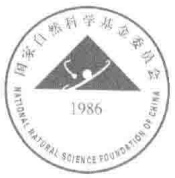
21世纪理论物理及其交叉学科前沿丛书

量子色动力学专题

黄涛 王伟 等著

科学出版社



国家自然科学基金
理论物理专款资助

21世纪理论物理及其交叉学科前沿丛书

量子色动力学专题

黄 涛 王 伟 等 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书采用专题形式，对量子色动力学(QCD)基础和有效理论进行了深入介绍，包含 QCD 基本特点、格点 QCD、QCD 求和规则、手征微扰理论、重夸克有效理论、软共线有效理论和非相对论 QCD 等，还介绍了多种微扰 QCD 计算技巧、高能强子碰撞与重味夸克物理中的 QCD 效应以及热密 QCD 理论等。内容既衔接基础理论与相关研究前沿，又有一定的自洽性和相对独立性，是迅速系统掌握量子色动力学整体框架和最新进展所必备的参考书。

本书适合理论物理专业尤其是量子色动力学研究领域的研究生学习使用，也可作为这一研究领域的科研工作者阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

量子色动力学专题/黄涛等著. —北京：科学出版社, 2018.6

(21 世纪理论物理及其交叉学科前沿丛书)

ISBN 978-7-03-057353-7

Ⅰ. ①量… Ⅱ. ①黄… Ⅲ. ①量子色动力学-研究 Ⅳ. ①O572.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 093325 号

责任编辑：钱 俊／责任校对：彭珍珍 樊雅琼

责任印制：张 伟／封面设计：无极书装

科 学 出 版 社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018 年 6 月第 一 版 开本：720 × 1000 B5

2018 年 8 月第二次印刷 印张：39 1/4

字数：765 000

定价：198.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

安徽大学图书馆 藏书 http://www.lib.ahu.edu.cn

《21世纪理论物理及其交叉学科前沿丛书》编委会

（第二届）

主　　编：孙昌璞

执行主编：常　凯

编　　委：（按姓氏拼音排序）

蔡荣根　段文晖　方　忠　冯世平

李　定　李树深　梁作堂　刘玉鑫

卢建新　罗民兴　马余刚　任中洲

王　炜　王建国　王玉鹏　向　涛

谢心澄　邢志忠　许甫荣　尤　力

张伟平　郑　杭　朱少平　朱世琳

庄鹏飞　邹冰松

作者名单

（按姓氏笔划排序）

丁亨通　马滟青　王由凯　王　伟
王　青　王新年　申建明　吕才典
朱守华　吴兴刚　李湘楠　陈　莹
赵光达　郭新恒　黄　涛

《21 世纪理论物理及其交叉学科前沿丛书》

出 版 前 言

物理学是研究物质及其运动规律的基础科学。其研究内容可以概括为两个方面：第一，在更高的能量标度和更小的时空尺度上，探索物质世界的深层次结构及其相互作用规律；第二，面对由大量个体组元构成的复杂体系，探索超越个体特性“演生”出来的有序和合作现象。这两个方面代表了两种基本的科学观 —— 还原论（reductionism）和演生论（emergence）。前者把物质性质归结为其微观组元间的相互作用，旨在建立从微观出发的终极统一理论，是一代又一代物理学家的科学梦想；后者强调多体系统的整体有序和合作效应，把不同层次“演生”出来的规律当成自然界的基本规律加以探索。它涉及从固体系统到生命软凝聚态等各种多体系统，直接联系关乎日常生活的实际应用。

现代物理学通常从理论和实验两个角度探索以上的重大科学问题。利用科学实验方法，通过对自然界的主动观测，辅以理论模型或哲学上思考，先提出初步的科学理论假设，然后借助进一步的实验对此进行判定性检验。最后，据此用严格的数学语言精确、定量表达一般的科学规律，并由此预言更多新的、可以被实验再检验的物理效应。当现有的理论无法解释一批新的实验发现时，物理学就要面临前所未有的挑战，有可能产生重大突破，诞生新理论。新的理论在解释已有实验结果的同时，还将给出更一般的理论预言，引发新的实验研究。物理学研究这些内禀特征，决定了理论物理学作为一门独立学科存在的必要性以及在当代自然科学中的核心地位。

理论物理学立足于科学实验和观察，借助数学工具、逻辑推理和观念思辨，研究物质的时空存在形式及其相互作用规律，从中概括和归纳出具有普遍意义的基本理论。由此不仅可以描述和解释自然界已知的各种物理现象，而且还能够预言此前未知的物理效应。需要指出，理论物理学通过当代数学语言和思想框架，使得物理定律得到更为准确的描述。沿循这个规律，作为理论物理学最基础的部分，20 世纪初诞生的相对论和量子力学今天业已成为当代自然科学的两大支柱，奠定了理论物理学在现代科学中的核心地位。统计物理学基于概率统计和随机性的思想处理多粒子体系的运动，是二者的必要补充。量子规范场论从对称性的角度描述微观粒子的基本相互作用，为自然界四种基本相互作用的统一提供坚实的基础。

关于理论物理的重要作用和学科发展趋势，我们分六点简述。

1. 理论物理研究纵深且广泛，其理论立足于全部实验的总和之上。由于物质结构是分层次的，每个层次上都有自己的基本规律，不同层次上的规律又是互相联系的。物质层次结构及其运动规律的基础性、多样性和复杂性不仅为理论物理学提供了丰富的研究对象，而且对理论物理学家提出巨大的智力挑战，激发出人类探索自然的强大动力。因此，理论物理这种高度概括的综合性研究，具有显著的多学科交叉与知识原创的特点。在理论物理中，有的学科（诸如粒子物理、凝聚态物理等）与实验研究关系十分密切，但还有一些更加基础的领域（如统计物理、引力理论和量子基础理论），它们一时并不直接涉及实验。虽然物理学本身是一门实验科学，但物理理论是立足于长时间全部实验总和之上，而不是只针对个别实验。虽然理论正确与否必须落实到实验检验上，但在物理学发展过程中，有的阶段性理论研究和纯理论探索性研究，开始不必过分强调具体的实验检验。其实，产生重大科学突破甚至科学革命的广义相对论、规范场论和玻色–爱因斯坦凝聚就是这方面的典型例证，它们从纯理论出发，实验验证却等待了几十年，甚至近百年。近百年前爱因斯坦广义相对论预言了一种以光速传播的时空波动 —— 引力波。直到 2016 年 2 月，美国科学家才宣布人类首次直接探测到引力波。引力波的预言是理论物理发展的里程碑，它的观察发现将开创一个崭新的引力波天文学研究领域，更深刻地揭示宇宙奥秘。

2. 面对当代实验科学日趋复杂的技术挑战和巨大经费需求，理论物理对物理学的引领作用必不可少。第二次世界大战后，基于大型加速器的粒子物理学开创了大科学工程的新时代，也使得物理学发展面临经费需求的巨大挑战。因此，伴随着实验和理论对物理学发展发挥的作用有了明显的差异变化，理论物理高屋建瓴的指导作用日趋重要。在高能物理领域，轻子和夸克只能有三代是纯理论的结果，顶夸克和最近在大型强子对撞机（LHC）发现的 Higgs 粒子首先来自理论预言。当今高能物理实验基本上都是在理论指导下设计进行的，没有理论上的动机和指导，高能物理实验如同大海捞针，无从下手。可以说，每一个大型粒子对撞机和其他大型实验装置，都与一个具体理论密切相关。天体宇宙学的观测更是如此。天文观测只会给出一些初步的宇宙信息，但其物理解释必依赖于具体的理论模型。宇宙的演化只有一次，其初态和末态迄今都是未知的。宇宙学的研究不能像通常的物理实验那样，不可能为获得其演化的信息任意调整其初末态。因此，仅仅基于观测，不可能构造完全合理的宇宙模型。要对宇宙的演化有真正的了解，建立自洽的宇宙学模型和理论，就必须立足于粒子物理和广义相对论等物理理论。

3. 理论物理学本质上是一门交叉综合科学。大家知道，量子力学作为 20 世纪的奠基性科学理论之一，是人们理解微观世界运动规律的现代物理基础。它的建立，带来了以激光、半导体和核能为代表的新技术革命，深刻地影响了人类的物质、精神生活，已成为社会经济发展的原动力之一。然而，量子力学基础却存在诸

多的争议，哥本哈根学派对量子力学的“标准”诠释遭遇诸多挑战。不过这些学术争论不仅促进了量子理论自身发展，而且促使量子力学走向交叉科学领域，使得量子物理从观测解释阶段进入自主调控的新时代，从此量子世界从自在之物变成为我之物。近二十年来，理论物理学在综合交叉方面的重要进展是量子物理与信息计算科学的交叉，由此形成了以量子计算、量子通信和量子精密测量为主体的量子信息科学。它充分利用量子力学基本原理，基于独特的量子相干进行计算、编码、信息传输和精密测量，探索突破芯片极限、保证信息安全的新概念和新思路。统计物理学为理论物理研究开拓了跨度更大的交叉综合领域，如生物物理和软凝聚态物理。统计物理的思想和方法不断地被应用到各种新的领域，对其基本理论和自身发展提出了更高的要求。由于软物质是在自然界中存在的最广泛的复杂凝聚态物质，它处于固体和理想流体之间，与人们的日常生活及工业技术密切相关。例如，水是一种软凝聚态物质，其研究涉及的基础科学问题关乎人类社会今天面对的水资源危机。

4. 理论物理学在具体系统应用中实现创新发展，并在基本层次上回馈自身。从量子力学和统计物理对固体系统的具体应用开始，近半个世纪以来凝聚态物理学业已发展成当代物理学最大的一个分支。它不仅是材料、信息和能源科学的基础，也与化学和生物等学科交叉与融合，而其中发现的新现象、新效应，都有可能导致凝聚态物理一个新的学科方向或领域的诞生，为理论物理研究展现了更加广阔的前景。一方面，凝聚态物理自身理论发展异常迅猛和广泛，描述半导体和金属的能带论和费米液体理论为电子学、计算机和信息等学科的发展奠定了理论基础；另一方面，从凝聚态理论研究提炼出来的普适的概念和方法，对包括高能物理在内的其他物理学科的发展也起到了重要的推动作用。BCS 超导理论中的自发对称破缺概念，被应用到描述电弱相互作用统一的 Yang-Mills 规范场论，导致了中间玻色子质量演生的 Higgs 机制，这是理论物理学发展的又一个重要里程碑。近二十年来，在凝聚态物理领域，有大量新型低维材料的合成和发现，有特殊功能的量子器件的设计和实现，有高温超导和拓扑绝缘体等大量新奇量子现象的展示。这些现象不能在以单体近似为前提的费米液体理论框架下得到解释，新的理论框架建立已迫在眉睫，如果成功将使凝聚态物理的基础及应用研究跨上一个新的历史台阶，也将理论物理的引领作用发挥到极致。

5. 理论物理的一个重要发展趋势是理论模型与强大的现代计算手段相结合。面对纷繁复杂的物质世界（如强关联物质和复杂系统），简单可解析求解的理论物理模型不足以涵盖复杂物质结构的全部特征，如非微扰和高度非线性。现代计算机的发明和快速发展提供了解决这些复杂问题的强大工具。辅以面向对象的科学计算方法（如第一原理计算、蒙特卡罗方法和精确对角化技术），复杂理论模型的近似求解将达到极高的精度，可以逐渐逼近真实的物质运动规律。因此，在解析手段

无法胜任解决复杂问题任务时，理论物理必须通过数值分析和模拟的办法，使得理论预言进一步定量化和精密化。这方面的研究导致了计算物理这一重要学科分支的形成，成为连接物理实验和理论模型必不可少的纽带。

6. 理论物理学将在国防安全等国家重大需求上发挥更多作用。大家知道，无论决胜第二次世界大战、冷战时代的战略平衡，还是中国国家战略地位提升，理论物理学在满足国家重大战略需求方面发挥了不可替代的作用。爱因斯坦、奥本海默、费米、彭桓武、于敏、周光召等理论物理学家也因此彪炳史册。与战略武器发展息息相关，第二次世界大战后开启了物理学大科学工程的新时代，基于大型加速器的重大科学发现反过来为理论物理学提供广阔的用武之地，如标准模型的建立。国防安全方面等国家重大需求往往会提出自由探索不易提出的基础科学问题，在对理论物理提出新挑战的同时，也为理论物理研究提供了源头创新的平台。因此，理论物理也要针对国民经济发展和国防安全方面等国家重大需求，凝练和发掘自己能够发挥关键作用的科学问题，在实践应用和理论原始创新方面取得重大突破。

为了全方位支持我国理论物理事业长足发展，1993 年国家自然科学基金委员会设立“理论物理专款”，并成立学术领导小组（首届组长是我国著名理论物理学家彭桓武先生）。多年来，这个学术领导小组凝聚了我国理论物理学家集体智慧，不断探索符合理论物理特点和发展规律的资助模式，培养理论物理优秀创新人才做出杰出的研究成果，对国民经济和科技战略决策提供指导和咨询。为了更全面地支持我国的理论物理事业，“理论物理专款”持续资助我们编辑出版这套《21 世纪理论物理及其交叉学科前沿丛书》，目的是要系统全面介绍现代理论物理及其交叉领域的基本内容及其学科前沿发展，以及中国理论物理学家科学贡献和所取得的主要进展。希望这套丛书能帮助大学生、研究生、博士后、青年教师和研究人员全面了解理论物理学研究进展，培养对物理学研究的兴趣，迅速进入理论物理前沿研究领域，同时吸引更多的年轻人献身理论物理学事业，为我国的科学研究在国际上占有一席之地作出自己的贡献。

孙昌璞

中国科学院院士，发展中国家科学院院士

国家自然科学基金委员会“理论物理专款”学术领导小组组长

前　言

粒子物理中标准模型理论包含两部分：量子色动力学和弱-电磁相互作用统一模型理论。量子色动力学（简称 QCD）是 20 世纪 70 年代初发展起来的描述强相互作用的基本理论，它的基本成分是夸克与胶子，相互作用遵从色空间精确的 $SU(3)$ 规范对称性。由此它具有两个特点：渐近自由和夸克禁闭。对于高能散射过程，强子中的夸克犹如无相互作用的自由粒子，表现为强相互作用的渐近自由性质；渐近自由的特点决定了大动量迁移物理过程可较好地应用微扰理论计算。夸克禁闭，指低能强子中的夸克总被束缚在强子内部，以色单态成团出现，人们不能找到一个单独的带色夸克。夸克禁闭特点决定了低、中动量迁移物理过程中含有不可忽略的量子色动力学非微扰效应，这些非微扰效应影响了量子色动力学理论预言的精确程度，为人们理解强相互作用及相关问题带来了极大的困难。

自量子色动力学创立以来，人们已经将它应用到各种不同的物理现象和过程中，成功地经受了实验的检验，同时发展了新的方法和技巧，包括以格点量子色动力学、QCD 求和规则等为主的非微扰理论和方法；引入因子化定理保证了微扰理论可应用到一系列高能物理过程，部分微扰过程已经计算到次领头阶甚至次次领头阶，发展了重求和等技术处理可能破坏微扰展开收敛的大对数项；针对各种不同的强子系统，人们建立了量子色动力学的多种有效理论，如低能轻介子的手征有效理论等。这些方法和技巧发展迅速，且相对专业，不但初学者难以掌握，对于很多相近领域的专家也绝非易事。

目前我国研究生的课程学习虽已包含了量子场论与规范场论，但对量子色动力学新专题的学习则只能借助于综述性文献，阅读过程中难免存在专业知识背景、约定、统一性等多方面的问题，缺乏一本反映近期进展且适合初入门者的教科书。针对这一现象，本书作者选取了量子色动力学中的基础方法和有效理论进行了系统性的介绍，以专题形式撰写了相关章节，期望此书既能衔接基础理论课程与相关前沿研究，又能存在一定的自洽性和独立性，为研究生和青年学者了解量子色动力学整体框架与最新进展提供帮助。为了读者阅读方便，第 1 章介绍了量子色动力学的基本特点，其余共分五部分，第一部分为第 2~5 章，主要介绍了量子色动力学中的非微扰理论和方法，包含格点量子色动力学、手征微扰理论，QCD 求和规则等。第 6 和 7 两章侧重于介绍微扰 QCD 中所需要的基本方法：因子化定理可以将散射或衰变振幅因子化成微扰计算与非微扰参数化部分；重求和计算处理微扰计算中出现的大对数项，提高了微扰论的收敛性。第 8 章介绍了高能碰撞中 QCD

辐射修正效应。第 9 章介绍了 QCD 重整化理论中重整化能标设定问题的解决方案。第 11 章针对对撞机上重味物理理论和相关的进展进行了介绍。第 10 和 12 章依次介绍了目前流行的有效理论，重夸克有效理论可以处理包含一个重夸克的介子或重子；软共线有效理论则描述高速运动的粒子；当介子或重子全是由重夸克构成时，所有组分的运动都是非相对论的，人们发展了非相对论量子色动力学。最后一部分涉及有限温度 QCD 并介绍了 QCD 相变。由于作者和选题的局限性，本书并未包含所有量子色动力学专题的内容。作为已选的专题，读者除了具备量子场论的基础理论外，还需要了解量子色动力学基础和部分粒子物理的相关知识。

参与撰写本书的各位作者一直从事粒子物理与核物理理论的研究工作，并在各自的工作领域做出了有影响力的工作。各位作者基于自己多年的研究工作积累和对物理的深入理解，认真组织内容，经过两年的努力得以出版本书。希望本书的出版对于我国从事粒子物理尤其是量子色动力学研究领域的研究生、青年教师和科研人员有所帮助。

感谢科学出版社和《21 世纪理论物理及其交叉学科前沿丛书》编委的热情帮助和鼓励。在撰写过程中，我们还得到了贾宇、钟涛等的帮助，此处一并致谢。

由于作者水平有限，而且参与撰写的人员较多，书中不妥之处在所难免，诚请各位同行专家和读者能够提出宝贵意见，以便今后进一步完善。

作者谨识

2017 年 9 月

目　录

前言
第 1 章　量子色动力学 (QCD) 的基本特点 ····· 黄　涛
1.1　量子色动力学的实验基础 ····· 1
1.1.1　核力和强子 ····· 1
1.1.2　强子谱分类和夸克 ····· 3
1.1.3　深度非弹性散射实验中标度无关性规律 ····· 4
1.1.4　夸克“色”自由度存在的实验证据 ····· 6
1.2　$SU(3)$ 规范对称性和 QCD 拉氏密度 ····· 7
1.2.1　规范变换不变性原理 ····· 8
1.2.2　$SU(3)$ 群 ····· 9
1.2.3　QCD 拉氏函数 ····· 12
1.2.4　手征对称性 ····· 14
1.3　QCD 量子化和 Feynman 规则 ····· 15
1.3.1　QCD 量子化 ····· 15
1.3.2　QCD Feynman 规则 ····· 19
1.4　单圈图近似 $\beta(g)$ 函数和渐近自由 ····· 29
1.4.1　维数正规化和单圈图重整化 ····· 30
1.4.2　重整化常数和抵消项 ····· 33
1.4.3　渐近自由 ····· 35
1.4.4　重整化群方程 ····· 37
1.5　微扰 QCD ····· 41
1.6　夸克禁闭 ····· 49
1.6.1　禁闭在强子内部的夸克和胶子 ····· 49
1.6.2　强子内夸克和胶子的几率分布 ····· 51
1.6.3　重夸克偶素和禁闭势 ····· 55
1.6.4　夸克禁闭和非微扰效应 ····· 57
参考文献 ····· 58
第 2 章　格点 QCD ····· 陈　莹
2.1　格点 QCD 简介 ····· 62
2.1.1　时空格点上的规范对称性和规范不变量 ····· 63

2.1.2 规范场的格点作用量 ····· 65
2.1.3 夸克场的格点实现 ····· 67
2.1.4 Wilson 费米子作用量 ····· 69
2.1.5 Wilson 费米子的对称性 ····· 71
2.1.6 格点上的手征对称性 ····· 72
2.1.7 连续极限 ····· 73
2.1.8 格点 QCD 的物理观测量和计算方案 ····· 75
2.1.9 系统误差来源 ····· 78
2.1.10 作用量改进方案 ····· 80
2.2 蒙特卡罗数值模拟方法 ····· 81
2.2.1 蒙特卡罗模拟 ····· 83
2.2.2 马尔可夫过程 ····· 84
2.2.3 Metropolis 算法 ····· 85
2.2.4 纯规范场组态的更新算法 ····· 86
2.2.5 包含夸克场的格点 QCD 的蒙特卡罗模拟 ····· 87
2.2.6 淬火近似和 full-QCD 计算 ····· 90
2.3 强子谱的格点 QCD 计算 ····· 90
2.3.1 强子谱学格点 QCD 研究的一般方案 ····· 91
2.3.2 轻强子质量谱 ····· 97
2.3.3 重夸克势和色禁闭 ····· 99
2.3.4 标准模型基本参数 —— 强耦合常数和流夸克质量 ····· 103
2.3.5 三点函数和强子矩阵元 ····· 105
2.3.6 CKM 矩阵元的相关格点 QCD 计算 ····· 108
2.4 强子–强子相互作用 ····· 109
2.4.1 格点上单粒子的有限体积效应 ····· 110
2.4.2 格点上的两粒子相互作用 ····· 111
2.4.3 Lüscher 有限体积方法 ····· 113
2.4.4 可能的强子–强子束缚态的格点 QCD 研究 ····· 117
2.4.5 ρ 共振态的格点 QCD 研究 ····· 119
参考文献 ····· 122
第 3 章 QCD 的手征对称性和手征微扰论 ····· 王　青
3.1 QCD 的手征对称性与手征反常 ····· 124
3.2 赝标介子的手征有效拉氏量与手征微扰理论 ····· 137
3.3 赝标介子手征有效拉氏量与 QCD 的关系 ····· 160
3.4 其他低能强子的手征有效拉氏量 ····· 179

参考文献……192
第 4 章　QCD 的大 N_c 展开……王　青
4.1　QCD 大 N_c 展开的 Feynman 图及路径积分分析……194
4.2　介子的大 N_c 展开……201
4.3　重子与核子的大 N_c 展开……208
4.4　QCD 的圈动力学与大 N_c 展开……216
参考文献……222
第 5 章　QCD 真空凝聚和背景场方法……黄　涛
5.1　QCD 真空凝聚……223
5.1.1　非零真空平均值……223
5.1.2　QCD 真空凝聚……226
5.2　背景场中 QCD 等效拉氏函数和 Feynman 规则……230
5.2.1　背景场中 QCD 等效拉氏函数……230
5.2.2　背景场中 QCD Feynman 规则……232
5.3　背景场中的夸克传播子和胶子传播子……234
5.3.1　固定点规范……234
5.3.2　背景场中的夸克传播子……236
5.3.3　背景场中的胶子传播子……245
5.4　真空凝聚参量……249
5.4.1　几个常用的量纲 $d \leqslant 6$ 真空凝聚参量……249
5.4.2　与凝聚参量 $\langle\bar{\psi}\psi\rangle^2$ 相关的几个公式……251
5.4.3　非零点真空凝聚参量……253
5.5　QCD 求和规则……259
5.6　强子分布振幅和它们的矩……267
5.6.1　强子价夸克分布振幅 $\phi(x_i, Q)$……267
5.6.2　Brodsky-Lepage 演化方程……270
5.6.3　分布振幅的矩……274
5.7　应用背景场方法计算介子分布振幅的矩……275
5.7.1　定义两点关联函数……275
5.7.2　背景场方法计算关联函数……278
5.7.3　强子唯象层次计算关联函数……281
5.7.4　应用 Borel 变换……282
5.7.5　数值计算 $\langle\xi^n\rangle_\mu$ 结果……283
5.7.6　分布振幅模型……284
参考文献……286

第 6 章　QCD 因子化 ····· 李湘楠
6.1　红外发散与红外安全 ····· 289
6.2　深度非弹性散射与共线因子化 ····· 293
6.3　重整化群与因子化定理的应用 ····· 303
6.4　k_T 因子化 ····· 308
参考文献 ····· 313
第 7 章　QCD 重求和 ····· 李湘楠
7.1　重求和基本技巧 ····· 316
7.2　阈重求和与 DGLAP 方程式 ····· 323
7.3　k_T 重求和与 BFKL 方程式 ····· 330
7.4　联合重求和与 CCFM 方程式 ····· 334
参考文献 ····· 337
第 8 章　高能碰撞中的 QCD 效应 ····· 王由凯，朱守华
8.1　简介 ····· 338
8.2　例子：标准模型 Higgs 粒子的产生、衰变与 QCD 效应 ····· 339
8.3　实验数据与理论预言直接对比的困难 ····· 341
8.4　微扰 QCD 过程 ····· 343
8.4.1　因子化定理 ····· 343
8.4.2　红外安全 ····· 345
8.4.3　固定阶计算 ····· 345
8.4.4　一圈图计算的程序实现 ····· 351
8.4.5　簇射 ····· 354
8.5　软 QCD 过程 ····· 357
8.6　蒙特卡罗事例产生子 ····· 358
8.6.1　利用马尔可夫链对微扰过程的模拟 ····· 358
8.6.2　匹配问题 ····· 360
8.6.3　强子化的弦模型 ····· 360
8.6.4　强子化团簇模型 ····· 363
8.7　小结 ····· 364
参考文献 ····· 364
第 9 章　QCD 重整化能标的设定 ····· 吴兴刚，申建明
9.1　微扰 QCD 展开与重整化能标的设定问题 ····· 366
9.2　重整化能标设定方案需满足的自洽条件 ····· 367
9.3　几种典型的重整化能标设定方案 ····· 371
9.3.1　FAC 方案 ····· 371

9.3.2 BLM 方案 ····· 373
9.3.3 PMS 方案 ····· 385
9.3.4 PMC 方案 ····· 392
9.4 基于重整化群不变性的讨论 ····· 399
9.5 PMC 应用举例 ····· 402
9.5.1 正负电子湮灭比值 $R_{e^+e^-}(Q)$ ····· 403
9.5.2 Z^0 玻色子衰变到强子的高阶微扰修正 ····· 405
9.5.3 Tevatron 强子对撞机上顶夸克对的产生 ····· 408
9.5.4 重夸克和轻子的角分布 ····· 412
参考文献 ····· 416
第 10 章　重夸克对称性和重夸克有效理论 ····· 郭新恒
10.1 重夸克对称性和重夸克有效理论的基本思想 ····· 418
10.2 $m_Q \to \infty (m_Q \gg \Lambda_{\rm QCD})$ 时的重夸克有效理论 ····· 420
10.2.1 重夸克有效理论的拉氏量 ····· 420
10.2.2 重夸克味道和自旋对称性 $SU(2)_f \times SU(2)_s$ ····· 421
10.2.3 重夸克极限下重味强子弱衰变的跃迁矩阵元 ····· 423
10.3 重夸克有效理论的 $1/m_Q$ 高阶修正 ····· 427
10.3.1 计算有效理论的一般步骤 ····· 427
10.3.2 包含 $1/m_Q$ 展开的一阶修正的重夸克有效理论的推导 ····· 430
10.4 重味强子的质量谱 ····· 434
10.5 考虑 $1/m_Q$ 高阶修正的重味强子跃迁矩阵元 ····· 438
10.6 重夸克有效理论的重整化和辐射修正 ····· 442
10.6.1 重夸克有效理论的重整化 ····· 442
10.6.2 重夸克有效理论和 QCD 的匹配 ····· 445
10.6.3 几个关于算符辐射修正的例子 ····· 447
参考文献 ····· 453
第 11 章　重味物理和 QCD ····· 吕才典
11.1 重味物理中的 CP 破坏 ····· 455
11.1.1 中性 B 介子系统 ····· 458
11.1.2 弱衰变的 CP 破坏的分类 ····· 461
11.2 B 介子非轻子衰变的 QCD 计算方法简介 ····· 467
11.2.1 b 夸克衰变的有效哈密顿量 ····· 468
11.2.2 朴素和推广的因子化方法 ····· 471
11.3 QCD 因子化方法 ····· 474
11.3.1 辐射修正 ····· 476

11.3.2 $1/m_b$ 幂次修正 ····· 478
11.4 微扰 QCD 因子化方法 ····· 481
11.4.1 $B \to \gamma l\bar{\nu}$ 衰变的因子化证明 ····· 483
11.4.2 $B \to \pi$ 形状因子 ····· 489
11.4.3 B 介子两体非轻衰变 ····· 493
11.5 小结 ····· 497
参考文献 ····· 498
第 12 章 软共线有效理论 ····· 王 伟
12.1 大能量有效理论中的重到轻形状因子 ····· 499
12.2 动量积分区域展开 ····· 502
12.2.1 二维标量粒子的自能修正 ····· 502
12.2.2 Sudakov 因子：无质量粒子的顶点修正 ····· 505
12.2.3 有质量粒子的顶点修正 ····· 508
12.3 标量粒子的软共线有效理论 ····· 510
12.3.1 标量粒子的拉氏量 ····· 510
12.3.2 有效理论拉氏量与流算符的匹配 ····· 511
12.3.3 六维时空中的 Sudakov 因子 ····· 515
12.4 量子色动力学与软共线有效理论 ····· 519
12.4.1 幂次分析 ····· 519
12.4.2 有效拉氏量 ····· 520
12.4.3 软共线相互作用 ····· 521
12.4.4 Wilson 线与规范不变性 ····· 522
12.4.5 软共线退耦与因子化定理 ····· 523
12.4.6 共线反常情况下的因子化 ····· 525
12.5 软共线有效理论的一些应用 ····· 526
12.5.1 $B \to D\pi$ 因子化 ····· 526
12.5.2 重到轻形状因子分析 ····· 529
12.5.3 Sudakov 因子重求和 ····· 532
参考文献 ····· 535
第 13 章 NRQCD 与重夸克偶素物理 ····· 马滟青，赵光达
13.1 重夸克偶素及其性质 ····· 538
13.2 NRQCD 有效理论 ····· 541
13.2.1 Foldy-Wouthuysen-Tani 变换 ····· 541
13.2.2 NRQCD 拉氏量 ····· 542
13.2.3 速度标度率 ····· 544

13.2.4　匹配确定 Wilson 系数 ····· 546
13.2.5　重夸克偶素在 NRQCD 中的描述 ····· 548
13.3　重夸克偶素的湮灭衰变 ····· 550
13.3.1　色单态模型中 η_c 的衰变 ····· 550
13.3.2　湮灭衰变的时空结构 ····· 551
13.3.3　NRQCD 因子化 ····· 552
13.4　重夸克偶素的高能产生 ····· 556
13.4.1　拓扑因子化假设 ····· 556
13.4.2　$\psi(2S)$ 超额产生与色八重态机制 ····· 557
13.4.3　NRQCD 因子化的不足与展望 ····· 558
参考文献 ····· 560
第 14 章　热密 QCD 理论和高能重离子碰撞物理 ····· 王新年，丁亨通
14.1　有限温度场论的介绍 ····· 562
14.2　格点 QCD 的应用 ····· 566
14.2.1　高温高密条件下的格点 QCD ····· 567
14.2.2　QCD 的热力学性质 ····· 568
14.2.3　QCD 的输运性质 ····· 573
14.2.4　热密物质中强子的性质 ····· 575
14.3　QCD 的相结构 ····· 577
14.4　微扰 QCD 的应用 ····· 583
14.4.1　喷注淬火 ····· 583
14.4.2　广义因子化 ····· 584
14.4.3　双重部分子散射 ····· 587
14.4.4　虚修正 ····· 595
14.4.5　修正碎裂函数及部分子能量损失 ····· 596
14.4.6　QGP 中的喷注淬火 ····· 600
14.4.7　喷注淬火小结 ····· 605
参考文献 ····· 605

第 1 章　量子色动力学 (QCD) 的基本特点

量子色动力学理论是强相互作用的基本理论，它创立于 1973 年。从 1964 年提出夸克和夸克模型理论到 1973 年，这短短十年是粒子物理快速发展的时期。在这个时期，在强子谱的对称性分类基础上发现了夸克新层次，1967 年建立了弱相互作用和电磁相互作用统一理论，1967~1968 年发现了电子–质子深度非弹散射过渡中标度无关性规律导致夸克–部分子模型理论建立，1972 年提出了夸克具有颜色自由度的概念，同年提出维数正规化方法和完成了非阿贝尔 (Abel) 规范场可重整化的证明。本章作为本书的开篇，主要介绍量子色动力学理论的基础和基本特点。量子色动力学理论描述了夸克和胶子相互作用，遵从色空间精确的 $SU(3)$ 规范对称性。量子色动力学理论具有两个基本特点：渐近自由和夸克禁闭。渐近自由特点决定了大动量迁移物理过程可较好地应用微扰理论计算。夸克禁闭特点决定了低、中动量迁移物理过程中含有不可忽略的非微扰效应，这些非微扰效应影响量子色动力学理论预言的精确程度。

1.1　量子色动力学的实验基础

为了理解量子色动力学的实验基础，我们回顾一下 1973 年以前哪些实验事实的揭示对发展强相互作用基本理论起了里程碑的作用。

1.1.1　核力和强子

历史上，1932 年 Chadwick 发现了中子，接着 Heisenberg 和 Iwanenko 提出了原子核是由质子和中子构成的模型，实验表明原子核只有原子的万分之一大小。这就提出了一个问题，质子和中子通过什么类型的相互作用才能紧密结合在 10^{-13}cm 大小的原子核中。当时人们试图利用已知的电磁相互作用和弱相互作用来解释，但都不能自圆其说。1935 年汤川 (Yukawa) 提出了质子和中子通过交换一种未知的介子 (其质量介于质子和电子之间) 形成原子核内很强的束缚力 (核力)，这种介子称为 π 介子，其质量为 100~200MeV，这种力与交换无质量光子的电磁力不同，它是短程力，这就开创了强相互作用的历史。1947 年，鲍威尔 (Powell) 发现了参与强相互作用的 π 介子，逐步完善地建立了核力的介子交换理论。

Yukawa 的强相互作用理论，其形式为

$$\mathcal{L}_i = \mathrm{i}g\bar{\psi}\gamma_5\psi\phi_\pi + h.c. \tag{1.1}$$

其中，ψ 表示质子或中子场；ϕ_π 是 π 介子场；$h.c.$ 代表前项的厄米共轭；g 是强相互作用耦合常数。此相互作用形式可以与电磁相互作用类比，所不同的是相互作用耦合常数以及交换的 π 介子是有质量的，核力是短程力，很强地将质子和中子紧密结合在 10^{-13}cm 大小的原子核中。人们分析了原子核能谱以及核子间散射的大量实验数据，得到一个重要特点 —— 核力的电荷无关性，即质子和中子之间虽然有带电和中性粒子的差别，但它们的相互作用是一样的。所谓电荷无关性是指在核力中如果略去质子间的库仑力，那么，质子间的作用力、中子间的作用力、中子与质子间的作用力都是相同的。这一性质可以利用 1932 年 Heisenberg 引入的同位旋概念来表达，如果仅考虑强相互作用，那么质子和中子可以视为一种粒子的两重态，称为核子 N(质子和中子的总称)。引入 $SU(2)$ 同位旋空间，核子 N 表示为同位旋 $T=\dfrac{1}{2}$ 的两重态，其本征态为 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，分别对应于质子态和中子态，那么核子可表示为同位旋空间旋量

$$N=\begin{pmatrix}\psi_{\mathrm{p}}\\ \psi_{\mathrm{n}}\end{pmatrix},\qquad \begin{aligned}&\mathrm{p}: T_3=\frac{1}{2}\\ &\mathrm{n}: T_3=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

另一方面，Kemmer 在 1938 年将同位旋概念扩充引入介子场理论中，对于 π 介子来讲有类似的性质，如果略去电磁相互作用，π^+,π^-,π^0 也可以视为一种粒子，可以认为它们是 $SU(2)$ 同位旋 $T=1$ 的三种态，引入同位旋空间矢量

$$\phi_\pi=\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{pmatrix}$$

其中，$\phi_i(i=1,2,3)$ 都是实标量场，π^+,π^- 是两实标量场 ϕ_1,ϕ_2 的组合，

$$\begin{aligned}\phi_{\pi^+}&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1-\mathrm{i}\phi_2)\\ \phi_{\pi^-}&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1+\mathrm{i}\phi_2)\\ \phi_{\pi^0}&=\phi_3\end{aligned}$$

其相应的同位旋有三个分量 $T_3=1,-1,0$。Kemmer 在引入同位旋概念到介子场理论后建立了核力的电荷无关性相互作用场论。它要求描述核子与 π 介子相互作用的拉氏函数密度必须是同位旋 $SU(2)$ 空间转动不变的，即 π-N 的强相互作用保持同位旋守恒最简单的形式为

$$\mathcal{L}_i=\mathrm{i}g\bar{N}\gamma_5\boldsymbol{\tau}N\cdot\boldsymbol{\phi}\tag{1.2}$$

其中，τ_i 的一个明显表示就是三个 Pauli 矩阵

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

核力介子交换相互作用场论按微扰最低阶计算结果已得到了实验的支持。然而当人们将 Yukawa 理论与核力实验相比较时发现有效相互作用强度 $\frac{g^2}{4\pi} \cong 14$，远远大于 1，这要比电磁相互作用 $\frac{e^2}{4\pi} \cong \frac{1}{137}$ 大很多。虽然最低阶的计算结果与实验符合很好，但高阶项的贡献不仅不能忽略，而且使得整个微扰理论计算变得无意义，因此微扰理论不再适用于介子交换的强相互作用理论。20 世纪 50 年代，理论上放弃了微扰论，而发展不依赖于微扰展开的 S 矩阵理论和公理化场论随之有了相当大的进展。

随着高能加速器的发展，在加速器实验中发现了一大批直接参与强相互作用的粒子，它们的寿命极短。60 年代初自然界中已发现的基本粒子多达一百几十种，按照相互作用可以分为两类：一类是直接参与强相互作用的粒子，如质子、中子、π 介子、奇异粒子和一系列的共振态粒子等，统称为强子，强子又分为自旋为整数的介子和自旋为分数的重子；另一类是不直接参与强相互作用，只直接参与电磁、弱相互作用的粒子，如电子、μ 子和中微子等，统称为轻子。自然地人们将 Yukawa 型介子交换的强相互作用理论推广到描述所有介子–重子间相互作用，它作为强相互作用等效理论一直延续至今。

1.1.2 强子谱分类和夸克

对称性理论的发展对探讨强子内部结构和提出物质结构下一层次夸克极为重要。20 世纪 60 年代初按 $SU(3)$ 对称性表示很好地对众多强子进行分类，这种分类非常像原子按门捷列夫周期表的分类。当时，实验上发现了大量强子，其中相当一部分粒子的奇异量子数 S 不为零，如 $K^{\pm}$、K^0、$\bar{K}^0$、$\Sigma^{\pm}$、Σ^0、Λ、Ξ^0、Ξ^- 等。此外还发现在大量奇异粒子产生过程中奇异量子数 S 是守恒的。Gell-Mann 和 Nishijima[2] 进一步引入超荷 $Y = B + S$，其中，B 为重子数，S 为奇异数。它们与电荷存在下列关系式

$$Q = \frac{Y}{2} + T_3 \tag{1.4}$$

这样很自然地将描述同位旋空间的 $SU(2)$ 对称性推广到包含奇异数 S 的 $SU(3)$ 对称性。选择 $SU(3)$ 群的秩为 Y 和 T_3，以这两个好量子数对强子谱进行分类。在平面图上取横坐标为 T_3，纵坐标为 Y，人们惊奇地发现实验上发现的上百种强子态可以按 $SU(3)$ 群表示分类 [3]，介子可以填充在 $SU(3)$ 群的单态和八重态里，而重子则填充在八重态和十重态里。例如，自旋为 0 的八个赝标介子和自旋为 1 的八

个矢量介子分别填充在各自的 8 维表示中，自旋为 1/2 的八个重子和自旋为 3/2 的十个重子分别填充在 8 维表示和 10 维表示中。当时自旋为 3/2 的十个重子中 Ω 粒子尚未发现，$SU(3)$ 分类预言了 Ω 粒子的存在并预言了它的自旋为 3/2，奇异量子数为 -3，质量 $m_\Omega \cong$1670MeV。不久实验上发现了它，证实了众多的强子谱成功地按 $SU(3)$ 分类。基于 $SU(3)$ 对称性成功地将强子谱分类这一事实，1964 年 Gell-Mann 和 Zweig 提议对应于 $SU(3)$ 群基础表示的三个基为三种夸克 [4]，

$$q = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} u\text{-up} \\ d\text{-down} \\ s\text{-strange} \end{matrix}$$

介子、重子按 $SU(3)$ 群表示分类可以理解为由三种不同夸克 u, d, s 构成，按照数学 $SU(3)$ 群表示性质提出了介子是由夸克和反夸克构成，重子是由三个夸克构成，从而解释了介子和重子谱的分类。加速器实验的发展还发现了质子不是点粒子而是有一定大小内部结构的粒子。所有这些实验结果都证实了强子具有内部结构，促使人们接受了对应于 $SU(3)$ 群的基础表示三个基的三种夸克为粒子物理中更基本的组成成分，并构造了夸克模型、层子模型等描述强子的内部结构。人们形象地称不同类型的夸克 u、d、s 为夸克的 "味"。提出夸克以及引入它的味自由度开创了粒子物理从强子层次深入夸克层次的新篇章。

1.1.3　深度非弹性散射实验中标度无关性规律

夸克模型成功地将强子谱进行了分类并解释了大量的实验事实，但它没有涉及强子内部夸克之间的相互作用的动力学规律。1967 年美国斯坦福直线加速器中心 (SLAC) 利用电子打质子的深度非弹性散射实验寻找质子内部夸克构成和相互作用规律，Friedman, Kendall 和 Taylor 发现了电子–质子的深度非弹性散射实验标度无关性规律 (scaling law)[5]。电子–质子深度非弹性散射是一个单举 (inclusive) 过程 (图 1.1)，实验上只观测终态电子而不测量其他强子态 X，即

$$e(k) + P(P) \longrightarrow e(k') + X(P_X)$$

X 代表所有可能的强子，它们的总动量为 P_X。定义 $q = (k - k') = (P' - P)$ 和 $P \cdot q = M\nu$，取运动学变量 $Q^2 = -q^2, \nu$，那么在实验室系 ($\boldsymbol{P} = 0$) 中，微分截面为

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}E'\mathrm{d}\Omega} &= \frac{4\alpha^2(E')^2}{Q^4}\left[W_2(q^2,\nu)\cos^2\frac{\theta}{2} + 2W_1(q^2,\nu)\sin^2\frac{\theta}{2}\right] \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\text{Mott}}\left[W_2(q^2,\nu) + 2W_1(q^2,\nu)\tan^2\frac{\theta}{2}\right] \end{aligned}$$

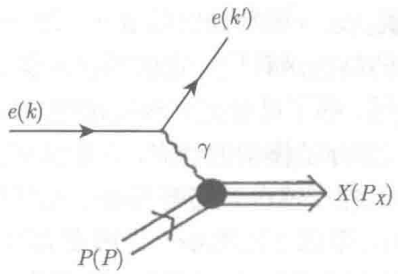


图 1.1 电子–质子深度非弹散射过程，$e(k)+P(P)\longrightarrow e(k')+X(P_X)$

其中，$\left(\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\text{Mott}}$ 是相对论电子在 Coulomb 场中的散射截面，称为 Mott 截面；θ 是实验室系中电子的散射角；Ω 为立体角；E' 为出射电子的能量。实验结果表明，对于固定的 x，$x=\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{Q^2}{2M\nu}$，在 $Q^2>1\text{GeV}^2$ 能区内存在标度无关性现象，即 W_1 和 νW_2 不再是 Q^2 和 ν 两个变量的函数，而仅是它们的比值 $x=Q^2/2M\nu$(x 是无量纲量) 的函数，

$$\begin{aligned} MW_1(x,Q^2)&\longrightarrow F_1(x)\\ \nu W_2(x,Q^2)&\longrightarrow F_2(x)\end{aligned}\tag{1.5}$$

实验上还发现它们之间存在一个近似的 Callen-Gross 关系式 $F_2(x)=2xF_1(x)$。

结构函数 $MW_1(x,Q^2)$ 和 $\nu W_2(x,Q^2)$ 仅是无量纲量 x 的函数，而与 Q^2 无关，这表明结构函数独立于任何能量标度，这种现象称为标度无关性现象。Bjorken 等 [6] 首先认识到如果电子–质子的非弹性散射是由于电子与质子内部的许多类点成分发生不相干的弹性散射，那么标度无关性现象就自然发生。那么实验上的标度无关性现象揭示了强子的两个最显著的特征：① 强子内部存在很多点状结构；② 强子内的点状成分在动量迁移足够大时相互作用很微弱，犹如自由粒子。电子–质子深度非弹性散射过程中电子是与质子内许多无相互作用的自由点粒子发生相互作用，Feynman 称质子内的这些点粒子为部分子 (parton)。实验上发现的关系式 $2xF_1(x)=F_2(x)$ 意味着这些与电子相互作用的部分子是自旋为 $\dfrac{1}{2}$ 的点粒子。质子是由夸克组成的，质子内自旋为 $\dfrac{1}{2}$ 的部分子就是所有的价夸克和海夸克 (大量夸克和反夸克对)。由此自然地建立了夸克–部分子模型 (quark-parton model)，它很好地解释了标度无关性的实验现象，告诉人们在动量迁移足够大时，$Q^2>1\text{GeV}^2$，质子内大量的部分子之间近似地无相互作用，这些部分子是自由点粒子，呈现渐近自由现象。

发现标度无关性现象不久后又发现了当动量迁移再升高时，标度无关性规律按某种规律受到破坏 (scaling violation)。实验上表明标度无关性现象仅在一定的 Q^2 范围内近似地保持，当 Q^2 增加时，强子的结构函数明显地依赖于 Q^2，即 $F_i(x)\rightarrow$

$F_i(x,Q^2)$ $(i=1,2)$，或者说，这一现象表明随着 Q^2 增大，质子内近似自由点粒子之间的相互作用使得强子的结构函数按一定的规律依赖于 Q^2，这对建立量子色动力学理论起到了关键性作用。强子谱分类导致提出夸克模型和深一层次夸克成分。标度无关性现象导致夸克–部分子模型的建立，人们认识到质子内不仅是简单的三个组分夸克而是有无穷多点粒子成分，这些与电子相互作用的部分子就是价夸克和海夸克 (夸克–反夸克对)，夸克之间的相互作用在大动量迁移下变弱，近似地看作自由点粒子，即具有渐近自由的特点。强子 h 的结构函数 $F_i(x,Q^2)$ 由强子内部的部分子分布函数 $G_{a/h}(x,Q)$ (parton distribution function，PDF) 确定

$$F_2(x,Q)=x\sum_a e_a^2 G_{a/h}(x,Q) \tag{1.6}$$

其中，a 是对强子内的所有部分子求和；e_a 是第 a 个部分子的电荷；$G_{a/h}(x,Q)\mathrm{d}x$ 是给定 Q 在强子内发现第 a 个部分子具有动量分量在 $x\to x+\mathrm{d}x$ 间隔内的几率。

标度无关性破坏现象使人们认识到强子内的夸克之间存在相互作用，它是产生标度无关性规律破坏的根源。这些结果对粒子物理的影响是深远的，接着的问题是什么样的强相互作用理论具有渐近自由的特点？这些部分子之间存在什么样的相互作用使得标度无关性规律受到破坏？

1.1.4　夸克“色”自由度存在的实验证据

夸克模型很好地解释了强子谱，当时发现的强子或者是由两个正、反夸克 (介子) 或者是由三个夸克 (重子) 组成。然而夸克模型中存在自旋–统计矛盾，例如，重子是由三个价夸克组成的，三个夸克的总波函数应由三部分组成

$$\psi(123)=\psi_{\text{space}}(123)\times\psi_{\text{spin}}(123)\times\psi_{\text{flavor}}(123)$$

其中，$\psi_{\text{space}}(123)$ 是三个夸克的空间波函数；$\psi_{\text{spin}}(123)$ 是三个夸克的自旋波函数；$\psi_{\text{flavor}}(123)$ 是三个夸克的 $SU(3)$ 味波函数 (u、d、s 是夸克三种不同的味)，或者说是味空间的 $SU(3)$ 波函数。夸克是自旋为 1/2 的费米子，总波函数应满足 Fermi-Dirac 统计，即 $\psi(123)$ 的三个组成夸克中交换任意两个是反对称的。然而在夸克模型中并不是这样，以 Δ^{++} 为例，它的自旋为 3/2，它由三个 u 夸克组成，处于基态 (S 波) 的空间波函数是对称的，

$$\Delta^{++}=(u\uparrow u\uparrow u\uparrow)$$

三个夸克自旋向上显然在自旋空间是对称的，味空间是由同一种味 u 夸克组成的，因而也是对称的。这样，如果要求 Δ^{++} 的总波函数是反对称的，只有要求空间部分是反对称的，这是不可能的，因为 S 波基态波函数总是对称的。还可以从另一

个角度看空间波函数，实验上表明质子的形状因子中没有节点存在，这意味着空间波函数不可能是反对称的，因此总的波函数只能是对称的，这就与 Fermi-Dirac 统计相矛盾。为了解决这一矛盾有两种可能途径：一种是修改统计性质引入三套夸克或综合 (para) 统计；另一种想法是引入一个新的自由度 "色"(color)(1972, Gell-Mann)[6]。尽管空间、自旋、味空间是对称的，然而只要新引入的自由度 "色" 是反对称的，总的波函数仍是反对称的。这意味着夸克除了内部自由度味 (u、d、s，以及后来发现的重夸克 c、b、t) 不同外，每种夸克还具有三种不同颜色 (如可用红 R、绿 G、蓝 B 来标记)，由此就可以做到在夸克模型中强子遵从相应的 Fermi 和 Bose 统计。这种 "色" 自由度的引入立即获得了实验上的证实，如 e^+e^- 对撞中 R 值的测量，$R=\dfrac{\sigma(e^+e^-\to \text{强子})}{\sigma(e^+e^-\to \mu^+\mu^-)}$，其中 σ 是相应过程的碰撞截面。一方面通过夸克模型可以直接计算 $R=N_c\sum\limits_{i=1}^{n_f}Q_i^2$，其中 n_f 是夸克的 "味" 数，N_c 是夸克的 "色" 数，Q_i 是第 i 种夸克的电荷值。另一方面可以在正、负电子对撞机的实验中精确地测量 R 值。早期及北京谱仪 (BES) 近几年来的实验都证实了 "色" 数 $N_c=3$。实验上测量的 $\pi^0\to\gamma\gamma$ 衰变几率值也证实了夸克的 "色" 数 $N_c=3$。每一种夸克含有内部色空间自由度，即有三种不同的色，不同色夸克之间的强相互作用使得它们被紧紧地束缚在强子内部，不能被击出呈现自由的状态，人们形象地称此物理现象为 "夸克禁闭"。强子态都是色单态，实验上并未观察到带色量子数的强子和自由夸克，因此色空间应具有某种精确的对称性，它禁闭了夸克致使实验上只观察到无色 (色单态) 的强子。

综上所述，作为唯象描述核力的介子交换理论在核物理实验和 N-N, π-N 相互碰撞实验中得以发展；实验上发现的上百种强子分类规律性地揭示了粒子物理下一层次夸克的存在；电子–质子深度非弹性散射实验揭示了禁闭在强子内部夸克之间很强的相互作用在大动量迁移下变弱，具有渐近自由的特点；色夸克之间的强相互作用使得它们被紧紧地束缚在强子内部，不能被击出呈现自由的状态，而无色强子内夸克之间的相互作用是产生标度无关性破坏现象的根源。这些实验事实为建立强相互作用的基本理论 —— 量子色动力学奠定了基础。

1.2 $SU(3)$ 规范对称性和 QCD 拉氏密度

电磁相互作用的基本理论是量子电动力学 (QED)，在 QED 理论中以重整化电荷来描述，实验上测量到的电子电荷 $e\left(\dfrac{e^2}{4\pi}\cong\dfrac{1}{137}\right)$ 是屏蔽以后的有效相互作用，即在小动量迁移下 (汤姆孙极限) 下是确定的。当动量迁移 Q^2 增加到很大时，有

效耦合常数 (电荷 e) 随之增大，这样的一个行为可由重整化理论中的 β 函数完全确定，在 QED 中 β 函数是正的，有效耦合常数随能量的增加而增大。这是可理解的，因为当 Q^2 很大时，探测电荷的波长很短，可直接探测到未被屏蔽的电荷，其探测到的电荷量自然增大。因此，QED 理论不具有随着动量迁移 Q^2 的增加，有效耦合常数 (电荷 e) 随之减小的渐近自由特点。1972 年 Symanzik 和't Hooft 在马赛的国际会议上注意到只有具有 β 函数为负的量子场论可能给出渐近自由特点，与电磁相互作用相反，强相互作用场论应具有 β 函数为负的特点, 致使它具有反屏蔽性质。实际上，在量子色动力学建立以前，人们分析了各种类型的量子场论，发现只有非 Abel 规范场论才可能具有渐近自由的性质。

1973 年，Gross，Wilczek 和 Politzer 分别发表的论文 [7] 提议了 $SU(3)$ 规范群下非 Abel 规范场论可以作为强相互作用的量子场论, 其重整化 β 函数是负的, 它的反屏蔽性质使得有效耦合常数 $\alpha_s(Q^2)$ 随着 Q^2 的增大而减小, 即渐近自由性质。他们三人发现的这一性质, 导致强相互作用量子场论 —— 量子色动力学理论的建立。

1.2.1　规范变换不变性原理

量子色动力学可以看作量子电动力学向非 Abel 规范群的推广。众所周知，量子电动力学建立在 Abel 规范群 $U(1)$ 规范变换不变性的基础上，量子电动力学拉氏密度在 Abel 规范群 $U(1)$ 变换下是不变的，对于电磁相互作用引入的整体规范变换群 $U(1)$ 的参量 θ 不依赖于时空坐标。如果将变换参量 θ 定域化，即 θ 是 x 的函数 ——$\theta(x)$，其中参量 θ 不是常数而是时空点 x 的函数，在群空间的转动变换可以在任何时空点独立地进行，即电子场量 ψ 作如下的规范变换

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(x)}\psi(x) \tag{1.7}$$

相应的规范变换称为定域规范变换，又称为第二类规范变换。在电磁相互作用中规范群是 Abel 规范群 $U(1)$，即两次变换的次序是可交换的。如果场量 A_μ 也作如下变换

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x) \tag{1.8}$$

那么电子自由场的拉氏函数 $\mathcal{L}_0 = \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ 在变换 (1.7) 和 (1.8) 下不是不变的。事实上，由于 $\partial_\mu\theta(x) \neq 0$，自由场的拉氏函数由规范变换 (1.7) 引起的变化

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) \to \bar{\psi}'(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi'(x) &= \bar{\psi}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(x)}\gamma^\mu\partial_\mu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(x)}\psi(x)) \\ &= \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) + \mathrm{i}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\theta(x)\psi(x)\end{aligned}$$

为变换 (1.8) 引起 A_μ 场的变化所抵消。因而有下列变换式

$$(\partial_\mu + \mathrm{i}eA_\mu)\psi \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\partial_\mu + \mathrm{i}eA_\mu)\psi$$

如果定义协变微商 D_μ：

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + \mathrm{i}eA_\mu \tag{1.9}$$

那么就可以将上述变换 (1.7) 和 (1.8) 写成

$$D_\mu\psi \to (D_\mu\psi)' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} D_\mu\psi$$

这就意味着如果将变换参量 θ 定域化，$\mathcal{L}_0 = \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ 中的场量 ψ 可作式 (1.7) 的规范变换。必须引入矢量规范场 A_μ，令 $\partial_\mu \to D_\mu \equiv \partial_\mu + \mathrm{i}eA_\mu$，相应地 A_μ 按式 (1.8) 变换，从而保证理论的规范不变性。显而易见，反对称张量 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ 在规范变换 (1.7) 和 (1.8) 下是不变的，电磁相互作用拉氏函数

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)\left(\mathrm{i}\not{D} - m\right)\psi(x) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{1.10}$$

在 $U(1)$ 规范群变换 (1.7) 和 (1.8) 下也是不变的。协变微商 D_μ 满足下述关系式

$$[D_\mu, D_\nu] = \mathrm{i}eF_{\mu\nu} \tag{1.11}$$

反过来，如果只要求拉氏函数满足 Lorentz 不变性，时间反演和空间反射变换下不变以及可重整理论，那么式 (1.10) 还允许光子质量项 $-\frac{1}{2}m_\gamma^2 A^\mu A_\mu$ 的存在。显然此项在规范变换下不是不变的。如果要求拉氏函数是规范变换式 (1.7) 和式 (1.8) 下不变的，就不允许这一项的存在。因而电磁相互作用的规范不变性是与光子质量为零密切相关的，或者说规范不变性要求光子质量为零。可见规范不变性在构造电磁相互作用的拉氏函数中起了重要作用：① 引入规范场 A_μ，以协变微商 D_μ 代替偏微商 ∂_μ；② 光子的质量项不出现。因此，Lorentz 不变性、时间反演和空间反射变换下不变性、Abel 规范不变性以及可重整理论这几条原理在一起就完全决定了电磁作用拉氏函数的形式 (1.10)。由于光子不带电荷，拉氏函数形式 (1.10) 中纯电磁场部分是自由场，不存在电磁场本身的自相互作用。

这一规范变换不变性的思想可以推广到非 Abel 规范群。1954 年 Yang 和 Mills 首先将 $U(1)$ 群推到 $SU(2)$ 群，发现了非 Abel 规范场的重要特点，人们又称其为 Yang-Mills 规范场。上一节已指出每一种夸克具有三种颜色，在色空间具有精确的对称性，量子色动力学就是假定在 $SU(3)$ 规范群变换下不变的拉氏函数所唯一确定的理论。

1.2.2 $SU(3)$ 群

首先介绍 $SU(3)$ 群，$SU(3)$ 群不同于 $U(1)$ 群，它是非 Abel 群，两次变换的次序是不可交换的。$SU(3)$ 群有 8 个生成元 $T_a (a = 1, 2, \cdots, 8)$，

$$\left[T^a, T^b\right] = \mathrm{i}f^{abc}T^c \tag{1.12}$$

$SU(3)$ 群生成元一个明显的矩阵表示为$T_a = \dfrac{1}{2}\lambda_a$，$\lambda^a$ 是 8 个 Gell-Mann 矩阵。式 (1.12) 中重复指标为求和，f^{abc} 是 $SU(3)$ 群的结构常数。f^{abc} 具有全反对称性质，即交换其中任意两个指标改变符号

$$f^{abc} = -f^{bac} \tag{1.13}$$

由 T^a 张成的线性矢量空间在乘法和加法运算下封闭构成 $SU(3)$ 群的李代数，且有下列 Jacobi 恒等式

$$\left[T^a,[T^b,T^c]\right]+\left[T^b,[T^c,T^a]\right]+\left[T^c,[T^a,T^b]\right]=0 \tag{1.14}$$

将式 (1.12) 代入式 (1.14) 可得到结构常数 f^{abc} 满足的条件

$$f^{abd}f_{dce}+f^{bcd}f_{dae}+f^{cad}f_{dbe}=0 \tag{1.15}$$

一般地讲，李代数有它某一给定维空间 R 的表示，在这些表示空间中的线性算符 (群元素 g 的矩阵实现) 满足式 (1.12) 的李代数对易关系。$SU(3)$ 群的任何一个元素 g 都可以记成李代数中元素 T^a 的指数形式

$$\{g\}=\{\exp(-\mathrm{i}T^a\theta_a\} \tag{1.16}$$

由 Jacobi 恒等式 (1.14) 可知，生成元 T^a

$$(T^a)^{bc}=-\mathrm{i}f^{abc} \tag{1.17}$$

显然满足李代数对易关系式 (1.12)。李代数表示中维数最小的称为基础表示。由式 (1.17) 得到的表示称为 $SU(3)$ 群的伴随表示。将式 (1.17) 代入式 (1.14) 就得到结构常数 f^{abc} 满足的式 (1.15)。这是自然的，因为伴随表示下的李代数就是由结构常数来表示的。因此我们说一个场量属于伴随表示就是指它在规范变换下的变换性质由结构常数决定。

令费米子场 ψ 属于 $SU(3)$ 群的基础表示，ψ 场有三个分量 ψ_i ($i=1,2,3$ 相应于夸克的三种色)。相应的规范变换 U 为

$$\psi_i(x)\to\psi_i'(x)=U_{ij}\psi_j(x),\quad U=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}T^a\theta^a} \tag{1.18}$$

其中，θ^a 是 $SU(3)$ 群的 8 个参量。如果是整体规范变换，它是常参量；对于定域规范变换，它是 x 的函数。在定域规范变换下，由于 θ^a 是 x 的函数，$\partial_\mu\theta^a\neq 0$，为了构造定域规范变换下不变的拉氏密度，考虑流算符 $\bar{\psi}_i\gamma^\mu\psi_i$ 由规范变换式 (1.18) 引起的变化

$$\bar{\psi}_i(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi_i(x)\to\bar{\psi}_i'(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi_i'(x)=\bar{\psi}_i(x)U_{ij}^\dagger\gamma^\mu\partial_\mu(U\psi(x))_j$$

$$= \bar{\psi}_i(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi_i(x) - \mathrm{i}\bar{\psi}_i(x)\left(T^a\gamma^\mu\partial_\mu\theta^a(x)\right)_{ij}\psi_j(x)$$

在获得最后一个等式时已取了无穷小变换。与电磁相互作用类似，多出的一项需要引入矢量规范场 $A_\mu = T^a A_\mu^a$ 来抵消。定义协变微商 D_μ：

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - \mathrm{i}gA_\mu \tag{1.19}$$

其中

$$A_\mu = T^a A_\mu^a \tag{1.20}$$

$A_\mu^a (a = 1, 2, \cdots, 8)$ 是相应于规范群 $SU(3)$ 引入的规范场，其数目等于生成元的个数，g 是 $SU(3)$ 的规范荷，它标记着费米子场 ψ 和规范场 A_μ^a 之间的耦合强度。规范场 A_μ^a 的 8 个分量相应于传递相互作用的 8 个带色荷的媒介子场，称为胶子场。对于非 Abel 规范场，若要求写下 $SU(3)$ 规范群不变的拉氏密度，规范场 A_μ^a 的规范变化就不能像 Abel 规范场变换那么简单。现在考察费米子场在规范变换 (1.18) 下引起的变化如何为规范场在新的规范变换下引起的变化所抵消。可以证明在非 Abel $SU(3)$ 规范群下，若定义规范场的规范变换

$$T^a A_\mu^a \to U\left(T^a A_\mu^a - \frac{\mathrm{i}}{g}U^{-1}\partial_\mu U\right)U^{-1} \tag{1.21}$$

这恰好保证了 $\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi$ 在规范变换 (1.18) 和 (1.21) 下是不变的。引入矢量规范场 A_μ^a 后必然在拉氏密度中出现规范场的动能项 $-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$，其中 $F_{\mu\nu}$ 若按 $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ 定义在式 (1.21) 规范变换下显然不是不变的。为此必须修改拉氏密度中的动能项使之满足在式 (1.21) 规范变换下不变。换句话说，非 Abel 规范群下定义的

$$F_{\mu\nu} = T^a F_{\mu\nu}^a \tag{1.22}$$

应该是规范变换下协变的，即

$$F_{\mu\nu} \to U F_{\mu\nu} U^{-1} \tag{1.23}$$

注意到 $D_\mu \to U D_\mu U^{-1}$ 以及 $SU(3)$ 下 $D_\mu\psi$ 的变换性质，就可选择式 (1.19) 的对易关系 $[D_\mu, D_\nu]$ 来定义 $F_{\mu\nu}$ 从而保证它在规范变换下协变性的要求，即定义

$$[D_\mu, D_\nu] = -\mathrm{i}gF_{\mu\nu} = -\mathrm{i}gT^a F_{\mu\nu}^a \tag{1.24}$$

利用式 (1.12) 计算对易关系 $[D_\mu, D_\nu]$ 得到规范场 A_μ^a 的场强 $F_{\mu\nu}^a$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \tag{1.25}$$

式中，第三项是非 Abel 规范场所特有的，对于 Abel 规范场其结构函数为零，式 (1.25) 就回到了电磁相互作用的场强表达式 $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$。利用式 (1.20) 和式 (1.22) 可以将式 (1.25) 改写为

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu-\mathrm{i}g\left[A_\mu,A_\nu\right] \tag{1.26}$$

可以证明由式 (1.26) 定义的 $F_{\mu\nu}$ 在非 Abel 规范变换下是协变的，即满足式 (1.23)。

1.2.3　QCD 拉氏函数

这样按非 Abel 规范不变性原理建立的拉氏函数为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}&=\bar{\psi}(x)\left(\mathrm{i}\not{\partial}-m\right)\psi(x)-\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)\\&=\bar{\psi}(x)\left(\mathrm{i}\not{\partial}-m\right)\psi(x)-\frac{1}{4}\left(F^{a,\mu\nu}F^a_{\mu\nu}\right)\end{aligned} \tag{1.27}$$

从形式上讲，它完全类似于规范群为 $U(1)$ 的量子电动力学拉氏函数 (1.10)。

为了验证这样定义的拉氏函数在规范变换 (1.18) 和 (1.21) 下是不变的，可以考虑作一个无穷小变换，即参量 θ^a 是无穷小量，规范变换 (1.18) $U=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}T^a\theta^a}$ 中只取线性项，

$$U=I-\mathrm{i}T^a\theta^a \tag{1.28}$$

其中，I 是单位矩阵。那么式 (1.18) 和式 (1.21) 无穷小规范变换就变成

$$\begin{aligned}\delta\psi_i&=-\mathrm{i}T^a_{ij}\theta^a\psi_j\\\delta A^a_\mu&=f^{abc}\theta^bA^c_\mu-\frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a\end{aligned} \tag{1.29}$$

在获得上式时已用到了生成元 T^a 的对易关系式 (1.12)。因此

$$\begin{aligned}\delta(\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu)&=\partial_\mu\delta A^a_\nu-\partial_\nu\delta A^a_\mu\\&=f^{abc}\theta^b(\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu)+f^{abc}[(\partial_\mu\theta^b)A^c_\nu-(\partial_\nu\theta^b)A^c_\mu]\end{aligned} \tag{1.30}$$

另一方面，式 (1.25) 右边的第三项在无穷小变换下

$$\begin{aligned}\delta(gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu)&=gf^{abc}[(\delta A^b_\mu)A^c_\nu+A^b_\mu(\delta A^c_\nu)]\\&=f^{abc}[g(f^{cde}A^b_\mu A^e_\nu+f^{bde}A^c_\nu A^e_\mu)\theta^d-A^b_\mu\partial_\nu\theta^c-A^c_\nu\partial_\mu\theta^b]\end{aligned} \tag{1.31}$$

应用 Jacobi 恒等式 (1.15) 就可以得到

$$\delta(gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu)=f^{abc}(gf^{cde}A^d_\mu A^e_\nu-A^b_\mu\partial_\nu\theta^c-A^c_\nu\partial_\mu\theta^b)$$

从式 (1.30) 和式 (1.31) 可以见到两式相加的结果正好将 $\partial_\mu\theta^a$ 的项相消，给出 $F^{\mu\nu}$ 在无穷小变换下的表达式

$$\delta F^a_{\mu\nu} = f^{abc}\theta^b F^c_{\mu\nu} \tag{1.32}$$

因此，考虑到 $SU(3)$ 群结构常数的全反对称性将导致 $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 的无穷小变换为零

$$\delta(F^{a\mu\nu}F^a_{\mu\nu}) = 2F^{a\mu\nu}\delta F^a_{\mu\nu} = 2f^{abc}\theta^b F^{a\mu\nu}F^c_{\mu\nu} = 0$$

这意味着规范场的动能项是规范变换下的不变量，或者说证明了拉氏函数在规范变换 (1.18) 和 (1.21) 下是不变的。

类似于电磁场，引入的规范场 A^a_μ 不仅有横向分量还有纵向和标量分量，即 A^a_μ 含有非物理自由度，需要引入规范固定条件来限制，如协变的 Lorentz 条件

$$\partial \cdot A^a(x) = \partial^\mu A^a_\mu(x) = 0 \tag{1.33}$$

这就使得非 Abel 规范场拉氏函数 $\mathcal{L}$ 是一个具有约束条件的物理系统。

物理系统在规范变换下的不变性使得规范场的质量项 $A^a_\mu A^{a\mu}$ 不出现，即规范变换下不变性要求规范场的质量为零。值得强调指出，拉氏函数 (1.27) 的一个重要特点是出现了规范场的自相互作用，它们来自于规范场动能项 $-\frac{1}{4}\left(F^{a,\mu\nu}F^a_{\mu\nu}\right)$ $(F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu)$。拉氏密度中具有三个规范场和四个规范场的自相互作用。这一特点是非 Abel 规范场所特有的，在电磁相互作用中不存在规范场的自作用。正是规范场自作用的存在使得非 Abel 规范场论出现新的特点。例如，量子色动力学中的渐近自由就是规范场自作用的必然结果。

从式 (1.27) 可以见到量子色动力学拉氏函数与量子电动力学拉氏函数在形式上是一样的，但规范群不一样。在量子电动力学中，规范群是 Abel 群，矢量场 A_μ 仅有一个分量，基本成分是电子和光子，由于传递相互作用的光子是电中性的，因此不存在规范场的自作用。而在量子色动力学理论中规范群是非 Abel $SU(3)$ 群，矢量场 A^a_μ 有 8 个分量，基本成分是夸克场 ψ_i 和胶子场 A^a_μ。传递相互作用的 8 个胶子分别对应于 $SU(3)$ 色规范群的 8 个生成元 T^a，它们不是色中性的，属于色八重态。因此胶子是带色的，它们的作用是诱导不同色夸克之间的转换，传递强相互作用。正是由于胶子带色荷，胶子之间可以有自相互作用，从而产生反屏蔽效应，这决定了强相互作用的渐近自由性质。这种三个规范场和四个规范场的自相互作用来自于规范场动能项 $-\frac{1}{4}\left(F^{a,\mu\nu}F^a_{\mu\nu}\right)(F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu)$。

综上所述，量子色动力学的建立可以用下面几点来概括：① 选择夸克色空间精确的对称性 $SU(3)$ 作为色规范群，夸克的 3 种不同色 $\psi_i(i=1,2,3)$ 是 $SU(3)$ 群的基础表示。② 规范变换参数 θ_a 定域化，即 θ_a 是时空坐标 x 的函数 $\theta_a(x)$，为

了保持规范不变性必须引入相应的矢量规范场 $A_\mu^a(a=1,2,\cdots,8)$，矢量规范场的 8 个分量与 $SU(3)$ 群生成元 T_a 的个数相对应。③ 由式 (1.19) 和式 (1.20) 定义协变微分 D_μ ($D_\mu \equiv \partial_\mu - \mathrm{i}gA_\mu$) 代替拉氏函数中的偏微分 ∂_μ，这样由规范不变性原理获得的拉氏函数形式 (1.17) 是唯一确定的，仅有夸克场和矢量规范场耦合常数 g 是唯一待定参数。可见，一旦选择了正确的规范群，由规范不变性原理就完全确定了既简洁又纯美的相互作用拉氏函数形式 (1.27)。夸克之间由于交换色八重态胶子产生颜色转换。它们被紧紧束缚在强子内部，不能被击出呈现自由的状态，只可能间接地由强子实验观测到它们的存在，例如，三喷注的实验结果证实了强子内部存在胶子等。拉氏函数 (1.27) 式中的 m 是夸克质量矩阵。事实上当物理系统包含夸克的味自由度时，此式中还应对味指标求和。

1.2.4　手征对称性

特别地对于最轻的 u、d 夸克来讲，$m_u \simeq m_d \simeq 0$，如果忽略了轻夸克的质量，QCD 拉氏函数变为

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)\mathrm{i}\not{D}\psi(x) - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right) \tag{1.34}$$

在仅考虑两种味夸克的情况下，

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \end{pmatrix}$$

明显地，拉氏函数式 (1.34) 具有 $SU(2)$ 同位旋对称性。在质量为零的情况下，左手和右手是分离的，引入投影算符 $\dfrac{1\pm\gamma_5}{2}$，定义

$$q_R = \frac{1+\gamma_5}{2}q, \quad q_L = \frac{1-\gamma_5}{2}q \ (q=u,d)$$

$$\psi_{L,R} \equiv \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{L,R}$$

那么拉氏函数式 (1.34) 的第一项，即夸克部分在手征变换

$$\begin{aligned} \psi_L &\to \exp\left(\mathrm{i}\theta_i^L T_i^L\right)\psi_L \\ \psi_R &\to \exp\left(\mathrm{i}\theta_i^R T_i^R\right)\psi_R \end{aligned} \tag{1.35}$$

下是不变的，其对称群为 $SU_L(2)\times SU_R(2)$，称之为手征对称性。其中参数 θ_i^L, θ_i^R 是对称群的实参数，而 T_i^L, T_i^R 分别是手征对称群的生成元，它们在左手和右手夸克所属表示中的矩阵可以用 Pauli 矩阵 $\tau_i(i=1,2,3)$ 来表示 (见式 (1.3))，

$$T_i^L = (1+\gamma_5)\frac{1}{2}\tau_i, \quad T_i^R = (1-\gamma_5)\frac{1}{2}\tau_i$$

显然手征对称群的生成元 T_i^L, T_i^R 满足下面的对易关系

$$\begin{aligned}\left[T_i^L, T_j^L\right] &= \mathrm{i}\varepsilon_{ijk}T_k^L \\ \left[T_i^R, T_j^R\right] &= \mathrm{i}\varepsilon_{ijk}T_k^R \\ \left[T_i^L, T_j^R\right] &= 0\end{aligned}$$

它们各自构成封闭的代数，这表明 $SU_L(2)\times SU_R(2)$ 确为 QCD 拉氏密度夸克部分的手征对称群，它是在忽略 u、d 夸克质量的条件下得到的。在式 (1.34) 中加上 u、d 夸克的质量，这是手征对称性的明显破缺项。理论上讲，Goldstone 定理给出了这种对称性 $SU_L(2)\times SU_R(2)$ 动力学破缺的途径。1960 年 Nambo 首先认识到在某种相互作用形式下真空态可能不是唯一的，存在多个最低能量态，此时真空的对称性小于相互作用的对称性。按照 Nambo-Goldstone 定理，当连续对称性产生自发破缺时，物理系统中一定会出现零质量的 Goldstone 粒子。Goldstone 粒子的数目取决于相互作用对称性的大小 (G) 和物理真空保留对称性大小 (H) 之差。QCD 拉氏密度 (1.34) 具有手征对称性，$SU_L(2)\times SU_R(2)$ 手征对称性破缺伴有零质量的 Goldstone 粒子是三个赝标量的 π 介子，这也是 π 介子质量轻的原因。轻味夸克还有奇异夸克 s，加上 s 夸克后 QCD 拉氏密度 (1.34) 近似地具有 $SU_L(3)\times SU_R(3)$ 的手征对称性，破缺伴有零质量的 Goldstone 粒子是八个赝标量介子。由于奇异夸克 s 要比 u、d 夸克的质量大很多，相应的手征对称性 $SU_L(3)\times SU_R(3)$ 近似不如 $SU_L(2)\times SU_R(2)$ 对称性好。

1.3 QCD 量子化和 Feynman 规则

考虑纯粹的非 Abel 规范场，规范固定条件的存在使得直观的正则量子化方案遇到了困难，于是人们采用路径积分量子化方法，路径积分方法量子化可以保持非 Abel 规范场的协变性和规范不变性。

1.3.1 QCD 量子化

生成泛函理论告诉我们任意的 Green 函数都可以通过对生成泛函的泛函微商得到。例如，对于纯粹非 Abel 规范场，拉氏函数 $\mathcal{L}(x)=-\dfrac{1}{4}F^{a,\mu\nu}F^a_{\mu\nu}$，其生成泛函 $Z(J)$ 定义为

$$Z(J)=\int[\mathrm{d}A]\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\left(\mathcal{L}(x)+AJ\right)\right\} \tag{1.36}$$

$$Z(0)=\int[\mathrm{d}A]\exp(\mathrm{i}S) \tag{1.37}$$

其中，作用量 $S=\int\mathrm{d}^4x\mathcal{L}(x)$，外源为 J。生成泛函 $Z(0)$ 是规范不变的，然而

$Z(J)=\int[\mathrm{d}A]\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\left(\mathcal{L}(x)+AJ\right)\right\}$ 不是规范不变量，因为源项 AJ 是规范相关的。

现在考察如何将规范固定条件引入式 (1.36) 的生成泛函。上一节已指出规范场 A_μ^a 含有非物理自由度，需要引入规范固定条件来限制，例如，前面提到的 Lorentz 条件 (1.33)。更一般地可以将规范固定条件设为

$$G^\mu A_\mu^a(x)=B^a\quad(a=1,2,\cdots,8) \tag{1.38}$$

当 $G^\mu=\partial^\mu, B^a=0$ 时，式 (1.38) 就回到 Lorentz 条件 $(\partial\cdot A^a(x)=\partial^\mu A_\mu^a(x)=0)$。当 $A_\mu^a(x)$ 作规范变换 (1.8) 可获得变换后的场量 $A_\mu^{(\theta)a}(x)$ 时，$A_\mu^{(\theta)a}(x)$ 也必须满足规范固定条件 (1.38), 即

$$G^\mu A_\mu^{(\theta)a}(x)=B^a \tag{1.39}$$

这样，规范固定条件使得 θ^a 受到一定限制，例如，Lorentz 条件要求 θ^a 是方程 $\Box\theta^a=0$ 的解。引入泛函 $\Delta_G[A]$ 使它满足下列等式

$$\frac{1}{\Delta_G[A]}=\int\prod_a\{[\mathrm{d}\theta^a]\delta(G^\mu A_\mu^{(\theta)a}-B^a)\} \tag{1.40}$$

或者记为

$$\Delta_G[A]\int\prod_a\{[\mathrm{d}\theta^a]\delta(G^\mu A_\mu^{(\theta)a}-B^a)\}=1 \tag{1.41}$$

由此定义的 $\Delta_G[A]$ 是规范不变的。由于式 (1.41) 右边为 1，可以将此等式插入式 (1.37)，得到

$$Z(0)=\int[\mathrm{d}A]\prod_a[\mathrm{d}\theta^a]\Delta_G[A]\delta^n(G^\mu A^{(\theta)a}-B^a)\exp(\mathrm{i}S) \tag{1.42}$$

在式 (1.42) 中除了 δ 函数以外都是规范不变的，因此可以不需要特别标记 $A_\mu^{(\theta)a}(x)$。$A_\mu^a(x)$ 作规范变换，$A_\mu^a(x)\to A_\mu^{(\theta)a}(x)$，作用量 S 在所有 $A_\mu^{(\theta)a}(x)$ 的子集中是一个常数，因此当积分区域无穷大时，其泛函积分是发散的无穷大常数。将此无穷大常数分离，定义规范场的泛函积分

$$Z(0)=\int[\mathrm{d}A]\Delta_G[A]\delta^n(G^\mu A^a-B^a)\exp(\mathrm{i}S) \tag{1.43}$$

这相当于约定规范场的泛函积分的不变测度为 1。这样引入外源后的生成泛函式 (1.36) 成为

$$Z(J)=\int[\mathrm{d}A]\Delta_G[A]\prod_{a,x}\delta^n(G^\mu A^a-B^a)\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\left(\mathcal{L}(x)+A_\mu^aJ^{a\mu}\right)\right\} \tag{1.44}$$

如果定义矩阵 $M_G(x,y)$

$$(M_G(x,y))^{ab}=\frac{\delta(G^\mu A_\mu^{(\theta)a}(x))}{\delta\theta^b(y)} \tag{1.45}$$

由式 (1.41) 可以解出 $\Delta_G[A]$ 的明显形式

$$\Delta_G[A]=\det M_G \tag{1.46}$$

注意到式 (1.44) 中 B^a 是任意的，我们可以在泛函积分意义下对 $Z(J)$ 在 $B^a(x)$ 上选择合适的权重函数求平均。在式 (1.44) 两边乘以权重函数，得

$$\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{2\alpha}\int \mathrm{d}^4x(B^a(x))^2\right\}$$

其中，α 是规范固定参量。利用下面的公式：

$$\begin{aligned}&\int[\mathrm{d}B]\exp\left\{\frac{-\mathrm{i}}{2\alpha}\int \mathrm{d}^4x(B^a(x))^2\right\}\prod_{a,y}\delta(G^\mu A_\mu^a(y)-B^a(y))\\&=\exp\left\{\frac{-\mathrm{i}}{2\alpha}\int \mathrm{d}^4x(G^\mu A_\mu{}^a)^2\right\}\end{aligned} \tag{1.47}$$

就可以将式 (1.44) 改写为

$$Z(J)=\int[\mathrm{d}A]\det M_G\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\left(\mathcal{L}(x)-\frac{1}{2\alpha}(G^\mu A_\mu^a)^2+A_\mu^aJ^{a\mu}\right)\right\} \tag{1.48}$$

这样式 (1.48) 将 δ 函数引入的规范固定条件式 (1.33) 变为指数形式与拉氏密度在一起合并成为等效拉氏函数，这样一个化简过程类似于利用拉格朗日乘子法处理规范条件。在非 Abel 规范场下，式 (1.48) 中的行列式 $\det M_G$ 不是常数，一般地讲它依赖于规范场 A_μ，必须留在积分号内。特别地，对于协变 Lorentz 规范，将 $G^\mu=\partial^\mu$ 代入就得到

$$(M_G(x,y))^{ab}=-\frac{1}{g}(\delta^{ab}\Box-gf^{abc}\partial^\mu A^c{}_\mu)\delta^4(x-y) \tag{1.49}$$

对于如何处理式 (1.48) 被积函数中的 $\det M_G$，Faddeev-Popov[8] 引入满足 Grassmann 代数的虚构的复场 $C(x)$，使得在式 (1.48) 中的行列式 $\det M_G$ 指数化以便合并到等效拉氏函数中，即令

$$\det M_G=\int[\mathrm{d}C][\mathrm{d}C^*]\exp\left\{-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4yC^{a*}(x)(M_G(x,y))^{ab}C^b(y)\right\} \tag{1.50}$$

鬼场 $C(x)$ 满足 Grassmann 代数。协变规范 $M_G(x-y)$ 由式 (1.49) 描述，注意到由协变微商的伴随表示有

$$\partial^\mu D_\mu^{ab}=\delta^{ab}\Box-gf^{abc}\partial^\mu A_\mu^c$$

并将它代入式 (1.50) 进行分部积分就可得到

$$\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y C^{a*}(x)(M_G(x,y))^{ab}C^b(y) = -\int \mathrm{d}^4x(\partial^\mu C^a(x))^* D_\mu^{ab}C(x) \tag{1.51}$$

鬼场 $C(x)$ 是复标量场，我们可以引入两个独立的实场 C_1^a 和 C_2^a 来描述，C_1^a 和 C_2^a 仍然满足 Grassmann 代数，它们自身的平方为零，即

$$(C_1^a)^2 = (C_2^a)^2 = 0 \tag{1.52}$$

令

$$C^a = (C_1^a + \mathrm{i}C_2^a)/\sqrt{2} \tag{1.53}$$

那么式 (1.51) 就可用此两个实场来表示

$$\mathcal{L}_{FP} = (\partial^\mu C^{a*})D_\mu^{ab}C^b = \mathrm{i}(\partial^\mu C_1^a)D_\mu^{ab}C_2^b \tag{1.54}$$

在写出最后一个等号时已忽略了全散度项。

现在考虑纯规范场生成泛函式 (1.48) 加入夸克场后量子色动力学的拉氏函数

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \tag{1.55}$$

其中，右边第二项包含了所有夸克味求和，而 m 是夸克的质量矩阵。生成泛函式 (1.48) 扩充包含费米子场为

$$\begin{aligned} Z(J,\eta,\bar{\eta}) = \int [\mathrm{d}A]\,[\mathrm{d}\psi]\,[\mathrm{d}\bar{\psi}]\,\det M_G \exp\Big\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x[\mathcal{L}(x) - (1/2\alpha)(G^\mu A_\mu^a)^2 \\ + A_\mu^a J^{a\mu} + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi]\Big\} \end{aligned} \tag{1.56}$$

其中，η 和 $\bar{\eta}$ 是费米子场 $\bar{\psi}$ 和 $\psi(\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0)$ 的外源，它满足 Grassmann 代数，即它们的相互满足反对易关系。

将式 (1.50) 代入式 (1.56) 后得到全部指数化的生成泛函：

$$\begin{aligned} Z(J,\xi,\xi^*,\eta,\bar{\eta}) = \int [\mathrm{d}A]\,[\mathrm{d}\psi]\,[\mathrm{d}\bar{\psi}]\,[\mathrm{d}C]\,[\mathrm{d}C^*] \\ \times \exp\Big\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(\mathcal{L}_{\mathrm{eff}} + AJ + C^*\xi + \xi^*C + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi)\Big\} \end{aligned} \tag{1.57}$$

其中，$\mathcal{L}_{\mathrm{eff}}$ 是 QCD 等效拉氏函数

$$\mathcal{L}_{\mathrm{eff}} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP} \tag{1.58}$$

式 (1.58) 中各项分别为规范场、费米子场、规范固定项以及 Faddeev-Popov 鬼场项。其形式分别为

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} \tag{1.59}$$

$$\mathcal{L}_F = \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \tag{1.60}$$

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A^a_\mu)^2 \tag{1.61}$$

$$\mathcal{L}_{FP} = (\partial^\mu C^{a^*})D^{ab}_\mu C^b \tag{1.62}$$

式 (1.57) 中的 J、η、$\bar{\eta}$、ξ、ξ^* 分别是 A、$\bar{\psi}$、ψ、C^*、C 的源函数。而 AJ、$C^*\xi$、ξ^*C 分别是 $A^a_\mu J^{a\mu}$、$C^{a^*}\xi^a$、$\xi^{a^*}C^a$ $(a = 1, 2, \cdots, 8)$ 的缩写。ψ 是 $SU(3)$ 规范群的基础表示，$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0$。$\bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu - m)\psi$ 是 $\bar{\psi}^i(\mathrm{i}\gamma^\mu D^{ij}_\mu - m\delta_{ij})\psi^j$ 的缩写，D^{ij}_μ 是基础表示的协变微商。方程 (1.57)~(1.62) 就是我们讨论协变规范下 QCD 有效拉氏函数和费曼规则的基本出发点。

1.3.2 QCD Feynman 规则

为了讨论协变微扰论和 Feynman 规则，首先将式 (1.58)~式 (1.62) 中的拉氏函数按耦合常数 g 无关和相关分为自由部分和相互作用部分：

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}^0_{\text{eff}} + \mathcal{L}^I_{\text{eff}} \tag{1.63}$$

其中，$\mathcal{L}^0_{\text{eff}}$ 包括 $\mathcal{L}^0_G$、$\mathcal{L}^0_F$、$\mathcal{L}^0_{FP}$ 三部分，它们分别是由式 (1.59)、(1.60) 和 (1.62) 中与耦合常数 g 无关的部分组成的，剩下与 g 有关的部分包含在相互作用拉氏函数 $\mathcal{L}^I_{\text{eff}}$ 中，亦即

$$\mathcal{L}^0_{\text{eff}} = \mathcal{L}^0_G + \mathcal{L}^0_F + \mathcal{L}^0_{FP} \tag{1.64}$$

$$\mathcal{L}^0_G = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A^a_\mu)^2 \tag{1.65}$$

$$\mathcal{L}^0_F = \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \tag{1.66}$$

$$\mathcal{L}^0_{FP} = (\partial^\mu C^{a^*})(\partial_\mu C^a) \tag{1.67}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^I_{\text{eff}} &= \mathcal{L}_{\mathrm{I}}(A^a, C^a, C^{a^*}, \psi, \bar{\psi}) \\ &= -\frac{g}{2}f^{abc}(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)A^{b\mu}A^{c\nu} - \frac{g^2}{4}f^{abc}f^{cde}A^a_\mu A^b_\nu A^{c\mu}A^{d\nu} \\ &\quad + g\bar{\psi}T^a\gamma^\mu\psi A^a_\mu - gf^{abc}(\partial^\mu C^{a*})C^b A^c_\mu\end{aligned} \tag{1.68}$$

在式 (1.65) 中已包含了规范固定项。至于鬼场项，其动能部分是无质量的玻色子具有的形式，它与规范场相互作用部分包含在式 (1.68) 中。如此分割后有效拉氏量

的相互作用部分全部包含在式 (1.68) 中，而与相互作用无关的部分包含在式 (1.64) 的自由部分中。这样，我们就可以定义自由场的生成泛函 $Z_0[J...]$ 和整个系统的生成泛函 $Z[J...]$。

相应于式 (1.65)~式 (1.67)，定义自由场生成泛函

$$Z_0(J,\xi,\xi^*\eta,\bar{\eta}) = \int [\mathrm{d}A]\,[\mathrm{d}\psi]\,[\mathrm{d}\bar{\psi}]\,[\mathrm{d}C]\,[\mathrm{d}C^*] \times \exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(\mathcal{L}^0_{\mathrm{eff}} + AJ + C^*\xi + \xi^*C + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi)\right\} \tag{1.69}$$

将式 (1.64) 代入式 (1.69) 就可以得到

$$Z_0(J,\xi,\xi^*\eta,\bar{\eta}) = Z_0^G(J)Z_0^{FP}(\xi,\xi^*)Z_0^F(\eta,\bar{\eta}) \tag{1.70}$$

其中

$$Z_0^G(J) = \int [\mathrm{d}A]\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(\mathcal{L}^0_G + AJ)\right\} \tag{1.71}$$

$$Z_0^{FP}(\xi,\xi^*) = \int [\mathrm{d}C]\,[\mathrm{d}C^*]\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(\mathcal{L}^0_{FP} + C^*\xi + \xi^*C)\right\} \tag{1.72}$$

$$Z_0^F(\eta,\bar{\eta}) = \int [\mathrm{d}\psi]\,[\mathrm{d}\bar{\psi}]\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(\mathcal{L}^0_F + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi)\right\} \tag{1.73}$$

将有相互作用的生成泛函式 (1.57) 用自由场的生成泛函表达

$$Z(J,\xi,\xi^*\eta,\bar{\eta}) = \exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\mathcal{L}^i_{\mathrm{eff}}\left(\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J^{a\mu}},\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta\xi^{a*}},\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta(-\xi^a)},\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta\bar{\eta}},\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta(-\eta)}\right)\right\} Z_0[J,\xi,\xi^*,\eta,\bar{\eta}] \tag{1.74}$$

对此式的证明是直接的，只须做指数展开进行泛函微商即可。这样就归之于计算 $Z_0(J,\xi,\xi^*\eta,\bar{\eta})$ 中的 $Z_0^G(J), Z_0^{FP}(\xi,\xi^*)$ 和 $Z_0^F(\eta,\bar{\eta})$。对式 (1.71) 中的 $\mathcal{L}^0_G$ 项进行分部积分，将它变换为

$$Z_0^G(J) = \int [\mathrm{d}A]\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\left(\frac{1}{2}A^{a\mu}K^{ab}_{\mu\nu}A^{b\nu} + AJ\right)\right\} \tag{1.75}$$

其中

$$K^{ab}_{\mu\nu} = \delta^{ab}\left(g_{\mu\nu}\Box - \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\partial_\mu\partial_\nu\right) \tag{1.76}$$

同样在式 (1.72) 和式 (1.73) 做分部积分可得

$$Z_0^{FP}(\xi,\xi^*) = \int [\mathrm{d}C]\,[\mathrm{d}C^*]\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(C^{a*}K^{ab}C^b + C^*\xi + \xi^*C)\right\} \tag{1.77}$$

$$Z_0^F(\eta,\bar{\eta})=\int[\mathrm{d}\psi]\,[\mathrm{d}\bar{\psi}]\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x(\bar{\psi}R\psi+\bar{\psi}\eta+\bar{\eta}\psi)\right\} \tag{1.78}$$

其中

$$K^{ab}=-\delta^{ab}\Box \tag{1.79}$$

$$R=\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu-m \tag{1.80}$$

进一步利用下列等式定义 $K^{ab}_{\mu\nu},K^{ab}$ 和 R 的逆函数 $D^{ab}_{\mu\nu},D^{ab}$ 和 S

$$\int\mathrm{d}^4z\;K^{ac}_{\mu\lambda}(x-z)g^{\lambda\rho}D^{cb}_{\rho\nu}(z-y)=\delta^{ab}g_{\mu\nu}\delta^{(4)}(x-y) \tag{1.81}$$

$$\int\mathrm{d}^4z\;K^{ac}(x-z)D^{cb}(z-y)=\delta^{ab}\delta^{(4)}(x-y) \tag{1.82}$$

$$\int\mathrm{d}^4zR(x-z)S(z-y)=\delta^{(4)}(x-y) \tag{1.83}$$

求解三个方程可得相应的逆函数

$$D^{ab}_{\mu\nu}=\delta^{ab}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{k^2+\mathrm{i}\varepsilon}\left(-g_{\mu\nu}+(1-\alpha)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) \tag{1.84}$$

$$D^{ab}(x)=\delta^{ab}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2+\mathrm{i}\varepsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \tag{1.85}$$

$$S(x)=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{\not{p}-m}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} \tag{1.86}$$

这三个逆函数分别是胶子场、鬼场和夸克场的传播子。进一步在式 (1.71)~式 (1.73) 对 $A,C,C^*,\psi,\bar{\psi}$ 做泛函积分，利用高斯积分就得到

$$Z_0^G(J)=\exp\left\{\frac{-\mathrm{i}}{2}\int\mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4yJ^{a\mu}(x)D^{ab}_{\mu\nu}(x-y)J^{b\nu}(y)\right\} \tag{1.87}$$

$$Z_0^{FP}(\xi,\xi^*)=\exp\left\{-\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\xi^{a*}(x)D^{ab}(x-y)\xi^b(y)\right\} \tag{1.88}$$

$$Z_0^F(\eta,\bar{\eta})=\exp\left\{-\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\bar{\eta}(x)S(x-y)\eta(y)\right\} \tag{1.89}$$

在得到式 (1.87)~式 (1.89) 时已忽略了无关的常数。

定义两点 Green 函数

$$\langle0|\,T(A^a_\mu(x)A^b_\nu(y))\,|0\rangle=\frac{(-\mathrm{i})^2}{Z_0^G(0)}\frac{\delta^2Z_0^G(J)}{\delta J^{a\mu}(x)\delta J^{b\nu}(y)}\bigg|_{J=0}=\mathrm{i}D^{ab}_{\mu\nu}(x,y) \tag{1.90}$$

$$\langle 0|\,T(C(x)C^*(y))\,|0\rangle = \frac{(-\mathrm{i})^2}{Z_0^{FP}(0,0)}\frac{\delta^2 Z_0^{FP}(\xi,\xi^*)}{\delta\xi^{a*}\delta(-\xi^b)}\bigg|_{\xi=\xi^*=0} = \mathrm{i}D^{ab}(x,y) \tag{1.91}$$

$$\langle 0|\,T(\psi(x)\bar{\psi}(y))\,|0\rangle = \frac{(-\mathrm{i})^2}{Z_0^{F}(0,0)}\frac{\delta^2 Z_0^{F}(\eta,\bar{\eta})}{\delta\bar{\eta}\delta(-\eta)}\bigg|_{\eta=\bar{\eta}=0} = \mathrm{i}S(x,y) \tag{1.92}$$

这三个两点 Green 函数是由自由场的生成泛函给出的，相应于三种自由场的传播子。它们在动量空间的表达式分别为

$$D_{\mu\nu}^{ab}(k) = -\delta^{ab}\frac{d_{\mu\nu}(k)}{k^2},\quad d_{\mu\nu}(k) = g_{\mu\nu} - (1-\alpha)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \tag{1.93}$$

$$D^{ab}(k) = \delta^{ab}\frac{1}{k^2} \tag{1.94}$$

$$S(p) = \frac{1}{\not{p} - m} \tag{1.95}$$

同样对于相互作用顶点可以通过式 (1.74) 对具有相互作用的生成泛函 $Z[J,\xi,\xi^*,\eta,\bar{\eta}]$ 展开求泛函微商得到，即

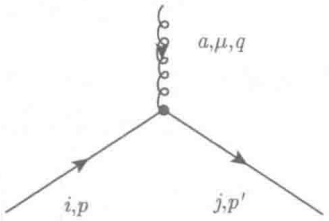
$$\begin{aligned} &Z(J,\xi,\xi^*\eta,\bar{\eta}) \\ &= \left\{1 + \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\mathcal{L}_{\mathrm{eff}}^i\left(\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J^{a\mu}},\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta\xi^{a*}},\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta(-\xi^a)},\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta\bar{\eta}},\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta(-\eta)}\right)\right\} Z_0[J,\xi,\xi^*,\eta,\bar{\eta}] \end{aligned} \tag{1.96}$$

将式 (1.74) 中相应的相互作用项代入上式就得到相应的顶角。

综合上面的讨论，可以得到量子色动力学微扰展开中相应的 Feynman 规则。

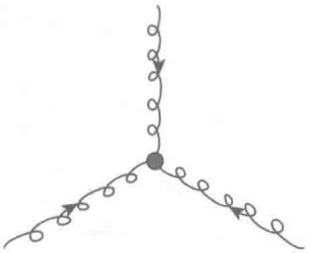
1. 夸克–胶子顶角

$g\gamma_\mu\,(T^a)_{ij}$



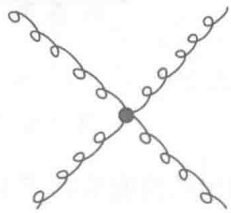
2. 三胶子顶角

$\mathrm{i}g\,f^{abc}V_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2,k_3)$



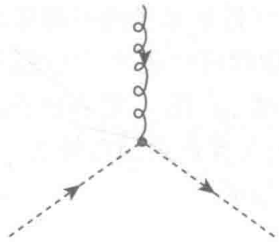
3. 四胶子顶角

$-g^2 W^{abcd}_{\mu\nu\lambda\sigma}$



4. 鬼–胶子顶角

$\mathrm{i}g\ f^{abc}k_\mu$



5. 夸克传播子

$$S^{ij}(p) = \delta^{ij}\frac{1}{\not{p} - m}$$

6. 胶子传播子

$$D^{ab}_{\mu\nu}(k) = -\frac{\delta^{ab}d_{\mu\nu}(k^2)}{k^2 + \mathrm{i}\varepsilon}$$



7. 鬼场传播子

$$\frac{\delta^{ab}}{k^2 + \mathrm{i}\varepsilon}$$



一共有四个顶角和三个传播子，所有鬼场出现在圈图内，由于 Grassmann 代数的结果，鬼场圈 (图 1.2) 贡献一个负号。四个顶角都具有普适的 g，且 g 与味无关。这里三胶子顶角和四胶子顶角是 Abel 规范场中所没有的，这是因为胶子具有色荷。在 QED 中光子是中性的没有自相互作用。下一节将见到三胶子和四胶子顶角的存在使得 QCD 不同于 QED，例如，图 1.3 就是三胶子相互作用对胶子传播子的贡献，正是三胶子和四胶子的自作用导致 QCD 的一个重要特点 —— 渐近自由。



图 1.2 鬼场圈图对胶子传播子的贡献



图 1.3　胶子传播子中三胶子相互作用顶点

上面给出的协变规范下 Feynman 规则是在仅考虑最低阶树图时得到的，不完全。一个完整的 Feynman 规则应包括圈图以及包含抵消项的计算规则。

首先讨论费米子圈图和鬼场圈图的符号因子 (-1)。按照生成泛函理论，任意 Green 函数都可以通过对生成泛函 (1.96) 的泛函微商得到。考虑夸克圈图对胶子传播子的贡献 (g^2 阶)，其生成泛函由式 (1.96) 展开到二级给出，贡献来自于两个夸克-胶子的相互作用顶角等式 (1.68) 右边的第三项 $\mathcal{L}_{\text{eff}}^{I(F)}$。生成泛函 $Z(J,\xi,\xi^*\eta,\bar{\eta})$ 展开到二级项

$$\frac{1}{2!}\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\mathcal{L}_{\text{eff}}^{I(F)}\left(\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J^{a\mu}},\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta\bar{\eta}},\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta(-\eta)}\right)\right\}^2 Z_0[J,\xi,\xi^*,\eta,\bar{\eta}] \tag{1.97}$$

其中，$Z_0(J,\xi,\xi^*\eta,\bar{\eta}) = Z_0^G(J)Z_0^{FP}(\xi,\xi^*)Z_0^F(\eta,\bar{\eta})$，只涉及 $Z_0^G(J)$、$Z_0^F(\eta,\bar{\eta})$ 部分。注意到 Grassmann 代数 η 和 $\bar{\eta}$ 的反对易特性，对于夸克和反夸克圈会多一个负号，对上式运算后得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2!}\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\mathcal{L}_{\text{eff}}^{I(F)}\left(\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J^{a\mu}},\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta\bar{\eta}},\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta(-\eta)}\right)\right\}^2 Z_0[J,\xi,\xi^*,\eta,\bar{\eta}]\\
=&(-1)\frac{g^2}{2}\int \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\,\mathrm{Tr}[T^a\gamma^\mu S(x_1-x_2)T^b\gamma^\nu S(x_2-x_1)]\\
&\times D_{\mu\lambda}^{ac}(x_1-y_1)D_{\nu\rho}^{bd}(x_2-y_2)J^{c\lambda}(y_1)J^{d\rho}(y_2)
\end{aligned} \tag{1.98}$$

按照 Green 函数的定义可从式 (1.98) 导出夸克-反夸克圈图对胶子传播子的贡献，

$$\begin{aligned}
-\mathrm{i}G_{2\mu\nu}^{ab}(x,y) = &-(-1)g^2\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-y)}\frac{d_{\mu\lambda}(k)}{k^2}\frac{d_{\nu\rho}(k)}{k^2}\\
&\times\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4\mathrm{i}}\,\mathrm{Tr}\left(T^a\gamma^\lambda\frac{1}{\not{p}-m}T^b\gamma^\rho\frac{1}{\not{p}-\not{k}-m}\right)
\end{aligned} \tag{1.99}$$

我们已经强调这个 (-1) 因子来自于 Grassmann 代数的反对易性质，因此对于鬼粒子圈也同样有这样一个 (-1) 因子。从 Feynman 规则上来讲，因子 (-1) 是与圈图积分相联系的，即对于费米子圈和鬼粒子图积分附加一个 (-1) 因子。因此，对夸克圈图，相应的圈积分为 $-\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4\mathrm{i}}\delta^{ij}\delta^{\alpha\beta}$；对鬼粒子圈图，相应的圈积分为

$-\int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4\mathrm{i}}\delta^{ab}$；而对于胶子圈积分则无 (-1) 因子。在圈积分中除了上述的符号因子外还需要考虑统计因子。由于玻色子的统计性质，对于胶子圈图会出现重复计算对 Green 函数的贡献，必须消去这种由于全同性而出现的因子。相应图 1.4 中的三个图形应附加三个不同因子

$$(\mathrm{a})\frac{1}{2!},\quad (\mathrm{b})\frac{1}{2!},\quad (\mathrm{c})\frac{1}{3!} \tag{1.100}$$

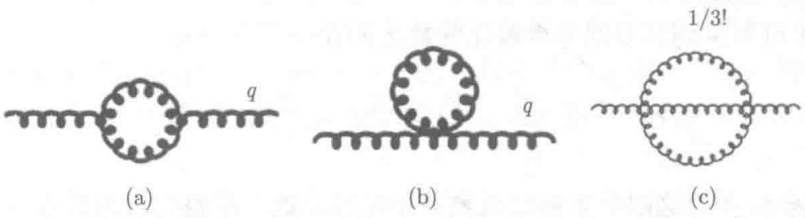


图 1.4 由于玻色子全同性质在胶子圈图中相应的三个图形中应附加 $(\mathrm{a})\frac{1}{2!},(\mathrm{b})\frac{1}{2!},(\mathrm{c})\frac{1}{3!}$

为了找出可重整的 QCD 拉氏密度的抵消项，首先需要了解如何处理紫外发散的重整化理论。重整化的基本思想包括圈图发散积分正规化和场量、参量的重整化。所谓正规化就是从一给定的 Feynman 图计算，正确定义发散积分并抽出无穷大的方法。紫外发散积分是由动量空间中积分积到无穷大引起的，要想确切定义圈图发散积分可以通过很多方法达到，这些方法不外乎增大被积函数分母的幂次使积分收敛，或者降低被积函数分子的幂次使积分收敛。例如，维数正规化就是降低时空的维数，令四维发散积分定义在 $D(=4-2\varepsilon)$ 维空间计算，当 $\varepsilon\neq 0$ 时积分是收敛的，无穷大项作为 $\frac{1}{\varepsilon},\frac{1}{\varepsilon^2},\cdots$ 极点出现。然后通过减除方案使得将分离出来的所有发散部分通过重新定义质量和电荷而消除，最终微扰圈图计算只给出有限高阶修正的结果。这些分离出的发散部分可以表达为 QCD 理论的几个独立的重整化常数 Z。重整化过程也可以从另一个角度去理解，一开始就以重整化场量和重整化参量 $(g,\cdots)$ 来计算 Feynman 图，其发散积分表达式利用减除方式挪去奇异性而获得有限的物理结果。一旦减除方式被指定，重整化常数 Z 就可以被完全确定。在 QCD 中我们将定义下述重整化场量和参量：

$$\begin{aligned}&\psi=Z_2^{1/2}\psi_R,\quad A_\mu^a=Z_3^{1/2}A_{R\mu}^a,\quad \chi_{1,2}^a=\tilde{Z}_3^{1/2}\chi_{1,2R}^a\\&g=Z_g g_R,\quad \alpha=Z_3\alpha_R,\quad m=Z_m m_R\end{aligned} \tag{1.101}$$

这里选择了规范参数 α 的重整化常数与胶子的相同，这就使得规范固定项在重新定义后具有相同的形式。这里引入了 5 个重整化常数 Z_2、Z_3、$\tilde{Z}_3$、Z_g、Z_m，或者

选择另外 5 个重整化常数 Z_1、$\tilde{Z}_1$、Z_4、Z_{1F} 和 Z_m，由下面的关系式给出

$$\begin{aligned} &Z_1 \equiv Z_g Z_3^{3/2}, \quad \tilde{Z}_1 \equiv Z_g \tilde{Z}_3 Z_3^{1/2} \\ &Z_4 \equiv Z_g^2 Z_3^2, \quad Z_{1F} \equiv Z_g Z_2 Z_3^{1/2} \\ &g_R = Z_g^{-1} g \end{aligned} \tag{1.102}$$

其中，Z_2 是夸克场的重整化常数，Z_3 是胶子场的重整化常数，Z_1 是三胶子顶角的重整化常数，Z_4 是四胶子顶角的重整化常数，Z_{1F} 是夸克–胶子顶角的重整化常数，$\tilde{Z}_3$ 是鬼粒子场的重整化常数，$\tilde{Z}_1$ 是鬼粒子–胶子顶角的重整化常数。从式 (1.102) 可以见到其中四个重整化常数之间存在下列关系

$$\frac{Z_1}{Z_3} = \frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3} = \frac{Z_{1F}}{Z_2} = \frac{Z_4}{Z_1} \tag{1.103}$$

这个约束条件表明这四个重整化常数并不是独立的。重整化后的结果可以将拉氏函数式 (1.63)~(1.68) 中场量和参数代以重整化的场量和参数，并引入相应的抵消项 $\mathcal{L}_C$，得到新的拉氏函数

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{eff}}^{R0} + \mathcal{L}_{\text{eff}}^{RI} + \mathcal{L}_C \tag{1.104}$$

其中，$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{R0} + \mathcal{L}_{\text{eff}}^{RI}$ 就是式 (1.64)~(1.68) 中将裸的场量和参数代之以重整化的场量和参数，而引入的抵消项 $\mathcal{L}_C$ 由下式定义

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_C = &-(Z_3-1)\frac{1}{4}(\partial_\mu A_{R\nu}^a - \partial_\nu A_{R\mu}^a)(\partial^\mu A_R^{a\nu} - \partial^\nu A_R^{a\mu}) \\ &+(\tilde{Z}_3-1)\mathrm{i}(\partial^\mu C_{1R}^a)(\partial_\mu C_{2R}^a) + (Z_2-1)\bar{\psi}_R^i(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m_R)\psi_R^i \\ &-(Z_2 Z_m - 1)m_R\bar{\psi}_R^i\psi_R^i \\ &-(Z_g Z_3^{3/2}-1)\frac{1}{2}g_R f^{abc}(\partial_\mu A_{R\nu}^a - \partial_\nu A_{R\mu}^a)A_R^{b\mu}A_R^{c\nu} \\ &-(Z_g^2 Z_3^2 - 1)\frac{1}{4}g_R^2 f^{abe}f^{cde}A_{R\mu}^a A_{R\nu}^b A_R^{c\mu}A_R^{d\nu} \\ &-(Z_g\tilde{Z}_3 Z_3^{1/2}-1)\mathrm{i}g_R f^{abc}(\partial^\mu C_{1R}^a)C_{2R}^b A_{R\mu}^c \\ &+(Z_g Z_2 Z_3^{1/2}-1)g_R\bar{\psi}_R^i T_{ij}^a\gamma^\mu\psi_R^j A_{R\mu}^a \end{aligned} \tag{1.105}$$

为了给出它的 Feynman 规则，我们将式 (1.105) 重写成下列形式

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_C = &(Z_3-1)\frac{1}{2}A_R^{a\mu}\delta_{ab}(g_{\mu\nu}-\partial_\mu\partial_\nu)A_R^{b\nu} + (\tilde{Z}_3-1)C_{1R}^a\delta_{ab}(-\mathrm{i}\Box)C_{2R}^b \\ &+(Z_2-1)\bar{\psi}_R^i(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m_R)\psi_R^i - (Z_2Z_m-1)m_R\bar{\psi}_R^i\psi_R^i \\ &-(Z_1-1)\frac{1}{2}g_R f^{abc}(\partial_\mu A_{R\nu}^a - \partial_\nu A_{R\mu}^a)A_R^{b\mu}A_R^{c\nu} \end{aligned}$$

$$-(Z_4-1)\frac{1}{4}g_R^2 f^{abe}f^{cde}A^a_{R\mu}A^b_{R\nu}A^{c\mu}_R A^{d\nu}_R-(\tilde{Z}_1-1)\mathrm{i}g_R f^{abc}(\partial^\mu C^a_{1R})C^b_{2R}A^c_{R\mu}$$
$$+(Z_{1F}-1)g_R\bar{\psi}^i_R T^a_{ij}\gamma^\mu\psi^j_R A^a_{R\mu} \tag{1.106}$$

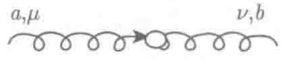
在写出式 (1.106) 时已将全散度略去。

在量子电动力学中只有 Z_{1F}、Z_2 和 Z_3，由规范不变性导出的 Ward 等式可以证明 $Z_{1F}=Z_2$，且电荷

$$e=Z_e e_R=Z_{1F}Z_2^{-1}Z_3^{-1/2}e_R=Z_3^{-1/2}e_R \tag{1.107}$$

在量子色动力学中除了夸克-胶子顶角外，还有三胶子、四胶子、鬼粒子-胶子顶角，反映在抵消项式 (1.106) 中引入的后四项是包含同一个 g_R 的相互作用项，相应有四个重整化常数 Z_1、$\tilde{Z}_1$、Z_4 和 Z_{1F} 相关到同一个重整化常数 Z_g，即式 (1.102)。也就是说当这四种顶角得到同一个 Z_g 时，才有关系式 (1.103) 成立，类似于 QED，这是由拉氏函数的规范不变性保证的。式 (1.103) 称为 Slavnov-Taylor 等式 [9]，正是此等式保证了重整化耦合常数 g_R 的普适性。

由式 (1.106) 可以直接写出抵消项所对应的 Feynman 规则，如图 1.5 所示。



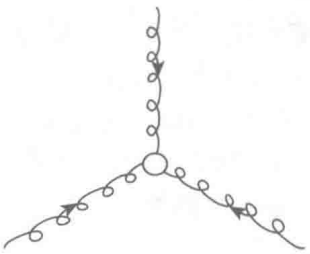
$$(Z_3-1)\delta_{ab}(k_\mu k_\nu-k^2 g_{\mu\nu})$$



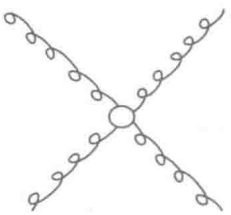
$$(\tilde{Z}_3-1)\delta_{ab}k^2$$



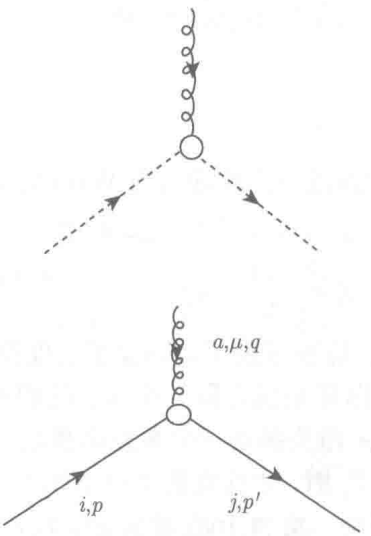
$$\left[(Z_2-1)\not{p}-(Z_2Z_m-1)m_r\right]\delta_{ij}$$



$$(Z_1-1)\mathrm{i}g_r f^{a_1a_2a_3}V_{\mu_1\mu_2\mu_3}(k_1,k_2,k_3)$$



$$(Z_4-1)(-1)g_r^2 W^{a_1a_2a_3a_4}_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$$



$$(\tilde{Z}_1-1)\mathrm{i}g_r f^{abc}k_\mu$$

$$(Z_{1F}-1)g_r T^a_{ij}\gamma^\mu$$

图 1.5　抵消项式 (1.106) 各项所对应的费曼图

这里给出的抵消项 Feynman 规则、圈图符号、统计因子以及在 1.2 节中给出的树图下的 Feynman 规则合在一起构成量子色动力学中计算截腿 Green 函数的完整 Feynman 规则。而其中重整化常数 Z_1、$\tilde{Z}_1$、Z_4、Z_{1F} 和 Z_m 或 Z_3、$\tilde{Z}_3$、Z_2、Z_g 和 Z_m 应在加入抵消项后由圈图计算消去发散项获得有限圈图修正后确定。进一步可以证明 QCD 理论在引入抵消项式 (1.106) 后，足以在所有阶圈图的计算中消去所有发散积分。

以上的 Feynman 规则都是按截腿 Green 函数计算 Feynman 图形给出的，任何一个物理过程都有外线，在量子色动力学里夸克和胶子虽然是被禁闭在强子内部，但大动量转移下渐近自由性质导致物理过程的 QCD 因子化定理，将微扰论不能计算的强子–部分子顶角分离开来使得中间的硬过程成为微扰论可计算的。对于中间硬过程的夸克、胶子外线是在壳粒子，即 $p^2=m^2$ 和 $k^2=0$，需要附加外线费曼规则。外线分为入射态 (incoming) 和出射态 (outgoing) 两类。

初态夸克线	p →	$u_\lambda(p)$
初态反夸克线	← $-p$	$\bar{v}_\lambda(p)$
终态夸克线	p →	$\bar{u}_\lambda(p)$
终态反夸克线	p →	$v_\lambda(p)$
初态胶子线	k ⇝	$\varepsilon^{(\lambda)}_\mu(k)$
终态胶子线	k ⇝	$\varepsilon^{(\lambda)*}_\mu(k)$

其中，$u_\lambda(p)$，$v_\lambda(p)$ 分别是夸克和反夸克的旋量波函数，$u(p)$ 和 $v(p)$ 所满足的旋量

方程为

$$\begin{aligned}(\not{p}-m)u(p)&=0\\(\not{p}+m)v(p)&=0\end{aligned}\tag{1.108}$$

方程 (1.108) 的解为

$$\begin{aligned}u_\lambda(p)&=\frac{\not{p}+m}{\sqrt{p^0+m}}\begin{pmatrix}\chi_\lambda\\0\end{pmatrix}\\v_\lambda(p)&=\frac{-\not{p}+m}{\sqrt{p^0+m}}\begin{pmatrix}0\\\xi_\lambda\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{1.109}$$

其中 χ_λ 和 $\xi_\lambda(\lambda=1,2)$ 是二分量旋量，可取为 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{p}(\hat{p}=\boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|)$ 的本征态

$$\chi^{(1)}(\hat{p})=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\theta}{2}\\\sin\dfrac{\theta}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\end{pmatrix},\quad\chi^{(2)}(\hat{p})=\begin{pmatrix}-\sin\dfrac{\theta}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\\\cos\dfrac{\theta}{2}\end{pmatrix}\tag{1.110}$$

它们满足 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{p}\chi_\lambda(\hat{p})=\varepsilon_\lambda\chi_\lambda(\hat{p})(\varepsilon_1=1,\varepsilon_2=-1)$，$(\theta,\varphi)$ 表示 $\hat{p}$ 的方向。式 (1.109) 中 $u_\lambda(p)$，$v_\lambda(p)$ 满足归一化条件

$$\bar{u}_\lambda(p)\gamma^0u_{\lambda'}(p)=\bar{v}_\lambda(p)\gamma^0v_{\lambda'}(p)=2p^0\delta_{\lambda\lambda'}\tag{1.111}$$

反夸克的旋量波函数 $v_\lambda(p)$ 与 $u_\lambda(p)$ 由电荷共轭算符 C 相关联

$$v_\lambda(p)=C\bar{\tilde{u}}_\lambda(p),C=\mathrm{i}\gamma^2\gamma^0\tag{1.112}$$

由电荷共轭变换可以确定两者的关系为 $\xi_\lambda=-\mathrm{i}\sigma_2\chi_\lambda$。

胶子极化矢量 $\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k)$ 是四个线性无关的基矢，$\lambda=0,1,2,3$ 是四个矢量的极化序标，$\varepsilon^{(0)},\varepsilon^{(1)},\varepsilon^{(2)},\varepsilon^{(3)}$ 分别是标量极化，两个横向极化和纵向极化矢量。$\varepsilon^{(0)},\varepsilon^{(3)}$ 分别是标量极化和纵向极化矢量，是非物理的。极化矢量 $\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k)$ 满足正交完备条件

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda\lambda'}g_{\lambda\lambda'}\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k)\varepsilon_\nu^{(\lambda')}(k)&=g_{\mu\nu}\\\varepsilon^{(\lambda)\mu}(k)\cdot\varepsilon_\mu^{(\lambda')}(k)&=g^{\lambda\lambda'}\end{aligned}\tag{1.113}$$

1.4 单圈图近似 $\beta(g)$ 函数和渐近自由

当计算量子场论微扰展开圈图时会出现发散积分，此类发散积分是由动量空间中积分积到无穷大引起的，通常称为紫外发散。为了在微扰展开中有效地计算高阶圈图修正，必须对理论进行重整化以得到有限物理量。重整化是由两部分组

成的：正规化和重整化。所谓正规化就是从一给定的费曼图计算，正确定义发散积分并抽出无穷大的方法。这里采用 1972 年't Hooft 和 Veltman 提出的维数正规化方法 [13]，这一方法的要点是降低时空的维数使得被积函数的分子幂次降低，将四维发散积分定义在 $D(=4-2\varepsilon)$ 维空间计算，当 $\varepsilon \neq 0$ 时积分是收敛的。无穷大项作为 $\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon^2}, \cdots$ 极点出现，这些分离出的发散部分的表达式利用减除方式表达为 QCD 理论的几个独立的重整化常数 Z_i。一旦减除方式被指定，重整化常数 Z_i 就可以被完全确定。按式 (1.101) 定义重整化场量和参量 $(g, \cdots)$，由重整化场量和重整化参量的拉氏函数出发计算 Feynman 图的高阶修正获得有限的物理结果，不再出现发散困难。

1.4.1　维数正规化和单圈图重整化

以夸克传播子 $S(p)=(\not{p}-m)^{-1}$ (式 (1.95)) 为例，在链式近似下夸克传播子 $S(p)$ 可写作下面的展开形式 (图 1.6)

$$\begin{aligned} S(p) =& S_0(p) + S_0(p)\Sigma^{(2)}(p)S_0(p) \\ &+ S_0(p)\Sigma^{(2)}(p)S_0(p)\Sigma^{(2)}(p)S_0(p) + \cdots \end{aligned}$$

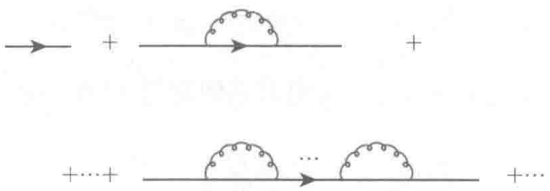


图 1.6　链式近似下夸克传播子展开图示

展开式中 $\Sigma^{(2)}(p)$ 是夸克单圈自能图贡献 (为了简便起见，忽略夸克质量 m)，由 Feynman 规则知 (取 Feynman 规范 $\alpha=1$)

$$\Sigma^{(2)}(p) = g^2 C_F \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4 \mathrm{i}} \gamma_\mu \frac{\not{k}-\not{p}}{k^2(p-k)^2}\gamma^\mu \tag{1.114}$$

将上述积分式从四维时空延拓到 $D(=4-2\varepsilon)$ 维空间，注意到在 D 维空间中 γ 矩阵的代数性质仍保持不变，

$$\begin{aligned} &(1)\ g_\mu^\mu = g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = D \\ &(2)\ \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \\ &(3)\ \gamma_\mu\gamma^\mu = D \\ &(4)\ \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\mu = (2-D)\gamma_\nu \\ &(5)\ \mathrm{Tr}(I) = 4 \\ &(6)\ \{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0 \end{aligned} \tag{1.115}$$

在 γ 矩阵收缩后变为

$$\Sigma^{(2)}(p)=g^2C_F(2-D)\int\frac{\mathrm{d}^Dk}{(2\pi)^D\mathrm{i}}\frac{\not{k}-\not{p}}{k^2(p-k)^2} \tag{1.116}$$

应用 Feynman 参数公式积出它的明显表达式 (保留规范参量 α)，当 $\alpha\neq1$ 时，通过直接计算可以证明在 $m=0$ 的情况下式 (1.116) 修改为下列形式

$$\Sigma^{(2)}(p)=\alpha\frac{2g_0^2}{(4\pi)^{D/2}}C_F\not{p}\frac{\Gamma\left(2-\dfrac{D}{2}\right)}{(-p^2)^{2-D/2}}(D-1)B\left(\frac{D}{2},\frac{D}{2}\right) \tag{1.117}$$

当 $D=4$ 时，$\Gamma\left(2-\dfrac{D}{2}\right)$ 是发散的。表达式 (1.117) 中已将所有奇异部分分离出来包含在 $\Gamma\left(2-\dfrac{D}{2}\right)$ 中，将 Γ 函数对 $\varepsilon\left(=\dfrac{4-D}{2}\right)$ 展开成极点形式

$$\Gamma(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}-\gamma_E+O(\varepsilon)$$

其中，Euler 常数 $\gamma_E=0.5772$。再利用 Beta 函数在 $O(\varepsilon)$ 近似下可得到 $\alpha\neq1$ 时的表达式 $(D\to4)$

$$\Sigma^{(2)}(p)=\alpha\frac{g_0^2}{16\pi^2}C_F\not{p}\left(\frac{1}{\varepsilon}-\log\frac{-p^2}{\mu_0^2}+1+\log4\pi-\gamma_E\right)+O(\varepsilon) \tag{1.118}$$

其中，色因子 $C_F=\dfrac{N_c^2-1}{2N_c}=\dfrac{4}{3}$。上式中标度参量为 μ_0(量纲为 1)，它的引入是为了在 $D(=4-2\varepsilon)$ 维空间使 g 无量纲化，$g=g_0\mu_0^{\varepsilon}(\varepsilon\to0,g_0=g)$，$g_0$ 是 D 维空间无量纲耦合常数。Euler 常数 $\gamma_E=0.5772$。括号中第一项是对数发散项 $(D=4)$，而且在 D 维空间有确切的定义，第二项在 p^2 复平面上沿正实轴有割线。将此无穷级数收敛为简单形式

$$S(p)=\frac{1}{\not{p}}\frac{1}{(1+\sigma(p^2))} \tag{1.119}$$

在单圈图近似下由维数正规化方法计算得到

$$\sigma(p^2)=-\frac{\alpha g_0^2}{16\pi^2}C_F\left(\frac{1}{\varepsilon}-\log\frac{-p^2}{\mu_0^2}+1+\log4\pi-\gamma_E\right)+O(g_0^4) \tag{1.120}$$

定义重整化的夸克场量和夸克传播子

$$\psi_R=Z_2^{-1/2}\psi,\quad S_R(p)=Z_2^{-1}S(p) \tag{1.121}$$

其中，Z_2 是夸克场重整化常数。将式 (1.121) 中的 Z_2 按 g_0^2 幂次展开并在式 (1.119) 的分母中仅保留 g_0^2 项，忽略高阶项，即 $Z_2=1-z_2+O(g_0^4)$，那么式 (1.119) 定义

的传播子为

$$S_R(p)=\frac{1}{\not p}\frac{1}{Z_2(1+\sigma(p^2))}=\frac{1}{\not p}\frac{1}{(1+\sigma(p^2)-z_2)} \tag{1.122}$$

为了从式 (1.119)~(1.122) 中确定夸克场重整化常数 Z_2，人们必须选择减除方式。通常计算 Feynman 图的高阶修正和确定重整化常数 Z_i 有下述几种减除方案 (scheme)。

(1) 固定动量点减除方式 (MOM)：这一种减除方式是在动量空间里的某一点上定义重整化的传播子和顶角具有确定值。固定动量点减除方式就是选择任一动量点 μ，当 $p^2=-\mu^2$ 时，定义重整化的传播子具有确定值，即自然的物理归一化条件

$$S_R^{-1}(p)=\not p,\quad \text{当 } p^2=-\mu^2(\mu^2>0) \tag{1.123}$$

因此得到重整化常数 Z_2

$$Z_2=1-\frac{\alpha g_0^2}{16\pi^2}C_F\left[\frac{1}{\varepsilon}-\log\left(\frac{\mu^2}{\mu_0^2}\right)+1+\log 4\pi-\gamma_E\right] \tag{1.124}$$

夸克传播子包括 $g_0^2(=g^2,\varepsilon\to 0)$ 阶修正的表达式

$$S_R(p)=\frac{1}{\not p}\left(1+\alpha\frac{g^2}{(4\pi)^2}C_F\log\frac{-p^2}{\mu^2}\right)^{-1} \tag{1.125}$$

(2) 最小减除方式 (MS)：在动量减除方式中，不仅减去了发散项 $\frac{1}{\varepsilon}$，而且减去了常数项，致使 Z_2 包含常数项，比较复杂，这在计算重整化群参数和反常量纲时很不方便。1973 年't Hooft 提出一种最小减除方式 [18]，即减除时仅减去那些发散项 $\frac{1}{\varepsilon}$。例如，在上面的例子中仅减去发散项而得到

$$Z_2=1-\frac{\alpha g_0^2}{16\pi^2}C_F\frac{1}{\varepsilon} \tag{1.126}$$

这样，Z_2 比较简单，$S_R(p)$ 要复杂一些

$$S_R(p)=\frac{1}{\not p}\left[1-\alpha\frac{g^2}{(4\pi)^2}C_F\left(\log\frac{-p^2}{\mu_0^2}-1-\log 4\pi+\gamma_E\right)\right]^{-1} \tag{1.127}$$

由于 Z_2 简单，便于计算重整化参数和反常量纲。这里很自然地要提出一个问题，不同的减除方式给出的 $S_R(p)$ 不一样，但不会影响物理结果。因为 $S_R(p)$ 依赖于减除方式，而物理量是由 $\Sigma_R^{(2)}$ 和其他依赖于减除方式的表达式组成的，相消的结果就给出了不依赖于减除方式的物理量。

(3) 修正的最小减除方式 ($\overline{\text{MS}}$)：在式 (1.124) 中 $(\log 4\pi-\gamma_E)$ 是 MS 减除方式所特有的常数项。1978 年 Bardeen 等提出了引入一修正的最小减除方式 [19]，在

$S_R(p)$ 中挪掉这一常数项，即

$$Z_2 = 1 - \frac{\alpha g_0^2}{16\pi^2} C_F \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \log 4\pi \right) \tag{1.128}$$

$$S_R(p) = \frac{1}{\not{p}} \left[1 + \alpha \frac{g^2}{(4\pi)^2} C_F \left(\log \frac{-p^2}{\mu_0^2} - 1 \right) \right]^{-1} \tag{1.129}$$

这有利于在计算双圈图修正中改善微扰级数收敛性。

以上三种减除方式虽不同，但其共同点都是从计算中挪去发散项重新定义重整化的场量和物理参量。因此重整化方案包括两部分：发散积分正规化和消去发散的减除方式。正规化是使发散积分有确切的定义，减除是消去理论的发散而获得确定有限的结果，为此引入合适的抵消项和自然的物理归一化条件是必要的。

1.4.2 重整化常数和抵消项

比较式 (1.120) 和 (1.122)，可以见到重整化后的夸克传播子是将未重整化传播子作下列代换

$$\not{p}\sigma(p^2) \to \not{p}(\sigma(p^2) - (Z_2 - 1))$$

其结果 $\sigma(p^2)$ 发散项正好与 $(Z_2 - 1)$ 发散项相消。不同的减除方式只相差其中的常数如何定义。仔细考察式 (1.119) 如何计算得到的就可以见到式 (1.122) 也可以通过下述方式获得：① 将拉氏函数中场量和参量代之以重整化的场量和参量。② 在拉氏函数中附加抵消项的拉氏量，为了构造抵消项必须将发散积分正规化使得积分有意义，找出相应的抵消项附加到拉氏函数上。如对于无质量夸克自能其抵消项为

$$(Z_2 - 1)\bar{\psi}_R \mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R$$

③ 抵消项的系数完全由加在 Green 函数上的归一化条件所确定，即 Green 函数要满足归一化条件，这不仅确定了抵消项的发散部分而且也确定了有限部分。从这样带有抵消项的重整化拉氏函数出发计算就自然地获得了式 (1.120) 有限的结果。对于可重整化理论这样的步骤还应证明不仅在微扰论的单圈图成立，而且对微扰论的所有阶都成立。这就是重整化的基本思想。

顺便指出，本节对于无质量夸克介绍了三种减除方式，在量子电动力学中电子有质量，还有另一种减除方式，即质壳减除方式。这种方式是将式 (1.123) 的定义改为

$$S_R^{-1}(p) = \not{p} - m, \quad \text{当} \, p^2 = m^2$$

而在 QCD 中即使考虑到夸克质量不为零，由于存在非微扰效应无法定义低能行为，人们也不能采用质壳减除方式。

本节是以无质量夸克自能为例解释维数正规化和重整化并引入了抵消项 $(Z_2-1)\bar{\psi}_R \mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R$，对于 QCD 完全的拉氏函数，还应引入胶子自能、顶角、鬼粒子等相关的抵消项。由重整化场量和重整化参量的拉氏函数出发，按照维数正规化方法在 $D(=4-2\varepsilon)$ 维空间采用最小减除方式计算单圈图近似下重整化常数的结果如下:

$$Z_1 = 1 - \frac{g_R^2}{(4\pi)^2}\left[C_G\left(-\frac{17}{12}+\frac{3\alpha_R}{4}\right)+\frac{4}{3}T_R N_f\right]\frac{1}{\varepsilon}+O(g_R^4) \tag{1.130}$$

$$Z_2 = 1 - \frac{g_R^2}{(4\pi)^2}C_F\alpha_R\frac{1}{\varepsilon}+O(g_R^4) \tag{1.131}$$

$$Z_3 = 1 - \frac{g_R^2}{(4\pi)^2}\left[\frac{4}{3}T_R N_f-\frac{1}{2}C_G\left(\frac{13}{3}-\alpha_R\right)\right]\frac{1}{\varepsilon}+O(g_R^4) \tag{1.132}$$

$$Z_4 = 1 - \frac{g_R^2}{(4\pi)^2}\left[\left(-\frac{2}{3}+\alpha_R\right)C_G+\frac{4}{3}T_R N_f\right]\frac{1}{\varepsilon}+O(g_R^4) \tag{1.133}$$

$$\tilde{Z}_1 = 1 - \frac{g_R^2}{(4\pi)^2}C_G\frac{\alpha_R}{2}\frac{1}{\varepsilon}+O(g_R^4) \tag{1.134}$$

$$\tilde{Z}_3 = 1 + \frac{g_R^2}{(4\pi)^2}C_G\frac{3-\alpha_R}{4}\frac{1}{\varepsilon}+O(g_R^4) \tag{1.135}$$

$$Z_{1F} = 1 - \frac{g_R^2}{(4\pi)^2}\left(\frac{3+\alpha_R}{4}C_G+\alpha_R C_F\right)\frac{1}{\varepsilon}+O(g_R^4) \tag{1.136}$$

$$\begin{aligned} Z_g &= Z_1 Z_3^{-3/2} = \tilde{Z}_1\tilde{Z}_3^{-1}Z_3^{-1/2} = Z_{1F}Z_2^{-1}Z_3^{-1/2} \\ &= 1 - \frac{g_R^2}{(4\pi)^2}\left(\frac{11}{6}C_G-\frac{2}{3}T_R N_f\right)\frac{1}{\varepsilon}+O(g_R^4) \end{aligned} \tag{1.137}$$

$$Z_m = 1 - \frac{3g_R^2}{(4\pi)^2}C_F\frac{1}{\varepsilon}+O(g_R^4) \tag{1.138}$$

其中，N_f 是贡献到夸克圈图的味数；重整化规范参量 $g_R = Z_g^{-1}g$；$\alpha_R = Z_3^{-1}\alpha$。对于阶数为 N_c 的色规范群 $SU(N_c)$，其中群因子 C_F，C_G，T_R 定义为

$$\begin{aligned} &T^a_{il}\delta_{lm}\delta_{ab}T^b_{mj} = (T^aT^a)_{ij} = \delta_{ij}C_F, \quad C_F = \frac{N_c^2-1}{2N_c} \\ &f^{acd}f^{bcd} = \delta^{ab}C_G, \quad C_G = N_c \\ &\mathrm{Tr}(T^aT^b) = T_R\delta_{ab} \end{aligned} \tag{1.139}$$

在 QCD 情况下，$N_c=3$，群因子 $C_F=\dfrac{4}{3}$，$C_G=3$，$T_R=\dfrac{1}{2}$。从上述单圈图计算表达式可以见到这些重整化常数并不是独立的，它们满足式 (1.140)

$$\frac{Z_1}{Z_3} = \frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3} = \frac{Z_{1F}}{Z_2} = \frac{Z_4}{Z_1} = 1 - \frac{g_R^2}{(4\pi)^2}C_G\frac{3+\alpha_R}{4}\frac{1}{\varepsilon}+O(g_R^4) \tag{1.140}$$

它正是由规范不变性导致的 Slavnov-Taylor 等式 [12]。实际上是规范不变性要求这些发散常数满足 Slavnov-Taylor 等式。前面式 (1.112) 和 (1.113) 已指出不同发散

图形所定义的 Z_g 应相同，即

$$\begin{aligned} Z_g &= Z_1 Z_3^{-3/2} = \tilde{Z}_1 \tilde{Z}_3^{-1} Z_3^{-1/2} = Z_{1F} Z_2^{-1} Z_3^{-1/2} \\ &= 1 - \frac{g_R^2}{(4\pi)^2}\left(\frac{11}{6}C_G - \frac{4}{6}T_R N_f\right)\frac{1}{\varepsilon} + O(g_R^4) \end{aligned} \tag{1.141}$$

此式不依赖于具体规范。

由前面式 (1.112) 定义的重整化耦合常数参量 $g_R = Z_g^{-1} g$，由于维数正规化在 D 维空间计算，g_R 不再是无量纲参量，直接利用标度参量 μ 在 D 维空间定义无量纲化耦合常数 g_r

$$g_r = \mu^{-\varepsilon} g_R = \mu^{-\varepsilon} Z_g^{-1} g \tag{1.142}$$

当 $\varepsilon \to 0$ 回到四维时空时，$g_r \to g_R$。如果固定 g, g_r 是标度参量 μ 的函数 $g_r(\mu)$。在上式两边对 μ 微分并定义 $\beta(g_r)$ 函数

$$\beta = \mu \left.\frac{\partial g_r}{\partial \mu}\right|_g = -\varepsilon g_r - \frac{\mu}{Z_g}\frac{\mathrm{d}Z_g}{\mathrm{d}\mu} g_r \tag{1.143}$$

单圈近似下 $\beta(g_r) = -\dfrac{1}{(4\pi)^2}\beta_0 g_r^3 + O(g_r^5)$，如果超出单圈图将有下面的微扰展开

$$\beta(g_r) = -\frac{1}{(4\pi)^2}\beta_0 g_r^3 - \frac{1}{(4\pi)^4}\beta_1 g_r^5 - \frac{1}{(4\pi)^6}\beta_2 g_r^7 + O(g_r^9) \tag{1.144}$$

其中，β_0, β_1 和 β_2 分别由单圈图、双圈图和三圈图计算给出，这里只列出计算的结果，

$$\begin{aligned} \beta_0 &= 11 - \frac{2}{3}N_f \\ \beta_1 &= 102 - \frac{38}{3}N_f \\ \beta_2 &= \frac{2857}{2} - \frac{5033}{18}N_f + \frac{325}{54}N_f^2 \end{aligned} \tag{1.145}$$

1.4.3 渐近自由

对于任何一个大动量转移 $Q^2 = -q^2$ 的物理过程，我们可以引入一个无量纲的标度参量 $\lambda \left(= \sqrt{\dfrac{\mu^2}{Q^2}}\right)$，在计及圈图修正以后有效耦合常数 $g_r(\mu) \to \bar{g}(\mu, \lambda)$。相应于式 (1.143)，代之以标度 μ/λ 的微商

$$\frac{\mu}{\lambda}\frac{\mathrm{d}\bar{g}}{\mathrm{d}(\mu/\lambda)} = \beta(\bar{g}) \tag{1.146}$$

将变量 μ 代之以 λ，并定义

$$t = -\ln\lambda = \ln\left(\frac{Q}{\mu}\right) \tag{1.147}$$

则可将式 (1.146) 改写为

$$\frac{\mathrm{d}\bar{g}}{\mathrm{d}t} = \beta(\bar{g}) \tag{1.148}$$

对此式积分可得

$$t = \int_{g_r}^{\bar{g}(t)} \frac{\mathrm{d}g'}{\beta(g')} \tag{1.149}$$

其中

$$\bar{g}(t=0) = g_r \tag{1.150}$$

在单圈近似下，仅有 β_0 代入积分形式 (1.149) 给出

$$\bar{g}(t)^2 = \frac{g_r^2}{1 + \dfrac{2}{(4\pi)^2}\beta_0 g_r^2 t} = \frac{g_r^2}{1 + \dfrac{2}{(4\pi)^2}\beta_0 g_r^2 \ln\left(\dfrac{Q}{\mu}\right)} \tag{1.151}$$

此式明显地表达了 QCD 渐近自由性质，即 $\bar{g}(t) \to 0$，当 $t \to \infty$。人们称 $\bar{g}(t)$ 为跑动耦合常数，式 (1.150) 意味着 $\bar{g}(Q=\mu) = g_r$。定义跑动耦合常数

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\bar{g}(Q)^2}{4\pi} = \frac{\alpha_s}{1 + \dfrac{1}{(4\pi)}\beta_0\alpha_s \ln\left(\dfrac{Q^2}{\mu^2}\right)} \tag{1.152}$$

其中，$\alpha_s = \dfrac{g_r^2}{4\pi}$。当进一步考虑高圈图影响时将式 (1.144) 代入积分形式可得

$$t = \int_{g_r}^{\bar{g}(t)} \frac{\mathrm{d}g'}{\beta(g')} = -\frac{(4\pi)^2}{2}\int_{g_r^2}^{\bar{g}^2} \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} \frac{1}{\beta_0 + \dfrac{1}{(4\pi)^2}\beta_1\lambda + \dfrac{1}{(4\pi)^4}\beta_2\lambda^2 + O(\lambda^3)}$$

如果仅考虑双圈图，对式 (1.151) 积分就可得

$$t = \frac{(4\pi)^2}{2\beta_0}\left[\frac{1}{\bar{g}^2} - \frac{1}{g_r^2}\right] + \frac{\beta_1}{2\beta_0^2}\ln\frac{\bar{g}^2(\beta_0 + \beta_1 g_r^2/(4\pi)^2)}{g_r^2(\beta_0 + \beta_1\bar{g}^2/(4\pi)^2)}$$

或者

$$\frac{(4\pi)^2}{\beta_0\bar{g}^2} + \frac{\beta_1}{\beta_0^2}\ln\frac{\beta_0\bar{g}^2}{1 + \beta_1\bar{g}^2/\beta_0(4\pi)^2} = \frac{(4\pi)^2}{\beta_0 g_r^2} + \frac{\beta_1}{\beta_0^2}\ln\frac{\beta_0 g_r^2}{1 + \beta_1 g_r^2/\beta_0(4\pi)^2} + 2t \tag{1.153}$$

其中，g_r 是标度参量 μ 的函数 $g_r(\mu)$，不同标度参量 μ 应给出相同的物理结果。引入 QCD 普适参量 Λ 定义为

$$\frac{(4\pi)^2}{\beta_0\bar{g}^2}+\frac{\beta_1}{\beta_0^2}\ln\frac{\beta_0\bar{g}^2}{1+\beta_1\bar{g}^2/\beta_0(4\pi)^2}=\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2} \tag{1.154}$$

就可以得到物理过程中双圈图近似下的有效耦合常数

$$\alpha_s(Q^2)=\frac{\bar{g}^2}{4\pi}=\frac{4\pi}{\beta_0\log\dfrac{Q^2}{\Lambda^2}}\left[1-\frac{\beta_1}{\beta_0^2}\frac{\log\left(\log\dfrac{Q^2}{\Lambda^2}\right)}{\log\left(\dfrac{Q^2}{\Lambda^2}\right)}\right] \tag{1.155}$$

相应地 QCD 参量 Λ 与重整化标度 μ 有下述关系

$$\Lambda^2=\mu^2\left[\frac{1+\beta_1 g_r^2/\beta_0(4\pi)^2}{\beta_0 g_r^2/(4\pi)^2}\right]^{\beta_1/\beta_0^2}\exp\left[-\frac{(4\pi)^2}{\beta_0 g_r^2}\right] \tag{1.156}$$

因此，QCD 参量 Λ 具体数值在有限阶微扰计算中将依赖于重整化的减除方案。由式 (1.155) 得知单圈图近似下有效耦合常数为

$$\alpha_s(Q^2)=\frac{\bar{g}^2}{4\pi}=\frac{4\pi}{\beta_0\log\dfrac{Q^2}{\Lambda^2}} \tag{1.157}$$

可以看出 QCD 渐近自由性质的关键是 $\beta_0>0$，即 (式 (1.145))

$$\beta_0=\frac{11}{3}C_G-\frac{4}{3}T_R N_f=11-\frac{2}{3}N_f>0$$

其中，N_f 是夸克味的数目。当 $N_f=0$ 时，只有纯规范场，总有 $\beta_0>0$，这是由非 Abel 规范场的自作用决定的，一定有渐近自由的性质。由于夸克参与规范场相互作用，$N_f\neq 0$，抵消纯规范场的正定性，削弱理论的渐近自由性质，仅当 $N_f>16$ 时 β_0 将变为负值，理论将不再具有渐近自由的性质。实际上夸克味的数目 $N_f=6$ 总有 $\beta_0>0$。

1.4.4 重整化群方程

实际上，方程 (1.148) 和 (1.149) 是重整化群方程 [17] 的必然结果。为了正确描述重整化理论引入了标度参量 μ，而重整化标度 μ 的改变应导致相应物理参量和格林函数，即物理计算结果不依赖于重整化点 μ 的选择。这样一个性质导致重整化群方程。以上给出了一个典型的例子，从计算结果不依赖于重整化点的选择而获得有效耦合常数的表达方式。一般地讲，对于任意 n 条外线截腿的不可约振幅 $\Gamma^{(n)}(\lambda p,g_r)$ 有下面的重整化群方程

$$\left[-\frac{\partial}{\partial t}+\beta(g_r)\frac{\partial}{\partial g_r}+\gamma_d(g_r)\right]\Gamma^{(n)}(\lambda p,g_r)=0 \tag{1.158}$$

其中，$\gamma_d(g_r)$ 定义为

$$\gamma_d(g_r) = d_{\Gamma^{(n)}} - n\gamma(g_r) \tag{1.159}$$

式中，$d_{\Gamma^{(n)}}$ 是不可约振幅 $\Gamma^{(n)}(\lambda p, g_r)$ 的正则量纲；$\gamma(g_r)$ 是反常量纲。在量子色动力学中 n 条外线中有 n_ψ 条夸克线和 n_A 条胶子线，那么有

$$n\gamma(g_r) \to n_\psi\gamma_\psi(g_r) + n_A\gamma_A(g_r)$$

其中，$\gamma_\psi(g_r)$ 和 $\gamma_A(g_r)$ 分别是夸克场和胶子场的反常量纲，定义为

$$\gamma_A(g_r) = \left.\frac{\mu}{2Z_3}\frac{\partial Z_3}{\partial \mu}\right|_g \tag{1.160}$$

$$\gamma_\psi(g_r) = \left.\frac{\mu}{2Z_2}\frac{\partial Z_2}{\partial \mu}\right|_g \tag{1.161}$$

由于方程 (1.158) 中 $\gamma_d(g_r)$ 与 t 无关，分离变量，先求出下列齐次方程的解

$$\left(-\frac{\partial}{\partial t} + \beta(g_r)\frac{\partial}{\partial g_r}\right)\Phi = 0 \tag{1.162}$$

方程 (1.162) 中 Φ 的一般解为

$$\Phi = \Phi(\bar{g}(g_r, t)) \tag{1.163}$$

由齐次方程 (1.162) 的解 (1.163) 就很容易得到非齐次方程 (1.158) 的一般解形式：

$$\Gamma^{(n)}(\lambda p, g, \mu) = \Gamma^{(n)}(p, \bar{g}(t), \mu) \times \exp\left(\int_o^t \gamma_d\left[\bar{g}(t')\right] \mathrm{d}t'\right) \tag{1.164}$$

$$= \Gamma^{(n)}(p, \bar{g}(t), \mu) \exp\left(\int_g^{\bar{g}} \frac{\gamma_d(g')}{\beta(g')} \mathrm{d}g'\right) \tag{1.165}$$

方程 (1.165) 中的指数唯一地被 $\beta(\bar{g})$ 和 $\gamma(\bar{g})$ 所确定。当 $\bar{g}$ 小时，$\beta(\bar{g})$ 和 $\gamma(\bar{g})$ 可在最低阶圈图计算下确定，然后指数因子就将对所有阶中包含领头对数项的渐近级数求和。这就大大地改进了微扰论计算结果，给出了一种对所有阶领头对数贡献求和的方法。

作为例子，考虑高能下 $e^+e^- \to$ 强子过程的截面。正、负电子湮灭为强子的过程是最简单的物理过程，因为它的一个顶点是电磁顶角，可以很好地用量子电动力学来描述，另一个顶点与强相互作用相关。假定在正、负电子湮灭为强子的过程中主要子过程是正、负电子湮灭为夸克、反夸克对，然后夸克、反夸克对转化为强子。一般地讲正、负电子湮灭为强子的过程可以由下列方式表示 (图 1.7)

$$e^+(k_2) + e^-(k_1) \to X$$

在最低级近似下，正、负电子湮灭为单光子再转变为强子终态，其费曼振幅为

$$\langle X|\,T\left|e^+e^-\right\rangle = \bar{v}_{\lambda_2}(k_2)e\gamma^\mu u_{\lambda_1}(k_1)\frac{-e^2}{q^2}\langle X|\,J_\mu(0)\,|0\rangle \tag{1.166}$$

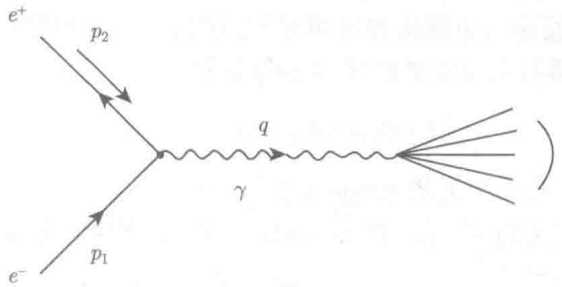


图 1.7 单光子近似下 $e^+(k_2)+e^-(k_1)\to$ 强子 (X) 费曼图

式中，$J_\mu(x)$ 是电磁流算符。计算正、负电子湮灭为强子过程的总截面，对正负电子初态自旋求平均和对终态所有可能强子态求和就得到

$$\sigma = \frac{1}{2S}\frac{1}{4}\sum_{\lambda_1,\lambda_2}\sum_X (2\pi)^4\delta^4(P_X-q)\left|\langle X|\,T\left|e^+e^-\right\rangle\right|^2 \tag{1.167}$$

将式 (1.166) 代入式 (1.167) 并直接做求迹运算就将式 (1.167) 简化为

$$\sigma = \frac{e^4}{2S^3}l^{\mu\nu}w_{\mu\nu} \tag{1.168}$$

其中，$l^{\mu\nu}$ 是纯轻子顶角

$$l^{\mu\nu} = k_1^\mu k_2^\nu + k_1^\nu k_2^\mu - \frac{1}{2}q^2 g^{\mu\nu} \tag{1.169}$$

$w_{\mu\nu}$ 是终态强子相关顶角的平方

$$\begin{aligned} w_{\mu\nu} &= \sum_X (2\pi)^4\delta^4(P_X-q)\langle 0|\,J_\mu(0)\,|X\rangle\langle X|\,J_\nu(0)\,|0\rangle \\ &= \int \mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\langle 0|\,J_\mu(x)J_\nu(0)\,|0\rangle \end{aligned} \tag{1.170}$$

在获得式 (1.170) 时已用到了希伯特空间的完备性和时空平移不变性，或者说在式 (1.170) 中插入$\sum\limits_X |X\rangle\langle X| = 1$ 和利用 $\langle 0|\,J_\mu(x)\,|X\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}P_X x}\langle 0|\,J_\mu(0)\,|X\rangle$ 代入积分就得到验证。注意到对正、负电子湮灭的物理过程来讲，$q_0>0$，那么

$$\int \mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\langle 0|\,J_\nu(0)J_\mu(x)\,|0\rangle = \sum_X (2\pi)^4\delta^4(P_X+q)\langle 0|\,J_\nu(0)\,|X\rangle\langle X|\,J_\mu(0)\,|0\rangle = 0$$

因此将式 (1.170) 的流乘积改写为流对易关系

$$w_{\mu\nu} = \int \mathrm{d}^4 x \mathrm{e}^{\mathrm{i}qx} \langle 0| \left[J_\mu(x), J_\nu(0)\right] |0\rangle \tag{1.171}$$

也就是说在物理区域内式 (1.170) 和式 (1.171) 是等价的。式 (1.171) 告诉我们正、负电子湮灭的总截面是与电磁流算符对易关系的 Fourier 变换相关的。进一步由于因果性定律，流对易关系仅在类时区域不等于零

$$[J_\mu(x), J_\nu(0)] = 0, \quad x^2 < 0$$

这意味着式 (1.171) 有一个支集 (support)$x^2 \geqslant 0$。

由式 (1.171) 定义的 $w_{\mu\nu}(q)$ 是 Lorentz 张量，注意到电磁流是守恒流，满足

$$q^\mu w_{\mu\nu}(q) = 0 \quad 或 \quad q^\nu w_{\mu\nu}(q) = 0 \tag{1.172}$$

那么由 Lorentz 协变性和电磁流守恒条件，$w_{\mu\nu}(q)$ 的一般张量结构应为

$$w_{\mu\nu}(q) = \frac{1}{6\pi}(q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) w(q^2) \tag{1.173}$$

其中，$w(q^2)$ 仅是 q^2 的不变函数。将式 (1.169) 和式 (1.173) 代入式 (1.168) 给出

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3S} w(S) = \sigma_0 w(S) \tag{1.174}$$

其中，σ_0 是在最低级近似下 (即 Born 近似) 忽略电子和 μ 子质量的 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 过程的截面

$$\sigma_0 = \frac{4\pi\alpha^2}{3S} \tag{1.175}$$

正、负电子湮灭为强子的过程，部分子模型中定义的截面比 R 值定义为

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \to 强子)}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} \tag{1.176}$$

比较上两个公式就可以见到 $R = w(S)$。在式 (1.171) 两边乘以 $g^{\mu\nu}$ 就得到

$$\begin{aligned} R = w(S) &= -\frac{2\pi}{q^2} g^{\mu\nu} w_{\mu\nu} \\ &= -\frac{2\pi}{q^2} \int \mathrm{d}^4 x \mathrm{e}^{\mathrm{i}qx} \langle 0| J_\mu(x) J^\mu(0) |0\rangle \end{aligned} \tag{1.177}$$

在利用重整化了的 QCD 拉氏函数计算 QCD 高阶修正后 R 值应是能量 $S(=Q^2)$，重整化标度 μ^2 以及重整化耦合常数 g_r 的函数。由于 $g_r = \mu^\varepsilon g_R$，忽略 ε 小量后以 g_R 代替 g_r，简单地记作 $R(S, \mu^2, g_R)$。由于 R 值是无量纲的，人们可以重写 $R(S, \mu^2, g_R)$ 为

$$R(S, \mu^2, g_R) = R(S/\mu^2, g_R) \tag{1.178}$$

注意到电磁流是守恒流，它的反常量纲为零，看重整化群方程应用到此过程会有什么普遍的性质。那么 $R(S/\mu^2, g_R)$ 所满足的重整化群方程 [15] 应为

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta(g_R)\frac{\partial}{\partial g_R}\right]R\left(\frac{S}{\mu^2},g_R\right)=0 \tag{1.179}$$

此方程的一般解为

$$R\left(\frac{S}{\mu^2},g_R\right)=R(1,\bar{g}(S)) \tag{1.180}$$

其中，$\bar{g}(S)$ 是计及圈图修正以后的有效耦合常数。

1.5 微扰 QCD

由于 QCD 是具有渐近自由特点的理论，当 $S=Q^2$ 很大时耦合常数变得很小，单圈图近似下有效耦合常数为 (式 (1.157))

$$\alpha_s(Q^2)=\frac{4\pi}{\beta_0\log\dfrac{Q^2}{\Lambda^2}}$$

当 $Q^2\gg\Lambda^2, \alpha_s(Q^2)<1$，人们可以应用微扰理论计算物理过程。一般地讲，QCD 参数 Λ 具有强子大小量级 $\Lambda\sim 200\text{MeV}$，因此，微扰 QCD 理论计算完全可应用到目前加速器实验所达到的能区范围。首先计算最低阶 Feynman 图的理论预言，进而计算高阶修正以改善理论预言的精确度。

作为应用微扰理论计算最简单的例子，考虑高能下 $e^+e^-\to$ 强子过程的截面，正、负电子湮灭为强子过程是最简单的物理过程，因为它的一个顶点是电磁顶角，可以很好地用量子电动力学来描述，另一个顶点与强相互作用相关。在最低级近似下，正、负电子湮灭为单光子再转变为强子终态。假定在正、负电子湮灭为强子的过程中的主要子过程是正、负电子湮灭为单光子生成夸克、反夸克对，然后夸克、反夸克对碎裂为强子。当 S 很大时最低级费曼图就是正、负电子湮灭为光子而后光子产生一对正、反夸克，正、反夸克对转变为各种强子态。计算这一过程的最低阶 Feynman 图 (树图) 是正、负电子湮灭为光子而后光子产生一对正、反夸克 (图 1.8)，这个最低阶图形完全是电磁相互作用过程

$$e^+(k_2)+e^-(k_1)\to q(p_1)+\bar{q}(p_2)$$

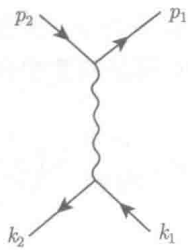


图 1.8　正、负电子湮灭为强子过程中主要子过程，$e^+e^- \to q\bar{q}$ 的最低费曼图

它很容易计算，完全类似于 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 过程，两个过程仅相差夸克电荷。定义质心系四动量

$$\begin{aligned} q &= k_1 + k_2 \\ S &= q^2 = (k_1 + k_2)^2 \end{aligned} \tag{1.181}$$

和 $e_q = Q_i e$ 是相应第 $i(= u, d, s, \cdots)$ 夸克的电荷，由 QED Feynman 规则知

$$\langle p_1, p_2 | T | k_1, k_2 \rangle = -e^2 Q_i \bar{u}_{s_1}(p_1)\gamma_\mu v_{s_2}(p_2)\frac{d_{\mu\nu}(q)}{q^2}\bar{v}_{\lambda_2}(k_2)\gamma^\nu u_{\lambda_1}(k_1) \tag{1.182}$$

其中，$u_{s_1}(p_1)$ 是动量为 p_1 自旋为 s_1 的夸克旋量波函数；$v_{s_2}(p_2)$ 是动量为 p_2 自旋为 s_2 的反夸克旋量波函数。式 (1.182) 中光子传播子

$$d_{\mu\nu}(q) = g_{\mu\nu} - (1-\alpha)\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}$$

由于正、负电子遵从 Dirac 运动方程，$d_{\mu\nu}$ 中 $q_\mu q_\nu$ 项的贡献正比于电子质量可以忽略。直接计算振幅的平方 (见图 1.9)，可以给出质心系中树图下微分截面

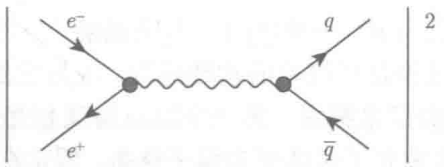


图 1.9　计算 $e^+e^- \to q\bar{q}$ 截面的示意图

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = N_c Q_i^2 \frac{\alpha^2}{4S}\sqrt{\frac{S-4m_q^2}{S-4m_e^2}}\left[1 + \frac{4(m_q^2+m_e^2)}{S} + \left(1-\frac{4m_q^2}{S}\right)\left(1-\frac{4m_e^2}{S}\right)\cos^2\theta\right] \tag{1.183}$$

和总截面

$$\sigma = N_c Q_i^2 \frac{4\pi\alpha^2}{3S}\sqrt{\frac{S-4m_q^2}{S-4m_e^2}}\left(1+\frac{2m_q^2}{S}\right)\left(1+\frac{2m_e^2}{S}\right) \tag{1.184}$$

其中，N_c 是夸克的颜色数；θ 是质心系中出射夸克动量方向与入射电子方向的夹角；能量平方 $S=(k_1+k_2)^2=(p_1+p_2)^2$。当 $S\gg m_q^2$ 时忽略夸克的质量效应，即 $O(m^2/S)$，式 (1.183) 和式 (1.184) 就变为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=N_cQ_i^2\frac{\alpha^2}{4S}(1+\cos^2\theta) \tag{1.185}$$

$$\sigma=\sigma_B=N_cQ_i^2\frac{4\pi\alpha^2}{3S}=N_cQ_i^2\sigma_0 \tag{1.186}$$

其中，$\sigma_0=\dfrac{4\pi\alpha^2}{3S}$ 就是高能下 $e^+e^-\to\mu^+\mu^-$ 过程的截面。这一结果正相应于正、负电子湮灭为强子的过程部分子模型中定义的截面比 R 值式 (1.176)

$$R=\frac{\sigma(e^+e^-\to\text{强子})}{\sigma(e^+e^-\to\mu^+\mu^-)}=N_c\sum_i Q_i^2\theta(S-4m_q^2) \tag{1.187}$$

其中，$\theta(S-4m_q^2)$ 是表示夸克运动学的阈效应，对 i 求和是指在 S 允许下对所有可能产生的夸克味求和。式 (1.176) 是 QCD 树图的贡献，即正、负电子湮灭为强子是通过产生正、反夸克对转变为强子的结果。

由于 QCD 是渐近自由理论，QCD 所有可能的高阶图形都为 α_s 所压低，作为高阶修正以改善理论预言的精确度。本节先以单圈图为例应用 QCD 计算 α_s 级对树图结果式 (1.186) 的修正。显然对 $e^+e^-\to q\bar{q}$ 过程的 QCD 最低级修正有下列五个图形 (图 1.10)。

前两个图形是发射两个实胶子，后三个图形是虚胶子的交换图。现在分别计算这五个最低阶修正的图形。在 QCD 中胶子质量为零，又由于考虑到高能行为计算中忽略了夸克质量，因此对两个实胶子发射图存在红外发散，对虚胶子单圈图计算既存在紫外发散又有红外发散。为此采用前面讨论过的维数正规化方法在 $D(=4-2\varepsilon)$ 维空间计算这些物理截面 (采取 MS 减除方式)。为了下一节讨论 QCD 修正方便起见，这里给出四维时空下式 (1.184) 相应的 $D(=4-2\varepsilon)$ 维时空树图 (Born 近似) 对 $\sigma(e^+e^-\to\text{强子})$ 贡献的表达式 (忽略了夸克质量)。

$$\begin{aligned}\sigma_B&=\sigma(e^+e^-\to\text{强子})|_{\text{Tree}}\\&=N_c\frac{4\pi\alpha^2}{3S}\left(\sum_i Q_i^2\right)\left(\frac{4\pi}{S}\right)^{\varepsilon}\frac{3(1-\varepsilon)\Gamma(2-\varepsilon)}{(3-2\varepsilon)\Gamma(2-2\varepsilon)}\\&=N_c\sigma_0\left(\sum_i Q_i^2\right)\left(\frac{4\pi}{S}\right)^{\varepsilon}\frac{3(1-\varepsilon)\Gamma(2-\varepsilon)}{(3-2\varepsilon)\Gamma(2-2\varepsilon)}\end{aligned} \tag{1.188}$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时回到了四维时空，式 (1.188) 就回到了式 (1.184)。这里应记住式 (1.188) 中求和是对能量 S 下所允许产生的夸克味求和。

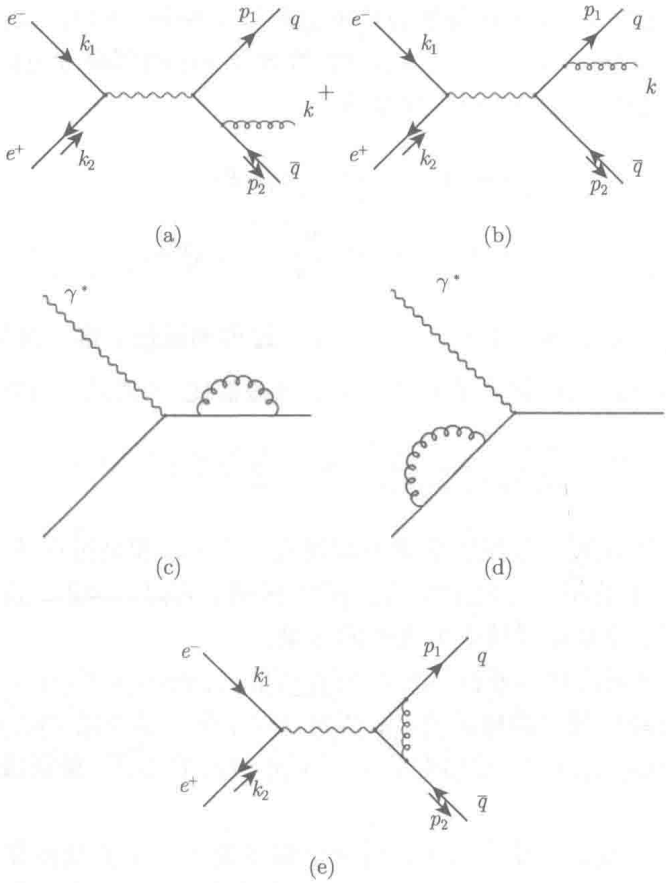


图 1.10　$e^+e^- \to \gamma^* \to q\bar{q}$ 的 QCD 最低级修正图

现在计算图 1.10(a) 和图 1.10(b) 两个实胶子发射的图形，定义

$$\begin{cases} q = P_1 + P_2 + P_3 \\ Q = E_1 + E_2 + E_3 \end{cases} \tag{1.189}$$

$$\begin{cases} x_i = \dfrac{2E_i}{Q} \quad (i = 1, 2, 3) \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \tag{1.190}$$

$$\begin{cases} s = (P_1 + P_3)^2 = P_1^2 + P_3^2 + 2P_1 \cdot P_3 \approx 2P_1 \cdot P_3 \\ t = (P_2 + P_3)^2 = P_1^2 + P_3^2 + 2P_2 \cdot P_3 \approx 2P_2 \cdot P_3 \\ u = (P_1 + P_2)^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2P_1 \cdot P_2 \approx 2P_1 \cdot P_2 \end{cases} \tag{1.191}$$

它们满足关系式 (已忽略了夸克质量)

$$s + u + t = Q^2 = S \tag{1.192}$$

一般地讲，可定义 ($i,j,k=1,2,3$ 且 i,j,k 不同)

$$\begin{aligned} P_i\cdot P_j &= \frac{1}{2}\left[(P_i+P_j)^2-P_i^2-P_j^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[(q-P_k)^2-P_i^2-P_j^2\right] \\ &= \frac{1}{2}[Q^2-2P_k\cdot q+P_k^2-P_i^2-P_j^2] \\ &\cong \frac{1}{2}\left[Q^2-2\,P_k\cdot q\right] \\ &= \frac{1}{2}Q^2(1-x_k) \end{aligned}$$

在写下最后一式时已取了质心系 ($\boldsymbol{q}=0$)，则有

$$s=Q^2(1-x_2),\quad t=Q^2(1-x_1),\quad u=Q^2(1-x_3) \tag{1.193}$$

直接计算图 1.10(a) 和图 1.10(b) 可得到发射实胶子两个图形相应的振幅

$$|T_R|^2=8g_R^2(1-\varepsilon)\frac{x_1^2+x_2^2-\varepsilon x_3^2}{(1-x_1)(1-x_2)} \tag{1.194}$$

以及微分截面 (图 1.10(a)+ 图 1.10(b))

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2}\right)_R &= \left(\sum_i Q_i^2\right)\frac{3\alpha_s}{2\pi}\sigma_0 C_F\left(\frac{4\pi\mu}{S}\right)^{2\varepsilon}\prod_i(1-x_i)^{-\varepsilon} \\ &\quad\times\frac{(1-\varepsilon)^2}{(3-2\varepsilon)\Gamma(2-2\varepsilon)}\frac{x_1^2+x_2^2-\varepsilon x_3^2}{(1-x_1)(1-x_2)} \end{aligned} \tag{1.195}$$

其中，$\alpha_s=g_R^2/4\pi$。从式 (1.195) 可以见到此微分截面在 $\varepsilon=0$ 情况下，当 x_1,x_2 趋于 1 时是发散的，此发散是红外发散，来源于胶子 $m_g=0$ 和小夸克质量 m_q。在胶子质量 $m_g=0$ 和略去夸克质量的情况下，我们有

$$t\cong 2P_2\cdot P_3=2E_2\omega(1-\cos\theta_{23}) \tag{1.196}$$

其中，$\omega=E_3$ 是胶子的能量。从式 (1.196) 可知存在两种情况使得 $t\to 0$，这两种情况对应于两类红外发散：

(1) $\omega\to 0$ 软胶子发射 ($m_g=0$) 引起的红外发散，夸克 $E_2\neq 0$，称此类发散为软红外发散。

(2) $\cos\theta_{23}\to 1$，即 $\theta_{23}\to 0$。这意味着 $\boldsymbol{P}_3//\boldsymbol{P}_2$，即发射出的胶子与夸克平行，是共线情况。这时带有动量 $(\boldsymbol{P}_2+\boldsymbol{P}_3)$ 的 (qg) 态与带有 $(\boldsymbol{P}_2+\boldsymbol{P}_3)$ 动量的夸克态

简并 $(m_g = 0, m_q = 0)$。即使发射胶子的动量大 (以至于 $|\boldsymbol{P}_3| \sim |\boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{P}_3|$) 仍会出现发散行为，这种发散称为共线发散或质量奇异性 (mass singularity)，源于夸克质量和胶子质量都为零。此时胶子可以不是软的。

对式 (1.195) 积分并注意到式 (1.196)，就得到图 1.10(a) 和图 1.10(b) 对截面的贡献

$$\sigma_R = A_R \sigma_B \tag{1.197}$$

其中，σ_B 由式 (1.196) 给出，A_R 由下式定义

$$A_R = \frac{\alpha_s}{\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{S}\right)^{\varepsilon} \frac{\cos \pi\varepsilon}{\Gamma(1-\varepsilon)} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{3}{2\varepsilon} + \frac{19}{4} + O(\varepsilon)\right) \tag{1.198}$$

从式 (1.197) 和式 (1.198) 可以见到当 $\varepsilon \to 0$ 时 $\sigma_R \to \infty$，是红外发散。当计算了虚胶子修正的图形以后，发现这些虚胶子修正的图形之和给出对截面的贡献正好与式 (1.198) 中的红外发散项相消，而给出有限的修正。

现在计算虚胶子单圈图修正，除了虚胶子顶角修正外，还应考虑终态为正、反夸克的夸克线上的自能图形 (图 1.10(c),(d),(e))，它们加在一起消去紫外发散，经过冗长的计算给出它们对正、负电子湮灭为强子过程截面的贡献为

$$\sigma_V = A_V \sigma_B \tag{1.199}$$

其中，A_V 是虚胶子单圈图贡献

$$A_V = \frac{\alpha_s}{\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{S}\right)^{\varepsilon} \frac{\cos \pi\varepsilon}{\Gamma(1-\varepsilon)} \left(-\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{3}{2\varepsilon} - 4 + O(\varepsilon)\right) \tag{1.200}$$

将式 (1.199) 和式 (1.197) 相加消去红外发散是有限的。令 $\varepsilon = 0$ 就可以给出 QCD 在最低阶修正下对截面的贡献为

$$\sigma_R + \sigma_V = \frac{3}{4} C_F \frac{\alpha_s}{\pi} \sigma_B = \frac{\alpha_s}{\pi} \sigma_B \tag{1.201}$$

因此对 R 值的 QCD 修正为 α_s/π, 最终树图加上单圈图修正总的结果是

$$\begin{aligned} R &= N_c \sum_i Q_i^2 \left[1 + \frac{3}{4} C_F \frac{\alpha_s}{\pi} + O(\alpha_s^2)\right] \\ &= 3 \sum_i Q_i^2 \left[1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + O(\alpha_s^2)\right] \end{aligned} \tag{1.202}$$

这里定义的 α_s 依赖于重整化标度 μ，即 $\alpha_s(\mu^2)$。由于重整化标度的任意性，很难保证微扰论的可应用性。但对于大 Q^2 区域内 R 值的渐近行为我们可应用重整化

群方程一般解式 (1.180)，R 值将由跑动耦合常数 $\alpha_s(Q^2)$ 确定。因此，式 (1.202) 在大 Q^2 区域内变为

$$\begin{aligned} R &= N_c \sum_i Q_i^2 \left[1 + \frac{3}{4} C_F \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} + O(\alpha_s^2(Q^2))\right] \\ &= 3 \sum_i Q_i^2 \left[1 + \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} + O(\alpha_s^2(Q^2))\right] \end{aligned} \tag{1.203}$$

其中，跑动耦合常数 $\alpha_s(Q^2) = \bar{g}^2(Q^2)/4\pi$ 在单圈近似下由式 (1.157) 确定。

从单圈图下对 R 值的修正式 (1.203) 可以见到：

(1) 由于 QCD 是渐近自由理论，高阶修正是微扰可计算的，而且所有同阶图形相加后无红外发散问题。

(2) 高阶修正项大于零，实验上可以确定 Λ 值的大小。单圈图 $\alpha_s(Q^2)$ 修正 $\dfrac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} \sim (10 \sim 15)\%$，当 $Q^2 > 2\text{GeV}^2$。

(3) 随着 Q^2 增加，QCD 修正将以对数行为减小。当 $Q^2 \to \infty$ 时 R 值回到了部分子模型的结果。

如果进一步考虑双圈图修正，其结果为

$$R = 3 \sum_i Q_i^2 \left[1 + \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} + (B + AN_f)\left(\frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi}\right)^2 + \cdots\right] \tag{1.204}$$

其中，AN_f 项起源于夸克圈的贡献；常数 A 和 B 依赖于减除方式。在 MS 减除方式里计算结果是

$$\begin{aligned} B &= \frac{365}{24} - 11\varsigma(3) + \frac{33}{12}(\ln 4\pi - \gamma_E) = 7.36 \\ A &= \frac{2}{3}\varsigma(3) - \frac{11}{12} - \frac{1}{6}(\ln 4\pi - \gamma_E) = -0.44 \end{aligned} \tag{1.205}$$

其中，ς 是 Riemann zeta 函数，$\varsigma(3) = 1.202$；$\gamma_E = 0.5772$ 是 Euler 常数。正像上一节介绍的在 $\overline{\text{MS}}$ 方式里只相差 $(\ln 4\pi - \gamma_E)$ 项，即在式 (1.205) 中去掉第三项即得 $\overline{\text{MS}}$ 方式里常数 A 和 B

$$\begin{aligned} B &= \frac{365}{24} - 11\varsigma(3) = 1.99 \\ A &= \frac{2}{3}\varsigma(3) - \frac{11}{12} = -0.12 \end{aligned} \tag{1.206}$$

在式 (1.204) 中参量 N_f 是夸克的味数，它的选取取决于过程的能量 $S = q^2$，因为在计算过程中已忽略了夸克的质量，即式 (1.193) 仅在 $S \gg m_q^2$ 时成立，略去了 $O(m_q^2/S)$。此项修正要与 α_s 级修正相匹配，因此在某种味夸克产生阈附近用

式 (1.204) 计算 QCD 修正的准确性就差。仅在正、负电子湮灭过程能量 $S \gg m_b^2$ 时，五种味夸克都有可能在终态产生。将具体的 N_F 代入就可以发现 α_s^2 阶的系数在 $\overline{\text{MS}}$ 方式里要比 MS 方案小很多，因此微扰级数的收敛性比较好，$\overline{\text{MS}}$ 方式更适合于讨论 R 值的 QCD 高阶修正。

从这一过程的分析可见高阶圈图计算除了紫外发散外还有红外发散，红外发散有两类：一类来源于胶子质量 $m_g = 0$，称之为软发散 (soft divergence)；另一类来源于 $m_g = 0$ 和夸克质量 $m_q = 0$，称之为共线发散 (collinear divergence) 或质量奇异性 (mass singularity)。在胶子质量 $m_g = 0$ 和略去夸克质量的情况下，有两种情况使得 $t \to 0$，$t \cong 2E_2\omega(1 - \cos\theta_{23})$，一种是胶子的能量 $\omega \to 0$，软胶子发射引起的红外发散，另一种是 $\theta_{23} \to 0$，即发射出的胶子与夸克平行，是共线情况引起的红外发散。软红外发散和共线发散在计算正、负电子湮灭为强子总截面后发散被消除给出有限的修正，这本质上是 Kinoshita-Lee-Naunberg(K-L-N) 定理 [20] 的一个例证。实际上，对于任何一个物理过程，引入虚构的胶子质量 $m_g(\neq 0)$ 和保持夸克质量 m_q，所有同级图形相加后令 $m_g = 0$，其结果无红外发散问题，高阶修正可以安全计算。

自 1973 年奠定了微扰 QCD 基础以来，人们一直应用它到各类过程，经受了 40 多年的实验检验取得了很大的成功。电子–质子深度非弹性散射过程，强子–强子碰撞中 Drell-Yan 过程以及正、负电子碰撞过程中喷注现象等都是微扰 QCD 应用的经典例子。这几个过程有一个共同的特点，就是实验上不特指观测某一强子，其截面对终态所有强子求和 (喷注现象除外) 依赖于算符乘积的平均值。这样，部分子模型或算符乘积展开提供了因子化的基础，使得硬子过程在微扰 QCD 框架内可计算。特别值得指出，微扰 QCD 从一开始就应用到单举 (inclusive) 和遍举 (exclusive) 各类过程主导级下的理论计算结果得到了实验上精确的检验。单举过程中实验上只观测某一或某一对粒子而不测量其余粒子的过程，例如，前面已讨论过的电子–质子深度非弹性散射过程等。遍举过程是指实验上对终态所有粒子都测量的过程，如强子的电磁形状因子等。微扰 QCD 应用到遍举过程最简单的例子是大动量迁移 Q^2 下强子 (h) 形状因子 $(\gamma^* h \to h)$，重味强子衰变等。应用因子化分析，将强子部分分离出来，用强子分布振幅描述使得硬子过程在微扰 QCD 框架内可计算。四十几年的实验，从较低能到高能区一系列过程检验充分地证实了反映渐近自由特点的表达式 (1.157) 的正确性 (图 1.11)。

人们形象地将反映这一特点的耦合常数称为跑动耦合常数。量子色动力学的微扰理论得到了巨大的成功，使量子色动力学理论已走向精密验证和发展的阶段。微扰 QCD 应用到强子–强子碰撞过程中精确计算 QCD 修正对寻找超出于标准模型的新物理具有重要意义。

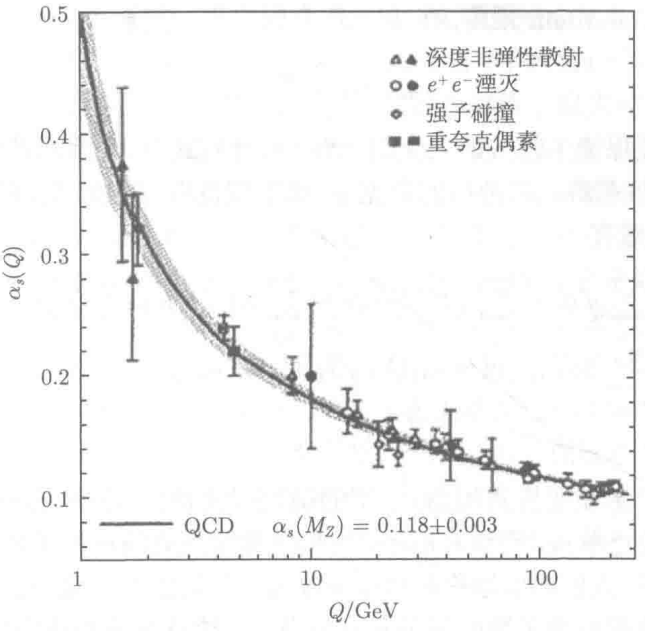


图 1.11 跑动耦合常数 $\alpha_s(Q)$ 随 Q^2 变化而改变。实验上从几 GeV^2 一直到几百 GeV^2 都验证了公式 (1.157) 的正确性。图中阴影部分显示理论计算中的不确定性

1.6 夸克禁闭

1972 年 Gell-Mann[6] 提出色自由度的同时假定可观察的强子态是无色的，因为实验上并未观察到带色的强子，亦即强子具有无色量子数 (或称为白色的)。在数学上描述夸克模型中无色量子数的强子态有两种可能性，对于介子 M 和重子 B 分别为

$$M \sim \bar{q}_i q_i$$

$$B \sim \varepsilon_{ijk} q_i q_j q_k$$

这里 $i,j,k = 1,2,3$ 是夸克的色指标，求和是对所有颜色求和，M 和 B 都是无色量子数的强子态。这就是说由三种色量子数作为基张开的色空间，在色空间内作任一变换 U 不会使强子态变出有色态，而是变换到强子态自身。

1.6.1 禁闭在强子内部的夸克和胶子

设夸克场量 $q_i(i = 1,2,3$ 是夸克的三种不同颜色) 是 $SU(3)$ 群的三个基，它的八个生成元满足 $SU(3)$ 群的对易关系式。它们的明显的矩阵表示为 $T_a = \dfrac{1}{2}\lambda_a$，$\lambda_a(a =$

$1,2,\cdots,8$) 是 Gell-Mann 矩阵, 在 $SU(3)$ 空间中作一变换 U

$$q_i \to q_i' \equiv U_{ij}\, q_j \tag{1.207}$$

U 矩阵的幺正性保证了态矢的正交归一性，且行列式为 1，因此基于物理上的需求选择了 $SU(3)$ 规范群。三种色的夸克 q_i 属于规范群 $SU(3)$ 的基础表示。在变换式 (1.207) 下显然有

$$\begin{aligned}
&\sum_i \bar{q}_i' q_i' = \sum_{ij} \bar{q}_i U_{ji}^* U_{jk} q_k = \sum_{i,j} \bar{q}_i U_{ji}^+ U_{jk} q_k = \sum_i \bar{q}_i q_i \\
&\sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} q_i q_j q_k = \varepsilon_{ijk} U_{im} U_{jn} U_{kp} q_m q_n q_p \\
&\qquad\qquad = \varepsilon_{mnp} q_m q_n q_p
\end{aligned} \tag{1.208}$$

即介子态和重子态在变换式 (1.207) 下的确变回到自身。对于那些在 U 变换下变为自身的态称为色单态。夸克和胶子，它们被紧紧地束缚在强子内部，不能被击出呈现自由的状态，人们形象地称此物理现象为 “夸克禁闭”。强子态都是色单态，实验上并未观察到带色量子数的强子和自由夸克，这就要求在色空间变换群具有精确的 $SU(3)$ 对称性。当然以三种色为基的群，除了 $SU(3)$ 群外，还可以选择 $U(3)$ 和 $SO(3)$ 群。对于 $U(3)$ 情况，差别在于矩阵的行列式不要求为 1，人们可能因子化出一个相位 (因为 $U^+U=1$)。这种相位除了电荷以外就是重子数，实验上并没有观察到除了 $SU(3)$ 以外的相位耦合 (像库仑力一样的长程耦合)，因此 $U(3)$ 群被排除。如果是 $SO(3)$，在这一模型里无法区分夸克和反夸克，这就是说介子态和双夸克态应该一样多，然而自然界中并没有观察到双夸克态，所以也应排除。因此选择色空间具有 $SU(3)$ 精确的对称性提供了从理论上解释实验上未观察到带色强子的事实。通过 $SU(3)$ 对称性定域化，即在色空间内的规范变换可以在任何时空点独立地进行，由此建立的量子色动力学理论在此变换下是不变的。所引入的规范场玻色子 A_μ^a 传递夸克之间的相互作用，这 8 个媒介玻色子称为胶子。

量子色动力学的基本自由度是夸克和胶子，它们之间的相互作用决定了强子的性质和强相互作用的物理过程。然而实验上观测的是强子，它们被禁闭在强子内部，理论上必须回答强子中夸克和胶子是如何分布的，才能准确预言实验观测的物理量，这是微扰 QCD 理论应用到物理过程的一个主要困难。在大动量迁移物理过程中，应用量子色动力学因子化定理将物理过程中矩阵元因子化为两部分：夸克–胶子硬散射振幅和强子分布振幅 $\phi(x,Q)$(遍举过程) 或结构函数 $F_i(x,Q^2)$ $(i=1,2)$ (单举过程)。子过程夸克–胶子硬散射振幅可应用微扰 QCD 精确计算，而表征强子内部结构的分布振幅或结构函数则被分离开来处理，两者卷积给出了强相互作用物理过程的 QCD 理论计算结果。所有理论预言都依赖于反映强子内部结构的分布振幅或结构函数 (包括终态夸克和胶子强子化的碎裂函数)，它们不能精确地计算

但和该强子参与的具体过程无关，即具有普适性。实际应用中采取唯象方法确定强子分布振幅或结构函数，使微扰 QCD 应用到大动量 (小距离) 迁移下的一系列过程具有理论上的可预言性，在实验过程中获得检验并取得了很大的成功，这奠定了 QCD 理论的基础。理论上讲，强子分布振幅 $\phi(x,Q)$ 或结构函数 $F_i(x,Q^2)$ $(i=1,2)$ 是由强子中夸克和胶子分布决定的，即它们必须从大距离非微扰效应中确定。这意味着量子色动力学微扰理论的计算结果是在假定微扰真空以及小距离相互作用不受大距离非微扰结构的影响下获得的。小距离即大动量迁移下强子物理过程具有渐近自由性质，大距离即小动量迁移下强子物理过程主要由非微扰 QCD 理论决定，夸克禁闭性质从本质上影响了强子物理过程计算结果，其影响程度取决于强子物理过程动量迁移 Q^2 值的大小。微扰 QCD 仅在大动量迁移下的物理过程中得到很好的应用，对于低动量迁移的物理现象和强子结构，由于微扰理论忽略了很重要的物理内容，强子态的禁闭问题和大距离相互作用效应，它的理论预言不确定性大。这种不确定性很强地依赖于唯象输入的强子内部结构的分布振幅和结构函数的精确程度。

1.6.2 强子内夸克和胶子的几率分布

这样，如何确定反映强子内部结构的分布振幅或结构函数就成为一个关键问题，这对单举和遍举过程 QCD 理论检验具有重要意义。原则上，强子分布振幅或结构函数都可由强子展开中的一系列 Fock 组态的强子波函数确定 [21]。强子波函数描述了强子内部夸克和胶子成分的几率分布，它是联系物理过程在小距离和大距离物理性质的纽带。

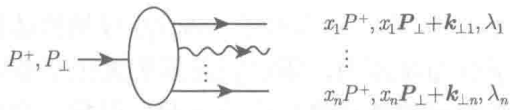
对于任一强子态 $|h\rangle$，描述它的内部结构最方便的表象是定义光锥上等时的 $\tau=t+z$ 的相对论波函数 —— 光锥波函数 [22]。采用物理的光锥规范，$A^+=A^0+A^3=0$，这样强子内所有部分子都是物理的夸克和胶子。这些部分子在强子内部的几率分布由强子波函数来描述，定义光锥上等时的 $\tau=t+z$ 的相对论波函数，$\psi_n(x_i,k_{\perp i},\lambda_i)$，其中，$n$ 为部分子数目；$k_{\perp i}$ 是第 i 个部分子 (夸克或胶子) 的横动量；x_i 是第 i 个部分子的纵向动量分量。

$$x_i=\frac{k_i^+}{P^+}=\frac{(k^0+k^3)_i}{P^0+P^3} \tag{1.209}$$

图 1.12 中强子动量 $P(P^+,P^-,\boldsymbol{P}_\perp)$，当 $P^3\to\infty$ 时 $(\boldsymbol{P}_\perp=0)$，即无穷大参考系，动量守恒要求满足下列等式：

$$\sum_{i=1}^{n}k_{\perp i}=0,\quad \sum_{i=1}^{n}x_i=1\quad (0<x_i<1) \tag{1.210}$$

其中，每个部分子都在质壳上，即 $k_i^2 = m_i^2$ 或 $k_i^- = \dfrac{k_{\perp i}^2 + m_i^2}{k_i^+} = \dfrac{k_{\perp i}^2 + m_i^2}{x_i}$，在波函数中 λ_i 是每个部分子的自旋投影。



$$\psi_n(x_i, \boldsymbol{k}_{\perp i}, \lambda_i)$$

图 1.12　定义在等 τ 上强子内包含 n 个部分子的光锥波函数 $\psi_n(x_i, k_{\perp i}, \lambda_i)$

按照光锥量子化定义一组描述强子内部分子的福克态 $|n\rangle$

$$\begin{aligned}
&|0\rangle \\
&|q\bar{q}\rangle = b^\dagger(x_1, k_{\perp 1}, \lambda_1)\, d^\dagger(x_2, k_{\perp 2}, \lambda_2)\,|0\rangle \\
&|q\bar{q}g\rangle = b^\dagger(x_1, k_{\perp 1}, \lambda_1)\, d^\dagger(x_2, k_{\perp 2}, \lambda_2) c^\dagger(x_3, k_{\perp 3}, \lambda_3)\,|0\rangle \\
&\vdots \\
&|n : x_i, k_{\perp i}, \lambda_i\rangle
\end{aligned} \tag{1.211}$$

以 π 介子为例，它可以按 Fock 组态基展开，其展开式为

$$|\pi\rangle = \psi_{q\bar{q}}\,|q\bar{q}\rangle + \psi_{q\bar{q}g}\,|q\bar{q}g\rangle + \psi_{q\bar{q}q\bar{q}}\,|q\bar{q}q\bar{q}\rangle + \cdots \tag{1.212}$$

这些组态的第一项为 π 介子价夸克态，第二项为 π 介子正反夸克和胶子构成的混杂态，第三项为 π 介子四夸克态，省略号包含了 π 介子所有混杂态和多夸克态的高 Fock 态。其中，展开系数是 π 介子态在各组态 $|n\rangle$ 上的投影，从而定义了 π 介子一系列组态光锥波函数

$$\psi_n^\pi(x_i, k_{\perp i}, \lambda_i) = \langle n, x_i, k_{\perp i}, \lambda_i|\,\pi\rangle \tag{1.213}$$

一般地讲，对于任一强子态 $|h\rangle$，可以对福克态 $|n\rangle = |n; x_i, k_{\perp i}, \lambda_i\rangle$ 展开

$$|h\rangle = \sum_{n,\lambda_i} \int [\mathrm{d}x]\,[\mathrm{d}k_\perp] \psi_n(x_i, k_{\perp i}, \lambda_i)\,|n\rangle \tag{1.214}$$

显然，$|\psi_n|^2$ 表示在给定 τ 时刻强子 h 中找到具有纵向动量 x_i，横向动量 $k_{\perp i}$ 和自旋 λ_i 的夸克、胶子态 $|n\rangle$ 的几率。在 ψ_n 中还包含了夸克自旋和胶子极化的因子

$$\prod_{\text{fermions}} \frac{u(x_i, k_{\perp i}, \lambda_i)}{\sqrt{x_i}} \prod_{\text{gluons}} \frac{\varepsilon(x_i, k_{\perp i}, \lambda_i)}{\sqrt{x_i}} \tag{1.215}$$

由此展开式，再利用强子态归一条件

$$\langle h(p')\,|h(p)\rangle = 2p^+(2\pi)^3\delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}') \tag{1.216}$$

就可得福克组态波函数满足的归一条件

$$\sum_n \int [\mathrm{d}x]\,[\mathrm{d}k_\perp] \sum_{\lambda_i} |\psi_n(x_i, k_{\perp i}, \lambda_i)|^2 = 1 \tag{1.217}$$

其中，n 是对所有可能的福克态求和，所有 Fock 态几率相加应为 1。对于介子来讲 $n = 2, \cdots, \infty$，对于重子来讲 $n = 3, \cdots, \infty$。方程 (1.217) 中的 $[\mathrm{d}x], [\mathrm{d}k_\perp]$ 分别定义为

$$\begin{aligned} [\mathrm{d}x] &= \delta\left(1 - \sum_i^n x_i\right) \prod_{i=1}^n \mathrm{d}x_i \\ [\mathrm{d}k_\perp] &= 16\pi^2 \delta^{(2)} \left(\sum_{i=1}^n k_{\perp i}\right) \prod_{i=1}^n \frac{\mathrm{d}^2 k_{\perp i}}{16\pi^3} \end{aligned} \tag{1.218}$$

这两个因子给出三动量守恒。从式 (1.214) 可以见到介子内光锥波函数 $\psi_n(x_i, k_{\perp i}, \lambda_i)$ 与 π 介子动量无关，因为 x_i 代表部分子所携带的纵向动量成分，$k_{\perp i}$ 代表部分子相对于 π 介子运动方向的横向动量，自然，它们是与 π 介子总动量参考系无关的 (可以取 $P^+ = 1$)。这些福克组态都是离能壳 (光锥坐标下定义的能量 ε_n) 的，因而

$$\varepsilon_n = P^- - \sum_{i=1}^n k_i^- = \frac{M^2}{P^+} - \frac{1}{P^+} \sum_{i=1}^n \frac{k_{\perp i}^2 + m_i^2}{x_i} < 0 \tag{1.219}$$

物理上任一强子态都是 QCD 总哈密顿量的本征态。如 π 介子，它必须是哈密顿量的本征态，即

$$\left(M_\pi^2 - H_{L.C.}\right) |\pi\rangle = 0 \tag{1.220}$$

这里已取了 $P_\pi = (1, P^-, 0_\perp), P^- = M_\pi^2$。利用式 (1.219) 和式 (1.220)，可以获得一个联立的积分方程

$$\left(M_\pi^2 - \sum_i \frac{\boldsymbol{k}_{\perp i}^2 + m_i^2}{x_i}\right) \begin{bmatrix} \psi_{q\bar{q}/\pi} \\ \psi_{q\bar{q}g/\pi} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle q\bar{q}|V|q\bar{q}\rangle & \langle q\bar{q}|V|q\bar{q}g\rangle & \cdots \\ \langle q\bar{q}g|V|q\bar{q}\rangle & \langle q\bar{q}g|V|q\bar{q}g\rangle & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{q\bar{q}/\pi} \\ \psi_{q\bar{q}g/\pi} \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{1.221}$$

其中，V 是相互作用部分。它包括了各种可能的相互作用项，仅仅是所有不可约图形。由于 QCD 理论的夸克禁闭性质，无法从理论上确定无穷组态的相互作用矩阵元，也无理由将组态截断成为有限个组态波函数。原则上讲，这些无穷的联立方程组确定了强子谱和强子波函数。然而对于强相互作用，要想解这个方程是相当困难的，目前人们还不能从理论上计算强子内夸克和胶子的几率分布，或者说强子内夸克和胶子的几率分布 $\psi_n(x_i, k_{\perp i}, \lambda_i)$ 本质上是由 QCD 非微扰效应确定的。仔细观

察方程 (1.221) 会发现在不解方程的情况下也能得到强子组态波函数的一些重要特点。首先从方程 (1.221) 可知所有强子组态波函数具有一般形式

$$\psi_n(x_i,k_{\perp i},\lambda_i)=\frac{1}{M^2-\sum_i^n\left[\dfrac{k_\perp^2+m^2}{x}\right]_i}(V\psi)$$
$$=\frac{1}{\varepsilon_n}(V\psi) \tag{1.222}$$

其中，参量 ε_n 就是式 (1.219) 定义的离壳能量，它标志一个福克组态远离能量壳的程度。注意到在展开式 (1.214) 中每一组态内的裸量子是处于质壳上，但它们是离能壳的，即 $\varepsilon_n\neq 0$。显然，当 $\varepsilon_n\to-\infty$ 时，组态波函数 $\psi_n\to 0$。一般地讲，当 $k_{\perp i}^2$ 和 m_i^2 变大，x 变小时，ε_n 变大，波函数 ψ_n 变小。这就是说对一个物理强子来讲，只有很少的几率处于离能壳大的福克组态。

前面已提到微扰 QCD 应用到高动量迁移下的物理过程理论预言的不确定性，它很强地依赖于输入的强子分布振幅或结构函数。下面仍以 π 介子为例讨论反映强子内部结构的光锥波函数与遍举过程中分布振幅和单举过程中结构函数之间的关系。所有涉及 π 介子的遍举过程在因子化以后其领头项都依赖于 π 介子价夸克分布振幅 $\phi(x,Q)$，它的定义为 [23]

$$\phi(x,Q)=\int_0^Q\frac{\mathrm{d}^2k_\perp}{16\pi^3}\psi^{(Q)}(x,k_\perp) \tag{1.223}$$

显然它是 π 介子内发现价 Fock 组态 $|q\bar{q}\rangle$ 的几率振幅，其中夸克和反夸克是共线的，因为它们的内部横向动量已被忽略，标度 Q 标示了 π 介子内价夸克共线到 $k_\perp\sim Q$ 时的分布。如果进一步考虑超出领头阶的贡献，还须计及展开式 (1.214) 中高 Fock 组态的几率振幅。对于电子–强子深度非弹散射过程 $e+h\to e+X$，在因子化以后其领头阶项依赖于强子 h 的结构函数 $F_i(x,Q)$。仍以 π 介子为例，$e+\pi\to e+X$，其结构函数 $F_i(x,Q)$ 可以用 π 介子内与电子相互作用的部分子 a 分布函数 (PDF)$G_{a/\pi}(x,Q)$ 来表示

$$2MF_1(x,Q)=\frac{F_2(x,Q)}{x}\cong\sum_a e_a^2G_{a/\pi}(x,Q) \tag{1.224}$$

其中，x 是部分子的纵向动量比率；Q 是此过程中电子的动量转移，$Q^2=q_\perp^2$。上式中第一个等式是 Callen-Gross 关系，部分子分布函数 $G_{a/\pi}(x,Q)$ 依赖于 π 介子内所有 Fock 组态的光锥波函数 $\psi_{n/\pi}^Q(x_i,k_{\perp i})$ [24]

$$G_{a/\pi}(x,Q)\equiv\sum_{n,\lambda_i}\int\tilde{\prod_i}\frac{\mathrm{d}x_i\mathrm{d}^2k_{\perp i}}{16\pi^3}\left|\psi_{n/\pi}^Q(x_i,k_{\perp i})\right|^2\sum_{b=a}\delta(x_b-x) \tag{1.225}$$

这里，$k_{\perp i}$ 是部分子的横向动量，仅有 $k_\perp^2 \ll Q^2(1-x)$ 区域有贡献，$k_{\perp i}$ 相对于 $q_\perp$ 可以忽略，因此可以选择 Q 作为紫外截断参量。实际上式 (1.225) 给出的分布函数 $G_{a/\pi}(x,Q)$ 是 π 介子内具有纵向动量 x 部分子 a 的几率密度。其中 $\sum\limits_n$ 要对 π 介子所有 Fock 组态求和，即对所有含部分子 a 的 Fock 组态求和。这意味着 π 介子分布函数 $G_{a/\pi}(x,Q)$ 需要从束缚态方程求解出所有 Fock 组态的光锥波函数，这几乎不可能做到，本质上这是由夸克禁闭引起的非微扰 QCD 难题。仅当部分子 a 纵向动量比率 $x \to 1$ 时，其主要贡献来自于 π 介子的价夸克态。从式 (1.223)~式 (1.225) 可以看出强子 Fock 组态展开中所有组态光锥波函数 $\psi_n(x_i, k_{\perp i}, \lambda_i)$ 原则上完全确定了所有物理过程中所需要的强子分布振幅和结构函数。目前由于非微扰 QCD 难题，强子光锥波函数 $\psi_n(x_i, k_{\perp i}, \lambda_i)$ 仍依赖于半理论半唯象方法来构造合理的模型拟合实验。

1.6.3 重夸克偶素和禁闭势

在量子电动力学中，电磁相互作用弱，正负电子束缚态 (e^+e^-) 近似地认为仅有价态 $\psi_{e^+e^-}$ 是主要贡献，略去所有高 Fock 组态，方程 (1.201) 中的相互作用矩阵元中仅有一个矩阵元 $\langle e^+e^-|V|e^+e^-\rangle$ 不为零，人们可以从方程解出价态波函数 $\psi_{e^+e^-}$。在 QCD 中，重夸克偶素 $(Q\bar{Q})$ 形成重夸克偶素束缚态，这一系统可以近似地认为组态展开中主要是价夸克组态，高 Fock 态可以被忽略。因为重夸克中粲夸克 c 和底夸克 b，它们的质量分别为 $1.4 \sim 1.5$GeV 和 $4.6 \sim 4.9$GeV，都比强子的标度 1GeV 大，比 QCD 标度参量 $\Lambda_{\rm QCD} \approx 200$MeV 大很多，即 $m_b^2 \gg m_c^2 \gg \Lambda_{\rm QCD}^2$。自从 1974 年发现粲夸克 c 和 1977 年发现底夸克 b 以来，实验上已很好地观察到重夸克偶素 $(c\bar{c})$ 和 $(b\bar{b})$ 的能谱，如 J/ψ、η_c、χ_c 和 Υ、η_b、χ_b 以及 ψ'、Υ' 等激发态 (图 1.13)。

这些能谱表明了重夸克偶素 $(Q\bar{Q})(Q = c、b)$ 具有下述特点：

(1) 重夸克偶素 $(Q\bar{Q})$ 能谱正像正、负电子偶素 (positronium) 一样构成基态、轨道激发态、径向激发态完整的图像。

(2) 重夸克在重夸克偶素 $(Q\bar{Q})$ 内的运动可以看作是非相对论的，因为

$$\left\langle \frac{v^2}{c^2} \right\rangle \simeq \frac{\Delta E}{m_Q} \simeq \begin{cases} 0.25 & J/\psi \\ 0.10 & \Upsilon \end{cases} \tag{1.226}$$

其中，ΔE 是 $(Q\bar{Q})$ 径向激发态质量和基态质量之差。

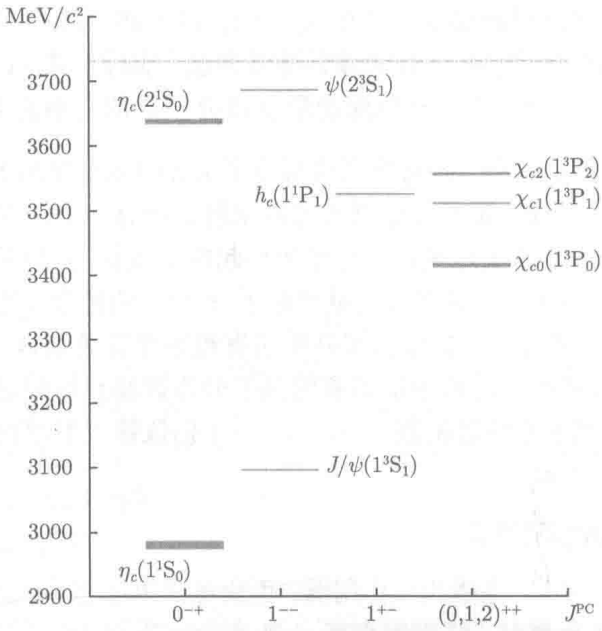


图 1.13　粲夸克偶素家族能谱图示

(3) 非相对论势模型描写重夸克偶素 $(Q\bar{Q})$ 相当好，尽管人们可以采取不同参量化势模型，通过求解 Schrödinger 方程在可观察态的标度范围内都相自洽。

这些特点很强地表明在重夸克偶素内价夸克 $(Q\bar{Q})$ 占主导成分。事实上 J/ψ 和 Υ 的径向激发谱和格点规范理论的计算表明相互作用势在长距离下是线性势，在短距离下是库仑势

$$V(r)=\begin{cases} Kr, & r\to\infty \\ \dfrac{\alpha_s(1/r)}{r}, & r\to 0 \end{cases} \tag{1.227}$$

有兴趣的是式 (1.227) 简单地叠加构成 Cornell 势 [25]

$$V(r)=Kr-\frac{a}{r} \tag{1.228}$$

其中，参量 $a\simeq 0.52, K\simeq 0.18\text{GeV}^2$，就能很好地解释 J/ψ 和 Υ 家族的能谱。其他还有 Richardson 势 [26] 和幂次势等参数化的势模型。图 1.14 给出了四种不同形式的相互作用势模型，它们在 0.1~1.0fm 是一致的。因此求解 Schrödinger 方程都能得到正确的 J/ψ 和 Υ 家族的能谱。夸克偶素 $(Q\bar{Q})$ 的衰变的应用是检验 QCD 的一个重要领域。

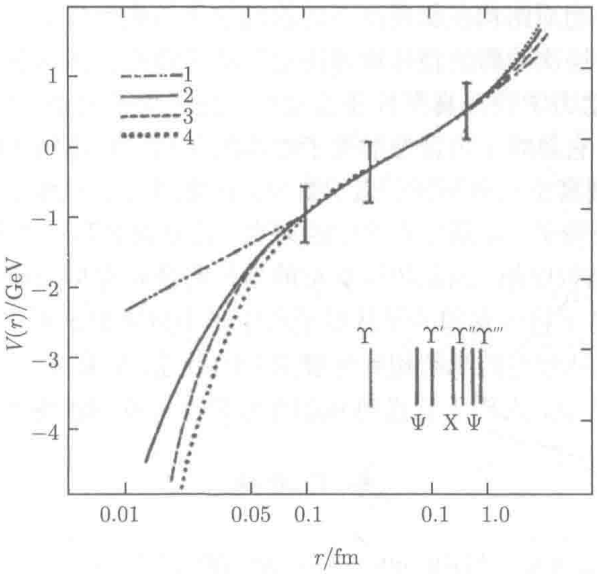


图 1.14 不同模型下重夸克之间的相互作用势。其中点线 4 就是式 (1.228) 描述的 Cornell 势，曲线 1 是幂次势，实线 2 是 Richardson 势，破折线 3 是对数形式势

1.6.4 夸克禁闭和非微扰效应

渐近自由和夸克禁闭是量子色动力学理论的两个重要特点。当能量 Q^2 趋于无穷大时，强相互作用耦合常数 $\alpha_s(Q^2)$ 趋于零，这意味着夸克之间的相互作用趋于零，式 (1.157) 定量地表达了强相互作用渐近自由的性质。从表达式 (1.157) 还可以看出跑动耦合常数 g_s 在能量 Q^2 变小时逐渐增大以至于达到无穷大，由此可以定性地理解为什么夸克在强子内部而不能以自由状态分离出来，因为当两个夸克之间的距离增大时，夸克之间交换胶子的能量 Q^2 变小，跑动耦合常数变大，以至于耦合强度变为无穷大，这意味着夸克之间的相互作用随着分开距离的增加而增加，使得夸克和胶子永远束缚在强子内部，人们形象地称此物理现象为 “夸克禁闭”。这正像橡皮筋一样，拉的愈长弹回的强度愈大，永远束缚在一起。自然界六种夸克中的前五种夸克 (u、d、s、c、b) 只存在于强子束缚态内部，而最重的顶夸克 t 产生以后寿命极短，很快衰变为底夸克 b。目前，量子色动力学理论虽然定性地解释了夸克禁闭在强子内部的结构图像，但是要想定量地解释夸克禁闭疑难和强子结构图像仍是高能物理中的一个重大难题。格点规范理论 [27] 正试图从量子色动力学非微扰理论最终解决夸克禁闭这一难题。由于格点规范理论本质上是非微扰理论，其理论方法不依赖于相互作用的强弱，因此科学家们正努力获得强相互作用的全部解，而不仅是渐近自由解。然而由于计算量大等技术上的原因，目前它对解决非微扰问题的能力还有待发展。目前，夸克禁闭仍是 QCD 至今未解决的难

题。夸克禁闭表明物质结构在新层次下的物理图像与先前原子、原子核的层次完全不一样，支配下一层次的新的物理规律决定了新的物理图像和观念。人们推测夸克禁闭是由量子色动力学物理真空性质造成的，微扰量子色动力学理论是建立在微扰真空的基础上，它忽略了很重要的强子态的禁闭和大距离相互作用效应问题。而量子色动力学物理真空完全不同于微扰真空。在物理真空中真空不空，它充满着夸克、反夸克对以及胶子，物质与真空中的夸克、反夸克对和胶子不断发生相互作用构造出新的强子结构图像。因此揭示真空的本质将使夸克禁闭疑难得到解决。实验上力图在极端条件下将夸克和胶子从质子和中子中解放出来形成夸克-胶子等离子体相，也就是实现从夸克的禁闭相到退禁闭相的跃迁。只有完全掌握了渐近自由和夸克禁闭这两个特点，人们才能说对强相互作用有了深刻的理解。

参 考 文 献

[1] Yukawa H. Prog. Phys. Math. Soc. of Japan, 1935, 17: 48.

[2] Gell-Mann M. Nuovo Cim., 1956, 4, Suppl. 2: 848; Nishijima K. Prog. Theor. Phys., 1955, 13: 285.

[3] Ne'eman Y. Nucl. Phys., 1961, 26: 222; Ne'eman Y, Gell-Mann M., eds, The eightfold way, New York, Benjamin, 1964.

[4] Gell-Mann M. Phys. Rev., 1962, 125: 1067; Phys. Lett., 1964, 8: 214; Zweig G, CERN-TH-412, 1964: 401.

[5] Bloom E D, et al. Phys. Rev. Lett., 1969, 23: 930; Breidenbach M, et al. Phys. Rev. Lett., 1969, 23: 935.

[6] Bjorken J D. Phys. Rev., 1967, 163: 1767; Bjorken J D, Paschos E A. Phys. Rev., 1969, 185: 1975.

[7] Feynman R P. Phys. Rev. Lett., 1969, 23: 1415.

[8] Gell-Mann M. Acta Phys. Austriaca, 1972, Suppl. 9: 733; Fritzsch H, Gell-Mann M. Proc. XVI Int.on High Energy Physics (eds J. D. Jackson and A. Roberts), Fermilab, 1972, 2: 135.

[9] Gross D J, Wilczek F. Phys. Rev. Lett., 1973, 30: 1343; Politzer H D. Phys. Rev. Lett., 1973, 30: 1346.

[10] Yang C N, Mills R L. Phys. Rev., 1954, 96: 191.

[11] Faddeev L, Popov V N. Phys. Lett., 1967, B25: 29.

[12] Slavnov A A. Theor. Math. Phys., 1972: 10; Taylor J C. Nucl. Phys., 1971, B33: 436.

[13] 't Hooft G. Nucl. Phys., 1971, B33: 173; 't Hooft G, Veltman M J G. Nucl. Phys., 1972, B50: 318.

[14] Celmaster W, Gonsalves R J. Phys. Rev. Lett., 1979, 42: 1435; Celmaster W, Gonsalves R J. Phys. Rev., 1979, D20: 1420; Barbieri R, Caneschi L, Curci G, et al. Phys. Lett.,

1979, 81B: 207.

[15] 't Hooft G. Nucl. Phys., 1973, B61: 455.

[16] Bardeen W A, Buras A J, Duke D W, et al. Phys. Rev., 1978, D18: 3998.

[17] Gell-Mann M, Low F E. Phys. Rev., 1954, 95: 1300; Callan C G. Phys. Rev., 1970, D2: 1541; Symanzik K. Comm. Math. Phys., 1970, 18: 227; Georgi H, Politzer H D. Phys. Rev., 1976, D14: 1829.

[18] ' t Hooft G. Nucl. Phys., 1973, B61: 455.

[19] Bardeen W A, Buras A J, Duke D W, et al. Phys. Rev., 1978, D18: 3998.

[20] Kinoshita T. Jour. Math. Phys., 1962, 3: 1950; Lee T D, Nauenberg M. Phys. Rev., 1964, 133: 1549.

[21] 黄涛. 量子色动力学引论. 北京: 北京大学出版社, 2011.

[22] Lepage G P, Brodsky S J, Huang T, et al. Particles and Fields V2, (Proceedings of the Banff Summer Institute, Banff, Alberta, 1981) edited by A. Z. Capri and A. N. Kamal (Plenum, New York, 1983), 83; Huang T, Proceedings of XXth International Conference on High Energy Physics, Madison, Wisconsin, 1980, edited by L.Durand and L. G. Pondrom, AIP Conf. Proc. No. 69(AIP, New York, 1981), 1000.

[23] Lepage G P, Brodsky S J. Phys. Rev., 1980, D22: 2157; 1981, D24: 1808.

[24] Brodsky S J, Huang T, Lepage G P. Particles and Fields V2, (Proceedings of the Banff Summer Institute, Banff, Alberta, 1981) edited by A. Z. Capri and A. N. Kamal (Plenum, New York, 1983), 143.

[25] Eichten E, Gottfried K, Kinoshita T, et al. Phys. Rev., 1980, D21: 203.

[26] Richardson J L. Phys. Lett., 1979, 82B: 272.

[27] Wilson K G. Phys. Rev., 1974, D10: 2445; Kogut J B. Rev. Mod. Phys., 1983, 55: 775.

