量子电动力学

北京师范大学出版社

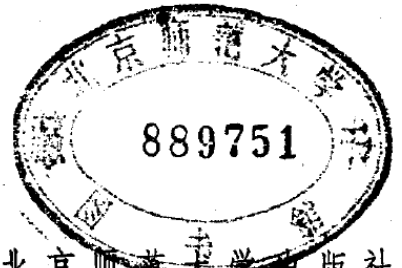
量子电动力学

S. N. 古普塔 著

史天一 孙 岳 刘在祥 译

喀兴林 校

O413.1/20



北京师范大学出版社

1981.3

原文书名：

Quantum Electrodynamics

Suraj N. Gupta

Gordon and Breach Science Publishers

1977

ISBN 0 - 677 - 04240 - X

前　言

虽然我们对基本粒子物理学的完全认识仍然是一个诱人的而又捉摸不透的努力目标，可是在量子电动力学方面的很多东西却可以认为是已完全确立了的。在探索基本粒子相互作用方面，量子电动力学的广泛知识对理论和实验物理学家来说都是必不可少的。在本书中，我对基本理论，计算技巧，以及量子电动力学的重要应用作了简洁而系统的介绍。对数学推演作了足够详细的解释，而且对许多公式的推导给出了不寻常的简化形式。

为了弄清基本思想，对量子场论的基本原理进行了充分讨论，而对其理论结构采用了较为普遍的形式，使它也能在相当大的程度上适用于强相互作用，弱相互作用和重力相互作用。

本书基本上是自足的，但读者应具有研究生一年级水平的标准量子力学课程的预备知识。我已经作了特殊的努力来保证本书既对研究人员，又对学生们都是有用的和可以获益的。

衷心感谢 S·霍夫曼在准备本书手稿中的秘书作用。

S.N. 古普塔

目　录

前　言
第一章　经典场论……（1）
1．张量和洛伦兹变换……（1）
2．经典电动力学定律……（3）
3．电磁能量动量张量……（5）
4．电磁势……（7）
5．辐射场……（8）
6．经典场的变分原理……（10）
7．能量动量张量的性质……（12）
8．能量动量张量的一般推导……（15）
9．δ函数……（19）
10．场的傅里叶分解……（22）
第二章　量子场论原理……（25）
11．量子力学的理论结构……（25）
12．采用不定度规的量子力学……（32）
13．玻色振子和费米振子……（37）
14．用正规积表示的量子场论……（41）
15．海森伯绘景和薛定谔绘景……（49）
16．相互作用绘景……（50）
17．复场……（55）
18．场的量子化的几个实例……（58）
第三章　电子场和光子场……（65）
19．光子场的拉格朗日形式……（65）
20．光子场的量子化……（67）
21．电子场的狄喇克方程……（73）

22. 电子场方程的洛伦兹协变性…… (77)
23. 电子场的拉格朗日形式…… (81)
24. 电子场的傅里叶分解…… (83)
25. 电子场的量子化…… (86)
26. 光子场和电子场的相互作用…… (89)
27. 电荷共轭…… (93)
28. 时间反转…… (96)
第四章 散射算符…… (99)
29. 散射算符的展开式…… (99)
30. 不变奇异函数 …… (102)
31. 协变的对易关系 …… (107)
32. 相互作用绘景里的附加条件 …… (110)
33. 散射算符的化简 …… (112)
34. 散射矩阵元和相互作用图 …… (119)
35. 导数耦合的散射算符 …… (124)
第五章 散射截面与寿命 …… (128)
36. 截面的推导 …… (128)
37. 对自旋态和极化态取和 …… (131)
38. 光子-电子散射…… (134)
39. 正电子-电子湮没…… (140)
40. 电子-电子的散射…… (144)
41. 电子被外场散射 …… (151)
42. 韧致辐射 …… (156)
43. 衰变过程 …… (161)
第六章 规则化与重整化 …… (167)
44. 散射过程的高阶贡献 …… (167)
45. 规则化 …… (171)
46. 电子和光子的自能 …… (179)

47. 重整化 …… (186)
48. 电子散射的辐射修正 …… (190)
49. 散射算符的规范不变性 …… (201)
50. 原始发散 …… (203)
51. 量子电动力学中的重整化 …… (210)
第七章 若干专题 …… (221)
52. 泡利旋量和泡利矩阵 …… (221)
53. 散射算符的么正化 …… (225)
54. 散射过程中的阻尼效应 …… (228)
55. 双粒子势的推导 …… (233)
56. 电子-电子势和正电子-电子势 …… (238)
57. 红外发散 …… (243)
58. 高能电子散射 …… (247)
59. 多光子产生 …… (254)

第一章　经典场论

众所周知，经典力学仅能解释一些有限的实验结果，而更多的精密实验已经显示出对量子力学的需要。虽然经典理论没有为我们提供对自然界完善的描述，但它仍是一个自洽的理论。经典理论和量子理论相比，它比较简单而且为人们所熟悉，而且在它本身的适用范围内可以解释所观察到的现象。此外，我们常常从经典理论导出量子理论的公式。因此，熟悉经典电磁场和经典场论的某些一般原理是有用的。

1. 张量和洛伦兹变换

我们首先说明本书中所采用的张量表示法。一个四维矢量表示为 A_μ，而一个二阶张量表示为 $A_{\mu\nu}$，其中希腊指标取值永远为 1、2、3、4。特别是，一个点的四维坐标表示为 x_μ，其中 x_1、x_2 和 x_3 是空间坐标，而 $x_4=ict$。任何四维矢量 A_μ 的空间分量表示为 A_i 或 $\vec{A}$，其中拉丁指标的取值永远为 1、2、3。重复的拉丁或希腊指标，意味着对该指标的所有值取和。我们将经常直接用指标 0 来代替 4，这两个指标之间的联系是

$$A_4=iA_0,\quad A_{i4}=iA_{i0},\quad A_{4i}=iA_{0i},\quad A_{44}=i^2A_{00}=-A_{00},\tag{1.1}$$

但必须注意，我们将把 $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ 表示为 ∂_μ，把 $\frac{\partial}{\partial x_0}$ 表示为 ∂_0，因而 $\partial_4=-i\partial_0$。为了方便起见有时我们略掉四维矢量指标，将 A_μ 表示为 A，将 $A_\mu B_\mu$ 表示为 $A\cdot B$，将 A_μ^2 表示为 A^2，而将 ∂_μ 表示为 ∂^2。我们也把 $dx_1dx_2dx_3$ 表示为 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$，而 $dx_1dx_2dx_3dx_0$

表示为 dx 。

若 A_i 和 A_0 是实数，我们就称一个四维矢量 A_μ 为实矢量，同样，若 A_{ik}、A_{i0}、A_{0i} 和 A_{00} 都是实数，则称张量 $A_{\mu\nu}$ 为实张量。在涉及张量的复共轭时要予以特别注意。我们将始终用星号来表示任意非张量的量的复共轭。我们也用星号来表示带有指标 1、2、3、0 的任何张量分量的复共轭，但是若指标 4 在一个张量分量中出现几次，那么星号就表示 $(-1)^n$ 乘以这个分量的复共轭。这样，关系式 $A_4 = iA_0$ 的复共轭就是

$$-A_4^* = -iA_0^*$$

或

$$A_4^* = iA_0^*, \tag{1.2}$$

同样

$$A_{i4}^* = iA_{i0}^*, \quad A_{4i}^* = iA_{0i}^*, \quad A_{44}^* = -A_{00}^*. \tag{1.3}$$

若 A_μ 和 $A_{\mu\nu}$ 是实的，则由此得到

$$A_\mu^* = A_\mu, \quad A_{\mu\nu}^* = A_{\mu\nu}. \tag{1.4}$$

保持量 x_μ^2 为不变量的空时坐标 x_μ 的任何线性变换称为洛伦兹变换，这样的一个变换可以表示为

$$x'_\mu = a_{\mu\nu}x_\nu \tag{1.5}$$

其中

$$a_{\mu\lambda}a_{\nu\lambda} = a_{\lambda\mu}a_{\lambda\nu} = \delta_{\mu\nu}. \tag{1.6}$$

所有洛伦兹变换由下述三个变换中的一个或几个组成：(1)正常洛伦兹变换，(2)空间反演，(3)时间反转。一个正常洛伦兹变换对应于空时轴的一个连续转动。空间反演是

$$x'_i = -x_i, \quad x'_4 = x_4, \tag{1.7}$$

而时间反转是

$$x'_i = x_i \quad x'_4 = -x_4. \tag{1.8}$$

空间反演也就是通常所说的宇称操作，按照一个量在空间反演下保持不变或者经受一次符号改变而称这一量具有偶宇称或奇宇称。

我们考虑相应于空时轴的一个无限小转动的洛伦兹变换，在这样一个变换下

$$x'_\mu = x_\mu + \omega_{\mu\nu}x_\nu, \tag{1.9}$$

其中 $\omega_{\mu\nu}$ 是无限小量，所以

$$a_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu},$$

将此式代入（1.6）式中，得出

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}. \tag{1.10}$$

注意下述关系也是有用的

$$\partial\omega_{\mu\nu}/\partial\omega_{\alpha\beta} = \delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} - \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha}. \tag{1.11}$$

任何正常洛伦兹变换都可以从由（1.9）和（1.10）式给出的较简单的无限小变换组成。

2. 经典电动力学定律

经典电动力学讨论电磁场和带电物体之间的相互作用。电磁场是由作为空间和时间函数的电场强度 **E** 和磁场强度 **H** 来描述的。另一方面，带电物体在场中产生电荷密度 ρ 和电流密度 $\rho\mathbf{v}$，其中 **v** 为电荷的速度。电磁场对于电荷存在的依赖关系是由麦克斯韦方程组给出的

$$\nabla\times\mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{c}\rho\mathbf{v}, \tag{2.1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \rho, \tag{2.2}$$

$$\nabla\times\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = 0, \tag{2.3}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{H} = 0, \tag{2.4}$$

而电荷所受电磁场的力是由洛伦兹方程给出

$$\mathbf{K} = \rho\mathbf{E} + \frac{\rho}{c}(\mathbf{v}\times\mathbf{H}), \tag{2.5}$$

其中 **K** 表示电磁场施加在电荷上的力密度。

若我们按照下式把 $\rho\mathbf{v}$ 和 $c\rho$ 当作一个四维矢量 j_μ 的分量，

把 **E** 和 **H** 当作一个反对称张量 $F_{\mu\nu}$ 的分量：

$$(j_1, j_2, j_3) = \rho \mathbf{v}, \quad j_4 = ic\rho, \tag{2.6}$$

$$(F_{23}, F_{31}, F_{12}) = \mathbf{H}, \quad (F_{41}, F_{42}, F_{43}) = i\mathbf{E}. \tag{2.7}$$

那么上述 (2.1)—(2.5) 各式就可以表示成协变的形式，我们可将 (2.1) 和 (2.2) 式表示为

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = \frac{1}{c} j_\mu, \tag{2.8}$$

(2.3) 和 (2.4) 式可表示为

$$\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} = 0. \tag{2.9}$$

同样可以把 (2.5) 式写成协变形式

$$K_\mu = \frac{1}{c} F_{\mu\nu} j_\nu, \tag{2.10}$$

其中 K_μ 的空间分量相应于 **K**。为了阐明 K_μ 时间分量的意义，我们注意到，按照 (2.10)，(2.6) 和 (2.7) 式

$$K_0 = \frac{1}{c} F_{0i} j_i = \frac{\rho}{c} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}),$$

利用 (2.5) 式，由上式可以得到

$$K_0 = \frac{1}{c} (\mathbf{K} \cdot \mathbf{v}) = \frac{w}{c}, \tag{2.11}$$

其中 $w = \mathbf{K} \cdot \mathbf{v}$ 表示电磁场对于单位体积内的电荷所完成的功率。

将 (2.8) 式对 x_μ 微分，得

$$\partial_\mu \partial_\nu F_{\mu\nu} = \frac{1}{c} \partial_\mu j_\mu.$$

因为 $F_{\mu\nu}$ 是反对称的，上式左边为零，因此得

$$\partial_\mu j_\mu = 0, \tag{2.12}$$

此式表示电荷守恒。

3. 电磁能量动量张量

使用场方程（2.8）和（2.9）二式以及$F_{\mu\nu}$是反对称的这一事实，可以将力密度(2.10)表示为一个张量的四维散度。因为，按照（2.8）和（2.10）式，有

$$K_\mu = F_{\mu\nu}\partial_\rho F_{\nu\rho} = \partial_\rho(F_{\mu\nu}F_{\nu\rho}) - F_{\nu\rho}\partial_\rho F_{\mu\nu}, \qquad (3.1)$$

再将（2.9）式乘以$F_{\nu\rho}$，得

$$F_{\nu\rho}\partial_\rho F_{\mu\nu} + F_{\nu\rho}\partial_\nu F_{\rho\mu} + F_{\nu\rho}\partial_\mu F_{\nu\rho} = 0 \qquad (3.2)$$

在（3.2）式的第二项中交换指标ν和ρ

$$2F_{\nu\rho}\partial_\rho F_{\mu\nu} + F_{\nu\rho}\partial_\mu F_{\nu\rho} = 0,$$

所以

$$F_{\nu\rho}\partial_\rho F_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}F_{\nu\rho}\partial_\mu F_{\nu\rho} = -\frac{1}{4}\partial_\mu F^2_{\nu\rho}, \qquad (3.3)$$

于是从（3.1）和（3.3）式就可得到

$$K_\mu = \partial_\rho(F_{\mu\nu}F_{\nu\rho}) + \frac{1}{4}\partial_\mu(F^2_{\nu\rho}),$$

上式可以写成这样的形式

$$K_\mu = -\partial_\nu T_{\mu\nu} \qquad (3.4)$$

其中

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho}F_{\nu\rho} - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}F^2_{i\rho}. \qquad (3.5)$$

对称张量$T_{\mu\nu}$称做电磁场的能量动量张量。

为了解释$T_{\mu\nu}$各个分量的物理意义，我们将（3.4）式改写为

$$K_\mu = -\partial_i T_{\mu i} - \frac{1}{c}\frac{\partial T_{\mu 0}}{\partial t},$$

将此式对以S为界面的体积V进行积分，得

$$\int K_\mu d\mathbf{x} = -\int \partial_i T_{\mu i} d\mathbf{x} - \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int T_{\mu 0} d\mathbf{x}.$$

上式右边第一项可以转换为面积分：

$$\int K_\mu\, d\mathbf{x} = -\int T_{\mu i} dS_i - \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int T_{\mu 0}\, d\mathbf{x}, \qquad (3.6)$$

其中 dS_i 是面元和面元外法线单位矢量的乘积。

我们再来考虑（3.6）式的时间分量，它由下式给出

$$\int K_0 dx = -\int T_{0i} dS_i - \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int T_{00} dx$$

或者，考虑到（2.11）式，

$$-\frac{d}{dt}\int T_{00} dx = \int cT_{0i} dS_i + \int w dx. \tag{3.7}$$

如果我们将 $\int T_{00} dx$ 看成体积 V 内的电磁场能量，而将 $\int cT_{0i}\, ds$ 看成每单位时间从 S 面流出的能量，那么上式就表示能量守恒定律。于是（3.7）式简明的含义就是体积 V 内每单位时间所减少的电磁场能量，等于单位时间内从该体积向外流出的能量，加上该体积内电磁场所作出的功率。这样一来，电磁场内的能量密度 H 就是

$$H = T_{00} = F_{0\rho}F_{0\rho} + \frac{1}{4}F_{\lambda\rho}^2, \tag{3.8}$$

而单位时间内通过单位面积沿任意方向流过的能量为

$$N_i = cT_{0i} = cF_{0\mu}F_{i\mu}, \tag{3.9}$$

矢量 N_i 称为波印廷矢量。借助于（2.7）式，这些结果也可以用电场强度和磁场强度来表示

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2), \quad \mathbf{N} = c(\mathbf{E} \times \mathbf{H}). \tag{3.10}$$

类似地，我们考虑（3.6）式的空间分量，它由下式给出

$$\int K_i\, dx = -\int T_{ik} dS_k - \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int T_{i0} dx$$

或写成

$$-\frac{d}{dt}\int \frac{1}{c} T_{i0} dx = \int T_{ik} dS_k + \int K_i dx. \tag{3.11}$$

如果我们将 $\int (T_{iv}/c)\, dx$ 看成体积 V 内电磁场动量，并且将 $\int T_{ik} dS_k$ 看成单位时间内从该体积流出的动量，则上式就表示

动量守恒定律。因而 (3.11) 式的意义就是体积 V 内每单位时间所减少的电磁场动量，等于单位时间从该体积流出的动量加上电磁场在该体积内所施出的作用力。由此得出，在电磁场内动量密度 G_i 是

$$G_i = \frac{1}{c} T_{i0}, \tag{3.12}$$

而在单位时间内，动量第 i 个分量沿 x_k 轴通过单位面积的流量是 T_{ik}。值得注意的是，虽然力密度的洛伦兹方程是电动力学的一个基本方程，但是力密度的符号是由麦克斯韦方程组所确定的。因为如果我们改变 (2.10) 式右边的符号，相应的能量动量张量就要和 (3.5) 式差一个负号。这样，电磁场的能量密度也就要成为负值 $-\frac{1}{2}(\mathbf{E}+\mathbf{H})^2$，这在物理上是不允许的。

4. 电磁势

为了以更简单形式来表述麦克斯韦方程组，我们令

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{4.1}$$

其中四维矢量 A_μ 称为电磁势。因为张量 $F_{\mu\nu}$ 是实张量，因此势 A_μ 也可以取为实的。将 (4.1) 式代入到 (2.9) 式中得到一个恒等式，因此我们现在可以不必再管 (2.9) 式了。将 (4.1) 式代入 (2.8) 式中则得到电磁势的场方程：

$$\partial_\mu \partial_\nu A_\nu - \partial^2 A_\mu = \frac{1}{c} j_\mu. \tag{4.2}$$

根据 (4.1) 式，A_μ 并不能唯一地由电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 确定。因为，在下述变换下 $F_{\mu\nu}$ 仍然保持不变

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda, \tag{4.3}$$

其中 Λ 为任意空时函数。电磁势的上述变换叫做规范变换。

规范变换可以用来简化场方程 (4.2)，为此，对于一给定的 $F_{\mu\nu}$，令 $\overline{A}_\mu$ 表示电磁势的一个可能值，现在我们考虑这样的一个函数 Λ，使得

$$\partial^2\Lambda = -\partial_\mu \overline{A}_\mu .$$

因为大家知道从上述方程可以解出 Λ，因而我们总可以找到所需要的 Λ。如果现在我们进行一个规范变换，使新的电磁势由

$$A_\mu = \overline{A}_\mu + \partial_\mu \Lambda$$

给出。我们发现

$$\partial_\mu A_\mu = 0 \qquad (4.4)$$

因此，对于一个给定的电磁场，我们总可以按照使（4.4）得到满足的方式来选择电磁势。关系式（4.4）称为电磁势的附加条件，借助于这个条件，就可以把（4.2）式简化成非齐次波动方程

$$\partial^2 A_\mu = -\frac{1}{c} j_\mu . \qquad (4.5)$$

即使应用了附加条件，电磁场也不能完全确定电磁势。因为，只要 Λ 满足波动方程

$$\partial^2\Lambda = 0, \qquad (4.6)$$

那么在（4.3）式的变换下，（4.1）和（4.4）式仍能保持不变。由（4.3）和（4.6）式给出的电磁势变换关系表示一个局限的规范变换。

5. 辐射场

按照麦克斯韦方程组，电磁场依赖于场中电荷的存在。但是，即使电荷不存在，电磁场一般也不为零。因为这时（4.5）式仅是简化为一个齐次波动方程

$$\partial^2 A_\mu = 0 \qquad (5.1)$$

（5.1）式的通解可以用形式为：

$$A_\mu = a_\mu [e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0 c t + \delta)} + e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k_0 c t + \delta)}] \qquad (5.2)$$

的平面波叠加而得到，

其中

$$|\mathbf{k}| = k_0 . \qquad (5.3)$$

(5.2)式表示以速度 c 沿矢量 k 方向传播的平面波。因为(5.2)式必须满足附加条件（4.4）式，由此得出

$$k_i a_i - k_0 a_0 = 0. \tag{5.4}$$

我们把 A 看作由一个沿 k 的纵向分量和两个垂直于 k 的横向分量所组成，而称 A_0 为 A_μ 的时间分量。为了研究这些不同分量的性质，选择空间轴的 x_3 轴沿 k 方向较为方便。这时，A_1、A_2 就是 A_μ 的横向分量，而 A_3 和 A_0 分别为其纵向分量和时间分量。由于这样选择坐标轴，就有

$$k_1 = k_2 = 0, \quad k_3 = |\mathbf{k}| = k_0, \tag{5.5}$$

因而（5.2）式变为

$$A_\mu = a_\mu [e^{ik_0(x_3 - ct) + i\delta} + e^{-ik_0(x_3 - ct) - i\delta}] \tag{5.6}$$

附加条件（5.4）式取下列形式

$$a_3 - a_0 = 0. \tag{5.7}$$

应用（4.1）式，我们可以得到由电磁势（5.6）所形成的电磁场 $F_{\mu\nu}$，然后，利用（2.7）式，我们可以将电磁场不同的分量写出：

$$\begin{aligned} &H_1 = -k_0 a_2 f, \quad H_2 = k_0 a_1 f, \quad H_3 = 0, \\ &E_1 = k_0 a_1 f, \quad E_2 = k_0 a_2 f, \quad E_3 = k_0 (a_3 - a_0) f = 0, \end{aligned} \tag{5.8}$$

其中

$$f = i[e^{ik_0(x_3 - ct) + i\delta} - e^{-ik_0(x_3 - ct) - i\delta}], \tag{5.9}$$

因为有附加条件（5.7），所以（5.8）中的 E_3 分量为零。这样，即使电荷不存在，电磁场也可以含有各种平面电磁波。将(5.8)式代入（3.10）式，可以看到这个平面电磁波具有能量。一个不包含任何电荷的电磁场称为纯电磁场或者辐射场。

按照（5.8）式，有

$$E_1 H_1 + E_2 H_2 + E_3 H_3 = 0, \quad E_3 = H_3 = 0, \tag{5.10}$$

这表明，由平面电磁波形成的电场和磁场是互相垂直的，同时又

和波的传播方向垂直。通常取和这样一个电磁波的电场 E 相垂直的平面为它的极化平面。关系式 (5.8) 进一步说明，在一个辐射场中，电场强度和磁场强度仅依赖于电磁势的横向分量。因而，在辐射场中电磁势的纵向分量和时间分量不会引起任何物理效应。事实上，在一个辐射场中，对 (5.6) 式进行一个规范变换 (4.3)，并取 Λ 为

$$\Lambda=\frac{ia_0}{k_0}[e^{ik_0(x_3-ct)+i\delta}-e^{-ik_0(x_3-ct)-i\delta}], \qquad (5.11)$$

再应用 (5.7) 式，就可以把电磁势的纵向分量和时间分量消去。但是必须记住，在电荷存在时，电磁场的纵向分量和时间分量是不能忽略的。

6. 经典场的变分原理

在前面各节中，我们已经对经典电磁场给予简要的叙述，现在我们描述经典场论中的一些普遍原理。

在经典物理中，一个场是用一个或多个满足某些偏微分方程的空时函数来描述的，这些偏微分方程叫做场方程。一般相信那些物理上感兴趣的场只能是由那样一些场方程所描写，这种场方程可以利用哈密顿变分原理按下述方式得到。

令 L 是一个洛伦兹不变的函数，它是任意数量线性独立的场变量 $u^{(1)}$，$u^{(2)}$，$\cdots u^{(n)}$ 以及这些场变量的一阶空间和时间导数的函数，即：

$$L=L(u^{(r)},\partial_\mu u^{(r)}), \qquad (6.1)$$

这里 r 取值为 $1,2,\cdots n$，进而，我们将 L 对任意体积 V 和任意时间间隔 t_1 到 t_2 的积分表示为

$$I=\int_{t_1}^{t_2}dt\int_V dx L, \qquad (6.2)$$

而且假定，只要 $u^{(r)}$ 在积分域内的边界上的变分为零，则对于 $u^{(r)}$ 的任意无限小变分，上述积分保持不变，即对于任意无限小

变分

$$u^{(r)} \to u^{(r)} + \delta u^{(r)} \tag{6.4}$$

有

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V dx \delta L = 0 \tag{6.3}$$

其中

$$\delta u^{(r)} = 0 \quad \text{在体积 } V \text{ 的表面}$$

$$= 0 \quad \text{对于 } t = t_1 \text{ 和 } t = t_2 。 \tag{6.5}$$

按照上述变分原理，并应用 (6.1) 式，我们从 (6.3) 式得到

$$\sum_{r=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V dx \left\{ \frac{\partial L}{\partial u^{(r)}} \delta u^{(r)} + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu u^{(r)})} \delta (\partial_\mu u^{(r)}) \right\} = 0. \tag{6.6}$$

但是

$$\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu u^{(r)})} \delta (\partial_\mu u^{(r)}) = \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu u^{(r)})} \partial_\mu (\delta u^{(r)})$$

$$= -\partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu u^{(r)})} \right] \delta u^{(r)} + \partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu u^{(r)})} \delta u^{(r)} \right], \tag{6.7}$$

因而 (6.6) 式可以表示为

$$\sum_r \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V dx \left\{ \frac{\partial L}{\partial u^{(r)}} \delta u^{(r)} - \partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu u^{(r)})} \right] \delta u^{(r)} + \partial_i \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_i u^{(r)})} \delta u^{(r)} \right] + \partial_0 \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_0 u^{(r)})} \delta u^{(r)} \right] \right\} = 0. \tag{6.8}$$

由于条件 (6.5)，(6.8) 式左边最后二项为零，因为其中一项可以变换成面积分，而另一项可以直接对 t 积分。因此得

$$\sum_{\tau}\int_{t_1}^{t_2}dt\int_{V}dx\left\{\frac{\partial L}{\partial u^{(\tau)}}-\partial_{\mu}\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}u^{(\tau)})}\right]\right\}\delta u^{(\tau)}=0,\tag{6.9}$$

而且因为变分 $\delta u^{(\tau)}$ 和 (6.9) 式中的积分区域都是任意的，因此得到

$$\frac{\partial L}{\partial u^{(\tau)}}-\partial_{\mu}\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}u^{(\tau)})}\right]=0.\tag{6.10}$$

哈密顿变分原理意味着，对于自然界中任何场的系统都存在着一个洛伦兹不变函数 L，这个函数产生这一系统的场方程。函数 L 叫做拉格朗日密度，而场方程 (6.10) 式称为拉格朗日场方程。这里已经假定拉格朗日密度不包含 $u^{(\tau)}$ 的二阶或者更高阶的导数。虽然在实践中对于处理那些有意义的场来说，这种限制常常是适当的，但是这些限制决不是必须的。事实上，上述的数学处理可以推广到包含任意所需要阶的导数。还应注意到，如果拉格朗日密度 L 被

$$L\to L+\partial_{\mu}\Lambda_{\mu},\tag{6.11}$$

所代替，则由哈密顿变分原理所得到的场方程仍保持不变。(6.11) 式中的 Λ_{μ} 是 $u^{(\tau)}$ 及其导数的任意函数。的确，上面对拉格朗日密度附加上一个四维散度一点也不会改变系统的物理性质。拉格朗日密度在选择上的这种任意性有时在实际应用中要加以利用。

7. 能量动量张量的性质

我们将首先考虑一个封闭的场的系统的能量动量张量应当具有什么特性，然后将在下一节讨论一般的能量动量张量的存在问题。

为了使对经典场的一般论述和以前对电磁场的论述相一致，我们期望一般的能量动量张量和第三节中得到的电磁场能量动量张量满足同样形式的关系式。因此，我们要求任何封闭的场系统的能量动量张量 $T_{\mu\nu}$ 满足

$$\partial_\nu T_{\mu\nu} = 0 \tag{7.1}$$

而且这一系统的能量密度H和动量密度G_i由

$$H = T_{00} \quad G_i = \frac{1}{c} T_{i0} \tag{7.2}$$

给出。对整个空间进行积分后，(7.1) 式可以表为

$$\int \left(\partial_i T_{\mu i} + \frac{1}{c} \frac{\partial T_{\mu 0}}{\partial t} \right) d\mathbf{x} = 0. \tag{7.3}$$

(7.3)式中左边第一项可以转换成面积分并可证明为零。因为我们可以假设在远处，$T_{\mu\nu}$是足够快地趋于零，因此(7.3)式化简成

$$\int \frac{\partial T_{\mu 0}}{\partial t} d\mathbf{x} = 0 \quad 或 \quad \frac{d}{dt} \int T_{\mu 0}\, d\mathbf{x} = 0, \tag{7.4}$$

考虑到 (7.2) 式，上式变为

$$\frac{d}{dt} \int H d\mathbf{x} = 0, \qquad \frac{d}{dt} \int G_i d\mathbf{x} = 0. \tag{7.5}$$

上述关系表明一个封闭的场系统的总能量和总动量是守恒的。

现在，我们通过无限小洛伦兹变换来导出封闭的场系统的能量动量张量的另一个重要性质。令 C_μ 为任意的，对空间和时间来说都是不变的四维矢量。我们令

$$A_\mu = C_\nu T_{\nu\mu} \tag{7.6}$$

按照 (7.1) 式得

$$\partial_\mu A_\mu = C_\nu \partial_\mu T_{\nu\mu} = 0. \tag{7.7}$$

在无限小洛伦兹变换下

$$x'_\mu = x_\mu + \omega_{\mu\nu} x_\nu \tag{7.8}$$

其中

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}, \tag{7.9}$$

四维矢量 A_μ 转变为

$$A'_\mu(x') = A_\mu(x) + \omega_{\mu\nu} A_\nu(x), \tag{7.10}$$

而且我们也看到

$$A'_\mu(x') = A'_\mu(x) + (x'_\lambda - x_\lambda) \partial_\lambda A'_\mu(x)$$

$$= A'_\mu(x) + \omega_{\lambda\nu}x_\nu\partial_\lambda A_\mu(x) \qquad (7.11)$$

所以，按照（7.10）式和（7.11）式，有

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \omega_{\mu\nu}A_\nu(x) - \omega_{\lambda\nu}x_\nu\partial_\lambda A_\mu(x)。\quad (7.12)$$

因此，考虑到$A_4 = C_\nu T_{\nu 4}$的空间积分是不随时间改变的，有

$$\int A'_4(x')d\mathbf{x}' = \int A'_4(x)d\mathbf{x}$$

$$= \int A_4(x)d\mathbf{x} + \int[\omega_{4\nu}A_\nu(x) - \omega_{\lambda\nu}x_\nu\partial_\lambda A_4(x)]d\mathbf{x}$$

再利用（7.7）和（7.9），可将上式改写为

$$\int A'_4(x')d\mathbf{x}' = \int A_4(x)d\mathbf{x} + \int\partial_i[\omega_{4\nu}x_\nu A_i(x) - \omega_{i\nu}x_\nu A_4(x)]d\mathbf{x}$$

$$= \int A_4(\lambda)d\mathbf{x}。 \qquad (7.13)$$

这表示$\int A_4 d\mathbf{x}$为洛伦兹不变量。又因

$$\int A_4 d\mathbf{x} = C_\nu\int T_{\nu 4}d\mathbf{x},$$

由此得到

$$\zeta_\nu = -\frac{i}{c}\int T_{\nu 4}d\mathbf{x} \qquad (7.14)$$

为一四维矢量。这样，我们就得出，封闭的场系统的总动量和总能量组成一个四维矢量的结论。①

除了满足散度条件（7.1）式之外，一个封闭的场系统的能量动量张量$T_{\mu\nu}$应具有对称性

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}, \qquad (7.15)$$

这个性质保证了总角动量守恒。理由是这样的：我们定义一个量

$$M_{\rho,\mu\nu} = x_\mu T_{\nu\rho} - x_\nu T_{\mu\rho}, \qquad (7.16)$$

考虑到（7.1）式，则

$$\partial_\rho M_{\rho,\mu\nu} = T_{\nu\mu} - T_{\mu\nu}。$$

① 我们的推导比以前著作中的几何证明简单一些。

如果我们进一步利用（7.15）式就得到

$$\partial_\rho M_{\rho,\mu\nu}=0, \tag{7.17}$$

按照上面得到（7.4）式时所使用过的论证，由上式可得到

$$\frac{d}{dt}\int M_{0,\mu\nu}dx=0. \tag{7.18}$$

但是，系统对原点的总角动量的各分量，可由下式给出

$$P_{ik}=\int(x_iG_k-x_kG_i)dx, \tag{7.19}$$

利用（7.2）和（7.16）式，上式变为

$$P_{ik}=\frac{1}{c}\int M_{0,ik}dx. \tag{7.20}$$

因此，（7.18）式就直接表明总角动量守恒。

8. 能量动量张量的一般推导

我们将要证明，从场系统的拉格朗日密度能够得出一个张量，这个张量具有上节所描述的能量动量张量的全部特性。

把场方程（6.10）式乘以$\partial_\nu u^{(r)}$，并且对指标r取和，我们得到

$$-\sum_r\partial_\mu\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u^{(r)})}\right]\partial_\nu u^{(r)}+\sum_r\frac{\partial L}{\partial u^{(r)}}\partial_\nu u^{(r)}=0,$$

上式可表示为

$$-\sum_r\partial_\mu\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u^{(r)})}\partial_\nu u^{(r)}\right]+\sum_r\left[\frac{\partial L}{\partial u^{(r)}}\partial_\nu u^{(r)}+\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u^{(r)})}\partial_\nu\partial_\mu u^{(r)}\right]=0. \tag{8.1}$$

但是，按照（6.1）式，有

$$\sum_r\left[\frac{\partial L}{\partial u^{(r)}}\partial_\nu u^{(r)}+\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u^{(r)})}\partial_\nu\partial_\mu u^{(r)}\right]=\partial_\nu L, \tag{8.2}$$

因此（8.1）式简化为

$$-\sum_r \partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u^{(r)})} \partial_\nu u^{(r)} \right] + \partial_\nu L = 0, \tag{8.3}$$

交换指标 μ 和 ν 后，上式可以写成

$$\partial_\nu S_{\mu\nu} = 0 \tag{8.4}$$

其中

$$S_{\mu\nu} = -\sum_r \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu u^{(r)})} \partial_\mu u^{(r)} + \delta_{\mu\nu} L. \tag{8.5}$$

虽然张量 $S_{\mu\nu}$ 的四维散度为零，但一般来说这个张量不是对称的。因此，我们下面要修改 $S_{\mu\nu}$，使修改后的张量 $T_{\mu\nu}$ 不仅满足（7.1）式而且也满足（7.15）式。考虑一个量 $f_{\mu,\nu\rho}$，它相对于指标 ν 和 ρ 为反对称的，即

$$f_{\mu,\nu\rho} = -f_{\mu,\rho\nu}, \tag{8.6}$$

从而

$$\partial_\nu \partial_\rho f_{\mu,\nu\rho} = 0 . \tag{8.7}$$

所以，如果我们按照

$$T_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} + \partial_\rho f_{\mu,\nu\rho}, \tag{8.8}$$

定义一个张量 $T_{\mu\nu}$，则，$\partial_\nu T_{\mu\nu} = 0$。而且，如果选择 $f_{\mu,\nu\rho}$，使它满足

$$S_{\mu\nu} + \partial_\rho f_{\mu,\nu\rho} = S_{\nu\mu} + \partial_\rho f_{\nu,\mu\rho} \tag{8.9}$$

或者

$$\partial_\rho f_{\mu,\nu\rho} - \partial_\rho f_{\nu,\mu\rho} = S_{\nu\mu} - S_{\mu\nu}. \tag{8.10}$$

则张量 $T_{\mu\nu}$ 将也满足 $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ 的关系。在一些简单情形中，很容易通过观察求得 $f_{\nu,\mu\rho}$，但是，我们将介绍一个求得这个量的一般方法。①

在无限小洛伦兹变换

① F.J.Belinfante, physica 6, 887 (1939)

$$\delta x_\mu = \omega_{\mu\nu} x_\nu, \qquad \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} \tag{8.11}$$

下，令$\delta u^{(r)}$是$u^{(r)}$的变分，于是有：

$$\delta(\partial_\mu u^{(r)}) = \partial_\mu(\delta u^{(r)}) + (\delta\partial_\mu)u^{(r)}$$

或者

$$\delta(\partial_\mu u^{(r)}) = \partial_\mu(\delta u^{(r)}) + \omega_{\mu\lambda}\partial_\lambda u^{(r)}. \tag{8.12}$$

然后，用$\delta u^{(r)}$乘场方程（6.10），并且对指标r取和，我们得到

$$\sum_r \partial_\rho\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\rho u^{(r)})}\right]\delta u^{(r)} = \sum_r \frac{\partial L}{\partial u^{(r)}}\delta u^{(r)}$$

或者

$$\sum_r \partial_\rho\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\rho u^{(r)})}\delta u^{(r)}\right] = \sum_r\left[\frac{\partial L}{\partial u^{(r)}}\delta u^{(r)} + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\rho u^{(r)})}\partial_\rho(\delta u^{(r)})\right]$$

$$= \sum_r\left[\frac{\partial L}{\partial u^{(r)}}\delta u^{(r)} + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\rho u^{(r)})}\delta(\partial_\rho u^{(r)}) - \omega_{\rho\lambda}\frac{\partial L}{\partial(\partial_\rho u^{(r)})}\partial_\lambda u^{(r)}\right]. \tag{8.13}$$

但是，因为拉格朗日密度是洛伦兹不变的，

$$\sum_r\left[\frac{\partial L}{\partial u^{(r)}}\delta u^{(r)} + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\rho u^{(r)})}\delta(\partial_\rho u^{(r)})\right] = \delta L = 0,$$

这样，（8.13）式简化为

$$\sum_r \partial_\rho\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\rho u^{(r)})}\delta u^{(r)}\right] = \omega_{\mu\nu}\sum_r \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu u^{(r)})}\partial_\mu u^{(r)}$$

或者，考虑到（8.5）式，得

$$\sum_r \partial_\rho \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\rho u^{(r)})} \delta u^{(r)} \right] = -\omega_{\mu\nu} S_{\mu\nu}. \tag{8.14}$$

我们进一步看到，因为 $\delta u^{(r)}$ 是 $\omega_{\mu\nu}$ 的一个线性函数，它可以表示为下列形式

$$\delta u^{(r)} = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu} u^{(r)}_{\mu\nu}, \qquad u^{(r)}_{\mu\nu} = -u^{(r)}_{\nu\mu}, \tag{8.15}$$

这里 $u^{(r)}_{\mu\nu}$ 相对于指标 μ 和 ν 被取成反对称的。因其对称部分与 $\omega_{\mu\nu}$ 相乘后将为零。把 (8.15) 式代入 (8.14) 式并利用 (1.11) 式，得到

$$\partial_\rho g_{\rho,\mu\nu} = S_{\nu\mu} - S_{\mu\nu}, \tag{8.16}$$

式中

$$g_{\rho,\mu\nu} = \sum_r \frac{\partial L}{\partial(\partial_\rho u^{(r)})} u^{(r)}_{\mu\nu}. \tag{8.17}$$

按照 (8.10) 和 (8.16) 式，可以取

$$f_{\mu,\nu\rho} - f_{\nu,\mu\rho} = g_{\rho,\mu\nu} \tag{8.18}$$

或者

$$f_{\mu,\nu\rho} = -\frac{1}{2}(g_{\mu,\rho\nu} + g_{\nu,\rho\mu} + g_{\rho,\mu\nu}), \tag{8.19}$$

所以，可以用 (8.15)、(8.17) 和 (8.19) 式来确定 $f_{\mu,\nu\rho}$。

我们已经看到，由 (8.8) 和 (8.19) 给出的张量 $T_{\mu\nu}$ 是对称的，而且它的四维散度为零。这样，$T_{\mu\nu}$ 具有前节所讨论的能量动量张量的全部特性，而且，有理由把它和具有拉格朗日密度 L 的系统的能量动量张量等同起来。此外，按照 (8.8) 式，有

$$\int T_{\mu 0} dx = \int S_{\mu 0} dx + \int \partial_i f_{\mu,0i} dx, \tag{8.20}$$

其中右边第二项可以转换成面积分而为零，因而

$$\int T_{\mu 0} dx = \int S_{\mu 0} dx. \tag{8.21}$$

这就证明，如果我们采用 $S_{\mu\nu}$ 代替 $T_{\mu\nu}$ 作为能量动量张量，这对于系统的总能量和总动量并没有什么两样。事实上，虽然研究角

动量必须利用对称张量 $T_{\mu\nu}$，但是在许多场合下，将较简单的量 $S_{\mu\nu}$ 当作能量动量张量是更加方便的。

为了区分$T_{\mu\nu}$和$S_{\mu\nu}$这两个量，我们称$T_{\mu\nu}$为对称能量动量张量，而称 $S_{\mu\nu}$ 为正则能量动量张量。我们注意到，按照 (8.5) 式所表示的正则能量动量张量，能量密度H和动量密度 G_i 以下式给出

$$H = S_{00} = \sum_r \frac{\partial L}{\partial(\partial u^{(r)}/\partial t)} \frac{\partial u^{(r)}}{\partial t} - L, \qquad (8.22)$$

$$G_i = \frac{1}{c} S_{i0} = -\sum_r \frac{\partial L}{\partial(\partial u^{(r)}/\partial t)} \partial_i u^{(r)}. \qquad (8.23)$$

也能够按简单方式利用正则能量动量张量 $S_{\mu\nu}$和量 $g_{\rho,\mu\nu}$ 来表示系统的角动量。因为将 (8.8) 式代入 (7.16) 式，得出

$$\begin{aligned} M_{\lambda,\mu\nu} &= x_\mu S_{\nu\lambda} - x_\nu S_{\mu\lambda} + x_\mu \partial_\rho f_{\nu,\lambda\rho} - x_\nu \partial_\rho f_{\mu,\lambda\rho} \\ &= (x_\mu S_{\nu\lambda} - x_\nu S_{\mu\lambda}) - (f_{\nu,\lambda\mu} - f_{\mu,\lambda\nu}) \\ &\quad + \partial_\rho (x_\mu f_{\nu,\lambda\rho} - x_\nu f_{\mu,\lambda\rho}), \end{aligned}$$

因此，按照 (7.20) 式，角动量的各分量为

$$\begin{aligned} P_{ik} = \frac{1}{c}\int [&(x_i S_{k0} - x_k S_{i0}) - (f_{k,0i} - f_{i,0k}) \\ &+ \partial_j (x_i f_{k,0j} - x_k f_{i,0j})] d\mathbf{x}. \end{aligned} \qquad (8.24)$$

把右边最后一项转化为面积分而成为零后，应用 (8.18) 式，我们得到

$$P_{ik} = \frac{1}{c}\int (x_i S_{k0} - x_k S_{i0}) d\mathbf{x} - \frac{1}{c}\int g_{0,ik} d\mathbf{x}, \qquad (8.25)$$

正如我们将在 20 节和 25 节中看到的，上式表明P_{ik} 可以分解成轨道角动量和自旋角动量。

9. δ函数

描述δ函数的某些性质将是有用的。δ函数是用关系式

$$\text{当}\quad \xi \neq a\text{时}, \quad \delta(\xi - a) = 0; \quad \int \delta(\xi - a) d\xi = 1, \qquad (9.1)$$

来定义的。这里的积分区域是ξ从小于a的某一数值延伸到大于a的另一数值。从（9.1）式显然可以看出，在围绕$\xi=a$的无限小区域内，$\delta(\xi-a)$为无限大，但在其它地方它的值为零。这样，$\delta(\xi-a)$是一特别奇异的函数，用起来要多加小心。

因为只有当$\xi=a$时，$\delta(\xi-a)$才不为零，由此得到

$$\int f(\xi)\delta(\xi-a)d\xi=\int f(a)\delta(\xi-a)d\xi=f(a), \qquad (9.2)$$

这里$f(\xi)$为ξ的任意连续函数。若$f(\xi)$也是可微的，那么将（9.2）式对a微分，我们得到

$$\int f(\xi)\delta'(\xi-a)d\xi=-f'(a), \qquad (9.3)$$

上式中的撇“′”表示对宗量进行微分。上式也可以这样求得：对上式左边进行分部积分，然后运用（9.2）式，将其中的$f(\xi)$换为$f'(\xi)$即可。推广来说，我们将（9.2）式对于a微分n次，可得

$$\int f(\xi)\delta^{(n)}(\xi-a)d\xi=(-1)^n f^{(n)}(a). \qquad (9.4)$$

涉及δ函数的一些熟知的关系式有：

$$\delta(-\xi)=\delta(\xi), \qquad (9.5)$$

$$\delta(a\xi)=\frac{\delta(\xi)}{a} \qquad a>0, \qquad (9.6)$$

$$\delta(\xi^2-a^2)=\frac{\delta(\xi-a)+\delta(\xi+a)}{2a} \qquad a>0, \qquad (9.7)$$

$$f(\xi)\delta(\xi-a)=f(a)\delta(\xi-a), \qquad (9.8)$$

（9.8）式中的$f(\xi)$是ξ的连续函数。为了证明上面这些关系式，只要证明当ξ不在奇点时两边都等于零，然后在每一奇点附近将两边对ξ积分，证明结果相等即可。

下面，我们将要得到一些进一步的结果，表明在运算其它函数时，δ函数是如何出现的。若有一函数$\varepsilon(\xi)$由

$$\varepsilon(\xi)=1 \qquad \text{对于 } \xi>0$$
$$=-1 \qquad \text{对于 } \xi<0 \tag{9.9}$$

给出，那么，显然除 $\xi=0$ 外，对一切 ξ 值，$\varepsilon(\xi)$ 的导数为零，而且

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varepsilon(\xi)}{d\xi}d\xi=\int_{-1}^{1}d\varepsilon(\xi)=2,$$

上式给出

$$\frac{d\varepsilon(\xi)}{d\xi}=2\delta(\xi). \tag{9.10}$$

其次，对于实数 a，我们考虑积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{ia\xi}d\xi \tag{9.11}$$

上式可以计算如下

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{ia\xi}d\xi=\int_{-\eta}^{\eta}e^{ia\xi}d\xi=\frac{2}{a}\sin(a\eta), \tag{9.12}$$

其中参量 η 趋于无限大。现在我们研究（9.12）式右边对 a 值的依赖关系。对于 $a=0$，量 $2a\sin(a\eta)$ 具有无限大值 2η，而在 a 的任何其他值的邻域内这个量就围绕零值以无限大的频率 $\eta/2\pi$ 进行振动。因此，为了实用目的，除 $a=0$ 外，对所有其他 a 值（9.11）式可以当做零。进而

$$\int_{-\infty}^{\infty}da\int_{-\infty}^{\infty}e^{ia\xi}d\xi=\int_{-\infty}^{\infty}da\frac{2}{a}\sin(a\eta)=2\pi,$$

这使我们推出

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{ia\xi}d\xi=2\pi\delta(a). \tag{9.13}$$

上面的结果可以推广，用到 δ 函数的乘积上，我们常常使用下列符号表示 δ 函数的乘积：

$$\delta(\mathbf{x})=\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3),$$
$$\delta(x)=\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)\delta(x_0), \tag{9.14}$$

从关系式

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}dx=(2\pi)^4\delta(\mathbf{k}). \tag{9.15}$$

可见，（9.14）中 $\delta(x)$ 的洛伦兹协变性是明显的。

10．场的付里叶分解

常常需要对描述给定场的场变量实行付里叶分解。虽然一个场扩展到整个空间，但是为了方便，可以假定场是被封闭在一个大的但是有限的边长为 L 体积为 V 的立方体里，立方体的边长和空间轴相平行，其中心在原点。我们还假定任意场变量 u 是空间的周期函数，而 u 及其空间导数在立方体对应面的相应点上具有相同的值。当然，我们必须最终让边长 L 趋于无限大，但是这种极限步骤可以在适当阶段进行，而不是一开始就这样做。正像我们所知道的，在立方体表面上周期性的量 u 可以表示为付里叶级数

$$u(x)=\sum_{\mathbf{k}}C(\mathbf{k}^2)u(\mathbf{k},x_0)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \qquad (10.1)$$

其中 $C(\mathbf{k}^2)$ 要根据方便进行选择，而取和对所有 $\mathbf{k}$ 值进行而 $\mathbf{k}$ 由下式给出

$$k_1=\frac{2\pi}{L}n_1, \quad k_2=\frac{2\pi}{L}n_2, \quad k_3=\frac{2\pi}{L}n_3, \qquad (10.2)$$

n_1，n_2 和 n_3 为正负整数或零。

我们特别感兴趣的是考虑 u 满足波动方程的情况，即

$$(\partial^2-\kappa^2)u=0, \qquad (10.3)$$

其中 κ 是正的恒量或零。将（10.1）式代入（10.3），给出

$$(\partial_0^2+\mathbf{k}^2+\kappa^2)u(\mathbf{k},x_0)=0,$$

所以

$$u(\mathbf{k},x_0)=u^+(\mathbf{k})e^{-ik_0x_0}+u^-(\mathbf{k})e^{ik_0x_0}, \qquad (10.4)$$

其中 $u^+(\mathbf{k})$ 和 $u^-(\mathbf{k})$ 对于空间和时间是常数，而

$$k_0=(\mathbf{k}^2+\kappa^2)^{1/2}. \qquad (10.5)$$

考虑到（10.4）式，展开式（10.1）可表示为

$$u(x)=\sum_{\mathbf{k}}C(\mathbf{k}^2)[u^+(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-k_0x_0)}$$

$$+u^-(\mathbf{k})e^{i(k\cdot x+k_0x_0)}], \tag{10.6}$$

或

$$u(x)=\sum_{\mathbf{k}}C(\mathbf{k}^2)[v^+(\mathbf{k})e^{i(k\cdot x-k_0x_0)}$$

$$+v^-(\mathbf{k})e^{-i(k\cdot x-k_0x_0)}], \tag{10.7}$$

其中 $v^+(\mathbf{k})=u^+(\mathbf{k})$，$v^-(\mathbf{k})=u^-(-\mathbf{k})$。如果某一付里叶分量对时间的函数关系具有 $\exp(-i|a|t)$ 的形式，则称它具有正频率，而如果它对时间函数关系具有 $\exp(i|a|t)$ 的形式，就称它有负频率。这样，按照（10.6）式，Q 就可以将 u 分解为正频和负频二部分 u^+ 和 u^-：

$$\begin{aligned}u^+(x)&=\sum_{\mathbf{k}}C(\mathbf{k}^2)u^+(\mathbf{k})e^{i(k\cdot x-k_0x_0)},\\ u^-(x)&=\sum_{\mathbf{k}}C(\mathbf{k}^2)u^-(\mathbf{k})e^{i(k\cdot x+k_0x_0)}.\end{aligned} \tag{10.8}$$

现在我们将要说明当L 趋近于无限大时如何由公式（10.1）的付里叶级数过渡到付里叶积分。按照定积分的定义

$$\lim_{\Delta s\to 0}\sum_{n}f(n\Delta s)\Delta s=\int_{-\infty}^{\infty}dsf(s), \tag{10.9}$$

其中 n 取从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 包括零的所有整数值。令（10.9）式中 $\Delta s=\frac{2\pi}{L}$ 我们得到

$$\lim_{L\to\infty}\frac{2\pi}{L}\sum_{n}f\left(\frac{2\pi n}{L}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}dsf(s),$$

它可以写为

$$\lim_{L\to\infty}\frac{2\pi}{L}\sum_{s}f(s)=\int_{-\infty}^{\infty}dsf(s), \tag{10.10}$$

其中（10.10）式左边的取和遍及到由 $s=2\pi n/L$ 给出的一切 s 值。从（10.10）得到

$$\lim_{L\to\infty}\frac{(2\pi)^3}{L^3}\sum_{\mathbf{k}}f(\mathbf{k})=\int_{-\infty}^{\infty}d\mathbf{k}f(\mathbf{k}),\qquad(10.11)$$

这里的取和遍及到由（10.2）式给出的所有 $\mathbf{k}$ 值。

关系式（10.11）使我们能从付里叶级数过渡到付里叶积分。例如，如果我们取 $C(\mathbf{k}^2)=\frac{1}{2}k_0L^3$，并且令 L 趋近于无限大，（10.8）式就变为

$$u^+(x)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\mathbf{k}}{2k_0}u^+(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-k_0x_0)},$$
$$u^-(x)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\mathbf{k}}{2k_0}u^-(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+k_0x_0)}.\qquad(10.12)$$

进一步，如果我们把 k_0 当作一个独立变量来代替由（10.5）式给出关系，并且利用关系式

$$\delta(k^2+\kappa^2)=\frac{\delta[k_0-(\mathbf{k}^2+\kappa^2)^{1/2}]+\delta[k_0+(\mathbf{k}^2+\kappa^2)^{1/2}]}{2(\mathbf{k}^2+\kappa^2)^{1/2}},\qquad(10.13)$$

（此式可以从(9.7)式得到）（10.12）式就可以写成下列形式

$$u^+(x)=(2\pi)^{-3}\int_0^{\infty}dk_0\int_{-\infty}^{\infty}d\mathbf{k}\delta(k^2+\kappa^2)u^+(k)e^{ik_\mu x_\mu},$$
$$u^-(x)=(2\pi)^{-3}\int_{-\infty}^{0}dk_0\int_{-\infty}^{\infty}d\mathbf{k}\delta(k^2+\kappa^2)u^-(k)e^{ik_\mu x_\mu},\qquad(10.14)$$

其中

$$u^{\pm}(k)=u^{\pm}(\mathbf{k}),\ \text{当}k_0=\pm(\mathbf{k}^2+\kappa^2)^{1/2}.$$

众所周知，若一个四维矢量 k_μ 满足条件 $k_\mu^2\leqslant 0$，那么，k_0 在正常洛伦兹变换或空间反演下都不会改变它的符号，但在时间反转下要改变符号。因此，（10.14）式表明，在正常洛伦兹变换或空间反演下，$u(x)$ 的正频部分仍变换为正频部分，负频部分仍变换为负频部分，反之亦然。因此满足波动方程（10.3）式的任何场量都能以洛伦兹协变的形式分解为正频和负频两部分，它们总是分别以上标“+”和“−”来表示。

第二章　量子场论原理

我们将简要地叙述量子力学的理论结构，并且表明如何通过扩展经典场论的概念和应用量子力学规律而产生的量子理论。

11. 量子力学的理论结构

量子力学的通常理论结构需要利用一个无限维空间。在这个空间里，矢量的分量一般是复数。这个空间称为希耳伯空间，而在希耳伯空间中的一个矢量通常用 Ψ 或者 Φ 来表示。可以将一个对偶空间与希尔伯空间联系起来，使得对于希尔伯空间中任何一个矢量 Ψ，在对偶空间都有一个矢量 Ψ^* 与之对应，这两个矢量叫作互为厄密共轭。这两个空间之间的关系是这样的，如果 Ψ 和 Φ 是希耳伯空间中的任意矢量，则 $\Psi+\Phi$ 和 $c\Psi$ 的厄密共轭由

$$(\Psi+\Phi)^*=\Psi^*+\Phi^*,\quad (c\Psi)^*=c^*\Psi^* \tag{11.1}$$

给出，其中 c 是一个数，c^* 是 c 的复共轭①，进而，一个形式为 $\Phi^*\Psi$ 的乘积是一个数，而且

$$\Phi^*\Psi=(\Psi^*\Phi)^*, \tag{11.2}$$

$$\Psi^*\Psi>0. \tag{11.3}$$

正数 $\Psi^*\Psi$ 叫做矢量 Ψ 的模方，对 Ψ 乘以适当的数可以使它归一化，以保证

$$\Psi^*\Psi=1. \tag{11.4}$$

---

① 星号将不仅用来表示复共轭，而且也用来表示矢量和算符的厄密共轭，这种表示，在实践中证明是方便的。

如果有两个矢量 Ψ 和 Φ，其乘积 $\Psi^*\Phi$ 为零，则称它们是正交的。如果在一个集合中矢量既是归一化的，而且又是互相正交的，则称这组矢量形成正交归一集。

除了矢量外，我们必须涉及到算符，作用在任何一个矢量上的算符把这个矢量变为同一空间中的另一矢量。这样，如果 α 是任意算符，则 $\alpha\Psi$ 和 $\Psi^*\alpha$ 分别是希耳伯空间及其对偶空间中的矢量，而且一个形式为 $\Phi^*\alpha\Psi$ 的量是一个数。如果算符 α 作用在某一矢量 Ψ 上，得出形式为

$$\alpha\Psi = a\Psi, \tag{11.5}$$

的结果，其中 a 是一个数，那么，Ψ 称为算符 α 对应于本征值 a 的本征矢量。算符之间除去不总是可以对易外，它们遵循通常的代数运算法则。任意两个算符 α 和 β 的对易子定义为

$$[\alpha,\beta] = \alpha\beta - \beta\alpha, \tag{11.6}$$

而反对易子定义为

$$\{\alpha,\beta\} = \alpha\beta + \beta\alpha. \tag{11.7}$$

若对于任意矢量 Ψ 有

$$\Psi^*\alpha^* = (\alpha\Psi)^*, \tag{11.8}$$

那么算符 α^* 称为 α 的厄密共轭，由此得到

$$\Psi^*\alpha^*\Phi = (\alpha\Psi)^*\Phi = (\Phi^*\alpha\Psi)^*. \tag{11.9}$$

从 (11.9) 式很容易推出，若 α^* 是 α 的厄密共轭，那么，α 就是 α^* 的厄密共轭。上式也表明，算符和矢量乘积的厄密共轭或复共轭可以这样来求得，即颠倒所有因子的次序然后每个因子用其厄密共轭来代替。一个算符如果等于它的厄密共轭，则这个算符就称为厄密算符。于是，对于任何厄密算符有

$$\alpha^* = \alpha. \tag{11.10}$$

量子力学的基本假设可以表述如下：

1. 一个系统在任何时刻的状态可以用希耳伯特空间中的一个矢量来表示。

2. 一个系统的力学量，可以用一个作用在态矢量上的适当的算符来表示。

3. 对系统的一个动力学变量的单独测量结果，一般说来不能给出确定的预言。但是，若对处于某一确定态的系统的力学量进行多次测量，测量的平均值或所谓的期待值则由

$$\langle\alpha\rangle=\Psi^*\alpha\Psi, \tag{11.11}$$

给出，其中算符 α 表示力学量，而 Ψ 是表示该系统状态的归一化矢量。

如果 α 表示某一物理量，则它的期待值必须是实数，因此

$$\Psi^*\alpha\Psi=(\Psi^*\alpha\Psi)^*=\Psi^*\alpha^*\Psi.$$

因为上述关系必须对任何矢量 Ψ 都成立，由此得出 $\alpha=\alpha^*$。因此，一切物理量都用厄密算符来表示。

我们现在讨论厄密算符的本征值和本征矢量的一些性质。令 Ψ 为厄密算符 α 相应于本征值 a 的本征矢量，因此

$$\Psi^*\alpha\Psi=\Psi^*a\Psi=a\Psi^*\Psi, \tag{11.12}$$

而上述方程的复共轭是

$$\Psi^*\alpha\Psi=a^*\Psi^*\Psi. \tag{11.13}$$

按照 (11.12) 和 (11.13) 式，有

$$(a-a^*)\Psi^*\Psi=0$$

或

$$a^*=a, \tag{11.14}$$

这表示一个厄密算符的本征值是实数。

进一步，令 Ψ_1 和 Ψ_2 是厄密算符 α 对应于二个不同本征值 a_1 和 a_2 的任意二个本征矢量，正如我们已证明的，a_1，a_2 为实数。那么，由

$$\alpha\Psi_1=a_1\Psi_1,\quad \alpha\Psi_2=a_2\Psi_2,$$

可以得出

$$\Psi_2^*\alpha\Psi_1=a_1\Psi_2^*\Psi_1,\quad \Psi_1^*\alpha\Psi_2=a_2\Psi_1^*\Psi_2$$

从第一式减去第二式的复共轭，我们得到

$$(a_1 - a_2)\Psi_2^*\Psi_1 = 0,$$

因为$a_1 \neq a_2$，由此得到

$$\Psi_2^*\Psi_1 = 0, \tag{11.15}$$

这表示一个厄密算符属于不同本征值的本征矢量是互相正交的。有时一个厄密算符 α 的两个不同的本征矢量 Ψ_1 和 Ψ_2 可以对应于同一个本征值 a，这称做简并情况。在这种情况中，若 Ψ_1 和 Ψ_2 不是互相正交的，令

$$\Psi_1^*\Psi_1 = c, \quad \Psi_1^*\Psi_2 = c'. \tag{11.16}$$

那么，我们可以选择 Ψ_1' 和 Ψ_2' 作为一对正交的本征矢量，它们可由

$$\Psi_1' = \Psi_1, \quad \Psi_2' = \Psi_2 - \frac{c'}{c}\Psi_1, \tag{11.17}$$

给定，因此

$$\Psi_1'^*\Psi_2' = \Psi_1^*\Psi_2 - \frac{c'}{c}\Psi_1^*\Psi_1 = 0.$$

上述过程可以很容易地推广到对应同一本征值有两个以上的独立本征矢量的情况。因为，如果 Ψ_1，Ψ_2，……Ψ_n 是对应厄密算符同一本征值的 n 个独立的本征矢量，我们可以选择 Ψ_1'，Ψ_2'……Ψ_n' 为 n 个相互正交的本征矢量，其中

$$\Psi_m' = \Psi_m - \frac{c_{1,m}}{c_1}\Psi_1' - \frac{c_{2,m}}{c_2}\Psi_2' - \cdots - \frac{c_{m-1,m}}{c_{m-1}}\Psi_{m-1}', \tag{11.18}$$

$$c_l = \Psi_l'^*\Psi_l', \quad c_{l,m} = \Psi_l'^*\Psi_m.$$

从以上论证可以得到，在按适当方式选择对应同一本征值的本征矢量之后，一个厄密算符的本征矢量组成在希耳伯空间中的一组正交矢量集。

我们将假定，由任何厄密算符的本征矢量所组成的正交矢量集是一个完全集，也就是说，希耳伯空间内的任意矢量可以用这些正交矢量线性地表示出来。因此如果一个厄密算符 α 的本征值

是分立的，那么，任何归一化的矢量 Φ 可表示为

$$\Phi=\sum_{n}c_{n}\Psi_{n}, \tag{11.19}$$

其中 c_n 为复数，而 Ψ_n 是对应于本征值 a_n 的 α 的正交归一化的本征矢量，所以

$$\Psi_{m}^{*}\Psi_{n}=\delta_{mn}. \tag{11.20}$$

现在，令 $f(\alpha)$是 α 的任意函数，它可以表示为 α 的幂函数，那么

$$f(\alpha)\Psi_{n}=f(a_{n})\Psi_{n},$$

而且

$$\Phi^{*}f(\alpha)\Phi=\sum_{m}c_{m}^{*}\Psi_{m}^{*}f(\alpha)\sum_{n}c_{n}\Psi_{n}=\sum_{m}c_{m}^{*}\Psi_{m}^{*}\sum_{n}c_{n}f(a_{n})\Psi_{n},$$

利用 (11.20) 式，对于 $f(\alpha)$在状态 Φ 中的期待值而言，上式给出以下结果

$$\langle f(\alpha)\rangle=\sum_{n}c_{n}^{*}c_{n}f(a_{n}). \tag{11.21}$$

但是，$f(\alpha)$的期待值可以表示为

$$\langle f(\alpha)\rangle=\sum_{n}P_{n}f(a_{n})+\sum_{m}P'_{m}f(a'_{m}), \tag{11.22}$$

其中 a'_m 是 α 所取的不是本征值 a_n 的某一个值，而 P_n 和 P'_m 分别是测量 α 得到 a_n 和 a'_n 的几率。因为函数 $f(\alpha)$为任意的，比较 (11.21) 和 (11.22) 式得出

$$P_{n}=c_{n}^{*}c_{n},\quad P'_{m}=0, \tag{11.23}$$

这表明，可以把表示式 (11.19) 中的数字系统看作测量 α 得到不同本征值的“几率幅”，而测量 α 得到任何其它结果的几率为零。

让我们考虑在希耳伯空间中正交归一矢量 Ψ_n 的一个完全集。那么，对于任何算符 α 我们可以构成一个矩阵

$$\begin{pmatrix} \langle 1|\alpha|1\rangle & \langle 1|\alpha|2\rangle & \langle 1|\alpha|3\rangle & \cdot & \cdot \\ \langle 2|\alpha|1\rangle & \langle 2|\alpha|2\rangle & \langle 2|\alpha|3\rangle & \cdot & \cdot \\ \langle 3|\alpha|1\rangle & \langle 3|\alpha|2\rangle & \langle 3|\alpha|3\rangle & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \tag{11.24}$$

其中数$\langle m|\alpha|n\rangle$也可表示为$a_{mn}$，它可以由

$$\langle m|\alpha|n\rangle = \Psi_m^* \alpha \Psi_n . \tag{11.25}$$

给出，矩阵（11.24）称为在矢量Ψ_n的正交归一集的参照系中算符α的表象。很容易得到，一个厄密算符α在它自己本征矢量的正交归一集的参照系中的表象是一个对角矩阵，这个矩阵的对角元素是α的本征值。从（11.25）和（11.9）式，可知，一般说来任何厄密算符α在任意参照系中的表示为：

$$\langle m|\alpha|n\rangle = \langle n|\alpha|m\rangle^*, \tag{11.26}$$

这意味着一个厄密算符总可以用一个厄密矩阵来表示。进一步，一个任意矢量Φ可以表示为（11.19）式的形式，因此，

$$\sum_m \Psi_m \Psi_m^* \Phi = \sum_m \Psi_m \Psi_m^* \sum_n c_n \Psi_n ,$$

应用（11.20），上式得出

$$\sum_m \Psi_m \Psi_m^* \Phi = \sum_m c_m \Psi_m = \Phi .$$

因为Φ是任意的，由此得到

$$\sum_m \Psi_m \Psi_m^* = 1, \tag{11.27}$$

所以

$$\Psi_\dagger^* \alpha \beta \Psi_n = \sum_m \Psi_\dagger^* \alpha \Psi_m \Psi_m^* \beta \Psi_n$$

或者

$$\langle l\,|\alpha\beta|\,n\rangle=\sum_{m}\langle l\,|\alpha|\,m\rangle\langle m\,|\beta|\,n\rangle. \qquad (11.28)$$

下面我们叙述一个在量子力学中具有重要作用的变换。任何一么正算符满足关系式

$$U^*U=UU^*=1, \qquad (11.29)$$

并且使我们能够按照下列关系把一组矢量或一组算符变换成为另一组矢量或算符：

$$\Psi'=U\Psi,\ \Psi^{*\prime}=\Psi^*U^*,\ \alpha'=U\alpha U^*, \qquad (11.30)$$

其中 Ψ、Ψ^*、α……和 Ψ'，$\Psi^{*\prime}$，α'……表示两组相应的量。这种变换具有一些值得注意的性质。例如，如果任意两个矢量或者算符互为厄密共轭，在么正变换下它们仍保持这一性质。而且在么正变换下，一个正交归一的矢量集仍保持其正交归一性，任何算符的一个本征矢量仍然是带有同样本征值的本征矢量，一个厄密算符仍保持它的厄密性，同时任何算符对于系统任意状态的期待值保持不变。一般说来，含有矢量和算符的任何代数关系式，在么正变换下都保持不变。因此，如果给定了一组矢量和算符，用它们来描述系统的状态及其力学量，那么，我们就可以通过么正变换得到另外一组矢量和算符，它们仍能描述此系统原来的状态和原来的力学量。每一组这种矢量和算符称为对系统在特定绘景中的描述，这样一来，么正变换就使我们能够从一个绘景过渡到另一绘景。

在量子力学的应用中，常常需要找出算符的本征值。我们将描述一个有用的特殊情况，在那里一个算符的本征值很容易得到。令 α 为满足下列代数方程的算符

$$f(\alpha)\equiv\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+a_2\alpha^{n-2}+\cdots+a_n=0, \qquad (11.31)$$

其中系数 a_i 是一些数。我们还假定 (11.31) 式是 α 所满足的最低次的代数方程。当然，这个方程意味着，算符 $f(\alpha)$ 作用在任

何矢量上，结果都为零。因为出现在 $f(\alpha)$中的所有量 都是互相对易的，它可以分解因子为

$$f(\alpha)\equiv(\alpha-c_1)(\alpha-c_2)\cdots(\alpha-c_n), \qquad (11.32)$$

c_r 为一些数，然后，令

$$f(\alpha)=(\alpha-c_r)g_r(\alpha),$$

其中 $g_r(\alpha)$表示 (11.32) 式中除 $(\alpha-c_r)$ 外的所有其余因式的乘积，对于任意一个矢量 Ψ，我们得到

$$(\alpha-c_r)g_r(\alpha)\Psi=0. \qquad (11.33)$$

如果对于每个Ψ，$g_r(\alpha)\Psi$都是零，则 $g_r(\alpha)$本身将 是零，并且 α 就必然满足一个 $(n-1)$ 次代数方程，而这将和我们先前的假设矛盾。因此，一定存在着一个矢量 Ψ，使得 $g_r(\alpha)\Psi$不为零，这样 (11.33) 式表示 $g_r(\alpha)\Psi$ 是算符 α 的相应于本 征 值 c_r 的本征矢量，这里 r 可以取从 1 到 n 的任意 值。此 外，若 a' 是 α 对应于本征矢量 Ψ' 的任何一个本征值，则有

$$f(\alpha)\Psi'=f(a')\Psi',$$

因为以上方程左端为零，所以

$$f(a')=0.$$

这就表明，a' 必定等于出现在 (11.32) 式 中 的 某 一个 c_r。因此，我们已经证明，若 (11.31) 式是算符 α 满足的最低 次代数方程，则 (11.31) 式的根就是 α 的本征 值，此外 α 没 有 其 它本征值。

12. 采用不定度规的量子力学

前节中叙述的量子力学理论结构并不适合于处理自然界所有的场，因此我们要叙述一个更普遍的理论结构①

让我们重新考虑一个无限维空间，在这个空间中矢量的分量

① 这种采用不定度规的量子力学结 构 是S. N. Gup t_a 提出的。Canad J.Phys、35，901(1957)。

一般为复数，我们用 Ψ 或 Φ 来表示这个空间中的任意矢量。对于这样的空间我们构成一个对偶空间，使得对应于每一个矢量 Ψ，在对偶空间中都存在着一个矢量 Ψ^*。我们假定这两个空间的关系是这样的：

$$(\Psi+\Phi)^*=\Psi^*+\Phi^*,\quad (c\Psi)^*=c^*\Psi^*, \tag{12.1}$$

$$\Phi^*\Psi=\text{数}=(\Psi^*\Phi)^*, \tag{12.2}$$

其中 c 是数。从（12.2）式可得：

$$\Psi^*\Psi=\text{实数} \tag{12.3}$$

上面的假设和 11 节中的假设之间的区别仅仅在于现在量 $\Psi^*\Psi$ 不是正定的，而且按照（12.3）式，这个量可以是正的，负的，或者零。因此，我们将把我们所研究的这个空间称为不定度规空间。

由于现在的理论结构和 11 节的非常相似，因此仍然保留前一节对各种量的记号和术语较为方便。而运用时，我们将记住在两种理论结构上的那些差别，这些差别我们将在下面讨论。这样，满足关系式（12.1）、（12.2）和（12.3）的 Ψ 和 Ψ^* 称做互相厄密共轭，而实数 $\Psi^*\Psi$ 就称作矢量 Ψ 的模方。然而，我们把满足更一般条件

$$\Psi^*\Psi=\pm 1\text{ 或 }0 \tag{12.4}$$

之一的任何矢量称为归一化的。因为我们不能通过对一个矢量乘以任何数来改变它的模方的符号。

象在第 11 节中一样，我们也可以在不定度规空间中定义算符。特别是对于任意矢量 Ψ，如果

$$\Psi^*\alpha^*=(\alpha\Psi)^* \tag{12.5}$$

则算符 α^* 将称作 α 的厄密共轭。上式给出

$$\Psi^*\alpha^*\Phi=(\alpha\Psi)^*\Phi=(\Phi^*\alpha\Psi)^*. \tag{12.6}$$

若算符 α 满足

$$\alpha^*=\alpha, \tag{12.7}$$

则这样的算符将称为厄密算符。

在现在的理论结构中量子力学的基本假设和 11 节 中 所叙述的基本假设是类似的，因此对于一个系统的力学量的期待值由

$$\langle\alpha\rangle = \Psi^*\alpha\Psi, \qquad (12.8)$$

给出，其中算符代表力学量，而 Ψ 为归一化的态矢量。由(12.8)式仍然可以得出，为了使算符具有实的期待值，所有的物理量必须用厄密算符来表示。

虽然，由 (12.6) 式可以明显看出厄密算符 具 有实 的 期待值，但是，现在厄密算符的某些其它性质并 不 和 11 节中所描述的完全相对应。例如，令 Ψ 为厄密算符 α 相应于 本 征值 a 的本征矢量，像 11 节一样给出

$$(a - a^*)\Psi^*\Psi = 0. \qquad (12.9)$$

由于按照 (12.3) 式，模方 $\Psi^*\Psi$ 可以为零，所以从上面方程 式不能必然得 出 $a^* = a$。然而，我们仍能从 (12.9) 式推出，厄密算符与具有非零模方的本征矢量相对应的所有本征值都是实数。同样地，我们现在一般不能确定厄密算符的全部本征矢量的正交性。但是按照11节中的处理方法，只要对应于相同本征值的本征矢量以一种适当的方法选取，我们仍然能够证明一个厄密算符有非零模方的那些本征矢量组成一个正交集。

