被委任为东京理化研究所的领导人之一。在哥本哈根逗留期间，他(与克莱因一起)推导了康普顿效应的理论公式。后来他成为日本实验核物理和宇宙线研究的奠基人。他监管几台粒子加速器的建造。

罗逊布鲁斯(M. N. Rosenbluth)，美国物理学家，1927 年 2 月 5 日生于阿尔巴尼(纽约)，罗逊布鲁斯在哈佛大学和芝加哥大学学习。在芝加哥大学期间，在 E. 戴勒和 E. 费米的指导下于

1949 年取得博士学位。他在洛斯阿拉莫斯和核技术总实验室工作过。1960 年他在圣地亚哥加利福尼亚大学工作。1967 年他在普林斯顿大学和高等研究院工作。自 1980 年起，他担任斯丁得克萨斯大学聚变研究所主任。罗逊布鲁斯从事用于研究核内电荷分布的相对论电子散射的分析研究工作。他的主要研究领域是等离子体物理，他发展了非均匀等离子体理论。他提出建议以避免等离子体的不稳定性，这对控制热核聚变的托克马克反应堆是非常重要的。在 1985 年他荣获费米奖。

惠勒(J. A. Wheeler)，美国物理学家，1911 年 7 月 9 日生于扎克逊弗莱(佛罗里达)。惠勒在约翰霍布斯金大学学习物理(1933 年取得博士学位)。他在哥本哈根大学和北卡罗来纳大学做博士后。1938 年他成为普林斯顿大学的教员。退休后，他于 1976 年去奥斯丁得克萨斯大学工作。惠勒在理论物理的许多领域作出重要贡献。他的主要兴趣在引力理论和宇宙论，以及测量的量子理论。

第四章　总结:QED 的 Feynman 规则

上一章中,我们分析了多种散射过程。通过该途径,我们已获得足够的经验去抽取一套规则——Feynman 规则——原则上,这些规则可用来计算任何 QED 过程,不管它是怎样的复杂。

让我们考虑最普遍的弹性或非弹性的下列类型的两粒子散射

$$1+2\to 1'+2'+\cdots+n,$$

它包含了可能的对产生和光子发射。矩阵元 S_{fi} 能被写作

$$S_{fi}=\mathrm{i}(2\pi)^4\delta^4\Big(p_1+p_2-\sum_{i=1}^{n}p_i'\Big)M_{fi}\prod_{i=1}^{2}\sqrt{\frac{N_i}{2E_iV}}\prod_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{N_i'}{2E_i'V}},\tag{4.1}$$

其中本质的物理包含在一个 Lorentz 不变幅 M_{fi} 中,平方根因子来自入射和出射平面波的归一化。按照我们的约定,它们对 Fermi 子和光子是不同的;这被表示成归一化因子 N_i:

$$N_i=\begin{cases}4\pi & \text{对光子},\\ 2m_0 & \text{对自旋为}\dfrac{1}{2}\text{ 的粒子}.\end{cases}\tag{4.2}$$

这些因子是很清楚的。例如,对 Fermi 子可从 3.1 节中(3.2)式看出,而对光子从 3.6 节中(3.170),(3.184)可以看出来。

从(4.1)式,我们能导出微分截面的一般表达式

$$\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{4\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2-m_1^2m_2^2}}N_1N_2(2\pi)^4\delta^4\Big(p_1+p_2-\sum_{i=1}^{n}p_i'\Big)S$$
$$\times\ |M_{fi}|^2\frac{N_1'\mathrm{d}^3p_1'}{2E_1'(2\pi)^3}\cdots\frac{N_n'\mathrm{d}^3p_n'}{2E_n'(2\pi)^3}.\tag{4.3}$$

分母中的根号来自于以 Lorentz 不变形式写出的入射粒子流,参见 3.2 节(3.79)式。

当末态中包含全同粒子时,简并度因子 S 变得重要。既然差别仅在于粒子置换的组态描述了相同量子力学态,那么,在这种情况下,位相空间减小。若终态中存在 g_k 个 k 类型粒子,统计因子

$$S=\prod_k\frac{1}{g_k!},\tag{4.4}$$

就计算了这种减小。

在电子-电子散射情况中,这意味着截面有一个 1/2 缩小因子,另一个实际重要的例子是多光子的韧致辐射,其中因子 $g_k!$ 能变得很大。这因子的产生是由于在终态中有 g_k 个全同粒子因此有 $g_k!$ 种可能的对这些粒子的排列(记数),但是实验上所测量的只是这些排列中的一种!

为将(4.3)式与实验作比较,我们必须将微分截面对实验上不加区分的位相空间间隔作积

分。此外,如果实验上对极化不作测量的话,我们必须对初态极化求平均和对末态极化求和。

不变幅 M_n能用传播子方法按耦合常数 e 的幂指数形式展开成微扰级数。下列规则可用作计算展开系数。它们在下面以实际计算中最有用的形式,即在动量空间中给出。

4.1 动量空间中 QED 的 Feynman 规则

1) 在 n 阶微扰论中,我们首先必须画出所有可能的拓扑分类上不同的 Feynman 图,这些图有 n 个顶角并带上指定数目初末态粒子(外线)。

2) 对每根外线必须联系下列因子:

a) 入射电子: $u(p,s)$ 

b) 入射正电子: $\bar{v}(p,s)$(负能出射电子) 

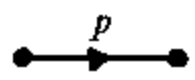
c) 入射光子: $\varepsilon_\mu(k,\lambda)$ 

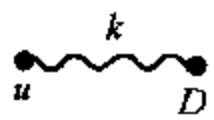
d) 出射电子: $\bar{u}(p,s)$ 

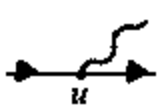
e) 出射正电子: $v(p,s)$ (负能入射电子) 

f) 出射光子: $\varepsilon_\mu^*(k,\lambda)$ 

3) 连接两顶角的每根内线必须与一个传播子相联系

a) 电子: $iS_F(p)=i(\not{p}+m_0)/(p^2-m_0^2+i\varepsilon)$ 

b) 光子: $iD_F^{\mu\nu}(k)=-i4\pi g^{\mu\nu}/k^2+i\varepsilon$ 

4) 每个顶角涉及一个因子 $-ie\gamma_\mu$ 

指标 μ 必须与光子线中的 μ 相乘,并对 μ 求和。

5) 每个顶角上四动量守恒。必须对所有不固定(内圈)的动量积分: $\int d^4p/(2\pi)^4$

6) 所有图的幅必须被相干地加在一起,并考虑下列相因子:

a) 对每个入射正电子(负能出射电子)有 -1 因子;

b) 在两个图间差别仅反映在两 Fermi 子线的交换情况中有 -1 因子——这对入射(出射)粒子线和出射(入射)反粒子线间的交换也成立,因为后者是一个入射(出射)负能粒子线。

c）每一个封闭 Fermi 子圈有 -1 因子。

这里我们附加下列评注：

对 1：对 Feynman 图的构造，只有拓扑结构是重要的。因为理论是用相对论协变方法建立的，所有可能的时序已被自动考虑。只要保持沿 Fermi 子线上顶角次序，图形可以随意变形不改变它们的涵义。

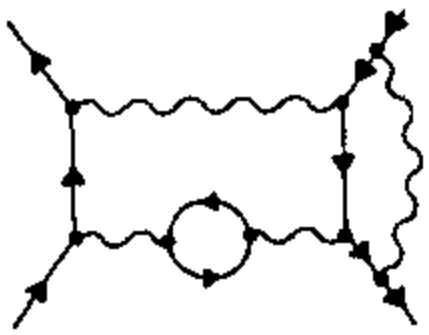


图 4.1　具有 10 条内线的 8 阶图，必须对 $10-(8-1)=3$ 个内线动量积分

对 5：首先每个顶角联系一个四动量 δ-函数，然后对所有内线动量积分。因为 δ 函数是用来保证总动量守恒的，对含有 I 条内线的 n 阶图而言，存在 $I-(n-1)$ 个对内线的积分。我们对一个 8 阶图（图 4.1）来说明这一点。

对 6：a）中的符号因子在（2.42）中的 S 矩阵中讨论过。那里，它是被标记为 ϵ_f。b）中负号在电子-电子和电子-正电子的一阶散射计算的例子中作过解释。它来自于服从 Fermi-Dirac 统计的波函数的反对称性，规则 6c 是新的。不过，它能直接从 6b 中推得。让我们考虑，例如，包含电子回路圈的图 4.2(a)，它可以是一个更大图的一部分。交换两个电子线就得图 4.2(b)，它也可以被画成 4.2(c)。从而含有闭合回路圈的图与 4.2(c)相比就有一个位相因子 -1。

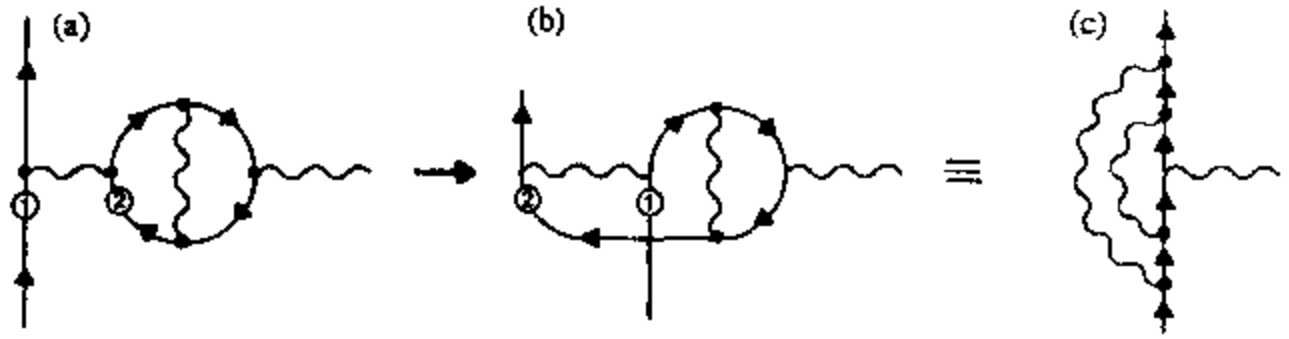


图 4.2(a)～(c)　图(b)为图(a)中(1)与(2)的交换以解释伴随闭合 Fermi 圈的负号

另一个极为有用的从其他规则导来的表述，能用到含电子回路线的图上。

Furry 定理：包含有奇数个光子顶角的电子圈的图在 M_{fi} 展开中能被略去。这将在练习 4.1 中给出证明。

练　　习

4.1　Furry 定理

问题：证明包含一个有奇数个光子顶角的电子圈的 Feynman 图在物理过程计算中可以被略去。

解答：考虑一个能用包含一个有 n 个顶角的电子圈的图来描述的一个过程。根据图 4.3(a)和 4.3(b)，对每个图均存在另一个含方向相反回路的图。我们将证明当 n 为奇数时，这些图贡献相互抵消。

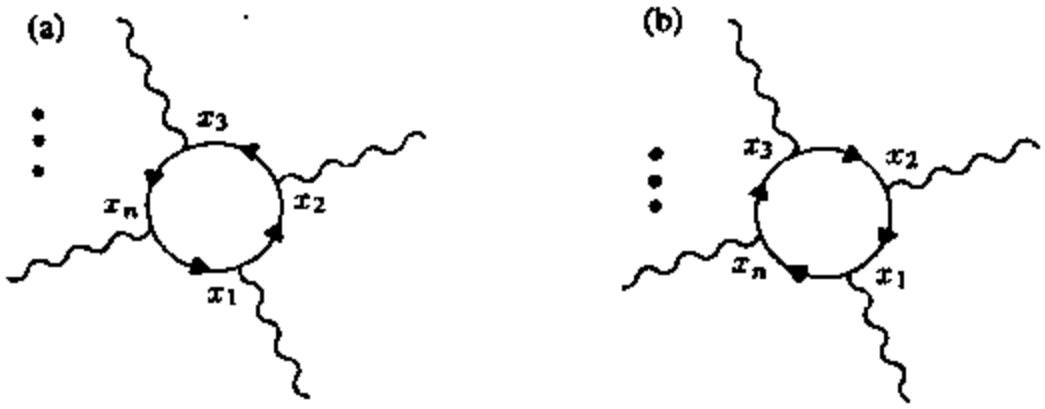


图 4.3 内 Fermi 圈的方向相反的二个图

描述回路(a)的 S 矩阵元的贡献具有下列形式：

$$\begin{aligned} M_a &= (-\mathrm{i}e\gamma_{\mu_1})_{\alpha\beta}(\mathrm{i}S_F(x_1-x_n))_{\beta\gamma}(-\mathrm{i}e\gamma_{\mu_n})_{\gamma\delta}(\mathrm{i}S_F(x_n-x_{n-1}))_{\delta\varepsilon}\times\cdots \\ &\quad\times(\mathrm{i}S_F(x_3-x_2))_{\rho\sigma}(-\mathrm{i}e\gamma_{\mu_2})_{\sigma\tau}(\mathrm{i}S_F(x_2-x_1))_{\tau\alpha} \\ &= \mathrm{Tr}\,[(-\mathrm{i}e\gamma_{\mu_1})(\mathrm{i}S_F(x_1-x_n))(-\mathrm{i}e\gamma_{\mu_n})(\mathrm{i}S_F(x_n-x_{n-1}))\times\cdots \\ &\quad\times(\mathrm{i}S_F(x_3-x_2))(-\mathrm{i}e\gamma_{\mu_2})(\mathrm{i}S_F(x_2-x_1))]. \end{aligned} \tag{1}$$

求迹来自于这样一个事实，由于回路是闭合的，第一个 γ 矩阵与最后一个传播子相乘。根据 Feynman 规则，每个 γ 矩阵与尾随其后的传播子相乘。既然起点是任意的，最后一个传播子必须与第一个传播子相乘，这就形成了一个迹。类似地，来自图(b)的贡献为

$$\begin{aligned} M_b &= \mathrm{Tr}\,[(-\mathrm{i}e\gamma_{\mu_1})(\mathrm{i}S_F(x_1-x_2))(-\mathrm{i}e\gamma_{\mu_2})(\mathrm{i}S_F(x_2-x_3))\times\cdots \\ &\quad\times(\mathrm{i}S_F(x_{n-1}-x_n))(-\mathrm{i}e\gamma_{\mu_n})(\mathrm{i}S_F(x_n-x_1))]. \end{aligned} \tag{2}$$

(1)和(2)中的迹是密切联系着的。为看清这一点，我们利用电荷共轭矩阵 $\hat{C}=\mathrm{i}\gamma^2\gamma^0$，它具有性质[①]

$$\hat{C}\,\gamma_\mu\hat{C}^{-1}=-\gamma_\mu^T. \tag{3}$$

将其用到坐标空间 Feynman 传播于中去，这变换就导致

$$\begin{aligned} \hat{C}\,S_F(x)\,\hat{C}^{-1} &= \int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\frac{p^\mu\hat{C}\,\gamma_\mu\hat{C}^{-1}+m_0\mathbf{1}}{p^2-m_0^2+\mathrm{i}\varepsilon} \\ &= \int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\frac{-p^\mu\gamma_\mu^T+m_0\mathbf{1}}{p^2-m_0^2+\mathrm{i}\varepsilon} \\ &= S_F^T(-x). \end{aligned} \tag{4}$$

注意最后一步在传播子中的指标 T，它表明 $S_F=$必须被转置！现在我们在(2)中插入因子 $\hat{C}^{-1}\hat{C}=\mathbf{1}$：

$$M_b=\mathrm{Tr}\,[\hat{C}^{-1}\hat{C}\,(-\mathrm{i}e\gamma_{\mu_1})\,\hat{C}^{-1}\hat{C}\,(\mathrm{i}S_F(x_1-x_2))\,\hat{C}^{-1}\hat{C}\,(-\mathrm{i}e\gamma_{\mu_2})\,\hat{C}^{-1}\hat{C}$$

① 参见 W. Greiner: Theoretical Physics, Vol. 3, *Relativistic Quantum Mechanics-Wave Equations* (Springer, Berlin, Heidelberg 1990), Sect. 12.1.

$$\times (\mathrm{i}S_{\mathrm{F}}(x_2 - x_3)) \times \cdots \times \hat{C}^{-1}\hat{C}\,(\mathrm{i}S_{\mathrm{F}}(x_{n-1} - x_n))\,\hat{C}^{-1}\hat{C}$$

$$\times (-\mathrm{i}e\gamma_{\mu_n})\,\hat{C}^{-1}\hat{C}\,(\mathrm{i}S_{\mathrm{F}}(x_n - x_1))]. \tag{5}$$

迹中第一个因子$\hat{C}^{-1}$被换到右边(用 Tr $[AB]$= Tr $[BA]$)。进一步我们用(3)和(4)导得

$$\begin{aligned}
M_{\mathrm{b}} &= (-1)^n \mathrm{Tr}\,[(-\mathrm{i}e\gamma^T_{\mu_1})(\mathrm{i}S^T_{\mathrm{F}}(x_2 - x_1))(-\mathrm{i}e\gamma^T_{\mu_2})(\mathrm{i}S^T_{\mathrm{F}}(x_3 - x_2)) \times \cdots \\
&\quad \times (\mathrm{i}S^T_{\mathrm{F}}(x_n - x_{n-1}))(-\mathrm{i}e\gamma^T_{\mu_n})(\mathrm{i}S^T_{\mathrm{F}}(x_1 - x_n))] \\
&= (-1)^n \mathrm{Tr}\,[(\mathrm{i}S_{\mathrm{F}}(x_1 - x_n))(-\mathrm{i}e\gamma_{\mu_n})(\mathrm{i}S_{\mathrm{F}}(x_n - x_{n-1})) \times \cdots \\
&\quad \times (-\mathrm{i}e\gamma_{\mu_2})(\mathrm{i}S_{\mathrm{F}}(x_2 - x_1))(-\mathrm{i}e\gamma_{\mu_1})]^T \\
&= (-1)^n M_{\mathrm{a}}.
\end{aligned} \tag{6}$$

所以和 $M_{\mathrm{a}}+M_{\mathrm{b}}$ 在 n 为奇数时为零！对此结果有一种可能的解释。在封闭的回路中，既能有一个电子又能有一个正电子在“回旋”。这些粒子和电磁场相互作用时，电荷符号相反。从而，对奇数个顶角，它们的贡献相互抵消。



图 4.4(a)～(c)　画出具有二条外线的圈图(a)和(b)。(c)：蝌蚪图

附注：绝对值相等的两个贡献 M_{a} 和 M_{b} 的存在就有这样一个推论：对 n 为偶数时，圈图对幅的贡献加倍，然而对 $n=2$ 情况必须小心。这里，我们或许被引导着去将两贡献相加(参见图 4.4a 和 4.4b)。可是这种想法是错误的，因为两种画法代表着同一个 Feynman 图，它们仅是以两种方式画出而已。另一方面，在 $n>2$ 情况，这一论断不适用。因为右转的圈和左转的圈导出拓扑上有差别的图，它们在顶角次序上不同。

在具有一个顶角 $n=1$ 的一个电子回路的情况是有些病态。显然，它不存在抵消项，因而 Farry 定理不适用。在图 4.4c(被称之为蝌蚪图)中图形的贡献不会自动为零。很显然，光子线不会是自由光子，因为它不能违反能量和动量守恒而简单消失。然而，蝌蚪图将在微扰论更高阶情况中出现，那里，在一些更复杂的图形中回路圈通过一个虚光子(动量 $k=0$)耦合到电子线上。这就提供了一个对“电子自能”的贡献；我们将在下一章处理它。结果表明，蝌蚪图贡献没有任何物理上观测效果。因为它的大小与电子动量无关，这与将在 5.3 节中要讨论的自能修正情况相反。它能完全地被吸收到一个(发散的)重整化常数中去而最终省去了对它的任何计算。更经济而又能达到相同目的的做法是干脆从一开始就不考虑任何蝌蚪图贡献[①]。

① 处理此事的形式方法是以相互作用哈密顿的“正规编时”的方式构成的量子场论。

4.2 不同规范下的光子传播子

在 3.2 节中所引入的光子传播子 D_F 的形式不能惟一确定。到目前为止，我们一直选用形式(动量空间)

$$D_{F\mu\nu} = -\frac{4\pi}{k^2 + i\varepsilon} g_{\mu\nu}, \tag{4.5}$$

这仅是众多的光子传播子定义中的一种。当我们考虑到在构造 S 矩阵元时，光子传播子总是位于两跃迁流元之间，这种不确定性的起因也就变得清楚了。例如

$$j^{\mu}_{43}(p_4, p_3) D_{F\mu\nu}(k) j^{\nu}_{21}(p_2, p_1), \tag{4.6}$$

式中 $p_2 = p_1 - k$ 和 $p_4 = p_3 + k$。现在，跃迁流服从连续性方程。它们的四维散度为零；即在动量空间中(在本书中也可参见 3.6 节(3.210)式)

$$k_{\nu} j^{\nu}_{12}(p_1 - k, p_1) = 0 \tag{4.7a}$$

$$k_{\mu} j^{\mu}_{43}(p_3 + k, p_3) = 0 \tag{4.7b}$$

成立。所以，我们能将带有任意函数 $f_\nu(k)$和 $g_\mu(k)$的表达式 $k_\mu f_\nu(k) + k_\nu g_\mu(k)$加到 $D_{F_{\mu\nu}}$中而不改变计算结果。在保持(4.6)式两流间的对称下，对(4.5)式的有限制的推广式为

$$D_{\mu\nu}(k) = -\frac{4\pi}{k^2 + i\varepsilon} g_{\mu\nu} + k_\mu f_\nu(k) + k_\nu f_\mu(k), \tag{4.8}$$

其中任意函数 $f(k)_\mu$的量纲为$[k^{-3}]$。这种光子传播子不确定性的根源是电磁场的规范自由度。由于这一原因，即使势 A_μ 作了变换，观测结果不变

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \frac{\partial}{\partial x^\mu}\chi(x). \tag{4.9}$$

所以光子场的传播子也变成不确定了。在(4.5)式所做的特定选择被称作为 Feynman 规范。这是最普遍选择。我们现在引入在有些应用中有用的其他两种规范。

Ⅰ) Laudau 规范。若选取(4.4)式中 $f_\mu(k)$为

$$f_\mu(k) = \frac{1}{2} \frac{4\pi k_\mu}{(k^2 + i\varepsilon)^2} \tag{4.10}$$

则传播子如下

$$D_{L\mu\nu}(k) = -\frac{4\pi}{k^2 + i\varepsilon}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\varepsilon}\right). \tag{4.11}$$

这种形式传播子满足条件

$$k^\mu D_{L\mu\nu}(k) = 0 \tag{4.12}$$

这类似于动量空间中势的 Lorentz 规范。

Ⅱ) Coulomb 规范。对这种情况，我们取

$$f_0 = \frac{1}{2} \frac{4\pi}{k^2 + i\varepsilon} \frac{k_0}{k^2}, \quad f_i = -\frac{1}{2} \frac{4\pi}{k^2 + i\varepsilon} \frac{k_i}{k^2}, \tag{4.13}$$

其中拉丁指标 i 表示空间分量($i=1,2,3$)。从而传播子的形式为

$$D_{Cij}(k)=\frac{4\pi}{k^2+i\epsilon}\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k_2}\right), \tag{4.14a}$$

$$D_{C0i}(k)=D_{Ci0}(k)=0, \tag{4.14b}$$

$$D_{C00}(k)=\frac{4\pi}{k^2}. \tag{4.14c}$$

在(4.14c)中,我们已用到 $k_0^2-\boldsymbol{k}^2=k^2$,从而在分母中因子 k^2 被消掉。这个规范满足条件

$$k^iD_{Cij\mu}(k)=0,\ (i=1,2,3), \tag{4.15}$$

这对应着势的 Coulomb 规范,$\nabla\cdot\boldsymbol{A}(x)=0$ 或 $k^iA_i(k)=0$。分量 D_{C00}正好是静电势 $1/r$ 的 Fourier 变换。

练　习

4.2　附注:电动力学中单位制

在电动力学中,采用了几种传统的单位制,如果混用则会引起混乱。在这本书中,我们采用 Gauss 单位制。现在我们将其与其他单位制作比较。首先我们将用到静电学和静磁学中力的定律。两电荷 e_1 和 e_2 间力的 Coulomb 定律为

$$\boldsymbol{F}=k_1\frac{e_1e_2}{r^3}\boldsymbol{r}, \tag{1}$$

其中 k_1 是比例常数;暂时它仍然是任意的。常数 k_1 定义了电荷单位。人们通常指定一个独立的基本的电荷单位(例如 1Coulomb=1As),从而 k_1具有量纲[质量][长度]^3[电荷]$^{-2}$[时间]$^{-2}$。在 MKSA制中,它是法定的 SI 单位制的一部分,这能借助介电常数 ϵ_0 被定义成

$$k_1^{MKSA}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \tag{2}$$

在 Gauss 制中,人们简单地选择

$$k_1^G=1. \tag{3}$$

从而,电荷是一个能从力学量导出的一个单位。在理论物理文献中或许使用得最频繁的单位制中取

$$k_1^{HL}=\frac{1}{4\pi} \tag{4}$$

这被称作为"合理化的 Gauss 制 "或"Heaviside-Lorentz 制"。

对静磁学相互作用力,Ampère 定律是成立的

$$\boldsymbol{F}=k_2\iint d^3r_1d^3r_2\,\frac{\boldsymbol{j}_1\times(\boldsymbol{j}_2\times\boldsymbol{r}_{12})}{r_{12}^3}, \tag{5}$$

式中 k_2 在 MKSA 制中为

$$k_2^{\mathrm{MKSA}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \tag{6}$$

电荷密度单位和电流密度单位总是通过连续性方程联系在一起的。

$$\nabla \cdot j + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \tag{7}$$

这意味着 k_1 和 k_2 的比率具有速度平方的量纲。我们把这速度与光速等同，这是电动力学的特征：

$$\frac{k_1}{k_2} = c^2. \tag{8}$$

而且，在磁场强度 $\boldsymbol{B}$ 的定义中，人们能引入一个比例因子 k_3，使对运动电荷 e 的 Lorentz 力为

$$\boldsymbol{F} = e\left(\boldsymbol{E} + k_3 \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{B}\right). \tag{9}$$

在 Gauss 制和 Heaviside-Lorentz 制中，人们选取

$$k_3^{\mathrm{G}} = k_3^{\mathrm{HL}} = 1, \tag{10}$$

而在 MKSA 制中

$$k_3^{\mathrm{MKSA}} = c. \tag{11}$$

从(9)式知，场强 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的定义还依赖于电荷单位的选取。

总结所有这些，Maxwell 方程组为(在真空中)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi k_1 \rho, \tag{12a}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{12b}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{k_3}{c} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{12c}$$

$$k_3 \nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{4\pi k_1}{c} j + \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \tag{12d}$$

对一个点电荷，(12a)式导出 Coulomb 定律(1)因为 $\boldsymbol{F} = e\boldsymbol{E}$。同样，人们认识到(12d)式中的非齐次项与(9)一道，即 $\boldsymbol{F} = k_3/c \int \mathrm{d}^3 r j \times \boldsymbol{B}$，导出 Ampère 定律(5)。Maxwell 方程在合理化的 Heaviside-Lorentz 制中形式最简单，因为在这种情况下所有因子 4π 将消失。另一方面，它们又出现在其他地方，例如，在 Coulomb 定律(1)中。这是相当合理的，因为 4π 是一个依赖空间维数的“几何因子”。这样，它最好不在场方程中出现而应出现在场方程的解中。

当然容易看出，物理观察量不依赖于单位制的选取。尤其在 S-矩阵元的计算中，组合形式 $1/c(j_\mu A^\mu)$ 总是出现，这是相互作用能量密度。这种组合形式是不变的，因为，由子流密度和电荷作同样的变换，即因为(1)式，它被乘以一个因子 $\sqrt{k_1}$。同时，

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \phi - \frac{k_3}{c} \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{13}$$

势乘上因子 $1/\sqrt{k_1}$。所以，这导得

$$e^{G}A^{G}=\left(\sqrt{4\pi}e^{HL}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi}}A^{HL}\right)=e^{HL}A^{HL}. \tag{14}$$

当采用 Heaviside-Lorentz 单位制时,Feynman 规则作下列变动:

1) 对外光子线没有因子 $N_\gamma=4\pi$。

2) 对每个顶角存在一个因子$-e^{HL}\gamma_\mu$。

3) 光子传播子不含因子 4π,即,它为 $D_F^{\mu\nu}=-g^{\mu\nu}/(k^2+i\varepsilon)$。

任何计算的最终结果总能用无量纲精细结构常数 $\alpha\approx1/137.036$ 来表示。然而这常数以不同方式与基本电荷相联系着:

$$\alpha=\begin{cases}e^2/\hbar c & \text{Gauss 制}\\ e^2/4\pi\hbar c & \text{Heaviside-Lorentz 制}\\ e^2/4\pi\varepsilon_0\hbar c & \text{MKSA 制}\end{cases} \tag{15}$$

4.3　传　　记

法雷(W. H. Furry),美国物理学家,1907 年 2 月 18 日生于珀莱里顿(印第安纳),1984 年逝世。1932 年法雷于伊利诺斯大学取得博士学位。法雷从事正电子理论、量子场论、分子能量理论和测量的研究工作。

第五章　高阶散射矩阵

在第三章中，我们对许多散射过程进行了微扰论的最低阶计算。由于耦合常数 $\alpha=1/137$ 是一个小量，因此，通常仅第一项就可给出可靠的结果。然而，对于一个完整的理论，应能对高阶贡献进行计算。正如我们将在 QED 中所看到的——这种计算对所有的量子场论均成立——这就引起了具有特征性的困难：有些“小修正”变为无限大！克服这一困难将成为理论发展的关键。下面，我们将讨论微扰论的最低非平庸阶中的“重整化”。由此所得的有限理论将可用作计算真空涨落的可测量效应，即与虚产生粒子的相互作用。

5.1　电子-正电子的四阶散射

为了检查发生在高阶微扰展开中的可能过程，作为一个例子，我们考虑四阶的电子-正电子散射过程。根据普遍的 Feynman 规则，我们必须构造出所有的具有不同拓扑结构的图，这些图有四个顶点和规定构形的外线。它们被汇集在图 5.1 中，正如我们所看到的，这是些给人印象极深的 18 个不同图形的结果。图(e)～(h)存在不同的版本，这些版本的差别在于光子圈的所在位置的不同，为简单起见，其他的版本没在图中画出。

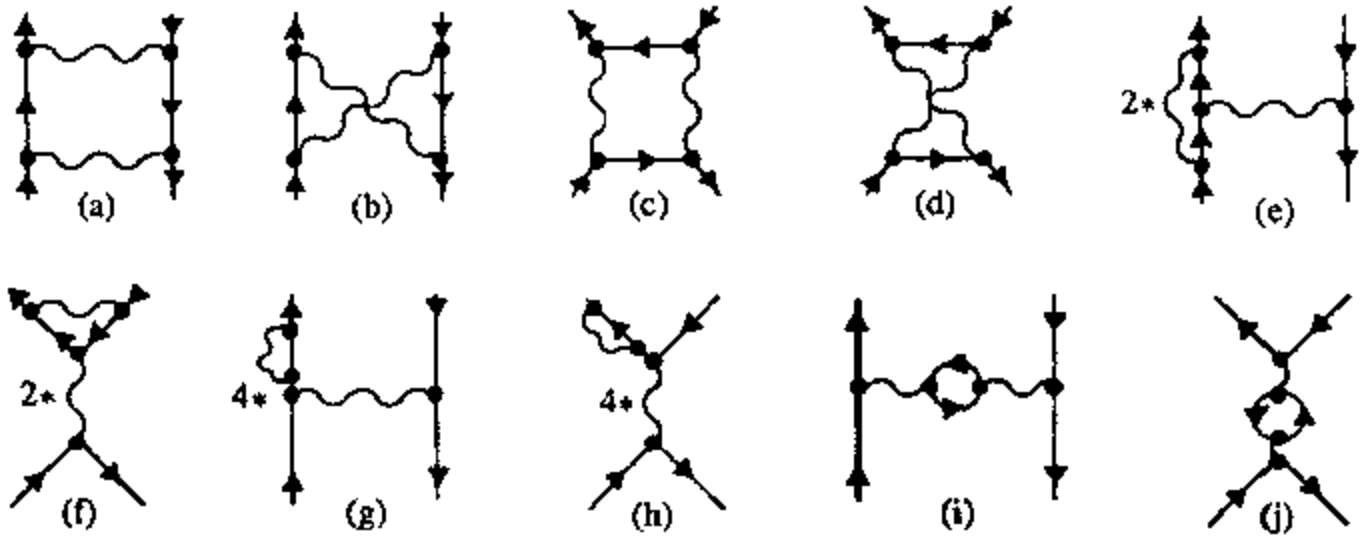


图 5.1(a)～(j)　电子-正电子四阶散射的所有 Feynman 图

作为练习，我们写下一些图形的不变矩阵元。我们在处理电子-质子散射(例 3.6)时，已经遇到过类似图 5.1 的图形。与图 5.2 相对应的不变矩阵元为

$$M_{fi}^{(a)}=-e^4\int\frac{\mathrm{d}^4q_1}{(2\pi)^4}\bar{u}(p_1',s_1')(-\mathrm{i}\gamma_\mu)\frac{\mathrm{i}}{\not p_2-\not p_1-m+\mathrm{i}\varepsilon}(-\mathrm{i}\gamma_\nu)u(p_1,s_1)\frac{-4\pi\mathrm{i}}{q_1^2+\mathrm{i}\varepsilon}$$

$$\times\bar{v}(p_2,s_2)(-\mathrm{i}\gamma^\nu)\frac{\mathrm{i}}{-\not p_2-\not p_1-m+\mathrm{i}\varepsilon}(-\mathrm{i}\gamma^\mu)v(p_2',s_2')\frac{-4\pi\mathrm{i}}{(q+q_1)^2+\mathrm{i}\varepsilon}\,. \quad (5.1)$$

这里，我们已引入了动量转移 $p_1'-p_1=p_2-p_2'$；因子 $(\mathrm{i})^4(-\mathrm{i})^4$ 相消了。结果中的负号是根据第四章中的 Feynman 规则 6a，有一个入射正电子所带来的。

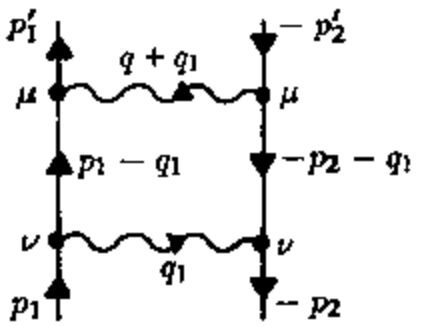


图 5.2　图 5.1(a)在动量空间中的图

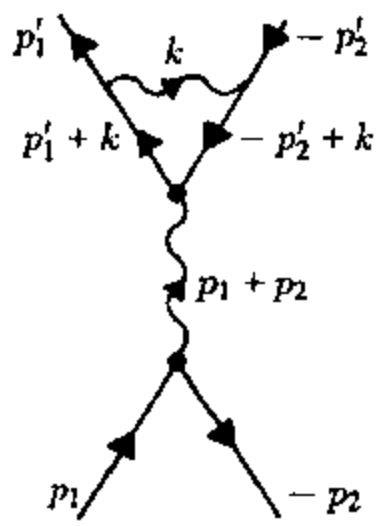


图 5.3　图 5.1(f)在动量空间中的图

下一步，我们研究图 5.3 中所示的新图(f)。其矩阵元是

$$M_{fi}^{(f)}=+e^4\bar{u}(p_1',s_1')\left[\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}(-\mathrm{i}\gamma_\nu)\frac{\mathrm{i}}{\not p_1'+\not k-m+\mathrm{i}\varepsilon}(-\mathrm{i}\gamma_\mu)\right.$$
$$\left.\times\frac{\mathrm{i}}{-\not p_2'+\not k-m+\mathrm{i}\varepsilon}(-\mathrm{i}\gamma^\nu)\frac{-4\pi\mathrm{i}}{k^2+\mathrm{i}\varepsilon}\right]v(p_2',s_2')$$
$$\times\bar{v}(p_2,s_2)(-\mathrm{i}\gamma^\mu)u(p_1,s_1)\frac{-4\pi\mathrm{i}}{(p_1+p_2)^2+\mathrm{i}\varepsilon}.\qquad(5.2)$$

括号为图中含动量积分的那部分。(5.2)式与(5.1)式的相对符号可根据 Feynman 规则 6b 来解释。也就是说，图(f)能由图(a)中的两条电子线相互交换而得来。为看清这一点，我们可以通过如图5.4所示的图形变形来选择方便的时间次序(为此，我们忽略位形空间)。对某一时间间隔，必有一个虚电子，它与入射的实电子反对称化而满足 Fermi 统计。这就解释了(5.1)与(5.2)之间所出现的相对负号。

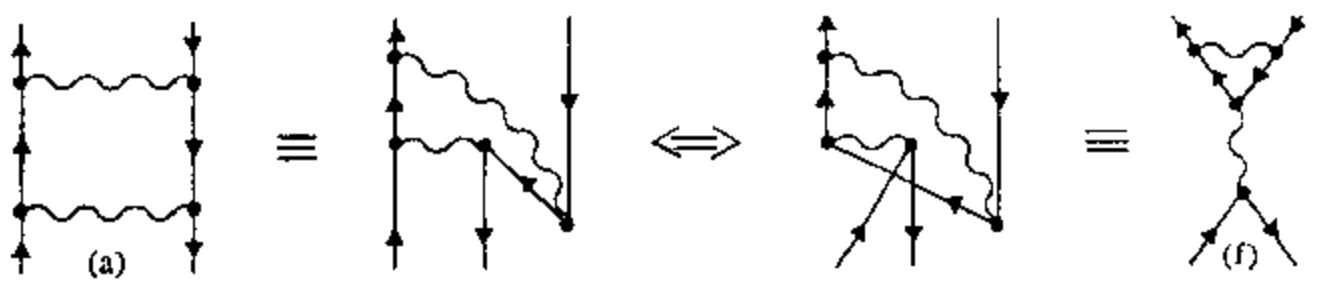


图 5.4　图(a)和(b)是交换图，这包含(5.1)和(5.2)之间的相对负号

图 5.5 中(g)图的矩阵元为

$$M_{fi}^{(g)}=-e^4\bar{u}(p_1',s_1')\left[\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}(-\mathrm{i}\gamma_\mu)\frac{\mathrm{i}}{\not p_1'-\not k-m+\mathrm{i}\varepsilon}(-\mathrm{i}\gamma^\mu)\frac{-4\pi\mathrm{i}}{k^2+\mathrm{i}\varepsilon}\right]$$

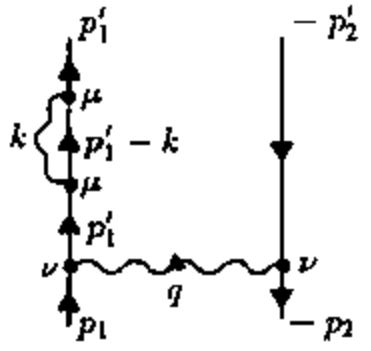


图 5.5 图 5.1(g)在动量空间中的图

$$\times \frac{\mathrm{i}}{\not p_1' - m + \mathrm{i}\varepsilon}(-\mathrm{i}\gamma_\nu)u(p_1,s_1)\bar{v}(p_2,s_2)(-\mathrm{i}\gamma^\nu)v(p_2',s_2')\frac{-4\pi\mathrm{i}}{q^2+\mathrm{i}\varepsilon}, \tag{5.3}$$

这里，圈积分又仅对某些因子进行。

让我们最后考虑图 5.6 中所示的图(i)。由于存在一个封闭的电子线，故出现了额外的负号。其矩阵元为

$$M_{fi}^{(i)} = +e^4\bar{u}(p_1',s_1')(-\mathrm{i}\gamma^\mu)u(p_1,s_1)\frac{-4\pi\mathrm{i}}{q^2+\mathrm{i}\varepsilon}$$
$$\times\left[\mathrm{Tr}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{\not k - m + \mathrm{i}\varepsilon}(-\mathrm{i}\gamma_\nu)\frac{\mathrm{i}}{\not k - \not p - m + \mathrm{i}\varepsilon}(-\mathrm{i}\gamma_\mu)\right]$$
$$\times\frac{-4\pi\mathrm{i}}{q^2+\mathrm{i}\varepsilon}\bar{v}(p_2,s_2)(-\mathrm{i}\gamma^\nu)v(p_2',s_2'). \tag{5.4}$$

求迹来自于沿电子线闭合环路(也可对照练习 4.1)循环出现不同的两个矩阵$-\mathrm{i}e\gamma_\mu$和$\mathrm{i}S_\mathrm{F}$的相乘这样一个事实。这也确保了 4×4 矩阵γ_μ和S_F的乘积变成一个纯数。

对图 5.1 的检查表明存在三个具有特征性的子图，它可出现在一个图的不同部位。这些子图分别画在图 5.7 中。

这些图被称之为顶角修正，电子自能和真空极化。数学上它们对应着已在(5.2～4)式中由方括号特别标出的四维动量积分(圈积分)。

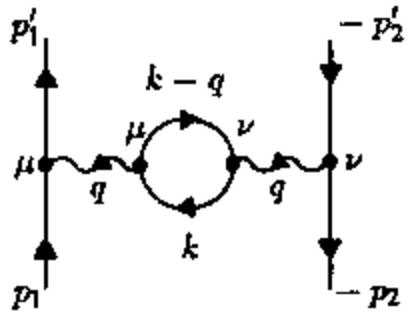


图 5.6 图 5.1(i)在动量空间中的图

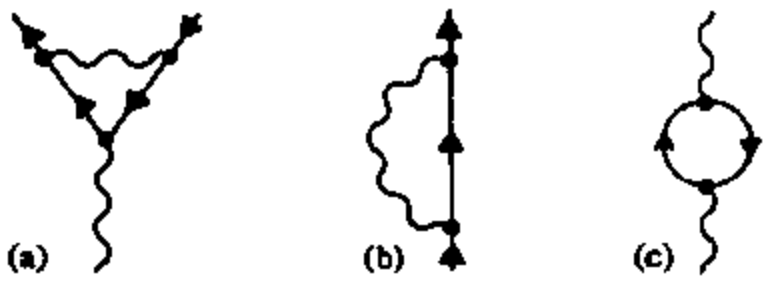


图 5.7(a)～(c) 三个包含一个回路的基本子图
(a) 顶角修正，(b) 电子自能，(c) 真空极化

不幸的是，所有这些积分在$k\to\infty$时都是发散的。这可通过对被积函数中的k的方次进行计数来很快看清这一点。当分子中的四维积分体元像k^4行为增大时，对图 5.7 中三个过程，分母分别与k^{-4},k^{-3}和k^{-2}成比例，从而，我们预计对顶角修正是对数发散的，电子自能是(暂且)线性发散的，而真空极化为平方发散。下一节中，我们将分别考虑这些问题。

最后要提醒的是，在系统构造所有四阶 Feynman 图的过程中，有些项我们没有提到。图 5.8 给出两个图的例子，这些图可以分解成不相连接的两部分。

例如，在图 5.8(a)中，在最低阶散射发生的同时，在真空中也产生一个独立的虚粒子，稍后发生湮灭。诸如图 5.8(a)所示过程的S矩阵元被分解成包含外线的“连通”矩阵元和“不连通”的



图 5.8(a),(b)　二个四阶不连接图

真空泡的矩阵元之积。然而,这些真空涨落时刻发生着,且与真实粒子的存在与否无关。从而,每个图要以下面的因子相乘:

$$S'_{fi}=S_{fi}\left[1+\quad+\quad+\cdots\right]$$

$$=S_{fi}C.$$

然而,常数 C 的绝对值必须是 1,因为尽管真实粒子不存在,真空的背景噪音总是存在。从而,真空-真空跃迁的 S 矩阵元是

$$S'_{0,0}=S_{0,0}C$$

既然真空——不管电磁相互作用考虑了与否——必须是守恒的,那么,$|C|^2=1$,就决定了 C 仅是一个没有物理意义的位相因子。从而,S 矩阵展开中的非连通图能被忽略掉。

5.2　真 空 极 化

这一节中,我们将计算虚电子-正电子的产生对光子传播子的影响(图 5.7(c))。为此,我们研究没有加微扰修正的光子传播子

$$\mathrm{i}D_{\mathrm{F}\mu\nu}(q)=\frac{-4\pi\mathrm{i}}{q^2+\mathrm{i}\varepsilon}g_{\mu\nu} \tag{5.5}$$

是怎样受到 e^2 级的修正

$$\mathrm{i}D'_{\mathrm{F}\mu\nu}(q)=\quad+\quad$$

$$=\mathrm{i}D_{\mathrm{F}\mu\nu}(q)+\mathrm{i}D_{\mathrm{F}\mu\lambda}(q)\frac{\mathrm{i}\prod^{\lambda\sigma}(q)}{4\pi}\mathrm{i}D_{\mathrm{F}\sigma\nu}(q). \tag{5.6}$$

这里,引进了极化张量(参见(5.4))

$$\frac{\mathrm{i}\prod_{\lambda\sigma}(q)}{4\pi}=-e^2\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\left[\gamma_\lambda\frac{1}{\not k-m+\mathrm{i}\varepsilon}\gamma_\sigma\frac{1}{\not k-\not q-m+\mathrm{i}\varepsilon}\right] \tag{5.7}$$

正如已经指出的,在被积函数中 k 的幂次数表明积分是平方发散的。在着手计算之前,不顾这一

问题，我们先查看一下 $\prod_{\mu\nu}(q)$ 的普遍特征。由于它是一个 Lorentz 张量，$\prod_{\mu\nu}$ 能由 $g_{\mu\nu}$ 和 $q_\mu q_\nu$ 以及 q^2 的标量函数构成。我们把它写成

$$\prod_{\mu\nu}(q) = Dg_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}q^2\prod^{(1)}(q^2) + q_\mu q_\nu\prod^{(2)}(q^2), \tag{5.8}$$

式中，常数项 $Dg_{\mu\nu}$ 是极化张量在动量转移为零，$q\to 0$ 时的值。D 的存在有不良后果。现在我们利用一个对算符普遍成立的恒等式

$$\frac{1}{\hat{X}+\hat{Y}} = \frac{1}{\hat{X}} - \frac{1}{\hat{X}}\hat{Y}\frac{1}{\hat{X}} + \frac{1}{\hat{X}}\hat{Y}\frac{1}{\hat{X}}\hat{Y}\frac{1}{\hat{X}} \pm \cdots, \tag{5.9}$$

将(5.6)式进行改写，这个等式很容易借助于乘以$(\hat{X}+\hat{Y})$来得以证明。在极限 $q^2\to 0$ 时，并计算到 $\alpha=e^2$ 的更高阶，得到

$$\begin{aligned} iD'_{F\mu\nu}(q^2\to 0) &= \frac{-4\pi i}{q^2+i\varepsilon}g_{\mu\nu} + \frac{-4\pi i}{q^2+i\varepsilon}g_{\mu\lambda}\frac{iD}{4\pi}g^{\lambda\sigma}\frac{-4\pi i}{q^2+i\varepsilon}g_{\sigma\nu} + \cdots \\ &= \left(\frac{-4\pi i}{q^2+i\varepsilon} + \frac{-4\pi i}{q^2+i\varepsilon}\frac{iD}{4\pi}\frac{-4\pi i}{q^2+i\varepsilon} + \cdots\right)g_{\mu\nu} \\ &= -\frac{4\pi i g_{\mu\nu}}{q^2+i\varepsilon}\left(1+\frac{D}{q^2}+\left(\frac{D}{q^2}\right)^2+\cdots\right) \\ &\simeq \frac{-4\pi i g_{\mu\nu}}{q^2-D+i\varepsilon}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

这正好是质量为$\sqrt{D}$的 Bose 子(一个“重光子”)传播子。由于光子的质量是零，从而 $\prod_{\mu\nu}(0)$ 的值必为零。其所以是这样，其根源是理论规范不变性的要求。

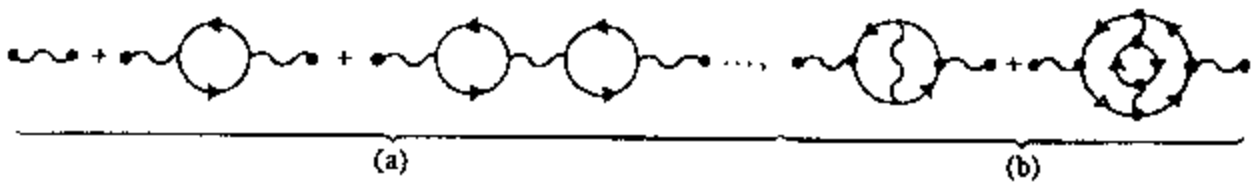


图 5.9 方程(5.10)对部分 a 的所有图求和，然而没有包括更复杂的图(部分 b)

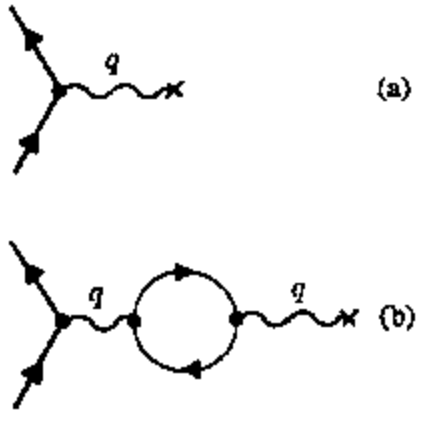


图 5.10 电子与外势(a)的相互作用受真空极化的修正(b)

顺便指出，方程(5.10)甚至对普遍情况也成立，因为在展开式(5.9)中的每一项总有与其相对应的带有多电子圈的 Feynman 图(参见图 5.9(a))。由于明显的理由，对这些图进行求和称为链近似。然而，以这种方式所获得的无穷级数也仅对一定类型的图的求和。还有任意数目的更复杂的“泡”，这些在严格的光子传播子(参见图 5.9(b))的计算中均应得以考虑。

为了看清常数 D 是怎样与规范不变性相联系的，我们以一个电子在具有 Fourier 变换形式为 $A_\mu(q)$的外势场上的散射作为一个例子，见图 5.10。直接散射的相应矩阵元正比于

$$M_{fi} \sim e\bar{u}_f\gamma^\mu u_i A_\mu(q). \tag{5.11}$$

为了能解释交换光子的真空极化，必须要加进下列修正

$$M_{fi}^{\mathrm{VP}} \sim e\bar{u}_f\gamma^\mu u_i \frac{-4\pi\mathrm{i}}{q^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{i}\prod_{\mu\nu}(q)}{4\pi}A^\nu(q). \tag{5.12}$$

规范不变原理就要求这一表达式在下列变换下不变

$$A_\mu(x)\to A_\mu(x)-\frac{\partial}{\partial x^\mu}\chi(x) \quad 或 \quad A_\mu(q)\to A_\mu(q)+\mathrm{i}q_\mu\chi(q). \tag{5.13}$$

显然，这意味着

$$\prod_{\mu\nu}(q)q^\nu=0. \tag{5.14}$$

由于 $\prod_{\mu\nu}$ 的对称性(参见(5.8))

$$q^\mu\prod_{\mu\nu}(q)=0. \tag{5.15}$$

也成立。这也能被解释成外场产生的极化流

$$J_\mu^{\mathrm{VP}}(q)=\frac{1}{4\pi}\mathrm{i}\prod_{\mu\nu}(q)A^\nu(q). \tag{5.16}$$

的流守恒 $q^\mu J_\mu^{\mathrm{VP}}(q)$ 条件。将方程(5.14)和(5.15)用到(5.8)式得

$$D+q^2\left(\prod^{(1)}(q^2)+\prod^{(2)}(q^2)\right)=0. \tag{5.17}$$

既然方程必须对所有的 q^2 成立，那么，D 就必须为零(假定函数 $\prod^{(i)}$ 在 $q^2=0$ 处无奇点!) 极化张量必定被假定成下列简单形式

$$\prod_{\mu\nu}(q^2)=(q^2g_{\mu\nu}-q_\mu q_\nu)\prod(q^2), \tag{5.18}$$

其中，我们已引入了极化函数 $\prod(q^2)\equiv\prod^{(1)}(q^2)=-\prod^{(2)}(q^2)$。

然而，对 D 的直接计算似乎与这一结论相矛盾。按照(5.8)和(5.7)，我们得

$$\begin{aligned}D&=\frac{1}{4}\prod^{\mu}{}_{\mu}(0)\\&=\frac{1}{4}4\pi\mathrm{i}e^2\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu\frac{\not k+m}{k^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\gamma_\mu\frac{\not k+m}{k^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\right]\\&=8\pi\mathrm{i}e^2\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{2m^2-k^2}{(k^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon)^2},\end{aligned} \tag{5.19}$$

式中，求迹可用通常方法进行计算：

$$\mathrm{Tr}[\gamma^\mu(\not k+m)\gamma_\mu(\not k+m)]=\mathrm{Tr}[(-2\not k+4m)(\not k+m)]=4(-2k^2+4m^2).$$

表达式(5.19)不可能为零，相反，它是一个平方发散的积分。既然原有的理论是规范不变的，$D\neq0$的结果显然是由于对 $\prod_{\mu\nu}$ 的定义式(5.7)属于数学上含糊不清的表达式。有不同的方法避免这一问题，并用“正规化”使得这些积分收敛。例如，我们可以将 k 的积分限在大动量值 Λ 处进行截断，或者，可以引入诸如 $\Lambda^2/(k^2+\Lambda^2)$这样一个衰减因子，它在 $k\gg\Lambda$ 时连续趋近于零。

我们将采用 Pauli 和 Villars 所提出的正规化方案[①]。它应用相对简单而且具有能保证理论的所有不变量守恒的优点。其想法是从被积函数中减除一个与其具有相同渐近行为的函数，确保所获得的被积函数随 k 的增大而足够快地下降。确切地说，引进一组 N 个辅助质量 M_i 和常数 C_i，被积函数被取代为：

$$\prod_{\mu\nu}(q) = \int \mathrm{d}^4k f_{\mu\nu}(q,k,m^2)$$

$$\to \overline{\prod}_{\mu\nu}(q) = \int \mathrm{d}^4k \left(f_{\mu\nu}(q,k,m^2) + \sum_{i=1}^{N} C_i f_{\mu\nu}(q,k,M_i^2) \right). \tag{5.20}$$

然后这样选取常数 C_i, M_i 使得正规化了的极化张量 $\overline{\prod}_{\mu\nu}(q)$ 是由一个收敛积分给出的。通过这一步骤，有可能借助普通方法（例如，交换积分与求和的次序）来处理积分。计算结果中再作极限 $M_i \to \infty$。由于截断程序是随意选择的，那么，只有当物理观测量与参数 C_i, M_i 无关时计算才有意义。正如我们将看到的，这一点是可以实现的。

现在，让我们来明显地计算正规化的极化张量。

$$\begin{aligned}
\overline{\prod}_{\mu\nu}(q) &= 4\pi i e^2 \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{\mathrm{Tr}[\gamma_\mu(\not{k}+m)\gamma_\nu(\not{k}-\not{q}+m)]}{(k^2-m^2+i\varepsilon)[(k-q)^2-m^2+i\varepsilon]} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^{N} C_i \frac{\mathrm{Tr}[\gamma_\mu(\not{k}+M_i)\gamma_\nu(\not{k}-\not{q}+M_i)]}{(k^2-M_i^2+i\varepsilon)[(k-q)^2-M_i^2+i\varepsilon]} \right\} \\
&= 16\pi i e^2 \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} \\
&\quad \times \left\{ \frac{k_\mu(k-q)_\nu + k_\nu(k-q)_\mu - g_{\mu\nu}(k^2 - q\cdot k - m^2)}{(k^2-m^2+i\varepsilon)[(k-q)^2-m^2+i\varepsilon]} + \mathrm{reg} \right\},
\end{aligned} \tag{5.21}$$

式中，我们已利用了数学附注 3.3 中的求迹恒等式 2 和 3，“reg”代表着正规项。这种类型的动量积分是相当困难的。为解决这一问题，针对辅助变量的新积分的引入，人们已发展了多种技巧使得对 d^4k 的积分简单。我们利用通常的动量空间传播子的下列积分表达式：

$$\frac{\mathrm{i}}{k^2-m^2+i\varepsilon} = \int_0^\infty \mathrm{d}\alpha \exp[i\alpha(k^2-m^2+i\varepsilon)]. \tag{5.22}$$

由此，动量积分变成 Gauss 型，它是容易求解的。为方便起见，在下面我们将去掉使积分收敛的 $i\varepsilon$ 项，从此而把质量视作为有一个负的小虚部的复数。从而，我们获得

$$\begin{aligned}
\overline{\prod}_{\mu\nu} &= -16\pi i e^2 \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} \left([k_\mu(k-q)_\nu + k_\nu(k-q)_\mu - g_{\mu\nu}(k^2 - q\cdot k - m^2)] \right. \\
&\quad \left. \times \int_0^\infty \mathrm{d}\alpha_1 \int_0^\infty \mathrm{d}\alpha_2 \exp\{i[\alpha_1(k^2-m^2) + \alpha_2((k-q)^2-m^2)]\} + \mathrm{reg} \right).
\end{aligned} \tag{5.23}$$

为消除 k 和 $k-q$ 的多项式，我们可在指数因子中引进矢量辅助变量 z_1 和 z_2 并利用恒等式

---

① 参见 W. Pauli and F. Villars: Rev. Mod. Phys. **21**, 434(1949).

$$ik_\mu = \frac{\partial}{\partial z_1^\mu}\exp(ik\cdot z_1)\Big|_{z_1=0}. \tag{5.24}$$

因此,(5.23)能被写作为:

$$\begin{aligned}\overline{\Pi}_{\mu\nu} = &-16\pi ie^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\Big(\Big[-\frac{\partial}{\partial z_1^\mu}\frac{\partial}{\partial z_2^\nu}-\frac{\partial}{\partial z_1^\nu}\frac{\partial}{\partial z_2^\mu}-g_{\mu\nu}\Big(-\frac{\partial}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial}{\partial z_2}-m^2\Big)\Big]\\ &\times\int_0^\infty d\alpha_1\int_0^\infty d\alpha_2\exp\{i[\alpha_1(k^2-m^2)+\alpha_2((k-q)^2-m^2)\\ &+z_1\cdot k+z_2\cdot(k-q)]\}+\mathrm{reg}\Big)\Big|_{z_1=z_2=0}.\end{aligned} \tag{5.25}$$

在交换积分次序后,对 k 的积分便容易解决了。按照数学辅注 5.5,(6)式,Gauss 型动量积分的结果为:

$$\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\exp[i(ak^2+b\cdot k)]=\frac{-i}{(4\pi)^2a^2}\exp(-ib^2/4a), \tag{5.26}$$

从而,

$$\begin{aligned}&\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\exp\{i[k^2(\alpha_1+\alpha_2)+k\cdot(-2\alpha_2q+z_1+z_2)\\ &\quad+(-m^2(\alpha_1+\alpha_2)+q^2\alpha_2-q\cdot z_2)]\}\\ &=\frac{-i}{(4\pi)^2(\alpha_1+\alpha_2)^2}\exp\Big\{i\Big[-m^2(\alpha_1+\alpha_2)+q^2\alpha_2-\frac{\alpha_2^2q^2}{\alpha_1+\alpha_2}\Big]\Big\}\\ &\quad\times\exp\Big\{-i\Big[q\cdot z_2+\frac{z_1^2+2z_1\cdot z_2+z_2^2-4\alpha_2q\cdot z_1-4\alpha_2q\cdot z_2}{4(\alpha_1+\alpha_2)}\Big]\Big\}.\end{aligned} \tag{5.27}$$

所需要的一些微商是容易得到的,即:

$$\frac{\partial}{\partial z_2^\nu}\exp(\cdots)=-i\Big[q_\nu+\frac{z_{1\nu}+z_{2\nu}-2\alpha_2q_\nu}{2(\alpha_1+\alpha_2)}\Big]\exp(\cdots),$$

$$\frac{\partial}{\partial z_1^\mu}\exp(\cdots)=-i\Big[\frac{z_{1\mu}+z_{2\mu}-2\alpha_2q_\mu}{2(\alpha_1+\alpha_2)}\Big]\exp(\cdots),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_1^\mu}\frac{\partial}{\partial z_2^\nu}\exp(\cdots)=&\Big\{-i\frac{g_{\mu\nu}}{2(\alpha_1+\alpha_2)}\\ &-\Big[q_\nu+\frac{z_{1\nu}+z_{2\nu}-2\alpha_2q_\nu}{2(\alpha_1+\alpha_2)}\Big]\frac{z_{1\mu}+z_{2\mu}-2\alpha_2q_\mu}{2(\alpha_1+\alpha_2)}\Big\}\exp(\cdots)\\ &\xrightarrow{z_1=z_2=0}-i\frac{g_{\mu\nu}}{2(\alpha_1+\alpha_2)}+\frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}q_\nu q_\mu.\end{aligned}$$

缩并指标 μ 和 ν 得:

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial}{\partial z_2}\exp(\cdots)\to-\frac{2i}{\alpha_1+\alpha_2}+\frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}q^2.$$

由此,我们得

$$\overline{\prod}_{\mu\nu}(q) = +16\pi i e^2 \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \times \left\{ \frac{-i}{(4\pi)^2(\alpha_1+\alpha_2)^2} \exp\left\{ i\left[-m^2(\alpha_1+\alpha_2) + \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2} q^2 \right] \right\} \times \left\{ \frac{2\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2} q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}\left[\frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2} q^2 - \frac{i}{\alpha_1+\alpha_2} + m^2 \right] \right\} + \text{reg} \right\}. \quad (5.28)$$

被积函数中的多项式被分成形如(5.18)的规范不变部分和剩下的部分

$$\{\cdots\} = \frac{2\alpha_1\alpha_1}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}(q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2) + g_{\mu\nu}\left[\frac{\alpha_1\alpha_2 q^2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2} + \frac{i}{\alpha_1+\alpha_2} - m^2 \right]. \quad (5.29)$$

我们可以证明令人头痛的非规范不变部分——我们将称之为 $\Delta\overline{\prod}_{\mu\nu}$——在正规化理论中消失。当取 $C_0=1$，$M_0=m$ 的约定值，非规范不变部分为：

$$\Delta\overline{\prod}_{\mu\nu} = \frac{e^2}{\pi} g_{\mu\nu} \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2} \sum_{i=0}^N C_i \left[\frac{\alpha_1\alpha_2 q^2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2} + \frac{i}{\alpha_1+\alpha_2} - M_i^2 \right] \times \exp\left\{ i\left[-M_i^2(\alpha_1+\alpha_2) + \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2} q^2 \right] \right\}. \quad (5.30)$$

我们注意到方括号中的量看上去十分相似。这可用来简化积分。我们再次引人辅助变量 ρ，并在 $\rho=1$ 处计算表达式：

$$\Delta\overline{\prod}_{\mu\nu} = -\frac{e^2}{\pi} g_{\mu\nu} i\rho \frac{\partial}{\partial\rho} \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^3} \frac{1}{\rho} \times \sum_{i=0}^N C_i \exp\left\{ i\rho\left[-M_i^2(\alpha_1+\alpha_2) + \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2} q^2 \right] \right\} \Bigg|_{\rho=1}. \quad (5.31)$$

这里，由于常数 C_i 能被选得使积分绝对收敛(当 $\alpha\to 0$)，因此积分号前的微分可以移去。现在，我们在积分中作 $\alpha_i' = \rho\alpha_i$ 标度变换。正如所预料的，这能达到完全消除 ρ 的效果！从而积分完全不依赖于 ρ。微分算符 $\partial/\partial\rho$ 的作用结果为零。这就证明了正规化的极化张量 $\overline{\prod}_{\mu\nu}$ 的规范不变性。

让我们由(5.18) 对规范不变极化算符作进一步的计算。根据(5.28,5.29)，其正规化的形式为

$$\overline{\prod}(q^2) = -\frac{2e^2}{\pi} \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^4} \times \sum_{i=0}^N C_i \exp\left\{ i\left[-M_i^2(\alpha_1+\alpha_2) + \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2} q^2 \right] \right\}. \quad (5.32)$$

这里，我们引进一个因子

$$1 = \int_0^\infty d\rho\,\delta(\rho - \alpha_1 - \alpha_2) \quad (5.33)$$

然后再作标度变换 $\alpha_i = \rho\beta_i$：

$$\begin{aligned}\overline{\prod}(q^2) &= -\frac{2e^2}{\pi}\int_0^\infty d\alpha_1\int_0^\infty d\alpha_2\int_0^\infty d\rho\,\delta(\rho-\alpha_1-\alpha_2)\,\frac{\alpha_1\alpha_2}{\rho^4}\\ &\quad\times\sum_{i=0}^{N}C_i\exp\left[i\left(-M_i^2\rho+\frac{\alpha_1\alpha_2}{\rho}q^2\right)\right]\\ &= -\frac{2e^2}{\pi}\int_0^\infty d\rho\int_0^\infty\rho\,d\beta_1\int_0^\infty\rho\,d\beta_2\,\delta(\rho-\rho\beta_1-\rho\beta_2)\\ &\quad\times\frac{\rho^2\beta_1\beta_2}{\rho^4}\sum_{i=0}^{N}C_i\exp[i(-M_i^2+\beta_1\beta_2q^2)\rho]\\ &= -\frac{2e^2}{\pi}\int_0^1 d\beta_1\int_0^1 d\beta_2\beta_1\beta_2\delta(1-\beta_1-\beta_2)\\ &\quad\times\underbrace{\int_0^\infty\frac{d\rho}{\rho}\sum_{i=0}^{N}C_i\exp[i\rho(-M_i^2+\beta_1\beta_2q^2)]}_{\equiv I}.\end{aligned}\tag{5.34}$$

由于 δ 函数，β 的范围被限制在 $0\leqslant\beta_i\leqslant1$。

如果没有正规化，积分 $I=\int_0^\infty d\rho/\rho...$ 将是对数发散。极化张量的规范不变性允许将(5.18)式动量的两次方因子化出来，从而将发散度降低了 2。现在我们得考虑如何选取 C_i 和 M_i 的值来获得有限的结果。让我们考虑 ρ 的积分并将积分路径变形到负虚坐标轴上。由于 $\beta_1\beta_2=\beta_1(1-\beta_1)$ 的积绝不超过 1/4，这样，只要条件 $q^2<4m^2$ 满足，就能得到指数衰减的被积函数①。如果我们选取更低的积分边界 η 并考虑极限 $\eta\to0$，作替代 $t=i\rho(M_i^2-\beta_1\beta_2q^2)$，并根据练习 5.1，我们得到：

$$\begin{aligned}I&=\lim_{\eta\to0}\int_{-i\eta}^{-i\infty}\frac{d\rho}{\rho}\sum_{i=0}^{N}C_i\exp[-i\rho(M_i^2-\beta_1\beta_2q^2)]\\ &=\lim_{\eta\to0}\sum_{i=0}^{N}C_i\int_{\eta(M_i^2-\beta_1\beta_2q^2)}^{\infty}\frac{dt}{t}\exp(-t)\end{aligned}$$

再利用分部积分，得：

$$I=-\lim_{\eta\to0}\left(\sum_{i=0}^{N}C_i\ln\eta\right)-\sum_{i=0}^{N}C_i\ln(M_i^2-\beta_1\beta_2q^2)+\sum_{i=0}^{N}C_i\int_0^\infty dt\,\ln t\exp(-t).\tag{5.35}$$

由此，我们达到了目的：选取常数

$$\sum_{i=0}^{N}C_i=0.\tag{5.36}$$

使(5.35)中的第一和最后项消失，得到有限的结果：

---

① $q^2=4m^2$ 为产生实的电子-正电子对的阈值，正如将在练习 5.2 中所讨论的。

$$I=-\left[\ln(m^2-\beta_1\beta_2q^2)+\sum_{i=1}^{N}C_i\ln(M_i^2-\beta_1\beta_2q^2)\right]$$

$$=-\left[\ln\left(1-\beta_1\beta_2\frac{q^2}{m^2}\right)+\sum_{i=1}^{N}C_i\ln\frac{M_i^2}{m^2}+\underbrace{\sum_{i=0}^{N}C_i\ln m^2}_{=0}\right]$$

$$=-\left[\ln\left(1-\beta_1\beta_2\frac{q^2}{m^2}\right)-\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}\right], \tag{5.37}$$

其中 q^2 项与大的质量 M_i 相比很小而被忽略掉。引进缩写记号

$$\sum_{i=1}^{N}C_i\ln\frac{M_i^2}{m^2}\equiv-\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}, \tag{5.38}$$

来定义一个平均的截断动量 Λ[①]。借助于(5.37)式的极化函数,(5.34)式最后可写为:

$$\overline{\prod}(q^2)=\frac{2e^2}{\pi}\int_0^1 d\beta\,\beta(1-\beta)\left\{-\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}+\ln\left[1-\beta(1-\beta)\frac{q^2}{m^2}\right]\right\}$$

$$=\frac{2e^2}{\pi}\left\{-\frac{1}{6}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}+\int_0^1 d\beta\,\beta(1-\beta)\ln\left[1-\beta(1-\beta)\frac{q^2}{m^2}\right]\right\}$$

$$\equiv-\frac{e^2}{3\pi}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}+\prod{}^{R}(q^2). \tag{5.39}$$

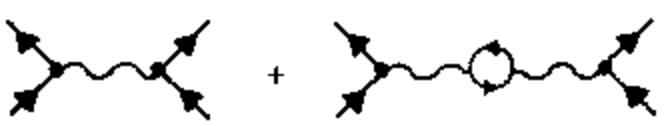
剩下的一维积分 $\prod^{R}(q^2)$ 能积出解析形式。我们不打算在这里给出最终结果(这将留到练习 5.2 中完成)而仅考虑极限 $q^2/m^2\ll1$。这种情况下,我们可将对数展开成 Taylor 级数

$$\ln(1-z)=-\left(z+\frac{z^2}{2}+\cdots\right), \tag{5.40}$$

进行一个简单的积分便得到:

$$\prod{}^{R}(q^2)=-\frac{e^2}{\pi}\frac{q^2}{m^2}\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{140}\frac{q^2}{m^2}+\cdots\right). \tag{5.41}$$

这样,根据(5.39),正规化的真空极化张量由一个对截断动量为 Λ 对数发散的常数项和一个具有明确定义的有限的动量依赖函数 $\prod^{R}(q^2)$ 组成。这些项的意义是什么?为了理解它们,我们回到修正的光子传播子(5.6)并考虑它在散射过程中的影响。例如 Møller 散射的散射幅为

$M_{fi}^{(2)}=$  $+$

$$=(-ie\bar{u}_1'\gamma^\mu u_1)\frac{-4\pi i}{q^2}\left[g_{\mu\nu}+\frac{i}{4\pi}\overline{\prod}_{\mu\nu}(q)\frac{-4\pi ig_x^\tau}{q^2}\right](-ie\bar{u}_2'\gamma^\nu u_2)$$

---

① 我们注意到,利用一个扣除项($N=1$),即 $C_1=-1$,$M_1=\Lambda$,就能得到 $\overline{\prod}(q^2)$ 的正规化。然而,这并不能足以抵消平方发散的非规范不变项 $\Delta\prod_{\mu\nu}(q)$。

$$= (-\mathrm{i}e\bar{u}_1'\gamma^\mu u_1)\mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{(0)}(q)\left[g_{\mu\nu}+(g_{\mu\sigma}q^2-q_\mu q_\sigma)\overline{\prod}(q^2)\frac{g_\nu^\sigma}{q^2}\right](-\mathrm{i}e\bar{u}_2'\gamma^\nu u_2)$$

$$= (-\mathrm{i}e\bar{u}_1'\gamma^\mu u_1)\mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{(0)}(q)\left[1-\frac{e^2}{3\pi}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}+\prod{}^{\mathrm{R}}(q^2)\right](-\mathrm{i}e\bar{u}_2'\gamma_\mu u_2), \tag{5.42}$$

其中最后一个变换利用了跃迁流的规范不变性 $q_\nu j_{fi}^\nu=0$。这样，与 $q_\mu q_\nu$ 成比例的项消失。考虑到 u_1 是自由 Dirac 旋量，就能明显地证明这一点，即：

$$\left.\begin{aligned}(\not{p}_1-m)u_1&=0\\ \bar{u}_1'(\not{p}_1'-m)&=0\end{aligned}\right\}\quad \text{于是有}\quad q_\nu\bar{u}_1\gamma^\nu u_1=\bar{u}_1(\not{p}_1'-\not{p}_1)u_1=0, \tag{5.43}$$

这是因为 $q=(p_1'-p_1)$。由于(5.42)只对 α^2 阶成立，因此它也能被写作为：

$$M_{fi}^{(2)}=(-\mathrm{i}e\bar{u}_1'\gamma^\mu u_1)\left[Z_3\left(1+\prod{}^{\mathrm{R}}(q^2)\right)\mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{(0)}(q)\right](-\mathrm{i}e\bar{u}_2'\gamma_\mu u_2), \tag{5.44}$$

其中常数因子

$$Z_3=1-\frac{e^2}{3\pi}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}. \tag{5.45}$$

表达式(5.44)和(5.42)只在 α^3 项上才有差异，而这些项远远超出了目前所要的精度。和最低阶矩阵元进行比较，考虑真空极化后产生了一个常数修正因子 Z_3 和一个动量依赖修正部分 $\prod^{\mathrm{R}}(q^2)$。根据(5.41)，后者在小 q^2 时趋于零。因此，如果作一个小 q^2 的散射实验(这在经典上对应着两个相距远的电荷间的边缘散射)，那么二阶散射幅可由下式给出

$$M_{fi}^{(2)}=Z_3M_{fi}^{(1)}.$$

然而，电荷值的大小由这种实验从经验上定出。对一位远离的观察者而言，一个“裸”电荷为 e 的荷电粒子似乎带一“重整化”的电荷 e_{R}

$$e_{\mathrm{R}}=\sqrt{Z_3}e. \tag{5.46}$$

然而，原则上讲裸电荷 e 不是一个可观察量，这是因为电子与质子间的相互作用不能被“关闭掉”。以这种方式我们很巧妙地避免了对截断动量 Λ 依赖问题的发生，巧妙之处就在于：只有重整化了的电荷才是物理观测量。其值在实验上被确定为 $e_{\mathrm{R}}^2\simeq1/137$。与重整化常数大小 Z_3 和裸电荷 e 的大小无关。为了能对任意过程进行计算，人们简单地利用电荷 e_R，然后只需处理有确定含义的有限量！