第2章　格点 QCD

20 世纪 60 年代，Gell-Mann 等利用味道 $SU(3)_F$ 对称性成功将强子分类为 $SU(3)_F$ 的不同的多重态，比如介子属于味道单态和八重态，重子属于味道八重态和十重态 (激发态也有味道单态)。在此基础上，Gell-Mann 和 Zweig 等提出了夸克 (quark) 的概念，认为夸克构成味道 $SU(3)_F$ 的基础表示，介子由正反夸克构成，重子由三个夸克构成，这就是著名的夸克模型 (quark model)。为了解决重子波函数和自旋 - 统计关系的矛盾，人们引入了一种新的自由度 – 颜色 (color)，即每一味夸克还具有颜色自由度 (实验证实夸克的颜色数为 $N_c = 3$)，颜色自由度构成 $SU_c(3)$ 对称性，从而保证夸克模型中重子波函数的全反对称性。轻子 - 核子的深度非弹性散射实验 (lepton-neucleon deep inelastic scattering，简称 DIS) 发现，核子内部存在带电的费米子型点状散射中心，称作带电部分子 (parton)。DIS 实验现象可以用部分子模型描述：在 DIS 中，轻子实际上是和这些部分子发生准弹性碰撞，在高能碰撞过程中，部分子之间可以近似看作是自由的。进一步的实验分析表明，带电部分子具有和夸克模型中的夸克相同的量子数，从而证实了夸克的客观存在。DIS 还发现核子中除了带电的部分子之外，还存在电中性的部分子 (胶子)，它们携带核子大约一半的能动量。将 $SU_c(3)$ 颜色对称性定域化得到的 $SU_c(3)$ 规范理论 – 量子色动力学 (QCD)–具有独特的渐进自由性质，可以自然地解释 DIS 的实验现象，因此提出不久就作为描述强相互作用的基本理论引起粒子物理学界的关注。目前的高能物理实验都证实了 QCD 作为强相互作用基本理论的正确性。

但是，渐进自由特性只是基于 QCD 微扰计算得出的结论，可以成功地描述高能标下的强相互作用现象，但对于低能 QCD 现象，微扰计算已不能成立。因此，对于强子性质、强子结构等低能 QCD 性质，人们只能通过一些基于 QCD 特性的唯象模型进行研究。同时，尽管作为 QCD 基本自由度的夸克和胶子的客观存在已经被 DIS 和高能实验中的喷注 (jet) 现象所证实，但实验上始终没有观测到自由的胶子、夸克以及带色的强子，这促使人们提出“夸克禁闭”或“色禁闭”(quark confinement) 的假设，即夸克和胶子只能以颜色单态的强子形式存在。怎样从 QCD 出发对夸克禁闭的物理机制给出合理的解释，便成了一个亟待解决的问题。

1974 年，K.G. Wilson 为了理解 QCD 中的夸克禁闭问题，开创性地在离散的四维时空格点上建立了一个有规范对称性的量子场论，他的著名论文 *Confinement of Quarks* [1] 可以看作是格点规范理论 (lattice gauge theory，简称 LGT) 的源起。LGT 在 QCD 方面的应用就是格点量子色动力学，简称格点 QCD。LGT 采用路径积分量

子化方案，经过 Wick 转动将四维 Minkowski 时空转动到四维欧氏时空，其理论形式和一个多自由度的统计系统相似。Wilson 运用统计物理中的强耦合展开方法对格点 QCD 强耦合区的 Wilson 圈进行计算，从而得到了面积律，这可以解释为 (无穷重) 夸克之间的相互作用势能正比于它们之间的距离，这在一定程度上对夸克禁闭给出了一个解释。1979 年，M. Creutz 将蒙特卡罗模拟 (Monte Carlo simulation) 引入格点场论的研究 [2]，大大拓展了格点场论的研究范围。随着计算机水平的提高，格点 QCD 数值模拟研究已经逐步成为与高能物理实验研究和传统的理论研究并列的第三大分支。格点 QCD 的蒙特卡罗模拟研究为 QCD 的理论研究提供了重要的非微扰方法。一方面，格点 QCD 可以对标准模型的基本参数如强耦合常数 $\alpha_s(\mu)$ 、流夸克质量 (除 top 夸克之外) 进行精确计算；另一方面，强子性质和 QCD 的非微扰特性密切相关，人们期望能够从第一性原理出发对它们有可靠的理解和描述，格点 QCD 在此方面有广泛的应用，也有很大的发展前景。在强子物理研究方面，格点 QCD 对强子 (包括介子、重子、奇特强子态如胶球和混杂态、强子共振态等) 质量谱有广泛的研究；对于强子电磁衰变和弱衰变相关的非微扰强子矩阵元的计算可以达到相当精度。关于强子弱矩阵元 (如介子衰变常数和半轻子衰变形状因子等) 的计算精度甚至可以达到或超过高能物理实验对相关过程的截面或分宽度的测量精度，对于精确抽取 CKM 矩阵元并验证幺正三角形有重要的物理意义。

根据 QCD，胶子具有自相互作用从而可以参与构成强子束缚态如胶球和混杂态；除了夸克模型描述的普通介子和重子之外，也可能存在多个夸克构成的体系如四夸克态、五夸克态、强子分子态等。相对于夸克模型描述的 $q\bar{q}$ 介子和 qqq 重子，这些强子束缚态统称为奇特强子态。多年来，实验中也发现了若干奇特强子态的候选者，但对它们真实身份的最终确定需要理论和实验的进一步努力，格点 QCD 的研究结果可以为实验提供可靠的理论判据。尤其是近些年来，Belle、BaBar、BES 和 LHC 等实验组先后发现了许多含 $c\bar{c}$ 或 $b\bar{b}$ 的强子共振结构，它们多数表现为近阈共振，而且其产生和衰变都显示出明确的奇特性质，因而很难简单归类到普通的强子多重态中 (关于这方面的实验和理论研究现状请参阅文献 [3])。这些粒子一般统称为 XYZ 粒子，它们的发现引起了粒子物理实验和理论研究的浓厚兴趣。人们提出了诸多唯象图像，如分子态、多夸克态、混杂态、末态相互作用效应等，但要得到最终结论还需要更深入的研究。格点 QCD 数值模拟研究在此类研究方面正在或即将发挥越来越重要的作用。

在本章中，我们将对 QCD 的理论体系进行简单回顾，然后重点介绍格点 QCD 的理论框架和研究方法，如格点正规化方案、蒙特卡罗模拟、规范组态的产生和物理量的测量等。

2.1　格点 QCD 简介

格点 QCD 采用路径积分量子化，为了方便阅读，我们这里对 QCD 的路径积分量子化形式进行简单回顾。由第 1 章我们已经知道，QCD 的拉氏量的形式为

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QCD}}=-\frac{1}{4}F^{a}_{\mu\nu}F^{a,\mu\nu}+\sum_{i,f}\bar{\psi}^{f}_{i}(x)((\mathrm{i}\not{D})_{ij}-\delta_{ij}m^{(f)})\psi^{f}_{j}(x) \tag{2.1}$$

其中

$$\begin{aligned}F^{a}_{\mu\nu}&=\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu}+gf^{abc}A^{b}_{\mu}A^{c}_{\nu}\\ D_{\mu}&=\partial_{\mu}-\mathrm{i}gT^{a}A^{a}_{\mu}\end{aligned} \tag{2.2}$$

$\psi^{f}(x)$ 和 $A^{a}_{\mu}(x)$ 分别为夸克场和胶子场。夸克场 ψ_i 属于 $SU(3)$ 的基础表示，用 $i,j,...$ 标记，规范场 $A^{a}_{\mu}(x)$ 属于伴随表示，用 $a,b,...$ 标记；T^{a} 为 $SU(3)$ 群的生成元的基础表示矩阵；f 代表夸克味道数，即 $\{u,d,s,c,b,t\}$。QCD 的路径积分量子化形式可以表达为，

$$\begin{aligned}Z&=\int\mathcal{D}A_{\mu}\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^{4}x\mathcal{L}_{\mathrm{QCD}}(x)}\\ \langle 0|T\mathcal{O}[A_{\mu},\psi,\bar{\psi}]|0\rangle&=\frac{1}{Z}\int\mathcal{D}A_{\mu}\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^{4}x\mathcal{L}_{\mathrm{QCD}}(x)}\mathcal{O}[\mathcal{A}_{\mu},\psi,\bar{\psi}]\end{aligned} \tag{2.3}$$

其中 $\mathcal{O}[A_{\mu},\psi,\bar{\psi}]$ 是场算符乘积，$\mathcal{O}[\mathcal{A}_{\mu},\psi,\bar{\psi}]$ 是对应的经典场的乘积。正如第 1 章中讲述的，对于连续的时空，比如我们所在的四维时空，规范理论的上述泛函积分形式并没有很好地定义，原因是规范场 $A_{\mu}(x)$ 是规范依赖的，具有非物理的自由度，从而造成泛函积分发散。Faddeev-Popov 通过引入规范固定和规范补偿项将定域对称群的体积因子分离出来，在处理规范补偿项时引入了非物理的鬼场和反鬼场自由度 (见第 1 章)。需要指出的是，当自由度有限时，在计算规范不变的物理量时，规范固定不是必须的 (格点规范理论就是一个例子)，因此在上述表达式中，我们暂时忽略规范规定和规范补偿的表现。准确地说，连续场论中的规范固定是微扰论的要求，与连续时空没有必然的联系。

四维闵氏时空的场论和四维欧氏时空的场论可以通过所谓的 Wick 转动联系起来。如果我们用 x^{μ} 代表闵氏时空的坐标 $x^{\mu}=(t,\boldsymbol{x})$，用 $x^{E}_{\mu}=(\boldsymbol{x},\tau)$ 代表欧氏时空坐标，Wick 转动就是从实的时间 $x^{0}=t$ 到虚的时间 $x^{E}_{4}=\tau$ 的解析延拓，即 $t\to-\mathrm{i}\tau$，而空间分量不变。相应地，闵氏空间的四动量 $p^{\mu}=(E,\boldsymbol{p})$ 变为 $p^{E}_{\mu}=(\boldsymbol{p},p^{E}_{4}=-\mathrm{i}E)$，相应的不变量为

$$x^{2}=-x^{E,2},\quad p^{2}=-p^{E,2} \tag{2.4}$$

另外，我们在四维欧氏空间引入厄米的 γ- 矩阵 $\gamma_\mu^E = \gamma_\mu^{E\dagger}$，它们和闵氏时空的 γ-矩阵 γ_μ 的联系为

$$\gamma_i^E = -\mathrm{i}\gamma_i, \quad \gamma_4^E = \gamma_0 \tag{2.5}$$

很容易证明 γ_μ^E 满足对易关系

$$\{\gamma_\mu^E, \gamma_\nu^E\} = 2\delta_{\mu\nu} \tag{2.6}$$

相应地，四维欧氏空间的 γ_5^E 定义为 $\gamma_5^E = \gamma_1^E\gamma_2^E\gamma_3^E\gamma_4^E$。

基于以上定义和约定，四维欧氏时空中 QCD 的泛函积分形式可以表达为，

$$\begin{aligned} Z_E &= \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}^4x_E \mathcal{L}_{\mathrm{QCD}}(x_E)} \\ \langle \mathcal{O}[A_\mu,\psi,\psi]\rangle &= \frac{1}{Z_E}\int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}^4x_E \mathcal{L}_{\mathrm{QCD}}(x_E)} \mathcal{O}[\mathcal{A}_\mu,\psi,\bar{\psi}] \end{aligned} \tag{2.7}$$

通过 Wick 转动，闵氏时空的 QCD 场论体系转化到欧氏时空后，理论形式和统计力学体系十分相似。但是连续时空的自由度数目是无穷的，借用统计力学方法进行计算仍是不可行的。K.G. Wilson 正是考虑到这一点，从而提出了格点规范场论的实现方法，即将连续时空离散化为一个超立方的时空格子，这样一来自由度数目就是有限可数的了。从本质上讲，格点场论是一种正规化方案，有限的格距 a (类似于晶体的晶格常数) 提供了一个自然的紫外截断，有限的格子大小也避免了红外发散的问题。所以格点场论是一个没有发散的理论体系。而且格点场论基于物理体系的基本对称性，是从第一性原理出发的理论体系。这些都是格点场论的优越性。格点 QCD 有严格定义的连续极限，其蒙特卡罗数值模拟研究方法不依赖于微扰论，是有效的研究 QCD 的非微扰方法，所以一经提出就受到关注。

2.1.1 时空格点上的规范对称性和规范不变量

格点规范场论是定义在离散的欧氏空间格子 Λ

$$\Lambda = \{x = (an_1, an_2, an_3, an_4),\ n_\mu = 1, 2, ..., N_\mu\} \tag{2.8}$$

上的场论，物质场 (如夸克场) 可以直接定义在格位 (site) 上，即 $\psi(x)$ 和 $\bar{\psi}(x)$, $x \in \Lambda$, 其颜色、狄拉克指标以及味道等内部量子数跟连续时空中的一样 (除非特别强调，本章随后的叙述都是基于欧氏时空，所以诸如 x_E 等的变量的下标都将暂时略去)。

但在时空格点上定义规范场则不是这么直接。从前面我们看到，规范场 $A_\mu(x)$ 的引入是基于连续时空中规范变换的微分定义，而时空格点体系中格距 a 是时空点的最小间隔。因此我们必须利用**有限的空间平移算子**来考虑格点上的规范对称

性。我们知道，规范对称性 (对称群为 G) 的对称变换 $V(x) \in G$ 是依赖于时空坐标的。如果一个物质场 $\psi(x)$ 属于群 G 的表示 R，则其对称变换可以表示为

$$\psi'(x) = V(x)\psi(x), \quad V(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta^a(x)T^a} \tag{2.9}$$

其中 $\theta^a(x)$ 是时空坐标依赖的群变换参数，T^a 是群的第 a 个生成元在 R 表示的表示矩阵。由于对称变换的定域性，两个不同时空点上的场 ψ 不能直接比较，也不能直接定义规范不变的标量内积，需要引入平行移动算子的概念。如果用 $U(x, x+\mathrm{d}x)$ 表示将 ψ 从时空点 $x+\mathrm{d}x$ 移动到 x 的平行移动算子，则 ψ 在 x 的值和 $x+\mathrm{d}x$ 的值的差定义为

$$U(x, x+\mathrm{d}x)\psi(x+\mathrm{d}x) - \psi(x) = \partial_\mu\psi(x)\mathrm{d}x^\mu + \delta\psi(x) \tag{2.10}$$

其中等式右边第一项是普通的微分项，第二项则来自不同时空点规范变换的差异。原则上，$\delta\psi(x)$ 应该正比于 $\mathrm{d}x^\mu$ 和 $\psi(x)$，即

$$\delta\psi(x) = -\mathrm{i}gA_\mu(x)\psi(x)\mathrm{d}x^\mu \tag{2.11}$$

其中 g 是常数因子 (规范耦合常数)，$A_\mu(x) = A^a_\mu(x)T^a(R)$ 是比例因子，属于群 G 的李代数。实际上 $A_\mu(x)$ 就是我们熟悉的规范场，从几何意义上讲是一种联络场。引入协变导数 $D_\mu(x) = \partial_\mu - \mathrm{i}gA_\mu(x)$，则当 $A_\mu(x)$ 在定域规范变换下满足如下变换关系，

$$A'_\mu(x) = V(x)A_\mu(x)V^\dagger(x) + \frac{\mathrm{i}}{g}V(x)\partial_\mu V(x)^\dagger \tag{2.12}$$

$D_\mu\psi(x)$ 满足和 $\psi(x)$ 相同的定域变换关系 $D_\mu\psi(x) \to V(x)D_\mu\psi(x)$。这样，我们就可以定义 $\psi(x)$ 和 $\psi(x+dx)$ 的标量积，

$$(\psi(x), \psi(x+\mathrm{d}x)) \equiv \psi(x)^\dagger U(x, x+\mathrm{d}x)\psi(x+\mathrm{d}x) = \psi^\dagger(x)\psi(x) + \mathrm{d}x^\mu\psi(x)^\dagger D_\mu\psi(x) + \ldots \tag{2.13}$$

相应地，利用关系 $\psi(x+\mathrm{d}x) = \psi(x) + \mathrm{d}x^\mu\partial_\mu\psi(x)$，$A_\mu(x)$ 也给出了无穷小平行移动算子的定义

$$U(x, x+\mathrm{d}x) = 1 - \mathrm{i}gA_\mu(x)\mathrm{d}x^\mu \approx \mathrm{e}^{-\mathrm{i}gA_\mu(x)\mathrm{d}x^\mu} \tag{2.14}$$

对于一个沿某一路径 C 从 y 到 z 的有限平行移动，我们可以看做是通过该路径进行无穷多的无穷小移动的顺序操作的结果，从而形式地表示为

$$U(z, y; C) = \mathcal{P}\mathrm{e}^{\mathrm{i}g\int_C \mathrm{d}x_\mu A_\mu(x)} \tag{2.15}$$

这里算符 $\mathcal{P}$ 表示沿路径 C 积分。显然 $U(z,y;C)$ 是对路径 C 依赖的，而且可以证明它的定域规范变化性质为

$$U(z,y;C) \to V(z)U(z,y;C)V^{\dagger}(y) \tag{2.16}$$

这是平行移动算子的一个十分重要的性质，即其规范变换性质只和路径 C 的两端的时空点上的规范变换性质有关。平行移动算子给出了两类重要的规范不变量，一种是通过其连接的不同时空点上物质场的标量积即 $\psi^{\dagger}(x)U(x,y;C)\psi(y)$；另一种是经封闭回路 C 回到起点的平行移动算子在颜色空间的迹，即

$$W(C)(x) = \mathrm{Tr}\, U(x,x;C) \tag{2.17}$$

这个量一般称作 Wilson 圈。这两种规范不变量是我们在时空格点上构造规范不变的 QCD 作用量的出发点。图 2.1 给出格点上定义的物质场 (quark 场) 和规范场 (gluon 场) 的示意图，其中物质场定义在格位 (用黑点表示) 上，规范场由从格位出发的有限平移算子表示；封闭的路径 (1×1 方块) 是最小的 Wilson 圈，由有限平移算子连接的两个时空点上的物质场的内积也是规范不变量。

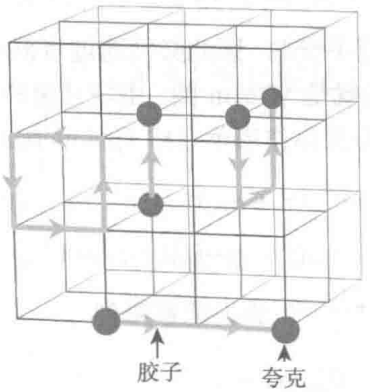


图 2.1 格子上的费米场和规范场，以及规范不变量的示意图。物质场 (quark 场) 定义在格位 (用黑点表示) 上，规范场由从格位出发的有限平移算子表示；封闭的路径 (1×1 方块) 是最小的 Wilson 圈，由有限平移算子连接的两个时空点上的物质场的内积也是规范不变量

2.1.2 规范场的格点作用量

正如上面讨论的，在连续时空中，规范场 $A_\mu(x) = A^a_\mu(x)T^a$ 的引入是通过无穷小平行移动算子引入的，是一种微分定义，在规范群的李代数中取值。但在离散的时空格子 Λ 上，这种微分定义已经不成立。因此在格点规范理论中，我们引入从格位 (lattice site) $x \in \Lambda$ 沿 μ 方向移动距离为 a 的平行移动算子 $U_\mu(x)$ 作为基本

的规范场变量，

$$U_\mu(x) \equiv U(x, x+a\hat{\mu}) = \mathcal{P}\exp\left[-ig\int_x^{x+a\hat{\mu}} \mathrm{d}z_\mu A_\mu(z)\right] \approx \mathrm{e}^{-iagA_\mu(x+\frac{a}{2}\hat{\mu})} \tag{2.18}$$

这是格点上最小的有限平移算子，通常称作规范键变量 (gauge link)，是规范群的元素，满足规范变换性质

$$U_\mu(x) \to V(x)U_\mu(x)V(x+a\hat{\mu})^\dagger \tag{2.19}$$

显然，当格距 a 很小 $(a \to 0)$ 时有

$$U_\mu(x) = 1 - \mathrm{i}agA_\mu(x) + \mathcal{O}(a^2) \tag{2.20}$$

可以看出，这也是规范场 $A_\mu(x)$ 在格点上的实现方式。这样一来，格点上沿任意可能的路径的平行移动算子都可以由 $U_\mu(x)$ 首尾相乘生成。

我们已经知道，由规范键首尾相连形成的封闭路径在规范群空间的矩阵迹是一类重要的不变量，即 Wilson 圈，

$$W(C) = \mathrm{Tr}[U_\mu(x)U_\nu(x+a\hat{\mu})....U_{-\rho}(x+a\hat{\rho})] \tag{2.21}$$

由于作用量是定域规范不变的，因此必须通过规范不变量构造，构造格点上规范场作用量 S_g 的基本单元就是 Wilson 圈。由规范键构成的最小回路是一个 1×1 的小正方形回路 $U_{\mu\nu}(x)$，通常称作规范方格 (plaquette)

$$\begin{aligned} U_{\mu\nu}(x) &= U_\mu(x)U_\nu(x+a\hat{\mu})U_{-\mu}(x+a\hat{\mu}+a\hat{\nu})U_{-\nu}(x+a\hat{\nu}) \\ &= U_\mu(x)U_\nu(x+a\hat{\mu})U_\mu^\dagger(x+a\hat{\nu})U_\nu^\dagger(x), \end{aligned} \tag{2.22}$$

根据定义 $U_\mu(x) = \mathrm{e}^{-iagA_\mu(x+a\hat{\mu}/2)}$ 我们能够得到

$$U_{\mu\nu}(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a^2gF_{\mu\nu}(x)+\mathcal{O}(a^3)} \tag{2.23}$$

$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) - \mathrm{i}g[A_\mu(x), A_\nu(x)]$ 为场强张量。

对于 $SU(N)$ 规范理论，很容易看到，

$$Re\,\mathrm{Tr}[I - U_{\mu\nu}] \propto a^4g^2(\mathrm{Tr}[(F_{\mu\nu})^2] + \mathcal{O}(a^2)) \tag{2.24}$$

由此，我们得到格点上的最简单的 $SU(N)$ 规范理论的作用量形式，

$$\begin{aligned} S_g[U] &= \frac{2}{g^2}\,\mathrm{Tr}\sum_{x;\mu<\nu}\{1 - \frac{1}{2}(U_{\mu\nu}(x) + U_{\mu\nu}^\dagger(x))\} \\ &= \beta\sum_{\mathcal{P}}\{1 - \frac{1}{2N}\,\mathrm{Tr}(U_{\mathcal{P}} + U_{\mathcal{P}}^\dagger)\} \end{aligned} \tag{2.25}$$

其中 $\beta \equiv \dfrac{2N}{g^2}$ 是耦合常数部分，$U_{\mu\nu}(x)$ 代表格点上在 $\mu-\nu$ 平面上的规范方格 (plaquette)，第二个等式后面的求和指对所有的 plaquette 进行。显然当取连续极限 $a \to 0$ 时，$S_g[U]$ 回到连续形式。这个格点作用量形式是 Wilson 最早提出的，因此一般又称作 Wilson 规范作用量。

2.1.3 夸克场的格点实现

和规范场不同，费米子场的格点实现比较直接，即直接定义在格点体系 Λ 的格位 (site) 上，表示为 $\psi(x)$ 和 $\bar{\psi}(x)$, $x \in \Lambda$，其颜色、狄拉克指标以及味道等内部量子数跟连续时空中的一样。

连续欧氏时空的自由费米场作用量为

$$S_f = \int \mathrm{d}^4 x \bar{\psi}(x)(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi(x) \tag{2.26}$$

其中 m 是费米子质量。在离散格子上，如果我们用对称的差分形式来代替时空导数

$$\partial_\mu \psi(x) \to \frac{1}{2a}(\psi(x+a\hat{\mu}) - \psi(x-a\hat{\mu})) \tag{2.27}$$

并将时空积分替换为对所有的格位 $x \in \Lambda$ 的求和，则 S_f 可以相应地表达为

$$\begin{aligned} S_f =& a^4 \sum_{\mu, x\in\Lambda} \bar{\psi}(x) \left[\sum_{\mu=1}^{4} \gamma_\mu \frac{\psi(x+a\hat{\mu}) - \psi(x-a\hat{\mu})}{2a} + m\psi(x) \right] \\ \equiv& a^3 \sum_{x,y\in\Lambda} \bar{\psi}(x) M(x,y) \psi(y) \end{aligned} \tag{2.28}$$

其中 $M(x,y)$ 可以看作在离散坐标空间和旋量空间的矩阵，

$$M(x,y) = \sum_\mu \frac{1}{2} \left[\gamma_\mu (\delta_{x+a\hat{\mu},y} - \delta_{x-a\hat{\mu},y}) \right] + ma\delta_{xy} \tag{2.29}$$

利用格距为 a 的离散的时空格子上的 Fourier 变换性质，

$$\psi(x) = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{\psi}(p) \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} \tag{2.30}$$

和

$$M(x,y) = \frac{1}{a^4} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{M}(p) \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)} \equiv \frac{1}{a^4} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} (\mathrm{i}\gamma_\mu \sin(p_\mu a) + ma) \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)} \tag{2.31}$$

格点上费米子的自由传播子可以表示为

$$\langle\psi(x)\bar{\psi}(y)\rangle = M^{-1}(x,y) = a\int_{-\pi/a}^{\pi/a}\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{\mathrm{i}\gamma_\mu\sin(p_\mu a)+ma} \tag{2.32}$$

这个表达式和连续场论中费米子传播子的区别在于：1) 动量积分限为 $p\in(-\pi/a,\pi/a]$，这是格点正规化的直接结果，和晶格动力学类似，对于格距为 a 的无穷大周期性格子，动量取值为第一布里渊区 (Brillouin zone)(这正是格点正规化的含义，即格距 a 自然提供了一个紫外动量截断，使得格点场论不存在紫外发散，而且如果时空格点为有限，比如格点线度为 L，则会自然提供一个红外截断 $|p|>2\pi/(La)$，所以格点场论是没有发散的场论)；2) 动量以 $\sin(p_\mu a)$ 的形式出现。当取连续极限 $(a\to 0)$ 时，显然当 $p_\mu a$ 很小时有 $\sin(p_\mu a)\to p_\mu a$，传播子回到连续形式，有正确的连续极限。我们知道传播子的极点对应于物理的单粒子激发，但是从公式 (2.32) 可以看出，费米子传播子第一布里渊区存在十六个极点，对应于十六个费米子型传播模式。这就是所谓的格点“费米子加倍子”问题 (fermion doubling)，比如在手征极限 $m=0$ 时，传播子的极点动量的四个分量分别可以取 0 或 π/a，但只有 $p_\mu=(0,0,0,0)$ 对应于物理的费米子传播模式。

以上的这种格点费米子的直接实现方式通常称作“天真”(naive) 格点费米子。

实际上，费米子加倍子问题和费米子的手征性联系在一起。对于现在这种最简单的格点费米子实现中，当费米子质量为零时，费米子矩阵 $M(x,y)$ 具有严格的手征对称性，

$$\{\gamma_5,M\}=0,\quad \gamma_5M+M\gamma_5=0 \tag{2.33}$$

即费米子作用量在轴 $U_A(1)$ 变换下不变。更深入的研究表明，每一味费米子的十六种模式中有八种的手征性为正，另八种为负，这保证了费米子在与矢量规范场耦合时规范反常的消除，从而保证了理论的可重整性；但另一方面，整体的轴变换对称性表明存在相应的严格的守恒流 —— 轴矢流，在任意有限的格距 a 时，轴矢流都是守恒的。但我们知道轴矢流反常是一种量子效应，它是客观存在的，因此这种格点费米子实现是和连续极限相违背的。加倍子的存在表明具有确定手征性的费米子的直接的格点实现是有困难的。事实上，在格点规范场论研究的早期，Nielsen 和 Ninomiya 就证明了一个 No-go 定理 [4]：格点规范场论不可能同时满足以下四个条件：

(1) 狄拉克矩阵 M 是局域的，而且具有平移不变性；

(2) M 具有正确的连续极限，例如当动量 p 很小时，$\tilde{M}(p)=\mathrm{i}\not{p}$；

(3) 不存在加倍子，即 $\tilde{M}(p)$ 在 $p\neq 0$ 时，是非奇异的；

(4) 费米子拥有 (naive 的) 手征对称性：$\gamma_5M+M\gamma_5=0$。

随着格点理论的发展，人们发现可以重新定义格点上的手征对称性以回避这个 No-go 定理，即利用 Ginsparg-Wilson 关系

$$\gamma_5 M + M\gamma_5 = aRM\gamma_5 M \tag{2.34}$$

式中 M 是费米子矩阵，R 是正比于单位矩阵的算符。它作为格点上的手征对称性的定义以取代连续形式的手征对称性 $\{\gamma_5, M\} = 0$。满足这个关系的 M 可以消除费米子加倍问题，例如，后来提出的格点上手征费米子的实现方式 overlap 费米子和 domain-wall 费米子作用量。

当有规范场和费米子耦合时，考虑到费米子场的定域规范变换性质，

$$\psi(x) \to V(x)\psi(x),\ \bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}(x)V^{\dagger}(x) \tag{2.35}$$

显然公式 (2.28) 中的作用量 S_f 不是规范不变的 (夸克场内积 $\bar{\psi}(x)\psi(y)$ 不是规范不变量)。规范不变的夸克的作用量必须通过规范不变的算符构造。前面为了引入规范场，我们已经找到并利用了格子上的一个规范不变量 $\bar{\psi}(n)U_\mu(n)\psi(n+\hat{\mu})$ 。实际上，即使不是近邻的费米子场，只要通过规范链沿着某个路径 C 连接起来，

$$L(x, y; C) = \bar{\psi}(x)U_\mu(x)U_\nu(x + a\hat{\mu})....U_\rho(m - a\hat{\rho})\psi(y) \tag{2.36}$$

也是规范不变的。为了表述方便，我们定义负方向的规范键为

$$U_{-\mu}(x) \equiv U_\mu^{\dagger}(x - a\hat{\mu}). \tag{2.37}$$

这样，有规范耦合的费米子作用量就可以写为

$$S_f[\psi, \bar{\psi}, U] = a^4 \sum_{x\in\Lambda;\mu} \bar{\psi}(x)\left[\frac{1}{2a}\gamma_\mu\left(U_\mu(x)\psi(x + a\hat{\mu}) - U_{-\mu}(x)\psi(x - a\hat{\mu})\right) + m\psi(x)\right] \tag{2.38}$$

可以很直接地证明，S_f 在连续极限时会回到连续形式 $S_f = \int \mathrm{d}^4x\bar{\psi}(x)(\gamma_\mu D_\mu(x) + m)\psi(x)$，其中 $D_\mu(x) = \partial_\mu - \mathrm{i}gA_\mu(x)$ 为协变导数。

2.1.4 Wilson 费米子作用量

由于加倍子的存在，naive 的费米子作用量并不是格点费米子场的最终实现方式。格点规范场论早期提出的 Wilson 费米子和 Kogut-Susskind 费米子，后者又常称作“交错”(staggered) 费米子，以及基于这两种实现的改进形式，仍是目前格点 QCD 数值计算中运用最广泛的费米子作用量。交错费米子是“天真”(naive) 费米子的约化版，基本思想是在每个格位上定义费米子的一个 Dirac 分量，完整的 Dirac 结构由近邻格位的费米子共同构成 [5, 6]，其优点是保持了部分手征对称性，

同时部分地消除了费米子加倍子，而且自动改进到 $\mathcal{O}(a^2)$。但是由于没有完全消除加倍子，这种作用量形式在连续极限下描述四种简并的费米子。交错费米子由于数值计算效率高的特点仍被广泛使用。在实际运用中，对于每一味物理的费米子的四种简并模式，通常通过取路径积分中的交叠费米子行列式的四次方根的形式来消除多余的自由度。这种求根的方式的可靠性没有严格的证明，但实际计算表明是可行的。有关交错费米子的细节我们不做详细介绍，感兴趣的读者可以参阅文献 [5]。下面我们重点讨论 Wilson 费米子的实现方案。

注意到“天真”费米子作用量的加倍子主要来自于将连续时空的微商替换为离散格子上的对称的时空差分，Wilson 建议引入额外的项 ——Wilson 项 —— 来消除多余的零点 (更严格的说法是在能谱上抬高其余十五个非物理零点对应的费米子的激发能量)。Wilson 项是一个量纲为五的算符 $(-\dfrac{1}{2}ar\bar{\psi}D^2\psi)$，其中 $D^2 = D_\mu D_\mu$ 是协变导数 D_μ 的标量内积，r 是 Wilson 参数，可以调节，一般取 $r = 1$。

在自由费米子情形，$D^2 = \partial^2$，其在格点上取有限差分形式

$$\bar{\psi}(x)\partial^2\psi(x) \to \frac{1}{a^2}\sum_\mu \bar{\psi}(x)\left(\psi(x+a\hat{\mu}) + \psi(x-a\hat{\mu}) - 2\psi(x)\right) \tag{2.39}$$

这样，自由的 Wilson 费米子作用量为

$$S_f^{(W)} = a^3 \sum_{x,y\in\Lambda} \bar{\psi}(x) M^{(W)}(x,y)\psi(y) \tag{2.40}$$

其中，Wilson 费米子矩阵为

$$M^{(W)}(x,y) = (ma+4r)\delta_{xy} - \frac{1}{2}\left(\sum_\mu (r-\gamma_\mu)\delta_{x+a\hat{\mu},y} - (r+\gamma_\mu)\delta_{x-a\hat{\mu},y}\right) \tag{2.41}$$

其动量空间表达为

$$\tilde{M}^{(W)}(p) = (ma+4r) + \sum_\mu \left(\mathrm{i}\gamma_\mu \sin(p_\mu a) - r\cos(p_\mu a)\right) \tag{2.42}$$

它的零点就是费米子传播子 $\tilde{S}_F(p)$ 的极点 ($\tilde{S}_F(p) \propto \tilde{M}^{-1}(p)$)。注意，当 $r = 0$ 时，上式对应于“天真”费米子的情形，如果 p ($|p_\mu|a < \pi/2$) 满足零点方程 $ma + \sum_\mu \mathrm{i}\gamma_\mu \sin(p_\mu a) = 0$, 则 p 的任意一个或多个分量换成 $\pi/a - p_\mu$ 也满足零点方程，这些动量模式就是“天真”费米子的加倍子。对于 Wilson 费米子 ($r \neq 0$)，在 $a \to 0$ 时，利用 $\sin(p_\mu a) = \sin(\pi - p_\mu a) \sim p_\mu a$, $\sum_\mu \cos(p'_\mu a) \sim 4 - 2n$ (这里 p' 含义是将 p 中的 n 个分量替换为 $\pi/a - p_\mu$ 之后的加倍子动量)，我们得到 Wilson 费米子算符的零点方程

$$p^2 + (m + 2nr/a)^2 + \mathcal{O}(a) = 0 \tag{2.43}$$

可以看出，$p_\mu a \sim (0,0,0,0)$ 的模式的质量约为 m，对应于物理的传播模式；而十五个多余的模式获得质量 $m + 2nr/a(n \neq 0)$，并且当 $a \to 0$ 时质量趋于无穷，从而与我们感兴趣的物理退耦。这是引入 Wilson 项的好处，即解决了费米子加倍问题。但是，在有限格距 a 时 Wilson 项明显破坏手征对性 (注意到 Wilson 项的系数正比于 a，所以在连续极限下手征对称性可以恢复)。由于有限格距下手征对称性不成立，费米子的质量 m 的重整化除了相乘性重整化常数 Z_m 之外，还有一个相加性重整化常数 $m_{\rm cr}$(称作临界质量)

$$m_R = Z_m(m - m_{\rm cr}), \tag{2.44}$$

其中 $m_{\rm cr}$ 的值依赖于格距。在弱耦合情形，Z_m 和 $m_{\rm cr}$ 可以通过格点微扰论进行计算。此外，它们也可以通过非微扰重整化方案进行数值计算。

和“天真”费米子作用量类似，当考虑费米子和规范场耦合时，需要引入规范键变量 $U_\mu(x)$ 从而保证作用量的规范对称性。最终的 Wilson 费米子作用量的形式为

$$\begin{aligned} S_f^{(W)}[\psi,\bar\psi,U] &= a^3 \sum_{x,y\in\Lambda} \bar\psi(x) M^{(W)}[U](x,y)\psi(y) \\ M^{(W)}[U](x,y) &= (ma+4r)\delta_{xy} \\ &\quad -\frac{1}{2}\sum_\mu [(r-\gamma_\mu)U_\mu(x)\delta_{x+a\hat\mu,y} + (r+\gamma_\mu)U_{-\mu}(x)\delta_{x-a\hat\mu,y}] \end{aligned} \tag{2.45}$$

Wilson 费米子的另一个重要性质就是费米子矩阵 $M^{(W)}$ 的 γ_5- 厄米性 (实际上大部分的格点费米子算符都具有这个性质)

$$(\gamma_5 M^{(W)})^\dagger = \gamma_5 M^{(W)} \tag{2.46}$$

相应地，费米子传播子 $S_F \propto (M^{(W)})^{-1}$ 也具有这个性质。注意这里的厄米共轭是针对坐标空间、旋量空间和颜色空间的直乘空间的矩阵而言。如果将坐标明显表示出来，费米子传播子的 γ_5- 厄米性为 $\gamma_5 S_F^\dagger(x,y)\gamma_5 = S_F(y,x)$(这里的厄米共轭只针对颜色和旋量矩阵)，这个性质的重要含义是建立了 $S_F(x,y)$ 和 $S_F(y,x)$ 的联系。我们后面可以看到，利用这个性质可以大大简化数值模拟研究中对夸克传播子的计算。

2.1.5 Wilson 费米子的对称性

虽然格点正规化方案破坏了连续时空的平移和转动对称性，但是我们预期，在连续极限下，这些对称性能得到恢复。表 2.1 列出了 Wilson 费米子的离散对称性 $\mathcal{C},\mathcal{P},\mathcal{T}$。我们需要利用这些性质来构造具有特定量子数 J^{PC} 的算符。

表 2.1　格点上规范场变量和费米场的 $\mathcal{C},\mathcal{P},\mathcal{T}$ 变换性质

	$\mathcal{P}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{T}$
$U_i(\boldsymbol{x},t)$	$U_{-i}(-\boldsymbol{x},t)$	$U_i^\star(\boldsymbol{x},t)$	$U_i(\boldsymbol{x},-t)$
$U_4(\boldsymbol{x},t)$	$U_4(-\boldsymbol{x},t)$	$U_4^\star(\boldsymbol{x},t)$	$U_4(\boldsymbol{x},-t)$
$\psi(\boldsymbol{x},t)$	$\gamma_4\psi(-\boldsymbol{x},t)$	$\gamma_4\gamma_2\bar{\psi}^T(\boldsymbol{x},t)$	$\gamma_4\gamma_5\psi(\boldsymbol{x},-t)$
$\bar{\psi}(\boldsymbol{x},t)$	$\bar{\psi}(-\boldsymbol{x},t)\gamma_4$	$-\psi^T(\boldsymbol{x},t)\gamma_2\gamma_4$	$\bar{\psi}(\boldsymbol{x},-t)\gamma_5\gamma_4$

Wilson 费米子破坏了手征对称性，而手征对称性保证了费米子的质量不会发散。在裸质量不为零时，质量的重整化正比于裸质量，即相乘性重整化。

2.1.6　格点上的手征对称性

在零夸克质量极限下，QCD 的拉氏量有一个重要的对称性，即手征对称性。QCD 的这种固有的对称性及其自发破缺在低能强相互作用中有深刻的物理内涵和后果，最典型的就是赝标介子八重态的质量很轻 (手征对称性自发破缺产生的 Goldstone 粒子)。人们自然期望 QCD 的格点实现也应该保持手征对称性。其实早在 1982 年，Ginsparg 和 Wilson 就讨论过手征对称性的格点实现问题 [7]。他们从手征对称性的作用量出发，利用实空间重整化的方法寻找合适的格点 Dirac 算符 D，发现一类算符满足关系，

$$\gamma_5 D + D\gamma_5 = aDR\gamma_5 D \tag{2.47}$$

其中 a 是格距，R 在 Dirac 子空间正比于单位算符，这后来被称作 Ginsparg-Wilson 关系 (GW 关系)。可以看出，当取连续极限 $a \to 0$ 时，连续的手征对称性恢复。更重要的是，由 GW 关系可以得到 $\{\gamma_5, D^{-1}\} = aR\gamma_5$，考虑到 D^{-1} 对应于零质量的费米子的传播子，这说明，即使在时空格子上，满足 GW 关系的费米子的传播子只在 δ_{xy}(接触项) 的水平上偏离连续的手征对称性，即

$$\gamma_5 S_F(x,y;m=0) + S_F(x,y;m=0) = aR\gamma_5\delta_{xy} \tag{2.48}$$

GW 关系在提出十几年后才受到人们的重视，人们找到了满足 GW 关系的几种实现方式，如交迭费米子，畴壁费米子，以及固定点 (fixed point) 作用量形式。

人们进而发现，在手征极限下 $(m=0)$，满足 GW 关系的 Dirac 算符 D 构成的作用量形式 $S_f = \bar{\psi}D\psi$ 在如下变化下

$$\begin{aligned} \psi &\to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\gamma_5(1-aD/2)}\psi \\ \bar{\psi} &\to \bar{\psi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\gamma_5(1-aD/2))} \end{aligned} \tag{2.49}$$

是不变的。所以人们也把这种变换称作格点上的手征变换，把 GW 关系称作格点上的手征对称性。

和连续情形的手征对称性一样，格点上的手征对称性也能够给出轴矢流反常，

$$\Delta_\mu A_\mu(x) = 2mP(x) - a \operatorname*{Tr}_{\text{Dirac}} D(x,x) + ... \tag{2.50}$$

其中 Δ_μ 是格点上的微商 (有限差分)，最后一项是反常项，求迹运算对旋量空间进行。

目前广泛采用的手征费米子 (又叫 Ginsparg-Wilson 费米子) 有两类，即交迭 (overlap) 费米子和畴壁 (domain wall) 费米子。Overlap 费米子算符 D_{ov} 定义为

$$D_{\text{ov}} = 1 + \gamma_5 \epsilon(H_W(\rho)) \tag{2.51}$$

其中 $\epsilon(H_W(\rho))$ 是厄米矩阵 $H_W(\rho)$ 的符号矩阵 $\epsilon(H_W) = H_W/\sqrt{H_W^2}$，$H_W(\rho) = \gamma_5 M^{(W)}(\rho)$ (ρ 对应于 Wilson 费米子算符 $M^{(W)}$ 中的质量参数 ma，但取值范围为 $-2 < \rho < 0$)。在此情形下，有质量的费米子的传播子 $D_c^{-1}(ma)$ 定义为

$$D_c^{-1}(ma) = \frac{1}{D_c(0) + ma} \tag{2.52}$$

其中 $D_c = \rho D_{\text{ov}}/(1 - D_{\text{ov}}/2)$，$ma$ 是费米子的裸质量参数。需要强调的是，根据 D_{ov} 满足的 GW 关系可以得到 $\{\gamma_5, D_c(0)\} = 0$，这隐含的含义是质量参数 ma 是对应于连续情形的费米子裸质量，也是出现于上面反常轴矢流关系中的质量。这是交迭费米子实现的很重要的性质。

另一种是畴壁费米子，它定义在五维空间，左手和右手的费米子分别限制在第五维两端的四维时空。当第五维趋于无穷时，左右手费米子没有耦合，所以手征对称性是完全满足的。但在实际计算时，第五维是有限的，左右手费米子还是有很小的耦合，从而造成手征对称性的微小的破坏，表现为费米子有微小的剩余质量。这个剩余质量的大小可以通过调整第五维长度来控制。

每种格点费米子实现方案都有优缺点。Wilson 费米子实现会有质量的相加性重整化；格点上的畴壁费米子由于第五维有限会有一个小的剩余质量 m_{res}；交迭费米子算符严格满足格点上的手征对称性 (GW 关系)，没有相加性质量重整化，但在数值实现中会因对矩阵符号函数 $\epsilon(H_W)$ 的处理而带来很大的计算开销，所以对计算资源要求很高。一般而言，由于手征对称性是 QCD 的固有性质，Ginsparg-Wilson 费米子有其理论上的优越性，但通常所需的计算开销比其他费米子方案的计算量大至少一个量级。一个妥协的方案是，如果所研究的物理问题对手征对称性不很敏感，则可以不采用手征费米子作用量从而降低对计算资源的需求。

2.1.7 连续极限

在前面我们看到，当 $a \to 0$ 时，格点规范作用量和费米子作用量都会回到连续的形式。但是，一般而言，仅仅通过取 $a \to 0$ 的极限并不必然使格点场论给出

正确的连续场论。格点场论可以看作是连续场论的一种正规化方案，有限的格距 a 提供了一个自然的 $\mathcal{O}(1/a)$ 的紫外截断，因此，根据重整化理论，格点作用量中的耦合常数 g 与格距有必然的内在联系。

原则上讲，我们要求格点上测量的所有的物理量在连续极限下是有限的。由于格距 a 是格点场论中的唯一有量纲的参量 (暂时忽略质量)，考虑物理量 Θ，如果其能量量纲为 d_Θ，则其在格点场论中的测量值为无量纲的数

$$\hat{\Theta}(g) = \Theta(g,a)a^{d_\Theta} \tag{2.53}$$

其中 $\Theta(g,a)$ 在 $a \to 0$ 时是有限的，并且连续极限要求

$$\Theta(g(a),a) \xrightarrow[a\to 0]{} \Theta_{\text{phys}} \tag{2.54}$$

这说明当 $a \to 0$ 时，耦合常数 $g(a)$ 应该随 a 变化，而且 $\hat{\Theta}(g) \to \infty$。如果 Θ 是某种关联长度，$\hat{\Theta}(g) \to \infty$ 预示着当 $a \to 0$ 时，g 会趋于一个临界值 g_{cr}，这个临界值定义了体系的一个临界标度不动点，所有的物理量在临界点趋于常数。根据临界行为的特征，所有的物理量在临界点附近都正比于关联长度的幂次 (幂次依赖于物理量的量纲)，这就要求 a 和 g 在临界点附近满足某种普适的标度关系 $a = \frac{1}{\Lambda}f(g)$，其中 Λ 是一个标度参量。

对于非阿贝尔规范场论，理论上已经证明它具有渐近自由的性质，$g_{\text{cr}} = 0$ 具有标度临界点的性质。另外，在此临界点附近，非阿贝尔规范理论可以进行微扰计算。如果将 $1/a$ 看作紫外截断，由重整化理论知道，规范耦合常数 g 满足 Callan-Symanzik 重整化群方程，

$$\beta(g) = \mu\frac{d}{d\mu}g = -a\frac{d}{da}g \tag{2.55}$$

$\beta(g)$ 就是所谓的 β- 函数。对于包含 N_f 味的 QCD 来说，两圈微扰论给出的 β- 函数为

$$\beta(g) = -\beta_0 g^3 - \beta_1 g^5 \tag{2.56}$$

其中

$$\beta_0 = \frac{1}{16\pi^2}\left(11 - \frac{2}{3}N_f\right), \quad \beta_1 = \frac{1}{(16\pi^2)^2}\left(102 - \frac{38}{3}N_f\right) \tag{2.57}$$

求解方程 (2.55) 我们就得到了 a 和耦合常数 g 的关系

$$a = \frac{1}{\Lambda_L}f(g) \equiv \frac{1}{\Lambda}(\beta_0 g^2)^{-\frac{\beta_1}{2\beta_0^2}} e^{-\frac{1}{2\beta_0 g^2}} \tag{2.58}$$

满足这个关系的 g 的区域通常称作标度区域。

QCD 是非阿贝尔规范理论，因此格点 QCD 具有正确的连续极限，这是由重整化理论保证的。需要指出的是，量子电动力学是阿贝尔规范理论，$g=0$ 是红外不动点，因此其格点形式的连续极限没有很好的定义。

在格点 QCD 计算中，耦合常数 g 通常在标度区域取值。由于在标度区域标度函数 $f(g)$ 的普适性，我们可以利用任意一个有量纲的物理量的物理值按照公式 (2.53) 和公式 (2.54) 确定与 g 对应的格距 a。对于物理量在不同的 g (或者 a) 得到的值进行 $a\to 0$ 的外推，就可以得到该物理量在连续极限下的值。

2.1.8 格点 QCD 的物理观测量和计算方案

场论体系中的物理观测量是格林函数，即基本场算符 (以及由基本场算符构成的组合算符) 的编时乘积的真空期望值。格点 QCD 作为一种场论体系也不例外，也是以场算符乘积的真空期望值作为主要计算目标。我们在前面介绍了在离散的四维欧氏时空格点上定义 QCD 的方法，在本小节中我们将说明格点 QCD 的具体计算方案。原则上讲，当格点 QCD 的作用量定义好之后，我们也可以像连续场论一样，对微扰能区的强相互作用现象进行微扰论计算，即根据作用量形式，采用合适的量子化方案建立完整的 Feynman 规则，从而进行微扰计算。在格点 QCD 理论的早期有许多这方面的工作，具体计算方法和细节请参阅文献 [9]。下面我们着重介绍格点 QCD 的非微扰计算方案。

格点 QCD 采用路径积分量子化方案，所以由夸克场和胶子场构成的算符乘积 $A(\psi,\bar{\psi},\ldots,U)$ 的真空期望值的路径积分表述 (作为约定，我们暂不考虑 Heisenberg 场算符和相应的经典场表述上的区别)，

$$\langle A(\psi,\bar{\psi},\ldots,U)\rangle=\frac{1}{Z}\int \mathcal{D}U\mathcal{D}\bar{\psi}D\psi e^{-(S_g[U]+S_f[\psi,\bar{\psi},U])}A(\psi,\bar{\psi},U) \tag{2.59}$$

其中，格点上的费米子作用量 S_F 可以表示成 ψ 和 $\bar{\psi}$ 的双线性型 $S_f[\psi,\bar{\psi},U]=\bar{\psi}M[U]\psi$，这里 $M[U]$ 是费米子矩阵，具体形式依赖于格点上费米子的实现方式，ψ 可以看作是四维时空格点、旋量空间和颜色空间的直乘空间的列向量。所以上述泛函积分中对费米子场 ψ 和 $\bar{\psi}$ 的积分是高斯型的，可以直接积掉。在给定的背景规范场 $\{U_\mu(x)\}$ 下的费米子场格林函数的生成泛函为

$$Z[\eta,\bar{\eta};U]=\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \mathrm{e}^{-\bar{\psi}M[U]\psi+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta}=\det M[U]\mathrm{e}^{\bar{\eta}M^{-1}[U]\eta}\equiv \det M[U]\mathrm{e}^{\bar{\eta}S[U]\eta} \tag{2.60}$$

这里 S 就是费米子场 ψ 的传播子

$$S[U](x,y)=\langle\psi(x)\bar{\psi}(y)\rangle_U=\frac{1}{Z[0,0;U]}\left[\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}}\frac{\delta}{\delta\eta}Z[\eta,\bar{\eta};U]\right]_{\eta=\bar{\eta}=0}=M^{-1}[U](x,y) \tag{2.61}$$

类似地，对于该背景规范场 $\{U_\mu(x)\}$，算符乘积 $A(\psi,\bar{\psi},\ldots,U)$ 的测量值为

$$\langle A(\psi,\bar{\psi},\ldots,U)\rangle_U=\frac{1}{Z[0,0;U]}\left[A\left(\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}}\frac{\delta}{\delta\eta},U\right)Z[\eta,\bar{\eta};U]\right]_{\eta=\bar{\eta}=0}=F[S[U],U] \tag{2.62}$$

即该测量值可以表达为夸克传播子和规范场的泛函 $F[S[U],U]$，其具体的表达式可以通过我们熟悉的 Wick 收缩得到。最终，$A(\psi,\bar{\psi},\ldots,U)$ 的真空期望值是对规范场的泛函积分

$$\langle A(\psi,\bar{\psi},\ldots,U)\rangle=\frac{1}{Z}\int\mathcal{D}U\det M[U]\mathrm{e}^{-S_g[U]}F[S[U],U] \tag{2.63}$$

这是格点 QCD 中真正要计算的观测量。如果理论中包括多味费米子，比如两味轻夸克 u,d，如果我们取近似 $m_u=m_d$，则有

$$\langle A(\psi,\bar{\psi},\ldots,U)\rangle=\frac{1}{Z}\int\mathcal{D}U|\det M[U]|^2\mathrm{e}^{-S_g[U]}F[S[U],U] \tag{2.64}$$

注意：费米子矩阵只依赖于费米子质量。

格点 QCD 的非微扰计算方法就是基于表达式 (2.64)：可以将算符乘积 A 的真空期望值看作是对所有规范组态 $\{U\}$ 上测量值的加权平均值，权重因子为 $|\det M[U]|^2\mathrm{e}^{-S_g[U]}$；由于经过时空离散化和 Wick 转动，体系的自由度是有限的 (尽管自由度数目极大)，而且该权重因子是有下界的实数，可以看作是规范组态 $\{U\}$ 的可归一的概率分布密度，所以特别适合采用蒙特卡罗数值模拟计算 (关于蒙特卡罗数值模拟计算的相关细节我们在 2.2 节做较详细的介绍) 该路径积分，即按照该几率分布进行重点抽样产生规范组态系综 $\{\{U^{(i)}\},i=1,2,\ldots,N\}$，在该组态系综中的每一个规范组态 $\{U^{(i)}\}$ 上计算泛函值 $F[S[U^{(i)}],U^{(i)}]$，然后计算其算术平均值，就得到了泛函积分的近似值

$$\langle A(\psi,\bar{\psi},\ldots,U)\rangle\approx\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}F[S[U^{(i)}],U^{(i)}] \tag{2.65}$$

计算的误差正比于系综中组态的数目的平方根的倒数 $\delta\langle A\rangle\sim\mathcal{O}(1/\sqrt{N})$；对于算符乘积 A 包含费米子场的情形，计算的首要步骤是在每一个规范组态上计算费米子传播子 $S[U^{(i)}]$。

格点 QCD 计算的格林函数主要是强子算符的多点格林函数 (在格点 QCD 中通常称作多点关联函数)。介子型算符一般为夸克场的双线性型算符 $\bar{\psi}\Gamma\psi$，其中 Γ 是 γ 矩阵以及空间协变微商算符和规范场算符的特定组合，这种组合会给出算符的确定的 J^{PC} 量子数。两个具有相同量子数的算符 $O_A=\bar{\psi}_1\Gamma_A\psi_2$ 和 $O_B=\bar{\psi}_1\Gamma_B\psi_2$ 的关联函数定义为

$$C_{AB}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{0},0)=\langle O_A(\boldsymbol{x},t)O_B^\dagger(\boldsymbol{0},0)\rangle=\langle\bar{\psi}_1(\boldsymbol{x},t)\Gamma_A\psi_2(\boldsymbol{x},t)\bar{\psi}_2(\boldsymbol{0},0)\Gamma'_B\psi_1(\boldsymbol{0},0)\rangle \tag{2.66}$$

其中 $\Gamma'_B = \gamma_4\Gamma_B^\dagger\gamma_4$。经过 Wick 收缩，$C_{AB}$ 可以通过夸克传播子表达为

$$C_{AB}(\boldsymbol{x},t;\mathbf{0},0) = -\langle \mathrm{Tr}\left[S_1[U](\mathbf{0},0;\boldsymbol{x},t)\Gamma_A S_2[U](\boldsymbol{x},t;\mathbf{0},0)\Gamma'_B\right]\rangle \tag{2.67}$$

其中 $S_2[U](\boldsymbol{x},t;\mathbf{0},0)$ 是夸克场 ψ_2 在背景规范场 $\{U\}$ 中从 $(\mathbf{0},0)$ 到 $(\boldsymbol{x},t)$ 的传播子，$S_1[U](\mathbf{0},0;\boldsymbol{x},t)$ 是夸克场 ψ_1 从 $(\boldsymbol{x},t)$ 到 $(\mathbf{0},0)$ 的传播子。为了获得关联函数 C_{AB}，首先要计算的是在背景规范场 $\{U_\mu(x)\}$ 下的夸克传播子 $S[U] = M^{-1}[U]$，这涉及到费米子矩阵 $M[U]$ 的求逆。由于 $M[U]$ 是维数很高的矩阵，直接求逆在实际计算中是不可行的。但是，我们在前面介绍费米子作用量时讲过，对于几乎所有的格点费米子作用量的实现方式，费米子矩阵 $M[U]$ 有一个十分重要的性质就是 γ_5- 厄米性，即 $M^\dagger[U] = \gamma_5 M[U]\gamma_5$，其中的厄米共轭是针对矩阵 $M[U]$ 的所有指标，包括时空坐标 x, 旋量指标 i 和颜色指标 a。传播子 $S[U]$ 也同样具有这个性质。将空间指标明显表达出来的 γ_5- 厄米性给出

$$S[U]^\dagger(x,y) = \gamma_5 S[U](y,x)\gamma_5 \tag{2.68}$$

这里的厄米共轭是对旋量指标和颜色指标。利用这个关系，两点函数 C_{AB} 可以进一步表达为

$$C_{AB}(\boldsymbol{x},t;\mathbf{0},0) = -\langle \mathrm{Tr}\left[S_1[U]^\dagger(\boldsymbol{x},t;\mathbf{0},0)\gamma_5\Gamma_A S_2[U](\boldsymbol{x},t;\mathbf{0},0)\Gamma'_B\gamma_5\right]\rangle \tag{2.69}$$

这个表达式的重要含义是两点函数只需用从 $(\mathbf{0},0)$ 到 $(\boldsymbol{x},t)$ 的传播子表示出来。如果考虑特定动量态的投影，即做傅里叶变换

$$C_{AB}(\boldsymbol{p},t) = \sum_{\boldsymbol{x}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} C_{AB}(\boldsymbol{x},t;\mathbf{0},0) \tag{2.70}$$

其中涉及的也只是从 $(\mathbf{0},0)$ 到所有时空点的夸克传播子，这为我们的数值计算提供了极大便利。利用 $M[U]$ 和 $S[U]$ 的互逆关系

$$M[U]S[U] = \boldsymbol{I}_{spin\otimes color} \otimes \boldsymbol{I}_{spacetime} \tag{2.71}$$

如果我们只取右边单位矩阵的某一列，列指标为 $j,b,x_0 = (\mathbf{0},0)$，则上式对应的线性方程组为

$$M[U]^{i,a}_{k,c}(x,z)S[U]^{k,c}_{j,b}(z,x_0) = \delta_{ij}\delta_{ab}\delta(x,x_0), \tag{2.72}$$

求解该方程组就可以得到解 $S[U]^{j,b}_{k,c}(z,x_0)$，它也是行指标为 k,c,z 的列向量。当上式右边的指标 j 取遍 $j=1,2,3,4$, a 取遍 $a=1,2,3$ 时，我们实际上就得到了从 x_0 到 z 的夸克传播子 $S[U](z,x_0)$。上式的右边的列向量一般称作源向量 (source vector)。由此可以看出，利用 $S[U]$ 的 γ_5- 厄米性，在每一个规范组态，我们不需要

对 $M[U]$ 完全求逆，只要解 4×3 次上述的线性方程组，就可以完成格点 QCD 模拟中所需费米子传播子的求解。推而广之，对方程 (2.71) 右乘一个任意矩阵 B，取 B 的任意一列作为源向量，就可以得到广义的传播子 $S[U]B$ 的一列，这种关系在格点 QCD 计算中被广泛使用。例如，通过对源向量的空间部分进行特定的操作，可以得到各种特定源的广义夸克传播子，细节就不在这里介绍了。需要强调的是，夸克传播子和强子算符的形式和具体强子的性质无关，它们是所有强子关联函数的基本构造单元，所以对传播子的计算是独立于具体强子性质的研究的。所以在产生规范组态后可以直接对夸克传播子先行计算并存储下来，此后所有的强子观测量都可以基于这些传播子构造。

总体而言，格点 QCD 计算强子关联函数的步骤一般分为三步，首先是先根据格点 QCD 的作用量形式通过蒙特卡罗模拟产生规范组态系综；其次是在这些组态上计算所需的夸克传播子；最后，根据关联函数的具体形式进行 Wick 收缩后用夸克传播子表达，然后对关联函数的测量值进行组态平均。

在得到关联函数之后，对这些关联函数进行参数化得到关联函数的具体理论形式，对关联函数进行数据分析，就可以得到我们感兴趣的物理量，如强子质量和强子矩阵元等，具体过程在本章的 2.3 节中详细描述。

2.1.9　系统误差来源

我们已经知道，格点 QCD 可以看作是采用路径积分量子化形式的 QCD 的一种正规化方案。它从第一性原理出发，并通过蒙特卡罗数值模拟计算相应的路径积分，最终得到格林函数等物理观测量，为求解 QCD 的低能性质提供了一种强有力的非微扰解决方案。相对于 QCD 的其他唯象的非微扰理论方法，格点 QCD 最大的特点是不引入任何物理假设，各种误差都能得到很好的控制和量化，所以得到强子物理理论研究和实验研究的日益重视。格点 QCD 的计算结果的误差包含统计误差和系统误差，统计误差来自于蒙特卡罗模拟计算，与统计量 N 直接相关 (正比于 $1/\sqrt{N}$)，所以提高统计量可以有效地降低统计误差，我们在此不对统计误差做过多讨论。格点 QCD 的系统误差来自三个方面，一是时空离散化带来的有限格距误差；二是有限格点体积带来的有限体积效应；三是手征外推误差，即受计算资源和算法本身的限制，许多格点 QCD 计算只能在非物理的 π 质量处进行计算，但要获得真正的物理结果必须外推到物理的 π 介子质量，外推形式的不确定性会带来一定的系统误差。下面我们对这三方面系统误差的处理做简要说明。

对于非 Abel 规范理论 (比如 QCD)，根据重整化群理论可以知道规范耦合常数 g 存在紫外不动点 $g_{\rm cr}=0$，在临界点附近，格距 a 和耦合常数 g 有明确的标度关系，各种物理量有很好的标度行为，所以格点 QCD 在取 $a\to 0$ 时的连续极限时有很好的定义。但是由于实际的计算都是在具有有限的格距 a 的格点体系上

进行的，所计算的物理量都会有离散误差，离散误差一般是 a 的幂次依赖的，比如 Wilson 规范作用量会带来 $\mathcal{O}(a^2)$ 的离散误差，Wilson 费米子作用量的离散误差为 $\mathcal{O}(ma)$ (其中 ma 为夸克质量参数) 等。原则上，格点 QCD 的计算结果只有取 $a \to 0$ 时才能和物理的结果进行合理的比较，格点 QCD 对离散误差的处理方式通常为在若干个不同的 a 的情况下计算相同的物理量 Q，然后利用 a 的多项式的形式进行 $a \to 0$ 的外推，$Q(a) = Q(0) + c_1 a + c_2 a^2 + \ldots$，从而得到连续极限 $Q(0)$。连续极限外推公式中的 a 的幂次项一般和格点 QCD 的作用量形式带来的固有的误差有关，为了改善连续极限外推，需要减小外推公式中的系数 c_1, c_2 等，或者进而消除低幂次项，使得离散误差是 a 的高幂次形式。这可以通过采用对格点作用量的改进来实现 (见后面关于改进作用量的讨论)。大部分利用改进作用量的格点计算的领头阶离散误差具有 $\mathcal{O}(a^2\Lambda^2)$, $\mathcal{O}(\alpha_s a^2 \Lambda^2)$, 或者 $\mathcal{O}(\alpha_s a \Lambda)$ 的形式，其中 Λ 是典型的动量标度。

格点 QCD 计算是在有限大小的超立方格子上进行的，有限的格点体积也给格点上计算的物理量带来有限体积效应。如果我们主要关心温度 (接近) 为零的强相互作用现象，格点计算时一般选取时间方向的格点线度 T 大于空间线度 L(通常的选取 $T \geqslant 2L$)，则时间方向的有限性带来的误差一般不考虑，主要考虑有限的空间体积效应。一般而言，在确定数值模拟的空间线度时，都要考虑所关心的物理体系的典型尺寸，比如一般强子的大小为 $r \sim 1$ fm，则要求格点的空间线度应该选为 $L > 3r$。当然这是一个直觉性的很粗略的估计。Lüscher 仔细研究了有限空间体积对格点上单粒子能量、两粒子能量等的有限体积效应 (详见 节)，基本结论是，如果所研究的物理体系的最轻的粒子的质量为 m 时，格点空间线度取 $mL \gtrsim 4$ 时，有限体积效应可以忽略。当然，有限体积效应并不全是负面的，有限的欧氏格子上多粒子能谱中也包含着丰富的强子-强子相互作用的信息，但需要建立它们和连续物理世界中强子-强子散射性质之间的有效联系。Lüscher 公式就提供了格点上两粒子能谱和强子共振态或强子束缚态之间的对应关系 (见 2.4 节讨论)。

格点 QCD 数值计算的实践表明，当动力学夸克质量越轻时，所需要的计算量就可能急剧增大。对于有些费米子作用量实现 (如最原始的 Wilson 费米子作用量)，轻夸克质量有个临界值，当夸克质量低于这个临界值时，线性方程组 $M[U]x = b$ 的数值求解可能不收敛，而这样的临界值对应的 π 介子质量有可能仍然高于物理的 m_π 很多。所以传统的包含轻味动力学夸克的格点 QCD 研究所用的夸克质量都高于物理的轻夸克质量。如果要将格点 QCD 的计算结果和物理的值做比较，或者要给出物理的理论预言，都需要根据所计算的物理量对夸克质量的依赖关系 (由于格点 QCD 模拟使用的是夸克的裸质量参数，物理量的夸克质量依赖性通常都表述为对 m_π 的依赖性) 外推到手征极限 (或者物理的 m_π) 处，这种外推通常称作手征外推。手征外推的方式有两种，一种是利用经验公式 (m_π 的多项式) 进行简单的

外推，一种是基于手征微扰论 (见第 3 章) 所给出的物理量和 m_π 的具体的函数关系进行外推。不同的外推方式所得的结果可能有偏差，严格的误差分析也需要将这种偏差计入系统误差的估计中。为了进一步地降低由于手征外推带来的不确定性，当前的一些格点 QCD 合作组也在努力实现在物理的 m_π 的格点数值模拟，并且有了许多进展和有趣的结果。

2.1.10　作用量改进方案

在本节的最后，我们对作用量的改进方案做简要介绍。我们在前面已经看到，在构建格点上的规范场作用量和费米子作用量时首先要求作用量具有正确的对称性性质 (如规范不变性和分立对称性等)，还要求在 $a \to 0$ 时回到连续时空的作用量形式，而在有限的格距 a，格点作用量与连续的形式的偏差正比于 a 的幂次。实际上，满足这些条件格点作用量形式有许多种，它们的不同主要体现在离散误差的形式，比如 Wilson 规范作用量的离散误差为 $\mathcal{O}(a^2)$；Wilson 费米子作用量的离散误差为 $\mathcal{O}(ma)$，而 naive 的费米子作用量的离散误差为 $\mathcal{O}(m^2a^2)$。由于我们最终要对计算结果取连续极限，作用量中的这些固有的离散误差形式都会传递到所计算的物理量的离散误差形式上。改善离散误差的自然的想法就是对格点作用量进行改进。Symanzik 改进方案就是一种改进作用量的系统方案。

当对格点作用量进行 $a \to 0$ 的经典展开时，我们会发现领头阶的项具有连续时空的作用量形式，高阶项中肯定会出现高量纲的算符 (比如 Wilson 规范作用量的次领头阶项为 $\sum_j a^2 c_j O_6^{(j)}$，其中 O_6 为质量量纲为 6 的算符)，按照实空间重整化群理论，这些高量纲算符都是无关算符 (irrelevant operator)，在取连续极限时对物理没有贡献。Symanzik 指出，如果将格点规范场论视作一个有效理论，即将能标在 a^{-1} 以上的物理被积分掉得到的理论，那么它应该包含一些高维的算符，这些算符都被 a 的幂次压低，也就是说，作用量中 D 维的算符前面的系数包含 a^{D-4}。于是我们想要改进作用量到某一阶，只须找到所有线性无关的相应算符，并计算出他们前面的系数就可以了。比如，我们先把作用量写成

$$S_{\text{eff}} = \int \mathrm{d}x^4 \mathcal{L}_0(x) + a\mathcal{L}^{(1)}(x) + a^2\mathcal{L}^{(2)}(x) + \ldots \tag{2.73}$$

其中，第一项表示最简单的格点作用量如 Wilson 规范作用量和 Wilson 费米子作用量，而 $L^{(k)}(x)$ 则是添加的改进项，包含量纲为 $4+k$ 的算符 (所以是 $O(a^k)$ 的项)。通过调节改进项中的参数，消除第一项中的高量纲算符项，就达到了改进的目的。

对于 Wilson 费米子作用量，$L^{(1)}(x)$ 中包括如下几个量纲为 5 的算符 [10]

$$\mathcal{L}_1^{(1)}(x) = \bar{\psi}(x)\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}(x)\psi(x)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2^{(1)}(x) &= \bar{\psi}(x)(\overrightarrow{D}_\mu(x)\overrightarrow{D}_\mu(x) + \overleftarrow{D}_\mu(x)\overleftarrow{D}_\mu(x))\psi(x) \\
\mathcal{L}_3^{(1)}(x) &= m\mathrm{Tr}[F_{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)] \\
\mathcal{L}_4^{(1)}(x) &= m\bar{\psi}(x)(\gamma_\mu\overrightarrow{D}_\mu(x) - \gamma_\mu\overleftarrow{D}_\mu(x))\psi(x) \\
\mathcal{L}_5^{(1)}(x) &= m^2\bar{\psi}(x)\psi(x)
\end{aligned} \tag{2.74}$$

利用运动方程 $(\not{D} + m)\psi = 0$ 可以得到它们的两个关系

$$\mathcal{L}_1^{(1)} - \mathcal{L}_2^{(1)} + 2\mathcal{L}_5^{(1)} = 0,\ \mathcal{L}_4^{(1)} + 2\mathcal{L}_5^{(1)} = 0 \tag{2.75}$$

也就是说，这五个算符中只有三个是独立的，我们考虑 $\mathcal{L}_1^{(1)}$，$\mathcal{L}_3^{(1)}$ 和 $\mathcal{L}_5^{(1)}$ 这三个算符。$\mathcal{L}_3^{(1)}$ 和 $\mathcal{L}_5^{(1)}$ 已经出现在 $\mathcal{L}_0$ 中了，可以通过重新定义 $\mathcal{L}_0$ 中的参数将它们吸收。于是只需要添加 $\mathcal{L}_1^{(1)}$，就得到了改善到 $\mathcal{O}(a^2)$ 的改进的 Wilson 作用量

$$S_{\text{clover}} = S_f^{(W)} + c_{SW}a^5\sum_{n\in\Lambda}\sum_{\mu<\nu}\bar{\psi}(n)\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}(n)\psi(n) \tag{2.76}$$

其中 c_{SW} 是 Sheikholeslami-Wohlert 系数。规范场强 $F_{\mu\nu}$ 在格点上可以通过 1×1 的正方形 Wilson 圈 (plaquette) 构造，

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}(n) &= -\frac{\mathrm{i}}{8a}(Q_{\mu\nu}(n) - Q_{\nu\mu}(n)) \\
Q_{\mu\nu}(n) &\equiv U\mu,\nu(n) + U\nu,-\mu(n) + U-\mu,-\nu(n) + U-\nu,\mu(n)
\end{aligned} \tag{2.77}$$

由于这一项形状像四叶草，所以这一作用量也叫 clover 作用量。这是格点 QCD 数值模拟计中最常用的费米子作用量。在树图阶 (经典展开) 系数 $c_{SW} = 1$，如果考虑量子修正，格点微扰论计算得到 $c_{SW} = 1 + 0.2659g^2 + \mathcal{O}(g^4)$。

规范场作用量的改进方案和以上类似：基于 Wilson 规范作用量 (只包含 1×1 的 Wilson 圈)，可以通过添加包含六条规范键变量的 Wilson 圈 (比如 1×2 的长方形 Wilson 圈)，并调节添加项和原始项的相对组合系数，可以消除量纲为 6 的算符，从而使作用量改进到 $\mathcal{O}(a^4)$。不同的改进项添加方式和组合系数的计算方法给出不同的规范作用量形式。常用的规范场改进作用量有 Iwasaki 改进作用量 [11]、Symanzik 改进作用量 [12] 等。

2.2 蒙特卡洛数值模拟方法

2.1 节介绍了格点 QCD 的理论体系，其要点是采用路径积分的量子化方案，并通过 Wick 转动由闵氏时空解析延拓到欧氏时空，这时路径积分中的复的测度因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}S}$ 变为实的测度因子 e^{-S_E}；通过时空离散化将连续的欧氏时空离散化为一个

有限大小的格距为 a 的四维的超立方时空格点，这种离散化自然地引入了一个紫外截断 $\sim \pi/a$，可以理解为 QCD 的一种正规化方案；在此超立方格点上定义基本场变量和格点作用量，从而物理体系类似一个有限自由度的近邻相互作用的统计体系，场算符的真空期望值类似统计系统的系综平均值。欧氏时空格点场论的生成泛函和物理量 $\mathcal{O}[\bar{\psi},\psi;U]$(场算符的函数) 的真空期望值表达为，

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}U\mathrm{e}^{-S[\bar{\psi},\psi;U]}, \\ \langle\mathcal{O}[\bar{\psi},\psi;U]\rangle &= \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}U\mathcal{O}[\bar{\psi},\psi;U]\mathrm{e}^{-S[\bar{\psi},\psi;U]} \end{aligned} \tag{2.78}$$

其中，$S[\bar{\psi},\psi;U]$ 为格点作用量，包括规范场部分 $S_G[U]$ 和费米子部分 $S_f[\bar{\psi},\psi;U]$。注意到 S_f 是费米子场 $\psi(x)$ 的二次型，

$$S_f[\bar{\psi},\psi;U] = \sum_{x,y}\bar{\psi}(x)M[U](x,y)\psi(y) \equiv \bar{\psi}M[U]\psi \tag{2.79}$$

对于给定的规范场位型 (组态)$U_\mu(x), x\in\Lambda$, 我们可以把费米子场先行积分掉

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathrm{exp}(-\bar{\psi}M[\mathrm{U}]\psi) = \mathrm{det}M[\mathrm{U}] \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}\,\mathrm{ln}M[\mathrm{U}]} \tag{2.80}$$

当然，理论可以包含多种味道的夸克场，对每一味夸克都可以进行上述处理，最后得到

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}U\mathrm{e}^{-S_G[U]+\sum\limits_{i=1}^{N_f}\mathrm{Tr}\,\mathrm{ln}\,M^{(i)}[U]}, \\ \langle\hat{\mathcal{O}}[U]\rangle &= \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}U\hat{\mathcal{O}}[U]\mathrm{e}^{-S_G[U]+\sum\limits_{i=1}^{N_f}\mathrm{Tr}\,\mathrm{ln}\,M^{(i)}[U]} \end{aligned} \tag{2.81}$$

其中，N_f 是夸克味道数，$\hat{\mathcal{O}}[U]$ 是算符乘积 $\mathcal{O}[\bar{\psi},\psi;U]$ 用给定背景场 $\{U_\mu(n), n\in\Lambda\}$ 下费米子传播子表达的形式。这样一来，在格点 QCD 体系下进行计算的核心是计算上述的路径积分。由于自由度有限，这些量原则上可以解析计算，但由于是超高维积分，实际上解析计算是不可行的。

蒙特卡罗数值模拟方法为计算这些路径积分提供了一种可能。蒙特卡罗方法的核心思想是对随机变量按照其分布进行重点抽样，从而使所得的样本满足特定的分布。对于上述的生成泛函的表达式，我们可以把积分权重因子 $\exp(-S_G[U]+\sum\limits_{i=1}^{N_f}\mathrm{Tr}\mathrm{ln}M^{(i)}[U])$($N_f$ 为偶数时) 看成是组态 $\{U_\mu(n), n\in\Lambda\}$ 的几率分布函数，并利

用蒙特卡罗思想按照这种分布对组态进行抽样，最终可以得到满足分布的组态样本；在每一个组态上对物理量进行测量，测量结果的算术平均值就可以作为物理量的真空期望值的近似，即

$$\langle \hat{O}[U] \rangle \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \hat{O}[U^{(i)}] \tag{2.82}$$

N 是组态的数目。这样一来，格点场论的计算就分成两步，即先利用蒙特卡罗方法产生组态 (configuration)；再在每个组态上对物理量进行测量。在本节中我们对格点 QCD 的蒙特卡罗模拟研究方法进行简要介绍。

2.2.1 蒙特卡罗模拟

蒙特卡罗 (Monte Carlo) 模拟是通过随机变量的统计试验来求解数学、物理、工程技术和管理科学等的实际问题的数值方法。Monte Carlo 是世界著名的赌城，赌场每天都在做随机试验，所以这个名字很形象地概括了这个方法的精神。

比如定积分 $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 的蒙特卡罗模拟求解方法：将 x 看作是在 $[0,1]$ 之间的一个均匀分布的随机变量，从而在该区间按照均匀分布随机抽取 $x_i \in [0,1]$，并计算函数值 $f(x_i)$，并将多次抽样后的函数值做平均得到积分 I 的估计值，

$$I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \langle f \rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \tag{2.83}$$

这种对 x 的抽样方式称作直接的蒙特卡罗抽样方法，与被积函数 $f(x)$ 的性质无关。但是当 $f(x)$ 在积分区域中某些部分函数值很小，实际上在这段区域的积分对总的积分值贡献很小时，直接抽样方法在此区域的抽样和其他主要贡献区域是平权的，这将造成抽样的效率很低。比如积分 $I = \int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \approx \int_0^L f(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ (其中 $f(x)$ 是积分区域内变化平稳的函数)，在 $x \gg 1$ 的区域被积函数趋于零，但是直接抽样却主要集中在此区域。为了提高抽样效率，我们可以将 $p(x) = \mathrm{e}^{-x}$ 看做是一个积分权重因子 (几率分布因子)，从而按照 $p(x)$ 的几率分布来对 x 进行抽样，则积分值可以近似为

$$I = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \tag{2.84}$$

这种按照可归一的几率分布

$$P(x)\mathrm{d}x = \frac{p(x)\mathrm{d}x}{\int_0^\infty \mathrm{d}x p(x)} \tag{2.85}$$

来进行抽样的方式称作**重要抽样**。很明显，$F(x) = \int_0^x P(y)\mathrm{d}y$ 是一个在 $[0,1]$ 区间均匀分布的变量，如果我们按照均匀分布随机抽取 $r_i = F(x_i) \in [0,1]$，就可以反解出 $x_i = F^{-1}(r_i)$。这是按照 $P(x)$ 分布抽取 x 的普遍做法 (读者可以自行验证，对于 $p(x) = \mathrm{e}^{-x}$，在 $x \in [0,\infty)$ 有 $P(x) = p(x)$，这样随机抽取 $r_i \in [0,1]$ 就可以得到满足分布 $P(x)$ 的 $x_i = -\ln(1-r_i)$，而且由于 r_i 是在 $[0,1]$ 均匀分布，我们可以通过更简单的 $x_i = -\ln r_i$ 得到满足分布的 x_i)。

以上是一维的情形，但可以直接推广到高维积分情形，只是按照随机分布抽样的算法会复杂一些。

2.2.2　马尔可夫过程

在格点 QCD 计算中，我们将系统在位形空间的位置用 $\{U_\mu(x), x \in \Lambda\}$—— 或者更为简洁地用 $\{U\}$ 来标记并称其为一个组态 (configuration)。我们可以把公式 (2.81) 中的积分测度看作规范场组态 $\{U\}$ 的几率分布密度

$$\mathcal{P}(U) = \frac{1}{Z}\mathrm{e}^{-S_g[U]+\sum_{i=1}^{N_f}\mathrm{Tr}\ln M^{(i)}[U]} \equiv \frac{1}{Z}\mathrm{e}^{-S_{\mathrm{eff}}[U]} \tag{2.86}$$

格点 QCD 的蒙特卡罗模拟的重要组成部分就是利用这样的分布来产生规范组态。一般来说，当味道数为偶数时，$S_{\mathrm{eff}}[U]$ 是一个有下界的实数，因此，不失一般性，我们可以假定它是正定的。很容易验证，这个概率密度在位型空间是归一的，即 $\int \mathcal{D}[U]\mathcal{P}(U) = 1$。格点场论中的重点抽样就是注意到系统在位形空间中出现的概率并不是均等的，$S_{\mathrm{eff}}[U]$ 值越小，组态 $\{U\}$ 出现的机率越大，对路径积分的贡献就越大。因此重点抽样应当主要将那些大概率出现的组态筛选出来。实现这个目的最为简单的方法就是在位形空间中构造一个随机过程，它能够不断地更新系统在位形空间的位置，从而达到“热平衡”，即组态 $\{U\}$ 按照 $\mathcal{P}(U)$ 分布出现。这个过程就是马尔克夫过程 (Markov process) 或者称作马尔可夫链 (Markov chain)

$$\{U^{(0)}\} \to \{U^{(1)}\} \to \{U^{(2)}\} \ldots \tag{2.87}$$

其中，组态 $\{U^{(n)}\}$ 是一个接一个相继产生的，两个相邻组态 $\{U\}$ 和 $\{U'\}$ 之间的转变 (组态更新，update) 由“跃迁”概率密度 $W[\{U\} \to \{U'\}]$ 给出。在 Markov 过

程中每经过一次这样的组态更新，组态的概率密度相应变为

$$\mathcal{P}^{(1)}[\{U'\}] = \int \mathcal{D}[U] W[\{U\} \to \{U'\}] \mathcal{P}^{(0)}[\{U\}] \tag{2.88}$$

其中 $\mathcal{P}^{(0)}[\{U\}]$ 是更新前组态的概率密度。从某个初始组态出发 (概率密度为 $P^{(0)}[\{U\}]$ 经过多次更新，我们可以得到一个概率密度序列

$$\mathcal{P}^{(0)}[\{U\}] \to \mathcal{P}^{(1)}[\{U\}] \to \mathcal{P}^{(2)}[\{U\}] \cdots \tag{2.89}$$

马尔可夫过程要求跃迁概率 W 必须满足特定条件使得最终达到“热”平衡

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{P}^{(n)}[\{U\}] = \frac{1}{Z} \mathrm{e}^{-S_{\mathrm{eff}}[U]} = \mathcal{P}[U] \tag{2.90}$$

两个组态之间跃迁概率一般需要满足两个条件，一是稳定条件 (stability condition)，即 $\mathcal{P}[U]$ 在跃迁概率 W 的作用下是稳定的

$$\mathrm{e}^{-S_{\mathrm{eff}}[U']} = \int \mathcal{D}U W[\{U\} \to \{U'\}] \mathrm{e}^{-S_{\mathrm{eff}}[U]} \tag{2.91}$$

二是所谓的细致平衡条件 (detailed balance condition)：

$$\mathrm{e}^{-S_{\mathrm{eff}}[U']} [W[\{U'\} \to \{U\}] = \mathrm{e}^{-S_{\mathrm{eff}}[U]} [W[\{U\} \to \{U'\}] \tag{2.92}$$

需要注意的是细致平衡条件隐含了稳定条件 (上式两边对 $\{U\}$ 积分并利用 $\int \mathcal{D}UW[\{U'\} \to \{U\}] = 1$，就得到前面的稳定性条件)，但倒过来不一定成立。可以证明，如果跃迁概率 W 满足稳定性条件 (或者比它更强的细致平衡条件) 以及各态历经条件，那么它所定义的 Markov 链一定会收敛到我们需要的玻尔兹曼分布。满足上述这些条件的跃迁概率 $W[\{U\} \to \{U'\}]$ 就定义了一个严格跃迁。严格跃迁的实现方法可以有多种，实际计算过程中要根据算法的效率进行取舍。

2.2.3 Metropolis 算法

Metropolis 算法是严格跃迁算法中的一种，它是最古老的蒙特卡罗算法，也是 20 世纪最为流行的十大算法之一。Metropolis 算法的基本思想很简单，即首先按照某种跃迁概率 $W_0[\{U\} \to \{U'\}]$ 将组态从 $\{U\}$ 更新至 $\{U'\}$，其次再按照合适的概率接受这种更新。算法实现具体表述如下：

第一步：初始化组态 $\{U\} = \{U^{(0)}\}$；

第二步：选择适当的跃迁概率函数 $W_0[\{U\} \to \{U'\}]$ 将组态从 $\{U\}$ 更新至 $\{U'\}$；

第三步：按照如下概率接受或放弃上面的更新

$$P_A[\{U\}\to\{U'\}]=\min\left(1,\frac{W_0[\{U\}\to\{U'\}]\mathrm{e}^{-S_{\mathrm{eff}}[U']}}{W_0[\{U'\}\to\{U\}]\mathrm{e}^{-S_{\mathrm{eff}}[U]}}\right) \tag{2.93}$$

其中 P_A 为更新的接受概率。如果 W_0 满足 $W_0[\{U\}\to\{U'\}]=W_0[\{U'\}\to\{U\}]$，则 P_A 可以更简单地表述为

$$P_A[\{U\}\to\{U'\}]=\min(1,\mathrm{e}^{-\Delta S_{\mathrm{eff}}}) \tag{2.94}$$

其中 $\Delta S_{\mathrm{eff}}=S_{\mathrm{eff}}[U']-S_{\mathrm{eff}}[U]$ 为更新后作用量的变化。

第四步：重复第二、三步。

可以证明这个算法的第二步和第三步的组合 P_AW_0 满足细致平衡条件。注意，由于马尔可夫过程和起始组态 $\{U^0\}$ 无关，所以初始组态可以任意选取。

2.2.4　纯规范场组态的更新算法

对规范场组态的更新通常是对每一个时空格位 (site) 上的规范键变量 $U_\mu(x)$ 依次更新来实现的，因此在对每个 $U_\mu(x)$ 更新时，格点组态上的其他键变量都保持不变，这种算法称作热浴 (heatbath) 算法。由于这时除 $U_\mu(x)$ 外其他的规范键都不变，所以作用量中不包含 $U_\mu(x)$ 的规范回路对作用量的贡献在只更新 $U_\mu(x)$ 时是常数，不影响更新。所以形式上，对于目标 $U_\mu(x)$，相应的概率分布密度就可以写成

$$\mathcal{P}[U_\mu(x)]\mathrm{d}U_\mu(x)\propto\exp\left(\frac{\beta}{N}Re\,\mathrm{Tr}[U_\mu(x)S_\mu(x)]\right)\mathrm{d}U_\mu(x) \tag{2.95}$$

其中 $S_\mu(x)$ 是规范作用量中包含 $U_\mu(x)$ 的所有规范回路中扣除 $U_\mu(x)$ 后的各种剩余路径的和。

作为例子，下面我们考虑 $SU(2)$ 规范场键变量的更新步骤。很容易证明，$S_\mu(x)$ 正比于 $SU(2)$ 的群元，即 $S_\mu(x)=aV$，其中 $V\in SU(2)$，$a=\sqrt{\det S_\mu(x)}$。令 $X=U_\mu(x)V$ (X 也是 $SU(2)$ 的元素)，根据 $SU(N)$ 群的 Haar 测度的不变性，我们只需要通过分布

$$P(X)\mathrm{d}X\sim\mathrm{d}X\exp\left(\frac{\beta a}{2}\mathrm{Tr}\,X\right)=\mathrm{d}X\mathrm{e}^{\beta aX_0} \tag{2.96}$$

产生 X，就可以得到更新的 $U'_\mu(x)=XV^\dagger$。在上式中，我们将 X 参数化为 $X=X_0+\mathrm{i}\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{\sigma}$，其中 $X_0^2+\boldsymbol{X}^2=1$。基于这种参数化，Haar 测度 $\mathrm{d}X$ 可以写作

$$\mathrm{d}X=\frac{1}{\pi^2}\mathrm{d}X_0\mathrm{d}\boldsymbol{X}\delta(X_0^2+\boldsymbol{X}^2-1)=\frac{1}{2\pi^2}\mathrm{d}\cos\theta\mathrm{d}\phi(\mathrm{d}X_0\sqrt{1-X_0^2}) \tag{2.97}$$

其中我们利用了 $\mathrm{d}\boldsymbol{X} = r^2 \mathrm{d}r \mathrm{d}\cos\theta \mathrm{d}\phi$ 和 $r^2 + X_0^2 = 1$。这样，分布 $P(X)\mathrm{d}X$ 就显式地表示为

$$P(X)\mathrm{d}X \sim \frac{1}{2\pi^2}\mathrm{d}\cos\theta \mathrm{d}\phi \left(\mathrm{d}X_0 \sqrt{1 - X_0^2} \mathrm{e}^{a\beta X_0}\right) \tag{2.98}$$

其中各个变量的取值范围为 $X_0 \in [-1, 1]$，$\theta \in [0, \pi]$，$\phi \in [0, 2\pi]$。通过随机抽取 X_0, θ, ϕ 的值，我们可以得到满足分布 $P(X)\mathrm{d}X$ 的 X。

对于 X_0 的随机抽取，我们引入辅助变量 $\xi \in [0, 1]$ 满足关系 $X_0 = 1 - 2\xi^2$，从而有

$$\mathrm{d}X_0 \sqrt{1 - X_0^2} \mathrm{e}^{a\beta X_0} \propto \mathrm{d}\xi \xi^2 \sqrt{1 - \xi^2} \mathrm{e}^{-2a\beta\xi^2} \tag{2.99}$$

按照上式右边的分布抽取 ξ 的步骤是：首先产生三个均匀分布的随机数 $r_i \in (0, 1]$，$i = 1, 2, 3$，从而得到 ξ^2 的抽样

$$\xi^2 = -\frac{1}{2a\beta}\left(\ln r_1 + \cos^2(2\pi r_2) \ln r_3\right) \tag{2.100}$$

然后再产生随机数 $r \in [0, 1)$，当 $r \leqslant \sqrt{1 - \xi^2}$ 时接受 ξ^2 的抽样，进而得到 $X_0 = 1 - 2\xi^2$。

对于方位角 θ 和 ϕ 我们并不直接抽取。考虑到 $|\boldsymbol{X}| = \sqrt{1 - X_0^2}$ 是固定的，以此为半径的球面上的点的方位角就是满足要求的抽样，具体做法时再产生三个随机数 $r_i \in [-1, 1]$，如果它们满足关系 $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \leqslant 1$ 就接受，然后将向量 $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, r_3)$ 的长度归一到 $|\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{X}|$，就得到了我们需要的 $\boldsymbol{X}$。这就完成了 X 的抽样 $X = X_0 + \mathrm{i}\boldsymbol{X} \cdot \sigma$。

对于 $SU(3)$ 规范场，一般不存在直接的热浴算法。实际的做法是将适当的 $SU(2)$ 子矩阵内嵌到 $SU(3)$ 矩阵中，并利用 $SU(2)$ 的热浴算法来实现 $SU(3)$ 矩阵更新，这个算法一般称作 Cabibbo-Marinari 算法，具体细节请参阅文献 [13]。

2.2.5 包含夸克场的格点 QCD 蒙特卡罗模拟

前一小节我们介绍了纯规范场组态的蒙特卡罗更新算法。但是 QCD 还包括夸克自由度，规范场的积分权重因子为

$$\mathcal{P}(U) = \frac{1}{Z}\prod_{i=1}^{N_f} \det M^{(i)}[U] \mathrm{e}^{-S_g[U]} \tag{2.101}$$

其中 N_f 为夸克味道数。由于费米子矩阵 $M^{(i)}[U]$ 不是厄米的，所以上面公式中的费米子矩阵行列式的乘积不一定正定。但是，如果我们考虑两味质量简并的夸克，则有 $M^{(1)}[U] = M^{(2)}[U] = M[U]$，这时上面的积分权重因子是正定的，可以理解为概率密度。但是需要指出的是，费米子矩阵是一个维数很高的矩阵，其行列式以目前的计算机能力是不可能直接计算的。

格点 QCD 数值模拟中对费米子行列式的处理方法是赝费米子方法 (pseudo-fermion)。对于两味的简并夸克，通过引入赝费米子场 ϕ 和 $\phi^\dagger$ (复标量场)，它们的行列式的乘积可以表示为

$$|\det M|^2 = \int D\phi D\phi^\dagger \mathrm{e}^{-\phi^\dagger (MM^\dagger)^{-1}\phi} \tag{2.102}$$

这样，含两味简并费米子的格点 QCD 的配分函数改写为

$$Z = \int \mathcal{D}U\mathcal{D}\phi\mathcal{D}\phi^\dagger \mathrm{e}^{-S_{\mathrm{eff}}[U,\phi,\phi^\dagger]}$$

$$S_{\mathrm{eff}}[U,\phi,\phi^\dagger] = S_g[U] + \phi^\dagger (M[U]M^\dagger[U])^{-1}\phi \tag{2.103}$$

由于 ϕ 和 $\phi^\dagger$ 的积分权重 (分布因子) 是高斯型的，所以在实际的算法实现中，一般先由高斯分布 $\mathrm{e}^{-\xi^\dagger\xi}$ 产生场 ξ，然后令 $\phi = M[U]\xi$ 就得到了满足分布 $\exp[-\phi^\dagger(M[U]M^\dagger[U])^{-1}\phi]$ 的 ϕ 场。

在此基础上主要处理的是规范场 $U_\mu(x)$ 的更新，这个步骤一般采用 hybrid Monte Carlo(简称 HMC) 算法 (在分子动力学方法基础上衍生出来的算法)。首先，引入与变量 $U_\mu(x)$ 共轭的“正则”动量 $\Pi_\mu(x)$($\Pi_\mu(x)$ 属于 $SU(3)$ 的李代数 $su(3)$)，从而得到体系的“哈密顿量”

$$\mathcal{H}[U,\Pi,\phi,\phi^\dagger] = \sum_{x,\mu} \mathrm{Tr}(\Pi_\mu(x)\Pi_\mu(x)) + S_g[U] + \phi^\dagger (M[U]M^\dagger[U])^{-1}\phi \tag{2.104}$$

配分函数进一步修改为

$$Z = \int \mathcal{D}U\mathcal{D}\Pi\mathcal{D}\phi\mathcal{D}\phi^\dagger \mathrm{e}^{-\mathcal{H}[U,\Pi,\phi,\phi^\dagger]} \tag{2.105}$$

由于关于 $\Pi_\mu(x)$ 和 $U_\mu(x)$ 的概率密度是完全独立的，对 $\Pi_\mu(x)$ 的泛函积分只贡献一个常数，所以正则动量 $\Pi_\mu(x)$ 的引入不影响 $U_\mu(x)$ 的概率密度。“哈密顿量” $\mathcal{H}$ 给出的正则运动方程为

$$\begin{aligned} \dot{U}_\mu(x) &= \mathrm{i}\Pi_\mu(x)U_\mu(x) \\ \dot{\Pi}_\mu(x) &= -\frac{\delta S_g[U]}{\delta U_\mu(x)} - \phi^\dagger \left[\frac{\delta (M[U]M^\dagger[U])^{-1}}{\delta U_\mu(x)}\right]\phi \end{aligned} \tag{2.106}$$

式中，$\dot{U}_\mu(x)$ 和 $\dot{\Pi}_\mu(x)$ 表示对虚拟时间 τ 的微商。体系按照上述正则方程沿虚拟时间演化，规范组态 $\{U\}$ 在组态空间就形成了一条轨迹。原则上，只要轨迹足够长 (或者演化时间足够长)，我们就能得到一个满足分布 $\mathcal{P}[U]$ 的规范组态。

由于篇幅限制，关于分子动力学算法和 HMC 算法的细节我们不在这里赘述，有兴趣的读者可以参阅文献 [14]。下面采用 Wilson 费米子作用量来讨论格点 QCD 高强度数值计算的来源之一。在上述正则方程的第二式中，$\delta S_g[U]/\delta U_\mu(x)$ 实际上正比于公式 (2.95) 中的 $S_\mu(x)$，它的具体形式很容易得到；对于第二项，我们令

$$S_\phi[\phi,\phi^\dagger,U]=\phi^\dagger(M[U]M^\dagger[U])^{-1}\phi\equiv Y^\dagger Y \tag{2.107}$$

其中

$$\begin{aligned}Y&=(M^\dagger[U])X=M[U]^{-1}\phi\\ X&=(M[U]M^\dagger[U])^{-1}\phi=(M^\dagger[U])^{-1}M[U]^{-1}\phi\end{aligned} \tag{2.108}$$

$S_\phi[\phi,\phi^\dagger,U]$ 随 $U_\mu(x)$ 的变化量为

$$\begin{aligned}\delta S_\phi[\phi,\phi^\dagger,U]&\equiv\frac{1}{2}\sum_{x,\mu}\mathrm{Tr}\left[F_\mu(x)\delta U_\mu(x)+F_\mu^\dagger(x)\delta U_\mu^\dagger(x)\right]\\ &=(\delta Y)^\dagger\cdot Y+h.c.=-(X^\dagger\cdot\delta M[U]\cdot Y+h.c.)\end{aligned} \tag{2.109}$$

其中，$F_\mu(x)$ 一般称作费米力。利用 Wilson 费米子算符 $M[U]$ 的具体形式 (公式 (2.41)，取 $r=1$) 可以显式写出 δS_ϕ 的表达式

$$\delta S_\phi[\phi,\phi^\dagger,U]=\sum_{x,\mu}\left[X_x^\dagger(1-\gamma_\mu)\delta U_\mu(x)Y_{x+\mu}+X_x^\dagger(1+\gamma_\mu)\delta U_\mu^\dagger(x)Y_{x-\mu}+h.c.\right] \tag{2.110}$$

和公式 (2.109) 对比可以得到费米力 $F_\mu(x)$

$$F_\mu(x)=2\operatorname*{Tr}_D\left[Y_{x+\mu}\otimes X_x^\dagger(1-\gamma_\mu)+X_{x+\mu}\otimes Y_x^\dagger(1+\gamma_\mu)\right] \tag{2.111}$$

其中 Tr_D 是对旋量空间求迹，直乘是对颜色和旋量空间进行。利用定义，对于给定的 ϕ，通过求解如下线性方程组

$$(M[U]M^\dagger[U])X=\phi,\quad Y=M^\dagger[U]X \tag{2.112}$$

得到 X 和 Y，从而得到费米力 $F_\mu(x)$。最终我们得到正则运动方程的形式

$$\begin{aligned}\dot{U}_\mu(x)&=\mathrm{i}\Pi_\mu(x)U_\mu(x)\\ \dot{\Pi}_\mu(x)&=\frac{1}{4}[U_\mu(x)(S_\mu(x)+F_\mu(x))]_{T.A.}\end{aligned} \tag{2.113}$$

这里 $[\ldots]_{T.A.}$ 表示取颜色空间无迹反厄米部分 (traceless anti-hermitian)。

在利用 HMC 产生规范组态时，体系需要按照上面的正则方程演化足够长的轨迹 (用演化时间 τ_0 标记)。在计算机模拟时，一般将 τ_0 分成 N 小段 $\tau_0=N\delta\tau$，δ_τ 称作演化步长。这样，在计算机实现时，根据正则方程 (2.113) 就可以得到

$$\begin{aligned}U'_\mu(x)&=\exp[\mathrm{i}\delta\tau\Pi_\mu(x)]U_\mu(x)\\ \mathrm{i}\Pi'_\mu(x)&=\mathrm{i}\Pi_\mu(x)+\frac{\delta_\tau}{4}[S_\mu(x)+F_\mu(x)]U_\mu(x)\end{aligned} \tag{2.114}$$

从而实现规范场的更新 $\{U_\mu,\Pi_\mu\}\to\{U'_\mu,\Pi'_\mu\}$。显然，每演化一步都需要计算费米力 $F_\mu(x)$，而计算费米力需要求解维数极高的线性方程组 (2.112)，这就产生了很大的计算量。所以产生包含动力学费米子的格点组态需要耗费大量的计算资源。

2.2.6　淬火近似和 full-QCD 计算

上面我们看到，在包含海夸克的格点 QCD 的计算中，大量的计算量来自于规范组态的产生过程中对费米子矩阵 $M[U]$ 的行列式 $\det M[U]$ 的处理。在前面的 HMC 算法实现中我们看到，在组态更新过程中会频繁地求解线性方程组 $(M[U]M^{\dagger}[U])X = \phi$，这是计算量的主要来源。因此，在格点 QCD 的数值计算的早期阶段甚至一直持续到二十世纪初，由于计算资源所限，大多数格点 QCD 计算都采用“淬火近似”(quenched approximation)，即令 $\det M[U] = \text{const.}$。这样，在产生规范组态时只需要利用规范场作用量对规范场变量进行更新，计算大大简化。由于淬火近似下的 QCD 仍体现了 QCD 的基本特征如渐近自由、色禁闭以及手征对称性自发破缺等，而且和 full QCD 的差别只体现在背景规范场的相对权重上，所以人们认为这种近似是定性合理的。淬火近似下的格点 QCD 在计算轻强子谱、强子矩阵元等物理量的结果也支持这一点。从物理上讲，淬火近似相当于忽略了海夸克的真空极化效应，从而阻止了强子的典型强相互作用衰变过程，因而在淬火近似下观测到的强子都是稳定粒子，这显然是和现实物理世界不符的。另外，淬火近似也破坏了理论的幺正性，即中间粒子态和物理粒子态的自由度不同。这些都造成淬火近似的系统误差很难严格量化，这是淬火近似的主要问题。不过，由于淬火近似的格点 QCD 计算量相对较小，忽略海夸克效应在某种程度上也避免了一些物理上的复杂性，因此对于一些物理问题，如关于胶球、混杂态等奇特强子态的性质，人们也采用淬火近似进行定性研究。

近十几年来，随着计算机技术的进步，进行包含动力学费米子 (即在产生组态时考虑费米子行列式的贡献) 的格点 QCD 计算已经成为主流，人们在对系统误差的控制方面付出了很多努力，使得格点 QCD 关于标准模型基本参数如强耦合常数、流夸克质量等的计算结果达到了很好精度；关于基态强子谱的计算和实验结果符合相当好；关于与 CKM 矩阵元相关的强子矩阵元的计算精度已经可以和实验上的相关物理过程的测量精度相比较，从而提高了 CKM 矩阵元的计算结果。

目前许多格点组也在努力在物理点上进行格点 QCD 计算。这里的物理点是指格点体积足够大，格距足够小，而且计算中选取的夸克质量参数对应物理的 π 介子质量。另外也有合作组开展包含动力学粲夸克的计算、考虑 QCD+QED 的计算等。也就是说，随着计算机技术的进步，full-QCD 的格点研究也正在快速发展中。

2.3　强子谱的格点 QCD 计算

强子谱学研究是格点 QCD 数值模拟的一个重要的应用领域。由于强子质量和强子内部结构涉及到 QCD 的低能非微扰性质，因此在高能量强相互作用领域

应用十分成功的微扰 QCD 方法在计算强子质量等低能 QCD 方面已经不再适用，低能 QCD 性质的研究需要可靠的非微扰方法。目前，对强子谱学的理论研究多基于 QCD 求和规则和一些唯象模型如势模型、有效场论等，但这些研究都有模型依赖性和系统误差不能有效控制等问题。正如我们在 2.1 节和 2.2 节介绍的，格点 QCD 数值模拟研究是从第一性原理出发的 QCD 理论方法，不引入任何唯象假设，在 QCD 的微扰能区和非微扰能区都有效。格点 QCD 计算的误差包括统计误差和系统误差，统计误差可以通过增加蒙特卡罗模拟过程中的统计量来降低，而由有限格距、非物理的 π 介子质量和有限体积效应等方面带来的系统误差可以通过连续极限外推、手征外推和增大格点体积等手段加以很好地控制。基于这些特点，格点 QCD 研究受到高能物理实验研究和理论研究的日益重视。

我们知道，强子除了少数基态强子 (如赝标量介子和重子八重态) 是强相互作用的稳定粒子之外，绝大部分强子表现为高能物理过程中的共振结构。另外，从性质上讲，人们常基于夸克模型的语言将强子解释为 $\bar{q}q$ 介子和 qqq 重子及其激发态，或者超出夸克模型的胶球 (由胶子构成的束缚态)、混杂态 (夸克和胶子构成的束缚态) 和多夸克态等奇特强子态。格点 QCD 作为一种场论体系，真正观测到的是具有确定量子数的强子体系，它们是离散格子上哈密顿量的本征态。这些本征态和真实物理世界的强子态的联系并不全是简单直接的。对于强子基态，由于它们是强相互作用的稳定粒子，格点上的强子基态和真实世界的基态强子有明确的对应关系。但对于高激发态，则需要从理论上建立格点上离散的能谱和真实物理世界的高激发态强子共振态的可靠的联系 (在 2.4 节中，我们将介绍在最简单情形下将二者联系起来的一种理论方法，即 Lüscher 提出的有限体积方法)。另外，在场论中，所谓的奇特强子态并不能很好地定义，认识强子内部结构仍然是对理论和实验具有挑战性的问题。

在本节中，我们将主要介绍格点 QCD 关于基态强子性质的研究，包括基态强子质量谱、涉及基态强子的强子矩阵元等的计算。

2.3.1 强子谱学格点 QCD 研究的一般方案

从逻辑上讲，格点 QCD 对强子质量的计算是十分直接的。考虑具有量子数 J^{PC} 的定域格点场算符 $O(\boldsymbol{x},t)$ 的格林函数

$$C(\boldsymbol{x},t)=\langle 0|O(\boldsymbol{x},t)O^{\dagger}(\boldsymbol{0},0)|0\rangle=\frac{1}{Z}\int\mathcal{D}U\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{O}(\boldsymbol{x},t)\mathcal{O}(\boldsymbol{0},0)\mathrm{e}^{-S_g[U]-S_f[U,\psi,\bar{\psi}]} \tag{2.115}$$

其中，$\mathcal{O}(\boldsymbol{x},t)$ 是 Heisenberg 场算符 $O(\boldsymbol{x},t)$ 的经典场对应。上式的第二个等式表明这个关联函数可以通过格点 QCD 数值模拟计算相应的路径积分而得到。对 $C(\boldsymbol{x},t)$ 进行 Fourier 变换，我们可以得到质心动量为 $\boldsymbol{p}$ 的两点关联函数

$$C(\boldsymbol{p},t)=\sum_{\boldsymbol{x}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\langle\mathrm{O}(\boldsymbol{x},\mathrm{t})\mathrm{O}^{\dagger}(\boldsymbol{0},0)\rangle \tag{2.116}$$

利用欧氏空间的定域算符的时空平移关系

$$O(\boldsymbol{x},t)=\mathrm{e}^{Ht-\mathrm{i}\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{x}}O(\boldsymbol{0},0)\mathrm{e}^{-Ht+\mathrm{i}\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{2.117}$$

其中，H 和 $\hat{\boldsymbol{p}}$ 为欧氏空间的哈密顿量和空间动量算符，并插入单位算符

$$\sum_{\boldsymbol{p},n}\frac{1}{2E_n(\boldsymbol{p})V}|\boldsymbol{p},n\rangle\langle\boldsymbol{p},n|=1$$

两点函数 $C(\boldsymbol{p},t)$ 可以参数化为

$$\begin{aligned}C(\boldsymbol{p},t)&=\sum_{n=0}^{\infty}\langle 0|O(\boldsymbol{p},0)|n(\boldsymbol{p};t)\rangle\frac{\mathrm{e}^{-E_n(\boldsymbol{p})t}}{2E_n(\boldsymbol{p})}\langle n(\boldsymbol{p};0)|O^{\dagger}(0,0)|0\rangle\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z^{(n)}Z^{(n)*}}{2E_n(\boldsymbol{p})}\mathrm{e}^{-E_n(\boldsymbol{p})t}\end{aligned} \tag{2.118}$$

这里我们使用了有限体积格子上态的归一化 $\langle\boldsymbol{p},n|\boldsymbol{p},n\rangle=2E_n(\boldsymbol{p})V$，$V$ 是格子的空间体积。可以看出，只要得到关联函数 $C(\boldsymbol{p},t)$，原则上就可以通过数据分析得到矩阵元 $Z^{(n)}\equiv\langle 0|O|n\rangle$ 和本征能量 $E_n(p)$。当质心动量 $\boldsymbol{p}=0$ 时，$E_n(p)$ 就可以给出强子态的质量信息。在 t 很大的区域，两点函数主要由最低能量态主导

$$C(\boldsymbol{p},t)\approx|Z^{(1)}|^2\mathrm{e}^{-E_1(\boldsymbol{p})t}\left(1+\mathcal{O}\left(\mathrm{e}^{-t\Delta_{n1}}\right)\right) \tag{2.119}$$

其中，$\Delta_{n1}=E_n(\boldsymbol{p})-E_1(\boldsymbol{p})$ 是激发态和基态的能量差。因此，在 t 足够大时，我们可以通过关联函数的指数衰减行为得到基态强子态的能量 $E_1(\boldsymbol{p})$。有时候为了更清楚的看到 $C(t)$ 的行为，一般引入有效能量的概念

$$E_{\mathrm{eff}}(\boldsymbol{p},t)\equiv\ln\frac{C(\boldsymbol{p},t)}{C(\boldsymbol{p},t+1)} \tag{2.120}$$

在 t 比较大的区域，$E_{\mathrm{eff}}(\boldsymbol{p},t)$ 与 t 无关。因此，在数据分析的过程中，可以先在 $E_{\mathrm{eff}}-t$ 图上将有效能量 $E_{\mathrm{eff}}(\boldsymbol{p},t)$ 画出来，在 E_{eff} 对 t 不敏感的平台区域进行单指数函数拟合，就可以得到基态的能量及相关矩阵元。例如，图 2.2 是 D^* 介子的质量平台图，两条不同的曲线代表不同算符的关联函数给出的等效质量，平台区出现在 $t\in[8,14]$ 时间窗口，在这个时间窗口进行拟合，就可以得到 D^* 介子的质量。

利用格点 QCD 计算强子谱的第一步是确定具有特定量子数 $J^{P(C)}$ 的强子内插场算符 (hadron interpolator)O，这些算符湮灭或产生我们需要的物理态。内插场算符 O 是格点场 (胶子场和夸克场) 的泛函，并且具有和相应的粒子态相同的量子数。在不考虑规范固定时，这些算符应该是规范不变的。算符的一般构造方法如下。

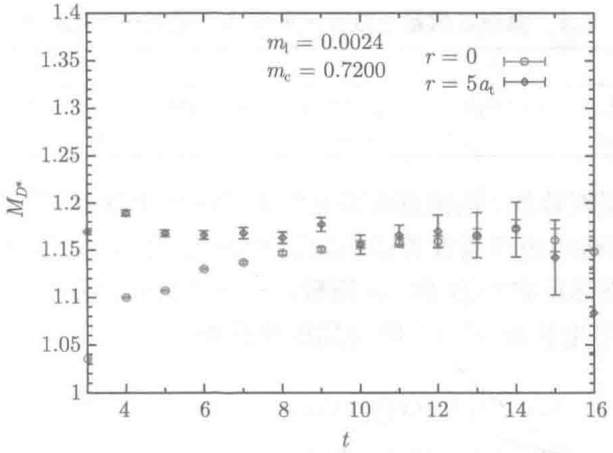


图 2.2 D^* 介子的质量平台图，两条不同的曲线代表不同算符的关联函数给出的等效质量。平台区出现在 $t \in [8, 14]$ 时间窗口

(1) 定域算符：介子算符的一般形式为 $O_M(x) = \bar{\psi}_1(x)\Gamma\psi_2(x)$，其中 $\psi_{1,2}$ 代表特定味道的夸克场，Γ 是特定的 γ 矩阵的组合，从而使得算符 O_M 具有确定的量子数 (同位旋量子数还需要根据同位旋波函数进行适当的组合)。重子算符由三个夸克场构成，构成方式类似，主要的要求是有确定的各种量子数。量子数通过格点上离散对称性 (如 $\mathcal{P}$ 宇称、$\mathcal{C}$ 宇称等) 和转动对称性 (角动量) 来实现。

(2) 具有空间结构的算符：对于介子，这类算符可以是

$$\bar{\psi}_1(x)\Gamma U(x, y; C)\psi_2(y)$$

型算符的组合 (保证确定的空间量子数)，其中 $U_(x, y; C)$ 是平行移动算子，保证算符的规范不变性。重子算符可以类似构造。

(3) 纯规范场算符：由 Wilson 圈构成的纯胶子算符，这类算符可以投影到胶球态。在有海夸克存在时，这类算符也投影到普通介子态。

(4) 多夸克算符：由多个夸克场构成的算符如 $\bar{\psi}_1\psi_2\bar{\psi}_3\psi_4$ 型算符 (中间可以插入不同的 γ 矩阵组合以实现特定的量子数)，诸如此类。

根据夸克模型，介子是由正反夸克构成的，如果正反夸克间的轨道量子数为 l，总自旋为 S，则宇称量子数为 $P = (-)^{l+1}$，$\mathcal{C}$ 宇称为 $C = (-)^{l+S}$，因此所有的可能量子数为 $J^{PC} = 0^{\pm+}$、$1^{\pm-}$、1^{++}、$2^{\pm+}$ 等。这些量子数一般被称作正常量子数，与此相对的 1^{-+} 和 $0^{\pm-}$ 等量子数就是相应的奇特量子数。具有正常量子数并且 $J \leqslant 1$ 的介子算符的最简单的形式为 $\bar{\psi}\Gamma\psi$ 型，其中 Γ 是不同的 γ 矩阵组合，$J \geqslant 2$ 的介子算符则需要引入协变的空间 (协变) 导数算符 D_i 来构造。表 2.2 中给出了常用的最简单的介子双线性型算符。

表 2.2　具有正常量子数介子的夸克双线性型内插场算符

J^{PC}	0^{-+}	1^{--}	0^{++}	1^{++}	1^{+-}	2^{++}
O	$\bar{\psi}\gamma_5\psi$ $\bar{\psi}\gamma_4\gamma_5\psi$	$\bar{\psi}\gamma_i\psi$ $\bar{\psi}\gamma_4\gamma_i\psi$	$\bar{\psi}\psi$ $\bar{\psi}\gamma_4\psi$	$\bar{\psi}\gamma_5\gamma_i\psi$	$\bar{\psi}\sigma_{ij}\psi$	$\lvert\epsilon_{ijk}\rvert\bar{\psi}\gamma_j D_k\psi$

如果考虑味道对称性，还需要对夸克味道波函数进行适当组合。作为例子，我们考虑 π 介子的格点内插场算符的构造。考虑三味轻夸克 u,d,s 的情形，我们用 $u,\bar{u},d,\bar{d},s,\bar{s}$ 来标记它们的 Dirac 旋量。π 介子是同位旋 $I=1$ 的赝标量介子 $(J^P=0^-)$，三种带电状态 $\pi^0,\pi^\pm$ 的内插场算符为

$$\begin{aligned} O_{\pi^+}(x) &= \bar{d}(x)\gamma_5 u(x) \\ O_{\pi^-}(x) &= \bar{u}(x)\gamma_5 d(x) \\ O_{\pi^0}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\bar{u}(x)\gamma_5 u(x) - \bar{d}(x)\gamma_5 d(x)\right) \end{aligned} \tag{2.121}$$

它们在宇称 $(\mathcal{P})$ 和电荷共轭变换 $(\mathcal{C})$ 下有确定的变换性质。以 O_{π^+} 为例，

$$\begin{aligned} O_{\pi^+}(\boldsymbol{x},t) &= \bar{d}(\boldsymbol{x},t)\gamma_5 u(\boldsymbol{x},t) \\ &\xrightarrow{\mathcal{P}} \bar{d}(-\boldsymbol{x},t)\gamma_4\gamma_5\gamma_4 u(-\boldsymbol{x},t) = -\bar{d}(-\boldsymbol{x},t)\gamma_5 u(-\boldsymbol{x},t) \\ &= -O_{\pi^+}(-\boldsymbol{x},t) \end{aligned} \tag{2.122}$$

具有奇特量子数的介子算符一般考虑加入色电场算符 E_i^a 或色磁场算符 B_i^a 来构造，如 $\bar{\psi}^a\Gamma\psi^b B_i^{ab}$ 型算符 (又称作混杂态算符)，当然这类算符也可以给出正常的量子数，表 2.3 列出了一些常用的这类算符。

表 2.3　$\bar{\psi}\Gamma\psi B(E)$ 型介子内插场算符。a,b 是颜色指标。E_i^{ab} 和 B_i^{ab} 分别是色电场和色磁场

0^{-+}	0^{--}	0^{++}	0^{+-}
$\bar{\psi}^a\gamma_i B_i^{ab}\psi^b$	$\bar{\psi}^a\gamma_5\gamma_i E_i^{ab}\psi^b$	$\bar{\psi}^a\gamma_i E_i^{ab}\psi^b$	$\bar{\psi}^a\gamma_5\gamma_i B_i^{ab}\psi^b$
1^{-+}	1^{--}	1^{++}	1^{+-}
$\epsilon_{ijk}\bar{\psi}^a\gamma_j B_k^{ab}\psi^b$	$\bar{\psi}^a\gamma_5 B_i^{ab}\psi^b$	$\bar{\psi}^a\gamma_4 B_i^{ab}\psi^b$	$\bar{\psi}^a B_i^{ab}\psi^b$

原则上讲，具有相同量子数的内插场算符都可以投影到相同的强子态上，这样的算符可以有许多种构造办法，在这里我们不做太多描述。还以上述的夸克双线性型算符为例，如果两个具有相同量子数的算符为 $O_A=\bar{\psi}_1\Gamma_A\psi_2$ 和 $O_B=\bar{\psi}_1\Gamma_B\psi_2$，则它们的关联函数

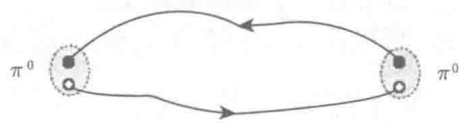
$$\begin{aligned} C_{AB}(\boldsymbol{p},t) &= \sum_{\boldsymbol{x}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\langle 0|O_A(\boldsymbol{x},t)O_B^\dagger(\boldsymbol{0},0)|0\rangle \\ &= \sum_{\boldsymbol{x}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\langle 0|\bar{\psi}_1(\boldsymbol{x},t)\Gamma_A\psi_2(\boldsymbol{x},t)\bar{\psi}_2(\boldsymbol{0},0)\Gamma'_B\psi_1(\boldsymbol{0},0)|0\rangle \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{\boldsymbol{x}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \langle \mathrm{Tr}\left[S_1(\boldsymbol{0},0;\boldsymbol{x},t)\Gamma_A S_2(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{0},0)\Gamma'_B\right]\rangle \\
&= -\sum_{\boldsymbol{x}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \left\langle \mathrm{Tr}\left[S_1^{\dagger}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{0},0)\gamma_5\Gamma_A S_2(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{0},0)\Gamma'_B\gamma_5\right]\right\rangle
\end{aligned} \tag{2.123}
$$

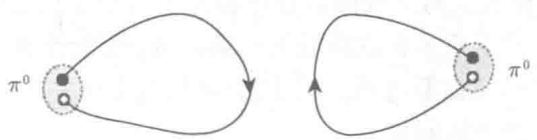
其中 $\Gamma'_B = \gamma_4\Gamma^{\dagger}\gamma_4$，$S_{1,2}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{0},0)$ 是两种夸克味道 ψ_1 和 ψ_2 的夸克传播子，也就是费米子矩阵的逆 D^{-1}，尖括号 $\langle\ldots\rangle$ 代表对规范组态求平均。在最后一个等式中我们利用到了狄拉克矩阵的 γ_5- 厄米性。如果 ψ_1 和 ψ_2 是相同的夸克场，则还有一种收缩方式，即同一点的夸克场收缩，

$$
\mathrm{Tr}[S_1(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x},t)\Gamma_A]\,\mathrm{Tr}[S_2(\boldsymbol{0},0;\boldsymbol{0},0)\Gamma'_B]
$$

格点上一般将这两种收缩方式称为连通图和非连通图 (或者湮灭图)。图 2.3 给出了 π^0 介子的收缩方式 (当然 π^0，由于场算符的同位旋组合为 $O_{\pi^0} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\bar{u}\gamma_5 u - \bar{d}\gamma_5 d\right)$，简单的计算可以看出非连通夸克图的贡献在 u,d 夸克质量简并时是相消的，但对于味道单态的情形，非连通图会有贡献)。



连通



非连通

图 2.3 π^0 介子两点关联函数的两种 Wick 收缩方式

由此看到，只要在产生规范组态后，在每个组态上计算夸克传播子，则计算强子关联函数是直接的。

上面介绍的是介子场算符的构造以及相应的关联函数的计算。对于重子的情形也是类似处理。自旋为 $J = 1/2$ 和 $J = 3/2$ 的重子的格点场算符的最简单的形式为

$$
\begin{aligned}
J = \frac{1}{2}: &\qquad O_{\frac{1}{2}} = \epsilon_{abc}(\psi_1^{a,T} C\gamma_5 \psi_2^b)\psi_3^c \\
J = \frac{3}{2}: &\qquad O_{\frac{3}{2}} = \epsilon_{abc}(\psi_1^{a,T} C\gamma_i \psi_2^b)\psi_3^c
\end{aligned} \tag{2.124}
$$

其中 a,b,c 是颜色指标，$1,2,3$ 代表夸克场的味道，$\psi^{a,T}$ 表示 ψ^a 的转置，C 是电荷共轭变换矩阵 $C=\gamma_2\gamma_4$。这是基本的算符形式，如果考虑重子的味道多重态中的特定态，则还需要根据重子的味道波函数对 $\psi_{1,2,3}$ 进行适当的组合，细节在这里略去。需要说明的是，重子算符是 Dirac 旋量算符，它既可以投影到正宇称重子态，也可以投影到负宇称重子态。

$$\bar{O}_J|0\rangle=\sum_n\left[Z_+^{(n)}|n,J^+\rangle+Z_-^{(n)}|n,J^-\rangle\right] \tag{2.125}$$

$|n,J^\pm\rangle$ 表示 $J^\pm$ 重子态，$Z_\pm^{(n)}=\langle n,J^\pm|\bar{O}(\mathbf{0},0)|0\rangle$。根据夸克场的 $\mathcal{P}$ 变换性质 $\mathcal{P}\psi(\boldsymbol{x},t)\mathcal{P}^{-1}=\gamma_4\psi(-\boldsymbol{x},t)$，引入宇称投影算符 $P_\pm=\frac{1}{2}(1\pm\gamma_4)$，则可以得到具有确定宇称的重子算符 $O_{J^\pm}=P_\pm O_J$。这样，有确定宇称的重子两点函数就可以表示为

$$C_{J^\pm}(\boldsymbol{p},t)=\sum_{\boldsymbol{x}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\langle 0|\,\mathrm{Tr}[P_\pm O_J(\boldsymbol{x},t)\bar{O}_J(\mathbf{0},0)]|0\rangle \tag{2.126}$$

其中 $O_J=O_J^+\gamma_4$。另外，在周期性的时空格子上，一般对于费米子，我们在时间方向取反周期性边条件，利用格点上电荷共轭变换和 $\mathcal{T}$ 变换性质还可以证明 $C_{J^\pm}(\boldsymbol{p},t)=-C_{J^\mp}(\boldsymbol{p},T-t)$，所以在 $\boldsymbol{p}=0$ 时，$C_{J^\pm}(\mathbf{0},t)$ 可以参数化为

$$C_{J^\pm}(\mathbf{0},t)=\sum_n\left(Z_\pm^{(n)}\mathrm{e}^{-E_n^\pm(\mathbf{0})t}\pm Z_\mp^{(n)}\mathrm{e}^{-E_n(0)^\mp(T-t)}\right) \tag{2.127}$$

如果第 n 个态是单粒子态，则 $E_n^\pm(0)=m_n^\pm$ 就是这个态的质量。在得到关联函数之后，利用这种参数化方式对关联函数进行和介子情形完全相同的数据分析，就可以得到重子的质量。关于重子关联函数的计算，和介子情形类似，先进行 Wick 收缩 (所有可能的收缩形式都要考虑)，在每个规范组态将关联函数用相应的夸克传播子表达，再对组态求平均即可。

我们在上面列出的算符都是最简单的定域算符，空间宇称 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{C}$ 宇称可以通过格点上的分立对称性得到，自旋量子数可以通过和连续时空的对应知道。但是对于具有空间结构的算符，其量子数和连续情形的 J^P 量子数对应并不那么显然。实际上，在离散的时空格点上，空间转动对称群是具有二十四个元素的立方点群 O；如果再将宇称变换 (空间反射) 考虑进来，则对称群为 $O\otimes Z_2$ 即四十八个元素的 O_h。点群 O 的不可约表示为 $R=A_1,A_2,E,T_1,T_2$，它们的维数分别为 $1,1,2,3,3$。也就是说，在格点上，确定的量子数为 R^{PC} 而不是我们在连续时空时的 J^{PC}，但它们之间存在一定的对应关系，表 2.4 给出了 R 和 J 的部分对应关系 (J 只取到 5)。一般的假设是具有 R^{PC} 量子数的多个态中能量较低的态在连续极限下对应角动量较小的态。关于 R^{PC} 态在连续极限下对应的具体的 J 的量子数，还需要考虑转动对称性恢复的要求。比如 E 表示和 T_2 表示中都含有 $J=2$(张量) 的成分，所

以当 $a \to 0$ 时，如果 T_2 表示的态和 E 表示的态的质量趋于简并，则可以判断它们的连续极限就是 $J = 2$ 的张量态。

表 2.4 连续空间转动对称群 $SO(3)$ 的不可约表示 (用角动量 J 表示) 和格点上空间对称群 O 的不可约表示 R 的对应关系。每一个 R 可以对应多个 J

R \ J	0	1	2	3	4	5
A_1	1	0	0	0	1	0
A_2	0	0	0	1	0	0
E	0	0	1	0	1	1
T_1	0	1	0	1	1	2
T_2	0	0	1	1	1	1

我们知道在连续空间中，$SO(3)$ 群对应于真正的三维空间转动群，只有张量表示 (给出整数的角动量量子数)，而 $SU(2)$ 群是 $SO(3)$ 的双重覆盖群，既有整数的角动量量子数 (对应于玻色体系)，也有半奇数的角动量量子数 (对应于费米体系)。类似地，在离散空间，立方点群 O 的双重覆盖群用 O^D 来表示，它有四十八个元素。O^D 群的不可约表示除了 O 群的五个不可约表示 (张量表示) 外，还多出三个旋量表示 G_1, G_2, H，维数分别为 2，2，4，它们和连续空间的角动量量子数的对应关系为

$$G_1 \to J = \frac{1}{2}, \quad , H \to J = \frac{3}{2}, \quad , G_2 \oplus H \to J = \frac{5}{2}, \ldots \tag{2.128}$$

在格点 QCD 计算中，具有相同 R^{PC} 量子数的算符可以有多种构造方式，细节在这里略去。需要知道的是，具有相同 R^{PC} 量子数的不同算符在不同的态上的投影大小可能不同，因此通常为了可靠得到 R^{PC} 道的能谱，人们需要构造包含多种算符的集合，通过变分法 (具体见本章第四节中的介绍) 来得到这些算符的特定线性组合方式，从而使组合出的算符在特定态上的投影最大。

在下面几部分，我们将介绍从两点函数计算物理量的一些例子。

2.3.2 轻强子质量谱

轻强子性质涉及 QCD 非微扰性质，理论上很难直接通过微扰 QCD 方法给出预言。基态强子如赝标介子和八重态重子是强相互作用的稳定粒子，如果能够通过格点 QCD 的计算给出和实验结果相符的质量值，则可以看作是对 QCD 作为强相互作用正确理论的直接支持。格点 QCD 计算结果的可靠程度取决于对各种误差的控制和估计。一般来说，误差分统计误差和系统误差两种。统计误差由蒙特卡洛模拟的统计量 N 来控制，$\delta_{\text{stat}} \sim \mathcal{O}(1/\sqrt{N})$，统计量越大，则统计误差就越小。系统误差有多个来源，包括离散格距误差、计算时所取的轻夸克质量对应的 m_π 与物理的 m_π 的偏离程度以及有限体积效应等。关于有限格距误差，格点的结果只有取连续

极限之后，才能得到物理结果。模拟计算都是在有限的格距 a 上进行的，所以需要进行外推才能得到连续极限。对于不同的格点作用量，他们的连续极限都应该一致；但是有限格距下的离散误差并不一样，通常离散误差形式为 $\mathcal{O}(a^2\Lambda^2)$，$\mathcal{O}(\alpha_s a^2\Lambda^2)$ 等，其中 Λ 是系统的特征能标。一般情况下，我们很难知道所计算的物理量对 a 的具体依赖形式，因此通常采用 a 的多项式进行连续极限外推。格点 QCD 模拟计算只能在有限的格子体积上进行，这会带来有限体积效应。我们在 2.4 节会具体讨论有限体积对强子能谱的影响，这里只给出一般结论，即当系统的最轻的粒子的质量 m 和格点空间线度满足 mL 足够大时，有限体积效应可以忽略。对于 QCD，最轻的强子是 π 介子，一般要求格点体系的大小满足 $m_\pi L > 4$ 。目前对大部分格点 QCD 数值模拟研究还很难真正在物理的 u, d 夸克质量上进行，通常要将所计算的物理量通过手征外推到物理的 m_π。物理量对轻夸克质量的依赖可以表现为对 m_π^2 的依赖，所以一般的手征外推采取两种方式，其一是基于手征微扰论计算出物理量对 m_π^2 的具体函数形式，然后外推；或者直接用 m_π 的多项式进行外推。实际研究的经验表明这两种外推方式在 $m_\pi < 300$ MeV 时，外推的结果差别不是很大。当然不同的外推方式所得的结果的偏差可以计入系统误差范畴。

关于基态强子质量的计算细节，感兴趣的读者可以参看最近的综述性文章 [18]。目前引用比较多的是来自欧洲 BMW(Budapest-Marseille-Wuppertal 的首字母缩写) 格点合作组的结果 (见图 2.4 [19]) 和日本 PACS-CS 格点合作组 (见图 2.5 [20]) 的

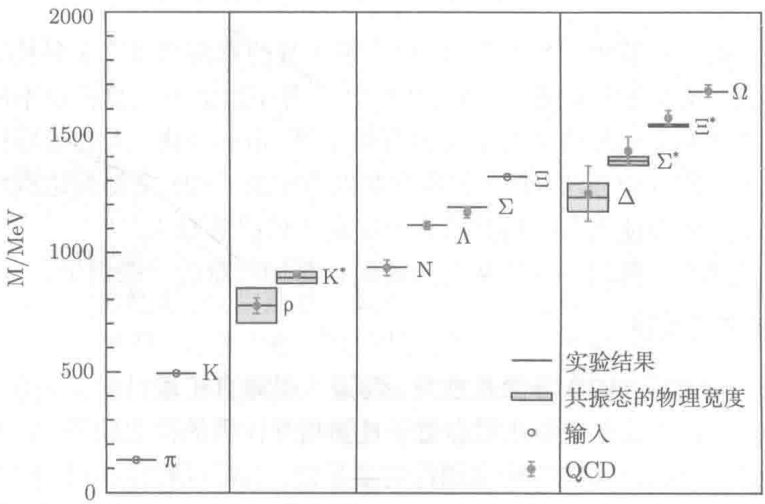


图 2.4　欧洲 BMW 格点合作组进行包含 $N_f = 2+1$ 味海夸克的格点 QCD 计算得到的轻强子质量谱 [19]。图中带误差的数据点是外推到物理 m_π 的格点结果；稳定强子的质量实验值用短横线表示；不稳定的强子的质量的实验值用方框表示，方框的高度表示该粒子的衰变宽度

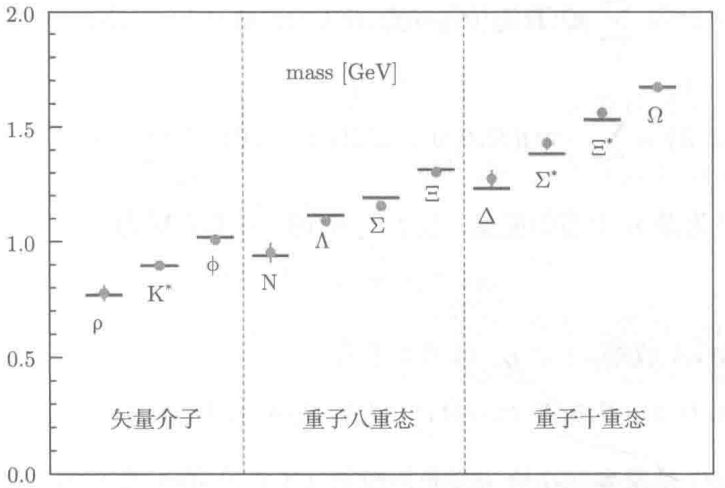


图 2.5 日本 PACS-CS 格点合作组进行包含 $N_f = 2 + 1$ 味海夸克的格点 QCD 计算得到的轻强子质量谱 [20]。图中的短横线表示实验的结果，带误差的数据点是外推到物理 m_π 的格点结果 (纵坐标为以 GeV 为单位的强子质量)

结果。这两个工作对统计误差和系统误差来源的估计都很细致全面。从图中可以看到，除了 Δ 重子的质量误差较大外，其他的基态强子 (包括矢量介子和十重态重子) 质量的理论预言和实验结果的偏差仅为 2-5%。

2.3.3 重夸克势和色禁闭

K.G. Wilson 最初提出格点 QCD 的文章的题目就是*Confinement of quarks*。该论文提出了计算 (无穷) 重夸克之间的势能的办法。我们在此做简要介绍。考虑两个质量为 M 的正反静态夸克构成的系统，正夸克和反夸克的时空坐标分别为 $x' = (\boldsymbol{R}, t)$ 和 $x = (\boldsymbol{0}, 0)$。如果不存在色禁闭，即夸克可以作为自由色荷，我们可以预期在 $R \to \infty$ 时该系统的能量为 $E(R) = 2M$；如果存在色禁闭，则系统能量为 $E(R = \infty)$ 为无穷大，即不可能将正反夸克完全分开成自由的色荷。忽略夸克的自旋状态，产生这样的正反夸克状态的规范不变的场算符可以取为

$$\Omega(x', x; C) = \bar{Q}(x')U(x', x; C)Q(x) \tag{2.129}$$

其中，$x' = (\boldsymbol{R}, t)$；$x = (\boldsymbol{0}, t)$；$\bar{Q}(x')$ 和 $Q(x)$ 为正反夸克场，

$$U(x', x; C) = \mathcal{P}\exp[-ig\int_{x,C}^{x'} dy_\mu A_\mu(y)]$$

是沿路径 C 从 x 到 x' 的有限规范路径 (平行移动算子)。算符 Ω 的关联函数为

$$C(t; R) = \langle 0|\Omega(\boldsymbol{R}, t; \boldsymbol{0}, t; C)\Omega^\dagger(\boldsymbol{R}, 0; \boldsymbol{0}, 0; C)|0\rangle \tag{2.130}$$

插入本征态完全集 $\sum_n |\bar{Q}(\boldsymbol{R})Q(\boldsymbol{0}),n\rangle\langle\bar{Q}(\boldsymbol{R})Q(\boldsymbol{0}),n| = 1$，关联函数 $C(t;R)$ 可以参数化为

$$C(t;R) = \sum_n |\langle 0|\Omega(\boldsymbol{R},0;\boldsymbol{0},0;C)|\bar{Q}(\boldsymbol{R})Q(\boldsymbol{0}),n\rangle|^2 \mathrm{e}^{-E_n(R)t} \tag{2.131}$$

其中，$E_n(R)$ 为第 n 个态的能量。当 $t\to\infty$ 时，基态贡献为主，即

$$\lim_{t\to\infty} C(t;R) \sim \mathrm{e}^{-E_1(R)t} \tag{2.132}$$

另外，经过 Wick 收缩，$C(t;R)$ 可以表示为

$$C(t;R) = \langle 0|\,\mathrm{Tr}[S_Q(\boldsymbol{R},0;\boldsymbol{R},t)U(\boldsymbol{R},t;\boldsymbol{0},t;C)S_Q(\boldsymbol{0},t;\boldsymbol{0},0)U(\boldsymbol{0},0;\boldsymbol{R},0;C)]|0\rangle \tag{2.133}$$

其中，$S_Q(x,x')$ 是重夸克在给定背景规范场 $\{A_\mu(x)\}$ 的传播子，定义为

$$S_Q(x,x') = \langle 0|Q(x)\bar{Q}(x')|0\rangle_A \tag{2.134}$$

在给定的背景规范场下，传播子 $S_Q(x,x')$ 满足欧氏空间的 Dirac 方程，

$$(\gamma_\mu\partial_\mu - \mathrm{i}g\gamma_\mu A_\mu(x) + M)S_Q(x,x') = \delta^4(x-x') \tag{2.135}$$

在无穷重夸克极限 $M\to\infty$ 下，不考虑夸克的动能部分，即忽略上述方程中的空间部分，方程可以简化为

$$(\gamma_4\partial_4 - \mathrm{i}g\gamma_4 A_4(x) + M)S_Q(x,x') = \delta^4(x-x') \tag{2.136}$$

这样，$S_Q(x,x')$ 解的形式为

$$S_Q(x,x') = \hat{S}_Q(x,x')\exp\left(\mathrm{i}g\int_{x'}^{x}\mathrm{d}y_4 A_4(y)\right) \tag{2.137}$$

其中，$\hat{S}_Q(x,x')$ 满足方程 $(\gamma_4\partial_4 + M)\hat{S}_Q(x,x') = \delta^4(x-x')$，表示自由的重夸克的传播子 $\hat{S}_Q(x,x')\sim\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\mathrm{e}^{-M|x_4-x_4'|}$。这样一来，$C(t;R)$ 就可以写成

$$\begin{aligned} C(t;R) &\propto \mathrm{e}^{-2Mt}\langle 0|\,\mathrm{Tr}[U(\boldsymbol{0},0;\boldsymbol{R},0)U(\boldsymbol{R},0;\boldsymbol{R},t)U(\boldsymbol{R},t;\boldsymbol{0},t)U(\boldsymbol{0},t;\boldsymbol{0},0)]|0\rangle \\ &\equiv \mathrm{e}^{-2Mt}\langle W(t,R)\rangle \end{aligned} \tag{2.138}$$

其中，$W(t,R)$ 是一个 $t\times R$ 的 Wilson 圈。由此可以得到该 Wilson 圈的真空期望值的参数化形式

$$\lim_{t\to\infty}\langle W(t,R)\rangle \sim \mathrm{e}^{-(E_1(R)-2M)t} \equiv \mathrm{e}^{-V(R)t} \tag{2.139}$$

这里 $V(R) = E_1(R) - 2M$ 就是无穷重夸克的静态势 (static potential)。也就是说，我们可以由不同 R 的 Wilson 圈的大 t 行为得到夸克静态势。

Wilson 利用格点 $SU(N)$ 规范场论形式解析计算了 Wilson 圈的真空期望值，即

$$\langle W(t,R)\rangle = \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}U W(t,R)\exp\left\{-\beta\sum_{\mathcal{P}}\left[1-\frac{1}{N}Re\,\mathrm{Tr}\,U_{\mathcal{P}}\right]\right\} \tag{2.140}$$

其中 $\beta = 2N/g^2$。在强耦合极限下 ($g\to\infty$ 或者 $\beta\to 0$) 把上式对 β 进行展开 (细节见 Wilson 原初的文章 [1])，最终得到

$$\langle W(t,R)\rangle \sim \mathrm{e}^{-\sigma Rt} \equiv \mathrm{e}^{-\sigma A(t,R)} \tag{2.141}$$

这里 $A(t,R) = tR$ 是 Wilson 圈的面积，σ 是常系数，称作弦张力 (string tension)，这个结果称作面积律 (area law)。由此我们可以得到在强耦合情形下夸克静态势为

$$V(R) = \sigma R \tag{2.142}$$

即夸克静态势是线性的禁闭势。另外需要指出的是，由强耦合展开的计算也可以得到弦张力的表达式 $\sigma a^2 = -\ln\beta$，而且这个结果不依赖于规范对称群。也就是说，即使是 $U(1)$ 规范理论，在强耦合展开计算中仍然能得到面积律，或者说禁闭势，但我们知道在连续的 $U(1)$ 规范理论 —— 量子电动力学中并不存在禁闭势。关于这个问题的回答是，研究发现当减小耦合常数 g(或者增大 β), 会发现存在一个临界点 $\beta = \beta_c$，体系在这里会发生相变：当 $\beta < \beta_c$ 时，体系处于禁闭相 (confinement phase)，Wilson 圈的真空期望值满足面积律；当 $\beta > \beta_c$ 时，体系处于退禁闭相 (deconfinement phase)，Wilson 圈 的真空期望值满足周长律 $\langle W(t,R)\rangle \sim \exp(-K(t+R))$，这对应于我们熟悉的库仑势 (比如正方形的 Wilson 圈 $t = R$，周长律给出 $V(R)\propto R^{-1}$)，因此这个相又称作库仑相，我们熟悉的 QED 就处于这个相。对于 QCD, 一般认为并不存在这样的相变，所以 QCD 描写的强相互作用体系一直处于禁闭相 (注意我们现在讨论的都是零温的情形，有限温度 QCD 见后面章节)。

Wilson 圈的真空期望值也可以根据公式 (2.140) 通过格点 QCD 的 Monte Carlo 数值模拟方法进行计算，即计算不同 R 和 t 的 Wilson 圈的真空期望值，根据不同 R 的 Wilson 圈的大 t 行为 (计算细节及关于重夸克势的讨论请参阅综述性文献 [16])，利用公式 (2.139) 得到 $V(R)$。实际的数值研究表明 $V(R)$ 可以很好地参数化为 Cornell 势的形式

$$V(R) = V_0 - \frac{\alpha_s}{R} + \sigma R, \tag{2.143}$$

即库仑势 + 线性势的形式，V_0 是没有明确物理意义的势能常数，σ 就是我们前面提到的弦张力。图 2.6 是在淬火近似下计算的重夸克静态势 [15]，不同形状的数据点是在不同的 $\beta = 6.0, 6.2, 6.4$ (对应于三个不同的格距 a) 计算的静态势，它们几乎重合在一起，说明有限格距误差很小；实线是利用上面的 Cornell 势的形式拟合数据的结果，可以看出 Cornell 势 的理论形式能够很好地描述格点模拟结果。由于

在淬火近似下不存在海夸克，所以色禁闭型的势一直延续到很大的 R (从图中可以看到在 $R > 3r_0 \sim 1.5\text{fm}$ 时 $V(R)$ 仍是线性禁闭势)。

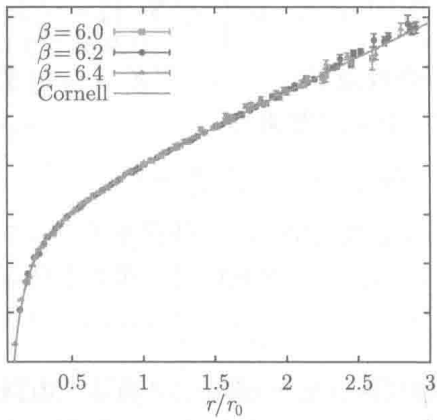


图 2.6　淬火近似下计算的重夸克静态势 [15]。不同的 $\beta = 6.0, 6.2, 6.4$ 下计算的势 (不同形状的数据点) 几乎重合，说明离散误差很小。实线是利用 Cornell 势的形式拟合数据的结果

当进行包含动力学夸克的 full-QCD 格点数值模拟时，可以预期，当正反重夸克间的距离增大到某个中间的 R 处时，由于夸克的真空极化效应造成重夸克之间的“弦”发生断裂，体系衰变为一对重轻介子 (夸克组分为 $\bar{Q}q$ 和 $\bar{q}Q$)，这时系统的能量不再随正反重夸克之间的距离增加而增加，而是表现为一个与 R 无关的常数。文献 [16] 最早在格点 QCD 数值模拟中观察到了这种“弦断裂”的现象。这个工作计算了 $\bar{Q}Q$ 型算符和 $\bar{Q}q\bar{q}Q$ 型的算符的关联矩阵 ($\bar{Q}Q$ 型算符的两点函数按照正常的 Wilson 圈计算，如前所述)，从而在每个 R 处得到两个能级 (对应基态和激发态)，具体计算细节请参阅该文献。图 2.7 是计算得出的两个态的能级随 R 的变化行为，可以看出，在 R 小的区域，基态的能量仍表现出 Cornell 势的形式，而激发态能量表现是常数；在中间 R 区域 $R/a > 15$ 时，基态能量停止增长，而激发态能量开始增长。这个现象表明，在 $R/a < 15$ 时，激发态为一对轻重介子，由于 $\bar{Q}Q$ 的能量低于一对轻重介子的阈值，所以弦没有断裂，没有发生衰变；而当 $R/a \gtrsim 15$ 时 $\bar{Q}Q$ 的能量达到阈值，弦发生断裂，$\bar{Q}Q$ 衰变为一对轻重介子。

弦张力参数是量纲为质量平方的物理量，因此在格点计算中，人们经常通过精确计算静态势从而抽取 σ 来确定格距 —— 格点 QCD 中唯一的有量纲的输入参数。基于 Cornell 势的参数化形式，一种抽取 σ 的方式是引入 Creutz 比 (Creutz ratio)

$$\sigma a^2 = \lim_{t,R\to\infty} -\ln\left(\frac{\langle W(t,R)\rangle\langle W(t+1,R+1)\rangle}{\langle W(t+1,R)\rangle\langle W(t,R+1)\rangle}\right) \tag{2.144}$$

如果知道 σ 的物理值，由格点计算中得到的 σa^2 (无量纲的数)，就可以定出 a。σ

的物理值可以由轻强子谱所表现出的 Regge 轨迹现象来估计。人们发现许多具有相同的 $\mathcal{P},\mathcal{C}$ 宇称的轻强子都可以排放在 (m_l^2, l) 平面上的直线 $l = \alpha' m_l^2 + c$ 上，其中 m_l 是角动量为 l 的强子的质量，α' 称作 Regge 斜率 (Regge's slope)。弦模型给出弦张力和 Regge 斜率的关系 $\sigma = 1/(2\pi\alpha')$, 势模型给出 $\sigma = 1/(8\alpha')$。α' 通常取值为 $\alpha' = 0.85\ \text{GeV}^{-2}$，这样利用弦模型关系可以估计 $\sigma = (440\ \text{MeV})^2$, 这也是早期格点计算中常用的值。当然 σ 的不确定性会带来系统误差。

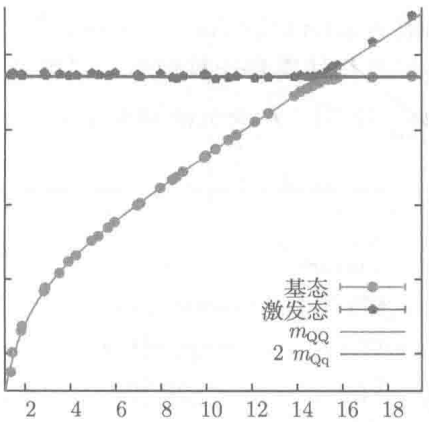


图 2.7 包含动力学夸克的格点计算的重夸克势 [16, 17]。基态 $V(r)a$ 在 $R/a \gtrsim 15$ 时停止增长，表现出弦断裂的迹象

R. Sommer 提出了另外一种利用静态势定标的方案，即引入两个静态色荷的距离参量 r_0 来定标。r_0 可以通过静态势定义如下，

$$\left(R^2 \frac{dV(R)}{dR}\right)_{R=r_0} = 1.65 \tag{2.145}$$

强子谱的势模型研究发现，Cornell 势和 Richardson 势都能成功预言粲偶素 (charmonium) 和底偶素 (bottomium) 的质量谱，并给出最佳取值 $r_0 = 0.49$ fm。利用 r_0 定标的好处在于：一是它的值和不同的唯象的夸克势的选取不敏感；二是它定义在 R 的中段部分，这段部分的势受到粲偶素和底偶素谱的高度限制；三是在这段距离的势的格点计算结果最精确；四是这种定标方式对淬火近似和 full-QCD 的格点计算都有效。

2.3.4 标准模型基本参数——强耦合常数和流夸克质量

在本节中，我们列举若干格点 QCD 的研究成果。格点 QCD 不但应用于强子质量谱和强子矩阵元的计算中，还能够精确计算标准模型的基本参数 (如强相互作用跑动耦合常数和流夸克质量等)。

强耦合常数 α_s 和流夸克质量是 QCD 拉氏量中的基本参数。目前微扰 QCD 可以在高圈图水平上计算 α_s; 实验上也可以通过各种实验过程进行测量; 格点 QCD 也可以对 α_s 进行计算。图 2.8 是对通过实验 (experiment) 和格点 QCD 计算得到的跑动耦合常数 $\alpha_s(\mu)$ 在能标 $\mu = M_Z$ 处的值的比较，α_s 的实验测量值来自 τ 衰变 (τ decay)、深度非弹性实验 (DIS)、正负电子湮灭实验 (e^+e^-) 和中性矢量玻色子 Z 的极点 (Z pole)，在图中表示为空心的圆圈。格点 QCD 计算结果用实心的圆点表示，不同的数据点来自不同的理论方法，如薛定谔泛函方法 (Schrödinger func)、流–流两点关联函数 (current 2pt func)、Wilson 圈 (Wilson loop) 和夸克静态势 (static potential)，关于具体结果和计算细节可以参阅“味物理格点 QCD 平均值”工作组 (Flavor Lattice QCD Averages Working Group，简称 FLAG) 的综述 [21]。

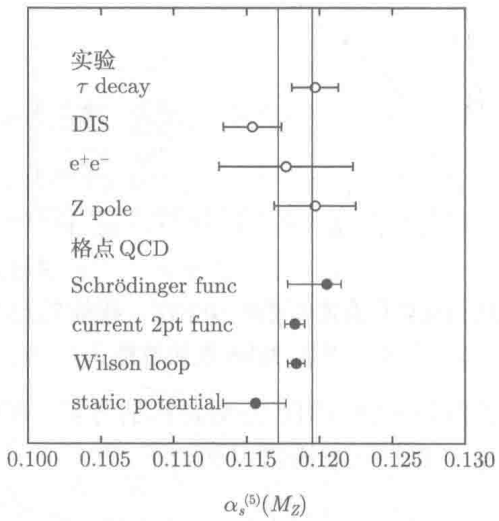


图 2.8　通过实验 (experiment) 和格点 QCD 计算得到的跑动耦合常数 $\alpha_s(M_Z)$ 的比较。α_s 的实验测量值来自 τ 衰变 (τ decay)、深度非弹性实验 (DIS)、正负电子湮灭实验 (e^+e^-) 和中性矢量玻色子 Z 的极点 (Z pole)，在图中表示为空心的圆圈。格点 QCD 计算结果用实心的圆点表示，不同的数据点来自不同的理论方法，如薛定谔泛函方法 (Schrödinger func)、流–流两点关联函数 (current 2pt func)、Wilson 圈 (Wilson loop) 和夸克静态势 (static potential)

由于夸克禁闭，不存在游离态的夸克，因此夸克的质量不能像带电轻子质量那样进行直接测量。实验上只能通过高能的强相互作用过程的测量并结合微扰 QCD 的计算反推出流夸克质量，因此存在很大的误差。格点 QCD 的计算结果如图 2.9，中间灰色的垂直线是格点计算结果的平均，即在能标为 $\mu = 2$ GeV 时，$\overline{\text{MS}}$ 方案下的流夸克质量为 $m_{ud}^{\overline{\text{MS}}(2\,\text{GeV})} = 3.408 \pm 0.048$ MeV，$m_s^{\overline{\text{MS}}(2\,\text{GeV})} = 93.4 \pm 1.1$ MeV。

和 PDG 的结果 $m_{ud}^{\overline{\rm MS}}(2\,{\rm GeV}) = 3.5^{+0.7}_{-0.2}$ MeV，$m_s^{\overline{\rm MS}}(2\,{\rm GeV}) = 95 \pm 5$ MeV 比较，二者符合很好，但格点计算的误差比实验误差小很多。本文中的图和结果来自“2 + 1 Flavor Lattice QCD Averages”网站 (http://www.latticeaverages.org)。相关计算方法和计算细节请浏览该网站及网站上的相关资料。

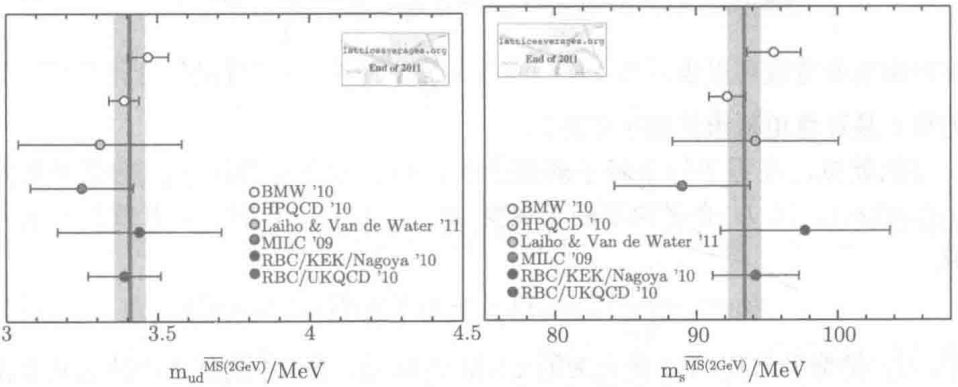


图 2.9 格点 QCD 对轻夸克 (u, d, s) 的流夸克质量在 $\overline{\rm MS}$ 能标 $\mu = 2$ GeV 处的计算结果 (截止到 2011 年)。图中的数据点表示不同的格点 QCD 研究组的结果，竖线是不同组的结果的平均值。图来自网站 http://www.latticeaverages.org

2.3.5 三点函数和强子矩阵元

强子普遍出现在强相互作用、电磁相互作用和弱相互作用的初末态中，但它们参与这些相互作用主要是通过它们的部分子 (主要是夸克)。用规范理论的语言，这些相互作用都发生在由夸克构成的色流、电磁流和弱流与矢量规范玻色子 (胶子、光子和 $W^{\pm}, Z$) 之间。但是由于夸克禁闭，实验上观察到包含夸克 (和胶子) 的初末态物理体系只能是强子，所以关于强子矩阵元 $\langle h_f|\mathcal{O}|h_i\rangle$(这里算符 $\mathcal{O}$ 可以是由夸克场构成的定域算符，比如流算符 $\bar{\psi}\Gamma\psi$，和弱相互作用等效理论中的定域等效算符) 的理论计算对解释和预言实验现象有重要的意义。

在电磁相互作用过程中，和强子–强子之间的电磁跃迁和电磁衰变过程密切相关的是电磁流 $j^{\mu}_{\rm em}(x)$ 的强子矩阵元 $\langle h_f|j^{\mu}_{\rm em}(0)|h_i\rangle$。比如电磁衰变过程 $i \to f\gamma$ 衰变分宽度的一般表达式为

$$\Gamma(i \to \gamma f) = \int {\rm d}\Omega_q \frac{1}{32\pi^2}\frac{|\boldsymbol{q}|}{M_i^2}\frac{1}{2J_i+1} \times \sum_{r_i, r_j, r_\gamma} \left|\mathcal{M}_{r_i, r_j, r_\gamma}\right|^2 \tag{2.146}$$

其中，$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}_f$ 是衰变动量；$|\boldsymbol{q}| = (M_i^2 - M_f^2)/(2M_i)$ (M_i 和 M_f 是初末态强子质量)；$\mathcal{M}_{r_i, r_j, r_\gamma}$ 是衰变振幅 (r_i, r_f, r_γ 分别为初末态粒子以及光子的极化指标)。在最低阶 QED 中，$\mathcal{M}$ 可以表示为

$$\mathcal{M}_{r_i, r_f, r_\gamma} = \epsilon^*_\mu(\boldsymbol{q}, r_\gamma)\langle f(\boldsymbol{p}_f, r_f)|j^{\mu}_{\rm em}(0)|i(\boldsymbol{p}_i, r_i)\rangle \tag{2.147}$$

其中，$\epsilon_\mu(\boldsymbol{q}, r_\gamma)$ 是光子的极化矢量，$\langle f(\boldsymbol{p}_f, r_f)|j^\mu_{\rm em}(0)|i(\boldsymbol{p}_i, r_i)\rangle$ 是电磁流 $j^\mu_{\rm em}$ 在初末态之间的在壳 (on-shell) 的强子矩阵元。经过多极分解，该强子矩阵元可以表示成电磁多极形状因子 $F_K(Q^2)$ 的线性组合 ($Q^2 = -(p_i - p_f)^2$)

$$\langle f(\boldsymbol{p}_f, r_f)|j^\mu_{\rm em}(0)|i(\boldsymbol{p}_i, r_i)\rangle = \sum_k \alpha^\mu_k(p_i, p_f)F_k(Q^2) \tag{2.148}$$

最终电磁衰变宽度可以表示为 $\Gamma(i \to \gamma f) \propto \sum\limits_k F_k^2(0)$。可以看出理论计算该衰变宽度的核心是计算电磁流的强子矩阵元。

与此类似，在强子的半轻子弱衰变中也涉及到夸克弱流 j^μ_W 的强子矩阵元 $\langle h_f|j^\mu_W(0)|h_i\rangle$。以 D 介子的半轻子衰变 $D \to Xl^+\nu_e$ 为例，其有效拉氏量可以写成

$$\mathcal{L}_{\rm eff} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}}V^*_{cq}\bar{\nu}\gamma_\mu(1-\gamma_5)l\langle X|\bar{q}\gamma^\mu(1-\gamma_5)c|D\rangle \tag{2.149}$$

其中，G_F 是费米常数；V_{cq} 是有关的 CKM 矩阵元。上式中的强子矩阵元是非微扰的量，一般的理论计算需要在非微扰的唯象模型框架下进行。如果强子 X 为赝标量介子，如 K 介子，则只有矢量流的矩阵元有贡献。这个强子弱矩阵元可以用形状因子表示为

$$\langle K|\bar{s}\gamma_\mu c|D\rangle = \left((p_D + p_K)_\mu - \frac{m_D^2 - m_K^2}{q^2}q_\mu\right)F_+(q^2) + \frac{m_D^2 - m_K^2}{q^2}q_\mu F_0(q^2) \tag{2.150}$$

其中 $q = p_D - p_K$，$F_+(q^2)$ 和 $F_0(q^2)$ 分别称作横向和纵向形状因子。衰变的微分宽度为

$$\frac{{\rm d}\Gamma}{{\rm d}q^2}(D \to Kl^+\nu) = \frac{G_F^2}{192\pi^3 m_D^3}|V_{cs}|^2[(m_D^2 + m_P^2 - q^2) - 4m_D^2 m_K^2]^{3/2}|F_+(q^2)|^2 \tag{2.151}$$

精确决定 CKM 矩阵元对于新物理的寻找等有重要的物理意义。特定的 CKM 矩阵元的确定需要对特定的弱相互作用过程的精确实验测量，也需理论上对该过程性质的精确计算。比如上面的 $D \to Kl^+\nu$ 的过程涉及 V_{cs}，要从实验结果得到它的精确的值需要知道形状因子 $F_+(q^2)$ 的精确理论结果。

低能弱相互作用可以用弱相互作用的有效哈密顿量来描述。按照有效场论的观点，如果我们从标准模型出发，在某个特定的能标 μ 处，将标准模型中更重的自由度积掉，就可以获得适用于该能标的有效哈密顿量，或者说等效拉氏量。对于我们感兴趣的强相互作用现象，明显高于强作用能标 $\Lambda_{\rm QCD}$ 的自由度如顶夸克和中间玻色子 $W^\pm, Z$，积掉这些自由度，我们可以得到仍然包含剩余的五味夸克自由度的有效拉氏量

$$\mathcal{L}_{\rm eff} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\sum_i A_i(\mu, m_t, m_W, m_Z, \alpha_s, \alpha, V_{lm})\mathcal{Q}_i(\mu) \tag{2.152}$$

其中，$\mathcal{Q}_i(\mu)$ 是一系列四夸克算符；A_i 是 Wilson 系数，它们的定义原则上依赖于重整化能标 $\mu \sim m_W$。但是有效拉氏量在物理态之间的矩阵元是不依赖于能标的，这是由重整化群方程保证的。有效算符 $\mathcal{Q}_i(\mu)$ 在强子初末态中的矩阵元也是在研究强子弱相互作用过程中需要理论计算的重要物理量。

还有许多物理上感兴趣的量都涉及到强子矩阵元的计算，例如，π 介子的电磁形状因子 $F_\pi(q^2)$ 就涉及到强子矩阵元

$$\langle \pi^+(p_1)|j^\mu_{\rm em}|\pi^+(p_2)\rangle = (p_1+p_2)^\mu F_\pi(q^2) \tag{2.153}$$

核子的电磁形状因子 $F_1(q^2)$ 和 $F_2(q^2)$ 就和矩阵元

$$\langle N(p',s')|j^\mu_{\rm em}(0)|N(p,s)\rangle = \bar{u}(p',s')\left[\gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{{\rm i}\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m_N}F_2(q^2)\right]u(p,s) \tag{2.154}$$

有关，等等。这些矩阵元都可以通过格点 QCD 进行非微扰计算。

格点 QCD 为从 QCD 第一性原理计算这些强子矩阵元 (尤其是初末态只涉及基态强子时) 提供了系统性的解决方案。为了计算强子矩阵元，格点 QCD 方法首先需要计算三点函数 (以电磁形状因子为例，下面的表达式中的定域矢量流算符也可以换成其他的定域算符)

$$\Gamma^{(3)\mu}_{mn}(\boldsymbol{p}_f,\boldsymbol{q},t,t') = \sum_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} {\rm e}^{-{\rm i}\boldsymbol{p}_f\cdot\boldsymbol{x}}{\rm e}^{-{\rm i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{y}}\langle O^f_m(\vec{x},t)j^\mu_{\rm em}(\vec{y},t')O^{i\dagger}_n(\vec{0},0)\rangle \tag{2.155}$$

其中 $O^{i,f}_{m,n}$ 是产生初末态强子 i 和 f 的格点场算符，下标 m,n 表示自旋不为零的强子算符的分量。通过在算符间插入正交完备集，三点函数可以参数化为

$$\begin{aligned}\Gamma^{(3),\mu}_{mn}(\boldsymbol{p}_f,\boldsymbol{q},t,t') = &\sum_{r_i,r_f} {\rm e}^{-E_f t}{\rm e}^{-(E_i-E_f)t'}\frac{\hat{Z}^f_m(\boldsymbol{p}_f,r_f)\hat{Z}^{i*}_n(\boldsymbol{p}_i,r_i)}{2E_i\,2E_f}\\ &\times\langle f(\vec{p}_f,r_f)|j^\mu_{\rm em}(0)|i(\vec{p}_i,r_i)\rangle \quad (t',t-t'\to\infty)\end{aligned} \tag{2.156}$$

其中 r_i 和 r_f 代表初末态强子的极化指标，$\hat{Z}^{i,f}_m$ 代表矩阵元 $\hat{Z}^X_m(\boldsymbol{p}_X,r_X) = \langle 0|O^X_m|X(\boldsymbol{p}_X,r_X)\rangle$，它们的值可以通过计算相应的两点函数

$$C_{X,mn}(\boldsymbol{p}_X,t) = \sum_{\boldsymbol{x}} {\rm e}^{{\rm i}\boldsymbol{p}_X\cdot\boldsymbol{x}}\langle O^X_m(\vec{x},t)O^{X\dagger}_n(\boldsymbol{0},0)\rangle \to \sum_{r_X}\frac{\hat{Z}^{X*}_m\hat{Z}^X_m}{2E_X}{\rm e}^{-E_X t} \quad (t\to\infty) \tag{2.157}$$

得到 (这里 X 代表 i,j)。在实际计算中，矩阵元一般通过比例

$$R^\mu(t) = \Gamma^{(3)\mu}(\boldsymbol{p}_f,\boldsymbol{q},t_f,t)\sqrt{\frac{2E_iC_i(\boldsymbol{p}_i,t_f-t)}{C_i(\boldsymbol{p}_i,t)C_i(\boldsymbol{p}_i,t_f)}}\sqrt{\frac{2E_fC_f(\boldsymbol{p}_f,t)}{C_f(\boldsymbol{p}_f,t_f-t)C_f(\boldsymbol{p}_f,t_f)}} \tag{2.158}$$

来提取。显然在 $t_f-t, t-t_i\to\infty$ 的情况下 $R^\mu(t)$ 是不依赖于 t 的，所以在数据分析时通过对平台区的拟合就可以得到相应的矩阵元。

2.3.6　CKM 矩阵元的相关格点 QCD 计算

CKM 矩阵元也是标准模型的基本参数。目前只发现了三代夸克 (u,d)，(c,s)，(t,b)，三代夸克之间存在混合，即它们的弱作用本征态是质量本征态的混合，混合矩阵就是 CKM 矩阵。如果自然界只存在三代夸克，则 CKM 矩阵应该是幺正的，在 Wolfenstein 参数化下，这种幺正性可以在 $(\bar{\rho},\bar{\eta})$ 复平面上用一个封闭的三角形来描述。如果还存在第四代夸克，CKM 矩阵就不是幺正的，这个三角形就不封闭。证实或证伪 CKM 矩阵的幺正性依赖于 CKM 矩阵元的精确实验测量。实验上只能测量与 CKM 矩阵元相关的物理过程的截面或宽度，由此提取 CKM 矩阵元则需要知道相关的强子弱矩阵元的精确值，人们希望其最可靠的结果来自第一性原理的 QCD 计算。目前格点 QCD 计算的强子弱矩阵元的精度已经达到或超过相关物理过程的实验测量精度。更精确的 CKM 矩阵元的获取需要理论和实验的共同努力。图 2.10 是网站 unitary triangle fit (http://www.utfit.org/UTfit/) 的一个实验和格点结果的全局拟合的结果，其中格点数据 (B 介子矩阵元等) 来自 FLAG(Flavor Lattice Averaging Group) 合作组。

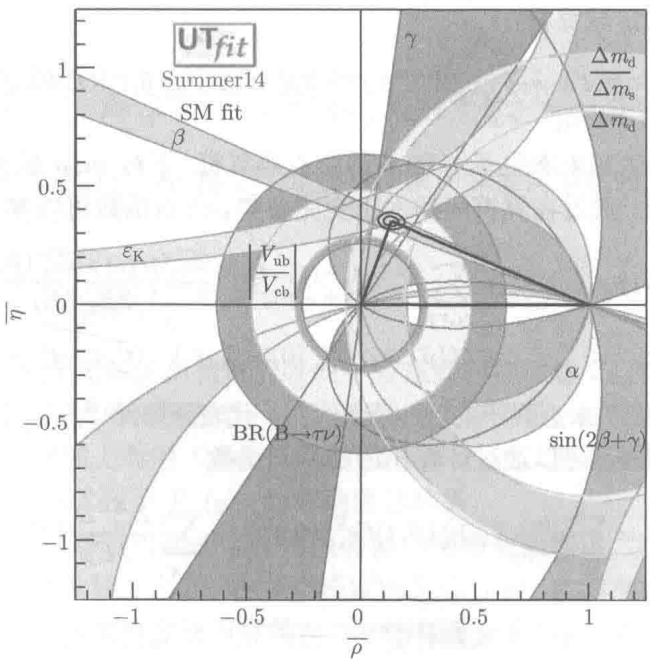


图 2.10　在 $(\bar{\rho},\bar{\eta})$ 平面上对 CKM 矩阵各种参数的限制。该图网站 unitary triangle fit (http://www.utfit.org/UTfit/) 的一个实验和格点结果的全局拟合的结果，其中格点数据 (B 介子矩阵元等) 来自 FLAG(Flavor Lattice Averaging Group) 合作组

2.4 强子–强子相互作用

我们知道大多数强子是强子共振态，是不稳定的粒子。格点 QCD 不能直接计算强子共振态的性质，因为有限欧氏时空格点上只能得到格点哈密顿量的离散的能级。但是通过计算两个粒子的弹性散射性质，利用特定的理论公式，可以间接得到束缚态和共振态的信息。Lüscher 通过讨论格点上单粒子和两粒子能级的有限体积效应，建立了格点上两粒子体系的的能级和连续空间两粒子弹性散射的相移之间的联系 [22–25]。

对于最简单的两粒子单道弹性散射，l- 分波的散射矩阵 $S(\sqrt{s})$ 可以用 l- 分波的散射相移参数化为

$$S(\sqrt{s}) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\delta_l(\sqrt{s})} \tag{2.159}$$

其中 s 是两粒子体系的不变质量平方，$S(\sqrt{s})$ 满足幺正性条件 $SS^\dagger = 1$。定义散射振幅 $T_l(\sqrt{s})$ 为 $S = 1 + 2\mathrm{i}T_l(\sqrt{s})$，则散射振幅和散射相移的关系为

$$T_l(\sqrt{s}) = \frac{1}{\cot\delta_l(\sqrt{s}) - \mathrm{i}} \tag{2.160}$$

如果存在强子共振态，在共振能量 $\sqrt{s} = m_R$ 附近，散射振幅 $T(\sqrt{s})$ 可以参数化为 Breit-Wigner 形式

$$T(\sqrt{s}) = \frac{-\sqrt{s}\Gamma_R(\sqrt{s})}{s - m_R^2 + \mathrm{i}\sqrt{s}\Gamma_R(\sqrt{s})} \tag{2.161}$$

其中 m_R 为共振态质量，$\Gamma_R(\sqrt{s}) = g^2\frac{p(s)^{2l+1}}{s}$ 为共振态的宽度 ($p(s)$ 为末态粒子衰变动量，g 为相应的等效耦合常数)，散射截面 $\sigma \propto |T_l(\sqrt{s})|^2$ 会在 $s = m_R^2$ 附近表现为一个共振峰，散射相移 $\delta_l(\sqrt{s})$ 满足关系

$$\frac{p(s)^{2l+1}}{\sqrt{s}}\cot\delta_l(\sqrt{s}) = \frac{1}{g^2}(m_R^2 - s) \tag{2.162}$$

可以看出，$\delta_l(\sqrt{s})$ 会在 $s = m_R^2$ 附近有 π 的跃变，并且 $\delta_l(\sqrt{s} = m_R) = \pi/2$。

如果存在两粒子的束缚态，则在 $\sqrt{s} < E_{\mathrm{th}}$ 处 (E_{th} 是两粒子能量阈值)$T(\sqrt{s})$ 存在一个极点，对应的散射动量 $p(s)^2 < 0$，这时有

$$T_l(\sqrt{s}) = \frac{1}{\cot\delta_l(\sqrt{s}) - \mathrm{i}} = \infty, \quad \cot\delta_l(\sqrt{s}) = \mathrm{i} \tag{2.163}$$

这个结论在无穷大体积连续时空的情形成立，但在有限体积的欧氏时空格子上得到束缚态的信息则需要更进一步分析。通常，对散射相移可以做有效力程展开

$$p\cot\delta_l(\sqrt{s}) = \frac{1}{a_l} + \frac{1}{2}r_l p^2 \tag{2.164}$$

如果可以得到散射相移，我们可以通过上式得到散射长度 a_l 和有效力程 r_l，原则上这两个参数和体积无关。如果散射长度 a_l 取很大的负值，则预示这可能存在一个束缚态 (因为 $p^2<0$ 表示 $p=i|p|$)。利用从有限格子上得到的 a_l 和 r_l，我们可以得到在无限体积极限下的束缚态动量 p_B，

$$-|p_B|=\frac{1}{a_l}-\frac{1}{2}r_l|p_B|^2 \tag{2.165}$$

相应地，我们可以得到束缚态的质量和束缚能。

从上面的一般性讨论可以看出，如果能够通过格点 QCD 计算两粒子的散射相移，就能得到共振态和束缚态的信息。在格点 QCD 中，强子的信息主要通过格点计算中的离散的能量谱获取。对于给定的量子数 J^P，物理体系可以通过具有相同量子数的任意场算符 $O_j^\dagger$ 作用到真空态 $|0\rangle$ 得到，对于一个玻色型的强子系统，这些算符可以是 $\bar{q}\Gamma q$ 型算符，也可是 $(\bar{q}\Gamma_1 q)_{\boldsymbol{p}_1}(\bar{q}\Gamma_2 q)_{\boldsymbol{p}_2}$ 型算符 (强子–强子算符) 和 $[\bar{q}\Gamma_1\bar{q}^T][q^T\Gamma_2 q]$ 型算符 (四夸克算符)。所以通常在计算中，对于给定的 J^P 量子数，人们会构建一个算符集合 $\{O_j, j=1,2,\ldots\}$，并计算相应的关联函数矩阵 $C(t)$

$$C_{ij}(t)=\langle 0|O_i(t)O_j(0)|0\rangle=\sum_n Z_i^n Z_j^{n,*}\mathrm{e}^{-E_n t},\quad Z_i^n\equiv\langle 0|O_i|n\rangle \tag{2.166}$$

在此基础上通过求解广义的本征值问题 (也称作变分法)

$$C(t)u^n(t)=\lambda^n(t,t_0)C(t_0)u^n(t) \tag{2.167}$$

其中，$u^n(t)$ 是本征矢量，提供不同算符之间的最优线性组合的组合系数，使得优化算符 $O^n=u_i^n O_i$ 主要投影在第 n 个态上；$\lambda^n(t,t_0)=\exp(-E_n(t-t_0))$ 是第 n 个本征值，当 t 很大时，E_n 给出第 n 个态的能量。原则上讲，具有相同量子数 J^P 的所有的可能的态都对关联函数有贡献，理想情形下 E_n 就对应这些态的能量。这些态可以是单粒子态，也可以是两粒子态或多粒子散射态 (格点哈密顿量的本征态)。由于存在可能的相互作用，E_n 往往会多少偏离单粒子能级或多粒子能量阈，这种因相互作用而产生的偏离实际上为我们提供了丰富的强子–强子相互作用信息 (我们在以下的部分进行简要介绍)。

2.4.1　格点上单粒子的有限体积效应 [22]

在有限大小的格子上，物理观测量具有一定的有限体积效应。假设格点体系的时间方向足够长，我们暂时忽略时间方向的有限体积效应，并在格点体系的空间方向取周期性边条件。有限体积对单粒子传播的效应体现在两方面，一是格点上单粒子在时间 t_0 和时间 t $(t>t_0)$ 之间的传播子实际上是源 (source) 时间点 t_0 到 t 时间点的所有空间镜像点 (来自周期性边条件) 的传播子的叠加；二是传播子的自能

修正部分还有环绕空间方向的传播模式的贡献 (粒子可以有环绕空间方向的传播模式)。我们可以把这种有限体积效应理解为有限空间体积的盒子对虚粒子 (比如圈图积分中的传播子) 的压缩效应。这种有限体积效应主要来自最轻的相互作用粒子 (在 QCD 中就是 π 介子)。一般来讲，当最轻的粒子的关联长度 (康普顿波长) 远小于格点空间线度 L，则有限体积效应可以很好控制。对于 QCD 来说有限体积效应在 $m_\pi L$ 足够大时可以忽略。

就单个强子的传播而言，在其传播过程中吸收一个 π 介子或者放出一个 π 介子，其动量不变，所以相应的相互作用只和向前散射振幅有关。对于玻色子，由于这种相互作用引起的质量辐射修正为

$$m^2 = m_0^2 + \alpha \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} \hat{G}(p) = m_0^2 + \alpha G(0) \tag{2.168}$$

其中参数 α 近似地描述相互作用性质，$\hat{G}(p)$ 是动量空间的传播子，$G(0)$ 是实空间传播子的零点值。在有限的周期性空间盒子 L^3 上，周期性边条件要求对上式做如下替换

$$G(x) \to \sum_{\boldsymbol{n} \in Z^3} G(x + L\boldsymbol{n}) \tag{2.169}$$

相应地，有限格点上单粒子的质量和物理的质量之间的差别体现了有限体积效应，它可以表述为

$$m^2(L) - m^2 = \alpha \sum_{\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{0}} G(L\boldsymbol{n}) \tag{2.170}$$

我们知道，在欧氏空间，自由的玻色子传播子的渐近行为是

$$G(x) = \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}}{p^2 + m^2} \sim \frac{m^2 \sqrt{8\pi}}{(4\pi)^2} \frac{\mathrm{e}^{-m|x|}}{(m|x|)^{3/2}}, \tag{2.171}$$

由此，我们可以预期质量的有限体积修正为 $\sim \exp(-mL)/L^{3/2}$ 的形式。这也是格点 QCD 计算中确定格点尺度大小的基础，即格点空间尺度应该足够大以保证单粒子的有限体积效应可以忽略。

2.4.2 格点上的两粒子相互作用

Lüscher 将有限格子上的两个稳定粒子的能谱和它们的弹性散射振幅联系起来 [24, 25]。在前一节我们看到，有限体积效应对单粒子的影响是随格点空间线度指数压低的。但对两粒子体系情况则不完全相同，有些体积盒子中的两粒子的相互作用可以表示成 $1/L$ 的多项式，并且领头阶为 $(1/L)^3$。换句话说，在有限大小的盒子中两个粒子必然会相互靠近发生相互作用，其相互靠近的几率和盒子的空间体积成反比。我们会看到，有限体积效应并不仅是我们在格点计算中需要控制的系统误差，它还隐含着许多物理的信息。

两个粒子的近阈低能散射主要由 s- 波的散射长度 $a_0 = \lim\limits_{k\to 0}\delta_0(k)/k$ 决定（k 为两粒子的散射动量，δ_0 为 s- 波的散射相移）。具体来说，基态能量对 $1/L$ 的展开式为

$$W = 2m_\pi - \frac{4\pi a_0}{m_\pi L^3}\left(1 + c_1\frac{a_0}{L} + c_2\frac{a_0^2}{L^2} + O\left(\frac{1}{L^3}\right)\right) \tag{2.172}$$

对于非零动量的散射态，也有类似的关系，也涉及其他分波相移 $\delta_l(k)$ 。

强子基态才是强相互作用中的稳定粒子，能够直接观测，而绝大多数强子激发态都是非稳定粒子，寿命很短，表现为强子共振态，以散射过程的中间态形式出现。Lüscher 将上面关于低能散射的讨论进行扩展，建立了有限格点上的离散的两粒子本征能量和弹性散射相移之间的联系。

首先，我们考虑最简单的 $1+1$ 维的散射 (空间线度 L 有限，时间线度无穷)。最基本的假设是两粒子的相互作用力程有限并小于 L，这样两个相互作用的粒子的波函数在力程范围之外应该表现为平面波，相互作用的效应体现在动量有关的散射相移 $\delta(k)$ 上。根据周期性边条件，在格子边界 $x = L$ 处波函数的连续性要求

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL + 2\mathrm{i}\delta(k)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k0} = 1 \tag{2.173}$$

这给出相对动量的量子化条件

$$k_n L + 2\delta(k_n) = 2n\pi \tag{2.174}$$

其中 n 为整数。相移 $\delta = 0$ 给出自由情形的量子化动量 $k = 2\pi n/L$。如果存在相互作用，相移 $\delta \neq 0$ ，则量子化动量和相移就存在直接的关系。如果我们知道相移 $\delta(k_n)$ 的表达式，我们可以由此得到量子化的散射动量；或者相反，如果我们知道了散射动量，我们可以利用上式得到每个散射动量对应的相移 $\delta(k_n)$ 。

尽管上述讨论是最简单的 $1+1$ 维散射的情形，但可以很容易推广到四维时空的理论。格点 QCD 对强子–强子散射的研究采用由散射动量到散射相移的逻辑。通过直接的数值模拟计算，在有限的格子上，我们原则上可以得到两粒子体系的一系列离散的能级 $E_0, E_1, E_2, \ldots$，相对于每一个能级，相应的散射动量 k_n 由下式定义

$$E_n = 2\sqrt{m^2 + k_n^2} \tag{2.175}$$

当然，要可靠得到以上分立的能级对数值计算有很高的要求。目前普遍采用的方案是，对于给定的量子数 J^{PC}，构造足够多的单粒子算符和两粒子算符，然后计算这些算符的关联函数矩阵，再采用变分法得到投影到特定态的算符组合的组合系数，从而得到特定态的能量。最终，散射动量和散射相移的关系为

$$\delta(k) = \phi\left(\frac{kL}{2\pi}\right) \mod \pi, \quad \tan(-\phi(q)) = \frac{q\pi^{3/2}}{\mathcal{Z}_{00}(1;q^2)}, \quad \phi(0) = 0 \tag{2.176}$$

这里 $\mathcal{Z}_{00}$ 是推广的黎曼 Zeta 函数 (具体定义见下一节介绍)。需要注意上述讨论的局限性：相互作用区域和单粒子关联长度都应小于格点体系的空间体积；上述关系只适用于第一非弹性阈以下的散射情形。下面我们将介绍 Lüscher 推导该结果的大致过程。

2.4.3 Lüscher 有限体积方法

Lüscher 在一系列文章中，提出了一整套的理论，将有限体积下的能级和无限体积下的散射相移联系起来，使得格点上的计算结果可以跟实验上的相关结果做对比。Lüscher 在原始文章中，主要针对立方盒子中都在质心系下具有周期性边界条件的两个等质量标量粒子散射问题进行研究，后来人们又对该方法进行了各方面的扩展，包括非质心系、不同质量粒子散射、不同分波、包含费米子 (重子) 的散射等。

考虑在一个 L^3 盒子中的两个质量为 m 的粒子在质心系中的低能散射问题，系统的哈密顿量可以由非相对论性近似表述为

$$H=\frac{1}{2\mu}\nabla^2+V_L(\boldsymbol{r}),\quad V_L(\boldsymbol{r})=\sum_{\boldsymbol{r}\in R^3,\boldsymbol{n}\in Z^3}V(|\boldsymbol{r}+\boldsymbol{n}L|) \tag{2.177}$$

其中 $V_L(\boldsymbol{r})$ 为格点上两粒子之间的相互作用周期势，相应的定态波函数满足周期性边界条件 $\psi(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{n}L)=\psi(\boldsymbol{r})$。

在格点上的数值模拟都是在有限的空间格子 L^3 上进行，而由于低能散射问题的有效力程 R 往往很大，为了能够得到比较合理的结果，针对特定问题的格点体积必须满足 $L>2R$ 的限制条件。对相互作用的描述可以做如下近似：相互作用区域限制在 R 为半径的球形区域内，在此区域之外的无相互作用区域 (外部区域，$V_L(\boldsymbol{r})=0$) 为

$$\Omega=\{\boldsymbol{r}\in R^3||\boldsymbol{r}+\boldsymbol{n}L|>R,\forall\boldsymbol{n}\in Z^3\} \tag{2.178}$$

令 $k=\sqrt{2\mu E}$，E 为相应的定态能级，波函数 $\psi(\boldsymbol{r})$ 满足的定态 Schrödinger 方程为 Helmholtz 方程

$$(\nabla^2+k^2)\psi(\boldsymbol{r})=0 \tag{2.179}$$

将 $\psi(\boldsymbol{r})$ 用球谐函数展开，

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{r})&=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}(\theta,\phi)\psi_{lm}(r;k)\\ \psi_{lm}(r;k)&=b_{lm}(\alpha_l(k)j_l(kr)+\beta_l(k)n_l(kr))\end{aligned} \tag{2.180}$$

其中，l 和 m 为轨道角动量及其分量，$j_l(kr)$ 和 $n_l(kr)$ 分别为球 Bessel 函数。利用球 Bessel 函数在 $r \to \infty$ 时的渐近行为

$$\begin{aligned} j_l(kr) &\to \frac{1}{kr}\sin(kr - \frac{l\pi}{2}) \\ n_l(kr) &\to \frac{1}{kr}\cos(kr - \frac{l\pi}{2}) \end{aligned} \tag{2.181}$$

可以得到 $\psi_{lm}(r;k)$ 在 $k > 0$ 时的渐近形式

$$\begin{aligned} \psi_{lm}(r;k) &\to b_{lm}\frac{\sqrt{\alpha_l(k)^2 + \beta_l(k)^2}}{kr}\sin(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l(k)) \\ e^{2i\delta_l(k)} &= \frac{\alpha_l(k) + i\beta_l(k)}{\alpha_l(k) - i\beta_l(k)}, \quad \delta_l(k) = \arctan(\frac{\beta_l(k)}{\alpha_l(k)}) \end{aligned} \tag{2.182}$$

其中，δ_l 为 l 分波的散射相移。$k \to 0$ 的展开式为

$$\delta_l(k) = \nu_l\pi + a_l k^{2l+1} + \mathcal{O}(k^{2l+3}) \tag{2.183}$$

式中，ν_l 为整数。在低能区占主导的是 $s-$ 波散射，a_0 是 s- 波的散射长度。

以上的讨论只限于 Ω 区内的波函数的解，即无相互作用区的解，并且是一般性的讨论。Lüscher 证明了只要确定 Ω 区的解的形式，通过解析延拓就可以唯一确定相互作用区域的解的形式。

关于 Ω 区的解的具体形式，可以做如下讨论。在质心系中，两个粒子动量为 $\boldsymbol{k}_1 = -\boldsymbol{k}_2 \equiv \boldsymbol{k}$。如果粒子没有相互作用，在格子空间的所有区域有 $V_L(\boldsymbol{r}) = 0$，此时两粒子的总能量为

$$E(\boldsymbol{k}) = 2\sqrt{m^2 + \boldsymbol{k}^2} \tag{2.184}$$

$\boldsymbol{k}$ 的取值范围为 $\Gamma = \{\boldsymbol{k}|\boldsymbol{k} = \frac{2\pi\boldsymbol{n}}{L}, \boldsymbol{n} \in Z^3\}$。如果存在相互作用，两粒子的总能量为

$$E(\boldsymbol{k}) = 2\sqrt{m^2 + \tilde{\boldsymbol{k}}^2} \tag{2.185}$$

$\tilde{\boldsymbol{k}}$ 的取值应该偏离 Γ 集合中的值，进一步定义无量纲的量

$$q^2 = \frac{\tilde{\boldsymbol{k}}^2 L^2}{(2\pi)^2} \tag{2.186}$$

q^2 与自由情况下的 $\boldsymbol{n}^2$ 相对应。在周期性的盒子里，Helmholtz 方程的格林函数 $G(\boldsymbol{r}, k^2)$ 满足方程 (对于有相互作用的情形，k^2 就对应于 $\tilde{\boldsymbol{k}}^2$)

$$(\nabla^2 + k^2)G(\boldsymbol{r}, k^2) = -\sum_{\boldsymbol{n}\in Z^3}\delta(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{n}L) \tag{2.187}$$

其通解为

$$G(\boldsymbol{r},k^2)=\frac{1}{L^3}\sum_{\boldsymbol{p}\in\Gamma}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}}{\boldsymbol{p}^2-\boldsymbol{k}^2} \tag{2.188}$$

当有相互作用时，$\boldsymbol{k}$ 偏离会偏离 Γ 集合中的值，格林函数不会出现奇异值。对于 $\boldsymbol{r}\neq 0$ 的区域而言，$G(\boldsymbol{r},k^2)$ 就是 Helmholtz 方程的一个解。经过仔细推导，Lüscher 给出了在 $0<r<L/2$ 区域内满足 Helmholz 方程的更广泛的周期性解的形式 [25]

$$G_{lm}(\boldsymbol{r};k^2)=\frac{(-1)^l k^{l+1}}{4\pi}\left[Y_{lm}(\theta,\phi)n_l(kr)+\sum_{l'm'}\mathcal{M}_{lm;l'm'}Y_{l'm'}(\theta,\phi)j_{l'}(kr)\right] \tag{2.189}$$

其中，$\mathcal{M}_{lm;l'm'}$ 定义为

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{lm;js}=&\sum_{l'm'}\frac{(-1)^s i^{j-1}\mathcal{Z}_{l'm'}(1,q^2)}{\pi^{3/2}q^{l'+1}}\sqrt{(2l+1)(2l'+1)(2j+1)}\\&\times\begin{pmatrix}l & l' & j\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l & l' & j\\m & m' & -s\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{2.190}$$

其中，括号中为 Wigner $3j$ 符号，可以和 CG 系数联系起来；$\mathcal{Z}_{lm}(1,q^2)$ 是广义的黎曼 Zeta 函数

$$\mathcal{Z}_{lm}(s,q^2)=\sum_{\boldsymbol{n}\in Z^3}\frac{\mathcal{Y}_{lm}(\boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n}^2-q^2)^s} \tag{2.191}$$

其中，$\mathcal{Y}_{lm}(\boldsymbol{r})=r^lY_{lm}(\theta,\phi)$，$Y_{lm}(\theta,\phi)$ 是球谐函数。该函数只在 $Re(s)>(l+3)/2$ 时收敛，具体应用中需要进行相应的解析延拓。矩阵 $\mathcal{M}_{lm;l'm'}$ 在我们分析有限体积下两粒子的能谱时有十分重要的作用，下面我们会看到它和散射相移直接联系起来。

$G_{lm}(\boldsymbol{r};k^2)$ 构成一组完备集，$\psi(\boldsymbol{r})$ 可以表示成它们的线性组合

$$\psi(\boldsymbol{r})=\sum_{l=0}^{N}\sum_{m=-l}^{l}\nu_{lm}G_{lm}(\boldsymbol{r};k^2) \tag{2.192}$$

其中 $\psi(\boldsymbol{r})$ 满足 $\lim\limits_{r\to 0}|r^{N+1}\psi(\boldsymbol{r})|<\infty$，$\nu_{lm}$ 为复系数。这里引入了角动量截断 N，即只考虑分波 $l<N$ 的散射的贡献。Lüscher 证明了 $l<N$ 的分波波函数的形式和 $N\to\infty$ 时的波函数是一致的。对比公式 (2.180) 和公式 (2.192)，我们得到前面 $\alpha_l(k)$ 和 $\beta_l(k)$ 的具体表达式

$$\begin{aligned}b_{lm}\alpha_l(k)=&\sum_{l'=0}^{N}\sum_{m'=-l'}^{l'}\nu_{l'm'}\frac{(-)^{l'}k^{l'+1}}{4\pi}\mathcal{M}_{l'm';lm},\\b_{lm}\beta_l(k)=&\nu_{lm}\frac{(-)^l k^{l+1}}{4\pi}\end{aligned} \tag{2.193}$$

将上面第二式带入第一式可以消去 ν_{lm}，而且如果将 b_{lm} 看作是 $l=0,1,\ldots,N; m=-l,-l+1,\ldots,l$ 空间的矢量 $\boldsymbol{b}$，则可以定义该线性空间的矩阵 A,B，它们分别以 $\alpha_l(k)$ 和 $\beta_l(k)$ 为本征值，即

$$A\boldsymbol{b}=\alpha_l(k)\boldsymbol{b};\quad B\boldsymbol{b}=\beta_l(k)\boldsymbol{b} \tag{2.194}$$

这样公式 (2.193) 可以写成紧致的形式

$$A\boldsymbol{b}=B\mathcal{M}\boldsymbol{b}. \tag{2.195}$$

$\boldsymbol{b}$ 有非平庸解 ($\boldsymbol{b}\neq 0$) 的条件为

$$\det[A-B\mathcal{M}]=0 \tag{2.196}$$

根据公式 (2.182)，当 $k>0$ 时，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\delta_l(k)}=\dfrac{\alpha_l(k)+\mathrm{i}\beta_l(k)}{\alpha_l(k)-\mathrm{i}\beta_l(k)}$，上式等价于

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\delta_l(k)}(A-\mathrm{i}B)\boldsymbol{b}=(A+\mathrm{i}B)\boldsymbol{b} \tag{2.197}$$

即 $\det\left[\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\delta_l(k)}-\dfrac{A+\mathrm{i}B}{A-\mathrm{i}B}\right]=0$。由公式 (2.195) 有 $\mathcal{M}=AB^{-1}$，最终我们得到矩阵 $\mathcal{M}$ 和散射相移的关系

$$\det\left[\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\delta_l(k)}-\frac{\mathcal{M}+\mathrm{i}}{\mathcal{M}-\mathrm{i}}\right]=0 \tag{2.198}$$

这是简化的 Lüscher 公式，对于不同的系统，动量截断 N 不同，相应地需要选取不同的完备集来给出不同的 $\mathcal{M}$ 矩阵。在矩阵元的计算中，其中所包含的修正的广义黎曼 Zeta 函数是一个比较难计算的量，需要相应地变形。

在格点 QCQ 计算中，从关联函数中提取出能级信息后，通过 Lüscher 公式就可以直接得到分波相移。在近阈散射过程中，对于分波相移可以进行有效力程展开

$$k^{2l+1}\cot\delta_l(k)=a_l^{-1}+\frac{1}{2}r_lk^2+\ldots \tag{2.199}$$

其中 a_l 是 l 分波的散射长度，r_l 称作 l 分波的有效力程。在此框架下，如果得到的 a_l 为负并且此时的动量点都为正值 $q^2>0$，则说明两粒子之间存在排斥的相互作用；如果 $q^2<0$ 且 a_l 为正时，说明两粒子之间存在吸引的相互作用；当 $q^2<0$ 并且 $a_l<0$ 但值很大，则意味着两粒子有可能形成束缚态。

在无限大体积下，两粒子系统的束缚态可以由两粒子能量阈下哈密顿量的离散本征值来标识，但在离散的有限格点，所有的能级都是分立的，因而需要新的关于束缚态存在的判据。在格点上，两粒子之间如果存在吸引 (排斥) 的相互作用，则系统能量小于 (大于) 两粒子的能量阈值，此时对应于 $q^2<0(q^2>0)$ 。但吸引相

互作用并不一定意味着存在束缚态，还取决于相互作用的强弱。由于存在吸引相互作用时 q 为虚数，需要相应地将相移 $\delta_l(q)$ 解析延拓 $\cot\sigma(q)=\mathrm{i}\cot\delta(q)$。比如 $s-$ 波散射的 Lüscher 公式相应地修改为

$$(-\mathrm{i}q)\cot\sigma(q)=\frac{1}{\pi^{3/2}}\mathcal{Z}_{00}(1;q^2) \tag{2.200}$$

其中 $(-\mathrm{i}q)>0$。其无穷大体积外推的近似公式为

$$\cot\sigma(q)=-1+\frac{6}{2\pi\sqrt{-q^2}}e^{-2\pi\sqrt{-q^2}}+\ldots \tag{2.201}$$

从纯虚数动量 q 定义的相移 $\sigma(q)$ 的物理意义在于，如果在无限体积外推时有 $\cot\sigma(q)\to-1$，则可以推断两粒子束缚态的存在，并由此得到相应的束缚能。

2.4.4 可能的强子-强子束缚态的格点 QCD 研究

在这一部分，我们以 $D_{s0}^*(2317)$ 的相关计算为例介绍格点 QCD 对可能的强子-强子束缚态的探索性研究。$D_{s0}^*(2317)$ 的量子数为 $J^P=0^+$，质量低于 DK 阈值，宽度很窄 [29]。它的最小可能的夸克组分为 $c\bar{s}$，而且是目前在这个道发现的最轻的粒子。对它的一个自然的解释是它是夸克模型中的 $c\bar{s}$ 标量介子。但是基于夸克模型的唯象计算预言的 $c\bar{s}$ 标量介子的质量在 2.4GeV 以上，因此也有人认为 $D_{s0}^*(2317)$ 可能不是夸克模型中的 $c\bar{s}$ 标量介子而有可能是四夸克态或 DK 分子态等。

文献 [26] 首次在格点 QCD 框架下通过 DK 散射来研究 $D_{s0}^*(2317)$ 相关性质。对于含 $c\bar{s}$ 的具有 $J^P=0^+$ 的态，这个工作既引入夸克双线性算符 $\bar{s}A_{1-4}c$(其中 A_{1-4} 代表由 γ 矩阵和空间导数构成的四种算符，但保证算符的整体量子数为 A_1^+，即格点空间对称群 O_h 的不可约表示，在连续极限下对应 0^+)，也引入四夸克算符

$$\begin{aligned}
O_1^{DK}&=[\bar{s}\gamma_5 u](p=0)[\bar{u}\gamma_5 c](p=0)+\{u\to d\}\\
O_2^{DK}&=[\bar{s}\gamma_4\gamma_5 u](p=0)[\bar{u}\gamma_4\gamma_5 c](p=0)+\{u\to d\}\\
O_3^{DK}&=[\bar{s}\gamma_5 u](\boldsymbol{p})[\bar{u}\gamma_5 c](-\boldsymbol{p})+\{u\to d\}
\end{aligned} \tag{2.202}$$

这里 $\boldsymbol{p}\in\frac{2\pi}{L}\times\{(\pm1,0,0),(0,\pm1,0),(0,0,\pm1)\}$。然后计算这些算符的关联矩阵

$$C_{ij}(t)=\langle 0|O_i(t)O_j^\dagger(0)|0\rangle \tag{2.203}$$

再利用本节开始时介绍的求解广义本征值问题的方法 (公式 (2.166) 和公式 (2.167)，一般也称变分法)，求解分立的能谱 E_n。具体的计算采用两个规范组态，组态参数见表 2.5。

表 2.5　文献 [26] 中格点计算所用的两个规范组态系综的参数

ID	$L^3 \times T$	N_f	a[fm]	L[fm]	m_π [MeV]	m_K [MeV]
(1)	$16^3 \times 32$	2	0.1239(13)	1.98	266(3)(3)	552(2)(6)
(2)	$32^3 \times 64$	2+1	0.0907(13)	2.90	156(7)(2)	504(1)(7)

图 2.11 显示了在这两个组态系综上测量的能级，左图是 $m_\pi = 266(3)(3)$ MeV 的结果；右图是 $m_\pi = 156(7)(2)$ MeV 的结果。在每个图中，横的虚线表示相对动量 $\boldsymbol{p} = 0$ 和 $|\boldsymbol{p}|a = 2\pi/L$ 时 DK 的能量阈；左边的点是对只包含 $\bar{q}q$ 型算符的关联矩阵的变分法分析的基态的结果，在谱中没有看到在阈值附近的能级 (可能的原因时 $\bar{q}q$ 型算符在 DK 散射态上的投影比较小)；右边的点是既包含 $\bar{q}q$ 型算符由包含四夸克态算符的的关联矩阵的变分法分析得到的最低的三个能级。可以看出在 $DK(\boldsymbol{p} = 0)$ 阈上下出现了两个能级。尤其是在 $m_\pi = 156(7)(2)$ MeV 的情形，不包括四夸克算符时，能级出现在 $DK(\boldsymbol{p} = 0)$ 阈上 (可能是“裸”的 $c\bar{s}$ 态，对应夸克模型的 $c\bar{s}$ 标量介子态，但不是格点上哈密顿量的本征态)；而当引入四夸克算符时，图中的能级能够比较可靠地反映了哈密顿量的本征能量。通过关系 $E_n(L) = E_D(p) + E_K(p)$ 可以定义每条能级 E_n 对应的散射动量 p。由于在这个对称道，DK 应该处于 s- 分波 ($l = 0$)，利用 s- 分波散射动量和散射相移的关系，以及有效力程展开，我们有

$$p \cot \delta(p) = \frac{2}{\sqrt{\pi} L} \mathcal{Z}_{00}(1, (\frac{pL}{2\pi})^2) \sim a_0^{-1} + \frac{1}{2} r_0 p^2 \tag{2.204}$$

利用 $DK(\boldsymbol{p} = 0)$ 阈附近的两个能级可以解出散射长度 a_0 和有效力程 r_0，结果如下：

$$\begin{aligned} m_\pi = 266(3)(3)\ \text{MeV}:\ & a_0 = -0.756(25)\ \text{fm},\ r_0 = -0.056(31)\ \text{fm} \\ m_\pi = 156(7)(2)\ \text{MeV}:\ & a_0 = -1.33(20)\ \text{fm},\ \ r_0 = -0.27(17)\ \text{fm} \end{aligned} \tag{2.205}$$

可以看到，在这两个 m_π 的情形，$s-$ 分波的 DK 散射长度都是很大的负数，并且有效力程很小，这都和存在 $s-$ 分波的 DK 束缚态的性质吻合。

在无穷大体积极限下，束缚态对应于 S 矩阵在实轴上的极点，极点条件由 $\cot \delta(p_B) = \mathrm{i}, p_B = \mathrm{i}|p_B|$ 给出，其中 p_B 是束缚态的束缚动量。假设前面得到的 a_0 和 r_0 对体积依赖不大，可以看作是 $L \to \infty$ 的近似，则利用这个极点条件和公式 (2.204) 可以计算出 $L \to \infty$ 时的束缚动量 p_B，从而利用 $E(\infty) = \sqrt{M_K^2 + p_B^2} + \sqrt{M_D^2 + p_B^2}$ 得到束缚态能量。由于计算中的夸克质量参数和物理的夸克质量有一定偏差，文献 [26] 引入 $E(\infty)$ 和 D_s 介子的自旋平均质量 $M_{\overline{1S}} = (M_{D_s} + 3M_{D_s^*})/4$ 的差来和实验的结果比较 (这个结果对粲夸克质量和奇异夸克质量不敏感)。具体的结果是：当 $m_\pi = 266(3)(3)$ MeV 时，$E(\infty) - M_{\overline{1S}} = 287.2(5.0)(3.0)$ MeV；当

$m_\pi = 156(7)(2)$ MeV 时，$E(\infty) - M_{\overline{1S}} = 266(16)(4)$ MeV。这和实验值 $m_{D_{s0}^*(2317)} - M_{\overline{1S}} = 241.45(60)$ 都很接近。

尽管这个研究还是格点 QCD 对束缚态研究的新的尝试，但对认识 $D_{s0}^*(2317)$ 的性质提供了新的理论信息。关于束缚态的格点 QCD 研究还在发展中，我们这里只是给读者提供一个参考。

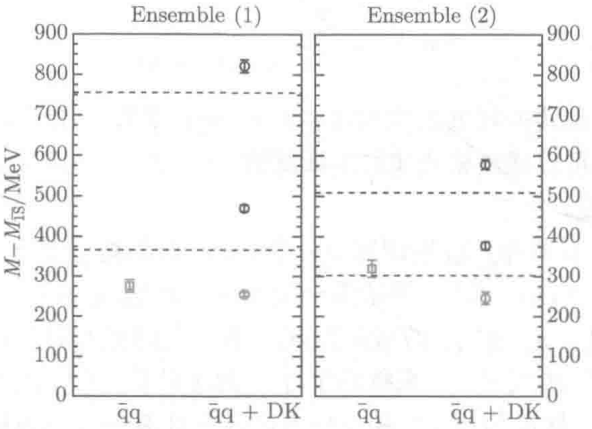


图 2.11 文献 [26] 中在两个组态系综上测量的能级。左图是 $m_\pi = 266(3)(3)$ MeV 的结果，右图是 $m_\pi = 156(7)(2)$ MeV 的结果。横的虚线表示相对动量 $\boldsymbol{p} = 0$ 和 $|\boldsymbol{p}|a = 2\pi/L$ 时 DK 的能量阈。在每个图中，左边的点是对只包含 $\bar{q}q$ 型算符的关联函数给出的基态能量；右边的点时既包含 $\bar{q}q$ 型算符由包含四夸克态算符的的关联矩阵的变分法分析得到的最低的三个能级，其中两个出现在 $DK(\boldsymbol{p} = 0)$ 阈上下

2.4.5 ρ 共振态的格点 QCD 研究

我们以格点 QCD 计算 ρ 共振态作为例子说明格点 QCD 中有关共振态的研究。ρ 介子是典型的强子共振态，量子数为 $I^G J^{PC} = 1^+1^{--}$，它几乎 100% 地强衰变到 $\pi\pi$，表现为 $\pi\pi$ 的 p- 波共振 ($l = 1$)。在弹性散射中，如果存在共振态，相对论的 Breit-Wigner 散射振幅 (两粒子相对角动量为 l) 表示为

$$T_l(\sqrt{s}) = \frac{-\sqrt{s}\Gamma_R(s)}{s - M_R^2 + \mathrm{i}\sqrt{s}\Gamma_R(s)} \tag{2.206}$$

其中，s 为质心系总能量平方；M_R 是共振态的质量参数；$\Gamma_R(s)$ 是 s 依赖的共振态宽度。散射振幅 $M_l(s)$ 和 l- 分波的散射相移 δ_l 关系为

$$\tan\delta_l = \frac{\sqrt{s}\Gamma_R(s)}{M_R^2 - s} \tag{2.207}$$

令 $g_{\rho\pi\pi}$ 为 $\rho \to \pi\pi$ 的有效耦合常数，m_ρ 表示 ρ 的质量，则 ρ 共振态的共振参数为

$$M_R = m_\rho, \quad \Gamma_R(s) = \frac{g_{\rho\pi\pi}^2}{6\pi}\frac{p^3}{s} \tag{2.208}$$

其中，$p = \sqrt{s/4 - m_\pi^2}$ 是衰变动量。利用物理可观测量 m_ρ 和 $g_{\rho\pi\pi}$，$\pi\pi$ 散射在 $l = 1, I = 1$ 道的散射相移可以表示为

$$\tan\delta_1 = \frac{g_{\rho\pi\pi}^2}{6\pi}\frac{p^3}{\sqrt{s}(m_\rho^2 - s)} \tag{2.209}$$

一般取 ρ 共振态在共振峰处的宽度 $\Gamma_R(s = m_\rho^2)$ 作为 ρ 介子的宽度，并取 $p = \sqrt{m_\rho^2/4 - m_\pi^2}$，则可以通过格点 QCD 计算的 $\pi\pi$ 在 $I = 1, l = 1$ 道的散射相移来抽取 ρ 的共振参数。

在格点 QCD 计算中，首先计算 $\pi\pi$ 在 $l = 1$ 时的格点上分立的能级，对应的质心系能量 $\sqrt{s} = E_{CM}$，E_{CM} 的范围一般取在弹性区域 $2m_\pi < E_{CM} < 4m_\pi$。在离散的时空格点上，$\pi\pi$ 的 p- 波散射态属于格点上的空间对称群 O_h 的不可约表示 $R^P = T_1^-$ (这里 P 代表 $\pi\pi$ 系统的宇称)。为了计算方便，通常选取同位旋第三分量 $I_3 \neq 0$ 的道，比如考虑 ρ^+ 和 $\pi^+\pi^0$(这样在计算中可以省略双重的夸克湮灭图)。这样，对应于 ρ 量子数的 $q\bar{q}$ 算符可以选取为 $O_{q\bar{q}}^i = \bar{d}\Gamma_i u$，具有不同相对动量的 $\pi\pi$ 算符表示为 $O_{\pi\pi}^i = O_{\pi^+}O_{\pi^0}$ (这里指标 i 代表不同的极化状态，$O_{\pi^+} = \bar{d}\gamma_5 u$，$O_{\pi^0} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}\gamma_5 u - \bar{d}\gamma_5 d)$)。如果算符 $O_{q\bar{q}}^i$ 和 $O_{\pi\pi}^i$ 各有一种，为了计算分立能级，则需要计算相应的 2×2 关联矩阵

$$C^{ii}(t) = \begin{pmatrix} \langle O_{\pi\pi}^i(t)O_{\pi\pi}^{i,\dagger}(0)\rangle & \langle O_{\pi\pi}^i(t)O_{q\bar{q}}^{i,\dagger}(0)\rangle \\ \langle O_{q\bar{q}}^i(t)O_{\pi\pi}^{i,\dagger}(0)\rangle & \langle O_{q\bar{q}}^i(t)O_{q\bar{q}}^{i,\dagger}(0)\rangle \end{pmatrix} \tag{2.210}$$

在计算过程中，关联矩阵中的矩阵元的计算需要通过 Wick 收缩用夸克传播子表达。图 2.12 [30] 表示所有可能的收缩，其中同一列的圆圈表示算符在同一时间点，在同一时间点之间的夸克传播子原则上需要计算全传播子，这些传播子的计算一般来说需要很大的计算量。对计算所得的关联矩阵进行变分法分析，就可以得到相应的本征能级 E_1 和 E_2。由于格点动量是离散的，要得到足够多的 $\pi\pi$ 能级，人们也经常在 $\pi\pi$ 的质心系和非质心系进行计算。如果 $\pi\pi$ 体系的总动量为 $\boldsymbol{P}$，则所得的能级 E 和质心系能量的关系可以通过 $E^2 = E_{CM}^2 + \boldsymbol{P}^2$ 得到，具体细节可以参考文献 [27]。不过需要注意的是，当在非静止系计算时，Lüscher 公式需要进行相应的修正 [31]。比如，如果质心动量沿某一空间坐标轴方向 $\boldsymbol{d}$，则格点上的空间对称群缩小为 D_{4h}，其不可约表示 A_2^- 和 E^- 都含有 $L = 1$ 的 $\pi\pi$ 散射分波，相应的相移公式变为

$$\tan\delta(E_{CM}) = \frac{\gamma\pi^{3/2}q}{\mathcal{Z}_{00}^{\boldsymbol{d}}(1;q^2) + (2q^{-2}/\sqrt{5})\mathcal{Z}_{20}^{\boldsymbol{d}}(1;q^2)} \quad (J^P = A_2^-) \tag{2.211}$$

其中

$$\mathcal{Z}_{lm}^{\boldsymbol{d}}(s;q^2)=\sum_{\boldsymbol{n}\in P_{\boldsymbol{d}}}\frac{\mathcal{Y}_{lm}^{*}(\boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n}^2-q^2)^s} \tag{2.212}$$

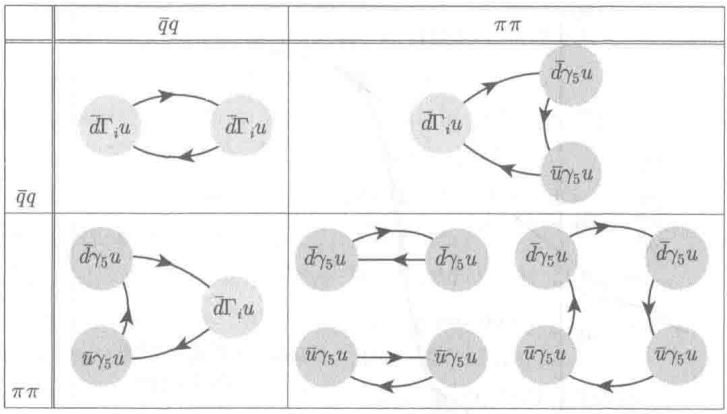


图 2.12 图中表示 $\pi^0\pi^+$ 在 $L=1, I=1$ 道散射的格点计算中相应关联函数的 Wick 收缩的各种情形，其中带箭头的线表示夸克传播子 [30]

为变形的 Zeta 函数。当然，也可以通过对边界条件的操作 (比如扭曲的边界条件，twisted boundary condition) 来获得更多的质心能量点 [32]。图 2.13 是参考文献 [30] 中计算的 $\pi\pi$ 在 $I=1, L=1$ 道散射的散射相移随 $\sqrt{s}$ 变化的结果。这个计算是包含 $N_f=2+1$ 味动力学夸克，费米子作用量采用 Wilson clover 作用量，格子的大小是 $L^3\times T=32^3\times 96$，裸耦合常数 $\beta=6.1$ 对应格距 $a=0.11403(77)$ fm，简并的 u,d 夸克质量对应于 $am_\pi=0.183295(36)$，奇异夸克质量对应于 $am_{\eta_s}=0.3882(19)$，组态数目为 1041。很明显，在质心系能量 $0.4<a\sqrt{s}<0.6$ 之间散射相移 $\delta_1(\sqrt{s})$ 有一个 π 的跃变，这是在这个能量范围内出现共振态的典型特征。利用公式 (2.209) 进行拟合，可以得到 m_ρ 和 $g_{\rho\pi\pi}$ 的值

$$m_\rho=797.6(2.8)_{\text{stat}}(2.4)_{\text{sys}}(5.4)_a\ \text{MeV},\quad g_{\rho\pi\pi}=5.69(13)_{\text{stat}}(16)_{\text{sys}} \tag{2.213}$$

m_ρ 的值已经根据 a 的值换算成物理单位，注意这里 $m_\pi=316.6(0.6)_{\text{stat}}(2.1)_a$ MeV，其中第一个误差为统计误差；第二个误差为系统误差，包含了有限体积效应、相移公式等的不确定性；下标为 a 的误差是考虑到格距 a 定标时的误差。具体分析方法在这里略去。需要说明的是，关于 ρ 共振态的计算有很多格点工作，感兴趣的读者请查阅相关文献 [33]。

$\pi\pi\to\rho\to\pi\pi$ 是典型的单道共振，通过计算 $\pi\pi$ 散射的能谱抽取散射相移，在对散射相移随 $\sqrt{s}$ 的变化利用 Breit-Wigner 公式提取 ρ 的共振参数，在格点 QCD 计算中比较简单直接，目前已经研究得很深入。但是对于大部分共振态来说，其产

生和衰变模式可能不止一种，因此多道耦合的情形必须考虑，这也给格点 QCD 计算带来了比较大的难度，而且涉及到三体衰变时还需要从理论上建立类似 Lüscher 公式的格点上的离散能谱和散射性质的关系，这些方面还都在探索中。

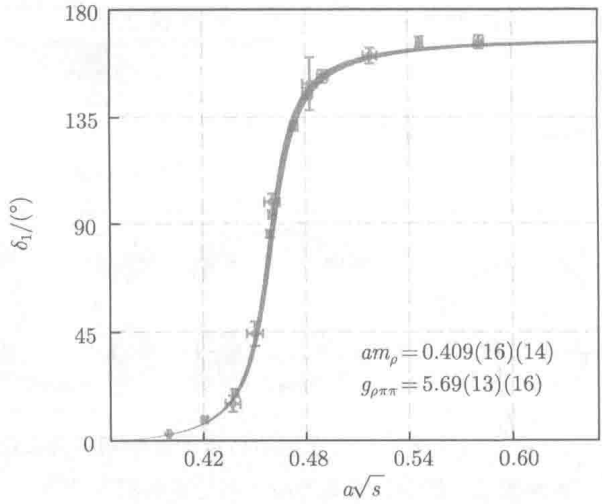


图 2.13　$\pi\pi(\ I=1, L=1\ )$ 散射的散射相移随 $\sqrt{s}$ 变化的结果 [30]。在质心系能量 $0.4 < a\sqrt{s} < 0.6$ 之间散射相移 $\delta_1(\sqrt{s})$ 有一个 π 的跃变，这是在这个能量范围内出现共振态的典型特征。利用公式 (2.209) 进行拟合，可以得到 m_ρ 和 $g_{\rho\pi\pi}$ 的值

第一个考虑与 K^* 共振态相关的 $K\pi - K\eta$ 耦合道效应的工作参见文献 [34]，在这个工作中，散射矩阵被参数化为散射相移 $\delta^{K\pi}$ 和 $\delta^{K\eta}$ 和非弹性度的函数 $T_{ii} \propto \eta e^{2i\delta_i(p)} - 1$，在 $m_\pi \sim 400$MeV 时，在 $K\pi$ 阈下看到了对应 κ 和 $K^*(892)$ 的态，在 $K\pi$ 阈上看到了对应 $K^*(1430)$ 和 K_2 的态。另外还有关于 $D_0^*(2400)$ 和 $D_1(2430)$ 分别作为 $D\pi$ 共振和 $D^*\pi$ 共振的工作 [35] 等。总之，关于共振态的格点 QCD 研究是目前的热点之一，由于涉及到复杂的强子–强子相互作用以及耦合效应，相关的理论探讨也是既重要又有挑战性的工作。

参 考 文 献

[1] Wilson K G. Phys. Rev. 1974, D10: 2445.
[2] Creutz M, Jacobs L, Rebbi C. Phys. Rev. Lett. 1979, 42: 1390.
[3] Brambilla N *et al.* Eur. Phys. J. 2014, C74: 2981
[4] Nielsen H B, Ninomiya M. Nucl. Phys. 1981, 185: 20.
[5] Kogut J, Susskind L. Phys. Rev. 1975, D11: 395.
[6] Gliozzi F. Nucl. Phys. 1982, B 204: 493.
[7] Ginsparg P H, Wilson K G. Phys. Rev. 1982, D25: 2649.

[8] Neuberger H. Phys. Lett. 1998, B 427: 353.
[9] Rothe H. Lattice Gauge Theory: An Introduction (4th ed.), Singapore, World Scientific, 2012.
[10] Sheikholeslami B, Wohlert R. Nucl. Phys. 1985 B 259, 572.
[11] Iwasaki Y. University of Tsukuba report UTHEP-118, 1983.
[12] Symanzik K. Nucl. Phys. 1983, B226: 187, 205.
[13] Cabibbo N, Marinari E. Phys. Lett. 1982, B119: 387.
[14] 刘川. 格点量子色动力学导论. 北京大学出版社, 2017.
[15] Booth S P (UKQCD Collab.), Phys. Lett. 1992, B294: 385.
[16] Bali G. Phys. Rept. 2001, 343: 1.
[17] Bali G *et al.* (SESAM Collab.), Phys. Rev. 2005, D 71: 114513.
[18] Fodor Z, Hoelbling C. Rev. Mod. Phys. 2012, 84: 449.
[19] Durr S *et al.* (BMW Collab.), Science 2008, 322: 1224.
[20] Aoki S *et al.* (PACS-CS Collab.), Phys. Rev. 2009, D79: 034503.
[21] Aoki S *et al.* Eur. Phys. J. 2014, C74: 2890.
[22] Lüscher M. Commun. Math. Phys. 1986, 104: 177.
[23] Lüscher M. Commun. Math. Phys. 1986, 105: 153.
[24] Lüscher M. Nucl. Phys. 1991, B354: 531.
[25] Lüscher M. Nucl. Phys. 1991, B364: 237.
[26] Mohler D *et al.* Phys. Rev. Lett. 2013, 111: 222001.
[27] Feng X, Jansen K, Renner, D B. Phys. Rev. 2011, D83: 094505.
[28] Prelovsek S. PoS Lattice2014, 2014: 009.
[29] Patrignani C *et al.* Chin. Phys. 2016, C40: 100001.
[30] Alexandrou C *et al.* Phys. Rev. 2017, D96: 034525.
[31] Rummukainen K, Gottlieb S A. Nucl. Phys. 1995, B450: 397.
[32] Ozaki S, Sasaki S. Phys. Rev. 2013, D87: 014506.
[33] Dudek J J, Edwards R G, Thomas C E. Phys. Rev. 2013, D87: 034505.
[34] Dudek J J, Edwards R G, Thomas C E, Wilson D J. Phys. Rev. 2015, D91, 054008.
[35] Mohler D, Prelovsek S, Woloshyn R. Phys. Rev. 2013, D87: 034501.

第 3 章　QCD 的手征对称性和手征微扰论

QCD 具有近似自发破缺的手征对称性，从它出发人们可以得到对 QCD 所描写的强子物理特别是轻介子物理很多重要的关系和限制。物理上这个近似自发破缺的手征对称性是 QCD 在低能区与颜色禁闭并列的两个最重要的物理效应。它解释了为什么强子谱的低质量段只有少数几个质量非常轻的赝标介子，与典型的强子质量形成较大的间隔。在计算方法上，在 QCD 色规范相互作用很强的低能区，非微扰效应在物理过程中起主要作用使得传统的微扰计算方法失效，因此迫切需要能够有效计算非微扰效应的方法。早年人们依据手征对称性导出的流代数在量子场论的正则形式下可以对轻介子谱和矩阵元给出一些限制，到 1979 年 S. Weinberg[1] 开始将传统描写 π 介子的非线性 σ 模型推广并加入高阶修正项形成了唯象拉氏量也是现在的手征有效拉氏量，1984 年 J. Gasser 和 H. Leutwyler[2] 又进一步通过引进夸克流的外源把手征有效拉氏量写成了可以产生与 QCD 同样的流流格林函数的生成泛函形式，由此在路径积分形式的量子场论框架下，把轻夸克质量和介子的能动量作为相互关联的小量进行微扰展开，形成了以自发破缺的手征对称性为基础的手征微扰论。这样一个体系通过把 QCD 理论的非微扰动力学参数化使人们得以把手征极限和低能极限下的强子物理作为领头阶，系统逐级近似地描写低能强子物理。对轻的赝标介子，手征微扰论做得最完备和系统，后面又被推广到其他较重的介子和重子。我们在这一章沿此顺序，先介绍 QCD 的手征对称性及其对赝标介子的延伸，然后用两节分别介绍赝标介子手征微扰论和手征有效拉氏量的基本理论与 QCD 的关系，最后再用一节讨论这个体系对其他介子和重子的推广。手征有效拉氏量的理论体系只依赖于基本相互作用 QCD 的手征对称性质，对其相互作用细节不太敏感，人们还利用这个特点进一步通过把粒子物理的标准模型看成是新物理的低能手征有效拉氏量来探索和描述现在还是未知的超出标准模型的新物理。

3.1　QCD 的手征对称性与手征反常

本节从式 (1.27) 给出的 QCD 拉氏密度出发对 QCD 的手征对称性进行介绍，我们先在经典水平上讨论，再用正则量子体系讨论，最后进入路径积分的量子体系进行讨论。

在式 (1.27) 的拉氏密度中有一个夸克的质量项，目前实验上发现了 6 种夸克 (u,d,s,c,b,t)，它们的质量分别是 $m_u = 2.08\text{MeV}$，$m_d = 4.73\text{MeV}$，$m_s = 104\text{MeV}$，$m_c = 1.27\text{GeV}$，$m_b = 4.2\text{GeV}$，$m_t = 171\text{GeV}$。我们看到前三个夸克 u、d、s 与后三个夸克 c、b、t 的质量之间有很多个量级的差别，由此我们称 u、d、s 为轻夸克，c、b、t 为重夸克。在 1.1 节的最后我们对只考虑 u 和 d 夸克并忽略掉其质量的情形进行了初步讨论，发现这时理论的拉氏密度式 (1.34) 具有整体的 $SU_L(2)\times SU_R(2)$ 连续对称性，这个对称性具有手性 (也就是左手夸克场和右手夸克场在对称变换下分别进行各自的独立变换，见式 (1.35))，因而我们称 QCD 在略去小的 u 和 d 夸克质量时具有 $SU_L(2)\times SU_R(2)$ 手征对称性，相应的略去夸克质量情形的理论叫 QCD 的手征极限。如果进一步把 s 夸克的质量项也略去，QCD 拉氏密度具有的手征对称性就进一步扩充为 $SU_L(3)\times SU_R(3)$。当然略去轻夸克质量是一种近似，因此我们称 QCD 具有的这种手征对称性是近似的对称性或称小的明显破缺的对称性。这里所说的明显破缺是指在 QCD 拉氏密度中具有不满足手征对称性的夸克质量项，显然质量越大对手征对称性的破缺也就越大，注意到 s 夸克比 u 和 d 夸克重一到两个量级，因此在 QCD 的拉氏密度层次，$SU_L(3)\times SU_R(3)$ 是比 $SU_L(2)\times SU_R(2)$ 明显破缺更加厉害的对称性。在本章里我们将直接讨论 $SU_L(3)\times SU_R(3)$ 的情形，若要回到 $SU_L(2)\times SU_R(2)$ 只需在我们的结果中略去 s 夸克对应的贡献即可。为了更加定量化，我们现在重写 QCD 的拉氏密度式 (1.27) 如下：

$$L = L_0 - \bar{\psi}(x)m\psi(x) \tag{3.1}$$

$$L_0 = \bar{\psi}(x)\mathrm{i}\not{D}\psi(x) + \bar{\Psi}(x)(\mathrm{i}\not{D} - M)\Psi(x) - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) + \frac{g^2\bar{\theta}}{32\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\mu'\nu'}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu'\nu'}) \tag{3.2}$$

其中，L_0 是手征极限下的 QCD 拉氏密度；$\psi(x)$ 是三个轻夸克场；m 是轻夸克质量矩阵；$\Psi(x)$ 是三个重夸克场；M 是重夸克质量矩阵。它们的具体形式如下：

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \\ s(x) \end{pmatrix}, \quad m = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix} \\
\Psi(x) &= \begin{pmatrix} c(x) \\ b(x) \\ t(x) \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} m_c & 0 & 0 \\ 0 & m_b & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

L_0 在手征对称性变换式 (1.35) 下是不变的 (不过不同于 1.2.4 节的是，那里是 $SU_L(2)\times SU_R(2)$ 变换，现在是更大的 $SU_L(3)\times SU_R(3)$ 变换)，因而它具有 $SU_L(3)\times SU_R(3)$ 不变性。实际上这时手征极限下的 QCD 具有更大的 $U_L(3)\times U_R(3)$ 对称性，

它相比这里用的 $SU_L(3)\times SU_R(3)$ 又多出了对称性 $U_L(1)\times U_R(1)=U_V(1)\times U_A(1)$。我们把 QCD 拉氏密度中具有手征对称性的部分 L_0 单写出来了，剩下的明显破坏手征对称性的轻夸克质量项 ——$\bar{\psi}(x)m\psi(x)$ 留待以后作为小的扰动进行逐级修正。实际上 L_0 中的轻夸克相互作用可以因子化成左手夸克场和右手夸克场的部分：

$$\bar{\psi}(x)\mathrm{i}\not{D}\psi(x)=\bar{\psi}_L(x)\mathrm{i}\not{D}\psi_L(x)+\bar{\psi}_R(x)\mathrm{i}\not{D}\psi_R(x)$$

而轻夸克质量项：

$$-\bar{\psi}m\psi=-\bar{\psi}_Lm\psi_R-\bar{\psi}_Rm\psi_L$$

则将左右手轻夸克场耦合在一起。这说明了为什么 L_0 具有而轻夸克质量项不具有的纯左手轻夸克场参与的左手对称性 $U_L(3)$ 和纯右手轻夸克场的右手对称性 $U_R(3)$。

对手征极限下 QCD 具有的手征对称性 $U_L(3)\times U_R(3)$，物理理论中的诺特定理告诉我们拉氏密度中的连续对称性对应有相应的流守恒定律和守恒荷。对应 $U_L(3)$ 和 $U_R(3)$ 的守恒流分别是左手流和右手流

$$L^{\mu,i}=\bar{\psi}_L\gamma^\mu\frac{\lambda^i}{2}\psi_L,\quad R^{\mu,i}=\bar{\psi}_R\gamma^\mu\frac{\lambda^i}{2}\psi_R \tag{3.4}$$

其中，λ^i 是在味道空间 (也就是对 u、d、s 夸克自由度) 的 3×3 盖尔曼矩阵，它们一共有 9 个 $i=0,1,2,\cdots,7,8$，其中 λ^0 是单位矩阵。而相应的守恒荷 (也就是流的时间分量的空间积分) 是

$$Q_L^i=\int \mathrm{d}^3x\psi_L^+(x)\frac{\lambda^i}{2}\psi_L(x) \tag{3.5}$$

$$Q_R^i=\int \mathrm{d}^3x\psi_R^+(x)\frac{\lambda^i}{2}\psi_R(x) \tag{3.6}$$

相应的流守恒定律是

$$\partial_\mu L^{\mu,i}=\partial_\mu R^{\mu,i}=0 \tag{3.7}$$

除了左手场和右手场各自独立变换形成的对称性外，我们还经常会看到左手场和右手场联合变换形成的对称性，一种是同向同步进行变换形成的对称性 $U_V(3)$，相应的守恒流叫矢量流，记为

$$V^{\mu,i}\equiv R^{\mu,i}+L^{\mu,i}=\bar{\psi}\gamma^\mu\frac{\lambda^i}{2}\psi \tag{3.8}$$

相应的守恒荷是

$$Q_V^i=Q_R^i+Q_L^i=\int \mathrm{d}^3x\psi^+(x)\frac{\lambda^i}{2}\psi(x) \tag{3.9}$$

另一种是左手场和右手场反向同步进行变换形成的对称性，这个对称性经常被写成 $U_A(3)$，但后面我们会看到实际上这个对称性不会形成一个封闭的群，因此把它写成 $U_A(3)$ 是错误的 (实际上只有其 Abel 子部分形成封闭的群 $U_A(1)$)。这个对称性的守恒流叫轴矢流，记为

$$A^{\mu,i} \equiv R^{\mu,i} - L^{\mu,i} = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\frac{\lambda^i}{2}\psi \tag{3.10}$$

相应的守恒荷是

$$Q_A^i = Q_R^i - Q_L^i = \int \mathrm{d}^3x\psi^+(x)\gamma^5\frac{\lambda^i}{2}\psi(x) \tag{3.11}$$

用矢量流和轴矢流表达，原来的左手流和右手流分别守恒就转化为

$$\partial_\mu V^{\mu,i} = \partial_\mu A^{\mu,i} = 0 \tag{3.12}$$

如果要考虑轻夸克质量对流守恒的影响，读者可以自己推导式 (3.12)，推广为

$$\partial_\mu V^{\mu,i} = \mathrm{i}\bar{\psi}\left[m, \frac{\lambda^i}{2}\right]\psi, \quad \partial_\mu A^{\mu,i} = \mathrm{i}\bar{\psi}\left\{m, \frac{\lambda^i}{2}\right\}\gamma^5\psi \tag{3.13}$$

从上式可以看出，对矢量流只要所有轻夸克质量都相同，也就是轻夸克质量矩阵正比于单位矩阵，它就守恒。实际上即使轻夸克质量各不相同，对矢量流中的三个对角元 $i = 0, 3, 8$ 所对应的流仍然守恒，因为这时 m 是对角矩阵。这三个守恒的矢量流分别对应重子数、同位旋第三分量和超荷守恒，而在下一节中我们将用同位旋第三分量和超荷作为标记赝标介子八重态的量子数；需要注意对轴矢流的散度 $i = 0$ 的情形，上式在量子水平上并不正确，还差了一个和胶子场有关的项，这叫 $U_A(1)$ 的轴矢流反常。本节后面会对此进行讨论，也正是这个原因在讨论手征对称性时一般都只讨论 $SU_L(3) \times SU_R(3)$，而回避讨论 $U_L(3) \times U_R(3)$，因为多出来的 $U_L(1) \times U_R(1) = U_V(1) \times U_A(1)$ 中的 $U_A(1)$ 部分在量子水平上具有反常。通常把 $U_V(1)$ 理解为与重子数对应的对称性，而 $U_A(1)$ 在 QCD 中是一个比较复杂的问题，读者可以查阅相关文献。

在讨论了 QCD 拉氏密度的整体连续手征对称性的基础上，我们再简要介绍一下空间反演和电荷共轭分立对称性，它们在后面的讨论中都要用到。

空间反演对称性变换是：$\boldsymbol{x} \to -\boldsymbol{x}$，$t \to t$。量子场论还告诉我们 $\bar{\theta} \to -\bar{\theta}$，还有夸克场和胶子场在这个变换下的变换行为：

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) \to \gamma^0\psi(-\boldsymbol{x}, t), \quad \Psi(\boldsymbol{x}, t) \to \gamma^0\Psi(-\boldsymbol{x}, t) \tag{3.14}$$

$$A_0(\boldsymbol{x}, t) \to A_0(-\boldsymbol{x}, t), \quad A_i(\boldsymbol{x}, t) \to -A_i(-\boldsymbol{x}, t) \tag{3.15}$$

注意式 (3.15) 中的下标 i 是 μ 的三个空间分量角标，不是式 (3.4)~式 (3.13) 中的味道角标。很容易验证式 (3.1) 式给出的 QCD 拉氏密度在空间反演变换下是不变的，并且读者可以验证式 (3.5)、(3.6)、(3.9) 和 (3.11) 给出的各种荷在空间反演变换下的变换行为是

$$Q_L^i \to Q_R^i, \quad Q_R^i \to Q_L^i, \quad Q_V^i \to Q_V^i, \quad Q_A^i \to -Q_A^i \tag{3.16}$$

注意空间反演变换把左手群的生成元与右手群的生成元进行了互换，因而也就把左右手群进行了互换，因此空间反演是改变体系的手性的。

电荷共轭对称性变换是：$\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}$，$t \to t$，$\bar{\theta} \to \bar{\theta}$，夸克场和胶子场在这个变换下的变换行为是

$$\psi(\boldsymbol{x},t) \to C\bar{\psi}^+(\boldsymbol{x},t), \quad \Psi(\boldsymbol{x},t) \to C\bar{\Psi}^+(\boldsymbol{x},t) \tag{3.17}$$

$$A_{\mu,a}(\boldsymbol{x},t)\lambda_a \to -A_{\mu,a}(-\boldsymbol{x},t)\lambda_a^T \tag{3.18}$$

其中，$C = \mathrm{i}\gamma^2\gamma^0 = -C^{-1} = -C^+ = -C^T$ 是电荷共轭矩阵。

同样可以验证式 (3.1) 给出的 QCD 拉氏密度在电荷共轭变换下是不变的，并且读者可以验证式 (3.5)、(3.6)、(3.9) 和 (3.11) 给出的各种荷在空间反演变换下的变换行为是

$$Q_L^i \to Q_R^{\bar{i}}, \quad Q_R^i \to Q_L^{\bar{i}}, \quad Q_V^i \to Q_V^{\bar{i}}, \quad Q_A^i \to -Q_A^{\bar{i}} \tag{3.19}$$

其中，对 $U(3)$ 的 8 个生成元来说

$$\bar{0} = 0, \quad \bar{1} = 2, \quad \bar{2} = 1, \quad \bar{3} = 3, \quad \bar{4} = 5, \quad \bar{5} = 4, \quad \bar{6} = 7, \quad \bar{7} = 6, \quad \bar{8} = 8 \tag{3.20}$$

以上讨论都是在经典场论水平上进行的，下面我们进入量子水平进行进一步的讨论。先在量子场论的正则体系中讨论。这时夸克场变成了算符，它们之间的等时反对易关系 (由于它们是费米子场，因而是反对易而不是对易关系) 是

$$\left\{\psi_\sigma(\boldsymbol{x},t), \psi_\rho^+(\boldsymbol{y},t)\right\} = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\delta_{\sigma\rho} \tag{3.21}$$

$$\left\{\psi_\sigma(\boldsymbol{x},t), \psi_\rho(\boldsymbol{y},t)\right\} = \left\{\psi_\sigma^+(\boldsymbol{x},t), \psi_\rho^+(\boldsymbol{y},t)\right\} = 0 \tag{3.22}$$

其中，轻夸克场的下标 σ、ρ 包括夸克场所携带的颜色指标、味道指标和旋量指标。利用式 (3.21) 和 (3.22) 及 (3.5) 和 (3.6) 定义的左手和右手荷，读者可以自行验证如下关系式：

$$\left[Q_L^i, \psi_L(x)\right] = -\frac{\lambda^i}{2}\psi_L(x), \quad \left[Q_L^i, \psi_R(x)\right] = 0 \tag{3.23}$$

$$\left[Q_R^i, \psi_R(x)\right] = -\frac{\lambda^i}{2}\psi_R(x), \quad \left[Q_R^i, \psi_L(x)\right] = 0 \tag{3.24}$$

$$\left[Q_L^i, Q_L^j\right] = \mathrm{i}f^{ijk}Q_L^k, \quad \left[Q_R^i, Q_R^j\right] = \mathrm{i}f^{ijk}Q_R^k, \quad \left[Q_L^i, Q_R^j\right] = 0 \tag{3.25}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_L^i Q_L^i}\psi_L(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_L^i Q_L^i} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_L^i \frac{\lambda^i}{2}}\psi_L(x), \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_L^i Q_L^i}\psi_R(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_L^i Q_L^i} = \psi_R(x) \tag{3.26}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_R^i Q_R^i}\psi_R(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_R^i Q_R^i} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_R^i \frac{\lambda^i}{2}}\psi_R(x), \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_R^i Q_R^i}\psi_L(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_R^i Q_R^i} = \psi_L(x) \tag{3.27}$$

从式 (3.25) 看出 Q_L^i 和 Q_R^i 分别是相互独立的 $U_L(3)$ 和 $U_R(3)$ 群的生成元，它们满足各自生成元的 $U(3)$ 代数。式 (3.26) 和 (3.27) 给出用生成元生成的夸克场的 $U_L(3)\times U_R(3)$ 变换。利用左手群 $U_L(3)$ 和右手群 $U_R(3)$ 群的生成元 Q_L^i 和 Q_R^i，手征极限的 QCD 在 $U_L(3)\times U_R(3)$ 变换下保持不变的量子表达式为

$$\left[Q_L^i, H_0\right] = \left[Q_R^i, H_0\right] = \left[Q_L^i, \boldsymbol{P}\right] = \left[Q_R^i, \boldsymbol{P}\right] = 0 \tag{3.28}$$

其中，H_0 和 $\boldsymbol{P}$ 分别是式 (3.2) 定义的手征极限拉氏密度 L_0 所对应的哈密顿量密度和拉氏密度 L 对应的动量密度。注意 $\boldsymbol{P}$ 和手征极限下的动量密度是一样的 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_0$，还有上式如前面说过的对 $i = 0$ 是有反常因而是不为零的。

利用式 (3.9)、(3.11) 和 (3.25)，发现不用左右手流的荷 Q_L、Q_R 而改用矢量流和轴矢流的荷 Q_V、Q_A，我们有

$$\left[Q_V^i, Q_V^j\right] = \mathrm{i}f^{ijk}Q_V^k, \quad \left[Q_A^i, Q_A^j\right] = \mathrm{i}f^{ijk}Q_V^k, \quad \left[Q_V^i, Q_A^j\right] = \mathrm{i}f^{ijk}Q_A^k \tag{3.29}$$

从上面的对易关系我们看到，Q_V^i 是 $SU_V(3)$ 群的生成元，Q_A^0 是 $U_A(1)$ 的生成元，而 Q_A^i 自己的代数的非 Abel 部分 (即 i、j 都不为零的部分) 的群结构常数不全为零，因而等式右边有非零的贡献，并且这个贡献项不再能用 Q_A 来表达，须用超出轴对称性的荷 Q_V 描写，这导致非 Abel 部分不封闭，实际只是个陪集，不形成群，这就是我们前面强调的不存在 $SU_A(3)$ 群的具体论证!

在量子场论水平拉氏密度中的连续对称性的体现除了诺特定理对应的流守恒和守恒荷外，还有 Ward 恒等式。对手征对称性就是手征 Ward 恒等式和流代数，它是关于夸克流的真空期望值的一组恒等式。所涉及的带夸克味的流是

$$S^i(x) = \bar{\psi}(x)\lambda^i\psi(x), \quad P^i(x) = \mathrm{i}\bar{\psi}(x)\gamma^5\lambda^i\psi(x) \tag{3.30}$$

$$V^{\mu,i}(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\frac{\lambda^i}{2}\psi(x), \quad A^{\mu,a}(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\frac{\lambda^i}{2}\psi(x) \tag{3.31}$$

实际上式 (3.30) 不是真的夸克流而是某种夸克对密度，不过在本章里我们不再做这种详细的区分而把它们和式 (3.31) 中真正的夸克流一起都统称夸克流。利用反对易关系式 (3.21) 和 (3.22)，我们可以得到上面给出的流之间的对易关系

$$\left[V^{0,i}(\boldsymbol{x}, t), \phi^j(\boldsymbol{y}, t)\right] = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\mathrm{i}f^{ijk}\phi^k, \quad \phi = S, P, V^\mu, A^\mu \tag{3.32}$$

$$\left[A^{0,i}(\boldsymbol{x},t),A^{\mu,j}(\boldsymbol{y},t)\right]=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\mathrm{i}f^{ijk}V^{\mu,k} \tag{3.33}$$

$$\left[A^{0,i}(\boldsymbol{x},t),V^{\mu,j}(\boldsymbol{y},t)\right]=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\mathrm{i}f^{ijk}A^{\mu,k} \tag{3.34}$$

$$\left[A^{0,i}(\boldsymbol{x},t),S^{j}(\boldsymbol{y},t)\right]=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\mathrm{i}f^{ijk}P^{k} \tag{3.35}$$

$$\left[A^{0,i}(\boldsymbol{x},t),P^{j}(\boldsymbol{y},t)\right]=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\mathrm{i}f^{ijk}S^{k} \tag{3.36}$$

而手征 Ward 恒等式就是计算如下夸克流的格林函数的散度：

$$\begin{aligned}
&\partial_{\mu,x}\left\langle 0\left|T\left\{J^{\mu}(x)\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\cdots\phi_n(x_n)\right\}\right|0\right\rangle\\
=&\left\langle 0\left|T\left\{\left[\partial_{\mu,x}J^{\mu}(x)\right]\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\cdots\phi_n(x_n)\right\}\right|0\right\rangle\\
&+\delta(x^0-x_1^0)\left\langle 0\left|T\left\{\left[J^0(x),\phi_1(x_1)\right]\phi_2(x_2)\cdots\phi_n(x_n)\right\}\right|0\right\rangle\\
&+\delta(x^0-x_2^0)\left\langle 0\left|T\left\{\phi_1(x_1)\left[J^0(x),\phi_2(x_2)\right]\cdots\phi_n(x_n)\right\}\right|0\right\rangle+\cdots\\
&+\delta(x^0-x_n^0)\left\langle 0\left|T\left\{\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\cdots\left[J^0(x),\phi_n(x_n)\right]\right\}\right|0\right\rangle
\end{aligned} \tag{3.37}$$

其中，T 是编时乘积，J^{μ} 是矢量流或轴矢流，$\phi_a(x_a)$ 可以是式 (3.30) 和 (3.31) 中的任意一个夸克流。注意在式 (3.37) 右边第一行有流的散度可以利用诺特定理，第二行之后每一项都出现了矢量流或轴矢流的时间分量与夸克流的对易子，而对这些对易子可以利用式 (3.32)~(3.36)，把诺特定理和流代数的结果代入式 (3.37) 就是手征 Ward 恒等式，它把矢量流或轴矢流与若干夸克流的编时乘积的散度的真空期望值用纯的流流格林函数表达出来了。给一个具体的例子：

$$\begin{aligned}
\partial_{\mu,x}\left\langle 0\left|T\left[A^{\mu,i}(x)P^{j}(y)\right]\right|0\right\rangle=&\delta(x-y)\mathrm{i}f^{ijk}\left\langle 0\left|S^{\mathrm{k}}x)\right|0\right\rangle\\
&+\left\langle 0\left|T\left[\bar{\psi}(x)\left\{\frac{\lambda^i}{2},m\right\}\gamma^5\psi(x)P^{j}(y)\right]\right|0\right\rangle
\end{aligned} \tag{3.38}$$

其中，$i,j=1,2,\cdots,8$，上式中的赝标夸克对密度可以利用式 (3.3) 给出的轻夸克质量矩阵和式 (3.30) 定义的夸克流展开为

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}(x)\left\{\frac{\lambda^i}{2},m\right\}\gamma^5\psi(x)=&\left[\frac{1}{3}(m_u+m_d+m_s)+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{m_u+m_d}{2}-m_s\right)d^{ii8}\right]P^i(x)\\
&+\left[\sqrt{\frac{1}{6}}(m_u-m_d)\delta^{i3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{m_u+m_d}{2}-m_s\right)\delta^{i8}\right]P^0(x)\\
&+\frac{m_u-m_d}{2}\sum_{k=1}^{8}d^{i3k}P^k(x)
\end{aligned} \tag{3.39}$$

其中，d^{ijk} 是盖尔曼矩阵给出的全对称结构常数。利用上式我们发现轴矢流和赝标密度的编时乘积的全散度可以用密度的格林函数表达出来了。

现在我们对路径积分的量子场论体系进行讨论。与等价的正则体系不同的是，在路径积分体系中场不再是算符而是积分变量，因而处理起来相对简单。我们把 QCD 的式 (3.1) 拉氏密度扩展为含外界影响的形式，外界的影响通过在式 (3.1) 加入外源项来实现

$$L_J = L_0 + \bar{\psi}(x)J(x)\psi(x) \tag{3.40}$$

其中，$J(x)$ 是外源，它按照其旋量结构分解为矢量、轴矢、标量和赝标几部分。

$$J(x) \equiv \not{v}(x) + \not{a}(x)\gamma^5 - s(x) + \mathrm{i}p(x)\gamma^5 \tag{3.41}$$

原始文献 [2] 中没有引进张量的源项，除了简单外，张量外源对应的张量流背后的介子场可以用矢量场来描写 (见 3.4 节) 也是一个可能的原因。每个部分又可以进一步按照其味道结构进行展开：

$$v^\mu = \sum_{i=0}^{8} \lambda^i v^{\mu,i}, \quad a^\mu = \sum_{i=0}^{8} \lambda^i a^{\mu,i}, \quad s = \sum_{i=0}^{8} \lambda^i s^i, \quad p = \sum_{i=0}^{8} \lambda^i p^i \tag{3.42}$$

我们把外界影响消失的情形叫真空。在真空上

$$v^\mu = a^\mu = p = 0, \quad s = m \tag{3.43}$$

因此式 (3.40) 定义的 L_J 在真空情形就回到了式 (3.1) 给出的 QCD 拉氏密度 L。在拉氏密度中引入了外源后，原来手征极限拉氏密度 L_0 的整体连续手征对称性可以扩展成局域的连续对称性，而局域对称性显然比整体对称性对理论可以给予更强的限制，因而有利于我们获取更多的理论相互作用结构的信息。实际上原来 L_0 之所以只能具有整体对称性而不是局域对称性的根本原因是夸克的动能项 $\bar{\psi}(x)\mathrm{i}\not{\partial}\psi(x)$ 只具有整体对称性而不具有局域对称性。现在加进了外源，我们可以要求外源做一定的变化来补偿原来动能项在局域变化下改变的部分，使之达到不变 (这实际上是规范场的原始想法)。因此我们可以要求 $\bar{\psi}(x)[\mathrm{i}\not{\partial} + J(x)]\psi(x)$ 在手征转动下

$$\psi(x) \to [V_R(x)P_R + V_L(x)P_L]\psi(x) \tag{3.44}$$

是不变的。其中，$V_L(x) \equiv \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_L^i(x)\frac{\lambda^i}{2}}$；$V_R(x) \equiv \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_R^i(x)\frac{\lambda^i}{2}}$；$P_R(x) \equiv \dfrac{1}{2}(1+\gamma^5)$；$P_L(x) \equiv \dfrac{1}{2}(1-\gamma^5)$。它们是式 (3.26) 和 (3.27) 定义的左右手转动 (这时对称性变换是 $U_L(3)\times U_R(3)$)，不过原来的转动相角是与时空坐标无关的，因而是整体转动。现在我们把转动相角推广为时空坐标的函数，因而现在的转动是局域的。如果标记变换后的外源为 $J'(x)$, 这个不变的要求转化为

$$[V_R^+(x)P_L + V_L^+(x)P_R][\mathrm{i}\not{\partial} + J'(x)][V_R(x)P_R + V_L(x)P_L] = \mathrm{i}\not{\partial} + J(x)$$

注意这时微商不仅要作用出现在其后面的 V_R 和 V_L，还要对 V_R 和 V_L 后面未写下来的量进行作用，它体现为等号右边的微商。上式等价于要求：

$$J(x) \to J'(x) = [V_R(x)P_L + V_L(x)P_R][J(x) + \mathrm{i}\partial][V_R^+(x)P_R + V_L^+(x)P_L] \tag{3.45}$$

而式 (3.45) 中的微商仅仅作用于后面出现的 V_R 和 V_L。利用式 (3.41) 把上面表达式两边的 γ 矩阵明显写出来进行比较，我们得到

$$v_\mu + a_\mu \to v'_\mu + a'_\mu = V_R[v_\mu + a_\mu + \mathrm{i}\partial_\mu]V_R^+ \tag{3.46}$$

$$v_\mu - a_\mu \to v'_\mu - a'_\mu = V_L[v_\mu - a_\mu + \mathrm{i}\partial_\mu]V_L^+ \tag{3.47}$$

$$-s + \mathrm{i}p \to -s' + \mathrm{i}p' = V_L[-s + \mathrm{i}p]V_R^+ \tag{3.48}$$

$$s + \mathrm{i}p \to s' + \mathrm{i}p' = V_R[s + \mathrm{i}p]V_L^+ \tag{3.49}$$

从式 (3.46) 和 (3.47) 看出矢量和轴矢外源的变换体现为规范场的变换，具体体现为变换式中有对变换元的微商项，而式 (3.48) 和 (3.49) 告诉我们标量和赝标外源的变换体现为物质场的变换。特别强调一下，这里引入局域手征对称性完全是为了以后理论方便，不是 QCD 本身所具有的对称性，QCD 本身只具有近似的整体手征对称性。由于 QCD 的拉氏密度是在空间反演和电荷共轭变换下不变的，我们希望引进的外源不改变这些好的性质。这要求我们新引进的外源项 $\bar{\psi}(x)J(x)\psi(x)$ 在空间反演和电荷共轭变换下必须也是不变的，从这个要求和夸克的变换行为式 (3.14) 和 (3.17) 我们可以倒推出，在空间反演变换下，除了空间坐标要变号外，源本身还要做如下变换：

$$v^\mu \to v_\mu, \quad a^\mu \to a_\mu, \quad s \to s, \quad p \to -p \tag{3.50}$$

在电荷共轭变换下：

$$v_\mu \to -v_\mu^T, \quad a_\mu \to a_\mu^T, \quad s \to s^T, \quad p \to p^T \tag{3.51}$$

在确定了新引进的源的对称变换行为后，我们引入 QCD 流流格林函数的生成泛函

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}Z[J,\bar{\theta}]} = \int \mathscr{D}A_\mu^a \mathscr{D}\bar{\Psi}\mathscr{D}\Psi\mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\psi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x L_J} \tag{3.52}$$

它是本章最重要的生成泛函的基础定义。在这个生成泛函中源的作用就是贡献夸克流，对特定的源做一次泛函微商，相应的流就从被积函数的指数上微下来一个，伴随一个 i 系数。如果我们要考虑 n 个流的连接格林函数，就只需要对相应的流做总共 n 次的泛函微商，再除掉一个 i^{n-1} 系数即可 (之所以不是除掉 n 个 i 是因

为生成泛函 Z 在指数上还多出一个 i)。因此式 (3.52) 生成了所有可能的多点流流格林函数。我们用两个例子来明显说明：首先一个 u 夸克场的真空凝聚是一点格林函数

$$\langle 0\,|\bar{u}u|\,0\rangle = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\frac{\delta}{\delta s^0(x)} + \frac{\delta}{\delta s^3(x)} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\delta}{\delta s^8(x)}\right] Z[J,\bar{\theta}]\Big|_{J=m} \tag{3.53}$$

另一个是轴矢流的两点格林函数

$$\left\langle 0\left|TA_\mu^i(x)A_\nu^j(0)\right|0\right\rangle = -\mathrm{i}\frac{\delta^2}{\delta a^{\mu,i}(x)\delta a^{\nu j}(0)} Z[J,\bar{\theta}]\Big|_{J=m} \tag{3.54}$$

而我们原来讨论的对这些格林函数的对称性限制，如 Ward 恒等式等，这时应该通过在被积函数的指数上的拉氏密度所具有的对称性能够自动在结果生成泛函里得以呈现。为了明显地看到这些，我们先讨论比较简单的分立对称性，对式 (3.14) 和 (3.15) 定义的空间反演对称性变换与式 (3.17) 和 (3.18) 定义的电荷共轭对称性变换，读者可以自己证明式 (3.52) 中的路径积分测度 $\mathscr{D}A_\mu^a\mathscr{D}\bar{\Psi}\mathscr{D}\Psi\mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\psi$ 是不变的，前面讨论过被积函数中的含外源的 QCD 拉氏密度 L_J 也是不变的，而在拉氏密度前面的四度时空积分 $\int \mathrm{d}^4x$ 也是不变的 (注意：$\int\limits_{x=-\infty}^{x=\infty}\mathrm{d}x = -\int\limits_{-x=\infty}^{-x=-\infty}\mathrm{d}(-x) = \int\limits_{-x=-\infty}^{-x=\infty}\mathrm{d}(-x)$)，对空间反演变换我们有

$$Z(J,\bar{\theta}) \to Z(J^P,-\bar{\theta}) = Z(J,\bar{\theta}) \tag{3.55}$$

其中，J^P 是式 (3.50) 给出的变换后的外源，也就是除了空间坐标变号外，矢量轴矢源的空间分量和赝标源还要变号。而对电荷共轭变换我们有

$$Z(J,\bar{\theta}) \to Z(J^C,\bar{\theta}) = Z(J,\bar{\theta}) \tag{3.56}$$

其中，J^C 是式 (3.51) 给出的变换后的外源。同样的讨论也可以用到式 (3.44) 定义的局域手征变换，其中已知被积函数是不变的，如果路径积分的积分测度也是不变的，那么将有生成泛函是不变的结论。遗憾的是在手征变换下，积分测度不再是不变的，它所产生的变化叫反常。之所以这么叫是因为这个反常只在量子理论中出现，在经典理论中不涉及积分测度，因而没有这个改变项。以下我们就计算这个反常的具体表达式。由于测度本身的计算十分困难，我们采用一些取巧的方法回避直接计算测度本身。具体就是把生成泛函中涉及变换的轻夸克场的路径积分完成!