我们假设，若厄密算符的全部本征矢的模方都不为零，由这些本征矢量组成的正交集是一个完全集。那么，如果一个厄密算符 α 的本征值是分立的，而且其全部本征矢 量 都具有不 为零的模方，我们可将任意归一化的矢量 Φ 表示为

$$\Phi = \sum_n c_n \Psi_n \qquad (12.10)$$

其中 c_n 是数，而且 Ψ_n 是相应于本征值 a_n 的 α 的正交归一的本征矢量，所以

$$\Psi_m^*\Psi_n = \pm\delta_{mn} \qquad (12.11)$$

其中正和负的符号分别与这一本征矢量具有正的模方或负的模方相对应。在现在的情况下，代替 (11.21)式，我们得到，在状态 Φ 中 $f(\alpha)$的期待值为

$$\langle f(\alpha)\rangle = \sum_{n} \pm c_n^* c_n f(a_n), \tag{12.12}$$

此式给出

$$P_n = \pm c_n^* c_n, \tag{12.13}$$

其中 P_n 是测量 α 得到 a_n 的几率。(12.13) 式结果表明具有负模方的矢量表示具有负几率的态①。

如果 Ψ_n 组成一个具有模方不为零的完全正交归一的矢量集，则我们就可以在以这些矢量为基矢的参照系中用一个矩阵作为算符 α 的表象，矩阵元由

$$\langle m\,|\alpha|\,n\rangle = \Psi_m^* \alpha \Psi_n. \tag{12.14}$$

给定。由 (12.14) 和 (12.6) 式也可以得出，若 α 厄密的，则有

$$\langle m\,|\alpha|\,n\rangle = \langle n\,|\alpha|\,m\rangle^*, \tag{12.15}$$

这表示，一个厄密算符的表象仍然是一个厄密矩阵。然而，关系式 (11.27) 和 (11.28) 现在需要修改。因为

我们定义一个量 η_{lm}

$$\eta_{lm} \equiv \Psi_l^* \Psi_m = \pm \delta_{lm}, \tag{12.16}$$

这时，按公式 (12.10) 表示任意一个矢 ϕ 时，我们有

$$\sum_{l,m} \Psi_l \eta_{lm} \Psi_m^* \Phi = \sum_{l,m} \Psi_l \eta_{lm} \Psi_m^* \sum_{n} c_n \Psi_n$$

---

① 注意如果矢量 Ψ_r 有负模方，在这个状态中，α 的期待值为 $-a_r$。但是我们不能认为 Ψ_r 是表示一个和可观测值为 $-a_r$ 相对应的，具有正几率的态，因为，在这个态中

$$\langle f(\alpha)\rangle = -f(a_r) \neq f(-a_r)$$

$$= \sum_{l,m,n} c_n \Psi_l \eta_{lm} \eta_{mn}. \qquad (12.17)$$

但是，根据（12.16）式

$$\sum_m \eta_{lm} \eta_{mn} = \delta_{ln},$$

所以（12.17）式简化为

$$\sum_{l,m} \Psi_l \eta_{lm} \Psi_m^* \Phi = \sum_l c_l \Psi_l = \Phi. \qquad (12.18)$$

因 ϕ 是任意的，由此得到

$$\sum_{l,m} \Psi_l \eta_{lm} \Psi_m^* = 1, \qquad (12.19)$$

所以

$$\Psi_k^* \alpha \beta \Psi_n = \sum_{l,m} \Psi_k^* \alpha \Psi_l \eta_{lm} \Psi_m^* \beta \Psi_n$$

即

$$\langle k|\alpha\beta|n\rangle = \sum_{l,m} \langle k|\alpha|l\rangle \eta_{lm} \langle m|\beta|n\rangle. \qquad (12.20)$$

在现在的理论结构中，我们也可以用关系式（11.29）和（11.30）定义么正算符和么正变换，并且通过么正变换从一种绘景过渡到另一种绘景。

最后，我们必须注意到，由于物理解释上的一些困难，采用不定度规的量子力学理论结构仅在特殊情况下才可使用。物理解释的主要困难来自这样事实，一个具有负模矢量表示一个出现几率为负的态，这当然是没有意义的。物理解释上的另一个困难是和模方为零的矢量相联系的。因为，如果一个矢量 Ψ 具有零模方，我们可以用任意一个数乘这个矢量，这样可以得到另一个也具有零模方的矢量 Ψ'，这样就要发生困难，虽然 Ψ 和 Ψ' 是表

示同一状态的归一化矢量，但是除了零的期待值外，它们会导致任何力学量 α 有不同期待值。因为上述物理解释上的困难都和模方为零或为负的矢量相联系，因此，仅仅当用模方为零或为负的矢量所表示的态在物理上不可观察时，不定度规才能应用于量子力学体系。

13．玻色振子和费米振子

我们发现，所有无相互作用的场，也称为自由场，可以通过对场变量的付里叶展开，而把它们分解为玻色振子或费米振子系统。一般说来，通过假设下述真空态条件，可以确定这些振子能量的本征值和本征矢量①。

每一个物理系统有一个最低能量态，这个态叫作真空态，这个态用一个模为正的矢量来表示。

（a）正常玻色振子

一个正常玻色振子的能量算符由

$$\mathscr{H} = Ea^*a, \tag{13.1}$$

给出，其中 E 为正数，并且算符 a 及其厄密共轭 a^* 满足关系式

$$aa^* - a^*a = 1. \tag{13.2}$$

如果 λ 是 $\mathscr{H}$ 相应于本征矢量 Ψ 的一个本征值，那么

$$\mathscr{H}\Psi = \lambda\Psi, \tag{13.3}$$

而且，按照（13.1）和（13.2）式

$$\mathscr{H}a\Psi = a\mathscr{H}\Psi - Ea\Psi = (\lambda - E)a\Psi, \tag{13.4}$$

$$\mathscr{H}a^*\Psi = a^*\mathscr{H}\Psi + Ea^*\Psi = (\lambda + E)a^*\Psi, \tag{13.5}$$

这表明只要 $a\Psi \neq 0$ 和 $a^*\Psi \neq 0$，$(\lambda - E)$ 和 $(\lambda + E)$ 也是 $\mathscr{H}$ 的本征值。由此得出，必定存在这样一个矢量 Ψ_0 使得

$$a\Psi_0 = 0, \tag{13.6}$$

① S.N.Gupta, Canad, J.Phys.35, 901(1957)

因为不然的话，通过重复应用（13.4）式，将得出 $\mathscr{H}$ 的本征值没有下限，而这会违背我们真空态条件。$\mathscr{H}$ 对于满足（11.6）式的本征态 Ψ_0 的本征值是

$$\mathscr{H}\Psi_0 = Ea^*a\Psi_0 = 0, \qquad (13.7)$$

通过重复应用（13.5）式，我们找到全部本征值为

$$0, E, 2E, \cdots, nE, \cdots$$

它们分别对应于下列本征矢量

$$\Psi_0, a^*\Psi_0, a^{*2}\Psi_0, \cdots, a^{*n}\Psi_0, \cdots。$$

因为我们要求真空态 Ψ_0 具有正的模方，因此它可以归一化为

$$\Psi_0^*\Psi_0 = 1, \qquad (13.8)$$

然后，对应着本征值 nE 的归一化的本征矢量 Ψ_n 以及它的厄密共轭 Ψ_n^* 可以表示为

$$\Psi_n = (n!)^{-1/2}a^{*n}\Psi_0, \qquad \Psi_n^* = (n!)^{-1/2}\Psi_0^*a^n, \qquad (13.9)$$

它们满足

$$\Psi_m^*\Psi_n = \delta_{mn}。 \qquad (13.10)$$

我们可以把 Ψ_n 当作描写服从玻色——爱因斯坦统计的 n 个能量为 E 的粒子的态。这些粒子称为玻色子。而且按照（13.2），（13.6）和（13.9）有

$$a\Psi_n = n^{1/2}\Psi_{n-1}, \qquad a^*\Psi_n = (n+1)^{1/2}\Psi_{n+1}, \qquad (13.11)$$

这表示，算符 a 把一个有 n 个粒子的态变为一个有 $(n-1)$ 个粒子的态，而 a^* 把一个有 n 个粒子的态变为一个有 $(n+1)$ 个粒子的态。因此，a 和 a^* 就分别称为湮灭算符和产生算符。

（*b*）反常玻色振子

在这种情况下，能量算符取这样形式：

$$\mathscr{H} = -Ea^*a, \qquad (13.12)$$

其中 E 是正数，而且

$$aa^* - a^*a = -1。 \qquad (13.13)$$

可以按处理正常玻色振子同样的方式来处理反常玻色振子。

于是，如果 λ 是 $\mathscr{H}$ 对应于本征矢量 Ψ 的本征值，那么

$$\mathscr{H}a\Psi = a\mathscr{H}\Psi - Ea\Psi = (\lambda - E)a\Psi, \qquad (13.14)$$

$$\mathscr{H}a^*\Psi = a^*\mathscr{H}\Psi + Ea^*\Psi = (\lambda + E)a^*\Psi, \qquad (13.15)$$

同样又得到必须存在这样一个矢量 Ψ_0，使得

$$a\Psi_0 = 0, \qquad (13.16)$$

因为不然的话，就要违反真空态条件。因为 $\mathscr{H}\Psi_0 = 0$，通过重复应用 (13.15)，我们找到 $\mathscr{H}$ 的全部本征值为：

$$0, E, 2E, \cdots, nE, \cdots$$

它们分别对应于下列本征矢量

$$\Psi_0, a^*\Psi_0, a^{*2}\Psi_0, \cdots, a^{*n}\Psi_0, \cdots。$$

进而，真空态 Ψ_0 可以归一化为

$$\Psi_0^*\Psi_0 = 1, \qquad (13.17)$$

这就使我们能把对应着本征值 nE 的归一化的本征矢量 Ψ_n 及其厄密共轭 Ψ_n^* 表示为

$$\Psi_n = (n!)^{-1/2}a^{*n}\Psi_0, \quad \Psi_n^* = (n!)^{-1/2}\Psi_0^*a^n. \qquad (13.18)$$

但是，作为对易关系 (13.13) 式的结果，有

$$\Psi_m^*\Psi_n = (-1)^n\delta_{mn}, \qquad (13.19)$$

这表示了一种不定度规。我们可以认为 Ψ_n 表示一个具有 n 个能量为 E 的粒子的态，而且因为 (13.13)，(13.16) 和 (13.18) 给出

$$a\Psi_n = -n^{1/2}\Psi_{n-1}, \quad a^*\Psi_n = (n+1)^{1/2}\Psi_{n+1}, \qquad (13.20)$$

a 和 a^* 又分别是湮灭算符和产生算符。

(c) 正常费米振子

一个正常费米振子的能量算符由

$$\mathscr{H} = Ea^*a, \qquad (13.21)$$

给出，其中 E 是正数，而算符 a 和 a^* 满足关系式

$$aa^* + a^*a = 1, \quad a^2 = 0, \quad a^{*2} = 0. \qquad (13.22)$$

按照 (13.21) 和 (13.22) 式，有

$$\mathscr{H}(\mathscr{H}-E)=0, \tag{13.23}$$

因而，正如在11节中所表明的，$\mathscr{H}$的本征值只能是0和E。也可以证明一定存在着一个

$$a\Psi_0=0, \tag{13.24}$$

的矢量Ψ_0。因为，如果一个给定的矢量Ψ不满足（13.24）式，考虑到（13.22）中的第二式，我们可以从Ψ得到满足（13.24）的$\Psi_0=a\Psi$。也可能由Ψ_0得到另一个由下式给出的矢量Ψ_1

$$\Psi_1=a^*\Psi_0, \tag{13.25}$$

由（13.22）和（13.24）式知Ψ_1满足

$$a\Psi_1=\Psi_0, \qquad a^*\Psi_1=0. \tag{13.26}$$

由上述Ψ_0和Ψ_1的性质可以得到

$$\mathscr{H}\Psi_0=0, \qquad \mathscr{H}\Psi_1=E\Psi_1, \tag{13.27}$$

所以Ψ_0和Ψ_1分别为$\mathscr{H}$对应于本征值0和E的两个本征矢量。而且，当Ψ_0为归一化时，

$$\Psi_0^*\Psi_0=1 \tag{13.28}$$

也有

$$\Psi_1^*\Psi_1=1。 \tag{13.29}$$

我们可以把Ψ_0当作真空态，而把Ψ_1看作一个能量为E的粒子的态，然后从（13.26）和（13.25）看到，a把Ψ_1变换为Ψ_0，而a^*把Ψ_0变换为Ψ_1。因而，a和a^*可以分别地被认为是服从费密——狄喇克统计的粒子的湮灭和产生算符，这些粒子称为费密子。

（d）非正常费密振子

在这种情况下能量算符取这样形式

$$\mathscr{H}=-Ea^*a \tag{13.30}$$

其中E为正数，而且

$$aa^*+a^*a=-1, \qquad a^2=0 \qquad a^{2*}=0 \tag{13.31}$$

仿照和正常费密振子相同的讨论，可以证明$\mathscr{H}$的本征值只

能是 0 和 E，而且与这两个本征值相对应的本征矢量 Ψ_0 和 Ψ_1 满足关系式

$$\begin{aligned} a\Psi_0 &= 0, \qquad a^*\Psi_0 = \Psi_1, \\ a^*\Psi_1 &= 0, \qquad a\Psi_1 = -\Psi_0. \end{aligned} \tag{13.32}$$

然而，若 Ψ_0 归一化为

$$\Psi_0^*\Psi_0 = 1$$

那么

$$\Psi_1^*\Psi_1 = \Psi_0^* a a^* \Psi_0 = -\Psi_0^*\Psi_0 = -1,$$

这样就产生了不定度规

$$\Psi_m^*\Psi_n = (-1)^n \delta_{mn}, \tag{13.33}$$

其中 m 和 n 取 0 和 1 的值。我们可以把 Ψ_0 看作真空态，而把 Ψ_1 看作一个能量为 E 的粒子的态，那末可以得出，a 和 a^* 又分别代表湮灭和产生算符。

14. 用正规积表示的量子场论

在量子理论中，一个场的系统也用一个或多个满足某种场方程的空时函数来描写，但是，现在我们把场量看成算符。因而，我们将通过应用场算符适当的代数学和微积分学，来发展量子场论的理论结构①。

(a) 正规积

我们假设一般存在两种类型的场算符，称这两类算符为玻色算符和费密算符。同时我们把两个或多个场算符 $U\cdots\cdots V$ 的正规积表示为 $:U\cdots\cdots V:$，假设它具有如下性质：

1. 在一个正规积中场算符的次序可以调换，如果任意二个费密算符，则彼此按反对易调换，而任意其它二算符则按彼此对易调换。例如，如果 U 和 V 为两个费密算符，那么

$$:UV: = -:VU: \tag{14.1}$$

而除此以外

① S.N.Gupta, Phys.Rev.107, 1722(1957)

$$:UV:=:VU:. \tag{14.2}$$

2. 正规积满足加法规则

$$\begin{aligned}&:U\cdots V:+:W\cdots X:=:(U\cdots V+W\cdots X):,\\&:U\cdots V\cdots X:+:U\cdots W\cdots X:=:U\cdots(V+W)\cdots X:.\end{aligned} \tag{14.3}$$

3. 若A是任意算符，同时

$$:U\cdots V:=:W\cdots X:, \tag{14.4}$$

那么

$$\begin{aligned}&:AU\cdots V:=:AW\cdots X:,\\&:U\cdots VA:=:W\cdots XA:.\end{aligned} \tag{14.5}$$

4. 一个正规积的正规积满足关系式

$$:U\cdots V(:W\cdots X:):=:U\cdots VW\cdots X:. \tag{14.6}$$

5. 对任意的δU，若

$$:V\cdots W\delta U:=0 \tag{14.7}$$

则有

$$:V\cdots W:=0. \tag{14.8}$$

6. 一个正规积可以和非算符c相乘，也可以按照下式对非算符变量x_μ微分：

$$\begin{aligned}&c:U\cdots V:=:cU\cdots V:,\\&\partial_\mu(:U\cdots V:)=:\partial_\mu(U\cdots V):.\end{aligned} \tag{14.9}$$

7. 若算符U，……V中任意一对玻色算符的对易子，和任意一对费密算符的反对易子都不是算符，那么这些算符的正规积可以表示为这样形式

$$:U\cdots V:=U\cdots V+\sum_i c_i f_i, \tag{14.10}$$

其中c_i不是算符，而f_i是由$U\cdots V$中略去一对或几对玻色或费密算符而得到的算符乘积。

暂时我们限于假设这些正规积的重要性质。然而，在16节，我们将给出正规积的明确定义，这一定义是和上述性质相一致的。

让我们进一步考虑任意两算符U和V的正规积

$$f=:UV: \tag{14.11}$$

并且对这些算符实行任意的无限小变分，而仍保留每一个算符的玻色性或者费密性，那么

$$\delta f=:\delta UV:+:U\delta V:=\pm:V\delta U:+:U\delta V:, \tag{14.12}$$

其中负号对应于U和V都是费密算符的情况，而正号对应于所有其他情况。上述关系可写为

$$\delta f=:\frac{\partial f}{\partial U}\delta U:+:\frac{\partial f}{\partial V}\delta V: \tag{14.13}$$

其中

$$\frac{\partial f}{\partial U}=\pm V,\qquad \frac{\partial f}{\partial V}=U. \tag{14.14}$$

同样地，如果

$$f=:\cdots UVW\cdots:, \tag{14.15}$$

那么，通过将f相对于算符V的导数定义为，例如，下式：

$$\frac{\partial f}{\partial V}=\pm:\cdots UW\cdots:, \tag{14.16}$$

则δf可以写成这样的形式

$$\delta f=\cdots+:\frac{\partial f}{\partial U}\delta U:+:\frac{\partial f}{\partial V}\delta V:+:\frac{\partial f}{\partial W}\delta W:+\cdots \tag{14.17}$$

在上式中，如果V是费密算符，而且奇数个费密算符出现在乘积（14.15）中V的右边，那么就取负号，而所有其他情况都取正号。

(*b*) 拉格朗日形式

借助正规积能够按协调方式来系统阐述量子场论。我们假定，对任意场的系统都存在一洛伦兹不变的拉格朗日密度L，它由一些线性独立的场变量$u^{(1)},u^{(2)}\cdots\cdots u^{(n)}$以及它们空间和时间的一阶导数的正规积组成：

$$L = L:(u^{(r)}, \partial_\mu u^{(r)}):, \tag{14.18}$$

其中 r 取 1，2，…n 的值而（14.18）右边表示 L 是 $u^{(r)}$ 和 $\partial_\mu u^{(r)}$ 的正规积函数。对每一个 r 值，场算符可以是一个玻色算符或者是一个费密算符，但是，要使我们现在的理论结构协调的发展，就要求 L 中的每一项要么没有费密算符，要么就有偶数个费密算符的乘积。

从上面讨论过的有关正规积的性质可以明显看出，我们可以用大体上和处理经典量相同的方法来处理拉格朗日密度(14.18)。这样，通过应用第 6 节的变分原理，我们得到场方程组

$$\frac{\partial L}{\partial u^{(r)}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu u^{(r)})} \right) = 0, \tag{14.19}$$

其中 L 的导数现在按（14.16）式来定义。而且，遵照第 8 节的论述，可以证明正则的能量动量张量

$$S_{\mu\nu} = -\sum_r : \frac{\partial L}{\partial (\partial_\nu u^{(r)})} \partial_\mu u^{(r)} : + \delta_{\mu\nu} V \tag{14.20}$$

满足守恒方程

$$\partial_\nu S_{\mu\nu} = 0, \tag{14.21}$$

同时我们注意到，能量密度 H 和动量密度 G_i 由

$$H = -S_{44} = \sum_r : \frac{\partial L}{\partial (\partial u^{(r)}/\partial t)} \frac{\partial u^{(r)}}{\partial t} : - L, \tag{14.22}$$

$$G_i = -\frac{i}{c} S_{i4} = -\sum_r : \frac{\partial L}{\partial (\partial u^{(r)}/\partial t)} \partial_i u^{(r)} :. \tag{14.23}$$

给出。第 8 节的论述同样地可应用于推导对称能量动量张量 $T_{\mu\nu}$。

(c) 正则形式

通过定义量 $\pi^{(r)}$ 为

$$\pi^{(r)} = \frac{\partial L}{\partial (\partial u^{(r)}/\partial t)}, \tag{14.24}$$

可以将拉格朗日场方程组（14.19）式表示为另一种形式。上式中 $\pi^{(r)}$ 称为 $u^{(r)}$ 的正则共轭。有时一个场的拉格朗日密度是这样的，使得一个或多个 $\pi^{(r)}$ 为零。因此，为了普遍起见，我们假定 $\pi^{(1)}$，$\pi^{(2)}$，…，$\pi^{(l)}$ 不为零，而 $\pi^{(l+1)}$，$\pi^{(l+2)}$，…，$\pi^{(n)}$ 为零。我们还假定，和 $u^{(1)}$，$u^{(2)}$，…，$u^{(l)}$ 及其空间导数一样，$\pi^{(1)}$，$\pi^{(2)}$，…，$\pi^{(l)}$ 及其空间导数也是彼此线性独立的。算符 $u^{(1)}$，$u^{(2)}$，…，$u^{(l)}$ 及其正则共轭可以叫做正则变量，但是，按照我们的定义，算符 $u^{(l+1)}$，$u^{(l+2)}$，…，$u^{(n)}$ 将不看成正则变量。

考虑到（14.24）式，场方程（14.19）和能量密度（14.22）可以写为

$$\frac{\partial L}{\partial u^{(r)}}-\partial_i\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_i u^{(r)})}\right)-\frac{\partial \pi^{(r)}}{\partial t}=0, \tag{14.25}$$

$$H=\sum_{r=1}^{n}:\pi^{(r)}\frac{\partial u^{(r)}}{\partial t}:-L. \tag{14.26}$$

从（14.18）和（14.26）我们也发现，对应于场变量 $u^{(r)}$ 的任意无限小变分，L 和 H 的变分以下式给出

$$\begin{aligned}\delta L&=\sum_{r=1}^{n}\left\{:\frac{\partial L}{\partial u^{(r)}}\delta u^{(r)}:+:\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u^{(r)})}\delta(\partial_\mu u^{(r)}):\right\}\\&=\sum_{r=1}^{n}\left\{:\frac{\partial L}{\partial u^{(r)}}\delta u^{(r)}:+:\frac{\partial L}{\partial(\partial_i u^{(r)})}\delta(\partial_i u^{(r)}):\right.\\&\qquad\left.+:\pi^{(r)}\delta\left(\frac{\partial u^{(r)}}{\partial t}\right):\right\},\end{aligned} \tag{14.27}$$

$$\begin{aligned}\delta H=\sum_{r=1}^{n}&\left\{\pm:\frac{\partial u^{(r)}}{\partial t}\delta\pi^{(r)}:+:\pi^{(r)}\delta\left(\frac{\partial u^{(r)}}{\partial t}\right):\right\}\\&-\delta L,\end{aligned} \tag{14.28}$$

其中（14.28）式中的正号与玻色正则变量情况相对应，而负号与费密正则变量情况相对应。将（14.27）式代入（14.28）式中，得出

$$\delta H=\sum_{r=1}^{n}\left\{\pm:\frac{\partial u^{(r)}}{\partial t}\delta\pi^{(r)}:-:\frac{\partial L}{\partial u^{(r)}}\delta u^{(r)}:\right.$$

$$\left.-:\frac{\partial L}{\partial(\partial_i u^{(r)})}\delta(\partial_i u^{(r)}):\right\},$$

应用（14.25）式，上式可表示为

$$\delta H=\sum_{r=1}^{n}\left\{\pm:\frac{\partial u^{(r)}}{\partial t}\delta\pi^{(r)}:-:\frac{\partial\pi^{(r)}}{\partial t}\delta u^{(r)}:\right.$$

$$\left.-:\partial_i\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_i u^{(r)})}\delta u^{(r)}\right):\right\}. \qquad (14.29)$$

因为（14.29）式右端最后一项对整个空间积分为零，由此得到

$$\int\delta H\,dx=\int\sum_{r=1}^{n}\left\{\pm:\frac{\partial u^{(r)}}{\partial t}\delta\pi^{(r)}:-:\frac{\partial\pi^{(r)}}{\partial t}\delta u^{(r)}:\right\}dx$$

或者由于当 $r>l$ 时，$\pi^{(r)}$ 变为零

$$\int\delta H\,dx=\int\sum_{r=1}^{l}\left\{\pm:\frac{\partial u^{(r)}}{\partial t}\delta\pi^{(r)}:-:\frac{\partial\pi^{(r)}}{\partial t}\delta u^{(r)}:\right\}dx.$$

(14.30)

上述结果表明，H可以被认为是正则变量以及还可能有正则变量空间导数的正规积函数。因此

$$H=H:(u^{(r)},\partial_i u^{(r)},\pi^{(r)},\partial_i\pi^{(r)}):, \qquad (14.31)$$

其中 $r=1,2,\cdots,l$ 。因而有

$$\delta H=\sum_{r=1}^{l}\left\{:\frac{\partial H}{\partial u^{(r)}}\delta u^{(r)}:+:\frac{\partial H}{\partial(\partial_i u^{(r)})}\delta(\partial_i u^{(r)}):\right.$$
$$\left.+:\frac{\partial H}{\partial \pi^{(r)}}\delta\pi^{(r)}:+:\frac{\partial H}{\partial(\partial_i \pi^{(r)})}\delta(\partial_i \pi^{(r)}):\right\}$$
$$=\sum_{r=1}^{l}\left\{:\left[\frac{\partial H}{\partial u^{(r)}}-\partial_i\left(\frac{\partial H}{\partial(\partial_i u^{(r)})}\right)\right]\delta u^{(r)}:\right.$$
$$+:\left[\frac{\partial H}{\partial \pi^{(r)}}-\partial_i\left(\frac{\partial H}{\partial(\partial_i \pi^{(r)})}\right)\right]\delta\pi^{(r)}:$$
$$\left.+:\partial_i\left(\frac{\partial H}{\partial(\partial_i u^{(r)})}\delta u^{(r)}+\frac{\partial H}{\partial(\partial_i \pi^{(r)})}\delta\pi^{(r)}\right):\right\},$$

将上式对整个空间积分，给出

$$\int\delta H\,dx=\int\sum_{r=1}^{l}\left\{:\left[\frac{\partial H}{\partial u^{(r)}}-\partial_i\left(\frac{\partial H}{\partial(\partial_i u^{(r)})}\right)\right]\partial u^{(r)}:\right.$$
$$+:\left[\frac{\partial H}{\partial \pi^{(r)}}-\partial_i\left(\frac{\partial H}{\partial(\partial_j \pi^{(r)})}\right)\right]$$
$$\left.\delta\pi^{(r)}:\right\}dx. \qquad (14.32)$$

因为正则变量及其空间导数是线性独立的，而且空间每点的变分 $\delta u^{(r)}$ 和 $\delta\pi^{(r)}$ 是任意的，当比较 (14.30) 和 (14.32) 时，我们得到正则场方程

$$\pm\frac{\partial u^{(r)}}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial \pi^{(r)}}-\partial_i\left(\frac{\partial H}{\partial(\partial_i \pi^{(r)})}\right),$$
$$-\frac{\partial \pi^{(r)}}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial u^{(r)}}-\partial_i\left(\frac{\partial H}{\partial(\partial_i u^{(r)})}\right), \qquad (14.33)$$

其中 $r=1,2,\cdots,l$。应该注意到(14.33)第一式中的正负号分别与玻色正则变量情况和费密正则变量情况相对应，而正规积函数H的导数则按照 (14.16)式定义。

(*d*) 对易关系

除了拉格朗日形式之外，量子场论需要场算符对易性质的知

识。为此，我们假定对任意场量 $f(x)$，对易规律为：

$$\partial_\mu f(x) = (i/\hbar)[f(x), \mathscr{G}_\mu], \tag{14.34}$$

其中，

$$\mathscr{G}_i = \int G_i dx, \qquad \mathscr{G}_4 = (i/c)\mathscr{H} = (i/c)\int H dx, \tag{14.35}$$

G_i 和 H 为该系统的动量和能量密度，已由 (14.23) 和 (14.22) 给出，而 $2\pi\hbar$ 就是普朗克常数。

特别是从 (14.34) 式可以得到

$$\frac{\partial u^{(r)}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}[u^{(r)}, \mathscr{H}],$$
$$\frac{\partial \pi^{(r)}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}[\pi^{(r)}, \mathscr{H}], \tag{14.36}$$

上式和 (14.33) 式一起，得出

$$\pm[u^{(r)}, \mathscr{H}] = i\hbar\frac{\partial H}{\partial \pi^{(r)}} - i\hbar\partial i\left(\frac{\partial H}{\partial(\partial_i \pi^{(r)})}\right),$$
$$-[\pi^{(r)}, \mathscr{H}] = i\hbar\frac{\partial H}{\partial u^{(r)}} - i\hbar\partial_i\left(\frac{\partial H}{\partial(\partial_i u^{(r)})}\right), \tag{14.37}$$

其中 $r = 1, 2, \cdots, l$。普遍关系式 (14.37) 能被正则变量之间的简单对易关系所满足。玻色正则变量的对易关系式由

$$[u^{(r)}(\mathbf{x}, t), \pi^{(s)}(\mathbf{x}', t)] = i\hbar\delta_{rs}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$
$$[u^{(r)}(\mathbf{x}, t), u^{(s)}(\mathbf{x}', t)] = [\pi^{(r)}(\mathbf{x}, t), \pi^{(s)}(\mathbf{x}', t)] = 0, \tag{14.38}$$

给出，而费密正则变量的对易关系为

$$\{u^{(r)}(\mathbf{x}, t), \pi^{(s)}(\mathbf{x}', t)\} = i\hbar\delta_{rs}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$
$$\{u^{(r)}(\mathbf{x}, t), u^{(s)}(\mathbf{x}', t)\} = \{\pi^{(r)}(\mathbf{x}, t), \pi^{(s)}(\mathbf{x}', t)\} = 0, \tag{14.39}$$

而且任一玻色正则变量和任一费密正则变量是对易的。如果 H 是

一个正则变量和它们空间导数的普通乘积，H中或者不含，或者含有偶数个费密算符，利用（14.38）和（14.39）可证明(14.37)成立。然后注意到正规积函数H可以按照（14.10）借助普通乘积表示出来，就可以证明对于正规积函数的H（14.37）也是成立的。

15. 海森伯绘景和薛定谔绘景

拉格朗日形式给予我们一种在特殊绘景中对量子场论的描述，这种绘景叫海森伯绘景。在海森伯绘景中一个系统的场算符和态矢量对时间的依赖性值得别特注意。按照（14.34)式，任何场量$f_H(x)$随时间按照

$$\partial f_H/\delta t = -(i/\hbar)[f_H, \mathscr{H}_H], \tag{15.1}$$

变化，其中下标H表示这些量属于海森伯绘景。我们将进一步假定系统的态矢量Ψ_H不随时间变化，即

$$d\Psi_H/dt = 0, \tag{15.2}$$

这意味着，在海森伯绘景中，在一段时间内系统性质上变化是由于场算符在这段时间内按照海森伯方程（15.1）式所给出的变化造成的。

我们可以通过么正变换从海森伯绘景过渡到薛定谔绘景

$$\Psi_S = U\Psi_H, \quad f_S = Uf_HU^*, \tag{15.3}$$

其中下标S表示这个量是在薛定谔绘景中，而U是么正算符，由

$$U = \mathrm{esp}[-i\mathscr{H}_H(t-t_0)/\hbar], \tag{15.4}$$

给出，其中包含有不变的厄密算符$\mathscr{H}_H$和一个任意常数t_0。由此得出

$$U^{-1} = U^* = \mathrm{esp}[i\mathscr{H}_H(t-t_0)/\hbar], \tag{15.5}$$

并且，因为U和U^*是$\mathscr{H}$的函数

$$\mathscr{H}_S = U\mathscr{H}_HU^* = \mathscr{H}_H \tag{15.6}$$

现在我们考虑Ψ_S和f_S随时间的变化。从（15.3）（15.2）

和（15.4），我们得到

$$d\Psi_S/dt=(dU/dt)\Psi_H=-(i/\hbar)U\mathscr{H}_H\Psi_H$$
$$=-(i/\hbar)\mathscr{H}_S\Psi_S$$

即

$$i\hbar(d\Psi_S/dt)=\mathscr{H}_S\Psi_S, \qquad (15.7)$$

而按照（15.3）式

$$\partial f_S/\partial t=U(\partial f_H/\partial t)U^*+(dU/dt)f_HU^*$$
$$+Uf_H(dU^*/dt),$$

再应用（15.1），（15.4）和（15.5）得

$$\partial f_S/\partial t=0. \qquad (15.8)$$

这样，在薛定谔绘景中，系统的态矢量按薛定谔方程（15.7）随时间变化，而场算符则不随时间改变。

当然，薛定谔绘景保证态矢量的模方保持不变，因为(15.7)式的厄密共轭为

$$-i\hbar(d\Psi_S^*/dt)=\Psi_S^*\mathscr{H}_S, \qquad (15.9)$$

而作为（15.7）和（15.9）的结果，有

$$d(\Psi_S^*\Psi_S)/dt=(d\Psi_S^*/dt)\Psi_S$$
$$+\Psi_S^*(d\Psi_S/dt)=0. \qquad (15.10)$$

16. 相互作用绘景

除了海森伯绘景和薛定谔绘景以外，对于有相互作用的场系统，引入另一个绘景是有用的。① 为了简单起见，我们考虑有相互作用的两个场构成的系统，这样每一个场就用单独的场算符来描述。我们用 $u_H^{(1)}$ 和 $u_H^{(2)}$ 表示两个场的场算符，用 $\pi_H^{(1)}$ 和 $\pi_H^{(2)}$ 表示它们的正则共轭，其中下标 H 表示这些量属于海森伯绘景。按照（14.38）和（14.39）式，系统的正则对易关系为

$$u_H^{(r)}(\mathbf{x},t)\pi_H^{(s)}(\mathbf{x}',t)\mp\pi_H^{(s)}(\mathbf{x}',t)u_H^{(r)}(\mathbf{x},t)=i\hbar\delta_{rs}(\mathbf{x}-\mathbf{x}'),$$

① S.Tomonaga, Progr. Theoret. Phys. 1, 27(1946)

$$u_H^{(s)}(x,t)n_H^{(s)}(x',t)\mp u_H^{(s)}(x',t)u_H^{(r)}(x,t)=0, \qquad (16.1)$$
$$\pi_H^{(s)}(x,t)\pi_H^{(s)}(x',t)\mp\pi_H^{(s)}(x',t)\pi_H^{(r)}(x,t)=0,$$

其中 r 和 s 取值为 1 和 2，而上号和下号分别对应玻色情况和费密情况。系统的能量算符 $\mathscr{H}_H$ 表示为

$$\mathscr{H}_H=\mathscr{H}_H^{(1)}+\mathscr{H}_H^{(2)}+\mathscr{H}'_H, \qquad (16.2)$$

其中 $\mathscr{H}_H^{(1)}$ 和 $\mathscr{H}_H^{(2)}$ 为两个场的能量，而 $\mathscr{H}'_H$ 表示相互作用能，因而这些算符具有这样形式

$$\mathscr{H}_H^{(1)}=\int H^{(1)}:(u_H^{(1)},\ \pi_H^{(1)},\ \partial_i u_H^{(1)},\ \partial_i\pi_H^{(1)}):dx,$$
$$\mathscr{H}_H^{(2)}=\int H^{(2)}:(u_H^{(2)},\ \pi_H^{(2)},\ \partial_i u_H^{(2)},\ \partial_i\pi_H^{(2)}):dx,$$
$$\mathscr{H}'_H=\int H':(u_H^{(r)},\ \pi_H^{(r)},\ \partial_i u_H^{(r)},\ \partial_i\pi_H^{(r)}):dx. \qquad (16.3)$$

正如 15 节所讨论的，系统态矢量及其正则变量的时间依赖性由

$$d\Psi_H/dt=0, \qquad (16.4)$$

和

$$\partial u_H^{(r)}/\partial t=-(i/\hbar)[u_H^{(r)},\mathscr{H}_H],$$
$$\partial\pi_H^{(r)}/\partial t=-(i/\hbar)[\pi_H^{(r)},\mathscr{H}_H]. \qquad (16.5)$$

给出。现在我们进行么正变换

$$\Psi=U\Psi_H,\quad u^{(r)}=Uu_H^{(r)}U^*,\quad \pi^{(r)}=U\pi_H^{(r)}U_*, \qquad (16.6)$$

其中量 Ψ，$u^{(r)}$ 和 $\pi^{(r)}$ 属于另一绘景，这一绘景称做相互作用绘景，而 U 以下式给出

$$i\hbar(dU/dt)=U\mathscr{H}'_H,\quad [U]_{t=t_0}=1, \qquad (16.7)$$

t_0 为一任意瞬时。因为相互作用能 $\mathscr{H}'_H$ 随时间改变，因此不能直接积分 (16.7) 式来得到 U 的解。然而，可以证明算符 U 是么正的，因通过关系式 $U^{-1}U=1$ 对时间微分，再应用 (16.7)

式，我们得到

$$-i\hbar(dU^{-1}/dt)=\mathscr{H}'_{H}U^{-1},$$

$$[U^{-1}]_{t=t_0}=1,$$

上式和（16.7）式的厄密共轭相比较，给出

$$U^{-1}=U^{*} \tag{16.8}$$

应用（16.6）式，将对易关系（16.1）式变为

$$\begin{aligned}
&u^{(r)}(x,t)\pi^{(s)}(x',t)\mp\pi^{(s)}(x',t)u^{(r)}(x,t)\\
&\quad=i\hbar\delta_{rs}(x-x'),\\
&u^{(r)}(x,t)u^{(s)}(x',t)\mp u^{(s)}(x',t)u^{(r)}(x,t)=0,\\
&\pi^{(r)}(x,t)\pi^{(s)}(x',t)\mp\pi^{(s)}(x',t)\pi^{(r)}(x,t)=0,
\end{aligned} \tag{16.9}$$

而（16.2）式所表示的能量算符变为

$$\mathscr{H}=\mathscr{H}^{(1)}+\mathscr{H}^{(2)}+\mathscr{H}', \tag{16.10}$$

这里，考虑到正则变量及其空间导数的正规积可表示为公式（14.10）形式，有

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}^{(1)}&=\int H^{(1)}:(u^{(1)},\pi^{(1)},\partial_i u^{(1)},\partial_i\pi^{(1)}):dx,\\
\mathscr{H}^{(2)}&=\int H^{(2)}:(u^{(2)},\pi^{(2)},\partial_i u^{(2)},\partial_i\pi^{(2)}):dx,\\
\mathscr{H}'&=\int H':(u^{(r)},\pi^{(r)},\partial_j\pi^{(r)},\partial_i\pi^{(v)}):dx.
\end{aligned} \tag{16.11}$$

从（16.6），（16.4）和（16.7）式解出Ψ的时间依赖性

由

$$i\hbar(d\Psi/dt)=i\hbar(dU/dt)\Psi_H=U\mathscr{H}'_{H}U^{*}\Psi$$

或

$$i\hbar(d\Psi/dt)=\mathscr{H}'\Psi, \tag{16.12}$$

给出，应用15节中所用的方法，可以证明，Ψ的模方不随时间改变。

进一步，从（16.6），（16.5）和（16.7）式，我们得到

$$\partial u^{(1)}/\partial t = U(\partial u_H^{(1)}/\partial t)U^* + (dU/dt)u_H^{(1)}U^* + Uu_H^{(1)}(dU^*/dt)$$
$$= -(i/\hbar)U[u_H^{(1)}, (\mathscr{H}_H^{(1)} + \mathscr{H}_H^{(2)})]U^*$$

即

$$\partial u^{(1)}/\partial t = -(i/\hbar)[u^{(1)}, (\mathscr{H}^{(1)} + \mathscr{H}^{(2)})].$$

因为 $u^{(1)}$ 和 $\mathscr{H}^{(2)}$ 对易，上式简化为

$$\partial u^{(1)}/\partial t = -(i/\hbar)[u^{(1)}, \mathscr{H}^{(1)}], \qquad (16.13)$$

而且，正如 14 节所表明的，对易关系 (16.9)产生

$$\pm[u^{(1)}, \mathscr{H}^{(1)}] = i\hbar\frac{\partial H^{(1)}}{\partial \pi^{(1)}} - i\hbar\partial_i\left(\frac{\partial H^{(1)}}{\partial(\partial_i \pi^{(1)})}\right) \qquad (16.14)$$

从 (16.13) 和 (16.14) 式得到

$$\pm\frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} = \frac{\partial H^{(1)}}{\partial \pi^{(1)}} - \partial_i\left(\frac{\partial H^{(1)}}{\partial(\partial_i \pi^{(1)})}\right), \qquad (16.15)$$

并且类似地

$$-\frac{\partial \pi^{(1)}}{\partial t} = \frac{\partial H^{(1)}}{\partial u^{(1)}} - \partial_i\left(\frac{\partial H^{(1)}}{\partial(\partial_i u^{(1)})}\right) \qquad (16.16)$$

关系式 (16.15) 和 (16.16) 只不过是场 $u^{(1)}$ 的非耦合正则场方程，与此相应的场量 $u^{(2)}$ 的非耦合场方程可以通过同样步骤而得到。

上述讨论，很明显可以推广到相互作用场的任意系统，这样可以导致下述结论：

1. 在相互作用绘景中态矢量按关系式 (16.12) 随时间变化，其中 $\mathscr{H}'$ 为相互作用绘景中系统的相互作用能。

2. 相互作用绘景中的场算符满足的场方程和相互作用不存在的海森伯绘景中的场算符所满足场方程相同。

已经发现，对所有物理上有兴趣的场，相互作用绘景中的正则变量都满足波动方程

$$(\partial^2 - \kappa^2)u^{(r)} = 0, \quad (\partial^2 - \kappa^2)\pi^{(r)} = 0, \qquad (16.17)$$

其中常量 κ 可以为零，也可以不为零。如第 10 节所表明，从(16.17) 式可得到，正则变量 $u^{(r)}$ 和 $\pi^{(r)}$ 可以以洛伦兹协变形式分解为正频和负频部分。而且通过将 $u^{(r)}$ 和 $\pi^{(r)}$ 的付里叶展开式代入正则对易关系，可以证明，任意二费密正则变量的正频部分彼此反对易，而任意其他二个正则变量的正频部分彼此可对易。正则变量的负频部分也具有同样性质。

在 14 节中我们假定了正规积的重要性质。现在我们能够给出在相互作用绘景中正规积的明确定义①。我们考虑场算符的任意乘积

$$U\cdots V\cdots W, \tag{16.18}$$

这里的算符可以表示为正频部分和负频部分的和。将 (16.18) 式表示为那样一些项之和，其中任何一项中的每一因子不是正频部分就是负频部分。然后，调换每一项中的因子的次序，其因子若为二个费密算符，则彼此反对易，若为任何其它二个算符，则彼此对易。按这样方式重排每项中所有因子，使所有正频部分在右边，而所有负频率部分在左边。最终表示式就是正规积

$$:U\cdots V\cdots W:. \tag{16.19}$$

因此，例如，若 U 和 V 是费密算符，那么

$$\begin{aligned}:UV: &= :(U^+ + U^-)(V^+ + V^-):\\ &= :(U^+V^+ + U^+V^- + U^-V^+ + U^-V^-):\\ &= U^+V^+ - V^-U^+ + U^-V^+ + U^-V^-,\end{aligned} \tag{16.20}$$

而在其他情况下

$$\begin{aligned}:UV: &= :(U^+ + U^-)(V^+ + V^-):\\ &= :(U^+V^+ + U^+V^- + U^-V^+ + U^-V^-):\\ &= U^+V^+ + V^-U^+ + U^-V^+ + U^-V^-\end{aligned} \tag{16.21}$$

① G.C.Wick, Phys.Rev.80, 268(1950)

从正频部分和负频部分的对易性质可以看到，像上面所定义的正规积，满足 14 节的全部特性。进而，定义了相互作用绘景中的正规积以后，我们也可以得到它在海森伯绘景中的定义，因为，我们将任何在相互作用绘景中的正则变量表示为

$$U = U^{+} + U^{-}, \tag{16.22}$$

并进行从相互作用绘景过渡到海森伯绘景的么正变换，这提供出这样的关系式

$$U_{H} = U_{H}^{+} + U_{H}^{-}, \tag{16.23}$$

因此，在海森伯绘景中的正规积可以按和相互作用绘景中相同的方式来定义，只要用U_{H}^{+}和U_{H}^{-}来代替U^{+}和U^{-}即可。

17. 复　场

14 节中所描述的量子场论的理论结构应用于具有形式如(14.18)的拉格朗日密度的场系统，是以场算符 $u^{(r)}$ 线性独立为条件的。现在我们考虑一个复场，这场是用线性独立的场算符 $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}\cdots\cdots u^{(n)}$ 及其厄密共轭来描述的，并且令其拉格朗日密度具有这样形式

$$L = L{:}(u^{(r)}, u^{(r)*}, \partial_{\mu}u^{(r)}, \partial_{\mu}u^{(r)*}){:}, \tag{17.1}$$

其中 r 取值为1，2，$\cdots n$。因为 $u^{(r)}$ 和 $u^{(r)*}$ 是线性独立的，所以除了用 $2n$ 个变量 $u^{(r)}$ 和 $u^{(r)*}$ 来代替 n 个变量 $u^{(r)}$ 外，14 节的全部讨论都可在这里应用。这样，(17.1)式就给出场方程组

$$\frac{\partial L}{\partial u^{(r)}} - \partial_{\mu}\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}u^{(r)})}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial u^{(r)*}} - \partial_{\mu}\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}u^{(r)*})}\right) = 0, \tag{17.2}$$

而正则能量动量张量是

$$S_{\mu\nu} = -\sum_{r}{:}\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\nu}u^{(r)})}\partial_{\mu}u^{(r)} + \frac{\partial L}{\partial(\partial_{\nu}u^{(r)*})} \times \partial_{\mu}u^{(r)*}\right]{:} + \delta_{\mu\nu}L. \tag{17.3}$$

特别是，能量密度H和动量密度G_i以下式给出

$$H=\sum_r{}'\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial u^{(r)}/\partial t)}\frac{\partial u^{(r)}}{\partial t}+\frac{\partial L}{\partial(\partial u^{(r)*}/\partial t)}\frac{\partial u^{(r)*}}{\partial t}\right]'-L, \tag{17.4}$$

$$G_i=-\sum_r{}'\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial u^{(r)}/\partial t)}\partial_i u^{(r)}+\frac{\partial L}{\partial(\partial u^{(r)*}/\partial t)}\partial_i u^{(r)*}\right]'. \tag{17.5}$$

进一步，$u^{(r)}$ 和 $u^{(r)*}$的正则共轭是

$$\pi^{(r)}=\frac{\partial L}{\partial(\partial u^{(r)}/\partial t)},$$

$$\pi^{(r)*}=\frac{\partial L}{\partial(\partial u^{(r)*}/\partial t)}。 \tag{17.6}$$

当然，其中 $u^{(r)*}$的正则共轭 $\pi^{(r)*}$并不必须是 $\pi^{(r)}$ 的厄密共轭。像 14 节中已讨论过的一样，复场的正则形式可以在适当条件下加以发展，而玻色或费密对易关系也和 (14.38) 或者 (14.39) 相类似，只不过其中不仅包含 $u^{(r)}$ 和 $\pi^{(r)}$ 而且还包含 $u^{(r)*}$和 $\pi^{(r)*}$。

在位相变换

$$u^{(r)}\to u^{(r)}e^{i\alpha},\quad u^{(r)*}\to u^{(r)}e^{-i\alpha}, \tag{17.7}$$

下，要求一个复场的拉格朗日密度是不变量，这里 α 为一实常数。上述条件意味着，L 仅仅通过 $u^{(r)*}u^{(s)}$ 的组合或包括空时导数的类似组合而依赖于复场变量。当 α 取为无限小量时，(17.7) 式可写成

$$u^{(r)} \to u^{(r)}(1+i\alpha), \quad u^{(r)*} \to u^{(r)*}(1-i\alpha),$$

所以 $u^{(r)}$ 和 $u^{(r)*}$ 的变分是

$$\delta u^{(r)} = i\alpha u^{(r)}, \quad \delta u^{(r)*} = -i\alpha u^{(r)*}. \tag{17.8}$$

从 L 对于变分 (17.8) 的不变性可以得到

$$\sum_r :\Big[\frac{\partial L}{\partial u^{(r)}}(i\alpha u^{(r)}) + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u^{(r)})}(i\alpha\partial_\mu u^{(r)}) + \frac{\partial L}{\partial u^{(r)*}}(-i\alpha u^{(r)*}) + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u^{(r)*})}\times (-i\alpha\partial_\mu u^{(r)*})\Big]: = 0,$$

用 α 除上式，并且应用场方程组 (17.2) 得到

$$i\sum_r :\Big[\partial_\mu\Big(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u^{(r)})}u^{(r)} + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u^{(r)})}\partial_\mu u^{(r)} - \partial_\mu\Big(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u^{(r)*})}\Big)u^{(r)*} - \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u^{(r)*})}\partial_\mu u^{(r)*}\Big] = 0$$

或

$$i\sum_r \partial_\mu :\Big[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u^{(r)})}u^{(r)} - \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u^{(r)*})}\times u^{(r)*}\Big]: = 0. \tag{17.9}$$

我们现在定义一个四维矢量 j_μ

$$j_\mu = -\frac{ie}{\hbar}\sum_r :\Big[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u^{(r)})}u^{(r)} - \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u^{(r)*})}u^{(r)*}\Big]:, \tag{17.10}$$

其中常因子 $e/\hbar$ 是为以后方便而选取的。那么，由 (17.9) 式得，

$$\partial_\mu j_\mu = 0\,。 \tag{17.11}$$

这与（2.12）式一致，上式可以解释为表示电荷守恒。这样，一个复场就可以看作为一个带电场，其电流四维矢量由（7.10）式给出，因而其电荷是

$$Q=\int \rho dx, \tag{17.12}$$

其中

$$\rho=-\frac{i}{c}j_4=-\frac{ie}{\hbar}\sum_r :\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial u^{(r)}/\partial t)}u^{(r)}-\frac{\partial L}{\partial(\partial u^{(r)*}/\partial t)}u^{(r)*}\right]: \tag{17.13}$$

18. 场的量子化的几个实例

量子场论的一些概念可以通过中性和带电标量场的量子化简单地加以说明。我们将假定标量场是用玻色场算符来描述的，随后讨论这一假定是否必需。

(a) 中性标量场

这个场是用满足下列方程的厄密标量算符 U 来描写的

$$(\partial^2-\kappa^2)U=0, \tag{18.1}$$

上式可以按照 14 节的方法，从洛伦兹不变的拉格朗日密度

$$L=-\frac{1}{2}:\left[(\partial_\mu U)^2+\kappa^2U^2\right]: \tag{18.2}$$

得到。所求得的能量密度 H 和动量密度 G_i 为

$$H=\frac{1}{2}:\left[(\partial_i U)^2+(\partial_0 U)^2+\kappa^2U^2\right]:, \tag{18.3}$$

$$G_i=-c^{-1}:(\partial_0 U\partial_i U):.$$

而 U 的正则共轭由

$$\pi=c^{-1}\partial_0 U \tag{18.4}$$

给出，这个场的玻色对易关系是

$$[U(x,t),\partial_0 U(x',t)]=ic\hbar\delta(x-x'), \tag{18.5}$$

$$[U(x,t),U(x',t)]=[\partial_0 U(x,t),\partial_0 U(x',t)]=0.$$

像在第10节中一样，我们假定场封闭在一个体积为V的大立方盒子中，并对场实行付里叶展开

$$U=\sum_{\mathbf{k}}[U^{+}(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-k_0x_0)}+U^{-}(\mathbf{k})e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-k_0x_0)}], \tag{18.6}$$

其中

$$k_0=(\mathbf{k}^2+\kappa^2)^{1/2}. \tag{18.7}$$

令

$$U^{+}(\mathbf{k})=(c\hbar/2k_0V)^{1/2}a(\mathbf{k}),$$

将是很方便的。由于U为厄密的，因而有

$$U^{-}(\mathbf{k})=(c\hbar/2k_0V)^{1/2}a^{*}(\mathbf{k})。$$

这样（18.6）就变为

$$U=V^{-1/2}\sum_{\mathbf{k}}(c\hbar/2k_0)^{1/2}[a(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-k_0x_0)}+a^{*}(\mathbf{k})e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-k_0x_0)}], \tag{18.8}$$

其中，应当注意到算符$a(\mathbf{k})$和$a^{*}(\mathbf{k})$分别属于正频部分和负频部分。

将（18.8）式代入（18.5）的第一式中，得到

$$\begin{aligned}V^{-1}\sum_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}\frac{1}{2}(k_0'/k_0)^{1/2}\{&[a(\mathbf{k}),a^{*}(\mathbf{k}')]\times e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}')}e^{-i(k_0-k_0')x_0}\\&-[a^{*}(\mathbf{k}),a(\mathbf{k}')]e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}')}e^{i(k_0-k_0')x_0}\\&-[a(\mathbf{k}),a(\mathbf{k}')]e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}')}e^{-i(k_0+k_0')x_0}\\&+[a^{*}(\mathbf{k}),a^{*}(\mathbf{k}')]e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}')}e^{i(k_0+k_0')x_0}\}\\&=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'),\end{aligned} \tag{18.9}$$

上式只有当左边与时间无关时才能成立。这样，（18.9）式中$\exp[-i(k_0+k_0')x_0]$和$\exp[i(k_0+k_0')x_0]$的系数必须为零，即

$$[a(\mathbf{k}),a(\mathbf{k}')]=[a^*(\mathbf{k}),a^*(\mathbf{k}')]=0. \qquad (18.10)$$

而且，在（18.9）式中，除非 $\mathbf{k}'_0=\mathbf{k}_0$，$\exp[-i(\mathbf{k}_0-\mathbf{k}'_0)x_0]$ 和 $\exp[i(\mathbf{k}_0-\mathbf{k}'_0)x_0]$ 的系数也必须为零，因此，（18.9）式简化为

$$V^{-1}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{\mathbf{k}'}\frac{1}{2}\{[a(\mathbf{k}),a^*(\mathbf{k}')]e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}')}$$

$$-[a^*(\mathbf{k}),a(\mathbf{k}')]e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}')}\}=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}').$$

用 $\exp[-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}'')]$ 乘上式并借助于下列关系式

$$V^{-1}\int d\mathbf{x}e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}=\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}, \qquad (18.11)$$

将其中的两个体积分作出，我们得到

$$\frac{1}{2}\{[a(\mathbf{p}),a^*(\mathbf{p}')]-[a^*(-\mathbf{p}),a(-\mathbf{p}')]\}=\delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}$$

(18.12)

同样，（18.5）中第二关系式给出

$$\frac{1}{2}\{[a(\mathbf{p}),a^*(\mathbf{p}')]+[a^*(-\mathbf{p}),a(-\mathbf{p}')]\}=0, \qquad (18.13)$$

于是，从（18.12）和（18.13）可以得到

$$[a(\mathbf{k}),a^*(\mathbf{k}')]=\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}. \qquad (18.14)$$

进一步，将（18.8）代入（18.3）式，并且对体积 V 积分，场的能量和动量可以表示为

$$\mathscr{H}=\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{2}c\hbar k_0:[a^*(\mathbf{k})a(\mathbf{k})+a(\mathbf{k})a^*(\mathbf{k})]:,$$

$$\mathscr{G}_i=\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{2}\hbar k_i:[a^*(\mathbf{k})a(\mathbf{k})+a(\mathbf{k})a^*(\mathbf{k})]:. \qquad (18.15)$$

正如 16 节所阐明过的，若算符 $a(\mathbf{k})$ 和 $a^*(\mathbf{k})$ 彼此可对易，则它们在正规积中也可对易，并且，若 $a(\mathbf{k})$ 在右边，$a^*(\mathbf{k})$ 在左边，则 $a(\mathbf{k})$ 和 $a^*(\mathbf{k})$ 的正规积和普通乘积相等。因而（18.15）式也

可表示为

$$\mathscr{H} = \sum_{\mathbf{k}} c\hbar k_0 a^*(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}),$$

$$\mathscr{G}_i = \sum_{\mathbf{k}} \hbar k_i a^*(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}). \qquad (18.16)$$

上述关系和 (18.14) 式一起，表明中性标量场可以看成为由 13 节中所讨论过的正常玻色振子组成，并且 $a(\mathbf{k})$ 和 $a^*(\mathbf{k})$ 分别代表能量为 $c\hbar k_0$ 而动量为 $\hbar k_i$ 的粒子的湮灭算符和产生算符。因为这些粒子的静止能量为 $c\hbar k$，它们的静止质量为

$$m = \hbar k / c. \qquad (18.17)$$

(*b*) 带电标量场

在这种情况里标量场算符 U 是非厄密的，但是场方程还由

$$(\partial^2 - \kappa^2) U = 0 \qquad (18.18)$$

或其厄密共轭方程

$$(\partial^2 - \kappa^2) U^* = 0, \qquad (18.19)$$

给出，而且以上两方程可以按照 17 节的方法从拉格朗日密度

$$L = -:(\partial_\mu U^* \partial_\mu U + \kappa^2 U^* U): \qquad (18.20)$$

导出。我们可以求得能量密度 H，动量密度 G_i 和电荷密度 ρ 由下式给出

$$\begin{aligned} H &= :(\partial_0 U^* \partial_0 U + \partial_i U^* \partial_i U + \kappa^2 U^* U):, \\ G_i &= -c^{-1}:(\partial_0 U^* \partial_i U + \partial_i U^* \partial_0 U):, \\ \rho &= -(ie/c\hbar):(\partial_0 U^* U - U^* \partial_0 U):, \end{aligned} \qquad (18.21)$$

U 和 U^* 的正则共轭为

$$\pi = c^{-1} \partial_0 U^*, \quad \pi^* = c^{-1} \partial_0 U, \qquad (18.22)$$

而玻色对易关系可表示为

$$\begin{aligned} [U(\mathbf{x},t), \partial_0 U^*(\mathbf{x}',t)] &= ic\hbar\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'), \\ [U(\mathbf{x},t), U^*(\mathbf{x}',t)] &= [\partial_0 U(\mathbf{x},t), \partial_0 U^*(\mathbf{x}',t)] = 0, \\ [U(\mathbf{x},t), \partial_0 U(\mathbf{x}',t)] &= 0, \\ [U(\mathbf{x},t), U(\mathbf{x}',t)] &= [\partial_0 U(\mathbf{x},t), \partial_0 U(\mathbf{x}',t)] = 0. \end{aligned} \qquad (18.23)$$

现在U的付里叶展开式取这样形式

$$U = V^{-1/2}\sum_{\mathbf{k}}(c\hbar/2k_0)^{1/2}[a(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-k_0x_0)} + b^*(\mathbf{k})e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-k_0x_0)}] \tag{18.24}$$

其中

$$k_0 = (\mathbf{k}^2+\kappa^2)^{1/2}, \tag{18.25}$$

将上式代入 (18.23) 式得出

$$[a(\mathbf{k}),a^*(\mathbf{k}')] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'},$$
$$[b(\mathbf{k}),b^*(\mathbf{k}')] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}, \tag{18.26}$$

而包含算符$a(\mathbf{k})$,$a^*(\mathbf{k})$, $b(\mathbf{k})$和$b^*(\mathbf{k})$中任意两个的其它所有对易子全为零。此外，进行付里叶分解后，场的能量、动量和电量可以表示为

$$\mathscr{H} = \sum_{\mathbf{k}} c\hbar k_0 :[a^*(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + b(\mathbf{k})b^*(\mathbf{k})]:,$$
$$\mathscr{G}_i = \sum_{\mathbf{k}} \hbar k_i :[a^*(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + b(\mathbf{k})b^*(\mathbf{k})]:, \tag{18.27}$$
$$Q = \sum_{\mathbf{k}} e:[a^*(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) - b(\mathbf{k})b^*(\mathbf{k})]:,$$

上式可以改写为

$$\mathscr{H} = \sum_{\mathbf{k}} c\hbar k_0[a^*(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + b^*(\mathbf{k})b(\mathbf{k})],$$
$$\mathscr{G}_i = \sum_{\mathbf{k}} \hbar k_i[a^*(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + b^*(\mathbf{k})b(\mathbf{k})], \tag{18.28}$$
$$Q = \sum_{\mathbf{k}} e[a^*(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) - b^*(\mathbf{k})b(\mathbf{k})].$$

按照关系式 (18.28) 和 (18.26)，这个场还是由正常玻色振子所组成，而$a(\mathbf{k})$和$a^*(\mathbf{k})$分别代表能量为$c\hbar k_0$，动量为$\hbar k_i$以

及电荷为 e 的粒子的湮灭算符和产生算符，而 $b(\mathbf{k})$ 和 $b^*(\mathbf{k})$ 分别代表电量为 $-e$ 的粒子的同样算符。

(c) 反常标量场

我们现在来看看前面有关中性和带电标量场的论述用于反常标量场时要修改到什么程度。

如果我们改变中性标量场的拉格朗日密度 (18.2) 式的符号，场方程 (18.1)式将不受影响，但是,能量密度 (18.3) 式和对易关系(18.5)式要改变符号。这样，代替(18.16)和 (18.14)式，我们得到

$$\mathscr{H}=\sum_{\mathbf{k}}-c\hbar k_0 a^*(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) \tag{18.29}$$

和

$$[a(\mathbf{k}),a^*(\mathbf{k}')]=-\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}。 \tag{18.30}$$

上式描述一个反常玻色振子系统。同样的讨论可以应用于改变带电标量场的拉格朗日密度 (18.20) 的符号。

而且，如果我们保留中性标量场拉格朗日密度 (18.2) 式，但是把 U 当作一个费密算符，我们发现，拉格朗日密度为零，因为，在正规积中，任意两个费密算符彼此反对易，因此，

$$:\partial_\mu U\partial_\mu U:=-:\partial_\mu U\partial_\mu U:=0,$$

$$:UU:=-:UU:=0.$$

另一方面，如果我们在带电标量场拉格朗日密度 (18.20) 式中把 U 当作费密算符，场方程 (18.18) 式和能量密度 (18.21) 式保持不变，但是，在关系式 (18.23) 中，所有对易子要由反对易子来代替。结果，我们得到

$$\{a(\mathbf{k}),a^*(\mathbf{k}')\}=\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'},$$

$$\{b(\mathbf{k}),b^*(\mathbf{k}')\}=-\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}, \tag{18.31}$$

以及

$$\mathscr{H} = \sum_{\mathbf{k}} c\hbar k_0 :[a^*(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + b(\mathbf{k})b^*(\mathbf{k})]:$$

$$= \sum_{\mathbf{k}} c\hbar k_0 [a^*(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) - b^*(\mathbf{k})b(\mathbf{k})], \qquad (18.32)$$

所以 $a(\mathbf{k})$ 和 $a^*(\mathbf{k})$ 属于正常费密振子，而 $b(\mathbf{k})$ 和 $b^*(\mathbf{k})$ 属于反常费密振子。

在 13 节已经提到，反常玻色振子和反常费密振子导致负模方的态，因此，拉格朗日密度符号的改变和场的统计法的改变只在特殊情况下才是可以允许的，这些特殊情况将在 45 节中再加以论述。

第三章　电子场和光子场

在量子理论中，所有物理实体除了有粒子特征外，还有场的特征，因此尽管量子理论很复杂，但这个理论揭示了自然界的协调性。由于和电磁相互作用相联系的粒子称为光子，我们将电磁场称为光子场，并且我们将尽可能按统一的方法来处理光子场和电子场。

19．光子场的拉格朗日形式

光子场是由满足方程

$$\partial^2 A_\mu = 0 \qquad (19.1)$$

的一个厄密算符 A_μ 来描述的。上式可以按 14 节的论述从拉格朗日密度

$$L = -\frac{1}{2}:(\partial_\nu A_\mu)^2: \qquad (19.2)$$

得到。其中需将 A_μ 看作一个玻色子算符，因为如果 A_μ 是费密算符，作为正规积的（19.2）式就要变为零。也可以把光子的拉格朗日密度取为：

$$L = -:\left[\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\mu)^2\right]: \qquad (19.3)$$

它得出场方程

$$\partial_\nu(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu + \delta_{\mu\nu}\partial_\lambda A_\lambda) = 0 \text{ 或 } \partial^2 A_\mu = 0.$$

拉格朗日密度（19.2）式和(19.3)式是等价的，因为（19.3）式和（19.2）式的不同仅在于差一个四维散度

$\frac{1}{2}:\partial_\mu(A_\nu\partial_\nu A_\mu - A_\mu\partial_\nu A_\nu)$。虽然（19.2）式比较简单，但我

们将采用（19.3）式。它在特殊的规范变换

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda, \qquad \text{而 } \partial^2 \Lambda = 0 \tag{19.4}$$

下具有明显的不变性。Λ 是一个非算符的空时函数。这个变换和在第 4 节中讨论过的经典变换相对应。然而第四节中的附加条件 $\partial_\mu A_\mu = 0$ 在这里不可能满足，而与光子场相对应的附加条件将在下一节中给出。

按照（14.20）式，我们得到光子场的正则能量动量张量是

$$S_{\mu\nu} = :[(\partial_\nu A_\rho - \partial_\rho A_\nu)\partial_\mu A_\rho + \partial_\mu A_\nu \partial_\rho A_\rho - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}(\partial_\rho A_\lambda - \partial_\lambda A_\rho)^2 - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}(\partial_\rho A_\rho)^2]: . \tag{19.5}$$

可以把从（19.5）式得到的能量密度 H 和动量密度 G_i 表示为

$$H = S_{00} = \frac{1}{2}:[\partial_i A_\lambda \partial_i A_\lambda + \partial_0 A_\lambda \partial_0 A_\lambda + \partial_i (A_i \partial_k A_k - A_k \partial_k A_i)]:, \tag{19.6}$$

$$G_i = c^{-1} S_{i0} = -c^{-1}:[\partial_i A_\rho \partial_0 A_\rho + \partial_i (A_k \partial_k A_0) - \partial_k (A_k \partial_i A_0)]:, \tag{19.7}$$

所以光子场的能量 $\mathscr{H}$ 和动量 $\mathscr{G}_i$ 是

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}\int dx:[\partial_i A_\lambda \partial_i A_\lambda + \partial_0 A_\lambda \partial_0 A_\lambda]:,$$

$$\mathscr{G}_i = -c^{-1}\int dx:[\partial_i A_\lambda \partial_0 A_\lambda]:, \tag{19.8}$$

这里已略去了可以转换成面积分而等于零的项。

对称的能量动量张量也可以按第 8 节的论述从拉格朗日密度（19.3）式得到。在无限小洛伦兹变换下，A_μ 的变分由

$$\delta A_\lambda = \omega_{\lambda\nu} A_\nu$$

或者

$$\delta A_\lambda = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu} A_{\lambda,\mu\nu} \quad \text{而} \quad A_{\lambda,\mu\nu} = \delta_{\lambda\mu} A_\nu - \delta_{\lambda\nu} A_\mu \tag{19.9}$$

给出。因此，再利用（8.17）式和（8.19）式，得

$$g_{\rho,\mu\nu} = :[A_\mu(\partial_\rho A_\nu - \partial_\nu A_\rho) - A_\nu(\partial_\rho A_\mu - \partial_\mu A_\rho) + (\delta_{\nu\rho}A_\mu - \delta_{\mu\rho}A_\nu)\partial_\lambda A_\lambda]:, \tag{19.10}$$

$$f_{\mu,\nu\rho} = :[A_\mu(\partial_\rho A_\nu - \partial_\nu A_\rho) + (\delta_{\mu\nu}A_\rho - \delta_{\mu\rho}A_\nu)\partial_\lambda A_\lambda]:, \tag{19.11}$$

结果光子场的对称的能量动量张量是

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= S_{\mu\nu} + \partial_\rho f_{\mu,\nu\rho} \\ &= :[(\partial_\mu A_\rho - \partial_\rho A_\mu)(\partial_\nu A_\rho - \partial_\rho A_\nu) \\ &\quad - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}(\partial_\lambda A_\rho - \partial_\rho A_\lambda)^2 - A_\mu\partial_\nu\partial_\rho A_\rho \\ &\quad - A_\nu\partial_\mu\partial_\rho A_\rho + \delta_{\mu\nu}A_\rho\partial_\rho\partial_\lambda A_\lambda \\ &\quad + \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}(\partial_\lambda A_\lambda)^2]:. \end{aligned} \tag{19.12}$$

进而光子场角动量可据根（8.25）式表示成

$$P_{ij} = c^{-1}\int d\mathbf{x}(x_i S_{j0} - x_j S_{i0}) - c^{-1}\int d\mathbf{x} g_{0,ij}, \tag{19.13}$$

其中，根据（19.10）式，$g_{0,ij}$ 为

$$g_{0,ij} = -:[A_i(\partial_0 A_j + \partial_j A_0) - A_j(\partial_0 A_i + \partial_i A_0)]: \tag{19.14}$$

把（19.7）式和（19.14）式代入（19.13）式，则出现在（19.3）式两个积分中的一些项可以互相抵消，简化后我们得到

$$\begin{aligned} P_{ij} &= -c^{-1}\int d\mathbf{x}:[x_i(\partial_j A_\rho\partial_0 A_\rho) - x_j(\partial_i A_\rho\partial_0 A_\rho)]: \\ &\quad + c^{-1}\int d\mathbf{x}:(A_i\partial_0 A_j - A_j\partial_0 A_i):. \end{aligned} \tag{19.15}$$

20. 光子场的量子化

经过几十年许多不成功的尝试后，通过采用不定度规，找到

了一种以协调的方式实现光子场量子化的可能性①

根据 (14.38) 式，光子场算符 A_μ 和它的正则共轭 π_μ 的对易关系由

$$[A_\mu(\mathbf{x},t),\pi_\nu(\mathbf{x}',t)]=i\hbar\delta_{\mu\nu}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \tag{20.1}$$

$$[A_\mu(\mathbf{x},t),A_\nu(\mathbf{x}',t)]=[\pi_\mu(\mathbf{x},t),\pi_\nu(\mathbf{x}',t)]=0 \tag{20.2}$$

给出，其中

$$\pi_i=\frac{\partial L}{\partial(\partial A_i/\partial t)}=ic^{-1}(\partial_4 A_i-\partial_i A_4),$$

$$\pi_4=\frac{\partial L}{\partial(\partial A_4/\partial t)}=ic^{-1}(\partial_4 A_4+\partial_i A_i). \tag{20.3}$$

关系式 (20.2) 表示 $A_\mu(\mathbf{x},t)$ 和 $A_\nu(\mathbf{x},t)$ 以及它的空间导数是互相对易的，结果，

$$[A_\mu(\mathbf{x},t),\pi_\nu(\mathbf{x}',t)]=ic^{-1}[A_\mu(\mathbf{x},t),\partial_4 A_\nu(\mathbf{x}'t)],$$

因此 (20.1) 式变为

$$[A_\mu(\mathbf{x},t),\partial_0 A_\nu(\mathbf{x}',t)]=ic\hbar\delta_{\mu\nu}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \tag{20.4}$$

光子场的付里叶分解可以按和 18 节相同的方法进行。按照场是被封闭在体积为 V 的大立方箱子的假定，我们可以令

$$A_\mu=V^{-1/2}\sum_{\mathbf{k}}(c\hbar/2k_0)^{1/2}[a_\mu(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-k_0x_0)}$$

$$+a_\mu^*(\mathbf{k})e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-k_0x_0)}], \tag{20.5}$$

其中

$$k_0=|\mathbf{k}|. \tag{20.6}$$

将 (20.5) 式代入 (20.4) 式和 (20.2) 式，给出

$$[a_\mu(\mathbf{k}),a_\nu^*(\mathbf{k}')]=\delta_{\mu\nu}\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'},$$

$$[a_\mu(\mathbf{k}),a_\nu(\mathbf{k}')]=[a_\mu^*(\mathbf{k}),a_\nu^*(\mathbf{k}')]=0. \tag{20.7}$$

而把 (20.5) 式代入 (19.8) 式时，使我们能够把光子场的能量

① S.N.Gupta, Proc.Phys.Soc.London A63, 681 (1950).