当然，这一论点也很有其不足之处。如果在重整化常数计算中存在发散，这就意味着理论根基就不完全自洽。对很大的动量，或换句话说，对很小的距离，该理论不成立。然而，值得我们自信的是理论成立的范围将是很大的。由于(5.45)中的发散仅是对数型的，所以只有当

$$\Lambda\simeq\mathrm{e}^{3\pi/2\alpha}m=10^{280}m. \tag{5.47}$$

时 Z_3 才明显偏离 1。根据测不准关系，这对应着一个长度 $\Delta x=h/\Lambda\simeq10^{-293}\mathrm{cm}$！实际上，这是根本无关的，这是因为其他量子场的存在对纯 QED 的成立有了限制。例如，只要 π 介子质量区 $m_\pi\simeq270m_e$ 存在一个动量，就必须考虑强相互作用。在更高标度上，弱相互作用变得重要。按照目前的理解程度，这两个现象在统一框架中描述，那就是弱电相互作用理论。然而在这一更普遍的理

论中，仍存在发散的重整化积分（参见 W. Greiner, B. Müller, Theoretical Physics, Vol. 5, *Gauge Theory of Weak Interaction*）。

也许时空可能不连续，而是由一些时空元构成的。在比时空元小的尺度内，不会有动量。该情况下，回路积分（在连续时空中是发散的）将在最大动量处有一个自然的“截断参数”。重整化仍是必要的，但是没必要进行人为的正规化。

到现在为止，我们已检查了真空极化对内光子线的修正。这就出现了(5.44)式中 $Z_3\left(1+\prod^{R}\right)$ 的修正的光子传播子。对外光子外线的修正也应考虑。这些线代表着势 $A_\mu(q)$，它在质壳上的动量为 $q^2=0$。该势满足 Laplace 方程，在动量空间为

$$q^2 A_\mu(q) = 0, \tag{5.48}$$

以及 Lorentz 规范条件，

$$q^\mu A_\mu(q) = 0. \tag{5.49}$$

根据图 5.11，我们可用下式来表达由自由势 A_μ^0 构成的经重整化后形成的新势 A_μ^R：

$$A_\mu^R = A_\mu^0 + iD_{F\mu\sigma}(q)\frac{i\prod^{\sigma\sigma}(q)}{4\pi}A_\sigma^0 = A_\mu^0 + \frac{-4\pi i}{q^2}\frac{i}{4\pi}q^2\overline{\prod}(q^2)A_\mu^0. \tag{5.50}$$

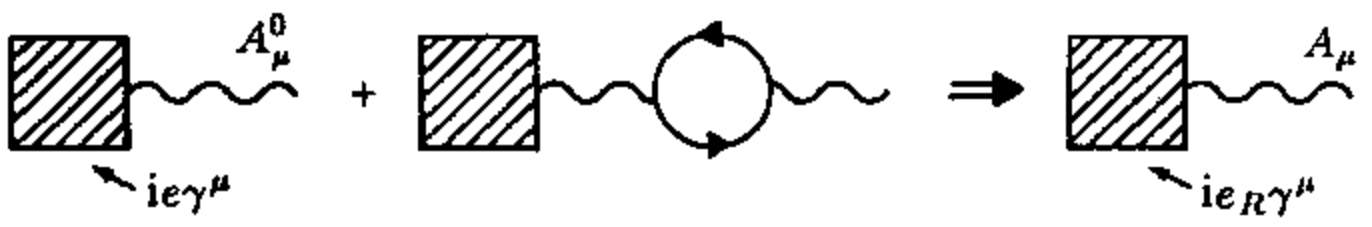


图 5.11 外光子线的重整化

不幸的是，由于第二项是一个不确定的表达式。根据因子如何组合而为零或 $\overline{\prod}A_\mu^0$（因为 5.48），要有一个确定的结果需要作如下考虑。从(5.44)式我们知道，修正的光子传播子 $D_F^{(1)}(q^2)$ 是以自由光子传播子与一个常数 Z_3 的乘积形式出现。然而一个场的传播子总是一个波函数的平方函数。所以，自然也就出现了对光子波函数的重整化，从而势由下式给出①

$$A_\mu^R = \sqrt{Z_3}A_\mu^0. \tag{5.51}$$

这一点是容易被接受的，因为一个光子从来不可能是真正自由的，而是在某个时刻由远处一个源所发出的（或被远处的观察者所接受）。然而，这一源的电荷也必须是根据 $e_R=\sqrt{Z_3}e$ 进行重整化了的。这又一次导致了(5.51)。从而，在对带有光子外线图的计算中，根据(5.51)只要去掉真空极化泡图的贡献，并在顶点处用重整化电荷 e_R 替代就可以了。经过下列步骤后矩阵元中不再出现裸电荷 e：对于内光子线情况，就用 $D_F^R=Z_3D_F$，这对该线两端的电荷因子进行了重整化，对外光子线，就作代换 $A_\mu^R=\sqrt{Z_3}A_\mu^0$。从而，我们根据重整化步骤获知，极化函数在零动量转移处的

① 有限部分 $\prod^{R}(q^2)$ 对外线没有贡献，因为根据(5.41)式，它与 q^2 成比例，因而由于(5.48)式，它为 0。

值 $\overline{\prod}(0)=-(e^2/3\pi)\ln(\Lambda^2/m^2)$ 是根本没有物理意义的，这是因为它被吸收到耦合常数中。然而，动量依赖贡献项 $\prod^{R}(q^2)$ 却导致了很明确的测量效应。正如(5.44)中所指出的，两个电子或其他荷电粒子的散射截面将受到影响，原子中电子的束缚能也受到影响。

如果我们考虑到电荷为$-Ze$的外稳定源的 Coulomb 势[①]，即 $A_0(\boldsymbol{x})=-Ze/|\boldsymbol{x}|$，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=0$，我们就能最清楚地理解这种效应，根据(5.50)式，动量空间中的修正的势为

$$A_0'(\boldsymbol{q})=A_0(\boldsymbol{q})+\prod^{R}(-\boldsymbol{q}^2)A_0(\boldsymbol{q}) \tag{5.52}$$

或者在坐标空间中

$$A_0'(\boldsymbol{x})=\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\exp(i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x})\left(1+\prod^{R}(-\boldsymbol{q}^2)\right)A_0(\boldsymbol{q}). \tag{5.53}$$

由于一个定态源能吸收动量而不吸收能量，故我们可令 $q_0=0$，从而 $q^2=-\boldsymbol{q}^2$。在练习 5.3，(7)式中对此作了明显的证明。动量空间中原来的 Coulomb 势为

$$A_0(\boldsymbol{q})=\int d^3x\,\exp(-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x})\frac{-Ze}{|\boldsymbol{x}|}=-4\pi\frac{Ze}{|\boldsymbol{q}|^2}. \tag{5.54}$$

(5.53) 式中的 Fourier 积分能用 Taylor 级数展开式(5.41)的 q^2 的最低阶来近似解出

$$\begin{aligned}A_0'(\boldsymbol{x})&\simeq\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\exp(i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x})\left(1+\frac{e^2}{15\pi m^2}\boldsymbol{q}^2\right)A_0(\boldsymbol{q})\\&=A_0(\boldsymbol{x})+\frac{e^2}{15\pi m^2}(-\nabla^2)\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\exp(i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x})A_0(\boldsymbol{q})\\&=\left(1-\frac{e^2}{15\pi m^2}\nabla^2\right)A_0(\boldsymbol{x}),\end{aligned} \tag{5.55}$$

其中已经考虑了这样一个事实，即动量转移是完全类空的，$q^2=-\boldsymbol{q}^2$。我们从点电荷$-Ze$出发，由于 $\nabla^2(1/|\boldsymbol{x}|)=-4\pi\delta^3(\boldsymbol{x})$，势能为

$$eA_0'(\boldsymbol{x})=-\frac{Z\alpha}{|\boldsymbol{x}|}-\alpha Z\alpha\frac{4}{15m^2}\delta^3(\boldsymbol{x})\equiv eA_0(\boldsymbol{x})+e\Delta A_0(\boldsymbol{x}), \tag{5.56}$$

除 Coulomb 势之外，一个短程的吸引势在起作用，这一结果早已被发现，它仅适用于低动量转移情况，即(5.41)式中 $\prod^{R}(q^2)$ 的最低阶近似式。在正电子发现不久后，Dirac 和 Heisenberg 讨论了真空极化效应，此后，在 1935 年 Uehling[②]导出了对电磁相互作用修正的结果，从而表达式(5.53)常被称作为 Uehling 势。

由于电子在原子核势场中的运动能准确地用一个定态势 $A_0(\boldsymbol{x})$来描述，那么我们就可以借助(5.56)式很快确定原子束缚能的变化。为了计算附加势的期待值 ΔA_0，当然有必要去知道电子在原子核处的波函数的密度，非相对论量子力学导出了主量子数为 n 和角量子数 l 的氢原子的波函数

---

① 在下面的计算中，我们假定已进行电荷重整化，然而为方便起见，我们丢掉 e_R 的指标。

② E. A. Uehling: Phys. Rev. **48**, 55 (1935).

$$|\Psi_{nl}(0)|^2 = \frac{m^3(Z\alpha)^3}{\pi n^3}\delta_{l0}. \tag{5.57}$$

从而由于一阶微扰理论中真空极化而引起的能量移动可写成

$$\Delta E_{nl}^{\mathrm{VP}} = \langle \Psi_{nl}|e\Delta A_0|\Psi_{nl}\rangle = -\alpha(Z\alpha)\frac{4}{15m^2}|\Psi_{nl}(0)|^2$$

$$= -\frac{4m}{15\pi n^3}\alpha(Z\alpha)^4\delta_{l0}. \tag{5.58}$$

由于势 $\Delta A_0(\boldsymbol{x})$是短程的只有 s 态($l=0$)才受到影响,因为所有其他波函数在原子核处都存在一个节点(这是由角动量位垒引起的)。

在历史上最重要的例子是氢原子($Z=1, n=2, l=0$)中的 $2s$ 态,它应该和纯 Coulomb 势的 $2p$ 态简并。在另一方面方程(5.58)预言了能量的移动值

$$\Delta E_{2s}^{\mathrm{VP}} = -1.122\times 10^{-7}\mathrm{eV}. \tag{5.59}$$

尽管其量值很小,但它可以借助于研究对没有移动的 $2p_{1/2}$态的能级差来给予精确测量,在氢原子中,这些态之间的跃迁可以用无线电波频率区域的电磁场刺激来获得。根据(5.59)式我们希望存在下列频率处有一个共振效应

$$\nu = \frac{E_{2s}-E_{2p}}{2\pi\hbar} = -27.1\mathrm{MHz}. \tag{5.60}$$

然而,在实验上 Lamb 和他的合作者[①]利用微波技术发现 $2s$ 态处在 $2p_{1/2}$态之上。即(我们引用了其现代数值)

$$\nu_{\mathrm{exp}} = +1057.8\mathrm{MHz}. \tag{5.61}$$

以后我们将看到氢原子中的 Lamb 移动是由图 5.7 所示的其他两个辐射修正引起的。然而,实验和理论上的精度还远远不足于根据(5.60)式来确认真空极化能量移动的存在。

根据(5.58)式,为了增加这种效应,必须增加在原子核处波函数的密度,这可以借助于增加原子核荷电数 Z 来实现。在非相对论近似下,(5.58)式的能量移动的增大行为类似子 Z^4,而束缚能的增大仅与 Z^2 成正比。实际上 ΔE^{VP}的增加更大,因为必须用到 Dirac 方程的束缚态解,在原子核处,这个解要比(5.57)式 Schrödinger 方程波函数强得多,它是通过考虑原子核的有限范围而得到部分地补偿。

对原子序数为 $Z=170$ 的假设的原子作为极端的例子,最低束缚态真空极化能量移动的计算结果为 $\Delta E_{1s}^{\mathrm{VP}}=-8\mathrm{keV}$,这约为结合能的 1%,在氢原子中能级移动约为结合能的 10^{-7}部分。实验上真空极化效应可以在 μ 介子原子当中看得很清楚,这在例子 5.4 中进行了解释。

(5.56)中的短程 δ-函数极化势 $\Delta A_0(\boldsymbol{x})$是基子对极化函数(5.41)式的近似 $\prod^{R}(q^2)\simeq -(e^2/15\pi)(q^2/m^2)$ 的 。练习 5.3 的任务是更精确地研究由原子核电荷所引起的极化势。

① 参见 W. E. Lamb 和 R. C. Retherford: Phys. Rev. **72**, 241(1947).

练　习

5.1　积分的计算

问题：根据下式导出(5.34)到(5.35)式的详细步骤

$$I := \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} \sum_{i=0}^{N} C_i \exp[\mathrm{i}\rho(-M_i^2 + \beta_1\beta_2 q^2)] \tag{1}$$

解答：既然被积函数中求和是有限的，借助于缩写 $M_i^2-\beta_1\beta_2q^2=:B_i$，我们可以写出

$$I = \sum_{i=0}^{N} C_i \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\rho B_i} =: \sum_{i=0}^{N} C_i I_i \tag{2}$$

积分 I_i 在数学上是没有确定的，因为被积函数在下限处发散，因此我们把 I_i 取代为

$$I_i = \lim_{\eta\to 0} \int_\eta^\infty \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\rho B_i} \tag{3}$$

这儿，极限 $\eta\to 0$ 是在计算末了进行。

为了进一步的计算，我们现在考虑沿复平面上的下列回路积分

$$J_i := \int_C \frac{\mathrm{d}z}{z} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}zB_i}, \tag{4}$$

它是沿着曲线 C 延拓的，如图 5.12 所示。显然这一积分能分成四个部分

$$J_i = \int_\eta^R \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\rho B_i} + \int_{-\mathrm{i}R}^{-\mathrm{i}\eta} \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\rho B_i} + \int_{C_1} \frac{\mathrm{d}z}{z} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}zB_i} + \int_{C_2} \frac{\mathrm{d}z}{z} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}zB_i}, \tag{5}$$

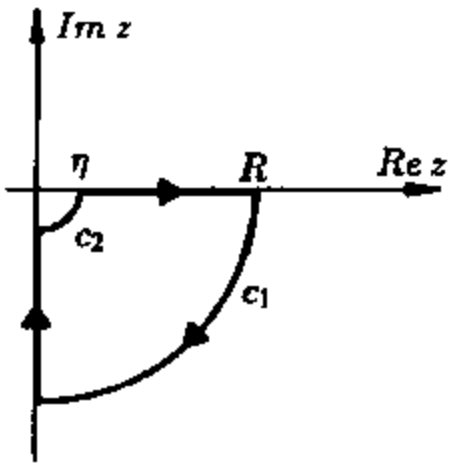


图 5.12　复 Z 平面上的积分回路

其中后两个部分是沿着四分之一圆周 C_1 和 C_2 延拓过来的(如图 5.12 所示)。现在根据留数定理积分为零，即 $J_i=0$，因为在曲线 C 所包围的区域内被积函数是一个正则函数。这对任意一个正的实的 η 和 R 的值都成立，所以我们可以通过取极限 $R\to\infty$ 和 $\eta\to 0$ 而获得

$$0 = I_i + \lim_{\eta\to 0}\lim_{R\to\infty} \int_{-\mathrm{i}R}^{-\mathrm{i}\eta} \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\rho B_i} + \lim_{R\to\infty} \int_{C_1} \frac{\mathrm{d}z}{z} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}zB_i} + \lim_{\eta\to 0} \int_{C_2} \frac{\mathrm{d}z}{z} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}zB_i}. \tag{6}$$

利用参数化 $z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ 我们可以将沿着 C_1 的积分表示成下列形式

$$\int_{C_1} \frac{\mathrm{d}z}{z} \exp(-\mathrm{i}zB_i) = \mathrm{i} \int_{2\pi}^{3\pi/2} \mathrm{d}\phi \exp(-\mathrm{i}R\cos\phi\, B_i)\exp(R\sin\phi\, B_i), \tag{7}$$

我们现在假定质量 M_i^2 选择得比 $\beta_1\beta_2q^2$ 大，即 $B_i>0$。

当振荡因子 $\exp(-\mathrm{i}R\cos\phi B_i)$ 的绝对值取 1 时，在 $R\to\infty$ 极限下，第二个因子是指数压低的(除掉与 $\phi=2\pi$ 邻近的狭隘区域，因为它的延拓是 $1/R$ 的量级，该区域可以略去)，结果整个沿着

C_1 的积分等于零，类似地考虑，沿着 C_2 的积分值为 $i\pi/2$（取极限 $\eta\to 0$ 后），我们最终得到

$$I_i=-\lim_{\eta\to 0}\lim_{R\to\infty}\int_{-iR}^{-i\eta}\frac{d\rho}{\rho}e^{-i\rho B_i}-i\frac{\pi}{2}$$

$$=\lim_{\eta\to 0}\int_{-i\eta}^{-i\infty}\frac{d\rho}{\rho}e^{-i\rho B_i}-i\frac{\pi}{2}, \tag{8}$$

式中在上限时的收敛是不成问题的，做替代 $t=i\rho B_i$ 积分成为

$$I_i=\lim_{\eta\to 0}\int_{\eta B_i}^{\infty}\frac{dt}{t}e^{-t}-i\frac{\pi}{2} \tag{9}$$

它具有正的下限，这是因为假定了 $B_i>0$，分部积分得

$$I_i=\lim_{\eta\to 0}\left(\ln te^{-t}\Big|_{\eta B_i}^{\infty}+\int_{\eta B_i}^{\infty}dt\ln te^{-t}\right)-i\frac{\pi}{2}$$

$$=\lim_{\eta\to 0}\left[-e^{-\eta B_i}(\ln\eta+\ln B_i)+\int_{\eta B_i}^{\infty}dt\ln te^{-t}\right]-i\frac{\pi}{2}$$

$$=-\lim_{\eta\to 0}\ln\eta-\ln(M_i^2-\beta_1\beta_2q^2)+\int_0^{\infty}dt\ln te^{-t}-i\frac{\pi}{2}. \tag{10}$$

对 i 从 0 到 N 求和就获得确定到常数项 $-i\pi/2$ 的(5.35)，因为选择了 $\sum_{i=0}^{N}C_i=0$（参见(5.36)），故常数项略去。

练　习

5.2 光子极化函数

问题：(a) 试导出(5.39)式给出的对所有 q^2 值都成立的重整化的光子极化函数 $\prod^R(q^2)$ 的明显表达式。证明 $\prod^R(q^2)$ 在 $q^2>4m^2$ 区间上有一虚部并给出该虚部的解。

(b) 证明光子极化函数能够按照下式的“减除色散关系”仅用其虚部来表示。

$$\prod^R(q^2)=\frac{1}{\pi}q^2\int_0^{\infty}dq'^2\frac{\mathrm{Im}\prod^R(q'^2)}{q'^2(q'^2-q^2-i\varepsilon)}. \tag{1}$$

解答：(a)极化光子函数，可以借助下列积分表示获得

$$\prod^R(q^2)=\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1d\beta\beta(1-\beta)\ln\left[1-\beta(1-\beta)\frac{q^2}{m^2}\right]$$

$$=-\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1d\beta\left(\frac{1}{2}\beta^2-\frac{1}{3}\beta^3\right)\frac{1}{1-\beta(1-\beta)\frac{q^2}{m^2}}\left[-\frac{q^2}{m^2}(1-2\beta)\right], \tag{2}$$

在第二行中的对数已经通过分部积分消除掉，在(2)式中的分母能够借助于新的积分变量 $v=2\beta-1$(即 $\beta(1-\beta)=\frac{1}{4}(1-v^2)$)而简化：

$$\Pi^R(q^2)=\frac{2\alpha}{\pi}\frac{q^2}{m^2}\int_{-1}^{+1}\mathrm{d}v\,\frac{1}{4}(1+v)^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}v\right)\frac{-v}{1-\frac{q^2}{4m^2}(1-v^2)}$$

$$=-\frac{\alpha}{\pi}\frac{q^2}{4m^2}\int_{-1}^{+1}\mathrm{d}v\,\frac{\frac{1}{3}v+\frac{1}{2}v^2-\frac{1}{6}v^4}{1-\frac{q^2}{4m^2}(1-v^2)}$$

$$=-\frac{\alpha}{\pi}\int_0^1\mathrm{d}v\,\frac{v^2(1-\frac{1}{3}v^2)}{v^2+\frac{4m^2}{q^2}-1}\,. \tag{3}$$

在最后一步中，我们已经利用了被积函数的对称性。积分能用基本方法求得，我们提醒读者注意的是基本的不定积分

$$\int\frac{\mathrm{d}v}{v^2-c}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{c}}\ln\left|\dfrac{v-\sqrt{c}}{v+\sqrt{c}}\right| & c>0\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{-c}}\arctan\dfrac{v}{\sqrt{-c}} & c<0\end{cases}. \tag{4}$$

式中定义 $c=1-4m^2/q^2$，我们得区别动量平方的 3 个分立的区域。

区域 Ⅰ　$-\infty<q^2<0$：$1<c<\infty$，

区域 Ⅱ　$0<q^2\leqslant 4m^2$：$-\infty<c\leqslant 0$，

区域 Ⅲ　$4m^2<q^2<\infty$：$0<c<1$.

这里，区间 3 特别有趣，因为被积函数的两个极点之一进入了积分区域 $v\in[0,1]$。为了得到确定的结果，我们必须记得有一个通常的方案处理这种极点，这就要回到 Feynman 传播子的定义中去。通过给出一个小的负的虚部的质量($m\to m-\mathrm{i}\varepsilon$)，将(2)和(3)式中的极点移到复平面的上半部；相当于积分回路能通过加入一个延伸到下半平面的无限小半圆来进行修正。于是，一个定积分就由主值积分加上在 $v_0=\sqrt{c}$ 处的极点的留数的一半所组成：

$$I_0=\int_0^1\mathrm{d}v\,\frac{1}{v^2-c-\mathrm{i}\varepsilon}=\left[\int_0^{v_0-\epsilon}+\int_{v_0+\varepsilon}^1\right]\mathrm{d}v\,\frac{1}{v^2-c}+\frac{1}{2}2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\,\frac{1}{v^2-c}\bigg|_{v_0}$$

$$=\mathrm{P}\int_0^1\mathrm{d}v\,\frac{1}{v^2-c}+\pi\mathrm{i}\,\frac{1}{2v_0}\,. \tag{5}$$

这相应于著名的恒等式

$$\frac{1}{x-\mathrm{i}\varepsilon}=\mathrm{P}\,\frac{1}{x}+\mathrm{i}\pi\delta(x). \tag{6}$$

从而在有趣的三个区域，我们获得

$$I_0=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{c}}\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}+1} & \text{对}\quad 1<c<\infty\\ \dfrac{1}{\sqrt{-c}}\arctan\dfrac{1}{\sqrt{-c}} & \text{对}\quad -\infty<c\leqslant 0.\\ \dfrac{1}{\sqrt{c}}\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-\sqrt{c}}{1+\sqrt{c}}+\mathrm{i}\dfrac{\pi}{2\sqrt{c}} & \text{对}\quad 0<c<1\end{cases}\tag{7}$$

在(3)式中需要的下列类型的积分

$$I_n=\int_0^1 \mathrm{d}v\,\frac{v^n}{v^2-c-\mathrm{i}\varepsilon}\tag{8}$$

可以利用下列递推关系式追溯到 I_0

$$I_n-cI_{n-2}=\int_0^1 \mathrm{d}v v^{n-2}=\frac{1}{n-1}.\tag{9}$$

利用(7)式与(9)式,我们获得极化函数的下列结果:

$$\prod{}^{\mathrm{R}}(q^2)=\frac{\alpha}{\pi}\left[-\frac{5}{9}-\frac{4}{3}\frac{m^2}{q^2}+\frac{1}{3}\left(1+\frac{2m^2}{q^2}\right)f(q^2)\right],\tag{10}$$

其中的缩写为

$$\begin{aligned}f(q^2)&=\sqrt{1-\frac{4m^2}{q^2}}\ln\frac{\sqrt{1-\dfrac{4m^2}{q^2}}+1}{\sqrt{1-\dfrac{4m^2}{q^2}}-1},\quad q^2<0\\&=2\sqrt{\frac{4m^2}{q^2}-1}\arctan\frac{1}{\sqrt{\dfrac{4m^2}{q^2}-1}},\quad 0<q^2\leqslant 4m^2\\&=\sqrt{1-\frac{4m^2}{q^2}}\ln\frac{1+\sqrt{1-\dfrac{4m^2}{q^2}}}{1-\sqrt{1-\dfrac{4m^2}{q^2}}}-\mathrm{i}\pi\sqrt{1-\frac{4m^2}{q^2}},\quad 4m^2<q^2.\end{aligned}\tag{11}$$

图 5.13 给出了 π/α 乘以 $\prod^{\mathrm{R}}(q^2)$ 的函数。该函数在 $q^2=0$ 处是光滑的,但是在动量 $q^2=4m^2$ 处是数学上奇异的,在这个不连续点处,出现了一个虚部 $\mathrm{Im}\prod^{\mathrm{R}}(q^2)$。

在大动量处,极化函数对数地增加:

$$\prod{}^{\mathrm{R}}(q^2)\simeq\frac{\alpha}{\pi}\left(-\frac{5}{9}+\frac{1}{3}\ln\frac{|q^2|}{m^2}-\frac{1}{3}\mathrm{i}\pi\Theta(q^2-4m^2)\right).\tag{12}$$

$\prod^{\mathrm{R}}$ 的虚部能作如下的理解:这个 $q^2=4m^2$ 的值是通过电磁场产生实的电子-正电子对的阈值。$1+\prod^{\mathrm{R}}$ 量起着真空的双电子函数的作用,正如在宏观极化介质情形中,介电函数的负虚部标记着电磁辐射的吸收。在我们的情形中,A_μ 场的强度在 e^+e^- 对产生时消失。

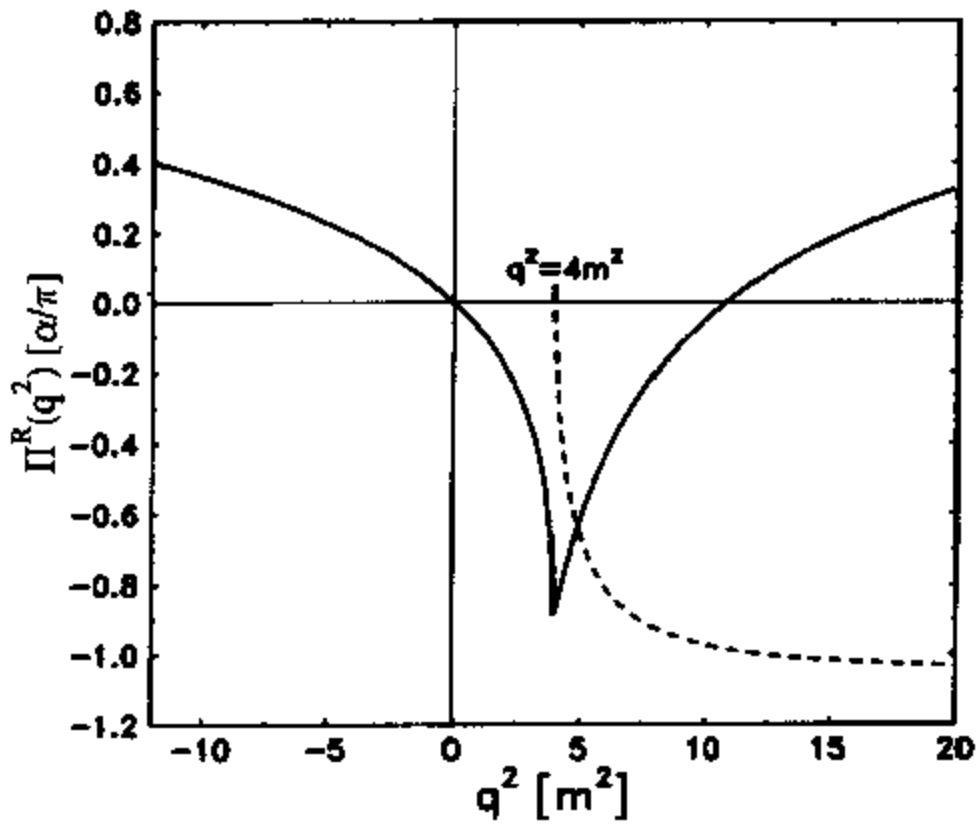


图 5.13　光子极化函数 $\prod^R(q^2)$ 的实部(实线)和虚部(虚线)作为动量平方 q^2 的函数画出(以 α/π 为单位)

(b) (1)式的正确性容易验证。由(10)式,我们插入

$$\mathrm{Im}\prod^R(q'^2) = -\frac{\alpha}{\pi}\frac{1}{3}\left(1+\frac{3m^2}{q'^2}\right)\sqrt{1-\frac{4m^2}{q'^2}}\pi\Theta(q'^2-4m^2) \tag{13}$$

进行变量代换 $q'^2=4m^2/(1-v^2)$,即 $v=\sqrt{1-4m^2/q'^2}$。根据(3)式我们立刻导出

$$\frac{1}{\pi}q^2\int_{4m^2}^{\infty}\mathrm{d}q'^2\frac{\mathrm{Im}\prod^R(q'^2)}{q'^2(q'^2-q^2-\mathrm{i}\varepsilon)} = -\frac{\alpha}{\pi}\int_0^1\mathrm{d}v\frac{v^2(1-\frac{1}{3}v^2)}{v^2+\frac{4m^2}{q^2}-1-\mathrm{i}\varepsilon} = \prod^R(q^2) \tag{14}$$

减除色散关系这一名称来自于(1)式能被分解成下列部分分数形式

$$\prod^R(q^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{d}q'^2\mathrm{Im}\prod^R(q'^2)\left(\frac{1}{q'^2-q^2-\mathrm{i}\varepsilon}-\frac{1}{q'^2}\right). \tag{15}$$

这儿,为了使得积分有限 q^2 非依赖项被减除掉了。不做这一减除,积分将成对数型发散,合理考虑 $\prod^R(q^2)$ 在复 q^2 平面上的行为后,色散关系(1)式可由 Cauchy 积分公式推得。

练　习

5.3　Uehling 势

问题:在考虑了真空极化时,计算由一个外部点电荷 $-Ze$ 所产生的势。靠近荷电中心和远离

荷电中心很大距离处的 Coulomb 势的偏差是什么？求出真空中引起的极化电荷密度。提示：利用恒等式

$$(\nabla^2 - \mu^2)\frac{e^{-\mu r}}{r} = -4\pi\delta^3(\boldsymbol{x}). \tag{1}$$

解答：势是由一个稳定的外部电荷密度产生的

$$j_\mu(x) = -Ze\delta^3(\boldsymbol{x})\delta_{\mu 0}. \tag{2}$$

考虑真空极化效应，借助于(5.6)式中的修正的光子传播子 D'_F 可计算这个势。在动量空间中进行操作是很方便的

$$\begin{aligned} A'_\mu(x) &= \int d^4y\, D'_{F\mu\nu}(x-y)j_\nu(y) \\ &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}e^{-iq\cdot x}D'_{F\mu\nu}(q)j^\nu(q). \end{aligned} \tag{3}$$

修正的光子传播子能根据重整化的真空极化函数来描述，在动量空间中其形式为

$$\begin{aligned} D'_{F\mu\nu}(q) &= D_{F\mu\nu}(q) - D_{F\mu\lambda}(q)\frac{\prod^{\lambda\sigma}(q)}{4\pi}D_{F\sigma\nu}(q) \\ &= \frac{-4\pi g_{\mu\nu}}{q^2} - \frac{-4\pi g_{\mu\lambda}}{q^2}\frac{q^2 g^{\lambda\sigma} - q^\lambda q^\sigma}{4\pi}\prod{}^{R}(q^2)\frac{-4\pi g_{\sigma\nu}}{q^2} \\ &= \frac{-4\pi g_{\mu\nu}}{q^2}\left(1 + \prod{}^{R}(q^2)\right). \end{aligned} \tag{4}$$

从而修正的势(3)式为

$$\begin{aligned} A'_\mu(x) &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}e^{-iq\cdot x}\left(1 + \prod{}^{R}(q^2)\right)D_{F\mu\nu}(q)j^\nu(q) \\ &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}e^{-iq\cdot x}\left(1 + \prod{}^{R}(q^2)\right)A_\mu(q). \end{aligned} \tag{5}$$

由于在动量空间中未修正的势是通过 $A_\mu(q) = D_{F\mu\nu}(q)j^\nu(q)$ 与流相关的，如果流源是稳定的，$j^\nu(x) = j^\nu(\boldsymbol{x})$，(5)式中的 q_0 依赖，根据下式就消失

$$\begin{aligned} j^\nu(q) &= \int d^4y e^{iq\cdot y}j^\nu(y) = \int dy_0 e^{iq_0 y_0}\int d^3y e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{y}}j^\nu(y) \\ &= 2\pi\delta(q_0)j^\nu(\boldsymbol{q}). \end{aligned} \tag{6}$$

从而(5)式被化简

$$\begin{aligned} A'_\mu(\boldsymbol{x}) &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\left(1 + \prod{}^{R}(-\boldsymbol{q}^2)\right)D_{F\mu\nu}(0,\boldsymbol{q})j^\nu(\boldsymbol{q}) \\ &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\left(1 + \prod{}^{R}(-\boldsymbol{q}^2)\right)A_\mu(\boldsymbol{q}). \end{aligned} \tag{7}$$

在点电荷(2)情形，我们有

$$j^\nu(\boldsymbol{q}) = \int d^3y e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{y}}(-Ze\delta_{\nu 0}\delta^3(\boldsymbol{y})) = -Ze\delta_{\nu 0}, \tag{8}$$

所以(7)式变成

$$A'_\mu(\boldsymbol{x}) = -Ze\int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\left(1+\prod{}^{\mathrm{R}}(-\boldsymbol{q}^2)\right)D_{\mathrm{F}\mu 0}(0,\boldsymbol{q}) \tag{9}$$

或者代入极化函数(5.39)后有

$$A'_0(\boldsymbol{x}) = -Ze\int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\frac{4\pi}{\boldsymbol{q}^2}$$

$$\times\left[1+\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 \mathrm{d}\beta\,\beta(1-\beta)\ln\left(1+\frac{\boldsymbol{q}^2}{m^2}\beta(1-\beta)\right)\right]. \tag{10}$$

此处在技巧上我们已经很巧妙地假定进行了电荷重整化，也就是说，e 是重整化电荷。从恒等式(用 $r\equiv|\boldsymbol{x}|$)，

$$\int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{q}^2} = \frac{1}{4\pi r} \tag{11}$$

当然，(10)式中的第一项的 Fourier 变换就正好产生了原来的 Coulomb 势。当计算修正项时，根据分部积分消除对数项并引入新的积分变量 $v=2\beta-1$ 是方便的。根据练习 5.2 中的(3)式就能得出：

$$\prod{}^{\mathrm{R}}(-\boldsymbol{q}^2) = \frac{\alpha}{\pi}\frac{\boldsymbol{q}^2}{4m^2}\int_0^1 \mathrm{d}v\,\frac{v^2\left(1-\frac{1}{3}v^2\right)}{1+\frac{\boldsymbol{q}^2}{4m^2}(1-v^2)}. \tag{12}$$

在交换(10)式中的积分次序后，就能求出 Fourier 积分。为此，我们利用公式

$$\int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{q}^2+a^2} = \frac{1}{4\pi}\frac{\exp(-ar)}{r}, \tag{13}$$

这可以借助留数积分很容易证明，从而势为

$$A'_0(\boldsymbol{x}) = -Ze\left[\frac{1}{r}+\frac{2\alpha}{\pi}\frac{4\pi}{8m^2}\int_0^1 \mathrm{d}v\,v^2\left(1-\frac{1}{3}v^2\right)\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x})}{1+\frac{\boldsymbol{q}^2}{4m^2}(1-v^2)}\right]$$

$$= -\frac{Ze}{r}\left[1+\frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 \mathrm{d}v\,\frac{v^2\left(1-\frac{1}{3}v^2\right)}{1-v^2}\exp\left(-\frac{2m}{\sqrt{1-v^2}}r\right)\right]. \tag{14}$$

进一步用变换 $\zeta=(1-v^2)^{-1/2}$或者 $v^2=1-1/\zeta^2$，$v\mathrm{d}v=\zeta^{-3}\mathrm{d}\zeta$ 可简化指数部分：

$$A'_0(r) = -\frac{Ze}{r}\left[1+\frac{\alpha}{\pi}\frac{1}{3}\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta^3}v(3-v^2)\mathrm{e}^{-2m\zeta r}\right]$$

$$= -\frac{Ze}{r}\left[1+\frac{2\alpha}{3\pi}\int_1^\infty \mathrm{d}\zeta\left(1+\frac{1}{2\zeta^2}\right)\frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta^2}\mathrm{e}^{-2m\zeta r}\right]. \tag{15}$$

这是一个通常使用的 Uehling 势的积分表示。其中积分不能够用封闭形式导出，但是可以通过数值计算获得。获得对修正项行为的印象，我们就可以得到对 $mr\ll 1$ 和 $mr\gg 1$ 情况的渐近表达式。

对 $mr\ll1$，我们首先让(15)式积分在 τ 点处分解成两部分

$$\int_1^\infty d\zeta e^{-2mr\zeta}\frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta^2}=\int_1^\tau\cdots+\int_\tau^\infty\cdots\equiv I_1+I_2, \tag{16}$$

其中，我们选取 $1/mr\gg\tau\gg1$。于是在 I_1 中指数能被假定成一个常数($\exp(-2mr\zeta)\approx1$)

$$I_1\simeq\int_1^\tau d\zeta\frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta^2}=\left[-\frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta}+\ln(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\right]_1^\tau$$

$$\simeq\ln(2\tau)-1. \tag{17}$$

在第二个积分中，我们可以作近似$\sqrt{\zeta^2-1}\simeq\zeta$，从而我们有

$$I_2\simeq\int_\tau^\infty\frac{d\zeta}{\zeta}e^{2mr\zeta}. \tag{18}$$

分部积分后，积分在下限收敛，

$$I_2\simeq e^{-2mr\zeta}\ln\zeta|_\tau^\infty+2mr\int_\tau^\infty d\zeta\ln\zeta e^{-2mr\zeta}$$

$$=-e^{-2mr\tau}\ln\tau+\int_{2mr\tau}^\infty du\ln\frac{u}{2mr}e^{-u}$$

$$\simeq-\ln\tau+\int_0^\infty du\ln u\,e^{-u}+\ln\frac{1}{2mr}\int_0^\infty du\,e^{-u}$$

$$=-\ln\tau-C-\ln2+\ln\frac{1}{mr}. \tag{19}$$

这儿出现了一个有名的积分 $\int_0^\infty du\ln u\exp(-u)$，其值等于 Euler 常数 $C=0.5772...$ 的负值，从而

$$I_2\simeq-\ln2\tau+\ln\frac{1}{mr}-C. \tag{20}$$

正如所预料的，当 I_1 和 I_2 相加时，与值 τ 的依赖性相消。(15)式中的第二个积分，在(16)式当中没被考虑，它不会引起任何麻烦，因为，它在大的 ζ 下，即使没有指数函数帮助它也收敛。所以我们能作下列近似，

$$\int_1^\infty d\zeta e^{-2mr\zeta}\frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{2\zeta^4}\simeq\int_1^\infty d\zeta\frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{2\zeta^4}=\frac{1}{2}\frac{(\zeta^2-1)^{3/2}}{3\zeta^3}\Big|_1^\infty=\frac{1}{6}. \tag{21}$$

于是，对 $mr\ll1$ 的情形，势的渐近近似就变成

$$A_0'(r)\simeq-\frac{Ze}{r}\left[1+\frac{2\alpha}{3\pi}\left(\ln\frac{1}{mr}-\frac{5}{6}-C\right)\right] \tag{22}$$

对 $mr\gg1$ 的情形。仅有 $0\leqslant\zeta-1\ll1/mr$ 区域才对积分有贡献。因此，我们能够在不同的地方作近似 $\zeta\simeq1$，

$$\int_1^\infty d\zeta\left(1+\frac{1}{2\zeta^2}\right)\frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta^2}e^{-2mr\zeta}\simeq\int_1^\infty d\zeta\,\frac{3\sqrt{2}}{2}\sqrt{\zeta-1}e^{-2mr\zeta}$$
$$=\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{-2mr}\int_0^\infty d\zeta'\sqrt{\zeta'}e^{-2mr\zeta'}. \tag{23}$$

利用 Γ 函数的积分表示

$$\int_0^\infty dt\,e^{-at}t^{z-1}=a^{-z}\Gamma(z), \tag{24}$$

和 $\Gamma(3/2)=\sqrt{\pi}/2$，对 $mr\gg1$，我们得到

$$A_0'(r)\simeq-\frac{Ze}{r}\left[1+\frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}}\frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}}\right] \tag{25}$$

从而求得了在类点正电荷场中，一个电子感受到相互作用

$$eA_0'(r)=-\frac{Z\alpha}{r}Q(r), \tag{26}$$

式中，根据(25)式，$Q(r)$是一个在大距离很快趋近于 1 的函数。仅当 r 比一个电子的 Compton 波长小的时候，才能感觉到偏差的存在。前面用到的(5.56)近似式只是平均地给出了这种效应。函数 $eQ(r)$能被认作等效的耦合“常数”，它在小距离处增大。这也称作跑动耦合常数。图 5.14 式给出了这个函数 $Q(r)$，它由(15)式数值积分获得。等效相互作用强度在小 r 处的对数增加是明显的，然而只有在极其小的距离处，函数 $Q(r)$才远离 1。

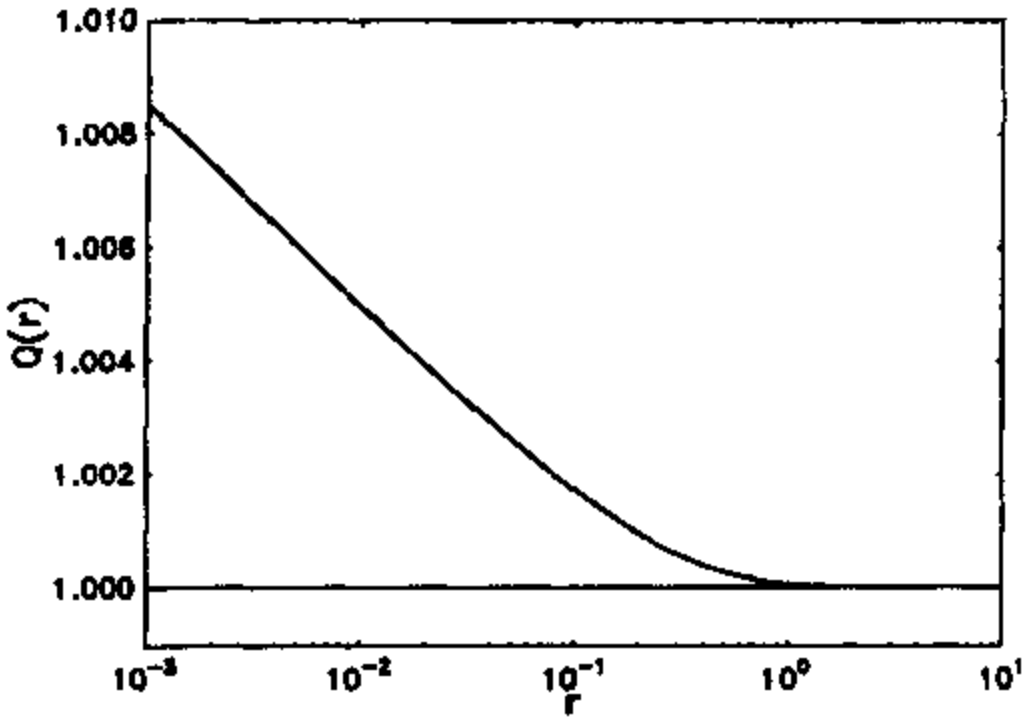


图 5.14　等效耦合强度 $Q(r)$作为距离 r 的函数(以 Compton 波长为单位)

从这个势 $A_0(x)$用 Poisson 方程可以算出相应的极化电荷密度，利用 Uehling 势的积分表达式(15)，求得真空极化电荷分布为

$$\rho_{VP}(x)=-\frac{1}{4\pi}\nabla^2 A_0^{VP}$$
$$=-\frac{1}{4\pi}(-Ze)\frac{2\alpha}{3\pi}\int_1^\infty d\zeta\left(1+\frac{1}{2\zeta^2}\right)\frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta^2}\nabla^2\left(\frac{e^{-2m\zeta r}}{r}\right). \tag{27}$$

利用恒等式(1),我们求得

$$\rho_{VP}(x)=-Ze\frac{2\alpha}{3\pi}\int_1^\infty d\zeta\left(1+\frac{1}{2\zeta^2}\right)\frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta^2}\left[\delta^3(x)-\frac{m^2}{\pi}\zeta^2\frac{e^{-2m\zeta r}}{r}\right]. \tag{28}$$

从而感生极化电荷包含两部分:在 $x=0$ 处存在的一个正电荷,和一个延伸到 Compton 波长 $1/m$ 尺度区域的负电荷云。它表示在图 5.15a 中。5.15b 给出了在真空中感生的 e^+e^- 对的分布的示意图,感生电荷云的行为正好和原有的极化介质情况相反! 我们希望一个偶极层形成,其中相反的(即负的)电荷处在内部,而同种(即正的)电荷处在外部,我们将在第 7.1 节末尾,再次回到真空极化电荷这种明显有点矛盾的行为。

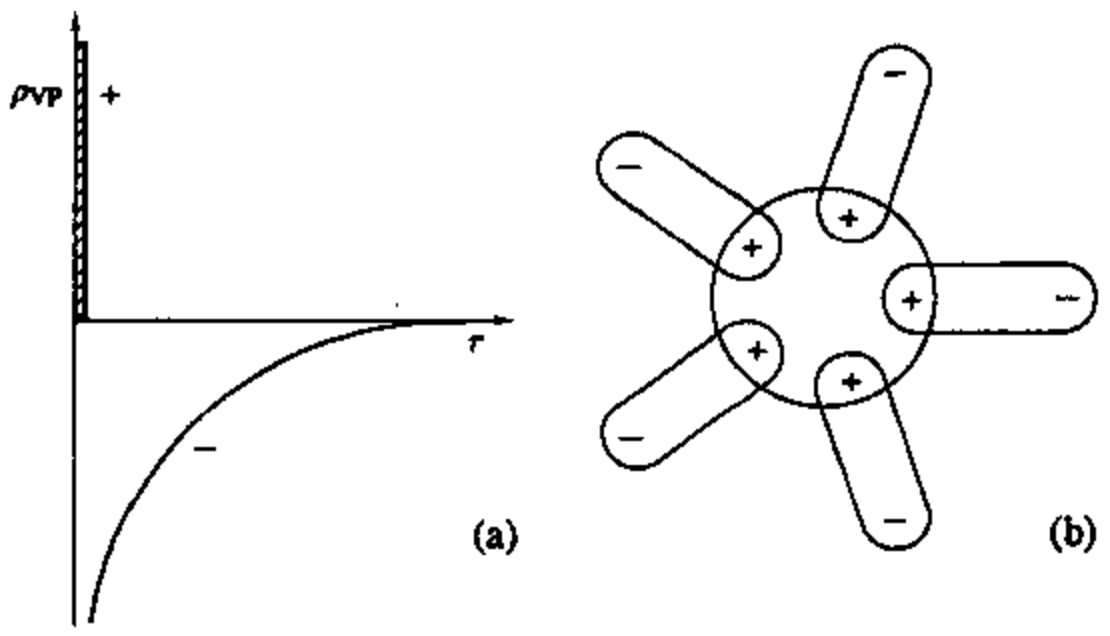


图 5.15(a)(b) (a)外部正的点源电荷感生的真空极化电荷密度,它由处在点源位置的正的部分和负的扩展的极化电荷云组成。(b)在扩展正电荷源周围真空感生的电子-正电子对的示意图

总的真空感生电荷被发现为零。这可利用 Poisson 方程和 Gauss 定理很快给出,

$$Q_{VP}=\int d^3x\rho_{VP}(x)=-\frac{1}{4\pi}\int d^3x\nabla\cdot(\nabla A_0^{VP})$$
$$=-\frac{1}{4\pi}\int d\sigma\cdot\nabla A_0^{VP}=0, \tag{29}$$

因为根据(25)式,A_0^{VP} 在大距离处比 $1/r$ 下降得更快。

结果(28)式必须细心地去理解,因为在计算总电荷时,两个相消的贡献是发散的。$\delta^3(x)$ 项是被一个上限 $\zeta\to\infty$ 处对数发散的一个积分相乘的。在小距离负的电荷云的行为如同

$$\rho_{\mathrm{VP}}^{(-)}(r)=Ze\frac{2\alpha}{3\pi}\frac{m^2}{\pi}\frac{1}{r}\int_1^\infty \mathrm{d}\zeta\left(1+\frac{1}{2\zeta^2}\right)\sqrt{\zeta^2-1}\,\mathrm{e}^{-2m\zeta r}$$

$$\simeq Ze\frac{2\alpha}{3\pi}\frac{m^2}{\pi}\frac{1}{r}\int_1^\infty \mathrm{d}\zeta\zeta\mathrm{e}^{-2m\zeta r}$$

$$=Ze\frac{2\alpha}{3\pi}\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r^3}, \tag{30}$$

这也能通过应用径向的 Laplace 算符作用于(22)式而获得，从而 $\rho_{\mathrm{VP}}^{(-)}(r)$的积分对数发散。

附加评论：Uehling 势和相应的真空电荷分布也能对一个扩展源作计算，在这种情况下，ρ_{VP}是一个光滑函数而没有发现发散量。我们考虑一个球对称的静电源，

$$j_0(x)\equiv\rho(r)=-Zeh(r), \tag{31}$$

式中 $h(r)$是一个光滑分布函数，它归一成下式

$$\int \mathrm{d}^3x\,h(r)=4\pi\int_0^\infty \mathrm{d}r\,r^2h(r)=1. \tag{32}$$

在 x 处的真空极化势，可以通过对点源 Uehling 势和扩展源分布的卷积来获得，在动量空间中，这种卷积对应着一个简单的乘法，根据(7)式，我们有

$$A_0^{\mathrm{VP}}(x)=\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\prod{}^{\mathrm{R}}(-q^2)\frac{4\pi}{q^2}\tilde{\rho}(q), \tag{33}$$

其中

$$\tilde{\rho}(q)=\int \mathrm{d}^3x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}\rho(x) \tag{34}$$

是源电荷分布的 Fourier 变换。如果 $\rho(x)$是球对称的，$\tilde{\rho}(q)$将仅依赖于动量的绝对值，(33)式中的角向积分能被积出

$$A_0^{\mathrm{VP}}(r)=\frac{2}{\pi}\int \mathrm{d}|q|\frac{\sin|q|r}{|q|r}\prod{}^{\mathrm{R}}(-q^2)\tilde{\rho}(|q|). \tag{35}$$

重整化的极化函数 $\prod^{\mathrm{R}}(-q^2)$ 可以解析获得(参见练习 5.2 中的(10)式)，剩下来的 (35)式中的一维积分一般需用数值求解。

作为一个例子，让我们考虑一个扩展的原子核中的电荷分布，它能够由 Fermi 分布函数[①] 近似给出，

$$\rho(r)=\frac{\rho_0}{1+\mathrm{e}^{(r-R)/c}}. \tag{36}$$

参数 R 表示原子核的半径，而 c 表示表面的“弥散”(极限 $c\to 0$ 导致一个明显的表面)。函数(36)不能以封闭的形式作 Fourier 变换，但是$\tilde{\rho}(q)$能按照快速收敛的级数展开来表示[②]。

图 5.16 表明，对原子核^{208}Pb 的例子，Uehling 势由扩展源(36)感生出来。我们采用了参数 Z

① 如果一个盒分布 $\rho(r)=\rho_0\Theta(R-r)$代替式 (36)，导致真空电荷在核表面发散。

② V. Hnizdo: J. Phys. **A21**, 3629(1988).

$=82, R=6.62\text{fm}, c=0.549\text{fm}$。虚线表示 Uehling 势 eA_0^{VP}(以 MeV 为单位),而实线表示借助 Poisson 方程所导出的真空感生电荷。结果与前面所讨论的类点源(见图 5.14)的情况相类似,在源的内部电荷密度由于真空极化而得以增强,在外部存在一个负的电荷云(为了更好地看清这一点,我们已将放大 30 倍的曲线画在图中)。图 5.17 给出了径向真空电荷密度 $r^2\rho^{VP}$。当我们积分到几个 Compton 波长距离时,曲线下的面积为零,由于 α 的值很小,总的正的和负的感生电荷也很小,($Q_{\overline{VP}}=-Q_{VP}^{+}=0.037e$ 与源的电荷 $Q=-82e$ 相比)。

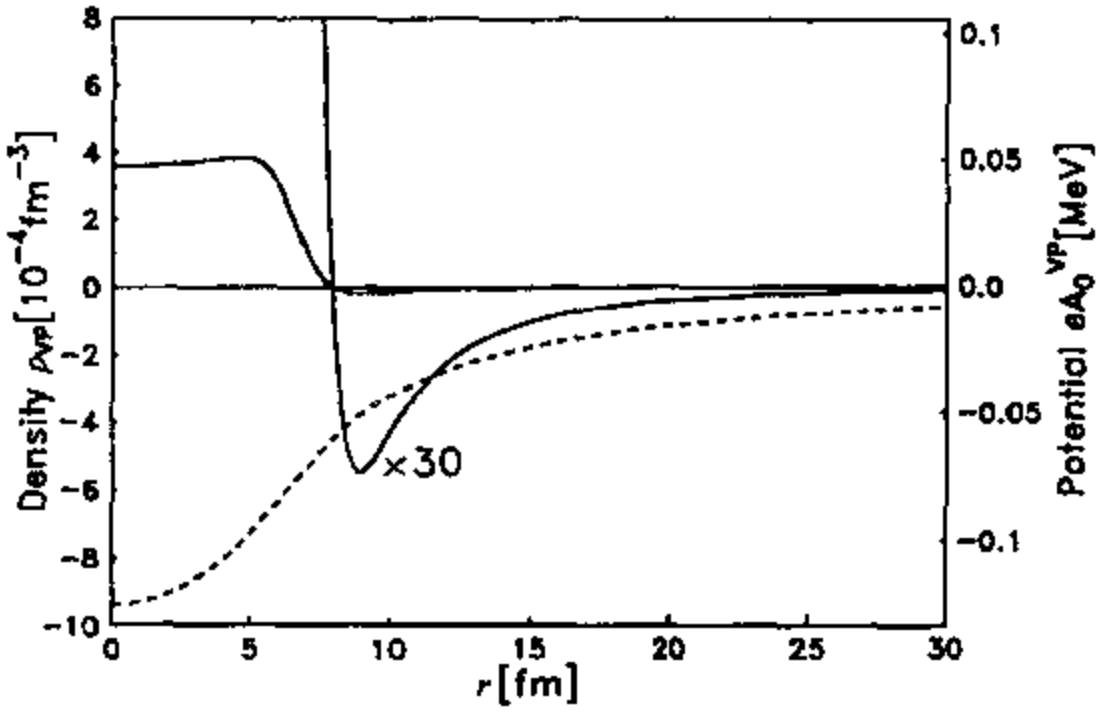


图 5.16 扩展^{208}pb 核感生的 Uehling 势 $eA^{VP}(r)$(虚线),实线表示相应的真空极化电荷密度 $\rho_{VP}(r)$。它在核内为正,而在核外为负

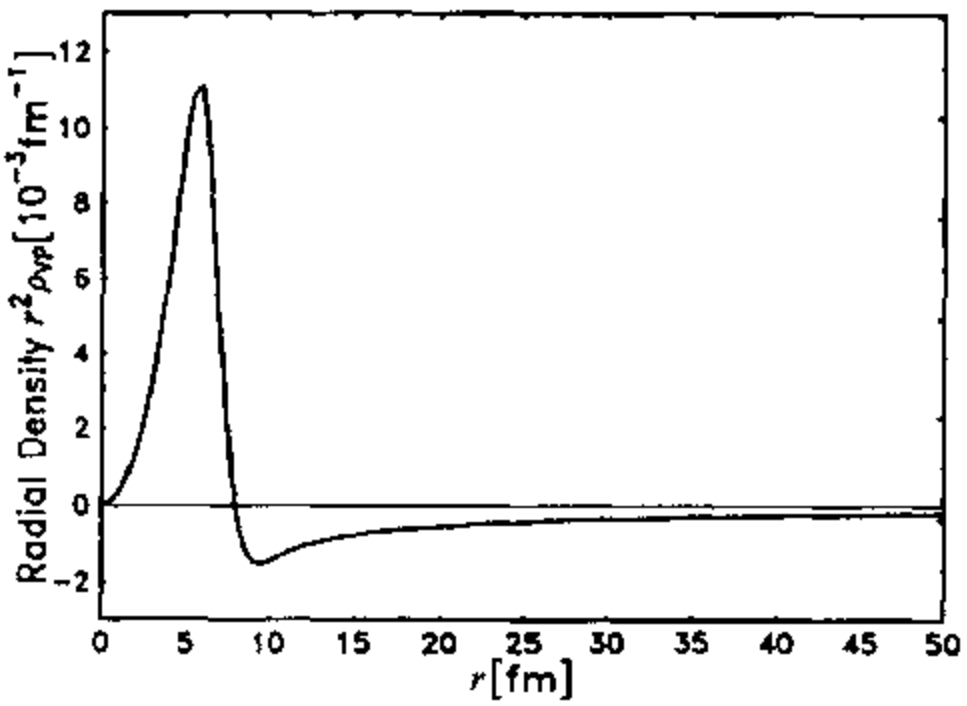


图 5.17 图 5.16 所示的真空极化电荷密度在这里乘以径向体元 $r^2\rho_{VP}$,曲线下的总面积必须为零

例　子

5.4　μ原子

一个非常有效的增大真空极化强度的方法是，用负的 μ 介子(μ^-)替代电子作为测试电荷。正如我们知道的，这些粒子像电子一样严格服从 QED，然而又与电子不同。在质量上 μ 子比电子大一个因子 $m_\mu/m_e=206.77$。它们通过弱相互作用衰变[①]($\mu^-\to e^-+\nu_\mu+\bar{\nu}_e$)，但是，在电磁过程中由于它们的寿命长达 $2.2\times10^{-6}s$，因此它们能被认为是几乎稳定的。

如今 μ 介子束流能不费力地在粒子加速器上产生。用一个高能质子轰击一个靶，产生 π 介子，大约 2×10^{-8}秒之后，它衰变成 μ 子和中微子($\pi^-\to\mu^-+\nu_\mu$)，接着 μ 子在物质中由碰撞而减速。最后变得足够慢的 μ 子能被一个原子俘获。通常，它首先被原子的一个外壳(主量子数 n 通常为 14)俘获，在那里它由级联辐射跃迁，跳到 $1s$ 能级。与上述所说到的自由衰变不同，它然后最有可能被原子核内的一个质子俘获($\mu^-+p^+\to n+\nu_\mu$)。级联辐射只需要大约 $10^{-9}\cdots10^{-12}$秒，这与 μ 子的寿命相比是很快的。在层之间的跃迁主要是发射电子(Auger 跃迁)，而内壳层轨道间的跃迁是通过光子发射而实现的。这些过程发射的 X 光线，可以很精确地被测量到。

QED 中 μ 子原子行为特别有趣，由于大的 μ 子质量，其束缚态是高度定域的，它的 Bohr 半径(用 $\hbar=c=1$)

$$a_B^{(\mu)}=\frac{n}{m_\mu(Z\alpha)}\,, \tag{1}$$

比电子型原子要小一个因子 m_e/m_μ，所以它能够容易变得比电子的 Compton 波长 $\lambda_e/2\pi=1/m_e$ 更小，$\lambda/2\pi=1/m_e$ 是一个典型的真空涨落的标度。图 5.18 给出了重的 μ 原子的相关标度。这儿 r_n 代表着原子核半径，$a_B^{(\mu)}$ 和 $a_B^{(e)}$ 分别是 μ 子和电子的 Bohr 半径。

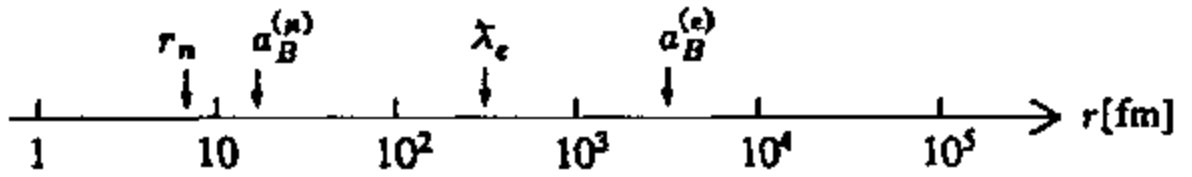


图 5.18　μ原子的相关长度标度

由此 μ 原子是一个检测真空极化的理想工具，能移(5.58)式的简单估算被修正为

$$\Delta E_{nl}^{\mathrm{VP}}=-\,\alpha(Z\alpha)^4\,\frac{4m_e}{15\pi n^3}\delta_{l0}\left(\frac{m_\mu}{m_e}\right)^3. \tag{2}$$

这一点很快可以从(5.57)式中获得。然而这一简单近似不足以获得足够的精度，我们必须利用

① 完全的讨论见 W. Greiner 和 B. Müller: Theoretical Physics, Vol. 5, *Gauge Theory of Weak Interactions* (Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1993).

(5.3)中更精确的 Uehling 势的形式,这需要进行数值积分。

有趣的是,已经发现 μ 原子能移几乎完全是真空极化引起,这与(电子型)氢原子 Lamb 移动的情况不一样。更高精度的测量甚至可以看清更高阶 $Z\alpha$ 的贡献。作为例子,我们在表 5.1 中给出了 μ 铅原子的跃迁,就证实了这一点。

表 5.1

Dirac 能量	429 339±2
VP $\alpha Z\alpha$ Uehling	2 105±1
VP $\alpha^2 Z\alpha$	15
VP $\alpha(Z\alpha)^{n\geqslant 3}$	−43
VP $\alpha^2(Z\alpha)^2$	1
其他修正	0±2
电子屏蔽	−82±4
理论合计	431 336±6
实验*	431 331±8

* T. Dubler et al. ,Nucl. Phys. **A294**,397(1978).

可以看出理论和实验是相当符合的,这不仅确认了 5.10bFeynman 图的 $\alpha Z\alpha$ 量级的主要贡献,此外,对光子传播子的更高阶修正也得到证实,其图在 5.19 中所示。注意,在圈图中产生的粒子是电子-正电子对。而 $\mu^+\mu^-$ 对的贡献很小(如果只有 μ 子,我们当然就和电子型原子有相同的情况——除有限的原子核半径 r_n 外! 只是能量标度才放大一个 m_μ/m_e 因子)。

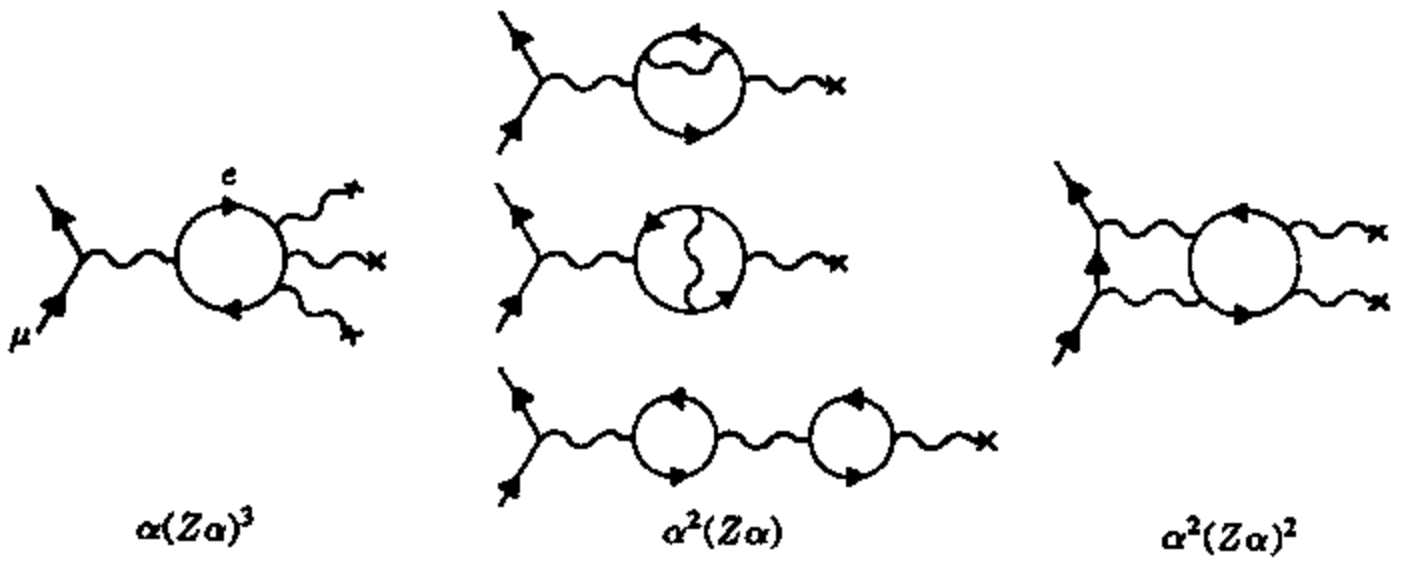


图 5.19 对 μ 原子束缚能有贡献的高阶真空极化图

主要的更高阶贡献是由描述 e^+e^- 圈和原子核场(即 $\alpha(Z\alpha)^3$,$\alpha(Z\alpha)^5$,等等)之间多次相互作用图引起的(由于 Furry 定理只有奇次幂才有贡献),非常繁杂的计算才能确定这些高阶贡献。

最后我们注意到在重的 μ 子原子中必须要考虑原子核的有限尺度,尤其是低轨道确实很大程度上通过原子核内部,所以 μ 子是一个确定核电荷分布和核形变的敏感探针。

数 学 附 注

5.5 Gauss 积分

在下面我们证明一个在辐射修正计算中用到的积分公式($a>0$ 情形)：

$$\int \mathrm{d}^4k\ \exp[\mathrm{i}(ak^2+2b\cdot k)]=\frac{\pi^2}{\mathrm{i}a^2}\exp(-\mathrm{i}b^2/a) \tag{1}$$

方程(1)被分解成四个笛卡尔单重积分。一维积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\ \exp[\mathrm{i}(ax^2+2bx)]\quad (a>0) \tag{2}$$

中进行了变换

$$x=\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}u-\frac{b}{a},\quad \mathrm{i}(ax^2+2bx)=-au^2-\frac{\mathrm{i}b^2}{a}, \tag{3}$$

即转动$-\pi/4$角和原点的平移，它把(2)式变换成标准的 Gauss 积分

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\ \exp[\mathrm{i}(ax^2+2bx)]&=\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\exp(-\mathrm{i}b^2/a)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}u\ \exp(-au^2)\\&=\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp(-\mathrm{i}b^2/a).\end{aligned} \tag{4}$$

由于(1)式中的 Minkowski 度规，我们也需要一个复共轭关系

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\mathrm{i}(ax^2+2bx))\mathrm{d}x=\frac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp(+\mathrm{i}b^2/a). \tag{5}$$

于是，四维积分(1)式变成

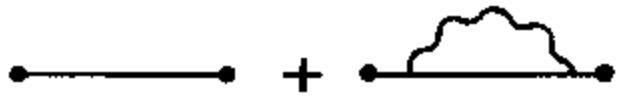
$$\begin{aligned}&\int \mathrm{d}^4k\ \exp[\mathrm{i}(ak^2+2b\cdot k)]\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_0\ \exp[\mathrm{i}(ak_0^2+2b_0k_0)]\prod_{i=1}^{3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_i\ \exp[-\mathrm{i}(ak_i^2+2b_ik_i)]\\&=\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\left(\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^3\frac{\pi^2}{a^2}\exp\left[-\mathrm{i}(b_0^2-\boldsymbol{b}^2)/a\right]\\&=\frac{\pi^2}{\mathrm{i}a^2}\exp(-\mathrm{i}b^2/a).\end{aligned} \tag{6}$$

5.3 电 子 自 能

正如光子传播子被对产生和接着的湮灭所修正那样，电子传播子将被虚光子的发射和再吸收过程所修正。我们要计算非微扰电子传播子

$$iS_F(p) = \frac{i}{\not p - m + i\varepsilon} \tag{5.62}$$

是怎样被图 5.7b 的 Feynman 图修正。在 e^2 量级，我们获得，

$iS'_F(p) =$ 

$$= iS_F(p) + iS_F(p)(-i\Sigma(p))iS_F(p). \tag{5.63}$$

这儿已引入了自能函数

$$-i\Sigma(p) = (-ie)^2\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{-4\pi i}{k^2+i\varepsilon}\gamma^\mu \frac{i}{\not p - \not k - m + i\varepsilon}\gamma_\mu \tag{5.64}$$

(对照(5.3)式)。与极化的 Lorentz 张量 $\prod_\mu(q)$ 不同，$\Sigma(p)$ 是旋量空间的 4×4 矩阵。我们可以把它分解成与 $\not p$ 成比例的项及与单位矩阵成比例的项。然而下面的分解更方便

$$\Sigma(p) = A + B(\not p - m) + \Sigma^R(p)(\not p - m)^2, \tag{5.65}$$

它在某种程度下对应着 $\not p = m$ 点附近的 Taylor 展开。常数 A, B 和剩余项 $\Sigma^R(p)$ 将不包含 γ 矩阵。(5.65)中的最后一项包含与 $\not p\not p = p^2$ 成比例的项，与 $\not p$ 成比例的项以及与 m^2 成比例的项。这样的项当然已在(5.65)中前二项中出现。第三项的新内容就在子这些因子被乘以一个动量相关的函数(留数函数)$\Sigma^R(p)$。在我们进行(5.64)式的详细计算前，我们考察一下(5.65)式中前二项的意义。利用恒等式(5.9)，(5.63)式的链近似能很快地写成几何级数之和，类似光子传播子(5.10)，得到

$$iS'_F(p) = \frac{i}{\not p - m - \Sigma(p) + i\varepsilon}. \tag{5.66}$$

不仅(5.66)式直到 e^2 阶是近似正确的，而且对所有带有任意多个一个接一个的单光子线的图还能准确求和(链式近似)。

现在让我们看一下，在 $\not p = m$ 邻近修正的传播子。这种不严格的说法实际上意味着我们在考察质壳 $p^2 = m^2$ 上旋量波函数间的矩阵元 S'_F。由子自由旋量满足 Dirac 方程 $(\not p - m)u(p) = 0$，在跃迁算符中，如果 $\not p$ 直接作用在自由旋量上，我们可以令 $\not p = m$。这一替换对束缚电子不允许，因为 $\not p\, u(p) \neq \mu(p)$。

由(5.66)和(5.65)式，我们得到

$$iS'_F(p) = \frac{i}{\not p - m - A - B(\not p - m) - (\not p - m)^2\Sigma^R(p) + i\varepsilon}$$

$$\simeq \frac{i}{(\not p - m - A)(1-B)(1-(\not p - m)\Sigma^R(p)) + i\varepsilon}$$

$$\simeq \frac{(1+B)\mathrm{i}}{(\not p - m - A)(1-(\not p - m)\Sigma^{\mathrm{R}}(p)) + \mathrm{i}\varepsilon}. \tag{5.67}$$

这里 A,B,Σ^{R} 被看做 e^2 阶小量。在多种情况下，更高阶项被忽略。例如，在第一个变换中，诸如乘积 AB 等项已被忽略，且在最后一行我们令 $(1-B)^{-1}\simeq 1+B$。在质壳附近，我们可明显地略去动量依赖修正项 $(\not p - m)\Sigma^{\mathrm{R}}(p)$。从而修正的电子传播子可简单表述成

$$\mathrm{i}S'_{\mathrm{F}}(p) \simeq \frac{\mathrm{i}(1+B)}{\not p - m - A + \mathrm{i}\varepsilon} \tag{5.68}$$

或

$$\mathrm{i}S'_{\mathrm{F}}(p) \simeq Z_2\,\mathrm{i}S_{\mathrm{F}}(p, m \to m+\delta m), \tag{5.69}$$

式中已引进了电子重整化常数

$$Z_2 \equiv 1 + B \tag{5.70}$$

和电子自能

$$\delta m \equiv A \tag{5.71}$$

后者将电子传播子的极点从 m 移到 $m+\delta m$。这就意味着如果我们计及了自产生电磁场的作用，则原来具有裸质量 m 的电子，现按物理质量 m_R 在运动

$$m_{\mathrm{R}} = m + \delta m, \tag{5.72}$$

由于完全没有可能消除这种相互作用，所以量 m 和 δm 将没有任何物理意义，这正如在电荷重整化(5.46)式的情况下裸电荷没有物理意义一样。所有可观察量，例如，S 矩阵元，包含重整化质量 $m_{\mathrm{R}}\simeq 0.511\mathrm{MeV}$。从而，我们不要过分担心 δm 又会被证明是发散的。(5.70)式所给因子 Z_2 起着类似的作用。它乘上图中出现的所有的电子传播子。由于内电子线总是处在带有因子 $(-\mathrm{i}e\gamma_\mu)$ 的两顶角之间，所以，我们总可以进行电荷重整化将因子 Z_2 吸收进来，即

$$e'_{\mathrm{R}} = Z_2 e\ . \tag{5.73}$$

与(5.46)式不同，这里不存在平方根，因为总是两电子线共享一个 e 因子。外线的重整化又须作特别的考虑。根据图 5.20，对任意图的外电子线应用 Feynman 规则，便引起一个自能代换