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}Z[J,\bar{\theta}]} = \int \mathscr{D}A_\mu^a\mathscr{D}\bar{\Psi}\mathscr{D}\Psi \mathrm{e}^{\mathrm{Trln}(\mathrm{i}\not{D}+J)+\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4xL'} \tag{3.57}$$

其中

$$L' = \bar{\Psi}(x)(\mathrm{i}\not{D} - M)\Psi(x) - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) + \frac{g^2\bar{\theta}}{32\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\mu'\nu'}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu'\nu'}) \tag{3.58}$$

式中，L' 是式 (3.2) 定义的手征极限 QCD 的拉氏密度 L_0 中扣除轻夸克场后剩余的部分。为得到式 (3.57)，我们利用了如下 Grassman 场路径积分的关系

$$\int \mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\psi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\bar{\psi}(\cdots)\psi} = \det(\cdots) = \mathrm{e}^{\mathrm{Trln}(\cdots)} \tag{3.59}$$

其中，Tr 包括对时空坐标、颜色、味道和旋量指标的求迹。我们现在利用式 (3.57) 计算在式 (3.45) 给出的源的手征变换后，生成泛函的变化

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}Z[J',\bar{\theta}]} &= \int \mathscr{D}A_\mu^a \mathscr{D}\bar{\Psi}\mathscr{D}\Psi \mathrm{e}^{\mathrm{Trln}(\mathrm{i}\not{D}+J')+\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4xL'} \\ &= \int \mathscr{D}A_\mu^a \mathscr{D}\bar{\Psi}\mathscr{D}\Psi \mathrm{e}^{\mathrm{Trln}(\mathrm{i}\not{D}+J)+\delta\mathrm{Trln}(\mathrm{i}\not{D}+J)+\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4xL'}\end{aligned} \tag{3.60}$$

我们从无穷小变换开始讨论，在无穷小变换下，式 (3.44) 中的变换元 V_R、V_L 可以参数化为

$$V_R(x) = 1 + \mathrm{i}\alpha(x) + \mathrm{i}\beta(x) + \cdots, \quad V_L(x) = 1 + \mathrm{i}\alpha(x) - \mathrm{i}\beta(x) + \cdots \tag{3.61}$$

利用它，根据式 (3.45)，我们发现外源的无穷小变化为

$$\delta J = \mathrm{i}[\alpha(x) - \beta(x)\gamma^5]J(x) - [\mathrm{i}\not{\partial} + J(x)]\mathrm{i}[\alpha(x) + \beta(x)\gamma^5] \tag{3.62}$$

由此我们可以计算式 (3.60) 中出现的项

$$\begin{aligned}&\delta\mathrm{Trln}(\mathrm{i}\not{D} + J) \\ &= \mathrm{Tr}\left[(\mathrm{i}\not{D} + J)^{-1}\delta(\mathrm{i}\not{D} + J)\right] \\ &= \mathrm{Tr}\Big[(\mathrm{i}\not{D} + J)^{-1}\left\{\mathrm{i}[\alpha(x) - \beta(x)\gamma^5](\mathrm{i}\not{D} + J) - (\mathrm{i}\not{D} + J)\mathrm{i}[\alpha(x) + \beta(x)\gamma^5]\right\}\Big] \\ &= -2\mathrm{i}\mathrm{Tr}(\beta\gamma^5) = -2\mathrm{i}\lim_{\Lambda\to\infty}\mathrm{Tr}\left[\beta\gamma^5\mathrm{e}^{\frac{(\mathrm{i}\not{D}+J)^2}{\Lambda^2}}\right]\end{aligned} \tag{3.63}$$

其中，在计算的第三行的大括号中首先我们增加了相互抵消的纯微商算符项，其中第二个协变微商中的算符不再像式 (3.60) 中那样只作用于后面的 $[\alpha(x) + \beta(x)\gamma^5]$，而是还对 $[\alpha(x) + \beta(x)\gamma^5]$ 的后面作用；然后又加入了相互抵消的胶子场规范作用项。利用算符求迹的前后互换的性质，$(\mathrm{i}\not{D} + J)$ 和前面出现的 $(\mathrm{i}\not{D} + J)^{-1}$ 相互抵消，使剩下的 α 项也相消，最后只留下 $\beta\gamma^5$ 项。由于 $\beta\gamma^5$ 项的迹属于典型的 $0\times\infty$ 型项 (γ^5 的迹为零，时空坐标的迹为无穷大)，因此在式 (3.63) 中的最后一个等式的右边加入了正规化因子。读者可以把式 (3.63) 中的最后一个等式右边指数上的因子进行展开，逐项计算，只有有限项有贡献，结果为[3]

$$\delta\mathrm{Trln}(\mathrm{i}\not{D} + J) = -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{tr}_f\left\{\beta(x)\left[\tilde{\Omega}(x) + \frac{g^2}{32\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\mu'\nu'}F_{\mu\nu}^a(x)F_{\mu'\nu'}^a(x)\right]\right\} \tag{3.64}$$

其中，tr_f 是对味道角标的求迹

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}(x) =&\frac{N_c}{16\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\mu'\nu'}\left[v_{\mu\nu}(x)v_{\mu'\nu'}(x)+\frac{4}{3}d_\mu a_\nu(x)d_{\mu'}a_{\nu'}(x)+\frac{2\mathrm{i}}{3}\{v_{\mu\nu}(x),a_{\mu'}(x)a_{\nu'}(x)\}\right.\\&\left.+\frac{8\mathrm{i}}{3}a_\mu(x)v_{\mu'\nu'}(x)a_\nu(x)+\frac{4}{3}a_\mu(x)a_\nu(x)a_{\mu'}(x)a_{\nu'}(x)\right]\\ v_{\mu\nu} =&\partial_\mu v_\nu-\partial_\nu v_\mu-\mathrm{i}[v_\mu,v_\nu],\quad d_\mu a_\nu=\partial_\mu a_\nu-\mathrm{i}[v_\mu,a_\nu]\end{aligned}\tag{3.65}$$

把结果式 (3.64) 代回式 (3.60)，得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}Z[J',\bar{\theta}]}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\mathrm{tr}_f[\beta(x)\tilde{\Omega}(x)]}\int\mathscr{D}A_\mu^a\mathscr{D}\bar{\Psi}\mathscr{D}\Psi\mathrm{e}^{\mathrm{Trln}(\mathrm{i}\not{D}+J)+\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\left[L'-\frac{g^2\mathrm{tr}_f\beta}{32\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\mu'\nu'}F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu'\nu'}\right]}\tag{3.65'}$$

为了让路径积分的被积函数的指数上回归变换前的形式 (3.57)，我们定义 $\bar{\theta}$ 在局域手征变换下的变换规则为

$$\bar{\theta}(x)\to\bar{\theta}'(x)=\bar{\theta}(x)+2\mathrm{tr}_f\beta(x)=\bar{\theta}(x)-\mathrm{i}\det{}_f[V_R(x)V_L^+(x)]\tag{3.66}$$

其中，最后一个等式我们稍后给出证明。则式 (3.65′) 给出生成泛函在局域手征变换式 (3.44) 和 (3.45) 下的变换行为是

$$Z[J,\bar{\theta}]\to Z[J',\bar{\theta}']=Z[J,\bar{\theta}]-\int\mathrm{d}^4x\mathrm{tr}_f[\beta(x)\tilde{\Omega}(x)]\tag{3.67}$$

其中，最后一项导致了生成泛函的改变，我们叫它为无穷小非 Abel 手征反常。对有限大的变换，我们可以把参数化式 (3.61) 写为

$$V_R(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\beta(x)+\alpha(x)]}=\lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{\mathrm{i}}{n}[\alpha(x)+\beta(x)]\right\}^n\tag{3.68}$$

$$V_L(x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\beta(x)-\alpha(x)]}=\lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{\mathrm{i}}{n}[\alpha(x)-\beta(x)]\right\}^n\tag{3.69}$$

把它们代入式 (3.45)，我们得到转动后的外源

$$\begin{aligned}J'=&\lim_{n\to\infty}\left\{\left[1+\frac{\mathrm{i}}{n}(\alpha+\beta)\right]P_L+\left[1+\frac{\mathrm{i}}{n}(\alpha-\beta)\right]P_R\right\}^n[J+\mathrm{i}\not{\partial}]\\&\times\left\{\left[1+\frac{\mathrm{i}}{n}(\alpha+\beta)\right]^\dagger P_R+\left[1+\frac{\mathrm{i}}{n}(\alpha-\beta)\right]^\dagger P_L\right\}^n\\=&\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{\mathrm{i}}{n}(\alpha-\beta\gamma^5)\right]^n[J+\mathrm{i}\not{\partial}]\left[1-\frac{\mathrm{i}}{n}(\alpha+\beta\gamma^5)\right]^n\\=&\lim_{n\leftarrow\infty}\left(1+\frac{\delta_\beta}{n}\right)^n J=\mathrm{e}^{\delta_\beta}J\end{aligned}\tag{3.70}$$

其中，注意我们定义操作 δ_β 满足

$$\left(1+\frac{\delta_\beta}{n}\right)J \equiv \left[1+\frac{\mathrm{i}}{n}(\alpha-\beta\gamma^5)\right][J+\mathrm{i}\not{\partial}]\left[1-\frac{\mathrm{i}}{n}(\alpha+\beta\gamma^5)\right] \tag{3.71}$$

从中读出 δ_β 对外源的作用为

$$\begin{aligned}\delta_\beta J &= \mathrm{i}(\alpha-\beta\gamma^5)J-[\mathrm{i}\not{\partial}+J]\mathrm{i}(\alpha+\beta\gamma^5)+\frac{1}{n}(\alpha-\beta\gamma^5)[\mathrm{i}\not{\partial}+J](\alpha+\beta\gamma^5)\\ &\xlongequal{n\to\infty}\mathrm{i}(\alpha-\beta\gamma^5)J-[\mathrm{i}\not{\partial}+J]\mathrm{i}(\alpha+\beta\gamma^5)\end{aligned} \tag{3.72}$$

我们现在来证明式 (3.66)。

$$\begin{aligned}\bar{\theta}'-\bar{\theta} &= -\mathrm{i}\det{}_f[V_R(x)V_L^+(x)] = -\mathrm{i}\lim_{n\to\infty}\ln\det\left\{\left[1+\frac{\mathrm{i}}{n}(\alpha+\beta)\right]\left[1-\frac{\mathrm{i}}{n}(\alpha-\beta)\right]\right\}^n\\ &= -\mathrm{i}\lim_{n\to\infty}\left\{\ln\det\left[1+\frac{2\mathrm{i}}{n}\beta+\frac{1}{n^2}(\alpha^2-\beta^2)\right]^n\right\} = 2\mathrm{tr}_f\beta(x)\end{aligned} \tag{3.73}$$

由此我们可以定义 δ_β 对 $\bar{\theta}$ 的作用为

$$\delta_\beta\bar{\theta} \equiv 2\mathrm{tr}_f\beta \tag{3.74}$$

很容易看到对 $n>1$，$\delta_\beta^n\bar{\theta}=0$，由此式 (3.73) 又可进一步写为

$$\bar{\theta}' = \bar{\theta}+2\mathrm{tr}_f\beta = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\delta_\beta\right)^n\bar{\theta} = \mathrm{e}^{\delta_\beta}\bar{\theta} \tag{3.75}$$

也就是利用 δ_β，从式 (3.70) 和 (3.75) 可以看出，外源和 $\bar{\theta}$ 的有限大变换具有形式上相同的变换式。这使得我们可以简单地表达生成泛函在有限大局域手征对称性变换下的变换行为，也就是无穷小的结果式 (3.67) 的有限大推广，即

$$\begin{aligned}Z[J',\bar{\theta}'] &= \mathrm{e}^{\delta_\beta}Z[J,\bar{\theta}] = Z[J,\bar{\theta}]+\int_0^1\mathrm{d}t\mathrm{e}^{t\delta_\beta}\delta_\beta Z[J,\bar{\theta}]\\ &= Z[J,\bar{\theta}]+\int_0^1\mathrm{d}t\int\mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{t\delta_\beta}\mathrm{tr}_f[\beta(x)\tilde{\Omega}(x)]\end{aligned} \tag{3.76}$$

其中，我们利用了如下关系

$$\mathrm{e}^{\delta_\beta} = 1-\frac{1-\mathrm{e}^{\delta_\beta}}{\delta_\beta}\delta_\beta = 1+\int_0^1\mathrm{d}t\mathrm{e}^{t\delta_\beta}\delta_\beta$$

并且我们认定 $f(J')=\mathrm{e}^{\delta_\beta}f(J)$，$g(\bar{\theta}')=\mathrm{e}^{\delta_\beta}g(\bar{\theta})$。式 (3.76) 是 QCD 的生成泛函在有限大局域手征变换下的最后反常表达式，其中涉及无穷阶的 δ_β 对外源的作用，

这种作用由式 (3.72) 给出。在 3.2 节中可以看到，利用赝标介子场我们还可以把这种无穷求和的有限大反常表达为更为简化紧致的有限项形式。

为了 3.2 节的需要，我们进一步讨论这个反常项的变换行为。考虑在 $\mathrm{e}^{\delta_\beta}$ 变换的基础上再进行一次 $\mathrm{e}^{\delta_{\beta'}}$ 变换，因为变换形成群，我们知道这两次的连续变换可以等价于一次 $\mathrm{e}^{\delta_{\beta''}}$ 变换，即 $\mathrm{e}^{\delta_{\beta''}} = \mathrm{e}^{\delta_{\beta'}}\mathrm{e}^{\delta_\beta}$。因此结合式 (3.76)，我们有

$$
\begin{aligned}
Z[J'',\bar{\theta}''] &= \mathrm{e}^{\delta_{\beta''}} Z[J,\bar{\theta}] = Z[J,\bar{\theta}] + \int_0^1 \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^4x \mathrm{e}^{t\delta_{\beta''}} \mathrm{tr}_f[\beta''(x)\tilde{\Omega}(x)] \\
&= \mathrm{e}^{\delta_{\beta'}} \left\{ Z[J,\bar{\theta}] + \int_0^1 \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^4x \mathrm{e}^{t\delta_\beta} \mathrm{tr}_f[\beta(x)\tilde{\Omega}(x)] \right\} \\
&= Z[J,\bar{\theta}] + \int_0^1 \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^4x \mathrm{e}^{t\delta_{\beta'}x} \mathrm{tr}_f[\beta'(x)\tilde{\Omega}(x)] + \mathrm{e}^{\delta_{\beta'}} \int_0^1 \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^4x \mathrm{e}^{t\delta_\beta} \mathrm{tr}_f[\beta(x)\tilde{\Omega}(x)]
\end{aligned}
$$

把上式的第二个等号后的结果和第四个等号后的结果进行比较，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{\delta_{\beta'}} \int_0^1 \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^4x \mathrm{e}^{t\delta_\beta} \mathrm{tr}_f[\beta(x)\tilde{\Omega}(x)] \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^4x \mathrm{e}^{t\delta_{\beta''}} \mathrm{tr}_f[\beta''(x)\tilde{\Omega}(x)] - \int_0^1 \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^4x \mathrm{e}^{t\delta_{\beta'}} \mathrm{tr}_f[\beta'(x)\tilde{\Omega}(x)] \qquad (3.77)
\end{aligned}
$$

这个结果的含义是，反常项在手征变换下不是不变的，因为如果不变应该只有等号右边的第一项，而现在却多出了第二项。这个造成反常改变的第二项也是一个反常项。

3.2 赝标介子的手征有效拉氏量与手征微扰理论

实验上看到的 1GeV 以下的质量最低的强子谱如下。

赝标介子家族 ($J^{\mathrm{P}} = 0^-$)：

π^0 (135MeV)，$\pi^\pm$ (140MeV)，$K^\pm$ (494MeV)，K^0，$\bar{K}^0$ (498MeV)，η (547MeV)，η' (958MeV)。

矢量介子家族 ($J^{\mathrm{P}} = 1^-$)：

ω (547MeV)，$\rho^\pm$，ρ^0 (769MeV)，$K^{*\pm}$ (892MeV)，K^{*0}，$\bar{K}^{*0}$ (896MeV)。

标量介子家族 ($J^{\mathrm{P}} = 0^+$)：

f_0 或 σ (500MeV)，K_0^* 或 κ (800MeV)，f_0 (980MeV)，a_0 (980MeV)。

重子家族 ($J^P = 1/2^+$)：

p (938MeV)，n (940MeV)。

轴矢介子家族没有轻于 1GeV 的粒子，最轻的非奇异 1^+ 介子是 h_1 (1170MeV)，最轻的奇异 1^+ 介子是 K_1 (1270MeV)。

我们看到在强子谱中质量最低的几个强子就是赝标介子。我们目前的讨论从低能开始向高能扩展，因此我们首先从赝标介子谱开始讨论，在 3.4 节的讨论中，我们将对上面列出的所有粒子的手征有效拉氏量理论分别予以介绍或评论。本节我们先在量子场论的正则体系进行讨论，然后再进入路径积分体系。用 $|a,-\rangle$ 代表第 a 个赝标介子态，H 代表式 (3.1) 定义的 QCD 拉氏密度对应的哈密顿密度，P 代表空间反演算符 (请不要和 3.1 节的轻夸克赝标密度搞混)，因此我们有

$$H|a,-\rangle = E_a|a,-\rangle, \quad P|a,-\rangle = -|a,-\rangle, \quad Q_V^i|a,-\rangle = t_{ab}^i|b,-\rangle \tag{3.78}$$

其中，Q_V^i 是式 (3.9) 定义的矢量流的荷。由式 (3.29) 要求 $[t^i,\ t^j]=\mathrm{i}f^{ijk}t^k$。我们引入赝标介子的产生算符 a_a^+：

$$|a,-\rangle \equiv a_a^\dagger|0\rangle$$

因此

$$t_{ab}^i a_b^\dagger|0\rangle = t_{ab}^i|b,-\rangle = Q_V^i a_a^\dagger|0\rangle = [Q_V^i, a_a^\dagger]|0\rangle + a_a^\dagger Q_V^i|0\rangle \tag{3.79}$$

我们以下假设轻夸克质量都相同即轻夸克质量矩阵正比于单位矩阵时 QCD 的真空态 $|0\rangle$ 具有 $U_V(3)$ 对称性，注意这时 QCD 的拉氏密度式 (3.1) 本身就具有这个对称性，因为这时左右手夸克场同向同步变换，因而轻夸克质量项在这样的变换下是不变的。如 3.1 节所说 $U_V(3)$ 中 $U_V(1)$ 对称性代表重子数，剩下的 $SU_V(3)$ 对称性就是人们用来对赝标介子 8 重态进行分类的对称性，下面的讨论就是介绍这种分类的理由。在此假设下我们有

$$|0\rangle' \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_V^i\theta^i}|0\rangle = |0\rangle$$

它意味着矢量流的荷会湮灭真空，即 $Q_V^i|0\rangle = 0$。实际上利用式 (3.9) 和 (3.30) 和 (3.21)，(3.22)，我们有 $[Q_V^i, S^j(x)] = \mathrm{i}\sum_{k=1}^{8} f^{ijk}S^k(x)$，这样 $Q_V^i|0\rangle = 0$ 就导致 $\sum_{k=1}^{8} f^{ijk}\langle 0|S^k(0)|0\rangle = 0$。利用 $f^{12k} = \delta^{k3}$，它给出 $\langle 0|S^3(0)|0\rangle = 0$，这等价于 $\langle 0|[\bar{u}(0)u(0) - \bar{d}(0)d(0)]|0\rangle = 0$；再利用 $f^{67k} = -\frac{1}{2}\delta^{k3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\delta^{k8}$ 并结合已有的 $\langle 0|S^3(0)|0\rangle = 0$ 给出 $\langle 0|S^8(0)|0\rangle = 0$ 或 $\langle 0|[\bar{u}(0)u(0) + \bar{d}(0)d(0) - 2\bar{s}(0)s(0)]|0\rangle = 0$，两个结果结合起来我们得到：

$$\langle 0|\bar{u}u|0\rangle = \langle 0|\bar{d}d|0\rangle = \langle 0|\bar{s}s|0\rangle \tag{3.80}$$

其中，我们省略了夸克场的时空坐标。上式是说真空具有 $SU_V(3)$ 对称性，这使三种轻夸克的真空凝聚都相等。由此

$$\begin{aligned}\langle\bar{\psi}\psi\rangle &\equiv \langle 0|(\bar{u}u+\bar{d}d+\bar{s}s)|0\rangle \\ &= 3\langle 0|\bar{u}u|0\rangle = 3\langle 0|\bar{d}d|0\rangle = 3\langle 0|\bar{s}s|0\rangle\end{aligned} \tag{3.81}$$

把 $Q_V^i|0\rangle = 0$ 代入式 (3.79)，我们在只保留产生算符的意义上，得到

$$[Q_V^i, a_a^\dagger] = t_{ab}^i a_b^\dagger \tag{3.82}$$

这个式子的群论诠释就是赝标介子的产生算符可以作为以 Q_V^i 为生成元的 $SU_V(3)$ 群的表示，因而我们可以用 $SU_V(3)$ 的表示对赝标介子进行分类。这些是对矢量流的荷对赝标介子态作用的讨论，下面我们进一步讨论轴矢流的荷对赝标介子态的作用，也就是讨论态 $Q_A^i|a,-\rangle$，利用式 (3.16) 给出的 $PQ_A^iP^{-1} = -Q_A^i$，我们得到 $PQ_A^i|a,-\rangle = PQ_A^iP^{-1}P|a,-\rangle = Q_A^i|a,-\rangle$，也就是说 $Q_A^i|a,-\rangle$ 态的宇称是正的。进一步这样态的质量为

$$HQ_A^i|a,-\rangle \approx H_0Q_A^i|a,-\rangle = Q_A^iH_0|a,-\rangle \approx Q_A^iH|a,-\rangle = E_aQ_A^i|a,-\rangle \tag{3.83}$$

因此 $Q_A^i|a,-\rangle$ 近似具有和 $|a,-\rangle$ 同样的质量。但实验上并未看到这样的具有近似质量但宇称完全相反的介子态，因此只有可能 $Q_A^i|a,-\rangle$ 不是单粒子态。注意

$$Q_A^i|a,-\rangle = Q_A^ia_a^\dagger|0\rangle = [Q_A^i, a_a^\dagger]|0\rangle + a_a^\dagger Q_A^i|0\rangle \tag{3.84}$$

上式等号右边第一项中的 $[Q_A^i, a_a^+]$ 是对赝标粒子产生算符的轴对称性变换，应仍维持单粒子产生算符的性质，要体现非单粒子态的性质只能靠第二项。这首先要求这一项不为零，也就是轴矢流的荷不湮灭真空：$Q_A^i|0\rangle \neq 0$，因而 QCD 的真空在这些荷生成的轴对称性变换下不是不变的：$|0\rangle' \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_A^i\theta^i}|0\rangle \neq |0\rangle$。这意味着真空在轴转动下会发生改变，真空不再具有轴荷产生的对称性，或者说轴荷产生的对称性自发破缺了，只剩下 $U_V(3)$ 子对称性。如果不管手征对称性中的 $U(1)$ 部分，原来手征极限下 QCD 拉氏密度所具有的 $SU_L(3)\times SU_R(3)$ 手征对称性则自发破缺成 $SU_V(3)$ 对称性。

既然 $Q_A^i|0\rangle$ 不为零，我们进一步看一下它有什么性质：

$$\boldsymbol{P}Q_A^i|0\rangle = Q_A^i\boldsymbol{P}|0\rangle = 0, \quad H_0Q_A^i|0\rangle = Q_A^iH_0|0\rangle = 0 \tag{3.85}$$

$$PQ_A^i|0\rangle = PQ_A^iP^{-1}P|0\rangle = -Q_A^i|0\rangle \tag{3.86}$$

因此这个态不运动 (零动量)，在手征极限下零能量 (按照狭义相对论给出的粒子质壳关系定出这个态对应的粒子质量为零)，宇称为负。结合前面的轴对称性的自发破

缺和量子场论中的 Goldstone 定理：每一个破缺生成元对应有一个零质量粒子。我们看到 $Q_A^i|0\rangle$ 正是这样的粒子态，因而我们叫它们 Goldstone 粒子。注意式 (3.85)，这样的粒子只是在手征极限下才是零质量的，超出手征极限轻夸克质量会对这些粒子的质量产生贡献，因而我们更准确地叫这些粒子为赝 Goldstone 粒子 (也就是因为它们实际有质量，前面说的零动量才有意义。否则对一个严格零质量的粒子，其零动量极限是没有意义的)。由于轻夸克的质量很轻，我们预期这样的非零质量修正会是比较小的，因而对完整的 QCD，这些赝 Goldstone 应该是些很轻的粒子。这些性质和实验上看到的轻赝标介子完全匹配，我们可把这些轻的赝 Goldstone 粒子认作实验上看到的轻赝标介子。把这个粒子态记为：$Q_A^i|0\rangle = \tilde{b}^{i,\dagger}(\mathbf{0})|0\rangle$，其中 $\tilde{b}^{i,\dagger}(\vec{0})$ 是此粒子的产生算符，括号里的 $\mathbf{0}$ 代表零动量，则

$$[Q_V^i, \tilde{b}^{i,\dagger}(\mathbf{0})]|0\rangle = [Q_V^i, Q_A^j]|0\rangle = \mathrm{i}f^{ijk}Q_A^k|0\rangle = \mathrm{i}f^{ijk}\tilde{b}^{i,\dagger}(\mathbf{0})|0\rangle \tag{3.87}$$

因此，$[Q_V^i, \tilde{b}^{i,\dagger}(\mathbf{0})] = if^{ijk}\tilde{b}^{i,\dagger}(\mathbf{0})$，注意这个式子是在特定的使赝 Goldstone 粒子动量为零的参考系中给出的，通过参考系变换，我们可以把它写到粒子动量为 $\boldsymbol{p}$ 的参考系中：

$$[Q_V^i, \tilde{b}^{i,\dagger}(\boldsymbol{p})] = \mathrm{i}f^{ijk}\tilde{b}^{i,\dagger}(\boldsymbol{p}) \tag{3.88}$$

其中 $\tilde{b}^{i,\dagger}(\boldsymbol{p})$ 是动量为 $\boldsymbol{p}$ 的赝 Goldstone 粒子的产生算符，我们记它为

$$\tilde{b}^{i,\dagger}(\boldsymbol{p})|0\rangle = |\phi^i(\boldsymbol{p})\rangle, \quad Q_A^i|0\rangle = \tilde{b}^{i,\dagger}(\mathbf{0})|0\rangle = |\phi^i(\mathbf{0})\rangle \tag{3.89}$$

它是一个动量为 $\boldsymbol{p}$ 的赝 Goldstone 粒子态，实际就是本节开始讨论的 $|a,-\rangle$ 在 $a=i$ 的情形，只是我们现在进一步厘清了它与轴矢流的荷的关系，用 $\phi^i(\boldsymbol{p})$ 来标记态是为了方便以后过渡到量子场的形式。

在强子谱中存在式 (3.89) 给出的单粒子态对式 (3.81) 中讨论的轻夸克凝聚十分重要，在式 (3.81) 中我们还不知道这个凝聚是否为零。我们可以从如下讨论看出来，计算轴矢流的荷和赝标夸克密度的对易关系，我们得到

$$\mathrm{i}[Q_A^i, P^i(x)] = \begin{cases} \bar{u}u + \bar{d}d, & i = 1,2,3 \\ \bar{u}u + \bar{s}s, & i = 4,5 \\ \bar{d}d + \bar{s}s, & i = 6,7 \\ \dfrac{1}{3}(\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s), & i = 8 \end{cases} \tag{3.90}$$

结合式 (3.80) 和 (3.81)，上式对真空态的期望值可以写为

$$\langle 0|\mathrm{i}[Q_A^i, P^i(x)]|0\rangle = \frac{2}{3}\langle\bar{\psi}\psi\rangle \tag{3.91}$$

因此轻夸克凝聚是否为零取决于赝标密度与轴矢流的荷的对易关系的真空期望值是否为零，我们通过插入中间态完备集来仔细研究这个期望值

$$\begin{aligned}-\frac{2\mathrm{i}}{3}\langle\bar{\psi}\psi\rangle &= \sum_n \left[\langle 0|Q_A^i|n\rangle\langle n|P^i(x)|0\rangle - \langle 0|P^i(x)|n\rangle\langle n|Q_A^i|0\rangle\right] \\ &= \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{2\sqrt{\boldsymbol{p}^2}}\left[\langle\phi^i(0)|\phi^j(\boldsymbol{p})\rangle\langle\,\phi^j(\boldsymbol{p})|P^i(x)|0\rangle\right. \\ &\quad \left.-\langle 0|P^i(x)|\phi^j(\boldsymbol{p})\rangle\langle\phi^j(\boldsymbol{p})|\phi^i(0)\rangle\right] \end{aligned} \tag{3.92}$$

我们在所有中间态中只有式 (3.89) 引入的赝 Goldstone 粒子态可能贡献非零的轻夸克凝聚。利用式 (3.88) 和 (3.89)，我们得到

$$Q_V^i|\phi^j(\boldsymbol{p})\rangle = \mathrm{i}f^{ijk}|\phi^k(\boldsymbol{p})\rangle, \quad [Q_V^i,\phi^j(\boldsymbol{p})] = \mathrm{i}f^{ijk}\phi^k(\boldsymbol{p}) \tag{3.93}$$

上式说明矢量流的荷作用到赝 Goldstone 粒子态上变成各种类似的粒子态并按一定规则的线性叠加。对这种 $SU_V(3)$ 对称性，实际最多可以组合出两个相互对易的算符，用它们的本征值来标记式 (3.89) 所代表的态 (或者说这些态是这两个算符的共同本征态)。习惯选同位旋 $I_3 = Q_V^3$ 和超荷 $Y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}Q_V^8$，因为如上节 (3.13) 后面所讨论的，即使当夸克质量不同时这两个荷对应的矢量流也是守恒的 (除这两个荷外，在 (3.13) 后面还多讨论了一个对应 Q_V^0 的荷是重子数，它现在恒为零因此就不再单列了)。利用 $SU_V(3)$ 的结构常数 f^{ijk} 的如下非零取值：

$$f^{123}=1, \quad f^{147}=-f^{156}=f^{246}=f^{257}=f^{345}=-f^{367}=\frac{1}{2}, \quad f^{458}=f^{678}=\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{3.94}$$

我们可以重组 8 个赝 Goldstone 粒子，用 (I_3，Y) 的本征值来标记它们，它们是

$$K^0 \equiv \phi^6 + \mathrm{i}\phi^7 \quad (-1/2,1), \quad K^+ \equiv \phi^4 + \mathrm{i}\phi^5 \quad (1/2,1)$$

$$\pi^- \equiv \phi^1 - \mathrm{i}\phi^2 \quad (-1,0), \quad \pi^0 \equiv \phi^3 \quad (0,0), \quad \eta \equiv \phi^8 \quad (0,0), \quad \pi^+ \equiv \phi^1 + \mathrm{i}\phi^2 \quad (1,0)$$

$$K^- \equiv \phi^4 - \mathrm{i}\phi^5 \quad (-1/2,-1), \quad \bar{K}^{0+} \equiv \phi^6 - \mathrm{i}\phi^7 \quad (1/2,-1)$$

其中，括号里我们给出了每个粒子态的两个本征值的数值，括号前面的粒子态标记是式 (3.89) 定义的态所对应的实验上的赝标介子名称。以这种对应，我们可以重写式 (3.89) 定义的态的组合如下：

$$\sum_{i=1}^{8}\lambda^i\phi^i = \begin{pmatrix} \phi^3+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\phi^8 & \phi^1-\mathrm{i}\phi^2 & \phi^4-\mathrm{i}\phi^5 \\ \phi^1+\mathrm{i}\phi^2 & -\phi^3+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\phi^8 & \phi^6-\mathrm{i}\phi^7 \\ \phi^4+\mathrm{i}\phi^5 & \phi^6+\mathrm{i}\phi^7 & -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\phi^8 \end{pmatrix} \equiv \phi$$

$$= \begin{pmatrix} \pi^0 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\eta & \sqrt{2}\pi^- & \sqrt{2}K^- \\ \sqrt{2}\pi^+ & -\pi^0 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\eta & \sqrt{2}\bar{K}^0 \\ \sqrt{2}K^+ & \sqrt{2}K^0 & -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\eta \end{pmatrix} \tag{3.95}$$

上述式与通常文献中给出的相差一个转置，这个转置所起的效果是把赝标粒子态换成其电荷共轭态，由于我们以后将要建立的理论在电荷共轭变换下是不变的，因此只须做一个电荷共轭变换就得到文献中的传统结果，我们后面实际构造的手征有效拉氏量将直接用转置后的表达式。注意 ϕ^i 为实导致 ϕ 是厄米矩阵。把式 (3.95) 和 (3.93) 中最后的对易式结合起来，容易证明：

$$[Q_V^i, \phi] = \sum_{j=1}^{8} \lambda^j [Q_V^i, \phi^j] = \sum_{j,k=1}^{8} \mathrm{i} f^{ijk} \lambda^j \phi^k = -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{8} [\lambda^i, \lambda^k] \phi^k = \left[-\frac{\lambda^i}{2}, \phi\right] \tag{3.96}$$

到目前为止，我们一直用 ϕ^i 标记轴矢流的荷从真空产生的赝 Goldstone 粒子态，并把它们认作实验上的赝标介子的粒子态，我们把 ϕ^i=0 取为真空态，式 (3.93) 还给出了它们在矢量流的荷作用下的变换规则。ϕ^i 与轴矢流的荷的这种一一对应关系使得我们的赝标介子的标记与轴对称性紧密地联系起来了。我们以下对此做些更一般的讨论。先假设不用前面的与轴矢流的荷一一对应的 ϕ^i 而改用更一般的 π^i 来描述赝标介子，考虑在一个一般的群 G 的群元 g 变换下 π^i 变成 $\phi^i[g,\pi]$，利用群 G 的特征，我们有：

(1) $\phi^i[I,\pi] = \pi^i$，当群元为单位元 I 不做群变换时应回到原来的 π^i；

(2) $\phi[g_1, \phi[g_2,\pi]] = \phi[g_1 g_2, \pi]$，两次变换与做一次变换两群元乘积变换相同 (注意这时的乘法结合是先做 g_2)，再注意到 $\phi^i[g,0]$ 虽不依赖原来的 π，但确可以起到和 π 同样的作用，首先具有真空态 $\phi^i[I,0]=0$，再满足上面两个关系；

(3) $\phi[I, \phi[g,0]] = \phi[g,0]$；

(4) $\phi[g_1, \phi[g_2, \phi[g,0]]] = \phi[g_1, \phi[g_2 g,0]] = \phi[g_1 g_2 g, 0] = \phi[g_1 g_2, \phi[g,0]]$。

因此 $\phi^i[g,0]$ 可以用来替代原来的 π^i，即它可用来描述赝标 Goldstone 粒子，且独立的群元素和独立的 Goldstone 粒子一一对应。这个 $\phi^i[g,0]$ 实际是式 (3.89) 引入 ϕ^i 的深化，也就是挖掘出了其纯对群元的依赖。进一步如果我们要求赝标 Goldstone 粒子是局域的，这种和群元素的一一对应就要求我们考虑局域的群元素，这是在上节最后我们要把整体的手征对称性局域化的原因之一。下面我们对 $\phi^i[g,0]$ 进行更深入的讨论。前面说过 $\phi[I,0]=0$，实际上不止单位元满足此条件，经常还会有更多的群元也满足，假设群 G 的群元 h 也满足，即 $\phi[h,0]=0$。下面我们证明 h 形成群。这只要证单位元、乘法和逆三件事。首先单位元满足，即 $\phi[I,0]=0$；

再对乘法，如果 h_1 和 h_2 满足条件，$\phi[h_1,0]=\phi[h_2,0]=0$，则 h_1h_2 也满足条件，因为 $\phi[h_1h_2,0]=\phi[h_1,\phi[h_2,0]]=\phi[h_1,0]=0$；最后 h 的逆也满足条件，这可以通过如下计算看出：$\phi[h^{-1},0]=\phi[h^{-1},\phi[h,0]]=\phi[h^{-1}h,0]=\phi[I,0]=0$。$h$ 形成的群是原来群 G 的子群，我们记为 H，它的特点是保持真空不变。对比前面讨论的结果我们知道在手征极限下，QCD 拉氏密度所具有的手征对称性是 $G=SU_L(3)\times SU_R(3)$，而真空具有的对称性是 $H=SU_V(3)$，它是手征极限 QCD 发生的手征对称性自发破缺以后的结果。在讨论了 H 中的群元都对应真空或者说 $\phi=0$ 以后，我们考察 G/H 中群元的作用。对 G 中的群元 g 和 H 中的子群元 h，很容易看到 $\phi[g,0]=\phi[gh,0]$，它告诉我们 g 对应的赝 Goldstone 粒子和 gh 对应的赝 Goldstone 粒子是完全一样的。进一步如果群 G 的两个群元 g_1 和 g_2 对应的赝 Goldstone 粒子是完全一样的，即 $\phi[g_1,0]=\phi[g_2,0]$，则 $g_1^{-1}g_2$ 是子群 H 中的群元，这可以通过下式看出：

$$\phi[g_1^{-1}g_2,0]=\phi[g_1^{-1},\phi[g_2,0]]=\phi[g_1^{-1},\phi[g_1,0]]=\phi[g_1^{-1}g_1,0]=\phi[I,0]=0$$

这些讨论告诉我们赝标 Goldstone 粒子的群论标记 $\phi[g,0]$ 同构于 G/H。它们可以被看成是定义在 G 的左陪集上 (准到 $g'=gh$，之所以使用左陪集是由前面乘法结合律定义的结合顺序决定的)。我们可以在每个陪集上选一个代表群元 n，用它来代表赝标 Goldstone 粒子。每个陪集上都选定代表群元后，任意的一个群元都可唯一地分解为 nh，因此对任意群元 g 及陪集上的代表元 n，我们由 $gn=n'h$ 确定了 n 在操作 g 下到 n' 的变换行为，其中 n' 也是陪集上的代表元，见图 3.1。

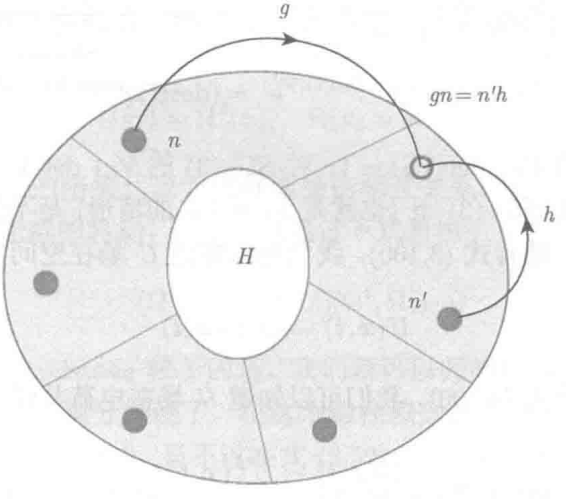


图 3.1 与赝标 Goldstone 一一对应的陪集代表元的群变换

对 $G=SU_L(3)\times SU_R(3)$，$g=(V_L,V_R)$，其中 V_L、V_R 是式 (3.44) 中引入

的左右手夸克场变换元。我们如此规定群元的乘法：对 $g'=(V_L',V_R')$ 有 $gg'=(V_LV_L',V_RV_R')$。通常人们最为常用的是进一步约定陪集的代表群元为

$$n=(1,U),\quad U(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\phi(x)}{F_0}},\quad \phi(x)=\sum_{i=1}^{8}\lambda^i\phi^i \tag{3.97}$$

其中，ϕ 就选为式 (3.95) 所引进的赝标 Goldstone 粒子标记，不过现在它们是时空坐标依赖的场，注意 ϕ 厄米和 F_0 为实常数导致 U 是幺正的。在真空上，$\phi=0$ 因而 $U=1$。在群元 g 的变换下，我们有

$$gn=(V_L,V_R)(1,U)=(V_L,V_RU)=(1,V_RUV_L^+)(V_L,V_L)=(1,U')(V_L,V_L)=n'h \tag{3.98}$$

因此我们约定的陪集代表元中的 U 场的变换规则必须是

$$U(x)\to U'(x)=V_R(x)U(x)V_L^\dagger(x) \tag{3.99}$$

根据式 (3.44)，我们可以辨认出 U 场和轻夸克场的关系为

$$U(x)\propto\psi_R(x)\bar{\psi}_L(x) \tag{3.100}$$

其中，$\propto$ 代表可以相差一个乘在前面的系数。注意式 (3.97) 定义的 U 场对味角标行列式为

$$\det U(x)=1 \tag{3.101}$$

而这与变换关系式 (3.99) 是相互协调的，因为 $\det U$ 的变换关系为

$$\det U'=\det(V_RUV_L^\dagger)=(\det U)\mathrm{e}^{\mathrm{Indet}(V_RV_L^\dagger)}=(\det U)\mathrm{e}^{\mathrm{Indet}(V_R)+[\mathrm{Indet}(V_L)]^\dagger}=\det U$$

其中，对 $SU_R(3)$ 的 V_R，$\det(V_R)=1$；对 $SU_L(3)$ 的 V_L，$\det(V_L)=1$。注意真空对应 $U=1$，而真空在 $SU_V(3)$ 下 (也就是 $V_L=V_R$ 的情形) 是不变的。

利用式 (3.14)，结合式 (3.100)，我们可以知道 U 场在空间反射下的变换行为

$$U(\boldsymbol{x},t)\to U^\dagger(-\boldsymbol{x},t) \tag{3.102}$$

利用式 (3.17)，结合式 (3.100)，我们可以知道 U 场在电荷共轭下的变换行为

$$U(\boldsymbol{x},t)\to U^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},t) \tag{3.103}$$

作为式 (3.99) 的检验，我们结合式 (3.96) 和 (3.97)，U 在 $SU_V(3)$ 下的变换可以类似于式 (3.26) 和 (3.27)，写为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta^iQ_V^i}U\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta^iQ_V^i}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\lambda^i}{2}\theta^i}U\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\lambda^i}{2}\theta^i}$，它正是式 (3.99) 在

$V_R = V_L = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\lambda^i}{2}\theta^i}$ 的特殊情形。而利用式 (3.100)，(3.26) 和 (3.27)，我们也可得到同样的结果

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta^i Q_V^i} U \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta^i Q_V^i} \propto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta^i Q_V^i} \psi_R \bar{\psi}_L \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta^i Q_V^i} \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta^i Q_V^i} \psi_R \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta^i Q_V^i} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta^i Q_V^i} \bar{\psi}_L \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta^i Q_V^i} \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta^i Q_R^i} \psi_R \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta^i Q_R^i} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta^i Q_L^i} \bar{\psi}_L \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta^i Q_L^i} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\lambda^i}{2}\theta^i} \psi_R \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\lambda^i}{2}\theta^i} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\lambda^i}{2}\theta^i} \bar{\psi}_L \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\lambda^i}{2}\theta^i} \\
&= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\lambda^i}{2}\theta^i} \psi_R \bar{\psi}_L \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\lambda^i}{2}\theta^i} \propto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\lambda^i}{2}\theta^i} U \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\lambda^i}{2}\theta^i}
\end{aligned} \tag{3.104}$$

陪集代表群元的选择可以因人而异，式 (3.97) 是人们最常用的选法，这种选法不好的地方是对左手群和右手群不平等对待。另一种平等对待左右手群并且也经常被人们使用的约定是：

$$n = (\Omega^\dagger, \Omega) \tag{3.105}$$

这时图 3.1 给出的陪集代表元的变换关系要求：

$$gn = (V_L, V_R)(\Omega^\dagger, \Omega) = (V_L \Omega^\dagger \tilde{h}^\dagger, V_R \Omega \tilde{h}^\dagger)(\tilde{h}, \tilde{h}) = (\Omega'^\dagger, \Omega')(\tilde{h}, \tilde{h}) = n'h \tag{3.106}$$

其中，$h = (\tilde{h}, \tilde{h})$。我们得到 Ω' 的变换为

$$\Omega \to \Omega' = V_R \Omega \tilde{h}^\dagger = \tilde{h} \Omega V_L^\dagger \tag{3.107}$$

$\tilde{h}$ 是一个由式 (3.107) 的右边最后一个等式所限制的矢量型局域 $SU(3)$ 对称性，它既依赖于 Ω 也依赖于 V_L 和 V_R(特别地对真空 $\Omega = 1$ 且 $\tilde{h} = V_L = V_R$)，通常称其为隐藏的对称性 (hidden symmetry)。从式 (3.107) 我们可以推出 Ω^2 和前面另一种陪集代表元 U 的变换关系 (3.99) 相同，加上对真空的限制我们得到

$$U(x) = \Omega^2(x), \quad \Omega(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\phi(x)}{2F_0}} \tag{3.108}$$

上式给出了两种不同的陪集代表元选择结果的相互关系。这两种代表元的不同选择实际只相差一个子群的转动，这也可以通过下式看出：

$$(\Omega^\dagger, \Omega) = (1, U)(\Omega^\dagger, \Omega^\dagger)$$

有了描写赝标 Goldstone 粒子的场，我们就可以开始进入到本节的核心 —— 手征有效拉氏量的路径积分描述了。在这个路径积分体系中，出发点是 3.1 节式 (3.52) 定义的生成泛函 $Z[J, \bar{\theta}]$。只不过在式 (3.52) 它是用 QCD 的拉氏密度加入外源定义的。这个生成泛函在低能区由于 QCD 的耦合常数大而使传统的针对强作用耦合常数幂次展开的微扰计算失效，人们需要发展有效的能处理低能非微扰效应的计算方法。物理上在所讨论的能区，采用此能区实验上实际观测到的物理自由度

作为计算体系的基本变量，或者说把它们作为力学体系中的广义坐标进行计算，往往能比较容易接近实验结果。现在低能区的物理自由度就是赝标介子，手征有效拉氏量的第一个基本考虑就是把拉氏密度中的变量选为赝标介子场 U，而不是原来 QCD 中的夸克和胶子。

我们把用 U 和外源 J 及参量 $\bar{\theta}$ 一起构造出来的拉氏密度叫手征有效拉氏量 $L_{\text{eff}}[U,J,\bar{\theta}]$，称手征是指我们下面将要讨论的它所具有的手征对称性，称有效是指这不是一个基本的理论。我们现在采用手征有效拉氏量来构造原来在式 (3.52) 中通过 QCD 定义的生成泛函 $Z[J,\bar{\theta}]$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}Z[J,\bar{\theta}]}=\int \mathscr{D}U\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4xL_{\text{eff}}[U,J,\bar{\theta}]} \tag{3.109}$$

我们期待从这个生成泛函的表达式出发，可以发展出一套非微扰的计算方法。首先所要解决的问题就是确定手征有效拉氏量 L_{eff}。我们原则上需要从 QCD 把它推导出来，由于涉及非微扰计算，因此这是一个相当困难的问题，我们留待下节专门讨论。一般人们设法回避这个困难，采取只抽取它与 QCD 之间的对称性联系的方法来限制 L_{eff} 可能的形式和结构。以下分别讨论空间反演、电荷共轭和手征对称性对 L_{eff} 的限制，实际我们还要求 L_{eff} 在洛伦兹变换下也是不变的。

对空间反演对称性，利用式 (3.55)，得

$$\begin{aligned}\int \mathscr{D}U\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4xL_{\text{eff}}[U,J,\bar{\theta}]}&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}Z[J,\bar{\theta}]}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}Z[J^P,-\bar{\theta}]}=\int \mathscr{D}U^P\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x^PL_{\text{eff}}[U^P,J^P,-\bar{\theta}]}\\&=\int \mathscr{D}U\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4xL_{\text{eff}}[U^P,J^P,-\bar{\theta}]}\end{aligned} \tag{3.110}$$

其中，我们利用了式 (3.102) 给出的 $U^P(\boldsymbol{x},t)=U^\dagger(-\boldsymbol{x},t)=U^{-1}(-\boldsymbol{x},t)$，因此

$$\mathscr{D}U^P=\mathscr{D}U^{-1}=(\det U)^{-3}\mathscr{D}U(\det U)^{-3}=\mathscr{D}U \tag{3.111}$$

从式 (3.110) 我们可以看出手征有效拉氏量在空间反演变换下的变换性质为

$$L_{\text{eff}}[U^P,J^P,-\bar{\theta}]=L_{\text{eff}}[U,J,\bar{\theta}] \tag{3.112}$$

它告诉我们手征有效拉氏量在空间反演变换下是不变的。

对电荷共轭对称性，利用式 (3.56)，得

$$\begin{aligned}\int \mathscr{D}U\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4xL_{\text{eff}}[U,J,\bar{\theta}]}&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}Z[J,\bar{\theta}]}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}Z[J^C,\bar{\theta}]}=\int \mathscr{D}U^C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4xL_{\text{eff}}[U^C,J^C,\bar{\theta}]}\\&=\int \mathscr{D}U\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4xL_{\text{eff}}[U^C,J^C,\bar{\theta}]}\end{aligned} \tag{3.113}$$

其中，利用了性质：$\mathscr{D}U^C = \mathscr{D}U^T = \mathscr{D}U$。从式 (3.113) 我们可以看出手征有效拉氏量在电荷共轭变换下是不变的：

$$L_{\text{eff}}[U^C, J^C, \bar{\theta}] = L_{\text{eff}}[U, J, \bar{\theta}] \tag{3.114}$$

对手征对称性，利用式 (3.76)，得

$$\begin{aligned}\int \mathscr{D}U \mathrm{e}^{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x L_{\text{eff}}[U,J,\bar{\theta}]} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}Z[J,\bar{\theta}]} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Z[J',\bar{\theta}']+\mathrm{i}\int_0^1 \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^4x \mathrm{e}^{t\delta_\beta} \mathrm{tr}_f[\beta\tilde{\Omega}]} \\ &= \int \mathscr{D}U' \mathrm{e}^{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x L_{\text{eff}}[U',J',\bar{\theta}']+\mathrm{i}\int_0^1 \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^4x \mathrm{e}^{t\delta_\beta} \mathrm{tr}_f[\beta\tilde{\Omega}]} \\ &= \int \mathscr{D}U \mathrm{e}^{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x L_{\text{eff}}[U',J',\bar{\theta}']+\mathrm{i}\int_0^1 \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^4x \mathrm{e}^{t\delta_\beta} \mathrm{tr}_f[\beta\tilde{\Omega}]}\end{aligned} \tag{3.115}$$

在上式中我们利用了 U 场的测度在手征对称性变换下是不变的性质。这可由式 (3.99) 出发

$$\mathscr{D}U' = \mathscr{D}[V_R U V_L^\dagger] = \det(V_R V_L^\dagger)\mathscr{D}U = \mathscr{D}U \tag{3.116}$$

如前面所讨论过的 $\det(V_R V_L^+) = 1$。注意与原始 QCD 不同，现在泛函积分测度是手征变换不变的，而在 QCD 中泛函积分测度在手征变换下是改变的。为了产生与 QCD 同样的流流格林函数，在手征有效拉氏量层次我们不得不依靠拉氏量本身而不是测度来产生手征反常。从式 (3.115) 我们可以看出手征有效拉氏量在手征对称性变换下的变换性质为

$$\int \mathrm{d}^4x L_{\text{eff}}[U', J', \bar{\theta}'] = \int \mathrm{d}^4x L_{\text{eff}}[U, J, \bar{\theta}] + \mathrm{i}\int_0^1 \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^4x \mathrm{e}^{t\delta_\beta} \mathrm{tr}_f[\beta\tilde{\Omega}] \tag{3.117}$$

习惯上把手征有效拉氏量分为正常和反常项：

$$L_{\text{eff}}[U, J, \bar{\theta}] = L_{\text{eff},N}[U, J, \bar{\theta}] + L_{\text{eff},A}[U, J, \bar{\theta}] \tag{3.118}$$

它们在手征变换下的行为分别为

$$L_{\text{eff},N}[U', J', \bar{\theta}'] = L_{\text{eff},N}[U, J, \bar{\theta}] \tag{3.119}$$

$$\int \mathrm{d}^4x L_{\text{eff},A}[U', J', \bar{\theta}'] = \int \mathrm{d}^4x L_{\text{eff},A}[U, J, \bar{\theta}] + \mathrm{i}\int_0^1 \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^4x \mathrm{e}^{t\delta_\beta} \mathrm{tr}_f[\beta\tilde{\Omega}] \tag{3.120}$$

对于正常项，由于是手征变换不变的，如果只考虑目前讨论的手征对称性、空间反演与电荷共轭对称性及洛伦兹不变性给出的对手征拉氏量的限制，我们将可

以构造出无穷多个在这些对称性变换下不变的项，这些项都是由一些基本的基元拼搭起来的。以下在表 3.1 中我们把它们及其变换行为罗列出来。第二列是手征对称性变换，第三列是电荷共轭变换，第四列是空间反演变换。

表 3.1　手征有效拉氏量中的基元及其在对称性变换下的性质

基元	$SU_L(3)\times SU_R(3)$	C	P
U	$V_R U V_L^\dagger$	U^{T}	$U^\dagger$
$\nabla_{\lambda_1}\cdots\nabla_{\lambda_n}U$	$V_R(\nabla_{\lambda_1}\cdots\nabla_{\lambda_n}U)V_L^\dagger$	$(\nabla_{\lambda_1}\cdots\nabla_{\lambda_n}U)^{\mathrm{T}}$	$(\nabla_{\lambda_1}\cdots\nabla_{\lambda_n}U)^\dagger$
$\chi\equiv 2B_0(s+\mathrm{i}p)$	$V_R\chi V_L^\dagger$	χ^{T}	$\chi^\dagger$
$\nabla_{\lambda_1}\cdots\nabla_{\lambda_n}\chi$	$V_R(\nabla_{\lambda_1}\cdots\nabla_{\lambda_n}\chi)V_L^\dagger$	$(\nabla_{\lambda_1}\cdots\nabla_{\lambda_n}\chi)^{\mathrm{T}}$	$(\nabla_{\lambda_1}\cdots\nabla_{\lambda_n}\chi)^\dagger$
$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$-\bar\theta$
$\nabla_\mu\bar\theta\equiv\partial_\mu\bar\theta+2\mathrm{i}\mathrm{tr}_f a_\mu$	$\nabla_\mu\bar\theta$	$\nabla_\mu\bar\theta$	$-\nabla_\mu\bar\theta$
$r_\mu\equiv v_\mu+a_\mu$	$V_R r_\mu V_R^\dagger+\mathrm{i}V_R\partial_\mu V_R^\dagger$	$-l_\mu^T$	l^μ
$l_\mu\equiv v_\mu-a_\mu$	$V_L l_\mu V_L^\dagger+\mathrm{i}V_L\partial_\mu V_L^\dagger$	$-r_\mu^T$	r^μ
$f_{\mu\nu}^R\equiv\partial_\mu r_\nu-\partial_\nu r_\mu-\mathrm{i}[r_\mu,r_\nu]$	$V_R f_{\mu\nu}^R V_R^\dagger$	$-(f_{\mu\nu}^L)^T$	$f_L^{\mu\nu}$
$f_{\mu\nu}^L\equiv\partial_\mu l_\nu-\partial_\nu l_\mu-\mathrm{i}[l_\mu,l_\nu]$	$V_L f_{\mu\nu}^L V_L^\dagger$	$-(f_{\mu\nu}^R)^T$	$f_R^{\mu\nu}$

表 3.1 中出现的 U 场和 χ 场的协变微商的定义如下：

$$\nabla_\mu U\equiv\partial_\mu U-\mathrm{i}(v_\mu+a_\mu)U+\mathrm{i}U(v_\mu-a_\mu) \tag{3.121}$$

$$\nabla_\mu\chi\equiv\partial_\mu\chi-\mathrm{i}(v_\mu+a_\mu)\chi+\mathrm{i}\chi(v_\mu-a_\mu) \tag{3.122}$$

有了这些构造对称变换不变的基元，原则上可以用它们构造任意的不变量，剩下的问题是如何组织这无穷多的不变量进行计算。标准的做法是把这些不变量按照一定的规则进行排序，分出不同的 “阶”，然后一阶阶地计算。这些 “阶” 的安排直接决定了理论计算的有效性，因为只有高阶项对物理贡献小才能使计算有效。考虑到我们主要讨论的是低能区的介子物理，介子的能动量相对典型的 1GeV 的能量标度 (在低能区大部分强子的质量典型地在这个能标附近) 应该是小量，因此我们按照介子能动量的幂次进行展开，在坐标空间体现为对介子场和外源的微商幂次展开，习惯上称为低能展开。轻夸克质量相比 1GeV 也是小量，因此也可以进行展开。这个展开的好处是在最低的领头阶相当于把轻夸克质量取为零，这正是前面讨论过的 QCD 的手征极限，这时 QCD 的手征对称性实现方式是拉氏密度中具有的手征对称性 $SU_L(3)\times SU_R(3)$ 自发破缺到其子对称性 $SU_V(3)$，这样的展开称作手征微扰展开，相应的理论叫手征微扰论。手征有效拉氏量的实际计算是低能展开和手征微扰展开的结合，我们通过给所有出现在手征有效拉氏量中的量赋予动量的幂次来实现和确定各种项的阶，这个过程叫数幂。首先将微商算符 ∂_μ 记为动量一次幂，而矢量外源 v_μ 和轴矢外源 a_μ 由于式 (3.121) 和 (3.122) 要与微商算符 ∂_μ 联合组成协变微商，因此也应与微商算符同阶也就是动量一次幂，否则我们按

动量展开就会打破协变微商 (即协变微商的不同项属于不同的阶) 造成人为的手征对称性破坏。对标量外源 s 由于轻夸克质量是被吸收到这个外源中的，因此此外源和轻夸克质量应该具有相同的阶。而后面我们将会证明赝标介子的质量平方正比于夸克的质量，而赝标介子质量的平方在量子场论中的格林函数中是四动量平方的极点，我们的展开应该维持赝标介子的质量性质也就是保持极点，由此赝标介子的质量平方也就具有了动量平方的幂次，由此关联到轻夸克质量，因而标量外源 s 也就具有动量平方的幂次。正是这个保持赝标介子极点的要求把低能展开和手征微扰展开关联起来了，因此在手征有效拉氏量理论中人们经常不再区分到底是做低能展开还是手征微扰展开，在不同的地方两个名词经常混用。对赝标外源 p 由式 (3.48) 和 (3.49) 通过手征变换变出来，因而应该与 s 同阶也就是也具有动量平方的幂次。剩下还有 U 场和 $\bar{\theta}$，我们找不到特别的对其动量幂次的约束，因此把它们都取为动量的零次幂。这样选择的好处是即使在最低阶我们也不会丢掉与它们相关的所有信息。

有了各种量在低能展开中的动量幂次安排，下面讨论几个低阶的项。最低阶的手征有效拉氏量应该是 p^0 阶，它只能由零次幂的 U 场和 $\bar{\theta}$ 来构成，注意 U 场的变换关系式 (3.99)，我们发现 U 场的手征变换不变量只可能是 $\mathrm{tr}(U^\dagger U)^n$ 的形式，其中 n 是任意的实数。由于 U 是幺正的，这种项是与 U 无关的常数，因此手征有效拉氏量 p^0 阶是一依赖 $\bar{\theta}$ 的纯常数 (空间反演不变要求此常数是 $\bar{\theta}$ 的偶函数)，和赝标介子场无关，因此通常我们不予考虑。怎么理解这个没有 p^0 阶的结果呢？我们说赝标介子无自作用势能，因为势能项是由不含微商的纯 U 场的函数形成的。另一种说法是：赝标介子的自相互作用在四动量趋于零时为零，即在低能极限下赝标介子无自作用。最早提出手征有效拉氏量的温伯格的解释是：由于赝标介子场可以看成是手征对称性 $SU_L(3)\times SU_R(3)$ 的群元素 (实际是前面讨论过的陪集代表元)，因而可以利用局域手征对称性把这个群元变换成单位元也就是真空。对手征拉氏量中不含微商的项，作为群元的赝标介子场直接就变为真空或单位元了，这样的项就成为与赝标介子场无关的常数项了。对含微商的赝标介子场有两种看法，一种是不考虑引进外源，这时含微商的项在局域手征变换下不是不变的，因而无法利用局域手征变换把介子场变为真空；另一种是引进外源，这时通过把普通时空坐标的微商替换为由式 (3.121) 和 (3.122) 定义的协变微商，仍可保持含协变微商的项在局域手征变换下是不变的。但这时虽然 U 场变成单位元了，但变换后的外源却隐含地依赖了 U 场，因而这样的项是消不掉 U 的依赖性的。注意到按我们前面做的数幂安排，参与协变微商的外源都带动量的幂次，因此所有这些涉及微商的讨论实际都和 p^0 阶无关。

除了没有 p^0 阶外，赝标介子手征有效拉氏量还没有动量的奇次阶，因为奇次阶的动量只能靠微商来构造，而微商是带角标的，要形成洛伦兹变换的不变量，这

些角标必须是配对地收缩掉，奇数个角标是无法收缩的，因而不存在奇数个角标，也就没有动量的奇次阶。这些讨论告诉我们最低阶的手征有效拉氏量是 p^2 阶，并且以后只有偶数阶项。具体写下来就是：

$$L_{\mathrm{eff},N}[U,J,\bar{\theta}]=\mathscr{L}_2+\mathscr{L}_4+\mathscr{L}_6+\cdots \tag{3.123}$$

在最低的 p^2 阶把所有可能的项都写下来是：

$$\mathscr{L}_2=\frac{F_0^2}{4}\mathrm{tr}_f[\nabla_\mu U(\nabla^\mu U)^\dagger]+\frac{F_0^2}{4}\mathrm{tr}_f(\chi U^\dagger+U\chi^\dagger)+\frac{H_0}{12}\nabla_\mu\bar{\theta}\nabla^\mu\bar{\theta} \tag{3.124}$$

其中有三个独立的项，分别是手征对称性变换、空间反演、电荷共轭和洛伦兹变换不变。每个项各自有一个独立的参数，注意第二项的独立参数 B_0 被吸收到 χ 场的定义中去了 (见表 3.1)。

对次低的 p^4 阶项，为简单起见，只考虑 $\bar{\theta}=0$ 及矢量和轴矢外源对味道指标是无迹的情形

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_4=&L_1\{\mathrm{tr}_f[\nabla_\mu U(\nabla^\mu U)^\dagger]\}^2+L_2\mathrm{tr}_f[\nabla_\mu U(\nabla_\nu U)^\dagger]\mathrm{tr}_f[\nabla^\mu U(\nabla^\nu U)^\dagger]\\&+L_3\mathrm{tr}_f[\nabla_\mu U(\nabla^\mu U)^\dagger\nabla_\nu U(\nabla^\nu U)^\dagger]+L_4\mathrm{tr}_f[\nabla_\mu U(\nabla^\mu U)^\dagger]\mathrm{tr}_f(\chi U^\dagger+U\chi^\dagger)\\&+L_5\mathrm{tr}_f[\nabla_\mu U(\nabla^\mu U)^\dagger(\chi U^\dagger+U\chi^\dagger)]+L_6[\mathrm{tr}_f(\chi U^\dagger+U\chi^\dagger)]^2\\&+L_7[\mathrm{tr}_f(\chi U^\dagger-U\chi^\dagger)]^2+L_8\mathrm{tr}_f(U\chi^\dagger U\chi^\dagger+\chi U^\dagger\chi U^\dagger)\\&-\mathrm{i}L_9\mathrm{tr}_f[f_{\mu\nu}^R\nabla^\mu U(\nabla^\nu U)^\dagger+f_{\mu\nu}^L(\nabla^\mu U)^\dagger\nabla^\nu U]+L_{10}\mathrm{tr}_f(Uf_{\mu\nu}^LU^\dagger f_R^{\mu\nu})\\&+H_1\mathrm{tr}_f(f_{\mu\nu}^Rf_R^{\mu\nu}+f_{\mu\nu}^Lf_L^{\mu\nu})+H_2\mathrm{tr}_f(\chi\chi^\dagger)\end{aligned} \tag{3.125}$$

目前人们已经讨论到 p^6 阶，详情读者可参考文献 [4]。

现在开始讨论反常项。反常项在式 (3.118) 和 (3.120) 中是作为反映手征有效拉氏量在局域手征变换下非不变的部分而引进的。这个非不变的部分原来在基本的 QCD 的生成泛函中反映的是夸克场的泛函积分测度在手征转动下的非不变性，而现在在手征拉氏量层次，生成泛函的手征变换非不变性是由手征拉氏量中的反常项来承担的。我们从式 (3.120) 出发，首先选择一个特殊的手征转动 —— 介子场本身作为转动元：

$$\Omega(x)=V_L(x)=V_R^\dagger(x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta(x)} \tag{3.126}$$

其中，用介子场 ϕ 来代表 β，即

$$\beta(x)=-\frac{\phi(x)}{2F_0} \tag{3.127}$$

用下标 Ω 标记在这样的转动后的量。利用式 (3.99)，我们发现这样的转动把 U 场转为单位元，即 $U_\Omega=1$。而转动后的外源 J_Ω 由式 (3.45) 得

$$J_\Omega=[\Omega P_R+\Omega^\dagger P_L][J+\mathrm{i}\partial\!\!\!/][\Omega P_R+\Omega^\dagger P_L] \tag{3.128}$$

或者按照式 (3.41) 的分解

$$s_\Omega = \frac{1}{2}[\Omega(s-\mathrm{i}p)\Omega + \Omega^\dagger(s+\mathrm{i}p)\Omega^\dagger] \tag{3.129}$$

$$p_\Omega = \frac{\mathrm{i}}{2}[\Omega(s-\mathrm{i}p)\Omega - \Omega^\dagger(s+\mathrm{i}p)\Omega^\dagger] \tag{3.130}$$

$$v_{\Omega,\mu} = \frac{1}{2}[\Omega^\dagger(v_\mu + a_\mu + \mathrm{i}\partial_\mu)\Omega + \Omega(v_\mu - a_\mu + \mathrm{i}\partial_\mu)\Omega^\dagger] \tag{3.131}$$

$$a_{\Omega,\mu} = \frac{1}{2}[\Omega^\dagger(v_\mu + a_\mu + \mathrm{i}\partial_\mu)\Omega - \Omega(v_\mu - a_\mu + \mathrm{i}\partial_\mu)\Omega^\dagger] \tag{3.132}$$

而由式 (3.66) 及 Ω 的行列式为 1，我们得到

$$\bar{\theta}_\Omega = \bar{\theta} \tag{3.133}$$

在式 (3.126) 和 (3.127) 定义的转动下，手征有效拉氏量的反常部分由式 (3.120) 可以写为

$$\int \mathrm{d}^4x L_{\mathrm{eff},A}[U,J,\bar{\theta}] = \int \mathrm{d}^4x L_{\mathrm{eff},A}[1,J_\Omega,\bar{\theta}] - \mathrm{i}\int_0^1 \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^4x \mathrm{e}^{t\delta_\beta}\mathrm{tr}_f[\beta\tilde{\Omega}]\Big|_{\Omega=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}} \tag{3.134}$$

也就是反常项被分为了两项，第二项对应的是反常项，按照上节结尾的讨论，它在手征变换下不是不变的，担负起了产生手征反常的任务，因此第一项反而在手征变换下应该是不变的。以下我们先计算第二项。利用式 (3.76)

$$\int_0^1 \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^4x \mathrm{e}^{t\delta_\beta}\mathrm{tr}_f[\beta\tilde{\Omega}] = Z[J_\Omega,\bar{\theta}_\Omega] - Z[J,\bar{\theta}] \tag{3.135}$$

我们引入在 0 和 1 区间变化的参数 t 及 t 依赖的 Ω：

$$\Omega(t) \equiv \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\beta} \tag{3.136}$$

因此式 (3.126) 定义的 Ω 实际是 $\Omega = \Omega(1)$，而真空是 $1 = \Omega(0)$。这样式 (3.135) 就可以用 t 依赖的 Ω 表达为

$$\int_0^1 \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^4x \mathrm{e}^{t\delta_\beta}\mathrm{tr}_f[\beta\tilde{\Omega}] = Z[J_{\Omega(1)},\bar{\theta}_{\Omega(1)}] - Z[J_{\Omega(0)},\bar{\theta}_{\Omega(0)}] = \int_0^1 \mathrm{d}t \frac{\mathrm{d}Z[J_{\Omega(t)},\bar{\theta}_{\Omega(t)}]}{\mathrm{d}t} \tag{3.137}$$

其中

$$\bar{\theta}_{\Omega(t)} = \bar{\theta} \tag{3.138}$$

$J_{\Omega(t)}$ 是式 (3.128)~(3.132) 把其中的 Ω 置换成 $\Omega(t)$ 所得的结果。注意当 $\Omega(t)$ 变成 $\Omega(t+\mathrm{d}t)$ 时，由式 (3.136) Ω 的变化量为 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathrm{d}t\beta}=1-\mathrm{i}\mathrm{d}t\beta$，它在 $J_{\Omega(t)},\bar{\theta}_{\Omega(t)}$ 上或者说在生成泛函 $Z[J_{\Omega(t)},\bar{\theta}_{\Omega(t)}]$ 产生 $V_L=V_R^\dagger=1-\mathrm{i}\mathrm{d}t\beta$ 的手征变换，这正是式 (3.61) 所讨论的变换的特例，即把其中的 α 取为零，β 置换为 $\mathrm{d}t\beta$，并且把 $J,\bar{\theta}$ 分别置换成 $J_{\Omega(t)},\bar{\theta}_{\Omega(t)}$。相应的生成泛函的变化由式 (3.67) 给出，写下来就是

$$\mathrm{d}Z[J_{\Omega(t)},\bar{\theta}_{\Omega(t)}]=\mathrm{d}t\int\mathrm{d}^4x\mathrm{tr}_f[\beta(x)\tilde{\Omega}(x)] \tag{3.139}$$

把它代回式 (3.137)，并利用 $\beta=\dfrac{\mathrm{i}}{2}\dfrac{\partial U(t)}{\partial t}U^\dagger(t)$，其中 $U(t)\equiv\Omega^2(t)$，得

$$\int_0^1\mathrm{d}t\int\mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{t\delta_\beta}\mathrm{tr}_f[\beta\tilde{\Omega}]=\int_0^1\mathrm{d}t\int\mathrm{d}^4x\ \mathrm{tr}_f\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\partial U(t)}{\partial t}U^\dagger(t)\tilde{\Omega}\right]\Bigg|_{J\to J_{\Omega(t)}}\equiv S_{\mathrm{WZ}}[U,J] \tag{3.140}$$

这个项叫 Wess-Zumino 反常作用量。它目前的表达形式把反常项用参数 t 依赖的赝标介子场 $U(t)$ 表达出来了。更具体地，注意到目前的 $\tilde{\Omega}$ 中只依赖做了 $\Omega(t)=\sqrt{U(t)}$ 转动以后通过式 (3.131) 和 (3.132) 定义的矢量和轴矢外源，我们可以将反常作用量分解为外源无关的部分和外源依赖的部分

$$S_{\mathrm{WZ}}[U,J]=S_{\mathrm{WZ}}[U,0]+\frac{1}{48\pi^2}\int\mathrm{d}^4x\varepsilon^{\mu\nu\mu'\nu'}W_{\mu\nu\mu'\nu'} \tag{3.141}$$

为了给出这两部分的具体形式，先罗列几个由式 (3.131) 和 (3.132) 引申出来的关于转动源的关系式：

$$a_\Omega^\mu=\frac{\mathrm{i}}{2}\Omega^\dagger[\nabla^\mu U]\Omega^\dagger \tag{3.142}$$

$$d^\mu a_\Omega^\nu-d^\nu a_\Omega^\mu=\frac{1}{2}[\Omega^\dagger f_R^{\mu\nu}\Omega-\Omega f_L^{\mu\nu}\Omega^\dagger] \tag{3.143}$$

$$v_\Omega^{\mu\nu}=\frac{\mathrm{i}}{4}\Omega^\dagger[-(\nabla^\mu U)U^\dagger(\nabla^\nu U)+(\nabla^\nu U)U^\dagger(\nabla^\mu U)]\Omega^\dagger+\frac{1}{2}[\Omega^\dagger f_R^{\mu\nu}\Omega+\Omega f_L^{\mu\nu}\Omega^\dagger] \tag{3.144}$$

利用上面的公式并把外源取为零，我们得到

$$S_{\mathrm{WZ}}[U,0]=-\frac{N_c\mathrm{i}}{48\pi^2}\int_0^1\mathrm{d}t\int\mathrm{d}^4x\varepsilon^{\mu\nu\mu'\nu'}\mathrm{tr}_f\left[U^\dagger(t)\frac{\partial U(t)}{\partial t}L_\mu(t)L_\nu(t)L_{\mu'}(t)L_{\nu'}(t)\right] \tag{3.145}$$

其中

$$L_\mu(t)\equiv U^\dagger(t)\partial_\mu U(t) \tag{3.146}$$

如果要完成上式中参数 t 的积分，需要把现在的四维时空看成是一个五维时空的边界，则在五维时空边界超曲面 Q 上有

$$\int_Q \mathrm{d}\Sigma^{ijklm}\frac{\partial}{\partial y^m}=\int \mathrm{d}^4x\varepsilon^{\mu\nu\mu'\nu'} \tag{3.147}$$

其中，y^m 是五维时空中的坐标，$\mathrm{d}\Sigma^{ijklm}$ 是五维时空中的超曲面面元，这里 $ijklm$ 用来标记五维时空的坐标分量，它们是全反对称的，其中的 $ijkl$ 在四维边界上退化为我们的四维时空角标 $\mu\nu\mu'\nu'$。把我们的 U 场和式 (3.146) 定义的 L_μ 扩展到五维时空，读者可以自行验证下面关系：

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{tr}_f[L_iL_jL_kL_lL_m]\mathrm{d}\Sigma^{ijklm}=5\frac{\partial}{\partial y^m}\mathrm{tr}_f\left[U^+\frac{\partial U}{\partial t}L_iL_jL_kL_l\right]\mathrm{d}\Sigma^{ijklm} \tag{3.148}$$

利用式 (3.147) 和 (3.148)，式 (3.145) 可以改写为

$$\begin{aligned}S_{\mathrm{WZ}}[U,0]&=-\frac{N_c\mathrm{i}}{48\pi^2}\int_0^1\mathrm{d}t\int_Q\mathrm{d}\Sigma^{ijklm}\frac{\partial}{\partial y^m}\mathrm{tr}_f\left[U^+(t)\frac{\partial U(t)}{\partial t}L_i(t)L_j(t)L_k(t)L_l(t)\right]\\&=-\frac{N_c\mathrm{i}}{240\pi^2}\int_0^1\mathrm{d}t\int_Q\mathrm{d}\Sigma^{ijklm}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{tr}_f\left[L_i(t)L_j(t)L_k(t)L_l(t)L_m(t)\right]\\&=-\frac{N_c\mathrm{i}}{240\pi^2}\int_Q\mathrm{d}\Sigma^{ijklm}\mathrm{tr}_f\left[L_i(1)L_j(1)L_k(1)L_l(1)L_m(1)\right]\end{aligned} \tag{3.149}$$

其中我们利用了 $L_i(t=0)=0$。因此我们把参数 t 积掉了，将 Wess-Zumino 反常作用量的外源无关部分表达为五维时空的四维边界上的 U 场 (注意 $U(t=1)=U$) 的积分了。以上是对式 (3.141) 中的外源无关部分的讨论，对其外源相关部分读者可以自己检验结果是：

$$\begin{aligned}W_{\mu\nu\mu'\nu'}=\mathrm{tr}_f\Big\{&[-l_\mu U_{\nu L}U_{\mu' L}U_{\nu' L}+\partial_\mu l_\nu l_{\mu'}U_{\nu' L}+l_\mu\partial_\nu l_{\mu'}U_{\nu' L}+(L\to R)]\\&+\partial_\mu l_\nu Ur_{\mu'}U^{-1}U_{\nu' L}+U\partial_\mu r_\nu U^{-1}l_{\mu'}U_{\nu' L}-\frac{1}{2}[l_\mu U_{\nu L}l_{\mu'}U_{\nu' L}-(L\to R)]\\&+l_\mu Ur_\nu U^{-1}U_{\mu' L}U_{\nu' L}-Ur_\mu U^{-1}l_\nu U_{\mu' L}U_{\nu' L}-l_\mu\partial_\nu l'_\mu Ur'_\nu U^{-1}\\&-\partial_\mu l_\nu l'_\mu Ur'_\nu U^{-1}+r_\mu\partial_\nu r'_\mu U^{-1}l'_\nu U+\partial_\mu r_\nu r'_\mu U^{-1}l_{\nu'}U+l_\mu Ur_\nu U^{-1}l'_\mu U_{\nu' L}\\&+r_\mu U^{-1}l_\nu Ur_{\mu'}U_{\nu' R}+[l_\mu l_\nu l_{\mu'}U_{\nu' L}+(L\to R)]-l_\mu l_\nu l_{\mu'}Ur_{\nu'}U^{-1}\\&+r_\mu r_\nu r_{\mu'}U^{-1}l_{\nu'}U-\frac{1}{2}l_\mu Ur_\nu U^{-1}l_{\mu'}Ur_{\nu'}U^{-1}\Big\}\end{aligned} \tag{3.150}$$

其中

$$U_{\mu L}\equiv(\partial_\mu U)U^{-1},\quad U_{\mu R}\equiv U^{-1}(\partial_\mu U) \tag{3.151}$$

分析得到的 WZ 作用量，我们发现它的内禀宇称是负的。内禀宇称变换是在上节讨论的空间反演变换中扣除时空坐标及 $\bar{\theta}$ 的变换 (也就是维持时空坐标和 $\bar{\theta}$ 不变) 后剩余下来的场和外源变换，具体地有

$$U \to U^{\dagger} = U^{-1}\Omega \to \Omega^{\dagger} = \Omega^{-1}L_{\mu} \to -UL_{\mu}U^{\dagger} \tag{3.152}$$

$$U_{\mu L} \to -U_{\mu R}, \quad U_{\mu R} \to -U_{\mu L}, \quad r_{\mu} \to l_{\mu}, \quad l_{\mu} \to r_{\mu} \tag{3.153}$$

利用它们很容易验证在内禀宇称变换下，WZ 作用量变换为它自己的负值。利用 WZ 作用量，反常部分的赝标介子手征有效拉氏量式 (3.134) 可以写为

$$\int \mathrm{d}^4x L_{\mathrm{eff},A}[U,J,\bar{\theta}] = \int \mathrm{d}^4x L_{\mathrm{eff},A}[1,J_{\Omega},\bar{\theta}] - \mathrm{i}S_{\mathrm{WZ}}[U,J] \tag{3.154}$$

如前面所讨论的，等号右边第一项 $\int \mathrm{d}^4x L_{\mathrm{eff},A}[1,J_{\Omega},\bar{\theta}]$ 应该在手征变换下是不变的，那凭什么还称它为反常项？这主要是这一项虽然手征变换下不变但其内禀宇称与第二项的 WZ 作用量相同，即都在内禀宇称变换下变一个负号；而正常项在内禀宇称变换下不出负号。这是人们用于区分赝标介子手征有效拉氏量正常项和反常项的基本标准：正常项具有正的内禀宇称，反常项具有负的内禀宇称。按照我们的数幂规则可以看到 WZ 作用量是 p^4 阶的，你会发现在 p^4 阶除了 WZ 作用量外无法再写出其他的手征变换不变的内禀宇称为负的项。由此，早年人们相信 WZ 作用量已经包含了所有的赝标介子手征有效拉氏量的反常项，但后来发现到更高阶，如 p^6 阶，确实可以写下手征变换不变内禀宇称为负的项，也就是说式 (3.154) 等号右边的第一项的低能展开最低阶是 p^6 阶项。

到目前为止我们已经把赝标介子手征有效拉氏量写到 p^4 阶，本节剩下的部分将对应用这个有效拉氏量进行的计算做一基本介绍。由于手征有效拉氏量是通过式 (3.109) 的泛函积分引入的，因此就要涉及如何计算相应的泛函积分。在量子场论中有一种圈图展开的标准的计算泛函积分的方法[5]，它告诉我们生成泛函在最低阶的树图近似下不需要对场变量进行积分，只要将其用满足经典场方程的场替代即可，超出树图的是从一圈图开始的按照确定规则所给出的各阶圈图修正，而可以证明对这种圈数的衡量实际就是 $\hbar$，也就是圈图展开实际就是按照量子效应的大小进行展开。以下我们先讨论树图再讨论圈图。在树图下我们只考虑最低阶的 p^2 项 (这时只有正常项，反常项没有贡献)，后面将会讨论这样做的合理性。从式 (3.109) 出发：

$$Z[J,\bar{\theta}] = -\mathrm{i}\ln\int \mathscr{D}U \mathrm{e}^{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x L_{\mathrm{eff}}[U,J,\bar{\theta}]} = \int \mathrm{d}^4x \mathscr{L}_2[U_c,J,\bar{\theta}] + O(p^4) \tag{3.155}$$

其中，U_c 是 U 的经典场，它满足经典场方程：

$$\frac{\delta}{\delta U_c(y)}\int \mathrm{d}^4x\left\{\mathscr{L}_2[U_c,J,\bar{\theta}]+\mathrm{i}B_0F_0^2\lambda\ln\det{}_f U_c\right\}=0 \tag{3.156}$$

其中，λ 是为保证 U 场的行列式满足的约束条件式 (3.101) 而引入的拉氏乘子。利用 p^2 阶手征拉氏量的表达式 (3.124), 稍做运算，我们就可以得到

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{L}_2&=\delta\left\{\frac{F_0^2}{4}\mathrm{tr}_f[\nabla_\mu U(\nabla^\mu U)^\dagger]+\frac{F_0^2}{4}\mathrm{tr}_f(\chi U^\dagger+U\chi^\dagger)+\frac{H_0}{12}\mathrm{tr}_f(\nabla_\mu\bar{\theta}\nabla^\mu\bar{\theta})\right\}\\&=\frac{F_0^2}{4}\mathrm{tr}_f\left\{U^\dagger(\nabla^\mu\nabla_\mu U)U^\dagger-(\nabla^\mu\nabla_\mu U^\dagger)+\chi^\dagger-U^\dagger\chi U^\dagger\right\}\delta U\\&=-\mathrm{i}F_0^2\mathrm{tr}_f\left\{\Omega^\dagger[d_\mu a_\Omega^\mu+B_0p_\Omega]\Omega^\dagger\delta U\right\}\end{aligned} \tag{3.157}$$

其中，

$$d^\mu a_\Omega^\nu\equiv\partial^\mu a_\Omega^\nu-\mathrm{i}[v_\Omega^\mu,a_\Omega^\nu] \tag{3.158}$$

利用上面的结果我们得到 p^2 阶 U 场所满足的场方程为

$$d_\mu a_\Omega^\mu+B_0\left[p_\Omega-\frac{1}{3}\mathrm{tr}_f p_\Omega\right]=0,\quad \lambda=\frac{1}{3}\mathrm{tr}_f p_\Omega \tag{3.159}$$

或者不用转动后的外源而直接用 U 和 Ω 场写：

$$\begin{aligned}&\Omega_c^\dagger(\nabla^\mu\nabla_\mu U_c)\Omega_c^\dagger-\Omega_c(\nabla^\mu\nabla_\mu U_c^\dagger)\Omega_c+\Omega_c\chi^\dagger\Omega_c-\Omega_c^\dagger\chi\Omega_c^\dagger\\&-\frac{1}{3}\mathrm{tr}_f(\Omega_c\chi^\dagger\Omega_c-\Omega_c^\dagger\chi\Omega_c^\dagger)=0\end{aligned} \tag{3.160}$$

对上述方程，我们可以验证当取真空 $v_\mu=a_\mu=p=0$，$s=m=\mathrm{diag}(m_u,m_d,m_s)$ 时，$U=\Omega=1$，这正是我们以前设计的结果，它告诉我们在真空上赝标介子场 $\phi=0$。有了生成泛函，我们就可以计算流流格林函数了。首先计算一点格林函数：

$$\frac{\delta Z[J,\bar{\theta}]}{\delta J(y)}=\int \mathrm{d}^4x\frac{\partial\mathscr{L}_2[U_c,J,\bar{\theta}]}{\partial J(y)}+O(p^4) \tag{3.161}$$

由它出发我们可以计算夸克对的凝聚：

$$\begin{aligned}\langle 0|\bar{\psi}(y)\lambda^i\psi(y)|0\rangle_{\text{真空}}&=\left.\frac{\delta Z[J,\bar{\theta}]}{\delta s^i(y)}\right|_{v_\mu=a_\mu=p=0;s=m}=\int \mathrm{d}^4x\left.\frac{\partial\mathscr{L}_2[U_c,J,\bar{\theta}]}{\partial J(y)}\right|_{\text{真空}}+O(p^4)\\&=F_0^2B_0\mathrm{tr}_f(\lambda^i)+O(p^4)\end{aligned} \tag{3.162}$$

我们发现不同味的夸克对的凝聚为零，只有 $i=0$ 有非零的贡献，即式 (3.92) 讨论过的夸克对凝聚，现在可以用手征有效拉氏量中的参数 $F_0^2B_0$ 表达：

$$\langle 0|\bar{\psi}\psi|0\rangle_{\text{真空}}=3F_0^2B_0 \tag{3.163}$$

下面讨论赝标夸克密度的两点格林函数：

$$\begin{aligned}
&\langle 0|T\bar{\psi}(y)\lambda^i\gamma^5\psi(y)\bar{\psi}(y')\lambda^j\gamma^5\psi(y')|0\rangle_{\text{真空}} = -\mathrm{i}\left.\frac{\delta^2 Z[J,\bar{\theta}]}{\delta p^i(y)\delta p^j(y')}\right|_{v_\mu=a_\mu=p=0;s=m}\\
&=-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\ \frac{\delta}{\delta p^j(y')}\left.\frac{\partial \mathscr{L}_2[U_c,J,\bar{\theta}]}{\partial p^i(y)}\right|_{\text{真空}} + O(p^4)\\
&=\frac{1}{2}F_0^2B_0\mathrm{tr}_f\left\{\lambda^i\left[\frac{\delta U_c^\dagger(y)}{\delta p^j(y')}-\frac{\delta U_c(y)}{\delta p^j(y')}\right]\right\}_{\text{真空}} + O(p^4)\\
&=F_0^2B_0\mathrm{tr}_f\left\{\lambda^i\frac{\delta U_c^\dagger(y)}{\delta p^j(y')}\right\}_{\text{真空}} + O(p^4)
\end{aligned} \tag{3.164}$$

其中我们用了 $U_c^\dagger U_c=1$，$[\delta U_c^\dagger]U_c+U_c^\dagger\delta U_c=0$。为了能把式 (3.164) 的计算进行到底，我们从场方程 (3.160) 出发，将其中的场和赝标外源做无穷小变化，然后取真空得到：

$$\begin{aligned}
&\partial^2\delta U_c-\partial^2U_c^\dagger+2B_0[\{\delta\Omega_c,m\}-\{\delta\Omega_c^\dagger,m\}-2\mathrm{i}\delta p]\\
&-\frac{2}{3}B_0\mathrm{tr}_f[\{\delta\Omega_c,m\}-\{\delta\Omega_c^\dagger,m\}-2\mathrm{i}\delta p]=0
\end{aligned} \tag{3.165}$$

它可以化简为

$$\partial^2\delta U_c+B_0[\{\delta U_c,m\}-2\mathrm{i}\delta p]-\frac{1}{3}B_0\mathrm{tr}_f[\{\delta U_c,m\}-2\mathrm{i}\delta p]=0 \tag{3.166}$$

为了处理这个方程，我们把不包括单位矩阵的无迹的 8 个盖尔曼矩阵重新组合成新的 8 个矩阵 λ_P，满足正交关系：

$$\mathrm{tr}_f(\lambda_P\lambda_{P'}^\dagger)=2\delta_{PP'} \tag{3.167}$$

及如下本征关系

$$B_0\{m,\lambda_P\}-\frac{2}{3}B_0\mathrm{tr}_f(m\lambda_P)=\widetilde{M}_P^2\lambda_P \tag{3.168}$$

具体求解并用盖尔曼矩阵明显写出这些矩阵为

$$\lambda_{\pi^+}=-\sqrt{\frac{1}{2}}(\lambda^1+\mathrm{i}\lambda^2),\quad \lambda_{\pi^-}=\sqrt{\frac{1}{2}}(\lambda^1-\mathrm{i}\lambda^2) \tag{3.169}$$

$$\lambda_{K^+}=-\sqrt{\frac{1}{2}}(\lambda^4+\mathrm{i}\lambda^5),\quad \lambda_{K^-}=\sqrt{\frac{1}{2}}(\lambda^4-\mathrm{i}\lambda^5) \tag{3.170}$$

$$\lambda_{K^0}=-\sqrt{\frac{1}{2}}(\lambda^6+\mathrm{i}\lambda^7),\quad \lambda_{\bar{K}^0}=\sqrt{\frac{1}{2}}(\lambda^6-\mathrm{i}\lambda^7) \tag{3.171}$$

$$\lambda_{\pi^0}=\lambda^3\cos\varepsilon+\lambda^8\sin\varepsilon,\quad \lambda_{\eta'}=-\lambda^3\sin\varepsilon+\lambda^8\cos\varepsilon \tag{3.172}$$

其中

$$\tan(2\varepsilon)=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{m_d-m_u}{m_s-\hat{m}},\quad \hat{m}=\frac{1}{2}(m_u+m_d) \tag{3.173}$$

用这个基表达，我们得到赝标介子的最低阶质量为

$$\breve{M}^2_{\pi^\pm}=(m_u+m_d)B_0 \tag{3.174}$$

$$\breve{M}^2_{K^\pm}=(m_u+m_s)B_0 \tag{3.175}$$

$$\breve{M}^2_{K^0}=\breve{M}^2_{\bar{K}^0}=(m_u+m_s)B_0 \tag{3.176}$$

$$\breve{M}^2_{\pi^0}=(m_u+m_d)B_0-\frac{4}{3}(m_s-\hat{m})B_0\frac{\sin^2\varepsilon}{\cos(2\varepsilon)} \tag{3.177}$$

$$\breve{M}^2_{\eta}=\frac{2}{3}(\hat{m}+2m_s)B_0+\frac{4}{3}(m_s-\hat{m})B_0\frac{\sin^2\varepsilon}{\cos(2\varepsilon)} \tag{3.178}$$

这样我们在最低阶的赝标介子手征有效拉氏量理论中用三个夸克质量和一个参数 B_0 给出了八个赝标介子 (实际是 5 个不同的质量数值) 的质量。

将 δU_c 和 δp 按照 λ_P 进行展开：$\delta U_c=\delta U_P\lambda_P$，$\delta p=\delta p_P\lambda_P$，由此我们结合式 (3.166)~(3.168) 得到

$$(\partial^2+\breve{M}^2_P)\delta U_P-2\mathrm{i}B_0\delta p_P=0 \tag{3.179}$$

因此，我们得到

$$\frac{\delta U_P(y)}{\delta p_{P'}(y')}=\frac{2\mathrm{i}B_0\delta_{PP'}}{\partial_y^2+\breve{M}^2_P}\delta^4(y-y') \tag{3.180}$$

把这个式子代回式 (3.164)，得

$$\begin{aligned}&\langle 0|T\bar{\psi}(y)\lambda_P\gamma^5\psi(y)\bar{\psi}(y')\lambda^+_{P'}\gamma^5\psi(y')|0\rangle_{\text{真空}}\\=&F_0^2B_0\mathrm{tr}_f\left\{\lambda_P\frac{\delta U_c^+(y)}{\delta p_{P'}(y')}\right\}_{\text{真空}}+O(p^4)\\=&\frac{4\mathrm{i}F_0^2B_0^2\delta_{PP'}}{\partial_y^2+\breve{M}^2_P}\delta^4(y-y')+O(p^4)\end{aligned} \tag{3.181}$$

如果我们进一步计算这个两点格林函数的动量空间表达式，得

$$\begin{aligned}&\int \mathrm{d}^4y\mathrm{d}^4y'\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot y+\mathrm{i}q'\cdot y'}\langle 0|T\bar{\psi}(y)\lambda_P\gamma^5\psi(y)\bar{\psi}(y')\lambda^+_{P'}\gamma^5\psi(y')|0\rangle_{\text{真空}}\\=&\frac{4\mathrm{i}F_0^2B_0^2\delta_{PP'}}{-q^2+\breve{M}^2_P}(2\pi)^4\delta^4(q+q')+O(q^4)\end{aligned} \tag{3.182}$$

而另一方面按照量子场论的计算，通过在格林函数的真空期望值中插入中间态的完备集，我们可以得到赝标介子极点对此格林函数动量空间表达式的贡献应为

$$\mathrm{i}\frac{\langle 0|\bar{\psi}(0)\lambda_P\gamma^5\psi(0)|\phi_P(\boldsymbol{p})\rangle\langle\phi_P(\boldsymbol{p})|\bar{\psi}(0)\lambda_P^+\gamma^5\psi(0)|0\rangle}{-q^2+\breve{M}_P^2}(2\pi)^4\delta^4(q+q')$$

其中，$|\phi_P(\boldsymbol{p})\rangle$ 是前面讨论过的赝标介子态 $|\phi^i(\boldsymbol{p})\rangle$，只是原来的 i 是盖尔曼矩阵的指标，现在的 P 是按照前面说的重新组合的指标，组合关系由式 (3.169)~(3.172) 决定。将上式与式 (3.182) 对比四动量平方的极点的留数，我们得到赝标轻夸克密度在真空与介子态之间的矩阵元为

$$\langle 0|\bar{\psi}(0)\lambda_P\gamma^5\psi(0)|\phi_P(\boldsymbol{p})\rangle=\langle\phi_P(\boldsymbol{p})|\bar{\psi}(0)\lambda_P^+\gamma^5\psi(0)|0\rangle=2F_0B_0 \tag{3.183}$$

我们可以进一步计算其他各种两点流流格林函数，还有三点、四点等高点格林函数，这些读者如果有兴趣可参看文献 [6]。

讨论完树图后，作为本节最后的内容，我们对圈图进行讨论。首先作为有效理论有人认为圈图计算是不必要的，应该只考虑树图对应的经典场论就行。到底在有效场论中该不该计算圈图，有如下讨论：首先场理论的 S 矩阵的解析性和幺正性等一系列基本性质要求圈图的存在，没有圈图的经典场论是无法完全满足这些性质的；其次我们所描写的是物理的粒子，按照以往的经验物理粒子都应具有量子效应，因而需要圈图；再次，S 矩阵的虚部通常采用树图的经典理论是算不出来的，需要通过圈图中的虚粒子对产生才能得到；最后，S 矩阵的非局域、非解析项，如对能量或质量的对数依赖项采用树图是计算不出来的，只有通过圈图计算才能得到。综合起来就是即使在有效理论的层次，圈图计算还是必要的。

对赝标介子的手征有效理论来说，由于在理论的最低阶 (也就是手征极限) 赝标介子是无质量的 Goldstone 粒子，因而用于圈图计算的 U 场的传播子是无质量的标量场传播子；而我们对理论所采用的是低能展开，也就是圈图计算中的相互作用顶角都是带动量幂次的，即包含微商或外源。如果我们研究一个有 L 个圈的费曼图，如果这个图有 E 条赝标介子外线，I 条赝标介子内线，n_i 个动量幂次为 $2n$ (包括所含的微商和外源所产生的动量幂次) 类型的顶角。这个费曼图对动量 (包括所有内外线动量及外源) 的总依赖幂次为 ω，则

$$\omega=4L-2I+\sum_i 2nn_i,\quad L=I+1-\sum_i n_i \tag{3.184}$$

其中，第一个式子是直接数图中所有部分 (包括圈积分、传播子和顶角) 对动量幂次的贡献；第二个式子是标准的图内圈和内线与顶角的关系。用第二个式子消去第

一个式子中的内线数目，我们得到

$$\omega = 2L + 2 + 2\sum_i (n-1)n_i \tag{3.185}$$

上面这个公式是赝标介子手征有效拉氏量圈图理论中最重要的公式。它告诉我们，如果我们只希望研究最低阶的 p^2 阶项 (也就是 $\omega = 2$)，从式 (3.185) 我们得到 $0 = L + \sum_i (n-1)n_i$，从中只能解出 $L = 0$，$n = 1$，也就是说这时只能在计算中考虑 p^2 阶项，并只计算到树图，因为任何圈图计算都会贡献超出 p^2 阶更高的动量幂次。这是为什么我们在前面讨论树图时可以只计算 p^2 阶的基本理论依据。在此基础上如果考虑次低阶的 p^4 阶 (也就是 $\omega = 4$) 项，从式 (3.185) 我们得到 $1 = L + \sum_i (n-1)n_i$，从中我们能解出两组解：一个是 $L = 0$，有一个 p^4 阶的顶角，剩下都是 p^2 阶的顶角；另一个是 $L = 1$，所有都是 p^2 阶的顶角。因此到次低阶的 p^4 阶，我们有两种在原来 p^2 阶顶角的树图上的 "修正"：一种是多考虑一个 p^4 阶的顶角；另一种是算一个一圈图。类似地，到次次低阶的 p^6 阶，我们将有三类在原来 p^2 阶顶角的树图上的 "修正"：一类是多考虑一个 p^6 阶的顶角或两个 p^4 阶顶角；另一类是算一个一圈图再加考虑一个 p^4 阶顶角；第三类是算一个两圈图 ……，以此类推。我们发现多加一个圈和多考虑一个高一个 p^2 幂次的顶角的效果是等价的。当我们限制低能展开到 p^2 的某个幂次精度时，相应的计算也就限制到某个有限的圈图幂次和图中所需考虑的顶角的动量的某个有限幂次。有限的理论精度要求只需要有限的计算就可完成，无限多的高阶圈图和高动量顶角不会对有限动量幂次结果产生贡献，这是赝标介子有效拉氏量理论特有而所有其他强子有效理论目前都不具有的最突出完美的特点。正是因为这个特点使得我们可以比较完美地推广传统量子场论中的重整化方法到有效场论：在树图级别，我们只需计算 p^2 的相互作用，这时没有发散，因而式 (3.124) 中 p^2 阶拉氏量的三个参数 F_0、B_0、H_0 是不需要重整化的；到一圈图开始有发散，但这时有了一次 p^4 阶相互作用的贡献，我们可以利用 p^4 阶相互作用项前的系数来吸收一圈图所产生的发散；到两圈图开始有更多的发散，还包括原来用于抵消一圈图发散导致 p^4 阶相互作用项前的系数所含的发散，但这时有了一次 p^6 阶相互作用的贡献，我们又可以利用 p^6 阶相互作用项前的系数来吸收两圈图和 p^4 阶相互作用项前的系数所产生的发散，……，可以依次类推到所有阶使理论变成一个可重整的有效理论。有人会质疑我们的 p^4、p^6、$\cdots$ 阶相互作用项前的系数是否足以抵消发散？这由对称性的考虑是毋庸置疑的，因为我们写下的是对称性所要求的所有可能的 p^4、p^6、$\cdots$ 阶相互作用项，而发散本身如果正规化的好不破缺这些对称性的话也是遵循这些对称性的限制的，完全可以对应上相应的相互作用项因而足以被抵消。在本节中我们只把一圈图计算导致的 p^4 阶相互作用项前的系数所需要包含的发散部分罗列如

下，具体计算见文献 [6]，

$$L_i = L_i^r + \Gamma_i \lambda, \quad i = 1, 2, \cdots, 10; \quad H_j = H_j^r + \Delta_j \lambda, \quad j = 1, 2;$$

$$\lambda = \lim_{d \to 4} \frac{\mu^{d-4}}{(4\pi)^2} \left[\frac{1}{d-4} - \frac{1}{2} [\ln(4\pi) + \gamma + 1] \right] \tag{3.186}$$

其中，L_i^r、H_j^r 是和发散无关的系数中的重整化部分，μ 是维数正规化所引入的任意质量量纲尺度，γ 是欧拉常数，系数中发散常数 λ 前的系数由下表列出。

Γ_1	Γ_2	Γ_3	Γ_4	Γ_5	Γ_6	Γ_7	Γ_8	Γ_9	Γ_{10}	Δ_1	Δ_2
$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{16}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{11}{144}$	0	$\frac{5}{48}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{5}{24}$

利用这些系数与发散的关系，人们可以进一步讨论重整化的系数 L_i^r、H_j^r 对尺度依赖的跑动行为。

3.3　赝标介子手征有效拉氏量与 QCD 的关系

3.2 节已经对赝标介子手征有效拉氏量的基本理论体系进行了介绍，但留下了一个如何从 QCD 推导出这个有效拉氏量的问题，将在这一节进行专门的讨论 (见公式 (3.109) 后面的讨论)。由于在文献中的有效拉氏量都是通过对称性的限制写下来的，从 QCD 推导出它们先不说难度有多大，有人就直接质疑是否有这样做的必要。理由是即使推导出来了，有效拉氏量的形式也不会和通过对称性限制写下来的有什么差别。为此我们先罗列几条进行这种推导的重要性和必要性：首先这个推导可以给出有效拉氏量中所有参数的 QCD 的定义，因为既然能够推导出来，势必最后的表达式是用 QCD 的生成泛函经过复杂的变形表达的，因此有效拉氏量中的系数也就用 QCD 变形了的生成泛函表达出来了，本节后面就会推导出这些定义。这就有了利用 QCD 第一原理计算这些系数的基础，下一步就是利用这些定义要发展出有效的计算方法。一旦完成这样的计算，我们就真正实现了从 QCD 的第一原理计算赝标介子手征有效拉氏量中的所有参数，这类似于凝聚态物理中的第一原理计算，它可以解决传统的有效拉氏量理论中参数任意，特别到高阶参数过多导致失去理论预言性的根本问题。在传统的有效拉氏量中各个独立项前的参数的数值是完全任意的，需要通过与实验的比较确定下来。但随着所考虑的展开阶次的升高，参数的数目急剧上升，实验数据远不足够确定这些参数，导致理论中有很多任意参数无法对实验结果进行预测。这时人们就需要寻找除实验数据之外的方法对这些无法由实验确定的参数的数值进行估算，目前人们采用各种各样的唯象模型来估算这些参数，显然这些都不如从基本的 QCD 第一原理进行计算可靠。即使对那些

可以用实验来确定的低阶项前的参数，把实验确定的数值与 QCD 第一原理计算给出的数值进行比对也将直接形成对 QCD 的检验。其次从 QCD 推导出来的手征有效拉氏量一般是赝标介子场和外源的紧致表达式，它相当于对按照低能展开逐阶写下的有效拉氏量做了无穷系列求和，这避免了原来低能展开收敛域的限制，使得理论的适用范围将不再受限于低能区域，可以讨论超出低能区的赝标介子物理。再次，第一原理的推导一般不太依赖原始 QCD 的对称性，它可以揭示一些独立于对称性的 QCD 动力学特性，有利于我们更好地了解 QCD 的动力学结构。最后，这本书聚焦的是 QCD 的专题，介绍任何强相互作用的现象如果离开了 QCD 也就偏离了本书的主题，第一原理推导正是把基本的 QCD 与唯象上各种手征有效拉氏量紧密联系起来的根本方法，不介绍它就使有效理论与 QCD 相对比较脱节 (除对称性外)，因而对本书的主题有所偏离。鉴于这些特点，我们有必要对如何从 QCD 第一原理推导出赝标介子手征有效拉氏量进行讨论。注意鉴于 QCD 在低能区的非微扰计算困难，很多文献中采用的做法是在做一定的近似以后再完成推导，这样 "推导" 的缺陷在于无法确定被丢掉的部分是否会破坏已实现的推导。从这个意义上来说，那些不是从 QCD 第一原理而是从唯象模型出发的对赝标介子手征有效拉氏量的推导，即使不做任何近似也具有同样的缺陷，因为唯象模型本身就是 QCD 的近似描述。

在上面定性讨论的基础上我们开始介绍从 QCD 第一原理不做任何近似到赝标介子手征有效拉氏量的推导。我们采用路径积分的做法，出发点是式 (3.52) 在 QCD 中定义的流流格林函数的生成泛函，目标是把它变成式 (3.109) 用赝标介子手征有效拉氏量定义的生成泛函。对比式 (3.52) 和 (3.109)，我们看到从出发点到终点我们要做的就是积掉式 (3.52) 中的胶子场和夸克场，积进赝标介子 U 场形成式 (3.109)。具体的推导过程有如下五步：① 形式积掉胶子和重夸克场；② 积进双局域介子场和其共轭场并积掉轻夸克场；③ 积进局域赝标介子 U 场；④ 利用手征转动将赝标介子场吸进外源；⑤ 积掉双局域介子场和其共轭场及赝标介子约束的共轭场。其中在实际的推导过程中，中间步骤②和⑤涉及 QCD 类型的矢量型规范理论特有的结构，需要引入一些辅助的场变量，并在最后再把它们积掉。以下一一进行介绍：

① 形式积掉胶子和重夸克场。

式 (3.52) 中涉及胶子场和重夸克场的泛函积分的部分可以写为

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}Z'[I_a^\mu,\bar{\theta}]}=\int\mathscr{D}A_\mu^a\mathscr{D}\bar{\Psi}\mathscr{D}\Psi\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x[gA_\mu^aI_a^\mu+L']} \tag{3.187}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}Z[J,\bar{\theta}]}=\int\mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\psi\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x[\bar{\psi}(\mathrm{i}\partial\!\!\!/+J)\psi]}\mathrm{e}^{\mathrm{i}Z'[\bar{\psi}\gamma^\mu T^a\psi,\bar{\theta}]} \tag{3.188}$$

其中，L' 是式 (3.2) 中的 L_0 扣除轻夸克场剩下的部分

$$L' \equiv \bar{\Psi}(x)(\mathrm{i}\not{D} - M)\Psi(x) - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) + \frac{g^2\bar{\theta}}{32\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\mu'\nu'}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu'\nu'}) \tag{3.189}$$

注意到式 (3.187) 作为含重夸克贡献的胶子场的连接图生成泛函，对外源 I_a^μ 作泰勒展开的系数函数就是标准的胶子连接格林函数，

$$Z'[I_a^\mu, \bar{\theta}] = \sum_{n=2}^{\infty}\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_n \frac{(-\mathrm{i})^n g^n}{n!} G^{i_1\cdots i_n}_{\mu_1\cdots\mu_n}(x_1,\cdots,x_n) I^{\mu_1}_{i_1}(x_1)\cdots I^{\mu_n}_{i_n}(x_n) \tag{3.190}$$

其中，$G^{i_1\cdots i_n}_{\mu_1\cdots\mu_n}(x_1,\cdots,x_n)$ 是具有 n 个外腿的包含重夸克 (但不包含轻夸克) 作为内线的胶子连接格林函数。注意在式 (3.188) 中胶子外源是由夸克流组成的，$I_i^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\dfrac{\lambda^i}{2}\psi(x)$，因此实际在式 (3.188) 中出现的是

$$\begin{aligned}
&G^{i_1\cdots i_n}_{\mu_1\cdots\mu_n}(x_1,\cdots,x_n)\left[\bar{\psi}^{a_1}_{\alpha_1}(x_1)\left(\frac{\lambda^{i_1}}{2}\right)_{\alpha_1\beta_1}\gamma^{\mu_1}\psi^{a_1}_{\beta_1}(x_1)\right]\\
&\cdots\left[\bar{\psi}^{a_n}_{\alpha_n}(x_n)\left(\frac{\lambda^{i_n}}{2}\right)_{\alpha_n\beta_n}\gamma^{\mu_n}\psi^{a_n}_{\beta_n}(x_n)\right]\\
&=\int \mathrm{d}^4x_1'\cdots\mathrm{d}^4x_n' g^{n-2}\bar{G}^{\sigma_1\cdots\sigma_n}_{\rho_1\cdots\rho_n}(x_1,x_1',\cdots,x_n,x_n')\bar{\psi}^{\sigma_1}_{\alpha_1}(x_1)\psi^{\rho_1}_{\alpha_1}(x_1')\cdots\bar{\psi}^{\sigma_n}_{\alpha_n}(x_n)\psi^{\rho_n}_{\alpha_n}(x_n')
\end{aligned} \tag{3.191}$$

其中，$a_1\cdots a_n$ 是轻夸克场的味道指标；α 和 β 是轻夸克场的颜色指标。在上式等号左边轻夸克场的旋量指标没有明显标出来。等号右边的 σ 和 ρ 是旋量和味道指标的集合。在上式的等号右边中我们利用 γ 矩阵和盖尔曼矩阵之间的关系把等号左边的颜色矩阵对角化了 (体现在等号右边的颜色角标是直接求和的)，代价是味道指标原来是对角的，现在变得不再对角了，而且多加了一倍的时空坐标使得夸克和反夸克场不再像原来那样位于同一时空点而是两个不同的时空点，这是为后面进一步的处理做准备。$\bar{G}^{\sigma_1\cdots\sigma_n}_{\rho_1\cdots\rho_n}(x_1,x_1',\cdots,x_n,x_n')$ 是用 $G^{i_1\cdots i_n}_{\mu_1\cdots\mu_n}(x_1,\cdots,x_n)$ 构建的一个推广的不再含颜色指标的胶子格林函数，式 (3.191) 可以看成是其定义式。我们不去证明一般的式 (3.191)，而只是通过给出几个低阶的计算来显示其确实是成立的。

我们先计算最低阶的 $n=2$ 的情形。利用

$$G^{i_1i_2}_{\mu_1\mu_2}(x_1,x_2) = \delta^{i_1i_2}G_{\mu_1\mu_2}(x_1,x_2) \tag{3.192}$$

及

$$\lambda^{i_1}_{\alpha_1\beta_1}\lambda^{i_1}_{\alpha_2\beta_2} = 2\delta_{\alpha_1\beta_2}\delta_{\alpha_2\beta_1} - \frac{2}{N_c}\delta_{\alpha_1\beta_1}\delta_{\alpha_2\beta_2} \tag{3.193}$$

得到

$$
\begin{aligned}
&G^{i_1i_2}_{\mu_1\mu_2}(x_1,x_2)\left[\bar\psi^{a_1}_{\alpha_1}(x_1)\left(\frac{\lambda^{i_1}}{2}\right)_{\alpha_1\beta_1}\gamma^{\mu_1}\psi^{a_1}_{\beta_1}(x_1)\right]\left[\bar\psi^{a_2}_{\alpha_2}(x_2)\left(\frac{\lambda^{i_2}}{2}\right)_{\alpha_2\beta_2}\gamma^{\mu_2}\psi^{a_2}_{\beta_2}(x_2)\right]\\
=&\frac{1}{2}G_{\mu_1\mu_2}(x_1,x_2)\left[\bar\psi^{a_1}_{\alpha_1}(x_1)\gamma^{\mu_1}\psi^{a_1}_{\beta_1}(x_1)\right]\left[\bar\psi^{a_2}_{\alpha_2}(x_2)\gamma^{\mu_2}\psi^{a_2}_{\beta_2}(x_2)\right]\\
&\cdot\left(\delta_{\alpha_1\beta_2}\delta_{\alpha_2\beta_1}-\frac{1}{N_c}\delta_{\alpha_1\beta_1}\delta_{\alpha_2\beta_2}\right)\\
=&\int \mathrm{d}^4x_1'\mathrm{d}^4x_2'G_{\mu_1\mu_2}(x_1,x_2)\Big[-\frac{1}{2}\gamma^{\mu_1}_{\sigma_1\rho_2}\gamma^{\mu_2}_{\sigma_2\rho_1}\delta(x_1'-x_2)\delta(x_2'-x_1)\\
&-\frac{1}{2N_c}\gamma^{\mu_1}_{\sigma_1\rho_1}\gamma^{\mu_2}_{\sigma_2\rho_2}\delta(x_1'-x_1)\delta(x_2'-x_2)\Big]\times\bar\psi^{\sigma_1}_{\alpha_1}(x_1)\psi^{\rho_1}_{\alpha_1}(x_1')\bar\psi^{\sigma_2}_{\alpha_2}(x_2)\psi^{\rho_2}_{\alpha_2}(x_2')
\end{aligned}
\tag{3.194}
$$

对比式 (3.191) 我们得到

$$
\begin{aligned}
\bar G^{\sigma_1\sigma_2}_{\rho_1\rho_2}(x_1,x_1',x_2,x_2')=&-\frac{1}{2}G_{\mu_1\mu_2}(x_1,x_2)\Big[\gamma^{\mu_1}_{\sigma_1\rho_2}\gamma^{\mu_2}_{\sigma_2\rho_1}\delta(x_1'-x_2)\delta(x_2'-x_1)\\
&+\frac{1}{N_c}\gamma^{\mu_1}_{\sigma_1\rho_1}\gamma^{\mu_2}_{\sigma_2\rho_2}\delta(x_1'-x_1)\delta(x_2'-x_2)\Big]
\end{aligned}
\tag{3.195}
$$

对次低阶 $n=3$ 的情形，首先将三点胶子格林函数做如下分解：

$$
G^{i_1i_2i_3}_{\mu_1\mu_2\mu_3}(x_1,x_2,x_3)=gf^{i_1i_2i_3}G^{(0)}_{\mu_1\mu_2\mu_3}(x_1,x_2,x_3)+gd^{i_1i_2i_3}G^{(1)}_{\mu_1\mu_2\mu_3}(x_1,x_2,x_3)
\tag{3.196}
$$

其中

$$
f^{i_1i_2i_3}=-2\mathrm{itr}\left(\left[\frac{\lambda^{i_1}}{2},\frac{\lambda^{i_2}}{2}\right]\frac{\lambda^{i_3}}{2}\right)=\frac{\mathrm{i}}{4}\lambda^{i_2}_{\alpha\beta}\lambda^{i_1}_{\beta\gamma}\lambda^{i_3}_{\gamma\alpha}-\frac{\mathrm{i}}{4}\lambda^{i_1}_{\alpha\beta}\lambda^{i_2}_{\beta\gamma}\lambda^{i_3}_{\gamma\alpha}
\tag{3.197}
$$

$$
d^{i_1i_2i_3}=2\mathrm{tr}\left(\left\{\frac{\lambda^{i_1}}{2},\frac{\lambda^{i_2}}{2}\right\}\frac{\lambda^{i_3}}{2}\right)=\frac{1}{4}\lambda^{i_2}_{\alpha\beta}\lambda^{i_1}_{\beta\gamma}\lambda^{i_3}_{\gamma\alpha}+\frac{1}{4}\lambda^{i_1}_{\alpha\beta}\lambda^{i_2}_{\beta\gamma}\lambda^{i_3}_{\gamma\alpha}
\tag{3.198}
$$

结合式 (3.193)，我们得到

$$
f^{i_1i_2i_3}\lambda^{i_1}_{\alpha_1\beta_1}\lambda^{i_2}_{\alpha_2\beta_2}\lambda^{i_3}_{\alpha_3\beta_3}=2\mathrm{i}(\delta_{\alpha_3\beta_2}\delta_{\alpha_2\beta_1}\delta_{\alpha_1\beta_3}-\delta_{\alpha_3\beta_1}\delta_{\alpha_1\beta_2}\delta_{\alpha_2\beta_3})
\tag{3.199}
$$

$$
\begin{aligned}
&d^{i_1i_2i_3}\lambda^{i_1}_{\alpha_1\beta_1}\lambda^{i_2}_{\alpha_2\beta_2}\lambda^{i_3}_{\alpha_3\beta_3}\\
=&2\Big(\delta_{\alpha_3\beta_2}\delta_{\alpha_2\beta_1}\delta_{\alpha_1\beta_3}+\delta_{\alpha_3\beta_1}\delta_{\alpha_1\beta_2}\delta_{\alpha_2\beta_3}-\frac{2}{N_c}\delta_{\alpha_1\beta_1}\delta_{\alpha_2\beta_3}\delta_{\alpha_3\beta_2}\\
&-\frac{2}{N_c}\delta_{\alpha_1\beta_3}\delta_{\alpha_2\beta_2}\delta_{\alpha_3\beta_1}-\frac{2}{N_c}\delta_{\alpha_1\beta_2}\delta_{\alpha_2\beta_1}\delta_{\alpha_3\beta_3}+\frac{4}{N_c^2}\delta_{\alpha_1\beta_1}\delta_{\alpha_2\beta_2}\delta_{\alpha_3\beta_3}\Big)
\end{aligned}
\tag{3.200}
$$

把式 (3.196)、(3.199) 和 (3.200) 联合应用到式 (3.191) 左边的 $n=3$ 情形，我们可以得到

$$\begin{aligned}
&\bar{G}^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}_{\rho_1\rho_2\rho_3}(x_1,x_1',x_2,x_2',x_3,x_3')\\
=&\frac{\mathrm{i}}{4}G^{(0)}_{\mu_1\mu_2\mu_3}(x_1,x_2,x_3)[\gamma^{\mu_1}_{\sigma_1\rho_2}\gamma^{\mu_2}_{\sigma_2\rho_3}\gamma^{\mu_3}_{\sigma_3\rho_1}\delta(x_1'-x_3)\delta(x_2'-x_1)\delta(x_3'-x_2)\\
&-\gamma^{\mu_1}_{\sigma_1\rho_3}\gamma^{\mu_2}_{\sigma_2\rho_1}\gamma^{\mu_3}_{\sigma_3\rho_2}\delta(x_1'-x_2)\delta(x_2'-x_3)\delta(x_3'-x_1)]\\
&+\frac{1}{4}G^{(1)}_{\mu_1\mu_2\mu_3}(x_1,x_2,x_3)[\gamma^{\mu_1}_{\sigma_1\rho_2}\gamma^{\mu_2}_{\sigma_2\rho_3}\gamma^{\mu_3}_{\sigma_3\rho_1}\delta(x_1'-x_3)\delta(x_2'-x_1)\delta(x_3'-x_2)\\
&+\gamma^{\mu_1}_{\sigma_1\rho_3}\gamma^{\mu_2}_{\sigma_2\rho_1}\gamma^{\mu_3}_{\sigma_3\rho_2}\delta(x_1'-x_2)\delta(x_2'-x_3)\delta(x_3'-x_1)\\
&+\frac{2}{N_c}\gamma^{\mu_1}_{\sigma_1\rho_1}\gamma^{\mu_2}_{\sigma_2\rho_3}\gamma^{\mu_3}_{\sigma_3\rho_2}\delta(x_1'-x_1)\delta(x_2'-x_3)\delta(x_3'-x_2)\\
&+\frac{2}{N_c}\gamma^{\mu_1}_{\sigma_1\rho_3}\gamma^{\mu_2}_{\sigma_2\rho_2}\gamma^{\mu_3}_{\sigma_3\rho_1}\delta(x_1'-x_3)\delta(x_2'-x_2)\delta(x_3'-x_1)\\
&+\frac{2}{N_c}\gamma^{\mu_1}_{\sigma_1\rho_2}\gamma^{\mu_2}_{\sigma_2\rho_1}\gamma^{\mu_3}_{\sigma_3\rho_3}\delta(x_1'-x_2)\delta(x_2'-x_1)\delta(x_3'-x_3)\\
&+\frac{4}{N_c^2}\gamma^{\mu_1}_{\sigma_1\rho_1}\gamma^{\mu_2}_{\sigma_2\rho_2}\gamma^{\mu_3}_{\sigma_3\rho_3}\delta(x_1'-x_1)\delta(x_2'-x_2)\delta(x_3'-x_3)]
\end{aligned}\tag{3.201}$$

把式 (3.190) 和 (3.191) 代入式 (3.188) 得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}Z[J,\bar{\theta}]}=&\int\mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\psi\exp\mathrm{i}\Big\{\int\mathrm{d}^4x\bar{\psi}(\mathrm{i}\not{\partial}+J)\psi\\
&+\sum_{n=2}^{\infty}\int\mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_n\mathrm{d}^4x_1'\cdots\mathrm{d}^4x_n'\frac{(-\mathrm{i})^n(g^2)^{n-1}}{n!}\bar{G}^{\sigma_1\cdots\sigma_n}_{\rho_1\cdots\rho_n}(x_1,x_1',\cdots,x_n,x_n')\\
&\times\bar{\psi}^{\sigma_1}_{\alpha_1}(x_1)\psi^{\rho_1}_{\alpha_1}(x_1')\cdots\bar{\psi}^{\sigma_n}_{\alpha_n}(x_n)\psi^{\rho_n}_{\alpha_n}(x')\Big\}
\end{aligned}\tag{3.202}$$

上式即是第 ① 步的最后结果。我们发现利用连接胶子格林函数积掉胶子和重夸克场后，QCD 的生成泛函变成一个含无穷多轻夸克场非局域自相互作用的相互作用理论。在唯象处理上，如果只保留最低阶的 $n=2$ 阶胶子格林函数 (通常称此为 Abel 近似，因为对 Abel 规范理论没有超过 $n=2$ 的格林函数，这是 Abel 规范理论没有规范场自作用的典型标志)，则这些相互作用简化为 4 费米型非局域相互作用。若更进一步地用局域作用替代非局域相互作用我们就得到著名的 NJL 模型[7]。20 世纪 60 年代南部阳一郎用此模型把凝聚态中的对称性自发破缺引入量子场论和粒子物理中，并因此获得了 2008 年的诺贝尔物理学奖。

② 积进双局域介子场和其共轭场并积掉轻夸克场。

显然式 (3.202) 给出的是一个非常复杂的生成泛函，为了简化，我们在式 (3.202) 中插入一个积分:

$$1=\int\mathscr{D}\Phi\delta(N_c\Phi^{\sigma\rho}(x,x')-\bar{\psi}^{\sigma}_{\alpha}(x)\psi^{\rho}_{\alpha}(x'))\tag{3.203}$$

其中的双局域 Φ 场由复合的轻夸克反夸克场对构成，我们称其为有效双局域介子场 (因为介子就是由夸克反夸克对构成的)。注意到这个积分只贡献一个常数 1 不影响生成泛函的数值。把它插进式 (3.202) 后，式 (3.202) 最后一行的轻夸克对场 (也是最为复杂的由胶子和重夸克导致的轻夸克自相互作用项) 都可以改换用 Φ 场来代替，式 (3.202) 化为

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}Z[J,\bar{\theta}]}=&\int\mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\psi\mathscr{D}\Phi\delta(N_c\Phi^{\sigma\rho}(x,x')-\bar{\psi}^{\sigma}_{\alpha}(x)\psi^{\rho}_{\alpha}(x'))\exp\mathrm{i}\Big\{\int\mathrm{d}^4x\bar{\psi}(\mathrm{i}\not{\partial}+J)\psi\\&+N_c\sum_{n=2}^{\infty}\int\mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_n\mathrm{d}^4x'_1\cdots\mathrm{d}^4x'_n\frac{(-\mathrm{i})^n(N_cg^2)^{n-1}}{n!}\\&\times\bar{G}^{\sigma_1\cdots\sigma_n}_{\rho_1\cdots\rho_n}(x_1,x'_1,\cdots,x_n,x'_n)\times\Phi^{\sigma_1\rho_1}(x_1,x'_1)\cdots\Phi^{\sigma_n\rho_n}(x_n,x'_n)\Big\}\end{aligned}\tag{3.204}$$

为了方便处理 δ 函数，引入其傅里叶变换，得

$$\begin{aligned}&\delta(N_c\Phi^{\sigma\rho}(x,x')-\bar{\psi}^{\sigma}_{\alpha}(x)\psi^{\rho}_{\alpha}(x'))\\=&\text{const}\times\int\mathscr{D}\Pi\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4x'\Pi^{\sigma\rho}(x,x')[N_c\Phi^{\sigma\rho}(x,x')-\bar{\psi}^{\sigma}_{\alpha}(x)\psi^{\rho}_{\alpha}(x')]}\end{aligned}$$

这样式 (3.204) 中轻夸克场只在被积函数的指数上以双线性形式出现，因此我们可以完成轻夸克场的路径积分，将生成泛函式 (3.204) 表达为

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}Z[J,\bar{\theta}]}=\int\mathscr{D}\Phi\mathscr{D}\Pi\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Gamma_0[J,\Phi,\Pi]}\tag{3.205}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_0[J,\Phi,\Pi]\equiv&-\mathrm{i}N_c\mathrm{Trln}[\mathrm{i}\not{\partial}+J-\Pi]+N_c\int\mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4x'\Phi^{\sigma\rho}(x,x')\Pi^{\sigma\rho}(x,x')\\&+N_c\sum_{n=2}^{\infty}\int\mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_n\mathrm{d}^4x'_1\\&\cdots\mathrm{d}^4x'_n\frac{(-\mathrm{i})^n(N_cg^2)^{n-1}}{n!}\bar{G}^{\sigma_1\cdots\sigma_n}_{\rho_1\cdots\rho_n}(x_1,x'_1,\cdots,x_n,x'_n)\\&\times\Phi^{\sigma_1\rho_1}(x_1,x'_1)\cdots\Phi^{\sigma_n\rho_n}(x_n,x'_n)\Big\}\end{aligned}\tag{3.206}$$

第 ② 步到此结束。到此为止，我们已经积掉了原始 QCD 中的所有夸克和胶子场，把 QCD 的生成泛函式 (3.52) 变成了一个由双局域有效介子场 $\Phi^{\sigma\rho}(x,x')$ 和其共轭场 $\Pi^{\sigma\rho}(x,x')$ 所构成理论的生成泛函。实际上 QCD 理论的这个形式特别适合讨论由夸克、反夸克组成的复合态的结构，从这个形式很容易导出轻夸克场的 Schwinger-Dyson 和 Bethe-Salpeter 方程 (见后面的讨论)。实际上也正是因为这一点我们才在这个推导中引进了双局域有效介子场和其共轭场，它使得我们在以后

实行具体计算时会得到很多计算的便利。后面我们也会介绍不引入这组双局域有效介子场和其共轭的形式推导手征有效拉氏量的方法，那种方法相比起来更简单但只是形式体系不利于实际的计算。

③ 积进局域赝标介子 U 场。

我们的推导进程走了一半，积掉了所有的夸克和胶子场，要达到最后的目标还要积进赝标介子场。如上一节所讨论过的，我们知道赝标介子场作为 Goldstone 粒子可以用 QCD 手征极限下的对称性群的陪集 $SU_L(3)\times SU_R(3)/SU_V(3)$ 的代表元 $U=\Omega^2$ 来代表。这些代表元本来就是手征对称性群 $SU_L(3)\times SU_R(3)$ 的一部分，因此我们可以利用手征转动把这些代表元 "转入" 理论。这是第 ③④ 两步的核心想法。为此我们先看一下在手征变换式 (3.44) 下，Φ 和 Π 场的变换规则。结合式 (3.44) 和 (3.203), 我们可以从轻夸克场的手征变换推出 Φ 场的变换规则，即

$$\Phi^{\mathrm{T}}(x',x)\to[V_R(x')P_R+V_L(x')P_L]\Phi^{\mathrm{T}}(x',x)[V_R^{\dagger}(x)P_L+V_L^{\dagger}(x)P_R] \tag{3.207}$$

式中，上标 T 代表所有指标包括时空坐标的转置。

$$\Phi^{\mathrm{T},\rho\sigma}(x',x)\equiv\Phi^{\sigma\rho}(x,x') \tag{3.208}$$

而 Π 场的变换规则可以通过要求式 (3.206) 第一行的最后一项在手征转动下保持不变得到

$$\Pi(x,x')\to[V_R(x)P_L+V_L(x)P_R]\Pi(x,x')[V_R^{\dagger}(x')P_R+V_L^{\dagger}(x')P_L] \tag{3.209}$$

现在考虑 Φ 场的两个时空坐标点合二而一的情形，这对应式 (3.30) 和 (3.31) 所给出的夸克密度和流。如果只考虑其密度部分，也就是其 γ 矩阵结构分解的标量与赝标部分，我们要求通过一个特定的手征转动 $V_L(x)=V_R^{\dagger}(x)=\Omega'(x)$(这正是式 (3.105) 给出的陪集代表元的标准形式，只是那里的 Ω 对应现在的 $\Omega'^{\dagger}$) 把 $\Phi^{\mathrm{T}}(x,x)$ 的标量与赝标部分转成纯只有标量的实场部分，并记转后只剩纯标量的 $\Phi^{\mathrm{T}}(x,x)$ 为 $\sigma(x)$，它是厄米的 $\sigma(x)=\sigma^{\dagger}(x)$。那么转以前的 $\Phi^{\mathrm{T}}(x,x)$ 的标量和赝标分量可以表达为

$$\Phi^{\mathrm{T}}(x,x)\Big|_{\text{标量和赝标分量}}=[\Omega'(x)P_R+\Omega'^{\dagger}(x)P_L]\sigma(x)[\Omega'^{\dagger}(x)P_L+\Omega'(x)P_R] \tag{3.210}$$

两边分别乘上单位的 γ 矩阵和 γ_5 在对旋量角标求迹，我们得到

$$\begin{aligned}(1)_{\xi\eta}\Phi^{(b\xi)(a\eta)}(x,x)&=[\Omega'(x)\sigma(x)\Omega'(x)+\Omega'^{\dagger}(x)\sigma(x)\Omega'^{\dagger}(x)]^{ab}\\(\gamma_5)_{\xi\eta}\Phi^{(b\xi)(a\eta)}(x,x)&=[\Omega'(x)\sigma(x)\Omega'(x)-\Omega'^{\dagger}(x)\sigma(x)\Omega'^{\dagger}(x)]^{ab}\end{aligned} \tag{3.211}$$

做到这一步的 $\Omega'(x)$ 并不一定满足行列式为 1 的条件 (为保证 σ 厄米)，也就是可能含 $U_A(1)$ 的成分，我们把这个成分单独分出来。定义：

$$\det\Omega'^2(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta(x)}\Omega(x) \equiv \Omega'(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\vartheta(x)}{2N_f}} \tag{3.212}$$

其中，det 是对味道求行列式；N_f 是轻夸克味道数。由上式我们得到新引进的 $\Omega(x)$ 满足行列式为 1 的条件：

$$\det\Omega^2(x) = 1$$

因而当 $\Omega(x)$ 或者 $U(x) = \Omega^2(x)$ 真正是陪集 $SU_L(3) \times SU_R(3)/SU_V(3)$ 的元素时，可以被拿来描写我们的赝标介子场。我们要做的是把 $\Omega(x)$ 和 $\Phi^{\mathrm{T}}(x,x)$ 的标量和赝标分量的关系明显地给出来，然后再把这个关系作为一个约束加到生成泛函当中去。注意在我们的讨论中 σ 场只是一个中间的过渡变量，它没必要出现在最后的约束方程中来产生不必要的复杂性。实际上这个场对应唯象上的标量介子场，目前我们只讨论赝标介子场，因此并不希望它在最后的理论结果中出现。我们利用式 (3.210) 反解出 σ 场，然后要求这个解出来的 σ 场满足厄米条件，得到

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\vartheta(x)}{N_f}}\Omega^\dagger(x)\mathrm{tr}_l[P_R\Phi^{\mathrm{T}}(x,x)]\Omega^\dagger(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\vartheta(x)}{N_f}}\Omega(x)\mathrm{tr}_l[P_L\Phi^{\mathrm{T}}(x,x)]\Omega(x) \tag{3.213}$$

其中，我们明显地用 $\Omega(x)$ 和 $\Phi^{\mathrm{T}}(x,x)$ 来表达结果，tr_l 代表对旋量角标求迹，公式中出现的 $\vartheta(x)$ 可以通过把上式对味道角标求行列式 (利用 Ω 的行列式为 1) 得到

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\vartheta(x)} = \frac{\det\{\mathrm{tr}_l[P_R\Phi^{\mathrm{T}}(x,x)]\}}{\det\{\mathrm{tr}_l[P_L\Phi^{\mathrm{T}}(x,x)]\}} \tag{3.214}$$

约束条件式 (3.213) 告诉我们 $\Phi^{\mathrm{T}}(x,x)$ 和 $\Omega(x)$ 是什么样的一种约束关系。我们下面要做的是把它设法插入生成泛函中。这个过程和规范场路径积分量子化时的 Faddev-Popov 手续的做法是完全类似的。那里我们需要把规范固定条件设法插入生成泛函，现在只不过把规范固定条件换成了约束条件 (3.213)。这个插入积分的讨论比较复杂且和本章的内容关系不大，我们就不罗列其推导细节，只给出最后结果：对任何一个场 $\mathscr{O}$ 满足 $\det\mathscr{O} = \det\mathscr{O}^\dagger$，可以证明[8] 如下积分是一个常数，

$$\mathscr{F}[\mathscr{O}]\int\mathscr{D}U\delta(U^\dagger U-1)\delta(\det U-1)\delta(\Omega\mathscr{O}^\dagger\Omega-\Omega^\dagger\mathscr{O}\Omega^\dagger) = \mathrm{const} \tag{3.215}$$

其中，$\mathscr{D}U\delta(U^\dagger U-1)\delta(\det U-1)$ 是有效积分测度，确保 U 场的幺正行列式为 1。$\mathscr{F}[\mathscr{O}]$ 是一个补偿项，用于补偿积分造成的对场 $\mathscr{O}$ 的依赖，它可以写成

$$\frac{1}{\mathscr{F}[\mathscr{O}]} = \det\mathscr{O}\int\mathscr{D}\sigma\delta(\mathscr{O}^\dagger\mathscr{O}-\sigma^\dagger\sigma)\delta(\sigma-\sigma^\dagger) \tag{3.216}$$

对约束条件式 (3.213)，只要选

$$\mathscr{O}(x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\vartheta(x)}{N_f}}\,\mathrm{tr}_l[P_R\Phi^{\mathrm{T}}(x,x)] \tag{3.217}$$

而式 (3.215) 中的表达约束条件的 δ 函数可以进一步通过其傅里叶变换来表达：

$$\delta(\Omega\mathscr{O}^\dagger\Omega-\Omega^\dagger\mathscr{O}\Omega^\dagger)=\mathrm{const}\times\int\mathscr{D}\Xi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}N_c\int\mathrm{d}^4x\Xi^{\sigma\rho}(x)[\Omega(x)\mathscr{O}^\dagger(x)\Omega(x)-\Omega^\dagger(x)\mathscr{O}(x)\Omega^\dagger(x)]} \tag{3.218}$$

这样生成泛函式 (3.205) 就可以写成

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}Z[J,\bar{\theta}]}=&\int\mathscr{D}\Phi\mathscr{D}\Pi\mathscr{D}\Xi\mathscr{D}U\delta(U^\dagger U-1)\delta(\det U-1)\exp\left\{\mathrm{i}\Gamma_0[J,\Phi,\Pi]+\mathrm{i}\Gamma_I[\Phi]\right.\\&+\mathrm{i}N_c\int\mathrm{d}^4x\mathrm{tr}_f\left[\Xi(x)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\vartheta(x)}{N_f}}\Omega^\dagger(x)\mathrm{tr}_l[P_R\Phi^{\mathrm{T}}(x,x)]\Omega^\dagger(x)\right.\right.\\&\left.\left.\left.-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\vartheta(x)}{N_f}}\Omega(x)\mathrm{tr}_l[P_L\Phi^{\mathrm{T}}(x,x)]\Omega(x)\right)\right]\right\}\end{aligned} \tag{3.219}$$

其中，tr_f 是对味道角标求迹。$\Gamma_I[\Phi]$ 是加入约束后的补偿项，其定义为

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Gamma_I[\Phi]}\equiv\prod_x\frac{1}{\mathscr{F}[\mathscr{O}(x)]}=&\prod_x\left\{\left[\det\{\mathrm{tr}_l[P_R\Phi^{\mathrm{T}}(x,x)]\}\det\{\mathrm{tr}_l[P_L\Phi^{\mathrm{T}}(x,x)]\}\right]^{\frac{1}{2}}\right.\\&\left.\times\int\mathscr{D}\sigma\delta[(\mathrm{tr}_lP_R\Phi^{\mathrm{T}})(\mathrm{tr}_lP_L\Phi^{\mathrm{T}})-\sigma^\dagger\sigma]\delta(\sigma-\sigma^\dagger)\right\}\end{aligned} \tag{3.220}$$

第 ③ 步到此结束。我们现在已经在生成泛函中积进了赝标介子场，剩下只要积掉双局域有效介子场 $\Phi^{\sigma\rho}(x,x')$ 和其共轭场 $\Pi^{\sigma\rho}(x,x')$ 就将达到最后的目标了。

④ 利用手征转动将赝标介子场吸进外源。

在进一步积掉双局域有效介子场和其共轭场之前，利用引入的赝标介子场是手征转动群的元素的性质，可以通过手征转动对理论的表达形式进行一定的简化。引进如下形式的手征变换 $V_L(x)=V_R^\dagger(x)=\Omega^\dagger(x)$ 并把变换后的量用下标 Ω 标记，则

$$\Phi_\Omega^{\mathrm{T}}(x,y)=[\Omega^\dagger(x)P_R+\Omega(x)P_L]\Phi^{\mathrm{T}}(x,y)[\Omega^\dagger(y)P_R+\Omega(y)P_L] \tag{3.221}$$

$$\Pi_\Omega(x,y)=[\Omega(x)P_R+\Omega^\dagger(x)P_L]\Pi(x,y)[\Omega(y)P_R+\Omega^\dagger(y)P_L] \tag{3.222}$$

而转动后的外源 J_Ω 由式 (3.128) 给出。利用上面的转动后的变量，可以证明

$$\Gamma_0[J,\Phi,\Pi]=\Gamma_0[J_\Omega,\Phi_\Omega,\Pi_\Omega]+\text{反常项} \tag{3.223}$$

$$\Gamma_I[\Phi]=\Gamma_I[\Phi_\Omega],\quad\vartheta(x)=\vartheta_\Omega(x) \tag{3.224}$$

其中，在式 (3.206) 给出的 $\Gamma_0[J,\Phi,\Pi]$ 的表达式中，等式右边第二项和第三项不直接依赖外源 J 且都是手征转动不变的，因而可以直接把其中的 Φ 和 Π 场置换为转动后的。但对等号右边的第一项则不是，它会产生反常。也就是式 (3.223) 中的反常项实际来自

$$-\mathrm{i}N_c\mathrm{Trln}[\mathrm{i}\partial\!\!\!/+J-\Pi]=-\mathrm{i}N_c\mathrm{Trln}[\mathrm{i}\partial\!\!\!/+J_\Omega-\Pi_\Omega]+\text{反常项} \tag{3.225}$$

这是我们给出的一个用转动前后的 J 和 Π 写下的反常项严格紧致的定义。上式中的项 $-\mathrm{i}N_c\mathrm{Trln}[\mathrm{i}\partial\!\!\!/+J-\Pi]$ 实际上可以看成是式 (3.135) 中没有规范作用的自由轻夸克场所贡献的生成泛函 $Z[J,\bar{\theta}]$，由此对应关系利用式 (3.135) 及 (3.140)，我们得到

$$\text{反常项}=-S_{\mathrm{WZ}}[\Omega^2,J] \tag{3.226}$$

它把式 (3.225) 定义的反常项与上节讨论的传统反常联系起来了。由式 (3.223) 和 (3.224) 生成泛函式 (3.219) 就化为

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}Z[J,\bar{\theta}]}=\int\mathscr{D}\Phi_\Omega\mathscr{D}\Pi_\Omega\mathscr{D}\Xi\mathscr{D}U\delta(U^\dagger U-1)\delta(\det U-1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tilde{\Gamma}[J_\Omega,\Phi_\Omega,\Pi_\Omega,\Xi,\Omega]} \tag{3.227}$$

$$\begin{aligned}&\tilde{\Gamma}[J_\Omega,\Phi_\Omega,\Pi_\Omega,\Xi,\Omega]\\&\equiv\Gamma_0[J_\Omega,\Phi_\Omega,\Pi_\Omega]+\Gamma_I[\Phi_\Omega]+\mathrm{i}S_{\mathrm{WZ}}[\Omega^2,J]\\&\quad+N_c\int\mathrm{d}^4x\mathrm{tr}_f\left[\Xi(x)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\vartheta_\Omega(x)}{N_f}}\mathrm{tr}_l[P_R\Phi_\Omega^{\mathrm{T}}(x,x)]-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\vartheta_\Omega(x)}{N_f}}\mathrm{tr}_l[P_L\Phi_\Omega^{\mathrm{T}}(x,x)]\right)\right]\end{aligned} \tag{3.228}$$

其中我们利用了测度不变的性质 $\mathscr{D}\Phi\mathscr{D}\Pi=\mathscr{D}\Phi_\Omega\mathscr{D}\Pi_\Omega$，而 $\tilde{\Gamma}[J_\Omega,\Phi_\Omega,\Pi_\Omega,\Xi,\Omega]$ 中对 Ω 的显式依赖只来自反常项。实际上上式最后一项还可以写成另外一种形式：

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}N_c\int\mathrm{d}^4x\mathrm{tr}_f\left[\Xi(x)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\vartheta_\Omega(x)}{N_f}}\mathrm{tr}_l[P_R\Phi_\Omega^{\mathrm{T}}(x,x)]-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\vartheta_\Omega(x)}{N_f}}\mathrm{tr}_l[P_L\Phi_\Omega^{\mathrm{T}}(x,x)]\right)\right]\\&=\mathrm{i}N_c\int\mathrm{d}^4x\mathrm{tr}_{lf}\left[\Xi(x)\left(-\mathrm{i}\sin\frac{\vartheta_\Omega(x)}{N_f}+\gamma_5\cos\frac{\vartheta_\Omega(x)}{N_f}\right)\Phi_\Omega^{\mathrm{T}}(x,x)\right]\end{aligned} \tag{3.229}$$

第 ④ 步到此结束。在式 (3.227) 给出的用转动以后的双局域有效介子场及其共轭场表达的生成泛函中，被积函数的指数上除了反常项外，赝标介子场 Ω 只通过转动后的外源 J_Ω 隐含的依赖，而没有显式的依赖，这大大简化了对 Ω 依赖的行为的讨论。

⑤ 积掉双局域介子场和其共轭场及赝标介子约束的共轭场。

最后这步就是积掉式 (3.227) 中目前还剩下的转动后的双局域介子场 Φ_Ω 和其共轭场 Π_Ω 及赝标介子约束的共轭场 Ξ。利用前面提到过的圈图展开[5] 方法，生成

泛函式 (3.227) 可以写成

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}Z[J,\bar{\theta}]}=\int\mathscr{D}U\delta(U^{+}U-1)\delta(\det U-1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_{\mathrm{eff}}[J_{\Omega},\Phi_{\Omega c},\Pi_{\Omega c},\Xi_{c},\Omega]} \tag{3.230}$$

其中

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_{\mathrm{eff}}[J_{\Omega},\Phi_{\Omega c},\Pi_{\Omega c},\Xi_{c},\Omega]}=\int\mathscr{D}\Phi_{\Omega}\mathscr{D}\Pi_{\Omega}\mathscr{D}\Xi\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tilde{\Gamma}[J_{\Omega},\Phi_{\Omega},\Pi_{\Omega},\Xi,\Omega]} \tag{3.231}$$

$\Phi_{\Omega c},\Pi_{\Omega c},\Xi_{c}$ 分别是 $\Phi_{\Omega},\Pi_{\Omega},\Xi$ 的经典场，它们满足场方程

$$\begin{aligned}&\frac{\partial S_{\mathrm{eff}}[J_{\Omega},\Phi_{\Omega c},\Pi_{\Omega c},\Xi_{c},\Omega]}{\partial\Phi_{\Omega c}^{\sigma\rho}(x,y)}=\frac{\partial S_{\mathrm{eff}}[J_{\Omega},\Phi_{\Omega c},\Pi_{\Omega c},\Xi_{c},\Omega]}{\partial\Pi_{\Omega c}^{\sigma\rho}(x,y)}=0\\&\frac{\partial S_{\mathrm{eff}}[J_{\Omega},\Phi_{\Omega c},\Pi_{\Omega c},\Xi_{c},\Omega]}{\partial\Xi_{c}^{\sigma\rho}(x)}=0\end{aligned} \tag{3.232}$$

而圈图展开给出了按照 $\tilde{\Gamma}[J_{\Omega},\Phi_{\Omega},\Pi_{\Omega},\Xi,\Omega]$ 逐级计算 $S_{\mathrm{eff}}[J_{\Omega},\Phi_{\Omega c},\Pi_{\Omega c},\Xi_{c},\Omega]$ 的方法。如果按照第 4 章将要介绍的大 Nc 展开，其领头阶的显式结果如下：

$$\begin{aligned}&S_{\mathrm{eff}}[J_{\Omega},\Phi_{\Omega c},\Pi_{\Omega c},\Xi_{c},\Omega]\\=&\Gamma_{0}[J_{\Omega},\Phi_{\Omega c},\Pi_{\Omega c}]+\mathrm{i}S_{\mathrm{WZ}}[\Omega^{2},J]\\&+N_{c}\int\mathrm{d}^{4}x\mathrm{tr}_{f}\left[\Xi_{c}(x)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\vartheta_{\Omega c}(x)}{N_{f}}}\mathrm{tr}_{l}[P_{R}\Phi_{\Omega c}^{\mathrm{T}}(x,x)]-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\vartheta_{\Omega c}(x)}{N_{f}}}\mathrm{tr}_{l}[P_{L}\Phi_{\Omega c}^{\mathrm{T}}(x,x)]\right)\right]\\&+O\left(\frac{1}{N_{c}}\right)\end{aligned} \tag{3.233}$$

其中的 $\vartheta_{\Omega c}$ 由式 (3.214) 决定，只把其中的 ϑ，Φ 分别置换为 $\vartheta_{\Omega\mathrm{c}}$，$\Phi_{\Omega c}$ 即是。把式 (3.233) 代回式 (3.232)，在略去反常项并取大 N_c 极限的情形下我们得到

$$\tilde{\Xi}^{\sigma\rho}(x)\delta(x-y)+\Pi_{\Omega c}^{\sigma\rho}(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\int\mathrm{d}^{4}x_{1}\cdots\mathrm{d}^{4}x_{n}\mathrm{d}^{4}x_{1}'\cdots\mathrm{d}^{4}x_{n}'\frac{(-\mathrm{i})^{n+1}(N_{c}g^{2})^{n}}{n!}$$
$$\times\bar{G}_{\rho\rho_{1}\cdots\rho_{n}}^{\sigma\sigma_{1}\cdots\sigma_{n}}(x,y,x_{1},x_{1}',\cdots,x_{n},x_{n}')\Phi_{\Omega c}^{\sigma_{1}\rho_{1}}(x_{1},x_{1}')\cdots\Phi_{\Omega c}^{\sigma_{n}\rho_{n}}(x_{n},x_{n}')=0 \tag{3.234}$$

$$\Phi_{\Omega c}^{\sigma\rho}(x,y)=-\mathrm{i}[(\mathrm{i}\partial\!\!\!/+J_{\Omega}-\Pi_{\Omega c})^{-1}]^{\rho\sigma}(y,x) \tag{3.235}$$

$$\mathrm{tr}_{l}\left[\left(-\mathrm{i}\sin\frac{\vartheta_{\Omega c}(x)}{N_{f}}+\gamma_{5}\cos\frac{\vartheta_{\Omega c}(x)}{N_{f}}\right)\Phi_{\Omega c}^{\mathrm{T}}(x,x)\right]=0 \tag{3.236}$$

其中，$\tilde{\Xi}^{\sigma\rho}(x)$ 是一个由加入 Ω 场约束导致的拉氏乘子

$$\begin{aligned}\tilde{\Xi}^{\sigma\rho}(x)\equiv&\frac{\partial}{\partial\Phi_{\Omega c}^{\sigma\rho}(x,x)}\\&\times\int\mathrm{d}^{4}y\mathrm{tr}_{lf}\left[\Xi_{c}(y)\left(-\mathrm{i}\sin\frac{\vartheta_{\Omega c}(y)}{N_{f}}+\gamma_{5}\cos\frac{\vartheta_{\Omega c}(y)}{N_{f}}\right)\Phi_{\Omega c}^{\mathrm{T}}(y,y)\right]_{\Xi_{c}\text{固定}}\end{aligned} \tag{3.237}$$

式 (3.234) 和 (3.235) 的结合即是大 N_c 极限下含夸克流外源的轻夸克传播子的 Schwinger-Dyson 方程 (只是多加了要扣除固定赝标介子自由度而导致的约束对应的拉氏乘子 $\Xi^{\sigma\rho}(x)$)，而 $\Phi^{\mathrm{T}}_{\Omega c}(x,y)$ 就是轻夸克的传播子，特别地式 (3.235) 告诉我们 $\Pi_{\Omega c}$ 是轻夸克的自能。现在式 (3.230) 即是我们推导出的生成泛函在赝标介子手征有效拉氏量层次上的最后结果，对比上节的标准表达式 (3.109), 我们得到在那里定义的 $L_{\mathrm{eff}}[U,J,\bar{\theta}]$ 现在为

$$\int \mathrm{d}^4x L_{\mathrm{eff}}[U,J,\bar{\theta}] = S_{\mathrm{eff}}[J_\Omega,\Phi_{\Omega c},\Pi_{\Omega c},\Xi_c,\Omega] \tag{3.238}$$

而式 (3.109) 中的 U 场的积分测度 $\mathscr{D}U$ 现在被细化为 $\mathscr{D}U\delta(U^\dagger U-1)\delta(\mathrm{det}U-1)$，以凸显 U 场所具有的幺正和行列式为 1 的性质。至此我们完成了全部从 QCD 第一原理不作任何近似地推导赝标介子手征有效拉氏量的过程。

如前面讨论过的，如果不是为了像式 (3.233)~(3.237) 那样真刀实枪地计算赝标介子手征有效拉氏量，而是只满足于从 QCD 形式地推出结果式 (3.230)，我们不必要十分辛苦地真的积掉胶子和夸克场，也不必引进双局域的介子场及其共轭场，只须进行目前采取的 5 个步骤中的第 ③ 和 ④ 步即可。具体地，首先从 QCD 定义的生成泛函式 (3.52) 出发直接进行第 ③ 步：积进局域赝标介子 U 场，也就是把约束条件式 (3.215) 结合式 (3.218) 插入式 (3.52) 中，只是式 (3.217) 中的 $\Phi^{\mathrm{T},\rho\sigma}(x',x)$ 需要改为 $\dfrac{1}{N_c}\psi^\rho_\alpha(x')\bar{\psi}^\sigma_\alpha(x)$，则生成泛函式 (3.52) 因此变为

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}Z[J,\bar{\theta}]} =& \int \mathscr{D}A^a_\mu\mathscr{D}\bar{\Psi}\mathscr{D}\Psi\mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\psi\mathscr{D}\Xi\mathscr{D}U\delta(U^\dagger U-1)\delta(\mathrm{det}U-1)\exp\left\{\mathrm{i}\Gamma_I\left[\frac{1}{N_c}\psi\bar{\psi}\right]\right.\\
&+\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x L_J[\psi,\bar{\psi},\Psi,\bar{\Psi},A^a_\mu,\bar{\theta}]\\
&+\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{tr}_f\left[\Xi(x)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\vartheta(x)}{N_f}}\Omega^\dagger(x)\mathrm{tr}_l[P_R\psi(x)\bar{\psi}(x)]\Omega^\dagger(x)\right.\right.\\
&\left.\left.-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\vartheta(x)}{N_f}}\Omega(x)\mathrm{tr}_l[P_L\psi(x)\bar{\psi}(x)]\Omega(x)\right)\right]\Bigg\}\end{aligned} \tag{3.239}$$

其中，$\vartheta(x)$ 由式 (3.214) 决定，同样其中的 $\Phi^{\mathrm{T},\rho\sigma}(x',x)$ 需要改为 $\dfrac{1}{N_c}\psi^\rho_\alpha(x')\bar{\psi}^\sigma_\alpha(x)$。

到此为止我们完成了积进局域赝标介子 U 场的工作。然后进行第 ④ 步：利用手征转动将赝标介子场吸进外源。对轻夸克场作手征变换 $V_L(x)=V_R^\dagger(x)=\Omega^\dagger(x)$ 并把变换后的量用下标 Ω 标记：

$$\psi_\Omega(x)=[\Omega^\dagger(x)P_L+\Omega(x)P_R]\psi(x),\quad \bar{\psi}_\Omega(x)=\bar{\psi}(x)[\Omega^\dagger(x)P_L+\Omega(x)P_R]$$

利用转动以后的轻夸克场，生成泛函式 (3.239) 可以简化为

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}Z[J,\bar{\theta}]}=&\int\mathscr{D}A_\mu^a\mathscr{D}\bar{\Psi}\mathscr{D}\Psi\mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\psi\mathscr{D}\Xi\mathscr{D}U\delta(U^+U-1)\delta(\det U-1)\exp\left\{\mathrm{i}\Gamma_I\left[\frac{1}{N_c}\psi_\Omega\bar{\psi}_\Omega\right]\right.\\&+\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4xL_{J_\Omega}[\psi_\Omega,\bar{\psi}_\Omega,\Psi,\bar{\Psi},A_\mu^a,\bar{\theta}]\\&+\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\mathrm{tr}_f\left[\Xi(x)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\vartheta_\Omega(x)}{N_f}}\mathrm{tr}_l[P_R\psi_\Omega(x)\bar{\psi}_\Omega(x)]\right.\right.\\&\left.\left.\left.-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\vartheta_\Omega(x)}{N_f}}\mathrm{tr}_l[P_L\psi_\Omega(x)\bar{\psi}_\Omega(x)]\right)\right]\right\}\end{aligned}\tag{3.240}$$

这就是形式推导的最后结果，将式 (3.240) 与上节的标准表达式 (3.109) 对比，我们得到在那里定义的 $L_{\mathrm{eff}}[U,J,\bar{\theta}]$，现在的 QCD 形式表达式为

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4xL_{\mathrm{eff}}[U,J,\bar{\theta}]}=&\int\mathscr{D}A_\mu^a\mathscr{D}\bar{\Psi}\mathscr{D}\Psi\mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\psi\mathscr{D}\Xi\exp\left\{\mathrm{i}\Gamma_I\left[\frac{1}{N_c}\psi_\Omega\bar{\psi}_\Omega\right]\right.\\&+\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4xL_{J_\Omega}[\psi_\Omega,\bar{\psi}_\Omega,\Psi,\bar{\Psi},A_\mu^a,\bar{\theta}]\\&+\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\mathrm{tr}_f\left[\Xi(x)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\vartheta_\Omega(x)}{N_f}}\mathrm{tr}_l[P_R\psi_\Omega(x)\bar{\psi}_\Omega(x)]\right.\right.\\&\left.\left.\left.-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\vartheta_\Omega(x)}{N_f}}\mathrm{tr}_l[P_L\psi_\Omega(x)\bar{\psi}_\Omega(x)]\right)\right]\right\}\end{aligned}\tag{3.241}$$

其中，$\vartheta_\Omega(x)$ 仍由式 (3.214) 决定，只是把 $\vartheta(x)$ 换成 $\vartheta_\Omega(x)$，把 $\Phi^{\mathrm{T},\rho\sigma}(x',x)$ 改为 $\dfrac{1}{N_c}\psi^\rho_{\Omega\alpha}(x')\bar{\psi}^\sigma_{\Omega\alpha}(x)$。注意式 (3.241) 中轻夸克场的积分测度 $\mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\psi$ 仍是用未转动的轻夸克场而不是用转动后的轻夸克场 $\mathscr{D}\bar{\psi}_\Omega\mathscr{D}\psi_\Omega$ 来写的，这两个测度之间相差的正是前面讨论的反常项：

$$\int\mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\psi=\int\mathscr{D}\bar{\psi}_\Omega\mathscr{D}\psi_\Omega\mathrm{e}^{-S_{\mathrm{WZ}}[\Omega^2,J]}\tag{3.242}$$

结果式 (3.241) 只是一个赝标介子手征有效拉氏量的 QCD 形式定义，从它出发我们可以推出赝标介子手征有效拉氏量中所有的低能常数的 QCD 定义。它是以路径积分的形式 (或者称 QCD 的格林函数的形式) 紧致地给出定义，如果要想知道具体的数值，仍须发展有效的计算路径积分的方法或者直接在格点上进行计算。这时前面的积掉胶子夸克场、引进双局域有效介子场和其共轭场的方法就开始显示出价值和威力了。

以下我们具体显示如何从式 (3.241) 出发给出赝标介子手征有效拉氏量最低阶的 p^2 阶项的低能常数的 QCD 定义的具体计算。注意到如果不管反常 (它至少是 p^4 阶的，在 p^2 阶不会出现)，式 (3.211) 中轻夸克场的积分测度可以直接用转动后

的轻夸克场 $\mathscr{D}\bar{\psi}_\Omega\mathscr{D}\psi_\Omega$ 来写，这时式 (3.241) 定义的赝标介子手征有效拉氏量对 U 场 (或 Ω 场) 的依赖完全通过转动后的外源 J_Ω 来隐含实现，我们按动量幂次计算有效拉氏量 (上节讨论的低能展开) 则只需考虑对转动后的外源的幂次展开即可。按照上节给出的数幂规则及公式 (3.129)~(3.132) 我们知道，转动后的标量、赝标外源是 p^2 阶的，转动后的矢量、轴矢外源是 p 阶的。

现在我们先计算式 (3.241) 给出的赝标介子手征有效拉氏量的最低非平庸阶：p^2 阶。按照前面的数幂分析，我们只需要保留式 (3.241) 等号右边对转动后的外源的幂次展开到标量或赝标源的线性项和矢量或轴矢源的二次项即可。具体写出来就是：

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^4x L_{\mathrm{eff}}[U,J,\bar{\theta}]\Big|_{p^2\text{阶}} =& \int \mathrm{d}^4x \mathrm{tr}_f[F^{ab}(x)s_\Omega^{ab}(x)+F'^{ab}(x)p_\Omega^{ab}(x)]\\ &+\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4z G_{\mu\nu}^{abcd}(x,z)a_\Omega^{\mu,ab}(x)a_\Omega^{\nu,cd}(z)\end{aligned} \tag{3.243}$$

其中

$$F^{ab}(x)=-\left\langle[\bar{\psi}_\Omega^a(x)\psi_\Omega^b(x)]\right\rangle,\quad F'^{ab}(x)=-\left\langle[\bar{\psi}_\Omega^a(x)\psi_\Omega^b(x)]\tan\frac{\vartheta_\Omega(x)}{N_f}\right\rangle \tag{3.244}$$

$$\begin{aligned}G_{\mu\nu}^{abcd}(x,z)=&\frac{\mathrm{i}}{2}\left\langle[\bar{\psi}_\Omega^a(x)\gamma_\mu\gamma_5\psi_\Omega^b(x)][\bar{\psi}_\Omega^c(z)\gamma_\nu\gamma_5\psi_\Omega^d(z)]\right\rangle\\ &-\frac{\mathrm{i}}{2}\left\langle[\bar{\psi}_\Omega^a(x)\gamma_\mu\gamma_5\psi_\Omega^b(x)]\right\rangle\left\langle[\bar{\psi}_\Omega^c(z)\gamma_\nu\gamma_5\psi_\Omega^d(z)]\right\rangle\end{aligned} \tag{3.245}$$

上面式子中的 $\langle\cdots\rangle$ 代表如下的路径积分平均：

$$\langle O\rangle\equiv\frac{\int \mathrm{d}\mu O}{\int \mathrm{d}\mu} \tag{3.246}$$

其中，积分测度 $\mathrm{d}\mu$ 的定义是无外源手征极限下 QCD 生成泛函的测度加上对赝标介子场的约束及其约束补偿，

$$\begin{aligned}d\mu\equiv&\mathscr{D}A_\mu^a\mathscr{D}\bar{\Psi}\mathscr{D}\Psi\mathscr{D}\bar{\psi}_\Omega\mathscr{D}\psi_\Omega\mathscr{D}\Xi\exp\left\{\mathrm{i}\Gamma_I\left[\frac{1}{N_c}\psi_\Omega\bar{\psi}_\Omega\right]\right.\\ &+\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x L_{J_\Omega=0}[\psi_\Omega,\bar{\psi}_\Omega,\Psi,\bar{\Psi},A_\mu^a,\bar{\theta}]\\ &\left.+\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{tr}_f\left[\Xi(x)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\vartheta_\Omega(x)}{N_f}}\mathrm{tr}_l[P_R\psi_\Omega(x)\bar{\psi}_\Omega(x)]-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\vartheta_\Omega(x)}{N_f}}\mathrm{tr}_l[P_L\psi_\Omega(x)\bar{\psi}_\Omega(x)]\right)\right]\right\}\end{aligned} \tag{3.247}$$

读者可能质疑为什么式 (3.243) 中没有依赖转动后的矢量外源的项？原因是用转动后的外源和轻夸克场描写的理论 (见式 (3.247) 给出的测度，不过不取转动后的外源为零) 具有一个额外的隐藏不破缺的矢量对称性：

$$\psi_\Omega(x) \to \tilde{h}(x)\psi_\Omega(x) \tag{3.248}$$

$$s_\Omega(x) \to \tilde{h}(x)s_\Omega(x)\tilde{h}^+(x), \quad p_\Omega(x) \to \tilde{h}(x)p_\Omega(x)\tilde{h}^+(x) \tag{3.249}$$

$$a^\mu_\Omega(x) \to \tilde{h}(x)a^\mu_\Omega(x)\tilde{h}^+(x), \quad v^\mu_\Omega(x) \to \tilde{h}(x)[v^\mu_\Omega(x) + \mathrm{i}\partial^\mu]\tilde{h}^+(x) \tag{3.250}$$

这个对称性实际来自式 (3.106) 和 (3.107) 给出的手征变换所诱导出的一个矢量性变换 $\tilde{h}(x)$，把式 (3.106) 和 (3.107) 及外源在手征变换下的变换关系式 (3.45) 代入转动外源的定义式 (3.128) 就得到式 (3.249) 和 (3.250)。正是这个对称性限制了转动后的矢量外源出现在式 (3.243) 中，因为这个外源以规范场的角色出现，为保证结果的不变性，它只能以场强 $V^{\mu\nu}_\Omega$ 的形式出现

$$V^{\mu\nu}_\Omega \equiv \partial^\mu v^\nu_\Omega - \partial^\nu v^\mu_\Omega - \mathrm{i}v^\mu_\Omega v^\nu_\Omega + \mathrm{i}v^\nu_\Omega v^\mu_\Omega \tag{3.251}$$

而洛伦兹对称性最后要求 $V^{\mu\nu}_\Omega$ 必须以 $V^\mu_{\Omega,\mu}$ 的形式出现，而它为零。

对 $F^{ab}(x)$，时空平移不变性和手征极限下 QCD 的味对称性要求，

$$F^{ab}(x) = F_0^2 B_0 \delta^{ab}, \quad F_0^2 B_0 = -\frac{1}{N_f}\langle\bar{\psi}\psi\rangle \tag{3.252}$$

对 $F'^{ab}(x)$，因为宇称变换改变 $\vartheta_\Omega(x)$ 的符号，因此要求其为零。

对 $G^{abcd}_{\mu\nu}(x,z)$，平移不变性要求它是 $x-z$ 的函数，我们可以按 $\delta(x-z)$ 及其对坐标的各阶微商进行展开，对 p^2 阶来说只有不含微商的 $\delta(x-z)$ 项有贡献，因此

$$G^{abcd}_{\mu\nu}(x,z) = \delta(x-z)g_{\mu\nu}\delta^{ad}\delta^{bc}F_0^2 + \text{含微商的 } \delta(x-z)\text{项} \tag{3.253}$$

其中

$$F_0^2 = \frac{1}{4(N_f^2-1)}\int \mathrm{d}^4x \left[G^{\mu',abba}_{\mu'}(0,x) - \frac{1}{N_f}G^{\mu',aabb}_{\mu'}(0,x)\right] \tag{3.254}$$

将式 (3.252) 和 (3.253) 及 $F'^{ab}(x)$ 为零的结果代回式 (3.243)，我们得到

$$\int \mathrm{d}^4x L_{\mathrm{eff}}[U,J,\bar{\theta}]\Big|_{p^2\text{阶}} = F_0^2\int \mathrm{d}^4x \mathrm{tr}_f[a^2_\Omega(x) + B_0 s_\Omega(x)] \tag{3.255}$$

利用式 (3.121) 和 (3.132)，可以证明这正是标准的 p^2 阶赝标介子手征有效拉氏量的标准形式 (3.124) 给出的依赖 U 场的那两项。现在我们通过式 (3.254) 结合式 (3.245) 和 (3.252) 分别给出了 F_0^2 和 $F_0^2B_0$ 的 QCD 的路径积分定义。当然这些只是形式表达式，如果要计算这两个参数的数值，还需要发展计算路径积分的方法。

为此我们可以回到前面通过积掉胶子和夸克场，并引入双局域有效介子场及其共轭场的结果式 (3.231)，因为这个体系提供了能够进行具体求解的场方程 (3.232)(或其大 N_c 结果式 (3.234)~(3.236))。为了能更方便地利用这个体系进行计算，我们在略去反常项 (我们将在本节最后对反常项进行单独讨论) 的情形下计算式 (3.231) 给出的有效作用量对转动后的外源的微商，注意这时所有的 U 场依赖都被吸收到转动后的外源当中了，计算给出

$$\left.\frac{\mathrm{d}S_{\mathrm{eff}}[J_\Omega,\Phi_{\Omega c},\Pi_{\Omega c},\Xi_c,\Omega]}{\mathrm{d}J_\Omega^{\sigma\rho}(x)}\right|_{\text{略去反常}}=N_c\overline{\Phi_{\Omega c}^{\sigma\rho}(x,x)} \tag{3.256}$$

其中

$$\overline{O}\equiv\frac{\displaystyle\int\mathscr{D}\Phi_\Omega\mathscr{D}\Pi_\Omega\mathscr{D}\Xi O\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tilde{\Gamma}[J_\Omega,\Phi_\Omega,\Pi_\Omega,\Xi,\Omega]}}{\displaystyle\int\mathscr{D}\Phi_\Omega\mathscr{D}\Pi_\Omega\mathscr{D}\Xi\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tilde{\Gamma}[J_\Omega,\Phi_\Omega,\Pi_\Omega,\Xi,\Omega]}} \tag{3.257}$$

之所以是这个结果是因为在求微商的过程中，式 (3.232) 确保只需对被积函数 $\tilde{\Gamma}[J_\Omega,\Phi_\Omega,\Pi_\Omega,\Xi,\Omega]$ 中的 $J_\Omega^{\sigma\rho}(x)$ 的显式依赖求偏导即可，而无需再对通过 $\Phi_{\Omega c}$，$\Pi_{\Omega c}$，Ξ_c 隐含依赖的 $J_\Omega^{\sigma\rho}(x)$ 进行求导，而 $\tilde{\Gamma}[J_\Omega,\Phi_\Omega,\Pi_\Omega,\Xi,\Omega]$ 中的最后一个显式的 Ω 依赖在略去反常项时是没有的。而根据式 (3.228)，$\tilde{\Gamma}[J_\Omega,\Phi_\Omega,\Pi_\Omega,\Xi,\Omega]$ 对 $J_\Omega^{\sigma\rho}(x)$ 的显式依赖求偏导在略去反常项的情形下就是 $\Gamma_0[J_\Omega,\Phi_\Omega,\Pi_\Omega]$ 对 $J_\Omega^{\sigma\rho}(x)$ 的显式依赖求偏导，再根据式 (3.206)，$\Gamma_0[J_\Omega,\Phi_\Omega,\Pi_\Omega]$ 对 $J_\Omega^{\sigma\rho}(x)$ 的显式依赖求偏导就是 $-\mathrm{i}N_c\mathrm{Trln}[\mathrm{i}\partial\!\!\!/+J_\Omega-\Pi_\Omega]$ 对 $J_\Omega^{\sigma\rho}(x)$ 的显式依赖求偏导，而进一步从式 (3.205) 可以推出 $-\mathrm{i}N_c\mathrm{Trln}[\mathrm{i}\partial\!\!\!/+J_\Omega-\Pi_\Omega]$ 对 $J_\Omega^{\sigma\rho}(x)$ 的显式依赖求偏导就是 $N_c\Phi_\Omega^{\sigma\rho}(x,x)$，再一步步传递回式 (3.231) 就是最后的式 (3.256)。式 (3.256) 的方便之处是，方程左边可以用赝标介子手征有效拉氏量直接计算，结果依赖转动后的外源和赝标介子手征有效拉氏量中的各种参数，而方程右边可以利用圈图展开借助 QCD 的非微扰方程 (3.234)~(3.236) 进行计算。为此我们先要给出赝标介子手征有效拉氏量用转动后的外源表达的形式，对应式 (3.124) 的 p^2 阶结果是

$$\mathscr{L}_2=F_0^2\mathrm{tr}_f[a_\Omega^2+B_0s_\Omega] \tag{3.258}$$

而对应式 (3.125) 的 p^4 阶结果是

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_4=&\mathrm{tr}_f\Big\{-K_1(d_\mu a_\Omega^\mu)^2-K_2(d^\mu a_\Omega^\nu-d^\nu a_\Omega^\mu)(d_\mu a_{\Omega,\nu}-d_\nu a_{\Omega,\mu})+K_3(a_\Omega^2)^2\\&+K_4a_\Omega^\mu a_\Omega^\nu a_{\Omega,\mu}a_{\Omega,\nu}+K_5a_\Omega^2\mathrm{tr}_f(a_\Omega^2)+K_6a_\Omega^\mu a_\Omega^\nu\mathrm{tr}_f(a_{\Omega,\mu}a_{\Omega,\nu})+K_7s_\Omega^2\\&+K_8s_\Omega\mathrm{tr}_f(s_\Omega)+K_9p_\Omega^2+K_{10}p_\Omega\mathrm{tr}_f(p_\Omega)+K_{11}s_\Omega a_\Omega^2+K_{12}s_\Omega\mathrm{tr}_f(a_\Omega^2)\\&-K_{13}V_\Omega^{\mu\nu}V_{\Omega,\mu\nu}+\mathrm{i}K_{14}V_\Omega^{\mu\nu}a_{\Omega,\mu}a_{\Omega,\nu}+K_{15}p_\Omega d^\mu a_{\Omega,\mu}\Big\}\end{aligned} \tag{3.259}$$

其中

$$\mathrm{d}^\mu a_\Omega^\nu \equiv \partial^\mu a_\Omega^\nu - \mathrm{i}v_\Omega^\mu a_\Omega^\nu + \mathrm{i}a_\Omega^\nu v_\Omega^\mu$$

$V_\Omega^{\mu\nu}$ 由式 (3.251) 定义，而式 (3.259) 中的 K 系数和式 (3.125) 中的 L、H 系数的关系为

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{1}{32}K_4 + \frac{1}{16}K_5 + \frac{1}{16}K_{13} - \frac{1}{32}K_{14}\\
L_2 &= \frac{1}{16}K_4 + \frac{1}{16}K_6 + \frac{1}{8}K_{13} - \frac{1}{16}K_{14}\\
L_3 &= \frac{1}{32}K_3 - \frac{1}{8}K_4 + \frac{3}{8}K_{13} + \frac{3}{16}K_{14}\\
L_4 &= \frac{1}{16B_0}K_{12}, \quad L_5 = \frac{1}{16B_0}K_{11}, \quad L_6 = \frac{1}{16B_0^2}K_8\\
L_7 &= -\frac{1}{16N_f}K_1 - \frac{1}{16B_0^2}K_{10} - \frac{1}{16B_0N_f}K_{15}\\
L_8 &= \frac{1}{16}K_1 + \frac{1}{16B_0^2}K_7 - \frac{1}{16B_0^2}K_9 + \frac{1}{16B_0}K_{15}\\
L_9 &= \frac{1}{2}K_{13} - \frac{1}{8}K_{14}, \quad L_{10} = \frac{1}{2}K_2 - \frac{1}{2}K_{13}, \quad H_1 = -\frac{1}{4}K_2 - \frac{1}{4}K_{13}\\
H_2 &= -\frac{1}{8}K_1 + \frac{1}{8B_0^2}K_7 + \frac{1}{8B_0^2}K_9 - \frac{1}{8B_0}K_{15}
\end{aligned} \tag{3.260}$$

然后利用式 (3.256)，得

$$\begin{aligned}
&\overline{\Phi_{\Omega c}^{(b\xi)(a\xi)}(x,x)}\\
=&-\frac{1}{N_c}\int \mathrm{d}^4y\, \frac{\partial S_{\mathrm{eff}}}{\partial J_\Omega^{(d\xi)(c\xi)}(y)}\bigg|_{\text{略去反常}} \frac{\partial J_\Omega^{(d\xi)(c\xi)}(y)}{\partial s_\Omega^{ba}(x)} = -\frac{1}{N_c}\frac{\partial S_{\mathrm{eff}}}{\partial s_\Omega^{ba}(x)}\bigg|_{\text{略去反常}}\\
=&\frac{1}{N_c}\left[-F_0^2B_0 - 2K_7 s_\Omega(x) - 2K_8\mathrm{tr}_f[s_\Omega(x)] - K_{11}a_\Omega^2(x) - K_{12}\mathrm{tr}_f[a_\Omega^2(x)]\right]^{ab} + O(p^3)
\end{aligned} \tag{3.261}$$

$$\begin{aligned}
&(\gamma_5)_{\zeta\xi}\overline{\Phi_{\Omega c}^{(b\zeta)(a\xi)}(x,x)}\\
=&-\frac{\mathrm{i}}{N_c}\int \mathrm{d}^4y\, \frac{\partial S_{\mathrm{eff}}}{\partial J_\Omega^{(d\zeta)(c\xi)}(y)}\bigg|_{\text{略去反常}} \frac{\partial J_\Omega^{(d\zeta)(c\xi)}(y)}{\partial p_\Omega^{ba}(x)} = -\frac{\mathrm{i}}{N_c}\frac{\partial S_{\mathrm{eff}}}{\partial p_\Omega^{ba}(x)}\bigg|_{\text{略去反常}}\\
=&-\frac{\mathrm{i}}{N_c}\left[2K_9 p_\Omega(x) + 2K_{10}\mathrm{tr}_f[p_\Omega(x)] + K_{15}d_\mu a_\Omega^\mu(x)\right]^{ab} + O(p^3)
\end{aligned} \tag{3.262}$$

$$\begin{aligned}
&(\gamma^\mu)_{\zeta\xi}\overline{\Phi_{\Omega c}^{(b\zeta)(a\xi)}(x,x)}\\
=&\frac{1}{N_c}\int \mathrm{d}^4y\, \frac{\partial S_{\mathrm{eff}}}{\partial J_\Omega^{(d\zeta)(c\xi)}(y)}\bigg|_{\text{略去反常}} \frac{\partial J_\Omega^{(d\zeta)(c\xi)}(y)}{\partial v_{\Omega,\mu}^{ba}(x)} = \frac{1}{N_c}\frac{\partial S_{\mathrm{eff}}}{\partial v_{\Omega,\mu}^{ba}(x)}\bigg|_{\text{略去反常}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&\frac{1}{N_c}\left[-2\mathrm{i}K_1\{[d_\nu a_\Omega^\nu(x)]a_\Omega^\mu(x)-a_\Omega^\mu(x)[d_\nu a_\Omega^\nu(x)]\}\right.\\
&+4\mathrm{i}K_2\{a_{\Omega,\nu}(x)[d^\mu a_\Omega^\nu(x)-d^\nu a_\Omega^\mu(x)]-[d^\mu a_\Omega^\nu(x)-d^\nu a_\Omega^\mu(x)]a_{\Omega,\nu}(x)\}\\
&+4K_{13}d_\nu V_\Omega^{\mu\nu}(x)+\mathrm{i}K_{14}\{d_\nu[a_\Omega^\mu(x)a_\Omega^\nu(x)-a_\Omega^\nu(x)a_\Omega^\mu(x)]\}\\
&\left.-\mathrm{i}K_{15}[a_\Omega^\mu(x)p_\Omega(x)-p_\Omega(x)a_\Omega^\mu(x)]\right]^{ab}+O(p^4)
\end{aligned}
\tag{3.263}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\gamma^\mu\gamma_5)_{\zeta\xi}\overline{\Phi_{\Omega c}^{(b\zeta)(a\xi)}(x,x)}\\
=&\frac{1}{N_c}\int \mathrm{d}^4y\left.\frac{\partial S_{\mathrm{eff}}}{\partial J_\Omega^{(d\zeta)(c\xi)}(y)}\right|_{\text{略去反常}}\frac{\partial J_\Omega^{(d\zeta)(c\xi)}(y)}{\partial a_{\Omega,\mu}^{ba}(x)}=\frac{1}{N_c}\left.\frac{\partial S_{\mathrm{eff}}}{\partial a_{\Omega,\mu}^{ba}(x)}\right|_{\text{略去反常}}\\
=&\frac{1}{N_c}\left[2F_0^2a_\Omega^\mu(x)+2K_1d^\mu d^\nu a_{\Omega,\nu}(x)+4K_2\{d_\nu[d^\nu a_\Omega^\mu(x)-d^\mu a_\Omega^\nu(x)]\}\right.\\
&+2K_3[a_\Omega^\mu(x)a_\Omega^2(x)+a_\Omega^2(x)a_\Omega^\mu(x)]+4K_4[a_\Omega^\nu(x)a_\Omega^\mu(x)a_{\Omega,\nu}(x)]\\
&+4K_5a_\Omega^\mu(x)\mathrm{tr}_f[a_\Omega^2(x)]+4K_6a_{\Omega,\nu}(x)\mathrm{tr}_f[a_\Omega^\mu(x)a_\Omega^\nu(x)]\\
&+4K_{11}[s_\Omega(x)a_\Omega^\mu(x)+a_\Omega^\mu(x)s_\Omega(x)]+2K_{12}a_\Omega^\mu(x)\mathrm{tr}_f[s_\Omega(x)]\\
&\left.+\mathrm{i}K_{14}[a_{\Omega,\nu}(x)V_\Omega^{\mu\nu}(x)-V_\Omega^{\mu\nu}(x)a_{\Omega,\nu}(x)]-K_{15}d^\mu p_\Omega(x)\right]^{ab}+O(p^4)
\end{aligned}
\tag{3.264}
$$

利用这些结果下面我们就演示在最低的 p^2 阶赝标介子手征有效拉氏量的两个是如何计算的。由于在 p^2 阶赝标介子手征有效拉氏量只有转动后的赝标和轴矢外源依赖，因此我们只须计算式 (3.261) 和 (3.264) 中方程右边的第一项，而完全不须考虑式 (3.262) 和 (3.263)。这要求我们解出 $\Phi_{\Omega c}^{(b\zeta)(a\xi)}(x,x)$ 的标量和轴矢量部分，并分别考虑其常数项和对转动后的轴矢外源展开的一次幂项。

首先对式 (3.261) 的领头阶常数项，可以直接把式 (3.235) 中的转动外源略去，因此

$$
F_0^2B_0=-\frac{N_c}{N_f}\left.\overline{\Phi_{\Omega c}^{(a\xi)(a\xi)}(x,x)}\right|_{J_\Omega=0}=\mathrm{i}N_c\mathrm{tr}_{lf}[(\mathrm{i}\not\partial-\Pi_{\Omega c})^{-1}](x,x)
\tag{3.265}
$$

注意在大 N_c 极限下平均是没有效果的。目前的式 (3.265) 虽只是大 N_c 极限的结果，但这个结果是严格成立的 (见式 (3.163))，只要把 $\Pi_{\Omega c}$ 认定为轻夸克场的自能就行。然后对式 (3.264) 的领头阶项，也就是转动后轴矢外源的线性项，需要对式 (3.235) 中的转动后的轴矢外源 (其他外源取为零) 进行展开并保留到一次项，因此

$$
\begin{aligned}
F_0^2[a_\Omega^\mu(x)]^{ab}=&\frac{N_c}{2}(\gamma^\mu\gamma_5)_{\zeta\xi}\left.\overline{\Phi_{\Omega c}^{(b\zeta)(a\xi)}(x,x)}\right|_{a_\Omega^\mu\text{线性项}}\\
=&\frac{N_c}{2}\int \mathrm{d}^4y\mathrm{tr}_l\left[\gamma^\mu\gamma_5(\mathrm{i}\not\partial-\Pi_{\Omega c})^{-1}(x,y)\not a(y)\gamma^5(\mathrm{i}\not\partial-\Pi_{\Omega c})^{-1}(y,x)\right]^{ab}
\end{aligned}
\tag{3.266}
$$

注意到轻夸克场自能 $\Pi_{\Omega c}$ 在转动后外源为零时只有标量分量对味道角标正比于 δ^{ab}，由此我们得到

$$F_0^2 g^{\mu\nu}\delta(x-y)=\frac{N_c}{2}\int \mathrm{d}^4 y \mathrm{tr}_l\left[\gamma^\mu\gamma_5(\mathrm{i}\partial\!\!\!/-\Pi_{\Omega c})^{-1}(x,y)\gamma^\nu\gamma^5(\mathrm{i}\partial\!\!\!/-\Pi_{\Omega c})^{-1}(y,x)\right] \tag{3.267}$$

引入动量空间的轻夸克自能 $\Sigma(p^2)$，

$$\Pi_{\Omega c}(x,y)=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}\Sigma(p^2) \tag{3.268}$$

则式 (3.267) 用动量空间的轻夸克自能 $\Sigma(p^2)$ 可以表达为

$$\begin{aligned}F_0^2&=\frac{N_c}{8}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{tr}_f\left[\gamma^\mu\gamma_5\frac{1}{p\!\!\!/-\Sigma(p^2)}\gamma_\mu\gamma_5\frac{1}{p\!\!\!/-\Sigma(p^2)}\right]\\&=-4N_c\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\left[\frac{1}{8}\frac{\partial}{\partial p^\mu}\left(\frac{p^\mu}{p^2-\Sigma^2(p^2)}\right)+\frac{\left[\Sigma(p^2)-\dfrac{1}{2}p^2\Sigma'(p^2)\right]\Sigma(p^2)}{[p^2-\Sigma^2(p^2)]^2}\right]\end{aligned} \tag{3.269}$$

其中，上式的第二个等式右边若略掉第一个全微商项，则得到的结果就是关于 F_0^2 的著名的 Pagel-Stokar 公式[9]。以上是对 p^2 阶赝标介子手征有效拉氏量中参数的讨论，对更高阶的系数文献中不再有像 Pagel-Stokar 公式那样相对简单的解析公式，因此我们做比较也多只进行数值计算，具体计算见文献[8,10−14]。

在本节式 (3.256) 前面讨论 p^4 阶手征有效拉氏量时略去了反常项，现在作为本节的最后我们把反常项单独拿出来进行讨论。原本从式 (3.226) 和 (3.242) 看，我们已经把反常项和上节计算出的轻夸克在手征转动前后的路径积分测度差，也就是 Wess-Zumino 作用量 $S_{\mathrm{WZ}}[\Omega^2,J]$ 联系起来了，一切都是已知和确定的，为什么还要讨论？原因是在实际计算中，这个反常作用量的各项前的系数往往是像式 (3.269) 计算 F_0^2 那样会被表达为动量空间的轻夸克自能 $\Sigma(p^2)$ 的函数。而这个轻夸克自能是由式 (3.234) 和 (3.235) 结合而成的轻夸克传播子的 Schwinger-Dyson 方程来决定的，到目前为止人们不会严格求解它，只能给出近似解。而用这些不准确 (可能人们还在不断改进计算精度) 的轻夸克自能所描写的反常项系数却要得到如式 (3.141) 所给出的严格的结果是很难的。因此这就要求我们得到的轻夸克自能表达的反常项中各项的系数要具有对轻夸克自能函数的不准确性不敏感这一性质，极端地，要求对两个可能很不一样的轻夸克自能给出同样的系数结果。这对这个表达式施加了很强的要求，能否满足这些要求可以从另一个方面作为对我们推导结果可靠性的一种检验。所幸的是，我们真的证明了这些用轻夸克自能表达的反常项中各项的系数确实对夸克自能函数的具体形式是十分不敏感的[15]。

3.4 其他低能强子的手征有效拉氏量

在前面两节我们把介子谱中最轻的赝标介子看成是 QCD 手征极限下手征对称性自发破缺所产生的 Goldstone 玻色子，建立了描述它们的手征有效拉氏量，并形式地从 QCD 推导出了这个拉氏量。本节讨论如何把这个手征有效拉氏量推广到能够包含其他轻强子的情形。首先从 3.2 节开始给出的 1GeV 以下的强子谱来看，除了最轻的赝标介子外，剩下的就是矢量介子、标量介子和一个比较重的赝标介子 η'。由于矢量介子有可能和手征对称性建立比较密切的关系，本节我们按照质量由轻到重的顺序先从如何在手征有效拉氏量中包括进矢量介子入手，然后讨论标量、η' 和其他介子，最后讨论重子。受篇幅限制，本节对每种介子我们最多只写下其含外源的手征有效拉氏量，原则上把这个拉氏量放进路径积分就得到在介子水平上表达的生成泛函，它的定义与原来在 QCD 中定义的生成泛函式 (3.52) 是一样的。我们在这节不像 3.2 节最后那样再进一步讨论其各种应用。

沿用对赝标介子的处理所获得的经验，我们总希望把要讨论的目标与对称性关联起来，期待这样就能帮助和有利于我们构建手征有效拉氏量。矢量介子在有效场理论中最直接的就是采用矢量场进行描述 (后面我们还会讨论用反对称张量场的描述)。而在量子场论中很多矢量场是以规范场的角色出现的，虽然规范场所反映的规范对称性本身要求相应的矢量场必须是无质量的，但就像电弱统一理论中的矢量中间玻色子那样，通过著名的希格斯机制，人们还是可以用自发破缺的规范对称性所对应的规范场来描写有质量的矢量场。由此，一部分物理学家猜测矢量介子也是 QCD 理论中的某种自发破缺了的规范对称性的规范场[16,17]。注意到在 3.3 节的式 (3.107) 所引入的一个由原来局域的手征对称性所诱导的局域隐藏矢量对称性 $\tilde{h}(x)$，在式 (3.248)~(3.250) 中我们发现它是转动后的轻夸克场和外源所具有的一个局域对称性，正因如此它可以作为我们现在所需要的规范对称性。原来在式 (3.248)~(3.250) 中理论的拉氏量本来并不具有这个局域的对称性，而只是在把外源作为规范场的情形下才使得生成泛函具有了此局域对称性。现在我们把理论中的手征有效拉氏量进行扩充使之包括进矢量介子，并要求矢量介子替代原来的矢量外源承担起这个对称性规范场的作用。这样我们就把原来靠外源支撑起来的局域对称性变成了通过引入作为规范场的矢量介子而扩充后的手征有效拉氏量本身所具有的局域对称性。注意在式 (3.107) 中对称性 $\tilde{h}(x)$ 并不是独立的，它是由于我们局域的手征转动 V_R 和 V_L 所诱导引发的，因此 $\tilde{h}(x)$ 依赖于 V_R 和 V_L 及 Ω。现在我们首先做一些理论扩充使得这个对称性变成一个独立于局域的手征转动 V_R 和 V_L 的对称性。做法是将式 (3.108) 扩充为

$$U(x)=\xi_L^\dagger(x)\xi_R(x),\quad \xi_R(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\tilde{\phi}(x)}{2F_0}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\phi(x)}{2F_0}},\quad \xi_L(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\tilde{\phi}(x)}{2F_0}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\phi(x)}{2F_0}} \tag{3.270}$$

其中，$\xi_R(x)$，$\xi_L(x)$ 分别是两个独立的场，它们之间的差别体现在新引进的场 $\tilde{\phi}(x)$ 上，它是一个新引进的 Goldstone 场。我们要求一个新的独立的局域 $SU(3)_V$ 对称性，在这个对称性和原来的手征对称性 $SU_L(3)\times SU_R(3)$ 变化下，$\xi_R(x)$，$\xi_L(x)$ 的变化行为定义为

$$\xi_R(x)\to\bar{h}(x)\xi_R(x)V_R^\dagger(x),\quad \xi_L(x)\to\bar{h}(x)\xi_L(x)V_L^\dagger(x) \tag{3.271}$$

注意原来的手征对称性 $SU_L(3)\times SU_R(3)$ 只在引入外源并且外源按照式 (3.45) 或者式 (3.46)~(3.49) 变化时才是局域的，否则只是整体的对称性，具体体现在 V_R 和 V_L 是否依赖时空坐标。这时的局域 $SU(3)_V$ 对称性的元素 $\bar{h}(x)$ 不再像前面提到的 $\tilde{h}(x)$ 和 V_R 及 V_L 和 $\xi_R(x)$，$\xi_L(x)$ 是没有依赖关系的，而是一个独立的群元素，在它的变换下导致新引进的 Goldstone 场 $\tilde{\phi}(x)$ 的变化。当变化到 $\tilde{\phi}(x)=0$ 时 (文献中有时也称这为取幺正规范)，这个新的 Goldstone 场不出现了 (俗称被吃掉了)，而这时式 (3.270) 给出 $\xi_R(x)=\Omega(x)=\xi_L^\dagger(x)$，$\bar{h}(x)$ 则变回原来的 $\tilde{h}(x)$，因而通过式 (3.107) 强烈地依赖 V_R 和 V_L 及 Ω。这时这个局域 $SU(3)_V$ 对称性发生了自发破缺，新引进的 Goldstone 场 $\tilde{\phi}(x)$ 被吃掉就是著名的希格斯机制，在后面将会看到它导致局域 $SU(3)_V$ 对称性的规范场获得质量。注意由式 (3.271) 定义的对称性变换规则并不改变 U 场本身的变换，结合式 (3.271) 及 (3.270) 的第一个式子我们发现 U 场仍然按照式 (3.99) 给出的变换规则变换。虽然现在增加了新的独立的 $SU(3)_V$ 对称性，而在由原来式 (3.99) 定义的 U 场的变换中新引进的 $SU(3)_V$ 对称性群元 $\bar{h}(x)$ 完全不出现，因此如果理论最后只用 U 场和外源来表达的话，它将和这个新的对称性完全无关。这就是我们称这个新的对称性为隐藏的原因，也正是因为有些物理学家并不承认这个对称性的存在，因而导致矢量介子另外的描述 (见以后的讨论)。

目前我们先继续发展矢量介子作为隐藏对称性 $SU(3)_V$ 的规范场的理论体系。我们引入矢量场 $V_\mu(x)$ 来描述矢量介子，并要求它在新的局域 $SU(3)_V$ 及老的手征对称性 $SU_L(3)\times SU_R(3)$ 变化下的变换规则为

$$V_\mu(x)\to\bar{h}(x)V_\mu(x)\bar{h}^\dagger(x)+\mathrm{i}\bar{h}(x)\partial_\mu\bar{h}^\dagger(x) \tag{3.272}$$

注意目前这个矢量场的变换只与新引进的隐藏对称性 $SU(3)_V$ 有关，与原来的手征对称性无关。利用式 (3.272)，我们可以构造对 $\xi_R(x)$，$\xi_L(x)$ 场的协变微商，

$$D^\mu\xi_R\equiv\partial^\mu\xi_R+\mathrm{i}\xi_R(v^\mu+a^\mu)-\mathrm{i}V^\mu\xi_R \tag{3.273}$$

$$D^\mu\xi_L\equiv\partial^\mu\xi_L+\mathrm{i}\xi_L(v^\mu-a^\mu)-\mathrm{i}V^\mu\xi_L \tag{3.274}$$

利用式 (3.46)、(3.47) 和式 (3.273)、(3.274)，很容易证明协变微商后的 $\xi_R(x)$，$\xi_L(x)$ 场仍满足式 (3.271) 给出的变换规则。从式 (3.270) 的定义式看，$\xi_R(x)$，$\xi_L(x)$ 场都

是 p^0 次幂的量，因为 U 是 p^0 次幂，而从式 (3.273) 和 (3.274) 看，我们引入的矢量场 $V_\mu(x)$ 是 p^1 次幂的量。利用上面定义的协变微商，我们可以组合出如下两个很重要的量：

$$\begin{aligned}(D^\mu\xi_R)\xi_R^\dagger-(D^\mu\xi_L)\xi_L^\dagger&=(\partial^\mu\xi_R)\xi_R^\dagger+\mathrm{i}\xi_R(v^\mu+a^\mu)\xi_R^\dagger-(\partial^\mu\xi_L)\xi_L^\dagger-\mathrm{i}\xi_L(v^\mu-a^\mu)\xi_L^\dagger\\&=\xi_L(\nabla^\mu U)\xi_R^\dagger=-\xi_R(\nabla^\mu U^\dagger)\xi_L^\dagger\end{aligned}\tag{3.275}$$

$$\begin{aligned}&(D^\mu\xi_R)\xi_R^\dagger+(D^\mu\xi_L)\xi_L^\dagger\\=&(\partial^\mu\xi_R)\xi_R^\dagger+\mathrm{i}\xi_R(v^\mu+a^\mu)\xi_R^\dagger+(\partial^\mu\xi_L)\xi_L^\dagger+\mathrm{i}\xi_L(v^\mu-a^\mu)\xi_L^\dagger-2\mathrm{i}V^\mu\end{aligned}\tag{3.276}$$

它在新的局域 $SU(3)_V$ 及老的手征对称性 $SU_L(3)\times SU_R(3)$ 变化下都按如下规则变换

$$(D^\mu\xi_R)\xi_R^\dagger\mp(D^\mu\xi_L)\xi_L^\dagger\to\bar{h}[(D^\mu\xi_R)\xi_R^\dagger\mp(D^\mu\xi_L)\xi_L^\dagger]\bar{h}^\dagger\tag{3.277}$$

利用这些结果我们可以写下最低阶的 p^2 阶手征有效拉氏量的一般表达式：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_2=&F_0^2\mathrm{tr}_f\left[-\frac{1}{4}[(D^\mu\xi_R)\xi_R^\dagger-(D^\mu\xi_L)\xi_L^\dagger]^2+\frac{1}{2}B_0[\xi_L^\dagger\xi_R(s-\mathrm{i}p)+\xi_R^\dagger\xi_L(s+\mathrm{i}p)]\right]\\&-a\frac{F_0^2}{4}\mathrm{tr}_f\left[[(D^\mu\xi_R)\xi_R^\dagger+(D^\mu\xi_L)\xi_L^\dagger]^2\right]-a'\frac{F_0^2}{4}\left[\mathrm{tr}_f[(D^\mu\xi_R)\xi_R^\dagger+(D^\mu\xi_L)\xi_L^\dagger]\right]^2\end{aligned}\tag{3.278}$$

在上式中没有 $\left[\mathrm{tr}_f[(D^\mu\xi_R)\xi_R^\dagger-(D^\mu\xi_L)\xi_L^\dagger]\right]^2$ 项的原因是由于式 (3.275)，我们有

$$\mathrm{tr}_f[(D^\mu\xi_R)\xi_R^\dagger-(D^\mu\xi_L)\xi_L^\dagger]=\mathrm{tr}_f[U^\dagger\nabla^\mu U]=\mathrm{tr}_f[U^\dagger\partial^\mu U]=0\tag{3.279}$$

其中我们利用了矢量和轴矢外源是无迹的及 U 的行列式为 1 的条件 (它导致 $\mathrm{tr}_f[U^\dagger\partial^\mu U]=0$)。利用式 (3.275) 和 (3.270) 的第一个式子，很容易看到式 (3.278) 给出的 p^2 阶手征有效拉氏量第一行的两项正是原来的式 (3.124) 给出的 p^2 阶赝标介子手征有效拉氏量的头两项 (我们现在为方便只考虑 $\bar{\theta}=0$ 的情形因而没有式 (3.124) 中的最后一项)。式 (3.278) 的第二行的两项是考虑进矢量介子后比原来 p^2 阶赝标介子手征有效拉氏量多出来的项。这个项如果考虑 p^2 阶矢量介子场的运动方程则为零，因为运动方程给出

$$2\mathrm{i}V^\mu=(\partial^\mu\xi_R)\xi_R^\dagger+\mathrm{i}\xi_R(v^\mu+a^\mu)\xi_R^\dagger+(\partial^\mu\xi_L)\xi_L^\dagger+\mathrm{i}\xi_L(v^\mu-a^\mu)\xi_L^\dagger\tag{3.280}$$

也就是说代入矢量介子场的运动方程的解 (这实际是另一种积掉矢量介子场的方式)，含矢量介子的手征有效拉氏量就自然地回到前面两节讨论的纯赝标介子的手征有效拉氏量。

在目前式 (3.278) 给出的含矢量介子的 p^2 阶手征有效拉氏量中矢量介子场没有动能项，因而它不是作为动力学场而是辅助场出现的。为了使其成为动力学场，我们必须人为地在式 (3.278) 中补上矢量介子场的动能项 $-\dfrac{1}{4g_\rho^2}V^i_{\mu\nu}V^{i,\mu\nu}$，其中，

$$V^i_{\mu\nu}\equiv\partial_\mu V^i_\nu-\partial_\nu V^i_\mu+f^{ijk}V^j_\mu V^k_\nu$$

按照标准的数幂规则这个动能项本应该是属于 p^4 阶的，现在把它强行加入 p^2 阶的手征拉氏量相当于要求常数 g_ρ 是 p 阶的量，而让一个常数带动量幂次令人匪夷所思，因为我们不知道这个常数在哪里还会出现 (如所有项前的参数是否会依赖或包含它)，而只要这些带动量的常数出现就会改变原来的动量数幂结果。当然为维持矢量介子的极点不受低能展开的影响，还可以换种方式把式 (3.278) 的 a 和 a' 看成 p^2 阶的量使得以下将要讨论的矢量介子质量项也成为 p^4 阶的，这同样涉及让一些常数带动量幂次。这些搅乱了原来的数幂规则，这是矢量介子手征有效拉氏量的一个重要问题，也就是我们说的只有纯赝标介子手征有效拉氏量才是最完备的有效场论的原因。在式 (3.278) 加上了动能项，我们就可以读出式 (3.278) 中的参数 $a(g_\rho F_0)^2$ 是矢量介子质量的平方，而 a' 反映味单态矢量介子质量平方与味多重态矢量介子质量平方的偏离。实际上这两项原本反映的是矢量介子和新引进的 Goldstone 场及赝标介子场的相互作用，在幺正规范 $\tilde{\phi}(x)=0$ 下就只剩矢量介子的质量项及矢量介子与赝标介子的相互作用项了。而参数 g_ρ 可以通过重新标度矢量场 $V_\mu\to g_\rho V_\mu$ 来看出它正比于 $\rho\pi\pi$ 的耦合强度，因为利用式 (3.270) 的后两个式子可以从式 (3.278) 读出 $\rho\pi\pi$ 的相互作用项为

$$\frac{\mathrm{i}}{4}ag_\rho\mathrm{tr}_f\left[V^\mu[(\partial_\mu\phi)\phi-\phi(\partial_\mu\phi)]\right]\tag{3.281}$$

实际上述 $\rho\pi\pi$ 的相互作用的强度与矢量介子质量和 F_0 之比的关系正是著名的 KSRF 关系[18,19]。为简单起见我们不再讨论涉及矢量介子手征有效拉氏量的 p^4 阶了，有兴趣的读者可以参看文献 [20]。

在完成了矢量介子的隐藏对称性理论之后，我们现在开始讨论它的另外一种理论 —— 二阶反对称张量理论[6]。如前所述有些人不相信隐藏对称性的存在，因而也就不相信相应的描写矢量介子的体系，因此对这些人来说矢量介子一定需要用另外的方式进行描写。在这个体系中，人们用一个二阶反对称张量场 $\mathbf{V}_{\mu\nu}$ 来描写矢量介子，相应的含矢量介子的 p^2 阶手征拉氏量 (同样只考虑 $\bar{\theta}=0$ 的情形) 为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_2'=&\frac{F_0^2}{4}\mathrm{tr}_f[\nabla_\mu U(\nabla^\mu U)^\dagger]+\frac{F_0^2}{4}\mathrm{tr}_f(\chi U^\dagger+U\chi^\dagger)-\frac{1}{2}\mathrm{tr}_f[\nabla^\lambda\mathbf{V}_{\lambda\mu}\nabla_\nu\mathbf{V}^{\nu\mu}]\\&+\frac{1}{4}M_V^2\mathrm{tr}_f[\mathbf{V}_{\mu\nu}\mathbf{V}^{\mu\nu}]+\frac{F_V}{\sqrt{2}}\mathrm{tr}_f[\mathbf{V}^{\mu\nu}\hat{\mathrm{V}}_{\mu\nu}]+\sqrt{2}G_V\mathrm{itr}_f(\mathbf{V}_{\mu\nu}[a_\Omega^\mu,a_\Omega^\nu])\end{aligned}\tag{3.282}$$

其中

$$\nabla^\lambda \mathbf{V}_{\lambda\mu} \equiv \partial^\lambda \mathbf{V}_{\lambda\mu} - \mathrm{i}[v_\Omega^\lambda, \mathbf{V}_{\lambda\mu}] \tag{3.283}$$

$$\hat{\mathrm{V}}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}[\Omega^\dagger f_{\mu\nu}^R \Omega + \Omega f_{\mu\nu}^L \Omega^\dagger] \tag{3.284}$$

在拉氏量式 (3.282) 中涉及反对称张量场的项的动量数幂也是混乱的，最合适的似乎是将反对称张量场 $\mathbf{V}_{\mu\nu}$ 看成是 p^0 次幂，这时唯一要要求的是矢量介子质量的平方参数 M_V^2 必须被看作 p^2 阶的量。在局域手征变换下，利用式 (3.250) 从协变微商式 (3.283) 的定义我们可以倒推算出 $\mathbf{V}_{\mu\nu}$ 的变换行为是

$$\mathbf{V}_{\mu\nu}(x) \to \tilde{h}(x)\mathbf{V}_{\mu\nu}(x)\tilde{h}^\dagger(x) \tag{3.285}$$

而利用式 (3.107) 和表 3.1，我们可以推出式 (3.284) 定义的 $\hat{\mathrm{V}}_{\mu\nu}$ 变换行为是

$$\hat{\mathrm{V}}_{\mu\nu}(x) \to \tilde{h}(x)\hat{\mathrm{V}}_{\mu\nu}(x)\tilde{h}^\dagger(x) \tag{3.286}$$

再结合式 (3.250) 给出的 a_Ω^μ 的变换关系，我们就很明显地看到式 (3.282) 给出的含矢量介子的 p^2 阶手征拉氏量在局域手征变换下是明显不变的。至于对这个拉氏量中除反对称张量场的动能和质量项外，只有它的与赝标介子耦合的线性项，而没有其他非线性项这一现象，我们将在本节后面讨论到更一般的介子手征有效拉氏量时再一并做讨论。目前在这个拉氏量里并不存在独立的局域 $SU(3)_V$ 对称性，只有原来手征对称性诱导出以 $\tilde{h}(x)$ 为群元依赖 V_R 和 V_L 及 Ω 的对称性。这时理论中转动后的矢量外源 v_Ω^λ 起到了这个局域的诱导对称性的规范场的作用。

下面按文献 [21] 的思路证明这个用反对称张量场描写的矢量介子手征有效拉氏量式 (3.282) 严格等价于前面用隐藏对称性描写的矢量介子手征有效拉氏量式 (3.278)。为此我们先将式 (3.282) 中的 U 场和 Ω 从式 (3.108) 推广到式 (3.270)，再把式 (3.283) 中作为规范场的转动后的矢量外源 $v_{\Omega\mu}$ 从式 (3.131) 推广为

$$v_{\Omega\mu} = \frac{1}{2}[\xi_R(v_\mu + a_\mu + \mathrm{i}\partial_\mu)\xi_R^\dagger + \xi_L(v_\mu - a_\mu + \mathrm{i}\partial_\mu)\xi_L^\dagger] \tag{3.287}$$

把式 (3.284) 推广为

$$\hat{\mathrm{V}}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\xi_R f_{\mu\nu}^R \xi_R^\dagger + \xi_L f_{\mu\nu}^L \xi_L^\dagger] \tag{3.288}$$

把式 (3.282) 中的 a_Ω^μ 从式 (3.142) 推广为

$$a_\Omega^\mu = \frac{\mathrm{i}}{2}\xi_L[\nabla^\mu U]\xi_R^\dagger \tag{3.289}$$

然后在式 (3.282) 中加上如下含辅助矢量场 $V_\mu(x)$ 的项

$$\mathscr{L}_2'' \equiv \mathscr{L}_2' + \frac{1}{2}\kappa^2 \mathrm{tr}_f \left[\left(V_\mu - v_{\Omega\mu} - \frac{1}{\kappa}\nabla^\nu \mathbf{V}_{\nu\mu}\right)^2\right] \tag{3.290}$$

在式 (3.290) 中这个新加的项既可以通过路径积分直接插入对 $V_\mu(x)$ 的积分 (由于这项是在作用量里出现在路径积分的被积函数的 e 指数上，因此这个插入的积分是一个可以积出来的高斯积分，积出来后只是个无关常数因而对理论没有影响) 来实现，也可通过代入 $V_\mu(x)$ 的场方程：$V_\mu = v_{\Omega\mu} + \dfrac{1}{\kappa}\nabla^\nu \mathbf{V}_{\nu\mu}$ 来消掉，由此说明新加的项并不影响原来的拉氏量。注意式 (3.290) 中新加项里面对反对称张量场的二次项正好抵消原来拉氏量式 (3.282) 中反对称张量场的动能项，使得式 (3.290) 中的反对称张量场成为没有微商项的辅助场。注意原本出现在式 (3.290) 新加项中的对反对称张量场原本是有微商的，但我们可以通过分部微商并扔掉全微商项进行处理，具体的交叉项是

$$\begin{aligned}\kappa\mathrm{tr}_f[(v_\Omega^\mu - V^\mu)\nabla^\nu \mathbf{V}_{\nu\mu}] &= \kappa\mathrm{tr}_f\left[(v_\Omega^\mu - V^\mu)[\partial^\nu - \mathrm{i}v_\Omega^\nu, \mathbf{V}_{\nu\mu}]\right] \\ &= \kappa\mathrm{tr}_f\left[-[\partial^\nu - \mathrm{i}v_\Omega^\nu, v_\Omega^\mu - V^\mu]\mathbf{V}_{\nu\mu} + \partial^\nu[(v_\Omega^\mu - V^\mu)\mathbf{V}_{\nu\mu}]\right]\end{aligned} \tag{3.291}$$

扔掉最后的全微商项 $\kappa\mathrm{tr}_f\left[\partial^\nu[(v_\Omega^\mu - V^\mu)\boldsymbol{V}_{\nu\mu}]\right]$ (在拉氏量中本来就允许扔掉全微商项)，剩下项中的对易子为

$$\begin{aligned}[\partial^\nu - \mathrm{i}v_\Omega^\nu, v_\Omega^\mu - V^\mu] &= [\partial^\nu - \mathrm{i}V^\nu, v_\Omega^\mu - V^\mu] - \mathrm{i}[v_\Omega^\nu - V^\nu, v_\Omega^\mu - V^\mu] \\ &= -V^{\nu\mu} + [\partial^\nu - \mathrm{i}V^\nu, \mathrm{i}\partial^\mu + v_\Omega^\mu] - \mathrm{i}[v_\Omega^\nu - V^\nu, v_\Omega^\mu - V^\mu]\end{aligned} \tag{3.292}$$

而项 $(v_{\Omega\mu} - V_\mu)$ 利用式 (3.287) 正是式 (3.276) 所讨论的项

$$v_{\Omega\mu} - V_\mu = -\frac{\mathrm{i}}{2}[(D_\mu\xi_R)\xi_R^+ + (D_\mu\xi_L)\xi_L^+] \tag{3.293}$$

利用以上结果，式 (3.290) 在略掉全微商项后成为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_2'' \equiv &\frac{F_0^2}{4}\mathrm{tr}_f[\nabla_\mu U(\nabla^\mu U)^\dagger] + \frac{F_0^2}{4}\mathrm{tr}_f(\chi U^\dagger + U\chi^\dagger) + \frac{1}{4}M_V^2\mathrm{tr}_f[\mathbf{V}_{\mu\nu}\mathbf{V}^{\mu\nu}] \\ &+ \mathrm{tr}_f\left[\mathbf{V}_{\mu\nu}\left(\frac{F_V}{\sqrt{2}}\hat{\mathrm{V}}^{\mu\nu} + \sqrt{2}G_V\mathrm{i}[a_\Omega^\mu, a_\Omega^\nu]\right.\right. \\ &\left.\left. + \kappa(V^{\mu\nu} - [\partial^\mu - \mathrm{i}V^\mu, \mathrm{i}\partial^\nu + v_\Omega^\nu] + \mathrm{i}[v_\Omega^\mu - V^\mu, v_\Omega^\nu - V^\nu])\right)\right] \\ &+ \frac{1}{2}\kappa^2\mathrm{tr}_f[(V_\mu - v_{\Omega\mu})^2]\end{aligned} \tag{3.294}$$

我们现在可以积掉上式中的反对称张量场，或等价地直接将如下场方程代进去消掉它，得

$$\frac{1}{2}M_V^2\mathbf{V}^{\mu\nu} = -\frac{F_V}{\sqrt{2}}\hat{V}^{\mu\nu} - \sqrt{2}G_V\mathrm{i}[a_\Omega^\mu, a_\Omega^\nu]$$

$$-\kappa(V^{\mu\nu}-[\partial^\mu-\mathrm{i}V^\mu,\mathrm{i}\partial^\nu+v_\Omega^\nu]+\mathrm{i}[v_\Omega^\mu-V^\mu,v_\Omega^\nu-V^\nu]) \quad (3.295)$$

结果式 (3.294) 中所有反对称张量场依赖的项在积掉 $\mathbf{V}_{\mu\nu}$ 后的贡献都是 p^4 阶的项，其中特别包括矢量介子场的动能项 $-\dfrac{\kappa^2}{M_V^2}\mathrm{tr}_f(V_{\mu\nu}V^{\mu\nu})$，如果我们取 g_ρ 为

$$g_\rho^2=\frac{M_V^2}{4\kappa^2} \quad (3.296)$$

则这个动能项就是在矢量介子的隐藏对称性描述中人为加入理论的矢量介子场的动能项。在目前 p^2 阶的水平上若略去式 (3.294) 中所有 p^4 阶的项，唯一剩下来的 p^2 阶的项是 $\dfrac{1}{2}\kappa^2\mathrm{tr}_f[(V_\mu-v_{\Omega\mu})^2]$。结合式 (3.293)，在 p^2 阶的水平上式 (3.294) 进一步化为

$$\mathscr{L}_2''\equiv\frac{F_0^2}{4}\mathrm{tr}_f[\nabla_\mu U(\nabla^\mu U)^\dagger]+\frac{F_0^2}{4}\mathrm{tr}_f(\chi U^\dagger+U\chi^\dagger)-\frac{1}{8}\kappa^2\mathrm{tr}_f\left[[(D_\mu\xi_R)\xi_R^\dagger+(D_\mu\xi_L)\xi_L^\dagger]^2\right] \quad (3.297)$$

它和矢量介子的隐藏对称性描写的手征有效拉氏量式 (3.278) 完全一样，只要我们认同如下关系：

$$aF_0^2=\frac{1}{2}\kappa^2,\quad a'=0 \quad (3.298)$$

其中 $a'=0$ 是因为在原始拉氏量式 (3.282) 中我们没有特别考虑矢量单态与多重态的差别。两个描述矢量介子体系的等价性到此就证明完毕。

在介绍完矢量介子的手征有效拉氏量以后，我们现在开始讨论标量介子。标量介子是低能强子谱中最为困难的部分，一方面是因为标量除了其所具有的传统夸克、反夸克结构外，很多其他的奇异结构，如四夸克态、混杂态、胶球甚至分子态等都比较容易混合进来；另一方面标量介子往往有很大的宽度，导致传统的共振态诠释失效。所有这些都导致对标量介子的研究异常复杂，理论五花八门并且也不像前面讨论的矢量介子的两种描述可以建立相互的等价关系，而多是几乎完全没有相互联系，目前所有这些理论还远没达到形成共识的地步。在基本粒子最权威的数据统计 PDG 中，对低质量的标量介子不像其他强子那样罗列具体的性质，而是代之以一个单独的综述。鉴于此对标量介子，我们只定性地介绍几个与手征有效拉氏量相关理论的大概思路并给予评述，不过多涉及理论的具体细节。

首先从 3.2 节一开始给出的 1GeV 以下的介子谱看，最为重要的就是 f_0 或 σ (500MeV)，它远低于最低的矢量介子 ρ，也低于 $SU(3)$ 分类的赝标介子中最重的 η。它的这个性质似乎提示人们这个粒子应该和矢量介子不太一样，而应和赝标介子有类似的性质。赝标介子之所以轻，核心就是它们是 QCD 理论近似的手征对称性自发破缺导致的赝 Goldstone 粒子，而 σ 粒子也比较轻，这也就预示它可能也是

QCD 理论某种近似的对称性破缺导致的赝 Goldstone 粒子。人们发现 QCD 理论还真可能具有这样的对称性，它就是标度对称性。在手征极限下，QCD 理论的拉氏量中不再有任何带质量量纲的参数因而具有标度对称性，具体体现在 QCD 拉氏量的标度变换对应的守恒流的全散度是

$$\frac{\pi\beta(g)}{g^2}\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})+[1+\gamma_m(g)]\sum_{\psi=u,d,s}m_\psi\bar{\psi}\psi \tag{3.299}$$

其中，$\beta(g)$，$\gamma_m(g)$ 分别是 QCD 耦合常数跑动的 β 函数和 $\bar{\psi}\psi$ 的反常量纲。在手征极限下上式的第二项为零，标度变换的流是否守恒就完全取决于第一项能否为零。在低能区由于非微扰效应很强，人们到目前为止还无法准确判断 β 函数的确切跑动行为，有一种观点认为 QCD 在低能可能存在红外固定点，在能量足够低时耦合常数趋近于这个红外固定点因而 β 函数趋近于零。在这种情形下，上式的第一项也就为零了，因此标度变换的流守恒。当然由于圈图计算的重整化导致能标引进，这个对称性在量子水平上会被破坏，因而产生相应的零质量的标量 Goldstone 粒子，我们就把 σ 粒子看成是这个 Goldstone 粒子，它在 QCD 的手征极限下的低能红外固定点 (如果存在的话) 处是零质量的。考虑到实际的理论并没有真到达红外固定点，因此 β 函数并不严格为零，因而流守恒并不严格成立而是具有一些小的明显破坏，由此而产生一些对标度对称性的小的明显破缺，这些小的明显破缺使得作为 Goldstone 的零质量 σ 粒子变为一个具有小质量的赝 Goldstone 粒子。这种对 σ 粒子的处理从对称性角度和对赝标介子的处理思想几乎完全一样，只是对称性从手征对称性换成了标度对称性。这和 σ 粒子在强子谱中和赝标介子比较靠近是完全匹配的。人们把上两节介绍的赝标介子手征有效拉氏量推广到包括进标度对称性及其对应的赝 Goldstone 粒子 σ，形成包含 σ 粒子的赝标介子手征标度有效拉氏量[22]。

上面讨论的包含 σ 粒子的赝标介子手征标度有效拉氏量只单独挑出了最轻的标量介子，没涉及其他的标量粒子。以下将要介绍的另外两种与手征对称性有关的描述标量介子的方法都设法把所有标量介子联合起来一并予以考虑，这与我们前面对所有赝标介子一并进行研究是一致的。通常是将 3.2 节一开始给出的 1GeV 以下的标量介子 $f_0(500\mathrm{MeV})$，$K_0^*(800\mathrm{MeV})$，$f_0(980\mathrm{MeV})$，$a_0(980\mathrm{MeV})$ 看成是一个 $U_V(3)$ 的九重态。第一种也是最古老的方法，它是线性 σ 模型的方法，最新的介绍见文献 [23]。相对应地，我们上两节讨论的赝标介子手征有效拉氏量实际上是对传统的非线性 σ 模型的推广，p^2 阶手征有效拉氏量式 (3.124) 中的第一项就是标准的非线性 σ 模型。在这套非线性模型的描写中，赝标介子通过式 (3.99) 或式 (3.107) 形成手征对称性的非线性表示。之所以这么做是因为早期人们无法确认低质量标量介子的存在，因而在理论构建中努力设法构造没有标量介子的理论。原本作为夸

克、反夸克束缚态的介子，只有标量和赝标介子联合在一起才能形成手征对称性的线性表示。这点可以通过由式 (3.30) 给出的标量和赝标双线性夸克对密度 (它们经常被用来分别作为有效的复合标量和赝标介子场) 在手征对称性变换式 (3.44) 下的行为即可看出。为了简化计算我们只考虑无穷小情形的手征转动式 (3.61)，则我们发现在无穷小手征变换下

$$S^i \to S^i - 2f^{ijk}\alpha^j S^k + 2\beta^i P^0 + 2\mathrm{i}d^{ijk}\beta^j P^k \tag{3.300}$$

$$P^i \to P^i - 2f^{ijk}\alpha^j P^k - 2\beta^i S^0 - 2\mathrm{i}d^{ijk}\beta^j S^k \tag{3.301}$$

从上式看出在线性手征变换下，从赝标密度 (也是复合赝标介子场) 会变换出标量密度 (也是复合标量介子场)，反之亦然。如果想要在赝标密度的变换中不出现标量密度，只有像式 (3.98) 和 (3.99) 或式 (3.106) 和 (3.107) 那样采用非线性的表示。在 3.3 节从 QCD 推导赝标介子手征有效拉氏量时，当我们试图利用手征转动把赝标介子场积入路径积分时，原本在式 (3.211) 中也出现了厄米的九重态标量场 σ，只是那时我们强行在约束条件中把它减除掉了。介绍这些是说明原本从手征对称性的线性实现来看，标量介子和赝标介子是交缠在一起的，只是我们要构造纯赝标介子的理论，只好通过非线性实现的方式去除了标量介子的贡献。现在回到线性 σ 模型，只不过是退回到原来手征对称性的线性实现而已，从理论框架上应该比我们前两节讨论的手征对称性的非线性实现简单许多。在实际处理中手征对称性的非线性实现的一个重要特点是没有纯赝标介子的自相互作用势 (也就是没有 p^0 阶的拉氏量项)，而对线性实现的理论则会出现标量和赝标介子的自相互作用势，而且对每一个标量和赝标介子场的微商项原则上都可以乘上一个任意的标量和赝标介子的自相互作用势项，这些无论对理论描述和实验验证都造成了很大的复杂性，这是线性 σ 模型的缺点。

除了上面提到的退回到手征对称性的线性实现的描写标量介子和赝标介子的线性 σ 模型外，另一种依据赝标介子手征有效拉氏量并试图包括进标量介子的方法是对从赝标介子手征有效拉氏量出发计算出的散射振幅进行推广。因为我们是利用低能展开进行计算的，这样得到的散射振幅在能量高时会变得很大以致破坏量子场论中的幺正性。为了改善理论的高能行为，人们对计算得到的散射振幅进行改进，把原来对能动量的幂次依赖扩展为分式依赖，例如，对一个变量 x 的函数在准到一阶时我们得到的结果是 $1+x$，那么在准到这阶的精度下，它也可以写为分式结果 $1/(1-x)$。通常把这种保持同阶精度但扩展了的散射振幅的方法叫逆散射振幅方法 (inverse amplitude method，IAM)，相应的理论叫幺正化的手征有效理论，具体如何幺正化主要以最大范围地改善理论的幺正性为基本要求。人们发现[24]，原本只有赝标介子极点的散射振幅在幺正化后出现了标量介子极点，由此给出对标量介子的描述。到此我们完成了对标量介子手征有效拉氏量的概要介绍。

到目前为止我们已经讨论了绝大部分在 3.2 节开始给出的 1GeV 以下的介子，只剩一个 η' (958MeV) 尚未讨论。现在我们就介绍关于它的手征有效拉氏量理论。

对 η' 来说，由于它属于赝标介子，在手征对称性的框架下最自然描述它的方式就是把它嵌入前两节讨论的赝标介子八重态，也就是考虑包括进 η' 的扩充了的赝标介子九重态。但是从 3.2 节开始给出的强子谱看，η' 的质量似乎远离其他八个轻赝标介子，反而和其他较重的一些矢量、标量介子还有质子中子等典型的低能强子的质量相近。这预示着我们不能指望期待 η' 完全具有 QCD 手征对称性的赝 Goldstone 粒子的性质。从 QCD 本身看，当我们把从 $SU_L(3)\times SU_R(3)$ 破缺下来的 $SU_V(3)$ 扩充到 $U_V(3)$ 时就涉及 $U_L(3)\times U_R(3)=SU_L(3)\times SU_R(3)\times U_V(1)\times U_A(1)$ 中的 $U_A(1)$ 的破缺问题。若把 η' 看成是赝 Goldstone 粒子，它就对应是 $U_A(1)$ 自发破缺所产生的 Goldstone 粒子。而如我们在式 (3.13) 后面的讨论所介绍的，$U_A(1)$ 在量子水平上具有反常是一个明显破坏的对称性，不具有自发破缺的性质，因而把 η' 看成是赝 Goldstone 粒子并不是一个合理的描述。为了能够找到把 η' 嵌入赝标介子九重态的理由，人们注意到在 QCD 的大 N_c 极限下 $U_A(1)$ 反常并不出现，也就是它是 $1/N_c$ 阶的效应，因此至少在大 N_c 极限下把 η' 看成是赝 Goldstone 粒子嵌入赝标介子九重态是完全合理的。而 η' 比其他八个赝标介子重很多反映的是 QCD 的 $1/N_c$ 阶效应在某些特定方面并不很小。

为了描写赝标介子九重态，我们必须把原来式 (3.97) 定义的 U 场进行扩充，使之能包括 η' 的自由度，具体就是废弃要求 (3.101)，把 U 场的行列式作为一个独立的描写 η' 粒子的场变量，相应地我们也不再能取 $\bar{\theta}=0$ 了。为了讨论这个新引进的自由度在手征变换下的行为，引入如下组合场变量来描写 η' 粒子，

$$X(x)\equiv \mathrm{i}\bar{\theta}(x)-\mathrm{lndet}_f U(x) \tag{3.302}$$

在手征变换下利用 $\bar{\theta}$ 的变换规则式 (3.66) 和 U 的变换规则式 (3.99)，我们看到 X 在局域手征变换 $U_L(3)\times U_R(3)$ 下是不变的，而在空间反演变换下 X 要出现一个负号，X 场的动量幂次显然是 p^0 阶的。这些意味着在包含进 η' 粒子后，我们现在会有 p^0 阶的赝标介子手征有效拉氏量，它是一个纯 X 场的任意函数，

$$\mathscr{L}_0\equiv W_0[X] \tag{3.303}$$

而 p^2 阶的赝标介子手征有效拉氏量也可以从式 (3.124) 扩充为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_2'''=&W_1[X]\mathrm{tr}_f[\nabla_\mu U(\nabla^\mu U)^+]+W_2[X]\mathrm{tr}_f(\chi U^+ + U\chi^+)+\mathrm{i}W_3[X]\mathrm{tr}_f(\chi U^+ - U\chi^+)\\&+W_4[X][\nabla_\mu \mathrm{lndet}U][\nabla^\mu \mathrm{lndet}U]\\&+W_5[X][\nabla_\mu \mathrm{lndet}U]\nabla^\mu\bar{\theta}+W_6[\mathrm{X}]\nabla_\mu\bar{\theta}\nabla^\mu\bar{\theta}\end{aligned} \tag{3.304}$$

其中，$W_i[X](i=0,1,2,4,5,6)$ 是 X 的任意偶函数；$W_3[X]$ 是 X 的任意奇函数。

$$\nabla_\mu \mathrm{lndet}U \equiv \partial_\mu \mathrm{lndet}U - 2\mathrm{i}\mathrm{tr}_f a_\mu \tag{3.305}$$

习惯上人们喜欢利用 U 场的行列式的定义的任意性把 $W_4[X]$ 去掉。对 p^4 阶的拉氏量及如何从 QCD 中推导出这些 p^0、p^2 和 p^4 阶的手征有效拉氏量，可以参考文献 [25]。

作为对低能介子手征有效拉氏量理论的结尾，为了更系统统一地描写除最轻的赝标介子外的所有其他轻介子，我们不再对它们做更多的额外对称性假设，而把前面采用反对称张量场描述矢量介子的方法推广到所有其他介子，把它们一视同仁地对待来构造包含所有这些介子的赝标介子手征有效拉氏量[25]。我们只考虑作为 $SU_V(3)$ 的八重态 (用 R 表示) 和单态 (用 R_1 表示) 的介子，包括矢量 1^-(用反对称张量 $\mathbf{V}_{\mu\nu}$ 描写)、轴矢 1^+(用反对称张量 $\mathbf{A}_{\mu\nu}$ 描写)、标量 0^+(用标量 $\mathbf{S}$ 描写) 和赝标 0^-(用赝标量 $\mathbf{P}$ 描写) 介子 (这里的轴矢和赝标介子都应是强子谱中质量超过 1GeV 的介子)，这些介子场都是 p^0 次幂。在手征对称性变化下，我们要求八重态像式 (3.285) 中的反对称张量场一样变换，单态则保持不变，

$$R(x) \to \tilde{h}(x)R(x)\tilde{h}^\dagger(x), \quad R_1(x) \to R_1(x) \tag{3.306}$$

R 的协变微商为

$$\nabla^\lambda R \equiv \partial^\lambda R - \mathrm{i}[v_\Omega^\lambda, R] \tag{3.307}$$

包含最轻的赝标介子和上面提到的所有介子的手征有效拉氏量为原来的在上两节里讨论由式 (3.118) 给出来的纯赝标介子的手征有效拉氏量 $L_{\mathrm{eff}}[U,J,\bar{\theta}]$ 再加上其他介子部分的贡献 L_{res}，

$$L_{\mathrm{res}} = \sum_{R=\mathbf{V},\mathbf{A},\mathbf{S},\mathbf{P}} [\mathscr{L}_{\mathrm{kin}}(R) + \mathscr{L}_2(R)] \tag{3.308}$$

其中其他介子部分进一步可以分为动能项和相互作用项，动能项是

对 $R=\mathbf{V}$，$\mathbf{A}$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{kin}}(R) = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}_f[\nabla^\lambda R_{\lambda\mu}\nabla_\nu R^{\nu\mu} - \frac{1}{2}M_R^2 R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}] - \frac{1}{2}\partial^\lambda R_{1,\lambda\mu}\partial_\nu R_1^{\nu\mu} + \frac{1}{4}M_{R_1}^2 R_{1,\mu\nu}R_1^{\mu\nu} \tag{3.309}$$

对 $R=\mathbf{S}$，$\mathbf{P}$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{kin}}(R) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}_f[\nabla^\mu R\nabla_\mu R - M_R^2 R^2] + \frac{1}{2}[\partial^\mu R_1\partial_\mu R_1 - M_{R_1}^2 R_1^2] \tag{3.310}$$

其中，M_R, M_{R_1} 分别是手征极限下的介子质量，显然若要维持这些动能项为 p^2 阶，这些介子质量必须被看成是 p^1 阶的量。相互作用项是

$$\mathscr{L}_2[\mathbf{V}(1^-)] = \frac{F_V}{2\sqrt{2}}\mathrm{tr}_f[\mathbf{V}^{\mu\nu}\hat{V}_{\mu\nu}] + \frac{\mathrm{i}G_V}{\sqrt{2}}\mathrm{tr}_f[\mathbf{V}_{\mu\nu}a_\Omega^\mu a_\Omega^\nu] \tag{3.311}$$

$$\mathscr{L}_2[\mathbf{A}(1^+)] = \frac{F_A}{2\sqrt{2}}\mathrm{tr}_f[\mathbf{A}^{\mu\nu}\tilde{\mathrm{V}}_{\mu\nu}] \tag{3.312}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_2[\mathbf{S}(0^+)] =& c_d\mathrm{tr}_f[\mathbf{S}a_{\Omega\mu}a_\Omega^\mu] + c_m\mathrm{tr}_f[\mathbf{S}(\Omega^\dagger\chi\Omega^\dagger + \Omega\chi\Omega)] \\ &+ \tilde{c}_d\mathbf{S}_1\mathrm{tr}_f[a_{\Omega\mu}a_\Omega^\mu] + \tilde{c}_m\mathbf{S}_1\mathrm{tr}_f(\Omega^\dagger\chi\Omega^\dagger + \Omega\chi\Omega)\end{aligned} \tag{3.313}$$

$$\mathscr{L}_2[\mathbf{P}(0^-)] = \mathrm{i}d_m\mathrm{tr}_f[\mathbf{P}(\Omega^\dagger\chi\Omega^\dagger - \Omega\chi\Omega)] + \mathrm{i}\tilde{d}_m\mathbf{P}_1\mathrm{tr}_f(\Omega^\dagger\chi\Omega^\dagger - \Omega\chi\Omega) \tag{3.314}$$

其中，$\hat{\mathrm{V}}_{\mu\nu}$ 由 (3.284) 确定。而 $\tilde{\mathrm{V}}_{\mu\nu}$ 为

$$\tilde{\mathrm{V}}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}[\Omega^\dagger f_{\mu\nu}^R\Omega - \Omega f_{\mu\nu}^L\Omega^\dagger] \tag{3.315}$$

文献 [26] 通过与实验进行比较给出了式 (3.310)~(3.314) 中各种参数的数值。注意在上面拉氏量中，对 $\mathbf{S},\mathbf{P},\mathbf{V},\mathbf{A}$ 我们只写下了其动能项和单个介子场与最轻的赝标介子场的相互作用项，并未像 3.2 节对最轻的赝标介子那样讨论这些介子的自相互作用 (强调一下目前的扔掉自相互作用项并取动能项中的质量为物理质量是一种自洽的理论处理。如果要考虑进自相互作用项，动能项中的质量项可能就不一定能取为物理质量了，因为自相互作用可能会改变质量)，也没有讨论多个介子场与最轻的赝标介子场的相互作用项。这是因为我们把 $\mathbf{S},\mathbf{P},\mathbf{V},\mathbf{A}$ 都取为了 p^0 阶，它使得对任何一个固定的动量幂次项，原则上都可以含无穷多的任意幂次的 $\mathbf{S},\mathbf{P},\mathbf{V},\mathbf{A}$ 项，因而无法处理，因此我们只能限制自己只讨论有固定 $\mathbf{S},\mathbf{P},\mathbf{V},\mathbf{A}$ 幂次的项。显然这样的处理是有缺陷的，特别在计算圈图时就无法估计那些没被考虑的项的贡献。而原来在 3.2 节讨论的纯赝标介子的手征有效拉氏量中，所有可能的项对圈图的贡献都是可以被计算进来的。这是我们多次提到的只有纯赝标介子的手征有效拉氏量理论是最完备的原因，同时也是我们在 3.3 节开始强调的需要从 QCD 的第一原理推导的原因之一，因为从 QCD 推导出来的结果往往都是 $\mathbf{S},\mathbf{P},\mathbf{V},\mathbf{A}$ 的紧致表达式，其中不再有任何的任意性，不像现在即使数幂也无法限制其函数形式。文章 [27] 做了这样的推导，限于篇幅我们不再对这些推导进行介绍。

文献 [26] 估算了把手征有效拉氏量式 (3.308) 中这些额外的介子积掉对 p^4 阶纯赝标介子手征有效拉氏量的贡献，发现了矢量介子的贡献是最主要的。到此为止我们完成了对 1GeV 以下的所有介子的手征有效拉氏量的介绍和讨论，部分的拉氏量还包括了一些 1GeV 以上的介子。

作为本节的最后一部分，我们简单地介绍一下重子的情况。首先沿用前面对介子场的处理方式，只不过把自旋为 0 或 1 的介子场换为自旋为 1/2 的重子场。为了匹配我们一直沿用的 $SU_V(3)$ 对称性，我们对重子也讨论八重态，用 $(I_3,\ S,\ \text{质量})$ 标记，它们重子数为 1，J^P 为 $1/2^+$：

$$\Xi^-(-1/2,\ -2,\ 1322\mathrm{MeV}),\quad \Xi^0(1/2,\ -2,\ 1315\mathrm{MeV})$$

$$\Sigma^-(-1,\ -1,\ 1197\text{MeV}),\quad \Sigma^0(0,-1,1193\text{MeV})$$
$$\Lambda(0,-1,1116\text{MeV}),\quad \Sigma^+(1,-1,1189\text{MeV})$$
$$n(-1/2,\ 0,\ 940\text{MeV}),\quad p(1/2,\ 0,\ 938\text{MeV})$$

其中，除了质子 p 和中子 n 外，其他重子的质量都高于 1GeV。我们用一个复的四分量狄拉克场构成的一个无迹 3×3 矩阵 B 来描写八重态重子场，

$$B=\sum_{i=1}^{8}\frac{B_i\lambda^i}{\sqrt{2}}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0+\dfrac{1}{\sqrt{6}}\Lambda & \Sigma^+ & p\\ \Sigma^- & -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0+\dfrac{1}{\sqrt{6}}\Lambda & n\\ \Xi^- & \Xi^0 & -\dfrac{2}{\sqrt{6}}\Lambda\end{pmatrix}\tag{3.316}$$

我们要求在局域手征变换下，上面的重子八重态场作如下变换：

$$B(x)\to\tilde{h}(x)B(x)\tilde{h}^\dagger(x)\tag{3.317}$$

则此重子场的动能项及其与赝标介子的相互作用项为

$$\mathscr{L}_{B1}=\mathrm{Tr}[\bar{B}(\mathrm{i}\not{D}-M_0)B]-\frac{D}{2}\mathrm{Tr}(\bar{B}\gamma_\mu\gamma_5\{a_\Omega^\mu,B\})-\frac{F}{2}\mathrm{Tr}(\bar{B}\gamma_\mu\gamma_5[a_\Omega^\mu,B])\tag{3.318}$$

其中，M_0 是手征极限下的重子八重态质量

$$D^\mu B\equiv\partial^\mu B-\mathrm{i}[v_\Omega^\mu,B]\tag{3.319}$$

因为是与赝标介子的相互作用，因此出现在相互作用项中的是转动后的轴矢外源及相应的轴矢 γ 矩阵；两个常数 D 和 F 可以从重子的半轻子衰变 $B\to B'+e^-+\bar{\nu}_e$ 进行估算[28]，结果是 $D=0.80$，$F=0.50$。对重子的手征有效拉氏量的更详细介绍见文献 [29]。

另一种在手征有效拉氏量理论中描述重子的方法不再依赖单独引入的重子场，而是依赖在 3.2 节中讨论的纯赝标介子的手征有效拉氏量。在那里我们引进了 U 场来描写赝标介子，它只是对应 U 场的拓扑平凡位形。还存在拓扑非平凡的位形：实际上对固定的时间，U 场对应 R^3 到 $SU(3)$ 流型 (在两味的情形是 $SU(2)$) 的映射，如果要求 U 场在空间无穷远回到真空 $U\big|_{r\to\infty}=1$，在拓扑上这些映射可以被分类组成同伦群，其中特别重要的是 $\pi_3(SU(3))=\pi_3(SU(2))=Z$ 确定了这些映射可以被整数来分类。而其中的整数为零和非零分别对应拓扑平凡和非平凡的 U 的位形 (所谓的拓扑孤子解)，这个整数现在被认作是重子数，它是重子流所对应的荷，而重子流是

$$B^\mu\equiv\frac{\mathrm{i}\varepsilon^{\mu\nu\mu'\nu'}}{24\pi^2}\mathrm{Tr}_f[L_\nu L_{\mu'}L_{\nu'}]\tag{3.320}$$

其中，L_μ 的定义由式 (3.146) 给出。而重子数就对应重子流零分量的全空间积分。这个重子流的守恒是可以直接通过计算重子流的全散度得到的，其中不需要借助 U 场的场方程。式 (3.124) 在外源为零时给出的 p^2 阶手征有效拉氏量所给出的重子数为 1 的孤子解是不稳定的，但把式 (3.125) 在外源为零时给出的 p^4 阶手征有效拉氏量加进来，并把其中的三个系数 L_1、L_2、L_3 取为实验所确定的数值后孤子解将会变成稳定的了。注意对重子这样的描写只限于把它看成是 U 场的经典拓扑孤子解，并未涉及其量子效应，文献中即使讨论量子化也最多只是到角动量的量子化的程度，完全没有涉及场本身的量子化。再有就是这些拓扑孤子的讨论多限制在两味的情形，因为三味的导出结果与实验不相符。对重子的拓扑孤子描写的最新介绍见文献 [30]，在其中也可以找到早期的综述。

参 考 文 献

[1] Weinberg S. Physica., 1979, A96: 327.

[2] Gasser J, Leutwyler H. Annals. Phys., 1984, 158: 142.

[3] Fujikawa. Phys. Rev., 1980, D21: 2848; Phys. Rev., 1980, D22: 1499; Phys. Rev., 1984, D29: 285.

[4] Bijnens J, Colangelo G, Ecker G. JHEP., 1999, 02: 020.

[5] Jackiw R. Phys. Rev., 1974, D9: 1686.

[6] Gasser J, Leutwyler H. Nucl. Phys., 1985, B250: 465.

[7] Nambu Y, Jona-Lasinio G. Phys. Rev., 1961, 122: 345; 1961, 124: 246.

[8] Wang Q, Kuang Y P, Wang X L, et al. Phys. Rev., 2000, D61: 54011.

[9] Pagels H, Stokar S. Phys. Rev., 1979, D20: 2947.

[10] Yang H, Wang Q, Kuang Y P, et al. Phys. Rev., 2002, D66: 014019.

[11] Jiang S Z, Zhang Y, Li C, et al. Phys. Rev., 2010, D81: 014001.

[12] Jiang S Z, Wang Q. Phys. Rev., 2010, D81: 094037.

[13] Jiang S Z, Zhang Y, Wang Q. Phys. Rev., 2013, D81: 094014.

[14] Jiang S Z, Wei Z L, Chen Q S, et al. Phys. Rev., 2015, D92: 025014.

[15] Ma Y L, Wang Q. Phys. Lett., 2003, B560: 188.

[16] Bando M, Kugo T, Uehara S, et al. Phys. Rev. Lett., 1985, 54: 1215.

[17] Bando M, Kugo T, Yamawaki K. Phys. Rep., 1988, 164: 217.

[18] Kawarabayashi K, Suzuki M. Phys. Rev. Lett., 1966, 16: 255.

[19] Riazuddin, Fayyazuddin. Phys. Rev., 1966, 147: 1071.

[20] Wang X L, Wang Q. Commun. Theor. Phys., 2000, 34: 519.

[21] Tanabashi M. Phys. Lett., 1996, B384: 218.

[22] Crewther R J, Tunstall L C. Phys. Rev., 2015, D91: 034016.

[23] Fariborz A H, Schechter J, Zarepour S, et al. Phys. Rev., 2014, D90: 033009.

[24] Oller J A, Oset E. Phys. Rev., 1999, D59: 074001.
[25] Wang X L, Wang Z M, Wang Q. Commun. Theor. Phys., 2000, 34: 683.
[26] Ecker G, Gasser J, Pich A. Nucl. Phys., 1989, B321: 311.
[27] Ren K, Fu H F, Wang Q. Phys. Rev., 2017, D95: 074012.
[28] Borasoy B. Phys. Rev., 1999, D59: 054021.
[29] Scherer S, Schindler M. Lect. Notes Phys., 21012, 830: 1.
[30] Ma Y L, Rho M. Sci. Chin. Phys, Mech&Astro, 2017, 60: 032001.