和动量表示成

$$\mathscr{H} = \sum_{\mathbf{k}} c\hbar k_0 a_\mu^*(\mathbf{k}) a_\mu(\mathbf{k}), \tag{20.8}$$

$$\mathscr{G}_i = \sum_{\mathbf{k}} \hbar k_i a_\mu^*(\mathbf{k}) a_\mu(\mathbf{k}).$$

根据以上结果，光子场的能量可以写成这样的形式

$$\mathscr{H} = \sum_{\mathbf{k}} c\hbar k_0 [a_1^*(\mathbf{k}) a_1(\mathbf{k}) + a_2^*(\mathbf{k}) a_2(\mathbf{k}) + a_3^*(\mathbf{k}) a_3(\mathbf{k}) - a_0^*(\mathbf{k}) a_0(\mathbf{k})], \tag{20.9}$$

而且有

$$[a_1(\mathbf{k}), a_1^*(\mathbf{k})] = [a_2(\mathbf{k}), a_2^*(\mathbf{k})] = [a_3(\mathbf{k}), a_3^*(\mathbf{k})] = 1,$$
$$[a_0(\mathbf{k}), a_0^*(\mathbf{k})] = -1. \tag{20.10}$$

为了方便起见，我们限于考虑一个特殊的 k 值，并略去下标 k。根据 13 节的论述，我们发现 (20.9) 式描写一个四个玻色振子系统的能量，其中三个是正常的，而第四个是反常的。进一步可以得 a_1，a_2，a_3，和 a_0 是能量为 $c\hbar k_0$ 的光子湮灭算符。而且，如果 $\Psi(n_1, n_2, n_3, n_0)$ 表示四类光子数分别是 n_1，n_2，n_3 和 n_0 的归一化态矢量，我们就有

$$\Psi(n_1, n_2, n_3, n_0) = (n_1! n_2! n_3! n_0!)^{-1/2} a_1^{*n_1} a_2^{*n_2} a_3^{*n_3} a_0^{*n_0} \Psi(0,0,0,0), \tag{20.11}$$

并且

$$\Psi^*(m_1, m_2, m_3, m_0)\Psi(n_1, n_2, n_3, n_0) = (-1)^{n_0} \delta_{m_1 n_1} \delta_{m_2 n_2} \delta_{m_3 n_3} \delta_{m_0 n_0}, \tag{20.12}$$

这代表了一种不定度规。

现在我们假设光子场的每一个物理态必须满足附加条件

$$(\partial_\mu A_\mu)^+ \Psi = 0, \tag{20.13}$$

这只是包括 $\partial_\mu A_\mu$ 的正频部分。然而从 (20.13) 式和它的厄密

共轭

$$\Psi^*(\partial_\mu A_\mu)^- = 0 \tag{20.14}$$

得到 $\partial_\mu A_\mu$ 的期待值为零，这是因为

$$\langle \partial_\mu A_\mu \rangle = \Psi^*(\partial_\mu A_\mu)^+ \Psi + \Psi^*(\partial_\mu A_\mu)^- \Psi = 0, \tag{20.15}$$

这与经典附加条件（4.4）式相对应。利用（20.5）式我们从（20.13）式得到，对于光子场的 k 分量有

$$(k_i a_i - k_0 a_0)\Psi = 0. \tag{20.16}$$

选 x_3 轴沿 k 方向更加方便，结果算符 a_1 和 a_2 相应于横光子，a_3 相应于纵光子，而 a_0 相应于时间光子，因此（20.16）式简化为

$$(a_3 - a_0)\Psi = 0. \tag{20.17}$$

让我们考虑光子场的一个一般态

$$\Psi = \sum_{n_1, n_2, n_3, n_0} A_{n_1, n_2, n_3, n_0} \Psi(n_1, n_2, n_3, n_0), \tag{20.18}$$

这里 A_{n_1, n_2, n_3, n_0} 是一个数字系数，而 $\Psi(n_1, n_2, n_3, n_0)$ 是一个包含 n_1 和 n_2 个横光子，n_3 个纵光子和 n_0 个时间光子的归一化本征态。将条件（20.17）式应用到（20.18）式，可导出关系式

$$n_3^{1/2} A_{n_1, n_2, n_3, n_0 - 1} + n_0^{1/2} A_{n_1, n_2, n_3 - 1, n_0} = 0, \tag{20.19}$$

其中带有一个负下标的系数将被取为零。从（20.19）式可见，相应于纵光子和时间光子总数相同的各态，其系数是相互联系着的，而附加条件所允许的态是

$$\begin{aligned}
\Phi(n_1, n_2, 0) &= \Psi(n_1, n_2, 0, 0), \\
\Phi(n_1, n_2, 1) &= \Psi(n_1, n_2, 1, 0) - \Psi(n_1, n_2, 0, 1), \\
\Phi(n_1, n_2, 2) &= \Psi(n_1, n_2, 2, 0) - \sqrt{2}\Psi(n_1, n_2, 1, 1) \\
&\quad + \Psi(n_1, n_2, 0, 2),
\end{aligned} \tag{20.20}$$

等等。

可以表示成下列一般形式

$$\Phi(n_1,n_2,m)=\sum_{l=0}^{m}(-l)^{l}\left(\frac{m!}{(m-l)!\,l!}\right)^{1/2}\Psi(n_1,n_2,m-l,l), \tag{20.21}$$

其中 m 表示纵光子和时间光子的总数。由此得到

$$\Phi^*(n_1,n_2,0)\Phi(n_1,n_2,0)=1, \tag{20.22}$$

而

$$\Phi^*(n_1,n_2,m)\Phi(n_1,n_2,m)=\sum_{l=0}^{m}(-1)^{l}\frac{m!}{(m-l)!\,l!}$$

$$=(1-1)^{m}=0 \quad \text{当} m\neq 0. \tag{20.23}$$

值得指出的是，(20.21) 式也可以纳入这样的形式：

$$\Phi(n_1,n_2,m)=(m!)^{-1/2}(a_3^*-a_0^*)^{m}\Psi(n_1,n_2,0,0),$$

鉴于关系式

$$[(a_3-a_0),(a_3^*-a_0^*)]=0,$$

上式显然满足条件 (20.17) 式从而也能得到(20.23)式的结果。满足条件 (20.23) 式的光子场的一般态可以用态 $\Phi(n_1,n_2,m)$来表示，表示为

$$\Phi=\sum_{m}\Phi_m, \tag{20.24}$$

其中

$$\Phi_m=\sum_{n_1,n_2}B_{n_1,n_2,m}\Phi(n_1,n_2,m). \tag{20.25}$$

然而，按照 (20.23) 式

$$\Phi_m^*\Phi_m=0 \quad \text{当} \quad m\neq 0, \tag{20.26}$$

因此

$$\Phi^*\Phi=\Phi_0^*\cdot\Phi_0. \tag{20.27}$$

对于一些物理量，例如光子场的能量，也能够证明

$$\Phi^*\mathscr{H}\Phi=\Phi_0^*\mathscr{H}\Phi_0. \tag{20.28}$$

由于态 Φ_1，Φ_2，……的模方为零，而且对物理量的期待值没有贡献，在物理上，它们是不可观察的，因而，我们把它们称为鬼态。略去鬼态，可以把附加条件所允许的光子场的一般态取为

$$\Phi_0 = \sum_{n_1, n_2} B_{n_1, n_2, 0} \Phi(n_1, n_2, 0) \tag{20.29}$$

因此，实际上附加条件含有排除纵光子和时间光子的意思。然而，只有在光子场和其它场没有相互作用情况下，这个结论才是正确的。

实行光子场角动量的付里叶分解也是有用的。将（20.5）式代入（19.15）式，得出

$$P_{ij} = P^0_{ij} + P'_{ij} \tag{20.30}$$

其中

$$P^0_{ij} = V^{-1} \int dx \sum_k \hbar (x_i k_j - x_j k_i) a^*_\rho(k) a_\rho(k), \tag{20.31}$$

$$P'_{ij} = \sum_k i\hbar [a^*_i(k) a_i(k) - a^*_i(k) a_j(k)]. \tag{20.32}$$

由于(20.31)式明显地表示了光子的轨道角动量，(20.32)式可以被认为是由于光子自旋而引起的角动量。我们若只考虑(20.32)式的一个 k 值，当选择 x_3 轴沿着 k 方向并略去含有纵光子和时间光子的项时，得到横光子的自旋角动量为：

$$P'_{12}(k) = i\hbar [a^*_2(k) a_1(k) - a^*_1(k) a_2(k)], \tag{20.33}$$

而 $P'_{23}(k)$ 和 $P'_{31}(k)$ 成为零。在(20.33)式中，可以通过引入算符

$$\begin{aligned} a_+(k) &= 2^{-1/2} [a_1(k) - i a_2(k)], \\ a_-(k) &= 2^{-1/2} [a_1(k) + i a_2(k)], \end{aligned} \tag{20.34}$$

而将两个独立部分的贡献分开。按照(20.7)式，有

$$[a_+(\mathbf{k}),a_\pm^*(\mathbf{k})]=[a_-(\mathbf{k}),a_\pm^*(\mathbf{k})]=1,$$
$$[a_+(\mathbf{k}),a_\pm^*(\mathbf{k})]=[a_-(\mathbf{k}),a_\pm^*(\mathbf{k})]=0, \tag{20.35}$$

这又一次使我们能够将 $a_+(\mathbf{k})$ 和 $a_-(\mathbf{k})$解释为二类光子湮灭算符，而将 $a_\pm^*(\mathbf{k})$ 和 $a^*(\mathbf{k})$解释为二类光子产生算符。应用这些算符，能够把(20.33)式表示为

$$P'_{12}(\mathbf{k})=\hbar[a_+^*(\mathbf{k})a_+(\mathbf{k})-a_-^*(\mathbf{k})a_-(\mathbf{k})], \tag{20.36}$$

这表明可观察的光子是自旋为 1 的粒子（以 $\hbar$ 为单位），并且它们有自旋轴与其运动方向平行或反平行的两种独立的自旋态。

21 电子场的狄喇克方程

电子场是用一个满足方程

$$\gamma_\mu\partial_\mu\psi+\kappa\psi=0 \tag{21.1}$$

的算符 ψ 来描写的，其中 κ 是常数，ψ 是一列矩阵，γ_μ 是服从对易关系

$$\frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu)=\delta_{\mu\nu} \tag{21.2}$$

的正方矩阵。

以上方程 (21.2) 式是这样得来的①，当时希望找到一个方程，使它对 ∂_μ 是线性的，而且可以由它导出波动方程

$$(\partial^2-\kappa^2)\psi=0. \tag{21.3}$$

从 (21.1) 和 (21.2) 式得出，ψ 的确满足 (21.3) 式。因为用 $\frac{1}{2}(\gamma_\nu\partial_\nu-\kappa)$乘(21.1)式可得

$$\frac{1}{2}(\gamma_\nu\gamma_\mu\partial_\nu\partial_\mu\psi-\kappa^2\psi)=0, \tag{21.4}$$

在交换指标 μ 和 ν 后成为

$$\frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu\partial_\nu\partial_\mu\psi-\kappa^2\psi)=0, \tag{21.5}$$

① P.A.M. Dirac, Proc. Roy. soc. London A 117, 610 (1928)

再将(21.4)和(21.5)式加起来并利用(21.2)式，结果我们得到了波动方程(21.3)式。

γ_μ 就是通常所谓的狄喇克矩阵，如果选取这些矩阵为

$$\gamma_1=\begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\i&0&0&0\end{pmatrix},\quad \gamma_2=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\gamma_3=\begin{pmatrix}0&0&-i&0\\0&0&0&i\\i&0&0&0\\0&-i&0&0\end{pmatrix},\quad \gamma_4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix} \qquad (21.6)$$

通过矩阵直接相乘即可证明关系式 (21.2) 是满足的。从 (21.6) 式，我们还能够得到其它矩阵组，它们也满足 (21.2) 式。因为如果 (21.2) 式被一组矩阵 γ_μ 满足，它将也被

$$\gamma'_\mu=S\gamma_\mu S^{-1} \qquad (21.7)$$

满足，其中 S 是和 γ_μ 有同样维数并且有逆 S^{-1} 存在的任意正方矩阵。变换关系 (21.7) 式称为相似变换。并且众所周知，两组以 (21.7) 式相联系的矩阵在实用中是互相等价的。我们将始终采用表示 (21.6) 式，并且注意到在这个表示中，狄喇克矩阵是厄密的。

弄清上面这些矩阵是否存在着任何其它不等价的不可约表示是可能的。对易关系 (21.2) 式表示 γ_1、γ_2、γ_3 和 γ_4 互相反对易，而其中每一个矩阵的平方是单位矩阵。因此，一个可以由 γ_μ 得到的线性独立矩阵的完全集是

$$
\begin{gathered}
1, \\
\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4, \\
\gamma_1\gamma_2,\gamma_2\gamma_3,\gamma_3\gamma_1,\gamma_1\gamma_4,\gamma_2\gamma_4,\gamma_3\gamma_4, \\
\gamma_1\gamma_2\gamma_3,\gamma_1\gamma_2\gamma_4,\gamma_2\gamma_3\gamma_4,\gamma_3\gamma_1\gamma_4, \\
\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4。
\end{gathered}
\tag{21.8}
$$

由于单位矩阵是唯一能与 (21.8) 中每一个其它矩阵对易的矩阵，所以对满足 (21.2) 式的矩阵组，只存在着一个不等价的不可约表示。而且这个表示至少必须是四维的，以便在 (21.8) 式中提供 16 个线性独立的矩阵。当然，(21.6) 的表示 满 足这些要求。

导出狄喇克矩阵乘积的某些性质是有用的，为此，我们令

$$
\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4, \tag{21.9}
$$

因此，根据对易关系式 (21.2)，有

$$
\gamma_5\gamma_\mu = -\gamma_\mu\gamma_5, \quad \gamma_5^2 = 1, \tag{21.10}
$$

而且根据表示式 (21.6)，r_5 为

$$
\gamma_5 = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}。 \tag{21.11}
$$

由于在取迹号内矩阵可以按循环次序置换，所以

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(\gamma_5\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n}\gamma_5) &= \mathrm{Tr}(\gamma_5^2\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n}) \\
&= \mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n}),
\end{aligned}
$$

而应用 (21.10) 式导出

$$
\gamma_5\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n}\gamma_5 = (-1)^n\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n}。
$$

从以上两个关系，我们得出

$$
\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n}) = (-1)^n\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n}),
$$

这表示 n 为奇数时

$$
\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n}) = 0 \tag{21.12}
$$

如果 n 是偶数，（21.2）式导出关系式

$$\frac{1}{2}\gamma_{\mu_1}(\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n})+\frac{1}{2}(\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n})\gamma_{\mu_1}$$
$$=\delta_{\mu_1\mu_2}(\gamma_{\mu_3}\cdots\gamma_{\mu_n})-\delta_{\mu_1\mu_3}(\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_4}\cdots\gamma_{\mu_n})$$
$$+\cdots+\delta_{\mu_1\mu_n}(\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_{n-1}}),$$

由此得到

$$\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n})=\delta_{\mu_1\mu_2}\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_3}\cdots\gamma_{\mu_n})$$
$$-\delta_{\mu_1\mu_3}\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_4}\cdots\gamma_{\mu_n})+\cdots$$
$$+\delta_{\mu_1\mu_n}\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_{n-1}}) \qquad (21.13)$$

偶数个狄喇克矩阵乘积的迹，可以通过重复应用（21.13）式得出，其中

$$\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu)=4\delta_{\mu\nu}, \qquad (21.14)$$
$$\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\rho)=4(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\rho}-\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\rho}+\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda}),$$

这里第一个关系由（21.2）式取迹得出，而第二个则需要应用（21.13）式。进而，我们注意到在取迹号内可以将狄喇克矩阵的次序颠倒过来

$$\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n})=\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_n}\cdots\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_1}) \qquad (21.15)$$

这是因为当 n 为奇数时上式两边都是零，而当 n 为偶数时，重复应用(21.13)式可使两边都给出相同的结果。

对易关系(21.2)式也可以用来简化狄喇克矩阵的乘积。应特别指出

$$\gamma_\mu\gamma_\mu=4,$$
$$\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\mu=-2\gamma_\alpha, \qquad (21.16)$$
$$\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu=4\delta_{\alpha\beta},$$
$$\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\delta\gamma_\mu=-2\gamma_\delta\gamma_\beta\gamma_\alpha,$$

以及

$$\gamma_\mu\gamma_\nu = \delta_{\mu\nu} + i\sigma_{\mu\nu}, \tag{21.17}$$

其中 $\sigma_{\mu\nu}$ 的定义是

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2i}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu). \tag{21.18}$$

利用四维矢量的形式来表示关系式 (21.14) 和 (21.16) 常常是有用的。例如，在 (21.14) 式中的第一个关系式可以写成

$$\mathrm{Tr}(\gamma\cdot a\gamma\cdot b) = 4a\cdot b$$

22 电子场方程的洛伦兹协变性

可以通过证明狄喇克方程(21.1)式在洛伦兹变换下变换为

$$\gamma_\mu\partial'_\mu\psi' + \kappa\psi' = 0, \tag{22.1}$$

来证实狄喇克方程的协变性，应该注意到(22.1)式中狄喇克矩阵的希腊字母下标不表示张量指标。我们假设

$$\psi' = \Lambda\psi, \tag{22.2}$$

这里 Λ 是一个四维矩阵。此外，由于 ∂_μ 按四维矢量变换

$$\partial'_\mu = a_{\mu\nu}\partial_\nu \tag{22.3}$$

而

$$a_{\mu\lambda}a_{\nu\lambda} = a_{\lambda\mu}a_{\lambda\nu} = \delta_{\mu\nu}. \tag{22.4}$$

将(22.2)和(22.3)式代入(22.1)式中，并乘以 Λ^{-1}，我们得到

$$\Lambda^{-1}\gamma_\mu\Lambda a_{\mu\nu}\partial_\nu\psi + \kappa\psi = 0, \tag{22.4'}$$

如果

$$\Lambda^{-1}\gamma_\mu\Lambda a_{\mu\nu} = \gamma_\nu,$$

或者，考虑到(22.4)式

$$\Lambda^{-1}\gamma_\mu\Lambda = a_{\mu\nu}\gamma_\nu. \tag{22.5}$$

则(22.4′)式将和 (21.1) 式相一致。我们下面证明对于正常洛伦兹变换和空间反演，满足(22.5)的矩阵 Λ 是存在的①。由于对电子场来说时间反转导致某些复杂情况，我们在后面 28 节中再

① W.Pauli, Handbuch der Physik, Vol.24/1(Springer, Berlin, 1933), p.220.

来讨论时间反转。

让我们首先来考虑一个无限小洛伦兹变换，这时

$$a_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}+\omega_{\mu\nu}\quad 而\quad \omega_{\mu\nu}=-\omega_{\nu\mu}. \tag{22.6}$$

显然对这样一个变换，Λ 和单位矩阵差一个无限小量，因此能够将它表示成

$$\Lambda=1+\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}t_{\mu\nu}\quad 其中\ t_{\mu\nu}=-t_{\nu\mu}. \tag{22.7}$$

将(22.6)和(22.7)式代入(22.5)得出 $t_{\mu\nu}$ 应满足的关系式

$$\left(1-\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}t_{\alpha\beta}\right)\gamma_\mu\left(1+\frac{1}{2}\omega_{\lambda\nu}t_{\lambda\nu}\right)=\gamma_\nu(\delta_{\mu\nu}+\omega_{\mu\nu}),$$

或者

$$\frac{1}{2}(\gamma_\mu t_{\lambda\nu}-t_{\lambda\nu}\gamma_\mu)\omega_{\lambda\nu}=\gamma_\nu\omega_{\mu\nu},$$

利用 (1.11) 式，得

$$\gamma_\mu t_{\lambda\nu}-t_{\lambda\nu}\gamma_\mu=\gamma_\nu\delta_{\lambda\mu}-\gamma_\lambda\delta_{\nu\mu}.$$

如果

$$t_{\lambda\nu}=\frac{1}{4}(\gamma_\lambda\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\lambda). \tag{22.8}$$

则上式可以得到满足。在正常洛伦兹变换下，对于保证电子场方程洛伦兹协变性的无穷小洛伦兹变换来说，Λ 是由 (22.7) 和 (22.8) 式给出的。

现在让我们考虑空间反演，对空间反演有

$$a_{11}=a_{22}=a_{33}=-1,\ a_{44}=1, \tag{22.9}$$

而 $a_{\mu\nu}$ 的其它分量为零。于是(22.5)简化成

$$\Lambda^{-1}\gamma_1\Lambda=-\gamma_1,\ \Lambda^{-1}\gamma_2\Lambda=-\gamma_2,\ \Lambda^{-1}\gamma_3\Lambda=-\gamma_3,$$
$$\Lambda^{-1}\gamma_4\Lambda=\gamma_4, \tag{22.10}$$

如果

$$\Lambda=\eta_P\gamma_4, \tag{22.11}$$

上式即可得到满足，这里 η_P 是一个为保证 Λ 是么正的，满足条

件

$$\eta_p^* \eta_p = 1 \tag{22.12}$$

的常数。于是我们也证实了在空间反演下，电子场方程的协变性。

由于根据矩阵表示式(21.6)，γ_μ 是厄密的，(21.1)式的厄密共轭为

$$\partial_i \psi^* \gamma_i - \partial_4 \psi^* \gamma_4 + \kappa \psi^* = 0,$$

或者用 γ_4 从右边乘上去后得

$$-\partial_i (\psi^* \gamma_4) \gamma_i - \partial_4 (\psi^* \gamma_4) \gamma_4 + \kappa (\psi^* \gamma_4) = 0,$$

它可以写成紧凑的形式

$$\partial_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu - \kappa \bar{\psi} = 0 \tag{22.13}$$

其中

$$\bar{\psi} = \psi^* \gamma_4. \tag{22.14}$$

此外，变换关系式(22.2)的厄密共轭是

$$\psi^{*\prime} = \psi^* \Lambda^*$$

或者

$$\bar{\psi}' = \psi^* \Lambda^* \gamma_4 = \bar{\psi} (\gamma_4 \Lambda^* \gamma_4). \tag{22.15}$$

但是，从(22.7)和(22.8)式，对无限小的洛伦兹变换我们有

$$\Lambda^* = 1 - \frac{1}{2} \omega_{ij} t_{ij} + \frac{1}{2} \omega_{i4} t_{i4} + \frac{1}{2} \omega_{4i} t_{4i}, \tag{22.16}$$

这里我们已经考虑 ω_{ij} 是实的，ω_{i4} 和 ω_{4i} 是虚的，以及 $t_{\mu\nu}$ 是反厄密的事实。从(22.16)及(22.8)两式得出，

$$\gamma_4 \Lambda^* \gamma_4 = 1 - \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} t_{\mu\nu}$$

即

$$\gamma_4 \Lambda^* \gamma_4 = \Lambda^{-1}. \tag{22.17}$$

然而，由(22.11)和(22.12)式显然可以看出，以上关系对空间反演也成立。因此，把(22.17)式代入(22.15)式，我们得到，对正常洛伦兹变换和空间反演都有

$$\bar{\psi}' = \bar{\psi} \Lambda^{-1}. \tag{22.18}$$

一个和 ψ 或 $\bar{\psi}$ 一样变换的量称为旋量，从 $\bar{\psi}$ 和 ψ 乘积可以得到各种张量和赝张量。因为，借助于 (22.2) 、(22.18) 和 (22.5)式我们发现

$$
\begin{aligned}
&:\bar{\psi}'\psi':=:\bar{\psi}\Lambda^{-1}\Lambda\psi:=:\bar{\psi}\psi:,\\
&:\bar{\psi}'\gamma_\mu\psi':=:\bar{\psi}\Lambda^{-1}\gamma_\mu\Lambda\psi:=a_{\mu\nu}:\bar{\psi}\gamma_\nu\psi:,\\
&:\bar{\psi}'\gamma_\mu\gamma_\nu\psi':=:\bar{\psi}(\Lambda^{-1}\gamma_\mu\Lambda)(\Lambda^{-1}\gamma_\nu\Lambda)\psi:\\
&\qquad=a_{\mu\lambda}a_{\nu\rho}:\bar{\psi}\gamma_\lambda\gamma_\rho\psi:,
\end{aligned}
\tag{22.19}
$$

这表明 $:\bar{\psi}\psi:$，$:\bar{\psi}\gamma_\mu\psi:$，及 $:\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\psi:$ 的行为分别像一个标量，四维矢量和张量。而且按照(22.7)、(22.8)和(22.11)式，由(21.9)式所定义的矩阵 γ_5 满足关系式

$$
\Lambda^{-1}\gamma_5\Lambda=\pm\gamma_5, \tag{22.20}
$$

这里“+”号对应于无限小洛伦兹变换，而“-”号对应于空间反演。因此有

$$
\begin{aligned}
&:\bar{\psi}'\gamma_5\psi':=:\bar{\psi}\Lambda^{-1}\gamma_5\Lambda\psi:=\pm:\bar{\psi}\gamma_5\psi:,\\
&:\bar{\psi}'\gamma_5\gamma_\mu\psi':=:\bar{\psi}(\Lambda^{-1}\gamma_5\Lambda)(\Lambda^{-1}\gamma_\mu\Lambda)\psi:\\
&\qquad=\pm a_{\mu\nu}:\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\nu\psi:,
\end{aligned}
\tag{22.21}
$$

这表明 $:\bar{\psi}\gamma_5\psi:$ 的行为像一个赝标量，而 $:\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi:$ 像一个赝矢量或轴矢量。令 O 是一些狄喇克矩阵的乘积，注意到形式为 $:\bar{\psi}O\psi:$ 的线性独立的量只能有下列几种：

$$
\begin{aligned}
S&=:\bar{\psi}\psi:, \quad V_\mu=i:\bar{\psi}\gamma_\mu\psi:,\\
&\quad T_{\mu\nu}=i:\bar{\psi}(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu)\psi:,\\
&\quad P_\mu=i:\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi:,\\
&\quad P=i:\bar{\psi}\gamma_5\psi:,
\end{aligned}
\tag{22.22}
$$

这些对应于(21.8)中的 16 个线独立矩阵。引入因子 i 是为了使所有这些双线性协变量是厄密的。

23 电子场的拉格朗日形式

电子场的拉格朗日密度可以写成①

$$L=-c\hbar:\left[\frac{1}{2}\left(\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi-\partial_\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\right)+\kappa\bar{\psi}\psi\right]: \tag{23.1}$$

或者，略去四维散度$\frac{1}{2}c\hbar:\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi):$，写成

$$L=-c\hbar:(\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi+\kappa\bar{\psi}\psi):. \tag{23.2}$$

虽然在(23.1)的形式中，拉格朗日密度更为对称，但是为方便起见，我们将使用形式比较简单的(23.2)式。也要注意到，在必要时，(23.2)式可以写成

$$\begin{aligned}L&=-c\hbar:[\bar{\psi}_\alpha(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\partial_\mu\psi_\beta+\kappa\bar{\psi}_\alpha\psi_\alpha]:\\&=-c\hbar:[\bar{\psi}_\alpha(\gamma_\mu\partial_\mu\psi)_\alpha+\kappa\bar{\psi}_\alpha\psi_\alpha]:\\&=-c\hbar:[(\bar{\psi}\gamma_\mu)_\alpha\partial_\mu\psi_\alpha+\kappa\bar{\psi}_\alpha\psi_\alpha]:,\end{aligned}$$

其中$\psi_\alpha,\bar{\psi}_\alpha$，和$(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}$是$\psi$，$\bar{\psi}$和$\gamma_\mu$的元素。

按照17节复场的处理，由(23.2)式得出的场方程组是

$$\gamma_\mu\partial_\mu\psi+\kappa\psi=0,\quad \partial_\mu\bar{\psi}\gamma_\mu-\kappa\bar{\psi}=0, \tag{23.3}$$

这与(21.1)和(21.13)式一致。而且，由(17.3)和(17.10)式给出的正则能量动量张量和电流四维矢量采取下述形式

$$S_{\mu\nu}=c\hbar:\bar{\psi}\gamma_\nu\partial_\mu\psi:, \tag{23.4}$$

$$j_\mu=iec:\bar{\psi}\gamma_\mu\psi:. \tag{23.5}$$

特别是，能量密度H，动量密度G_i以及电荷密度ρ由

$$\begin{aligned}H&=S_{00}=ic\hbar:\psi^*\partial_0\psi:,\\G_i&=c^{-1}S_{i0}=-i\hbar:\psi^*\partial_i\psi:,\\\rho&=c^{-1}j_0=e:\psi^*\psi:\end{aligned} \tag{23.6}$$

---

① 由于在拉格朗日密度中可任意地选择一个正的相乘常数，在(23.1)和(23.2)中我们已引入一个因子$c\hbar$以适合于通常习惯。

给出。

通过将第 8 节的论述推复到广场，也可以得到电子场对称的能量动量张量。在由(22.2)，(22.7)和(22.8)式给出的无限小变换下，ψ 的变分可以表示为

$$\delta\psi = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\psi_{\mu\nu}, \tag{23.7}$$

其中

$$\psi_{\mu\nu} = \frac{1}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)\psi, \tag{23.8}$$

因此，根据(8.17)和(8.19)式有

$$g_{\rho,\mu\nu} = \frac{1}{4}c\hbar{:}\bar{\psi}\gamma_\rho(\gamma_\nu\gamma_\mu - \gamma_\mu\gamma_\nu)\psi{:}, \tag{23.9}$$

$$f_{\mu,\nu\rho} = \frac{1}{4}c\hbar{:}\bar{\psi}\left(\frac{1}{2}\gamma_\rho\gamma_\nu\partial_\mu - \frac{1}{2}\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\mu + \delta_{\mu\nu}\gamma_\rho - \delta_{\mu\rho}\gamma_\nu\right)\psi{:}, \tag{23.10}$$

经过一些化简后，上式给出

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= S_{\mu\nu} + \partial_\rho f_{\mu,\nu\rho} \\ &= \frac{1}{4}c\hbar{:}(\bar{\psi}\gamma_\nu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\bar{\psi}\gamma_\nu\psi + \bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\nu\psi \\ &\quad - \partial_\nu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi){:}. \end{aligned} \tag{23.11}$$

此外，按照(8.25)，电子场的角动量可以表示为：

$$P_{ij} = c^{-1}\int dx(x_i S_{j0} - x_j S_{i0}) - c^{-1}\int dx g_{0,ij}, \tag{23.12}$$

由(23.4)和(23.9)式，上式中的 S_{j0} 和 $g_{0,ij}$ 为

$$\begin{aligned} S_{j0} &= -ic\hbar{:}\psi^*\partial_j\psi{:}, \\ g_{0,ij} &= \frac{1}{4}ic\hbar{:}\psi^*(\gamma_i\gamma_j - \gamma_j\gamma_i)\psi{:}. \end{aligned} \tag{23.13}$$

将(23.13)式代入(23.12)式得出

$$P_{ij} = -i\hbar\int dx{:}(x_i\psi^*\partial_j\psi - x_j\psi^*\partial_i\psi){:}$$

$$+\frac{1}{2}\hbar\int dx{:}\psi^*\sigma_{ij}\psi{:}, \qquad (23.14)$$

其中 σ_{ij} 是由(21.18)式定义的。

这里得到的结果与 ψ 是玻色算符还是费密算符无关。

24 电子场的付里叶分解

像在第 10 节中一样，假设电子场被封闭在一个体积为 V 的大立方箱子中，我们可以将满足(21.3)式的 ψ 表示成

$$\psi = V^{-1/2}\sum_{\mathbf{k}}[\psi^+(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-k_0x_0)} + \psi^-(\mathbf{k})e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-k_0x_0)}], \qquad (24.1)$$

其中 $\psi^+(\mathbf{k})$ 和 $\psi^-(\mathbf{k})$ 是一列矩阵，而 k_0 为

$$k_0 = (\mathbf{k}^2+\kappa^2)^{1/2}. \qquad (24.2)$$

注意到 ψ 的每一个付里叶分量必须满足(21.1)式，这样就可以确定矩阵 $\psi^+(\mathbf{k})$ 和 $\psi^-(\mathbf{k})$。对于付里叶分量

$$\psi^+(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-k_0x_0)},$$

(21.1)式给出

$$(ik_i\gamma_i - k_0\gamma_4 + \kappa)\psi^+(\mathbf{k}) = 0. \qquad (24.3)$$

令

$$\psi^+(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\\ \phi_4\end{bmatrix}, \qquad (24.4)$$

并且将(21.6)式代入，矩阵关系(24.3)式导致这样一组方程

$$\begin{aligned}
(\kappa-k_0)\phi_1 + k_3\phi_3 + (k_1-ik_2)\phi_4 &= 0,\\
(\kappa-k_0)\phi_2 + (k_1+ik_2)\phi_3 - k_3\phi_4 &= 0,\\
-k_3\phi_1 + (-k_1+ik_2)\phi_2 + (\kappa+k_0)\phi_3 &= 0,\\
-(k_1+ik_2)\phi_1 + k_3\phi_2 + (\kappa+k_0)\phi_4 &= 0.
\end{aligned} \qquad (24.5)$$

让我们将 ϕ_1 取为任意量，试图从(24.5)式来确定 ϕ_2，ϕ_3，和 ϕ_4。在(24.5)式中，从前三个方程消去 ϕ_3 和 ϕ_4，得出

$$\begin{vmatrix} (\kappa-k_0)\phi_1 & k_3 & k_1-ik_2 \\ (\kappa-k_0)\phi_2 & k_1+ik_2 & -k_3 \\ -k_3\phi_1+(-k_1+ik_2)\phi_2 & \kappa+k_0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

即

$$(\kappa^2+\mathbf{k}^2-k_0^2)k_3\phi_1=-(\kappa^2+\mathbf{k}^2-k_0^2)(k_1-ik_2)\phi_2,$$

并且由于(24.2)式的存在，上述关系式两边都等于零，因此，ϕ_2 是不确定的。因而，ϕ_1 和 ϕ_2 二者都必须取作任意量，而从(24.5)式的后二个方程，我们得到

$$\phi_3=\frac{k_3}{\kappa+k_0}\phi_1+\frac{k_1-ik_2}{\kappa+k_0}\phi_2,\quad \phi_4=\frac{k_1+ik_2}{\kappa+k_0}-\frac{k_3}{\kappa+k_0}\phi_2, \tag{24.6}$$

所以，将(24.6)式代入(24.4)式后，得

$$\psi^+(\mathbf{k})=\phi_1\begin{bmatrix}1\\0\\\dfrac{k_3}{\kappa+k_0}\\\dfrac{k_1+ik_2}{\kappa+k_0}\end{bmatrix}+\phi_2\begin{bmatrix}0\\1\\\dfrac{k_1-ik_2}{\kappa+k_0}\\\dfrac{-k_3}{\kappa+k_0}\end{bmatrix}。 \tag{24.7}$$

以上结果可以表示为这样形式

$$\psi^+(\mathbf{k})=a_1(\mathbf{k})u_1(\mathbf{k})+a_2(\mathbf{k})u_2(\mathbf{k}), \tag{24.8}$$

这里

$$u_1(\mathbf{k})=C\begin{bmatrix}1\\0\\\dfrac{k_3}{\kappa+k_0}\\\dfrac{k_1+ik_2}{\kappa+k_0}\end{bmatrix},\quad u_2(\mathbf{k})=C\begin{bmatrix}0\\1\\\dfrac{k_1-ik_2}{\kappa+k_0}\\\dfrac{-k_3}{\kappa+k_0}\end{bmatrix}, \tag{24.9}$$

而且把 C 选为

$$C=\left(\frac{\kappa+k_0}{2k_0}\right)^{1/2} \tag{24.10}$$

较为方便。

与此类似，对付里叶分量

$$\psi^-(\mathbf{k})e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-k_0x_0)},$$

(21.1)式给出

$$(ik_i\gamma_i-k_0\gamma_4-\kappa)\psi^-(\mathbf{k})=0, \tag{24.11}$$

它导致了形式为

$$\psi^-(\mathbf{k})=b_1^*(\mathbf{k})v_1(\mathbf{k})+b_2^*(\mathbf{k})v_2(\mathbf{k}) \tag{24.12}$$

的结果，其中

$$v_1(\mathbf{k})=C\begin{pmatrix}\dfrac{k_1-ik_2}{\kappa+k_0}\\ \dfrac{-k_3}{\kappa+k_0}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\quad v_2(\mathbf{k})=C\begin{pmatrix}\dfrac{k_3}{\kappa+k_0}\\ \dfrac{k_1+ik_2}{\kappa+k_0}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \tag{24.13}$$

而 c 仍由(24.10)式给出。

考虑到(24.8)和(24.12)式，付里叶展开式(24.1)可以表示成

$$\psi=V^{-1/2}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{r=1,2}[a_r(\mathbf{k})u_r(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-k_0x_0)}$$
$$+b_r^*(\mathbf{k})v_r(\mathbf{k})e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-k_0x_0)}]. \tag{24.14}$$

而且从(24.9)和(24.13)式可以验证下列关系

$$\begin{aligned}&u_r^*(\mathbf{k})u_s(\mathbf{k})=v_r^*(\mathbf{k})v_s(\mathbf{k})=\delta_{rs},\\ &u_r^*(\mathbf{k})v_s(-\mathbf{k})=v_r^*(-\mathbf{k})u_s(\mathbf{k})=0.\end{aligned} \tag{24.15}$$

注意下列关系

$$\begin{aligned}&\gamma_4(ik_i\gamma_i+\kappa)u_r(\mathbf{k})=k_0u_r(\mathbf{k}),\\ &\gamma_4(ik_i\gamma_i+\kappa)v_r(-\mathbf{k})=-k_0v_r(-\mathbf{k}),\end{aligned} \tag{24.17}$$

即

$$(ik\gamma+\kappa)u_r(\mathbf{k})=0,$$
$$(ik\gamma-\kappa)v_r(\mathbf{k})=0. \tag{24.16}$$

这表明，$u_r(\mathbf{k})$和$v(-\mathbf{k})$是厄密算符$\gamma_4(ik_i\gamma_i+\kappa)$的本征矢量，而这些本征矢量总可以按这样的方法来选择，使它们组成一个正交归一集，因此，关系式(24.15)也可以不利用明显解(24.9)和(24.13)式而从(24.17)式推出。

25. 电子场的量子化

电子场的量子化是相当直截了当的，只要在这个场的对易关系中使用场算符的反对易子即可①。因此，我们在这里把ψ看作一个费密算符，至于把ψ当做玻色算符处理的可能性，将在45节讨论。

我们注意到ψ_α的正则共轭是

$$\pi_\alpha=\frac{\partial L}{\partial(\partial\psi_\alpha/\partial t)}=i\hbar(\bar{\psi}\gamma_4)_\alpha=i\hbar\psi^*_\alpha \tag{25.1}$$

而ψ^*_α的正则共轭为零。因此，根据14节的论述，我们只把ψ_α和π_α看成为正则变量，而费密对易关系式(14.39)导致

$$\{\psi_\alpha(\mathbf{x},t),\psi^*_\beta(\mathbf{x}',t)\}=\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'),$$
$$\{\psi_\alpha(\mathbf{x},t),\psi_\beta(\mathbf{x}',t)\}=0, \tag{25.2}$$
$$\{\psi^*_\alpha(\mathbf{x},t),\psi^*_\beta(\mathbf{x}',t)\}=0.$$

对易关系式的付里叶分解可以按与18节同样的方式进行。付里叶展开式(24.14)可以写成

$$\psi_\alpha=V^{-1/2}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{r=-1,2}[a_r(\mathbf{k})u_{r;\alpha}(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-k_0x_0)}$$
$$+b^*_r(\mathbf{k})v_{r,\alpha}(\mathbf{k})e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-k_0x_0)}], \tag{25.3}$$

所以

$$\psi^*_\beta=V^{-1/2}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{s=-1,2}[a^*_s(\mathbf{k})u^*_{s,\beta}(\mathbf{k})e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-k_0x_0)}$$

① P. Jordan and E. Wigner, Z. Phsik. 47, 631 (1928)

$$+b_s(\mathbf{k})v^*_{s,\beta}(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{x}_0)}]. \tag{25.4}$$

将 (25.3) 式和 (25.4) 式代入 (25.2) 式的第一式，导出

$$\{a_r(\mathbf{k}),b_s(\mathbf{k}')\}=\{b^*_r(\mathbf{k}),a^*_s(\mathbf{k}')\}=0, \tag{25.5}$$

和

$$\sum_r\sum_s[\{a_r(\mathbf{k}),a^*_s(\mathbf{k}')\}u_{r,\alpha}(\mathbf{k})u^*_{s,\beta}(\mathbf{k}')$$
$$+\{b^*_r(-\mathbf{k}),b_s(-\mathbf{k}')\}v_{r,\alpha}(-\mathbf{k})v^*_{s,\beta}(-\mathbf{k}')]$$
$$=\delta_{\alpha\beta}\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}. \tag{25.6}$$

用 $u^*_{m,\alpha}(\mathbf{k})u_{n,\beta}(\mathbf{k}')$ 乘(25.6)式，并利用关系(24.15)式，那么，我们发现

$$\{a_m(\mathbf{k}),a^*_n(\mathbf{k}')\}=\delta_{mn}\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}, \tag{25.7}$$

类似地还有

$$\{b^*_m(\mathbf{k}),b_n(\mathbf{k}')\}=\delta_{mn}\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}. \tag{25.8}$$

从(25.2)式中最后二个关系式也可以得到

$$\{a_m(\mathbf{k}),a_n(\mathbf{k}')\}=\{b^*_m(\mathbf{k}),b^*_n(\mathbf{k}')\}=\{a_m(\mathbf{k}),b^*_n(\mathbf{k}')\}=0,$$
$$\{a^*_m(\mathbf{k}),a^*_n(\mathbf{k}')\}=\{b_m(\mathbf{k}),b_n(\mathbf{k}')\}=\{a^*_m(\mathbf{k}),b_n(\mathbf{k}')\}=0. \tag{25.9}$$

此外，将付里叶展开式(25.3)和(25.4)代入(23.6)式，然后对体积 V 积分，电子场的能量，动量，以及电荷可以表示为

$$\mathscr{H}=\sum_{\mathbf{k}}\sum_{r=1,2}c\hbar k_0:[a^*_r(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k})-b_r(\mathbf{k})b^*_r(\mathbf{k})]:,$$
$$G_i=\sum_{\mathbf{k}}\sum_{r=1,2}\hbar k_i:[a^*_r(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k})-b_r(\mathbf{k})b^*_r(\mathbf{k})]:,$$
$$Q=\sum_{\mathbf{k}}\sum_{r=1,2}e:[a^*_r(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k})+b_r(\mathbf{k})b^*_r(\mathbf{k})]:, \tag{25.10}$$

它们可以改写成

$$\mathscr{H}=\sum_{k}\sum_{r=1,2}c\hbar k_0[a_r^*(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k})+b_r^*(\mathbf{k})b_r(\mathbf{k})],$$

$$\mathscr{G}_i=\sum_{k}\sum_{r=1,2}\hbar k_i[a_r^*(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k})+b_r^*(\mathbf{k})b_r(\mathbf{k})], \quad (25.11)$$

$$Q=\sum_{k}\sum_{r=1,2}e[a_r^*(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k})-b_r^*(\mathbf{k})b_r(\mathbf{k})].$$

从以上结果以及(25.7)及(25.8)式可以看出，对于每一个k值，电子场可以看成是由四种在13节中讨论过的正常费密振子组成，而且，$a_r(\mathbf{k})$和$a_r^*(\mathbf{k})$分别代表能量为$c\hbar k_0$，动量为$\hbar\mathbf{k}_i$，以及电荷为e的粒子的湮灭算符和产生算符，而$b_r(\mathbf{k})$和$b_r^*(\mathbf{k})$代表电荷为$-e$的粒子的湮灭和产生算符。这些电荷为e和$-e$的粒子分别称为电子和正电子，由于一个电子或一个正电子的静止能量是$c\hbar k$，它的静止质量由

$$m=\hbar\kappa/c \quad (25.12)$$

给出。

还可以将(25.3)和(25.4)式代入(23.14)式来实行电子场角动量的付里叶分解，得出

$$P_{ij}=P_{ij}^0+P'_{ij} \quad (25.13)$$

其中

$$P_{ij}^0=V^{-1}\int dx\sum_{k}\sum_{r}\hbar(x_ik_j-x_jk_i)[a_r^*(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k})+b_r^*(\mathbf{k})b_r(\mathbf{k})], \quad (25.14)$$

$$P'_{ij}=\sum_{k}\sum_{r}\sum_{s}\frac{1}{2}\hbar[a_r^*(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k})u_r^*(\mathbf{k})\sigma_{ij}u_r(\mathbf{k})-b_r^*(\mathbf{k})b_s(\mathbf{k})v_r^*(\mathbf{k})\sigma_{ij}v_r(\mathbf{k})]. \quad (25.15)$$

由于(25.14)式代表电子和正电子轨道角动量，因而，(25.15)式可以看成是由于这些粒子自旋而引起的角动量。为

了考察一个电子或一个正电子的自旋角动量，我们选择一个相对于电子或正电子静止的参考系，而且注意到，对于 $\mathbf{k}=0$，关系式(24.16)简化为

$$(1-\gamma_4)u_r(0)=0,\quad (1+\gamma_4)v_r(0)=0. \tag{25.16}$$

根据(21.18)式，由于 $\sigma_{12}^2-1=0$，因而，σ_{12} 的本征值是 ±1。而且，σ_{12} 和 $1\pm\gamma_4$ 对易，所以存在着和 σ_{12} 的本征值为 ±1 相应的(25.16)式的解。选择 $u_r(0)$ 和 $v_r(0)$ 使得

$$\begin{aligned}&\sigma_{12}u_1(0)=u_1(0),\quad \sigma_{12}u_2(0)=-u_2(0),\\&\sigma_{12}v_1(0)=-v_1(0),\quad \sigma_{12}v_2(0)=v_2(0),\end{aligned} \tag{25.17}$$

从(25.15)式我们发现，对应于 $\mathbf{k}=0$ 的 P'_{12} 的付里叶分量可以表示为

$$P'_{12}(0)=\frac{1}{2}\hbar[a_1^*(0)a_1(0)-a_2^*(0)a_2(0)+b_1^*(0)b_1(0)-b_2^*(0)b_2(0)], \tag{25.18}$$

这表示一个静止的电子或正电子的自旋角动量的 x_3 分量的本征值是 $\pm\frac{1}{2}\hbar$，并且对于其它分量这一结论也必定成立。因此，可以把电子和正电子看成自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子(以 $\hbar$ 为单位)。

26. 光子场和电子场的相互作用

我们考虑拉格朗日密度为

$$L_C=L_C:(u^{(r)},u^{(r)*},\partial_\mu u^{(r)},\partial_\mu u^{(r)*}): \tag{26.1}$$

的任何带电场，其中 $r=1,2,\cdots\cdots n$。我们假设一个由光子场和上述带电场组成的系统的总拉格朗日密度是

$$L=-:\left[\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)^2+\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\mu)^2\right]:+L'_C:(u^{(r)},u^{(r)*},D_\mu u^{(r)},D_\mu^* u^{(r)*}):, \tag{26.2}$$

其中第一项是光子场的拉格朗日密度，而第二项是从(26.1)式通过下列变换

$$\partial_\mu u^{(r)} \to D_\mu u^{(r)},\quad \partial_\mu u^{(r)*} \to D_\mu^* u^{(r)*}, \tag{26.3}$$

得来的，其中

$$D_\mu = \partial_\mu - (ie/c\hbar)A_\mu,\quad D_\mu^* = \partial_\mu + (ie/c\hbar)A_\mu. \tag{26.4}$$

上述假定的理由是：由(26.2)式可以得出场方程

$$\partial^2 A_\mu + \partial L_C'/\partial A_\mu = 0. \tag{26.5}$$

但是，由于 A_μ 只通过下面两个关系

$$\partial_\mu u^{(r)} - (ie/c\hbar)A_\mu u^{(r)}$$

及

$$\partial_\mu u^{(r)*} + (ie/c\hbar)A_\mu u^{(r)*},$$

包含在 L_C' 中，由此得到

$$\frac{\partial L_C'}{\partial A_\mu} = \sum\left[\frac{\partial L_C'}{\partial(\partial_\mu u^{(r)})}\left(-\frac{ie}{c\hbar}u^{(r)}\right) + \frac{\partial L_C'}{\partial(\partial_\mu u^{(r)*})}\left(\frac{ie}{ch}u^{(r)*}\right)\right],$$

或者，考虑到(17.10)式得

$$\frac{\partial L_C'}{\partial A_\mu} = \frac{1}{c}j_\mu, \tag{26.6}$$

其中 j_μ 是带电场电流四维矢量。因此，光子场方程(26.5)可以表示为

$$\partial^2 A_\mu = -\frac{1}{c}j_\mu, \tag{26.7}$$

它与经典场方程(4.5)一致。

一个值得注意的场的变换是由

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda,\quad u^{(r)} \to u^{(r)} e^{ie\Lambda/c\hbar},$$
$$u^{(r)*} \to u^{(r)*} e^{-ie\Lambda/c\hbar} \tag{26.8}$$

给出的，其中 Λ 是一个非算符的空时函数，满足条件

$$\partial^2 \Lambda = 0. \tag{26.9}$$

这个变换的含义是

$$[\partial_\mu - (ie/c\hbar)A_\mu]u^{(r)} \to [\partial_\mu - (ie/c\hbar)(A_\mu + \partial_\mu \Lambda)](u^{(r)} e^{ie\Lambda/c\hbar})$$

$$= \{[\partial_\mu - (ie/c\hbar)A_\mu]u^{(r)}\}e^{ieA/c\hbar},$$

或者，

$$D_\mu u^{(r)} \to (D_\mu u^{(r)})e^{ieA/c\hbar}, \tag{26.10}$$

并且类似地有

$$D_\mu^* u^{(r)*} \to (D_\mu^* u^{(r)*})e^{-ieA/c\hbar}. \tag{26.11}$$

在上面变换下，(26.2)式中第一项显然是不变的。而且，在变换(17.7)下 L_c 的不变性保证了在变换(26.8)，(26.10)，和(26.11)下 L_c' 的不变性。因此，总的拉格朗日密度(26.2)在由(26.8)和(26.9)式所给出的变换下是不变的。(26.8)和(26.9)式可以看成是特殊的规范变换(19.4)式的推广。

在特殊情况下，当带电场是电子场时，拉格朗日密度(26.2)式取下列形式

$$L = -:\left[\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\mu)^2\right]:$$

$$- c\hbar:(\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi + \kappa\bar{\psi}\psi):+ ie:(A_\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi):, \tag{26.12}$$

式中最后一项是由于在(23.2)式中 ∂_μ 变换成 D_μ 而引起的。得到的场方程组是

$$\partial^2 A_\mu = -ie:\bar{\psi}\gamma_\mu\psi:, \tag{26.13}$$

$$\gamma_\mu D_\mu\psi + \kappa\psi = 0, \quad D_\mu^*\bar{\psi}\gamma_\mu - \kappa\bar{\psi} = 0, \tag{26.14}$$

而电流四维矢量 j_μ，正则能量动量张量 $S_{\mu\nu}$ 以及对称的能量动量张量 $T_{\mu\nu}$ 是由

$$j_\mu = iec:\bar{\psi}\gamma_\mu\psi:, \tag{26.15}$$

$$S_{\mu\nu} = :\left[(\partial_\nu A_\rho - \partial_\rho A_\nu)\partial_\mu A_\rho + \partial_\mu A_\nu\partial_\rho A_\rho\right.$$

$$\left. - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}(\partial_\rho A_\lambda - \partial_\lambda A_\rho)^2 - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}(\partial_\rho A_\rho)^2\right]:$$

$$+c\hbar:(\bar{\psi}\gamma_\nu\partial_\mu\psi):, \tag{26.16}$$

$$T_{\mu\nu}=:\Big[(\partial_\mu A_\rho-\partial_\rho A_\mu)(\partial_\nu A_\rho-\partial_\rho A_\nu)$$

$$-\frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}(\partial_\lambda A_\rho-\partial_\rho A_\lambda)^2-A_\mu\partial_\nu\partial_\rho A_\rho$$

$$-A_\nu\partial_\mu\partial_\rho A_\rho+\delta_{\mu\nu}A_\rho\,\partial_\rho\partial_\lambda A_\lambda+\frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}(\partial_\lambda A_\lambda)^2\Big]:$$

$$+\frac{1}{4}c\hbar:(\bar{\psi}\gamma_\nu D_\mu\psi-D_\mu^*\bar{\psi}\gamma_\nu\psi+\bar{\psi}\gamma_\mu D_\nu\psi$$

$$-D_\nu^*\bar{\psi}\gamma_\mu\psi): \tag{26.17}$$

给出的。

由(26.16)得到的能量密度是

$$S_{00}=\frac{1}{2}:[\partial_i A_\lambda\partial_i A_\lambda-\partial_4 A_\lambda\partial_4 A_\lambda+\partial_i A_i\partial_k A_k$$

$$-\partial_i A_k\partial_k A_i]:-c\hbar:(\bar{\psi}\gamma_4\partial_4\psi):, \tag{26.18}$$

那里不出现光子——电子耦合项是容易使人误解的，因为耦合项只有在利用正则变量和它们空间导数表示能量密度以后才能被分开。的确，总能量密度(26.18)式可以写成下列正则形式

$$H_{tot}=H_{ph}+H_{el}+H_{int} \tag{26.19}$$

其中

$$H_{ph}=\frac{1}{2}:[c^2\pi_\mu^2+2ic(\pi_i\partial_i A_4-\pi_4\partial_i A_i)$$

$$+\partial_i A_i(\partial_i A_k-\partial_k A_i)]:, \tag{26.20}$$

$$H_{el}=-ic:\pi'\gamma_4(\gamma_i\partial_i\psi+\kappa\psi):, \tag{26.21}$$

$$H_{int}=-(e/\hbar):A_\mu(\pi'\gamma_4\gamma_\mu\psi):, \tag{26.22}$$

这里 π_μ 和 π'_α，即 A_μ 和 ψ_α 的正则共轭，由下式

$$\pi_i=ic^{-1}(\partial_4 A_i-\partial_i A_4),\quad \pi_4=ic^{-1}\partial_\mu A_\mu,$$

$$\pi_\alpha=i\hbar\psi_\alpha^* \tag{26.23}$$

给出。

在 20 节中曾发现对光子场的量子化必须引入附加条件。现在我们将证明，在存在相互作用的情况下，这个条件满足协变性和自洽性的要求。附加条件(20.1)式可以表为

$$\Omega^{+}\Psi = 0 \tag{26.24}$$

而

$$\Omega \equiv \partial_{\mu} A_{\mu}. \tag{26.25}$$

由于

$$\partial^{2}\Omega = \partial_{\mu}(\partial^{2} A_{\mu}) = -c^{-1}\partial_{\mu} j_{\mu} = 0, \tag{26.26}$$

即使存在着保证 (26.24) 式协变性的相互作用，按洛伦兹协变的方式把 Ω 分成正频和负频部分也是可能的。我们进而可以把 Ω^{+} 对空间坐标的任意值按 t 的幂次展开为

$$\Omega^{+} = [\Omega^{+}]_{t=0} + t[\dot{\Omega}^{+}]_{t=0} + (t^{2}/2!)[\ddot{\Omega}^{+}]_{t=0} + (t^{3}/3!)[\dddot{\Omega}^{+}]_{t=0} + \cdots, \tag{26.27}$$

其中 Ω^{+} 上面的点表示相对于 t 微分。在(26.27)式中，由于 Ω^{+} 的第二阶和高阶时间导数可以借助于关系式

$$\partial^{2}\Omega^{+} = 0 \quad \text{或} \quad \ddot{\Omega}^{+} = c^{2}\partial_{i}^{2}\Omega^{+}, \tag{26.28}$$

变为 Ω^{+} 和 $\dot{\Omega}^{+}$ 的空间导数。由此得出，如果在 $t=0$ 时有

$$\Omega^{+}\Psi = 0 \text{ 以及 } \dot{\Omega}^{+}\Psi = 0 \text{ 当 } t = 0, \tag{26.29}$$

那么对于所有 t 值都有

$$\Omega^{+}\Psi = 0。 \tag{26.30}$$

应当注意到，这里满足(26.7)式的 A_{μ} 不可能按公式 (20.5) 式展开，因此由(26.24)式不会导出(20.29)式。这表明在存在着相互作用的情况下，附加条件并不意味着纵光子和时间光子不会出现。

27. 电荷共轭

在 25 节中曾指出电子场对应于荷电 e 和 $-e$ 称为电子和正电子的两种粒子。习惯上把电子和正电子分别看成粒子和反粒

子，我们下面证明，粒子和反粒子除了有相反的电荷外，它们还扮演了对称的角色。

在存在相互作用的情况下，由(26.4)式得出的电子场方程组是

$$\gamma_\mu[\partial_\mu - (ie/c\hbar)A_\mu]\psi + \kappa\psi = 0, \tag{27.1}$$

$$[\partial_\mu + (ie/c\hbar)A_\mu]\bar{\psi}\gamma_\mu - \kappa\bar{\psi} = 0. \tag{27.2}$$

如果我们在上式中用 ψ_c 代替 ψ，用 $-e$ 代替 e 得

$$\gamma_\mu[\partial_\mu + (ie/c\hbar)A_\mu]\psi_C + \kappa\psi_C = 0, \tag{27.3}$$

$$[\partial_\mu - (ie/c\hbar)A_\mu]\bar{\psi}_C\gamma_\mu - \kappa\bar{\psi}_C = 0 \tag{27.4}$$

用这一场方程组来代替(27.1)和(27.2)式，所得到的理论除了电子和正电子地位将交换外，和原来的理论是一样的。场算符 ψ_C 称为 ψ 的电荷共轭①。

以上二组场方程可以互相变换。因为(27.2)式的转置是

$$\gamma_\mu^T[\partial_\mu + (ie/ch)A_\mu]\bar{\psi}^T - \kappa\bar{\psi}^T = 0,$$

所以，在乘以有逆矩阵 C^{-1} 的常数矩阵 C 之后得

$$(C\gamma_\mu^T C^{-1})[\partial_\mu + (ie/ch)A_\mu](C\bar{\psi}^T) - \kappa(C\bar{\psi}^T) = 0,$$

如果

$$\gamma_\mu = -C\gamma_\mu^T C^{-1}, \tag{27.5}$$

$$\psi_C = C\bar{\psi}^T \tag{27.6}$$

它将和(27.3)一致。根据矩阵表示(21.6)式，有

$$\gamma_1^T = -\gamma_1,\ \gamma_2^T = \gamma_2,\ \gamma_3^T = -\gamma_3,\ \gamma_4^T = \gamma_4, \tag{27.7}$$

因此，将 C 取为

$$C = \eta_C\gamma_2\gamma_4 \text{ 而 } \eta_C^*\eta_C = 1, \tag{27.8}$$

则(27.5)式即可被满足。这里附加在常数 η_C 上的条件保证了 C

① H. A. Kramers, Proc. Amsterdam Akad. Sci. 40 814(1937).

是么正的。注意到由(27.8)式得出的下列有用的关系式

$$C^{\mathrm{T}} = -C,\quad C^{*} = C^{-1}. \tag{27.9}$$

我们也可以把(27.6)式写为

$$\psi_{C} = C(\psi^{*}\gamma_{4})^{\mathrm{T}} = C\gamma_{4}\psi^{*\mathrm{T}},$$

这给出

$$\psi_{C}^{*} = \psi^{\mathrm{T}}\gamma_{4}C^{*},$$

因此，考虑到(27.8)式后得出

$$\bar{\psi}_{C} = \psi^{\mathrm{T}}\gamma_{4}C^{*}\gamma_{4} = -\psi^{\mathrm{T}}C^{*} = -\psi^{\mathrm{T}}C^{-1}. \tag{27.10}$$

变换关系(27.6)和(27.10)式，表明

$$:\bar{\psi}_{C}O\psi_{C}: = -:\psi^{\mathrm{T}}(C^{-1}OC)\bar{\psi}^{\mathrm{T}}:$$

$$= -\varepsilon:\psi^{\mathrm{T}}O^{\mathrm{T}}\bar{\psi}^{\mathrm{T}}: = \varepsilon:\bar{\psi}O\psi:, \tag{27.11}$$

上式在

$$C^{-1}OC = \varepsilon O^{\mathrm{T}} \tag{27.12}$$

而 ε 是一个常数的条件下成立。的确，根据(27.5)式，有

$$C^{-1}C = 1,$$

$$C^{-1}\gamma_{\mu}C = -\gamma_{\mu}^{\mathrm{T}},$$

$$C^{-1}(\gamma_{\mu}\gamma_{\nu} - \gamma_{\nu}\gamma_{\mu})C = \gamma_{\mu}^{\mathrm{T}}\gamma_{\nu}^{\mathrm{T}} - \gamma_{\nu}^{\mathrm{T}}\gamma_{\mu}^{\mathrm{T}}$$

$$= -(\gamma_{\mu}\gamma_{\nu} - \gamma_{\nu}\gamma_{\mu})^{\mathrm{T}},$$

$$C^{-1}\gamma_{5}C = \gamma_{5}^{\mathrm{T}},$$

$$C^{-1}\gamma_{5}\gamma_{\mu}C = -\gamma_{5}^{\mathrm{T}}\gamma_{\mu}^{\mathrm{T}} = (\gamma_{5}\gamma_{\mu})^{\mathrm{T}},$$

所以

$$\begin{aligned} &\text{当 } O = 1, \gamma_{5}, \gamma_{5}\gamma_{\mu} \text{ 时}, && \varepsilon = +1 \\ &\text{当 } O = \gamma_{\mu}, \gamma_{\mu}\gamma_{\nu} - \gamma_{\nu}\gamma_{\mu} \text{ 时}, && \varepsilon = -1 \end{aligned} \tag{27.13}$$

由于(27.1)和(27.2)式与(27.3)和(27.4)式等价，由此得出电子场方程在下述变换下

$$\psi \to \psi_{C},\quad A_{\mu} \to -A_{\mu}, \tag{27.14}$$

是不变的，这个变换通常叫做电荷共轭变换。利用关系式

$$:\bar{\psi}_{C}\psi_{C}: = :\bar{\psi}\psi:,$$

$$:\bar{\psi}_c\gamma_\mu\psi_c:=-:\bar{\psi}\gamma_\mu\psi:, \tag{27.15}$$

$$:\bar{\psi}_c\gamma_\mu\partial_\mu\psi_c:=-:\partial_\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi:,$$

并注意到$-:\partial_\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi:$在省略去四维散度后可以写为$:\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi:$，也可以证明在(27.14)式的变换下，拉格朗日密度(26.12)式也是不变的。

28. 时间反转

时间反转比空间反演更加复杂，已经提出了几种时间反转的看法，我们将遵循看来是最简单的处理方法①。

令电子场方程

$$\gamma_\mu[\partial_\mu-(ie/c\hbar)A_\mu]\psi+\kappa\psi=0 \tag{28.1}$$

在时间反转下变换为

$$\gamma_\mu[\partial'_\mu-(ie/c\hbar)A'_\mu]\psi'+\kappa\psi'=0, \tag{28.2}$$

这里

$$\psi'=\Lambda\psi, \tag{28.3}$$

$$\partial'_i=\partial_i,\ \partial'_4=-\partial_4, \tag{28.4}$$

$$A'_i=A_i,\ A'_4=-A_4. \tag{28.5}$$

把(28.3)，(28.4)和(28.5)式代入(28.2)式，并乘以Λ^{-1}，我们得到

$$(\Lambda^{-1}\gamma_i\Lambda)[\partial_i-(ie/c\hbar)A_i]\psi-(\Lambda^{-1}\gamma_4\Lambda)[\partial_4-(ie/c\hbar)A_4]\psi+\kappa\psi=0,$$

如果Λ满足

$$\Lambda^{-1}\gamma_i\Lambda=\gamma_i,\ \Lambda^{-1}\gamma_4\Lambda=-\gamma_4. \tag{28.6}$$

则上式将和(28.1)式一致。这两个条件也可以在时间反转的特殊情况下由(22.5)式得出。当取Λ为

$$\Lambda=\eta_T\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \text{ 而 } \eta_T^*\eta_T=1, \tag{28.7}$$

时这两个条件就可以得到满足。其中给常数η_T所加的条件保证

① 我们的简单方法综合了在早期文献中出现的各种观点。

了Λ是么正的。此外，(28.3)式的厄密共轭是

$$\psi^{*\prime} = \psi^* \Lambda^*,$$

因此有

$$\bar{\psi}' = \bar{\psi}\gamma_4 \Lambda^* \gamma_4 = -\bar{\psi}\Lambda^* = -\bar{\psi}\Lambda^{-1}. \tag{28.8}$$

现在由于关系式(28.8)和(22.18)式之间差一个负号这一事实引起了一个困难。的确，应用(28.3)，(28.6)和(28.8)式得出

$$\begin{aligned} &:\bar{\psi}'\psi': = -:\bar{\psi}\Lambda^{-1}\Lambda\psi: = -:\bar{\psi}\psi:, \\ &:\bar{\psi}'\gamma_i\psi': = -:\bar{\psi}\Lambda^{-1}\gamma_i\Lambda\psi: = -:\bar{\psi}\gamma_i\psi:, \\ &:\bar{\psi}'\gamma_4\psi': = -:\bar{\psi}\Lambda^{-1}\gamma_4\Lambda\psi: = :\bar{\psi}\gamma_4\psi:, \end{aligned} \tag{28.9}$$

这似乎表明电子场的拉格朗日密度在时间反转之后改变了符号。

对单个场算符来说不必改变变换关系就可以避免上面的困难，只要令场算符和态矢量的乘积在时间反转之下按下列方式变换

$$\begin{aligned} &x_4 \to x'_4 = -x_4, \quad A_4 \to A'_4 = -A_4, \\ &\psi \to \psi' = \Lambda\psi, \quad \bar{\psi} \to \bar{\psi}' = -\bar{\psi}\Lambda^{-1}, \\ &\Psi \to \Psi^*, \qquad \Psi^* \to \Psi, \end{aligned} \tag{28.10}$$

其中Λ由(28.7)式给出，然后在一切乘积中把所有场算符和态矢量的次序颠倒过来。

为了证实这些步骤的正确性，我们首先观察形如$:\bar{\psi}O\psi:$的乘积，只要把ψ看成为一个费密算符，这一乘积的变换就是

$$:\bar{\psi}O\psi: \to :\psi'_\beta O_{\alpha\beta}\bar{\psi}'_\alpha: = -:\bar{\psi}'O\psi':, \tag{28.11}$$

结果，按照(28.11)和(28.9)式得

$$\begin{aligned} &:\bar{\psi}\psi: \to -:\bar{\psi}'\psi': = :\bar{\psi}\psi:, \\ &:\bar{\psi}\gamma_i\psi: \to -:\bar{\psi}'\gamma_i\psi': = :\bar{\psi}\gamma_i\psi:, \\ &:\bar{\psi}\gamma_4\psi: \to -:\bar{\psi}'\gamma_4\psi': = -:\bar{\psi}\gamma_4\psi:, \end{aligned} \tag{28.12}$$

因此，$:\bar{\psi}\psi:$和$:\bar{\psi}\gamma_\mu\psi:$的行为分别像一个标量和一个四维矢量，这就保证了有相互作用的光子和电子场系统的拉格朗日密度（26.12）式的不变性。由（26.18）式给出的系统能量密度在时间反转下的不变性也是明显的。

让我们进一步考虑场算符和态随时间变化的普遍规律的变换，在海森堡绘景中，场算符和态矢量随时间变化的规律是由（15.1）和（15.2）式给出的。我们注意到在时间反转下有

$$\partial f_{\mathrm{H}}/\partial t \to -\partial f'_{\mathrm{H}}/\partial t,$$

$$[f_{\mathrm{H}}, \mathscr{H}_{\mathrm{H}}] \to -[f'_{\mathrm{H}}, \mathscr{H}_{\mathrm{H}}],$$

$$d\Psi_{\mathrm{H}}/dt \to -d\Psi^*_{\mathrm{H}}/dt,$$

在第一和第三式中负号是由于t被$-t$替换引起的，而在第二式中的负号是由于因子次序颠倒引起的。因此，（15.1）式变换为等价形式

$$\partial f'_{\mathrm{H}}/\partial t = -(i/\hbar)[f'_{\mathrm{H}}, \mathscr{H}_{\mathrm{H}}], \tag{28.13}$$

而（15.2）式变换为等价的厄密共轭关系式

$$d\Psi^*_{\mathrm{H}}/dt = 0. \tag{28.14}$$

类似的结果在薛定谔绘景和相互作用绘景中也是成立的。因为在时间反转下从（15.4）和（14.7）式显然有

$$U \to U^*, \quad U^* \to U, \tag{28.15}$$

这和$\Psi \to \Psi^*$，$\Psi^* \to \Psi$，一起再加上颠倒因子次序就保证了么正变换（15.3）和（16.6）式的不变性。

第四章　散射算符

将散射算符进行展开，就可以对相互作用场发展一种协变的微扰理论。在详细论述量子电动力学中的散射算符之外，我们还将指出这种方法如何能用于导数耦合，这在其它场的相互作用中是可能出现的。

29. 散射算符的展开式

在16节中描述过的相互作用绘景中，一个相互作用场系统的场算符满足自由场方程，而态矢量满足

$$i\hbar[d\Psi(t)/dt]=\mathscr{H}(t)\Psi(t), \qquad (29.1)$$

这里在相互作用绘景中的相互作用能量简单地用$\mathscr{H}$表示。我们定义一个算符S满足

$$\Psi(\infty)=S\Psi(-\infty), \qquad (29.2)$$

这里S称为散射算符。正如早先指出的，在（29.1）式中$\mathscr{H}$的厄密性保证了态矢量的模方是守恒的，因此，由（29.2）式所定义的S是一个么正算符，即

$$S^*S=1. \qquad (29.3)$$

为了处理散射过程，有理由假定在$t=-\infty$时没有相互作用，而相互作用是在碰撞前很久逐渐加上去的，在碰撞结束后很久，相互作用逐渐消失，所以在$t=+\infty$时又没有相互作用。因此，可以认为在$t=\pm\infty$时，$\mathscr{H}$变成零，结果

当$t=\pm\infty$时，
$$d\Psi(t)/dt=0. \qquad (29.4)$$

我们也可以令

$$\Psi(t)=S(t,-\infty)\Psi(-\infty) \qquad (29.5)$$

而

$$S(-\infty, -\infty)=1, \tag{29.6}$$

并且注意到

$$S=S(\infty, -\infty). \tag{29.7}$$

将（29.5）式代入（29.1）式，考虑到（29.4）式得出

$$i\hbar\frac{dS(t,-\infty)}{dt}=\mathscr{H}S(t,-\infty), \tag{29.8}$$

它满足条件（29.6）式，因此有

$$\begin{aligned}S(t,-\infty)&=1-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{t}dt'\mathscr{H}(t')S(t', -\infty)\\&=1-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{t}dt'\int_{-\infty}^{\infty}dx''H(x')S(t',-\infty)\end{aligned}$$

即

$$S(t,-\infty)=1-\frac{i}{c\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}dx'\theta(t-t')H(x')S(t',-\infty), \tag{29.9}$$

其中$\mathscr{H}$是在相互作用绘景中的相互作用能量密度，而

$$\begin{aligned}\theta(t-t')&=1 \quad t>t',\\&=0 \quad t<t'.\end{aligned} \tag{29.10}$$

作重复代换，（29.9）式可以表示为

$$\begin{aligned}S(t,-\infty)&=1+\left(\frac{-i}{c\hbar}\right)\int dx'\theta(t-t')H(x')\\&+\left(\frac{-i}{c\hbar}\right)^2\int dx'\int dx''\theta(t-t')\theta(t'-t'')H(x')H(x'')+\cdots\\&+\left(\frac{-i}{c\hbar}\right)^n\int dx'\int dx''\cdots\int dx^{(n)}\theta(t-t')\theta(t'-t'')\cdots\\&\times\theta(t^{(n-1)}-t^{(n)})H(x')H(x'')\cdots H(x^{(n)})+\cdots,\end{aligned}$$

这里所有的积分范围都是从$-\infty$到∞，而令$t=\infty$时以上展开式变成

$$S=1+\left(\frac{-i}{c\hbar}\right)\int dx'H(x')$$

$$+\left(\frac{-i}{c\hbar}\right)^2\int dx'\int dx''\theta(t'-t'')H(x')H(x'')+\cdots$$

$$+\left(\frac{-i}{c\hbar}\right)^n\int dx'\int dx''\cdots\int dx^{(n)}\theta(t'-t'')\cdots$$

$$\times\theta(t^{(n-1)}-t^{(n)})H(x')H(x'')\cdots H(x^{(n)})+\cdots. \quad (29.11)$$

如果令 $P[H(x')H(x'')\cdots H(x^{(n)})]$表示将$H(x')$, $H(x'')$,…, $H(x^{(n)})$ 这样的乘积中各因子按时间流逝先后次序从右到左重新排列。那末由此可得

$$P[H(x')H(x'')\cdots H(x^{(n)})]$$

$$=\sum_P\theta(t'-t'')\theta(t''-t''')\cdots\theta(t^{(n-1)}$$

$$-t^{(n)})H(x')H(x'')\cdots H(x^{(n)}), \quad (29.12)$$

这里取和遍及到按所有可能方式交换这些撇所得到 $n!$ 种排列。将 (29.12) 对x', x'', $\cdots x^{(n)}$ 积分，并注意到在 (29.12) 式右边的每种排列积分后结果相同，我们得到

$$\int dx'\int dx''\cdots\int dx^{(n)}P[H(x')H(x'')\cdots H(x^{(n)})]$$

$$=n!\int dx'\int dx''\cdots\int dx^{(n)}\theta(t'-t'')\theta(t''-t''')\cdots$$

$$\times\theta(t^{(n-1)}-t^{(n)}H(x')H(x'')\cdots H(x^{(n)}). \quad (29.13)$$

利用上面的关系式，散射算符 (29.11) 式可以表示为这样形式①，②

---

① F.J.Dyson, Phys.Rev.75, 486(1949).