图 5.20　外 Fermi 子线的重整化

$$u'(p) = u(p) + \mathrm{i}S_{\mathrm{F}}(p)(-\mathrm{i}\Sigma(p))u(p) \tag{5.74}$$

此公式的直接应用就导致一个不确定的表达形式 $(\not p - m)^{-1}(\not p - m)\,u(p)$。然而，由于我们已经知道如何去重整化传播子 $S'_{\mathrm{F}}(p)$，根据(2.24)式，后者应该是场幅的平方函数，我们必须进行波函数重整化

$$u'(p) = \sqrt{Z_2}\,u(p). \tag{5.75}$$

在任意复杂的 Feynman 图的矩阵元计算中，重整化常数相消。让我们考虑一个含有 n_e 根电子(或正电子)外线的 n 阶图。容易看出，这里含有 $n-n_e/2$ 条内电子线，考虑电子自能，每一条必须按照(5.69)式进行重整化。这就导致了重整化矩阵元

$$M'_{fi} \sim (Z_2)^{n-n_e/2}\sqrt{Z_2^{n_e}}M_{fi} = Z_2^n M_{fi}, \tag{5.76}$$

该结果完全与根据(5.73)在 n 个顶角中每个顶角处进行电荷重整化所得的结果一致。

在作这些一般考虑之后，剩下来的任务显然就是计算出自能函数 $\Sigma(p)$和确定(5.65)式展开中的各项。正如已经提到的，通过计数 k 的幂次，可知积分(5.64)是线性发散的，从而它必须正规化。然而，(5.64)对小的 k 仍然存在发散问题。虽然暂时不明显，但这个问题在下面的计算中将变得很清楚。为避免所谓的红外发散，我们(形式上)赋予光子一个小质量 μ。考虑这种修正后，自能函数为

$$\Sigma(p,\mu) = -4\pi i e^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-\mu^2+i\varepsilon}\gamma^\mu\frac{\not p-\not k+m}{(p-k)^2-m^2+i\varepsilon}\gamma_\mu. \tag{5.77}$$

(最后，物理观察量必须在 $\mu\to 0$ 极限下计算。此问题的详细讨论将在后面给出)，这样，我们就能处理 积分(5.77)在 $k\to 0$ 时所出现的各种可能的问题。

为计算(5.77)，我们再次引入传播子(5.22)的参数形式。根据数学附注 3.3 中的规则，$\gamma^\mu(\not p-\not k+m)\gamma_\mu=-2\not p+2\not k+4m$，分子能被简化。我们再次提醒读者注意那种简短的计算：

$$\begin{aligned}\gamma^\mu\not p\gamma_\mu &= p^\nu\gamma^\mu\gamma_\nu\gamma_\mu\\ &= p^\nu\gamma^\mu(-\gamma_\mu\gamma_\nu+2g_{\mu\nu})\\ &= -\gamma^\mu\gamma_\mu\not p+2\not p\\ &= -4\not p+2\not p=-2\not p.\end{aligned}$$

当我们根据(5.24)再次将与 k 成正比的因子换成微分表示形式时，我们最终得到用 Pauli-Villars 方法正规化的自能函数：

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma}(p,\mu) =& 4\pi i e^2\int_0^\infty d\alpha_1\int_0^\infty d\alpha_2\left(-2\not p-2i\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial z^\mu}+4m\right)\\ &\times\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\Big(\exp\{i[\alpha_1(k^2-\mu^2)+\alpha_2((p-k)^2-m^2)\\ &+z\cdot k]\}+\mathrm{reg}\Big)\Big|_{z=0}\end{aligned} \tag{5.78}$$

为完成对 k 的积分，我们利用 Gauss 积分(5.26)：

$$\begin{aligned}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\cdots =& \exp[i(-\alpha_1\mu^2+\alpha_2p^2-\alpha_2m^2)]\frac{-i}{(4\pi)^2(\alpha_1+\alpha_2)^2}\\ &\times\exp[-i(-2\alpha_2p+z)^2/4(\alpha_1+\alpha_2)].\end{aligned}$$

对 z 进行微分和通常的变换，(5.78)变为：

$$\overline{\Sigma}(p,\mu) = \frac{e^2}{2\pi}\int_0^\infty d\alpha_1\int_0^\infty d\alpha_2\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}\left\{\left(2m-\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\not p\right)\right.$$

$$\times \exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}p^2-\alpha_1\mu^2-\alpha_2m^2\right)\right]+\mathrm{reg}\Big\}\,. \tag{5.79}$$

如果我们再引入(5.33)式的因子 $1=\int_0^\infty \mathrm{d}\rho\delta(\rho-\alpha_1-\alpha_2)$，并按照 $\alpha_i=\rho\beta_i$ 进行标度变换，我们得到

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma}(p,\mu)=&\frac{e^2}{2\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}\rho\int_0^\infty \mathrm{d}\alpha_1\int_0^\infty \mathrm{d}\alpha_2\delta(\rho-\alpha_1-\alpha_2)\frac{1}{\rho^2}\\&\times\left\{\left(2m-\frac{\alpha_1}{\rho}\not{p}\right)\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{\rho}p^2-\alpha_1\mu^2-\alpha_2m^2\right)\right]+\mathrm{reg}\right\}\\=&\frac{e^2}{2\pi}\int_0^1 \mathrm{d}\beta_1\int_0^1 \mathrm{d}\beta_2\delta(1-\beta_1-\beta_2)\\&\times\left\{(2m-\beta_1\not{p})\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}\exp[\mathrm{i}\rho(\beta_1\beta_2p^2-\beta_1\mu^2-\beta_2m^2)]+\mathrm{reg}\right\}.\end{aligned} \tag{5.80}$$

显然，ρ 的积分在下限处是对数发散的。为了对其进行正规化，只要在被积函数中减去一项($C_1=-1$)就够了，该项中的光子质量 μ 用一个大的截断动量 $\mu_1=\Lambda$ 来取代，即

$$I=\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}\{\exp[\mathrm{i}\rho(\beta_1\beta_2p^2-\beta_1\mu^2-\beta_2m^2)]-\exp(-\mathrm{i}\rho\beta_1\Lambda^2)\}, \tag{5.81}$$

式中在第二个指数中的其他所有项与大的 Λ^2 值相比都被忽略掉。进行积分时用到公式

$$\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho(z_1+\mathrm{i}\epsilon)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho(z_2+\mathrm{i}\epsilon)})=\ln\frac{z_2}{z_1}\,. \tag{5.82}$$

与(5.35)式相联系，我们证明了怎样通过取极限 $\lim\limits_{\eta\to0}\int_\eta^\infty\cdots$ 获得这一结果。于是正规化自能函数为：

$$\overline{\Sigma}(p,\mu,\Lambda)=\frac{e^2}{2\pi}\int_0^1\mathrm{d}\beta(2m-\beta\not{p})\ln\left[\frac{\beta\Lambda^2}{(1-\beta)m^2+\beta\mu^2-\beta(1-\beta)p^2}\right]. \tag{5.83}$$

如果动量矢量是类时的，则已经出现在(5.39)式中的极化函数 $\prod^{\mathrm{R}}(q)$ 一种效应将又在此出现：如果 p^2 足够大，则(5.83)中对数的宗量为零，这就移进了 $\beta\in[0,1]$ 的积分范围。对二次形式 $(1-\beta)m^2+\beta\mu^2-\beta(1-\beta)p^2$ 的检查表明这将在 $p^2>(m+\mu)^2$ 时发生。如果动量平方超过这一阈值，$\overline{\Sigma}(p,\mu,\Lambda)$ 就获得一个虚部。物理上这必须理解成一个虚电子衰变成一个实电子和一个实光子的可能性，这正如 3.3 节(Bhabha 散射)那样，那儿一个虚光子变成一对电子-反电子对。所以，在 $p^2=(m+\mu)^2$ 处，$\overline{\Sigma}(p,\mu,\Lambda)$ 是一个非正则函数。从而在(5.65)式中的展开仅当虚设的光子质量 μ 不为零时才有可能！在 $\mu=0$ 情况下出现困难的原因起于这样的事实，即一个可以任意接近质壳的电子仍然可以发射实光子(具有相当大的波长)，以及由于这一原因而根本不可能考虑一个没有辐射云的孤立电子。所以，我们将保持 μ 有限，且仅在最后我们将取极限到物理值 $\mu=0$。

积分(5.83)的完整求解是相当困难的①。我们仅需要确定(5.65)式中的常数 A 和 B。由自能函数在质壳条件 $\not{p}=m, p^2=m^2$ 下所计算得来的质量修正 δm 为(按照上面的说法,就是指夹在自由旋量 $u(p)$之间的):

$$\begin{aligned}\delta_m \equiv A &= \overline{\Sigma}(p,\mu,\Lambda)\Big|_{\not{p}=m,p^2=m^2}\\ &= \frac{e^2m}{2\pi}\int_0^1 \mathrm{d}\beta(2-\beta)\ln\frac{\beta\Lambda^2}{(1-\beta)m^2+\beta\mu^2-\beta(1-\beta)m^2}\\ &= \frac{e^2m}{2\pi}\int_0^1 \mathrm{d}\beta(2-\beta)\ln\frac{\beta\Lambda^2}{m^2(1-\beta)^2+\beta\mu^2}.\end{aligned} \tag{5.84}$$

在极限 $\mu\to 0$ 时,该积分收敛为一个有限值,从而我们可以令 $\mu=0$。将对数分开得

$$\delta m = \frac{e^2m}{2\pi}\int_0^1 \mathrm{d}\beta(2-\beta)\left[\ln\beta-2\ln(1-\beta)+\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}\right]. \tag{5.85}$$

借助于基本积分

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\, x^n\ln x = -\frac{1}{(n+1)^2} \tag{5.86}$$

立刻得到

$$\delta m = m\frac{3\alpha}{4\pi}\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}+\frac{1}{2}\right). \tag{5.87}$$

重整化常数 B 就是 $\hat{\Sigma}$ 的 Taylor 展开的第一项。利用(5.83)式和 $p^2=\not{p}^2$

$$\begin{aligned}B\equiv Z_2-1 &= \frac{\partial\overline{\Sigma}}{\partial\not{p}}\Big|_{\not{p}=m,p^2=m^2}\\ &= \frac{e^2}{2\pi}\int_0^1 \mathrm{d}\beta\Big[-\beta\ln\frac{\beta\Lambda^2}{(1-\beta)m^2+\beta\mu^2-\beta(1-\beta)p^2}\\ &\quad -(2m-\beta\not{p})(-)\frac{\beta(1-\beta)2\not{p}}{m^2(1-\beta)+\beta\mu^2-\beta(1-\beta)p^2}\Big]_{\not{p}=m,p^2=m^2}\\ &= \frac{-e^2}{2\pi}\int_0^1 \mathrm{d}\beta\beta\Big[\ln\frac{\beta\Lambda^2}{(1-\beta)^2m^2+\beta\mu^2}-\frac{2m^2(2-\beta)(1-\beta)}{m^2(1-\beta)^2+\beta\mu^2}\Big].\end{aligned} \tag{5.88}$$

第一个积分可以如同(5.85)那样被积出;这里我们能在没有不良后果下,令 $\mu=0$:

$$I_1 = \int_0^1 \mathrm{d}\beta\beta[\ln\beta-2\ln(1-\beta)+\ln\Lambda^2/m^2] = +\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}.$$

第二部分能在对数精度上被近似为

$$I_2 = -2\int_0^1 \mathrm{d}\beta\beta\frac{(2-\beta)(1-\beta)}{(1-\beta)^2+\beta\mu^2/m^2} \approx -2\int_0^{1-\mu/m}\mathrm{d}\beta\beta\frac{(2-\beta)(1-\beta)}{(1-\beta)^2},$$

① 在下文中可以找到,R. Karplus and N. M. Kroll: Phys. Rev. 77, 536(1950).

其中分母中的截断项已经被积分上限的减小所取代。作替代 $t=1-\beta$，我们得到

$$I_2 \approx -2\int_{\mu/m}^{1} \mathrm{d}t\left(\frac{1}{t}-t\right) \simeq \ln\frac{\mu^2}{m^2}+1$$

从而

$$Z_2 = 1+B = 1-\frac{e^2}{2\pi}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}+\ln\frac{\mu^2}{m^2}+\frac{9}{4}\right). \tag{5.89}$$

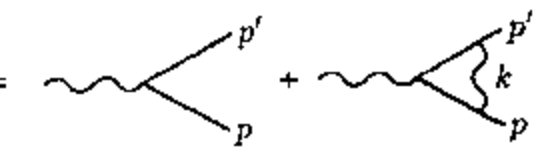
最后我们要注意的是质量重整化 δm(5.87)和电子传播子的重整化(5.89)仅是微弱的对数发散。按照 k 的幂次计数，给出了线性发散这样一个完全不乐观的预言。

除此之外，重整化常数 Z_2 具有十分不好的特征。它不仅在光子零质量处存在红外发散，而且还依赖于光子场的规范。如果我们采用非 Feynman 规范的光子传播子(参见第四章)，我们就会得到与(5.89)截然不同的 Z_2 结果。这不适用于质量重整化 δm，它是规范不变的。在下一节中我们将发现这种 Z_2 的两重含糊性没产生任何不良后果。

5.4　顶 角 修 正

作为最后一个属重整化基础的辐射修正，我们检查图 7a 所示的虚光子引起的顶角修正。根据 Feynman 规则，因子 $-ie\gamma_\mu$ 被下式替换

$$-ie\Lambda_\mu(p',p) = \quad + \quad$$



$$= -ie\gamma_\mu - ie\Gamma_\mu(p',p) \tag{5.90}$$

其中顶角函数为(参见(5.2)式)

$$\Gamma_\mu(p',p) = -4\pi ie^2\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-\mu^2+i\varepsilon} \times\left(\gamma^\nu\frac{1}{\not p'-\not k-m+i\varepsilon}\gamma_\mu\frac{1}{\not p-\not k-m+i\varepsilon}\gamma_\nu\right). \tag{5.91}$$

此动量圈又导致一个对数发散积分而必须重整化。此外，为了能处理可能发生的红外发散，我们再一次有远见地引入了虚光子质量 μ。

虽然顶角函数 $\Gamma_\mu(p',p)$的完整计算是可行的，但有很多要求，所以，我们局限于一个重要的特殊情况，即顶角的电子线在质壳上。这意味着在计算最后将构成形如$\bar{u}'(p')\Gamma_\mu(p',p)u(p)$的自由旋量间的矩阵元。在下面，尽管我们不明显写出这些旋量，但是以下计算均在此条件下成立[①]。这一条件就允许我们对左作用时作 $\not p'\to m$ 替代，对右作用时作 $\not p\to m$ 替代。

现在，我们将 $\Gamma_\mu(p',p)$分解成对应于零动量极限 $q=p'-p=0$("向前散射")的部分与剩下

① 假定一个或二个电子处在质壳的 Γ_μ 的明显表达式在 A. I. Akhiezer, V. B. Beresteskii, Quantum Electrodynamics, Wiley-Interscience, New York, 1965 中给出.

的部分之和

$$\Gamma_\mu(p',p)=\Gamma_\mu(p,p)+(\Gamma_\mu(p',p)-\Gamma_\mu(p,p)),$$
$$\equiv\Gamma_\mu(p,p)+\Gamma_\mu^{R}(p',p). \tag{5.92}$$

当我们构造向前散射部分时，在我们处理中没有矢量 q_μ（它等于零）；所以 $\Gamma_\mu(p,p)$只能正比于 γ_μ 或 p_μ。然而当动量传递为零时，在这些算符的自由旋量之间的矩阵元就互成正比从而能被互相转换。这由 Dirac 流的 Gordon 分解得到

$$\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p)=\frac{1}{2m}\bar{u}(p')[(p+p')_\mu+\mathrm{i}\sigma_{\mu\nu}(p'-p)^\nu]u(p). \tag{5.93}$$

从而仅用 γ_μ 就足够了。这样我们就可假定

$$\Gamma_\mu(p,p)=L\gamma_\mu. \tag{5.94}$$

L 将被证明在截断动量 Λ 处为对数发散的常数，而顶角函数剩余的部分，即 $\Gamma_\mu^{R}(p',p)$是一个完全确定的有限的表达式。如果将(5.91)积分式中的第一个电子传播子在固定的动量 p 处，按照算符恒等式(5.9)进行展开，我们便可很容易地理解这一断言。即

$$\frac{1}{\not p'-\not k-m+\mathrm{i}\varepsilon}=\frac{1}{\not p-\not k-m+(\not p'-\not p)+\mathrm{i}\varepsilon}$$
$$=\frac{1}{\not p-\not k-m+\mathrm{i}\varepsilon}$$
$$-\frac{1}{\not p-\not k-m+\mathrm{i}\varepsilon}(\not p'-\not p)\frac{1}{\not p-\not k-m+\mathrm{i}\varepsilon}+\cdots. \tag{5.95}$$

与 p'无关的第一项在 k 的大值处与 $|k|^{-1}$成正比，这正是(5.91)积分式对数发散的原因。另一方面，级数的后面一些项，它随 $p'\to p$ 而消失，导致 $\Gamma_\mu^{R}(p',p)$分母上有更高的 k 幂次，从而致使动量积分收敛。因为电子的电荷是通过低动量转移散射来测量的，代换

$$-\mathrm{i}e\gamma_\mu\to-\mathrm{i}e\gamma_\mu-\mathrm{i}eL\gamma_\mu+O(q) \tag{5.96}$$

使我们预料进一步施行电荷重整化是必要的，即

$$e_R^{\circ}=Z_1^{-1}e, \tag{5.97}$$

式中，按照约定，引进了重整化常数 Z_1

$$Z_1=(1+L)^{-1}\simeq 1-L. \tag{5.98}$$

然而，$\Gamma_\mu(p,p)$发散部分能在无需计算的情况下回到已熟悉的结果。为实现这一点，我们将电子传播子 $S_F=(\not p-m+\mathrm{i}\varepsilon)^{-1}$对动量进行微商，因为 $S_F(p)S_F^{-1}(p)=1$，根据乘积规则得

$$\frac{\partial}{\partial p^\mu}S_F(p)\cdot S_F^{-1}(p)+S_F(p)\frac{\partial}{\partial p^\mu}(\not p-m)=0,$$

或

$$\frac{\partial}{\partial p^\mu}S_F(p)=-S_F(p)\gamma_\mu S_F(p). \tag{5.99}$$

电子传播子对动量的微商对应着引入如图 5.21a 所示的零动量转移的顶角。显然，我们有可能按照图 5.21b，将零动量转移 $q=0$ 的顶角修正，通过一个简单的微商与电子的自能图相联系。

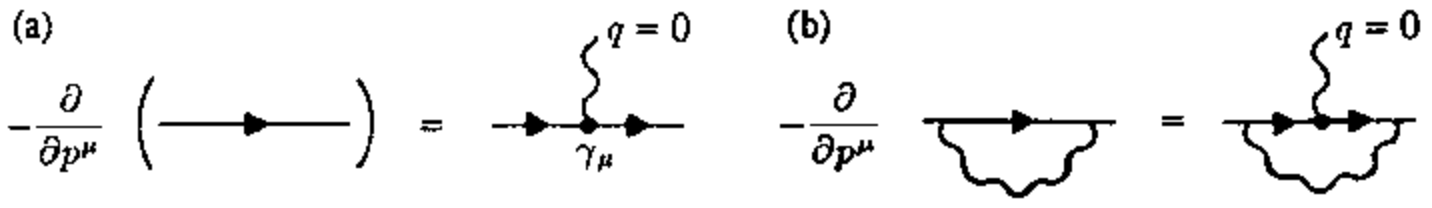


图 5.21　Ward 恒等式的示意图

$$\Gamma_\mu(p,p) = -\frac{\partial}{\partial p^\mu}\Sigma(p). \tag{5.100}$$

将(5.99)式应用到自能函数(5.77)上便可立即得到这一结果。被称之为 Ward 恒等式[①]的方程(5.100)是一个早已获得的结果。

如果将自能函数(5.65)的展开对动量矢量求微商，我们便可获得

$$L\gamma_\mu = \Gamma_\mu(p,p) = -\frac{\partial}{\partial p^\mu}\Sigma(p) = -B\gamma_\mu + O(\not{p} - m). \tag{5.101}$$

在质壳上

$$L = -B, \quad \text{于是有} \quad Z_1 = Z_2. \tag{5.102}$$

从而自能和顶角修正的重整化常数严格相等而简单地相互抵消了！根据(5.46)、(5.73)和(5.97)，最终的电荷重整化为

$$e_R = Z_1^{-1}Z_2\sqrt{Z_3}e = \sqrt{Z_3}e, \tag{5.103}$$

它包含了真空极化、自能和顶角修正的效应。既然我们自洽地只包括了 e^2 阶修正，每一种修正的相乘处理是合理的，因为对最低阶修正有$(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n)\simeq(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)\cdots(1+\varepsilon_n)$。

结果(5.103)说明了电荷重整化单一地由真空极化引起的，这一结果最令人满意。这是因为所导出的电荷重整化(5.103)与(5.73)和(5.97)不同，它不依赖于虚设的光子质量 μ 和规范的选取。Ward 恒等式具有更基本的意义：它确保了电磁相互作用的普适性。其原因就在于自能(Z_2)和顶角修正(Z_1)对每个荷电粒子($e,\mu,p\cdots$)看上去都不同。然而方程(5.103)确保了电荷重整化不依赖于具体处理的那种粒子，恰恰相反，它仅依赖于被虚对产生所修正的光子传播子。这样，如果两个基本粒子的裸电荷相等，那么，Ward 恒等式能保证它们的重整化电荷 e_R 也相等。如果 Ward 恒等式不成立，那么裸电荷就得存在一个差别，使得由于重整化所引起的差别正好相消。这是不合理的！——测得的基本电荷 e 是一个普适常数。量子电动力学中非常令人满意的结果就是这一性质对各阶微扰计算都成立(我们仅局限于非平庸的最低阶 e^2)。

① J. C. Ward, Phys. Rev. **78**, 182(1950).

例　子

5.6 电子的形状因子

我们要研究那些顶角函数$-ie\gamma_\mu$被复杂的表达式(5.90)(即$-ie(\gamma_\mu+\Gamma_\mu(p',p))$)取代后，所引起的物理上可观察的结果。正如我们在上一节所做的一般考虑那样，这里电子将被近似认作自由的(即，在质壳上)。

为了计算动量积分(5.91)，我们首先简化分子，并将其简记为X。既然顶角函数是位于自由旋量之间，那么我们便有$\bar{u}(p')(\not{p}'-m)=0$，$(\not{p}-m)u(p)=0$，并且我们能作替换$\not{p}'\to m$，$\not{p}\to m$。然而，为了能做到这一点，我们必须在最左边摆上矩阵$\not{p}$和在最右边摆上矩阵$\not{p}$，使每个都摆得靠近其本征旋量。利用 Dirac 矩阵的对易关系我们得到

$$\begin{aligned}X&=\gamma^\nu(\not{p}'-\not{k}+m)\gamma_\mu(\not{p}-\not{k}+m)\gamma_\nu\\&=[(-\not{p}'+\not{k}+m)\gamma^\nu+2(p'-k)^\nu]\gamma_\mu[\gamma_\nu(-\not{p}+\not{k}+m)+2(p-k)_\nu]\\&=[\not{k}\gamma^\nu+2(p'-k)^\nu]\gamma_\mu[\gamma_\nu\not{k}+2(p-k)_\nu].\end{aligned}\tag{1}$$

这一表达式能被变换成

$$X=4\{\gamma_\mu[(p'-k)\cdot(p-k)-k^2/2]+(p'+p-k)_\mu\not{k}-m\not{k}_\mu\}.\tag{2}$$

从而顶角函数为

$$\begin{aligned}\Gamma_\mu(p',p)=&-4\times4\pi ie^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\\&\times\frac{\gamma_\mu[(p'-k)\cdot(p-k)-k^2/2]+(p'+p-k)_\mu\not{k}-m\not{k}_\mu}{(k^2-\mu^2+i\varepsilon)(k^2-2p'\cdot k+i\varepsilon)(k^2-2p\cdot k+i\varepsilon)},\end{aligned}\tag{3}$$

在式中分母上我们再次利用质壳条件$p^2=p'^2=m^2$和$k^2=\mu^2$。显然这一积分的计算是极其费力的。然而，我们可以利用曾经用于计算真空极化和自能的方法。为此，我们将很快地跳过一些中间步骤。

我们可再次引入传播子的积分表达式(5.22)，现在(3)式中有三个传播子，故需要引入三个参数积分。利用 Gauss 积分(5.26)，我们得到恒等式

$$\begin{aligned}&\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\exp(ik\cdot z)\frac{1}{(k^2-\mu^2+i\varepsilon)(k^2-2p'\cdot k+i\varepsilon)(k^2-2p\cdot k+i\varepsilon)}\\&=\frac{1}{(4\pi)^2}\int_0^\infty\frac{d\alpha_1d\alpha_2d\alpha_3}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2}\exp\left\{-i\left[\frac{(z/2-p'\alpha_2-p\alpha_3)^2}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}+\mu^2\alpha_1\right]\right\}.\end{aligned}\tag{4}$$

在(3)式的分子中的动量因子k可以如同(5.24)那样被换成指数关于辅助变量的微商。从而，我们可以作代换$k\exp(ikz)=-i\partial/\partial z\exp(ik\cdot z)$，这就导致

$$k\to\frac{-z/2+p'\alpha_2+p\alpha_3}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}.\tag{5}$$

最后，积分(3)采用下面形式

$$\Gamma_\mu(p',p)=-\mathrm{i}\frac{e^2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}\alpha_1\mathrm{d}\alpha_2\mathrm{d}\alpha_3}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^3}\Big\{\gamma_\mu\Big[(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)p\cdot p'+\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_3)(p+p')^2+\frac{1}{2}\frac{m^2(\alpha_2+\alpha_3)^2-\alpha_2\alpha_3q^2}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}+\frac{\mathrm{i}}{2}\Big]+\frac{m}{2}(p+p')_\mu\frac{\alpha_1(\alpha_2+\alpha_3)}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\Big\}\times\exp\Big\{-\mathrm{i}\Big[\mu^2\alpha_1+\frac{m^2(\alpha_2+\alpha_3)^2-\alpha_2\alpha_3q^2}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\Big]\Big\}. \tag{6}$$

其中，$q=p'-p$ 表示动量转移。在推导(6)式中，我们多次利用了 $p^2=p'^2=m^2$，$p'\cdot p=m^2-q^2/2$。例如，为了获得下列等式时

$$(p'\alpha_2+p\alpha_3)^2=m^2(\alpha_2+\alpha_3)^2-q^2\alpha_2\alpha_3.$$

此外，我们作了替代 $\not{p}\to m$，$\not{p}'\to m$。另一个技巧就是利用了被积函数关于变量 α_2 和 α_3 的交换对称性。诸如

$$\int_0^\infty\mathrm{d}\alpha_2\mathrm{d}\alpha_3(\alpha_2-\alpha_3)f(\alpha_2,\alpha_3),$$

中具有对称函数 $f(\alpha_2,\alpha_3)=f(\alpha_3,\alpha_2)$ 的项等于零。在(6)式第二行中的 i/2 项是由 k^2 因子引起的，因为(4)式的二阶微商 $(-\mathrm{i}\partial/\partial z)$ 必须用到乘积规则。指数中的变量可通过在 α_i 复平面上旋转 $-\pi/2$ 来变为实的和负的。为达到这个目的，我们考虑到给自由粒子的动量转移是类空的，$q^2<0$。因此，我们可以作替代

$$\alpha_i\to-\mathrm{i}\alpha_i \tag{7}$$

然后让积分沿着实轴延拓到 $+\infty$。此外，如同(5.33)式，我们引进下列对变量 ρ 的辅助积分

$$\int_0^\infty\mathrm{d}\rho\delta(\rho-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)=1. \tag{8}$$

于是，顶角函数(6)就成为

$$\Gamma_\mu(p',p)=-\frac{e^2}{\pi}\int_0^\infty\mathrm{d}\alpha_1\mathrm{d}\alpha_2\mathrm{d}\alpha_3\int_0^\infty\mathrm{d}\rho\delta(\rho-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)\frac{1}{\rho^3}\times\Big\{\gamma_\mu\Big\{\rho p\cdot p'-\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_3)(p+p')^2+\frac{1}{2\rho}[m^2(\alpha_2+\alpha_3)^2-\alpha_2\alpha_3q^2]-\frac{1}{2}\Big\}+\frac{m}{2}(p+p')_\mu\frac{\alpha_1(\alpha_2+\alpha_3)}{\rho}\Big\}\times\exp\Big\{-\frac{1}{\rho}[-\alpha_2\alpha_3q^2+(\alpha_2+\alpha_3)^2m^2+\alpha_1\rho\mu^2]\Big\}. \tag{9}$$

现在交换积分次序，然后作标度变换 $\alpha_i=\rho\beta_i$，最后我们得到

$$\Gamma_\mu(p',p) = -\frac{e^2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}\beta_1\mathrm{d}\beta_2\mathrm{d}\beta_3\delta(1-\beta_1-\beta_2-\beta_3)$$
$$\times\int_0^\infty \mathrm{d}\rho\Big\{\gamma_\mu\Big\{p\cdot p' - \frac{1}{2}(\beta_2+\beta_3)(p+p')^2$$
$$+\frac{1}{2}[m^2(\beta_2+\beta_3)^2-\beta_2\beta_3q^2]-\frac{1}{2\rho}\Big\}+\frac{m}{2}(p+p')_\mu\beta_1(\beta_2+\beta_3)\Big\}$$
$$\times\exp\{-\rho[-\beta_2\beta_3q^2+(\beta_2+\beta_3)^2m^2+\beta_1\mu^2]\}. \tag{10}$$

因为 $\gamma_\mu(-1/(2\rho))$ 项的存在，ρ 积分中有一部分是对数发散的。从(5.102)我们获知这种发散存在。正规化可根据(5.92)通过减除向前散射项($q=0$)来完成：

$$\Gamma_\mu^{\mathrm{R}}(p',p) = \Gamma_\mu(p',p) - \Gamma_\mu(p,p). \tag{11}$$

严格地说，为了确保正规的操作，我们早该在(10)的推导中考虑到这一点。

我们要以更清楚的排列方式给出正规化的顶角。因此，我们写成

$$\Gamma_\mu^{\mathrm{R}}(p',p) = \gamma_\mu F_1(q^2) + \frac{\mathrm{i}}{2m}\sigma_{\mu\nu}q^\nu F_2(q^2). \tag{12}$$

这正是我们在练习 3.5 中通过一般考虑光子与自旋为 1/2 粒子的相互作用而给出的形式。函数 $F_1(q^2)$ 和 $F_2(q^2)$ 被称之为形状因子。显然电子在虚辐射场相互作用中呈现出一种表观的内部结构，其行为不同于纯的 Dirac 粒子。在(12)式中的形状因子能通过对变量 β 的积分而重新表达。为了获得(12)式中的形式，我们利用 Gordon 分解

$$\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p) = \frac{1}{2m}\bar{u}(p')[(p+p')_\mu + \mathrm{i}\sigma_{\mu\nu}q^\nu]u(p). \tag{13}$$

对 ρ 的积分是容易完成的。对于第一个形状因子我们得到

$$F_1(q^2) = -\frac{e^2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}\beta_1\mathrm{d}\beta_2\mathrm{d}\beta_3\delta(1-\beta_1-\beta_2-\beta_3)$$
$$\times\Big\{\Big[m^2-\frac{q^2}{2}-(\beta_2+\beta_3)\Big(2m^2-\frac{q^2}{2}\Big)$$
$$+\frac{1}{2}m^2(\beta_2+\beta_3)^2-\beta_2\beta_3q^2+m^2\beta_1(\beta_2+\beta_3)\Big]$$
$$\times[m^2(\beta_2+\beta_3)^2+\beta_1\mu^2-\beta_2\beta_3q^2]^{-1}$$
$$+\frac{1}{2}\ln[m^2(\beta_2+\beta_3)^2+\beta_1\mu^2-\beta_2\beta_3q^2] - \underbrace{\cdots}_{(q=0)}\Big\}. \tag{14}$$

对数积分来自于被积函数中的 $1/\rho$ 项。我们利用

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}(\mathrm{e}^{-\rho A}-\mathrm{e}^{-\rho B}) := \lim_{\eta\to 0}\int_\eta^\infty \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}(\mathrm{e}^{-\rho A}-\mathrm{e}^{-\rho B})$$

$$= \lim_{\eta\to 0}\left(\int_{\eta A}^{\infty} - \int_{\eta B}^{\infty}\right)\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}\mathrm{e}^{-\rho} = \lim_{\eta\to 0}\int_{\eta A}^{\eta B}\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}\mathrm{e}^{-\rho}$$

$$= \lim_{\eta\to 0}\int_{\eta A}^{\eta B}\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = \ln B - \ln A. \tag{15}$$

在(5.35)与(5.82)式中也曾出现过类似形式的积分。乘积 $p'\cdot p$ 已被 $m^2-q^2/2$ 所取代，这是因为 $q^2=(p'-p)^2=p'^2+p^2-2p'\cdot p=2m^2-2p'\cdot p$。在(14)式第一项分子中的 $m^2\beta_1(\beta_2+\beta_3)$ 项来自于 $(m/2)(p+p')_\mu\beta_1(\beta_2+\beta_3)$ 借助 $(p+p')_\mu=2m\gamma_\mu-i\sigma_{\mu\nu}q^\nu$ 变换而来的。

第二个形状因子很少涉及到。没有必要去对它进行正规化，其结果为

$$F_2(q^2) = \frac{e^2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}\beta_1\mathrm{d}\beta_2\mathrm{d}\beta_3\delta(1-\beta_1-\beta_2-\beta_3)$$

$$\times\frac{m^2\beta_1(\beta_2+\beta_3)}{m^2(\beta_2+\beta_3)^2+\beta_1\mu_2-\beta_2\beta_3q^2}. \tag{16}$$

我们不打算介入相当难的积分(14)和(16)的一般推导的细节。在低动量转移极限下，$q^2\to 0$ 可获得简单的结果。形状因子 $F_2(q^2)$ 能被很快地计算出来。因为没有红外发散的发生，我们令 $\mu^2=0$，于是方程(16)变成

$$F_2(0) = \frac{e^2}{\pi}\int_0^1 \mathrm{d}\beta_2\int_0^{1-\beta_2}\mathrm{d}\beta_3\frac{1-\beta_2-\beta_3}{\beta_2+\beta_3}$$

$$= \frac{e^2}{\pi}\int_0^1 \mathrm{d}\beta_2[\ln(\beta_2+\beta_3)-\beta_3]_0^{1-\beta_2}$$

$$= \frac{e^2}{\pi}\left[(-\beta_2\ln\beta_2+\beta_2)-\beta_2+\frac{1}{2}\beta_2^2\right]_0^1$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi}. \tag{17}$$

在 $q^2\to 0$ 极限下，函数 $F_1(q^2)$ 包含一个发散部分，它引起了电荷重整化，并由(14)式的正规化而被消除。在最低非零阶下，我们得到

$$F_1(q^2) \simeq \frac{\alpha}{3\pi}\frac{q^2}{m^2}\left(\ln\frac{m}{\mu}-\frac{3}{8}\right), \tag{18}$$

这能通过完成对(14)的既是基本的又是冗长的积分来作检验。从而出现了一个与自能图(5.89)相类似的对数发散。现在自由旋量和低动量转移下的正规化的顶角函数 $\Gamma_\mu^{\mathrm{R}}(p',p)$ 完全由(12)，(17)，和(18)式来确定。

为了理解这一结果的物理推论，我们检查一下一个电子在一个静外电磁场 A_μ^{ext} 中的相互作用，这正如练习 3.5 中所做的那样：

$$W = \int \mathrm{d}^3x j_\mu A_{\mathrm{ext}}^\mu$$

$$= e\int d^3x\bar{\psi}_{p'}\left(\gamma_\mu + \Gamma^R_\mu(p',p) + \frac{i\prod^R_{\mu\omega}}{4\pi} iD^{\omega\sigma}_F\gamma_\sigma\right)\psi_p A^\mu_{ext}. \tag{19}$$

这里我们增加了图 5.22(a),(b)和(c)。它们对 Fermi 子与外场相互作用都有贡献。

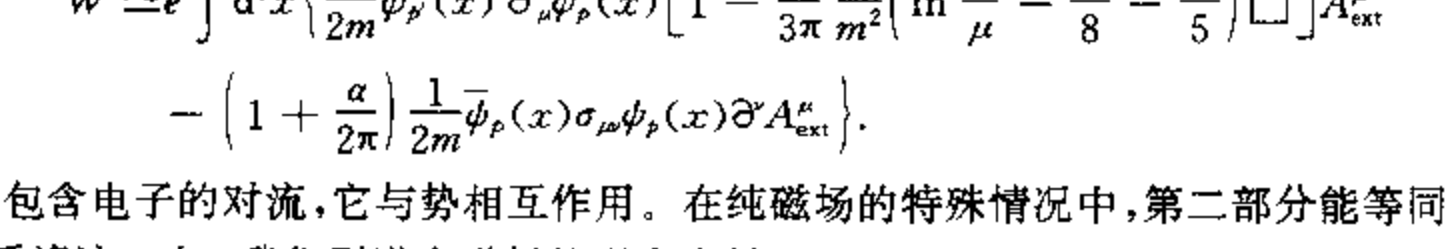


图 5.22 图(a—c)对 Fermi 子与外场的相互作用都有贡献

自能修正可以暂不考虑,因为对自由粒子它仅对电荷与质量重整化有贡献。这也由于自由粒子是在质壳上的,从而在(5.65)式中的 $\Sigma^R(p)(\not p - m)^2$ 项没有贡献。这是因为 $\not p = m$。将(17)、(18) 以及(5.18),(5.41)和 $D^{\omega\sigma}_F = -4\pi g^{\omega\sigma}/q^2$ 代入,我们获得对小 q^2 值的结果

$$W \simeq e\int d^3x\bar{\psi}_{p'}\left\{\gamma_\mu\left[1 + \frac{\alpha}{3\pi}\frac{q^2}{m^2}\left(\ln\frac{m}{\mu} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5}\right)\right]\right.$$
$$\left. + \frac{\alpha}{2\pi}\frac{i}{2m}\sigma_{\mu\omega}q^\omega\right\}\psi_p A^\mu_{ext}, \tag{20}$$

式中 $-1/5$ 项是来自于真空极化(5.41)。利用 Gordon 分解,(20)式能被写成

$$W \simeq e\int d^3x\bar{\psi}_{p'}\left\{\frac{1}{2m}(p+p')_\mu\left[1 + \frac{\alpha}{3\pi}\frac{q^2}{m^2}\left(\ln\frac{m}{\mu} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5}\right)\right]\right.$$
$$\left. + \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right)\frac{i}{2m}\sigma_{\mu\omega}q^\omega\right\}\psi_p A^\mu_{ext}. \tag{21}$$

因为我们仅对缓慢变化(准稳)场感兴趣,我们将最后一项中与 q^3 成比例的项丢掉。动量因子能被转换成对位形空间的梯度:$q_\mu \to i\partial_\mu$ 作用在光子场上而 $p'_\mu = -i\partial_\mu$,$p_\mu = i\partial_\mu$ 分别左作用和右作用在旋量场上。这就导得

$$W \simeq e\int d^3x\left\{\frac{i}{2m}\bar{\psi}_{p'}(x)\overleftrightarrow{\partial}_\mu\psi_p(x)\left[1 - \frac{\alpha}{3\pi}\frac{1}{m^2}\left(\ln\frac{m}{\mu} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5}\right)\Box\right]A^\mu_{ext}\right.$$
$$\left. - \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right)\frac{1}{2m}\bar{\psi}_p(x)\sigma_{\mu\omega}\psi_p(x)\partial^\omega A^\mu_{ext}\right\}. \tag{22}$$

第一项中包含电子的对流,它与势相互作用。在纯磁场的特殊情况中,第二部分能等同于磁偶极能量。为看清这一点,我们引进电磁场的强度张量 $F^{\mu\omega} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$,并利用 $\sigma_{\mu\omega} = i/2[\gamma_\mu,\gamma_\nu]$的反对称性,从而

$$W_{mag} \simeq e\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right)\frac{1}{4m}\int d^3x\bar{\psi}(x)\sigma_{\mu\omega}\psi(x)F^{\mu\omega}. \tag{23}$$

对纯磁场情况 $F^{12} = -B^3$,$\sigma_{12} = \Sigma_3$,还有其循环置换。从而相互作用能变成

$$W_{mag} \simeq -\frac{e}{4m}\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right)2\int d^3x\bar{\psi}(x)\boldsymbol{\Sigma}\psi(x)\cdot\boldsymbol{B}$$

$$= -\langle \mu \rangle \cdot \boldsymbol{B}, \tag{24}$$

其中磁矩($\langle \boldsymbol{S} \rangle = \langle \boldsymbol{\Sigma} \rangle /2$)为

$$\begin{aligned} \langle \mu \rangle &= \frac{e\hbar}{2mc}\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right) 2\langle \boldsymbol{S} \rangle \\ &= 2\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right)_{\mu B} \langle \boldsymbol{S} \rangle = g\mu_B \langle \boldsymbol{S} \rangle. \end{aligned} \tag{25}$$

这里我们已经将自然常数 ħ和 c 一次性写出来。因子 ħ是由于 $q \to i\hbar\partial_x$ 而 c 是由 Gordon 分解得来的,严格地说它包含因子 $1/2mc$。正如所期待的那样,磁矩与电子的自旋期待值成正比。以 Bohr 磁子 $\mu_B = e\,\hbar/2mc$ 为单位,比例因子(Landé g 因子)为

$$g = 2\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{\alpha}{\pi}\right) \simeq 2(1 + 0.001\ 161\ 41). \tag{26}$$

g 因子与 2 之差被称之为电子的反常。这是量子电动力学最重要的预言之一,它首先由 Schwinger[①]计算出来,并已由实验很精确地测量。最新的实验值[②]是

$$g_{\exp} = 2(1 + 0.001\ 159\ 652\ 193), \tag{27}$$

式中仅最后一位小数是不确定的。

显然,Schwinger 的预言在二阶适用的范围内完全被证实。为了完整地理解(27),必须考虑更高阶项。在图 5.23 中,我们给了四阶(α^2)图。我们发现仅(a～e)5 个图对磁矩有贡献。在六阶近似下,72 个 Feynman 图有贡献。随着测量精度的提高,就得计算 891 个 α^4 阶的 Feynman 图,并且还要考虑进一步的修正(虚强子产生!)。纯粹 QED 贡献通常表示成按 α/π 幂级数展开的系数 C_i,α/π 是这一问题的自然展开参数。

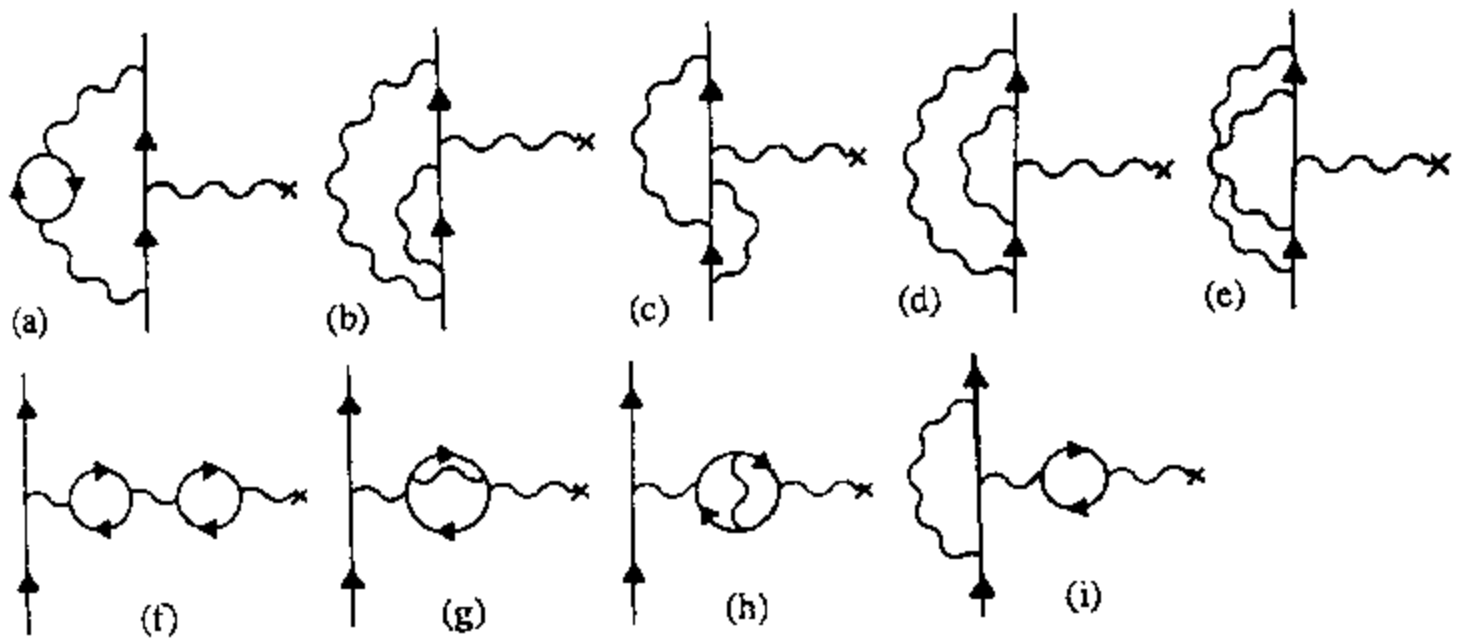


图 5.23(a)～(i)　对光子电子相互作用四阶辐射修正

① J. Schwinger: Phys. Rev. **73**, 416(1948) and **76**, 790(1949).

② R. S. Van Dyck, Jr., P. B. Schwinberg, H. G. Dehmelt: Phys. Rev. Lett. **59**, 26(1987).

$$g_{\text{theor}} = 2\left[1 + C_1\left(\frac{\alpha}{\pi}\right) + C_2\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + C_3\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + \cdots\right]. \tag{28}$$

上面我们已经计算了 Schwinger 的二阶项 $C_1 = 1/2$。为了获得四阶系数的正确的解析表达式，人们花了将近十年的功夫获得了结果[①]

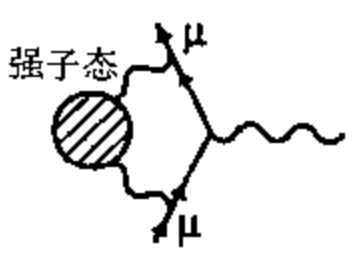
$$C_2 = \frac{197}{144} + \left(\frac{1}{2} - 3\ln 2\right)\zeta(2) + \frac{3}{4}\zeta(3)$$
$$= -0.328478965\cdots . \tag{29}$$

式中 $\zeta(n) = 1 + 2^{-n} + 3^{-n} + \cdots$ 是 Riemann zeta 函数。当今，已能写出的许多(不是完全) 六阶图的贡献已给出解析的计算结果。对剩下来的图(包括重叠光子圈图)，人们必须借助于数值求解来处理多维积分。对八阶贡献也是这样。系数 C_3 和 C_4 已被解出如下结果[②]：

$$C_3 = 1.176\ 11 \pm 0.000\ 42,$$
$$C_4 = -1.434 \pm 0.138, \tag{30}$$

式中误差来自于 Monte-Carlo 积分的统计不确定性。利用这些系数，g 因子的理论值是

$$g_{\text{theor}} = 2(1 + 0.001\ 159\ 652\ 140 \pm 0.000\ 000\ 000\ 028). \tag{31}$$



误差的大部分是由精细结构常数 α 的不确定性引起的。(31)式与(27)式的实验结果相当符合。这就很清楚地证明了“裸”电子是理想的类点 Dirac 粒子。虽的确存在偏离，但是它们只是由与辐射场相互作用引起的，而这可在任意精度上计算出来。于是可观测的扩展的结构不是电子的内禀特性。

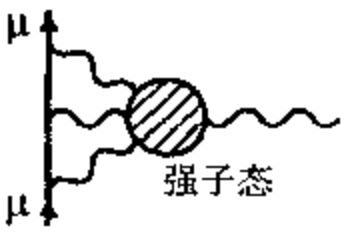


图 5.24 对 μ 子反常磁矩的强修正

对 μ 子也有相同的结论。其 $(g-2)$ 反常，略比(27)式大些。然而，这是很好理解的，因为在带有虚的 Fermi 子圈的图中，如图 5.23(a)，e^+e^- 对是优先地由 μ 子产生的。所以求和的结果不再与轻子质量无关。理论预言的精度也差些，这是由于在高能量标度，即小尺度标度下，强子的修正使得 μ 探测的真空涨落的贡献较大。

目前所提供的 μ 子反常磁矩的理论和实验值[③]为

$$g^{\mu}_{\text{th}} = 2(1 + .001\ 165\ 919 \pm .000\ 000\ 002), \tag{32}$$

$$g^{\mu}_{\text{exp}} = 2(1 + .001\ 165\ 923 \pm .000\ 000\ 009), \tag{33}$$

它们符合得相当好。理论值中，除了 QED 辐射修正以外，还包含了来自强子虚产生引起的贡献。

$$\Delta a_{\mu}(\text{hadr.}) = (70 \pm 2) \cdot 10^{-9}. \tag{34}$$

对此有贡献的两个图如图 5.24 所示。这里带阴影的泡泡代表许多复杂的强子态与虚光子的耦

---

① A. Peterman: Helv. Phys. Act. 30, 407 (1957); C. M. Sommerfield: Ann. Phys. (N. Y) 5, 26 (1958).

② 许多复杂繁重的计算已由 T. Kinoshita 及其合作者做出。在书 T. Kinoshita: *Quantum Electrodynamics* (World Scientific, Singapore, 1990)中广泛评述了这一问题。

③ J. Bailey et al., Nucl. Phys. **B150**, 1(1979).

合。在不可能由第一原则计算这些过程时，它们的贡献无论如何也可利用强子的电磁产生的实验数据而可靠地导出。对 μ 子的 g 因子的进一步修正是来自于弱相互作用。在 Glashow-Salam-Weinberg 统一描述电弱相互作用的标准模型中，存在三个(最低阶)额外的包含顶角修正的图，参见图 5.25。它们总贡献的计算值是

$$\Delta a_\mu(\text{weak}) = (7 \pm 0.1) \cdot 10^{-9}. \tag{35}$$

从而 (33)和(34)中精度的适当提高允许对标准模型所作的预言进行检验。最后我们要注意的是 g^μ_{th}和 g^μ_{exp}的比较也提供了新粒子存在[①]，即关于 Higgs Bose 子质量等的信息。

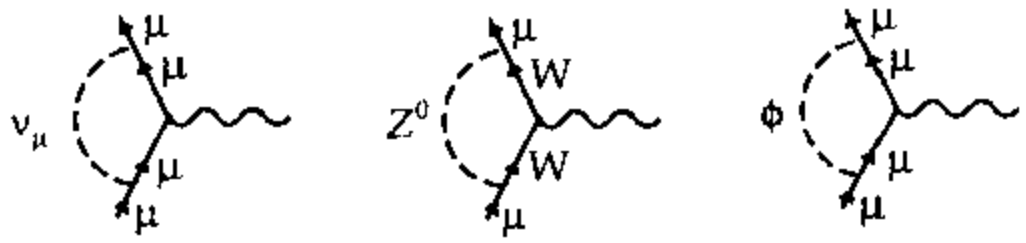


图 5.25　在电弱相互作用的模型中，中微子、中间矢量 Bose 子 ($W^\pm, Z^0$)和 Higgs 粒子中的虚产生对 μ 子的顶角函数有贡献

例　子

5.7　红外灾难

在例 5.6 中关于电子形状因子 $F_1(q^2)$的结果(18)是明显不完整的。表达式是红外发散的，即当虚设光子质量 μ 趋于零时它趋于无限大。为了便于理解这一明显不合理的行为，我们回忆一下另一个也存在红外发散的过程，那就是曾在 3.6 节中讨论过的轫致辐射过程。如果考虑到可发射任意软的光子时，那里所计算的发射光子的截面也是发散的。我们现在将证明这两个发散互相抵消，从而结果将不依赖于虚设光子的质量 μ，这一虚设质量的引入完全是作为计算的手段而已。

的确，为了能描述电子的散射过程，仅对图 5.22 中图的贡献求和是不够的。除了纯粹弹性散射外，还可能存在发射频率为 ω 的光子的非弹性散射，出射的电子的能量受到一定程度的压低。现在关键的问题就在于每一个实验仪器具有有限的能量分辨率 ΔE。从而不能探测到频率 $\omega < \Delta E$ 的光子的辐射。纯粹弹性碰撞和伴随波长非常长的光子辐射的碰撞是无法区分的。从而它们的截面必须相加。这由图 5.26 所示。相应子弹性散射和光子轫致辐射图的散射幅应相干相加，而它们相对应的贡献就得非相干相加(因为量子力学末态不同)。于是必须对光子能量从下限 μ 求和到ΔE。

为定量描述修正，我们将在 Coulomb 势(3.8)上弹性散射的 S-矩阵元和轫致辐射的相应结

① J. Reinhardt, A. Schäfer, B. Müller, W. Greiner, Phys. Rev. **C33**, 194(1986).

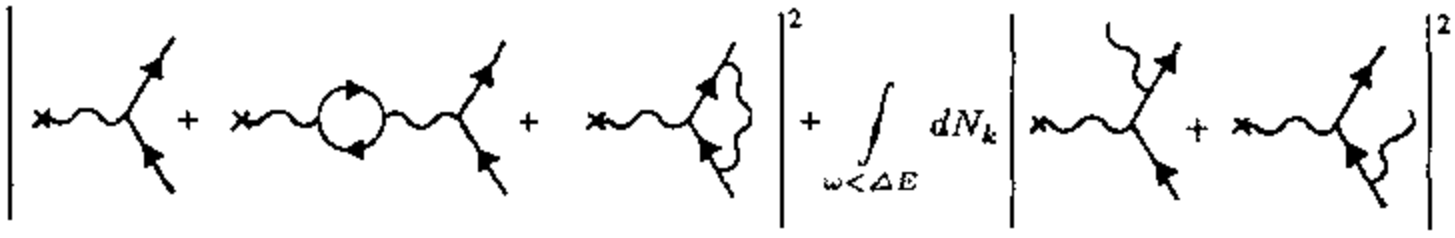


图 5.26 发射长波长光子的过程与弹性散射不能区分的过程

果，3.6节中的(3.193)和(3.201)，作比较。在 $\omega\to 0$ 的极限下我们发现

$$S_{fi}^{\mathrm{Br}} = e\sqrt{\frac{4\pi}{2\omega V}}\left(\frac{\varepsilon\cdot p'}{k\cdot p'} - \frac{\varepsilon\cdot p}{k\cdot p}\right) S_{fi}^{\mathrm{elast}}. \tag{1}$$

因此，对长波长的光子 Coulomb 势上的弹性散射的 S 矩阵元，可分解成一个弹性散射的表达式与一个依赖于光子能量的因子。我们将这一因子作为对电子的形状因子的修正。为此，我们首先对不加观测的光子极化 λ 进行求和并对能量积分。

$$\int_{\omega<\Delta E} \mathrm{d}N_k \sum_{\lambda} |F_1^{\mathrm{Br}}|^2 = \int_{\omega<\Delta E} \frac{V|\boldsymbol{k}|^2\mathrm{d}|\boldsymbol{k}|\mathrm{d}\Omega_k}{(2\pi)^3}\frac{e^2 4\pi}{2\omega V}$$

$$\times \sum_{\lambda}\left|\frac{\varepsilon^{(\lambda)}\cdot p'}{k\cdot p'} - \frac{\varepsilon^{(\lambda)}\cdot p}{k\cdot p}\right|^2. \tag{2}$$

极化求和可借助于 3.6 节中的(3.220)来计算。

$$\sum_{\lambda}(\varepsilon^{(\lambda)}\cdot a)(\varepsilon^{(\lambda)}\cdot b) = -a\cdot b, \tag{3}$$

从而

$$\sum_{\lambda}|F_1^{\mathrm{Br}}|^2 = \frac{4\pi}{2\omega V}e^2\left[\frac{-m^2}{(k\cdot p')^2} + \frac{-m^2}{(k\cdot p)^2} + \frac{2p\cdot p'}{(k\cdot p)(k\cdot p')}\right]. \tag{4}$$

现在我们局限于非相对论极限 $|\boldsymbol{p}|$，$|\boldsymbol{p}'|\ll m$。注意到

$$p\cdot k = E\omega - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k} = m\sqrt{1+|\boldsymbol{p}|^2/m^2}\,\omega - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k}$$

$$\simeq m\omega + \frac{|\boldsymbol{p}|^2\omega}{2m} - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k}$$

以及对 $p'\cdot k$ 存在类似的形式，我们略去 $|\boldsymbol{p}|$ 的二阶以上的项。考虑到动量转移 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}$，(4)化为

$$\sum_{\lambda}|F_1^{\mathrm{Br}}|^2 = \frac{4\pi}{2\omega V}\frac{e^2|\boldsymbol{q}|^2}{m^2\omega^2}\left[1 - \frac{(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{k})^2}{|\boldsymbol{q}|^2\omega^2}\right]. \tag{5}$$

现在可以对(2)式中光子的能量进行积分，考虑到 $|\boldsymbol{k}^2| = \omega^2 - \mu^2$ 和 $|\boldsymbol{k}|d|\boldsymbol{k}| = \omega d\omega$

$$\int_{\omega<\Delta E}\mathrm{d}N_k\sum_{\lambda}|F_1^{\mathrm{Br}}|^2$$

$$= \frac{4\pi}{(2\pi)^3}\frac{e^2|\boldsymbol{q}|^2}{2m^2}\int_{\mu}^{\Delta E}\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega^2}\sqrt{\omega^2-\mu^2}\int\mathrm{d}\Omega_k\left[1 - \frac{(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{k})^2}{|\boldsymbol{q}|^2\omega^2}\right]$$

$$= \frac{e^2|\boldsymbol{q}|^2}{\pi m^2}\int_{\mu}^{\Delta E}\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega^2}\sqrt{\omega^2-\mu^2}\left(1-\frac{1}{3}\frac{\omega^2-\mu^2}{\omega^2}\right). \tag{6}$$

这一积分能借助于下式计算

$$\int \mathrm{d}x\,\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2} = -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2} + \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right),$$

$$\int \mathrm{d}x\,\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4} = \frac{1}{3a^2}\frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{x^3}.$$

结果是($\mu \ll \Delta E$)

$$\int \mathrm{d}N_k \sum_{\lambda}|F_1^{\mathrm{Br}}|^2 = \frac{2e^2|\boldsymbol{q}|^2}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{2\Delta E}{\mu}-\frac{5}{6}\right). \tag{7}$$

该结果必须与图 5.26 虚的辐射修正而引起的形状因子结合起来。用 $\bar{F}_1(q^2)$来标记例 5.6 中(20)式方括号的因子，我们得到

$$|F_1'(q^2)|^2 := |\bar{F}_1(q^2)|^2 + \int \mathrm{d}N_k |F_1^{\mathrm{Br}}(q^2,k)|^2$$

$$= \left|1+\frac{\alpha q^2}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{\mu}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\right)\right|^2 + \frac{2\alpha(-q^2)}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{2\Delta E}{\mu}-\frac{5}{6}\right)$$

或

$$F_1'(q^2) \simeq 1+\frac{\alpha}{3\pi m^2}q^2\left(\ln\frac{m}{2\Delta E}+\frac{5}{6}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\right). \tag{8}$$

最后一步中，仅考虑到 α 对“红外修正形状因子”$F_1'(q^2)$的最低阶贡献。此函数的动量相关部分按照 $e\gamma_\mu \to F_1'(q^2)\gamma_\mu$ 修正了顶角处的相互作用强度。

正如我们已经指出的，这一电子形状因子的表达式与虚设的光子质量 μ 无关。仔细的分析就会发现红外发散灾难原来是虚无的。如果不考虑到电子总被长波长的光子“云”包围住，这种“光子云”可以是虚的(顶角修正)，也可以是实的(软的韧致辐射)，那么就会引起这一灾难。如果试图把电子与辐射云分开，例如坚持末态没有光子，那么就会获得不自洽的结果。事实上，能够证明，在每一个荷电粒子的散射过程中存在任意数目长波长光子的发射。在无质量粒子的理论中不存在纯的弹性散射。这一红外灾难的根源早就被人们所认识[①]。在更高阶微扰论中，这一灾难也能通过将内部和外部辐射修正相结合而得以消除。

(8)式中的能量 ΔE 根据实验安排来确定，结果取决于能获得的能量分辨率。尤其是在基本粒子物理的高能碰撞的研究中，必须要仔细计算辐射修正并在实验结果的解释中予以考虑。

① F. Bloch 和 A. Nordsieck: Phys. Rev. **52**, 54(1937); D. R. Yennie, S. C. Frautschi, H. Sunra: Ann. Phys. (NY) **13**, 379(1961).

例　子

5.8 原子能级的能量移动

除了磁矩的$(g-2)$反常之外，QED 所预言的“真空涨落”毫无疑问地存在着对原子的束缚态能级的影响。因为原子的跃迁能量可借助于光谱学方法得以很精确地测量，所以，能级移动的计算成为检验理论的试金石。然而，这一问题的严格处理是相当困难的。由于我们所处理的是束缚态，它能与电荷为Ze的原子核相互作用任意次。所以，我们不能像前面处理散射问题那样利用自由平面波，但是我们必须求解 Coulomb 势场中的 Dirac 方程。这可用图 5.27 中的图来说明，双线代表 Coulomb 场中的电子传播子。(a) 表示自能(现在它自动包含顶角修正)。(b) 表示真空极化。这两个图对虚光子的发射都是一阶图，而与原子核相互作用上已考虑到任意阶。可借助于 Coulomb 场中 Dirac 方程的严格的 Feynman 传播子来对此作相应的计算。这是一件相当艰巨的任务，可以借助于数值计算来完成它。

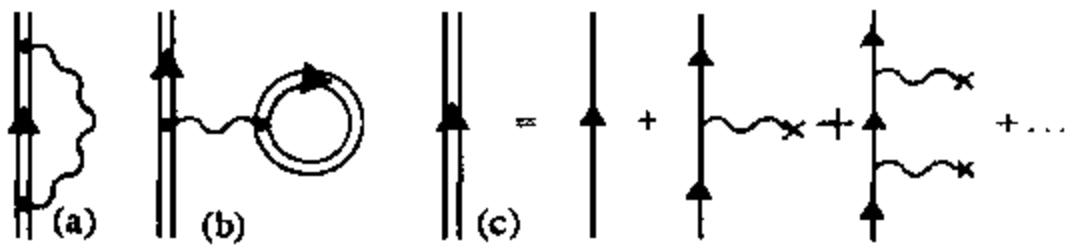


图 5.27a～c　原子中自能和真空极化的图

值得庆幸的是，对轻原子$(Z\alpha \ll 1)$情况可在高精度下有近似的处理方法。由于原子结合能是$(Z\alpha)^2 m$量级的，所以在轻原子中的电子态是高度非相对论的。从而(a)图的计算可分两步走：

(i) 如果是高能虚光子$\omega \geqslant K \gg (Z\alpha)^2 m$辐射，那么 Coulomb 势的影响可被略去，计算中可采用自由态。

(ii) 另一方面，如果虚发射的光子是低能的，$\omega \leqslant K \ll m$那么初态、中间态和末态均是非相对论性的。从而，我们可简单利用 Schrödinger 方程的普通量子力学微扰论。

如果我们能选择分离能量K使得下式成立

$$(Z\alpha)^2 m \ll K \ll m \tag{1}$$

则这一步骤就很生效。对轻的原子，这是毫无问题的。只要(1)式能满足，把两个区域上所获得的能量移动相加就必定获得与K无关的结果。

高频贡献。我们将计算任意原子态ψ_n上由于高频虚光子$\omega \gg k$发射所引起的能量移动。ν代表态的量子数(njlm)。我们利用例 5.6 中计算的自由态的形状因子$F_1(q^2)$，$F_2(q^2)$。在一级微扰论中，能量移动被设为这样的形式(参见例子 5.6，(20))：

$$\delta E_\nu^{>} = e\int \mathrm{d}^3x\,\psi_\nu^{\dagger}(\boldsymbol{x}) \times\left[\frac{\alpha}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{\mu}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\right)\Delta A^0(\boldsymbol{x})+\frac{\alpha}{2\pi}\frac{\mathrm{i}}{2m}\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{E}\right]\psi_\nu(\boldsymbol{x}). \tag{2}$$

这里我们已经利用了 $q^2=q_0^2-\boldsymbol{q}^2\to(i\nabla^\mu)(i\nabla^\mu)=-(\partial^2/\partial_t^2-\Delta)$。因为我们处理的是静态势 $A^0(\boldsymbol{x})$，仅有类空部分贡献，也就是说，仅有 $+\Delta$ 部分作贡献。

$$A^0(x)=-\frac{Ze}{|\boldsymbol{x}|} \tag{3}$$

是原子核的 Coulomb 势。现在的情况中，四维势中惟独这一分量不为零。$\boldsymbol{E}=-\nabla A^0$ 是相应的场强。我们已经利用了 $\gamma^0\sigma_{ok}\partial A^0/\partial x_k=-\gamma^0\sigma_{ok}\partial A^0/\partial x=\gamma^0(i/2)(\gamma_0\gamma_k-\gamma_k\gamma_0)E^k=i\gamma_k E^k=-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{E}$。$-1/5$项是由于真空极化引起的；与 $\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{E}$ 成比例的项描述了反常磁矩的效应。

为了确保仅有高频光子被考虑进来，我们必须在积分区拓宽到频率 $\omega>K$ 而不引入光子质量 μ 的条件下来重新推出形状因子 $F_1(q^2)$。我们不打算在这里给出推导的细节，正如例子5.7，(8)中那样，计算结果消除了红外发散。这儿的截断参数 K 就起着 ΔE 的作用，是能被观测光子的能量下限。在(2)式中我们必须作代换

$$\ln\frac{m}{\mu}\to\ln\frac{m}{2K}+\frac{5}{6}. \tag{4}$$

利用(4)式，能量移动为

$$\delta E_\nu^{>}=\delta E_\nu^{(1)}+\delta E_\nu^{(2)}, \tag{5}$$

式中

$$\delta E_\nu^{(1)}=\frac{e\alpha}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{2K}+\frac{5}{6}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\right)\langle\nu|\nabla^2A^0|\nu\rangle \tag{6a}$$

和

$$\delta E_\nu^{(2)}=\frac{-\mathrm{i}e\alpha}{4\pi m}\langle\nu|\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla A^0|\nu\rangle, \tag{6b}$$

并且这里我们已采用尖括号来代表期待值。我们可将(6b)所表示的反常磁矩贡献作变换。为此，我们注意到 $\boldsymbol{\gamma}$ 是一个奇算符，它将波函数 ψ_ν 的大分量和小分量联系在一起。为了获得非零的结果，我们必须用非相对论近似(为简单起见，我们省去足标 ν)

$$\psi=\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix} \tag{7}$$

其中

$$\chi=-\frac{\mathrm{i}}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\phi$$

借助(7)式和(6b)式中的矩阵元 $\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}0&\boldsymbol{\sigma}\\-\boldsymbol{\sigma}&0\end{pmatrix}$ 得：

$$\langle\nu|\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla A^0|\nu\rangle=\int\mathrm{d}^3x[\phi^*(\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla A^0)\chi-\chi^*(\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla A^0)\phi]$$

$$=-\frac{\mathrm{i}}{2m}\int \mathrm{d}^3x[\phi^*(\sigma\cdot\nabla A^0)(\sigma\cdot\nabla\phi)+(\sigma\cdot\nabla\phi^*)(\sigma\cdot\nabla A^0)\phi]. \tag{8}$$

现在我们可对 ϕ 简单地用 Schrödinger 波函数。我们利用分部积分变换(8)式中的第二项,得:

$$-\frac{\mathrm{i}}{2m}\int \mathrm{d}^3x(\sigma\cdot\nabla\phi^*)(\sigma\cdot\nabla A^0)\phi=+\frac{\mathrm{i}}{2m}\int \mathrm{d}^3x\phi^*\sigma\cdot\nabla[(\sigma\cdot\nabla A^0)\phi]. \tag{9}$$

然后二次应用恒等式

$$\sigma\cdot A\sigma\cdot B=A\cdot B+\mathrm{i}\sigma\cdot(A\times B) \tag{10}$$

得:

$$\begin{aligned}&\phi^*(\sigma\cdot\nabla A^0)(\sigma\cdot\nabla\phi)-\phi^*\sigma\cdot\nabla[(\sigma\cdot\nabla A^0\phi)]\\&=\phi^*[(\nabla A^0)\cdot(\nabla\phi)+\mathrm{i}\sigma\cdot(\nabla A^0)\times(\nabla\phi)]\\&\quad-\phi^*\{[(\nabla^2+\mathrm{i}\sigma\cdot\nabla\times\nabla)A^0]\phi+[(\nabla\phi)\cdot(\nabla A^0)+\mathrm{i}\sigma\cdot(\nabla\phi)\times(\nabla A^0)]\}\\&=-\phi^*(\nabla^2A^0)\phi+2\mathrm{i}\phi^*\sigma\cdot(\nabla A^0)\times(\nabla\phi).\end{aligned} \tag{11}$$

如果我们考虑势的球对称性,在最后一项中可引入角动量算符 $L=-\mathrm{i}r\times\nabla$,从而 $\nabla A^0=(r/r)(\mathrm{d}A^0/\mathrm{d}r)$ 可写成:

$$2\mathrm{i}\phi^*\sigma\cdot(\nabla A^0)\times(\nabla\phi)=-2\phi^*\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}A^0}{\mathrm{d}r}\sigma\cdot L\phi. \tag{12}$$

考虑到(8),(11),以及(12),能量移动可写成:

$$\delta E_\nu^{(2)}=\frac{e\alpha}{8\pi m^2}\left(\langle\nu|\nabla^2A^0|\nu\rangle+4\left\langle\nu\left|\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}A^0}{\mathrm{d}r}S\cdot L\right|\nu\right\rangle\right). \tag{13}$$

对(6a)和(13)中期待值的计算不会遇到任何困难。

低频贡献。我们将要在非相对论性微扰论下,并采用开始时就讨论的近似方案来导出由于频率为 $\omega<K$ 的软光子的发射和再吸收所引起的能级移动 $\delta E^<$。非微扰问题可用 Schrödinger 方程来描述:

$$\hat{H}_0\psi_\nu=\left(-\frac{\nabla^2}{2m}+eA^0(x)\right)\psi_\nu=E\psi_\nu. \tag{14}$$

此外,存在微扰算符

$$\hat{H}'=2\frac{\mathrm{i}e}{2m}A\cdot\nabla, \tag{15}$$

其中 A 是辐射场的势(在横向规范条件下)。由于 $\hat{H}'$ 产生并又湮灭光子,所以,在二阶微扰论下能量移动为

$$\delta E_\nu^<=\sum_{\nu',k,\lambda}\frac{|\langle\nu',k,\lambda|\hat{H}'|\nu\rangle|^2}{E_\nu-(E_{\nu'}+\omega)}. \tag{16}$$

这里,我们必须对所有电子态 ν'、虚光子的动量 k 和极化 λ 求和或积分。考虑到归一化和光子场的相空间因子,(16)式变成

$$\delta E_\nu^<=\sum_{\nu'}\sum_{\lambda}\int_{\omega<K}\frac{\mathrm{d}^3k}{2\omega(2\pi)^3}\frac{4\pi\alpha}{(2m)^2}\frac{|\langle\nu'|2\mathrm{i}e^{\mathrm{i}k\cdot x}\varepsilon(k,\lambda)\cdot\nabla|\nu\rangle|^2}{E_\nu-E_{\nu'}-\omega}. \tag{17}$$

光子场是按照 3.6 节中(3.170)式引入的。平面波的归一化因子是$\sqrt{4\pi/2\omega V}$。为进一步简化，我们现做长波长近似，并用 1 取代$\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})$。这是正确的，因为态$\phi_n$的典型的长度标度是由 Bohr 半径$a_B=1/(Z\alpha m)$给出。这就导致了$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}\leqslant Ka_B=K/(Z\alpha m)$，而且我们可以选一 K 值，使得指数在(1)式所允许的区域上都很小。

一般地，对横向极化的矢量，以下“完备性”成立：

$$\int d\Omega_k \sum_{\lambda=1}^{2} \epsilon_i^*(\boldsymbol{k},\lambda)\epsilon_j(\boldsymbol{k},\lambda) = \frac{2}{3}4\pi\delta_{ij}. \tag{18}$$

这可以用以下极化矢量，

$$\begin{aligned}\epsilon(\boldsymbol{k},1) &= (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta),\\ \epsilon(\boldsymbol{k},2) &= (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)\end{aligned} \tag{19}$$

并对$\int d\cos\theta d\varphi$进行积分来进行验证。

对极化的求和与对光子立体角的积分是容易完成的：

$$\int d\Omega_k \sum_{\lambda} |\langle\nu'|i\epsilon^{(\lambda)}\cdot\nabla|\nu\rangle|^2 = \frac{2}{3}4\pi|\langle\nu'|i\nabla|\nu\rangle|^2. \tag{20}$$

于是(17)式成为

$$\delta E_\nu^{<} = \frac{2\alpha}{3\pi}\int_0^K \omega d\omega \sum_{\nu'} \frac{|\langle\nu'|\hat{\boldsymbol{v}}|\nu\rangle|^2}{E_\nu - E_{\nu'} - \omega}, \tag{21}$$

其中速度算符为$\hat{\boldsymbol{v}}=\hat{\boldsymbol{p}}/m=-i\nabla/m$。然而，方程(21)还不能正确地描述物理上观察的能量平移，因为它包含了低能光子对质量重整化的修正。如果我们能意识到对自由态也存在能级移动，那么我们就能认识到这一点。对自由电子，速度算符是对角化的，能量移动为

$$\delta E_{\text{free}}^{<} = \frac{2\alpha}{3\pi}\int_0^K \omega d\omega \frac{v^2}{-\omega}. \tag{22}$$