第 4 章　QCD 的大 N_c 展开

QCD 的耦合常数在中低能区不小，导致按耦合常数幂次展开的微扰论失效。为了研究中低能区中的 QCD 特别是其非微扰效应，我们需要发展相应的计算方法。第 3 章介绍的手征微扰论和低能展开就是一种按轻夸克的流质量和低能强子能动量的幂次展开的方法，它必须在强子的有效理论层次进行。本章我们介绍另外一种在 QCD 的夸克胶子层次的非微扰计算方法，它是以 QCD 颜色数目的倒数作为展开参数进行的幂次展开[1,2]。由于这个方法最开始是从 Feynman 图的分析发展起来的，因此在 4.1 节，我们先从大 N_c 展开的标准 Feynman 图分析入手进行介绍，然后辅以一些相关的路径积分的一般性讨论；然后在 4.2 节和 4.3 节分别讨论强子物理中最重要的两种粒子 —— 介子和重子在大 N_c 展开中的特性；最后选择大 N_c 展开对 QCD 的基础影响十分大的圈动力学进行介绍。

4.1　QCD 大 N_c 展开的 Feynman 图及路径积分分析

大 N_c 展开的具体做法是将 QCD 的 $SU(3)$ 颜色规范对称性中的颜色数由 3 推广到一个很大的 N_c，同时保持 $g^2N_c \equiv g_{\rm eff}^2$ 固定，将理论按照 $1/N_c$ 的幂次进行展开。从后面的介绍会发现，QCD 在这样展开的领头阶也就是当 N_c 趋于无穷大时具有十分好的性质。实际上当 N_c 很大时，胶子的数目会按照 N_c^2 增长，它们对 Feynman 图的内线圈的贡献也会相应地增长，为了平衡具有不同内线的 Feynman 图的贡献，我们要求耦合常数的平方 $g^2 = g_{\rm eff}^2/N_c$ 要变得很小，这是我们在大 N_c 展开中必须要求 g^2N_c 固定的原因。而如果我们不选 g^2N_c 固定改为选 $g^2N_c^{1+\varepsilon}$ 固定，则当 $\varepsilon < 0$ 时，在大 N_c 极限下无穷阶的 Feynman 图在任意尺度都将会主导我们讨论的结果，我们将会失去渐近自由；而当 $\varepsilon > 0$ 时在大 N_c 极限在任意尺度理论都将趋于自由场；这些可以通过 QCD 的微扰两圈 β 函数明显地看出来：

$$\mu\frac{{\rm d}g}{{\rm d}\mu} = -\frac{1}{(4\pi)^2}\left(\frac{11N_c - 2N_f}{3}\right)g^3 - \frac{1}{(4\pi)^4}\left(\frac{34N_c^3 - 13N_c^2N_f + 3N_f}{3N_c}\right)g^5 + O(g^7) \tag{4.1}$$

在大 N_c 极限下，它化为

$$\mu\frac{{\rm d}g_{\rm eff}^2}{{\rm d}\mu} = -\frac{11}{24\pi^2}g_{\rm eff}^4 - \frac{17}{192\pi^4}g_{\rm eff}^6 + O(g_{\rm eff}^8) \tag{4.2}$$

如果 $\varepsilon < 0$，显然后面越高圈的图贡献越大；而如果 $\varepsilon > 0$ 则方程右边的各项都分别趋于零。这两者都不是我们所希望的，因而在大 N_c 展开中我们只有选择 $g^2 N_c$ 固定，这看起来是必要的，但并不一定是充分的。

大 N_c 展开的主要结果都是从对 Feynman 图进行分析得到的。为了能展示这些分析的细节特别是比较有利于计算 Feynman 图对 N_c 的依赖，我们先引入夸克和胶子场的如下双线表示[1]：夸克场 ψ^i 带颜色指标 i，它的传播子在 Feynman 图上用 ——→—— 一条带箭头的线来代表，反夸克场 $\bar{\psi}_i$ 带颜色指标 i，在 Feynman 图上用 ——←——一条带反向箭头的线来代表其传播子，对式 (1.20) 定义的胶子场 $(A_\mu)_{ij} = T^a_{ij} A^a_\mu$，在 Feynman 图上用  带相反方向箭头的双线来代表它的传播子 (注意，通常的文献和教科书里胶子场传播子的 Feynman 图习惯用螺旋线来代表，但在涉及大 N_c 展开的讨论中最方便的是这种双线表示)。在双线表示中，由 QCD 拉氏函数式 (1.27) 给出的胶子自作用顶角用双线胶子场 $(A_\mu)_{ij}$ 来描写

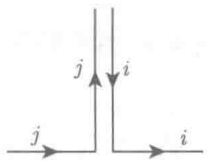
$$\mathrm{Tr}(A_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu) = A_{\mu,ij} A_{\nu,jk} \partial^\mu A^\nu_{ki}, \quad \mathrm{Tr}(A_\mu A_\nu A^\mu A^\nu) = A_{\mu,ij} A_{\nu,jk} A^\mu_{kl} A^\nu_{li} \tag{4.3}$$

用 Feynman 图描述分别就是

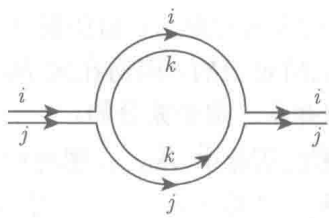
而夸克和胶子的规范作用用双线胶子场 $(A_\mu)_{ij}$ 描写是

$$\bar{\psi} \gamma_\mu A^\mu \psi = \bar{\psi}_i \gamma_\mu \psi_j A^\mu_{ij} \tag{4.4}$$

用 Feynman 图描述就是



利用双线表示，Feynman 图对的 N_c 的依赖可以很容易计算出来。例如，如下的胶子真空极化图



在这个图中求和指标只有在其中心的动量为 k 的那条内线上的颜色指标，它形成一个内部圈求和贡献一个因子 N_c，它和图中的两个三胶子顶角各贡献的一个耦合常数 g，联合起来组成一个 $g^2N_c \equiv g_{\text{eff}}^2$ 的与 N_c 无关的量，因而这个图在大 N_c 展开中是 $O(1)$ 阶的。更一般地，对一个连接的 Feynman 图我们把每个指标圈覆盖上一块小的平面，把夸克圈也单独覆盖上一块小的平面，整个 Feynman 图就变成一个有很多小平面衔接而成的曲面，曲面的边界是夸克线或胶子双线中的一条单指标线。这样的曲面一般可能是多重连通的包含有一些虫洞。假设这个 Feynman 图有 V_3 个三线顶角 (包括胶子自作用三线顶角和夸克胶子相互作用顶角)，V_4 个胶子自作用四线顶角，I 个内部指标圈。则此 Feynman 图对耦合常数和 N_c 的依赖来自如下因子：

$$r = g^{V_3+2V_4} N_c^I \tag{4.5}$$

假设 Feynman 图所代表的曲面如果有 F 个小平面，L 个夸克圈，则

$$F = L + I \tag{4.6}$$

如果我们将此 Feynman 图的每条内线的两端各赋予一个点，并记图上的总点数为 P，注意到每条内线总是连接两个顶角，因此我们有

$$2P = 3V_3 + 4V_4 \tag{4.7}$$

结合式 (4.6) 和 (4.7)，此 Feynman 图给出的耦合常数和 N_c 因子式 (4.5) 化为

$$r = g^{2P-2V} N_c^{F-L} \tag{4.8}$$

其中，V 是 Feynman 图中的总顶角数：

$$V = V_3 + V_4 \tag{4.9}$$

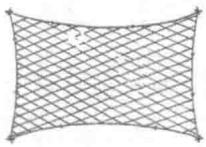
利用 Euler 给出的定理：

$$F - P + V = 2 - 2H \tag{4.10}$$

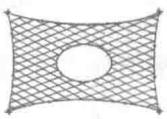
其中，H 是整个曲面的孔洞数 (如球 $H = 0$，面包圈 $H = 1$，等等)，我们进一步把式 (4.8) 化为

$$r = (g^2 N_c)^{\frac{1}{2}V_3+V_4} N_c^{2-2H-L} \tag{4.11}$$

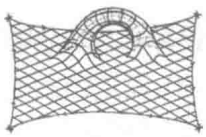
从式 (4.11) 我们看到，在所有可能的 Feynman 图中，在大 N_c 展开下，最大 (也是最低阶) 的贡献来自 $H=L=0$ 的 Feynman 图。$H=0$ 对应没有孔洞的平面图，$L=0$ 对应没有内部的夸克圈，因此大 N_c 极限下领头阶是没有内部夸克圈的平面图，由于有无穷多这样的 Feynman 图，体现为可以在图中不断地增加不破坏平面图性质的胶子内线 (因而图中的 V_3 和 V_4 可以不断地增加)，大 N_c 极限就是要将它们求和，这虽看起来是不可能完成的工作，但后面将会看到我们确可以得到很多在大 N_c 极限下理论的很好性质。在此基础上按照式 (4.11) 在领头阶 Feynman 图上每多考虑一个内部夸克圈，整个图就会多出一个 $1/N_c$ 因子；而要每多一个孔洞则会多出一个 $1/N_c^2$ 因子。从这个意义上讲，Feynman 图的大 N_c 展开实际上就是按照 Feynman 图中所包含的内部夸克圈和 Feynman 图所具有的孔洞数而进行的展开。原始文献 [1] 给出的一个夸克流流 4 点格林函数的大 N_c 展开领头阶 $O(N_c)$ 是除必有的一个夸克圈外无额外内部夸克圈无孔洞的平面图：



次领头阶 $O(1)$ 是具有一个额外内部夸克圈无其他孔洞的图：



而次次领头阶 $O(1/N_c)$ 是没有额外内部夸克圈但有一个孔洞的图：



当然也可以是没有孔洞但有两个额外内部夸克圈的图。一般地说一个物理过程的振幅 $\mathscr{A}$ 会有无穷多的 Feynman 图，在大 N_c 展开下，它可以按照 Feynman 图的孔洞数 H、夸克的圈数 L 和有效耦合常数 g_{eff}^2 的幂次进行展开，

$$\mathscr{A}=\sum_{H,L=0}^{\infty}N_c^{2-2H-L}\sum_{n=0}^{\infty}c_{H,L;n}g_{\text{eff}}^{2n} \tag{4.12}$$

以上是 QCD 大 N_c 展开的 Feynman 图分析，下面针对其领头阶 —— 大 N_c 极限进行路径积分分析。大 N_c 极限的一个非常突出的性质是：对 QCD 中任意一个规范不变的算符 X，它可以是局域算符 $\text{Tr}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})$，或非局域算符像 Wilson 圈

(在本章的最后一节我们针对它进行专门的分析) 或更奇特的 Dirac 算符的行列式 $\mathrm{Det}(\mathrm{i}\not{D}-m)$，在大 N_c 极限下它的真空期望值满足因子化规则：

$$\langle X^2\rangle = \langle X\rangle^2 + 1/N_c \text{ 高阶项} \tag{4.13}$$

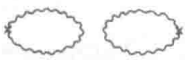
从 Feynman 图的角度看，我们只以 $\mathrm{Tr}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})$ 为例进行证明，考虑其自由场部分。$\langle X\rangle$ 是 N_c^2 阶的，

$\langle \mathrm{X}\rangle$ =



因为有 N_c^2 种胶子 (严格地说对 $SU(N_c)$ 是 N_c^2-1 种胶子，但在大 N_c 极限下，差别 1 是高阶项可以被忽略) 求和；因此 $\langle X\rangle^2$ 是 N_c^4 阶的，它由两个不相互连接每个都为 N_c^2 阶的一圈图相乘而成，

$\langle \mathrm{X}\rangle^2$ =



而 $\langle X^2\rangle$ 的连接部分只是 N_c^2 阶的，因为它只有一个来自两个 X 植入的胶子圈，其中每种共有 N_c^2 个胶子都需求和遍，因此是 N_c^2 阶的，

$\langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2$ =



因此 $\langle X^2\rangle$ 的连接部分相对其不连接部分 $\langle X\rangle^2$ 在大 N_c 极限下是高阶可忽略的项，因而我们有式 (4.13)，它不仅对 $\mathrm{Tr}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})$ 对，对任意的规范不变算符都是正确的。不仅如此，式 (4.13) 还可以进一步推广到更多的规范不变算符 (定域或非定域) X、Y、Z，即

$$\langle XYZ\rangle = \langle X\rangle\langle Y\rangle\langle Z\rangle + 1/N_c \text{ 高阶项} \tag{4.14}$$

式 (4.13) 的另一种表达是

$$\langle (X-\langle X\rangle)^2\rangle = 1/N_c \text{ 高阶项} \tag{4.15}$$

也就是说规范不变的算符在大 N_c 极限下没有平方量子涨落，成为了 c 数。规范不变算符的乘积的真空期望值是因子化的，这个结果对理解 QCD 的大 N_c 极限十分重要，其中一个重要应用来自如下 E. Witten 对其的诠释：用欧氏空间的胶子场的路径积分可以将 X 的真空期望值写成

$$\langle X\rangle = \frac{\int \mathscr{D}A_\mu X \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x \mathrm{Tr}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}}}{\int \mathscr{D}A_\mu \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x \mathrm{Tr}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}}} \tag{4.16}$$

其中，我们需要对所有可能的胶子场 A_μ 位形进行平均。考虑两个规范不等价的胶子场位形 $A_\mu(1)$ 和 $A_\mu(2)$，则原则上存在某个规范不变的算符 X 来区分它们，也就是 X 在 $A_\mu(1)$ 和 $A_\mu(2)$ 分别取不同的数值。因此 X 分别具有确定的几率 (注意由于在式 (4.16) 中我们选择了欧氏空间的路径积分，因此这些几率都是正定的) 在 $A_\mu(1)$ 和 $A_\mu(2)$ 上，而考虑 X 在 $A_\mu(1)$ 和 $A_\mu(2)$ 分别取不同的数值，则必然导致其非零的平均平方涨落。因此在大 N_c 极限下规范不变算符的零平均平方涨落意味着我们实际没有做两个或更多个胶子场的平均。因而应只能有一个单一的经典胶子场 (只准到可以相差一个规范变换) $A_\mu^{\rm cl}(x)$ 实际贡献所有的路径积分。这个经典胶子场 (也叫 master 场) 使得对任何规范不变的算符 X，其真空期望值就是其在经典场上的数值：

$$\langle X\rangle = X(A_\mu^{\rm cl}) \tag{4.17}$$

显然式 (4.17) 将导致因子化式 (4.13) 和 (4.14)。

到此为止我们把 QCD 的大 N_c 极限化为存在一个经典胶子场 $A_\mu^{\rm cl}(x)$。不幸的是人们不知道如何确定这个经典胶子场，只能发现一些对它的限制。首先我们可以对经典胶子场的时空坐标依赖进行平移变换，把它从 x 处平移到 $x+x_0$，其中 x_0 是另外一个固定的时空点，而在 $x+x_0$ 处的经典胶子场又可以写为

$$A_\mu^{\rm cl}(x+x_0) = {\rm e}^{x\cdot\frac{\partial}{\partial x_0}} A_\mu^{\rm cl}(x_0){\rm e}^{-x\cdot\frac{\partial}{\partial x_0}} \tag{4.18}$$

我们选式 (1.21) 中的规范变换 $U(x) = {\rm e}^{-x\cdot\frac{\partial}{\partial x_0}}$，则针对先进行了平移再做式 (1.21) 给出的规范变换后的经典胶子场为

$$U(x)A_\mu^{\rm cl}(x+x_0)U^{-1}(x) - \frac{\rm i}{g}[\partial_\mu U(x)]U^{-1}(x) = A_\mu^{\rm cl}(x_0) + \frac{\rm i}{g}\frac{\partial}{\partial x_0^\mu} \quad (\text{对所有 } x) \tag{4.19}$$

因此总可以把经典胶子场通过平移加规范变换变成一个位于某个固定时空点的经典胶子场再叠加上对这个固定时空点的微商 (实际是对这个点的动量)，而这个固定时空点的经典胶子场 (通常习惯把它选为坐标原点) 在洛伦兹群变换下按照矢量进行变换。因此 QCD 的大 N_c 极限只要求我们知道这个有 N_c^2 个分量的四矢量分量 (不幸的是 N_c 是无穷大)，不需要再知道其对时空坐标的依赖。如果这个经典胶子场是某个有效作用量的极值，则我们可以确定这个有效作用量一定不是 QCD 的经典作用量 (因而也就不是经典 Yang-Mills 场方程的解)，因为经典作用量给出的胶子场的极值是零或纯规范，而零经典场显然不能满足式 (4.17)。由此人们开始发展与时空坐标无关的纯矩阵构造的理论，也就是所谓的矩阵理论。虽然我们到目前为止还不知道这个经典胶子场的具体数值，但我们还是可以依据这些与时空坐标无关的经典胶子场来对 QCD 的大 N_c 极限做些一般的讨论。我们从式 (3.52) 定义的 QCD 的夸克流的生成泛函出发，只是目前我们改在欧氏空间进行讨论，并不再

区分轻重夸克，统一用 ψ 代表所有的夸克场，相应的流和外源 J 也扩充到对所有的 $N_f=6$ 味的夸克流和外源，且把 $\bar{\theta}$ 取为零，在这些考虑下生成泛函为

$$Z[J]=\int \mathscr{D}\psi\mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}A_\mu \mathrm{e}^{\int \mathrm{d}^4x\left[-\frac{1}{4}\mathrm{Tr}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\bar{\psi}(\mathrm{i}\not{D}+J)\psi\right]} \tag{4.20}$$

其中的夸克场可以被积掉，我们得到

$$Z[J]=\int \mathscr{D}A_\mu \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{Tr}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\mathrm{Trln}(\mathrm{i}\not{D}+J)}=\left\langle \mathrm{e}^{\mathrm{Trln}(i\not{D}+J)}\right\rangle \int \mathscr{D}A_\mu \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{Tr}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}} \tag{4.21}$$

其中的真空期望值由式 (4.16) 定义。按照式 (4.17)，我们有

$$\left\langle \mathrm{e}^{\mathrm{Trln}(\mathrm{i}\not{D}+J)}\right\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{Trln}(\mathrm{i}\not{D}_{\mathrm{cl}}+J)}+\frac{1}{N_c}\text{ 阶修正} \tag{4.22}$$

其中

$$D^\mu_{\mathrm{cl}}=\partial^\mu+\mathrm{i}gA^\mu_{\mathrm{cl}} \tag{4.23}$$

是经典胶子场的 Dirac 算符。

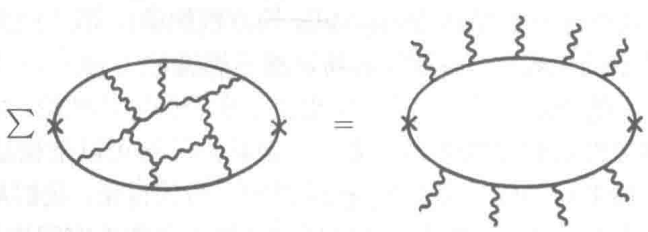
而在第 3 章我们着重考虑的夸克 n 点流流格林函数则变成

$$\begin{aligned}&\frac{\delta^n}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\ln Z[J]\bigg|_{J=\text{真空}}\\ &=\frac{\delta^n}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\mathrm{Trln}(\mathrm{i}\not{D}_{\mathrm{cl}}+J)\bigg|_{J=\text{真空}}+\frac{1}{N_c}\text{ 阶修正}\end{aligned} \tag{4.24}$$

它告诉我们这些流流格林函数在大 N_c 极限下不过是在背景经典胶子场上的夸克一圈图。如对两点流流格林函数，

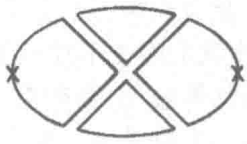
$$\begin{aligned}&\frac{\delta^n}{\delta J^{\sigma\rho}(x)\delta J^{\sigma'\rho'}(x')}\ln Z[J]\bigg|_{J=\text{真空}}\\ &=-(\mathrm{i}\not{D}_{\mathrm{cl}}-m)^{-1,\rho\sigma'}(x,x')(\mathrm{i}\not{D}_{\mathrm{cl}}-m)^{-1,\rho'\sigma}(x',x)+\frac{1}{N_c}\text{ 修正}\end{aligned} \tag{4.25}$$

用 Feynman 图表示就是

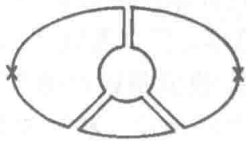


4.2 介子的大 N_c 展开

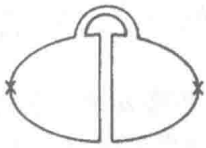
在完成了对 QCD 大 N_c 展开的一般 Feynman 图及路径积分分析之后，在本节我们将聚焦介子的大 N_c 展开。首先利用色单态夸克流 $J=\bar{\psi}\Gamma\psi$ 在动量空间的两点格林函数 $\langle J(k)J(-k)\rangle$ 来讨论介子的质量和衰变常数，其中 $\Gamma=1,\gamma_5,\gamma^\mu,(\partial_\mu-\mathrm{i}gA_\mu),\cdots$。这个两点流流格林函数的 Feynman 图由于 J 是色单态，在 4.1 节介绍的双线表示中至少具有一个夸克圈作为图的边界，因此由式 (4.11) 大 N_c 展开的领头阶是 $O(N_c)$ 阶的平面图 (注：这实际是忽略了这个两点格林函数中的不连接图，它是 $O(N_c^2)$ 阶的。S. Weinberg 注意到这点，并由此指出由两个夸克和两个反夸克组成的四夸克态等例外介子态在大 N_c 极限下并不一定被压低的可能性[3]，后继发展可见引用 Weinberg 的文章)。例如，



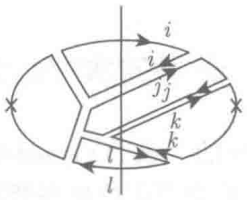
其中两边的两个 $\times$ 分别代表两个色单态的夸克流；次领头阶 $O(1)$ 带一个额外的内部夸克圈，例如，



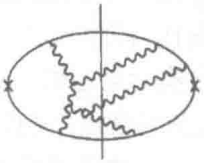
次次领头阶 $O(1/N_c)$ 带一个孔洞，例如，



当然也可以没有孔洞但有两个额外的内部夸克圈。注意到两点格林函数 $\langle J(k)J(-k)\rangle$ 在大 N_c 极限下只有一个作为边界的费米子圈，这意味着如果把 Feynman 图切成两半 (对应在格林函数中插入中间态)，这个单一的夸克圈总是被严格切断两次，顶部夸克线一次，底部夸克线一次 (对应中间态总是严格包含一个 $\psi\bar{\psi}$ 对)。如果我们进一步假定大 N_c 极限下理论是禁闭的 (这是人们一直在努力确认并试图证明的)，$\psi\bar{\psi}$ 对将只能严格束缚成介子。看下面这个切过的用双线表示的两点格林函数



或者用普通的非双线表示的 Feynman 图表达



中间态包含一个夸克、一个反夸克和三个胶子。由于颜色禁闭，这个中间态必须是色单态。从图中可以看出夸克、反夸克和三个胶子场的颜色指标是以如下结构关联在一起的：$\bar{\psi}_l A_{lk} A_{kj} A_{ji} \psi_i$(其中我们略去了在这里不重要的胶子场的矢量指标)。因而这个中间态是一个单一的颜色单态，所有夸克、反夸克和三个胶子都纠缠在一起的一个色单态 (实际上中间的三个胶子 A_{lk} 形成伴随表示，$A_{lk}A_{kj}$ 形成的还是伴随表示，$A_{lk}A_{kj}A_{ji}$ 形成的也是伴随表示)，并不包含有额外的色单态，如夸克、反夸克和一个胶子场形成色单态，另外两个胶子场自己再单独形成另外一个色单态 $\bar{\psi}_l A_{lk} \psi_k A_{ji} A_{ij}$。它反映的是在此禁闭的理论中，中间态是单一的强子态，它是不能被分解为两个或更多个颜色单态的。而这里讨论的性质恰是没有额外内部夸克圈的平面图所具有的一般性质，也就是说对两点流流格林函数中所有这样的图，中间态都将是单一的介子态，不存在两粒子和其他多粒子态。由此借助单粒子态自身的完备性，我们可以在两点流流格林函数中只插入单粒子中间态，因此，有

$$\langle J(k)J(-k)\rangle = \sum_n \frac{a_n^2}{k^2 - m_n^2} + O(1) \tag{4.26}$$

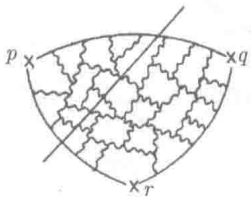
其中，求和遍及所有介子态；m_n 是第 n 个介子的质量；$a_n = \langle 0|J|n\rangle$ 是 J 从真空产生第 n 个单个介子的矩阵元，这里没有 J 从真空产生多个粒子的矩阵元，求和项是大 N_c 展开的领头阶，它只有极点没有多粒子割线，$O(1)$ 是高阶修正项，所有多粒子中间态的贡献都集聚于此。从式 (4.26) 看，首先方程左边在 N_c 趋于无穷大时具有光滑的极限，这个极限就是没有额外内夸克圈的平面图。因此方程的右边也就同样具有光滑的大 N_c 极限，它意味着介子的质量具有与 N_c 无关的大 N_c 极限，而矩阵元的平方 a_n^2 具有正比于 N_c 的大 N_c 极限。其次，方程 (4.26) 左边在大动量区通过可靠的微扰计算得出对动量的依赖是对数型的，而右边求和式中的每一项的贡献都是 $1/k^2$ 型的，只有当求和是无穷求和时才可以将这种幂次型的动量依

赖转化为对数型的动量依赖，它意味着必须有无穷多的介子态存在。再次，为不破坏谱表示，式 (4.26) 给出的单粒子极点必须在 k^2 的实轴上，它进一步意味着介子态在大 Nc 极限下是稳定的。这些结果综合起来就是

$$\langle JJ\rangle = \sum_n \quad \overset{a_n}{\times}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\overset{a_n}{\times}, \quad \frac{1}{k^2-m_n^2}$$

即两点夸克流流格林函数在大 N_c 极限下实际是 J 以 a_n 振幅产生一个介子并以裸传播子 $1/(k^2-m_n^2)$ 传播的所有树图之和。

我们下面讨论色单态夸克流在动量空间的三点格林函数 $\langle J(p)J(q)J(r)\rangle$。为了确定其对 p^2 的奇异性，看一个切过的用普通的非双线表示的 Feynman 图表达的三点格林函数



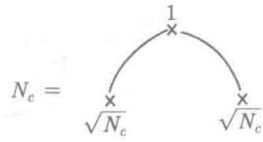
类似前面对两点函数的分析，我们得到切开处是严格的单介子态，因而所产生的奇异来自于单介子极点。综合起来我们只可能有如下类型的三极点项 $\frac{A}{(p^2-a^2)(q^2-b^2)(r^2-c^2)}$，或两极点项 $\frac{B}{(p^2-a^2)(q^2-b^2)}$，即三点格林函数的在大 N_c 极限下的一般结构为

$$\langle JJJ\rangle = \sum \quad + \sum$$

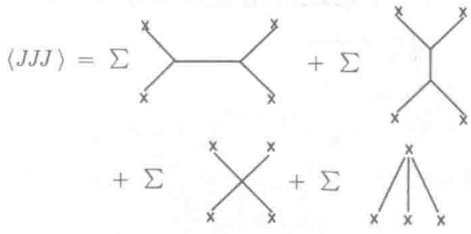
其中头一项代表三极点项，第二项代表二极点项。由于整个三点格林函数是 $O(N_c)$ 阶的，对三极点项，考虑它的系数应为 $\langle 0|J|m\rangle^3\Gamma_{mmm}$，其中 $\langle 0|J|m\rangle$ 是 J 从真空产生第 m 个单个介子的矩阵元，是 $\sqrt{N_c}$ 阶的，因此三点顶角 Γ_{mmm} 必须是 $\frac{1}{\sqrt{N_c}}$ 阶的，用图来表达就是

$$N_c \;=\; \sqrt{N_c}, \quad \frac{1}{\sqrt{N_c}}, \quad \sqrt{N_c}, \quad \sqrt{N_c}$$

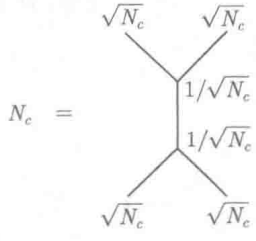
而对二极点项，考虑它的系数应为 $\langle 0|J|m\rangle^2\langle 0|J|mm\rangle$，我们得到 J 从真空产生两个 m 介子的矩阵元是 $O(1)$ 阶的，用图来表达就是



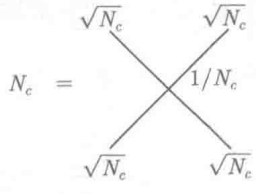
最后讨论色单态夸克流在动量空间的四点格林函数 $\langle J(x)J(y)J(z)J(w)\rangle$。用同样于两点和三点格林函数的分析，我们会得到四点格林函数在大 N_c 极限下的树图结构为



其中仍只存在单粒子极点。对四点格林函数中的前两个图也就是五极点项，利用以前得到的结果很容易看到 N_c 的阶是相互匹配的，如图所示



而对第三项也就是四极点项，考虑它的系数应为 $\langle 0|J|m\rangle^4\Gamma_{mmmm}$，其中 $\langle 0|J|m\rangle$ 是 J 从真空产生第 m 个单个介子的矩阵元，是 $\sqrt{N_c}$ 阶的，因此四点顶角 Γ_{mmmm} 必须是 $1/N_c$ 阶的，用图来表达就是



而对第四项也就是三极点项，考虑它的系数应为 $\langle 0|J|m\rangle^3\langle 0|J|mmm\rangle$，我们得到 J

从真空产生三个 m 介子的矩阵元是 $\frac{1}{\sqrt{N_c}}$ 阶的。对两体介子散射 $AB \to CD$，其振幅可以通过在四点流流格林函数中抽取四个同时出现的极点项的留数系数得到，它对应前面四点格林函数的前三项，其中前两项包含带 $\frac{1}{\sqrt{N_c}}$ 阶顶角的介子交换，第三项是带 $1/N_c$ 阶顶角的局域 ABCD 的接触作用。例如，对 $\pi\pi \to \pi\pi$ 散射，就包括交换 ρ 等介子，还有 4 个 π 的接触作用。所有这些项对两体散射振幅的贡献都是 $1/N_c$ 阶的，因此在大 N_c 极限下，介子是自由和无相互作用的，QCD 的大 N_c 极限是一个自由介子场理论。

进一步利用交叉对称性，我们知道一个极点若出现在某个道，它就会出现在所有交叉的道中。而考虑幺正性则确保如果一个极点出现，如在三点格林函数中，它就必须在四点格林函数可能的三点子图中也出现。因此交叉和幺正性联合起来保证了如果振幅是一些极点项的求和，它一定来自某个拉氏量的树图近似。

我们的推导可以进一步推广到更多的 n 点格林函数的情形。三介子的顶角是 $\frac{1}{\sqrt{N_c}}$ 阶的，四介子的顶角是 $1/N_c$ 阶的，五介子的顶角应该是 $\frac{1}{N_c^{\frac{3}{2}}}$ 阶的 $\cdots\cdots$。一般地，k 个介子的顶角应该是 $\frac{1}{N_c^{\frac{k-2}{2}}}$ 阶的。

以上的讨论是针对夸克流流格林函数进行的。我们还可以进一步把夸克流部分替换为规范不变的胶子场强，例如，$\mathrm{Tr}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})$ 或 $\varepsilon^{\mu\nu\mu'\nu'}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu'\nu'})$。类似地讨论给出了这样的算符所产生的由胶子构成的胶球态是自由、稳定、无相互作用，并且有无穷多数目。在大 N_c 极限下，胶球态与介子态退耦合 (因此在此极限下我们讨论介子时不必关心胶球的影响)；胶球与一个介子的混合是 $\frac{1}{\sqrt{N_c}}$ 阶的，胶球衰变到两个胶球或两个介子的振幅是 $1/N_c$ 阶的；胶球–胶球或胶球–介子弹性散射振幅是 $1/N_c^2$ 阶的。在大 N_c 极限下，给定任意数目的介子和胶球态的振幅可以通过树图求和得到，其中 k 个介子、l 个胶球态的局域顶角是 $N_c^{-l-k/2+1}$ 阶 ($k=0$ 时是 N_c^{-l+2} 阶) 的。

作为一个总结我们罗列一下本节给出的定性结果：

(1) 在大 N_c 极限下，介子是自由、稳定和无相互作用的。介子的质量对大的 N_c 具有光滑的极限，介子态的数目是无限的。

(2) 介子的衰变振幅是 $\frac{1}{\sqrt{N_c}}$ 阶的；介子–介子的弹性散射振幅是 $1/N_c$ 阶的，并且可以通过由局域介子顶角和传播子构成的包含交换介子的所有树图给出。在大 N_c 极限下，介子物理由用局域介子场及其局域顶角构造的有效局域的拉氏量的树图描写。

(3) 单态–八重态混合和介子与胶球的混合都被 N_c 压低，因此介子是纯九重态，介子在大 N_c 极限下是纯 $\psi\bar{\psi}$ 态。

本节以上的讨论都是在 Feynman 图上进行的，我们并没有使用路径积分的方法，原因是介子 QCD 描述的大 N_c 展开的路径积分已经在 3.3 节中做了详细的讨论，因此在这里就不再多说了。

作为本节的最后一部分我们讨论介子大 N_c 展开的唯象应用。首先我们讨论大 N_c 对强子物理中 $\psi\bar{\psi}$ 海的压低，它使得介子近似地是纯 $\psi\bar{\psi}$ 态。这个结果来自 Feynman 图内部的夸克圈在大 N_c 展开下有一个 $1/N_c$ 压低因子，而此压低本质上是由于胶子有 N_c^2 个自由度，而夸克只有 N_c 个自由度。一个相关的问题人们早年认为四夸克例外态 $\psi\bar{\psi}\psi\bar{\psi}$ 在大 N_c 极限下是不出现的。一种简单的方式是大 N_c 极限下介子之间是无相互作用的，因而两个介子无法通过相互作用结合形成四夸克的束缚态。另一种方式是构造规范不变的产生此例外态的算符，它只能是 $K=\psi_i\bar{\psi}_i\psi_j\bar{\psi}_j$，而在大 N_c 展开的领头阶，这个算符的两点格林函数 $\langle K(x)K(y)\rangle$ 会被因子化成 $\langle\psi(x)\bar{\psi}(x)\psi(y)\bar{\psi}(y)\rangle^2$，这不是例外态而是两个自由传播的介子。例外态虽然在现实的 QCD 中很可能是存在的，但理论上它们受到了 $1/N_c$ 的压制。实际上不止四夸克态，所有其他的例外态如多夸克态和混杂态在大 N_c 极限下都是不存在的。这个结果看似和近些年来实验上发现的一些强相互作用的例外态有冲突，这一方面是本节最开始提到的 Weinberg 所发现的以往论证的漏洞，再就可能是大 N_c 极限并不完全代表现实的 QCD，对这些例外态的形成及性质的研究可以很好地促进人们对 QCD 的大 N_c 极限及其偏离效应的深入了解。

大 N_c 展开的另一个预言是 Zweig 规则，它是说一个 Feynman 图，如果可以通过只剪断其中的胶子线而被分成不相连的两半，则这样的图所代表的过程是被压低的。例如，对一个介子的两体衰变 $A\to BC$，被压低与保持 Zweig 规则的振幅之比是一个正比于 $1/N_c$ 的因子。这通过数相应 Feynman 图的 N_c 数目即可得到，实际上被压低的 Feynman 图中具有更多的内部夸克圈因而导致 N_c 的压低，例如，



虽然在某些情形，如重夸克系统的衰变，人们使用渐近自由来解释 Zweig 规则，但也有很多情形这种解释是不成立的 (如 $\rho-\omega$ 质量差)，只有大 N_c 展开给出了 Zweig 规则的一般解释。作为一个特殊的情形，我们可以用它来解释为什么味 $SU(3)$ 的九重态比八重态和单态更加准确地描述了介子。这是因为如果不看夸克的质量差，分裂单态和八重态的图涉及 $\psi\bar{\psi}$ 的湮灭，因而有 $1/N_c$ 的压低。按照 Zweig 规则，在大 N_c 极限下，胶球与介子退耦合，胶球态不是产生于任何初始的普通包含夸克

的强子或弱或电磁反应过程，这个退耦可能是它在实验上不容易出现的部分原因。

下面我们讨论不稳定介子的多体衰变。当运动学允许时，这些衰变主要通过共振两体来实现。例如，$b_1(1235)$ 到 4π 的衰变，实际主要是先 $b_1 \to \omega\pi$，然后再 $\omega \to 3\pi$。从大 N_c 展开的观点看，像 $b_1 \to \omega\pi$ 这样的三介子耦合是 $\dfrac{1}{\sqrt{N_c}}$ 阶的，而直接的 $b_1 \to \pi\pi\pi\pi$ 的五介子耦合是 $\dfrac{1}{N_c^{\frac{3}{2}}}$ 阶的，比 $b_1 \to \omega\pi$ 在振幅上多了一个 $1/N_c$ 压低因子，因而在衰变几率上多了一个 $1/N_c^2$ 的压低因子。

现在我们讨论一些更一般定性的性质。首先共振态在大 N_c 下是窄的，共振的宽度是 $1/N_c$ 阶的。例如，虽然 ρ 主要强衰变到 $\pi\pi$，但 $\rho\pi\pi$ 的三介子耦合却是 $\dfrac{1}{\sqrt{N_c}}$ 阶的，这与 $\psi\bar{\psi}$ 到 ρ 的矩阵元是 $\sqrt{N_c}$ 相差了一个 $1/N_c$ 因子的压低，这也说明现代的 ρ 介子的 $\psi\bar{\psi}$ 构成解释相比早年的 $\pi\pi$ 构成的解释更加贴近 QCD 实际。实际上不止窄共振和其 $\psi\bar{\psi}$ 构成在大 N_c 展开中得以解释，共振态本身的存在性也同样可以解释，因为由我们前面讨论的可知，在大 N_c 极限下，必须存在无穷多的介子态才能使两点夸克流流格林函数有与微扰理论相匹配的正确的大动量行为。

很多物理学家相信大 N_c 极限的平面图与弦模型有关系，因为很多大 N_c 极限下的行为与弦模型的结论相似，并且平面图很像弦运动给出的 Feynman 图。弦模型给出夸克和反夸克之间的线性势的自然和简单的图像，因而是描写颜色禁闭的一个有力模型。从 QCD 的角度看弦的图像最合理的存在方式就是弦模型直接联系大 N_c 极限。目前寻找与 QCD 大 N_c 极限对应的有效弦理论仍是理论上在积极探索的挑战性课题，这些与近年来发展起来的四维时空规范理论与高维弯曲时空中弦理论的对偶有密切的关系。

在第 3 章里我们建立了赝标介子的手征有效拉氏量，并从 QCD 的第一原理把它推导出来了。利用推导出的公式，我们很容易读出这个拉氏量中出现的各项参数对 N_c 的依赖关系。例如，从领头的 p^2 阶的两个系数决定公式 (3.244) 和 (3.245)，我们就知道它们应该是 N_c 阶的，因为决定它们的 Feynman 图有一个夸克圈，也就是 F_0^2 是 N_c 阶的。它使得手征和低能展开的领头阶也是大 N_c 展开领头阶的一部分，也能在大 N_c 极限下得以生存。注意从式 (3.97) 给出的 U 场按赝标介子场的展开的表达式看，每个赝标介子场 ϕ 都伴随着一个 $1/F_0$ 因子也就是 $N_c^{-1/2}$ 因子出现，也就是理论中多植入一个赝标介子场就需要伴随多配上一个 $N_c^{-1/2}$ 因子，这个结果在 4.3 节讨论从 Feynman 图插入介子时也同样会得到。而对次领头的 p^4 阶，从第 3 章的文献 [10]，我们能够读出 12 个独立参数中，除 $2L_1 - L_2$、L_4、L_6 是 N_c^0 阶的外，其他都是 N_c 阶的 (虽然 $2L_1 - L_2$ 是 N_c^0 阶的，但 L_1 和 L_2 各自分别都是 N_c 阶的)。

4.3　重子与核子的大 N_c 展开

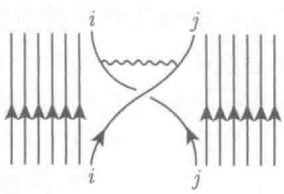
在 $SU(N_c)$ 规范理论中重子是由 N_c 个夸克场组成的：

$$B^{\xi}(x) \equiv \varepsilon_{\alpha_1\cdots\alpha_{N_c}} F_{a_1\cdots a_{N_c}} S^{\xi}_{\xi_1\cdots\xi_{N_c}} \psi^{a_1\xi_1}_{\alpha_1}(x)\cdots\psi^{a_{N_c}\xi_{N_c}}_{\alpha_{N_c}}(x)$$
$$\bar{B}^{\xi}(x) \equiv \varepsilon_{\alpha_1\cdots\alpha_{N_c}} F_{a_1\cdots a_{N_c}} S^{\xi}_{\xi_1\cdots\xi_{N_c}} \bar{\psi}^{a_1\xi_1}_{\alpha_1}(x)\cdots\bar{\psi}^{a_{N_c}\xi_{N_c}}_{\alpha_{N_c}}(x) \tag{4.27}$$

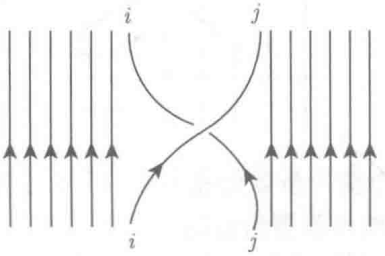
其中，α 是颜色指标；$\varepsilon_{\alpha_1\cdots\alpha_{N_c}}$ 是 N_c 阶全反对称张量，它把 N_c 个夸克耦合成颜色单态；a 是味道指标，$F_{a_1\cdots a_{N_c}}$ 把 N_c 个由下标标记的夸克味道耦合成所讨论的重子，它对下标交换是全对称的；ξ 是旋量指标，$S^{\xi}_{\xi_1\cdots\xi_{N_c}}$ 把 N_c 个由下标标记的 Dirac 旋量 (N_c 个夸克) 耦合成一个由上标标记的 Dirac 旋量 (重子)，它对下标交换是全对称的。$F_{a_1\cdots a_{N_c}}$ 和 $S^{\xi}_{\xi_1\cdots\xi_{N_c}}$ 的具体形式见 Griffiths 书的 5.6.1 节[4]。

以下首先针对重子大 N_c 展开的 Feynman 图进行分析。相比介子，由夸克、反夸克的构成的重子在基本构成上多了对 N_c 的依赖，这在讨论其大 N_c 展开时额外造成了很多困难。

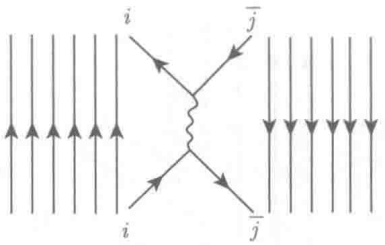
我们按照对 N_c 依赖从大到小的不同过程进行分析。首先如果我们讨论一个传播的重子中的 N_c 个夸克中发生了 m 个胶子交换，这 m 个交换胶子和重子中的夸克相互作用顶角贡献一个与 N_c 相关的因子 $g^{2m} = (g^2N_c)^m/N_c^m$，考虑到这 m 个胶子总共有 $[N_c(N_c-1)/2]^m$ 种连接重子中的各个夸克的方式，因此把这两个因子相乘起来就给出了这个过程对 N_c 的依赖，它是 N_c^m 阶的，在 N_c 很大时趋于无穷。如果看重子的质量，它有分别来自 N_c 个组分夸克的质量和动能的贡献，正比于 N_c，还有来自夸克–夸克通过交换胶子相互作用的势能贡献，每对夸克的相互作用强度为 g^2，因此贡献一个 $1/N_c$ 因子，而总共的夸克对数为 $N_c(N_c-1)/2$ 在 N_c 大时正比于 N_c^2，因此相互作用势总体也是 N_c 阶的，由此总体上重子的质量是 N_c 阶的。这也可以从 3.4 节最后采用介子场的孤子位形对重子的 Skyrmion 描述看出，因为那时采用的拉氏量包括 p^2 阶的非线性 σ 模型项和相应的 p^4 阶的稳定项的系数都是 N_c 阶的，因此由拉氏量导出的哈密顿量就是 N_c 阶的，由此描述重子的 Skyrmion 的能量或质量也就是 N_c 阶的。重子的质量是 N_c 阶的意味着在大 N_c 极限下重子会变得无穷重。即使夸克的质量都为零，这时 QCD 唯一的量纲参数是 Λ_{QCD}，因此此时重子的质量也应大约为 $N_c\Lambda_{\mathrm{QCD}}$。再如对重子–重子散射，典型的大 N_c Feynman 图是



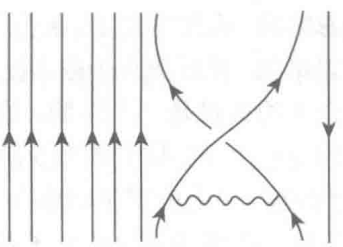
散射是通过交换一对组分夸克并交换胶子来实现的，也就是每个重子中的一个夸克跳到另一个重子中，同时这两个发生跳跃的夸克之间交换一个胶子。对每个重子各有 N_c 种方式选择那个要跳跃的夸克，贡献一个 N_c^2 因子，而交换一个胶子贡献一个 $1/N_c$ 因子，联合起来这个图是 N_c 阶的。实际上两个跳跃夸克之间也可以不交换胶子



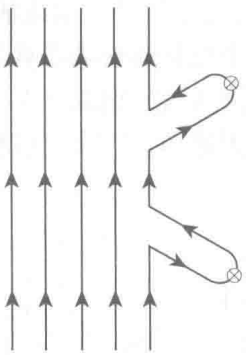
这时第一个跳跃夸克可以有 N_c 种选择，而为保持重子的色中性要求，第二个跳跃夸克就只能有一种选择，因此这种图同有一个胶子交换的图一样是 N_c 阶的。对重子–反重子散射



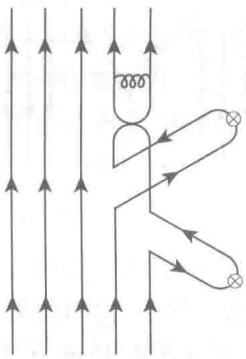
参与反应的两个夸克各有 N_c 种选择方式，交换胶子贡献一个 $1/N_c$，因此总体也和前面的重子–重子散射一样是 N_c 阶的，它们在大 N_c 极限下都将变成无穷。注意到重子的质量是 N_c 阶的，重子–重子散射和重子–反重子散射相互作用也是 N_c 阶的，它保证了这些散射相互作用和重子的动能 (为重子的质量乘以重子的速度) 在大 N_c 展开下是同一阶，必须同时存在，哪个都不能被忽略。与之形成对照的是重子–介子散射



是 N_c^0 阶的，因为从重子中选跳跃夸克的方式有 N_c 种，交换一个胶子贡献一个 $1/N_c$。另一种用重子–介子相互作用来描写重子–介子散射的 Feynman 图为

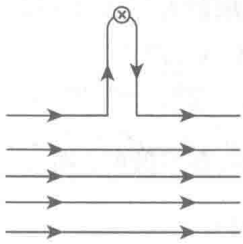


其中在重子的 N_c 个夸克中有一条夸克线上有两个介子插入，因为有 N_c 个夸克可供选择，若使这个图的贡献和前面给出的 N_c^0 阶保持一致，夸克线上的每个介子插入必须额外贡献一个 $N_c^{-1/2}$ 因子 (这与上节讨论的从式 (3.97) 给出的 U 场按赝标介子场的展开的表达式中每个赝标介子场 ϕ 都伴随着一个 $1/F_0$ 因子，也就是 $N_c^{-1/2}$ 因子出现的结果是一致的)。这个图没有胶子交换，还有另一个既有介子插入又通过胶子交换产生的重子–介子散射

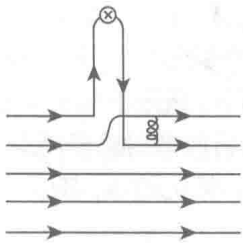


这时介子的插入不是只从一个夸克，而是从两个夸克，它们有 $N_c(N_c-1)/2$ 种选择，加上交换一个胶子贡献的一个 $1/N_c$ 因子和插入两个介子贡献的两个 $N_c^{-1/2}$ 因子，这个图仍是 N_c^0 阶的。重子–介子散射相互作用是 N_c^0 阶的，使得其相比是 N_c 阶的重子动能来说是可以被忽略的，因此在大 N_c 展开的领头阶下，重子–介子散射对重子运动的影响是可以被忽略的，就好像介子根本没出现一样，介子不为重子传递能动量。而另一方面由于介子的质量是 N_c^0 阶的，这导致介子的动能与重子–介子散射相互作用是同阶的，因而在大 N_c 展开的领头阶重子–介子散射会影响介子的运动，结果是介子会被重子散射。以上的重子对单介子散射可以很容易推广到多介子散射的情形，结果是对入射一个重子和一个介子而出射一个重子和 $n-1$ 个介子的情形，散射振幅是 $N_c^{1-n/2}$ 阶的，也就是每增加一个出射介子的散射会导致多一个 $N_c^{-1/2}$ 的压低因子。在讨论重子介子散射时我们引进了图示的重子–介子相互

作用，只是那里发生了两次相互作用，如果单看重子–介子的一次相互作用，它的 Feynman 图是



它是 $N_c^{1/2}$ 阶的，因为有 N_c 个夸克可供选择在其上插入介子，而如前所述插入一个介子要额外贡献一个 $N_c^{-1/2}$ 因子。还有另一个图



两个涉及插入介子的夸克有 $N_c(N_c-1)/2$ 种选择，交换一个胶子贡献一个 $1/N_c$，插入一个介子贡献一个 $N_c^{-1/2}$，总体这个图也是 $N_c^{1/2}$ 阶的 (这些讨论的重子都是同种夸克味道，或者至少包含 $O(N_c)$ 个相关的夸克味，如果相关的夸克味低于 $O(N_c)$，如是 $O(1)$ 个，这些 N_c 因子的计算就需要进行修改)。重子–介子相互作用是 $N_c^{1/2}$ 阶的意味着在大 N_c 下，重子和介子之间是强相互作用。重子–介子的散射振幅是 N_c^0 阶的，而重子–介子的相互作用却是 $N_c^{1/2}$ 阶的，这会产生冲突。因为单个重子–介子散射可以通过一个入射重子吸收一个入射介子后再放出一个出射介子后再出射，这个图显然经历了两次重子–介子相互作用，因而是 N_c 阶的。重子–介子散射在大 N_c 下随 N_c 线性增长破坏了前面估计的 N_c^0 阶的结论，也破坏了幺正性，除非理论内部出现某些相互抵消，使得正比于 N_c 的效应都消掉而只剩下 N_c^0 项。这些由大 N_c 展开的自洽性导致的相消给出了一些很强的限制重子–介子耦合的自洽条件。以 π 介子和重子的微商耦合 $\pi+B\to B'$ 顶角为例：

$$\frac{\partial_\mu \pi^i}{F_\pi}(A^{\mu i})_{B'B} \tag{4.28}$$

其中，F_π 是 π 介子的衰变常数，它是 $N_c^{1/2}$ 阶的，

$$(A^{\mu i})_{BB'}=\left\langle B'\left|(\bar\psi\gamma^\mu\gamma_5\tau^i\psi)_{\mathrm{QCD}}\right|B\right\rangle \tag{4.29}$$

是两味轴矢流的重子矩阵元，它是 N_c 阶的，$i=1,2,3$ 是 π 介子的同位旋指标。合起来这个 π 介子和重子的微商耦合顶角是 $N_c^{1/2}$ 阶的。在大 N_c 极限下，重子相对 π 介子无穷重，这个耦合就约化成静态的重子耦合

$$\frac{\nabla\pi^i}{F_\pi}\cdot(\boldsymbol{A}^i)_{B'B} \tag{4.30}$$

对一个固定的 π 介子能量的重子–介子散射，在大 N_c 极限下最主要的 Feynman 图是

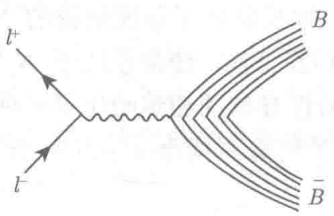


两个图合起来的振幅正比于 $[\boldsymbol{A}^i,\boldsymbol{A}^j]N_c^{-1}$，是 N_c 阶的 (来自两个 $N_c^{1/2}$ 阶的重子–介子顶角)，其中两个图之间有一个相对的负号，而两个轴矢流矩阵的乘积求和了所有可能的重子中间态，只有在大 N_c 极限下与初末态重子简并的中间态的重子才有可能对求和产生贡献。为保证最后的散射总振幅是 N_c^0 阶的，我们必须有一个相消的约束条件，即在大 N_c 极限下，领头的 N_c 阶：

$$[\boldsymbol{A}^i,\boldsymbol{A}^j]N_c^{-1}=0 \tag{4.31}$$

这只有在中间态具有和初末态不一样但质量一样的其他重子存在时才可能实现[4]，而对 π 介子与那个其他的重子的散射，同样为保证散射振幅是 N_c^0 阶的，我们又需要类似式 (4.31) 的相消条件，这又要求新的同质量的其他重子存在，如此下去会导致一系列无穷多的同质量重子系列，人们进一步发展了对称性理论研究这些由大 N_c 展开自洽性导致的无穷重子系列[5]。

最后有一类极端，在大 N_c 展开的任意阶都会被忽略的例子是轻子–反轻子对碰撞湮灭成虚光子产生重子–反重子对：



由于虚光子实际产生的是夸克–反夸克对，而要组成重子–反重子对需要 N_c 个夸克–反夸克对。如果产生额外一对夸克–反夸克的几率为 x (它是一个小于 1 的数)，产生额外 N_c-1 个夸克–反夸克对的几率就是 $x^{N_c-1}=x^{-1}\mathrm{e}^{N_c\ln x}$，注意 $\ln x$ 因为 $x<1$ 是负数，因此这个过程的几率在大 N_c 情形下是随 N_c 指数衰减的，在大 N_c

展开的任一一个固定阶都是不会被考虑进理论的。对轻子–重子散射，在 N_c 展开的每一阶都可以利用交叉对称性把它与正反轻子对湮灭通过虚光子产生正反重子对过程联系起来，因而整体上也是 N_c 指数压低的。类似地分析重子–反重子碰撞产生轻子–反轻子对，同样在大 N_c 展开下是指数衰减的。此结果还可以推广到一对介子碰撞产生一对正反重子对或一对正反重子对碰撞产生一对介子的情形，它们在大 N_c 展开下由于都涉及需要产生或湮灭 N_c 对夸克，因而都是 N_c 指数压低的。

以上是对重子的大 N_c 展开的 Feynman 图分析，Witten 发现重子的各种性质在大 N_c 展开领头阶对 N_c 的依赖和 QCD 的磁单极对 N_c 的依赖是完全一样的，由此提出了重子可以由 QCD 的孤子来描述[2]，由此也衍生出 3.4 节中介绍的重子的 Skyrmion 描写。

在重子大 N_c 展开的 Feynman 图分析中有些图得出了正比于 N_c 正幂次的结果，这些似乎与重子的性质具有光滑的大 N_c 极限矛盾，通常这被诠释为用 Feynman 图数 N_c 的方法讨论重子的大 N_c 行为不都是很方便的，以下我们改用其他方法。

重子内部的夸克数在大 N_c 极限下随 N_c 线性增长，而重子的线度是由 $\Lambda_{\rm QCD}$ 控制的，与 N_c 无关。这意味着当 N_c 大时，重子内部的夸克变得越来越密，Witten 认为这种情形应该可以用在 N_c 个夸克束缚态中每个夸克与其他 $O(N_c)$ 个夸克所产生的平均势相互作用的 Hartree 近似来描写。在大 N_c 极限下这个 Hartree 图像变成严格的，每个夸克都感受同样的 Hartree 势。对大 N_c 的重子，Hartree 哈密顿量由 N_c 表全同的单夸克哈密顿量叠加而成，即

$$\mathscr{H}_{\text{重子}} = N_c \mathscr{H}_{\text{夸克}} \tag{4.32}$$

因此这时我们不必去求解重子的多体波函数，而只须求解单个夸克的波函数就可以了。重子的波函数只是 N_c 个全同的夸克波函数的简单乘积而已，即

$$\Psi(x_1, \ldots x_{N_c}) = \prod_{i=1}^{N_c} \phi(x_i) \tag{4.33}$$

其中因为重子的波函数对颜色指标是全反对称的，因而对剩下的玻色部分的其他指标都是全对称的。Hartree 哈密顿量只对重夸克可以给出封闭的非相对论形式的表达式，而对涉及轻夸克的相对论形式的表达仍不清楚。下面我们就用路径积分的方法讨论相对论形式的重子理论的描述。

在原始文献 [2] 中，由于不知道如何处理 1+3 维时空中现实的 QCD，Witten 改为在't Hooft 最早启用的 1+1 维的 QCD 讨论对应重子体系的路径积分。现在由于我们在 3.3 节已经建立起一套介子场的大 N_c 展开的路径积分，它可以看作 Witten 早年的 1+1 维处理现实 QCD 的翻版，因此我们对重子的大 N_c 展开可从 3.3 节给出的路径积分表达式 (3.188) 开始我们的讨论，注意这时的讨论都是在闵

氏空间。不过这时我们不再区分轻重夸克，而是用 ψ 代表所有的夸克场，并且不再引入夸克流的外源，为方便起见 $\bar{\theta}$ 也取为零。这时 QCD 的路径积分是

$$Z=\int\mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\psi\mathscr{D}A_\mu^a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\left[-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})+\bar{\psi}(x)(\mathrm{i}\not{D}-m)\psi(x)\right]}\tag{4.34}$$

对重子我们关心的是重子场的两点格林函数，也就是

$$\begin{aligned}\left\langle B^\xi(x)\bar{B}^{\xi'}(0)\right\rangle=&Z^{-1}\varepsilon_{\alpha_1\cdots\alpha_{N_c}}F_{a_1\cdots a_{N_c}}S^\xi_{\xi_1\cdots\xi_{N_c}}\varepsilon_{\alpha'_1\cdots\alpha'_{N_c}}F_{a'_1\cdots a'_{N_c}}S^{\xi'}_{\xi'_1\cdots\xi'_{N_c}}\\&\times\int\mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\psi\mathscr{D}A_\mu^a\psi^{a_1\xi_1}_{\alpha_1}(x)\cdots\psi^{a_{N_c}\xi_{N_c}}_{\alpha_{N_c}}(x)\bar{\psi}^{a'_1\xi'_1}_{\alpha'_1}(0)\cdots\bar{\psi}^{a'_{N_c}\xi'_{N_c}}_{\alpha'_{N_c}}(0)\\&\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\left[-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})+\bar{\psi}(x)(\mathrm{i}\not{D}-m)\psi(x)\right]}\end{aligned}\tag{4.35}$$

我们可以在路径积分中引入对应 $\psi^{a\xi}_\alpha(x)\bar{\psi}^{b\zeta}_\beta(0)$ 的双局域外源项

$$\psi^{a\xi}_\alpha(x)\bar{\psi}^{b\zeta}_\beta(y)K^{b\zeta,a\xi}_{\beta\alpha}(y,x)$$

将生成泛函式 (4.34) 扩展成

$$Z[K]\equiv\int\mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\psi\mathscr{D}A_\mu^a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\left[-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})+\bar{\psi}(x)(\mathrm{i}\not{D}-m)\psi(x)+\int\mathrm{d}^4y\bar{\psi}(y)K(y,x)\psi(x)\right]}\tag{4.36}$$

则重子场的两点格林函数式 (4.35) 可以写成

$$\begin{aligned}&\left\langle B^\xi(x)\bar{B}^{\xi'}(0)\right\rangle\\=&\left.\frac{\varepsilon_{\alpha_1\cdots\alpha_{N_c}}F_{a_1\cdots a_{N_c}}S^\xi_{\xi_1\cdots\xi_{N_c}}\varepsilon_{\alpha'_1\cdots\alpha'_{N_c}}F_{a'_1\cdots a'_{N_c}}S^{\xi'}_{\xi'_1\cdots\xi'_{N_c}}(-\mathrm{i})^{N_c}\delta^{N_c}Z[K]}{Z[0]\delta K^{a'_1\xi'_1,a_1\xi_1}_{\alpha'_1\alpha_1}(0,x)\cdots\delta K^{a'_{N_c}\xi'_{N_c},a_{N_c}\xi_{N_c}}_{\alpha'_{N_c}\alpha_{N_c}}(0,x)}\right|_{K=0}\end{aligned}\tag{4.37}$$

对式 (4.36) 引进的生成泛函，我们可以重复式 (3.187)~(3.206) 的积掉胶子场 (与那里不同的是这里由于不再区分轻重夸克，因此不需要再积掉重夸克场，而是把重夸克和轻夸克同等对待。再有那里引入的是局域的双线性夸克流的外源，这里是双局域的双线性夸克场的外源，虽有不同但整个推导过程几乎是完全一样的)、积进双局域介子场 Φ 和其共轭场 Π、最后积掉夸克场，得到

$$Z[K]=\int\mathscr{D}\Phi\mathscr{D}\Pi\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Gamma_0[K-m,\Phi,\Pi]}\tag{4.38}$$

其中，$\Gamma_0[K-m,\Phi,\Pi]$ 由式 (3.206) 给出，只是其中的多点胶子格林函数中不再包含重夸克的贡献，并且把原来的 J 取真空 $-m$ 再补上双局域外源 K。将这个结果代入式 (4.37)，得

$$\left\langle B^\xi(x)\bar{B}^{\xi'}(0)\right\rangle=-N_c!\varepsilon_{\alpha_1\cdots\alpha_{N_c}}F_{a_1\cdots a_{N_c}}S^\xi_{\xi_1\cdots\xi_{N_c}}\varepsilon_{\alpha'_1\cdots\alpha'_{N_c}}F_{a'_1\cdots a'_{N_c}}S^{\xi'}_{\xi'_1\cdots\xi'_{N_c}}\mathrm{i}^{N_c}Z^{-1}[0]$$

$$\times \int \mathscr{D}\Phi\mathscr{D}\Pi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Gamma_0[-m,\Phi,\Pi]}$$
$$\times \Big[[\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m - \Pi]^{-1,a_1\xi_1,a_2'\xi_2'}_{\alpha_1\alpha_2'}(x,0)[\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m - \Pi]^{-1,a_2\xi_2,a_3'\xi_3'}_{\alpha_2\alpha_3'}(x,0)$$
$$\cdots[\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m - \Pi]^{-1,a_{N_c}\xi_{N_c},a_1'\xi_1'}_{\alpha_{N_c}\alpha_1'}(x,0) + \frac{1}{N_c}\text{ 阶修正}\Big] \tag{4.39}$$

其中第二行中括号里的第一项对应只有一个夸克圈，而后面的 $1/N_c$ 阶修正项中则包含至少两个或更多的夸克圈因而产生 N_c 的压低。注意 $[\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - \Pi]$ 实际对色指标是对角的，因此我们可以完成对色指标的求和，得

$$\begin{aligned}
&\left\langle B^{\xi}(x)\bar{B}^{\xi'}(0)\right\rangle \\
=&(N_c!)^2 F_{a_1\cdots a_{N_c}} S^{\xi}_{\xi_1\cdots\xi_{N_c}} F_{a_1'\cdots a_{N_c}'} S^{\xi'}_{\xi_1'\cdots\xi_{N_c}'} \mathrm{i}^{N_c} Z^{-1}[0] \int \mathscr{D}\Phi\mathscr{D}\Pi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Gamma_0[-\mathrm{m},\Phi,\Pi]} \\
&\times \Big[[\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m - \Pi]^{-1,a_1\xi_1,a_2'\xi_2'}(x,0)[\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m - \Pi]^{-1,a_2\xi_2,a_3'\xi_3'}(x,0) \\
&\cdots[\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m - \Pi]^{-1,a_{N_c}\xi_{N_c},a_1'\xi_1'}(x,0) + \frac{1}{N_c}\text{ 阶修正}\Big]
\end{aligned} \tag{4.40}$$

注意到在第二行的大 N_c 展开领头阶有 N_c 项 $[\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m - \Pi]^{-1}(x,0)$ 连乘在一起，它们在 e 指数上相当于有效地贡献一个 $N_c\ln[\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - \mathrm{m} - \Pi]^{-1}(x,0)$ 项，但是考虑到味道和旋量指标的复杂性，为了描述这个项我们引入：

$$\begin{aligned}
&\ln\Big[F_{a_1\cdots a_{N_c}} S^{\xi}_{\xi_1\cdots\xi_{N_c}} F_{a_1'\cdots a_{N_c}'} S^{\xi'}_{\xi_1'\cdots\xi_{N_c}'} [\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m - \Pi]^{-1,a_1\xi_1,a_2'\xi_2'}(x,0) \\
&\cdots[\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m - \Pi]^{-1,a_{N_c}\xi_{N_c},a_1'\xi_1'}(x,0)\Big] \\
\equiv&\mathrm{i}N_c\tilde{\Gamma}_{\xi\xi'}[\Pi](x,0)
\end{aligned} \tag{4.41}$$

由此在大 N_c 极限下，重子两点格林函数式 (4.40) 化为

$$\begin{aligned}
\left\langle B^{\xi}(x)\bar{B}^{\xi'}(0)\right\rangle &= (N_c!)^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}N_c\tilde{\Gamma}_{\xi\xi'}[\Pi_c](x,0)} \\
&= (N_c!)^2 F_{a_1\cdots a_{N_c}} S^{\xi}_{\xi_1\cdots\xi_{N_c}} F_{a_1'\cdots a_{N_c}'} S^{\xi'}_{\xi_1'\cdots\xi_{N_c}'} \\
&\quad\times [\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m - \Pi_c]^{-1,a_1\xi_1,a_2'\xi_2'}(x,0)\cdots[\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m - \Pi_c]^{-1,a_{N_c}\xi_{N_c},a_1'\xi_1'}(x,0)
\end{aligned} \tag{4.42}$$

其中，Π_c 满足

$$\frac{\delta}{\delta\Pi_c^{\sigma\rho}(y,z)}\Big[\Gamma_0[0,\Phi_c,\Pi_c] + N_c\tilde{\Gamma}_{\xi\xi'}[\Pi_c](x,0)\Big] = 0 \tag{4.43}$$

将式 (3.206) 代入式 (4.43) 得到

$$\Phi_c^{\sigma\rho}(y,z) = -\mathrm{i}[(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m - \Pi_c)^{-1}]^{\rho\sigma}(z,y) + \frac{\delta\tilde{\Gamma}_{\xi\xi'}[\Pi_c](x,0)}{\delta\Pi_c^{\sigma\rho}(y,z)} \tag{4.44}$$

而 Φ_c 满足

$$\frac{\delta\Gamma_0[0,\Phi_c,\Pi_c]}{\delta\Pi_c^{\sigma\rho}(y,z)} = 0 \tag{4.45}$$

将式 (3.206) 代入式 (4.45)，我们得到

$$\Pi_c^{\sigma\rho}(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty}\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_n\mathrm{d}^4x_1'\cdots\mathrm{d}^4x_n'\frac{(-\mathrm{i})^{n+1}(N_cg^2)^n}{n!}$$
$$\times\,\tilde{G}^{\sigma\sigma_1\cdots\sigma_n}_{\rho\rho_1\cdots\rho_n}(x,y,x_1,x_1',\cdots,x_n,x_n')\Phi_c^{\sigma_1\rho_1}(x_1,x_1')\cdots\Phi_c^{\sigma_n\rho_n}(x_n,x_n') = 0 \tag{4.46}$$

按照 3.3 节的讨论，式 (4.44) 和式 (4.46) 的联合应该是 Schwinger-Dyson 方程，只是现在由于考虑的是重子两点格林函数，在式 (4.44) 中多出现了方程右边的最后一项，它对有效介子场 Φ 贡献了重子背景，这是我们前面 Feynman 图分析重子–介子散射相互作用和介子动能在大 N_c 展开领头阶同阶的量的具体反映，能否从式 (4.44) 和 (4.46) 中如 Witten 希望的那样抽出单个夸克在剩下其他夸克产生的平均 Hartree 势中的运动方程仍是未解决的问题。

4.4　QCD 的圈动力学与大 N_c 展开

作为本章的最后一节，应该汇集讨论更多的大 N_c 展开在 QCD 中的各种应用。可惜这些内容非常繁杂与零散，并且相当强烈地依赖具体问题的细节。作为一本介绍 QCD 的书，我们似乎还是应该撇开那些和 QCD 的基础关系不那么密切的内容，集中精力在有限的篇幅里选择一些更加基础和系统的 QCD 议题。为此我们放弃了继续介绍大 N_c 展开在 QCD 各处的进一步应用的做法，而特别选择在这节介绍 QCD 的圈动力学及其与大 N_c 展开的关系。之所以选择这个题目是因为它对 QCD 来说足够基础与重要，并且与量子场论很多最新的发展都有密切关系。

在圈动力学中我们最重要的是在 QCD 水平上引进了沿闭合路径 C 的基本圈变量：

$$\Psi(C) \equiv \mathrm{tr}_c\left[\mathscr{P}\mathrm{e}^{\mathrm{i}g\oint_C A_\mu \mathrm{d}x^\mu}\right] \tag{4.47}$$

其中，tr_c 是对颜色指标求迹；$\mathscr{P}$ 是路径排序算符，它规定其后的曲线积分计算要按照路径 C 的先后排序进行。对圈变量求由式 (4.16) 定义的真空期望值就得到了著名的 Wilson 圈场：

$$W(C) \equiv \frac{1}{N_c}\langle\Psi(C)\rangle \tag{4.48}$$

我们所说的 QCD 圈动力学就是要把 QCD 用 $W(C)$ 来描写。注意式 (4.47) 定义的圈变量和 Wilson 圈场 $W(C)$ 都是颜色规范不变的量，而原来 QCD 中的夸克场、胶子场和鬼场则都是颜色依赖的量。在现实世界中由于色禁闭，人们能观测到的都是颜色的单态，显然用颜色非单态来描写和计算颜色单态的性质会比较困难和麻烦，因此我们期望在 QCD 水平上能使用色单态的量来描写 QCD 的动力学，这就是我们在本节要讨论的 QCD 的圈动力学。圈变量的理论对格点 QCD 理论和弦理论有着重要影响，并且与这些理论的关联至今还在不断被人们挖掘和发展。由于圈变量是规范不变的，利用 4.1 节最后给出的对规范不变算符的真空期望值在大 N_c 极限下的因子化性质，对圈变量的各种组合乘积做真空期望值等于把它们因子化拆成各自分别的真空期望值的乘积，即

$$\langle\Psi(C_1)\Psi(C_2)\Psi(C_3)\cdots\rangle = \langle\Psi(C_1)\rangle\langle\Psi(C_2)\rangle\langle\Psi(C_3)\rangle\cdots + \frac{1}{N_c}\text{ 高阶项} \tag{4.49}$$

这将使得讨论和计算大为简化，特别是后面我们将会看到对圈变量的量子场方程——Schwinger-Dyson 方程将由于这个因子化变成封闭的方程，这同对带颜色的夸克场、胶子场和鬼场的 Schwinger-Dyson 方程总是无法求解的无穷阶的嵌套方程串形成鲜明的反差，这应该是大 N_c 极限对 QCD 理论最为重要的贡献。

首先我们依据文献 [6] 的方式把第 3 章式 (3.52) 中引入 QCD 的流流格林函数的生成泛函表达为圈变量的形式。为方便我们改在欧氏空间讨论，不再区分轻重夸克，并取 $\bar{\theta}=0$，这时的 QCD 流流生成泛函定义为

$$Z_E[J] \equiv \int \mathscr{D}A_\mu^a \mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\psi \mathrm{e}^{\int \mathrm{d}^4x\left[\bar{\psi}(x)(\mathrm{i}\not{D}+J)\psi(x)-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})\right]} \tag{4.50}$$

其中，为了和式 (3.52) 的闵氏空间的生成泛函区别并与文献 [6] 一致，我们特地在生成泛函 Z 上加了一个下标 E 以表示这是在欧氏空间的流流生成泛函，而且式 (3.52) 是在 e 指数上定义的连接图的生成泛函，我们现在不用 e 指数上的定义，它相应于把不连接的部分也包括进来了，也就是现在的 $\ln Z_E$ 和原来的 Z 对应。注意这时的真空对应是把色规范不变的外源 J 取成流夸克质量 $J=m$。对大 N_c 展开，我们不像第 3 章 3.3 节那样先形式积掉胶子场再积掉夸克场，而是直接先积掉夸克场，然后直接对胶子场进行仔细处理，把式 (4.50) 的夸克场积掉，我们就得到

$$Z_E[J] \equiv \int \mathscr{D}A_\mu^a \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}\ln(\mathrm{i}\not{D}+J)+\int \mathrm{d}^4x\left[-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})\right]} \tag{4.51}$$

其中积掉的夸克场贡献的 $\ln(\mathrm{i}\not{D}+J)$ 项中的对数可以利用如下公式指数化为

$$\ln(\mathrm{i}\not{D}+J) = \text{常数} + \int_{0^+}^{\infty}\frac{\mathrm{d}T}{T}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}T(\mathrm{i}\not{D}+J)} \tag{4.52}$$

利用由哈密顿量 $\hat{H}$ 构造的时间演化算符的量子力学路径积分公式为

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}T}=\int \mathscr{D}k\mathscr{D}x\hat{T}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_0^T \mathrm{d}\tau[k\dot{x}-H(x,k)]} \tag{4.53}$$

其中，$\hat{T}$ 是编时排序。我们把粒子运动的轨迹 x_μ 用原时 τ 标记为 $x_\mu(\tau)$，且在所讨论的时间间隔 T 的两端要求周期条件 $x_\mu(0)=x_\mu(T)$ 形成一个闭合路径 C。将 $\hat{H}$ 看成是 $\mathrm{i}\not{p}+J$，则式 (4.52) 可以进一步写为

$$\ln(\mathrm{i}\not{p}+J)=\text{常数}+\int_{0+}^{\infty}\frac{\mathrm{d}T}{T}\int_{x(0)=x(T)}\mathscr{D}x\hat{J}[x(\tau)]\Psi[x(\tau)] \tag{4.54}$$

其中，$\hat{J}[x(\tau)]$、$\Psi[x(\tau)]$ 都是 $x_\mu(\tau)$ 的泛函。$\hat{J}[x(\tau)]$ 是夸克流的变形表示：

$$\hat{J}[x(\tau)]=\int \mathscr{D}k\mathrm{tr}_f\left[\hat{T}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_0^T \mathrm{d}\tau[k^\mu(\dot{x}_\mu-i\gamma_\mu)-J(\tau)]}\right] \tag{4.55}$$

其中，$\Psi[x(\tau)]$ 就是在 $x_\mu(0)=x_\mu(T)$ 形成的闭合路径上由式 (4.47) 定义的圈变量。利用式 (4.54)，我们可以把生成泛函式 (4.50) 写为对圈场求真空期望值的形式：

$$Z_E[J]=\left\langle \mathrm{e}^{\sum\limits_C \hat{J}[C]\Psi[C]}\right\rangle_A \tag{4.56}$$

其中，真空期望值是对胶子场的平均：

$$\langle O\rangle_A\equiv\int \mathscr{D}A_\mu^a O\mathrm{e}^{\int \mathrm{d}^4x\left[-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})\right]} \tag{4.57}$$

而圈求和的定义现在是

$$\sum_C f(C)\equiv\int_{0+}^{\infty}\frac{\mathrm{d}T}{T}\int_{x(0)=x(T)}\mathscr{D}x(\tau)f[x(\tau)] \tag{4.58}$$

实际上式 (4.58) 中 $x(\tau)$ 的每一组满足周期条件 $x(0)=x(T)$ 的连续轨迹就对应一个圈，这个圈绕一整圈的原时长度为 T，所有这样的连续轨迹 (包括不同的 T 长度) 就构成了所有的圈，而对 T 的积分可以理解为考虑进所有可能不同的 T 的圈。

原来的 QCD 的流流生成泛函是在手征极限下对指数上外源 J 乘上相应的夸克流或密度的平均值，现在我们把它化成了有一个纯胶子场系统对指数上变形了的外源乘上相应的圈变量的平均值，也就是 QCD 的流流生成泛函现在变成了与它实际是等价的圈圈生成泛函。

现在我们推导 QCD 中圈变量满足的场方程。对胶子场的任意一个函数 $Q_{ij}(A)$，我们可以有如下场方程

$$\int \mathscr{D}A \frac{\delta}{\delta A_\mu^{lk}(x)} \left(\delta_{il}\delta_{jk} - \frac{1}{N_c}\delta_{ij}\delta_{lk}\right) Q_{ij}(A) \mathrm{e}^{\int \mathrm{d}^4x\left[-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})\right]} = 0 \tag{4.59}$$

其中，胶子场取了双线表示有两个颜色指标，其泛函积分的被积函数因为是全微商可以被积出来代之以无穷边界上的值，在胶子场的无穷取值边界上作用量取值将其压低为零，因而使式 (4.59) 成立。括号里的指标设置是为了减除色指标 lk 的迹，因为我们虽用双线表示，但实际处理的是 $SU(N_c)$，胶子场需要保持无迹。把式 (4.59) 中被积函数对胶子场的微商做出来，我们就得到

$$\langle \mathrm{tr}_c \{[D^\mu F_{\mu\nu}(x)]\, Q\}\rangle_A = \left(\delta_{il}\delta_{jk} - \frac{1}{N_c}\delta_{ij}\delta_{lk}\right) \left\langle \frac{\delta Q_{ij}}{\delta A_{lk}^\nu(x)} \right\rangle_A \tag{4.60}$$

以下我们把 $Q_{ij}(A)$ 特别选为

$$Q_{ij} = U_{ij}(C_{xx}) \mathrm{e}^{\sum\limits_{C'} \hat{J}(C')\Psi(C')} \tag{4.61}$$

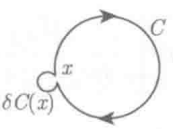
其中

$$U(C_{xy}) \equiv \mathscr{P}\mathrm{e}^{\mathrm{i}g\int\limits_{C_{xy}} A_\mu \mathrm{d}x^\mu} \tag{4.62}$$

则式 (4.60) 的左边就化为

$$\frac{1}{g^2}\partial_x^\mu \frac{\delta}{\delta\sigma^{\mu\nu}(x)} \left\langle \Psi(C) \mathrm{e}^{\sum\limits_{C'} \hat{J}(C')\Psi(C')} \right\rangle_A = \frac{1}{g^2}\partial_x^\mu \frac{\delta}{\delta\sigma^{\mu\nu}(x)} \frac{\delta Z_E}{\delta \hat{J}(C)} \tag{4.63}$$

其中，如果在原来的圈 C 上的 x 点处加一小的闭合圈 $\delta C(x)$



则 $\delta\sigma^{\mu\nu}(x)$ 就是 $\delta C(x)$ 内部的面积

$$\delta\sigma^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2}\oint\limits_{\delta C(x)} y^\mu \mathrm{d}y^\nu \tag{4.64}$$

可以证明

$$\delta\Psi(C) = \delta\sigma^{\mu\nu}(x)\mathrm{tr}_c[F_{\mu\nu}(x)\mathscr{P}\mathrm{e}^{\mathrm{i}g\int\limits_{C_{xx}} A_\lambda \mathrm{d}x^\lambda}] \tag{4.65}$$

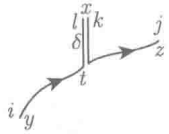
而式 (4.60) 的右边的微商化为

$$\frac{\delta Q_{ij}}{\delta A^{\nu}_{lk}(x)} = \left[\oint_{C_{xx}} \mathrm{d}y_\nu U_{il}(C_{cy}) U_{kj}(C_{yz}) \delta(x-y) + \sum_{C'} \hat{J}(C') \right.$$
$$\left. \times \oint_{C'} \mathrm{d}y_\nu \delta(x-y) U_{ij}(C_{xx}) U_{\mathrm{l}k}(C'_{yy}) \right] \mathrm{e}^{\sum\limits_{C'} \hat{J}(C')\Psi(C')} \tag{4.66}$$

其中我们利用了如下关系式，即

$$\frac{\delta U_{ij}(C_{yz})}{\delta A^{\nu}_{lk}(x)} = \int_{C_{yz}} \mathrm{d}t_\nu U_{il}(C_{yt}) U_{kj}(C_{tz}) \delta(t-x) \tag{4.67}$$

图示为



再在式 (4.66) 中加上式 (4.60) 右边提供的无迹的因子 $\left(\delta_{il}\delta_{jk} - \dfrac{1}{N_c}\delta_{ij}\delta_{lk}\right)$，它变为

$$\oint_C \mathrm{d}y_\nu \delta(x-y) \left[\Psi(C_{xy})\Psi(C_{yx}) - \frac{1}{N_c}\Psi(C) \right]$$
$$+ \sum_{C'} \hat{J}(C') \int_{C'} \mathrm{d}y_\nu \delta(x-y) \left[\Psi(C_{xx}C'_{yy}) - \frac{1}{N_c}\Psi(C)\Psi(C') \right] \tag{4.68}$$

注意其中的 $\Psi(C_{xy})\Psi(C_{yx})$ 由于有前面的 δ 函数，因而实际是两个交在一点的圈。把式 (4.68) 代回式 (4.60)，结合式 (4.63)，得

$$\frac{1}{g^2}\partial^\mu_x \frac{\delta}{\delta\sigma^{\mu\nu}(x)} \frac{\delta Z_E}{\delta \hat{J}(C)} = \oint_C \mathrm{d}y_\nu \delta(x-y) \left[\frac{\delta^2 Z_E}{\delta\hat{J}(C_{xy})\delta\hat{J}(C_{yx})} - \frac{1}{N_c}\frac{\delta Z_E}{\delta\hat{J}(C)} \right]$$
$$+ \sum_{C'} \hat{J}(C') \oint_{C'} \mathrm{d}y_\nu \delta(x-y) \left[\frac{\delta Z_E}{\delta\hat{J}(C_{xx}C'_{yy})} - \frac{1}{N_c}\frac{\delta^2 Z_E}{\delta\hat{J}(C)\delta\hat{J}(C')} \right] \tag{4.69}$$

这就是圈变量对应的场方程，它对应 $U(1)$ 规范理论中的四个麦克斯韦方程组中的两个有源场方程，而另外两个无源场方程现在对应的圈场方程是

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\partial^\nu_x \frac{\delta}{\delta\sigma_{\lambda\rho}(x)} \frac{\delta Z_E}{\delta\hat{J}(C)} = 0 \tag{4.70}$$

外加初始条件：

$$\frac{\delta Z_E}{\delta \hat{J}(0)} = N_c Z_E \tag{4.71}$$

式 (4.69)~(4.71) 是圈场的三个最基本的方程。为讨论大 N_c 展开，我们改用式 (4.48) 引进的 Wilson 圈场 $W(C)$ 来进行讨论，它现在可以写为

$$W(C) \equiv \frac{\delta \ln Z_E}{N_c \delta \hat{J}(C)} = \frac{\left\langle \Psi(C) \mathrm{e}^{\sum\limits_{C'} \hat{J}[C']\Psi[C']} \right\rangle_A}{N_c \left\langle \mathrm{e}^{\sum\limits_{C'} \hat{J}[C']\Psi[C']} \right\rangle_A} \tag{4.72}$$

注意式 (4.71) 用 Wilson 圈场表达是

$$W(0) = 1 \tag{4.73}$$

它可以解释为什么我们如此选择生成泛函对 N_c 的依赖。再引入圈外源：

$$j(C) \equiv \frac{\hat{J}(C)}{N_c} \tag{4.74}$$

圈方程 (4.69) 化为

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{g^2 N_c} \partial_x^\mu \frac{\delta}{\delta \sigma^{\mu\nu}(x)} W(C) \\
&= \oint_C \mathrm{d}y_\nu \delta(x-y) \left\{ W(C_{xy}) W(C_{yx}) + \frac{1}{N_c^2} \left[\frac{\delta W(C_{xy})}{\delta j(C_{yx})} - W(C) \right] \right\} \\
&\quad + \sum_{C'} j(C') \oint_{C'} \mathrm{d}y_\nu \delta(x-y) \left[W(C_{xx} C'_{yy}) - W(C) W(C') - \frac{1}{N_c^2} \frac{\delta W(C)}{\delta j(C')} \right]
\end{aligned} \tag{4.75}$$

注意到在大 N_c 极限下，不会算的 $W(C)$ 对 $j(C')$ 的微商不出现了，方程变成一个封闭的方程了。人们已经证明上面的方程在大 N_c 极限下，没有外源 $j(C')=0$ 时确实产生对 $W(C)$ 贡献的平面 Feynman 图，并且还发现能够导致颜色禁闭的 Wilson 圈的面积率 (也就是 $\ln W(C)$ 在面积很大时正比于圈的面积) 在圈的面积很大时确实是方程可能的渐近解之一。

式 (4.70) 则变为

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \partial_x^\nu \frac{\delta}{\delta \sigma_{\lambda\rho}(x)} W(C) = 0 \tag{4.76}$$

如果我们真能求解圈场方程 (4.73)、(4.75) 和 (4.76)，QCD 的流流格林函数就完全可以得到了，如流的真空期望值 (也是一点格林函数) 为

$$\left. \frac{\delta \ln Z_E}{\delta J^{\sigma\rho}(x)} \right|_{\text{真空}} = \sum_C \frac{\delta \ln Z_E}{\delta j(C)} \frac{\delta j(C)}{\delta J^{\sigma\rho}(x)} \bigg|_{\text{真空}} = \sum_C W(C) \frac{\delta \hat{J}(C)}{\delta J^{\sigma\rho}(x)} \bigg|_{\text{真空}} \tag{4.77}$$

而两点流流格林函数为

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{\delta^2 \ln Z_E}{\delta J^{\sigma'\rho'}(x')\delta J^{\sigma\rho}(x)}\right|_{\text{真空}} \\
&= \left.\frac{\delta}{\delta J^{\sigma'\rho'}(x')}\sum_C W(C)\frac{\delta \hat{J}(C)}{\delta J^{\sigma\rho}(x)}\right|_{\text{真空}} \\
&= \left[\sum_C W(C)\frac{\delta^2 \hat{J}(C)}{\delta J^{\sigma'\rho'}(x')\delta J^{\sigma\rho}(x)} + \sum_{C,C'}\frac{\delta W(C)}{\delta \hat{J}(C')}\frac{\delta \hat{J}(C')}{\delta J^{\sigma'\rho'}(x')}\frac{\delta \hat{J}(C)}{\delta J^{\sigma\rho}(x)}\right]_{\text{真空}}
\end{aligned} \tag{4.78}$$

类似地我们可以利用 $W(C)$ 计算任意多点的流流格林函数。

参 考 文 献

[1] 't Hooft G. Nucl. Phys., 1974, B72: 461.

[2] Witten E. Nucl. Phys., 1979, B160: 57.

[3] Weinberg S. Phys. Rev. Lett., 2013, 110: 261601.

[4] Griffiths D J. Introduction to Elementary Particles. 2nd edition. Weinheim: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2008; 王青, 译. 粒子物理导论. 北京: 机械工业出版社, 2016: 10.

[5] Jenkins E. Annu. Rev. Nucl. Part. Sci., 1998, 48: 81.

[6] Makeenko Y, Migdal A A. Nucl. Phys., 1981, B188: 269.

第 5 章　QCD 真空凝聚和背景场方法

微扰 QCD 是在假定微扰真空以及短距离相互作用不受非阿贝尔规范场大距离结构的影响下建立的，它在大 Q^2 下的物理过程中获得成功。因此当讨论 Q^2 不足够大或较低能物理过程时，微扰真空和微扰 QCD 忽略了很重要的物理内容：强子态的禁闭问题和大距离相互作用效应，这些 QCD 的非微扰特征使得真空包含复杂的物理内容。当考虑了大距离相互作用效应后，QCD 物理真空完全不同于微扰真空，存在着一系列的真空凝聚，如夸克凝聚 $\langle 0|\bar{q}q|0\rangle$，胶子凝聚 $\langle 0|G^2|0\rangle$，等等。这些真空凝聚反映了 QCD 的非微扰特征。背景场方法给出了一种可能的途径去考虑非微扰效应，它从场论的观点对这些真空凝聚提供了一个较为系统的描述，认为夸克和胶子是在充满夸克–反夸克对和胶子的物理真空中传播，夸克、胶子与真空中背景场不断相互作用。本章将介绍背景场方法和 QCD 求和规则，以及应用它们研究赝标介子分布振幅和计算分布振幅的矩。

5.1　QCD 真空凝聚

微扰 QCD 应用到大动量迁移下的单举和遍举过程取得了很大的成功，奠定了 QCD 理论的基础。然而这是在假定微扰真空以及小距离相互作用不受非阿贝尔规范场大距离结构的影响下获得的，因此微扰 QCD 和微扰真空忽略了很重要的物理内容：强子态的禁闭问题和大距离相互作用效应。QCD 非微扰效应产生夸克凝聚、胶子凝聚以及夸克–胶子混合凝聚等。这些真空凝聚表达为它们相应的场算符真空平均值不等于零，在物理上表明了物理真空完全不同于微扰 QCD 真空，因为湮灭算符作用于微扰真空为零，但作用于非微扰真空不为零。这意味着真空凝聚的存在源自于物理真空的复杂性质，即真空不空，揭示 QCD 物理真空的本质才能确定真空凝聚是怎么产生的。第 2 章中介绍的格点规范理论正努力解决非微扰 QCD 问题，然而由于计算规模大等技术上的原因，目前它对解决非微扰问题的威力还不足，有待进一步的发展。

5.1.1　非零真空平均值

实际上，早在 20 世纪 60 年代末由流代数[1] 和 PCAC 关系[2–4] 就表示了夸克真空平均值不等于零，$\langle 0|\bar{\psi}\psi|0\rangle \neq 0$。考虑轴矢流 $A_\mu(x)$

$$A^i_\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5 T^i\psi(x) \tag{5.1}$$

其中 $T^i(i=0,1,2)$ 为同位旋算符。定义 $T^{\mp}=(T^1\pm \mathrm{i}T^2)$。为了讨论荷电 π 介子，可选择

$$A_\mu^-(x)=\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5 T^-\psi(x)=A_\mu^1(x)+\mathrm{i}A_\mu^2(x)=\bar{u}(x)\gamma_\mu\gamma_5 d(x)$$

其中 $u(x),d(x)$ 分别是 u 夸克和 d 夸克相应的场量。应用夸克场量运动方程给出它的散度为

$$\partial^\mu A_\mu^-(x)=\mathrm{i}(m_\mathrm{u}+m_\mathrm{d})\bar{u}(x)\gamma_5 d(x) \tag{5.2}$$

显然流散度 $\partial_\mu A^\mu(x)$ 的量子数与 π^- 介子是相同的。现在考虑在物理真空下定义的两点关联函数，

$$\Pi^{\mu\nu}(q)=\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\left\langle 0\right|T\left(A^\mu(x)A^{\nu *}(0)\right)\left|0\right\rangle \tag{5.3}$$

这里为了简便起见以下计算中略去了轴矢流上标负号，即 $A_\mu^-(x)=A_\mu(x)$，有 $\partial^\mu A_\mu(x)=\partial^\mu(A_\mu^1(x)+\mathrm{i}A_\mu^2(x))=\mathrm{i}(m_u+m_d)\bar{u}(x)\gamma_5 d(x)$。在式 (5.3) 两边倍乘以矢量 $q_\mu q_\nu$，

$$\begin{aligned}
q_\nu q_\mu\Pi^{\mu\nu}(q)=&-q_\nu\int \mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\partial_\mu\left\langle 0\right|T\left(A^\mu(x)A^{\nu *}(0)\right)\left|0\right\rangle\\
=&-q_\nu\int \mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\delta(x^0)\left\langle 0\right|\left[A^0(x),A^{\nu *}(0)\right]\left|0\right\rangle\\
&-q_\nu\int \mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\left\langle 0\right|T\left(\partial_\mu A^\mu(x)A^{\nu *}(0)\right)\left|0\right\rangle\\
=&2\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\delta(x^0)\left\langle 0\right|\left[A^0(x),\partial_\nu A^{\nu *}(0)\right]\left|0\right\rangle\\
&+\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\left\langle 0\right|T\left(\partial_\mu A^\mu(x)\partial_\nu A^{\nu *}(0)\right)\left|0\right\rangle
\end{aligned} \tag{5.4}$$

上式最后一个等式中第一项可以应用流代数 (假定场量满足等时正则对易关系) 得到

$$\begin{aligned}
q_\nu q_\mu\Pi^{\mu\nu}(q)=&2(m_u+m_d)\int \mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\delta^{(4)}(x)\left\langle 0\right|\bar{u}u(x)+\bar{d}d(x)\left|0\right\rangle\\
&+\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\left\langle 0\right|T\left(\partial_\mu A^\mu(x)\partial_\nu A^{\nu *}(0)\right)\left|0\right\rangle
\end{aligned}$$

至于第二项，由轴矢流部分守恒 (PCAC) 假定，对荷电 π 介子有

$$\partial^\mu A_\mu(x)=\sqrt{2}f_\pi m_\pi^2\phi_\pi(x) \tag{5.5}$$

其中 f_π 是 π^+ 介子衰变常数，由 $\pi^+ \to \mu\nu$ 衰变宽度实验确定，

$$\Gamma(\pi \to \mu\nu) = \frac{G_F^2}{4\pi} f_\pi^2 m_\pi m_\mu^2 \left|V_{ud}\right|^2 \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2}\right)^2 \tag{5.6}$$

其中 V_{ud} 是 Cabibbo 角，$\cos\theta \simeq 1$，代入各参数实验值可确定 $f_\pi = (93.3 \pm 0.3)\text{MeV}$。当 π 介子质量 $m_\pi \to 0$ 时，式 (5.5) 右边趋于零，这意味着轴矢量守恒，理论具有手征对称性性质。物理上 π 介子质量不为零必然有相应的轴矢流部分守恒 (PCAC) 式 (5.5)。在式 (5.5) 两边夹以态矢量 $\langle 0|$ 和 $|\pi\rangle$ 就得到

$$\langle 0| \partial^\mu A_\mu 0) |\pi\rangle = \sqrt{2} f_\pi m_\pi^2 \langle 0| \phi_\pi(0) |\pi\rangle = \sqrt{2} f_\pi m_\pi^2 \tag{5.7}$$

将式 (5.7) 代入式 (5.4)，即应用了流算符等时对易关系和 PCAC 式 (5.5)，式 (5.4) 成为

$$\begin{aligned} q_\nu q_\mu \Pi^{\mu\nu}(q) =& 2(m_u + m_d) \int \mathrm{d}^4 x \mathrm{e}^{\mathrm{i}qx} \delta^{(4)}(x) \langle 0| \bar{u}u(x) + \bar{d}d(x) |0\rangle \\ &+ 2\mathrm{i} f_\pi^2 m_\pi^4 \int \mathrm{d}^4 x \mathrm{e}^{\mathrm{i}qx} \langle 0| T(\phi_\pi(x)\phi_\pi^*(0)) |0\rangle \end{aligned} \tag{5.8}$$

式 (5.8) 对任何 q 成立，在两边取 $q \to 0$，即软 π 极限可得

$$\begin{aligned} & 2(m_u + m_d) \langle 0| : \bar{u}(0)u(0) + \bar{d}(0)d(0) : |0\rangle \\ =& -2\mathrm{i} f_\pi^2 m_\pi^4 \int \mathrm{d}^4 x \mathrm{e}^{\mathrm{i}qx} \langle 0| T(\phi_\pi(x)\phi_\pi^*(0)) |0\rangle |_{q\to 0} \end{aligned} \tag{5.9}$$

在式 (5.9) 左边已取正规乘积定义两夸克场算符乘积。右边需要计算 π 介子场算符的传播函数的 Fourier 变换，取单极点近似有

$$\mathrm{i} \int \mathrm{d}^4 x \mathrm{e}^{\mathrm{i}qx} \langle 0| T(\phi_\pi(x)\phi_\pi^*(0)) |0\rangle |_{q\to 0} = \left[\frac{1}{m_\pi^2 - q^2} + \cdots\right]_{q\to 0} \tag{5.10}$$

式 (5.10) 中 "..." 代表连续谱的贡献。将式 (5.10) 代入式 (5.9) 并取手征极限 $(m_\pi^2 \to 0)$ 就得到

$$(m_u + m_d)\langle 0|\bar{u}u + \bar{d}d|0\rangle = -2m_\pi^2 f_\pi^2 (1 + O(m_\pi^2)) \tag{5.11}$$

即准确到 $O(m_\pi^2)$ 量级式 (5.11) 成立。当 $m_u, m_d \neq 0$ 时，QCD 手征对称性被明显地破缺，物理上 $m_\pi^2 \neq 0$，实验上测得 $f_\pi \neq 0$，仅可能是真空平均值不等于零，

$$\langle 0|\bar{u}u + \bar{d}d|0\rangle \neq 0 \tag{5.12}$$

这意味着 $|0\rangle$ 不是微扰真空。取 $\langle 0|\bar{u}u|0\rangle = \langle 0|\bar{d}d|0\rangle$ 不失为好的近似，由式 (5.11) 可以估计夸克凝聚在强子标度 ($\mu = 1\text{GeV}$) 下 ($f_\pi = 93\text{MeV}$)

$$\langle 0|\,\bar{q}q\,|0\rangle = -\frac{f_\pi^2 m_\pi^2}{(m_u + m_d)} \simeq -(240 \pm 10\text{MeV})^3 \tag{5.13}$$

这一数值可以作为 QCD 求和规则应用到具体过程的唯象输入。

对于轻夸克 u, d, s，存在近似的 SU(3) 对称性，人们可将上述讨论推到 K 介子，定义相应的轴矢流和 PCAC 关系，

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= \bar{u}(x)\gamma^\mu\gamma_5 s(x) \\ \partial_\mu A^\mu(x) &= \sqrt{2} f_K m_K^2 \phi_K(x) \end{aligned} \tag{5.14}$$

其中 f_K 是 K 介子的衰变常数，由 K 介子衰变实验定出 $f_K = (114 \pm 1.1)\text{MeV}$。与 f_π 相比相差约 20%，这与 SU(3) 破缺的大小一致。重复前面对 π 介子的推导可得与式 (5.11) 类似的下述关系：

$$\begin{aligned} (m_u + m_s)\langle 0|\bar{u}u + \bar{s}s|0\rangle &= -2m_{K^+}^2 f_K^2 (1 + O(m_K^2)) \\ (m_d + m_s)\langle 0|\bar{d}d + \bar{s}s|0\rangle &= -2m_{K^0}^2 f_K^2 (1 + O(m_K^2)) \end{aligned} \tag{5.15}$$

这些关系式表明所有轻夸克 u, d, s 的真空平均值均不等于零，即 $\langle 0|\bar{u}u|0\rangle \neq 0$, $\langle 0|\bar{d}d|0\rangle \neq 0, \langle 0|\bar{s}s|0\rangle \neq 0$ 或 $\langle 0|\bar{q}q|0\rangle \neq 0$，这也意味着强相互作用中手征对称性自发地破缺。如果假定 SU(3) 对称性破缺约 20%，那么可以合理地取下列近似关系

$$\langle 0|\bar{s}s|0\rangle = 0.8\langle 0|\bar{u}u|0\rangle = 0.8\langle 0|\bar{d}d|0\rangle \tag{5.16}$$

此式与式 (5.13) 给出了轻夸克凝聚的唯象数值。

5.1.2　QCD 真空凝聚

量子色动力学的物理真空产生真空凝聚，这是 QCD 的一个重要特点，它对于强子态谱以及强子态的物理过程起了重要的作用。同时，QCD 理论中由于非阿贝尔规范场的大范围结构，存在着瞬子 (instanton) 解，瞬子解性质可以在稀薄气体近似下计算出 $\langle 0|G^2|0\rangle \neq 0$。夸克凝聚和胶子凝聚在物理上反映了 QCD 真空性质很大地不同于微扰真空，QCD 物理真空完全是由非微扰相互作用决定的。它不断地与夸克、胶子相互作用影响着夸克和胶子的传播，这种真空与夸克或胶子相互作用具有零动量转移，是大距离行为，其标度 $\sim \Lambda_{\text{QCD}}$。仅当外动量 $Q^2 \gg \Lambda_{\text{QCD}}^2$ 时可以忽略这种相互作用，近似地以微扰真空来代替。当 $Q^2 \sim \Lambda_{\text{QCD}}^2$ 时这种来自真空的相互作用不可忽略，必须考虑物理真空的影响，即夸克和胶子凝聚的贡献。以上讨论都是对轻夸克而言的，真空凝聚产生手征对称性破缺。

由于真空凝聚的存在，所有物理过程理论计算预言都将受到它们的影响，其大小依赖于物理过程的动量传递 Q^2。以正、负电子湮灭为强子过程的总截面为例，式 (1.171) 表明总截面与两个电磁流算符乘积的真空平均值相关

$$\Pi_{\mu\nu}(q)=\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\left\langle 0\right|T(J_\mu(x)J_\nu(0))\left|0\right\rangle \tag{5.17}$$

由 Lorentz 协变性和电磁流守恒条件，$\Pi_{\mu\nu}(q)$ 的一般张量结构应为 (见式 (1.173))

$$\Pi_{\mu\nu}(q)=\frac{1}{6\pi}(q_\mu q_\nu-q^2g_{\mu\nu})w(q^2)$$

在第 1 章中讨论大 $Q^2(=-q^2)$ 正、负电子湮灭为强子过程时，我们应用微扰理论计算最低阶树图贡献以及高阶修正。另一方面，对于大 Q^2 正、负电子湮灭为强子过程，式 (5.17) 表明右边流算符乘积真空平均值主要贡献来自于小 x^2 区域，对 $T(J_\mu(x)J_\nu(0))$ 作算符乘积展开 (OPE) 就可以获得 $x^2\to 0$ 的展开式，即

$$\begin{aligned}T(J_\mu(x)J_\nu(0))=&\frac{x^2g_{\mu\nu}-2x_\mu x_\nu}{\pi^4(x^2-\mathrm{i}\varepsilon)^4}+\frac{\mathrm{i}x^\lambda}{2\pi^2(x^2-\mathrm{i}\varepsilon)^2}s_{\mu\lambda\nu\rho}O_V^\rho(x,0)\\&+\frac{x^\lambda}{2\pi^2(x^2-\mathrm{i}\varepsilon)^2}\varepsilon_{\mu\lambda\nu\rho}O_A^\rho(x,0)+O_{\mu\nu}(x,0)\end{aligned} \tag{5.18}$$

其中正规乘积算符定义如下：

$$O_V^\mu(x,0)=:\bar\psi(x)\gamma^\mu\psi(0)-\bar\psi(0)\gamma^\mu\psi(x):\tag{5.19}$$

$$O_A^\mu(x,0)=:\bar\psi(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(0)+\bar\psi(0)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x):\tag{5.20}$$

$$O_{\mu\nu}(x,0)=:\bar\psi(x)\gamma_\mu\psi(x)\bar\psi(0)\gamma_\nu\psi(0):\tag{5.21}$$

将式 (5.18) 代入式 (5.17) 得到大 Q^2 正、负电子湮灭为强子过程截面的领头贡献。式 (5.18) 给出的算符乘积展开式逐项的系数包含了 $x^2\to 0$ 短距离的奇异性。第一项是最奇异的，依次各项降低奇异性。

为了说明算符乘积展开式各项的物理含义，首先将式 (5.17) 转变为流对易子展开式，注意到 $J_\mu(x)$ 是厄米的，存在下列等式：

$$T(J_\mu(x)J_\nu(0))-T(J_\mu(x)J_\nu(0))^\dagger=\varepsilon(x_0)\left[J_\mu(x),J_\nu(0)\right]\tag{5.22}$$

其中 $\varepsilon(x_0)$ 是符号函数，即定义为

$$\varepsilon(x_0)=\frac{x_0}{|x_0|}=\begin{cases}1, & x_0>0\\ -1, & x_0<0\end{cases}\tag{5.23}$$

将式 (5.18) 代入式 (5.22) 即可得到流对易子展开式

$$\begin{aligned}\varepsilon(x_0)\left[J_\mu(x),J_\nu(0)\right]=&\frac{\mathrm{i}}{3\pi^3}(2x_\mu x_\nu-x^2g_{\mu\nu})\delta^{(3)}(x^2)\\&+\frac{1}{\pi}x^\lambda\delta^{(1)}(x^2)s_{\mu\lambda\nu\rho}O_V^\rho(x,0)\\&-\frac{\mathrm{i}}{\pi}x^\lambda\delta^{(1)}(x^2)\varepsilon_{\mu\lambda\nu\rho}O_A^\rho(x,0)\\&+O_{\mu\nu}(x,0)-O_{\nu\mu}(0,x)\end{aligned}\tag{5.24}$$

其中 $\delta^{(n)}(x^2)$ 是 δ-函数的 n 阶微商

$$\delta^{(n)}(x^2)=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}(x^2)^n}\delta(x^2)\tag{5.25}$$

在获得式 (5.24) 时已用到下面的等式：

$$\frac{1}{(x^2-\mathrm{i}\varepsilon)^n}=\frac{P}{(x^2)^n}+\mathrm{i}\pi\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}(x^2)\tag{5.26}$$

$$\frac{1}{(x^2-\mathrm{i}\varepsilon)^n}-\frac{1}{(x^2+\mathrm{i}\varepsilon)^n}=2\mathrm{i}\pi\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}(x^2)\tag{5.27}$$

经过直接的运算即可证明式 (5.24) 成立。

现在考察算符乘积展开在物理过程中的应用。将式 (5.24) 代入式 (5.17) 得到

$$\begin{aligned}w_{\mu\nu}=&\int\mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\left\langle0\right|\left[J_\mu(x),J_\nu(0)\right]\left|0\right\rangle\\=&\int\mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\varepsilon(x_0)\frac{\mathrm{i}}{3\pi^3}(2x_\mu x_\nu-x^2g_{\mu\nu})\delta^{(3)}(x^2)\\=&\frac{\mathrm{i}}{3\pi^3}\left(g_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial q}\cdot\frac{\partial}{\partial q}-2\frac{\partial}{\partial q^\mu}\frac{\partial}{\partial q^\nu}\right)I_3\end{aligned}\tag{5.28}$$

由于大 Q^2 正、负电子湮灭为强子过程人们可直接应用微扰理论计算，忽略大距离非微扰效应，取微扰真空，所有正规乘积的真空平均值为零。式 (5.24) 中只有第一项有贡献就得到式 (5.28) 的第一个等式，再将 $(2x_\mu x_\nu-g_{\mu\nu}x^2)$ 提到积分号外就得到式 (5.28) 的第二个等式。其中积分 I_3 定义为

$$\begin{aligned}I_n=&\int\mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\varepsilon(x_0)\delta^{(n)}(x^2)\\=&\frac{\mathrm{i}\pi^2}{4^{n-1}(n-1)!}(q^2)^{n-1}\varepsilon(q_0)\theta(q^2)\end{aligned}\tag{5.29}$$

再将积分 I_3 代入式 (5.28) 给出

$$w_{\mu\nu} = \frac{1}{6\pi}(q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu})\varepsilon(q_0)\theta(q^2) \tag{5.30}$$

对于正、负电子湮灭到一对正、反夸克物理过程总有 $q_0 > 0, q^2 > 0$，注意到式 (1.153) 和式 (1.154) 以及夸克的电荷、味道、颜色，就得到

$$\sigma = \sigma_0 N_c \sum_{i=1}^{N_f} Q_i^2 \theta(q^2) \tag{5.31}$$

这正是微扰计算最低阶树图下的结果式 (1.167)。在第 1 章中讨论大 $Q^2(=-q^2)$ 时采用微扰真空并计算了微扰论高阶的贡献。

当 Q^2 不是很大但保持有 $Q^2 \gg \Lambda_{\mathrm{QCD}}^2$，流算符乘积 $T(J_\mu(x)J_\nu(0))$ 仍然可以有小距离下算符乘积展开成立。如果考虑大距离非微扰效应，以 QCD 物理真空代替微扰真空，按照量纲分析知算符乘积展开中除第一项以外各项都以 $\frac{1}{(Q^2)^n}$ 幂次贡献，其幂次由算符乘积展开中算符量纲 d 决定。两个夸克流算符的算符乘积展开具有下述形式

$$\langle 0|\, T(J_\mu(x)J_\nu(0))\,|0\rangle = (\partial^2 g_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu)\sum_n C_n(x)\,\langle 0|:O_n(0):|0\rangle \tag{5.32}$$

其中 $C_n(x)$ 是 Wilson 展开系数，可以由微扰计算给出，$O_n(0)$ 是夸克和胶子场量构成的定域算符。这些算符按量纲 d 排列有

$$\begin{aligned}
&I && d=0\\
&m\bar\psi\psi && d=4\\
&G^a_{\mu\nu}G_{a\mu\nu} && d=4\\
&\bar\psi\Gamma\psi\bar\psi\Gamma\psi && d=6\\
&m\bar\psi\sigma_{\mu\nu}T^a\psi G^{a\mu\nu} && d=6\\
&f^{abc}G^a_{\mu\nu}G^{b\nu}_{\rho}G^{c\rho\mu} && d=6\\
&\quad\vdots
\end{aligned} \tag{5.33}$$

这一展开是无穷级数，它们的真空平均值就相应于非微扰真空凝聚贡献，包括夸克凝聚贡献和胶子凝聚贡献等。这些无穷的真空平均值是未知的，引入了无穷个未知参量，这对讨论它们的贡献是很困难的。然而这些真空平均值随着量纲愈高相应的 Q^2 幂次压低愈大。因此可以忽略高量纲算符的贡献，将展开级数截断只计及前面几项就够了，一般至量纲 $d=6$ 的算符。式 (5.32) 中第一项的贡献已在第 1 章中讨论过，就是微扰论的领头阶以及高阶修正，后面各项真空凝聚给出微扰贡献的非微扰修正。

5.2　背景场中 QCD 等效拉氏函数和 Feynman 规则

QCD 真空凝聚的存在使得所有物理过程的理论计算预言都将受到它们的影响，仅在物理过程中 Q^2 很大时这些效应才可以被略去。上一节以正、负电子湮灭为强子过程的总截面为例，表明此过程总截面与两个电磁流算符乘积的真空平均值相关。问题是如何计算与过程相关的关联函数？或者说如何计算流算符的真空平均值？真空凝聚的存在源自于物理真空的复杂性质，只有揭示 QCD 物理真空的本质才能确定真空凝聚是怎么产生的。格点规范理论正努力解决非微扰 QCD 问题，有待进一步的发展。20 世纪 70 年代末 Shifman, Vainshtein, Zakharov 等[5–7]提出 QCD 求和规则 (Sum Rules) 通过唯象地引入真空凝聚参量计算非微扰效应的影响，并将这种处理发展成为有效的非微扰 QCD 方法。人们通常称它为 SVZ 求和规则。SVZ 求和规则计算关联函数方法是按照微扰 QCD 图形切断其中夸克内线或胶子内线得到切断后的费曼图形，被切割的夸克和胶子与物理真空相互作用形成夸克凝聚和胶子凝聚。例如，图 5.1 中 (a) 是微扰 QCD 图形，切断其中夸克内线成为 (b)。利用微扰 QCD 方法计算夸克凝聚项的 Wilson 系数。这种方法的缺点是不能自洽又系统地完成所有各类过程的计算。



图 5.1　图解计算关联函数中夸克凝聚方法

(a) 微扰 QCD 图形；(b) 切断 (a) 中夸克内线后的图形

5.2.1　背景场中 QCD 等效拉氏函数

为了描述物理真空的复杂性质，人们将真空设想为填满了可能的各种夸克–反夸克对和胶子的气体，它们可以用背景场来描述，夸克和胶子凝聚是在背景场的相互作用下形成的，它们的真空平均值不为零，描述夸克和胶子凝聚参量。背景场方法[8,9] 从场论的观点对这些真空凝聚提供了一个系统的描述，这些背景场的相互作用决定了 QCD 非微扰性质，夸克和胶子是在充满夸克–反夸克对和胶子的物理真空中传播，QCD 微扰效应是围绕外场背景场 (夸克场和胶子场) 的量子涨落产生的，相应的夸克、胶子的量子场与真空中背景场不断相互作用。

假定真空中填满了各种夸克-反夸克对和胶子的气体，它们可以用经典背景场来描述，具有简单的 QCD 拉氏函数

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QCD}}(A,\psi)=-\frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{a\mu\nu}+\bar{\psi}(\mathrm{i}\not{D}-m)\psi \tag{5.34}$$

其中，$D_\mu=\partial_\mu-\mathrm{i}gA^a_\mu T^a(a,b,c,\cdots=1,2,\cdots,8)$ 是基础表示的协变微商，A^a_μ 是胶子场，$G^a_{\mu\nu}=\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu+gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu$ 是胶子场强张量，ψ 是夸克场，g 是强相互作用耦合常数，f^{abc} 是 SU(3) 群的结构常数。夸克场 ψ 和胶子场 A^a_μ 满足 QCD 经典运动方程

$$(\mathrm{i}\not{D}-m)\psi=0 \tag{5.35}$$

$$\tilde{D}^{ab}_\mu G^{\nu\mu}_b=g\bar{\psi}\gamma^\nu T^a\psi \tag{5.36}$$

其中，$\tilde{D}^{ab}_\mu=\delta^{ab}\partial_\mu-gf^{abc}A^c_\mu$ 是伴随表示的协变微商。

前面已经提到，夸克、胶子的量子场是围绕背景场的量子涨落，人们可以假设将夸克场和胶子场分解为背景场和其上的量子起伏，具体实现的方法就是在 QCD 拉氏函数或格林函数中的胶子场 $A^a_\mu(x)$ 和夸克场 $\psi(x)$ 作下述替代：

$$A^a_\mu(x)\to A^a_\mu(x)+\phi^a_\mu(x) \tag{5.37}$$

$$\psi(x)\to\psi(x)+\eta(x) \tag{5.38}$$

在上式右边，A^a_μ，ψ 分别表示胶子和夸克背景场，而背景场下的量子涨落 $\phi^a_\mu(x)$ 和 $\eta(x)$ 代表胶子和夸克的量子场。QCD 拉氏密度在作式 (5.37) 和式 (5.38) 替代后生成 QCD 等效拉氏函数，它既包含背景场又包含量子场。在有背景场存在的情况下对量子场量子化，并对胶子量子场 $\phi^a_\mu(x)$ 取背景场规范，即

$$\tilde{D}^{ab}_\mu(A)\phi^\mu_b(x)=0 \tag{5.39}$$

将式 (5.37) 和式 (5.38) 代入式 (5.34)，可以得到背景场下的等效拉氏密度：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{eff}}=&\mathcal{L}(A,\psi)+\mathcal{L}(\mathrm{ghosts})+\bar{\eta}(\mathrm{i}\not{D}-m)\eta+\frac{1}{2}\phi^a_\mu(g^{\mu\nu}D^2_{ac}+2g_sf^{abc}G^{\mu\nu}_b)\phi^c_\nu\\&+g_s(\bar{\psi}\phi^aT^a\eta+\bar{\eta}\phi^aT^a\eta)-g_s^2f^{adf}f_{abc}A^\mu_d\phi^\nu_f\phi^b_\mu\phi^c_\nu-g_sf^{abc}(\partial_\mu\phi^a_\nu)\phi^\mu_b\phi^\nu_c\\&-\frac{1}{4}g_s^2f^{abc}f_{acf}\phi^\mu_b\phi^\nu_c\phi^d_\mu\phi^f_\nu+g_s\bar{\eta}\phi^aT^a\eta\end{aligned} \tag{5.40}$$

式中第一项和第二项分别是背景场的自由拉氏密度和含鬼场的项，第三项和第四项分别是夸克量子场和胶子量子场的二次项。从这两项可以分别读出背景场中的夸克和胶子传播子所满足的方程，后面几项则是相互作用拉氏密度。

5.2.2　背景场中 QCD Feynman 规则

我们可以重写式 (5.40) 中 $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ 为两部分

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_i \tag{5.41}$$

其中自由拉氏密度 $\mathcal{L}_0$ 为

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}(A,\psi) + \mathcal{L}(\text{ghosts}) + \bar{\eta}(\mathrm{i}\not{D} - m)\eta + \frac{1}{2}\phi_\mu^a(g^{\mu\nu}D_{ac}^2 + 2g_s f^{abc}G_b^{\mu\nu})\phi_\nu^c \tag{5.42}$$

和相互作用拉氏密度 $\mathcal{L}_i$ 为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_i =& g_s(\bar{\psi}\phi^a T^a\eta + \bar{\eta}\phi^a T^a\eta) - g_s^2 f^{adf}f_{abc}A_d^\mu\phi_f^\nu\phi_\mu^b\phi_\nu^c - g_s f^{abc}(\partial_\mu\phi_\nu^a)\phi_b^\mu\phi_c^\nu \\ &- \frac{1}{4}g_s^2 f^{abc}f_{acf}\phi_b^\mu\phi_c^\nu\phi_\mu^d\phi_\nu^f + g_s\bar{\eta}\phi^a T^a\eta\end{aligned} \tag{5.43}$$

由 $\mathcal{L}_0$ 的变分很容易地得到背景场满足的经典运动方程 (5.35) 和 (5.36)。同时我们可以从等效拉氏密度 (5.41) 得到背景场中夸克和胶子传播子所满足的方程分别为

$$(\mathrm{i}\not{D}(A) - m)S_F(x,0) = \delta^4(x) \tag{5.44}$$

和

$$\left[g^{\mu\nu}(\tilde{D}^2)^{ab} + 2gf^{abc}G^{c\mu\nu}\right]S_{\nu\rho}^{bd}(x,0) = \delta^{ad}g_\rho^\mu\delta^4(x) \tag{5.45}$$

为了简单起见，在写出上式时已取了规范参量 $\alpha = 1$(Feynman 规范)，如果不取 $\alpha = 1$，应有

$$\left[g^{\mu\nu}(\tilde{D}^2)^{ab} - (1-\alpha)[D^\mu(A)D^\nu(A)]^{ab} + 2gf^{abc}G^{c\mu\nu}\right]S_{\nu\rho}^{bd}(x,0) = \delta^{ad}g_\rho^\mu\delta^4(x) \tag{5.46}$$

这样，量子场须在背景场存在下实现量子化，应用文献 [9] 中的方法，选择在 Furry 表象中按下述方式展开量子场量 $\phi_\mu^a(x)$ 和 $\eta(x)$

$$\begin{aligned}\phi_\mu^a(x) &= \sum_{n,\alpha}[a_{n\alpha}h_\mu^{a(n\alpha)}(x) + a_{n\alpha}^\dagger h_\mu^{*a(n\alpha)}(x)] \\ \eta(x) &= \sum_n[c_n f^{(n)}(x) + d_n^\dagger g^{(n)}(x)] \\ \bar{\eta}(x) &= \sum_n[c_n^\dagger\bar{f}^{(n)}(x) + d_n\bar{g}^{(n)}(x)]\end{aligned} \tag{5.47}$$

其中函数 $f^{(n)}, g^{(n)}, h_\mu^{a(n,\alpha)}(\alpha = 1,2,\pm)$ 满足经典运动方程的本征函数

$$(\mathrm{i}\not{D} - m)f^{(n)}(x) = 0, \quad (\mathrm{i}\not{D} - m)g^{(n)}(x) = 0 \tag{5.48}$$

$$\left[g^{\mu\nu}(\tilde{D}^2)_{ac} - (1-\alpha)[D^\mu(A)D^\nu(A)]_{ac} + 2gf_{abc}G_b^{\mu\nu}\right]h_\mu^{a(n,\alpha)} = 0 \tag{5.49}$$

构成 $\mathcal{L}_0$ 的正交完备集合。$f^{(n)}, g^{(n)}$ 分别是旋量经典场的正能解和负能解，相应于自由 Dirac 方程情况下的 $\psi^{(+)}(x)$，$\psi^{(-)}(x)$。$h_\mu^{a(n,\alpha)}(\alpha = 1, 2, \pm)$ 是胶子经典场的本征解。实际上求解方程 (5.48) 和 (5.49) 的本征解是不可能做的，这里采取假设它们存在，然后将场量 $\phi_\mu^a(x)$、$\eta(x)$ 在光锥上选择光锥规范按正则量子化方式量子化，其中 c_n 和 $c_n^\dagger$ 分别是夸克的湮灭和产生算符，d_n 和 $d_n^\dagger$ 分别是反夸克的湮灭和产生算符，满足反对易关系

$$\begin{aligned} \{c_n, c_{n'}^\dagger\} &= \mathrm{i}\delta_{nn'} \\ \{d_n, d_{n'}^\dagger\} &= \mathrm{i}\delta_{nn'} \end{aligned} \tag{5.50}$$

$a_{n\alpha}$ 和 $a_{n\alpha}^\dagger$ 分别是胶子的湮灭和产生算符，满足对易关系

$$[a_{n\alpha}, a_{n'\alpha'}^\dagger] = \delta_{nn'}\delta_{\alpha\alpha'} \tag{5.51}$$

定义物理真空 $|0\rangle$，满足下述等式

$$c_n|0\rangle = d_n|0\rangle = a_{n\alpha}|0\rangle = 0 \tag{5.52}$$

以及经典场的真空平均值不等于零，

$$\begin{aligned} &\langle 0|\bar{\psi}\psi|0\rangle \neq 0 \\ &\langle 0|G_{\mu\nu}^a(A)G^{a\mu\nu}(A)|0\rangle \neq 0 \\ &\langle 0|\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi|0\rangle \neq 0 \\ &\quad\vdots \end{aligned} \tag{5.53}$$

由此可以构成 Hilbert 空间。这些 Fock 态不再是自由的夸克和胶子态，而是束缚在经典背景场中的夸克和胶子态。

由拉氏密度式 (5.41) 可以获得一套新的 QCD Feynman 规则，它包含了胶子和夸克量子场 $\phi_\mu^a(x)$、$\eta(x)$ 之间的相互作用顶角，也包含了夸克和胶子量子场与背景场 $A_\mu^a(x)$、$\psi(x)$ 之间的相互作用顶角。Feynman 规则中除了有通常微扰 QCD 的全部规则外，还包含量子场和背景场的相互作用顶点。

如图 5.2 所示，其中 (a) 图来自于 $\mathcal{L}_0$ 对夸克传播子的贡献，(b) 图来自于 $\mathcal{L}_0$ 对胶子传播子的贡献，(c) 图来自于 $\mathcal{L}_i$ 出现在微扰展开的顶角中。图中带有端点“$\times$”的直线和螺旋线分别表示夸克和胶子背景场，由于背景场满足经典场运动方程，在上述新出现的图形中不包含有两个背景场的顶角图形。这样对于任何一个 Green 函数的计算都可表达为两部分之和：一部分是纯粹量子场对微扰展开的贡献，同于微扰 QCD 的计算；另一部分是包含与背景场有关的非微扰贡献，即含有真空凝聚的贡献。这样应用此有效拉氏密度下的 Feynman 规则后，对于任一 Green 函数，Wick 定理仅被应用于量子场，在此框架中自然地计算微扰展开的 Wilson 系

数，并在此框架中自然地计算微扰展开的 Wilson 系数，留下的是背景场的真空平均值给出相应的真空凝聚。

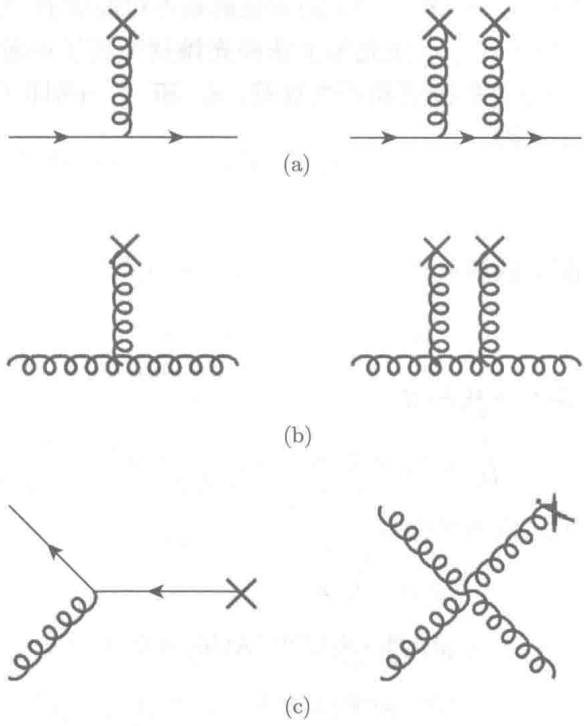


图 5.2　包含与背景场有关的相互作用顶点

5.3　背景场中的夸克传播子和胶子传播子

5.2 节引入背景场方法以描述 QCD 非微扰性质，夸克和胶子是在充满夸克–反夸克对和胶子的物理真空中传播，相应的夸克、胶子的量子场与真空中背景场不断相互作用，使得夸克及胶子传播子不同于微扰理论中自由传播子的情况，含有非微扰效应对夸克及胶子传播子的贡献。这一节将从背景场中夸克传播子所满足的方程 (5.44) 和胶子传播子所满足的方程 (5.45) 解出它们的传播子的具体表达式[9,10]。

5.3.1　固定点规范

背景场中夸克传播子所满足的方程 (5.44) 提供了计算夸克传播子的途径。采用固定点规范 (Schwinger 规范)

$$x^\mu A_\mu^a(x) = 0 \tag{5.54}$$

显然由此式可得

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[x^\alpha A^a_\alpha(x)\right]=A^a_\mu(x)+x^\alpha\frac{\partial}{\partial x^\mu}A^a_\alpha(x)=0 \tag{5.55}$$

于是

$$A^a_\mu(x)=-x^\alpha\frac{\partial}{\partial x^\mu}A^a_\alpha(x) \tag{5.56}$$

再利用 SU(3) 群的生成元的对易关系 $\left[T^a,T^b\right]=\mathrm{i}f^{abc}T^c$，式 (5.54) 以及 (5.56)，容易得到 ($G^a_{\mu\nu}=\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu+g_sf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu$) 下列等式

$$x^\alpha G^a_{\alpha\mu}(x)=x^\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha}A^a_\mu(x)+A^a_\mu(x) \tag{5.57}$$

对上式作替换 $x\to\beta x$，

$$A^a_\mu(\beta x)=\beta x^\alpha G^a_{\alpha\mu}(\beta x)-x^\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha}A^a_\mu(\beta x)$$

并利用

$$\beta\frac{\partial}{\partial\beta}A^a_\mu(\beta x)=x^\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha}A^a_\mu(\beta x) \tag{5.58}$$

可以得到

$$\beta x^\alpha G^a_{\alpha\mu}(\beta x)=A^a_\mu(\beta x)+\beta\frac{\partial}{\partial\beta}A^a_\mu(\beta x)=\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\beta A^a_\mu(\beta x)\right] \tag{5.59}$$

上式右边是全微分，对两边积分可得

$$A^a_\mu(x)=x^\alpha\int_0^1\beta\mathrm{d}\beta G^a_{\alpha\mu}(\beta x) \tag{5.60}$$

由式 (5.60) 显然有

$$A^a_\mu(0)=0 \tag{5.61}$$

可以将式 (5.60) 右边利用规范不变的算符将胶子背景场 $A^a_\mu(z)$ 展开得到

$$A^a_\mu(x)=x^\nu\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+2)}x^{\alpha_1}\cdots x^{\alpha_n}\left[\partial_{\alpha_1}\cdots\partial_{\alpha_n}G^a_{\nu\mu}\right](0) \tag{5.62}$$

由于采用固定点规范很容易证明：$\delta^{ab}x^\mu\partial_\mu\leftrightarrow x^\mu\tilde{D}^{ab}_\mu$，因而式 (5.62) 可以重新表示为

$$\begin{aligned}A^a_\mu(x)=&x^\nu\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+2)}x^{\alpha_1}\cdots x^{\alpha_n}\left[\tilde{D}^{aa_1}_{\alpha_1}\cdots\tilde{D}^{a_{n-1}b}_{\alpha_n}G^b_{\nu\mu}\right](0)\\ \equiv&x^\nu\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+2)}x^{\alpha_1}\cdots x^{\alpha_n}G^a_{\nu\mu;\alpha_n\cdots\alpha_1}(0)\end{aligned} \tag{5.63}$$

其中

$$G^a_{\nu\mu;\alpha_n\cdots\alpha_1}(0)=\left[\tilde{D}^{aa_1}_{\alpha_1}\cdots\tilde{D}^{a_{n-1}b}_{\alpha_n}G^b_{\nu\mu}\right](0)$$

显然，算符 $G^a_{\nu\mu;\alpha_n\cdots\alpha_1}(0)$ 是规范不变的，因而通过式 (5.63) 可以将 $A^a_\mu(x)$ 用规范不变的算符表示出来。在具体的计算过程中，由于高量纲算符有高 Q^2 幂次压低效应，通常对于较大 Q^2 物理过程只需要考虑取近似到量纲为 6 的凝聚项。因而在 $A^a_\mu(x)$ 的展开式中近似地只须保留前面几项，即

$$\begin{aligned}A^a_\mu(x)=&\frac{1}{2}x^\nu G^a_{\nu\mu}+\frac{1}{3}x^\nu x^\rho G^a_{\nu\mu;\rho}+\frac{1}{8}x^\nu x^\rho x^\sigma G^a_{\nu\mu;\rho\sigma}+\frac{1}{30}x^\nu x^\rho x^\sigma x^\lambda G^a_{\nu\mu;\rho\sigma\lambda}\\&+\frac{1}{144}x^\nu x^\rho x^\sigma x^\lambda x^\tau G^a_{\nu\mu;\rho\sigma\lambda\tau}+\cdots\end{aligned}\tag{5.64}$$

为简便起见，在式 (5.64) 中，我们省略了零点处胶子场张量 (协变微商) 中的 "(0)"，在下文中如没有特别的说明，均用 $G^a_{\nu\mu;\cdots}$ 表示 $G^a_{\nu\mu;\cdots}(0)$。为便于应用到夸克及胶子传播子的推导，利用式 (5.71) 给出 $\partial_\nu A^a_\mu(x)$ 和 $A^a_\nu(x)A^b_\mu(x)$ 的展开式

$$\begin{aligned}\partial_\nu A^a_\mu(x)=&\frac{1}{2}G^a_{\nu\mu}+\frac{1}{3}x^\rho(G^a_{\nu\mu;\rho}+G^a_{\rho\mu;\nu})+\frac{1}{8}x^\rho x^\sigma(G^a_{\nu\mu;\rho\sigma}+G^a_{\rho\mu;\nu\sigma}+G^a_{\alpha\mu;\sigma\nu})\\&+\frac{1}{30}x^\rho x^\sigma x^\lambda(G^a_{\nu\mu;\rho\sigma\lambda}+G^a_{\rho\mu;\nu\sigma\lambda}+G^a_{\rho\mu;\sigma\nu\lambda}+G^a_{\rho\mu;\sigma\lambda\nu})\\&+\frac{1}{144}x^\rho x^\sigma x^\lambda x^\tau(G^a_{\nu\mu;\rho\sigma\lambda\tau}+G^a_{\rho\mu;\nu\sigma\lambda\tau}+G^a_{\rho\mu;\sigma\nu\lambda\tau}+G^a_{\rho\mu;\sigma\lambda\nu\tau}+G^a_{\rho\nu;\sigma\lambda\tau\nu})\\&+\cdots\end{aligned}\tag{5.65}$$

$$\begin{aligned}A^a_\nu(x)A^b_\mu(x)=&\frac{1}{4}x^\rho x^\sigma G^a_{\rho\nu}G^b_{\sigma\nu}+\frac{1}{6}x^\rho x^\sigma x^\lambda(G^a_{\rho\nu}G^b_{\sigma\mu;\lambda}+G^a_{\rho\nu;\lambda}G^b_{\sigma\mu})\\&+x^\rho x^\sigma x^\lambda x^\tau\left(\frac{1}{16}G^a_{\rho\nu}G^b_{\sigma\mu;\lambda\tau}+\frac{1}{9}G^a_{\rho\nu;\lambda}G^b_{\sigma\mu;\tau}+\frac{1}{16}G^a_{\rho\nu;\lambda\tau}G^b_{\sigma\mu}\right)\\&+\cdots\end{aligned}\tag{5.66}$$

5.3.2　背景场中的夸克传播子

现在求解方程式 (5.44)，令

$$S_F(x,0)=(\mathrm{i}\not{D}+m)D(x,0)\tag{5.67}$$

以及记住简化符号定义

$$\begin{aligned}&A_\mu\equiv gA^a_\mu T^a,\quad G_{\mu\nu}\equiv gG^a_{\mu\nu}T^a\\&D_\mu=\partial_\mu-\mathrm{i}A_\mu\\&G_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu+f^{abc}A_\mu A_\nu\end{aligned}$$

将式 (5.67) 代入式 (5.44)，可以得到 $D(x,0)$ 满足的方程为

$$(\partial^2 - P_\mu \partial^\mu - Q + m^2) D(x,0) = \delta^4(x) \tag{5.68}$$

其中，P_μ 和 Q 定义为

$$\begin{aligned} P_\mu =& 2\mathrm{i}A_\mu(x) \\ =& \mathrm{i}x^\nu G_{\nu\mu} + \frac{2\mathrm{i}}{3}x^\nu x^\rho G_{\nu\mu;\rho} + \frac{\mathrm{i}}{4}x^\nu x^\rho x^\sigma G_{\nu\mu;\rho\sigma} + \frac{\mathrm{i}}{15}x^\nu x^\rho x^\sigma x^\lambda G_{\nu\mu;\rho\sigma\lambda} \\ &+ \frac{\mathrm{i}}{72}x^\nu x^\rho x^\sigma x^\lambda x^\tau G_{\nu\mu;\rho\sigma\lambda\tau} + \cdots \end{aligned} \tag{5.69}$$

$$\begin{aligned} Q =& \gamma^\nu \gamma^\mu \left[A_\nu(x) A_\mu(x) + \mathrm{i}\partial_\nu A_\mu(x)\right] \\ =& \gamma^\nu \gamma^\mu (b_{0\nu\mu} + x^\rho b_{1\nu\mu|\rho} + x^\rho x^\sigma b_{2\nu\mu|\rho\sigma} + x^\rho x^\sigma x^\lambda b_{3\nu\mu|\rho\sigma\lambda} \\ &+ x^\rho x^\sigma x^\lambda x^\tau b_{4\nu\mu|\rho\sigma\lambda\tau} + \cdots) \end{aligned} \tag{5.70}$$

以及

$$b_{0\nu\mu} = \frac{\mathrm{i}}{2} G_{\nu\mu}(0) \tag{5.71}$$

$$b_{1\nu\mu|\rho} = \frac{\mathrm{i}}{3}\left[G_{\nu\mu;\rho}(0) + G_{\rho\mu;\nu}(0)\right] \tag{5.72}$$

$$b_{2\nu\mu|\rho\sigma} = \frac{1}{4} G_{\rho\nu}(0) G_{\sigma\mu}(0) + \frac{\mathrm{i}}{8}\left[G_{\nu\mu;\rho\sigma}(0) + G_{\rho\mu;\nu\sigma}(0) + G_{\rho\mu;\sigma\nu}(0)\right] \tag{5.73}$$

$$\begin{aligned} b_{3\nu\mu|\rho\sigma\lambda} =& \frac{1}{6}\left[G_{\rho\nu}(0) G_{\sigma\mu;\lambda}(0) + G_{\rho\nu;\sigma}(0) G_{\lambda\mu}(0)\right] \\ &+ \frac{\mathrm{i}}{30}\left[G_{\nu\mu;\rho\sigma\lambda}(0) + G_{\rho\mu;\nu\sigma\lambda}(0) + G_{\rho\mu;\sigma\nu\lambda}(0) + G_{\rho\mu;\sigma\lambda\nu}(0)\right] \end{aligned} \tag{5.74}$$

$$\begin{aligned} b_{4\nu\mu|\rho\sigma\lambda\tau} =& \frac{1}{9} G_{\rho\nu;\sigma}(0) G_{\lambda\mu;\tau}(0) + \frac{1}{16} G_{\rho\nu}(0) G_{\sigma\mu;\tau\lambda}(0) + \frac{1}{16} G_{\rho\nu;\lambda\sigma}(0) G_{\tau\mu}(0) \\ &+ \frac{\mathrm{i}}{144}\left[G_{\nu\mu;\rho\sigma\lambda\tau}(0) + G_{\rho\mu;\nu\sigma\lambda\tau}(0)\right. \\ &\left. + G_{\rho\mu;\sigma\nu\lambda\tau}(0) + G_{\rho\mu;\sigma\lambda\nu\tau}(0) + G_{\rho\mu;\sigma\lambda\tau\nu}(0)\right] \end{aligned} \tag{5.75}$$

将式 (5.68) 通过 Fourier 变换到动量空间得到

$$\begin{aligned} &\left\{m^2 - p^2\left[\mathrm{i}G_{\nu\mu}\partial^\nu + \frac{2}{3}G_{\nu\mu;\rho}\partial^\nu\partial^\rho - \frac{\mathrm{i}}{4}G_{\nu\mu;\rho\sigma}\partial^\nu\partial^\rho\partial^\sigma - \frac{1}{15}G_{\nu\mu;\rho\sigma\lambda}\partial^\nu\partial^\rho\partial^\sigma\partial^\lambda\right.\right. \\ &\left.\left. + \frac{\mathrm{i}}{72}G_{\nu\mu;\rho\sigma\lambda\tau}\partial^\nu\partial^\rho\partial^\sigma\partial^\lambda\partial^\tau + \cdots\right] p^\mu - \gamma^\nu\gamma^\mu\left[b_{0\nu\mu} - \mathrm{i}b_{1\nu\mu|\rho}\partial^\rho - b_{2\nu\mu|\rho\sigma}\partial^\rho\partial^\sigma\right. \end{aligned}$$

$$+\mathrm{i}b_{3\nu\mu|\rho\sigma\lambda}\partial^\rho\partial^\sigma\partial^\lambda + b_{4\nu\mu|\rho\sigma\lambda\tau}\partial^\rho\partial^\sigma\partial^\lambda\partial^\tau + \cdots]\Big\}\tilde{D}(p) = 1 \tag{5.76}$$

其中，$\tilde{D}(p)$ 是 $D(x,0)$ 经 Fourier 变换后在动量空间中的表示形式，即

$$\tilde{D}(p) = \sum_{i=0}^{\infty}\tilde{D}_i(p), \quad \tilde{D}_i(p) = \frac{d_i}{(m^2-p^2)^{i+1}} \tag{5.77}$$

将式 (5.77) 代入式 (5.76) 可得

$$d_0 = 1 \tag{5.78}$$

$$d_1 = B_0 \tag{5.79}$$

$$d_2 = B_0^2 - \mathrm{i}2p^\rho B_{1\rho} - 2B_{2\rho}^{\ \rho} \tag{5.80}$$

$$\begin{aligned} d_3 =& B_0^3 - \mathrm{i}6p^\rho B_0 B_{1\rho} - 6B_0 B_{2\rho}^{\ \rho} - 8p^\rho p^\sigma B_{2\rho\sigma} \\ &+ \mathrm{i}8B_{3\rho\sigma\lambda}g^{\{\rho\sigma}p^{\lambda\}} + 8B_{4\rho\sigma\lambda\tau}g^{(\rho\sigma\lambda\tau)} \end{aligned} \tag{5.81}$$

$$\begin{aligned} d_4 =& -8p^\rho p^\sigma B_0 B_{2\rho\sigma} - 12p^\rho p^\sigma B_{1\rho}B_{1\sigma} - 24p^\rho p^\sigma B_0 B_{2\rho\sigma} \\ &+ \mathrm{i}48p^\rho p^\sigma p^\lambda B_{3\rho\sigma\lambda} + 48g^{\{\rho\sigma}p^\lambda p^{\tau\}}B_{4\rho\sigma\lambda\tau} + \cdots \end{aligned} \tag{5.82}$$

$$d_5 = 384p^\rho p^\sigma p^\lambda p^\tau B_{4\rho\sigma\lambda\tau} + \cdots \tag{5.83}$$

这里，高于量纲为 6 的项没有给出，并且有

$$\begin{aligned} &B_0 = \gamma^\nu\gamma^\mu b_{0\nu\mu}, \quad B_{1\rho} = \gamma^\nu\gamma^\mu b_{1\nu\mu|\rho}, \quad B_{2\rho\sigma} = \gamma^\nu\gamma^\mu b_{2\nu\mu|\rho\sigma} \\ &B_{3\rho\sigma\lambda} = \gamma^\nu\gamma^\mu b_{3\nu\mu|\rho\sigma\lambda}, \quad B_{4\rho\sigma\lambda\tau} = \gamma^\nu\gamma^\mu b_{4\nu\mu|\rho\sigma\lambda\tau} \end{aligned} \tag{5.84}$$

另外注意到

$$\begin{aligned} g^{(\mu\nu\rho\sigma)} &= g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} + g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} \\ g^{\{\mu\nu}p^{\rho\}} &= g^{\mu\nu}p^\rho + g^{\mu\rho}p^\nu + g^{\nu\rho}p^\mu \\ g^{\{\mu\nu}p^\rho p^{\sigma\}} &= g^{\mu\nu}p^\rho p^\sigma + g^{\mu\rho}p^\nu p^\sigma + g^{\mu\sigma}p^\nu p^\rho + g^{\nu\rho}p^\mu p^\sigma \\ &\quad + g^{\nu\sigma}p^\mu p^\rho + g^{\rho\sigma}p^\mu p^\nu \end{aligned}$$

从而获得背景场中从 0 传播到 x 的夸克传播子式 (5.67) 可具体展开为

$$\begin{aligned} S_F(x,0) = -\Big[& m + \mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu + \frac{1}{2}G_{\nu\mu}\gamma^\mu x^\nu + \frac{1}{3}G_{\nu\mu;\rho}\gamma^\mu x^\nu x^\rho \\ &+ \frac{1}{8}G_{\nu\mu;\rho\sigma}\gamma^\mu x^\nu x^\rho x^\sigma + \frac{1}{30}G_{\nu\mu;\rho\sigma\lambda}\gamma^\mu x^\nu x^\rho x^\sigma x^\lambda \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{144}G_{\nu\mu;\rho\sigma\lambda\tau}\gamma^{\mu}x^{\nu}x^{\rho}x^{\sigma}x^{\lambda}x^{\tau}+\cdots\Bigg]D(x,0) \tag{5.85}$$

将式 (5.85) 变换到动量空间则有

$$\begin{aligned}\tilde{S}(p)=\Bigg[&-(m+\not{p})+\frac{\mathrm{i}}{2}G_{\nu\mu}\gamma^{\mu}\partial^{\nu}+\frac{1}{3}G_{\nu\mu;\rho}\gamma^{\mu}\partial^{\nu}\partial^{\rho}\\&-\frac{\mathrm{i}}{8}G_{\nu\mu;\rho\sigma}\gamma^{\mu}\partial^{\nu}\partial^{\rho}\partial^{\sigma}-\frac{1}{30}G_{\nu\mu;\rho\sigma\lambda}\gamma^{\mu}\partial^{\nu}\partial^{\rho}\partial^{\sigma}\partial^{\lambda}\\&+\frac{\mathrm{i}}{144}G_{\nu\mu;\rho\sigma\lambda\tau}\gamma^{\mu}\partial^{\nu}\partial^{\rho}\partial^{\sigma}\partial^{\lambda}\partial^{\tau}+\cdots\Bigg]\tilde{D}(p)\end{aligned} \tag{5.86}$$

其中，$\tilde{S}(p)$ 是 $S_F(x,0)$ 变换到动量空间中的表达式。将式 (5.77)~(5.83) 代入式 (5.86) 即可得到背景场中夸克传播子的表达式，即

$$\begin{aligned}S_F^{d\leqslant 3}(x,0)=&\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\Bigg\{-\frac{m+\not{p}}{m^2-p^2}+\frac{\gamma^{\nu}(\not{p}-m)\gamma^{\mu}}{(m^2-p^2)^2}b_{0\nu\mu}-\mathrm{i}\Bigg[2\frac{\gamma^{\nu}(\not{p}-m)p^{\rho}}{(m^2-p^2)^3}\\&+\frac{g^{\nu\rho}}{(m^2-p^2)^2}\Bigg]\gamma^{\mu}b_{1\nu\mu|\rho}\Bigg\}\end{aligned} \tag{5.87}$$

其中，d 表示胶子背景场及其协变倒数的量纲。考虑到计算精度的需要，这里只保留了前面几项。令上式中 $m^2=0$ 并完成傅里叶积分，注意到 $\tilde{D}_{\mu}^{ab}G_{b}^{\nu\mu}=g\bar{\psi}\gamma^{\nu}T^{a}\psi$ 以及 $\delta^{ab}x^{\mu}\partial_{\mu}-x^{\mu}\tilde{D}_{\mu}^{ab}$，即可得到轻夸克传播子表达式：

$$\begin{aligned}S_F(x,0)=&\frac{\mathrm{i}\not{x}}{2\pi^2x^4}-\frac{m}{4\pi^2x^2}-\frac{\gamma^{\alpha}\not{x}\gamma^{\beta}}{16\pi^2x^2}G_{\alpha\beta}(0)+\frac{\ln(-x^2)}{48\pi^2}\gamma^{\mu}G^{\alpha}_{\alpha\mu;}(0)\\&-\frac{x^{\alpha}\gamma^{\nu}\not{x}\gamma^{\mu}}{48\pi^2x^2}\left[G_{\nu\mu;\alpha}(0)+G_{\alpha\mu;\nu}(0)\right]+\cdots\end{aligned} \tag{5.88}$$

上式中前两项是纯粹量子场的贡献，同于微扰 QCD 的自由传播子 (未计入辐射修正)。后面的项都是与背景场相互作用的贡献，即真空凝聚的贡献。这里省略号表示高量纲凝聚的贡献。

为了方便描述具体的计算过程，我们将夸克传播子表达式 (5.88) 推算到高量纲 ($d\leqslant 6$)，并按量纲分别表示为 (图 5.3 给出相应的 Feynman 图)

$$S_F^0(x,0)=\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\left\{-\frac{m+\not{p}}{m^2-p^2}\right\} \tag{5.89}$$

$$S_F^2(x,0)=\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\left\{-\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\gamma^{\mu}(m-\not{p})\gamma^{\nu}}{(m^2-p^2)^2}G_{\mu\nu}\right\} \tag{5.90}$$

$$S_F^3(x,0)=\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}$$

$$\left\{-\frac{2}{3}\left[\frac{(\gamma^\mu p^\rho+\gamma^\rho p^\mu)(m-\not{p})}{(m^2-p^2)^3}-\frac{g^{\mu\rho}}{(m^2-p^2)^2}\right]\gamma^\nu G_{\mu\nu;\rho}\right\} \tag{5.91}$$

$$\begin{aligned}S_F^{4(1)}(x,0)=&\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\left\{\left[\frac{1}{4}\left(\frac{\gamma^\mu(m-\not{p})}{(m^2-p^2)^3}-2\frac{p^\mu}{(m^2-p^2)^3}\right)\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\right.\right.\\&\left.\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{(m+\not{p})\gamma^\mu}{(m^2-p^2)^3}g^{\nu\sigma}+4\frac{\gamma^\mu(m-\not{p})}{(m^2-p^2)^4}p^\nu p^\sigma\right)\gamma^\rho\right]G_{\mu\nu}G_{\rho\sigma}\right\}\end{aligned} \tag{5.92}$$

$$\begin{aligned}S_F^{4(2)}(x,0)=&\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\left\{\frac{\mathrm{i}}{4}\left[\frac{g^{\{\mu\rho}\gamma^{\sigma\}}(m-\not{p})}{(m^2-p^2)^3}-2\frac{g^{\{\mu\rho}p^{\sigma\}}}{(m^2-p^2)^3}\right.\right.\\&\left.\left.+4\frac{\gamma^{\{\mu}p^\rho p^{\sigma\}}(m-\not{p})}{(m^2-p^2)^4}\right]\gamma^\nu G_{\mu\nu;\rho\sigma}\right\}\end{aligned} \tag{5.93}$$

$$\begin{aligned}S_F^{5(1)}(x,0)=&\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\\&\left\{-\frac{\mathrm{i}}{3}\left[\left(3\frac{\gamma^\mu(m-\not{p})\gamma^\nu}{(m^2-p^2)^4}\left(p^\lambda\gamma^\rho+p^\rho\gamma^\lambda\right)-\frac{\gamma^\nu\left(g^{\mu\lambda}\gamma^\rho+g^{\mu\rho}\gamma^\lambda\right)}{(m^2-p^2)^3}\right)\gamma^\sigma\right.\right.\\&\left.\left.+4\left(\frac{\gamma^\mu(m-\not{p})}{(m^2-p^2)^4}g^{\{\nu\sigma}p^{\lambda\}}+2\frac{p^\mu g^{\{\nu\sigma}p^{\lambda\}}}{(m^2-p^2)^4}+6\frac{\gamma^\mu(m-\not{p})}{(m^2-p^2)^5}p^\nu p^\sigma p^\lambda\right)\gamma^\rho\right]\right.\\&\left.\times G_{\mu\nu}G_{\rho\sigma;\lambda}\right\}\end{aligned} \tag{5.94}$$

$$\begin{aligned}S_F^{5(2)}(x,0)=&\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\left\{\frac{2\mathrm{i}}{3}\left[\left(\frac{g^{\mu\lambda}}{(m^2-p^2)^3}+\frac{6p^\mu p^\lambda}{(m^2-p^2)^4}\right)\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\right.\right.\\&-2\left(\frac{\gamma^\mu(m-\not{p})}{(m^2-p^2)^4}g^{\{\nu\sigma}p^{\lambda\}}+2\frac{p^\mu g^{\{\nu\sigma}p^{\lambda\}}}{(m^2-p^2)^4}\right.\\&\left.\left.\left.+6\frac{\gamma^\mu(m-\not{p})}{(m^2-p^2)^5}p^\nu p^\sigma p^\lambda\right)\gamma^\rho\right]G_{\mu\nu;\lambda}G_{\rho\sigma}\right\}\end{aligned} \tag{5.95}$$

$$\begin{aligned}S_F^{5(3)}(x,0)=&\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\left\{\frac{4}{15}\left[\frac{g^{\{\rho\sigma}p^\lambda\gamma^{\mu\}}(m-\not{p})}{(m^2-p^2)^4}-2\frac{g^{\{\rho\sigma}p^\lambda p^{\mu\}}}{(m^2-p^2)^4}\right.\right.\\&\left.\left.+6\frac{\gamma^{\{\mu}p^\rho p^\sigma p^{\lambda\}}(m-\not{p})}{(m^2-p^2)^5}-\frac{g^{(\mu\rho\sigma\lambda)}}{(m^2-p^2)^3}\right]\gamma^\nu G_{\mu\nu;\rho\sigma\lambda}\right\}\end{aligned} \tag{5.96}$$

$$S_F^{6(1)}(x,0)=\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\frac{\mathrm{i}}{8}$$
$$\left\{\left[\frac{\gamma^\mu(m-\not p)}{(m^2-p^2)^4}-4\frac{p^\mu}{(m^2-p^2)^4}\right]\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\lambda\gamma^\tau+2\left[3\frac{\gamma^\mu(m-\not p)}{(m^2-p^2)^4}g^{\sigma\tau}\right.\right.$$
$$\left.\left.+16\frac{\gamma^\mu(m-\not p)}{(m^2-p^2)^5}p^\sigma p^\tau-4\frac{g^{\mu\sigma}p^\tau+g^{\mu\tau}p^\sigma}{(m^2-p^2)^4}\right]\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\lambda\right\}G_{\mu\nu}G_{\rho\sigma}G_{\lambda\tau}\quad(5.97)$$

$$S_F^{6(2)}(x,0)=\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\left(-\frac{1}{8}\right)$$
$$\left\{\left[3\frac{\gamma^\mu(m-\not p)\gamma^\nu}{(m^2-p^2)^4}g^{\{\lambda\tau}\gamma^{\rho\}}+16\frac{\gamma^\mu(m-\not p)\gamma^\nu}{(m^2-p^2)^5}\gamma^{\{\rho}p^\lambda p^{\tau\}}\right.\right.$$
$$\left.-4\frac{\gamma^\nu}{(m^2-p^2)^4}g^{\mu\{\lambda}p^\tau\gamma^{\rho\}}\right]\gamma^\sigma$$
$$+4\left[\frac{m+\not p}{(m^2-p^2)^4}g^{(\nu\sigma\tau\lambda)}+6\frac{m+\not p}{(m^2-p^2)^5}g^{\{\nu\sigma}p^\tau p^{\lambda\}}\right.$$
$$\left.\left.+48\frac{m+\not p}{(m^2-p^2)^6}p^\nu p^\sigma p^\tau p^\lambda\right]\gamma^\mu\gamma^\rho\right\}G_{\mu\nu}G_{\rho\sigma;\lambda\tau}\quad(5.98)$$

$$S_F^{6(3)}(x,0)=\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\left(-\frac{2}{9}\right)\left\{3\left(\left[2\frac{\gamma^\mu(m-\not p)}{(m^2-p^2)^5}p^\lambda p^\tau-\frac{g^{\{\mu\lambda}p^{\tau\}}}{(m^2-p^2)^4}\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{4p^\mu p^\lambda p^\tau}{(m^2-p^2)^5}\right]\gamma^\nu\gamma^\rho+(\mu\leftrightarrow\lambda)+(\rho\leftrightarrow\tau)+(\mu\leftrightarrow\lambda,\rho\leftrightarrow\tau)\right)\gamma^\sigma$$
$$+4\left[\frac{m+\not p}{(m^2-p^2)^4}\,g^{(\nu\lambda\sigma\tau)}+6\frac{m+\not p}{(m^2-p^2)^5}g^{\{\nu\lambda}p^\sigma p^{\tau\}}\right.$$
$$\left.\left.+48\frac{m+\not p}{(m^2-p^2)^6}\,p^\nu p^\lambda p^\sigma p^\tau\right]\gamma^\mu\gamma^\rho\right\}G_{\mu\nu;\lambda}G_{\rho\sigma;\tau}\quad(5.99)$$

$$S_F^{6(4)}(x,0)=\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\left(-\frac{1}{2}\right)\left\{\left[\frac{m+\not p}{(m^2-p^2)^4}g^{(\nu\tau\lambda\sigma)}+6\frac{m+\not p}{(m^2-p^2)^5}g^{\{\nu\tau}p^\lambda p^{\sigma\}}\right.\right.$$
$$\left.+48\frac{m+\not p}{(m^2-p^2)^6}p^\nu p^\tau p^\lambda p^\sigma\right]\gamma^\mu\gamma^\rho$$
$$\left.-3\left[\frac{g^{\{\mu\lambda}p^{\tau\}}}{(m^2-p^2)^4}+\frac{8p^\mu p^\lambda p^\tau}{(m^2-p^2)^5}\right]\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\right\}G_{\mu\nu;\lambda\tau}G_{\rho\sigma}\quad(5.100)$$

$$
\begin{aligned}
S_F^{6(5)}(x,0) =& \mathrm{i}\int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} \\
&\left\{ -\frac{\mathrm{i}}{18}\left[\frac{g^{[\rho\sigma\lambda\tau}\gamma^{\mu]}\left(m-\not{p}\right)}{(m^2-p^2)^4} - 4\frac{g^{\{\rho\sigma\lambda\tau}p^{\mu\}}}{(m^2-p^2)^4} + 6\frac{g^{\{\rho\sigma}p^{\lambda}p^{\tau}\gamma^{\mu\}}\left(m-\not{p}\right)}{(m^2-p^2)^5} \right.\right. \\
&\left.\left. - 12\frac{g^{\{\rho\sigma}p^{\lambda}p^{\tau}p^{\mu\}}}{(m^2-p^2)^5} + 48\frac{p^{\{\rho}p^{\sigma}p^{\lambda}p^{\tau}\gamma^{\mu\}}\left(m-\not{p}\right)}{(m^2-p^2)^6} \right]\gamma^{\nu}G_{\mu\nu;\rho\sigma\lambda\tau} \right\} \qquad (5.101)
\end{aligned}
$$

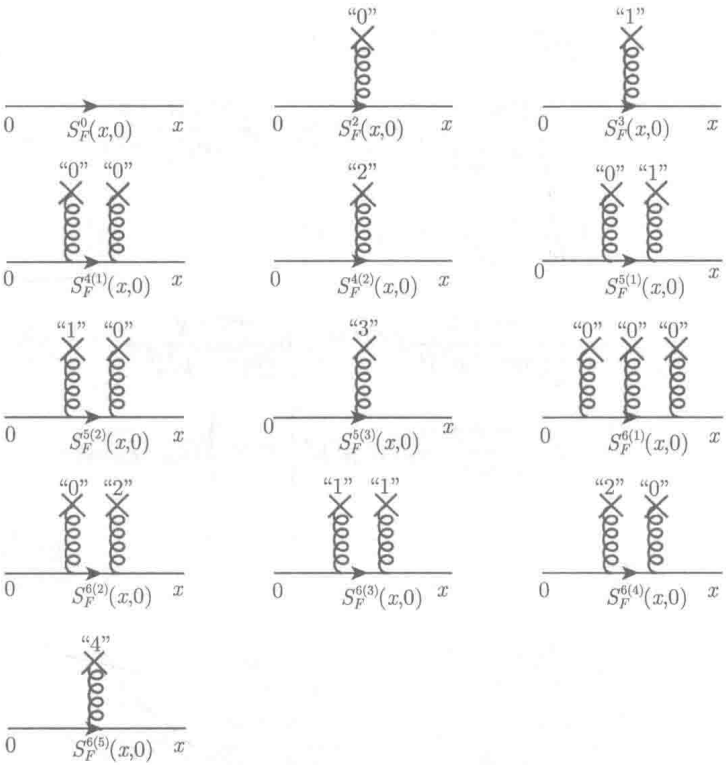


图 5.3　背景场中的夸克传播子

其中

$$
\begin{aligned}
g^{[\mu\nu\rho\sigma}p^{\lambda]} =& g^{(\mu\nu\rho\sigma)}p^{\lambda} + g^{(\lambda\nu\rho\sigma)}p^{\mu} + g^{(\mu\lambda\rho\sigma)}p^{\nu} + g^{(\mu\nu\lambda\sigma)}p^{\rho} + g^{(\mu\nu\rho\lambda)}p^{\sigma} \\
g^{\{\mu\nu}p^{\rho}p^{\sigma}p^{\lambda\}} =& g^{\mu\nu}p^{\rho}p^{\sigma}p^{\lambda} + g^{\mu\rho}p^{\nu}p^{\sigma}p^{\lambda} + g^{\mu\sigma}p^{\rho}p^{\nu}p^{\lambda} + g^{\mu\lambda}p^{\rho}p^{\sigma}p^{\nu} + g^{\nu\rho}p^{\mu}p^{\sigma}p^{\lambda} \\
&+ g^{\nu\sigma}p^{\rho}p^{\mu}p^{\lambda} + g^{\nu\lambda}p^{\rho}p^{\sigma}p^{\mu} + g^{\rho\sigma}p^{\mu}p^{\nu}p^{\lambda} + g^{\rho\lambda}p^{\mu}p^{\sigma}p^{\nu} + g^{\sigma\lambda}p^{\rho}p^{\mu}p^{\nu} \\
g^{\{\mu\rho}\gamma^{\sigma\}} =& g^{\mu\rho}\gamma^{\sigma} + g^{\mu\sigma}\gamma^{\rho} + g^{\rho\sigma}\gamma^{\mu} \\
g^{[\rho\sigma\lambda\tau}\gamma^{\mu]} =& \gamma^{\mu}g^{(\rho\sigma\lambda\tau)} + (\mu\leftrightarrow\rho) + (\mu\leftrightarrow\sigma) + (\mu\leftrightarrow\lambda) + (\mu\leftrightarrow\tau) \\
g^{\{\rho\sigma}p^{\lambda}\gamma^{\mu\}} =& \gamma^{\mu}g^{\{\rho\sigma}p^{\lambda\}} + (\mu\leftrightarrow\rho) + (\mu\leftrightarrow\sigma) + (\mu\leftrightarrow\lambda)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g^{\{\rho\sigma}p^{\lambda}p^{\tau}\gamma^{\mu\}} =&\gamma^{\mu}g^{\{\rho\sigma}p^{\lambda}p^{\tau\}} + (\mu\leftrightarrow\rho) + (\mu\leftrightarrow\sigma) + (\mu\leftrightarrow\lambda) + (\mu\leftrightarrow\tau)\\
\gamma^{\{\mu}p^{\rho}p^{\sigma\}} =&\gamma^{\mu}p^{\rho}p^{\sigma} + \gamma^{\rho}p^{\mu}p^{\sigma} + \gamma^{\sigma}p^{\mu}p^{\rho}\\
\gamma^{\{\mu}p^{\rho}p^{\sigma}p^{\lambda\}} =&\gamma^{\mu}p^{\rho}p^{\sigma}p^{\lambda} + (\mu\leftrightarrow\rho) + (\mu\leftrightarrow\sigma) + (\mu\leftrightarrow\lambda)\\
\gamma^{\{\mu}p^{\rho}p^{\sigma}p^{\lambda}p^{\tau\}} =&\gamma^{\mu}p^{\rho}p^{\sigma}p^{\lambda}p^{\tau} + (\mu\leftrightarrow\rho) + (\mu\leftrightarrow\sigma) + (\mu\leftrightarrow\lambda) + (\mu\leftrightarrow\tau)\\
g^{\mu\{\lambda}p^{\tau}\gamma^{\rho\}} =&g^{\mu\lambda}p^{\tau}\gamma^{\rho} + g^{\mu\tau}p^{\lambda}\gamma^{\rho} + g^{\mu\rho}p^{\tau}\gamma^{\lambda} + g^{\mu\tau}p^{\rho}\gamma^{\lambda} + g^{\mu\rho}p^{\lambda}\gamma^{\tau} + g^{\mu\lambda}p^{\rho}\gamma^{\tau}
\end{aligned}
$$

对于从 x 到 0 的夸克传播子表达式，可利用如下关系式

$$
S_F(0,x|A) = CS_F^T(x,0|-A^{\mathrm{T}})C^{-1} \tag{5.102}
$$

因而有

$$
S_F^0(0,x) = \mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\left\{-\frac{m-\not{p}}{m^2-p^2}\right\} \tag{5.103}
$$

$$
S_F^2(0,x) = \mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\left\{\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\gamma^{\nu}(m+\not{p})\gamma^{\mu}}{(m^2-p^2)^2}G_{\mu\nu}\right\} \tag{5.104}
$$

$$
\begin{aligned}
S_F^3(0,x) =&\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\\
&\times\left\{\frac{2}{3}\gamma^{\nu}\left[\frac{(m+\not{p})(\gamma^{\mu}p^{\rho}+\gamma^{\rho}p^{\mu})}{(m^2-p^2)^3}+\frac{g^{\mu\rho}}{(m^2-p^2)^2}\right]G_{\mu\nu;\rho}\right\}
\end{aligned} \tag{5.105}
$$

$$
\begin{aligned}
S_F^{4(1)}(0,x) =&\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\left\{\left[\frac{1}{4}\gamma^{\sigma}\gamma^{\rho}\gamma^{\nu}\left(\frac{(m+\not{p})\gamma^{\mu}}{(m^2-p^2)^3}+2\frac{p^{\mu}}{(m^2-p^2)^3}\right)\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{1}{2}\gamma^{\rho}\left(\frac{\gamma^{\mu}(m-\not{p})}{(m^2-p^2)^3}g^{\nu\sigma}+4\frac{(m+\not{p})\gamma^{\mu}}{(m^2-p^2)^4}p^{\nu}p^{\sigma}\right)\right]G_{\rho\sigma}G_{\mu\nu}\right\}
\end{aligned} \tag{5.106}
$$

$$
\begin{aligned}
S_F^{4(2)}(0,x) =&\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\left\{-\frac{\mathrm{i}}{4}\gamma^{\nu}\left[\frac{(m+\not{p})g^{\{\mu\rho}\gamma^{\sigma\}}}{(m^2-p^2)^3}+2\frac{g^{\{\mu\rho}p^{\sigma\}}}{(m^2-p^2)^3}\right.\right.\\
&\left.\left.+4\frac{(m+\not{p})\gamma^{\{\mu}p^{\rho}p^{\sigma\}}}{(m^2-p^2)^4}\right]G_{\mu\nu;\rho\sigma}\right\}
\end{aligned} \tag{5.107}
$$

$$
\begin{aligned}
S_F^{5(1)}(0,x) =&\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\\
&\times\left\{-\frac{\mathrm{i}}{3}\left[\gamma^{\sigma}\left(3\left(p^{\lambda}\gamma^{\rho}+p^{\rho}\gamma^{\lambda}\right)\frac{\gamma^{\nu}(m+\not{p})\gamma^{\mu}}{(m^2-p^2)^4}+\frac{\left(g^{\mu\lambda}\gamma^{\rho}+g^{\mu\rho}\gamma^{\lambda}\right)\gamma^{\nu}}{(m^2-p^2)^3}\right)\right.\right.
\end{aligned}
$$

$$+4\gamma^{\rho}\left(\frac{(m+\not{p})\gamma^{\mu}}{(m^2-p^2)^4}g^{\{\nu\sigma}p^{\lambda\}}-2\frac{p^{\mu}g^{\{\nu\sigma}p^{\lambda\}}}{(m^2-p^2)^4}+6\frac{(m+\not{p})\gamma^{\mu}}{(m^2-p^2)^5}p^{\nu}p^{\sigma}p^{\lambda}\right)\Bigg]$$

$$\times G_{\rho\sigma;\lambda}G_{\mu\nu}\Bigg\} \tag{5.108}$$

$$S_F^{5(2)}(0,x)=\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\Bigg\{\frac{2\mathrm{i}}{3}\Bigg[-\gamma^{\sigma}\gamma^{\rho}\gamma^{\nu}\left(\frac{g^{\mu\lambda}}{(m^2-p^2)^3}+\frac{6p^{\mu}p^{\lambda}}{(m^2-p^2)^4}\right)$$

$$-2\gamma^{\rho}\left(\frac{(m+\not{p})\gamma^{\mu}}{(m^2-p^2)^4}g^{\{\nu\sigma}p^{\lambda\}}-2\frac{p^{\mu}g^{\{\nu\sigma}p^{\lambda\}}}{(m^2-p^2)^4}\right.$$

$$\left.+6\frac{(m+\not{p})\gamma^{\mu}}{(m^2-p^2)^5}p^{\nu}p^{\sigma}p^{\lambda}\right)\Bigg]G_{\rho\sigma}G_{\mu\nu;\lambda}\Bigg\} \tag{5.109}$$

$$S_F^{5(3)}(0,x)=\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\Bigg\{-\frac{4}{15}\gamma^{\nu}\Bigg[\frac{(m+\not{p})g^{\{\rho\sigma}p^{\lambda}\gamma^{\mu\}}}{(m^2-p^2)^4}+2\frac{g^{\{\rho\sigma}p^{\lambda}p^{\mu\}}}{(m^2-p^2)^4}$$

$$+6\frac{(m+\not{p})\gamma^{\{\mu}p^{\rho}p^{\sigma}p^{\lambda\}}}{(m^2-p^2)^5}+\frac{g^{(\mu\rho\sigma\lambda)}}{(m^2-p^2)^3}\Bigg]G_{\mu\nu;\rho\sigma\lambda}\Bigg\} \tag{5.110}$$

$$S_F^{6(1)}(0,x)=\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\left(-\frac{\mathrm{i}}{8}\right)$$

$$\times\Bigg\{\gamma^{\tau}\gamma^{\lambda}\gamma^{\sigma}\gamma^{\rho}\gamma^{\nu}\left[\frac{(m+\not{p})\gamma^{\mu}}{(m^2-p^2)^4}+4\frac{p^{\mu}}{(m^2-p^2)^4}\right]$$

$$+2\gamma^{\lambda}\gamma^{\rho}\gamma^{\nu}\left[3\frac{(m+\not{p})\gamma^{\mu}}{(m^2-p^2)^4}g^{\sigma\tau}+16\frac{(m+\not{p})\gamma^{\mu}}{(m^2-p^2)^5}p^{\sigma}p^{\tau}\right.$$

$$\left.+4\frac{g^{\mu\sigma}p^{\tau}+g^{\mu\tau}p^{\sigma}}{(m^2-p^2)^4}\right]\Bigg\}G_{\lambda\tau}G_{\rho\sigma}G_{\mu\nu} \tag{5.111}$$

$$S_F^{6(2)}(x,0)=\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\left(-\frac{1}{8}\right)$$

$$\times\Bigg\{\gamma^{\sigma}\Bigg[3g^{\{\lambda\tau}\gamma^{\rho\}}\frac{\gamma^{\nu}(m+\not{p})\gamma^{\mu}}{(m^2-p^2)^4}+16\gamma^{\{\rho}p^{\lambda}p^{\tau\}}\frac{\gamma^{\nu}(m+\not{p})\gamma^{\mu}}{(m^2-p^2)^5}$$

$$+4\frac{g^{\mu\{\lambda}p^{\tau}\gamma^{\rho\}}\gamma^{\nu}}{(m^2-p^2)^4}\Bigg]+4\gamma^{\rho}\gamma^{\mu}\left[\frac{m-\not{p}}{(m^2-p^2)^4}g^{(\nu\sigma\tau\lambda)}\right.$$

$$\left.+6\frac{m-\not{p}}{(m^2-p^2)^5}g^{\{\nu\sigma}p^{\tau}p^{\lambda\}}\right.$$

$$+48\frac{m-\not{p}}{(m^2-p^2)^6}p^\nu p^\sigma p^\tau p^\lambda\Bigg]\Bigg\}G_{\rho\sigma;\lambda\tau}G_{\mu\nu} \tag{5.112}$$

$$\begin{aligned}S_F^{6(3)}(0,x)=&\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\left(-\frac{2}{9}\right)\\&\times\Bigg\{3\gamma^\sigma\Bigg(\gamma^\rho\gamma^\nu\Bigg[2\frac{(m+\not{p})\gamma^\mu}{(m^2-p^2)^5}p^\lambda p^\tau+\frac{g^{\{\mu^\lambda}p^{\tau\}}}{(m^2-p^2)^4}\\&+\frac{4p^\mu p^\lambda p^\tau}{(m^2-p^2)^5}\Bigg]+(\mu\leftrightarrow\lambda)+(\rho\leftrightarrow\tau)+(\mu\leftrightarrow\lambda,\rho\leftrightarrow\tau)\Bigg)\\&+4\gamma^\rho\gamma^\mu\left[\frac{m-\not{p}}{(m^2-p^2)^4}g^{(\nu\lambda\sigma\tau)}+6\frac{m-\not{p}}{(m^2-p^2)^5}g^{\{\nu\lambda}p^\sigma p^{\tau\}}\right.\\&\left.+48\frac{m-\not{p}}{(m^2-p^2)^6}p^\nu p^\lambda p^\sigma p^\tau\right]\Bigg\}G_{\rho\sigma;\tau}G_{\mu\nu;\lambda}\end{aligned} \tag{5.113}$$

$$\begin{aligned}S_F^{6(4)}(0,x)=&\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\left(-\frac{1}{2}\right)\\&\Bigg\{\gamma^\rho\gamma^\mu\Bigg[\frac{m-\not{p}}{(m^2-p^2)^4}g^{(\nu\tau\lambda\sigma)}+6\frac{m-\not{p}}{(m^2-p^2)^5}g^{\{\nu\tau}p^\lambda p^{\sigma\}}\\&+48\frac{m-\not{p}}{(m^2-p^2)^6}p^\nu p^\tau p^\lambda p^\sigma\Bigg]\\&+3\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu\left[\frac{g^{\{\mu\lambda}p^{\tau\}}}{(m^2-p^2)^4}+\frac{8p^\mu p^\lambda p^\tau}{(m^2-p^2)^5}\right]\Bigg\}G_{\rho\sigma}G_{\mu\nu;\lambda\tau}\end{aligned} \tag{5.114}$$

$$\begin{aligned}S_F^{6(5)}(0,x)=&\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\Bigg\{\frac{\mathrm{i}}{18}\gamma^\nu\Bigg[\frac{(m+\not{p})\,g^{[\rho\sigma\lambda\tau}\gamma^{\mu]}}{(m^2-p^2)^4}\\&+4\frac{g^{\{\rho\sigma\lambda\tau}p^{\mu\}}}{(m^2-p^2)^4}+6\frac{(m+\not{p})\,g^{\{\rho\sigma}p^\lambda p^\tau\gamma^{\mu\}}}{(m^2-p^2)^5}+12\frac{g^{\{\rho\sigma}p^\lambda p^\tau p^{\mu\}}}{(m^2-p^2)^5}\\&+48\frac{(m+\not{p})\,p^{\{\rho}p^\sigma p^\lambda p^\tau\gamma^{\mu\}}}{(m^2-p^2)^6}\Bigg]G_{\mu\nu;\rho\sigma\lambda\tau}\Bigg\}\end{aligned} \tag{5.115}$$

5.3.3 背景场中的胶子传播子

类似于解出背景场中夸克传播子的方法，同样，可以从背景场中的胶子传播子所满足的方程 (5.45) 解出胶子传播子的具体表达式。取固定点规范式 (5.54)，先将式 (5.45) 写成矩阵形式，即

$$\left[g_{\mu\rho}D^2-2\mathrm{i}\tilde{G}_{\mu\rho}\right]S_\nu^\rho(x,0|\tilde{A})=g_{\mu\nu}\delta^4(x) \tag{5.116}$$

其中

$$(\tilde{A}_\mu)^{bc} = -\mathrm{i}gf^{abc}A^a_\mu \tag{5.117}$$

$$(\tilde{G}_{\mu\nu})^{bc} = -\mathrm{i}gf^{abc}G^a_{\mu\nu} \tag{5.118}$$

利用协变微商的伴随表示表达式，将方程 (5.116) 式重新表示为

$$\left[g_{\mu\rho}(\partial^2 - \tilde{p}_\mu\partial^\mu - \tilde{Q}) - 2\mathrm{i}\tilde{G}_{\mu\rho}\right] S^\rho_\nu(x,0|\tilde{A}) = g_{\mu\nu}\delta^4(x) \tag{5.119}$$

其中，$\tilde{p}_\mu$ 和 $\tilde{Q}$ 定义为

$$\tilde{p}_\mu = 2\mathrm{i}\tilde{A}_\mu(x) \tag{5.120}$$

$$\tilde{Q} = \mathrm{i}\partial_\mu\tilde{A}^\mu(x) + \tilde{A}_\mu(x)\tilde{A}^\mu(x) \tag{5.121}$$

由上一节展开式 (5.64)~(5.66)，可以得到

$$\begin{aligned}\tilde{A}_\mu(x) =& \frac{1}{2}x^\nu\tilde{G}_{\nu\mu} + \frac{1}{3}x^\nu x^\rho\tilde{G}_{\nu\mu;\rho} + \frac{1}{8}x^\nu x^\rho x^\sigma\tilde{G}_{\nu\mu;\rho\sigma} + \frac{1}{30}x^\nu x^\rho x^\sigma x^\lambda\tilde{G}_{\nu\mu;\rho\sigma\lambda} \\ &+ \frac{1}{144}x^\nu x^\rho x^\sigma x^\lambda x^\tau\tilde{G}_{\nu\mu;\rho\sigma\lambda\tau} + \cdots \end{aligned} \tag{5.122}$$

$$\begin{aligned}\partial_\nu\tilde{A}_\mu(x) =& \frac{1}{2}\tilde{G}_{\nu\mu} + \frac{1}{3}x^\rho(\tilde{G}_{\nu\mu;\rho} + \tilde{G}_{\rho\mu;\nu}) + \frac{1}{8}x^\rho x^\sigma(\tilde{G}_{\nu\mu;\rho\sigma} + \tilde{G}_{\rho\mu;\nu\sigma} + \tilde{G}_{\alpha\mu;\sigma\nu}) \\ &+ \frac{1}{30}x^\rho x^\sigma x^\lambda(\tilde{G}_{\nu\mu;\rho\sigma\lambda} + \tilde{G}_{\rho\mu;\nu\sigma\lambda} + \tilde{G}_{\rho\mu;\sigma\nu\lambda} + \tilde{G}_{\rho\mu;\sigma\lambda\nu}) \\ &+ \frac{1}{144}x^\rho x^\sigma x^\lambda x^\tau(\tilde{G}_{\nu\mu;\rho\sigma\lambda\tau} + \tilde{G}_{\rho\mu;\nu\sigma\lambda\tau} + \tilde{G}_{\rho\mu;\sigma\nu\lambda\tau} \\ &+ \tilde{G}_{\rho\mu;\sigma\lambda\nu\tau} + \tilde{G}_{\rho\nu;\sigma\lambda\tau\nu}) + \cdots \end{aligned} \tag{5.123}$$

$$\begin{aligned}\tilde{A}_\nu(x)\tilde{A}_\mu(x) =& \frac{1}{4}x^\rho x^\sigma\tilde{G}_{\rho\nu}\tilde{G}_{\sigma\nu} + \frac{1}{6}x^\rho x^\sigma x^\lambda(\tilde{G}_{\rho\nu}\tilde{G}_{\sigma\mu;\lambda} + \tilde{G}_{\rho\nu;\lambda}\tilde{G}_{\sigma\mu}) \\ &+ x^\rho x^\sigma x^\lambda x^\tau\left(\frac{1}{16}\tilde{G}_{\rho\nu}\tilde{G}_{\sigma\mu;\lambda\tau} + \frac{1}{9}\tilde{G}_{\rho\nu;\lambda}\tilde{G}_{\sigma\mu;\tau} + \frac{1}{16}\tilde{G}_{\rho\nu;\lambda\tau}\tilde{G}_{\sigma\mu}\right) \\ &+ \cdots \end{aligned} \tag{5.124}$$

将式 (5.124) 代入式 (5.120) 和 (5.121) 可得

$$\begin{aligned}\tilde{p}_\lambda =& \mathrm{i}x^\alpha\tilde{G}_{\alpha\lambda} + \frac{2\mathrm{i}}{3}x^\alpha x^\beta\tilde{G}_{\alpha\lambda;\beta} + \frac{\mathrm{i}}{4}x^\alpha x^\beta x^\gamma\tilde{G}_{\alpha\lambda;\beta\gamma} + \frac{\mathrm{i}}{15}x^\alpha x^\beta x^\gamma x^\delta\tilde{G}_{\alpha\lambda;\beta\gamma\delta} \\ &+ \frac{\mathrm{i}}{72}x^\alpha x^\beta x^\gamma x^\delta x^\rho\tilde{G}_{\alpha\lambda;\beta\gamma\delta\rho} + \cdots \end{aligned} \tag{5.125}$$

$$\tilde{Q} = x^\alpha\tilde{b}_{1\alpha} + x^\alpha x^\beta\tilde{b}_{1\alpha\beta} + x^\alpha x^\beta x^\gamma\tilde{b}_{1\alpha\beta\gamma} + x^\alpha x^\beta x^\gamma x^\delta\tilde{b}_{1\alpha\beta\gamma\delta} + \cdots \tag{5.126}$$

其中

$$\tilde{b}_{1\alpha}=\frac{\mathrm{i}}{3}\tilde{G}_{\alpha\lambda;\lambda} \tag{5.127}$$

$$\tilde{b}_{2\alpha\beta}=\frac{\mathrm{i}}{8}(\tilde{G}_{\alpha\lambda;\lambda\beta}+\tilde{G}_{\alpha\lambda;\beta\lambda})+\frac{1}{4}\tilde{G}_{\alpha\lambda}\tilde{G}_{\beta\lambda} \tag{5.128}$$

$$\begin{aligned}\tilde{b}_{3\alpha\beta\gamma}=&\frac{\mathrm{i}}{30}(\tilde{G}_{\alpha\lambda;\lambda\beta\gamma}+\tilde{G}_{\alpha\lambda;\beta\lambda\gamma}+\tilde{G}_{\alpha\lambda;\beta\gamma\lambda})\\&+\frac{1}{6}(\tilde{G}_{\alpha\lambda}\tilde{G}_{\beta\lambda;\gamma}+\tilde{G}_{\alpha\lambda;\beta}\tilde{G}_{\gamma\lambda})\end{aligned} \tag{5.129}$$

$$\begin{aligned}\tilde{b}_{4\alpha\beta\gamma\delta}=&\frac{\mathrm{i}}{144}(\tilde{G}_{\alpha\lambda;\lambda\beta\gamma\delta}+\tilde{G}_{\alpha\lambda;\beta\lambda\gamma\delta}+\tilde{G}_{\alpha\lambda;\beta\gamma\lambda\delta}+\tilde{G}_{\alpha\lambda;\beta\gamma\delta\lambda})\\&+\frac{1}{9}\tilde{G}_{\alpha\lambda;\beta}\tilde{G}_{\gamma\lambda;\delta}+\frac{1}{16}\tilde{G}_{\alpha\lambda}\tilde{G}_{\beta\lambda;\delta\gamma}+\frac{1}{16}\tilde{G}_{\alpha\lambda;\gamma\beta}\tilde{G}_{\delta\lambda}\end{aligned} \tag{5.130}$$

此外，$\tilde{G}_{\mu\rho}(x)$ 可展开为

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{\mu\rho}(x)=&\tilde{G}_{\mu\rho}+x^{\alpha}\tilde{G}_{\mu\rho;\alpha}+\frac{1}{2}x^{\alpha}x^{\beta}\tilde{G}_{\mu\rho;\alpha\beta}+\frac{1}{6}x^{\alpha}x^{\beta}x^{\gamma}\tilde{G}_{\mu\rho;\alpha\beta\gamma}\\&+\frac{1}{24}x^{\alpha}x^{\beta}x^{\gamma}x^{\delta}\tilde{G}_{\mu\rho;\alpha\beta\gamma\delta}+\cdots\end{aligned} \tag{5.131}$$

这样将它们代入式 (5.119) 得到

$$\begin{aligned}&\Big\{g_{\mu\rho}\Big[\partial^2-\Big(\mathrm{i}x^{\alpha}\tilde{G}_{\alpha\lambda}+\frac{2\mathrm{i}}{3}x^{\alpha}x^{\beta}\tilde{G}_{\alpha\lambda;\beta}+\frac{\mathrm{i}}{4}x^{\alpha}x^{\beta}x^{\gamma}\tilde{G}_{\alpha\lambda;\beta\gamma}+\frac{\mathrm{i}}{15}x^{\alpha}x^{\beta}x^{\gamma}x^{\delta}\tilde{G}_{\alpha\lambda;\beta\gamma\delta}\\&+\frac{\mathrm{i}}{72}x^{\alpha}x^{\beta}x^{\gamma}x^{\delta}x^{\rho}\tilde{G}_{\alpha\lambda;\beta\gamma\delta\rho}+\cdots\Big)\partial^{\lambda}-\Big(x^{\alpha}\tilde{b}_{1\alpha}+x^{\alpha}x^{\beta}\tilde{b}_{2\alpha\beta}+x^{\alpha}x^{\beta}x^{\gamma}\tilde{b}_{3\alpha\beta\gamma}\\&+x^{\alpha}x^{\beta}x^{\gamma}x^{\delta}\ \tilde{b}_{4\alpha\beta\gamma\delta}+\cdots\Big)\Big]\\&-2\mathrm{i}\Big(\tilde{G}_{\mu\rho}+x^{\alpha}\tilde{G}_{\mu\rho;\alpha}+\frac{1}{2}x^{\alpha}x^{\beta}\tilde{G}_{\mu\rho;\alpha\beta}+\frac{1}{6}x^{\alpha}x^{\beta}x^{\gamma}\tilde{G}_{\mu\rho;\alpha\beta\gamma}\\&+\frac{1}{24}x^{\alpha}x^{\beta}x^{\gamma}x^{\delta}\tilde{G}_{\mu\rho;\alpha\beta\gamma\delta}+\cdots\Big)\Big\}S^{\rho}_{\ \nu}(x,0|\tilde{A})=g_{\mu\nu}\delta^4(x)\end{aligned} \tag{5.132}$$

将上式变换到动量空间可得

$$\begin{aligned}&\Big\{g_{\mu\rho}\Big[-p^2+\Big(\mathrm{i}\tilde{G}_{\alpha\lambda}\partial^{\alpha}+\frac{2}{3}\ \tilde{G}_{\alpha\lambda;\beta}\partial^{\alpha}\partial^{\beta}-\frac{\mathrm{i}}{4}\tilde{G}_{\alpha\lambda;\beta\gamma}\partial^{\alpha}\partial^{\beta}\partial^{\gamma}-\frac{\mathrm{i}}{15}\tilde{G}_{\alpha\lambda;\beta\gamma\delta}\partial^{\alpha}\partial^{\beta}\partial^{\gamma}\partial^{\delta}\\&+\frac{\mathrm{i}}{72}\tilde{G}_{\alpha\lambda;\beta\gamma\delta\rho}\partial^{\alpha}\partial^{\beta}\partial^{\gamma}\partial^{\delta}\partial^{\rho}+\cdots\Big)p^{\lambda}+\Big(\mathrm{i}\tilde{b}_{1\alpha}\partial^{\alpha}+\tilde{b}_{2\alpha\beta}\partial^{\alpha}\partial^{\beta}-\mathrm{i}\tilde{b}_{3\alpha\beta\gamma}\partial^{\alpha}\partial^{\beta}\partial^{\gamma}\\&-\tilde{b}_{4\alpha\beta\gamma\delta}\partial^{\alpha}\partial^{\beta}\partial^{\gamma}\partial^{\delta}+\cdots\Big)\Big]\end{aligned}$$

$$+2\left(-\mathrm{i}\tilde{G}_{\mu\rho}-\tilde{G}_{\mu\rho;\alpha}\partial^{\alpha}+\frac{\mathrm{i}}{2}\tilde{G}_{\mu\rho;\alpha\beta}\partial^{\alpha}\partial^{\beta}+\frac{1}{6}\tilde{G}_{\mu\rho;\alpha\beta\gamma}\partial^{\alpha}\partial^{\beta}\partial^{\gamma}\right.$$
$$\left.-\frac{\mathrm{i}}{24}\tilde{G}_{\mu\rho;\alpha\beta\gamma\delta}\partial^{\alpha}\partial^{\beta}\partial^{\gamma}\partial^{\delta}+\cdots\right)\Big\}\tilde{S}^{\rho}_{\ \nu}(p)=g_{\mu\nu} \tag{5.133}$$

其中，$\tilde{S}^{\rho}_{\ \nu}(p)$ 是 $S^{\rho}_{\ \nu}(x,0|\tilde{A})$ 的 Fourier 变换，即背景场中胶子传播子在动量空间中的表达式。定义：

$$\tilde{S}^{\rho}_{\ \nu}(p)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\tilde{d}_i)^{\rho}_{\ \nu}}{(-p^2)^{i+1}} \tag{5.134}$$

并将之代入式 (5.133) 即可解出

$$(\tilde{d}_0)_{\mu\nu}=g_{\mu\nu},\quad (\tilde{d}_1)_{\mu\nu}=2\mathrm{i}\tilde{G}_{\mu\nu},\quad \cdots \tag{5.135}$$

再变换回到坐标空间就可以给出胶子传播子在坐标空间中的表达式，即

$$\begin{aligned}
S^{ab}_{\mu\nu}(x,0)=&\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}\delta^{ab}\Big\{-\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}+2\mathrm{i}\frac{\tilde{G}_{\mu\nu}}{(-q^2)^2}+\frac{1}{(-q^2)^3}\\
&\Big[-4\tilde{G}^{\rho}_{\nu}\tilde{G}_{\mu\rho}-2((\mathrm{i}g_{\mu\nu}\tilde{b}_{1\alpha}-2\tilde{G}_{\mu\nu;\alpha})q^{\alpha}\\
&+g_{\mu\nu}\tilde{b}^{\alpha}_{2\alpha}+\mathrm{i}\tilde{G}^{\alpha}_{\mu\nu;\alpha})\Big]\\
&+\frac{1}{(-q^2)^4}\Big[-8\mathrm{i}\tilde{G}^{\sigma}_{\nu}\tilde{G}^{\rho}_{\sigma}\tilde{G}_{\mu\rho}-4\mathrm{i}\Big(\Big(\mathrm{i}g^{\rho}_{\nu}\tilde{b}_{1\alpha}-2\tilde{G}^{\rho}_{\nu;\alpha}\Big)q^{\alpha}+g^{\rho}_{\nu}\tilde{b}^{\alpha}_{2\alpha}\\
&+\mathrm{i}\tilde{G}^{\rho\alpha}_{\nu;\alpha}\Big)\tilde{G}_{\mu\rho}-8\mathrm{i}\tilde{G}^{\rho}_{\nu}\Big(\Big(\mathrm{i}g_{\mu\rho}\tilde{b}_{1\alpha}-2\tilde{G}_{\mu\rho;\alpha}\Big)q^{\alpha}+g_{\mu\rho}\tilde{b}^{\alpha}_{2\alpha}+\mathrm{i}\tilde{G}^{\alpha}_{\mu\rho;\alpha}\Big)\\
&-8\Big(\Big(g_{\mu\nu}\tilde{b}_{2\alpha\beta}+\mathrm{i}\tilde{G}_{\mu\nu;\alpha\beta}\Big)\times q^{\alpha}q^{\beta}\\
&+\Big(-\mathrm{i}g_{\mu\nu}\tilde{b}_{3\alpha\beta\gamma}+\frac{1}{3}\tilde{G}_{\mu\nu;\alpha\beta\gamma}\Big)g^{\{\alpha\beta\}}q^{\gamma\}}\\
&+\Big(-g_{\mu\nu}\tilde{b}_{4\alpha\beta\gamma\delta}-\frac{\mathrm{i}}{12}\tilde{G}_{\mu\nu;\alpha\beta\gamma\delta}\Big)g^{(\alpha\beta\gamma\delta)}\Big)\Big]\\
&+\frac{1}{(-q^2)^5}\Big[-16\mathrm{i}\Big(g^{\rho}_{\nu}\tilde{b}_{2\alpha\beta}+\mathrm{i}\tilde{G}^{\rho}_{\nu;\alpha\beta}\Big)\tilde{G}_{\mu\rho}q^{\alpha}q^{\beta}\\
&+12\Big(\mathrm{i}g^{\rho}{}_{\nu}\tilde{b}_{1\alpha}-2\tilde{G}^{\rho}_{\nu;\alpha}\Big)\Big(\mathrm{i}g_{\mu\rho}\tilde{b}_{1\beta}-2\tilde{G}_{\mu\rho;\beta}\Big)q^{\alpha}q^{\beta}\\
&-48\mathrm{i}\tilde{G}^{\rho}_{\nu}\Big(g_{\mu\rho}\tilde{b}_{2\alpha\beta}+\mathrm{i}\tilde{G}_{\mu\rho;\alpha\beta}\Big)q^{\alpha}q^{\beta}\\
&-48\Big(-\mathrm{i}g_{\mu\nu}\tilde{b}_{3\alpha\beta\gamma}+\frac{1}{3}\tilde{G}_{\mu\nu;\alpha\beta\gamma}\Big)q^{\alpha}q^{\beta}q^{\gamma}
\end{aligned}$$

$$-48\left(-g_{\mu\nu}\tilde{b}_{4\alpha\beta\gamma\delta}-\frac{\mathrm{i}}{12}\tilde{G}_{\mu\nu;\alpha\beta\gamma\delta}\right)g^{\{\alpha\beta}q^{\gamma}q^{\delta\}}\Big]$$
$$+\frac{384}{(-q^2)^6}\left(g_{\mu\nu}\tilde{b}_{4\alpha\beta\gamma\delta}+\frac{\mathrm{i}}{12}\tilde{G}_{\mu\nu;\alpha\beta\gamma\delta}\right)q^{\alpha}q^{\beta}q^{\gamma}q^{\delta} \tag{5.136}$$

5.4 真空凝聚参量

在 5.2 节和 5.3 节中见到，在背景场的框架下，量子场收缩成背景场中的传播子，而 Wick 定理不应用到背景场，这些保留下来的背景场被两个真空态夹在之间构成非零真空平均值，它们反映了 QCD 非微扰效应。这一节讨论这些真空矩阵元在做了 Lorentz 指标和色空间指标分解后如何得到相应的真空凝聚参量[9,10]。这些真空凝聚参量是无色的 Lorentz 标量。

5.4.1 几个常用的量纲 $d\leqslant 6$ 真空凝聚参量

首先考察最简单的非零真空平均值是 $\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha\psi^j_\beta\,|0\rangle$，$\langle 0|\,G^a_{\mu\nu}G^b_{\rho\sigma}\,|0\rangle$(色指标 $i,j=1,2,3;a,b=1,2\cdots,8$)，其中 ψ，$G_{\mu\nu}$ 表示零点处的夸克和胶子背景场 $\psi(0)$，$G_{\mu\nu}(0)$。注意到真空凝聚是 Lorentz 空间和色空间中的标量，即

$$\langle\bar{\psi}\psi\rangle\equiv\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha\psi^{i\alpha}\,|0\rangle \tag{5.137}$$

为此首先写出 $\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha\psi^j_\beta\,|0\rangle$ 的协变形式

$$\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha\psi^j_\beta\,|0\rangle=A\delta^{ij}g_{\alpha\beta}$$

在上式两边乘以 $\delta^{ij}g^{\beta\alpha}$，左边就是 Lorentz 空间和色空间中的标量，真空凝聚 $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$，右边为 $12A$，因此非零真空平均值在做了 Lorentz 指标和色空间指标分解后有下列等式，即

$$\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha\psi^j_\beta\,|0\rangle=\frac{1}{12}\langle 0|\,\bar{\psi}\psi\,|0\rangle\,\delta^{ij}g_{\alpha\beta}=\frac{1}{12}\langle\bar{\psi}\psi\rangle\,\delta^{ij}g_{\alpha\beta} \tag{5.138}$$

夸克凝聚 $\langle\bar{\psi}\psi\rangle\equiv\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha\psi^{i\alpha}\,|0\rangle$ 就是式 (5.13) 确定的参量值

$$\langle 0|\,\bar{\psi}\psi\,|0\rangle=-\frac{f_\pi^2m_\pi^2}{(m_u+m_d)}\simeq-((240\pm10)\mathrm{MeV})^3$$

其中，$\psi=u,d$，已取了 $m_u+m_d=11\mathrm{MeV}$。

类似地 $\langle 0|\,G^a_{\mu\nu}G^b_{\rho\sigma}\,|0\rangle$ 在做了 Lorentz 指标和色空间指标分解后有下列等式，即

$$\langle 0|\,G^a_{\mu\nu}G^b_{\rho\sigma}\,|0\rangle=\frac{1}{96}\langle 0|\,G^2\,|0\rangle\,\delta^{ab}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}-g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})$$

$$=\frac{1}{96}\left\langle G^2\right\rangle \delta^{ab}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}-g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) \tag{5.139}$$

$$\left\langle G^2\right\rangle \equiv \langle 0|\, G^2\,|0\rangle \equiv \langle 0|\, G^a_{\mu\nu}G^{a\mu\nu}\,|0\rangle$$

只要在此式两边乘以 $\delta^{ab}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}$ 就可得到证明。无色的 Lorentz 标量 $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ 和 $\left\langle G^2\right\rangle$ 是夸克和胶子真空凝聚参量。通过拟合可获得的胶子凝聚值

$$\langle 0|\,\frac{\alpha_s}{\pi}G^a_{\mu\nu}G^{a\mu\nu}\,|0\rangle = 0.012(\mathrm{GeV}^4) \tag{5.140}$$

对于四夸克矩阵元 $\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha\psi^j_\beta\bar{\psi}^k_\gamma\psi^l_\delta\,|0\rangle$，一般地讲应包含 γ 矩阵，即 $\langle 0|\,\bar{\psi}\Gamma_A\psi\bar{\psi}\Gamma_B\psi\,|0\rangle$，其中 Γ_A,Γ_B 是任意 γ 矩阵。写出明显的 Lorentz 指标和色空间指标，即

$$\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha\,(\Gamma_A)_{\alpha\beta}\psi^j_\beta\bar{\psi}^k_\gamma\,(\Gamma_B)_{\gamma\delta}\psi^l_\delta\,|0\rangle = (\Gamma_A)_{\alpha\beta}\,(\Gamma_B)_{\gamma\delta}\,\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha\psi^j_\beta\bar{\psi}^k_\gamma\psi^l_\delta\,|0\rangle \tag{5.141}$$

对 $\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha\psi^j_\beta\bar{\psi}^k_\gamma\psi^l_\delta\,|0\rangle$ 取真空为主近似，将四夸克凝聚近似地表达为夸克凝聚参量的平方，即

$$\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha\psi^j_\beta\bar{\psi}^k_\gamma\psi^l_\delta\,|0\rangle = \langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha\psi^j_\beta\,|0\rangle\,\langle 0|\,\bar{\psi}^k_\gamma\psi^l_\delta\,|0\rangle - \langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha\psi^l_\delta\,|0\rangle\,\langle 0|\,\bar{\psi}^k_\gamma\psi^j_\beta\,|0\rangle \tag{5.142}$$

其中，色指标 $i,j,k,l=1,2,3$ 和洛伦兹指标 $\alpha,\beta,\gamma,\delta=1,2,3,4$ 被明显标示。将式 (5.139) 和 (5.142) 代入四夸克凝聚式 (5.141) 就得到

$$\langle 0|\,\bar{\psi}\Gamma_A\psi\bar{\psi}\Gamma_B\psi\,|0\rangle = \frac{1}{(12)^2}\left[(\mathrm{Tr}\Gamma_A)\,(\mathrm{Tr}\Gamma_B) - \mathrm{Tr}\,(\Gamma_A\Gamma_B)\right]\langle 0|\,\bar{\psi}\psi\,|0\rangle^2 \tag{5.143}$$

其中，符号 Tr 表示对矩阵求迹。特别地有下列等式

$$\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha\bar{\psi}^j_\beta\psi^k_\gamma\psi^l_\delta\,|0\rangle = \frac{1}{144}\left\langle\bar{\psi}\psi\right\rangle^2(\delta^{il}\delta^{jk}g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}-\delta^{ik}\delta^{jl}g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}) \tag{5.144}$$

从矢量流和轴矢流求和规则拟合实验数据唯象地可得其数值为

$$\alpha_s\left\langle\bar{\psi}\psi\right\rangle^2 \simeq 1.8\times 10^{-4}\mathrm{GeV}^6 \tag{5.145}$$

对于夸克–胶子混合凝聚参量 $\langle 0|\,g_s\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}T^aG^{a\mu\nu}\psi\,|0\rangle$

$$\langle 0|\,\bar{\psi}G^{a\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}T^a\psi\,|0\rangle = \left\langle\bar{\psi}\sigma TG\psi\right\rangle$$

唯象地采取下述近似，即

$$\langle 0|\,g_s\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}T^aG^{a\mu\nu}\psi\,|0\rangle \simeq m_0^2\,\langle 0|\,\bar{\psi}\psi\,|0\rangle \tag{5.146}$$

其中，m_0 可以由重子流关联函数物理过程的实验值抽取出来，早在 20 世纪 80 年代初确定为

$$m_0^2(1\mathrm{GeV}) \simeq (0.8\pm 0.2)\mathrm{GeV}^2 \tag{5.147}$$

虽然后来确定的值的精度有所提高，但中心值基本未变。

更高维的凝聚参量在物理过程中将被幂次压低而变得不重要，甚至可忽略。有时会用到三胶子凝聚参量，其协变形式为

$$\begin{aligned}\langle 0|\, G^a_{\mu\nu}G^b_{\rho\sigma}G^c_{\lambda\tau}\,|0\rangle =&\frac{1}{576}f^{abc}\left\langle f^{def}G^dG^eG^f\right\rangle\\ &\times\{[g_{\mu\rho}(g_{\nu\lambda}g_{\sigma\tau}-g_{\nu\tau}g_{\sigma\lambda})-g_{\mu\sigma}(g_{\nu\lambda}g_{\rho\tau}-g_{\nu\tau}g_{\rho\lambda})]\\ &-[g_{\nu\rho}(g_{\mu\lambda}g_{\sigma\tau}-g_{\mu\tau}g_{\sigma\lambda})-g_{\nu\sigma}(g_{\mu\lambda}g_{\rho\tau}-g_{\mu\tau}g_{\rho\lambda})]\}\\ =&\frac{1}{576}f^{abc}\left\langle fG^3\right\rangle\\ &\times\{[g_{\mu\rho}(g_{\nu\lambda}g_{\sigma\tau}-g_{\nu\tau}g_{\sigma\lambda})-g_{\mu\sigma}(g_{\nu\lambda}g_{\rho\tau}-g_{\nu\tau}g_{\rho\lambda})]\\ &-[g_{\nu\rho}(g_{\mu\lambda}g_{\sigma\tau}-g_{\mu\tau}g_{\sigma\lambda})-g_{\nu\sigma}(g_{\mu\lambda}g_{\rho\tau}-g_{\mu\tau}g_{\rho\lambda})]\}\end{aligned}$$

它的值从实验中拟合约为

$$\langle 0|\, g_s^3 f_{abc}G^a_{\mu\nu}G^{b\nu}_{\sigma}G^{c\sigma\mu}\,|0\rangle = g_s^3\left\langle fG^3\right\rangle \simeq 0.045\mathrm{GeV}^6 \tag{5.148}$$

5.4.2 与凝聚参量 $\langle\bar{\psi}\psi\rangle^2$ 相关的几个公式

在具体计算中，我们会常遇到如下形式的真空矩阵元，它们可与高量纲凝聚参量 $\langle\bar{\psi}\psi\rangle^2$ 相联系，即

$$\begin{aligned}\langle 0|\, G^a_{\mu\nu;\lambda}G^b_{\rho\sigma;\tau}\,|0\rangle =&-\frac{g_s^2}{648}\sum_{u,d,s}\left\langle\overline{\psi}\psi\right\rangle^2\delta^{ba}[2g_{\lambda\tau}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}-g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})\\ &+g_{\lambda\rho}(g_{\tau\mu}g_{\sigma\nu}-g_{\tau\nu}g_{\sigma\mu})-g_{\lambda\sigma}(g_{\tau\mu}g_{\rho\nu}-g_{\tau\nu}g_{\rho\mu})]\end{aligned} \tag{5.149}$$

$$\begin{aligned}\langle 0|\, G^a_{\mu\nu}G^b_{\rho\sigma;\lambda\tau}\,|0\rangle =&\frac{g_s^2}{648}\sum_{u,d,s}\left\langle\overline{\psi}\psi\right\rangle^2\delta^{ba}[2g_{\lambda\tau}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}-g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})\\ &+g_{\lambda\rho}(g_{\tau\mu}g_{\sigma\nu}-g_{\tau\nu}g_{\sigma\mu})-g_{\lambda\sigma}(g_{\tau\mu}g_{\rho\nu}-g_{\tau\nu}g_{\rho\mu})]\\ =&\delta^{ba}\left\{\left(\frac{-1}{1296}\times\sum_{u,d,s}\left\langle g_s\overline{\psi}\psi\right\rangle^2-\frac{1}{384}\times\left\langle g_sfG^3\right\rangle\right)\right.\\ &[2g_{\lambda\tau}(g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}-g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma})\\ &+g_{\rho\tau}(g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda}-g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma})+g_{\sigma\tau}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}-g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda})]\\ &\left.+\left(\frac{-1}{1296}\times\sum_{u,d,s}\left\langle g_s\overline{\psi}\psi\right\rangle^2-\frac{1}{384}\times\left\langle g_sfG^3\right\rangle\right)\right.\end{aligned}$$

$$\times [g_{\mu\tau}(g_{\rho\nu}g_{\sigma\lambda} - g_{\rho\lambda}g_{\nu\sigma}) + g_{\nu\tau}(g_{\rho\lambda}g_{\sigma\mu} - g_{\rho\mu}g_{\sigma\lambda})]\Big\} \tag{5.150}$$

$$\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha(0)\psi^j_\beta(0)G^a_{\mu\nu;\rho}\,|0\rangle = \frac{1}{432}g_s\,\langle\bar{\psi}\psi\rangle^2\,(g_{\mu\rho}\gamma_\nu - g_{\nu\rho}\gamma_\mu)_{\beta\alpha}(T^A)^{ji} \tag{5.151}$$

其中，$G^a_{\nu\mu;\alpha_n\cdots\alpha_1}$ 由式 (5.73) 给出，$G^a_{\nu\mu;\alpha_n\cdots\alpha_1}(0) = \left[\tilde{D}^{aa_1}_{\alpha_1}\cdots\,\tilde{D}^{a_{n-1}b}_{\alpha_n}G^b_{\nu\mu}\right](0)$。

下面我们给出以上公式的具体推导过程。首先推导式 (5.149)，按 Lorentz 协变性，令

$$\begin{aligned}\langle 0|\,G^a_{\mu\nu;\lambda}G^b_{\rho\sigma;\tau}\,|0\rangle =& L\delta^{ba}[2g_{\lambda\tau}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) \\ &+ g_{\lambda\rho}(g_{\tau\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\tau\nu}g_{\sigma\mu}) - g_{\lambda\sigma}(g_{\tau\mu}g_{\rho\nu} - g_{\tau\nu}g_{\rho\mu})]\end{aligned} \tag{5.152}$$

上式两边同时乘以 $\delta^{ba}g^{\nu\lambda}g^{\sigma\tau}$ 可得

$$\langle 0|\,G^{a\nu}_{\mu\nu;}G^{a\sigma}_{\rho\sigma;}\,|0\rangle = 72Lg_{\mu\rho}$$

利用胶子背景场运动方程 (5.36)，可以得到

$$g_s^2\sum_{u,d,s}\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha\psi^j_\beta\bar{\psi}^k_\gamma\psi^l_\delta\,|0\rangle\,(\gamma_\mu)^{\alpha\beta}\,(\gamma_\rho)^{\gamma\delta}\,(T^a)^{ij}\,(T^a)^{kl} = 72Lg_{\mu\rho}$$

利用式 (5.164) 即可解出

$$L = -\frac{g_s^2}{648}\sum_{u,d,s}\langle\bar{\psi}\psi\rangle^2$$

将 L 的值代入式 (5.152) 即可得到式 (5.149)。

其次推导式 (5.151)，由式 (5.151) 可以看出，真空矩阵元 $\langle 0|\,G^a_{\mu\nu}G^b_{\rho\sigma;\lambda\tau}\,|0\rangle$ 的公式有两种不同的形式，对于第一个等号给出的形式，我们可以很容易证明如下等式：

$$\langle 0|\,G^a_{\mu\nu}G^a_{\rho\sigma;\lambda\tau}\,|0\rangle = -\langle 0|\,G^a_{\mu\nu;\tau}G^a_{\rho\sigma;\lambda}\,|0\rangle \tag{5.153}$$

并利用式 (5.149) 即可得到。对于式 (5.151) 的第二个等号，等式两边同时乘以 $\delta^{ab}g^{\lambda\tau}g^{\nu\sigma}g^{\mu\rho}$，并利用恒等式

$$\left(\widetilde{D}\right)^2 G^a_{\rho\sigma} = g_s f^{abc}\left(G^b_{\rho\alpha}G^c_{\sigma\alpha} - G^b_{\sigma\alpha}G^c_{\rho\alpha}\right) + G^a_{\rho\alpha;\alpha\sigma} - G^a_{\sigma\alpha;\alpha\rho} \tag{5.154}$$

即可得证。利用式 (5.151) 给出的真空矩阵元 $\langle 0|\,G^a_{\mu\nu}G^b_{\rho\sigma;\lambda\tau}\,|0\rangle$ 的两种不同的形式，我们还可以得到如下很有用的等式：

$$g_s^4\sum_{u,d,s}\langle\bar{\psi}\psi\rangle^2 = \frac{27}{8}\langle g_s f G^3\rangle \tag{5.155}$$

最后推导式 (5.151)，注意到 $G^a_{\mu\nu;\rho}=\left[\tilde{D}^{ab}_\rho G^b_{\mu\nu}\right]$ 和 $\tilde{D}^{ab}_\mu=\delta^{ab}\partial_\mu-gf^{abc}A^c_\mu$，按 Lorentz 协变性，令

$$\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha(0)\psi^j_\beta(0)G^a_{\mu\nu;\rho}\,|0\rangle=H(g_{\nu\rho}\gamma_\mu-g_{\mu\rho}\gamma_\nu)_{\beta\alpha}(T^a)^{ji} \tag{5.156}$$

上式两边同时乘以 $(\gamma^\nu)^{\alpha\beta}g^{\rho\mu}(T^a)^{ij}$ 得

$$\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha(T^a)^{ij}\psi^j_\beta(\gamma^\nu)^{\alpha\beta}G^{a\ \mu}_{\mu\nu;}\,|0\rangle=H\mathrm{Tr}(\gamma_\rho\gamma^\rho-4\gamma^\nu\gamma_\nu)\mathrm{Tr}(T^aT^a)$$

利用胶子背景场运动方程 (5.36)，右边应对轻夸克味求和，即

$$G^{a\ \mu}_{\mu\nu;}=\left(\tilde{D}^\mu\right)^{ab}G^b_{\mu\nu}=-\sum_{u,d,s}g_s\bar{\psi}\gamma_\nu T^a\psi$$

可以得到

$$-(T^a)^{ij}(\gamma^\nu)^{\alpha\beta}(T^a)^{kl}(\gamma_\nu)^{\gamma\delta}g_s\,\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha\psi^j_\beta\sum_{u,d,s}\bar{\psi}^k_\gamma\psi^l_\delta\,|0\rangle=-192H$$

或者

$$(T^a)^{ij}(T^a)^{kl}(\gamma^\nu)^{\alpha\beta}(\gamma_\nu)^{\gamma\delta}g_s\,\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha\bar{\psi}^k_\gamma\psi^j_\beta\psi^l_\delta\,|0\rangle=-192H$$

再利用式 (5.144) 可以得到

$$H=-\frac{g_s}{432}\langle\bar{\psi}\psi\rangle^2$$

将 H 的表达式代入定义式 (5.156) 即可获得式 (5.151)。

5.4.3 非零点真空凝聚参量

例如，$\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha(x)\psi^j_\beta(0)\,|0\rangle$ 和 $\langle 0|\,\bar{\psi}^a_\alpha(x)\psi^b_\beta(y)G^a_{\mu\nu}\,|0\rangle$，真空平均值中宗量不在同一零点，这时可将 $\bar{\psi}^i_\alpha(x)$ 在零点附近展开。先讨论 $\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha(x)\psi^j_\beta(0)\,|0\rangle$，其展开式为

$$\begin{aligned}\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha(x)\psi^j_\beta(0)\,|0\rangle=&\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha(0)\psi^j_\beta(0)\,|0\rangle+x_\mu\,\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha(0)\overleftarrow{D}^\mu\psi^j_\beta(0)\,|0\rangle\\&+\frac{1}{2!}x_\mu x_\nu\,\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha(0)\overleftarrow{D}^\mu\overleftarrow{D}^\nu\psi^j_\beta(0)\,|0\rangle\\&+\frac{1}{3!}x_\mu x_\nu x_\rho\,\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha(0)\overleftarrow{D}^\mu\overleftarrow{D}^\nu\overleftarrow{D}^\rho\psi^j_\beta(0)\,|0\rangle+\cdots\end{aligned} \tag{5.157}$$

上式中的省略号表示量纲高于 6 的项。对于第二项中的 $\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha(0)\overleftarrow{D}^\mu\psi^j_\beta(0)\,|0\rangle$，按 Lorentz 协变性，令

$$\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha(0)\overleftarrow{D}^\mu\psi^j_\beta(0)\,|0\rangle=B\delta^{ji}\,(\gamma^\mu)_{\beta\alpha} \tag{5.158}$$

两边同时乘以 $\delta^{ij}\,(\gamma_\mu)^{\alpha\beta}$，得

$$\langle 0|\,\bar{\psi}\overleftarrow{\not{D}}\psi\,|0\rangle=48B$$

利用背景夸克场的运动方程 $\bar{\psi}\overleftarrow{\not{D}} = \mathrm{i}m\bar{\psi}$，可以得到

$$B = \frac{\mathrm{i}m}{48}\langle\bar{\psi}\psi\rangle$$

于是

$$\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha(0)\overleftarrow{D}^\mu\psi^j_\beta(0)\,|0\rangle = \frac{\mathrm{i}m}{48}\langle\bar{\psi}\psi\rangle\,\delta^{ji}\,(\gamma^\mu)_{\beta\alpha} \tag{5.159}$$

对于 $\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha(0)\overleftarrow{D}^\mu\overleftarrow{D}^\nu\psi^j_\beta(0)\,|0\rangle$，按 Lorentz 协变性，令

$$\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha(0)\overleftarrow{D}^\mu\overleftarrow{D}^\nu\psi^j_\beta(0)\,|0\rangle = Cg^{\mu\nu}g_{\beta\alpha}\delta^{ji} + D\,(\sigma^{\mu\nu})_{\beta\alpha}\,\delta^{ji} \tag{5.160}$$

下面分别求出上式中 C, D，两边乘以 $g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\delta^{ji}$，整理后可得

$$\begin{aligned}
C =& \frac{1}{48}\langle 0|\,\bar{\psi}\overleftarrow{D}^\mu\overleftarrow{D}^\nu g_{\mu\nu}\psi\,|0\rangle\\
=& \frac{1}{96}\langle 0|\,\bar{\psi}\overleftarrow{D}^\mu\overleftarrow{D}^\nu\left(\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu\right)\psi\,|0\rangle\\
=& \frac{1}{96}\left[\langle 0|\,\bar{\psi}\overleftarrow{D}^\mu\overleftarrow{D}^\nu\gamma_\nu\gamma_\mu\psi\,|0\rangle + \langle 0|\,\bar{\psi}\overleftarrow{\not{D}}\,\overleftarrow{\not{D}}\psi\,|0\rangle\right]\\
=& \frac{1}{96}\left[\langle 0|\,\bar{\psi}\left[\overleftarrow{D}^\mu,\overleftarrow{D}^\nu\right]\gamma_\nu\gamma_\mu\psi\,|0\rangle + 2\,\langle 0|\,\bar{\psi}\overleftarrow{\not{D}}\,\overleftarrow{\not{D}}\psi\,|0\rangle\right]\\
=& \frac{1}{96}\left[-\mathrm{i}g_s\langle 0|\,\bar{\psi}T^aG^{a\mu\nu}\gamma_\nu\gamma_\mu\psi\,|0\rangle + 2\,\langle 0|\,\bar{\psi}\overleftarrow{\not{D}}\,\overleftarrow{\not{D}}\psi\,|0\rangle\right]\\
=& \frac{1}{96}\left[g_s\langle 0|\,\bar{\psi}G^{a\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}T^a\psi\,|0\rangle + 2\,\langle 0|\,\bar{\psi}\overleftarrow{\not{D}}\,\overleftarrow{\not{D}}\psi\,|0\rangle\right]\\
=& -\frac{m^2}{48}\langle\bar{\psi}\psi\rangle + \frac{1}{96}g_s\langle\bar{\psi}\sigma TG\psi\rangle
\end{aligned}$$

在上面的推导过程中，倒数第 3 个等式利用了如下恒等式，即

$$\gamma_\nu\gamma_\mu = \mathrm{i}\sigma_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}$$

$$\left[\overleftarrow{D}^\mu,\overleftarrow{D}^\nu\right] = -\mathrm{i}g_sT^aG^{a\mu\nu}$$

而在最后一个等式则利用了背景夸克场的运动方程，此外 $\langle\bar{\psi}\sigma TG\psi\rangle$ 是 $\langle 0|\bar{\psi}G^{a\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}T^a\psi|0\rangle$ 的简写形式。在 $\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha(0)\overleftarrow{D}^\mu\overleftarrow{D}^\nu\psi^j_\beta(0)\,|0\rangle$ 定义式的两边同时乘以 $(\sigma_{\mu\nu})^{\beta\alpha}\delta^{ij}$，并稍作整理可得

$$\begin{aligned}
D =& \frac{1}{144}\langle 0|\,\bar{\psi}\overleftarrow{D}^\mu\overleftarrow{D}^\nu\sigma_{\mu\nu}\psi\,|0\rangle\\
=& \frac{\mathrm{i}}{288}\langle 0|\,\bar{\psi}\overleftarrow{D}^\mu\overleftarrow{D}^\nu(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu)\psi\,|0\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&\frac{\mathrm{i}}{288}\langle 0|\,\bar{\psi}\overleftarrow{D}^{\mu}\overleftarrow{D}^{\nu}(2\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}-2g_{\mu\nu})\psi\,|0\rangle\\
=&\frac{\mathrm{i}}{144}\left[\langle 0|\,\bar{\psi}\overleftarrow{\not{D}}\overleftarrow{\not{D}}\psi\,|0\rangle-\langle 0|\,\bar{\psi}\overleftarrow{D}^{\mu}\overleftarrow{D}^{\nu}g_{\mu\nu}\psi\,|0\rangle\right]\\
=&-\frac{\mathrm{i}}{288}g_s\langle\bar{\psi}\sigma TG\psi\rangle
\end{aligned}
$$

将上面得到的 C,D 的表达式代入定义式 (5.160) 中可以得到

$$
\begin{aligned}
\langle 0|\,\bar{\psi}^i_{\alpha}(0)\overleftarrow{D}^{\mu}\overleftarrow{D}^{\nu}\psi^j_{\beta}(0)\,|0\rangle=&\delta^{ji}\left\{-\frac{m^2}{48}g_{\beta\alpha}g^{\mu\nu}\langle\bar{\psi}\psi\rangle+\left[\frac{1}{96}g_{\beta\alpha}g^{\mu\nu}\right.\right.\\
&\left.\left.-\frac{\mathrm{i}}{288}(\sigma^{\mu\nu})_{\beta\alpha}\right]g_s\langle\bar{\psi}\sigma TG\psi\rangle\right\}
\end{aligned}
\tag{5.161}
$$

对于 $\langle 0|\,\bar{\psi}^i_{\alpha}(0)\overleftarrow{D}^{\mu}\overleftarrow{D}^{\nu}\overleftarrow{D}^{\rho}\psi^j_{\beta}(0)\,|0\rangle$，按 Lorentz 协变性，定义

$$
\langle 0|\,\bar{\psi}^i_{\alpha}(0)\overleftarrow{D}^{\mu}\overleftarrow{D}^{\nu}\overleftarrow{D}^{\rho}\psi^j_{\beta}(0)\,|0\rangle=\delta^{ji}\left(E\gamma^{\mu}g^{\nu\rho}+F\gamma^{\nu}g^{\mu\rho}+G\gamma^{\rho}g^{\mu\nu}\right)_{\beta\alpha}
\tag{5.162}
$$

下面分别求出上式中 E,F,G，对上式两边同时乘以 $(\gamma_{\mu})_{\alpha\beta}\,g_{\nu\rho}\delta^{ji}$，得

$$
\langle 0|\,\bar{\psi}\overleftarrow{\not{D}}\overleftarrow{D}^{\nu}\overleftarrow{D}^{\rho}\psi\,|0\rangle\,g_{\nu\rho}=48(4E+F+G)
$$

$$
\begin{aligned}
4E+F+G=&\frac{\mathrm{i}m}{48}\,\langle 0|\,\bar{\psi}\overleftarrow{D}^{\nu}\overleftarrow{D}^{\rho}g_{\nu\rho}\psi\,|0\rangle\\
=&-\frac{\mathrm{i}m^3}{48}\langle\bar{\psi}\psi\rangle+\frac{\mathrm{i}m}{96}g_s\langle\bar{\psi}\sigma TG\psi\rangle
\end{aligned}
\tag{5.163}
$$

另一方面，我们容易得到

$$
\langle 0|\,\bar{\psi}^i_{\alpha}(0)\overleftarrow{D}^{\mu}\overleftarrow{D}^{\nu}\overleftarrow{D}^{\rho}\psi^j_{\beta}(0)\,|0\rangle=-\,\langle 0|\,\bar{\psi}^i_{\alpha}(0)\overleftarrow{D}^{\mu}\overleftarrow{D}^{\nu}\vec{D}^{\rho}\psi^j_{\beta}(0)\,|0\rangle
$$

上式两边同时乘以 $(\gamma_{\rho})_{\alpha\beta}\,g_{\mu\nu}\delta^{ab}$ 得

$$
\begin{aligned}
E+F+4G=&-\frac{1}{48}\langle 0|\,\bar{\psi}\overleftarrow{D}^{\mu}\overleftarrow{D}^{\nu}\vec{\not{D}}g_{\mu\nu}\psi\,|0\rangle\\
=&\frac{\mathrm{i}m}{48}\,\langle 0|\,\bar{\psi}\overleftarrow{D}^{\mu}\overleftarrow{D}^{\nu}g_{\mu\nu}\psi\,|0\rangle\\
=&-\frac{\mathrm{i}m^3}{48}\langle\bar{\psi}\psi\rangle+\frac{\mathrm{i}m}{96}g_s\langle\bar{\psi}\sigma TG\psi\rangle
\end{aligned}
\tag{5.164}
$$

将 $\langle 0|\,\bar{\psi}^i_{\alpha}(0)\overleftarrow{D}^{\mu}\overleftarrow{D}^{\nu}\overleftarrow{D}^{\rho}\psi^j_{\beta}(0)\,|0\rangle$ 定义式两边同时乘以 $\delta^{ji}\,(\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}\gamma_{\rho})_{\alpha\beta}$ 得

$$
\langle 0|\,\bar{\psi}\overleftarrow{\not{D}}\overleftarrow{\not{D}}\overleftarrow{\not{D}}\psi\,|0\rangle=96(2E-F+2G)
$$

$$2E - F + 2G = -\frac{\mathrm{i}m^3}{96}\langle\bar{\psi}\psi\rangle \tag{5.165}$$

利用式 (5.163)~(5.165) 可以解出

$$\begin{aligned} E = G &= -\frac{\mathrm{i}m^3}{32\times 9}\langle\bar{\psi}\psi\rangle + \frac{\mathrm{i}m}{96\times 9}g_s\langle\bar{\psi}\sigma TG\psi\rangle \\ F &= -\frac{\mathrm{i}m^3}{96\times 3}\langle\bar{\psi}\psi\rangle + \frac{4\mathrm{i}m}{96\times 9}g_s\langle\bar{\psi}\sigma TG\psi\rangle \end{aligned} \tag{5.166}$$

将以上 E, F, G 的值代入定义式 (5.162)，即

$$\begin{aligned} &\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha(0)\overleftarrow{D}^\mu\overleftarrow{D}^\nu\overleftarrow{D}^\rho\psi^j_\beta(0)\,|0\rangle \\ =&\delta^{ji}\left\{-\frac{\mathrm{i}m^3}{96\times 3}\langle\bar{\psi}\psi\rangle\left(\gamma^\mu g^{\nu\rho}+\gamma^\nu g^{\mu\rho}+\gamma^\rho g^{\mu\nu}\right)\right. \\ &\left.+\frac{\mathrm{i}m}{96\times 9}g_s\langle\bar{\psi}\sigma TG\psi\rangle\left(\gamma^\mu g^{\nu\rho}+4\gamma^\nu g^{\mu\rho}+\gamma^\rho g^{\mu\nu}\right)\right\}_{\beta\alpha} \end{aligned} \tag{5.167}$$

将式 (5.137)，(5.159)，(5.161) 和 (5.167) 代入式 (5.157) 即可得到

$$\begin{aligned} \langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha(x)\psi^j_\beta(0)\,|0\rangle =&\delta^{ji}\left\{\langle\bar{\psi}\psi\rangle\left[\frac{1}{12}g_{\beta\alpha}+\frac{\mathrm{i}m}{48}\not{x}_{\beta\alpha}-\frac{m^2}{96}x^2g_{\beta\alpha}-\frac{\mathrm{i}m^3}{576}x^2\not{x}_{\beta\alpha}\right]\right. \\ &\left.+g_s\langle\bar{\psi}\sigma TG\psi\rangle\left[\frac{1}{192}x^2g_{\beta\alpha}+\frac{\mathrm{i}m}{864}x^2\not{x}_{\beta\alpha}\right]\right\} \end{aligned} \tag{5.168}$$

最后讨论 $\langle 0|\,\bar{\psi}^a_\alpha(x)\psi^b_\beta(y)G^a_{\mu\nu}\,|0\rangle$，将其中 $\bar{\psi}^a_\alpha(x)\psi^b_\beta(y)$ 在零点处展开为

$$\begin{aligned} \langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha(x)\psi^j_\beta(y)G^a_{\mu\nu}\,|0\rangle =&\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha(0)\psi^j_\beta(0)G^a_{\mu\nu}\,|0\rangle + x_\rho\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha(0)\overleftarrow{D}^\rho G^a_{\mu\nu}\psi^j_\beta(0)\,|0\rangle \\ &+y_\rho\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha(0)G^a_{\mu\nu}\vec{D}^\rho\psi^j_\beta(0)\,|0\rangle+\cdots \end{aligned} \tag{5.169}$$

对于式 (5.169) 的第一项，令

$$\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha(0)\psi^j_\beta(0)G^a_{\mu\nu}\,|0\rangle = I(\sigma_{\mu\nu})_{\beta\alpha}(T^a)^{ji} \tag{5.170}$$

上式两边同时乘以 $(\sigma^{\mu\nu})^{\alpha\beta}(T^a)^{ij}$，可得

$$\langle\bar{\psi}\sigma TG\psi\rangle = I\mathrm{Tr}(\sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu})\mathrm{Tr}(T^aT^a) = 192I$$

即

$$I = \frac{1}{192}\langle\bar{\psi}TG\sigma\psi\rangle$$

于是

$$\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha(0)\psi^j_\beta(0)G^a_{\mu\nu}\,|0\rangle = \frac{1}{192}\langle\bar{\psi}TG\sigma\psi\rangle(\sigma_{\mu\nu})_{\beta\alpha}(T^a)^{ji} \tag{5.171}$$

对于式 (5.169) 的第二项，令

$$\begin{aligned}\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha \overleftarrow{D}^\rho G^a_{\mu\nu}\psi^j_\beta\,|0\rangle =& J(g_{\rho\mu}\gamma_\nu - g_{\rho\nu}\gamma_\mu)_{\beta\alpha}(T^a)^{ji}\\ &+ K(\varepsilon_{\rho\mu\nu\sigma}\gamma_5\gamma^\sigma)_{\beta\alpha}(T^a)^{ji}\end{aligned} \tag{5.172}$$

另外

$$\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha \overleftarrow{D}^\rho G^a_{\mu\nu}\psi^j_\beta\,|0\rangle = \frac{1}{2}\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha \overleftarrow{D}^\rho G^a_{\mu\nu}\psi^j_\beta\,|0\rangle + \frac{1}{2}\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha \overleftarrow{D}^\rho G^a_{\mu\nu}\psi^j_\beta\,|0\rangle$$

利用对易式

$$\left[G^a_{\mu\nu}, \overleftarrow{D}^\rho\right] = G^a_{\mu\nu}\overleftarrow{D}^\rho - \overleftarrow{D}^\rho G^a_{\mu\nu} \tag{5.173}$$

可以得到

$$\begin{aligned}\langle 0|\,\bar{\psi}_\alpha \overleftarrow{D}^\rho T^a G^a_{\mu\nu}\psi_\beta\,|0\rangle =& \frac{1}{2}\langle 0|\,\bar{\psi}_\alpha \overleftarrow{D}^\rho T^a G^a_{\mu\nu}\psi_\beta\,|0\rangle - \frac{1}{2}\langle 0|\,\bar{\psi}_\alpha T^a G^a_{\mu\nu}\vec{D}^\rho\psi_\beta\,|0\rangle\\ &- \frac{1}{2}\langle 0|\,\bar{\psi}_\alpha\left[T^a G^a_{\mu\nu}, \overleftarrow{D}^\rho\right]\psi_\beta\,|0\rangle\end{aligned}$$

再利用恒等式

$$\left[T^a G^a_{\mu\nu}, \overleftarrow{D}^\rho\right] = T^a G^a_{\mu\nu;} \tag{5.174}$$

可将它化简为

$$\begin{aligned}\langle 0|\,\bar{\psi}_\alpha \overleftarrow{D}^\rho T^a G^a_{\mu\nu}\psi_\beta\,|0\rangle =& \frac{1}{2}\langle 0|\,\bar{\psi}_\alpha \overleftarrow{D}^\rho T^a G^a_{\mu\nu}\psi_\beta\,|0\rangle - \frac{1}{2}\langle 0|\,\bar{\psi}_\alpha T^a G^a_{\mu\nu}\vec{D}^\rho\psi_\beta\,|0\rangle\\ &- \frac{1}{2}\langle 0|\,\bar{\psi}_\alpha T^a G^{a\ \rho}_{\mu\nu;}\psi_\beta\,|0\rangle\end{aligned}$$

注意到

$$\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha \overleftarrow{D}^\rho G^a_{\mu\nu}\psi^j_\beta\,|0\rangle = -\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha G^a_{\mu\nu}\vec{D}^\rho\psi^j_\beta\,|0\rangle - \langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha\psi^j_\beta G^{a\ \rho}_{\mu\nu;}\,|0\rangle \tag{5.175}$$

将式 (5.172) 两边乘以 $(\gamma^\rho\sigma_{\mu\nu})^{\alpha\beta}(T^a)^{ij}$ 化简为

$$\langle 0|\,\bar{\psi}\overleftarrow{\not{D}}\sigma_{\mu\nu}T^a G^a_{\mu\nu}\psi\,|0\rangle = 384\mathrm{i}J + 384K$$

进一步利用夸克背景场的运动方程，上式成为

$$im\left\langle\bar{\psi}\sigma TG\psi\right\rangle = 384\mathrm{i}J + 384K \tag{5.176}$$

由式 (5.172) 和 (5.175) 可得

$$\begin{aligned}&-\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha G^a_{\mu\nu}\vec{D}^\rho\psi^j_\beta\,|0\rangle - \langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha\psi^j_\beta G^{a\rho}_{\mu\nu;}\,|0\rangle\\ =&J(g_{\rho\mu}\gamma_\nu - g_{\rho\nu}\gamma_\mu)_{\beta\alpha}(T^a)^{ji} + K(\varepsilon_{\rho\mu\nu\sigma}\gamma_5\gamma^\sigma)_{\beta\alpha}(T^a)^{ji}\end{aligned}$$

将式 (5.156) 代入上式得

$$
\begin{aligned}
&-\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha G^a_{\mu\nu}\vec{D}^\rho\psi^j_\beta\,|0\rangle-\frac{1}{432}g_s\langle\bar{\psi}\psi\rangle^2(g_{\rho\mu}\gamma_\nu-g_{\rho\nu}\gamma_\mu)_{\beta\alpha}(T^a)^{ji}\\
=&J(g_{\rho\mu}\gamma_\nu-g_{\rho\nu}\gamma_\mu)_{\beta\alpha}(T^a)^{ji}+K(\varepsilon_{\rho\mu\nu\sigma}\gamma_5\gamma^\sigma)_{\beta\alpha}(T^a)^{ji}
\end{aligned}
$$

上式两边同时乘以 $(\sigma_{\mu\nu}\gamma_\rho)^{\alpha\beta}(T^a)^{ij}$ 得

$$
-\langle 0|\,\bar{\psi}\sigma TG\vec{\not{D}}\psi\,|0\rangle+\frac{8}{9}\mathrm{i}g_s\langle\bar{\psi}\psi\rangle^2=-384\mathrm{i}J+384K
$$

利用夸克背景场的运动方程，上式化简为

$$
\mathrm{i}m\langle\bar{\psi}\sigma TG\psi\rangle+\frac{8}{9}\mathrm{i}g_s\langle\bar{\psi}\psi\rangle^2=-384\mathrm{i}J+384K \tag{5.177}
$$

由 (5.176)，(5.177) 两式可以解得 J 和 K，即

$$
J=-\frac{1}{864}g_s\langle\bar{\psi}\psi\rangle^2
$$

$$
K=\frac{\mathrm{i}m}{384}\langle\bar{\psi}\sigma TG\psi\rangle+\frac{1}{864}\mathrm{i}g_s\langle\bar{\psi}\psi\rangle^2
$$

于是式 (5.172) 变为

$$
\begin{aligned}
&\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha\overleftarrow{D}^\rho G^a_{\mu\nu}\psi^j_\beta\,|0\rangle\\
=&-\frac{1}{864}g_s\langle\bar{\psi}\psi\rangle^2(g_{\rho\mu}\gamma_\nu-g_{\rho\nu}\gamma_\mu)_{\beta\alpha}(T^a)^{ji}\\
&+\left[\frac{\mathrm{i}m}{384}\langle\bar{\psi}\sigma TG\psi\rangle+\frac{\mathrm{i}}{864}g_s\langle\bar{\psi}\psi\rangle^2\right](\varepsilon_{\rho\mu\nu\sigma}\gamma_5\gamma^\sigma)_{\beta\alpha}(T^a)^{ji}
\end{aligned} \tag{5.178}
$$

对于式 (5.172) 式的最后一项，由式 (5.175) 可得

$$
\begin{aligned}
&\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha G^a_{\mu\nu}\vec{D}^\rho\psi^j_\beta\,|0\rangle\\
=&-\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha\overleftarrow{D}^\rho G^a_{\mu\nu}\psi^j_\beta\,|0\rangle-\langle 0|\,\bar{\psi}^i_\alpha\psi^j_\beta G^{a\ \rho}_{\mu\nu;}\,|0\rangle\\
=&\frac{-1}{864}g_s\langle\bar{\psi}\psi\rangle^2(g_{\rho\mu}\gamma_\nu-g_{\rho\nu}\gamma_\mu)_{\beta\alpha}(T^a)^{ji}\\
&-\mathrm{i}\left[\frac{m}{384}\langle\bar{\psi}\sigma TG\psi\rangle+\frac{g_s}{864}\langle\bar{\psi}\psi\rangle^2\right](\varepsilon_{\rho\mu\nu\sigma}\gamma_5\gamma^\sigma)_{\beta\alpha}(T^a)^{ji}
\end{aligned} \tag{5.179}
$$

将 (5.171)，(5.178)，(5.179) 三式代入式 (5.169) 最终得到表达式，即

$$
\langle 0|\,\bar{\psi}^a_\alpha(x)\psi^b_\beta(y)G^a_{\mu\nu}\,|0\rangle=\frac{1}{192}\langle\bar{\psi}\sigma TG\psi\rangle(\sigma_{\mu\nu})_{\beta\alpha}(T^A)^{ba}
$$

$$+\left\{-\frac{1}{864}g\left\langle\bar{\psi}\psi\right\rangle^2(g_{\mu\rho}\gamma_\nu-g_{\nu\rho}\gamma_\mu)_{\beta\alpha}(x+y)^\rho\right.$$
$$+\mathrm{i}(x-y)^\rho\left[\frac{1}{864}g\left\langle\bar{\psi}\psi\right\rangle^2+\frac{m}{384}\left\langle\bar{\psi}\sigma TG\psi\right\rangle\right]$$
$$\left.\times(\varepsilon_{\rho\mu\nu\sigma}\gamma_5\gamma^\sigma)_{\beta\alpha}\right\}(T^a)^{ba} \tag{5.180}$$

5.5 QCD 求和规则

前面几节介绍了背景场方法和真空凝聚，这一节通过关联函数的计算说明 QCD 求和规则的基本要点[5−7,11]。真空凝聚的存在源自于物理真空的复杂性质，QCD 求和规则不企图揭示 QCD 物理真空的本质，而是通过唯象地引入真空凝聚参量计算非微扰效应的影响，并通过一系列物理过程的实验值自洽地确定它们的值，再应用到大量过程作为非微扰参量输入，从而给出确定的理论预言。

QCD 求和规则有以下 4 个关键步骤：① 根据物理过程定义关联函数，关联函数中算符和真空都包含非微扰效应；② 应用 QCD 在夸克层次计算包含 QCD 物理真空凝聚的关联函数，表达式中高量纲的真空凝聚参量为 Q^2 幂次压低；③ 应用色散关系在强子层次计算关联函数，表达式中谱函数依赖于近似和模型；④ 两者相等建立求和规则，应用 Borel 变换寻找求和规则适用能区以及改善求和规则不确定性。这些构成了 QCD 求和规则的几个主要因素。

1. 定义关联函数

首先根据物理过程引入相应的关联函数，例如，5.1 节中两个电磁流算符 $J_\mu(x)$ 乘积的真空平均值 (见式 (5.17)) 为

$$\langle 0|\,T(J_\mu(x)J_\nu(0))\,|0\rangle$$

计算两个矢量流 $J_\mu(x)=\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$ 乘积的关联函数

$$\Pi_{\mu\nu}(q)=\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\langle 0|\,T(J_\mu(x)J_\nu(0))\,|0\rangle=(q_\mu q_\nu-q^2g_{\mu\nu})\Pi(q^2) \tag{5.181}$$

其中，$(q_\mu q_\nu-q^2g_{\mu\nu})$ 是 Lorentz 协变性和电磁流守恒条件给出的一般张量结构；$\Pi(q^2)$ 是 Lorentz 不变函数。

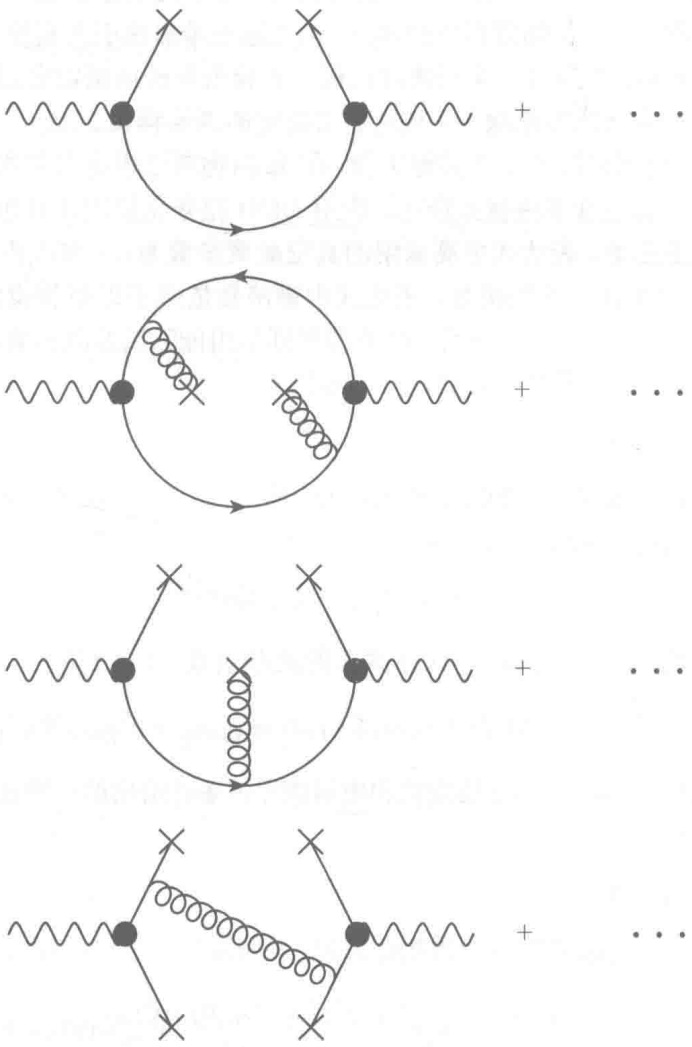
2. 夸克层次计算

一般地讲，不变函数 $\Pi(q^2)$ 的展开式为

$$\Pi(q^2)=\sum_n C_n(q^2)\langle 0|:O_n(0):|0\rangle \tag{5.182}$$

问题是如何计算凝聚算符真空平均值的 Wilson 系数 $C_n(q^2)$。5.2 节介绍的背景场方法从场论的观点对这些真空凝聚提供了一个系统的描述，由拉氏密度 (5.41) 获得的一套 Feynman 规则，它包含了胶子和夸克量子场 $\phi_\mu^a(x)$、$\eta(x)$ 之间的相互作用顶角，也包含了夸克和胶子量子场和背景场 $A_\mu^a(x)$、$\psi(x)$ 之间的相互作用顶角。Feynman 规则中除了有通常微扰 QCD 的全部规则外还有包含量子场和背景场的相互作用顶点。而 Wick 定理仅应用于量子场将量子场收缩并在此框架中自然地计算微扰展开的 Wilson 系数，留下的是背景场的真空平均值给出真空凝聚。

对应于关联函数 (5.181)，由拉氏密度 (5.41) 按背景场下 Feynman 规则计算的夸克凝聚、胶子凝聚、夸克-胶子混合凝聚、四夸克凝聚、三胶子凝聚的图形 (量纲 $d \leqslant 6$) 分别列图如下 (图 5.4)。



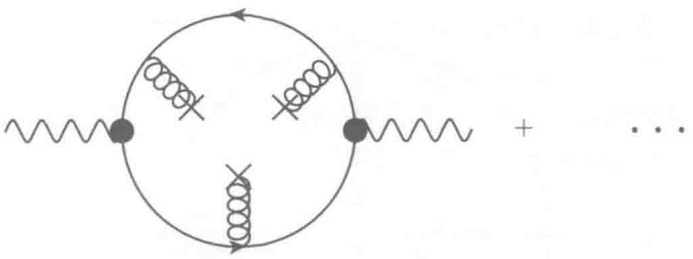


图 5.4 两个矢量流乘积的关联函数的夸克凝聚和胶子凝聚贡献对应的图形，每个图形“+···”表示加上辐射修正的图形

由这些图形计算给出 $(Q^2=-q^2)$

$$\Pi(q^2)=-\frac{1}{4\pi^2}\left(1+\frac{\alpha_s}{\pi}\right)\log\frac{Q^2}{\mu^2}+\frac{1}{Q^4}\langle 0|\,m_u\bar{u}u+m_d\bar{d}d\,|0\rangle$$
$$+\frac{1}{12Q^4}\langle 0|\,\frac{\alpha_s}{\pi}G^2\,|0\rangle-\frac{224\pi}{81Q^6}\alpha_s\langle 0|\,\bar{\psi}\psi\,|0\rangle^2+\cdots \tag{5.183}$$

这里第一项是微扰贡献，第二、三项的夸克凝聚和胶子凝聚已采用了式 (5.138) 和 (5.139) 定义的具有洛伦兹不变性和色空间不变性的真空凝聚值——$\langle 0|\,\bar{\psi}\psi\,|0\rangle$ 和 $\langle 0|\,G^2\,|0\rangle$，在推导式 (5.183) 第四项过程中已假定了四夸克凝聚中插入真空态为主成为夸克凝聚的平方 (见式 (5.142))。

3. 应用强子色散关系计算关联函数

两点关联函数 $\Pi(q^2)$ 在复 q^2 平面上是解析函数，由于幺正性，它仅在正实轴物理区域上有割缝存在，割缝的起点位置是物理中间态的阈值 s_0，其割缝为 $s_0\leqslant q^2\leqslant\infty$(图 5.5)。

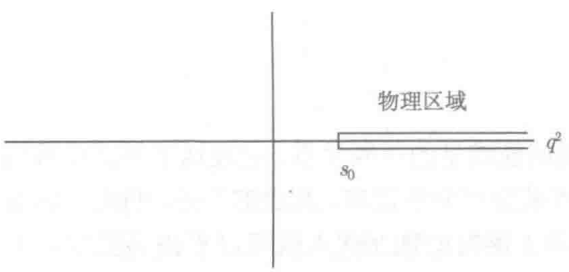


图 5.5 复 q^2 平面在正实轴上有割缝

人们可以对 $\Pi(q^2)$ 应用 Cauchy 定理并取如图 5.6 所示的回路。

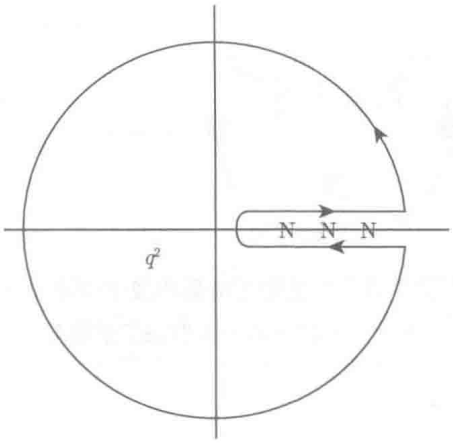


图 5.6　复 q^2 平面沿割缝 C 的回路

沿正实轴割缝的两岸且半径 $R\to\infty$ 的回路积分，则有

$$\begin{aligned}\Pi(q^2)=&\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \mathrm{d}z\frac{\Pi(z)}{z-q^2}\\ =&\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=R}\mathrm{d}z\frac{\Pi(z)}{z-q^2}+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^R \mathrm{d}z\frac{\Pi(z+\mathrm{i}\varepsilon)-\Pi(z-\mathrm{i}\varepsilon)}{z-q^2}\end{aligned}\tag{5.184}$$

如果关联函数 $\Pi(q^2)$ 在复 q^2 平面上当 $\left|q^2\right|\sim R\to\infty$ 时足够快地趋于零，譬如说 $\lim\limits_{R\to\infty}\Pi(q^2)\sim 1/\left|q^2\right|^{\varepsilon}$ $(\varepsilon>0)$，那么式 (5.184) 第一项在大圆上的积分趋于零，只有第二项存在。第二项的分子除了割缝以外都为零，仅在割缝区域为上、下岸值之差，即

$$\Pi(q^2+\mathrm{i}\varepsilon)-\Pi(q^2-\mathrm{i}\varepsilon)=2\mathrm{i}\mathrm{Im}\Pi(q^2),\quad q^2>s_0\tag{5.185}$$

其中，s_0 是割缝的起点处。这样式 (5.184) 就转变为

$$\Pi(q^2)=\frac{1}{\pi}\int_{s_0}^{\infty}\mathrm{d}s\frac{\mathrm{Im}\Pi(s)}{s-q^2-\mathrm{i}\varepsilon}\tag{5.186}$$

式 (5.186) 就是关联函数满足的色散关系，它表达了关联函数的整体可以用它的虚部表示出来。进一步若应用光学定理，其虚部与正、负电子转变为强子的总截面相联系，那么利用实验上测得的截面代入就可以求出它的实部或关联函数本身。然而在很多情况下关联函数的虚部并不能简单地用实验上测得的截面表示出来，需要引入模型来表述它的虚部，代入到式 (5.186) 得到关联函数。然而色散积分区间为 $s_0\leqslant s\leqslant\infty$，它依赖于在整个积分区间内谱函数的行为，通常利用夸克–强子对偶性 (quark-hadron duality) 假定表达色散积分中的被积函数 $\mathrm{Im}\Pi(s)$。主要思想如

下：在低能部分以相应的具有与构成关联函数流算符相同量子数的一系列强子窄宽度共振态做近似，在高能部分不能以强子窄宽度共振态近似，强子共振态愈来愈密集而且宽度更宽而趋于连续谱。严格地说在式 (5.181) 定义的关联函数中插入中间态 $|n\rangle$，利用平移不变性并对 x 积分得到的虚部为 (物理区域内 $(q^2 \geqslant 0)$)

$$2\mathrm{Im}\Pi_{\mu\nu}(q^2) = \sum_n \langle 0|J_\mu|n\rangle \langle n|J_\nu|0\rangle \,\mathrm{d}\Phi_n (2\pi)^4 \delta(q - p_n) \tag{5.187}$$

其中，$p_n, \mathrm{d}\Phi_n$ 分别表示为中间态 $|n\rangle$ 的动量和相空间。对于两个电磁流情况，在物理区域内，首先贡献到虚部的是矢量介子态 V[14]，定义

$$\langle 0|J_\mu|V^\lambda(p_V)\rangle = \sqrt{2} f_V m_V \varepsilon_\mu^\lambda \tag{5.188}$$

这里 $m_V, f_V, \varepsilon_\mu^\lambda$ 分别是矢量介子的质量、衰变常数和极化矢量。将式 (5.188) 代入式 (5.187) 分离出 Lorentz 张量结构后就得到

$$\mathrm{Im}\Pi(q^2) = 2\pi f_V^2 \delta(q^2 - m_V^2) + \cdots$$

这里省略号代表强子高激发态和连续态的贡献。由于强子高激发态愈来愈密集而且宽度更宽不能以强子窄宽度共振态近似而趋于连续谱，以最低连续态阈值 s_0^h 为起点表示

$$\mathrm{Im}\Pi(q^2) = 2\pi f_V^2 \delta(q^2 - m_V^2) + \pi \rho^h(q^2)\theta(q^2 - s_0^h) \tag{5.189}$$

其中，$\rho^h(q^2)$ 代表 $q^2 \geqslant s_0^h$ 的强子谱函数。它在高能下由于多强子连续态的复杂性很难找到合理的表达式，即使是以模型来近似。但由夸克-强子对偶性可以将强子谱函数积分近似地以夸克相互作用微扰论计算 (包括 QCD 辐射修正) 给出的虚部 $\mathrm{Im}\Pi^{\mathrm{pert}}(s)$ 的积分表示。例如，对于关联函数 (5.181)，近似地假定

$$\mathrm{Im}\Pi(q^2) = 2\pi f_V^2 \delta(q^2 - m_V^2) + \mathrm{Im}\Pi^{\mathrm{pert}}(q^2)\theta(q^2 - s_0) \tag{5.190}$$

或者

$$\int_{s_0^h}^{\infty} \mathrm{d}s \frac{\rho^h(s)}{s - q^2} \simeq \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \mathrm{d}s \frac{\mathrm{Im}\Pi^{\mathrm{pert}}(s)}{s - q^2} \tag{5.191}$$

其中，$\mathrm{Im}\Pi^{\mathrm{pert}}(s)$ 是 QCD 微扰计算得到的关联函数 $\Pi^{\mathrm{pert}}(s)$ 的虚部，即正、负电子湮灭衰变为夸克 QCD 树图近似以及高阶辐射修正计算给出的正、负电子湮灭衰变为强子的总截面。s_0 是 QCD 微扰计算中相应的夸克图的阈值，它不需要与 s_0^h 一致。s_0 和 s_0^h 的选取依赖于具体研究的过程。式 (5.190) 和 (5.191) 就是夸克-强子对偶性假定，有时称式 (5.190) 为定域对偶性 (local duality)，式 (5.191) 称为总体对偶性 (global duality)。

4. 应用 Borel 变换改善求和规则可靠性

由拉氏密度 (5.41) 按背景场下 Feynman 规则计算给出 $q^2 \ll -\mu^2$ 下关联函数 $\Pi(q^2)$ 的表达式 (5.183)，另一方面应用色散关系将关联函数表达为强子物理区域 $q^2 > 0$ 的谱函数积分表示 (5.186) 和 (5.189)。由于关联函数 $\Pi(q^2)$ 在复 q^2 平面上的解析性质，这两种表达式应该相等，从而给出求和规则，即

$$\frac{1}{\pi}\int_{s_0}^{\infty} \mathrm{d}s \frac{\mathrm{Im}\Pi(s)}{s-q^2-\mathrm{i}\varepsilon} = -\frac{1}{4\pi^2}\left(1+\frac{\alpha_s}{\pi}\right)\log\frac{Q^2}{\mu^2} + \frac{1}{Q^4}\langle 0|\, m_u\bar{u}u + m_d\bar{d}d\,|0\rangle + \frac{1}{12Q^4}\langle 0|\,\frac{\alpha_s}{\pi}G^2\,|0\rangle - \frac{224\pi}{81Q^6}\alpha_s\langle 0|\,\bar{\psi}\psi\,|0\rangle^2 + \cdots \tag{5.192}$$

求和规则式 (5.192) 的左边是无减除的色散关系，而右边依赖于真空凝聚参量，原则上是无穷多参量，但随着凝聚参量量纲增加，Q^2 压低的幂次也增加，因此当 Q^2 大时收敛性高，只须取前几项近似就可以了。例如，可以取量纲 $d \leqslant 6$，这样只有 3~4 个凝聚参量就可以很好地近似描述关联函数。然而，式 (5.192) 左边是强子谱函数的积分，从式 (5.189) 可知低 Q^2 时强子窄宽度共振态近似是好的且为已知，随着 Q^2 增大连续谱的贡献增大，计算中不确定性增大，尽管可利用夸克–强子对偶性，但可靠性仍差。因此式 (5.192) 右边希望 Q^2 大近似好，等式左边希望被积函数 $\mathrm{Im}\Pi(s)$ 中来自小 s 的极点贡献为主近似好。这两者是矛盾的，问题是如何选择一定的方法使得等式两边近似都好，以减少计算中的不确定性。

Borel 变换帮助压低左边连续态的贡献和右边高量纲凝聚的贡献。定义 Borel 变换，对于任一函数 $f(x)$，它的 Borel 变换 $\tilde{f}(\lambda)$ 为

$$\tilde{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{\lambda/x} f(x) x \mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) \tag{5.193}$$

其反变换由下式给出

$$f(x) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda/x}\tilde{f}(\lambda)\mathrm{d}\left(\frac{\lambda}{x}\right) \tag{5.194}$$

利用定义很容易得到，如果 $f(x)$ 是一个幂次求和式

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{5.195}$$

则其 Borel 变换为

$$\tilde{f}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n\lambda^n}{n!} \tag{5.196}$$

$\tilde{f}(\lambda)$ 比 $f(x)$ 的收敛性更好，因为多了一个 $n!$ 因子压低高 n 项。定义 Borel 算子 $\hat{B}_M$，即

$$\hat{B}_M = \lim_{\substack{Q^2,n\to\infty \\ Q^2/n=M^2}} \frac{1}{(n-1)!}(Q^2)^n \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Q^2}\right)^n \tag{5.197}$$

由此定义可得

$$\hat{B}_M \left(\frac{1}{Q^2}\right)^k = \frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{1}{M^2}\right)^k \tag{5.198}$$

$$\hat{B}_M \left(\mathrm{e}^{-aQ^2}\right) = \delta(1-aM^2) \tag{5.199}$$

$$\hat{B}_M \left(\frac{1}{s+Q^2}\right) = \frac{1}{M^2}\mathrm{e}^{-s/M^2} \tag{5.200}$$

$$\hat{B}_M \left(Q^2\right)^k \ln(a^2Q^2) = (-)^{k+1}k!\left(a^2M^2\right)^k \quad (k \geqslant 0) \tag{5.201}$$

$$\hat{B}_M \left(\frac{1}{Q^2}\right)^k \left(\frac{1}{\ln\left(Q^2/\Lambda^2\right)}\right)^{\varepsilon} = \frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{1}{M^2}\right)^k \left(\frac{1}{\ln\left(M^2/\Lambda^2\right)}\right)^{\varepsilon} \times \left[1+O\left(\frac{1}{\ln\left(Q^2/\Lambda^2\right)}\right)\right] \tag{5.202}$$