② 我们通过 (29.13) 式引入P乘积，提供了 Dyson 结果的一个简单推导。P乘积和θ函数之间关系是由 S.N.Gupta 给出的：S.N. Gupta, Proc.Cambridge Phil. Soc.47, 454(1951).

$$S=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{-i}{c\hbar}\right)^{n}\int dx'\int dx''\cdots\int dx^{(n)}P[H(x')H(x'')\cdots H(x^{(n)})]. \tag{29.14}$$

任何场系统的相互作用能量密度H都可以从拉格朗日密度得到。在26节中，光子-电子相互作用能量密度已在海森伯绘景中表示为正则形式，而在相互作用绘景中同样的结果也成立，只要将这些正则变量看成自由场算符即可。因此，按照（26.22）和（26.23）式，在相互作用绘景中，相互作用能量密度是

$$H=-(e/\hbar):A_{\mu}(\pi'\gamma_4\gamma_{\mu}\psi):\quad \text{其中}\quad \pi'=i\hbar\psi^{*},$$

或者

$$H=-ie:A_{\mu}\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi:=-c^{-1}A_{\mu}j_{\mu}, \tag{29.15}$$

其中A_{μ}，ψ，和$\bar{\psi}$满足自由场方程。

30. 不变奇异函数

在量子场论中，有两种类型不变奇异函数是特别重要的。

我们首先来描述相互作用绘景中出现在场算符协变对易关系中的一个奇异函数。我们考虑由关系式①

$$(\partial^2-\kappa^2)\Delta(x)=0, \tag{30.1}$$

$$[\Delta(x)]_{t=0}=0, \tag{30.2}$$

$$[\partial_0\Delta(x)]_{t=0}=\delta(\mathbf{x}). \tag{30.3}$$

所定义的函数$\Delta(x)$。

按照第10节，满足（30.1）式的函数$\Delta(x)$可以表示成这样形式

$$\Delta(x)=(2\pi)^{-3}\int d\mathbf{k}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}[A(\mathbf{k})e^{-ik_0x_0}+B(\mathbf{k})e^{ik_0x_0}] \tag{30.4}$$

其中

① P.Jordan and W.Pauli, Z.Phys.47, 151(1929).

$$k_0 = (\mathbf{k}^2 + \kappa^2)^{1/2}. \tag{30.5}$$

利用 (30.4) 式后，关系式 (30.2) 和 (30.3) 式变为

$$(2\pi)^{-3}\int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}}[A(\mathbf{k}) + B(\mathbf{k})] = 0,$$

$$(2\pi)^{-3}\int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}}[-ik_0 A(\mathbf{k}) + ik_0 B(\mathbf{k})] = \delta(\mathbf{x}),$$

由此得到

$$A(\mathbf{k}) + B(\mathbf{k}) = 0,$$

$$-ik_0 A(\mathbf{k}) + ik_0 B(\mathbf{k}) = 1,$$

即

$$A(\mathbf{k}) = -B(\mathbf{k}) = i/2k_0. \tag{30.6}$$

将 (30.6) 式代入 (30.4) 式，以明显形式给出 $\Delta(x)$

$$\Delta(x) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}}\frac{1}{2k_0}[e^{-ik_0 x_0} - e^{ik_0 x_0}]$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}}\frac{\sin(k_0 x_0)}{k_0}. \tag{30.7}$$

$\Delta(x)$ 满足下列关系

$$\Delta(\mathbf{x}, x_0) = \Delta(-\mathbf{x}, x_0) = -\Delta(\mathbf{x}, -x_0) = -\Delta(-\mathbf{x}, -x_0), \tag{30.8}$$

而 $\Delta(x)$的正频和负频部分是

$$\Delta^+(x) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\frac{1}{2k_0}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{X} - k_0 x_0)},$$

$$\Delta^-(x) = \frac{-i}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\frac{1}{2k_0}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{X} + k_0 x_0)}. \tag{30.9}$$

$\Delta(x)$的积分表示式也可以写成

$$\Delta(x) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\frac{1}{2k_0}[\varepsilon(k_0)e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{X} - k_0 x_0)}$$

$$+ \varepsilon(-k_0)e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{X} + k_0 x_0)}], \tag{30.10}$$

按照 (9.9)，其中

$$\varepsilon(k_0)=1,\ \varepsilon(-k_0)=-1,\ k_0>0. \qquad (30.11)$$

再有，把 k_0 当作独立变量，以此来代替由 (30.5) 式给出的关系，可以将 (30.10) 式表示为

$$\Delta(x)=\frac{i}{(2\pi)^3}\iint d\mathbf{k}\,dk_0\frac{\delta[k_0-(\mathbf{k}^2+\kappa^2)^{1/2}]}{2(\mathbf{k}^2+\kappa^2)^{1/2}}$$
$$\times[\varepsilon(k_0)e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}-k_0x_0)}+\varepsilon(-k_0)e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}+k_0x_0)}]$$
$$=\frac{i}{(2\pi)^3}\iint d\mathbf{k}\,dk_0\frac{\delta[k_0-(\mathbf{k}^2+\kappa^2)^{1/2}]+\delta[k_0+(\mathbf{k}^2+\kappa^2)^{1/2}]}{2(\mathbf{k}^2+\kappa^2)^{1/2}}$$
$$\times\varepsilon(k_0)e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}-k_0x_0)}$$

或者，借助于(10.13)式写成

$$\Delta(x)=i(2\pi)^{-3}\int dk\,\delta(k^2+\kappa^2)\varepsilon(k_0)e^{ik\cdot X}. \qquad (30.12)$$

以上结果表明在正常洛伦兹变换和空间反演下，$\Delta(x)$ 是不变的，但因为有因子 $\varepsilon(k_0)$ 存在，在时间反转时，$\Delta(x)$ 要改变符号。

另一个奇异函数出现在散射算符的贡献中，其定义为①

$$\Delta_F(x)=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{(2\pi)^4}\int dke^{ik\cdot X}\frac{1}{k^2+\kappa^2-i\varepsilon}. \qquad (30.13)$$

上面这个函数明显地具有洛伦兹不变性，我们将利用下列围道积分定理来建立 $\Delta_F(x)$ 和 $\Delta(x)$ 之间的关系。这个定理是：如果 $f(x)$ 具有 $N(z)/D(z)$ 的形式，而 $N(z)$ 和 $D(z)$ 都是多项式，$D(z)$ 的次数至少高于 $N(z)$ 一次，而且 $D(z)=0$ 有实数根，那么

$$\int_{-\infty}^{\infty}dzf(z)e^{imz}=2\pi i\sum R_+ \qquad m>0, \qquad (30.14)$$

这里积分遍及所有 z 的实数值，而 ΣR_+ 表示 $f(z)e^{imz}$ 在 z 的上半复平面里的各极点的留数之和。

---

① R.P.Feynman, Phys.Rev.76,749(1949).

为了将（30.13）式对 k_0 积分，我们令

$$\Delta_F(x)=(2\pi)^{-4}\int d\mathbf{k}\, e^{i\mathbf{k}\cdot X}I(x_0), \tag{30.15}$$

其中

$$I(x_0)=\lim_{\varepsilon\to+0}\int dk_0\frac{e^{-ik_0x_0}}{\mathbf{k}^2+\kappa^2-k_0^2-i\varepsilon}. \tag{30.16}$$

那么，对于 $t<0$，有

$$I(x_0)=\lim_{\varepsilon\to+0}\int dk_0\frac{e^{ik_0|x_0|}}{\mathbf{k}^2+\kappa^2-k_0^2-i\varepsilon}, \tag{30.17}$$

它具有（30.14）的形式。在（30.17）式中积分的极点位于

$$k_0=(\mathbf{k}^2+\kappa^2)^{1/2}-i\varepsilon' \quad 和 \quad k_0=-(\mathbf{k}^2+\kappa^2)^{1/2}+i\varepsilon'$$

处，其中 $\varepsilon'\to+0$，但只有这两个极点里的第二个才位于上半平面里，而在这个极点处的留数是

$$R_+=\frac{e^{-i(k^2+\kappa^2)^{1/2}|x_0|}}{2(\mathbf{k}^2+\kappa^2)^{1/2}}.$$

因此，对于 $t<0$ 有

$$I(x_0)=2\pi i\frac{e^{-ik_0|x_0|}}{2k_0}=2\pi i\frac{e^{ik_0x_0}}{2k_0},$$

$$k_0\equiv(\mathbf{k}^2+\kappa^2)^{1/2}. \tag{30.18}$$

类似地，对于 $t>0$ 有

$$I(x_0)=\lim_{\varepsilon\to+0}\int dk_0\frac{e^{-ik_0|x_0|}}{\mathbf{k}^2+\kappa^2-k_0^2-i\varepsilon}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\int dk_0\frac{e^{ik_0|x_0|}}{\mathbf{k}^2+\kappa^2-k_0^2-i\varepsilon},$$

它具有和（30.17）式相同的形式，并且导出下列结果

$$I(x_0)=2\pi i\frac{e^{-ik_0|x_0|}}{2k_0}=2\pi i\frac{e^{-ik_0x_0}}{2k_0},$$

$$k_0\equiv(\mathbf{k}^2+\kappa^2)^{1/2}. \tag{30.19}$$

把 (30.18) 和 (30.19) 式代入 (30.15) 式里得到

$$\Delta_F(x)=\frac{i}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\,\frac{1}{2k_0}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}+k_0x_0)}=-\Delta^-(x)$$

对于 $t<0$,

$$=\frac{i}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\,\frac{1}{2k_0}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}-k_0x_0)}=\Delta^+(x)$$

对于 $t>0$, (30.20)

或者

$$\Delta_F(x)=\theta(t)\Delta^+(x)-\theta(-t)\Delta^-(x), \qquad (30.21)$$

这里 $\theta(t)$是由 (29.10) 给出的。

下式是值得注意的:

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\xi-i\varepsilon}\equiv\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{\xi}{\xi^2+\varepsilon^2}+i\frac{\varepsilon}{\xi^2+\varepsilon^2}\right). \qquad (30.22)$$

此式右边第一项在围绕 $\xi=0$ 的无限小区域外面的行为象$1/\xi$，而在 $\xi=0$ 附近，它给出

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}d\xi\,\frac{\xi}{\xi^2+\varepsilon^2}=0,$$

这表明

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\xi}{\xi^2+\varepsilon^2}=P\frac{1}{\xi}, \qquad (30.23)$$

这里$P(1/\xi)$代表$1/\xi$ 的主值。 (30.22) 式右边第二项在 $\xi=0$ 周围无限小区域外边为零，而对于 $\xi=0$ 它成为无穷大，而下式成立

$$\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\,\frac{\varepsilon}{\xi^2+\varepsilon^2}=\pi,$$

由此得出

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon}{\xi^2+\varepsilon^2}=\pi\delta(\xi). \qquad (30.24)$$

将 (30.23) 和 (30.24) 式代入 (30.22) 式，得出

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\xi-i\varepsilon}=P\frac{1}{\xi}+\pi i\delta(\xi),\qquad(30.25)$$

而且借助于 (30.23) 和 (30.24) 式，也可以证明

$$P(1/\xi)\delta(\xi)=-\frac{1}{2}\delta'(\xi).\qquad(30.26)$$

在处理 $\Delta_F(x)$ 函数时，上述关系式有时是有用的。

31. 协变的对易关系

在相互作用绘景中，光子场方程和对易关系与在 19 和 20 节中对自由场所给出的场方程和对易关系一样，我们有

$$\partial^2 A_\mu=0,\qquad(31.1)$$

以及

$$[A_\mu(\mathbf{x},t),A_\nu(\mathbf{x}',t)]=0,\qquad(31.2)$$

$$[\partial_0 A_\mu(\mathbf{x},t),A_\nu(\mathbf{x}',t)]=-ic\hbar\delta_{\mu\nu}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}').\qquad(31.3)$$

为了把光子场的对易关系表示为协变形式，我们令

$$[A_\mu(x),A_\nu(x')]=-ic\hbar\delta_{\mu\nu}D(x-x'),\qquad(31.4)$$

并设法求出函数 $D(x-x')$。把 ∂^2 作用到(31.4)式，考虑到(31.1)式，得出

$$\partial^2 D(x-x')=0,\qquad(31.5)$$

而将 (31.4) 和 (31.2) 式比较后我们得到

$$[D(x-x')]_{t'-t}=0,\qquad(31.6)$$

并且，在将 (31.4) 式对 x_0 微分并与 (31.3) 式比较后，得到

$$[\partial_0 D(x-x')]_{t'-t}=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}').\qquad(31.7)$$

关系式 (31.5)，(31.6)，和 (31.7) 与 $\kappa=0$ 的 (30.1)，(30.2) 和 (30.3) 式一致，这就表明

$$D(x-x')=\lim_{\kappa\to0}\Delta(x-x'),$$

因此，根据 (30.12) 式有

$$D(x)=i(2\pi)^{-3}\int dk\,\delta(k^2)\varepsilon(k_0)e^{ik\cdot x}.\qquad(31.8)$$

类似地，对于在相互作用绘景中电子场，象在23和25节中那样，我们有

$$\gamma_\mu\partial_\mu\psi+\kappa\psi=0,\quad \partial_\mu\bar{\psi}\gamma_\mu-\kappa\bar{\psi}=0, \tag{31.9}$$

和

$$\{\psi_\alpha(\mathbf{x},t),\psi_\beta(\mathbf{x}',t)\}=0,\ \{\psi^*_\alpha(\mathbf{x},t),\psi^*_\beta(\mathbf{x}',t)\}=0, \tag{31.10}$$

$$\{\psi_\alpha(\mathbf{x},t),\psi^*_\beta(\mathbf{x}',t)\}=\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \tag{31.11}$$

(31.10) 式的协变形式是由

$$\{\psi_\alpha(x),\psi_\beta(x')\}=0,\ \{\bar{\psi}_\alpha(x),\bar{\psi}_\beta(x')\}=0, \tag{31.12}$$

给出的。因为不仅关系式 (31.12) 在 $t=t'$ 时与 (31.10) 式一致，而且它们的时间导数，在利用场方程组 (31.9)后，在 $t=t'$ 时也与 (31.10) 式一致。此外，用 $(\gamma_4)_{\beta\gamma}$ 乘 (31.11) 式后，可以把它写成

$$\{\psi_\alpha(\mathbf{x},t),\bar{\psi}_\gamma(\mathbf{x}',t)\}=(\gamma_4)_{\alpha\gamma}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'), \tag{31.13}$$

而且，为了将 (31.13) 式表示成协变形式，我们令

$$\{\psi_\alpha(x),\bar{\psi}_\gamma(x')\}=iS_{\alpha\gamma}(x-x'), \tag{31.14}$$

并设法确定 $S_{\alpha\gamma}(x-x')$。将 $(\gamma_\mu\partial_\mu+\kappa)_{\beta\alpha}$ 作用到(31.14)式上，考虑到 (31.9) 式，证明了 $S_{\alpha\gamma}(x-x')$必须满足关系式

$$(\gamma_\mu\partial_\mu+\kappa)_{\beta\alpha}S_{\alpha\gamma}(x-x')=0. \tag{31.15}$$

如果我们取

$$S(x-x')=(\gamma_\mu\partial_\mu-\kappa)\Delta(x-x'), \tag{31.16}$$

那末 (31.15) 式变为

$$\delta_{\beta\alpha}(\partial^2-\kappa^2)\Delta(x-x')=0,$$

借助于 $\Delta(x-x')$的性质 (30.1) 式，上式可以成立。此外，比较 (31.14) 和 (31.13) 式导出下列要求

$$(\gamma_4)_{\alpha\gamma}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')=i[S_{\alpha\gamma}(x-x')]_{t'=t}$$
$$=i[(\gamma_\mu\partial_\mu-\kappa)_{\alpha\gamma}\Delta(x-x')]_{t'=t},$$

借助于性质 (30.2) 和 (30.3) 式，上式也可被满足。因此，

(31.14) 和 (31.16) 式一起提供了 (31.11) 式的协变形式。

也可以得到光子场和电子场算符的正频和负频部分的协变对易关系。将对易关系 (31.4) 的正频和负频部分分开，得出

$$\begin{aligned}[A_\mu^+(x),A_\nu(x')]&=-ic\hbar\delta_{\mu\nu}D^+(x-x'),\\ [A_\mu^-(x),A_\nu(x')]&=-ic\hbar\delta_{\mu\nu}D^-(x-x'),\end{aligned}\tag{31.17}$$

而由 (20.5) 和 (20.7) 式可以明显看出

$$[A_\mu^+(x),\ A_\nu^+(x')]=[A_\mu^-(x),\ A_\nu^-(x')]=0,\tag{31.18}$$

此式可以使我们把 (31.17) 式简化为

$$\begin{aligned}[A_\mu^+(x),A_\nu^-(x')]&=-ic\hbar\delta_{\mu\nu}D^+(x-x'),\\ [A_\mu^-(x),A_\nu^+(x')]&=-ic\hbar\delta_{\mu\nu}D^-(x-x').\end{aligned}\tag{31.19}$$

类似地，对易关系式 (31.14) 给出

$$\begin{aligned}\{\psi_\alpha^+(x),\bar\psi_\gamma(x')\}&=iS_{\alpha\gamma}^+(x-x'),\\ \{\psi_\alpha^-(x),\bar\psi_\gamma(x')\}&=iS_{\alpha\gamma}^-(x-x'),\end{aligned}\tag{31.20}$$

而鉴于 (25.3)，(25.4) 和 (25.5) 式，有

$$\{\psi_\alpha^+(x),\bar\psi_\gamma^+(x')\}=\{\psi_\alpha^-(x),\bar\psi_\gamma^-(x')\}=0,\tag{31.21}$$

所以 (31.20) 式简化为

$$\begin{aligned}\{\psi_\alpha^+(x),\bar\psi_\gamma^-(x')\}&=iS_{\alpha\gamma}^+(x-x'),\\ \{\psi_\alpha^-(x),\bar\psi_\gamma^+(x')\}&=iS_{\alpha\gamma}^-(x-x').\end{aligned}\tag{31.22}$$

从电子场算符的对易关系，可以导出电流与电流之间的对易关系。根据在 16 节中所给出的正规积定义，可将 j_μ 写成

$$j_\mu=iec{:}\bar\psi\gamma_\mu\psi{:}=iec[\bar\psi\gamma_\mu\psi^+-\psi_\beta^-(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\bar\psi_\alpha],$$

因此，借助于 (31.20) 式我们有

$$j_\mu=iec[\bar\psi\gamma_\mu\psi^+ +\bar\psi\gamma_\mu\psi^- +i(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}S_{\beta\alpha}^-(0)]$$

或者

$$j_\mu=iec\bar\psi\gamma_\mu\psi-ec\mathrm{Tr}[\gamma_\mu S^-(0)].\tag{31.23}$$

由于 (31.23) 右边第二项不是算符，所以得

$$[j_\mu(x), j_\nu(x')] = -e^2c^2[\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x), \bar{\psi}(x')\gamma_\nu\psi(x')],$$

再利用 (31.12) 和 (31.14) 式，上式可表示为

$$[j_\mu(x), j_\nu(x')] = -ie^2c^2[\bar{\psi}(x)\gamma_\mu S(x-x')\gamma_\nu\psi(x') - \bar{\psi}(x')\gamma_\nu S(x'-x)\gamma_\mu\psi(x)]. \quad (31.24)$$

当时间相同时，(31.14)式简化为(31.13)式，而关系式(31.24)变为

$$[j_\mu(x), j_\nu(x')]_{t'=t} = -e^2c^2[\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_4\gamma_\nu\psi(x') - \bar{\psi}(x')\gamma_\nu\gamma_4\gamma_\mu\psi(x)]_{t'=t}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'), \quad (31.25)$$

而作为上式的特殊情况，有

$$[j_\mu(x), j_0(x')]_{t'=t} = ie^2c^2[\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x') - \bar{\psi}(x')\gamma_\mu\psi(x)]_{t'=t}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = 0. \quad (31.26)$$

32. 相互作用绘景里的附加条件

我们已经指出在海森堡绘景中有相互作用时光子场的附加条件由 (26.24) 式给出。在相互作用绘景中相应的附加条件具有复杂的形式①，这里我们将用简单的方法得出这个形式②。

在附加条件 (26.24) 式中正频部分的出现使得附加条件在变换到相互作用绘景时复杂化。然而，我们注意到在相互作用绘景中的附加条件应当满足下列要求：(*a*)在不存在相互作用时，它应该和海森伯绘景中附加条件是等价的。(*b*)它应该和相互作用绘景中态矢量的运动方程相一致。根据 (29.1) 和 (29.5) 式，态矢量的运动方程由

$$i\hbar[d\Psi(t)/dt] = \mathscr{H}(t)\Psi(t), \quad (32.1)$$

---

① K. Bleuler, Helv. Phys. Acta. 23,567(1950).

② S. N. Gupta, Phys. Rev. 180,1601(1969).

给出，其中

$$\mathscr{H}'(t) = -c^{-1}\int A_\nu(x) j_\nu(x) d\mathbf{x}. \tag{32.2}$$

我们将证明在相互作用绘景中适当的附加条件是

$$\Omega^+(x)\Psi(t) = 0, \tag{32.3}$$

其中

$$\Omega^+(x) \equiv \partial_\mu A_\mu^+(x) + c^{-1}\int [D^+(x-x') j_0(x')]_{t'=t} d\mathbf{x}' \tag{32.4}$$

在不存在相互作用时，当然条件 (32.3) 式与 (26.24) 式等价，我们只需要证明此式满足一致性要求即可。

将 (32.3) 式对 x_0 微分并利用 (32.1) 式，我们得到

$$\{\partial_0\Omega^+(x) - (i/c\hbar)\Omega^+(x)\mathscr{H}'(t)\}\Psi(t) = 0,$$

再利用 (32.3) 式，上式可以表示为

$$\{\partial_0\Omega^+(x) - (i/c\hbar)[\Omega^+(x), \mathscr{H}'(t)]\}\Psi(t) = 0 \tag{32.5}$$

但是，根据 (32.4) 式，有

$$\partial_0\Omega^+(x) = \partial_0\partial_\mu A_\mu^+(x) + c^{-1}\int D^+(\mathbf{x}-\mathbf{x}', 0)\partial_0 j_0(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}'$$

$$= \partial_0\partial_\mu A_\mu^+(x) + c^{-1}\int [D^+(x-x')\partial'_0 j_0(x')]_{t'=t} d\mathbf{x}',$$

利用 $\partial'_0 j_0(x') = -\partial'_i j_i(x')$ 并略去可以转换成面积分而等于零的项之后，上式给出

$$\partial_0\Omega^+(x) = \partial_0\partial_\mu A_\mu^+(x) + c^{-1}\int [\partial'_i D^+(x-x') j_i(x')]_{t'=t} d\mathbf{x}'$$

$$= \partial_0\partial_\mu A_\mu^+(x) - c^{-1}\int [\partial_i D^+(x-x') j_i(x')]_{t'=t} d\mathbf{x}'. \tag{32.6}$$

此外，鉴于 (31.26)，(32.4) 和 (32.2) 式的对易子为

$$[\Omega^+(x), \mathscr{H}'(t)] = [\partial_\mu A_\mu^+(x), \mathscr{H}'(t)]$$

$$= i\hbar\int [\partial_\nu D^+(x-x') j_\nu(x')]_{t'=t} d\mathbf{x}', \tag{32.7}$$

将（32.6）和（32.7）式代入（32.5）式导至

$$\left(\partial_0\partial_\mu A_\mu^+(x)+c^{-1}\int[\partial_0 D^+(x-x')j_0(x')]_{t'=t}dx'\right)\Psi(t)=0. \tag{32.8}$$

将（32.8）对 x_0 微分并利用（32.1）式，通过重复上面步骤，得到

$$\left(\partial_0^2\partial_\mu A_\mu^+(x)+c^{-1}\int[\partial_0^2 D^+(x-x')j_0(x')]_{t'=t}dx'\right)\Psi(t)=0, \tag{32.9}$$

并且，考虑到

$$\partial^2 A_\mu^+(x)=0,\qquad \partial^2 D^+(x-x')=0,$$

能够把（32.9）式表示为

$$\partial_t^2[\Omega^+(x)\Psi(t)]=0. \tag{32.10}$$

从上面结果得出，将（32.3）和（32.8）式重复对时间微分所得的全部关系式等价于将 ∂_t^2 重复作用于（32.3），（32.8）式所得的关系式。因此，如果（32.3）和（32.8）式开始时得到满足，那么它们将在全部时间内都会被满足。

33. 散射算符的化简

为了实际应用，我们将描述一些把散射算符化简为方便形式的有用处理方法①

(a) 时序积

我们考虑任意乘积

$$UV\cdots W, \tag{33.1}$$

其中 $U, V, \cdots W$ 表示玻色算符或费密算符，我们规定任意两个费密算符，彼此反对易地置换，而任意其它两个算符，则彼此对易置换，按这样方式，将（33.1）中因子按时间流逝先后次序从右到左重新排列，这样得到的表示式就是（33.1）式的时序积或

① G. C. Wick, Phys. Rev. 80,268(1950).

T 乘积。以下列形式表示

$$T(UV\cdots W)。 \tag{33.2}$$

显然有

$$T(UV\cdots W)=\delta_P P(UV\cdots W), \tag{33.3}$$

其中因子 $\delta_P=\pm1$ 的来源是在 29 节中所定义的 P 乘积中所有算符置换时都是可对易的，而在 T 乘积中，二费密算符置换时是反对易的。然而 $H(x)$ 中包含都是偶数个费密算符的乘积，因此不论利用 P 乘积或者 T 乘积，我们都可以将 $H(x')$，$H(x'')\cdots H(x^{(n)})$ 等当作互相对易来置换。因此，散射算符 (29.14) 式也可以写成

$$S=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{-i}{c\hbar}\right)^n\int dx'\int dx''\cdots\int dx^{(n)} \times T[H(x')H(x'')\cdots H(x^{(n)})], \tag{33.4}$$

这里 $H(x)$ 是由 (29.15) 式给出的。

(*b*) 收缩

在相互作用绘景中，任意两个场算符 U 和 V 的收缩 $U^{\bullet}V^{\bullet}$ 定义为①

$$U^{\bullet}V^{\bullet}=T(UV)-:UV:, \tag{33.5}$$

其中 $:UV:$ 代表在 16 节中描述过的 U 和 V 的正规积，从 (33.5) 式显然得出

$$U^{\bullet}V^{\bullet}=\pm V^{\bullet}U^{\bullet}, \tag{33.6}$$

其中当 U 和 V 都是费密算符时取负号，而所有其它情况取正号。

由于

$$:A_\mu(x)A_\nu(x'):=A_\mu^-(x)A_\nu(x')+A_\nu(x')A_\mu^+(x),$$

由此得出

---

① 常用连线代替上标的点来表示两个算符的收缩。

$$
\begin{aligned}
&A_\mu(x)^{\cdot}A_\nu(x')^{\cdot}\\
&\quad=A_\mu(x)A_\nu(x')-:A_\mu(x)A_\nu(x'):\\
&\quad=[A_\mu^+(x),A_\nu(x')] \qquad t>t',\\
&\quad=A_\nu(x')A_\mu(x)-:A_\mu(x)A_\nu(x'):\\
&\quad=-[A_\mu^-(x),A_\nu(x')] \qquad t<t',
\end{aligned}
$$

利用对易关系式 (31.17)，可以把上式表示为

$$
A_\mu(x)^{\cdot}A_\nu(x')^{\cdot}=-ic\hbar\delta_{\mu\nu}D_F(x-x'), \tag{33.7}
$$

其中

$$
D_F(x-x')=\theta(t-t')D^+(x-x')-\theta(t'-t)D^-(x-x'). \tag{33.8}
$$

比较 (33.8) 与 (30.21) 式，表明

$$
D_F(x)=\lim_{k\to 0}\Delta_F(x), \tag{33.9}
$$

而且，和 (30.13) 式相对应，$D_F(x)$ 的积分表示由

$$
D_F(x)=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{(2\pi)^4}\int dk e^{ik\cdot x}\frac{1}{k^2-i\varepsilon} \tag{33.10}
$$

给出。类似地有

$$
\begin{aligned}
&\psi_\alpha(x)^{\cdot}\bar{\psi}_\beta(x')^{\cdot}\\
&\quad=\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x')-:\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x'):\\
&\quad=\{\psi_\alpha^+(x),\bar{\psi}_\beta(x')\} \qquad t>t',\\
&\quad=-\bar{\psi}_\beta(x')\psi_\alpha(x)-:\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x'):\\
&\quad=-\{\psi_\alpha^-(x),\bar{\psi}_\beta(x')\} \qquad t<t',
\end{aligned}
$$

利用了 (31.20) 式后，上式导致

$$
\psi_\alpha(x)^{\cdot}\bar{\psi}_\beta(x')^{\cdot}=iS_{F,\alpha\beta}(x-x'), \tag{33.11}
$$

其中

$$
S_F(x-x')=\theta(t-t')S^+(x-x')-\theta(t'-t)S^-(x-x'). \tag{33.12}
$$

借助于（31.16）和（30.12）式，关系式（33.12）式也可以改写为①

$$S_F(x-x')=(\gamma_\mu\partial_\mu-\kappa)[\theta(t-t')\Delta^+(x-x')-\theta(t'-t)$$
$$\Delta^-(x-x')]=(\gamma_\mu\partial_\mu-\kappa)\Delta_F(x-x'), \qquad (33.13)$$

而且，把（30.13）式代入（33.13）式得出积分表示为

$$S_F(x)=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{(2\pi)^4}\int dk e^{ik\cdot x}\frac{ik\cdot\gamma-\kappa}{k^2+\kappa^2-i\varepsilon}. \qquad (33.14)$$

当U和V简单地彼此对易或反对易时，那么

$$T(UV)=UV, \qquad :UV:=UV,$$

所以，在这种情况下收缩（33.5）式为零，因此

$$A_\mu(x)^\cdot\psi_\alpha(x')^\cdot=A_\mu(x)^\cdot\bar{\psi}_\alpha(x')^\cdot=\psi_\alpha(x)^\cdot\psi_\beta(x')^\cdot$$
$$=\bar{\psi}_\alpha(x)^\cdot\bar{\psi}_\beta(x')^\cdot=0. \qquad (33.15)$$

我们也可以在任何正规积中引入一对算符的收缩，而且为了区分在一个乘积中的不同收缩，我们可以采用不同上标像单点、双点等等来表示。例如

$$:U^\cdot VW^{\cdot\cdot}X^{\cdot\cdot}Y^\cdot Z: \qquad (33.16)$$

表示U和Y之间收缩以及W和X之间的收缩。在一个正规积里，两个相邻因子之间收缩是通过假定这样的一个收缩有(33.7)，（33.11）或者（33.15）式给出的值来定义的，因此它或者是一个非算符，或者是零。而非相邻因子之间的收缩是通过下述假定来定义的，即假设在正规积中即使包含有收缩，任意两个费密算符因子，可以彼此按反对易关系置换，而任意其它两算符因子，置换时彼此是可对易的。

（c）约化定理

---

① 虽然∂_μ和$\theta(t-t')$不对易，但是把(33.12)式改写成(33.13)式可以通过在35节描述的严格步骤加以证明。

为了得到 T 乘积的约化定理，我们首先证明，如果标记算符 Z 的时刻比 $U,V,\cdots X,Y$ 中任何一个的时刻都早，那么

$$:UV\cdots XY:Z=:UV\cdots XYZ:+:UV\cdots XY^{\cdot}Z^{\cdot}:$$
$$+:UV\cdots X^{\cdot}YZ^{\cdot}:+\cdots+:U^{\cdot}V\cdots XYZ^{\cdot}:. \tag{33.17}$$

由于分配律对正规积成立，所以在每个因子 $U,V,\cdots\cdots X,Y$ 或者是正频部分或者是负频部分这样的情况下，建立(33.17)式就足够了。而且，根据早先的定义，当我们改变因子 $U,V,\cdots X,Y$ 的顺序，只要在(33.17)式两边取相同的顺序，则(33.17)式仍保持不变。因此，我们可以假定，在算符 $U,V,\cdots\cdots X,Y$ 中所有正频部分都在负频部分的右边，所以我们可以取

$$:UV\cdots XY:=UV\cdots XY. \tag{33.18}$$

此外，如果算符 Z 是以比另一个算符 W 为早的时刻来标记，那么

$$W^{\cdot}Z^{\cdot}=WZ-:WZ:=(WZ^{+}+WZ^{-})-(WZ^{+}+\delta_{p}Z^{-}W)$$
$$=WZ^{-}-\delta_{p}Z^{-}W,$$

其中，如果 W 和 Z 两个都是费密算符，则 $\delta_p=-1$ 否则 $\delta_p=1$。以上关系式也可以写成

$$WZ^{-}=\delta_{p}Z^{-}W+W^{\cdot}Z^{\cdot}, \tag{33.19}$$

而且，考虑（33.18）式，重复应用（33.19）式导致

$$:UV\cdots XY:Z^{-}=\delta_{Q}Z^{-}:UV\cdots XY:+:UV\cdots XY^{\cdot}Z^{\cdot}:$$
$$+:UV\cdots X^{\cdot}YZ^{\cdot}:+\cdots+:U^{\cdot}V\cdots XYZ^{\cdot}:, \tag{33.20}$$

其中，如果 Z 是一个费密算符而且 $:UV\cdots\cdots XY:$ 包含奇数个费密算符则 $\delta_Q=-1$，否则 $\delta_Q=1$。将（33.20）式代入恒等式

$$:UV\cdots XY:Z=:UV\cdots XY:Z^{+}+:UV\cdots XY:Z^{-} \tag{33.21}$$

中，并且注意到

$$:UV\cdots XY:Z^{+}+\delta_{Q}Z^{-}:UV\cdots XY:=:UV\cdots XYZ:, \tag{33.22}$$

我们就得到（33.17）式。

现在我们来证明下列约化定理：一个 T 乘积可以按

$$\begin{aligned}T(UVW\cdots XYZ)=&:UVW\cdots XYZ:+:U^{\cdot}V^{\cdot}W\cdots XYZ:\\&+\cdots+:U^{\cdot}V^{\cdot\cdot}W\cdots X^{\cdot}YZ^{\cdot\cdot}:+\cdots\\&+:U^{\cdot}V^{\cdot\cdot}W^{\cdot\cdot}\cdots X^{\cdots}Y^{\cdot}Z^{\cdots}:+\cdots\end{aligned} \tag{33.23}$$

改写成正规积之和，其中右边取和包括任意若干对算符之间一切可能的各种收缩。

当然，关系式（33.5）是（33.23）式的最简单情况。一般情况可由归纳法得出。让我们假定对 n 个因子（33.23）式已被证明。用另一个比任何其它因子时刻都早的因子 Ω 乘（33.23）式得出

$$T(UV\cdots Z)\Omega=:UV\cdots Z:\Omega+:U^{\cdot}V^{\cdot}\cdots Z:\Omega+\cdots. \tag{33.24}$$

将（33.17）式用到右边每一项，并注意到

$$T(UV\cdots Z)\Omega=T(UV\cdots Z\Omega), \tag{33.25}$$

我们发现（33.23）式对$(n+1)$个因子也成立。对 Ω 标记的时间限制可以通过按已经解释过的规则重新排列因子顺序而去掉。

（d）等时乘积的极限处理

约化定理（33.23）式不是立即可以应用到散射算符（33.4）式的 T 乘积上去的，因为 $H(x)$是由属于同一时刻的场算符的正规积组成的。因此，我们将对场算符等时乘积提出适当处理方法①。我们注意到当算符 $U,V,W\cdots\cdots$ 以不同时刻来标记时，那

① S. S. El-Ghabaty, s. N. Gupta, and W. H. Weihofen, Phys. Rev. D 2, 1-130 (1970)。在这篇论文中也证明了忽略等时算符之间收缩在量子场论中并不是普遍成立的。

么

$$T(:UVW\cdots:)=T(UVW\cdots), \tag{33.26}$$

因为不论我们先按正规积的要求置换这些算符，然后再按 T 乘积的要求再重新对它们置换还是直接按 T 乘积置换它们，所得结果没有任何不同。另一方面，当算符以同一时刻标记时，在没有做一些合理的假定之前，无法定义算符的 T 乘积。我们假定在这种情况下，时间标记可以被看成是差无限小的量，这意味着这样的替换

$$\begin{aligned}T[:U(t)V(t)W(t)\cdots:]&\to \mathrm{sym}T[:U(t)V(t')W(t'')\cdots:]\\&=\mathrm{sym}T[U(t)V(t')W(t'')\cdots],\end{aligned} \tag{33.27}$$

这里 $t,t',t'',\cdots$ 都只差一个无限小量，sym 表示对于这些时间标记进行对称化。

对等时算符采用以上极限处理，散射算符 (33.4) 式中 T 乘积可以按 (33.23) 式简化为正规积，这些正规积包括全部可能的收缩组，但我们当然可以略去那些结果为零的收缩项。除了由 (33.15)式给出的结果为零的收缩外，可以证明 $\psi(x)$ 和 $\bar{\psi}(x)$ 之间收缩，当它们以 (29.15) 式形式出现时，也为零。因为

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(x')\cdot\gamma_\mu\psi(x)\cdot&=-\psi_\beta(x)\cdot\bar{\psi}_\alpha(x')\cdot(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\\&=-iS_{F,\beta\alpha}(x-x')(\gamma_\mu)_{\alpha\beta},\end{aligned}$$

当 $x'\to x$ 时，上式变为

$$\bar{\psi}(x)\cdot\gamma_\mu\psi(x)\cdot=-iTr[S_F(0)\gamma_\mu]$$

或者，将 (33.14) 代入后得

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(x)\cdot\gamma_\mu\psi(x)\cdot&=\frac{-i}{(2\pi)^4}\int dk\frac{Tr[(ik\cdot\gamma-\kappa)\gamma_\mu]}{k^2+\kappa^2-i\varepsilon}\\&=\frac{4}{(2\pi)^4}\int dk\frac{k_\mu}{k^2+\kappa^2-i\varepsilon}=0.\end{aligned} \tag{33.28}$$

34. 散射矩阵元和相互作用图

为了求得散射算符对物理过程的贡献，下列结果是最常用的。

1. 正如在 33 节表明的那样，散射算符可表示为

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n, \tag{34.1}$$

这里

$$S_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{-i}{c\hbar}\right)^n \int dx' \int dx'' \cdots \int dx^{(n)}\, T[H(x') \times H(x'') \cdots H(x^{(n)})] \tag{34.2}$$

而

$$H(x) = -ie{:}A_\mu(x)\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x){:}. \tag{34.3}$$

将 (34.3) 式代入 (34.2) 式后，T 乘积可以简化为包含所有可能的收缩组的正规积。不为零的收缩由

$$A_\mu(x)\cdot A_\nu(x')\cdot = -ic\hbar\delta_{\mu\nu} D_F(x-x'), \tag{34.4}$$

$$\psi_\alpha(x)\cdot\bar{\psi}_\beta(x')\cdot = iS_{F,\alpha\beta}(x-x'). \tag{34.5}$$

给出，其中

$$D_F(x) = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{(2\pi)^4}\int dk\, e^{ik\cdot x}\frac{1}{k^2 - i\varepsilon}, \tag{34.6}$$

$$S_F(x) = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{(2\pi)^4}\int dk\, e^{ik\cdot x}\frac{ik\cdot\gamma - \kappa}{k^2 + \kappa^2 - i\varepsilon}. \tag{34.7}$$

2. 在正规积中不收缩的算符可以当作自由算符来处理，而且按照 20 节和 25 节可以表示为

$$A_\mu(x) = V^{-1/2}\sum_{\mathbf{k}} (c\hbar/2k_0)^{1/2}[a_\mu(\mathbf{k})e^{ik\cdot x} + a_\mu^*(\mathbf{k})e^{-ik\cdot x}], \tag{34.8}$$

以及

$$\psi(x) = V^{-1/2}\sum_{\mathbf{k}} [a(\mathbf{k})u(\mathbf{k})e^{ik\cdot x} + b^*(\mathbf{k})v(\mathbf{k})e^{-ik\cdot x}],$$

$$\bar{\psi}(x) = V^{-1/2}\sum_{\mathbf{k}}[a^*(\mathbf{k})\bar{u}(\mathbf{k})e^{-ik\cdot x} + b(\mathbf{k})\bar{v}(\mathbf{k})e^{ik\cdot x}], \tag{34.9}$$

对于光子场，$k^2 = 0$ 而对于电子场，$k^2 + \kappa^2 = 0$，而且为了方便起见，在（34.9）式中自旋指标已被略去了。在这些付里叶展开式中，$a_\mu(\mathbf{k})$，$a(\mathbf{k})$，和 $b(\mathbf{k})$ 分别是光子，电子和正电子的湮灭算符，而 $a_\mu^*(\mathbf{k})$，$a^*(\mathbf{k})$和 $\mathbf{b}^*(\mathbf{k})$是相应的产生算符。再有，由于在没有相互作用情况下，附加条件含有不存在纵光子和时间光子的意思，因此对初态或末态令

$$\mathbf{a}(\mathbf{k}) = \sum_e \mathbf{e}a_e(\mathbf{k}), \quad \mathbf{a}^*(\mathbf{k}) = \sum_e \mathbf{e}a_e^*(\mathbf{k}), \quad a_0(\mathbf{k}) = a_3^*(\mathbf{k}) = 0, \tag{34.10}$$

则（34.8）式可以简化。上式中 $a_e(\mathbf{k})$和 $a_e^*(\mathbf{k})$ 分别是单位极化矢量为 $\mathbf{e}$ 的横光子湮灭和产生算符，而取和遍及到垂直于 $\mathbf{k}$ 的两个极化方向。

习惯上，将（34.8）和（34.9）式中出现的 k 当作传播四维矢量。应该注意到 k 和四维动量的关系是 $P = \hbar k$，而一个粒子的 k 的各分量和它的动量 $\mathbf{P}$ 及能量 E 之间的关系是

$$\mathbf{P} = \hbar\mathbf{k}, \quad E = c\hbar k_0. \tag{34.11}$$

利用以上结果，例如，让我们实行对 S_2 的简化。可以把 S_2 写为

$$S_2 = (e^2/2c^2\hbar^2)\int dx \int dx' T[A_\mu(x)\bar{\psi}(x)$$

$$\gamma_\mu\psi(x)A_\nu(x')\bar{\psi}(x')\gamma_\nu\psi(x')]. \tag{34.12}$$

在（34.12）式中将 T 乘积简化为不为零的全部各种可能的收缩的组合，这就导致

$$S_2 = S_a + S_b + S_c + S_d + S_e + S_f \tag{34.13}$$

其中

$$S_a=(e^2/2c^2\hbar^2)\int dx\int dx':[A_\mu(x)\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A_\nu(x')\bar{\psi}(x')\times x\gamma_\nu\psi(x')]:,$$

$$S_b=(e^2/2c^2\hbar^2)\int dx\int dx':[A_\mu(x)\cdot\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A_\nu(x')\cdot\bar{\psi}(x')\times\gamma_\nu\psi(x')]:,$$

$$S_c=(e^2/2c^2\hbar^2)\int dx\int dx':[A_\mu(x)\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)\cdot A_\nu(x')\bar{\psi}(x')\cdot\times\gamma_\nu\psi(x')+A_\mu(x)\bar{\psi}(x)\cdot\gamma_\mu\psi(x)A_\nu(x')\bar{\psi}(x')\gamma_\nu\psi(x')\cdot]:$$

$$=(e^2/c^2h^2)\int dx\int dx':[A_\mu(x)\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)\cdot A_\nu(x')\bar{\psi}(x')\cdot\times\gamma_\nu\psi(x')]:,$$

$$S_d=(e^2/2c^2\hbar^2)\int dx\int dx':[A_\mu(x)\bar{\psi}(x)\cdot\gamma_\mu\psi(x)\cdot\cdot A_\nu(x')\times\bar{\psi}(x')\cdot\cdot\gamma_\nu\psi(x')\cdot]:,$$

$$S_e=(e^2/2c^2\hbar^2)\int dx\int dx':[A_\mu(x)\cdot\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)\cdot\cdot A_\nu(x')\cdot\times\bar{\psi}(x')\cdot\cdot\gamma_\nu\psi(x')+A_\mu(x)\cdot\bar{\psi}(x)\cdot\cdot\gamma_\mu\psi(x)A_\nu(x')\cdot\bar{\psi}(x')\times\gamma_\nu\psi(x')\cdot\cdot]:$$

$$=(e^2/c^2\hbar^2)\int dx\int dx':[A_\mu(x)\cdot\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)\cdot\cdot A_\nu(x')\cdot\times\bar{\psi}(x')\cdot\cdot\gamma_\nu\psi(x')]:,$$

$$S_f=(e^2/2c^2\hbar^2)\int dx\int dx':[A_\mu(x)\cdot\bar{\psi}(x)\cdot\cdot\gamma_\mu\psi(x)\cdot\cdot\cdot A_\nu(x')\cdot\times\bar{\psi}(x')\cdot\cdot\cdot\gamma_\nu\psi(x')\cdot\cdot]:, \qquad (34.14)$$

这里我们已经合并了那些通过交换 x 和 x' 以及置换某些因子可以证明是等价的各项。

借助于相互作用图，可以使以上各收缩组具体化①。包含三

① R.P.Feynman, Phys.Rev.76, 769(1949).

个场算符乘积的光子-电子耦合可以如图 34.1 用带有三条线的一个顶角来代表，其中虚线对应于 A_μ，方向从顶角离开的实线对应于$\bar{\Psi}$，而方向指向顶角的实线对应于 Ψ。然后，我们把不同顶角的线连接起来表示收缩。按照不为零收缩的表示式 (34.4) 和 (34.5)，一个顶角的光子线可以和另一个顶角的光子线相连，而从一个顶角向外指向的电子线可以和方向指向另一个顶角的电子线相连。因此，S_a, S_b, S_c, S_d, S_e，和 S_f 可以分别地用图 34.2 中 (a)，(b)，(c)，(d)，(e)和(f) 代表。类似的相互作用图可以用来表示散射算符在任何其它阶的收缩。

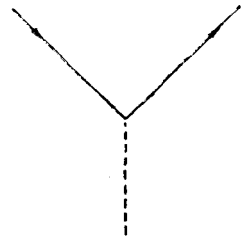


图 34.1　光子-电子耦合

为了说明对于一个具体的物理过程如何能得到散射算符的贡献，让我们考虑光子-电子散射。让 k 和 p 分别表示在初态中光子和电子的传播四维矢量，而 k' 和 p' 表示末态中光子和电子的传播四维矢量。在这种情况下，散射算符必须含有初态光子和电子的湮灭算符，和末态光子和电子的产生算符。这样的一个贡献包含在 S_c 中，利用 (34.5) 式，可以将 S_c 表示为

$$S_c = (ie^2/c^2\hbar^2)\int dx \int dx' :[A_\mu(x)A_\nu(x')\bar{\psi}(x)\gamma_\mu S_F(x-x')\gamma_\nu\psi(x')]:, \tag{34.15}$$

而将 (34.8)，(34.9) 和 (34.7) 各式

$$A_\mu(x)A_\nu(x') = V^{-1/2}(c\hbar/2k_0')^{1/2}V^{-1/2}(c\hbar/2k_0)^{1/2} \times [a_\mu^*(\mathbf{k}')e^{-ik'\cdot x}a_\nu(\mathbf{k})e^{ik\cdot x'} + a_\mu(\mathbf{k}) \times e^{ik\cdot x}a_\nu^*(\mathbf{k}')e^{-ik'\cdot x'}],$$

$$\bar{\psi}(x) = V^{-1/2}a^*(\mathbf{p}')\bar{u}(\mathbf{p}')e^{-ip'\cdot x},$$

$$\psi(x') = V^{-1/2}a(\mathbf{p})u(\mathbf{p})e^{ip\cdot x'},$$

$$S_F(x-x')=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{(2\pi)^4}\int dq e^{iq\cdot(x-x')}\frac{iq\cdot\gamma-\kappa}{q^2+\kappa^2-i\varepsilon}$$

代入后，可以把需要的项留下来。利用下式

$$\int dx e^{ik\cdot x}=(2\pi)^4\delta(k), \qquad (34.16)$$

对 x 和 x' 进行积分，然后通过对 q 积分，去掉 δ 函数中的一个，我们得到

$$S_c=V^{-2}(2\pi)^4\delta(p+k-p'-k')a_\mu^*(\mathbf{k}')a_\nu(\mathbf{k})a^*(\mathbf{p}')a(\mathbf{p})$$
$$\times\frac{ie^2}{2c\hbar}\frac{1}{(k_0k_0')^{1/2}}\bar{u}(\mathbf{p}')\left[\gamma_\mu\frac{i(p+k)\cdot\gamma-\kappa}{(p+k)^2+\kappa^2}\gamma_\nu\right.$$
$$\left.\times\gamma_\nu\frac{i(p-k')\cdot\gamma-\kappa}{(p-k')^2+\kappa^2}\gamma_\mu\right]u(\mathbf{p}) \qquad (34.17)$$

再利用 (34.10) 式，得

$$S_c=V^{-2}(2\pi)^4\delta(p+k-p'-k')a_{e'}^*(\mathbf{k}')a_e(\mathbf{k})a^*(\mathbf{p}')a(\mathbf{p})$$
$$\times\frac{ie^2}{2c\hbar}\frac{1}{(k_0k_0')^{1/2}}\times\bar{u}(\mathbf{p}')\left[(\mathbf{e}'\cdot\gamma)\frac{i(p+k)\cdot\gamma-\kappa}{(p+k)^2+\kappa^2}\right.$$
$$\left.\times(\mathbf{e}\cdot\gamma)+(\mathbf{e}\cdot\gamma)\frac{i(p-k')\cdot\gamma-\kappa}{(p-k')^2+\kappa^2}(\mathbf{e}'\cdot\gamma)\right]u(\mathbf{p}), \qquad (34.18)$$

这里 $\mathbf{e}$ 和 $\mathbf{e}'$ 分别表示光子在初态和末态中的极化矢量。而且，利用真空态 $\overline{\Psi}_0$，可以把所考虑过程的初态和末态表示为

$$\Psi_i=a_e^*(\mathbf{k})a^*(\mathbf{p})\Psi_0,\quad \Psi_f=a_{e'}^*(\mathbf{k}')a^*(\mathbf{p}')\Psi_0, \qquad (34.19)$$

因此

$$\Psi_f^*a_{e'}^*(\mathbf{k}')a_e(\mathbf{k})a^*(\mathbf{p}')a(\mathbf{p})\Psi_i=\Psi_0^*\Psi_0=1, \qquad (34.20)$$

所以，只要简单地去掉 (34.18) 式中的产生和湮灭算符就可以得到散射矩阵元：

$$S_{fi}=\Psi_f^*S_c\Psi_i \qquad (34.21)$$

表示光子-电子散射贡献的 (34.18) 式由两项组成，因为在 (34.15) 式中 $A_\mu(x)$ 和 $A_\nu(x')$ 二者既含有产生算符，又含有湮灭算符。借助于在图 34.3 中所示的二图可以使这种贡献具体化。

图 34.3 是把图 34.2 (*c*)中代表初态和末态的粒子线用传播四维矢量来标记而得到的。用向下的线代表初态粒子，用向上的线代表末态粒子也是有益的，但是常常有人不用这种习惯规定。

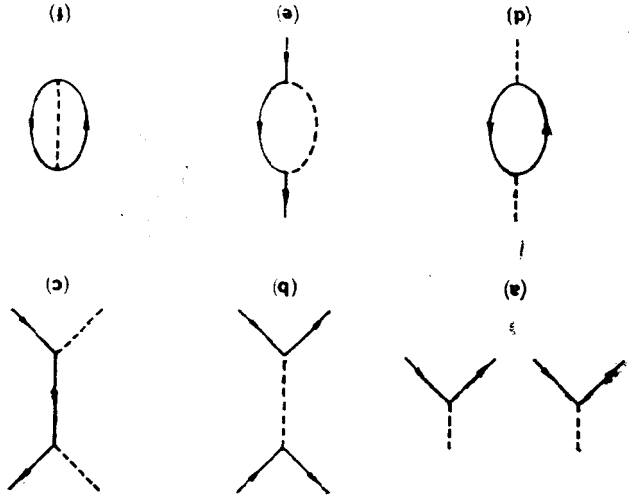


图 34.2　量子电动子学里的二阶过程

35. 导数耦合的散射算符

光子-电子耦合不包含场算符的空间时间导数，但是在量子场论中常常使用导数耦合。为了举例说明在导数耦合这一比较复杂的情况下对散射算符的处理，我们考虑一个自旋$\frac{1}{2}$场与一个中性标量场通过导数耦合的相互作用①。这两个场的拉格朗日形式已经在 18 节和

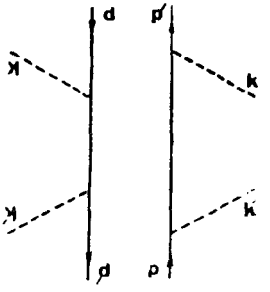


图 34.3　光子-电子散射

① P.T.Matthews, Phys.Rev.76, 684(1949).

23节中描述过了，而相互作用系统的拉格朗日密度采取这样形式

$$L = -c\hbar:(\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi + \kappa\bar{\psi}\psi): - \frac{1}{2}:[(\partial_\mu U)^2 + \mu^2 U^2]:$$

$$+ if:(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\partial_\mu U):, \qquad (35.1)$$

它导致这样的能量密度

$$S_{00} = c\hbar:(\bar{\psi}\gamma_i\partial_i\psi + \kappa\bar{\psi}\psi): + \frac{1}{2}:[(\partial_i U)^2 + (\partial_0 U)^2$$

$$+ \mu^2 U^2]: - if:(\bar{\psi}\gamma_i\psi\partial_i U):, \qquad (35.2)$$

而 Ψ_α 和 U 的正则共轭是

$$\pi'_\alpha = i\hbar\psi^*_\alpha, \qquad \pi = c^{-1}(\partial_0 U + f:\bar{\psi}\gamma_4\psi:). \qquad (35.3)$$

能量密度（35.2）式可以按正则形式写成

$$H_{tot} = H_{el} + H_{sc} + H_{int}, \qquad (35.4)$$

其中

$$H_{el} = -ic:\pi'\gamma_4(\gamma_i\partial_i\psi + \kappa\psi):, \qquad (35.5)$$

$$H_{sc} = \frac{1}{2}:[c^2\pi^2 + (\partial_i U)^2 + \mu^2 U^2]:, \qquad (35.6)$$

$$H_{int} = -(f/\hbar):(\pi'\gamma_4\gamma_i\psi\partial_i U - ic\pi'\psi\pi):$$

$$-\frac{1}{2}(f^2/\hbar^2):(\pi'\psi)(\pi'\psi):. \qquad (35.7)$$

现在，我们将从海森伯绘景过渡到相互作用绘景。在相互作用绘景中，相互作用能量密度，可简单地用H来表示，它可以通过将正则变量看成自由场算符而从（35.7）式得到。因此将

$$\pi'_\alpha = i\hbar\psi^*_\alpha, \qquad \pi = c^{-1}\partial_0 U,$$

代入（35.7）式，得出

$$H = -if:\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\partial_\mu U: + \frac{1}{2}f^2:(\bar{\psi}\gamma_4\psi)(\bar{\psi}\gamma_4\psi):. \qquad (35.8)$$

当把（35.8）式代入（34.2）式时，为了简化散射算符，必需求收缩 $\partial_\mu U(x)\cdot\partial'_\nu U(x')$ 的值。为此目的，我们需用中性标

量场的协变对易关系

$$[U(x),U(x')]=-ic\hbar\Delta(x-x'), \tag{35.9}$$

其中 $\Delta(x-x')$是在 μ 代替 κ 的情况下由 (30.12) 式给出的。为求收缩值，遵照 33 节步骤，我们找到

$$\begin{aligned}U(x)^{\cdot}U(x')^{\cdot}&=-ic\hbar\{\theta(t-t')\Delta^{+}(x-x')-\theta(t'-t)\Delta^{-}(x-x')\}\\&=-ic\hbar\Delta_{F}(x-x'),\end{aligned} \tag{35.10}$$

而

$$\begin{aligned}\partial_{\mu}U(x)^{\cdot}\partial'_{\nu}U(x')^{\cdot}=&-ic\hbar\{\theta(t-t')\partial_{\mu}\partial'_{\nu}\Delta^{+}(x-x')\\&-\theta(t'-t)\partial_{\mu}\partial'_{\nu}\Delta^{-}(x-x')\}\end{aligned}$$

或者，由于 $\theta(t-t')$ 与 $\partial_{\mu}\partial'_{\nu}$ 不对易

$$\begin{aligned}\partial_{\mu}U(x)^{\cdot}\partial'_{\nu}U(x')^{\cdot}=&-ic\hbar\partial_{\mu}\partial'_{\nu}\Delta_{F}(x-x')+ic\hbar\{[\partial_{\mu}\partial'_{\nu},\\&\theta(t-t')]\Delta^{+}(x-x')-[\partial_{\mu}\partial'_{\nu},\theta(t-t')]\\&\Delta^{-}(x-x')\}.\end{aligned} \tag{35.11}$$

而且

$$\theta(t-t')=\frac{1+\varepsilon(t-t')}{2},\quad \theta(t'-t)=\frac{1-\varepsilon(t-t')}{2}, \tag{35.12}$$

其中 $\varepsilon(t-t')$ 是由 (9.9) 式定义的，因此 (35.11) 式可表示为

$$\begin{aligned}\partial_{\mu}U(x)^{\cdot}\partial'_{\nu}U(x')^{\cdot}=&-ic\hbar\partial_{\mu}\partial'_{\nu}\Delta_{F}(x-x')\\&+\frac{1}{2}ic\hbar[\partial_{\mu}\partial'_{\nu},\varepsilon(t-t')]\Delta(x-x').\end{aligned} \tag{35.13}$$

(35.13) 式右边第二项可以简化，注意到按照 (9.10) 式有

$$\partial_{\mu}\varepsilon(t-t')=-2i\delta_{\mu 4}\delta(x_0-x'_0), \tag{35.14}$$

按照 (30.2) 和 (30.3) 式还有

$$\begin{aligned}\delta(x_0-x'_0)\Delta(x-x')&=0,\\\delta(x_0-x'_0)\partial_{\mu}\Delta(x-x')&=-i\delta_{\mu 4}\delta(x-x'),\end{aligned} \tag{35.15}$$

所以，利用 (35.14) 和 (35.15) 式得

$$[\partial_\mu, \varepsilon(t-t')]\Delta(x-x') = 0,$$
$$[\partial_\mu \partial'_\nu, \varepsilon(t-t')]\Delta(x-x') = 2\delta_{\mu 4}\delta_{\nu 4}\delta(x-x'), \quad (35.16)$$

而（35.13）式成为

$$\partial_\mu U(x)\cdot\partial'_\nu U(x')\cdot = -ic\hbar\partial_\mu\partial'_\nu\Delta_F(x-x') + ic\hbar\delta_{\mu 4}\delta_{\nu 4}\delta(x-x'). \quad (35.17)$$

让我们考虑（35.8）式中一阶相互作用项对散射算符 S_2 的贡献，并且对一对标量场算符实行收缩，这得出

$$S_2 = (f^2/2c^2\hbar^2)\int dx\int dx'\,\partial_\mu U(x)\cdot\partial'_\nu U(x')\cdot \times :[\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)\bar{\psi}(x')\gamma_\nu\psi(x')]: \quad (35.18)$$

如果我们把收缩（35.17）式的非协变部分代入（35.18）式，我们得到

$$S'_2 = (if^2/2c\hbar)\int dx :[\bar{\psi}(x)\gamma_4\psi(x)\bar{\psi}(x)\gamma_4\psi(x)]:, \quad (35.19)$$

它恰好和（35.8）式中二阶相互作用项对散射算符 S_1 的贡献抵消。的确可以证明，类似的抵消发生在散射算符的所有贡献中。因此，为了实用目的，代替（35.8）和（35.17）式，我们可以使用有效相互作用能量密度

$$H_{eff} = -if:\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\partial_\mu U:, \quad (35.20)$$

与有效收缩

$$[\partial_\mu U(x)\cdot\partial'_\nu U(x')\cdot]_{eff} = -ic\hbar\partial_\mu\partial'_\nu\Delta_F(x-x'). \quad (35.21)$$

当以上论述应用到任何导数耦合时，通常可发现，有效相互作用能量密度和有效收缩二者都取得了协变形式。

第五章　散射截面与寿命

散射算符能使我们推导出散射截面与寿命。我们将计算几个实验上感兴趣的散射过程的截面，这也可以作为例子来说明基本的计算技巧。然后我们再考虑一个不稳定粒子的衰变，并通过研究两种不同的衰变方式找出它的寿命。

36. 截面的推导

让我们考虑一个封闭在大立方体积V中的两个粒子之间的碰撞。并且令两个粒子初态的传播四维矢量是 p 和 q，而末态是p'和q'。正如在 34 节中曾阐明的那样，对于所研究的过程散射算符的贡献可以用这样形式来表示：

$$S_{fi}=V^{-2}(2\pi)^4\delta(p+q-p'-q')F(p',q';p,q) \quad (36.1)$$

其中含有因子V^{-2}是因为对应于初态和末态粒子的四个场算符中每一个的付里叶分解中都出现一个因子 $V^{-\frac{1}{2}}$。由于 S_{fi} 是所研究的末态的几率幅，所以系统跃迁到任何一个末态的总几率可以从(36.1)式将 $|S_{fi}|^2$对所有$\mathbf{p}'$ 和$\mathbf{q}'$值取和而得到，所以总的跃迁几率是

$$W=V^{-4}(2\pi)^8\sum_{\mathbf{p}'}\sum_{\mathbf{q}'}|F(p',q';p,q)|^2[\delta(p+q-p'-q')]^2. \quad (36.2)$$

而

$$[\delta(p\times q-p'-q')]^2=\delta(p+q-p'-q')\times(2\pi)^{-4}\int dx e^{i(p+q-p'-q')\cdot x}$$

$$= \delta(p+q-p'-q')(2\pi)^{-4}\int dx$$

$$= \delta(p+q-p'-q')(2\pi)^{-4}cVT, \tag{36.3}$$

其中 T 表示一个很大时间间隔，碰撞就是在这一时间间隔中发生的。因此（36.2）式变为

$$W = \frac{(2\pi)^4 cT}{V^3}\sum_{\mathbf{p}'}\sum_{\mathbf{q}'}|F(p',q';p,q)|^2\delta(p+q-p'-q'),$$

而每单位时间的跃迁几率是

$$w = \frac{(2\pi)^4 c}{V^3}\sum_{\mathbf{p}'}\sum_{\mathbf{q}'}|F(p',q';p,q)|^2\delta(p+q-p'-q')$$

或者根据（10.11）式写成

$$w = \frac{c}{(2\pi)^2 V}\int d\mathbf{p}'\int d\mathbf{q}'\,|F(p',q';p,q)|^2\delta$$
$$(p+q-p'-q'). \tag{36.4}$$

在（36.4）式中对 $\mathbf{q}'$ 积分得

$$w = \frac{c}{(2\pi)^2 V}\int d\mathbf{p}'\,|F(p',q';p,q)|^2\delta(p_0+q_0-p_0'-q_0'), \tag{36.5}$$

上式要受到条件

$$\mathbf{p}'+\mathbf{q}' = \mathbf{p}+\mathbf{q}. \tag{36.6}$$

的限制，进一步通过令

$$d\mathbf{p}' = |\mathbf{p}'|^2 d|\mathbf{p}'|\,d\Omega = |\mathbf{p}'|\,p_0' dp_0' d\Omega, \tag{36.7}$$

其中 $d\Omega$ 是沿 $\vec{\mathbf{p}'}$ 方向的立体角元，可以把（36.5）式表示为

$$w = \frac{c}{(2\pi)^2 V}\int d\Omega\int dp_0'\,|\mathbf{p}'|\,|p_0'|\,F(p',q';p,q)|^2$$
$$\times\delta(p_0+q_0-p_0'-q_0'). \tag{36.8}$$

为了在（36.8）式中对 p_0' 进行积分，应注意到出现在 δ 函数中

的 p'_0 与 q'_0 是按照（36.6）式互相依存的，因此必须使

$$dp'_0 = \frac{1}{\partial(p'_0+q'_0)/\partial p'_0} d(p'_0+q'_0), \tag{36.9}$$

其中偏导数 $\partial(p'_0+q'_0)/\partial p'_0$ 应当利用条件（36.6）式并把 $\mathbf{p}'$ 的角变量看成常数来求得。因此，对 $p'_0+q'_0$ 积分以后，我们得到跃迁率

$$w = \frac{c}{(2\pi)^2 V}\int d\Omega \frac{|\mathbf{p}'|\, p'_0}{\partial(p'_0+q'_0)/\partial p'_0} |F(p',q';p,q)|^2, \tag{36.10}$$

此式要受到附加条件

$$p'_0+q'_0 = p_0+q_0 \tag{36.11}$$

的限制。关系式（36.6）与（36.11）表示在碰撞过程中动量和能量守恒。

现在我们假定，初态两个粒子是沿同一直线运动的，并且我们称初态粒子中的一个为入射粒子，称另一个是散射体。然后定义散射截面 σ 为入射粒子在每单位时间内被散射的几率与对准散射体的相对入射流密度之比。因此得到

$$\sigma = \frac{w}{V^{-1}\,|\mathbf{p}/p_0 - \mathbf{q}/q_0|\, c}, \tag{36.12}$$

式中 V^{-1} 是入射粒子的几率密度，而 $|\mathbf{p}/p_0 - \mathbf{q}/q_0|$ 是两个粒的相对速度。把（36.10）式代入到（36.12）中得出截面为

$$\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2\,|\mathbf{p}/p_0 - \mathbf{q}/q_0|}\int d\Omega \frac{|\mathbf{p}'|\, p'_0}{\partial(p'_0+q'_0)/\partial p'_0} \times |F(p',q';p,q)|^2. \tag{36.13}$$

我们还可以写成

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int d\sigma, \tag{36.14}$$

式中 $d\sigma$ 称为微分截面。

截面σ的定义是两个量之比，其中一个的量纲是每单位时间几率，而另一个的量纲是每单位时间内通过入射粒子运动方向垂直的单位面积的几率。显然，截面具有面积的量纲。而且截面在沿入射粒子运动方向的洛伦兹变换下是不变的，因为一个垂直于运动方向的单位面积不受这样的洛伦兹变换的影响。最后，按照在所有正常的洛伦兹变换下，截面是不变的这一要求，能够把截面的定义推广到初态两个粒子不是沿同一直线运动这种碰撞上去。

37. 对自旋态和极化态取和

当我们对碰撞过程中粒子的自旋态不感兴趣时，应该将截面(36.13)式对初态粒子的自旋态取平均并对末态粒子的自旋态取和。我们将描述对电子和正电子的自旋态及光子的极化状态如何实行这一步骤。

在24节中曾证明，构成厄密算符 $\gamma_4(ip_i\gamma_i-\kappa)$ 的正交归一的本征矢量集 $u_r(p)$ 及 $V_r(p)$ 满足关系式(24.15)式。我们可以令

$$\sum_{r=1,2}[u_r(p)u_r^*(p)+v_r(-p)v_r^*(-p)]=1, \qquad (37.1)$$

将上式两边分别作用到本征矢量 $u_s(p)$ 或 $v_s(-p)$ 上，并利用(24.15)式，即可证明上式。根据(24.1)式，又有

$$\frac{(-ip\cdot\gamma+\kappa)\gamma_4}{2p_0}u_r(p)=u_r(p),$$

$$\frac{(-ip\cdot\gamma+\kappa)\gamma_4}{2p_0}v_r(-p)=0, \qquad (37.2)$$

因此以 $[(-ip\cdot\gamma+\kappa)\gamma_4]/2p_0$ 乘(37.1)式得出

$$\sum_{r=1,2}u_r(p)u_r^*(p)=\frac{(-ip\cdot\gamma+\kappa)\gamma_4}{2p_0},$$

亦即

$$\sum_{r=1,2} u_r(p)\bar{u}_r(p) = -\frac{ip\cdot\gamma-\kappa}{2p_0}, \tag{37.3}$$

上式可以写为

$$\sum_{r=1,2} u_{r,\alpha}(p)\bar{u}_{r,\beta}(p) = -\left(\frac{ip\cdot\gamma-\kappa}{2p_0}\right)_{\alpha\beta}, \tag{37.4}$$

用类似方法得到

$$\sum_{r=1,2} v_r(p)\bar{u}_r(p) = -\frac{ip\cdot\gamma+\kappa}{2p_0}, \tag{37.5}$$

上式也可以用类似（37.4）式的形式表示。

关系式（37.3）、（37.5）使我们能够对一个电子或正电子的自旋态取和。例如，让我们考虑

$$\frac{1}{2}\sum_r\sum_s |\bar{u}_s(p')Ou_r(p)|^2 = \frac{1}{2}\sum_r\sum_s [\bar{u}_s(p')Ou_r(p)]\times$$

$$[\bar{u}_r(p)\overline{O}u_s(p')], \tag{37.6}$$

式中

$$\overline{O} = \gamma_4 O^* \gamma_4. \tag{37.7}$$

借助于（37.3）式对（37.6）式右边取和，我们得到

$$\frac{1}{2}\sum_r\sum_s |\bar{u}_s(p')Ou_r(p)|^2 = \frac{1}{8p_0p_0'}\mathrm{Tr}[O(ip\cdot\gamma$$

$$-\kappa)\overline{O}(ip'\cdot\gamma-\kappa)]. \tag{37.8}$$

正如在24节中所提到的那样，略掉自旋指标 r 和 s 是方便的，结果（37.8）式可以写为

$$\overline{\sum_{spin}} |\bar{u}(p')Ou(p)|^2 = \frac{1}{8p_0p_0'}\mathrm{Tr}[O(ip\cdot\gamma-\kappa)\,\overline{O}(ip'\cdot\gamma$$

$$-\kappa)], \tag{37.9}$$

这里 $\overline{\sum_{spin}}$ 表示对初自旋态取平均以及对末自旋态取和。

借助于关系式

$$\sum_{e}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{e}\cdot\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}-\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{k}\cdot\mathbf{b})}{\mathbf{k}^2}, \tag{37.10}$$

可以实行对一个光子极化态的取和，其中 e 是传播四维矢量为 k_μ 的光子的单位极化矢量，而 a 和 b 是任意矢量。然而，除开两个横光子也把纵光子和时间光子包括进来，按协变方式进行取和常常是更方便的，因为纵光子和时间光子的贡献可以互相抵消。现在，我们将按照 20 节中的论述，更充分的阐明协变取和的步骤。