我们可通过(21)式，减去表达式(22)来获得物理上的能量移动。借助于$\langle\nu|v^2|\nu\rangle=\Sigma_{\nu'}'|\langle\nu'|v|\nu\rangle|^2$，这样，重整化的表达式为

$$\begin{aligned}(\delta E_\nu^{>})_{\text{ren}} &= \delta E_\nu^{>} - \delta E_{\text{free}}^{>}\\ &= \frac{2\alpha}{3\pi}\int_0^K \omega d\omega \sum_{\nu'}{}' |\langle\nu'|\hat{\boldsymbol{v}}|\nu\rangle|^2\left(\frac{1}{E^\nu - E_{\nu'} - \omega} + \frac{1}{\omega}\right)\\ &= \frac{2\alpha}{3\pi}\int_0^K d\omega \sum_{\nu'}{}' |\langle\nu'|\hat{\boldsymbol{v}}|\nu\rangle|^2 \frac{E_\nu - E_{\nu'}}{E_\nu - E_{\nu'} - \omega}.\end{aligned} \tag{23}$$

如果我们还记得 K 将比所有的能量差$E_{\nu'}-E_\nu$要大，则对(a) $E_{\nu'}-E_\nu>0$ 情形，对 ω 的积分为

$$\begin{aligned}-\int_0^K \frac{d\omega}{\omega + (E_{\nu'} - E_\nu)} &= -\ln\frac{K + (E_{\nu'} - E_\nu)}{E_{\nu'} - E_\nu}\\ &\simeq -\ln\frac{K}{E_{\nu'} - E_\nu}\end{aligned} \tag{24}$$

对(b)$E_\nu - E_{\nu'} > 0$ 的积分为

$$-\int_0^K \frac{d\omega}{\omega - (E_\nu - E_{\nu'})} = -\left[\int_0^{E_\nu - E_{\nu'} - \varepsilon} \cdots + \int_{E_\nu - E_{\nu'} + \varepsilon}^{K} \cdots\right]$$

$$= -\left[\ln \frac{\varepsilon}{E_\nu - E_{\nu'}} + \ln \frac{K - (E_\nu - E_{\nu'})}{\varepsilon}\right]$$

$$\simeq -\ln \frac{K}{E_\nu - E_{\nu'}} . \tag{25}$$

这就导致

$$(\delta E_\nu^{>})_{\text{ren}} = \frac{2\alpha}{3\pi} \sum_{\nu'} |\langle \nu' | \hat{v} | \nu \rangle|^2 (E_{\nu - E_\nu}) \ln \frac{K}{|E\nu' - E_\nu|} . \tag{26}$$

上式求和不能解析获得。然而按照下式将对数重新标度是有用的

$$\ln \frac{K}{|E_{\nu'} - E_\nu|} = \ln \frac{2K}{m} - 2\ln(Z\alpha) + \ln \frac{(Z\alpha)^2 m/2}{|E_{\nu'} - E_\nu|} , \tag{27}$$

式中最后一项中的能量差称为束缚能单位(Rydberg 数)。头两项与 ν' 无关,相应的对中间态的求和为

$$S = \sum_{\nu'} |\langle \nu' | \hat{v} | \nu \rangle|^2 (E_{\nu'} - E_\nu)$$

$$= \sum \langle \nu | \hat{v} | \nu' \rangle \langle \nu' | \hat{v} | \nu \rangle (E_{\nu'} - E_\nu). \tag{28}$$

这一表达式能借助于常常用在此类"求和规则"中的对易子技巧推得。由于(14)式,我们能用 Hamilton 量 $\hat{H}_0$ 来替代能量本征值

$$S = \frac{1}{2} \sum_{\nu'} (\langle \nu | \hat{v} \hat{H}_0 | \nu' \rangle \langle \nu' | \hat{v} | \nu' \rangle + \langle \nu' | \hat{H}_0 \hat{v} | \nu \rangle$$

$$- \langle \nu | \hat{H}_0 \hat{v} | \nu' \rangle \langle \nu' | \hat{v} | \nu \rangle - \langle \nu | \hat{v} | \nu' \rangle \langle \nu' | \hat{v} \hat{H}_0 | \nu \rangle)$$

$$= \frac{1}{2m^2} \langle \nu | 2\hat{\boldsymbol{p}} \hat{H}_0 \hat{\boldsymbol{p}} - \hat{H}_0 \hat{\boldsymbol{p}} \hat{\boldsymbol{p}} - \hat{\boldsymbol{p}} \hat{\boldsymbol{p}} \hat{H}_0 | \nu \rangle$$

$$= \frac{1}{2m^2} \langle \nu | [\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{H}_0] \hat{\boldsymbol{p}} - \hat{\boldsymbol{p}} [\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{H}_0] | \nu \rangle$$

$$= -\frac{1}{2m^2} \langle \nu | [\hat{\boldsymbol{p}}, [\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{H}_0]] | \nu \rangle , \tag{29}$$

其中已用到完备性关系。因为

$$[\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{H}_0] = -\mathrm{ie}[\nabla, A^0] = -\mathrm{ie}(\nabla A^0)$$

我们得到

$$S = \frac{\mathrm{e}}{2m^2} \langle \nu | (\nabla^2 A^0) | \nu \rangle . \tag{30}$$

从而,由于长波长光子所引起的能量移动为

$$(\delta E_\nu^<)_{\text{ren}} = \frac{e\alpha}{3\pi m^2}\langle\nu|(\nabla^2 A^0)|\nu\rangle\left[\ln\frac{2K}{m} - 2\ln(Z\alpha)\right] + \frac{2\alpha}{3\pi}\sum_{\nu'}|\langle\nu'|\,\vec{v}\,|\nu\rangle|^2(E_{\nu'} - E_\nu)\ln\frac{(Z\alpha)^2 m/2}{|E_{\nu'} - E\nu|}\,. \tag{31}$$

总的能级移动。现在(6a),(13)以及(31)的贡献必须加在一起。正如我们能看到的,带有$\ln(2K/m)$的对数项正好互相消掉。正如所预料的,结果与分离能 K 的选择无关! 从而总的能量移动是由下列确定的结果给出:

$$\delta E_\nu = \frac{e\alpha}{3\pi m^2}\left(\frac{5}{6} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5} - \frac{3}{8} - 2\ln(Z\alpha)\right)\langle\nu|\nabla^2 A^0|\nu\rangle + \frac{e\alpha}{2\pi m^2}\left\langle\nu\left|\frac{1}{r}\frac{dA^0}{dr}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{L}\right|\nu\right\rangle + \frac{2\alpha}{3\pi}\sum_{\nu'}|\langle\nu'|\,\vec{v}\,|\nu\rangle|^2(E_{\nu'-E_\nu})\ln\frac{(Z\alpha)^2 m/2}{|E_{\nu'} - E_\nu|}. \tag{32}$$

现在我们要尽可能计算(32)式的矩阵元。势(3)满足

$$\nabla^2 A^0 = 4\pi Ze\delta^3(\boldsymbol{x}) \tag{33}$$

从而

$$\langle\nu|\nabla^2 A^0|\nu\rangle = 4\pi Ze|\phi_\nu(\boldsymbol{0})|^2. \tag{34}$$

类氢原子在原点的非相对论波函数密度为

$$|\phi_n(\boldsymbol{0})|^2 - \frac{(Z\alpha)^3 m^3}{\pi n^3}\delta_{l0}. \tag{35}$$

这意味着(32)式中的第一项只对 $s(l=0)$态有贡献。

对第二个矩阵元,我们用总角动量 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{S}$ 的平方来表示,从而

$$\langle\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S}\rangle = \frac{1}{2}\left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}\right] = \frac{1}{2}\begin{cases} l \\ -l-1 \end{cases}, \tag{36}$$

式中上(下)表达式分别对应着 $j=l+1/2(j=l-1/2)$,对 s 波(36)式消失。因为有$(1/r)(dA^0/dr)=-Ze/r^3$,我们须要计算 $1/r^3$ 的期待值。对此非相对论量子力学得到下面的结果,原则上讲这是一个基本问题。

$$\left\langle\nu\left|\frac{1}{r^3}\right|\nu\right\rangle = \frac{2(Z\alpha)^3 m^3}{l(l+1)(2l+1)n^3}\,. \tag{37}$$

最后,我们定义量

$$L_{nl} = \frac{n^3}{2m(Z\alpha)^4}\sum_{\nu'}|\langle\nu'|\,\vec{v}\,|\nu\rangle|^2(E_{\nu'} - E_\nu)\ln\frac{(Z\alpha)^2 m/2}{(E_{\nu'} - E_\nu)}\,, \tag{38}$$

它被称之为 Bethe 对数并必须用数值方法进行计算。

把(34-38)代入(32)式中,我们最后获得一个原子能级的能量移动的表达式,对 $j=l\pm1/2$ 的态为

$$\delta E_{nj} = \frac{4m}{3\pi n^3}\alpha(Z\alpha)^4\left\{L_{nl} + \left[\frac{19}{30} - 2\ln(Z\alpha)\right]\delta_{l0}\right.$$

$$\pm \frac{3}{4} \frac{1}{(2j+1)(2l+1)}(1-\delta_{l0})\Bigg\} \tag{39}$$

与无微扰的束缚能

$$E_n \simeq -\frac{(Z\alpha)^2 m}{2n^2} \tag{40}$$

(没自旋-轨道分裂)相比,能量移动压低一个因子 $\alpha(Z\alpha)$,从而变得很小。不管怎样,δE_{nj}的影响能在实验上获得高精度的测量。尤其是(39)式预言在类点原子的 Dirac 核理论仍成立的具有相等总角动量 j 的态的简并将被消除。氢原子中 $2s_{1/2}$态与 $2p_{1/2}$态间的能级分裂就是一个经典的例子。这首先是由 Lamb 与他的合作者[①]用最新发展的微波光谱学方法测得的,由此而被称之为 Lamb 移动。

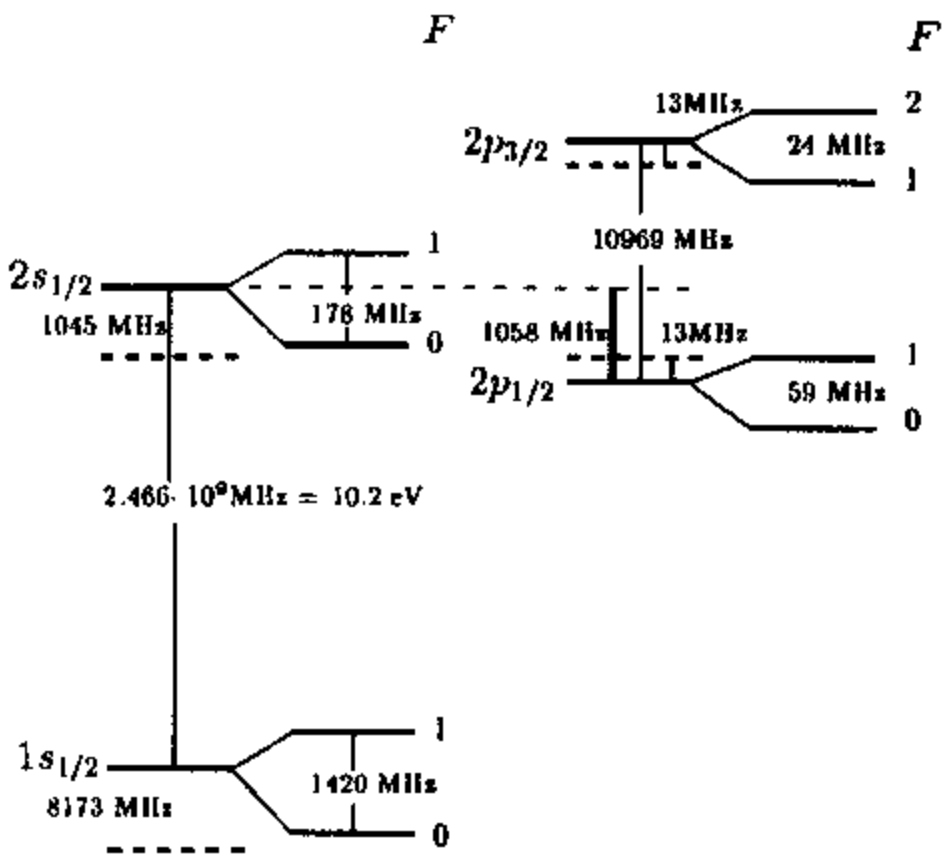


图 5.28 对氢原子 K 壳层和 L 壳层的能级的 QED 修正。
虚线表示未移动的 Dirac 能级的位置,实的粗线标记 Lamb 移动

图 5.28 中画出了氢原子最内层的能级(没有标度)。对 $1s_{1/2}$, $2s_{1/2}$, $2p_{1/2}$, $2p_{3/2}$的每个态,δE_{nj}给出了相对于 Dirac 能级(虚线所示)的 QED 移动。我们应该注意到事实上还存在来自于电子与质子(自旋 $S=1/2$)的磁矩相互作用所引起的额外结构。其结果是超精细分裂使每个能级分裂成不同总自旋量子数 F 的双重态。当引用 Lamb 移动时,通常都是指不言而喻地移去了超精

① 参见 W. E. Lamb 和 R. C. Retherford: Phys. Rev. **72**,241(1947).

细结构的双重态的中心能量①。为了计算 Lamb 移动的值，必须数值计算(38)式的和 L_{nl}，结果为

$$L_{20} \simeq -2.81177,$$
$$L_{21} \simeq +0.03002. \tag{41}$$

从而，对氢原子($Z=1$)，我们得到

$$\delta E_{2s_{1/2}} = \frac{4m}{3\pi 2^3}\alpha(Z\alpha)^4\left[-2.81177 - 2\ln(Z\alpha) + \frac{19}{30}\right]$$
$$= \frac{m}{6\pi}\alpha(Z\alpha)^4(+7.66205)$$
$$= +4.29828 \times 10^{-6}\text{eV}$$
$$= +1039.3\text{MHz}, \tag{42a}$$

式中，最后一步我们已利用 $\delta E = 2\pi\hbar\nu$($\hbar = 6.58212\times10^{-16}$ eVsec)，将能量换算成频率了。类似地可得到

$$\delta E_{2p_{1/2}} = -\frac{4m}{3\pi 2^3}\alpha(Z\alpha)^4\left(+0.03002 - \frac{1}{8}\right)$$
$$= \frac{m}{6\pi}\alpha(Z\alpha)^4(-0.09498)$$
$$= -5.328 \times 10^{-8}\text{eV}$$
$$= -12.9\text{MHz}. \tag{42b}$$

从而氢原子的 Lamb 移动是

$$L^{\text{theor}} = \delta E_{2s_{1/2}} - \delta E_{2p_{1/2}} = +1052.2\text{MHz}. \tag{43}$$

它包含了真空极化((2)式中的$-1/5$ 项)的贡献-27.1MHz。(43)式的预言很好地与当今的实验测量值相符合②

$$L^{\text{exp}} = +1057.845 \pm 0.009\text{MHz}. \tag{44}$$

为理解 L 的大小量级，作(31)式的非相对论计算就足够了。后者在 Lamb 和 Retherford 发现此效应不久就由 Bethe③完成了。在对截断能量 $K=m$ 作任意选择时，他得到 $L=1040$MHz。然而为了能完全理解(44)式的实验值，就必须考虑高能光子的贡献。为了获得更好的定量上的符合，必须包括几个更高阶的贡献④，尤其是$(Z\alpha)^5$ 和 $\alpha^2(Z\alpha)^4$ 以及由于有限核质量所引起的反冲修正

---

① 氢原子基态的超精细劈裂($\delta E_{1s}^{hfs} = 1.4204057517667$GHz 产生著名的 21cm 氢光谱线)是研究最好的物理可观察量之一。不幸的是理论与实验成就并不相同，因为理论预言依赖于尚了解不够的质子的详细内部结构。因此引用数的最后 6 位数仍然不好解释。

② S. R. Lundeen 和 R. M. Pipkin: Phys. Rev. Lett. **46**, 232(1981).

③ H. A. Bethe: Phys. Rev. **72**, 339(1947).

④ 例如，B. E. Lautrup, A. Peterman, E. de Rafael: Phys. Rep. **3**, 193(1972).

(参见表 5.2)。此结果是当今 Lamb 移动的理论值[①]

$$L^{theor} = +\ 1057.855 \pm 0.014\text{MHz}, \tag{45}$$

这与实验非常相符。在量子电动力学框架中,人们对氢原子的结合能的研究已达到 10^{-11}这样的精度,已经是极其成功的了!符合的程度受到质子半径不确定性的限制。

利用无反冲两光子激光光谱学方法,现已能很高精度地直接测量[②]能量差 $E_{2s_{1/2}} - E_{1s_{1/2}}$。其结果完全与 QED 的预言相一致。注意这些测量的精度原则上可几乎无限制地提高。相反,原始的 Lamb 移动测量受到一些自然限制,因为态 $2p_{1/2}$具有短寿命,它导致能量展宽的量级为 100MHz。从而 Lamb 移动的最新测量已能将共振态信号确定在 10^{-4}线宽的精度内。另一方面,对 $1s-2s$ 能量差的直接测量不受这一问题的影响:基态当然是完全稳定的,而 $2s_{1/2}$态是亚稳的(寿命约 1/7 秒),所以这一跃迁线宽度是可忽略掉的。

表 5.2 对氢原子能量分裂 $E_{2s_{1/2}} - E_{2p_{1/2}}$的贡献

贡献	ΔE[MHz]
$\alpha(Z\alpha)^4$	+1 050.559
$\alpha(Z\alpha)^5$	+7.129
$\alpha(Z\alpha)^6$	−0.419
$\alpha^2(Z\alpha)^4$	+0.101
反冲修正	+0.358
有限核半径的影响	+0.127
合计	1 057.855

如今努力的目标是确定具有大原子质量数 Z 的类氢离子的能级移动。诸如 U^{91+}的高荷电离子能在重离子加速器中产生。在这种系统中的辐射修正的相对强度比氢原子中的要大得多。然而为获得丰富的理论知识,我们有必要避免采用计算 Lamb 移动所作的近似,而应该用含 Coulomb 势的 Dirac 方程的完全传播子[③]。结果能精确到参数 $Z\alpha$ 展开的所有级。

在各种单电子的原子中的 1s 态的能量的移动值见图 5.29。该图所显示的能量移动已除以原子核电荷数 Z 的四次方,更具体地说,该图表示如下定义的函数 $F(Z)$:

$$\delta E_{1s} = \frac{\alpha}{\pi}\frac{(Z\alpha)^4}{n^3}mF(Z). \tag{46}$$

---

① 见评论,J. R. Sapirstein 和 D. R. Yennie in T. Kinoshita: Quantum Electrodymamics (World Scientific, Singapore, 1990).

② R. G. Beausoleil, D. H. MacIntyre, C. J. Fort, E. A. Hildum, C. Couilland, T. W. Häusch, Phys. Rev. **A35**, 4878(1987).

③ P. J. Mohr: Ann. Phys. (NY)**88**, 26 and 52(1974); P. J. Mohr: *in Physics of Strong Fields*, W. Greiner(ed.) (Plenum, London and New York 1987).

测量值又与理论预言的曲线相符。在所研究的最重的离子U^{91+}中，在GSI(Darmstadt)[①]的ESR重离子储存环的工作小组已经获得$\delta E_{1s}=413\pm65$eV的测量值，它必须与理论值$\delta E_{1s}=454$eV进行比较。

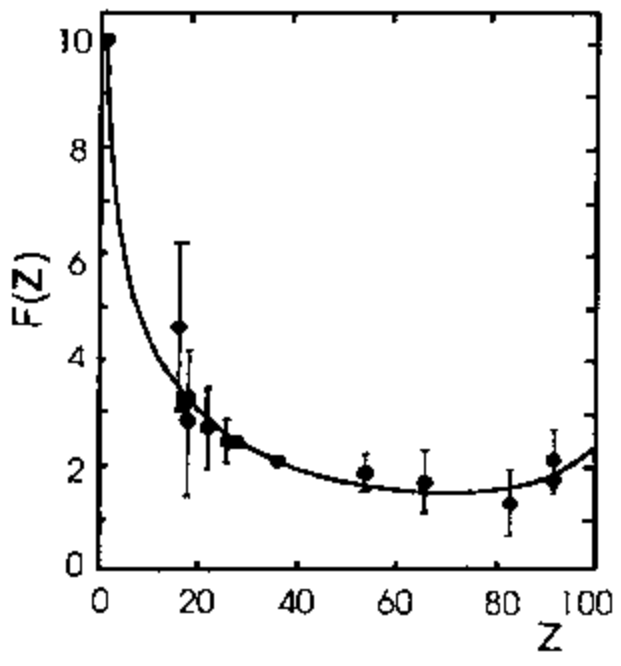


图 5.29　单电子原子 1s 态能量移动实验和理论结果的比较，用核电荷 Z 的函数画出

5.5　传　　记

布洛赫(F. Bloch)，美籍瑞士-物理学家，1905年10月13日生于苏黎世，1983年9月10日卒于苏黎世。布洛赫在苏黎世大学和莱比锡大学学习物理，并于1928年在海森堡指导下于莱比锡大学取得博士学位。在哥本哈根(与尼尔斯·玻尔一起)和其他地方逗留以后，1932年他成为莱比锡大学的无薪大学教师。1934年布洛赫移居到美国并参加斯坦福大学物理系的工作。1954年布洛赫成为日内瓦西欧核子研究中心(CERN)的主席。布洛赫从事金属的量子场论(他的博士论文)和铁磁性的研究，他建立了磁区域之间边界的性质(布洛赫壁)。他还研究具有能量的粒子在物质中的阻止。在斯坦福大学，他从事中子极化、中子的磁散射和核磁矩的研究工作。由于发现核磁感应布洛赫荣获1952年诺贝尔物理奖(与珀塞尔分享)。

兰姆(W. E. Lamb)，美国物理学家，1913年7月12日生于洛杉矶，兰姆在加利福尼亚大学学习物理(1938年取得博士学位)。兰姆首先担任研究助理，后来他先后在哥伦比亚大学(1938～

① Th. Stöhlker, P. H. Mokler, K. Beckert, F. Bosch, H. Eickhoff, B. Franzke, M. Jung, T. Kandler, C. Kozhuharov, R. Mooshammer, F. Nolden, H. Reich, R. Rymuza, P. Spädtke, M. Steck: Phys. Rev. Lett. **71**, 2184(1993).

1952)、斯坦福大学、牛津大学和耶鲁大学(1962～1972)及阿利桑那大学作教授。兰姆从事原子物理、固态物理和微波谱学的研究工作。由于对氢原子能级的精细结构分裂的测量,兰姆荣获 1955 年诺贝尔物理奖(与库什分享)。

乌林(E. A. Uehling),美国物理学家,1901 年 1 月 27 日生于洛韦尔(威斯康星),1985 年 5 月 18 日去世。乌林在威斯康星大学学习物理,并在贝尔电话实验室和其他公司担任无线电工程师。1932 年他于密执安大学在乌伦贝克指导下取得博士学位。此后,他先后在哥本哈根、莱比锡(与海森堡一起)、伯克利和珀塞顿纳(与奥本海默一起)等地理论物理研究所当博士后,自 1936 年起,乌林在华盛顿大学担任物理教授。乌林从事输运过程的量子理论和真空极化效应的研究工作。他还对凝聚态物理,特别是铁电理论作出过贡献。

华德(J. C. Ward),英国物理学家,1924 年生于伦敦。华德在牛津大学学习数学和物理(1949 年取得博士学位)。他先后在马里兰大学、迈阿密大学和约翰霍布金斯大学教书。1966 年起他在马奎里大学(澳大利亚)担任物理教授。华德从事量子场论中的重整化理论和规范不变性效应(华德恒等式)的研究工作。他与萨拉姆一起研究弱、电磁、强作用之间的联系,为统一场论铺定道路。华德还从事二维 Ising 模型的研究,对统计力学作出贡献。

第六章　双粒子体系

6.1　Bethe-Salpeter 方程

在许多情况下，对双粒子相互作用，需要一个比迄今为止我们所讨论的微扰论更好的描写。尤其当我们处理束缚态时更是这样：在束缚态中一些粒子长时间地处在一起，所以它们像图 6.1 那样随时在相互作用。显然，这种情况不能用几个 Feynman 图之和来描写。如果其中一个粒子比其他的重很多，则问题可大大地被简化成：解此轻粒子在其他重粒子所产生的外场中运动的 Dirac 方程。由于质量比很大，轻粒子对重粒子的影响可以忽略。

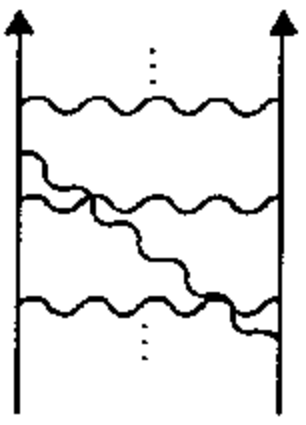


图 6.1　在束缚态中的粒子可随时地相互作用

描写两个相等或可比质量的粒子的相互作用比较困难，因为不能忽略“反冲”效应。其最有名的例子是电子偶素，即电子和正电子的束缚体系。这里无法区分场源和被检验粒子。我们必须把两个粒子同等地处理。更复杂的是相互作用以一定的速度传播，这将产生“延迟效应”。在正确的相对论理论中，没有一个优先的共同时间坐标。双粒子体系的波动方程与两个时间坐标有关，所以要解释它就很困难。

下面我们想至少在原则上写出一个双粒子体系的精确方程，虽然要得到此方程的精确解是很困难的。然后我们将研究一种近似，这种近似又可导出一类有相互作用外场(Breit 相互作用，见习题 6.4)的 Dirac 方程。

为了研究两个相等粒子 a 和 b 的行为，我们推广传播子的定义。只考虑一个粒子时，它的波动方程用有 4 个分量的旋量 $\psi(x)$来描写。如在习题 6.1 中所示，相应的初值问题是用 Feynman 传播子 $S_F(x_2,x_1)$来解决的：

$$\psi(x_2) = -\mathrm{i}\int \mathrm{d}\sigma(x_1) S_F(x_2,x_1)\gamma^\mu n_\mu(x_1)\psi(x_1), \tag{6.1}$$

这里，我们必须在一个包括时空点 x_2 的封闭的三维超曲面上作积分；$n_\mu(x_1)$是超曲面的外部法向矢量。

这个关系可推广到双粒子的情况。显然，这种体系必须用有 8 个坐标的波函数 $\psi_{ab}(x_1,x_2)$来描写：6 个空间坐标$(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)$和两个时间坐标$(t_1,t_2)$。另外，$\psi_{ab}(x_1,x_2)$还有两个旋量指标，即 $4\times4=16$ 个分量！指标 a 和 b 表示两个粒子的旋量空间。与非相对论多粒子理论不同，两个时间坐标的出现，使得解释此波动方程更困难。如果我们想用同等的方式来处理时间和空间坐标，这种困难是不可避免的。

类似于(6.1)我们可以定义双粒子波函数的传播子

$$\psi_{ab}(x_3,x_4)=\int \mathrm{d}\sigma(x_1)\mathrm{d}\sigma(x_2)S^{ab}(x_3,x_4;x_1,x_2)\not{n}(x_1)\not{n}(x_2)\psi_{ab}(x_1,x_2), \tag{6.2}$$

这里，现在我们必须在包含点 x_3 和 x_4 的两个三维双曲面上积分。如在习题 6.1 中那样，(6.2)可转化为两个类空超曲面的情况，即在固定的时间坐标 t_n 下对 d^3x_n 积分。

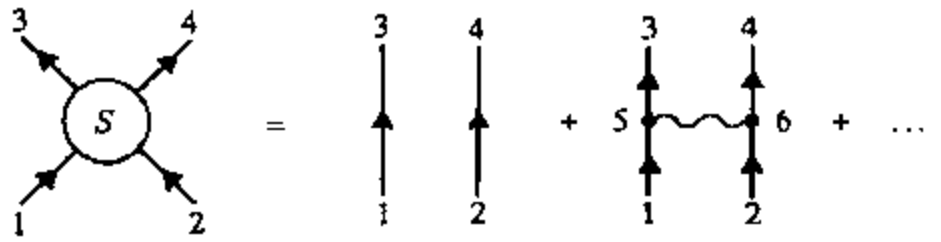
如果两个粒子不相互作用，则波函数简单地为如下的积

$$\psi^0_{ab}(x_1,x_2)=\psi_a(x_1)\psi_b(x_2) \tag{6.3}$$

所以，如果我们令

$$S^{0\,ab}(x_3,x_4;x_1,x_2)=\mathrm{i}S^a_{\mathrm{F}}(x_3,x_1)\mathrm{i}S^b_{\mathrm{F}}(x_4,x_2)\ . \tag{6.4}$$

则(6.2)因子化成式(6.1)那样的两个积分。超出这种平庸的情况，我们就必须考虑如果两个粒子有电磁作用，将会怎样。在微扰论中(按耦合常数 e 的幂来展开)可以很容易地得到对(6.4)的第一级修正[①]，它由单光子交换图给出

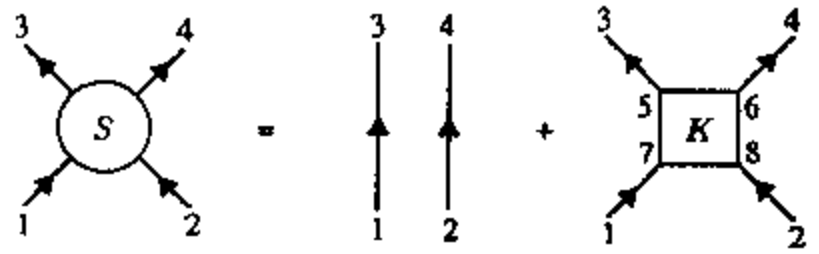


(6.5)

用 S 表示的圈为完全双粒子传播子，不连接的 Fermi 子线表示在(6.4)中给出的自由双粒子传播子 S^0。用 Feynman 规则，我们可以将(6.5)转换成公式

$$\begin{aligned}S^{ab}(x_3,x_4;x_1,x_2)=&\mathrm{i}S^a_{\mathrm{F}}(x_3,x_1)\mathrm{i}S^b_{\mathrm{F}}(x_4,x_2)\\&+\int \mathrm{d}^4x_5\mathrm{d}^4x_6\mathrm{i}S^a_{\mathrm{F}}(x_3,x_5)\mathrm{i}S^b_{\mathrm{F}}(x_4,x_6)\\&\times[(-\mathrm{i}e_a)\gamma^a_\mu \mathrm{i}D^{\mu\nu}_{\mathrm{F}}(x_5,x_6)(-\mathrm{i}e_b)\gamma^b_\nu]\mathrm{i}S^a_{\mathrm{F}}(x_5,x_1)\mathrm{i}S^b_{\mathrm{F}}(x_6,x_2)\\&+\cdots .\end{aligned} \tag{6.6}$$

注意，在这里和下面的方程中有两个独立的旋量指标。例如，4×4 的矩阵 γ^a_μ 与矩阵 $S^a_{\mathrm{F}}(x_3,x_5)$和 $S^a_{\mathrm{F}}(x_5,x_1)$相乘，而 γ^b_ν 与 $S^b_{\mathrm{F}}(x_4,x_6)$和 $S^b_{\mathrm{F}}(x_6,x_2)$相乘。于是双粒子传播子是 16×16 的矩阵。在(6.5)和(6.6)中，我们只写出了无穷级数的头两项。无穷级数的结果可以用代表函数 $K(x_3,x_4;x_1,x_2)$的黑方块来表示，它称为“作用核”。于是(6.5)的精确形式成为



(6.7)

或明显地写出来为

---

① 为简单起见，我们假设粒子 a 和 b 是不可区分的，否则将出现交换图。粒子和其反粒子的作用将在例 6.2中讨论。

$$S^{ab}(x_3,x_4;x_1,x_2)=\mathrm{i}S_{\mathrm{F}}^{a}(x_3,x_1)\mathrm{i}S_{\mathrm{F}}^{b}(x_4,x_2)$$
$$+\int \mathrm{d}^4x_5\mathrm{d}^4x_6\mathrm{d}^4x_7\mathrm{d}^4x_8\mathrm{i}S_{\mathrm{F}}^{a}(x_3,x_5)\mathrm{i}S_{\mathrm{F}}^{b}(x_4,x_6)$$
$$\times K^{ab}(x_5,x_6;x_7,x_8)\mathrm{i}S_{\mathrm{F}}^{a}(x_7,x_1)\mathrm{i}S_{\mathrm{F}}^{b}(x_8,x_2)\ . \qquad (6.8)$$

到此，我们还没有得到更多，因为 K 是一个非常复杂的函数。只在微扰论的第一级上，核才非常简单，根据(6.6)，它为

$$K_0^{ab}(x_5,x_6;x_7,x_8)=(-\mathrm{i}e_a)\gamma_\mu^a\mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x_5,x_6)(-\mathrm{i}e_b)\gamma_\nu^b\delta^4(x_5-x_7)\delta^4(x_6-x_8). \qquad (6.9)$$

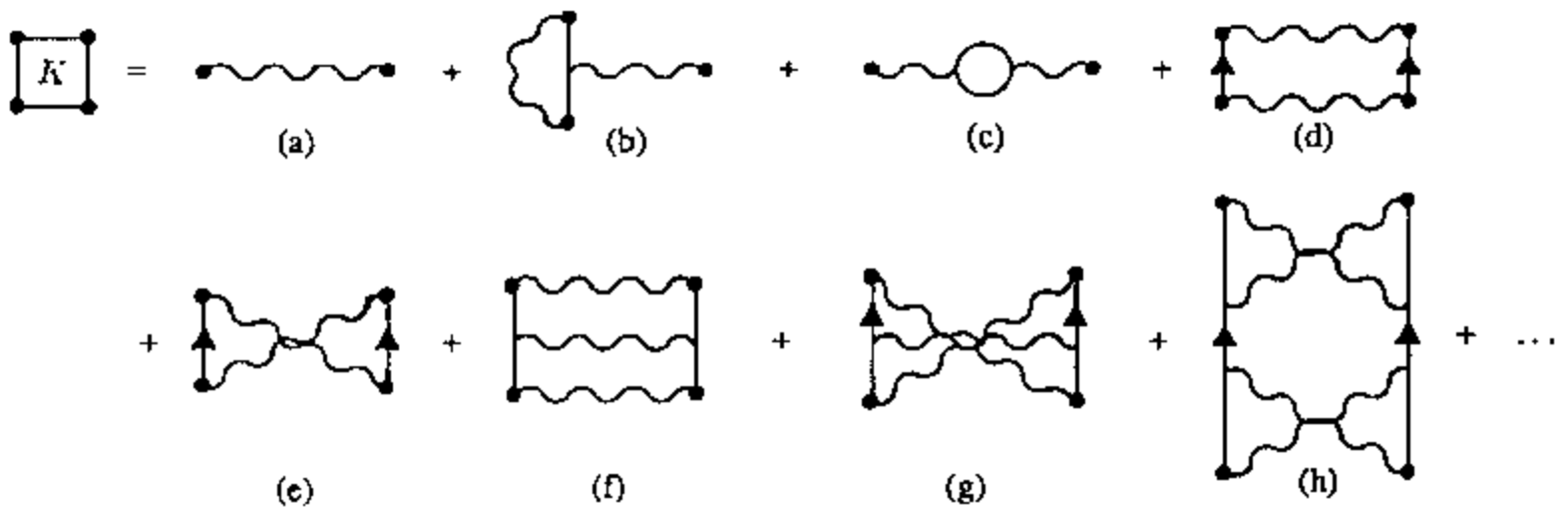


图 6.2(a)～(h)　作用核 K 对微扰级数有贡献的一些典型图

完全函数 K 是无穷多的任意高级图之和。在图 6.2 中显示了一些例子。为了超越微扰论，我们可以通过一些技巧，至少将对无穷和 K 有贡献的子集收进来。为此我们定义一个可约作用核的概念。它表征为此核可通过切断两条 Fermi 线而分为不连接的两部分。相应地，如果它密集地交叉起来，使得它不能作这样的切割，则称为不可约的核①。在图 6.3 中显示了可约和不可约的图的例子。在图 6.2 中只有图 d，f，和 h 是可约的。我们将所有的对 K 有贡献的不可约核之和表示为不可约相互作用核 $\overline{K}$。

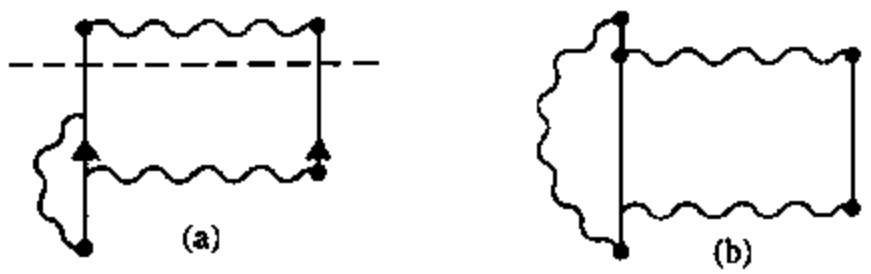
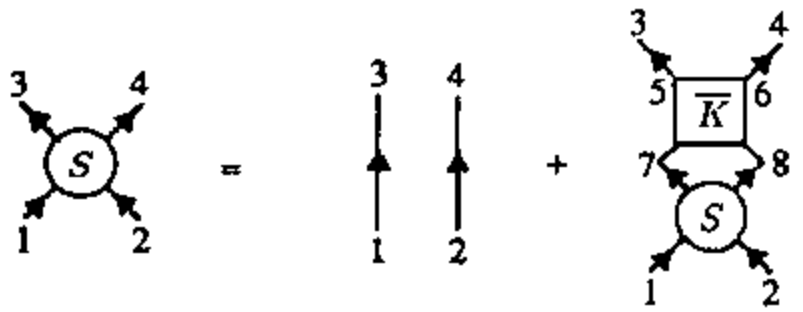


图 6.3　可约的(a)和不可约的(b)第三级相互作用的例子

显然，每一个可约图可以用连接对核 $\overline{K}$ 有贡献的几个不可约图来描写。但是这可通过将(6.7)作简单的变形而得到：

① 切割必须在“水平”方向。图 6.2 中的图(a)到(c)就不是可约的。

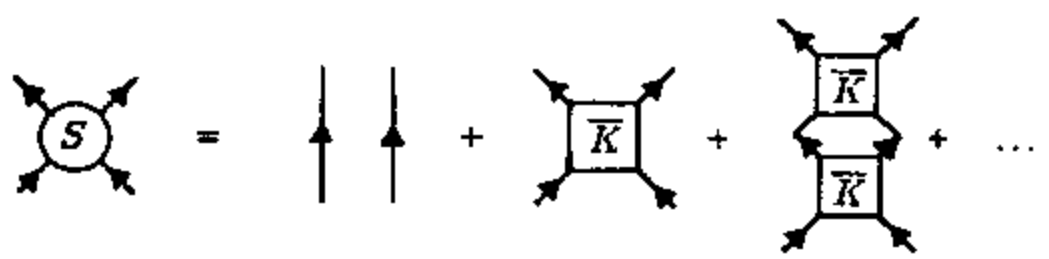


(6.10)

或明显地写出来为

$$S^{ab}(x_3,x_4;x_1,x_2) = iS_F^a(x_3,x_1)iS_F^b(x_4,x_2) + \int d^4x_5 d^4x_6 d^4x_7 d^4x_8 iS_F^a(x_3,x_5)iS_F^b(x_4,x_6) \times \overline{K}^{ab}(x_5,x_6;x_7,x_8)S^{ab}(x_7,x_8;x_1,x_2). \tag{6.11}$$

在此方程中，完全核 K 被不可约核 $\overline{K}$ 来代替，但为此我们也将两个独立的单粒子传播子用完全双粒子传播子来代替。如果我们用迭代法来解(6.10)，即重复地将(6.10)的左端插入右端，那么(6.10)等价于(6.7)就马上清楚了：



(6.12)

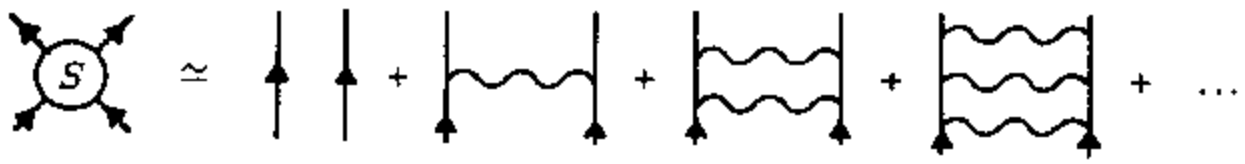
于是(6.10)的迭代法保证了所有可能的不可约 Feynman 图都被结合了，这样，我们就从 $\overline{K}$ 得到了完全的和 K。

不可约核 $\overline{K}$ 也包含了无穷多 Feynman 图，所以也无法精确计算。但是与(6.7)比较，(6.10)有着明确的优点：看一下(6.12)，我们看到它的解自动地包含了无穷的相互作用级数，即使 $\overline{K}$ 本身是用低级微扰论来计算的！如我们在本节开始时讨论的那样，如果我们对束缚态有兴趣，就必须包括无穷数的相互作用。

在许多实际情况中，我们限于计算最低级的不可约核 $\overline{K}$(图 6.2(a))，即在(6.9)中给出的单光子交换核。

$$\overline{K}^{ab}(x_5,x_6;x_7,x_8) \approx K_0^{ab}(x_5,x_6;x_7,x_8) \tag{6.13}$$

这种精确度称为梯形近似。如果我们看一下迭代方程(6.14)就可见此名称来自它自己：



(6.14)

在此近似中可看到一个 Lorentz 框架。在此框架中，在给定的时间只交换一个光子，但此过程可重复任意多次。总之我们必须意识到其中有许多可能的图。在梯形近似中，由于对 $\overline{K}$ 的限制，我们只考虑了一类非常特殊的图，虽然其中包含了无穷个图。这种近似的合理性只能被它的成功所证明。

我们要指出，原则上当我们计算(6.11)时，不应当用自由的 Feynman 传播子 S_F，而应当用“穿衣的”传播子，其中包含任意级的和它们自己的光子场的相互作用(见第五章)。所以我们考虑了(6.10)中的所有的自相互作用图。同样，当计算 $\overline{K}$ 时，我们应当用精确的光子传播子和顶角函数。与此有关的重整化问题，我们不在这里讨论。

为了得到双粒子波函数的方程，我们将(6.11)插入(6.2)：

$$\begin{aligned}\psi_{ab}(x_3,x_4) =& \int d\sigma(x_1)d\sigma(x_2)iS_F^a(x_3,x_1)iS_F^b(x_4,x_2)\not{n}(x_1)\not{n}(x_2)\psi_{ab}(x_1,x_2)\\ &+\int d\sigma(x_1)d\sigma(x_2)\int d^4x_5d^4x_6d^4x_7d^4x_8 iS_F^a(x_3,x_5)iS_F^b(x_4,x_6)\\ &\times \overline{K}^{ab}(x_5,x_6;x_7,x_8)S^{ab}(x_7,x_8;x_1,x_2)\not{n}(x_1)\not{n}(x_2)\psi_{ab}(x_1,x_2),\end{aligned}\tag{6.15}$$

或者，如果我们将第一项缩写成 $\phi_{ab}(x_3,x_4)$，在第二项中插入(6.2)，并改写一些指标，就得

$$\begin{aligned}\psi_{ab}(x_1,x_2) =& \phi_{ab}(x_1,x_2)+\int d^4x_3d^4x_4d^4x_5d^4x_6 iS_F^a(x_1,x_5)iS_F^a(x_2,x_6)\\ &\times \overline{K}^{ab}(x_5,x_6;x_3,x_4)\psi_{ab}(x_3,x_4).\end{aligned}\tag{6.16}$$

这就是 Bethe-Salpeter 方程[①]。它是一个 Fredholm 型的复杂的非齐次积分方程。这种数学结构是我们为了超越微扰论而必须付出的代价。

$\phi_{ab}(x_1,x_2)$是自由双粒子波函数。如果我们对束缚态，即定域态，有兴趣，就从(6.16)中去掉 $\phi_{ab}(x_1,x_2)$，于是积分方程就成为齐次的(见本节结尾的附注)。如果我们在 Bethe-Salpeter 方程(6.16)左端乘以自由 Dirac 算符$(i\not{\partial}_1-m_a)$ 和$(i\not{\partial}_2-m_b)$，则它也可写成另一形式。因为单粒子传播子满足关系

$$\begin{aligned}(i\not{\partial}_1-m_a)S_F^a(x_1,x_5)&=\delta^4(x_1-x_5),\\ (i\not{\partial}_2-m_b)S_F^b(x_2,x_6)&=\delta^4(x_2-x_6),\end{aligned}\tag{6.17}$$

于是有

$$(i\not{\partial}_1-m_a)(i\not{\partial}_2-m_b)\psi_{ab}(x_1,x_2)=-\int d^4x_3d^4x_4\overline{K}^{ab}(x_1,x_2;x_3,x_4)\psi_{ab}(x_3,x_4).\tag{6.18}$$

在此形式中，Bethe-Salpeter 方程是一个积分-微分方程(有 8 个变量)。为了实用的目的，此方程还有另一种将它变换到动量空间的有用的形式。

如果我们将在动量空间中的波函数定义为

$$\chi_{ab}(p_1,p_2)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x_1d^4x_2e^{i(p_1\cdot x_1+p_2\cdot x_2)}\psi_{ab}(x_1,x_2),\tag{6.19}$$

则(6.18)的 Fourier 变换为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x_1d^4x_2e^{i(p_1\cdot x_1+p_2\cdot x_2)}(i\not{\partial}_1-m_a)(i\not{\partial}-m_b)\psi_{ab}(x_1,x_2)\\ &=-\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x_1d^4x_2d^4x_3d^4x_4e^{i(p_1\cdot x_1+p_2\cdot x_2)}\overline{K}^{ab}(x_1,x_2;x_3,x_4)\psi_{ab}(x_3,x_4).\end{aligned}\tag{6.20}$$

① H. A. Bethe 和 E. E. Salpeter: Phys. Rev. **82**, 309(1951) 和 **84**, 1232(1951).

我们在左端作分部积分，使梯度算符作用于指数函数上，并在右端插入两个 δ 函数 $\delta^4(x_3'-x_3)$，$\delta^4(x_4'-x_4)$

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2[(-\mathrm{i}\not\partial_1-m_a)(-\mathrm{i}\not\partial_2-m_b)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1\cdot x_1+p_2\cdot x_2)}]\psi_{ab}(x_1,x_2)$$

$$=-\frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\mathrm{d}^4x_3\mathrm{d}^4x_4\mathrm{d}^4x_3'\mathrm{d}^4x_4'\delta^4(x_3'-x_3)\delta^4(x_4'-x_4)$$

$$\times \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1\cdot x_1+p_2\cdot x_2)}\overline{K}^{ab}(x_1,x_2;x_3,x_4)\psi_{ab}(x_3',x_4')\ . \tag{6.21}$$

用 δ 函数的积分表示式，

$$\delta^4(x_3'-x_3)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4p_1'\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1'\cdot(x_3'-x_3)}, \tag{6.22}$$

我们可将(6.21)的右端表示成动量空间波函数和动量空间作用核的乘积：

$$\overline{K}^{ab}(p_1,p_2;p_3,p_4)$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^8}\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\mathrm{d}^4x_3\mathrm{d}^4x_4\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1\cdot x_1+p_2\cdot x_2-p_3\cdot x_3-p_4\cdot x_4)}\overline{K}^{ab}(x_1,x_2;x_3,x_4). \tag{6.23}$$

于是动量空间的 Bethe-Salpeter 方程成为

$$(\not p_1-m_a)(\not p_2-m_b)\chi_{ab}(p_1,p_2)$$

$$=-\int \mathrm{d}^4p_1'\mathrm{d}^4p_2'\overline{K}^{ab}(p_1,p_2;p_1',p_2')\chi(p_1',p_2')\ . \tag{6.24}$$

当处理双粒子体系时，转换到绝对和相对坐标中是有好处的。为简单起见，我们假定两个粒子的质量相等 $m=m_a=m_b$，并定义

$$P=p_1+p_2, p=\frac{1}{2}(p_1-p_2), \tag{6.25}$$

或

$$p_1=\frac{1}{2}P+p,\ p_2=\frac{1}{2}P-p\ . \tag{6.26}$$

因为由核 $\overline{K}^{ab}$ 描写的相互作用必须动量守衡，即 $p_1+p_2=p_1'+p_2'$，我们可以设

$$\overline{K}^{ab}(p_1,p_2;p_1',p_2')=\delta^4(P-P')\overline{K}^{ab}(p,p';P)\ . \tag{6.27}$$

用(6.26)和(6.27)，由于(6.27)中的体积元变换的 Jacobi 行列式等于 1，(6.24)就成为

$$\left(\frac{1}{2}\not P+\not p-m\right)\left(\frac{1}{2}\not P-\not p-m\right)\chi_{ab}(p,P)$$

$$=-\int \mathrm{d}^4p'\mathrm{d}^4p'\left|\frac{\partial(p_1',p_2')}{\partial(p',P')}\right|\overline{K}^{ab}(p,p';P')\delta^4(P-P')\chi_{ab}(p',P') \tag{6.28}$$

或

$$\left(\frac{1}{2}\not P+\not p-m\right)\left(\frac{1}{2}\not P-\not p-m\right)\chi_{ab}(p,P)$$

$$=-\int \mathrm{d}^4p'\overline{K}^{ab}(p,p';P)\chi_{ab}(p',P)\ , \tag{6.29}$$

在(6.29)中，P 只起着参数的作用。我们可看一下给定“质心动量”K 值的波函数

$$\chi_{ab}(p,P) = \delta^4(P-K)\chi_{ab}(p). \tag{6.30}$$

在(6.29)中对 P 积分，并定义 $p'=p+k$，我们得到最后的结果为

$$\left(\frac{1}{2}\not{K}^a + \not{p}^a - m\right)\left(\frac{1}{2}\not{K}^b - \not{p}^b - m\right)\chi_{ab}(p)$$

$$= -\int \mathrm{d}^4k\,\overline{K}^{ab}(p,p+k;K)\chi_{ab}(p+k). \tag{6.31}$$

此积分方程对 K 有分裂的本征解，并且，原则上它允许我们确定双 Fermi 子束缚体系的谱。结合能 E_b 可从用 $\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{0}$ 定义的质心系中的本征值 K 得到，其形式为

$$K = (2m - E_B, \boldsymbol{0}). \tag{6.32}$$

不幸的是作用核 $\overline{K}^{ab}$ 非常复杂，因而不能写成一个封闭形式。即使我们限于最简单的梯形近似(6.13)，(6.31)仍复杂到使我们不能找到精确解。只对一个简化了的问题，即两个有标量相互作用的，自旋为 0 的束缚态才能完全解出来①。Bethe-Salpeter 方程又被一系列严重的困难所困扰(非物理态，错误的极限 $m_b/m_a\to\infty$，等等)。对 QED 框架内的问题，特别是关于电子偶素谱的问题，微扰论近似技术是适用的(但梯形近似是不够的，我们必须还考虑图 6.2e)。另外，Bethe-Salpeter 方程的数值解是在基本粒子领域中计算束缚态(夸克-反夸克，即介子)的重要工具②。

附注。在下面，我们来证明，如果研究束缚态，Bethe-Salpeter 方程的自由解 $\phi_{ab}(x_1,x_2)$ 可以去掉。论据是在能量动量平衡的基础上得到的。

对初值积分(6.15)的积分限 $\sigma(x_1')$ 和 $\sigma(x_2')$，我们选取遥远过去的时刻 $t_1'=t_2'=t$ 的类空超曲面：

$$\phi_{ab}(x_1,x_2) = \int \mathrm{d}^3x_1' \int \mathrm{d}^3x_2' \mathrm{i}S_{\mathrm{F}}^a(x_1;\boldsymbol{x}_1',t)\mathrm{i}S_{\mathrm{F}}^b(x_2;\boldsymbol{x}_2',t)\gamma_0^a\gamma_0^b\psi_{ab}(\boldsymbol{x}_1',t;\boldsymbol{x}_2',t). \tag{6.33}$$

因为 $t_1>t$ 和 $t_2>t$，只有时间上向前传播的那部分 Feynman 传播子才有贡献，即(见问题 2.1)

$$\mathrm{i}S_{\mathrm{F}}(x',x) \to \int \mathrm{d}^3p\,\frac{m}{E}\Lambda_+(p)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x'-x)}. \tag{6.34}$$

具有等时宗量 t 的双粒子波函数 ψ_{ab} 具有如下的形式：

$$\psi_{ab}(\boldsymbol{x}_1',t;\boldsymbol{x}_2',t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}K_0t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot(\boldsymbol{x}_1'+\boldsymbol{x}_2')/2}\chi_{ab}(\boldsymbol{x}_1'-\boldsymbol{x}_2'). \tag{6.35}$$

其中第一个因子描述了总能量为 K_0 的时间发展，而第二个因子描述了动量为 $\boldsymbol{K}$ 的质心运动。$\chi_{ab}(\boldsymbol{x}_1'-\boldsymbol{x}_2')$ 是束缚态的相对运动波函数。

K_0 和 $\boldsymbol{K}$ 必须满足通常的色散关系

$$K_0^2 - \boldsymbol{K}^2 = M^2, \tag{6.36}$$

---

① G. C. Wick: Phys. Rev. **96**, 1124(1954); R. E. Cutkosky, ibid. p. 1135.

② 关于 Bethe-Salpeter 方程的大量的文献及其应用可在 N. Nakanishi: Prog. Theor. Phys. Suppl. **95**, 78 (1988)中找到。

即从外面看，对质心运动来说，束缚系统的行为像一个单粒子。但其质量减小一个结合能 E_B(质量亏损)：

$$M = 2m - E_B. \tag{6.37}$$

现在我们将(6.34)和(6.35)插入(6.33)

$$\begin{aligned}\phi_{ab}(x_1,x_2) =& \int d^3x_1' d^3x_2' \int d^3p' \frac{m}{E'}\Lambda_+(p')e^{-ip_0'(t_1-t)}e^{+ip'\cdot(x_1-x_1')} \\ &\times \int d^3p \frac{m}{E}\Lambda_+(p)e^{-ip_0(t_2-t)}e^{+ip\cdot(x_2-x_2')} \\ &\times e^{-iK_0t}e^{iK\cdot(x_1'+x_2')/2}\gamma_0^a\gamma_0^b\chi_{ab}(x_1'-x_2').\end{aligned} \tag{6.38}$$

其次将此式转换到质心坐标和相对坐标是有用的：

$$x = x_1' - x_2', X = \frac{1}{2}(x_1' + x_2'), \tag{6.39a}$$

或

$$x_1' = X + \frac{1}{2}x,\ x_2' = X - \frac{1}{2}x. \tag{6.39b}$$

由此得到

$$\begin{aligned}\phi_{ab}(x_1,x_2) =& \int d^3p' \frac{m}{E'}\Lambda_+(p')e^{-ip'\cdot x_1}\int d^3p \frac{m}{E}\Lambda_+(p)e^{-ip\cdot x_2} \\ &\times e^{i(p_0'+p_0-K_0)t}(2\pi)^3\delta^3(K-p-p')\int d^3x e^{i\frac{1}{2}x\cdot(p'-p)}\gamma_0^a\gamma_0^b\chi_{ab}(x).\end{aligned} \tag{6.40}$$

于是关系

$$K = p + p' \tag{6.41a}$$

必须成立。另一方面，(6.40)导致对 K_0 的一个类似的条件。这是因为如果振荡因子消失的话，ϕ_{ab} 与初始时刻 t 的任意选取无关，

$$K_0 = p_0 + p_0'. \tag{6.41b}$$

如要对此论据作更严格一点的推导，则为了消除强振荡的贡献，我们可以在一个时间间隔上取平均，如取

$$\phi_{ab}(x_1,x_2) = \lim_{T\to-\infty}\int_{\frac{1}{2}T}^{T} dt\cdots .$$

用(6.41)，色散关系(6.36)得到如下的形式

$$(p_0 + p_0')^2 - (p + p')^2 = M^2,$$

或

$$2m^2 + 2p_0p_0' - 2p\cdot p' = M^2,$$

$$\sqrt{m^2+p^2}\sqrt{m^2+p'^2} - p\cdot p' = m^2 - \frac{1}{2}(4m^2 - M^2). \tag{6.42}$$

如果有束缚引起的质量亏损，$M^2<(2m)^2$，此方程就不能满足是由于如下理由。对 $p=p'=0$，方

程的左端大于右端，并且因为$\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}-xy\geqslant 1$（这可通过对表示式取平方来直接证明），对有限大小的动量（这时，$\boldsymbol{p}\parallel\boldsymbol{p}'$是最可能的情况），这点仍正确。于是我们证明了 Bethe-Salpeter 的非齐次项，即(6.33)的ϕ_{ab}，对束缚态的来说为零。

习　题

6.1　Fermi 子初值问题的解

问题：用四维 Gauss 定理来确定在时空体积 V 中 x 点处的波函数 $\psi(x)$，假定它的值在封闭曲面 S 上是已知的，见图 6.4。再对共轭旋量 $\overline{\psi}(x)$推导出类似的关系。

解：四维 Gauss 定理形为

$$\int_V \mathrm{d}^4x\,\frac{\partial F_\mu}{\partial x_\mu}(x)=\int_S \mathrm{d}\sigma(x)F_\mu(x)n^\mu(x)\,. \tag{1}$$

这里 F_μ 是一矢量场，$n^\mu(x)$是面元 $\mathrm{d}\sigma(x)$上的外法向。我们选取函数 $F_\mu(x')\equiv \mathrm{i}S_\mathrm{F}(x-x')\gamma_\mu\psi(x')$，于是体积积分中的散度为

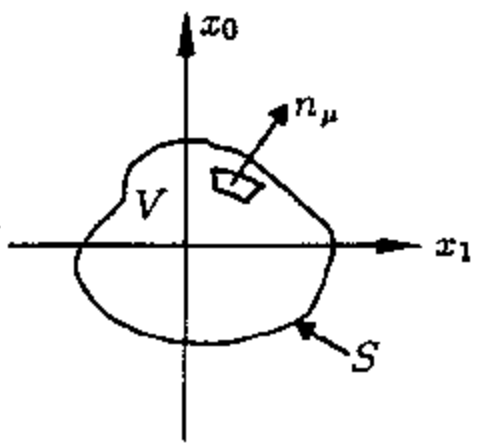


图 6.4　表面为 S 的四维时空体积

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x'_\mu}(\mathrm{i}S_\mathrm{F}(x-x')\gamma_\mu\psi(x'))\\
&=\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x'_\mu}S_\mathrm{F}(x-x')\right)\gamma_\mu\psi(x')+S_\mathrm{F}(x-x')\gamma_\mu\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x'_\mu}\psi(x')\right)\\
&=\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x'_\mu}S_\mathrm{F}(x-x')\right)\gamma_\mu\psi(x')+mS_\mathrm{F}(x-x')\psi(x')\\
&=\left[S_\mathrm{F}(x-x')\left(\mathrm{i}\gamma_\mu\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x'_\mu}+m\right)\right]\psi(x')\,.
\end{aligned}\tag{2}$$

这里我们用到了 $\psi(x)$满足自由 Dirac 方程。由于定义 Feynman 传播子的方程

$$\left(\mathrm{i}\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}-m\right)S_\mathrm{F}(x-x')=\delta^4(x-x') \tag{3}$$

和

$$S_\mathrm{F}(x-x')\left(\mathrm{i}\gamma_\mu\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x'_\mu}+m\right)=-\delta^4(x-x')\,, \tag{4}$$

是等价的，这可用动量空间表示(2.19)来证明，故方括号中的表示式约成 δ 函数。于是如果 $x\in V$，(1)的左端就成为

$$\begin{aligned}
\int_V \mathrm{d}^4x'\,\frac{\partial F_\mu}{\partial x'_\mu}(x')&=\int_V \mathrm{d}^4x'(-\delta^4(x-x'))\psi(x')\\
&=-\psi(x)
\end{aligned}\tag{5}$$

(1)的右端成为

$$\int_S \mathrm{d}\sigma(x')F_\mu(x')n^\mu(x') = \mathrm{i}\int_S \mathrm{d}\sigma(x')S_\mathrm{F}(x-x')\gamma_\mu n^\mu(x')\psi(x'), \tag{6}$$

结果为

$$\psi(x) = -\mathrm{i}\int_S \mathrm{d}\sigma(x')S_\mathrm{F}(x-x')\not{n}(x')\psi(x'). \tag{7}$$

选取由两个确定时间 t_1 和 t_2 的平直超曲面为界的四维体积 V，见图 6.5，可将此结果特殊化。假定边界面在无穷远处，于是体积 V 包含了整个三维空间，但时间间隔是有限的。法矢量为 $n_1=(-1,\mathbf{0})$和 $n_2=(1,\mathbf{0})$。于是(7)可写为

$$\psi(x) = \mathrm{i}\int_{t_1} \mathrm{d}^3x' S_\mathrm{F}(x-x')\gamma_0\psi(x') - \mathrm{i}\int_{t_2} \mathrm{d}^3x' S_\mathrm{F}(x-x')\gamma_0\psi(x'), \tag{8}$$

其中 $t_1<t<t_2$。

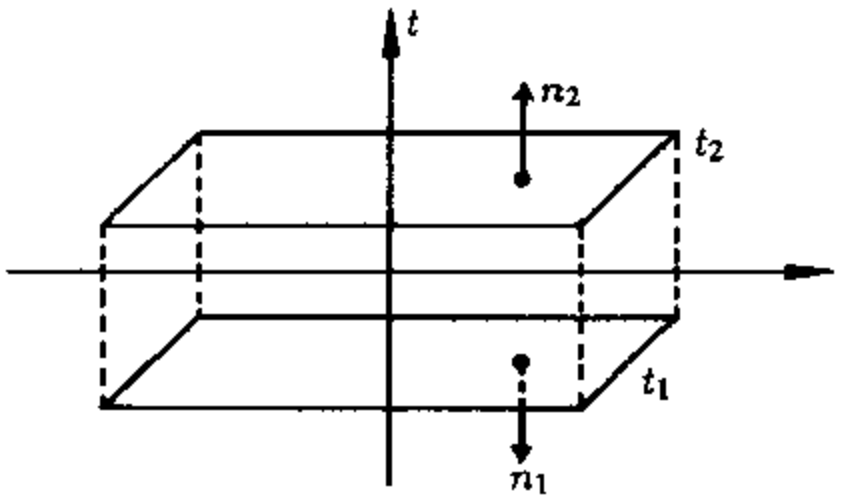


图 6.5　对以确定时刻 t_1 和 t_2 的平直超曲面为边界的时空体积的特殊选取

如果波函数只有正(或负)的频率，于是由传播子的性质(见(2.25,2.26))可得，只有在时间 $t_1(t_2)$的积分才有贡献，故(8)与习题 2.4 的结果是一致的。于是解旋量场的边界值问题的(7)，是以前第二章结果的协变性推广。

共轭旋量 $\bar{\psi}(x)$计算过程与此类似。现在我们选取矢量场为 $F_\mu(x')=-\mathrm{i}\bar{\psi}(x')\gamma_\mu S_\mathrm{F}(x'-x)$。用共轭旋量的 Dirac 方程

$$\bar{\psi}(x)\left(\mathrm{i}\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+m\right)=0 \tag{9}$$

和(3)，(1)的左端可约成$-\psi(x)$。于是和(7)类似，共轭旋量满足

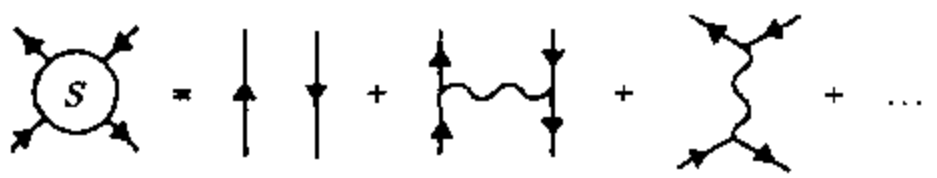
$$\bar{\psi}(x) = \mathrm{i}\int \mathrm{d}\sigma(x')\bar{\psi}(x')\not{n}(x')S_\mathrm{F}(x'-x). \tag{10}$$

习　题

6.2　电子偶素的 Bethe-Salpeter 方程

问题：迄今为止我们假定了相互作用的两个粒子 a 和 b 是互相没有关系的。那么在粒子-反粒子体系的情况下，如电子偶素(e^+e^-)，将作何改变？考虑作用核 $\overline{K}$ 的最低级来推导出其在动量空间中的 Bethe-Salpeter 方程。

解：电子正电子问题可以用和电子电子问题十分相同的方法来处理。在按 Feynman 图的展开中，其中一个 Fermi 子的箭头的方向是相反的。如我们在 Bhabha 散射(3.4 节)中已讨论过的那样，交换图描写了虚对的湮灭过程



(1)

在构造相应的双粒子波函数时，我们用共轭旋量(入射电子↔出射正电子)来描述正电子的反粒子特征。对没有相互作用的情况，这表示

$$\psi^0_{\mu\sigma}(x_1,x_2) = \psi_\mu(x_1)\bar{\psi}_\sigma(x_2)\,. \tag{2}$$

没有相互作用时，电子旋量的显式是一平面波 $\psi(x_1)=u(p,s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x_1}$。同样正电子旋量的为$\bar{\psi}(x_2)=\bar{v}(p',s')\mathrm{e}^{+\mathrm{i}p'\cdot x_2}$。按照 Feynman 规则，入射电子用 $u(p,s)$来描写，入射正电子用 $\bar{v}(p',s')$来描写。共轭旋量的传播已在习题 6.1，(12)中导出：

$$\bar{\psi}(x) = \mathrm{i}\int \mathrm{d}\sigma(x')\bar{\psi}(x')\not{n}(x')S_{\mathrm{F}}(x',x). \tag{3}$$

对双粒子波函数，这表示

$$\begin{aligned}\psi_{\mu\sigma}(x_3,x_4) =& \int \mathrm{d}\sigma(x_1)\mathrm{d}\sigma(x_2)S_{\mu\sigma\nu\tau}(x_3,x_4;x_1,x_2)\\ &\times \not{n}_{\nu'}(x_1)\not{n}_{\tau'\tau}(x_2)\psi_{\nu'\tau'}(x_1,x_2).\end{aligned} \tag{4}$$

注意矩阵 $\not{n}$的带撇和不带撇指标的次序是相反的。通过将(4)中的表示式写成 $\not{n}_{\nu'}(x_1)\psi_{\nu'\tau'}(x_1,x_2)\not{n}_{\tau'\tau}(x_2)$ 可以明白这是分别与(6.1)中的 $\not{n}\psi$ 和(3)中的 $\bar{\psi}\not{n}$次序相反有关的。双粒子的传播子为：

$$\begin{aligned}&S_{\mu\sigma\nu\tau}(x_3,x_4;x_1,x_2)\\ &= -\mathrm{i}S_{\mathrm{F}\mu\nu}(x_3,x_1)\mathrm{i}S_{\mathrm{F}\tau\sigma}(x_2,x_4) - \int \mathrm{d}^4x_5\mathrm{d}^4x_6\mathrm{d}^4x_7\mathrm{d}^4x_8\mathrm{i}S_{\mathrm{F}\mu\mu'}(x_3,x_5)\\ &\times \mathrm{i}S_{\mathrm{F}\sigma'\sigma}(x_6,x_4)K_{\mu'\sigma'\nu'\tau'}(x_5,x_6;x_7,x_8)\mathrm{i}S_{\mathrm{F}\nu'\nu}(x_7,x_1)\mathrm{i}S_{\mathrm{F}\tau'\tau}(x_2,x_8).\end{aligned} \tag{5}$$

方程(5)和(6.8)的差别只在对正电子“反演”了 Feynman 传播子。这点特别表现在对电子和正电子的矩阵 $S_{\mathrm{F}\nu'\nu}(x_7,x_1)$和 $S_{\mathrm{F}\tau'\tau}(x_2,x_8)$中带撇和不带撇指标的交换上。这和(4)中两个 $\not{n}$的指标位置的改变的原因一样。这里我们必须仔细地找出(6.1)和(3)中 S，$\not{n}$和 ψ 的次序。正电子传播子总是

交换指标。

现在我们又可引入不可约作用核 $\overline{K}$ 和迭代(5)

$$S_{\mu\sigma\nu\tau}(x_3,x_4;x_1,x_2)$$

$$=-\mathrm{i}S_{\mathrm{F}\mu\sigma}(x_3,x_1)\mathrm{i}S_{\mathrm{F}\tau\sigma}(x_2,x_4)+\int \mathrm{d}^4x_5\mathrm{d}^4x_6\mathrm{d}^4x_7\mathrm{d}^4x_8\mathrm{i}S_{\mathrm{F}\mu\mu'}(x_3,x_5)$$

$$\times \mathrm{i}S_{\mathrm{F}\sigma'\sigma}(x_6,x_4)\overline{K}_{\mu'\sigma'\nu'\tau'}(x_5,x_6;x_7,x_8)S_{\nu'\tau\tau}(x_7,x_8;x_1,x_2)\,. \tag{6}$$

将它插入(4)中,就得到 Bethe-Salpeter 方程的积分形式

$$\psi_{\mu\sigma}(x_1,x_2)$$

$$=\phi_{\mu\sigma}(x_1,x_2)+\int \mathrm{d}^4x_3\mathrm{d}^4x_4\mathrm{d}^4x_5\mathrm{d}^4x_6$$

$$\times \mathrm{i}S_{\mathrm{F}\mu\mu'}(x_1,x_5)\mathrm{i}S_{\mathrm{F}\sigma'\sigma}(x_6,x_2)\overline{K}_{\mu'\sigma'\nu'\tau'}(x_5,x_6;x_3,x_4)\psi_{\nu'\tau'}(x_3,x_4). \tag{7}$$

对束缚态(即定域态),又可弃去自由解 $\phi_{\mu\sigma}(x_1,x_2)$。

为了得到像(6.18)那样的积分—微分方程,我们用

$$(\mathrm{i}\not\partial_1-m)_{\mu\nu}S_{\mathrm{F}\nu\mu'}(x_1,x_5)=\delta^4(x_1-x_5)\delta_{\mu\mu'} \tag{8a}$$

和

$$(\mathrm{i}\not\partial_2+m)_{\tau\sigma}S_{\mathrm{F}\sigma'\tau}(x_6,x_2)=-\delta^4(x_2-x_6)\delta_{\sigma\sigma'}. \tag{8b}$$

方程(8b)可直接从动量空间中的 Feynman 传播子的积分表示推出。将(8)的 Dirac 算符用到(7)中,并重写一些指标,就得到

$$(\mathrm{i}\not\partial_1-m)_{\mu\mu'}(\mathrm{i}\not\partial_2+m)_{\sigma\sigma}\psi_{\mu\sigma}(x_1,x_2)$$

$$=\int \mathrm{d}^4x_3\mathrm{d}^4x_4\overline{K}_{\mu\sigma\nu\tau}(x_1,x_2;x_3,x_4)\psi_{\nu\tau}(x_3,x_4) \tag{9}$$

它和(6.18)类似。

此结果也可变换到动量空间中。同样将作用核定义成

$$\overline{K}_{\mu\sigma\nu\tau}(p_1,p_2;p_3,p_4)=\frac{1}{(2\pi)^8}\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\mathrm{d}^4x_3\mathrm{d}^4x_4$$

$$\times \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1\cdot x_1+p_2\cdot x_2-p_3\cdot x_3-p_4\cdot x_4)}\overline{K}_{\mu\sigma\nu\tau}(x_1,x_2;x_3,x_4) \tag{10}$$

我们可以直接用以前的计算,得到结果

$$\left(\frac{1}{2}\not P+\not p-m\right)_{\mu\mu'}\left(\frac{1}{2}\not P-\not p+m\right)_{\sigma'\sigma}\chi_{\mu'\sigma'}(p,P)$$

$$=\int \mathrm{d}^4p'\overline{K}_{\mu\sigma\nu\tau}(p,p';P)\chi_{\nu\tau}(p',P)\,. \tag{11}$$

此方程与(6.29)的不同只在于第二个 Dirac 算符和作用项中的正号。

为了写出 e 的微扰级数中最低级的核 $\overline{K}$,必须考虑直接散射和虚湮灭的贡献。与图 6.6 相应的 Feynman 图可以转换成公式:

$$\overline{K}^0_{\mu\sigma\nu\tau}(p_1,p_2;p_1',p_2')$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^8}\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\mathrm{d}^4x_1'\mathrm{d}^4x_2'\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1\cdot x_1+p_2\cdot x_2-p_1'\cdot x_1'-p_2'\cdot x_2')}(-\mathrm{i}e)^2$$

$$\times \{ \gamma^{\alpha}_{\mu\sigma} iD_{F\alpha\beta}(x_1, x_2)\gamma^{\beta}_{\tau\sigma}\delta^4(x_1 - x_1')\delta^4(x_2 - x_2')$$

$$- \gamma^{\alpha}_{\mu\sigma} iD_{F\alpha\beta}(x_1, x_1')\gamma^{\beta}_{\tau\nu}\delta^4(x_1 - x_2)\delta^4(x_1' - x_2')\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^8}\int d^4x_1 d^4x_2 e^{i[(p_1 - p_1')\cdot x_1 + (p_2 - p_2')\cdot x_2]}(-ie)^2\gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}\gamma^{\beta}_{\tau\sigma} iD_{F\alpha\beta}(x_1, x_2)$$

$$- \frac{1}{(2\pi)^8}\int d^4x_1 d^4x_1' e^{i[(p_1 + p_2)\cdot x_1 - (p_1' + p_2')\cdot x_1']}(-ie)^2\gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}\gamma^{\beta}_{\tau\nu} iD_{F\alpha\beta}(x_1, x_1') . \tag{12}$$