利用定义式 (5.193) 和 (5.198) 可以得到下列关系式，即

$$\left[\tilde{F}(M^2)\right] = \hat{B}_M f(Q^2), \quad F(x) = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) \tag{5.203}$$

这些关系式有助于改进求和规则式 (5.192) 的近似程度。

现在应用 Borel 变换到式 (5.192) 两边。左边是色散关系式 (5.186) 给出的 $\Pi(Q^2)$，对式 (5.186) 微商并乘以 Q^2 得到

$$Q^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Q^2}\Pi(Q^2) = -\frac{Q^2}{\pi}\int_{s_0}^{\infty}\mathrm{d}s\frac{\mathrm{Im}\Pi(s)}{(s+Q^2)^2} \tag{5.204}$$

注意到

$$\Pi'(Q^2) \equiv Q^2\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Q^2}\right)\Pi(Q^2) = \frac{Q^2}{\pi}\int_{s_0}^{\infty}\mathrm{d}s\frac{\mathrm{Im}\Pi(s)}{(s+Q^2)^2}$$

$$= \frac{Q^2}{\pi}\int_{s_0}^{\infty}\mathrm{d}s\mathrm{Im}\Pi(s)\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{M^2}\right)\mathrm{e}^{-(Q^2+s)/M^2}\mathrm{d}\left(\frac{1}{M^2}\right)$$

$$= \int_0^{\infty}\left[\frac{Q^2}{\pi M^2}\int_{s_0}^{\infty}\mathrm{d}s\mathrm{Im}\Pi(s)\mathrm{e}^{-s/M^2}\right]\mathrm{e}^{-Q^2/M^2}\mathrm{d}\left(\frac{1}{M^2}\right)$$

$$= \int_0^{\infty} \tilde{\Pi}'(M^2) \mathrm{e}^{-Q^2/M^2} Q^2 \mathrm{d}\left(\frac{1}{M^2}\right) \tag{5.205}$$

和 Borel 变换定义式 (5.197) 及 (5.203) 就得到求和规则，即

$$\frac{1}{\pi M^2} \int_{s_0}^{\infty} \mathrm{Im}\Pi(s) \mathrm{e}^{-s/M^2} \mathrm{d}s = \hat{B}_M \Pi(Q^2) \tag{5.206}$$

其中，算符 $\hat{B}_M$ 作用于式 (5.192) 右边的算符乘积展开多项式。利用关系式 (5.198)～(5.202) 就给出，即

$$\begin{aligned} \hat{B}_M \Pi(Q^2) =& \hat{B}_M \left[C_I \ln\left(Q^2/\mu^2\right) + \sum_K \frac{C_K O_K(Q^2)}{(Q^2)^K} \right] \\ =& - C_I + \sum_K \frac{C_K O_K(M^2)}{(K-1)!(M^2)^K} \end{aligned} \tag{5.207}$$

从式 (5.206) 和 (5.207) 可以见到经过 Borel 变换后的求和规则将原先按 $1/Q^2$ 展开变为按 $1/M^2$ 展开。在求和规则的左边，参量 M^2 出现在被积函数的指数上因而对大 s 的积分起压低作用，从而压低了 $\mathrm{Im}\Pi(s)$ 中连续谱的贡献。它在求和规则的右边式 (5.207) 有一个因子 $(K-1)!$ 出现在级数展开每一项的分母上，因而更好地压低了高量纲凝聚项的贡献。这样 Borel 变换既压低了高能 $\mathrm{Im}\Pi(s)$ 中连续谱的贡献，又压低了高量纲凝聚项的贡献，起到了改善求和规则精确度的作用。然而这里存在对 Borel 参量 M 的选取问题，等式 (5.206) 的右边为了压低高量纲凝聚项的贡献要求 M 大，而左边为了压低高能 $\mathrm{Im}\Pi(s)$ 中连续谱的贡献尽量使基态贡献为主要求 M 小，因而这两个要求就给出 M 取值的下、上限。在实际计算中 Borel 参量取值范围依赖于物理过程，在给定的物理过程中，物理结果不应依赖于 Borel 参量 M，方能使得理论预言有价值。由于 QCD 求和规则的近似性，实际计算中要求物理结果对 Borel 参量 M 的依赖性尽可能得小，或者说要寻找物理量对 Borel 参量 M 在取值范围内变动的变化曲线在合理的窗口内出现平台，平台所对应的物理量就是计算的结果。顺便指出所有过程的计算不仅 Borel 参量 M 而且阈参量 s_0^h 都是过程相关的参量。

以上虽然是以正、负电子湮灭为强子过程定义关联函数 (5.181)，计算了关联函数得到的 QCD 求和规则，但它具有一般性。当应用 QCD 求和规则方法到具体物理过程时，求和规则的左边是待求的强子物理量 (如质量、衰变常数、形状因子等)，右边是有限的 3～4 个真空凝聚参量 (夸克凝聚、胶子凝聚、夸克-胶子凝聚、四夸克凝聚等)，它们是与过程无关的普适参量。只要知道这几个凝聚参量值就可

以计算各种不同过程的物理量，同时通过对大量物理过程的计算结果与实验比较从而验证 QCD 求和规则方法的精确程度。

40 年来，QCD 求和规则方法曾广泛地应用到各种物理过程取得了很大的成功。它的应用包括轻强子谱、强子衰变常数和形状因子、重夸克 (粲夸克和底夸克) 组成的重强子谱和衰变常数、强子的分布振幅和结构函数、非普通强子 (胶球、多夸克态、混杂态) 的谱和性质、K 介子和 B 介子混合相关的强子矩阵元、轻重夸克质量的确定、核物质中强子性质等。

自 20 世纪 90 年代起，人们将 QCD 求和规则推广到 QCD 光锥求和规则，它与通常的 QCD 求和规则有三点不同：① 以一个真空态和一个强子态定义关联函数代替两真空态平均值定义关联函数；②以光锥展开代替小距离展开；③以强子光锥波函数 (分布振幅) 代替真空凝聚参量作为输入。正是这三点不同简化了原来 QCD 求和规则中三点关联函数的计算。QCD 光锥求和规则中的重要物理量是强子光锥波函数，这就需要对强子分布振幅按扭度 (twist) 展开，领头阶的光锥波函数是扭度为 2(twist-2) 的光锥波函数。如果超出于主导级近似，还须计及高扭度等次领头项的光锥波函数的贡献。

5.6 强子分布振幅和它们的矩

量子色动力学的基本自由度是夸克和胶子，而实验上观测的是强子，这就构成了微扰 QCD 理论应用到物理过程的一个主要困难。这一困难在遍举过程中显得更为突出，因为实验上是要分别测量终态的所有强子，这就需要理解强子的内部结构，即每个强子内部分子的分布几率，从而描述强子如何转化为夸克、胶子自由度或者夸克、胶子自由度如何转化为实验上观测到的强子。原则上，人们需要知道强子内所有 Fock 组态波函数 $\psi_n(x_i, k_{\perp i}, \lambda_i)$ 以及相应的部分子不可约散射振幅 $T_H^n(x_i, k_{\perp i}, \lambda_i)$，即

$$\sum_{n,\lambda_i} \int \tilde{\prod_i} \frac{\mathrm{d}x_i \mathrm{d}^2 k_{\perp i}}{16\pi^3} \psi_n(x_i, k_{\perp i}, \lambda_i) T_H^n(x_i, k_{\perp i}, \lambda_i) \tag{5.208}$$

其中，Fock 组态波函数 $\psi_n(x_i, k_{\perp i}, \lambda_i)$ 是由式 (1.214) 确定的强子 h 中找到具有纵向动量 x_i，横向动量 $k_{\perp i}$ 和自旋 λ_i 的夸克、胶子态 $|n\rangle$ 的几率。一般地讲，上式应对所有 Fock 组态求和。

5.6.1 强子价夸克分布振幅 $\phi(x_i, Q)$

在大动量迁移 Q^2 下，忽略高 Fock 组态贡献后，领头的价夸克态贡献为主，如介子 $n = 2$，重子 $n = 3$。在大 Q^2 下，由于不可约散射振幅 $T_H^n(x_i, k_{\perp i}, \lambda_i)$ 中夸克横向动量可以忽略，上式中对 Fock 组态波函数 $\psi_n(x_i, k_{\perp i}, \lambda_i)$ 横向动量积分

定义了强子价夸克分布振幅 $\phi(x_i,Q)$。这一性质决定了物理过程中特定强子 (介子或重子) 分布振幅 $\phi(x_i,Q)$ 是微扰 QCD 应用到强子遍举过程中的重要物理量，它是特定强子 (介子或重子) 参与物理过程的特征量，与具体过程无关，具有普适性。微扰 QCD 应用到遍举过程有一个共同的特点，就是大 Q^2 下强子过程的散射振幅可以因子化为部分子硬散射过程振幅 $T_H(x_i,y_i;Q)$ 和强子分布振幅 $\phi(x_i,Q)$ 的卷积形式，其中 $T_H(x,y\ ;Q)$ 和 $\phi(x_i,Q)$ 都是规范不变的。这样在大动量迁移 Q^2 下遍举过程的散射振幅行为将由硬散射振幅 $T_H(x,y;Q)$ 的性质和分布振幅 $\phi(x,Q)$ 的形式决定。强子分布振幅 $\phi(x_i,Q)$ 与过程无关的，不同过程主要是硬散射振幅 $T_H(x_i,y_i\ ;Q)$ 不同。在主导级近似下硬散射振幅 $T_H(x_i,y_i\ ;Q)$ 是价夸克散射的硬子过程且是微扰论可计算的，所有非微扰效应部分都包含在分布振幅 $\phi(x_i,Q)$ 内。强子分布振幅 $\phi(x_i,Q)$ 反映了每个强子内价夸克的分布几率，确切地说它反映了强子内价夸克 (q 和 $\overline{q}$) 共线到 $k_\perp\sim Q$ 时的分布。

介子和重子价夸克分布振幅 $\phi(x_i,Q)$(这里已略去了自旋波函数，只保留了空间部分) 定义如下：

$$\phi_M(x,Q)=\int_0^Q\frac{\mathrm{d}^2k_\perp}{16\pi^3}\psi_{q\overline{q}}(x,k_\perp) \tag{5.209}$$

$$\phi_B(x,Q)=\int_0^Q[\mathrm{d}^2k_\perp]\psi_{qqq}(x_i,k_{\perp i}) \tag{5.210}$$

其中，$\psi_{q\overline{q}}(x,k_\perp)$ 和 $\psi_{qqq}(x_i,k_{\perp i})$ 分别与价夸克的光锥坐标系时间 $\tau=0$ 的 Bethe-Salpeter 束缚态波函数相关。按式 (1.209) 和 (1.210) 定义，式 (5.210) 中 $\left[\mathrm{d}^2k_\perp\right]=16\pi^3\delta^{(2)}\left(\sum\limits_{i=1}^3k_{\perp i}\right)\prod\limits_{i=1}^3\dfrac{\mathrm{d}^2k_{\perp i}}{16\pi^3}$。具体讲，介子 M 光锥波函数 $\psi(x_i,k_\perp)$(未明显写出自旋部分)，即

$$\psi(x_i,k_\perp)=\frac{1}{2\pi}\int\mathrm{d}k^-\psi_{BS}(k) \tag{5.211}$$

其中，$\psi_{BS}(k)$ 是 Bethe-Salpeter 相对论束缚态波函数。k 是介子 M 内价夸克相对动量分别为 $k_i(i=1,2)$，取光锥坐标

$$k_i(k_i^+,k_i^-,\boldsymbol{k}_{i\perp})$$

方程左边宗量 x_i 是光锥波函数纵向动量分量 $x_i=\dfrac{k_i^+}{P^+}=\dfrac{\left(k^0+k^3\right)_i}{P^0+P^3}$。式 (5.209) 和 (5.210) 的定义可以推广到高 Fock 态，如 n 个夸克和胶子组态情况。对于 n 个组分组态有 $\left[\mathrm{d}^2k_\perp\right]=16\pi^3\delta^{(2)}\left(\sum\limits_{i=1}^nk_{\perp i}\right)\prod\limits_{i=1}^n\dfrac{\mathrm{d}^2k_{\perp i}}{16\pi^3}$。

式 (5.211) 中的 Bethe-Salpeter 波函数 $\psi_{BS}(k)$，对于赝标介子 M，它定义为

$$\psi_{BS}(z) = \langle 0|\, \bar{q}(z)\gamma_\mu\gamma_5 q(0)\,|M\rangle$$

$$\psi_{BS}(z) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4 k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}\psi_{BS}(k) \tag{5.212}$$

下面以 π 介子为例，其方法和性质可以推广到其他强子。π 介子分布振幅 $\phi_\pi\left(x_i, Q\right)$ 定义为

$$\phi_\pi\left(x_i, Q\right) = \int_0^Q \frac{\mathrm{d}^2 k_\perp}{16\pi^3}\psi_\pi\left(x_i, k_\perp\right) \tag{5.213}$$

它是 π 介子内发现价福克组态 $|q\bar{q}\rangle$ 的几率振幅，对于 π 介子来讲，动量守恒要求满足下列等式 $k_{\perp 1} = -k_{\perp 2} = k_\perp$ 以及 $x_1 + x_2 = 1(0 < x_i < 1)$，其中每个部分子都在质壳上，即 $k_i^2 = m_i^2$ 或 $k_i^- = \dfrac{k_{\perp i}^2 + m_i^2}{k_i^+} = \dfrac{k_{\perp i}^2 + m_i^2}{x_i}$。标度 Q^2 表示了 π 介子内价夸克共线到 $k_\perp \sim Q$ 时的分布。式 (5.212) 中的第一式取初始值 $Q_0 = \mu$

$$\psi_\mu(z) = \langle 0|\, \bar{d}(z)\gamma_\mu\gamma_5 u(0)\,|\pi(P)\rangle_\mu \tag{5.214}$$

特别地，π 介子的零点波函数 $\psi_\mu(0) = \langle 0|\, \bar{d}(0)\gamma_\mu\gamma_5 u(0)\,|\pi(P)\rangle_\mu$ 可以通过 $\pi \to \mu\nu$ 衰变过程来确定，因为在此过程中相互作用顶点仅有 $(q\bar{q})$ 福克态有贡献，其他图形都包含在非微扰的波函数中。事实上 $\pi \to \mu\nu$ 衰变过程矩阵元，即

$$\langle 0|\, \bar{\psi}_u\gamma^+(1-\gamma_5)\psi_d\,|\pi\rangle_\mu = -\sqrt{2}P^+ f_\pi \tag{5.215}$$

定义了 π 介子的衰变常数 f_π，$f_\pi = 93\mathrm{MeV}$。式 (5.215) 的右边应与标度参量 μ 无关。这样 π 介子的衰变常数 f_π 提供了对 π 介子的价夸克光锥波函数很强的归一化限制，从而也保证了 π 介子内发现价夸克的几率是有限的。由式 (5.212) 和 (5.215) 可得一约束条件

$$\psi_\mu(0) = \langle 0|\, \bar{d}(0)\gamma_\mu\gamma_5 u(0)\,|\pi(P)\rangle_\mu = -\mathrm{i}P_\mu f_\pi \int_0^1 \mathrm{d}x_1\varphi_\pi(x_i,\mu) \tag{5.216}$$

$$\int_0^1 \mathrm{d}x_1\varphi_\pi(x_1, Q) = 1 \tag{5.217}$$

这里定义的 $\varphi_\pi(x_i, Q)$ 与分布振幅 $\phi_\pi(x_i, Q)$ 有如下关系，即

$$\phi_\pi(x_i, Q) = \frac{f_\pi}{2\sqrt{3}}\varphi_\pi(x_i, Q) \tag{5.218}$$

式 (5.217) 是 π 介子光锥波函数 $\psi(x_i, k_\perp)$ 的重要约束条件，也是构建 π 介子价夸克光锥波函数模型必须满足的关系式。

5.6.2　Brodsky-Lepage 演化方程

强子分布振幅 $\phi(x_i,Q)$ 对 Q 的依赖关系可以从光锥上的算符乘积展开，或从 QCD 演化方程来确定。注意到遍举过程硬散射振幅中 T_H 已经包含了顶角和费米子自能的修正，那么在波函数的两条腿上也应包含费米子自能修正，因此定义式 (5.209) 应修改为

$$\phi(x,Q)=D_F^{-1}(Q)\int_0^Q\frac{\mathrm{d}^2k_\perp}{16\pi^3}\psi^{(Q)}(x,k_\perp) \tag{5.219}$$

其中，$D_F(Q)$ 定义为

$$D_F(Q)=\frac{d_F(Q^2)}{d_F(Q_0^2)}=\frac{Z_2(Q^2)}{Z_2(Q_0^2)} \tag{5.220}$$

强子分布振幅 (5.213) 取初始值 $Q_0=\mu\sim 1\mathrm{GeV}^2$，$d_F(Q^2)$ 是夸克场算符的重整化因子，它满足重整化群方程

$$Q^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Q^2}\log d_F^{-1}(Q^2)=-\tilde{\gamma}\left(\alpha_s(Q^2)\right) \tag{5.221}$$

$$\tilde{\gamma}\left(\alpha_s(Q^2)\right)=\frac{\alpha_s(Q^2)}{4\pi}\gamma_F+\cdots \tag{5.222}$$

在光锥规范里，$\gamma_F=C_F\left\{1+4\int_0^1\mathrm{d}x\frac{x}{1-x}\right\}$，方程 (5.221) 的解为

$$d_F(Q^2)=\left(\log\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)^{\frac{\gamma_F}{\beta}} \tag{5.223}$$

当 $Q^2\to\infty$ 时，$d_F(Q^2)\to Z_2$，Z_2 是费米子自能的重整化常数。对方程 (5.221) 两边微商就可得到 $\phi(x,Q)$ 所满足的微分方程

$$\begin{aligned}Q^2\frac{\partial}{\partial Q^2}\phi(x_i,Q)=&\left(\log\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)^{-\frac{\gamma_F}{\beta}}\frac{Q^2\psi^{(Q)}(x_i,q_\perp)}{16\pi^2}\\&+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\log Q^2}\log d_F^{-1}(Q^2)\cdot\phi(x_i,Q)\end{aligned} \tag{5.224}$$

方程式 (5.224) 右边第一项中的 $\psi^{(Q)}(x,q_\perp)$ 满足下列等式 (图 5.7(a))：

$$\left(-\frac{q_\perp^2}{x_1x_2}\right)\psi^{(Q)}(x,q_\perp)=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^Q\frac{\mathrm{d}^2l_\perp}{16\pi^3}V_{\mathrm{eff}}(x,q_\perp;y,l_\perp)\psi^{(Q)}(y,l_\perp) \tag{5.225}$$

考虑单胶子交换图对 V_{eff} 的贡献 (图 5.7(b)) 为

$$\psi^{(Q)}(x,q_\perp)=\frac{-C_F}{q_\perp^2/x_1x_2}$$
$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^Q \frac{\mathrm{d}^2 l_\perp}{16\pi^3}\left[\frac{N}{D}\frac{\theta(y_1-x_1)}{y_1-x_1}+(1\leftrightarrow 2)\right]\psi^{(Q)}(y,l_\perp) \tag{5.226}$$

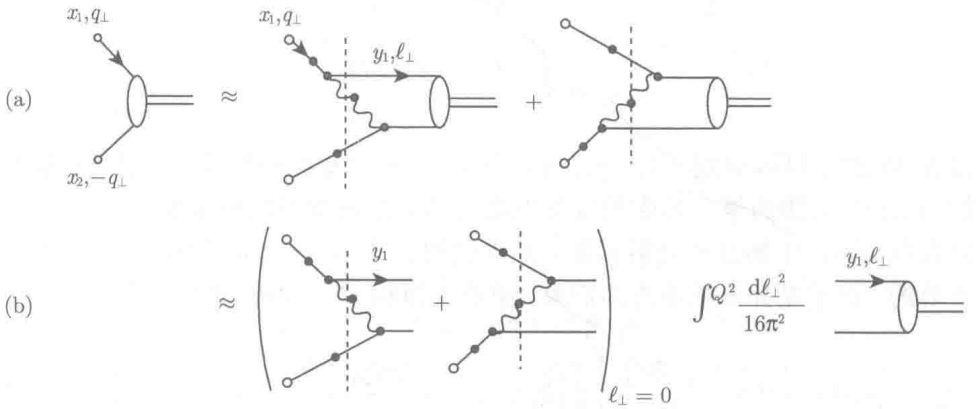


图 5.7 介子分布振幅演化方程示意图

其中，N,D 由光锥微扰论给出

$$D=-\frac{q_\perp^2}{x_1}-\frac{l_\perp^2}{y_2}-\frac{(q_\perp-l_\perp)^2}{y_1-x_1}$$
$$N=\frac{\bar{u}_\uparrow(x_1,q_\perp)}{\sqrt{x_1}}\mathrm{i}g\gamma^\mu\frac{u_\uparrow(y_1,l_\perp)}{\sqrt{y_1}}d_{\mu\nu}$$
$$\times\frac{\bar{v}_\downarrow(y_2,-l_\perp)}{\sqrt{y_2}}\mathrm{i}g\gamma^\nu\frac{v_\downarrow(x_2,-q_\perp)}{\sqrt{x_2}}$$

注意到束缚态波函数的分布主要集中在低横动量 $l_\perp$ 区域，夸克横向动量相对于大 $q_\perp$ 是可以忽略的，略去 $l_\perp$，代入式 (5.226) 得到

$$\frac{\psi^{(Q)}(x,q_\perp)\,Q^2}{16\pi^2}=2C_F\frac{\alpha_s}{4\pi}\int_0^1\mathrm{d}y\left[x_1y_2\theta(y_1-x_1)\left(1+\frac{1}{y_1-x_1}\right)+(1\leftrightarrow 2)\right]$$
$$\times\int_0^Q\frac{\mathrm{d}l_\perp^2}{16\pi^2}\frac{\psi^{(Q)}(y,l_\perp)}{y_1y_2} \tag{5.227}$$

再考虑到夸克和胶子自能修正以及上式是在最低螺旋态下得到的，即 $\uparrow\downarrow\to\uparrow\downarrow$，上式就转化为下列方程，即

$$\frac{\psi\left(x_i, q_\perp\right) Q^2}{16\pi^2}=\frac{\alpha_s\left(Q^2\right)}{4\pi} \int_0^1[\mathrm{d}y] V\left(x_i, y_i\right) \cdot \frac{\phi\left(y_i, Q\right)}{y_1 y_2} \tag{5.228}$$

其中，$V(x_i, y_i)$ 表达为

$$V\left(x_i, y_i\right)=2 C_F\left\{x_1 y_2 \theta\left(y_1-x_1\right)\left(\delta_{h_1 \bar{h}_2}+\frac{1}{y_1-x_1}\right)+(1 \leftrightarrow 2)\right\} \tag{5.229}$$

$$\delta_{h_1 \bar{h}_2}=\left\{\begin{array}{ll} 1, & \uparrow\downarrow \rightarrow \uparrow\downarrow \\ 0, & \uparrow\uparrow \rightarrow \uparrow\uparrow \end{array}\right.$$

从方程 (5.229) 可以见到 $V(x_i, y_i)$ 中，当 $x_i=y_i$ 时是红外发散的，它将精确地与方程 (5.224) 右边的第二项中的红外发散相消。这意味着在波函数 $\psi(x_i, q_\perp)$ 中的红外发散与 γ_F 中的红外发散相消，从而使得由式 (5.219) 定义的 $\phi(x, Q)$ 是无红外发散的，这正是介子色单态的后果。最终可以将式 (5.224) 转化为方程

$$Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2} \phi\left(x_i, Q\right)=\frac{\alpha_s\left(Q^2\right)}{4\pi}\left\{\int_0^1[\mathrm{d}y] \tilde{V}\left(x_i, y_i\right) \frac{\phi\left(y_i, Q\right)}{y_1 y_2}-C_F \phi\left(x_i, Q\right)\right\} \tag{5.230}$$

其中

$$\tilde{V}\left(x_i, y_i\right)=2 C_F\left\{x_1 y_2 \theta\left(y_1-x_1\right)\left(\delta_{h_1 \bar{h}_2}+\frac{\Delta}{y_1-x_1}\right)+(1 \longleftrightarrow 2)\right\} \tag{5.231}$$

$$\Delta \phi\left(y_i, Q\right)=\phi\left(y_i, Q\right)-\phi\left(x_i, Q\right)$$

如果定义

$$\xi=\frac{\beta}{4\pi} \int_0^Q \frac{\mathrm{d} k_\perp^2}{k_\perp^2} \alpha_s\left(k_\perp^2\right) \tag{5.232}$$

$$\phi\left(x_i, Q\right)=x_1 x_2 \tilde{\phi}\left(x_1, Q\right) \tag{5.233}$$

那么方程 (5.230) 将变成

$$x_1 x_2\left\{\frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{\phi}\left(x_1, Q\right)+\frac{C_F}{\beta} \tilde{\phi}\left(x_1, Q\right)\right\}=\frac{C_F}{\beta} \int_0^1[\mathrm{d}y] \tilde{V}\left(x_i, y_i\right) \tilde{\phi}\left(y_i, Q\right) \tag{5.234}$$

方程 (5.234) 表明，如果给定一个初始条件 $\phi(x_i, Q_0)$，那么由 QCD 微扰论所给出的方程 (5.234) 将确定 $Q^2>Q_0^2$ 时的演化 $\phi(x_i, Q)$。这就是 Brodsky-Lepage 演化方程。强子价夸克态分布振幅 $\phi(x_i, Q)$ 只有在知道初始条件 $\phi(x_i, Q_0)$ 以后才能由微扰论推出的演化方程解出。所以微扰 QCD 应用到遍举过程的理论预言很大程度上依赖于如何输入介子和重子分布振幅的初始条件 $\phi(x_i, Q_0)$。$\phi(x_i, Q_0)$ 本质上是

由 QCD 非微扰决定的，由于强子内夸克禁闭疑难，目前尚不能由 QCD 第一原理计算确定，有赖于构造模型输入。

Brodsky-Lepage 演化方程 (5.234) 的普遍解是

$$\begin{aligned}\phi\left(x_i,Q\right)=&x_1x_2\sum_{n=0}^{\infty}a_nC_n^{3/2}\left(x_1-x_2\right)\cdot\mathrm{e}^{-\gamma_n\xi}\\=&x_1x_2\sum_{n=0}^{\infty}a_nC_n^{3/2}(x_1-x_2)\left(\log\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)^{-\gamma_n}\end{aligned}\tag{5.235}$$

其中，反常量纲

$$\gamma_n=\frac{C_F}{\beta}\left\{1+4\sum_2^{n+1}\frac{1}{k}-\frac{2\delta_{h\bar{h}}}{(n+1)(n+2)}\right\}\geqslant 0\tag{5.236}$$

它是 $\tilde{V}(x_1-x_2)$ 的本征值，其本征函数是 $C_n^{3/2}\left(x_1-x_2\right)$，这正是 Gegenbauer 多项式。从式 (5.236) 可见到本征值 γ_n 就是深度非弹散射过程中非单态结构函数的反常量纲。这些结果也可以通过对分布振幅 $\phi(x,Q)$ 应用算符乘积展开得到[15]，因为由定义可知

$$\phi(x,Q)=\mathrm{i}\Lambda^+\int\frac{\mathrm{d}Z^-}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}xZ^-/2}\left\langle 0|\bar{\Psi}\left(z\right)\Psi\left(0\right)|\pi\right\rangle^Q|_{Z^+=0,Z^2=-Z_\perp^2}\tag{5.237}$$

其中，Λ^+ 是正能旋量投影算符；$Z_\perp^2\sim O\left(\dfrac{1}{Q^2}\right)$。当 $Q^2\to\infty$ 时，q 和 $\bar{q}$ 的相对间隔 $Z_\perp^2=0$，所以可应用光锥展开而给出方程 (5.236) 和 (5.237) 的结果。实际上文献 [16] 证明了方程 (5.235) 和 (5.236) 也是 QCD 理论满足共形不变性的结果。

当 $Q^2\to\infty$ 时，方程 (5.235) 中仅有主导项 $\gamma_0=0$ 存在，因此主导项给出了分布振幅的渐近解，即

$$\phi(x,Q^2)\to a_0x_1x_2,\quad Q^2\to\infty\tag{5.238}$$

其中，常数 a_0 将由 π 介子衰变常数来确定。进一步由 Gegenbauer 的正交关系，从式 (5.235) 可得

$$a_n\left(\log\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)^{-\gamma_n}=\frac{2\left(2n+3\right)}{(2+n)(1+n)}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\left(x_1-x_2\right)C_n^{3/2}\left(x_1-x_2\right)\phi\left(x_i,Q\right)\tag{5.239}$$

对式 (5.239) 两边取 $Q=Q_0$，展开系数 a_n 本质上是由非微扰的初始条件 $\phi(x_i,Q_0)$ 确定，即

$$a_n=\frac{2\left(2n+3\right)}{(2+n)(1+n)}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\left(x_1-x_2\right)C_n^{3/2}\left(x_1-x_2\right)\phi\left(x_i,Q_0\right)$$

即展开系数 a_n 是 QCD 的非微扰理论确定的。定义变量 $\xi = x_1 - x_2 = 2x_1 - 1$，上式变为

$$a_n = \frac{2(2n+3)}{(2+n)(1+n)} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\xi C_n^{3/2}(\xi)\,\phi(x_i, Q_0) \tag{5.240}$$

特别地第一项系数

$$\frac{a_o}{6} = \int_0^1 \mathrm{d}x\phi(x_i, Q) = \int_0^1 \mathrm{d}x \int^Q \frac{\mathrm{d}^2 k_\perp}{16\pi^3} \Psi^Q(x, k_\perp)$$

显然上式右边就是 π 介子的零点波函数，它可以通过 $\pi \to \mu\nu$ 衰变过程来确定，因为在此过程中相互作用顶点仅有 $(q\bar{q})$ 福克态有贡献，其他图形都包含在非微扰的波函数中。事实上 $\pi \to \mu\nu$ 衰变过程矩阵元，即

$$\begin{aligned}
&\langle 0|\,\bar{\psi}_u \gamma^+(1-\gamma_5)\psi_d\,|\pi\rangle = -\sqrt{2}P^+ f_\pi \\
&= \int \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}^2 k_\perp}{16\pi^3} \psi^\Lambda_{q\bar{q}}(x, k_\perp) \sqrt{\frac{N_c}{2}} \left\{ \frac{\bar{v}_\downarrow}{\sqrt{1-x}} \gamma^+(1-\gamma_5) \frac{u_\uparrow}{\sqrt{x}} - (\downarrow \leftrightarrow \uparrow) \right\}
\end{aligned}$$

定义了 π 介子的衰变常数 f_π，式 (5.243) 的右边应与截断参量 Λ 无关。这样 π 介子的衰变常数 f_π 提供了对 π 介子的价夸克光锥波函数很强的归一化限制，从而也保证了 π 介子内发现价夸克的几率是有限的。由式 (5.213) 和 (5.215) 可得约束条件式 (5.217) 对系数 a_0 的限制

$$\begin{aligned}
&\frac{a_0}{6} = \int_0^1 \mathrm{d}x\phi(x_i, Q) = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^Q \frac{\mathrm{d}^2 k_\perp}{16\pi^3} \psi(x, k_\perp) = \frac{1}{2\sqrt{3}} f_\pi \\
&\phi(x, Q^2 \to \infty) \to a_o x_1 x_2 = \sqrt{3} f_\pi x_1 x_2
\end{aligned} \tag{5.241}$$

即系数 a_0 与 π 介子衰变常数 f_π 相关。

5.6.3　分布振幅的矩

首先将 Bethe-Salpeter 波函数 $\psi_\mu(x) = \langle 0|\,\bar{d}(x)\gamma_\mu\gamma_5 u(0)\,|\pi(p)\rangle_\mu$ 改写成规范不变的形式

$$\begin{aligned}
&\langle 0|\,\bar{d}(x)\gamma_\mu\gamma_5 u(0)\,|\pi(p)\rangle_\mu \to \\
&\psi(z) = \langle 0|\,\bar{d}(z)\gamma_\mu\gamma_5 \exp\left\{ \mathrm{i}g \int_0^z d\sigma^\mu A_\mu(\sigma) \right\} u(0)\,|\pi(p)\rangle_\mu
\end{aligned} \tag{5.242}$$

其中，$A_\mu = g A_\mu^a T^a$。这里规范不变因子在取了光锥规范 $n \cdot A = 0$ 后实际不会产生附加贡献。将上述非定域算符展开为定域算符之和

$$z^{\mu}\psi_{\mu}(z)=\sum_{n}^{\infty}\frac{1}{n!}\langle 0|\,\bar{d}(0)\not{z}\gamma_5(z^{\nu}\overleftrightarrow{D}_{\nu})^n u(0)\,|\pi(p)\rangle_{\mu^2}$$
$$=\mathrm{i}f_{\pi}\sum_{n=0}\frac{(\mathrm{i})^n}{n!}(z^{\nu}p_{\nu})^{n+1}\langle\xi^n\rangle_{\mu}+\text{其他张量结构} \tag{5.243}$$

这里其他张量结构是指比第一项至少多一个度规张量项 $g_{\nu_1\nu_2}$，例如，$\sum_{n=2}\frac{(-\mathrm{i})^{n+1}}{n!}f_{\pi}$ $p_{\mu}z^{\nu_1}z^{\nu_2}g_{\nu_1\nu_2}(z^{\nu}p_{\nu})^n\varphi_n'(\mu^2)$ 以及含更多的度规张量的展开项。这些其他张量结构项显然要比领头项 Q^2 幂次压低，或称为高扭度项。式 (5.246) 中非微扰矩阵元 $\langle\xi^n\rangle_{\mu}$ 与领头级 (扭度为 2) 分布振幅 $\varphi_{\pi}(x_i,\mu^2)$ 具有如下关系式，即

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\xi\xi^n\varphi_{\pi}(\xi,\mu^2)=\langle\xi^n\rangle_{\mu},\quad \xi=x_1-x_2=2x_1-1 \tag{5.244}$$

$\langle\xi^n\rangle_{\mu}$ 是对分布振幅倍乘以纵向动量分量 ξ^n 的积分，特别地称 $\langle\xi^n\rangle_{\mu}$ 为分布振幅的矩。对于 π 介子，由于同位旋对称性分布振幅只有偶次矩，对于 K 介子，没有同位旋对称性，必须考虑 SU(3) 破缺效应，K 介子分布振幅的矩既有偶次又有奇次矩。

比较式 (5.244) 和 (5.240) 可见，一个是按多项式 ξ^n 定义矩，一个是按 Gegenbauer 多项式定义矩，两者矩在同一标度上存在如下关系式

$$\begin{aligned}
a_2^{\pi}&=\frac{7}{12}\left(5\langle\xi^2\rangle-1\right)\\
a_4^{\pi}&=-\frac{11}{24}\left(14\langle\xi^2\rangle-21\langle\xi^4\rangle-1\right)\\
a_6^{\pi}&=\frac{5}{64}\left(135\langle\xi^2\rangle-495\langle\xi^4\rangle+429\langle\xi^6\rangle-5\right)\\
&\vdots
\end{aligned} \tag{5.245}$$

注意到式 (5.243)(略去其他张量结构)

$$\langle 0|\,\bar{d}(0)\not{z}\gamma_5(z^{\nu}\overleftrightarrow{D}_{\nu})^n u(0)\,|\pi(p)\rangle_{\mu^2}=\mathrm{i}f_{\pi}(z^{\nu}p_{\nu})^{n+1}\langle\xi^n\rangle_{\mu}$$

就可能应用背景场方法计算两点关联函数获得分布振幅的矩[9,10] $\langle\xi^n\rangle_{\mu}$。

5.7 应用背景场方法计算介子分布振幅的矩

5.7.1 定义两点关联函数

首先定义两点关联函数 $\Pi_{\mu\nu}(x)$，即

$$\Pi^{(n,0)}(z,x)=z^\mu z^\nu\Pi_{\mu\nu}(x)=\langle 0|\,T(J^{(n)}(x)J^{(0)}(0)\,|0\rangle \tag{5.246}$$

其中，流 $J^{(n)}(x)$ 的选取由不同强子的自旋和宇称性质确定，例如对于赝标介子定义为

$$\begin{aligned}J^{(n)}(x)&=d(x)\not{z}\gamma_5(\mathrm{i}z\cdot\overleftrightarrow{D})^n u(x)\\ J^{(0)}(z)&=u(0)\not{z}\gamma_5 d(0)\end{aligned} \tag{5.247}$$

对于矢量介子将取 γ_μ 代替 $\gamma_\mu\gamma_5$，即取 $J^{(n)}(x)=d(x)\not{z}(\mathrm{i}z\cdot\overleftrightarrow{D})^n u(x)$。更一般地说，$\Gamma(\mathrm{i}z\cdot\overleftrightarrow{D})^n$，$\Gamma$ 是与介子类型相应的 Dirac 矩阵，依赖于讨论的强子波函数，例如，对于扭度为 3 的分布振幅取 $\Gamma=\gamma_5$ 或 $\Gamma=\sigma_{\mu\nu}\gamma_5$，推导所用的方法是相同的。展开 $(z\cdot\overleftrightarrow{D})^n$ 则有

$$(z\cdot\overleftrightarrow{D})^n=(z\cdot\overrightarrow{D}-z\cdot\overleftarrow{D})^n=(z\cdot\overleftrightarrow{\partial}+z\cdot B)^n+\cdots \tag{5.248}$$

其中 "$\cdots$" 是高阶项，而不受微分算符作用的部分 $z\cdot B$ 为

$$\begin{aligned}z\cdot B=&-2\mathrm{i}z\cdot A\\ =&-\mathrm{i}x^\mu z^\nu G_{\mu\nu}-\frac{2\mathrm{i}}{3}x^\mu x^\rho z^\nu G_{\mu\nu;\rho}-\frac{\mathrm{i}}{4}x^\mu x^\rho x^\sigma z^\nu G_{\mu\nu;\rho\sigma}\\ &-\frac{\mathrm{i}}{15}x^\mu x^\rho x^\sigma x^\lambda z^\nu G_{\mu\nu;\rho\sigma\lambda}-\frac{\mathrm{i}}{72}x^\mu x^\rho x^\sigma x^\lambda x^\tau z^\nu G_{\mu\nu;\rho\sigma\lambda\tau}+\cdots\end{aligned}$$

将上述表达式按 $n=0,1,2,\cdots$ 展开

$$\begin{aligned}&(z\cdot\overleftrightarrow{D})^0=1\\ &(z\cdot\overleftrightarrow{D})^1=z\cdot\overleftrightarrow{\partial}+z\cdot B\\ &(z\cdot\overleftrightarrow{D})^2=(z\cdot\overleftrightarrow{\partial})^2+2(z\cdot\overleftrightarrow{\partial})(z\cdot\bar{B})+(z\cdot B)^2\\ &(z\cdot\overleftrightarrow{D})^3=(z\cdot\overleftrightarrow{\partial})^3+3(z\cdot\overleftrightarrow{\partial})^2(z\cdot\bar{B})+[(z\cdot\overleftrightarrow{\partial})^2(z\cdot B)]+3(z\cdot\overleftrightarrow{\partial})(z\cdot\bar{B})^2+(z\cdot B)^3\\ &\qquad\vdots\end{aligned}$$

其中，$\bar{B}$ 是指微分算符 $\overleftrightarrow{\partial}$ 对它不作用，在获得上述展开时已用到

$$(z\cdot\overleftrightarrow{\partial})^n(z\cdot B)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}(z\cdot\overleftrightarrow{\partial})^{n-k}[(z\cdot\partial)^k(z\cdot B)] \tag{5.249}$$

如果仅保留量纲 $d\leqslant 6$ 项，$(z\cdot\overleftrightarrow{D})^n$ 按量纲排列结果如下

$$\begin{aligned}&(z\cdot\overleftrightarrow{D})^n_0=(z\cdot\overleftrightarrow{\partial})^n\\ &(z\cdot\overleftrightarrow{D})^n_2=-\mathrm{i}\times n(z\cdot\overleftrightarrow{\partial})^{n-1}\underline{x}^\mu z^\nu G_{\mu\nu}\\ &(z\cdot\overleftrightarrow{D})^n_3=-\frac{2\mathrm{i}}{3}\times n(z\cdot\overleftrightarrow{\partial})^{n-1}\underline{x}^\mu\underline{x}^\rho z^\nu G_{\mu\nu;\rho}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(z\cdot\overleftrightarrow{D})^n_{4(1)} =& -\frac{n(n-1)}{2}(z\cdot\overleftrightarrow{\partial})^{n-2}\underline{x}^\mu\underline{x}^\rho z^\nu z^\sigma G_{\mu\nu}G_{\rho\sigma}\\
(z\cdot\overleftrightarrow{D})^n_{4(2)} =& \Bigg[-\frac{\mathrm{i}}{4}\times n(z\cdot\overleftrightarrow{\partial})^{n-1}\underline{x}^\mu\underline{x}^\rho\underline{x}^\sigma z^\nu\\
&-\frac{\mathrm{i}}{12}n(n-1)(n-2)(z\cdot\overleftrightarrow{\partial})^{n-3}\times\underline{x}^\mu z^\rho z^\sigma z^\nu\Bigg]G_{\mu\nu;\rho\sigma}\\
(z\cdot\overleftrightarrow{D})^n_{5(1)} =& -\frac{n(n-1)}{3}(z\cdot\overleftrightarrow{\partial})^{n-2}\times\underline{x}^\mu\underline{x}^\rho\underline{x}^\lambda z^\nu z^\sigma G_{\mu\nu}G_{\rho\sigma;\lambda}\\
(z\cdot\overleftrightarrow{D})^n_{5(2)} =& -\frac{n(n-1)}{3}(z\cdot\overleftrightarrow{\partial})^{n-2}\times\underline{x}^\mu\underline{x}^\rho\underline{x}^\lambda z^\nu z^\sigma G_{\mu\nu;\lambda}G_{\rho\sigma}\\
(z\cdot\overleftrightarrow{D})^n_{5(3)} =& \Bigg[-\frac{\mathrm{i}}{15}\times n\left(z\cdot\overleftrightarrow{\partial}\right)^{n-1}\underline{x}^\mu\underline{x}^\rho\underline{x}^\sigma\underline{x}^\lambda z^\nu\\
&-\frac{\mathrm{i}}{45}n\left(n-1\right)\left(n-2\right)\left(z\cdot\overleftrightarrow{\partial}\right)^{n-2}\\
&\times\underline{x}^\mu\left(\underline{x}^\rho z^\sigma z^\lambda+\underline{x}^\sigma z^\rho z^\lambda+\underline{x}^\lambda z^\sigma z^\rho\right)z^\nu\Bigg]G_{\mu\nu;\rho\sigma\lambda}\\
(z\cdot\overleftrightarrow{D})^n_{6(1)} =& \frac{\mathrm{i}}{6}n(n-1)(n-2)(z\cdot\overleftrightarrow{\partial})^{n-3}\times\underline{x}^\mu\underline{x}^\rho\underline{x}^\lambda z^\nu z^\sigma z^\tau G_{\mu\nu}G_{\rho\sigma}G_{\lambda\tau}\\
(z\cdot\overleftrightarrow{D})^n_{6(2)} =& \Bigg[-\frac{n(n-1)}{8}(z\cdot\overleftrightarrow{\partial})^{n-2}\underline{x}^\mu\underline{x}^\rho\underline{x}^\lambda\underline{x}^\tau z^\nu z^\sigma\\
&-\frac{1}{12}n(n-1)(n-2)(n-3)(z\cdot\overleftrightarrow{\partial})^{n-4}\\
&\times\underline{x}^\mu\underline{x}^\rho z^\lambda z^\tau z^\nu z^\sigma\Bigg]G_{\mu\nu}G_{\rho\sigma;\lambda\tau}\\
(z\cdot\overleftrightarrow{D})^n_{6(3)} =& -\frac{2}{9}n(n-1)(z\cdot\overleftrightarrow{\partial})^{n-2}\times\underline{x}^\mu\underline{x}^\rho\underline{x}^\lambda\underline{x}^\tau z^\nu z^\sigma G_{\mu\nu;\lambda}G_{\rho\sigma;\tau}\\
(z\cdot\overleftrightarrow{D})^n_{6(4)} =& -\frac{n(n-1)}{8}(z\cdot\overleftrightarrow{\partial})^{n-2}\times\underline{x}^\mu\underline{x}^\rho\underline{x}^\lambda\underline{x}^\tau z^\nu z^\sigma G_{\mu\nu;\lambda\tau}G_{\rho\sigma}\\
(z\cdot\overleftrightarrow{D})^n_{6(5)} =& \Bigg[-\frac{\mathrm{i}}{72}\times n(z\cdot\overleftrightarrow{\partial})^{n-1}\underline{x}^\mu\underline{x}^\rho\underline{x}^\sigma\underline{x}^\lambda\underline{x}^\tau z^\nu\\
&-\frac{\mathrm{i}}{216}n(n-1)(n-2)(z\cdot\overleftrightarrow{\partial})^{n-3}\times\underline{x}^\mu\Bigg(z^\rho z^\sigma\underline{x}^\lambda\underline{x}^\tau\\
&+z^\rho\underline{x}^\sigma z^\lambda\underline{x}^\tau+z^\rho\underline{x}^\sigma\underline{x}^\lambda z^\tau+\underline{x}^\rho z^\sigma z^\lambda\underline{x}^\tau+\underline{x}^\rho z^\sigma\underline{x}^\lambda z^\tau+\underline{x}^\rho\underline{x}^\sigma z^\lambda z^\tau\Bigg)z^\nu
\end{aligned}
$$

$$-\frac{\mathrm{i}}{360}n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\times(z\cdot\overrightarrow{\partial})^{n-5}\underline{x}^{\mu}z^{\rho}z^{\sigma}z^{\lambda}z^{\tau}z^{\nu}\Big]G_{\mu\nu;\rho\sigma\lambda\tau}$$

所有等式左边下标 $k(m)$，k 标记算符量纲，括号 (m) 具有同样量纲 k 的不同类型算符，量纲 $d\leqslant 6$ 项共有 13 项。其中 $\underline{x}$ 是指微分算符 $\overrightarrow{\partial}$ 对它不作用。图 5.8 列出了在背景场方法中顶角 $(z\cdot\overrightarrow{D})^n$ 相应的 Feynman 图，13 个图 (a)~(m) 相应于量纲 $d\leqslant 6$ 项共有 13 项，图中胶子线端点 "×" "n" 标记具有 n 阶协变微分的胶子背景场张量。

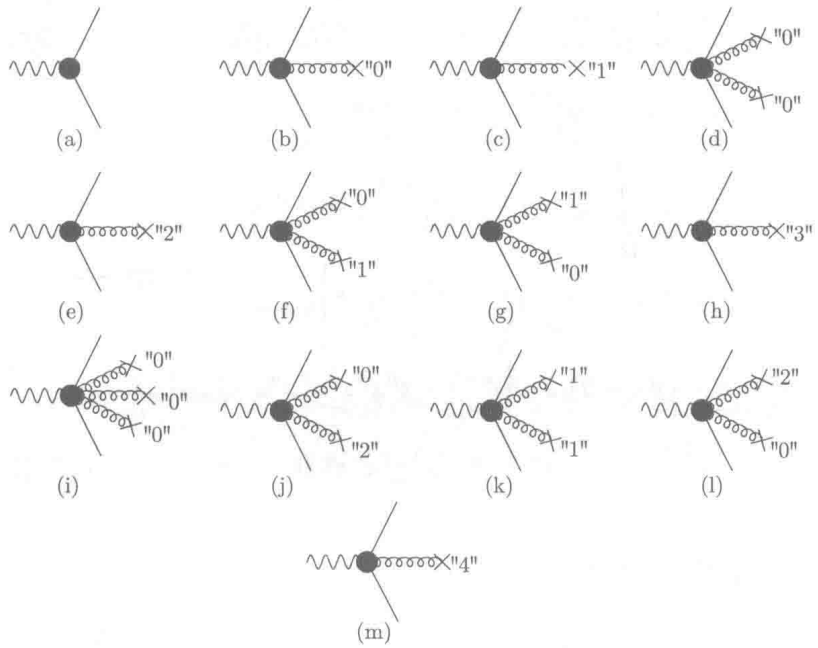


图 5.8　在背景场方法中顶角 $(z\cdot\overrightarrow{D})^n$ 相应的 Feynman 图

一般地讲式 (5.246)$\Pi^{(n,0)}(z,x)$ 的 Fourier 变换按 Lorentz 协变分析应有

$$\begin{aligned}\Pi_{\pi}^{(n,0)}(z,q)=&\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\left\langle 0\right|T(J^{(n)}(x)J^{(0)}(0)\left|0\right\rangle\\=&(z\cdot q)^{n+2}I_{\pi}^{(n,0)}(q^2)\end{aligned}\tag{5.250}$$

其中，$I_{\pi}^{(n,0)}(q^2)$ 是 Lorentz 不变的标量函数。

下面仍以 π 介子为例，利用背景场方法和 QCD 求和规则计算分布振幅的矩 $\langle\xi^n\rangle_{\mu}$。其结果可以推广到计算其他赝标介子分布振幅的矩。

5.7.2　背景场方法计算关联函数

在背景场方法里应用 Feynman 规则到关联函数 (5.250) 有

$$\begin{aligned}\prod_{\pi}^{(n,0)}(z,q) =& \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\times\{-\mathrm{Tr}\langle 0|\, S_F^d(0,x)\not{z}\gamma_5(\mathrm{i}z\cdot\overleftrightarrow{D})^n S_F^u(x,0)\not{z}\gamma_5\,|0\rangle \\ &+\mathrm{Tr}\langle 0|\,\overline{d}(x)d(0)\not{z}\gamma_5(\mathrm{i}z\cdot\overleftrightarrow{D})^n S_F^u(x,0)\not{z}\gamma_5\,|0\rangle \\ &+\mathrm{Tr}\langle 0|\, S_F^d(0,x)\not{z}\gamma_5(\mathrm{i}z\cdot\overleftrightarrow{D})^n\overline{u}(0)u(x)\not{z}\gamma_5\,|0\rangle\} \\ &+\cdots \end{aligned} \tag{5.251}$$

相应的 Feynman 图表示在图 5.9 上，图中的实线表示总的夸克传播子，实线上的端点 "×" 表示夸克背景场，左边大黑圈是顶角算符 $\not{z}\gamma_5(z\cdot\overleftrightarrow{D})^n$，右边大黑圈是顶角算符 $\not{z}\gamma_5$。将夸克传播子公式各项对应的 Feynman 图和顶角 $(z\cdot\overleftrightarrow{D})^n$ 各项对应的 Feynman 图，图 5.3 和图 5.8，代入图 5.9 中可得到图 5.9(a) 和图 5.9(b) 相应的所有子图，如图 5.10 和图 5.11 所示，图 5.10 和图 5.11 给出了图 5.9(a) 和图 5.9(b) 相应的所有子图，图中实线是夸克传播子，螺旋线是胶子传播子，端点 "×" 标记背景场，左边大黑圈是顶角算符 $\not{z}\gamma_5(z\cdot\overleftrightarrow{D})^n$，右边大黑圈是顶角算符 $\not{z}\gamma_5$。图 5.9(a) 相应于方程的第一项，图 5.9(b) 和它的置换图相应于方程的第二项和第三项。

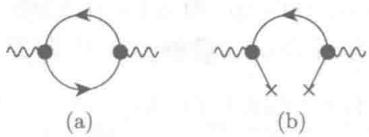


图 5.9 式 (5.251) 相应的 Feynman 图

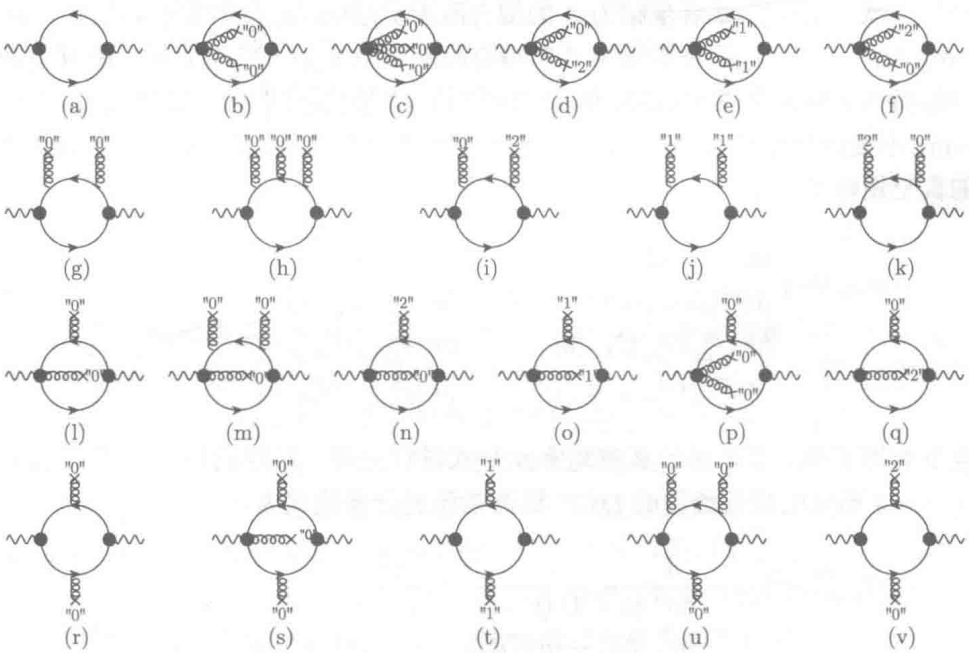


图 5.10 图 5.9(a) 相应的所有子图

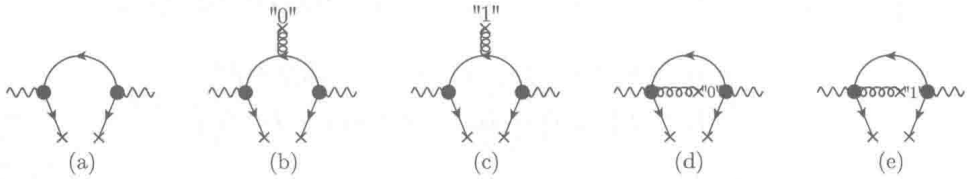


图 5.11　图 5.9(b) 相应的所有子图

将背景场夸克传播子表达式代入方程，可以得到夸克层次上关联函数的表达式。现在分析这些图的贡献。① 显然图 5.10(a) 是微扰贡献的最低阶图，高阶图为 α_s/π 所压低的表达式。② 图 5.10(b) 和 5.10(r) 是量纲为 4 的胶子凝聚贡献，正比于 $\langle G^2\rangle$ 表达式。③ 图 5.10(c), 5.10(h), 5.10(m), 5.10(u) 是量纲为 6 的胶子凝聚贡献，正比于 $\langle g_s^3 fG^3\rangle$ 表达式。④ 图 5.10(e), 5.10(j), 5.10(o), 5.10(t) 是量纲为 6 的夸克凝聚贡献，正比于 $g_s^2\sum\limits_{u,d,s}\langle g_s\bar{\psi}\psi\rangle^2$ 表达式。⑤ 图 5.10(l), 5.10(p), 5.10(q), 5.10(s) 贡献为零，因为 $\mathrm{Tr}[\cdots]=0$。⑥ 图 5.10(g) 贡献可忽略，因为它们的贡献正比于 u,d 的流夸克质量。⑦ 其余包含量纲为 6 的凝聚贡献，正比于 $\langle g_s^3 fG^3\rangle$ 或 $g_s^2\sum\limits_{u,d,s}\langle g_s\bar{\psi}\psi\rangle^2$。对于图 5.11，① 图 5.11(a) 是量纲为 4 的夸克凝聚贡献 $m\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ 和量纲为 6 的混合凝聚贡献 $m\langle g_s\bar{\psi}\sigma TG\psi\rangle$ 表达式。② 图 5.11(b) 是量纲为 6 的夸克凝聚贡献 $\langle g_s\bar{\psi}\psi\rangle^2$ 或者量纲为 6 的混合凝聚贡献 $m\langle g_s\bar{\psi}\sigma TG\psi\rangle$ 表达式。③ 图 5.11(c), 5.11(d), 5.11(e) 是量纲为 6 的夸克凝聚贡献 $\langle g_s\bar{\psi}\psi\rangle^2$ 表达式。所有贡献加在一起得到关联函数式 (5.250) 的 QCD 算符乘积的展开结果。显然式 (5.250) 中 Lorentz 不变的标量函数 $I_\pi^{(n,0)}(q^2)$ 依赖于上述的凝聚参量。此外，还会遇到如下形式的真空矩阵元：

$$\begin{aligned}
&\langle 0|\,\bar{q}_\alpha^i(x)q_\beta^j(y)\,|0\rangle\,, && \langle 0|\,\bar{q}_\alpha^i(x)q_\beta^j(y)G_{\mu\nu}^a\,|0\rangle\\
&\langle 0|\,\bar{q}_\alpha^i(x)q_\beta^j(y)G_{\mu\nu;\rho}^a\,|0\rangle\,, && \langle 0|\,G_{\mu\nu}^a G_{\rho\sigma}^b\,|0\rangle\\
&\langle 0|\,G_{\mu\nu}^a G_{\rho\sigma}^b G_{\lambda\tau}^c\,|0\rangle\,, && \langle 0|\,G_{\mu\nu;\lambda}^a G_{\rho\sigma;\tau}^b\,|0\rangle\\
&\langle 0|\,G_{\mu\nu}^a G_{\rho\sigma;\lambda\tau}^b\,|0\rangle\,, && \langle 0|\,G_{\mu\nu;\lambda\tau}^a G_{\rho\sigma}^b\,|0\rangle
\end{aligned}$$

这些都利用了 5.4 节给出的真空矩阵元公式进行处理。最终我们得到了式 (5.250) 中 Lorentz 不变的标量函数的 QCD 算符乘积展开表达式为

$$\begin{aligned}
I_{\pi,qcd}^{(n,0)}(q^2)=&-\frac{3}{4\pi^2}\frac{1}{(n+1)(n+3)}\ln\frac{-q^2}{\mu^2}\\
&+\frac{m_u\langle\bar{u}u\rangle+m_d\langle\bar{d}d\rangle}{(-q^2)^2}+\frac{\langle\alpha_s G^2\rangle}{(-q^2)^2}\frac{[1+n\times\theta(n-2)]}{12\pi(n+1)}
\end{aligned}$$

$$-\frac{8n+1}{9}\frac{m_u\langle g_s\bar{u}\sigma TGu\rangle+m_d\langle g_s\bar{d}\sigma TGd\rangle}{(-q^2)^3}$$
$$+\frac{4(2n+1)}{81}\frac{\langle g_s\bar{u}u\rangle^2+\langle g_s\bar{d}d\rangle^2}{(-q^2)^3} \tag{5.252}$$

由于计算过程和结果复杂冗长，这里对于图 5.10 仅列出计算到 g_s^2 项的贡献，没有给出正比于 g_s^3 项以上的贡献，如 $\langle g_s^3fG^3\rangle$ 和 $g_s^2\sum_{u,d,s}\langle g_s\bar{\psi}\psi\rangle^2$ 的项。

5.7.3 强子唯象层次计算关联函数

从强子唯象层次上关联函数 $\Pi_\pi^{(n,0)}(z,q)$ 分解出的不变函数 $I_\pi^{(n,0)}(q^2)$ 遵从色散关系

$$I_\pi^{(n,0)}(q^2)=\frac{1}{\pi}\int \mathrm{d}s\frac{\mathrm{Im}I_\pi^{(n,0)}(s)}{(s-q^2)} \tag{5.253}$$

对上述两点关联函数插入完备中间态可以得到

$$\mathrm{Im}I_{\pi,\mathrm{had}}^{(n,0)}(q^2)=\pi\delta(q^2-m_\pi^2)f_\pi^2\langle\xi^n\rangle+\pi\frac{3}{4\pi^2(n+1)(n+3)}\theta(q^2-s_\pi) \tag{5.254}$$

其中，第一项是 π 介子极点的贡献，第二项是极点以上连续态的贡献。将虚部表达式 (5.254) 代入色散关系式 (5.253)，给出不变函数 $I_\pi^{(n,0)}(q^2)$ 表达为强子物理区域 $q^2>0$ 的谱函数积分表示式。式 (5.254) 中 s_π 是阈值。另一方面，在上一节中已给出 $q^2\ll-\mu^2$ 下不变函数 $I_\pi^{(n,0)}(q^2)$ 的 QCD 算符乘积展开式。由于不变函数 $I_\pi^{(n,0)}(q^2)$ 在复 q^2 平面上的解析性质，这两种表达式应该相等，从而给出求和规则，即

$$\frac{1}{\pi}\int_{s_\pi}^{\infty}\mathrm{d}s\frac{\mathrm{Im}I_{\pi,\mathrm{had}}^{(n,0)}(s)}{(s-q^2)}=I_{\pi,\mathrm{qcd}}^{(n,0)}(q^2) \tag{5.255}$$

求和规则式 (5.255) 的左边是无减除的色散关系，而右边依赖于真空凝聚参量。等式右边的真空凝聚参量原则上包含无穷多项，但随着凝聚参量量纲的增加，Q^2 压低的幂次也增加，因此在 Q^2 较大时，只须取前几项就可以了。例如，若取量纲 $d\leqslant 6$，则只须引入 3~4 个凝聚参量就能较好地描述关联函数。等式左边是强子谱函数的积分，从式 (2.253) 知强子窄宽度共振态近似只有在 Q^2 较小时才是有效近似，而随着 Q^2 的增大连续谱的贡献将增大，导致计算的不确定性增大。尽管可利用夸克-强子对偶性降低这种不确定性，但理论预言的可靠性仍然很差。因此，式 (5.255) 右边希望 Q^2 越大越好，等式左边希望被积函数 $\mathrm{Im}I_{\pi,\mathrm{had}}^{(n,0)}(s)$ 中来自小 s 的极点贡献越大越好。这两者是矛盾的，问题的关键就变成如何使得等式两边近似都好，以减少计算中的不确定性。

5.7.4　应用 Borel 变换

引入 Borel 变换帮助压低左边连续态的贡献和右边高量纲凝聚的贡献。完成 Borel 变换后可得到如下求和规则，即

$$\frac{1}{\pi}\frac{1}{M^2}\int \mathrm{d}s \mathrm{e}^{-s/M^2}\mathrm{Im}I^{(n,0)}_{\pi,\mathrm{had}}(s)=\hat{L}_M I^{(n,0)}_{\pi,\mathrm{qcd}}(q^2) \tag{5.256}$$

其中，M 是 Borel 参量；$\hat{L}_M$ 是 Borel 算符。

$$\hat{L}_M=\lim_{\substack{-q^2,n\to\infty\\ -q^2/n=M^2}}\frac{1}{(n-1)!}(-q^2)^n\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(-q^2)}\right)^n \tag{5.257}$$

将式 (5.257) 分别作用于式 (5.255) 两边，经过 Borel 变换后的求和规则将原先的 Q^2 变为参量 M^2。在求和规则的左边参量 M^2 出现在被积函数的指数上，因而对大 s 的积分起压低作用，从而压低了 $\mathrm{Im}I^{(n,0)}_{\pi,\mathrm{had}}(s)$ 中连续谱的贡献。它在求和规则式 (5.256) 的右边有一个因子 $(n-1)!$ 出现在级数展开的每一项分母上，因而更好地压低了高量纲凝聚项的贡献。这样 Borel 变换既压低了高能 $\mathrm{Im}I^{(n,0)}_{\pi,\mathrm{had}}(s)$ 中连续谱的贡献，又压低了高量纲凝聚项的贡献，起到了改善求和规则精确度的作用。利用 QCD 求和规则方法计算两点关联函数 (5.250)。一方面从强子唯象计算关联函数，对式 (5.250) 插入完备集，第一个极点贡献就是 π 介子的矩阵元，从式 (5.254) 可知它与分布振幅的矩 $\langle\xi^n\rangle_\mu$ 相联系。另一方面从算符乘积展开计算关联函数，它将表达为一系列非微扰的真空凝聚值。两者相等并应用 Borel 变换就获得分布振幅的矩 $\langle\xi^n\rangle_\mu$ 的求和规则。输入普适的真空凝聚参量值，可以求出 π 介子分布振幅的矩 $\langle\xi^n\rangle_\mu$。对于 π 介子，由于同位旋对称性分布振幅只有偶次矩，将式 (5.252) 和 (5.254) 代入式 (5.256) 可得下面的矩 $\langle\xi^n\rangle_\mu$ 表达式[10]，即

$$\begin{aligned}\frac{\langle\xi^n\rangle f_\pi^2}{M^2\mathrm{e}^{m_\pi^2/M^2}}=&\frac{3}{4\pi^2}\frac{1}{(n+1)(n+3)}\left(1-\mathrm{e}^{-s_\pi/M^2}\right)\\&+\frac{m_u\langle\bar{u}u\rangle+m_d\langle\bar{d}d\rangle}{(M^2)^2}+\frac{\langle\alpha_sG^2\rangle}{(M^2)^2}\frac{[1+n\times\theta(n-2)]}{12\pi(n+1)}\\&-\frac{8n+1}{18}\frac{m_u\langle g_s\bar{u}\sigma TGu\rangle+m_d\langle g_s\bar{d}\sigma TGd\rangle}{(M^2)^3}\\&+\frac{2(2n+1)}{81}\frac{\langle g_s\bar{u}u\rangle^2+\langle g_s\bar{d}d\rangle^2}{(M^2)^3}\end{aligned} \tag{5.258}$$

计算结果除了依赖于真空凝聚参量，还依赖于 Borel 参量 M 和阈参量 s_π。Borel 参量 M 的选取要使得等式 (5.256) 的右边压低高量纲凝聚项的贡献，而左边压低高能 $\mathrm{Im}I^{(n,0)}_{\pi,\mathrm{had}}(s)$ 中连续谱的贡献而尽量使基态贡献占主导，因而这两个要求就给

出 M 取值的下、上限。在实际计算中 Borel 参量取值使物理结果不应依赖于 Borel 参量 M，方能使得理论预言有价值，即实际数值计算中要求物理结果对 Borel 参量 M 的依赖性尽可能得小，或者说要寻找物理量对 Borel 参量 M 在取值范围内变动的变化曲线在合理的窗口内出现平台，平台所对应的物理量有好的近似性，因而给出的计算结果较为可靠。

5.7.5 数值计算 $\langle \xi^n \rangle_\mu$ 结果

首先确定输入的参量。为此，选择实验测量值作为 π 介子的质量和衰变常数的输入值

$$m_\pi = (139.57018 \pm 0.00035)\text{MeV}, \quad f_\pi = (130.41 \pm 0.20)\text{MeV}$$

对于凝聚参量，选择如下数值作为输入

$$m_u \langle \bar{u}u \rangle + m_d \langle dd \rangle \simeq -\frac{f_\pi^2 m_\pi^2}{2} = (1.656 \pm 0.005) \times 10^{-4}\text{GeV}^4$$

$$\langle g_s \bar{q}q \rangle^2 = (1.8 \pm 0.7) \times 10^{-3}\text{GeV}^6$$

$$\langle \alpha_s G^2 \rangle = (0.038 \pm 0.011)\text{GeV}^4$$

$$m_u \langle g_s \bar{u}\sigma TGu \rangle + m_d \langle g_s \bar{d}\sigma TGd \rangle = (1.325 \pm 0.033) \times 10^{-4}\text{GeV}^4$$

此外选取 $\alpha_s(M_Z) = 0.1184 \pm 0.0007$，$s_\pi \simeq 1.69\text{GeV}^2$。

为了得到 $\langle \xi^n \rangle_{\mu=M}$ 的具体数值，人们需确定 Borel 参量 M 的取值范围 (通常称之为 Borel 窗口)。它应使连续态在色散积分的总贡献不超过 30%，量纲为 6 的贡献对于二矩 $\langle \xi^2 \rangle_\mu$，四矩 $\langle \xi^4 \rangle_\mu$，六矩 $\langle \xi^6 \rangle_\mu$ 的贡献不超过 10%，10%，15%。图 5.12 分别画出这三个矩对 M^2 的依赖关系；表 5.1 给出了这三个矩的 Borel 窗口和相应的数值。

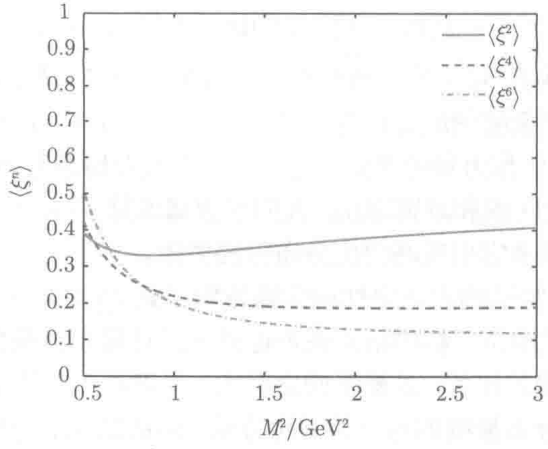


图 5.12 矩 $\langle \xi^2 \rangle_\mu$，$\langle \xi^4 \rangle_\mu$，$\langle \xi^6 \rangle_\mu$ 对 M^2 的依赖关系

表 5.1　矩 $\langle \xi^2 \rangle_\mu$, $\langle \xi^4 \rangle_\mu$, $\langle \xi^6 \rangle_\mu$ 的 Borel 窗口及相应数值

n	2	4	6
M^2/GeV^2	$[0.855 \sim 1.528]$	$[1.387 \sim 1.699]$	$[1.590 \sim 1.907]$
$\langle \xi^n \rangle_\mu$	0.343 ± 0.020	0.192 ± 0.014	0.137 ± 0.015

表 5.1 的数值是在 $\mu = M$ 获得的，借助 Gegenbauer 矩的能标演化公式，从 M 演化到 $\mu = 1\mathrm{GeV}$ 并考虑到各输入参数带来的误差，得到 $\langle \xi^n \rangle_{\mu=1\mathrm{GeV}}$ 的数值为

$$\begin{aligned} \langle \xi^2 \rangle|_{\mu=1\mathrm{GeV}} &= 0.358 \pm 0.022 \\ \langle \xi^4 \rangle|_{\mu=1\mathrm{GeV}} &= 0.204 \pm 0.017 \\ \langle \xi^6 \rangle|_{\mu=1\mathrm{GeV}} &= 0.147 \pm 0.017 \end{aligned} \tag{5.259}$$

其中，误差主要来自于凝聚参量 $\langle \alpha_s G^2 \rangle, \langle g_s \bar{\psi}\psi \rangle^2$。忽略连续谱和高量纲凝聚项的贡献可得到 (若取归一化的 $\langle \xi_\pi^0 \rangle = 1$)

$$\langle \xi_\pi^2 \rangle = 0.46, \quad \langle \xi_\pi^4 \rangle = 0.30 \tag{5.260}$$

与式 (5.259) 相比，二阶矩和四阶矩的值都有所增加。由式 (5.260) 建立起的分布振幅模型，即 Chernyk-Zhitnitsky 模型 (简称 CZ 模型)[12]。需要指出的是，定义式 (5.243) 或 (5.244) 表明只有计算出所有矩 $\langle \xi_\pi^n \rangle_{\mu^2}$ 的值才能得到分布振幅的严格准确的行为，而实际处理中，通常只须计算前几个矩值就可得到足够精度的预言。

5.7.6　分布振幅模型

为了理解矩值对分布振幅性质的影响，这里列出介子分布振幅渐近行为所对应的矩值，即

$$\begin{aligned} \langle \xi_\pi^{2n} \rangle &= \frac{3}{(2n+1)(2n+3)} \\ \langle \xi_\pi^2 \rangle &= 0.20, \quad \langle \xi_\pi^4 \rangle = 0.09, \quad \langle \xi_\pi^6 \rangle = 0.05, \cdots \end{aligned} \tag{5.261}$$

显然，QCD 求和规则计算出的矩值结果明显地偏离分布振幅的渐近行为。这是可以理解的，因为分布振幅的渐近行为仅是高能极限下 ($Q^2 \to \infty$) 的近似行为。人们可以用式 (5.259) 的值作为参考获知理论计算结果或者构造分布振幅模型对渐近行为的偏离。利用 QCD 求和规则方法，人们也尝试计算了 K 介子和 ρ 介子扭度为 2 的分布振幅的矩以及它们的高扭度分布振幅的矩。

QCD 求和规则方法的不确定性很大地影响了式 (5.259) 的精确度和计算值的可信度。有的文献试图从严格的格点规范理论出发计算两点关联函数，但由于条件限制也很难给出精确的矩值。虽然不确定性大，但仍有一定的参考价值。

以下给出构造分布振幅的另一种常用方法，即通过构造光锥波函数[12] 来获得分布振幅。在光锥坐标系可定义光锥波函数 $\psi_n(x_i, k_{\perp i}, \lambda_i)$，它所对应的福克组态都

是离壳的。光锥坐标下定义的能量 ε_n，$\varepsilon_n = P^- - \sum_{i=1}^{n} k_i^- = M^2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{k_{\perp i}^2 + m_i^2}{x_i} < 0$。光锥波函数 $\psi_n(x_i, k_{\perp i}, \lambda_i)$ 须满足无穷联立的积分方程组，目前尚无精确求解的方法。但若进一步假定光锥波函数是光锥坐标系能量 ε_n 的函数，即

$$\psi_n(x_i, k_{\perp i}, \lambda_i) = \psi_n(\varepsilon_n) \tag{5.262}$$

我们可构造出一类有用的波函数模型。两体 Bethe-Salpeter 束缚态波函数在弱束缚态下的解表明质心系下的等时波函数的解是能量 $\varepsilon = M^2 - (q_1^0 + q_2^0)^2$ 的函数，由此，质心系下的等时波函数与光锥坐标系中光锥波函数存在下列对应关系，即

$$\psi_{\text{L.C.}}\left(M^2 - \frac{k_{\perp 1}^2 + m_1^2}{x_1} - \frac{k_{\perp 2}^2 + m_2^2}{x_2}\right) \rightleftarrows \psi_{\text{C.M.}}(M^2 - (q_1^0 + q_2^0)^2)$$

或者

$$\psi_{\text{L.C.}}\left(\frac{k_{\perp 1}^2 + m_1^2}{x_1} + \frac{k_{\perp 2}^2 + m_2^2}{x_2}\right) \rightleftarrows \psi_{\text{C.M.}}(\boldsymbol{q}^{\,2}) \tag{5.263}$$

其中，$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_1$ 是质心系中两粒子的相对动量。对应于式 (5.263)，相应于沿粒子运动的方向做一个 Lorentz boost[13]

$$k_{\perp i} \rightleftarrows q_{\perp i}, \quad x_i \equiv \frac{k_i^+}{P^+} \rightleftarrows \frac{q_i^0 + q_i^3}{q_1^0 + q_2^0} \tag{5.264}$$

这样利用质心系下的等时波函数就可以获得光锥波函数近似解。例如，将谐振子势代入两体 Bethe-Salpeter 方程，可得到质心系下的瞬时波函数，$\sim \exp(-b^2 \boldsymbol{q}^{\,2})$；依据式 (5.263) 就可给出任何介子的价夸克光锥波函数，即

$$\psi(x_i, k_{\perp i}) = A \exp\left[-b^2\left(\frac{k_{\perp 1}^2 + m_1^2}{x_1} + \frac{k_{\perp 2}^2 + m_2^2}{x_2}\right)\right] \tag{5.265}$$

其中，A 是归一化常数。完成对 $k_\perp$ 的积分后就可得到价夸克模型的分布振幅，即

$$\phi(x_i) = A_\phi x_1 x_2 \exp\left[-b^2\left(\frac{m_1^2}{x_1} + \frac{m_2^2}{x_2}\right)\right] \tag{5.266}$$

这一形式有两个优点：①具有接近于分布振幅渐近行为 $a_0 x_1 x_2 (a_0 = \sqrt{3} f_M)$ 的形式；②具有指数压低的端点行为，在卷积中可以很好地消去端点奇异性。考虑到由于夸克自旋的存在，Lorentz boost 将对分布振幅产生附加的纵向修正，这种效应可以通过唯象地引入纵向修正函数 $\varphi_\pi(x)$ 来处理。引入 $\varphi_\pi(x)$ 之后，对横向动量 $k_\perp$ 积分后得到[10,14]，即

$$\phi_\pi(\mu, x) = \frac{\sqrt{3} A_\pi m_q \beta_\pi}{2\pi^{3/2} f_\pi} \sqrt{x(1-x)} \varphi_\pi(x)$$

$$\times\left\{\mathrm{Erf}\left[\sqrt{\frac{m_q^2+\mu^2}{8\beta_\pi^2 x(1-x)}}\right]-\mathrm{Erf}\left[\sqrt{\frac{m_q^2}{8\beta_\pi^2 x(1-x)}}\right]\right\} \tag{5.267}$$

其中，$\beta_\pi=1/b$，轻组分夸克质量取为 $m_q\simeq 0.30\mathrm{GeV}$，$\mathrm{Erf}(x)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^x \mathrm{d}t\mathrm{e}^{-t^2}$ 为误差函数。纵向修正函数

$$\varphi_\pi(x)=[1+B_2\times C_2^{3/2}(2x-1)+B_4\times C_4^{3/2}(2x-1)] \tag{5.268}$$

这里 $C_n^{3/2}(2x-1)$ 为 Gegenbauer 多项式。模型参量 A_π,β_π,B_2,B_4 可以通过波函数归一化条件，$\pi\to\gamma\gamma$ 衰变振幅的求和规则和分布振幅的前两个非零矩值来确定。表 5.2 中给出不同矩值下相应的参数[10,14]。

表 5.2　相应于不同矩值下的模型参数

$\langle\xi_\pi^2\rangle_{1\mathrm{GeV}}$		0.336			0.358			0.380	
$\langle\xi_\pi^4\rangle_{1\mathrm{GeV}}$	0.187	0.204	0.221	0.187	0.204	0.221	0.187	0.204	0.221
A_π/GeV^{-1}	19.022	18.221	17.499	19.035	18.221	17.473	19.036	18.203	17.457
B_2	0.311	0.278	0.239	0.393	0.364	0.328	0.477	0.452	0.418
B_4	0.114	0.266	0.408	−0.031	0.129	0.279	−0.185	−0.016	0.142
β_π/GeV	0.702	0.734	0.766	0.690	0.721	0.753	0.678	0.709	0.739

模型式 (5.267) 明显地不同于渐近形式，图 5.13 表明它也不同于 CZ 形式。它可以作为初始条件输入到演化方程而获得各种物理过程中所需的任意能标下的分布振幅 $\phi(x_i,Q)$。

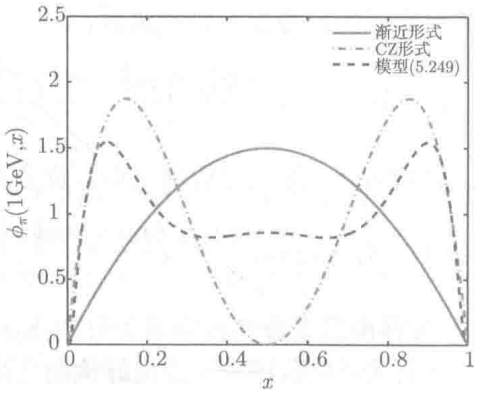


图 5.13　对式 (5.267) 参数化后不同形式的分布振幅 $\phi(x_i,Q=1\mathrm{GeV})$

参 考 文 献

[1] Adler S L, Dashen R. Current Algebras and Applications to Particle Physics. NewYork:

W. A. Benjamin Inc., 1987.

[2] Nambu Y. Phys. Rev. Lett., 1960, 4: 380; Nambu Y, Jona-Lasinio G. Phys. Rev., 1961, 122: 345.

[3] Gell-Mann M, Levy M. Nuovo Cimento, 1960, 16: 705.

[4] Chou K C. J. Expt. and Theor. Phys. (USSR) 1960, 39: 703 (Soviet Phys., JETP, 1961, 12: 492).

[5] Shifman M A, Vainshtein A I, Zakharov V I. Nucl. Phys. B, 1979, 147: 385-448.

[6] Reinders L J, Rubinstein H, Yazaki S. Phys. Report, 1985, 127: 1.

[7] Shifman M A. Vacuum structure and QCD sum rules. North-Holland, 1992.

[8] Hubschmid W, Mallik S. Nucl. Phys., 1982, B207: 29; Govaerts J, de Viron F, Gusbin D, et al. Phys. Lett., 1983, 128B: 262; Nucl. Phys., 1984, B248: 1.

[9] Xiang X D, Wang X N, Huang T. Commu. Theor. Phys., 1986, 6: 117; Phys. Rev., 1987, D35: 1013. Huang T, Huang Z. Phys. Rev., 1989, D39: 1213.

[10] Zhong T, et al. Phys. Rev., 2014, D90: 016004.

[11] 黄涛. 量子色动力学引论. 北京: 北京大学出版社, 2011.

[12] Chernyak V L, Zhitnitsky I R. Nucl. Phys., 1990, B345: 137.

[13] Huang T. Proceedings of XXth International Conference on High Energy Physics, Madison, Wisconsin, 1980// Durand L, Pondrom L G. AIP Conf.Proc.No. 69(AIP, New York, 1981), p1000.; Brodsky S J, Huang T, Lepage G P. Particles and Fields V2, (Proceedings of the Banff Summer Institute, Banff, Alberta, 1981)// Capri A Z, Kamal A N. (Plenum, New York, 1983), P143.

[14] Zhong T, Wu X G, Huang T. Eur. Phys. J., 2016, C76: 390.

第 6 章　QCD 因子化

强相互作用是宇宙中已知的四个基本作用力之一，它的发现肇始于一个非常简单的问题：原子核为何存在？经过物理学家瞎子摸象般的摸索，才将当时理论及实验上存在的、乍看之下不相干的拼图，包括 Gell-Mann 的夸克模型、深度非弹性散射过程中显示的自由部分子 (parton) 现象，杨振宁和 Mills 提出的 non-Abelian 规范场论、Politzer 及 Gross、Wilczek 发现的渐近自由 (asymptotic freedom) 的机制，透过抽丝剥茧的研究，拼凑出强作用力的完整图像，即现在已知的量子色动力学 (Quantum Chromodynamics, QCD)。学术界已经发展出许多 QCD 的理论方法，借以研究不同运动学区域的过程和涉及不同强子的系统，详细内容请参考本书的其他章节。

强相互作用理论远比电磁理论复杂，简单的 QCD Lagrangian 其实蕴含着丰富的动力学机制：在低能量区域显示色禁闭效应 (color confinement)，解释了各种强子束缚态的存在，包括 π 介子、质子、B 介子等。以微扰方法计算束缚态性质时，经常出现的红外发散 (infrared divergence) 即归因于其中的非微扰机制。另一方面，QCD 在高能量区域显示的渐近自由特性导致了耦合常数变小，这允许微扰 QCD 理论架构的建立，因此有可能在高能量过程中检验 QCD。由于散射过程通常无法避免地牵涉强子的性质，即高能量的 QCD 过程仍然同时包括微扰和非微扰的动力学机制，这检验并不简单。欲实现微扰 QCD 理论的目标，Collins、Soper 和 Sterman 等学者以 non-Abelian 规范场论为基础，率先发展出分析高能量强子碰撞过程的因子化定理 (factorization theorem)[1]，其中红外发散的部分可从散射过程中因子化出来，其余的强作用贡献则纳入硬散射核 (hard scattering kernel)。因子化定理的关键是证明红外发散部分的普适性 (universality)，即某种强子参与的不同过程皆产生相同的红外发散，将红外发散吸收到该强子的部分子分布函数 (parton distribution function)，普适性则保证了涉及相同强子的所有过程的硬散射核必定是红外有限 (infrared finite) 的。部分子分布函数可从实验数据抽取或以非微扰方法处理而得，一旦决定了部分子分布函数，将其与微扰计算而得的、其他过程的硬散射核卷积，便可预言对应的散射过程截面。换言之，部分子分布函数的普适性是微扰 QCD 具有预言能力的基础。

大强子对撞机 (large hadron collider) 的一个重要任务是寻找超越标准模型 (standard model) 的新物理。新物理信号的辨识通常要求对标准模型的确切了解，尤其是必须清楚地掌握来自 QCD 的背景贡献。数十年来，透过微扰 QCD 计算获

致可信的理论预言，与许多高能量过程的精确数据比较，证明了微扰 QCD 方法的成功；同时，某些令人意外的数据反过来要求理论学家重新审视并改进其理论架构，最后部分数据或许可能成为新物理的征兆。本章将重点介绍微扰 QCD 中的主要因子化定理，包括共线因子化定理及 k_T 因子化定理，说明其基本要素及在大强子对撞机物理上的应用。

6.1 红外发散与红外安全

建立因子化定理的第一个步骤是计算 QCD 过程在夸克-胶子层次的 Feynman 图，并确认其中的红外发散。以虚光子生成正反夸克对的过程 $\gamma^*(q) \to q(p_1)\bar{q}(p_2)$ 为例，其中夸克 q 带动量 p_1，反夸克 $\bar{q}$ 带动量 p_2，虚光子 γ^* 带动量 $q = p_1 + p_2$，其领头阶的振幅为 $-\mathrm{i}e\gamma_\mu$，其中 e 为单位电荷，γ_μ 为 Gamma 矩阵。首先检视此过程的顶点修正，如图 6.1 所示，根据本书第 1 章中给定的 Feynman 规则，圈图积分写为

$$\int \frac{\mathrm{d}^4 l}{(2\pi)^4}(-\mathrm{i}g\gamma^\nu T^a)\frac{\mathrm{i}(\not{p}_1 - \not{l})}{(p_1 - l)^2 + \mathrm{i}\varepsilon}(-\mathrm{i}e\gamma_\mu)\frac{-\mathrm{i}(\not{p}_2 - \not{l})}{(p_2 - l)^2 + \mathrm{i}\varepsilon}(-\mathrm{i}g\gamma_\nu T^a)\frac{-\mathrm{i}}{l^2 + \mathrm{i}\varepsilon} \tag{6.1}$$

其中，g 是强耦合常数，T^a 是颜色矩阵，l 是胶子携带的圈动量，正则化紫外发散 (ultraviolet divergence) 所需的抵消项并未列出。同一阶的圈图还包括夸克的自能修正，在此暂不予讨论。

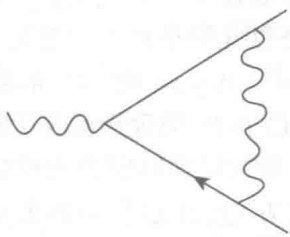


图 6.1 虚光子生成正反夸克对的顶点修正

在光锥坐标系中进行回路积分，则红外发散的出现将变得浅显易懂，在此坐标系中圈动量表示为 $l^\mu = (l^+, l^-, \boldsymbol{l}_T)$，其中分量定义为

$$l^\pm = \frac{l^0 \pm l^z}{\sqrt{2}}, \quad \boldsymbol{l}_T = (l^x, l^y) \tag{6.2}$$

胶子的不变质量平方则写成 $l^2 = 2l^+l^- - \boldsymbol{l}_T^2$。当在壳粒子以光速沿着光锥方向运动时，其动量在光锥坐标系中只有一个大的分量，例如，之前提及的夸克动量可写为 $p_1^\mu = (p_1^+, 0, \boldsymbol{0}_T)$ 和 $p_2^\mu = (0, p_2^-, \boldsymbol{0}_T)$，其中 p_1 只有一个大的加分量 p_1^+，p_2 只有一个大的负分量 p_2^-，这可简化为与红外发散相关的幂次分析。

若使用光锥坐标，式 (6.1) 表示为

$$\int \frac{\mathrm{d}l^+\mathrm{d}l^-\mathrm{d}^2l_T}{(2\pi)^4}\frac{1}{2(l^+-p_1^+)l^- - l_T^2+\mathrm{i}\varepsilon}\frac{1}{2l^+(l^- - p_2^-)-l_T^2+\mathrm{i}\varepsilon}\frac{1}{2l^+l^- - l_T^2+\mathrm{i}\varepsilon} \tag{6.3}$$

因为红外发散主要是由奇点结构决定的，上式只显示了分母的部分。当圈动量加分量 l^+ 在 $l^+ > p_1^+$ 的范围时，负分量 l^- 的三个奇点均位于复数平面的下半平面，即

$$l^- = \frac{l_T^2}{2(l^+-p_1^+)} - \mathrm{i}\varepsilon, \quad l^- = p_2^- + \frac{l_T^2}{2l^+} - \mathrm{i}\varepsilon, \quad l^- = \frac{l_T^2}{2l^+} - \mathrm{i}\varepsilon \tag{6.4}$$

可选择 l^- 的回路沿实轴从负无限大到正无限大，然后以无限大的半径经上半平面回到实轴的负无限大，这个回路并未包含 l^- 的任何奇点，所以回路积分为零。当 l^+ 在 $l^+ < 0$ 的范围时，l^- 的三个奇点均位于复数平面的上半平面，同理，可选择经下半平面回到实轴的负无限大的回路使积分为零。

因此，只有当 l^+ 在 $0 < l^+ < p_1^+$ 的范围内，l^- 的奇点分布于复数平面的上、下半平面时，

$$l^- = \frac{l_T^2}{2(l^+-p_1^+)} + \mathrm{i}\varepsilon, \quad l^- = p_2^- + \frac{l_T^2}{2l^+} - \mathrm{i}\varepsilon, \quad l^- = \frac{l_T^2}{2l^+} - \mathrm{i}\varepsilon \tag{6.5}$$

如图 6.2 所示，式 (6.3) 中的积分才不为零。这范围也符合物理的图像，即夸克辐射出的胶子应带有介于 0 和 p_1^+ 之间的夸克部分动量。当 l^+ 的数量级为 $l^+ \sim O(p_1^+)$ 且横向分量 l_T 的数量级为 $l_T \sim O(\Lambda_{\mathrm{QCD}})$ 时，其中 Λ_{QCD} 为 QCD 的能标，l^- 的回路被第一和第三个奇点限制在 $l^- \sim O(\Lambda_{\mathrm{QCD}}^2/p_1^+)$ 的数量级，以上 l^μ 的数量级表示胶子的运动方向与夸克几乎平行，这定义了与夸克动量 p_1 相关的共线 (collinear) 区域；当 $l^+ \sim l_T \sim O(\Lambda_{\mathrm{QCD}})$ 时，l^- 的回路被第一和第三个奇点限制在 $l^- \sim O(\Lambda_{\mathrm{QCD}})$ 的数量级，以上 l^μ 的数量级表示胶子带有极低的动量，这定义了所谓的软 (soft) 区域。共线和软区域对应的动量配置分别为 $l^\mu = (E, \Lambda^2/E, \Lambda)$ 和 $l^\mu = (\Lambda, \Lambda, \Lambda)$，其中 E 代表 QCD 过程中的大能标，Λ 代表 QCD 过程中的小能标。另一个给出重要贡献的配置称为硬 (hard) 区域，其中圈动量的数量级为 $l^\mu = (E, E, E)$，它表示胶子带有极高的动量。

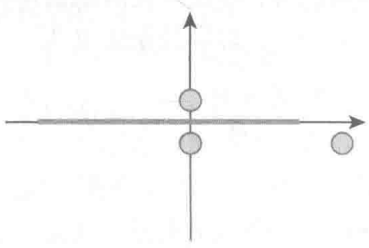


图 6.2　$0 < l^+ < p_1^+$ 时 l^- 于复数平面的奇点分布

通过简单的幂次分析可知，在与夸克动量 p_1 相关的共线区域中，式 (6.1) 中的分母 $(p_1-l)^2$ 和 l^2 同为 Λ^2 的数量级，$(p_2-l)^2$ 为 E^2 的数量级；在软区域中，$(p_1-l)^2$ 和 $(p_2-l)^2$ 同为 $E\Lambda$ 的数量级，l^2 为 Λ^2 的数量级；在硬区域中，三个分母皆为 E^2 的数量级；另外，式 (6.1) 中的分子为 E^2 的数量级，d^4l 在共线区域中为 Λ^4 的数量级：$\mathrm{d}l^+\mathrm{d}l^-\mathrm{d}^2l_T = E\left(\mathrm{d}^2\Lambda/E\right)\mathrm{d}^2\Lambda = \mathrm{d}^4\Lambda$，在软区域中亦为 Λ^4 的数量级，在硬区域中为 E^4 的数量级，因此式 (6.1) 的积分在上述三个重要区域中均给出对数发散

$$\int\frac{\mathrm{d}^4\Lambda}{\Lambda^4}\sim\int\frac{\mathrm{d}^4E}{E^4}\sim\log \tag{6.6}$$

选取式 (6.5) 中的第一个奇点，式 (6.3) 变成

$$\begin{aligned}&\frac{-\mathrm{i}}{2p_1^+}\int\frac{\mathrm{d}l^+\mathrm{d}^2l_T}{(2\pi)^3}\frac{p_1^+-l^+}{2p_2^-l^+(p_1^+-l^+)+p_1^+l_T^2+\mathrm{i}\varepsilon}\frac{1}{l_T^2}\\ \approx&\frac{-\mathrm{i}}{4p_1\cdot p_2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}l^+}{l^+}\int\frac{\mathrm{d}^2l_T}{l_T^2}\end{aligned} \tag{6.7}$$

式中，共线区域 (l^+ 的积分) 和软区域 (l_T 的积分) 的贡献重叠，给出了双对数 $\ln^2\Lambda$，双对数的处理需要重求和 (resummation) 的技巧，将在第 7 章中详细说明。

红外发散的存在是 QCD 辐射修正的一般特征，但图 6.1 中的振幅并非物理量，截面才是。为了检验红外发散是否成为值得仔细探究的问题，可进一步分析正负电子湮灭成强子过程 $e^-e^+\to X$ 的截面。1.5 节中已讨论了这截面的圈图计算，在此特别强调其中红外发散的贡献。截面的圈图计算是透过振幅的平方，其 Feynman 图是由振幅和共轭振幅连接而成，之间以末状态的切线隔开。图 6.3 为上述 $e^-e^+\to\gamma*\to q\bar{q}$ 截面的领头阶 Feynman 图，其中垂直的实线即为末态切线，被末态切线切过的粒子为在壳的实夸克。图 6.3 的计算结果为

$$\sigma^{(0)}=N_c\frac{4\pi\alpha^2}{3Q^2}\sum_f Q_f^2 \tag{6.8}$$

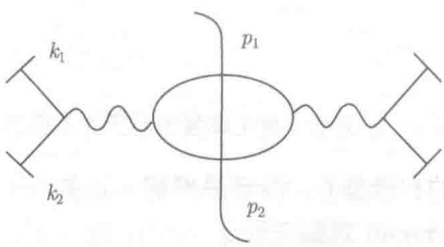


图 6.3 正负电子湮灭成强子截面的领头阶 Feynman 图

其中，$N_c = 3$ 是颜色的数量；α 是电磁耦合常数；Q 是正负电子对 (即虚光子) 的不变质量；Q_f 是以电子电荷为单位的夸克电荷。式 (6.8) 是四维时空下的结果，因此与式 (1.188) 有些许差异。

图 6.4 所示为正负电子湮灭成强子截面的单圈修正，上面两图为虚胶子修正，下面两图为实胶子修正。对式 (6.8) 的单圈虚修正，包括式 (6.1) 中的胶子顶点修正 (图 6.4 中的左上角) 及夸克的自能修正 (图 6.4 中的右上角)，在维数正则化下给出[2]

$$\sigma^{(1)V} = -\sigma^{(0)}\frac{\alpha_s}{\pi}C_F\left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)^{\varepsilon}\frac{1-\varepsilon}{\Gamma(2-2\varepsilon)}\left[\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{3}{2\varepsilon}-\frac{\pi^2}{2}+4+O(\varepsilon)\right] \tag{6.9}$$

其中，$C_F = 4/3$ 为颜色因子，α_s 为强耦合常数，μ 为正则化紫外发散时引入的重整化能标，Γ 为 Gamma 函数，值趋近零的参数 ε 来自圈动量的任意维数 $n = 4-2\varepsilon$，双奇点 $1/\varepsilon^2$ 是共线发散和软发散重叠的结果，对应式 (6.7) 中的双对数。实胶子单圈修正给出[2]

$$\sigma^{(1)R} = \frac{\alpha_s}{\pi}C_F\left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)^{\varepsilon}\frac{1-\varepsilon}{\Gamma(2-2\varepsilon)}\left[\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{3}{2\varepsilon}-\frac{\pi^2}{2}+\frac{19}{4}+O(\varepsilon)\right] \tag{6.10}$$

以上次领头阶计算获致如下的关键结论：红外发散在式 (6.9) 中虚胶子修正及式 (6.10) 中实胶子修正的求和中完全抵消，因为修正中的双奇点和单奇点在式 (6.9) 中带负号，在式 (6.10) 中带正号。以上二式与式 (1.198)、(1.200) 稍有差异，也是采取不同微扰计算方案的缘故。

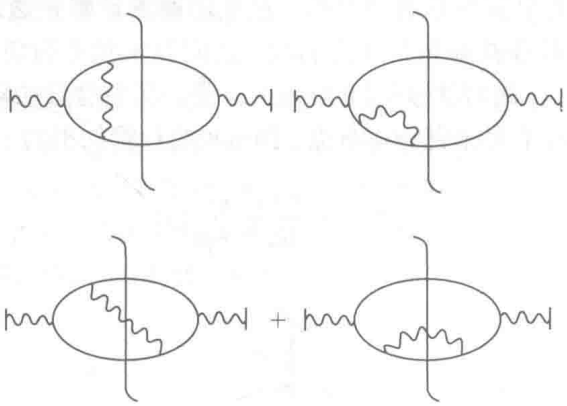


图 6.4　正负电子湮灭成强子截面的单圈修正

借由虚光子传播子的自能修正，很容易理解上述的红外发散抵消。已知带动量 p 的末态在壳粒子的 Feynman 规则正比于 $\delta(p^2)$，而 $\delta(p^2)$ 恰是粒子传播子的虚部 $\mathrm{Im}(1/(p^2+\mathrm{i}\varepsilon)) \propto \delta(p^2)$，因此当末态切线通过某粒子线时，其作用等同于选取该粒子传播子的虚部。图 6.5 中虚光子传播子的高阶自能修正加上末态的切线后，即对

应于 $\gamma* \to X$ 截面的高阶 Feynman 图，于是 $\gamma* \to X$ 的截面与虚光子传播子自能修正的虚部相关，即是大家熟悉的色散关系 (dispersion relation)。因为虚光子不涉及任何小的特征能标，其圈修正必定是红外有限的；因为自能修正是红外有限的，其虚部当然也是红外有限的。

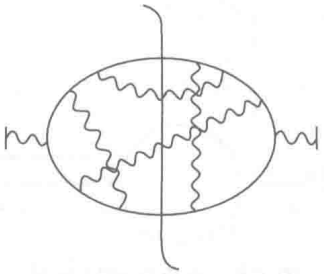


图 6.5 加上末态切线后虚光子传播子的自能修正对应于 $\gamma* \to X$ 的截面

以上观察结果已归纳为 Kinoshita-Lee-Nauenberg (KLN) 定理[3]：当积分末状态完整的运动学相空间并对所有末状态求和后，末状态中的红外发散相消，所以 $e^-e^+ \to X$ 过程的截面为红外安全的 (infrared safe)。此定理蕴含深刻的物理意义，即夸克–强子对偶性 (quark-hadron duality)：对末状态求和后，末状态的强子图像可被夸克、胶子的图像取代，夸克、胶子层次的微扰计算则等同于强子层次的计算，或者末状态中的强子作用可以借由夸克、胶子的作用描述。结合式 (6.8)∼(6.10) 可得 $e^-e^+ \to X$ 过程至次领头阶的截面

$$\sigma = N_c \frac{4\pi\alpha^2}{3Q^2} \sum_f Q_f^2 \left[1 + \frac{3}{4}\frac{\alpha_s(Q)}{\pi} C_F\right] \tag{6.11}$$

上式已被用来从 $e^-e^+ \to X$ 截面的实验数据中抽取强耦合常数 $\alpha_s(Q)$ 在能标 Q 的值。

6.2 深度非弹性散射与共线因子化

虽然 6.1 节中直截了当的微扰理论适用于 $e^-e^+ \to X$ 的湮灭过程，但对于更复杂的过程，譬如 1.1 节中触及的、图 6.6 中轻子 ℓ 和核子 N 的深度非弹性散射 (deeply inelastic scattering)$\ell(k) + N(p) \to \ell(k') + X$，其中 k 为入射轻子动量，p 为核子动量，k' 为出射轻子动量，X 表示任意的末状态粒子，直接的微扰计算并不适用。即使动量转移平方 $-q^2 = (k-k')^2 \equiv Q^2$ 很大，深度非弹性散射的夸克层次截面，在考虑高阶辐射修正后仍存在红外发散，所以微扰计算的结果不具物理意义。红外发散其实反映了核子中的非微扰机制，必须针对这红外发散提出特殊的处理

方法，以下阐述如何将这些红外发散从散射过程中因子化出来，并吸收到核子的部分子分布函数。

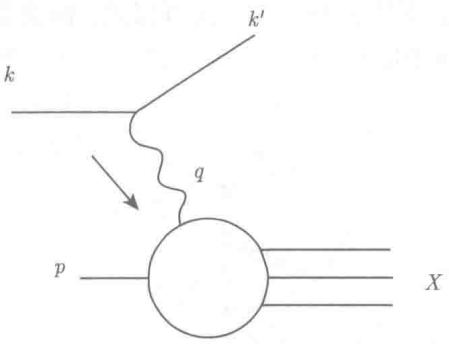


图 6.6　深度非弹性散射

深度非弹性散射的微分截面写为

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\mathrm{d}^3 k'}{2s\left|\vec{k}'\right|}\frac{1}{Q^4}L^{\mu\nu}(k,q)W_{\mu\nu}(p,q) \tag{6.12}$$

其中，s 为质心能量的平方，轻子张量和强子张量分别是

$$L^{\mu\nu} = \frac{e^2}{8\pi^2}\mathrm{tr}\left[\not{k}\gamma^\mu \not{k}'\gamma^\nu\right] \tag{6.13}$$

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} =& \frac{1}{8\pi}\sum_{\text{spins }\sigma}\sum_X \langle N(p,\sigma)|\, J_\mu(0)\,|X\rangle\,\langle X|\, J_\nu(0)\,|N(p,\sigma)\rangle \\ & \times (2\pi)^4\delta^4(p_X - p - q) \end{aligned} \tag{6.14}$$

e 为轻子电荷，$|N(p,\sigma)\rangle$ 表示动量 p 和自旋 σ 的核子束缚态，$J_\mu(0)$ 为坐标原点的电磁流密度，p_X 为末态粒子动量，$\delta^4(p_X - p - q)$ 表示动量守恒。考虑宇称对称性、流守恒等对称性质后，强子张量可参数化为两个独立的结构函数

$$W_{\mu\nu} = -\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)W_1(x,Q^2) + \left(p_\mu - \frac{q_\mu}{2x}\right)\left(p_\nu - \frac{q_\nu}{2x}\right)W_2(x,Q^2) \tag{6.15}$$

其中，Bjorken 变量定义为 $x \equiv Q^2/(2p\cdot q)$。为方便讨论，可定义无量纲的结构函数

$$F_1(x,Q^2) \equiv W_1(x,Q^2), \quad F_2(x,Q^2) \equiv p\cdot q W_2(x,Q^2) \tag{6.16}$$

首先考虑质子中价夸克 q 的深度非弹性散射，图 6.7(a) 表示截面的领头阶 Feynman 图，图 6.7(b)~(f) 表示次领头阶的修正。以 F_2 为例，图 6.7 对夸克深度非弹性散射截面的贡献为[2]

$$F_2^q(x,Q^2) = x\delta(1-x) + \frac{\alpha_s}{2\pi}C_F x\left[\frac{1+x^2}{1-x}\left(\ln\frac{1-x}{x} - \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{4}(9+5x)\right]_+$$

$$+\frac{\alpha_s}{2\pi}C_F x\left(\frac{1+x^2}{1-x}\right)_+[4\pi\mu\exp(-\gamma_E)]^\varepsilon\int_0^{Q^2}\frac{\mathrm{d}k_T^2}{k_T^{2+2\varepsilon}}+\cdots \tag{6.17}$$

其中，上标 q 表示初态为价夸克；γ_E 是 Euler 常数。上式右侧第一项来自图 6.7(a)，其结果正比于末态在壳夸克的 Feynman 规则

$$\delta((p+q)^2)=\delta(2p\cdot q+q^2)\propto\delta(1+q^2/(2p\cdot q))=\delta(1-x) \tag{6.18}$$

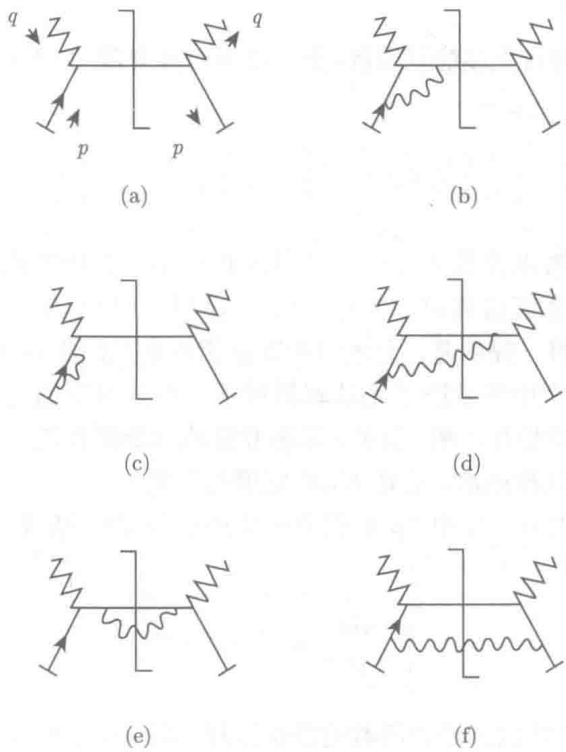


图 6.7 深度非弹性散射截面的 Feynman 图

(a) 领头阶图；(b)∼(f) 单圈图

式 (6.17) 中的其余项代表夸克结构函数中的次领头阶贡献，其中下标 + 表示加 (plus) 函数，具有分布几率的意义，所以是通过如下与任意函数 $f(x)$ 的积分定义的

$$\int_0^1\mathrm{d}x\frac{f(x)}{(1-x)_+}\equiv\int_0^1\mathrm{d}x\frac{f(x)-f(1)}{1-x} \tag{6.19}$$

很显然的，图 6.7(b) 和 (c) 的虚修正以及末态夸克的自能图包含末态在壳夸克的 Feynman 规则，其贡献正比于 $\delta(1-x)$；因为额外的实胶子辐射，图 6.7(d)∼(f) 的

实修正给出平滑的有理函数 $1/(1-x)$，以上两个结果在 $x \to 1$ 处发散，但相差负号。这发散源自于软胶子辐射，因为末态夸克带动量 $p+q-l$，其中 l 为实胶子的动量，在壳条件要求 $(p+q-l)^2 = 2p\cdot q + q^2 - 2l\cdot(p+q) = 0$，$x \to 1$ 的极限可推得 $l \to 0$。若将 $1/(1-x)$ 理解为分布几率，而与某函数 $f(x)$ 相关的物理量是透过期望值，亦即透过和分布几率的积分产生的，再将此积分分解为

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \frac{f(x)}{1-x} = f(1)\int_0^1 \mathrm{d}x \frac{1}{1-x} + \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{f(x)-f(1)}{1-x} \tag{6.20}$$

则等式右侧第一项包含上述的软发散，第二项是红外有限的，于是分布几率 $1/(1-x)$ 形式上可表为

$$\frac{1}{1-x} \equiv \delta(1-x)\int_0^1 \mathrm{d}x \frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)_+} \tag{6.21}$$

借由引入加函数以及式 (6.21) 中的分解抽取实修正中的软发散，发现实修正和虚修正中的软发散直接相消，这是引入加函数并以分布几率的概念处理红外发散的动机之一。值得一提的是，上述的软发散相消是归因于核子本身是色单态的，一个分布于巨大时空中的软胶子无法解析核子内有限时空的色结构，以致软胶子无法和色单态的核子相互作用。另外，末态夸克的自能图和图 6.7(e) 中与末态夸克相关的共线发散也互相抵消，这是 KLN 定理的结果。

最后，重点是式 (6.17) 中 k_T^2 的积分产生的红外发散。若以维数正则化的方式处理，$\varepsilon < 0$ 时可得

$$\int_0^{Q^2} \frac{\mathrm{d}k_T^2}{k_T^{2+2\varepsilon}} = \frac{1}{-\varepsilon}(Q^2)^{-\varepsilon} \tag{6.22}$$

因此，夸克深度非弹性散射结构函数的微扰计算，即使在求和虚圈图与实圈图的修正、软发散相消、应用 KLN 定理于末态夸克相关的圈积分之后，仍存在红外发散。这发散源自于圈动量平行于核子动量的共线区域，因为可通过初态夸克质量的引入而予以正则化，它反映了一组平行运动在壳粒子的长距离现象，与核子的禁闭效应相关。若将深度非弹性散射和 $e^-e^+ \to X$ 湮灭过程比较，前者涉及末态运动学区域的积分，但没有初态运动学区域的积分，这是 KLN 定理不适用于与初态核子相关红外发散的讨论，而式 (6.17) 存在共线发散的原因。

辐射共线胶子可改变夸克原来的动量，使得初态夸克以不同的动量参与硬散射的过程，另外，式 (6.17) 中共线发散的系数正比于加函数，必须理解为分布几率，很自然地，可尝试将共线发散吸收到与核子相关的分布函数之中，这分布函数描述夸克带着部分核子动量的几率。换言之，微扰理论中夸克层次的共线发散是被

核子部分子分布函数中相同的共线发散消去，余下的红外有限贡献则纳入硬散射核，红外发散和红外有限贡献的分解称为因子化。根据以上陈述，可将夸克层次的结构函数写成强耦合常数的幂次展开，即

$$F_2^q(x,Q^2)=H_q^{(0)}\otimes\phi_{q/N}^{(0)}+\frac{\alpha_s}{2\pi}H_q^{(1)}\otimes\phi_{q/N}^{(0)}+\frac{\alpha_s}{2\pi}H_q^{(0)}\otimes\phi_{q/N}^{(1)}+\cdots \tag{6.23}$$

其中，$H_q^{(i)}$ 是微扰计算中第 i 阶的硬散射核；$\phi_{q/N}^{(i)}$ 是第 i 阶的部分子分布函数，符号 $\otimes$ 表示对部分子动量分数 ξ 的卷积，即

$$H_q\otimes\phi_{q/N}\equiv\int_x^1\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}H_q\left(x/\xi,Q,\mu\right)\phi_{q/N}(\xi,\mu) \tag{6.24}$$

式中，μ 为因子化能标；$\phi_{q/N}(\xi,\mu)$ 描述核子 N 中夸克 q 在能标 μ 时带动量 ξp 的几率；$H_q\left(x/\xi,Q,\mu\right)$ 是在相对 Bjorken 变量 x/ξ、动量转移 Q、能标 μ 时的硬散射核，为确定部分子动量分数 ξ 及相对 Bjorken 变量 x/ξ 有意义，ξ 的取值范围为 $x\leqslant\xi\leqslant 1$。

现在将式 (6.17) 中的各项分配至式 (6.23) 中的 $H_q^{(i)}$ 或 $\phi_{q/N}^{(i)}$。第一项 $\delta(1-x)$ 指定给 $H_q^{(0)}\otimes\phi_{q/N}^{(0)}$，其中 $H_q^{(0)}$ 和 $\phi_{q/N}^{(0)}$ 分别定义为

$$\begin{aligned}&H_q^{(0)}\left(x/\xi,Q,\mu\right)=\delta\left(1-x/\xi\right)\\&\phi_{q/N}^{(0)}(\xi,\mu)=\delta(1-\xi)\end{aligned} \tag{6.25}$$

式 (6.17) 中的第二项为红外有限的，指定给 $H_q^{(1)}\otimes\phi_{q/N}^{(0)}$，第三项是共线发散的，指定给 $H_q^{(0)}\otimes\phi_{q/N}^{(1)}$，其中 $H_q^{(1)}$ 和 $\phi_{q/N}^{(1)}$ 分别定义为

$$\begin{aligned}&H_q^{(1)}\left(x/\xi,Q,\mu\right)=P_{qq}^{(1)}(x)\ln\frac{Q^2}{\mu^2}+\mu-\text{independent}\\&\phi_{q/N}^{(1)}(\xi,\mu)=[4\pi\mu\exp(-\gamma_E)]^{\varepsilon}P_{qq}^{(1)}(\xi)\int_0^{Q^2}\frac{\mathrm{d}k_T^2}{k_T^{2+2\varepsilon}}\end{aligned} \tag{6.26}$$

$P_{qq}^{(1)}$ 为夸克分裂函数

$$P_{qq}^{(1)}(x)=C_Fx\left(\frac{1+x^2}{1-x}\right)_+ \tag{6.27}$$

式 (6.23) 左侧的结构函数为物理量，与因子化能标 μ 无关，该能标是在右侧因子化的过程中引入的，其任意性对应部分子分布函数和硬散射核之间红外有限项的任意移动，因子化能标角色和重整化能标类似，后者的任意性对应重整化常数和重整化算符之间紫外有限项的任意移动。以上共线发散和红外有限贡献的分配可推广至夸克结构函数的高阶修正，亦即可将夸克结构函数中的共线发散逐阶吸收

至部分子分布函数中，从而定义每一阶的部分子分布函数，并获致每一阶的硬散射核。

接下来说明，上述程序中定义的部分子分布函数可写成非定域的强子矩阵元。以图 6.8(a) 中离壳光子的顶角虚修正为例，设初态夸克旋量为 $u(p)$，带动量 $p=(p^+,0,\mathbf{0}_T)$，末态夸克带动量 $p'=(0,p'^-,\mathbf{0}_T)$，辐射胶子带圈动量 l，以上顶角修正的部分 Feynman 规则写为

$$I=\not{p}'\gamma^\nu\frac{\not{p}'+\not{l}}{(p'+l)^2}\gamma^\mu\frac{\not{p}+\not{l}}{(p+l)^2}\gamma_\nu u(p) \tag{6.28}$$

其中 $\not{p}'$ 来自末态夸克的 Feynman 规则，γ^μ 是光子顶角。当圈动量 l 和 p 共线时，分子 $\not{p}+\not{l}\approx(p^++l^+)\gamma^-$ 要求 $\gamma_\nu=\gamma^+$，因为 $(\gamma^-)^2=0$，且 $\gamma_\nu=\gamma^\perp$ 时，$(p^++l^+)\gamma^-$ 中的 γ^- 可与 $\gamma^\perp$ 交换，作用于旋量 $u(p)$，由运动方程式 $\not{p}u(p)=0$ 可知 $\gamma^-u(p)=0$。于是式 (6.28) 近似为

$$\begin{aligned}I\approx&\not{p}'\gamma^-\frac{\not{p}'+\not{l}}{(p'+l)^2}\gamma^\mu\frac{\not{p}+\not{l}}{(p+l)^2}\gamma^+u(p)\\\approx&\not{p}'\gamma^-\frac{\not{p}'}{2p'\cdot l}\gamma^\mu\frac{\not{p}+\not{l}}{(p+l)^2}\gamma^+u(p)\end{aligned} \tag{6.29}$$

第二行中已忽略分子中的 $l\approx l^+\gamma^-$ 及分母中的 $l^2\ll 2p'\cdot l$。利用恒等式 $\gamma^-\not{p}'=2p'^-\gamma^--\not{p}'\gamma^-$ 及 $\not{p}'\not{p}'=p'^2=0$，式 (6.29) 推得

$$I\approx\not{p}'\gamma^\mu\frac{\not{p}+\not{l}}{(p+l)^2}\gamma^+\frac{p'^-}{p'\cdot l}u(p)=\not{p}'\gamma^\mu\frac{\not{p}+\not{l}}{(p+l)^2}\gamma_\nu\frac{n_-^\nu}{n_-\cdot l}u(p) \tag{6.30}$$

其中无量纲向量 $n_-=(0,1,\mathbf{0}_T)$ 和 p' 平行，因子 n_-^ν 和 $1/n_-\cdot l$ 分别称为程函 (eikonal) 顶角及程函传播子，后者在图 6.8(b) 中以双线表示。在此强调，式 (6.30) 的近似结果也适用于 $l\to 0$ 的软胶子。

然后验证式 (6.30) 中程函化末态夸克的 Feynman 规则，可由以下的 Wilson 连结推得：

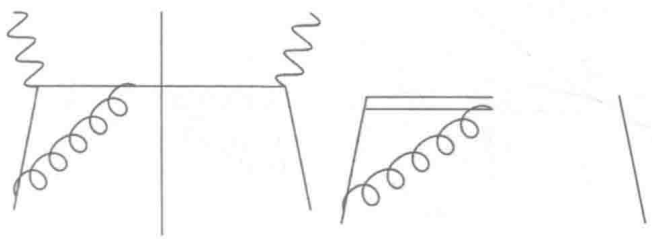
$$W(0)=P\exp\left[-\mathrm{i}g\int_0^\infty \mathrm{d}zn_-\cdot A(zn_-)\right] \tag{6.31}$$

其中 P 意指路径有序 (path-ordered) 的指数，Wilson 连结的性质类似带色荷的标量粒子。考虑 $W(0)$ 的路径有序指数次领头阶的展开，并将坐标空间中的规范场傅里叶变换到动量空间

$$-\mathrm{i}g\int_0^\infty \mathrm{d}zn_-\cdot\int \mathrm{d}^4l\exp\left[\mathrm{i}z\left(n_-\cdot l+\mathrm{i}\varepsilon\right)\right]\tilde{A}(l)$$

$$
\begin{aligned}
&= -\mathrm{i}g\int \mathrm{d}^4 l \frac{\exp\left[\mathrm{i}z\left(n_-\cdot l+\mathrm{i}\varepsilon\right)\right]}{\mathrm{i}\left(n_-\cdot l+\mathrm{i}\varepsilon\right)}\Big|_{z=0}^{z=\infty} n_-\cdot \tilde{A}(l) \\
&= \int \mathrm{d}^4 l \frac{g n_-^\nu}{n_-\cdot l+\mathrm{i}\varepsilon}\tilde{A}_\nu(l)
\end{aligned} \tag{6.32}
$$

其中已引入因子 $\mathrm{i}\varepsilon(\varepsilon\to 0)$ 以压低来自 $z=\infty$ 处的贡献。规范场 $\tilde{A}(l)$ 和来自具相互作用的初态夸克释放出的规范场收缩，形成图 6.8(b) 中的胶子传播子 $-\mathrm{i}/(l^2+\mathrm{i}\varepsilon)$。余下的 $n_-^\nu/n_-\cdot l$ 即为式 (6.29) 中程函顶角及程函传播子。



(a) (b)

图 6.8 离壳光子的顶角虚修正 (a) 及其程函近似 (b)

从末态夸克分离共线胶子后，费米子流仍然连接部分子分布函数和硬散射核，欲因子化费米子流，可插入 Fierz 恒等式

$$
\begin{aligned}
I_{ij}I_{lk} =& \frac{1}{4}I_{ik}I_{lj}+\frac{1}{4}(\gamma_\alpha)_{ik}(\gamma^\alpha)_{lj}+\frac{1}{4}(\gamma^5\gamma_\alpha)_{ik}(\gamma^\alpha\gamma^5)_{lj} \\
&+\frac{1}{4}(\gamma^5)_{ik}(\gamma^5)_{lj}+\frac{1}{4}(\gamma^5\sigma_{\alpha\beta})_{ik}(\sigma^{\alpha\beta}\gamma^5)_{lj}
\end{aligned} \tag{6.33}
$$

其中 I 为单位矩阵，$\sigma_{\alpha\beta}=\mathrm{i}[\gamma_\alpha,\gamma_\beta]/2$。下标 i，j，k，l 已注明于图 6.9 中，上式左侧表示原来夸克结构函数 Feynman 图中 $j\to i$ 及 $k\to l$ 的费米子流，右侧表示因子化后新的 $j\to l$ 及 $k\to i$ 的费米子流，即部分子分布函数费米子流 $(j\to l)$ 和硬散射核费米子流 $(k\to i)$ 的分离。改变费米子流的代价是式 (6.33) 左侧的一项产生右侧的五项自旋投影算符，但考虑核子的对称性后，包含 γ_5 的后三项并无贡献，有贡献的项则对应不同幂次的核子矩阵元，在高能极限下且核子动量已选择在光锥方向时，只领头幂次项，即 $(\gamma_\alpha)_{ik}(\gamma^\alpha)_{lj}/4$ 中的 $(\gamma^-)_{ik}(\gamma^+)_{lj}/4$ 有贡献，其中 $(\gamma^+)_{lj}/2$ 纳入部分子分布函数的定义，$(\gamma_\alpha)_{ik}/2\approx(\gamma^-)_{ik}/2$ 纳入硬散射核的计算，式 (6.33) 中的其他项属于幂次压低的贡献。

至于部分子分布函数和硬散射核之间颜色流的因子化，可插入类似的恒等式

$$
I_{ij}I_{lk}=\frac{1}{N_c}I_{ik}I_{lj}+2(T^c)_{ik}(T^c)_{lj} \tag{6.34}
$$

其中 I 为 3×3 单位矩阵，T^c 为颜色矩阵，下标 i，j，k，l 仍如图 6.9 中所注明的。上式左侧表示原来夸克结构函数 Feynman 图中 $j\to i$ 及 $k\to l$ 的颜色流，右侧表示因子化后新的 $j\to l$ 及 $k\to i$ 的颜色流，即部分子分布函数颜色流 $(j\to l)$ 和硬散射核颜色流 $(k\to i)$ 的分离。改变颜色流的代价是式 (6.34) 左侧的一项产生右侧的两项，第一项贡献至目前考虑的组态，其中末态切线前后的价夸克处于颜色的单重态，结构 I_{lj}/N_c 纳入部分子分布函数的定义，I_{ik} 纳入硬散射核的计算；式 (6.34) 的第二项贡献至价夸克的八重态，这八重态的价夸克伴随来自核子的胶子部分子，共同参与硬散射过程，给出三部分子分布函数的贡献，也属于次领头幂次的贡献。

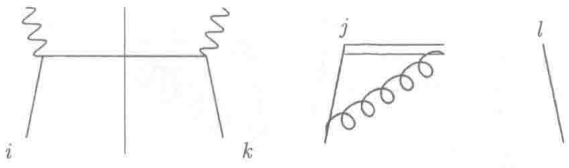


图 6.9　费米子流的因子化

经过以上夸克结构函数 Feynman 图中共线发散的抽取及其因子化的推导过程，可定义如下非定域强子矩阵元形式的核子部分子分布函数

$$\begin{aligned}\phi_{q/N}(\xi,\mu)=&\int\frac{\mathrm{d}y^-}{2\pi}\exp\left(-\mathrm{i}\xi p^+y^-\right)\\&\times\frac{1}{2}\sum_{\sigma}\langle N(p,\sigma)|\,\bar{q}\left(0,y^-,0_T\right)\\&\frac{1}{2}\gamma^+W\left(y^-,0\right)\,q\left(0,0,0_T\right)|N(p,\sigma)\rangle\end{aligned}\tag{6.35}$$

其中 y^- 为末态切线右方的夸克场坐标的负分量，第一个 $1/2$ 的因子源于核子自旋的平均，矩阵 $\gamma^+/2$ 是来自式 (6.33) 中 Fierz 恒等式的自旋投影算符；Wilson 连结 $W(y^-,0)$ 表示 $W(0)$ 和 $W(y^-)$ 共轭变换的乘积，$W(0)$ 已定义于式 (6.31)，$W(y^-)$ 则定义为

$$W(y^-)=P\exp\left[-\mathrm{i}g\int_0^\infty\mathrm{d}zn_-\cdot A(y^-+zn_-)\right]\tag{6.36}$$

式 (6.35) 中的两个夸克场的坐标间隔一段距离，因此需要 Wilson 连结使得非定域的强子矩阵元满足规范不变性。如之前的推导，Wilson 连结的出现是末态夸克与共线胶子作用后程函化的结果，第二段 Wilson 连结 $W(y^-)$ 的共轭变换给出末态切线右侧的程函线的 Feynman 规则，如图 6.10 所示，在这例子中，次领头阶展开

的路径积分下限 $z=0$ 给出额外的指数因子 $\exp(\mathrm{i}l^+y^-)$：

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}g\int_0^\infty \mathrm{d}zn_-\cdot\int \mathrm{d}^4l\exp\left[\mathrm{i}y^-l^+ +\mathrm{i}z\left(n_-\cdot l+\mathrm{i}\varepsilon\right)\right]\tilde{A}(l)\\ =&\mathrm{i}g\int \mathrm{d}^4l\frac{\exp\left[\mathrm{i}y^-l^+ +\mathrm{i}z\left(n_-\cdot l+\mathrm{i}\varepsilon\right)\right]}{\mathrm{i}\left(n_-\cdot l+\mathrm{i}\varepsilon\right)}\Big|_{z=0}^{z=\infty}n_-\cdot\tilde{A}(l)\\ =&-\int \mathrm{d}^4l\frac{gn_-^\nu}{n_-\cdot l+\mathrm{i}\varepsilon}\exp\left(\mathrm{i}l^+y^-\right)\tilde{A}_\nu(l)\end{aligned}\tag{6.37}$$

这指数因子和式 (6.35) 中的指数因子 $\exp(-\mathrm{i}\xi p^+y^-)$ 合并成 $\exp[-\mathrm{i}(\xi p^+-l^+)y^-]$，意指末态切线右侧的价夸克 $q(0,y^-,0_T)$ 带纵向动量 ξp^+-l^+。结论是，第一段 Wilson 连结对应圈动量 l 未流经硬散射核的组态，如图 6.8 示；第二段 Wilson 连结对应圈动量 l 流经硬散射核的组态，如图 6.10 所示，以上讨论确认了部分子分布函数中 Wilson 连结的定义。

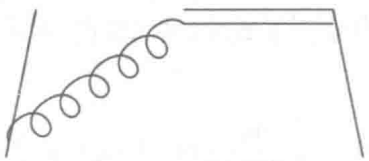


图 6.10 离壳光子顶角实修正的程函近似

式 (6.35) 中的核子部分子分布函数在次领头阶的虚胶子修正如图 6.11 所示，实胶子修正如图 6.12 所示。图 6.11(a) 吸收了 QCD Feynman 图 6.7(c) 中的共线发散，图 6.11(b) 吸收了图 6.7(b) 中的共线发散，图 6.12(a) 吸收了图 6.7(f) 中的共线发散，图 6.12(b) 吸收了图 6.7(d) 中的共线发散；图 6.11(c) 和图 6.12(c) 没有贡献，因为其 Feynman 规则正比于 $n_-^2=0$，这对应的正是与末态夸克相关的红外发散因 KLN 定理而消去的结果。式 (6.35) 只依赖于核子的性质，和核子参与的硬散射过程无关，所以部分子分布函数具有普适性，普适性赋予因子化定理强大的预言能力，是因子化定理最重要的内涵。

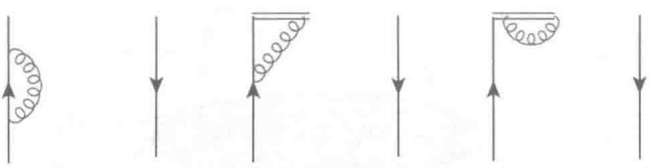


图 6.11 夸克部分子分布函数的单圈虚胶子修正

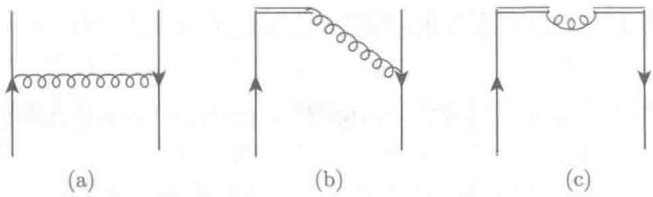


图 6.12　夸克部分子分布函数的单圈实胶子修正

经过动量空间、费米子流、颜色流的完整因子化处理后，并考虑其他种类部分子的贡献，譬如不同味道的价夸克，核子深度非弹性散射的结构函数写为

$$F_2(x,Q^2)=\sum_f\int_x^1\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}H_f\left(x/\xi,Q,\mu\right)\phi_{f/N}(\xi,\mu) \tag{6.38}$$

式中的共线因子化如图 6.13 所示，其中下标 f 标记部分子的味道，包括价夸克、胶子及海夸克；硬散射核 H_f 可依循共线发散的减除步骤而得，其价夸克贡献的领头阶及次领头阶表达式已分别列于式 (6.25) 和式 (6.26)。胶子部分子分布函数定义为

$$\begin{aligned}\phi_{g/N}(\xi,\mu)=&\int\frac{\mathrm{d}y^-}{2\pi xp^+}\exp\left(-\mathrm{i}\xi p^+y^-\right)\\&\times\frac{1}{2}\sum_\sigma\langle N(p,\sigma)|\,F^{+\mu}\left(0,y^-,0_T\right)\\&W\left(y^-,0\right)\,F_\mu^+\left(0,0,0_T\right)|N(p,\sigma)\rangle\end{aligned} \tag{6.39}$$

其中 F 为规范场强度，因为不需因子化费米子流，自旋投影算符并未出现。具有普适性的部分子分布函数 $\phi_{f/N}$ 描述部分子 f 携带核子动量分数 ξ 的概率，其平滑的函数模型必须通过非微扰方法得到，或从实验数据中抽取。

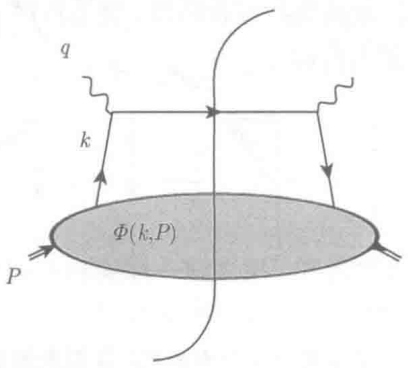


图 6.13　核子深度非弹性散射结构函数的因子化

式 (6.38) 中共线因子化公式的全阶证明是非常复杂的，譬如 QCD non-Abelian 规范场论的特性在双圈图的分析中开始体现，以上单圈图的分析其实也适用于 Abelian 规范场论的量子电动力学 (QED)，达到双圈图的精度时，必须考虑三胶子顶点的贡献，亦即必须考虑完整的规范不变集合中所有的 Feynman 图后，共线发散在颜色流空间中才能因子化。原则上，应用某共线因子化公式之前，应该先检验其是否成立，一些简单 QCD 过程共线因子化公式的全阶证明，请参阅相关文献 [4]，本书中将不予详述。

6.3 重整化群与因子化定理的应用

6.2 节中推得的深度非弹性散射因子化定理与大家熟知的部分子模型一致：核子在受到虚光子撞击之前行进了极长的时空，当动量转移平方 Q^2 远大于 QCD 能标时，硬散射发生于点时空，核子中的在壳夸克因为分布在极大的时空中，相对而言，夸克在发生硬散射时的行为类似自由粒子，和核子其余的组分去耦。核子深度非弹性散射的截面原本写为对所有部分子组态的同调求和，在共线因子化定理中简化为对部分子组态的非同调求和，如图 6.14 所示，亦即以下的近似表达式成立

$$\left|\sum_f M_{f/N}\right|^2 \approx \sum_f |M_f|^2 \phi_{f/N} \tag{6.40}$$

其中 $M_{f/N}$ 表示核子 N 中的部分子组态 f 的散射至任意末状态的振幅 (f 可能是一个多部分子组态)，M_f 表示部分子组态 f 红外有限的散射振幅；上式左侧表示对所有核子部分子组态的同调求和，右侧表示对所有部分子组态考虑分布几率权重的非同调求和。

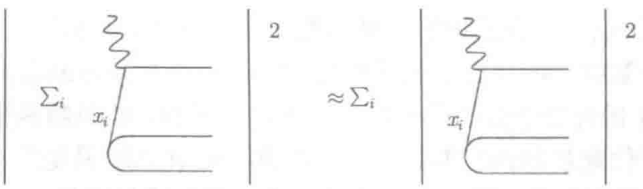


图 6.14 因子化定理等同于对部分子组态的非同调求和

比较因子化定理和作用子乘积展开 (operator product expansion)，后者涉及在短距离 $y^\mu \sim 0$ 的展开，一个典型的例子是红外安全的 $e^-e^+ \to X$ 的过程，其截面可表为级数 $\sigma \approx \sum_i C_i(y)O_i(0)$，其中 Wilson 系数 C_i 和定域等效算符 O_i 在作用子乘积展开中以乘积的形式出现；因子化公式则涉及趋近光锥区域 $y^2 \approx 0$ 的展开，而非短距离 $y^\mu \sim 0$ 的展开，典型的例子是深度非弹性散射的结构函数，其蕴

含的共线发散意指部分子可行进一段有限的纵向距离 y^-，这也解释了为何硬散射核 H_f 和部分子分布函数 $\phi_{f/N}$ 在动量分数空间中以卷积的形式出现。

如式 (6.38) 所示，左侧核子结构函数的 QCD Feynman 图中不存在因子化能标 μ，上节已阐述，因子化物理量的过程中，将 μ 引入了硬散射核 H_f 和部分子分布函数 $\phi_{f/N}$，于是 H_f 的高阶修正产生对数 $\ln(Q/\mu)$，$\phi_{f/N}$ 的高阶修正产生对数 $\ln(\mu/Q_0)$，其中 Q_0 是 $\phi_{f/N}$ 的特征能标，约为 QCD 标度的数量级。这两种对数源于结构函数 F_2 中对数 $\ln(Q/Q_0)=\ln(Q/\mu)-\ln(\mu/Q_0)$ 的拆解，前者由硬散射核吸收，后者由部分子分布函数吸收。通常设 $\mu=Q$，消去 H_f 中的对数，于是应用共线因子化公式时，需要在任意 Q 值的非微扰输入 $\phi_{f/N}(\xi,Q)$。

物理量与因子化能标无关性

$$\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}F_2(x,Q^2)=0 \tag{6.41}$$

导致一组重整化群方程式

$$\begin{aligned}\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\phi_{f/N}(\xi,\mu)&=\gamma_f\phi_{f/N}(\xi,\mu)\\ \mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}H_f(x/\xi,Q,\mu)&=\gamma_f H_f(x/\xi,Q,\mu)\end{aligned} \tag{6.42}$$

其中 γ_f 表示部分子分布函数的反常量纲，其实就是 $\phi_{f/N}(\xi,\mu)$ 中共线发散的系数，类似一般重整化群方程式中的反常量纲，是紫外发散的系数。以上重整化群方程式的解描述部分子分布函数随 Q 值的演化

$$\phi_{f/N}(\xi,Q)=\phi_{f/N}(\xi,Q_0)\exp\left[\int_{Q_0}^{Q}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}\gamma_f(\alpha_s(\mu))\right] \tag{6.43}$$

上式是对数 $\ln(Q/Q_0)$ 全阶求和的结果，联系 $\phi_{f/N}(\xi,Q)$ 与初始条件 $\phi_{f/N}(\xi,Q_0)$，因此仅需从实验数据抽取定义在初始能标 Q_0 的部分子分布函数 $\phi_{f/N}(\xi,Q_0)$，在其他较高标度 Q 的部分子分布函数则可经由演化求得，亦即纳入重整化群的演化效应可提升因子化定理的预言能力。在此强调，式 (6.43) 只是为说明方便、形式上的演化方程式的解，部分子分布函数遵循的其实是较复杂的 Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi (DGLAP) 方程式[5]，在第 7 章中会详细介绍。

某些高能量过程的 QCD 机制据信已了解透彻，譬如式 (6.38) 中深度非弹性散射的结构函数，其因子化已被证明在所有幂次都成立。以微扰计算结果输入因子化公式中的硬散射核，然后将因子化公式与这些过程的实验数据拟合，数个研究群已抽取了质子中在初始能标不同味道的部分子分布函数。初始能标选择当然是任意的，其值应足够低，以极大化部分子分布函数在高能标的应用范围，但必须足够

高，以确保微扰演化方程式的可信度，CTEQ 研究群设定初始能标 $Q_0 = 1.3\text{GeV}$ 应是合理的选择。图 6.15 左侧显示的是以精确至次领头阶 (虚线) 和次次领头阶 (实线) 的硬散射核为输入，数据拟合后抽取而得的、并演化至能标 $Q = 2\text{GeV}$ 的 CTEQ-TEA CT10 部分子分布函数模型 $x\phi_{f/N}(x,Q)$[6,7]。如预期的，价夸克的部分子分布函数主要集中在有限 $x \sim O(0.1)$ 的区域；胶子和海夸克部分子分布函数随动量分数 x 递减而上升的现象，归因于部分子必须产生较多的辐射才能降低其动量分数。图 6.15 右侧显示的是部分子分布函数演化至 $Q = 85\text{GeV}$ 的结果，比较图 6.15 的左侧和右侧，可观察到价夸克的部分子分布随 Q 值的增加而变低变宽，胶子和海夸克部分子分布函数则随 Q 值的增加而变大，亦即演化效应将价夸克的动量转移至因辐射而产生的胶子和海夸克。

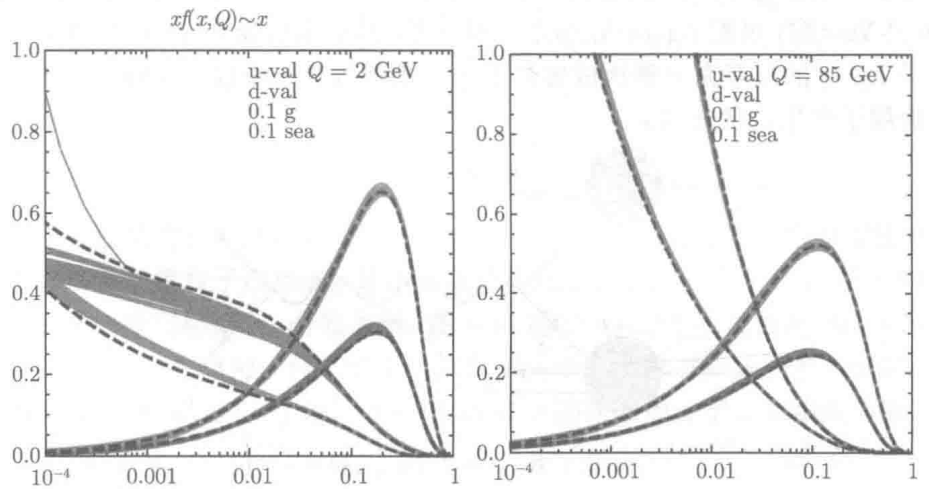


图 6.15 不同标度下的 CTEQ 部分子分布函数模型

关于部分子分布函数的微扰计算，值得一提的是其红外发散正则子 (regulator) 的选择和一般 Feynman 圈图计算中紫外发散正则子的选择同样是任意的，亦即可以将任意的有限量并入 $\phi_{f/N}^{(1)}$ 中的红外奇点 $1/(-\varepsilon)$，H_f 和 $\phi_{f/N}$ 之间不同有限量的移动对应于不同的因子化方案 (scheme)，譬如式 (6.26) 中的 $H_q^{(1)}$ 可加上某常数，$\phi_{q/N}^{(1)}$ 可减去此常数，不影响和式 (6.23) 左侧夸克结构函数的相等关系。在因子化方案 1 和因子化方案 2 下定义的部分子分布函数满足如下关系：

$$\phi_2(x,\mu_2) = \int_x^1 \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} C\left(x/\xi,\mu_2,\mu_1\right)\phi_1(\xi,\mu_1) \tag{6.44}$$

其中 C 是红外有限的函数，因为 $\phi_1(\xi,\mu_1)$ 和 $\phi_2(\xi,\mu_2)$ 具有共线发散。部分子分布函数的抽取不仅和计算 QCD Feynman 图的阶数与幂次有关，也和采用的因子化

方案有关，因为微扰计算只能进行至有限的阶数及幂次，因子化方案的相依性是无可避免的，但如果所有的计算都采用一致的因子化方案，原则上可以极小化微扰量子色动力学的因子化方案相依性。在应用部分子分布函数的模型之前，必须检视决定此模型的阶数、幂次、初始能标和因子化方案，才能获致合理的预言。

最后解释如何应用因子化定理预言其他 QCD 过程的物理量。之前已说明，因为禁闭机制，以微扰方法计算核子部分子分布函数 $\phi_{f/N}$ 将产生红外发散，深度非弹性散射结构函数的 QCD Feynman 图以夸克和胶子作为外线，其微扰计算也产生红外发散，两者的红外发散相消，夸克结构函数的 Feynman 图和部分子分布函数的 Feynman 图之间的差定义了硬散射核。简单得说，推得式 (6.38) 后，将实验数据输入左侧的结构函数 F_2，将微扰计算的硬散射核输入右侧的 H_f，原则上可解得部分子分布函数 $\phi_{f/N}$。然后推导其他过程物理量的因子化公式，譬如图 6.16 中的 Drell-Yan(颜) 过程 $h_A(p_1)h_B(p_2) \to \ell\bar{\ell} + X$，其中来自强子 h_A 中的夸克 q 和来自强子 h_B 中的反夸克 $\bar{q}$ 湮灭成虚光子 $\gamma*$，然后虚光子生成正反轻子对 $\ell\bar{\ell}$。过程中其余粒子产生末状态 X。

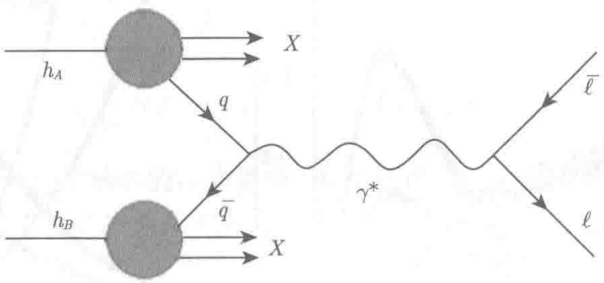


图 6.16　Drell-Yan 过程

计算 Drell-Yan 过程截面相应的硬散射核 H^{DY} 时，重点是证明夸克 Drell-Yan 过程的 Feynman 图和核子部分子分布函数的 Feynman 图中的红外发散相消，它们之间的差 H^{DY} 是红外有限的，若能证得以上结果，核子部分子分布函数的普适性成立，可应用因子化定理于 Drell-Yan 过程的研究；若不能证得以上结果，因子化定理失效。证明 Drell-Yan 过程的因子化定理后，即可利用图 6.17 中所示的因子化公式

$$\sigma^{\mathrm{DY}} = \phi_{f_1/N} \otimes H^{\mathrm{DY}} \otimes \phi_{f_2/N} \tag{6.45}$$

预言此过程的截面，其中相同核子的部分子分布函数 $\phi_{f_{1,2}/N}$ 是已知的输入，来自深度非弹性散射数据的抽取，H^{DY} 是可以微扰方法计算的。

以上是利用简单的深度非弹性散射和 Drell-Yan 过程说明如何应用前者的因子化定理从数据中抽取核子部分子分布函数，如何应用后者的因子化定理预言 Drell-Yan 过程的截面，实际的操作远比上述的复杂许多，Drell-Yan 过程其实也

被视为 QCD 机制已透彻了解的类别，其实验数据已纳入部分子分布函数抽取的程序；Drell-Yan 过程因为涉及正反夸克的湮灭反应，对反夸克即海夸克部分子分布函数的信息较深度非弹性散射来得敏锐。所以，对不同过程的数据进行全局拟合 (global fit) 是必要的，目前部分子分布函数全局拟合的工作正由数个颇具规模的合作群推动，图 6.15 中引用的部分子分布函数模型即来自其中的 CTEQ 合作群。

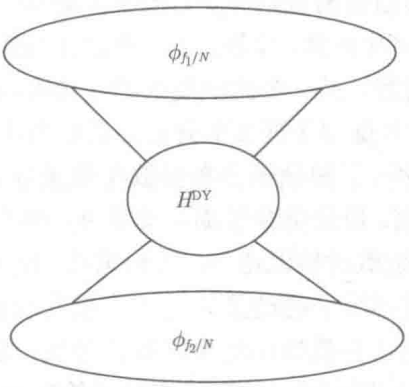


图 6.17 Drell-Yan 过程的因子化定理

粒子喷注是高能对撞实验中常见的事例，它由硬散射过程中产生的高能粒子连续辐射许多低能量粒子而形成，具体图像是从硬散射顶点以锥状喷出的一束粒子。以单举喷注的横向动量 p_T 分布为例，图 6.18 展示 ATLAS 实验数据与理论预言的比值[7]，搜集的喷注事例已设定喷注半径为 $R = 0.6$，分布在中央快度 (rapidity) 的范围 $0 < |y| < 3$，以 CTEQ 合作群 CT10NNLO 的质子部分子分布函数为输入，结果在大范围的 p_T 中明显吻合比值为 1，亦即因子化定理的预言与数据相当符合，说明因子化定理的预言能力。

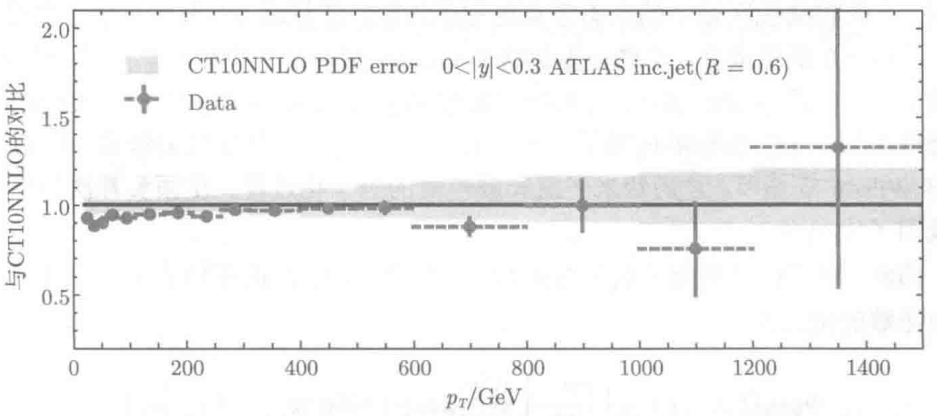


图 6.18 因子化定理的预言与单举喷注 p_T 分布数据的比较

6.4　k_T 因子化

以上数节中介绍的共线因子化定理已被透彻研究，并广泛应用于许多 QCD 过程高阶数和高幂次的分析，部分子分布函数从低至高因子化能标演化由 DGLAP 方程式决定，部分子分布函数的数据库已经建立，譬如 CTEQ 模型，其他非微扰输入函数，诸如软函数、喷注函数、碎裂函数，都已详细探讨。然而，针对某些特殊的运动学区域或半单举过程，另一个比较复杂的理论架构——k_T 因子化定理可能更为适当。共线因子化定理适用于深度非弹性散射在有限 Bjorken 变量 x 的测量，其截面可写为硬散射核和核子部分子分布函数在动量分数 ξ 上的卷积，当 $x \to 0$ 时，$\xi \geqslant x$ 可以是很小的值，以致部分子横向动量 k_T 和纵向动量 ξp 有相同的数量级，因此不可忽略，一旦硬散射核保留 k_T 的相关性，便需要一个横动量相关的函数 $\Phi(\xi, k_T, \mu)$ 以同时描述部分子在动量分数 ξ 及横向动量 k_T 上的分布；k_T 因子化定理亦可应用于末态粒子在低横向动量区域的分布，譬如直接光子和喷注在低横向动量区域的分布，在这区域中 k_T 和末态粒子的横向动量 p_T 约为相同的数量级，所以也不可忽略。目前对共线因子化定理已有深入的研究和了解，但对于 k_T 因子化定理，仍存在许多不清楚的面向性质值得探讨。

在 k_T 因子化定理中，因为保留部分子的横向动量 k_T，分析夸克层级的结构函数时，部分子动量可参数化为 $k = (\xi p^+, 0, \boldsymbol{k}_T)$，亦即部分子带有少量离壳的不变质量 $-k_T^2$，于是与此部分子平行运动的共线胶子产生的共线发散正则化为 $\ln k_T^2$。共线胶子的辐射不仅改变部分子的纵向动量，也同时产生横向动量的相依性，k_T 因子化的目标便是将所有夸克结构函数中的共线发散 $\ln k_T^2$ 吸收至横动量相关的部分子分布函数 $\Phi(\xi, k_T, \mu)$。横动量相关分布函数的因子化程序和部分子分布函数的类似，也依赖共线区域中的末态夸克的程函近似，若忽略 γ^ν 垂直分量的次领头贡献，式 (6.29) 仍然成立；若进一步忽略 Feynman 规则分子中圈动量垂直分量 l_T 的次领头贡献，式 (6.30) 成立，这意味在忽略 Feynman 规则分子中 l_T 的近似下，可推得程函顶角 n_-^ν 和程函传播子 $1/n_- \cdot l$，亦即程函近似仍导致类似式 (6.31) 中定义的 Wilson 连结[8]。之后费米子流和颜色流的因子化过程，在领头幂次的层次和共线因子化相同。

因此，对于横动量相关的分布函数，一个简单的、直接延伸式 (6.35) 中部分子分布函数的定义是

$$\Phi_{q/N}(\xi, k_T, \mu) = \int \frac{\mathrm{d}y^-}{2\pi} \int \frac{\mathrm{d}^2 y_T}{(2\pi)^2} \exp\left(-\mathrm{i}\xi p^+ y^- + \mathrm{i}\boldsymbol{k}_T \cdot \boldsymbol{y}_T\right) \times \frac{1}{2} \sum_\sigma \langle N(p,\sigma) | \, \bar{q}\left(0, y^-, y_T\right)$$

$$\frac{1}{2}\gamma^+ W\left(y^-, y_T; 0, 0_T\right) q\left(0, 0, 0_T\right) |N(p,\sigma)\rangle \tag{6.46}$$

其中 Wilson 连结表示为

$$W(y^-, y_T; 0, 0_T) \equiv W(y^-, y_T) I_{0,y_T} W(0, 0_T) \tag{6.47}$$

$W(0, 0_T)$ 的表达式见式 (6.31)，第二段 Wislon 连结 $W(y^-, y_T)$ 则写为

$$W(y^-, y_T) = P \exp\left[-\mathrm{i}g \int_0^\infty \mathrm{d}z n_- \cdot A(y^- + z n_-, y_T)\right] \tag{6.48}$$

因为横动量相关分布函数中末态切线前后的价夸克场分隔一个横向距离，为形成封闭的 Wislon 连结以维持横动量相关分布函数的规范不变性，另外需要两段位于 $y^- = \infty$ 的垂直连结 I_{0,y_T}，一段从 $y_T = 0$ 延伸至 $y_T = \infty$，另一段从 $y_T = \infty$ 回到 y_T，如图 6.19 所示。

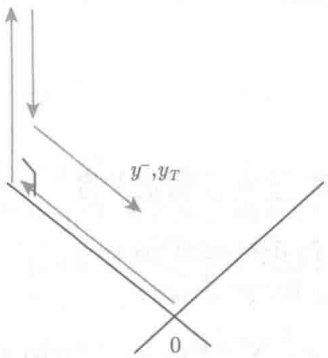


图 6.19 横动量相关分布函数的 Wilson 连结

式 (6.48) 的共轭变换给出末状态切线右侧的程函线的 Feynman 规则，另外领头阶展开的路径积分下限 $z = 0$ 产生额外的指数因子 $\exp(\mathrm{i}l^+ y^- - \mathrm{i}\boldsymbol{l}_T \cdot \boldsymbol{y}_T)$：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{i}g \int_0^\infty \mathrm{d}z n_- \cdot \int \mathrm{d}^4 l \exp\left[\mathrm{i}y^- l^+ + \mathrm{i}z\left(n_- \cdot l + \mathrm{i}\varepsilon\right) - \mathrm{i}\boldsymbol{y}_T \cdot \boldsymbol{l}_T\right] \tilde{A}(l) \\
=&\mathrm{i}g \int \mathrm{d}^4 l \frac{\exp\left[\mathrm{i}y^- l^+ + \mathrm{i}z\left(n_- \cdot l + \mathrm{i}\varepsilon\right) - \mathrm{i}\boldsymbol{y}_T \cdot \boldsymbol{l}_T\right]}{\mathrm{i}\left(n_- \cdot l + \mathrm{i}\varepsilon\right)}\Bigg|_{z=0}^{z=\infty} n_- \cdot \tilde{A}(l) \\
=&-\int \mathrm{d}^4 l \frac{g n_-^\nu}{n_- \cdot l + \mathrm{i}\varepsilon} \exp\left(\mathrm{i}l^+ y^- - \mathrm{i}\boldsymbol{l}_T \cdot \boldsymbol{y}_T\right) \tilde{A}_\nu(l)
\end{aligned} \tag{6.49}$$

这指数因子和式 (6.46) 中的指数因子 $\exp(-\mathrm{i}\xi p^+ y^- + \mathrm{i}\boldsymbol{k}_T \cdot \boldsymbol{y}_T)$ 合并成 $\exp[-\mathrm{i}(\xi p^+ - l^+) y^- + \mathrm{i}(\boldsymbol{k}_T - \boldsymbol{l}_T) \cdot \boldsymbol{y}_T]$，意指末状态切线右侧的价夸克 $q(0, y^-, y_T)$ 带动量 $(\xi p^+ - l^+, 0, \boldsymbol{k}_T - \boldsymbol{l}_T)$，亦即第二段 Wilson 连结对应圈动量 l 流经硬散射核的组态。

关于垂直 Wilson 连结贡献的探讨可参考文献 [9]，简而言之，位于 $y^- = \infty$ 处的垂直连结在协变规范 $\partial \cdot A = 0$ 下，因为傅里叶指数 $\exp(-il^+y^-)$ 快速振荡相消而无贡献；在光锥规范 $n_- \cdot A = A^+ = 0$ 下，图 6.19 中与光锥平行的两段 Wilson 连结消失，但价夸克辐射出的胶子仍可附着于垂直的 Wilson 连结之上，而胶子传播子正比于

$$\frac{1}{l^2}\left(g^{\mu\nu} - \frac{n_-^\mu l^\nu + n_-^\nu l^\mu}{n_- \cdot l}\right) \tag{6.50}$$

因为 $n_- \cdot l = l^+ = 0$ 处的奇点，傅里叶指数振荡相消的效应不存在，

$$\lim_{y^- \to \infty} \frac{\exp(\mathrm{i}l^+y^-)}{l^+} = 2\pi\mathrm{i}\delta(l^+) \tag{6.51}$$

于是附着于垂直连结上的辐射胶子产生贡献。垂直 Wilson 连结在不同规范下贡献的差异，对证明横动量相关分布函数的规范不变性至为重要。

核子深度非弹性散射的截面在 k_T 因子化定理中表为如下卷积

$$F_2(x, Q^2) = \sum_f \int_x^1 \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} \int \mathrm{d}^2 k_T H_f\left(x/\xi, k_T, Q, \mu\right) \Phi_{f/N}(\xi, k_T, \mu) \tag{6.52}$$

其中胶子横动量相关分布函数 ($f = g$) 的定义为

$$\begin{aligned} \Phi_{g/N}(\xi, k_T, \mu) = & \int \frac{\mathrm{d}y^-}{2\pi x p^+} \int \frac{\mathrm{d}^2 y_T}{(2\pi)^2} \exp\left(-\mathrm{i}\xi p^+ y^- + \mathrm{i}\boldsymbol{k}_T \cdot \boldsymbol{y}_T\right) \\ & \times \frac{1}{2} \sum_\sigma \langle N(p,\sigma)| F^{+\mu}\left(0, y^-, y_T\right) \\ & W\left(y^-, 0\right) F_\mu^+\left(0, 0, 0_T\right) |N(p,\sigma)\rangle \end{aligned} \tag{6.53}$$

若忽略式 (6.52) 中硬散射核 H_f 中的 k_T 相依性，可直接积分横动量相关分布函数中的 k_T 相依性，得到和部分子分布函数 $\phi_{f/N}(\xi, \mu)$ 有关的卷积

$$\int \mathrm{d}^2 k_T \Phi_{f/N}(\xi, k_T, \mu) = \int_x^1 \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} C\left(x/\xi, \mu, \mu_1\right) \phi_{f/N}(\xi, \mu_1) \tag{6.54}$$

其中 C 是红外有限的函数。在此强调，上式左侧并不等于 $\phi_{f/N}(\xi, \mu)$，因为先保留横动量相关分布函数中的 k_T 相依性，处理其圈图的重整化后，再将 k_T 积分掉的结果，与直接忽略 k_T 相依性，再处理圈图重整化的结果并不相同，相同的部分是式 (6.54) 左侧和 $\phi_{f/N}(\xi, \mu)$ 中的共线发散，所以两者通过与红外有限函数的卷积联系起来。

虽然我们需要 k_T 因子化定理，但该定理的许多面向性质仍未了解透彻，譬如式 (6.46) 中横动量相关分布函数的简单定义其实并非完全正确，因为当辐射胶子的动量和 Wilson 线方向 n_- 平行时，程函传播子 $1/n_-\cdot l = 1/l^+$ 在 $l^+ \to 0$ 的极限下产生所谓的光锥发散，这类型的红外发散在共线因子化定理中并不产生问题：注意式 (6.32) 中第一段 Wilson 连结的 Feynman 规则 (对应圈动量 l 未流经硬散射核的组态) 和式 (6.37) 中第二段 Wilson 连结的 Feynman 规则 (对应圈动量 l 流经硬散射核的组态) 相差负号，于是对 l^+ 的圈动量积分

$$\int \frac{\mathrm{d}l^+}{l^+}\left[H(x) - H(x + l^+/p^+)\right] \tag{6.55}$$

括号中的两项硬散射核在 $l^+ \to 0$ 时相消，以致光锥发散不存在于共线因子化定理中，亦即部分子分布函数并未包含额外的红外发散，正确描述了 QCD 过程中的非微扰机制。

但考虑部分子的横向运动自由度后，式 (6.55) 变成

$$\int \frac{\mathrm{d}l^+}{l^+}\left[H(x, k_T) - H(x + l^+/p^+, |\boldsymbol{k}_T + \boldsymbol{l}_T|)\right] \tag{6.56}$$

括号中的两项硬散射核在 $l^+ \to 0$ 且 $l_T \neq 0$ 时无法抵消，导致光锥发散存在于 k_T 因子化定理中。这发散并不存在于深度非弹性散射的 Feynman 图中，因为 $l^+ \to 0$ 且 $l_T \neq 0$ 的运动学区域对在壳胶子而言，意指极大的分量 $l^- \approx l_T^2/(2l^+) \to \infty$，所以光锥发散其实是与 Wilson 连结或末态夸克相关的共线发散；但由 KLN 定理已知，深度非弹性散射中并不存在这样的共线发散，以致夸克结构函数的 Feynman 图和横动量相关分布函数的 Feynman 图相减时，得到的硬散射核包含光锥发散，亦即无法对硬散射核进行微扰计算。光锥发散的引入是因为不恰当的因子化程序，换言之，是式 (6.46) 中的横动量相关分布函数并未正确地描述 QCD 过程中的非微扰机制。

横动量相关分布函数定义可能的修正方案是将 Wilson 线由光锥方向 n_- 旋转至其他方向 $n = (n^+, n^-, 0_T)$[1]，如图 6.20 所示，因为 n 带有加分量 n^+，$n^2 \neq 0$。这样的旋转是允许的，重复式 (6.30) 中的推导，可发现共线发散对 Wilson 线的方向其实并不敏感，即使将 n_- 旋转到 n，依然只有负分量 n^- 在共线发散的计算中产生作用：

$$\begin{aligned}
\not{p}'\gamma^\mu \frac{\not{p}+\not{l}}{(p+l)^2}\gamma_\nu \frac{n^\nu}{n\cdot l} =& \not{p}'\gamma^\mu \frac{\not{p}+\not{l}}{(p+l)^2}\frac{\gamma^+ n^- + \gamma^- n^+}{n^- l^+ + n^+ l^-} \\
\approx& \not{p}'\gamma^\mu \frac{\not{p}+\not{l}}{(p+l)^2}\frac{\gamma^+ n^-}{n^- l^+} = \not{p}'\gamma^\mu \frac{\not{p}+\not{l}}{(p+l)^2}\gamma_\nu \frac{n_-^\nu}{n_-\cdot l}
\end{aligned} \tag{6.57}$$

分子中可忽略 $\gamma^- n^+$，因为在共线区域中 $\not{p} + \not{l} \approx (p^+ + l^+)\gamma^-$ 且 $(\gamma^-)^2 = 0$，分母中可忽略 $n^+ l^-$，因为在共线区域中 $l^- \ll l^+$。一旦 $n^2 \neq 0$，当 $l^+ \to 0$ 且 $l_T \neq 0$ 时，$n \cdot l$ 不为零，光锥发散将被正则化为 $\ln n^2$。修正后的横动量相关分布函数定义为

$$\begin{aligned}\Phi_{q/N}(\xi, k_T, \mu) = \int \frac{\mathrm{d}y^-}{2\pi} \int \frac{\mathrm{d}^2 y_T}{(2\pi)^2} \exp\left(-\mathrm{i}\xi p^+ y^- + \mathrm{i}\boldsymbol{k}_T \cdot \boldsymbol{y}_T\right) \\ \times \frac{1}{2} \sum_\sigma \langle N(p,\sigma)| \bar{q}\left(0, y^-, y_T\right) \\ \frac{1}{2}\gamma^+ W_n\left(y^-, y_T; 0, 0_T\right) q\left(0, 0, 0_T\right) |N(p,\sigma)\rangle \end{aligned} \tag{6.58}$$

其中 Wilson 连结表示为

$$W_n(y^-, y_T; 0, 0_T) \equiv W_n(y^-, y_T) I_{0,y_T} W_n(0, 0_T) \tag{6.59}$$

第二段 Wilson 连结 $W_n(y^-, y_T)$ 写为

$$W(y^-, y_T) = P \exp\left[-\mathrm{i}g \int_0^\infty \mathrm{d}z n \cdot A(y^- + zn, y_T)\right] \tag{6.60}$$

由于 n 是任意向量，式 (6.58) 中的横动量相关分布函数无可避免地包含此任意性，这不意外，因为正则化任何发散都会引入类似的任意性，只须将不同的 n 视为对应不同的 k_T 因子化方案，并在所有的微扰计算中采取一致的方案即可。

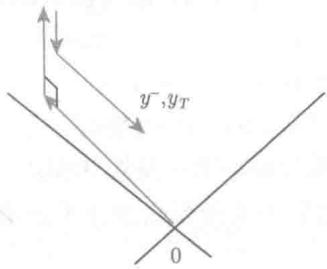


图 6.20　修正后横动量相关分布函数的 Wilson 连结

但式 (6.58) 仍不一定正确地描述深度非弹性散射中的非微扰机制，虽然将 Wilson 线由 n_- 旋转至其他方向 n 可以正则化光锥发散，但 $n^2 \neq 0$ 却使得横动量相关分布函数的次领头阶图 6.12 (c) 产生贡献。对于此图，类时方向 $n^2 > 0$ 的选择和类空方向 $n^2 < 0$ 的选择给出非常不同的结果，前者的确不再引入额外的红外发散，式 (6.58) 中的定义是适当的；后者则导致所谓的幂次发散，这发散的源头很容易理解：图 6.12 (c) 的 Feynman 规则包含

$$\frac{n^2}{(n^- l^+ + n^+ l^- + \mathrm{i}\varepsilon)(n^- l^+ + n^+ l^- - \mathrm{i}\varepsilon)} \tag{6.61}$$

将末态在壳胶子的条件 $\delta(l^2)$ 代入上式，即代入 $l^- = l_T^2/(2l^+) > 0$，此处类空条件 $n^2 = 2n^+n^- < 0$ 表示 n^+ 和 n^- 异号，于是当 $2n^-(l^+)^2 + n^+l_T^2 = 0$ 时，分母以平方的形式发散，这额外的发散显示式 (6.58) 并未正确描述深度非弹性散射中的非微扰机制。在此强调，旋转横动量相关分布函数中的 Wilson 线时，应将 n_- 转至类时的方向 n，此时 n^+ 和 n^- 同号，式 (6.61) 中的分母 $2n^-(l^+)^2 + n^+l_T^2$ 不为零。

最后，在共线因子化定理中，QCD 过程 Feynman 图中的外线因为只带纵向动量，都是在壳的，所以夸克-胶子层次 Feynman 图的结果是规范不变的；同时，部分子分布函数的 Feynman 图中只包含在壳的部分子，其结果也是规范不变的，于是，借由以上两者的差计算而得的硬散射核自然是规范不变的。硬散射核的规范不变性非常重要，因为利用共线因子化定理预言某 QCD 过程的截面时，是将硬散射核与部分子分布函数的模型卷积，而模型不包含任何规范相依性的信息，所以，硬散射核必须有规范不变性才能确保理论预言的规范不变性。k_T 因子化定理中保留横向动量 k_T 的自由度，部分子离壳 $-k_T^2$，于是夸克-胶子层次 Feynman 图的结果和横动量相关分布函数 Feynman 图的结果都是规范相依的。但可推论，计算硬散射核时，规范相依性将在以上两者的差中互相抵消，因为规范相依性是由离壳的部分子引起，离壳同时正则化共线发散，形成对数 $\ln k_T^2$；已知对数 $\ln k_T^2$ 在夸克-胶子层次 Feynman 图和横动量相关分布函数的差中完全抵消，所以规范相依性也随之消失，k_T 因子化定理中的硬散射核是规范不变的，有关这结论严谨的证明，请参阅文献 [10]。总之，k_T 因子化定理中仍存在许多未解之处及值得深究的课题。

参考文献

[1] Collins J C, Sterman G. Nucl. Phys. B, 1981, 185: 172; Collins J C, Soper D E. Nucl. Phys. B, 1982, 194: 445.

[2] Sterman G. An Introduction to Quantum Field Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

[3] Kinoshta T J. Math. Phys.,1962, 3: 650; Lee T D, Nauenberg M. Phys. Rev. B, 1964, 133: 1549.

[4] Li H N. Phys. Rev. D, 2001, 64: 014019.

[5] Gribov V N, Lipatov L N. Sov. J. Nucl. Phys., 1972, 15: 438; Altarelli G, Parisi G. Nucl. Phys. B, 1977, 126: 298; Dokshitzer Y L. Sov. Phys. JETP, 1977,46: 641.

[6] Lai H L, et al. Phys. Rev. D, 2010, 82: 074024.

[7] Nadolsky P, et al. arXiv:1206.3321 [hep-ph].

[8] Nagashima M, Li H N. Phys. Rev. D, 2003, 67: 034001.

[9] Cherednikov I O, Stefanis N G. Nucl. Phys. B, 2008, 802: 146.

[10] Nandi S, Li H N. Phys. Rev. D, 2007, 76: 034008.

第7章 QCD 重求和

如前章所述，微扰量子色动力学中的辐射修正可在耦合常数的每一幂次产生重要的对数项。在某些运动学极限的区域中，譬如低末状态横向动量 q_T 或大的 Bjorken 变数 x，共线发散与软发散重叠产生双对数项，前者涵盖低 q_T 喷注、光子、W 玻色子的生成，这些过程均要求低 q_T 实胶子的辐射；后者涵盖顶夸克等重粒子生成、高 q_T 喷注生成、末态动量端点区域中的重介子衰变 $B \to X_u \ell\nu$ 和 $B \to X_s\gamma$，这些过程要求参与硬散射或硬衰变的部分子必须维持足够的动量，亦即辐射出的胶子必须限制在软区域中。因为实胶子修正的相空间受到限制，其贡献的红外发散与虚胶子修正的红外发散无法完全抵消，衍生的双对数项和强耦合常数 α_s 形成的乘积并非足够小的参数，譬如 $\alpha_s \ln^2(E/q_T)$ 与 $\alpha_s \ln(1-x)/(1-x)_+$，其中 E 为进行碰撞粒子的能量，以致影响微扰计算的精度。双对数修正也出现在遍举过程中，譬如 Landshoff 散射、强子形因子、康普顿散射以及在极大反冲 (recoil) 处的重至轻跃迁形因子 $B \to \pi(\rho)$ 和 $B \to D^{(*)}$，以上过程若要求可靠的微扰 QCD 分析，其中的重要对数辐射修正皆必须求和至全阶，称为重求和。

图 7.1 显示的是 Drell-Yan 过程中产生的轻子对的横动量 q_T 分布[1]，数据来自费米实验室 D0 组的测量结果，理论是领头阶 (LO) 和次领头阶 (NLO) 微扰 QCD 的预言，其部分子分布函数来自 MRST 的模型。可观察到固定阶的计算在大 q_T 区域基本上吻合实验数据，尤其是次领头阶的预言改进了 $q_T < 150\text{GeV}$ 范围内领头阶的符合程度。图 7.1 右上角的小图显示了数据和理论在 $q_T < 20\text{GeV}$ 的详细比较，很明显地，领头阶的预言在小 q_T 处 (几个 GeV) 呈现正的发散，次领头阶预言修正了上升的趋势，在 $q_T < 2\text{GeV}$ 处反转成下降的行为，但在 $q_T \to 0$ 时产生负的发散，且次领头阶的预言在小 q_T 处比数据高了两倍以上，结论是固定阶的微扰理论无法描述小 q_T 处的数据。欲了解此区域 Drell-Yan 过程的机制，必须应用重求和方法。

双对数修正通常出现在包含两个非常不同能标过程中，对于前述的 Sudakov 对数 $\alpha_s \ln^2(E/q_T)$，高能标为 E、低能标为 q_T；对于阈值对数 $\alpha_s \ln(1-x)/(1-x)_+$，高能标为 E、低能标为对应软辐射胶子动量的红外截断 $(1-x)E$，Mellin 变换之后该双对数项以 $\alpha_s \ln^2(1/N)$ 的形式出现。只包含单一能标过程则产生单对数项，譬如部分子辐射粒子 (即所谓的劈裂) 的效应，根据辐射粒子在运动学空间中的分布，可能产生单对数修正 $\alpha_s \ln E$ 和 $\alpha_s \ln(1/x)$，其对应的能标分别为 E 和低能标

xE。同理，劈裂效应产生的单对数可借由演化方程式求和至全阶。为方便讨论，定义对数的计数规则 (counting rule)：若对数修正符合 $\alpha_s^n L^{2n}$ 的形式，称为领头对数 (LL)，因此之前讨论的双对数属于领头对数；若符合 $\alpha_s^n L^{2n-1}$ 的形式，称为次领头对数 (NLL)，因此之前讨论的单对数属于次领头对数，以此类推。在此强调，对数修正 $\alpha_s L^2$ 略小于 1 时，重求和的结果才可信。

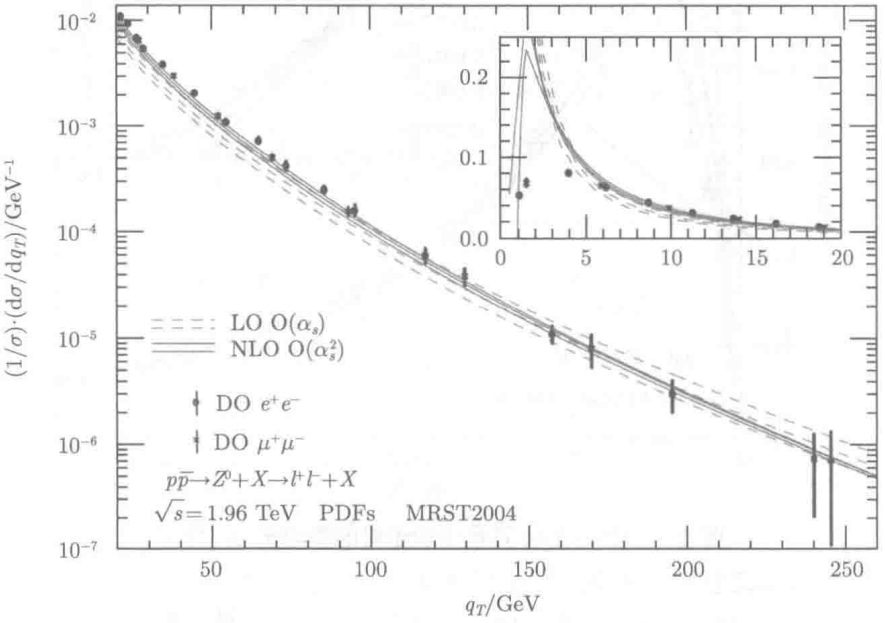


图 7.1　Drell-Yan 过程轻子对的横动量 q_T 分布

应用重求和方法后，Drell-Yan 过程中轻子对横动量 q_T 分布的理论预言如图 7.2 所示[1]，其中部分子分布函数采用 MRST 的模型。如前所述，次领头阶的预言在小 q_T 处比数据高了许多，考虑至次领头对数的重求和效应及领头阶的微扰 QCD 贡献 (NLL+LO) 后，理论预言与数据的吻合程度获得大幅改善；考虑至次次领头对数的重求和效应及次领头阶的微扰 QCD 贡献 (NNLL+NLO) 后，理论预言完全符合数据，支持重求和方法的必要性。至于 NLL+LO 和 NNLL+NLO 结果的严格定义，在说明重求和方法的细节后会再论及。

针对部分子分布函数与横动量相关分布函数中不同的双对数和单对数修正，微扰 QCD 领域已发展出相对应的全阶求和方法，包括针对 $\alpha_s \ln^2(E/q_T)$ 的 k_T 重求和技巧[2,3]、针对 $\alpha_s \ln^2(1/N)$ 的阈重求和技巧[4-6]、整合以上两种理论架构的联合重求和技巧[7,8]、针对 $\alpha_s \ln E$ 的 Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi (DGLAP) 方程式[9]、针对 $\alpha_s \ln(1/x)$ 的 Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov (BFKL) 方程式[10]，以及整合以上两种演化方程式的 Ciafaloni-Catani-Fiorani-Marchesini (CCFM) 方程

式[11]。本章中将在 Collins-Soper-Sterman (CSS) 的架构[2,3] 下简略介绍上述双对数和单对数修正的全阶求和方法。

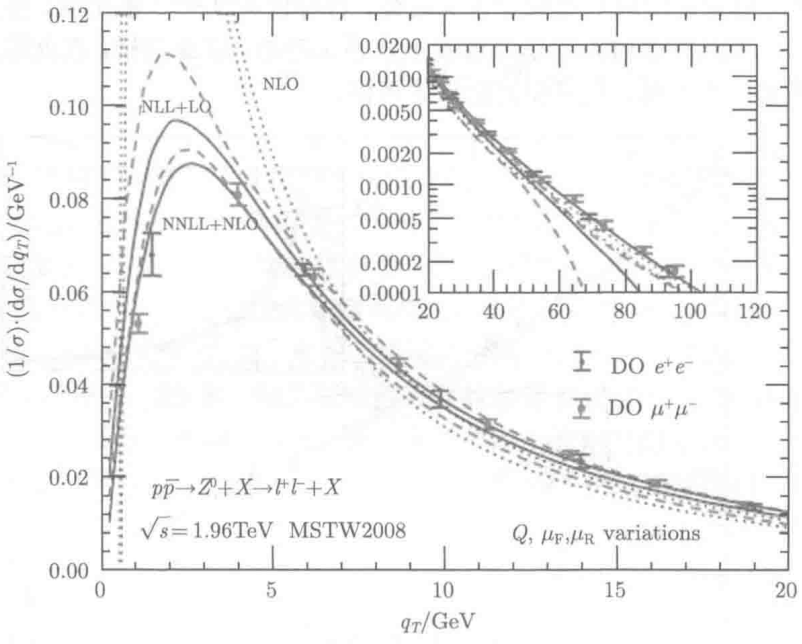


图 7.2　Drell-Yan 过程中轻子对的横动量 q_T 分布

7.1　重求和基本技巧

本节首先以简单的 QCD 夸克喷注过程为例，阐述重求和技巧的基本思路。夸克喷注函数 J 的一般 Feynman 图如图 7.3 中所示，其矩阵元定义为

$$J(p,n)u(p)=\langle 0|\,P\exp\left[-\mathrm{i}g\int_0^\infty \mathrm{d}zn\cdot A(zn)\right]q(0)\,|p\rangle \tag{7.1}$$

其中，q 是动量为 $p=(p^+,0,\mathbf{0}_T)$ 的轻夸克场，$u(p)$ 为其旋量，唯一的光锥分量 p^+ 代表此过程中的高能标。夸克喷注函数可视为与动量 p 平行的共线胶子从某遍举 QCD 过程中因子化出来的结果，如第 6 章中解释的，共线发散的因子化导致上式中路径有序的指数，即沿着方向 n、以双线表示的 Wilson 连结。第 6 章已强调，n 的任意性可视为对应不同因子化方案的喷注函数 J。

计算喷注函数 J 的次领头阶图，包括图 7.4 中左侧的自能修正及右侧的顶点修正，在协变规范 $\partial\cdot A=0$ 下，可发现以上两类图中共线发散和软发散重叠，形成类似式 (6.7) 中的双对数项 $\alpha_s\ln^2 p^+$；在轴规范 $n\cdot A=0$ 下，路径有序的指数简化为 1，不存在图 7.4 中的顶点修正，双对数项都出现在图 7.4 中左侧的自能修

正。以下将在协变规范下说明双对数修正的重求和技巧[12]，此规范选择可直接显示 Wilson 连结方向的关键角色与重求和技巧的精髓。

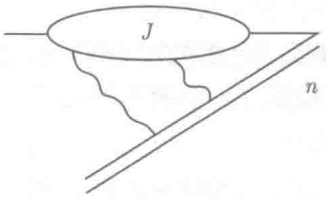


图 7.3 夸克喷注函数

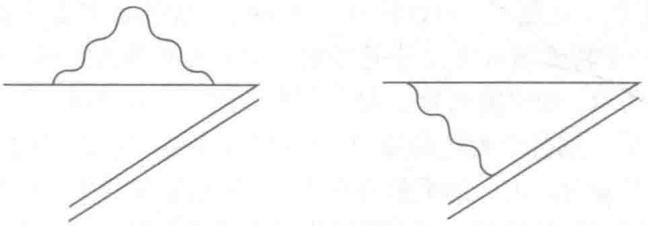


图 7.4 喷注函数的次领头阶图

重求和技巧中最主要的步骤是推得微分方程式

$$p^+\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}p^+}=C\otimes J \tag{7.2}$$

若将喷注函数 J 中的双对数 $\alpha_s\ln^2 p^+$ 求和至全阶，预期该双对数以指数的形式出现，于是微分运算符 $\mathrm{d}/\mathrm{d}p^+$ 作用后产生的系数函数 C 只含有单对数 $\alpha_s\ln p^+$，可以重整化群方法处理。此外，物理量只和 Lorentz 不变量相关，J 的定义包含两个向量 p 和 n，而 p 和 n 构成两个 Lorentz 不变量 $p\cdot n$ 和 n^2(已设 $p^2=0$)；因为路径有序的指数相对于 n 是能标不变的，亦即 n 调整任意倍数，路径有序的指数维持不变。能标不变性也可以从 Wilson 连结的 Feynman 规则中看出：$n^\nu/n\cdot l$ 中的 n 调整任意倍数，Feynman 规则不变。所以，J 与向量 p、n 的相依性必定通过比 $\varsigma^2=(p\cdot n)^2/n^2$ 的形式出现，于是微分运算符 $\mathrm{d}/\mathrm{d}p^+$ 可经由链规则

$$p^+\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}p^+}=-\frac{n^2}{v\cdot n}v_\alpha\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}n_\alpha} \tag{7.3}$$

以 $\mathrm{d}/\mathrm{d}n$ 取代，其中向量 $v=(1,0,0_T)$ 由关系式 $p=p^+v$ 所定义。

式 (7.3) 很容易验证，左侧可推得

$$p^+\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}p^+}=p^+\frac{\mathrm{d}\varsigma^2}{\mathrm{d}p^+}\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\varsigma^2}=2\varsigma^2\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\varsigma^2} \tag{7.4}$$

右侧可推得

$$-\frac{n^2}{v\cdot n}v_\alpha\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}n_\alpha}=-\frac{n^2}{v\cdot n}v_\alpha\frac{\mathrm{d}\varsigma^2}{\mathrm{d}n_\alpha}\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\varsigma^2}$$

$$= -2\frac{n^2}{v\cdot n}v_\alpha \frac{v^\alpha n^2 - (v\cdot n)^2 n^\alpha}{(n^2)^2}\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\varsigma^2} = 2\varsigma^2\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\varsigma^2} \tag{7.5}$$

所以式 (7.3) 成立。

式 (7.3) 的优点是大大降低了分析的困难度，因为 n 只出现在 Wilson 连结的 Feynman 规则中，而 p 则流经图 7.3 中所有的粒子线。每一个程函顶点及所属的程函传播子对 n_α 的微分

$$-\frac{n^2}{v\cdot n}v_\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_\alpha}\frac{n_\mu}{n\cdot l} = \frac{n^2}{v\cdot n}\left(\frac{v\cdot l}{n\cdot l}n_\mu - v_\mu\right)\frac{1}{n\cdot l} \equiv \frac{\widehat{n}_\mu}{n\cdot l} \tag{7.6}$$

定义了特殊顶点 $\widehat{n}_\mu$，在图 7.5 中以符号 "+" 标示，Wilson 连结上每个胶子顶点对 n_α 的微分产生一个特殊顶点 $\widehat{n}_\mu$，于是导数 $p^+\mathrm{d}J/\mathrm{d}p^+$ 表为对不同特殊顶点 $\widehat{n}_\mu$ 的求和，如图 7.5 所示。如果圈动量 l 和 p 平行，因子 $v\cdot l$ 为零，$\widehat{n}_\mu$ 正比于 v_μ，当这个 $\widehat{n}_\mu$ 与胶子另一端位于喷注函数 J 中的顶点收缩，而 J 中的动量基本上和 p 平行时，此收缩对 $p^+\mathrm{d}J/\mathrm{d}p^+$ 的贡献会被压低，所以圈动量 l 的领头相空间不含共线区域，而是硬区域和软区域。这个结果也可以从共线发散与向量 n 无关去理解，因为 J 对 n_α 微分的效应，即 J 对扰动方向 n_α 的效应不含共线发散，系数函数 C 只含有来自硬区域和软区域的单对数。



图 7.5　喷注函数对 p^+ 的微分

接下来以图 7.6 中的双圈图说明系数函数 C 的推导。图 7.6(a) 显示的是图 7.5 中等式的右侧，在此忽略三胶子和四胶子顶点的贡献，因为它们的分析是相同的；每一图的 Wilson 连结包含两个胶子顶点，所以有两处可以出现特殊顶点 $\widehat{n}_\mu$，两条胶子线可以交错，因此有四个图。如果流过特殊顶点的圈动量是软的，另一个胶子的动量是硬的，只有图 7.6(a) 中的第一个图是重要的，最外侧的三个传播子 (夸克、胶子和 Wilson 连结) 以 $1/\Lambda^4$ 的行为发散，给出重要的单对数；图 7.6(a) 中的其他三个图，因为硬胶子的动量流经较多的传播子，发散行为均比 $1/\Lambda^4$ 弱。在软区域中，包含特殊顶点的次级图可透过程函近似予以因子化，即将沿着方向 p 的夸克线置换为沿着方向 v 的 Wilson 连结，然后从双圈图中分离出来，如图 7.6(b) 所示。因为圈动量仍流经图 7.6(b) 中的右图，其中符号 $\otimes$ 表示动量空间中的卷积；这次级图的贡献可由一个软核函数 K(左图) 吸收，剩下的部分则视为原来的喷注函数 J (右图)，图 7.6(b) 给出了 K 和 J 在 $O(\alpha_s)$ 阶的定义。如果图 7.6(a) 中两

个胶子的圈动量都是软的，四个图一样重要，可将两个夸克传播子都置换为沿着方向 v 的 Wilson 连结，然后从双圈图中因子化出来，如图 7.6(c) 所示，括号中的四个次级图贡献至软核函数 K 的 $O(\alpha_s^2)$ 阶，剩下的部分即图 7.6(c) 中的下图，为喷注函数 J 的领头阶。如果流过特殊顶点的圈动量是硬的，另一个胶子的动量不是硬的，只有图 7.6(a) 中的第二个图是重要的，最内侧的三个传播子 (夸克、胶子和 Wilson 连结) 给出 $1/E^4$ 的行为；其他三个图，因为硬胶子的动量流经较多的传播子，分母含有 E 的更高幂次，压低了其圈积分。在这个区域中，包含特殊顶点的次级图的因子化如图 7.6(d) 所示，其中虚线表示 Fierz 恒等式的插入，以分离费米子流，虚线右侧的次级图可吸收至硬核函数 G 中，成为其 $O(\alpha_s)$ 阶的贡献，左侧为 $O(\alpha_s)$ 阶的喷注函数 J。如果图 7.6(a) 中两个胶子的圈动量都是硬的，四个图一样重要，这些次级图的因子化全部吸收至函数 G 之中，给出其 $O(\alpha_s^2)$ 阶的贡献。

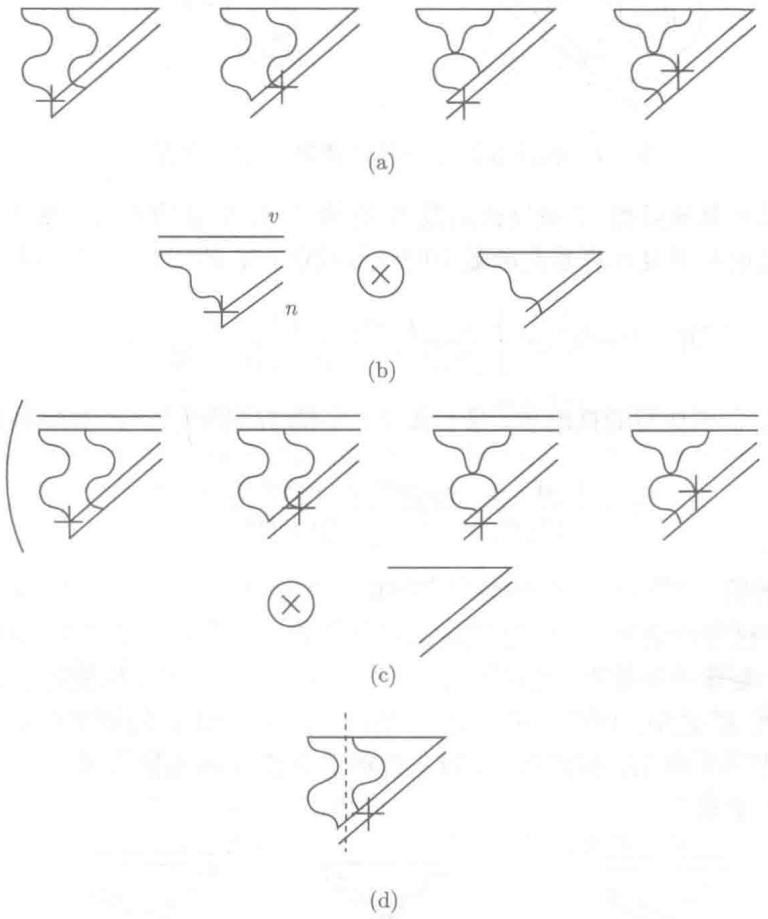


图 7.6 喷注函数 J 导数的双圈图分析

将以上含有特殊顶点的次级图因子化逐步推展至全阶，可得微分方程式

$$p^+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p^+}J=\left[K(m/\mu,\alpha_s(\mu))+G(p^+\nu/\mu,\alpha_s(\mu))\right]J \tag{7.7}$$

其中系数函数 C 已表为软核函数 K 与硬核函数 G 的和，其全阶图如图 7.7 所示，含有一个特殊顶点，μ 是一个因子化能标，源自系数函数 C 中软贡献和硬贡献的分离，G 中的规范因子定义为 $\nu=\sqrt{(v\cdot n)^2/|n^2|}$，正比于 J 的自变量 $(p\cdot n)^2/n^2$；同时式 (7.7) 已引入一个胶子质量 m 将 K 中的红外发散正则化，式 (7.7) 清楚地显示 K 与 G 分别和单一的红外能标 m 及单一的紫外能标 p^+ 相关。

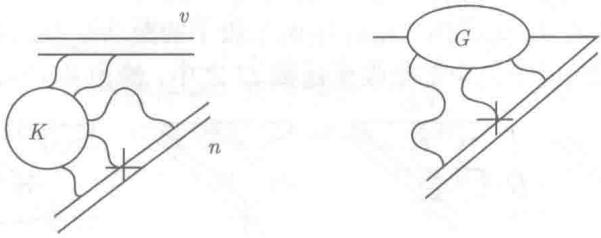


图 7.7　软核函数 K 及硬核函数 G 的全阶图

图 7.8 显示软核函数 K 及硬核函数 G 的单圈图，后者的第二个图表示红外减除项，作用是避免重复计算系数函数中的红外发散。K 的 $O(\alpha_s)$ 阶贡献写为

$$K=-\mathrm{i}g^2C_F\mu^\varepsilon\int\frac{\mathrm{d}^{4-\varepsilon}l}{(2\pi)^{4-\varepsilon}}\frac{\widehat{n}_\mu}{n\cdot l}\frac{g^{\mu\nu}}{l^2-m^2}\frac{v_\nu}{v\cdot l}-\delta K \tag{7.8}$$

其中 δK 是一个相加型的抵消项。来自图 7.8 右侧 G 的 $O(\alpha_s)$ 阶贡献写为

$$G=-\mathrm{i}g^2C_F\mu^\varepsilon\int\frac{\mathrm{d}^{4-\varepsilon}l}{(2\pi)^{4-\varepsilon}}\frac{\widehat{n}_\mu}{n\cdot l}\frac{g^{\mu\nu}}{l^2}\left(\frac{\not{p}+\not{l}}{(p+l)^2}\gamma_\nu-\frac{v_\nu}{v\cdot l}\right)-\delta G \tag{7.9}$$

其中括号内的第二项即为上述的红外减除项，δG 也是一个相加型的抵消项。直接计算式 (7.9) 括号内的第一项，可发现该积分是紫外有限的；式 (7.8) 中包含程函近似的积分，是紫外发散的，通过抵消项 δK 的正则化，将因子化能标 μ 的相依性引入软核函数 K 之中；同时，式 (7.9) 中的红外减除项将 μ 的相依性引入硬核函数 G 之中，且 δG 和 δK 相差负号，以上解释了前述 μ 的相依性源自分离 C 中软贡献和硬贡献的说法。



图 7.8　软核函数 K(左侧) 及硬核函数 G(右侧) 的单圈图

函数 K 和 G 的积分结果分别包含单对数 $\ln(m/\mu)$ 和 $\ln(p^+\nu/\mu)$，这些对数可利用重整化群方法收集单对数至全阶。由系数函数 $K+G$ 与因子化能标无关的性质

$$\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left[K(m/\mu,\alpha_s(\mu))+G(p^+\nu/\mu,\alpha_s(\mu))\right]=0 \tag{7.10}$$

推得 K 和 G 的重整化群方程式

$$\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}K=-\gamma_K=\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}G \tag{7.11}$$

其中 K 的反常量纲

$$\gamma_K=\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\delta K \tag{7.12}$$

至双圈的精度写为[13]

$$\gamma_K=\frac{\alpha_s}{\pi}C_F+\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2C_F\left[C_A\left(\frac{67}{36}-\frac{\pi^2}{12}\right)-\frac{5}{18}n_f\right] \tag{7.13}$$

其中 n_f 为夸克的味数目，$C_A=3$ 为色因子。

式 (7.11) 的解表为

$$\begin{aligned}&K(m/\mu,\alpha_s(\mu))+G(p^+\nu/\mu,\alpha_s(\mu))\\&=K(1,\alpha_s(m))+G(\nu,\alpha_s(p^+))-\int_m^{p^+}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}\gamma_K\left(\alpha_s(\mu)\right)\end{aligned} \tag{7.14}$$

其中最后一个积分项是求和系数函数 $K+G$ 中单对数的结果。当然，在实际的重求和技巧应用中，胶子质量 m 会被 QCD 过程中的特征低能标取代，使得初始条件 $K(1,\alpha_s(m))$ 可以微扰理论计算，再次强调，重求和技巧仍是以微扰理论为基础的。另一个重点是，积分项中的上下限可以乘上数量级为 1 的常数，譬如 2 或 0.5，当上限设为 C_1p^+ 时，初始条件 G 中的因子化能标必须相应地设为 $\mu=C_1p^+$，得 $G(\nu/C_1,\alpha_s(C_1p^+))$，不同 C_1 的选择导致一些微差异的数值结果，但这是无可避免的重求和方案的相依性，规范因子 ν 的选择则属于因子化方案的相依性，所以重求和结果也和因子化方案相关。重求和方案的相依性类似因子化方案，不同的是，处理重求和方案的相依性有一定依循的准则：重求和结果展开至固定阶时，必须和固定阶的微扰计算结果吻合，亦即所谓的匹配 (matching)，其中细节之后还会提及。

将式 (7.14) 代入微分方程式 (7.7) 右侧，可重求和喷注函数 J 中的双对数 $\ln^2(p^+/m)$，最后的表达式为

$$J(p,n)=\exp\left[-s(p,n)\right]J_i \tag{7.15}$$

其中 Sudakov 因子写为

$$s(p,n)=-\int_m^{p^+}\frac{\mathrm{d}k}{k}\left[\int_m^k\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}\gamma_K\left(\alpha_s(\mu)\right)-K(1,\alpha_s(m))-G(\nu,\alpha_s(k))\right] \tag{7.16}$$

式中含反常量纲的第一项对应喷注函数中领头对数的重求和，其他项对应次领头对数的重求和，重求和的初始条件 J_i 包含固定阶微扰计算的结果，其表达式的决定是通过匹配的程序，譬如欲求得 J_i 次领头阶的结果，首先计算图 7.4 中喷注函数的次领头阶 Feynman 图，然后将式 (7.15) 中的指数 $\exp\left[-s(p,n)\right]$ 对强耦合常数展开至次领头阶，再计算前者和后者的差，即得 J_i 次领头阶的表达式，其中不应存在领头对数项和次领头对数项，因为它们已得到重求和的处理而进入 Sudakov 指数。当然，J_i 的表达式也与重求和的方案有关。最后，J_i 的精度即对应图 7.4 中提及的领头阶或次领头阶微扰 QCD 贡献。

利用简单的喷注函数说明重求和技巧的基本思路后，接着详细推导所有已知的重求和及演化方程式。考虑一个带动量 p^+ 的强子横动量相关分布函数 $\Phi(x,k_T)$，该函数已隐含因子化能标 μ 的相依性，如果部分子是一个夸克，其定义如式 (6.58) 所示；如果部分子是一个胶子，其定义类似式 (6.53)，但将 Wilson 连结由光锥方向 n_- 旋转至任意方向 n，且 $n^2\neq 0$。经由相同的推论，可知 Φ 透过比例 $\varsigma^2=(p\cdot n)^2/n^2$ 与 p^+ 相关，这性质就意味着，研究不同加速器中相同的强子碰撞过程，若加速器能量不同，即必须采用不同的横动量相关分布函数，严格说来，与强子动量的相依性破坏了横动量相关分布函数的普适性。应用重求和技巧可抽取分布函数中与强子动量相关的部分，余下的部分则满足普适性的要求，亦即重求和技巧可恢复分布函数的普适性，这是另一个发展重求和技巧的重要动机。

首先建立 Φ 的基本方程式，式 (7.3) 中的链规则将微分运算 $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}p^+$ 联系至 $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}n_\alpha$，分析 Φ 对方向 n 的扰动效应，可得基本方程式

$$p^+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p^+}\Phi(x,k_T)=2\bar{\Phi}(x,k_T) \tag{7.17}$$

其中函数 $\bar{\Phi}$ 的 Feynman 图包含一个特殊顶点 $\widehat{n}_\mu$，其典型的例子如图 7.9 所示，流过特殊顶点的胶子动量只含有软及硬的机制，所以可以从 $\bar{\Phi}$ 中因子化出来，系数 2 的出现是因为特殊顶点位在末态切线左右两侧的图给出相等的贡献。

根据之前的推论，$\bar{\Phi}$ 的贡献可写成软和硬两项的和

$$\bar{\Phi}(x,k_T)=\bar{\Phi}_s(x,k_T)+\bar{\Phi}_h(x,k_T) \tag{7.18}$$

其中软贡献写为 $O(\alpha_s)$ 软核函数和原来横动量相关分布函数的卷积

$$\bar{\Phi}_s=\left[-\mathrm{i}g^2C_F\mu^\varepsilon\int\frac{\mathrm{d}^{4-\varepsilon}l}{(2\pi)^{4-\varepsilon}}\frac{\widehat{n}\cdot v}{n\cdot ll^2v\cdot l}-\delta K\right]\Phi(x,k_T)$$

$$-\mathrm{i}g^2 C_F \mu^\varepsilon \int \frac{\mathrm{d}^{4-\varepsilon} l}{(2\pi)^{4-\varepsilon}} \frac{\widehat{n}\cdot v}{n\cdot l v\cdot l} 2\pi \mathrm{i}\delta(l^2)\Phi\left(x + l^+/p^+, |\boldsymbol{k}_T + \boldsymbol{l}_T|\right) \tag{7.19}$$

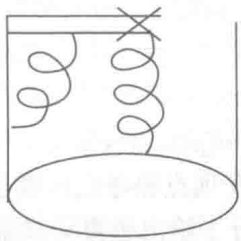


图 7.9 函数 $\bar{\Phi}$ 典型的 Feynman 图

式中第一项源自于虚胶子的辐射，对应图 7.10 中的左侧，表达式基本上和式 (7.8) 相同，正比于 $\delta(l^2)$ 的第二项源自于实胶子的辐射，对应图 7.10 中的右侧，其圈动量 l 流经 Φ，因此改变其自变量 $x \to x + l^+/p^+$, $\boldsymbol{k}_T \to \boldsymbol{k}_T + \boldsymbol{l}_T$。因子化实软胶子辐射的推论和因子化虚软胶子辐射类似，在领头阶的精度下，特殊顶点出现在 Wilson 连结的最外侧，即最靠近末态切线处，从特殊顶点辐射出的软胶子必须附着在夸克线的最上方，然后直接程函化夸克线即可因子化此软胶子。

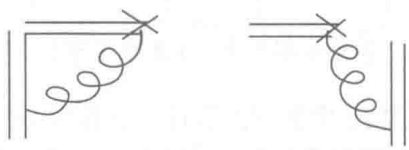


图 7.10 重求和技巧中的软核函数

式 (7.18) 中的硬贡献写为式 (7.9) 中的硬核函数 G 和原来横动量相关分布函数的乘积

$$\bar{\Phi}_h = G(p^+\nu/\mu, \alpha_s(\mu))\Phi(x, k_T) \tag{7.20}$$

其中 G 的 $O(\alpha_s)$ 阶 Feynman 图如图 7.11 所示，第二个图为红外减除项。硬核函数 G 的因子化推论基本上和式 (7.9) 相同。



图 7.11 重求和技巧中的硬核函数

7.2 阈重求和与 DGLAP 方程式

首先分析 Feynman 图中产生重要对数修正的结构，为方便说明，暂时采用轴

规范 $n \cdot A = 0$，在此规范选择下，横动量相关分布函数的单圈图简化为图 7.12 中的两个图，左侧为夸克的自能修正，右侧为两夸克之间交换实胶子的单阶梯图，因为共线发散主要来自在壳的夸克和胶子，而非来自 Wilson 连结，选择轴规范可将 Wilson 连结方向的相依性藏入胶子传播子中，如式 (6.50) 所示。设图 7.12 中梯图夸克的初动量为加方向的 p，辐射动量为 l 的胶子后带动量 $p-l$，根据 Feynman 规则，两夸克线下方夹旋量乘积 $u(p)\bar{u}(p) \propto \not{p} \propto \gamma^-$，两夸克线上方夹自旋算符 γ^+，一旦上下由 γ^+ 和 γ^- 夹住，胶子顶点和夸克传播子中 Gamma 矩阵只能是垂直分量 γ^T，于是两个夸克传播子的分子给出垂直动量乘积 l_T^2，分母则给出 $(p-l)^4$，将实胶子的条件 $l^- = l_T^2/(2l^+)$ 代入，即得到预期的红外对数发散

$$\int \frac{\mathrm{d}^2 l_T l_T^2}{(p-l)^4} \propto \int \frac{\mathrm{d}^2 l_T l_T^2}{(p^+ l^-)^2} \propto \int \frac{\mathrm{d}^2 l_T}{l_T^2} \tag{7.21}$$

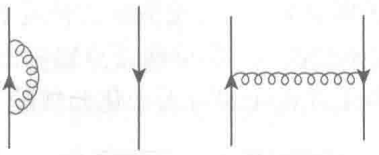


图 7.12　横动量相关分布函数轴规范下的单圈图

将以上讨论推广至图 7.13 中的双阶梯图，夸克由下往上，辐射带动量 l_1 的胶子后，夸克带动量 $p-l_1$，再辐射带动量 l_2 的胶子后，夸克带动量 $p-l_1-l_2$，于是左右成对的夸克传播子给出分子 l_{1T}^2 和 $|\boldsymbol{l}_{1T}+\boldsymbol{l}_{2T}|^2$，以及分母 $(p-l_1)^4$ 和 $(p-l_1-l_2)^4$，将两个实胶子的条件代入得到双圈积分

$$\int \frac{\mathrm{d}^2 l_{1T} \mathrm{d}^2 l_{2T} l_{1T}^2 |l_{1T}+l_{2T}|^2}{(p-l_1)^4 (p-l_1-l_2)^4} \propto \int \frac{\mathrm{d}^2 l_{1T} \mathrm{d}^2 l_{2T}}{l_{1T}^2 |l_{1T}+l_{2T}|^2} \tag{7.22}$$

接下来分析，l_{1T} 和 l_{2T} 呈现何种关系时，式 (7.22) 导致最重要的对数贡献。为方便讨论，考虑一维积分的例子 $\int \mathrm{d}x/x \int \mathrm{d}y/(x+y)$，若 x 不小于 y，以变数变换 $x = \lambda y$ 代入，只得到来自积分 y 的单对数，即

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} \int \frac{\mathrm{d}y}{x+y} \to \int_1 \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} \int \frac{\mathrm{d}y}{(\lambda+1)y} \sim \log \tag{7.23}$$

若 x 小于 y，以相同变数变换代入，可得来自积分 λ 和积分 y 的双对数，即

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} \int \frac{\mathrm{d}y}{x+y} \to \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} \int \frac{\mathrm{d}y}{(\lambda+1)y} \sim \log^2 \tag{7.24}$$

这最重要的贡献由 $\lambda \to 0$ 和 $y \to 0$ 的区域，即 $x \ll y$ 的区域产生。将以上结果应用至式 (7.22)，可推论 $l_{1T} \ll l_{2T}$ 的排列给出最大的对数项

$$\int \frac{\mathrm{d}^2 l_{1T} \mathrm{d}^2 l_{2T}}{l_{1T}^2 |l_{1T} + l_{2T}|^2} \to \left(\int \frac{\mathrm{d}^2 l_T}{l_T^2} \right)^2 \tag{7.25}$$

结论是，高阶梯图中最重要的对数贡献来自有序排列 $l_{1T} \ll l_{2T} \ll l_{3T} \cdots$ 的相空间组态，称为 k_T 有序排列。

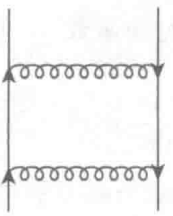


图 7.13 横动量相关分布函数的双阶梯图

已知阶梯图中实胶子以 k_T 有序排列方式辐射时给出最重要的对数贡献，但其他类型的 Feynman 图，譬如图 7.14 中的，两个实胶子呈交叉状或三胶子顶点图，是否也包含同样重要的对数贡献？重复类似的分析，可发现这两个图对应的圈积分分子皆正比于

$$l_{1T} \cdot l_{2T} |l_{1T} + l_{2T}|^2 \to l_{1T} \cdot l_{2T} l_{2T}^2 \tag{7.26}$$

上式右侧已应用了有序排列 $l_{1T} \ll l_{2T}$，使得圈积分的分母在小 l_{1T}、l_{2T} 的区域具有最强的发散，但在此有序排列下，分子是 l_{1T} 和 l_{2T} 的奇函数，以致在小 l_{1T}、l_{2T} 的区域发生抵消，所以图 7.14 的贡献相对于图 7.13 是可忽略的。以下关于实胶子辐射在重求和技巧中的角色，只需专注于阶梯图的讨论，在 k_T 有序排列之下，很容易理解为何求和无阶梯图, 单阶梯图, 双阶梯图, 三阶梯图, $\cdots$ 可以得到前一节中提到的指数函数。

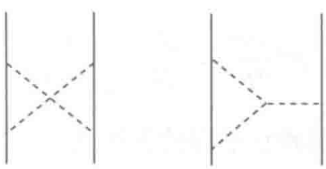


图 7.14 横动量相关分布函数的其他双圈图

再来说明对应于阶梯图中实胶子辐射 k_T 有序排序的软近似，这对式 (7.17) 之后的推导非常关键。如前所述，没有横向动量的部分子辐射出一个带纵向动量 l_1^+ 和横向动量 l_{1T} 的胶子后，带有横向动量 $-l_{1T}$，再辐射出一个携带纵向动量 l_2^+ 和横向动量 l_{2T} 的胶子后，带横向动量 $-l_{1T} - l_{2T}$。在有序排列 $l_{1T} \ll l_{2T}$ 和 $l_1^+ \sim l_2^+$

的区域，末态部分子的横向动量可近似为 $-l_{1T}-l_{2T}\approx -l_{2T}$，使得第一个辐射胶子的圈动量积分只包含 l_{1T}，第二个辐射胶子的圈动量积分只包含 l_{2T}，与 l_{1T} 积分去耦，亦即所有圈动量的横向分量可直接积分掉。在种这情况下，式 (7.19) 中的软核函数与 Φ 在圈动量的横向分量上去耦，可对实胶子辐射贡献采取近似

$$\Phi\left(x+l^+/p^+,|\boldsymbol{k}_T+\boldsymbol{l}_T|\right)\approx\Phi\left(x+l^+/p^+,k_T\right) \tag{7.27}$$

其中 x 和 l^+/p^+ 约为同一个数量级，然后将式 (7.17) 两侧对 k_T 积分。于是横动量相关分布函数 Φ 化简为部分子分布函数 ϕ，能标 k_T 消失，而能标 $(1-x)p^+$ 保留，推得基本方程式

$$p^+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p^+}\phi(x)=2\bar{\phi}(x) \tag{7.28}$$

其中函数 $\bar{\phi}=\bar{\phi}_s+\bar{\phi}_h$ 的软贡献和硬贡献分别写为

$$\begin{aligned}\bar{\phi}_s=&\left[-\mathrm{i}g^2C_F\mu^\varepsilon\int\frac{\mathrm{d}^{4-\varepsilon}l}{(2\pi)^{4-\varepsilon}}\frac{\widehat{n}\cdot v}{n\cdot l l^2 v\cdot l}-\delta K\right]\phi(x)\\&-\mathrm{i}g^2C_F\mu^\varepsilon\int\frac{\mathrm{d}^{4-\varepsilon}l}{(2\pi)^{4-\varepsilon}}\frac{\widehat{n}\cdot v}{n\cdot l v\cdot l}2\pi\mathrm{i}\delta(l^2)\phi\left(x+l^+/p^+\right)\\\bar{\phi}_h=&\,G(p^+\nu/\mu,\alpha_s(\mu))\phi(x)\end{aligned} \tag{7.29}$$

利用 Mellin 变换将 $\bar{\phi}_s$ 从动量分数空间 x 转换至 moment 空间 N，

$$\bar{\phi}_s(N)=\int_0^1\mathrm{d}x\,x^{N-1}\bar{\phi}_s(x) \tag{7.30}$$

在这变换下可以分离 l^+ 的积分。在大 x 区域 ϕ 包含两个能标：来自硬核函数 G 的高能标 $xp^+\sim p^+$ 及来自软核函数 K 的低能标 $(1-x)p^+\sim p^+/N$。欲重求和对数 $\ln(1/N)$，将式 (7.28) 中的导数 $p^+\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}p^+$ 改写为

$$p^+\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}p^+}=\frac{p^+}{N}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\left(p^+/N\right)} \tag{7.31}$$

代入式 (7.29) 的结果，可得解阈重求和的表达式

$$\phi(N)=\Delta_t(N)\phi_i \tag{7.32}$$

其中 Sudakov 指数写为

$$\Delta_t(N)=\exp\left[-2\int_{p^+/N}^{p^+}\frac{\mathrm{d}k}{k}\int_{p^+}^{k}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}\gamma_K\left(\alpha_s(\mu)\right)\right] \tag{7.33}$$

为求表达式简单，在此只显示领头对数的贡献。Sudakov 演化的初始条件 ϕ_i 即是熟知的部分子分布函数，ϕ_i 仍含有因子化能目标相依性，其处理须应用之后推导的 DGLAP 演化方程式。经过适当的变量变换，上式亦可表为

$$\Delta_t(N)=\exp\left[\int_0^1 \mathrm{d}z\frac{1-z^{N-1}}{1-z}\int_{(1-z)^2}^1\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}\gamma_K\left(\alpha_s(\sqrt{\lambda}p^+)\right)\right] \tag{7.34}$$

之前已提及，顶夸克对生成需要高动量分数的部分子挹注足够能量，图 7.15 中所示的是该过程的领头阶 Feynman 图，文献中发现，图 7.15 的 QCD 高阶修正产生重要的阈值对数，必须将阈重求和的理论架构应用于顶夸克对生成截面的计算，其结果已精确至次次领头对数[14]。如图 7.16 所示为顶夸克对生成截面随顶夸克质量 m_t 变化的行为，从上图可观察到阈重求和的效应提升上述过程的次领头阶截面几个百分比，其中细线夹住的范围表示理论误差。如图 7.16 中的下图所示，文献中的分析结果可用以决定顶夸克质量，其中实线表示顶夸克对生成截面随顶夸克质量 m_t 变化的中心值，理论与实验的总误差由虚线表示。将经过阈重求和技巧改进的理论预言与实验数据比较，即可抽取 m_t 的中心值及误差范围。

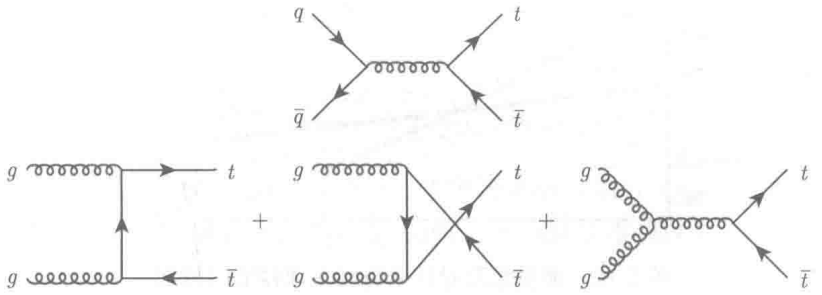


图 7.15 顶夸克对生成的 Feynman 图

在 x 的中间值区域中，因为 $xp^+\sim(1-x)p^+$，双能标系统简化为单能标系统，双对数变得较不重要，直接计算式 (7.29) 并代入式 (7.28)，在不做 Mellin 变换的情况下，即可推得 DGLAP 方程式

$$p^+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p^+}\phi(x)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}P\left(x/\xi\right)\phi(\xi) \tag{7.35}$$

其中演化核写为

$$P(z)=\frac{\alpha_s(p^+)}{\pi}C_F\frac{2}{(1-z)_+} \tag{7.36}$$

推得上式时已代入变数变换 $\xi=x+l^+/p^+$。跑动耦合常数中的自变数，亦即因子化能标 μ，已设为 $xp^+\sim(1-x)p^+\sim O(p^+)$。在此指出演化核 P 和分裂函数 P_{qq} 不同，譬如加函数的部分差了一项 $(z^2-1)/(1-z)_+$，这项在 $z\to1$ 极限下是有限

的，其差异源于推导 P 时，实胶子辐射效应是在软胶子近似下计算的，而推导 P_{qq} 时，则是精确计算了实胶子辐射的效应。

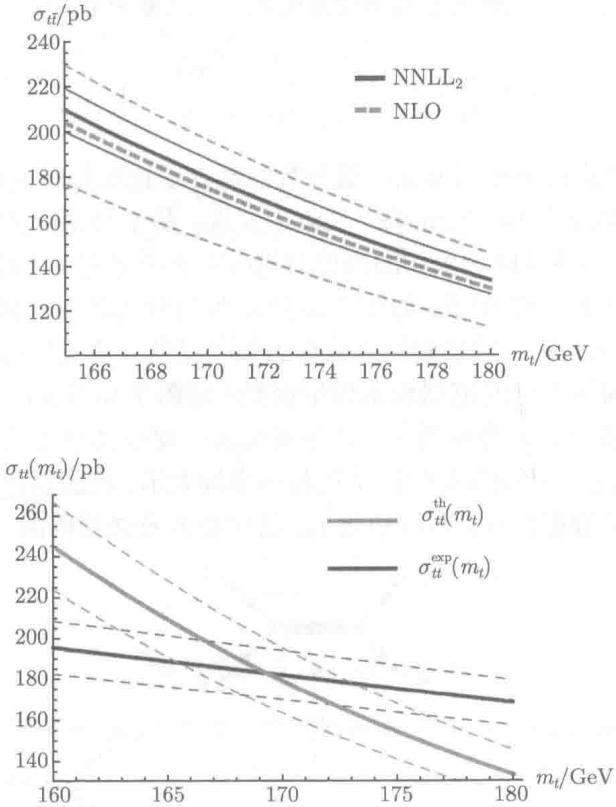


图 7.16　阈重求和对顶夸克对生成截面的效应

以上推导的目的主要是在重求和方法的框架下，解释 DGLAP 演化方程式中蕴含的重要机制。若欲推得精确的分裂函数 P_{qq}，必须计算图 6.11 和图 6.12 中部分子分布函数的单圈修正，各图结果总结如下：

$$\text{图 6.11(a)} = \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F (1-x) \ln \frac{\mu^2}{xm^2}$$

$$\text{图 6.11(b)} = \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \frac{2x}{1-x} \ln \frac{\mu^2}{xm^2}$$

$$\text{图 6.12(a)} = -\frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \int_0^1 \mathrm{d}y y \ln \frac{\mu^2}{ym^2} \delta(1-x)$$

$$\text{图 6.12(b)} = -\frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \int_0^1 \mathrm{d}y \frac{2y}{1-y} \ln \frac{\mu^2}{ym^2} \delta(1-x)$$

如第 6 章说明的，图 6.11 (c) 和图 6.12 (c) 没有贡献，因为其 Feynman 规则正比于 Wilson 连结向量的平方 $n_-^2 = 0$。求图 6.11 和图 6.12 以及镜射对称的 Feynman

图，总贡献写为

$$\frac{\alpha_s}{2\pi}C_F\left[\frac{1+x^2}{(1-x)_+}\ln\frac{\mu^2}{xm^2}+\left(\frac{3}{2}\ln\frac{\mu^2}{m^2}+\frac{7}{4}-\frac{\pi^2}{3}\right)\delta(1-x)\right] \tag{7.37}$$

其中的 $\ln\mu$ 的系数给出

$$P_{qq}(z)=\frac{\alpha_s}{\pi}C_F\left[\frac{1+z^2}{(1-z)_+}+\frac{3}{2}\delta(1-z)\right] \tag{7.38}$$

很容易看出，在 $z\to 1$ 的极限下但 $z\neq 1$ 时，式 (7.38) 趋近式 (7.36)。

考虑完整的单圈修正后，胶子辐射导致夸克和胶子部分子分布函数的混合，图 7.17 中 Feynman 图给出完整的、含有四个分裂函数的 DGLAP 演化方程式的集合

$$p^+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p^+}\begin{pmatrix}\phi_q\\ \phi_g\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_{qq} & P_{qg}\\ P_{gq} & P_{gg}\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}\phi_q\\ \phi_g\end{pmatrix} \tag{7.39}$$

其中牵涉的分裂函数为

$$\begin{aligned}
P_{qg}(z)&=\frac{\alpha_s}{\pi}T_F\left[z^2+(1-z)^2\right]\\
P_{gq}(z)&=\frac{\alpha_s}{\pi}C_F\frac{1+(1-z)^2}{z}\\
P_{gg}(z)&=\frac{\alpha_s}{\pi}C_A\frac{2(1-z+z^2)^2}{z(1-z)_+}+\left(\frac{11}{6}C_A-\frac{2}{3}n_fT_F\right)\delta(1-z)
\end{aligned} \tag{7.40}$$

其中颜色因子 $T_F=1/2$。u-夸克、d-夸克、胶子和海夸克部分子分布函数在 DGLAP 方程式主导下，随 Q^2 的演化行为已显示于图 6.15，其变化牵涉的物理机制也已讨论。

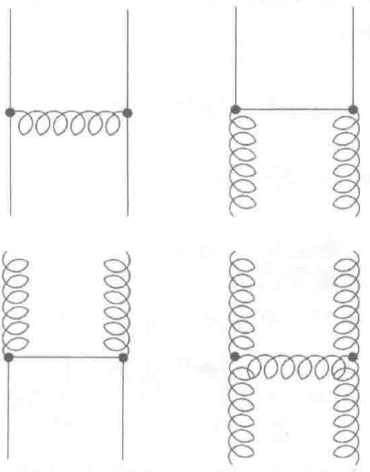


图 7.17 DGLAP 分裂函数

7.3　k_T 重求和与 BFKL 方程式

如前所言，式 (6.58) 中横动量相关分布函数的定义包含三个能标 $(1-x)p^+$、xp^+ 及 k_T，现在考虑阶梯图中的实胶子辐射呈现快度 (rapidity) 有序排列时，在重求和技巧中对应的软近似。假设初始部分子携带纵向动量 $xp^+ + l_2^+ + l_1^+$，辐射出携带纵向动量 l_2^+ 和横向动量 l_{2T} 的胶子后，动量变成 $xp^+ + l_1^+$，再辐射出携带纵向动量 l_1^+ 和横向动量 l_{1T} 的胶子后，动量最后变成 xp^+。在 $l_2^+ \gg l_1^+$ 和 $l_{2T} \sim l_{1T}$ 的运动学组态下，初始的部分子纵向动量可近似为 $xp^+ + l_2^+ + l_1^+ \approx xp^+ + l_2^+$，于是第一个辐射胶子的圈动量积分与 l_1^+ 无关，对 l_2^+ 积分后即得一个对数项；第二个辐射胶子的圈动量积分只与 l_1^+ 相关，其结果也给出一个对数项。所以，l_1^+ 与 l_2^+ 积分去耦，亦即所有圈动量的纵向分量可直接积分掉，于是，一个具有 N 条胶子的阶梯图在快度有序排列的条件下，产生对数修正 $(\alpha_s L)^N$，其中 L 表示大的对数。在这种情况下，式 (7.19) 中的软核函数与 Φ 在圈动量的纵向分量上去耦，可对实胶子辐射贡献采取近似

$$\Phi\left(x + l^+/p^+, |\boldsymbol{k}_T + \boldsymbol{l}_T|\right) \approx \Phi\left(x, |\boldsymbol{k}_T + \boldsymbol{l}_T|\right) \tag{7.41}$$

其中已忽略 l^+ 的相依性，至于横动量 l_T，因为在考虑的运动学组态中与 k_T 是同一个数量级，予以保留，于是软核函数 K 中的变数 l^+ 可积分至无限大，亦即能标 $(1-x)p^+$ 不存在。

将式 (7.19) 傅里叶变换至冲击参数 b 的空间中，以分离 l_T 的积分，亦即 b 是部分子横向动量的共轭变量，表示该过程中的低能标。在 x 的中间值区域，Φ 含有两个能标，即硬核函数 G 的高特征能标 xp^+ 及软核函数 K 的低特征能标 $1/b$，因此，基本方程式 (7.17) 写为

$$p^+ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p^+}\Phi(x,b) = 2\left[K(1/(b\mu), \alpha_s(\mu)) + G(xp^+\nu/\mu, \alpha_s(\mu))\right]\Phi(x,b) \tag{7.42}$$

其规范因子 $\nu = 1$ 的解给出 k_T 重求和

$$\Phi(x,b) = \Delta_k(x,b)\Phi_i(x,b) \tag{7.43}$$

其中 Sudakov 指数写为

$$\Delta_k(x,b) = \exp\left[-2\int_{1/b}^{xp^+}\frac{\mathrm{d}k}{k}\int_{1/b}^{k}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}\gamma_K\left(\alpha_s(\mu)\right)\right] \tag{7.44}$$

Φ_i 是 Sudakov 演化的初始条件。式 (7.43) 的结果可理解为 Φ_i 描述核子中部分子的 intrinsic k_T 相依性，Sudakov 指数则给出 extrinsic k_T 相依性。至于此处的重求

和方案相依性以及与固定阶微扰计算的匹配，其讨论基本上和上一节中的阈重求和相同。

直接光子意指在硬散射过程中直接产生的光子，如图 7.18 所示，有别于从行进中的带电粒子 (譬如夸克) 辐射出的光子，前者的方向通常偏中央快度，后者则通常偏前向快度。文献已分析了 k_T 重求和对图中直接光子产生在低 p_T 区域的效应[15]，以 CTEQ4M 部分子分布函数的模型[16] 为输入，已获得次领头阶微扰 QCD 的预言。图 7.19 中以 $x_t = 2p_T/\sqrt{s}$ 为变量，显示此预言和实验数据的偏离程度 (Data − Theory)/Theory，其中 s 为质心能量的平方，如图 7.19(a) 所示，偏离程度非常显著，尤其在每一组数据的低 x_t 区域。本章的开头已强调，初态及末态辐射的相空间在低 p_T 区域中被严重限制，所以必须应用 k_T 重求和以改进微扰理论，纳入 k_T 重求和的效应后，图 7.19(b) 清楚地显示了理论预言和实验数据吻合程度的改进。至于中间 p_T 区域和高 p_T 区域的直接光子产生，如预期的，次领头阶微扰 QCD 的预言可以大致解释数据。

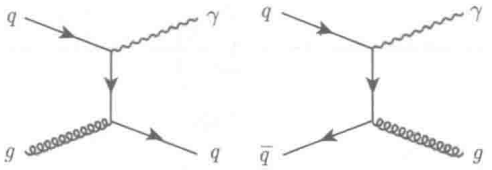


图 7.18 直接光子 (以波浪线表示) 的产生

在小 x 区域，因为 $xp^+ \sim k_T$(或在 b 的空间中 $xp^+ \sim 1/b$)，双能目标系统简化为单能目标系统，由图 6.15 中显示的部分子分布函数行为知，在这区域胶子部分子给出最重要的贡献，因此以下讨论中，Φ 表示胶子的横动量相关分布函数，其定义已在 7.1 节中提及。双对数的来源，亦即反常量纲 γ_K 的积分项，较不重要，因为只有软能标存在，可忽略硬核函数 G，保留软核函数，但引进一个紫外截断，于是式 (7.17) 的右侧写为

$$\bar{\Phi} = -\mathrm{i}g^2 N_c \int \frac{\mathrm{d}^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\widehat{n}\cdot v}{n\cdot l l v\cdot l} \left[\frac{\theta\left(k_T^2 - l_T^2\right)}{l^2} \Phi(x, k_T) + 2\pi\mathrm{i}\delta(l^2)\Phi\left(x, |\boldsymbol{k}_T + \boldsymbol{l}_T|\right) \right] \tag{7.45}$$

其中色因子 C_F 已被对应于胶子横动量相关分布函数的 N_c 取代，θ 函数引进上述 l_T 的紫外截断。欲通过 p^+ 的变化达成 x 的变化，可设想一个固定的部分子动量，在这假设下，动量分数 x 正比于 $1/p^+$，所以

$$p^+ \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}p^+} = -x\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x} \tag{7.46}$$

完成式 (7.45) 中 l^+ 和 l^- 的积分，基本方程式 (7.17) 给出 BFKL 方程式

$$\frac{\mathrm{d}\Phi\left(x,k_T\right)}{\mathrm{d}\ln\left(1/x\right)}=\bar{\alpha}_s\int\frac{\mathrm{d}^2l_T}{\pi l_T^2}\left[\Phi\left(x,|\boldsymbol{k}_T+\boldsymbol{l}_T|\right)-\theta\left(k_T^2-l_T^2\right)\,\Phi(x,k_T)\right] \tag{7.47}$$

其中耦合常数为 $\bar{\alpha}_s\equiv N_C\alpha_s/\pi$。

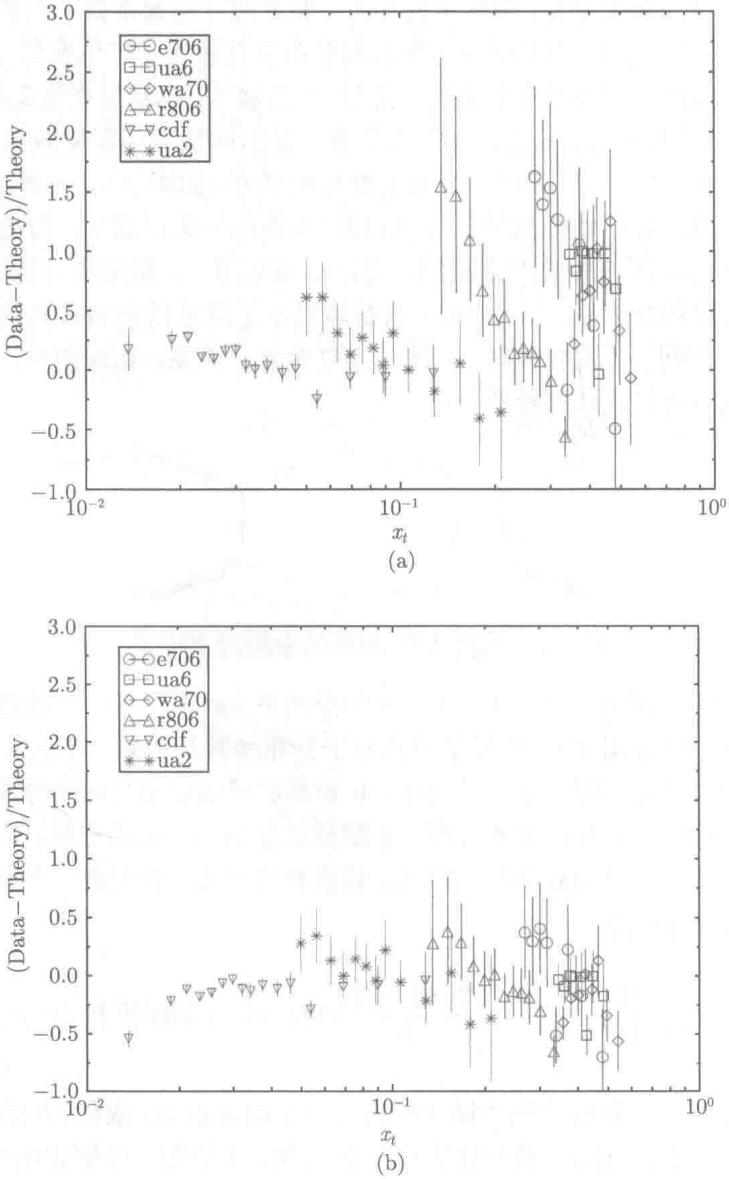


图 7.19　直接光子 p_T 分布理论预言和数据的比较

现在可以比较 DGLAP 和 BFKL 演化方程式所描述的 QCD 机制，前者在 k_T 有序排列的情况下，部分子随实胶子辐射带有越来越大的横向动量，亦即部分子逐渐变得离壳，从坐标空间来看，部分子在横向空间中变得越来越小，所以 DGLAP

方程式描述的是在核子中找到离壳或小部分子的概率，因为辐射的效应，小部分子的概率会随着能标而增加，如图 7.20 所示。在快度有序排列的情况下，部分子辐射出纵向动量越来越小的实胶子，实胶子可以分裂成正反夸克，所有这些部分子都带有相同数量级的横向动量，因此它们离壳的程度近似，在横向空间中的大小没有太大变化，但因为纵向动量小，随着辐射可以产生众多的部分子，所以 BFKL 方程式描述的是在核子中找到低动量但大小不变的部分子概率，辐射的效应导致这样部分子数目的增加，如图 7.20 所示。当然，当部分子数目增加至某程度，它们再结合的机制会开始作用而减缓数目的增加，这称为饱和效应，显示在图 7.20 的上方，这效应在演化方程式中以非线性项呈现，尚未包括在 BFKL 方程式中。

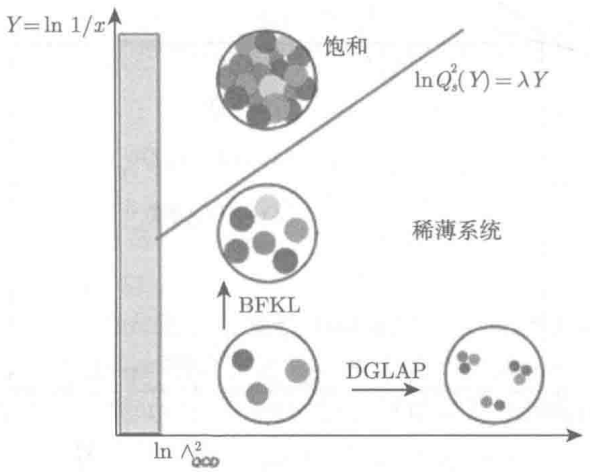


图 7.20 DGLAP 和 BFKL 演化的比较

式 (7.47) 中领头阶的 BFKL 演化方程式给出一个重要的预言，亦即高能散射截面随质心能量变化的行为

$$\sigma \approx \frac{1}{t}\left(\frac{s}{t}\right)^{\omega_P - 1} \tag{7.48}$$

其中 t 为动量转移的平方，s 为质心能量的平方，它们的比值约为 $t/s \sim x$。但因为 Pomeron intercept $\omega_P - 1 = 4\bar{\alpha}_s \ln 2$，上式中的散射截面随质心能量以幂次形式增加，违反 Froissart(幺正性) 上限 $\sigma < \text{const.} \times \ln^2$[17]，所以领头阶 BFKL 方程式的预言并不完整，可能必须计算次领头阶的修正。但是次领头阶的修正剧烈得改变了领头阶的行为：图 7.21 显示结构函数的导数 $\mathrm{d}F_L/\mathrm{d}Q^2$ 随 x 的变化[18]，可发现次领头阶的效应在 $x \sim 0.001$ 处已和领头阶一般大小，在更低的 x 处变成主要的效应，在小于 $x \sim 0.0001$ 时甚至将图 7.21 中上图的 $\mathrm{d}F_L/\mathrm{d}Q^2$ 转为负值，亦即微扰解完全不稳定；如果采用跑动的耦合常数，次领头阶的效应不会是压倒性的，但如图 7.21(b) 所示，其效应仍然非常显著，所以物理中小 x 仍有许多尚未了解的重要机制，包括饱和效应，都需要更深刻地钻研。

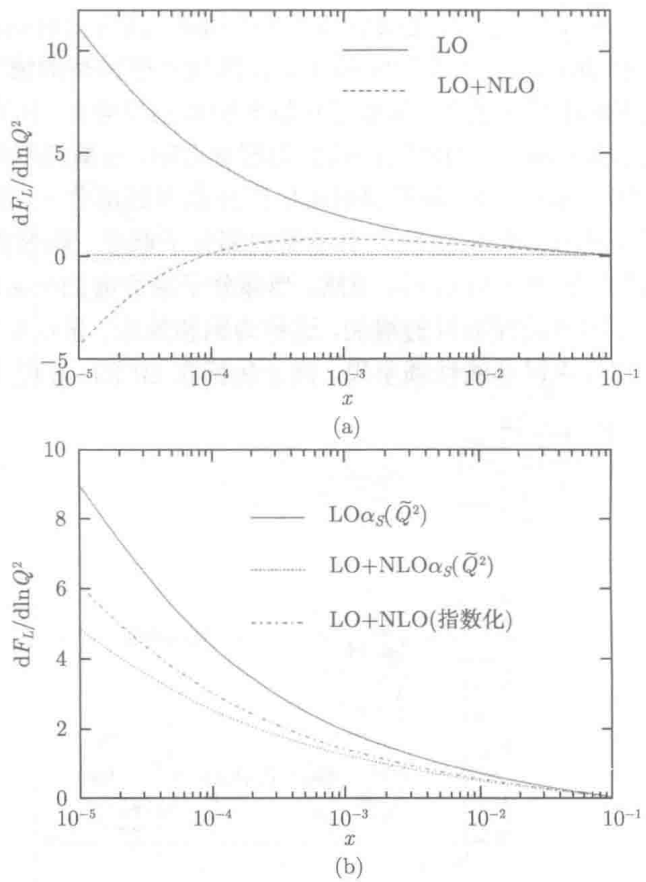


图 7.21　BFKL 方程式的预言

7.4　联合重求和与 CCFM 方程式

最后简单讨论可同时应用于大和中间 x 区域的统一重求和公式，以及可同时应用于中间和小 x 区域的统一演化方程式。推导方法是保留式 (7.19) 中 l^+ 和 l_T 的相关性，这对应的运动学组态是实胶子辐射呈现角度的有序排列，此例中须对式 (7.19) 同时进行傅里叶和 Mellin 转换，推得

$$\bar{\Phi}_s(N,b) = K\left(p^+/(N\mu), 1/(b\mu), \alpha_s(\mu)\right)\,\Phi(N,b) \tag{7.49}$$

其中软核函数写为

$$K = -\mathrm{i}g^2 C_F \mu^{\varepsilon} \int_0^1 \mathrm{d}z \int \frac{\mathrm{d}^{4-\varepsilon} l}{(2\pi)^{4-\varepsilon}} \frac{\widehat{n}\cdot v}{n\cdot l v\cdot l} \times \left[\frac{\delta(1-z)}{l^2} + 2\pi\mathrm{i}\delta(l^2)\delta\left(1-z-\frac{l^+}{p^+}\right) z^{N-1} \exp\left(\mathrm{i}\boldsymbol{l}_T\cdot\boldsymbol{b}\right)\right] - \delta K$$

$$= \frac{\alpha_s(\mu)}{\pi} C_F \left[\ln \frac{1}{b\mu} - K_0 \left(\frac{2\nu p^+ b}{N} \right) \right] \tag{7.50}$$

式中 K_0 为 modified Bessel 函数。当 $p^+ b \gg N$ 时，得 $K_0 \to 0$ 的极限，上式中的软能标趋近 k_T 重求和中的 $1/b$；当 $N \gg p^+ b$ 时，得 $K_0 \to -\ln(\nu p^+ b/N)$ 的极限，上式中的软能标趋近阈重求和中的 p^+/N。

依循式 (7.10)~(7.14) 的步骤可得联合重求和公式

$$\Phi(N, b) = \Delta_u(N, b) \Phi_i \tag{7.51}$$

其中指数表为

$$\Delta_u(N, b) = \exp \left[-2 \int_{p^+ \chi^{-1}(N,b)}^{p^+} \frac{\mathrm{d}p}{p} \int_{p^+ \chi^{-1}(1,b)}^{p} \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} \gamma_K \left(\alpha_s(\mu) \right) \right] \tag{7.52}$$

积分下限中的无能标函数

$$\chi(N) = \left(N + \frac{p^+ b}{2} \right) \exp(\gamma_E) \tag{7.53}$$

满足前述的两个极限。显而易见的，式 (7.52) 在 $N \to \infty$ 和 $b \to \infty$ 的极限下，分别化简为式 (7.33) 和式 (7.44)。

在质心能量 14TeV 的大强子对撞机中可能产生很重的超对称粒子 selectron 对，可测量 selectron 对的 q_T 谱，在高 q_T 的区域尤其需要高动量分数的部分子挹注足够能量，因此这区域 QCD 机制的研究要求阈重求和的理论；在低 q_T 范围 QCD 机制的研究则要求 k_T 重求和的理论，在这种情况下，联合重求和技巧提供了更完整的架构。联合重求和在上述过程中的效应已于文献详细探讨[19]，由图 7.22 可见，联合和 k_T 重求和在小 q_T 区域如预期的展现相似的行为，但联合重求和处理过的截面比 k_T 重求和处理过的截面在 50GeV< q_T <100GeV 区间中低了约 5%~10%，这差异源自前者额外的阈重求和效应。

在中间和小 x 的区域中不需重求和双对数 $\ln^2(1/N)$，抽取 k_T 重求和的效应之后，余下的单对数求和对应一个统一 DGLAP 和 BFKL 演化的方程式，因为 l^+ 和 l_T 的相依性已被同时保留下来，式 (7.19) 第二项中对应实胶子贡献的函数 $\Phi\left(x + l^+/p^+, |\bar{k}_T + \bar{l}_T|\right)$ 在傅里叶变换后可改写为

$$\begin{aligned} \Phi\left(x + l^+/p^+, b\right) =& \theta\left((1-x)p^+ - l^+\right) \Phi(x, b) \\ &+ \left[\Phi\left(x + l^+/p^+, b\right) - \theta\left((1-x)p^+ - l^+\right) \Phi(x, b) \right] \end{aligned} \tag{7.54}$$

式中第一项和式 (7.19) 中对应虚胶子贡献的第一项相加，推得 k_T 重求和的软核函数，上式中第二项给出

$$-\mathrm{i}g^2 N_c \int \frac{\mathrm{d}^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\widehat{n} \cdot v}{n \cdot l v \cdot l} 2\pi \mathrm{i} \delta(l^2) \exp(\mathrm{i} \boldsymbol{l}_T \cdot \boldsymbol{b})$$

$$\times \left[\Phi\left(x+l^{+}/p^{+},b\right)-\theta\left((1-x)p^{+}-l^{+}\right)\Phi\left(x,b\right)\right] \tag{7.55}$$

这贡献可推得以下的分裂函数，因为此处考虑胶子的横动量相关分布函数，其中色因子已取为 N_c。

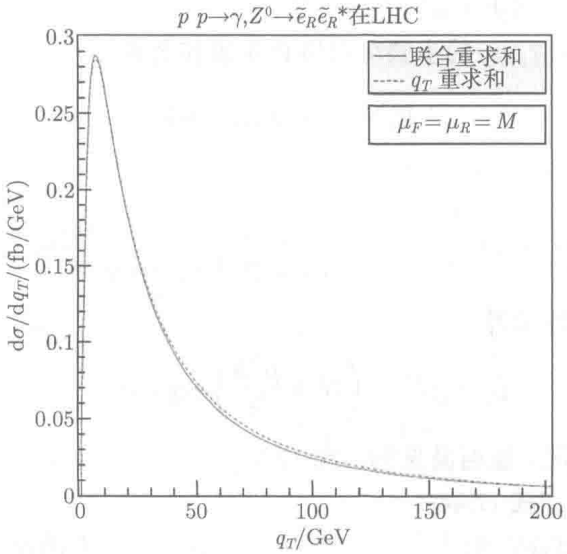


图 7.22　14TeV 的大强子对撞机中产生 selectron 对的 q_T 谱

于是式 (7.17) 中的基本方程式变成

$$p^{+}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p^{+}}\Phi(x,b)=-2\left[\int_{1/b}^{xp^{+}}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}\gamma_K\left(\alpha_S(\mu)\right)-\bar{\alpha}_s(xp^{+})\ln\left(p^{+}b\right)\right]\Phi(x,b)$$
$$+2\bar{\alpha}_s(xp^{+})\int_{x}^{1}\mathrm{d}zP_{gg}\left(z\right)\Phi(x/z,b) \tag{7.56}$$

其中分裂函数

$$P_{gg}(z)=\frac{1}{(1-z)_{+}}+\frac{1}{z}-2+z(1-z) \tag{7.57}$$

可由计算式 (7.55) 而得，最后加上的两项 $-2+z(1-z)$，在 $z\to 0$ 和 $z\to 1$ 的极限下是有限的。从 k_T 重求和抽取出来的指数写为

$$\Delta(x,b,Q_0)=\exp\left\{-2\int_{xQ_0}^{xp^{+}}\frac{\mathrm{d}k}{k}\left[\int_{1/b}^{k}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}\gamma_K\left(\alpha_s(\mu)\right)-\bar{\alpha}_s(k)\ln\frac{kb}{x}\right]\right\} \tag{7.58}$$

其中 Q_0 是一个任意的低能标，利用代入法，很容易验证方程式 (7.56) 的解为

$$\Phi(x,b)=\Delta(x,b,Q_0)\Phi_i$$

$$+2\int_x^1 \mathrm{d}z \int_{Q_0}^{p^+} \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} \bar{\alpha}_s(x\mu)\Delta(x,b,\mu)P_{gg}(z)\,\Phi(x/z,b) \tag{7.59}$$

上式可视为 CCFM 演化方程式的一种变化形式。

参考文献

[1] Bozzi G, Catani S, Ferrera G, et al. Nucl. Phys. B, 2009, 815: 174.