让我们考虑在一个任意过程中，传播四维矢量为 k_μ 的一个光子的产生，并且将这个过程散射算符的贡献写为

$$S=M_\mu a_\mu^*(\mathbf{k}), \tag{37.11}$$

为了方便起见，其中我们已把除我们所考虑的那个光子以外的其他产生算符与湮灭算符全部略去。我们把 x 轴造在 k 的方向上，从而 $a_1^*(\mathbf{k})$ 和 $a_2^*(\mathbf{k})$ 是横光子的产生算符，而 $a_3^*(\mathbf{k})$ 和 $a_0^*(\mathbf{k})$ 则分别是纵光子及时间光子的产生算符。这个过程的末态 Ψ_f 与初态 Ψ_i 的联系为

$$\Psi_f=M_\mu a_\mu^*(\mathbf{k})\Psi_i, \tag{37.12}$$

由于在上述的末态里，附加条件只允许纵光子和时间光子以下列组合

$$[a_3^*(\mathbf{k})-a_0^*(\mathbf{k})]\Psi_i$$

出现。由此得出

$$M_3=M_0. \tag{37.13}$$

从而有

$$M_1^*M_1+M_2^*M_2=M_\mu^*M_\mu, \tag{37.14}$$

上式意味着对两类横光子取和等价于对所有四类光子取和。

类似地让我们考虑，任意一个过程中传播四维矢量为 k_μ 的光子的湮灭，并且将这个过程的散射算符的贡献写为

$$S'=M'_\mu a_\mu(\mathbf{k}), \tag{37.15}$$

仍选取 x_3 轴沿 k 的方向。附加条件允许初态不仅包括横光子，而且也包括以下列组合

$$\Psi'_1 = [a_3^*(\mathbf{k}) - a_0^*(\mathbf{k})]\Psi(0,0,0,0) \qquad (37.16)$$

的纵光子和时间光子。Ψ'_1 有等于零的模方。鉴于散射算符的么正性，我们发现

$$\Psi'_f = M'_\mu a_\mu(\mathbf{k})\Psi'_i = (M'_3 - M'_0)\Psi(0,0,0,0)$$

也有一个为零的模方，这表明

$$M'_3 = M'_0, \qquad (37.17)$$

因此得

$$M'_1{}^* M'_1 + M'_2{}^* M'_2 = M'_\mu{}^* M'_\mu. \qquad (37.18)$$

今后，我们将利用下列记号：

$$\overline{\sum} = \overline{\sum_{\text{spin}}} \overline{\sum_{\text{pol}}}, \qquad (37.19)$$

其中 $\overline{\sum_{\text{spin}}}$ 表示在任何过程中对电子及正电子初自旋态取平均，对末自旋态取和，而 $\overline{\sum_{\text{pol}}}$ 表示对光子的初极化态取平均及对末极化态取和。对自旋态和极化态作了上述处理后，截面 (36.13) 式表示为这样形式

$$\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2 |\mathbf{p}/p_0 - \mathbf{q}/q_0|} \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}'|p'_0}{\partial(p'_0 + q'_0)/\partial p'_0} \times$$
$$\times \overline{\sum} |F(p', q'; p, q)|^2, \qquad (37.20)$$

其中 $\alpha\Omega$ 是沿 p 方向的立体角元。

38. 光子-电子散射

让我们考虑光子被一个电子散射的情况，并且令光子和电子初态传播四维矢量分别为 k 和 p，末态的传播四维矢量为 k 和

p'，象在 34 节曾阐明的那样，这个过程最低阶的散射矩阵元由

$$S_{fi}=V^{-2}(2\pi)^4\delta(p+k-p'-k')\mathrm{F} \qquad (38.1)$$

给出，其中

$$F=\frac{ie^2}{2ch}\frac{1}{(k_0k_0')^{1/2}}$$
$$\times\bar{u}(\mathbf{p}')\Big[(\mathbf{e}'\cdot\gamma)\frac{i(p-k)\cdot\gamma-\kappa}{(p+k)^2+\kappa^2}(\mathbf{e}\cdot\gamma)+(\mathbf{e}\cdot\gamma)\times$$
$$\times\frac{i(p-k')\cdot\gamma-\kappa}{(p-k')^2+\kappa^2}(\mathbf{e}'\cdot\gamma)\Big]u(\mathbf{p}), \qquad (38.2)$$

式中

$$\bar{u}(\mathbf{p}')(ip'\cdot\gamma+\kappa)=0, \qquad (ip\cdot\gamma+\kappa)u(\mathbf{p})=0, \qquad (38.3)$$

$$p^2=p'^2=-\kappa^2, \qquad k^2=k'^2=0, \qquad (38.4)$$

而相互作用图是图 34.3。

现在我们假定初态电子是静止的，因而

$$\mathbf{p}=0,\ p_0=\kappa,\ \text{或}\ p_\mu=i\kappa\delta_{\mu4}. \qquad (38.5)$$

为了从散射矩阵元算出截面，象在 36 节中所描述的那样，必须利用动量守恒并把 k 的角变数看作常数来计算 $\partial(k_0'+p_0')/\partial k_0'$。动量守恒关系式

$$\mathbf{p}'+\mathbf{k}'=\mathbf{k} \qquad (38.6)$$

给出

$$p_0'^2=\kappa^2+k_0'^2+k_0^2-2k_0'k_0\cos\theta, \qquad (38.7)$$

即

$$p_0'^2=\kappa^2+\mathbf{p}'^2=\kappa^2+(\mathbf{k}'-\mathbf{k})^2,$$

其中 θ 是 k 与 k 之间的夹角。因此，对恒定的 θ 角有

$$\frac{\partial(k_0'+p_0')}{\partial k_0'}=1+\frac{2k_0'-2k_0\cos\theta}{2p_0'}$$
$$=\frac{(p_0'+k_0')^2-k_0^2-\kappa^2}{2k_0'p_0'},$$

在求得上述偏导数以后，由于我们还可以利用能量守恒关系

$$p_0'+k_0'=\kappa+k_0, \qquad (38.8)$$

我们求得

$$\frac{\partial(k_0'+p_0')}{\partial k_0'}=\frac{k_0\kappa}{k_0'p_0'} \tag{38.9}$$

因此，在现在的情况下，截面（37.20）式变为

$$\sigma=\frac{1}{(2\pi)^2}\int d\Omega\frac{p_0'k_0'^3}{\kappa k_0}\overline{\sum}|F|^2, \tag{38.10}$$

其中 $d\Omega$ 是沿 $\mathbf{k}$ 的方向的立体角元。

由于（38.3），（38.4）及（38.5）式知

$$(ip\cdot\gamma-\kappa)(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\gamma})u(\mathbf{p})=0,\quad (ip\cdot\gamma-\kappa)(\mathbf{e}'\cdot\boldsymbol{\gamma})u(\mathbf{p})=0,$$

$$(p+k)^2+\kappa^2=-2\kappa k_0,\qquad (p-k')^2+\kappa^2=2\kappa k_0',$$

据此可以简化 F。结果（38.2）式简化为

$$F=-\frac{ie^2}{4c\hbar\kappa}\frac{1}{(k_0k_0')^{1/2}}\bar{u}(\mathbf{p}')Ou(\mathbf{p}), \tag{38.11}$$

其中

$$O=k_0^{-1}(\mathbf{e}'\cdot\boldsymbol{\gamma})(ik\cdot\gamma)(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\gamma})+k_0'^{-1}(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\gamma})(ik'\cdot\gamma)(\mathbf{e}'\cdot\boldsymbol{\gamma}). \tag{38.12}$$

然后，应用（37.9）式并考虑到（38.5）式得出

$$\overline{\sum_{spin}}|F|^2=\left(\frac{e^2}{4c\hbar\kappa}\right)^2\frac{1}{8k_0k_0'p_0'}\mathrm{Tr}[O(-\gamma_4-1)\times\overline{O}(ip'\cdot\gamma-\kappa)]. \tag{38.13}$$

现在我们将采取适当方式利用21节的结果，来简化并求出上述的迹。

对（38.13）式取迹号内每一因子，把含有 γ_4 的项同含有 γ_i 的项分开来将是方便的。因此，利用关系式

$$\begin{aligned}&(ik\cdot\gamma)(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\gamma})=-(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\gamma})(ik\cdot\gamma),\\&(ik'\cdot\gamma)(\mathbf{e}'\cdot\boldsymbol{\gamma})=-(\mathbf{e}'\cdot\boldsymbol{\gamma})(ik'\gamma),\\&(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\gamma})(\mathbf{e}'\cdot\boldsymbol{\gamma})+(\mathbf{e}'\cdot\boldsymbol{\gamma})(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\gamma})=2(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}'),\end{aligned} \tag{38.14}$$

我们把（38.2）式表示为

$$O = Q + 2(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}')\gamma_4 \tag{38.15}$$

其中

$$Q = -k_0^{-1}(\mathbf{e}'\cdot\boldsymbol{\gamma})(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\gamma})(i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}) - k_0'^{-1}(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\gamma})(\mathbf{e}'\cdot\mathbf{r})(i\mathbf{k}'\boldsymbol{\gamma}), \tag{38.16}$$

这意味着

$$\overline{O} = \overline{Q} + 2(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}')\gamma_4 \tag{38.17}$$

其中

$$\overline{Q} = -k_0^{-1}(i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma})(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\gamma})(\mathbf{e}'\cdot\boldsymbol{\gamma}) - k_0'^{-1}(i\mathbf{k}'\cdot\boldsymbol{\gamma})(\mathbf{e}'\cdot\boldsymbol{\gamma})(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\gamma}), \tag{38.18}$$

并且我们注意到 Q 及 $\overline{Q}$ 都含有奇数个 γ_i 的乘积。能量动量守恒关系式

$$p'_\mu + k'_\mu = i\kappa\delta_{\mu 4} + k_\mu \tag{38.19}$$

还能使我们写出

$$ip'\cdot\gamma - \kappa = i(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{k}'\cdot\boldsymbol{\gamma}) - (k_0 - k_0' + \kappa)\gamma_4 - \kappa. \tag{38.20}$$

把 (38.15)，(38.17) 及 (38.20) 式代入求迹的式子中得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}[O(-\gamma_4 - 1)\overline{O}(ip'\cdot\gamma - \kappa)]\\ &= \mathrm{Tr}[(k_0' - k_0)Q\overline{Q} + 2(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}')(Q + \overline{Q})(i\mathbf{k}'\cdot\gamma - i\mathbf{k}\cdot\gamma)\\ &\quad + 4(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}')^2(k_0 - k_0' + 2\kappa)],\end{aligned} \tag{38.21}$$

其中我们已略掉取迹中含有奇数个 γ_i 或者奇数个 γ_4 的乘积那些项。然后将 (38.16) 及 (38.18) 式代进来，利用循环置换和颠倒狄喇克矩阵的次序，将取迹号内的各项重新整理，再借助 (38.14) 式将相同因子合并起来，并利用 $(\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\gamma})^2 = a^2$，然后按照 (21.14) 式进行一些简单的求迹计算，即可得到：

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[Q\overline{Q}] &= 8(k_0k_0')^{-1}[k\cdot k' - 2(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}')(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}'\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}'\\ &\quad - \mathbf{e}\cdot\mathbf{k}'\mathbf{e}'\cdot\mathbf{k})],\\ \mathrm{Tr}[(Q + \overline{Q})(i\mathbf{k}'\cdot\boldsymbol{\gamma} - i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma})]\\ &= 8(k_0' - k_0)[\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}' + (k_0k_0')^{-1}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}'\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}'\\ &\quad - \mathbf{e}\cdot\mathbf{k}'\mathbf{e}'\cdot\mathbf{k})],\end{aligned}$$

因此 (38.21) 式简化为

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}[O(-\gamma_4-1)\bar{O}(ip'\cdot\gamma-\kappa)]\\&=8(k_0^{-1}-k_0'^{-1})(k\cdot k')+32\kappa(e\cdot e')^2.\end{aligned}\tag{38.22}$$

但是按照 (38.19) 式，有

$$(k_\mu-k'_\mu+i\kappa\delta_{\mu4})^2=p'^2_\mu,$$

考虑到 (38.4) 式，上式给出

$$k\cdot k'=\kappa(k'_0-k_0).\tag{38.23}$$

这样，(38.22) 式可以表示为

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}[O(-\gamma_4-1)\bar{O}(ip'\cdot\gamma-\kappa)]\\&=8\kappa[k_0k_0'^{-1}+k'_0k_0^{-1}-2+4(e\cdot e')^2],\end{aligned}\tag{38.24}$$

而 (38.13) 式变为

$$\overline{\sum_{\text{spin}}}|F|^2=\left(\frac{e^2}{4ch\kappa}\right)^2\frac{\kappa}{k_0k'_0p'_0}\left[\frac{k_0}{k'_0}+\frac{k'_0}{k_0}-2+4(e\cdot e')^2\right].\tag{38.25}$$

对于光子极化态取和，在 37 节中曾叙述了两种不同的方法，在这里我们将举例说明其中一种方法的用法，而另一种方法将在 39 节中用到，按照 (37.10) 式，有

$$\sum_e(e\cdot e)^2=1-\frac{(e\cdot k')^2}{k'^2}$$

因此有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_e\sum_{e'}(e\cdot e')^2&=1-\frac{1}{2k'^2}\sum(e\cdot k')^2\\&=1-\frac{1}{2k'^2}\left[k'^2-\frac{(k\cdot k')^2}{k^2}\right]\end{aligned}$$

即

$$\overline{\sum_{p\cdot l}}(e\cdot e')^2=\frac{1}{2}+\frac{(k\cdot k')^2}{2k^2k'^2}=\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta).\tag{38.26}$$

此外运算 $\overline{\sum_{pol}}$ 应把与 e′ 及 e 无关的项乘以 2，因此通过对初态光子的极化状态取平均并对末态光子的极化状态取和，从(38.25)式得到

$$\overline{\sum}|F|^2=\left(\frac{e^2}{4c\hbar\kappa}\right)^2\frac{2k}{k_0k'_0p'_0}\left[\frac{k_0}{k'_0}+\frac{k'_0}{k_0}-\sin^2\theta\right]. \tag{38.27}$$

如果我们用 (38.25) 式代替 (38.27) 式代入 (38.10) 中，我们就得到极化光子的截面 σ_{pol}，而把 (38.27) 式代入(38.10)式则得出非极化光子的截面 σ，因此对极化光子来说，截面是①

$$\sigma_{pol}=\frac{1}{4}r_0^2\int d\Omega\frac{k_0^2}{k_0'^2}\left[\frac{k_0}{k'_0}+\frac{k'_0}{k_0}-2+4(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}')^2\right], \tag{38.28}$$

而对非极化的光子，是

$$\sigma=\frac{1}{2}r_0^2\int d\Omega\frac{k_0'^2}{k_0^2}\left[\frac{k_0}{k'_0}+\frac{k'_0}{k_0}-\sin^2\theta\right]。 \tag{38.29}$$

其中，所谓经典电子半径的 r_0 由

$$r_0=e^2/4\pi ch\kappa=e^2/4\pi mc^2 \tag{38.30}$$

给出，借助于关系式

$$k'_0=\frac{k_0}{1+(k_0/\kappa)(1-\cos\theta)}, \tag{38.31}$$

可以从上述的截面中消去 k'_0，此式可以从 (38.23) 式得出，称为康普顿公式。

公式 (38.31) 表明，对于 $k_0\ll\kappa$，有 $k'_0=k_0$，因此对于低能光子，(38.29) 式简化为

$$\sigma=r_0^2\int d\Omega\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\theta\right) \tag{38.32}$$

此式与经典的汤姆孙公式一致。

---

① O.Klein and T.Nishina, Z.Physik 52, 853(1929).

39. 正电子-电子湮灭

一个正电子与一个电子可以互相湮灭而产生几个光子。由于动量和能量守恒排除了产生一个光子的可能性，我们来研究产生两个光子的湮灭过程。令 p 和 q 分别是电子及正电子的传播四维矢量，k 和 k' 是两个光子的传播四维矢量，按照 34 节中的论述，这个过程的散射算符最低阶贡献可以从 (34.15) 式得出并表示为

$$S=V^{-2}(2\pi)^4\delta(p+q-k-k')F_{\mu\nu}a_\mu^*(\mathbf{k})a_\nu^*(\mathbf{k}')b(\mathbf{q})a(\mathbf{p}), \tag{39.1}$$

式中

$$F_{\mu\nu}=\frac{ie^2}{2c\hbar}\frac{1}{(k_0k_0')^{1/2}}\times\bar{v}(\mathbf{q})\left[\gamma_\nu\frac{i(p-k)\cdot\gamma-\kappa}{(p-k)^2+\kappa^2}\gamma_\mu+\gamma_\mu\frac{i(p-k')\cdot\gamma-\kappa}{(p-k')^2+\kappa^2}\gamma_\nu\right]u(\mathbf{p}), \tag{39.2}$$

对应于上述贡献的相互作用图是图 39.1。

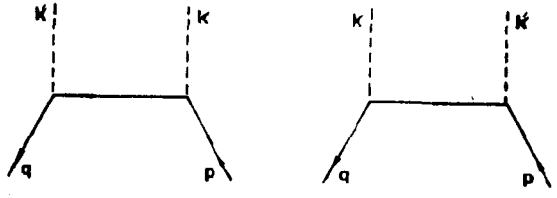


图 39.1 正电子-电子湮灭

应注意到

$$\bar{v}(\mathbf{q})(iq\cdot\gamma-\kappa)=0,\quad (ip\cdot\gamma+\kappa)u(\mathbf{p})=0, \tag{39.3}$$

$$p^2=q^2=-\kappa^2,\qquad k^2=k'^2=0, \tag{39.4}$$

$$p+q=k+k'. \tag{39.5}$$

为了对光子极化态取和，我们可以用在 37 节中所叙述的更方便的协变方法。对于目前的情况，截面 (37.20) 式取这样形式

$$\sigma=\frac{1}{(2\pi)^2|\mathbf{p}/p_0-\mathbf{q}/q_0|}\int d\Omega\frac{k_0^2}{\partial(\mathbf{k}_0+\mathbf{k}'_0)/\partial\mathbf{k}_0}\overline{\sum_{\text{spin}}}F^*_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\,,\tag{39.6}$$

式中 $d\Omega$ 是沿 k 方向的立体角元。

为了简化 (39.2) 式，我们利用 (39.3) 和 (39.4) 式得到

$$[i(p-k)\cdot\gamma-\kappa]\gamma_\mu u(\mathbf{p})=[2ip_\mu-(ik\cdot\gamma)\gamma_\mu]u(\mathbf{p}),$$
$$[i(p-k')\cdot\gamma-\kappa]\gamma_\nu u(\mathbf{p})=[2ip_\nu-(ik'\cdot\gamma)\gamma_\nu]u(\mathbf{p}),$$
$$(p-k)^2+\kappa^2=-2p\cdot k,$$
$$(p-k')^2+\kappa^2=-2p\cdot k',$$

所以 $F_{\mu\nu}$ 变为

$$F_{\mu\nu}=\frac{-ie^2}{4c\hbar}\frac{1}{(k_0k'_0)^{1/2}}\bar{v}(\mathbf{q})O_{\mu\nu}u(\mathbf{p})\tag{39.7}$$

其中

$$O_{\mu\nu}=(p\cdot k)^{-1}\gamma_\nu[2ip_\mu-(ik\cdot\gamma)\gamma_\mu]$$
$$+(p\cdot k')^{-1}\gamma_\mu[2ip_\nu-(ik'\cdot\gamma)\gamma_\nu],\tag{39.8}$$

并因而有

$$F^*_{\mu\nu}=\frac{ie^2}{4c\hbar}\frac{1}{(k_0k'_0)^{1/2}}\bar{u}(\mathbf{p})\overline{O}_{\mu\nu}u(\mathbf{q})\tag{39.9}$$

其中

$$\overline{O}_{\mu\nu}=(p\cdot k)^{-1}[2ip_\mu-\gamma_\mu(ik\cdot\gamma)]\gamma_\nu$$
$$+(p\cdot k')^{-1}[2ip_\nu-\gamma_\nu(ik'\cdot\gamma)]\gamma_\mu.\tag{39.10}$$

借助于 (37.3) 及 (37.5) 式对电子及正电子的自旋态取平均之后，从 (39.7) 及 (39.9) 式得出

$$\overline{\sum_{\text{spin}}}F^*_{\mu\nu}F_{\mu\nu}=\left(\frac{e^2}{4c\hbar}\right)^2\frac{1}{16k_0k'_0p_0q_0}\times$$
$$\mathrm{Tr}[O_{\mu\nu}(ip\cdot\gamma-\kappa)\overline{O}_{\mu\nu}(iq\cdot\gamma+\kappa)],$$

再把 (39.8) 及 (39.10) 代入上式，得

$$\sum_{spin} F^*_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \left(\frac{e^2}{4c\hbar}\right)^2 \frac{1}{16k_0k'_0p_0q_0}$$
$$\times[(p\cdot k)^{-2}A + (p\cdot k')^{-2}B$$
$$+ (p\cdot k)^{-1}(p\cdot k')^{-1}(C+D)], \qquad (39.11)$$

其中

$$A = \mathrm{Tr}\{\gamma_\nu[2ip_\mu - (ik\cdot\gamma)\gamma_\mu](ip\cdot\gamma - \kappa)[2ip_\mu$$
$$- \gamma_\mu(ik\cdot\gamma)]\gamma_\nu(iq\cdot\gamma + \kappa)\},$$
$$C = \mathrm{Tr}\{\gamma_\nu[2ip_\mu - (ik\cdot\gamma)\gamma_\mu](ip\cdot\gamma - \kappa)[2ip_\nu$$
$$- \gamma_\nu(ik'\cdot\gamma)]\gamma_\mu(iq\cdot\gamma + \kappa)\}, \qquad (39.12)$$

而 B 与 C 可以通过互相交换 k 与 k' 分别从 A 和 C 得到。

在 (39.12) 中的取迹号内各项可以通过略掉奇数个 γ_μ 的乘积并应用 (21.16)式而大大的简化。然后通过循环置换及颠倒 γ_μ 的顺序，重新整理所得的各项，再把相同因子合并在一起，并利用 $(\mathbf{a}\cdot\gamma)^2 = \mathbf{a}^2$，最后算出一些简单的迹的值，我们得到

$$A = 32(p\cdot k)(q\cdot k) + 32\kappa^2(p\cdot q - 2p\cdot k - q\cdot k) - 64\kappa^4,$$
$$C = 32(p\cdot q)(p\cdot k + p\cdot k' - k\cdot k')$$
$$-16\kappa^2(2p\cdot k + 2p\cdot k' - q\cdot k - q\cdot k' + p\cdot q - k\cdot k') - 16\kappa^4.$$

这些结果可以借助于下面关系式用 $p\cdot k$ 及 $p\cdot k'$ 来表示

$$q\cdot k = p\cdot k', \qquad q\cdot k' = p\cdot k,$$
$$p\cdot q = p\cdot k + p\cdot k' + \kappa^2, \qquad k\cdot k' = p\cdot k + p\cdot k', \qquad (39.13)$$

它们可以从 (39.4) 及 (39.5) 式得到，因此

$$A = 32[(p\cdot k)(p\cdot k') - \kappa^2(p\cdot k) - \kappa^4],$$
$$C = -16\kappa^2[(p\cdot k) + (p\cdot k') + 2\kappa^2], \qquad (39.14)$$

而 B 与 D，正如前面所指出的那样，可以从 A 和 C 得到，即

$$B = 32[(p\cdot k)(p\cdot k') - \kappa^2(p\cdot k') - \kappa^4],$$
$$D = C. \qquad (39.15)$$

把 (39.14) 及 (39.15) 式代入 (39.11) 式，导致

$$\sum_{spin} F^*_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \left(\frac{e^2}{4c\hbar}\right)^2 \frac{2}{k_0 k'_0 p_0 q_0}$$
$$\times\left[\left(\frac{p\cdot k'}{p\cdot k}+\frac{p\cdot k}{p\cdot k'}\right)-2\left(\frac{\kappa^2}{p\cdot k}+\frac{\kappa^2}{p\cdot k'}\right)\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\kappa^2}{p\cdot k}+\frac{\kappa^2}{p\cdot k'}\right)^2\right]. \qquad (39.16)$$

现在让我们仅限于在质心系中讨论。因此

$$\mathbf{q}=-\mathbf{p},\ \mathbf{k}'=-\mathbf{k},\ p_0=q_0=k_0=k'_0, \qquad (39.17)$$

并且

$$p\cdot k=-p_0(p_0-|\mathbf{p}|\cos\theta),$$
$$p\cdot k'=-p_0(p_0+|\mathbf{p}|\cos\theta), \qquad (39.18)$$

其中 θ 表示 $\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{p}$ 之间或者 $\mathbf{k}'$ 与 $\mathbf{q}$ 之间的夹角。然后，把(39.16)式代入（39.6）式，并利用(39.17)及(39.18)式，截面（39.6）式变为

$$\sigma=r_0^2\frac{\kappa^2}{4|\mathbf{p}|p_0}\int d\Omega\left[\frac{2p_0^2+2\kappa^2}{p_0^2-\mathbf{p}^2\cos^2\theta}\right.$$
$$\left.-\frac{2\kappa^4}{(p_0^2-\mathbf{p}^2\cos^2\theta)^2}-1\right], \qquad (39.19)$$

其中 γ_0 由（38.30）式给出。上面的积分可以这样求得，即令 $d\Omega=2\pi\sin\theta d\theta$，再对 θ 只从 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 进行积分，因为互相交换两个光子的方向并不导致新的状态。因此我们便得到在质心系中的截面为

$$\sigma=\pi r_0^2\frac{\kappa^2}{2p_0^2}\left[\frac{\beta^2-2}{\beta}+\frac{3-\beta^4}{2\beta^2}\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)\right], \qquad (39.20)$$

其中

$$\beta=|\mathbf{p}|/p_0. \qquad (39.21)$$

下面，我们把 p 及 q 变换成电子处于静止的实验室坐标系中的 $\overline{p}$ 及 $\overline{q}$，这时

$$\overline{p}_\mu=i\kappa\delta_{\mu 4}. \qquad (39.22)$$

然后，根据（39.17）及（39.22）式，关系式

$$(p+q)^2=(\bar{p}+\bar{q})^2$$

导致

$$-4p_0^2=\bar{q}^2-(k+\bar{q}_0)^2$$

即

$$p_0^2=-\frac{1}{2}\kappa(\bar{q}_0+\kappa), \tag{39.23}$$

因此有

$$\beta=\left(\frac{p_0^2-\kappa^2}{p_0^2}\right)^{1/2}=\left(\frac{\bar{q}_0-\kappa}{\bar{q}_0+\kappa}\right)^{1/2}=\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{1/2} \tag{39.24}$$

其中

$$\gamma=\bar{q}_0/\kappa. \tag{39.25}$$

上述各关系使我们可以把（39.20）式表示成这样形式①

$$\sigma=\pi r_0^2\frac{1}{\gamma+1}\left[\frac{\gamma^2+4\gamma+1}{\gamma^2-1}\ln\{\gamma+(\gamma^2-1)^{1/2}\}-\frac{\gamma+3}{(\gamma^2-1)^{1/2}}\right], \tag{29.26}$$

根据 σ 的洛伦兹不变性，（39.26）式给出了传播四维矢量为 $\bar{q}$ 的一个正电子与一个静止电子的湮灭截面。

对于逆过程，即二个光子转换成一个正电子-电子对，可以很容易算出它的截面②，因为事实上那里遇到的迹的计算与本节所做的相同。

40. 电子-电子的散射

两个全同粒子散射的一个感兴趣的例子是电子-电子散射。这个过程的散射算符最低阶贡献包含在（34.14）式的 S_b 中，按

① P.A.M.Dirac, Proc. Cambridge Phil. Soc.26, 361 (1930).

② G.Breit and J.A.Wheeler, Phys.Rev.46, 1087 (1934).

照 34 节的论述可表示为

$$S=V^{-2}(2\pi)^4\delta(p+q-p'-q')Fa^*(\mathbf{p}')a^*(\mathbf{q}')a(\mathbf{q})a(\mathbf{p}) \tag{40.1}$$

其中

$$F=-\frac{ie^2}{c\hbar}\left[\frac{1}{(p'-p)^2}\bar{u}(\mathbf{q}')\gamma_\mu u(\mathbf{q})\bar{u}(\mathbf{p}')\gamma_\mu u(\mathbf{p})\right.$$
$$\left.-\frac{1}{(q'-p)^2}\bar{u}(\mathbf{p}')\gamma_\mu u(\mathbf{q})\bar{u}(\mathbf{q}')\gamma_\mu u(\mathbf{p})\right], \tag{40.2}$$

式中 p 和 q 是初态电子的传播四维矢量，而 p' 及 q' 是末态电子的传播四维矢量，它们满足关系式

$$p^2=q^2=p'^2=q'^2=-\kappa^2, \tag{40.3}$$

$$p+q=p'+q'. \tag{40.4}$$

对应于上述贡献的相互作用图见图 40.1

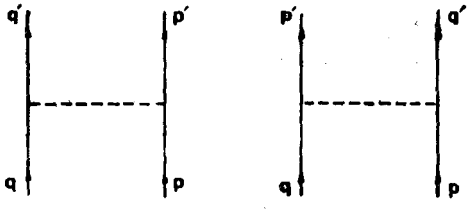


图 40.1　电子-电子散射

按照（37.20）式，截面为

$$\sigma=\frac{1}{(2\pi)^2|\mathbf{p}/p_0-\mathbf{q}/q_0|}\int d\Omega\frac{|\mathbf{p}'|p'_0}{\partial(p'_0+q'_0)/\partial p'_0}\overline{\sum_{spin}}|F|^2, \tag{40.5}$$

式中 $d\Omega$ 是沿 $\mathbf{p}'$ 方向的立体角元。

由（40.1）及（40.2）式所确定的贡献 S 由两项组成，这两项可以通过交换 p' 与 q' 由一项得出另一项，而且因为 $a^*(\mathbf{p})$

与 $a^*(\mathbf{p}')$ 的反对易性，应该注意到这样的交换引起了 (40.2)式中两项的符号上的不同。从 (40.2) 式得出

$$F^* = \frac{ie^2}{c\hbar}\left[\frac{1}{(p'-p)^2}\bar{u}(\mathbf{q})\gamma_\mu u(\mathbf{p}')\bar{u}(\mathbf{p})\gamma_\mu u(\mathbf{p}')\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(q'-p)^2}\bar{u}(\mathbf{q})\gamma_\mu u(\mathbf{p}')\bar{u}(\mathbf{p})\gamma_\mu u(\mathbf{q}')\right], \quad (40.6)$$

其中我们已利用了下列关系式：

$$\gamma_4\gamma_\mu\gamma_4(\cdots)\gamma_4\gamma_\mu\gamma_4 = \gamma_\mu(\cdots)\gamma_\mu.$$

根据 (40.6) 与 (40.2) 式，有

$$|F|^2 = \frac{e^4}{c^2\hbar^2}\left[\frac{A}{(p'-p)^4}+\frac{B}{(q'-q)^4}\right.$$

$$\left.-\frac{C+D}{(p'-p)^2(q'-q)^2}\right], \quad (40.7)$$

其中

$$\begin{aligned} A &= [\bar{u}(\mathbf{q})\gamma_\nu u(\mathbf{q}')\bar{u}(\mathbf{q}')\gamma_\mu u(\mathbf{q})][\bar{u}(\mathbf{p})\times \\ &\quad \times\gamma_\nu u(\mathbf{p}')\bar{u}(\mathbf{p}')\gamma_\mu u(\mathbf{p})], \\ C &= [\bar{u}(\mathbf{q})\gamma_\nu u(\mathbf{q}')\bar{u}(\mathbf{q}')\gamma_\mu u(\mathbf{p})\bar{u}(\mathbf{p})\gamma_\nu\times \\ &\quad \times u(\mathbf{p}')\bar{u}(\mathbf{p}')\gamma_\mu u(\mathbf{q})], \end{aligned} \quad (40.8)$$

而 B 和 D 可以通过交换 p' 与 q' 分别从 A 与 C 得到。

应用 (37.3) 式，对初态的自旋取平均并对末态的自旋取和，我们可以把 (40.8) 式改写成

$$\overline{\sum_{\text{spin}}} A = \frac{1}{64p_0q_0p_0'q_0'}\mathrm{Tr}[\gamma_\nu(iq'\cdot\gamma-\kappa)\gamma_\mu(iq\cdot\gamma-\kappa)]$$

$$\times\mathrm{Tr}[\gamma_\nu(ip'\cdot\gamma-\kappa)\gamma_\mu(ip\cdot\gamma-\kappa)], \quad (40.9)$$

$$\overline{\sum_{\text{spin}}} C = \frac{1}{64p_0q_0p_0'q_0'}\mathrm{Tr}[\gamma_\nu(iq'\cdot\gamma-\kappa)\gamma_\mu(ip\cdot\gamma-\kappa)\times$$

$$\times\gamma_\nu(ip'\cdot\gamma-\kappa)\gamma_\mu(iq\cdot\gamma-\kappa)]. \quad (40.10)$$

借助于(21.16)式对(40.10)式中的取迹简化以后，利用(21.14)式计算出上述的迹为

$$\overline{\sum_{spin}} A=\frac{1}{4p_0q_0p'_0q'_0}[2(p\cdot q)(p'\cdot q')+2(p\cdot q')(q\cdot p')$$
$$+2\kappa^2(p\cdot p')+2\kappa^2(q\cdot q')+4\kappa^4],$$
$$\overline{\sum_{spin}} C=\frac{-1}{4p_0q_0p'_0q'_0}[2(p\cdot q)(p'\cdot q')+\kappa^2(p\cdot q)+\kappa^2(p'q')$$
$$+\kappa^2(p\cdot p')+\kappa^2(p\cdot q')+\kappa^2(q\cdot p')+\kappa^2(q\cdot q')+2\kappa^4].$$

可以用 $p\cdot p'$ 和 $p\cdot q$ 来表示这些结果。我们借助于从 (40.3) 与 (40.4) 式得出的关系式

$$p'\cdot q'=p\cdot q,\quad q\cdot q'=p\cdot p',$$
$$p\cdot q'=p'\cdot q=p\cdot q-p\cdot p'-\kappa^2, \qquad (40.11)$$

然后，再利用

$$p\cdot p'=-\frac{1}{2}(p'-p)^2-\kappa^2,$$

得到

$$\overline{\sum_{spin}} A=\frac{1}{2p_0q_0p'_0q'_0}\left[\frac{1}{4}(p'-p)^4\right.$$
$$\left.+(p\cdot q-\kappa^2)(p'-p)^2+2(p\cdot q)^2\right], \qquad (40.12)$$
$$\overline{\sum_{spin}} C=\frac{-1}{2p_0q_0p'_0q'_0}[(p\cdot q)^2+2\kappa^2(p\cdot q)],$$

将 p' 与 q' 互换，还可得到

$$\overline{\sum_{spin}} B=\frac{1}{2p_0q_0p'_0q'_0}\left[\frac{1}{4}(q'-p)^4\right.$$

$$+(p\cdot q-\kappa^2)(q'-p)^2+2(p\cdot q)^2\Big],$$

$$\sum_{\text{spin}}\overline{D}=\sum_{\text{spin}}\overline{C}. \tag{40.13}$$

从 (40.7), (40.12) 及 (40.13) 式，我们得到

$$\sum_{\text{spin}}\overline{|F|^2}=\frac{e^4}{c^2\hbar^2}\frac{1}{2p_0q_0p_0'q_0'}\Big[\frac{2(p\cdot q)^2}{(p'-p)^4}+\frac{2(p\cdot q)^2}{(q'-p)^4}$$

$$+\frac{2(p\cdot q)^2+4\kappa^2(p\cdot q)}{(p'-p)^2(q'-p)^2}+\frac{p\cdot q-\kappa^2}{(p'-p)^2}$$

$$+\frac{p\cdot q-\kappa^2}{(q'-p)^2}+\frac{1}{2}\Big] \tag{40.14}$$

在质心系中

$$\mathbf{q}=-\mathbf{p},\quad \mathbf{q}'=-\mathbf{p}',\quad p_0=q_0=p_0'=q_0', \tag{40.15}$$

所以

$$p\cdot q=-(\mathbf{p}^2+p_0^2),\quad (p'-p)^2=2\mathbf{p}^2(1-\cos\theta),$$

$$(q'-p)^2=2\mathbf{p}^2(1+\cos\theta), \tag{40.16}$$

其中 θ 是 $\mathbf{p}'$ 与 $\mathbf{p}$ 之间的夹角。因此把 (40.14) 式代入 (40.5) 式，并利用 (40.15) 及 (40.16) 式，散射截面就成为

$$\sigma=r_0^2\frac{\kappa^2}{2p_0^2}\int d\Omega\Big[\frac{2(\mathbf{p}^2+p_0^2)^2}{\mathbf{p}^4\sin^4\theta}$$

$$-\frac{3(\mathbf{p}^2+p_0^2)^2-4\mathbf{p}^4}{2\mathbf{p}^4\sin^2\theta}+\frac{1}{2}\Big], \tag{40.17}$$

其中 r_0 由 (38.30) 式给出，而 $d\Omega=2\pi\sin\theta d\theta$，$\theta$ 从零变化到 $\frac{\pi}{2}$。

鉴于截面 σ 的洛伦兹不变性，可以简单地用相对于实验室系的量来表示 (40.17) 式中右边的量，从而得到实验室系中的截面。为此，把 p、q、p'、q 换成实验室系中的 $\bar{p}$，$\bar{q}$，$\bar{p}'$ 及 $\bar{q}$，其中

$$\bar{\mathbf{p}}=0,\quad \bar{p}_0=\kappa,\quad \kappa+\bar{q}_0=\bar{p}'_0+\bar{q}_0. \tag{40.18}$$

根据 (40.15) 及 (40.18) 式，关系式

$$(p+q)^2=(\bar{p}+\bar{q})^2$$

给出

$$-4p_0^2=\bar{\mathbf{q}}^2-(\kappa+\bar{q}_0)^2$$

即

$$p_0^2=\frac{1}{2}\kappa(\bar{q}_0+\kappa),\quad \mathbf{p}^2=\frac{1}{2}\kappa(\bar{q}_0-\kappa), \tag{40.19}$$

而关系式

$$p\cdot p'=\bar{p}\cdot\bar{p}'$$

给出

$$\mathbf{p}^2\cos\theta-p_0^2=-\kappa\bar{p}'_0=-\kappa(\kappa+\bar{q}_0-\bar{q}'_0)$$

即

$$\mathbf{p}^2(1-\cos\theta)=\kappa(\bar{q}_0-\bar{q}'_0). \tag{40.20}$$

从 (40.19) 式得出

$$p_0^2=\frac{1}{2}\kappa^2(\gamma+1),\quad \mathbf{p}^2=\frac{1}{2}\kappa^2(\gamma-1),\quad \gamma\equiv\bar{q}_0/\kappa, \tag{40.21}$$

而从 (40.19) 及 (40.20) 式得出

$$\frac{1}{2}(1-\cos\theta)=\xi,\quad \xi\equiv\frac{\bar{q}_0-\bar{q}'_0}{\bar{q}_0-\kappa}, \tag{40.22}$$

其中 ξ 可以解释为实验室系中的入射粒子在碰撞中损失的能量与入射动能之比。变换关系 (40.21) 及 (40.22) 式，使我们能把电子-电子散射截面 (40.17) 式表示成下面形式①

$$\sigma=2\pi r_0^2\frac{\gamma^2}{(\gamma+1)(\gamma-1)^2}\int d\xi\left[\frac{1}{\xi^2}+\frac{1}{(1-\xi)^2}\right.$$

① C.Møller, Ann. Physik 14, 531 (1932).

$$-\left(\frac{2\gamma-1}{\gamma^2}\right)\frac{1}{\xi(1-\xi)}+\frac{(\gamma-1)^2}{\gamma^2}\Big], \qquad (40.23)$$

其中 ξ 从 0 变到 $\frac{1}{2}$。

如果我们考虑正电子-电子散射，而不是电子-电子散射，由 (40.1) 与 (40.2) 式定出的散射算符的贡献被

$$S'=V^{-2}(2\pi)^4\delta(p+q-p'-q')F'a^*(\mathbf{p}')b^*(\mathbf{q}')b(\mathbf{q})a(\mathbf{p}) \qquad (40.24)$$

代替，其中

$$F'=\frac{ie^2}{c\hbar}\Big[\frac{1}{(p'-p)^2}\bar{v}(\mathbf{q})\gamma_\mu v(\mathbf{q}')\bar{u}(\mathbf{p}')\gamma_\mu u(\mathbf{p}) - \frac{1}{(q+p)^2}\bar{u}(\mathbf{p}')\gamma_\mu v(\mathbf{q}')\bar{v}(\mathbf{q})\gamma_\mu u(\mathbf{p})\Big], \qquad (40.25)$$

式中 p 与 q 分别是初态的电子和正电子的传播四维矢量，而 p' 与 q' 是末态的电子与正电子传播四维矢量。与上述贡献对应的相互作用图是图 40.2。

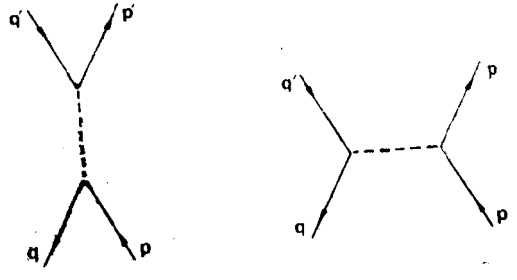


图 40.2　正电子-电子散射

最终的截面[①]可以按照对电子-电子散射曾使用的相同步骤得到，

① H.J.Bhabha, Proc.Roy.Soy.London A154, 195(1935).

尽管不是全同粒子，但所需要的求迹计算与这一节的类似。

41. 电子被外场散射

用外场来代表散射体对某些过程是很方便的。例如我们考虑一个电子被一个重核散射。我们可以把核当作一个质量趋于无限大的粒子来处理，而把电子当作被重核所产生的外场所散射，可以更容易地得到同样的结果。电子与磁场的相互作用也可以用外场来处理。

(a) 含有外场的散射算符

为了考虑外场的影响，(34.1) 及 (34.2) 式给定的散射算符中相互作用能量密度应作如下替换

$$H \to H + H^{ex} \tag{41.1}$$

其中

$$H = -ie{:}A_\mu \bar{\psi}\gamma_\mu \psi{:}, \tag{41.2}$$

$$H^{ex} = -ie{:}A_\mu^{ex}\bar{\psi}\gamma_\mu \psi{:}, \tag{41.3}$$

式中 A_μ 是通常的光子场，而 A_μ^{ex} 是外场。在散射算符中实行以上替换后，并只保留 H^{ex} 的线性项，我们得到

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n, \tag{41.4}$$

其中

$$S_n = \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{-i}{c\hbar}\right)^n \int dx \int dx' \cdots \times \int dx^{(n-1)} T[H^{ex}(x)H(x')\cdots H(x^{(n-1)})]. \tag{41.5}$$

除了外场不受到收缩外，这种散射算符对任何过程的贡献可以用通常的办法导出。此外，在相互作用图中用粗的波纹线表示外场。

在散射算符中所用的外场是静场时，外场可以表示为

$$A_\mu^{ex}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{q} A_\mu^{ex}(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}, \tag{41.6}$$

或者

$$A_\mu^{:x}(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int dq A_\mu^{:x}(q) e^{iq\cdot x} \tag{41.7}$$

其中

$$A_\mu^{:x}(q) = 2\pi A_\mu^{:x}(\mathbf{q})\delta(q_0). \tag{41.8}$$

具体说来，由电荷为 $-Ze$ 的重核所引起的库仑场是

$$\begin{aligned} A_\mu^{:x}(x) &= -i\delta_{\mu 4}\frac{Ze}{4\pi|\mathbf{x}|} \\ &= -i\delta_{\mu 4}\frac{Ze}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{q} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\frac{1}{\mathbf{q}^2} \end{aligned} \tag{41.9}$$

(*b*) 电子-核散射

让电子被重核散射，电子的初态与末态传播四维矢量分别为 p 与 p'。对这个过程散射算符的最低阶贡献可以通过把(41.9)式和 (34.9) 式的适当的付里叶分量代入

$$S_1 = -\frac{e}{c\hbar}\int dx : A_\mu^{:x}(x)\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x) : \tag{41.10}$$

中求得。S_1 产生的散射矩阵元是

$$S_{fi} = V^{-1}(2\pi)\delta(p_0 - p_0')|F \tag{41.11}$$

其中

$$F = \frac{iZe^2}{c\hbar}\frac{1}{(\mathbf{p}'-\mathbf{p})^2}\bar{u}(\mathbf{p}')\gamma_4 u(\mathbf{p}), \tag{41.12}$$

其相应的相互作用图是图 41.1。



图 41.1
电子被外场散射

注意到按照 (41.11) 式，粒子的能量是守恒的，而粒子的动量是不守恒的，因为入射粒子的一部分动量传递给核了。

通过与 36 节中相类似的步骤可以从 (41.11) 式导出散射截面，但动量不守恒导致了某些简化。从 (41.11) 式得出的总跃迁几率是

$$W = \frac{(2\pi)^2}{V^2}\sum_{p'}|F|^2[\delta(p_0 - p_0')]^2. \tag{41.13}$$

而

$$[\delta(p_0-p_0')]^2=\delta(p_0-p_0')(2\pi)^{-1}\int dx_0 e^{i(p_0-p_0')x_0}$$

$$=\delta(p_0-p_0')(2\pi)^{-1}\int dx_0$$

$$=\delta(p_0-p_0')(2\pi)^{-1}cT, \qquad (41.14)$$

所以我们得到单位时间的跃迁几率为

$$w=\frac{W}{T}=\frac{2\pi c}{V^2}\sum_{\mathrm{p}}|F|^2\delta(p_0-p_0'). \qquad (14.15)$$

令

$$\frac{(2\pi)^3}{V}\sum_{\mathrm{p}'}=\int d\mathrm{p}'=\iint|\mathrm{p}'|p_0'dp_0'd\Omega,$$

其中 $d\Omega$ 是沿 p' 的立体角元，而积分遍及 p_0'，(41.15) 式就可以表示为

$$w=\frac{c}{(2\pi)^2V}\int d\Omega|\mathrm{p}|p_0|F|^2 \qquad (41.16)$$

在上式中利用了

$$p_0'=p_0 \quad 或 \quad |\mathrm{p}'|=|\mathrm{p}|. \qquad (41.17)$$

因此，对初自旋态取平均并对末自旋态求和后，截面可由下式给出

$$\sigma=\overline{\sum_{\mathrm{spin}}}\frac{w}{V^{-1}|\mathrm{p}/p_0|c}=\frac{1}{(2\pi)^2}\int d\Omega p_0^2\overline{\sum_{\mathrm{spin}}}|F|^2. \qquad (41.18)$$

然后，利用 (37.9) 式从 (41.12) 式得出

$$\overline{\sum_{\mathrm{spin}}}|F|^2=\frac{Z^2e^4}{c^2\hbar^2(\mathrm{p}'-\mathrm{p})^4}\ \frac{1}{8p_0^2}$$

$$\mathrm{Tr}[\gamma_4(ip\cdot\gamma-\kappa)\gamma_4(ip'\cdot\gamma-\kappa)]$$

$$=\frac{Z^2e^4}{c^2\hbar^2(\mathrm{p}'-\mathrm{p})^4}\ \frac{1}{2p_0^2}(\mathrm{p}\cdot\mathrm{p}'+p_0^2+\kappa^2),$$

代入（41.18）式，得出

$$\sigma=\int d\Omega\frac{Z^2e^4}{8\pi^2c^2\hbar^2}\ \frac{1}{(\mathbf{p}'-\mathbf{p})^4}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}'+p_0^2+\kappa^2),$$

若把 $\mathbf{p}'$ 与 $\mathbf{p}$ 之间的夹角用 θ 表示，那么截面可以写成这样形式①

$$\sigma=\int d\Omega\frac{Z^2r_0^2}{4(\mathbf{p}^4/\kappa^4)\sin^4(\theta/2)}\left(1+\frac{\mathbf{p}^2}{\kappa^2}\cos^2\frac{\theta}{2}\right),\tag{41.19}$$

其中 r_0 由(38.30)式给出。

对于一个低能电子，(41.19)式与经典的卢瑟福公式一致

$$\sigma=\int d\Omega\left(\frac{Ze^2}{4\pi}\right)^2\frac{1}{4m^2v^4\sin^4(\theta/2)},\tag{41.20}$$

其中 v 是入射电子的速度。

(c) 电子的磁矩

让我们再考虑一个电子被外场所散射的情况，把（34.9）与（41.7）式代入（41.10）式，可把散射算符的最低阶贡献表示为

$$S_1=-V^{-1}(e/c\hbar)a^*(\mathbf{p}')a(\mathbf{p})A_\mu^{ex}(q)\bar{u}(\mathbf{p}')\gamma_\mu u(\mathbf{p}),\tag{41.21}$$

式中 p 与 p' 分别是初态与末态电子的传播四维矢量，并且

$$q=p'-p.\tag{41.22}$$

从关系式

$$\bar{u}(\mathbf{p}')(ip'\cdot\gamma+\kappa)=0,\quad(ip\cdot\gamma+\kappa)u(\mathbf{p})=0,$$
$$\sigma_{\mu\nu}=(1/2i)(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu),$$

可以得出

$$\bar{u}(\mathbf{p}')\gamma_\mu u(\mathbf{p})=-(1/2\kappa)\bar{u}(\mathbf{p}')(ip_\mu+ip'_\mu+q_\nu\sigma_{\mu\nu})u(\mathbf{p}),\tag{41.23}$$

---

① N. F. Mott, Proc. Roy, Soc. London A124, 425(1929).

把(41.23)代入(41.21)式，得出

$$S_1 = V^{-1}(e/4c\hbar\kappa)a^*(\mathbf{p}')a(\mathbf{p})\{\bar{u}(\mathbf{p}')(2ip_\mu + 2ip'_\mu)A_\mu^{*x}(q)u(\mathbf{p})$$
$$-\bar{u}(\mathbf{p}')\sigma_{\mu\nu}[q_\mu A_\nu^{*x}(q) - q_\nu A_\mu^{*x}(q)]u(\mathbf{p})\}. \qquad (41.24)$$

对于磁场，在低动量极限情况下，(41.24)式简化为

$$S_1 = -V^{-1}(e/4c\hbar\kappa)a^*(\mathbf{p}')a(\mathbf{p})\bar{u}(\mathbf{p}')\sigma_{ij}[q_i A_j^{*x}(q)$$
$$-q_j A_i^{*x}(q)]u(\mathbf{p}), \qquad (41.25)$$

上式等价于从有效的相互作用能量密度

$$H_{\mathrm{eff}} = -\frac{e}{4\kappa}:F_{ij}^{x}\bar{\psi}\sigma_{ij}\psi:. \qquad (41.26)$$

所获得的贡献。如果所考虑的不是电子散射而是正电子散射，我们仍得到(41.26)式。

由(41.26)式给出的电子场同外磁场的有效相互作用可以表示为

$$H_{\mathrm{eff}} = -\frac{1}{2}F_{ij}^{x}M_{ij}, \qquad (41.27)$$

式中

$$M_{ij} = \frac{e}{2\kappa}:\psi^*\gamma_4\sigma_{ij}\psi: \qquad (41.28)$$

给出了磁矩密度，所以电子场的磁矩由

$$\mathscr{M}_{ij} = \frac{e}{2\kappa}\int dx:\psi^*\gamma_4\sigma_{ij}\psi:. \qquad (41.29)$$

给出。对于一个静止的电子或正电子的磁矩可以通过在25节中对自旋角动量所采用的方法来验证。因此对静止粒子，$\mathscr{M}_{12}$ 的付里叶分量可以表示为

$$\mathscr{M}_{12}(0) = (e/2\kappa)[a_1^*(0)a_1(0) - a_1^*(0)a_2(0)$$
$$-b_1^*(0)b_1(0) + b_2^*(0)b_2(0)], \qquad (41.30)$$

对 μ_{ij} 的其它分量，也有类似的结果。比较(25.18)式与(41.30)式表明，自旋角动量的本征值$\pm\frac{\hbar}{2}$对应于电子磁矩的本征值

$\pm\frac{e}{2\kappa}$及正电子磁矩的本征值$\mp\frac{e}{2\kappa}$。因此，可以将磁矩μ_0和$-\mu_0$分别与电子和正电子相联系，而

$$\mu_0 = e/2\kappa = e\hbar/2mc \tag{41.31}$$

通常称为玻尔磁子。

42. 韧致辐射

当带电粒子散射时发射光子的现象称为韧致辐射。我们来推导在电子-核碰撞中的韧致辐射截面。

假设一个电子被带电为$-Z_e$的一个重核所产生的外场散射，并且令入射电子、散射电子及发射的光子的传播四维矢量分别为p，p'与k。对这一过程，散射算符的最低阶贡献除了对A_μ^x的付里叶分解需要用（41.9）取代外，可按34节的论述从（41.4）式中的二阶项得到。所以散射算符的贡献可以表示为

$$S = V^{-3/2}(2\pi)\delta(p_0 - p_0' - k_0)F_\mu a_x^*(\mathbf{k})a^*(\mathbf{p}')a(\mathbf{p}) \tag{42.1}$$

其中

$$F_\mu = \frac{Ze^3}{(ch)^{3/2}}\frac{1}{(2k_0)^{1/2}}\frac{1}{(\mathbf{p}'-\mathbf{p}+\mathbf{k})^2} \times \bar{u}(\mathbf{p}')\left[\gamma_4\frac{i(p-k)\cdot\gamma-\kappa}{(p-k)^2+\kappa^2}\gamma_\mu + \gamma_\mu\frac{i(p'+k)\cdot\gamma-\kappa}{(p'+k)^2+\kappa^2}\gamma_4\right]u(\mathbf{p}), \tag{42.2}$$

式中

$$\bar{u}(\mathbf{p}')(ip'\cdot\gamma+\kappa)=0,\quad (ip\cdot\gamma+\kappa)u(\mathbf{p})=0, \tag{42.3}$$

$$p^2 = p'^2 = -\kappa^2,\quad k^2 = 0, \tag{42.4}$$

相互作用图如图42.1所示

为了推导散射截面，我们注意到由(42.1)式所得出的总跃迁几率是

$$W = \frac{(2\pi)^2}{V^3}\sum_{\mathbf{p}'}\sum_{\mathbf{k}}F_x^*F_\mu[\delta(p_0-p_0'-k_0)]^2, \tag{42.5}$$

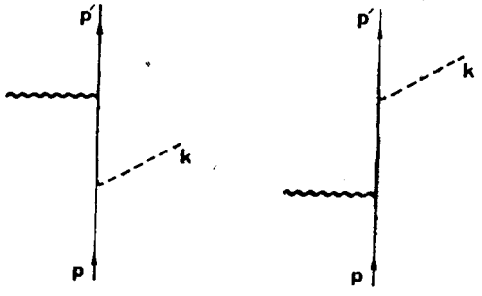


图 42.1　韧致辐射

其中对所发射的光子极化状态的取和已按 37 节 的 协变步骤完成了。然后，根据 41 节对电子与核子的散射所使用过的讨论可以证明每单位时间的跃迁几率是

$$w=\frac{c}{(2\pi)^2V^2}\sum_{\mathbf{k}}\int d\Omega\,|\mathbf{p}'|\,p_0'F_\mu^*F_\mu$$

$$=\frac{c}{(2\pi)^5V}\int d\Omega\int d\Omega_{\mathbf{k}}\int dk_0k_0^2\,|\mathbf{p}'|\,p_0'F_\mu^*F_\mu,\tag{42.6}$$

其中 $d\Omega$ 与 $d\Omega_{\mathbf{k}}$ 是沿 $\mathbf{p}'$ 和 $\mathbf{k}$ 方向的立体角元，并且

$$p_0'+k_0=p_0.\tag{42.7}$$

因此，对初自旋态取平均和对末自旋态取和后，得出截面为

$$\sigma=\overline{\sum_{spin}}\frac{w}{V^{-1}|\mathbf{p}/p_0|c}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^5}\int d\Omega\int d\Omega_{\mathbf{k}}\int dk_0\frac{k_0^2|\mathbf{p}'|p_0'p_0}{|\mathbf{p}|}\overline{\sum_{spin}}F_\mu^*F_\mu.\tag{42.8}$$

借助于(42.3)与(42.4)式能够简化(42.2)式，此二式给出

$$F_\mu = \frac{iZe^3}{(c\hbar)^{3/2}} \frac{1}{(2k_0)^{1/2}}$$

$$\times \frac{1}{(\mathbf{p}' - \mathbf{p} + \mathbf{k})^2} \bar{u}(\mathbf{p}')(O_\mu + O'_\mu)u(\mathbf{p}), \qquad (42.9)$$

其中

$$O_\mu = \frac{\gamma_4[(k\cdot\gamma)\gamma_\mu - 2p_\mu]}{2p\cdot k},$$

$$O'_\mu = \frac{[\gamma_\mu(k\cdot\gamma) + 2p'_\mu]\gamma_4}{2p'\cdot k}, \qquad (42.10)$$

从而有

$$F^*_\mu = \frac{-iZe^3}{(c\hbar)^{3/2}} \frac{1}{(2k_0)^{1/2}}$$

$$\times \frac{1}{(\mathbf{p}' - \mathbf{p} + \mathbf{k})^2} \bar{u}(\mathbf{p})(\bar{O}_\mu + \bar{O}'_\mu)u(\mathbf{p}'), \qquad (42.11)$$

其中

$$\bar{O}_\mu = \frac{[\gamma_\mu(k\cdot\gamma) - 2p_\mu]\gamma_4}{2p\cdot k},$$

$$\bar{O}'_\mu = \frac{\gamma_4[(k\cdot\gamma)\gamma_\mu + 2p'_\mu]}{2p'\cdot k}, \qquad (42.12)$$

然后，利用(37.9)式得出

$$\overline{\sum_{\text{自旋}}} F^*_\mu F_\mu = \frac{Z^2e^6}{(c\hbar)^3}$$

$$\times \frac{1}{16k_0p_0p'_0(\mathbf{p}' - \mathbf{p} + \mathbf{k})^4}(A + B + C + D), \qquad (42.13)$$

其中

$$\begin{aligned} A &= \mathrm{Tr}[\bar{O}_\mu(ip\cdot\gamma - \kappa)\bar{O}_\mu(ip'\cdot\gamma - \kappa)], \\ B &= \mathrm{Tr}[\bar{O}'_\mu(ip\cdot\gamma - \kappa)\bar{O}'_\mu(ip'\cdot\gamma - \kappa)], \\ C &= \mathrm{Tr}[\bar{O}_\mu(ip\cdot\gamma - \kappa)\bar{O}'_\mu(ip'\cdot\gamma - \kappa)], \\ D &= \mathrm{Tr}[\bar{O}'_\mu(ip\cdot\gamma - \kappa)\bar{O}_\mu(ip'\cdot\gamma - \kappa)], \end{aligned} \qquad (42.14)$$

进行通常的运算，同时应用(21.16)与(21.14)式，可以求出以上的迹。借助于能量守恒关系

$$p'_0 - p_0 + k_0 = 0, \quad . \tag{42.15}$$

可以使计算得到一些简化。令

$$\mathbf{q}^2 = (\mathbf{p}' - \mathbf{p} + \mathbf{k})^2, \tag{42.16}$$

是方便的。由此式得出

$$\mathbf{q}^2 = (p' - p + k)^2 = -2\kappa^2 - 2p\cdot p' - 2p\cdot k + 2p'\cdot k. \tag{42.17}$$

因而

$$A = \frac{2p^2(4p'^2_0 - \mathbf{q}^2)}{(p\cdot k)^2} - \frac{4(p'\cdot k) + 8p'_0 k_0}{p\cdot k}, \tag{42.18}$$

$$C = \frac{-2(p\cdot p')(2p'^2_0 + 2p_0^2 - \mathbf{q}^2) + 2(p^2 + p'^2)k_0^2}{(p\cdot k)(p'\cdot k)} + \frac{4p_0(p_0 + p'_0)}{p\cdot k} - \frac{4p'_0(p'_0 + p_0)}{p'\cdot k},$$

而通过循环置换可以表明 B 可以通过用替换 $p\to p'$，$p'\to p$ 以及 $k\to -k$ 从 A 得到，而利用循环置换以及颠倒因子的顺序可以看出 C 与 D 是等价的，于是

$$B = \frac{2p'^2(4p_0^2 - \mathbf{q}^2}{(p'\cdot k)^2)} - \frac{4(p\cdot k) + 8p_0 k_0}{p'\cdot k}, \qquad D = C. \tag{42.19}$$

因此，借助于关系式

$$\begin{aligned} p^2 &= [\mathbf{p}^2 - (\mathbf{p}\cdot\mathbf{k})^2/\mathbf{k}^2] + (p\cdot k)^2/k_0^2 + 2(p\cdot k)(p_0/k_0), \\ p'^2 &= [\mathbf{p}'^2 - (\mathbf{p}'\cdot\mathbf{k})^2/\mathbf{k}^2] + (p'\cdot k)^2/k_0^2 \\ &\quad + 2(p'\cdot k)(p'_0/k_0), \\ p\cdot p' &= [\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}' - (\mathbf{p}\cdot\mathbf{k})(\mathbf{p}'\cdot\mathbf{k})/\mathbf{k}^2] + (p\cdot k)(p'\cdot k)/k_0^2 \\ &\quad + (p\cdot k)(p'_0/k_0) + (p'\cdot k)(p_0/k_0), \end{aligned}$$

重新整理各项，我们得到

$$A+B+C+D=2\frac{[\mathbf{p}^2-(\mathbf{p}\cdot\mathbf{k})^2/k_0^2](4p_0'^2-\mathbf{q}^2)}{(p\cdot k)^2}$$
$$+2\frac{[\mathbf{p}'^2-(\mathbf{p}'\cdot\mathbf{k})^2/k_0^2](4p_0^2-\mathbf{q}^2)}{(p'\cdot k)^2}$$
$$-4\frac{[\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}'-(\mathbf{p}\cdot\mathbf{k})(\mathbf{p}\cdot\mathbf{k})/k_0^2](2p_0'^2+2p_0^2-\mathbf{q}^2)}{(p\cdot k)(p'\cdot k)}$$
$$+4k_0^2\frac{[\mathbf{p}^2-(\mathbf{p}\cdot\mathbf{k})^2/k_0^2]+[\mathbf{p}'^2-(\mathbf{p}'\cdot\mathbf{k})^2/k_0^2]}{(p\cdot k)(p'\cdot k)}\cdot \tag{42.20}$$

我们引入一个参照系，使得 x_3 轴沿 $\mathbf{k}$ 方向，x_1 轴在 $(\mathbf{p}\cdot\mathbf{k})$ 的平面内，θ 是 $\mathbf{p}$ 与 $\mathbf{k}$ 之间的夹角，而 θ' 与 ϕ' 是 $\mathbf{p}'$ 相对于 $\mathbf{k}$ 的极角。因此，$\mathbf{k}$，$\mathbf{p}$ 与 $\mathbf{p}'$ 的分量是

$$\mathbf{k}=(0,0,k_0),$$
$$\mathbf{p}=(|\mathbf{p}|\sin\theta,0,|\mathbf{p}|\cos\theta),$$
$$\mathbf{p}'=(|\mathbf{p}'|\sin\theta'\cos\phi',|\mathbf{p}'|\sin\theta'\sin\phi',|\mathbf{p}'|\cos\theta'). \tag{42.21}$$

把(42.13)与(42.20)式代入(42.8)式，并利用(42.21)式，可将韧致辐射截面写成下面形式①

$$\sigma=\frac{\alpha Z^2r_0^2}{(2\pi)^2}\int d\Omega\int d\Omega_k\int\frac{dk_0}{k_0}\frac{|\mathbf{p}'|}{|\mathbf{p}|}\frac{2}{\mathbf{q}^4}$$
$$\times\left[\frac{\mathbf{p}^2\sin^2\theta}{(p_0-|\mathbf{p}|\cos\theta)^2}(4p_0'^2-\mathbf{q}^2)\right.$$
$$+\frac{\mathbf{p}'^2\sin^2\theta'}{(p_0'-|\mathbf{p}'|\cos\theta')^2}(4p_0^2-\mathbf{q}^2)$$
$$\left.-2\frac{|\mathbf{p}||\mathbf{p}'|\sin\theta\sin\theta'\cos\phi'}{(p_0-|\mathbf{p}|\cos\theta)(p_0'-|\mathbf{p}'|\cos\theta')}(2p_0'^2+2p_0^2-\mathbf{q}^2)\right.$$

① H.A.Bethe and W. Heitler, Proc. Roy. Soc. London A146, 83(1934).

$$+2k_0^2\frac{\mathbf{p}^2\sin^2\theta+\mathbf{p}'^2\sin^2\theta'}{(p_0-|\mathbf{p}|\cos\theta)(p_0'-|\mathbf{p}'|\cos\theta')}\Bigg], \tag{42.22}$$

式中由(42.16)式给出的 $\mathbf{q}^2$ 可以表示为

$$\mathbf{q}^2=\mathbf{p}^2+\mathbf{p}'^2+k_0^2-2|\mathbf{p}|k_0\cos\theta+2|\mathbf{p}'|k_0\cos\theta' -2|\mathbf{p}||\mathbf{p}'|(\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos\phi'), \tag{42.23}$$

并且

$$d\Omega_k=2\pi\sin\theta d\theta,\quad d\Omega=\sin\theta' d\theta'\theta\phi', \tag{42.24}$$

而 r_0 由(38.30)式确定，并且

$$\alpha=e^2/4\pi c\hbar \tag{42.25}$$

通常称为精细结构常数。

43. 衰变过程

散射算符也可以用来计算不稳定粒子的寿命，我们将讨论一般的方法和两个应用。

a. 寿命的推导

设具有传播四维矢量 q 的粒子衰变成两个传播四维矢量为 k 与 k' 的粒子，令这一过程的散射算符的矩阵元是

$$S_{fi}=V^{-3/2}(2\pi)^4\delta(q-k-k')F. \tag{43.1}$$

根据 36 节的论述，得出每单位时间的跃迁几率为

$$w=\frac{c}{(2\pi)^2}\int d\Omega\frac{|\mathbf{k}|k_0}{\partial(k_0+k_0')/\partial k_0}|F|^2, \tag{43.2}$$

其中 $d\Omega$ 是 $\mathbf{k}$ 方向的立体角元，$\partial(k_0+k_0')/\partial k_0$ 应利用动量守恒并把 k 的角变数当作常数来求出。而粒子的寿命是由

$$\tau=\frac{1}{w} \tag{43.3}$$

给出。

类似地，如果传播四维矢量为 q 的粒衰变成传播四维矢量分

别为 k，k' 及 k'' 的三个粒子，对这一过程，散热算符的矩阵元是

$$S'_{fi}=V^{-2}(2\pi)^4\delta(q-k-k'-k'')F', \tag{43.4}$$

因此代替（43.2）式，每单位时间的跃迁几率变为

$$w'=\frac{c}{(2\pi)^5}\int d\mathbf{k}''\int d\Omega\frac{|\mathbf{k}|k_0}{\partial(k_0+k'_0)/\partial k_0}|F'|^2, \tag{43.5}$$

而寿命 τ' 为

$$\tau'=\frac{1}{w'}. \tag{43.6}$$

（b）中性 π 介子衰变成两个光子

中性 π 介子是众所周知的不稳定粒子，它衰变成两个光子，可以借助于唯象耦合

$$L_{int}=\eta{:}U\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\partial_\mu A_\nu\partial_\lambda A_\rho{:} \tag{43.7}$$

来描述。其中 U 是代表中性 π 介子场的厄密赝标量算符，而 $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ 是完全反对称的，而 $\varepsilon_{1234}=i$。像在 35 节中所阐明的那样，有效相互作用能量密度由

$$H_{eff}=-\eta{:}U\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\partial_\mu A_\nu\partial_\lambda A_\rho{:} \tag{43.8}$$

给出，而散射算符中的一阶项是

$$\begin{aligned}S_1&=-(i/c\hbar)\int dx H_{eff}(x)\\&=(in/c\hbar)\int dx{:}U\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\partial_\mu A_\nu\partial_\lambda A_\rho{:}.\end{aligned} \tag{43.9}$$

在 18 节中所描述过的标量场的处理也可以应用于赝标量场，因此赝标量算符 U 的付里叶分解也由（18.8）式给出，而对光子场的付里叶分解可以利用（34.8）及（34.10）式。因此对具有传播四维矢量为 q 的中性 π 介子衰变成两个传播四维矢量分别为 k 及 k' 而极化矢量分别为 $\mathbf{e}$ 及 $\mathbf{e}'$ 的光子来说，（43.9）式导致的矩阵元为

$$S_{fi}=V^{-3/2}(2\pi)^4\delta(q-k-k')F, \tag{43.10}$$

其中

$$F = i\eta(c\hbar/2q_0k_0k_0')^{1/2}[(\mathbf{e}\times\mathbf{e}')\cdot\mathbf{k}k_0 + (\mathbf{e}'\times\mathbf{e})\cdot\mathbf{k}'k_0]. \tag{43.11}$$

在 π 介子静止的坐标系中，矩阵元可以通过取

$$\mathbf{q}=0, \quad q_0=\mu, \quad \mathbf{k}'=-\mathbf{k}, \quad k_0'=k_0=\mu/2, \tag{43.12}$$

得到简化，其中 $\mu\hbar/c$ 等于 π 介子的质量。这时，(43.11) 式简化为

$$F = i\eta(2c\hbar/\mu)^{1/2}[(\mathbf{e}\times\mathbf{e}')\cdot\mathbf{k}], \tag{43.13}$$

对光子的极化态取和，(43.2) 式给出

$$w = \frac{\eta^2\mu c^2\hbar}{16\pi^2}\int d\Omega \sum_{e,e'}[(\mathbf{e}\times\mathbf{e}')\cdot\mathbf{k}]^2. \tag{43.14}$$

因为根据 (37.10) 式有

$$\sum_{e,e'}[(\mathbf{e}\times\mathbf{e}')\cdot\mathbf{k}]^2 = 2\mathbf{k}^2 = \frac{\mu^2}{2},$$

并且鉴于两个光子的不可区分性有

$$\int d\Omega = \int_0^{\pi/2} 2\pi\sin\theta d\theta = 2\pi,$$

于是我们得到对应于所考虑的衰变方式的寿命 τ 满足

$$\tau^{-1} = w = \eta^2\mu^3c^2\hbar/16\pi. \tag{43.15}$$

(c) 中性 π 介子衰变成正电子，电子及光子

一个中性的 π 介子还可以衰变成一个正电子，一个电子及一个光子，并且这种衰变方式可以利用唯象的 π 介子-光子相互作用及通常的电子光子相互作用来处理。在 (34.2) 式中用下列代换

$$H \to H + H_{eff},$$

则与 H_{eff} 成线性关系的 S 的二阶项变为

$$S_2 = -(1/c^2\hbar^2)\int dx\int dx' T[H_{eff}(x)H(x')]. \tag{43.16}$$

把（43.8）及（34.3）式代入上式，收缩掉一对光子算符，并实行通常的付里叶分解，我们得到衰变矩阵元为

$$S'_{fi}=V^{-2}(2\pi)^4\delta(q-p-p'-k)F' \qquad (43.17)$$

其中

$$F'=\frac{e\eta}{(k_0q_0)^{1/2}}\frac{\varepsilon_{\mu_1\rho}k_\mu e_i q_\lambda}{(k-q)^2}\bar{u}(p')\gamma_\rho v(p), \qquad (43.18)$$

式中 q 是初态 π 介子的传播四维矢量，p，p' 及 k 分别是末态正电子，电子及光子的传播四维矢量，而 e_i 是光子的极化矢量。

在相对 π 介子静止的参照系中

$$q=0, \qquad q_0=\mu, \qquad (43.19)$$

所以（43.18）式便简化为

$$F'=\frac{e\eta}{(\mu k_0)^{1/2}(\mu-2k_0)}(e\times k)_i[\bar{u}(p')\gamma_i v(p)], \qquad (43.20)$$

再利用 37 节中论述，实行对正电子和电子自旋态取和并对光子极化态的取和后，得到

$$\sum|F'|^2=\frac{e^2\eta^2}{\mu k_0(\mu-2k_0)^2}\frac{2}{p_0p'_0}[(\kappa^2+p_0p'_0)k_0^2 -(p\cdot k)(p'\cdot k)]. \qquad (43.21)$$

借助于动量和能量的守恒关系式

$$p+p'+k=0, \qquad (43.22)$$

$$p_0+p'_0+k_0=\mu, \qquad (43.23)$$

可以使（43.21）式写成这样形式

$$\sum|F'|^2=\frac{e^2\eta^2}{\mu k_0(\mu-2k_0)^2}\frac{2}{p_0p'_0}[p_0^2(\mu_0-2\mu k_0) -p_0\mu(\mu-2k_0)(\mu-k_0) +\mu^2\left(\frac{1}{2}\mu-k_0\right)^2+\mu\left(\frac{1}{2}\mu-k_0\right)k_0^2+\kappa^2k_0^2]. \qquad (43.24)$$

根据（43.25）式，每单位时间的跃迁几率是

$$w' = \frac{c}{(2\pi)^6}\int dk \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}|\, p_0}{\partial(p_0 + p_0')/\partial p_0}\sum |F'|^2 \qquad (43.25)$$

而

$$d\Omega = 2\pi \sin\theta\, d\theta, \qquad (43.26)$$

式中 θ 是 $\mathbf{p}$ 与 $\mathbf{k}$ 的夹角。从动量守恒关系 (43.22) 式得出

$$p_0'^2 = \mathbf{p}'^2 + \kappa^2 = (\mathbf{p} + \mathbf{k})^2 + \kappa^2$$
$$= p_0^2 + k_0^2 + 2|\mathbf{p}|k_0 \cos\theta,$$

由上式得出

$$\frac{\partial(p_0 + p_0')}{\partial p_0} = \frac{|\mathbf{p}|(p_0 + p_0') + p_0 k_0 \cos\theta}{|\mathbf{p}|p_0'},$$

或者，利用能量守恒关系 (43.23) 式，得

$$\frac{\partial(p_0 + p_0')}{\partial p_0} = \frac{|\mathbf{p}|(\mu - k_0) + p_0 k_0 \cos\theta}{|\mathbf{p}|p_0'} \qquad (43.27)$$

还可以从 (43.22) 式及 (43.23) 式得到

$$|\mathbf{p}|k_0 \cos\theta + p_0(\mu - k_0) = \mu\left(\frac{1}{2}\mu - k_0\right), \qquad (43.28)$$

所以

$$\sin\theta d\theta = \frac{|\mathbf{p}|(\mu - k_0) + p_0 k_0 \cos\theta}{\mathbf{p}^2 k_0} dp_0. \qquad (43.29)$$

关系式 (43.27) 及 (43.29) 式使我们能把 (43.25) 式表示为

$$w' = \frac{c}{(2\pi)^4}\int dk \int dp_0 \frac{p_0 p'_0}{k_0}\sum |F'|^2, \qquad (43.30)$$

式中对 p_0 积分的上下限可以通过使 (43.28) 式中的 $\theta = \pi$ 及 $\theta = 0$ 得出

$$p_0 = \frac{1}{2}(\mu - k_0) \pm \frac{1}{2}k_0\left(\frac{\mu^2 - 2\mu k_0 - 4\kappa^2}{\mu^2 - 2\mu k_0}\right)^{1/2} \qquad (43.31)$$

把 (43.24) 式代入 (43.30) 式后，对 p_0 积分，并令

$$dk = 4\pi k_0^2 dk_0, \quad 2k_0/\mu = \xi,$$

我们得出：

$$w' = \frac{e^2\eta^2\mu^3 c}{96\pi^3}\int_0^{1-4\kappa^2/\mu^2} d\xi\xi^3\frac{1-\xi+2\kappa^2/\mu^2}{(1-\xi)^2}$$

$$\times\left(\frac{1-\xi-4\kappa^2/\mu^2}{1-\xi}\right)^{1/2}, \qquad (43.32)$$

式中 ξ 的最大值对应于

$$p = p' = -\frac{1}{2}k, \qquad 2(k_0^2/4+\kappa^2)^{1/2}+k_0=\mu$$

的情况。

当考虑两种衰变率 (43.15) 及 (43.32) 式时，中性 π 介子的寿命 $\bar{\tau}$ 可表示为

$$\bar{\tau}^{-1} = \tau^{-1}+\tau'^{-1}, \qquad (43.33)$$

式中 $\tau^{-1}=w$ 而 $\tau'^{-1}=w'$。

特别值得注意的是衰变率 (43.32) 与 (43.15) 式的比率是与唯象参数 η 无关的，并取这样形式①

$$\frac{w'}{w} = \frac{2\alpha}{3\pi}\int^{1-4\kappa^2/\mu^2} d\xi\xi^3\frac{1-\xi+2\kappa^2/\mu^2}{(1-\xi)^2}$$

$$\cdot\left(\frac{1-\xi-4\kappa^2/\mu^2}{1-\xi}\right)^{1/2} \qquad (43.34)$$

或者

$$\frac{w'}{w}\approx\frac{2\alpha}{3\pi}\left(2\ln\frac{\mu}{\kappa}-3.5\right), \text{当}\kappa^2/\mu^2\ll 1. \qquad (43.35)$$

① R.H.Dalitz, Proc.Phys.Soc.London A64, 667(1951).