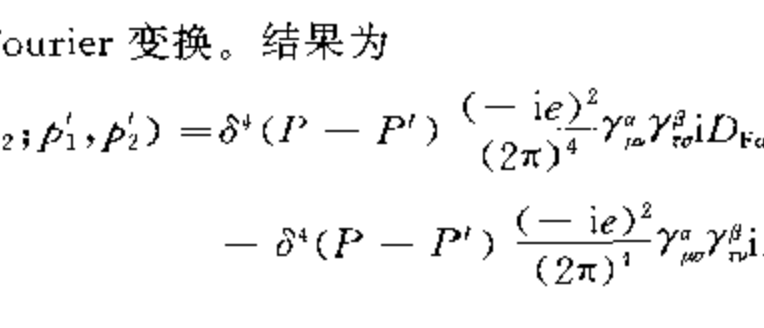


图 6.6　最低级的直接和交换图。Fermi 子线被“截断”了，即它们不进入作用核 $\overline{K}$ 的表示式中

在第一个积分中，我们作替换 $u = x_1 - x_2, v = x_1 + x_2$，而在第二个积分中作替换 $u = x_1 - x_1', v = x_1 + x_1'$。将指数上的项排序后，我们发现可完成 v 的积分而得到一个四动量守恒的 δ 函数。对 u 的积分得到光子传播子的 Fourier 变换。结果为

$$\bar{K}^0_{\mu\sigma\nu\tau}(p_1, p_2; p_1', p_2') = \delta^4(P - P')\frac{(-ie)^2}{(2\pi)^4}\gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}\gamma^{\beta}_{\tau\sigma} iD_{F\alpha\beta}(p - p')$$

$$- \delta^4(P - P')\frac{(-ie)^2}{(2\pi)^4}\gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}\gamma^{\beta}_{\tau\nu} iD_{F\alpha\beta}(P), \tag{13}$$

其中

$$P = p_1 + p_2, P' = p_1' + p_2',$$

$$p = \frac{1}{2}(p_1 - p_2), p' = \frac{1}{2}(p_1' - p_2')$$

或

$$\bar{K}^0_{\mu\sigma\nu\tau}(p, p'; P) = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4}\gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}\gamma^{\beta}_{\tau\sigma} D_{F\alpha\beta}(p - p') + \frac{ie^2}{(2\pi)^4}\gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}\gamma^{\beta}_{\tau\nu} D_{F\alpha\beta}(P). \tag{14}$$

现在我们像(6.30)那样分出质心动量 P。类似于(6.31)，对 P 积分后，我们得到梯形近似下的电子正电子系统的 Bethe-Salpeter 方程：

$$\left(\frac{1}{2}K + p - m\right)_{\mu\rho}\left(\frac{1}{2}K - p + m\right)_{\sigma'\sigma}\chi_{\rho'\sigma'}(p)$$

$$= [(V_{dir} + V_{ann})\chi(p)]_{\mu\sigma} , \tag{15}$$

其中直接作用为

$$[V_{\rm dir}\chi(p)]_{\mu\sigma}=\frac{-ie^2}{(2\pi)^4}\gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\gamma^{\beta}_{\tau\sigma}\int d^4p' D_{F\alpha\beta}(p-p')\chi_{\nu\tau}(p')\ , \tag{16a}$$

湮灭作用为

$$[V_{\rm anni}\chi(p)]_{\mu\sigma}-\frac{ie^2}{(2\pi)^4}\gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}\gamma^{\beta}_{\tau\nu}D_{F\alpha\beta}(K)\int d^4p'\chi_{\nu\tau}(p')\ . \tag{16b}$$

在 Feynman 规范中,光子传播子为

$$D_{F\alpha\beta}(q)=-\frac{4\pi g_{\alpha\beta}}{q^2} \tag{17}$$

于是作用项为

$$V_{\rm dir}\chi(p)=\frac{ie^2}{4\pi^3}\int\frac{d^4p'}{(p-p')^2}\gamma^{\alpha}\chi(p')\gamma_{\alpha}, \tag{18a}$$

$$V_{\rm anni}\chi(p)=-\frac{ie^2}{4\pi^3}\frac{1}{K^2}\gamma^{\alpha}\int d^4p'\ {\rm Tr}\,[\gamma_{\alpha}\chi(p')]\ , \tag{18b}$$

这里,我们没有写出 Dirac 指标。直接项(18a)的形式和有相反电荷,$e_b=-e_a$,的双粒子体系的完全一样(见例 6.3 中的(5))。湮灭作用的 e 的幂次是一样的,但由于分母很大,即对弱束缚系统 $K^2\approx(2m)^2$,所以作用很弱。于是在实际中,我们先不要湮灭作用,解出(15),然后将(18.b)处理成微扰。

补充:我们可以用电荷共轭变换将 Bethe-Salpeter 方程变成关于粒子和反粒子对称的形式。电荷共轭波函数为①

$$\psi_c=\hat{C}\,\bar{\psi}^T=\hat{C}\,\gamma_0\psi^*. \tag{19}$$

变换矩阵$\hat{C}$ 满足条件

$$\hat{C}\,\gamma^{\mu}\hat{C}^{-1}=-\gamma^{\mu T} \tag{20}$$

并且有

$$\hat{C}^T=\hat{C}^{\dagger}=\hat{C}^{-1}=-\hat{C}\ . \tag{21}$$

我们将电荷共轭矩阵$\hat{C}$ 应用到双粒子波函数 χ 的右指标上,并引入变换波函数 ψ:

$$\psi_{\mu\sigma}(p)=C_{\sigma\sigma'}\chi_{\mu\sigma'}(p) \tag{22}$$

或写成紧凑的形式为

$$\psi(p)=\chi(p)\,\hat{C}^T. \tag{23}$$

接着我们用(21)得到

$$\chi(p)=\psi(p)(\hat{C}^T)^{-1}=\psi(p)\,\hat{C}\ . \tag{24}$$

将此变换插入(15)中,并将方程右乘$\hat{C}^{-1}$。由于有(20),只有 Dirac 算符中的动量和质量项的相对符号被改变。经过一些运算后,得到

---

① 见 W. Greiner: Theoretical Physics, Vol. 3, *Relativistic Quantum Mechanics-Wave Equations* (Springer, Berlin, Heidelberg 1990), Chap. 12.

$$\left(\frac{K}{2}+p-m\right)_1\left(\frac{K}{2}-p-m\right)_2\psi(p)$$
$$=\frac{ie^2}{4\pi^3}\int\frac{d^4p'}{(p-p')^2}(\gamma^a)_1(\gamma_a)_2\psi(p')$$
$$-\frac{ie^2}{4\pi^3}\frac{1}{K^2}\gamma^a\hat{C}\int d^4p'\ \mathrm{Tr}\left[\gamma_a\psi(p')\hat{C}\right]. \tag{25}$$

例　子

6.3　Bethe-Salpeter 方程的非延迟极限

我们继续研究梯形近似下形为(6.31)的 Bethe-Salpeter 方程，并引入一种近似，在此近似下方程具有简单的作用位势中的 Dirac 方程形式。

为此我们首先必须确定动量空间中的作用核 $\overline{K}^{ab}(p,p';P)$。在梯形近似(6.9)下，按照(6.23)，我们必须取光子传播子 $D_F(x-x')$的 Fourier 变换：

$$\overline{K}_0^{ab}(p_1,p_2;p_1',p_2')$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^8}\int d^4x_1d^4x_2d^4x_1'd^4x_2'e^{i(p_1\cdot x_1+p_2\cdot x_2-p_1'\cdot x_1'-p_2'\cdot x_2')}$$
$$\times(-ie_a)(-ie_b)\gamma_a^\mu\gamma_\mu^b iD_F(x_1-x_2)\delta^4(x_1-x_1')\delta^4(x_2-x_2'). \tag{1}$$

变换到新变量 $u=x_1-x_2$ 和 $v=x_1+x_2$，得到

$$\overline{K}_0^{ab}(p_1,p_2;p_1',p_2')=\frac{(-ie_a)(-ie_b)}{(2\pi)^4}\gamma_\mu^a\gamma_\nu^b\delta^4[(p_1+p_2)-(p_1'+p_2')]$$
$$\times iD_F^{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}(p_1-p_2)-\frac{1}{2}(p_1'-p_2')\right) \tag{2}$$

或按照(6.27)得到

$$\overline{K}_0^{ab}(p,p';P)=\frac{-ie_ae_b}{(2\pi)^4}\gamma_\mu^aD_F^{\mu\nu}(p-p')\gamma_\nu^b. \tag{3}$$

在我们已用过的 Feynman 规范中，光子传播子的动量空间表示为

$$D_F^{\mu\nu}(q)=\int d^4x\ e^{iq\cdot x}D_F^{\mu\nu}(x)=-\frac{4\pi g^{\mu\nu}}{q^2+i\varepsilon}. \tag{4}$$

于是在梯形近似下动量空间的 Bethe-Salpeter 方程(6.31)形为

$$\left(\frac{1}{2}K^a+p^a-m\right)\left(\frac{1}{2}K^b-p^b-m\right)\chi_{ab}(p)$$
$$=ie_ae_b\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\gamma_\mu^aD_F^{\mu\nu}(k)\gamma_\nu^b\chi_{ab}(p+k). \tag{5}$$

在实际应用中，(5)中的核仍然太复杂了。如果我们忽略对频率的依赖，即作替代

$$D_F^{\mu\nu}(k_0,k)\to D_F^{\mu\nu}(0,k). \tag{6}$$

问题就可简化。如我们将在例 6.4 中作进一步的考察那样，这意味着我们忽略了相互作用的延迟效应。如果我们将(5)乘以 $\gamma_0^a\gamma_0^b$ 就得到

$$\hat{F}\,\chi_{ab}(p)=\frac{ie_ae_b}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4k\gamma_0^a\gamma_\mu^a\gamma_0^b\gamma_\nu^bD_F^{\mu\nu}(0,\boldsymbol{k})\chi_{ab}(p+k) \tag{7}$$

其中的缩写为

$$\hat{F}=\gamma_0^a\left(\frac{1}{2}\gamma_\mu^aK^\mu+\gamma_\mu^ap^\mu-m\right)\gamma_0^b\left(\frac{1}{2}\gamma_\nu^bK^\nu-\gamma_\nu^bp^\nu-m\right). \tag{8}$$

在以 $\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2=0$ 表征的质心系中，表示总动量的矢量 K 是纯类时的，即

$$K=(2m-E_B,\boldsymbol{0})=(E,\boldsymbol{0}), \tag{9}$$

所以我们得到

$$\begin{aligned}\hat{F}(p)&=\left(\frac{1}{2}E-\alpha_a\cdot\boldsymbol{p}-\beta_am+p_0\right)\left(\frac{1}{2}E+\alpha_b\cdot\boldsymbol{p}-\beta_bm-p_0\right)\\&=\left(\frac{1}{2}E-\hat{H}_a(\boldsymbol{p})+p_0\right)\left(\frac{1}{2}E-\hat{H}_b(\boldsymbol{p})-p_0\right),\end{aligned} \tag{10}$$

其中，自由 Dirac Hamilton 量为

$$\hat{H}_a(\boldsymbol{p})=\alpha_a\cdot\boldsymbol{p}+\beta_am, \tag{11a}$$

$$\hat{H}_b(\boldsymbol{p})=-\alpha_b\cdot\boldsymbol{p}+\beta_bm. \tag{11b}$$

用近似(6)，可以分离出频率积分。我们定义一个新的波函数，它只依赖于动量矢量的空间分量：

$$\phi_{ab}(\boldsymbol{p})=\int \mathrm{d}p_0\chi_{ab}(p_0,\boldsymbol{p}). \tag{12}$$

在(7)的右端完成对 k 积分后，我们得到近似结果

$$\hat{F}(p)\chi_{ab}(p)=\frac{ie_ae_b}{2\pi}\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\gamma_0^a\gamma_\mu^a\gamma_0^b\gamma_\nu^bD_F^{\mu\nu}(0,\boldsymbol{k})\phi_{ab}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}), \tag{13}$$

或用简单的符号写出来为

$$\hat{F}(p)\chi_{ab}(p)=\Gamma(\boldsymbol{p}). \tag{14}$$

为了使用此方程，我们必须按照(12)，在(13)的左端对变量 p_0 积分。为此我们使用算符 $\hat{F}(p)$ 的逆运算，即将它移到右端。这可运用下面的技巧来完成：对正频和负频波函数的分量引入投影算符，即

$$\hat{\Lambda}_\pm^n(\boldsymbol{p})=\frac{\omega(\boldsymbol{p})\pm\hat{H}_n(\boldsymbol{p})}{2\omega(\boldsymbol{p})}\quad\text{其中 } n=a,b, \tag{15}$$

其中 $\omega(\boldsymbol{p})=+\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2}$。因为 $\hat{H}_n^2(\boldsymbol{p})=\omega^2(\boldsymbol{p})$，我们可以立即证明(15)满足通常的正交投影算符规则：

$$(\hat{\Lambda}_\pm^n)^2=\hat{\Lambda}_\pm^n,\ \hat{\Lambda}_+^n\hat{\Lambda}_-^n=0,\hat{\Lambda}_+^n+\hat{\Lambda}_-^n=\mathbb{1}^n. \tag{16}$$

另外还有一个重要的关系

$$\hat{H}_n(\boldsymbol{p})\hat{\Lambda}_\pm^n(\boldsymbol{p})=\hat{\Lambda}_\pm^n(\boldsymbol{p})\hat{H}_n(\boldsymbol{p})=\pm\omega(\boldsymbol{p})\hat{\Lambda}_\pm^n(\boldsymbol{p}). \tag{17}$$

用了(15)后，(10)中的 Hamilton 量可被频率 ω(乘以单位矩阵)来代替：

$$\hat{\Lambda}^{a}_{\pm}(\boldsymbol{p})\hat{\Lambda}^{b}_{\mp}(\boldsymbol{p})\hat{F}(\boldsymbol{p})\chi_{ab}(p)$$
$$=\left(\frac{1}{2}E\mp\omega(\boldsymbol{p})+p_0\right)\left(\frac{1}{2}E\mp\omega(\boldsymbol{p})-p_0\right)\hat{\Lambda}^{a}_{\pm}(\boldsymbol{p})\hat{\Lambda}^{b}_{\pm}(\boldsymbol{p})\chi_{ab}(p), \tag{18}$$

这里，所有四种符号组合都是允许的。于是 Bethe-Salpeter 方程(14)成为一组 4 个投影方程：

$$\left(\frac{1}{2}E\mp\omega(\boldsymbol{p})+p_0\right)\left(\frac{1}{2}E\mp\omega(\boldsymbol{p})-p_0\right)\chi_{+\pm}(p)=\hat{\Lambda}^{a}_{+}(\boldsymbol{p})\hat{\Lambda}^{b}_{\pm}(\boldsymbol{p})\Gamma(\boldsymbol{p}), \tag{19}$$

其中投影波函数为

$$\chi_{\mp\pm}(p)=\hat{\Lambda}^{a}_{\pm}(\boldsymbol{p})\hat{\Lambda}^{b}_{\mp}(\boldsymbol{p})\chi_{ab}(p). \tag{20}$$

用完全类似的方法，我们可以通过对 p_0 积分（见(12)）来定义投影波函数 $\phi_{\pm\pm}(\boldsymbol{p})=\Lambda^{a}_{\pm}(\boldsymbol{p})\Lambda^{b}_{\mp}(\boldsymbol{p})\phi_{ab}(\boldsymbol{p})$，利用(17)，(13)左端的算符已被一个简单的数所代替，用除法可以将它移到右端。于是按照(12)作积分，又可以消去(19)左端的频率变量 p_0，即

$$\phi_{\pm\pm}(\boldsymbol{p})=\int \mathrm{d}p_0\chi_{\pm\pm}(\boldsymbol{p})$$
$$=\int \mathrm{d}p_0\frac{1}{\frac{1}{2}E\mp\omega(\boldsymbol{p})+p_0}\frac{1}{\frac{1}{2}E\mp\omega(\boldsymbol{p})-p_0}\hat{\Lambda}^{a}_{\pm}(\boldsymbol{p})\hat{\Lambda}^{b}_{\pm}(\boldsymbol{p})\Gamma(\boldsymbol{p}). \tag{21}$$

为了使(21)惟一，我们必须确定当对 p_0 积分时，如何处理极点。在前文中我们记得一个经常使用的规则，此规则说，给粒子的质量一个小的虚部，即 $m\to m-\mathrm{i}\varepsilon$，(由此又有 $\omega(\boldsymbol{p})\to\omega(\boldsymbol{p})-\mathrm{i}\delta$)，因果条件就可被满足。这表示

$$\phi_{\pm\pm}(\boldsymbol{p})=\left\{\int \mathrm{d}p_0\frac{1}{\frac{1}{2}E\mp\omega(\boldsymbol{p})+p_0\pm\mathrm{i}\delta}\frac{1}{\frac{1}{2}E\mp\omega(\boldsymbol{p})-p_0\pm\mathrm{i}\delta}\right\}\Gamma_{\pm\pm}(\boldsymbol{p}), \tag{22}$$

其中

$$\Gamma_{\pm\pm}(\boldsymbol{p})=\hat{\Lambda}^{a}_{\pm}(\boldsymbol{p})\hat{\Lambda}^{b}_{\pm}(\boldsymbol{p})\Gamma(\boldsymbol{p}).$$

对 p_0 的积分可用留数定理来完成，其中的积分路径被上或下半平面的半圆所封闭。这是可以的，因为对大的 p_0，被积函数以 $1/|p_0|^2$ 方式下降，于是对积分没有贡献。被积函数在

$$p_0=\frac{1}{2}E\mp\omega(\boldsymbol{p})\pm\mathrm{i}\delta, \tag{23a}$$

$$p_0=-\frac{1}{2}E\pm\omega(\boldsymbol{p})\mp\mathrm{i}\delta. \tag{23b}$$

处有两个极点。如我们已经强调的那样，(22)中的两个符号可以独立地选取。如果(23a)和(23b)中的两个符号相等，则两个极点在同一半平面内。因为我们可以在另一个半平面内封闭积分路径，而那里的被积函数是正规的，用留数定理就得到

$$\phi_{+-}(\boldsymbol{p})=\phi_{-+}(\boldsymbol{p})=0. \tag{24}$$

在相反的情况下，我们得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}z\frac{1}{z-a\mp\mathrm{i}\delta}\frac{1}{z+b\pm\mathrm{i}\delta}=\pm\frac{2\pi\mathrm{i}}{a+b} \tag{25}$$

于是

$$\phi_{++}(p) = -\frac{2\pi i}{E - 2\omega(p)}\Gamma_{++}(p), \tag{26a}$$

$$\phi_{--}(p) = \frac{2\pi i}{E + 2\omega(p)}\Gamma_{--}(p). \tag{26b}$$

由于(24)和(26),完全波函数 $\phi(p)=\phi_{++}+\phi_{+-}+\phi_{-+}+\phi_{--}$就服从积分方程

$$\phi(p) = 2\pi i\left(\frac{\hat{\Lambda}_{++}(p)}{2\omega - E} + \frac{\hat{\Lambda}_{--}(p)}{2\omega + E}\right)\Gamma(p). \tag{27}$$

我们消去(26)中的分母,并将两式相减

$$\begin{aligned}&(E - 2\omega(p))\phi_{++}(p) + (E + 2\omega(p))\phi_{--}(p)\\ &\quad = -2\pi i(\Gamma_{++}(p) - \Gamma_{--}(p)).\end{aligned} \tag{28}$$

按照(17),频率 $\omega(p)$可被 Hamilton 量$\hat{H}_n$代替。为了用对称的方式来进行,我们写出等式

$$\begin{aligned}&-2\omega\phi_{++} + 2\omega\phi_{--}\\ &= (-\omega\hat{\Lambda}^a_+\hat{\Lambda}^b_+ - \hat{\Lambda}^a_+\omega\hat{\Lambda}^b_+ + \omega\hat{\Lambda}^a_-\hat{\Lambda}^b_- + \hat{\Lambda}^a_-\omega\hat{\Lambda}^b_-)\phi\\ &= (-\hat{\Lambda}^a_+\hat{\Lambda}^b_+\hat{H}_a - \hat{\Lambda}^a_+\hat{\Lambda}^b_+\hat{H}_b - \hat{\Lambda}^a_-\hat{\Lambda}^b_-\hat{H}_a - \hat{\Lambda}^a_-\hat{\Lambda}^b_-\hat{H}_b)\phi\\ &= (\hat{\Lambda}^a_+\hat{\Lambda}^b_+ + \hat{\Lambda}^a_-\hat{\Lambda}^b_-)(-\hat{H}_a - \hat{H}_b)\phi\\ &= (\mathbf{1} - \hat{\Lambda}^a_+\hat{\Lambda}^b_- - \hat{\Lambda}^a_-\hat{\Lambda}^b_+)(-\hat{H}_a - \hat{H}_b)\phi\\ &= (-\hat{H}_a - \hat{H}_b)\phi.\end{aligned}$$

在最后一步,由于有(16),我们可以用$\pm\omega$来代替$\hat{H}_n$,再用(24),就得到混合投影算符 $\hat{\Lambda}^a_\pm\hat{\Lambda}^b_\mp$ 的贡献为零。如果我们现在定义一个混合投影算符

$$\hat{\Lambda}(p) = \hat{\Lambda}_{++}(p) - \hat{\Lambda}_{--}(p) = \hat{\Lambda}^a_+\hat{\Lambda}^b_+(p) - \hat{\Lambda}^a_-\hat{\Lambda}^b_-(p), \tag{29}$$

于是(28)的右端简单地成为$-2\pi i\,\hat{\Lambda}(p)\Gamma(p)$。方程(28)成为非延迟近似的 Bethe-Salpeter 方程:[①]

$$(E - \hat{H}_a(p) - \hat{H}_b(p))\phi(p) = -2\pi i\,\hat{\Lambda}(p)\Gamma(p), \tag{30}$$

其中梯形近似 $\Gamma(p)$由(13)的右端给出。

如果我们假定可以忽略负能量的解,即在(30)中取近似

$$\hat{\Lambda}(p) \to \mathbb{1} \tag{31}$$

则方程(30)可变成更熟悉的形式。现在方程(30)将按照

$$\phi(r) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{-ip\cdot r}\phi(p), \tag{32}$$

变换到坐标空间中,即用在(13),(14)中定义的 $\Gamma(p)$得到

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,e^{-ip\cdot r}(E - \hat{H}_a(p) - \hat{H}_b(p))\phi(p)$$

---

① E. E. Salpeter: Phys. Rev. **87**, 328(1952).

$$= e_a e_b \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^3} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot r} \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \gamma_0^a \gamma_\mu^a \gamma_0^b \gamma_\nu^b D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(0,k) \phi(p+k), \tag{33}$$

或用(32)得到

$$\begin{aligned}
&(E - \hat{H}_a(\mathrm{i}\nabla) - \hat{H}_b(\mathrm{i}\nabla))\phi(r) \\
&= \left(e_a e_b \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot r} \gamma_0^a \gamma_\mu^a \gamma_0^b \gamma_\nu^b D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(0,k) \right) \phi(r) \\
&= U(r)\phi(r) .
\end{aligned} \tag{34}$$

为得到此结果，我们将(33)中的积分变量 p 移到了 $p+k$。方程(34)的形状和通常的在等效相互作用位势 $U(r)$ 中的 Dirac 方程一样。为了计算此位势，用 Coulomb 规范中的光子传播子比较有利(见第四章，(13—15))。在此规范中，D_{F}^{00} 只与空间分量 k 有关，所以近似式(6)(忽略对频率的依赖关系)就不像在通常使用的 Feynman 规范中那样突然。于是，我们插入

$$D_{\mathrm{F}}^{ij}(k) = \frac{-4\pi}{k^2} \left(\frac{k^i k^j}{|k|^2} - \delta_{ij} \right) \to \frac{4\pi}{|k|^2} \left(\frac{k^i k^j}{|k|^2} - \delta_{ij} \right) , \tag{35a}$$

$$D_{\mathrm{F}}^{00}(k) = + \frac{4\pi}{|k|^2} , \tag{35b}$$

$$D_{\mathrm{F}}^{0i}(k) = D_{\mathrm{F}}^{i0}(k) = 0 . \tag{35c}$$

相互作用位势就为

$$U(r) = e_a e_b 4\pi \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot r} \left[\frac{1}{|k|^2} \left(\frac{\alpha_a \cdot k \, \alpha_b \cdot k}{|k|^2} - \alpha_a \cdot \alpha_b \right) + \frac{1}{|k|^2} \right] . \tag{36}$$

我们所需要的 Fourier 积分之一

$$\int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot r}}{|k|^2} = \frac{1}{4\pi r} , \tag{37}$$

就是熟知的 Coulomb 位势。另外一个积分可使用一些技巧来推出。应用 $\nabla_k (1/|k|^2) = -2k/|k|^4$ 我们得

$$\begin{aligned}
I &\equiv \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot r} \frac{(a\cdot k)(b\cdot k)}{|k|^4} = -\mathrm{i}(a\cdot\nabla_r) \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot r} \left(b \cdot \frac{k}{|k|^4} \right) \\
&= \frac{\mathrm{i}}{2} (a\cdot\nabla_r) \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot r} (b\cdot\nabla_k) \frac{1}{|k|^2} ,
\end{aligned} \tag{38}$$

或者，经过分部积分后为

$$\begin{aligned}
I &= -\frac{\mathrm{i}}{2} (a\cdot\nabla_r) \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} (b\cdot\nabla_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot r}) \frac{1}{|k|^2} \\
&= \frac{1}{2} (a\cdot\nabla_r)(b\cdot r) \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^2} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot r}}{|k|^2} \\
&= \frac{1}{2} (a\cdot\nabla_r)(b\cdot r) \frac{1}{4\pi r} .
\end{aligned} \tag{39}$$

经过梯度运算后得

$$I=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{2r}\left(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{r}^2}\right). \tag{40}$$

于是等效位势为

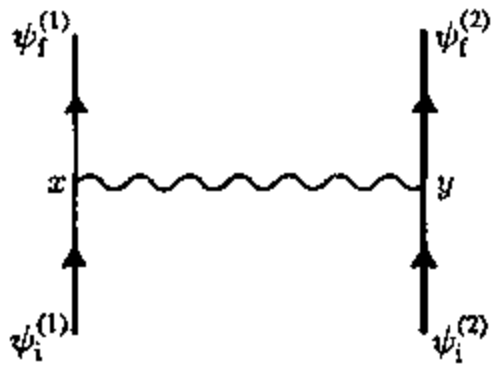
$$\begin{aligned}U(r)&=e_ae_b\left[\frac{1}{2r}\left(\boldsymbol{\alpha}_a\cdot\boldsymbol{\alpha}_b-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_a\cdot\boldsymbol{r})(\boldsymbol{\alpha}_b\cdot\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{r}^2}\right)-\frac{\boldsymbol{\alpha}_a\cdot\boldsymbol{\alpha}_b}{r}+\frac{1}{r}\right]\\&=e_ae_b\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{2r}\left(\boldsymbol{\alpha}_a\cdot\boldsymbol{\alpha}_b+\frac{(\boldsymbol{\alpha}_a\cdot\boldsymbol{r})(\boldsymbol{\alpha}_b\cdot\boldsymbol{r})}{r^2}\right)\right].\end{aligned} \tag{41}$$

此位势称为 Breit 相互作用。在例 6.4 中我们用另一种方法来推导它。

例　　子

6.4 Breit 相互作用

两个 Dirac 粒子间的相互作用是协变地用交换虚光子来描写的。现在我们试图用位势 $U(\boldsymbol{r})$(它与时间坐标无关)对相互作用作非相对论近似描写。当然,这将引出静态极限下的 Coulomb 位势。另外,我们还要计算直到$(v/c)^2$级的相对论修正。



我们将如下来进行。首先我们来计算单光子交换的 S 矩阵元,然后我们来考察怎样的位势 $U(r)$将在所作的近似下给出同样的结果。如我们在例 3.2 中讨论过的那样,右图的 S 矩阵元为

$$S_{fi}=-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\int \mathrm{d}^4y\, j_{fi}^{(2)}(y)D_{\mathrm{F}}(y-x)j_{fi}^{(1)}(x) \tag{1}$$

其中有光子传播子 D_{F} 和两个跃迁流

$$\begin{aligned}j_{fi}^{(n)}(x)&=e_n\bar{\psi}_f^{(n)}(x)\gamma\psi_i^{(n)}(x)\\&=j_{fi}^{(n)}(\boldsymbol{x})e^{\mathrm{i}\omega_{fi}^{(n)}t_x},\quad n=1,2.\end{aligned} \tag{2}$$

在第二行中,时间有关部分被分离出来了,并定义了跃迁频率 $\omega_{fi}^{(n)}=E_f^{(n)}-E_i^{(n)}$。为了简短起见,抛去了四矢量指标。如果粒子是不可区分的,我们必须减去(1)中的交换项。

将(2)和传播子的 Fourier 表示(在 Feynman 规范中的)插入(1)中,就得到

$$S_{fi}=-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\int \mathrm{d}^4y\int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}j_{fi}^{(2)}(\boldsymbol{y})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{fi}^{(2)}t_y}\frac{-4\pi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(y-x)}}{k^2+\mathrm{i}\varepsilon}j_{fi}^{(1)}(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{fi}^{(1)}t_x}. \tag{3}$$

对 t_y 的积分给出了一个 δ 函数。用 $k=(\omega,\boldsymbol{k})$我们得到

$$\begin{aligned}S_{fi}=&4\pi\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\int \mathrm{d}^3y\int \mathrm{d}t_x\int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}2\pi\delta(\omega-\omega_{fi}^{(2)})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{fi}^{(1)}+\omega)t_x}\\&\times j_{fi}^{(2)}(\boldsymbol{y})j_{fi}^{(1)}(\boldsymbol{x})\int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k\cdot(y-x)}}{\omega^2-\boldsymbol{k}^2+\mathrm{i}\varepsilon}.\end{aligned} \tag{4}$$

引入球坐标后，我们用留数积分可以完成对动量的积分：

$$\int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k\cdot r}}{\omega^2-\boldsymbol{k}^2+\mathrm{i}\varepsilon}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty k^2\mathrm{d}k\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\cos\theta_k\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi_k\frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{i}kr\cos\theta_k}}{\omega^2-\boldsymbol{k}^2+\mathrm{i}\varepsilon}$$

$$=\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^2}\frac{1}{r}\int_0^\infty \mathrm{d}k\frac{k}{k^2-\omega^2-\mathrm{i}\varepsilon}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr})$$

$$=\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^2}\frac{1}{r}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\frac{k}{k^2-\omega^2-\mathrm{i}\varepsilon}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}. \tag{5}$$

极点的位置在 $k=\pm(\omega+\mathrm{i}\varepsilon'\mathrm{sgn}(\omega))$。于是留数积分(它必须在上半平面封闭)只包含一个极点，因而得到

$$\int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot r}}{\omega^2-\boldsymbol{k}^2+\mathrm{i}\varepsilon}=-\frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{i}|\omega|r}}{4\pi r}. \tag{6}$$

如果再完成对 ω 和 t_i 的积分，S 矩阵元就为

$$S_{fi}=-2\pi\mathrm{i}\delta(\omega_{fi}^{(1)}+\omega_{fi}^{(2)})\int \mathrm{d}^3x\int \mathrm{d}^3y\, j_{fi}^{(2)}(\boldsymbol{y})\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{fi}|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|}}{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|}j_{fi}^{(1)}(\boldsymbol{x}). \tag{7}$$

像通常那样，δ 函数保证了能量守衡。除此以外，S_{fi}的大小由频率有关的相互作用跃迁流 $j_{fi}^{(1)}$和 $j_{fi}^{(2)}$之间的耦合来确定。

为了更深刻地理解这一点，我们倒退一步，保留时间积分。用由(7)推知的 $|\omega_{fi}^{(2)}|=|\omega_{fi}^{(1)}|$，我们得到

$$S_{fi}=-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3y\int \mathrm{d}t\, j_{fi}^{(2)}(\boldsymbol{y})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{fi}^{(2)}t}\int \mathrm{d}^3x\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{fi}^{(1)}t-\omega_{fi}^{(1)}|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|)}}{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|}j_{fi}^{(1)}(\boldsymbol{x}). \tag{8}$$

如果我们考虑散射过程，其中粒子 1 的能量转移给粒子 2，于是 $\omega_{fi}^{(1)}<0$，和 $|\omega_{fi}^{(1)}|=-\omega_{fi}^{(1)}$，这样，用(2a)可将(8)变为

$$S_{fi}=-\mathrm{i}\int \mathrm{d}t\int \mathrm{d}^3y\, j_{fi}^{(2)}(\boldsymbol{y},t)A_{fi}^{(1)}(\boldsymbol{y},t), \tag{9}$$

其中

$$A_{fi}^{(1)}(\boldsymbol{y},t)=\int \mathrm{d}^3x\, j_{fi}^{(1)}(\boldsymbol{x})\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{fi}^{(1)}(t-|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|)}}{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|}$$

$$=\int \mathrm{d}^3x\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}j_{fi}^{(1)}(\boldsymbol{x},t-|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|). \tag{10}$$

(9)意味着跃迁流 $j_{fi}^{2}(\boldsymbol{y})$和另一个粒子的流 $j_{fi}^{(2)}(\boldsymbol{x})$在早一点时刻发射的场发生相互作用，其中时间差为$|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|\equiv|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|/c$。于是(10)正是延迟位势。(7)中的频率有关因子给出了相互作用的有限传播速度引起的延迟效应。对小的粒子速度($v/c\ll1$)，我们就证明了用最低级的 Taylor 展开来代替指数是正确的。

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\omega_{fi}|\cdot|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|/c}}{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|}\approx\frac{1}{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|}+\frac{\mathrm{i}}{c}|\omega_{fi}|-\frac{1}{2c^2}|\omega_{fi}|^2|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|. \tag{11}$$

下面我们将明显地写出按光速 c 展开的级数。近似 S 矩阵元为

$$\begin{aligned} S_{fi} =& -2\pi i\delta(\omega_{fi}^{(1)}+\omega_{fi}^{(2)})e_1e_2\int d^3x\int d^3y \\ &\times \bar{\psi}_f^{(2)}(\boldsymbol{y})\bar{\psi}_f^{(1)}(\boldsymbol{x})\gamma_\mu^{(1)}\gamma^{(2)\mu}\frac{e^{i|\omega_{fi}|\cdot|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|}}{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|}\psi_i^{(2)}(\boldsymbol{y})\psi_i^{(1)}(\boldsymbol{x}) \\ \simeq& -2\pi i\delta(\omega_{fi}^{(1)}+\omega_{fi}^{(2)})e_1e_2\int d^3x\int d^3y \\ &\times \psi_f^{(2)+}(\boldsymbol{y})\psi_f^{(1)+}(\boldsymbol{x})(\mathbb{1}^{(1)}\mathbb{1}^{(2)}-\boldsymbol{\alpha}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\alpha}^{(2)}) \\ &\times\left(\frac{1}{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|}+i\frac{|\omega_{fi}|}{c}-\frac{1}{2c^2}\omega_{fi}^2|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|\right)\psi_i^{(2)}(\boldsymbol{y})\psi_i^{(1)}(\boldsymbol{x}). \end{aligned} \tag{12}$$

在(12)中只考虑了 v/c 的最低级项。因为 $c\alpha$ 是 Dirac 理论中的速度算符，所以到 $1/c^2$ 级的自洽的近似为

$$\begin{aligned} &(\mathbb{1}^{(1)}\mathbb{1}^{(2)}-\boldsymbol{\alpha}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\alpha}^{(2)})\left(\frac{1}{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|}+i\frac{|\omega_{fi}|}{c}-\frac{1}{2c^2}\omega_{fi}^2|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|\right) \\ &\approx\frac{\mathbb{1}^{(1)}\mathbb{1}^{(2)}}{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|}+\frac{i}{c}\mathbb{1}^{(1)}\mathbb{1}^{(2)}|\omega_{fi}|-\frac{\boldsymbol{\alpha}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\alpha}^{(2)}}{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|}-\frac{1}{2c^2}\omega_{fi}^2|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|\mathbb{1}^{(1)}\mathbb{1}^{(2)}, \end{aligned} \tag{13}$$

如果将它插入(12)中，由于波函数 $\psi_f^{(n)}$ 和 $\psi_i^{(n)}$ 的正交性，$1/c$ 级项的贡献显然为零。(13)中最后的二次修正项看来有点讨厌，因为它包含 ω_{fi} 而与初末态有关。这里，我们可以利用对易子技巧。波函数假定为 Hamilton 量的稳定本征态，于是

$$\begin{aligned} \hat{H}^{(1)}(\boldsymbol{x})\psi_i^{(1)}(\boldsymbol{x}) &= E_i^{(1)}\psi_i^{(1)}(\boldsymbol{x}), \\ \hat{H}^{(1)}(\boldsymbol{x})\psi_f^{(1)}(\boldsymbol{x}) &= E_f^{(1)}\psi_f^{(1)}(\boldsymbol{x}), \end{aligned} \tag{14}$$

类似地还有对 $\hat{H}^{(2)}(\boldsymbol{x})$ 的方程。于是我们可以在(13)中将能量代以相应的 Hamilton 量，只要我们确信它直接作用在波函数上。应用 $\omega_{fi}^{(1)}=-\omega_{fi}^{(2)}$ 我们得到

$$\begin{aligned} -\omega_{fi}^2|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| &= (E_f^{(1)}-E_i^{(1)})(E_f^{(2)}-E_i^{(2)})|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| \\ &= |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\hat{H}^{(1)}\hat{H}^{(2)}-\hat{H}^{(1)}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\hat{H}^{(2)} \\ &\quad -\hat{H}^{(2)}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\hat{H}^{(1)}+\hat{H}^{(1)}\hat{H}^{(2)}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| \\ &= \lfloor\hat{H}^{(1)},\lfloor\hat{H}^{(2)},|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\rfloor\rfloor. \end{aligned} \tag{15}$$

现在我们必须计算距离函数 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ 和双粒子 Hamilton 量的双重对易关系。这些 Hamilton 量的形式为

$$\hat{H}^{(1)}=c\boldsymbol{\alpha}^{(1)}\cdot\boldsymbol{p}_x+\beta^{(1)}m_1c^2+\hat{H}_{\text{ext}}^{(1)}(\boldsymbol{x}), \tag{16}$$

其中只有动量算符与 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ 不对易。这里，$\hat{H}_{\text{ext}}$ 表示和可能出现的(静态)外势的相互作用，它不会改变下面的考虑。应用 $[\boldsymbol{p},f(\boldsymbol{x})]=-i\nabla f(\boldsymbol{x})$ 我们得到

$$[\hat{H}^{(1)},[\hat{H}^{(2)},|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|]]=c^2\boldsymbol{\alpha}^{(1)}\cdot(-i\nabla_x)[\boldsymbol{\alpha}^{(2)}\cdot(-i\nabla_y)|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|]. \tag{17}$$

$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=\sqrt{\sum_k(x_k-y_k)^2}$ 的微分不产生任何困难，于是得到

$$[\hat{H}^{(1)},[\hat{H}^{(2)},|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|]]=c^2\left[\frac{\boldsymbol{\alpha}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\alpha}^{(2)}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}-\frac{\boldsymbol{\alpha}^{(1)}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\boldsymbol{\alpha}^{(2)}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^3}\right]. \tag{18}$$

显然,(13)中的第二项和(18)中的第一项可以合并。最后的结果为

$$\begin{aligned}S_{fi}=&-2\pi\mathrm{i}\delta(\omega_{fi}^{(1)}+\omega_{fi}^{(2)})e_1e_2\int\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3y\psi_f^{(2)\dagger}(\boldsymbol{y})\psi_f^{(1)\dagger}(\boldsymbol{x})\\&\times\left[\frac{\mathbb{1}^{(1)}\mathbb{1}^{(2)}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}-\frac{\boldsymbol{\alpha}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\alpha}^{(2)}+(\boldsymbol{\alpha}^{(1)}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{\alpha}^{(2)}\cdot\boldsymbol{n})}{2|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\right]\psi_i^{(2)}(\boldsymbol{y})\psi_i^{(1)}(\boldsymbol{x}),\end{aligned} \tag{19}$$

其中方向矢量 $\boldsymbol{n}=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})/|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$。(19)可以这样解释,粒子通过(非延迟的)等效相互作用 $U(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ 互相散射,即

$$\begin{aligned}S_{fi}=&-2\pi\mathrm{i}\delta(\omega_{fi}^{(1)}+\omega_{fi}^{(2)})\int\mathrm{d}^3x\int\mathrm{d}^3y\\&\times\psi_f^{(2)\dagger}(\boldsymbol{y})\psi_f^{(1)\dagger}(\boldsymbol{x})U(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\psi_i^{(2)}(\boldsymbol{y})\psi_i^{(1)}(\boldsymbol{x}).\end{aligned} \tag{20}$$

等效相互作用算符形为

$$\begin{aligned}U(x-y)=&\frac{e_1e_2}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}-\frac{e_1e_2}{2}\frac{\boldsymbol{\alpha}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\alpha}^{(2)}+(\boldsymbol{\alpha}^{(1)}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{\alpha}^{(2)}\cdot\boldsymbol{n})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\\\equiv&U_C(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+U_B(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).\end{aligned} \tag{21}$$

正如期望的那样,第一项是粒子间的 Coulomb 位势。另外,我们得到一个速度二次方的修正 U_B,它就是所谓 Breit 相互作用。我们有趣地注意到,如果用经典速度代替 Dirac 矩阵,$\boldsymbol{\alpha}^{(i)}\to\boldsymbol{v}_i/c$,(21)和两个经典粒子的延迟相互作用是一致的。

如果对波函数 $\psi_f^{(i)}$ 也取非相对论近似,(21)可约化为我们所称的自旋-轨道和自旋-自旋相互作用贡献之和。更详细的叙述见例如 H. A. Bethe and E. E. Salpeter: Quantum Mechanics of One-and Two-Electron Atoms(Springer, Berlin, 1957)和例 6.5。

Breit 相互作用在计算多体系和电子偶素(那里也必须考虑虚对湮灭的 Feynman 图)的能移时是很有用的。但是我们必须记住,(21)只是一个近似。它只在微扰论中被严格地证明是有用的。如果简单地把 Dirac 方程中的位势 U 作为相互作用位势,可能会导致错误的结果。特别地,我们必须避免正能和负能解的混合,这可通过引入投影算符而做到[①]。

例　子

6.5　用于电子偶素的二体方程的非相对论约化

我们在本章的开始已经知道,在 QED 中双 Fermi 子体系有一个按照 Bethe-Salpeter 方程的,形式上精确的描述。我们必须构造一个 $4\times4=16$ 分量的二体波函数和一个二体传播子 S_F^{ab}。为了作精确的描述,我们需要知道作用核 K^{ab},它形式上表示为所有可能 Feynman 图的无穷和。

① J. Sucher: Phys. Rev. **A22**, 348(1980).

但实际上,此要求太高了,Bethe-Salpeter 只能用于简化的形式下,即梯形近似。在这个例子中我们将用梯形近似来略述一下电子偶素的非相对论 Hamilton 量的推导,这是 QED 的奠基石之一。

虽然我们将从完全的二体问题开始,但将相应的 16 分量的方程约化到非相对论极限下的最大分量方程是合理的。这两者在实际计算中都是有用的,并且得到一个物理解释清楚的方程。这个步骤的正确性的基础是,电子偶素是一个十分弱的束缚体系。电子和正电子定域在两倍(由于约化质量)于氢 Bohr 半径的轨道上,这比 Compton 波长要大

$$r_0 \approx \frac{2}{m\alpha} \gg \frac{1}{m}.$$

其结合能为 $\alpha^2 m$ 的量级,远小于静止质量 $2m$。在通常的单粒子 Dirac 理论中,非相对论近似四分量 Dirac 方程变为二分量 Pauli 方程。这种约化是用 Foldy Wouthuysen 技术[①],漂亮而系统地得到的。

这个方法的思想是应用一种幺正变换 $\hat{U}_F$,它排除了在 Hamilton 量中的"奇"算符 $\mathcal{O}$。名称奇是给予耦合 Dirac 旋量的大小分量的算符的;典型的例子是矩阵 α 和 γ。相应地,关于大小分量是对角的算符称为"偶的",它用字母 $\mathcal{E}$ 来标记。这类算符的例子是 $\mathbb{1}, \beta, \Sigma$。所以现在的任务是构造一个幺正算符 $\hat{U}_F$,使 Hamilton 量的奇部分被消除。如果原来的 Hamilton 量写成

$$H = \beta m + \mathcal{E} + \mathcal{O}, \tag{1}$$

按照 Foldy 和 Wouthuysen 技术,变换后的 Hamilton 量为

$$\begin{aligned} H &= U_F^{-1} H U_F \\ &= \beta m + \mathcal{E} + \frac{\beta}{2m}\mathcal{O}^2 + \frac{1}{8m^2}[[\mathcal{O},\mathcal{E}],\mathcal{O}] - \frac{\beta}{8m^3}\mathcal{O}^4 + \cdots. \end{aligned} \tag{2}$$

这个过程被 Chraplyvy[②]推广成可以应用到二体问题上。

此方法的思想原则保持不变。但现在 Hamilton 量由 16×16 的矩阵构成,它是粒子 1 和粒子 2 的 4×4 单体 Dirac 矩阵的直积。要推广奇偶算符的概念,我们必须区分 4 种情况:

偶偶算符($\mathcal{E}\mathcal{E}$);例如 $\mathbb{1}, \beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \Sigma^{(1)}, \Sigma^{(1)} \cdot \Sigma^{(2)}$;

偶奇算符($\mathcal{E}\mathcal{O}$);例如 $\alpha^{(2)}, \gamma^{(2)}$

奇偶算符($\mathcal{O}\mathcal{E}$);例如 $\alpha^{(1)}, \gamma^{(1)}$

奇奇算符($\mathcal{O}\mathcal{O}$);例如 $\alpha^{(1)} \cdot \alpha^{(2)}, \gamma^{(1)} \cdot \gamma^{(2)}$

这里我们用了缩写记号

$$\alpha^{(1)} \equiv \alpha \otimes \mathbb{1} \quad \text{and} \quad \alpha^{(2)} \equiv \mathbb{1} \otimes \alpha. \tag{3}$$

($\mathcal{E}\mathcal{O}$),($\mathcal{O}\mathcal{E}$),($\mathcal{O}\mathcal{O}$)型的算符耦合二体方程的 16 个分量,而算符($\mathcal{E}\mathcal{E}$)关于大小分量是对角的。

---

① 见 W. Greiner: Theoretical Physics, Vol. 3, *Relativistic Quantum Mechanics-Wave Equations* (Springer, Berlin, Heidelberg 1990), Chap. 11.

② Z. V. Chraplyvy: Phys. Rev. **91**, 388(1953) and **92**, 1310(1953).

于是如果我们能找到一个幺正变换来消除算符$(\mathcal{O}\mathcal{E})$,$(\mathcal{E}\mathcal{O})$,$(\mathcal{O}\mathcal{O})$,则 16 分量的方程就退耦为一组 4 个独立分量的方程。其中一个包含了二体方程的 Pauli 近似,而其余三个方程描述了负能态的混合,并可证明在非相对论近似下,它们为零。与 Foldy Wouthuysen 变换算符$\hat{U}_{\mathrm{F}}$类似,对 16 分量的二体方程也可构造一个幺正算符$\hat{U}_{12}$,使到 $1/m$ 的任意选取的级都可将大分量退耦。

我们从一般的二体 Hamilton 量开始

$$H_{12}=\beta^{(1)}m_1+\beta^{(2)}m_2+(\mathcal{E}\mathcal{E})+(\mathcal{E}\mathcal{O})+(\mathcal{O}\mathcal{E})+(\mathcal{O}\mathcal{O})\,. \tag{4}$$

如 Chraplyvy 在一个长长的计算(在此我们不重复此计算)中所指出的那样,变换后的 Hamilton 量形为

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{12}&=\hat{U}_{12}^{(-1)}H_{12}\hat{U}_{12}\\&=\beta^{(1)}m_1+\beta^{(2)}m_2+(\mathcal{E}\mathcal{E})+\frac{\beta^{(1)}}{2m_1}(\mathcal{O}\mathcal{E})^2+\frac{\beta^{(2)}}{2m_2}(\mathcal{E}\mathcal{O})^2\\&\quad-\frac{\beta^{(1)}}{8m_1^3}(\mathcal{O}\mathcal{E})^4-\frac{\beta^{(2)}}{8m_2^3}(\mathcal{E}\mathcal{O})^4+\frac{1}{8m_1^2}[[(\mathcal{O}\mathcal{E}),(\mathcal{E}\mathcal{E})]_-,(\mathcal{O}\mathcal{E})]_-\\&\quad+\frac{1}{8m_2^2}[[(\mathcal{E}\mathcal{O}),(\mathcal{E}\mathcal{E})]_-,(\mathcal{E}\mathcal{O})]_-+\frac{\beta^{(1)}\beta^{(2)}}{4m_1m_2}[[(\mathcal{O}\mathcal{E}),(\mathcal{O}\mathcal{O})]_+,(\mathcal{E}\mathcal{O})]_+\\&\quad+\frac{\beta^{(1)}+\beta^{(2)}}{4(m_1+m_2)}(\mathcal{O}\mathcal{O})^2+\cdots\,.\end{aligned} \tag{5}$$

原则上$\hat{H}_{12}$仍然作用在 16 分量波函数上。但现在可以分出一个只包含"大分量"的 4 分量的方程。

在通常的单粒子 Foldy Wouthuysen 变换情况中,这简单地通过用一个 2×2 矩阵 a,例如

$$\beta=\begin{pmatrix}\mathbb{1}&0\\0&-\mathbb{1}\end{pmatrix}_{4\times4}\to\mathbb{1}_{2\times2}.$$

来替代每个 4×4 的 Dirac 矩阵

$$M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}_{4\times4}$$

而得到。在二体情况下,类似的替代为

$$\beta^{(1)}=\begin{pmatrix}\mathbb{1}&&&\\&\mathbb{1}&&\\&&-\mathbb{1}&\\&&&-\mathbb{1}\end{pmatrix}_{16\times16}\to\mathbb{1}_{4\times4},$$

$$\beta^{(2)}=\begin{pmatrix}\mathbb{1}&&&\\&-\mathbb{1}&&\\&&\mathbb{1}&\\&&&-\mathbb{1}\end{pmatrix}_{16\times16}\to\mathbb{1}_{4\times4}.$$

应用到电子偶素系统上。我们从例 6.3 的(34)开始，它是从 Bethe-Salpeter 方程推得的

$$(E - H^{(1)}(\mathrm{i}\nabla) - H^{(2)}(\mathrm{i}\nabla))\Phi(r) = U(r)\Phi(r), \tag{6}$$

其中 $U(r)$ 是在例 6.3 的(41)中定义的。这里，

$$H^{(1)} = \alpha^{(1)} \cdot p + \beta^{(1)} m_1,$$
$$H^{(2)} = -\alpha^{(2)} \cdot p + \beta^{(2)} m_2.$$

明显地写出来，(6)为

$$H\Phi(r) = \left\{\alpha^{(1)} \cdot p - \alpha^{(2)} \cdot p + \beta^{(1)} m_1 + \beta^{(2)} m_2 + \frac{e_1 e_2}{r}\left[\mathbb{1} - \frac{\alpha^{(1)} \cdot \alpha^{(2)}}{2}\right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{(\alpha^{(1)} \cdot r)(\alpha^{(2)} \cdot r)}{2r^2}\right]\right\}\Phi(r) = E\Phi(r). \tag{7}$$

如果我们令 $m_1 = m_2 = m$，$e_1 = -e_2 \equiv e$，就描写了电子偶素系统。为了应用上面讨论的约化方法，我们必须定出 Hamilton 量中各种类型的偶和奇算符：

$$(\mathscr{E}\mathscr{E}) = -\frac{e^2}{r}\mathbb{1},$$
$$(\mathscr{E}\mathscr{O}) = -\alpha^{(2)} \cdot p,$$
$$(\mathscr{O}\mathscr{E}) = +\alpha^{(1)} \cdot p,$$
$$(\mathscr{O}\mathscr{O}) = +\frac{e^2}{2r}\left[\alpha^{(1)} \cdot \alpha^{(2)} + \frac{(\alpha^{(1)} \cdot r)(\alpha^{(2)} \cdot r)}{r^2}\right]. \tag{8}$$

由此可推出下面的在(5)中的要素：

$$(\mathscr{O}\mathscr{E})^2 = (\mathscr{E}\mathscr{O})^2 = p^2, \tag{9a}$$
$$(\mathscr{O}\mathscr{E})^4 = (\mathscr{E}\mathscr{O})^4 = p^4, \tag{9b}$$
$$\{[[(\mathscr{O}\mathscr{E}),(\mathscr{E}\mathscr{E})]_-,(\mathscr{O}\mathscr{E})]_- + [[(\mathscr{E}\mathscr{O}),(\mathscr{E}\mathscr{E})]_-,(\mathscr{E}\mathscr{O})]_-\}$$
$$= 2e^2\left[(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}).\left(\frac{r}{r^3} \times p\right) + 4\pi\delta^3(r)\right], \tag{9c}$$
$$[[(\mathscr{O}\mathscr{E}),(\mathscr{O}\mathscr{O})]_+,(\mathscr{E}\mathscr{O})]_+$$
$$= -2e^2\left[\frac{p^2}{r} + r\left(\frac{r}{r^3} \cdot p\right)p - (\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)})\left(\frac{r}{r^3} \times p\right)\right]$$
$$- e^2\left[\frac{\alpha^{(1)} \cdot \alpha^{(2)}}{r^3} - \frac{3(\alpha^{(1)} \cdot r)(\alpha^{(2)} \cdot r)}{r^5} - \frac{8\pi}{3}\alpha^{(1)} \cdot \alpha^{(2)}\delta^3(r)\right], \tag{9d}$$
$$(\mathscr{O}\mathscr{O})^2 = \frac{e^4}{2r^2}\left[3 - 2\alpha^{(1)} \cdot \alpha^{(2)} + \frac{(\alpha^{(1)} \cdot r)(\alpha^{(2)} \cdot r)}{r^2}\right]. \tag{9e}$$

我们将这些表示式插入(5)中，并完成如前讨论的替代 $\beta^{(1)} \to \mathbb{1}$，$\beta^{(2)} \to \mathbb{1}$ 等等。波函数由两个 Pauli 旋量的直积所组成。这相应于这样的近似，即两个粒子被它们原始的二分量旋量的两个上分量所描写。于是推广的 Pauli 方程为

$$H_{12}^{\text{Pauli}}\psi_{12}(\boldsymbol{r}) = E\psi_{12}(\boldsymbol{r}) \ , \tag{10}$$

其中

$$H_{12}^{\text{Pauli}} \equiv H_0 + H_1 + H_2 + H_3 + H_4$$

而

$$\begin{aligned}
H_0 &= -\frac{e^2}{r} + \frac{\boldsymbol{p}^2}{m} \ , \\
H_1 &= -\frac{1}{4m^3}\boldsymbol{p}^4 , \\
H_2 &= -\frac{e^2}{2m^2}\left[\frac{\boldsymbol{p}^2}{r} + \boldsymbol{r}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\boldsymbol{p}\right)\boldsymbol{p}\right] + \frac{e^2}{m^2}\pi\delta^3(\boldsymbol{r}) , \\
H_3 &= \frac{3e^2}{4m^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\times\boldsymbol{p}\right)(\boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)}) , \\
H_4 &= -\frac{e^2}{4m^2}\left[\frac{\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(2)}}{r^3} - \frac{3(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\cdot\boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\cdot\boldsymbol{r})}{r^5} - \frac{8\pi}{3}(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(2)})\delta^3(\boldsymbol{r})\right] .
\end{aligned} \tag{11}$$

c^4 级的项被忽略了。二体 Pauli Hamilton 量的各部分有一个直观的解释。H_0 是非相对论 Shrödinger 算符(静止质量已从(10)中减去)。H_1 描写了由于质量对速度的依赖性引起的第一级修正。H_2 包含了由于延迟效应引起的对两个带电粒子相互作用的经典相对论修正和由 Zitterbewegung 引起的 Darwin 项。H_3 是粒子的总自旋 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}^{(1)}+\boldsymbol{s}^{(2)}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}+\boldsymbol{\sigma}^{(2)})$ 和粒子相对轨道角动量 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ 之间的相互作用。H_4 是电子和正电子的磁矩之间的磁偶极相互作用(自旋自旋作用)。

再加一些其他的考虑,我们得到这样的结论,Hamilton 量(11)没有包括电子偶素系统的全部真实情况。我们把两个粒子处理成电荷相反的独立体。但是因为我们处理一个粒子反粒子体系,虚对的湮灭过程必须考虑进去。于是在习题 6.2 中引入的湮灭相互作用必须包括在内。我们不再逐步推导相互作用的非相对论极限,而只引用对 Hamilton 量附加贡献的结果:

$$H_5 = \frac{e^2\pi}{2m^2}(3 + \boldsymbol{\sigma}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(2)})\delta^3(\boldsymbol{r}) \ .$$

注意,此相互作用只对轨道角动量 $L=0$(因为有 δ 函数)和总自旋 $S=1$(因为对单态来说 $\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(2)}=-3$)的态有贡献。

将 Hamilton 量 H_1 到 H_5 作为微扰加到 H_0 上,将给出直到 α^4 级的电子偶素的能级[①]。

① 例如见 M. A. Stroscio: Phys. Rep. **22**, 215(1975).

6.2 传　　记

SALPETER, Edwin Ernest, 美国物理学家, 1924 年 3 月 12 日生于维也纳。Salpeter 就读于悉尼大学(澳大利亚)和伯明翰大学, 1948 年他在那里得到了博士学位。他在康乃尔大学成为研究助理, 后来成为教授和康乃尔辐射物理和空间研究中心的主任。Salpeter 和 Bethe 一起研究了多电子系统和量子力学二体问题(Bethe-Salpeter 方程)。Salpeter 的主要研究领域一直是天体物理, 他研究了星体中的核裂变机制, 塌缩星体的结构, 星际物质等。

第七章　强场的量子电动力学

迄今为止，在本书中我们主要考虑了电子（或正电子）在弱微扰影响下的行为。在本章中，我们要处理有强电磁场时出现的现象[①]。

在此情况中，我们将看到出现一种新的“零级效应”，它不能像通常那样用微扰论来描写：理论中的基态（真空态）变成不稳定的，在某种电磁位势强度下会发生变化。首先，我们将对过程作定性的讨论。

通常，如在弱场中，能量最低的稳定态的特征是其中没有（实际的）粒子；在 QED 中，这表示既没有电子，也没有正电子。在无外场时 Dirac 方程只有能量为 $E_p=\pm\sqrt{m_0^2c^4+p^2c^2}$ 的连续解。真空态是由这样的要求确定的，即所有的正能态都是空的，而所有的负能态都被占据（见图 7.1）。

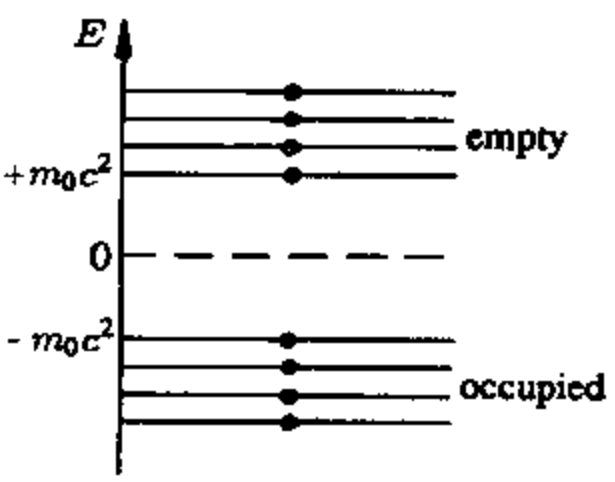


图 7.1　在无外场时 Dirac 理论的真空态

在 Dirac 的空穴图像中，这意味着既没有自由电子，也没有自由正电子（即下部连续区中的空穴）。形式上的“Dirac 海”中的无穷大能量和电荷原则上是观察不到的，都被“重整化掉了”。于是物理上可观察到的真空态（没有电磁场时）是没有粒子的和电中性的。现在我们加入外电磁场 $A_\mu(x)$。外场近似意味着假定 $A_\mu(x)$ 为经典场，并且不受电子的影响。在实际中，电荷为 $-Ze$ 的原子核很好地代表了这种场，因为它的质量比电子质量大很多（$m_p/m_e\approx2000$）。宏观场和相干电磁辐射也可用外场来描写。

为了实现这种实质的效应，我们考虑一个在有限范围内的静电势阱 $A_0(x)$。如果势阱是正的，则电子可以被束缚在阱内。这表示一个或多个电子能级 $E_1,E_2,\cdots$ 可以降低到 $E=+m_0c^2$ 和 $E=-m_0c^2$ 之间的能隙中。相应的波函数在空间上定域于势阱中。但是，由于在能量上它仍然倾向于不占据下部的态（图 7.2），所以真空态的基本结构没有改变。

如果位势非常强，使得 E_1 成为负的，即结合能 $E_B=m_0c^2-E_1$ 超过了 m_0c^2，情况就改变了。在系统中加一个电子，比包含在电子静止质量中更多的能量将被发射出去。这就导致了奇怪的现象，按照质－能等价性，系统将比没有电子还要轻！但是由于电荷守恒应严格地被遵守，单个电子是无法产生的；只能产生电子 正电子对。其能阈为 $2m_0c^2$，于是一个空能级的系统在范围　m_0c^2

① 详细的介绍可在 W. Greiner, B. Müller, J. Rafelski: *Quantum Electrodynamics of Strong Fields* (Springer, Berlin, Heidelberg 1985)中找到。

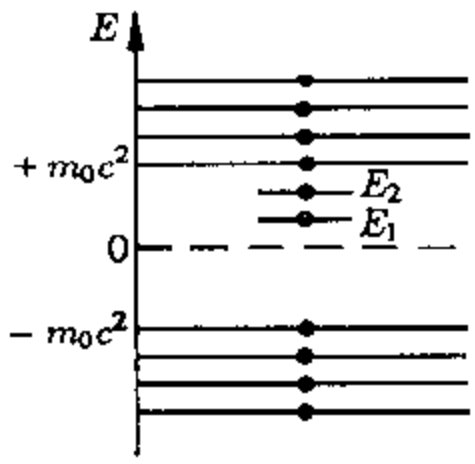


图 7.2 在有弱的外束缚位势时 Dirac 方程的谱

$<E_1<0$ 内也保持稳定(图 7.3a)。但当状态一旦降到阈 $E=-m_0c^2$ 以下时,事情就发生了变化。电子正电子对可以在不需要消耗能量(如从入射光子得到)的情况下产生。甚至还有剩余的能量可用作动能,即 $E_{kin}=E_B-2m_0^2c^2=|E_1|-m_0c^2$。当超过某一个临界位势强度时,就会发生下面的情况:e^+e^-对自发地产生了。电子受到吸引,停留在势阱内,而正电子被推出去,以动能 E_{kin}逃离系统(图 7.3b)。

这个过程也可这样来解释:当位势强度增加时,状态 E_1"潜入下面的连续区中",并合并进去。如果原来是空的,则现在 Dirac 海有了一个空穴,在物理上,它相应一个正电子。经过一定长的时间(我们将比较严格地计算此时间)就形成了一个新的稳定基态:原来空的(在临界以下情况中)势阱,现在填充了一个电子,或者说原来中性的真空衰变为带电的真空。当然,总的电荷守恒不受破坏。被发射的正电子带了一个单位的正电荷到无穷远处,即从围绕势阱的一个任意大的,但是是有限的体积中逃跑了。

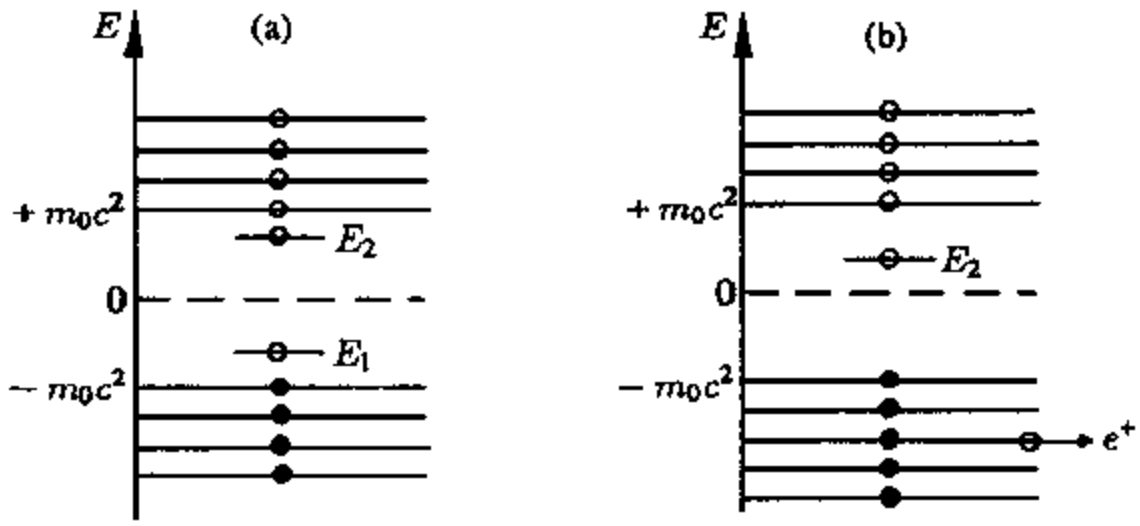


图 7.3(a)(b) 在强外场情况下 Dirac 理论的真空态。
(a) 临界下:真空是中性的
(b) 超临界:正电子自发地发射出去,真空获得电荷

超临界真空呈现的电荷 Q_{vac}与势阱的强度有关,即穿过阈 $-m_0c^2$ 而被淹没的能级 $E_1, E_2, \cdots$ 的数目有关。如果没有磁场,所有的能级是双重简并的(两个自旋方向 $S_z=\pm 1/2$ 的能量相等),所以,随着位势强度的增加,Q_{vac}取值 $2e, 4e, \cdots$。

在我们作定量描写前,定性地考虑一下在各种情况下量子力学波函数的结构是有用的。我们要找标量电磁位势 $A_0^{(x)}$ 中的静态 Dirac 方程的本征解 ψ,它满足

$$(c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m_0c^2+eA_0(x))\psi(x)=E\psi(x)\,. \tag{7.1}$$

这里能量 E 和位势 $V(x)=eA_0(x)$以组合形式 $E-V(x)$出现是重要的。这表示能隙的边界(在自由场的情况下,它在 $+m_0c^2$ 和 $-m_0c^2$ 之间)被位势定域地移动了。图 7.4 显示了在吸引势阱中的情况。

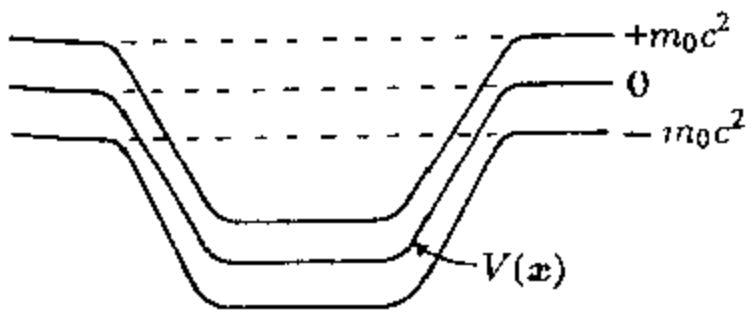


图 7.4　有静电势阱的 Dirac 方程的能隙

能隙内是经典的禁戒区，其中只能有指数衰变的波函数。在能隙外，即对 $|E-V|>m_0c^2$，有振荡解。因为 $V(x)$假定为渐近地趋于零，对 $E>m_0c^2$ 和 $E<-m_0c^2$，我们得到延伸到无穷的，振荡的连续波函数。势阱的效应使这些波函数变形。在通常的弱位势中，这种破坏不导致定性地改变波函数的性质。在图 7.5 中，大致地画出了典型的上(a)和下(b)两个连续区波函数。(这是一个示意图，因为严格来说，我们必须用四分量旋量波函数。)只有吸引位势才可能在区域 $-m_0c^2<E<+M_0c^2$ 中的分立能量处有空间上定域的束缚波函数(图 7.5 的情况 c)。但如果势阱足够深，一个(或多个)束缚态可以掉到阈 $-m_0c^2$ 以下。于是波函数必须改变其特性，因为它不再能指数衰变，而是延伸到无穷。它的形状显示在图 7.5d 中。

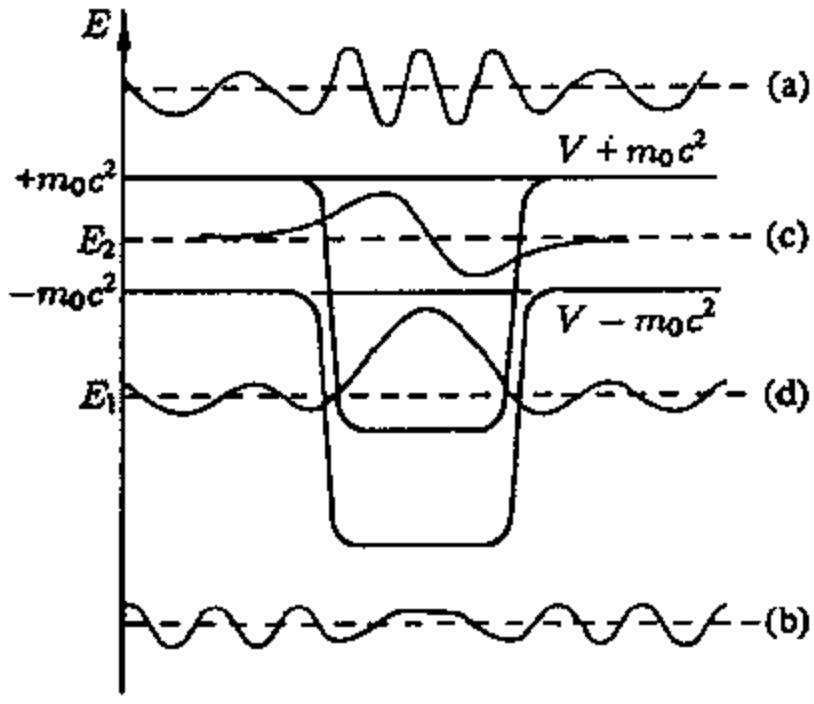


图 7.5(a)～(d)　深势阱的 Dirac 波函数的示意图：
(a)自由电子态，(b)自由正电子态，(c)束缚电子态，(d)在下连续区的共振态

我们现在可以区分三个区域：在势阱内部的波函数类似于通常的束缚态波函数；在势阱外，它是一个振荡的连续波，两个区域被一个能量在“禁戒”能隙中的区域连接。

这种情况强烈地使我们想起非相对论量子力学中熟悉的过程，即出现在如 α 衰变或固体物理中的隧道效应。当一个粒子必须通过一个空间区域，但不具有经典上所需的能量时，穿透是可

能的，例如在图 7.6 显示的势垒情况。

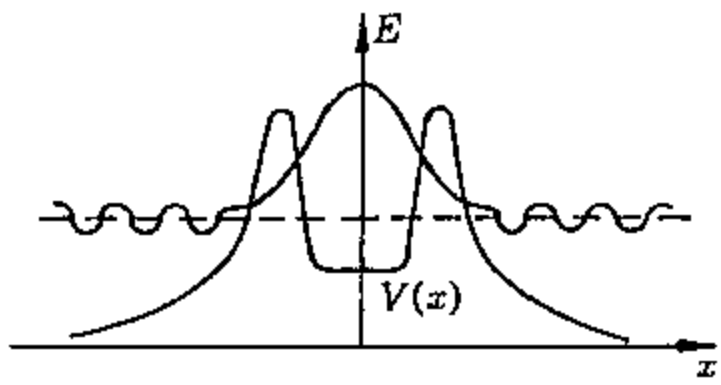


图 7.6 在非相对论量子力学中隧道效应的解释

处于势阱中的粒子是一个“准束缚态”。它能以一定的衰变率(单位时间的几率)穿过势垒的能量禁戒区。现在我们可以完全类似地说，在超临界束缚态中的粒子为了逃脱成一个正电子，将穿过上下连续区之间的能隙。

众所周知，在隧道过程中的衰变几率随着要通过的势垒的宽度和高度(“Gamow 因子”)而指数下降。这对中性真空衰变也成立。这解释了为何在宏观静电场中没有发现自发对产生。几兆伏特的位势是很容易产生的，但典型地，它们延伸到几米的范围，这使得对产生的几率非常小。粗略的估计告诉我们，如果位势 $\Delta V = e\Delta A_0$ 在由电子 Compton 波长 $\lambda = \hbar/m_0c^2$ 所表征的特征长度标度上改变两个静止质量单位 $2m_0c^2$，则对产生就需要考虑了。因为 $E = -\nabla A_0$，这导致临界场强度的量级为

$$E_{cr} \sim \frac{\Delta A_0}{\Delta x} = \frac{2m_0c^2}{e\hbar/m_0c} = \frac{2m_0^2c^3}{e\hbar} = \frac{1}{e}\frac{2\times 511\ \text{keV}}{386\text{fm}} = 2.6\times 10^{16}\frac{\text{V}}{\text{cm}}. \tag{7.2}$$

我们将在研究均匀电场的 7.3 节中再次遇到此临界场强度。大小为 E_{cr} 的场强只出现在宏观系统中[①]。另一方面，位势区域的大小必须足够大，使得(根据测不准关系)波函数能够定域化。实验上，只有一个可用的系统，它的真空衰变是可以检测的：核电荷数 Z 很高的重原子。

7.1 原子中的强场

自然界提供了原子核作为最理想的强外电场源。一个电荷为 Z，质量数为 A 的核，产生一个球对称的电势

$$V(r) = ZU(r) = \begin{cases} -Ze^2/r & \text{对} \quad r > R \\ -(Ze^2/R)f(r) & \text{对} \quad r < R, \end{cases} \tag{7.3}$$