[2] Collins J C, Soper D E. Nucl. Phys. B, 1981, 193: 381.

[3] Collins J C, Soper D E, Sterman G. Nucl. Phys. B, 1985, 250: 199.

[4] Sterman G. Phys. Lett. B, 1986, 179: 281; Nucl. Phys. B, 1987, 281: 310.

[5] Catani S, Trentadue L. Nucl. Phys. B, 1989, 327: 323; Nucl. Phys. B, 1991, 353: 183.

[6] Korchemsky G P, Marchesini G. Nucl. Phys. B, 1993, 406: 225; Phys. Lett. B, 1993, 313: 433.

[7] Li H N. Phys. Lett. B, 1999, 454: 328.

[8] Laenen E, Sterman G, Vogelsang W. Phys. Rev. Lett., 2000, 84: 4296; Phys. Rev. D, 2001, 63: 114018.

[9] Gribov V N, Lipatov L N. Sov. J. Nucl. Phys., 1972, 15: 438; Altarelli G, Parisi G. Nucl. Phys. B, 1977, 126: 298; Dokshitzer Y L. Sov. Phys. JETP, 1977, 46: 641.

[10] Kuraev E A, Lipatov L N, Fadin V S. Sov. Phys. JETP, 1977, 45: 199; Balitsky Y Y, Lipatov L N. Sov. J. Nucl. Phys., 1978, 28: 822; Lipatov, L N. Sov. Phys. JETP, 1986, 63: 904.

[11] Ciafaloni M. Nucl. Phys. B, 1988, 296: 49; Catani S, Fiorani F, Marchesini G. Phys. Lett. B, 1990, 234: 339; Nucl. Phys. B, 1990, 336: 18; Marchesini G. Nucl. Phys. B, 1995, 445: 49.

[12] Li H N. Phys. Lett. B, 1996, 369: 137; Phys. Rev. D, 1997, 55: 105.

[13] Kodaira J, Trentadue L. Phys. Lett. B, 1982, 112: 66.

[14] Beneke M, Falgari P, Klein S, et al. Nucl. Phys. B, 2012, 855: 695.

[15] Lai H L, Li H N. Phys. Rev. D, 1998, 58: 114020.

[16] Lai H L, et al. Phys. Rev. D, 1997, 55: 1280.

[17] Froissart M. Phys. Rev., 1961, 123: 1053.

[18] Thorne R S. Phys. Rev. D, 1999, 60: 054031.

[19] Bozzi G, Fuks B, Klasen M. Nucl. Phys. B, 2008, 794: 46.

第 8 章　高能碰撞中的 QCD 效应

在本章中我们将以 Higgs 粒子的研究为例，展示在高能碰撞，特别是在大型强子对撞机 (Large Hadron Collider，LHC) 上 QCD 效应的重要性，以及使得数据与理论可以直接比较所需要的工具。这些工具的基础是 QCD 的渐近自由性质：在高能区它的贡献可以微扰计算，而在低能区需要依赖非微扰的方法。本章将给出十分简短、非常初步的介绍，希望可以帮助读者理解 QCD 理论是如何应用在高能散射过程中的。

8.1　简　　介

加速器在高能物理发展中起着举足轻重的作用。早期卢瑟福利用天然放射性进行的经典实验厘清了原子的结构，直接促使了质子的发现。后期的深度非弹散射 (deep inelastic scattering) 实验以及众多其他实验，为夸克模型的创立提供了无可替代的实验基础，当然也包括在高能散射过程的部分子模型。束流碰撞 (colliding beam) 的加速器更充分地提高了碰撞的质心能量，从而形成了今天人类对于物质基本结构和相互作用的认识，即确立了标准模型 (standard model，SM)。随着现代加速器和探测器的发展，加速器的质心能量和亮度越来越高，探测器也越来越精确，当然尺寸也越来越大。以目前在日内瓦正在运行的加速器 LHC 为例，如图 8.1 所示，它是目前世界上能量最高的加速器，也是在未来几十年最重要的加速器。LHC 有非常复杂的结构，粒子加速分级进行，可以实现质子–质子，以及重离子之间的碰撞。其主环，也是加速的最后一级，周长约 27km。在主环上分布着几个主要的探测器，如 ATLAS，CMS，LHCb，ALICE 等。其中 ATLAS，CMS 为通用探测器，性能相当，两者的实验测量结果可互相检验。

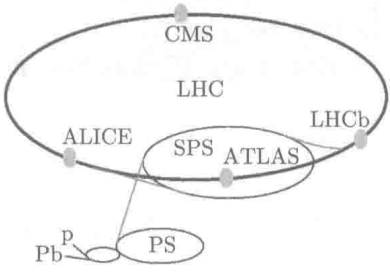


图 8.1　LHC 的示意图

LHC 的质子-质子对撞质心能量目前达到了 $\sqrt{s} = 13\text{TeV}$，在 2017 年 6 月 30 日达到的瞬时亮度为 $L = 1.58 \times 10^{34}\text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$，已经超过了其设计的亮度 $L = 1 \times 10^{34}\text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$。随着实验技术的发展，测量精度的不断提高，对理论计算也提出了挑战。理论预言的精度要等于或远小于实验的精度。只有这样，理论与实验的对比才有意义。在 LHC 实验中，由于这是一个强子碰撞实验，一方面其 QCD 的效应很显著，很重要，并且无处不在，几乎决定了大部分观测的现象；另一方面，强作用的复杂性，主要是非微扰性质，决定了探测器里的信号非常复杂，如何把实验测量的数据与理论预言进行直接比较变得十分困难。从需要研究的物理来看，无论是对于标准模型的检验，还是研究可能超出标准模型 (beyond the SM，BSM) 的新物理，在高能散射中深入理解 QCD 效应都是十分必要的。

本章主要是简单介绍 QCD 在对撞机物理中的应用，特别是强调 QCD 的性质决定了在加速器上的相关处理。对于具体的物理公式，我们将不给出详细的理论计算与证明。相关知识可以参考本书的其他章节以及其他文献，比如[1]-[3]，本章的撰写也大量参考了这些文献。

8.2 例子：标准模型 Higgs 粒子的产生、衰变与 QCD 效应

作为例子，我们考虑一个问题：如何在 LHC 上发现标准模型的 Higgs 粒子。现在我们知道，Higgs 粒子的质量为 125GeV 左右，这个能标远大于微扰 QCD 失效的能标 Λ_{QCD}，这决定了在高能散射中的一个硬标度。在人们感兴趣的高能散射实验中，一般总存在一个硬标度。如果从时间尺度的角度看，标准模型 Higgs 粒子在很短的时间内产生，并很快发生了衰变，与之相比较，在很长的时间后 $(1/\Lambda_{\text{QCD}})$，其衰变产物中稳定的带色的粒子才会强子化 (hadronization)，即变成强子。研究表明，Higgs 产生的总截面可以通过下面因子化公式计算，

$$\sigma = \sum_{a,b} \int_0^1 \mathrm{d}x_a \mathrm{d}x_b \sum_F f_a^P(x_a, \mu_F) f_b^P(x_b, \mu_F) \hat{\sigma}_{ab \to F} \tag{8.1}$$

其中的求和包括质子中所有可能的部分子 a, b，它们带的动量分数为 x_a, x_b，F 是包括 Higgs 粒子的末态，f 是部分子分布函数 (parton distribution function，PDF)。因子化本质上是由 QCD 性质决定的，它把物理观测量分成长程贡献 (又称软过程，这里表现为 PDF) 和短程贡献 (硬过程)，这里的能标 μ_F 就称为因子化能标，它的物理含义粗略来看就是区分软硬过程。$\hat{\sigma}$ 表示硬过程的贡献，因为它还取决于不同的部分子，也常常称为子过程。

研究表明，对于 Higgs 产生贡献最大的是来自子过程 $PP \to gg + X \to H + X$，其中“X”表示为任意的其他成分。子过程 $gg \to H + X$ 在微扰论的最大的贡献

来自一个顶夸克圈的三角图，费曼图如图 8.2 所示。因为 Higgs 并不带色荷，所以 Higgs 与胶子没有直接的相互作用，它们之间的相互作用只能联合胶子与顶夸克的 QCD 相互作用加上 Higgs 与顶夸克的汤川耦合相互作用而产生。

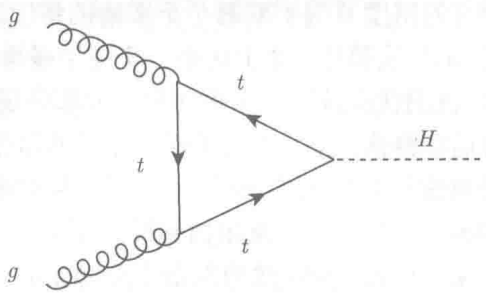


图 8.2　标准模型 Higgs 粒子通过子过程 $gg \to H + X$ 产生的领头阶贡献的典型费曼图

Higgs 粒子产生后很快就会衰变到各种末态 (图 8.3)，主要是 $b\bar{b}$，W^+W^-，ZZ，$\tau^+\tau^-$，gg，$\gamma\gamma$，$\cdots$，而衰变到 $b\bar{b}$ 的分支比最大。然而，在 LHC 最先发现 Higgs 粒子的末态并不是 $b\bar{b}$，其原因就是 $b\bar{b}$ 末态也可以通过强作用产生 ($gg \to b\bar{b}$，$q\bar{q} \to b\bar{b}$)，并且其截面远大于通过 Higgs 产生过程的截面。

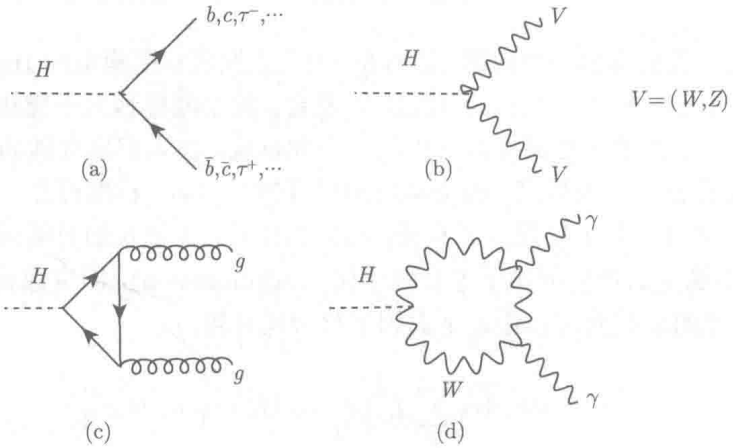


图 8.3　标准模型 Higgs 粒子主要衰变道的领头阶贡献的典型费曼图

这个例子形象地说明，在研究感兴趣的物理 (这里是 Higgs 粒子的发现) 时，QCD 效应发挥着至关重要的作用。一方面，为了寻找 Higgs 粒子的信号，其主要产生的子过程 $gg \to H$ 的截面正比于 α_s^2；另一方面，QCD 的本底贡献是如此之大，使得 Higgs 粒子的信号不可能通过它的主要衰变道找到。从历史的角度，2012 年 Higgs 粒子主要是通过双光子末态这个 Higgs 的稀有衰变道发现的。事实上，就算是双光子末态，其主要的本底过程依然来自 QCD 相互作用。

8.3 实验数据与理论预言直接对比的困难

8.2 节过度简化的例子只是为了说明 QCD 效应的重要性。当人们试图把实验数据与理论进行直接对比时，就会发现将面临巨大的困难。这些困难表现在如下方面：

- 8.2 节的例子只是考虑了微扰论的领头阶，当实验测量越来越精确，理论需要计算到微扰论的更高阶 (如子过程胶子聚合产生 Higgs 粒子的过程中，QCD 高阶效应的代表性费曼图见图 8.4)，这会带来新的紫外发散和红外发散问题。另外需要考虑的问题是，理论计算中外腿上额外的胶子和夸克如何与实验“喷注”信号进行匹配，才能避免重复计算 (double counting)。

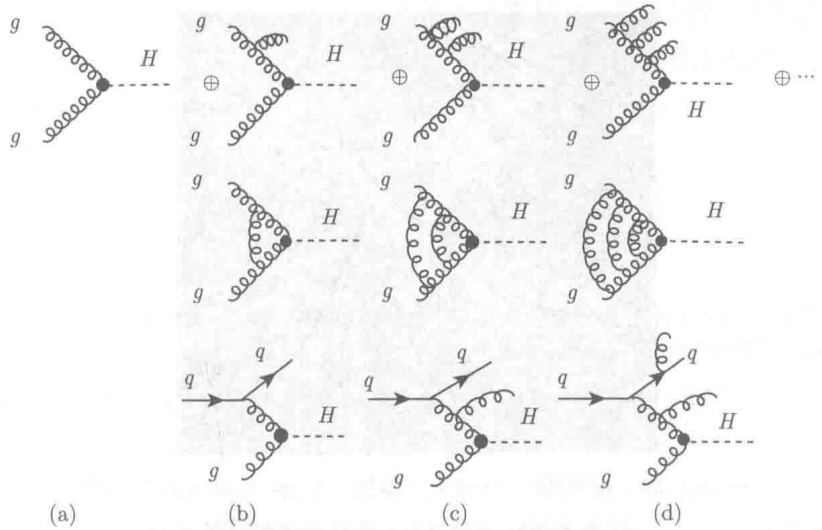


图 8.4 标准模型 Higgs 粒子主要产生过程的高阶贡献的典型费曼图举例

- 除了需要研究的信号，真实的探测器信号更复杂，其主要原因本质上依然来源于 QCD 的复杂性，如参与散射的质子是复合粒子，而非基本粒子。举个例子，如果我们想研究标准模型 Higgs 粒子产生后又衰变为两个“喷注”加上正负电子的过程，即 $H \to ZZ^* \to q\bar{q}e^+e^-$，见图 8.5。在真实的探测器里，信号会十分复杂，如图 8.6 所示的模拟信号。当然为了理解这些信号，首先需要了解现代探测器的基本结构，如图 8.7 所示。基本来讲，现代探测器是一个洋葱结构。根据所探测粒子的性质，从里到外是径迹探测器、电磁量能器、强子量能器和缪子探测器等。如何从物理上去理解这些额外信号的来源？从微扰论的角度，除了上面的领头阶贡献，还存在其他的贡献，如高阶 QCD 修正的贡献，如图 8.4 和图 8.8 所示。除此之外，质子在提供部分

子胶子之后的残留物 (remnant) 对探测器信号的贡献也需要考虑。即在质子–质子对撞中的其他成分“X”需要处理，需要模拟它对人们感兴趣信号的影响。

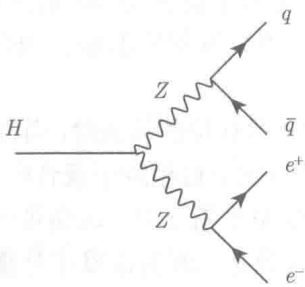


图 8.5　标准模型 Higgs 粒子的一个衰变过程 $H \to ZZ^* \to q\bar{q}e^+e^-$ 的领头阶费曼图

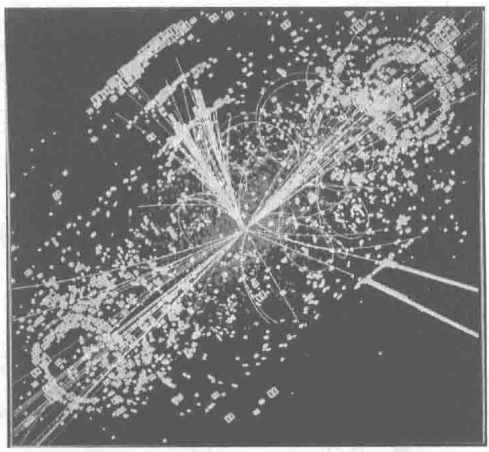


图 8.6　CMS 探测器上模拟的一个 Higgs 事例：Higgs 衰变道两个“喷注”和正负电子，线条表示粒子的轨迹，亮点表示能量的沉积

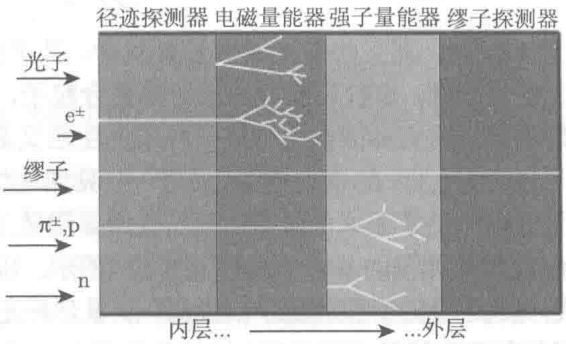


图 8.7　现代探测器典型结构概念图。在图 8.6 中，电子的径迹会在径迹探测器和电磁量能器留下信号，而重建的“喷注”来自径迹探测器、电磁和强子量能器

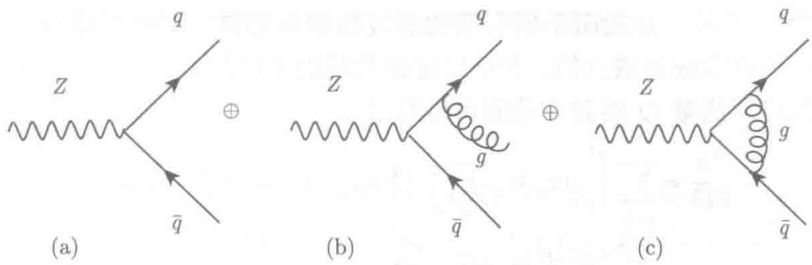


图 8.8 对图 8.5 中 QCD 领头修正发生在 Z 粒子衰变的典型费曼图

- 实验数据最终测量的粒子是强子，而微扰论计算涉及的都是夸克和胶子，如何把夸克和胶子变成强子 (强子化)？因为 QCD 在低能区不能进行微扰计算，人们需要借助一些唯象模型来实现强子化。

这些问题的回答，在高能区可以通过微扰计算估计，在低能区需要引入非微扰的唯象模型。幸运的是，目前已经有成熟的方法和相应的计算机程序可以实现对真实的物理过程进行计算和模拟，并与实验数据进行直接比较。

8.4 微扰 QCD 过程

考虑一个一般的 QCD 反应过程，其中最重要的就是夸克，胶子这些带色荷粒子的所谓硬散射过程，它的反应截面可以利用费曼规则，通过微扰计算得出，但这并不是整个反应过程的全部，就像 8.3 节中所指出的那样。色禁现象意味着我们无法直接观测到初末态中的夸克胶子，能观测到的都是色单态的强子，考虑到真实对撞机上的反应过程，必须包含初末态辐射的贡献、喷注、强子化、underlying event 等多种 QCD 效应，这些效应中包含所谓的长程相互作用，即非微扰效应，处理这些问题的方法一般是利用因子化定理。值得指出的是，在低能过程中，强作用的非微扰效应是显然的，但是在高能过程中非微扰效应的重要性可能被低估。一个例子就是对于高能散射过程中衍射过程 (diffractive scattering) 机制的理解目前并不是特别清楚，这会导致理论预言的不确定性。实际上无论低能还是高能区，在处理上都具有同等的难度和不确定度，需要相应的技巧来处理。

8.4.1 因子化定理

因子化定理的好处是它可以将可微扰计算的硬过程和不可微扰的软过程的贡献分离开。对于软过程可以用模型描述并用实验数据拟合出来。这里的软过程可以包含两部分贡献，一部分是初态强子中的部分子分布函数，另一部分是衰变产物的强子化过程。

因子化定理并一定适用于所有的物理过程和观测量，本章假设对于研究的物理过程，因子化定理是成立的。本章只讨论共线因子化的形式。对于强子强子对撞过程，任意可观测量 O 的微分截面可以写成

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}O}=\sum_{a,b}\int_0^1 \mathrm{d}x_a\mathrm{d}x_b\sum_F\int \mathrm{d}\Phi_F f_a^{h_1}(x_a,\mu_F)f_b^{h_2}(x_b,\mu_F)$$
$$\times\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}_{ab\to F}}{\mathrm{d}\hat{o}}D_F(\hat{O}\to O,\mu_F) \tag{8.2}$$

其中第一个求和包括强子中所有可能的部分子 a、b，它们带的动量分数分别为 x_a、x_b，$\mathrm{d}\Phi_F$ 是 F 体末态相空间，f 是部分子分布函数，上标 $\hat{}$ 表示是部分子水平上的，D_F 表示部分子的碎裂函数 (fragmentation function，FF)。可以笼统地把 PDF 和 FF 归结为非微扰的贡献，而把 $\mathrm{d}\hat{\sigma}_{ab\to F}/\mathrm{d}\hat{o}$ 称为微扰的贡献，在簇射那一节会进一步地讨论这个问题。

因子化需要引入一个能量标度以区分软硬过程，这个能标 μ_F 就称为因子化能标。原则上讲，可观测微分截面 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}O$ 和 μ_F 是无关的。虽然软硬过程都和 μ_F 相关，但把它们结合在一起就和 μ_F 无关。但实际上，当改变 μ_F 的取值，经常会发现 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}O$ 也会稍有变化，这种变化通常被归结为因子化带来的理论误差。在因子化中通常还涉及另外一个能标，即重整化标度 μ_R。我们知道，部分子水平的截面是通过微扰 QCD 逐级计算得出的，它一定会留一个重整化能标 μ_R 的依赖。相应地，利用实验数据拟合得到 PDF 时，需把精确到某个阶次硬过程计算的截面放入式 (8.2) 中，所以 PDF 同样是 μ_R 依赖的。同 μ_F 类似，由 μ_R 改变而引起的强子水平截面 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}O$ 的变化也被认为是理论误差的一部分。

另外，一个和因子化相关的问题就是初末态共线辐射。对于初态部分子，它可以劈裂成两个共线的部分子，如图 8.4 描述的过程 $g\to gg$，还有 $q\to qg$。这会引起修正图的共线发散。Kinoshita-Lee-Nauenberg (KLN) 定理保证了在某一固定阶水平上，实图和虚图的红外发散一定会全部抵消。但对于部分子水平上真实的反应过程，存在一个明显的困难，就是我们根本无法区分初态粒子是一个部分子还是伴随了很多共线辐射的部分子。我们需要做的是从伴随了很多共线辐射的众多部分子中抽取出一个理论上纯粹的单个部分子。这样一来，对于某个单个部分子的情况，其他所有共线部分子的贡献就被归结到这个部分子分布函数中去了。所以此时某一固定阶部分子水平虚实图相加之后还会残留共线发散，它需要和 PDF 中的共线发散相抵消。因此 PDF 还包含了到能标 μ_F 的多级辐射的重求和效应 (resummation)。当然我们真正用到的 PDF 只可能是一个有限的数值函数，它不可能包含发散的共线极点。这等于说我们在计算硬散射部分时，已经对它的初态辐射图的相空间做了切割，把共线的部分归结到 PDF 中去了。这时就需要用到所谓的 "+" 函数，把极点扣掉，并考虑所谓的劈裂函数 (spliting function)[4, 5]。和重整化类

似，对于共线发散的去除方案，即因子化存在不同的减除方案，通常选取的是 $\overline{\text{MS}}$ 方案。

8.4.2 红外安全

所谓的红外安全是指，我们定义的物理可观测量必须对长程相互作用是不敏感的。这里的红外包含软和共线两种情况，可以是软的，或是共线的，抑或是既软又共线的情形。可以想象，对于真实的实验测量，探测器的能量分辨与角度分辨是有一定的下限的，不可能趋近于 0。这样，如果探测器看到的粒子同时伴随有低于它探测能力的额外软的或是共线的辐射粒子，它是根本无法区分的。或者说，额外的红外修正并不能明显地影响到我们定义的可观测截面。对于红外安全的可观测量，它的红外修正是被压低的。

$$\text{红外安全可观测量：红外修正} \propto \frac{Q_{\text{IR}}^2}{Q_{\text{UV}}^2} \tag{8.3}$$

可以看到红外修正是被紫外 (硬过程) 能标压低的，但它并不一定为 0。在某些情况下，硬过程能标本身就很低，如软喷注 (对应着有些超对称模型，或者能标不是太高的新物理的信号寻找)、喷注的子结构等问题，红外修正相对来说就有可能不见得小到可以忽略。红外安全的物理观测量的重要性质是可以从理论上进行可靠的计算，从实验观测的角度，它也并不一定比红外不安全的量更好。值得指出的是，因为研究的物理目的不同，比如希望研究理论的红外性质，红外敏感的可观测量显然更合适。

8.4.3 固定阶计算

对于硬散射部分，可观测量 $\mathcal{O}$ 的微分截面可表示为

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}_F}{\mathrm{d}\mathcal{O}} = \sum_{k=0}^{\infty} \int \mathrm{d}\Phi_{F+k} |\sum_{l=0}^{\infty} \mathcal{M}_{F+k}^{(l)}|^2 \delta(\mathcal{O} - \mathcal{O}(\Phi_{F+k})) \tag{8.4}$$

其中 F 为领头阶末态粒子，k 为实辐射粒子，$F+k$ 表示 F 的遍举过程，l 表示虚图修正，Φ_{F+k} 为考虑实辐射修正之后的末态相空间。

按照微扰 QCD(按照耦合常数微扰展开)，在不变矩阵元水平上，多一个外腿，实修正阶数就多一个 $\sqrt{\alpha_s}$，多一个圈图，虚修正就多一个 α_s。考虑截面水平，它也可以表达为 α_s 不同阶次的展开。对于某一阶次的截面，它可能来自于纯的实辐射图的贡献，也可能是减少一条外腿而在两个共轭相乘的费曼图中的一个多加一个圈图。所以，一般情况，有 k 条外腿，l 个圈图。

在截面 $|\mathcal{M}|^2$ 水平，

$$
\begin{aligned}
&k=0, l=0, && F \text{ 遍举过程的领头阶 (通常是树图水平)}\\
&k=n, l=0, && F+n \text{ 个喷注遍举过程的领头阶}\\
&k+l \leqslant n, && F \text{ 过程的N}^n\text{LO阶修正 (包括 } F+1 \text{ 个喷注的N}^{n-1}\text{LO阶修正，} F+2 \text{ 个喷注的N}^{n-2}\text{LO 阶修正，直至 } F+n \text{ 个喷注的 LO 阶过程)}
\end{aligned}
\tag{8.5}
$$

我们用单个标准模型 Higgs 粒子产生的微扰展开作为例子，见图 8.9。其领头阶是 (a) 图，因为我们把 Hgg 看成有效顶点，所以对应 $k=0$，$l=0$，虽然在标准模型里领头阶的贡献是一个单圈图。(b) 图对应 $k=1$，$l=0$，(c) 图对应 $k=0$，$l=1$。

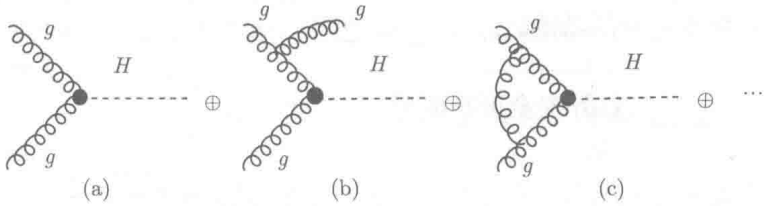


图 8.9　标准模型 Higgs 粒子产生过程中包括更高阶贡献的典型费曼图

下面来具体考察式 (8.4) 在某一固定阶上的展开式。对于最低阶的情况实辐射修正外腿数 $k=0$，虚图圈数 $l=0$，对应最低阶截面或称为玻恩截面。按照约定，当我们声称某个领头阶过程的次级修正，或次次级修正等时，对于领头阶需要给出明确的定义。一般情况下，某个指定过程的领头阶并不一定就是玻恩水平截面，它也可以包括实 QCD 辐射出来的喷注，这样的领头阶本身就存在红外发散，因为没有同时考虑 α_s 同阶幂次上的虚过程。为了得到有限的结果，在做末态相空间积分时就需要对辐射出的喷注做额外的截断。例如，要求它垂直方向上的分量大于某一个下限 $P_\perp > P_{\perp\min}$。当然这样算出来的结果是和喷注的算法依赖的。

对于理想情况，玻恩截面就是领头阶截面。则精确到 NLO 水平的总截面为

$$
\begin{aligned}
\sigma_0^{\mathrm{NLO}} &= \int \mathrm{d}\Phi_0 |\mathcal{M}_0^{(0)}|^2 + \int \mathrm{d}\Phi_0 2\mathrm{Re}[\mathcal{M}_0^{(1)}\mathcal{M}_0^{(0)*}] + \int \mathrm{d}\Phi_1 |\mathcal{M}_1^{(0)}|^2 \\
&= \sigma_0^{(0)} + \sigma_0^{(1)} + \sigma_1^{(0)}
\end{aligned}
\tag{8.6}
$$

式中下脚标表示实辐射喷注数 k(这里是一个理想情形，不考虑部分子的强子化过程，而把部分子对应喷注)，上脚标表示虚图圈数 l。总截面包括三部分：玻恩部分、玻恩图和一圈虚图的干涉部分，以及实修正自共轭部分。拿图 8.9 作为例子，(a) 的平方对应玻恩贡献，(a) 与 (c) 干涉的贡献，(b) 的平方部分对应实修正。其中 $\sigma_0^{(1)}$ 和 $\sigma_1^{(0)}$ 的红外发散部分按照 KLN 定理相互抵消。更多固定阶计算的例子，可以参考文献 [6, 7]。

如果领头阶就已经包含一个实辐射出的喷注，则它精确到 NLO 水平的总截面为

$$\begin{aligned}\sigma_1^{\mathrm{NLO}}(P_{\perp\min}) = &\int_{P_\perp > P_{\perp\min}} \mathrm{d}\Phi_1 |\mathcal{M}_1^{(0)}|^2 + \int_{P_\perp > P_{\perp\min}} \mathrm{d}\Phi_1 2\mathrm{Re}[\mathcal{M}_1^{(1)} \mathcal{M}_1^{(0)*}] \\ &+ \int_{P_\perp > P_{\perp\min}} \mathrm{d}\Phi_2 |\mathcal{M}_2^{(0)}|^2 \\ = &\sigma_1^{(0)}(P_\perp > P_{\perp\min}) + \sigma_1^{(1)}(P_\perp > P_{\perp\min}) + \sigma_2^{(0)}(P_{\perp 1} > P_{\perp\min}) \end{aligned} \tag{8.7}$$

可以看到，结果依赖于 $P_{\perp\min}$ 的选择。对于两个喷注 (jet) 辐射的情况，至少需要其中一个喷注的 $P_\perp$ 大于 $P_{\perp\min}$。这样一来，在实际计算中结果是依赖于喷注算法的。

同样，对于两圈图

$$\sigma_0^{\mathrm{NNLO}} = \sigma_0^{\mathrm{NLO}} + \sigma_1^{\mathrm{NLO}} + \sigma_0^{(2)} \tag{8.8}$$

其中 $\sigma_0^{(2)}$ 来自于截面水平两圈图的贡献，包括 1 圈图的自共轭以及树图与 2 圈图的干涉。其他更高圈的固定阶贡献也可以类似写出。

一般说来，在某一阶上的截面既可能有实修正，又可能有虚修正。紫外发散由重整化引入抵消项来解决，红外发散由 KLN 定理保证虚实相抵。但在具体操作过程中，对于红外发散的处理会有一些相对麻烦之处。

第一，实修正的末态相空间积分。对于 $2 \to 2$ 过程，末态相空间积分可以解析得到。但对于更多的末态粒子，它的相空间维数为 $(4-1)n_f - 4$，n_f 为末态粒子数目，即每个末态粒子的四动量减去一个在壳条件，再减掉一个整体的四动量守恒，每增加一个末态粒子，相空间维数加 3。对于高维情况，只能做数值积分，这通常会耗费大量 CPU 计算时间。还有就是关于多体末态相空间积分参数的选取，

$$\prod_{i=3}^{n} \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} \delta^4 \left(\sum_{i=3}^{n} p_i - (p_1 + p_2) \right) \tag{8.9}$$

我们要求末态相空间积分是洛伦兹不变的，只需要从 $4n_f$ 个四动量中构造出 $3n_f - 4$ 个不变量做积分即可，这可以有多种选择。具体操作时，可以用类似 FormCalc 的方法。如图 8.10 所示，即先将初态的两体按 s 道那样“捏”在一起，然后分裂出一个在壳的末态粒子和一个不在壳的虚粒子，虚粒子再逐级循环分裂，直至分裂出所有的末态粒子数目，这样对一个一般的多体相空间积分，就可以写成多个 $2 \to 2$ 或 $2 \to 3$ 相空间积分之积。程序上实现起来比较方便。当然，分裂出末态粒子的先后次序与真实反应过程的拓扑结构可能是不同的，但这并不会改变末态相空间积分的最终结果。

第二，KLN 定理保证了虚实修正的红外发散相抵消，我们现在来考察这个抵消具体是怎样实现的[9, 10]。虚辐射修正的解析表达式可以直接计算出来，所以它的红外无穷大的处理不需要额外的技巧。但实辐射修正的红外发散来自于某些极端条件下的相空间积分，这些积分一般很难直接积出来，必须把实修正中的红外发散解析地分离出来，并且这种解析分离必须与虚修正解析式的计算约定保持一致，否则二者的抵消将无法进行。同理，这种解析分离还必须与 PDF 或碎裂函数的解析式的计算约定保持一致。在计算方案上，虚修正、实修正，以及用来做因子化减除的 PDF 或碎裂函数一般都采用维数正规化下的 $\overline{\text{MS}}$ 方案。分离了红外无穷大的实修正的积分式将不再包含极点，可以用蒙特卡罗积分方法来数值积出。分离实修正的红外无穷大通常有两种方法，即双截断切割方法 (two slicing cutoff)[11] 和积分核减除方法。这里我们主要介绍双截断切割法。所谓双截断切割是指在处理 $2 \to 3$ 实过程中，引入两个截断参数。一个负责切割软和硬，另一个负责区分共线和非共线。这样三体末态相空间最终就被这两个参数切成了三个部分，即硬非共线区域 (无软发散和共线发散)、硬共线区域 (无软发散但有共线发散) 和软共线区域 (既有软发散又有共线发散)。由于共线发散需要由因子化处理，相当于引入因子化的共线发散抵消项，现在实修正的共线发散被切割成了硬共线和软共线两部分，软共线部分可以近似为 $2 \to 2$ 过程乘上一个软辐射因子，这样就可以和虚修正 $2 \to 2$ 过程的截面相加，得到一个所谓的虚软 (virtual-soft) 部分，虚软部分中的软发散完全抵消，只剩下共线发散。相应地，也可以将因子化抵消项拆成硬共线部分和虚软共线部分，两部分分别和上述的实修正对应的两部分去抵消。这样就完成了虚实修正红外发散的处理。

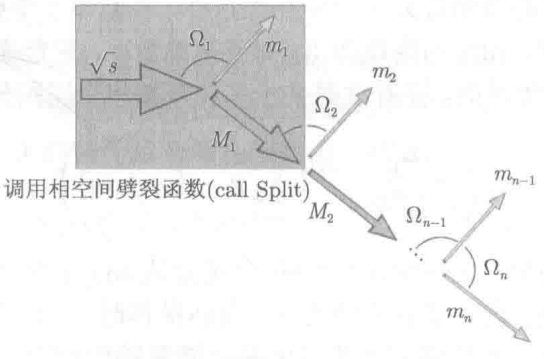


图 8.10　FormCalc 中相空间的产生，引自文献 [8]

相空间双截断切割方法

下面来具体介绍一下“相空间双截断切割”方法的操作过程。对于 $q\bar{q} \to q\bar{q}$，2 到 2 过程的实修正，记为 $1+2 \to 3+4+5$，其中第 5 个粒子是辐射出的胶子。首

先引入一个软截断 δ_s，把末态相空间分割成“软辐射区域”

$$0 \leqslant E_5 \leqslant \delta_s \sqrt{s_{12}}/2 \tag{8.10}$$

和“硬辐射区域”

$$E_5 > \delta_s \sqrt{s_{12}}/2 \tag{8.11}$$

然后再引入一个共线截断 δ_c，把硬辐射区域又分割成“硬共线区域”

$$E_5 > \delta_s \sqrt{s_{12}}/2, \quad 0 \leqslant -t_{25} \leqslant \delta_c s_{12} \tag{8.12}$$

和“硬非共线区域”

$$E_5 > \delta_s \sqrt{s_{12}}/2, \quad -t_{25} > \delta_c s_{12} \tag{8.13}$$

并且要求 $\delta_c \ll \delta_s$。其中 s 和 t 为相应脚标对应粒子构成的 Mandstan 变量，硬非共线区域的积分既不包括软发散，也不包括共线发散，利用标准的蒙特卡罗积分方法可直接积出。软辐射区域包含了软发散和共线发散，硬共线区域包含了共线发散而无软发散。在维数正规化下它们可以近似地解析计算出来。

软辐射区域的截面可利用 Eikonal 近似 (后面还会具体讨论) 表达为

$$\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{soft}}_{1+2\to 3+4+5} = \mathrm{d}\sigma^{D}_{1+2\to 3+4} \sum_{i,j=1}^{4} \frac{C_{ij}}{C_0} S_{ij} \tag{8.14}$$

其中 C_{ij} 是在截面水平上一个从第 i 个腿上辐射出胶子的费曼图和另一个从第 j 个腿上辐射出胶子的费曼图共轭相乘而产生的“色因子” (color factor)，满足 $C_{ij} = C_{ji}$。S_{ij} 是分离了色因子之后的软辐射因子，可由下式算出

$$\begin{aligned} S_{ij} =& \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{(4\pi)^{\epsilon}}{\Gamma(1-\epsilon)} \left(\frac{\mu^2}{s}\right)^{\epsilon} \frac{1}{\pi} \left(\frac{4}{\epsilon}\right)^{(-\epsilon)} \int_0^{\delta_s \frac{\sqrt{s}}{2}} \mathrm{d}E_q \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta_1 \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta_2 \\ & \times \left(\eta_i \eta_j \frac{p_i^{\mu}}{p_i \cdot q} \frac{p_j^{\nu}}{p_j \cdot q} (-g^{\mu\nu})\right) E_q^{1-2\epsilon} \sin^{1-2\epsilon}\theta_1 \sin^{-2\epsilon}\theta_2 \end{aligned} \tag{8.15}$$

在软辐射区域的截面 (8.14) 解析计算出后，就可以和 $2 \to 2$ 过程的虚修正截面相加，得到所谓的“虚软部分”。虚软部分中的软发散完全相消，只剩下一些共线发散。

对于硬共线区域的截面，可由下式做近似处理。由于这里的硬共线胶子可从四条外腿中的任意一个上面辐射出，这里只给出硬胶子与入射部分子 2 共线的情况，

并假设部分子 2 来自于一个强子 H。其他情况也可以类似得出。

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{HC}}_{1+H\to 3+4+5} =& \int_0^1 \mathrm{d}y f_{2/H}(y) \\ &\times \int_0^{1-\delta_s} \mathrm{d}z \left[\frac{\alpha_S}{2\pi}\frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)}\left(\frac{4\pi\mu^2}{yzS_h}\right)\right]\left(\frac{-1}{\epsilon_{\mathrm{IR}}}\right) \\ &\times \delta_c^{-\epsilon} P_{2'2}(z,\epsilon)\left[\frac{(1-z)}{z}\right]^{-\epsilon} \\ &\times \mathrm{d}\sigma^D_{1+2'\to 3+4}(yzS_h, t_{13}, t_{14})\end{aligned} \tag{8.16}$$

可以明显看出硬共线区域的截面正比于共线发散因子 $-1/\epsilon_{\mathrm{IR}}$。

虚软部分和硬共线截面中的共线发散统一由因子化来处理，可以等效认为引入了因子化抵消项。在 $\overline{\mathrm{MS}}$ 因子化方案下为

$$\int_0^1 \mathrm{d}y f_{2/H}(y)\int_0^1 \mathrm{d}z P_{2'2}(z)\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\left[\frac{\alpha_s}{2\pi}\frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)}\left(\frac{4\pi\mu^2}{\mu_F^2}\right)\right]\mathrm{d}\sigma^D_{1+2'\to 3+4}(yzS_h, t_{13}, t_{14}) \tag{8.17}$$

由于共线发散已经被拆成虚软和硬共线两部分，对应地，可以把因子化抵消项也拆成虚软 (式 (8.18)) 和硬共线 (式 (8.20)) 两部分，分别和上述两部分相抵消。

因子化抵消项的虚软部分为

$$\left[\frac{\alpha_s}{4\pi}\frac{(4\pi)^\epsilon}{\Gamma(1-\epsilon)}\left(2A_1^{\mathrm{sc}}(2\to 2'5)\right)\left(\log\left(\frac{\mu_F^2}{\mu^2}\right)-\frac{1}{\epsilon_{\mathrm{IR}}}\right)\right]\mathrm{d}\sigma^D_{1+2'\to 3+4}(S_h, t_{13}, t_{14}) \tag{8.18}$$

其中 $A_1^{\mathrm{sc}}(2\to 2'5)$ 称为“软共线”因子，

$$\begin{aligned}A_1^{\mathrm{sc}}(q\to qg) =& C_F\left(2\log\delta_s+\frac{3}{2}\right) \\ A_1^{\mathrm{sc}}(g\to gg) =& 2N\log\delta_s+(11N-2n_f)/6\end{aligned} \tag{8.19}$$

因子化抵消项的硬共线部分为

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \mathrm{d}y f_{2/H}(y)\int_0^{1-\delta_s}\mathrm{d}z P_{2'2}(z)\left(\frac{1}{\epsilon_{\mathrm{IR}}}\right)\left[\frac{\alpha_s}{2\pi}\frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\gamma(1-2\epsilon)}\left(\frac{4\pi\mu^2}{\mu_F^2}\right)^\epsilon\right] \\ &\times \mathrm{d}\sigma_{1+2'\to 3+4}(yzS_h, t_{13}, t_{14})\end{aligned} \tag{8.20}$$

将因子化抵消项的虚软部分加到虚软部分的截面中，就得到一个没有共线发散的虚软截面；将因子化抵消项的硬共线部分加到硬共线区域的截面中，就得到一个没有共线发散的硬共线部分截面，如式 (8.21)。

$$\mathrm{d}\tilde{\sigma}^{\mathrm{HC}}_{1+H\to 3+4+5} = \int_0^1 \mathrm{d}y f(y,\mu_F)\int_0^{1-\delta_s}\mathrm{d}z\tilde{P}(z)\times\mathrm{d}\sigma^D_{1+2'\to 3+4}(yzS_h, t_{13}, t_{14}) \tag{8.21}$$

其中

$$\tilde{P}(x) = P_{ij}(z)\log\left((1-z)\frac{yS_h}{\mu^2}\delta_c\right) - P'_{ij}(z) \tag{8.22}$$

$P_{ij}(z)$ 和 $P'_{ij}(z)$ 是标准的劈裂函数，见文献 [11]。

8.4.4 一圈图计算的程序实现

当需要计算或模拟一圈费曼图过程时，现在有多种程序包可供选择。例如，Madgraph 可以自动实现一圈图截面的计算以及模拟事例产生过程，通常用户并不需要关心它的计算细节；FeynArts[12]、FormCalc[13] 和 LoopTools[13] 程序包可以集合在一起完成画费曼图、产生振幅的模方、相空间积分、圈图积分等一系列过程，除了多体相空间积分需要数值计算，其他过程都是严格解析的；如果用户感兴趣，还可以利用 FeynCalc[14] 按照费曼规则自行计算费曼振幅；除此以外，还有些程序已经植入了某些过程的一圈图解析结果，如 MCFM，但通常只限于某些特定过程。在实际使用过程中，用户需要根据自身的需求选取合适的辅助程序，通常还需要根据具体过程的特殊要求，对上述软件进行修改以得到理想的结果。下面介绍部分软件的特点和使用中的注意事项。

FeynArts 是一个 Mathematica 程序包。它可以自动生成某特定过程到微扰展开的指定阶次的所有费曼图，并且给出每个费曼图振幅的解析表达式。FormCalc 的主体是一个 Fortran 程序包。它可以利用 FeynArts 给出的费曼振幅而得到振幅的模方，并把振幅模方缩写成更有利于数值计算的形式。对于一圈图振幅，FormCalc 可以把它做 Passarino-Veltman 约化，然后调用 LoopTools 计算圈动量积分。对于圈图中的紫外发散，FormCalc 可以根据用户设置的自能图抵消项，定出重整化常数并得到抵消项对应的费曼振幅，与圈图振幅相加得到重整化之后的不变振幅。为了验证紫外发散是否完全抵消，FormCalc 提供了一个可更改的维数正规化标度 μ，紫外重整化之后的结果在 μ 值变化时是稳定的。在得到振幅模方之后，FormCalc 可以利用标准的蒙特卡罗数值积分完成对末态相空间以及部分子分布函数的积分。FormCalc 还嵌入了一个计算软光子辐射因子的程序，可以算出一个辐射软光子过程的截面。虽然集成了上述优点，但 FormCalc 还是有一些不足之处。例如，它的软无穷大是由“光子质量”Λ 来正规化的，而不是通常选取的维数正规化，因此它不能自动处理共线发散，也不能自动做因子化减除。对于计算电弱修正比较理想，而 QCD 修正过程就不太适用。

FeynCalc 也是一个 Mathematica 程序包。它包括求迹、张量指标计算、自旋求和等多个库函数，可以解析计算费曼振幅并化简。对于圈图计算，特别有用的是它能把所有的 Passarino-Veltman 系数函数解析展开成标量函数 A_0、B_0、C_0 和 D_0 的形式。在实际应用中，可以用 FeynCalc 计算振幅模方，然后将振幅模方程序植

入 FormCalc 进行 PDF 卷积和相空间积分等操作。

LoopTools 和 QCDLoop[15] 是进行圈图积分计算的 Fortran 程序包。LoopTools 能计算不含共线发散且软发散采用“光子质量”正规化的 Passarino-Veltman 系数函数。因此和 FormCalc 一致，适用于电弱过程的一圈图计算。QCDLoop 可以在维数正规化方案下，给出四种标量函数 A_0、B_0、C_0 和 D_0 中的共线发散、软发散和紫外发散的具体形式。例如，

$$c_2\frac{1}{\epsilon^2}+c_1\frac{1}{\epsilon}+c_0 \tag{8.23}$$

因此，借助于 QCDLoop 可以方便地看到各种发散是如何消去的。

Passarino-Veltman 约化

下面介绍一圈图计算程序包的实现原理。我们知道，Madgraph 软件包功能很强大，它可以自动计算模拟某过程的 NLO 阶的结果，而不局限于某些特定过程。要实现这种功能，必须有通用的算法才行。这套算法就是 Passarino-Veltman 约化[16]。

对于一个任意的一圈图，它的振幅可以写成圈动量积分的形式。

$$\mathcal{M}=\int \mathrm{d}^D q\frac{N(q)}{D_0(q)D_1(q)\cdots D_{n-1}(q)} \tag{8.24}$$

其中 $D_0(q)\equiv q^2-m_0^2+\mathrm{i}\epsilon$，$D_i(q)\equiv (q+p_i)^2-m_i^2+\mathrm{i}\epsilon$ 为一圈图中传播子的分母，$N(q)$ 为分子部分。

对 $\mathcal{M}$ 做张量展开

$$\begin{aligned}\mathcal{M}=&a_0\frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{\mathrm{i}\pi^2}\int \mathrm{d}^D q\frac{1}{D_0(q)D_1(q)\cdots D_{n-1}(q)}\\&+a_\mu\frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{\mathrm{i}\pi^2}\int \mathrm{d}^D q\frac{q^\mu}{D_0(q)D_1(q)\cdots D_{n-1}(q)}\\&+a_{\mu_1\mu_2}\frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{\mathrm{i}\pi^2}\int \mathrm{d}^D q\frac{q^{\mu_1}q^{\mu_2}}{D_0(q)D_1(q)\cdots D_{n-1}(q)}\\&+\cdots\\&+a_{\mu_1\cdots\mu_p}\frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{\mathrm{i}\pi^2}\int \mathrm{d}^D q\frac{q^{\mu_1}\cdots q^{\mu_p}}{D_0(q)D_1(q)\cdots D_{n-1}(q)}\end{aligned} \tag{8.25}$$

其中

$$\frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{\mathrm{i}\pi^2}\int \mathrm{d}^D q\frac{q^{\mu_1}\cdots q^{\mu_p}}{D_0(q)D_1(q)\cdots D_{n-1}(q)}\equiv T^n_{\mu_1\cdots\mu_p}(p_1\cdots p_{n-1},m_0\cdots m_{n-1}) \tag{8.26}$$

称为 Passarino-Veltman 一圈张量积分。可以把 $T^n_{\mu_1\cdots\mu_p}$ 按 Lorentz 张量展成如下一系列形式，其中还给出了标量函数 A_0、B_0、C_0 和 D_0 的定义。

$$A_0\equiv T^1(m_0) \tag{8.27}$$

$$
\begin{aligned}
B_0 &\equiv T^2(p_1, m_0, m_1) \\
B_\mu &\equiv T^2_\mu(p_1, m_0, m_1) = p_{1\mu} B_1 \\
B_{\mu\nu} &\equiv T^2_{\mu\nu}(p_1, m_0, m_1) = g_{\mu\nu} B_{00} + p_{1\mu} p_{1\nu} B_{11}
\end{aligned} \tag{8.28}
$$

$$
\begin{aligned}
C_0 &\equiv T^3(p_1, p_2, m_0, m_1, m_2) \\
C_\mu &\equiv T^3_\mu(p_1, p_2, m_0, m_1, m_2) \\
&= p_{1\mu} C_1 + p_{2\mu} C_2 = \sum_{i=1}^{2} p_{i\mu} C_i \\
C_{\mu\nu} &\equiv T^3_{\mu\nu}(p_1, p_2, m_0, m_1, m_2) \\
&= g_{\mu\nu} C_{00} + \sum_{i,j=1}^{2} p_{i\mu} p_{j\nu} C_{ij} \\
C_{\mu\nu\rho} &\equiv T^3_{\mu\nu\rho}(p_1, p_2, m_0, m_1, m_2) \\
&= \sum_{i=1}^{2} (g_{\mu\nu} p_{i\rho} + g_{\nu\rho} p_{i\mu} + g_{\mu\rho} p_{i\nu}) C_{00i} + \sum_{i,j,k=1}^{2} p_{i\mu} p_{j\nu} p_{k\rho} C_{ijk}
\end{aligned} \tag{8.29}
$$

$$
\begin{aligned}
D_0 &\equiv T^4(p_1, p_2, p_3, m_0, m_1, m_2, m_3) \\
D_\mu &\equiv T^4_\mu(p_1, p_2, p_3, m_0, m_1, m_2, m_3) = \sum_{i=1}^{3} p_{i\mu} D_i \\
D_{\mu\nu} &\equiv T^4_{\mu\nu}(p_1, p_2, p_3, m_0, m_1, m_2, m_3) \\
&= g_{\mu\nu} D_{00} + \sum_{i,j=1}^{3} p_{i\mu} p_{j\nu} D_{ij} \\
D_{\mu\nu\rho} &\equiv T^4_{\mu\nu\rho}(p_1, p_2, p_3, m_0, m_1, m_2, m_3) \\
&= \sum_{i=1}^{3} (g_{\mu\nu} p_{i\rho} + g_{\nu\rho} p_{i\mu} + g_{\mu\rho} p_{i\nu}) D_{00i} + \sum_{i,j,k=1}^{3} p_{i\mu} p_{j\nu} p_{k\rho} D_{ijk} \\
D_{\mu\nu\rho\sigma} &\equiv T^4_{\mu\nu\rho\sigma}(p_1, p_2, p_3, m_0, m_1, m_2, m_3) \\
&= (g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} + g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) D_{0000} \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{3} (g_{\mu\nu} p_{i\rho} p_{j\sigma} + g_{\nu\rho} p_{i\mu} p_{j\sigma} + g_{\mu\rho} p_{i\nu} p_{j\sigma} \\
&\quad + g_{\mu\sigma} p_{i\nu} p_{j\rho} + g_{\nu\sigma} p_{i\mu} p_{j\rho} + g_{\rho\sigma} p_{i\mu} p_{j\nu}) D_{00ij} \\
&\quad + \sum_{i,j,k,l=1}^{3} p_{i\mu} p_{j\nu} p_{k\rho} p_{l\sigma} D_{ijkl}
\end{aligned} \tag{8.30}
$$

n 更大的 $T^n_{\mu_1\cdots\mu_p}$ 也可以做类似展开。所有的 A_0，B_0，B_1，B_{11}，$\cdots$ 统称为 Passarino-Veltman 系数，它们都可以按四种标量函数 A_0、B_0、C_0 和 D_0 完全展开。所以，一个任意的一圈图费曼振幅就可以展开为四种标量函数 A_0、B_0、C_0 和 D_0 的代数式。这就是程序可以实现不区分反应过程，而计算一圈费曼图的核心算法。

为了进一步分析红外发散、紫外发散的性质，特别是想明显地看出重整化、因子化等是如何将紫外发散、红外发散消除的，可以具体考察标量函数 A_0、B_0、C_0 和 D_0 中的发散项，并区分清楚某发散是紫外发散还是红外发散，例如参考文献 [15]，

- “一点”标量函数中的无穷大 $1/\epsilon$ 是紫外发散

$$I_1^D(m^2) = m^2\left(\frac{\mu^2}{m^2-\mathrm{i}\varepsilon}\right)^{\epsilon}\left(\frac{1}{\epsilon}+1\right)+\mathcal{O}(\epsilon) \tag{8.31}$$

- “两点”标量函数中的无穷大 $1/\epsilon$ 也是紫外发散

$$\begin{aligned} I_2^D(s;m_1^2,m_2^2) =& \mu^{2\epsilon}\left(\frac{1}{\epsilon}+2-\ln(s-\mathrm{i}\varepsilon)\right.\\ &\left.+\sum_{i=1}^{2}\left[\gamma_i\ln\left(\frac{\gamma_i-1}{\gamma_i}\right)-\ln(\gamma_i-1)\right]\right)+\mathcal{O}(\epsilon)\\ I_2^D(s;0,m^2) =& \left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{\epsilon}\left[\frac{1}{\epsilon}+2+\frac{m^2-s}{s}\ln\left(\frac{m^2-s-\mathrm{i}\varepsilon}{m^2}\right)\right]+\mathcal{O}(\epsilon)\\ I_2^D(s;0,0) =& \left(\frac{\mu^2}{-s-\mathrm{i}\varepsilon}\right)^{\epsilon}\left(\frac{1}{\epsilon}+2\right)+\mathcal{O}(\epsilon) \end{aligned} \tag{8.32}$$

但当 $I_2^D(s;0,0)$ 中的 $s=0$ 时，它应当取为[17]

$$I_2^D(0;0,0) = \frac{1}{\epsilon_{\mathrm{UV}}}-\frac{1}{\epsilon_{\mathrm{IR}}} \tag{8.33}$$

- “三点”标量函数和“四点”标量函数中的无穷大 $1/\epsilon$ 全部是红外发散。

于是，任意一个一圈图费曼振幅可以表示为

$$c_2^{\mathrm{IR}}\frac{1}{\epsilon_{\mathrm{IR}}^2}+c_1^{\mathrm{IR}}\frac{1}{\epsilon_{\mathrm{IR}}}+c_1^{\mathrm{UV}}\frac{1}{\epsilon_{\mathrm{UV}}}+c_0 \tag{8.34}$$

其中 c_2^{IR}、c_1^{IR} 和 c_1^{UV} 可以解析给出，c_0 可以以数值方式给出。

8.4.5　簇射

考察一个 QCD 过程，在不是很严格的情况下，通常可以认为因子化将整个过程硬的和软的部分分离开，硬的部分为部分子水平截面，软的部分为 PDF 以及碎裂函数。在前面讨论高阶计算时已经有所提及，这样的理解其实并不是非常准确。

严格来讲，我们的因子化减除实际上是为了处理无穷次共线劈裂带来的共线发散，从这个角度，有几点需要澄清。

第一，部分子分布函数和碎裂函数并不是纯粹的软过程，显然这些劈裂过程是利用微扰 QCD 计算的。虽然原则上 PDF 和 FF 是不可计算的，只能通过实验数据拟合得到 (低能标)，但由此我们还是可以通过微扰计算得到它们随能标依赖的演化方程，即 Altarelli-Parisi 方程 (或者也称为 DGLAP 方程，其中的缩写 AP 就是 Altarelli-Parisi，前三个是苏联人，他们最早发表了俄文的论文)。第二，随着劈裂次数的增加，相互作用能标是逐渐降低的，能标总会有一个下限，即 $\Lambda_{\rm QCD}$。第三，对于劈裂过程的影响，我们可以将能算的部分考虑到某一固定阶次 (对应某一阶次的 PDF、FF 和部分子截面)，也可以将它的影响考虑到无穷阶 (如果计算上可行)。这种考虑到无穷阶的实劈裂，并对于包含到无穷圈虚修正的处理就是人们常说的重求和 (resummation)，实际上重求和包含了更高阶的贡献，它可以显著改善某些低能标 (低 $P_{\rm T}$，近产生阈值附近等) 下的理论预言。其中的综述可见文献 [18]。

Eikonal 近似与重求和

下面来考虑通过实辐射修正释放无穷多条外腿过程中的红外发散行为。设有部分子水平玻恩过程 F, 当增加一个实辐射时, 它将变为 $F+1$ 过程, 则近似地, 当只考虑红外发散奇点行为的情形下, $F+1$ 过程和 F 过程满足

$$\mathrm{d}\sigma_{F+1}^{(0)} = g_s^2 \left(N_{AB\to a1b} \frac{\mathrm{d}s_{a1}}{s_{a1}} \frac{\mathrm{d}s_{1b}}{s_{1b}} + \text{无红外奇点项} \right) \mathrm{d}\sigma_F^{(0)} \tag{8.35}$$

这个关系叫做 Eikonal 近似, $\mathrm{d}\sigma_F^{(0)}$ 前面的系数叫做 Eikonal 因子。相当于在额外增加一个实辐射时, 若实辐射射出的粒子动量很小, 可以近似地认为原来的相空间结构没有变化, 只是额外引入了一个 Eikonal 因子。在截面水平上, 它来自于两个振幅的干涉, 因此需要两个粒子的指标 A 和 $B(a$ 和 $b)$, 其中大写表示没实辐射时的情况, 小写表示已经辐射之后的指标。如果考虑初 (末) 态, 则 AB 就对应 PDF(FF) 中的部分子。$N_{AB\to a1b}$ 包括了归一化因子、色因子等参数。Eikonal 近似虽然只是 $F+1$ 相空间与 F 相空间之间的近似, 但它在描述实辐射修正的红外发散奇点行为上是严格的。这一点也可以从 KLN 定理来理解。实修正与虚修正之间的红外发散需要抵消, 而那些不满足 Eikonal 近似的实辐射相空间积分并不会包含红外发散。为了进一步理解实修正红外发散行为, 可将不变质量平方项 s_{ij} 表示为

$$s_{ij} = 2E_iE_j(1-\cos\theta_{ij}) \tag{8.36}$$

这样 Eikonal 因子中有

$$\frac{\mathrm{d}s_{a1}}{s_{a1}} \frac{\mathrm{d}s_{1b}}{s_{1b}} \propto \frac{\mathrm{d}E_1}{E_1} \frac{\mathrm{d}\theta_{a1}}{\theta_{a1}} + \frac{\mathrm{d}E_1}{E_1} \frac{\mathrm{d}\theta_{1b}}{\theta_{1b}} \tag{8.37}$$

红外发散部分被分解为软的 $\mathrm{d}E_1/E_1$ 和共线 $\mathrm{d}\theta/\theta$ 的两部分。需要指出的是，虽然这样的表达式物理意义非常清晰，但显然它不是 Lorentz 不变的。还有一点，这些发散的形式都是 log 发散，对应的是 Sudakov 双对数 (double logarithm) 因子。双对数中一个是软发散，一个是共线发散。通常也可以写成式 (8.38) 中的形式。例如，电子辐射软光子过程可表示为

$$\mathrm{d}\sigma(p\to p'+\gamma(k))\sim \mathrm{d}\sigma(p\to p')\frac{\alpha}{2\pi}\log\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right)\log\left(\frac{-q^2}{m^2}\right) \tag{8.38}$$

其中 $q^2=(p'-p)^2$，$-q^2\to\infty$，表示除软光子辐射外的是硬过程。μ 为光子质量正规化参数，m 为电子质量。

另外，在做 Eikonal 近似时还会引入一个积分下限能标，即微扰截止标度 μ^2_{IR}。对于 Eikonal 因子的积分上限，它对应于我们前面讨论的双截断切割法中引入的软截断和共线截断。这样，整体实修正截面由 Eikonal 近似对应的部分加非软非共线部分组成，实截面将会是 μ^2_{IR} 依赖的，它不是红外安全的。

当考虑 n 或 $n-1$ 次实辐射过程时，有

$$\begin{aligned}\sigma^{(0)}_{F+n} &= \alpha_s^n\ (\ln^{2n} + \ln^{2(n-1)} + \ln^{2(n-2)} + \cdots + \ln + R)\sigma^{(0)}_F\\ \sigma^{(0)}_{F+n-1} &= \alpha_s^{n-1}(\ln^{2(n-1)} + \ln^{2(n-2)} + \ln^{2(n-3)} + \cdots + \ln + R)\sigma^{(0)}_F\end{aligned} \tag{8.39}$$

重求和:LL,NLL,NLL′,NNLL+NNLO

$$\begin{aligned}\sigma=\sigma_0\{&1+\alpha_S[c_{12}L^2+c_{11}L+c_{10}+n_1(p_T^{\mathrm{cut}})]\\ &+\alpha_S^2[c_{24}L^4+c_{23}L^3+c_{22}L^2+c_{21}L+c_{20}+n_2(p_T^{\mathrm{cut}})]\\ &+\alpha_S^3[c_{36}L^6+c_{35}L^5+c_{34}L^4+c_{33}L^3+\cdots]\\ &+\quad\vdots\quad+\quad\vdots\quad+\quad\vdots\quad+\quad\vdots+\quad\ddots\}\end{aligned}$$

图 8.11　重求和示意图。横行表示固定阶计算结果 (同时包括虚实修正)，竖列表示重求和对应的项

对于 n 次实辐射过程，相当于 n 个 Eikonal 因子相乘，由于 Eikonal 因子中既有 log，又有有限部分，所以连乘的结果是一系列 $\ln^2$ 的幂次，从 n 次到 0 次。近似地，当只保留 $\ln^{2n}$ 项时，称为双对数近似 (double logarithm approximation)。理论上，我们还可以把这些 log 项求和到无穷阶 (当然还要同时考虑虚图的贡献)。这样的做法有专有名词 —— 重求和 (图 8.11)。对于某个玻恩过程 F，重求和特指对上式中某一阶次的 log 项求和，而非将式 (8.39) 所有的 log 项求和，即式 (8.39) 或图 8.11 中竖列的 log 项求和，而非行 log 项求和，最常见的就是所谓 leading log (LL) 求和。它求和的是式 (8.39) 括号中的领头项 $\ln^{2n}$ 所在列，直至 $n\to\infty$。求和的具体过程可参考其他文献，例如，Peskin 的场论教科书 6.5 节。最终的结果是将 Sudakov double log 因子写成了 e 指数的形式，称为 Sudakov form factor。例如，对于光子辐射式 (8.38) 求和，可得到式 (8.40)[4]。

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\text{measured}} = \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_0 \left|\exp\left[-\frac{\alpha}{2\pi}\log\left(\frac{-q^2}{m^2}\right)\log\left(\frac{-q^2}{E_l^2}\right)\right]\right|^2 \tag{8.40}$$

其中 E_l 为探测器能量分辨下限，即辐射光子动量上限 $k < E_l$。ln 的幂次为什么通过求和会变成 e 指数呢？可以看出，这其中还需要考虑实辐射究竟要安在硬过程的哪条腿上，这会引入对称因子 (symmetry factor) $1/n!$。这样我们就可以将这些 log 项求和到无穷阶而写成 e 指数的形式了。Eikonal 因子的两个积分上限，即软截断和共线截断还会保留在 Sudakov 形状因子中，当它和实修正非软非共线区接起来时，这两个参数依赖将会消去。由于计算 Sudakov 形状因子时，已经考虑了相应虚图的贡献，所以 Eikonal 因子的下限 μ_{IR}^2 中的软截断的依赖不会出现在 Sudakov 因子中。当然，重求和还包括了其他很多丰富的内容，这里就不展开讨论了。

8.5 软 QCD 过程

在讨论 QCD 过程时，不可避免地会涉及软 QCD 过程，例如，在质子–质子对撞时，就会涉及部分子分布函数、最小偏离、软的遍举过程，以及所谓 “underlying events” 等。原则上来讲，这些软 QCD 相关物理量是不可微扰计算的，为了处理这些问题，人们发明了各种各样的“模型”来描述它们，这些模型只针对某个特殊的物理对象有效，因此它们不可能像微扰 QCD 那样成为一个标准的基础模型。

部分子分布密度函数

对于 QCD 过程，它的初态是强子，而强子是复合粒子，因此会涉及组成它的部分子的密度问题。处理这个问题的方法是引入因子化过程。因子化定理中会用到部分子分布函数。同时，我们还有所谓的结构函数 (structure function)。在领头阶 (leading order)，它们之间满足

$$F_2(x, Q^2) = \sum_i e_i^2 x f_i(x, Q^2) \tag{8.41}$$

其中 F_2 为结构函数，f_i 为 PDF 函数，x 为部分子 i 携带的动量分数，e_i 为它的电荷，Q^2 为相互作用能标。结构函数的概念来源于深非弹散射，它是一个实验可观测量。而部分子分布函数是一个更抽象、更基本的概念，它不直接对应物理可观测量。简单地，我们可以认为它是第 i 种组分，携带动量占强子总动量分数为 x 时，出现的概率。所以它的归一化条件 $\sum_i x f_i(x) = 1$ 来自于强子总动量的归一化，而不是直接将 f_i 求和。前面我们还讨论过关于共线发散在因子化定理中的处理等涉及高阶修正的问题，因此，结构函数和部分子分布函数在高阶上通常不再有式 (8.41) 那样的简单对应关系。

在应用 PDF 过程中，有以下几点值得关注。

第一, 在一些比较“极端”的区域, 例如, 当在大型强子对撞机 (LHC) 上探测一些低能过程时, 人们对这种情况下的 PDF 理解得并不是很精确。这是由于 PDF 是通过实验数据拟合得出的, 换言之, 小 x 区域的实验数据相对还比较匮乏。

第二, PDF 也是带阶次的, 它的阶次来源于在做拟合时, 因子化公式中硬过程所选取的阶次。因此, 在应用 PDF 时, 要选取与硬过程阶次一致的 PDF, 并不见得 PDF 的阶次越高, 最终的精度就越高。同理, 如果将硬过程阶数算得很高而 PDF 阶次选得较低, 那么这些硬过程的高阶修正也会失去原来的意义。同时要注意选择的 PDF 要与共线因子化方案一致。

第三, PDF 的误差。有些待选的 PDF 可以计算对应的误差, 但绝大多数 PDF 并不提供这种选项。人们通常的做法是采用不同组给出的 PDF 分别计算并比较最终结果。还有就是将改变因子化标度时结果的影响作为理论误差的一部分。

第四, PDF 与蒙特卡罗软件。由于 PDF 和蒙特卡罗软件有相对独立的来源, 所以将它们接起来使用的时候有可能会有小的不一致的问题, 通常这些问题用户是不需要仔细考虑的, 软件的开发人员对于一些参数可能做一些小的微调。后面部分还会就软件微调参数做出讨论。

这里附带提一下 underlying event 的概念。Underlying event 讲的是强子强子对撞时, 每个强子可能贡献多个部分子发生反应 (multiple parton interactions, MPI)。那么除我们考虑的最主要的硬过程外的反应就是 underlying event。这种 underlying event 的末态产物同样有可能贡献到探测器覆盖区域并被记录下来, 这就对我们探测硬过程反应截面带来干扰, 在实验上及蒙特卡罗水平要对它们的影响进行估计扣除。

8.6　蒙特卡罗事例产生子

前面已经提到过, 对于一个完整的 QCD 过程来说, 能够理论上精确计算的只有硬散射部分。要想把理论精确计算的结果和真实实验数据作对比, 就必须借助于蒙特卡罗事例产生子, 从这一点可见蒙特卡罗事例产生子的重要性。但从另一角度来说, 作为用户, 多数情况下大家对蒙特卡罗 (MC) 产生子的具体实现过程并不是非常了解。在本节中, 我们通过 MC 产生子的主要实现过程, 对其中一些比较重要的问题作出简要介绍。

8.6.1　利用马尔可夫链对微扰过程的模拟

在利用 MC 对 QCD 过程进行模拟时, 需要对可能发生的高阶辐射修正做模拟, 这种辐射修正包括实修正和虚修正两部分。最原始的出发点当然是硬的玻恩过程, 以玻恩过程为基础, 一级一级在上面添加更高一级修正的影响。随着阶数的增

加, 相互作用能标自然也会不断下降, 当降到 1GeV 附近时, 微扰论失效, 需要利用其他方法。这里我们暂时只讨论可微扰能区的情况。

基于前一阶次的结果, 利用随机过程对后一阶次结果的模拟是基于马尔可夫链的方法。马尔可夫链的一个最重要的特征就是它与历史无关, 即前一阶次的结果对后一阶次结果发生的概率是没有影响的。

下面来介绍基于马尔可夫链对微扰过程的模拟具体是如何实现的。在玻恩水平的一个硬过程下, 关于任意红外安全的可观测量 $\mathcal{O}$ 的微分截面可表述为

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma_F^{(0)}}{\mathrm{d}\mathcal{O}}\right|_{\mathrm{Born}} = \int \mathrm{d}\Phi_F |\mathcal{M}_F^{(0)}|^2 \delta(\mathcal{O} - \mathcal{O}(\Phi_F)) \tag{8.42}$$

其中 $\mathrm{d}\Phi_F$ 表示对全相空间积分, 由于保留了一个微分分布, 所以还要在总的相空间扣除一个自由度, 即 $\delta(\mathcal{O} - \mathcal{O}(\Phi_F))$。

当高阶修正为簇射过程时, 可以认为是在原有基础上加了一个演化因子 S, 即

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma_F}{\mathrm{d}\mathcal{O}}\right|_{S} = \int \mathrm{d}\Phi_F |\mathcal{M}_F^{(0)}|^2 S(\Phi_F, \mathcal{O}) \tag{8.43}$$

这样的写法似曾相识, 其实就是前面我们在算实修正做 Eikonal 近似时的处理方式。这里的红外近似包括两层含义, 即高阶辐射出的粒子, 它的能量不能太高 (软的), 夹角不能太大 (近似于共线)。好在我们现在主要关注的粒子簇射 (parton shower) 可以认为很好地满足了这种近似要求。对于不满足的情况, 实际上我们可以把它归结到硬过程中去。这个演化的函数 S 除和相空间、可观测量 $\mathcal{O}$ 依赖外, 还和相互作用能标依赖, 而相互作用能标有演化前 Q_{E1} 和演化后 Q_{E2} 两个, 其中 $Q_{E1} > Q_{E2}$。这里的标度就是之前在讨论高阶修正时的共线因子化标度。依赖于簇射的具体算法, 这个标度可以是横向动量或能量与角度等。

从 F 过程到 $F+1$ 过程, S 的演化可以表述为

$$\begin{aligned} S(\Phi_F, Q_{E1}, Q_{E2}, \mathcal{O}) =& \Delta(\Phi_F, Q_{E1}, Q_{E2})\delta(\mathcal{O} - \mathcal{O}(\Phi_F)) \\ &+ \sum_r \int_{Q_{E2}}^{Q_{E1}} \frac{\mathrm{d}\Phi_{F+1}^r}{\mathrm{d}\Phi_F} S_r(\Phi_{F+1}) \Delta(\Phi_F, Q_{E1}, Q_{F+1}) \\ &\times S(\Phi_{F+1}, Q_{F+1}, Q_{E2}, \mathcal{O}) \end{aligned} \tag{8.44}$$

S 演化之后, 标度跑到了 Q_{E2}, 需要考虑的仅是大于 Q_{E2} 标度的贡献, 精确到 NLO 修正, 总截面包括两部分贡献, 一部分是单举的玻恩截面, 它并不会演化, 另一部分是遍举的 $F+1$ 阶截面, 它从标度 Q_{E1} 演化到 Q_{E2}。分别对应上式的两部分。其中

$$\Delta(\Phi_F, Q_{E1}, Q_{E2}) = \exp\left[-\sum_r \int_{Q_{E2}}^{Q_{E1}} \frac{\mathrm{d}\Phi_{F+1}^r}{\mathrm{d}\Phi_F} S_r(\Phi_{F+1})\right] \tag{8.45}$$

就是我们之前讨论高阶修正与重求和时提到的 Sudakov 形状因子。可以看到, 式 (8.44) 和推导部分子分布函数随能标变化的 DGLAP 方程的过程 (见 Peskin 场论书 583 页) 非常像。它们描述的都是高一级修正引起的能标演化, 右式第一项不会演化, 演化发生在第二项。实际上, 形式的相近来源于它们描述的物理。它们的物理都是一样的, 即劈裂引起的高一级的修正, 只不过 DGLAP 方程的对象是 PDF, 而现在我们主要关心的是劈裂对簇射的影响。在一般情况下, 式 (8.44) 中的 $S_r(\Phi_{F+1})$ 就是 DGLAP 方程中的劈裂函数。由劈裂引起的相空间的增加

$$\frac{\mathrm{d}\Phi^r_{F+1}}{\mathrm{d}\Phi_F} = \frac{\mathrm{d}\Phi^r_3}{\mathrm{d}\Phi_2} = \mathrm{d}s_{a1}\mathrm{d}s_{1b}\frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi}\frac{1}{16\pi^2 s_r} \tag{8.46}$$

其中, $s_r = (P_a + P_1 + P_b)^2$, 多一个末态粒子, 增加了 3 个自由度。

8.6.2　匹配问题

由前面的讨论可知, 为了处理发散问题, 包括紫外发散和红外发散 (软发散和共线发散), 我们不得不引入多个标度, 而这些标度通常也与微扰 QCD 的阶数相关。除了固定阶微扰 QCD, 我们还讨论了大 log 项的重求和问题, 如 LL 的 Sudakov 形状因子等。我们还知道, 截面有单举和遍举之分。如果稍加统计, 前面提到的有重整化标度、因子化标度, 在 "相空间双截断切割" 法中有软截断标度和共线截断标度。对于一个红外安全的可观测量来说, 虽然在计算中的各子部分有可能是标度依赖的, 但它们的和, 即总的结果必定是标度无关的。潜在的问题是, 如果各个子部分贡献没有匹配好, 就有可能出现某部分被重复考虑的情况, 这就是所谓的重复计算 (double counting) 问题。

在蒙特卡罗事例产生过程中, 通常的匹配问题是指相互作用矩阵元 $|\mathcal{M}|^2$ 与部分子簇射两部分之间的匹配。不同的模拟软件有可能采取不同的方法来处理匹配问题。一般情况下, 有相空间切割、减除与幺正条件三种待选方案[1], 这里就不展开具体讨论了。

8.6.3　强子化的弦模型

前面我们解释了硬过程的散射矩阵元, 硬过程产生粒子的簇射。接下来就是这些簇射的粒子如何通过强子化再转变成初级的强子, 这些强子有可能不稳定并发生级联衰变。强子化发生相互作用的能标就是簇射红外截断的能标, 显然它在非微扰区。在模拟中只能利用一些有效的、非严格的 QCD 唯象模型来描述这种过程。

图 8.12 给出了强子化弦模型的示意图。可以看到, 图中分别有两组夸克对生成了两条弦。每组夸克对生成一条弦。胶子会对弦有影响, 但起主导作用的还是夸克对。通过弦的断裂又生成了许多新的夸克。

下面对弦模型的特点做一些具体讨论。虽然不能严格计算, 但强子化的弦模型还是有一些最基本的要求需要满足, 例如, 庞加莱不变性、幺正性和因果性。

弦模型最初来源于格点 QCD, 格点 QCD 是计算非微扰 QCD 的一种方法, 它将连续的时空离散化, 变成许多离散的格点。最终的结果再将格子的间距 $\to 0$, 体积 $\to \infty$。它的好处是不需要引入 QCD 以外的参数。有一种近似理论叫做 "淬火" (quenched) 格点 QCD。这里 "淬火" 的意思是没有动力学意义上的夸克, 即夸克不能通过胶子劈裂这样的动力学过程产生。这种理论一个重要的结论就是当 $q\bar{q}$ 色偶极之间的距离大于一个费米时, 对应的场所形成的势的大小和它们之间的距离呈线性关系。这个线性的依赖关系成为弦模型的基础。这里我们讨论一种最成熟, 也是应用最广的弦模型, 即 Land 模型。我们在强子化模拟中经常用到的 PYTHIA[19] 就是采用的这种模型。

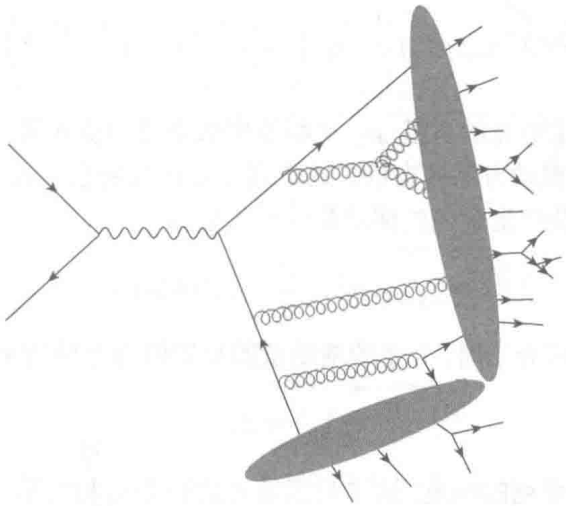


图 8.12 $e^+e^- \to$ 强子过程的强子化弦模型示意图

考虑真空中的一对 $q\bar{q}$, 它们之间的线性势 $V(r) = \kappa r$(这里不考虑近距离形为 $1/r$ 的库仑势)。线性系数 κ 的大小为 $\kappa \sim 1\text{GeV/fm} \sim 0.2\text{GeV}^2$。这个势的大小只和夸克对在纵向的距离相关, 而和横向距离无关。当夸克对相对运动时, 它们之间的动能和势能相互转化。在某些情况下, 束缚夸克对的弦会断裂。断裂的地方会生成一对新的色单态夸克对 $q'\bar{q}'$, 即 $q\bar{q} \to q\bar{q}' + q'\bar{q}$ 过程。在这个模型中, 新的夸克对只能通过弦断裂产生, 而不能通过其他运动学过程产生, 新夸克对 $q'\bar{q}'$ 的能量来源于原来的势能。这样就从一条弦变成了两条弦。通过这样不断地断裂产生新夸克对, 最初始的夸克就变成了许多夸克对。它们成为组成强子的来源, 在这个过程中能标也随之下降。这就是弦模型的最基本的思想。

考虑更加真实的情况, 需要解决的问题有: 胶子如何处理? 弦在什么情况下断裂? 断裂产生带何种味和色的夸克? 原来的动量在新的断裂产物之间该如何分配? 下面我们来逐一讨论。

对于胶子, 处理的方法是把它看作是横向的链接。这样软胶子的作用就是在原来只有纵向分量的弦上增加了横向的分量。这会对原来的碎裂模型带来修正, 但并不会有胶子喷注产生。

在弦模型中, 弦会发生多次断裂, 每次断裂产生的夸克对有可能是不同的, 这就有可能产生时序问题, 即不同的夸克对谁先产生, 谁后产生。对于这个问题, 弦模型是不做区分的, 只要最后产生的各种夸克所在的强子谱符合实验观测的比例就可以了。

对于弦发生断裂的几率, 可由量子隧道效应受到启发, 它的概率可以表达为高斯函数的形式

$$\mathrm{Prob}(m_q^2, p_{\perp q}^2) \propto \exp\left(\frac{-\pi m_q^2}{\kappa}\right) \exp\left(\frac{-\pi p_{\perp q}^2}{\kappa}\right) \tag{8.47}$$

这里 m_q 是断裂产生夸克的质量, $p_\perp$ 是断裂出来夸克的横动量, 显然这里夸克的横动量是相对于弦的振动方向而言的。这个式子显示弦断裂的几率是被夸克质量和横动量压低的。断裂产生夸克的横动量的平均值为

$$\left\langle p_{\perp q}^2 \right\rangle = \sigma^2 = \frac{\kappa}{\pi} \sim (250\mathrm{MeV})^2 \tag{8.48}$$

当两个夸克结合形成介子时, 介子的横动量的平均值为上值的两倍。

$$\left\langle p_{\perp h}^2 \right\rangle = 2\sigma^2 \tag{8.49}$$

对于劈裂产生夸克的味道, 这里只需要考虑轻夸克的情形, 即 u, d, s 三种, 更重的夸克是被 e 指数严重压低的。因此对于重夸克产生, 可以把它们安全地放在硬函数过程中。但即便只有轻夸克, 问题依然存在, 即如何选取轻夸克的质量。众所周知, 轻夸克质量有多种不同的定义方式, 不确定度还很大。对于强子化模型来讲, s 夸克和 u、d 夸克的比例是通过实验测得的介子数目 K/π 的比例推算出来的, 即 $s/u \sim s/d \sim (0.2 \sim 0.3)$。对于三个夸克形成重子的情形, 也与介子的情况类似, 只不过这时要考虑夸克的颜色, 断裂出来的一对夸克采用 $\bar{3}$ 表示 (如红 + 蓝 = 反绿)。三个夸克结合的比例仍是一个未知量, 需要通过实验信息得出, 如测量 p/π 的比例。除此以外, 对于不同自旋强子的比例, 如矢量与赝标量介子, spin 1/2 或 3/2 重子之间的比例, 同样可以通过实验测量对应强子之间的比例来得到。例如, $D^*/D \sim (1.0 \sim 2.0)$, $K^*/K \sim \rho/\phi \sim (0.3 \sim 1.0)$, spin 1 介子/spin 0 介子 $\sim (0.075 \sim 0.15)$ 等。对于动量分配的问题, 首先引入动量分数 z, 即生成的强子的动量占弦断裂之后生成的夸克部分所携带动量的比例。这时的碎裂函数

$$f(z) \propto \frac{1}{z}(1-z)^a \exp\left(-\frac{b(m_h^2 + p_{\perp h}^2)}{z}\right) \tag{8.50}$$

也称为 Land 对称碎裂函数。所谓对称是指之前提到的弦模型中断裂不具有时序性。这里的 a、b 是归一化系数。$f(z)$ 显示对于越重的强子，它的碎裂函数越小。

对于生成强子的夸克的味道，以及它的动量分配，图 8.13 给出了一个形象的说明。部分子的硬过程通过簇射使能标从 Q_{UV} 降到强子化能标 Q_{IR}，假如此时弦的一端有一个 u 夸克有 3 动量 $\boldsymbol{p}=(\boldsymbol{p}_{\perp 0},p_+)$，其中下标“+”表示“光锥”动量，$p_\pm=E\pm p_z$。通过弦断裂先生成一对 $d\bar{d}$，又通过第二次弦断裂生成一对 $s\bar{s}$，原先的 u 和 $\bar{d}$ 生成一个 π^+，d 和 $\bar{s}$ 生成一个 K^0。假设 $d(\bar{d})$ 的横动量是 $\boldsymbol{p}_{\perp 1}(-\boldsymbol{p}_{\perp 1})$，$s(\bar{s})$ 的横动量是 $\boldsymbol{p}_{\perp 2}(-\boldsymbol{p}_{\perp 2})$，$\pi^+$ 的动量分数为 z_1，则 K^0 只能在剩余的 $(1-z_1)$ 的“光锥”动量中再分配 z_2 的比例，它的总动量分数为 $z_2(1-z_1)$，则 π^+、K^0 的 3 动量可表示为 $\pi^+(\boldsymbol{p}_{\perp 0}-\boldsymbol{p}_{\perp 1},z_1p_+)$、$K^0(\boldsymbol{p}_{\perp 1}-\boldsymbol{p}_{\perp 2},z_2(1-z_1)p_+)$。

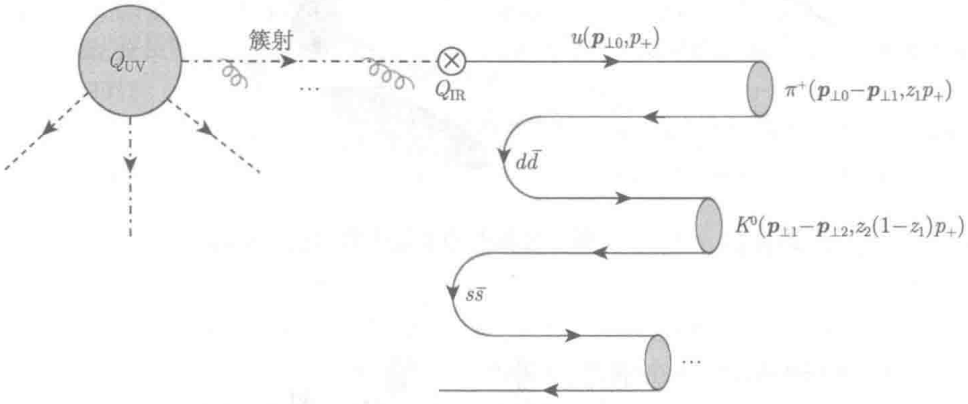


图 8.13 Lund 弦断裂模型中生成强子的夸克的味，以及它的动量分配示意图，图片引自文献 [1]

对于质量不能近似为 0 的夸克，如 c，它们不再有“光锥”动量。这时需要对它的碎裂函数引入压低修正，即 $f(z)\to f(z)/z^{bm_Q^2}$，其中 m_Q 为重夸克质量。

还有一点需要指出，这里我们讨论的碎裂函数完全是在非微扰低能量下的过程，$Q\sim 1\mathrm{GeV}$。它和我们之前讨论 PDF 的 DGLAP 方程中的劈裂函数 (微扰高能标下) 以及重求和过程的概念不尽相同，不可混淆。

8.6.4 强子化团簇模型

除弦模型外，还有一类称为团簇 (cluster) 模型的强子化方案[20]。例如，常用的 Herwig 软件采用的就是团簇强子化模型[21]。团簇模型的一个最大特点就是要求色禁闭，即由簇射产生出来的相邻近的夸克之间要组成一个色单态的团簇，再由团簇衰变到末态强子。图 8.14 给出了一个 $e^+e^-\to$ 强子过程的强子化团簇模型示意图。通过和弦模型 (图 8.12) 对比，可以看出，这里生成了多个团簇。

在团簇模型中，对胶子的处理是让它通过劈裂生成 $q\bar{q}$ 对，而胶子不直接参与

到团簇的形成中。为了实现色单态，由同一胶子劈裂出的夸克要分配给不同的团簇。团簇的质量通常在 GeV 量级，可以近似地看成是介子共振态，然后通过介子两体衰变到末态强子。对于更重的团簇，还需要考虑它衰变到多个强子的情况，这里就不展开讨论了。

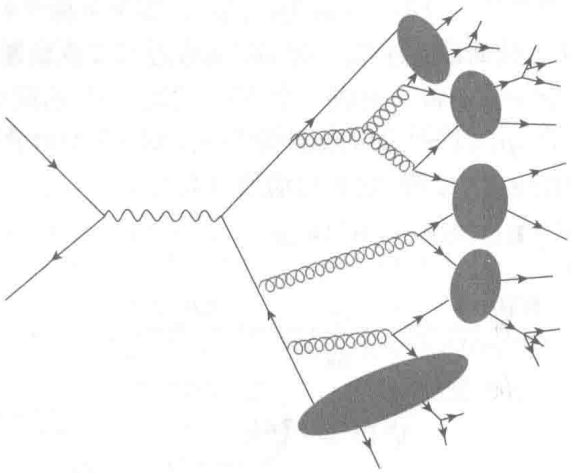


图 8.14　$e^+e^- \to$ 强子过程的强子化团簇模型示意图

8.7　小　　结

本章以标准模型 Higgs 粒子的产生和衰变的实验信号为例，展示了在高能碰撞中，特别是在大型强子对撞机 LHC 上 QCD 效应的重要性，以及可以使数据与理论直接比较所需要的工具。这些工具的基础，本质上是 QCD，特别是其渐近自由性质：在高能区它的贡献可以微扰计算，而在低能区需要依赖非微扰的方法。正是强作用的特性，决定了高能散射过程的复杂行为。为了探索未知领域，随着实验测量精度的不断提高，强作用对于物理过程的贡献必须精确了解。所以，无论是新物理本身还是相关重要物理过程的 QCD 精确预言都是目前研究的重要方向。

参 考 文 献

[1] Skands P Z. QCD for Collider Physics. arXiv:1104.2863 [hep-ph].

[2] Salam G P. Elements of QCD for hadron colliders. CERN Yellow Report CERN-2010-002, 45-100 [arXiv:1011.5131 [hep-ph]].

[3] Buckley A, et al. General-purpose event generators for LHC physics. Phys. Rept., 2011, 504: 145. doi:10.1016/j.physrep.2011.03.005 [arXiv:1101.2599 [hep-ph]].

[4] Peskin M E, Schroeder D V. An Introduction to Quantum Field Theory. USA: Westview Press, 1995.

[5] Field R D. Applications of Perturbative QCD. USA: Addison-Wesley Publishing Company, 1989.

[6] Zhu S H. Complete next-to-leading order QCD corrections to charged Higgs boson associated production with top quark at the CERN large hadron collider. Phys. Rev. D, 2003, 67: 075006. doi:10.1103/PhysRevD.67.075006 [hep-ph/0112109].

[7] Zhu S H. Next-to-leading order QCD corrections to $bg \to tW^-$ at CERN large hadron collider. Phys. Lett. B, 2002, 524: 283. Erratum: [Phys. Lett. B, 2002, 537: 351] doi:10.1016/S0370-2693(02)01952-4, 10.1016/S0370-2693(01)01404-6 [hep-ph/0109269].

[8] Hahn T. FormCalc User's Guide. Comput. Phys. Commun., 1999, 118: 153.

[9] 肖波. 正反费米子对在强子对撞机上产生中的电荷不对称性研究. 北京大学博士学位论文, 2011.

[10] 王由凯. 前后不对称性与超出标准模型新物理的研究. 北京大学博士学位论文, 2011.

[11] Harris B W, Owens J F. Two cutoff phase space slicing method. Phys. Rev. D, 2002, 65(9): 094032.

[12] Hahn T. Generating Feynman diagrams and amplitudes with FeynArts. Comput. Phys. Commun., 2001, 140: 418.

[13] Hahn T, Perez-Victoria M. Comput. Phys. Commun., 1999, 118: 153.

[14] Mertig R, Böhm M, Denner A. Comput. Phys. Commun., 1991, 64: 345-359.

[15] Ellis R K, Zanderighi G. JHEP, 2008, 0802: 002.

[16] Fortsch A D. Phys., 1993, 41: 307.

[17] Muta T. Foundations of Quantum Chromodynamics. Singapore: World Scientific, 1998.

[18] Li C S, Zhu S H. Int. J. Mod. Phys. A, 2006, 21: 629.

[19] Sjöstrand T, et al. Comput. Phys. Commun., 2015, 191: 159.

[20] Eills R K, Stirling W J, Webber B R. QCD and Collider Physics. UK: Cambridge University Press, 1996.

[21] Bellm J, et al. Eur. Phys. J. C, 2016, 76(4): 196.

第9章　QCD 重整化能标的设定

在量子场论框架下，重整化群不变性表明物理量的真实值不应依赖于微扰 QCD 理论中为了消除发散所人为引入的非物理的重整化方案和重整化能标。在微扰阶数为无穷阶的情况下，由于微扰展开式中各微扰阶对重整化方案和重整化能标的依赖存在相互抵消效应，重整化群不变性将自动得到满足。但在有限阶的情况下，各微扰项之间的完全抵消效应不复存在，再加上每一阶的强耦合常数和它所对应的微扰展开系数在简单能标选择下并不能很好匹配，导致微扰论预言具有重整化方案和重整化能标的不确定性。这种不确定性也导致微扰 QCD 理论的预言能力下降。如何正确地设定重整化能标从而获得可靠的有限阶下的理论预言是微扰 QCD 理论的重要研究内容。消除微扰论预言的重整化方案和重整化能标不确定性对于标准模型的精确检验以及寻找超出标准模型的新物理都十分重要。

本章将介绍几种典型的重整化能标设定方案：最快收敛 (FAC) 方案 [1]、最小敏感度原理 (PMS) 方案[2]、Brodsky-Lepage-Mackenzie(BLM) 方案[3] 和最大共形原理 (PMC) 方案[4,5]。FAC 方案将所有已知高阶修正项吸收进有效强耦合常数 (或称为有效荷) 中，通过与实验对比反定出物理量的有效能标。PMS 方案从保持数值稳定性出发，要求有限阶预言随重整化方案和重整化能标的变化敏感度最小来确定有效方案和有效能标。BLM 方案利用高阶修正项中的真空极化项，即 n_f 项，来确定不同阶下的强耦合常数的有效能标。PMC 方案基于重整化群不变性，利用重整化群方程，即 β 函数，确定微扰展开式中每一阶的强耦合常数值，由此定出每一阶的有效能标。相比而言，PMC 方案是这些方案中最严格且最完善的：PMC 方案满足自反性、对称性和传递性等重整化群的基本性质；基于 PMC 的理论预言与初始重整化能标和重整化方案的选择无关，微扰收敛性也大大增强，从而提高了 QCD 理论预言的精度。有鉴于此，本章将对 PMC 方案作重点介绍。

9.1　微扰 QCD 展开与重整化能标的设定问题

由于 QCD 理论的渐近自由性质，强耦合常数 α_s 在小距离的情况下变得很小，因此高能物理过程中的可观测量 ϱ 可以按 α_s 展开成微扰级数

$$\varrho_n = C_0 \alpha_s^p(\mu_r) + \sum_{i=1}^{n} C_i(\mu_r) \alpha_s^{p+i}(\mu_r) \tag{9.1}$$

其中，μ_r 为重整化能标；p 为树图阶强耦合常数的幂次；C_0 是树图阶系数；C_1 为 QCD 单圈系数，$\cdots$，依此类推。通常情况下，高阶微扰系数 $C_{i\geqslant 1}$ 存在紫外发散，需先对其做正规化处理，如采用可保持规范不变性的维数正规化方案；而后通过适当的重整化方案分离并消除发散项，由此获得有限的贡献。而在有限阶情况下，微扰系数 $C_i(\mu_r)$ 和强耦合常数 $\alpha_s(\mu_r)$ 对重整化方案和重整化能标的依赖不能完全抵消，导致人们所熟知的重整化方案和重整化能标的不确定性。

这种由先入为主的、简单能标选择所导致的不确定性成为通常理论分析中的一个重要系统误差。传统的能标设定方案简单地将能标设定为高能物理过程中的典型动量流动 (Q) 或是取为可消除具有发散性质的大对数项的值，通过变化一个假想的范围，如 $[Q/2, 2Q]$，来估算能标的不确定性，而后利用不断地增加微扰阶数来降低理论不确定性、增加理论预言精度。值得强调的是，重整化能标的变化确实可对未知的高阶非共形项 (即 β 项) 提供粗略估算，但并不能估算未知共形项的大小。高阶没有消除的具有发散性质的重整化子项 (形如 $n!\beta_0^n\alpha_s^n$) 也会极大地降低微扰级数的收敛性。例如，一些文献中提到重夸克偶素产生和衰变过程的微扰收敛性较差就是由这些重整化子项造成的。因此，找到普适性方案确定高能物理过程在固定阶下的最优能标是微扰 QCD 理论需要解决的重要问题。

9.2 重整化能标设定方案需满足的自洽条件

重整化能标问题的最终解决依赖于能否找到普适性的、可系统设定任意高能物理过程最优能标的方案；据此能标设定方案获得的理论预言与重整化方案的选择无关、与初始重整化能标的选择无关，且能体现出高度收敛性。基于重整化群不变性和重整化群方程，可获得重整化能标设定方案需要满足的理论自洽条件，包括存在性与唯一性、自反性、对称性和传递性。这些性质可以用于判断一个能标设定方案是否在理论上严格自洽，能否作为期望的最终解决方案。

下面对这些基本的自洽条件做简要说明。

(1) 存在性和唯一性。这与普遍认知一致，对于物理量的有限阶微扰估算，存在唯一的最优重整化能标。这里并没有排除每一微扰阶下的重整化能标唯一确定但是不同的情况。

(2) 自反性。给定一个耦合常数 $\alpha_s(\mu_r)$，可将其按同一重整化方案下的耦合常数 $\alpha_s(\mu_r')$ 展开，

$$\alpha_s(\mu_r) = \alpha_s(\mu_r') + f_1(\mu_r, \mu_r')\alpha_s^2(\mu_r') + \cdots \tag{9.2}$$

通常微扰系数，$f_1(\mu_r, \mu_r') \propto \ln(\mu_r/\mu_r')$。若能计算到无穷阶，根据物理量的重整化能标无关性，我们可得到 $\partial\alpha_s(\mu_r)/\partial\ln\mu_r' \equiv 0$。如果 $\alpha_s(\mu_r')$ 已知 (等价于某个实验

测量值所对应的有效耦合常数值)，可依据公式 (9.2) 预言 $\alpha_s(\mu_r)$，那么由于微扰级数的截断，只要 μ_r' 与 μ_r 之间有任意偏差，都将导致不准确的结果。更进一步，对于一个最高阶为 n 的有限阶微扰展开，我们可得到

$$\frac{\partial\alpha_s(\mu_r)}{\partial\ln\mu_r'^2}\propto\frac{\left(\ln\mu_r^2/\mu_r'^2\right)^n}{n!}\frac{\partial^{(n+1)}\alpha_s(\mu_r')}{\partial(\ln\mu_r'^2)^{(n+1)}} \tag{9.3}$$

这表明，在任意有限阶下，方程 (9.2) 的右边依赖于 μ_r'。为了得到 $\alpha_s(\mu_r)$ 的正确估算值，一个自洽能标设定方案需能确定出 $\mu_r'=\mu_r$。如果一个能标设定方法满足这个特性，我们称之具有自反性。

(3) 对称性。给定两个不同方案 $s1$ 和 $s2$ 以及不同能标 μ_1 和 μ_2 下的两个有效耦合常数 $\alpha_{s1}(\mu_1)$ 和 $\alpha_{s2}(\mu_2)$，我们可以把其中任何一个按另一个进行展开：

$$\begin{aligned}\alpha_{s1}(\mu_1)&=\alpha_{s2}(\mu_2)+r_{12}(\mu_1,\mu_2)\alpha_{s2}^2(\mu_2)+\cdots\\ \alpha_{s2}(\mu_2)&=\alpha_{s1}(\mu_1)+r_{21}(\mu_2,\mu_1)\alpha_{s1}^2(\mu_1)+\cdots\end{aligned}$$

运用能标设定方案，形式上，我们可得到

$$\begin{aligned}\alpha_{s1}(\mu_1)&=\alpha_{s2}(\mu_2^\star)+\tilde{r}_{12}(\mu_1,\mu_2^\star)\alpha_{s2}^2(\mu_2^\star)+\cdots\\ \alpha_{s2}(\mu_2)&=\alpha_{s1}(\mu_1^\star)+\tilde{r}_{21}(\mu_2,\mu_1^\star)\alpha_{s1}^2(\mu_1^\star)+\cdots\end{aligned}$$

在次领头阶近似下，由于次领头阶的有效能标需要利用更高阶信息才能确定，我们无法确定它的有效能标。作为近似处理，我们将取其为领头阶的有效能标。推广到更高阶的情况，我们可将最高阶待定的有效能标设定为与已确定出来的低一阶有效能标。这种处理有一定的合理性，因为低一阶的能标是根据已知信息推导出来的。当然，这种近似处理会导致残留的能标依赖性，但它比传统方案下基于猜测能标的不确定性要小得多。我们可将领头阶的两个有效能标写为：$\mu_2^\star=\lambda_{21}\mu_1$，$\mu_1^\star=\lambda_{12}\mu_2$，如果

$$\lambda_{12}\lambda_{21}=1 \tag{9.4}$$

我们称这种能标设定方案满足对称性。

关于对称性可做如下解释。我们可将有效耦合常数 $\alpha_{s1}(\mu_1)$ 和 $\alpha_{s2}(\mu_2)$ 之间的相互展开式进一步表为

$$\begin{aligned}\alpha_{s1}(\mu_1)&=\alpha_{s2}(\lambda_{21}\mu_1)+\tilde{r}_{12}(\mu_1,\lambda_{21}\mu_1)\alpha_{s2}^2(\lambda_{21}\mu_1)+\cdots\\ \alpha_{s2}(\mu_2)&=\alpha_{s1}(\lambda_{12}\mu_2)+\tilde{r}_{21}(\mu_2,\lambda_{12}\mu_2)\alpha_{s1}^2(\lambda_{12}\mu_2)+\cdots\end{aligned}$$

两者结合可推知

$$\alpha_{s1}(\mu_1)=\alpha_{s1}(\lambda_{12}\lambda_{21}\mu_1)+\left[\tilde{r}_{12}(\mu_1,\lambda_{21}\mu_1)+\tilde{r}_{21}(\lambda_{21}\mu_1,\lambda_{12}\lambda_{21}\mu_1)\right]\alpha_{s1}^2(\lambda_{12}\lambda_{21}\mu_1)+\cdots$$

根据自反性，如果能标设定方法满足对称性，可得

$$\tilde{r}_{12}(\mu_1,\mu_2^\star)+\tilde{r}_{21}(\mu_2^\star,\mu_1)=0 \tag{9.5}$$

反之亦然。这表明对称性 (9.4) 和关系式 (9.5) 互为充要条件。

(4) 传递性。给定不同重整化方案下的三个有效耦合常数 $\alpha_{s1}(\mu_1)$，$\alpha_{s2}(\mu_2)$ 和 $\alpha_{s3}(\mu_3)$，可以将其中一个按任意其他两个进行展开，即

$$\begin{aligned}
\alpha_{s1}(\mu_1)&=\alpha_{s2}(\mu_2)+r_{12}(\mu_1,\mu_2)\alpha_{s2}^2(\mu_2)+\cdots\\
\alpha_{s2}(\mu_2)&=\alpha_{s3}(\mu_3)+r_{23}(\mu_2,\mu_3)\alpha_{s3}^2(\mu_3)+\cdots\\
\alpha_{s3}(\mu_3)&=\alpha_{s1}(\mu_1)+r_{31}(\mu_3,\mu_1)\alpha_{s1}^2(\mu_1)+\cdots
\end{aligned}$$

运用能标设定方案之后，可分别得到

$$\begin{aligned}
\alpha_{s1}(\mu_1)&=\alpha_{s2}(\mu_2^\star)+\tilde{r}_{12}(\mu_1,\mu_2^\star)\alpha_{s2}^2(\mu_2^\star)+\cdots\\
\alpha_{s2}(\mu_2)&=\alpha_{s3}(\mu_3^\star)+\tilde{r}_{23}(\mu_2,\mu_3^\star)\alpha_{s3}^2(\mu_3^\star)+\cdots\\
\alpha_{s3}(\mu_3)&=\alpha_{s1}(\mu_1^\star)+\tilde{r}_{13}(\mu_3,\mu_1^\star)\alpha_{s1}^2(\mu_1^\star)+\cdots
\end{aligned}$$

可将有效能标形式上写为 $\mu_2^\star=\lambda_{21}\mu_1$，$\mu_3^\star=\lambda_{32}\mu_2$ 和 $\mu_1^\star=\lambda_{13}\mu_3$，如果

$$\lambda_{13}\lambda_{32}\lambda_{21}=1 \tag{9.6}$$

我们称这种能标设定方案满足传递性。关于传递性可做如下解释。我们可将有效耦合常数 $\alpha_{s1}(\mu_1)$，$\alpha_{s2}(\mu_2)$ 和 $\alpha_{s3}(\mu_3)$ 之间的相互展开式进一步表为

$$\begin{aligned}
\alpha_{s1}(\mu_1)&=\alpha_{s2}(\lambda_{21}\mu_1)+\tilde{r}_{12}(\mu_1,\lambda_{21}\mu_1)\alpha_{s2}^2(\lambda_{21}\mu_1)+\cdots\\
\alpha_{s2}(\mu_2)&=\alpha_{s3}(\lambda_{32}\mu_2)+\tilde{r}_{23}(\mu_2,\lambda_{32}\mu_2)\alpha_{s3}^2(\lambda_{32}\mu_2)+\cdots\\
\alpha_{s3}(\mu_3)&=\alpha_{s1}(\lambda_{13}\mu_3)+\tilde{r}_{31}(\mu_3,\lambda_{13}\mu_3)\alpha_{s1}^2(\lambda_{13}\mu_3)+\cdots
\end{aligned}$$

由上述方程，我们可推知

$$\begin{aligned}
\alpha_{s1}(\mu_1)=&\alpha_{s1}(\lambda_{13}\lambda_{32}\lambda_{21}\mu_1)+\alpha_{s1}^2(\lambda_{13}\lambda_{32}\lambda_{21}\mu_1)\\
&\times[\tilde{r}_{31}(\lambda_{32}\lambda_{21}\mu_1,\lambda_{13}\lambda_{32}\lambda_{21}\mu_1)\\
&+\tilde{r}_{23}(\lambda_{21}\mu_1,\lambda_{32}\lambda_{21}\mu_1)+\tilde{r}_{12}(\mu_1,\lambda_{21}\mu_1)]+\cdots
\end{aligned}$$

如果一个能标设定方案满足传递性 (9.6)，那么利用自反性，可得到

$$\tilde{r}_{12}(\mu_1,\mu_2^\star)+\tilde{r}_{23}(\mu_2^\star,\mu_3^\star)+\tilde{r}_{31}(\mu_3^\star,\mu_1)=0 \tag{9.7}$$

反之亦然。这表明，传递性 (9.6) 和系数关系 (9.7) 互为充要条件。

由传递性可推导出自洽的能标设定方案满足 $\lambda_{21}\equiv\lambda_{23}\lambda_{31}$，它表明与耦合常数 α_{s1} 和 α_{s2} 直接关联的能标比值 λ_{21} 与如何选择耦合常数 α_{s3} 无关，其等价描述是

任意两个物理可观测量之间的关系与作为传递的重整化方案无关。传递性是一个自洽能标设定方案必不可少的特性，它是重整化群不变性的自然要求，也是重整化群中 "群" 之称谓的由来。传递性可拓展到任意多个耦合常数，如果采用同一能标设定方案关联 n 个耦合常数，那么它们满足如下传递性关系：

$$\lambda_{1n}\lambda_{n(n-1)}\cdots\lambda_{32}\lambda_{21}=1 \tag{9.8}$$

对称性实际是传递性的特例。上面推导中，取 $\alpha_{s3}(\mu_3)=\alpha_{s1}(\mu_1)$，根据自反性，可得出 $\lambda_{11}\equiv 1$ 和 $\tilde{r}_{11}(\mu_1,\mu_1)\equiv 0$，由此，$\lambda_{13}\lambda_{32}\lambda_{21}=1$ 退化成为 $\lambda_{12}\lambda_{21}=1$。

采用拓展耦合常数 $a(\tau,\{c_i\})$ 和拓展重整化群方程，可对这些自洽性要求做出更直观的解释。基于拓展重整化群方程，拓展耦合常数 $a(\tau,\{c_i\})$ 仅是一个数学函数，原则上 $a(\tau,\{c_i\})$ 可以计算到任意精度，但高阶未知的重整化参数 $\{c_i\}$ 导致 $\beta(a,\{c_i\})$ 为截断序列，因此需要在有限维的子空间中求解 $a(\tau,\{c_i\})$。传统的耦合常数可与拓展耦合常数一一对应。采用拓展耦合常数 $a(\tau,\{c_i\})$，任意两个有效耦合常数可以利用由 $a(\tau,\{c_i\})$ 所定义的超曲面上的任意演化路径相互关联起来。

基于拓展耦合常数 $a(\tau,\{c_i\})$，图 9.1 形象地表示出不同重整化方案或重整化能标下耦合常数间的自反性、对称性和传递性，其中 $A,\cdots,F$ 表示耦合常数，箭头表示微扰展开方向。封闭路径开始和结束于同一点 A，自反性表明如果将 A 点处的有效耦合常数记为 a_A，完成封闭路径后得到的有效耦合常数仍然是 a_A。如果我们将 a_B 通过某一路径演化到 a_C，再将 a_C 由 C 演化回 B 点，对称性表明结果仍将是 a_B。传递性也可以作类似地说明，a_D 由某一路径直接演化到 E 点，与从 a_D 经过 F 再演化到 E，所得 a_E 一致。

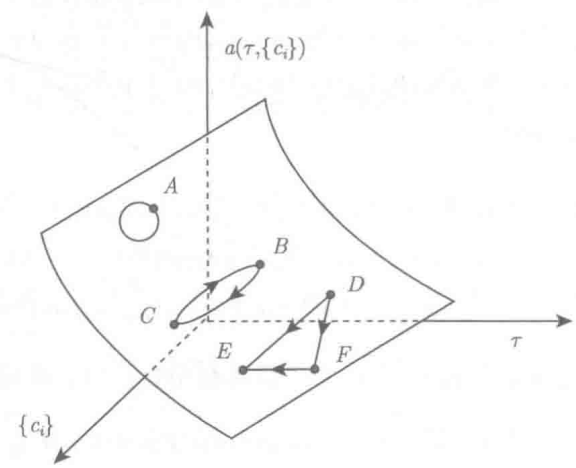


图 9.1　重整化能标设定方案的自洽条件基于拓展耦合常数 $a(\tau,\{c_i\})$ 的图形表示。A 点及其闭合圈表示自反性，B 点及 C 点及路径 $\overrightarrow{BC}$ 和 $\overleftarrow{CB}$ 表示对称性，D 点、E 点和 F 点及其路径 $\overrightarrow{DF}$，$\overrightarrow{FE}$ 和 $\overrightarrow{DE}$ 表示传递性

9.3 几种典型的重整化能标设定方案

对物理可观测量的正确微扰论预言依赖于耦合常数在任意能标下的准确值。强相互作用的耦合常数随能标的演化可以用重整化群方程，即 β- 函数来表示

$$\beta^R = \mu_r^2 \frac{\partial}{\partial \mu_r^2}\left(\frac{\alpha_s^R(\mu_r)}{4\pi}\right) = -\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i^R \left(\frac{\alpha_s^R(\mu_r)}{4\pi}\right)^{i+2} \tag{9.9}$$

这里，上标 R 表示重整化方案，如 MS 方案、$\overline{\text{MS}}$ 方案和 MOM 方案。目前，$\overline{\text{MS}}$ 方案下的 β_i^R 函数已经被计算到了五圈，而 β_i^R 函数对所有类似于 MS 的维数正规化方案来说都是一样的。通常情况下，β_i^R 函数依赖于重整化方案和夸克质量 m_f。根据 QCD 退耦合理论，当质量 $m_f \gg \mu_r$ 时，夸克的贡献可以忽略，而质量 $m_f \ll \mu_r$ 时，质量项可以忽略；综合起来考虑，我们仅需处理 $m_f = 0$ 的活跃夸克对重整化群方程的贡献。通常，用 n_f 表示活跃夸克的味道数。在无质量情况下，$\beta_{0,1}^R$ 与重整化方案无关，后面简记为 β_0 和 β_1。

9.3.1 FAC 方案

因该方案利用重整化群方程将所有已知类型的高阶微扰项全部吸收进有效耦合常数而获得较为准确的预言，Grunberg 和 Krasnikov 称之为有效耦合常数方案。形式上，由于该方案要求微扰表达式中所有高阶项的系数都等于零，即式 (9.1) 中，$C_{i(\geqslant 1)}(\mu_r^{\text{FAC}}) \equiv 0$，Stevenson 也将之称为最快收敛 (FAC) 方案。为简单起见，我们将沿用 Stevenson 的说法。

按照微扰 QCD 理论，物理可观测量的微扰论预言可写成

$$\sigma = f(\mu_r/\Lambda_{\text{QCD}}) \tag{9.10}$$

即它可以按 $1/\ln(\mu_r/\Lambda_{\text{QCD}})$ 作渐近展开。Λ_{QCD} 为强相互作用理论的渐近能标，它的值可以通过一些特定的实验测量点来确定。例如，人们常用 $\alpha_s(M_Z)$ 的测量值来反定 Λ_{QCD}。公式 (9.74) 可以反过来将重整化能标 μ_r 表示成物理测量值的函数，$(\mu_r/\Lambda_{\text{QCD}}) = f^{-1}(\sigma)$。Grunberg 提出可以 $f^{-1}(\sigma)$ 来确定重整化能标。与处理函数 $f(\mu_r/\Lambda_{\text{QCD}})$ 相比，处理反函数 $f^{-1}(\sigma)$ 的优点在于：一方面，不需要考虑 Λ_{QCD} 和 μ_r 的具体定义，仅需要两者的比值；另一方面，反函数 $f^{-1}(\sigma)$ 的准确值依赖于与方案无关的物理量 σ，因此确定有效能标的过程与重整化方案的选择无关。具体来说，FAC 是在给定的重整化方案下，通过吸收物理量 σ 中所有高阶修正项到有效耦合常数 $\bar{\alpha}_s$ 而获得 $f^{-1}(\sigma)$ 的展开表达式。

给定某个重整化方案，物理可观测量在形式上可写成如下微扰展开形式:

$$\sigma = A + B\left[\alpha_s(\mu_r)\right]^d \left[1 + \sigma_1(\mu_r)\alpha_s(\mu_r) + \cdots\right] \tag{9.11}$$

其中，系数 A 和 B 可通过微扰论计算得到，d 是树图阶强耦合常数的幂次。有效耦合常数 $\bar{\alpha}_s$ 通过如下方式定义

$$\sigma = A + B\left[\bar{\alpha}_s(\mu_r)\right]^d \tag{9.12}$$

假设有效耦合常数 $\bar{\alpha}_s$ 与耦合常数 α_s 满足相同的重整化群方程，那么我们可借助重整化群方程获得 $\bar{\alpha}_s$ 随能标的跑动行为。设 $\bar{\rho} \equiv \bar{\alpha}_s/(4\pi)$，可得到

$$\mu_r^2 \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \mu_r^2} = \bar{\beta}(\bar{\rho}) = -\beta_0 \bar{\rho}^2 - \beta_1 \bar{\rho}^3 + \cdots \tag{9.13}$$

求解式 (9.13) 得到

$$\beta_0 \ln\left(\frac{\mu_r^2}{\Lambda_{\mathrm{QCD}}^2}\right) = \frac{1}{\bar{\rho}} + \frac{\beta_1}{\beta_0}\ln(\beta_0\bar{\rho}) + C_1 + \int_0^{\bar{\rho}} \mathrm{d}x \left[\frac{1}{x^2} - \frac{\beta_1}{\beta_0 x} + \frac{\beta_0}{\bar{\beta}(x)}\right] \tag{9.14}$$

其中 C_1 为积分常数，它用于补偿不同重整化方案下的 Λ_{QCD} 值，从而确保在给定微扰阶下能得到与重整化方案无关的预言，比如

$$\bar{\rho}(\mu_r) = \rho_{\overline{\mathrm{MS}}}(Q)\left[1 + \left(C_1^{\overline{\mathrm{MS}}} - \beta_0 \ln\frac{\mu_r^2}{Q^2}\right)\rho_{\overline{\mathrm{MS}}}(Q) + \cdots\right] \tag{9.15}$$

这里 $\bar{\rho}(\mu_r)$ 的值就与 $\overline{\mathrm{MS}}$ 方案无关。以 $\overline{\mathrm{MS}}$ 方案下的值作为各种参数的输入值，在双圈精度下，式 (9.14) 可简化为

$$\beta_0 \ln\left(\frac{\mu_r^2}{(\Lambda_{\mathrm{QCD}}^{\overline{\mathrm{MS}}})^2}\right) = \frac{1}{\bar{\rho}} + \frac{\beta_1}{\beta_0}\ln(\beta_0\bar{\rho}) + C_1^{\overline{\mathrm{MS}}} + \mathcal{O}(\bar{\rho}) \tag{9.16}$$

作为自洽性检验，通过简单的参数变换，公式 (9.16) 就回到强耦合常数 α_s 满足的重整化群方程的双圈解。基于重整化群方程，可完成更复杂的分析，将更高圈的 β 函数如 β_2 函数等包含进来。重复上述步骤，可系统得到 $(\mu_r/\Lambda_{\mathrm{QCD}})$ 关于 $\bar{\rho}$(或 σ) 的函数。

归纳起来，FAC 方案有如下性质：

(1) 当不同重整化方案下的耦合常数间的微扰关系中的单圈修正项较大时，如公式 (9.15) 中的第二项就比较大，此时若基于公式 (9.16) 对公式 (9.15) 中的最重要的高阶项进行重求和，就可获得改善的微扰收敛性。这是 FAC 方案的核心性质，即利用重整化群方程改善微扰收敛性。但也正是这一点导致 FAC 方案存在较明显的理论缺陷，因为高阶表达式中并非所有项都与耦合常数的跑动行为相关，例如，高阶共形项就不能由重整化群方程来获得，因此将所有高阶项都归入有效耦合常数之后，并不能简单地认为该有效耦合常数满足通常的重整化群方程。因此，FAC 只能是一种用于改善微扰收敛性的近似数学处理。

(2) 从重整化群方程出发，如果要保证 $\bar{\beta}(\bar{\rho})$ 函数的是一个收敛性较好的微扰级数，那么对于某个物理量来说，其微扰展开的可行性判据是 $(\beta_1/\beta_0)\bar{\rho} \ll 1$。结合式 (9.16)，这就意味着其有效能标

$$\mu_r \gg \Lambda_{\mathrm{QCD}} \exp\left(\frac{c_1}{2\beta_0}\right) \exp\left\{\frac{1}{2\beta_0}\left[\frac{1}{\bar{\rho}_{\max}} + \frac{\beta_1}{\beta_0}\ln(\beta_0\bar{\rho}_{\max})\right]\right\} \tag{9.17}$$

其中 $\bar{\rho}_{\max} \equiv \beta_0/\beta_1$。

(3) FAC 方案的有效性还依赖于如何选择它作用的对象。例如，对于两个物理过程所对应的产生截面 σ_1 和 σ_2，可定义比值 $R = \sigma_1/\sigma_2$。分别对 σ_1 和 σ_2 运用 FAC 和直接对 R 运用 FAC，两种处理的结果是不同的。这种差别可归结于各自所包含的高阶微扰效应不同，随着微扰阶数的增加，这种差别将逐步减少。在有限低阶的情况下，第一种分别处理的做法更为可靠，因为 σ_1 和 σ_2 与物理过程的性质直接相关，而 R 只是人为构造的比值。这类观点也可以理解为，分开处理能够更全面地反映出 σ_1 和 σ_2 中所包含的信息。

(4) 可以简单地证明，FAC 方案确定出的有效能标满足基于重整化群不变性及重整化群方程推导出来的任意能标设定方案需要满足的自洽要求，即存在性、唯一性、自反性、对称性及传递性。

9.3.2 BLM 方案

BLM 方案基于 QCD 微扰表达式中的 n_f 项来设定重整化能标，以及改善微扰 QCD 理论的预言。BLM 方案提供了解决重整化能标和重整化方案不确定性问题的新思路。一方面，BLM 方案通过设定重整化能标可同时消除重整化方案的不确定性；另一方面，由于消除了具有发散性质的重整化子项 (正比于 n_f 项)，最终的表达式将呈现出较好的微扰收敛性。确定低阶耦合常数的 BLM 能标并不需要完成高阶圈图的完整计算，仅需知道与 n_f 相关的高阶项，这就降低了高阶圈图计算的复杂性。正因为如此，即使是在微扰低阶甚至是领头阶，BLM 的理论结果也可与实验进行有意义的对比。

自从 1983 年 Brodsky、Lepage 和 Mackenzie 三人提出 BLM 方案以来，它已经被应用于大量的高能物理过程，如 $e^+e^- \to$ 强子、深度非弹性散射、重介子或重子产生和衰变等，以及诸多遍举过程，如 π 介子–光子跃迁形状因子等。BLM 方案在这些应用中取得了极大的成功。1992 年，Lepage 和 Mackenzie 利用 BLM 方案确定了 QCD 格点微扰理论中的有效能标，解决了蒙特卡罗模拟微扰量时所存在的问题，提高了格点 QCD 微扰理论的预言能力。1999 年，Brodsky 等发现计算到次领头阶的 Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov (BFKL) 玻密子截距函数 $\omega\left(Q^2, 0\right)$ 在利用 BLM 方案后呈现出一个很好的特性：相比于传统能标设定方案下截距函数

$\omega\left(Q^2,0\right)$ 对胶子虚度 Q^2 的极度依赖，BLM 方案下的 $\omega\left(Q^2,0\right)$ 对胶子虚度 Q^2 的依赖非常小，由此能更好地用于与高能对撞机实验数据的对比。

BLM 方案的思想来源于对 QED 理论的观察。在 QED 理论框架下，按精细结构常数展开，物理量可以写为

$$\varrho_n = C_0\alpha_{em}^p(\mu_r) + \sum_{i=1}^{n} C_i(\mu_r)\alpha_{em}^{p+i}(\mu_r) \quad (p \geqslant 0) \tag{9.18}$$

其中 C_0 是树图阶系数，C_i 为微扰修正系数，p 为树图阶电磁耦合常数的幂次。作为阿贝尔规范理论，由于顶点重整化和费米子波函数重整化的紫外发散项正好抵消，QED 理论计算中剩下的紫外发散项来自于真空极化。这些项正比于轻子味道数 (n_l) 的幂次项，它们可用于确定能标。在单圈的情况下，确定出的 BLM 能标正好等于 Gell-Mann-Low 方案所确定的值。原则上，采用 BLM 方案后，我们可得到

$$\varrho_n = C_0\alpha_{em}^p(\mu_r^\star) + \widetilde{C}_1(\mu_r^{\star\star})\alpha_{em}^{p+1}(\mu_r^{\star\star}) + \widetilde{C}_2(\mu_r^{\star\star\star})\alpha_{em}^{p+2}(\mu_r^{\star\star\star}) + \cdots \tag{9.19}$$

通过选取有效的 BLM 能标 $\mu_r^\star, \mu_r^{\star\star}, \cdots$，所有光子自能修正项都将被吸收进耦合常数，系数 $\tilde{C}_i$ 为与 n_l 无关的共形项。由于每阶的自能修正项并不属于同一类型，因此每一阶需要采用不同的有效能标。

1. BLM 方案的基本性质

基于 BLM 方案，可逐阶确定每一阶的有效能标。我们以领头阶 BLM 能标的设定来说明 BLM 方案的基本思想及其基本性质。仅考虑次领头阶修正的情况下，物理量的微扰论表达式可写为

$$\varrho = C_0\alpha_{s,\overline{\rm MS}}^p(\mu_r)\left[1 + (An_f + B)\frac{\alpha_{s,\overline{\rm MS}}(\mu_r)}{\pi}\right] \tag{9.20}$$

其中 $\mu_r = \mu_r^{\rm init}$ 表示初始重整化能标，它可取为位于微扰区域的任意能标值，也可类似于通常能标设定方案，简单取为物理过程的典型动量转移。不同能标下的表达式可以通过重整化群方程相关联。n_f 项来源于夸克的真空极化。采用 BLM 方案之后，ϱ 值将与重整化方案无关，即采用 BLM 方案设定能标后，尽管微扰系数在不同方案下会有所不同，但不同方案下的 BLM 能标间的自洽关系确保了 ϱ 值与重整化方案无关。为方便起见，我们采用 $\overline{\rm MS}$ 方案来作说明。

在次领头阶情况下，BLM 方案要求所有 n_f 项均需被吸收进耦合常数中。借助次领头阶 α_s 能标跑动公式：

$$\alpha_{s,\overline{\rm MS}}(\mu_r^\star) = \frac{\alpha_{s,\overline{\rm MS}}(\mu_r)}{1 + \dfrac{\beta_0}{4\pi}\alpha_{s,\overline{\rm MS}}(\mu_r)\ln\dfrac{\mu_r^{\star 2}}{\mu_r^2}} \tag{9.21}$$

可得到

$$\varrho = C_0 \alpha^p_{s,\overline{\rm MS}}(\mu^\star_r)\left[1 + C^\star_1 \frac{\alpha_{s,\overline{\rm MS}}(\mu^\star_r)}{\pi}\right] \tag{9.22}$$

其中已利用了 β_0 和 n_f 的线性对应关系

$$\mu^\star_r = \mu_r \exp\left(\frac{3A}{p}\right), \quad C^\star_1 = \frac{33}{2}A + B \tag{9.23}$$

下面，列出 BLM 方案的一些典型特点：

- BLM 方案利用重整化群方程将所有与重整化有关的 n_f 项吸收进强耦合常数。如果两个重整化方案的差别仅在于与 n_f 无关的常数，那么基于这两种方案对同一物理量的微扰论预言在完成 BLM 处理后的结果将会是一致的。例如，由于 MS 方案和 $\overline{\rm MS}$ 方案下的强耦合常数满足相同的重整化群方程，因此在应用 BLM 方案后，物理量基于这两种方案的预言是相同的。事实上，可以严格证明所有类 $\overline{\rm MS}$ 方案的维数正规化方案都将获得相同的 BLM 预言。作为细节处理，在高阶计算中，存在一些含 n_f 项但并无紫外发散的情况，如含多条外腿的轻夸克圈所带来的 n_f 项并无紫外发散，这些项需要在设定 BLM 能标时作为常数对待。
- 领头阶的 BLM 能标可由参数 A 单独确定，A 恰恰就来自于夸克的真空极化贡献。$C^\star_1$ 中的 $33A/2$ 正好抵消耦合常数的重整化效应，一方面导致方案无关的预言，另一方面也对应耦合常数正确的跑动行为。这使得 BLM 方案的实际应用效果较好。
- 所有夸克真空极化效应的项将会被自动吸收进有效强耦合常数中，这意味着采用 BLM 方案可正确地确定 n_f 的值。
- 夸克圈可出现在多胶子相互作用的顶点和传播子的高阶修正项中，因此含多胶子耦合顶点的高能物理过程较难处理，很难用统一的形式将这些顶点的发散部分从过程依赖的有限部分中分离处理出去。例如，三胶子顶点的 BLM 能标是三个外腿胶子的虚度 q^2_1，q^2_2 和 q^2_3 的复杂函数，如对 $gg \to g \to Q\bar{Q}$ 过程，它的能标需采用如下较复杂形式：

$$\mu^2_r \propto \frac{q^2_{\rm min} q^2_{\rm med}}{q^2_{\rm max}} \tag{9.24}$$

其中 $|q^2_{\rm min}| < |q^2_{\rm med}| < |q^2_{\rm max}|$，$q^2_{\rm max}$ 表示最大虚度。这表明恰当地设定重整化能标非常关键；基于猜测能标如 $\mu^2_r \sim q^2_{\rm max}$ 的预言可能会误导我们得出错误结论。

- 未知高阶 n_f 项 (等价于 $\{\beta_i\}$ 项) 会造成残留能标依赖。以电子 -μ 子弹性散射为例，若仅考虑单光子交换骨架图，如图 9.2 的 (a) 和 (b) 所示，它所

对应的 $\{\beta_i\}$ 项可以很方便地重求和至所有阶。但当涉及两个或更多的骨架图时，会出现不止一类的 $\{\beta_i\}$ 项，图 9.2 的 (c) 和 (d) 显示了双光子交换的骨架图。这两类 $\{\beta_i\}$ 项来自于不同阶的耦合常数，因此需要被吸收进不同的 PMC 能标。吸收进 $\{\beta_i\}$ 项后，形成的 BLM 能标将是微扰展开式，它的未知高阶修正项会导致残留能标依赖。

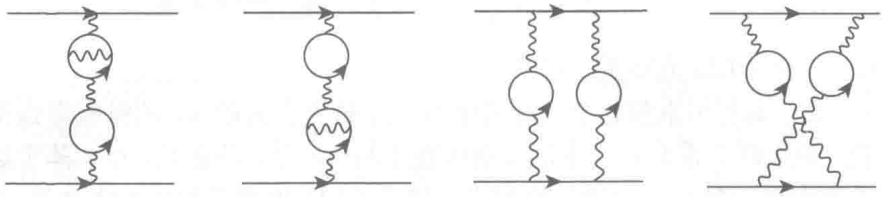


图 9.2　电子 -μ 子弹性散射过程含有的典型 n_f^2 项。实线圆圈表示轻子圈，图 (a) 和 (b) 是 "包裹" 光子传播子的真空极化贡献，这些项需被吸收到 $\alpha_{em}(t)$ 中，图 (c) 和 (d) 引入新的 $\{\beta_i\}$ 项类型，必须据此设定新的 BLM 能标[6]

• BLM 满足基于重整化群不变性的自洽条件。以下做简要说明：

(1) 满足存在性及唯一性。公式 (9.18) 的次领头阶系数 $C_1(\mu_r)$ 可写成如下形式

$$C_1(\mu_r) = (a + bn_f) + (c + dn_f)\ln\mu_r^2 \tag{9.25}$$

其中 a, b, c, d 都是与 n_f 无关的常数，那么领头阶的 BLM 能标可以设定为

$$\ln\mu_r^{\rm BLM} = -\frac{b}{2d} + \mathcal{O}(\alpha_s) \tag{9.26}$$

其中省略的高阶 α_s 项将由次次领头阶或更高阶的 n_f 项确定。

(2) 满足自反性。BLM 要求展开式，$\alpha_s(\mu_r) = \alpha_s(\mu_r') + f_1(\mu_r, \mu_r')\alpha_s^2(\mu_r') + \cdots$ 中所有与 n_f 成正比的 $\ln\left(\mu_r^2/\mu_r'^2\right)$ 项均为零，因此我们得到 $\mu_r' = \mu_r$。

(3) 满足对称性。经过 BLM 能标设定，我们总有

$$\tilde{r}_{12}(\mu_1, \mu_2^\star) = -\tilde{r}_{21}(\mu_2^\star, \mu_1)$$

也就是说，两个次领头阶的系数只差一个符号。要求其中一个不依赖于 n_f 项，等价于要求另一个也不依赖于 n_f 项。这表明经过 BLM 方案后，对称关系 $\lambda_{12}\lambda_{21} = 1$，可得到满足。

(4) 满足传递性。经过 BLM 能标设定后，可获得如下两个级数展开

$$\alpha_{s1}(\mu_1) = \alpha_{s2}(\mu_2^\star) + \tilde{r}_{12}(\mu_1, \mu_2^\star)\alpha_{s2}^2(\mu_2^\star) + \mathcal{O}(\alpha_{s2}^3) \tag{9.27}$$

$$\alpha_{s2}(\mu_2^\star) = \alpha_{s3}(\mu_3^\star) + \tilde{r}_{23}(\mu_2^\star, \mu_3^\star)\alpha_{s3}^2(\mu_3^\star) + \mathcal{O}(\alpha_{s3}^3) \tag{9.28}$$

其中 $\tilde{r}_{12}(\mu_1,\mu_2^\star)$ 和 $\tilde{r}_{23}(\mu_2^\star,\mu_3^\star)$ 不依赖于 n_f 项。由此得到

$$\alpha_{s1}(\mu_1)=\alpha_{s3}(\mu_3^\star)+[\tilde{r}_{12}(\mu_1,\mu_2^\star)+\tilde{r}_{23}(\mu_2^\star,\mu_3^\star)]\,\alpha_{s3}^2(\mu_3^\star)+\mathcal{O}(\alpha_{s3}^3) \tag{9.29}$$

其中次领头阶系数 $\tilde{r}_{12}(\mu_1,\mu_2^\star)+\tilde{r}_{23}(\mu_2^\star,\mu_3^\star)$ 也不依赖于 n_f，因为它是由两个不依赖于 n_f 的项相加而得。这些参数间的关系确保了经过 BLM 能标设定后的传递性关系，$\lambda_{31}=\lambda_{32}\lambda_{21}$ 成立。

2. BLM 方案的自洽能标关系

不同的重整化方案下重整化能标的具体值有所不同，但 BLM 能标间的自洽能标关系保证了 BLM 方案的理论预言不依赖于重整化方案的选择。物理可观测量 A 和 B 所对应的有效耦合常数 (α_A 和 α_B) 满足如下形式：

$$\alpha_A(Q_A)=\alpha_B(Q_B)\left[1+r_{A/B}\frac{\alpha_B(Q_B)}{\pi}+\mathcal{O}(\alpha_B^2)\right] \tag{9.30}$$

若两个能标满足自洽能标关系，$\lambda_{A/B}=Q_A/Q_B$，那么系数 $r_{A/B}$ 将与 n_f 无关。基于 BLM 的传递性，不同方案下的自洽能标关系满足

$$\lambda_{A/B}=\lambda_{A/C}\lambda_{C/B} \tag{9.31}$$

这确保有效耦合常数 α_A 和 α_B 间的关联与中间重整化方案 C 的选择无关。

下面给出对自洽能标关系的具体推导。考虑用 α_v(对应于任意中间重整化方案 v) 来展开有效耦合常数 α_A 到次领头阶：

$$\alpha_A(Q_A)=\alpha_v(Q_A)\left[1+(C_{vA}+D_{vA}n_f)\frac{\alpha_v(Q_A)}{\pi}+\mathcal{O}(\alpha_v^2)\right] \tag{9.32}$$

这里 Q_A 是通过测量有效耦合 α_A 所对应的可观测量所确定出的重整化能标。根据 BLM 方案可得到

$$\alpha_A(Q_A)=\alpha_v(Q_v)\left[1+r_{A/v}\frac{\alpha_v(Q_v)}{\pi}+\mathcal{O}(\alpha_v^2)\right] \tag{9.33}$$

其中 $Q_v=\mathrm{e}^{3D_{vA}}Q_A$，$r_{A/v}=C_{vA}+(33/2)D_{vA}$。有效耦合常数 α_A 和 α_v 间的能标关系，$\lambda_{A/v}=Q_A/Q_v$，它可通过要求系数 $r_{A/v}$ 不含真空极化项来确定。

类似地，我们可以将有效耦合 α_B 按 α_v 展开：

$$\alpha_B(Q_B)=\alpha_v(Q_v)\left[1+r_{B/v}\frac{\alpha_v(Q_v)}{\pi}+\mathcal{O}(\alpha_v^2)\right] \tag{9.34}$$

其中 $Q_v=Q_B/\lambda_{B/v}$，$r_{B/v}$ 也不含真空极化项。

消除 $\alpha_v(Q_v)$，可得到有效耦合常数 α_A 和 α_B 的自洽能标关系 (9.30)，其中 $Q_A/Q_B = \lambda_{A/B} = \lambda_{A/v}/\lambda_{B/v}$ 和 $r_{A/B} = r_{A/v} - r_{B/v}$。$\lambda_{A/B}\lambda_{B/A} = 1$，表明 BLM 具有对称性。作为验证能标间的关系，还可以反过来通过要求 $r_{A/B}$ 不含 n_f 项来直接确定能标，由于得到等价结果 $Q_A = \lambda_{A/B}Q_B$，该等式与 BLM 的传递性质一致。

自洽能标关系 (9.30) 提供了检验 QCD 理论的一种方法。能标间的比值 $\lambda_{A/B}$ 可唯一确定，表明有效耦合常数 α_A 和 α_B 将在相同的重整化点上跨越相同的夸克阈值。用来定义有效耦合常数 α_v 的中间方案 v 可以任意选取，特别是除了 $\overline{\rm MS}$ 方案，任何可微扰计算的物理量均可用于定义有效耦合常数 (等价于一种新方案)。选择任一方案预言某一观测值，根据自洽能标关系，与这些方案所对应的有效耦合常数间的能标会适当变化，确保理论预言不会因为方案变化而变化。图 9.3 总结了多种可观测量所对应的有效耦合常数的自洽能标关系。

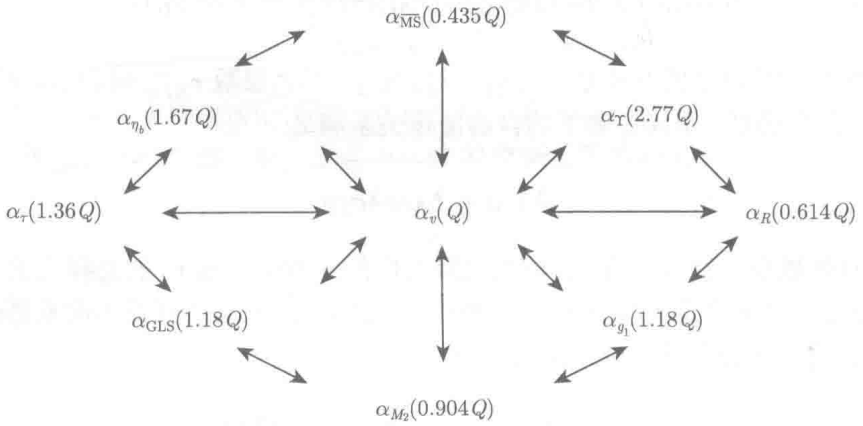


图 9.3　通过具体物理量所定义的各种有效耦合常数之间的领头阶自洽能标关系[6]

有限阶下自洽能标对应关系的存在使得我们可以采用任意重整化方案完成计算。值得注意的是，自洽能标关系是确定 BLM 能标之间的关系，因此上述结论是在将微扰展开式中最后一阶无法确定的能标直接取为上一阶 BLM 能标的情况下作出的。这种处理会导致残留方案依赖性，不过多个实例表明，除了个别极端情况，如次领头对数阶近似下的玻密子截距值在 $\overline{\rm MS}$ 方案下得不到正确值只能转到 MOM 方案，这种依赖性往往很小。重整化方案可以任意选择，但不同方案下的微扰收敛性是不一样的，因此可以选择一种方案，使表达式更加收敛，从而最大限度地降低由未知高阶项所导致的残留方案依赖性。按 $\overline{\rm MS}$ 方案强耦合常数 $\alpha_{\overline{\rm MS}}(Q)$ 展开的可观测量在小动量转移时必然失效，因为强耦合常数会在 $Q = \Lambda_{\overline{\rm MS}}$ 时有奇异。而可观测量之间的自洽能标关系可以在动量转移很小甚至在微扰 QCD 失效的能量区域仍然成立。特别是，两个含类似高扭度项的物理量之间也许可以用自洽能

标关系关联起来。

上面给出的是基于次领头阶近似下的领头阶 BLM 能标间的自洽关系。这样的能标关系可以拓展到任意阶。尽管 BLM 能标的数值会由于高阶修正项的加入而有所变化，但 BLM 方案的传递性表明不同方案下 BLM 能标间的相对关系将保持不变。可以按下列两步将自洽能标关系延拓到高阶：

- 领头阶 BLM 能标本身是一个微扰展开，包含来自于高阶的微扰修正项。在包含高阶修正项之后，BLM 能标仍然满足领头阶能标关系 (9.30)。
- 对于高阶 BLM 能标，如次领头阶能标、次次领头阶能标等，可以证明它们满足与领头阶能标类似的自洽能标关系。

下面我们将给出证明，在包含了高阶贡献之后，领头阶 BLM 能标的自洽能标关系仍将得到满足。因为如果证明了第一点之后，第二点可以通过递归方法加以证明：确定领头阶的 BLM 能标之后，我们可以将之分离出来；其余项可以看作新的微扰展开序列，由此可重复第一步中领头阶的处理步骤。由此循环往复，我们可将领头阶的证明拓展到任意阶。

为方便起见，我们采用 $\overline{\rm MS}$ 方案作为中间方案。考虑次次领头阶的情况，与物理可观测量 A 和 B 相对应的两个有效耦合常数 $\alpha_1(Q)/\pi$ 和 $\alpha_2(Q)/\pi$ 可按 $\overline{\rm MS}$ 方案下的强耦合常数作如下微扰级数展开：

$$\frac{\alpha_1(Q)}{\pi}=\frac{\alpha_{\overline{\rm MS}}(Q)}{\pi}+(A_1+B_1n_f)\left(\frac{\alpha_{\overline{\rm MS}}(Q)}{\pi}\right)^2+(C_1+D_1n_f+E_1n_f^2)\left(\frac{\alpha_{\overline{\rm MS}}(Q)}{\pi}\right)^3+\cdots \tag{9.35}$$

$$\frac{\alpha_2(Q)}{\pi}=\frac{\alpha_{\overline{\rm MS}}(Q)}{\pi}+(A_2+B_2n_f)\left(\frac{\alpha_{\overline{\rm MS}}(Q)}{\pi}\right)^2+(C_2+D_2n_f+E_2n_f^2)\left(\frac{\alpha_{\overline{\rm MS}}(Q)}{\pi}\right)^3+\cdots \tag{9.36}$$

另外，有效耦合常数 $\alpha_1(Q)/\pi$ 可以按 $\alpha_2(Q)/\pi$ 展开：

$$\frac{\alpha_1(Q)}{\pi}=\frac{\alpha_2(Q)}{\pi}+(A_{12}+B_{12}n_f)\left(\frac{\alpha_2(Q)}{\pi}\right)^2+(C_{12}+D_{12}n_f+E_{12}n_f^2)\left(\frac{\alpha_2(Q)}{\pi}\right)^3+\cdots \tag{9.37}$$

联立上式，可以得到系数 $A_{12},B_{12},C_{12},D_{12},E_{12}$ 为

$$A_{12}=A_1-A_2$$

$$B_{12}=B_1-B_2$$

$$C_{12}=C_1-C_2-2(A_1-A_2)A_2$$

$$D_{12}=D_1-D_2-2(A_1B_2+A_2B_1)+4A_2B_2$$

$$E_{12}=E_1-E_2-2(B_1-B_2)B_2$$

考虑次次领头阶贡献时，领头阶 BLM 能标将含有次领头阶修正项。根据标准 BLM 方案，可得到三个领头阶 BLM 能标：

$$Q_1^{LO} = Q\exp\left[\frac{3B_1}{2T} + \frac{9\beta_0}{8T^2}\left(B_1^2 - E_1\right)\frac{\alpha_{\overline{\rm MS}}(Q)}{\pi} + \mathcal{O}\left(\frac{\alpha_{\overline{\rm MS}}^2}{\pi^2}\right)\right] \tag{9.38}$$

$$Q_2^{LO} = Q\exp\left[\frac{3B_2}{2T} + \frac{9\beta_0}{8T^2}\left(B_2^2 - E_2\right)\frac{\alpha_{\overline{\rm MS}}(Q)}{\pi} + \mathcal{O}\left(\frac{\alpha_{\overline{\rm MS}}^2}{\pi^2}\right)\right] \tag{9.39}$$

$$Q_{12}^{LO} = Q\exp\left[\frac{3B_{12}}{2T} + \frac{9\beta_0}{8T^2}\left(B_{12}^2 - E_{12}\right)\frac{\alpha_{\overline{\rm MS}}(Q)}{\pi} + \mathcal{O}\left(\frac{\alpha_{\overline{\rm MS}}^2}{\pi^2}\right)\right] \tag{9.40}$$

$C_A = 3,\ T = 1/2,\ C_F = 4/3$。假设 $\lambda_{A/v} = Q_1^{LO}/Q, \lambda_{B/v} = Q_2^{LO}/Q, \lambda_{A/B} = Q_{12}^{LO}/Q$，可得到如下关系：

$$\lambda_{A/B} = \lambda_{A/v}/\lambda_{B/v} = \lambda_{A/v}\lambda_{v/B} \tag{9.41}$$

第二个等式用到了对称性关系，$\lambda_{B/v}\lambda_{v/B} = 1$。式 (9.41) 表明自洽能标对应关系在考虑高阶后仍然成立。值得注意的是，这里的 $\lambda_{A/v}, \lambda_{B/v}, \lambda_{A/B}$ 实际上都是 Q 的函数，为表述简洁，上面的推导省略了这种函数关系。即便考虑 $\lambda_{A/v}, \lambda_{B/v}, \lambda_{A/B}$ 是 Q 的函数，也不会影响上面的推导。

3. *含质量效应的重整化群方程*

强耦合常数随能标的跑动行为取决于重整化群方程或 β 函数。β 函数与活跃夸克味道数 n_f 相关。通常情况下，n_f 值不连续，它是重整化能标 μ_r 的阶梯函数。根据 QCD 退耦合理论，通常的 β 函数中不含有夸克质量项，因此强耦合常数随能标的跑动行为不依赖于夸克质量。而对强耦合常数做包含夸克质量效应的解析延拓对于 QCD 理论的精确检验很有用处：可了解夸克质量如何影响强耦合常数随能标演化到高能标或低能标的跑动行为；了解超对称大统一理论中的夸克质量效应，对理解各种相互作用耦合常数在非常高能量标度的统一行为有帮助。BLM 方案可给出随能标变化的正确 n_f 值，也可将夸克质量效应包含进来。正是基于 BLM 方案以及自洽能标关系，文献 [7] 通过加入有限质量的夸克阈值效应对 $\overline{\rm MS}$ 方案下的耦合常数进行了解析延拓，并称之为 $\widetilde{\overline{\rm MS}}$ 方案。以下对这种思想作简要介绍。

利用自洽能标关系可将 $\overline{\rm MS}$ 方案和 V 方案下的耦合常数连接起来：

$$\tilde{\alpha}_{\overline{\rm MS}}(Q) = \alpha_v(Q^\star) + \frac{2N_c}{3}\frac{\alpha_v^2(Q^{\star\star})}{\pi} + \cdots \tag{9.42}$$

其中

$$Q^\star = Q\exp\left[\frac{5}{6} + \mathcal{O}\left(\frac{\alpha_v}{\pi}\right)\right] \tag{9.43}$$

$$Q^{**} = Q \exp\left[\left(\frac{105}{128} - \frac{9}{8}\zeta_3\right)\frac{C_F}{N_c} + \left(\frac{103}{192} + \frac{21}{16}\zeta_3\right) + \mathcal{O}\left(\frac{\alpha_v}{\pi}\right)\right] \tag{9.44}$$

V 方案指的是基于有效耦合常数 $\alpha_v(Q)$ 来预言物理量，而有效耦合常数 $\alpha_v(Q)$ 基于重夸克势 $V(Q^2) = -4\pi\alpha_V(Q)/Q^2$ 定义。V 方案中，将重整化能标选择为 GM-L 方案建议的光子/胶子虚度，可自动将所有真空极化贡献项求和进耦合常数，避免重整化能标问题。V 方案含夸克质量效应，通过 $\overline{\rm MS}$ 方案和 V 方案间的自洽能标关系，可将 $\overline{\rm MS}$ 方案拓展为包含质量效应的 $\widetilde{\overline{\rm MS}}$ 方案[7]。可以证明领头阶 BLM 能标 $Q^\star$ 中，所有高阶修正项等于零。对公式 (9.42)，求关于 $\ln Q$ 的偏导数，我们可得到 $\overline{\rm MS}$ 方案下的 β 函数。

由此，我们得出 $\tilde{n}_{f,\overline{\rm MS}}$ 和 $n_{f,V}$ 间的关系

$$\tilde{n}_{f,\overline{\rm MS}}(Q) = n_{f,V}(Q^\star) \simeq \left(1 + \frac{5}{\mathrm{e}^{5/3}\rho_i}\right)^{-1} \tag{9.45}$$

其中，$\rho_i = Q^2/m_i^2$。图 9.4 给出了 $\widetilde{\overline{\rm MS}}$ 方案下随能标 Q 变化的夸克味道数 $\tilde{n}_{f,\overline{\rm MS}}(Q)$。同时也给出 $\widetilde{\overline{\rm MS}}$ 方案下的夸克味道数 n_f 随 Q 的变化，在阈值处它呈现出不连续的阶梯性质。计算中，我们采用数值 $m_u = 0.004$GeV，$m_d = 0.008$GeV，$m_s = 0.2$GeV，$m_c = 1.5$GeV，$m_b = 4.5$GeV 以及 $m_t = 175$GeV。图 9.4 表明 $\tilde{n}_{f,\overline{\rm MS}}$ 在夸克质量阈值处是连续的。我们也注意到，如果使用其他能标而不是 BLM 能标，将会导致 $\tilde{n}_{f,\overline{\rm MS}}$ 和 n_f 在阈值处的较大差别。

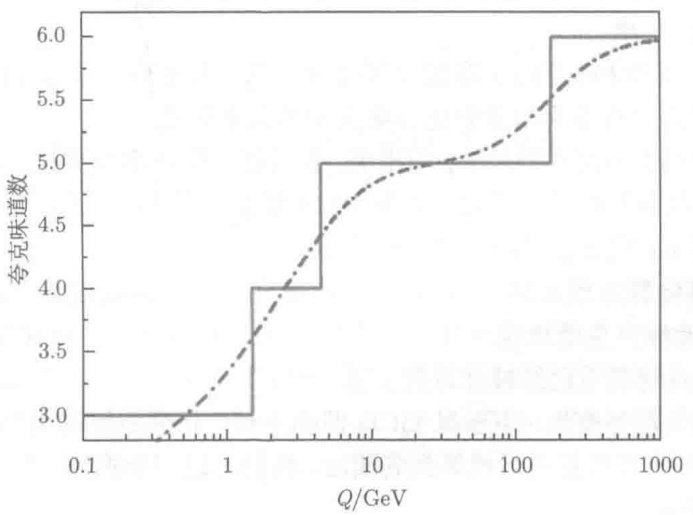


图 9.4 $\widetilde{\overline{\rm MS}}$ 方案下，夸克味道数 $\tilde{n}_{f,\overline{\rm MS}}(Q)$ 随能标 Q 的连续变化 (点划线)。作为对比，同时画出了传统的 n_f 值随 Q 的变化情况 (实线)

基于 BLM 方案，对 $\overline{\rm MS}$ 方案下的重整化群方程做解析延拓，可正确地将 QCD

高阶修正图中的轻夸克圈效应吸收进强耦合常数。将重夸克的质量效应考虑进强耦合常数会对其跑动行为产生约百分之几的数值影响，在阈值附近的影响会加大。这些看似较小的数值差别对于那些忽略夸克质量而得到的物理量可能会产生较大影响，特别是在考虑通过与实验对比来确定强耦合常数在低能和高能处的准确行为时。这表明正确考虑夸克质量效应对获得重整化能标的准确值以及强耦合常数的准确值有重要帮助。$\widetilde{\overline{\rm MS}}$ 方案的优点在于它可利用 α_v 方案的质量效应提供对传统维数正规化方案的一个解析延拓；解析延拓后的强耦合常数可正确反映出含夸克质量效应的有效耦合常数对能标的跑动行为以及高能物理过程中粒子产生的解析性质，特别是在夸克阈值处的解析性质。

4. BLM 方案从单圈到高圈的解析延拓

BLM 方案在实际运用中取得了巨大成功，但大都是基于 QCD 单圈处理。随着高阶圈图计算能力的提高，人们希望能够找到系统方法，将 BLM 方案从次领头阶解析延拓到更高微扰阶。国际上，大多数解析延拓的做法是设法消除所有 n_f 项，或为改变微扰收敛性、或为保持数值稳定性等。这些做法，虽然有一些实际效果，但给出的 BLM 预言仍然依赖于初始重整化能标的选择；另外，不加区分地处理所有 n_f 项，形成的并非共形表达式，这些处理也无法消除重整化方案的依赖性。理论预言不依赖于重整化能标以及重整化方案的选择是重整化群不变性的基本要求，因此这些做法并不能作为重整化能标问题的解决方案。

为了满足 QCD 理论中的重整化群不变性，BLM 方案的解析延拓需处理好微扰展开式中的 n_f 项：

- 仅与 β 函数相关的 n_f 项需要被吸收进耦合常数中。运用 BLM 方案之后，微扰展开式将变为与重整化方案无关的共形级数。
- 每一阶都会有新类型的 n_f 项出现，表明每一阶强耦合常数的跑动行为不一致，所以需要在每一阶均引入新 BLM 能标。因此，可通过逐阶吸收的方式将所有 n_f 项吸收进跑动耦合常数中。
- 从重整化群方程出发，BLM 能标本身会是一个微扰级数。获得的每一阶 BLM 能标究竟能准确到什么程度取决于已知高阶项中存在多少类型的 n_f 项，以及物理量已经被计算到了哪一阶。

基于重整化群不变性，下面以 QCD 四圈为例，介绍如何将 BLM 方案解析延拓到高圈。物理可观测量被微扰算到高圈后，我们可进一步将每一阶的微扰系数按 n_f 的幂次做展开

$$\varrho = r_0 \left[a_s^n(\mu_r) + \sum_{i=1}^{2} A_i n_f^{i-1} a_s^{n+1}(\mu_r) + \sum_{i=1}^{3} B_i n_f^{i-1} a_s^{n+2}(\mu_r) + \sum_{i=1}^{4} C_i n_f^{i-1} a_s^{n+3}(\mu_r) \right] \tag{9.46}$$

其中，$a_s = \alpha_s/\pi$。树图阶系数 r_0 不依赖于重整化能标且与强耦合常数无关。这里，μ_r 表示初始重整化能标。通常，可将初始重整化能标 μ_r 取为典型能标 Q 以避免微扰系数中出现的大对数项 $\ln(\mu_r/Q)$，$n\,(\geqslant 1)$ 表示树图阶的 α_s 阶数。选择其他初始能标时，可利用重整化群方程找回微扰系数中的完整对数项。按 BLM 思想，每一阶展开系数中与强耦合常数跑动行为相关的 n_f 项 (即 β 函数对应的项) 都需要被求和进跑动耦合常数。与 β 函数无关的 n_f 项将被作为共形系数不做处理，为方便起见，这里形式上已将这一类项放入每一阶微扰系数的第一个系数中。

在高阶情况下，每一阶的 BLM 能标都会有所不同，它们可逐阶确定。为了确定强耦合常数的正确能标，需要用到强耦合常数在任意能标 Q 处按 μ_r 处的值的展开关系

$$\begin{aligned} a_s(Q) = & a_s(\mu_r) - \frac{\beta_0}{4}\ln\left(\frac{Q^2}{\mu_r^2}\right)a_s^2(\mu_r) + \frac{1}{4^2}\left[\beta_0^2\ln^2\left(\frac{Q^2}{\mu_r^2}\right) - \beta_1\ln\left(\frac{Q^2}{\mu_r^2}\right)\right]a_s^3(\mu_r) \\ & + \frac{1}{4^3}\left[-\beta_0^3\ln^3\left(\frac{Q^2}{\mu_r^2}\right) + \frac{5}{2}\beta_0\beta_1\ln^2\left(\frac{Q^2}{\mu_r^2}\right) - \beta_2\ln\left(\frac{Q^2}{\mu_r^2}\right)\right]a_s^4(\mu_r) + O(a_s^5) \end{aligned}$$

在四圈修正的情况下，我们可通过如下三步完成微扰展开式 (9.46) 的 BLM 方案的能标设定。

第一步, 确定领头阶 (LO 阶)PMC 能标 Q_1。从微扰展开式 (9.46) 的领头阶出发，重整化能标 $\mu_r \to Q_1$，各阶系数中 n_f 的最高幂次项，$A_2 n_f, B_3 n_f^2, C_4 n_f^3$，将被吸收进强耦合常数。公式 (9.46) 因此变为

$$\varrho = r_0[a_s^n(Q_1) + \tilde{A}_1 a_s^{n+1}(Q_1) + (\tilde{B}_1 + \tilde{B}_2 n_f)a_s^{n+2}(Q_1) + (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 n_f + \tilde{C}_3 n_f^2)a_s^{n+3}(Q_1)] \tag{9.47}$$

第二步, 确定次领头阶 (NLO 阶)PMC 能标 Q_2。从微扰展开式中未确定能标的次领头阶开始，重整化能标 $Q_1 \to Q_2$，公式 (9.47) 中各阶最高的 n_f 幂次项 $\tilde{B}_2 n_f, \tilde{C}_3 n_f^2$，将被吸收到耦合常数，公式 (9.47) 变为

$$\varrho = r_0[a_s^n(Q_1) + \tilde{A}_1 a_s^{n+1}(Q_2) + \tilde{\tilde{B}}_1 a_s^{n+2}(Q_2) + (\tilde{\tilde{C}}_1 + \tilde{\tilde{C}}_2 n_f)a_s^{n+3}(Q_2)] \tag{9.48}$$

第三步, 设定次次领头阶 ($\mathrm{N^2LO}$ 阶)PMC 能标 Q_3。从微扰展开式中未确定能标的次次领头阶开始，重整化能标 $Q_2 \to Q_3$，公式 (9.48) 中各阶最高的 n_f 幂次项 $\tilde{\tilde{C}}_2 n_f$，将被吸收到耦合常数，公式 (9.48) 变为

$$\varrho = r_0[a_s^n(Q_1) + \tilde{A}_1 a_s^{n+1}(Q_2) + \tilde{\tilde{B}}_1 a_s^{n+2}(Q_3) + \tilde{\tilde{\tilde{C}}}_1 a_s^{n+3}(Q_3)] \tag{9.49}$$

通过这种方式逐阶确定能标，$\mu_r \to Q_1$，$Q_1 \to Q_2$ 和 $Q_2 \to Q_3$，我们可完全消除所有 n_f 项。改变能标时，各阶微扰系数要跟着相应改变，由此保证确定的能标能

得到正确的耦合常数跑动行为，以及正确的与方案无关的微扰估算值。确定 α_s^{n+3} 阶的有效能标，需要未知的更高阶信息。一个较自然的选择是将其设定为 Q_3，这是利用已知信息能够确定的最高阶重整化能标。利用重整化群方程，到次次领头阶的有效重整化能标可以写为

$$\ln\frac{Q_1^2}{\mu_r^2}=\ln\frac{Q_{1,0}^2}{\mu_r^2}+\frac{x\beta_0}{4}\ln\frac{Q_{1,0}^2}{\mu_r^2}a_s(\mu_r)+\frac{y}{16}\left(\beta_0^2\ln^2\frac{Q_{1,0}^2}{\mu_r^2}-\beta_1\ln\frac{Q_{1,0}^2}{\mu_r^2}\right)a_s^2(\mu_r)+\mathcal{O}(a_s^3) \tag{9.50}$$

$$\ln\frac{Q_2^2}{Q_1^2}=\ln\frac{Q_{2,0}^2}{Q_1^2}+\frac{z\beta_0}{4}\ln\frac{Q_{2,0}^2}{Q_1^2}a_s(\mu_r)+\mathcal{O}(a_s^2) \tag{9.51}$$

$$\ln\frac{Q_3^2}{Q_2^2}=\ln\frac{Q_{3,0}^2}{Q_2^2}+\mathcal{O}a_s) \tag{9.52}$$

有效能标 $Q_{1,0},Q_{2,0},Q_{3,0}$，可通过逐阶消除相关阶的最高 n_f 幂次项得到

$$\ln\frac{Q_{1,0}^2}{\mu_r^2}=\frac{6A_2}{n},\quad \ln\frac{Q_{2,0}^2}{Q_1^2}=\frac{6\tilde{B}_2}{(n+1)\tilde{A}_1},\quad \ln\frac{Q_{3,0}^2}{Q_2^2}=\frac{6\tilde{\tilde{C}}_2}{(n+2)\tilde{\tilde{B}}_1} \tag{9.53}$$

以及

$$x=\frac{3(n+1)A_2^2-6nB_3}{nA_2} \tag{9.54}$$

$$y=\frac{(n+1)(2n+1)A_2^3-6n(n+1)A_2B_3+6n^2C_4}{nA_2^2} \tag{9.55}$$

$$z=\frac{3(n+2)\tilde{B}_2^2-6(n+1)\tilde{A}_1\tilde{C}_3}{(n+1)\ \tilde{A}_1\tilde{B}_2} \tag{9.56}$$

这些指数形式的 BLM 能标表明，BLM 方案不会改变初始能标的类空或类时性质。等式中涉及的系数，具体表达式罗列如下:

$$\tilde{A}_1=A_1+\frac{33}{2}A_2,\quad \tilde{\tilde{B}}_1=\tilde{B}_1+\frac{33}{2}\tilde{B}_2,\quad \tilde{\tilde{\tilde{C}}}_1=\tilde{\tilde{C}}_1+\frac{33}{2}\tilde{\tilde{C}}_2 \tag{9.57}$$

$$\tilde{B}_1=\frac{1}{4n}[1089(n+1)A_2^2+153nA_2+66(n+1)A_1A_2+(4B_1-1089B_3)n] \tag{9.58}$$

$$\tilde{B}_2=\frac{-1}{4n}[66(n+1)A_2^2+19nA_2+4(n+1)A_1A_2-4n(B_2+33B_3)] \tag{9.59}$$

$$\begin{aligned}\tilde{C}_1=&\frac{1}{64A_2n^2}[-40392C_4n^3+143748A_2^4(3+5n+2n^2)+8A_2n^2(8C_1+35937C_4\\&+5049B_3n)-6732A_2^3n(2n^2-6n-11)+72A_1A_2(1+n)(34A_2n-242B_3n\\&+121A_2^2(3+2n))+3A_2^2n(2857n+352B_1(2+n)-95832B_3(3+2n))]\end{aligned} \tag{9.60}$$

$$\tilde{C}_2 = \frac{1}{192A_2n^2}[22392C_4n^3 - 52272A_2^4(3+5n+2n^2) - 24A_2n^2(-8C_2 + 6534C_4 + 933B_3n) - 48A_1A_2(1+n)(19A_2n - 132B_3n + 66A_2^2(3+2n)) + A_2^2n(-5033n - 192B_1(2+n) + 3168B_2(2+n) + 52272B_3(8+5n)) + 12A_2^3n(-2809 + n(-1254 + 622n))] \tag{9.61}$$

$$\tilde{C}_3 = \frac{1}{576A_2n^2}[-2736C_4n^3 + 4752A_2^4(3+5n+2n^2) + 144A_2n^2(4C_3 + 198C_4 + 19B_3n) - 456A_2^3(2n^3 - 5n) + 288A_1A_2(1+n)(-2B_3n + A_2^2(3+2n)) - A_2^2n(-325n + 576B_2(2+n) + 9504B_3(5+3n))] \tag{9.62}$$

$$\tilde{\tilde{C}}_1 = \frac{1}{4(n+1)\tilde{A}_1}[33(n+2)\tilde{B}_2(2\tilde{B}_1+33\tilde{B}_2)+(n+1)(153\tilde{B}_2+4\tilde{C}_1-1089\tilde{C}_3)\tilde{A}_1] \tag{9.63}$$

$$\tilde{\tilde{C}}_2 = \frac{-1}{4(n+1)\tilde{A}_1}[2(n+2)\tilde{B}_2(2\tilde{B}_1+33\tilde{B}_2)+(n+1)(19\tilde{B}_2-4(\tilde{C}_2+33\tilde{C}_3))\tilde{A}_1] \tag{9.64}$$

公式 (9.57) 表明系数 $\tilde{A}_1$，$\tilde{\tilde{B}}_1$ 和 $\tilde{\tilde{C}}_1$ 的相似性，这也从侧面表明 BLM 方案可以逐阶进行。微扰系数 A_i, B_i, C_i 等都与重整化方案相关，采用 BLM 方案后，最终的微扰论预言将不会依赖于重整化方案的选择。利用 Q_1 和 Q 的关系，可得到熟知的 GM-L 方案和 $\overline{\text{MS}}$ 方案强耦合常数之间的关系，$\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}(\text{e}^{-5/3}Q^2) = \alpha_s^{\text{GM-L}}(Q^2)$。

9.3.3 PMS 方案

基于重整化群不变性，物理量的微扰论预言在无穷阶的情况下与重整化能标和重整化方案等这些非物理参数无关；这等价于物理量本身的值与理论上采用何种方式去估算没有关系。为与之后将要引入的局域重整化群不变性相区别，我们称这种重整化群不变性为标准重整化群不变性。在有限阶情况下，如果简单采用 “猜测” 能标，那么这些非物理量的变化将会极大地影响理论预言值，影响程度的高低取决于微扰收敛性的好坏。

通常情况下，有限阶的微扰论预言存在着随重整化能标和重整化方案变化最稳定的点，称为最小敏感度点。PMS 方案正是将最小敏感度点所对应的值作为对物理量的预言值，由此获得有限阶下的最优能标和最优方案。在数学上，有可能存在多个极值点，实际处理中可以选择物理意义最明确的点作为最小敏感度点。人们可选择任意初始能标和重整化方案完成微扰论的计算，但最小敏感度点所对应的估算值与重整化方案及初始重整化能标的选择均无关。

具体来说，PMS 认为，如果有限阶微扰论预言必须依赖于某些非物理参数，那么可以通过令有限阶微扰论预言相对于这些非物理参数的偏微分等于零确定它们的最优值；由此进一步确定物理量在当前阶下的最优估算值。这种处理类似于数学上求某个函数极值的做法。从某种意义上来说，PMS 可以改善微扰级数的收敛性，

因为求极值保持数值稳定性的做法，实际效果是将领头阶及低阶的相对贡献加大了。

1. PMS 方案介绍

PMS 方案要求可观测物理量的微扰论近似 ϱ_n 需满足以下方程：

$$\frac{\partial \varrho_n}{\partial \tau}=\left(\left.\frac{\partial}{\partial \tau}\right|_{\alpha_s}+\beta(\alpha_s)\frac{\partial}{\partial \alpha_s}\right)\varrho_n\equiv 0 \tag{9.65}$$

$$\frac{\partial \varrho_n}{\partial \beta_j}=\left(\left.\frac{\partial}{\partial \beta_j}\right|_{\alpha_s}-\beta(\alpha_s)\int_0^{\alpha_s}\mathrm{d}\alpha'\frac{\alpha'^{j+2}}{[\beta(\alpha')]^2}\frac{\partial}{\partial \alpha_s}\right)\varrho_n\equiv 0 \quad (j=2,3,\cdots) \tag{9.66}$$

这里参量，$\tau=\ln\left(\mu_r^2/\Lambda_{\mathrm{QCD}}^2\right)$。此处

$$\frac{\partial \alpha_s}{\partial \beta_j}=-\beta(\alpha_s)\int_0^{\alpha_s}\mathrm{d}\alpha'\frac{\alpha'^{j+2}}{[\beta(\alpha')]^2}=\frac{\alpha_s^{j+1}}{\beta_0}\left(\frac{1}{j-1}-\frac{\beta_1}{\beta_0}\frac{j-2}{j(j-1)}\alpha_s+\cdots\right) \tag{9.67}$$

这里 $\beta(\alpha_s)$，α_s，$\beta_{j(j\geqslant 2)}$ 的具体值都与重整化方案相关。在不引起混淆的情况下，为简便起见，这里以及本小节的讨论均已略去重整化方案的标记符号。公式 (9.65) 和公式 (9.66) 要求微扰论近似 ϱ_n 在有限阶的情况下对能标以及方案的偏微分等于零；基于这一点，我们称 PMS 方案满足的是局域重整化群不变性。

强耦合常数在不同重整化方案下的跑动行为可由 $\beta(\alpha_s)$ 函数的不同取值来表征。利用公式 (9.65) 和公式 (9.66)，PMS 方案可确定出最优能标以及表征方案的最优 $\beta_{j(j\geqslant 2)}$ 变量取值。下面，采用正负电子湮灭到强子的过程来说明 PMS 方案的具体处理步骤。定义 $R_{e^+e^-}(s)\equiv\sigma(e^+e^-\to \text{强子})/\sigma(e^+e^-\to\mu^+\mu^-)$，其中 s 为正负电子质心对撞能量的平方。在 $\overline{\mathrm{MS}}$ 方案下，$R_{e^+e^-}(s)$ 已被算到四圈，以可解析处理的展开到三圈表达式为例，在任意初始能标 μ_r 下可得到

$$R_{e^+e^-}(s)=\left(3\sum_f Q_f^2\right)\left[1+\frac{\alpha_s(\mu_r)}{\pi}+r_2\left(\frac{\alpha_s(\mu_r)}{\pi}\right)^2+r_3\left(\frac{\alpha_s(\mu_r)}{\pi}\right)^3+\cdots\right] \tag{9.68}$$

其中 Q_f 表示夸克的电荷，微扰系数 $r_{i(i=2,3,\cdots)}$ 是 $\ln\mu_r^2/s$ 的函数。类比公式 (9.65) 和公式 (9.66)，得到标度不变和方案不变的两个方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau}+\beta(\alpha_s)\frac{\partial}{\partial \alpha_s}\right)R_{e^+e^-}=0 \tag{9.69}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \beta_j}-\beta(\alpha_s)\int_0^{\alpha_s}\mathrm{d}\alpha'\frac{\alpha'^{j+2}}{[\beta(\alpha')]^2}\frac{\partial}{\partial \alpha_s}\right)R_{e^+e^-}=0 \quad (j=2,3,4,\cdots) \tag{9.70}$$

这里 $\tau=\ln\left(\mu_r^2/\tilde{\Lambda}_{\rm QCD}^2\right)$，其中 $\tilde{\Lambda}_{\rm QCD}$ 和 $\Lambda_{\rm QCD}^{\overline{\rm MS}}$ 有如下关系:

$$\tilde{\Lambda}_{\rm QCD}=\left(\frac{\beta_1}{\beta_0^2}\right)^{-\beta_1/2\beta_0^2}\Lambda_{\rm QCD}^{\overline{\rm MS}} \tag{9.71}$$

根据公式 (9.69) 和 (9.70)，利用已知的 $\overline{\rm MS}$ 方案下的微扰展开系数 $r_2,r_3,\cdots$，可求解出最优方案所对应的 $\tau,\beta_2,\beta_3,\cdots$，以及最优方案下的微扰展开系数。为简单起见，以下采用 $a_s=\alpha_s/\pi$。利用公式 (9.67)~(9.70)，可得到 r_2,r_3 满足如下微分方程:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial r_2}{\partial\tau}=\frac{1}{4}\beta_0, &&\frac{\partial r_2}{\partial\beta_2}=0\\&\frac{\partial r_3}{\partial\tau}=\frac{1}{2}\beta_0 r_2+\frac{1}{16}\beta_1, &&\frac{\partial r_3}{\partial\beta_2}=-\frac{1}{16}\frac{1}{\beta_0}\end{aligned} \tag{9.72}$$

将方程组积分，得到

$$r_2=\frac{1}{4}\beta_0\tau+\rho_2$$

$$r_3=\frac{1}{16}\beta_0^2\tau^2+\frac{1}{2}\beta_0\rho_2\tau+\frac{1}{16}\beta_1\tau-\frac{1}{16}\frac{\beta_2}{\beta_0}+\rho_3'=\left(r_2+\frac{1}{8}\frac{\beta_1}{\beta_0}\right)^2-\frac{1}{16}\frac{\beta_2}{\beta_0}+\rho_3 \tag{9.73}$$

其中，ρ_2,ρ_3 是与重整化方案以及 τ,β_i 都无关的积分常数。利用 $\overline{\rm MS}$ 方案下的 $\beta_2^{\overline{\rm MS}},r_2^{\overline{\rm MS}},r_3^{\overline{\rm MS}}$ 可得到积分常数值

$$\begin{aligned}\rho_2&=r_2^{\overline{\rm MS}}-\frac{1}{4}\beta_0\ln\frac{s}{\tilde{\Lambda}_{\rm QCD}^2}\\\rho_3&=r_3^{\overline{\rm MS}}-\left(r_2^{\overline{\rm MS}}+\frac{1}{8}\frac{\beta_1}{\beta_0}\right)^2+\frac{1}{16}\frac{\beta_2^{\overline{\rm MS}}}{\beta_0}\end{aligned} \tag{9.74}$$

由此得到最优方案下的 r_2 值

$$r_2=-\frac{1}{4}\beta_0\ln\frac{s}{\tilde{\Lambda}_{\rm QCD}^2}+\frac{1}{4}\beta_0\tau+r_2^{\overline{\rm MS}} \tag{9.75}$$

公式 (9.73) 表明 r_3 并不显含 s 和 τ，但是通过 r_2 仍然依赖于这两个参数。通常情况下，可以使用重整化群的微扰解得到 τ 关于 β_i 函数的表达式。在三圈情况下，可得到如下解析解:

$$\tau=\frac{4}{\beta_0 a_s}+\frac{\beta_1}{\beta_0^2}\ln\left(\frac{\beta_1 a_s}{\beta_0}\right)-\frac{\beta_1}{2\beta_0^2}\ln\left(\frac{16\beta_0+4\beta_1 a_s+\beta_2 a_s^2}{\beta_0}\right)+\frac{2\beta_2\beta_0-\beta_1^2}{2\beta_0^2}f(a_s,\beta_2) \tag{9.76}$$

其中

$$f(a_s,\beta_2)=\frac{1}{\sqrt{D}}\ln\frac{4\beta_0+\frac{1}{2}a_s(\beta_1+\sqrt{D})}{4\beta_0+\frac{1}{2}a_s(\beta_1-\sqrt{D})}$$

$D=\beta_1^2-4\beta_0\beta_1$。

由公式 (9.69) 和 (9.70) 可得到

$$3\beta_0 r_3+\frac{1}{2}\beta_1 r_2+\frac{1}{16}\beta_2+\left(3\beta_1 r_3+\frac{1}{2}\beta_2 r_2\right)\frac{a_s}{4}+3\beta_2 r_3\frac{a_s^2}{16}=0 \tag{9.77}$$

$$\left[1+\left(\frac{\beta_1}{4\beta_0}+2r_2\right)a_s\right]I(a_s,\beta_2)-a_s=0 \tag{9.78}$$

其中

$$I(a_s,\beta_2)=\frac{4\beta_0}{D}\left[\frac{(4\beta_1^2-8\beta_2\beta_0)a_s+\beta_2\beta_1 a_s^2}{16\beta_0+4\beta_1 a_s+\beta_2 a_s^2}-2\beta_2\beta_0 f(a_s,\beta_2)\right]$$

利用公式 (9.76) 给出的 a_s 和 τ 的关系，公式 (9.77) 和 (9.78) 正好可解出 τ 和 β_2，即对任一个给定的 s 都可确定出最优方案下的 $\tilde{\tau}(s)$ 和 $\tilde{\beta}_2(s)$；由此进一步可得到最优跑动耦合常数 $\tilde{a}_s(s)$ 以及最优 $\tilde{r}_2(s)$ 和 $\tilde{r}_3(s)$，以及确定出物理量 $R_{e^+e^-}(s)$ 在最优重整化方案下的估算值。

以下给出基于 PMS 思想的能标设定方案的一些说明：

- 基于重整化方案不变的方程 (9.70)，我们可得到各阶微扰系数在任意重整化方案下的值。同时，与重整化方案无关的普适性积分常数 ρ_2,ρ_3 等可利用在 $\overline{\text{MS}}$ 方案下得到的微扰系数及 β 函数来获得。
- 方程 (9.77) 和方程 (9.78) 在任意重整化方案下都成立，因此由它们所导出的最优化重整化能标 $\tilde{\tau}(s)$ 的表达式也将具有普适性。利用得到的 $\tilde{\tau}(s)$ 表达式，就可进一步得到不同重整化方案所对应的最优能标值。虽然最优能标在不同的重整化方案下会有所不同，但最终得到的物理量 $R_{e^+e^-}$ 的 PMS 理论预言值将不会呈现对重整化方案的依赖性。这是 PMS 的关键思想。在更高微扰阶数的情况下，最优重整化能标，也意味着最优跑动耦合常数，很难获得解析的结果，但它们可以通过数值计算方式获得。
- 借助有效 PMS 能标 $\tilde{\tau}(s)$ 的重整化方案无关性，可得到不同重整化方案下的有效强耦合常数之间的对应关系。这种关系可与 BLM 方案中的自洽能标关系对应。当然，根据上述推导，PMS 方案是基于所有已知的微扰总贡献来获得稳定值的；在不同的已知微扰阶数下，PMS 方案的稳定点会有所差别，所以它无法获得类似的与 BLM 方案下所获得的重整化能标之间的关系。
- 按照上述做法，PMS 方案可扩展到更高阶的微扰处理，但需要用到数值求解方法。在后面章节中将介绍 PMS 方案的具体数值求解方法。
- PMS 预言的重整化方案无关性与 PMS 微扰表达式的微扰收敛性有很强关

联。作为简单说明，可将公式 (9.75) 改写为

$$r_2 = r_2^{\overline{\mathrm{MS}}} - \frac{1}{4}\beta_0 \ln \frac{s}{\mu_r^2} \tag{9.79}$$

上式表明若仅考虑次领头阶，采用 PMS 确定最优化能标后，正好将次领头阶系数中的 β_0 项减除掉。这与 BLM 方案处理后的次领头阶情况类似，因此，它同样也可改善微扰展开式的收敛性。从这种意义上讲，PMS 方案与 BLM 方案是一致的。但对于更高阶的情况，PMS 方案和 BLM 方案之间就没有这么简单的对应了。

作为本小节的结尾，下面对 PMS 方案的高阶数值求解方法作一简要说明。在微扰高阶情况下 (如 $n \geqslant 4$)，很难解析求解，为此，我们可采用螺旋迭代算法来求解联立方程组。它的具体流程如下[8,9]：

(1) 作为螺旋迭代算法的出发点，可猜测某个值为待求的最优重整化方案下的强耦合常数 $\tilde{a}_s$ 的初始值。这个值可以认为是当前选择的重整化方案下 (通常为 $\overline{\mathrm{MS}}$ 方案) 的强耦合常数在某个初始能标处的值。初始能标可以任意选择，仅需保证利用重整化群方程解出的强耦合常数值处于微扰区域内。实际处理中，可将初始能标选择为典型动量流动，因为若设定的初始值接近最终预言值，将会极大地减少迭代次数。

(2) 令 $\tilde{\beta}_2, \cdots, \tilde{\beta}_{n-1}$ 等于 $\overline{\mathrm{MS}}$ 方案下的 $\left\{\beta_i^{\overline{\mathrm{MS}}}\right\}$ 函数值。对于之后的每一步迭代，$\tilde{\beta}_2, \cdots, \tilde{\beta}_{n-1}$ 则被设定为上一步迭代之后获得的 $\left\{\tilde{\beta}_i\right\}$ 函数值。将确定的 $\tilde{\beta}_2, \cdots, \tilde{\beta}_{n-1}$ 取值与第一步猜测的 $\tilde{a}_s$ 一同代入局域重整化群方程组 (9.69) 和 (9.70)，求解出新的微扰系数 $r_2, \cdots, r_n$ 的数值。

(3) 将上一步求解出的微扰系数 $r_2, \cdots, r_n$ 代入与方案无关的重整化群不变量 $\rho_2, \cdots, \rho_n$ 的表达式，令它们的数值与 $\overline{\mathrm{MS}}$ 方案下的不变量数值相同，得到 $n-1$ 个方程组。联立这 $n-1$ 个关于不变量的方程组和能标 τ 的方程正好求解出 n 个参数 $\tilde{a}_s$、τ 和 $\tilde{\beta}_2, \cdots, \tilde{\beta}_{n-1}$ 的具体值。其中，τ 满足的方程可由重整化群方程求解得到

$$\tau = \frac{4}{\beta_0 a_s} + \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \ln \left| \frac{\beta_1 a_s}{\beta_1 a_s + 4\beta_0} \right| + \int_0^{a_s/4} \mathrm{d}\left(\frac{x}{4}\right) \left(\frac{1}{\beta^{(n-1)}(x)} - \frac{1}{\beta^{(2)}(x)} \right)$$

(4) 将第三步中所求得的 $\tilde{a}_s$、τ 和 $\tilde{\beta}_2, \cdots, \tilde{\beta}_{n-1}$ 代入第二步的过程，并作为相应参数的新初始值进入下一次迭代，求出的 $r_2, \cdots, r_n$ 继续进入第三步，不断循环，直到相近两次得到的物理量的估算值差别在可接受的范围，如可设若两次相邻迭代后的估算值差别小于 10^{-35}(双精度的极限)，即停止迭代过程。此时的估算值就可认为是 PMS 方案的最终预言值。

2. PMS 方案的特性

假若物理量随重整化能标的变化呈现单调上升或单调下降性质，并不存在 PMS 所要求的极值点，那么如何确定最优能标？在某些过程中，还可能存在多个数学上的极值点，究竟选择哪个极值点来确定最优能标及方案？是物理上看起来最合理的那一个还是其他？因此，与 FAC 方案和 BLM 方案不同，PMS 方案的最优化解并不一定满足存在性和唯一性。

另外，PMS 方案并不满足传递性。为简化描述，以下采用在't Hooft 方案下定义的有效耦合常数来讨论。在't Hooft 方案下，强耦合常数的跑动行为与我们选择何种重整化方案去处理微扰量无关，这时重整化群方程可化简为

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\tau} = -a^2(1+a) \tag{9.80}$$

该方程不含有依赖于重整化方案的参数。它的解可表为

$$\tau = \frac{1}{a} + \ln\left(\frac{a}{1+a}\right) \tag{9.81}$$

这里已重新定义 τ 为 $(\beta_0^2/\beta_1)\ln\mu_r^2/\Lambda_{\mathrm{QCD}}^{\prime\mathrm{tH2}}$，$\Lambda_{\mathrm{QCD}}^{\prime\mathrm{tH}}$ 是't Hooft 方案下的渐近能标。在't Hooft 方案下给定在不同能量标度下的有效强耦合常数 a_1 和 a_2，它们可通过微扰级数展开联系起来

$$a_1(\tau_1) = a_2(\tau_2) + (\tau_2 - \tau_1)a_2^2(\tau_2) + \cdots \tag{9.82}$$

PMS 要求

$$\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}\tau_2} = 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau_2}\left[a_2(\tau_2) + (\tau_2 - \tau_1)a_2^2(\tau_2)\right] \tag{9.83}$$

根据以上的重整化群方程，可以得到

$$1 + a_2 = \frac{1}{2(\tau_1 - \tau_2)} \tag{9.84}$$

结合 a_2 与 τ_2 的关系

$$\frac{1}{a_2} + \log\left(\frac{a_2}{1+a_2}\right) = \tau_2 \tag{9.85}$$

即可得到 τ_2 用 τ_1 表示的表达式。

图 9.5 给出 PMS 能标参数 τ_2 随 τ_1 变化的函数关系图。以下给出简要讨论：

- 图 9.5 表明 $\tau_2 \geqslant \tau_1 - 1/2$。在任何情况下，$\tau_2 \neq \tau_1$，因此，PMS 违反了自反性：对于有限阶的估算，当使用有效耦合常数预言它自身的值时，采用 PMS 方案得不到它自身，由此导致不准确的结果。

- 当存在大动量转移时，$\tau_1 \gg 1$，可推出 $a_2(\tau) \to 0$，且有

$$\tau_2 \simeq \tau_1 - \frac{1}{2} \tag{9.86}$$

在同一个重整化方案 R 下，a_1 和 a_2 有相同的渐近参量 $\Lambda_{\rm QCD}^{\prime {\rm tH}-R}$。这里 $\Lambda_{\rm QCD}^{\prime {\rm tH}-R}$ 指的是与 R 方案相关联的't Hooft 能标，其中 "相关联" 指选择的't Hooft 方案是与 R 方案有相同渐近能标的一类特殊't Hooft 方案。因此，公式 (9.86) 表明 μ_1 和 μ_2 满足关系式

$$\mu_2 \simeq \mu_1 \exp\left(-\frac{\beta_1}{4\beta_0^2}\right) \tag{9.87}$$

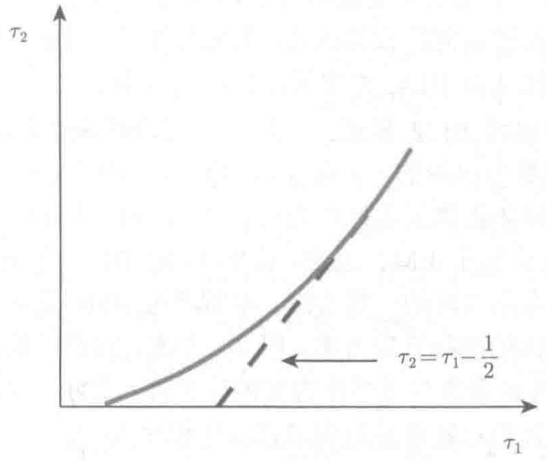


图 9.5 PMS 标度参数 τ_2 与外部标度参数 τ_1 的依赖关系[6]

上式的结论可写为更普遍的形式。运用 PMS 方案设定好重整化能标之后，在大动量区域，任何两个能标 μ_i 和 μ_j 之间的关联可用下式表示

$$\lambda_{ij} = \frac{\mu_i}{\mu_j} \simeq \exp\left(-\frac{\beta_1}{4\beta_0^2}\right) \tag{9.88}$$

这意味着

$$\lambda_{12}\lambda_{21} \simeq \exp\left(-\frac{\beta_1}{2\beta_0^2}\right) \neq 1 \tag{9.89}$$

$$\lambda_{13}\lambda_{32}\lambda_{21} \simeq \exp\left(-\frac{3\beta_1}{4\beta_0^2}\right) \neq 1 \tag{9.90}$$

因此，PMS 不满足对称性和传递性的要求。需要指出的是，引入重整化方案的依赖只会使耦合常数的跑动行为变得更加复杂，因此将耦合常数对重整化方案的依赖性考虑进来，也不会改变上述结论。从数学上看，PMS 方案无法满足自洽性的

要求主要是因为求解过程中用到的求导操作与自反性、对称性和传递性的操作有本质不同，它们不满足交换律。

任何截断的微扰级数会明显破坏严格的重整化群标度不变性，即对于任何有限阶的理论估算等，重整化群标度不变性只能近似成立。PMS 方案从数学上强行要求截断的微扰级数，在某个最优能标点，$\mu = \mu_{\rm PMS}$，满足严格的重整化群不变性。这种近似处理是 PMS 方案不能满足自反性、对称性和传递性的根本原因。

9.3.4　PMC 方案

BLM 方案作为早期处理重整化能标设定问题的方案，在仅考虑次领头阶时取得了巨大成功，但仅以轻夸克圈为基本原则的能标设定方案，在将其解析延拓到高圈时存在很大的问题：它无法确定高阶项中出现的 $n_f^2, n_f^3, \cdots$ 究竟该属于微扰论展开式的哪一阶，以及该如何吸收这些项。正因为如此，国际上出现了多种错误的延拓方案，甚至有看法认为 BLM 方案无法延拓到高圈。

9.3.2 节 4. 已指出将 BLM 延拓到高圈需要解决好两个核心问题：① 如何正确地区分各阶微扰系数中出现的 n_f 幂级数；② 如何逐阶吸收 n_f 项。PMC 方案为 BLM 方案的解析延拓提供了很好的思路，PMC 可以认为是 BLM 的底层原理。在 9.3.2 节 4. 中，正是基于 PMC 思想，借助 PMC-BLM 对应原理，我们给出了将 BLM 延拓到任意有限高阶的一种方法。本节将对 PMC 思想做进一步说明，介绍一种新的实现 PMC 的能标设定方案，即 R_δ 方案，它可以系统地设定体系的最优能标，方便地证明理论预言与重整化方案的无关性，获得不同的维数正规化方案间的自洽能标关系，且相对较容易地实现自动化程序设计。

1. 最大共形原理介绍

强耦合常数随能标的跑动由重整化群方程，即 β^R 函数来确定，R 指重整化方案。在本节中，为体现 β^R 函数对重整化方案的依赖将保留 β^R 函数中的上标 R。若能通过适当方法将微扰展开式中所有 β^R 函数项求和，获得强耦合常数的正确跑动行为以及对应于该跑动行为的重整化能标，那么就有可能解决有限阶下的重整化能标设定问题。PMC 正是基于这种考虑的一种能标设定方案：① PMC 基于重整化群方程来处理 β^R 函数项，因此它可获得强耦合常数的正确跑动行为。由于 β^R 函数项的系数与所考虑的物理过程密切相关，因此这种方法具有与过程无关的普适性，可用于系统地设定高能物理过程的能标。② PMC 可同时解决有限阶下重整化能标和重整化方案依赖性的问题。微扰表达式中的 β^R 函数项是破坏 QCD 理论共形对称性的原因，也是理论预言依赖于重整化方案的原因。将 β^R 函数消去之后，微扰展开中所有非共形项 ($\{\beta_i^R\} \neq 0$) 均被吸收到强耦合常数中，微扰级数将具有共形对称性，从而消除重整化方案的依赖性。③ 共形级数中不再含有具有发

散性质的重整化子项，$\left(\alpha_s^n\left(\beta_i^R\right)^n n!\right)$，因此 PMC 可自然改善微扰级数的收敛性。

PMC 提供了一套可系统设定任意有限阶最优重整化能标的方案。通常情况下，微扰展开系数是 n_f 幂级次展开。为此需首先将微扰系数重新表达为 $\{\beta_i^R\}$ 项与非 $\{\beta_i^R\}$ 项的形式，然后才是将所有 $\{\beta_i^R\}$ 项吸收到相应的强耦合常数中。

以直到次领头阶的微扰计算结果为例，次领头阶的系数可写为

$$C_1(\mu_r)=C_{10}(\mu_r)+C_{11}(\mu_r)n_f=\widetilde{C}_{10}(\mu_r)+\widetilde{C}_{11}(\mu_r)\beta_0 \tag{9.91}$$

μ_r 是初始重整化能标，系数 $C_{10}(\mu_r)$ 和 $C_{11}(\mu_r)$ 与 n_f 项无关。第二个等式中，系数 $\widetilde{C}_{10}=C_{10}+33C_{11}/2$ 和 $\widetilde{C}_{11}=-3C_{11}/2$。领头阶 PMC 能标 $\mu_r^{\rm PMC,LO}$ 可通过下式确定：

$$\widetilde{C}_{11}(\mu_r^{\rm PMC,LO})=0 \tag{9.92}$$

在次领头阶情况下，上式与 QED 类似，就是将真空极化中的轻费米子圈吸收进强耦合常数。在高阶情况下，一种简单的思路是在确定好领头阶能标之后，将剩下的项作为次领头阶的单圈修正；然后再按照上述相同思路确定次领头阶能标，而后再将剩下的项作为次次领头阶的单圈修正；依此类推。按照这种思想，PMC-BLM 对应原理指出，每一阶 $\{\beta_i^R\}$ 项的类型需与由重整化群方程所确定的强耦合常数在不同能标间的关系所确定的 $\{\beta_i^R\}$ 项类型一致。按此思想，不需要将 n_f 项转换为 $\{\beta_i^R\}$ 项之后再确定重整化能标；在确定重整化能标时，只需将当下所有已知阶的最高 n_f 幂次项吸收进强耦合常数即可；这正是 9.3.2 节 4. 所描写的逐阶确定能标的具体步骤。

下面将介绍一种新的实现 PMC 的方案，即 R_δ 方案，它无需引入自洽能标关系即可证明理论预言与重整化方案的无关性，且相对较容易实现自动化程序设计。R_δ 方案源自于对维数重整化方案的观察，通过对维数重整化方案进行拓展，以便同时用于分析重整化方案和重整化能标的解决方案。从共形对称性的角度来看，这两种 PMC 方案是等价的[10]。两者都满足所有重整化群不变性的基本特性，在任意有限阶下都能系统地给出能标确定且与重整化方案无关的理论预言。两种 PMC 方案吸收非共形项的方式有所不同，这导致它们得到的同阶 PMC 能标间有些差别，但这种差别具有微扰性质，随着圈图修正阶数的增加而迅速减小。

2. *R_δ 方案的介绍*

基于量子场论做微扰论计算时，高阶修正项中会出现圈图发散积分。此类发散积分是由在动量空间中将圈动量积分积到无穷大时所引起的，通常称为紫外发散。为了获得有意义的高阶圈图修正项，需要将无穷大分离出来，为此需要首先对圈图发散积分进行正规化，而后将分离出的发散项吸收进夸克质量、耦合常数等物理量中，从而形成有限的理论预言。这种方法就是重整化理论。理论界提出了多种正规

化方案，圈积分内通过增大分母幂次或降低分子幂次获得收敛积分，然而在这些方案中只有维数正规化方案可以保持规范不变性和洛仑兹不变性。R_δ 方案正是基于维数重整化方案来解决重整化能标的设定问题。

维数重整化方案中，对数发散积分采用如下方式正规化：

$$\int \mathrm{d}^4 p \to \mu^{2\varepsilon} \int \mathrm{d}^{4-2\varepsilon} p \tag{9.93}$$

μ 为重整化能量标度，ε 为额外的时空维度。μ 可任意选择，通常将之等价于强耦合常数的初始能标 μ_r^{init}。对数发散可转化为形如 $1/\varepsilon$ 的极点项，它们最终会被用于重新定义强耦合常数。微扰表达式中的极点项，通常是以如下组合或是以它的若干幂次的形式出现

$$\ln \frac{\left(\mu_r^{\mathrm{init}}\right)^2}{Q^2} + \frac{1}{\varepsilon} + C$$

其中，Q 为典型动量，C 为关联的有限项。减除 $1/\varepsilon$ 发散项的同时，可减除某个常数。常数的减除是人为的，不同减除方案对应于不同的重整化方案。例如，最小减除方案 (MS 方案) 仅减除 $1/\varepsilon$ 项；修正的最小减除方案 ($\overline{\mathrm{MS}}$ 方案) 则是除了减除 $1/\varepsilon$ 项之外，还将同时减除常数 $\ln(4\pi) - \gamma_E$。

为系统讨论微扰论预言与方案的相关性，我们可在 $\overline{\mathrm{MS}}$ 方案的减除项上加入常数 $(-\delta)$，由此形成的重整化方案，我们称为 R_δ 方案。不同 δ 值对应不同的重整化方案，例如，$\delta = 0$ 对应 $\overline{\mathrm{MS}}$ 方案，$\delta = \ln(4\pi) - \gamma_E$ 对应 MS 方案，$\delta = -2$ 对应 G 方案。两个 R_δ 方案可通过能标关系对应起来，$\mu_{\delta_2}^2 = \mu_{\delta_1}^2 \exp(\delta_2 - \delta_1)$。强耦合常数在任意 R_δ 方案下的 β 函数相同，均与 $\overline{\mathrm{MS}}$ 方案下的 β 函数一致：

$$\mu_\delta^2 \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\mu_\delta^2} = \beta(\alpha) = -\alpha(\mu_\delta)^2 \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \alpha(\mu_\delta)^i \tag{9.94}$$

其中，$\alpha = \alpha_s/4\pi$。为简化公式，本小节中将略去 β^{R_δ} 函数的方案指标。对于任意两个方案 δ_1 和 δ_2，它们的耦合常数之间的关系式可表为

$$\alpha(\mu_{\delta_1}) = \alpha(\mu_{\delta_2}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\mathrm{d}^n \alpha(\mu_r)}{(\mathrm{d}\ln \mu_r^2)^n}\bigg|_{\mu_r = \mu_{\delta_2}} (-\delta)^n \tag{9.95}$$

其中，$\ln \mu_{\delta_1}^2/\mu_{\delta_2}^2 = -\delta$。利用方程 (9.95)，$R_\delta$ 方案下的物理量有如下表达式[11]：

$$\begin{aligned}
\varrho_\delta(Q) = {} & r_0 + r_1\alpha_1(\mu_1) + \left[r_2 + \beta_0 r_1 \delta_1\right] \alpha_2^2(\mu_2) \\
& + \left[r_3 + \beta_1 r_1 \delta_1 + 2\beta_0 r_2 \delta_2 + \beta_0^2 r_1 \delta_1^2\right] \alpha_3^3(\mu_3) \\
& + \Bigg[r_4 + \beta_2 r_1 \delta_1 + 2\beta_1 r_2 \delta_2 + 3\beta_0 r_3 \delta_3 + 3\beta_0^2 r_2 \delta_2^2 \\
& + \beta_0^3 r_1 \delta_1^3 + \frac{5}{2}\beta_1 \beta_0 r_1 \delta_1^2\Bigg] \alpha_4^4(\mu_4)
\end{aligned} \tag{9.96}$$

式中 $\mu_i \equiv Q\mathrm{e}^{\delta_i/2}$，我们取初始重整化能标 $\mu_r^{\rm init} = Q$，并假定领头阶幂次 $n = 1$。r_i 表示 $\overline{\rm MS}$ 方案下各阶的微扰系数。这里，为明确哪些 δ 项与哪一阶的耦合常数相关，我们对每个 α 和 δ 均引入相应的指标。公式 (9.96) 给出了微扰展开式中每一阶微扰系数有哪些 $\{\beta_i\}$ 类型。公式 (9.96) 表明不同阶的微扰论系数间存在简并关系，如 $\beta_0\alpha\,(Q)^2$ 和 $\beta_1\alpha\,(Q)^3$ 前的微扰系数相等，这是为获得 QCD 理论与重整化方案无关的共形展开级数的必然要求。

基于上式给出的简并关系，物理量可重新表述为

$$\begin{aligned}\varrho_\delta(Q) =& r_{0,0} + r_{1,0}\alpha(Q) + \left[r_{2,0} + \beta_0 r_{2,1}\right]\alpha^2(Q) \\ &+ \left[r_{3,0} + \beta_1 r_{2,1} + 2\beta_0 r_{3,1} + \beta_0^2 r_{3,2}\right]\alpha^3(Q) \\ &+ \left[r_{4,0} + \beta_2 r_{2,1} + 2\beta_1 r_{3,1} + \frac{5}{2}\beta_1\beta_0 r_{3,2} + 3\beta_0 r_{4,1} + 3\beta_0^2 r_{4,2}\right. \\ &\left. + \beta_0^3 r_{4,3}\right]\alpha^4(Q) + \cdots \end{aligned} \tag{9.97}$$

$r_{i\geqslant 0,0}$ 为每一阶的共形系数。每一阶的 PMC 能标 Q_i 可按如下方式确定

$$\begin{aligned} r_{1,0}\alpha(Q_1) =& r_{1,0}\alpha(Q) - \beta(\alpha) r_{2,1} + \frac{1}{2}\beta(\alpha)\frac{\partial\beta}{\partial\alpha} r_{3,2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}\beta}{(\mathrm{d}\ln Q^2)^{n-1}} r_{n+1,n} \\ &\vdots \\ r_{k,0}\alpha^k(Q_k) =& r_{k,0}\alpha^k(Q) + r_{k,0}\, k\, \alpha^{k-1}(Q)\beta(\alpha) \\ &\times \left\{S_{k,1} + \Delta_k^{(1)}(\alpha) S_{k,2} + \cdots + \Delta_k^{(n-1)}(\alpha) S_{k,n}\right\} \end{aligned} \tag{9.98}$$

其中

$$\begin{aligned} S_{k,j} &= (-1)^j \frac{r_{k+j,j}}{r_{k,0}} \\ \Delta_k^{(1)}(\alpha) &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\beta}{\partial\alpha} + (k-1)\frac{\beta}{\alpha}\right] \\ \Delta_k^{(2)}(\alpha) &= \frac{1}{3!}\left[\beta\frac{\partial^2\beta}{\partial\alpha^2} + \left(\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\right)^2 + 3(k-1)\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha} + (k-1)(k-2)\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right] \\ &\vdots \end{aligned}$$

求解公式 (9.98) 可得

$$\ln\frac{Q_k^2}{Q^2} = \frac{S_{k,1} + \Delta_k^{(1)}(\alpha) S_{k,2} + \Delta_k^{(2)}(\alpha) S_{k,3}}{1 + \Delta_k^{(1)}(\alpha) S_{k,1} + \left(\Delta_k^{(1)}(\alpha)\right)^2 (S_{k,2} - S_{k,1}^2) + \Delta_k^{(2)}(\alpha) S_{k,1}^2} \tag{9.99}$$

将所有与 $\{\beta_i\}$ 项相关的项全部吸收进跑动耦合之中，可得到与初始重整化方案和重整化能标无关的表达式

$$\varrho_\delta(Q) = r_{0,0} + \sum_{i=1}^{n} r_{i,0}\alpha^i(Q_i) \tag{9.100}$$

对于有限阶情况，如 $n=4$，因为 α^5 的系数 $r_{5,1}$ 未知，没有更高阶的 β 项来用于设定 α^4 阶的 PMC 能标 Q_4，我们可取 $Q_4 = Q_3$，或者 $Q_4 = Q$。上述重求和方法可将所有已知非共形项吸收进强耦合常数。仅考虑单圈修正时，确定出的领头阶 PMC 能标将会与初始能标无关。若取 $\mu_r^{\rm init} \neq Q$，系数 $S_{k,1}$ 需替换为 $S_{k,1} + \ln Q^2/(\mu_r^{\rm init})^2$，领头阶的 PMC 能标则变为 $\ln Q_{k,LO}^2/(\mu_r^{\rm init})^2 = S_{k,1} + \ln Q^2/(\mu_r^{\rm init})^2$。等式左右两端的初始能标 $\mu_r^{\rm init}$ 正好相互抵消，最终的领头阶 PMC 能标表达式仍然与公式 (9.99) 的领头阶 PMC 能标一致。如果直到所有阶的 β 函数都已知，那么每一阶的 PMC 能标都将与初始重整化能标无关。但在其他有限阶的情况下，未知的高阶 β 函数会导致残留的重整化能标依赖性；这种残留能标依赖性与通常能标设定方案下的能标不确定性相比要小得多，因为它是高阶微扰效应且存在指数压低效应。

从公式 (9.96) 出发，我们可得到

$$\frac{\partial \varrho_\delta}{\partial \delta} = -\beta(\alpha)\frac{\partial \varrho_\delta}{\partial \alpha} \tag{9.101}$$

要求物理量的微扰论预言具有方案无关性，$\partial\varrho_\delta/\partial\delta = 0$，等价于要求微扰展开式中的 $\beta(\alpha) = 0$。非共形项完全移除之后形成的共形表达式 (9.100) 与有限阶物理预言的数值结果将与重整化方案无关，而这正是重整化群不变性的要求。这表明 PMC 方案在解决重整化能标设定问题的同时也可解决重整化方案依赖问题。

3. 含重整化以及因子化能标的完整微扰表达式

图 9.6 给出了强子对撞过程的示意图，$H_1H_2 \to HX$，X 代表任意末态。强子对撞过程的产生截面可写成如下因子化的形式：

$$\sigma_{H_1H_2\to HX} = \sum_{i,j}\iint \frac{{\rm d}\hat{s}{\rm d}s}{S\hat{s}} f_{i/H_1}(x_1,\mu_f) f_{i/H_2}(x_2,\mu_f)\hat{\sigma}_{ij}(s,M,R) \tag{9.102}$$

这里 $x_1 = \hat{s}/S$，$x_2 = s/\hat{s}$，i,j 表夸克或胶子。这里 S 表示强子质心对撞能量的平方，$s = x_1x_2S$ 表示子过程部分子质心对撞能量的平方。硬子过程的截面 $\hat{\sigma}_{ij}$ 与重整化能标 μ_r 和因子化能标 μ_f 均有关，$R = \mu_r^2/\mu_f^2$，$M = \mu_f^2/Q^2$。Q 代表对撞过程的典型动量流动，比如 $Q = m_H$ 对应与 Higgs 相关的过程，$Q = m_t$ 对应与顶夸克相关的过程。函数 $f_{i/H_{1,2}}(x_\alpha,\mu_f)\,(\alpha = 1,2)$ 是部分子分布函数，它表示在强子 $H_{1,2}$ 中找到 x_α 到 $x_\alpha + {\rm d}x_\alpha$ 之间部分子 i 的概率。

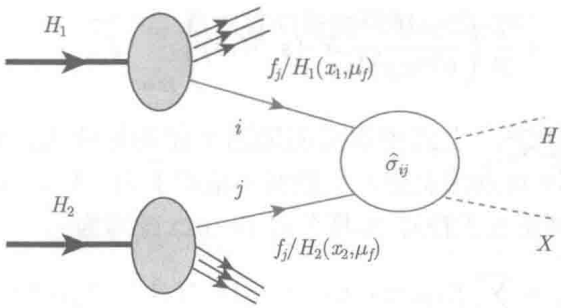


图 9.6 强子对撞过程 $H_1H_2 \to HX$，X 表示任何末态，它的产生截面可通过将硬子过程的散射截面与部分子分布函数的卷积得到[6]

对于涉及强子的高能物理过程，我们需要处理好因子化能标和重整化能标。因子化能标和重整化能标是两个完全独立的能量标度。与重整化能标不同，因子化能标涉及微扰部分以及非微扰部分的划分和强子的非微扰性质，如强子的部分子分布振幅与碎裂函数均依赖于因子化能标。基于 PMC 方案并利用重整化群不变性，重整化能标所导致的重整化方案及能标的依赖问题可通过将 QCD 微扰表达式转化为共形表达式得到解决。因子化能标的设定问题在共形理论下仍然存在，它也涉及诸多非微扰物理量的具体性质，因此因子化能标不确定性问题的解决比重整化能标问题更为复杂。对于硬子过程的重整化，初、末态夸克及胶子通常都作在壳处理以保证硬子过程散射振幅的规范不变性，因此，因子化能标设定问题还涉及如何将硬子过程中用到的流夸克质量与强子束缚态中的组分夸克质量相关联的问题。类似于微扰展开中利用重整化群方程来确定重整化能标，利用部分子分布函数所满足的 DGLAP 方程也许可以解决因子化能标的问题。关于这部分的工作，仍在尝试当中。作为权宜之计，人们普遍的选择是令因子化能标等于重整化能标，$\mu_f = \mu_r$，然后变换一定倍数，如 $\mu_f \in [\mu_r/2, 2\mu_r]$，讨论不确定性。另一种常用选择是令 $\mu_f = Q$ 以便消去可能出现的大对数项。

在 QCD 因子化理论框架下，获得微扰表达式中的完整重整化能标和因子化能标的依赖项对于确定正确的重整化能标以及因子化能标非常重要，尤其是那些来自于 $\mu_f \neq \mu_r$(或者 $R \neq 1$) 的项有可能会对微扰论预言产生巨大影响。本小节将介绍如何得到完整重整化能标和因子化能标依赖项的方法。为此，可以按如下两步来进行。

第一步，在 $\mu_r = \mu_f$(或者 $R = 1$) 的条件下，通过微扰论计算得到 $\hat{\sigma}_{ij}(s, 1, 1)$，然后利用下式得到 $\hat{\sigma}_{ij}(s, M, 1)$

$$\hat{\sigma}_{ij}(s, M, 1) = \hat{\sigma}_{ij}(s, 1, 1) + \left(\frac{\partial}{\partial \ln \mu_f^2} \hat{\sigma}_{ij}(s, M, 1)\right)_{M=1} L_M$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2}{(\partial\ln\mu_f^2)^2}\hat{\sigma}_{ij}(s,M,1)\right)_{M=1}L_M^2+\cdots \tag{9.103}$$

这里 $L_M=\ln\mu_f^2\Big/Q^2$。上式中需要的随因子化能标变化的硬子过程微分截面 $\mu_f^2\mathrm{d}\hat{\sigma}_{ij}(s,M,1)/\mathrm{d}\mu_f^2$，可利用总强产生截面不依赖于因子化能标的假设而得到。为了简化描述，我们利用直积符号 $\otimes$ 将公式 (9.102) 改写为

$$\sigma_{H_1+H_2\to HX}=\sum_{i,j}f_{i/H_1}(x_1,\mu_f)\otimes\hat{\sigma}_{ij}(s,M,1)\otimes f_{i/H_2}(x_2,\mu_f) \tag{9.104}$$

要求总截面不依赖于因子化能标 μ_f，即要求

$$\mu_f^2\frac{\partial}{\partial\mu_f^2}\sigma_{H_1+H_2\to HX}\equiv 0 \tag{9.105}$$

利用 DGLAP 演化方程

$$\mu_f^2\frac{\partial}{\partial\mu_f^2}f_{i/H_1}(x_1,\mu_f)=a_s(\mu_f)\sum_j[P_{ij}\otimes f_{i/H_1}(x_1,\mu_f)] \tag{9.106}$$

可得到

$$\begin{aligned}0\equiv\sum_{i,j,k}f_{i/H_1}(x_1,\mu_f)\otimes\Big[&a_s(\mu_f)P_{ik}\otimes\hat{\sigma}_{kj}(s,M,1)+\mu_f^2\frac{\partial}{\partial\mu_f^2}\hat{\sigma}_{kj}(s,M,1)\\&+a_s(\mu_f)\hat{\sigma}_{ik}(s,M,1)\otimes P_{kj}\Big]\otimes f_{i/H_2}(x_2,\mu_f)\end{aligned} \tag{9.107}$$

其中 $a_s=\alpha_s/4\pi$，P_{ij} 为劈裂函数，目前它已被计算到三圈 QCD 修正项，

$$P_{ij}(Q)=\frac{a_s(Q)}{4}P_{ij}^{(0)}(Q)+\frac{a_s^2(Q)}{4^2}P_{ij}^{(1)}(Q)+\frac{a_s^3(Q)}{4^3}P_{ij}^{(2)}(Q)+\cdots \tag{9.108}$$

公式 (9.107) 对于任意 μ_f 都成立，因此方括号内的项应恒等于 0，由此得到公式 (9.103) 中所需要的子过程微分截面随因子化能标的 “演化方程”

$$\begin{aligned}\mu_f^2\frac{\partial}{\partial\mu_f^2}\hat{\sigma}_{ij}(s,M,1)&=\frac{\partial}{\partial\ln\mu_f^2}\hat{\sigma}_{ij}(s,M,1)\\&=-a_s(\mu_f)\sum_k[P_{ik}\otimes\hat{\sigma}_{kj}(s,M,1)+\hat{\sigma}_{ik}(s,M,1)\otimes P_{kj}]\end{aligned} \tag{9.109}$$

第二步，利用重整化群方程完成 $\hat{\sigma}_{ij}(s,M,1)$ 到 $\hat{\sigma}_{ij}(s,M,R)$ 的转换。这一步可以利用强耦合常数在两个能标 μ_f 和 μ_r 下的关系得到

$$a_s(\mu_f^2)=a_s(\mu_r^2)+\frac{\beta_0}{4}\ln\frac{\mu_r^2}{\mu_f^2}a_s^2(\mu_r^2)+\frac{1}{16}\left\{\beta_0^2\ln^2\frac{\mu_r^2}{\mu_f^2}+\beta_1\ln\frac{\mu_r^2}{\mu_f^2}\right\}a_s^3(\mu_r^2)+\mathcal{O}(a_s^4) \tag{9.110}$$

这里 $a_s = \alpha_s/\pi$。利用这个方程，可以首先得到劈裂函数完整的重整化能标和因子化能标依赖

$$P_{ij}(\mu_r,\mu_f) = \frac{a_s(\mu_r)}{4}P_{ij}^{(0)}(\mu_f) + \frac{a_s^2(\mu_r)}{4^2}\left[P_{ij}^{(1)}(\mu_f) - \beta_0 \ln\frac{\mu_f^2}{\mu_r^2}P_{ij}^{(0)}(\mu_f)\right] + \frac{a_s^3(\mu_r)}{4^3}\left[P_{ij}^{(2)}(\mu_f) + \beta_0^2 \ln\frac{\mu_f^2}{\mu_r^2}P_{ij}^{(0)}(\mu_f) - \beta_1 \ln\frac{\mu_f^2}{\mu_r^2}P_{ij}^{(0)}(\mu_f) - 2\beta_0 \ln\frac{\mu_f^2}{\mu_r^2}P_{ij}^{(1)}(\mu_f)\right] + \cdots \tag{9.111}$$

上述两个步骤具有普适性，可以推广到微扰任意阶的处理。在完成以上两个步骤后，我们就能得到包含完整的因子化能标和重整化能标依赖信息的 $\hat{\sigma}_{ij}(s,M,R)$。由此我们可进一步利用适当的重整化能标处理方案，如 PMC，设定过程中的重整化能标。一些初步的 PMC 应用实例表明，虽然因子化能标的设定问题需要额外的处理才能得到真正的解决，但是一旦设定好重整化能标之后，因子化能标的不确定性会相应减少。这也从一个侧面说明正确的重整化能标的重要性。

9.4 基于重整化群不变性的讨论

重整化群不变性为讨论重整化能标的设定问题提供了更为基础的平台。本节将基于拓展重整化群方程引入标准重整化群不变性以及局域重整化群不变性[12]，借助基于这两种不变性的 PMC 方案和 PMS 方案分析它们的异同。

拓展重整化群方程可用于同时描述强耦合常数随重整化能标以及随重整化方案的连续跑动行为，为获得不同能标以及不同方案下强耦合常数间的关联提供重要依据。任意重整化方案 (R) 下，拓展重整化群方程包含下述两部分

$$\beta(a,\{c_i^R\}) = \frac{\partial a}{\partial \tau_R} = -a^2\left[1 + a + c_2^R a^2 + c_3^R a^3 + \cdots\right] \tag{9.112}$$

$$\beta_n(a,\{c_i^R\}) = \frac{\partial a}{\partial c_n^R} = -\beta(a,\{c_i^R\})\int_0^a \frac{x^{n+2}\mathrm{d}x}{\beta^2(x,\{c_i^R\})} \tag{9.113}$$

注意到 β_0 和 β_1 与重整化方案无关，这里已重新定义强耦合常数

$$a(\tau_R,\{c_i^R\}) = \frac{\beta_1}{4\pi\beta_0}\alpha_s^R(\tau_R,\{c_i^R\})$$

其中

$$\tau_R = \frac{\beta_0^2}{\beta_1}\ln\mu_r^2|_R, \quad c_i^R = \beta_i^R\beta_0^{i-1}/\beta_1^i \quad (i=2,3,\cdots)$$

与能标跑动相关的方程 (9.112) 可确定强耦合常数随能标跑动行为，与方案相关的方程 (9.113) 可确定强耦合常数随方案连续变化时的行为。

重整化群不变性表明对物理量的理论预言不应依赖于理论计算中所引入的非物理的重整化方案以及重整化能标。 每个物理量可用一个有效耦合常数如 $a(\tau_R,\{c_i^R\})$ 来表示，它对任意方案下 (记作 S 方案) 的能标参数 τ_S 和方案参数 c_j^S 不应存在依赖性，形式上可写出如下方程组

$$\frac{\partial a(\tau_R,\{c_i^R\})}{\partial \tau_S}=0 \tag{9.114}$$

$$\frac{\partial a(\tau_R,\{c_i^R\})}{\partial c_j^S}=0 \tag{9.115}$$

其中 $j=2,3,4,\cdots$。

基于拓展重整化群方程可将不同重整化方案以及不同能标下的强耦合常数联系起来，R 方案下有效耦合常数 $a(\tau_R,\{c_i^R\})$ 可以按 S 方案下的有效耦合常数 $a(\tau_S,\{c_i^S\})$ 作微扰展开

$$\begin{aligned}a(\tau_R,\{c_i^R\})=&a(\tau_S,\{c_i^S\})+\left(\frac{\partial a}{\partial\tau}\right)_S\bar{\tau}+\sum_i\left(\frac{\partial a}{\partial c_i}\right)_S\bar{c}_i\\&+\frac{1}{2!}\left[\left(\frac{\partial^2 a}{\partial\tau^2}\right)_S\bar{\tau}^2+2\sum_i\left(\frac{\partial^2 a}{\partial\tau\partial c_i}\right)_S\bar{\tau}\bar{c}_i+\sum_{i,j}\left(\frac{\partial^2 a}{\partial c_i\partial c_j}\right)_S\bar{c}_i\bar{c}_j\right]\\&+\frac{1}{3!}\left[\left(\frac{\partial^3 a}{\partial\tau^3}\right)_S\bar{\tau}^3+\cdots\right]+\cdots\end{aligned} \tag{9.116}$$

借助公式 (9.112) 和 (9.113) 可完成 $a(\tau_R,\{c_i^R\})$ 对 τ_S 的一阶求导，化简可得

$$\frac{\partial a(\tau_R,\{c_i^R\})}{\partial\tau_S}=\frac{\partial^{(n+1)}a(\tau_S,\{c_i^S\})}{\partial\tau_S^{(n+1)}}\frac{\bar{\tau}^n}{n!}+\sum_i\frac{\partial^{(n+1)}a(\tau_S,\{c_i^S\})}{\partial c_i^S\partial\tau_S^{(n)}}\frac{\bar{\tau}^{n-1}\bar{c}_i}{(n-1)!}+\cdots \tag{9.117}$$

其中 $\bar{\tau}=\tau_R-\tau_S$，$\bar{c}_i=c_i^R-c_i^S$。n 表示微扰最高阶的幂次。当 $n\to\infty$ 时，由于各阶与重整化方案和重整化能标相关的系数之间的相互抵消作用，等式 (9.117) 右边将严格等于 0，$a(\tau_R,\{c_i^R\})$ 将与标度参数 τ_S 的选择无关。同理，还可求出 $a(\tau_R,\{c_i^R\})$ 关于方案 c_j^S 的一阶导数，当 $n\to\infty$ 时，同样可以证明 $a(\tau_R,\{c_i^R\})$ 的方案无关性。因此，当微扰阶数达到无穷阶大时，它对应于物理量的真实值，等式 (9.114) 和 (9.115) 严格成立，它们体现出的是严格重整化群不变性，我们称为标准重整化群不变性。

假设 $\bar{c}_i\equiv 0(i=1,2,\cdots)$，我们可以得到有效强耦合常数按照其自身在另一个能标下的微扰展开

$$a(\tau_R,\{c_i^R\})=a(\tau_S,\{c_i^R\})+\left(\frac{\partial a(\tau_S,\{c_i^R\})}{\partial\tau_S}\right)\bar{\tau}+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 a(\tau_S,\{c_i^R\})}{\partial\tau_S^2}\right)\bar{\tau}^2$$
$$+\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 a(\tau_S,\{c_i^R\})}{\partial\tau_S^3}\right)\bar{\tau}^3+\cdots \tag{9.118}$$

利用能标方程 (9.112) 可将等式右边写为 $a(\tau_S,\{c_i^R\})$ 微扰展开的形式，它的每一阶系数均为含 $\{\beta_i^R\}$ 项的序列。在有限阶情况下，如果可将 c_j^S 项 (或者 β_j^S 项) 吸收进有效耦合常数，就能获得准确的 $a(\tau_R,\{c_i^R\})$ 值，从而解决传统能标设定方法中存在的重整化方案和能标的不确定性。

这正是 PMC 方案的基本出发点：基于重整化群方程，将微扰级数中的非共形项吸收进强耦合常数中，确定出每一阶的最优跑动行为并据此确定出每一阶的最优能标。将所有 β 项吸收到强耦合常数中之后，微扰 QCD 级数将对应于 $\beta=0$ 的共形理论，从而避免了重整化方案的不确定性问题。PMC 方案满足基于标准重整化群不变性所推导出的对重整化能标设定方案的自洽性、自反性、对称性和传递性要求。PMC 方案不会破坏规范不变性，可消除传统能标设定方法中的重整化方案和重整化能标依赖性。取阿贝尔极限 $N_C\to 0$，QCD 中的 PMC 能标与 QED 的 Gell-Mann-Low 能标一致。另外，由于 β 项都已被消除，微扰级数中的重整化子项 $(n!\beta^n\alpha_s^n)$ 带来的发散效应也将被有效压低，从而更好地保证了微扰 QCD 理论计算结果的收敛性。

对于 PMC 方案来说，由于微扰 QCD 表达式中的 β 项与紫外发散的轻夸克圈项 (n_f 项) 紧密关联，因此将微扰论计算中所得到的 n_f 项转变为 β 项是 PMC 方案的关键所在。有两种方法可实现这种转换，一种是基于 PMC-BLM 对应原理，另一种是基于 R_δ 方案。两种转换方法获得的共形系数相同，两者获得的 PMC 能标差别也具有微扰论性质，已知 β 项越多，PMC 能标就越准确，两种方法所导致的 PMC 能标间的差别就会越小。两种转换方法具有原理上以及数值上的等价性，特别是它们具有相同的共形展开式。

任何的截断微扰级数会明显破坏标准重整化群不变性 (9.114) 和 (9.115)，即在有限阶情况下，公式 (9.117) 中存在的未抵消完全的高阶微扰项表明标准重整化群不变性只能近似成立。与 PMC 转而利用微扰表达式中的 β 项来确定重整化能标不同，PMS 仍然要求等式 (9.114) 和 (9.115) 成立。基于这种近似处理，可以获得物理量的有效预言，且对于能标和方案的变化保持稳定；但由于这种处理破坏了标准重整化群不变性，我们称为局域重整化群不变性。

PMS 从局域重整化群不变性出发，找到有限阶的微扰 QCD 预言随重整化方案和重整化能标变化的驻点，以驻点所对应的参数值作为最优方案和最优能标，以驻点所对应的函数值作为有限阶的预言。PMS 方案要求有限阶理论预言对重整化能标的偏导数等于 0，由此设定最优重整化能标。PMS 方案破坏了标准重整化群

的不变性，它不满足自反性、对称性和传递性。这导致 PMS 对观测量的理论预言依赖于如何选择作为传递的中间重整化方案，当我们用一个有效耦合常数去表达另一个有效耦合常数时，PMS 将导致不自洽的能标选择。由于 PMS 方案的目标是使理论预言相对于重整化方案和重整化能标保持稳定，诸多具体实例表明使用 PMS 方案后，理论预言的主要贡献都将集中到领头阶，高阶微扰项的贡献会变得很小，体现出与微扰表达式本身的内禀收敛性不同的 “诱发收敛性”。

作为对比，在图 9.7 中，我们给出 e^+e^-- 湮灭产生三喷注事例在单圈修正时的 PMC 能标和 PMS 能标。图中也给出了 FAC 能标的曲线，而 BLM 和 PMC 能标在单圈情况下完全相同。不同的重整化能标设定方案出发点不一样，所以结果有所不同。通常情况下，e^+e^--湮灭产生的束流被定义成不变质量小于 $\sqrt{ys}$ 的群聚粒子 (y 为标记能量分辨的参数，$\sqrt{s}$ 表示 e^+e^--质心对撞能量)。从物理上定性考虑，重整化能标大致正比于束流的不变质量，即 $\mu_r \sim \sqrt{ys}$。由此，当 $y \to 0$，重整化 μ_r 会逐渐减小。图 9.7 所示，FAC 能标和 PMS 能标，$\mu_r^{\rm FAC}$ 和 $\mu_r^{\rm PMS}$，随着 y 的增大而减小，而当 $y \to 0$ 时它们迅速增大，显示出发散特性。这表明 FAC 和 PMS 不能得到正确的物理行为，原因在于它们将与强耦合常数重整化无关的贡献也求和到了耦合常数中。当 $y \to 0$ 时，PMC 能标体现了正确的变化趋势。

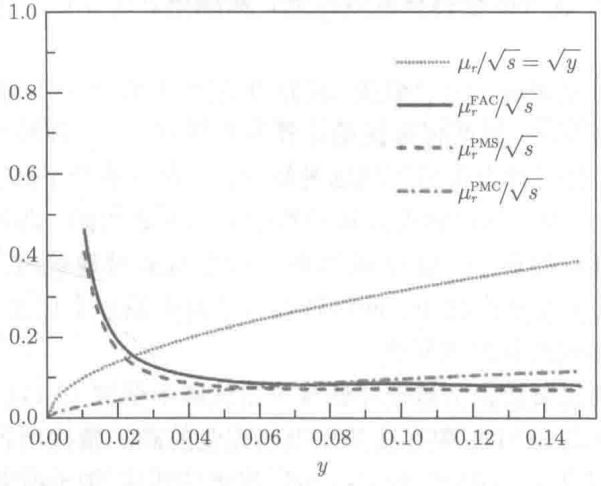


图 9.7　PMC 能标和 PMS 能标在单圈情况下的简单对比。e^+e^-- 湮灭产生三喷注事例，单圈能标 $\mu_r/\sqrt{s}$ 随 y 变化。图中也给出了 FAC 能标，而 BLM 和 PMC 的结果一致

9.5　PMC 应用举例

与其他几种重整化能标设定方案相比，PMC 基于重整化群方程，满足标准重

整化群不变性的基本性质。PMC 已被用于多个高能物理过程，本节将介绍 PMC 的几个典型应用实例。

9.5.1 正负电子湮灭比值 $R_{e^+e^-}(Q)$

正负电子湮灭过程因背景干净可提供验证微扰 QCD 理论的很好平台。$R_{e^+e^-}(Q)$ 的定义是

$$R_{e^+e^-}(Q)=\frac{\sigma\left(e^+e^-\to \text{强子}\right)}{\sigma\left(e^+e^-\to \mu^+\mu^-\right)}$$

Q 表示该 e^+e^- 的质心对撞能量。$R_{e^+e^-}(Q)$ 的微扰级数可以通过解析延拓 Adler 函数到类时区域得到

$$R_{e^+e^-}(s)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{-s-\mathrm{i}\varepsilon}^{-s+\mathrm{i}\varepsilon}\frac{D(Q^2)}{Q^2}\mathrm{d}Q^2 \tag{9.119}$$

这里 $D(Q^2)=\gamma(a)-\beta(a)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\Pi(Q^2,a)$，$a=\alpha_s/4\pi$，$\gamma$ 为矢量场反常量纲，Π 是真空极化函数。它们可以分别微扰展开成如下形式

$$\gamma(a)=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n a^n,\quad \Pi(Q^2,a)=\sum_{n=0}^{\infty}\Pi_n(Q^2)a^n \tag{9.120}$$

目前微扰系数 γ_i 和 Π_i，以及 β 函数在 $\overline{\text{MS}}$ 方案下均已被计算到 QCD 四圈。利用 γ_n 和 Π_n 可将 $R_{e^+e^-}(Q)$ 展开到 a^4 阶

$$\begin{aligned}R_{e^+e^-}(Q)=&\gamma_0+\gamma_1 a(Q)+\left[\gamma_2+\beta_0\Pi_1\right]a(Q)^2+\left[\gamma_3+\beta_1\Pi_1+2\beta_0\Pi_2-\beta_0^2\frac{\pi^2\gamma_1}{3}\right]a(Q)^3\\&+\Bigg[\gamma_4+\beta_2\Pi_1+2\beta_1\Pi_2+3\beta_0\Pi_3\\&-\frac{5}{2}\beta_0\beta_1\frac{\pi^2\gamma_1}{3}-\beta_0^2\pi^2\gamma_2-\beta_0^3\pi^2\Pi_1\Bigg]a(Q)^4+\mathcal{O}\left(a^5\right)\end{aligned} \tag{9.121}$$

对比 PMC 公式 (9.97)，可得到 $\{\beta_i\}$ 项的系数为

$$\begin{aligned}&r_{i,0}=\gamma_i(i\geqslant 1),\quad r_{i,1}=\Pi_{i-1}(i\geqslant 2),\\&r_{i,2}=-\frac{\pi^2}{3}\gamma_{i-2}(i\geqslant 3),\quad r_{i,3}=-\pi^2\Pi_{i-3}(i\geqslant 4)\end{aligned} \tag{9.122}$$

在维数正规化方案下，反常量纲 γ_i 也包含有 n_f 项，但是这些项与强耦合常数的重整化无关，所以在应用 PMC 方案时它们将保持不变。基于 PMC 方案，为得到准确的强耦合常数跑动行为，只有那些与强耦合常数重整化相关的项才需要吸收进强耦合常数。等式 (9.121) 中已设初始能标 $\mu_0=Q$；利用重整化群方程，我们可得到任意初始能标下的 $R_{e^+e^-}(Q,\mu_0)$。

数值计算中会用到 QCD 渐近参数 $\Lambda_{\overline{\rm MS}}$，它可由 $\alpha_s(M_Z) = 0.1185 \pm 0.0006$ 确定。作为自洽性要求，对精确到不同微扰阶的预言，需要引入相应的 QCD 渐近能标 $\Lambda_{\overline{\rm MS}}$，如对于 R_3，$\Lambda_{\overline{\rm MS}}^{n_f=5} = 214{\rm MeV}$。图 9.8 给出了在通常能标设定方案下，$R_n(Q,\mu_0)$ 随初始能标 μ_0 的变化情况，其中 $n_f = 5$ 和 $Q = 31.6{\rm GeV}$。这里已定义 $R_{e^+e^-}$ 的 $n+1$ 圈微扰修正

$$R_n(Q,\mu_0) = \sum_{i=0}^{n} C_i\,(Q,\mu_0)\,a_s^{i+1}\,(\mu_0)$$

其中 $C_i\,(Q,Q)$ 可由等式 (9.121) 读出，而后利用重整化群方程获得 $C_i\,(Q,\mu_0)$。图 9.8 表明，在通常能标设定方案下，R_n 随初始能标的变化会随着阶数的提高而逐渐减弱；当计算到四圈 QCD 修正效应时，R_n 随能标的变化基本上保持不变。

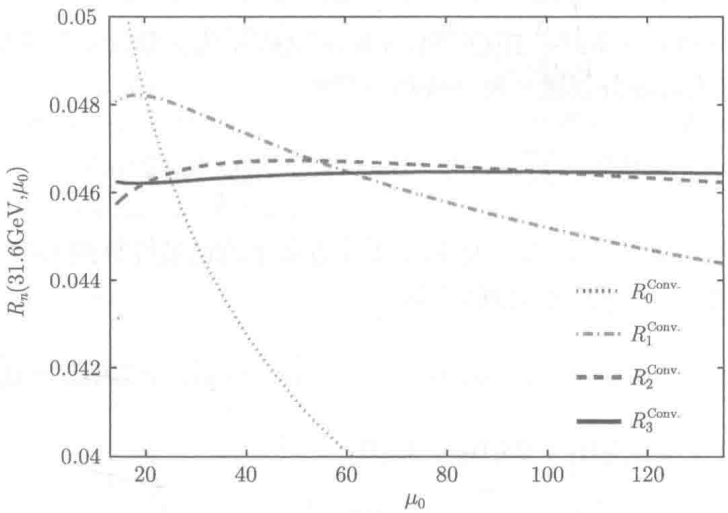


图 9.8　通常能标方案下的 $R_{n(n=0,1,2,3)}(31.6{\rm GeV},\mu_0)$ 随初始能标 μ_0 的变化

图 9.9 给出了 PMC 方案下的 $R_n(31.6{\rm GeV},\mu_0)$ 随初始能标 μ_0 的变化。除了 $R_0(31.6{\rm GeV},\mu_0)$ 没有高阶信息用于确定能标，图 9.9 表明 $R_{n\geqslant 1}(31.6{\rm GeV},\mu_0)$ 的 PMC 预言都与初始重整化能标无关，由高阶未知 β 项所导致的残留能标依赖性非常小，可以忽略。这说明，由于 PMC 可确定每阶强耦合常数的准确行为，也就获得了每阶微扰估算的准确值，从而解决了通常方案下的重整化能标的不确定性问题。当然，微扰表达式中最后一阶的重整化能标无法确定还会导致另一类残留能标的依赖性。如果微扰序列的收敛性增强，这一类的不确定性也会极大地降低，而这也是 PMC 的重要性质，因为 PMC 可将具有发散性质的重整化子项消除从而提高微扰的收敛性。

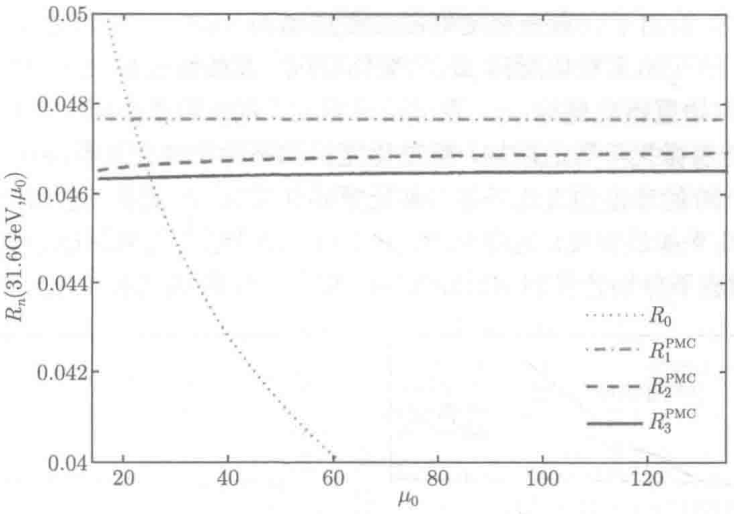


图 9.9 PMC 方案下的 $R_{n(n=0,1,2,3)}(31.6\text{GeV},\mu_0)$ 随初始能标 μ_0 的变化

9.5.2 Z^0 玻色子衰变到强子的高阶微扰修正

Z^0 玻色子衰变到强子的过程对于标准模型的精确检验以及确定强耦合常数在 M_Z 处的数值都非常重要。它的衰变宽度可表示如下：

$$\Gamma_Z = C\left[\sum_f v_f^2 r_{\text{NS}}^V + \left(\sum_f v_f\right)^2 r_S^V + \sum_f a_f^2 r_{\text{NS}}^A + r_S^A\right] \tag{9.123}$$

其中全局因子

$$C = 3\frac{G_F M_Z^3}{24\pi\sqrt{2}} \tag{9.124}$$

公式 (9.123) 中，$v_f \equiv 2I_f - 4q_f s_W^2$，$a_f \equiv 2I_f$，$q_f$ 表示 f 夸克的带电量，s_W 表示电弱混合角，I_f 代表 f 夸克左手分量弱同位旋的第三分量。$r_{\text{NS}}^V = r_{\text{NS}}^A \equiv r_{\text{NS}}$ 表示非单态部分的贡献，r_S^V 表示矢量单态部分的贡献，r_S^A 表示轴矢单态部分的贡献。各部分贡献的表达式如下：

$$r_{\text{NS}} = 1 + \sum_{i=1}^{n} C_i^{\text{NS}} a_s^i(\mu_r), \quad r_S^V = \sum_{i=3}^{n} C_i^{\text{VS}} a_s^i(\mu_r), \quad r_S^A = \sum_{i=2}^{n} C_i^{\text{AS}} a_s^i(\mu_r) \tag{9.125}$$

$a_s = \alpha_s/\pi$。r_{NS}、r_S^V 和 r_S^A 的各阶微扰系数已被计算到 QCD 四圈，它们对初始重整化能标的依赖可利用重整化群方程获得。

Z^0 玻色子强衰变中的每一部分物理的贡献有着不同的动量转移，作为严格处理，需要对 r_{NS}、r_S^V 和 r_S^A 分别设定重整化能标。下面以占主导贡献的非单态 r_{NS} 为例，讨论使用 PMC 方案后强衰变的性质。

图 9.10 中给出了在衰变宽度中占主要贡献的 $r_{\rm NS}$ 在传统能标设定方案下和 PMC 方案下随初始重整化能标 μ_r 的变化情况。在传统能标设定方案下，重整化能标恒等于初始重整化能标 μ_r，在低阶计算时，$r_{\rm NS}$ 的理论预言对重整化能标依赖性很大；随着微扰阶数的增加，重整化能标的不确定性会逐渐减小。采用 PMC 方案后，每一阶的理论预言几乎都与初始重整化能标 μ_r 无关，它们随初始重整化能标的变化几乎都是直线。运用 PMC 方案后，理论预言可更快地趋于稳定的中心值，例如，对应于分别计算到 NLO，N^{2}LO 和 N^{3}LO 阶的三条曲线几乎完全重合。

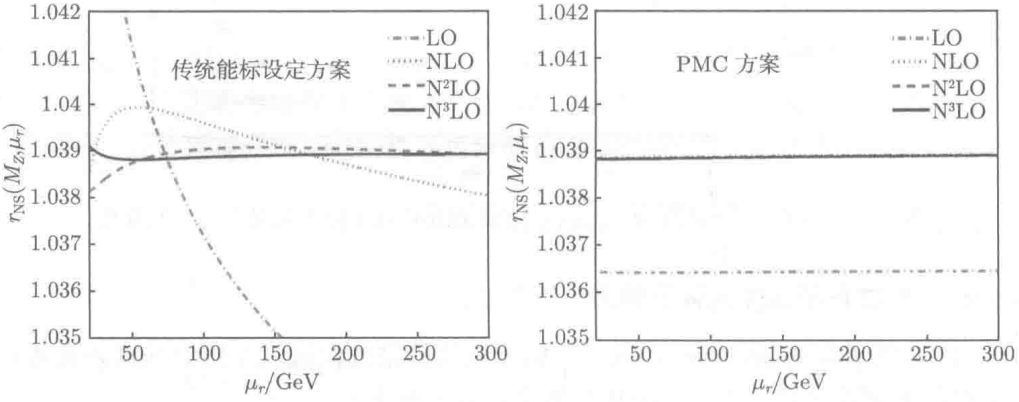


图 9.10　直到四圈微扰 QCD 精度下，在传统能标设定方案和 PMC 方案下的非单态 $r_{\rm NS}$ 随重整化能标 μ_r 的变化情况[13]

表 9.1 中，我们给出了 QCD 四圈修正下的 $r_{\rm NS}\left(=1+\sum_i R_i^{\rm NS}\right)$ 中每一微扰阶项的贡献。表 9.1 表明 PMC 方案获得了更好的级数收敛行为。在 QCD 四圈修正水平上，$r_{\rm NS}$ 的结果几乎是一致的，但各阶的结果有很大的不同，PMC 预言的最后两阶的贡献非常小。例如，在传统方案下 N^{3}LO 项的贡献为 -0.00016，由此引起耦合常数 $\alpha_s(M_Z)$ 的中心值从 0.1185 变化到 0.1190；PMC 方案下，N^{3}LO 项的贡献仅为 -0.00001，它对 $\alpha_s(M_Z)$ 的影响几乎可忽略不计。

表 9.1　非单态 $r_{\rm NS}=1+\sum_i R_i^{\rm NS}$ 在传统能标设定方案 (Conv.) 和 PMC 方案 (PMC) 下各微扰阶项的相对贡献大小。$R_i^{\rm NS}=C_i^{\rm NS}a_s^i$，$i=(1,\cdots,4)$ 分别表示 LO、NLO、N^{2}LO 和 N^{3}LO 各阶的贡献，重整化能标 $\mu_r=M_Z$