第六章　规则化与重整化

我们发现散射过程的高阶贡献含有严重的发散困难。我们将要说明如何通过规则化用精确的方式来计算这些发散积分，和如何通过重正化来消除这些发散。

44. 散射过程的高阶贡献

在第五章中我们限于讨论对各种物理过程散射算符的最低阶贡献。鉴于无量纲参量$\frac{e^2}{4\pi c\hbar}\approx 137$是小量，那里所作的计算是足够精确的，但还不能解释更加精细的实验结果。含有高于$\frac{e^2}{4\pi c\hbar}$幂的高阶贡献称为辐射修正。

34节中的论述还可以应用于散射过程的高阶贡献，并且依靠相互作用图来进行讨论将是有益的。在任何一个相互作用图中，代表初态及末态粒子的线称为外线，而所有其它的线称为内线。图形的贡献包括与外线相对应的算符 $\psi(x)$，$\overline{\psi}(x)$和 $A_\mu(x)$ 以及与内线相对应的函数 $D_F(x)$与 $S_F(x)$。通过下列公式的代换

$$A_\mu(x)=A_\mu(k)e^{ik\cdot x},\quad \psi(x)=\psi(p)e^{ip\cdot x},$$

$$\overline{\psi}(x)=\overline{\psi}(p)e^{-ip\cdot x}, \tag{44.1}$$

可以进行付里叶分解，按照（34.8）及（34.9）式，上式中 k 表示初态光子的传播四维矢量或者是末态光子负的传播四维矢量的负值，而 p 表示电子的传播四维矢量或是正电子的传播四维矢量的负值。此外，按照（34.6）与（34.7）式，有

$$D_F(x) = (2\pi)^{-4}\int dk e^{ik\cdot x} D_F(k),$$

$$S_F(x) = (2\pi)^{-4}\int dp e^{ip\cdot x} S_F(p), \qquad (44.2)$$

其中

$$D_F(k) = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{k^2+\lambda^2-i\varepsilon},$$

$$S_F(p) = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{ip\cdot\gamma-\kappa}{p^2+\kappa^2-i\varepsilon}, \qquad (44.3)$$

为了将来的方便，在 $D_F(k)$ 中已引入一个不变的参数 λ，但要明白在每一个有物理意义的结果中我们必须最终使 $\lambda=0$。在 $D_F(k)$ 及 $S_F(p)$ 中通常也不写出无穷小量 ε，而在影响积分结果的地方再把它写进来。在 (44.1) 中的传播四矢量 k 与 p 对应着与外线相联系的实粒子，与此类似，在 (44.2) 式中，k 与 p 可以看成是与内线相联系的虚粒子的传播四维矢量。散射算符的空时积分保证在每一个顶角相遇的传播四维矢量的代数和为零。然而实粒子的传播四维矢量满足

$$k^2=0, \quad p^2+\kappa^2=0, \qquad (44.4)$$

而对虚粒子，没有满足上述关系的要求。

散射过程的高阶贡献的计算不仅麻烦，而且还含有严重的发散困难。为了看出发散是如何出现的，首先让我们研究电子自能的简单例子。对于一个电子同它自身相互作用的散射算符的二阶贡献可以按34节中的论述得到，并由下式给出

$$S_{el} = (e^2/c^2\hbar^2)\int dx \int dx' :A_\mu(x)\cdot A_\nu(x')\cdot$$

$$\times \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)\cdot\cdot\bar{\psi}(x')\cdot\cdot\gamma_\nu\psi(x'):$$

$$= (e^2/c\hbar)\int dx \int dx' D_F(x-x'):$$

$$\times \bar{\psi}(x)\gamma_\mu S_F(x-x')\gamma_\mu\psi(x'): \qquad (44.5)$$

通过令

$$\bar{\psi}(x)=\bar{\psi}(p')e^{-ip'\cdot x'},\quad \psi(x')=\psi(p)e^{ip\cdot x'},$$

$$D_F(x-x')=(2\pi)^{-4}\int dx e^{ik\cdot(x-x')}D_F(k),$$

$$S_F(x-x')=(2\pi)^{-4}\int dk' e^{ik'\cdot(x-x')}S_F(k'),$$

并借助于（34.16）式对空时进行积分，（44.5）式可以表示成这样形式

$$S_{el}=\delta(p-p')(e^2/c\hbar)\int dk D_F(k):\qquad (44.6)$$

$$\times\bar{\psi}(p')\gamma_\mu S_F(p-k)\gamma_\mu\psi(p):$$

它可以用图44.1的相互作用图表示。把（44.3）式代入（44.6）式给出

$$S_{el}=\delta(p-p')\left(\frac{e^2}{c\hbar}\right)$$

$$\times\int dk\,\frac{:\bar{\psi}(p')\gamma_\mu[i(p-k)\cdot\gamma-\kappa]\gamma_\mu\psi(p):}{[k^2+\lambda^2][(p-k)^2+\kappa^2]}\qquad (44.7)$$

上式对于大的 k 值来说，其行为大致像

$$\int dk\frac{k_\mu}{k^4}$$

因此电子的自能表现出线性发散。

在光子的自能中也有类似的情形出现。一个光子与其自身相互作用的散射算符的二阶贡献是

$$S_{ph}=(e^2/2c^2\hbar^2)\int dx\int dx':A_\mu(x)A_\nu(x')$$

$$\times\bar{\psi}(x)\cdot\gamma_\mu\psi(x)\cdot\bar{\psi}(x')\cdot\gamma_\nu\psi(x')\cdot:.\qquad (44.8)$$

为了使全部的收缩出现在相毗邻的一对场算符之间，要借助下面

关系式

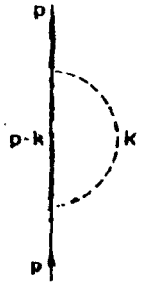


图 44.1 二阶电子自能

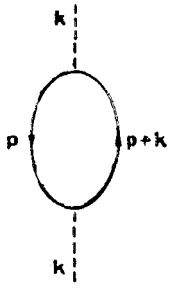


图 44.2 二阶光子自能图

$$:\bar{\psi}_\alpha(x)\cdot[\gamma_\mu\psi(x)\cdot\bar{\psi}(x')\cdot\gamma_\nu]_{\alpha\beta}\psi_\beta(x'):$$
$$=-:\psi_\beta(x')\cdot\bar{\psi}_\alpha(x)\cdot[\gamma_\mu\psi(x)\cdot\bar{\psi}(x')\cdot\gamma_\nu]_{\alpha\beta}:,$$

来重新排列 (44.8) 式中的电子场算符。上式中负号是由这些算符的费密性引起的，然后利用 (34.5) 式得出

$$S_{ph}=(e^2/2c^2\hbar^2)\int dx\int dx':A_\mu(x)A_\nu(x'):$$
$$\times \mathrm{Tr}[S_F(x'-x)\gamma_\mu S_F(x-x')\gamma_\nu]. \qquad (44.9)$$

要记住光子场算符的每一项除了含有 k' 分量外还含有 k，按照 (44.1) 式及 (44.2) 式，可以对 (44.9) 式进行付里叶分解

$$S_{ph}=\delta(k+k'):A_\mu(k')A_\nu(k):(e^2/c^2\hbar^2)$$
$$\times\int dp\,\mathrm{Tr}[S_F(p)\gamma_\mu S_F(p+k)\gamma_\nu], \qquad (44.10)$$

上式可以用如图 44.2 所示的相互作用图表示。把 (44.3) 式代入 (44.10) 式得出

$$S_{ph}=\delta(k+k'):A_\mu(k')A_\nu(k):\left(\frac{e^2}{c^2\hbar^2}\right)$$

$$\cdot\int dp\frac{\mathrm{Tr}\{[ip\cdot\gamma-\kappa]\gamma_\mu[i(p+k)\cdot\gamma-\kappa]\gamma_\nu\}}{[p^2+\kappa^2][(p+k)^2+\kappa^2]},$$

(44.11)

对于很大的 p 值，上式的行为大致像

$$\int dp\frac{1}{p^2}$$

因此光子的自能表现出是二次发散。

在 46 节中将充分讨论上述例子，在这些例子中，我们遇到的是对于虚粒子大的传播四维矢量值发散的积分。这样的发散不限于一个电子或光子的自相互作用，而且它们也出现在一切物理过程的高阶贡献中。例如，在图 34.3 已给出了光子-电子散射的二阶相互作用图形，图 44.3 表示同一过程的四阶图形。我们理解在上图的每一个图形里，外部光子线可以用初态光子和末态光子传播四维矢量的两种不同方式来标记。这些高阶图形显然会产生发散。

45. 规则化

为了计算出现在散射算符贡献中的发散积分，我们来叙述辅助场方法①，它不仅很方便而且完全没有含糊之处。这种方法的要点是在拉格朗日密度中引入无限大质量的光子和电子的辅助场。对某些辅助光子场，把通常的拉格朗日密度符号改变为相反的符号，而对某些辅助的电子场把通常的费密对易关系用玻色对易关系来代替。利用不定度规及适当的初始条件，可以保证辅助场一直是不可观察的，而对虚粒子大的传播四维矢量值，所有发散积分变成收敛。

(*a*) 辅助光子场

---

① N. Gupta, Proc. Phys. Soc. London A66, 129 (1953)

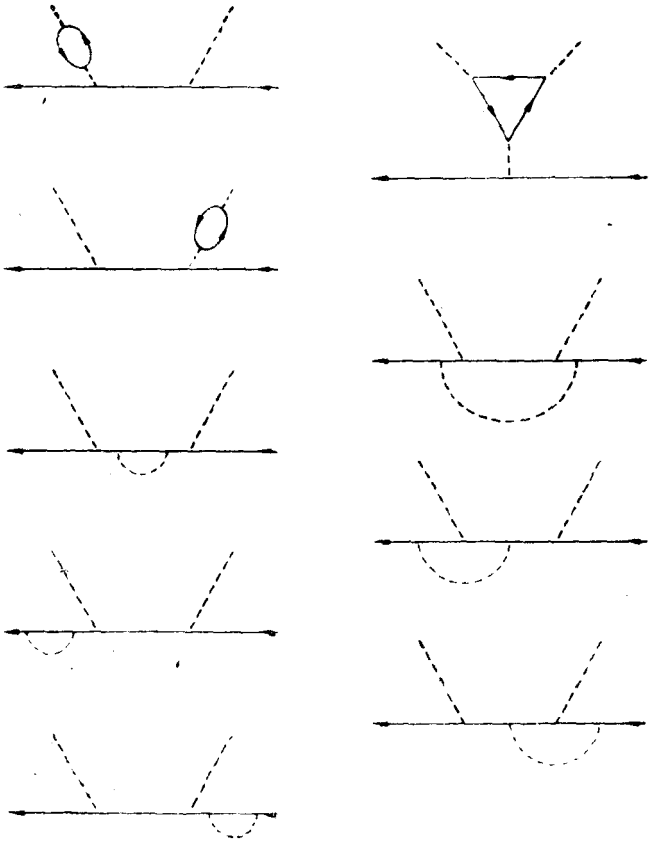


图 44.3　四阶光子-电子散射

我们假定电子不仅与通常的光子场发生相互作用，而且也与一个或更多个质量很大的辅助光子场发生相互作用。后面我们将阐明实际上应采用多少个这样的辅助场，但现在我们首先讨论两类辅助光子场，并称它们为正常辅助光子场和反常辅助光子场。

对正常辅助光子场，我们取拉格朗日密度为

$$L=-\frac{1}{2}:[(\partial_\nu A_\mu)^2+\xi^2 A_\mu^2]:, \tag{45.1}$$

其中 ξ 是一个很大的最后趋于无穷的常数。由上式得到的场方程，能量密度和对易关系是

$$(\partial^2-\xi^2)A_\mu=0, \tag{45.2}$$

$$H=\frac{1}{2}:[\partial_i A_\mu)^2+(\partial_0 A_\mu)^2+\xi^2 A_\mu^2]:, \tag{45.3}$$

和

$$\begin{aligned}[A_\mu(\mathbf{x},t),\partial_0 A_\nu(\mathbf{x}',t)]&=ic\hbar\delta_{\mu\nu}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'),\\ [A_\mu(\mathbf{x},t),A_\nu(\mathbf{x}',t)]&=0,\end{aligned} \tag{45.4}$$

所以付里叶分解后，场能量可以表示为

$$\mathscr{H}=\sum_{\mathbf{k}} c\hbar k_0[a_i^*(\mathbf{k})a_i(\mathbf{k})-a_0^*(\mathbf{k})a_0(\mathbf{k})] \tag{45.5}$$

其中

$$\begin{aligned}[a_i(\mathbf{k}),a_j^*(\mathbf{k})]&=\delta_{ij},\\ [a_0(\mathbf{k}),a_0^*(\mathbf{k})]&=-1,\end{aligned} \tag{45.6}$$

而

$$k_0=(\mathbf{k}^2+\xi^2)^{1/2}. \tag{45.7}$$

按照在 13 节中的论述，我们发现，对每一个 $\mathbf{k}$ 值，(45.5) 式描写了四个玻色振子的能量，其中三个是正常的，而第四个是反常的，但所有这些振子都对应着正能量为 $c\hbar k_0$ 的辅助光子场。通过对拉格朗日密度附加通常耦合项 $ie:A_\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi:$ 来考虑辅助光子场与电子场的相互作用。并且散射算符的贡献可借助于收缩

$$A_\mu(x)^{\cdot}A_\nu(x')^{\cdot}=-ic\hbar\delta_{\mu\nu}\Delta_F(\xi;x-x') \tag{45.8}$$

得到。其中

$$\begin{aligned}\Delta_F(\xi:x)&=(2\pi)^{-4}\int dk e^{ikx}\Delta_F(\xi;k),\\ \Delta_F(\xi;k)&=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{k^2+\xi^2-i\varepsilon},\end{aligned} \tag{45.9}$$

为了保证辅助光子一直是不可观察的，我们假定在初态中没有辅助光子，在相互作用绘景中，这可以利用初始条件

$$A_\mu^+ \Psi_i = 0 \tag{45.10}$$

来表示。而且，由于参数 ξ 最终要趋于无限大，所以通过选择足够大的 ξ 我们总可以使辅助光子的能量比系统给定的初态能量大得多。因此考虑到能量守恒，辅助光子肯定不会出现在系统的任何末态里。

对反常辅助光子场，拉格朗日密度取为

$$L = \frac{1}{2} :[\partial_\nu A_\mu)^2 + \xi^2 A_\mu^2]:, \tag{45.11}$$

它与（45.1）式差一个负号。因此我们可以得到场方程（45.2）式但能量密度及对易关系由

$$H = -\frac{1}{2} :[(\partial_i A_\mu)^2 + (\partial_0 A_\mu)^2 + \xi^2 A_\mu^2]: \tag{45.12}$$

和

$$[A_\mu(\mathbf{x},t), \partial_0 A_\nu(\mathbf{x}',t)] = -ic\hbar\delta_{\mu\nu}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'),$$

$$[A_\mu(\mathbf{x},t), A_\nu(\mathbf{x}',t)] = 0 \tag{45.13}$$

给出。所以付里叶分解后，场能取这样形式

$$\mathscr{H} = \sum_{\mathbf{k}} c\hbar k_0 [-a_i^*(\mathbf{k}) a_i(\mathbf{k}) + a_0^*(\mathbf{k}) a_0(\mathbf{k})] \tag{45.14}$$

而且

$$[a_i(\mathbf{k}), a_j^*(\mathbf{k})] = -\delta_{ij},$$

$$[a_0(\mathbf{k}), a_0^*(\mathbf{k})] = 1, \tag{45.15}$$

其中 k_0 由（45.7）式给定。13节的论述在这里表示为对每一个 $\mathbf{k}$，（45.14）式描述了三个反常玻色振子与一个正常玻色振子，并且所有这些振子都对应于正能量为 $c\hbar k_0$ 的辅助光子。正常辅助光子场与电子场的耦合具有通常的形式，但对散射算符的贡献，所要求的收缩由

$$A_\mu(x)^{\cdot} A_\nu(x')^{\cdot} = ic\hbar\delta_{\mu\nu}\Delta_F(\xi; x-x') \tag{45.16}$$

给出。上式与(45.8)式差一个负号。通过引入初始条件(45.10)式，仍能保证辅助光子场是不可观察的。

(*b*)辅助电子场

除了辅助光子场外，让我们引进一个质量很大的辅助电子场。对一个辅助电子场，我们选取拉格朗日密度为

$$L = -c\hbar{:}(\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi + \eta\bar{\psi}\psi){:}, \tag{45.17}$$

上式与(23.2)式具有同样形式，因此我们除了将讨论与两类对易关系相对应的两类辅助电子场外，可以用通常的方法得到拉格朗日的形式理论。

正常辅助电子场仅仅是一个带有很大质量的普通电子场。按照25节中的论述，它服从费密对易关系

$$\begin{aligned}\{\psi_\alpha(\mathbf{x},t),\psi^*_\beta(\mathbf{x}',t)\} &= \delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'),\\ \{\psi_\alpha(\mathbf{x},t),\psi_\beta(\mathbf{x}',t)\} &= 0,\end{aligned} \tag{45.18}$$

并且场能可以表示为

$$\mathscr{H} = \sum_{\mathbf{k}}\sum_{r} c\hbar k_0[a^*_r(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k}) + b^*_r(\mathbf{k})b_r(\mathbf{k})] \tag{45.19}$$

而

$$\{a_r(\mathbf{k}),a^*_s(\mathbf{k})\} = \delta_{rs}, \qquad \{b_r(\mathbf{k}),b^*_s(\mathbf{k})\} = \delta_{rs}, \tag{45.20}$$

并且

$$k_0 = (\mathbf{k}^2+\eta^2)^{1/2}. \tag{45.21}$$

因此对于每一个$\mathbf{k}$，(45.19)式描述了对应于能量为$c\hbar k_0$的辅助电子和正电子的四个费密振子的能量。正常辅助电子场与光子场的相互作用采用通常的耦合形式，而散射算符的贡献包含收缩

$$\psi_\alpha(x)^\cdot\bar{\psi}_\beta(x')^\cdot = iS_{F,\alpha\beta}(\eta;x-x'), \tag{45.22}$$

其中

$$S_F(\eta;x)=(2\pi)^{-4}\int dk e^{ik\cdot x}S_F(\eta;k),$$

$$S_F(\eta;k)=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{ik\cdot\gamma-\eta}{k^2+\eta^2-i\varepsilon} \tag{45.23}$$

通过引入初始条件

$$\psi^+\Psi_i=0,\quad \bar{\psi}^+\Psi_i=0 \tag{45.24}$$

及选择 η 足够大，可以保证辅助电子与正电子一直是不可观测的。

对于反常辅助电子场也可以利用拉格朗日密度（45.17)式，然而反常辅助电子场服从玻色对易关系

$$\begin{aligned}&[\psi_\alpha(x,t),\psi^*_\beta(x',t)]=\delta_{\alpha\beta}\delta(x-x'),\\&[\psi_\alpha(x,t),\psi_\beta(x',t)]=0,\end{aligned} \tag{45.25}$$

场能可以表示为

$$\mathscr{H}=\sum_k\sum_r{}' chk_0[a^*_r(k)a_r(k)-b^*_r(k)b_r(k)] \tag{45.26}$$

而

$$\begin{aligned}&[a_r(k),a^*_s(k)]=\delta_{rs},\\&[b_r(k),b^*_s(k)]=-\delta_{rs},\end{aligned} \tag{45.27}$$

其中 k_0 由（45.21）式给定。从13节中的论述得出，对每一个 k 值，(45.20) 式描述了两个正常玻色振子及两个反常玻色振子，这些振子对应于具有能量为正 $c\hbar k_0$ 的辅助电子和正电子。反常辅助电子场与光子场的耦合具有通常的形式，而对散射算符的贡献来说，所需要的收缩仍由（45.22）式给出。然而，在任何相互作用图形中，一个闭合的电子线回路的贡献需要在进行毗邻一对算符的收缩以前要对电子场的算符进行重新排列。这样的重新排列对于费密子情况产生一个负号，但对玻色子情况不产生负号，因此在反常情况下一个闭合的辅助电子回路的贡献与在正常

情况下闭合辅助电子回路的贡献差一个负号。在反常情况下也可以通过引入初始条件及选择充分大的 η 来保证辅助的电子和正电子一直是不可观察的。

(c)用辅助场进行规则化

在假设所有光子场与所有电子场都有相互作用的量子电动力学中，我们现在考虑引入任意数量的辅助光子场和辅助电子场的影响。

我们注意到在任何相互作用图中，一条内部光子线除了数字因子外产生的贡献是

$$D_F(k)。 \tag{45.28}$$

引入辅助光子场的效果应是用

$$R[D_F(k)] = D_F(k) + \sum_i c_i \Delta_F(\xi_i; k) \tag{45.29}$$

代替（45.28）式。式中取和是遍及全部的辅助光子场，而 c_i 按辅助场是正常的还是反常的分别取 $+1$ 或 -1。当用 $f(\lambda^2; k)$ 表示 $D_F(k)$ 时，我们还可以把（45.29）式写为

$$R[f(\lambda^2; k)] = f(\lambda^2; k) + \sum_i c_i f(\xi_i^2; k). \tag{45.30}$$

此外，在相互作用图中的全部电子线以一个或更多个链的形式出现。每个这样的链不是形成一个闭合回路就是一个两端代表两外部电子线的开链。类似地，辅助电子线也将以链的形式出现，但由于辅助电子在初态或末态中不可能存在，所以辅助电子线只能形成闭合回路。由此得出如果任意闭合电子回路的贡献是由

$$\int g(\kappa^2; k) dk \tag{45.31}$$

给出，那么引入辅助电子场的效果应是用

$$R[g(\kappa^2; k)] = g(\kappa^2; k) + \sum_i c_i g(\eta_i^2; k) \tag{45.32}$$

代替 $g(\kappa^2,k)$。式中取和遍及全部辅助电子场，按照辅助场是正常的还是反常的，c_i 分别等于 $+1$ 或 -1。

至此，除了全部辅助场质量最终要趋于无限大外，辅助场的数目及质量一直保持了任意性。然而，由于我们引入辅助场的目的在于用明确的方式来计算发散积分，所以我们将描述选择辅助场的数量及质量的一般方法，以便在所得理论中，所有遍及 k 空间的积分将是收敛的。

首先让我们考虑任意发散积分，它含有表示一条内部光子线的一个因子 $D_F(k)=f(\lambda^2,k)$。让我们把 $f(\lambda^2;k)$ 相对于 λ^2 的第一阶，第二阶及第 n 阶导数分别表示为 $f'(\lambda^2;k)$，$f''(\lambda^2;k)$ 及 $f^{(n)}(\lambda^2,k)$。从 (44.3) 式可以明显看到，对于大的 k 值，$f'(\lambda^2;k)$ 具有比 $f(\lambda^2,k)$ 低的阶，而 $f''(\lambda^2;k)$ 具有更低的阶，等等。我们还可以写下

$$(-1)\int_0^{\xi^2}dz_1 f'(\lambda^2+z_1;k)=f(\lambda^2;k)-f(\lambda^2+\xi^2;k),$$

$$\begin{aligned}(-1)^2\int_0^{\xi^2}dz_1\int_0^{\xi^2}dz_2 f''(\lambda^2+z_1+z_2;k)&=f(\lambda^2;k)-f(\lambda^2+\xi^2;k)\\&\quad-f(\lambda^2+\xi^2;k)+f(\lambda^2+2\xi^2;k),\end{aligned}$$

等等，因此可以这样来选择正常光子场和反常辅助光子场的数目和质量，使得 (45.30) 式可以表示为

$$\begin{aligned}R[f(\lambda^2;k)]=(-1)^n\int_0^{\xi^2}dz_1\int_0^{\xi^2}&dz_2\cdots\int_0^{\xi^2}dz_n f^{(n)}(\lambda^2+z_1\\&+z_2+\cdots+z_n;k)\end{aligned}\qquad(45.33)$$

的形式，式中 ξ 最终要趋于无限大。在适当选择 n 的情况下，通过利用 (45.33) 式，我们总能使得给定的积分在整个 k 空间收敛。

现在让我们考虑引起 (45.31)式这种形式的发散积分的闭合电子线回路的贡献。由于 $g(\kappa^2;k)$ 是形式为 S_k 的因子的乘积，从 (44.3) 式显然可知，对于大的 k 值，$g'(\kappa;k)$ 具有比 $g(\kappa^2;k)$ 低的阶，$g''(\kappa^2,k)$ 具有更低的阶，如此等等，式中的“撇”是表示相对于 κ^2 的微分。而且，像在辅助光子场的情况一样，可以这样来选取正常的和反常的辅助电子场的数目和质量，使得 (45.32)式可以表示为

$$R[g(\kappa^2;k)]=(-1)^n\int_0^{\eta^2}dz_1\int_0^{\eta^2}dz_2\cdots\int_0^{\eta^2}dz_n \times g^{(n)}(\kappa^2+z_1+z_2+\cdots+z_n;k) \qquad (45.34)$$

的形式，式中 η 最后趋于无限大。选择合适的 n(45.34)式将总能使积分

$$\int R[g(\kappa^2;k)]dk \qquad (45.35)$$

在整个 k 空间收敛。

我们已经证明在量子电动力学中通过引入辅助场，就可以根据 (45.32) 及 (45.34) 二式用 $R[f(\lambda^2;k)]$和 $R[g(\kappa^2;k)]$来代替 $f(\lambda^2;k)$ 及 $g(\kappa^2;k)$。这样的替换称为规则化，而且也把辅助场叫作规则场。原则上我们可以在(45.34)式中选择任意的 n 值，使给定的积分在整个 k 空间成为收敛。当然，实际上选择尽可能小的 n 较为方便的。事实上在 (45.33) 式中取 $n=1$，而在 (45.34) 式中取 $n=2$ 足够了。

46. 电子和光子的自能

我们将讨论用规则化计算发散积分的一般方法并把它应用于电子和光子的二阶自能。

(a) 规则化积分的计算

记下恒等式①

① R.P.Feynman, Phys.Rev.76, 769(1949).

$$\frac{1}{ab}=\int_0^1\frac{du}{[a+(b-a)u]^2} \tag{46.1}$$

和它的推广形式

$$\frac{1}{a_0a_1\cdots a_n}=n!\int_0^1 du_1\int_0^{u_1}du_2\cdots$$
$$\times\int_0^{u_{n-1}}du_n\frac{1}{[a_0+(a_1-a_0)u_1+\cdots\rightarrow}$$
$$\leftarrow\frac{1}{+(a_n-a_{n-1})u_n]^{n+1}}, \tag{46.2}$$

是有用的，（46.2）式可以用归纳法证明。利用这些恒等式，按照（45.33）和（45.34）式实行规则化，并移动积分变量的坐标原点，那么出现在散射算符贡献中的所有积分都可以简化成比较简单的积分，下面将讨论这些积分。

考虑积分

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int dk_0\frac{1}{\mathbf{k}^2+\Delta-k_0^2-i\varepsilon},$$

其中Δ是一个正的常数。注意到被积函数在上半平面唯一的极点是$k_0=-(\mathbf{k}^2+\Delta)^{1/2}+i\varepsilon'$其中$\varepsilon'\to+0$，就可以对$k_0$进行积分。在这个极点上的留数是$\frac{1}{2}(\mathbf{k}^2+\Delta)^{-1/2}$。因此

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int dk_0\frac{1}{\mathbf{k}^2+\Delta-k_0^2-i\varepsilon}$$
$$=\frac{\pi i}{(\mathbf{k}^2+\Delta)^{1/2}}, \tag{46.3}$$

把（46.3）式对Δ进行两次微分后，我们有

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int dk_0\frac{1}{(\mathbf{k}^2+\Delta-k_0^2-i\varepsilon)^3}=\frac{3\pi i}{8(\mathbf{k}^2+\Delta)^{5/2}},$$

因而

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int d\mathbf{k}\int dk_0\frac{1}{(\mathbf{k}^2+\Delta-k_0^2-i\varepsilon)^3}$$

$$= \int dk \frac{3\pi i}{8(k^2+\Delta)^{5/2}} = \frac{i\pi^2}{2\Delta},$$

上式可以写为

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int dk \frac{1}{(k^2+\Delta-i\varepsilon)^3} = \frac{i\pi^2}{2\Delta} \tag{46.4}$$

将（46.4）式对 Δ 微分导致进一步的结果

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int dk \frac{1}{(k^2+\Delta-i\varepsilon)^4} = \frac{i\pi^2}{6\Delta^2},$$

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int dk \frac{k^2}{(k^2+\Delta-i\varepsilon)^4} = \frac{i\pi^2}{3\Delta}, \tag{46.5}$$

等等。

还可以从对称性及协变性考虑得到下列各式

$$\int dk\, k_\mu f(k^2) = 0, \quad \int dk\, k_\mu k_\nu k_\lambda f(k^2) = 0,$$

$$\int dk\, k_\mu k_\nu f(k^2) = \int dk \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} k^2 f(k^2), \tag{46.6}$$

$$\int dk\, k_\mu k_\nu k_\lambda k_\rho f(k^2) = \int dk \frac{1}{24} (\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\rho} + \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\rho} + \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda}) k^4 f(k^2), \text{ 等等,}$$

这些公式使我们能在使用（46.4）和（46.5）式求积分之前简化在 k 空间中的积分。

(*b*) 电子自能

在 44 节曾证明了散射算符对于电子自能的二阶贡献是由(44.7)式给出。将（44.7）式表示为

$$S_{el} = -i(2\pi)^4 \delta(p-p') : \bar{\psi}(p') \Sigma(p) \psi(p) :, \tag{46.7}$$

对于处理辐射修正较为方便，其中

$$\Sigma(p) = \frac{ie^2}{(2\pi)^4 c\hbar} \int dk \frac{\gamma_\mu [i(p-k)\cdot\gamma - k]\gamma_\mu}{[k^2+\lambda^2][(p-k)^2+\kappa^2]} \,。 \tag{46.8}$$

或者，借助于（21.16)式简化后，是

$$\Sigma(p)=-\frac{2ie^2}{(2\pi)^4c\hbar}\int dk\frac{i(p-k)\cdot\gamma+2\kappa}{[\hbar^2+\lambda^2][k^2-2k\cdot p+p^2+\kappa^2]},\qquad(46.9)$$

我们来着手计算这个式子。

利用（46.1）式把（46.9）式中分母合起来，我们得到

$$\Sigma(p)=-\frac{2ie^2}{(2\pi)^4c\hbar}\int dk\times\int_0^1 du\frac{i(p-k)\cdot\gamma+2\kappa}{[k^2-2uk\cdot p+u(p^2+\kappa^2)+(1-u)\lambda^2]^2},$$

应用（45.33）式，采取 $n=1$，上式可以规则化为

$$\Sigma(p)=-\frac{4ie^2}{(2\pi)^4c\hbar}\int dk\int_0^1 du\times\int_0^{\xi^2}dz\frac{(1-u)[i(p-k)\cdot\gamma+2\kappa]}{[k^2-2uk\cdot p+u(p^2+\kappa^2)+(1-u)(\lambda^2+z)]^3}.$$

由于上述积分在整个 k 空间是收敛的，可以对原点作 $k\to k+up$ 的移动，所以

$$\Sigma(p)=-\frac{4ie^2}{(2\pi)^4c\hbar}\int dk\int_0^1 du\times\int_0^{\xi^2}dz\frac{(1-u)[i(p-up-k)\cdot\gamma+2\kappa]}{[k^2-u^2p^2+u(p^2+\kappa^2)+(1-u)(\lambda^2+z)]^3},$$

然后对整个 k 空间积分，利用（46.6）及（46.4）式得出

$$\Sigma(p)=\frac{2\pi^2e^2}{(2\pi)^4ch}\int_0^1 du\times\int_0^{\xi^2}dz\frac{(1-u)[i(1-u)p\cdot\gamma+2k]}{-u^2p^2+u(p^2+\kappa^2)+(1-u)(\lambda^2+z)},$$

对 z 积分并令 $\xi\to\infty$ 后，上式变为

$$\Sigma(p)=\frac{e^2}{8\pi^2c\hbar}\int_0^1 du[i(1-u)p\cdot\gamma+2\kappa]\times\lim_{\xi\to\infty}\{\ln[(1-u)\xi^2]-\ln[-u^2p^2+u(p^2+\kappa^2)+(1-u)\lambda^2]\}.\qquad(46.10)$$

鉴于关系式

$$p^2+\kappa^2=2\kappa(ip\cdot\gamma+\kappa)-(ip\cdot\gamma+\kappa)^2, \qquad (46.11)$$

可以把（46.10）式看作 $(ip\cdot\gamma+\kappa)$ 的函数，并写为这样形式

$$\Sigma(p)=A+B(ip\cdot\gamma+\kappa)+\Sigma^c(p), \qquad (46.12)$$

其中 A 与 B 是常数，而 $\Sigma^c(p)$ 可以表示为含有 $(ip\cdot\gamma+\kappa)$ 的二次及高次幂的幂级数。于是求得

$$A=\frac{e^2\kappa}{8\pi^2c\hbar}\int_0^1 du(1+u)\lim_{\zeta\to\infty}\{\ln[(1-u)\zeta^2]-\ln[n^2\kappa^2+(1-n)\lambda^2]\}, \qquad (46.13)$$

$$B=\frac{e^2}{8\pi^2c\hbar}\int_0^1 du(1-u)\lim_{\zeta\to\infty}\left\{\ln[(1-u)\zeta^2]-\ln[u^2\kappa^2+(1-u)\lambda^2]-\frac{2u(1+u)\kappa^2}{u^2\kappa^2+(1-u)\lambda^2}\right\}, \qquad (46.14)$$

而

$$\Sigma^c(p)=\frac{e^2}{8\pi^2c\hbar}\int_0^1 du\left[\frac{2u(1-u^2)\kappa^2(ip\cdot\gamma+\kappa)}{u^2\kappa^2+(1-u)\lambda^2}-[(1+u)\kappa+(1-u)(ip\cdot\gamma+\kappa)]\times\ln\left(1+\frac{u(1-u)(p^2+\kappa^2)}{u^2\kappa^2+(1-u)\lambda^2}\right)\right]. \qquad (46.15)$$

注意 A 与 B 对于大的 ζ 值是发散的，而 $\Sigma^c(p)$ 没有这样的发散。对 u 积分后，发散常数 A 与 B 可以用明显的形式表示为

$$A=\frac{3e^2\kappa}{8\pi^2c\hbar}\lim_{\zeta\to\infty}\left(\ln\frac{\zeta}{\kappa}+\frac{1}{4}\right), \qquad (46.16)$$

$$B=\frac{e^2}{8\pi^2c\hbar}\lim_{\zeta\to\infty}\left(\ln\frac{\zeta}{\kappa}+\frac{9}{4}-2\ln\frac{\kappa}{\lambda}\right), \qquad (46.17)$$

其中除了结果产生发散的情况以外，我们已令 $\lambda=0$。

上述的处理对实电子和虚电子都成立。然而，对实电子来讲，它满足关系式

$$\bar{\psi}(p)(ip\cdot\gamma+\kappa)=0,\qquad (ip\cdot\gamma+\kappa)\psi(p)=0, \tag{46.18}$$

由（46.7）及（46.12）式给出的自能贡献简化为

$$S_{el}=-i(2\pi)^4\delta(p-p')A:\bar{\psi}(p')\psi(p):, \tag{46.19}$$

根据（40.16）式，其中 A 是对数发散的①。

(c) 光子自能

散射算符对光子自能的二阶贡献由（44.11）式给出，为了处理辐射修正；可以用方便的形式把它表示为

$$S_{ph}=(i/c\hbar)(2\pi)^4\delta(k+k'):A_\mu(k')\Pi_{\mu\nu}(k)A_\nu(k):, \tag{46.20}$$

式中

$$\Pi_{\mu\nu}(k)=-\frac{ie^2}{(2\pi)^4c\hbar}\int dp \times\frac{\mathrm{Tr}\{[ip\cdot\gamma-\kappa]\gamma_\mu[i(p+k)\cdot\gamma-k]\gamma_\nu\}}{[p^2+\kappa^2][(p+k)^2+\kappa^2]} \tag{46.21}$$

或者，利用（21.2）及（21.14）式计算迹以后，得

$$\Pi_{\mu\nu}(k)=-\frac{4ie^2}{(2\pi)^4c\hbar}\int dp \times\frac{p^2\delta_{\mu\nu}-2p_\mu p_\nu+p\cdot k\delta_{\mu\nu}-p_\mu k_\nu-p_\nu k_\mu+k^2\delta_{\mu\nu}}{[p^2+k^2][p^2+k^2+2p\cdot k+\kappa^2]}. \tag{46.22}$$

与电子自能情况一样，借助于（46.1）式组合（46.22）式中的分母，结果得

$$\Pi_{\mu\nu}(k)=-\frac{4ie^2}{(2\pi)^4c\hbar}\int dp\times$$

① 实电子自能的对数发散是由 V.F.Weisskopf 提出的 V.F. Weisskopf, Phys.Rev.56.72(1939).

$$\times\int_0^1 du\frac{p^2\delta_{\mu\nu}-2p_\mu p_\nu+p\cdot k\delta_{\mu\nu}-p_\mu k_\nu-p_\nu k_\mu+\kappa^2\delta_{\mu\nu}}{[p^2+2up\cdot k+uk^2+\kappa^2]^2},$$

应用（45.34）式并采取 $n=2$，上式可以规则化为

$$\Pi_{\mu\nu}(k)=-\frac{4ie^2}{(2\pi)^4c\hbar}\int dp\int_0^1 du\int_0^{\eta^2}dz_1$$
$$\times\int_0^{\eta^2}dz_2\Bigg[-\frac{4\delta_{\mu\nu}}{[p^2+2up\cdot k+uk^2+\kappa^2+z_1+z_2]^3}$$
$$+6\frac{p^2\delta_{\mu\nu}-2p_\mu p_\nu+p\cdot k\delta_{\mu\nu}-p_\mu k_\nu-p_\nu k_\mu}{[p^2+2up\cdot k+uk^2+\kappa^2+z_1+z_2]^4}$$
$$+6\frac{(\kappa^2+z_1+z_2)\delta_{\mu\nu}}{[p^2+2up\cdot k+uk^2+\kappa^2+z_1+z_2]^4}\Bigg].$$

在上述的积分中通过移动原点 $p\to p-uk$，然后利用（46.6），（46.4）以及（46.5）等式，可以进行对 p 空间的积分，得出

$$\Pi_{\mu\nu}(k)=-\frac{e^2}{2\pi^2c\hbar}\int_0^1 du\int_0^{\eta^2}dz_1$$
$$\times\int_0^{\eta^2}dz_2\frac{u(1-u)(k^2\delta_{\mu\nu}-k_\mu k_\nu)}{[u(1-u)k^2+\kappa^2+z_1+z_2]^2},$$

对 z_1，z_2 积分，并令 $\eta\to\infty$，我们得到

$$\Pi_{\mu\nu}(k)=-\frac{e^2}{2\pi^2c\hbar}\int_0^1 duu(1-u)(k^2\delta_{\mu\nu}-k_\mu k_\nu)$$
$$\times\lim_{\eta\to\infty}\left[\ln\frac{\eta^2}{2\kappa^2}-\ln\left(1+\frac{u(1-u)k^2}{\kappa^2}\right)\right]\quad(46.23)$$

这一对于实光子和虚光子都成立的结果可以写为这样的形式

$$\Pi_{\mu\nu}(k)=F(k^2\delta_{\mu\nu}-k_\mu k_\nu)+\Pi^c_{\mu\nu}(k),\qquad(46.24)$$

式中F是由下式给定的对数发散常数

$$F=-\frac{e^2}{12\pi^2c\hbar}\lim_{\eta\to\infty}\left(\ln\frac{\eta^2}{2\kappa^2}\right),\qquad(46.25)$$

而

$$\Pi^c_{\mu\nu}(k)=\frac{e^2}{2\pi^2c\hbar}(k^2\delta_{\mu\nu}-k_\mu k_\nu)\times$$

$$\times\int_0^1 du u(1-u)\ln\left(1+\frac{u(1-u)k^2}{\kappa^2}\right)\cdot \qquad (46.26)$$

对于实光子，考虑到关系式 $k^2=0$，由（46.20）及（46.24）式所给出的自能贡献简化为

$$S_{ph}=(i/c\hbar)(2\pi)^4\delta(k+k')F:A_\mu(k')k'_\mu k_\nu A_\nu(k):,$$

由于附加条件，上式的期待值为零，因此得实光子的自能是零①。

47. 重整化

通过所谓重正化方案可以消除散射算符贡献中的发散。现在我们来阐明重正化方案并讨论它的物理解释。

根据（26.12）及（25.12）式，对于一个电子场与光子场相互作用系统，通常的拉格朗日密度是

$$\begin{aligned}L=&-:[c\hbar(\bar\psi\gamma_\mu\partial_\mu\psi)+mc^2\bar\psi\psi)]:\\&-:\left[\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)^2+\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\mu)^2\right]:\\&+ie:(A_\mu\bar\psi\gamma_\mu\psi):.\end{aligned}\qquad (47.1)$$

让我们用

$$\begin{aligned}\bar L=&-:[c\hbar(\bar\psi\gamma_\mu\partial_\mu\psi)+mc^2(\bar\psi\psi)]:\\&-:\left[\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)^2+\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\mu)^2\right]:\\&+ie:(A_\mu\bar\psi\gamma_\mu\psi):+\delta mc^2:(\bar\psi\psi):\\&-i\delta e:(A_\mu\bar\psi\gamma_\mu\psi):\end{aligned}\qquad (47.2)$$

来替换（47.1）式，② 其中 δm 与 δe 是适当选择的发散常数，它们可以表示为以 e 为幂的无穷级数。在（47.2）式中所引进的附加项的目的就是抵消通常相互作用所产生的发散，引入这些项

---

① 上述光子自能的处理避免了有争论之点，这是由 S.N.Gupta 给出的，见 Proc. Phys. Soc. London A66, 129(1953).

② J.Schwinger, Phys.Rev.73, 416(1948).

就称为电子质量和电荷的重整化，因为(47.2)式可以从（47.1）式通过下列替换而获得

$$m\to m-\delta m,\quad e\to e-\delta e. \tag{47.3}$$

对以上的方法可以给出如下的物理解释：让 m_0 与 e_0 表示电子的固有质量和固有电荷，它们与电子的物理质量 m 和物理电荷 e 按

$$m=m_0+\delta m,\quad e=e_0+\delta e, \tag{47.4}$$

相联系，其中 δm 与 δe 是由于电子同光子场相互作用而产生的电子的自质量与自电荷。关系式（47.4）可以写为

$$m_0=m-\delta m,\quad e_0=e-\delta e. \tag{47.5}$$

因此，只要我们把（47.1）式中的 m 与 e 解释为电子的固有质量和固有电荷，而把（47.2）式中的 m 与 e 解释为物理质量和物理电荷，那么我们便可断言（47.1）式与（47.2）式是完全等价的。

不管我们是否接受这个原理，在重整化的拉格朗日密度（47.2）式中的 m 和 e 代表电子的物理质量与物理电荷这一点是清楚的。而为了实际应用的目的，电子与光子的耦合由

$$\bar{L}_{\mathrm{int}}=ie:(A_\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi):+\delta mc^2:(\bar{\psi}\psi):$$
$$-i\delta e:(A_\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi):. \tag{47.6}$$

给出。

在另一种重整化方案中，发散量以洛伦兹不变的和规范不变的方式简单地用抵消项将其减掉。而将重整化的拉格朗日密度选作①

$$L=-:[c\hbar(\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi)+mc^2(\bar{\psi}\psi)]:-$$

① S.N.Gupta, Proc.Phys.Soc.London A64, 426 (1951).这一方案也提供了对其它相互作用场系统重整化的更一般方法。

$$-:\left[\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)^2+\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\mu)^2\right]:+$$

$$+ie:(A_\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi):+\delta mc^2:(\bar{\psi}\psi):+\frac{1}{4}\delta f$$

$$\times:(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)^2:, \qquad (47.7)$$

其中 δm 与 δf 是经适当选择的发散常数，可以表示成 e 的无穷幂级数。为了把（47.7）及（47.2）式进行比较，我们进行变换

$$A_\mu\to(1-\delta f)^{-1/2}A_\mu, \qquad (47.8)$$

当相互作用不存在时，上式简化为 $A_\mu\to A_\mu$，因此它代表耦合项的一种变换。这个变换把（47.7）式变为

$$\bar{L}=-:[ch(\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi)+mc^2(\bar{\psi}\psi)]:$$

$$-:\left[\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)^2+\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\mu)^2\right]:$$

$$+ie:(A_\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi):+\delta mc^2:(\bar{\psi}\psi):-i\delta e:(A_\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi):$$

$$+\frac{1}{2}[1-(1-\delta f)^{-1}]:(\partial_\mu A_\mu)^2: \qquad (47.9)$$

并且

$$\delta e/e=1-(1-\delta f)^{-1/2}, \qquad (47.10)$$

上式表明重整化的拉格朗日密度（47.7）与（47.2）式之间的区别是由（47.9）式右边的最后一项给出。实践证明，根据(47.7)式进行重整化更为方便。可以通过验证（47.9）式中右边的最后一项对散射过程的贡献为零来证实从（47.7）及（47.2）式所得结果是等价的，然而这个验证使得用（47.2）式不够方便。

我们将一直根据（47.7）式进行重整化。35 节中的论述可以应用于含导数耦合的拉格朗日密度（47.7）式，因此，有效相互作用能量密度取为

$$H_{eff}=-ie:A_\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi:-\delta mc^2:\bar{\psi}\psi:$$

$$-\frac{1}{4}\delta f:(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)^2: \qquad (47.11)$$

而有效收缩为

$$[\partial_\lambda A_\mu(x)\cdot\partial'_\rho A_\nu(x')\cdot]_{\rm eff}$$
$$=-ic\hbar\delta_{\mu\nu}\partial_\lambda\partial'_\rho D_F(x-x'). \qquad (47.12)$$

让我们把重整化的方案应用于二阶自能。把（47.11）式代入散射标符，我们发现抵消项对最低阶自能的贡献是

$$\delta S_{el}=(i/ch)(2\pi)^4\delta(p-p')\delta mc^2:\bar{\psi}(p')\psi(p):, \qquad (47.13)$$

$$\delta S_{ph}=(i/ch)(2\pi)^4\delta(k+k')\delta f:A_\mu(k')$$
$$\times(k^2\delta_{\mu\nu}-k_\mu k_\nu)A_\nu(k):, \qquad (47.14)$$

当上式加到由普通耦合产生的（46.7）和（46.20）式的二阶自能贡献时，只要取

$$\delta mc/\hbar=A,\quad \delta f=-F. \qquad (47.15)$$

（47.13）和（47.14）式就会把（46.12）和（46.24）式中的常数 A 和 F 抵消掉，因此重整化后的自能贡献由

$$S_{el}+\delta S_{el}=-i(2\pi)^4\delta(p-p'):\bar{\psi}(p')$$
$$\times[B(ip\cdot\gamma+\kappa)+\Sigma^c(p)]\psi(p):, \qquad (47.16)$$

$$S_{ph}+\delta S_{ph}=(i/c\hbar)(2\pi)^4\delta(k+k'):$$
$$\times A_\mu(k')\Pi^c_{\mu\nu}(k)A_\nu(k): \qquad (47.17)$$

给出，以上二式对实电子及实光子来说都是零，而在下一节将看到对虚电子和虚光子它们的重要性是显然的。注意到由二阶自能得到的自质量与自电荷可以从（47.15）及（47.10）两式确定。它们给出

$$\delta m/m=A\hbar/mc=A/\kappa,\quad \delta e/e=-\frac{1}{2}\delta f=\frac{1}{2}F,$$

或者利用（46.16）及（46.25）式，成为

$$\frac{\delta m}{m}=\frac{3}{2\pi}\left(\frac{e^2}{4\pi c\hbar}\right)\lim_{\xi\to\infty}\left(\ln\frac{\xi}{\kappa}+\frac{1}{4}\right),$$

$$\frac{\delta e}{e}=-\frac{1}{6\pi}\left(\frac{e^2}{4\pi c\hbar}\right)\lim_{\eta\to\infty}\left(\ln\frac{\eta^2}{2\kappa^2}\right)。\qquad(47.18)$$

如何消除一般散射过程的发散问题将在51节中讨论。为此要求 δm，δe 应是 e 的偶次幂的无穷级数。

指出这一点也是有用的：即使在经典电动力学中电子的自能也是发散的，并且已经提出各种方案来处理这个问题①。

48. 电子散射的辐射修正

为了阐明在消除发散后计算辐射修正的基本特征，我们研究一个电子被外场散射的简单过程。

(a) 二阶辐射修正

在41节中曾指出，在存在外场的情况下，仅保留外场的线性项时，散射算符可表示为

$$S=1+\sum_{n=1}^{\infty}S_n\qquad(48.1)$$

而

$$S_n=\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{-i}{c\hbar}\right)^n\int dx\int dx'\cdots$$
$$\times\int dx^{(n-1)}T[H^{ex}(x)H(x')\cdots H(x^{(n-1)})],\qquad(48.2)$$

这里

$$H=-ie:A_\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi:,\quad H^{ex}=-ie:A_\mu^{ex}\bar{\psi}\gamma_\mu\psi:。\qquad(48.3)$$

让我们考虑一个电子的散射，它的初态与末态传播四维矢量分别为 P 与 P'。对这一过程散射算符的最低阶贡献可以从

$$S_1=-(e/c\hbar)\int dx:A_\mu^{ex}(x)\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x):$$

---

① 关于消除电子经典自能的一个简单方案，见S.N.Gupta, Proc. Phys.Soc.London A64, 50(1951)。

得到，把

$$\overline{\psi}(x)=\overline{\psi}(p')e^{-ip'\cdot x},\quad \psi(x)=\psi(p)e^{ip\cdot x},\tag{48.4}$$

$$A_\mu^{ex}(x)=(2\pi)^{-4}\int dqA_\mu^{ex}(q)e^{iq\cdot x}\tag{48.5}$$

代入，按照相互作用图 41.1 得出

$$S_1=-(e/c\hbar):A_\mu^{ex}(q)\overline{\psi}(p')\gamma_\mu\psi(p):\tag{48.6}$$

而

$$q=p'-p.\tag{48.7}$$

同一物理过程的下一阶贡献包含在 S_3 中。因此，S_3 提供了二阶辐射修正，我们现在计算它。在

$$\begin{aligned}S_3=&-\frac{1}{2}(e/c\hbar)^3\int dx\int dx'\\&\times\int dx''T[A_\mu^{ex}(x)\overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A_\nu(x')\overline{\psi}(x')\\&\times\gamma_\nu\psi(x')A_\lambda(x'')\overline{\psi}(x'')\gamma_\lambda\psi(x'')]\end{aligned}$$

中。对于我们所研究的过程，应当使其中一对光子场算符和两对电子场算符收缩，我们得到

$$S_3=S_A+S_\Sigma'+S_\Sigma''+S_\Pi,\tag{48.8}$$

其中

$$\begin{aligned}S_A=&-(ie^3/c^2\hbar^2)\int dx\int dx'\int dx'':A_\mu^{ex}(x)D_F(x'-x'')\\&\times\overline{\psi}(x')\gamma_\nu S_F(x'-x)\gamma_\mu S_F(x-x'')\gamma_\nu\psi(x'):,\\S_\Sigma'=&-(ie^3/c^2\hbar^2)\int dx\int dx'\int dx'':A_\mu^{ex}(x)D_F(x'-x'')\\&\times\overline{\psi}(x)\gamma_\mu S_F(x-x')\gamma_\nu S_F(x'-x'')\gamma_\nu\psi(x''):,\\S_\Sigma''=&-(ie^3/c^2\hbar^2)\int dx\int dx'\int dx'':A_\mu^{ex}(x)D_F(x'-x'')\\&\times\overline{\psi}(x'')\gamma_\nu S_F(x''-x')\gamma_\nu S_F(x'-x)\gamma_\mu\psi(x):,\end{aligned}$$

$$S_{\Pi}=(ie^3/c^2\hbar^2)\int dx\int dx'\int dx'':A_\mu^{ex}(x)D_F(x'-x'')$$

$$\times T_r[S_F(x'-x)\gamma_\mu S_F(x-x')\gamma_\nu]\bar{\psi}(x'')\gamma_\nu\psi(x''):.$$

把 (48.4) 、 (48.5) 及 (44.2) 式代入，得出

$$S_A=-(e/c\hbar):A_\mu^{ex}(q)\bar{\psi}(p')\Lambda\mu(p,p')\psi(p):, \tag{48.9}$$

$$S'_\Sigma=-(e/ch):A_\mu^{ex}(q)\bar{\psi}(p')\gamma_\mu\frac{ip\cdot\gamma-\kappa}{p^2+\kappa^2}\Sigma(p)\psi(p):, \tag{48.10}$$

$$S''_\Sigma=-(e/c\hbar):A_\mu^{ex}(q)\bar{\psi}(p')\Sigma(p')\frac{ip\cdot\gamma-\kappa}{p'^2+\kappa^2}\gamma_\mu\psi(p):, \tag{48.11}$$

$$S_\pi=-(e/c\hbar):A_\mu^{ex}(q)\Pi_{\nu\mu}(q)\frac{1}{q^2}\bar{\psi}(p')\gamma_\nu\psi(p):, \tag{48.12}$$

其中 $\Lambda\mu(p,p')$由发散积分

$$\Lambda_\mu(p,p')=\frac{ie^2}{(2\pi)^4c\hbar}$$

$$\times\int dk\,\frac{\gamma_\nu[i(p'-k)\cdot\gamma-\kappa]\gamma_\mu[i(p-k)\cdot\gamma-\kappa]\gamma_\nu}{[k^2+\lambda^2][(p'-k)^2+\kappa^2][(p-k)^2+\kappa^2]}, \tag{48.13}$$

给出。$\Sigma(p)$及 $\Pi_{\nu\mu}(q)$ 由 (46.8) 及 (46.21) 式给出，而 q 由 (48.7) 式确定。其中贡献 S_Λ 由图 48.1 中的图(a)所代表，叫作顶角修正，而贡献 S'_Σ，S''_Σ 及 S_π 提供了自能的修正，它们分别由图形(b)、(c)及(d)所代表。

此外，在 47 节中所引入的抵消项对电子散射产生了附加贡献。用 $A_\mu+A_\mu^{ex}$ 代替 (47.11) 式中的 A_μ，并使用所得到的相互作用能量密度，我们发现：含有抵消项的最低阶散射贡献可以从下式

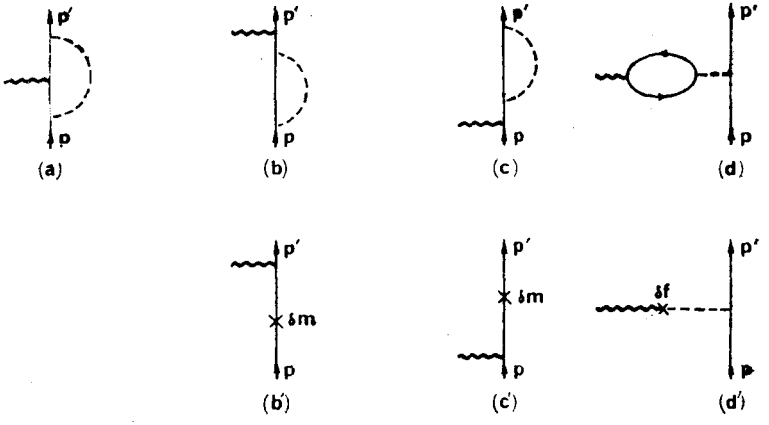


图 48.1　电子被外场散射的二阶辐射修正，
叉号表示抵消项的嵌入

$$\delta S'_{\Sigma} = -(ie/c^2\hbar^2)\int dx \int dx' : \delta mc^2 \bar{\psi}(x)^{\cdot}\psi(x)$$

$$\times A_{\mu}^{e\,x}(x')\bar{\psi}(x')\gamma_{\mu}\psi(x') :,$$

$$\delta S''_{\Sigma} = -(ie/c^2\hbar^2)\int dx \int dx' : \delta mc^2 \bar{\psi}(x)\psi(x)^{\cdot}$$

$$\times A_{\mu}^{e\,x}(x')\bar{\psi}(x')^{\cdot}\gamma_{\mu}\psi(x') :,$$

$$\delta S_{\Pi} = -(ie/c^2\hbar^2)\int dx \int dx' : \frac{1}{2}\delta f[\partial_{\mu}A_{\mu}^{e\,x}(x)$$

$$-\partial_{\nu}A_{\mu}^{e\,x}(x)][\partial_{\mu}A_{\nu}(x)^{\cdot} - \partial_{\nu}A_{\mu}(x)^{\cdot}]$$

$$\times A_{\lambda}(x')^{\cdot}\bar{\psi}(x')\gamma_{\lambda}\psi(x') :,$$

通过将收缩代入和实行付里叶分解得到。这些贡献由图 48.1 中的图(b')，(c')及(d')所表示，它们的效应是把图 (b)，(c)，(d) 中自能部分贡献中的特定的发散常数去掉。

(b) 顶角修正的计算

S_A 的贡献可按照像 46 节中应用于自能的同样的步骤计算出

来。利用代表（46.2）式的一个特殊情况的恒等式

$$\frac{1}{abc}=\int_0^1 du\int_0^u dv\,\frac{2}{[a+(b-a)u+(c-b)v]^3},\tag{48.14}$$

把（48.13）式中的分母组合起来。我们得到

$$\Lambda_\mu(p,p')=\frac{2ie^2}{(2\pi)^4c\hbar}\int dk\int_0^1 du\times\int_0^u dv\,\frac{\gamma_\nu[i(p'-k)\cdot\gamma-\kappa]\gamma_\mu[i(p-k)\cdot\gamma-\kappa]\gamma_\nu}{[k^2-2k\cdot\bar{p}+(p'^2+\kappa^2)u+(p^2-p'^2)v+(l-u)\lambda^2]^3},\tag{48.15}$$

其中

$$\bar{p}=up'-v(p'-p),\tag{48.16}$$

因此

$$-\bar{p}^2=-u^2p'^2+uv(p'^2-p^2)+v(u-v)q^2.\tag{48.17}$$

利用（45.33）式，并令 $n=1$，可以把（48.15）式规则化为

$$\Lambda_\mu(p,p')=\frac{6ie^2}{(2\pi)^4c\hbar}\int dk\int_0^1 du\int_0^u dv\int_0^{\xi^2}dz(1-u)\times\frac{\gamma_\nu[i(p'-k)\cdot\gamma-\kappa]\gamma_\mu(i(p-k)\cdot\gamma-\kappa]\gamma_\nu}{[k^2-2k\cdot\bar{p}+(p'^2+\kappa^2)u+(p^2-p'^2)v+(1-u)(\lambda^2+z)]^4},$$

上式可以通过移动坐标原点 $k\to k+\bar{p}$，并利用（46.6）及（46.5）式对整个 k 空间积分，所以有

$$\Lambda_\mu(p,p')=\frac{e^2}{16\pi^2c\hbar}\int_0^1 du\int_0^u dv\int_0^{\xi^2}dz(1-u)\times\left[\frac{2\gamma_\mu}{-\bar{p}^2+(p'^2+\kappa^2)u+(p^2-p'^2)v+(1-u)(\lambda^2+z)}\right.$$

$$\left.-\frac{\gamma_\nu[i(p'-\bar{p})\cdot\gamma-\kappa]\gamma_\mu[i(p-\bar{p})\cdot\gamma-\kappa]\gamma_\nu}{[-\bar{p}^2+(p'^2+\kappa^2)u+(p^2-p'^2)v+(1-u)(\lambda^2+z)]^2}\right],$$

通过关系式 $\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\nu=-2\gamma_\mu$，式中已做了一些简化。接着在 $\zeta\to\infty$ 的情况下对 z 积分，得

$$\Lambda_\mu(p,p')=\frac{e^2}{8\pi^2c\hbar}\int_0^1du\int_0^u dv$$

$$\times\Big[\lim_{\zeta\to\infty}\ln\Big(\frac{(1-u)\zeta^2}{-\bar{p}^2+(p'^2+\kappa^2)u+(p^2-p'^2)v+(1-u)\lambda^2}\Big)\gamma_\mu$$

$$-\frac{\gamma_\nu[i(p'-\bar{p})\cdot\gamma-\kappa]\gamma_\mu[i(p-\bar{p})\cdot\gamma-\kappa]\gamma_\nu}{2[-\bar{p}^2+(p'^2+\kappa^2)u+(p^2-p'^2)v+(1-u)\lambda^2]}\Big]. \tag{48.18}$$

为了简化计算，我们现在利用关系式

$$p^2+\kappa^2=p'^2+\kappa^2=0, \tag{48.19}$$

以及

$$\bar{\psi}(p')(ip'\cdot\gamma+\kappa)=0,\quad (ip\cdot\gamma+\kappa)\psi(p)=0, \tag{48.20}$$

上式也意味着

$$\bar{\psi}(p')iq\cdot\gamma\psi(p)=\bar{\psi}(p')$$

$$\times[(ip'\cdot\gamma+\kappa)-(ip\cdot\gamma+\kappa)]\psi(p)=0. \tag{48.21}$$

利用 (21.2) 式及 (21.16) 式并应用 (48.19) 及 (48.20) 来简化 (48.18) 式，给出

$$\Lambda_\mu(p,p')=\frac{e^2}{8\pi^2c\hbar}\int_0^1du\int_0^u dv\Big[\lim_{\xi\to\infty}\ln\Big(\frac{(1-u)\xi^2}{-\bar{p}^2+(1-u)\lambda^2}\Big)\gamma_\mu$$

$$-\frac{2\kappa^2\gamma_\mu+\kappa(i\bar{p}\cdot\gamma)\gamma_\mu+\kappa\gamma_\mu(i\bar{p}\cdot\gamma)+[i(q+\bar{p})\cdot\gamma]\gamma_\mu[i(q-\bar{p})\cdot\gamma]}{-\bar{p}^2+(1-u)\lambda^2}\Big],$$

尔后代入 (48.16) 式及 (48.17) 式，并且再度应用 (48.19) 及 (48.20) 式，我们得到

$$\Lambda_\mu(p,p')=\frac{e^2}{8\pi^2c\hbar}\int_0^1du\int_0^u dv$$

$$\times\left[\lim_{\xi\to\infty}\ \ln\left(\frac{(1-u)\xi^2}{u^2\kappa^2+(1-u)\lambda^2+v(u-v)q^2}\right)\gamma_\mu\right.$$

$$-\frac{(2-2u-u^2)\kappa^2\gamma_\mu+(1-u+uv-v^2)q^2\gamma_\mu}{u^2\kappa^2+(1-u)\lambda^2+v(u-v)q^2}$$

$$\left.-\frac{(u-uv-v)\kappa(iq\cdot\gamma)+(u^2-uv-v)\kappa\gamma_\mu(iq\cdot\gamma)}{u^2\kappa^2+(1-u)\lambda^2+v(u-v)q^2}\right]. \quad (48.22)$$

用 q^2/k^2 的幂来展开，(48.22) 式变为

$$\Lambda_\mu(p,p')=\frac{e^2}{8\pi^2c\hbar}\int_0^1 du\int_0^u dv$$

$$\left[\lim_{\xi\to\infty}\ \ln\left(\frac{(1-u)\xi^2}{u^2\kappa^2+(1-u)\lambda^2}\right)\gamma_\mu-\frac{(2-2u-u^2)\kappa^2\gamma_\mu}{u^2\kappa^2+(1-u)\lambda^2}\right.$$

$$-\frac{(1-u+2uv-2v^2)q^2\gamma_\mu}{u^2\kappa^2+(1-u)\lambda^2}$$

$$+\frac{(2-2u-u^2)(uv-v^2)\kappa^2q^2\gamma_\mu}{[u^2\kappa^2+(1-u)\lambda^2]^2}$$

$$\left.-\frac{(u-uv-v)\kappa(iq\cdot\gamma)\gamma_\mu+(u^2-uv-v)\kappa\gamma_\mu(iq\cdot\gamma)}{u^2\kappa^2+(1-u)\lambda^2}\right]$$

$$+\cdots$$

对 v 与 u 积分后，除了结果发散的情况外令 $\lambda=0$，得到

$$\Lambda_\mu(p,p')=C\gamma_\mu+\Lambda_\mu^s(p,p') \quad (48.23)$$

而

$$C=\frac{e^2}{8\pi^2c\hbar}\lim_{\xi\to\infty}\left(\ln\frac{\xi}{\kappa}+\frac{9}{4}-2\ln\frac{\kappa}{\lambda}\right), \quad (48.24)$$

$$\Lambda_\mu^s(p,p')=-\frac{e^2}{12\pi^2c\hbar}\frac{q^2}{\kappa^2}\left(\ln\frac{\kappa}{\lambda}-\frac{3}{8}\right)\gamma_\mu$$

$$-\frac{e^2}{8\pi^2c\hbar}\frac{1}{2\kappa}\sigma_{\mu\nu}q_\nu+\cdots, \quad (48.25)$$

式中 $\sigma_{\mu\nu}$ 由 (21.18) 式给定。应注意到当 $P=P'$ 时 $\Lambda_\mu^s(pp')$ 为零。把 (48.23) 式代入 (48.9) 式，得顶角修正可以写成下面形式

$$S_\Lambda = -(e/c\hbar):A_\mu^{ex}(q)\overline{\psi}(p')[C\gamma_\mu + \Lambda_\mu^c(p,p')]\psi(p):. \tag{48.26}$$

(c) 自能修正的计算

与图 48.1 中图(b)相对应的贡献 S'_Σ 是由 (48.10) 式给出的。按照 (46.12) 式，其中 $\Sigma(p)$ 可以表示为

$$\Sigma(p) = A + B(ip\cdot\gamma + \kappa) + \Sigma^c(p), \tag{48.27}$$

其中$\Sigma^c(p)$只含 $(ip\cdot\gamma+\kappa)$ 的二次及高于二次幂。只要我们根据 (47.15) 式选择 δm，那么可以证明与图(b′)相对应的贡献 $\delta S''_\Sigma$ 能完全抵消 (48.27) 式中的常数 A。而且，根据 (48.20) 式，当代入 (48.10) 式时 $\Sigma^c(p)$ 为零。因此在 (48.10) 式中完全可以用 $B(ip\cdot\gamma+\kappa)$代替 $\Sigma(p)$，于是得到

$$\overline{S}'_\Sigma = S'_\Sigma + \delta S'_\Sigma = -(e/ch):A_\mu^{ex}(q)\overline{\psi}(p')\gamma_\mu \times \frac{ip\cdot\gamma-\kappa}{p^2+\kappa^2}B(ip\cdot\gamma+\kappa)\psi(p):, \tag{48.28}$$

由于

$$(ip\cdot\gamma+\kappa)\psi(p)=0, \quad p^2+\kappa^2=0.$$

(48.28) 式是不确定的。

上述的困难可以通过一个简单取极限步骤加以避免。在这一步骤中把相互作用能量密度 $H(x)$中的电荷 e 代换成①

$$e \to ee^{i\varepsilon\cdot x} \tag{48.29}$$

其中 ε 是一无限小的四维矢量。这一修改对 (48.28) 式的影响是用

$$\frac{i(p+2\varepsilon)\cdot\gamma-\kappa}{(p+2\varepsilon)^2+\kappa^2}[i(p+\varepsilon)\cdot\gamma+\kappa]\psi(p) =$$

---

① 我们在 (48.30) 式导出因子$\frac{1}{2}$的方法避免了在以前文献中所采用过的直觉的理由

$$= \frac{1}{2}\frac{i(p+2\varepsilon)\cdot\gamma-\kappa}{(p+2\varepsilon)^2+\kappa^2}[i(2p+2\varepsilon)\cdot\gamma+2\kappa]\psi(p)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{i(p+2\varepsilon)\cdot\gamma-\kappa}{(p+2\varepsilon)^2+\kappa^2}[i(p+2\varepsilon)\cdot\gamma+\kappa]\psi(p)$$

$$= -\frac{1}{2}\psi(p).$$

代替

$$\frac{ip\cdot\gamma-\kappa}{p^2+\kappa^2}(ip\cdot\gamma+\kappa)\psi(p)。$$

因此，我们便能把

$$\frac{ip\cdot\gamma-\kappa}{p^2+\kappa^2}(ip\cdot\gamma+\kappa)\psi(p) = -\frac{1}{2}\psi(p) \qquad (48.30)$$

代入（48.28）式中，结果得出

$$\overline{S}'_{\Sigma} = -(e/c\hbar)(:A_{\mu}^{e\,x}(q)\bar{\psi}(p')\gamma_{\mu}\left(-\frac{1}{2}B\right)\psi(p):, \qquad (48.31)$$

并且与此类似，图(c)与(c')的贡献就简化为

$$\overline{S}''_{\Sigma} = -(e/c\hbar):A_{\mu}^{e\,x}(q)\bar{\psi}(p')\left(-\frac{1}{2}B\right)\gamma_{\mu}\psi(p):, \qquad (48.32)$$

所以

$$\overline{S}_{\Sigma} = \overline{S}'_{\Sigma} + \overline{S}''_{\Sigma} = -(e/c\hbar):A_{\mu}^{e\,x}(q)\bar{\psi}(p')(-B)\gamma_{\mu}\psi(p):. \qquad (48.33)$$

此外对应于图 48.1 中图(d)的贡献 S_{π} 由 （48.12） 式给出。按照（46.24），其中

$$\Pi_{\nu\mu}(q) = F(q^2\delta_{\nu\mu}-q_{\nu}q_{\mu}) + \Pi^{e}_{\nu\mu}(q) \qquad (48.34)$$

而

$$\Pi^{e}_{\nu\mu}(q) = \frac{e^2}{2\pi^2c\hbar}(q^2\delta_{\nu\mu}-q_{\nu}q_{\mu})\times$$

$$\times\int_0^1 du\, u(1-u)\ln\left(1+\frac{u(1-u)q^2}{\kappa^2}\right). \tag{48.35}$$

假使 δf 是由（47.15）式决定，那么与图（d'）相对应的贡献 δS_π 便足以消去（48.34）中的常数 F，因此

$$\overline{S}_\pi = S_\pi + \delta S_\pi = -(e/ch):A_\mu^x(q)\cdot$$
$$\Pi^c_{\nu\mu}(q)\frac{1}{q^2}\bar{\psi}(p')\gamma_\nu\psi(p):. \tag{48.36}$$

应当注意到，按 q^2/κ^2 的幂展开时，（48.35）式变为

$$\Pi^c_{\nu\mu}(q) = \frac{e^2}{2\pi^2 c\hbar}(q^2\delta_{\nu\mu}-q_\nu q_\mu)\frac{q^2}{\kappa^2}\int_0^1 du\, u^2(1-u)^2+\cdots$$
$$= \frac{e^2}{2\pi^2 c\hbar}(q^2\delta_{\nu\mu}-q_\nu q_\mu)\frac{q^2}{30\kappa^2}+\cdots. \tag{48.37}$$

（d）有效相互作用

在与图 48.1 中全部图形相对应的三阶贡献可以把(48.26)、(48.33) 及 (48.36) 式相加得到。这给出

$$\overline{S}_3 = S_A + \overline{S}_\Sigma + \overline{S}_\pi$$
$$= -(e/c\hbar):A_\mu^x(q)\bar{\psi}(p')[\Lambda^c_\mu(p,p')$$
$$+\gamma_\nu\Pi^c_{\nu\mu}(q)/q^2]\psi(p):, \tag{48.38}$$

根据（46.17）与（48.24）式，我们已在上式中利用了

$$B=C, \tag{48.39}$$

并且我们注意到由于（48.39）式，在 S_A 及 $\overline{S}_\Sigma$ 中的发散互相抵消了。正如我们将在 51 节中所看到的，发散常数 B 与 C 的相等不是偶然的。通过把（48.6）式加到（48.38）式，并利用（48.25），（48.37）及（48.21）式可以把被一个外场散射的电子的散射算符的贡献表示到第三阶，并按 q/κ 的幂展开，其形式写为

$$S_1+\overline{S}_3 = -(e/c\hbar):A_\mu^x(q)\times$$

$$\times\bar{\psi}(p')\left[\gamma_\mu-\frac{\alpha}{3\pi}\frac{q^2}{\kappa^2}\left(\ln\frac{\kappa}{\lambda}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\right)\gamma_\mu\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha}{2\pi}\frac{q_\nu}{2\kappa}\sigma_{\mu\nu}\right]\psi(p):+\cdots. \qquad (48.40)$$

当略去含 q/κ 的三次和高于三次幂的各项时，上述结果等价于由下面的有效相互作用引起的最低阶贡献①

$$H_{\mathrm{eff}}=-ie:A_\mu^x\bar{\psi}\gamma_\mu\psi:-ie:\delta A_\mu^x\bar{\psi}\gamma_\mu\bar{\psi}:$$

$$-\frac{1}{2}\delta\mu:F_{\mu\nu}^x\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi:, \qquad (48.41)$$

式中

$$\delta A_\mu^x=\frac{\alpha}{3\pi\kappa^2}\partial^2A_\mu^x\left(\ln\frac{\kappa}{\lambda}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\right),$$

$$\delta\mu=\frac{\alpha}{2\pi}\mu_0, \qquad (48.42)$$

其中 $\mu_0=e/2\kappa$。

在 41 节中曾证明一个电子磁矩的最低阶近似是 μ_0。按同样的论述，(48.41)式右边的最后一项导致一个附加磁矩 $\delta\mu$，通常把它称为电子的反常磁矩。因此电子的总磁矩是

$$\mu=\left[1+\frac{\alpha}{2\pi}+O(\alpha^2)\right]\mu_0. \qquad (48.43)$$

为了解释(48.41)式中的 δA_μ^x，我们把代表带电为 $-Ze$ 的一个重核的库仑场(41.9)式代入(48.42)式。那末

$$\delta A_\mu^x=i\delta\mu_4\frac{Ze}{4\pi}\frac{4\alpha}{3\kappa^2}\left(\ln\frac{\kappa}{\lambda}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\right)\delta(\mathbf{x}), \qquad (48.44)$$

这相当于对库仑场的一个短程修正。很显然，在有效相互作用(48.41)式中的 δA_μ^x 与 $\delta\mu$ 项导致了原子能级的移动，这就是通常所说的兰姆移动。

---

① J.Schwinger, Phys. Rev.76, 790(1949).