其中核的电荷半径 R 近似地为

$$R = 1.2A^{1/3}\text{fm}. \tag{7.4}$$

① 这里我们不处理很高强度的可能的激光场的问题。

如果我们把核看成有鲜明的边界，均匀带电的球——在大部分情况中这是足够的——那么势阱的底是抛物线状的。

$$f(r)=\frac{1}{2}\left(3-\frac{r^2}{R^2}\right). \tag{7.5}$$

作为粗略的，但是简单的近似，我们有时取 $f(r)=1$，这相应于一个带电的球壳。这三种情况都画在图 7.7 中。

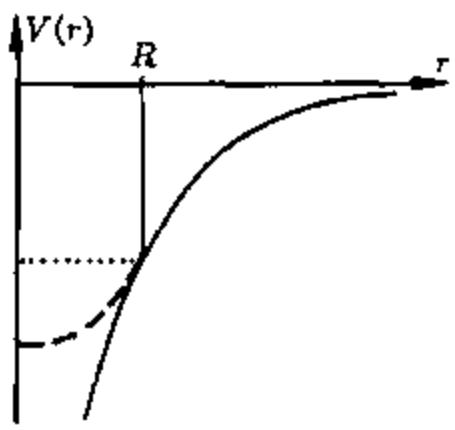


图 7.7　一个点核的（实线），均匀带电球的（短线），和带电球壳的（点线）Coulomb 位势

内部的位势，和最大的电场强度（在核的表面）是很大的，如对铀核（$Z=92, A=238$）为

$$|V_{\max}|=\frac{3}{2}\frac{Ze^2}{R}\simeq 26.7\ \mathrm{MeV}\simeq 52\ m_0c^2$$

和

$$|E_{\max}|=\frac{Ze}{R^2}\simeq 2.4\ 10^{19}\frac{V}{\mathrm{cm}}\simeq 900\ E_{\mathrm{cr}}.$$

这些数大大地超过了值 $2m_0c^2$ 和 E_{cr}，我们不能称铀核的电场为超临界的。另外，场延伸的空间区域必须足够大，使得可以将量子力学波函数定域化。这个条件在通常的原子中是不满足的。与图 7.5 所显示的情况相反，这里的电子能级不是束缚得很深的。

为了研究态的行为，必须对中心位势(7.3)来解 Dirac 方程(7.1)。在卷《RQM》的第九章中详细地描写了这个过程，在此我们只简短地重复一下。

对形为(7.3)的位势，角动量算符和宇称算符是和 Dirac Hamilton 量 $H_{\mathrm{D}}=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m_0+V(r)$对易的。所以波函数可按角动量 j 和宇称 π 来分类。双旋量波函数设为

$$\psi_{jm}(x)=\frac{1}{r}\begin{pmatrix}u_1(r)\chi_{\kappa m}(\Omega)\\ \mathrm{i}u_2(r)\chi_{-\kappa m}(\Omega)\end{pmatrix}, \tag{7.6}$$

其中二分量的球旋量为

$$\chi_{\kappa m}(\Omega)=\sum_{\mu=\pm 1/2}\left(l\ \frac{1}{2}\ j\,|\,m-\mu\ \mu m\right)Y_{lm-\mu}(\Omega)\chi_\mu, \tag{7.7}$$

这里 $\chi_{1/2}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\chi_{-1/2}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$。$\kappa$ 是算符 $\hat{K}=\beta(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{L}+1)$ 的本征值，其值为

$$\kappa=\begin{cases}-(l+1) & =-\left(j+\frac{1}{2}\right)\quad \text{for}\quad j=l+\frac{1}{2}\\ l & =+\left(j+\frac{1}{2}\right)\quad \text{for}\quad j=l-\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Dirac 方程(7.1)约化为两个耦合的一阶常微分方程组（$\hbar=c=1$）

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}u_1&=-\frac{\kappa}{r}u_1+(E+m_0-V(r))u_2,\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}u_2&=-(E-m_0-V(r))u_1+\frac{\kappa}{r}u_2.\end{aligned} \tag{7.8}$$

对所有的 $E>m_0, E<-m_0$ 的能量，(7.8)具有在原点($r=0$)正规的，并渐近($r\to\infty$)振荡的连续解。在能隙中，只在某些分立的能量本征值 E_{nj} 处，其解在 $r\to 0$ 和 $r\to\infty$ 时同时满足正规要求而可归一化：

$$\int_0^\infty \mathrm{d}r(u_1^2+u_2^2)=1\,. \tag{7.9}$$

为了确定任意位势的解，可以无困难地对方程组(7.8)求数值解。对某些位势还可得到解析解。为此将方程组(7.8)写成一个二级微分方程是有用的。

在对所有 r 的纯 Coulomb 位势 $V(r)=-Z\alpha/r$ 的情况下得到了一个封闭解。它实质上是由汇合超几何函数构成的。能量本征值满足众所周知的 Sommerfeld 的精细结构公式

$$E_{nj}=m_0\left[1+\left(\frac{Z\alpha}{n-|\kappa|+\sqrt{\kappa^2-Z^2\alpha^2}}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{7.10}$$

其中，$n=1,2,\cdots$ 为主量子数。显然，这个公式对电荷 $Z\alpha>|\kappa|$ 不再成立，因为那时根 $\gamma=\sqrt{\kappa^2-Z^2\alpha^2}$ 成为虚的。对最深的束缚态 $1s$-态，这一点能特别看得清楚，这个态的能量是 $E_{1s}=m_0\sqrt{1-(Z\alpha)^2}$。函数 $E_{1s}(z)$ 在 $Z\alpha\to 1$ 处断开，垂直正切为 $\mathrm{d}E_{1s}/\mathrm{d}Z\to-\infty$。

我们认为这种行为的原因在于波函数在接近原点时的形状。对 $r\to 0$，Coulomb 位势占优势：$|V|\gg E, m_0$。在方程组(7.8)中消去 u_2(见习题 7.1)，我们得到对 $u_1(r\to 0)$ 的微分方程：

$$u_1''+\frac{1}{r}u_1'+\frac{(Z\alpha)^2-\kappa^2}{r^2}u_1=0\,. \tag{7.11}$$

(7.11)的正规解是

$$u_1(r)\sim r^{\sqrt{\kappa^2-(Z\alpha)^2}}\quad \text{对}\quad r\to 0\,. \tag{7.12}$$

在 $Z\alpha>|\kappa|$ 时，指数为虚的。如果我们构造一个实际解，则如 $\sin(\sqrt{(Z\alpha)^2-\kappa^2}\ln r+\delta)$ 那样是以无穷个频率振荡的解 。因为这种奇异波函数是不可接受的，所以对 $Z\alpha>|\kappa|$，电子在纯 Coulomb 位势中的问题是无解的①。

这是因为我们没有正确地描述问题。在实际情况中，Coulomb 场的源应是有限的延伸，所以位势 V 应如(7.3)那样保持有限。这时，在原点波函数不会有(7.12)那样的奇异行为。于是能级可以连续地延伸到超过点 $Z_c=|\kappa|$。

解出截断 Coulomb 位势(7.3)的 Dirac 方程比纯 Coulomb 位势的情况更复杂。一个方法是首先构造两个解，内部区域解 $u_1^{(i)}, u_2^{(i)}$ 和外部区域解 $u_1^{(a)}, u_2^{(a)}$。在每一个区域中，一阶微分方程组(7.8)有两个线性无关的解。内部解要求在原点，$r\to 0$，是正规的，而外部解在无穷远处应当指数衰变。两个解在 R_0 点必须匹配，原则上 R_0 可以任意选择。我们将它选得使波函数的大分量和小分量的比值相等，

① 此问题的解见 P. Gärtner 等：Z. Phys. **A300**, 143 (1981).

$$\frac{u_1^{(i)}(R_0)}{u_2^{(i)}(R_0)} = \frac{u_1^{(a)}(R_0)}{u_2^{(a)}(R_0)} . \tag{7.13}$$

这个条件一般来说是不满足的。只对某些分立的能量本征值(可用迭代法确定)这两个解可以连续地结合成一个在两个边界处正规的整体波函数。与(7.10)相反,这个过程一般不能解析地进行。

习　题

7.1　在潜入点的波函数

问题:在潜入点(在该点处能量本征值为 $E=-m_0$)可以比较容易地确定解析的 Dirac 波函数。

a) 通过消去 u_2,将径向微分方程(7.8)写成一个对 u_1 的二阶微分方程。

b) 证明在 Coulomb 位势 $V(r)=-Z\alpha/r$ 的情况下,在特殊的能量 $E=-m_0$ 处,波函数 u_1 满足 Bessel 微分方程,并找到在无穷远处正规的解。

提示:用替代 $\rho=\sqrt{8m_0Z\alpha r}$ 。

c) 对截断的 Coulomb 位势($V(r)=-Z\alpha/R$ 对 $r\leqslant R$,$V(r)=-Z\alpha/r$ 对 $r\geqslant R$),通过按照(7.13)使内外区域的解匹配,来找到一个确定 $1s$-态的临界电荷 Z_{cr} 的方程。

解:a) 我们对微分方程(7.8a)取关于 r 的导数,给出

$$u_1'' = \frac{\kappa}{r^2}u_1 - \frac{\kappa}{r}u_1' - V'u_2 + (E + m_0 - V)u_2'. \tag{1}$$

再用(7.8a),我们可从此方程中消去 u_2

$$u_2 = \frac{u_1' + \frac{\kappa}{r}u_1}{E + m_0 - V} . \tag{2}$$

我们用第二个微分方程(7.8b)来消除 u_2'

$$u_2' = -(E - m_0 - V)u_1 + \frac{\kappa}{r}u_2. \tag{3}$$

从(1),(2)和(3)得到结果

$$u_1'' + \frac{V'}{E + m_0 - V}u_1' + \left[(E - V)^2 - m_0^2 - \frac{\kappa(\kappa + 1)}{r^2} + \frac{\kappa}{r}\frac{V'}{E + m_0 - V}\right]u_1 = 0 . \tag{4}$$

b) 用 Coulomb 位势 $V=-Z\alpha/r$,在特殊的能量 $E=-m_0$ 处,(4)约化为

$$u_1'' + \frac{1}{r}u_1' - \left(\frac{2m_0Z\alpha}{r} - \frac{(Z\alpha)^2 - \kappa^2}{r^2}\right)u_1 = 0 . \tag{5}$$

从替代

$$\rho^2 = 8m_0 Z\alpha r \tag{6}$$

得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = \frac{4m_0 Z\alpha}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\ , \tag{7a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} = \frac{(4m_0 Z\alpha)^2}{\rho^2}\left(-\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2}\right)\ . \tag{7b}$$

将它插入(5)中并乘以 $\rho^2/(4Z\alpha)^2$,得到

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2}u_1 + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}u_1 - \left\{1 - \frac{4[(Z\alpha)^2 - \kappa^2]}{\rho^2}\right\}u_1 = 0\ . \tag{8}$$

这正是变形 Bessel 函数服从的微分方程

$$f'' + \frac{1}{\rho}f' - \left(1 + \frac{\mu^2}{\rho^2}\right)f = 0\ . \tag{9}$$

这个微分方程是用两个线性无关的解 $K_\mu(\rho)$和 $I_\mu(\rho)$来解出的。函数 $I_\mu(\rho)$被弃去,因为它在

$$u_1(r) = cK_{i\nu}\left(\sqrt{8m_0 Z\alpha r}\right)\ , \tag{10}$$

处指数地增加,其中 c 是在此不感兴趣的归一化常数。在 $Z\alpha > |\kappa|$的情况中,Bessel 函数的指标是纯虚的,它为

$$\nu = 2\sqrt{(Z\alpha)^2 - \kappa^2}\ . \tag{11}$$

从(2)得到波函数的下分量

$$u_7 = \frac{c}{Z\alpha}\left[\frac{1}{2}\sqrt{8m_0 Z\alpha r}\,K'_{i\nu}\left(\sqrt{8m_0 Z\alpha r}\right) + \kappa K_{i\nu}\left(\sqrt{8m_0 Z\alpha r}\right)\right]\ , \tag{12}$$

其中,$K'_{i\nu}$表示 Bessel 函数关于其宗量的导数,并用了(7a)。值得注意,因为[①]

$$K_{i\nu}(z) \to \sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z} \quad \text{for} \quad z \to \infty\ . \tag{13}$$

对大的 r,"临界波函数"随$\sqrt{r}$ 指数衰变。极限 $r \to 0$ 更为复杂。用 Abramowitz 的(9.6.7)和(6.1.31),得到

$$K_{i\nu}(z) \to \sqrt{\frac{\pi}{\nu \sinh \pi\nu}}\sin\left(\nu \ln\frac{2}{z} + \arg\Gamma(1 + i\nu)\right)\ . \tag{14}$$

如我们已在和(7)相关的讨论中那样,这意味着波函数像 $\sin(\sqrt{(Z\alpha)^2-\kappa^2}\ln r+\delta)$那样振荡。

c) 为了得到一个在原点也正规的波函数,解(10),(12)必须在核半径 R 处与内部解 $u^{(i)}$匹配。因为在此区域中位势是常数 $V_0 = -Z\alpha/R$,Dirac 方程可取球面解(《RQM》,第 9 章)。它们是

$$u_1^{(i)} = c'\beta r j_l(\beta r)\ ,$$

---

① M. Abramowitz, I. A. Stegun: *Handbook of Mathematical Functions* (Dover), 9.7 章。

$$u_2^{(r)} = c' \operatorname{sgn}\kappa \frac{\beta}{E - V_0 + m_0} \beta r \, j_l(\beta r) \ , \tag{15}$$

其中 j_l 表示球面 Bessel 函数，$\beta = \sqrt{(E-V_0)^2 - m_0^2}$。Bessel 函数的级为，对 $\kappa<0, l=-\kappa-1, \bar{l}=-\kappa$；对 $\kappa>0, l=\kappa, \bar{l}=\kappa-1$。

在特殊的 $\kappa=-1$（$s_{1/2}$态）情况下，(15)为

$$\begin{aligned} u_1^{(r)} &= c' \sin \beta r, \\ u_2^{(r)} &= -c' \frac{\beta}{E - V_0 + m_0} \left(\frac{\sin \beta r}{\beta r} - \cos \beta r \right) . \end{aligned} \tag{16}$$

内部和外部解的匹配条件(13)就形为

$$-\frac{\sin \beta R}{\dfrac{\sin \beta R}{\beta R} - \cos \beta R} \frac{E - V_0 + m_0}{\beta} = \frac{Z\alpha K_{i\nu}}{\dfrac{1}{2}\sqrt{8 m_0 Z\alpha R}\, K'_{i\nu} - K_{i\nu}} \tag{17}$$

它是在能量 $E=-m_0c^2$ 处计算的。因为 $|V_0| \gg m_0$，左端第二个因子可近似为 1。同理有 $\beta \simeq |V_0| = Z\alpha/R$。于是(17)可写为

$$\frac{\rho K'_{i\nu}(\rho)}{K_{i\nu}(\rho)} = 2(Z\alpha)\cot(Z\alpha) \ . \tag{18}$$

其中，$\rho = \sqrt{8 m_0 Z\alpha R}$。这是 Z 的超越方程。其解是状态 $1s_{1/2}, 2s_{1/2}$等的临界电荷。图 7.8 显示了(18)的图解。为了得到合理的实际值 Z_{cr}，对作为 Z 的函数的核半径做如下的假设：

$$R = (2.5Z)^{1/3} \times 1.2\text{fm} \ .$$

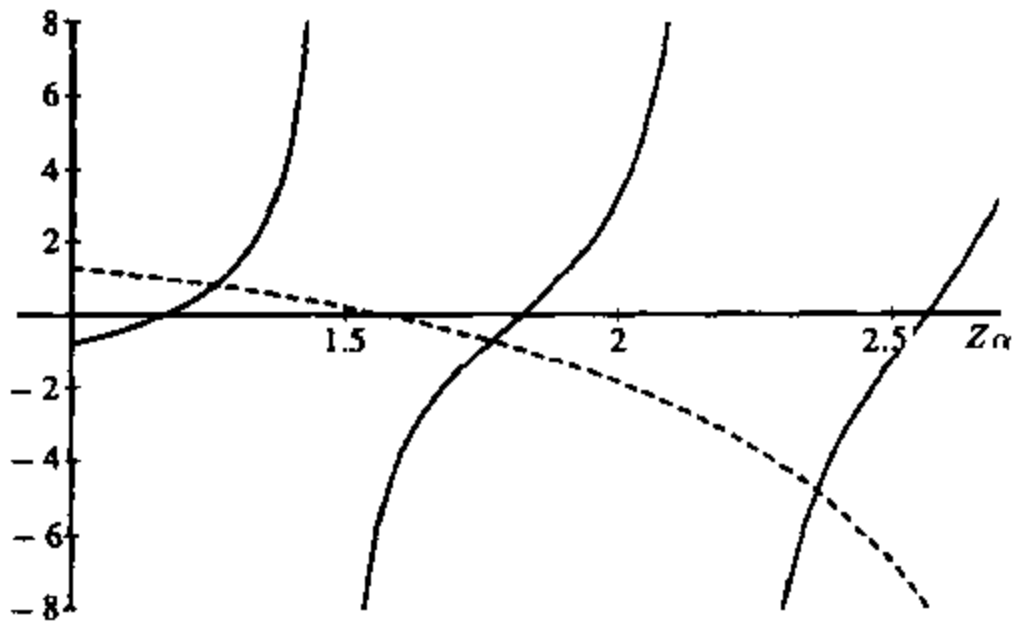


图 7.8　由图像来确定 s 态的临界核电荷。是实(虚)线是(18)的左(右)端。两组曲线交于 $Z_{cr}=172, 242, 324, \cdots$

图 7.9 显示了几个作为核电荷 Z 的函数的束缚态能量的数值计算结果。能级随着 Z 的增加而逐步下降。当 $Z>150$ 时，最低态($1s, \kappa=-1$)的能量成为负值。$1s$ 能级最后在临界电荷 $Z_{cr}^{1s} \simeq 173$ 处达到 $E_{1s}=-m_0c^2$。对 $\kappa=+1$ 的 $2p_{1/2}$态在 $Z_{cr}^{2p_{1/2}} \simeq 185$ 处，也发生同样的情况，而更高的态

在更大的核电荷下达到下部的连续区。

$\kappa=\pm1$ 的能级获得大的结合能是伴随波函数的剧烈的变化而来的。图 7.10 中画出了三个核电荷 $Z=100,135$,和 170 的 $1s$ 态波函数的径向密度 $\gamma^2\psi^\dagger(r)\psi(r)$。这里选取了一个标度表示，它已经考虑了原子半径像 $1/Z$ 那样的"平庸的"缩小。众所周知，非相对论 $1s$ 态的氢波函数形为

$$\psi_{1s}=2\left(\frac{Z}{a_B}\right)^{3/2}e^{-rZ/a_B},$$

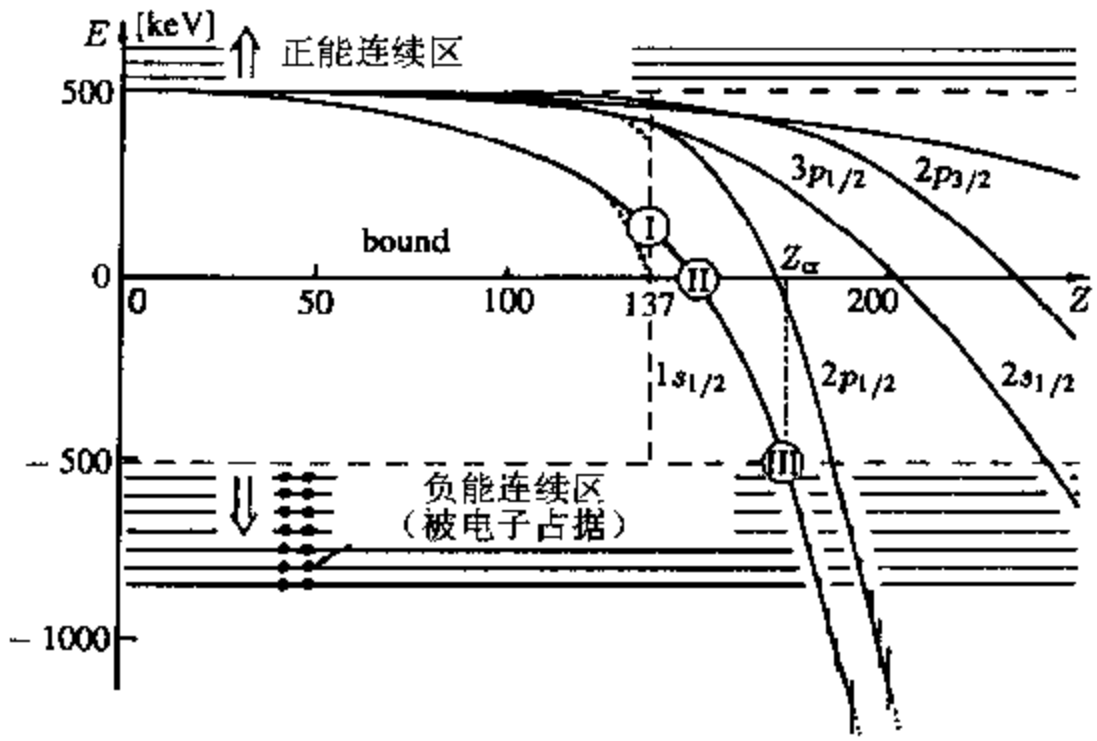


图 7.9　核电荷为 Z 的原子 Dirac 方程的最低束缚态。$\kappa=-1(ns_{1/2})$和 $\kappa=+1(np_{1/2})$态的 Sommerfeld 能量被在 $Z\alpha=1$ 处的垂直正切(点线)截断。考虑到核半径有限，所有的能级在相应的临界电荷 Z_{cr}处到达下面连续区的边缘 $E=-m_0c^2$。束缚态可以作为共振态进入下面的连续区(能宽扩大了一个因子(10))

其中，Bohr 半径 $a_B=\lambda_c/\alpha=52918\text{fm}$。在图 7.10 所用的表示中相应的密度是与 Z 无关的。我们看到在通常的原子中($Z\leqslant100$)，相对论效应仍然是很小的。如果我们进入 $Z\alpha>1$ 的区域，波函数的样子完全改变了，收缩为通常范围 a_B/Z 的一部分。只是因为核半径有限才避免了波函数完全塌缩。在插图 7.9 中可更清楚地看到，作为 Z 的函数，原点电子密度 $\psi'(0)\psi(0)$随 Z 的强烈的增加。非相对论下的对 Z 的依赖性已用标度 Z^{-3}将它分出。与非相对论值比，在大 Z 时，Dirac $1s$ 波函数密度大约增加 1000 倍。在 $2p_{1/2}$态的情况下这种效应更为剧烈，它在非相对论下，在 $r=0$ 处有一个节点，但其密度在大 Z 时，趋向于类似 $1s$ 态的密度。这种增加是受了波函数的下分量 u_2 的影响，通常它是小的。

如果超过了临界核电荷，就出现物理上最有兴趣的效应。如我们在上一节讨论过的那样，束缚态"潜入"到 Dirac 方程的下连续区，并自发发射两个正电子(由于自旋简并性，$m=\pm1/2$)。这在数学上为连续区包含一个共振态所揭示。以前的束缚态不再作为 Dirac 方程分立本征解存在，而与连续区混合起来。此混合态集中于围绕着共振能量 E_r，在宽度为 Γ 的窄区域中。这图示于图 7.11 中。

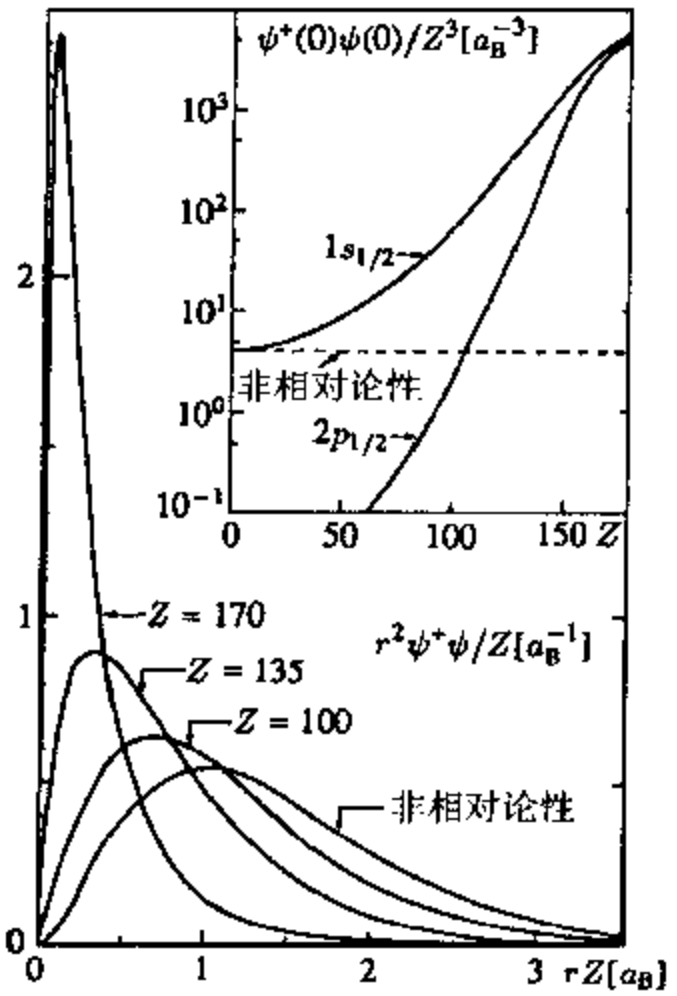


图 7.10　1s 态的径向电子密度 $\gamma^2\psi^\dagger(r)\psi(r)$ 被 Z 除对径向距离乘 Z 的函数关系。在此标度表示下，非相对论密度是与 Z 无关的。相反地，我们看到在范围 $Z\alpha \geqslant 1$ 中，Dirac 波函数强烈地收缩。插图表示用 Z^{-4} 来标度的原点电子密度对 Z 的函数关系

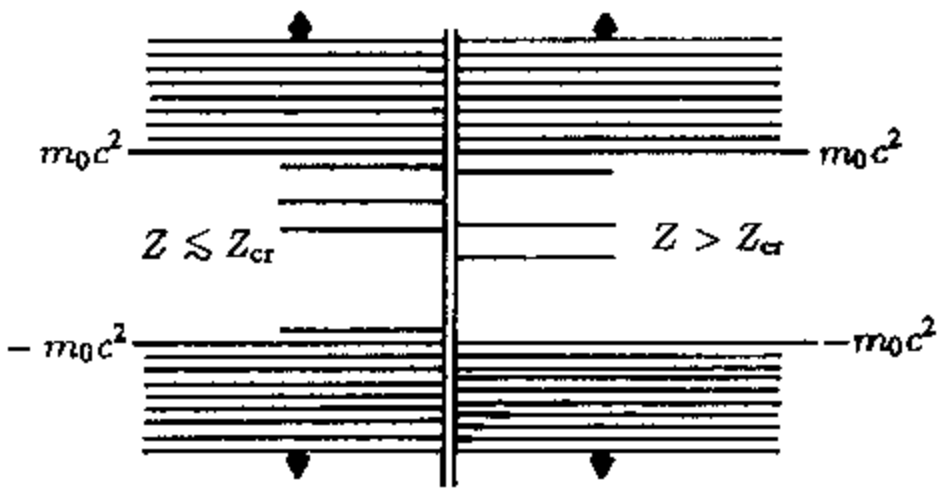


图 7.11　在临界以下的情况 $Z<Z_{cr}$ 中分立的态，在超临界位势下成为分布于确定宽度上的许多相邻的连续态上

此图解释了在临界以下位势(a)中的分立态，在超临界的情况(b)下如何扩散到大量相邻的连续态上。在图 7.11 中，为了更好地说明，将连续态分立化了。我们用一个技巧来达到这一点：我们将系统封闭在一个盒中，并在表面强加一个只对分立能量值才满足的边条件(但它在 $V\to\infty$ 时非常密)。

为了对共振作定量的描写，必须对下连续区的各能量值解出超临界位势的 Dirac 方程(7.8)。类似于束缚态的情况，又可给出在原点正规的内部解 $u_1^{(i)}$，$u_2^{(i)}$。但外部解不是惟一确定的，因为两个线性独立的解在 $r\to\infty$ 处都是有界的，因而都是可取的。于是匹配条件(7.13)对能量不给出限制，即得到一个连续区。现在条件(7.13)确定了解的渐近行为。我们在此不明显地推出连续解的结构，而只引入文献[①]。

我们可以构造一个实际的波函数，它的径向部分显示了渐近行为($r\to\infty$)，对 $E>m_0$ 为

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi p}} \begin{pmatrix} \sqrt{E+m_0} & \cos(pr+\Delta) \\ -\sqrt{E-m_0} & \sin(pr+\Delta) \end{pmatrix},$$

而对 $E<m_0$，为

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi p}} \begin{pmatrix} \sqrt{-E-m_0} & \cos(pr+\Delta) \\ \sqrt{-E+m_0} & \sin(pr+\Delta) \end{pmatrix}, \tag{7.14}$$

这里 $p=\sqrt{E^2-m_0^2}$，$\Delta=\delta_E+\delta_{\log}$，而

$$\delta_{\log} = y\left(\ln\frac{2pr}{|y|}+1\right)-\frac{\pi}{4}, \tag{7.15}$$

其中 $y=ZaE/p$。$\delta_{\log}$ 是随 r 对数增长的相移。它也出现于非相对论量子力学中，是由长程 Coulomb 位势引起的。δ_E 是物理相移，它由内部区域中的位势的形状来确定。波函数(7.14)是“在能量标度上”归一化的，这表示

$$\int \mathrm{d}^3x\ \Psi_E^\dagger(\boldsymbol{x})\Psi_{E'}(\boldsymbol{x}) = \delta(E-E')\ .$$

通常相移 δ_E 是随能量缓慢变化的函数(它在连续区边缘处，$E=\pm m_0$，的值为零)。但是当在情况 $Z>Z_{cr}$ 下计算下连续区的波函数时，我们发现存在一个能区，相移 δ_E 在此区域中突然强烈地变化。δ_E 在窄能区 $E_r-\Gamma\leqslant E\leqslant E_r+\Gamma$ 上升大约 π。这是共振态的特征信号。检查相应波函数的空间依赖性指出，与共振外的情况($|E-E_r|\gg\Gamma$)比较，在小距离处的几率密度急剧地上升。对核电荷数 $Z=184$ 的定量值显示在图 7.12 中。在显示的情况中，$1s$ 共振的宽度为 $\Gamma\approx 0.004 m_0c^2\approx 2\mathrm{keV}$。在内部区域中的波函数 u_1 增加 50，相应于密度增加因子 2500。

在超临界的情况中，随着 Z 进入共振态，我们也可像 $1s$ 态那样对连续区作相分析。在图7.9中我们已遇到过这种结果：状态更深地进入连续区，它的宽度在 $Z=Z_{cr}$ 处，从 $\Gamma=0$ 开始增加得很快。但与 m_0 相比，在物理上可取的 Z 值范围内，Γ 总是保持很小。

因为要得到 Dirac 方程的精确的连续解是相当不方便的，所以为了物理上的理解，得到一个共振的解析模型是有用的。在例 7.2 中我们将给出一个描写，它对波函数 Ψ_E 提供一个易于解释的封闭表示式。

---

① B. Müller, J. Rafelski, W. Greiner: Nuovo Cim. **18**, 551(1973).

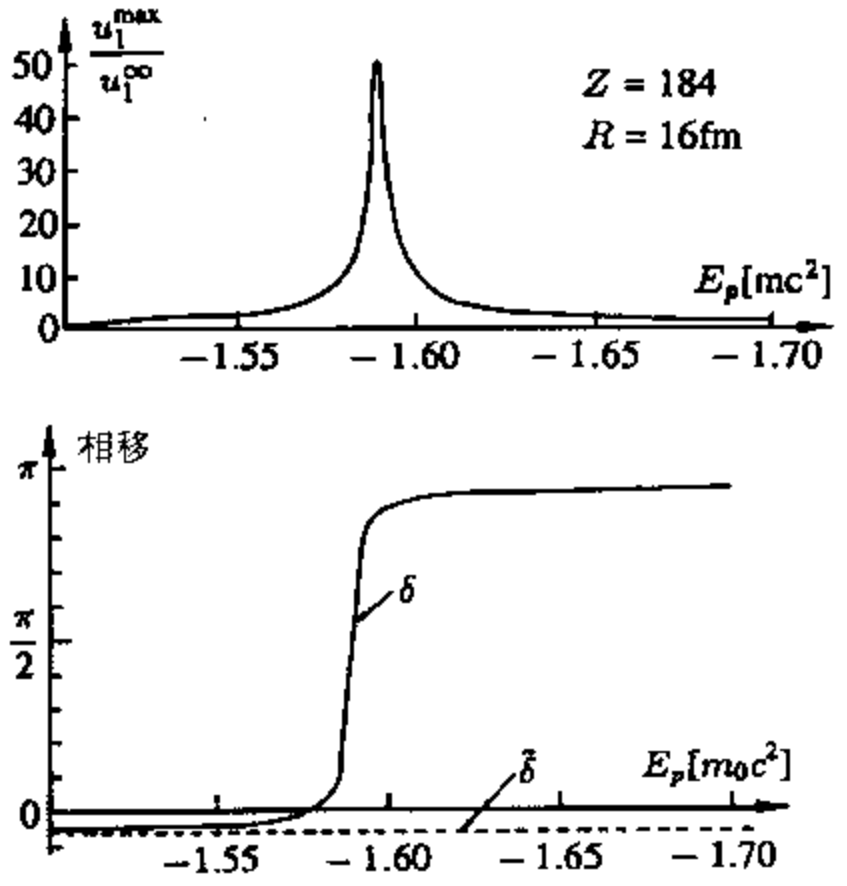


图 7.12　$s_{1/2}$下连续区波函数(u_1 分量)的共振增强和 $Z=184$ 的超临界核显示的相移的上升。δ 是没有共振的散射相位

例　　子

7.2　描写共振态的 Fano 公式

在量子力学的应用中有一个共同的课题，即当加上一个小的微扰时，一个初始稳定的态变成一个不稳定态，于是可以衰变。从数学上看，我们从一个用 Hamilton 量 H_0 表征的系统开始，它(至少)有一个能量为 E_0 的分立的、可归一化的波函数 ϕ_0，即

$$H_0\phi_0 = E_0\phi_0. \tag{1}$$

另外，对某个能区(对在此感兴趣的自发正电子产生的情况，此区域为 $-\infty<E<-m_0c^2$)，假设 H_0 有一个连续谱。

$$H_0\psi_E = E\psi_E \tag{2}$$

我们要求波函数 ψ_E 渐近地是一个定态驻波。下面的正交条件应成立。

$$\langle\phi_0|\phi_0\rangle = 1, \tag{3a}$$

$$\langle\psi_E|\phi_0\rangle = 0, \tag{3b}$$

$$\langle\psi_E|\psi_E\rangle = \delta(E' - E). \tag{3c}$$

于是连续态归一化“到 δ 函数”。现在再加一个微扰位势为 V' 形的相互作用

$$H = H_0 + V' \ . \tag{4}$$

这里，在相互作用的影响下，分立态 ϕ_0 会“丢失”。它会与连续区合并(嵌入进去)，现在连续态由方程

$$H\Psi_E = E\Psi_E \tag{5}$$

描写，其归一化为

$$\langle \Psi_{E'} | \Psi_E \rangle = \delta(E' - E) \ . \tag{6}$$

如果出现了这种情况，就不再可能将系统保留在定域化的定态中。物理上将发生下面的情况：原来的稳定系统通过发射它的一个组分而衰变(因为连续谱总是与向无穷远处运动有关的)。在与时间有关的描写中，实际上可以证明，当加上微扰 V' 后，碰到态 ϕ_0 的几率随着时间指数下降到零(见习题 7.4)。

从量子力学散射理论的角度来看，一个束缚态 ϕ_0 的出现表现为一个具有众所周知特征的共振态：散射截面在共振能量的邻域内上升，散射位相作为 E 的函数，很快地变化，波函数的密度 $|\Psi_E(x)|^2$ 在小距离内强烈地增长。现在我们用非微扰问题(1)，(2)的解来考察解(5)的性质。为此，我们借用 U. Fano 对原子物理中激发态的自动电离所用的方法①。

将新的连续波函数展开为

$$\Psi_E(x) = a(E)\phi_0(x) + \int dE' h_{E'}(E)\psi_{E'}(x) \ , \tag{7}$$

其中，$a(E)$ 和 $k_{E'}(E)$ 是待确定的未知函数。积分包括了整个连续区。注意：在(7)中假设了 Ψ_E 是在被 $\{\phi_0, \phi_{E'}\}$ 张开的 Hilbert 空间中的波函数。如果 H 的谱还包含了另外的(分立或连续的)部分，这些态也可能通过相互作用 V' 而混合。但只要其他的态“离得足够远”，并且耦合很弱，方程(7)仍然是一个有用的假设。

展开系数为

$$a(E) = \langle \phi_0 | \Psi_E \rangle , \tag{8a}$$

$$h_{E'}(E) = \langle \psi_{E'} | \Psi_E \rangle , \tag{8b}$$

但只要 Ψ_E 不知道，这对我们就没有太多的帮助。现在我们用(5)，并投影到 $\langle \phi_0 |$ 和 $\langle \psi_{E'} |$ 上。利用(3)和(7)，就得到方程组

$$(E - E_0 - \Delta E)a(E) = \int dE' \ V_{E'}^* h_{E'}(E) \tag{9a}$$

和

$$(E - E')h_{2\,E'}(E) = V_{E'}a(E) + \int dE'' U_{E'E''}h_{E''}(E) , \tag{9b}$$

其中用到了缩写

---

① U. Fano: Phys. Rev. **124**, 1866(1961)。其中也处理几个束缚态或几个连续态的情况。在 B. Müller, Rafelski, W. Greiner: Z. Physik **257**, 62 和 183(1972)中应用到了 QED 共振态。

$$E_0 + \Delta E = \langle \phi_0 | H | \phi_0 \rangle$$
$$= \langle \phi | H_0 | \phi \rangle + \langle \phi_0 | V' | \phi_0 \rangle , \tag{10a}$$
$$V_E = \langle \psi_E | H | \phi_0 \rangle = \langle \psi_E | V' | \phi_0 \rangle , \tag{10b}$$
$$U_{E E''} = \langle \psi_E | V' | \phi_{E''} \rangle . \tag{10c}$$

E_0 是 H_0 的束缚态的原始的能量。在此态中，$H - H_0 = V'$ 的期待值 ΔE 等于一级微扰论中的能移。矩阵元 V_E 描写了束缚态和连续态耦合的强度，$U_{E E''}$ 描写了连续态间的混合。另外还有归一化条件(6)，即

$$a^*(E)a(E') + \int dE'' h^*_{E''}(E) h_{E''}(E') = \delta(E - E') . \tag{11}$$

合起来，必须解出积分方程(9a,b)和(11)描写的耦合体系。如果在(9b)中的耦合项 $U_{E E''}$ 被忽略，

$$\int dE'' U_{E E''} h_{E''}(E) \simeq 0 . \tag{12}$$

就可找到一个解析解。原则上这可通过将连续态 ψ_E "预对角化"而做到，即作幺正变换

$$\chi_E = \int dE' \, M_{E E'} \psi_{E'} , \tag{13}$$

适当选取系数 $M_{E E'}$，使 $\langle \chi_{E'} | H | \chi_E \rangle$ 成为对角的。但在实际中这是难以做到的。另一方面，用 $U_{E E''}$ 来改变连续态，没有从定性上改变问题的解，所以，在下面我们将用近似(12)。为了解出方程组(9)和(11)，我们将展开系数 $h_{E'}(E)$ 分解成

$$h_{E'}(E) = C_{E'}(E) a(E) = 1 - P_0(T) . \tag{14}$$

这样，就从(9a)和(9b)中消去了 $a(E)$，即成为

$$E - E_0 - \Delta E = \int dE' V^*_{E'} C_{E'}(E) \tag{15a}$$

和

$$(E - E') C_{E'}(E) = V_{E'} . \tag{15b}$$

形式上，方程(15b)可直接解出

$$C_{E'}(E) = \frac{V_{E'}}{E - E'} . \tag{16}$$

这里问题在于如何处理 $E = E'$ 处的极点。在处理散射问题时，通常是在复平面上移动一个小的虚部，并使用因果性要求。但我们跟着 Fano 用另一种方法，它和所选取的边条件(驻波)是配合的。于是我们用

$$C_{E'}(E) = P \frac{V_{E'}}{E - E'} + g(E) V_E \delta(E - E') , \tag{17}$$

代替(16)，其中 P 表示在能量积分中取了 Cauchy 主值。由于 $x\delta(x) = 0$，故对任何函数 $g(E)$，$C_{E'}(E)$(17)是(15b)的解。现在将它插入(15a)就可确定未知函数 $g(E)$

$$E - E_0 - \Delta E = P \int dE' \frac{|V_{E'}|^2}{E - E'} + g(E) |V_E|^2 \tag{18}$$

或

$$g(E)=\frac{1}{|V_E|^2}[E-E_0-\Delta E-F(E)]\,, \tag{19}$$

其中 $F(E)$是缩写

$$F(E)=P\int \mathrm{d}E'\,\frac{|V_{E'}|^2}{E-E'}\,. \tag{20}$$

$a(E)$必须由归一化条件(11)确定。将(17)插入得到

$$\begin{aligned} a^*(E)a(E')\Big[1+\int \mathrm{d}E''\,V^*_{E''}\Big(P\frac{1}{E-E''}+g(E)\delta(E-E'')\Big) \\ \times\Big(P\frac{1}{E'-E''}+g(E')\delta(E'-E'')\Big)V_{E''}\Big]=\delta(E-E')\,, \end{aligned} \tag{21}$$

或

$$\begin{aligned} a^*(E)a(E')\Big(1+\int \mathrm{d}E''\,|V_{E''}|^2P\frac{1}{E-E''}P\frac{1}{E'-E''} \\ +g(E')|V_{E'}|^2P\frac{1}{E-E'}+g(E)|V_E|^2P\frac{1}{E'-E} \\ +g^2(E)|V_E|^2\delta(E-E')\Big)=\delta(E-E')\,, \end{aligned} \tag{22}$$

这里我们已用了下面的 δ 函数的性质：

$$\delta(E-E'')\delta(E'-E'')=\delta(E-E')\delta(E-E'')\,, \tag{23}$$

$$\int \mathrm{d}\,E'f(E')\delta(E-E')=f(E)\,. \tag{24}$$

如果(22)中的两个极点重合的话，即 $E=E'$，两个主值因子的积有点麻烦。在习题 7.3 中我们将证明

$$\begin{aligned} P\frac{1}{E-E''}P\frac{1}{E'-E''} \\ =-P\frac{1}{E-E'}\Big(P\frac{1}{E-E''}-P\frac{1}{E'-E''}\Big)+\pi^2\delta(E-E'')\delta(E'-E'') \end{aligned} \tag{25}$$

对这种表示式是成立的。将它插入(22)，加上定义(20)，就得到

$$\begin{aligned} a^*(E)a(E')\Big[1-P\frac{1}{E-E'}(F(E)-F(E')) \\ +g(E')|V'_E|^2P\frac{1}{E-E'}-g(E)|V_E|^2P\frac{1}{E-E'} \\ +\pi^2|V_E|^2\delta(E-E')+g^2(E)|V_E|^2\delta(E-E')\Big]=\delta(E-E')\,. \end{aligned} \tag{26}$$

现在我们取出主值项

$$\begin{aligned} -P\frac{1}{E-E'}[(F(E)+g(E)|V_E|^2)-(F(E')+g(E')|V_{E'}|^2)] \\ =-P\frac{1}{E-E'}(E-E')=-1\,, \end{aligned}$$

其中，对 $g(E)$ 用了(19)。显然，在(26)中所有没有因子 $\delta(E-E')$ 的项都相消了，保留了自洽的方程

$$a^*(E)a(E')(\pi^2|V_E|^2+g^2(E)|V_E|^2)\delta(E-E')=\delta(E-E'), \tag{27}$$

或

$$\begin{aligned}|a(E)|^2&=\frac{1}{|V_E|^2(g^2(E)+\pi)^2}=\frac{|V_E|^2}{(E-E_0-\Delta E-F(E))^2+\pi^2|V_E|^4}\\&=\frac{\Gamma_E/2\pi}{(E-E_r)^2+\Gamma_E^2/4},\end{aligned} \tag{28}$$

其中的缩写为

$$\Gamma_E=2\pi|V_E|^2, \tag{29a}$$

$$E_r=E_0+\Delta E+F(E). \tag{29b}$$

展开系数 $a(E)$ 可写成

$$a(E)=\frac{1}{V_E\sqrt{g^2(E)+\pi^2}}=\frac{V_E^*}{\sqrt{(E-E_r)^2+\Gamma_E^2/4}}. \tag{30a}$$

如果矩阵元 V_E 是实的，我们得到

$$a(E)=\sqrt{\frac{\Gamma_E/2\pi}{(E-E_r)^2+\Gamma_E^2/4}}. \tag{30b}$$

由于有(14)和(15)，所以下式成立：

$$h_{E'}(E)=\frac{V_E^*}{\sqrt{(E-E_r)^2+\Gamma_E^2/4}}\left(P\frac{V_{E'}}{E-E'}+\frac{E-E_r}{V_E^*}\delta(E-E')\right) \tag{31}$$

这就完成了方程组(9a,b)和(11)的求解。现在我们来考虑(7)中新构造的连续波函数 $\Psi_E(x)$ 的结构。Ψ_E 是在 $E=E'$ 处权重最大的非微扰连续波函数 $\Psi_{E'}$ 和束缚态 ϕ_0 的叠加。后者是由定域在有限距离，如 Bohr 半径内的波函数来描述的，并且在渐近的区域中很快地衰变。它对 $\Psi_E(x)$ 的定域贡献的强度

$$|\langle\phi_0|\Psi_E\rangle|^2=|a(E)|^2=\frac{\Gamma_E/2\pi}{(E-E_r)^2+\Gamma_E^2/4}, \tag{32}$$

在共振能量 $E=E_r$ 处达到最大(严格地说，这是一个不言自明的方程，因为 E_r 本身通过主值积分 $F(E)$(弱地)依赖于 E！$F(E)$描写了另外的由于和连续态耦合而引起的能级移动)。如果我们使能量离开 E_r，混合(32)就按由共振宽度 Γ_E 确定的标度下降。方程(32)具有共振态的 Breit-Wigner 曲线的形状。图 7.13 显示了在吸引势阱中，共振附近的波函数 Ψ_E 的增强。

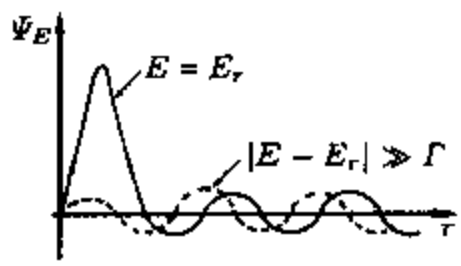


图 7.13　在共振附近和远离共振的波函数 $\Psi_{E(r)}$

$r\to\infty$时，波函数 Ψ_E 的渐近行为可用(7)，(30)和(31)来考察。为简单起见，我们限制于有一个快速下降中心位势的非相对论情况(Schrödinger 方程)。这时非微

扰的连续波 ψ_E 的行为为

$$\psi_E(r) \to N_E \sin(pr + \delta_E) , \tag{33}$$

其中,动量 $p=\sqrt{2mE}$,N_E 为这里不感兴趣的归一化常数。等效散射位势的信息包含在相移 δ_E 中。新的连续波函数 Ψ_E 对 r 的依赖关系如下

$$\begin{aligned}\Psi_E(r) &= a(E)\phi_0 + \int dE' h_E'(E)\psi_{E'}(r) \\ &\to a(E)\int dE'\left(P\frac{V_{E'}}{E-E'} + \frac{E-E_r}{V_E^*}\delta(E-E')\right)N_{E'}\sin(p'r+\delta_{E'}) ,\end{aligned} \tag{34}$$

其中我们用到了 $\phi_0(r)$渐近地趋于零。用了等式

$$P\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+i\varepsilon} + \frac{1}{x-i\varepsilon}\right) \tag{35}$$

(34)中的主值积分为

$$\begin{aligned}&\int dE' P\frac{V_{E'}}{E-E'}N_{E'}\sin(p'r+\delta_{E'}) \\ &= -\frac{i}{4}\int dE' V_{E'}N_{E'}\left(\frac{1}{E'-E-i\varepsilon} + \frac{1}{E'-E+i\varepsilon}\right) \\ &\quad\times (e^{i(p'r+\delta_{E'})} - e^{-i(p'r+\delta_{E'})}) .\end{aligned} \tag{36}$$

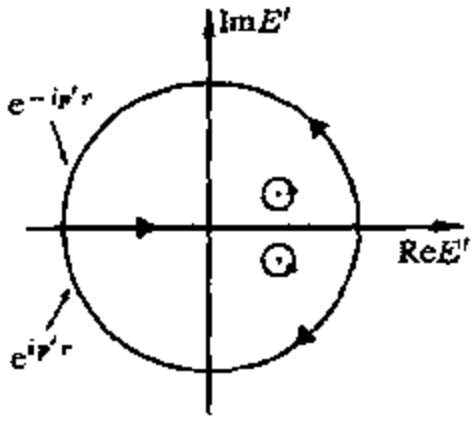


图 7.14 (36)中的积分回路

积分在 $E'=E\pm i\varepsilon$ 处有一个简单极点。如果积分限延续到无穷,则用留数定理很容易求出它,见图 7.14。(这是一种近似,因为在实际情况中,连续谱在一边是有界的,如在非相对论情况下 $0<E'<\infty$,或在 Dirac 方程情况下 $mc^2<|E'|<\infty$。)于是积分回路可被无穷远处的半圆所封闭。如果对 $p'=\sqrt{2mE'}$,在复平面上选取平方根的主值使

$$\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}\{p'\}) = \mathrm{sgn}(\mathrm{Im}\{E'\}) , \tag{37}$$

则对 $e^{ip'r}(e^{-ip'r})$ 的情况,回路必须在上(下)半平面上封闭。假定 $V_{E'}N_{E'}$是全纯的,则(36)的四个积分中的两个为零;其余两个积分为

$$\pm\frac{i}{4}\int_{-\infty}^{\infty} dE'\, V_{E'}N_{E'}\frac{e^{i\pm(p'r+\delta_{E'})}}{E'-E\mp i\varepsilon} = -\frac{\pi}{2}V_E N_E e^{\pm i(pr+\delta_E)} . \tag{38}$$

这导致

$$\int dE' P\frac{V_{E'}}{E-E'}N_{E'}\sin(p'r+\delta_{E'}) = -\pi V_E N_E\cos(pr+\delta_E) . \tag{39}$$

所以,结合(34)和(30a)得到

$$\begin{aligned}\Psi_E(r) &\to a(E)[-\pi V_E N_E\cos(pr+\delta_E) + ((E-E_r)/V_E^*)N_E\sin(pr+\delta_E)] \\ &= \frac{N_E}{\sqrt{(E-E_r)^2+\Gamma_E^2/4}}[-(\Gamma_E/2)\cos(pr+\delta_E) + (E-E_r)\sin(pr+\delta_E)] \\ &= N_E\sin(pr+\delta_E+\Delta_E) ,\end{aligned} \tag{40}$$

其中的*相移* 为

$$\Delta_E = -\arctan\frac{\Gamma_E/2}{E-E_r}. \tag{41}$$

于是变形的连续波函数 $\Psi_E(x)$精确地显示与 $\phi_E(r)$有同样的渐近行为，只是移动一个角度 Δ_E。如在图 7.15 中显示的那样，对 $|E-E_r|\gg\Gamma_E\sim\Gamma_{Er}$，相移接近常数，因而在(40)中没有效应。但在 E_r 的邻域内它"跳"得很快，跳了角度 π。这个行为在共振散射的量子力学理论中是众所周知的。

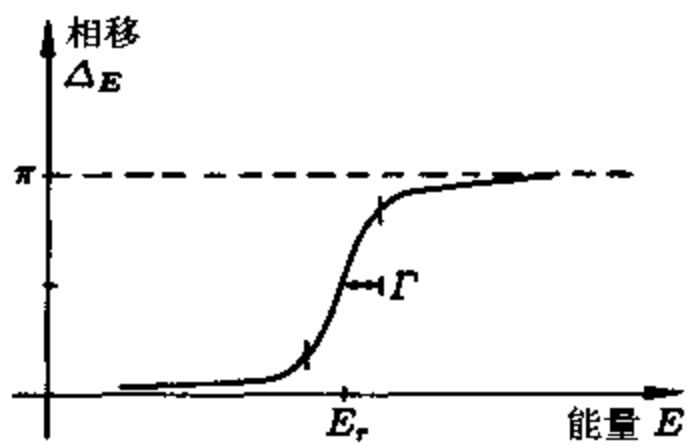


图 7.15　在共振附近的附加的相移

最后我们用相移来表示展开系数 $a(E)$，$h_E(E)$。方程(30b)给出

$$a(E)=\frac{1}{\pi V_E}\frac{\Gamma_E/2}{\sqrt{(E-E_r)^2+\Gamma_E^2/4}} \tag{42}$$

$$=\frac{1}{\pi V_E}\sqrt{\frac{\tan^2\Delta_E}{1+\tan^2\Delta_E}}=\frac{\sin\Delta_E}{\pi V_E}$$

而(31)成为

$$h_{E'}(E)=\frac{\sin\Delta_E}{\pi V_E}P\frac{V_{E'}}{E-E'}+\sin\Delta_E\frac{E-E_r}{\pi|V_E|^2}\delta(E-E')$$

$$=\frac{\sin\Delta_E}{\pi V_E}P\frac{V_{E'}}{E-E'}-\cos\Delta_E\delta(E-E'). \tag{43}$$

习　题

7.3　两个主值积分的积

问题：证明等式

$$P\frac{1}{E-E''}P\frac{1}{E'-E''}$$

$$=P\frac{1}{E-E'}\left(P\frac{1}{E'-E''}-P\frac{1}{E-E''}\right)+\pi^2\delta(E-E'')\delta(E'-E''), \tag{1}$$

它显示了两个作为 $E'-E$ 的函数的主值奇异性的积的行为。

解：用如下的等式可以很容易地给出正式的证明，

$$\frac{1}{x \pm \mathrm{i}\varepsilon} = P\frac{1}{x} \mp \mathrm{i}\pi\delta(x)\ , \tag{2}$$

此等式在极限 $\varepsilon \to +0$ 时成立。这时(1)的左端可写为

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{E-E''+\mathrm{i}\varepsilon}+\mathrm{i}\pi\delta(E-E'')\right)\left(\frac{1}{E'-E''-\mathrm{i}\varepsilon'}-\mathrm{i}\pi\delta(E'-E'')\right)\\&=\frac{1}{(E-E''+\mathrm{i}\varepsilon)(E'-E''-\mathrm{i}\varepsilon')}+\mathrm{i}\pi\frac{\delta(E-E'')}{(E'-E''-\mathrm{i}\varepsilon')}-\mathrm{i}\pi\frac{\delta(E'-E'')}{(E\quad E''+\mathrm{i}\varepsilon)}\\&\quad+\pi^2\delta(E-E'')\delta(E'-E'')\ .\end{aligned} \tag{3}$$

对(1)的右端第一项，下面的关系成立

$$\begin{aligned}&P\frac{1}{E-E'}\left(P\frac{1}{E'-E''}-P\frac{1}{E-E''}\right)\\&=\left(\frac{1}{E-E'+\mathrm{i}\varepsilon}+\mathrm{i}\pi\delta(E-E')\right)\\&\quad\times\left(\frac{1}{E'-E''-\mathrm{i}\varepsilon'}-\mathrm{i}\pi\delta(E'-E'')-\frac{1}{E-E''+\mathrm{i}\varepsilon''}-\mathrm{i}\pi\delta(E-E'')\right)\end{aligned} \tag{4}$$

因为对 $E=E'$，第二个因子为零，故第一个因子中的 δ 函数可弃去，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{E-E'+\mathrm{i}\varepsilon}\left(\frac{1}{E'-E''-\mathrm{i}\varepsilon'}-\frac{1}{E-E''+\mathrm{i}\varepsilon''}\right)\\&\quad+\mathrm{i}\pi\frac{\delta(E-E'')}{E'-E''-\mathrm{i}\varepsilon}-\mathrm{i}\pi\frac{\delta(E'-E'')}{E-E''+\mathrm{i}\varepsilon}\\&=\frac{(E-E''+\mathrm{i}\varepsilon'')-(E'-E''-\mathrm{i}\varepsilon')}{(E-E'+\mathrm{i}\varepsilon)(E'-E''-\mathrm{i}\varepsilon')(E-E''+\mathrm{i}\varepsilon'')}\\&\quad+\mathrm{i}\pi\frac{\delta(E-E'')}{E'-E''-\mathrm{i}\varepsilon}-\mathrm{i}\pi\frac{\delta(E'-E'')}{E-E''+\mathrm{i}\varepsilon}\ .\end{aligned} \tag{5}$$

记住 $\varepsilon,\varepsilon',\varepsilon''$ 是无穷小量，其值无关紧要，所以分母中的第一个因子可消去。比较(5)和(3)，就证明了猜测(1)。

注：用主值分布的积分表示

$$P\frac{1}{x}=\frac{\mathrm{i}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}u\ \mathrm{sgn}\ u\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xu}. \tag{6}$$

可以给出一个不太正式的证明。通过取极限，可证明(6)的正确性：

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathrm{i}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}u\ \mathrm{sgn}\ u\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xu-\varepsilon|u}\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathrm{i}}{2}\left(-\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}u\ u\ \mathrm{e}^{-(\mathrm{i}x-\varepsilon)u}+\int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}u\ u\ \mathrm{e}^{-(\mathrm{i}x+\varepsilon)u}\right)\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{i}x-\varepsilon}+\frac{1}{\mathrm{i}x+\varepsilon}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}=P\frac{1}{x}\ .\end{aligned} \tag{7}$$

用此表示作的进一步的计算，可在例 7.2 一开始引用的 U. Fano 的工作中找到。

习　题

7.4　真空的时间相关衰变

问题：为了描写超临界系统的随时间的衰变，我们来做下面的假想的实验。位势强度在 $t=0$ 的时刻突然增加，使得原来稍微在临界以下束缚的态成为下连续区中的共振态。在 $t=T$ 时刻，由于位势强度减小，使得临界以下的系统得到恢复。利用 Fano 公式(习题 7.2)计算在束缚态中末态空穴的几率，以及依赖于"潜入时间"的发射正电子的谱。

解：我们用例 7.2 的记号。现在 Hamilton 量是时间的函数，即

$$H(t)=\begin{cases}H_0, & \text{对}\quad t<0\\ H=H_0+V', & \text{对}\quad 0\leqslant t\leqslant T\\ H_0, & \text{对}\quad t>T\end{cases}. \tag{1}$$

必须这样来构造与时间有关的波函数 $\Psi(t)$，使它在 $t<0$ 时描写束缚空穴态 ϕ_0。可在三个区域中分段做假设：

$$\Psi(t)=\begin{cases}\phi_0 e^{iE_0 t} & \text{对 } t<0\\ \int dE\tilde{c}(E)\Psi_E e^{-iEt} & \text{对}\quad 0\leqslant t\leqslant T.\\ c_0\phi_0 e^{-iE_0(t-T)}+\int dE\ c(E)\psi_E e^{-iE(t-T)} & \text{对 } t>T\end{cases} \tag{2}$$

展开系数 $\tilde{c}(E)$或 c_0 和 $c(E)$是与时间无关的，因为按照假设，波函数 Ψ_E 或 ψ_E 和 ϕ_0 是 Hamilton 量 H 或 H_0 的本征态。所以它们以 $\exp(-iEt)$的方式随时间自由发展。$\Psi(t)$要求在 $t=0$ 和 $t=T$ 时连续。这表示

$$\phi_0=\int dE\tilde{c}(E)\Psi_E \tag{3}$$

和

$$\int dE\ \tilde{c}(E)\Psi_E\, e^{-iET}=c_0\phi_0+\int dE\ c(E)\psi_E. \tag{4}$$

通过在$\langle\Psi_E|$或$\langle\phi_0|$和$\langle\psi_E|$上作投影，用例 7.2 的(3a,b,c)和(8a,b)，就可得到确定系数 $\tilde{c}(E)$和 $c(E)$的方程：

$$\tilde{c}(E)=a^*(E) \tag{5}$$

和

$$c_0=\int dE\tilde{c}(E)a(E)e^{-iET}, \tag{6a}$$

$$c_E=\int dE'\tilde{c}(E')h_E(E')e^{-iE'T}. \tag{6b}$$

这里必须计算两个对 Fano 展开系数 $|a(E)|^2$ 或 $a^*(E)h_E(E')$的 Fourier 积分。积分区域从 $E=-\infty$到 $E=-m_0c^2$。为了可以进行解析计算，我们作一个近似①，用 $E=+\infty$代替上限。假定矩阵元 $V_E=\langle\Psi_E|V'|\phi_0\rangle$是能量的解析函数，积分就可用留数积分算出。

用习题 7.2,(32)，分立的展开系数得到

$$c_0=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}E\,\frac{\Gamma_E/2\pi}{(E-E_r)^2+\Gamma_E^2/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ET}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_rT}\mathrm{e}^{-\Gamma_0T/2}. \tag{7}$$

这里积分路径在下半平面中封闭。有关的量是 c_0 的绝对值平方。

$$P_0(T)=|c_0|^2=\mathrm{e}^{-\Gamma_0T}. \tag{8}$$

于是经过时间 T 后，在态 ϕ_0 中找到空穴的几率按照衰变宽度 $\Gamma_0=\Gamma_{E_r}$指数下降。为了看看相应的正电子几率如何随时间变化，必须用习题 7.2,(30a)和(31)来解出积分

$$c(E)\simeq\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}E'\,\frac{|V_{E'}|^2}{(E'-E_r)^2+\Gamma_{E'}^2/4}\left(P\frac{V_E}{E'-E}+\frac{E-E_r}{V_E^*}\delta(E-E')\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E'T} \tag{9}$$

我们重新写出主值项：

$$P\frac{V_E}{E'-E}=\frac{V_E}{E'-E-\mathrm{i}\epsilon}-\mathrm{i}\pi V_E\delta(E-E'), \tag{10}$$

因为上半平面的极点没有贡献，所以它是有用的。于是(9)成为

$$c(E)\simeq\int^{+\infty}\mathrm{d}E'\,\frac{|V_{E'}|^2}{(E'-E_r)^2+\Gamma_{E'}^2/4}\frac{V_E}{E'-E-\mathrm{i}\epsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E'T}$$

$$+\frac{V_E}{(E-E_r)^2+\Gamma_E^2/4}(E-E_r-\mathrm{i}\pi|V_E|^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ET}. \tag{11}$$

只有在 $E'=E_r-\mathrm{i}\Gamma_0/2$ 处的极点对留数积分有贡献。因为 $|V_E|^2=\Gamma_E/2\pi$，(11)中的第二项可简化。于是我们得到

$$c(E)\simeq\frac{V_E}{E-E_r+\mathrm{i}\Gamma_E/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ET}-\frac{V_{E_r}}{E-E_r+\mathrm{i}\Gamma_0/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_rT}\mathrm{e}^{-\Gamma_0T/2}. \tag{12}$$

产生的正电子的能谱由展开系数 $c(E)$的绝对值的平方给出。假定 Γ_E 只是很弱地依赖于 E，因而可用 Γ_0 来代替，我们就得到

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}E}=|c(E)|^2=\frac{\Gamma_0/2\pi}{(E-E_r)^2+\Gamma_0^2/4}|1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E-E_r)T}\mathrm{e}^{-\Gamma_0T/2}|^2. \tag{13}$$

很易检验，与各种近似无关，波函数 $\Psi(t)$的模是守恒的，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}E\,\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}E}=1-\mathrm{e}^{-\Gamma_0T}=1-P_0(T). \tag{14}$$

可讨论两种极限情况，见图 7.16。

---

① 有限的积分间隔导致非指数衰变定律。与此问题有关的内容见 L. Fonda 等：Rep. Progr. Phys. **41**, 587 (1978)。

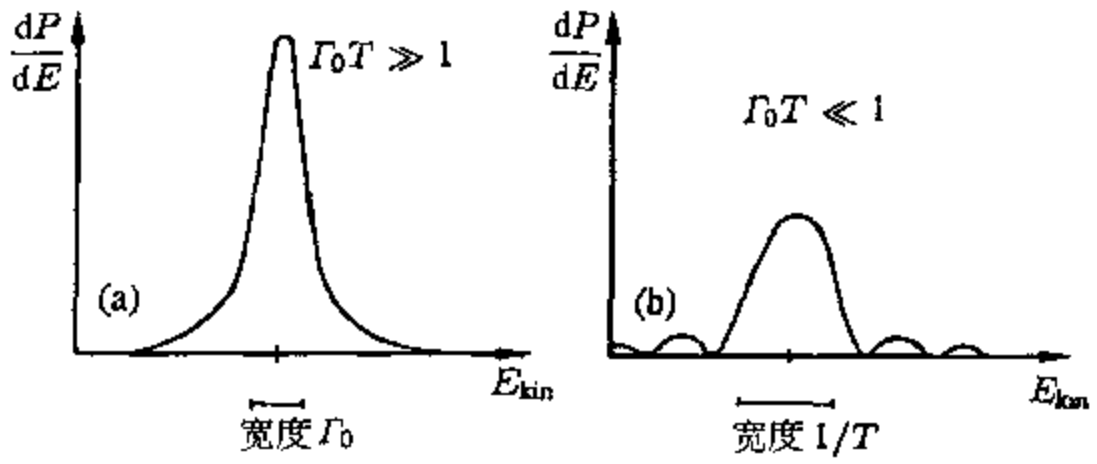


图 7.16　在大的(a)和小的(b)超临界时间 T 的极限下发射正电子的谱

a) $\Gamma_0 T \gg 1$：如果"潜入时间"比自然衰变时间 $1/\Gamma_0$ 长，得到线宽为 Γ_0 的 Breit-Wigner 谱

$$\frac{dP}{dE} = \frac{\Gamma_0/2\pi}{(E-E_r)^2 + \Gamma_0^2/4}. \tag{15}$$

b) $\Gamma_0 T \ll 1$：如果位势只在短的时间间隔 T 内超临界，则

$$\frac{dP}{dE} = \frac{\Gamma_0}{2\pi}\frac{|1-e^{i(E-E_r)T}|^2}{(E-E_r)^2} = \frac{\Gamma_0 T^2}{2\pi}\left[\frac{\sin(E-E_r)T/2}{(E-E_r)T/2}\right]^2. \tag{16}$$

这是最大值在 $E=E_r$ 处的振荡函数，其宽度随 T 的倒数下降。峰的高度二次方地增加，其容量随 T 线性变化，直到在 $T>1/\Gamma_0$ 处达到饱和。

在例 7.2 中给出的方法可以直接用于超临界原子的情况。临界以下的 Hamilton 量($Z<Z_{cr}$)的本征态可以用作展开超临界波函数的基

$$\Psi_E = a(E)\phi_0 + \int dE' h_{E'}(E')\psi_{E'}. \tag{7.16}$$

于是微扰位势 V' 形为

$$V' = V(Z) - V(Z_{cr}) \approx (Z - Z_{cr})U(r), \tag{7.17}$$

其中 $U(r)$ 与相应于(7.3)的截断 Coulomb 位势的形状有关。由于例 7.2 中的(29b)，(10a)，束缚态以线性依赖于电荷超量 $Z'=Z-Z_{cr}$ 的方式"潜"入连续区。数值计算得到的值大约为 $E_{1s}\approx -m_0c^2 - Z'\times 30\text{keV}$。按照(29a)，(10b)宽度 Γ 大约随 Z' 的二次方增长。但在小的潜入能量下(接近阈)，由于(10b)中的波函数 ψ_E 的 Coulomb 排斥，它被很强地抑制了。

在习题 7.4 中，借助于 Fano 公式，我们证明了如果位势是超临界的，则 1s 态的空穴通过发射正电子发生衰变。衰变定律是指数形的；(插入 $\hbar$)

$$P_{1s}(t) = P_{1s}(0)e^{-\Gamma t/\hbar}. \tag{7.18}$$

空穴的寿命 τ 由宽度的倒数确定

$$\tau = \hbar/\Gamma. \tag{7.19}$$

典型的衰变时间为 $\tau \approx 10^{-19}$s 的量级。发射正电子后(或如果 1s 从开始就被占据)，就达到了稳定态。现在，超临界原子的 K 壳层被两个电子填充，所以新真空态有两个负电荷。稳定超临界

原子的 K 壳层的共振性质只在下列的情况中才引起注意：在这样的原子上的正电子散射中，由于正电子可穿入势阱中，并在那里停留一段时间，所以在能量 $E_{e+}^{\mathrm{kin}}=|E_{1s}|-m_0c^2$ 处，散射截面应出现强烈的增长。

我们仍然必须证明，事实上超临界连续态 Ψ_E 的确包含 K 壳层的电荷分布。为此我们来计算假定所有的下连续区被电荷为 e 的电子所占据时的总电荷密度 $\rho(r,Z)$。当然，这在数学上是没有定义的，是极其发散的量。但如果我们从它减去在临界以下的连续态的电荷密度，就可得到一个有意义的表示式：

$$\Delta\rho(r)=\rho(r,Z)-\rho(r,Z_{\mathrm{cr}})=2e\left(\int \mathrm{d}E\ \Psi_E^{\dagger}(r)\Psi_E(r)-\int \mathrm{d}E\phi_E^{\dagger}(r)\phi(r)\right)\ , \tag{7.20}$$

其中积分从 $-\infty$ 到 $-m_0c^2$。用波函数(7.16)，我们得到

$$\begin{aligned}\Delta\rho(r)=2e\Big[&\left(\int \mathrm{d}E\,|a(E)|^2\right)\phi_0^{\dagger}\phi_0+\int \mathrm{d}E'\left(\int \mathrm{d}E\ a^*(E)h_{E'}(E)\right)\phi_0^{\dagger}\psi_{E'}\\&+\int \mathrm{d}E'\left(\int \mathrm{d}E\ a(E)h_E^*(E)\right)\psi_{E'}^{\dagger}\phi_0\\&+\int \mathrm{d}E'\int \mathrm{d}E''\left(\int \mathrm{d}E\ h_{E''}^*(E)h_{E'}(E)\right)\psi_{E''}^{\dagger}\psi_{E'}-\int \mathrm{d}E\ \psi_E^{\dagger}\psi_E\Big]\ .\end{aligned} \tag{7.21}$$

因子 2 是考虑了自旋简并度。展开系数(在括号中)的积分可以近似地用留数积分来计算。如在习题 7.4 中计算的那样，(那里令 $T=0$!)下面的关系成立：

$$\int \mathrm{d}\ E|a(E)|^2=1,\ \int \mathrm{d}E\ a^*(E)h_{E'}(E)=0.$$

类似地可以证明

$$\int \mathrm{d}E\ h_{E''}^*(E)h_{E'}(E)=\delta(E'-E'')\ .$$

用这些关系式，得到增加的电荷密度为

$$\begin{aligned}\Delta\rho(r)&=2e\left(|\phi_0(r)|^2+\int \mathrm{d}E|\psi_E(r)|^2-\int \mathrm{d}E|\phi_E(r)|^2\right)\\&=2e|\phi_0(r)|^2.\end{aligned} \tag{7.22}$$

超临界真空的“超出电荷”正好相应于两倍被占据的 $1s$ 态！

此结果有意义更深远的解释。占据 Dirac 方程“空态”的虚粒子引起了真空极化效应。用量子场论的工具可以论证相应的电荷分布为

$$\rho_{\mathrm{VP}}(r)=\frac{e}{2}\left(\sum_{n<F}|\phi_n(r)|^2-\sum_{p>F}|\phi_p(r)|^2\right)\ . \tag{7.23}$$

这里我们对谱中所有的态求和。“Fermi 面”F 表示被占据的和空的能级之间的边界。第一个求和包括了所有的能量本征值为 $E<-m_0c^2$ 的“Dirac 海”态。它们产生了电荷 $e=-|e|$(“被电子占据”)。第二个求和包括了所有的上连续区和从其中演化出来的束缚态的能级。这些能级被分配电荷 $-e=|e|$(“被正电子占据”)。方程(7.23)取了两个图像的平均值，这样就考虑了电荷共轭所要求的电子正电子等价性。在自由场的情况中，这两个和相消。对弱位势的情况，剩下了位移电

荷分布 $\rho_{VP}(r)$，但对它的积分仍为零。因为波函数 ϕ_p 被 Coulomb 场拉近核，而 ϕ_n 则被推开，故(7.23)解释了在 5.3 节中遇到的真空极化电荷云中显然荒谬的符号，可见图 5.15。

对 $Z>Z_{cr}$，情况完全不同。1s 态从(7.23)的第一个和移到第二个和中。因为有(7.22)，这时的 ρ_{VP}等于

$$\rho_{VP}(r) = 2e|\phi_0(r)|^2, \tag{7.24}$$

这表示出现了实际的真空极化。这是另一种描述带电真空的方法。

7.2　在重离子碰撞中的强场

如我们在前节中所见，只当核电荷数超过 $Z_{cr}\approx 173$ 时，在原子中才会出现中性真空衰变。因为在自然界中看到的稳定原子核，以及合成的超重元素电荷数都很小，强场量子电动力学好像只能是一个学术问题。但下面的考虑打开了在此领域中进行实验的可能性。为了考察强场的效应，不一定需要将此场保持无限长的时间。只需要在一段时间内将超临界电荷源集中到足够小的空间内，使电子-正电子场适合这种情况。