	$R_1^{\rm NS}$	$R_2^{\rm NS}$	$R_3^{\rm NS}$	$R_4^{\rm NS}$	$\sum_{i=1}^{4} R_i^{\rm NS}$
Conv.	0.03769	0.00200	−0.00069	−0.00016	0.03884
PMC	0.03636	0.00252	−0.00003	−0.00001	0.03885

在传统能标设定方案中，通常设定能标 $\mu_r^{\rm init}\in[M_Z/2,2M_Z]$ 来估算未知高阶

项的贡献大小。这种简单变化只能揭示微扰级数中与强耦合常数相关部分的非共形 β 项的贡献，但由于它不能估算完整高阶微扰系数的贡献，因此当微扰系数中的共形系数很大时或微扰序列中的微扰收敛性不好时，就会得到不恰当的估算结果。而采用 PMC 方案设定 PMC 能标之后，可得到共形展开级数。这时，若采用简单变化 PMC 能标的方法来估算高阶项的贡献，会直接破坏微扰级数的共形特性，也会导致不恰当的预言。下面将采用另一种方法来估算未知高阶项的大小，它同时也可作为重整化能标设定好之后，残留重整化能标误差的近似估算方法。

这种方法将最后一阶的贡献作为所有未知高阶项的估算值，例如，当计算到 n 阶时，不确定性估计为 $\pm|C_n^{\rm NS}a_s^n|_{\rm MAX}$。其中 "MAX" 表示变化重整化能标 $\mu_r^{\rm init}$ 在 $[M_Z/2, 2M_Z]$ 区间时，最高阶项 $C_n^{\rm NS}a_s^n$ 能取到的最大值。在图 9.11 中，我们给出了 $r_{\rm NS}^{(n)}$ 的大小，以及 $r_{\rm NS}^{(n)}$ 随着微扰阶数增加估算的未知高阶项贡献的变化情况。采用传统能标设定方案或 PMC 方案，我们可获得自洽的未知高阶贡献预言，即 "未知" 高阶项 $r_{\rm NS}^{(n)}(n=3$ 和 $4)$ 都位于由已知低阶 $r_{\rm NS}^{(n-1)}$ 所预言的高阶项贡献的宽带中。图 9.11 还表明，由于微扰收敛性的提高，PMC 方案预言的高阶修正贡献会迅速减小且更快趋向稳定值。

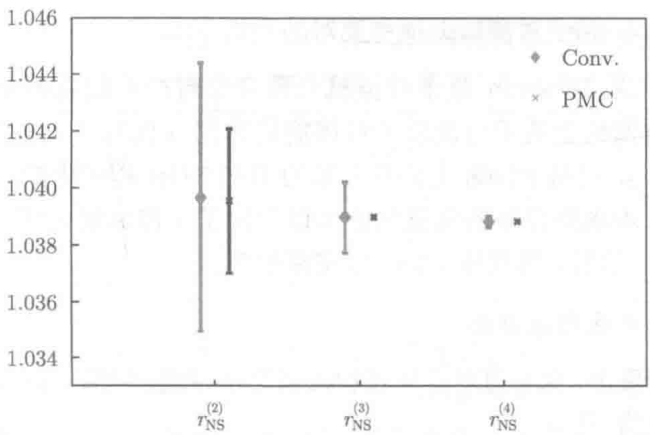


图 9.11 $r_{\rm NS}^{(n)}=1+\sum\limits_{i=1}^{n}C_i^{\rm NS}a_s^i$ 值的大小和 $r_{\rm NS}^{(n)}$ 的不确定性 $\pm|C_n^{\rm NS}a_s^n|_{\rm MAX}$[14]。这里我们取重整化能标的中心值为 $\mu_r^{\rm init}=M_Z$

对于N^{n}LO阶近似结果R_n，可按同样思路估算未知高阶项的贡献，$\pm|\mathcal{C}_n a_s^{n+1}|_{\rm MAX}$，它的最大值为初始能标在 $[1/2Q, 2Q]$ 范围内的最大值。图 9.12 分别给出了在传统能标设定方案、PMC 和 PMS 方案下的估算值。图 9.12 表明 PMC 方案和 PMS 方案都可给出比同一阶的传统能标设定方案更小的宽带范围，说明它们的结果更加精确。PMC 和 PMS 方案的宽带值随着阶数的升高会很快减小，表明 PMC 方案和 PMS 方案可提高 pQCD 微扰的收敛性，由此获得更小的高阶贡献，保证 pQCD

理论预言在有限阶下的高精度。图 9.12 表明，PMS 方案和 PMC 方案相比，它在低阶存在一些问题，如计算出来的 N^{2}LO 阶贡献及宽带并不在利用 NLO 阶估算的 N^{2}LO 阶及其宽带之内。

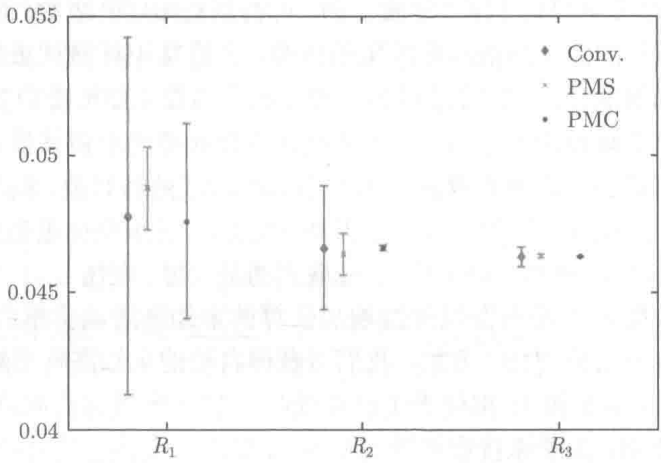


图 9.12　传统能标设定方案、PMC 及 PMS 方案下估算的高阶贡献 $\pm|\mathcal{C}_n a_s^{n+1}|_{\rm MAX}$

9.5.3　Tevatron 强子对撞机上顶夸克对的产生

本小节将讨论 Tevatron 强子对撞机上顶夸克对产生的总截面和正反不对称性。Tevatron 对撞机上质子与反质子对撞能量达到 1.96TeV。顶夸克对产生的示意图类似于图 9.6，可基于国际上公开发布的 HATHOR 程序中的直到 N^{2}LO 阶的解析表达式进一步求得完整的重整化能标以及因子化能标表达式，其处理过程与 9.3.4 节 3. 类似。然后，再利用 PMC 方案来处理。

1. 顶夸克对产生的总截面

在 N^{2}LO 精度下，顶夸克对产生过程的所有产生道，包括 $(q\bar{q})$、(gq)、$(g\bar{q})$、(gg) 产生道的总截面为[15]

$$\sigma_{\rm Total}|_{\rm Conv.} = 7.42^{+0.25}_{-0.29}\ {\rm pb} \tag{9.126}$$

$$\sigma_{\rm Total}|_{\rm PMC} \simeq 7.55\ {\rm pb} \tag{9.127}$$

在误差范围内，两者都与 Tevatron 对撞机上的 CDF 实验组和 D0 实验组的测量值吻合，最近由 CDF 实验组和 D0 实验组联合测量的值为 7.60 ± 0.41 pb。传统能标设定方案下，误差来源于初始能标 $\mu_r \in [m_t/2, 2m_t]$。考虑 N^{2}LO QCD 修正后，传统能标设定方法下给出的理论预言对初始能标的依赖也很小，约为 3% ~ 4%；但若设 $\mu_r = 0m_t$，误差仍将达到 15%。而 PMC 预言的总截面几乎不随初始能标的变化而改变，即使取 $\mu_r \in [m_t/4, 10m_t]$，误差也小于千分之一。

采用传统的能标设定方法，利用猜测的能标，也许会碰巧得到与实验一致且误差较小的预言。但这依赖于所有阶误差的相互抵消效应，采用猜测的能标并不能获得每一阶的准确值。仔细分析每一道每一微扰阶的贡献，就会发现，在传统的能标设定方法下，各个产生道各阶贡献的能标依赖依然很大。表 9.2 中，我们给出了 Tevatron 上对顶夸克对产生占主要贡献的 $(q\bar{q})$ 产生道的各微扰阶贡献。为了更清晰地展示 $(q\bar{q})$ 产生道截面 $\sigma^i_{q\bar{q}}$ 各阶的能标依赖，可定义比值

$$\kappa_i = \frac{\sigma^i_{q\bar{q}}|_{\mu_r=m_t/2} - \sigma^i_{q\bar{q}}|_{\mu_r=2m_t}}{\sigma^i_{q\bar{q}}|_{\mu_r=m_t}} \tag{9.128}$$

其中 $i = \mathrm{LO}, \mathrm{NLO}, \mathrm{N^2LO}$。运用传统能标设定方案，我们得到

$$\kappa_{\mathrm{LO}} = 39\%, \quad \kappa_{\mathrm{NLO}} = -138\%, \quad \kappa_{\mathrm{N^2LO}} = -36\% \tag{9.129}$$

这些结果表明，如果采用传统的能标设定方法，每一阶对初始能标的依赖仍然很大。比如 NLO 阶截面 $\sigma^{\mathrm{NLO}}_{q\bar{q}}$ 的能标不确定性达到了 -138%。而运用 PMC 能标设定方法后，可得 $\kappa_i < 0.1\%$，这 PMC 不仅仅消除的是总截面能标误差，而且它也消除了每一阶的能标依赖。

表 9.2 $(q\bar{q})$ 产生道的截面 (单位：pb) 各个微扰阶的贡献大小。这里分别给出了运用传统能标设定方案 (Conv.) 和 PMC 方案 (PMC) 的结果[15]

	Conv.			PMC
μ_r	$m_t/2$	m_t	$2m_t$	$[m_t/2, 2m_t]$
$\sigma^{\mathrm{LO}}_{q\bar{q}}$	5.99	4.90	4.09	$\simeq 4.76$
$\sigma^{\mathrm{NLO}}_{q\bar{q}}$	0.09	0.96	1.41	$\simeq 1.73$
$\sigma^{\mathrm{N^2LO}}_{q\bar{q}}$	0.45	0.48	0.63	$\simeq -0.06$

在上面的计算中，我们取因子化能标等于重整化能标，即 $\mu_f = \mu_r$。因子化能标的设定与重整化能标的设定不同。即便在共形理论中，因子化能标依然存在。虽然目前还没有因子化能标的解决方案，但是我们发现在采用 PMC 方案设定好重整化能标之后，因子化能标的依赖也会相应减小。而在传统能标设定方法中，简单设定 $\mu_r = m_t$ 以消除对数项 $\ln^k \mu_r^2/m_t^2$ 也是有问题的，因为它可能会导致很大的因子化能标依赖。

2. 顶夸克对产生的前后不对称性

因为实验数据与最初 NLO 阶的微扰 QCD 理论预言不一致，$\bar{p}p \to t\bar{t}X$ 对撞过程中顶夸克对产生的前后不对称性曾是人们探讨新物理效应的重要过程。人们最近几年的研究进展表明，在 $\mathrm{N^2LO}$ 的情况下，实验测量值可以由 QCD 理论得到很好的解释，而不再需要引入新物理效应。

顶夸克对的前后不对称性源自于对 $(q\bar{q})$ 产生道有贡献的振幅间的干涉效应。在领头阶的情况下，顶夸克对的分布完全对称，不对称性的贡献仅从 NLO 阶才开始，这导致两点：① 不对称性是次领头阶效应，所以其量值不大，量级大致在 10%左右；② 准确的 NLO 阶的估算值对于准确预言顶夸克对的不对称性极其重要。由于存在显著的能标依赖 ($\kappa_{\rm NLO} = -138\%$)，采用传统能标设定方案得到的 NLO 阶预言并不可靠。另外，在传统能标设定方案下，随着 μ_r 增大，$\sigma_{q\bar{q}}^{\rm NLO}$ 增大而 $\sigma_{q\bar{q}}^{\rm Total}$ 减小；因此，为了得到与测量的总截面相等的理论预言，传统能标设定方案需要一个更小的初始能标，例如 $\mu_r = m_t/2$，但这又会导致一个更小的 $t\bar{t}$ 不对称性。这就解释了为什么之前的 NLO 理论预言无法同时解释顶夸克对产生的总截面和前后不对称性。

值得注意的是，$(q\bar{q})$ 产生道所确定出来的 NLO PMC 能标 $\mu_r^{\rm PMC,NLO}$ 小于 m_t。这主要是由 α_s^4 阶的非库仑 n_f 项造成的，如图 9.13 所示。在这些截断图中，虚胶子的动量允许有一个大范围虚度。NLO PMC 能标的数值较小，小于通常认为的典型动量流动 m_t，这主要是因为两个胶子分担了动量流动，因此它反应的是虚胶子的不同动量流的权重平均。基于 PMC 能标所获得的 PMC NLO 阶的 $(q\bar{q})$ 产生截面是传统能标设定方案预言值的两倍，同时由于收敛性的增强，理论预言的 $A_{\rm FB}$ 精度也因此而提高。

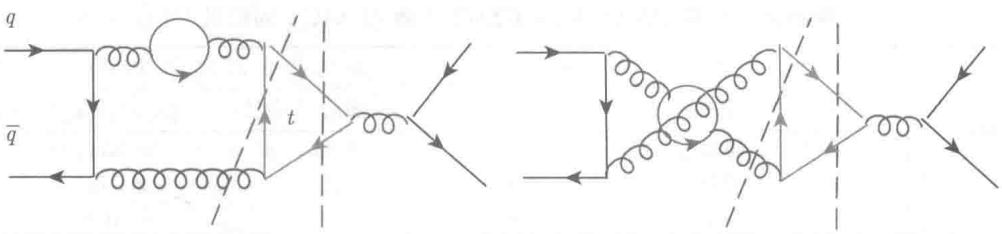


图 9.13　在 α_s^4 阶，对 $(q\bar{q})$ 产生道有主要贡献的截断图[6]。实线圆圈表示轻夸克圈

利用 PMC 方案之后，对于$(q\bar{q})$产生道，N^{2}LO 项和 NLO 项的比值$|\sigma_{q\bar{q}}^{\rm N^2LO}/\sigma_{q\bar{q}}^{\rm NLO}|$将从 $\sim 50\%$ 减小到 $\sim 4\%$。这表明利用 PMC 方案之后，微扰 QCD 级数的收敛性得到了极大的改善。微扰收敛性的改善对于得到 $t\bar{t}$ 不对称性的准确预言有很大帮助。如果再考虑 $\mathcal{O}(\alpha_s^2\alpha)$ 和 $\mathcal{O}(\alpha^2)$ 电弱修正的贡献，我们可得到一个准确的标准模型 “NLO- 不对称性” 预言

$$A_{\rm FB}^{\rm PMC} = \frac{\alpha_s^3 N_1 + \alpha_s^2\alpha\tilde{N}_1 + \alpha^2\tilde{N}_0}{\alpha_s^2 D_0 + \alpha_s^3 D_1} \tag{9.130}$$

D_i 项表示总截面中各阶的贡献，N_i 项为对应的不对称项的贡献。$\tilde{N}_1$ 项对应于 $\mathcal{O}(\alpha_s^2\alpha)$ 阶的 QCD-QED 干涉项贡献，$\tilde{N}_0$ 项代表源自于 $|M_{q\bar{q}\to\gamma\to t\bar{t}} + M_{q\bar{q}\to Z^0\to t\bar{t}}|^2$ 的 $\mathcal{O}(\alpha^2)$ 的纯电弱不对称性。运用等式 (9.130)，我们可得到不依赖能标选择的理

论预言，$A_{\rm FB}^{\rm PMC}=9.2\%$。这个结果在误差范围内，与 D0 实验组的测量值 $A_{\rm FB}^{\rm D0}=(10.6\pm3.0)\%$ 和 $A_{\rm FB}^{\rm D0}=(11.8\pm2.5\pm1.3)\%$ 一致。

利用 PMC 方案，我们可进一步获得顶夸克对不对称性 $A_{\rm FB}(M_{t\bar{t}}>M_{\rm cut})$ 随顶夸克对不变质量的下限 $M_{\rm cut}$ 变化的规律。表 9.3 给出了在几个典型下限 $M_{\rm cut}$ 的情况下，传统能标设定方案和 PMC 方案下的 $A_{\rm FB}(M_{t\bar{t}}>M_{\rm cut})$。当 $M_{\rm cut}=450{\rm GeV}$ 时，传统方法预言的不对称性为 $A_{\rm FB}(M_{t\bar{t}}>450{\rm GeV})|_{\rm Conv.}=13\%$，这个值远小于 CDF 实验组的测量值 $(47.5\pm11.4)\%$ 和 $(29.5\pm5.8\pm3.3)\%$；但是，利用 PMC 方案之后，可获得在实验误差内的值，$A_{\rm FB}(M_{t\bar{t}}>450{\rm GeV})|_{\rm PMC}=30\%$。

表 9.3 传统能标设定方案 (Conv.) 和 PMC 方案 (PMC) 下的 $A_{\rm FB}(M_{t\bar{t}}>M_{\rm cut})$。这里考虑了 $M_{\rm cut}$ 几个不同的典型值[16]，初始能标取为 $\mu_r=m_t$

	$M_{\rm cut}$/GeV					
$A_{\rm FB}(M_{t\bar{t}}>M_{\rm cut})$	400	450	500	600	700	800
Conv.	11%	13%	15%	18%	21%	23%
PMC	17%	30%	44%	38%	31%	30%

D0 实验组 2014 年的测量结果发现 $A_{\rm FB}(M_{t\bar{t}}>M_{\rm cut})$ 随着 $M_{\rm cut}$ 增加而呈现出先增后减的非单调行为。表 9.3 表明，在传统能标设定方案下，$A_{\rm FB}(M_{t\bar{t}}>M_{\rm cut})$ 却呈现出随 $M_{\rm cut}$ 增加而增加的单调递增行为。而若采用 PMC 方案，可以得到与 D0 实验组相同的变化趋势，即 $A_{\rm FB}(M_{t\bar{t}}>M_{\rm cut})$ 会随着 $M_{\rm cut}$ 增加而先增大再减小。图 9.14 给出了运用传统能标设定方案和 PMC 方案下的理论预言与 CDF 和 D0 实验组测量值的对比，可将这种趋势的差别看得更清楚。PMC 预言可以理解为有效耦合常数 $\bar{\alpha}_s(\bar{\mu}_r^{\rm PMC})$ 的行为，这里 $\bar{\alpha}_s(\bar{\mu}_r^{\rm PMC})$ 是 $(q\bar{q})$ 产生道中跑动耦合的权重平均，它决定了顶夸克对不对称性的大小。有效耦合常数 $\bar{\alpha}_s(\bar{\mu}_r^{\rm PMC})$ 依赖于运动学，它的非单调行为导致了 $A_{\rm FB}(M_{t\bar{t}}>M_{\rm cut})$ 的 “增大–减小” 行为。

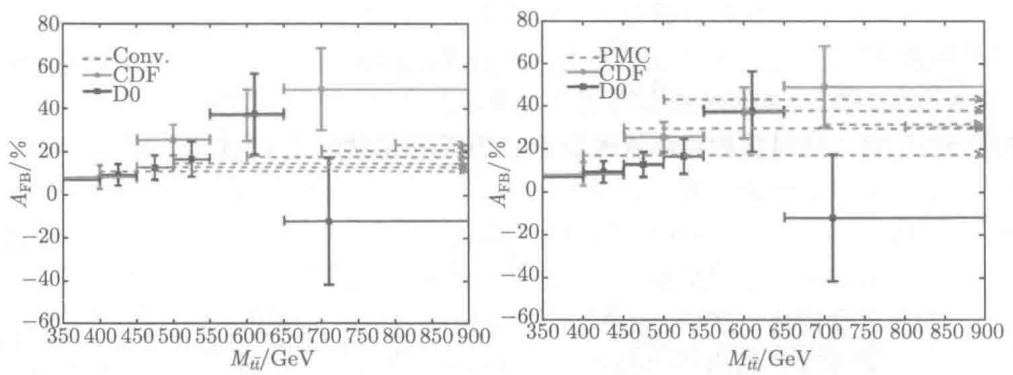


图 9.14 标准模型预言的 $A_{\rm FB}$ 与 CDF 实验组和 D0 实验组的测量值[13]，其中标准模型理论预言分别采用了传统能标设定方法 (Conv.) 和 PMC 方案。初始重整化能标 $\mu_r=m_t$

上述处理和讨论也可应用于大型强子对撞机 LHC 实验，文献 [16] 表明 PMC 预言与 ATLAS 实验组和 CMS 实验组的数据吻合。这说明，恰当的重整化能标可以自洽地解释 Tevatron 和 LHC 上顶夸克对不对称性的测量值。

9.5.4　重夸克和轻子的角分布

PMC 方案也可应用于涉及多个物理能标或多个典型能标的高能物理过程。Tevatron 或 LHC 上的顶夸克对强产生已经提供了一个这样的例子。对于顶夸克对强产生的两圈 QCD 修正下的硬子过程部分，我们实际需要设定两类 PMC 能标。与 9.5.3 节在通常高能区域内的处理不同，在顶夸克对产生的阈值附近，库仑类型的修正会带来 π 因子增强项 ——(π/v) 项和 $(\pi/v)^2$ 项。当 $v \to 0$ 时，这些项属于软的贡献，它们的强耦合常数行为与硬过程部分强耦合常数的行为不同。因此，这些项需要分开处理，由此需额外引入 PMC 能标。

重夸克和轻子在阈值处的角分布提供了另一个 PMC 应用实例。在重夸克阈值附近，子过程 $q\bar{q} \to Q\bar{Q}$ 不仅涉及常见的硬子过程能标，$\sqrt{\hat{s}} \sim 2M_Q$，还涉及 Sudakov 末态修正中的软能标，$v\sqrt{\hat{s}}$，其中 v 是重夸克–反重夸克间的相对运动速度。因此，在单圈修正的情况下，也需要设定两个 PMC 能标，一个是硬子过程的能标，另一个是库仑项的能标。类似的重夸克对产生的高能物理过程，也存在于正负电子对撞过程或双光子对撞过程，它们可通过超级 τ- 粲工厂等高亮度和高能的正负电子对撞机进行研究。

重夸克运动学中的一个重要运动学效应是沿重夸克运动方向产生重强子。靠近阈值区域，$v \to 0$，S 波态的贡献是主要的，$e^+e^- \to Q\bar{Q}$ 在质心系下的角分布呈现各向同性特性。略大于阈值时，P 波态将会导致额外的正比于 $v^2\cos\theta$ 的角分布。因此，实验上可以通过测量角分布来验证这些机制，并获得这些机制的更准确的内容。可定义函数 $A(v^2)$ 来显示各向异性的程度

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\cos\theta} \propto 1 + A(v^2)\cos^2\theta \tag{9.131}$$

函数 $A(v^2)$ 可以通过狄拉克形状因子 (F_1) 和泡利形状因子 (F_2) 来表示

$$A = \frac{\tilde{A}}{1-\tilde{A}} \tag{9.132}$$

其中，$\tilde{A} = \dfrac{v^2}{2}\dfrac{|F_1|^2(1-\beta^2) - |F_2|^2}{|F_1+F_2|^2(1-\beta^2)}$，$\beta = \sqrt{1-4m_Q^2/s}$。PMC 方案可以在 QED 极限下用于 QED 修正的处理，形状因子 $F_{1,2}$ 的 QED 修正已被计算到了两圈，因此我们可以利用 PMC 方案设定其 QED 修正所对应的重整化能标

$$F_1+F_2=1+\frac{\pi\alpha(v\sqrt{\hat{s}})}{4v}-2\frac{\alpha(\sqrt{\hat{s}}\mathrm{e}^{3/8}/2)}{\pi}\simeq\left(1-2\frac{\alpha(\sqrt{\hat{s}}\mathrm{e}^{3/8}/2)}{\pi}\right)\left(1+\frac{\pi\alpha(\sqrt{\hat{s}}v)}{4v}\right) \tag{9.133}$$

等式 (9.133) 有两个明显不同的修正因子: 第一个来自于硬光子交换，其中的能标反映短程过程的典型能标；第二个源自于瞬时库仑势。运用索末菲重散射公式，可将所有 $1/v$ 项重求和起来。由此公式 (9.133) 可进一步写为

$$|F_1+F_2|^2\simeq\left(1-4\frac{\alpha(\sqrt{\hat{s}}\mathrm{e}^{3/8}/2)}{\pi}\right)\frac{x}{1-\mathrm{e}^{-x}} \tag{9.134}$$

其中 $x=\pi\alpha(\sqrt{\hat{s}}v)/v$。在阈值区域，可以取 $\hat{s}\simeq 4m_Q^2$。

通过相同的处理，可以分别得出 $|F_1|^2$、$|F_2|^2$ 和 $|F_1+F_2|^2$，由此可得到对各向异性函数 A 的精确预言。

我们可通过类似的方法，研究 $e^+e^-\to\tau^+\tau^-$ 产生道中 τ 轻子对的各向异性，由此获知 τ 轻子对在阈值区域 $\hat{s}\geqslant 4m_\tau^2$ 的泡利形状因子 $F_2(\hat{s})$。对各向异性因子 A 的精确测量提供了对 τ 轻子基本参数和类时的反常磁矩的测量的一种新方法。

以下对本章内容作一简要小结。

基于标准重整化群不变性，任何物理量的真实值都不应依赖于微扰论计算中所用到的人为引入的、非物理的重整化方案和重整化能标。标准重整化群不变性只有对无穷阶的微扰论预言才严格成立。在实际应用中，由于计算能力的限制，特别是费曼图数量随阶数的增加而快速增加以及多体相空间的复杂性，我们很难将微扰论计算进行到无穷阶。有限阶的理论预言，在传统能标设定方案下，存在着重整化方案和重整化能标的不确定性。在传统能标设定方案下，重整化能标只是简单地被设定为物理过程中的典型动量转移 (Q)，而后将其在一定范围内变化，如 $\mu_r\in[Q/2,\,2Q]$，来估计理论误差。这种 "猜测式" 的处理给微扰 QCD 理论引入了不必要的系统误差，在 QED 极限下，甚至也会得出错误结论。

如图 9.15 所示，由于强耦合常数在微扰区域内小于 1，随着计算阶数的增加，人们希望传统能标设定方案所导致的重整化能标误差会逐渐减小。图 9.8 和图 9.10 给出的两个四圈 QCD 修正实例也体现出了这种逐渐减小的趋势，而且在达到 QCD 四圈修正时总宽度或总截面基本上已对重整化能标选择的依赖非常小。然而，微扰 QCD 级数中的形如 $n!\beta_0^n\alpha_s^n$ 的重整化子发散项会导致大的 K 因子出现，从而破坏微扰收敛性。另外，采用传统能标设定方案，在重整化子发散项存在压低的情况下，也许会得到与实验一致且能标误差较小的预言。但这种小的误差常常是由所有已有微扰阶误差的相互抵消效应造成的，采用猜测能标并不能获得每一微扰阶的准确值。事实上，若仔细分析每一微扰阶的贡献，就会发现，在传统能标设定方法下，各微扰阶自身的能标不确定性非常大，而且与算到的微扰阶数高低无关。表

9.2 表明强子对撞机上 $(q\bar{q})$ 产生道的截面值在 $\mu_r \in [m_t/2, 2m_t]$ 区域内，不同阶的误差达到 $\sim 40\%$ 或 $\sim 140\%$。对于依赖于各微扰阶准确值的物理量来说，传统能标设定方案会导致错误的预言。例如，准确的 $(q\bar{q})$ 产生道的 NLO 阶估算值可以解决早期的强子对撞机上顶夸克对前后不对称性的疑难问题。通常我们采用 $\overline{\text{MS}}$ 方案来完成微扰论计算，若采用其他方案，结果又会有所不同；而采用猜测的能标也无法解决有限阶理论预言对重整化方案的依赖问题。特别是对于强子对撞过程，我们的计算能力还非常有限，大多数过程只计算到了单圈阶，少数过程能到两圈阶，极少数过程在取特殊极限时能算到更高阶。因此，如何在有限低阶下获得准确预言是 QCD 理论的重要课题。准确的 QCD 预言也为人们寻找超出标准模型的新物理现象奠定了坚实基础。为此，寻找可消除传统重整化能标以及重整化方案不确定性的能标设定方案就显得极为重要。

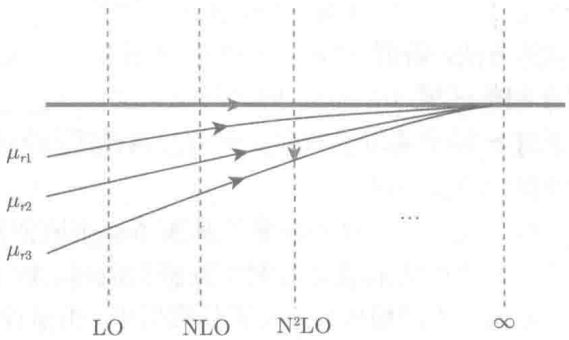


图 9.15　微扰 QCD 理论示意图，粗实线表明物理量的真实值，细实线表明不同的重整化能标所对应的微扰论预言。随着微扰阶数的增加，理论预言将越来越靠近物理量的真实值

一个自洽的重整化能标设定方案需满足标准重整化群不变性所导致的一些基本性质，如自反性、对称性和传递性。特别是基于传递性，我们可推导出不同有效强耦合常数间的自洽能标关系，从而在固定阶下获得与重整化方案无关的理论预言。这也正是早期 BLM 能标设定方案能获得众多关注的重要原因。在 9.2 节中，我们通过引入耦合常数满足的拓展重整化群方程对这些基本性质作了简要说明。拓展重整化群方程还有一个重要特性，它可同时获得强耦合常数随能标连续跑动和方案连续跑动的行为，这为我们确定不同能标以及不同方案下强耦合常数间的准确关联提供了很好的理论基础。

在 9.3 节中，我们介绍了几种典型的重整化能标设定方案，即 FAC、BLM、PMS 和 PMC，讨论了它们的基本性质以及它们的基本实现步骤。总体上，由于目的不同，不同能标设定方案有着极不相同的特性。FAC 方案主要是为了解释实验测量值，为此将所有已知高阶修正项吸收进有效强耦合常数中，基于实验测量值反定出有效能标。PMS 方案从保持数值稳定性出发，要求有限阶预言随重整化方案和重

整化能标的变化敏感度最小，同时确定有效方案和有效能标。BLM 方案利用真空极化项，即 n_f 项，来确定强耦合常数的有效能标，同时借助自洽能标关系消除重整化方案的依赖性。PMC 方案则利用重整化群方程，即 β 函数，确定微扰展开式中每一阶强耦合常数的有效值，并进一步定出每一阶的有效能标。FAC 方案的缺点是理论预言能力弱，难以用于探讨新物理效应；BLM 方案的缺点是以 n_f 项为纲，难以毫无疑义地延拓到 QCD 高圈，这也是国际上早期提出的多种 BLM 延拓方案不成功的原因，而随后发展起来的 PMC 方案为其提供了更底层的理论基础。因此，在 9.4 节中，我们基于标准重整化群不变性以及局域重整化群不变性重点探讨了 PMS 和 PMC 两种方案。

在有限阶的情况下，如公式 (9.117) 所示，标准重整化群不变性会导致不为零的等式，从而无法直接应用于确定高能物理过程的重整化能标。

作为一种处理思路，PMS 方案引入了局域重整化群不变性，认为公式 (9.117) 中剩余高阶项的贡献可以忽略，这等价于直接令有限阶微扰 QCD 预言对重整化方案和重整化能标的偏微分为零。从数学上看，PMS 方案是通过寻找微扰展开式对重整化方案及重整化能标变化的最小敏感点来定出有效的方案和能标。诸多具体应用表明，使用 PMS 方案后，理论预言的主要贡献都将集中到领头阶，高阶微扰项的贡献会变得很小，体现出 “诱发收敛性”。由此，可在一定程度上提高微扰论的整体预言精度。PMS 方案在越高阶的情况下越有效。作为近似处理，PMS 方案破坏了标准重整化群不变性，导致 PMS 方案不满足自反性、对称性和传递性等自洽要求。PMS 方案不满足传递性，这表明不同观测量之间的关联依赖于作为中间变量的重整化方案的选择，由此当我们用一个有效耦合常数去表达另一个有效耦合常数时，PMS 方案将导致不自洽的能标选择。

与 PMS 方案采用有效处理不同，作为理论上更严格的处理，PMC 方案并不利用标准重整化群不变性方程本身来处理有限阶的微扰序列，而是基于重整化群方程 (β 项) 来确定微扰序列中的强耦合常数正确跑动行为并进一步确定重整化能标。正因为如此，PMC 方案满足由标准重整化群不变性出发所获得的自洽条件。PMC 通过设定微扰 QCD 级数中每一阶的重整化能标，为 BLM 方案中物理量之间的自洽能标关系提供了理论依据，也为将其推广到任意阶打下基础。由于消除了具有发散性质的重整化子项，PMC 方案的理论预言将具有更好的微扰收敛性。高阶未知的 β 项会导致残留重整化方案和能标依赖性，但这种残留依赖相比于传统方案可被大大压低。基于获得的每一阶强耦合常数的准确值，PMC 方案可确定每阶准确的动量流动、正确的夸克味道数等。从这个意义上说，虽然重整化能标是非物理的，但我们可认为 PMC 能标是微扰有限阶下的物理能标。PMC 方案的关键步骤是基于重整化群方程获得的 β 序列，同时利用简并关系来重新表述通过标准微扰 QCD 计算所得到的微扰级数展开式。然后，将 β 项按递归方式系统地吸收进各阶

强耦合常数，最终获得与重整化方案无关的共形级数。

以 $R_{e^+e^-}$ 和 $\Gamma\left(H \to b\bar{b}\right)$ 精确到四圈的微扰 QCD 修正为例，文献 [12] 对 PMC 方案和 PMS 方案的异同点进行了详细对比。在 QCD 四圈精度下，PMC 和 PMS 给出的 $R_{e^+e^-}$ 和 $\Gamma\left(H \to b\bar{b}\right)$ 都与传统能标设定方法的理论预言一致，且都对初始能标的依赖很小。不同点在于，PMC 可很好地提高微扰收敛性，而 PMS 则体现出 "诱发收敛性"。对于非阿贝尔的 QED 过程，PMS 方案与 Gell-Mann-Low 方案确定出的能标并不一致；而 PMC 方案若取 QED 极限则会得到与 Gell-Mann-Low 方案一致的预言。另外，在 e^+e^- 湮灭产生光子束流的过程中，其确定 PMS 能标 $\mu_r^{\rm PMS}$ 会随着 y 的增大而减小，且当 $y \to 0$ 时它们迅速增大，显示出发散特性。这与从物理上分析当束流的不变质量越小时，典型能标越小不一致。这种不一致性表明 PMS 得不到束流的正确物理行为，原因在于它们将与强耦合常数重整化无关的贡献也求和到了耦合常数中。此外，当 $y \to 0$ 时，PMC 能标体现出与物理定性讨论一致的变化趋势。

9.5 节进一步给出了 PMC 方案的多个应用。运用 PMC 方案之后，理论预言会快速收敛到稳定点，可在已知微扰阶下获得较准确的理论预言。这些应用实例表明，PMC 方案提供了一种普适的与具体过程无关的方法，系统设定高能物理过程的重整化能标。例如，对于质子–反质子对撞产生顶夸克对的过程，$p\bar{p} \to t\bar{t}X$，顶夸克对产生的前后不对称，利用 PMC 方案可获得更准确的结果。如 PMC 方案可将传统能标设定方案下微扰 QCD 单圈预言与 2011 年 Tevatron CDF 和 D0 实验组的测量值之间存在的 3 个标准偏差降到 1 个标准偏差左右，并与 2014 年 D0 实验组的测量值吻合得很好。顶夸克对产生的过程，在夸克阈值附近的子过程 $q\bar{q} \to Q\bar{Q}$ 不仅涉及硬子过程的能标 $\hat{s} \sim 4M_Q^2$，还涉及库仑修正项中的 Sudakov 效应的能标 $v^2\hat{s}$。为此，需设定两类 PMC 能标，一类是硬子过程的能标，另一类是库仑项的能标。通过分别处理，可提高顶夸克对强产生的总截面或前后不对称性的精度。将类似处理应用到欧洲大型强子对撞机 LHC 上的顶夸克对电荷不对称的研究中，可发现在两圈 QCD 修正的精度下，PMC 预言也与 ATLAS 和 CMS 实验组的测量值在误差范围内符合。

存在于有限阶微扰 QCD 理论预言中的人为引入的系统误差实际上是可以避免的。PMC 能标设定方案以其坚实的物理和理论基础，满足重整化群不变性的自洽要求，基于重整化群方程设定过程的最优能标，大大地改善了标准模型的预言精度，它可被广泛用于各种高能物理过程。

参 考 文 献

[1] Grunberg G. Phys. Lett. B, 1980, 95: 70.

[2] Stevenson P M. Phys. Lett. B, 1981, 100: 61.
[3] Brodsky S J, Lepage G P, Mackenzie P B. Phys. Rev. D, 1983, 28: 228.
[4] Brodsky S J, Wu X G. Phys. Rev. D, 2012, 86: 079903.
[5] Mojaza M, Brodsky S J, Wu X G. Phys. Rev. Lett., 2013, 110: 192001.
[6] Wu X G, Brodsky S J, Mojaza M. Prog. Part. Nucl. Phys., 2013, 72: 44.
[7] Brodsky S J, Gill M S, Melles M, et al. Phys. Rev. D, 1998, 58: 116006.
[8] Mattingly A C, Stevenson P M. Phys. Rev. D, 1994, 49: 437.
[9] Ma Y, Wu X G, Ma H H, et al. Phys. Rev. D, 2015, 91: 034006.
[10] Bi H Y, et al. Phys. Lett. B, 2015, 748: 13.
[11] Brodsky S J, Mojaza M, Wu X G. Phys. Rev. D, 2014, 89: 014027.
[12] Wu X G, et al. Rept. Prog. Phys., 2015, 78: 126201.
[13] Wu X G, Wang S Q, Brodsky S J. Front. Phys., 2016, 11: 111201.
[14] Wang S Q, Wu X G, Brodsky S J. Phys. Rev. D, 2014, 90: 037503.
[15] Wang S Q, Wu X G, Si Z G, et al. Phys. Rev. D, 2016, 93: 014004.
[16] Wang S Q, Wu X G, Si Z G, et al. Phys. Rev. D, 2014, 90: 114034.

第 10 章　重夸克对称性和重夸克有效理论

在这一章中，我们介绍重夸克对称性和重夸克有效理论的基本思想；在 $m_Q \to \infty$ 时给出重夸克有效理论的拉氏量，讨论其具有的自旋和味道对称性，并讨论重夸克极限下重味强子弱衰变跃迁矩阵元的简化；介绍计算有效理论拉氏量的一般步骤，并推导出重夸克有效理论拉氏量的 $1/m_Q$ 一阶修正；基于重夸克有效理论，讨论重味强子谱；介绍加入 $1/m_Q$ 高阶修正时如何计算重味强子的跃迁矩阵元，并以 $\Lambda_b \to \Lambda_c$ 跃迁为例做了说明；最后介绍重夸克有效理论的重整化，重夸克有效理论和 QCD 理论的匹配，并以几个算符辐射修正为例做了说明。

10.1　重夸克对称性和重夸克有效理论的基本思想

很长时间以来，重味物理一直是粒子物理学研究的热点领域。标准模型理论 (standard model) 通过 $SU(2)_L \times U(1) \times SU(3)_C$ 对称群来描述电弱相互作用和强相互作用，它成功地解释了目前粒子物理学观测到的大部分实验现象。但是，在标准模型中还存在一些尚未解决的问题。在标准模型中存在着很多不确定的参数，如夸克和轻子的质量和 CKM 矩阵元中的参数。再有就是强相互作用的问题，由于长程强相互作用是非微扰的，处理起来有很大的难度。重味物理的研究为这些问题的解答提供了一个很好的途径。例如，在重味强子的研究中，我们可以通过重味强子的弱衰变直接测量相关的 CKM 矩阵元，如 V_{ub}；由于重味强子系统有较大的 CP 破缺，我们可以研究 CP 破缺的机制；此外，还可以通过研究重味强子衰变抽取有关非微扰 QCD 的信息，如强子波函数或分布振幅的信息。

量子色动力学 (QCD) 是描述强相互作用的非 Abel 规范理论，具有渐近自由的性质。QCD 的耦合常数是跑动的, 表达式为

$$\alpha_s(q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln \dfrac{q^2}{\Lambda^2_{\rm QCD}}} \tag{10.1}$$

其中，$\Lambda_{\rm QCD}$ 是 QCD 标度参量，为几百 MeV。在 $q^2 \gg \Lambda^2_{\rm QCD}$ 的高能区，α_s 远小于 1，我们是可以进行微扰计算的。但是在 $q^2 \leqslant \Lambda^2_{\rm QCD}$ 的低能区，QCD 的耦合常数会逐渐增大，在这一区域无法进行微扰计算。在这一区域，夸克和胶子被禁锢在强子内部，我们无法观测到自由的夸克，这被形象地称为“夸克禁闭”。对于非微

扰 QCD，目前有两种处理方法，一种是格点 QCD，另一种是非微扰 QCD 的唯象模型。

重味夸克是指质量远远大于 $\Lambda_{\rm QCD}$ 的夸克。满足这一条件的夸克包括 c、b 和 t 夸克，但是 t 夸克非常不稳定，很快会以 $t \to b + W$ 的形式衰变，很难形成稳定的束缚态，因此一般意义上的重味夸克是指 b 和 c 夸克。

重夸克对称性和重夸克有效理论 (heavy quark effective theory, HQET) 是 20 世纪 90 年代左右提出的 [1-3]，它们是在特定的动力学区域内对 QCD 相互作用的有效近似。在重夸克有效理论中，重味夸克主要通过交换软胶子和重味强子内部的其他轻味粒子进行相互作用。通过重夸克对称性和重夸克有效理论，可以对重味强子的物理过程进行大大的简化。计算重味强子衰变过程时，我们可以利用重夸克对称性和重夸克有效理论减少跃迁矩阵元中形状因子的个数。另外，在重夸克有效理论中，$1/m_Q$ 的各阶修正也可以被系统地考虑进来 (m_Q 是重味夸克的质量)。然而，重夸克有效理论并不能彻底地解决 QCD 在低能区的非微扰问题。在运用重夸克有效理论进行计算时，为了能给出比较准确的预言，我们通常会结合一些描述非微扰 QCD 的唯象模型。参考文献 [4]~[6] 中给出了关于重夸克有效理论的回顾。

如图 10.1 所示，考虑含有一个重味夸克 Q 的强子，重味夸克和强子内部轻的自由度 (包括轻味正反夸克和胶子) 之间交换动量 k。k 是强子内部强相互作用的典型动量，k 具有 $\mathcal{O}(\Lambda_{\rm QCD})$ 的量级。Q 的康普顿波长为 $\lambda_Q \sim \dfrac{1}{m_Q}$。为了探测到 Q 的量子数，需要一个动量 $Q^2 \geqslant m_Q^2$ 的探针。然而，动量为 k 的软胶子仅仅能够分辨波长为 $\dfrac{1}{\Lambda_{\rm QCD}}$ 量级的距离。因此重味强子内部轻的自由度分辨不出 Q 的量子数，即 Q 的质量和自旋与重味强子内部的动力学过程无关，这就是所谓的重夸克对称性，后文中将对此进行详细讨论。含重味夸克 $Q(m_Q, s)$ 的重味强子和含重味夸克 $Q'(m_{Q'}, s')$ 的重味强子内部轻的自由度的动力学是一样的 (s 和 s' 是相应的重味夸克的自旋)。这一结论的成立并不要求 Q 和 Q' 的质量相近，仅需要满足 Q 和 Q' 的质量分别远远大于 $\Lambda_{\rm QCD}$。

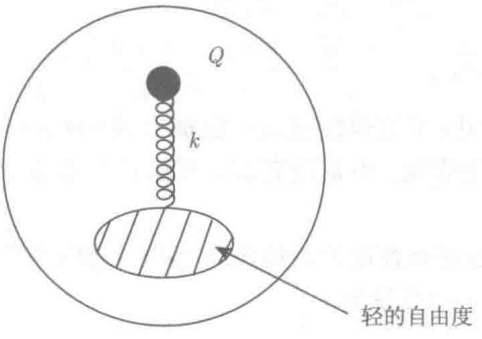


图 10.1 重味强子的结构示意图

需要注意的是，重夸克对称性只在 $m_Q \gg k \sim \mathcal{O}(\Lambda_{\mathrm{QCD}})$ 的能标范围内有效，它并非 QCD 的一个对称性，而仅仅是这个动力学区域的一个有效理论 (即重夸克有效理论) 所具有的对称性。这与手征对称性不同，手征对称性是在轻夸克质量 $m_q \to 0$ 时 QCD 拉氏量具有的对称性。

10.2　$m_Q \to \infty(m_Q \gg \Lambda_{\mathrm{QCD}})$ 时的重夸克有效理论

在这一节中，我们来介绍 $m_Q \to \infty(m_Q \gg \Lambda_{\mathrm{QCD}})$ 时重夸克有效理论的基本框架。

10.2.1　重夸克有效理论的拉氏量

重味强子中的重味夸克所携带的动量可以被表示为

$$p_Q = m_Q v + k \tag{10.2}$$

其中，v 是重味强子的速度，并且满足 $v^2 = 1$，$m_Q v$ 是重味夸克由于强子运动所获得的动量，而剩余部分的动量被写成 k，这一部分的动量来源于重味夸克和轻的自由度之间的软胶子交换，k 是 $\mathcal{O}(\Lambda_{\mathrm{QCD}})$ 的量级。当 $m_Q \gg \Lambda_{\mathrm{QCD}}$ 时，Q 几乎在壳，它的运动速度和重味强子相同。在强相互作用下 v 保持不变, 因此，v 不再是动力学上的自由度。这样重味夸克的传播子可以被写成

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{i}}{\not{p}_Q - m_Q + \mathrm{i}\epsilon} &= \frac{\mathrm{i}}{m_Q \not{v} + \not{k} - m_Q + \mathrm{i}\epsilon} = \frac{\mathrm{i}(m_Q \not{v} + m_Q + \not{k})}{2m_Q v \cdot k + k^2 + \mathrm{i}\epsilon} \\ &= \frac{\mathrm{i}}{v \cdot k + \mathrm{i}\epsilon}\frac{1 + \not{v}}{2} + \mathcal{O}(\frac{k}{m_Q}) \\ &\to \frac{\mathrm{i}}{v \cdot k + \mathrm{i}\epsilon} P_+ \end{aligned} \tag{10.3}$$

其中，P_+ 是正的能量投影算符。定义 $P_\pm = \dfrac{1 \pm \not{v}}{2}$, 它们满足

$$P_\pm^2 = P_\pm, \quad P_\pm P_\mp = 0 \tag{10.4}$$

$$P_+ \gamma^\mu P_+ = \frac{1 + \not{v}}{2}\gamma^\mu \frac{1 + \not{v}}{2} = \frac{1 + \not{v}}{2} v^\mu \frac{1 + \not{v}}{2} \tag{10.5}$$

根据上式，重味夸克和胶子的耦合顶点可以被写成 $\mathrm{i}gT_a\gamma^\mu \to \mathrm{i}gT_a v^\mu$，其中 T_a 是颜色 $SU(3)$ 对称群的生成元。由重夸克有效理论产生的 Feynman 规则应该具有这一形式。

接下来根据重味夸克有效理论的拉氏量来推导重味夸克的 Feynman 规则。对于一个重味夸克，QCD 拉氏量为

$$\mathscr{L}_{\mathrm{QCD}} = \bar{Q}(\mathrm{i}\not{D} - m_Q)Q \tag{10.6}$$

其中，Q 是重味夸克场，D 是协变导数，$D_\mu = \partial_\mu - \mathrm{i}gT_a A_\mu^a$。可以重新定义重味夸克场：

$$Q(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m_Q v\cdot x} Q_v(x) \tag{10.7}$$

其中 v 保持不变。

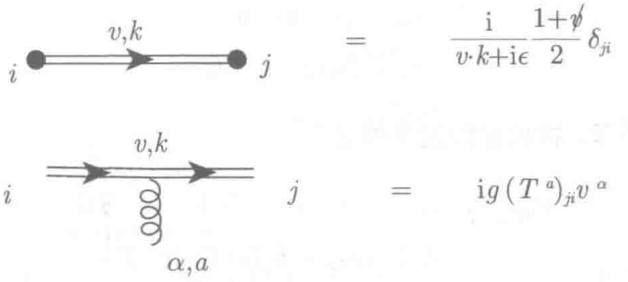
在重夸克极限 $m_Q \to \infty$ 下，重味夸克以速度 v 运动，满足 $\not{v} Q_v = Q_v$（忽略 $1/m_Q$ 修正）。在这种情况下，用 $h_v(x)$ 表示 Q_v，$h_v(x)$ 满足 $\not{v} h_v = h_v$，公式 (10.6) 可以写成

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{QCD} &\to \bar{h}_v(m_Q \not{v} + \mathrm{i}\not{D} - m_Q)h_v \\ &= \bar{h}_v(\mathrm{i}\not{D})h_v = \bar{h}_v \frac{1+\not{v}}{2}\mathrm{i}\not{D}\frac{1+\not{v}}{2}h_v \\ &= \bar{h}_v \mathrm{i}v\cdot D h_v \end{aligned} \tag{10.8}$$

因此得到重夸克有效理论的拉氏量

$$\mathscr{L}_{\rm HQET} = \bar{h}_v \mathrm{i}v\cdot D h_v \tag{10.9}$$

从上式中可以很容易写出关于重味夸克的 Feynman 规则：



其中，i, j, a 代表颜色指标，重夸克用双线表示，并用 v 和 k 来标记，α 为 Lorentz 指标。

10.2.2 重夸克味道和自旋对称性 $SU(2)_f \times SU(2)_s$

这一节中来讨论重夸克有效理论中的重夸克味道和自旋对称性。

先来看重夸克自旋 $SU(2)_s$ 的对称性。

根据公式 (10.8)，重夸克有效理论的拉氏量中不存在 Dirac 矩阵，因此重夸克和胶子的顶点与自旋无关。这一性质可以用 $\mathscr{L}_{\rm HQET}$ 满足的一个自旋 $SU(2)_s$ 不变性来描述。

在静止坐标系，自旋 $SU(2)$ 对称群的生成元 S^i 可以被写成

$$S^i = \frac{1}{2}\gamma_5\gamma^0\gamma^i = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sigma^i & 0\\ 0 & \sigma^i\end{pmatrix} \quad (i=1,2,3) \tag{10.10}$$

其中，σ^i 是三个 Pauli 矩阵，Dirac 矩阵为

$$\gamma^0=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},\qquad \gamma^i=\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix},\qquad \gamma_5=\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \tag{10.11}$$

我们可以在一般坐标系中定义互相正交并且与 v 正交的三个归一化的矢量，它们满足

$$e^{i2}=-1\quad (i=1,2,3),\qquad v\cdot e^i=0. \tag{10.12}$$

这样，公式 (10.10) 中自旋对称性的生成元可以被写成

$$S^i=\frac{1}{2}\gamma_5 \not{v}\not{e}^i \tag{10.13}$$

S^i 满足 $SU(2)$ 群生成元间的对易关系，并且可以证明它和 $\not{v}$ 对易

$$[S^i,\, S^j]=\mathrm{i}\epsilon^{ijk}S^k,\quad [\not{v},\, S^i]=0 \tag{10.14}$$

在自旋 $SU(2)$ 群的变换下，h_v 和 $\bar{h}_v$ 变为

$$h_v\to(1+\mathrm{i}\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{S})h_v \tag{10.15}$$

$$\bar{h}_v\to\bar{h}_v(1-\mathrm{i}\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{S}) \tag{10.16}$$

其中 $\boldsymbol{\epsilon}$ 是一个小量。拉氏量经过变换之后为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}'_{\mathrm{HQET}}&=\bar{h}_v(1-\mathrm{i}\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{S})\mathrm{i}v\cdot D(1+\mathrm{i}\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{S})h_v\\&=\bar{h}_v\mathrm{i}v\cdot Dh_v+\bar{h}_v[\mathrm{i}v\cdot D,\,\mathrm{i}\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{S}]h_v\\&=\bar{h}_v\mathrm{i}v\cdot Dh_v\end{aligned} \tag{10.17}$$

因此我们有 $\delta\mathscr{L}_{\mathrm{HQET}}=0$。这样我们就证明了 $\mathscr{L}_{\mathrm{HQET}}$ 在 $SU(2)_s$ 的变换下是守恒的。

此外，根据 $[\not{v},\, S^i]=0$，还可以得到

$$\not{v}(1+\mathrm{i}\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{S})h_v=(1+\mathrm{i}\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{S})\not{v}h_v=(1+\mathrm{i}\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{S})h_v \tag{10.18}$$

即 $\not{v}h_v=h_v$ 这一关系在 $SU(2)_s$ 变换下也总是成立的。

下面看重夸克味道 $SU(2)_f$ 的对称性。

对于有 N_f 种味道的重味夸克系统，QCD 的拉氏量可以被写成

$$\mathscr{L}_{\mathrm{QCD}}=\sum_{f=1}^{N_f}\bar{Q}_f(\mathrm{i}\not{D}-m_f)Q_f \tag{10.19}$$

其中 m_f 为重夸克 Q_f 的质量。它对应的重夸克有效理论拉氏量为

$$\mathscr{L}_{\rm HQET} = \sum_{f=1}^{N_f} \bar{h}_v^f \mathrm{i}v\cdot D h_v^f \tag{10.20}$$

由式 (10.7) 可知 h_v^f 是与味道无关的，因此 $\mathscr{L}_{\rm HQET}$ 在味道空间的转动下是完全不变的，具有 $SU(N_f)_f$ 的对称性。实际上，重味夸克包括 c 和 b 夸克，因此 $N_f = 2$，重夸克有效理论满足的是 $SU(2)_f$ 的对称性。

通过以上的分析可以看出，重夸克对称性 $SU(2)_f \times SU(2)_s$ 的物理内涵是：在重夸克极限 $m_Q \to \infty(m_Q \gg \Lambda_{\rm QCD})$ 下，有重味夸克参与的强相互作用过程在 $m_Q \gg k$ 的区域是与重味夸克的质量和自旋无关的。可以用下面的拉氏量来描述从一个重味夸克 $Q(v)$ 到另一个重味夸克 $Q'(v')$ 的衰变

$$\mathscr{L}_{\rm HQET} = \bar{h}_v \mathrm{i}v\cdot D h_v + \bar{h}'_{v'} \mathrm{i}v'\cdot D h'_{v'} \tag{10.21}$$

通过质量谱可以对 $SU(2)_f \times SU(2)_s$ 对称性进行验证。

在 $SU(2)_s$ 对称性下，B 和 B^* 介子，D 和 D^* 介子，D_s 和 D_s^* 介子分别是简并的。而实验上观测到它们的质量差分别是

$$\begin{aligned} m_{B^*} - m_B &\simeq 46\mathrm{MeV} \\ m_{D^*} - m_D &\simeq 142\mathrm{MeV} \\ m_{D_s^*} - m_{D_s} &\simeq 144\mathrm{MeV} \end{aligned} \tag{10.22}$$

可见它们的质量差别确实很小。

在 $SU(2)_f$ 对称性下，B_s 和 B 介子、D_s 和 D 介子的质量差分别为

$$m_{B_s} - m_B \simeq 87\mathrm{MeV} \tag{10.23}$$

$$m_{D_s} - m_D \simeq 99\mathrm{MeV} \tag{10.24}$$

可以看出 B_s 和 B 介子、D_s 和 D 介子的质量差几乎是相同的。

需要说明的是，在考虑 $1/m_Q$ 的修正时，重味夸克的味道和自旋对称性 $SU(2)_f \times SU(2)_s$ 会遭到破坏，它们破缺的量级大约是 $\Lambda_{\rm QCD}/m_Q$。

10.2.3 重夸克极限下重味强子弱衰变的跃迁矩阵元

通过重夸克对称性，我们可以减少弱衰变过程的跃迁形状因子数目。在重夸克极限下，可以用重味强子态 $|M(v)\rangle$ 中轻的自由度完整地描述这个强子态。在 $m_Q \to \infty$ 的极限下，$|M(v)\rangle$ 是 $\mathscr{L}_{\rm HQET} + \mathscr{L}_{\rm light}$（$\mathscr{L}_{\rm light}$ 代表轻味夸克和胶子的拉氏量）的本征态。

考虑一个赝标重味介子的弹性散射过程 $P(v) \to P(v')$，在该过程中，色源 v 被 v' 代替。如果 $v = v'$，将不会发生任何散射。如果 $v \neq v'$，与轻自由度发生相互作用的色源的速度会发生改变。色源与轻自由度之间将会交换软胶子，此时轻的自由度也进行调整，变成以速度 v' 运动的新末态 $P(v')$。这种重新调整将使跃迁形状因子被压低，并且压低会随着 v 和 v' 之差变大而增强。在 $m_Q \to \infty$ 极限下，跃迁形状因子只依赖于 $v \cdot v'$，而不依赖于重味夸克的质量。

一般来说，这个过程的矩阵元可以被写成如下形式

$$\langle P(v') \mid \bar{h}_{v'} \gamma^\mu h_v \mid P(v) \rangle = \xi(v \cdot v')(v + v')^\mu + \xi'(v \cdot v')(v - v')^\mu \tag{10.25}$$

在上式两边同时乘以 $(v - v')_\mu$，我们得到

$$\langle P(v') \mid \bar{h}_{v'} \not{v} h_v - \bar{h}_{v'} \not{v}' h_v \mid P(v) \rangle = \xi'(v - v')^2 \tag{10.26}$$

由于上式左边为零，我们可以得到 $\xi' = 0$。这样可以把跃迁形状因子数目减少到一个，

$$\langle P(v') \mid \bar{h}_{v'} \gamma^\mu h_v \mid P(v) \rangle = \xi(v \cdot v')(v + v')^\mu \tag{10.27}$$

其中，$\xi(v \cdot v')$ 被称为 Isgur-Wise 函数。对公式 (10.27) 进行复共轭变换，可以得到

$$\langle P(v) \mid \bar{h}_v \gamma^\mu h_{v'} \mid P(v') \rangle = \xi^*(v \cdot v')(v + v')^\mu \tag{10.28}$$

再交换 v 和 v'，

$$\langle P(v') \mid \bar{h}_{v'} \gamma^\mu h_v \mid P(v) \rangle = \xi^*(v \cdot v')(v + v')^\mu \tag{10.29}$$

将公式 (10.27) 和 (10.29) 进行对比，得到 $\xi = \xi^*$，即 $\xi(v \cdot v')$ 是一个依赖于 $v \cdot v'$ 的实函数。

如果考虑 $SU(2)_f$ 对称性，$P(v')$ 中的重味夸克 Q 可以被另一个重味夸克 Q' 取代，因而 P 变成 P'。在 $m_Q \to \infty$ 的极限下，这是一个对称变换，因此仍可以有

$$\langle P'(v') \mid \bar{h}'_{v'} \gamma^\mu h_v \mid P(v) \rangle = \xi(v \cdot v')(v + v')^\mu \tag{10.30}$$

此时矩阵元仍然只包含一个跃迁形状因子 $\xi(v \cdot v')$。

接下来讨论函数 $\xi(v \cdot v')$ 在 $v \cdot v' = 1$ 时的性质。这一点被称为反冲零点 (zero-recoil point)，满足 $v = v'$。

根据公式 (10.5)，我们有

$$J^\mu = \bar{h}'_v \gamma^\mu h_v = \bar{h}'_v v^\mu h_v \tag{10.31}$$

这是一个守恒流。由运动方程可知，

$$\partial_\mu J^\mu = \bar{h}'_v \mathrm{i}v \cdot D h_v + \bar{h}'_v \mathrm{i}v \cdot \overleftarrow{D} h_v = 0 \tag{10.32}$$

相应的守恒荷为

$$N_{Q'Q} = \int \mathrm{d}^3 x J^0(x) = \int \mathrm{d}^3 x h'^{\dagger}_v(x) h_v(x) \tag{10.33}$$

将算符 N_{QQ} 和 $N_{Q'Q}$ 分别作用到 $|P(v)\rangle$ 和 $|P'(v)\rangle$ 上

$$N_{QQ} \mid P(v)\rangle = \mid P(v)\rangle, \qquad N_{Q'Q} \mid P(v)\rangle = \mid P'(v)\rangle \tag{10.34}$$

因此，我们有

$$\langle P'(v) \mid N_{Q'Q} \mid P(v)\rangle = \langle P(v) \mid P(v)\rangle \tag{10.35}$$

如果采用如下的介子波函数的归一化条件

$$\langle M(p') \mid M(p)\rangle = 2p^0/m_M (2\pi)^3 \delta^3(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}') \tag{10.36}$$

其中 p 为介子 M 的动量，m_M 为介子 M 的质量，因而有

$$\langle P(v) \mid P(v)\rangle = 2v^0 (2\pi)^3 \delta^3(\boldsymbol{0}) \tag{10.37}$$

另一方面，根据公式 (10.30)，会有

$$\langle P'(v) \mid \bar{h}'_v \gamma^0 h_v \mid P(v)\rangle = \xi(1) 2v^0 \tag{10.38}$$

由公式 (10.38) 和 (10.35) 有

$$\begin{aligned} \langle P'(v) \mid \int \mathrm{d}^3 x h'^{\dagger}_v h_v \mid P(v)\rangle &= \langle P(v) \mid P(v)\rangle \\ &= \xi(1) 2v^0 (2\pi)^3 \delta^3(\boldsymbol{0}) \end{aligned} \tag{10.39}$$

将公式 (10.37) 和 (10.39) 联立，可以解得

$$\xi(1) = 1 \tag{10.40}$$

$\xi(1) = 1$ 的物理含义是：在 $v = v'$ 的情况下，重味夸克的速度没有改变，在流 J^μ 的作用前后，轻的自由度在发生相互作用前后看到的色场是相同的，并且轻的自由度没有发生变化，因此这里跃迁形状因子没有任何压低。

接下来，以 $B \to D$ 和 $B \to D^*$ 两个过程为例，讨论重夸克对称性可以减少重味夸克弱衰变过程中的形状因子数目。

一般情况下，$B \to D$ 过程的矩阵元可以包含两个独立的跃迁形状因子，

$$\langle D(p')|\bar{c}\gamma^\mu b|B(p)\rangle = F_1(q^2)\left[(p+p')^\mu - \frac{m_B^2 - m_D^2}{q^2}q^\mu\right] + F_0(q^2)\frac{m_B^2 - m_D^2}{q^2}q^\mu \tag{10.41}$$

其中 $q^\mu = p^\mu - p'^\mu$，$F_0(0) = F_1(0)$。在重夸克极限下，我们仅需要一个跃迁形状因子 $\xi(v\cdot v')$ 描述这个过程，其中 $v\cdot v'$ 满足

$$v\cdot v' = \frac{m_B^2 + m_D^2 - q^2}{2m_B m_D} \tag{10.42}$$

下面考虑 $P \to V$ 的过程 (P 和 V 分别为重味赝标和重味矢量介子)，如 $B \to D^*$ 过程。由于重味介子内部轻的自由度与重味夸克的自旋无关，重味矢量介子 V 可以通过如下关系和重味赝标介子 P 联系起来

$$|V(v,\epsilon_3)\rangle = 2S_Q^3|P(v)\rangle \tag{10.43}$$

其中 ϵ_3 为重味矢量介子 V 的极化矢量，S_Q^3 作用到重味夸克 Q 的自旋上，其具体形式为

$$S_Q^3 = \frac{\mathrm{i}}{4}\int h_v^\dagger(x)[\gamma^1,\gamma^2]h_v(x)\mathrm{d}^3x \tag{10.44}$$

在重夸克极限下这是一个守恒量。由式 (10.44) 可得 S_Q^3 和 $h_v^\dagger(0)$ 的对易关系满足

$$[S_Q^3, h_v^\dagger(0)] = h_v^\dagger(0)\Sigma_3, \qquad \Sigma_3 = \frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^1,\gamma^2] \tag{10.45}$$

由式 (10.43) 我们有

$$\langle V(v',\epsilon_3)\mid \bar{h}'_{v'}\Gamma h_v \mid P(v)\rangle = \langle P'(v')\mid 2[S_{Q'}^3, \bar{h}'_{v'}\Gamma h_v]\mid P(v)\rangle \tag{10.46}$$

选取矢量粒子的静止系，这时

$$v'^\mu = (1,0,0,0), \quad \epsilon_3^\mu = (0,0,0,1) \tag{10.47}$$

我们发现

$$\begin{aligned}[S_{Q'}^3, V^0] &= [S_{Q'}^3, \bar{h}'_{v'}\gamma^0 h_v] = [S_{Q'}^3, h'^\dagger_{v'}]h_v \\ &= h'^\dagger_{v'}\frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^1,\gamma^2]h_v = \frac{1}{2}\bar{h}'_{v'}\gamma^3\gamma_5 h_v \\ &= \frac{1}{2}A^3\end{aligned} \tag{10.48}$$

类似的，我们有

$$
\begin{aligned}
&[S^3_{Q'}, A^0] = \frac{1}{2}V^3, \quad [S^3_{Q'}, A^1] = \frac{\mathrm{i}}{2}A^2 \\
&[S^3_{Q'}, A^2] = -\frac{\mathrm{i}}{2}A^1, \quad [S^3_{Q'}, A^3] = \frac{1}{2}V^0 \\
&[S^3_{Q'}, V^1] = \frac{\mathrm{i}}{2}V^2, \quad [S^3_{Q'}, V^2] = -\frac{\mathrm{i}}{2}V^1, \quad [S^3_{Q'}, V^3] = \frac{1}{2}A^0
\end{aligned} \tag{10.49}
$$

其中，$A^\mu = \bar{h}'_{v'}\gamma^\mu\gamma_5 h_v$，$V^\mu = \bar{h}'_{v'}\gamma^\mu h_v$。

一般来说，$P \to V$ 的过程的矩阵元可以被写成

$$
\langle V(v', \epsilon)|V^\mu - A^\mu|P(v)\rangle = \mathrm{i}g\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon^*_\nu v'_\alpha v_\beta - f\epsilon^{*\mu} - a_1(\epsilon^*\cdot v)v^\mu - a_2(\epsilon^*\cdot v)v'^\mu \tag{10.50}
$$

通过公式 (10.49) 中的对易关系，g，f，a_1 和 a_2 都可以用 Isgur-Wise 函数来表示。这样我们可以把 $P \to V$ 过程的矩阵元写成

$$
\begin{aligned}
&\langle V(v', \epsilon) \mid \bar{h}'_{v'}\gamma^\mu(1-\gamma_5)h_v \mid P(v)\rangle \\
&= \left[\mathrm{i}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon^*_\nu v'_\alpha v_\beta - \epsilon^{*\mu}(v\cdot v'+1) + v'^\mu\epsilon^*\cdot v\right]\xi(v\cdot v')
\end{aligned} \tag{10.51}
$$

因此，通过重夸克极限下的重夸克的对称性，$B \to D^*$ 过程中的跃迁形状因子可以被减少到一个，即 $\xi(v\cdot v')$。

10.3 重夸克有效理论的 $1/m_Q$ 高阶修正

在这一节中，我们给出重夸克有效理论按 $1/m_Q$ 展开的一阶修正。

10.3.1 计算有效理论的一般步骤

一个有效理论往往只要考虑完整理论中的主要内容，而忽略次要内容。在粒子物理中，一个非常重的粒子在低能区变得不那么重要，这样我们就可以通过移除这个重粒子来构建一个低能有效的理论。例如，四费米子点相互作用理论就是移除 W 玻色子来描述弱相互作用的低能有效理论。构建低能有效理论一般需要三个步骤：

(1) 确定重的粒子场，并将其从完整理论中积掉。这时作用量将会变成非定域性的，非定域性是指，重粒子仅在 $1/m_H$ 的距离内传播 (m_H 为重粒子的质量)。

(2) 这个非定域的作用量可以通过算符乘积展开写成无限个定域项之和的形式。然后我们对这个展开进行截断，从而得到有效理论。在低能时，有效理论和完整理论是一致的。但是，这时我们在有效理论中没有考虑由虚的大动量引起的短程辐射修正。

(3) 通过微扰论，将短程辐射修正加入有效理论，并将有效理论和完整理论在能标 $\mathcal{O}(m_H)$ 进行匹配。此时，完整理论和有效理论得到的振幅应该是相等的，即 $A_{\text{full}} = A_{\text{eff}}$。我们可以通过这一匹配获得有效理论中的 Wilson 系数。在能标 $\mathcal{O}(m_H)$，Wilson 系数大约是 $\alpha_s \ln \dfrac{m_H}{\mu}$，其中 μ 是重整化标度。下一步再利用重整化群方程完成从能标 $\mathcal{O}(m_H)$ 到 $\mu \ll m_H$ 的演化，这样我们可以到微扰论所有阶将大对数项 $(\alpha_s \ln \dfrac{m_H}{\mu})^n$ 求和加起来。

接下来就通过路径积分的形式，以构建四费米子点相互作用理论为例说明如何构建一个低能有效理论。

完整理论的生成泛函为

$$Z_W \sim \int [\mathrm{d}W^+][\mathrm{d}W^-] \exp\left\{ \mathrm{i} \int \mathrm{d}^4 x \mathscr{L}_W(x) \right\} \tag{10.52}$$

其中，$\mathscr{L}_W$ 中含有 $W^\pm$ 的质量 m_W，它的质量远远比强子的能量标度要重，因此我们可以将上式中的 m_W 积分掉。这个理论的拉氏量的具体形式为

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_W(x) = & -\frac{1}{2}(\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+)(\partial^\mu W^{-\nu} - \partial^\nu W^{-\mu}) + m_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} \\ & + \frac{g_2}{2\sqrt{2}}(J_\mu^+ W^{+\mu} + J_\mu^- W^{-\mu}) \end{aligned} \tag{10.53}$$

其中，g_2 是耦合常数

$$J_\mu^+ = V_{pn} \bar{p} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) n, \qquad J_\mu^- = (J_\mu^+)^\dagger \tag{10.54}$$

V_{pn} 是相应的 CKM 矩阵元，$p = (u, c, t)$，$n = (d, s, b)$。将此式代入公式 (10.52)，可以得到

$$\begin{aligned} Z_W \sim \int [\mathrm{d}W^+][\mathrm{d}W^-] \exp\Big\{ & \mathrm{i} \int \mathrm{d}^4 x \mathrm{d}^4 y W_\mu^+(x) K^{\mu\nu}(x, y) W_\nu^-(y) \\ & + \mathrm{i} \frac{g_2}{2\sqrt{2}} \int \mathrm{d}^4 x \left(J_\mu^+ W^{+\mu} + J_\mu^- W^{-\mu} \right) \Big\} \end{aligned} \tag{10.55}$$

其中

$$K_{\mu\nu}(x, y) = \delta^{(4)}(x - y) \left[g_{\mu\nu}(\partial^2 + m_W^2) - \partial_\mu \partial_\nu \right] \tag{10.56}$$

我们知道 $K_{\mu\nu}$ 的倒数是 $W^\pm$ 玻色子的传播子 $\Delta_{\mu\nu}$，

$$\Delta_{\mu\nu}(x, y) = \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-y)} \frac{-1}{k^2 - m_W^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m_W^2} \right) \tag{10.57}$$

接下来，按照上文中所给出的步骤构造出低能有效理论。

(1) 积掉 $W^{\pm}$ 的贡献后可得到

$$Z_W \sim \exp\left[-\mathrm{i}\frac{g_2^2}{8}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y J_\mu^-(x)\Delta^{\mu\nu}(x,y)J_\nu^+(y)\right] \tag{10.58}$$

这样可以得到非定域的夸克场作用量

$$S_{nl} = -\frac{g_2^2}{8}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y J_\mu^-(x)\Delta^{\mu\nu}(x,y)J_\nu^+(y) \tag{10.59}$$

(2) 接下来对 $\Delta_{\mu\nu}$ 进行截断

$$\Delta^{\mu\nu}(x,y) \simeq \frac{g^{\mu\nu}}{m_W^2}\delta^{(4)}(x-y) \tag{10.60}$$

并将其代入公式 (10.59)，可以得到定域的相互作用项

$$\mathscr{L}_{\mathrm{int,\,eff}} = -\frac{G_\mathrm{F}}{\sqrt{2}}J_\mu^-(x)J^{+\mu}(x) = -\frac{G_\mathrm{F}}{\sqrt{2}}V_{pn}^*V_{p'n'}\bar{n}\gamma_\mu(1-\gamma_5)p\bar{p'}\gamma^\mu(1-\gamma_5)n' \tag{10.61}$$

其中 $G_\mathrm{F} = \dfrac{g_2^2}{4\sqrt{2}m_W^2}$。

(3) 最后，将有效理论和完整理论进行匹配，并根据重整化群方程的演化来得到任意标度下的 Wilson 系数。在考虑短程辐射修正之后，完整理论包括图 10.2(a)~(c) 中的 Feynman 图以及它们的对称图，有效理论包括 Feynman 图 (d)~(f) 以及它们的对称图，此时除了算符 $O_2 = \bar{n}\gamma_\mu(1-\gamma_5)p\bar{p'}\gamma^\mu(1-\gamma_5)n'$ 会加入一个新的算符 $O_1 = \bar{n}_\alpha\gamma_\mu(1-\gamma_5)p_\beta\bar{p'_\beta}\gamma^\mu(1-\gamma_5)n'_\alpha$。注意 O_1 和 O_2 具有相同的味结构但不同的色结构。将有效理论和完整理论进行匹配，

$$A_\mathrm{full} = A_\mathrm{eff} = \frac{G_\mathrm{F}}{\sqrt{2}}V_{pn}^*V_{p'n'}(c_1\langle O_1\rangle + c_2\langle O_2\rangle) \tag{10.62}$$

根据上文中给出的拉氏量，对这些 Feynman 图进行解析计算，可以得到

$$c_1(\mu) = -\frac{3\alpha_s}{4\pi}\ln\frac{m_W^2}{\mu^2}, \quad c_2(\mu) = 1 + \frac{3}{N_c}\frac{\alpha_s}{4\pi}\ln\frac{m_W^2}{\mu^2} \tag{10.63}$$

注意公式 (10.63) 在能标 $\mu \sim O(m_W)$ 成立。

考虑重整化群方程，

$$\mu\frac{\mathrm{d}c_i(\mu)}{\mathrm{d}\mu} = \gamma_{ij}c_j(\mu) \tag{10.64}$$

其中，γ_{ij} 为反常量纲，可以通过对 O_i 的重整化计算得到。于是可以得到任意标度下的 Wilson 系数

$$c_i(\mu) = U_{ij}(\mu, m_W)c_j(m_W) \tag{10.65}$$

其中，

$$U(\mu, m_W) = T_g \exp\left[\int_{g(m_W)}^{g(\mu)} \mathrm{d}g' \frac{\gamma^T(g')}{\beta(g')}\right] \tag{10.66}$$

其中 γ^T 表示反常量纲矩阵的转置，T_g 表示耦合常数的排列顺序为从右到左递增。

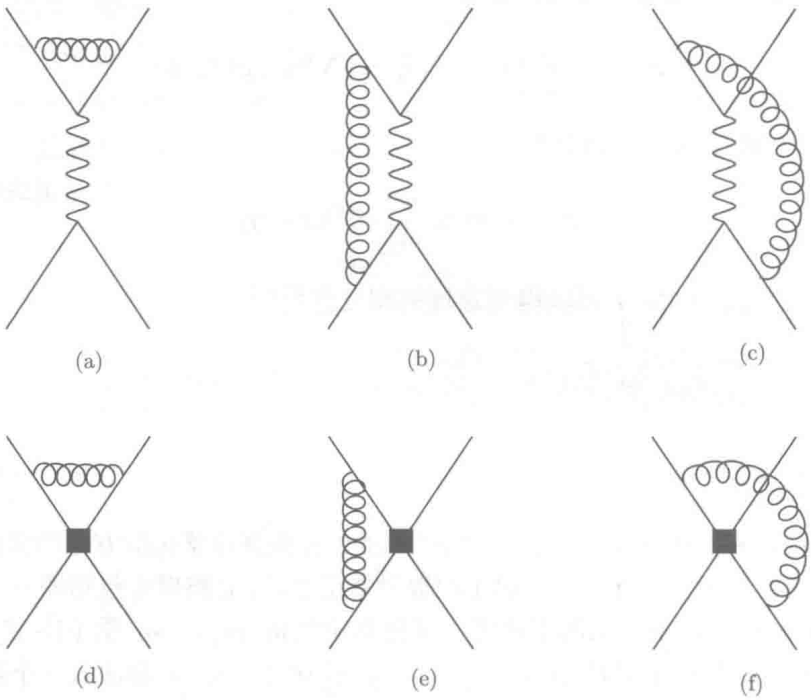


图 10.2　完整理论和有效理论对应的费曼图

10.3.2　包含 $1/m_Q$ 展开的一阶修正的重夸克有效理论的推导

与 10.2 节的推导相似，我们重新定义 (公式 (10.7))

$$Q(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m_Q v\cdot x} Q_v(x) \tag{10.67}$$

一般来说如果考虑 $1/m_Q$ 修正，我们需要把 Q_v 写成两部分

$$Q_v = h_v + H_v \tag{10.68}$$

其中，

$$h_v = P_+ Q_v, \qquad H_v = P_- Q_v \tag{10.69}$$

很容易证明

$$\not{v} h_v = h_v, \qquad \not{v} H_v = -H_v \tag{10.70}$$

这样，我们可以得到

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\mathrm{QCD}} &= \bar{Q}(\mathrm{i}\not{D} - m_Q)Q \\ &= \left(\bar{h}_v + \bar{H}_v\right)\left[m_Q(\not{v} - 1) + \mathrm{i}\not{D}\right](h_v + H_v) \\ &= \bar{h}_v \mathrm{i}v\cdot D h_v - \bar{H}_v(\mathrm{i}v\cdot D + 2m_Q)H_v \\ &\quad + \bar{h}_v \mathrm{i}\not{D}_\perp H_v + \bar{H}_v \mathrm{i}\not{D}_\perp h_v \end{aligned} \tag{10.71}$$

在上述推导中，我们运用了如下的关系式:

$$\frac{1+\not{v}}{2}\gamma_\mu\frac{1+\not{v}}{2} = \frac{1+\not{v}}{2}v_\mu\frac{1+\not{v}}{2} \tag{10.72}$$

$$\frac{1-\not{v}}{2}\gamma_\mu\frac{1-\not{v}}{2} = -\frac{1-\not{v}}{2}v_\mu\frac{1-\not{v}}{2} \tag{10.73}$$

并且定义

$$D_\perp^\mu \equiv D^\mu - v\cdot D v^\mu, \quad v\cdot D_\perp = 0 \tag{10.74}$$

由于 $\bar{H}_v \not{v} h_v = \bar{h}_v \not{v} H_v = 0$，

$$\bar{H}_v \mathrm{i}\not{D} h_v \to \bar{H}_v \mathrm{i}\not{D}_\perp h_v, \quad \bar{h}_v \mathrm{i}\not{D} H_v \to \bar{h}_v \mathrm{i}\not{D}_\perp H_v \tag{10.75}$$

可以看出，h_v 描述不包含质量的自由度，H_v 的质量为 $2m_Q$。H_v 是一个可以被积分掉的重粒子。

在费米理论中，玻色子 $W^\pm$ 可以被完全积掉。但是在这里，我们想要描述重味夸克的衰变，因此重味夸克的自由度不能被全部移除。我们只积分掉重味夸克中小的成分——H_v。在经典水平上，可以通过运动方程将 H_v 去掉。重味夸克完整的 QCD 拉氏量为

$$\mathscr{L}_{\mathrm{QCD}} = \bar{h}_v \mathrm{i}v\cdot D h_v - \bar{H}_v(\mathrm{i}v\cdot D + 2m_Q)H_v + \bar{h}_v \mathrm{i}\not{D}_\perp H_v + \bar{H}_v \mathrm{i}\not{D}_\perp h_v \tag{10.76}$$

相应的运动方程为

$$-\mathrm{i}v\cdot D h_v = \mathrm{i}\not{D}_\perp H_v \tag{10.77}$$

$$(\mathrm{i}v\cdot D + 2m_Q)H_v = \mathrm{i}\not{D}_\perp h_v \tag{10.78}$$

从式 (10.78) 可以得到

$$H_v = \frac{1}{\mathrm{i}v\cdot D + 2m_Q}\mathrm{i}\not{D}_\perp h_v \tag{10.79}$$

将其代入公式 (10.77)，可以得到

$$-\mathrm{i}v\cdot D h_v = \mathrm{i}\not{D}_\perp \frac{1}{\mathrm{i}v\cdot D + 2m_Q}\mathrm{i}\not{D}_\perp h_v \tag{10.80}$$

能产生式 (10.80) 运动方程的拉氏量为

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} = \bar{h}_v \mathrm{i}v\cdot D h_v + \bar{h}_v \mathrm{i}\not{D}_\perp \frac{1}{\mathrm{i}v\cdot D + 2m_Q}\mathrm{i}\not{D}_\perp h_v \tag{10.81}$$

对上式按 $1/m_Q$ 进行展开

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} = \bar{h}_v \mathrm{i}v\cdot D h_v + \frac{1}{2m_Q}\bar{h}_v \mathrm{i}\not{D}_\perp \mathrm{i}\not{D}_\perp h_v + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m_Q^2}\right) \tag{10.82}$$

$$= \mathscr{L}_0 + \frac{1}{2m_Q}\mathscr{L}_1 + \cdots \tag{10.83}$$

其中，$\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}_{\text{HQET}} = \bar{h}_v \mathrm{i}v\cdot D h_v$，$\mathscr{L}_1$ 是 $\mathscr{L}_{\text{HQET}}$ 的一阶微扰项。我们可以利用以下关系对 $\mathscr{L}_1$ 进行化简，

$$\begin{aligned}
&P_+\not{D}_\perp\not{D}_\perp P_+\\
=&P_+\gamma^\mu\gamma^\nu D_{\perp\mu}D_{\perp\nu}P_+\\
=&P_+\frac{1}{2}\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}D_{\perp\mu}D_{\perp\nu}P_+ + P_+\frac{1}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]D_{\perp\mu}D_{\perp\nu}P_+\\
=&P_+D_\perp^2 P_+ + P_+\frac{1}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu](D_\mu - v\cdot Dv_\mu)(D_\nu - v\cdot Dv_\nu)P_+\\
=&P_+D_\perp^2 P_+ + P_+\frac{1}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu][D_\mu,D_\nu]P_+ - P_+\frac{1}{2}[\not{v},\not{D}_\perp]v\cdot DP_+\\
&-P_+\frac{1}{2}[\not{D}_\perp,\not{v}]v\cdot DP_+\\
=&P_+D_\perp^2 P_+ + P_+\frac{1}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu][D_\mu,D_\nu]P_+
\end{aligned} \tag{10.84}$$

在最后一步的推导中，我们利用了 $\not{v}P_+ = P_+\not{v} = P_+$ 得到如下关系式：

$$\begin{aligned}
P_+\frac{1}{2}[\not{v},\not{D}_\perp]v\cdot DP_+ &= 0\\
P_+\frac{1}{2}[\not{D}_\perp,\not{v}]v\cdot DP_+ &= 0
\end{aligned} \tag{10.85}$$

定义 $\sigma^{\mu\nu} = \dfrac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]$，$\mathrm{i}gG^{\mu\nu} = [D^\mu,D^\nu]$，其中 $G^{\mu\nu}$ 表示胶子场的强度张量，公式 (10.84) 可以被写成

$$P_+\not{D}_\perp\not{D}_\perp P_+ = P_+D_\perp^2 P_+ + P_+\frac{g}{2}\sigma^{\mu\nu}G_{\mu\nu}P_+ \tag{10.86}$$

这样，精确到 $1/m_Q$ 展开的一阶修正的有效理论的拉氏量为

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} = \mathscr{L}_{\text{HQET}} + \frac{1}{2m_Q}\mathscr{L}_1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m_Q^2}\right) \tag{10.87}$$

其中，

$$\frac{1}{2m_Q}\mathscr{L}_1 = \frac{1}{2m_Q}\bar{h}_v(\mathrm{i}D_\perp)^2 h_v + \frac{g}{4m_Q}\bar{h}_v\sigma_{\mu\nu}G^{\mu\nu}h_v \tag{10.88}$$

$\mathscr{L}_1$ 中的第一项表示重味夸克的动能项，在静止系下为 $-\dfrac{1}{2m_Q}\bar{h}_v(\mathrm{i}\boldsymbol{D})^2 h_v$。这一项代表重夸克残留离壳的运动，会破坏重味夸克的 $SU(2)_f$ 味道对称性，但不会破坏自旋对称性。对于 $\mathscr{L}_1$ 中的第二项，在静止系下可以被写成 $-\dfrac{g}{m_Q}\bar{h}_v\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{B}h_v$，其中 $\boldsymbol{S}$ 是重味夸克的自旋算符，$B^i = -\dfrac{1}{2}\epsilon^{ijk}G^{jk}$ 表示色磁胶子场。这一项代表重味夸克与胶子之间的自旋相互作用，会同时破坏重夸克的味道和自旋对称性。式 (10.88) 中 $\mathscr{L}_1$ 可以看成 $\mathscr{L}_{\mathrm{HQET}}$ 的微扰。

下面利用路径积分的形式计算 $1/m_Q$ 展开的一阶修正。

重夸克有效理论的作用量 S 为

$$S = \int \mathrm{d}^4x[\bar{h}_v\mathrm{i}v\cdot D h_v - \bar{H}_v(\mathrm{i}v\cdot D + 2m_Q)H_v + \bar{h}_v\mathrm{i}\not{D}_\perp H_v + \bar{H}_v\mathrm{i}\not{D}_\perp h_v] \tag{10.89}$$

外源项为

$$\int \mathrm{d}^4x(\bar{\eta}Q + \bar{Q}\eta) = \int \mathrm{d}^4x(\bar{\rho}_v h_v + \bar{h}_v\rho_v + \bar{R}_v H_v + \bar{H}_v R_v) \tag{10.90}$$

其中

$$\rho_v = \frac{1+\not{v}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m_Q v\cdot x}\eta, \quad R_v = \frac{1-\not{v}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m_Q v\cdot x}\eta \tag{10.91}$$

这样，我们可以给出生成泛函

$$Z \sim \int [\mathrm{d}h_v][\mathrm{d}\bar{h}_v][\mathrm{d}H_v][\mathrm{d}\bar{H}_v]\exp\left\{\mathrm{i}S + \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(\bar{\rho}_v h_v + \bar{h}_v\rho_v + \bar{R}_v H_v + \bar{H}_v R_v)\right\} \tag{10.92}$$

积掉重粒子部分 H_v 和 $\bar{H}_v$，理论将会变成非定域的 (再取 $R_v = \bar{R}_v = 0$)，此时的作用量为

$$S_{nl} = \int \mathrm{d}^4x\bar{h}_v\mathrm{i}v\cdot D h_v + \int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y(-\bar{h}_v\mathrm{i}\overleftarrow{\not{D}}_\perp)_x\Delta(x,y)(\mathrm{i}\not{D}_\perp h_v)_y \tag{10.93}$$

其中，

$$\Delta(x,y) = \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{\mathrm{i}v\cdot D_x + 2m_Q}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-y)} \tag{10.94}$$

$\Delta(x,y)$ 是 $K(x,y) = \delta(x-y)(\mathrm{i}v\cdot D_y + 2m_Q)$ 的倒数。

对作用量 S_{nl} 根据 $1/m_Q$ 展开并进行截断，此时非定域的理论变成定域的理

论。有效作用量为

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}} &= \int \mathrm{d}^4x \left\{ \bar{h}_v \mathrm{i}v\cdot D h_v + \bar{h}_v \mathrm{i}\not{D}_\perp \frac{1}{2m_Q} \sum_n \left(\frac{-\mathrm{i}v\cdot D}{2m_Q} \right)^n \mathrm{i}\not{D}_\perp h_v \right\} \\ &= \int \mathrm{d}^4x \left\{ \bar{h}_v \mathrm{i}v\cdot D h_v + \bar{h}_v \mathrm{i}\not{D}_\perp \frac{1}{\mathrm{i}v\cdot D + 2m_Q} \mathrm{i}\not{D}_\perp h_v \right\} \\ &= \int \mathrm{d}^4x \left[\bar{h}_v \mathrm{i}v\cdot D h_v + \bar{h}_v \mathrm{i}\not{D}_\perp \frac{1}{2m_Q} \mathrm{i}\not{D}_\perp h_v + \mathcal{O}(1/m_Q^2) \right] \end{aligned} \tag{10.95}$$

这和经典方法推导出的结论 (10.82) 一致。为了获得上述作用量 S_{eff}，H_v 可以被等效地做如下替换：

$$H_v = \frac{1}{\mathrm{i}v\cdot D + 2m_Q} \mathrm{i}\not{D}_\perp h_v \tag{10.96}$$

这和公式 (10.78) 中的运动方程一致。

下面来看 $Q(x)$ 和 $h_v(x)$ 之间的关系。

将公式 (10.96) 代入公式 (10.68) 和 (10.67) 得到

$$\begin{aligned} Q(x) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m_Q v\cdot x}[h_v(x) + H_v(x)] \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m_Q v\cdot x} \left(1 + \frac{1}{\mathrm{i}v\cdot D + 2m_Q} \mathrm{i}\not{D}_\perp \right) h_v(x) \end{aligned} \tag{10.97}$$

对上式按照 $1/m_Q$ 展开，得到

$$Q(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m_Q v\cdot x} \left(1 + \frac{\mathrm{i}\not{D}_\perp}{2m_Q} + \cdots \right) h_v(x) \tag{10.98}$$

通过这个关系，我们可以在重夸克有效理论中构造出任意算符。例如，在树图阶有

$$\bar{Q}'\Gamma Q \to \bar{h}'_{v'}\Gamma h_v + \frac{1}{2m_Q}\bar{h}'_{v'}\Gamma \mathrm{i}\not{D} h_v + \frac{1}{2m_{Q'}}\bar{h}'_{v'}(-\mathrm{i}\overleftarrow{\not{D}})\Gamma h_v + \mathcal{O}(1/m_Q^2) \tag{10.99}$$

需要注意的是，这一关系还可以通过在泛函积分中插入算符的方式得到。关于树图阶以外的辐射修正，即短程相互作用的影响，我们将在 10.6 节中详细讨论。

10.4　重味强子的质量谱

在这一节中，我们通过重夸克有效理论来讨论重味强子的质量谱。

首先根据重夸克有效理论来对重味强子进行分类。在 $m_Q \to \infty$ 的极限下，重味夸克的自旋 $\boldsymbol{s}_Q$ 和轻的自由度的总角动量 $\boldsymbol{s}_l$ 分别守恒。此时，重味强子总的自旋为

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}_Q + \boldsymbol{s}_l \tag{10.100}$$

由于在重夸克极限下动力学过程不依赖于重味夸克的自旋和质量，所以，重味强子不仅可以根据 $\boldsymbol{s}$ 分类，也可以根据 $\boldsymbol{s}_l$ 进行分类。重味夸克的自旋为 $s_Q=\dfrac{1}{2}$，重味强子的总自旋可以写成 $s=s_l\pm\dfrac{1}{2}$。这时会有 $s_l+\dfrac{1}{2}$ 和 $s_l-\dfrac{1}{2}$ 两个态。这两个态在 $m_Q\to\infty$ 时是简并的，它们是 $\mathscr{L}_{\text{HQET}}+\mathscr{L}_{\text{light}}$(其中 $\mathscr{L}_{\text{light}}$ 是关于轻夸克和胶子的拉氏量) 的本征态。按照 s_l，重味强子可以有如下分类：

$$
\begin{aligned}
&s_l=\frac{1}{2}\text{:}\quad D,D^*\ ;\quad D_s,D_s^*\ ;\quad B,B^*\ ;\quad B_s,B_s^*\\
&s_l=\frac{3}{2}\text{:}\quad D_1,\ D_2^*\ ;\ D_{s1},D_{s2}^*\ ;\ B_1,B_2^*\ ;\ B_{s1},B_{s2}^*\\
&s_l=0\text{:}\quad \Lambda_c,\ \Xi_c^A\ ;\Lambda_b,\ \Xi_b^A\\
&s_l=1\text{:}\quad \Sigma_c^{(*)},\ \Xi_c^{S\,(*)},\ \Omega_c^{(*)}\ ;\ \Sigma_b^{(*)},\ \Xi_b^{S\,(*)},\ \Omega_b^{(*)}
\end{aligned}
$$

目前还没有观测到 Ω_b^*。

一般情况下，一个重味强子 H_Q 的质量可以被写成如下形式：

$$m_{H_Q}=m_Q+\bar{\Lambda}+\frac{\Delta m^2}{2m_Q}+\mathcal{O}(1/m_Q^2) \tag{10.101}$$

其中，$\bar{\Lambda}$ 代表拉氏量中不依赖于重味夸克质量和自旋的其他项的贡献，Δm^2 来源于 $1/m_Q$ 展开的一阶修正的拉氏量 ($\mathscr{L}_1$)。

接下来，我们通过一些例子来验证上述公式。

例 1 重味介子 $SU(3)$ 的质量劈裂。

由式 (10.101)，重味介子 B_s 与 B_d 和 D_s 与 D_d 的质量差分别为

$$m_{B_s}-m_{B_d}=\bar{\Lambda}_s-\bar{\Lambda}_d+\mathcal{O}(1/m_b) \tag{10.102}$$

$$m_{D_s}-m_{D_d}=\bar{\Lambda}_s-\bar{\Lambda}_d+\mathcal{O}(1/m_c) \tag{10.103}$$

由此，可以得到

$$m_{B_s}-m_{B_d}=m_{D_s}-m_{D_d}+\mathcal{O}(1/m_Q) \tag{10.104}$$

而这两对介子的质量差的实验结果为

$$m_{B_s}-m_{B_d}=(87.35\pm0.23)\,\text{MeV} \tag{10.105}$$

$$m_{D_s}-m_{D_d}=(98.69\pm0.05)\,\text{MeV} \tag{10.106}$$

可见，重夸克有效理论的结论和实验结果是一致的。

例 2 赝标介子和矢量介子的质量劈裂 (D 和 D^* 或者 B 和 B^*)。

在重味强子 (H_Q) 静止系 $(\boldsymbol{v}=0)$ 中，我们有

$$\Delta m^2=\frac{\langle H_Q\mid -\mathscr{L}_1\mid H_Q\rangle}{\langle H_Q\mid h_v^+h_v\mid H_Q\rangle} \tag{10.107}$$

其中，

$$\mathscr{L}_1=\bar{h}_v(\mathrm{i}D)^2h_v+\frac{g}{2}Z(\mu)\bar{h}_v\sigma_{\mu\nu}G^{\mu\nu}h_v \tag{10.108}$$

定义

$$\langle H_Q\mid \bar{h}_v(\mathrm{i}D)^2h_v\mid H_Q\rangle\equiv 2\lambda_1 \tag{10.109}$$

λ_1 不依赖于 m_Q，是 Λ_{QCD}^2 的量级。在静止系下，$\bar{h}_v\sigma_{\mu\nu}G^{\mu\nu}$ 正比于 $\bar{h}_v\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}h_v$，这一项给出自旋–自旋相互作用，它对应的矩阵元正比于 $\boldsymbol{s}_Q\cdot\boldsymbol{s}_l$。令

$$-16\lambda_2(\boldsymbol{s}_Q\cdot\boldsymbol{s}_l)=\langle H_Q|g\bar{h}_v\sigma_{\mu\nu}G^{\mu\nu}h_v|H_Q\rangle \tag{10.110}$$

其中，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{s}_Q\cdot\boldsymbol{s}_l&=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{s}^2-\boldsymbol{s}_Q^2-\boldsymbol{s}_l^2\right)\\&=\frac{1}{2}\left[s(s+1)-\frac{3}{2}\right]\end{aligned} \tag{10.111}$$

由于 $s=s_Q+s_l=1,0$ $(s_l=1/2)$，我们有

$$\boldsymbol{s}_Q\cdot\boldsymbol{s}_l=\begin{cases}-\dfrac{3}{4}, & s=0\\[2mm] \dfrac{1}{4}, & s=1\end{cases} \tag{10.112}$$

同时

$$\begin{aligned}\langle H_Q\mid h_v^+h_v\mid H_Q\rangle&=\langle H_Q\mid \bar{h}_v\gamma^0h_v\mid H_Q\rangle=\xi(1)\cdot(v+v)^0\\&=2\xi(1)v^0=2\end{aligned} \tag{10.113}$$

将公式 (10.109)，(10.110) 和 (10.113) 代入公式 (10.107) 得到

$$\Delta m^2=-\lambda_1-d_HZ(\mu)\lambda_2(\mu) \tag{10.114}$$

其中，

$$d_H=\begin{cases}3, & \text{对于赝标介子}\\ -1, & \text{对于矢量介子}\end{cases} \tag{10.115}$$

因此有

$$m_{H_Q} = m_Q + \bar{\Lambda} - \frac{\lambda_1}{2m_Q} - \frac{3\lambda_2(\mu)}{2m_Q} Z(\mu) \tag{10.116}$$

$$m_{H_Q^*} = m_Q + \bar{\Lambda} - \frac{\lambda_1}{2m_Q} + \frac{\lambda_2(\mu)}{2m_Q} Z(\mu) \tag{10.117}$$

两式平方后相减得到

$$m_{H_Q^*}^2 - m_{H_Q}^2 = 4\lambda_2(\mu) Z(\mu) + \mathcal{O}(1/m_Q) \tag{10.118}$$

根据相关的实验值

$$m_{B^*}^2 - m_B^2 \simeq 0.49\,\mathrm{GeV}^2 \tag{10.119}$$

$$m_{D^*}^2 - m_D^2 \simeq 0.55\,\mathrm{GeV}^2 \tag{10.120}$$

可以得到

$$\lambda_2(m_b) Z(m_b) \simeq 0.12\,\mathrm{GeV}^2 \tag{10.121}$$

$$\lambda_2(m_c) Z(m_c) \simeq 0.14\,\mathrm{GeV}^2 \tag{10.122}$$

这两个数值接近。

$\lambda_2(\mu) Z(\mu)$ 是与标度 μ 无关的，因此我们有

$$\begin{aligned} m_{H_Q^*} - m_{H_Q} &= \frac{4\lambda_2(\mu) Z(\mu)}{2m_Q} + \mathcal{O}(1/m_Q^2) \\ &\simeq \begin{cases} 50\,\mathrm{MeV}, & \text{对于} B, B^* \\ 160\,\mathrm{MeV}, & \text{对于} D, D^* \end{cases} \end{aligned} \tag{10.123}$$

这与实验值是相符的。

例 3 重味重子和重味介子的质量差。

Λ_b 重子和 B 介子与 Λ_c 重子和 D 介子的质量差表达式分别可以写成：

$$m_{\Lambda_b} - m_B = \bar{\Lambda}_{\mathrm{baryon}} - \bar{\Lambda}_{\mathrm{meson}} + \mathcal{O}(1/m_b) \tag{10.124}$$

$$m_{\Lambda_c} - m_D = \bar{\Lambda}_{\mathrm{baryon}} - \bar{\Lambda}_{\mathrm{meson}} + \mathcal{O}(1/m_c) \tag{10.125}$$

它们的质量差的实验值为

$$m_{\Lambda_b} - m_B = (339.2 \pm 1.4)\,\mathrm{MeV} \tag{10.126}$$

$$m_{\Lambda_c} - m_D = (421.62 \pm 0.04)\,\mathrm{MeV} \tag{10.127}$$

两者接近相等。

10.5　考虑 $1/m_Q$ 高阶修正的重味强子跃迁矩阵元

在 $m_Q \to \infty$ 极限下，重夸克有效理论可以使跃迁矩阵元中相互独立的形状因子数目减少。进一步，重夸克有效理论提供了一套系统的计算方法来考虑 $1/m_Q^n$ 阶的修正。但是在更高的阶次将会有更多的相互独立形状因子被引入。

下面来看看目前重夸克有效理论中对跃迁形状因子已有的研究。目前人们已经在以下各个过程中，利用重夸克有效理论按照 $1/m_Q$ 展开对强子跃迁矩阵元进行了讨论，括号中标注了这种讨论精确到的 $\dfrac{1}{m_Q}$ 阶数。

$$
\begin{aligned}
&B \to D^{(*)}(\text{二阶}), && \Lambda_b \to \Lambda_c(\text{二阶})\\
&\Lambda_b \to \Lambda_c^*(\text{一阶}), && \Sigma_b^{(*)} \to \Sigma_c^{(*)}(\text{一阶})\\
&\Lambda_b \to \Sigma_c^{(*)}(\text{二阶}), && \Lambda_b \to \Lambda_c \pi^a(\text{一阶})\\
&\Lambda_{b,c} \to \Lambda(\text{一阶}), && I^* \to F^*(\text{ 领头阶})
\end{aligned}
$$

其中，$\Lambda_b \to \Lambda_c^*$ 过程中的 Λ_c^* 轻的部分自旋可以为任意的 s_l，I 和 F 分别代表任意初末态。

下面列出精确到 $1/m_Q$ 展开的二阶修正的拉氏量和流算符。

精确到 $1/m_Q$ 展开的二阶修正的拉氏量为

$$
\mathscr{L} = \bar{h}_v \mathrm{i} v \cdot D h_v + \frac{1}{2m_Q}\mathscr{L}_1 + \frac{1}{(2m_Q)^2}\mathscr{L}_2 + \cdots \tag{10.128}
$$

其中，

$$
\mathscr{L}_1 = \bar{h}_v[(\mathrm{i}D)^2 + S_{\alpha\beta}G^{\alpha\beta}]h_v \tag{10.129}
$$

$$
\mathscr{L}_2 = \bar{h}_v(v_\beta \mathrm{i}D_\alpha G^{\alpha\beta})h_v + 2\bar{h}_v S_{\alpha\beta} v_\gamma \mathrm{i}D^\alpha G^{\beta\gamma} h_v \tag{10.130}
$$

其中，$\mathscr{L}_1$ 和 $\mathscr{L}_2$ 都对应树图，$S_{\alpha\beta} = -\dfrac{\mathrm{i}}{2}\sigma_{\alpha\beta}$，$G^{\alpha\beta} = [\mathrm{i}D^\alpha, \mathrm{i}D^\beta]$。

精确到 $1/m_Q$ 展开的二阶修正的树图流算符为

$$
\bar{Q}'\Gamma Q \to \bar{h}'_{v'}\Gamma h_v + \frac{1}{2m_Q}\bar{h}'_{v'}\Gamma \mathrm{i}\not{D} h_v + \frac{1}{2m_{Q'}}\bar{h}'_{v'}(-\mathrm{i}\overleftarrow{\not{D}})\Gamma h_v \tag{10.131}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{4m_Q^2}\bar{h}'_{v'}\Gamma\gamma_\alpha v_\beta G^{\alpha\beta}h_v\\
&-\frac{1}{4m_{Q'}^2}\bar{h}'_{v'}\gamma_\alpha v'_\beta G^{\alpha\beta}\Gamma h_v + \frac{1}{4m_Q m_{Q'}}\bar{h}'_{v'}(-\mathrm{i}\overleftarrow{\not{D}})\Gamma \mathrm{i}\not{D} h_v
\end{aligned} \tag{10.132}
$$

其中式 (10.131) 是 $\dfrac{1}{m_Q}$ 展开到一阶的结果。在这里可以考虑短程效应，但这并不

会引入新的形状因子，这是因为跃迁形状因子仅由轻的自由度所决定。

根据重味强子的质量表达式 (10.101)

$$m_{H_Q} = m_Q + \bar{\Lambda} + \frac{\Delta m^2}{2m_Q} + \cdots \tag{10.133}$$

当 $m_Q \to \infty$ 时，$M = m_Q + \bar{\Lambda}$ 就是粒子态 $|H_Q\rangle_{\mathrm{HQET}}$ 的质量，因此

$$|H_Q(x)\rangle_{\mathrm{HQET}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\bar{\Lambda}v\cdot x}|H_Q(0)\rangle_{\mathrm{HQET}} \tag{10.134}$$

其中 $\bar{\Lambda}$ 决定态矢 $|H_Q\rangle_{\mathrm{HQET}}$ 的相位，是一个未知的参数。

下面以 $\Lambda_b \to \Lambda_c$ 过程为例，讨论按 $1/m_Q$ 展开的一阶修正的强子矩阵元。由于 $s_l = 0$，这是最简单的一种情况。

首先，我们分别给出考虑 $1/m_Q$ 展开的领头阶、一阶修正和二阶修正对强子矩阵元有贡献的算符。

$\mathcal{O}(1)$: $\quad \bar{h}'_{v'}\Gamma h_v$;

$\mathcal{O}(1/m_Q)$: $1/m_Q$ 阶流算符, $\bar{h}'_{v'}\Gamma h_v$ 和 $\mathscr{L}_1$ 的乘积;

$\mathcal{O}(1/m_Q^2)$: $1/m_Q^2$ 阶流算符, $\bar{h}'_{v'}\Gamma h_v$ 和 $\mathscr{L}_2$ 的乘积, $1/m_Q$ 阶流算符和 $\mathscr{L}_1$ 的乘积。

一般来说，在完整的 QCD 理论中，$\Lambda_b \to \Lambda_c$ 过程的强子矩阵元可以被写为如下形式：

$$\langle\Lambda_c(v')|\bar{c}\gamma^\mu b|\Lambda_b(v)\rangle = \bar{u}(v')(F_1\gamma^\mu + F_2 v^\mu + F_3 v'^\mu)u(v) \tag{10.135}$$

$$\langle\Lambda_c(v')|\bar{c}\gamma^\mu\gamma_5 b|\Lambda_b(v)\rangle = \bar{u}(v')(G_1\gamma^\mu + G_2 v^\mu + G_3 v'^\mu)\gamma_5 u(v) \tag{10.136}$$

其中 F_i 和 $G_i\,(i = 1, 2, 3)$ 是 Lorentz 标量函数，$u(v)$ 和 $u(v')$ 分别为 Λ_b 和 Λ_c 的 Dirac 旋量。

接下来，我们利用重夸克有效理论来讨论按 $1/m_Q$ 展开的各阶修正对强子矩阵元的贡献。

先看领头阶的贡献 (精确到 $\mathcal{O}(1)$)。在领头阶的强子矩阵元为

$$\langle\Lambda'(v')\mid\bar{h}'_{v'}\Gamma h_v\mid\Lambda(v)\rangle = \zeta(\omega)\bar{u}(v')\Gamma u(v) \tag{10.137}$$

其中的 $\langle\Lambda'(v')\mid$ 和 $\mid\Lambda(v)\rangle$ 都是重夸克有效理论的本征态。由于在重夸克极限下重夸克和胶子之间无自旋相互作用，所以等号两端的 Γ 完全相同。此外，当 $\omega = v\cdot v' = 1$ 时，即在“零反冲点”，有 $\zeta(1) = 1$ (参见第 10.2 节)。

通过将完整理论和重夸克有效理论中的矩阵元对比，在 $m_Q \to \infty$ 时，

$$F_1 = G_1 = \zeta(\omega), \quad F_i = G_i = 0 \quad (i = 2, 3) \tag{10.138}$$

再来看 $1/m_c$ 和 $1/m_b$ 的一阶修正 (精确到 $\mathcal{O}(1/m_Q)$)。

由本节开始部分的分析，$1/m_Q$ 的一阶修正包括 $1/m_Q$ 阶流算符、$\bar{h}'_{v'}\Gamma h_v$ 和 $\mathscr{L}_1$ 的乘积两部分的贡献。

先来看流算符的贡献。对于流算符 $\dfrac{1}{2m_b}\bar{h}'_{v'}\Gamma \mathrm{i}\not{D}h_v$，它的贡献可以被写成

$$\langle \Lambda'(v') \mid \bar{h}'_{v'}\Gamma\gamma^\alpha \mathrm{i}D_\alpha h_v \mid \Lambda(v)\rangle = \zeta_\alpha(v,\, v')\bar{u}(v')\Gamma\gamma^\alpha u(v) \tag{10.139}$$

其中，$\zeta_\alpha(v,\, v')$ 的一般形式为

$$\zeta_\alpha(v,\, v') = \zeta_+(\omega)(v+v')_\alpha + \zeta_-(\omega)(v-v')_\alpha \tag{10.140}$$

根据运动方程 $\mathrm{i}v\cdot Dh_v = 0$ 可得

$$\langle \Lambda'(v') \mid \bar{h}'_{v'}\Gamma \mathrm{i}v\cdot D h_v \mid \Lambda(v)\rangle = 0 \tag{10.141}$$

由此可得

$$v^\alpha \zeta_\alpha(v,\, v') = 0 \tag{10.142}$$

将此式代入公式 (10.140)，可以得到

$$\zeta_+(\omega+1) = (\omega-1)\zeta_- \tag{10.143}$$

由于

$$\mathrm{i}\partial_\alpha(\bar{h}'_{v'}\Gamma h_v) = \bar{h}'_{v'}\Gamma \mathrm{i}D_\alpha h_v + \bar{h}'_{v'}\mathrm{i}\overleftarrow{D}_\alpha \Gamma h_v \tag{10.144}$$

并且有

$$|\Lambda(x)\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\bar{\Lambda}v\cdot x}|\Lambda(0)\rangle \tag{10.145}$$

我们可以得到

$$\langle \Lambda'(v') \mid \mathrm{i}\partial_\alpha(\bar{h}'_{v'}\Gamma h_v) \mid \Lambda(v)\rangle = \bar{\Lambda}(v-v')_\alpha \zeta(w)\bar{u}(v')\Gamma u(v) \tag{10.146}$$

对 $\langle \Lambda'(v')|\bar{h}'_{v'}\Gamma \mathrm{i}D_\alpha h_v|\Lambda(v)\rangle$ 取共轭并做 $v \longleftrightarrow v'$ 替换，可以得到

$$\langle \Lambda'(v')|\bar{h}'_{v'}\Gamma \mathrm{i}\overleftarrow{D}_\alpha h_v|\Lambda(v)\rangle = [-(v+v')_\alpha \zeta_+^* - (v'-v)_\alpha \zeta_-^*]\bar{u}(v')\Gamma u(v) \tag{10.147}$$

$$\langle \Lambda'(v')|\bar{h}'_{v'}\Gamma \mathrm{i}D_\alpha h_v|\Lambda(v)\rangle = [(v+v')_\alpha \zeta_+ + (v-v')_\alpha \zeta_-]\bar{u}(v')\Gamma u(v) \tag{10.148}$$

将 (10.147) 和 (10.148) 两式相加并代入公式 (10.146)，得到

$$\bar{\Lambda}(v-v')_\alpha \zeta = (\zeta_+ - \zeta_+^*)(v+v')_\alpha + (\zeta_- + \zeta_-^*)(v-v')_\alpha \tag{10.149}$$

从而有 $\zeta_+ = \zeta_+^*$，即 ζ_+ 为实函数。又 $\zeta_+(\omega+1) = \zeta_-(\omega-1)$，因此 ζ_- 也是实函数。我们可以得到 $2\zeta_- = \bar{\Lambda}\zeta$。这样就得到

$$\begin{cases} \zeta_+(\omega) = \dfrac{\bar{\Lambda}}{2} \cdot \dfrac{\omega-1}{\omega+1}\zeta(\omega) \\ \zeta_-(\omega) = \dfrac{\bar{\Lambda}}{2} \cdot \zeta(\omega) \end{cases} \tag{10.150}$$

对于流算符 $\dfrac{1}{2m_c}\bar{h}'_{v'}(-\mathrm{i}\overleftarrow{\not{D}})\Gamma h_v$，由于它的贡献可以通过对流算符 $\dfrac{1}{2m_b}\bar{h}'_{v'}\Gamma \mathrm{i}\not{D} h_v$ 取共轭并做代换 $v \longleftrightarrow v'$ 得到，所以不会引入新的形状因子。

接下来，我们看 $\bar{h}'_{v'}\Gamma h_v$ 和 $\mathscr{L}_1$ 的乘积的贡献。$\mathcal{L}_1$ 中的色磁算符 $\bar{h}_v S_{\alpha\beta}G^{\alpha\beta}h_v$ 对衰变矩阵元无贡献，即

$$\begin{aligned} &\langle \Lambda'(v') \mid T\left\{\bar{h}'_{v'}\Gamma h_v \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x \bar{h}_v S_{\alpha\beta}G^{\alpha\beta}h_v(x)\right\} \mid \Lambda(v)\rangle \\ &= \bar{u}(v')\Gamma\, P_+\, S_{\alpha\beta}\, u(v)\Xi^{\alpha\beta} = 0 \end{aligned} \tag{10.151}$$

这一点可由 $\Xi^{\alpha\beta}$ 的一般表达式直接验证。对于重味夸克的动能项，相应的矩阵元可以被写成

$$\langle \Lambda'(v') \mid T\{\bar{h}'_{v'}\Gamma h_v \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x \bar{h}_v(\mathrm{i}D)^2 h_v\} \mid \Lambda(v)\rangle = A(\omega)\bar{u}(v')\Gamma u(v) \tag{10.152}$$

此时会引入一个新的形状因子 $A(\omega)$。

通过将完整理论的矩阵元和在重夸克有效理论中精确至 $1/m_Q$ 展开的一阶的矩阵元进行对比，可以得到

$$\begin{aligned} F_1(\omega) &= \zeta(\omega) + \left(\frac{1}{2m_b} + \frac{1}{2m_c}\right)\left[\bar{\Lambda}\frac{\omega-1}{\omega+1}\zeta(\omega) + \frac{2\bar{\Lambda}}{\omega+1}\zeta(\omega) + A(\omega)\right] \\ G_1(\omega) &= \zeta(\omega) + \left(\frac{1}{2m_b} + \frac{1}{2m_c}\right)\left[\bar{\Lambda}\frac{\omega-1}{\omega+1}\zeta(\omega) + A(\omega)\right] \\ F_2(\omega) &= G_2(\omega) = \frac{1}{2m_c}\left(-\frac{2\bar{\Lambda}}{\omega+1}\right)\zeta(w) \\ F_3(\omega) &= -G_3(\omega) = \frac{1}{2m_b}\left(-\frac{2\bar{\Lambda}}{\omega+1}\right)\zeta(w) \end{aligned} \tag{10.153}$$

综上所述，精确到 $1/m_Q$ 展开的一阶，对于 $\Lambda_b \to \Lambda_c$ 的衰变矩阵元，我们需要两个形状因子 $\zeta(\omega)$、$A(\omega)$ 和一个未知参数 $\bar{\Lambda}$ 来描述。

由式 (10.153) 可见，到 $1/m_Q$ 展开一阶，$\Lambda_b \to \Lambda_c$ 跃迁矩阵元中的 6 个形状因子都可以由一个来表达出来，比如都可以用 $G_1(\omega)$ 表达出来：

$$\begin{aligned} F_1(\omega) &= G_1(\omega) + \left(\frac{1}{2m_b} + \frac{1}{2m_c}\right)\frac{2\bar{\Lambda}}{\omega+1}G_1(\omega) \\ G_1(\omega) &= G_1(\omega) \\ F_2(\omega) &= G_2(\omega) = \frac{1}{2m_c}\frac{2\bar{\Lambda}}{\omega+1}G_1(\omega) \\ F_3(\omega) &= -G_3(\omega) = \frac{1}{2m_c}\frac{2\bar{\Lambda}}{\omega+1}G_1(\omega) \end{aligned} \tag{10.154}$$

利用同样的方法，我们还可以分析 $1/m_Q$ 展开的二阶修正。但是在这一阶我们需要 12 个跃迁形状因子来描述 $\Lambda_b \to \Lambda_c$ 过程的矩阵元，相互独立的跃迁形状因子的个数并没有减少。

10.6　重夸克有效理论的重整化和辐射修正

前几节我们讨论了重夸克有效理论的 $1/m_Q$ 的领头阶以及高阶修正，本节将讨论如何在重夸克有效理论中系统地引入辐射修正。在 10.3.1 节关于有效理论计算的一般步骤中我们已经指出加入辐射修正时需要将有效理论和完整理论进行对比，即要求由完整理论和有效理论得出的振幅是相等的，即 $A_{\text{full}} = A_{\text{eff}}$，这一要求称作匹配 (matching)，通过这一要求和重整化群演化得到有效理论中的 Wilson 系数。对于有效理论，如四费米子相互作用和重夸克有效理论，这一计算过程具有一般性。当然，为了完成这一计算过程，还需要考虑有效理论的重整化，如有效理论中场和算符的重整化。下面我们先考虑重夸克有效理论的重整化。

10.6.1　重夸克有效理论的重整化

在重夸克有效理论中，关于场及其耦合常数的拉氏量密度 (10.9) 可以展开为

$$\mathscr{L}_{\text{HQEF}} = \mathrm{i}\bar{h}_v^{(0)} v^\mu [\partial_\mu + \mathrm{i}g^{(0)} A_\mu^{(0)}] h_v^{(0)} \tag{10.155}$$

这里的上标 (0) 表示裸量。重整化之后的重夸克场和裸量之间的关系如下：

$$h_v = \frac{1}{\sqrt{Z_h}} h_v^{(0)} \tag{10.156}$$

其中 Z_h 是波函数重整化常数，耦合常数 $g^{(0)}$ 和规范场 $A_\mu^{(0)}$ 也都可由重整化之后的量表达出来。在背景场 (background field) 规范中，gA_μ 是不需要重整化的，所以有关系式 $g^{(0)} A_\mu^{(0)} = g\mu^\epsilon A_\mu$，其中 $D = 4 - 2\epsilon$ 表示时空维数，μ 是维数正规化中的

一个标度参数。用重整化的量表示重夸克有效理论的拉氏量为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\mathrm{HQEF}} &= \mathrm{i}Z_h\bar{h}_v v^\mu(\partial_\mu + \mathrm{i}g\mu^\epsilon A_\mu)h_v \\ &= \mathrm{i}\bar{h}_v v^\mu(\partial_\mu + \mathrm{i}g\mu^\epsilon A_\mu)h_v + \text{抵消项}\end{aligned} \tag{10.157}$$

方程 (10.157) 是在 $D = 4 - 2\epsilon$ 时空中的。

由于重夸克有效理论中重夸克圈会消失，所以重夸克对轻夸克场 Z_q、胶子场 Z_A 和强耦合常数 Z_g 这些重整化参数没有影响。

Z_h 可以通过研究重夸克传播子的单圈修正来计算 (图 10.3)，取 Feynman 规范，该图为

$$\begin{aligned}&\int \frac{\mathrm{d}^D q}{(2\pi)^D}(-\mathrm{i}gT^a\mu^\epsilon)v_\lambda \frac{\mathrm{i}}{(q+p)\cdot v}(-\mathrm{i}gT^a\mu^\epsilon)v^\lambda \frac{(-\mathrm{i})}{q^2} \\ &= -\frac{4}{3}g^2\mu^{2\epsilon}\int \frac{\mathrm{d}^D q}{(2\pi)^D}\frac{1}{q^2 v\cdot(p+q)}\end{aligned} \tag{10.158}$$

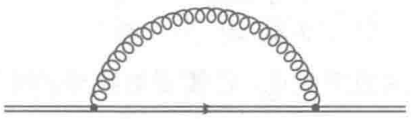


图 10.3 胶子对重夸克传播子的单圈修正

其中 p 是外线残留的动量，q 是圈中胶子的动量，对于 $SU(3)$ 群，我们在上式利用了等式 $T^aT^a = 4/3$。按照 $v\cdot p$ 展开，为了避免红外发散引入胶子质量 m (在最后再取 $m \to 0$)，则式 (10.158) 变为

$$-\frac{4}{3}g^2\mu^{2\epsilon}\int \frac{\mathrm{d}^D q}{(2\pi)^D}\frac{1}{(q^2-m^2)[v\cdot(q+p)]} \tag{10.159}$$

分母的计算可以利用下面的式子：

$$\frac{1}{a^r b^s} = 2^s\frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)}\int_0^\infty \mathrm{d}\lambda \frac{\lambda^{s-1}}{(a+2b\lambda)^{r+s}} \tag{10.160}$$

因此 (10.159) 可以写成

$$-\frac{8}{3}g^2\mu^{2\epsilon}\int_0^\infty \mathrm{d}\lambda\int \frac{\mathrm{d}^D q}{(2\pi)^D}\frac{1}{[q^2-m^2+2\lambda v\cdot(q+p)]^2} \tag{10.161}$$

对 q 做平移 $q \to q - \lambda v$，上式变为

$$-\frac{8}{3}g^2\mu^{2\epsilon}\int_0^\infty \mathrm{d}\lambda\int \frac{\mathrm{d}^D q}{(2\pi)^D}\frac{1}{[q^2-m^2-\lambda^2+2\lambda v\cdot p]^2} \tag{10.162}$$

计算式 (10.162) 得到

$$-\frac{8}{3}g^2\mu^{2\epsilon}\int_0^\infty \mathrm{d}\lambda \frac{\mathrm{i}}{(4\pi)^{2-\epsilon}}\Gamma(\epsilon)[\lambda^2 - 2\lambda v\cdot p + m^2]^{-\epsilon} \tag{10.163}$$

最后经过推导式 (10.163) 变为

$$-\mathrm{i}\frac{g^2}{6\pi^2\epsilon}v\cdot p + \text{有限项} \tag{10.164}$$

抵消项给出的树图贡献项如下：

$$\mathrm{i}v\cdot p(Z_h - 1) \tag{10.165}$$

对式 (10.164) 和式 (10.165) 求和，在 $\epsilon \to 0$ 时有限，因而在 $\overline{\mathrm{MS}}$ 方案中有

$$Z_h = 1 + \frac{g^2}{6\pi^2\epsilon} \tag{10.166}$$

因而重夸克场的反常量纲为

$$\gamma_h = \frac{1}{2}\frac{\mu}{Z_h}\frac{\mathrm{d}Z_h}{\mathrm{d}\mu} = -\frac{g^2}{6\pi^2} \tag{10.167}$$

对复合算符，除了考虑波函数重整化，还需要做额外的减除，考虑重轻裸算符

$$O_\Gamma^{(0)} = \bar{q}^{(0)}\Gamma h_v^{(0)} = \sqrt{Z_q Z_h}\bar{q}\Gamma h_v \tag{10.168}$$

其中 Γ 是任意 Dirac 矩阵，这时，重整化的算符可被定义为

$$\begin{aligned} O_\Gamma &= \frac{1}{Z_O}O_\Gamma^{(0)} = \frac{\sqrt{Z_q Z_h}}{Z_O}\bar{q}\Gamma h_v \\ &= \bar{q}\Gamma h_\nu + \text{抵消项} \end{aligned} \tag{10.169}$$

式中额外的重整化因子 Z_O 可以通过计算含有 O_Γ 的 Green 函数定出。例如，Z_O 可以通过计算含有 q，$\bar{h}_v$ 和 O_Γ 的单粒子不可约的 Green 函数来确定。计算中，式 (10.169) 中抵消项的贡献将为

$$\left(\frac{\sqrt{Z_q Z_h}}{Z_O} - 1\right)\Gamma \tag{10.170}$$

此外，图 10.4 中的单圈图也将贡献一个发散项，如果忽略外线动量的影响 (考虑算符 O_Γ 不含导数的情形)，并选用 Feynman 规范，则此图的贡献为

$$\int \frac{\mathrm{d}^D q}{(2\pi)^D}(-\mathrm{i}g\mu^\epsilon T^a)\gamma^\lambda \frac{\mathrm{i}\not{q}}{q^2}\Gamma\frac{\mathrm{i}}{v\cdot q}(-\mathrm{i}g\mu^\epsilon T^a)v_\lambda\frac{(-\mathrm{i})}{q^2} = -\mathrm{i}\frac{4}{3}g^2\mu^{2\epsilon}\int\frac{\mathrm{d}^D q}{(2\pi)^D}\frac{\not{v}\not{q}\Gamma}{q^4 v\cdot q} \tag{10.171}$$

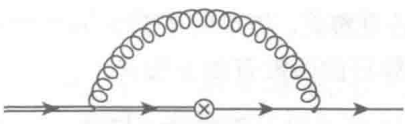


图 10.4 重夸克和轻夸克算符 $\bar{q}\Gamma h_v$ 的单圈重整化。双线代表重夸克，单线代表轻夸克，插入算符用 $\otimes$ 表示

再利用 Feynman 参数积分式 (10.160)，并引入一个胶子质量 m 以消除红外发散，在做变量替换 $q \to q - \lambda v$ 后，上式变为

$$-\mathrm{i}\frac{16}{3}g^2\mu^{2\epsilon}\int \mathrm{d}\lambda \int \frac{\mathrm{d}^D q}{(2\pi)^D}\frac{\not{v}(\not{q}-\lambda\not{v})\Gamma}{(q^2-\lambda^2-m^2)^3} \tag{10.172}$$

也就是说，图 10.4 的贡献包含发散项

$$\frac{g^2\Gamma}{12\pi^2\epsilon} \tag{10.173}$$

以及在 $\epsilon \to 0$ 时不发散的项。由于在 $\epsilon \to 0$ 时式 (10.170) 与式 (10.173) 之和必须是有限的，所以，利用式 (10.166) 中 $\sqrt{Z_h}$ 的表达式，并利用 $Z_q = 1 - \dfrac{g^2}{24\pi^2\epsilon}$，可以得到

$$Z_O = 1 + \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} \tag{10.174}$$

以及反常量纲

$$\gamma_O = -\frac{g^2}{4\pi^2} \tag{10.175}$$

注意，O_Γ 的重整化结果与矩阵 Γ 的具体形式无关，这是重夸克自旋对称性和轻夸克手征对称性的结果。

10.6.2 重夸克有效理论和 QCD 的匹配

10.6.1 节以重夸克场 h_v 的重整化和流算符 $\bar{q}\Gamma h_v$ 的重整化为例说明了在重夸克有效理论中如何计算场和算符的重整化。在利用重夸克有效理论计算 QCD 中的物理量时需要在重夸克有效理论算符和 QCD 算符之间建立联系，这可以通过之前提到的匹配来做到。具体来说，我们可以在同一个标度 μ 下计算 QCD 算符和重夸克有效理论算符在夸克场之间的矩阵元，再比较得到的两个矩阵元。由于这两个矩阵元是在微扰计算下得到的，它们可能会有红外发散。但由于重夸克有效理论可以正确地反映 QCD 的低能动力学效应，两个矩阵元中的红外发散在匹配过程中会消掉。还是以重夸克到轻夸克衰变矢量流为例，在 QCD 中这一流为

$$V^\lambda = \bar{q}\gamma^\lambda Q \tag{10.176}$$

在 QCD 中，这一算符不必重整化。如果取重整化标度 $\mu \approx m_Q$，那么在 QCD 和重夸克有效理论中，这一流算符的匹配有如下形式：

$$V^\lambda = C_1^{(V)}\left[\frac{m_Q}{\mu}, \alpha_s(\mu)\right]\bar{q}\gamma^\lambda h_v + C_2^{(V)}\left[\frac{m_Q}{\mu}, \alpha_s(\mu)\right]\bar{q}v^\lambda h_v \tag{10.177}$$

上式右端应包含所有量纲为 3 且具有 V^λ 量子数的算符。可以证明，只有两个独立的算符 $\bar{q}\gamma^\lambda h_v$ 和 $\bar{q}v^\lambda h_v$ 出现，其余量纲为 3 的算符都可以写成这两个算符的线性组合。在该式中，我们忽略了 $1/m_Q$ 高阶项，它们可以系统地加进来。

在树图阶，即 α_s 最低阶，Q 可被 h_v 代替，因此在 $\mu = m_Q$ 的匹配给出

$$\begin{aligned} C_1^{(V)}[1, \alpha_s(m_Q)] &= 1 + \mathcal{O}[\alpha_s(m_Q)] \\ C_2^{(V)}[1, \alpha_s(m_Q)] &= \mathcal{O}[\alpha_s(m_Q)] \end{aligned} \tag{10.178}$$

在一般情形下，一个 QCD 中的算符 O_{QCD}，其重整化标度为 m_Q，可以写成重夸克有效理论中一系列在重整化标度 μ 的算符 $O_i(\mu)(i = 1, 2, 3, \cdots)$ 的线性组合

$$O_{\mathrm{QCD}}(m_Q) = \sum_i C_i\left[\frac{m_Q}{\mu}, \alpha_s(\mu)\right] O_i(\mu) \tag{10.179}$$

其中，$C_i[1, \alpha_s(m_Q)]$ 可通过在 $\mu = m_Q$ 微扰计算并应用匹配关系得到。这与四费米子有效理论中的式 (10.62) 很类似。在 $\mu < m_Q$ 时，可以利用 HQET 中的重整化群演化得到 C_i 的表达式，正如四费米子有效理论中的式 (10.65) 一样 (只须将 m_W 代换成 m_Q)。

考虑一种特殊的情况，即没有算符混合，这时反常量纲矩阵 γ 变成了一个数，做如下微扰展开：

$$\begin{aligned} \gamma(g) &= \gamma_0\frac{g^2}{4\pi} + \gamma_1(\frac{g^2}{4\pi})^2 + \cdots \\ \beta(g) &= -\beta_0\frac{g^3}{4\pi} - \beta_1\frac{g^5}{(4\pi)^2} + \cdots \end{aligned} \tag{10.180}$$

则式 (10.65) 中演化矩阵的解为

$$U(\mu, m_Q) = \left(\frac{\alpha_s(m_Q)}{\alpha_s(\mu)}\right)^{\frac{\gamma_0}{2\beta_0}}\left(1 + \frac{\alpha_s(m_Q) - \alpha_s(\mu)}{4\pi}S + \cdots\right) \tag{10.181}$$

其中，$S = \dfrac{\gamma_1}{2\beta_0} - \dfrac{\gamma_0\beta_1}{2\beta_0^2}$。该公式对应所谓重整化群改进的微扰论次领头阶的结果。在这一近似下，跑动耦合常数将精确到两圈图，领头对数 $(\alpha_s \ln\dfrac{m_Q}{\mu})^n$ 和次领头对数 $\alpha_s(\alpha_s \ln\dfrac{m_Q}{\mu})^n$ 被求和到无穷阶。这需要计算两圈的反常量纲系数 γ_1。

10.6.3 几个关于算符辐射修正的例子

这一小节，我们通过几个例子说明如何考虑辐射修正。首先考虑 10.6.2 节中公式 (10.176) 中的重夸克到轻夸克衰变流算符的辐射修正，在树图下这一算符的匹配条件由式 (10.178) 给出。

此结果的单圈修正，可以通过分别计算方程 (10.177) 左右两端算符的矩阵元来确定：先在 QCD 的完整理论中计算方程左端算符的某个矩阵元 (只算 α_s 阶)，再在 HQET 中计算方程右端算符的同一个矩阵元，然后令二者相等。构造矩阵元的一个方便的办法是，选一个在壳的 4- 动量为 $p = m_Q v$ 的重夸克作为初态，并选一个在壳的 4- 动量为 0 的无质量夸克作为末态，然而，这样的态并不是物理的态，因为强相互作用是禁闭的。不过，由于方程 (10.177) 是在算符层次成立的，所以，这些非物理的态也可以被用来确定“匹配系数” $C_1^{(V)}$ 和 $C_2^{(V)}$。

在 QCD 中，α_s 阶的矩阵元包含单圈的顶角修正，以及重、轻夸克场传播子的单圈修正。在极点 $p^2 = m_Q^2$ 和 $p^2 = 0$ 附近，重夸克和轻夸克传播子分别具有“解析部分 $+ \dfrac{\mathrm{i}R^{(Q)}}{\not{p} - m_Q}$”的形式和“解析部分 $+ \dfrac{\mathrm{i}R^{(q)}}{\not{p}}$”的形式。留数 $R^{(Q)}$ 和 $R^{(q)}$ 具有微扰展开形式

$$R^{(Q)} = 1 + R_1^{(Q)}\alpha_s(\mu) + \cdots \tag{10.182}$$

和

$$R^{(q)} = 1 + R_1^{(q)}\alpha_s(\mu) + \cdots \tag{10.183}$$

在 QCD 完整理论中，我们所求解的矩阵元可以利用 LSZ 约化公式

$$\langle q(0,s')|V^\lambda|Q(p,s)\rangle = [R^{(Q)}R^{(q)}]^{1/2}\bar{u}(0,s')[\gamma^\lambda + V_1^\lambda\alpha_s(\mu)]u(p,s) \tag{10.184}$$

来得到。式中 γ^λ 是树图阶顶角，$\alpha_s V_1^\lambda$ 是图 10.5 中的顶角的单圈修正，它具有展开形式 ($p = m_Q v$)

$$V_1^\lambda = V_1^{(1)}\gamma^\lambda + V_1^{(2)}v^\lambda \tag{10.185}$$

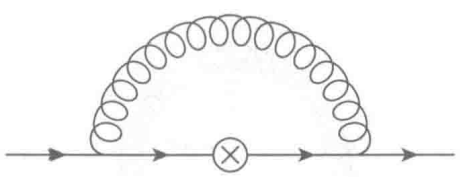


图 10.5 插入了费米子双线性型复合场算符 (如 $\bar{\psi}\psi$) 的单圈图 ($\otimes$ 表示插入算符)

此式将在式 (10.194) 中给出。

在 HQET 中，将有与 QCD 中类似的矩阵元表达式

$$\langle q(0,s')|\bar{q}\Gamma h_v|Q(v,s)\rangle = [R^{(h)}R^{(q)}]^{1/2}\bar{u}(0,s')[1+V_1^{\text{eff}}\alpha_s(\mu)]\Gamma u(v,s) \tag{10.186}$$

其中 $R^{(h)}$ 是重夸克传播子在极点附近的留数，传播子形式为 $(\mathrm{i}R^{(h)}/v\cdot p+$ 解析部分)，$\alpha_s V_1^{\text{eff}}\Gamma$ 是图 10.4 的单圈顶点修正，而且不依赖于算符 $\bar{q}\Gamma Q_v$ 中的 Γ 矩阵的结构。

比较公式 (10.184)~(10.186) 和 (10.177) 得到

$$\begin{aligned} C_1^{(V)}\left[\frac{m_Q}{\mu},\alpha_s(\mu)\right] &= 1+\left\{\frac{1}{2}[R_1^{(Q)}-R_1^{(h)}]+V_1^{(1)}-V_1^{\text{eff}}\right\}\alpha_s(\mu)+\cdots \\ C_2^{(V)}\left[\frac{m_Q}{\mu},\alpha_s(\mu)\right] &= V_1^{(2)}\alpha_s(\mu)+\cdots \end{aligned} \tag{10.187}$$

其中省略号部分代表 $\alpha_s(\mu)$ 的高阶项。$R_1^{(q)}$ 不出现在式 (10.187) 中，这是因为它对于 HQET 和完全 QCD 计算的矩阵元是一样的。

我们利用维数正规化处理红外发散和紫外发散。所有的图在 $4-2\epsilon$ 维中计算，在计算的最后取极限 $\epsilon\to 0$。这些图形由于红外发散和紫外发散会出现 $1/\epsilon$ 的极点，其中只有来自紫外发散的 $1/\epsilon$ 项被抵消项消掉。

首先讨论在 QCD 中的相应计算。在完全 QCD 理论中重整化的重夸克场的两点函数在 α_s 阶有两部分贡献，一部分来自图 10.6 中的单圈图，另一部分来自抵消项的树图矩阵元，这一抵消项消除了 $1/\epsilon$ 的紫外发散。取 Feynman 规范，图 10.6 的单圈贡献给出夸克自能项 Σ，

$$\begin{aligned} -\mathrm{i}\Sigma &= \int\frac{\mathrm{d}^D q}{(2\pi)^D}(-\mathrm{i}gT^a\mu^\epsilon)\gamma^\alpha\frac{\mathrm{i}(\not{q}+\not{p}+m_Q)}{[(q+p)^2-m_Q^2]}(-\mathrm{i}gT^a\mu^\epsilon)\gamma_\alpha\frac{(-\mathrm{i})}{q^2} \\ &= -g^2\left(\frac{4}{3}\right)\mu^{2\epsilon}\int\frac{\mathrm{d}^D q}{(2\pi)^D}\frac{\gamma^\alpha(\not{p}+\not{q})\gamma_\alpha+Dm_Q}{q^2[(q+p)^2-m_Q^2]} \end{aligned} \tag{10.188}$$

自能项有下面的形式

$$\Sigma(p) = A(p^2)m_Q + B(p^2)\not{p} \tag{10.189}$$

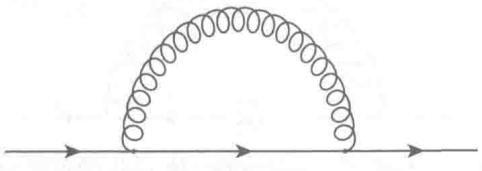


图 10.6　夸克传播子的单圈修正

由于完全传播子为 $\mathrm{i}/[\not{p}-m_Q-\Sigma(p)]$, 可以直接得到其在极点处的留数是

$$R_1^{(Q)}\alpha_s(\mu)=B(m_Q^2)+2m_Q^2\left.\frac{\mathrm{d}(A+B)}{\mathrm{d}p^2}\right|_{p^2=m_Q^2} \tag{10.190}$$

由式 (10.188)，在 $\epsilon=0$ 附近展开可以得到

$$R_1\alpha_s=-\frac{g^2}{12\pi^2}\left(\frac{3}{\epsilon}+4+3\ln\frac{\mu^2}{m_Q^2}\right) \tag{10.191}$$

其中的 $1/\epsilon$ 项包含了红外发散和紫外发散。抵消项的贡献是$-\mathrm{i}\Sigma_{ct}=\mathrm{i}(Z_q-1)\not{p}-\mathrm{i}(Z_{m_Q}-1)m_Q$，即 $A_{ct}=(Z_{m_Q}-1)$，$B_{ct}=-(Z_q-1)$，其中$Z_q=1-\dfrac{g^2}{12\pi^2\epsilon}$，给出了 $R_{1,ct}\alpha_s$ 的抵消项的贡献 $-(Z_q-1)$。把这一项与 $R_1\alpha_s$ 相加得到最后的结果

$$R_1^{(Q)}\alpha_s=-\frac{g^2}{12\pi^2}\left(\frac{2}{\epsilon}+4+3\ln\frac{\mu^2}{m_Q^2}\right) \tag{10.192}$$

在式 (10.192) 中的 $1/\epsilon$ 发散仅代表红外发散。

下面在图 10.5 中我们考虑对于完全 QCD 中的顶点的 α_s 阶的贡献，在 Feynman 规范下这个图给出

$$\int\frac{\mathrm{d}^Dq}{(2\pi)^D}(-\mathrm{i}g\mu^\epsilon T^a)\gamma_\alpha\frac{\mathrm{i}\not{q}}{q^2}\gamma^\lambda\mathrm{i}\frac{(\not{p}+\not{q}+m_Q)}{\left[(p+q)^2-m_Q^2\right]}(-\mathrm{i}g\mu^\epsilon T^a)\gamma^\alpha\frac{(-\mathrm{i})}{q^2} \tag{10.193}$$

对 ϵ 进行展开，由式 (10.193) 得到

$$\frac{g^2}{12\pi^2}\left(-2\gamma^\lambda+2v^\lambda\right) \tag{10.194}$$

在 QCD 中上式抵消项的贡献由流 $\bar{q}\gamma^\lambda Q$ 的重整化决定。由于这是一个部分守恒流 (即在质量消失的极限下守恒)，它不需要重整化。剩余的抵消项对 $V_1^{(1)}\alpha_s$ 的贡献来自于 QCD 波函数重整化 $Z_q-1=-\alpha_s/3\pi\epsilon$ 。将它加入公式 (10.194) 得到 (对比公式 (10.185))

$$\begin{aligned}V_1^{(1)}\alpha_s&=-\frac{\alpha_s}{3\pi}\left(\frac{1}{\epsilon}+2\right)\\V_1^{(2)}\alpha_s&=\frac{2\alpha_s}{3\pi}\end{aligned} \tag{10.195}$$

下面在重夸克有效理论中进行相关计算。在 Feynman 规范下 HQET 重夸克自能可以从 Feynman 图 10.3 得到

$$-\mathrm{i}\Sigma(p)=-\frac{4}{3}g^2\mu^{2\epsilon}\int\frac{\mathrm{d}^Dq}{(2\pi)^D}\frac{1}{q^2v\cdot(p+q)} \tag{10.196}$$

而重夸克传播子在极点处的留数是

$$R_1^{(h)}\alpha_s = v^\alpha \frac{\partial \Sigma}{\partial p^\alpha}\bigg|_{p\cdot v=0} \tag{10.197}$$

通过计算式 (10.196), 我们可发现它对 $R_1^{(h)}$ 的贡献为 0。对 $R_1^{(h)}$ 的唯一的贡献是 $-(Z_h-1)$，它来自式 (10.165) 的抵消项，从而有

$$R_1^{(h)}\alpha_s = R_{1,ct}^{(h)}\alpha_s = -\frac{2\alpha_s}{3\pi\epsilon} \tag{10.198}$$

在 HQET 中对顶角的计算同样比在 QCD 中要简单些。图 10.4 中的 Feynman 图给出

$$-\mathrm{i}g^2\mu^{2\epsilon}\left(\frac{4}{3}\right)\int\frac{\mathrm{d}^D q}{(2\pi)^D}\frac{\not{v}\not{q}\Gamma}{(q^2)^2 v\cdot q} \tag{10.199}$$

它在维数正规化方案中等于 0，所以，对顶角的唯一贡献来自于抵消项，根据式 (10.173)，有

$$V_1^{\mathrm{eff}}\alpha_s = -\frac{\alpha_s}{3\pi\epsilon} \tag{10.200}$$

综合式 (10.187)、(10.192)、(10.195)、(10.198) 和 (10.200)，可以得到

$$\begin{aligned} C_1^{(V)}\left[\frac{m_Q}{\mu},\alpha_s(\mu)\right] &= 1+\frac{\alpha_s(\mu)}{\pi}\left[\ln\left(\frac{m_Q}{\mu}\right)-\frac{4}{3}\right] \\ [3mm]C_2^{(V)}\left[\frac{m_Q}{\mu},\alpha_s(\mu)\right] &= \frac{2}{3}\frac{\alpha_s(\mu)}{\pi} \end{aligned} \tag{10.201}$$

其中，所有 $1/\epsilon$ 的红外发散都已经在匹配条件中相互抵消。要注意的是，在 $C_1^{(V)}$ 中，有一 (m_Q/μ) 的对数项，这就是在 $C_i^{(V)}$ $(i=1,2)$ 的初始条件中取 $\mu\approx m_Q$ 的原因。换句话来说，如果取 μ 与 m_Q 差别很大，那么，大的对数值将使得我们无法对 $C_i^{(V)}$ 的初值做微扰计算。系数 $C_i^{(V)}$ 对 μ 的依赖与 HQET 算符 $\bar{q}\gamma^\lambda h_v$ 的反常量纲有关。这里的 $\mu\dfrac{\mathrm{d}C_1^{(V)}}{\mathrm{d}\mu}$ 即为式 (10.175) 中的反常量纲 γ_O，从而 $C_1^{(V)}$ 可被解出，见式 (10.181)。

下面讨论的例子是重夸克 $\to$ 重夸克矢量流 $V^\mu=\bar{Q}\gamma^\mu Q$。这个流算符在如 e^+e^- 对撞产生重夸克对的物理过程中有着唯象上的意义，它的 Wilson 系数是重夸克速度转移标量 $\omega=v\cdot v'$ 的函数。与公式 (10.177) 类似，在 QCD 与 HQET 中，该流算符的匹配形式如下 (忽略 $1/m_Q$ 的高阶项)

$$V^\mu = \sum_{i=1}^{3} C_i(\omega,\mu)J_i \tag{10.202}$$

其中包含有三个独立的重整化算符

$$J_i = Z_{ij}^{-1} J_j^{\text{bare}} = Z_{ij}^{-1} Z_h \bar{h}_{v'} \Gamma_j h_v \tag{10.203}$$

$$\Gamma_1 = \gamma^\mu, \quad \Gamma_2 = v^\mu, \quad \Gamma_3 = v'^\mu \tag{10.204}$$

在 α_s 阶，短程系数可以比较图 10.7 的两个图来得到，当然还要考虑到波函数的重整化。如果将振幅形式写为 $\langle V^\mu \rangle = \bar{u}_Q \Gamma^\mu u_Q$，那么，在树图阶，将有 $\Gamma^\mu = \gamma^\mu$。经过一系列繁琐的计算，可以发现，在完整理论中，单圈的顶角函数是没有紫外发散的，并且

$$\Gamma^\mu_{\text{QCD}} = \left(1 + \frac{2\alpha_s}{3\pi}\{-[\omega r(\omega) - 1]\ln(m_Q^2/m^2) + F(\omega)\}\right)\gamma^\mu - \frac{\alpha_s}{3\pi} r(\omega)(v^\mu + v'^\mu) \tag{10.205}$$

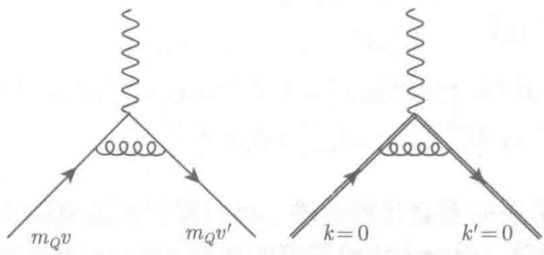


图 10.7 对味道守恒的重夸克流的“匹配”计算中出现的顶角修正图，流算符改变了重夸克的速度

注意，式中不含重整化标度 μ，m 是为了处理红外发散而引入的一个胶子质量，函数 $r(\omega)$ 定义为

$$r(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - 1}} \ln(\omega + \sqrt{\omega^2 - 1}) \tag{10.206}$$

而函数 $F(\omega)$ 定义为

$$\begin{aligned} F(\omega) = & \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - 1}} \left[2L_2(-\omega_-) + \frac{1}{6}\pi^2 + \frac{1}{2}(\omega^2 - 1) r^2(\omega)\right] \\ & - \omega r(\omega) \ln[2(\omega + 1)] + \frac{3}{2}(\omega + 1) r(\omega) - 2 \end{aligned} \tag{10.207}$$

其中 $\omega_- = \omega - \sqrt{\omega^2 - 1}$，并且

$$L_2(x) = -\int_0^x \mathrm{d}t \frac{\ln(1 - t)}{t} \tag{10.208}$$

由于在重夸克有效理论中，重夸克与胶子的耦合常数不含 γ 矩阵，所以，至微扰的所有阶，量纲为 3 的算符 J_i 都是相乘性重整化，并且与其 Dirac 结构无关。

对于任意的裸的流算符，其单圈矩阵元均为

$$\{1-(2\alpha_s/3\pi)[\omega r(\omega)-1][(1/\epsilon)+\ln(\mu^2/m^2)]\}\Gamma_i \tag{10.209}$$

由于算符的重整化矩阵 $\hat{Z}$ 正比于单位矩阵，我们可以简单地用 Z 来代替，在 $\overline{\text{MS}}$ 方案中，其值为

$$Z=1-(2\alpha_s/3\pi\epsilon)[\omega r(\omega)-1] \tag{10.210}$$

在 HQET 中，重整化的顶角函数为

$$\Gamma^{\mu}_{\text{HQET}}=\left(1-\frac{2\alpha_s}{3\pi}[\omega r(\omega)-1]\ln(\mu^2/m^2)\right)\sum_{i=1}^{3}C_i(\omega,\mu)\Gamma_i \tag{10.211}$$

由于对 m 的依赖恰好与式 (10.205) 相匹配，所以，短距离系数的单圈形式与红外正规化参数无关，并且有

$$\begin{aligned}C_1(\omega,\mu)&=1-(2\alpha_s/3\pi)\{[\omega r(\omega)-1]\ln(m_Q^2/\mu^2)-F(\omega)\}\\ C_2(\omega,\mu)&=C_3(\omega,\mu)=-(\alpha_s/3\pi)r(\omega)\end{aligned} \tag{10.212}$$

为了考虑单圈结果的重整化群改进，我们需要知道双线性重夸克流的反常量纲。它正比于单位矩阵，由一个依赖速度的系数 $\gamma_0^{hh}(\omega)$ 来表示。

到一圈图，式 (10.180) 中对应的 γ_0 为

$$\gamma_0^{hh}(\omega)=\frac{4}{3\pi}[\omega r(\omega)-1] \tag{10.213}$$

相应的演化方程由公式 (10.181) 给出。在对数领头阶

$$U(\mu,m_Q)=\left(\frac{\alpha_s(m_Q)}{\alpha_s(\mu)}\right)^{a(\omega)} \tag{10.214}$$

其中 $a(\omega)=\dfrac{8}{27}[\omega r(\omega)-1]$(取轻夸克味道数为 3)。

下面简单介绍一下公式 (10.88) 中 HQET 拉氏量的 $1/m_Q$ 阶的辐射修正。式 (10.88) 中包含两项，其中，动能项不需要重整化，这可以由“重新参数化不变性质”来证明，因而只有色–磁算符需要重整化。通过类似于前面两个例子中 QCD 与 HQET 的匹配过程，并考虑到色磁算符的重整化群演化，可以得到 (详细过程见文献 [4])

$$\mathscr{L}_1=\frac{1}{2m_Q}\bar{h}_v(\mathrm{i}D)^2h_v+\frac{g}{4m_Q}Z(m_Q,\mu)\bar{h}_v\sigma_{\mu\nu}G^{\mu\nu}h_v \tag{10.215}$$

其中，在对数近似领头阶可以证明

$$Z(m_Q,\mu)=\left[\frac{\alpha_s(m_Q)}{\alpha_s(\mu)}\right]^{\frac{9}{33-2n_f}} \tag{10.216}$$

其中 n_f 为夸克的味道数。

通过本章的讨论，可以发现重夸克有效理论在处理重味强子的问题时具有以下优点：

重夸克有效理论是 QCD 在 $m_Q \gg k \sim O(\Lambda_{\rm QCD})$ 能区内的一种等效近似 (k 是与重夸克作用的胶子的典型动量)；

在 $m_Q \to \infty$(即 $m_Q \gg \Lambda_{\rm QCD}$) 的极限下，重夸克有效理论具有 QCD 中不存在的 $SU(2)_f \times SU(2)_s$ 对称性，这些对称性使得重味强子内部的动力学与它包含的重味夸克的量子数无关；

在 $m_Q \to \infty$ 极限下，描述重味强子之间的强子跃迁矩阵元中相互独立的形状因子数目大大减少 (可通过 Isgur-Wise 函数来描述)；

在 $m_Q \to \infty$ 极限下，强子态不仅可以通过强子的自旋来分类，还可以通过强子内部轻的自由度的自旋来分类，这是由于此时它是一个好量子数；

重夸克有效理论中，有一套系统的方法将 $1/m_Q$ 各阶修正考虑进来 (不过它们会破坏 $SU(2)_f \times SU(2)_s$ 对称性)；

除了 $1/m_Q$ 高阶修正，在重夸克有效理论中还可以系统地加入 QCD 短程辐射修正，在这一过程中需要应用完全 QCD 理论和重夸克有效理论的匹配，并考虑重夸克有效理论的重整化、算符的重整化，以及重整化群演化。

虽然重夸克有效理论有许多优点，但是它也有其局限性，比如：

重夸克有效理论并不能彻底解决非微扰的 QCD 动力学问题，为了能给出唯象上的预言，通常还需要结合其他的非微扰 QCD 方法；

通常如果在重夸克有效理论中考虑按 $1/m_Q$ 展开的较高阶的贡献，将不得不引入更多的跃迁形状因子，相互独立的跃迁形状因子数目有可能不会减少。

参考文献

[1] Isgur N, Wise M B. Phys. Lett. B, 1989, 232: 113.

[2] Isgur N, Wise M B. Phys. Lett. B, 1990, 237: 527.

[3] Georgi H. Phys. Lett. B, 1991, 264: 447.

[4] Neubert M. Phys. Rep., 1994, 245: 259.

[5] Wise M B. hep-ph/9805468.

[6] Manohar A V, Wise M B. Heavy Quark Physics. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

第 11 章　重味物理和 QCD

重味物理主要是指研究粲夸克和底夸克的产生、衰变以及相关性质的学科，是粒子物理最重要的研究领域之一。实验上研究粲味物理已经进入了精确测量的阶段，研究粲物理的主要实验装置有位于美国康奈尔大学已经关闭的 CLEO-c 和基于北京正负电子对撞机 (BEPC) 的北京谱仪 (BES、BESII、BESIII)。为了精确测量 CKM(Cabibbo-Kobayashi-Maskawa) 矩阵[1] 参数和底夸克性质，主要有三个实验组专门从事底夸克实验，分别是位于日本 KEK 的 Belle，美国斯坦福大学的 BaBar 和西欧核子中心的 LHC-b 实验组。其中，Belle 和 BaBar 完成历史使命后分别在 2010 年和 2008 年关闭，Belle 即将于 2018 年升级为 Belle-II 实验。另外，规划中的环形正负电子对撞机和超级 Z 工厂都可以做高精度的 B 物理实验。

粒子物理的标准模型近年来取得了巨大的成功，但是对许多自然现象仍然无法给予完美解释，其中之一是宇宙中正反物质数目不对称需要比较大的电荷–宇称破坏来解释。在粒子物理标准模型中，电荷–宇称破坏所需要的弱相位来自于夸克混合矩阵——CKM 矩阵。由于 CKM 矩阵中允许弱相位的存在，它们在电荷–宇称 (CP) 变换下是变号的；衰变过程中同时存在 CP 变换下不变的强相位，二者的干涉可能会造成直接的 CP 破坏。2004 年，科学家分别在 Belle 和 BaBar 两个探测器中第一次观测到重味介子衰变过程 $B \to \pi\pi$, $K\pi$ 中的直接 CP 破坏现象；借助于大量的实验数据，人们还观测到了许多衰变中对时间依赖的 CP 破坏现象。但是目前实验室发现的 CP 破坏现象太小，还不足以解释宇宙中正反物质的不对称性。一般还需要新的超出标准模型的 CP 破坏来源来解决这个难题。重味物理的研究对于探寻电荷–宇称破坏和检验标准模型有着非常重要的地位。

对于底味夸克构成的强子，除了通过 $b \to c$ 衰变到含粲的强子外，还可以通过 CKM 压低过程 $b \to u$ 衰变到无粲的强子，这两类过程称为树图过程。此外，在标准模型下，树图级的味道改变中性流由于 GIM 机制是严格禁戒的，但是此类过程可以通过圈图发生，通常称为企鹅图过程。由于此类过程只能通过圈图才能实现，通常情况下，分支比较小。另外，在该过程中，如果有新物理存在，其预言的大质量粒子 (如超对称粒子) 可能会通过虚粒子形式进入圈图中，从而影响物理观测量，通过和标准模型的预言做比较，可以判断新物理是否存在；若在其他实验中直接发现新物理，也可以通过这类过程对新物理中的参数进行限制或测定。除了分支比外，还可以测量 CP 破坏，末态粒子的角分布，末态粒子前后数量比，末态粒子的

极化、自旋等物理量。这些由味道改变中性流诱导的稀有衰变过程通常被认为是间接寻找新物理的黄金平台。

由于重味夸克的质量远远大于轻夸克的质量，在构成重味介子 (B 介子和 D 介子) 后，重味夸克的动量很小，可以近似地认为静止，而轻夸克围绕重夸克转动，这种行为类似氢原子系统。对于轻夸克而言，粲夸克和底夸克的质量都可以认为是无穷大，在这种近似下，粲夸克和底夸克可以认为是等价的，人们通常把这种近似叫做重夸克对称性。在重夸克对称性下，重味介子的性质主要取决于轻夸克而不是重夸克，这也类似于氢原子以及其他各种原子的性质主要取决于核外电子而不是原子核。由于底夸克的主要衰变产物是粲夸克，所以重夸克对称性在研究底味强子衰变到粲味强子过程中发挥着重要作用。利用重夸克对称性发展起来的重夸克有效理论在 $1/m_b$ 展开下，可以有效地研究一些 QCD 的非微扰性质，其中最著名的是 $B \to D$ 跃迁的形状因子—— Isgur-Wise 函数。关于重夸克对称性和重夸克有效理论的详细论述见第 10 章。

重味强子的半轻衰变对于抽取 CKM 矩阵元具有重要的意义，理论上，半轻衰变中的轻子部分可以计算清楚，但强子部分涉及非微扰参量强子跃迁矩阵元，其计算是模型相关的；实验上，涉及共振态本底的减除，所以半轻衰变处理起来比较困难。对于非轻衰变，实验可以测量得比较准确，理论上由于涉及的能标、自由度较多，处理起来更加复杂。理论上的处理主要采取“因子化”的方法，关于因子化的基础理论见本书第 6 章。需要指出的是，因子化定理的证明在完整 QCD 理论中是很难完成的，通常需要有一个大的能量标度来做微扰展开，在重味物理中这个大尺度就是重夸克质量。关于因子化虽然有多种方法，但是它们的基础出发点都是重夸克有效理论。处理重味强子衰变，还有依赖于夸克味道 $SU(3)$ 对称性的拓扑图方法、QCD 求和规则、光锥求和规则，以及夸克模型等其他唯象学方法。

11.1 重味物理中的 CP 破坏

1956 年，发现宇称 (P) 破坏之后，人们很快就建立了一个能够反映宇称破坏和电荷共轭变换宇称 (C) 破坏而 CP 联合对称性守恒的弱作用理论。在 1964 年的 $K_L \to \pi^+\pi^-$ 衰变中，人类历史上第一次观测到弱相互作用的 CP 联合对称性的破缺是粒子物理中非常鼓舞人心的现象之一。随后在 2001 年的夏天，B 介子系统的 CP 破坏也被正式确立。在理论上，人们如此热衷于 CP 破坏效应的原因是非常简单的[2]：首先按照标准宇宙学理论，宇宙中的正反物质不对称性要求必须有 CP 破坏的理论才能形成，而标准模型理论能够提供的 CP 破坏大小不足以提供这种不对称的来源。其次，超越标准模型的新物理通常伴随着新的 CP 破坏的来源，如非最小 (non-minimal) 超对称模型、左右对称模型，以及扩展希格斯 (Higgs) 模型

等[3]。K 介子系统的 CP 破坏以及 $B^0-\bar{B}^0$ 混合对 B 介子系统的 CP 破坏的限制也对那些不提供新的 CP 破坏来源的新物理效应非常敏感。

在标准模型的电弱统一相互作用理论中，夸克的质量和混合都来源于它们与希格斯粒子的汤川耦合[2]

$$L_Y=-Y_{ij}^{d}\overline{Q_{Li}^{I}}\phi d_{Rj}^{I}-Y_{ij}^{u}\overline{Q_{Li}^{I}}\tilde{\phi}u_{Rj}^{I} \tag{11.1}$$

这里 $Y^{u,d}$ 表示 3×3 的复矩阵，ϕ 表示希格斯场，$\tilde{\phi}=\mathrm{i}\tau_2\phi^*$，这里 τ_2 是泡利矩阵。Q_L^I 表示弱相互作用基底下的左手夸克场二重态，d_R^I, u_R^I 表示在弱相互作用基底下的右手夸克场单态。在对称性自发破缺以后，希格斯场获得了一个真空期望值

$$\langle\phi\rangle_0\equiv\langle0|\phi|0\rangle=\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{v}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \tag{11.2}$$

从而使得方程 (11.1) 给出了夸克场的质量项。物理的夸克场 (也即质量本征态) 可以通过对 $Y^{u,d}$ 对角化得到，而夸克场的质量本征态和夸克场与 $W^{\pm}$ 的相互作用本征态可以是不同的。它们是通过下面的 CKM 矩阵混合的

$$V_{\mathrm{CKM}}\equiv V_L^uV_L^{d\dagger}=\begin{pmatrix}V_{ud}&V_{us}&V_{ub}\\ V_{cd}&V_{cs}&V_{cb}\\ V_{td}&V_{ts}&V_{tb}\end{pmatrix} \tag{11.3}$$

这个矩阵也就是质量本征态和味道本征态之间的转动矩阵。一般地，带电流诱导的夸克场和 $W^{\pm}$ 场相互作用的哈密顿量为

$$\mathcal{L}_{\mathrm{int}}^{\mathrm{CC}}=-\frac{g_2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\bar{u}_L,&\bar{c}_L,&\bar{t}_L\end{pmatrix}\gamma^{\mu}\hat{V}_{\mathrm{CKM}}\begin{pmatrix}d_L\\ s_L\\ b_L\end{pmatrix}W_{\mu}^{\dagger}+\mathrm{h.c.} \tag{11.4}$$

这里 g_2 是 $SU(2)_L$ 规范相互作用的耦合常数，$W_{\mu}^{\dagger}$ 对应于带电的 W 玻色子场。一般地，在只有三代费米子的情况下 CKM 矩阵是一个 3×3 的幺正矩阵，所以需要 3^2 个参数来刻画，但是其中 5 个参数可以被吸收到夸克场的相位的重新定义中，另外有 3 个转动角，因此只剩余 1 个相位。这个非平庸的弱相位，就会导致 CP 破坏[1]。在标准模型中，CP 破坏来源于这个 CKM 矩阵。

在标准参数化下，三代的 CKM 矩阵可以写成下面的形式：

$$\hat{V}_{\mathrm{CKM}}=\begin{pmatrix}c_{12}c_{13}&s_{12}c_{13}&s_{13}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta_{13}}\\ -s_{12}c_{23}-c_{12}s_{23}s_{13}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_{13}}&c_{12}c_{23}-s_{12}s_{23}s_{13}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_{13}}&s_{23}c_{13}\\ s_{12}s_{23}-c_{12}c_{23}s_{13}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_{13}}&-c_{12}s_{23}-s_{12}c_{23}s_{13}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_{13}}&c_{23}c_{13}\end{pmatrix} \tag{11.5}$$

这里 $c_{ij} \equiv \cos\theta_{ij}$，$s_{ij} \equiv \sin\theta_{ij}$。这种参数化的优点在于如果混合角 θ_{ij} 被选择成零，则 "i" 代与 "j" 代之间的混合消失。如果 $\theta_{23} = \theta_{13} = 0$, 则第三代退耦，这样将得到 Cabibbo 矩阵

$$\hat{V}_C = \begin{pmatrix} \cos\theta_C & \sin\theta_C \\ -\sin\theta_C & \cos\theta_C \end{pmatrix} \tag{11.6}$$

带电流引发的夸克之间相互跃迁强度有级差结构：相同代之间的跃迁是由 $\mathcal{O}(1)$ 量级上的 CKM 矩阵元刻画的，第一代和第二代之间的跃迁是由 $\mathcal{O}(10^{-1})$ 量级上的 CKM 矩阵元描述的，第二代和第三代之间的跃迁是由 $\mathcal{O}(10^{-2})$ 量级上的 CKM 矩阵元描述的，第一代和第三代之间的跃迁是由 $\mathcal{O}(10^{-3})$ 量级上的 CKM 矩阵元支配的，如果定义一组新的参数 λ, A, ρ 以及 η，在保留至 $\mathcal{O}(\lambda^3)$ 的条件下，就得到了著名的 CKM 矩阵的 Wolfenstein 参数化形式

$$\hat{V}_{\mathrm{CKM}} = \begin{pmatrix} 1-\dfrac{1}{2}\lambda^2 & \lambda & A\lambda^3(\rho - \mathrm{i}\eta) \\ -\lambda & 1-\dfrac{1}{2}\lambda^2 & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1-\rho-\mathrm{i}\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^4) \tag{11.7}$$

由于这种参数化下，CKM 矩阵元的级差结构很明显，因此在唯象研究上是非常方便的。在某些情况下，还需要把 CKM 矩阵元展开到 λ 的高阶项。

目前，实验给出的 Wolfenstein 参数化拟合的结果为[4]

$$\begin{aligned} &\lambda = 0.22506 \pm 0.00050, \quad A = 0.811 \pm 0.026 \\ &\bar{\rho} = 0.124^{+0.019}_{-0.018}, \quad \bar{\eta} = 0.356 \pm 0.011 \end{aligned} \tag{11.8}$$

CKM 矩阵是一个幺正矩阵，根据幺正关系其非对角元可以在复平面构成六个幺正三角形，通过测定三角形的三个内角 (α, β, γ) 以及三边，从而精确检验标准模型并间接探寻超出标准模型的新物理的痕迹。目前的实验数值和标准模型的预言基本一致[5]。

CKM 矩阵产生 CP 破坏的条件要求至少存在三代费米子。但是，实际上在具体过程中产生 CP 破坏需要更多的条件:

$$\begin{aligned} &(m_t^2 - m_c^2)(m_t^2 - m_u^2)(m_c^2 - m_u^2) \\ &\times (m_b^2 - m_s^2)(m_b^2 - m_d^2)(m_s^2 - m_d^2) \times J_{\mathrm{CP}} \neq 0 \end{aligned} \tag{11.9}$$

这里 Jarlskog 不变量的定义是

$$J_{\mathrm{CP}} = |\mathrm{Im}(V_{i\alpha} V_{j\beta} V_{i\beta}^* V_{j\alpha}^*)| \quad (i \neq j, \alpha \neq \beta) \tag{11.10}$$

方程 (11.9) 的第一项是很容易理解的，它表明如果带有相同电荷的两个夸克具有相同的质量，那么通过对夸克场做合适的幺正变换，就可以消去 CKM 矩阵的 CP 破坏相位。因此，CP 破坏的来源不仅与费米子代的数目有关，而且与夸克质量的级差结构有关。但是这些基本问题还有待于更深层次的理解。

方程 (11.9) 的第二个要素是 "Jarlskog" 参数 $J_{\rm CP}$，在标准模型中它是用来衡量 CP 破坏强度的一个标志。$J_{\rm CP}$ 是不依赖于夸克场的相位约定的，并且 CKM 矩阵的幺正性保证了所有不同的组合 $|{\rm Im}(V_{i\alpha}V_{j\beta}V_{i\beta}^*V_{j\alpha}^*)|$ 都是相等的。利用标准参数化和 Wolfenstein 参数化，可以得到

$$J_{\rm CP}=s_{12}s_{13}s_{23}c_{12}c_{23}c_{13}^2\sin\delta_{13}=\lambda^6A^2\eta=\mathcal{O}(10^{-5}) \tag{11.11}$$

从上式可以看到，在标准模型中 CP 破坏的效应确实是很小的。通常的，新物理图像中的复耦合常数会带来新的 CP 破坏来源。

11.1.1　中性 B 介子系统

中性 B^0 介子和其反粒子 $\bar{B}^0$ 具有某些不同的量子数，但是所有这些不同的量子数在弱作用下是不守恒的，导致在弱相互作用下，两个粒子是不可区分的。这个系统的复杂之处在于不同的物理过程是与不同的本征态相联系的。在 B 介子的产生和衰变过程中，我们面对的是具有确定夸克组分的味道本征态。而研究 B 介子在时空中以确定的方式传播时，需要用到哈密顿量的本征态，也就是质量本征态。由于 CP 变换在弱作用下不是一个好的对称性，味道本征态和质量本征态是不匹配的。因此两个味道本征态在传播一定距离后注定要混合起来。任意的一个中性 B 介子态都可以表示成味道本征态的线性组合

$$B(t)=a(t)|B^0\rangle+b(t)|\bar{B}^0\rangle \tag{11.12}$$

其随时间演化的行为是由薛定谔 (Schrödinger) 方程来描述的

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=H\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\left(\mathrm{M}-\frac{\mathrm{i}}{2}\Gamma\right)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \tag{11.13}$$

M 和 Γ 是 2×2 的厄米矩阵，分别叫做质量矩阵和衰变矩阵。由于 CPT 守恒，要求 $M_{11}=M_{22}$ 和 $\Gamma_{11}=\Gamma_{22}$。非对角元 M_{12} 与 Γ_{12} 分别对应于 B^0 到 $\bar{B}^0$ 跃迁振幅的色散部分和吸收部分。在标准模型中，它们来自于图 11.1 所示的两个 W 玻色子交换的箱图。由于 b 夸克的质量很大，从而保证了关于这两个量的 QCD 计算要比对应的 K 介子混合要可靠很多。对于色散部分 M_{12}，它显然是短程效应为主的，长程效应可以被忽略掉。对于吸收部分 Γ_{12}，通过计算夸克箱图的切割并且利用夸克–强子对偶性假设，可以将这个量与对应的强子层次上的量关联起来。尽管对于

定域的夸克-强子对偶性假设，并没有一个严格的论证，但是这个假设被证明对于足够大的能量范围是正确的。

具体计算图 11.1, 可以得到 M_{12} 与 Γ_{12} 的解析表达式如下[2]

$$
\begin{aligned}
M_{12} &= -\frac{G_F^2 m_W^2}{12\pi^2}\eta_B m_{B_q}\hat{B}_{B_q} f_{B_q}^2 (V_{tq}^* V_{tb})^2 S_0(x_t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi_{\mathrm{CP}}(B_q)} \\
\Gamma_{12} &= -M_{12}\frac{3\pi}{2S_0(x_t)}\frac{m_b^2}{m_W^2}\left[1+\frac{8}{3}\frac{m_c^2}{m_b^2}\frac{V_{cb}V_{cd}^*}{V_{tb}V_{td}^*}+O(\frac{m_c^4}{m_b^4})\right] \\
\frac{\Gamma_{12}}{M_{12}} &= O(\frac{m_b^2}{m_t^2}) \ll 1
\end{aligned}
\tag{11.14}
$$

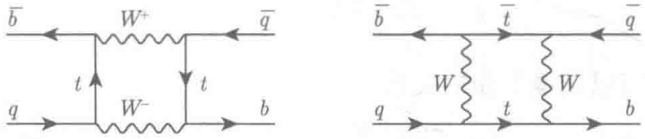


图 11.1 B^0 到 $\bar{B}^0$ 的跃迁振幅的箱图

这里 CP 相位是在计算强子矩阵元时引入的，$x_t = m_t^2/M_W^2$, $\eta_B = 0.55$ 是微扰 QCD 因子，它对于 M_{12} 与 Γ_{12} 是相同的。f_{B_q} 是 B_q 介子的衰变常数，$\hat{B}_{B_q}$ 的定义如下

$$
\langle \overline{B_q^0}|(\bar{b}q)_{\mathrm{V-A}}(\bar{b}q)_{\mathrm{V-A}}|B_q^0\rangle \equiv \frac{8}{3}\hat{B}_{B_q} f_{B_q}^2 m_{B_q}^2 \tag{11.15}
$$

对于其数值，QCD 求和规则和格点 QCD 都给出一致的结果：

$$
\sqrt{\hat{B}_{B_d}} f_{B_d} = (230 \pm 40)\,\mathrm{MeV} \tag{11.16}
$$

此外，Inami-Lim 函数 $S_0(x)$ 的具体形式为

$$
S_0(x) = x\left[\frac{1}{4}+\frac{9}{4(1-x)}-\frac{3}{2(1-x)^2}-\frac{3x^2\ln x}{2(1-x)^3}\right] \tag{11.17}
$$

很容易求解方程 (11.13)，得到 B 介子系统的质量本征态为

$$
|B_L\rangle = p|B^0\rangle + q|\bar{B}^0\rangle, \quad |B_H\rangle = p|B^0\rangle - q|\bar{B}^0\rangle \tag{11.18}
$$

对应的本征值为

$$
\begin{aligned}
\lambda_L &= (M - \frac{\mathrm{i}}{2}\Gamma) + \frac{q}{p}(M_{12} - \frac{\mathrm{i}}{2}\Gamma_{12}) \\
\lambda_H &= (M - \frac{\mathrm{i}}{2}\Gamma) - \frac{q}{p}(M_{12} - \frac{\mathrm{i}}{2}\Gamma_{12})
\end{aligned}
\tag{11.19}
$$

其中，

$$\frac{q}{p}=\sqrt{\frac{M_{12}^{*}-\frac{\mathrm{i}}{2}\Gamma_{12}^{*}}{M_{12}-\frac{\mathrm{i}}{2}\Gamma_{12}}},\quad |p|^2+|q|^2\ =\ 1 \tag{11.20}$$

这里约定：$\mathrm{Re}(q/p)>0$ 和 $CP|B^0\rangle=|\bar{B}^0\rangle$. 另外，定义下面的一些参数

$$\begin{aligned}\Delta M &\equiv M_H-M_L=2|M_{12}|\\ \Delta\Gamma &\equiv \Gamma_H-\Gamma_L=\frac{4\mathrm{Re}[M_{12}\Gamma_{12}]}{\Delta M}\\ \Gamma &\equiv \frac{\Gamma_H+\Gamma_L}{2}\end{aligned} \tag{11.21}$$

根据以上参数，可以发现下面的关系:

$$y\equiv\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma}\approx-\frac{3\pi}{2S_0(x_t)}\frac{m_b^2}{m_W^2}x_q=\mathcal{O}(10^{-2})x,\qquad x\equiv\frac{\Delta M}{\Gamma} \tag{11.22}$$

对于 B_d 和 B_s 介子系统而言[4]

$$\begin{aligned}x_d &= (\frac{\Delta M}{\Gamma})_d=0.775\pm0.006\\ x_s &= (\frac{\Delta M}{\Gamma})_s=26.81\pm0.10\\ y_d &= (\Delta\Gamma/\Gamma)_{B_d}=-0.007\pm0.004\\ y_s &= (\Delta\Gamma/\Gamma)_{B_s}=0.124\pm0.008\end{aligned} \tag{11.23}$$

如果把 q/p 按照小量 Γ_{12}/M_{12} 展开到次领头阶，可以得到

$$\frac{q}{p}=\left[1+\frac{1}{2}\left|\frac{\Gamma_{12}}{M_{12}}\right|\sin\delta\Theta_{M/\Gamma}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Theta_{M_{12}}+n\pi)} \tag{11.24}$$

其中 $M_{12}\equiv\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta_{M_{12}}}|M_{12}|$, $\Gamma_{12}\equiv\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta_{\Gamma_{12}}}|\Gamma_{12}|$, $\delta\Theta_{M/\Gamma}\equiv\Theta_{M_{12}}-\Theta_{\Gamma_{12}}$, $\Theta_{M_{12}}=\pi+2\mathrm{arg}(V_{tq}^{*}V_{tb})$。为了保证 $\mathrm{Re}(q/p)>0$，需要约定 $n=1$。等价的，方程 (11.24) 还可以表达成下面的形式

$$\frac{q}{p}\approx\frac{V_{tq}V_{tb}^{*}}{V_{tq}^{*}V_{tb}} \tag{11.25}$$

具体来说，对于 B_d 介子和 B_s 介子系统

$$\left(\frac{q}{p}\right)_{B_d}\approx\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\beta},\qquad \left(\frac{q}{p}\right)_{B_s}\approx\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\beta_s} \tag{11.26}$$

这里 β_s 的定义为

$$\beta_s \equiv \arg\left(-\frac{V_{cs}V_{cb}^*}{V_{ts}V_{tb}^*}\right) \tag{11.27}$$

最后，通过简单的量子力学计算就可以求解出 B 介子系统的味道本征态随时间演化的行为

$$\begin{aligned}
|B_q^0(t)\rangle = {} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Mt-\frac{1}{2}\Gamma t}\Big\{\cos(\frac{1}{2}\Delta Mt)\cosh(\frac{1}{2}\Delta\Gamma t)|B^0\rangle \\
& -\mathrm{i}\frac{q}{p}\sin(\frac{1}{2}\Delta Mt)\sinh(\frac{1}{2}\Delta\Gamma t)|\bar{B}^0\rangle\Big\} \\
|\bar{B}_q{}^0(t)\rangle = {} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Mt-\frac{1}{2}\Gamma t}\Big\{\cos(\frac{1}{2}\Delta Mt)\cosh(\frac{1}{2}\Delta\Gamma t)|\bar{B}^0\rangle \\
& +\mathrm{i}\frac{p}{q}\sin(\frac{1}{2}\Delta Mt)\sinh(\frac{1}{2}\Delta\Gamma t)|B^0\rangle\Big\}
\end{aligned} \tag{11.28}$$

这个演化方程的初始条件需要知道初始产生时候的 B^0 与 $\bar{B}^0$ 介子状态，而这在实验上的确定是比较困难的。在 B 介子工厂中，B^0 与 $\bar{B}^0$ 是通过 $e^+e^- \to \Upsilon(4S) \to B^0\bar{B}^0$ 相干产生的。它们处于相对轨道角动量为 1 的态。观测这两个态的一种方式就是测量这个态 $|B^0(t)\bar{B}^0(t)\rangle$ 随时间演化的行为。虽然 B^0 与 $\bar{B}^0$ 介子产生后就会互相转化，但是由于 B^0 与 $\bar{B}^0$ 是协同产生和演化的 (参考方程 (11.40) 和 (11.41))，所以只要 B^0 与 $\bar{B}^0$ 介子不衰变，就一定有一个 B^0 与对应的 $\bar{B}^0$ 同时存在，两粒子总是相干态。除非其中的一个粒子衰变，如果通过这个粒子的衰变产物能够确定其为 B^0 或 $\bar{B}^0$ 介子，则这个时刻另一个粒子必为其反粒子，会继续独立地随时间演化。由于 B^0 和 $\bar{B}^0$ 在 $\Upsilon(4S)$ 的静止系中产生时几乎是静止的，如果要测量时间演化方程，就必须产生快速运动的 B^0 和 $\bar{B}^0$ 以便于通过其运动径迹记录它们的衰变时刻，所以需要 $\Upsilon(4S)$ 在正负电子对撞机上产生时不能是静止的，这是两个 B 介子工厂的 e^+e^- 对撞机对撞能量不对称的原因。

11.1.2 弱衰变的 CP 破坏的分类

一般来说，CP 破坏的可能类型有以下三种方式[6]：①衰变中的 CP 破坏，这种 CP 破坏同时存在于带电 B 介子和中性 B 介子的衰变过程中，它来源于一个过程的衰变振幅与其 CP 共轭道的衰变振幅不同。通常也称这种类型的 CP 破坏为直接 CP 破坏。②混合引起的 CP 破坏，这种类型的 CP 破坏起源于中性系统的质量本征态与 CP 本征态是不匹配的。③中性 B 介子的混合与直接衰变干涉引起的 CP 破坏，这种 CP 破坏发生在 B^0 和 $\bar{B}^0$ 能衰变到共同的末态情况下。下面分别讨论这三种类型的 CP 破坏。

1. 直接 CP 破坏

以带电 B 介子的衰变为例，直接 CP 破坏定义如下：

$$A_{\mathrm{CP}}^{\mathrm{dir}} \equiv \frac{\Gamma(B^+ \to f) - \Gamma(B^- \to \bar{f})}{\Gamma(B^+ \to f) + \Gamma(B^- \to \bar{f})} = \frac{|A|^2 - |\bar{A}|^2}{|A|^2 + |\bar{A}|^2} \tag{11.29}$$

其中衰变振幅 A 和 $\bar{A}$ 的定义如下：

$$A \equiv \langle f|\mathcal{H}|B^+\rangle, \quad \bar{A} \equiv \langle \bar{f}|\bar{\mathcal{H}}|B^-\rangle \tag{11.30}$$

从方程 (11.29) 可以清楚地看出，直接 CP 破坏的产生条件是 $|\bar{A}/A| \neq 1$。对于任意末态，$|\bar{A}/A|$ 都是不依赖于相位约定的，从而物理意义是清楚的。一般地，有两种相位可以出现在衰变振幅中。一个相位是来自于拉氏量的复参数，这个相位在 A 和 $\bar{A}$ 中以相反的符号出现。在标准模型中，这个相位仅来源于电弱理论中的 CKM 矩阵，因此也通常称为弱相位。振幅 A 的不同项的相对弱相位差是不依赖于约定的。另外一个出现在衰变中的相位在 CP 变换下是不改变符号的，即使拉氏量是实的也会出现。它通常起源于衰变过程的中间态的在壳效应，也就是存在耦合道贡献的振幅的吸收部分。通常这种重散射的效应是来源于强相互作用，因此通常称它为强相位。

因此，通常衰变振幅可以拆分成三个部分：模 A_i，弱相位 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_i}$ 和强相位 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_i}$。以 $B^- \to \bar{f}$ 衰变为例来说明，假设有若干不同的振幅贡献到这个过程，则有

$$A = \sum_i A_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\delta_i + \phi_i)}, \qquad \bar{A} = \sum_i A_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\delta_i - \phi_i)} \tag{11.31}$$

然后根据方程 (11.29) 可以得到

$$A_{\mathrm{CP}}^{\mathrm{dir}} \propto 2 \sum_{ij} A_i A_j \sin(\phi_i - \phi_j) \sin(\delta_i - \delta_j) \tag{11.32}$$

从上式可以看出如果要能产生直接 CP 破坏，则必须要求至少有两种不同的模式贡献到衰变振幅中，并且这两种模式的弱相位与强相位是不同的。具体到有两种模式的情形：

$$A_{\mathrm{CP}}^{\mathrm{dir}} = \frac{2A_1 A_2 \sin(\phi_2 - \phi_1) \sin(\delta_2 - \delta_1)}{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) \cos(\delta_2 - \delta_1)} \tag{11.33}$$

显然，这时产生非零的直接 CP 破坏的条件是

$$A_1 A_2 \neq 0, \quad \phi_2 - \phi_1 \neq 0, \pi, \quad \delta_2 - \delta_1 \neq 0, \pi \tag{11.34}$$

在标准模型中，直接 CP 破坏主要来源于树图振幅和企鹅图振幅的干涉效应。振幅的强相位通常含有强相互作用的长程效应，因此不能从第一性原理来计算。幸运的

是对于 B 介子系统而言，b 夸克具有很大的质量，理论可以在重夸克极限下计算，相对于 K 介子系统而言理论计算要可靠得多，但是理论误差通常还是很大的。在直接 CP 破坏被实验证实以前，关于 CP 破坏的来源有很多理论模型。直接 CP 破坏的实验发现直接导致了以超弱作用为首的一些理论模型正式被排除了。目前实验发现的所有 CP 破坏现象都可以被 CKM 矩阵的弱相位所解释，这是标准模型理论的巨大成功之一。寻找超出标准模型的 CP 破坏来源以解释宇宙中巨大的正反物质不对称性，是目前高能物理理论和实验学家的重要任务之一。

2. 混合引起的 CP 破坏

首先观察下面的与相位约定无关的量

$$\left|\frac{q}{p}\right|^2=\left|\frac{M_{12}^*-\frac{\mathrm{i}}{2}\Gamma_{12}^*}{M_{12}-\frac{\mathrm{i}}{2}\Gamma_{12}}\right|^2 \tag{11.35}$$

当没有 CP 破坏时，质量本征态与 CP 本征态是相同的，从而 M_{12} 与 Γ_{12} 之间的相对相位为 0。因而从上式可以看出

$$\left|\frac{q}{p}\right|\neq 1\Rightarrow \text{CP 破坏} \tag{11.36}$$

这种类型的 CP 破坏是由混合引起的，因此也通常称为间接 CP 破坏。混合中的 CP 破坏在中性 K 介子系统中首次观测到。对于 B 介子系统，其效应可以通过测量 B 介子半轻衰变的不对称性

$$\begin{aligned}A_{sl}&=\frac{\Gamma(\bar{B}^0\to l^+\nu_l X)-\Gamma(B^0\to l^-\bar{\nu}_l X)}{\Gamma(\bar{B}^0\to l^+\nu_l X)+\Gamma(B^0\to l^-\bar{\nu}_l X)}\\&=\frac{1-|q/p|^4}{1+|q/p|^4}\end{aligned} \tag{11.37}$$

来标志。由于在 B 介子系统中 q/p 几乎是一个纯相位，因此混合引起的间接 CP 破坏的效应是非常小的，只有 $\mathcal{O}(10^{-2})$ 的量级。q/p 对纯相位的偏离大小，需要通过计算 M_{12} 与 Γ_{12} 来得到，而这通常会有很大的强相互作用的不确定性[7]。因此，即使这样的不对称性被观测到，也很难据此来确定 CKM 参数。

3. 直接衰变与混合干涉引起的 CP 破坏

一般情况下，B^0 介子衰变的末态 f 和 $\bar{B}^0$ 介子的衰变末态 $\bar{f}$ 是不同的，$f\neq\bar{f}$，那么虽然在 $B^0/\bar{B}^0$ 介子产生后，衰变之前它们会发生混合，但是通过其衰变末态 $f/\bar{f}$，实验上能够区分衰变时刻它是 $B^0/\bar{B}^0$ 介子。混合实际上相当于没有发生作用，如果有 CP 破坏就是刚讨论过的直接 CP 破坏，如 $B^0\to\pi^-K^+/\bar{B}^0\to\pi^+K^-$ 的衰变。

特殊情况下，虽然 $f \neq \bar{f}$，但是 B^0 和 $\bar{B}^0$ 介子都能衰变到 f 和 $\bar{f}$ 末态，例如，$B^0/\bar{B}^0 \to \pi^+\rho^-/\pi^-\rho^+$, $K^0\bar{K}^{*0}/K^{*0}\bar{K}^0$, $K^+K^{*-}/K^{*+}K^-$ 等。一般地，对于中性 B 介子衰变 $B^0/\bar{B}^0 \to f(\bar{f})$ 而言，存在下面四种不同的衰变振幅

$$A_f = \langle f|\mathcal{H}|B^0\rangle, \quad \bar{A}_f = \langle f|\mathcal{H}|\bar{B}^0\rangle, \quad A_{\bar{f}} = \langle \bar{f}|\mathcal{H}|B^0\rangle, \quad \bar{A}_{\bar{f}} = \langle \bar{f}|\mathcal{H}|\bar{B}^0\rangle \tag{11.38}$$

为方便起见，定义

$$\lambda = \frac{q}{p}\frac{\bar{A}_f}{A_f}, \quad \bar{\lambda} = \frac{q}{p}\frac{\bar{A}_{\bar{f}}}{A_{\bar{f}}} \tag{11.39}$$

利用时间演化方程 (11.28), 可以得到下面的衰变振幅

$$\Gamma(B^0(t)\to f) \propto \mathrm{e}^{-\Gamma t}\left(|A(B^0\to f)|^2+|\frac{q}{p}A(\bar{B}^0\to f)|^2\right)\left[\cosh\left(\frac{\Delta\Gamma t}{2}\right)+H_f\sinh\left(\frac{\Delta\Gamma t}{2}\right)\right.$$
$$\left. A_{\mathrm{CP}}^{\mathrm{dir}}\cos(\Delta M t) - S_f\sin(\Delta M t)\right] \tag{11.40}$$

$$\Gamma(\bar{B}^0(t)\to f) \propto \mathrm{e}^{-\Gamma t}\left(|\frac{p}{q}A(B^0\to f)|^2+|A(\bar{B}^0\to f)|^2\right)\left[\cosh\left(\frac{\Delta\Gamma t}{2}\right)+H_f\sinh\left(\frac{\Delta\Gamma t}{2}\right)\right.$$
$$\left. +A_{\mathrm{CP}}^{\mathrm{dir}}\cos(\Delta M t) + S_f\sin(\Delta M t)\right] \tag{11.41}$$

其中

$$A_{\mathrm{CP}}^{\mathrm{dir}} = \frac{|\lambda|^2-1}{1+|\lambda|^2}, \quad H_f = \frac{2\mathrm{Re}[\lambda]}{1+|\lambda|^2}, \quad S_f = \frac{2\mathrm{Im}[\lambda]}{1+|\lambda|^2}$$
$$(A_{\mathrm{CP}}^{\mathrm{dir}})^2 + H_f^2 + S_f^2 = 1 \tag{11.42}$$

类似地，还可以得到 B 介子衰变到 CP 共轭末态 $\bar{f}$ 的含时衰变宽度的表达式

$$\Gamma(B^0(t)\to \bar{f}) \propto \mathrm{e}^{-\Gamma t}\left(|A(B^0\to \bar{f})|^2+|\frac{q}{p}A(\bar{B}^0\to \bar{f})|^2\right)\left[\cosh\left(\frac{\Delta\Gamma t}{2}\right)+H_{\bar{f}}\sinh\left(\frac{\Delta\Gamma t}{2}\right)\right.$$
$$\left. -\bar{A}_{\mathrm{CP}}^{\mathrm{dir}}\cos(\Delta M t) - S_{\bar{f}}\sin(\Delta M t)\right] \tag{11.43}$$

$$\Gamma(\bar{B}^0(t)\to \bar{f}) \propto \mathrm{e}^{-\Gamma t}\left(|\frac{p}{q}A(B^0\to \bar{f})|^2+|A(\bar{B}^0\to \bar{f})|^2\right)\left[\cosh\left(\frac{\Delta\Gamma t}{2}\right)+H_{\bar{f}}\sinh\left(\frac{\Delta\Gamma t}{2}\right)\right.$$
$$\left. +\bar{A}_{\mathrm{CP}}^{\mathrm{dir}}\cos(\Delta M t) + S_{\bar{f}}\sin(\Delta M t)\right] \tag{11.44}$$

其中

$$\bar{A}_{\mathrm{CP}}^{\mathrm{dir}} = \frac{|\bar{\lambda}|^2-1}{1+|\bar{\lambda}|^2}, \quad H_{\bar{f}} = \frac{2\mathrm{Re}[\bar{\lambda}]}{1+|\bar{\lambda}|^2}, \quad S_{\bar{f}} = \frac{2\mathrm{Im}[\bar{\lambda}]}{1+|\bar{\lambda}|^2}$$
$$(\bar{A}_{\mathrm{CP}}^{\mathrm{dir}})^2 + H_{\bar{f}}^2 + S_{\bar{f}}^2 = 1 \tag{11.45}$$

由于 B^0 和 $\bar{B}^0$ 介子的混合，B 介子衰变的初态正反粒子性质是不能确定的，通常定义只区别 f 和 $\bar{f}$ 末态的一个整体的不对称性

$$\langle A_{f\bar{f}}\rangle = \frac{|A_f|^2+|\bar{A}_f|^2-|A_{\bar{f}}|^2-|\bar{A}_{\bar{f}}|^2}{|A_f|^2+|\bar{A}_f|^2+|A_{\bar{f}}|^2+|\bar{A}_{\bar{f}}|^2} \tag{11.46}$$

如果没有直接 CP 破坏，则有 $A_f = \bar{A}_{\bar{f}}$, $A_{\bar{f}} = \bar{A}_f$。这样从方程 (11.46) 可以看出 $\langle A_{f\bar{f}} \rangle = 0$, $C_f = -C_{\bar{f}}$, $S_f = -S_{\bar{f}}$。这样为了方便起见，实验物理学家通常引入下面的一组参数

$$\begin{aligned} S_{f\bar{f}} &= \frac{S_f + S_{\bar{f}}}{2}, \quad \Delta S_{f\bar{f}} = \frac{S_f - S_{\bar{f}}}{2} \\ C_{f\bar{f}} &= \frac{C_f + C_{\bar{f}}}{2}, \quad \Delta C_{f\bar{f}} = \frac{C_f - C_{\bar{f}}}{2} \end{aligned} \tag{11.47}$$

这里 C_f 和 S_f 的定义如下：

$$\begin{aligned} C_f &= \frac{1-|\lambda|^2}{1+|\lambda|^2} = \frac{|A_f|^2 - |\bar{A}_f|^2}{|A_f|^2 + |\bar{A}_f|^2}, \quad S_f = 2\frac{\mathrm{Im}(\lambda)}{1+|\lambda|^2} \\ C_{\bar{f}} &= \frac{1-|\bar{\lambda}|^2}{1+|\bar{\lambda}|^2} = \frac{|A_{\bar{f}}|^2 - |\bar{A}_{\bar{f}}|^2}{|A_{\bar{f}}|^2 + |\bar{A}_{\bar{f}}|^2}, \quad S_{\bar{f}} = 2\frac{\mathrm{Im}(\bar{\lambda})}{1+|\bar{\lambda}|^2} \end{aligned} \tag{11.48}$$

显然在 CP 变换下，$\Delta S_{f\bar{f}}$, $\Delta C_{f\bar{f}}$ 是 CP 偶宇称，$\langle A_{f\bar{f}} \rangle$, $S_{f\bar{f}}$, $C_{f\bar{f}}$ 是 CP 奇宇称。根据这些参数，可以看出 CP 守恒的条件是 $S_{f\bar{f}} = 0$, $C_{f\bar{f}} = 0$。参数 $\Delta C_{f\bar{f}} = 0$ 则表征最大的混合 CP 破坏，$\Delta S_{f\bar{f}}$ 描述的是 $B^0 \to f$ 与 $B^0 \to \bar{f}$ 之间的强相位的差别。为了理解这一点，考虑衰变振幅中仅含有一种弱振幅的简单例子。此时方程 (11.38) 中的振幅可以表达成下面的形式:

$$\begin{aligned} A_f &= |A_f| \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi+\delta)}, \quad \bar{A}_f = |\bar{A}_f| \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi'+\delta')} \\ A_{\bar{f}} &= |A_{\bar{f}}| \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\phi'+\delta')}, \quad \bar{A}_{\bar{f}} = |\bar{A}_{\bar{f}}| \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\phi+\delta)} \end{aligned} \tag{11.49}$$

同样可以将 S_f 与 $S_{\bar{f}}$ 的表达式化简如下：

$$\begin{aligned} S_f &= \frac{2|A_f||\bar{A}_f| \sin(\phi_{\mathrm{mix}} + \Delta\phi + \Delta\delta)}{||A_f|^2 + \bar{A}_f|^2} \\ S_{\bar{f}} &= -\frac{2|A_{\bar{f}}||\bar{A}_{\bar{f}}| \sin(\phi_{\mathrm{mix}} + \Delta\phi - \Delta\delta)}{||A_{\bar{f}}|^2 + |\bar{A}_{\bar{f}}||^2} \end{aligned} \tag{11.50}$$

这里 $\phi_{\mathrm{mix}} = \arg(\frac{q}{p})$, $\Delta\phi = \phi' - \phi$, $\Delta\delta = \delta' - \delta$。如果 CP 是守恒的，要求

$$\begin{aligned} |A_f| = |\bar{A}_{\bar{f}}|, \quad |\bar{A}_f| = |A_{\bar{f}}| \\ \sin(\phi_{\mathrm{mix}} + \Delta\phi + \Delta\delta) = \sin(\phi_{\mathrm{mix}} + \Delta\phi - \Delta\delta) \end{aligned} \tag{11.51}$$

只要上面的三个条件有一个不满足，就表明有 CP 破坏的存在。通常还可以定义下面的两个参数：

$$A_{f\bar{f}} = \frac{|\bar{A}_{\bar{f}}|^2 - |A_f|^2}{|\bar{A}_{\bar{f}}|^2 + |A_f|^2}, \quad A_{\bar{f}f} = \frac{|\bar{A}_f|^2 - |A_{\bar{f}}|^2}{|\bar{A}_f|^2 + |A_{\bar{f}}|^2} \tag{11.52}$$

这两个参数从物理上会更加直观一些，因为它们表征了直接 CP 破坏。当然，这两个参数与先前定义的参数并不是独立的，它们之间存在如下的关系

$$A_{f\bar{f}}=-\frac{\langle A_{f\bar{f}}\rangle+C_{f\bar{f}}+\langle A_{f\bar{f}}\rangle\Delta C_{f\bar{f}}}{1+\Delta C_{f\bar{f}}+\langle A_{f\bar{f}}\rangle C_{f\bar{f}}},\quad A_{\bar{f}f}=\frac{-\langle A_{f\bar{f}}\rangle+C_{f\bar{f}}+\langle A_{f\bar{f}}\rangle\Delta C_{f\bar{f}}}{-1+\Delta C_{f\bar{f}}+\langle A_{f\bar{f}}\rangle C_{f\bar{f}}} \tag{11.53}$$

如果中性 B 介子衰变到的末态是 CP 本征态 $f_{\rm CP}$，它们同时是 B^0 和 $\bar{B}^0$ 衰变的共同末态，则可以定义

$$\lambda\equiv\eta_{f_{\rm CP}}\frac{q}{p}\frac{\bar{A}}{A} \tag{11.54}$$

这里 $\eta_{f_{\rm CP}}$ 是末态 $f_{\rm CP}$ 的 CP 本征值。如果 CP 是守恒的，$|q/p|=1$, $|\bar{A}/A|=1$, 同时 q/p 以及 $\bar{A}/A$ 的相对相位消失。从而，由方程 (11.54) 可以看出

$$\lambda\neq\pm1\Longrightarrow\text{CP 破坏} \tag{11.55}$$

从方程 (11.29) 和 (11.36) 可以看出，直接 CP 破坏和间接 CP 破坏都要求 $|\lambda|\neq1$，从而可以导致方程 (11.55)。但是在满足 $|q/p|=1$, $|\bar{A}/A|=1$ 的条件下，只需要

$$|\lambda|=1,\qquad {\rm Im}\lambda\neq0 \tag{11.56}$$

仍然可能存在 CP 破坏。这种类型的 CP 破坏称为直接衰变与混合干涉引起的 CP 破坏。这种类型的 CP 破坏首先在中性 K 介子系统中观测到。

对于 B 介子系统而言，可以定义如下的含时 CP 不对称性

$$\begin{aligned}a_{\rm CP}(t)&=\frac{\Gamma(\bar{B}^0(t)\to f)-\Gamma(B^0(t)\to f)}{\Gamma(\bar{B}^0_q(t)\to f)+\Gamma(B^0_q(t)\to f)}\\&=\frac{A^{\rm dir}_{\rm CP}\,\cos(\Delta Mt)+S_f\,\sin(\Delta Mt)}{\cosh(\Delta\Gamma t/2)-H_f\,\sinh(\Delta\Gamma_q t/2)}\end{aligned} \tag{11.57}$$

这里 $A^{\rm dir}_{\rm CP}$, H_f, S_f 的定义已在方程 (11.42) 给出。$A^{\rm dir}_{\rm CP}$ 描述直接 CP 破坏，S_f 描述的则是由直接衰变和混合干涉引起的 CP 破坏。H_f 对于 B_s 系统而言可能比较重要，但是从方程 (11.42) 中看出这个量并不是一个独立的量。只要三种类型的 CP 破坏有一种存在，含时 CP 不对称性就不会消失。对于某些干净的衰变过程，$|\lambda|=1$, 这样方程 (11.57) 可以简化成下面的形式：

$$a_{\rm CP}(t)={\rm Im}\lambda\sin(\Delta Mt) \tag{11.58}$$

如果衰变过程中只有单个弱相位，即

$$\frac{\bar{A}}{A}=\eta_{f_{\rm CP}}\exp\left(-2{\rm i}\phi\right),\quad \lambda=\eta_{f_{\rm CP}}\exp[-2{\rm i}(\phi_{\rm mix}+\phi)] \tag{11.59}$$

那么中性 B 介子系统的含时间 CP 不对称性为

$$a_{\mathrm{CP}}(t) = -\eta_{f_{\mathrm{CP}}} \sin 2(\phi_{\mathrm{mix}} + \phi) \sin(\Delta M t) \tag{11.60}$$

这里 $\phi_{\mathrm{mix}} = \arg\left(\frac{q}{p}\right)$。这种过程是最理想的测量 CKM 相角的黄金衰变道，如 $B^0/\bar{B}^0 \to J/\Psi K_S$ 衰变，由于企鹅图贡献的 CKM 矩阵元压低效应，这个衰变可以近似看作只有一个树图贡献的弱相位，因而测量 CKM 相角 $\sin 2\beta$ 的黄金衰变道，只有很小的理论不确定性。

最后，还有一类情况是中性 B 介子系统衰变到自共轭的多粒子末态，如 $B \to \pi^+\pi^-\pi^0, K^+K^-K_S^0, J/\psi\pi^+\pi^-$ 或者 $B \to D\pi^0 \to K_S^0\pi^+\pi^-\pi^0$。但由于这些多体末态粒子之间可以有不同的轨道角动量，这些过程的衰变振幅可以拆分成 CP 为奇和 CP 为偶的两个部分。这些项之间的干涉非常敏感地依赖于衰变中的弱相位和强相位。为了从这些过程的角分布中提取出尽可能多的信息，通常要选取一些模型来进行研究，因此结果会存在一些模型的依赖性，详细的讨论参考文献 [8]。

11.2 B 介子非轻子衰变的 QCD 计算方法简介

重味强子如 B 介子可进行弱衰变。重味夸克尤其是底夸克质量较大，主要通过弱作用衰变，底味夸克的主要衰变产物为粲夸克，而粲夸克的主要衰变产物为奇异夸克等。相比起纯轻或半轻衰变，非轻衰变的初末态都是强子，因此都参与强相互作用。在低能下，强相互作用耦合常数很大，不能使用微扰论进行计算，因而理论上对非轻衰变过程的处理也是最复杂的。重味粒子在衰变过程中释放能量较大，因此重味粒子的衰变是一个多标度的问题。一方面是夸克胶子的湮灭与产生，这个过程时间很短，能标比较高，是可以微扰计算的，另一方面，强子的碎裂与夸克和胶子等再结合成为实验上所看到的强子，这个过程比较长，是不可微扰计算的。通常处理这个多标度跃迁矩阵元，可通过算符乘积展开为大动量区域内动量依赖的系数与 (非) 定域算符的乘积形式。高能标度的自由度放入短程系数中，表示短程大动量转移过程，可以使用微扰论计算。不能进行微扰计算的自由度被包含在小动量转移的剩余矩阵元中，幸运的是这些长程过程是过程普适的；重整化群方程则可以演化来处理对不同标度的依赖。

理论上，QCD 圈图计算的积分是从 0 到无穷大。因此上述不同标度物理能否分开计算是需要证明的。这个证明的过程就是因子化定理的证明。在 QCD 完整理论下，这是不可能完成的任务。幸运的是，利用重夸克有效理论，在 $1/m_b$ 展开的基础上，利用有效理论可以逐级证明一些过程的因子化。历史上计算重味 B 介子非轻子衰变的因子化方案有朴素因子化方法、推广的因子化等。较为成熟的建立在有效理论基础上的因子化方案有 QCD 因子化方法和微扰 QCD 因子化方法。这里

的 QCD 因子化指的是由 Beneke 等创立的一套方法，其理论基础为共线因子化。在 b 夸克质量无穷大极限下 (对应于重夸克有效理论展开的领头阶近似) 可以证明因子化。微扰 QCD 因子化方法则是由李湘楠等创立的基于横向动量依赖的因子化方法。随后发展起来的软共线有效理论也是基于共线因子化，但是从 QCD 基本理论出发的有效场论方法。这个理论在 B 物理研究中发展起来之后，应用到了 QCD 理论和计算的各个能量标度和领域，具有非常广泛的应用。

11.2.1　b 夸克衰变的有效哈密顿量

强子的弱衰变是由其内部的夸克的弱相互作用诱导的，强相互作用使得夸克束缚成强子，其典型标度 $O(1\text{GeV})$, 要比弱相互作用的标度 $O(M_{W,Z})$ 低很多。考虑 D 介子 Cabibbo 允许的夸克层次上的跃迁 $c \to su\bar{d}$，如果暂时忽略 QCD 修正的效应，在树图层次上的 W 玻色子交换的振幅为

$$\begin{aligned} A &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cs}^* V_{ud} \frac{M_W^2}{k^2 - M_W^2} (\bar{s}c)_{V-A} (\bar{u}d)_{V-A} \\ &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cs}^* V_{ud} (\bar{s}c)_{V-A} (\bar{u}d)_{V-A} + O(\frac{k^2}{M_W^2}) \end{aligned} \tag{11.61}$$

这里

$$(\bar{s}c)_{V-A} \equiv \bar{s}\gamma_\mu (1-\gamma_5) c \tag{11.62}$$

由于通过 W 玻色子传递的动量相比于 W 玻色子的质量要小很多，因此 $O(k^2/M_W^2)$ 量级的贡献可以安全地忽略掉，这样仅剩下 (11.61) 中的第一项。我们可以写下 $c \to su\bar{d}$ 的有效哈密顿量

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cs}^* V_{ud} (\bar{s}c)_{V-A} (\bar{u}d)_{V-A} + \cdots \tag{11.63}$$

这里的省略号表示包含导数项的高维算符的贡献。可以看出，两个带电流算符的乘积可以展开成一系列的定域算符之和，每一个算符的贡献是由其有效耦合常数来表征的，通常称之为威尔森系数。

考虑到越来越高的计算精确度的要求，需要逐级计算 QCD 修正对弱衰变算符乘积展开的影响。以下将局限于算符乘积展开中维数是 6 的领头阶算符，而忽略高维算符的贡献。对于 $c \to su\bar{d}$ 衰变，在不考虑 QCD 效应的时候，只有方程 (11.63) 中的一个有效算符有贡献。如果考虑 QCD 修正的效应，则需要将其推广为

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cs}^* V_{ud} \left[C_1(\mu) Q_1 + C_2(\mu) Q_2 \right] \tag{11.64}$$

这里

$$Q_1 = (\bar{s}_\alpha c_\beta)_{V-A} (\bar{u}_\beta d_\alpha)_{V-A} \tag{11.65}$$

$$Q_2 = (\bar{s}_\alpha c_\alpha)_{V-A}(\bar{u}_\beta d_\beta)_{V-A} \tag{11.66}$$

在 $\mathcal{O}(\alpha_s)$ 阶，完整振幅 $A_{\rm full}(m_i = 0, p^2 < 0)$ 由图 11.2(a)~(c) 以及它们的对称部分构成; 有效理论的流流算符 Q_1 和 Q_2 的矩阵元可以通过计算图 11.3(a)~(c) 及其对称的部分得到。完整理论和有效理论的匹配就可以抽取威尔森系数 C_i。这样，得到的威尔森系数为

$$C_1(\mu) = -3\frac{\alpha_s}{4\pi}\ln\frac{M_W^2}{\mu^2}\,, \qquad C_2(\mu) = 1 + \frac{3}{N}\frac{\alpha_s}{4\pi}\ln\frac{M_W^2}{\mu^2} \tag{11.67}$$

需要注意的是在做完整理论与有效理论的匹配时，必须采用相同的处理方式 (如夸克场的重整化等) 才能得到正确的结果。

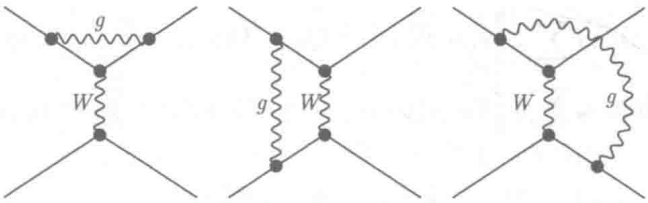


图 11.2 完整理论中的流流算符的单圈修正图 (另有三个对称图没有画)

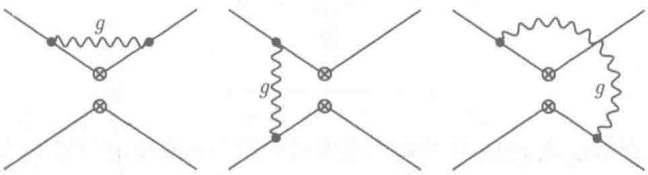


图 11.3 有效理论中的流流算符的单圈修正图 (另有三个对称图没有画)，“⊗” 代表四费米子算符的插入

标准模型中的 b 夸克衰变，由 $|\Delta B| = 1$，$|\Delta S| = 0, 1$ 的有效哈密顿量决定。在这里，有效算符通常可以分成四类：流流算符、QCD 企鹅算符、弱电企鹅算符、电磁和色磁企鹅算符。由于威尔森系数总是包含着相同的 CKM 因子，因此这一部分在有效哈密顿量中可以分离出来，记为

$$\lambda_p^{(D)} \equiv V_{pb}V_{pD}^* = \begin{cases} V_{pb}V_{pd}^*, & D{=}d,\ b \to d \text{ 跃迁} \\ V_{pb}V_{ps}^*, & D{=}s,\ b \to s \text{ 跃迁} \end{cases} \tag{11.68}$$

具体地，描述 B 介子两体非轻衰变的有效哈密顿量为[9]

$$\mathcal{H}_{\rm eff} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\sum_{p=u,c}\lambda_p^{(D)}\left(C_1\,Q_1^p + C_2\,Q_2^p + \sum_{i=3,\cdots,10} C_i\,Q_i + C_{8g}\,Q_{8g}\right) + \text{h.c.} \tag{11.69}$$

这里不同类型的算符的具体定义为

- 流流算符是类似于式 (11.65) 和 (11.66) 的算符：

$$Q_1^p = (\bar{p}_i b_j)_{V-A}(\bar{D}_j p_i)_{V-A}\,, \qquad Q_2^p = (\bar{p}b)_{V-A}(\bar{D}p)_{V-A} \tag{11.70}$$

- QCD 企鹅算符, 来源于图 11.4 所示的企鹅图:

$$\begin{aligned} Q_3 &= (\bar{D}b)_{V-A}\sum\nolimits_q (\bar{q}q)_{V-A}\,, \quad Q_4 = (\bar{D}_i b_j)_{V-A}\sum\nolimits_q (\bar{q}_j q_i)_{V-A} \\ Q_5 &= (\bar{D}b)_{V-A}\sum\nolimits_q (\bar{q}q)_{V+A}\,, \quad Q_6 = (\bar{D}_i b_j)_{V-A}\sum\nolimits_q (\bar{q}_j q_i)_{V+A} \end{aligned} \tag{11.71}$$

- 弱电企鹅算符，来源于类似图 11.4 所示的企鹅图，并以 Z 玻色子或者光子代替其中的胶子传播子:

$$\begin{aligned} Q_7 &= (\bar{D}b)_{V-A}\sum\nolimits_q \frac{3}{2}e_q(\bar{q}q)_{V+A}, \quad Q_8 = (\bar{D}_i b_j)_{V-A}\sum\nolimits_q \frac{3}{2}e_q(\bar{q}_j q_i)_{V+A} \\ Q_9 &= (\bar{D}b)_{V-A}\sum\nolimits_q \frac{3}{2}e_q(\bar{q}q)_{V-A}, \quad Q_{10} = (\bar{D}_i b_j)_{V-A}\sum\nolimits_q \frac{3}{2}e_q(\bar{q}_j q_i)_{V-A} \end{aligned} \tag{11.72}$$

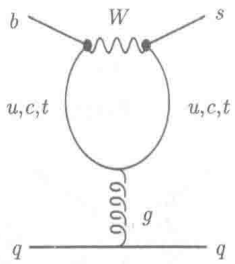


图 11.4　对应于式 (11.69) 中的有效哈密顿量在完整理论中的 QCD 企鹅费曼图

- 色磁企鹅算符，来源于图 11.5 所示的色磁企鹅图:

$$Q_{8g} = \frac{-g_s}{8\pi^2}\, m_b\, \bar{D}\sigma_{\mu\nu}(1+\gamma_5)G^{\mu\nu}b \tag{11.73}$$

这里 $(\bar{q}_1 q_2)_{V\pm A} = \bar{q}_1\gamma_\mu(1\pm\gamma_5)q_2$，求和遍及有效理论中所有激活的夸克味道，即 $q = u, d, s, c, b$。方程 (11.69) 中的威尔森系数 C_i 可以利用类似前面一小节的匹配方法推导出来，目前它们已经被计算到次领头阶，具体的形式参考文献[9]。

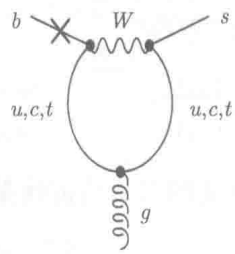


图 11.5　对应于式 (11.69) 中的有效哈密顿量在完整理论中的色磁企鹅费曼图

为了得到强子的衰变振幅，必须把有效哈密顿量插在初态和末态之间

$$A(i \to f) = \langle f|\mathcal{H}_{\text{eff}}|i\rangle = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \sum_i C_i(\mu)\langle Q_i(\mu)\rangle \tag{11.74}$$

这样需要计算算符在初末态之间的强子矩阵元 $\langle Q_i(\mu)\rangle$。遗憾的是，迄今仍然没有一种完全自洽的方式从 QCD 的角度去计算强子矩阵元，这涉及 QCD 理论的一个基本特性——夸克禁闭问题。

在理论上，处理两体非轻衰变的方法主要可以划分成以下三类：第一种是唯象的方法，如各种夸克模型、因子化假设和推广的因子化方法等。在这些方法中通常引入一组参数来刻画重要的非因子化贡献，而不是从基本理论出发来计算这些参数。第二种方法是从 QCD 出发的动力学方法，这些方法中采用了一些可以控制的近似，如大 N_c 展开方法、格点场论方法、QCD 求和规则与光锥求和规则、QCD 因子化方法与软-共线有效理论以及 PQCD 方法。第三种方法是基于味道拓扑图或味对称性的分类方法。在这类方法中，两体非轻衰变的振幅被拆分成一系列的不变子振幅，这些不变子振幅对应着特定的味道拓扑并根据它们在 $SU(3)$ 味道对称性下的变换性质来分类，或者这些不变子振幅对应于弱相互作用哈密顿量的特定 Wick 收缩并且是不依赖于重整化方案的。除了味道对称性关系之外，这些不变子振幅将会被看作唯象上的参数，通过拟合实验来得到。

11.2.2 朴素和推广的因子化方法

朴素的因子化方法也被称为 BSW 模型[10]，是 Bauer、Stech 和 Wirbel 在 1985 年基于夸克模型首先提出的计算 B/D 介子非轻子衰变最简单有效的理论方法。以 B 介子衰变到 $D\pi$ 介子过程为例，其物理图像是基于 Bjorken 的色透明机制[11]：由于 b 夸克很重，由它衰变出来的一对色单态正反轻夸克飞得很快，来不及和周围的软胶子发生作用就强子化成一个介子，或者说由于软胶子的波长很长，感受不到周围的硬胶子的存在。从多极展开的观点来看，这表明一对色单态的正反夸克和周围软胶子的领头阶相互作用是色偶极相互作用，是被 Λ_{QCD}/m_b 压低的。例如，$\bar{B}^0 \to D^+\pi^-$ 衰变的主要贡献费曼图如图 11.6 所示，在朴素因子化框架下，近似有下式成立：

$$\langle D^+\pi^-|(\bar{c}b)_{V-A}(\bar{d}u)_{V-A}|\bar{B}^0\rangle \simeq \langle \pi^-|(\bar{d}u)_{V-A}|0\rangle\langle D^+|(\bar{c}b)_{V-A}|\bar{B}^0\rangle \tag{11.75}$$

这样一个流流算符的强子矩阵元参数化成 π 介子衰变常数和 $B \to D$ 跃迁形状因子的乘积，衰变常数和形状因子都可以通过实验或者其他一些非微扰方法 (如格点 QCD, QCD 求和规则) 得到。朴素因子化方法能够在大能量有效理论[12] 和大 N_c 极限[13] 下被证明。朴素因子化方法的适用范围非常广泛，除了不能很好地预言色

压低的图, 对大部分的颜色增强的树图为主强子的衰变过程都能基本上给出与实验相一致的预言。

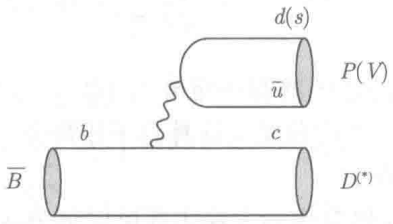


图 11.6　$\bar{B}^0 \to D^+\pi^-$ 衰变的领头阶费曼图

但是尽管朴素因子化方法有如此广泛的适用范围并且计算简单, 却遇到了一些原则上的问题。首先, 在朴素因子化方法中, 由于强子矩阵元是不依赖于标度的, 而四夸克算符的威尔森系数是依赖于标度的, 这样导致物理的衰变振幅是标度相关的, 这可能就是朴素因子化方法不能描述色压低衰变, 如 $\bar{B}^0 \to D^0\pi^0$ 衰变的一个主要原因。这类过程的领头阶贡献的费曼图 11.7 是颜色压低的, 因而其非因子化贡献很大, 破坏了因子化的色透明机制。另外, 在朴素因子化方法中, 衰变振幅的强相位来自于 Bander-Silverman-Soni (BSS) 机制[14]。在这个机制中, 粲夸克圈中的粲夸克在壳时, 可以贡献出一个虚部

$$C_2(t)\alpha_s(t)\int \mathrm{d}u u(1-u)\theta(q^2u(1-u)-m_c^2) \tag{11.76}$$

这里 q^2 是连接到企鹅图中的胶子不变质量。由于在朴素因子化方法中 q^2 不是良好定义的, 因此无法从方程 (11.76) 中抽取出准确的 CP 破坏的强相位。

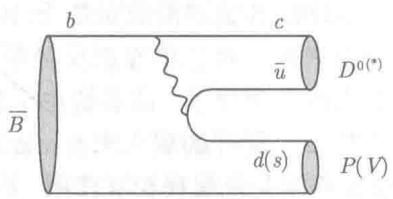


图 11.7　$\bar{B}^0 \to D^0\pi^0$ 衰变的领头阶费曼图

为了克服朴素因子化的上述缺点, 人们进行了诸多的努力, 标度问题的解决通常有以下两种方案。第一种方案是将非因子化的贡献加入威尔森系数中, 构建下面的有效参数 a_i^{eff}:

$$a_1^{\mathrm{eff}} = C_2(\mu) + C_1(\mu)\left[\frac{1}{N_c} + \chi_1(\mu)\right] \tag{11.77}$$

$$a_2^{\mathrm{eff}} = C_1(\mu) + C_2(\mu)\left[\frac{1}{N_c} + \chi_2(\mu)\right] \tag{11.78}$$

来分别描写颜色允许的过程和颜色压低的过程。这里非因子化的贡献由参数 χ_i 表示。威尔森系数的标度依赖性与 $\chi_i(\mu)$ 的标度依赖性严格相消。尽管在朴素因子化方法中 $\langle O(\mu)\rangle$ 是不依赖于标度的, 但是考虑了重整化后的四费米子算符仍然是标度相关的。在考虑了高阶修正后, 威尔森系数依赖于重整化方案的选择, $\chi_i(\mu)$ 此时不能保证矩阵元是不依赖于重整化方案的。

第二种方案是重整化后的矩阵元 $\langle O(\mu)\rangle$ 通过关系 $\langle O(\mu)\rangle = g(\mu)\langle O\rangle_{\text{tree}}$ 与树图矩阵元 $\langle O\rangle_{\text{tree}}$ 联系，因子 $g(\mu)$ 通过计算弱顶点的圈图修正得到[15]，这样就有:

$$C(\mu)\langle O(\mu)\rangle = C(\mu)g(\mu)\langle O\rangle_{\text{tree}} \equiv C^{\text{eff}}\langle O\rangle_{\text{tree}} \tag{11.79}$$

由于树图矩阵元 $\langle O\rangle_{\text{tree}}$ 是重整化方案和标度无关的, 有效威尔森系数也是重整化方案和标度无关的，有效参数 a_i^{eff} 可以表示成[15]

$$\begin{aligned} a_1^{\text{eff}} &= C_1^{\text{eff}} + C_2^{\text{eff}}/N_{\text{eff}} \\ a_2^{\text{eff}} &= C_2^{\text{eff}} + C_1^{\text{eff}}/N_{\text{eff}} \end{aligned} \tag{11.80}$$

这就是推广的因子化方法，而且通过调整 N_{eff} 的大小偏离 3，可以有效地引进理论中无法计算的非因子化贡献。这个推广的因子化方法也推广到了包含企鹅图贡献的末态无粲的 B 介子两体衰变计算中，并且取得了巨大的成功[15]。

但是不幸的是从圈图修正中抽取出的 $g(\mu)$ 是红外发散的, 通常采用的是离壳正规化方案，因此实际上得到的是

$$C^{\text{eff}} = C(\mu)g(\mu, -p^2, \lambda) \tag{11.81}$$

这里 p^2 是红外截断的标度，λ 是规范参数。显然，C^{eff} 存在红外截断和规范参数选择的任意性。只要计算夸克层次上的矩阵元，规范和红外相关性都会存在。其原因在于规范不变算符的离壳顶点重整化后一般是规范相关的。同时在推广因子化方法中引入了自由参数来参数化非因子化图的贡献，这些参数原则上都是过程相关的，因此预言能力受到了限制。同样的，强相位的问题在推广因子化方法中没有得到解决。

从 1999 年开始，基于推广的因子化方法的成功经验，利用重夸克有效理论的基础，基于 QCD 的因子化方法成功地引入 B 介子的非轻子衰变理论: QCD 因子化方法、基于横向动量依赖的微扰 QCD 因子化方法和软和共线有效理论。软和共线有效理论发展于 B 介子的非轻子衰变理论，其后广泛应用于高能 QCD 理论的各个方面，这部分内容单独在本书第 12 章中详细讨论。本章着重阐述前两种理论方法。

11.3　QCD 因子化方法

QCD因子化方法最初是1999年由Beneke、Buchalla、Neubert 和 Sachrajda[16]在推广的因子化方法基础上发展出来的处理重味强子衰变的因子化理论方法。其基本思想是将衰变振幅中不同能标的贡献进行分离，高能标贡献可以利用微扰论计算，低能自由度不可微扰计算却是普适的，可通过拟合实验或非微扰方法如格点量子色动力学获得，进而计算整个过程的衰变振幅从而预言各种物理观测量。B 介子的遍举衰变在运动学上是非常简单的，但是其动力学是非常复杂的，这是因为这个过程涉及的能量标度很多，包括 M_W, m_b, $m_b\Lambda_{\rm QCD}$ 和 $\Lambda_{\rm QCD}$。QCD 因子化方法具有因子化方法的普遍思想：根据微扰论去计算短程的效应，而将长程的效应参数化成一些普适的量，如光锥分布振幅、形状因子等。这些非微扰参数只能通过实验或者其他非微扰方法得到，通常情况下这些非微扰参量在结构上比原来的强子矩阵元要简单很多。

在重夸克极限下，考虑两体非轻衰变，衰变的末态如果是两个重 D 介子，由于末态粒子携带能量很小，则不太适用因子化计算。另外两种情况：衰变末态由一个重介子 H_1 和一个轻介子 L_2 组成，或者衰变末态是由两个轻介子 L_1 和 L_2 组成。首先考虑后一种比较简单的情况。这里轻介子的含义是其质量在重夸克极限 $m_b\to\infty$ 下是可以忽略的，而重夸克的含义是其质量 m 和 m_b 的比值 m/m_b 在重夸克极限下是不可忽略的。在幂次 $\Lambda_{\rm QCD}/m_b$ 展开的领头阶，末态是两个轻介子的情况可以写成下面的因子化公式[16]：

$$\begin{aligned}\langle L_1L_2|Q_i|\bar{B}\rangle=&\sum_j F_j^{B\to L_1}(m_2^2)\int_0^1 {\rm d}u\, T_{ij}^I(u)\,\Phi_{L_2}(u)\\&+\sum_k F_k^{B\to L_2}(m_1^2)\int_0^1 {\rm d}v\, T_{ik}^I(v)\,\Phi_{L_1}(v)\\&+\int_0^1 {\rm d}\xi{\rm d}u{\rm d}v\, T_i^{II}(\xi,u,v)\,\Phi_B(\xi)\,\Phi_{L_1}(v)\,\Phi_{L_2}(u)\end{aligned}\tag{11.82}$$

这里 $F_j^{B\to L_i}$ 代表 $B\to L_i$ 的形状因子，Φ_{L_i} 是介子 L_i 在 Fock 态空间的光锥分布振幅。上式中，前两行的表达式代表的是推广的因子化中类似的贡献，而最后一行是朴素因子化方法中所没有的不可因子化的贡献。这部分贡献是需要在共线因子化框架下来证明因子化的。光锥分布振幅反映的是一个介子态的普适特性，而形状因子仅和 $B\to L_i$ 跃迁的一个定域矩阵元相关。这两个参量都可以通过非微扰技术，如格点 QCD 或者 QCD 求和规则得到，也可以从实验中抽取。硬散射函数 $T_{ij}^I(u)$, $T_{ik}^I(v)$ 和 $T_i^{II}(\xi,u,v)$ 是可以通过微扰论来计算的，它可以表述成强子中

夸克携带的动量分数 u, v 和 ξ 的函数。因子化公式 (11.82) 的图形表示如图 11.8 所示。

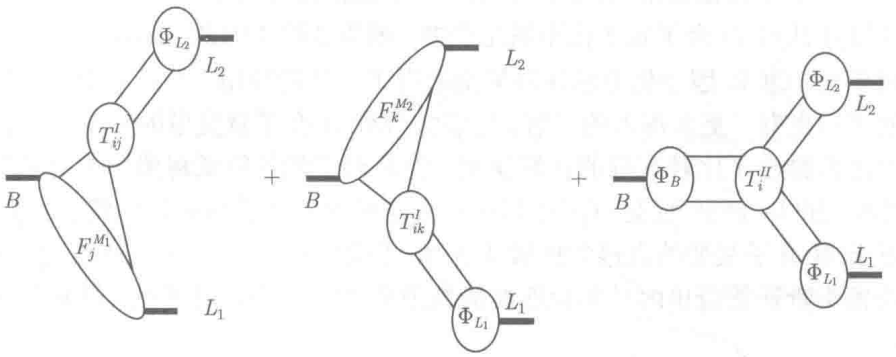


图 11.8 B 介子衰变到两个轻介子的因子化公式的图形表示，前两个图是朴素的因子化方法中已经有的因子化图，最后一个是微扰的硬散射图

对于末态含有重介子的情况，考虑 B 介子中的旁观者夸克进入重味介子的情况，如 $\bar{B}_d \to D^+\pi^-$。在重夸克极限下，旁观者夸克参与相互作用是幂次压低的，即因子化公式（11.82）中的第三项是可以忽略的，这样就得到比较简单的因子化公式

$$\langle H_1 L_2|Q_i|\bar{B}\rangle = \sum_j F_j^{B\to H_1}(m_2^2)\int_0^1 \mathrm{d}u\, T_{ij}^I(u)\,\Phi_{L_2}(u) \tag{11.83}$$

其数值结果则与推广的因子化方法给出的完全相同。对于相反的情况，如果旁观者夸克进入轻的介子，而发射出去的介子是重介子时，因子化公式则不再成立。这是因为重介子既跑得不快又有比较大的横向扩展 $\sim 1/\Lambda_{\rm QCD}$，从而不能从 $B \to L_2$ 跃迁中因子化出来。后面即将讨论的湮灭类费曼图在重夸克展开的领头阶是不贡献的，硬散射相互作用的贡献则是 $O(\alpha_s)$ 级的。由于在 $O(\alpha_s^0)$ 阶，硬散射函数 $T_{ij/k}^I$ 是不依赖于 u 和 v 的，因此方程 (11.82) 和 (11.83) 的卷积约化成衰变常数，从而重现出朴素因子化的结果。但是，现在我们可以系统地计算朴素因子化的辐射修正，在朴素因子化方法中的标度和方案依赖性都被消除了。由于形状因子都是实的，所以能够产生重散射强相位的费曼图在 QCD 因子化方法中要么是幂次压低的，要么是 α_s 压低的。在领头阶的计算中，强相位的主要来源与推广的因子化方法一样，来自于 BSS 机制，但是内部胶子的动量在这里有了很好的定义，消除了数值上的任意性。

简言之，QCD 因子化方法是一个自洽的公式体系，是关于 Bjorken 色透明机制[11] 的推广。这一点从 $\bar{B}_d \to D^+\pi^-$ 衰变中可以清楚地看出。B 介子中的旁观者夸克在发生 $b \to c$ 跃迁后可以很容易地形成 D 介子，$B \to D$ 的跃迁可以参数化

成形状因子。另外，从 b 夸克衰变出来的两个轻夸克是能量非常高的。为了能够形成一个 π 介子，这两个夸克必须是共线的并且处于色单态，这个几率是由 π 介子的领头阶光锥分布振幅来刻画的。这样一个共线的色透明紧致体可以迅速地离开衰变区域并且和 D 介子强子化不发生干涉，因为软胶子的效应退耦了。

近年来，QCD 因子化方法在唯象上取得了广泛的应用，并且人们对于因子化公式的结构也有了更加深入的了解。对于大部分 B 介子衰变道的分支比，QCD 因子化方法都给出了比较准确的计算结果，但是对于颜色压低树图为主贡献的衰变道，例如，$B^0 \to \pi^0\pi^0$ 衰变，QCD 因子化方法给出的计算结果却远低于实验数据。而且对于 B 介子衰变的直接 CP 破坏计算，例如，$B^0 \to K^+\pi^-$ 衰变，QCD 因子化方法领头阶计算给出的结果也跟实验数值非常不吻合。很显然，高阶修正是必需的。

11.3.1　辐射修正

在重夸克极限下，B 介子的两体非轻衰变矩阵元可以因子化为公式 (11.82) 的形式，其中的短程函数 T_i^I, T_i^{II} 可以在微扰论框架下进行逐级计算。如图 11.9 所示，原初的 QCD 因子化方法中被计算到 α_s 阶，前两行是对硬散射核 T_i^I 的 α_s 阶修正图，最后一行是对硬散射核 T_i^{II} 贡献的费曼图。这意味着强相互作用相位 (直接 CP 破坏) 以及硬旁观者散射效应仅仅停留在领头阶的水平。另外的 α_s 阶修正图应该还有图 11.10 所示，其中前三个图是形状因子的修正图，应该已经包含在形状因子的定义中，是不需要计算的。最后一个图，实际上可以归结到发射的末态介子的零点波函数也就是衰变常数的定义中，也是不需要计算的。

这些量的次领头阶计算从唯象学的角度来说是非常重要的。根据 $B \to \pi\pi, \pi K$ 衰变的分析，强相互作用的相位以及色压低树图和色允许树图的振幅的比值 C/T 中的次领头阶贡献有可能比领头阶的贡献还要重要。QCD 因子化框架下的短程系数的次领头阶的计算已经完成，其中包括 J 函数的硬–共线修正，树图振幅中的 H^{II} 的硬修正，企鹅图振幅的 H^{II} 的硬修正。目前，在 QCD 因子化方案下的两圈图树图振幅的修正已经完成，因此去完成 QCD 企鹅图振幅的次次领头阶修正是十分必要的。这些高阶修正的结果总结如下：①由于所有的卷积积分都是收敛的，所以硬旁观者散射项的因子化在单圈层次上 (次领头阶) 也是成立的；②包括在硬–共线标度上的微扰论，对于硬旁观者散射都是成立的；③高阶修正可以增强色压低的树图振幅，但是减小色允许的树图振幅，这改进了涉及末态是 π 介子和 ρ 介子的树图为主过程的预言；④高阶修正对于色允许的幂次展开领头阶企鹅图是可以忽略的，因此对于企鹅图为主的过程，关于分支比和 CP 破坏的预言没有明显的变化。这也再次说明了强相位主要不是来源于微扰 QCD 可计算的部分。

计算到次领头阶之后，色压低的树图振幅的计算结果是

$$a_2(\pi\pi) = 0.18 - [0.15 + 0.08i]_{\rm NLO} + \left[\frac{r_{sp}}{0.485}\right]\left\{[0.12]_{\rm LO} + [0.05 + 0.05i]_{\rm NLO} + [0.07]_{\rm tw3}\right\} \tag{11.84}$$

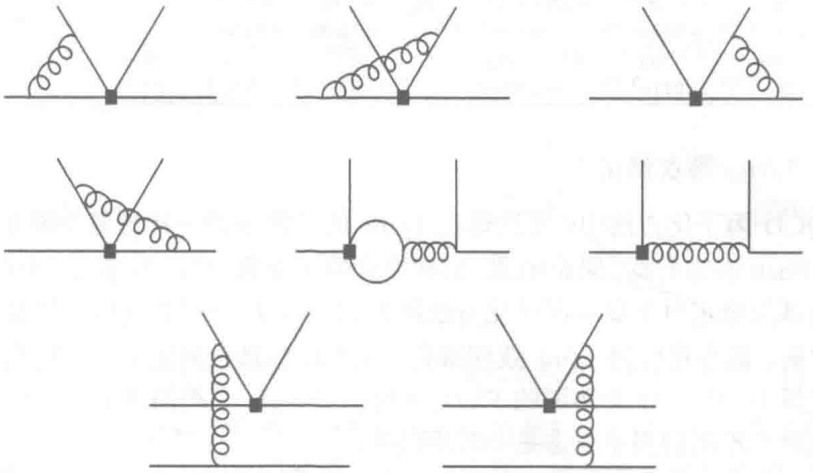


图 11.9 B 介子衰变到两个轻介子的因子化公式的 α_s 阶 QCD 修正费曼图。前两行是对硬散射核 T_i^I 的修正图，最后一行是对硬散射核 T_i^{II} 贡献的费曼图

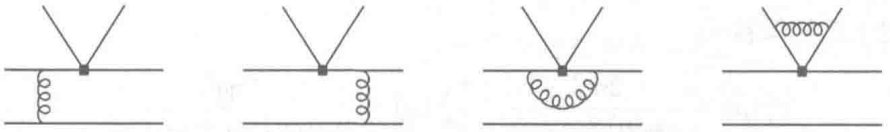


图 11.10 B 介子衰变到两个轻介子的因子化公式的 α_s 阶 QCD 修正费曼图中不需要计算的四个图

这里 $r_{sp} = (9 f_{M_1} \hat{f}_B)/(m_b F^{BM_1}(0)\lambda_B)$，$\hat{f}_B$ 表示重夸克有效理论下的 B 介子衰变常数。方程 (11.84) 表明计算量子修正的重要性：朴素因子化的结果式 (11.84) 的第一项几乎完全被单圈图的顶角修正抵消[16]，色压低的树图主要源于硬旁观者散射。如果因子 r_{sp} 比较大，威尔森系数 a_2 会变得很大。Beneke 等关于 $\pi\pi$, $\pi\rho$ 以及 $\rho\rho$ 分支比的解释是硬旁观者散射的贡献非常重要[17]。但是相比较于实验数据，QCDF 对于 $B^0 \to \pi^0\pi^0$ 衰变的分支比计算值还是太小，也就是对于颜色压低的这一类费曼图为主的过程，即使考虑了下一阶的 QCD 修正，其理论结果还是远小于实验值。通过实验数据整体拟合出的这个贡献的大小[18] 列在表 11.1 中。可以看出，QCD 因子化的计算结果与实验数据的差距还是很大的；而且从表 11.1 中看出等效威尔森系数 α_2 应该有很大的相位，而这也是 QCDF 方法从微扰 QCD 计算中很难得到的。这些都说明了微扰 QCD 的高阶修正计算是有局限性的，幂次微扰展开的高阶修正是必需的。

表 11.1　QCD 因子化方法 (QCDF) 计算中各个有效算符的贡献大小与从实验数据中通过整体拟合方法 (FAT) 抽取的振幅和相位大小的比较

费曼图 T	C	P_C	P(PP)	P_{EW}	E	A	P_A(PV)	P_E
FAT	$a_1\chi^{C^{(\prime)}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi^{C^{(\prime)}}}$	$\chi^{P_C^{(\prime)}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi^{P_C^{(\prime)}}}$	$a_4(\mu)+\chi^P\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi^P}r_\chi$	$a_9(\mu)$	$\chi^E\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi^E}$	–	$-\mathrm{i}\chi^{P_A}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi^{P_A}}$	–
	$0.48\mathrm{e}^{-1.58\mathrm{i}}$	$0.048\mathrm{e}^{1.56\mathrm{i}}$	$-0.12\mathrm{e}^{-0.24\mathrm{i}}$	-0.009	$0.057\mathrm{e}^{2.71\mathrm{i}}$		$0.0059\mathrm{e}^{-0.006\mathrm{i}}$	
QCDF	α_1	α_2	α_3	α_4	α_3^{EW}	β_1	β_2	β_3	β_4
	$0.22\mathrm{e}^{-0.53\mathrm{i}}$	$0.011\mathrm{e}^{2.23\mathrm{i}}$	$-0.089\mathrm{e}^{0.11\mathrm{i}}$	$-0.009\mathrm{e}^{0.04i}$	0.025	-0.011	-0.008	-0.003

11.3.2　$1/m_b$ 幂次修正

在 QCD 因子化方法中，幂次修正 $1/m_b$ 的可能来源包括标量企鹅图、湮灭拓扑图、高 Fock 态的贡献、粲企鹅图、高扭度光锥分布振幅等。唯象上，来自于 QCD 企鹅图的幂次修正对于保证因子化方法给出成功的 B 介子衰变分支比数值结果是非常重要的。最为重要的 $1/m_b$ 效应来自于 QCD 标量企鹅图 $r_\chi a_6$，它来自于对有效哈密顿量中 $(V+A)$ 企鹅图的 Fierz 变换。$(V+A)$ 企鹅图和 $(V-A)$ 企鹅图的干涉效应对于不同的强子末态是非常不同的:

$$\begin{aligned} PP &\sim a_4 + r_\chi a_6, \quad PV \sim a_4 \approx \frac{PP}{3} \\ VP &\sim a_4 - r_\chi a_6 \sim -PV, \quad VV \sim a_4 \sim PV \end{aligned} \tag{11.85}$$

这里对于赝标量粒子

$$r_\chi^\pi(\mu) = \frac{2m_\pi^2}{m_b(\mu)\,2m_q(\mu)}, \quad r_\chi^K(\mu) = \frac{2m_K^2}{m_b(\mu)\,(m_q+m_s)(\mu)} \tag{11.86}$$

由于手征因子 m_π^2/m_q 和 m_K^2/m_s 的增强效应，这些所谓的幂次压低贡献是跟领头阶的贡献同量级的，因而是不可忽略的。对于矢量粒子

$$r_\chi^V(\mu) = \frac{2m_V}{m_b(\mu)}\,\frac{f_V^\perp(\mu)}{f_V} \tag{11.87}$$

其中矢量粒子衰变常数的定义是

$$\begin{aligned} \langle V(p,\varepsilon^*)|\bar{q}\gamma_\mu q'|0\rangle &= -\mathrm{i}f_V m_V \varepsilon_\mu^* \\ \langle V(p,\varepsilon^*)|\bar{q}\sigma_{\mu\nu} q'|0\rangle &= f_V^\perp(p_\mu\varepsilon_\nu^* - p_\nu\varepsilon_\mu^*) \end{aligned} \tag{11.88}$$

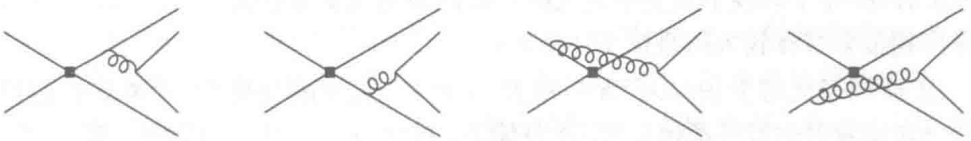
标量企鹅图对于在唯象上得到正确的预言结果是必不可少的。尽管目前对于标量企鹅图的因子化性质还不是很清楚, 端点发散的存在表明这个因子化不再被保持。

第二种重要的 $1/m_b$ 幂次修正来自于湮灭图。如图 11.11 所示，B 介子中的轻夸克也参与相互作用与反 b 夸克一起湮灭成为一对正反轻夸克，另外一对正反轻夸克则由一个硬胶子从真空产生。这里都是高能过程，因而是微扰 QCD 可以计算

的，但是由于存在端点发散，它却是不可以因子化的。在 QCD 因子化方案中，通常用一个参数来刻画其大小，同时用一个参数来表示其长程的强相互作用相位：

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{y} \to X_A, \quad \int_0^1 \mathrm{d}y \frac{\ln y}{y} \to -\frac{1}{2} X_A^2$$

$$X_A = (1 + \rho_A \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_A}) \ln \frac{m_B}{\Lambda_h}, \qquad \rho_A \leqslant 1, \quad \Lambda_h = 0.5\mathrm{GeV} \tag{11.89}$$