我们已在一个特殊的过程中证明了，重整化能使我们消除当辅助质量趋于无限大时出现在散射算符贡献中的发散。但是，应当注意到在辐射修正（48.40）式中还含有在 $\lambda=0$ 时出现的另一种类型的发散。这种所谓红外发散不会产生严重问题。我们将在57节中讨论它。

49. 散射算符的规范不变性

象在26节中曾指出的那样，量子电动力学中的拉格朗日密度仅在有限制的规范变换下是不变的。然而现在我们将证明散射算符在一般规范变换

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda, \tag{49.1}$$

下是不变的。式中 Λ 是一个任意的非算符的空时函数。这种不变性对出现在散射算符贡献中的发散的一般分析是有用的。

根据（26.12）式，一个电子和光子场系统的拉格朗日密度是

$$L = -:\left[\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\mu)^2\right]:$$

$$-c\hbar:(\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi + \kappa\bar{\psi}\psi):+ie:A_\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi: \tag{49.2}$$

我们现在应用变换

$$\psi \to e^{-ie\Lambda/c\hbar}\psi, \quad \bar{\psi} \to \bar{\psi}e^{ie\Lambda/c\hbar}, \tag{49.3}$$

对于 $e=0$，上式简化为 $\psi\to\psi$，$\bar{\psi}\to\bar{\psi}$，因此，（49.3）式代表一种耦合项的变换。变换后的拉格朗日密度取这样的形式

$$L = -:\left[\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\mu)^2\right]:$$

$$-c\hbar:(\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi + \kappa\bar{\psi}\psi):+ie:(A_\mu + \partial_\mu\Lambda)\bar{\psi}\gamma_\mu\psi:. \tag{49.4}$$

由于我们已经实证了(49.2)与(49.4)式的等价性，于是得出，如果在相互作用绘景中，通常的相互作用能量密度受到(49.1)式的变换，那么散射算符将保持不变。再有，由于 Λ 不是算符，在相

互作用绘景中我们有

$$[A_\mu(x)+\partial_\mu\Lambda(x)]^\cdot[A_\nu(x')+\partial'_\nu\Lambda(x')]^\cdot$$
$$=A_\mu(x)^\cdot A_\nu(x')^\cdot,$$

所以A对光子场算符的收缩没有贡献，而变换(49.1)式只影响外光子场算符①。

现在我们把规范变换(49.1)式应用于计算具有任意数量的外光子线的图形的贡献。而且，对外光子场算符我们不使用自由场方程，因此我们的结果不仅适用于实光子，也适用于虚光子。因此，借助于付里叶分解，(49.1)式可以写成下列等价的形式

$$A_\mu(k)\to A_\mu(k)+ik_\mu\Lambda(k), \qquad (49.5)$$

其中k既可满足，也可以不满足关系式$k^2=0$。并且象在44节中阐明的那样，k表示初态光子的传播四维矢量或者是末态光子的传播四维矢量的负值。很容易看出，如果图形的贡献具有

$$S=M_{\mu\nu\ldots}:A_\mu(k)A_\nu(k')\cdots: \qquad (49.6)$$

形式，那末在变换

$$A_\mu(k)\to A_\mu(k)+ik_\mu\Lambda(k),$$
$$A_\nu(k')\to A_\nu(k')+ik'_\nu\Lambda(k'),\ \cdots$$

下，(49.6)式的不变性要求

$$k_\mu M_{\mu\nu\ldots}=0,\ k'_\nu M_{\mu\nu\ldots}=0。\ \cdots。 \qquad (49.7)$$

通过直接计算对规范条件(49.7)式进行证明是有益的。因此让我们考虑由(44.10)式给出的二阶光子自能的贡献，它可以表示为

$$S_{\text{光}}=\delta(k+k')(e^2/c^2\hbar^2)M_{\mu\nu}(k):A_\mu(k')A_\nu(k):$$
$$(49.8)$$

① 我们关于散射算符的一般规范不变性的证明消除在以前的文献中所遇到的那种复杂性。

而

$$M_{\mu\nu}(k)=\int dp\,\mathrm{Tr}[\gamma_\mu S_F(p+k)\gamma_\nu S_F(p)]. \qquad (49.9$$

但是，由于

$$ik\cdot\gamma=[i(p+k)\cdot\gamma+\kappa]-[ip\cdot\gamma+\kappa]$$

因而有

$$S_F(p+k)(ik\cdot\gamma)S_F(p)=S_F(p+k)-S_F(p), \qquad (49.10)$$

很容易得出

$$k_\nu M_{\mu\nu}(k)=i\int dp\,\mathrm{Tr}[\gamma_\mu S_F(p)]-i\int dp\,\mathrm{Tr}[\gamma_\mu S_F(p+k)]. \qquad (49.11)$$

(49.4) 式右边代表两个发散积分的差，因而是不明确的。然而，借助于 45 节中所描述的规则化，可以使这两个积分在整个 p 空间收敛，并且，通过移动一个积分中坐标原点，彼此可以相互抵消。所以

$$k_\nu M_{\mu\nu}(k)=0. \qquad (49.12)$$

因此，我们发现，由形式上论证所确定的散射算符的性质，只有完成了发散积分的规则化以后，才可以通过直接计算来验证。

50. 原始发散

我们希望对散射算符贡献中的发散进行一般研究①，这种发散是由虚粒子大的传播四维矢量值引起的。

让我们考虑一个含 n 个顶点，E_e 条外电子线，E_p 条外光子线，I_e 条内电子线及 I_p 条内光子线的图形 G。对这样图形散射算符的贡献 S_G 将含有一个对 I_e+I_p 个四维矢量变数 $k^{(i)}$ 的积分，这 I_p+I_e 个变数 $k^{(i)}$ 是由 I_e 个形式为

$$\frac{ik^{(i)}\cdot\gamma-\kappa}{k^{(i)2}+\kappa^2}, \qquad (50.1)$$

的因子与 I_p 个形式为

① F. J. Dyson, Phys. Rev. 75, 1736(1949).

$$\frac{1}{k^{(i)2}+\lambda^2}, \tag{50.2}$$

的因子及 n 个形式为

$$\delta(q^{(i)}), \tag{50.3}$$

的因子的乘积组成。其中 $q^{(i)}$ 是在一个顶角处相遇的三个传播四维矢量的代数和，δ 函数中有一个可以完全借助于外线传播四维矢量来表示，而其余的 δ 函数使我们可以用 I_e+I_p 个变数 $k^{(i)}$ 中的 I_e+I_p-n+1 个来表示其余的 $n-1$ 个。结果 S_G 便归结为一个对 I_e+I_p-n+1 个独立的四维矢量变数的积分。而这些独立四维矢量称为基本四维矢量。我们进一步假定，如果这些基本四维矢量中的任何一个保持固定，而 S_G 对基本四维矢量的积分是收敛的话，那末就说 S_G 是收敛的。通过数出被积函数 S_G 中 (50.1) 式及 (50.2) 式形式的各因子中 $k^{(i)}$ 的幂次，我们便发现被积函数的分子是 I_e 次，而分母是 $2(I_e+I_p)$ 次。由于这个被积函数将对 $4(I_e+I_p-n+1)$ 个变数积分，只有当

$$I_e+4(I_e+I_p-n+1)\geqslant 2(I_e+I_p). \tag{50.4}$$

时，积分 S_G 才对大的 $k^{(i)}$ 值有可能发散。我们还注意到，如果每一条内电子线断开成为两条外电子线，每一个顶角将有两条外电子线与它相连。这给出关系式

$$2I_e+E_e=2n, \tag{50.5}$$

而与此类似有

$$2I_p+E_p=n. \tag{50.6}$$

利用(50.5)及(50.6)两式，对 S_G 可能发散的条件(50.4)式可表示为

$$4-\frac{3}{2}E_e-E_p\geqslant 0, \tag{50.7}$$

而可能的发散程度由下式给出

$$D=4-\frac{3}{2}E_e-E_p, \tag{50.8}$$

当 $D=0$ 时，积分最多是对数发散，而 $D=1$ 最多是线性发散，$D=2$ 最多是二次方发散，等等。

上述考虑可以直接应用到散射算符的原始发散图形的贡献。每一个原始发散图形导致了一项发散贡献，但如果它的内线中的任何一条断开成为两条外线，所得到图形的贡献就成为收敛的。由此得出，如果一个原始发散图形贡献中的任何一个基本四维矢量保持固定，那么对其余基本四维矢量的积分是收敛的。因此，原始发散图形必须满足条件(50.7)式，这就表明了唯一可能的原始发射图形是：$E_e=2$，$E_p=0$，1 和 $E_e=0$，$E_p=1$，2，3，4 的图形。我们将更加细致地研究这些可能性，而且我们应当记住外线可以对应于自由粒子也可以不对应于自由粒子，所以当原始发散图形作为一个较大的图形的一部分出现时，我们的结果也能适用。

首先让我们考虑 $E_e=0$ 和 E_p 是一个固定数的所有可能的图形。对这些图形，散射算符的贡献含有 E_p 个光子场算符，但不含电子场算符。因此，我们从由 (27.14) 式给出的电荷共轭下的不变性得出，当每一光子场算符的符号改变时，这样的贡献必然保持不变，而这就意味着，对奇数值的 E_p 贡献是零。$E_e=0$ 和 $E_p=$ 奇数的图形的贡献为零称为法雷定理①。并且应注意到法雷定理不能应用于给定过程的一些单个图形的贡献，而只适用于它们的总贡献。由于法雷定理，我们可以略去 $E_p=0$，$E_p=1,3$ 的这些可能的原始发散图形。

再有，对 $E_e=0$ 而 $E_p=4$ 的可能的原始发散图形来说，散射算符的贡献可以表示为

$$(2\pi)^4\delta(p+p'+p''+p''')X_{\mu\nu\lambda\rho}(p,p',p'',p''')\colon A_\mu(p)A_\nu(p')\times A_\lambda(p'')A_\rho(p''')\colon, \tag{50.9}$$

① W. H. Furry, Phys. Rev. 51, 125(1937).

根据(50.8)式，上式中积分$X_{\mu\nu\lambda\rho}$，最多是对数发散的，对除了一个以外所有其余的基本四维矢量积分后，$X_{\mu\nu\lambda\rho}$得到的形式是

$$X_{\mu\nu\lambda\rho}(p,p',p'\ p''')=\int R_{\mu\nu\lambda\rho}(p,p',p'',p''',k)dk. \quad (50.10)$$

(50.10)式中的被积函数可以写为

$$R_{\mu\nu\lambda\rho}(p,p',p'',p''',k)$$
$$=R_{\mu\nu\lambda\rho}(0,0,0,0,k)+R^{c}_{\mu\nu\lambda\rho}(p,p',p'',p''',k),$$

其中，对很大的k值，在$R_{\mu\nu\lambda\rho}(p,p',p'',p''',k)$中$k$的可能的最高次幂将限于右边的第一项，因此(50.10)式可以表示为

$$X_{\mu\nu\lambda\rho}(p,p',p'',p''')$$
$$=X_{\mu\nu\lambda\rho}(0,0,0,0)+X^{c}_{\mu\nu\lambda\rho}(p,p',p'',p'''), \quad (50.11)$$

其中$X_{\mu\nu\lambda\rho}(0,0,0,0)$是一个常数，可能是一个发散的积分，而$X^{c}_{\mu\nu\lambda\rho}(p,p',p'',p''')$是一个收敛积分，当$p=p'=p''=p'''=0$时为零。根据(50.11)式，(50.9)式的可能发散部分可以写为这样的形式

$$\frac{1}{4!}X_{\mu\nu\lambda\rho}(0,0,0,0)\int:A_{\mu}(x)A_{\nu}(x)A_{\lambda}(x)A_{\rho}(x):dx, \quad (50.12)$$

其次，在49节中所确定的散射算符的规范不变性表明，出现在(50.12)式中的$X_{\mu\nu\lambda\rho}(0,0,0,0)$必须是零。结果对于我们所讨论的那些图形中对应于光子-光子散射的图形的总贡献是收敛的①。

借助于上述结果，我们只剩下三种可能的原始发散图形，它们分别对应于(1) $E_e=2$, $E_p=0$, (2) $E_e=0$, $E_p=2$, 及(3)

① 这个事实已由 R. Karplus 及 M. Neuman 通过直接计算证明：Phys. Rev. 80, 380(1950)；83, 776(1951).

$E_e=2$，$E_p=1$。这些图形确实给出发散的贡献。仅有两条外电子线组成的图形称为电子自能图，而仅由两条外光子线组成的图形称为光子自能图，而仅由两条外电子线及一条外光子线组成的图形称为顶角图。这样，在量子电动力学中原始发散的图形不是自能图就是顶角图。

一个原始发散的电子自能图的贡献可以表示为

$$-i(2\pi)^4\delta(p-p'):\bar{\psi}(p')\Sigma(p)\psi(p):, \qquad (50.13)$$

根据(50.8)式，上式中积分 $\Sigma(p)$ 最多是线性发散的，除了一个以外，对全部的四维矢量积分后，它取这样的形式

$$\Sigma(p)=\int R(p,k)dk. \qquad (50.14)$$

(50.14) 式中的被积函数可分解为

$$R(p,k)=R(0,k)+p_\mu\left[\frac{\partial R(p,k)}{\partial p_\mu}\right]_{p=0}+R'(p,k),$$

其中对于数值大的 k 来讲，在 $R(p,k)$ 中 k 的两个可能的最高次幂将限于右边的前两项。因此，

$$\Sigma(p)=A'+p_\mu B'_\mu+\Sigma'(p), \qquad (50.15)$$

式中A'与B'_μ是常数发射积分，而 $\Sigma'(p)$是一个收敛积分。但是根据协变性，B'_μ 必须具有下列形式

$$B'_\mu=iB'\gamma_\mu, \qquad (50.16)$$

而 $\Sigma'(p)$必然是 $p\cdot\gamma$ 及 $p^2=(p\cdot\gamma)^2$ 的函数，所以 $\Sigma'(p)$可看成为$(ip\cdot\gamma+\kappa)$的函数，并展开为

$$\Sigma'(p)=A''+B''(ip\cdot\gamma+\kappa)+\Sigma^c(p), \qquad (50.17)$$

其中A''与B''是有限的常数，而 $\Sigma^c(p)$是一个有限的函数，它可以表示为含 $(ip\cdot\gamma+\kappa)$ 的二次及高于二次的一个幂级数。把 (50.16) 及(50.17)式代入(50.15)式给出

$$\Sigma(p)=(A'+A''-B'\kappa)+(B'+B'')(ip\cdot\gamma+\kappa)+\Sigma^c(p),$$

它具有这样形式

$$\Sigma(p) = A + B(ip\cdot\gamma + \kappa) + \Sigma^c(p), \qquad (50.18)$$

其中 A 与 B 是发散常数。

类似地对一个原始发散的光子自能图形可以表示为

$$(i/c\hbar)(2\pi)^4\delta(p+p'):A_\mu(p')\Pi_{\mu\nu}(p)A_\nu(p):, \qquad (50.19)$$

根据 (50.8) 式，其中积分 $\Pi_{\mu\nu}(k)$最多是二次发散的，并且可写为这样形式

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = \int R_{\mu\nu}(p,k)dk. \qquad (50.20)$$

(50.20) 式中的被积函数可以分解为

$$R_{\mu\nu}(p,k) = R_{\mu\nu}(0,k) + p_\lambda\left[\frac{\partial R_{\mu\nu}(p,k)}{\partial p_\lambda}\right]_{p=0} + \frac{1}{2}p_\lambda p_\rho\left[\frac{\partial^2 R_{\mu\nu}(p,k)}{\partial p_\lambda \partial p_\rho}\right]_{p=0} + R^c_{\mu\nu}(p,k),$$

结果得

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = D_{\mu\nu} + p_\lambda E_{\mu\nu\lambda} + p_\lambda p_\rho F_{\mu\nu\lambda\rho} + \Pi^c_{\mu\nu}(p), \qquad (50.21)$$

其中 $D_{\mu\nu}$，$E_{\mu\nu\lambda}$ 及 $F_{\mu\nu\lambda\rho}$ 是常数发散积分，而 $\Pi^c_{\mu\nu}(p)$是收敛积分。但是协变性要求

$$D_{\mu\nu} = D\delta_{\mu\nu},\quad E_{\mu\nu\lambda} = 0,$$
$$F_{\mu\nu\lambda\rho} = F\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\rho} + F'\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\rho} + F''\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda}, \qquad (50.22)$$

并且还可以得出 $\Pi^c_{\mu\nu}(p)$可以表示为 p 的四次及高于四次的幂级数。把(50.22)式代入(50.21)式给出

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = D\delta_{\mu\nu} + Fp^2\delta_{\mu\nu} + (F'+F'')p_\mu p_\nu + \Pi^c_{\mu\nu}(p), \qquad (50.23)$$

这使我们能把(50.19)式中的发散部分表示成这样形式

$$(i/c\hbar)\int dx:\left[\frac{1}{2}DA_\mu^2 + \frac{1}{2}(F+F'+F'')(\partial_\mu A_\nu)^2\right.$$

$$-\frac{1}{4}(F'+F'')(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)^2\Big]:. \qquad (50.24)$$

从散射算符在规范变换(49.1)下的不变性，得到$D=0$，$F'+F''=-F$，所以(50.23)式简化为

$$\Pi_{\mu\nu}(p)=F(p^2\delta_{\mu\nu}-p_\mu p_\nu)+\Pi^c_{\mu\nu}(p), \qquad (50.25)$$

式中F是发散常数。

最后我们把原始的发散的顶角图形的贡献表示为

$$-(e/c\hbar)(2\pi)^4\delta(p-p'+q):A_\mu(q)\bar{\psi}(p')\Lambda_\mu(p,p')\psi(p):, \qquad (50.26)$$

根据(50.8)式，其中积分$\Lambda_\mu(p,p')$最多是对数发散的。这样的发散可以用与(50.9)式一样的方法来处理，结果得

$$\Lambda_\mu(p,p')=C'_\mu+\Lambda'_\mu(p,p'), \qquad (50.27)$$

其中$C'_\mu=\Lambda_\mu(0,0)$是一个常数发散积分，并且$\Lambda'_\mu(p,p')$是一个收敛积分，当$p=p'=0$时这个积分为零。常数C'_μ只能取这样形式

$$C'_\mu=C'\gamma_\mu. \qquad (50.28)$$

还有，如果我们令$p'=p$，并且应用

$$\bar{\psi}(p)(ip\cdot\gamma+\kappa)=0,\quad (ip\cdot\gamma+\kappa)\psi(p)=0, \qquad (50.29)$$

那末，$\Lambda'_\mu(p,p')$可以简化为一个γ_μ的有限倍数，这表示我们可以写为

$$\Lambda'_\mu(p,p')=C''\gamma_\mu+\Lambda^c_\mu(p,p'), \qquad (50.30)$$

其中根据(50.29)式，当$p'=p$时，$\Lambda^c_\mu(p,p')$变为零。把(50.28)和(50.30)式代入(50.27)式，给出

$$\Lambda_\mu(p,p')=C\gamma_\mu+\Lambda^c_\mu(p,p'), \qquad (50.31)$$

式中$C=C'+C''$是一个发散常数。

我们已成功地把全部原始发散图形中的发散量分离出来。并且这里通过一般性的讨论所得的结果(50.8)、(50.25)及(50.31)

式与在 46 节及 48 节中对特殊进程所得到的结果是一致的。

51. 量子电动力学中的重整化

我们将继续对发散量进行一般研究。来证明重整化确实能够消除任意过程的散射算符的贡献中的，直到任意阶的所有发散量①。为此，我们将利用由(47.11)式给出的抵消项。

(a) 散射过程图形的举例

为了对一个散射过程得到全部可能的相互作用图，把自能与顶角图形归结为某些类型是方便的。断开任何一根线都不能把图形分成为不相连接的两个部分的自能图或顶角图称为固有自能图或固有顶角图。在图 51.1 及 51.2 中，分别表示出了固有的与非固有的自能与顶角图的一些例子。一个固有自能或顶角图形，以及其中不含有自能或顶角部分的自能或顶角图形，称为不可约的。在图 51.3 中，图(*a*)表示唯一的不可约的电子自能图，而图(*b*)表示唯一的不可约的光子自能图。但是，顶角图的情况与自能图不同，因为有无数个不可约的顶角图形。在图 51.3 中的图形(*c*)表示最低阶的不可约的顶角图。图形(*d*)表示下一阶不可约的顶角图形，如此等等。所有的不可约的自能图形和顶角图形都是原始发散的，但是，可约的固有自能及顶角图形不具有这样性质。

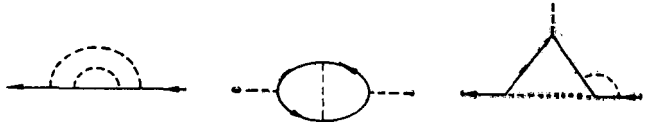


图 51.1　固有自能图及顶角图的例子

① 量子电动力学中可重整化的一般证明基本上是由 F. J. Dyson，给出，Phys. Rev. 75, 1736(1949)，而改进是由其他人做的。

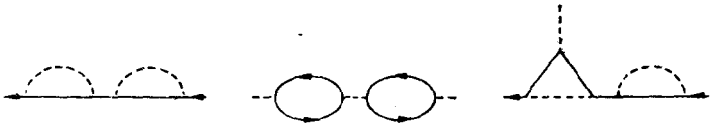


图 51.2　非固有自能图及顶角图的例子

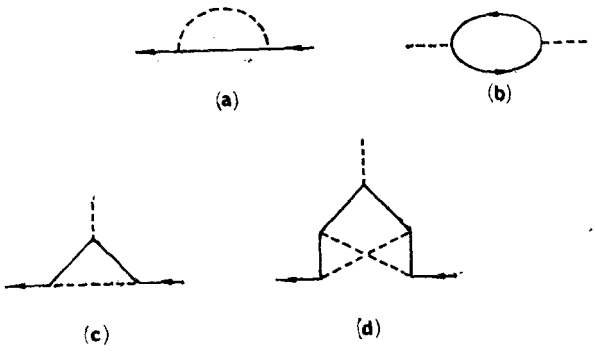


图 51.3　不可约的自能及顶角图

现在让我们考虑一个任意的散射过程，并且首先画出这一过程不含任何自能或顶角部分的全部相互作用图。这样的相互作用图称为骨架图，而对这一过程的所有其余图形都可用下述办法从骨架图中得到。

(1) 按所有可能方式，把每一种可能的固有电子自能部分任意次地插入任意数量的电子线中。

(2) 按所有可能的方式，把每一种可能的固有光子自能部分任意次地插入任意数量的光子线中。

(3) 按所有可能方式，在任意多的顶角处，插入每一种可能的固有顶角部分。

按照上述办法，所有可能的图形的贡献可以通过用$S'_F(p)$，$\bar{\psi}'(p)$，$\psi'(p)$，$D'_{F\mu\nu}(k)$，$A'_\mu(k)$及$\Gamma_\mu(p',p'')$分别代替骨架图形贡献中的$S_F(p)$，$\bar{\psi}(p)$，$\psi(p)$，$\delta_{\mu\nu}$ $D_F(k)$，$A_\mu(k)$，及

$\Gamma_\mu(p'\cdot p'')$表示式的因子而得到。其中

$$S'_F(p) = S_F(p) + S_F(p)\Sigma(p)S'_F(p), \tag{51.1}$$

$$\overline{\psi}'(p) = \overline{\psi}(p) + \overline{\psi}'(p)\Sigma(p)S_F(p), \tag{51.2}$$

$$D'_{F,\mu\nu}(k) = \delta_{\mu\nu}D_F(k) + \delta_{\mu\lambda}D_F(k)\Pi_{\lambda\rho}(k)D'_{F,\rho\nu}(k), \tag{51.3}$$

$$\psi'(p) = \psi(p) + S_F(p)\sum(p)\psi(p),$$

$$A'_\mu(k) = A_\mu(k) + \delta_{\mu\lambda}D_F(k)\Pi_{\lambda\rho}(k)A'_\rho(k), \tag{51.4}$$

$$\Gamma_\mu(p', p'') = \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p', p''), \tag{51.5}$$

而$\Sigma(p)$，$\Pi_{\lambda\rho}(k)$及$\Lambda_\mu(p', p'')$分别代表全部固有的电子自能部分，光子自能部分及顶角部分的贡献。应当注意到：我们并没有忽略非固有的自能部分及顶角部分，而是通过不只一次地把固有自能部分插入骨架图的每一条线中来对它们加以考虑的。而这可以通过把(51.1)式表示为

$$S'_F(p) = S_F(p) + S_F(p)\Sigma(p)S_F(p) + S_F(p)\Sigma(p)S_F(p)\Sigma(p)S_F(p) + \cdots, \tag{51.6}$$

显得更加明显，并且对(51.2)，(51.3)，和(51.4)等式也可以作类似的展开。以后我们将考虑消除发散的抵消项的贡献。

确定固有电子自能部分及顶角部分之间的普遍关系是可能的。我们能够把一组固有顶角部分V_i与任何固有电子自能部分W联系起来，而V_i是通过把一条光子线插入任意一条电子线W中得到的。让W的贡献用$\Sigma(W,p)$来表示，而V_i的贡献用$\Lambda_\mu(V_i, p'p'')$来表示。现在让我们考虑函数$\Lambda_\mu(V_i, p, p)$，在这个函数中已经让两个外电子的传播四维矢量相等，而外部光子的传播四维矢量等于零。因此$\Lambda_\mu(V_i, p, p)$可以从$\Sigma(W,p)$中得出，这只要用$S_F(p+k^{(i)})\gamma_\mu S_F(p+k^{(i)})$代替与$W$中第$i$个电

子线所相对应的形式为 $S_F(p+k^{(i)})$ 的因子。①于是，利用恒等式

$$S_F(p+k^{(i)})\gamma_\mu S_F(p+k^{(i)}) = -i\frac{\partial S_F(p+k^{(i)})}{\partial p_\mu}, \tag{51.7}$$

并且对与 W 相联系的全部顶角部分 V_i 取和。我们得到

$$\sum_i \Lambda_\mu(V_i, p, p) = -i\frac{\partial \Sigma(W,p)}{\partial p_\mu}. \tag{51.8}$$

但是按上面方法全部固有的顶角部分都能够同所有的固有电子自能部分相联系。这种方法结果形成瓦尔特恒等式②

$$\Lambda_\mu(p,p) = -i\frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p_\mu}, \tag{51.9}$$

其中 $\Sigma(p)$ 及 $\Lambda_\mu(p,p)$ 分别表示全部的固有电子自能和顶角部分。

(*b*) 二级辐射修正的可重整性

让我们考虑一个任意散射过程的一个骨架图 $G^{(0)}$ 并且将这个图对散射算符的贡献用 $S^{(0)}$ 表示。由于骨架图不含任何的自能或顶角部分，$S^{(0)}$ 是不发散的。而我们要着手研究对 $S^{(0)}$ 的二级辐射修正中的发散。二阶辐射修正的图形可以通过把二阶自能和顶角部分插入 $G^{(0)}$ 而得到，而重整化产生了更多的图形，这些图形是在 $G^{(0)}$ 的电子与光子线中插入由(47.11)式所给出的 δm 和 δf 抵消项而得到的。因此，实质上我们推广了在 48 节中对特殊情况应用过的论述。应当注意到自能或顶角部分的阶是按在任意图形中所插入外顶角数来决定的，因此二级自能部分与顶角部分对应着图 51.3 中的图形(*a*)、(*b*)及(*c*)。

---

① 我们还可以用这样办法选择 $\Sigma(W,p)$ 中的积分变数，使 p 出现在全部电子线的传播四维矢量中，包括那些形成闭合回路的电子线在内。而光子线不含有 p.

② J.C.Ward, Phys, Rev.78, 182 (1950).

在 G^0 的一条内电子线中插入二级电子自能部分的作用是在贡献 $S^{(0)}$ 中用

$$S_F(p)\to S_F(p)\Sigma^{(2)}(p)S_F(p), \tag{51.10}$$

替代形式为 $S_F(p)$ 的因子。其中表示原始发散部分的 $\Sigma^{(2)}(p)$，根据(50.18)式可表示为

$$\Sigma^{(2)}(p)=A^{(2)}+B^{(2)}(ip\cdot\gamma+\kappa)+\Sigma^{c\,(2)}(p). \tag{51.11}$$

然而，在内部电子线中抵消项 δm 的插入使我们能通过适当选择 δm 的 e^2 部分来抵消发散常数 $A^{(2)}$，并且为了目前的目的，(51.11)式中的有限项可以略去。因此(51.10)式简化为

$$S_F(p)\to S_F(p)B^{(2)}(ip\cdot\gamma+\kappa)S_F(p)=-B^{(2)}S_F(p). \tag{51.12}$$

与此类似，对外电子线有

$$\begin{aligned}\psi(p)&\to S_F(p)B^{(2)}(ip\cdot\gamma+\kappa)\psi(p)\\&=-\frac{1}{2}B^{(2)}\psi(p),\\\bar{\psi}(p)&\to\bar{\psi}(p)B^{(2)}(ip\cdot\gamma+\kappa)S_F(p)\\&=-\frac{1}{2}B^{(2)}\bar{\psi}(p),\end{aligned} \tag{51.13}$$

式中因子 $\frac{1}{2}$ 的出现已在 48 节中解释过了。这样一来在 $G^{(0)}$ 的任一电子线中，二级电子自能部分所有可能的插入引起的发散贡献以及抵消项 δm 是

$$\begin{aligned}[\overline{S_\Sigma^{(2)}}]_{\rm div}&=-(B^{(2)}I_e+\frac{1}{2}B^{(2)}E_e)S^{(0)}\\&=-nB^{(2)}S^{(0)},\end{aligned} \tag{51.14}$$

式中我们已对 $G^{(0)}$ 中所含的电子线及顶角利用了关系 (50.5) 式。

此外，在内光子线中插入二级光子自能部分的作用是把形式

为 $\delta_{\mu\nu}D_F(k)$的因子用

$$\delta_{\mu\nu}D_F(k)\to\delta_{\mu\lambda}D_F(k)\Pi^{(2)}_{\lambda\rho}(k)D_F(k)\delta_{\rho\nu} \tag{51.15}$$

替代，而对外光子线则用

$$A_\mu(k)\to\delta_{\mu\lambda}D_F(k)\Pi^{(2)}_{\lambda\rho}(k)A_\rho(k) \tag{51.16}$$

替代根据(50.25)式，式中 $\Pi^{(2)}_{\lambda\rho}(k)$可表示为

$$\Pi^{(2)}_{\lambda\rho}(k)=F^{(2)}(k^2\delta_{\lambda\rho}-k_\lambda k_\rho)+\Pi^{c(2)}_{\lambda\rho}(k). \tag{51.17}$$

由于通过适当选择 δ_f 中的 e^2 部分，在内光子线或者外光子线中插入抵消项 δ_f 使我们能够在 (51.17) 式中消去发散常数 $F^{(2)}$。由此得出在 $G^{(0)}$ 的任意一条光子线中，由插入二阶光子自能部分和抵消项 δ_f 不会产生发散贡献。所以

$$[\bar{S}^{(2)}_\Pi]_{Div}=0. \tag{51.18}$$

最后，在任何一个顶角上，插入二级顶角部分的作用是把形式为 γ_μ 的因子用

$$\gamma_\mu\to\Lambda^{(2)}_\mu(p',p'') \tag{51.19}$$

替换，式中 p'，p'' 是在顶角处相遇的电子线的传播四维矢量。并且根据(50.31)式可把 $\Lambda^{(2)}_\mu(p'\,p'')$表示为

$$\Lambda^{(2)}_\mu(p',p'')=C^{(2)}\gamma_\mu+\Lambda^{c(2)}_\mu(p',p''). \tag{51.20}$$

忽略(51.20)式中的有限项时，(51.19)式简化为

$$\gamma_\mu\to C^{(2)}\gamma_\mu, \tag{51.21}$$

因此，在 $G^{(0)}$ 的 n 个顶角的任何一个中，由于插入所有可能的二阶顶角部分所引起的发散贡献是

$$[S^{(2)}_A]_{Div}=nC^{(2)}S^{(0)}. \tag{51.22}$$

现在，根据(51.9)式，我们记得

$$\Lambda^{(2)}_\mu(p,p)=-i\frac{\partial\Sigma^{(2)}(p)}{\partial p_\mu}. \tag{51.23}$$

由于(51.23)式对任何电子的传播四维矢量 p 都成立，所以如果 p 满足

$$\bar{\psi}(p)(ip\cdot\gamma+\kappa)=0,\quad (ip\cdot\gamma+\kappa)\psi(p)=0, \tag{51.24}$$

(51.23) 式也一定成立。并且将 (51.11) 及 (51.20) 式代入 (51.23) 中，然后应用(51.24)式我们发现

$$C^{(2)}=B^{(2)}. \tag{51.25}$$

根据(51.25)式从(51.14)、(51.18)及(51.22)式得出

$$[\bar{S}_{\Sigma}^{(2)}+\bar{S}_{\Pi}^{(2)}+S_{\Lambda}^{(2)}]_{\mathrm{Div}}=n(-B^{(2)}+C^{(2)})=0, \tag{51.26}$$

这表明对 $S^{(0)}$ 的二阶辐射修正没有发散。由于发散量的抵消，在散射算符的贡献中把 $\Sigma^{(2)}(p)$，$\Pi_{\lambda\rho}^{(2)}(k)$及 $\Lambda_{\mu}^{(2)}(p',p'')$分别简化为 $\Sigma^{c(2)}(p)$，$\Pi_{\lambda\rho}^{c(2)}(k)$及 $\Lambda_{\mu}^{c(2)}(p',p'')$。

(c) 高阶辐射修正的可重整性

让我们再来考虑一个对任意的散射过程的骨架图形 $G^{(0)}$。正如这一节早些时候所阐明的那样高阶辐射修正的图形可通过在 $G^{(0)}$ 中插入各阶的固有自能及顶角部分得到。当一个图形含有四阶及高于四阶的自能及顶角部分时，我们第一次遇到消除来自二阶自能及顶角部分的发散的必要性，这样的二阶发散不仅出现在 $G^{(0)}$ 的线及顶角内而且也出现在 $G^{(0)}$ 中插入的更高阶固有自能及顶角部分内。在完成这些以后，被约化了的四阶自能及顶角部分的发散便类似于早些时候在二阶部分所遇到的那些发散，除了这些四阶部分的发散积分的被积函数含有附加因子 $\Sigma_{(p)}^{c(2)}S_F(p)$，$\Pi_{\lambda\rho}^{c(2)}(k)D_F(k)$及 $\Lambda_{\mu}^{c(2)}(p';p'')$，它们随 p，k 及 p' 趋于无穷时，仅是对数地发散①。结果，根据 50 节的论证，约化的四阶自能及顶角部分的发散可以按类似于(51.11)、(51.17)及(51.20)式的形式进行分离这又导致发散量的抵消。下一步可以通过约化六阶自能及顶角部分来完成分离并消除发散，如此等等。

① 从二阶自能及顶角部分的结果(46.15)、(46.26)及(48.18)式看这一点的明显的

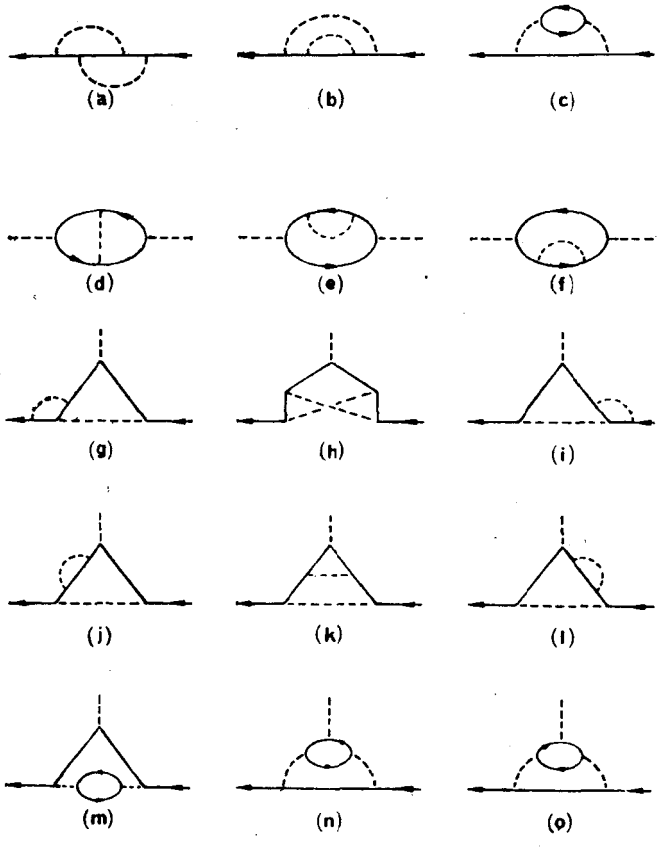


图 51.4 第四阶固有自能及顶角部分。图形(g)，(h)及(i)可以通过把光子线插入到图形(a)的一个内电子线上而得到，类似地，图形(j)、(k)及(l)可以从(b)中得到，而(m)、(n)及(o)可以从(c)得到。

实质上，上述处理是对消除来自二级辐射修正的发散所使用过的步骤的一个逐次的应用。在抵消项中的常数 δm，δ_f 必须是由 e 的偶次幂的无穷级数组成，这也是显然的，然而，在第四阶及高于四阶的辐射修正的处理中，存在一个附加的复杂问题，因

为出现了所谓的交迭发散，并且必须阐明在这种情况下发散的分离是如何实行的。为此，我们将研究在第四阶辐射修正中出现的交迭发散。对应于第四阶辐射修正图形可以通过插入两个二阶自能或顶角部分或插入单个的四阶固有自能或顶角部分而从 $G^{(0)}$ 得到。在图 51.4 中已表示出全部可能的第四阶固有的自能及顶角部分的图形，其中图形(*n*)与(*o*)可以略去，因为根据法雷定理，它们的总贡献是零。

在图 51.4 中，交迭发散只出现在由图形(*a*)和(*d*)表示的固有自能部分，图中两个二阶顶角部分发生交迭，即不是以一个完全含在另一个当中的方式出现。对交迭发散的分离步骤可以通过对图(*a*)所代表的电子自能部分的处理举例说明。对图形(*a*)散射算符产生

$$\Sigma^{(4a)}(p)=\int dk\int dk' F_\mu(p,k)G_{\nu\mu}(p,k,k')H_\nu(p,k'), \tag{51.27}$$

其中

$$F_\mu(p,k)=(2\pi)^{-4}(ie^2/c\hbar)D_F(k)\gamma_\mu S_F(p-k),$$
$$G_{\nu\mu}(p,k,k')=\gamma_\nu S_F(p-k-k')\gamma_\mu, \tag{51.28}$$
$$H_\nu(p,k')=(2\pi)^{-4}(ie^2/c\hbar)S_F(p-k')\gamma_\nu D_F(k').$$

如果对变数 k 与 k' 中的一个进行积分，而另一个变数不变，积分(51.27)式按对数发散。我们把它重写为

$$\begin{aligned}\Sigma^{(4a)}(p)=&\int dk\int dk' R(p,k,k')\\&+\left(\int dk F_\mu(p^0,k)G_{\nu\mu}(p^0,k,0)\right)\int dk' H_\nu(p,k')\\&+\int dk F_\mu(p,k)\left(\int dk' G_{\nu\mu}(p^0,0,k')H_\nu(p^0,k')\right)\end{aligned} \tag{51.29}$$

而

$$R(p,k,k')=F_\mu(p,k)G_{\nu\mu}(p,k,k')H_\nu(p,k')-$$

$$-F_\mu(p^0,k)G_{\nu\mu}(p^0,k,0)H_\nu(p,k')$$
$$-F_\mu(p,k)G_{\nu\mu}(p^0,0,k)H_\nu(p^0,k'),$$
(51.30)

这里最终我们将令

$$ip^0\cdot\gamma+\kappa=0. \tag{51.31}$$

p^0 的引入是一个技巧，它使我们能够比在50节所叙述过的严格处理更容易地实行公式(50.18)及(50.13)式的分解。由于

$$\int dkF_\mu(p^0,k)G_{\nu\mu}(p^0,k,0)=\Lambda_\nu^{(2)}(p^0,p^0)=C^{(2)}\gamma_\nu,$$

$$\int dk'G_{\nu\mu}(p^0,0,k')H_\nu(p^0,k')=\Lambda_\mu^{(2)}(p^0,p^0)=C^{(2)}\gamma_\mu,$$

$$\int dk'\gamma_\nu H_\nu(p,k')=\Sigma^{(2)}(p),$$

$$\int dkF_\mu(p,k)\gamma_\mu=\Sigma^{(2)}(p),$$

(52.19)式可以表示为

$$\Sigma^{(4a)}(p)=\int dk\int dk'R(p,k,k')+2C^{(2)}\Sigma^{(2)}(p), \tag{51.32}$$

其中应当注意到，两交迭的顶角的每一个对(51.32)式的右方第二项有独立地贡献。而且 $R(p,k,k')$ 可以分解为

$$R(p,k,k')=R(p^0,k,k')+(p_\mu-p_\mu^0)\left[\frac{\partial R(p,k,k')}{\partial p_\mu}\right]_{p=p^0}$$
$$+R^c(p,k,k'),$$

上式使我们可以把(51.32)式写成下面形式

$$\Sigma^{(4a)}(p)=A^{(4a)}+B^{(4a)}(ip\cdot\gamma+\kappa)+\Sigma^{c(4a)}(p)$$
$$+2C^{(2)}\Sigma^{(2)}(p), \tag{51.33}$$

其中

$$\Sigma^{c(4a)}(p)=\int dk\int dk'R^c(p,k,k') \tag{51.34}$$

对 k' 和 k 的积分是收敛的①。(51.33)式右边的第一项通过抵消项 δm 消去，而第二项及第四项根据瓦尔特恒等式，通过由其它图形所引起的大小相等而符号相反的项而消去。结果 $\Sigma^{(4a)}(p)$ 简化为散射算符贡献中的 $\Sigma^{(c)\,(4a)}(p)$。

我们已经阐明了量子电动力学重整化的一般方法，因此，对消除由辐射修正引起的任意阶发散能够提供一个形式的证明。通过交迭发散的值得注意的处理可以简化这一证明②。还应当记住，在一般情况下，重整化可以根据(47.7)式通过引入各种抵消项很方便地完成③。

我们不去详细讲述重整化的哲学含义，但我们要指出，从已重整化的量子电动力学得到的对辐射修正的理论结果与实验有相当好的符合。另一方面重整化的弱点在于它似乎不能应用于自然界中所有的相互作用场中。

---

① (51.34)式的收敛性可以这样的被证实，我们可以证明在 $R(p, k, k')$ 的展开式中 $(p_\mu - p_\mu^0)$ 的二阶项导致对 k 和 k' 积分时收敛的结果。

② J.C.Ward, Proc.Phys.Soc.London A64, 54(1951).

③ S.N.Gupta, Proc.Phys.Soc.London A64, 426(1951).

第七章　若干专题

我们最后讨论几个专题。这些专题包括量子电动力学几个比较有用的应用，并且使量子电动力学某些方面更清楚。

52. 泡利旋量和泡利矩阵

电子场方程包括一个四分量狄拉克旋量以及一组在21节中叙述过的四维狄拉克矩阵。狄拉克矩阵(21.6)式可以借助于二维矩阵写成下列形式：

$$\gamma_i=\begin{bmatrix}0 & -i\sigma_i\\ i\sigma_i & 0\end{bmatrix},\quad \gamma_4=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} \tag{52.1}$$

其中

$$\sigma_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad \sigma_2=\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix},\quad \sigma_3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \tag{52.2}$$

这里 σ_i 就是通常所说的泡利矩阵。这些矩阵是厄密的，并且可以证明

$$\begin{gathered}\sigma_i\sigma_j+\sigma_j\sigma_i=2\delta_{ij},\\ \sigma_1\sigma_2=i\sigma_3,\quad \sigma_2\sigma_3=i\sigma_1,\quad \sigma_3\sigma_1=i\sigma_2,\end{gathered} \tag{52.3}$$

所以

$$\sigma_i\sigma_j=\delta_{ij}+i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

或者

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B})=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}), \tag{52.4}$$

这里 **A** 和 **B** 是任意矢量。有时利用一个二分量泡利旋量和二维泡利矩阵来处理电子场较为方便。电子场的这种简化最初是在非

相对论近似中实现的①，但是我们这里将作精确的相对论论述②。

满足(21.1)式的电子场算符 ψ 可以利用付里叶分解表示成

$$\psi(x)=V^{-1/2}\sum_{\mathbf{p}}[\psi^{+}(\mathbf{p})e^{ip\cdot x}+\psi^{-}(\mathbf{p})e^{-ip\cdot x}] \tag{52.5}$$

而

$$p^{2}+\kappa^{2}=0, \tag{52.6}$$

这里分别对应于电子和正电子的四分量旋量 $\psi^{+}(\mathbf{p})$ 和 $\psi^{-}(\mathbf{p})$满足

$$(ip\cdot\gamma+\kappa)\psi^{+}(\mathbf{p})=0, \tag{52.7}$$

$$(ip\cdot\gamma-\kappa)\psi^{-}(\mathbf{p})=0. \tag{52.8}$$

对于电子旋量 $\psi^{+}(\mathbf{p})$，我们令

$$\psi^{+}(\mathbf{p})=C\begin{bmatrix}\phi(\mathbf{p})\\ \phi'(\mathbf{p})\end{bmatrix}, \tag{52.9}$$

这里 $\phi(\mathbf{p})$和 $\phi'(\mathbf{p})$是二分量旋量。把(52.1)和(52.9)二式代人 (52.7) 式，导出关系

$$(\mathbf{p}\cdot\sigma)\phi'(\mathbf{p})+(\kappa-p_{0})\phi(\mathbf{p})=0,$$

$$-(\mathbf{p}\cdot\sigma)\phi(\mathbf{p})+(\kappa+p_{0})\phi'(\mathbf{p})=0,$$

它给出

$$\phi'(\mathbf{p})=\frac{\sigma\cdot\mathbf{p}}{\kappa+p_{0}}\phi(\mathbf{p}), \tag{52.10}$$

结果 (52.9) 式可以被表示为

$$\psi^{+}(\mathbf{p})=C\begin{pmatrix}\phi(\mathbf{p})\\ \dfrac{\sigma\cdot\mathbf{p}}{\kappa+p_{0}}\phi(\mathbf{p})\end{pmatrix}. \tag{52.11}$$

---

① W.Pauli, Handbuch der Physik, Vol.24/1(Springer, Berlin, 1933), p.236.

② S.N.Gupta, Phys.Rev.122, 1923(1961).

用$\psi^{+}(p)$和$\phi(p)$满足归一化条件

$$\psi^{*-}(p)\psi^{+}(p)=\phi^{*}(p)\phi(p), \tag{52.12}$$

来定C，我们求出

$$C=\left(\frac{\kappa+p_0}{2p_0}\right)^{1/2}, \tag{52.13}$$

因此（52.11）式变成

$$\psi^{+}(p)=\left(\frac{\kappa+p_0}{2p_0}\right)^{1/2}\begin{pmatrix}\phi(p)\\ \dfrac{\sigma\cdot p}{\kappa+p_0}\phi(p)\end{pmatrix}. \tag{52.14}$$

利用（52.1）和(52.14)二式，与对易关系式（52.4)合起来，总可以得到下述形式的结果

$$\psi^{*-}(p')O\psi^{+}(p)=\phi^{*}(p')[a+b_i\sigma_i]\phi(p), \tag{52.15}$$

这里O是狄拉克矩阵的乘积，而a和b_i是数。上面的处理方法也可以借助于关系

$$\psi^{-}(p)=\left(\frac{\kappa+p_0}{2p_0}\right)^{1/2}\begin{pmatrix}\dfrac{\sigma\cdot p}{\kappa+p_0}\chi(p)\\ \chi(p)\end{pmatrix}, \tag{52.16}$$

推广到正电子旋量。（52.16）式是由（52.8）式得出的。

在24和25两节中证明了

$$\begin{aligned}\psi^{+}(p)&=\sum_{r=1,2}a_r(p)u_r(p),\\ \psi^{-}(p)&=\sum_{r=1,2}b_r^{*}(p)v_r(p),\end{aligned} \tag{52.17}$$

其中$a_r(p)$是电子湮灭算符，$b_r^{*}(p)$是正电子产生算符，而且

$$u_r^{*}(p)u_s(p)=v_r^{*}(p)v_s(p)=\delta_{rs}. \tag{52.18}$$

当把（52.14）式和（52.16）式代入到（52.17）式中，并且令

$$u_r(p)=\left(\frac{\kappa+p_0}{2p_0}\right)^{1/2}\begin{pmatrix}\alpha_r(p)\\ \dfrac{\sigma\cdot p}{\kappa+p_0}\alpha_r(p)\end{pmatrix},$$

$$v_r(p)=\left(\frac{\kappa+p_0}{2p_0}\right)^{1/2}\begin{pmatrix}\dfrac{\sigma\cdot p}{\kappa+p_0}\beta_r(p)\\ \beta_r(p)\end{pmatrix},$$

就可得出

$$\begin{aligned}\phi(p)&=\sum_{r=1,\ 2}a_r(p)\alpha_r(p),\\ \chi(p)&=\sum_{r=1,\ 2}b_r^*(p)\beta_r(p),\end{aligned}\tag{52.19}$$

其中

$$\alpha_r^*(p)\alpha_s(p)=\beta_r^*(p)\beta_s(p)=\delta_{rs}.\tag{52.20}$$

研究泡利旋量的电荷共轭也是很有意义的。根据27节，ψ的电荷共轭是

$$\psi_c=\eta_c\gamma_2\psi^{*T},\quad \eta_c^*\eta_c=1,\tag{52.21}$$

因此

$$\psi_c^+(p)=\eta_c\gamma_2[\psi^{*+}(p)]^T,\tag{52.22}$$

这里$\psi_c^+(p)$能够以类似于（52.14）式的方式分解为

$$\psi_c^+(p)=\left(\frac{\kappa+p_0}{2p_0}\right)^{1/2}\begin{pmatrix}\phi_c(p)\\ \dfrac{\sigma\cdot p}{\kappa+p_0}\phi_c(p)\end{pmatrix},\tag{52.23}$$

而$\psi^{*+}(p)$由（52.16）式的厄密共轭给出。我们还可以注意到下列关系：

$$\sigma_1^T=\sigma_1,\quad \sigma_2^T=-\sigma_2,\quad \sigma_3^T=\sigma_3.\tag{52.24}$$

（52.22）式经过化简可得

$$\phi_c(p)=-i\eta_c\sigma_2[\chi^*(p)]^T,\tag{52.25}$$

所以

$$\phi_c^*(p)=i\eta_c^*[\chi(p)]^T\sigma_2,\tag{52.26}$$

从而有

$$:\phi_c^*(p')\phi_c(p):=-:\chi^*(p)\chi(p'):,$$
$$:\phi_c^*(p')\sigma_i\phi_c(p):=:\chi^*(p)\sigma_i\chi(p'):. \tag{52.27}$$

简化成为泡利旋量和泡利矩阵的方法对研究物理过程中与自旋的依赖关系是特别有用的。

53. 散射算符的么正化

在29节中，利用关系式（29.2）定义了散射算符 S，而且指出了 S 是么正的，因为对一个有相互作用的场的系统，（29.1）式保证了态矢量的模方是守恒的。通过把散射算符表示为这样形式

$$S=1+\sum_{n=1}S_n\,. \tag{53.1}$$

也实现了散射算符的展开。

我们现在考虑散射算符的另一种展开①。我们令

$$S=\frac{1-\frac{1}{2}iK}{1+\frac{1}{2}iK}, \tag{53.2}$$

其中 S 的么正性意味着 K 是厄密的，并且我们将 K 按下式

$$K=\sum_{n=1}^{\infty}K_n. \tag{53.3}$$

展开。应该注意到虽然展开式（53.1）就整体来说是么正的，但是实际上在这个展开式中，我们必须限制取有限数目的项。因此，在这种情况下，它就不是么正的了。另一方面，由（53.2）和（53.3）两式给出的展开在任何阶近似中都是么正的，因此，它优于（53.1）式。我们把简单的展开（53.1）式称为直接展开

① S.N.Gupta, Proc. Cambridge Phil.Soc.47, 454(1951).

式，而把由（53.2）和（53.3）所给出展开称为么正展开。

为了利用一个系统的相互作用能量密度把K表示出来，我们回想起（29.9）式

$$S(t,-\infty)=1-\frac{i}{c\hbar}\int dx'\,\theta(t-t')H(x')S(t',-\infty),\tag{53.4}$$

在令$t=\infty$后，上式给出

$$S=1-\frac{i}{c\hbar}\int dx'\,H(x')S(t',-\infty).\tag{53.5}$$

通过引入一个满足下式的算符$\overline{S}(t)$

$$S(t,-\infty)=\overline{S}(t)\left(\frac{1+S}{2}\right),\tag{53.6}$$

可以把（53.5）式变换成

$$2i\frac{S-1}{S+1}=\frac{1}{c\hbar}\int dx'\,H(x')\overline{S}(t'),$$

因此，(53.2)式中的K应该是

$$K=\frac{1}{c\hbar}\int dx'\,H(x')\overline{S}(t')\cdot\tag{53.7}$$

进一步，根据（29.10）和（9.9）二式有

$$\theta(t-t')=\frac{1+\varepsilon(t-t')}{2},\tag{53.8}$$

所以若把（53.8）代入（53.4）式中，并且利用（53.5）式，我们有

$$S(t,-\infty)=\frac{1+S}{2}-\frac{i}{2c\hbar}\int dx'\,\varepsilon(t-t')H(x')S(t',-\infty),$$

借助于（53.6）式，上式导出

$$\overline{S}(t)=1-\frac{i}{2c\hbar}\int dx'\,\varepsilon(t-t')H(x')\overline{S}(t').\tag{53.9}$$

上面的关系表明，$\overline{S}(t)$可以通过重复代换表示成一个无穷级数。这使我们能够把（53.7）式表示成（53.3）式的形式，其中

$$K_n=\frac{1}{c\hbar}\left(\frac{-i}{2c\hbar}\right)^{n-1}\int dx'\int dx''\cdots\int dx^{(n)}\,\varepsilon(t'-t'')\varepsilon(t''-t''')$$
$$\cdots\varepsilon(t^{(n-1)}-t^{(n)})H(x')H(x'')\cdots H(x^{(n)})。$$

(53.10)

S_n 和 K_n 之间本质的差别在于前者包含 $\theta(t)$ 函数，而后者包含 $\varepsilon(t)$ 函数。然而，直接求 K_n 不如求 S_n 容易。因此，为了实用目的，利用 S_n 把 K_n 表示出来比较方便，这种表示或者通过关系 (53.8) 式将 $\varepsilon(t)$ 函数转换成 $\theta(t)$ 函数，或者直接地展开 (53.2) 式。因为，根据 (53.2) 式有

$$K=i(S-1)[1+\frac{1}{2}(S-1)]^{-1},$$

将 (53.1) 和 (53.3) 二式代入，上式可以展成

$$\sum_n K_n=i\left(\sum_n S_n\right)\left(i+\frac{1}{2}\sum_n S_n\right)^{-1}$$
$$=i\sum_n S_n+i\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\sum_n S_n\right)^2+\cdots+i\left(-\frac{1}{2}\right)^{p-1}$$
$$\cdot\left(\sum_n S_n\right)^p+\cdots,$$

因此

$$K_n=iS_n+i\left(-\frac{1}{2}\right)\sum_{n_1+n_2=n}S_{n_1}S_{n_2}+\cdots$$
$$+i\left(-\frac{1}{2}\right)^{p-1}\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_p=n}S_{n_1}S_{n_2}\cdots S_{n_p}$$
$$+\cdots,\qquad(53.11)$$

这里

$$\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_p=n}$$

表示取和遍及满足 $n_1+n_2+\cdots+n_p=n$ 的 n_1，n_2，$\cdots n_p$ 的一切可能的正整数值。

对于n为奇数，当 $S_n=0$ 时，由（53.11）式得出

$$K_2=iS_2 \tag{53.12}$$

$$K_4=iS_4-\frac{1}{2}iS_2S_2. \tag{53.13}$$

此外，由于 K_n 是厄密的，由此得出

$$iS_2=-iS_2^*$$

$$iS_4-\frac{1}{2}iS_2S_2=-iS_4^*+\frac{1}{2}iS_2^*S_2^*$$

这使我们能够将（53.13）式简化为

$$K_4=\frac{1}{2}i(S_4-S_4^*), \tag{53.14}$$

所以 K_4 等于 iS_4 的厄密部分。而且，根据（53.12)和(53.14)二式，K_n 和 S_n 之间关系对于 $n=2$ 或 4 可以表示成非常简单的形式，对较高的 n 值就不这样简单了。

利用 S_n 表示 K_n 的关系式（53.11）的物理意义如下：一个散射过程的相互作用图中的内部线，通常被认为代表虚粒子。但是事实上，当K值满足自由粒子的关系，即对于电子线满足 $K^2+K^2=0$，对于光子线满足 $K^2=0$ 时，传播四维矢量为K的内部线可以代表一个实粒子。如果可以将一个图看成由两部分组成，而连接这两部分的所有内部线的传播四维矢量能够同时满足自由粒子关系，那末就可以认为这样的图包含了一个实的中间态。（53.11）式右边第一项包含了所有可能的 n 阶图形的贡献，而余下的各项只是抵消了这些图形中的实中间态效应。

54. 散射过程中的阻尼效应

为了从散射算符的么正表示中得出散射截面，令

$$S=1+R \tag{54.1}$$

较为方便。上式可使我们把（53.2）式表示成

$$iR = K + \frac{1}{2}KR\,. \tag{54.2}$$

用矩阵元表示，（54.2）式成为

$$iR_{fi} = K_{fi} + \frac{1}{2}\sum_{n} K_{fn} R_{ni}, \tag{54.3}$$

这里指标 i 和 f 分别表示初态和末态，而指标 n 表示中间态。中间态是实的，因为只有在满足能量和动量守恒的态之间，K和 R 才有非零的矩阵元。

我们现在考虑两个粒子的散射，它们的初态传播四维矢量是 p 和 q，末态是 p' 和 q'，而实的中间态是 p'' 和 q''。由于在实态中间 R 和K的矩阵元具有下列形式

$$R_{fi} = V^{-2}(2\pi)^4\delta(p' + q' - p - q)F(p', q'; p, q), \tag{54.4}$$

$$K_{fi} = V^{-2}(2\pi)^4\delta(p' + q' - p - q)G(p', q'; p, q), \tag{54.5}$$

从（54.3）式得到

$$iF(p', q'; p, q) = G(p', q'; p, q) + \frac{1}{2}V^{-2}(2\pi)^4 \times \sum_{n} G(p', q'; p'', q'')F(p'', q''; p, q) \times \delta(p'' + q'' - p - q) \tag{54.6}$$

其中

$$\sum_{n} = \sum_{p''} \sum_{q''} \sum'' , \tag{54.7}$$

这里$\sum''$表示对于给定的 p''和 q'' 值，对自旋和极化态取和。借助于在 36 节中叙述过的处理方法，能够将(54.6)式变换成海特

勒积分方程①

$$iF(p',q';p,q)=G(p',q';p,q)+\frac{1}{8\pi^2}\times\int d\Omega_{q''}\frac{|\mathbf{q}''|q_0''}{\partial(\mathbf{p}_0''+\mathbf{q}_0'')/\partial q_0''}\times\sum{}''G(p',q';p'',q'')F(p'',q'';p,q),\tag{54.8}$$

这里 $d\Omega_{q''}$ 是沿 $\mathbf{q}''$ 方向的立体角元，而偏导数应由与 (36.9)式相同的方法求出。

把K_{fi}的值求到任意所希望的阶，就可以找出由(54.5)式给出的 $G(p',q';p,q)$，然后通过解积分方程 (54.8) 式可以确定 $F(p',q';p,q)$。最后，当末态和初态正交时，从 (54.1) 式显然有

$$S_{fi}=R_{fi},\tag{54.9}$$

所以 (54.4) 和 (36.1) 二式等效。而截面利用 (36.13)式可以从 $F(p',q';p,q)$得到

作为哈特利积分方程应用的一个例子，我们研究在非相对论近似下的光子-电子散射。令电子和光子在初态中传播四维矢量是 p 和 κ，在末态中是 p' 和 κ'，而在实的中间态是 p'' 和 κ''。我们还选择一个在其中有

$$\mathbf{p}=0,\quad p_0=\kappa,\tag{54.10}$$

的参照系并引入非相对论近似

$$p_0'=p_0''=\kappa,\quad k_0'=k_0''=k_0,\tag{54.11}$$

这时积分方程 (54.8) 式成为这样形式

$$iF(p',k';p,k)=G(p',k';p,k)+\frac{1}{8\pi^2}\int d\Omega_{k''}k_0^2\sum{}''G(p',k';p'',k'')\times F(p'',k'';p,k).\tag{54.12}$$

① W.Heitler, Proc. Cambridge Phil Soc. 37, 291 (1941)

由于$K_2 = iS_2$，K算符对所考虑这个过程的二阶贡献可以借助于38节的结果立即写下来。因此，对应于(38.1)，(38.11)和(38.12)三式，我们现在有

$$K_{fi} = V^{-2}(2\pi)^4\delta(p + k - p' - k')G(p', k'; p, k), \tag{54.13}$$

$$G(p', k'; p, k) = \frac{e^2}{4c\hbar\kappa(k_0 k_0')^{1/2}}\frac{1}{}\bar{u}(p')Ou(p), \tag{54.14}$$

和

$$O = k_0^{-1}(e'\cdot\gamma)(ik\cdot\gamma)(e\cdot\gamma) + k_0'^{-1}(e\cdot\gamma)(ik'\cdot\gamma)(e'\cdot\gamma). \tag{54.15}$$

在非相对论近似下，(54.14)式可以通过略去在O中奇数个γ_i的乘积而得到简化①。结果(54.15)式简化为

$$O = -(e'\cdot\gamma)\gamma_4(e\cdot\gamma) - (e\cdot\gamma)\gamma_4(e'\cdot\gamma) = 2(e'\cdot e)\gamma_4,$$

而(54.14)式可以表示为

$$G(p', k'; p, k) = \frac{e^2(e'\cdot e)}{2c\hbar\kappa k_0}u^*(p')u(p). \tag{54.16}$$

此外，在非相对论近似下，(54.16)式表明当初态和末态的电子处在相同自旋态时，有

$$G(p', k'; p, k) = \frac{e^2(e'\cdot e)}{2c\hbar\kappa k_0}, \tag{54.17}$$

但是，当这两个电子处在相反自旋态时，$G(p', k'; p, k) = 0$，因此，今后将认为散射过程中，电子具有单一自旋态。

鉴于(54.17)式，令

$$F(p', k'; p, k) = \frac{e^2(e'\cdot e)}{2c\hbar\kappa k_0}\overline{F}(k_0), \tag{54.18}$$

---

①用像在52节中叙述过的对泡利旋量和矩阵实行简化的方法可以方便地证明这一点。

我们试图解积分方程 (54.12)式。(54.18) 式中未知因子$\overline{F}(k_0)$不依赖于角度。从 (54.17) 和 (54.18) 二式又能得到

$$G(p',k';p'',k'')=\frac{e^2(\mathbf{e}'\cdot\mathbf{e}'')}{2c\hbar\kappa k_0},$$
$$F(p'',k'';p,k)=\frac{e^2(\mathbf{e}''\cdot\mathbf{e})}{2c\hbar\kappa k_0}\overline{F}(k_0). \tag{54.19}$$

把 (54.17)， (54.18) 和 (54.19) 三式代入 (54.12) 式，并注意到

$$\int d\Omega_{\mathbf{k}''}\sum{}''(\mathbf{e}'\cdot\mathbf{e}'')(\mathbf{e}''\cdot\mathbf{e})=\int d\Omega_{\mathbf{k}'}\left[\mathbf{e}'\cdot\mathbf{e}-\frac{(\mathbf{e}'\cdot\mathbf{k}'')(\mathbf{k}''\cdot\mathbf{e})}{\mathbf{k}^2}\right]$$
$$=\frac{8\pi}{3}(\mathbf{e}'\cdot\mathbf{e}),$$

我们得到

$$i\overline{F}(k_0)=\left(1+\frac{ie^2k_0}{6\pi c\hbar\kappa}\right)^{-1},$$

因此 (54.18) 式成为

$$F(p',k';p,k)=\frac{-ie^2(\mathbf{e}'\cdot\mathbf{e})}{2c\hbar\kappa k_0}\left(1+\frac{ie^2k_0}{6\pi c\hbar\kappa}\right)^{-1}. \tag{54.20}$$

在非相对论近似下，截面 (38.10) 式简化成

$$\sigma=\frac{1}{4\pi^2}\int d\Omega k_0^2\sum_{p\,o\,l}{}''|F(p',k';p,k)|^2, \tag{54.21}$$

而将 (54.20) 式代入 (54.21) 式后，并利用 (38.26)式，我们求得

$$\sigma=\frac{r_0^2}{1+\left(\frac{2}{3}r_0k_0\right)^2}\int d\Omega\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\theta\right), \tag{54.22}$$

这里r_0由 (38.30) 式给出。上面的截面与 (38.32) 式之间差一个因子$\left[1+\left(\frac{2}{3}r_0k_0\right)^2\right]^{-1}$，而且和熟知的光在电子上的有辐射阻尼散射的经典结果一致。的确，散射算符的么正化总会导致散射过程中的阻尼效应。

因为 $e^2/4\pi c\hbar$ 的值很小，用散射算符的么正表示代替比较方便的直接表示，在量子电动力学中不会对有实验意义的散射截面产生重大的修正。但是，在强相互作用中，由散射算符么正化得出的阻尼效应是相当重要的①。

55. 双粒子势的推导

利用散射算符的么正表示，我们来叙述一种推导双粒子势的一般步骤②。

在53节中已指出，实现散射算符 S 的么正表示可以通过将 S 表示为这种形式

$$S=\frac{1-\frac{1}{2}iK}{1+\frac{1}{2}iK} \tag{55.1}$$

并且将厄密算符 K 按

$$K=\sum_n K_n \tag{55.2}$$

展开。这里 K_n 由 (53.10) 或 (53.11) 式给出，特别是

$$K_1=\frac{1}{c\hbar}\int dx H(x). \tag{55.3}$$

因此，如果我们令

$$K=\frac{1}{c\hbar}\int dx H_{\mathrm{eff}}(x), \tag{55.4}$$

可以把厄密算符解释为有效相互作用能量密度，在第一阶么正近似中它的贡献等于在所有近似中 H 的贡献。上述关系也可写成为

$$K=\frac{1}{c\hbar}\int dx_0 \mathscr{H}_{\mathrm{eff}}, \tag{55.5}$$

---

①对于在核子-核子散射的介子理论中阻尼的专门处理见C. W. Bock and R. D. Haracz, Phys. Rev. D 5, 39 (1972).