一种可能的产生强场的实验方法是重离子碰撞。将一束重离子加速到每个核子有几个 MeV 的能量，然后打到电荷数也很高的元素上。射击离子的高动能使它能克服 Coulomb 排斥，面使两个核靠近。在这里感兴趣的超临界系统中，为使核接触而必须克服 Coulomb 势垒的能量大约为每个核子 6MeV，相应的投射速度大约为 $v_{ion}=0.1c$。与此相比，在内壳层的束缚电子以相对论的速度运动，$v_{el}\approx c$。我们从比值

$$v_{el}/v_{ion} \gg 1 \tag{7.25}$$

可得到这样的结论，即在内壳层的电子在任何时候都可使它们适合两个电荷数为 Z_1, Z_2，作用距离为 $R(t)$的核的 Coulomb 场。如果 R 与时间无关，我们就必须处理定态分子。但由于在碰撞中，相应的电子轨道的形成只是暂时的和不完善的，故此系统称为准分子。

为了理解这个术语，首先考虑“绝热近似”是有用的。对任意慢的核运动 R((7.25)的极端情况)，电子波函数 ϕ_n 由稳定的双中心 Dirac 方程的解来描写

$$H_{TCD}(\boldsymbol{R})\phi_n = (\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta m_0 + V_{TC}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{R}))\phi_n = E_n(\boldsymbol{R})\phi_n. \tag{7.26}$$

这里 V_{TC}是两个核的合并的 Coulomb 位势。如果我们用点近似，于是

$$V_{TC}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{R}) = -\frac{Z_1\alpha}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}_1|} - \frac{Z_2\alpha}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}_2|}, \tag{7.27}$$

其中 $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2$ 为两个核相对于原点的距离矢量，$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_1$。位势(7.27)不是球对称的。于是角动量算符 $\hat{J}$ 与 H_{TCD}不对易，解不能用角动量来分类。仅有的有效量子数是角动量在核内轴 $\boldsymbol{R}$ 上的投影(因为(7.27)有柱对称性)和在特殊情况 $Z_1=Z_2$ 下的宇称。和球对称的情况(7.6)不同，偏微分方程(7.26)不能分成“径向部分”和“角度部分”，即分成三个一维的常微分方程。于是双中心 Dirac 方程只能花很大的努力，作数值求解。

我们不想在此更详细地处理此问题，而只引证实质性的结果。它包含在修正图中，该图将本征能量描写成核距离 R 的函数。此曲线在极限情况 $R\to 0$（单一原子）和 $R\to\infty$（两个分开的原子）之间连续地变化。作为一个例子，图7.17显示了最重的，实验上可用的系统的修正图，即总电荷 $Z=Z_1+Z_2=92+96=188$ 的铀＋铜系统。

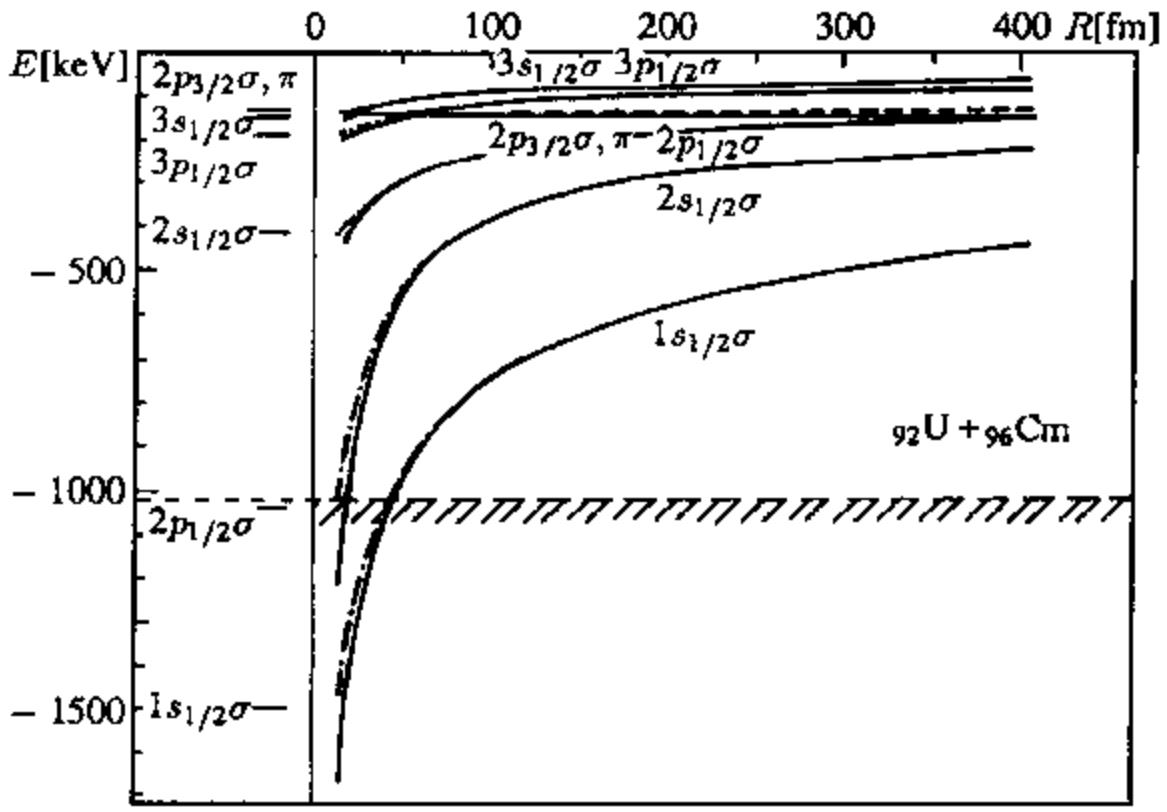


图 7.17 对准分子的最深束缚态的结合能 $U+Cm$ 作为核间距离 R 的函数画出的图。两个核的有限半径用点-短划线给出

如所期待的那样（我们已知单体系的极限情况），当核彼此靠近时，有些能级急速地下降。对最低态 $1s\sigma$（希腊字母 $\sigma,\pi,\delta,\cdots$ 在分子命名法中表示磁量子数 $|m|=1/2,3/2,5/2,\cdots$），有一个临界距离 R_{cr}，在此距离上结合能超过 $2m_0c^2$。如果两个核再接近一步，真空就不稳定了，就可能自发发射两个正电子（$m=\pm 1/2$）。在所考虑的情况（$U+Cm$）中，临界距离为 $R_{cr}=43\text{fm}$。于是准分子可以超临界的区域是比较小的，这将成为很严重的问题。沿着轨道的运动 $R(t)$ 被核的相互 Coulomb 斥力剧烈地加速。所以碰撞的核可以接近到在短时间间隔 Δt 内足以穿过临界距离。因为函数 $R(t)$ 是已知的（这是在力场 $F(R)=Z_1Z_2e^2/R^2$ 中的 Rutherford 双曲线），所以修正图7.17可以立即转换到关于时间轴的能量表示中。图 7.18 显示了结果。我们很易估计出 1s 能级潜入到“Dirac 海”中的时间只能持续大约

$$\Delta t\sim\frac{2R_{cr}}{v_{ion}}\sim 2\times 10^{-21}\,\text{s}\,. \tag{7.28}$$

它比共振态的衰变时间大约小两个数量级。因此，我们只能期望最多只有一小部分在 $1s\sigma$ 态中的空穴会自发发射正电子。在图 7.18 中，用箭头标示了这个过程。

轨道运动比超重准分子“典型长度标度”快这个事实，还有另外一个有意义的结果：就上面描写的意义上来说，电子波函数并不完全绝热地发展。在碰撞开始时处于某个分子能态 ϕ_i 中的

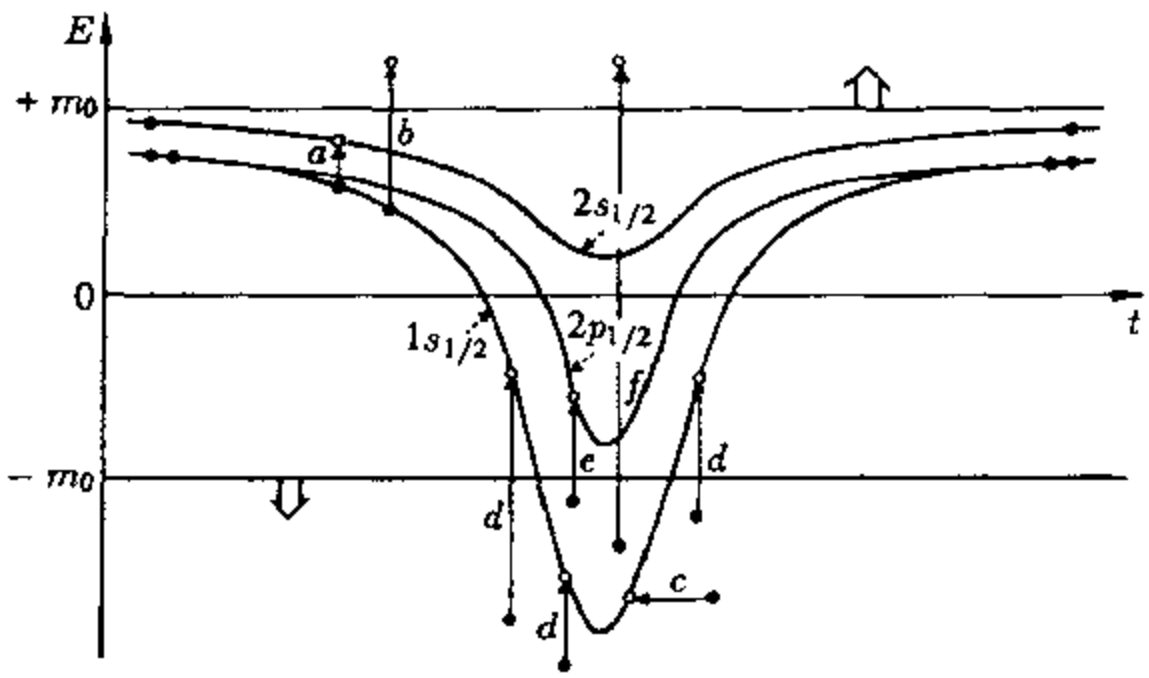


图 7.18　在超临界重离子碰撞中准分子能级的时间依赖关系。
箭头表示产生空穴和正电子的各种激发过程

电子(或空穴)可以被“碰撞动力学”以一定的几率转移到不同的态 ϕ_k 中。这可导致图 7.18 中用箭头指出的如下的物理过程:(a)通过一个电子激发到更高的态,在内壳层中产生一个空穴;(b)通过一个电子电离到连续区中而产生一个空穴;(d)和(e)通过一个电子从下连续区激发到空束缚态能级中而产生诱导正电子;(f)直接对产生。

在所有的这些情况中,动能可以从核运动转移到电子上。

正电子的动力学产生(d,e,f)要与 1s 共振态的自发衰变(c)叠加,所以不能从这个贡献中分离出来。于是重离子碰撞中正电子发射的发现并不自动地意味着肯定了真空衰变的预言。另一方面,(a,b)类的激发提供了一个很好的机会,在碰撞的入射相 $1s\sigma$ 能级中产生一个有利于产生正电子的空穴。否则我们就必须处理裸的,即完全电离的原子,这在实验上是更困难的。

现在我们要转到(非常简短地)原子散射理论的领域中去。并讨论如何计算在重离子碰撞中电子和正电子的各种激发过程①。因为核的质量很大,所以可以用半经典近似来处理散射(在定性讨论中我们已不言明地这样做了)。这里核的运动经典地给成时间的函数。时间相关的双中心 Dirac 方程为

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi_i = H_{\mathrm{TCD}}(\boldsymbol{R}(t))\psi_i. \tag{7.29}$$

和(7.26)不同,Hamilton 量通过给定的轨道 $\boldsymbol{R}(t)$,将时间作为参数。波函数 ψ_i 的指标指出,它是从有定义的、在极限 $t\to-\infty$时的初态 ϕ_i演变而来的。直接解出偏微分方程(7.30)是很困难的。如果将时间有关的波函数 ϕ_k 用一组尽可能适当选取的完备基来展开,则问题可变得易于处理。

---

① 见 J. Reinhardt, W. Greiner: Heavy ion atomic physics, in *Heavy Ion Science*, Vol. 5, edited by D. A. Bromley (Plenum, New York, 1984).

$$\psi_i(t) = \sum_k a_{ik}(t)\phi_k(R)e^{-i\chi_k(t)}. \tag{7.30}$$

这里,求和是对整个分立的和连续的谱作的。$\chi_k(t)$是一个可自由选取的任意的相因子。为简单起见,我们假定基波函数 ϕ_k 构成正交系,

$$\langle\phi_k|\phi_l\rangle = \delta_{kl}. \tag{7.31}$$

将(7.30)插入(7.29)中得到

$$i\sum_l(\dot{a}_{il}\phi_l + a_{il}\dot{\phi}_l - i\dot{\chi}_l a_{il}\phi_l)e^{-i\chi_l} = \sum_l a_{il}H_{TCD}\phi e^{-i\chi_l}. \tag{7.32}$$

因为有正交性(7.31),将它投影在$\langle\phi_k|$上,并乘以$-i$,就得到

$$\dot{a}_{ik} = -\sum_l a_{il}\left(\left\langle\phi_k\left|\frac{\partial}{\partial t}\right|\phi_l\right\rangle - i\langle\phi_k|H_{TCD}|\phi_l\rangle + i\dot{\chi}_l\delta_{kl}\right)e^{-i(\chi_l-\chi_k)}. \tag{7.33}$$

由于归一化$\langle\phi_k|\phi_k\rangle=1$ 和$\langle\phi_k|\dot{\phi}_k\rangle+\langle\dot{\phi}_k|\phi_k\rangle=0$,$\langle\phi_k|\dot{\phi}_k\rangle$的贡献为零。

通过选取任意 t_0 的相位

$$\chi_k(t) = \int_{t_0}^{t}dt'\langle\phi_k|H_{TCD}|\phi_k\rangle\ , \tag{7.34}$$

(7.33)中的 $l=k$ 的对角项可以消去;所以

$$\dot{a}_{ik} = -\sum_{l\neq k} a_{ik}\left(\left\langle\phi_k\left|\frac{\partial}{\partial t}\right|\phi_l\right\rangle - i\langle\phi_k|H_{TCD}|\phi_l\rangle\right)e^{-i(\chi_l-\chi_k)}. \tag{7.35}$$

现在,偏微分方程(7.29)已约化为一组耦合的常微分方程组。但组的维数是无限的!适当地选取基 ϕ_k,可使得只在展开中包含一些项就足以使它收敛。如果在(7.35)中的耦合矩阵元是小的,则 a_{ik}随时间改变很小,于是我们可在右端令它们近似地为常数。方程(7.35)就导致简单的对时间的积分,而得到众所周知的时间有关的微扰论公式。

如果绝热近似(7.25)是近似地满足的,则最有利的是将准分子态,即解(7.26)取为基。于是道耦合方程组为

$$\dot{a}_{ik} = -\sum_{l\neq k} a_{il}\left\langle\phi_k\left|\frac{\partial}{\partial t}\right|\phi_l\right\rangle\exp\left[-i\int_{t_0}^{t}dt'(E_l - E_k)\right], \tag{7.36}$$

这是因为在两个正交态之间的 Hamilton 量矩阵元为零

$$\langle\phi_k|H_{TCD}|\phi_l\rangle = E_k\delta_{kl}, \tag{7.37}$$

为了计算激发几率,微分方程组(7.36)被截断为有限个道,并从边界条件 $a_{ik}(t\to-\infty)=\delta_{ik}$处开始积分。量$|a_{ik}(t\to+\infty)|^2$ 描述了在碰撞过程中,电子从态 i 跃迁到态 k 的几率。现在我们一般地必须考虑出现几个电子的情况。如果我们忽略(比较弱的)电子之间的相互作用,它们的贡献可以独立地加起来。于是碰撞前为空的能级 k 中的*电子数* N_k 为

$$N_k = \sum_{i<F}|a_{ik}(\infty)|^2, \tag{7.38}$$

其中的和取遍所有的碰撞前被占据的能级。这由 $i<F$ 来指出,F 表示"Fermi 表面",它以下的电子能级都被填充。整个下连续区也包括在此组态中。

在原来被占据的 l 态中的空穴数 $\overline{N_l}$，也可用类似的方法来计算，得到结果

$$\overline{N_l} = \sum_{l>F} |a_{ll}|^2. \tag{7.39}$$

这个表示式对正电子的产生(即在下连续区中的空穴)也成立。

在入射能量在 Coulomb 势垒附近的重离子碰撞过程中，所有的原子激发过程可以用(7.26)，(7.36)，(7.38)和(7.39)来计算。结果发现跃迁几率是很大的。在两个十分重的原子的接近碰撞中，从 K 壳层中打出一个电子的几率超过 10%。较高的能级几乎完全被电离。K 空穴产生以及电离电子(称为 δ 电子)的能量分布的测量给出了强场作用的重要的知识。理论的预言(以及按照图 7.18 的准分子结构的概念)已在很大程度上被证实。特别地从测量中可清楚地得到这样的结论，即在 $Z\alpha \geqslant 1$ 的 Coulomb 位势中，(1)大小为 m_0c^2 或超过它的电子结合能可被达到，(2)如图 7.10 所示的那样，波函数收缩得很厉害。

但可证明要给出一个自发正电子产生的证据是很困难的。首先，为了描写超临界碰撞，即 $Z_1+Z_2>Z_{cr}$ 和 $R_{min}<R_{cr}$，必须将公式推广。如我们已看到，超过临界点，$1s$ 态在束缚谱外为零。代之以在连续态 Ψ_E 中隐藏为一个狭窄的时间有关的共振态结构。于是(7.36)几乎不可能有一个直接的解。如果我们在共振能量 E_r 处更仔细地分析波函数 Ψ_E，这个困难是可以克服的，见图7.5d。除了在小距离处的一个定域部分外，一个小振幅的振荡尾巴延伸到无穷。如果我们切断这个尾巴，即人为地禁止穿透粒子-反粒子空隙，就有可能构造出一个“类 $1s$ 态”的束缚波函数 $\tilde{\phi}_{1s}$。此新态 $\tilde{\phi}_{1s}$ 当然与下连续区的态 Ψ_E 不是线性独立的。所以它不能放入时间有关波函数的基展开(7.30)中。因而首先必须将束缚态的贡献从连续态中分出来。这可用投影算符来做到

$$\hat{P} = 1 - |\tilde{\phi}_{1s}\rangle\langle\tilde{\phi}_{1s}|. \tag{7.40}$$

于是可定义一个变形的连续态 $\tilde{\phi}_E$，它不再具有共振性质。$\tilde{\phi}_E$ 是投影 Hamilton 量的本征态

$$(E - \hat{P}H\hat{P})|\tilde{\phi}_E\rangle = 0. \tag{7.41}$$

如果我们假定它正交于高电子态 $\phi_n(E_n > -m_0c^2)$，(7.41)就可写为

$$(E - H)|\tilde{\phi}_E\rangle = -\langle\tilde{\phi}_{1s}|H|\tilde{\phi}_E\rangle|\tilde{\phi}_{1s}\rangle. \tag{7.42}$$

现在代替 Ψ_E，可将态 $\tilde{\phi}_{1s}$ 和 $\tilde{\phi}_E$ 插入表示式(7.30)中。这在原则上不会改变公式，但它有一个重要的结果：因为改变后的态 $\tilde{\phi}_{1s}$ 和 $\tilde{\phi}_E$ 不是 Hamilton 量 H 的精确的本征态，(7.37)不再成立。于是我们必须在微分方程(7.36)中作替代

$$\langle\phi_E|\partial/\partial t|\phi_{1s}\rangle \to \langle\tilde{\phi}_E|\partial/\partial t|\tilde{\phi}_{1s}\rangle + i\langle\tilde{\phi}_E|H|\tilde{\phi}_{1s}\rangle. \tag{7.43}$$

第二个矩阵元正好起着例 7.2 Fano 公式中 V_E 的作用。它引起 $1s$ 空穴的，自发正电子产生的衰变，宽度为

$$\Gamma_{1s} = 2\pi|\langle\tilde{\phi}_E|H|\tilde{\phi}_{1s}\rangle|^2. \tag{7.44}$$

(7.43)中的第一个矩阵元只当碰撞核运动时才有效应。它描写了“诱导”正电子发射。

但如果用上面得到的公式来计算正电子发射，结果有点令人失望。图 7.19 显示了在投射能

量为每个核子 5.9MeV 的中心碰撞中预言的发射正电子的分布，它取为动能的函数[①]。

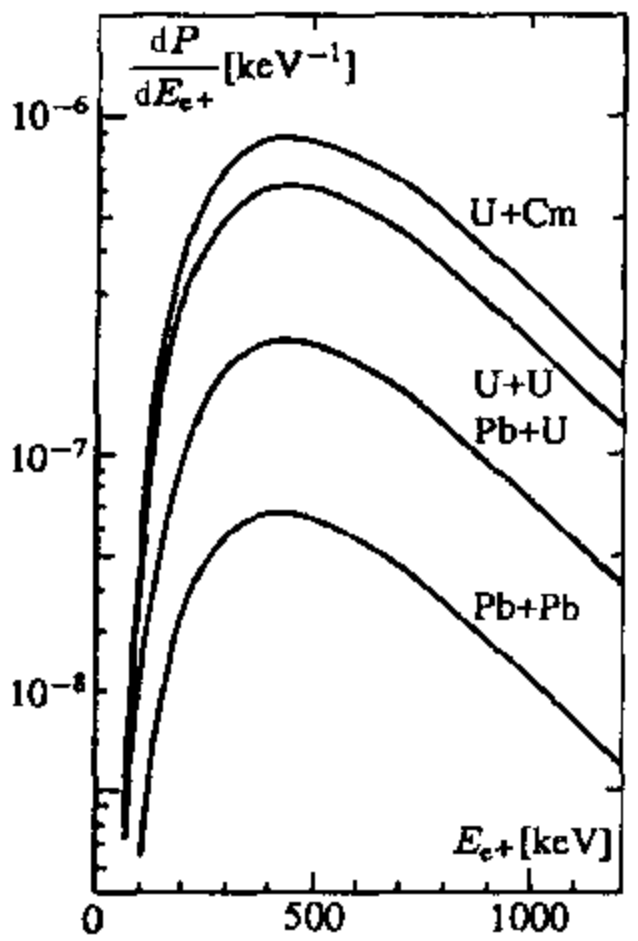


图 7.19 在各种重离子碰撞中，正电子发射的能量分布的计算，发射的强度随着参与核的电荷很快地增加

对几个不同的碰撞体系($Z=Z_1+Z_2=164,174,184,188$)作了比较。可看到随着电荷 Z 的增加，正电子有显著的增加。我们发现近似地有

$$P_{e^+} \propto Z^{20} = (Z_1 + Z_2)^{20}. \tag{7.45}$$

这明显地证明了两个核的强结合的 Coulomb 场在此起了作用。必须记住，从微扰论处理中只能期望随 $Z_1^2 Z_2^2$ 而增长(比较两个带电粒子碰撞中对产生的最低级 Feyman 图，图 7.20a)。结果7.45强调了如图 7.20b 中象征性地画出的那样的交换许多光子的重要性。这个在对产生中的非微扰效应完全被 P. Kienle，H. Backe，E. Kankeleit，和 J. S. Greenberg 组在 GSI 重离子加速器(Darmstadt)上做的实验所证实[②]。除了随 Z 的强增加外，图 7.19 中显示的正电子谱显示没有自发对产生的清楚的证据。这是不足为奇的，因为碰撞时间短，$\Delta t \simeq 10^{-21}$，发射谱中的窄结构的出现，是和 Heisenberg 的测不准关系相冲突的。

---

① J. Reinhardt, B. Müller, W. Greiner: Phys. Rev. **A24**, 103(1981).

② H. Backe, L. Handschug, F. Hessberger, E. Kankeleit, L. Richter, F. Weik, R. Willwater, H. Bokemeyer, P. Vincent, J. Nakayama, J. S. Greenberg: Phys. Rev. Lett. **40**, 1443(1978); C. Kozhuharov, P. Kienle, E. Berdermann, H. Bokemeyer, J. S. Greenberg, Y. Nakayama, P. Vincent, H. Backe, L. Handschug, E. Kankeleit: Phys. Rev. Lett. **42**, 376(1979).

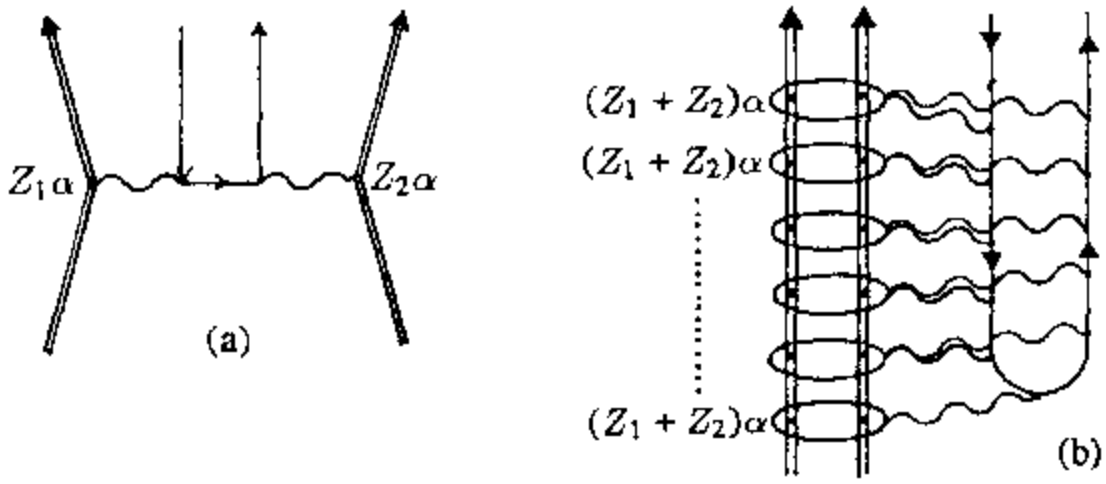


图 7.20　在两个核碰撞中的对产生：(a) 最低级 Feynman 图，(b) 大 Z 时的多光子交换。这个对产生的非微扰方法可解释为在两个重核碰撞中真空云的抖脱

如果在碰撞中有一种导致时间延迟的机制，则情况将会改变。如果核有足够的能量来克服 Coulomb 排斥，并互相接触，从而能互相吸引，则这种效应就会发生，见图 7.21。我们假设在时间 T 内，核"黏在一起"，随后又分开了。于是在超临界体系中自发正电子产生将增强。寿命为 $\tau=\hbar/\Gamma$ 的衰变耦合(7.43)将使 $1s$ 能级中出现的空穴作为正电子发射出去。如果延迟时间 T 与 τ 可比，则在正电子谱中将产生一条很细的线，其位置由被淹没的 $1s$ 态的潜入深度来确定。我们在习题7.4中已讨论过这一点。图 7.22 很清楚地显示了 $U+U$ 碰撞中，一直到 10^{-20}s 的各种假设时间的这种效应。

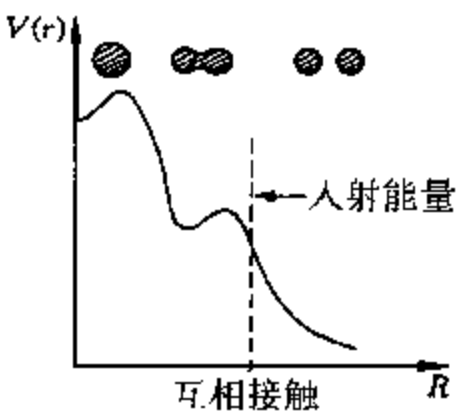


图 7.21　吸引的核力可在内核位势 $V(r)$中产生一个"口袋"

近几年中，在 Darmstadt 的 Gesellschaft für Schwerionenforschung(GSI)上实验检验了重离子碰撞中的正电子产生。在图 7.19 的预言被可信地肯定的同时，还在谱中发现了另外的窄线结构[①]。作为一个例子，图 7.23 显示了投射能量为每个核子 5.8MeV的铀-铜碰撞中($Z=188$)，正电子的发射。这个能量正好使它们互相接触。

初看来这些线是由一小部分散射事件中的自发正电子产生形成的，在这些事件中，碰撞时间增加，碰撞核由于强作用而在这段时间内粘在一起。但是，在临界电荷 $Z_1+Z_2<Z_{cr}$的碰撞系统中，差不多在同样能量位置处也发现了这种谱线，而这时并不会出现自发对产生[②]。接着还发

① J. Schweppe, A. Gruppe, K. Bethge, H. Bokemeyer, T. Cowan, H. Folger, J. S. Greenberg, H. Grein, S. Ito, R. Schule, D. Schwalm, K. E. Stiebing, N. Trautmann, P. Vincent, and M. Waldschmidt: Phys. Rev. Lett. **51**, 2261(1983); M. Clemente, E. Berdermann, P. Kienle, H. Tsertos, W. Wagner, C. Kozhuharov, F. Bosch, and W. Koenig: Phys. Lett. **137B**, 41(1984).

② 详细情况可在 W. Greiner(ed.): *Physics of Strong Fields* (Plenum, New York 1987).

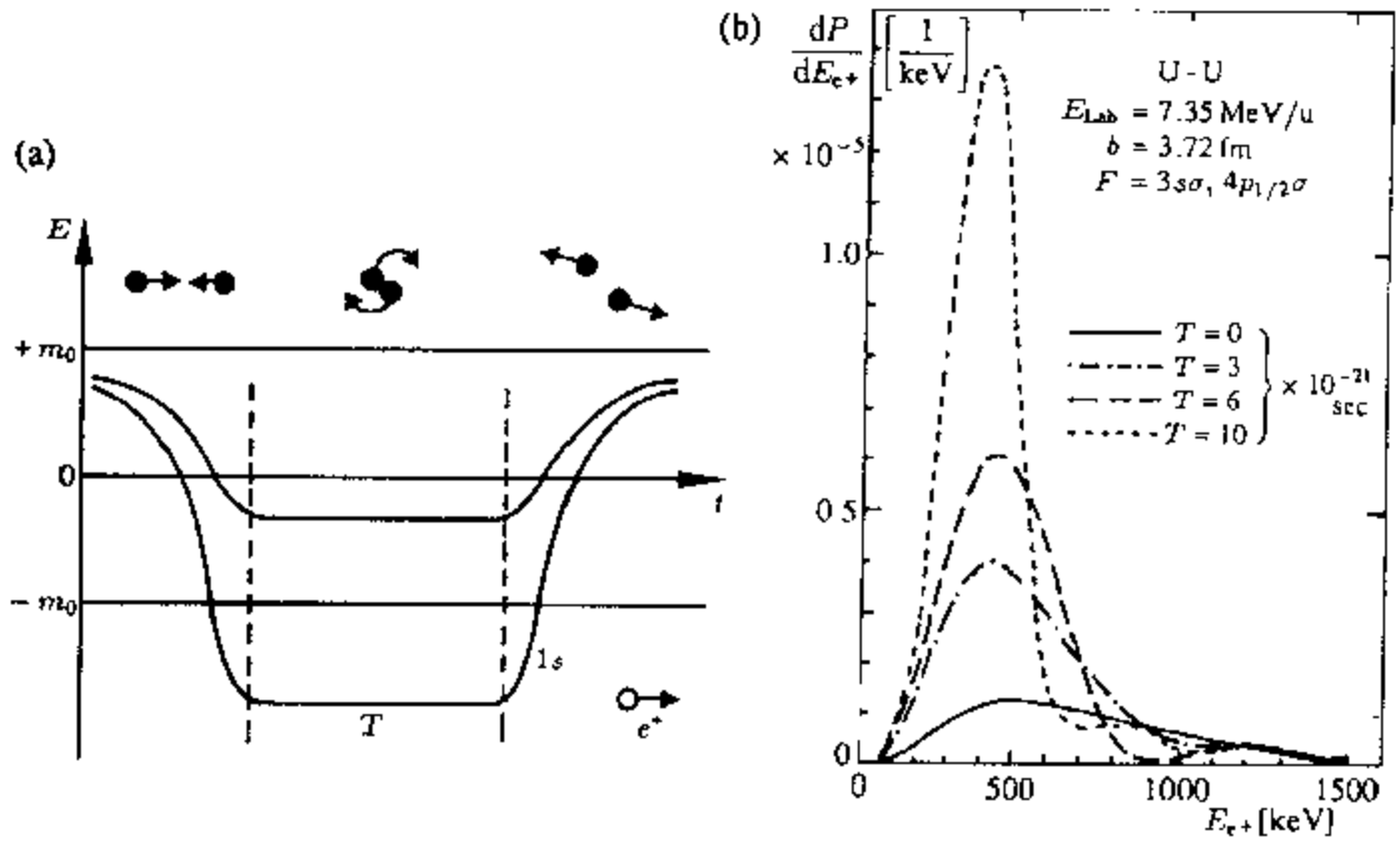


图 7.22 (a)假设两个重离子在时间 T 内粘在一起。在这段时间内 Coulomb 位势是超临界的，正电子可以从 1s 能级自发地被发射。(b)随着时间的增加，在发射正电子的谱中建立的谱线

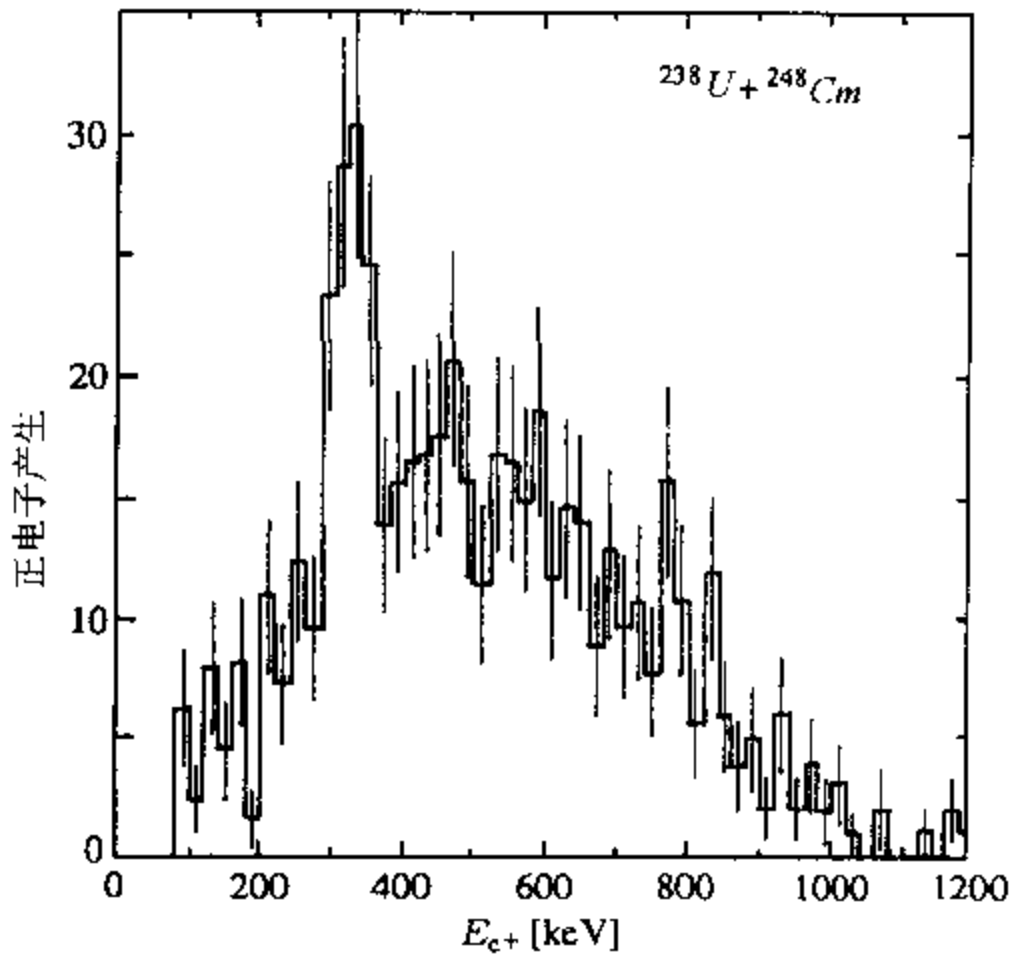


图 7.23 在 $U+Cm$ 碰撞中实验的正电子发射谱。在正电子动能 $E_{e+}=320$ keV 处，可看到一条窄线

现[①]正电子谱线看来伴随着反方向发射能量相等且确定的电子！这种现象的惟一自然的解释是：产生了质量在 $m_X=1.5\cdots2\text{MeV}$ 范围内的中性物体 X，它衰变为 $X\to e^+e^-$。有很多从理论上猜测这种粒子的可能的性质[②]。同时还发现了大量的各种性质的正电子线结构。尽管作了很大的努力，但没有找到这种现象的可信和自洽的解释。在有更多更好的实验数据可用之前，不可能解决这个令人感兴趣的正电子峰来源的问题。

7.3　电磁场的等效 Lagrange 量

如果我们孤立地考虑一电磁场，它是满足线性 Maxwell 方程的，并且叠加原理成立。在经典理论中，空的空间中没有电荷，并且因为光子也不带电荷，它们间没有相互作用，所以它们的场是用自由的无相互作用的 Lagrange 函数（更严格地说是 Lagrange 密度）来描写的

$$L_0=\frac{1}{8\pi}(\boldsymbol{E}^2-\boldsymbol{H}^2)\ , \tag{7.46}$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 表示电和磁场强度。因为 L_0 依赖于 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的二次方，这保证了得到的场方程是线性的。

但当我们用到量子场论时，情况就变了。现在有产生虚粒子的几率，特别是由光子产生电子-正电子对。因为它们是带电的，可以和其他的光子发生作用（在它们湮灭之前）。特别地，两个光子可互相散射。相应的最低级 Feynman 图画在图 7.24a 中。同样，光子可在外电磁场中散射（见图 7.24b）。叉号表示外场，它可被例如电荷为 $-Ze$ 的重核产生。

在构造这些图时，考虑到了按照 Furry 定理（见 4.1），有奇数个光子顶角的电子圈没有贡献。所以光和光的散射，图 7.24a，是四级的；其截面必须正比于 α^4，这太小了，所以还不能被实验证实。

对光子在核的电磁场中的散射，图 7.24b，情况比较好。这个称为 Delbrück 散射[③]的过程的标度为 $(Z\alpha)^4\alpha^2$ 并已被高能光子（几个 MeV）实验所发现[④]。作为另一个有兴趣的过程，我们提出在由核上的散射引起的光子一分为二的过程[⑤]（见图 7.23c），它也已在实验上被发现。

---

① T. Cowan, H. Backe, K. Bethge, H. Bokemeyer, H. Folger, J. S. Greenberg, K. Sakaguchi, D. Schwalm, J. Schweppe, K. E. Stiebing, P. Vincent: Phys. Rev. Lett. **56**, 444(1986); W. Koenig, E. Berdermann, F. Bosch, S. Huchler, P. Kienle, C. Kozhuharov, A. Schröter, S. Schuhbeck, H. Tsertos: Phys. Lett. **B218**, 12(1989).

② 如见：A. Schäfer: J. Phys. G15, 373(1989).

③ M. Delbrück: Z. Physik **84**, 144(1933); P. Papatzacos and K. Mork: Phys. Rep. **21**, 81(1975).

④ 如见 S. Kahane and R. Moreh: Phys. Lett. **47B**, 351(1973); P. Rullhusen et al.: Phys. Rev. **C27**, 559(1983).

⑤ G. Jarlskog et al.: Phys. Rev. **D8**, 3813(1973).

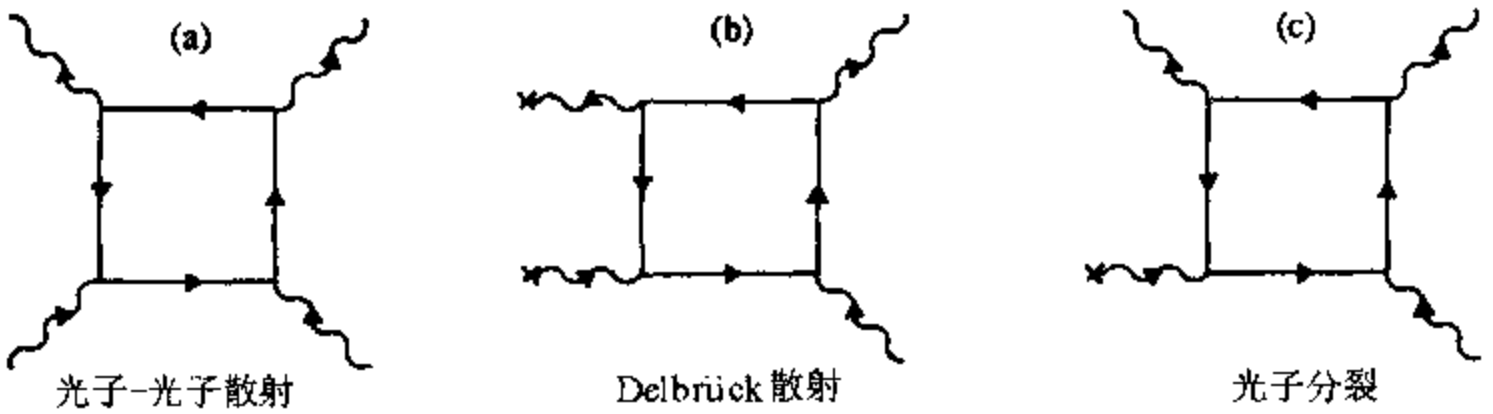


图 7.24 (a)光子-光子散射 (b)Delbrück 散射 (c)光子分裂

QED 的真空态是由虚过程引起的可极化的介质，并具有新的物理性质。我们可以通过用等效 Lagrange 量 L_{eff}代替电磁场 Lagrange 量 L_0 来描写此效应。其中将包括 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的高级修正，从而导致非线性场方程。在静态和均匀电磁场的极限情况中，可以对 L_{eff}给出一个精确的封闭表示式。此结果是在 Heisenberg 和 Euler[①]的开创工作中得到的。我们将部分地跟随 Weisskopf 的推导[②]。

首先，我们回忆起有两类描写电磁场的 Lorentz 不变量，即

$$\begin{aligned} I_1 &= \boldsymbol{H}^2 - \boldsymbol{E}^2, \\ I_2 &= \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{E}. \end{aligned} \tag{7.47}$$

于是等效 Lagrange 量可表示为这些不变量的函数

$$\begin{aligned} L_{\text{eff}}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{E}) &= L_{\text{eff}}(I_1, I_2) \\ &= L_{\text{eff}}(\boldsymbol{H}^2 - \boldsymbol{E}^2, \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{E}). \end{aligned} \tag{7.48}$$

我们提醒读者，标量 I_1 和 I_2 可用定义为

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= \partial^\mu F^\nu - \partial^\nu F^\mu \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ E_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ E_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{7.49}$$

的电磁场张量 $F_{\mu\nu}$的收缩来得到。我们再用 $F_{\mu\nu}$和完全反对称单位张量(Levi-Civita 张量)的收缩来引入一个对偶场张量

$$^*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma} = F^{\mu\nu}(\boldsymbol{E} \longleftrightarrow \boldsymbol{H})$$

① W. Heisenberg and H. Euler: Z. Physik **38**, 314(1936).

② V. Weisskopf: Kgl. Dankse Vid. Selskab., Math. -fys. Medd. **XIV**, 166(1936)；对最新的处理，见如 W. Dittrich, M. Reuter: *Effective Lagrangians in Quantum Electrodynamics* (Springer, Berlin, Heidelberg 1985).

$$= \begin{pmatrix} 0 & -H_1 & -H_2 & -H_3 \\ H_1 & 0 & -E_3 & E_2 \\ H_2 & E_3 & 0 & -E_1 \\ H_3 & -E_2 & E_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.50}$$

我们可通过这些张量的收缩来构造两类标量，即

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2(\boldsymbol{H}^2 - \boldsymbol{E}^2) = 2I_1, \tag{7.51a}$$

$$F^{\mu\nu}{}^*F_{\mu\nu} = -4\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{E} = -4I_2. \tag{7.51b}$$

因为 Lagrange 函数只依赖于场强，故它是规范不变的。我们来计算作为场强函数的单位体积真空的能量 W_0。非常自然地，我们将所有在“Dirac 海”中的电子能量本征值 $\epsilon_{p\sigma}<-m$ 加起来，以得到总能量 E_0。从此值中必须减去电场中的势能 U_0。除了真空纯能量以外，能量 E_0 中还包括了在外场中 Dirac 海电子的势能 U_0。因为我们只对真空的纯能量感兴趣，所以 U_0 的贡献必须被减去：

$$W_0 = E_0 - U_0,\ E_0 = \sum_{p\sigma}\epsilon_{p\sigma}^{(-)}, \tag{7.52}$$

$$U_0 = \sum_{p\sigma}\int \mathrm{d}^3x\psi_{p\sigma}^{(-)\dagger}\, eA_0(x)\psi_{p\sigma}^{(-)}, \tag{7.53}$$

其中 $A_0(x)$是静电位势。这里的和求遍所有的动量 $\boldsymbol{p}$ 和所有的自旋方向；但只考虑了负能态。通过某种技巧，我们可用 E_0 来表示 U_0。为此我们用如下的在量子力学中成立的一般考虑。

令 $\hat{H}(\lambda)$是一解析地依赖于参数 λ 的自共轭 Hamilton 量，$\psi_n(\lambda)$是归一化本征函数

$$\hat{H}(\lambda)\psi_n(\lambda) = \epsilon_n(\lambda)\psi_n(\lambda). \tag{7.54}$$

于是能量本征值关于参数 λ 的导数服从

$$\frac{\partial\epsilon_n}{\partial\lambda} = \left\langle\psi_n\middle|\frac{\partial\hat{H}}{\partial\lambda}\middle|\psi_n\right\rangle, \tag{7.55}$$

这是因为对(7.54)取导数并投影到$\langle\psi_n|$上，得到

$$\frac{\partial\epsilon_n}{\partial\lambda} = \left\langle\psi_n\middle|\frac{\partial\hat{H}}{\partial\lambda}\middle|\psi_n\right\rangle + \left\langle\psi_n\middle|(\hat{H}-\epsilon_n)\frac{\partial}{\partial\lambda}\middle|\psi_n\right\rangle.$$

而由于$\langle\psi_n|\hat{H} = \langle\psi_n|\epsilon_n$，使最后一项为零。

现在我们通过将静态的和均匀的 $\boldsymbol{E}$ 场写成

$$A_0(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{x}$$

来使用此一般的表述，并将场强用作参数 λ。于是

$$U_0 = \boldsymbol{E}\cdot\sum_{p\sigma}\int \mathrm{d}^3x\,\psi_{p\sigma}^{(-)\dagger}\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{E}}\psi_{p\sigma}^{(-)} = \boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial E_0}{\partial\boldsymbol{E}}, \tag{7.56}$$

所以有

$$W_0 = E_0 - U_0 = E_0 - \boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial E_0}{\partial\boldsymbol{E}}. \tag{7.57}$$

此关系用来从能量转换到 Lagrange 函数。对一广义坐标为 q_i 的体系，能量(Hamilton 量)Lagrange 量之间的关系一般为

$$W = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \,. \tag{7.58}$$

在电动力学中，位势 A_0 和 $\boldsymbol{A}$ 起着广义坐标作用。因为有关系 $\boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{A}} - \nabla A_0$ 和 $\boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{A}$，Lagrange 量只在矢量位势的时间导数中与广义速度($\dot{q}_i$)有关。但关于 $\dot{\boldsymbol{A}}$ 的微分等价于关于 $\boldsymbol{E}$ 的微分。所以(7.58)也可写成

$$W = \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{E}} - L. \tag{7.59}$$

于是我们发现，除了一个符号外，电磁场的 Lagrange 密度的改变由附加的能量密度 E_0 给定：

$$L_{\text{eff}} = L_0 + L' \,, \tag{7.60a}$$

其中

$$L' = -E_0^{(\text{ren})}. \tag{7.60b}$$

在(7.60b)中我们指出了表示式(7.52)仍需重整化。特别地，必须减去没有电磁场时的真空能量，因为它无法被观察到。

为了计算 E_0，开始时我们限制于纯磁场的情况，$\boldsymbol{E}=0$。能量本征值可精确地按照习题 7.6 来得到：

$$\varepsilon_{p\sigma}^{(-)} = -\sqrt{m^2 + p_z^2 + |e|H(2n+1+\sigma)} \,, \tag{7.61}$$

其中，$n=0,1,2,\cdots$，而 $\sigma=\pm 1$。单位动量间隔的态密度为 $|e|H/2\pi \mathrm{d}p_z/2\pi$；见习题 7.6。所以

$$\begin{aligned} L' &= -E_0 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}p_z}{2\pi} \frac{|e|H}{2\pi} \sum_{n\sigma}' \sqrt{m^2 + p_z^2 + |e|H(2n+1+\sigma)} \\ &= \frac{|e|H}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p_z \left(\sqrt{m^2 + p_z^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{m^2 + p_z^2 + 2|e|Hn} \right) . \end{aligned} \tag{7.62}$$

这里我们考虑了除了 $n=0$，$\sigma=-1$ 能级外，所有的态是双重简并的。量子数 n，$\sigma=+1$ 和 $n=-1$，$\sigma=-1$ 的态的能量相同。只对态 $n=0$，$\sigma=-1$，找不到配对者。

显然，(7.62)是高度发散的。但我们将看到，我们可以分出一个物理上有意义的有限的表示式。为此，首先我们通过引入一个适当选取的切断因子将(7.62)正规化。利用缩写

$$F(n,\lambda) = \int_0^{\infty} \mathrm{d}p_z \sqrt{m^2 + p_z^2 + 2|e|Hn}\ \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{m^2+p_z^2+2|e|Hn}} \tag{7.63}$$

正规化后的方程为

$$L'(\lambda) = \frac{|e|H}{\pi^2} \left(\frac{1}{2} F(0,\lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} F(n,\lambda) \right) . \tag{7.64}$$

λ 是切断参数，量纲为能量一次方。计算的最后必须取极限 $\lambda \to 0$。于是物理上有意义的量必须不

再依赖 λ。所以它们必须趋于有限的极限值。用 Euler 和 MacLaurin 求和公式[①]，方程(7.64)可写成

$$\sum_{n=0}^{N}F(n,\lambda)=\frac{1}{2}F(0,\lambda)+\frac{1}{2}F(N,\lambda)+\int_0^N \mathrm{d}n\,F(n,\lambda)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}(F^{(2k-1)}(N,\lambda)-F^{(2k-1)}(0,\lambda))\,. \tag{7.65}$$

这里，$F^{(k)}(x,\lambda)$表示函数 $F(x,\lambda)$关于 x 的 k 阶导数。B_{2n}是 Bernoulli 数 $B_2=1/6, B_4=-1/30, B_6=1/42,\cdots$。因为有(7.63)，$F(n,\lambda)$和它的所有的导数在大 n 处(对 $\lambda\neq 0$)指数衰变，所以在(7.65)中可取极限 $N\to\infty$，这导致结果

$$\sum_{n=0}^{\infty}F(n,\lambda)=\frac{1}{2}F(0,\lambda)+\int_0^{\infty}\mathrm{d}n\,F(n,\lambda)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}F^{(2k-1)}(0,\lambda)\,. \tag{7.66}$$

所以，(7.64)可写为

$$L'(\lambda)=\frac{|e|H}{\pi^2}\left(\int_0^{\infty}\mathrm{d}n\,F(n,\lambda)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}F^{(2k-1)}(0,\lambda)\right)\,. \tag{7.67}$$

定义函数 $F(n,\lambda)$的(7.63)中的积分可明显地计算出来。作替代 $x=\sqrt{p_z^2+a^2}\,/a$ 和 $a^2=m^2+2|e|Hn$，我们得到

$$F(n,\lambda)=\int_0^{\infty}\mathrm{d}p_z\sqrt{p_z^2+a^2}\,\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{p_z^2+a^2}}=a^2\int_1^{\infty}\mathrm{d}x\,\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{e}^{-\lambda a x}$$

$$=a^2\left(\frac{1}{-a}\right)^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\lambda^2}\int_1^{\infty}\mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{e}^{-\lambda a x}}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\lambda^2}K_0(\lambda a)=a^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}K_0(z)\,. \tag{7.68}$$

这里 $K_0(z)$是第二类变型 Bessel 函数(McDonald 函数)，并作了替代 $z=\lambda a$。

导数 $K_0'(z)$ 是用 Bessel 函数的递归关系来计算的(见 I. S. Gradshteyn 和 I. M. Ryzhik: Table of Integrals, Series, and Products, Academic Press, 1965, no. 8.486)。特别地，因为 $K_0'=-K_1, K_1'=K_1/z-K_2$，而有

$$F(n,\lambda)=-a^2\left(\frac{1}{\lambda a}K_1(\lambda a)-K_2(\lambda a)\right)$$

$$=-\frac{1}{\lambda^2}\left(zK_1(z)-z^2K_2(z)\right)\,. \tag{7.69}$$

在(7.67)中我们需要此函数对 n 的导数。因为 $z=\lambda a=\lambda\sqrt{m^2+2|e|Hn}$，$z\mathrm{d}z=\lambda^2|e|H\mathrm{d}n$，$m$ 阶导数可写为

---

① 例如见 G. Arfken: *Mathematical Methods for Physicists* (Academic Press, New York 1970) 5.9 章.

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\right)^m = (\lambda^2|e|H)^m\left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^m. \tag{7.70}$$

这些导数正好导致简单的变型 Bessel 函数(见 Gradshteyn/Ryzhik no. 8.486.14):

$$\left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^m (z^\nu K_\nu(z)) = (-1)^m z^{\nu-m} K_{\nu-m}(z). \tag{7.71}$$

用 $z(n=0)=\lambda m$,正规化的 Lagrange 量(7.67)现在为

$$\begin{aligned} L'(\lambda) = &-\frac{1}{\pi^2}\frac{1}{\lambda^4}\int_{\lambda m}^{\infty}\mathrm{d}z\, z^2(K_1(z) - zK_2(z)) \\ &-\frac{|e|H}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(-\frac{1}{\lambda^2}\right)\left(\lambda^2|e|H\right)^{2k-1} \\ &\times(-1)^{2k-1}[(\lambda m)^{2-2k}K_{2-2k}(\lambda m) - (\lambda m)^{3-2k}K_{3-2k}(\lambda m)]. \end{aligned} \tag{7.72}$$

现在我们来考虑此表示式的结构。它是场强 H 乘基本电荷 e 的偶次方的幂级数,

$$L'(\lambda) = C_0(\lambda) + C_2(\lambda)(eH)^2 + \sum_{k=2}^{\infty} C_{2k}(\lambda)(eH)^{2k}. \tag{7.73}$$

如果切断参数 λ 趋于零,前两个系数 $C_0(\lambda)$ 和 $C_2(\lambda)$ 是发散的。但高级系数 $C_4, C_6, \cdots$ 是有限的(见下)。$C_0(\lambda)$ 的发散性如下

$$C_0(\lambda) = -\frac{1}{\pi^2}\frac{1}{\lambda^4}\int_{\lambda m}^{\infty}\mathrm{d}z\, z^2\left(K_1(z) - zK_2(z)\right) = O\left(\frac{1}{\lambda^4}\right)\to\infty\,, \tag{7.74}$$

这是因为积分在下限是收敛的。场强的二次项从(7.72)得到:

$$C_2(\lambda) = -\frac{1}{\pi^2}\frac{B_2}{2}(K_0(\lambda m) - \lambda m K_1(\lambda m))\,. \tag{7.75}$$

对 $z\to 0$,Bessel 函数的渐近行为是

$$\begin{aligned} &K_m(z)\to (m-1)!\,2^{m-1}z^{-m} \quad \text{对} \quad m>0, \\ &K_0(z)\to -\ln(z)\,. \end{aligned} \tag{7.76}$$

所以作为切断参数 λ 函数的 $C_2(\lambda)$ 是对数发散的

$$C_2(\lambda)\to\frac{1}{\pi^2}\frac{1}{12}\ln(\lambda m)\,. \tag{7.77}$$

我们从开始时就知道,这类发散问题是必定出现的。在(7.72,7.53)中,下连续区中所有态的能量被相加。常数 C_0 正是"Dirac 海的总能量",所以是不可观察的。这一点可通过将 C_0 的表示式转换到三维动量积分而形式地来证实。在柱坐标中,替代 $p_\perp^2 = 2|e|Hn$ 和 $\mathrm{d}^2p_\perp = p_\perp\mathrm{d}p_\perp\mathrm{d}\varphi$ 导致

$$\begin{aligned} C_0(\lambda) &= \frac{|e|H}{\pi^2}\int_0^{\infty}\mathrm{d}n F(n,\lambda) \\ &= \frac{|e|H}{\pi^2}\int_0^{\infty}\mathrm{d}n\int_0^{\infty}\mathrm{d}p_z\sqrt{m^2+p_z^2+2|e|Hn}\;\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{m^2+p_z^2+2|e|Hn}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p_z \int_0^{\infty} \mathrm{d}p_\perp \, p_\perp \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi} \sqrt{m^2 + p_z^2 + p_\perp^2}\ \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{m^2+p_z^2+p_\perp^2}}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} 2\sqrt{m^2 + \boldsymbol{p}^2}\ \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2}}. \tag{7.78}$$

这正是在没有外场时，下连续区负能的正规表示。因此为了得到有意义的表示式，我们必须在(7.73)中减去 C_0。另外，项 $C_2e^2H^2$ 精确地具有自由 Lagrange(7.46)的形式，所以我们可以将各项合并成

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{eff}} &= L_0 + L' - C_0 \\ &= L_0 + C_2(eH)^2 + [L' - C_0 - C_2(eH)^2] \\ &= (1 + 8\pi C_2 e^2)\frac{H^2}{8\pi} + \sum_{n=2}^{\infty} C_{2n}(eH)^{2n}. \end{aligned} \tag{7.79}$$

所以自由 Lagrange 量乘了常数$(1+8\pi e^2C_2)$。同样，这个因子的出现在物理上是不能被观察到的。因为常数因子只导致重新定义场强和电荷，这对所有的实验都是有效的。我们可以形式地定义一个重整化的基本电荷

$$e_R = \frac{e}{\sqrt{1 + 8\pi e^2 C_2}} \tag{7.80}$$

和相应的重整化场强

$$H_R = \frac{e}{e_R}H = \sqrt{1 + 8\pi e^2 C_2}\,H\ . \tag{7.81}$$

用这些量来表示，磁场的 Lagrange 量为

$$L_{\mathrm{eff}} = \frac{1}{8\pi}H_R^2 + \sum_{n=2}^{\infty} C_{2n}(e_R H_R)^{2n} = L_{0R} + L_R'. \tag{7.82}$$

此表示式在小的场强下有正确的极限。这样，我们可把 H_R 和 e_R 看成物理上可观察的量。在下面为了简单起见我们去掉指标 R。

由于(7.76)，对 Lagrange 量的重整化修正 L' 为(用 $K_{-n}(z)=K_n(z)$)

$$\begin{aligned} L' &= -\frac{1}{\pi^2}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\frac{1}{\lambda^4}(\lambda^2|e|H)^{2k} \\ &\quad \times [(\lambda m)^{2-2k}K_{2k-2}(\lambda m) - (\lambda m)^{3-2k}K_{2k-3}(\lambda m)] \\ &= -\frac{1}{\pi^2}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\lambda^{4k-4}(eH)^{2k}(\lambda m)^{2-2k}(2k-3)!\,2^{2k-3}(\lambda m)^{-2k+2} \\ &= -\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\frac{1}{8}(2eH)^{2k}m^{4-4k}(2k-3)! \\ &= -\frac{1}{8\pi^2}\sum_{k=2}^{\infty}(2eH)^{2k}B_{2k}m^{4-4k}\frac{\Gamma(2k-2)}{(2k)!}\ . \end{aligned} \tag{7.83}$$

用积分表示来写出此结果是有用的。为此，我们将 Γ 函数写为

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty \mathrm{d}\eta\, \mathrm{e}^{-\eta}\eta^{z-1} \tag{7.84}$$

于是得到

$$L'=-\frac{1}{8\pi^2}\sum_{k=2}^{\infty}(2|e|H)^{2k}B_{2k}m^{4-4k}\frac{1}{(2k)!}\int_0^\infty \mathrm{d}\eta\, \mathrm{e}^{-\eta}\eta^{2k-3}$$

$$=-\frac{1}{8\pi^2}|e|Hm^2\int_0^\infty \mathrm{d}\eta\,\frac{\mathrm{e}^{-\eta}}{\eta^2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2^{2k}}{(2k)!}B_{2k}\left(\frac{|e|H\eta}{m^2}\right)^{2k-1}. \tag{7.85}$$

仔细地考察此表示式中的级数发现，它是和双曲余切函数的 Taylor 展开是一致的，

$$\coth(x)=\frac{1}{x}+\frac{x}{3}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2^{2k}}{(2k)!}B_{2k}x^{2k-1}. \tag{7.86}$$

引进无量纲的场强

$$\tilde{H}=\frac{H}{H_{\mathrm{cr}}}=\frac{|e|}{m^2}H\ , \tag{7.87}$$

我们得到一个紧凑的最后结果

$$L'(E=0,H)=\frac{m^4}{8\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{d}\eta\,\frac{\mathrm{e}^{-\eta}}{\eta^3}\left(-\tilde{H}\eta\coth(\tilde{H}\eta)+1+\frac{1}{3}(\tilde{H}\eta)^2\right). \tag{7.88}$$

对一般的电磁场的研究比较困难，因为我们不能找到一个类似于(7.61)的表示式。但对纯电场的情况($H=0$)，可通过一种技巧将它约化到(7.88)。为此，我们注意到可以按照(7.48)将结果表示为两个不变量 H^2-E^2 和 $H\cdot E$ 的函数。于是立即就看到

$$\begin{aligned}L'(E,H=0)&=L'(I_1=0-E^2,I_2=0)\\&=L'(I_1=(\mathrm{i}E)^2,I_2=0)\\&=L'(E=0,H=\mathrm{i}E)\ .\end{aligned} \tag{7.89}$$

因此我们可利用对磁场的解，并用 $\mathrm{i}E$ 来替代其中的 H！因为 $\coth(\mathrm{i}x)=-\mathrm{i}\cot(x)$，这导致

$$L'(E,H=0)=\frac{m^4}{8\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{d}\eta\,\frac{\mathrm{e}^{-\eta}}{\eta^3}\left[-\tilde{E}\eta\cot(\tilde{E}\eta)+1-\frac{1}{3}(\tilde{E}\eta)^2\right], \tag{7.90}$$

其中约化的电场强度为

$$\tilde{E}=\frac{E}{E_{\mathrm{cr}}}=\frac{|e|}{m^2}E\ . \tag{7.91}$$

为了完满起见，我们将引用推广到恒定平行电和磁场的结果，但不给证明。这对用不变量 I_1 和 I_2 (7.47)表示的 L' 的扩充是足够的了。所需的计算是很长的；我们只引证原始文献。结果为

$$\begin{aligned}L'(H\parallel E)=&\frac{m^4}{8\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{d}\eta\,\frac{\mathrm{e}^{-\eta}}{\eta^3}\\&\times\left[-\tilde{E}\eta\cot(\tilde{E}\eta)\,\tilde{H}\eta\coth(\tilde{H}\eta)+1-\frac{1}{3}(\tilde{E}^2-\tilde{H}^2)\eta^2\right],\end{aligned} \tag{7.92}$$

显然它包含了(7.88)和(7.90)作为其极限情况。L_0+L' 是电磁场的等效 Lagrange 量，它在

Heisenberg 和 Euler 时代(1936)就有了。后来 Schwinger[①]在“固有时间方法”的基础上，作了一个形式上更满意的推导。

现在我们来考察(7.92)的一些结果。首先我们来考虑弱场极限的情况，即 $\tilde{E}\ll 1$，$\tilde{H}\ll 1$。相应于(7.86)的 Taylor 展开到第三项为止为

$$L' = \frac{m^4}{8\pi^2}\frac{1}{45}\int_0^\infty \mathrm{d}\eta\ \eta \mathrm{e}^{-\eta}(\tilde{E}^4 + \tilde{H}^4 + 5\,\tilde{E}^2\,\tilde{H}^2)$$

$$= \frac{1}{8\pi}\frac{\mathrm{e}^4}{45\pi m^4}[(H^2 - E^2)^2 + 7(E\cdot H)^2]\,. \tag{7.93}$$

顺便提一下，此结果在任何参考系中都对，因为它是用不变量 I_1 和 I_2 来表示的。至于其他的结果，我们从(7.93)可得，对平面波没有非线性修正，因为这时两个不变量为零。

在强磁场，即 $\tilde{H}\gg 1$ 的极限情况下，我们将满足于对数近似的粗略估计。用替代 $\tau=\eta\tilde{H}$，(7.88)可写为

$$L' = \frac{m^4\,\tilde{H}^2}{8\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{d}\tau\,\frac{\mathrm{e}^{-\tau/\tilde{H}}}{\tau}\left(\frac{1}{3} + \frac{1-\tau\coth(\tau)}{\tau^2}\right). \tag{7.94}$$

对 $\tau\leqslant 1$，括号中的表示式使得被积函数变小(因为 $\coth\ \tau = 1/\tau + \tau/3 - \tau^3/45 \pm \cdots$)，而对大的 $\tau\geqslant\tilde{H}$，指数因子使它变小。所以用这两个值来替代积分限并进一步在此区域中忽略括号中的第二项和指数$\exp(-\tau/H)$的变化是合理的。于是我们得到

$$L' = \frac{m^4\,\tilde{H}^2}{8\pi^2}\int_1^{\tilde{H}}\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}\,\frac{1}{3} = \frac{m^4\,\tilde{H}^2}{24\pi^2}\ln(\tilde{H})\,. \tag{7.95}$$

如果我们将它和自由 Lagrange 量 L_0 做比较，我们看到在 QED 中非线性效应永远是小的，

$$\frac{L'}{L_0} = \frac{e^2}{3\pi}\ln\frac{|e|H}{m^2}\,. \tag{7.96}$$

为了使 $L'=L_0$我们必须达到数量级为

$$H = H_{\mathrm{cr}}\mathrm{e}^{3\pi/\alpha} = 10^{560}H_{\mathrm{cr}}. \tag{7.97}$$

的完全不实际的场强。当然，这是因为电磁耦合常数很小。

最后我们通过考虑强电场的 Lagrange 量来得到最有兴趣的结果。首先，结果(7.90)不是很好定义的，因为余切在实轴上有极点。在复平面上选择一个回路，对能量密度的积分可得到一个值。

$$E_0 = \frac{m^4\,\tilde{E}^2}{8\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{d}\tau\,\frac{\mathrm{e}^{\tau/\tilde{E}}}{\tau^3}\left(\tau\cot(\tau) - 1 + \frac{1}{3}\tau^2\right)\,, \tag{7.98}$$

如果极点从上半平面被包围，见图 7.25，能量得到一个负的虚部(后面将清楚此符号)。我们取每个极点的负的留数的一半来计算其大小

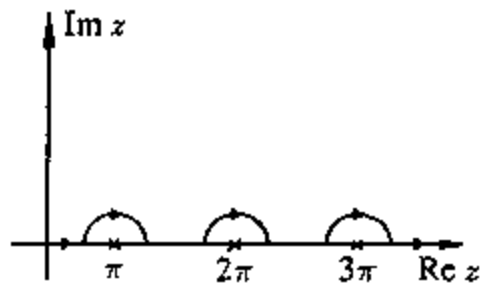


图 7.25　在(7.98)中选取的变形的积分回路

① J. Schwinger: Phys. Rev. **82**, 664(1951).

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\{E_0\} &= -\frac{1}{2}2\pi\mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Res}\,|_{\tau=n\pi}\\ &= -\frac{1}{2}2\pi\mathrm{i}\,\frac{m^4\tilde{E}^2}{8\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-n\pi/\tilde{E}}}{(n\pi)^3}(n\pi)\\ &= -\mathrm{i}\,\frac{e^2E^2}{8\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\mathrm{e}^{-n\pi m^2/|e|E}.\end{aligned}\tag{7.99}$$

为了理解此结果，我们回忆起复数能量表征了量子力学态的衰变。事实上时间相关态$|\Phi(t)\rangle=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}|\phi\rangle$的几率是

$$P(t)=\langle\Phi(t)|\Phi(t)\rangle=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E-E^*)t}\langle\phi|\phi\rangle=\mathrm{e}^{2\mathrm{Im}(E)t}.\tag{7.100}$$

在我们的叙述中，这表示原来没有粒子的真空态，在强电场中通过产生电子正电子对而自发衰变。单位体积和时间的粒子产生几率为

$$\begin{aligned}w &= 2\mathrm{Im}(L')\\ &= \frac{1}{4\pi^3}\left(\frac{eE\hbar}{m^2c^3}\right)^2\underbrace{\frac{mc^2}{\hbar}}_{\frac{1}{\text{时间}}}\underbrace{\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3}_{\frac{1}{\text{体积}}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\exp\left(-n\,\frac{\pi m^2c^3}{|e|E\hbar}\right),\end{aligned}\tag{7.101}$$

这次常数$\hbar$和c明显地写出来了。

值得注意的是，结果(7.101)在极限$e\to0$处有一个本性奇点。于是强场中的对产生是一个非微扰效应，它不能用耦合常数的级数展开来计算。

最后我们必须记住，(7.101)是在没有实际粒子的假设下计算的。当场强E很大时，这不再正确，而在电场中的对产生反应必须用一个自洽的方法来考虑进去[①]。

在本章之初我们对电场中的对产生作了一个直观的解释：在真空中，由于量子涨落，短寿命的虚e^+e^-对不断地被产生，又被湮灭。这些对可被外电场分开，并通过能量的消耗，转换成实际的粒子。为了使它成为可能，势能必须在大约一个 Compton 波长，$\Delta l\simeq\hbar/mc$ 的范围内改变大小$\Delta V=|e|E\Delta l>2mc^2$，它使场强达到临界。

从 Dirac 空穴图像可得到更定量的解释。图 7.26 显示了势能$V(x)=eEx$及相应的 Dirac 方程在$mc^2+V(x)$和$-mc^2+V(x)$间的能隙对空间的关系。和图 7.5 完全类似，对产生是由电子从“Dirac 海”穿透经典上的禁戒区域而引起的。此穿透过程的几率被穿透因子(Gamow 因子)

$$P\simeq\exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{x_-}^{x_+}q(x)\mathrm{d}x\right),\tag{7.102}$$

来描写，其中虚动量为

$$q(x)=\sqrt{m^2c^2-(W-eEx)^2/c^2}.\tag{7.103}$$

① 对此问题仍缺乏完全的解，见 Y. Kluger, J. M. Eisenberg, B. Svetitsky, F. Cooper, E. Mottola, Phys. Rev. **D45**, 4659, (1992).

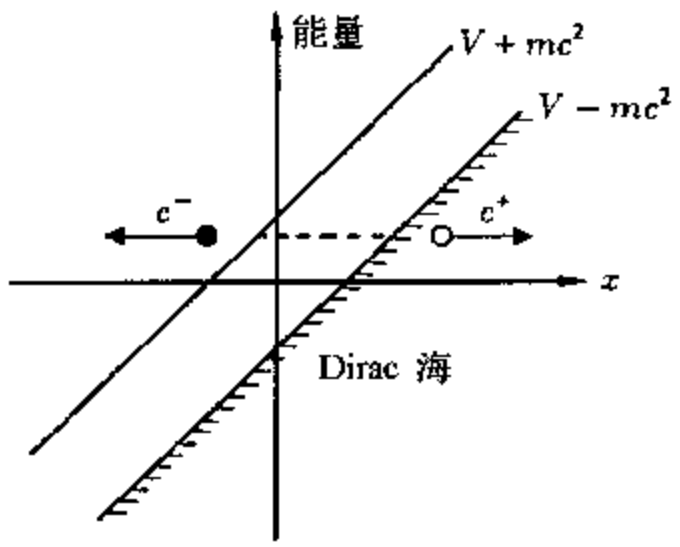


图 7.26　在恒定电场中的 e^+e^- 对产生可想象成
穿过 Dirac 方程的质量隙的隧道过程

$x_\pm$ 表示使 $q(x_\pm)=0$ 的经典穿透点，W 是能量。我们发现

$$P\simeq \exp\left(-\frac{2}{\hbar c}\int_{x_-}^{x_+}\sqrt{m^2c^4-(W-eEx)^2}\,\mathrm{d}x\right)$$

$$=\exp\left(-\frac{2}{\hbar c}\frac{1}{|e|E}m^2c^4\int_{-1}^{+1}\sqrt{1-u^2}\mathrm{d}u\right)$$

$$=\exp\left(-\frac{\pi m^2c^3}{|e|E\hbar}\right)\,. \tag{7.104}$$

这正是(7.99)中的指数因子(对一对项，$n=1$)!