② S. N. Gupta, Nucl. Phys. 57 19(1964).

其中

$$\mathscr{H}_{eff}=\int dx H_{eff} \tag{55.6}$$

代表有效相互作用能量。

我们现在考虑两个电子的散射，它们的传播四维矢量在初态中是 p 和 q，在末态中是 p' 和 q'。在估计了 K 的贡献并按照 (52.15) 式对泡利旋量和泡利矩阵进行简化后，有可能以

$$\begin{aligned}K=&\frac{(2\pi)^4}{V^2c\hbar}\delta(p+q-p'-q')\\&\times[\phi^{(2)*}(q')\phi^{(1)*}(p')\mathscr{W}(p'-p,p,q,\sigma^{(1)},\sigma^{(2)})\\&\times\phi^{(1)}(p)\phi^{(2)}(q)+\phi^{(2)*}(p')\phi^{(1)*}(q')\mathscr{W}(q'\\&-p,p,q,\sigma^{(1)},\sigma^{(2)})\phi^{(1)}(p)\phi^{(2)}(q)]\end{aligned} \tag{55.7}$$

的形式来表示结果到任意阶。这里上标 1 和 2 表示 $\sigma^{(1)}$ 只作用在旋量 $\phi^{(1)}$ 和 $\phi^{(1)*}$ 上，而 $\sigma^{(2)}$ 只作用在 $\phi^{(2)}$ 和 $\phi^{(2)*}$ 上。在 (55.7) 式方括弧中第二项称为交换项，因为它是由第一项通过交换 p' 和 q' 得到的，而且这有关联的两项的出现是两个电子不可区分性的结果。还应该注意到，由于两个电子的对称地位，有

$$\begin{aligned}&\mathscr{W}(p'-p,p,q,\sigma^{(1)},\sigma^{(2)})=\mathscr{W}(q'\\&\quad-q,q,p,\sigma^{(2)},\sigma^{(1)}),\\&\mathscr{W}(q'-p,p,q,\sigma^{(1)},\sigma^{(2)})=\mathscr{W}(p'\\&\quad-q,q,p,\sigma^{(2)},\sigma^{(1)}).\end{aligned} \tag{55.8}$$

由 (55.7) 式得出的有效相互作用能量是

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_{eff}=&V^{-2}\int dx\, e^{i(p+q-p'-q')\cdot x}\\&\times[\phi^{(2)*}(q')\phi^{(1)*}(p')\mathscr{W}(p'-p,p,q,\sigma^{(1)},\\&\sigma^{(2)})\phi^{(1)}(p)\phi^{(2)}(q)+\phi^{(2)*}(p')\phi^{(1)*}(q')\\&\times\mathscr{W}(q'-p,p,q,\sigma^{(1)},\sigma^{(2)})\phi^{(1)}(p)\phi^{(2)}(q)],\end{aligned} \tag{55.9}$$

这可以把 (55.9) 式代入(55.5)式来证明。根据 (52.19)式，有

$$\phi^{(1)}(\mathbf{p})=a(\mathbf{p})\alpha^{(1)}(\mathbf{p}),\quad \phi^{(2)}(\mathbf{q})=a(\mathbf{q})\alpha^{(2)}(\mathbf{q}),\tag{55.10}$$

其中已略去自旋指标。此外，初态和末态同真空态 Ψ_0 的关系为

$$\Psi_i=a^*(\mathbf{p})a^*(\mathbf{q})\Psi_0,\quad \Psi_f=a^*(\mathbf{p}')a^*(\mathbf{q}')\Psi_0.\tag{55.11}$$

因此利用 (55.10) 和 (55.11) 式，(55.9) 式给出

$$\begin{aligned}\langle f|\mathscr{H}_{eff}|i\rangle=V^{-2}\int d\mathbf{x}\,e^{i(\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{p}'-\mathbf{q}')\cdot\mathbf{x}}&\\ \times[\alpha^{(2)*}(\mathbf{q}')\alpha^{(1)*}(\mathbf{p}')\mathscr{W}(\mathbf{p}'-\mathbf{p},\mathbf{p},\mathbf{q},&\\ \sigma^{(1)},\sigma^{(2)})\alpha^{(1)}(\mathbf{p})\alpha^{(2)}(\mathbf{q})-\alpha^{(2)*}(\mathbf{p}')&\\ \times\alpha^{(1)*}(\mathbf{q}')\mathscr{W}(\mathbf{q}'-\mathbf{p},\mathbf{p},\mathbf{q},\sigma^{(1)},\sigma^{(2)})&\\ \times\alpha^{(1)}(\mathbf{p})\alpha^{(2)}(\mathbf{q})],&\end{aligned}$$

它可以表示成

$$\begin{aligned}\langle f|\mathscr{H}_{eff}|i\rangle=\int d\mathbf{x}'\int d\mathbf{x}''\psi_f^*(1,2)e^{iE_ft/\hbar}\mathscr{W}(\mathbf{x}'-\mathbf{x}'')&\\ \times\psi_i(1,2)e^{-iE_it/\hbar},&\end{aligned}\tag{55.12}$$

其中各量的定义为

$$\mathscr{W}(\mathbf{x})=(2\pi)^{-3}\int d\mathbf{k}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\mathscr{W}(\mathbf{k},\mathbf{p}^{(1)},\mathbf{p}^{(2)}\sigma^{(1)},\sigma^{(2)});\tag{55.13}$$

$$\begin{aligned}\psi_i(1,2)&=(1/\sqrt{2})[\psi^{(1)}(\mathbf{p})\psi^{(2)}(\mathbf{q})\\&\quad-\psi^{(1)}(\mathbf{q})\psi^{(2)}(\mathbf{p})],\\ \psi_f(1,2)&=(1/\sqrt{2})[\psi^{(1)}(\mathbf{p}')\psi^{(2)}(\mathbf{q}')\\&\quad-\psi^{(1)}(\mathbf{q}')\psi^{(2)}(\mathbf{p}')];\end{aligned}\tag{55.14}$$

$$\begin{aligned}E_i&=c\hbar(p_0+q_0),\\ E_f&=c\hbar(p_0'+q_0');\end{aligned}\tag{55.15}$$

这里

$$\begin{aligned}\psi^{(1)}(\mathbf{p})&=V^{-1/2}\alpha^{(1)}(\mathbf{p})e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}'},\\ \psi^{(2)}(\mathbf{q})&=V^{-1/2}\alpha^{(2)}(\mathbf{q})e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}''},\end{aligned}\tag{55.16}$$

$$\mathbf{p}^{(1)} = -i\partial', \quad \mathbf{p}^{(2)} = -i\partial''.$$

我们所得的 (55.12) 式使我们能够以初等量子力学的言语来描述电子-电子散射，这里 $\psi_i(1,2)exp(-iE_it/\hbar)$ 和 $\psi_f(1,2)exp(-iE_ft/\hbar)$ 代表二电子系统反对称的初态和末态波函数，而 $\mathscr{W}(\mathbf{x}'-\mathbf{x}'')$ 代表有效相互作用算符。如果用 $\mathscr{V}(\mathbf{x}'-\mathbf{x}'')$ 代表双电子系统的势，那末

$$\langle f|\mathscr{W}|i\rangle = \langle f|\mathscr{V}|i\rangle + \sum_{E_n\neq E_i} \frac{\langle f|\mathscr{V}|n\rangle\langle n|\mathscr{V}|i\rangle}{E_i - E_n} + \cdots, \tag{55.17}$$

这是大家熟知的。上式中

$$\langle r|\mathscr{W}|s\rangle = \int d\mathbf{x}' \int d\mathbf{x}''\psi_r^*(1,2)\mathscr{W}(\mathbf{x}'-\mathbf{x}'')\psi_s(1,2),$$
$$\langle r|\mathscr{V}|s\rangle = \int d\mathbf{x}' \int d\mathbf{x}''\psi_r^*(1,2)\mathscr{V}(\mathbf{x}'-\mathbf{x}'')\psi_s(1,2), \tag{55.18}$$

而且式中取和遍及所有 $E_n\neq E_i$ 的中间态。通过代入

$$\mathscr{W} = \mathscr{W}_2 + \mathscr{W}_4 + \cdots,$$
$$\mathscr{V} = \mathscr{V}_2 + \mathscr{V}_4 + \cdots, \tag{55.19}$$

这里 W_n 和 V_n 具有 e 的 n 阶，能够从 (55.17) 式推出

$$\langle f|\mathscr{W}_2|i\rangle = \langle f|\mathscr{V}_2|i\rangle,$$
$$\langle f|\mathscr{W}_4|i\rangle = \langle f|\mathscr{V}_4|i\rangle + \sum_{E_n\neq E_i} \frac{\langle f|\mathscr{V}_2|n\rangle\langle n|\mathscr{V}_2|i\rangle}{E_i - E_n}$$

或者

$$\langle f|\mathscr{V}_2|i\rangle = \langle f|\mathscr{W}_2|i\rangle, \tag{55.20}$$
$$\langle f|\mathscr{V}_4|i\rangle = \langle f|\mathscr{W}_4|i\rangle - \sum_{E_n\neq E_i} \frac{\langle f|\mathscr{W}_2|n\rangle\langle n|\mathscr{W}_2|i\rangle}{E_i - E_n} \tag{55.21}$$

等等。

根据 (55.20) 式，$V_2 = W_2$，因此从 (55.7) 和 (55.13) 式得到

$$K_2=\frac{(2\pi)^4}{V^2c\hbar}\delta(p+q-p'-q')$$
$$\times[\phi^{(2)*}(q')\phi^{(1)*}(p')\mathscr{V}_2(p'-p,p,q,\sigma^{(1)},$$
$$\sigma^{(2)})\phi^{(1)}(p)\phi^{(2)}(q)+\phi^{(2)*}(p')\phi^{(1)*}(q')$$
$$\times\mathscr{V}_2(q'-p,p,q,\sigma^{(1)},\sigma^{(2)})\phi^{(1)}(p)\phi^{(2)}(q)],$$
(55.22)

以及

$$\mathscr{V}_2(x)=(2\pi)^{-3}\int dk e^{ik\cdot x}\mathscr{V}_2(k,\ p^{(1)},p^{(2)},\sigma^{(1)},\sigma^{(2)}),$$
(55.23)

这表示 $\mathscr{V}_2$ 能直接由 k_2 得到。然而，为了求出 $\mathscr{V}_4$，首先必须从 k_2 和 k_4 求出 $\mathscr{W}_2$ 和 $\mathscr{W}_4$，然后把它们代入 (55.21) 式。因为一般说来，求出 $\mathscr{W}_n$ 比求出 $\mathscr{V}_n$ 简单一点，凡是可能的地方，使用有效相互作用算符 $\mathscr{W}$ 而不是用势 $\mathscr{V}$ 是更加方便的。

对上面的论述稍加修改也能够应用于正电子-电子散射。令 p 和 p' 是电子初态和末态传播四维矢量，而 q 和 q' 是正电子的初态和末态传播四维矢量。计算出任意阶的 K 贡献并按在 52 节中阐明的那样简化为泡利旋量和泡利矩阵后，我们又得到了包含旋量 $\phi^*(p)$，$x^*(q)$，$\phi(p)$，和 $x(q')$ 的不同配对的两项。然而，由于电子和正电子是可区分的粒子，这两项不能用系统波函数反对称化来处理。但是它们能够通过泡利矩阵的对调关系合并成单项

$$1_{s's}1_{r's}=\frac{1}{2}1_{r'r}1_{s's}+\frac{1}{2}(\sigma_{r'r}\cdot\sigma_{s's}),$$
$$\sigma_{s's}\cdot\sigma_{r's}=\frac{3}{2}1_{r'r}1_{s's}-\frac{1}{2}(\sigma_{r'r}\cdot\sigma_{s's}),$$
$$(\sigma_{s'r}\cdot c)(\sigma_{r's}\cdot c)-\frac{1}{3}(\sigma_{s'r}\cdot\sigma_{r's}\cdot\sigma) \qquad (55.24)$$
$$=(\sigma_{r'r}\cdot c)(\sigma_{s's}\cdot c)-\frac{1}{3}(\sigma_{r'r}\cdot\sigma_{s's}),$$
$$\sigma_{s'r}1_{r's}+1_{s'r}\sigma_{r's}=\sigma_{r'r}1_{s's}+1_{r'r}\sigma_{s's},$$

这里I_{rs}和σ_{rs}表示单位矩阵I和泡利矩阵σ的矩阵元，而c是任意一个单位矢量。此外为了把电子和正电子同等看待，可以借助于电荷共轭关系（52.27）式，把一对$\chi^*(q)$和$\chi(q')$变换成为一对$\phi_e^*(q')$和$\phi_c(q)$。因此，K的贡献可以简化为单项形式：

$$K' = \frac{(2\pi)^4}{V^2 c\hbar}\delta(p+q-p'-q') \times \phi_e^{(2)*}(q')\phi^{(1)*}(p')\mathscr{W}'(p'-p, p, q, \sigma^{(1)}, \sigma^{(2)})\phi^{(1)}(p)\phi_e^{(2)}(q), \qquad (55.25)$$

这里上标1和2分别表示电子和正电子，因此有效相互作用算符和势可以通过类似于对电子-电子系统给出的步骤得出。

56. 电子-电子势和正电子-电子势

利用上节描述的步骤，我们给出一些熟知势的简化推导①。

(a) 电子-电子势

从40节的论述中得出，对电子-电子散射K_2的贡献可以表示成

$$K_2 = iS_2 = V^{-2}(2\pi)^4\delta(p+q-p'-q')\frac{e^2}{c\hbar}\frac{1}{\mathbf{k}^2-k_0^2} \times :[\bar{\psi}^-(q')\gamma_\mu\psi^+(q)][\bar{\psi}^-(p')\gamma_\mu\psi^+(p)]:, \qquad (56.1)$$

这里

$$\mathbf{k} = \mathbf{p}'-\mathbf{p} = -(\mathbf{q}'-\mathbf{q}),\quad k_0 = p_0'-p_0 = -(q_0'-q_0), \qquad (56.2)$$

而交换项已经略去，因为对于导出电子-电子势，直接项的知识是足够了。

我们把（56.1）式写成

$$K_2 = K_C + K_B \qquad (56.3)$$

其中

---

① S.N.Gupta, Nucl.Phys.57,19(1964).

$$K_C = V^{-2}(2\pi)^4\delta(p+q-p'-q')\frac{e^2}{c\hbar}\frac{1}{\mathbf{k}^2-k_0^2}$$
$$\times:\{[\bar{\psi}^-(q')\gamma_4\psi^+(q)][\bar{\psi}^-(p')\gamma_4\psi^+(p)]$$
$$+[\bar{\psi}^-(q')\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\gamma}\psi^+(q)][\bar{\psi}^-(p')\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\gamma}\psi^+(q)]\}:, \quad (56.4)$$
$$K_B = V^{-2}(2\pi)^4\delta(p+q-p'-q')\frac{e^2}{c\hbar}\frac{1}{\mathbf{k}^2-k_0^2}$$
$$\times:\{[\bar{\psi}^-(q')\gamma_i\psi^+(q)][\bar{\psi}^-(p')\gamma_i\psi^+(p)]$$
$$-[\bar{\psi}^-(q')\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\gamma}\psi^+(q)][\bar{\psi}^-(p')\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\gamma}\psi^+(q)]\}:, \quad (56.5)$$

而

$$\mathbf{n}=\mathbf{k}/|\mathbf{k}|, \quad (56.6)$$

其中 K_C 代表时间光子和纵光子的贡献，而 K_B 代表横光子的贡献。

从关系式

$$\bar{\psi}^-(p')ik\cdot\boldsymbol{\gamma}\psi^+(p)=\bar{\psi}^-(p')[(ip'\cdot\gamma+\kappa)$$
$$-(ip\cdot\gamma+\kappa)]\psi^+(p)=0$$

能够推出

$$\bar{\psi}^-(p')\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\gamma}\psi^+(p)=-i(k_0/|\mathbf{k}|)\psi^{*-}(p')\psi^+(p),$$

以及类似关系

$$\bar{\psi}^-(q')\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\gamma}\psi^+(q)=-i(k_0/|\mathbf{k}|)\psi^{*-}(q')\psi^+(q)。$$

所以 (56.4) 式简化为

$$K_C = V^{-2}(2\pi)^4\delta(p+q-p'-q')$$
$$\times\frac{e^2}{c\hbar}\frac{1}{\mathbf{k}^2}:[\psi^{*-}(q')\psi^+(q)][\psi^{*-}(p')\psi^+(p)] \quad (56.7)$$

从 (56.7)式得出的电子-电子相互作用被解释成库仑相互作用，

而从（56.5）式得出的电子-电子相互作用称做布莱特相互作用①。

简化为泡利旋量和泡利矩阵后，如在55节中阐明的那样，有可能将（56.7）和（56.5）式变成

$$K_C=\frac{(2\pi)^4}{V^2c\hbar}\delta(p+q-p'-q')\times\phi^{(2)*}(q')\phi^{(1)*}(p')\mathscr{V}_C(k)\phi^{(1)}(p)\phi^{(2)}(q),$$

$$K_B=\frac{(2\pi)^4}{V^2c\hbar}\delta(p+q-p'-q')\times\phi^{(2)*}(q')\phi^{(1)*}(p')\mathscr{V}_B(k)\phi^{(1)}(p)\phi^{(2)}(q), \tag{56.8}$$

在非相对论近似下，上式中的$\mathscr{V}_C$和$\mathscr{V}_B$为

$$\mathscr{V}_C(k)=\frac{e^2}{k^2}-\frac{e^2}{4\kappa^2}\left[1-\frac{i\sigma^{(1)}\cdot(k\times p)-i\sigma^{(2)}\cdot(k\times q)}{k^2}\right], \tag{56.9}$$

$$\mathscr{V}_B(k)=-\frac{e^2}{4\kappa^2}\left[\frac{4p\cdot q}{k^2}-\frac{4(p\cdot k)(q\cdot k)}{k^4}+\frac{2i\sigma^{(1)}\cdot(k\times q)-2i\sigma^{(2)}\cdot(k\times p)}{k^2}+\frac{(\sigma^{(1)}\cdot\sigma^{(2)})k^2-(\sigma^{(1)}\cdot k)(\sigma^{(2)}\cdot k)}{k^2}\right]. \tag{56.10}$$

利用（55.23）式并借助于下列各式

$$(2\pi)^{-3}\int dke^{ik\cdot x}=\delta(x),$$

$$(2\pi)^{-3}\int dke^{ik\cdot x}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{4\pi|x|},$$

$$(2\pi)^{-3}\int dke^{ik\cdot x}\frac{k_i}{k^2}=\frac{i}{4\pi}\frac{x_i}{|x|^3},$$

① G.Breit,Phys.Rev.34,553(1929).

$$(2\pi)^{-3}\int dk e^{ik\cdot x}\frac{k_ik_j}{k^4}=\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\delta_{ij}}{|x|}-\frac{x_ix_j}{|x|^3}\right),$$

$$(2\pi)^{-3}\int dk e^{ik\cdot x}\frac{k_ik_j}{k^2}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\delta_{ij}}{|x|^3}-\frac{3x_ix_j}{|x|^5}\right)+\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta(x).$$

进行积分，我们能够从 (56.9) 和 (56.10) 式得到电子-电子势，因此，最后得到的势是

$$\mathscr{V}_2(x)=\mathscr{V}_C(x)+\mathscr{V}_B(x) \tag{56.11}$$

其中

$$\mathscr{V}_A(x)=\frac{e^2}{4\pi|x|}-\frac{e^2}{4\kappa^2}\delta(x)$$
$$-\frac{e^2}{16\pi\kappa^2}\left[\frac{\sigma^{(1)}\cdot(x\times p^{(1)})-\sigma^{(2)}\cdot(x\times p^{(2)})}{|x|^3}\right], \tag{56.12}$$

$$\mathscr{V}_C(x)=-\frac{e^2}{8\pi\kappa^2}\left[\frac{p^{(1)}\cdot p^{(2)}}{|x|}+\frac{x\cdot(x\cdot p^{(1)})p^{(2)}}{|x|^3}\right]$$
$$+\frac{e^2}{8\pi\kappa^2}\left[\frac{\sigma^{(1)}\cdot(x\times p^{(2)})-\sigma^{(2)}\cdot(x\times p^{(1)})}{|x|^3}\right]$$
$$+\frac{e^2}{16\pi\kappa^2}\left[\frac{\sigma^{(1)}\cdot\sigma^{(2)}}{|x|^3}-\frac{3(\sigma^{(1)}\cdot x)(\sigma^{(2)}\cdot x)}{|x|^5}\right.$$
$$\left.-\frac{8\pi}{3}\sigma^{(1)}\cdot\sigma^{(2)}\delta(x)\right], \tag{56.13}$$

这里$\mathscr{V}_C(x)$和$\mathscr{V}_B(x)$分别对应于库仑相互作用和布莱特相互作用。

(b) 正电子-电子势

对于正电子-电子散射的K_2贡献可以从(40.24)和 (40.25)式得到，并且可以表示为

$$K'_2=iS'_2=K'_{2a}+K'_{2b} \tag{56.14}$$

其中

$$K'_{2a}=V^{-2}(2\pi)^4\delta(p+q-p'-q')\frac{e^2}{c\hbar}\frac{1}{(p'-p)^2}$$
$$\times:[\bar{\psi}^+(q)\gamma_\mu\psi^-(q')][\bar{\psi}^-(p')\gamma_\mu\psi^+(p)]:, \tag{56.15}$$

$$K'_{2b}=V^{-2}(2\pi)^4\delta(p+q-p'-q')\frac{e^2}{c\hbar}\frac{1}{(q+p)^2}$$

$$\times:[\bar{\psi}^-(p')\gamma_\mu\psi^-(q')][\bar{\psi}^+(q)\gamma_\mu\psi^+(p)]:. \quad (56.16)$$

从27节所描述的电荷共轭得出

$$:\bar{\psi}^+(q)\gamma_\mu\psi^-(q'):=-:\bar{\psi}_c^-(q')\gamma_\mu\psi_c^+(q):, \quad (56.17)$$

因此（56.15）式可以变为

$$K'_{2a}=-V^{-2}(2\pi)^4\delta(p+q-p'-q')\frac{e^2}{c\hbar}\frac{1}{(p'-q)^2}$$

$$\times:[\bar{\psi}_c^-(q')\gamma_\mu\psi_c^+(q)][\bar{\psi}^-(p')\gamma_\mu\psi^+(p)]:, \quad (56.18)$$

与（56.1）式比较，上式表明从K'_{2a}得到的势$\mathscr{V}'_{2a}(x)$与电子-电子势仅差一个负号。

而且，按照52节的处理方法，化简成为泡利旋量和泡利矩阵后，我们发现，在非相对论近似下，（56.16）式变为

$$K'_{2b}=V^{-2}(2\pi)^4\delta(p+q-p'-q')(e^2/4c\hbar\kappa^2)$$
$$\times:[\phi^*(p')\sigma_i\chi(q')][\chi^*(q)\sigma_i\phi(p)]:,$$

借助于（55.24）中第二个关系式以及旋量的反对易性质，上式可以重新整理为

$$K'_{2b}=V^{-2}(2\pi)^4\delta(p+q-p'-q')(e^2/8c\hbar\kappa^2)$$
$$\times:\{-3[\chi^*(q)\chi(q')][\phi^*(p')\phi(p)]$$
$$+[\chi^*(q)\sigma_i\chi(q')][\phi^*(p')\sigma_i\phi(p)]\}:,$$

此外，利用（52.27）式，得

$$K'_{2b}=V^{-2}(2\pi)^4\delta(p+q-p'-q')(e^2/8ch\kappa^2)$$
$$\times:\{3[\phi_c^*(q')\phi_c(q)][\phi^*(p')\phi(p)]$$
$$+[\phi_c^*(q')\sigma_i\phi_c(q)][\phi^*(p')\sigma_i\phi(p)]\}:. \quad (56.19)$$

因此，有可能把K'_{2b}表为这样形式

$$K'_{2b}=\frac{(2\pi)^4}{V^2c\hbar}\delta(p+q-p'-q')\phi_c^{(2)*}(q')\phi^{(1)*}(p')$$
$$\times\mathscr{V}'_{2b}(k)\phi^{(1)}(p)\phi_c^{(2)}(q), \quad (56.20)$$

其中

$$\mathscr{V}'_{2b}(\mathbf{k})=\frac{e^2}{8\kappa^2}(3+\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(2)}), \tag{56.21}$$

由此得出

$$\mathscr{V}'_{2b}(\mathbf{x})=\frac{e^2}{8\kappa^2}(3+\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(2)})\delta(\mathbf{x}). \tag{56.22}$$

因此，对正电子-电子势，我们得到这样结果①

$$\mathscr{V}'_2(\mathbf{x})=-\mathscr{V}_2(\mathbf{x})+\mathscr{V}'_{2b}(\mathbf{x}), \tag{56.23}$$

这里$V_2(\mathbf{x})$和$V_{2b}(\mathbf{x})$由(56.11)和(56.22)式给出。

57. 红外发散

在量子电动力学中，红外发散似乎出现在包含有能量极小的光子的过程中。象我们将要看到的那样，这种发散的处理要比在第六章中讨论过的由于虚粒子传播四维矢量的大值引起的严重发散简单得多。在含有光子和带电粒子的过程中，如果光子的动量比带电粒子动量以及带电粒子之间动量传递要小，就说这是一个软光子。研究红外发散时，采用软光子近似是合适的。

让我们考虑一个电子被外场散射而发射一个光子的情况。对于这种韧致辐射过程，散射算符的最低阶贡献是

$$\begin{aligned}S_2=&V^{-3/2}(2\pi)(p'_0-p_0+k_0)A^{ex}_\mu(\mathbf{p}'-\mathbf{p}+\mathbf{k})a^*_\nu(\mathbf{k})a^*(\mathbf{p}')a(\mathbf{p})\\&\times\frac{ie^2}{(c\hbar)^{3/2}}\frac{1}{(2k_0)^{1/2}}\bar{u}(\mathbf{p}')\Big[\gamma_\mu\frac{i(p-k)\cdot\gamma-\kappa}{(p-k)^2+\kappa^2}\gamma_\nu\\&+\gamma_\nu\frac{i(p'+k)\cdot\gamma-\kappa}{(p'+k)^2+\kappa^2}\gamma_\mu\Big]u(\mathbf{p}),\end{aligned} \tag{57.1}$$

这里我们已经按照42节进行了处理，对任意外场用了付里叶分解(41.6)式，而与(57.1)式相对应的相互作用图是图42.1。在软光子近似下，与$\mathbf{p}$，$\mathbf{p}'$以及$\mathbf{p}'-\mathbf{p}$相比$\mathbf{k}$可以略去，

① V.B.Berestetski and L.D.Landau, J. Exptl. Theoret. Phys. USSR 19,673(1949).

这也意味着与 p_0 和 p'_0 相比，k_0 可以略去。因此，做了软光子近似，并利用 (42.3) 和 (42.4) 式后，我们有

$$S_2 = V^{-3/2}(2\pi)\delta(p'_0 - p_0 + k_0)A^{*\,x}_{\mu}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})a^*_{\nu}(\mathbf{k})a^*(\mathbf{p}')a(\mathbf{p})$$
$$\times \frac{e^2}{(c\hbar)^{3/2}} \frac{1}{(2k_0)^{1/2}}\left(-\frac{p_\nu}{p\cdot k} - \frac{p'_\nu}{p'\cdot k}\right)\bar{u}(\mathbf{p}')\gamma_\mu u(\mathbf{p}). \tag{57.2}$$

进而，让我们将 (57.2) 式与电子被外场弹性散射的散射算符的最低阶贡献相比较，后者是

$$S_1 = V^{-1}(2\pi)\delta(p'_0 - p_0)A^{*\,x}_{\mu}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})a^*(\mathbf{p}')a(\mathbf{p})$$
$$\times(-e/c\hbar)\bar{u}(\mathbf{p}')\gamma_\mu u(\mathbf{p}) \tag{57.3}$$

而相应的相互作用图为图41.1。按照通常的方法从 (57.2) 式和 (57.3) 式算出截面，最低阶韧致辐射的截面 σ_B 可以借助于最低阶弹性散射截面 σ_0 表示为

$$\frac{d\sigma_B}{d\Omega} = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}}\frac{e^2}{c\hbar}\frac{1}{2k_0}\left(\frac{p_\nu}{p\cdot k} - \frac{p'_\nu}{p'\cdot k}\right)^2\frac{d\sigma_0}{d\Omega}$$
$$= \frac{e^2}{2(2\pi)^3 c\hbar}\int\frac{d\mathbf{k}}{k_0}\left(\frac{p_\nu}{p\cdot k} - \frac{p'_\nu}{p'\cdot k}\right)^2\frac{d\sigma_0}{d\Omega}, \tag{57.4}$$

在上式中，象在 42 节中一样，对光子的极化态，我们采取了协变取和步骤。

由于截面(57.4)式有形式为

$$\int d\mathbf{k}\,\frac{1}{k_0^3} = 4\pi\int dk_0\frac{1}{k_0},$$

的对 $\mathbf{k}$ 的依赖关系，对 $k_0 = 0$，它是对数发散的，因此 σ_B 包含红外发散。利用发射一个趋于零的低能光子的散射在物理上和弹性散射不可区别这一事实可以克服红外发散困难。并且，我们将证明在(57.4)式中的红外发散被一个类似的发散所抵消，这个发散出现在当考虑辐射修正时的电子弹性散射截面中。

在48节中，我们求得一个电子被外场弹性散射的二阶辐射修正含有与 λ有关的项。在（44.3）式给出的$D_F(k)$中，引入参数 λ 相当于给光子一个有限质量，这就避免了光子能量取零值。因而，只有当λ→0 时才显示出红外发散。为了消除与图（48.1)相对应的辐射修正中的红外发散，让我们首先考虑顶角的贡献

$$S_\Lambda = -(e/c\hbar):A_\mu^{ex}(p'-p)\bar{\psi}(p')\Lambda_\mu(p,p')\psi(p): \tag{57.5}$$

此式可根据（48.9）和（48.13）二式得出。在上式中

$$\Lambda_\mu(p,p') = \frac{ie^2}{(2\pi)^4 c\hbar}\int\frac{dk}{k^2-i\varepsilon}\times\frac{\gamma_\nu(ip'-k)\cdot\gamma-\kappa]\gamma_\mu[i(p-k)\cdot\gamma-\kappa]\gamma_\nu}{[(p'-k)^2+\kappa^2][(p-k)^2+\kappa^2]}, \tag{57.6}$$

这里我们已经让 λ = 0，但是在相应于 $D_F(k)$ 的因子中写出了一个无限小参量 ε。对目前的目的而言 k 与 p 和 p' 相比可以忽略，然后利用（48.19）、（48.20）和（57.6）各式可导出

$$\Lambda_\mu(p,p') = -\frac{ie^2}{(2\pi)^4 c\hbar}\int\frac{dk}{k^2-i\varepsilon}\frac{p'_\nu p_\nu}{(p'\cdot k)(p\cdot k)}\gamma_\mu. \tag{57.7}$$

上面给的结果可以进一步简化。根据（30.25）式，通过令

$$\frac{1}{k^2-i\varepsilon} = P\frac{1}{k^2}+\pi i\delta(k^2), \tag{57.8}$$

并且只保留 δ函数项，因为只有这一项在 $k=0$ 时有贡献，因而引起红外发散。因此

$$\Lambda_\mu(p,p') = \frac{e^2}{2(2\pi)^3 c\hbar}\int dk\,\delta(k^2)\frac{p'_\nu p_\nu}{(p'\cdot k)(p\cdot k)}\gamma_\mu, \tag{57.9}$$

通过下列代换

$$\delta(k^2) = \frac{\delta(k_0-|\mathbf{k}|)+\delta(k_0+|\mathbf{k}|)}{2|\mathbf{k}|}, \tag{57.10}$$

可以把上式中对 k_0 的积分作出，得

$$\Lambda_\mu(p,p')=\frac{e^2}{2(2\pi)^3c\hbar}\int\frac{d\mathbf{k}}{k_0}\frac{p'_\nu p_\nu}{(p'\cdot k)(p\cdot k)}\gamma_\mu,$$

$$k_0\equiv|\mathbf{k}|. \qquad (57.11)$$

应该注意到当将 (57.10) 式代入 (57.9) 式时，积分中包含 $\delta(k_0-|\vec{\mathbf{k}}|)$和$\delta(k_0+|\vec{\mathbf{k}}|)$的两部分通过 $k\to -k$ 的变换，可以证明是等价的。

在48节中也求出过，包含光子自能部分的相互作用图的贡献没有红外发散，而包含电子自能部分的相互作用图的贡献导致在 (57.5) 式中用

$$\Lambda^c_\mu(p,p')=\Lambda_\mu(p,p')-[\Lambda_\mu(p,p')]_{p=p'}. \qquad (57.12)$$

取代$\Lambda_\mu(p,p')$。因此，略去没有红外发散的各项，在图 48.1中各图形的总贡献可简化为

$$\bar{S}_3=-(e/c\hbar):A^{c\,x}_\mu(p'-p)\bar{\psi}(p')\Lambda^c_\mu(p,p')\psi(p):, \qquad (57.13)$$

根据 (57.12) 和 (57.11) 二式，上式中的 $\Lambda^c_\mu(p,p')$ 可表示为

$$\Lambda^c_\mu(p,p')=\Lambda_\mu(p,p')-\frac{1}{2}\Lambda_\mu(p,p)-\frac{1}{2}\Lambda_\mu(p',p')$$

$$=f(p,p')\gamma_\mu \qquad (57.14)$$

而

$$f(p,p')=-\frac{e^2}{4(2\pi)^3c\hbar}\int\frac{d\mathbf{k}}{k_0}\left(\frac{p_\nu}{p\cdot k}-\frac{p'_\nu}{p'\cdot k}\right)^2. \qquad (57.15)$$

将 (57.14) 代入 (57.13)，得出

$$\bar{S}_3=f(p,p')S_1, \qquad (57.16)$$

其中

$$S_1=-(e/c\hbar):A^{c\,x}_\mu(p'-p)\bar{\psi}(p')\gamma_\mu\psi(p): \qquad (57.17)$$

代表由 (48.6) 式给出的弹性散射的散射算符最低阶贡献。令

$$\bar{\psi}(p')=V^{-1/2}a^*(\mathbf{p}')\bar{u}(\mathbf{p}'),\quad \psi(p)=V^{-1/2}a(\mathbf{p})u(\mathbf{p})$$

$$A^{c\,x}_\mu(p'-p)=2\pi A^{c\,x}_\mu(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\delta(p'_0-p_0).$$

即可证明（57.17）式与（57.3）式的等价性。从$S_1+\overline{S}_3$得出的弹性散射截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=[1+f(p,p')]^2\frac{d\sigma_0}{d\Omega}, \tag{57.18}$$

上式中表示$\frac{d\sigma_0}{d\Omega}$的$e^2$阶修正项是

$$2f(p,p')\frac{d\sigma_0}{d\Omega}=-\frac{e^2}{2(2\pi)^3c\hbar}\int\frac{d\mathbf{k}}{k_0}\left(\frac{p_\nu}{p\cdot k}-\frac{p'_\nu}{p'\cdot k}\right)^2\frac{d\sigma_0}{d\Omega}, \tag{57.19}$$

它抵消了（57.4）。

我们已经证明了韧致辐射和弹性散射二者的截面都包含红外发散，但是二截面的总和没有红外发散。因此为了实用目的有可能按下列方法避免红外发散：让我们把一个能量小到在给定的实验中不能观察到的那种光子称作红外光子。因此，如果在一个给定的实验中，ω_{min}代表一个可观察光子的最小k_0值，那么对红外光子，$k_0<\omega_{min}$。由此得出韧致辐射的物理截面可以从(57.1)式通过限制发射光子的k_0必须满足$k_0>\omega_{min}$来得到。而由发射$k_0<\omega_{min}$的光子所引起的贡献可以当作弹性散射的物理截面的一部分来处理。

58. 高能电子散射

让我们再考虑一个电子被外场的散射，并让σ_0表示最低阶弹性散射截面。我们对有光子发射和没有光子发射的两种情况求出散射截面σ_0的二阶修正，而且我们只限于讨论高能电子散射和软光子发射的情况。我们的研究将和57节相似，但我们现在进行详细的计算而不是简单地论证两种红外发散互相抵消。

(a) 高能韧致辐射

早已指出，在（44.3）式表示的$D_F(k)$中引入一个参数λ是

方便的。这相当于赋于光子一个不为零的质量，然后在物理上感兴趣的结果中再让这个质量趋于零。由于我们现在要把包含实光子和虚光子的两种散射截面合并起来，必须把这个极限步骤也推广到实光子中，而且我们必须假定一个实光子的传播四维矢量 k 满足

$$k^2+\lambda^2=0 \quad 或 k_0=(\mathbf{k}^2+\lambda^2)^{1/2}, \tag{58.1}$$

这里最后我们将让 $\lambda=0$。在采用了 (58.1) 式后，由 (57.1) 式给出的韧致辐射过程的散射算符最低阶贡献在软光子近似下简化为

$$S_2=V^{-3/2}(2\pi)\delta(p_0'-p_0+k_0)A_\mu^{*\lambda}(\mathbf{p}'-\mathbf{p})a_\nu^*(\mathbf{k})a^*(\mathbf{p}')a(\mathbf{p})$$

$$\times\frac{e^2}{(c\hbar)^{3/2}}\frac{1}{(2k_0)^{1/2}}\left(\frac{p_\nu}{p\cdot k+\frac{1}{2}\lambda^2}\right.$$

$$\left.-\frac{p_\nu'}{p'\cdot k+\frac{1}{2}\lambda^2}\right)\bar{u}(\mathbf{p}')\gamma_\mu u(\mathbf{p}). \tag{58.2}$$

而且，对于小的 λ 值，有

$$p\cdot k=\mathbf{p}\cdot\mathbf{k}-p_0(\mathbf{k}^2+\lambda^2)^{1/2}$$
$$=\mathbf{p}\cdot\mathbf{k}-p_0|\mathbf{k}|-p_0\lambda^2/2|\mathbf{k}|,$$

上式含有一个与 λ^2 有关而比 λ^2 大得多的项，对于 $p'\cdot k$ 项也是这样。所以在 (58.2) 式的分母中，λ^2 可以略去。因此，象在57节中一样，从 (58.2) 式中得出的截面可以表示为①

$$\frac{d\sigma_B}{d\Omega}=\frac{e^2}{2(2\pi)^3c\hbar}\int\frac{d\mathbf{k}}{k_0}\left(\frac{p_\nu}{p\cdot k}-\frac{p_\nu'}{p'\cdot k}\right)^2\frac{d\sigma_0}{d\Omega}, \tag{58.3}$$

但是 k 现在满足 (58.1) 式。上面的截面也可以写成

① 这里对所发射光子的极化态采用协变取和手续是必须的，因为当 $\lambda\neq0$ 时附加条件不能给出非横光子的不可观察性。

$$\frac{d\sigma_B}{d\Omega}=\frac{e^2}{2(2\pi)^3c\hbar}\int\frac{d\mathbf{k}}{k_0}\left[-\frac{\kappa^2}{(p\cdot k)^2}-\frac{\kappa^2}{(p'\cdot k)^2}+\frac{2\kappa^2+q^2}{(p\cdot k)(p'\cdot k)}\right]\frac{d\sigma_0}{d\Omega},\tag{58.4}$$

这里

$$q=p'-p.\tag{58.5}$$

将 $\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{p}$ 之间角度表示为 θ，对 θ 进行积分，我们有

$$\int d\mathbf{k}\frac{1}{k_0(p\cdot k)^2}=\int d|\mathbf{k}|\int_0^\pi d\theta\,\frac{2\pi\mathbf{k}^2\sin\theta}{k_0(p_0k_0-|\mathbf{p}||\mathbf{k}|\cos\theta)^2}$$

$$=4\pi\int d|\mathbf{k}|\,\frac{\mathbf{k}^2}{k_0(p_0^2k_0^2-\mathbf{p}^2\mathbf{k}^2)},$$

所以，将积分变量变为 k_0 后，得

$$\int d\mathbf{k}\frac{1}{k_0(p\cdot k)^2}=4\pi\int_\lambda^{\omega_{max}}dk_0\frac{(k_0^2-\lambda^2)^{1/2}}{\kappa^2k_0^2+\lambda^2\mathbf{p}^2},\tag{58.6}$$

这里，ω_{max} 是被发射光子的最大 k_0 值。由于 $\lambda\to0$，(58.6) 式中对 k_0 的积分可以利用被积函数的分子按 λ^2 幂次展开而作出来，展开为

$$(k_0^2-\lambda^2)^{1/2}=k_0-\lambda^2/2k_0+\cdots\tag{58.7}$$

这里只保留了第一项，结果得出

$$\int d\mathbf{k}\frac{1}{k_0(p\cdot k)^2}=4\pi\int_\lambda^{\omega_{max}}dk_0\frac{k_0}{\kappa^2k_0^2+\lambda^2\mathbf{p}^2}$$

$$=\frac{2\pi}{\kappa^2}\left(\ln\frac{\kappa^2}{\lambda^2}-\ln\frac{p_0^2}{\omega_{max}^2}\right).\tag{58.8}$$

也可以证明，积分 (58.6) 式里由展开式 (58.7) 的第二项引起的贡献是

$$-\frac{\pi}{\mathbf{p}^2}\ln\frac{p_0^2}{\kappa^2},$$

这一项没有红外发散并且在高能电子情况下可以略去。类似地，可以得出

$$\int d\mathbf{k}\frac{1}{k_0(p'\cdot k)^2}=\frac{2\pi}{\kappa^2}\left(\ln\frac{\kappa^2}{\lambda^2}-\ln\frac{p_0'^2}{\omega_{max}^2}\right).\tag{58.9}$$

而且，根据（46.1）式，有

$$\int d\mathbf{k}\frac{1}{k_0(p\cdot k)(p'\cdot k)}=\int_0^1 dv\int d\mathbf{k}\frac{1}{k_0(\bar{q}\cdot k)^2}, \qquad (58.10)$$

这里

$$\bar{q}=p+(p'-p)v, \qquad (58.11)$$

因此

$$-\bar{q}^2=\kappa^2+v(1-v)q^2. \qquad (58.12)$$

在(58.10)式右边对 k 的积分导致类似于(58.8)式结果，因此

$$\int d\mathbf{k}\frac{1}{k_0(p\cdot k)(p'\cdot k)}=\int_0^1 dv\frac{2\pi}{-\bar{q}^2}\left(\ln\frac{-\bar{q}^2}{\lambda^2}-\ln\frac{-\bar{q}_0^2}{\omega_{max}^2}\right). \qquad (58.13)$$

在软光子近似下，我们可以令(58.9)式和(58.13)式中 $p_0'=p_0$ 和 $\bar{q}_0=p_0$，然后把（58.8），（58.9）和（58.13）三式代入（58.4）式中，得出

$$\frac{d\sigma_B}{d\Omega}=\frac{\alpha}{\pi}\left[\int_0^1 dv\frac{2\kappa^2+q^2}{-2\bar{q}^2}\left(\ln\frac{-\bar{q}^2}{\lambda^2}-\ln\frac{p_0^2}{\omega_{max}^2}\right)-\ln\frac{\kappa^2}{\lambda^2}+\ln\frac{p_0^2}{\omega_{max}^2}\right]\frac{d\sigma_0}{d\Omega}. \qquad (58.14)$$

(*b*) 高能弹性散射

由于弹性散射已经在 48 节中相当详细讨论过，我们将对那里得到的结果做高能近似。已经证明，出现在电子散射中的顶角部分的贡献由(48.22)式给出。做 $v\to uv$ 的替换，(48.22)式可以表示为

$$\Lambda_\mu(p,p')=\frac{e^2}{8\pi^2c\hbar}\int_0^1 du\int_0^1 dvu\left[\lim_{\zeta\to\infty}\ln\left(\frac{(1-u)\zeta^2}{-u^2\bar{q}^2+(1-u)\lambda^2}\right)\gamma_\mu-\frac{(2-2u-u^2)\kappa^2\gamma_\mu+(1-u+u^2v-u^2v^2)q^2\gamma_\mu}{-u^2\bar{q}^2+(1-u)\lambda^2}\right.$$

$$-\frac{(u-u^2v-uv)\kappa(iq\cdot\gamma)\gamma_\mu+(u^2-u^2v-uv)\kappa\gamma_\mu(iq\cdot\gamma)}{-u^2\bar{q}^2+(1-u)\lambda^2}\Big],$$

(58.15)

而这里 $-\bar{q}^2$ 仍由(58.12)式定义。对 u 的积分能够很容易地做出，为此可让(58.15)式中所有 $\lambda=0$，除了在

$$\frac{e^2}{8\pi^2c\hbar}\int_0^1du\int_0^1dvu\Big[-\frac{2\kappa^2\gamma_\mu+q^2\gamma_\mu}{-u^2\bar{q}^2+(1-u)\lambda^2}\Big]$$

$$=-\frac{e^2}{8\pi^2c\hbar}\Big(\int_0^1dv\frac{2\kappa^2+q^2}{-2\bar{q}^2}\ln\frac{-\bar{q}^2}{\lambda^2}\Big)\gamma_\mu \qquad (58.16)$$

部分外，上式代表红外发散 $\Lambda_\mu(p,p')$的贡献。通过只保留这项的贡献，我们有

$$\Lambda_\mu(p,p')=-\frac{e^2}{8\pi^2c\hbar}\Big(\int_0^1dv\frac{2\kappa^2+q^2}{-2\bar{q}^2}\ln\frac{-\bar{q}^2}{\lambda^2}\Big)\gamma_\mu, \qquad (58.17)$$

所以

$$\Lambda_\mu^c(p,p')=\Lambda_\mu(p,p')-[\Lambda_\mu(p,p')]_{q=0}$$

$$=-\frac{e^2}{8\pi^2c\hbar}\Big(\int_0^1dv\frac{2\kappa^2+q^2}{-2\bar{q}^2}\ln\frac{-\bar{q}^2}{\lambda^2}-\ln\frac{\kappa^2}{\lambda^2}\Big)\gamma_\mu, \qquad (58.18)$$

而且通过对(58.15)式中其余项积分可以确定(58.18)式给出了在 $\frac{q^2}{\kappa^2}\gg1$ 时 $\Lambda_\mu^c(p,p')$ 的主要贡献。

注意到这样一点是值得的，即通过对虚光子使用软光子近似来简化(48.13)式中被积函数也可以得到(58.18)式。然而，这一近似必须按这样的方式进行，即使对大量值的虚光子传播四维矢量 k，不应使被积函数中任何一项的发散度增加。因此，作了软光子近似以及利用(48.19)和(48.20)二式后，有可能将(48.13)式简化为

$$\Lambda_\mu(p,p')=\frac{ie^2}{(2\pi)^4c\hbar}\int dk\frac{-4(p'\cdot p)\gamma_\mu}{[k^2+\lambda^2][k^2-2k\cdot p'][k^2-2k\cdot p]},$$

(58.19)

在合并分母和对 k 空间积分之后，上式立即得出 (58.16) 式，而且对于 $\Lambda^c_\mu(p,p')$，导出了(58.18) 式的结果。这可以这样来解释，即在(48.13)中相应于大 k 值的贡献主要是包含在 $\Lambda_\mu(p,p')$ 的发散常数部分中。

按照 (48.35) 式和 (58.18) 式，$\Pi^c_{\nu\mu}(q)/q^2$ 与 $\Lambda^c_\mu(p,p')$ 比较，当 $q^2/k^2\gg1$ 时是可以忽略的。因此，将 (58.18) 式代入 (48.38) 式并且略去 $\Pi^c_{\nu\mu}(q)/q^2$ 后，散射算符的第三阶贡献可以写成

$$\bar{S}_3=f(p,p')S_1,\qquad(58.20)$$

这里 S_1 是(48.6)式给出的散射算符的第一阶贡献，而

$$f(p,p')=-\frac{e^2}{8\pi^2c\hbar}\left(\int_0^1 dv\frac{2\kappa^2+q^2}{-2\bar{q}^2}\ln\frac{-\bar{q}^2}{\lambda^2}-\ln\frac{\kappa^2}{\lambda^2}\right).$$

(58.21)

从 $S_1+\bar{S}_3$ 得出的弹性散射截面是

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=[1+f(p,p')]^2\frac{d\sigma_0}{d\Omega},$$

所以，在利用 (58.21) 以及略去对 σ_0 比 e^2 阶高的修正后，我们得到

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left[1-\frac{\alpha}{\pi}\left(\int_0^1 dv\frac{2\kappa^2+q^2}{-2\bar{q}^2}\ln\frac{-\bar{q}^2}{\lambda^2}-\ln\frac{\kappa^2}{\lambda^2}\right)\right]\frac{d\sigma_0}{d\Omega}.$$

(58.22)

(c) 物理截面

正如在 57 节解释过的，σ_B 和 σ 不代表物理截面，因为发射红外光子和弹性散射在物理上是不可区分的。

为了得出对于韧致辐射的物理截面，让我们将 (58.14) 简化为

$$\frac{d\sigma_B}{d\Omega}=\frac{\alpha}{\pi}\left[\int_0^1 dv\frac{2\kappa^2+q^2}{-2\bar{q}^2}\ln\frac{-\bar{q}^2}{\lambda^2}-\ln\frac{\kappa^2}{\lambda^2}\right.$$

$$\left.-2\ln\frac{p_0}{\omega_{max}}\left(\ln\frac{q^2}{\kappa^2}-1\right)\right]\frac{d\sigma_0}{d\Omega},\qquad(58.23)$$

这里我们已经作了积分

$$\int_0^1 dv\frac{2\kappa^2+q^2}{-2\bar{q}^2}=\ln\frac{q^2}{\kappa^2}\qquad\text{当 } q^2/\kappa^2\gg 1,$$

而为了方便，避免了另一个积分。于是，我们可将 (58.23) 式表示为

$$\frac{d\sigma_B}{d\Omega}=\frac{d\sigma_{inf}}{d\Omega}+\frac{d\sigma_{brem}}{d\Omega},\qquad(58.24)$$

其中

$$\frac{d\sigma_{inf}}{d\Omega}=\frac{\alpha}{\pi}\left[\int_0^1 dv\frac{2\kappa^2+q^2}{-2\bar{q}^2}\ln\frac{-\bar{q}^2}{\lambda^2}-\ln\frac{\kappa^2}{\lambda^2}\right.$$

$$\left.-2\ln\frac{p_0}{\omega_{min}}\left(\ln\frac{q^2}{\kappa^2}-1\right)\right]\frac{d\sigma_0}{d\Omega},\qquad(58.25)$$

并且

$$\frac{d\sigma_{brem}}{d\Omega}=\frac{2\alpha}{\pi}\ln\frac{\omega_{max}}{\omega_{min}}\left(\ln\frac{q^2}{\kappa^2}-1\right)\frac{d\sigma_0}{d\Omega},\qquad(58.26)$$

这里(58.25)式是从(58.23) 将 ω_{max} 用 ω_{min} 替换而得到的，它给出了发射 $k_0<\omega_{min}$ 的红外光子的截面，而 (58.26) 式给出了韧致辐射的物理截面。

进一步，弹性散射的物理截面可以认为是由

$$\frac{d\sigma_{elas}}{d\Omega}=\frac{d\sigma}{d\Omega}+\frac{d\sigma_{inf}}{d\Omega}\qquad(58.27)$$

给出的，借助于(58.22)和(58.25)式，上式导出结果①

① J.Schwinger, Phys. Rev. 76, 790(1949).

$$\frac{d\sigma_{elas}}{d\Omega}=\left[1-\frac{2\alpha}{\pi}\ln\frac{p_0}{\omega_{min}}\left(\ln\frac{q^2}{\kappa^2}-1\right)\right]\frac{d\sigma_0}{d\Omega}. \tag{58.28}$$

(58.26)和(58.28)式的截面都是利用假设 $q^2/k^2\gg1$ 求出的，在软光子近似下，$q^2/k^2\gg1$ 意味着

$$\frac{4p^2}{\kappa^2}\sin^2\frac{\theta_0}{2}\gg1, \tag{58.29}$$

这里 θ_0 是 p' 和 p 之间夹角。

59. 多光子产生

多粒子产生是在高能碰撞中的一个重要现象，我们这里要研究在某些过程中任意数目的光子的产生。我们将要看到，借助于一个有名的恒等式，这个问题的处理可以是很简单的。

(*a*) 在正电子-电子湮灭中多光子的产生

我们将首先去求一对高能电子和正电子湮灭产生 n 个光子的截面①。对于这个过程最低阶相互作用图是图 59.1，那里的 p 和 q 分别代表电子和正电子的传播四维矢量，而 k_1，$k_2\cdots\cdots k_n$ 代表各光子的传播四维矢量。同阶的其它相互作用图可以通过按一切可能方法交换 n 个光子的地位而得到。对于在图 59.1 中的图形，散射算符所给出的矩阵元为②

$$S_{fi}^{(n)}=V^{-(n+2)/2}(2\pi)^4\delta(p+q-k_1-k_2-\cdots-k_n)$$
$$\times(-i)^{n+1}\left(\frac{e^2}{2c\hbar}\right)^{n/2}\frac{1}{(k_{0,1}k_{0,2}\cdots k_{0,n})^{1/2}}$$
$$\times\frac{\bar{v}(q)(e_n\cdot\gamma)[ip_{n-1}\cdot\gamma-\kappa](e_{n-1}\cdot\gamma)\cdots[ip_1\cdot\gamma-\kappa](e_1\cdot\gamma)u(p)}{[p_{n-1}^2+\kappa^2]\cdots[p_1^2+\kappa^2]}, \tag{59.1}$$

---

① S. N. Gupta, Phys. Rev. **98**, 1502(1955).

② 注意这里 k_r 和 p_r 分别表示带有分量 $(k_r, ik_{0,r})$ 和 $(p_r, ip_{0,r})$ 的四维矢量。

其中

$$
\begin{aligned}
&p_1 = p - k_1,\\
&p_2 = p - k_1 - k_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&p_{n-2} = p - k_1 - \cdots - k_{n-2} = k_n + k_{n-1} - q,\\
&p_{n-1} = p - k_1 - \cdots - k_{n-1} = k_n - q.
\end{aligned}
\tag{59.2}
$$



图 59.1　正电子-电子湮灭为 n 个光子

采用质心系将是方便的，所以

$$
\mathbf{q} = -\mathbf{p},\quad q_0 = p_0,
\tag{59.3}
$$

而且，我们将讨论极端相对论情况 $p_0 \gg \kappa$。

除了软光子外，这里必须考虑能量和初态电子及正电子能量相比不能忽略的硬光子。的确，能量和动量的守恒要求在质心系中末态含有至少两个硬光子。利用(59.2)式，让我们将 (59.1) 式表示为

$$
\begin{aligned}
S_{fi}^{(n)} = {} & V^{-(n+2)/2}(2\pi)^4\delta(p+q-k_1-k_2-\cdots-k_n)\\
& \times(-i)^{n+1}\left(\frac{e^2}{2c\hbar}\right)^{n/2}\frac{1}{(k_{0,1}k_{0,2}\cdots k_{0,n})^{1/2}}\\
& \bar{v}(\mathbf{q})(\mathbf{e}_n\cdot\gamma)[i(k_n-q)\cdot\gamma-\kappa]\cdots\\
& \times\frac{(\mathbf{e}_{r+2}\cdot\gamma)[i(k_n+\cdots+k_{r+2}-q)\cdot\gamma-\kappa]}{[(k_n-q)^2+\kappa^2]\cdots[(k_n+\cdots+k_{r+2}-q)^2+\kappa^2]}\\
& \times\frac{(\mathbf{e}_{r+1}\cdot\gamma)[i(p-k_1-\cdots-k_r)\cdot\gamma-\kappa](\mathbf{e}_r\cdot\gamma)}{[(p-k_1-\cdots-k_r)^2+\kappa^2]}\\
& \times[i(p-k_1-\cdots-k_{r-1})\cdot\gamma-\kappa](\mathbf{e}_{r-1}\cdot\gamma)\cdots
\end{aligned}
$$

$$\times\frac{[i(p-k_1)\cdot\gamma-\kappa](e_1\cdot\gamma)u(p)}{[(p-k_1-\cdots-k_{r-1})^2+\kappa^2]\cdots[(p-k_1)^2+\kappa^2]}\cdot \tag{59.4}$$

那么，如果 k_r 和 k_{r+1} 是大的，而所有其它的 k 是小的，则在(59.4)式分母中仅有单个因子包含硬光子的传播四维矢量，它使矩阵元增加到最大值。因此，当在图 59.1 中用连续光子线表示的两个光子是硬光子，而所有其它光子是软光子时，对(59.4)式的主要贡献就出现了。

进一步，当 k_r 和 k_{r+1} 是大的，而其它的 k 是小的时，(59.4)式简化为

$$\begin{aligned}S_{fi}^{(n)}=&V^{-(n+2)/2}(2\pi)^4\delta(p+q-k_1-k_2-\cdots-k_n)\\&\times(-i)^{n+1}\left(\frac{e^2}{2c\hbar}\right)^{n/2}\frac{1}{(k_{0,1}k_{0,2}\cdots k_{0,n})^{1/2}}\\&\times\frac{\bar{v}(q)(e_n\cdot\gamma)[-iq\cdot\gamma-\kappa]\cdots(e_{r+2}\cdot\gamma)[-iq\cdot\gamma-\kappa]}{[-2q\cdot k_n]\cdots[-2q\cdot(k_n+\cdots+k_{r+2})]}\\&\times\frac{(e_{r+1}\cdot\gamma)[i(p-k_r)\cdot\gamma-\kappa](e_r\cdot\gamma)}{[-2p\cdot k_r]}\\&\times\frac{[ip\cdot\gamma-\kappa](e_{r-1}\cdot\gamma)\cdots[ip\cdot\gamma-\kappa](e_1\cdot\gamma)u(p)}{[-2p\cdot(k_1+\cdots+k_{r-1})]\cdots[-2p\cdot k_1]}\cdot\end{aligned} \tag{59.5}$$

由于

$$\begin{aligned}[ip\cdot\gamma-\kappa](e_1\cdot\gamma)u(p)&=[2ip\cdot e_1-(ip\cdot\gamma+\kappa)]u(p)\\&=2ip\cdot e_1u(p),\end{aligned}$$

由此得出

$$\begin{aligned}&[ip\cdot\gamma-\kappa](e_{r-1}\cdot\gamma)\cdots[ip\cdot\gamma-\kappa](e_1\cdot\gamma)u(p)\\&=(2ip\cdot e_{r-1})\cdots(2ip\cdot e_1)u(p),\end{aligned}$$

并且与此类似，有

$$\begin{aligned}&\bar{v}(q)(e_n\cdot\gamma)[-iq\cdot\gamma-\kappa]\cdots(e_{r+2}\cdot\gamma)[-iq\cdot\gamma-\kappa]\\&=\bar{v}(q)(-2iq\cdot e_n)\cdots(-2iq\cdot e_{r+2}).\end{aligned}$$

因此可以把(59.5)式表示为较简单的形式

$$S_{fi}^{(n)}=V^{-2}(2\pi)^4\delta(p+q-k_1-k_2-\cdots-k_n)F(k_r,k_{r+1})$$
$$\times\frac{1}{V^{(n-2)/2}}\left(\frac{e^2}{2c\hbar}\right)^{(n-2)/2}\frac{1}{(k_{0,1}\cdots k_{0,r-1})^{1/2}}$$
$$\times\frac{1}{(k_{0,r+2}\cdots k_{0,n})^{1/2}}$$
$$\times\frac{(q\cdot e_n)\cdots(q\cdot e_{r+2})}{[q\cdot k_n]\cdots[q\cdot(k_n+\cdots+k_{r+2})]}$$
$$\times\frac{(-p\cdot e_{r-1})\cdots(-p\cdot e_1)}{[p\cdot(k_1+\cdots+k_{r-1})]\cdots[p\cdot k_1]} \tag{59.6}$$

其中

$$F(k_r,k_{r+1})=\frac{ie^2}{2c\hbar}\frac{1}{(k_{0,r}k_{0,r+1})^{1/2}}$$
$$\times\frac{v(\bar{q})(e_{r+1}\cdot\gamma)[i(p-k_r)\cdot\gamma-\kappa](e_r\cdot\gamma)u(p)}{[-2p\cdot k_r]}. \tag{59.7}$$

有可能通过归纳法证明恒等式①

$$\sum_{a_1,\cdots,a_n}^{P}\frac{1}{a_1(a_1+a_2)\cdots(a_1+a_2+\cdots+a_n)}=\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}, \tag{59.8}$$

这里取和遍及所有 a_1，a_2，$\cdots a_n$的置换。通过按每一种可能方法交换(59.6)式中光子 k_1，k_2，$\cdots k_{r-1}$ 的地位，应用上面恒等式我们得到

$$\sum_{k_1,\cdots,k_{r-1}}^{P}\ \sum_{k_{r+2},\cdots,k_n}^{P}S_{fi}^{(n)}$$
$$=V^{-2}(2\pi)^4\delta(p+q-k_1-k_2-\cdots-k_n)F(k_r,k_{r+1})$$

① 这个由 S.N. Gupta 在 P254 上引证的论文中给出的恒等式，在高能碰撞中有广泛的应用。

$$\times\frac{1}{V^{(n-2)/2}}\left(\frac{e^2}{2c\hbar}\right)^{(n-2)/2}\frac{1}{(k_{0,1}\cdots k_{0,r-1})^{1/2}}$$
$$\times\frac{1}{(k_{0,r+2}\cdots k_{0,n})^{1/2}}\left(\frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{e}_n}{q\cdot k_n}\cdots\frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{e}_{r+2}}{q\cdot k_{r+2}}\right)$$
$$\times\left(\frac{-\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}_{r-1}}{p\cdot k_{r-1}}\cdots\frac{-\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}_1}{p\cdot k_1}\right). \qquad (59.9)$$

这个结果可以认为是代表了电子发射软光子 k_1，$k_2\cdots k_{r-1}$ 而正电子发射软光子 $k_{r+2}\cdots k_n$ 的那些置换的贡献。为了计入光子其余置换的贡献，我们注意到，如果光子 k_1 是被正电子发射而不是电子发射的，(59.9) 应含有因子 $(\mathbf{q}\cdot\mathbf{e}/q\cdot k)$代替$(-\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}_1/p\cdot k_1)$。因此，光子 k_1 或者被电子发射，或者被正电子发射的效果可以在(59.9)式中通过替换

$$\frac{-\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}_1}{p\cdot k_1}\to\frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{e}_1}{q\cdot k_1}-\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}_1}{p\cdot k_1}$$

来计算。类似的替换对其它软光子也可以进行。最后，我们还必须计入交换硬光子 k_r 和 k_{r+1} 的效应。因此，从光子所有可能置换引起的主要贡献由

$$\sum_{k_1,\cdots,k_n}^{P}S_{fi}^{(n)}$$
$$=V^{-2}(2\pi)^4\delta(p+q-k_1-k_2-\cdots-k_n)[F(k_r,k_{r+1})$$
$$+F(k_{r+1},k_r)]\frac{1}{V^{(n-2)/2}}\left(\frac{e^2}{2c\hbar}\right)^{(n-2)/2}$$
$$\times\frac{f_1\cdots f_{r-1}}{(k_{0,1}\cdots k_{0,r-1})^{1/2}}\ \frac{f_{r+2}\cdots f_n}{(k_{0,r+2}\cdots k_{0,n})^{1/2}} \qquad (59.10)$$

给出。这里

$$f_i=\frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{e}_i}{q\cdot k_i}-\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}_i}{p\cdot k_i}. \qquad (59.11)$$

在不存在软光子时，(59.10)式简化为

$$\sum_{k_r,\,k_{r+1}}^{P} S_{fi}^{(2)} = V^{-2}(2\pi)^4\delta(p+q-k_r-k_{r+1})[F(k_r,k_{r+1}) + F(k_{r+1},k_r)] \tag{59.12}$$

与39节结果一致。由(59.10)式得出的截面σ_n可以通过由(59.12)式得出的截面σ_2表示为

$$\sigma_n = \sum_{k_1,\cdots,k_{r-1},k_{r+2},\cdots,k_n}{}' \sum_{p\,o\,l} \frac{1}{V^{n-2}}\left(\frac{e^2}{2c\hbar}\right)^{n-2} \times \frac{f_1^2\cdots f_{r-1}^2}{k_{0,1}\cdots k_{0,r-1}} \frac{f_{r+2}^2\cdots f_n^2}{k_{0,r+2}\cdots k_{0,n}}\sigma_2, \tag{59.13}$$

这里$\sum'$意味着取和时，对每一种物理上不同的态只取一次，因此

$$\frac{1}{V^{n-2}} \sum_{k_1,\cdots,k_{r-1},k_{r+2},\cdots,k_n}{}' = \frac{1}{(n-2)!}\frac{1}{(2\pi)^{3(n-2)}}\int d\mathbf{k}_1\cdots\int d\mathbf{k}_{r-1}\int d\mathbf{k}_{r+2}\cdots\int d\mathbf{k}_n, \tag{59.14}$$

考虑到$(n-2)$个软光子的不可区分性，上式包含因子$(n-2)!$。利用(59.14)和(59.11)式，有可能将(59.13)式写成下列形式

$$\sigma_n = \frac{1}{(n-2)!}\left[\frac{\alpha}{4\pi^2}\int\frac{d\mathbf{k}}{k_0}\sum_{\mathbf{e}}\left(\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}}{p\cdot k}-\frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{e}}{q\cdot k}\right)^2\right]^{n-2}\sigma_2, \tag{59.15}$$

这里k和e是指软光子的。而且，考虑到(59.3)式以及关系式

$$\sum_{\mathbf{e}}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{e})^2 = \mathbf{p}^2-(p\cdot\mathbf{k})^2/\mathbf{k}^2,$$

由此得出在质心系中有

$$\sum_{\mathbf{e}}\left(\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}}{p\cdot k}-\frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{e}}{q\cdot k}\right)^2$$

$$= \frac{\mathbf{p}^2 \sin^2\theta}{k_0^2}\left(\frac{1}{p_0 - |\mathbf{p}|\cos\theta} + \frac{1}{p_0 + |\mathbf{p}|\cos\theta}\right)^2, \tag{59.16}$$

这里 θ 表示 $\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{p}$ 之间的角度。将(59.16)式代入(59.15)式，进行简单积分以及利用 $p_0 \gg \kappa$ 的事实后，我们求得

$$\sigma_n = \frac{1}{(n-2)!}\left[\frac{2\alpha}{\pi}\ln\frac{\omega_{max}}{\omega_{min}}\left(\ln\frac{4p_0^2}{\kappa^2} - 1\right)\right]^{n-2}\sigma_2, \tag{59.17}$$

这里 ω_{max} 和 ω_{min} 表示软光子 k_0 的最大和最小值。

在极端相对论情况下，当 $\theta \approx 0$ 时，(59.16)式中分母之一变得非常小，而另一个分母在 $\pi - \theta \approx 0$ 时非常小。结果软光子主要地被限制在围绕电子和正电子运动方向的狭窄的锥体内。而且将(59.12)和(59.7)式合在一起考虑能导出对于两个硬光子也有类似结论。

(*b*) 多重韧致辐射

对正电子-电子湮灭所采用的处理方法可以应用到任意高能过程中多重软光子的产生，作为另一个例子，我们将简要地描述多重韧致辐射①。

我们考虑一个高能电子被一个外场散射，并且令 $\sigma_{n,brem}$ 表示包括发射 n 个软光子的多重韧致辐射的截面。这些光子中的每一个都可以在外场散射之前或散射之后由电子发射，借助于恒等式(59.8)式，可以考虑一切可能的光子置换。因此，与正电子-电子湮灭的结果(59.15)式相对应，我们对多重韧致辐射得到

$$\frac{d\sigma_{n,brem}}{d\Omega} = \frac{1}{n!}\left[\frac{\alpha}{4\pi^2}\int\frac{d\mathbf{k}}{k_0}\left(\frac{p_\nu}{p\cdot k} - \frac{p'_\nu}{p'\cdot k}\right)^2\right]^n \frac{d\sigma_0}{d\Omega}, \tag{59.18}$$

① S. N. Gupta, Phys. Rev. 99, 1015(1955).

这里 σ_0 是最低阶弹性散射截面，p, p' 和 k 分别表示入射电子，散射电子和软光子的传播四维矢量，并且对光子极化态已经采用了协变取和手续。截面(59.18)式对 $n=1$ 情况已在 58 节中求出，由(58.26)式给出，这表明，对于 $q^2/p^2 \gg 1$，下式成立

$$\frac{\alpha}{4\pi^2}\int\frac{dk}{k_0}\left(\frac{p_\nu}{p\cdot k}-\frac{p'_\nu}{p'\cdot k}\right)^2=\frac{2\alpha}{\pi}\ln\frac{\omega_{max}}{\omega_{min}}\left(\ln\frac{q^2}{\kappa^2}-1\right)。$$

(59.19)

上式中 $q=p'-p$，而 ω_{max} 和 ω_{min} 表示软光子 k_0 的最大值和最小值。将(59.19)代入(59.18)式给出

$$\frac{d\sigma_{n,brem}}{d\Omega}=\frac{1}{n!}\left[\frac{2\alpha}{\pi}\ln\frac{\omega_{max}}{\omega_{min}}\left(\ln\frac{q^2}{\kappa^2}-1\right)\right]^n\frac{d\sigma_0}{d\Omega}.$$

(59.20)

象在正电子-电子湮灭情况一样，可以证明在极端相对论情况下，光子主要地被限制在围绕入射电子和散射电子运动方向的狭窄锥体内。而且，当 $\mathbf{p}'$ 和 $\mathbf{p}$ 之间夹角增加时，q^2/η^2 也增加，因此在韧致辐射中，当电子通过大角度偏转时，更可能出现多重光子的产生。

(c) 多重红外发散

在 57 和 58 节中，我们证明了在包含单个红外光子的过程中红外发散可以消去。在包含任意数目光子的过程中消去红外发散的证明最早是由半经典处理给出①。然而，通过使用在本节早些时候描述过的处理多重软光子的技巧可以避免使用半经典理论②。确实，消去单个光子红外发散的处理可以被推广到任意数量的光子，因为恒等式(59.8)式既可以应用到实的又可以应用到

① J. M. Jauch and F. Rohrlich, Helv. Phys. Acta 27, 613(1954).

② D. R. Yennie and H. Suura, Phys. Rev. 105, 1378 (1957).

虚的软光子的散射矩阵元上，这使我们能够独立地来处理每一个软光子。

让我们再来考虑一个高能电子被外场的散射。根据(58.28)式，如果 σ_0 是最低阶弹性散射截面，那么考虑了 e^2 修正后有

$$\frac{d\sigma_{elas}}{d\Omega}=(1-\delta)\frac{d\sigma_0}{d\Omega} \tag{59.21}$$

其中

$$\delta=\frac{2\alpha}{\pi}\ln\frac{p_0}{\omega_{min}}\left(\ln\frac{q^2}{\kappa^2}-1\right), \tag{59.22}$$

这里 σ_{elas} 表示包含发射一个 $k_0<\omega_{min}$ 的红外光子在内的弹性散射的物理截面。当考虑包含发射任意数量红外光子在内的类似高阶修正时，求到弹性散射截面的形式为

$$\frac{d\bar{\sigma}_{elas}}{d\Omega}=\left[1-\delta+\cdots+\frac{(-\delta)^n}{n!}+\cdots\right]\frac{d\sigma_0}{d\Omega}$$

或者

$$\frac{d\bar{\sigma}_{elas}}{d\Omega}=e^{-\delta}\frac{d\sigma_0}{d\Omega}. \tag{59.23}$$

高阶修正也可以通过在(59.20)式中用 $\frac{d\bar{\sigma}_{elas}}{d\Omega}$ 来代替 $\frac{d\sigma_0}{d\Omega}$ 加到多重韧致辐射的截面上。因此

$$\frac{d\bar{\sigma}_{n,brem}}{d\Omega}=\frac{1}{n!}\left[\frac{2\alpha}{\pi}\ln\frac{\omega_{max}}{\omega_{min}}\left(\ln\frac{q^2}{\kappa^2}-1\right)\right]^n e^{-\delta}\frac{d\sigma_0}{d\Omega} \tag{59.24}$$

给出发射 n 个可观察光子和任意数量红外光子的截面。

在量子电动力学中，高能现象是相当有兴趣的，因为所有可得到的实验证据表明，也许除了非常高能的情况以外，量子电动力学现有的理论结构是可以充分地信赖的。