习　　题

7.5　等效 Lagrange 量的另一种推导

问题：7.3 节中形为(7.88)的电磁场等效 Lagrange 量也可用较少的数学推导来得到。在第一步中，将(7.62)关于参数 m^2 微分两次，并用积分表示

$$\frac{1}{m^2}=\int_0^\infty \mathrm{d}\,\eta \mathrm{e}^{-m^2\eta} \tag{1}$$

对级数求和。然后将结果对 m^2 积分两次。最后必须完成重整化。

解：必须计算下面的表示式

$$L'(\boldsymbol{E}=0,\boldsymbol{H})$$

$$=\frac{|e|H}{(2\pi)^2}2\int_0^\infty \mathrm{d}p_z\left(\sqrt{m^2+p_z^2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{m^2+p_z^2+2|e|Hn}\right)\,. \tag{2}$$

我们形式地将此表示式作为收敛的来处理，而不管它需要作正规化处理。对 m^2 微分两次得到

$$\Lambda(H) := \frac{\mathrm{d}^2 L'}{(\mathrm{d}m^2)^2}$$

$$= -\frac{|e|H}{(2\pi)^2}\frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{d}p_z\left[\frac{1}{(m^2+p_z^2)^{\frac{3}{2}}} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(m^2+2|e|Hn+p_z^2)^{\frac{3}{2}}}\right]. \tag{3}$$

现在对 p_z 的积分是收敛的，并简单地得到

$$\int_0^\infty \mathrm{d}p_z \frac{1}{(p_z^2+a^2)^{3/2}} = \frac{p_z}{a^2\sqrt{p_z^2+a^2}}\Big|_0^\infty = \frac{1}{a^2}, \tag{4}$$

所以

$$\Lambda(H) = -\frac{|e|H}{8\pi^2}\left(\frac{1}{m^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^2+2|e|Hn}\right). \tag{5}$$

积分表示(1)导致

$$\Lambda(H) = -\frac{|e|H}{8\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{d}\eta\left(\mathrm{e}^{-m^2\eta} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-(m^2+2|e|Hn)\eta}\right)$$

$$= -\frac{|e|H}{8\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{d}\eta \mathrm{e}^{-m^2\eta}\left(2\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-2|e|Hn\eta} - 1\right). \tag{6}$$

这里对 n 的求和正是一个几何级数！它可得到一个封闭的和

$$\Lambda(H) = -\frac{|e|H}{8\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{d}\eta \mathrm{e}^{-m^2\eta}\left(\frac{2}{1-\mathrm{e}^{-2|e|H\eta}} - 1\right)$$

$$= -\frac{|e|H}{8\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{d}\eta\, \mathrm{e}^{-m^2\eta}\frac{1+\mathrm{e}^{-2|e|H\eta}}{1-\mathrm{e}^{-2|e|H\eta}}$$

$$= -\frac{1}{8\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{d}\eta \frac{\mathrm{e}^{-m^2\eta}}{\eta}|e|H\eta\coth(|e|H\eta). \tag{7}$$

对变量 m^2 作两次积分得到

$$L' = -\frac{1}{8\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{d}\eta \mathrm{e}^{-m^2\eta}\frac{1}{\eta^3}|e|H\eta\coth(|e|H\eta) + C_2 + C_1 m^2. \tag{8}$$

原则上，积分常数 C_1, C_2 可以是 H 的任意函数，但必须与 m^2 无关。这是一个很强的限制。从量纲上考虑，Lagrange 密度 L' 只能依赖于无量纲的比值 H/H_{cr}。严格地说，对 H 和 m 的函数关系应为

$$L'(H,m) = m^4 f(H/H_{\mathrm{cr}}) = m^4 f\left(\frac{|e|H}{m^2}\right)$$

$$= \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3 mc^2 f\left(\frac{|e|H}{m^2}\frac{\hbar}{c^3}\right). \tag{9}$$

在最后一步中，明显地插入了常数 $\hbar$ 和 c。这证明了因子 m^4 真正地给出了 Lagrange 密度的正确的量纲，即单位体积的能量。考虑了(9)，(7)中的积分常数只能形为

$$C_1 = C_1' m^2 \frac{|e|H}{m^2}, C_2 = C_2' e^2 H^2. \tag{10}$$

等效 Lagrange 量如下地和 L' 连接(见(7.79))：

$$L_{\text{eff}} = L_0 + L' - C_0 = L_{0R} + L_R'. \tag{11}$$

L' 中包含了正比于 $(eH)^0$ 和 $(eH)^2$ 的无定义的贡献。有限的重整化 Lagrange 量是从 L'_R 得到的

$$L_R' = L' - C_0. \tag{12}$$

这里，常数 C_0, C_1, C_2 必须选得使 L_R' 关于场强 H 的幂级数展开不包含小于二级的项。为此，我们必须取积分常数 $C_1=0$。另外，因为 $x\coth(x)=1+1/3x^2+\cdots$，所以重整化条件导致

$$C_0 = -\frac{1}{8\pi^2} m^4 \int_0^\infty \mathrm{d}\eta' \frac{\mathrm{e}^{-\eta'}}{\eta'^3} \tag{13a}$$

和

$$C_2 = \frac{1}{8\pi^2} \mathrm{e}^2 H^2 \frac{1}{3} \int_0^\infty \mathrm{d}\eta' \frac{\mathrm{e}^{-\eta'}}{\eta'}, \tag{13b}$$

其中变量替代为 $\eta' = m^2\eta$。因为我们没有作正规化处理，故这些积分是发散的。

所以电磁场的重整化等效 Lagrange 量为

$$L'_R = -\frac{m^4}{8\pi^2} \int_0^\infty \mathrm{d}\eta' \frac{\mathrm{e}^{-\eta'}}{\eta'^3} \left(\tilde{H}\eta' \coth(\tilde{H}\eta') - 1 - \frac{1}{3}(\tilde{H}\eta')^2 \right), \tag{14}$$

其中 $\tilde{H} = H/H_{cr} = |e|H/m^2$。此结果与(7.88)是一致的。

习　题

7.6　在均匀磁场中 Dirac 方程的解

问题：证明在均匀磁场 $\boldsymbol{H} = H\boldsymbol{e}_z$ 中 Dirac 粒子的能量为

$$\varepsilon_{p\sigma} = \pm\sqrt{m^2 + p_z^2 + |e|H(2n+1-\sigma)}.$$

p_z 为 z 方向的动量，$\sigma = \pm 1$ 是自旋的投影。利用双旋量 $\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$ 的 Dirac 方程，通过消去 χ 将问题约化成简谐振子微分方程。证明在体积 $V=1$ 时单位动量间隔的态密度为

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}p_z} = \frac{|e|H}{(2\pi)^2}.$$

解：按照《RQM》的第二章，用二分量记号的 Dirac 方程为($\hbar=1$)

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\phi &= \boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}} - e\boldsymbol{A})\chi + eA_0\phi + m\phi, \\ \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\chi &= \boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}} - e\boldsymbol{A})\phi + eA_0\chi - m\chi. \end{aligned} \tag{1}$$

对恒定的纯磁场($A_0=0$,$\boldsymbol{A}$ 与时间无关),定态解由

$$\begin{aligned}(\varepsilon-m)\phi&=\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}}-e\boldsymbol{A})\chi,\\(\varepsilon+m)\chi&=\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}}-e\boldsymbol{A})\phi\ .\end{aligned}\tag{2}$$

给出。我们将第一个方程乘以$(\varepsilon+m)$并消去 χ,得

$$(\varepsilon^2-m^2)\phi=\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}}-e\boldsymbol{A})\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}}-e\boldsymbol{A})\phi\ .\tag{3}$$

下面我们用等式

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\tag{4}$$

和动量算符 $\hat{\boldsymbol{p}}=-\mathrm{i}\nabla$ 的梯度性质得:

$$\begin{aligned}(\varepsilon^2-m^2)\phi&=[(\hat{\boldsymbol{p}}-e\boldsymbol{A})^2+\mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}}-e\boldsymbol{A})\times(\hat{\boldsymbol{p}}-e\boldsymbol{A})]\phi\\&=[(\hat{\boldsymbol{p}}-e\boldsymbol{A})^2-e\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{H}]\phi\\&=[\hat{\boldsymbol{p}}^2-2e\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}+e^2\boldsymbol{A}^2-e\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{H}]\phi\\&=[\hat{\boldsymbol{p}}^2+e^2H^2x^2-eH(\sigma_z+2x\hat{p}_y)]\phi\ .\end{aligned}\tag{5}$$

在最后的变换中,矢量势选为 $\boldsymbol{A}=(0,Hx,0)$,并用了 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ 和 $\boldsymbol{H}=\nabla\times\boldsymbol{A}$。我们注意到(5)的右端显然与动量算符的分量 $\hat{p}_y$ 和 $\hat{p}_z$ 对易。因而式子

$$\phi_\sigma(\boldsymbol{x})=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_yy+p_zz)}f(x)\chi_\sigma\tag{6}$$

描述了它自己,其中 χ_σ 是单位旋量。将它插入(5)中立即得到

$$(\varepsilon^2-m^2)f(x)=\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+p_y^2+p_z^2+e^2H^2x^2-2eHxp_y-eH\sigma\right)f(x)\ ,\tag{7}$$

它可写成

$$\left[-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+e^2H^2\left(x-\frac{p_y}{eH}\right)^2\right]f(x)=(\varepsilon^2-m^2-p_z^2+eH\sigma)f(x)\ .\tag{8}$$

这正是变量为 $\xi=x-p_y/eH$ 的谐振子 Schrödinger 方程。"振子能量"为 $\hbar\omega=2|e|H$。于是本征值为 $\lambda_n=(n+1/2)\hbar\omega=(2n+1)|e|H$ 所以

$$\varepsilon^2-m^2-p_z^2+eH\sigma=(2n+1)|e|H,$$

或

$$\varepsilon_{p\sigma}=\pm\sqrt{m^2+p_z^2+|e|H(2n+1+\sigma)}\ .\tag{9}$$

这是在磁场中粒子的 Landau 能级的相对论推广。

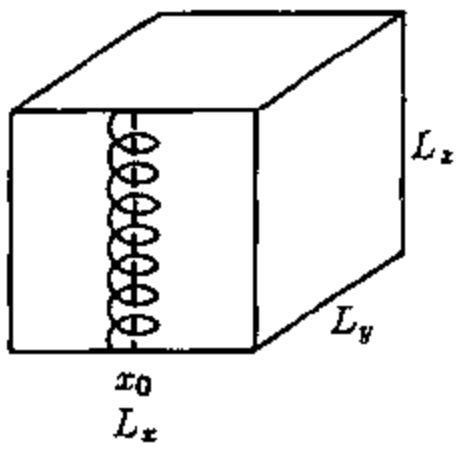


图 7.27 归一化盒子

为了确定态密度,我们注意到,因为动量 p_y 没有出现在公式中,故能级(9)是无穷度简并的。在经典的框架内我们的解描写了电子的螺旋运动,它的 y 和 z 方向的动量分量任意选取,但轨道绕着固定中心,

$$x_0=\frac{p_y}{eH}\ .\tag{10}$$

如果将粒子放入一个大小为 L_x,L_y,L_z 的盒子中(图 7.27),y 和 z 方向的运动被边界条件量子化,而态的数目为($\hbar=1$)

$$\Delta N = \frac{L_y}{2\pi}\Delta p_y \frac{L_z}{2\pi}\Delta p_z. \tag{11}$$

由于(10)，$\Delta p_y = eH\Delta x_0$ 成立。我们对允许的值 $0<x_0<L_x$ 求和，就如上面猜想那样得到

$$\Delta N = \frac{L_y}{2\pi}|e|HL_x \frac{L_z}{2\pi}\Delta p_z = \frac{|e|H}{(2\pi)^2}\Delta p_z V . \tag{12}$$

7.4 传　　记

DELBRÜCK，Max，美籍德国物理学和生物学家。1906 年 9 月 4 日生于 Berlin，1981 年 3 月 9 日逝于美国加州的 Pasadena。Delbrück 曾在 Tübingen，Berlin 和 Göttingen(1926～1929)学习物理，并曾在 Copenhagen，Niels Bohr 处作博士后。1932 年开始，他作为理论学家，在 Berlin 的 Kaiser Wilhelm Institute for Chemistry 与 L. Meitner 和 O. Hahn 一起工作。这时他在一篇实验文章上发表了一段关于硬 γ 射线相干散射的附录。他在其中指出了光子和被核诱导的真空极化电荷相互作用的可能性。很久以后此效应的存在被 H. Bethe 所证明，并称为 Delbrück 散射。1938 年 Delbrück 离开理论物理转向生物学。曾在加州理工学院从事遗传学和细菌病毒工作，1947 年他在 Vanderbilt(Nashville)大学任教数年后，成为生物学教授。Delbrück 在遗传重组机制和一般的细菌和病毒遗传领域中作出了重要的贡献。1969 年他得到了诺贝尔医药奖(和 S. Luria 及 A. Hershey 一起)。

EULER，Hans，德国物理学家。1909 年 10 月 6 日生于 Meran，1941 年 6 月 23 日逝世。Euler 在 Göttingen，Frankfurt 和 Leipzig 的大学中学习物理。1935 年他在 W. Heisenberg 的指导下获得了博士学位。他和 Heisenberg 紧密合作直到 1940 年他加入德国空军。他所服务的作为气象观测的飞机于 1941 年被击落。在他的博士论文中，Euler 计算了光子-光子散射的 QED 过程。接着他从事高能宇宙线碰撞的理论工作。

WEISSKOPF，Viktor Frederick，美国物理学家，1908 年 9 月 19 日生于 Vienna。Weisskopf 在 Vienna 和 Göttingen 的大学中学习物理，他在那里获得了博士学位(1931)。Weisskopf 曾在 Berlin，Copenhagen，Cambrige，Zurich(1933～1936)大学和 Rochester 大学工作。1945 年起是 Massachusetts Institute of Technology(Cambridge)的物理学教授。1961 到 1965 年他在 CERN 当总主任。1934 年 Weisskopf 建立了玻色子的相对论协变的量子场论(和 W. Pauli)，而于 1936 年引入了导致重整化理论的概念。他还对核物理有贡献，他引入了温度的概念来描述激发态(1937)，还引入了核反应的光学模型(1950，和 H. Feshbach)。1956 年 Weisskopf 获得了德国物理协会的 Max Plank 奖章。

第八章　无自旋 Bose 子的量子电动力学

迄今为止本书所有的考虑都是处理电子(或 μ 子)和它们的反粒子,即自旋为 1/2 的粒子,它们是用 Dirac 方程来描写的。量子电动力学的理论很满意地描写了这些粒子间的和与光子场的相互作用。原则上,没有什么会阻碍我们对其他种类的粒子来构造类似的理论。最简单的情况是零自旋的标量(或膺标)Bose 子。下面我们要发展这些粒子的电磁相互作用理论,就是所谓"标量电动力学"。我们可以从第二和第三章中直接地或作有限的变形,取来很多理论结果。

但与旋量电动力学不同,此理论的重要性是有限的,因为在自然界中没有基本的带电标量粒子。扮演此角色的最好的候选者是膺标介子,特别是 π 和 K。它们是不稳定的,会发生弱作用衰变。例如,大部分带电 π 通过道

$$\pi^{\pm} \to \mu^{\pm} + \nu_{\mu}$$

发生衰变,其寿命大约为 2.6×10^{-8}s。因为对自然时间标度来说,这个寿命是很长的,所以将 π 看成稳定粒子是很好的近似。下面的问题是更基本的:与基本的轻子(e,μ,τ)不同——它们都是类点粒子,π 有内部结构。众所周知它们现在被看成是由两个自旋为 1/2 的夸克组成的。在 W. Greiner 和 B. Muler 所写的《Quantum Mechanics-Symmetries》一书中,对此做了大量的讨论。因为这是强作用的课题,所以有大量的真空极化效应,物理上观察到的 π 是一个复杂的虚粒子云。即使我们只考虑与电磁场的相互作用,也不能忽略此内部结构。显然用标量电动力学来描写彼此耦合的介子是完全不合适的,因为这里强作用占优势。但是不管其有限的适用性,将量子电动力学从描写旋量转到标量,还是很有启发意义的。

8.1　Klein-Gordon 方程

首先我们来回忆一下 0 自旋粒子的相对论波动方程的一些性质[①]。自由标量粒子的波函数服从 Klein-Gordon 方程

$$(\partial^{\mu}\partial_{\mu} + m_0^2)\phi(x) = 0\,. \tag{8.1}$$

相关的流密度矢量为[②]

$$j_{\mu} = ie(\phi^*\partial_{\mu}\phi - \phi\partial_{\mu}\phi^*)$$

---

① 见 W. Greiner: Theoretical Physics, Vol. 3, *Relativistic Quantum Mechanics-Wave Equations* (Springer, Berlin, Heidelberg 1990), Chap. 1.

② 这里我们用了一个和在 *Relativistic Quantum Mechanics* 中所用的有点不同的符号。那里和(8.2)类似的式子中有一个附加的因子 $1/2m_0$,它是由波函数的不同归一化而加上的。

$$= ie\phi^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi \,, \tag{8.2}$$

它满足连续性方程。与 Dirac 情况不同，这里的电荷密度可取两种符号。解(8.1)的完备系由两类平面波组成，分别有正的和负的本征频率和动量，

$$\varphi_p^{(+)}(x) = N_p \, e^{-i(E_p t - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})} \tag{8.3a}$$

和

$$\varphi_p^{(-)}(x) = N_p \, e^{+i(E_p t - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})} , \tag{8.3b}$$

其中

$$E_p = + \sqrt{m_0^2 + \boldsymbol{p}^2} \,. \tag{8.4}$$

归一化可通过总电荷 $Q = \int d^3x j_0(x,t)$ 来确定，这是一个守恒量。正频解的电荷确定为 $Q = +e$，而负频解为 $Q = -e$。于是，一般地，Klein-Gordon 方程描写了有正和负电荷的粒子和反粒子，如 π^- 和 π^+ 介子的叠加。(在此不考虑中性标量粒子。)以后我们将回到这些贡献的物理解释。

在连续归一化"到 δ 函数"的情况，我们必须选取

$$N_p = \sqrt{\frac{1}{2E_p(2\pi)^3}} \,, \tag{8.5}$$

而平面波的归一化条件为

$$\int d^3x \, \varphi_{p'}^{(\pm)*}(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi_p^{(\pm)}(x) = \pm \delta^3(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}) , \tag{8.6a}$$

$$\int d^3x \, \varphi_{p'}^{(\pm)*}(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi_p^{(\mp)}(x) = 0 \,. \tag{8.6b}$$

一般地，(8.2)以下面的方式定义了变形的标量积 $(\phi_2|\phi_1)$：

$$(\phi_2|\phi_1) := \int d^3x \, \phi_2^*(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_1(x) \,, \tag{8.7}$$

对这个积，正定性条件 $(\phi|\phi) \geqslant 0$ 不再成立。

与电磁场的相互作用像通常那样用最小耦合方案来引入

$$\hat{p}_\mu \to \hat{p}_\mu - eA_\mu .$$

于是有电磁场的 Klein-Gordon 方程为

$$[(\hat{p}^\mu - eA^\mu)(\hat{p}_\mu - eA_\mu) - m_0^2]\phi(x) = 0 \tag{8.8}$$

或

$$[\partial^\mu \partial_\mu + m_0^2]\phi(x) = -\hat{V}\phi(x) \,. \tag{8.9}$$

这里我们形式地引入了位势算符 $\hat{V}$。显然它由下式给定

$$\hat{V}\phi = ie(\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu)\phi - e^2 A^\mu A_\mu \phi \,. \tag{8.10}$$

由于 Klein-Gordon 方程是坐标的二阶方程，(8.9)中的耦合项的结构相当复杂：它包含了梯度 ∂_μ 以及 A_μ 的非线性项，即最后的二次项。

除此以外，标量场的流密度被电磁位势所改变，即

$$j_\mu = \mathrm{i}e\phi^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi - 2e^2 A_\mu \phi^* \phi . \tag{8.11}$$

方程(8.9)将用来计算标量粒子在给定位势 A_μ 中的散射。我们在旋量 QED 上的经验建议我们在应用自由 Klein-Gordon 方程的传播子的基础上来发展微扰论。

8.2 标量粒子的 Feynman 传播子

和第二章中对 Dirac 方程完全类似的考虑，我们定义传播子 $\Delta_F(x'-x)$，它是类点单位源 Klein-Gordon 方程的解：

$$(\partial'^\mu \partial'_\mu + m_0^2)\,\Delta_F(x'-x) = -\delta^4(x'-x) . \tag{8.12}$$

右端源项的负号选取是自然的，因为(8.9)中的相互作用项也有一个负号。像通常那样，此微分方程的解可用 Fourier 变换来得到

$$\Delta_F(x'-x) = \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x'-x)} \frac{1}{p^2 - m_0^2 + \mathrm{i}\varepsilon} , \tag{8.13a}$$

即在动量空间中为

$$\Delta_F(p) = \frac{1}{p^2 - m_0^2 + \mathrm{i}\varepsilon} . \tag{8.13b}$$

在此我们又用了包围在 $p^2 = m_0^2$ 处的极点的 Stückelberg-Feynman 方案。我们立即会相信，这表示正频 $+E_p$ 的波函数随时间向前传播，而负频 $-E_p$ 波函数向后传播。它和自旋为 1/2 的 Feynman 传播子 S_F 的关系十分简单，即

$$S_F(x'-x) = (\mathrm{i}\gamma_\mu \partial^\mu - m_0)\Delta_F(x'-x) . \tag{8.14}$$

为了研究传播子在波函数上的作用，我们首先将 $\Delta_F(x'-x)$表示为完备解(8.3)的和。为此借助于留数定理完成(8.13)中对 p_0 的积分，在此过程中，对 $t'>t(t'<t)$，回路在下(上)半平面中封闭。此计算过程完全和第二章开始时，对 Dirac 粒子的 Feynman 传播子所作的一样，于是得到

$$\begin{aligned}\Delta_F(x'-x) &= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x'-x)} \int \frac{\mathrm{d}p_0}{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_0(t'-t)}}{p_0^2 - E_p^2 + \mathrm{i}\varepsilon} \\ &= -\mathrm{i}\int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x'-x)}}{2E_p} \left[\Theta(t'-t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_p(t'-t)} + \Theta(t-t')\mathrm{e}^{+\mathrm{i}E_p(t'-t)}\right] . \end{aligned} \tag{8.15}$$

用(8.3)它可写为

$$\begin{aligned}\Delta_F(x'-x) = &-\mathrm{i}\Theta(t'-t)\int \mathrm{d}^3 p\ \varphi_p^{(+)}(x')\varphi_p^{(+)*}(x) \\ &-\mathrm{i}\Theta(t-t')\int \mathrm{d}^3 p\ \varphi_p^{(-)}(x')\varphi_p^{(-)*}(x) ,\end{aligned} \tag{8.16}$$

我们在第二个积分中作了替代 $p \to -p$。

现在我们考虑由正频和负频的贡献组成的一般波函数 $\phi(x)$，

$$\phi(x) = \int \mathrm{d}^3 p\ a_p \varphi_p^{(-)}(x) + \int \mathrm{d}^3 p\ b_p \varphi_p^{(-)}(x) \equiv \phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x) , \tag{8.17}$$

并应用传播子 $\Delta_F(x'-x)$。为了使用变形的标量积(8.7),将算符 $i\overleftrightarrow{\partial}_0$ 夹在传播子和波函数之间

$$\begin{aligned}&\int d^3x\,\Delta_F(x'-x)i\overleftrightarrow{\partial}_0\phi(x)\\&=-i\int d^3p\Big(\Theta(t'-t)\varphi_p^{(+)}(x')\int d^3x\varphi_p^{(+)*}(x)i\overleftrightarrow{\partial}_0\phi(x)\\&\quad+\Theta(t-t')\varphi_p^{(-)}(x')\int d^3x\,\varphi_p^{(-)*}(x)i\overleftrightarrow{\partial}_0\phi(x)\Big)\,.\end{aligned}\tag{8.18}$$

现在如果按照(8.17),将 $\phi(x)$分解成分量,就可应用正交归一化关系(8.6a,b)。正如我们猜测的那样,结果为

$$\int d^3\,x\,\Delta_F(x'-x)i\overleftrightarrow{\partial}_0\phi(x)=-i\Theta(t'-t)\phi^{(+)}(x')+i\Theta(t-t')\phi^{(-)}(x')\,.\tag{8.19}$$

这个结果完全类似于第二章中对 Dirac 旋量推导出的(2.25)和(2.26)。

8.3　0 自旋 Bose 子的散射

沿着第三章的路线,我们也可借助于传播子来处理 0 自旋 Bose 子的散射过程。我们用 x 和 x' 间的短横线来表示 $\Delta_F(x'-x)$。例如,在图 8.1(a)中,一个自由 Bose 子从点(x,t)跑到(x',t'),$t'>t$。这是一个正能量的粒子,因而电荷 $Q=+e$。为简单起见,我们说是 π 介子(即是 π^-,因为约定了 $e=-|e|$)。在微扰位势影响下,粒子可在(x_1,t_1)处被散射(图 8.1(b))。也可多次散射(图8.1c)。但对后者情况,传播子 $\Delta_F(x_2-x_1)$也允许时间次序为 $t_2<t_1$,这表示 π^-时间倒退地从 x_1 传播到 x_2,如在图 8.2(a)中那样。但从物理上说,在 x_1 点上时间倒退地发射一个 π 和吸收一个反粒子的效果是一样的。所以我们也可像图 8.2(b)那样来画 Feynman 图,于是出现了时间上都向前传播的两种电荷号的粒子。按照这种说法,图 8.2 的过程表示进来一个 π^-,然后在点(x_2,t_2)处产生 $\pi^-\pi^+$对;后来,π^+与进来的 π^-在(x_1,t_1)处湮灭,而另外一个 π^-继续传播到将来。

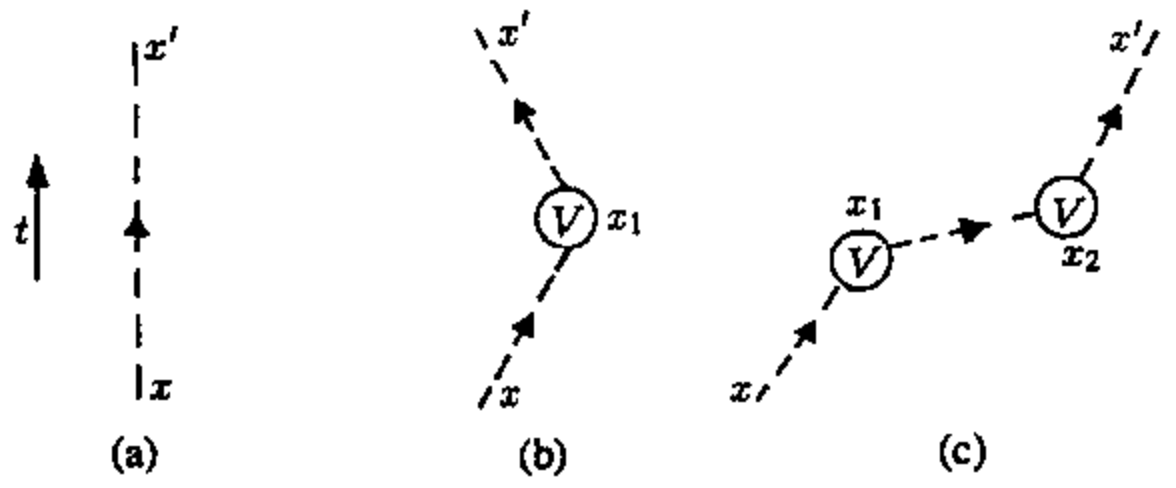


图 8.1(a)～(c)　Bose 子的自由传播子和散射

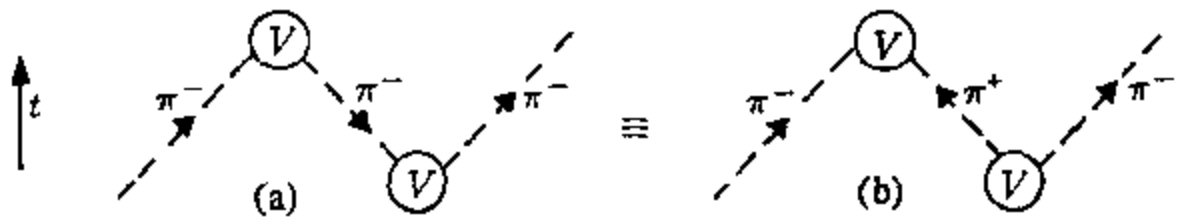


图 8.2(a),(b) 时间向后的 π^- 是一个 π^+

这和旋量电动力学的情况完全类似:我们只要改变名称 $\pi^{\pm}$ 和 $e^{\pm}$。但有一个差别:由于 Bosc 子不服从 Pauli 不相容原理,我们不能用 Dirac 的空穴图像。将 π^+ 解释成 π^- 海中的空位,而海中的其他态都被占据,是毫无意义的。

于是不求助于这个辅助概念,我们将 Feynman 的解释写成对所有粒子的(Bose 子和 Fermi 子)的假设:四动量为 p^μ 的粒子的发射(吸收),在物理上等价于四动量为 $-p^\mu$ 的反粒子的吸收(发射)。

现在我们给这种考虑以一个定量的描述,并计算散射过程的 S 矩阵。为此要解在(8.10)的微扰位势下,波函数 $\phi(x)$ 的 Klein-Gordon 方程(8.9)。应用 Feynman 传播子,从(8.12)我们得到

$$\phi(x) = \varphi(x) + \int \mathrm{d}^4y\ \Delta_{\mathrm{F}}(x-y)\,\hat{V}\,(y)\phi(y)\ , \tag{8.20}$$

其中 $\varphi(x)$ 表示满足 $(\partial_\mu\partial^\mu + m_0^2)\varphi(x)=0$ 的自由波。在粒子散射 $p_i \to p_f$ 的情况中,波函数 ϕ 必须满足在 $t\to-\infty$ 时的边界条件 $\phi(\boldsymbol{x},t)\to\varphi_{p_i}^{(+)}(\boldsymbol{x},t)$ 。S 矩阵从 $t\to+\infty$ 时在末态 $\varphi_{p_f}^{(+)}(\boldsymbol{x},t)$ 上的投影得到。

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \lim_{t\to+\infty}(\varphi_{p_f}^{(+)}(x)\,|\,\phi_{p_i}(x)) \\ &= \lim_{t\to+\infty}\int \mathrm{d}^3x\ \varphi_{p_f}^{(+)*}(\boldsymbol{x},t)\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0\,\phi_{p_i}(\boldsymbol{x},t)\ . \end{aligned} \tag{8.21}$$

用 Feynman 传播子表示(8.16)和(8.20),我们得到此表示式为

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \lim_{t\to\infty}\int \mathrm{d}^3x\ \varphi_{p_f}^{(+)*}(\boldsymbol{x},t)\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0\Big(\varphi_{p_i}(\boldsymbol{x},t) + \int \mathrm{d}^4y\ \Delta_{\mathrm{F}}(x-y)\,\hat{V}\,(y)\phi_{p_i}(y)\Big) \\ &= \lim_{t\to\infty}\int \mathrm{d}^3x\ \varphi_{p_f}^{(+)*}(\boldsymbol{x},t)\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0\,\varphi_{p_i}(\boldsymbol{x},t) \\ &\quad + \lim_{t\to\infty}\int \mathrm{d}^3x\varphi_{p_f}^{(+)*}(\boldsymbol{x},t)\ \mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0 \\ &\quad \times \int \mathrm{d}^4y\ \mathrm{d}^3p(-\mathrm{i})\Theta(t-t_y)\varphi_p^{(+)}(\boldsymbol{x},t)\varphi_p^{(+)*}(y)\,\hat{V}\,(y)\phi_{p_i}(y) \\ &= \lim_{t\to\infty}\int \mathrm{d}^3x\varphi_{p_f}^{(+)*}(\boldsymbol{x},t)\ \mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0\,\varphi_{p_i}^{(+)}(\boldsymbol{x},t) \\ &\quad - \mathrm{i}\lim_{t\to\infty}\int \mathrm{d}^3p\ \underbrace{\Big(\int \mathrm{d}^3x\ \varphi_{p_f}^{(+)*}(x)\ \mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0\,\varphi_p^{(+)}(x)\Big)}_{=+\delta^3(p_f-p)}\int \mathrm{d}^4y\ \varphi_p^{(+)*}(y)\,\hat{V}\,(y)\phi_{p_i}(y), \end{aligned} \tag{8.22}$$

由于平面波的正交归一关系(8.6),这导致

$$S_{fi} = \delta^3(\boldsymbol{p}_f - \boldsymbol{p}_i) - \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4y\, \varphi^{(+)*}_{p_f}(y)\, \hat{V}(y)\, \phi_{p_i}(y) \tag{8.23}$$

当我们涉及反粒子的散射 $\boldsymbol{p}_i \to \boldsymbol{p}_f$ 时，我们令负四动量为 $-p_f$ 的粒子向后传播到过去，并在 $t \to -\infty$ 时，投影到 $\varphi^{(-)}_{p_i}(\boldsymbol{x},t)$ 上：

$$\begin{aligned} S_{fi} &= -\lim_{t\to-\infty}\left(\varphi^{(-)}_{p_i}(x)\,|\,\phi_{p_f}(x)\right) \\ &= -\lim_{t\to-\infty}\int \mathrm{d}^3x\, \varphi^{(-)*}_{p_i}(\boldsymbol{x},t)\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0\phi_{p_f}(\boldsymbol{x},t)\ , \end{aligned} \tag{8.24}$$

其中的负号只是一个约定。这里清楚地看到——从纯计算的角度来看——动量为 p_f 的反粒子进入相互作用区域，然后带着动量 p_i 离开。所以我们得到

$$S_{fi} = \delta^3(\boldsymbol{p}_f - \boldsymbol{p}_i) - \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4y\varphi^{(-)*}_{p_i}(y)\, \hat{V}(y)\phi_{p_f}(y). \tag{8.25}$$

对湮灭和对产生可用完全类似的方法计算。

对表示式(8.23)和(8.25)与 $\phi(y)$ 的积分方程(8.20)，仍建议我们用微扰展开。为此，我们用迭代法来进行：为了计算第 $(n+1)$ 级近似 $\phi^{(n+1)}$，我们在迭代的第 n 步，将波函数的表示式 $\phi^{(n)}$ 插入(8.20)的右端。对粒子散射，就得到(形式的)微扰级数

$$S_{fi} = \sum_{n=1}^{\infty} S^{(n)}_{fi} \tag{8.26a}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{\infty}\int \mathrm{d}^4x_n \ldots \int \mathrm{d}^4x_1 \varphi^{(+)*}_{p_f}(x_n) \\ &\times(-\mathrm{i})\hat{V}(x_n)\mathrm{i}\Delta_F(x_n - x_{n-1})(-\mathrm{i})\hat{V}(x_{n-1})\ldots\varphi^{(+)}_{p_i}(x_1)\ . \end{aligned} \tag{8.26b}$$

但这里与 1/2 自旋理论的类似的公式有重要的差别。那里展开(8.26a)是电荷 e 的幂级数，而这里不再这样：每一项 $S^{(n)}_{fi}$ 包含了 e^n 和 e^{2n} 间的幂的混合。如果我们要保持按耦合强度 e 展开的形式——这是微扰论的合理的形式——则各种贡献必须重新排列和合并。其理由可从(8.10)的相互作用位势 $\hat{V}$ 看出，它包含了线性项 eA 和二次项 e^2A^2。

当微扰级数项用 Feynman 图表示时，$\hat{V}$ 的性质还有一个重要的结果。在标量电动力学中有两类光子顶角，如图 8.3 所示。按照四腿顶角(图 8.3(b))(由于它的形状，也称为海鸥顶角)Bose 子可以同时吸收和/或发射两个光子。所以和旋量 QED 不同，对给定的过程，还有一个多余的“动物学”Feynman 图的贡献。但双光子顶角包含因子 e^2；所以如果最低级的计算已足够的话，在允许情况下，它的贡献可以不计(不是这种情况的例子见习题 8.2!)。

现在我们来研究当计算 Feynman 图时，给顶角分配哪些数学因子。为此，我们来构造一级 S 矩阵元(按照展开(8.26))：

$$\begin{aligned} S^{(1)}_{fi} &= \int \mathrm{d}^4x\, \varphi^{(+)*}_f(x)(-\mathrm{i})\hat{V}(x)\varphi^{(+)}_i(x) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^4x}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_f 2E_i}}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}p_f\cdot x}\left[e(\partial^\mu A_\mu + A_\mu\partial^\mu) + \mathrm{i}e^2 g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_i\cdot x} \end{aligned}$$

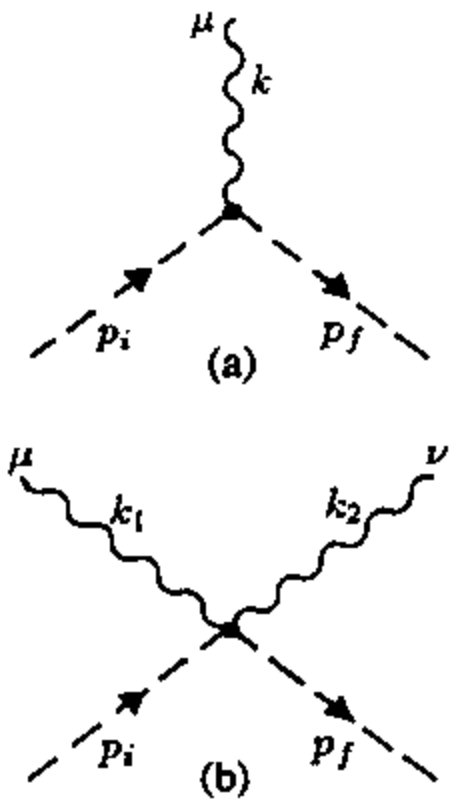


图 8.3(a),(b) 光子和自旋为 0 Bose 子之间的两类耦合顶角

$$\equiv S_{f_1}^{(1a)} + S_{f_2}^{(1b)}. \tag{8.27}$$

e 的线性项贡献可用分部积分来简化：

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(1a)} &= \frac{1}{\sqrt{2E_f 2E_i}(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_f\cdot x} e(\partial^\mu A_\mu + A_\mu\partial^\mu)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_i\cdot x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2E_f 2E_i}(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^4x\, e[-(\mathrm{i}p_f^\mu) + (-\mathrm{i}p_i^\mu)]A_\mu(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_f-p_i)\cdot x} \\ &= [(-\mathrm{i}e)(p_f^\mu + p_i^\mu)]\frac{1}{\sqrt{2E_f 2E_i}(2\pi)^3}A_\mu(p_f - p_i)\,. \end{aligned} \tag{8.28}$$

在第二行中抛去了由散度 $\partial^\mu(e^{\mathrm{i}(p_f-p_i)x}A_\mu(x))$ 引起的在无穷远处的面积分。所以图 8.3(a)中的单光子顶角分配了因子 $-\mathrm{i}e(p_f^\mu+p_i^\mu)$。此表示式起着电子-光子顶角中因子 $-\mathrm{i}e\gamma^\mu$ 的作用。另外，S 矩阵元包含了来源于平面波的归一化和动量交换为 $q=p_f-p_i$ 的 Fourier 变换的电磁位势的因子 $A_\mu(q)$。(8.27)中的二级耦合导致

$$S_{fi}^{(1b)} = (\mathrm{i}e^2 g_{\mu\nu})\frac{1}{\sqrt{2E_f 2E_i}(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_f-p_i)\cdot x}A^\mu(x)A^\nu(x)\,. \tag{8.29}$$

两个矢量位势的积的 Fourier 变换可变成动量空间中的卷积：

$$S_{fi}^{(1b)} = (\mathrm{i}e^2 g_{\mu\nu})\frac{1}{\sqrt{2E_f 2E_i}(2\pi)^3}\int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}A^\mu(q-k)A^\nu(k)\,. \tag{8.30}$$

我们必须小心对待(8.29)和(8.30)的解释，因为在此顶角上有两个分开的光子被发射/吸收。于是 A^μ 场包含两部分，我们称为 $A^\mu(1)$和 $A^\mu(2)$，如果我们取它的平方，由于单个光子不能作用两次，只有混合项被考虑了。

$$\begin{aligned} A^\mu A_\mu &= (A^\mu(1) + A^\mu(2))(A_\mu(1) + A_\mu(2)) \\ &\to A^\mu(1)A_\mu(2) + A^\mu(2)A_\mu(1) = 2A^\mu(1)A_\mu(2), \end{aligned} \tag{8.31}$$

这个原因导致了附加的因子 2。所以我们必须为图 8.3(b)的*双光子顶角*分配因子 $2\mathrm{i}e^2g_{\mu\nu}$。它和熟悉的归一因子和两个光子场的积相乘。

如果我们画出所有可能的 e 的二级过程 Feynman 图，如对湮灭的情况，附加因子 2 的必要性就更为明显。如我们在图 8.4 中可见，两个光子被发射。因为它们是不可区分的 *Bose* 粒子，末态是被对称化的。在有两个分开发射的图 8.4(a)情况中，这导致交换图 8.4(c)。同样在双光子的情况中，两个光子可以不同的方式相关。但由于交换图 8.4(d)和 8.4(b)有同样的结构，就可简单地将顶角因子乘 2，成为 $2\mathrm{i}e^2g_{\mu\nu}$。

但是这个可推广到任意过程的规则有一个例外：如图 8.5 那样的有封闭光子圈的图。这里也

必须对称化，这给出了因子 2。但如果对两个顶角都用 $2ie^2g_{\mu\nu}$，我们就双重计算了。于是为了修正它，每一个封闭圈必须乘因子 1/2。

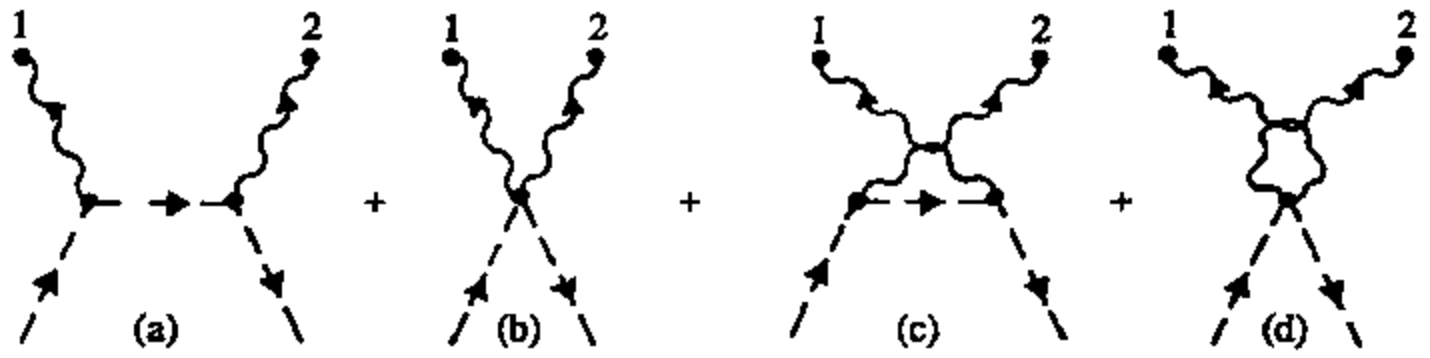


图 8.4(a)～(d)　对湮灭的二级图(b)和(d)有同样的值

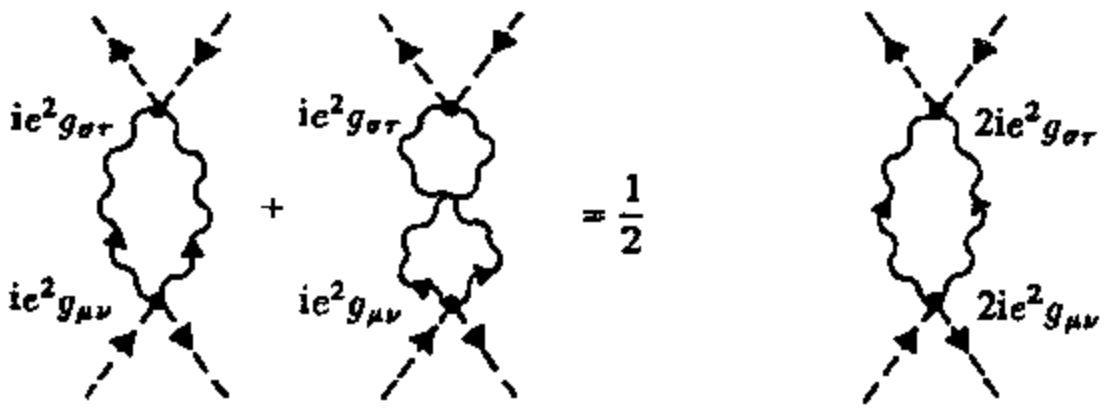


图 8.5　有封闭光子圈的图的对称化

(8.27)中的电磁场 A_μ 也可有作为源的 0 自旋 Bose 子的跃迁流 j_{fi}：

$$A^\mu(x) = \int \mathrm{d}^4y\, D_F(x-y) j^\mu_{fi}(y)\,. \tag{8.32}$$

按照(8.11)，又有级为 e 和 e^2 的两项出现于跃迁流中，它相应于图 8.3。这必定是这样的，因为在交换发射和吸收虚光子下，必须将结果对称化。

除了变形的顶角因子和传播子，所有计算截面的步骤都如第三章那样进行。与自旋 1/2 理论比较，计算极大地简化了。因为我们不再需要对粒子极化求和，并且不需要 γ 矩阵代数。

现在我们来考虑一个(无结构的)π 介子在时间无关的外 Coulomb 位势中散射的情况。按照 3.1 节，截面为

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{j_{\mathrm{in}}} \frac{|S_{fi}|^2}{T} \frac{V\mathrm{d}^3p_f}{(2\pi)^3}. \tag{8.33}$$

一级 S 矩阵元已在(8.27)中给出。对 Fourier 变换的 Coulomb 位势，我们有

$$A_\mu(q) = \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x} \frac{-Ze}{|\boldsymbol{x}|} g_{\mu 0} = 2\pi\delta(q_0) \frac{-Ze4\pi}{|\boldsymbol{q}|^2} g_{\mu 0}. \tag{8.34}$$

如果我们用在有限体积 V 中，每个盒子一个粒子的归一化，即用 $N_p = 1/\sqrt{2E_pV}$ 来代替(8.5)，

入射(粒子)流就为

$$j_{in} = -\varphi_{p_i}^{(+)} \mathrm{i} \overleftrightarrow{\nabla} \varphi_{p_i}^{(+)} = -\mathrm{i}\frac{1}{2E_i V}(2i\boldsymbol{p}) = \frac{1}{V}\frac{\boldsymbol{p}_i}{E_i} = \frac{\boldsymbol{v}_i}{V} . \tag{8.35}$$

用通常的替代$(2\pi\delta(E_f-E_i))^2 \to T\ 2\pi\delta(E_f-E_i)$,截面就为

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{V}{|\boldsymbol{v}_i|}\frac{1}{T}\left|(-\mathrm{i}e)\frac{(E_f+E_i)}{\sqrt{2E_f 2E_i V^2}}2\pi\delta(E_f-E_i)\frac{-Ze4\pi}{|\boldsymbol{q}|^2}\right|^2 \frac{V\mathrm{d}^3 p_f}{(2\pi)^3}$$

$$= \frac{4Z^2e^4}{|\boldsymbol{q}|^4}\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_f}{|\boldsymbol{v}_i|}\delta(E_f-E_i) . \tag{8.36}$$

于是我们得到散射到立体角元 $\mathrm{d}\Omega_f$ 中的微分截面为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_f} = \int \frac{|\boldsymbol{p}_f|^2\mathrm{d}|\boldsymbol{p}_f|}{|\boldsymbol{v}_i|}\delta(E_f-E_i)\frac{4Z^2\alpha^2}{|\boldsymbol{q}|^4} = \frac{4Z^2\alpha^2E^2}{|\boldsymbol{q}|^4} . \tag{8.37}$$

用动量交换 $|\boldsymbol{q}|^2 = 4|\boldsymbol{p}|^2\sin^2\theta/2$,见(3.38),我们可将(8.37)重新写成在质心系中的散射角的函数:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_f} = \frac{Z^2\alpha^2}{4|\boldsymbol{p}|^2v^2\sin^4\theta/2} . \tag{8.38}$$

将它和 3.1 节中的结果比较,我们注意到电子散射的截面包含一个附加的因子$(1-\beta^2\sin^2\theta/2)$。这个差异是由自旋 1/2 粒子的磁矩引起的;在低速极限下两个结果是一致的,因为那时磁相互作用可以忽略。

在习题 8.1 和 8.2 中计算了另外两个过程,Compton 散射和对产生。

8.4 标量电动力学的 Feynman 规则

如果包括了 0 自旋的 Bose 子,就要用下面的方法推广在第四章中编制的计算截面的规则。截面是按照(4.3)计算的。入或出射 Bose 子的归一化因子为

$$N_i = 1 .$$

这相当于外 Bose 子线的归一因子$\sqrt{1/(2E_iV)}$(归一化到体积 V 的盒子中有一个粒子)。为了计算一个过程的不变振幅 M_{fi},必须画出相应的 Feynman 图,并借助于下面一组规则转换成代数表示。

0 自旋粒子的 Feynman 规则。

1. 外线

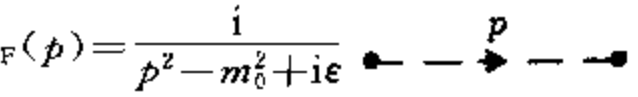
a) 入射 Bose 子 

b) 出射 Bose 子 

分配因子 1。

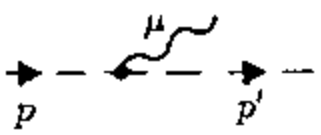
2. 每一条内 Bose 子线分配因子

$$\mathrm{i}\Delta_F(p)=\frac{\mathrm{i}}{p^2-m_0^2+\mathrm{i}\epsilon}$$

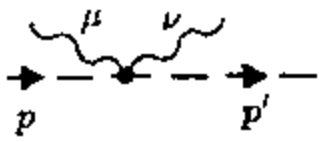


3. 顶角被如下的因子描写

a) 单光子顶角：$-ie(p'_\mu+p_\mu)$



b) 双光子顶角：$2ie^2g_{\mu\nu}$



4. 每一个封闭光子圈分配因子 1/2



5. 没有外加的因子 -1

规则 5 是显然的，因为根据 Bose 统计，Bose 子线的交换总是提供因子 $+1$。

习　　题

8.1　在 Bose 子上的 Compton 散射

问题：计算光子在 0 自旋 Bose 子上散射的最低级截面，和 3.7 节类似，检验散射振幅的规范不变性。

解：在最低级上(e^2)，有三类不同的必须相干地叠加的图，见图 8.6。按照 Feynman 规则，很容易构造不变振幅：

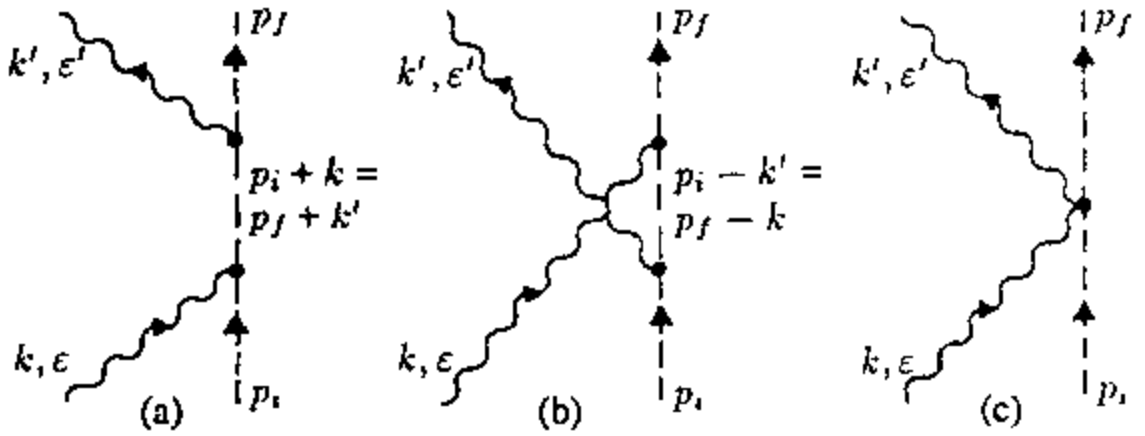


图 8.6(a)～(c)　在 0 自旋 Bose 子上 Compton 散射的三个二级 Feynman 图

$$M_{fi}^{(a)}=(-\mathrm{i}e)(p_f+p_f+k')^\mu\,\varepsilon_\mu^*(k',\lambda')\mathrm{i}\Delta_F(p_i+k)$$
$$\times(-\mathrm{i}e)(p_i+p_i+k)^\nu\varepsilon_\nu(k,\lambda),\tag{1a}$$

$$M_{fi}^{(b)} = (-ie)(p_f + p_f - k)^{\nu}\,\varepsilon_{\nu}(\boldsymbol{k},\lambda)\mathrm{i}\Delta_F(p_f - k) \times (-ie)(p_i + p_i - k')^{\mu}\varepsilon_{\mu}^{*}(\boldsymbol{k}',\lambda'), \tag{1b}$$

$$M_{fi}^{(c)} = 2ie^2 g^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu}^{*}(\boldsymbol{k}',\lambda')\varepsilon_{\nu}(\boldsymbol{k},\lambda)\,. \tag{1c}$$

完全不变振幅可写为

$$M_{fi} = \varepsilon_{\mu}^{*}(\boldsymbol{k}',\lambda')\,T^{\mu\nu}\,\varepsilon_{\nu}(\boldsymbol{k},\lambda)\,. \tag{2}$$

这里引入了 Compton 张量 $T^{\mu\nu}(p_i,p_f,k,k')$。其形式为

$$T^{\mu\nu} = -ie^2\left[\frac{(2p_f + k')^{\mu}(2p_i + k)^{\nu}}{(p_i + k)^2 - m_0^2} + \frac{(2p_i - k')^{\mu}(2p_f - k)^{\nu}}{(p_f - k)^2 - m_0^2} - 2g^{\mu\nu}\right]. \tag{3}$$

我们首先检验此表示式的规范不变性。如在 3.6 节中解释的那样，当位势重新规范时，即 $\varepsilon_{\nu}(k)\to\varepsilon_{\nu}(k)+k_{\nu}\Lambda(k)$，振幅的值必须不变，即

$$T^{\mu\nu}k_{\nu} = 0,\quad k_{\mu}T^{\mu\nu} = 0\,. \tag{4}$$

现在我们重写(3)中的分母为：

$$(p_i + k)^2 - m_0^2 = p_i^2 + 2k\cdot p_i + k^2 - m_0^2 = 2k\cdot p_i + k^2, \tag{5a}$$

$$(p_f - k)^2 - m_0^2 = p_f^2 - 2k\cdot p_f + k^2 - m_0^2 = -2k\cdot p_f + k^2. \tag{5b}$$

于是我们发现

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}k_{\nu} &= -ie^2\left[\frac{(2p_f + k')^{\mu}(2p_i\cdot k + k^2)}{(p_i + k)^2 - m_0^2} + \frac{(2p_i - k')^{\mu}(2p_f\cdot k - k^2)}{(p_f - k)^2 - m_0^2} - 2k^{\mu}\right] \\ &= -ie^2\left[(2p_f + k')^{\mu} - (2p_i - k')^{\mu} - 2k^{\mu}\right] \\ &= -ie^2 2(p_f + k' - p_i - k)^{\mu} = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

用同样的方法可以证明(4b)。显然，为了在微扰级数的给定的 e^n 级上满足规范不变性，双光子顶角是必不可少的。

按照第四章的规则，现在截面为

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{(4\pi)^2}{4\sqrt{(p_i\cdot k)^2 - 0}}(2\pi)^4\delta^4(p_f + k' - p_i - k)\,|M_{fi}|^2\,\frac{\mathrm{d}^3p_f}{2E_f(2\pi)^3}\,\frac{\mathrm{d}^3k'}{2\omega'(2\pi)^3}\,, \tag{7}$$

其中 $\omega' = |\boldsymbol{k}'|$ 是光子能量。对动量 p_f 和 k' 的有点冗长的积分，是在 3.7 节(3.249)中完成的，结果为

$$\int\frac{\mathrm{d}^3p_f}{2E_f}\,\frac{\mathrm{d}^3k'}{2\omega'}\,\delta^4(p_f + k' - p_i - k) = \frac{1}{2m_0}\int\mathrm{d}\Omega_{k'}\,\frac{\omega'^2}{2\omega}\,. \tag{8}$$

于是微分截面为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_{k'}} = \frac{1}{|p_i\cdot k|}\,\frac{1}{2m_0}\,\frac{\omega'^2}{2\omega}\,|M_{fi}|^2. \tag{9}$$

在原来粒子处于静止的实验系中，我们有 $p_i = (m_0,\boldsymbol{0})$ 所以 $p_i\cdot k = m_0\omega$。为了计算 $|M_{fi}|^2$，现在如在 3.7 中那样选取如下的*特殊规范*：

$$\varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{k},\lambda) = (0,\boldsymbol{\varepsilon}_{\mu}(\boldsymbol{k},\lambda)) \qquad \text{其中} \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},\lambda)\cdot\boldsymbol{k} = 0, \tag{10a}$$

$$\varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{k}',\lambda') = (0,\boldsymbol{\varepsilon}_{\mu}(\boldsymbol{k}',\lambda')) \qquad \text{其中} \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k}',\lambda')\cdot\boldsymbol{k}' = 0\,. \tag{10b}$$

由于此规范的横向性，所有带 $\varepsilon \cdot k$ 和 $\varepsilon' \cdot k'$ 的项都为 0，所以(2)简化成

$$M_{fi} = -\mathrm{i}e^2\left(\frac{2\varepsilon'^* \cdot p_f\, 2\varepsilon \cdot p_i}{2m_0\omega} + \frac{2\varepsilon'^* \cdot p_i\, 2\varepsilon \cdot p_f}{-2m_0\omega'} - 2\varepsilon'^* \cdot \varepsilon\right) \tag{11}$$
$$= -2\mathrm{i}e^2\varepsilon^*(\boldsymbol{k}',\lambda') \cdot \varepsilon(\boldsymbol{k},\lambda)\ .$$

借助于规范(10)，因为 $\varepsilon \cdot p_i = (0,\varepsilon)\cdot(m_0,0) = 0$ 和 $\varepsilon' \cdot p_i = (0,\varepsilon')\cdot(m_0,0) = 0$，前两项可去掉，于是 0 自旋 Bose 子的 Compton 散射完全地只被图 c 描写！从(9)得截面为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_{k'}} = \frac{e^4}{m_0^2}\frac{\omega'^2}{\omega^2}|\varepsilon^*(\boldsymbol{k}',\lambda') \cdot \varepsilon(\boldsymbol{k},\lambda)|^2. \tag{12}$$

如果我们不观察光子的极化，我们必须对 λ 求平均，对 λ' 求和。按照 3.7 节，(3.286)，我们有

$$\frac{1}{2}\sum_{\lambda,\lambda'}|\varepsilon^*(\boldsymbol{k}',\lambda') \cdot \varepsilon(\boldsymbol{k},\lambda)|^2 = \frac{1}{2}(1+\cos^2\theta), \tag{13}$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{k}'$ 间的夹角。于是不极化的 Compton 截面为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{unpol}}}{\mathrm{d}\Omega_{k'}} = \frac{1}{2}r_0^2\frac{\omega'^2}{\omega^2}(1+\cos^2\theta), \tag{14}$$

其中的粒子的经典电子半径为 $r_0 = e^2/m_0c^2$。这个结果比 1/2 自旋粒子上的 Compton 散射的结果稍微简单一点。通过在(14)中做替代

$$1+\cos^2\theta \to \left(\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\omega}{\omega'}-1\right)+\cos^2\theta$$

3.7 节中的 Klein-Nishina 公式得到了恢复。所以在 $\omega' \approx \omega$ 的低光子能量下，截面是与粒子的自旋无关的。

习　　题

8.2　π 对的电产生

问题：计算过程 $e^+ + e^- \to \pi^+ + \pi^-$ 的截面，在此过程中，电子-正电子对湮灭为一个虚光子，然后衰变成一对带电介子。截面是在加速器实验中测量的，并得到在能量 $E_{\mathrm{tot}} = 770\mathrm{MeV}$ 时(即如果粒子和反粒子以相等的能量碰撞，它们的能量为 $E = 385\mathrm{MeV}$)有最大值 $\sigma \simeq 1.4\times10^{-30}\mathrm{cm}^2$。将此值和理论结果作比较。

解：在最低级上必须计算图 8.7，其中 p_1 和 p_2 表示入射电子和正电子的四动量，$p_1'(p_2')$ 为 $\pi^-(\pi^+)$ 的。按照第四章，截面给定为

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2 - m_0^4}}(2m_0)^2(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_1'-p_2')|M_{fi}|^2$$
$$\times \frac{\mathrm{d}^3p_1'}{2E_1'(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}^3p_2'}{2E_2'(2\pi)^3}\ . \tag{1}$$

现在我们在质心系中进行计算(在储存环碰撞实验中，它是和实验系一致的)，所以我们有

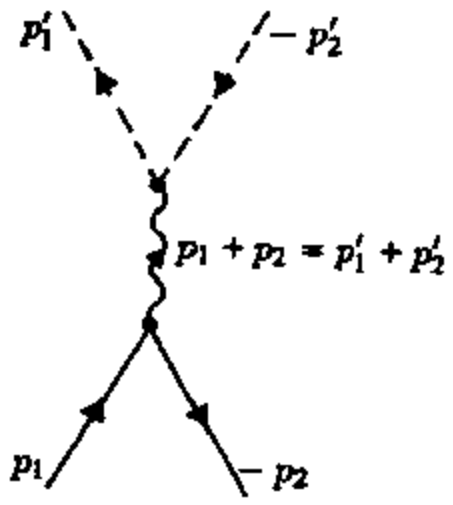


图 8.7 电子-正电子对电磁湮灭到无自旋带电介子的最低级图

$$p_1=(E,\boldsymbol{p}),p_2=(E,-\boldsymbol{p}), \tag{2a}$$

$$p_1'=(E,\boldsymbol{p}'),p_2'=(E,-\boldsymbol{p}'). \tag{2b}$$

流量因子为

$$\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2-m_0^4}=\sqrt{(E^2+\boldsymbol{p}^2)-m_0^4}=2E|\boldsymbol{p}|. \tag{3}$$

对不变矩阵元 M_{fi}的计算，我们用标量和旋量粒子的 Feynman 规则：

$$\begin{aligned}M_{fi}&=-(-\mathrm{i}e)(p_1'-p_2')_\mu \mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(p_1+p_2)\bar{v}(p_2,s_2)(-\mathrm{i}e\gamma_\nu)u(p_1,s_1)\\&=\mathrm{i}e^2\frac{4\pi}{(p_1+p_2)^2}\bar{v}(p_2,s_2)(\not{p}_1'-\not{p}_2')u(p_1,s_1).\end{aligned} \tag{4}$$

其中总动量为

$$q=p_1+p_2=(2E,\boldsymbol{0}) \tag{5}$$

对初态自旋 s_1 和 s_2 取平均，得到微分截面为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\bar{\sigma}&=\frac{1}{4}\sum_{s_1s_2}\frac{m_0^2}{2E^3|\boldsymbol{p}|}\delta^4(p_1+p_2-p_1'-p_2')\frac{e^4}{q^4}\\&\quad\times|\bar{v}(p_2,s_2)(\not{p}_1'-\not{p}_2')u(p_1,s_1)|^2\mathrm{d}^3p_1'\mathrm{d}^3p_2'\\&=\frac{e^4}{q^4}\frac{m_0^2}{2E^3|\boldsymbol{p}|}\delta^4(p_1+p_2-p_1'-p_2')S\mathrm{d}^3p_1'\mathrm{d}^3p_2'.\end{aligned} \tag{6}$$

自旋和的计算

$$S=\frac{1}{4}\sum_{s_1s_2}|\bar{v}(p_2,s_2)(\not{p}_1'-\not{p}_2')u(p_1,s_1)|^2 \tag{7}$$

将被简化，如果我们重写

$$\begin{aligned}&\bar{v}(p_2,s_2)(\not{p}_1'-\not{p}_2')u(p_1,s_1)\\&=\bar{v}(p_2,s_2)[(\not{p}_1'+\not{p}_2')-2\not{p}_2']u(p_1,s_1)\\&=\bar{v}(p_2,s_2)(\not{p}_1+\not{p}_2)u(p_1,s_1)-2\bar{v}(p_2,s_2)\not{p}_2'u(p_1,s_1).\end{aligned} \tag{8}$$

因为

$$\begin{aligned}\not{p}_1u(p_1,s_1)&=m_0u(p_1,s_1),\\\bar{v}(p_2,s_2)\not{p}_2&=-m_0\bar{v}(p_2,s_2).\end{aligned}$$

和的第一项为 0。按照第三章的规则，自旋和可重写为一个迹：

$$\begin{aligned}S&=\sum_{s_1s_2}(\bar{u}(p_1,s_1)\not{p}_2'v(p_2,s_2))(\bar{v}(p_2,s_2)\not{p}_2'u(p_1,s_1))\\&=-\mathrm{Tr}\left(\not{p}_2'\frac{-\not{p}_2+m_0}{2m_0}\not{p}_2'\frac{\not{p}_1+m_0}{2m_0}\right).\end{aligned} \tag{9}$$

按照节 3 中的规则，迹的计算给出

$$S=\frac{1}{4m_0^2}(\mathrm{Tr}\ \not p_2'\not p_2\not p_2'\not p_1-m_0^2\,\mathrm{Tr}\ \not p_2'\not p_2')$$
$$=\frac{1}{m_0^2}(2p_1\cdot p_2'p_2\cdot p_2'-M_0^2p_1\cdot p_2-m_0^2M_0^2)\ , \tag{10}$$

其中 m_0 是电子的静止质量，而 M_0 是 π 介子的。所以在质心系中，用(2)和质壳限制 $E^2=|\boldsymbol{p}|^2+m_0^2$，$E^2=|\boldsymbol{p}'|^2+M_0^2$ 我们得到

$$S=\frac{1}{m_0^2}[2(E^2+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}')(E^2-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}')-M_0^2(E^2+|\boldsymbol{p}|^2)-m_0^2M_0^2]$$
$$=\frac{2}{m_0^2}[E^2|\boldsymbol{p}'|^2-(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}')^2]\ . \tag{11}$$

由此，得到总截面为

$$\bar\sigma=\frac{e^4}{q^4}\frac{1}{E^3|\boldsymbol{p}|}\int \mathrm{d}^3p_1'\,\mathrm{d}^3p_2'\delta^4(p_1+p_2-p_1'-p_2')[E^2|\boldsymbol{p}'|^2-(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}')^2]$$
$$=\frac{e^4}{q^4}\frac{1}{E^3|\boldsymbol{p}|}\int|\boldsymbol{p}'|^2\mathrm{d}|\boldsymbol{p}'|\mathrm{d}\phi'\,\mathrm{d}\cos\theta'\delta(2E-2E')$$
$$\times(E^2|\boldsymbol{p}'|^2-|\boldsymbol{p}|^2|\boldsymbol{p}'|^2\cos^2\theta')\ . \tag{12}$$

描写能量守恒的 δ 函数可重写为

$$\delta(2E-2E')=\frac{1}{2}\frac{E}{|\boldsymbol{p}'|}\delta\left(|\boldsymbol{p}'|-\sqrt{E^2-M_0^2}\right)\ . \tag{13}$$

假定阈条件 $L\geqslant M_0^2$ 是满足的，(12)就成为

$$\bar\sigma=\frac{e^4}{q^4}\frac{1}{E^3|\boldsymbol{p}|}2\pi\frac{1}{2}\frac{E}{|\boldsymbol{p}'|}|\boldsymbol{p}'|^4\int_{-1}^{+1}\mathrm{d}\cos\theta'(E^2-|\boldsymbol{p}|^2\cos^2\theta')$$
$$=\frac{\pi e^4}{q^4}\frac{|\boldsymbol{p}'|^3}{E^2|\boldsymbol{p}|}\left(2E^2-\frac{2}{3}|\boldsymbol{p}|^2\right)$$
$$=\frac{\pi\alpha^2}{3q^2}\frac{|\boldsymbol{p}'|^3}{E^3}\frac{E}{|\boldsymbol{p}|}\left(1+\frac{1}{2}\frac{m_0^2}{E^2}\right). \tag{14}$$

因为与入射能量 E 相比，电子质量 m_0 是可忽略的，所以精确的结果(14)可简化为

$$\bar\sigma\simeq\frac{\pi\alpha^2}{3q^2}\beta'^3=\frac{\pi\alpha^2\beta'^3}{12E^2}\ , \tag{15}$$

其中 $\beta'=|\boldsymbol{p}'|/E$ 是 π 介子的速度。

为了计算给定能量 $E=385$ MeV 处的 $\bar\sigma$ 值，我们必须在(15)中插入适当的 $\hbar$ 和 c 的幂次。显然，我们必须乘以 $\hbar^2c^2\simeq(197\ \mathrm{MeV}\cdot\mathrm{fm})$，使得 $\bar\sigma$ 得到面积的量纲：

$$\bar\sigma=\frac{\pi\alpha^2\beta'^3}{12E^2}\hbar^2c^2$$
$$\simeq\frac{\pi\cdot0.932^3\cdot197^2}{12\cdot137^2\cdot385^2}\mathrm{fm}^2=3\times10^{-32}\mathrm{cm}^2, \tag{16}$$

其中 π 介子的速度 $\beta'=\sqrt{E^2-M_0^2}/E\simeq0.932$。所以测量到的 π 介子对截面比结果(14)预言的大

很多，几乎大了因子 50。

显然，只依靠电磁场相互作用的无结构粒子的假设是不正确的。在给定能量处产生大截面的原因是，虚光子首先转换为量子数相同的（自旋为 1，负宇称）ρ^0 介子，然后再衰变为 π 介子或参加包含强作用的其他过程。这种虚光子的性质是由“矢量为主”模型来描写的。“共振能量”等于该粒子的质量，对矢量介子 ρ^0，它等于 $M=770$ MeV。实际上在 e^+e^- 湮灭的截面中，发现了整个一族表现为共振态的短寿命介子。π 介子的纯电磁产生机制只起着背景过程的作用。

附　录

在本附录中，我们收集了一些文献，以使有兴趣的读者可以更详细地学习量子电动力学的有关知识、或用更广泛的量子场理论来理解量子电动力学。

1. 有关量子电动力学和各种过程计算的书籍

● A. Akhiezer and V. B. Berestetskii: *Quantum Electrodynamics*, Interscience, New York (1965)

● J. M. Jauch and F. Rohrlich: *The Theory of Photons and Electrons*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin (1976)

● G. Källen: *Quantum Electrodynamics*, Spring-Verlag, Berlin (1972)

● I. Bialynicki-Birula and Z. Bialynicka-Birula: *Quantum Electrodynamics*, Pergamon, Oxford (1975)

● V. B. Berestetzkii, E. M. Lifshitz, and L. P. Pitaevskii, *Relativistic Quantum Theory*, Pergamon Press, Oxford (1971)

2. 概括强场量子电动力学有关专题的两本书

● W. Greiner, B. Müller, J. Rafelski: *Quantum Electrodynamics of Strong Fields*, Springer-Verlag, Berlin (1985)

● V. L. Ginzburg (ed.): *Issues in Intense-Field Quantum Electrodynamics*, Nova Science Publ., Commack, N. Y. (1987)

3. 有关与量子电动力学理论对比的各种实验的最新信息需要从原始的研究论文和会议文集的综述文章中得到。另外，下面这本书也提供了好的综述

● T. Kinoshita (ed.): *Quantum Electrodynamics*, World Scientific, Singapore (1990)

4. 一本较早但仍很有价值的收集有关量子电动力学基本原始文章的文集

● J. Schwinger (ed.): *Quantum Electrodynamics*, Dover, New York (1958)

5. 一些经典的量子电动力学教材，以时间为序排列

● N. N. Bogoliubov and D. V. Shirkov: *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, Interscience, New York (1959)

● S. S. Schweber: *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*, Harper & Row,

New York (1962)

● J. D. Bjorken and S. D. Drell: *Relativistic Quantum Mechanics*, and *Relativistic Quantum Fields*, Mc Graw-Hill, New York (1964)

● D. Lurié: *Particles and Fields*, Interscience, New York (1968)

● C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York (1980)

6. 一些从路径积分角度有关量子场论和规范理论的参考文献

● L. H. Ryder: *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge (1985)

● D. Bailin and A. Love: *Introduction to Gauge Field Theory*, Adam Hilger, Bristol, Boston (1986)

● R. J. Rivers: *Path Integral Methods in Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge (1987)

● S. Pokorski: *Gauge Field Theories*, Cambridge University Press, Cambridge (1987)

[General Information]
书名=量子电动力学
作者=
页数=358
SS号=10429208
出版日期=

封面页
书名页
版权页
前言页
目录页
第一章　传播子与散射理论
　　１．１　引言
　　１．２　非相对论传播子
　　１．３　Ｇｒｅｅｎ函数和传播子
　　１．４　ψ的一个积分方程
　　１．５　散射问题的应用
　　１．６　Ｓ矩阵的幺正性
　　１．７　Ｓ矩阵的对称性质
　　１．８　动量表象中的Ｇｒｅｅｎ函数和它的性质
　　１．９　对相互作用粒子Ｇｒｅｅｎ函数的其他考虑
　　１．１０　传记
第二章　电子和正电子的传播子
第三章　量子电动力学过程
　　３．１　电子的Ｃｏｕｌｏｍｂ散射
　　３．２　电子在自由质子上的散射：反冲效应
　　３．３　全同Ｆｅｒｍｉ子上的散射
　　３．４　电子－正电子散射：Ｂｈａｂｈａ散射和μ子对产生
　　３．５　极化的Ｄｉｒａｃ粒子的散射
　　３．６　轫致辐射
　　３．７　Ｃｏｍｐｔｏｎ散射－－Ｋｌｅｉｎ－Ｎｉｓｈｉｎａ公式
　　３．８　粒子和反粒子的湮灭
　　３．９　传记
第四章　总结：ＱＥＤ和Ｆｅｙｎｍａｎ规则
　　４．１　动量空间中ＱＥＤ的ＦｅｙｎｍａｎＦ规则
　　４．２　不同规范下的光子传播子
　　４．３　传记
第五章　高阶散射矩阵
　　５．１　电子－正电子的四阶散射
　　５．２　真空极化
　　５．３　电子自能
　　５．４　顶角修正
　　５．５　传记
第六章　双粒子体系
　　６．１　Ｂｅｔｈｅ－Ｓａｌｐｅｔｅｒ方程
　　６．２　传记
第七章　强场的量子电动力学
　　７．１　原子中的强场
　　７．２　在重离子碰撞中的强场
　　７．３　电磁场的等效Ｌａｇｒａｎｇｅ量
　　７．４　传记
第八章　无自旋Ｂｏｓｅ子的量子电动力学
　　８．１　Ｋｌｅｉｎ－Ｇｏｒｄｏｎ方程
　　８．２　标量粒子的Ｆｅｙｎｍａｎ传播子
　　８．３　０自旋Ｂｏｓｅ子的散射
　　８．４　标量电动力学的Ｆｅｙｎｍａｎ规则
附录

附录页