(a) (b) (c) (d)

图 11.11 B 介子衰变到两个轻介子的因子化公式的幂次修正项–湮灭图

在这种模型中，标量企鹅算符诱导的湮灭图是很重要的。大量证据表明必须有额外的 QCD 企鹅图贡献才能和实验数据吻合，这通常归结为湮灭拓扑结构。对于末态都是赝标粒子的情况，湮灭图的贡献约占 QCD 企鹅振幅的 25%，而对于末态是两个矢量粒子的情况，这个比例要更高一些。理论上对于湮灭拓扑的计算还存在不同的理解，在微扰 QCD 方法中它是可以计算的，而在软和共线有效理论的框架下，由于也是共线因子化的理论，因子化公式中涉及的卷积积分通常存在端点奇异性，因此因子化失效。一种所谓的 "zero-bin" 因子化方案可以用来消除端点奇异性，但是在这种方案中引入了一个人为的截断，并且没有给出非微扰参量的算符定义，因此这个理论中，湮灭图和其他幂次压低的效应都被忽略掉了，这在唯象上是可行的，因为这个理论中粲企鹅图的贡献是通过实验来拟合的，而粲企鹅图与湮灭图在味道空间的拓扑结构是相同的，其唯象作用完全可以互相补偿。

第三种比较重要的幂次修正来自于粲企鹅图的贡献，它来自于粲夸克圈的收缩。在很长一段时间，粲企鹅图的贡献都是潜在的较大的高阶修正的来源。不同 QCD 方法在理论上对于粲企鹅图的因子化处理有很大的不同。在软和共线有效理论框架中，粲企鹅图即使在领头阶也是不可因子化的，原因是在这个理论框架下，不能引进新的能量标度 m_c，即 m_c/m_b 并不是一个小量可以微扰展开。因子化公式 (11.82) 在这种情况下是破坏的。粲夸克圈的贡献在这个理论框架下只能是另外引进的非微扰的参数。而在 QCD 因子化和下一节即将介绍的微扰 QCD 因子化方法中，将采用增加一个能量尺度的方法，也即在粲夸克圈的计算中再做 m_c/m_b 的小量微扰展开。因此在这个展开的领头阶，粲夸克圈和轻夸克圈没有原则上的区别，都是可以因子化的。如果 m_c 固定，$m_b \to \infty$ 的时候，最小的非相对论性标度为 $m_c v^2 \gg \Lambda_{\mathrm{QCD}}$。这个阈值区域的贡献是微扰可算的，可以利用标准的非相对论

性微扰重求和方法，余下的非微扰部分是幂次压低的，可以表示成高维算符矩阵元的形式，从而粲企鹅图的长程贡献总是伴随着一个压低因子 m_c/m_b。当然，粲夸克圈贡献的真正大小需要更加仔细的理论计算才可以确定，因为 QCD 因子化方法中的计算只限于领头阶 m_c/m_b 的计算，缺失下一阶修正具体计算的情况下，并没有很好的说服力。唯象上，在软和共线有效理论中不能微扰计算的粲夸克圈贡献作为自由参数起到了和 QCD 因子化中不能微扰计算的标量企鹅湮灭图参数同样的作用来解释 B 介子非轻子衰变中较大的企鹅图为主衰变道分支比，以及较大的强相互作用相位来解释较大的直接 CP 破坏。

QCD 因子化对于 $B \to \pi^{\mp}K^{\pm}$ 和 $B \to \pi^{+}\pi^{-}$ 衰变的直接 CP 不对称性的预言与后来实验数据的符号是相反的，而且偏小。从表格 11.2 中可以看出早期 QCD 因子化对于直接 CP 破坏的预言误差也是比较大的，这主要是因为湮灭图的大小和相位来源于参数化，是完全不确定的。这说明 QCD 因子化方法领头阶贡献给出的强相互作用相位是不够的，或者并不是最主要的贡献。与实验拟合的数据显示，湮灭图的贡献，特别是手征增强的企鹅湮灭图应该给出很大的贡献。公式 (11.89) 需要给出很大的振幅大小参数和相位参数[19]。在 2003 年，两个 B 介子工厂发现，在 $B \to \phi K^*$ 衰变中，末态矢量介子的横向极化分数高达 50%，远高于原来理论的预期。在 QCD 因子化方法中，这必须由很大的企鹅湮灭图来给出。这进一步显示企鹅湮灭图的贡献并不是压低的，而是手征增强的。

表 11.2　早期 QCD 因子化方法[17]和微扰 QCD 因子化方法[20]对 $B \to \pi\pi, \pi K$ 衰变过程的直接 CP 破坏大小预言和最近实验结果[4]的比较

衰变道	QCD 因子化	微扰 QCD 因子化	实验值
$B^0 \to \pi^- K^+$	4.5 ± 9.9	-17 ± 5	-9.7 ± 1.2
$B^+ \to \pi^0 K^+$	7.1 ± 10.1	-13 ± 4	4.7 ± 2.6
$B^0 \to \pi^- \pi^+$	-6.5 ± 13.6	30 ± 10	38 ± 7

另外一种幂次修正来自于高 Fock 态的贡献。对 B 介子非轻衰变中末态强子的三粒子分布振幅的效应研究，发现对于 ω 或者 $\eta^{(\prime)}$ 末态，其三粒子分布振幅的修正可以给出很重要的修正。在没有考虑未知的味道单态的湮灭拓扑结构情况下，三粒子 Fock 态的贡献仍然可以将 $B \to K\eta'$ 衰变的分支比提高到 5×10^{-5}。

因子化方法的预言和实验数据的详尽比较已经揭示了 QCD 因子化方法的一些问题。一个熟知的例子就是 $B \to \pi^0\pi^0$ 的分支比和 $A_{\rm CP}(B \to K\pi)$ 和 $S_{K_S\pi^0}$ 的实验数据要求色压低的树图贡献比较大，当然也有可能较大的硬旁观者散射的效应可以解释这一点，但是实验发现的较小的 $B \to \rho^0\rho^0$ 的分支比却要求这个硬散射贡献不能太大。由于幂次修正的效应是不确定的，强相互作用的相位通常带有很大的误差。无论如何，QCD 因子化是很难解释 QCD 企鹅图或者色压低树图的强相

位与色允许的树图是相差超过 90° 的。在理论上，我们对于幂次修正的效应还缺乏足够的认识，这将是未来改进 QCD 因子化方法的重要方向。

11.4 微扰 QCD 因子化方法

微扰 QCD 因子化方法是 2000 年在横向动量依赖的因子化基础上发展起来的 B 介子非轻子衰变计算方法[20]。在 B 介子的静止系中分析 $B \to \pi\pi$ 衰变，大质量的 B 介子衰变到两个背向高速运动的轻介子。末态中，轻介子的能量是 $M_B/2$，轻的价夸克能量是 $\mathcal{O}(M_B/4)$。对于 QCD 因子化方法中不能计算的形状因子图，由于旁观者夸克从其在 B 介子中的 $\Lambda_{\rm QCD}$ 量级的能量强子化到末态高速运动的介子中，需要一个硬胶子传递动量 $k \sim \mathcal{O}(M_B/4)$，因此计算形状因子的两个如图 11.12(a) 和 (b) 所示的费曼图就是与图 11.12(c) 和 (d) 所示的旁观者硬散射的费曼图是同量级的。两个计算形状因子的费曼图在 QCD 因子化方法中不能计算的原因是存在端点发散。而在微扰 QCD 因子化方法中，则可以通过保留夸克横动量的手段来消除端点发散。因此，在微扰 QCD 因子化方法中，这类费曼图也是能够微扰计算的。

首先看一下 $B \to \pi\pi$ 衰变的形状因子计算费曼图 11.12(a) 和 (b)。类似于 QCD 因子化方法中湮灭图的计算，其内线夸克和胶子的传播子正比于

$$\frac{1}{[(P_1-k_3)^2-M_B^2](k_1-k_3)^2}=\frac{1}{(2P_1\cdot k_3)(2k_1\cdot k_3)}=\frac{1}{x_1x_3^2M_B^4} \tag{11.90}$$

其中 $k_1(k_3)$ 是介子 $B(\pi)$ 中旁观者夸克的动量，$x_1=k_1^+/P_1^+$ $(x_3=k_3^-/P_3^-)$ 是相应的动量分数。这里忽略了 B 介子和 b 夸克的质量差 $\bar{\Lambda}=M_B-m_b$。利用 π 介子的波函数渐近形式 $x_3(1-x_3)$ 判断，很显然，当 $x_3\to 0$，上式是发散的。因此，QCD 因子化方法认为，夸克的动量越小贡献越大，过程是以长程贡献为主的，是非微扰的。QCD 因子化方法只能用形状因子 $F^{B\pi}$ 作为输入参数来描述这一过程。而实际上这种过程是大多数 B 介子非轻子衰变的主要贡献，在 QCD 因子化中却是不能微扰计算而只能作为非微扰贡献参数输入的。

实际上，以上过程在 $x_3\to 0$ 区域，夸克的横动量 k_T 变得很重要，不可忽略。相应地，方程（11.90）变为

$$\frac{1}{(x_3M_B^2+k_{3T}^2)[x_1x_3M_B^2+(\boldsymbol{k}_{1T}-\boldsymbol{k}_{3T})^2]} \tag{11.91}$$

此时已经没有了 $x_3\to 0$ 的端点奇异性。但是保留横向动量 k_T，则引入了一个新的标度，在圈图计算中就会出现新的双对数项，这些大的双对数项会使得微扰展开失效，必须利用重整化群方法重求和，使得微扰 QCD 因子化方法的 k_T 因子化方案与基于共线因子化的 QCD 因子化方法不同，这是两类方法的本质区别之一。

保留横向动量 k_T 后，B 介子衰变过程中出现三个标度：M_W，有效哈密顿量与完整理论匹配的标度；$t(\sim M_B)$，即硬散射振幅中虚粒子的最大动量，是硬散射振幅的特征标度，相当于因子化方法中的低能标 M_B；横向动量 k_T。利用有效哈密顿量，令 $\mu = t$，得衰变振幅

$$\mathcal{A} \propto C(t)\langle\pi\pi|O(t)|B\rangle = C(t)g(t)\langle\pi\pi|O|B\rangle_{\text{tree}} \equiv C^{\text{eff}}\langle\pi\pi|O|B\rangle_{\text{tree}} \tag{11.92}$$

其中，$g(t)$ 提取出了强子矩阵元的标度依赖部分，使得树图的强子矩阵元 $\langle\pi\pi|O|B\rangle_{\text{tree}}$ 和有效的威尔森系数 C^{eff} 是标度无关的。值得一提的是，威尔森系数 C 从 M_W 标度到 $t \sim M_B$ 标度的演化行为与其间是否存在新粒子密切相关。所以，威尔森系数 C 的精确计算和实验检验可以验证标准模型。

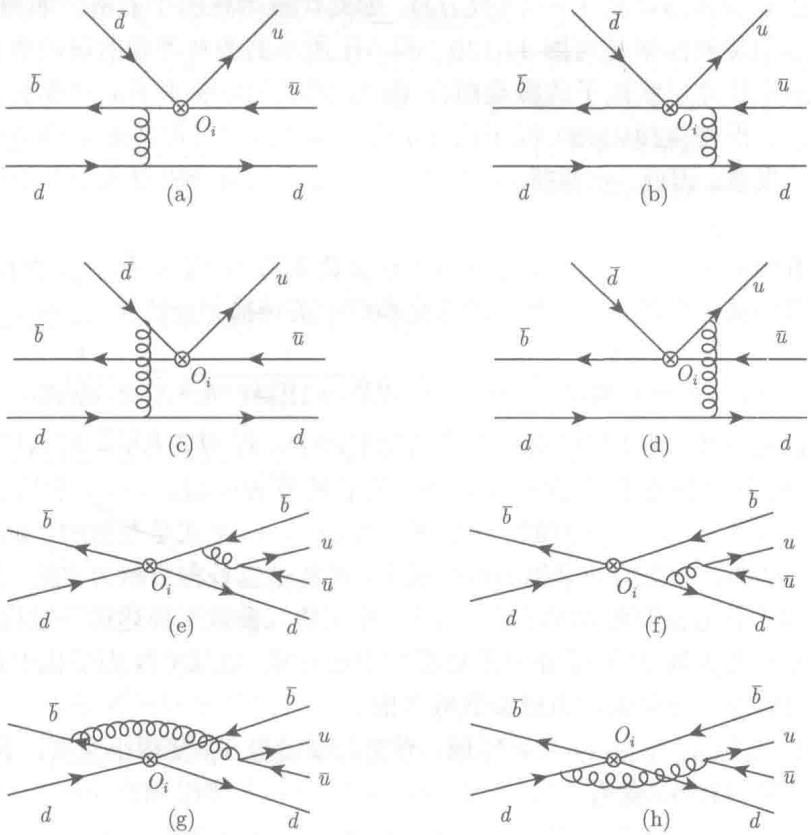


图 11.12　$B^0 \to \pi^+\pi^-$ 衰变的领头阶费曼图

保留横向动量后的 k_T 因子化幂次律将和共线因子化方案有很大不同，在微扰 QCD 因子化方法中的领头阶贡献来源于由一个硬胶子从四夸克传递 QCD 相互作用到旁观者或者海夸克的费曼图，如图 11.12 所示。在 QCD 因子化中被认为是幂次压低的湮灭图 11.12(e)~(h) 在这里和因子化图以及旁观者硬散射图是同阶的。

微扰 QCD 因子化方法的基础 k_T 因子化的证明类似于共线因子化，只是多了横向动量，需要逐个过程证明，详细情况参见第 6 章，这里只举一个简单的例子。

11.4.1 $B \to \gamma l\bar{\nu}$ 衰变的因子化证明

遍举过程的微扰 QCD 因子化定理表明在大动量转移时，强子形状因子可以表述成强子分布振幅和硬散射振幅的卷积。但是，在动量分数 $x \to 0$ 的端点区域，微扰计算受到了软贡献的抬升。在这个区域，硬散射振幅的典型标度是很低的，从而依据耦合常数 α_s 的微扰展开是不自洽的。当端点区域变得重要的时候，对硬散射核辐射的修正导致的双对数 $\alpha_s \ln^2 x$ 很大，将破坏微扰论，需要利用重求和技术来改进微扰论。具体地在微扰 QCD 因子化定理中引入夸克的喷注函数来求和由共线胶子模式导致的双对数。喷注函数是由辅助威尔森线夸克场的矩阵元来定义的，喷注函数中的双对数在 Mellin 空间可以重求和起来给出一个 Sudakov 因子。下面，以 $B \to \gamma l\bar{\nu}$ 为例讨论 $O(\alpha_s)$ 阶的因子化公式[21]。首先定义 B 介子和光子动量为

$$P_1 = (M_B/\sqrt{2})(1, 1, \mathbf{0}_T), \qquad P_2 = (M_B/\sqrt{2})(0, \eta, \mathbf{0}_T) \tag{11.93}$$

考虑转移动量平方 $q^2 = (1-\eta)M_B^2$ 比较小的运动学区域，这里 $q = P_1 - P_2$ 是轻子对的动量。显然，在 η 比较大的时候，微扰 QCD 是适用的。红外发散有两种类型，一种是软发散，一种是共线发散。通常，软发散可以在不同的费曼图之间抵消，真正需要因子化处理的是 $O(\alpha_s)$ 阶辐射修正的共线发散。

图 11.13(a) 和 (b) 是 $B \to \gamma l\bar{\nu}$ 过程的最低阶费曼图，这两个图中硬散射振幅的标度行为分别是 $1/(\bar{\Lambda} M_B)$ 和 $1/M_B^2$。在领头阶可以只考虑图 11.13(a)。在领头阶的 PQCD 计算中，由于没有圈图计算，也就没有红外发散，因而因子化的证明也只是形式上的，$B \to \gamma l\bar{\nu}$ 的形状因子可以写成

$$G(q^2) = \sum_{m=+,-} \phi_m(x) \otimes H_m(x, \eta) \tag{11.94}$$

这里符号 $\otimes$ 表示对动量分数 $x = k^+/P_1^+$ 的卷积，k 是旁观者夸克的动量。B 介子光锥分布振幅的定义是

$$\begin{aligned}\phi_\pm(x) = \int \frac{\mathrm{d}y^-}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xP_1^+ y^-} \langle 0|\bar{q}(y^-)\gamma_5(\not{v} + I)\gamma^\pm \\ \exp\left[-\mathrm{i}g\int_0^{y^-} \mathrm{d}z n_- \cdot A(zn_-)\right] b_v(0)|B(P_1)\rangle\end{aligned} \tag{11.95}$$

这里 $v = P_1/M_B$，$n_- = (0, 1, \mathbf{0}_T)$，$b_v$ 是重夸克有效理论中的 b 夸克场。

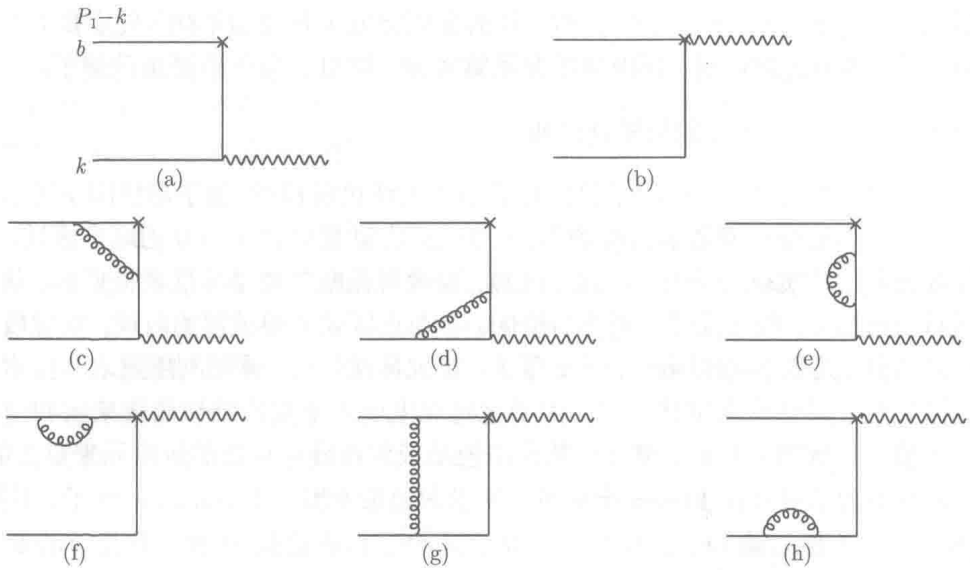


图 11.13　$B \to \gamma l\bar{\nu}$ 衰变过程的领头阶和 $O(\alpha_s)$ 级辐射修正的费曼图

方程 (11.94) 中的因子化公式对于 $k^+ \sim O(\bar{\Lambda})$ 区域是很好的，因为所有的软发散都被吸收到方程 (11.95) 中的波函数 $\phi_\pm$ 中。在端点区域 $k^+ \sim O(\bar{\Lambda}^2/M_B)$，费曼图 11.13(a) 的内线夸克携带的动量是 $P_2 - k$，其不变质量标度行为是 $(P_2 - k)^2 = -2xP_1 \cdot P_2 \sim O(\bar{\Lambda}^2)$。此时，被散射夸克携带的动量具有一个大分量，但是其不变质量是很小的。从而在这个区域，被散射夸克形成一个喷注，对喷注的辐射修正会产生共线发散。因此，需要引入一个喷注函数将这些共线增强效应全部收集起来。

$B \to \gamma l\bar{\nu}$ 衰变过程的 $O(\alpha_s)$ 级辐射修正的费曼图如图 11.13(c)~(h) 所示。下面以费曼图 11.13(c) 为例仔细讨论喷注函数的分离，其示意图如图 11.14 所示。

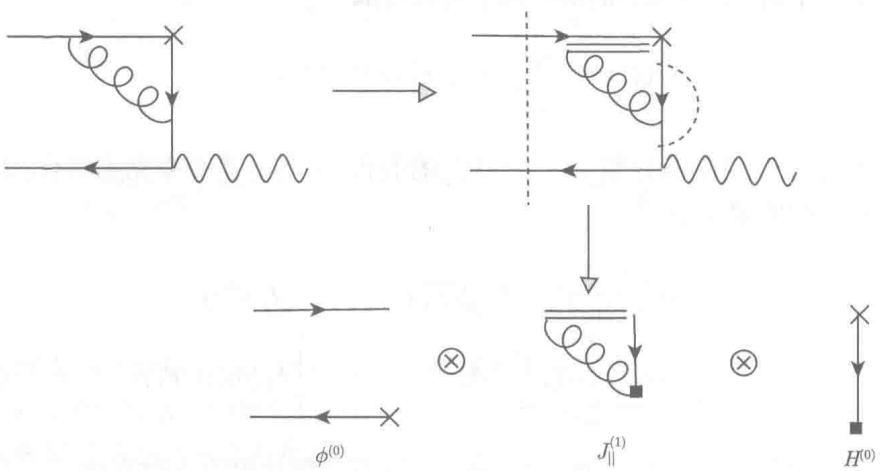


图 11.14　喷注函数的因子化

第一步：将 b 夸克线替换成 n_+ 方向的程函 (eikonal) 线，

$$\frac{\not P_1 - \not k + \not l + m_b}{(P_1 - k + l)^2 - m_b^2}\gamma^\beta b(P_1 - k) \approx \frac{n_+^\beta}{n_+ \cdot l} b(P_1 - k) \tag{11.96}$$

这里 $b(P_1 - k)$ 表示携带动量为 $P_1 - k$ 的 b 夸克的旋量，$n_+ = (1, 0, \mathbf{0}_T)$ 是一个单位向量。上述替换的原因在于 γ^β 主要是由正分量 γ^+ 主导的，l^- 远远大于 l^+，所以 $\not l \gamma^\beta$ 在领头阶是不贡献的。

第二步：引入 Fierz 恒等式

$$\begin{aligned} I_{ij} I_{lk} = & \frac{1}{4} I_{ik} I_{lj} + \frac{1}{4}(\gamma_5)_{ik}(\gamma_5)_{lj} + \frac{1}{4}(\gamma_\alpha)_{ik}(\gamma^\alpha)_{lj} \\ & + \frac{1}{4}(\gamma_5\gamma_\alpha)_{ik}(\gamma^\alpha\gamma_5)_{lj} + \frac{1}{8}(\sigma_{\alpha\beta})_{ik}(\sigma^{\alpha\beta})_{lj} \end{aligned} \tag{11.97}$$

将喷注函数和硬散射核分离出来。对于现在考虑的情况，只有第一项与最后一项贡献，可以等价地写成

$$I_{ij} I_{lk} \to \frac{1}{4} I_{ik} (\not n_+ \not n_-)_{lj} \tag{11.98}$$

将上式的单位矩阵 I 归入硬散射振幅中，可以得到图 11.13(a)。将矩阵 $\not n_+ \not n_-/4$ 归入喷注函数中，有

$$\begin{aligned} J_\parallel^{(1)} &= -\mathrm{i} g^2 C_F \int \frac{\mathrm{d}^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{4} \mathrm{tr}\left[\not n_+ \not n_- \gamma_\beta \frac{\not P_2 - \not k + \not l}{(P_2 - k + l)^2} \right] \frac{n_+^\beta}{n_+ \cdot l l^2} \\ &= -\frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \ln^2 x + \cdots \end{aligned} \tag{11.99}$$

这里 $C_F = 4/3$ 是色因子。上式中，我们已经将共线奇点从 l 平行于 n_+，变成允许 n_+ 具有一个小的负分量。将费曼图 11.13(c) 和 (e) 合并在一起，就得到了零级和 $O(\alpha_s)$ 级的喷注函数表达式

$$J^{(0)} = \mathrm{tr}(\not n_+ \not n_-)/4 = 1\,, \quad J^{(1)} = J_\parallel^{(1)} + J_\perp^{(1)} \tag{11.100}$$

观察所有的 α_s 阶修正图 11.13(c)~(h)，很容易发现其实只有 11.13(c) 可以产生出双对数 $\ln^2 x$，其物理解释是：软胶子线与共线夸克线、重夸克线都退耦，夸克传播子可以约化成标量的程函线；共线胶子线和重夸克线以及反向共线夸克线退耦，此时重夸克线以及反向共线夸克线可以约化成标量程函线。基于上面的分析，图 11.13(c) 中共线胶子线的一端是连接在 b 夸克传播子上的，从而 b 夸克传播子约化成程函线，进而可以用 Fierz 等式将程函线、共线胶子线以及靠近弱衰变顶点的夸克传播子分离出来，形成喷注函数。但是，对于图 11.13(d) 而言，共线胶子线是连接在轻夸克线上，胶子线方向是平行于动量 P_2，轻夸克线的动量分量 k^+ 是

大的。如果要使得共线胶子线与轻夸克线退耦，那么轻夸克线动量必须是反向共线的，显然这种动量模式是受到 B 介子波函数压低的，从而图 11.13(d) 仅会出现单对数 $\ln x$。对于自能修正图 11.13(e) 而言，共线胶子线与共线夸克线是不退耦的，只能产生单对数 $\ln x$，可以利用 Fierz 等式将其归入喷注函数 $J_\perp$。图 11.13(f)~(h) 是对 B 介子波函数的辐射修正，不会给出端点处的共线发散 $\ln x$。

现在，已经证明图 11.13(c)，(d)，(f)~(h) 中的软发散被吸收到 $O(\alpha_s)$ 级的 B 介子波函数 $\phi_\pm^{(1)}$ 中。剩余 $O(\alpha_s)$ 级红外安全的部分，包括除图 11.13(c) 以外的单对数项都被吸收到硬散射振幅 $H_\pm^{(1)}$ 中。考虑到端点区域的贡献，可以将 $O(\alpha_s)$ 级的因子化公式修改为

$$G^{(0)}+G^{(1)}=\sum_{m=+,-}[1+\phi_m^{(1)}]\otimes[H_m^{(0)}+H_m^{(1)}]\otimes[1+J^{(1)}]+O(\alpha_s^2) \tag{11.101}$$

这里 $G^{(0)}$ 和 $G^{(1)}$ 已经在图 11.13 中给出。从上面的表达式中，可以明显地看到喷注函数是不依赖于 B 介子波函数下标 m 的，这也可以从方程 (11.99) 看出。至此，式（11.101）在 α_s 阶的水平上证明了因子化。

另外还需要在 Mellin 空间完成对双对数 $\alpha_s\ln^2 x$ 的重求和，一般采用的规范是协变规范 $\partial\cdot A=0$。首先将矢量 n_+ 替换成 n，这里 n 具有正分量和一个小的负分量，其目的是正规化共线奇点。用无量纲矢量 n 以及 n_+ 表示的喷注函数可以看成是定义在不同的因子化方案下。这样喷注函数定义中涉及三个变量：威尔森线的方向 n, 动量 P_2 以及旁观者动量 k。从而喷注函数依赖于三个洛伦兹标量：$n\cdot k$, $n\cdot P_2$ 以及 $P_2\cdot k$。不变量 P_2^2 和 k^2 为零，而 n^2 是一个常数。需要指出的是，第三个不变量 $P_2\cdot k$ 与前两个不变量不是独立的，因为在 n^2 固定时它可以表述成 $(n\cdot P_2)(n\cdot k)$。另外，根据沿着 n 方向程函线的费曼规则的标度不变性，可以发现喷注函数必须依赖于比值 $n\cdot k/n\cdot P_2$。

下面推导喷注函数随着动量分数 $x=k^+/P_1^+$ 的演化行为。为此考虑下面的链式求导规则

$$k^+\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}k^+}=\frac{n\cdot k}{P_2\cdot k}P_2^\alpha\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}n^\alpha} \tag{11.102}$$

算符 $\mathrm{d}/\mathrm{d}n^\alpha$ 作用于 n 方向的程函线的结果是

$$\frac{n\cdot k}{P_2\cdot k}P_2^\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n^\alpha}\frac{n_\mu}{n\cdot l}=\frac{\hat{n}_\mu}{n\cdot l} \tag{11.103}$$

这里出现了一个特殊顶点

$$\hat{n}_\mu=-\frac{n\cdot k}{P_2\cdot k}\frac{P_2\cdot l}{n\cdot l}n_\mu \tag{11.104}$$

在方程 (11.104) 的推导中忽略了正比于 P_2 的贡献，因为这个特殊顶点是连接到喷注函数内部的，而喷注函数内部是平行于 P_2 的动量模式主导的。类似于前面 k_T 因子化定理的证明，流入特殊顶点的圈动量不会产生共线发散，这是因为在这个区域 $P_2 \cdot l$ 消失。同样的，容易观察出圈动量的紫外区域也不会产生 $\ln x$ 增强效应。因此，只需要考虑从特殊顶点发射出软胶子的因子化。这可以通过对内线夸克传播子做程函近似得到，从而给出系数 $n_{-\nu}/n_- \cdot l$。喷注函数的求导可以写成

$$x\frac{\mathrm{d}J(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\alpha_s}{2\pi}C_F\int_x^1 \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - x}J(\xi) \tag{11.105}$$

被积函数 J 的宗量来源于内线夸克的不变质量 $(P_2 - k + l)^2 \approx -2(x - l^+/P_1^+)P_1 \cdot P_2$。完成对 l^- 和 l_T 的积分，可以得到演化方程

$$x\frac{\mathrm{d}J(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\alpha_s}{2\pi}C_F\int_x^1 \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - x}J(\xi) \tag{11.106}$$

这里被积变量 ξ 对应于圈动量的正分量 l^+。做变量代换 $\xi = x/z$，方程 (11.106) 可以约化为

$$x\frac{\mathrm{d}J(x)}{\mathrm{d}x} = J^{(0)}(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi}C_F\int_x^1 \frac{\mathrm{d}z}{z}J(x/z) \tag{11.107}$$

这里的非微扰函数 $J^{(0)}(x)$ 吸收了来自于 $\xi \to x$ $(z \to 1)$ 的软奇点贡献。扣除这个奇点的贡献后，积分的第二项是红外安全的。

为了求解微分方程 (11.106)，需要利用 Mellin 变换从动量分数 (x) 空间变换到矩 (N) 空间

$$\tilde{J}(N) \equiv \int_0^1 \mathrm{d}x(1-x)^{N-1}J(x) \tag{11.108}$$

这里小 x 区域对应于大 N 区域。方程 (11.106) 的左边部分给出

$$\int_0^1 \mathrm{d}x(1-x)^{N-1}x\frac{\mathrm{d}J(x)}{\mathrm{d}x} = -N\tilde{J}(N) + (N-1)\tilde{J}(N-1) \approx \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}N}\left[N\tilde{J}(N)\right] \tag{11.109}$$

这里利用了近似 $\mathrm{d}N \approx \Delta N = 1$。方程 (11.105) 的右边部分可以化简为

$$\frac{\alpha_s}{2\pi}C_F\int_0^1 \mathrm{d}\xi(1-\xi)^{N-1}J(\xi)\int_0^1 \frac{\mathrm{d}w}{1-w}\left(\frac{1-\xi w}{1-\xi}\right)^{N-1} \approx \frac{\alpha_s}{2\pi}C_F\ln N\tilde{J}(N) \tag{11.110}$$

这里交换了对 x 和 ξ 的积分次序，并做了变量代换 $x = \xi w$。

将方程 (11.109) 和 (11.110) 匹配起来，就可以得到矩空间的演化方程

$$N\frac{\mathrm{d}\tilde{J}(N)}{\mathrm{d}N} = -\tilde{J}(N) - \frac{\alpha_s}{2\pi}C_F\ln N\tilde{J}(N) \tag{11.111}$$

这个方程的解给出一个 Sudakov 因子

$$\tilde{J}(N)=\frac{1}{N}\exp\left(-\frac{1}{4}\gamma_K\ln^2 N\right) \tag{11.112}$$

这里的反常量纲 $\gamma_K=\alpha_s C_F/\pi$。因子 $1/N$ 可以看成是 Mellin 变换的初始条件 $J^{(0)}=1$。与单举过程的喷注函数相比，可以发现遍举过程喷注函数的重求和受到 $1/N$ 因子的压低，并且反常量纲也少了一个因子 2。

利用 Mellin 反演变换，喷注函数在动量分数空间可以写成

$$J(x)=\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}\frac{\mathrm{d}N}{2\pi\mathrm{i}}(1-x)^{-N}\tilde{J}(N) \tag{11.113}$$

这里 c 是一个任意的实常数，只需大于所有的被积函数的奇点的实部。在复 N 平面内，$\tilde{J}(N)$ 在负实轴上包含一条支割线, 方程 (11.113) 可以约化成

$$J(x)=-\exp\left(\frac{\pi}{4}\alpha_s C_F\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\pi}(1-x)^{\exp t}\sin\left(\frac{1}{2}\alpha_s C_F t\right)\exp\left(-\frac{\alpha_s}{4\pi}C_F t^2\right) \tag{11.114}$$

这里对于回路的上半叶 (下半叶) 做了如下替换：$N=\exp(t+\mathrm{i}\pi)$ $(N=\exp(t-\mathrm{i}\pi))$。注意上面的表达式仅对 $\alpha_s>0$ 成立。对于 $\alpha_s=0$, $N=0$ 点处的留数必须包括进来，很容易验证 $\int J(x)\mathrm{d}x=\tilde{J}(1)=1$。

显然，方程 (11.114) 在 $x\to 0$ 时消失，因为被积函数是 t 的奇函数。由于因子 $(1-x)^{\exp t}$ 的存在，方程 (11.114) 在 $x\to 1$ 处消失, 这是 Sudakov 因子在小 N 区域外推的结果。方程 (11.114) 还提供了在端点处 $x\to 0$ 的压低，而且比任何 x 的幂次都要强，这是因为方程 (11.114) 在端点处 $x\to 0$ 对 x 的任意阶导数都为零。

如果将阈值重求和到次领头阶对数，需要用到包含两圈图的反常量纲 γ_K。这时的 Sudakov 因子的形式为

$$\tilde{J}(N)=\exp\left[\frac{1}{2}\int_0^{1-1/N}\frac{\mathrm{d}z}{1-z}\int_{(1-z)}^{(1-z)^2}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}\gamma_K(\alpha_s(\lambda M_B^2/2))\right] \tag{11.115}$$

其中

$$\gamma_K=\frac{1}{N}\frac{\alpha_s}{\pi}C_F+\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 C_F\left[C_A\left(\frac{67}{36}-\frac{\pi^2}{12}\right)-\frac{5}{18}n_f\right] \tag{11.116}$$

这里 n_f 是夸克的味道数目，$C_A=3$ 是色因子。为了唯象上分析方便，通常还引入下面的参数化

$$S_t(x)=\frac{2^{1+2c}\Gamma(3/2+c)}{\sqrt{\pi}\Gamma(1+c)}[x(1-x)]^c \tag{11.117}$$

在端点处 ($x \to 0$ 和 $x \to 1$)，$S_t(x)$ 函数也是消失的。在 $\alpha_s \to 0$ ($c \to 0$) 的极限下，方程的结果趋于 1。$S_t(x)$ 的 Mellin 变换给出

$$S_t(N) \equiv \frac{2^{1+2c}\Gamma(3/2+c)}{\sqrt{\pi}\Gamma(1+c)} B(c+1, c+N) \tag{11.118}$$

变量 N 必须足够小，以保证阈值重求和在次领头阶对数项 $\alpha_s \ln N$ 是成立的。同时 N 必须足够大以保证方程 (11.115) 中的耦合常数 $\alpha_s(M_B^2/(2N^2))$ 是不发散的。将方程 (11.118) 在 $3 < N < 7$ 之间做最佳拟合，可以定出 $c = 0.3$。方程 (11.117) 表明阈值重求和改变了强子波函数的端点行为，使得波函数在 $x \to 0$ 时消失得更快。总之，在微扰 QCD 因子化计算中，双对数项 $\ln^2 x$ 使得在端点 $x = 0$ 处，微扰展开在 α_s 的任意阶都是发散的，但是在重整化群重求和之后，其收敛性得到了很好的改观，端点处贡献被强烈压低。

11.4.2 $B \to \pi$ 形状因子

$B \to \pi$ 形状因子描写的物理过程是 $B \to \pi \ell \bar{\nu}_l$ 的半轻子衰变，其定义为

$$\begin{aligned}\langle \pi(P_2)|\bar{b}(0)\gamma_\mu u(0)|B(P_1)\rangle = f_+(q^2)\left[(P_1+P_2)_\mu - \frac{M_B^2 - M_\pi^2}{q^2} q_\mu\right] \\ + f_0(q^2)\frac{M_B^2 - M_\pi^2}{q^2} q_\mu\end{aligned} \tag{11.119}$$

这里 $q = P_1 - P_2$ 是轻子对的动量。在光锥求和规则和 QCD 因子化方法中，形状因子是软胶子交换为主的。主要原因是在共线因子化框架下计算形状因子，不可避免地会遇到端点发散的问题，而这个是非物理的发散。因而只能把形状因子的主要贡献归结为软胶子不能计算的部分。而在 PQCD 方法中，形状因子计算也是硬胶子交换为主的，由公式（11.91）可以看出，端点发散在 k_T 因子化框架下是可以因子化的，因而也是可以微扰计算的。由于外线夸克是在壳的，因此，辐射修正的紫外发散和红外发散都可以用维数正规化分离。然后利用一定的重整化方案将紫外发散减除掉，得到紫外有限的辐射修正。如何处理描述长程贡献的红外发散，得到红外安全的衰变振幅，则是因子化的目的。关于 k_T 因子化证明的细节可以参见 6.4 节。以 $B \to \pi$ 的形状因子的辐射修正为例，如图 11.15 所示，含有红外发散的辐射修正分为两类：可约和不可约的辐射修正。其中，图 11.15(a) 和 (b) 是可约图，含有二次对数项，起源于共线和软发散的交叠。图 11.15(c) 和 (d) 是不可约图，只含有软发散。物理图像上，可以这样理解，两个同向运动的夸克既可以通过共线胶子，也可以通过软胶子相互作用。而两个反向运动的夸克只能通过软胶子发生相互作用。通过分析，图 11.15(a) 和 (b)、(c) 和 (d) 的软发散分别互相抵消。然后，不可约图 (c) 和 (d) 贡献的红外有限部分被吸收到硬散射振幅 H 中。将可约

图 (a) 和 (b) 的共线发散吸收到介子波函数中，利用重整化群方程将双对数项求和为 Sudakov 因子。关于重求和技术的细节可以参见 7.1 节。虽然双对数项来源于对硬散射振幅的高阶修正，但在程函近似下，其只与初末态的共线夸克相关联，因而其重求和结果可以归结为对介子波函数的重整化。这样，波函数可以写为

$$\Phi(x,P,b,\mu_f)=\exp[-s(x,P,b)]\Phi(x,b,\mu_f) \tag{11.120}$$

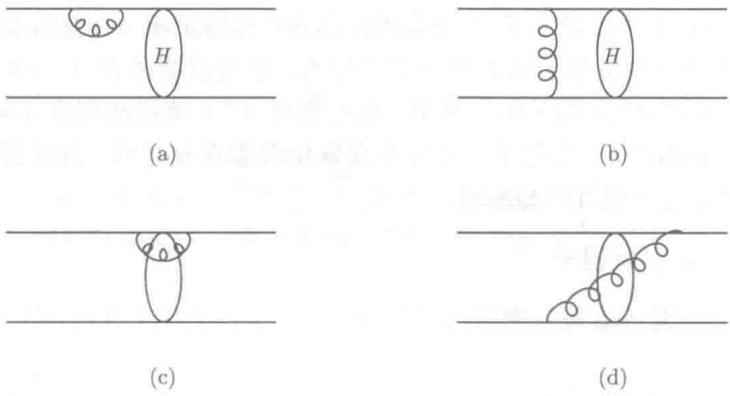


图 11.15　$B\to\pi$ 的形状因子的辐射修正

P 是介子光锥动量中的大分量，b 是 k_T 的共轭变量，μ_f 是 k_T 因子化的标度。$1/b$ 相当于红外截断，这可以从式 (11.91) 中 k_T 的作用看出来。

因子化证明：衰变振幅分为两部分，第一部分是红外安全的，对应于硬散射振幅 H；第二部分对应于波函数 Φ。这样，一般衰变振幅的因子化公式为

$$\mathcal{A}\propto C(t)\otimes H(t,\mu_f)\otimes\Phi(x,b,\mu_f)\otimes\exp\left[-s(x,P,b)\right] \tag{11.121}$$

其中，$\otimes$ 表示对变量 x 和 b 的卷积。硬散射振幅 H 和波函数 Φ 都是标度 μ_f 的函数，说明两者需要重整化。设 γ_Φ 是波函数 Φ 的反常量纲，由于夸克算符圈图修正的贡献，其与威尔森系数 C 的反常量纲不同。利用重整化群方程可得

$$\Phi(b,\mu_f)=\Phi(b,1/b)\exp\left[-2\int_{1/b}^{\mu_f}\frac{\mathrm{d}\bar{\mu}}{\bar{\mu}}\gamma_\Phi(\alpha_s(\bar{\mu}))\right] \tag{11.122}$$

$$H(t,\mu_f)=H(t,t)\exp\left[-2\int_{\mu_f}^{t}\frac{\mathrm{d}\bar{\mu}}{\bar{\mu}}\gamma_\Phi(\alpha_s(\bar{\mu}))\right] \tag{11.123}$$

方程 (11.122) 描述了波函数 Φ 从 $1/b$ 到 μ_f 的演化。方程 (11.123) 描述了硬散射振幅 H 从 μ_f 到 t 的演化。小于 $1/b$ 标度的贡献是红外发散的，被吸收到波函数 $\Phi(b,1/b)$ 中，波函数是微扰 QCD 的唯一输入参数，描述非微扰效应。这样不依赖

于标度 μ_f 的演化可以写为

$$H(t,\mu_f)\Phi(b,\mu_f)=H(t,t)\Phi(b,1/b)\exp\left[-2\int_{1/b}^{t}\frac{\mathrm{d}\bar{\mu}}{\bar{\mu}}\gamma_\Phi(\alpha_s(\bar{\mu}))\right] \tag{11.124}$$

代入方程 (11.121)，就可以得到 k_T 因子化后，标度无关的衰变振幅

$$\mathcal{A}\propto C(t)\otimes H(t,t)\otimes\Phi(x,b,1/b)\otimes g(t,b)\otimes\exp\left[-s(x,P,b)\right] \tag{11.125}$$

其中，

$$g(t,b)=\exp\left[-2\int_{1/b}^{t}\frac{\mathrm{d}\bar{\mu}}{\bar{\mu}}\gamma_\Phi(\alpha_s(\bar{\mu}))\right] \tag{11.126}$$

$$\langle\pi\pi|O|B\rangle_{\text{tree}}=H(t,t)\otimes\Phi(x,b,1/b)\otimes\exp\left[-s(x,P,b)\right] \tag{11.127}$$

由式 (11.127) 可见，波函数 Φ 只是 x 和 b 的函数，下文中我们将把波函数写为 $\Phi(x,b)$。波函数 Φ 是不可微扰计算的，描述长程贡献，相应地，其与具体过程无关，是普适的。值得强调的是，硬散射振幅 H 和介子波函数 Φ 分别依赖于因子化标度 μ_f。例如，波函数 $\Phi(x,b)$ 和 $\Phi(x,b/2)$ 是不同的。然而，由于衰变振幅是两部分的卷积，标度依赖性会互相抵消，如公式 (11.125)，所以，总的衰变振幅不依赖于标度 μ_f 的选取。

对于 B 介子两体非轻衰变中的软胶子，将来自软和共线部分的交叠产生的双对数项 $\ln^2(Pb)$ 求和而得到 Sudakov 因子 $\exp[-s(P,b)]$，其中，P 是介子光锥动量的大分量。Sudakov 因子对于横向动量 $1/b$ 和 Q 的依赖关系如图 11.16 所示，可以看出，重求和得到的 Sudakov 因子有效地压低了软胶子的贡献，保证了衰变过程是以硬胶子贡献为主的。综上所述，由于 Sudakov 因子对软胶子的压低效应，B 介子两体非轻衰变是以硬胶子贡献为主的，故是微扰可算的。非微扰的强子化部分由相应的介子波函数描述，它是微扰 QCD 方法中唯一的输入参数。波函数表述长程贡献，对具体过程不敏感，是普适的。利用某几个衰变道定出波函数，即可利用其对其他衰变道做预言。

至此，微扰 QCD 的 k_T 因子化将小于能标 $1/b$ 的长程非微扰效应吸收到波函数中，作为微扰 QCD 方法中的唯一输入参数。经过了两次因子化：第一次是低能有效哈密顿量中的因子化，对应四夸克算符的因子化，因子化标度 $\mu=t$；第二次是 k_T 因子化，对应六夸克算符的因子化，因子化标度 $\mu_f=1/b$。两次因子化可以用下式表示：

$$\overbrace{\overbrace{M_W\longleftarrow\!\!-\!\!-\longrightarrow t}^{\text{Harder }(C)}\overbrace{\longleftarrow\!\!-\!\!-\longrightarrow 1/b}^{\text{硬 }(H)}}^{\text{微扰}}\ \Big|\ \overbrace{\longleftarrow\!\!-\!\!-\longrightarrow}^{\text{软 }(\Phi)}\ \text{非微扰} \tag{11.128}$$

威尔森系数 C 描述了高于标度 $\mu = t$ 的微扰部分，相应于四夸克算符。硬散射振幅 H 描述了 t 到标度 $\mu_f = 1/b$ 的微扰部分，相应于六夸克算符。低于标度 $1/b$ 的非微扰部分吸收到波函数 Φ 中。可见，微扰 QCD 方法完成了具有三个标度 $(M_W, t, 1/b)$ 的因子化，正确地区分开了各能标区域的物理过程，得到了标度无关的衰变振幅。

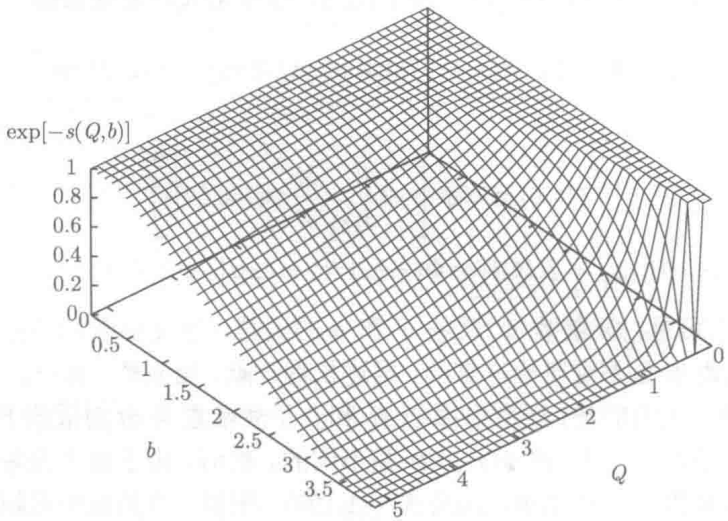


图 11.16　Sudakov 因子示意图。$b \to \Lambda_{\rm QCD}^{-1}$ 时，Sudakov 因子 $\mathrm{e}^{-s} \to 0$，有效地压低了非微扰区域的贡献

另外，衰变的辐射修正中存在双对数项 $\alpha_s \ln^2 x$。尤其在考虑高扭度波函数时，这种对数项在 $x \to 0$ 的端点区域不再是好的微扰展开参数，其起源于共线区域。在上一节中，已经证明了可以通过阈值求和把它吸收为喷注函数。实际上，图 11.15 中的 α_s 阶辐射修正是不完全的。具体的 $B \to \pi$ 形状因子计算的领头阶费曼图是图 11.17 中的 (a) 和 (b)。它们的 α_s 阶修正图除了图 11.15 中的那部分横跨领头阶图的胶子修正外，还包括图 11.17 中的连接领头阶硬核和外线夸克的 (c)∼(h)。这些图的计算类似于上一节 $B \to \gamma l \bar{\nu}$ 过程的推导，给出的喷注函数是普适的，过程无关的。数值分析表明，它有效地消除了双对数项 $\alpha_s \ln^2 x$ 的奇异性。而且，此阈值求和过程不影响上面的 k_T 因子化证明。这样，式 (11.125) 成为

$$\mathcal{A} \propto C(t) \otimes H(t,t) \otimes \Phi(x,b) \otimes g(t,b) \otimes S_t(x) \otimes \exp\left[-s(x,P,b)\right] \tag{11.129}$$

理解和运用微扰 QCD 的关键在于因子化的概念，因子化主要是指一些过程的衰变振幅或者散射截面具有可以分解成多个因子乘积的形式，并且每一个因子仅依赖于特定能标上的物理。在这些过程中，通常伴随着一个大的能标 Q，从而对因子化公式的修正是受到大能标 Q 的幂次压低的。

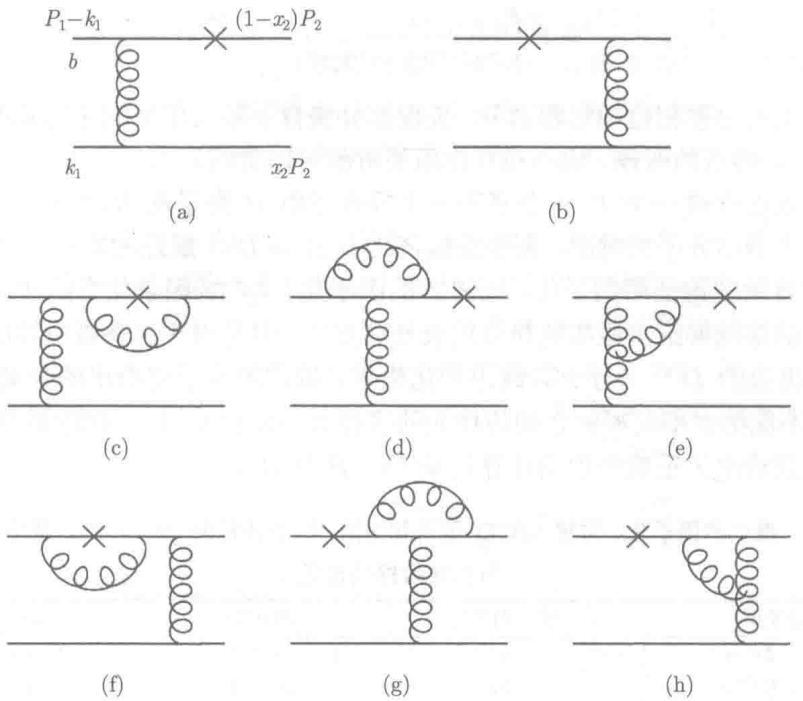


图 11.17 $B \to \pi$ 形状因子计算的领头阶费曼图 (a) 和 (b)，以及一部分 α_s 阶修正图(c)~(h)

11.4.3 B 介子两体非轻衰变

所有 B 介子的两体非轻衰变都由弱相互作用引起。其基本的夸克层次衰变由有效相互作用哈密顿量式 (11.69) 中的四夸克算符描写。由于 b 夸克质量很重，衰变产物的三个轻夸克的动量就很大，是软和共线有效理论中的共线夸克。而 B 介子中的轻 (反) 夸克在 B 介子的静止参考系中其动量只有 $\Lambda_{\rm QCD}$ 大小。要与另外一个共线夸克形成末态的高能量介子，必须有个硬胶子从四夸克算符传递能量过来。这就是图 11.12 中的前四个费曼图，而后四个图是湮灭图，从 QCD 真空里产生的一对正反夸克，也需要一个硬胶子传递高能量。从幂次来看这八个图都是同一个量级的。这完全不同于基于共线因子化的 QCD 因子化方法。

下面简单讨论一下 PQCD 方法处理 B 介子两体非轻衰变的基本特征。第一，在 PQCD 方法中，硬散射标度是 $\mu \sim \sqrt{m_b\Lambda_{\rm QCD}} \sim 1.7{\rm GeV}$, 所有的因子化标度都要演化到这个标度，从而会造成动力学的抬升。一个直接后果就是在 PQCD 方法中，企鹅图的贡献比较重要，这种动力学增强的效应对所有的 PP, PV, VV 末态都存在。第二，PQCD 方法中强相位主要来源于湮灭图。如果湮灭图的内线夸克在壳，就会给出一个虚部的贡献

$$\frac{1}{x_2x_3m_B^2-k_{3T}^2+\mathrm{i}\epsilon}=P\left(\frac{1}{x_2x_3m_B^2-k_{3T}^2}\right)-\mathrm{i}\pi\delta(x_2x_3m_B^2-k_{3T}^2) \tag{11.130}$$

湮灭图贡献的是强相位的短程部分，长程部分来自于幂次压低的末态重散射效应，在 B 介子足够重的时候，末态相互作用的贡献可以忽略。

对于末态含有一个 $D^{(*)}$ 介子和一个轻介子的 B 介子两体非轻子衰变，如果末态是两个带电介子的情况，衰变振幅正比于 $B\to D^{(*)}$ 跃迁的形状因子，可以用软和共线有效理论证明因子化，而推广的因子化、QCD 因子化方法和微扰 QCD 因子化方法都能够给出跟实验符合的衰变分支比。但是对于末态是中性的 π^0 的衰变，发射出去的 $D^{(*)}$ 介子，共线因子化失效，推广的因子化给出的分支比结果偏小，而且不能给出不同振幅之间的较大的强相角。基于 k_T 因子化的微扰 QCD 因子化方法则给出了正确的理论计算结果[24]，见表 11.3。

表 11.3　推广的因子化、微扰 QCD 因子化方法[24]下计算的 $B\to D\pi$ 衰变的分支比与实验数据的比较

衰变道	推广因子化	PQCD	实验值
$\bar{B}^0\to D^+\pi^-$	30	28 ± 4	26.8 ± 1.3
$\bar{B}^0\to D^{*+}\pi^-$	29	25 ± 4	27.6 ± 1.3
$\bar{B}^0\to D^0\pi^0$	0.7	2.6 ± 0.5	2.63 ± 0.14
$\bar{B}^0\to D^{*0}\pi^0$	1.0	2.8 ± 0.1	2.2 ± 0.6
$B^-\to D^0\pi^-$	48	55 ± 4	48.1 ± 1.5
$B^-\to D^{*0}\pi^-$	48	53 ± 5	51.8 ± 2.6

不同于其他基于共线因子化处理手段的方法，基于 k_T 因子化的微 QCD 因子化方法能够有效处理端点发散的问题。在 QCD 因子化和软和共线有效理论中不能处理的形状因子费曼图和非常重要的企鹅湮灭图都能够证明因子化，而且给出很大的贡献和较大的强相位。这对于解释 B 介子衰变中的较大直接 CP 破坏测量至关重要。从表 11.2 中可以看出，远在实验发现 B 介子的直接 CP 破坏之前，微扰 QCD 因子化方法就已经预言了 $B^0\to\pi^-K^+$ 和 $B^0\to\pi^-\pi^+$ 衰变中较大的直接 CP 破坏，这被后来的 B 介子工厂实验所验证。从这个表格中也可以看到，$B^0\to\pi^-K^+$ 和 $B^+\to\pi^0K^+$ 衰变的直接 CP 破坏在不同的理论方法中给出的符号是相同的，其大小也是相差不大的，原因是这两个衰变中较大的费曼图贡献是相同的，后者还有颜色压低的树图贡献和精细结构常数压低的电弱企鹅图贡献。电弱企鹅图除非有超出标准模型的新物理贡献，否则很难给出较大的贡献。至于颜色压低的树图贡献有可能由于非微扰 QCD 的贡献或者所谓 Glauber 胶子的贡献给予升高，并且给出重要的强相位[25]。这个贡献也同时能够解释 $B^0\to\pi^0\pi^0$ 衰变实验给出的远大于 QCD 理论计算的分支比，同时不会使得 $B^0\to\rho^0\rho^0$ 的衰变分支比理论计算值高于实验观测值。这个颜色压低树图的费曼图的重要贡献，特别是

较大的强相位，也得到了因子化辅助的拓扑图方法的支持[18]。

对于 B_s 介子的衰变，实验观测数据偏少，只有 Belle 和 LHCb 的一些有限观测，较新的理论计算值更多的是给出了理论预言值[22]，有待于实验的验证。对于 b 或者 c 重子的衰变，理论和实验的研究都偏少，两方面都有待于加强。

对于末态是两个矢量介子的情况，由于角动量守恒的要求，两个末态矢量介子可以同时是纵向极化的，也可以同时是横向极化的。在简单和推广的因子化方法中，由跃迁形状因子给出的主要贡献是纵向极化占主要贡献的，两个横向极化分数是忽略不计的。在 QCD 因子化方法中，由于幂次展开的领头阶也是来源于跃迁形状因子的贡献，因而纵向极化的贡献也是主要的。具体地，对于 B 介子衰变到两个矢量介子 $V_1(m_1,p_1,\eta^*)$ 和 $V_2(m_2,p_2,\epsilon^*)$，其中 η^* 和 ϵ^* 分别是两个介子的极化矢量，衰变振幅可以形式分解为三部分

$$\mathcal{A}_{B\to V_1V_2}=\mathrm{i}\eta^{*\mu}\epsilon^{*\nu}\left(g_{\mu\nu}S_1-\frac{p_{B\mu}p_{B\nu}}{m_B^2}S_2+\mathrm{i}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\frac{p_1^\rho p_2^\sigma}{p_1\cdot p_2}S_3\right) \tag{11.131}$$

对于每一个确定的螺旋度，其螺旋度振幅是

$$\mathcal{A}^0=\mathcal{A}(B\to V_1(p_1,\eta_0^*)V_2(p_2,\epsilon_0^*))=\mathrm{i}\frac{m_B^2}{2m_1m_2}\left(S_1-\frac{S_2}{2}\right) \tag{11.132}$$

$$\mathcal{A}^\pm=\mathcal{A}(B\to V_1(p_1,\eta_\pm^*)V_2(p_2,\epsilon_\pm^*))=\mathrm{i}\left(S_1\mp S_3\right) \tag{11.133}$$

在因子化方法中，螺旋度振幅 $\mathcal{A}^h_{B\to V_1V_2}$ 正比于

$$\mathcal{A}^h=\frac{G_F}{\sqrt{2}}V_{\mathrm{CKM}}\langle V_1^h|(\bar{b}q_s)_{V-A}|B\rangle\langle V_2^h|(\bar{q}q')_V|0\rangle \tag{11.134}$$

如果忽略末态矢量介子质量 m_i^2 项，上面的公式就可以简化为

$$\mathcal{A}^0=\mathrm{i}\frac{G_F}{\sqrt{2}}V_{\mathrm{CKM}}f_2m_B^2A_0^{BV_1}(0) \tag{11.135}$$

$$\mathcal{A}^+=\mathrm{i}\frac{G_F}{\sqrt{2}}V_{\mathrm{CKM}}f_2m_2\left\{-\left(m_B+m_1\right)A_1^{BV_1}(0)+\left(m_B-m_1\right)V^{BV_1}(0)\right\} \tag{11.136}$$

$$\mathcal{A}^-=\mathrm{i}\frac{G_F}{\sqrt{2}}V_{\mathrm{CKM}}f_2m_2\left\{-\left(m_B+m_1\right)A_1^{BV_1}(0)-\left(m_B-m_1\right)V^{BV_1}(0)\right\} \tag{11.137}$$

其中 $A_0^{BV_1}(0)$, $A_1^{BV_1}(0)$ 和 $V^{BV_1}(0)$ 是 B 介子到矢量介子的跃迁形状因子，其定义在文献 [10] 中。$f_i(i=1,2)$ 是矢量介子 V_i 的衰变常数。从上面的公式可以明显地看到，横向极化振幅 $\mathcal{A}^\pm$ 相比于纵向极化振幅 $\mathcal{A}^0$ 被因子 m_2/m_B 压低。由于轴矢量形状因子 A_1 和矢量形状因子 V 之间的相消因素，可以得到如下的比例关系：

$$\mathcal{A}^0:\mathcal{A}^-:\mathcal{A}^+=1:\frac{\Lambda_{\mathrm{QCD}}}{m_b}:\left(\frac{\Lambda_{\mathrm{QCD}}}{m_b}\right)^2 \tag{11.138}$$

横向极化分数相比于纵向极化是压低的。在树图贡献为主的 $B\to\rho\rho$ 衰变中，实验的确发现纵向极化贡献达到了 90%之多。但是 2003 年，两个 B 介子工厂发现企

鹅图贡献为主的末态无粲的两体 B 介子衰变的横向极化和纵向极化是同量级的。如果手征增强的企鹅湮灭图的贡献是不能忽略的，考虑了这部分贡献后，横向极化分数就可以得到很大增强，但是湮灭图的计算在 QCD 因子化方法中会遇到端点发散的问题，因而不能定量计算，只能用自由参数，从实验中抽取。

在微扰 QCD 因子化中，由于横向动量的引进，解决了端点发散的问题。手征增强的企鹅湮灭图可以定量计算，而且给出较大的贡献，使得末态粒子的横向极化分数大大增强，与实验结果符合很好；而且微扰 QCD 因子化方法给出的其他物理观测量，如不同极化振幅之间的相对强相位计算值以及两个不同的横向极化之间的相对大小等都与实验观测符合。一些 B 介子衰变到矢量介子的过程的分支比、纵向和横向极化分数、相对强相位等数值与实验的比值在表 11.4 中给出，可以看出领头阶的微扰 QCD 因子化结果已经与目前实验符合得很好了。更多的理论和实验结果比较参见文献 [23]。

表 11.4　微扰QCD因子化领头阶计算给出的 $B_{(s)} \to K^*\phi$, $B_s \to \phi\phi$ 和 $B_s \to \bar{K}^{*0}K^{*0}$ 衰变的分支比、纵向极化分数 f_L、横向极化分数 $f_\perp$, 相对强相位 $\phi_\parallel$(rad) 和 $\phi_\perp$(rad) 等与实验测量结果的比较

衰变道	分支比 (10^{-6})	f_L/%	$f_\perp$ /%	$\phi_\parallel$	$\phi_\perp$
$B^0 \to K^{*0}\phi$	$9.8^{+4.9}_{-3.8}$	$56.5^{+5.8}_{-5.9}$	$21.3^{+2.8}_{-2.9}$	$2.15^{+0.22}_{-0.19}$	$2.14^{+0.23}_{-0.19}$
实验值	9.8 ± 0.6	48 ± 3	24 ± 5	2.40 ± 0.13	2.39 ± 0.13
$B^+ \to K^{*+}\phi$	$10.3^{+4.9}_{-3.8}$	$57.0^{+6.3}_{-5.9}$	$21.0^{+3.0}_{-3.0}$	$2.18^{+0.23}_{-0.19}$	$2.19^{+0.22}_{-0.20}$
实验值	10.0 ± 2.0	50 ± 5	20 ± 5	2.34 ± 0.18	2.58 ± 0.17
$B_s \to \phi\phi$	$16.7^{+8.9}_{-7.1}$	$34.7^{+8.9}_{-7.1}$	$31.6^{+3.5}_{-4.4}$	$2.01^{+0.23}_{-0.23}$	$2.00^{+0.24}_{-0.21}$
实验值	19 ± 5	34.8 ± 4.6	$36.5 \pm 4.4 \pm 2.7$	$2.71^{+0.31}_{-0.36} \pm 0.22$	
$B_s \to \bar{K}^{*0}\phi$	$0.39^{+0.20}_{-0.17}$	$50.0^{+8.1}_{-7.2}$	$24.2^{+3.6}_{-3.9}$	$1.95^{-0.21}_{-0.22}$	$1.95^{+0.21}_{-0.22}$
实验值	1.10 ± 0.29	$51 \pm 15 \pm 7$	$28 \pm 11 \pm 2$	$1.75 \pm 0.58 \pm 0.3$	
$B_s \to K^{*0}\bar{K}^{*0}$	$5.4^{+3.0}_{-2.4}$	$38.3^{+12.1}_{-10.5}$	$30.0^{+5.3}_{-6.1}$	$2.12^{+0.21}_{-0.25}$	$2.15^{+0.22}_{-0.23}$
实验值	$28.1 \pm 4.6 \pm 5.6$	$31 \pm 12 \pm 4$	$38 \pm 11 \pm 4$		

由于 B 介子非轻子衰变实验精度的提高，微扰 QCD 因子化方法的领头阶计算结果已经远远不能满足实验和理论的精度要求，一个完整的次领头阶微扰 QCD 计算已经迫在眉睫。对于 B 介子的辐射纯轻子衰变 $B \to \gamma\ell\nu$，已经有了完整的次领头阶因子化证明。对于半轻子衰变相关的 $B \to \pi$ 形状因子的次领头阶计算也已经完成，而且对于扭度展开的次级修正也已经完成。部分包含最重要的次领头阶修正的 B 介子两体非轻衰变的过程也给出了数字结果，但是一个完整的次领头阶计算的微扰 QCD 因子化方法计算还没有完成。

近来 LHCb 实验还测到了 B 介子三体衰变中有较大的 CP 破坏，对于三体衰变的理论研究也迫在眉睫。一个完整的三体非轻子衰变理论还没有在任何理论中能够给出。目前的理论研究还集中在三体衰变的达立兹图的部分区域。

11.5 小　结

重味物理是味物理研究中的一个非常重要的组成部分，并且重味物理的研究应该享有更多的优先权。这主要是由于重味强子的衰变对标准模型的味道结构非常敏感，因为这些强子具有很大的质量，可以衰变到相当多不同的过程，从而导致非常丰富的唯象学。更为重要的是，由于重夸克的质量很大，复杂的强相互作用效应可以在重夸克展开的框架下很好的处理，从而使得理论预言具有可以接受的精确度，保证重味强子的衰变在理论上非常有意义。这也是重味物理在 QCD 方面取得巨大进步的一个重要原因。在过去的 10 年里，由于两个 B 介子工厂的运行，我们在理解 CP 破坏的唯象学方面取得了里程碑式的成就。2001 年，BaBar 和 Belle 两个实验组通过 $B^0 \to J/\psi K_S$ 含时 CP 不对称性的测量正式确立了 B 介子系统的 CP 破坏。基于三代费米子与一个 CP 为奇的相位，CP 破坏的 KM 模型能够在很好的精度内解释 B 介子与 K 介子系统中的 CP 破坏，从而直接否定了以 Wolfenstein 为代表的超弱模型。

尽管 CKM 机制在相当不错的精度范围内可以很好地解释 B 工厂的实验数据，但是随着实验数据的逐步增多，一些可能偏离标准模型的迹象已经初见端倪。这其中包括：①从 “黄金衰变道” $B \to J/\psi K_S$ 直接抽取的 $\sin 2\beta$ 数值明显偏离通过幺正三角形的限制间接确定的数值 (大约有两个标准偏差)；②从企鹅算符 $b \to s$ 主导的 B 介子强子衰变抽取出来的 $\sin 2\beta$ 数值通常比从树图算符 $b \to c$ 主导的 B 介子强子衰变抽取出来的结果要小。不幸的是，这些可能的新物理信号通常都被强相互作用的不确定性污染。因此，寻找一些理论上相对干净的观测量是非常有必要的。

一方面我们需要增加实验的统计量，新建一些超级味工厂，如 Super-B，CEPC 等。在这些大型的对撞机上，还可以产生出大量的不同类别的重味强子，如 B_s 介子、Λ_b 重子、双重味重子等。而对这些强子衰变特性的研究将有助于我们获取更多关于幺正三角形的限制，如关于 $B_s \to J/\psi\phi$ 含时 CP 破坏的研究，$\Lambda_b \to \Lambda(D^0, \bar{D}^0)$ 以及 $\Lambda_b \to \Lambda\eta^{(\prime)}$ 的两体非轻衰变的研究。另一方面，理论上也需要发展一些可靠方法来控制强相互作用的长程效应，从而提高理论的预言能力。目前，建立在有效理论基础上的方法已经达到成熟状态，并且受到了广泛的关注。鉴于重味夸克的质量较大，重夸克有效理论和重夸克展开被很好地应用于遍举过程和单举过程。这些理论的成熟应用，使得 CKM 矩阵元 V_{cb} 的确定达到了一个很高的精度。此外，对于末态含有大动量轻自由度 (如大动量的喷注与轻强子) 的过程，软和共线有效理论发展起来处理这些过程。但是，现有的实验数据表明软和共线有效理论展开的领头阶可能会受到重要的幂次修正，特别地，次领头阶端点发散的存在使得因子化公

式失效。因此关于幂次修正的深入理解对于理论的进一步发展是至关重要的。

参 考 文 献

[1] Kobayashi M, Maskawa T. Prog. Theor. Phys., 1973, 49: 652.

[2] Fleischer R. Phys. Rept., 2002, 370: 537.

[3] Grossman Y, Nir Y, Rattazzi R. Adv. Ser. Direct. High Energy Phys., 1998, 15: 755.

[4] Patrignani C, *et al.* Chin. Phys. C, 2016, 40: 100001.

[5] Charles J, *et al.* Phys. Rev. D, 2015, 91: 073007.

[6] The BaBar Physics Book. http://www.slac.stanford.edu/pubs/slacreports/slac-r-504.html.

[7] Bigi I I, *et al. CP violation*// Jarlskog C. Singapore: World Scientific, 1992.

[8] Barberio E, *et al.* Heavy Flavor Averaging Group. arXiv:0808.1297 [hep-ex].

[9] Buchalla G, Buras A J, Lautenbacher M E. Rev. Mod. Phys., 1996, 68: 1125.

[10] Wirbel M, Stech B, Bauer M. Z. Phys. C, 1985, 29: 637; Bauer M, Stech B, Wirbel M. Z. Phys. C, 1987, 34: 103.

[11] Bjorken J D. Nucl.Phys. (Proc. Suppl), 1989, B11: 325.

[12] Dugan M, Grinstein B. Phys. Lett., 1991, B255: 583.

[13] Buras A J, Gérard J M. Nucl. Phys., 1986, B264: 371; Buras A J, Gérard J M, Rückl R. Nucl.Phys. B, 1986, 268: 16.

[14] Bander M, Silverman D, Soni A. Phys. Rev. Lett., 1979, 43: 242.

[15] Ali A, Kramer G, Lu C D. Phys. Rev. D, 1998, 58: 094009; Phys. Rev. D, 1999, 59: 014005; Cheng H Y, Tseng B. Phys. Rev. D, 1998, 58: 094005.

[16] Beneke M, Buchalla G, Neubert M, Sachrajda C T. Phys. Rev. Lett., 1999, 83: 1914; Nucl. Phys. B, 2000, 591: 313.

[17] Beneke M, Neubert M. Nucl. Phys. B, 2003, 675: 333.

[18] Zhou S H, Zhang Q A, Lyu W R, Lü C D. Eur. Phys. J. C, 2017, 77: 125.

[19] Cheng H Y, Chua C K. Phys. Rev. D, 2009, 80: 114008.

[20] Keum Y -Y, Li H -N, Sanda A I. Phys. Rev. D, 2001, 63: 054008; Lu C -D, Ukai K, Yang M -Z. Phys. Rev. D, 2001, 63: 074009.

[21] 王玉明. 基于量子色动力学的重味强子弱衰变研究. 中国科学院研究生院博士论文, 2009.

[22] Ali A, Kramer G, Li Y, Lu C D, Shen Y L, Wang W, Wang Y M. Phys. Rev. D, 2007, 76: 074018.

[23] Zou Z T, Ali A, Lu C D, Liu X, Li Y. Phys. Rev. D, 2015, 91: 054033.

[24] Keum Y Y, Kurimoto T, Li H N, Lu C D, Sanda A I. Phys. Rev. D, 2004, 69: 094018.

[25] Li H N, Mishima S. Phys. Rev. D, 2011, 83: 034023.

第 12 章　软共线有效理论

软共线有效理论是近些年发展起来的可以系统研究高速运动粒子的有效理论。在圈图计算中，人们经常会碰到红外发散：软发散和共线发散。软发散的本质是交换无质量且动量为零的软粒子；共线发散主要来自于某个快速运动的粒子，其动量在某个方向的分量远大于其他方向的分量。此时在因子化定理中，可以将部分自由度积分出来，形成一个非协变的软共线有效理论。软共线有效理论起源于 B 介子到轻介子的单举和遍举衰变 [1–4]，随后广泛地用于研究各种物理过程，尤其是喷注物理和希格斯粒子相关物理。文献 [5] 是这方面一本非常好的入门级教材，本章很多内容都参考了该文献。

12.1　大能量有效理论中的重到轻形状因子

半轻重味 B 介子衰变如 $B \to \pi \ell \bar{\nu}$ 对于测量 CKM 矩阵元和探测新物理有非常重要的意义。衰变振幅中的轻子部分可使用微扰论进行计算，强子部分则被参数化成形状因子 (form factor)。历史上对形状因子的约化和分析大大地促进了软共线有效理论的建立与发展。本书之前的章节中已经讨论了重夸克有效理论，本节将初步研究大反冲情况下重介子到轻介子形状因子。在这个运动学区域，人们可以使用重夸克极限与大能量极限，这两种极限对应于软共线有效理论的前身——大能量有效理论[6, 7]。

我们以 $B \to P$ 与 $B \to V$ 为例 (P 和 V 分别表示轻的赝标量介子和矢量介子)，形状因子定义为

$$\langle P(p)|\bar{q}\gamma^\mu b|\overline{B}(p_B)\rangle = f_+(q^2)\left[P^\mu - \frac{m_B^2 - m_P^2}{q^2}\,q^\mu\right] + f_0(q^2)\,\frac{m_B^2 - m_P^2}{q^2}\,q^\mu$$

$$\langle P(p)|\bar{q}\sigma^{\mu\nu} q_\nu b|\overline{B}(p_B)\rangle = \mathrm{i}\frac{f_T(q^2)}{m_B + m_P}\left[q^2 P^\mu - (m_B^2 - m_P^2)\,q^\mu\right]$$

$$\langle V(p)|\bar{q}\gamma^\mu b|\overline{B}(p_B)\rangle = -\frac{2V(q^2)}{m_B + m_V}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_\nu^*\,(p_B)_\rho\,p_\sigma$$

$$\langle V(p)|\bar{q}\gamma^\mu\gamma_5 b|\overline{B}(p_B)\rangle = 2\mathrm{i}m_V A_0(q^2)\frac{\epsilon^*\cdot q}{q^2}\,q^\mu + \mathrm{i}(m_B + m_V)A_1(q^2)\left[\epsilon^{*\mu} - \frac{\epsilon^*\cdot q}{q^2}\,q^\mu\right]$$
$$-\mathrm{i}A_2(q^2)\frac{\epsilon^*\cdot q}{m_B + m_V}\left[P^\mu - \frac{m_B^2 - m_V^2}{q^2}\,q^\mu\right]$$

$$\langle V(p)|\bar{q}\sigma^{\mu\nu} q_\nu b|\overline{B}(p_B)\rangle = -2\mathrm{i}T_1(q^2)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_\nu^*\,(p_B)_\rho\,p_\sigma$$

$$\begin{aligned}\langle V(p)|\bar{q}\sigma^{\mu\nu}\gamma_5 q_\nu b|\overline{B}(p_B)\rangle =& T_2(q^2)\left[(m_B^2-m_V^2)\,\epsilon^{*\mu}-(\epsilon^*\cdot q)P^\mu\right]\\ &+T_3(q^2)\,(\epsilon^*\cdot q)\left[q^\mu-\frac{q^2}{m_B^2-m_V^2}P^\mu\right]\end{aligned}\tag{12.1}$$

其中 ϵ 为矢量介子极化矢量，$q^\mu=p_B^\mu-p^\mu$ 为转移动量，$P^\mu=p_B^\mu+p^\mu$，四维反对称张量约定为 $\epsilon^{0123}=1$。

在动量空间中，初末态重夸克旋量与轻夸克旋量的在壳条件为

$$\not{p}_b u_b=m_b b,\quad \not{p}_q u_q=0\tag{12.2}$$

重夸克极限 $m_b\to\infty$ 下，b 夸克动量与 B 介子动量接近，可以用强子的运动速度 v 标记：$p_b=m_b v$；对轻夸克来说，大能量极限意味着其运动接近于光锥，对应转移动量 q^2 较小。为了方便描述，我们引入类光矢量 $n_\pm$ 与速度矢量:

$$n_+^\mu=(1,0,0,1),\quad n_-^\mu=(1,0,0,-1),\quad v^\mu=(1,0,0,0)\tag{12.3}$$

在大能量有效理论中，场算符 h_v 和 χ 分别产生或者湮灭重夸克和沿 n_+ 方向运动的轻夸克。这样，旋量在壳条件转换成场算符方程：

$$\not{v}h_v=h_v,\quad \not{n}_+\chi=0\tag{12.4}$$

使用上面的运动方程相当于进行 $1/m_b$ 和 $1/E$ 展开并保留领头项 (E 是末态粒子能量)，这样重到轻的夸克流可化简成三个独立的有效算符：$[\bar{\chi}h_v]$, $[\bar{\chi}\gamma_5 h_v]$, $[\bar{\chi}\gamma_\perp^\mu h_v]$。其中

$$\gamma_\perp^\mu=\gamma^\mu-n_+^\mu\not{n}_-/2-n_-^\mu\not{n}_+/2\tag{12.5}$$

夸克流算符则可以约化成

$$\begin{aligned}\bar{q}b &\to C_1(\mu)\,[\bar{\chi}\,h_v]\\ \bar{q}\gamma_5 b &\to C_2(\mu)\,[\bar{\chi}\,\gamma_5 h_v]\\ \bar{q}\gamma_\mu b &\to C_3(\mu)\,[\bar{\chi}\,\gamma_\mu^\perp h_v]+\left\{C_4(\mu)\,n_{+\mu}+C_5(\mu)\,v_\mu\right\}[\bar{\chi}\,h_v]\\ \bar{q}\gamma_\mu\gamma_5 b &\to C_6(\mu)\,\mathrm{i}\epsilon_{\mu\nu}^\perp[\bar{\chi}\,\gamma_\perp^\nu h_v]-\left\{C_7(\mu)n_{+\mu}+C_8(\mu)v_\mu\right\}[\bar{\chi}\,\gamma_5 h_v]\\ \bar{q}\,\mathrm{i}\sigma_{\mu\nu}b &\to C_9(\mu)\,(n_{+\mu}g_{\nu\lambda}-n_{+\nu}g_{\mu\lambda})[\bar{\chi}\,\gamma_\perp^\lambda h_v]+C_{10}(\mu)\,\mathrm{i}\epsilon_{\mu\nu}^\perp\,[\bar{\chi}\,\gamma_5 h_v]\\ &\quad+C_{11}(\mu)\,(v_\mu n_{+\nu}-v_\nu n_{+\mu})\,[\bar{\chi}h_v]+C_{12}(\mu)\,(v_\mu g_{\nu\lambda}-v_\nu g_{\mu\lambda})[\bar{\chi}\,\gamma_\perp^\lambda h_v]\\ \bar{q}\,\mathrm{i}\sigma_{\mu\nu}\gamma_5 b &\to -[C_9(\mu)+C_{12}(\mu)]\,(\mathrm{i}n_{+\mu}\epsilon_{\nu\lambda}^\perp-\mathrm{i}n_{+\nu}\epsilon_{\mu\lambda}^\perp)[\bar{\chi}\,\gamma_\perp^\lambda h_v]+C_{11}(\mu)\,\mathrm{i}\epsilon_{\mu\nu}^\perp\,[\bar{\chi}\,h_v]\\ &\quad+C_{10}(\mu)\,(v_\mu n_{+\nu}-v_\nu n_{+\mu})[\bar{\chi}\gamma_5\,h_v]+C_{12}(\mu)\,(\mathrm{i}v_\mu\epsilon_{\nu\lambda}^\perp-\mathrm{i}v_\nu\epsilon_{\mu\lambda}^\perp)[\bar{\chi}\gamma_\perp^\lambda h_v]\end{aligned}\tag{12.6}$$

其中 $\epsilon_{\mu\nu}^{\perp}=\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}v^{\rho}n_{+}^{\sigma}$。树图层次的匹配系数为

$$C_{1,2,3,4,6,7,9,10,11}(m_b)=1\,,\qquad C_{5,8,12}(m_b)=0 \tag{12.7}$$

如果末态是一个赝标量介子，则非零的算符矩阵元为

$$\langle P|\bar{\chi}\,h_v|\overline{B}_v\rangle=2E\xi_P(E) \tag{12.8}$$

对于末态矢量介子，则有

$$\begin{aligned}\langle V|\bar{\chi}\gamma^5\,h_v|\overline{B}_v\rangle&=-2\mathrm{i}m_V\,\xi_{||}(E)\,v\cdot\epsilon^*\\ \langle V|\bar{\chi}\gamma_{\perp}^{\mu}\,h_v|\overline{B}_v\rangle&=-2E\xi_{\perp}(E)\epsilon_{\perp}^{\mu\nu}\epsilon_{\nu}^*\end{aligned} \tag{12.9}$$

这样，我们可以将量子色动力学中定义的 10 个形状因子约化成 3 个独立函数：

$$\begin{aligned}&f_+(q^2)=\xi_P(E)\,,\quad f_0(q^2)=2\hat{E}\xi_P(E)\,,\quad f_T(q^2)=(1+\hat{m}_P)\xi_P(E)\\ &V(q^2)=(1+\hat{m}_V)\xi_{\perp}(E),\quad A_0(q^2)=\xi_{||}(E),\quad A_1(q^2)=\frac{2\hat{E}}{1+\hat{m}_V}\xi_{\perp}(E)\\ &A_2(q^2)=(1+\hat{m}_V)\left[\xi_{\perp}(E)-\frac{m_V}{E}\zeta_{||}(E)\right]\\ &T_1(q^2)=\xi_{\perp}(E)\,,\quad T_2(q^2)=2\hat{E}\,\xi_{\perp}(E)\,,\quad T_3(q^2)=\xi_{\perp}(E)-\frac{m_V}{E}\xi_{||}(E)\end{aligned} \tag{12.10}$$

这里 $\hat{E}=E/m_B$，$\hat{m}_P=m_P/m_B$。实际上，上述约化也可通过一个求迹公式得到

$$\begin{aligned}\langle P(p)|\bar{q}\Gamma b|\overline{B}(p_B)\rangle&=\mathrm{tr}\left[A_P\frac{\not{n}_-\not{n}_+}{4}\Gamma\frac{1+\not{v}}{2}\right]\\ \langle V(p)|\bar{q}\Gamma b|\overline{B}(p_B)\rangle&=\mathrm{tr}\left[A_V\frac{\not{n}_-\not{n}_+}{4}\Gamma\frac{1+\not{v}}{2}\right]\end{aligned} \tag{12.11}$$

其中的函数选择为

$$A_P=2E\xi_P(E),\quad A_V=-2\mathrm{i}E\not{\epsilon}_{\perp}^*\gamma_5\xi_{\perp}(E)-2\mathrm{i}m_V v\cdot\epsilon^*\gamma_5\xi_{||}(E) \tag{12.12}$$

通过上面分析，可以看到大能量有效理论能在很大程度上约化形状因子，但是应该指出：上述约化认为与电弱顶点连接的夸克线都是在壳的，没有考虑软与共线粒子之间的相互作用。而实际上该部分相互作用也会产生领头阶的贡献，因此在 $1/E$ 领头阶，上述约化公式是不完备的。在本章最后一节中，我们将利用软共线有效理论系统地分析重到轻形状因子，并给出相应的因子化公式。

12.2　动量积分区域展开

本节将介绍动量积分的区域展开技巧[8, 9]，它方便研究圈动量积分在不同能量标度下的渐近行为。一般来说，这个技巧需要在维数正规化下进行重整化。具体操作上，先将整个积分动量分成不同的能量区域；然后在分割的区域内进行幂次展开，展开后的每一部分形式都很简单；最后将各个部分的贡献求和起来即得到完整结果。通过该技巧，人们将会了解到有效理论中存在哪些自由度。从有效理论的观点来看，不同区域的自由度将由不同的有效场来描述，区域展开后的振幅则可从有效理论对应得到。

如果仅想得到振幅在某个参数极限下的结果，人们甚至可以不建立有效理论而使用区域展开，直接计算出各领头区域的贡献。但是当需要考虑所有阶的贡献时，有效理论就具备很多优势，尤其是在

- 因子化定理的证明；
- 大对数的重求和

等方面。此外，有效理论中的拉氏量是规范不变的，而区域展开所对应的各个费曼图却不一定是规范不变的。通过考虑高阶拉氏量，有效理论还可以系统地研究高阶修正。这里 “高阶” 指的是按照标度比值参量的幂次展开，如 Λ/Q，此处 Λ 与 Q 分别为低能与高能的不同标度。有时，高阶幂次修正也被称为高扭度修正。

下面将以几个例子说明区域展开的技巧，实际上该方法与 Landau 方程之间有着密切的联系，这里不详细讨论。

12.2.1　二维标量粒子的自能修正

假设在二维空间中，存在两个可以发生相互作用的标量粒子，它们的自能图修正为

$$I=\int_0^\infty \mathrm{d}k\frac{k}{(k^2+m^2)(k^2+M^2)}=\frac{\ln(M/m)}{M^2-m^2} \tag{12.13}$$

m 与 M 是两个标量粒子的质量，在 $m\ll M$ 前提下，可将振幅进行幂次展开

$$I=\frac{\ln M/m}{M^2}\left(1+\frac{m^2}{M^2}+\frac{m^4}{M^4}+\cdots\right) \tag{12.14}$$

需要注意的是，由于质量 m 出现在对数中，因此上述展开并不是完全解析的。

为了方便起见，我们引入一个新的标度 Λ，将原来积分 I 拆分成两个不同的部分：

$$I=\underbrace{\int_0^\Lambda \mathrm{d}k\frac{k}{(k^2+m^2)(k^2+M^2)}}_{I_{(I)}}+\underbrace{\int_\Lambda^\infty \mathrm{d}k\frac{k}{(k^2+m^2)(k^2+M^2)}}_{I_{(II)}} \tag{12.15}$$

我们可以将积分区域 $[0,\Lambda]$ 称为低能区域，这里积分动量 k 满足幂次规则 $k\sim m\ll M$，因此 $I_{(I)}$ 可以展开为

$$\begin{aligned}I_{(I)}&=\int_0^{\Lambda}\mathrm{d}k\frac{k}{(k^2+m^2)(k^2+M^2)}\\&=\int_0^{\Lambda}\mathrm{d}k\frac{k}{(k^2+m^2)M^2}\left(1-\frac{k^2}{M^2}+\frac{k^4}{M^4}+\cdots\right)\end{aligned}\tag{12.16}$$

在这个积分中，标度 Λ 充当了紫外截断的角色。在高能区域 $[\Lambda,\infty]$ 中，动量 k 满足 $m\ll k\sim M$，积分 $I_{(II)}$ 计算如下：

$$\begin{aligned}I_{(II)}&=\int_{\Lambda}^{\infty}\mathrm{d}k\frac{k}{(k^2+m^2)(k^2+M^2)}\\&=\int_{\Lambda}^{\infty}\mathrm{d}k\frac{k}{k^2(k^2+M^2)}\left(1-\frac{m^2}{k^2}+\frac{m^4}{k^4}+\cdots\right)\end{aligned}\tag{12.17}$$

此处 Λ 则变成了一个红外截断标度。

将低能区域贡献的前两项进行积分，我们得到

$$\begin{aligned}I_{(I)}&\approx\frac{M^2+m^2}{2M^4}\ln\left(1+\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)-\frac{\Lambda^2}{2M^4}\\&=-\frac{1}{M^2}\ln\left(\frac{m}{\Lambda}\right)-\frac{\Lambda^2}{2M^4}+\mathcal{O}\left(\frac{\Lambda^4}{M^6},\frac{m^2}{M^4}\ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right)\right)\end{aligned}\tag{12.18}$$

类似的，可以将高能区域贡献的第一项积分出来：

$$I_{(II)}\approx\frac{1}{2M^2}\ln\left(1+\frac{M^2}{\Lambda^2}\right)=\frac{1}{M^2}\ln\left(\frac{M}{\Lambda}\right)+\frac{\Lambda^2}{2M^4}+\mathcal{O}\left(\frac{\Lambda^4}{M^6}\ln\left(\frac{M}{\Lambda}\right)\right)\tag{12.19}$$

将两个区域的贡献加到一起得到

$$I=I_{(I)}+I_{(II)}=\frac{1}{M^2}\ln\left(\frac{M}{m}\right)+\mathcal{O}\left(\frac{m^2}{M^4}\ln\left(\frac{M}{m}\right)\right)\tag{12.20}$$

应该注意的是，两项之和中对 Λ 的依赖完全消失了，并且这个结果与直接积分再进行幂次展开得到的结果 (式 (12.14)) 是一致的!

下面将以维数正规化的方法再次说明区域展开技巧：

$$I=\int_0^{\infty}\mathrm{d}k\,k^{-\varepsilon}\frac{k}{(k^2+m^2)(k^2+M^2)}\tag{12.21}$$

此处我们仅考虑了对动量大小的部分，没有考虑 d 维角度的影响。利用 Γ 函数定义，直接计算结果为

$$I=\frac{1}{2}\Gamma\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{m^{-\varepsilon}-M^{-\varepsilon}}{M^2-m^2}\tag{12.22}$$

下面进行低能区域 $k \sim m \ll M$ 的计算：

$$I_{(I)} = \int_0^\infty \mathrm{d}k\, k^{-\varepsilon} \frac{k}{(k^2+m^2)M^2} \left(1 - \frac{k^2}{M^2} + \frac{k^4}{M^4} + \cdots\right) \tag{12.23}$$

这里的展开式是红外有限的。而紫外发散可以通过取 $\epsilon > 0$ 来正规化。在高能区域，积分式可以展开为

$$I_{(II)} = \int_0^\infty \mathrm{d}k\, k^{-\varepsilon} \frac{k}{k^2(k^2+M^2)} \left(1 - \frac{m^2}{k^2} + \frac{m^4}{k^4} + \cdots\right) \tag{12.24}$$

这里的展开式是紫外有限的，而红外发散可以通过 $\epsilon < 0$ 来正规化。在 m/M 领头阶，公式 (12.23) 第一项可以积分为

$$I_{(I)} = \frac{m^{-\varepsilon}}{2M^2}\Gamma\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{1}{M^2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - \ln m + \mathcal{O}(\varepsilon)\right) \tag{12.25}$$

公式 (12.24) 的第一项积分结果为

$$I_{(II)} = -\frac{M^{-\varepsilon}}{2M^2}\Gamma\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{1}{M^2}\left(-\frac{1}{\varepsilon} + \ln M + \mathcal{O}(\varepsilon)\right) \tag{12.26}$$

两个公式 (12.25) 与 (12.26) 中的 $1/\epsilon$ 的奇点刚好抵消，且两区域贡献之和也与截断方法中的最终结果一致！实际上，从完整结果

$$I = \frac{1}{2}\Gamma\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{m^{-\varepsilon} - M^{-\varepsilon}}{M^2 - m^2}$$

中，我们可以明显地分辨出低能区域和高能区域不同的贡献。

为了显示低能区域和高能区域没有重合，可以将低能区域写成

$$\begin{aligned} I_{(I)}^{\Lambda} &= \int_0^\Lambda \mathrm{d}k \frac{k^{1-\varepsilon}}{(k^2+m^2)M^2}\left(1 - \frac{k^2}{M^2} + \frac{k^4}{M^4} + \cdots\right) \\ &= \left[\int_0^\infty \mathrm{d}k - \int_\Lambda^\infty \mathrm{d}k\right] \frac{k^{1-\varepsilon}}{(k^2+m^2)M^2}\left(1 - \frac{k^2}{M^2} + \frac{k^4}{M^4} + \cdots\right) \\ &= I_{(I)} - R_{(I)} \end{aligned} \tag{12.27}$$

第一项与公式 (12.23) 相同，而其中第二项 $R_{(I)}$ 依赖于截断参数 Λ，这样，当 $k \geqslant \Lambda \gg m^2$ 时，可以计算为

$$\begin{aligned} R_{(I)} &= \int_\Lambda^\infty \mathrm{d}k \frac{k^{1-\varepsilon}}{(k^2+m^2)M^2}\left(1 - \frac{k^2}{M^2} + \cdots\right) \\ &= \int_\Lambda^\infty \mathrm{d}k \frac{k^{1-\varepsilon}}{k^2M^2}\left(1 - \frac{m^2}{k^2} - \frac{k^2}{M^2} + \cdots\right) \end{aligned} \tag{12.28}$$

对于 $R_{(I)}$，我们做了两步的展开，首先在低能区域，这相当于取 $M \to \infty$；第二步做了 $m \to 0$ 的近似，相当于考虑高能区域贡献。在维数正规化下，这个结果正比于

$$\int_{\Lambda}^{\infty} \mathrm{d}k\, k^{n-\varepsilon} \sim \Lambda^{n+1-\varepsilon} \tag{12.29}$$

将高能区域贡献 (12.24) 引入一个低能截断参数 Λ，可以类似地得到

$$\begin{aligned} R_{(II)} &= \int_0^{\Lambda} \mathrm{d}k k^{-\varepsilon} \frac{k}{k^2(k^2+M^2)} \left(1 - \frac{m^2}{k^2} + \cdots\right) \\ &= \int_0^{\Lambda} \mathrm{d}k k^{-\varepsilon} \frac{k}{k^2 M^2} \left(1 - \frac{m^2}{k^2} - \frac{k^2}{M^2} + \cdots\right) \end{aligned} \tag{12.30}$$

这里做了 m 很小以及 M 很大的展开，顺序与 $R_{(I)}$ 中的顺序相反。这两个积分 $R_{(I)}$ 与 $R_{(II)}$ 形式一样，因此减除的结果为

$$R = R_{(I)} + R_{(II)} = \int_0^{\infty} \mathrm{d}k k^{-\varepsilon} \frac{k}{k^2 M^2} \left(1 - \frac{m^2}{k^2} - \frac{k^2}{M^2} + \cdots\right) \tag{12.31}$$

明显地，R 不依赖于截断参数，而且最后结果为零。因此最后结果也没有重叠或者交叉。

12.2.2 Sudakov 因子：无质量粒子的顶点修正

上面的例子显示，区域积分需要进行以下步骤[9]：

i) 找出所有给出领头阶贡献的动量区域；

ii) 将被积分式进行幂次展开，然后在全空间积分；

iii) 将不同积分结果加起来得到完整的积分结果。

在实际操作中，一般对上述展开中的积分进行正规化，不过在某些过程中，仅仅采用维数正规化是不够的，必须要引入新的正规化方法。另外，我们必须要找出所有可能产生领头阶贡献的动量区域，这依赖于圈图展开的幂次，找出所有贡献的动量区域有些类似于 Landau 方程的求解。

以图 12.1 所示的 Sudakov 因子为例，单圈图顶点修正可以表示为

$$I = \mathrm{i}\pi^{-d/2}\mu^{4-d} \int \mathrm{d}^d k \frac{1}{(k^2+\mathrm{i}\epsilon)\left[(k+l)^2+\mathrm{i}\epsilon\right]\left[(k+p)^2+\mathrm{i}\epsilon\right]} \tag{12.32}$$

其中，$d = 4 - 2\varepsilon$ 是维数。μ 是't Hooft 标度，引入下面的记号：

$$L^2 \equiv -l^2 - \mathrm{i}\epsilon\,, \qquad P^2 \equiv -p^2 - \mathrm{i}\epsilon\,, \qquad Q^2 \equiv -(l-p)^2 - \mathrm{i}\epsilon \tag{12.33}$$

我们的主要目的是在 $L^2 \sim P^2 \ll Q^2$ 极限下，计算公式 (12.32) 中的积分。

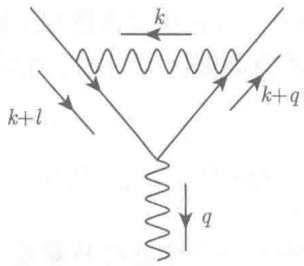


图 12.1　标量量子电动力学中的单圈图顶点修正

为了计算方便，引入两个类光矢量：

$$n_+^\mu = (1,0,0,1), \quad n_-^\mu = (1,0,0,-1) \tag{12.34}$$

它们满足正交归一化条件：

$$n_+^2 = n_-^2 = 0, \quad n_+ \cdot n_- = 2 \tag{12.35}$$

任意一个矢量则可以投影到 n_+, n_- 方向以及垂直方向：

$$p^\mu = (n_+ \cdot p)\frac{n_-^\mu}{2} + (n_- \cdot p)\frac{n_+^\mu}{2} + p_\perp^\mu \equiv p_+^\mu + p_-^\mu + p_\perp^\mu \tag{12.36}$$

为了方便标记，我们引入

$$p^\mu = (\underbrace{n_+ \cdot p}_{\text{“+ comp.”}}, \quad \underbrace{n_- \cdot p}_{\text{“- comp.”}}, \quad p_\perp^\mu) \tag{12.37}$$

进行光锥投影的好处是，动量等矢量各分量的幂次不同。对于 Lorentz 标量，我们有

$$p^2 = (n_+ \cdot p)(n_- \cdot p) + p_\perp^2$$

$$p \cdot q = p_+ \cdot q_- + p_- \cdot q_+ + p_\perp \cdot q_\perp \tag{12.38}$$

引入幂次展开参数：

$$\lambda^2 \sim \frac{P^2}{Q^2} \sim \frac{L^2}{Q^2}, \qquad p^2 \sim l^2 \sim \lambda^2 Q^2 \tag{12.39}$$

我们可以选择动量的方向，使得 $p^\mu \approx Qn_+^\mu/2$，$l^\mu \approx Qn_-^\mu/2$。这样动量 p, l 可以分解为

$$p^\mu \sim \left(\lambda^2, 1, \lambda\right) Q\,, \qquad l^\mu \sim \left(1, \lambda^2, \lambda\right) Q \tag{12.40}$$

在这个例子中，有四个动量区域产生贡献：

- **硬动量区域** (下面将会用 h 表示)，动量幂次为 $k^\mu \sim (1,1,1)\,Q$；
- **共线动量区域，与 p 平行** (以 c 来标记)，动量幂次为 $k^\mu \sim (\lambda^2,1,\lambda)\,Q$；
- **共线动量区域，与 l 平行** (以 $\bar{c}$ 来标记)，动量幂次为 $k^\mu \sim (1,\lambda^2,\lambda)\,Q$；
- **软动量区域** (用 s 来标记)，动量幂次为 $k^\mu \sim (\lambda^2,\lambda^2,\lambda^2)\,Q$。

其他动量模式，如 $k^\mu \sim (\lambda^a,\lambda^b,\lambda^c)\,Q$，$a,b,c$ 为整数且不与上面四种重合，都不会产生贡献。

当被积动量属于硬区域时，显然 $k^2 \sim \lambda^0 Q^2$，另两个传播子可展开为

$$\begin{aligned}(k+l)^2 &= \overbrace{k^2}^{\mathcal{O}(1)} + 2(\overbrace{k_+\cdot l_-}^{\mathcal{O}(\lambda^2)} + \overbrace{k_-\cdot l_+}^{\mathcal{O}(1)} + \overbrace{k_\perp\cdot l_\perp}^{\mathcal{O}(\lambda)}) + \overbrace{l^2}^{\mathcal{O}(\lambda^2)} \\ &= k^2 + 2k_-\cdot l_+ + \mathcal{O}(\lambda) \\ (k+p)^2 &= k^2 + 2k_+\cdot p_- + \mathcal{O}(\lambda)\end{aligned} \tag{12.41}$$

则硬动量区域对积分的贡献为

$$I_h = \mathrm{i}\pi^{-d/2}\mu^{4-d}\int \mathrm{d}^d k \frac{1}{(k^2+\mathrm{i}\epsilon)\,(k^2+2k_-\cdot l_+ +\mathrm{i}\epsilon)\,(k^2+2k_+\cdot p_- +\mathrm{i}\epsilon)} \tag{12.42}$$

显然这个积分与 $p^2=l^2=0$ 时的完整积分是一样的。积分结果为

$$\begin{aligned}I_h &= \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{2l_+\cdot p_-}\frac{\Gamma^2(-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)}\left(\frac{\mu^2}{2l_+\cdot p_-}\right)^{\varepsilon} \\ &= \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{Q^2}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{\mu^2}{Q^2}+\frac{1}{2}\ln^2\frac{\mu^2}{Q^2}-\frac{\pi^2}{6}\right)+\mathcal{O}(\varepsilon)\end{aligned} \tag{12.43}$$

其中的极点 $1/\varepsilon$ 来自于红外区域。

对于与 p 平行的动量区域，$k^\mu \sim (\lambda^2,1,\lambda)Q$，此时 $k^2 \sim \lambda^2 Q^2$，

$$(k+l)^2 = 2k_-\cdot l_+ + \mathcal{O}(\lambda^2)\,,\quad (k+p)^2 = \mathcal{O}(\lambda^2) \tag{12.44}$$

这个区域对积分的贡献为

$$\begin{aligned}I_c &= \mathrm{i}\pi^{-d/2}\mu^{4-d}\int \mathrm{d}^d k \frac{1}{(k^2+\mathrm{i}\epsilon)\,(2k_-\cdot l_+ +\mathrm{i}\epsilon)\,[(k+p)^2+\mathrm{i}\epsilon]} \\ &= -\frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{2l_+\cdot p_-}\frac{\Gamma^2(-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)}\left(\frac{\mu^2}{P^2}\right)^{\varepsilon} \\ &= \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{Q^2}\left(-\frac{1}{\varepsilon^2}-\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{\mu^2}{P^2}-\frac{1}{2}\ln^2\frac{\mu^2}{P^2}+\frac{\pi^2}{6}\right)+\mathcal{O}(\varepsilon)\end{aligned} \tag{12.45}$$

需要注意到，整个积分正比于 $P^{-2\varepsilon}$。与 l 平行的动量区域给出的贡献可以由上式将 P^2 换成 L^2 得到。

对于软动量区域，所有的动量分量都是 λ^2，因此

$$k^2=\mathcal{O}(\lambda^4),\quad (k+l)^2=2k_-\cdot l_+ + l^2+\mathcal{O}(\lambda^3)$$
$$(k+p)^2=2k_+\cdot p_- + p^2+\mathcal{O}(\lambda^3) \tag{12.46}$$

积分式为

$$\begin{aligned} I_s &= \mathrm{i}\pi^{-d/2}\mu^{4-d}\int \mathrm{d}^d k \frac{1}{(k^2+\mathrm{i}\epsilon)\,(2k_-\cdot l_+ + l^2+\mathrm{i}\epsilon)\,(2k_+\cdot p_- + p^2+\mathrm{i}\epsilon)} \\ &= -\frac{\Gamma\,(1+\varepsilon)}{2l_+\cdot p_-}\Gamma(\varepsilon)\Gamma\,(-\varepsilon)\left(\frac{2l_+\cdot p_-\mu^2}{L^2P^2}\right)^{\varepsilon} \\ &= \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{Q^2}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{\mu^2Q^2}{L^2P^2}+\frac{1}{2}\ln^2\frac{\mu^2Q^2}{L^2P^2}+\frac{\pi^2}{6}\right)+\mathcal{O}\,(\varepsilon) \end{aligned} \tag{12.47}$$

这里极点来源于紫外区域。这里结果引入了一个新的软标度：$\Lambda^2_{\mathrm{soft}}\sim P^2L^2/Q^2$。

将上面四个区域的贡献求和，可以得到在 $L^2\sim P^2\ll Q^2$，单圈图对形状因子的修正

$$\begin{aligned} I_h &= \frac{\Gamma\,(1+\varepsilon)}{Q^2}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{\mu^2}{Q^2}+\frac{1}{2}\ln^2\frac{\mu^2}{Q^2}-\frac{\pi^2}{6}+\mathcal{O}(\lambda)\right) \\ I_c &= \frac{\Gamma\,(1+\varepsilon)}{Q^2}\left(-\frac{1}{\varepsilon^2}-\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{\mu^2}{P^2}-\frac{1}{2}\ln^2\frac{\mu^2}{P^2}+\frac{\pi^2}{6}+\mathcal{O}(\lambda)\right) \\ I_{\bar{c}} &= \frac{\Gamma\,(1+\varepsilon)}{Q^2}\left(-\frac{1}{\varepsilon^2}-\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{\mu^2}{L^2}-\frac{1}{2}\ln^2\frac{\mu^2}{L^2}+\frac{\pi^2}{6}+\mathcal{O}(\lambda)\right) \\ I_s &= \frac{\Gamma\,(1+\varepsilon)}{Q^2}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{\mu^2Q^2}{L^2P^2}+\frac{1}{2}\ln^2\frac{\mu^2Q^2}{L^2P^2}+\frac{\pi^2}{6}+\mathcal{O}(\lambda)\right) \\ \hline I_h+I_c+I_{\bar{c}}+I_s &= \frac{1}{Q^2}\left(\ln\frac{Q^2}{L^2}\ln\frac{Q^2}{P^2}+\frac{\pi^2}{3}+\mathcal{O}(\lambda)\right) \end{aligned} \tag{12.48}$$

最后的结果不依赖于维数正规化参数 ε，这与直接计算并进行幂次参数 $\lambda\to 0$ 展开的结果是一致的。

需要强调的是，硬动量区域发现的软发散与软/共线动量区域发现的紫外发散完全抵消，这取决于

$$-\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{\mu^2}{P^2}-\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{\mu^2}{L^2}+\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{\mu^2Q^2}{L^2P^2}=-\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{\mu^2}{Q^2} \tag{12.49}$$

12.2.3　有质量粒子的顶点修正

对于一些物理量，简单地将整个积分拆分成硬、软和共线区域可能会存在问题，原因是在维数正规化的框架下，一些动量区域的贡献不能良好定义。这种情况被称为共线反常[10]。一个具体的例子就是大动量转移时有质量粒子的顶点修正。

为了说明共线反常，再次以图 12.1 为例，但现在考虑内线粒子的质量，$m^2 \sim \lambda^2 Q^2 \gg \lambda^4 Q^2$。当积分动量为软动量时 $k^2 \sim \lambda^4 Q^2$，传播子可以展开为

$$\frac{1}{k^2 - m^2} = -\frac{1}{m^2}\left(1 - \frac{k^2}{m^2} + \cdots\right) \tag{12.50}$$

可以证明软动量积分

$$I_s = -\mathrm{i}\pi^{-d/2}\mu^{4-d}\int \mathrm{d}^d k \frac{1}{(m^2 - \mathrm{i}\epsilon)\,(2k_- \cdot l_+ + l^2 + \mathrm{i}\epsilon)\,(2k_+ \cdot p_- + p^2 + \mathrm{i}\epsilon)}$$

是零，这样整个顶点修正只有硬动量和共线区域。对于共线区域，积分会依赖于 Lorentz 标度不变量 p^2, l^2 或者 m^2。而硬标度积分会产生单极点，其系数正比于 $\log Q^2$，不能被共线区域所抵消。产生这个问题的原因是共线区域单独是不能良好定义的，需要引入新的正规化参数。

最直接的方式是引入解析正规子[11]，将积分式变为

$$I = \mathrm{i}\pi^{-d/2}\mu^{4-d}\int \mathrm{d}^d k \frac{(-\nu^2)^\alpha}{(k^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon)[(k+l)^2 + \mathrm{i}\epsilon][(k+p)^2 + \mathrm{i}\epsilon]^{1+\alpha}} \tag{12.51}$$

其中幂次参数 α 将最后会被取成零，而 ν 是解析正规化引入的一个标度。共线区域的积分可以展开为

$$\begin{aligned} I_c &= \mathrm{i}\pi^{-d/2}\mu^{4-d}\int \mathrm{d}^d k \frac{(-\nu^2)^\alpha}{(k^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon)\,(2k_- \cdot l_+ + \mathrm{i}\epsilon)\,[(k+p)^2 + \mathrm{i}\epsilon]^{1+\alpha}} \\ I_{\bar{c}} &= \mathrm{i}\pi^{-d/2}\mu^{4-d}\int \mathrm{d}^d k \frac{(-\nu^2)^\alpha}{(k^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon)\,[(k+l)^2 + \mathrm{i}\epsilon]\,[2k_+ \cdot p_- + \mathrm{i}\epsilon]^{1+\alpha}} \end{aligned} \tag{12.52}$$

将外线粒子取成在壳，即 $p^2 = l^2 = 0$，我们得到两个共线动量区域的贡献：

$$\begin{aligned} I_c &= \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{Q^2}\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^\varepsilon \left(\frac{\nu^2}{m^2}\right)^\alpha \left(\frac{1}{\alpha\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{\pi^2}{3} + \mathcal{O}(\alpha,\varepsilon)\right) \\ I_{\bar{c}} &= \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{Q^2}\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^\varepsilon \left(\frac{\nu^2}{Q^2}\right)^\alpha \left(-\frac{1}{\alpha\varepsilon} + \frac{\pi^2}{6} + \mathcal{O}(\alpha,\varepsilon)\right) \end{aligned} \tag{12.53}$$

两部分贡献的和为

$$I_c + I_{\bar{c}} = \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{Q^2}\left[-\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{\mu^2}{Q^2} - \ln\frac{\mu^2}{m^2}\ln\frac{\mu^2}{Q^2} + \frac{1}{2}\ln^2\frac{\mu^2}{m^2} + \frac{\pi^2}{2}\right] \tag{12.54}$$

其中，对解析依赖参数 α 和 ν 的依赖已抵消。将公式 (12.42) 中的硬区域贡献加起来为

$$I_c + I_{\bar{c}} + I_h = \frac{1}{Q^2}\left[\frac{1}{2}\ln^2\frac{m^2}{Q^2} + \frac{\pi^2}{3}\right] \tag{12.55}$$

这个结果也就是公式 (12.51) 的积分结果。

12.3　标量粒子的软共线有效理论

12.3.1　标量粒子的拉氏量

本节将针对 12.2 节中计算的 Sudakov 形状因子构建标量粒子软共线有效理论。我们考虑 ϕ^3 理论：

$$\mathcal{L}(\phi)=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-\frac{g}{3!}\phi^3 \tag{12.56}$$

这里 ϕ 是标量场，g 是耦合常数。为了描述 12.2 节中的 Sudakov 因子，我们将标量场分为两个方向的共线场和软场：

$$\phi(x)\to\phi_c(x)+\phi_{\bar{c}}(x)+\phi_s(x) \tag{12.57}$$

由于低能部分不包含硬标度贡献，因此这里的标量场不需要将硬场加进去，硬标度的贡献被吸收到短程 Wilson 系数中。

按照标量场的展开，原始的拉氏量则可以展开为

$$\mathcal{L}(\phi)=\underbrace{\mathcal{L}(\phi_c)}_{\equiv\mathcal{L}_c}+\underbrace{\mathcal{L}(\phi_{\bar{c}})}_{\equiv\mathcal{L}_{\bar{c}}}+\underbrace{\mathcal{L}(\phi_s)}_{\equiv\mathcal{L}_s}+\mathcal{L}_{c+s}(\phi_c,\phi_{\bar{c}},\phi_s) \tag{12.58}$$

上式等号右边的前三项形式与完整理论的拉氏量完全相同，仅需要注意到其中的标量场为共线或者软场。最后一项则描述了它们的相互作用：

$$\mathcal{L}_{c+s}(\phi_c,\phi_{\bar{c}},\phi_s)=-\frac{g}{2}\phi_c^2\phi_s-\frac{g}{2}\phi_{\bar{c}}^2\phi_s \tag{12.59}$$

相互作用的费曼图如图 12.2 所示。需要指出的是，很多相互作用项都被四动量守恒所禁戒。

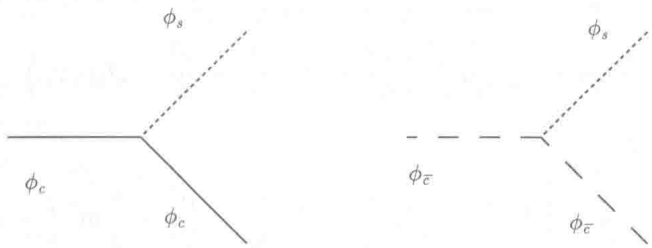


图 12.2　标量 SCET 中，不同动量模式的相互作用顶点。其余相互作用顶点均由动量守恒条件禁戒

最终，我们还需要对其中各场的小分量做多极展开，例如，考虑下面的相互作用：

$$\int \mathrm{d}^dx\phi_c^2\phi_s(x)=\int \mathrm{d}^dx\frac{\mathrm{d}^dp_1}{(2\pi)^d}\frac{\mathrm{d}^dp_2}{(2\pi)^d}\frac{\mathrm{d}^dp_s}{(2\pi)^d}\tilde{\phi}_c(p_1)\tilde{\phi}_c(p_2)\tilde{\phi}_s(p_s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_1+p_2+p_s)\cdot x} \tag{12.60}$$

其中波浪线表示经过傅里叶变换到动量空间的标量场。不失一般性，可以假定：p_1, p_2 都沿着 p 方向，而 p_s 是软的，则三个动量和的幂次为

$$p_1^\mu + p_1^\mu + p_s^\mu \sim (\lambda^2, 1, \lambda)Q \tag{12.61}$$

于是相应坐标的幂次为

$$x^\mu \sim \left(1, \frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda}\right)\frac{1}{Q} \tag{12.62}$$

考虑到软场中动量都是 λ^2 幂次，可以发现

$$p_s \cdot x = \underbrace{(p_s)_+ \cdot x_-}_{\mathcal{O}(1)} + \underbrace{(p_s)_- \cdot x_+}_{\mathcal{O}(\lambda^2)} + \underbrace{(p_s)_\perp \cdot x_\perp}_{\mathcal{O}(\lambda)} \tag{12.63}$$

于是便可将软场在 $x_-^\mu = (n_- \cdot x)n_+^\mu/2$ 处进行展开

$$\begin{aligned}\phi_s(x) = \phi_s(x_-) + \underbrace{x_\perp \cdot \partial_\perp \phi_s(x_-)}_{\mathcal{O}(\lambda)} + \underbrace{x_+ \cdot \partial_- \phi_s(x_-)}_{\mathcal{O}(\lambda^2)} \\ + \frac{1}{2}\underbrace{x_{\mu\perp} x_{\nu\perp} \partial^\mu \partial^\nu \phi_s(x_-)}_{\mathcal{O}(\lambda^2)} + \mathcal{O}(\lambda^3)\end{aligned} \tag{12.64}$$

因此精确到 λ 的领头阶，可以将相互作用写成

$$\int \mathrm{d}^d x\, \phi_c^2(x)\phi_s(x) = \int \mathrm{d}^d x\, \phi_c^2(x)\phi_s(x_-) + \mathcal{O}(\lambda) \tag{12.65}$$

需要注意的是，在平移变换下，相互作用项会产生关于 λ 的高阶贡献项，因而严格来说不是平移不变的。

软共线有效理论中，标量粒子的领头阶拉氏量可以写成

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{eff}} = &\frac{1}{2}\partial_\mu \phi_c(x)\partial^\mu \phi_c(x) - \frac{g}{3!}\phi_c^3(x) + \frac{1}{2}\partial_\mu \phi_{\bar{c}}(x)\partial^\mu \phi_{\bar{c}}(x) - \frac{g}{3!}\phi_{\bar{c}}^3(x) \\ &+ \frac{1}{2}\partial_\mu \phi_s(x)\partial^\mu \phi_s(x) - \frac{g}{3!}\phi_s^3(x) - \frac{g}{2}\phi_c^2(x)\phi_s(x_-) - \frac{g}{2}\phi_{\bar{c}}^2(x)\phi_s(x_+)\end{aligned} \tag{12.66}$$

12.3.2 有效理论拉氏量与流算符的匹配

从完整理论到有效理论，一般来说需要进行匹配，其中硬场的贡献被吸收到短程 Wilson 系数中。以拉氏量为例，匹配一般分为下面的几个步骤：

(1) 在有效理论中，写下满足对称性的所有算符，这些算符的系数就是短程 Wilson 系数。

(2) 选择一个合适的过程，在完整理论和有效理论中计算该过程的振幅。

(3) 调整有效理论中的短程系数，使得两个理论中的振幅结果一致。

一般来说，有效理论中算符的 Wilson 系数都会得到高阶修正。不过软共线有效理论拉氏量没有辐射修正，下面将举例说明。

假设存在非平庸的短程 Wilson 系数，以三个共线场为例：

$$-\frac{g}{3!}\phi_c^3(x) \to -\frac{g}{3!}C\phi_c^3(x) \equiv -\frac{g}{3!}\left(1+g^2C^{(1)}+g^4C^{(2)}+\cdots\right)\phi_c^3(x) \tag{12.67}$$

为了确定系数 $C^{(1)}$，则需要进行单圈图 (g^2 阶) 的计算，要求完整理论和有效理论的结果一致。单圈匹配的费曼图如图 12.3 所示。在图 12.3 中，外线粒子动量都与 p 平行。等号左边是完整理论，而等号右边的有效理论中，实线表示共线场，点线表示软场。省略号表示将前图中的软场进行轮换得到。最后一项为匹配系数项。需要注意的是，图中有效理论第一项与完整理论的贡献完全相同，而涉及软场的贡献为零。因此最后一项的系数必须为零，即 $C^{(1)}=0$。

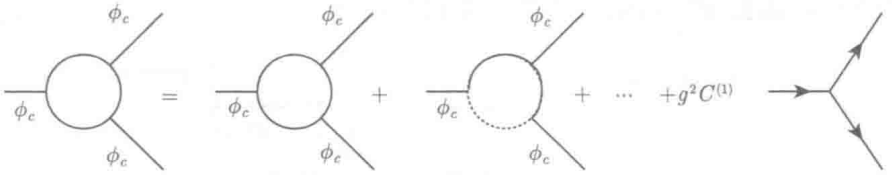


图 12.3　三个共线场相互作用的单圈图匹配示意图

算符匹配应该区分拉氏量和物理振幅对应的算符。以 $J=\phi^2$ 为例，费曼图如图 12.4 所示，该流算符可以涉及两个方向的共线场，可能产生非平庸的匹配系数：

$$J = J_2 + J_3 + \cdots = C_2\phi_c\phi_{\bar{c}} + \frac{C_3}{2!}\left(\phi_c^2\phi_{\bar{c}} + \phi_c\phi_{\bar{c}}^2\right) + \cdots \tag{12.68}$$

其中 J_i 和 C_i 中的下标表示算符中标量场的数量。除了场算符之外，还应该考虑微商。例如，微商算符作用到沿 p 方向的共线场给出

$$n_+\cdot\partial\phi_c(x) \sim \lambda^2\phi_c(x)\,,\quad \partial_\perp^\mu\phi_c(x) \sim \lambda\phi_c(x)\,,\quad n_-\cdot\partial\phi_c(x) \sim \lambda^0\phi_c(x) \tag{12.69}$$

作用到沿 l 方向，则有

$$n_-\cdot\partial\phi_{\bar{c}}(x) \sim \lambda^2\phi_{\bar{c}}(x)\,,\quad \partial_\perp^\mu\phi_{\bar{c}}(x) \sim \lambda\phi_{\bar{c}}(x)\,,\quad n_+\cdot\partial\phi_{\bar{c}}(x) \sim \lambda^0\phi_{\bar{c}}(x) \tag{12.70}$$

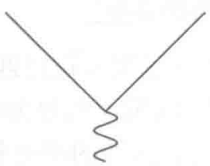


图 12.4　标量 SCET 中，$J=\phi^2$ 树图的费曼图

在进行 λ 展开时，微商算符 $n_-\cdot\partial\phi_c$ 和 $n_+\cdot\partial\phi_{\bar{c}}$ 也是领头阶的，因此一般来说有效理论中出现的场算符都是非定域算符形式：

$$\phi_c(x+tn_-)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{t^i}{i!}(n_-\cdot\partial)^i\phi_c(x) \tag{12.71}$$

这样，流算符 J_2 可以表示为

$$J_2(x)=\int \mathrm{d}s\mathrm{d}t\, C_2(s,t,\mu)\,\phi_c\left(x+sn_-\right)\phi_{\bar{c}}\left(x+tn_+\right) \tag{12.72}$$

坐标空间中算符的非定域性质将体现为动量空间中短程 Wilson 系数对动量的依赖。例如，将坐标空间中的 Wilson 系数做傅里叶变换得到

$$\tilde{C}_2\left(n_-\cdot p\,,n_+\cdot l,\mu\right)=\int \mathrm{d}s\mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}sn_-\cdot p}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tn_+\cdot l}C_2(s,t,\mu) \tag{12.73}$$

在这个公式中，我们明确给出了 Wilson 系数对重整化标度的依赖。这个标度依赖对应一个重整化群方程，最终可以用来进行重求和。短程系数 $\tilde{C}_2$ 可以进行 QCD 展开：

$$\tilde{C}_2=\tilde{C}_2^{(0)}+g^2\tilde{C}_2^{(1)}+g^4\tilde{C}_2^{(2)}+\cdots \tag{12.74}$$

显然在树图层次上，有 $\tilde{C}_2^{(0)}=1$。下面将给出 g^2 阶 (单圈阶) 系数 $\tilde{C}_2^{(1)}$ 的匹配计算，费曼图如图 12.5 所示。

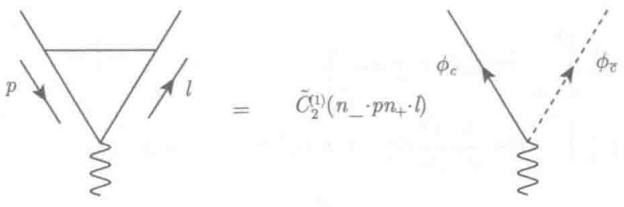


图 12.5 J_2 单圈图计算

动量 p 和 l 满足在壳条件，因此上图左边与上节中标量积分的硬动量区域贡献相同。公式右面除了由两个算符直接贡献还应该考虑与高阶相互作用的编时乘积，即顶点修正中的交换软动量粒子。而软粒子交换贡献在 $p^2=l^2=0$ 的条件下为零。这告诉我们短程系数直接就是上节中计算的硬动量贡献。

接下来分析三体算符，即包含两个沿 l 方向的共线场算符和一个沿 p 方向的场算符，费曼图如图 12.6 所示。图中等号左边只涉及一个传播子，因此很容易计算出来，可以分别写成

$$(p-l_2)^2=-2p\cdot l_2+\mathcal{O}\left(\lambda^2\right)=-\left(n_+\cdot l_2\right)\left(n_-\cdot p\right)+\mathcal{O}\left(\lambda^2\right),\quad (l_1+l_2)^2$$

由于 $\tilde{C}_2^{(0)}=1$，因此等号右边第一个图给出的贡献与等号左边第一个图贡献完全相同。三体算符系数 $\tilde{C}_3^{(0)}$ 便完全由上式传播子确定：

$$\tilde{C}_3^{(0)}\left(n_+\cdot l_1, n_+\cdot l_2, n_-\cdot p, \mu\right)=\frac{g}{-\left(n_+\cdot l_2\right)\left(n_-\cdot p\right)+\mathrm{i}\epsilon} \tag{12.75}$$

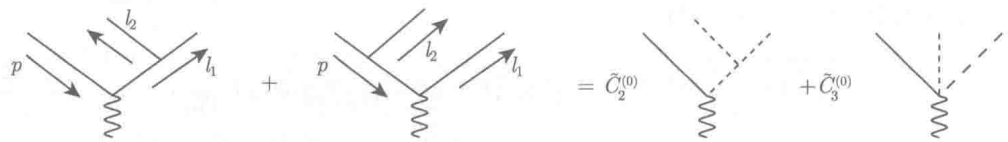


图 12.6　J_3 匹配系数计算

我们需要进一步考虑的是，什么样的算符对应着上面的 Wilson 系数 $\tilde{C}_3$。我们知道，对于一个入射动量，存在算符对应关系 $p^\mu \leftrightarrow \mathrm{i}\partial^\mu$，因此可以发现

$$\frac{g}{-\left(n_+\cdot l_2\right)\left(n_-\cdot p\right)+\mathrm{i}\epsilon} \longleftrightarrow -g\left(\frac{1}{n_-\cdot\partial}\phi_c\right)\left(\frac{1}{n_+\cdot\partial}\phi_{\bar{c}}\right)\phi_{\bar{c}} \tag{12.76}$$

这两个微商都是领头阶 $\lambda^0 Q$，因此在算符 J_3 可能是受 $1/Q^2$ 压低的，具体还需要判断场算符的幂次。实际上上面出现负幂次微商也可以转换成非定域场算符：

$$\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}n_+\cdot\partial+\mathrm{i}0^+}\phi(x)=\int_{-\infty}^0 \mathrm{d}s\,\phi(x+sn_+) \tag{12.77}$$

证明如下：

$$\begin{aligned}&n_+^\mu\int_{-\infty}^0 \mathrm{d}s\,\partial_\mu\phi(x+sn_+)\\ =&n_+^\mu\int_{-\infty}^0 \mathrm{d}s\,\frac{1}{n_+^\mu}\frac{\partial}{\partial s}\phi(x+sn_+)=\phi(x+sn_+)|_{-\infty}^0=\phi(x)\end{aligned} \tag{12.78}$$

需要注意的是，公式 (12.77) 存在一个正的无穷小虚部。

由于在软共线有效理论中，存在大的动量分量，不是所有动量分量都被积分出来，因此形成的有效算符一般都是非定域的。以完整理论中的流算符为例，匹配给出

$$J=C\phi^2(x)=J_2(x)+J_3(x)+\cdots \tag{12.79}$$

其中 J_2 的形式为 (12.72)，而 J_3 为

$$\begin{aligned}J_3(x)=&\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}s\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t_1\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t_2\,C_3(s,t_1,t_2,\mu)\\&\times\phi_c(x+sn_-)\phi_{\bar{c}}(x+t_1n_+)\phi_{\bar{c}}(x+t_2n_+)+(c\leftrightarrow\bar{c})\end{aligned} \tag{12.80}$$

坐标空间中，短程 Wilson 系数为

$$\begin{aligned} C_2(s,t,\mu) &= \delta(s)\delta(t) + \mathcal{O}(g^2) \\ C_3(s,t_1,t_2,\mu) &= g\theta(-s)\delta(t_1)\theta(t_2) + \mathcal{O}(g^3) \end{aligned} \tag{12.81}$$

经过傅里叶变化后，对应动量空间的 Wilson 系数

$$\begin{aligned} \tilde{C}_2^{(0)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}s \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t \mathrm{e}^{\mathrm{i}sn_-\cdot p} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tn_+\cdot l}\, \delta(s)\delta(t) = 1 \\ \tilde{C}_3^{(0)} &= g\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}s \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}sn_-\cdot p} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_1 n_+\cdot l_1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_2 n_+\cdot l_2} \theta(-s)\theta(t_2)\delta(t_1) \\ &= g\int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}s \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}t_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}sn_-\cdot p} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_2 n_+\cdot l_2} = \frac{g}{-(n_-\cdot p)(n_+\cdot l_2)} \end{aligned} \tag{12.82}$$

其中，函数 C_i 对 s,t 的依赖转化成 $\tilde{C}_i$ 对动量的依赖：

$$\delta(s) \leftrightarrow 1\,, \qquad \theta(-s) \leftrightarrow \frac{1}{\mathrm{i}Q} \tag{12.83}$$

12.3.3 六维时空中的 Sudakov 因子

现在可以在 $\lambda \to 0$ 的近似下，将 ϕ^3 理论中 Sudakov 因子的单圈图进行如图 12.7 所示的匹配。

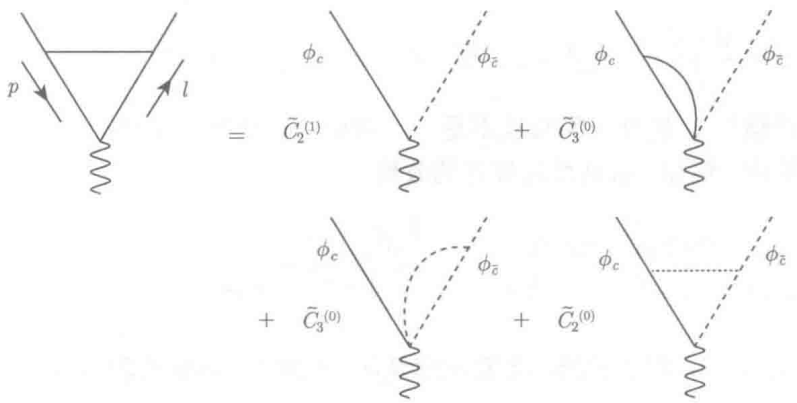
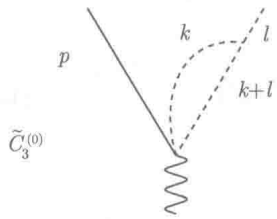


图 12.7 Sudakov 因子单圈匹配系数的计算

需要再次强调的是，外线动量 p 和 l 很小，但可以不为零。图中有效理论中的四个图恰好对应区域展开中硬能量标度、两个共线标度与一个软标度给出的单圈

贡献。例如，对于第三个图，其贡献为



$$\Longrightarrow \mathrm{i}g\int \mathrm{d}^d k \frac{1}{(k^2+\mathrm{i}\epsilon)[(k+l)^2+\mathrm{i}\epsilon]} \underbrace{\frac{g}{2k_+\cdot p_- +\mathrm{i}\epsilon}}_{=\tilde{C}_3^{(0)}}$$

该结果和上节中按照动量区域展开方法计算的结果相同。同样，也可以证明其他图与上节结果相同。

值得强调的是，如果仅仅是固定阶的计算，直接采用区域展开方法更加简单，但是软共线有效理论却提供了一个系统研究所有阶贡献的工具，包括因子化定理的证明，大对数的重求和。

在这里，我们将从理论角度，引入 6 维空间下 ϕ^3 所对应的软共线有效理论，重点分析该有效理论中 Sudakov 因子的因子化行为。在 $d=6$ 时，耦合常数是无量纲的。一般来说，d 维情况下的拉氏量可以写成

$$S=\int \mathrm{d}^d x \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\,\partial^\mu\phi(x)-g\phi^3(x)\right] \tag{12.84}$$

从拉氏量动能项，可以得到场的量纲

$$[\phi]=\frac{d-2}{2},\quad [\phi]=1 \quad 在 \quad d=4; \qquad [\phi]=2 \quad 在 \quad d=6 \tag{12.85}$$

同样的，将场的量纲代入相互作用项可以得到

$$[g]=\frac{6-d}{2}, \qquad [g]=1 \quad 在 \quad d=4; \qquad [g]=0 \quad 在 \quad d=6 \tag{12.86}$$

场的量纲与 λ 展开下的幂次不是一一对应的，但有效理论中的每一个算符都有确定的幂次。例如，从共线场算符的收缩

$$\langle 0|\,T\{\phi_c(x)\phi_c(0)\}\,|0\rangle \sim \int \underbrace{\mathrm{d}^6 p}_{\lambda^6}\,\underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}}_{\lambda^0}\,\underbrace{\frac{\mathrm{i}}{p^2}}_{\lambda^{-2}} \sim \lambda^4 \tag{12.87}$$

可以发现 $\phi_c\sim\lambda^2$。对于软场，动量分量都是 λ^2 量级，两点关联函数

$$\langle 0|\,T\{\phi_s(x)\phi_s(0)\}\,|0\rangle \sim \int \underbrace{\mathrm{d}^6 p}_{\lambda^{12}}\,\underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}}_{\lambda^0}\,\underbrace{\frac{\mathrm{i}}{p^2}}_{\lambda^{-4}} \sim \lambda^8 \tag{12.88}$$

给出幂次规则：$\phi_s\sim\lambda^4$。

接下来我们分析各种相互作用拉氏量的幂次：

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}^6x\,\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_c(x)\,\partial^\mu\phi_c(x) \sim \frac{1}{\lambda^6}\left(\lambda\lambda^2\right)^2 &&= \lambda^0 \\
&\int \mathrm{d}^6x\,\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_s(x)\,\partial^\mu\phi_s(x) \sim \frac{1}{\lambda^{12}}\left(\lambda^2\lambda^4\right)^2 &&= \lambda^0 \\
&\int \mathrm{d}^6x\,g\,\phi_c^3(x) \sim \frac{1}{\lambda^6}\left(\lambda^2\right)^3 &&= \lambda^0 \\
&\int \mathrm{d}^6x\,g\,\phi_s^3(x) \sim \frac{1}{\lambda^{12}}\left(\lambda^4\right)^3 &&= \lambda^0 \\
&\int \mathrm{d}^6x\,g\,\phi_c^2(x)\,\phi_s(x) \sim \frac{1}{\lambda^6}\left(\lambda^2\right)^2\lambda^4 = \lambda^2 &&\Longrightarrow \quad \text{压低 (Suppressed)}
\end{aligned} \tag{12.89}$$

这里坐标 x 的幂次由动量 p 决定。流算符 $J=\phi^2$ 包含两个方向的共线场，幂次为

$$\int \mathrm{d}^6x J_2(x) \propto \int \mathrm{d}^6x\,\phi_c(x)\,\phi_{\bar{c}}(x) \sim \frac{1}{\lambda^4}\lambda^2\lambda^2 = \lambda^0 \tag{12.90}$$

同样的，包含两个方向共线场的相互作用为

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}^6x\,\phi_c^2(x)\,\phi_{\bar{c}}(x) &\sim \frac{1}{\lambda^4}\left(\lambda^2\right)^2\lambda^2 = \lambda^2 \quad \Longrightarrow \quad \text{Suppressed} \\
\int \mathrm{d}^6x\,\phi_c(x)\,\phi_{\bar{c}}(x)\,\phi_s(x) &\sim \frac{1}{\lambda^4}\left(\lambda^2\right)^2\lambda^4 = \lambda^4 \quad \Longrightarrow \quad \text{Suppressed}
\end{aligned} \tag{12.91}$$

需要注意的是，此时坐标则需要由两个共线动量之和决定，因此 $\mathrm{d}^6x \sim (p_\perp)^{-4} \sim \lambda^{-4}$。

因此在 $d=6$ 下，ϕ^3 有效理论的相互作用为

$$\int \mathrm{d}^6x\,\mathcal{L}_{\mathrm{SCET}} = \int \mathrm{d}^6x\,\left[\mathcal{L}_c + \mathcal{L}_{\bar{c}} + \mathcal{L}_s\right] + \mathcal{O}\left(\lambda^2\right) \tag{12.92}$$

流算符的一般匹配形式为

$$\int \mathrm{d}^6x J(x) \to \int \mathrm{d}^6x \int \mathrm{d}s\mathrm{d}t C(s,t,\mu)\phi_c\left(x+sn_-\right)\phi_{\bar{c}}\left(x+tn_+\right) + \mathcal{O}\left(\lambda^2\right) \tag{12.93}$$

从相互作用可以看出，软和共线场之间的相互作用是受到压低的，因此可以建立一个领头阶的因子化定理。

以下面关联函数为例，因子化可以证明为

$$\begin{aligned}
G(p,l,\mu) &= \int \mathrm{d}^6x_1 \int \mathrm{d}^6x_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x_1+\mathrm{i}l\cdot x_2}\langle 0|T\left\{\phi_c(x_1)J(0)\phi_{\bar{c}}(x_2)\right\}|0\rangle \\
&= \int \mathrm{d}^6x_1 \int \mathrm{d}^6x_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x_1+\mathrm{i}l\cdot x_2}\int \mathrm{d}s \int \mathrm{d}t\,C(s,t,\mu) \\
&\quad \times\langle 0|T\left\{\phi_c(x_1)\phi_c(sn_-)\right\}|0\rangle\langle 0|T\left\{\phi_{\bar{c}}(tn_+)\phi_{\bar{c}}(x_2)\right\}|0\rangle
\end{aligned} \tag{12.94}$$

由于软和共线场的相互作用是压低的，因此不同方向的共线场 ϕ_c 和 $\phi_{\bar{c}}$ 互相退耦，可以将包含两种共线场算符的矩阵元因子化。

平移不变性给出

$$\langle 0|T\left\{\phi_c(x_1)\phi_c(sn_-)\right\}|0\rangle = \langle 0|T\left\{\phi_c(x_1-sn_-)\phi_c(0)\right\}|0\rangle \tag{12.95}$$

这样，我们就可以对因子化公式中进行坐标替换：

$$x_1 \to x_1 + sn_-\,, \qquad x_2 \to x_2 + tn_+ \tag{12.96}$$

从而得到

$$G(p,l,\mu) = \int \mathrm{d}s \int \mathrm{d}t\, C\left(s,t,\mu\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}sp\cdot n_- + \mathrm{i}tl\cdot n_+} \mathcal{J}\left(p^2,\mu\right)\mathcal{J}\left(l^2,\mu\right) \tag{12.97}$$

其中，

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}\left(p^2,\mu\right) &\equiv \int \mathrm{d}^6x_1\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x_1}\langle 0|T\left\{\phi_c(x_1)\phi_c(0)\right\}|0\rangle \\
\mathcal{J}\left(l^2,\mu\right) &\equiv \int \mathrm{d}^6x_2\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}l\cdot x_2}\langle 0|T\left\{\phi_{\bar{c}}(0)\phi_{\bar{c}}(x_2)\right\}|0\rangle
\end{aligned} \tag{12.98}$$

这里函数 $\mathcal{J}$ 不依赖于 s 和 t。引入傅里叶变换约定，

$$\tilde{C}_2\left(n_-\cdot p, n_+\cdot l, \mu\right) \equiv \int \mathrm{d}s \int \mathrm{d}t\, C\left(s,t,\mu\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}sp\cdot n_- + \mathrm{i}tl\cdot n_+} \tag{12.99}$$

我们可以得到三点函数的因子化表示形式：

$$G(p,l,\mu) = \tilde{C}_2\left(n_-\cdot p, n_+\cdot l, \mu\right)\mathcal{J}\left(p^2,\mu\right)\mathcal{J}\left(l^2,\mu\right) \tag{12.100}$$

这样，我们将函数 G 拆分成了硬函数 $\tilde{C}$ 和两个共线函数 (一般称为喷注函数)$\mathcal{J}$。硬函数可以在 $p^2 = l^2 = 0$ 的条件下计算，喷注函数可以形式上从完整理论计算，因为对于标量场来说，有效理论拉氏量与完整理论完全相同。该因子化可以用图 12.8 来表示。

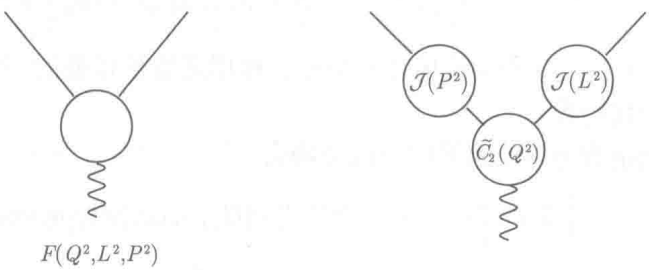


图 12.8　Sudakov 形状因子的因子化

因子化定理可将振幅分解为微扰可计算的高能散射核与非微扰的低能输入。因子化证明后，硬函数中往往会包含关于不同标度的对数，大的对数会破坏微扰展开的收敛性。一般来说，单对数可采用重整化群方程进行求和，双对数则需要借助于重求和技术。在上述例子中，软标度粒子不产生贡献，Sudakov 因子仅包含有单对数。

12.4 量子色动力学与软共线有效理论

本章将讨论量子色动力学的有效理论，跟标量场相比，该理论具有以下特点：

- 夸克场和胶子场不同分量的幂次不同；
- 有效理论满足规范不变性；
- 理论中存在非定域 Wilson 线。

12.4.1 幂次分析

为了简单起见，我们仅讨论一种共线场，其动量满足

$$p^\mu \sim (\lambda^2, 1, \lambda)Q \tag{12.101}$$

可以将夸克场和胶子场分为共线和软动量部分：

$$A^\mu(x) \to A_c^\mu(x) + A_s^\mu(x), \quad \psi(x) \to \psi_c(x) + \psi_s(x) \tag{12.102}$$

由于 p_- 为大分量，沿着 n_+ 方向，可以将共线夸克场分成两个部分：

$$\begin{aligned} &\psi_c(x) \equiv \xi(x) + \eta(x) \\ &\xi(x) = P_+\psi_c(x) = \frac{\not{n}_+\not{n}_-}{4}\psi_c(x) \\ &\eta(x) = \frac{\not{n}_-\not{n}_+}{4}\psi_c(x) = P_-\psi_c(x) \end{aligned} \tag{12.103}$$

很容易验证：

$$\not{n}_+\,\xi(x) = 0, \quad \not{n}_-\,\eta(x) = 0 \tag{12.104}$$

$$P_+ + P_- = 1, \quad P_+^2 = P_+, \quad P_-^2 = P_- \tag{12.105}$$

夸克场的幂次可以通过两点格林函数得到：

$$\begin{aligned} \langle 0|T\left\{\xi(x)\bar{\xi}(0)\right\}|0\rangle &= \frac{\not{n}_+\not{n}_-}{4}\langle 0|T\left\{\psi_c(x)\bar{\psi}_c(0)\right\}|0\rangle\frac{\not{n}_-\not{n}_+}{4} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{p^2+\mathrm{i}\epsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\frac{\not{n}_+\not{n}_-}{4}\not{p}\frac{\not{n}_-\not{n}_+}{4} \sim \frac{\lambda^4}{\lambda^2} = \lambda^2 \end{aligned} \tag{12.106}$$

因此 $\xi(x)\sim\lambda$。而对于分量 η，由两点函数

$$\begin{aligned}\langle 0|T\left\{\eta(x)\bar{\eta}(0)\right\}|0\rangle&=\frac{\not{n}_-\not{n}_+}{4}\langle 0|T\left\{\psi_c(x)\bar{\psi}_c(0)\right\}|0\rangle\frac{\not{n}_+\not{n}_-}{4}\\&=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{p^2+\mathrm{i}\epsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\frac{\not{n}_-\not{n}_+}{4}\not{p}\frac{\not{n}_+\not{n}_-}{4}\sim\frac{\lambda^4\lambda^2}{\lambda^2}=\lambda^4\end{aligned}\tag{12.107}$$

得到 $\eta(x)\sim\lambda^2$。容易看到 ξ 是大分量，而小分量 η 是受到 λ 压低的。对于软场，我们有

$$\langle 0|T\left\{\psi_s(x)\bar{\psi}_s(x)\right\}|0\rangle=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}\not{p}}{p^2+\mathrm{i}\epsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\sim(\lambda^2)^4\lambda^2\frac{1}{\lambda^4}\sim\lambda^6\tag{12.108}$$

于是 $\psi_s(x)\sim\lambda^3$。

胶子传播子

$$\langle 0|T\left\{A^\mu(x)A^\nu(0)\right\}|0\rangle=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{p^2+\mathrm{i}\epsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\left[-g^{\mu\nu}+\xi\frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right]\tag{12.109}$$

给出幂次规则：

$$n_-\cdot A_c\sim\lambda^0,\quad n_+\cdot A_c\sim\lambda^2,\quad A_{c\perp}\sim\lambda,\quad A_s^\mu\sim\lambda^2\tag{12.110}$$

12.4.2　有效拉氏量

在有效理论中，动力学场为 $\xi(x),\psi_s(x)$ 和 $A_{c,s}(x)$。为了考虑规范不变性，我们需要将协变微商写成

$$D_\mu\equiv\partial_\mu-\mathrm{i}gA_\mu=\partial_\mu-\mathrm{i}gt^a(A^a_{c\mu}+A^a_{s\mu})\tag{12.111}$$

共线场拉氏量为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_c&=\bar{\psi}_c\,\mathrm{i}\not{D}\psi_c\\&=(\bar{\xi}+\bar{\eta})\left[\frac{\not{n}_+}{2}\mathrm{i}n_-\cdot D+\frac{\not{n}_-}{2}\mathrm{i}n_+\cdot D+\mathrm{i}\not{D}_\perp\right](\xi+\eta)\\&=\bar{\xi}\frac{\not{n}_-}{2}\mathrm{i}n_+\cdot D\xi+\bar{\xi}\mathrm{i}\not{D}_\perp\eta+\bar{\eta}\mathrm{i}\not{D}_\perp\xi+\bar{\eta}\frac{\not{n}_+}{2}\mathrm{i}n_-\cdot D\eta\end{aligned}\tag{12.112}$$

相对于动力学场 ξ 而言，η 是受到 λ 压低的，因此可以采用运动方程将 η 积分出来。例如，对于 $\bar{\eta}$ 而言，运动方程给出

$$\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\eta})}-\frac{\partial\mathcal{L}_c}{\partial\bar{\eta}}=-\frac{\not{n}_-}{2}\mathrm{i}n_+\cdot D\eta-\mathrm{i}\not{D}_\perp\xi=0\tag{12.113}$$

同乘上 $\not{n}_-$ 得到

$$\frac{\not{n}_-}{2}\not{D}_\perp\xi=-\frac{\not{n}_-\not{n}_+}{4}n_-\cdot D\eta=-n_-\cdot D\eta\tag{12.114}$$

加上对 η 的运动方程，我们可以得到

$$\eta=-\frac{\not{n}_-}{2n_-\cdot D}\not{D}_\perp\xi,\quad \bar{\eta}=-\bar{\xi}\overleftarrow{\not{D}}_\perp\frac{\not{n}_-}{2n_-\cdot\overleftarrow{D}} \tag{12.115}$$

其中 $\bar{\eta}$ 中的微商算符向左作用。将上述表达式代入原拉氏量中可以得到

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_c=&\bar{\xi}\frac{\not{n}_-}{2}\mathrm{i}n_+\cdot D\xi+\bar{\xi}\mathrm{i}\not{D}_\perp\frac{1}{\mathrm{i}n_-\cdot D}\mathrm{i}\not{D}_\perp\frac{\not{n}_-}{2}\xi+\bar{\xi}\mathrm{i}\overleftarrow{\not{D}}_\perp\frac{1}{\mathrm{i}n_-\cdot\overleftarrow{D}}\mathrm{i}\not{D}_\perp\frac{\not{n}_-}{2}\xi\\&+\bar{\xi}\mathrm{i}\overleftarrow{\not{D}}_\perp\frac{\not{n}_-}{2\mathrm{i}n_-\cdot\overleftarrow{D}}\underbrace{\frac{\not{n}_+}{2}\mathrm{i}n_-\cdot D\frac{\not{n}_-}{2\mathrm{i}n_-\cdot D}}_{\frac{\not{n}_+\not{n}_-}{4}=P_+}\mathrm{i}\not{D}_\perp\xi\\=&\bar{\xi}\frac{\not{n}_-}{2}\mathrm{i}n_+\cdot D\xi+\bar{\xi}\mathrm{i}\not{D}_\perp\frac{1}{\mathrm{i}n_-\cdot D}\mathrm{i}\not{D}_\perp\frac{\not{n}_-}{2}\xi\end{aligned} \tag{12.116}$$

虽然共线部分拉氏量与原拉氏量形式相差很大，软动量拉氏量却是和量子色动力学形式一致：

$$\mathcal{L}_s=\bar{\psi}_s\mathrm{i}\not{D}_s\psi_s-\frac{1}{4}(F_s^a)_{\mu\nu}(F_s^a)^{\mu\nu} \tag{12.117}$$

其中协变微商和场强张量定义为

$$D_s^\mu=\partial^\mu-\mathrm{i}gA_s^\mu \tag{12.118}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{i}g(F_s^a)^{\mu\nu}t^a=&[\mathrm{i}D_s^\mu,\mathrm{i}D_s^\nu]=\mathrm{i}g\left\{\partial^\mu A_s^\nu-\partial^\nu A_s^\mu-\mathrm{i}g[A_s^\mu,A_s^\nu]\right\}\\=&\mathrm{i}g\left\{\partial^\mu(A_s^a)^\nu-\partial^\nu(A_s^a)^\mu+gf^{abc}(A_s^b)^\mu(A_s^c)^\nu\right\}t^a\end{aligned} \tag{12.119}$$

12.4.3 软共线相互作用

共线拉氏量可以进行幂次展开，需要利用

$$\begin{aligned}&(n_+\cdot A_c,n_-\cdot A_c,A_{c\perp})\sim(\lambda^2,1,\lambda)\\&(n_+\cdot A_s,n_-\cdot A_s,A_{s\perp})\sim(\lambda^2,\lambda^2,\lambda^2)\\&\xi\sim\lambda,\quad\psi_s\sim\lambda^3\end{aligned} \tag{12.120}$$

对于 ϕ^3，软共线相互作用可以由下面拉氏量描述：

$$-\frac{g}{3!}\int\mathrm{d}^4x\phi^3(x)\to-\frac{g}{2!}\int\mathrm{d}^4x\phi_c^2(x)\phi_s(x_-) \tag{12.121}$$

在量子色动力学对应的软共线有效理论中，领头阶不存在软夸克参与的软共线相互作用。另外，只有 $n_+\cdot A_s$ 是领头阶的：

$$A^\mu(x)\to(n_+\cdot A_c(x)+n_+\cdot A_s(x_-))\frac{n_-^\mu}{2}+n_-\cdot A_c(x)\frac{n_+^\mu}{2}+A_{c\perp}^\mu(x) \tag{12.122}$$

因此领头阶软共线有效理论拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\mathrm{SCET}}=\bar{\psi}_s \mathrm{i}\not{D}_s \psi_s+\bar{\xi}\frac{\not{n}_-}{2}\left[\mathrm{i}n_+\cdot D+\mathrm{i}\not{D}_{c\perp}\frac{1}{\mathrm{i}n_-\cdot D_c}\mathrm{i}\not{D}_{c\perp}\right]\xi$$
$$-\frac{1}{4}(F^{s,a}_{\mu\nu})^2-\frac{1}{4}(F^{c,a}_{\mu\nu})^2 \tag{12.123}$$

其中的协变微商定义为

$$\mathrm{i}D^s_\mu=\mathrm{i}\partial_\mu+gA^s_\mu=\mathrm{i}\partial_\mu+gA^{s,a}_\mu t^a \tag{12.124}$$
$$\mathrm{i}D^c_\mu=\mathrm{i}\partial_\mu+gA^c_\mu=\mathrm{i}\partial_\mu+gA^{c,a}_\mu t^a \tag{12.125}$$
$$\mathrm{i}n_+\cdot D=\mathrm{i}n_+\cdot\partial+gn_+\cdot A_c(x)+gn_+\cdot A_s(x) \tag{12.126}$$

场强张量定义为

$$\mathrm{i}gF^s_{\mu\nu}=[\mathrm{i}D^s_\mu,\mathrm{i}D^s_\nu] \tag{12.127}$$
$$\mathrm{i}gF^c_{\mu\nu}=[\mathrm{i}D^c_\mu,\mathrm{i}D^c_\nu] \tag{12.128}$$

其中

$$D^c_\mu=n_+\cdot D_c\frac{n_{-\mu}}{2}+n_-\cdot D_c\frac{n_{+\mu}}{2}+D_{c\perp\mu} \tag{12.129}$$

12.4.4　Wilson 线与规范不变性

在有效理论中，经常会出现非定域算符。对于规范理论，非定域算符需要满足规范不变性，因此需要引入 Wilson 线：

$$W[x+sn_-,x]\equiv\mathrm{Pexp}\left[\mathrm{i}g\int_0^s \mathrm{d}s' n_-\cdot A(x+s'n_-)\right] \tag{12.130}$$

其中，P 的含义是按照路径排序，如

$$\mathrm{P}[A(x)A(x+sn_-)]=A(x+sn_-)A(x),\quad s>0 \tag{12.131}$$

在规范变化下，Wilson 线的变换形式为

$$W[x+sn_-,x]\to V(x+sn_-)W[x+sn_-,x]V^\dagger(x) \tag{12.132}$$

因此规范不变的夸克旋量为

$$\bar{\psi}(x+sn_-)W[x+sn_-,x]\psi(x) \tag{12.133}$$

在软共线有效理论中，通常将 Wilson 线积分到无穷远：

$$W(x)\equiv W[x,-\infty n_-]=\mathrm{Pexp}\left[\mathrm{i}g\int_{-\infty}^0 \mathrm{d}sn_-\cdot A(x+sn_-)\right] \tag{12.134}$$

这样连接有限远的 Wilson 线可以写成两个上述 Wislon 线的乘积：

$$\begin{aligned} W[x+sn_-,x] &= W(x+sn_-)W^\dagger(x) \\ &= \mathrm{Pexp}\left[\mathrm{i}g\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}tn_-\cdot A(x+sn_-+tn_-)\right] \\ &\quad\times\mathrm{Pexp}\left[-\mathrm{i}g\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}tn_-\cdot A(x+tn_-)\right] \\ &= \mathrm{Pexp}\left[\mathrm{i}g\int_{0}^{s}\mathrm{d}tn_-\cdot A(x+tn_-)\right] \end{aligned} \tag{12.135}$$

连接无穷远 Wilson 线的规范变换为

$$W(x)\to V(x)W(x)V^\dagger(-\infty n_-) \tag{12.136}$$

约定规范变换函数在无穷远处为零，即 $V^\dagger(-\infty n_-)=0$，则夸克部分规范不变的基本组分可以写成

$$\chi(x)\equiv W^\dagger(x)\psi(x),\quad \bar{\chi}(x)\equiv\bar{\psi}(x)W(x) \tag{12.137}$$

从 Wilson 线的定义可以证明：

$$n_-\cdot DW(x)=0 \tag{12.138}$$

在软共线有效理论中，我们会碰到共线和软 Wilson 线

$$W_c(x)=\mathrm{Pexp}\left[\mathrm{i}g\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}sn_-\cdot A(x+sn_-)\right] \tag{12.139}$$

$$W_s(x)=\mathrm{Pexp}\left[\mathrm{i}g\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}sn_+\cdot A(x+sn_+)\right] \tag{12.140}$$

12.4.5 软共线退耦与因子化定理

上几节中给出了软和共线相互作用的拉氏量：

$$\mathcal{L}_{c+s}=\bar{\xi}\frac{\not{n}_-}{2}\mathrm{i}n_+\cdot D\xi \tag{12.141}$$

如果我们重新定义场量：

$$\xi(x)\to S_n(x_-)\xi^{(0)}(x),\quad A_c^\mu(x)\to S_n(x_-)A_c^{(0)\mu}(x)S_n^\dagger(x_-) \tag{12.142}$$

则协变微商变为

$$
\begin{aligned}
in_+D\xi(x) \to & in_+D'S_n(x_-)\xi(x) \\
= & \left(in_+\partial + gn_+S_n(x_-)A_c^{(0)}(x)S_n^\dagger(x_-) + gn_+A_s(x_-)\right) S_n(x_-)\xi^{(0)}(x) \\
= & \Big(in_+\cdot\partial S_n(x_-) + S_n(x_-)in_+\cdot\partial + S_n(x_-)gn_+\cdot A_c^{(0)}(x) \\
& + gn_+\cdot A_s(x_-)S_n(x_-)\Big)\xi^{(0)}(x) \\
= & \left[\underbrace{(in_+\cdot D)S_n(x_-)}_{=0} + S_n(x_-)in_+\cdot\partial + S_n(x_-)gn_+\cdot A_c^{(0)}(x)\right]\xi^{(0)}(x) \\
= & S_n(x_-)\left(in_+\cdot\partial + gn_+\cdot A_c^{(0)}(x)\right)\xi^{(0)}(x) \\
\equiv & S_n(x_-)in_+\cdot D_c^{(0)}\xi^{(0)}(x)
\end{aligned}
\tag{12.143}
$$

于是相互作用的拉氏量形式为

$$
\mathcal{L}_{c+s} \to \bar{\xi}^{(0)}\frac{\not{n}_-}{2}in_+\cdot D_c^{(0)}\xi^{(0)}(x) \tag{12.144}
$$

这表明软胶子场不再和共线场发生相互作用，即退耦。需要指出的是，相互作用的退耦仅适用于 λ 展开的领头阶。

软共线有效理论中，场重定义对于证明因子化是至关重要的。但是拉氏量的退耦并不一定等价于所有矩阵元都能进行因子化。以 Sudakov 因子为例，流算符

$$
J^\mu(x) \equiv \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma(x) \tag{12.145}
$$

将会匹配到非定域算符：

$$
J^\mu(x) \to \int \mathrm{d}s \int \mathrm{d}t C_V(s,t)\bar{\chi}_c(x+sn_-)\gamma_\perp^\mu\chi_{\bar{c}}(x+tn_-) \tag{12.146}
$$

其中 χ_c 与 $\chi_{\bar{c}}$ 是两个方向规范不变的夸克场：

$$
\chi_c = W_c^\dagger\xi_c, \quad \not{n}_+\chi_c = 0 \tag{12.147}
$$

$$
\chi_{\bar{c}} = W_{\bar{c}}^\dagger\chi_{\bar{c}}, \quad \not{n}_-\chi_{\bar{c}} = 0 \tag{12.148}
$$

对于矢量流，我们有

$$
\gamma^\mu = \not{n}_+\frac{n_-^\mu}{2} + \not{n}_-\frac{n_+^\mu}{2} + \gamma_\perp^\mu \tag{12.149}
$$

因此只有垂直分量贡献。当我们进行场重定义

$$
\chi_c(x) \to S_n(x_-)\chi_c^{(0)}(x), \quad \chi_{\bar{c}}(x) \to S_{\bar{n}}(x_+)\chi_{\bar{c}}^{(0)}(x) \tag{12.150}
$$

有效理论中的流算符变成

$$\begin{aligned} J^{\mu}(x) &= \int \mathrm{d}s \int \mathrm{d}t C_V(s,t) \bar{\chi}_c^{(0)}(x+sn_-) S_n^{\dagger}(x_-) S_{\bar{n}}(x_+) \gamma_{\perp}^{\mu} \chi_{\bar{c}}(x+tn_+) \\ &= \int \mathrm{d}s \int \mathrm{d}t C_V(s,t) \bar{\chi}_c^{(0)}(x_+ + x_{\perp} + sn_-) S_n^{\dagger}(0) S_{\bar{n}}(0) \gamma_{\perp}^{\mu} \chi_{\bar{c}}(x_- + x_{\perp} + tn_+) \end{aligned} \tag{12.151}$$

这里坐标的幂次为 $x^{\mu} \sim (1,1,1/\lambda)$，由两个方向共线场的动量和所决定：$p_c + p_{\bar{c}} \sim (1,1,\lambda)$，上式已经对场算符进行了多极展开。很容易发现，与 ϕ^3 情况不一样，这里软相互作用并没有完全抵消掉，两个共线场之间可以交换软胶子。费曼图如图 12.9 所示，其中双线表示软 Wilson 线。

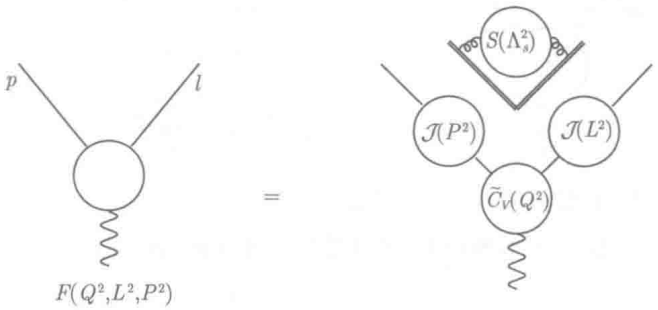


图 12.9 软共线有效理论中 Sudakov 形状因子的因子化

这里应该强调一下因子化的概念。如果从分离能标的意义上看，形状因子已经被分成了不同能标的模块；但是如果从相互作用上来看，由于软场与共线场仍然纠缠在一起，矢量流不能进行完全因子化，因此不存在简单的因子化公式。

12.4.6 共线反常情况下的因子化

类似于 12.2.3 节中的例子，我们可以考虑中间交换的粒子质量不为零，也就存在着共线反常。在有质量的情况下，引入解析正规化因子，关联函数可以写成

$$P = \mathcal{J}_c\left(p^2, m^2, \ln\frac{\nu^2}{m^2}, \mu\right) \mathcal{J}_{\bar{c}}\left(l^2, m^2, \ln\frac{\nu^2}{Q^2}, \mu\right) \tag{12.152}$$

满足重整化群方程

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln\nu} \ln P = 0 \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln\nu}\left[\ln \mathcal{J}_c\left(p^2, m^2, \ln\frac{\nu^2}{m^2}, \mu\right) + \ln \mathcal{J}_{\bar{c}}\left(l^2, m^2, \ln\frac{\nu^2}{Q^2}, \mu\right)\right] = 0 \end{aligned} \tag{12.153}$$

其中 ν 是引入的正规化标度。两项对 ν 的依赖关系需要抵消，因此我们可以改写

成

$$\ln P = \ln \mathcal{J}_c\left(p^2, m^2, \mu\right) + \ln \mathcal{J}_{\bar{c}}\left(l^2, m^2, \mu\right) - F(m^2, \mu) \ln \frac{Q^2}{m^2} \tag{12.154}$$

这样因子化公式为

$$P = \mathrm{e}^{-F(m^2,\mu)\ln\frac{Q^2}{m^2}} \mathcal{J}_c\left(p^2, m^2, \mu\right) \mathcal{J}_{\bar{c}}\left(l^2, m^2, \mu\right) \tag{12.155}$$

可以用图 12.10 来表示，其中对大能量能标的额外依赖关系已经被吸收到了指数因子中。

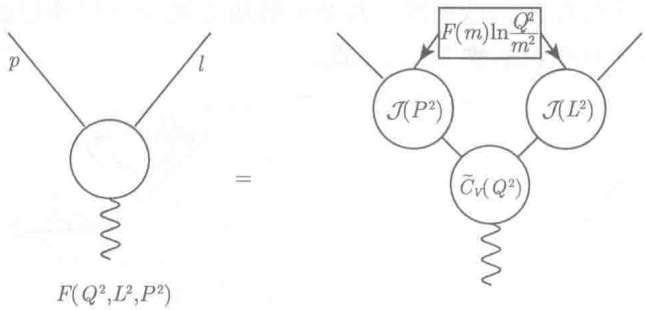


图 12.10　软共线有效理论中，存在共线反常情况下的 Sudakov 形状因子

12.5　软共线有效理论的一些应用

12.5.1　$B \to D\pi$ 因子化

下面来考虑软共线有效理论中一个较为经典的例子，$B \to D\pi$ 因子化的证明[15]。这里的 $B \to D\pi$ 指的是如 $\overline{B}^0 \to D^+\pi^-$ 等过程，因子化示意图如图 12.11 所示。

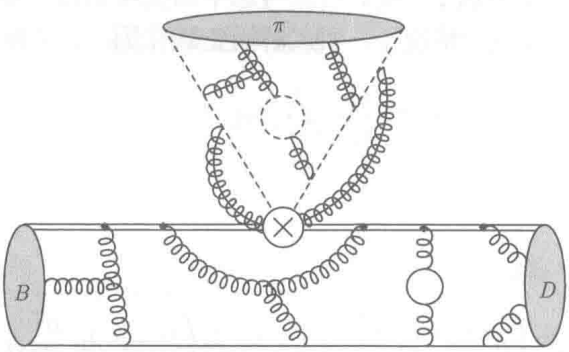


图 12.11　$B \to D\pi$ 衰变的因子化

B 介子衰变的有效哈密顿量为

$$\mathcal{H}_W = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} V_{cb}V_{ud}^*[C_0^F(\mu_0)O_0(\mu_0) + C_8^F(\mu_0)O_8(\mu_0)] \tag{12.156}$$

其中的色单和色八算符为

$$O_0 = [\bar{c}\gamma^\mu P_L b][\bar{d}\gamma_\mu P_L u], \quad O_8 = [\bar{c}\gamma^\mu P_L T^a b][\bar{d}\gamma_\mu P_L T^a u] \tag{12.157}$$

初态和末态各包含一个重夸克，有效理论需要考虑重夸克，其拉氏量为

$$\mathcal{L} = \bar{Q}_v\left(\mathrm{i}D\!\!\!/ - m\left(1-v\!\!\!/\right)\right)Q_v \;=\; \bar{Q}_v\left(\mathrm{i}D\!\!\!/_s - m\left(1-v\!\!\!/\right)\right)Q_v \tag{12.158}$$

其中 h_v 和 H_v 分别为大分量和小分量：

$$h_v = \frac{1+v\!\!\!/}{2}Q_v, \qquad H_v = \frac{1-v\!\!\!/}{2}Q_v \tag{12.159}$$

利用上面的展开，可积分出小分量 H_v：

$$Q_v = h_v + H_v = \left(1 + \frac{\mathrm{i}D\!\!\!/_s}{2m} + \mathcal{O}(\lambda^4)\right)h_v \tag{12.160}$$

我们以只涉及一个重夸克的流为例，见图 12.12，说明重夸克与共线胶子之间的相互作用[16]：

$$\begin{aligned} J_{\mathrm{QCD}}(x) =& \bar{\psi}(x)\Gamma\sum_{n=0}^{\infty}\int \mathrm{d}z_1\cdots\mathrm{d}z_n D_F(x-z_1)\mathrm{i}g\mathcal{A}\!\!\!/(z_1) \\ &\times\cdots D_F(z_{n-1}-z_n)\mathrm{i}g\mathcal{A}\!\!\!/_c(z_n)\,Q(z_n) \\ =& \bar{\psi}(x)\,\Gamma\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m}\left(-g\mathcal{A}\!\!\!/(x)\right)\cdots\frac{1}{\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m}\left(-g\mathcal{A}\!\!\!/_c(x)\right)Q(x) \\ =& \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\,v\cdot x}\,\bar{\psi}\,\Gamma\left(1 - \frac{1}{\mathrm{i}D\!\!\!/ - m\left(1-v\!\!\!/\right)}\,g\mathcal{A}\!\!\!/_c\right)Q_v \end{aligned} \tag{12.161}$$

在幂次展开的领头阶，重到轻夸克流可以写成

$$J_{\mathrm{QCD}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}mv\cdot x}\bar{\psi}\Gamma W_c h_v^{(b)} \tag{12.162}$$

这相当于做场的重定义：$h_v \to W_c h_v$。

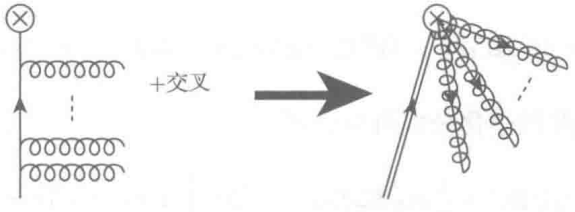


图 12.12 重到轻流算符的因子化

类似的，可以将重夸克场与共线场小分量积分出来，则 $B \to D\pi$ 衰变的有效算符为

$$Q_0^{1,5} = \int \mathrm{d}s[\bar{h}_v^{(c)}\Gamma_h^{1,5}h_v^{(b)}][\bar{\xi}_n^{(d)}W(x+sn_-)\Gamma_l C_0(s)W^\dagger\xi_n^{(u)}(x)] \tag{12.163}$$

$$Q_8^{1,5} = [\bar{h}_v^{(c)}\Gamma_h^{1,5}T^a h_v^{(b)}][\bar{\xi}_n^{(d)}W\Gamma_l C_0 T^a W^\dagger\xi_n^{(u)}] \tag{12.164}$$

其中 $\Gamma_h^1 = \not{n}_+/2$，$\Gamma_h^5 = \not{n}_+\gamma_5/2$，$\Gamma_l = \not{n}_-(1-\gamma_5)/4$。

现在考虑软与共线粒子之间的领头阶相互作用，可以通过共线场重定义来实现：

$$\chi_c^{(u)}(x) \to S_n(x_-)\chi_{(c)}^{0,(u)}(x) \tag{12.165}$$

对于色单态算符，两个软 Wilson 线抵消，

$$[\bar{\chi}_c^{(d)}(x+sn_-)\Gamma_l C_0(s)\chi_c^{(u)}(x)] \to [\bar{\chi}_c^{0,(d)}(x+sn_-)\Gamma_l C_0(s)\chi_c^{0,(u)}(x)] \tag{12.166}$$

对于色八重态算符，软 Wilson 线不会抵消，但是由于 Fierz 等式：

$$T^a \otimes S_n^\dagger T^a S_n = S_n T^a S_n^\dagger \otimes T^a \tag{12.167}$$

有效算符变成

$$Q_0^{1,5} = [\bar{h}_v^{(c)}\Gamma_h^{1,5}h_v^{(b)}][\bar{\xi}_n^{0,(d)}W_c\Gamma_l C_0 W_c^\dagger\xi_n^{0,(u)}] \tag{12.168}$$

$$Q_8^{1,5} = [\bar{h}_v^{(c)}\Gamma_h^{1,5}S_n T^a S_n^\dagger h_v^{(b)}][\bar{\xi}_n^{0,(d)}W_c\Gamma_l C_8 T^a W_c^\dagger\xi_n^{0,(u)}] \tag{12.169}$$

色八重态的物理矩阵元为零。

考虑到 π 的光锥分布振幅定义为

$$\langle\pi^-(p_\pi)|\bar{\xi}^{(d)}(y)\not{n}_-\gamma_5 W_c(y,-y)\xi^{(u)}(-y)|0\rangle \equiv -2\mathrm{i}f_\pi E_\pi\int_0^1 \mathrm{d}x\,\phi_\pi(x,\mu)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}2yE_\pi(2x-1)}$$

或者

$$\int \mathrm{d}s\langle\pi|[\bar{\xi}_n^{(d)}W(x+sn_-)\Gamma_l C_0(s)W^\dagger\xi_n^{(u)}(x)]|0\rangle = \frac{\mathrm{i}}{2}f_\pi E_\pi\int_0^1 \mathrm{d}xT(x,\mu)\phi_\pi(x,\mu)$$

$B \to D\pi$ 衰变过程的因子化公式可以证明为

$$\langle D\pi|Q_0^1|B_v\rangle = \frac{\mathrm{i}}{2}m_B E_\pi f_\pi F^{B\to D}(0)\int_0^1 \mathrm{d}xT(x,\mu)\phi_\pi(x,\mu) \tag{12.170}$$

这里 $T(x,\mu) = C_0^1(\mu,(4x-2)E_\pi)$。

12.5.2 重到轻形状因子分析

对于重到轻形状因子，除了离壳程度为 $\Lambda_{\rm QCD}^2$ 的软场、共线场，有效理论中还会出现离壳程度更大的硬共线场[17, 18]。因此需要引入一个中间有效理论，并做两步匹配。关于形状因子的幂次则需要由最终的有效理论所给出。此外，由于共线场与软场之间并不能完全的分离，在最终的有效理论中，结果还可能导致端点奇异性。

在具体操作上，我们需要先将高离壳 m_b^2 的粒子积分出来，形成中间有效理论。精确到次领头阶，重到轻的流算符可以形式地写成

$$J(x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m_b v\cdot x}[J^{(A0)}+J^{(B1)}] \tag{12.171}$$

其中

$$J^{(A0)}=(\bar{\xi}W_c)\Gamma h_v \tag{12.172}$$

$$J^{(B1)}=\frac{1}{m_b}(\bar{\xi}W_c)(W_c^\dagger \mathrm{i}D_{\perp c\mu}W_c)\Gamma h_v \tag{12.173}$$

具体匹配形式为

$$\begin{aligned}(\bar{\psi}\Gamma_i Q)(0)=&\int \mathrm{d}\hat{s}\sum_j \tilde{C}_{ij}^{(A0)}(\hat{s})O_j^{(A0)}(s;0)\\&+\int \mathrm{d}\hat{s}_1\mathrm{d}\hat{s}_2\sum_j \tilde{C}_{ij\mu}^{B1}(\hat{s}_1,\hat{s}_2)O_j^{(B1)\mu}(s_1,s_2;0)+\cdots\end{aligned} \tag{12.174}$$

其中，

$$O_j^{(A0)}(s;x)\equiv(\bar{\xi}W_c)(x+sn_+)\Gamma_j h_v(x_-)\equiv(\bar{\xi}W_c)_s\Gamma_j h_v \tag{12.175}$$

$$O_{j\mu}^{(B1)}(s_1,s_2;x)\equiv\frac{1}{m_b}(\bar{\xi}W_c)_{s_1}(W_c^\dagger \mathrm{i}D_{\perp c\mu}W_c)_{s_2}\Gamma_j h_v \tag{12.176}$$

对于不同的 Lorentz 结构，这些算符的具体形式如下[19]。

- 标量算符 $J=\bar{\psi}Q$:

$$\begin{aligned}J^{(A0)}&=(\bar{\xi}W_c)h_v\\J^{(B1)}&=\frac{1}{m_b}(\bar{\xi}W_c)[W_c^\dagger \mathrm{i}\not{D}_{\perp c}W_c]h_v\end{aligned} \tag{12.177}$$

- 矢量流算符 $J_\mu=\bar{\psi}\gamma_\mu Q$:

$$\begin{aligned}J_\mu^{(A0)1-2}&=(\bar{\xi}W_c)\{\gamma_\mu,v_\mu\}h_v\\J_\mu^{(A0)3}&=(\bar{\xi}W_c)\frac{n_{-\mu}}{n_-\cdot v}h_v+\frac{2}{n_-\cdot v}(\bar{\xi}W_c)\frac{\mathrm{i}\overleftarrow{\partial}_{\mu_\perp}}{\mathrm{i}n_+\overleftarrow{\partial}}h_v\end{aligned}$$

$$J_\mu^{(B1)1-3}=\frac{1}{m_b}(\bar\xi W_c)[W_c^\dagger \mathrm{i}\not{D}_{\perp c}W_c]\left\{v_\mu,\frac{n_{-\mu}}{n_-v},\gamma_{\mu_\perp}\right\}h_v$$
$$J_\mu^{(B1)4}=\frac{1}{m_b}(\bar\xi W_c)\gamma_{\mu_\perp}[W_c^\dagger \mathrm{i}\not{D}_{\perp c}W_c]h_v \tag{12.178}$$

- 张量流算符 $J_{\mu\nu}=\bar\psi \mathrm{i}\sigma_{\mu\nu}Q$:

$$\begin{aligned}
J_{\mu\nu}^{(A0)1-2}&=(\bar\xi W_c)\{\gamma_{[\mu}\gamma_{\nu]},v_{[\mu}\gamma_{\nu]}\}h_v\\
J_{\mu\nu}^{(A0)3-4}&=(\bar\xi W_c)\left\{\frac{n_{-[\mu}\gamma_{\nu]}}{n_-v},\frac{n_{-[\mu}v_{\nu]}}{n_-v}\right\}h_v\\
&\quad+\frac{2}{n_-v}(\bar\xi W_c)\frac{\mathrm{i}\overleftarrow{\partial}_{[\mu_\perp}}{\mathrm{i}n_+\overleftarrow{\partial}}\{\gamma_{\nu]},v_{\nu]}\}h_v\\
J_{\mu\nu}^{(B1)1-2}&=\frac{1}{m_b}(\bar\xi W_c)[W_c^\dagger \mathrm{i}\not{D}_{\perp c}W_c]\left\{v_{[\mu}\gamma_{\nu_\perp]},\frac{n_{-[\mu}\gamma_{\nu\perp]}}{n_-v}\right\}h_v\\
J_{\mu\nu}^{(B1)3-4}&=\frac{1}{m_b}(\bar\xi W_c)\left\{v_{[\mu}\gamma_{\nu_\perp]},\frac{n_{-[\mu}\gamma_{\nu\perp]}}{n_-v}\right\}[W_c^\dagger \mathrm{i}\not{D}_{\perp c}W_c]h_v\\
J_{\mu\nu}^{(B1)5-6}&=\frac{1}{m_b}(\bar\xi W_c)[W_c^\dagger \mathrm{i}\not{D}_{\perp c}W_c]\left\{\frac{n_{-[\mu}v_{\nu]}}{n_-v},\gamma_{[\mu_\perp}\gamma_{\nu_\perp]}\right\}h_v\\
J_{\mu\nu}^{(B1)7}&=\frac{1}{m_b}(\bar\xi W_c)\gamma_{[\mu_\perp}\gamma_{\nu_\perp]}[W_c^\dagger \mathrm{i}\not{D}_{\perp c}W_c]\,h_v+J_{\mu\nu}^{(B1)6}
\end{aligned}\tag{12.179}$$

其中 $a_{[\mu}b_{\nu]}=a_\mu b_\nu-a_\nu b_\mu$。在四维下，算符 $J_{\mu\nu}^{(B1)7}$ 是消失的。我们省略了其中的坐标依赖。

短程 Wilson 系数可以通过傅里叶变换到动量空间，例如，对于 B 类算符，动量空间的 Wilson 系数为

$$\tilde C_{ij\mu}^{(B1)}(\hat s_1,\hat s_2)=\int\frac{\mathrm{d}x_1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}x_2}{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x_1\hat s_1+x_2\hat s_2)}\,C_{ij\mu}^{(B1)}(x_1,x_2) \tag{12.180}$$

算符矩阵元表示成

$$\begin{aligned}
&\langle M(p')|\int\mathrm{d}\hat s_1\mathrm{d}\hat s_2\,\widetilde C_{ij\mu}^{(B1)}(\hat s_1,\hat s_2)\,O_j^{(B1)\mu}(s_1,s_2;0)|\bar B_v\rangle\\
&=\frac{1}{m_b}\int\mathrm{d}\tau\,C_{ij\mu}^{(B1)}\left(\frac{2E\bar\tau}{m_b},\frac{2E\tau}{m_b}\right)(2E)\int\frac{\mathrm{d}r}{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2E\tau r}\\
&\quad\times\langle M(p')|(\bar\xi W_c)(0)(W_c^\dagger \mathrm{i}D_{\perp c}^\mu W_c)(rn_+)\Gamma_j'h_v(0)|\bar B_v\rangle
\end{aligned}\tag{12.181}$$

其中 $\bar\tau=1-\tau$。可以定义

$$\mathcal{J}_k(\tau)=2E\int\frac{\mathrm{d}r}{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2E\tau r}\,(\bar\xi W_c)(0)(W_c^\dagger \mathrm{i}D_{\perp c}^\mu W_c)(rn_+)\Gamma_k h_v(0) \tag{12.182}$$

这里的 Lorentz 结构为

$$\Gamma_k = \{(\gamma_5)\gamma^{\mu_\perp}, (\gamma_5)\gamma_{\nu_\perp}\gamma^{\mu_\perp}, (\gamma_5)\gamma^{\mu_\perp}\gamma_{\nu_\perp}\} \tag{12.183}$$

其中 $\hat{r} = rm_b$。这给出有效理论中幂次展开的领头阶的形状因子：

$$\langle P(p')|(\bar{\xi}W_c)h_v|\overline{B}_v\rangle = 2E\,\xi_P(E) \tag{12.184}$$

$$\langle P(p')|(\bar{\xi}W_c)(W_c^\dagger \mathrm{i}\not{D}_{c\perp}W_c)(rn_+)h_v|\overline{B}_v\rangle = 2m_bE\int \mathrm{d}\tau\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2E\tau r}\,\Xi_P(\tau,E)$$

其中，第二个形状因子的定义是由下式确定：

$$\Xi_P(\tau,E) = (2m_bE)^{-1}\,\langle P(p')|\mathcal{J}_1(\tau)|\bar{B}_v\rangle \tag{12.185}$$

关于 ξ_P 和 Ξ_P 的进一步因子化讨论，可见文献 [18]，而文献 [20] 计算了 Ξ_P 的次领头阶辐射修正。

在软共线有效理论中，重介子到轻赝标量介子的形状因子的结果为

$$\begin{aligned}
f_+(E) &= C_{f_+}^{(A0)}(E)\,\xi_P(E) + \int \mathrm{d}\tau\, C_{f_+}^{(B1)}(E,\tau)\,\Xi_P(\tau,E)\\
\frac{m_B}{2E}\,f_0(E) &= C_{f_0}^{(A0)}(E)\,\xi_P(E) + \int \mathrm{d}\tau\, C_{f_0}^{(B1)}(E,\tau)\,\Xi_P(\tau,E)\\
\frac{m_B}{m_B+m_P}\,f_T(E) &= C_{f_T}^{(A0)}(E)\,\xi_P(E) + \int \mathrm{d}\tau\, C_{f_T}^{(B1)}(E,\tau)\,\Xi_P(\tau,E)
\end{aligned} \tag{12.186}$$

对于矢量介子，我们有

$$\frac{m_B}{m_B+m_V}\,V(E) = C_V^{(A0)}(E)\,\xi_\perp(E) + \int \mathrm{d}\tau\, C_V^{(B1)}(E,\tau)\,\Xi_\perp(\tau,E)$$

$$\frac{m_V}{E}\,A_0(E) = C_{f_0}^{(A0)}(E)\,\xi_\parallel(E) + \int \mathrm{d}\tau\, C_{f_0}^{(B1)}(E,\tau)\,\Xi_\parallel(\tau,E)$$

$$\frac{m_B+m_V}{2E}\,A_1(E) = C_V^{(A0)}(E)\,\xi_\perp(E) + \int \mathrm{d}\tau\, C_V^{(B1)}(E,\tau)\,\Xi_\perp(\tau,E)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{m_B+m_V}{2E}\,A_1(E) - \frac{m_B-m_V}{m_B}\,A_2(E)\\
=&C_{f_+}^{(A0)}(E)\,\xi_\parallel(E) + \int \mathrm{d}\tau\, C_{f_+}^{(B1)}(E,\tau)\,\Xi_\parallel(\tau,E)
\end{aligned}$$

$$T_1(E) = C_{T_1}^{(A0)}(E)\,\xi_\perp(E) + \int \mathrm{d}\tau\, C_{T_1}^{(B1)}(E,\tau)\,\Xi_\perp(\tau,E)$$

$$\frac{m_B}{2E}\,T_2(E) = C_{T_1}^{(A0)}(E)\,\xi_\perp(E) + \int \mathrm{d}\tau\, C_{T_1}^{(B1)}(E,\tau)\,\Xi_\perp(\tau,E)$$

$$\frac{m_B}{2E}T_2(E)-T_3(E)=C_{f_T}^{(A0)}(E)\,\xi_{\parallel}(E)+\int \mathrm{d}\tau\, C_{f_T}^{(B1)}(E,\tau)\,\Xi_{\parallel}(\tau,E) \quad (12.187)$$

其中，函数 $C_F^{(A0)}$ 与 $C_F^{(B1)}$ 是不同 O^A 和 O^B 算符的 Wislon 系数的组合。

相比于式 (12.1.10) 中给出的大能量有效理论的结果，软共线有效理论的结果包含了修正项 $\Xi_{P,\parallel,\perp}$，在 $1/m_b$ 的领头阶，形状因子仅存在如下关系：

$$\frac{m_B}{m_B+m_V}V(E)=\frac{m_B+m_V}{2E}A_1(E),\qquad T_1(E)=\frac{m_B}{2E}T_2(E) \quad (12.188)$$

12.5.3　Sudakov 因子重求和

在软共线有效理论中，可以利用重整化群方法对轻粒子的顶点修正进行 Sudakov 因子重求和。这个过程的一个特点是，反常量纲不仅是耦合常数的函数，还含有对过程典型标度的指数依赖。

首先计算量子色动力学中矢量形状因子的短程系数，标记为 $\tilde{C}_V^{\mathrm{bare}}(Q^2)$。在量子色动力学中，类空矢量形状因子的单圈结果为

$$\tilde{C}_V^{\mathrm{bare}}(\varepsilon,Q^2)=1+\frac{\alpha_s^0}{4\pi}C_F\left(-\frac{2}{\varepsilon^2}-\frac{3}{\varepsilon}-8+\frac{\pi^2}{6}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{\gamma_E}Q^2}{4\pi}\right)^{-\varepsilon}+\mathcal{O}\left(\alpha_s^2\right) \quad (12.189)$$

其中裸相互作用常数为 $\alpha_s^0=g_s^{0,2}/4\pi$。我们可以将裸的相互作用转换成重整化的相互作用常数，二者关系为 $Z_\alpha\,\alpha_s(\mu)\,\mu^{2\varepsilon}=\mathrm{e}^{-\varepsilon\gamma_E}(4\pi)^{\varepsilon}\alpha_s^0$。树图层次上，$Z_\alpha=1+\mathcal{O}(\alpha_s)$，这样可以得到

$$\tilde{C}_V^{\mathrm{bare}}(\varepsilon,Q^2)=1+\frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi}C_F\left(-\frac{2}{\varepsilon^2}-\frac{3}{\varepsilon}-8+\frac{\pi^2}{6}\right)\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right)^{-\varepsilon}+\mathcal{O}\left(\alpha_s^2\right) \quad (12.190)$$

所有有效理论的圈图都为零，因此不需要做额外的匹配。上面发散要被算符重整化因子 Z 吸收，得到有限的 Wilson 系数：

$$\tilde{C}_V(Q^2,\mu)=\lim_{\varepsilon\to 0}Z^{-1}\left(\varepsilon,Q^2,\mu\right)\tilde{C}_V^{\mathrm{bare}}(\varepsilon,Q^2) \quad (12.191)$$

相乘重整化因子为

$$Z\left(\varepsilon,Q^2,\mu\right)=1+\frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi}C_F\left(-\frac{2}{\varepsilon^2}+\frac{2}{\varepsilon}\ln\frac{Q^2}{\mu^2}-\frac{3}{\varepsilon}\right)+\mathcal{O}\left(\alpha_s^2\right) \quad (12.192)$$

而重整化后的短程 Wilson 系数为

$$\tilde{C}_V(Q^2,\mu)=1+\frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi}C_F\left(-\ln^2\frac{Q^2}{\mu^2}+3\ln\frac{Q^2}{\mu^2}+\frac{\pi^2}{6}-8\right)+\mathcal{O}(\alpha_s^2) \quad (12.193)$$

很容易验证上面的 Wilson 系数满足重整化群方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln\mu}\tilde{C}_V(Q^2,\mu)=\left[C_F\gamma_{\mathrm{cusp}}(\alpha_s)\ln\frac{Q^2}{\mu^2}+\gamma_V(\alpha_s)\right]\tilde{C}_V(Q^2,\mu) \quad (12.194)$$

反常量纲函数为

$$\gamma_{\text{cusp}}(\alpha_s)=4\frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi},\quad \gamma_V(\alpha_s)=-6C_F\frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi} \tag{12.195}$$

其中 γ_{cusp} 被称为尖端 (cusp) 反常量纲。

Wilson 系数重整化群方程的解为

$$\tilde{C}_V(Q^2,\mu)=\exp\left\{\int_{\mu_h}^{\mu}\left[C_F\gamma_{\text{cusp}}(\alpha_s)\ln\frac{Q^2}{\mu'^2}+\gamma_V(\alpha_s)\right]\mathrm{d}\ln\mu'\right\}\tilde{C}_V(Q^2,\mu_h) \tag{12.196}$$

可以看到与普通重整化群的解不一样的地方是，指数因子中出现对数积分。

为了更加方便地使用公式 (12.196)，可以将上面重整化群方程的解写成

$$\tilde{C}_V(Q^2,\mu)=U(\mu_h,\mu)\,\tilde{C}_V(Q^2,\mu_h) \tag{12.197}$$

并将对标度的积分转换成对耦合常数的积分，即

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_s(\mu)}{\mathrm{d}\ln\mu}=\beta(\alpha_s(\mu)) \tag{12.198}$$

$$\ln\frac{\nu}{\mu}=\int_{\alpha_s(\mu)}^{\alpha_s(\nu)}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\beta(\alpha)} \tag{12.199}$$

演化函数写成

$$U(\mu_h,\mu)=\exp\left[2C_FS(\mu_h,\mu)-A_{\gamma V}(\mu_h,\mu)\right]\left(\frac{Q^2}{\mu_h^2}\right)^{-C_FA_{\gamma_{\text{cusp}}}(\mu_h,\mu)} \tag{12.200}$$

其中使用的函数定义为

$$\begin{aligned}S(\nu,\mu)&=-\int_{\alpha_s(\nu)}^{\alpha_s(\mu)}\mathrm{d}\alpha\frac{\gamma_{\text{cusp}}(\alpha)}{\beta(\alpha)}\int_{\alpha_s(\nu)}^{\alpha}\frac{\mathrm{d}\alpha'}{\beta(\alpha')}\\ A_{\gamma_i}(\nu,\mu)&=-\int_{\alpha_s(\nu)}^{\alpha_s(\mu)}\mathrm{d}\alpha\frac{\gamma_i(\alpha)}{\beta(\alpha)}\end{aligned} \tag{12.201}$$

满足的重整化群方程分别为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln\mu}S(\nu,\mu)&=-\gamma_{\text{cusp}}(\alpha_s(\mu))\int_{\alpha_s(\nu)}^{\alpha_s(\mu)}\frac{\mathrm{d}\alpha'}{\beta(\alpha')}\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln\mu}A_{\gamma_i}(\nu,\mu)&=-\gamma_i(\alpha_s(\mu))\end{aligned} \tag{12.202}$$

由于 $\mathrm{d}\alpha_s/\beta=\mathrm{d}\ln\mu$，函数 A_i 对应 Sudakov 因子中单对数项的演化，而因子 S 对应双对数项的演化。

借助于 β 函数与 γ 函数的展开式

$$\begin{aligned}\beta(\alpha_s)&=-2\alpha_s\left[\beta_0\left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)+\beta_1\left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2+\mathcal{O}(\alpha_s^3)\right]\\ \gamma_{\text{cusp}}(\alpha_s)&=\gamma_0^{\text{cusp}}\left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)+\gamma_1^{\text{cusp}}\left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2+\mathcal{O}(\alpha_s^3)\\ \gamma_V(\alpha_s)&=\gamma_0^V\left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)+\gamma_1^V\left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2+\mathcal{O}(\alpha_s^3)\end{aligned}\tag{12.203}$$

我们可以将演化函数表示为

$$\begin{aligned}A_{\gamma_V}(\nu,\mu)&=\frac{\gamma_0^V}{2\beta_0}\ln\frac{\alpha_s(\mu)}{\alpha_s(\nu)}+\mathcal{O}(\alpha_s)\\ A_{\gamma_{\text{cusp}}}(\nu,\mu)&=\frac{\gamma_0^{\text{cusp}}}{2\beta_0}\ln\frac{\alpha_s(\mu)}{\alpha_s(\nu)}+\mathcal{O}(\alpha_s)\\ S(\nu,\mu)&=\frac{\gamma_0^{\text{cusp}}}{4\beta_0^2}\left[\frac{4\pi}{\alpha_s(\nu)}\left(\frac{r-1}{r}-\ln r\right)+\left(\frac{\gamma_1^{\text{cusp}}}{\gamma_0^{\text{cusp}}}-\frac{\beta_1}{\beta_0}\right)(1-r+\ln r)\right.\\ &\quad\left.+\frac{\beta_1}{2\beta_0}\ln^2 r\right]+\mathcal{O}(\alpha_s)\end{aligned}\tag{12.204}$$

其中 $r=\alpha_s(\mu)/\alpha_s(\nu)$。

形状因子的因子化公式为

$$F\left(Q^2,L^2,P^2\right)=\tilde{C}_V\left(Q^2,\mu^2\right)\mathcal{J}\left(L^2,\mu^2\right)\mathcal{J}\left(P^2,\mu^2\right)\mathcal{S}\left(\Lambda_s^2,\mu^2\right)\tag{12.205}$$

这里 $\mathcal{J}$ 是共线函数，$\mathcal{S}$ 是软函数，而其中的软能标为 $\Lambda_s^2=L^2P^2/Q^2$。整个形状因子应该是重整化标度无关的：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln\mu}\left[\tilde{C}_V\left(Q^2,\mu^2\right)\mathcal{J}\left(L^2,\mu^2\right)\mathcal{J}\left(P^2,\mu^2\right)\mathcal{S}\left(\Lambda_s^2,\mu^2\right)\right]=0\tag{12.206}$$

也就是

$$\begin{aligned}0&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln\mu}\ln\left[\tilde{C}_V\left(Q^2,\mu^2\right)\mathcal{J}\left(L^2,\mu^2\right)\mathcal{J}\left(P^2,\mu^2\right)\mathcal{S}\left(\Lambda_s^2,\mu^2\right)\right]\\ &=\frac{1}{\tilde{C}_V\left(Q^2,\mu^2\right)}\frac{\mathrm{d}\tilde{C}_V\left(Q^2,\mu^2\right)}{\mathrm{d}\ln\mu}+\frac{1}{\mathcal{J}\left(L^2,\mu^2\right)}\frac{\mathrm{d}\mathcal{J}\left(L^2,\mu^2\right)}{\mathrm{d}\ln\mu}\\ &\quad+\frac{1}{\mathcal{J}\left(P^2,\mu^2\right)}\frac{\mathrm{d}\mathcal{J}\left(P^2,\mu^2\right)}{\mathrm{d}\ln\mu}+\frac{1}{\mathcal{S}\left(\Lambda_s^2,\mu^2\right)}\frac{\mathrm{d}\mathcal{S}\left(\Lambda_s^2,\mu^2\right)}{\mathrm{d}\ln\mu}\end{aligned}\tag{12.207}$$

对于每一部分，重整化群方程为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln\mu}\mathcal{J}\left(L^2,\mu^2\right)&=-\left[C_F\gamma_{\text{cusp}}(\alpha_s)\ln\frac{L^2}{\mu^2}+\gamma_J(\alpha_s)\right]\mathcal{J}\left(L^2,\mu^2\right)\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln\mu}\mathcal{S}\left(\Lambda_s^2,\mu^2\right)&=\left[C_F\gamma_{\text{cusp}}(\alpha_s)\ln\frac{\Lambda_s^2}{\mu^2}+\gamma_S(\alpha_s)\right]\mathcal{S}\left(\Lambda_s^2,\mu^2\right)\end{aligned}\tag{12.208}$$

这样我们需要

$$C_F\gamma_{\rm cusp}\ln\frac{Q^2}{\mu^2}+\gamma_V-C_F\gamma_{\rm cusp}\left(\ln\frac{L^2}{\mu^2}+\ln\frac{P^2}{\mu^2}\right)-2\gamma_J-C_F\gamma_{\rm cusp}\ln\frac{\mu^2}{\Lambda_s^2}+\gamma_S=0 \tag{12.209}$$

尖端反常量纲出现的原因是，软函数是由两个方向的软场定义的。$S^\dagger_{n_+}(0)S_{n_-}(0)$ 可以看成一个沿着 n_- 方向的 Wislon 线从 $-\infty$ 运动到 0 点，然后再沿着 n_+ 方向的 Wislon 线从 0 运动到 ∞。两条路径在 0 点存在一个交点，交点 $x^\mu(0)=0$ 处 Wilson 线方向改变，如图 12.9 所示。实际上，Wilson 线的尖端反常正比于 Wilson 线在交点处的夹角[12, 13]。如果两个 Wilson 线的方向为 n_1^μ 与 n_2^μ，夹角为

$$\cosh\beta_{12}=\frac{n_1\cdot n_2}{\sqrt{n_1^2n_2^2}} \tag{12.210}$$

对于光锥 Wilson 线，该夹角是发散的。可以这个证明，在 $n_i^2\to 0$ 极限下，尖端反常量纲为[14]

$$\Gamma(\beta_{12})\overset{n_i^2\to 0}{\frown}C_F\gamma_i^{\rm cusp}(\alpha_s)\ln\frac{\mu^2}{\Lambda_s^2}+\cdots \tag{12.211}$$

参考文献

[1] Bauer C W, Fleming S, Luke M E. Phys. Rev. D, 2000, 63: 014006.

[2] Bauer C W, Fleming S, Pirjol D, Stewart I W. Phys. Rev. D, 2001, 63: 114020.

[3] Bauer C W, Stewart I W. Phys. Lett. B, 2001, 516: 134.

[4] Bauer C W, Pirjol D, Stewart I W. Phys. Rev. D, 2002, 65: 054022.

[5] Becher T, Broggio A, Ferroglia A. Lect. Notes Phys., 2015, 896: 1.

[6] Dugan M J, Grinstein B. Phys. Lett. B, 1991, 255: 583.

[7] Charles J, Le Yaouanc A, Oliver L, Pene O, Raynal J C. Phys. Rev. D, 1999, 60: 014001.

[8] Beneke M, Smirnov V A. Nucl. Phys. B, 1998, 522: 321.

[9] Smirnov V A. Springer Tracts Mod. Phys., 2002, 177: 1.

[10] Becher T, Neubert M. Eur. Phys. J. C, 2011, 71: 1665.

[11] Smirnov V A. Phys. Lett. B, 1997, 404: 101.

[12] Polyakov A M. Nucl. Phys. B, 1980, 164: 171.

[13] Brandt R A, Neri F, Sato M A. Phys. Rev. D, 1981, 24: 879.

[14] Korchemskaya I A, Korchemsky G P. Phys. Lett. B, 1992, 287: 169.

[15] Bauer C W, Pirjol D, Stewart I W. Phys. Rev. Lett., 2001, 87: 201806.

[16] Beneke M, Chapovsky A P, Diehl M, Feldmann T. Nucl. Phys. B, 2002, 643: 431.
[17] Bauer C W, Pirjol D, Stewart I W. Phys. Rev. D, 2003, 67: 071502.
[18] Beneke M, Feldmann T. Nucl. Phys. B, 2004, 685: 249.
[19] Beneke M, Kiyo Y, Yang D. Nucl. Phys. B, 2004, 692: 232.
[20] Beneke M, Yang D. Nucl. Phys. B, 2006, 736: 34.

第 13 章　NRQCD 与重夸克偶素物理

在第 10 章中，我们介绍了重夸克有效理论 (HQET)，并利用它解决涉及一个重夸克 Q(或者一个重反夸克 $\overline{Q}$) 的重味物理问题。本章将介绍如何构建有效理论来处理具有两个或者多个重味夸克的体系，如重夸克偶素，或者含有多个重味夸克的重子。

首先需要指出的是，HQET 对于具有多个重味夸克体系并不合适。为了说明这个问题，我们考虑 $Q\overline{Q}$ 的在壳散射，其单圈图如图 13.1 所示，该图的贡献为

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} \frac{f(k)}{[(k-p_-)^2 - m_Q^2 + \mathrm{i}\varepsilon](k^2+\mathrm{i}\varepsilon)[(k+p_+)^2 - m_Q^2 + \mathrm{i}\varepsilon]} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} \frac{f(k)}{[k^2 - 2k\cdot p_- + \mathrm{i}\varepsilon](k^2+\mathrm{i}\varepsilon)[k^2 + 2k\cdot p_+ + \mathrm{i}\varepsilon]} \end{aligned} \tag{13.1}$$

其中 m_Q 为重夸克质量，$f(k)$ 表示右边的胶子传播子以及该图的分子部分的贡献。在第二个等式中，利用了 $p_\pm^2 \equiv (p\pm q)^2 = m_Q^2$，从而有 $p\cdot q = 0$ 以及 $p^2 = m_Q^2 - q^2$。为了便于分析，取 $Q\overline{Q}$ 的静止系，此时有 $q^\mu = (0,\boldsymbol{q})$，$p = (E,\boldsymbol{0})$，其中 $E = \sqrt{m_Q^2 + |\boldsymbol{q}|^2} = m_Q + \dfrac{|\boldsymbol{q}|^2}{2m_Q} + \cdots$。在 HQET 中，拉氏量是按照 $1/m_Q$ 的幂次进行展开的，在展开的领头项中，$k^2 - 2k\cdot p_- + \mathrm{i}\varepsilon \approx -2k^0 m_Q + \mathrm{i}\varepsilon$ 及 $k^2 + 2k\cdot p_+ + \mathrm{i}\varepsilon \approx 2k^0 m_Q + \mathrm{i}\varepsilon$。于是，如果利用 HQET 计算 I 将得到如下展开式

$$I_{\mathrm{HQET}} = \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} \frac{f(k)/(2m_Q)^2}{(-k^0+\mathrm{i}\varepsilon)(k^2+\mathrm{i}\varepsilon)(k^0+\mathrm{i}\varepsilon)} + O(1/m_Q) \tag{13.2}$$

其中展开式第一项的被积函数中，在 k^0 的复平面内有奇点：$k^0 = +\mathrm{i}\varepsilon$ 和 $k^0 = -\mathrm{i}\varepsilon$，这样的一对奇点被称为 pinch 奇点。由于最终我们需要取 $\varepsilon \to 0$，这对 pinch 奇点的存在意味着 k^0 的积分在 $k^0 = 0$ 附近无法改变围道来绕开奇点，故积分发散。由此可见，HQET 的展开方法在这里失效了。

为了理解为何 HQET 的展开失效，我们来分析上述传播子分母中的展开，$k^2 + 2k\cdot p_+ = 2k^0 m_Q + (k^0)^2 - |\boldsymbol{k}|^2 - 2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{q} + O(|\boldsymbol{q}|/m_Q)$。由于 pinch 奇点的存在，$k^0$ 的有效贡献来自于其值非常小的区域，此时虽然依然满足 $k^0 m \gg (k^0)^2$，但是 $k^0 m_Q$ 与 $|\boldsymbol{k}|^2$ 及 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{q}$ 的大小关系并不明显。如果保留 $|\boldsymbol{k}|^2$ 和 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{q}$，我们将得到

$$I \approx \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} \frac{f(k)/(2m_Q)^2}{\left(-k^0 - \dfrac{|\boldsymbol{k}|^2 + 2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{q}}{2m_Q} + \mathrm{i}\varepsilon\right)(k^2+\mathrm{i}\varepsilon)\left(k^0 - \dfrac{|\boldsymbol{k}|^2 + 2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{q}}{2m_Q} + \mathrm{i}\varepsilon\right)} \tag{13.3}$$

此时虽然在 $\dfrac{|\boldsymbol{k}|^2+2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{q}}{2m_Q}\to 0$ 的极限下依然有一对 pinch 奇点，但是对 k^0 的积分有限。如果 k^0 积分取下大半圆的围道，最重要的贡献将来自于 $k^0=\dfrac{|\boldsymbol{k}|^2+2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{q}}{2m_Q}-\mathrm{i}\varepsilon$ 的奇点，而另一个奇点贡献一个因子 $-\dfrac{m_Q}{|\boldsymbol{k}|^2+2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{q}}$，该因子在 HQET 的 $m_Q\to\infty$ 极限下是无穷大，从而可以理解为何直接用 HQET 展开将出现发散。

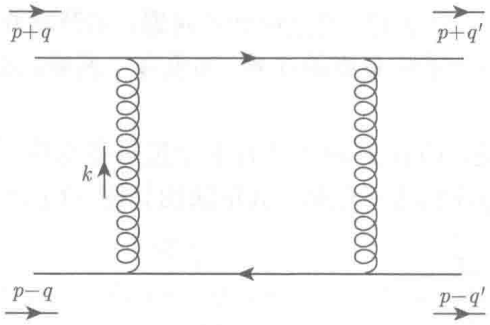


图 13.1　$Q\overline{Q}$ 散射的单圈图，箭头表示动量流动方向

在上述例子中，$|\boldsymbol{k}|$ 最重要积分区域的值与 $|\boldsymbol{q}|$ 的值在同一个量级。否则，如果 $|\boldsymbol{k}|$ 过大，则中间态的重夸克虚度将很大，相应贡献会被压低；如果 $|\boldsymbol{k}|$ 过小，则被相空间压低。令 $v=|\boldsymbol{q}|/m_Q$，由 pinch 奇点的存在得知，k 的最重要积分区域为

$$k^\mu\sim(v^2,v,v,v)\tag{13.4}$$

故为库仑胶子交换主导。在 $v\to 0$ 的极限下，库仑胶子的能量和动量的大小不是相同量级，从而简单的质量量纲的分析无法得到正确的量级估计。为了得到双重夸克系统的正确有效理论，需要按照 v 的幂次进行展开。如果显式写出光速 c，则是在 $c\to\infty$ 的极限下做 $1/c$ 的展开。所得有效理论即为非相对论 QCD (NRQCD)[1]。值得指出的是，NRQCD 有效拉氏量与 HQET 有效拉氏量实际上是完全相同的，只是它们对相同的项有各自不同的 power counting rule。

13.1　重夸克偶素及其性质

为了构造一个合适的有效理论，我们必须清楚地了解该有效理论要用来处理什么物理问题。物理问题中相对标度的大小是决定有效理论的关键。

重夸克偶素是由一个重夸克 (Q) 和一个相同味道的重反夸克 ($\overline{Q}$) 在强相互作用下形成的束缚态，由正反粲 (charm) 夸克构成的称为粲夸克偶素 (charmonium)，而由正反底 (bottom) 夸克构成的被称为底夸克偶素 (bottomonium)。由于顶 (top) 夸克寿命实际上很短，在未形成束缚态之前就已经衰变，故无法形成顶夸克偶素，

但是为了比较，我们假设顶夸克寿命较长，从而能讨论顶夸克偶素的行为。我们将会看到，在一定近似下，重夸克偶素可以看成是单纯正反重夸克 $Q\overline{Q}$ 相互作用的两体问题，是 QCD 中最简单的体系。由于两体问题可以约化为单体问题，所以重夸克偶素在各方面的行为很类似于 QED 中的氢原子。对重夸克偶素性质、行为的研究，将是理解 QCD 的一个重要途径。

重夸克偶素中有许多标度，这一方面导致重夸克偶素处理起来变得复杂，而另一方面也使得重夸克偶素中的物理变得更加丰富。其中三个重要的标度是重夸克偶素中重夸克的质量 M，重夸克的典型动量 Mv，以及重夸克的典型动能 Mv^2。重夸克的质量 M 标志了重夸克偶素湮灭衰变时候的总能量标度，同时标志了重夸克偶素产生时所需阈值能量的标度；动量的逆 $(Mv)^{-1}$ 标志了重夸克偶素占据空间的大小；典型动能 Mv^2 标志了重夸克偶素质量谱中径向激发态之间或轨道角动量激发态之间的质量劈裂。对于粲夸克偶素系统和底夸克偶素系统，最低能级的两个 ${}^3S_1$ 态之间的能级劈裂都大约为 600 MeV [粲夸克偶素对应于 J/ψ 和 $\psi(2S)$，底夸克偶素对应于 $\Upsilon(1S)$ 和 $\Upsilon(2S)$]，而最低能级的两个 ${}^3S_1$ 和 ${}^3P_J$ 态之间的能级劈裂都大约为 400 MeV [粲夸克偶素对应于 J/ψ 和 χ_{cJ}，底夸克偶素对应于 $\Upsilon(1S)$ 和 χ_{bJ}]。于是，对于这两个系统，我们都可以估计 Mv^2 约为 500 MeV。如果进一步估计 M 的值为最小质量的重夸克偶素的一半质量，并估计 Mv 的值为 M 和 Mv^2 的几何平均值，我们将得到表 13.1 中的结果。从表中可见，对于粲夸克偶素 $v^2 \approx 0.3$，而对于底夸克偶素 $v^2 \approx 0.1$，这些 v^2 的值都比较小，使得我们可以从理论上按照 v 的幂次进行展开。

表 13.1 重夸克偶素的能量标度

	$c\bar{c}$	$b\bar{b}$	$t\bar{t}$
M	1.5 GeV	4.7 GeV	180 GeV
Mv	0.9 GeV	1.5 GeV	16 GeV
Mv^2	0.5 GeV	0.5 GeV	1.5 GeV

如果重夸克的质量 M 足够的大，重夸克偶素中 $Q\bar{Q}$ 将靠得非常近，此时它们之间由库仑势主导

$$V(R) \approx -C_F \frac{\alpha_s(1/R)}{R}, \quad R \to 0 \tag{13.5}$$

其中 $C_F = 4/3$。把库仑势作为输入，通过解薛定谔方程就可以得到所有的能谱，进而能估计 Mv^2 为基态和径向激发态或者轨道激发态之间的能级差。对于顶夸克，由于其质量足够大，满足上述库仑势主导，解薛定谔方程得到能级劈裂约为 1.5 GeV，对应于 $v \approx 0.09$。由此估计出的 Mv^2 和 Mv 的值也列在表 13.1 中。从顶夸克的情况可以看出，如果 M 足够的大，将会得到 Mv^2 远大于 Λ_{QCD}。此外，

由位力定理知，重夸克偶素的尺度 R 是由动能和势能之间的平衡得到的，对于库仑势主导有

$$Mv^2 \sim C_F \frac{\alpha_s(1/R)}{R} \tag{13.6}$$

进而，由不确定原理知尺度与动量直接满足 $Mv \sim 1/R$，代入上式得到

$$\alpha_s(Mv) \sim v \tag{13.7}$$

通过这一关系，v 的值也被 M 的值唯一确定。

重夸克偶素中另外一个重要的能量标度是 QCD 的典型非微扰能标 Λ_{QCD}，它标志了由胶子和轻夸克导致的非微扰效应。为了看出该能标如何与重夸克偶素联系，考虑 $Q\bar{Q}$ 之间的距离 R 足够大的情况，此时色禁闭导致 $Q\bar{Q}$ 之间由线性势主导，

$$V(R) \approx \kappa^2 R, \quad R \to \infty \tag{13.8}$$

其中由经验值得到 $\kappa \approx 450$ MeV。由于 κ 描述了色禁闭的效应，其值必然与 M 无关，只能正比于 Λ_{QCD}。为了建立 Λ_{QCD} 与重夸克偶素物理中其他标度的关系，我们来考虑 M 足够小的极限以至于 $Q\bar{Q}$ 之间由线性势式 (13.8) 主导，但同时假设 $Q\bar{Q}$ 之间的相对运动依然是非相对论的，从而可以容易地定义动能。此时由位力定理得到

$$Mv^2 \sim \kappa^2 R \tag{13.9}$$

把关系 $Mv \sim 1/R$ 代入得到 $\kappa \sim Mv^{3/2}$。如果把 κ 取为 Λ_{QCD}，将发现在这种情况下 Λ_{QCD} 处于 Mv^2 和 Mv 之间。如果库仑势和线性势同等地重要，此时公式 (13.6) 和 (13.9) 将同时满足。这两个公式能自洽地同时满足意味着，$\alpha_s(Mv)$ 与 v 之间的关系 (13.7) 可能在较小的 M 时依然成立。

上述结果中一个非常有意思的地方是粲偶素和底偶素中 Mv^2 的值几乎相等。该标度几乎不随 M 的值改变而改变意味着，在这样的重夸克质量区域，Mv^2 是由另外一个标度 Λ_{QCD} 决定的，即 $Mv^2 \sim \Lambda_{\mathrm{QCD}}$。这一估计与表 13.1 中的值是相容的。

如果 M、Mv 和 Mv^2 中某个标度远大于 Λ_{QCD}，则这个标度的效应可以通过微扰 QCD 计算得到。表 13.2 中给出了 QCD 耦合常数在粲偶素、底偶素和顶偶素的这些能量标度处对应的值。对于顶偶素，所有三个能标处都是可以微扰计算的。对于粲偶素和底偶素，$\alpha_s(M)$ 足够小以至于可以微扰计算，$\alpha_s(Mv)$ 较大但看似也可以微扰计算，但是 $\alpha_s(Mv^2)$ 太大导致不可能微扰计算。此外，从势模型的计算

发现，线性势对粲偶素和底偶素的波函数有不可忽略的贡献，这意味着 Mv 标度的物理依然有很大的非微扰效应。

表 13.2 QCD 耦合常数在重夸克偶素的不同能量标度处的值

	$c\bar{c}$	$b\bar{b}$	$t\bar{t}$
$\alpha_s(M)$	0.35	0.22	0.11
$\alpha_s(Mv)$	0.52	0.35	0.16
$\alpha_s(Mv^2)$	>1	>1	0.35

我们接下来介绍的 NRQCD 有效理论，可以通过把 QCD 拉氏量中大于或者约为 M 的标度积分掉之后得到。由于 M 是一个微扰标度，于是 NRQCD 有效理论中的很多参数可以通过微扰地匹配 QCD 完整理论得到。由于 v 是一个小量，NRQCD 有效理论的拉氏量将按照 v 的幂次进行展开。

13.2 NRQCD 有效理论

13.2.1 Foldy-Wouthuysen-Tani 变换

对于研究重夸克偶素系统的结构和谱，最重要的能标是 Mv 和 Mv^2，其中 M 是重夸克 Q 的质量，$v \ll 1$ 是重夸克在重夸克偶素静止系中的典型速率。而标度 M 在束缚态的动力学中并不起重要作用。基于此，在研究重夸克偶素时可以对 QCD 做两步修改[2]，使得理论更加简单。下面从完整 QCD 出发，

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QCD}} = \mathcal{L}_{\mathrm{light}} + \overline{\Psi}(\mathrm{i}\gamma^{\mu}D_{\mu} - m_Q)\Psi \tag{13.10}$$

此时重夸克是用四分量的 Dirac 旋量场进行描述。

第一步是引入一个紫外截断 Λ，满足 $Mv \ll \Lambda \ll M$，然后把拉氏量中动量大于 Λ 的所有场的模式全部积分掉。所得结果即为描述动量小于 Λ 的场的 Wilson 形式的有效理论。截断 Λ 使得相对论性的重夸克，以及动量在 M 量级的轻夸克和胶子都被作为紫外积掉了，动力学标度只剩下 Mv 量级或者更小量级，这正是描述重夸克偶素所需要的最重要的能标。当然，被积掉的相对论性的场对于低能物理依然有效应。然而，被积掉的场的虚度都至少为 Λ，其在时空上的传播距离约为 $1/\Lambda$，相对于重夸克偶素的尺度 $(Mv)^{-1}$ 来说是非常定域的。于是可以按照传统的重整化手续，把这些积掉的相对论性的场的贡献，通过在拉氏量中引入新的定域相互作用项恢复回来。如果只保持到 $1/\Lambda$ 的领头项，则新引进来的相互作用项与原有拉氏量中的项的形式是相同的，其效应只是改变了原本裸质量和裸色荷的值。如果保持到 $1/\Lambda$ 的高阶，则必须按照 $1/\Lambda$ 的幂次，一阶一阶地在原本拉氏量中引入新的不可重整的相互作用项用以修正低能物理。在这样一个具有截断的 QCD 中，

所有相对论性场的效应都包含在了新的拉氏量的耦合常数重整化中，而所有非相对论性的场全部都是作为动力学自由度保留在拉氏量中，可见相对论性效应和非相对论性效应被清晰地分离开了。

第二步是把四分量的 Dirac 场分块对角化，从而实现重夸克和重反夸克自由度的分离。上述的截断使得动力学场中只有非相对论性重夸克场，故最方便的不是用四分量 Dirac 场 Ψ，而是用两分量的 Pauli 场 ψ 和 χ。但是如果简单地在拉氏量中做替换 $\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix}$，将得到 $\psi^\dagger$ 与 χ 的耦合项以及 $\chi^\dagger$ 与 ψ 的耦合项。这些耦合项能够产生或者湮灭一对 $Q\overline{Q}$，使得单独 Q 数和 $\overline{Q}$ 数不守恒，涉及的能标为 M 量级，并非我们所想要的。

对于拉氏量 (13.10) 中的重夸克场项，为了使 ψ 和 χ 场脱耦，我们可以利用 Foldy-Wouthuysen-Tani 幺正变换[3]。如果把规范场作为背景场，在重夸克速度的任意阶，都可以直接地构造出变换使得拉氏量分块对角化。最简单的一个变换是[4]

$$\Psi \;\rightarrow\; \exp(-\mathrm{i}\gamma\cdot \boldsymbol{D}/2m_Q)\Psi \tag{13.11}$$

其中 γ 矩阵采用了 Dirac 表示。通过该变换，拉氏量 (13.10) 中的重夸克场项可以近似为

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} -m_Q + \mathrm{i}D_0 + \boldsymbol{D}^2/2m_Q & 0 \\ 0 & m_Q + \mathrm{i}D_0 - \boldsymbol{D}^2/2m_Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} \tag{13.12}$$

如果取 $\boldsymbol{D}$ 的量级为 Mv，则上式中矩阵的修正项为 Mv^4 量级。

而对于具有截断 Λ 的有效拉氏量，ψ 场和 χ 场脱耦的变换将比上述的变换复杂得多。一方面，在有效拉氏量中不仅有 ψ 和 χ 的二次项，还有四次项以及更高次项。另一方面，胶子场的相互作用会进一步改变通过 Foldy-Wouthuysen-Tani 变换所得到项的系数。然而，上述一般性的讨论至少告诉我们，我们所希望得到的非相对论性有效理论中，可以做到 Q 数和 $\overline{Q}$ 数的严格守恒。

13.2.2　NRQCD 拉氏量

原则上，基于 QCD 拉氏量 (13.10)，按照上一节的两个步骤的操作，可以得到描述 $Q\overline{Q}$ 低能物理的非相对论有效拉氏量。第一步是通过重整化群变换来去掉动量大于 Λ 的场的模式；第二步是通过变换来去掉改变 Q 数和 $\overline{Q}$ 数的相互作用项。然而，在实际操作中，完成上述的两个步骤都是极其困难的。

幸运的是，存在一个等价但是更加直接的“有效场论方法”来构造有效拉氏量[5]。在该方法中，构造有效拉氏量分为以下步骤：

(1) 确定理论中描述低能激发所需的所有场；

(2) 引入合适的截断并做合适的场的重定义之后，确定有效理论中能够保留的所有对称性；

(3) 确定用有效理论来描述的低能可观测量所需的精度；

(4) 写出满足对称性的最一般的有效拉氏量，并只保留与低能可观测量所需精度相关的项；

(5) 通过匹配低能可观测量在有效理论和完整理论中的计算结果，来确定有效拉氏量中的系数。

把上述方案应用在完整 QCD 的低能 $Q\overline{Q}$ 部分，所得到的有效场论即为非相对论 QCD 有效场论 (NRQCD)。NRQCD 中，描述低能自由度的场包括重夸克和重反夸克的 Pauli 场 ψ 和 χ，胶子的 SU(3) 规范场 A_μ，以及轻夸克的 Dirac 场。NRQCD 具有的对称性如下。

- 空间旋转对称性：由于重夸克采用了非相对论描述，原本的洛伦兹对称性破缺为旋转对称性子群；
- SU(3) 规范对称性：这一定域对称性要求，有效理论中的胶子场只能是规范协变导数 D_0 和 $\boldsymbol{D}$ 或者 QCD 场强 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$；
- C 字称和 P 字称：QCD 的这两种离散对称性在有效场论中依然存在。重夸克和重反夸克场的 C 字称变换规则为

$$\psi \ \to \ \mathrm{i}(\chi^\dagger\sigma_2)^{\mathrm{T}}, \qquad\qquad \chi \ \to \ -\mathrm{i}(\psi^\dagger\sigma_2)^{\mathrm{T}}, \tag{13.13}$$

P 字称变换规则为

$$\psi(t,\boldsymbol{r}) \ \to \ \psi(t,-\boldsymbol{r}), \qquad\qquad \chi(t,\boldsymbol{r}) \ \to \ -\chi(t,-\boldsymbol{r}) \tag{13.14}$$

- 重夸克及反重夸克相位对称性：这两个 $U(1)$ 对称性保证了 Q 数和 $\overline{Q}$ 数各自守恒。相位变换规则为

$$\psi \ \to \ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\psi, \qquad\qquad \chi \ \to \ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\chi \tag{13.15}$$

有效理论所需精度定义为：用有效理论计算重夸克偶素能级时，能够正确地重复出严格解中按照 v 展开的阶数。

确定了 NRQCD 中的场，及其满足的对称性后，可以利用这些场来构造满足对称性的最一般的有效拉氏量，其形式为

$$\mathcal{L}_{\mathrm{NRQCD}} = \mathcal{L}_{\mathrm{light}} + \psi^\dagger\left(\mathrm{i}D_0 + \frac{\boldsymbol{D}^2}{2M}\right)\psi + \chi^\dagger\left(\mathrm{i}D_0 - \frac{\boldsymbol{D}^2}{2M}\right)\chi + \delta\mathcal{L} \tag{13.16}$$

其中 $\mathcal{L}_{\mathrm{light}}$ 是描述胶子和轻夸克的已有拉氏量。根据下一节将介绍的速度标度率可知，显式写出的重夸克项能够正确地计算重夸克偶素能级到 Mv^2 阶，误差为 Mv^4

阶。而 $\delta\mathcal{L}$ 表示更高阶的拉氏量。如果在式 (13.16) 中取 $\delta\mathcal{L}=0$，则得到了最小形式的 NRQCD。在最小形式 NRQCD 中有一个额外的对称性。

- 重夸克自旋对称性：重夸克的两个自旋分量和重反夸克的两个自旋分量各自满足独立的幺正变换：

$$\psi \to U\psi, \qquad \chi \to V\chi \tag{13.17}$$

其中 U 和 V 是 SU(2) 矩阵。但这只是完整 NRQCD 拉氏量中的一个近似对称性，其修正项的相对量级是 v^2。

物理量在场的重定义下不变，这可以帮助我们去掉 NRQCD 拉氏量中的一些项。规范不变性要求 $\delta\mathcal{L}$ 中的胶子场只能是协变导数 D_0 和 $\boldsymbol{D}$。但是，通过对 ψ 或 χ 场的重定义，能够去掉 D_0 作用在 ψ 或 χ 上的项。于是，通过场的重定义，$\delta\mathcal{L}$ 中除了 $[D_0,\boldsymbol{D}]=\mathrm{i}g\boldsymbol{E}$ 这种组合之外，其余所有地方的 D_0 都可以被去掉。值得注意的是，场的重定义将导致有效理论只能用于重复完整理论中在壳的物理量，而不能用于重复完整理论中的低能离壳格林函数。

根据下一节的速度标度率，如果为了正确计算重夸克偶素能级到 Mv^4 阶，考虑了上述场的重定义后，$\delta\mathcal{L}$ 需要保留如下项

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}=&\frac{c_1}{8M^3}\chi^\dagger(\boldsymbol{D}^2)^2\psi+\frac{c_2}{8M^2}\psi^\dagger(\boldsymbol{D}\cdot g\boldsymbol{E}-g\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})\psi\\&+\frac{c_3}{8M^2}\psi^\dagger(\mathrm{i}\boldsymbol{D}\times g\boldsymbol{E}-g\boldsymbol{E}\times\mathrm{i}\boldsymbol{D})\cdot\sigma\psi+\frac{c_4}{2M}\psi^\dagger(g\boldsymbol{B}\cdot\sigma)\psi\\&+\text{charge conjugate terms}\end{aligned} \tag{13.18}$$

其中 c_1、c_2、c_3 和 c_4 是无量纲的系数。我们称式 (13.18) 中的项为 NRQCD 拉氏量的 v^2 改善项。由于式 (13.18) 中有 Pauli 矩阵 σ，它们的存在将破坏最小形式 NRQCD 的自旋对称性。

13.2.3　速度标度率

在构造 NRQCD 有效拉氏量时，一个重要的问题是如何估计拉氏量中各个项的相对重要性。相对重要性的估计，可以通过重夸克偶素基本的定性特点，以及最小形式 NRQCD 对应的场方程的自洽性得到[6]。所得结果列在表 13.3 中，称之为速度标度率。其中 M 的幂次是由对应算符的量纲决定的，故非平凡的信息是 v 的幂次。定域规范不变的算符在重夸克偶素态中的矩阵元的大小，可以通过把表 13.3 中相应的因子乘在一起而得到。

表 13.3 中的第一行可以很容易得到。首先重夸克数算符 $\int \mathrm{d}^3\psi^\dagger\psi$ 在重夸克偶素态 $|H\rangle$ 中的期待值很接近 1：

$$\langle H|\int \mathrm{d}^3\psi^\dagger\psi|H\rangle\approx 1 \tag{13.19}$$

其中，重夸克偶素态归一化为 $\langle H|H\rangle = 1$。再考虑到重夸克偶素态所处于的区域的大小约为 $1/(Mv)^3$，就可以得到 ψ(对 χ 也类似) 的标度行为是 $(Mv)^{3/2}$。NRQCD 中动能项的期待值的标度行为是 Mv^2：

$$\langle H|\int \mathrm{d}^3\psi^\dagger(\boldsymbol{D}^2/2M)\psi|H\rangle \sim Mv^2 \tag{13.20}$$

这导致 $\boldsymbol{D}$ 的标度行为是 Mv。由 ψ 的场方程

$$\left(\mathrm{i}D_0 - \frac{\boldsymbol{D}^2}{2M}\right)\psi = 0 \tag{13.21}$$

可以直接得到，D_0 作用在 ψ 上时的标度行为是 Mv^2。

表 13.3 NRQCD 算符在重夸克偶素态中的矩阵元大小的量级估计

算符	量级估计	说明
ψ	$(Mv)^{3/2}$	
χ	$(Mv)^{3/2}$	
D_0	Mv^2	作用在 ψ 或 χ 上
$\boldsymbol{D}$	Mv	
$g\boldsymbol{E}$	M^2v^3	
$g\boldsymbol{B}$	M^2v^4	
gA_0	Mv^2	库仑规范
$g\boldsymbol{A}$	Mv^3	库仑规范

由于 gA_0 和 $g\boldsymbol{A}$ 并非规范不变量，表 13.3 中的估计是在选取特定的库仑规范 $\nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0$ 时得到的。后面将得到，在库仑规范中，矢量势 $\boldsymbol{A}$ 相对于标量势 A_0 有一个 v 的压低，故关于 ψ 和 A_0 的场方程的最重要的项为

$$\left(\mathrm{i}\partial_0 - gA_0 + \frac{\nabla^2}{2M}\right)\psi \approx 0 \tag{13.22}$$

$$\nabla^2 gA_0 + g^2\psi^\dagger\psi \approx 0 \tag{13.23}$$

在式 (13.22) 中，动能项 $\dfrac{\nabla^2}{2M}$ 与势能项 gA_0 之间的平衡要求 gA_0 标度行为是 Mv^2。另一方面，如果假设梯度算符 ∇ 作用在 A_0 上的标度行为是 Mv，则从式 (13.23) 中可以得到 gA_0 的标度行为是 g^2Mv。为了使这两种估计的结果相一致，我们需要要求有效耦合常数 $\alpha_s = g^2/4\pi$ 在能量为 Mv 的地方标度行为是 v，这与式 (13.7) 中简单地根据动能和库仑势之间平衡所得的估计一致。由于在这里的估计仅仅利用了场方程的自洽性，所以即便是对于粲偶素和底偶素在能标为 Mv 附近的微扰论不可信，这里所得结果依然适用。最后，$\boldsymbol{A}$ 的场方程的最重要项为

$$(\partial_0^2 - \nabla^2)g\boldsymbol{A} - gA_0\nabla gA_0 - \frac{g^2}{M}\psi^\dagger\nabla\psi \approx 0 \tag{13.24}$$

其中最后两项的标度行为分别是 M^3v^5 和 g^2Mv^4，如果 g^2 的标度行为是 v，则它们两项可比拟。如果假设梯度算符 ∇ 作用在 $\boldsymbol{A}$ 上的标度行为是 Mv，则可以得到 $g\boldsymbol{A}$ 的标度行为是 Mv^3。由此可见，$g\boldsymbol{A}$ 确实比 gA_0 有一 v 的压低。

根据上述 $g\boldsymbol{A}$ 和 gA_0 在库仑规范下标度的估计，可以得到场强的估计。在库仑规范下，色电场强 $\boldsymbol{E}$ 最重要的项是 $-\nabla A_0$，故得到 $g\boldsymbol{E}$ 的标度行为是 M^2v^3。色磁场强 $\boldsymbol{B}$ 最重要的项是 $\nabla\times\boldsymbol{A}$，故得到 $g\boldsymbol{B}$ 的标度行为是 M^2v^4。这里虽然采用了库仑规范，但是由于 $g\boldsymbol{E}$ 和 $g\boldsymbol{B}$ 本身为规范不变量，其标度行为不依赖于规范。

根据表 13.3 中的速度标度率，最小形式 NRQCD 拉氏量中与重夸克相关项的标度行为是 M^4v^5，再考虑到重夸克偶素的体积因子 $1/(Mv)^3$，得到重夸克偶素的能量标度为 Mv^2。而式 (13.18) 中每一项的标度行为都是 M^4v^7，故将贡献给重夸克偶素 Mv^4 阶的能量。尚未显式写出的 NRQCD 拉氏量的其他项，都只贡献给能级 Mv^6 或更小。

上述的速度标度率在一定程度上也得到了格点 NRQCD 的非微扰检验[7]。

13.2.4　匹配确定 Wilson 系数

在 NRQCD 有效拉氏量中有多个参数，称之 Wilson 系数，我们需要通过调节这些参数使得 NRQCD 与完整 QCD 对 $Q\overline{Q}$ 相关的低能可观测量有相同的预言。对于最小形式 NRQCD，有两个参数：g 和 M。如果引入式 (13.18) 中 v^2 改善的 NRQCD 拉氏量，将会再增加 c_1、c_2、c_3、c_4 四个参数。确定这些参数被称为匹配。此外，在 NRQCD 定义中还有一个紫外截断参数 Λ，重整化群方程会保证低能可观测量对该参数的依赖性很弱，而且依赖性还会随着匹配精度的提高而减小。

原则上，如果 NRQCD 拉氏量中有 N 个参数，可以调整这些参数使得 NRQCD 对 N 个物理态的质量给出正确预言。比如，最小形式 NRQCD 有两个参数 g 和 M，这两个参数可以通过匹配径向激发能级劈裂 (如 J/ψ 与 $\psi(2S)$ 之间) 以及轨道角动量激发能级劈裂 (如 J/ψ 与 χ_{cJ} 之间) 来确定，其结果将是 QCD 中耦合常数 α_s 和重夸克质量 m_Q，以及 NRQCD 中的紫外截断 Λ 的函数。上述的两种激发的能级劈裂的量级为 Mv^2，在忽略 v^2 阶修正效应时，通过匹配后的最小形式 NRQCD 正好能够正确地给出预言。由自旋劈裂 (如 $^1S_0$ 态的 η_c 与 $^3S_1$ 态的 J/ψ 之间) 导致的能级差为 Mv^4，其结果无法有效限制具有重夸克自旋对称性的最小形式 NRQCD 中的参数。

利用物理质量匹配时，由于重夸克偶素的质量敏感于长程效应，NRQCD 中必须通过非微扰的方式来计算，目前唯一可靠的非微扰方式是格点 NRQCD。对于完整 QCD 中重夸克偶素的质量，原则上也可以用非微扰的格点 QCD 计算，但是更简单的方式是直接取实验上的结果。通过物理质量来调整 NRQCD 拉氏量中的参

数是一个非微扰匹配的例子。然而，为了提高精度而在有效理论中引入的参数变多之后，非微扰匹配会变得极其困难。比如对于 v^2 改善的 NRQCD 有效拉氏量，将有六个参数需要去确定，这就意味着需要非微扰地计算六个物理态的质量，这是很难完成的事。

幸运的是，QCD 的渐近自由使得我们可以用微扰的方式来实现匹配。微扰匹配的流程如下：

(1) 用微扰 QCD 计算 Q、$\overline{Q}$ 以及胶子渐近态之间的散射振幅，要求渐近态之间的相对动量 $\boldsymbol{k}$ 远小于 M，并把结果按照 $\boldsymbol{k}/m_Q$ 的幂次进行展开，展开的每一阶都是 α_s 和 m_Q 的函数；

(2) 利用微扰 NRQCD 计算相同的散射振幅，并把结果按照 $\boldsymbol{k}/M$ 的幂次进行展开，展开的每一阶都是 NRQCD 中未知参数的函数；

(3) 通过调整 NRQCD 中的参数，上述的两种计算在 $\boldsymbol{k}/M$ 的确定阶次是匹配的，而这里的阶次即为所需 v 的幂次。

一个至关重要的条件是匹配散射振幅或者其他物理可观测量，而不是匹配离壳格林函数。原因是得到 NRQCD 拉氏量的过程中用到了场的重定义，从而改变了理论对离壳格林函数的计算值，但是不改变在壳物理量的值。

之所以能够使用微扰匹配，原因在于 NRQCD 与 QCD 在 Λ 标度以下是等价的，故 Wilson 系数涉及的都是 Λ 及其以上的标度。虽然在具体操作中，微扰 QCD 和微扰 NRQCD 的计算中都会混入低能标的物理，但是由于 QCD 与 NRQCD 在低能是等价的，在匹配过程中低能标物理会严格地完全相消。最终所得 Wilson 系数与低能物理的细节无关。

作为最简单的微扰匹配的示例，考虑重夸克的能动量关系，该关系是由重夸克传播子的极点的位置决定的。在 QCD 的树图阶，能动量关系是

$$E=\sqrt{m_Q^2+p^2}=m_Q+\frac{p^2}{2m_Q}-\frac{p^4}{8m_Q^3}+\cdots \tag{13.25}$$

在 NRQCD 的树图阶，能动量关系可以从 NRQCD 的拉氏量 (13.16) 中读出：

$$E=\frac{p^2}{2M}-c_1\frac{p^4}{8M^3}+\cdots \tag{13.26}$$

通过匹配两式得到

$$M=m_Q,\quad c_1=1 \tag{13.27}$$

如果能动量关系计算到微扰论的更高阶，上述关系将得到微扰论的修改。式 (13.18) 中系数的定义使得，在微扰论的领头阶，c_1、c_2、c_3 和 c_4 均为 1。

在当前格点 NRQCD 的计算中，所需 Wilson 系数是通过非微扰匹配和微扰匹配共同得到的。式 (13.18) 中 c_1、c_2、c_3 和 c_4 是通过微扰匹配得到的，而 g 和 M 是通过非微扰匹配重夸克偶素质量谱得到的。通过微扰匹配，可以把这些量与 QCD 的基本参数 α_s 和 m_Q 联系起来。利用这些微扰匹配关系，以及格点 NRQCD 对底夸克偶素谱的计算，可以把 QCD 耦合常数 α_s 和底夸克质量 m_b 确定到很高的精度。实际上，当前 α_s 的最精确的确定就来自于此。

13.2.5　重夸克偶素在 NRQCD 中的描述

重夸克偶素的很多性质可以从按照 v 展开的 NRQCD 有效拉氏量中直接读出。在完整 QCD 中虽然也可以按照 v 展开，进而得到相应性质，然而这将需要对大量洛伦兹不变的算符进行非相对论展开，操作极其复杂。

重夸克偶素的一个非常重要的性质是它几乎不依赖于重夸克自旋。这一点从 NRQCD 有效拉氏量中可以清楚地看出，其最小形式 NRQCD 拉氏量无自旋依赖性，满足自旋对称性。自旋依赖性从 v^2 改善拉氏量 (13.18) 中才首次通过 Pauli 矩阵的形式出现，但是这些都是 v^2 压低项。自旋的近似对称性使得我们可以用自旋来标记能级。

重夸克偶素另一个非常重要的唯象性质是，在很多时候势模型能够给出很精确的描述。在势模型中，重夸克和重反夸克是通过瞬时势束缚在一起的。势模型虽然只是一个唯象模型，而非严格理论，但是它比 NRQCD 或者 QCD 的场论描述简单很多。它的有效性依赖于重夸克偶素的两个本质因素。第一因素是，重夸克与重反夸克之间胶子交换主要是产生瞬时相互作用。原因在于重夸克偶素的尺度决定了交换胶子的动量量级一般为 Mv，而为了使胶子交换不改变重夸克的虚度，胶子的能量量级为 Mv^2。这种胶子的离壳度为 Mv，远大于重夸克的动能。于是，胶子交换所需的时间比重夸克状态改变所需的时间小很多，故在重夸克看来胶子交换是瞬时相互作用。第二个因素是，在重夸克偶素中，除了交换的库仑胶子外，发现其他动力学胶子的几率很小。这一点非常重要，因为在势模型中没有包含非瞬时作用的低能胶子。特别地，对于能量为 Mv^2 的非瞬时胶子，其相互作用时间与重夸克状态改变时间可比拟，交换这种胶子将导致很强的迟滞效应。

发现胶子的几率实际上会依赖于规范，上述重夸克偶素中发现动力学胶子的几率很小这一物理图像在库仑规范中是成立的。库仑规范 ($\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$) 属于一种物理规范，其中没有负模态，这是定义合理的 Fock 空间的一个必要条件。在这一规范中，标量势 A_0 不传播，所有动力学胶子都是通过矢量势 $\boldsymbol{A}$ 来产生和湮灭的。在库仑规范中，式 (13.16) 中的拉氏量可以按照 v 的幂次进行重新组合。v 的幂次可以通过对各种量做缩放清晰地看出来[8]：把空间 $\boldsymbol{r}$ 缩放 $1/(Mv)$ 倍，把时间 t 缩放 $1/(Mv^2)$ 倍，把 ψ 场和 χ 场缩放 $(Mv)^{3/2}$ 倍，把 A_0 场和 $\boldsymbol{A}$ 场缩放 $Mv^{3/2}$ 倍。缩

放之后，NRQCD 拉氏量中 v^0 项为

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_{\text{light}} + \psi^\dagger \left(\mathrm{i}\partial_0 - gA_0 + \frac{\nabla^2}{2M} \right) \psi + \chi^\dagger \left(\mathrm{i}\partial_0 - gA_0 - \frac{\nabla^2}{2M} \right) \chi \tag{13.28}$$

在库仑规范，用这一拉氏量计算重夸克偶素的能级能够得到与规范不变的最小形式 NRQCD 拉氏量所得结果一样的精度。缩放之后，NRQCD 拉氏量中 v^1 项为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 = & -\frac{1}{M}\psi^\dagger \left(\mathrm{i}g\boldsymbol{A} \cdot \nabla \right) \psi + \frac{c_4}{2M}\psi^\dagger \left(\nabla \times g\boldsymbol{A} \right) \cdot \sigma \psi \\ & + \text{charge conjugate terms} \end{aligned} \tag{13.29}$$

在微扰论的领头阶，这些项给出从 $|Q\overline{Q}\rangle$ Fock 态到含有一个胶子的 Fock 态之间的跃迁。由于式 (13.29) 中的项在 $|Q\overline{Q}\rangle$ Fock 态中的期待值为零，故 $\mathcal{L}_1$ 对重夸克偶素能级的贡献在 Mv^4 的量级。缩放之后，NRQCD 拉氏量中 v^2 项为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = & -\frac{1}{2M}\psi^\dagger \left(g\boldsymbol{A} \right)^2 \psi + \frac{c_1}{8M^3}\psi^\dagger \left(\nabla^2 \right)^2 \psi \\ & + \frac{c_2}{8M^2}\psi^\dagger \left(-\nabla^2 gA_0 \right) \psi - \frac{c_3}{4M^2}\psi^\dagger \left(\nabla g A_0 \right) \times \nabla \cdot \sigma \psi \\ & + \frac{c_4}{2M}\psi^\dagger \left(\mathrm{i}g\boldsymbol{A} \times g\boldsymbol{A} \right) \cdot \sigma \psi + \text{charge conjugate terms} \end{aligned} \tag{13.30}$$

其中第一项由式 (13.16) 中对协变导数 $\boldsymbol{D}$ 展开得到，而后四项来自于 v^2 改善项 (13.18)。在库仑规范中用拉氏量 $\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ 计算重夸克偶素能级所得结果与用规范不变的 NRQCD 拉氏量 (13.16) 和 (13.18) 所得结果的差异在 Mv^6 的量级。

在库仑规范下，可以对物理重夸克偶素态 $|H\rangle$ 进行 Fock 态展开：

$$|H\rangle = \psi^H_{Q\overline{Q}}|Q\overline{Q}\rangle + \psi^H_{Q\overline{Q}g}|Q\overline{Q}g\rangle + \cdots \tag{13.31}$$

其中自旋和颜色指标以及每个粒子的动量都没有显式地写出。最重要的 Fock 态是 $|Q\overline{Q}\rangle$，它具有确定的角动量量子数与颜色量子数 ${}^{2S+1}L_J^{[1]}$，其中“[1]”表示色单态。高 Fock 态中，比如 $|Q\overline{Q}g\rangle$ 中，会有动力学胶子或者轻夸克 $q\overline{q}$ 对。由于式 (13.28) 的 $\mathcal{L}_0$ 中没有 $\boldsymbol{A}$ 与 ψ 场或 χ 场耦合的项，处于高 Fock 态的几率一定会被 v 的幂次压低。

最大几率的 $|Q\overline{Q}g\rangle$ 是通过式 (13.29) 中 $\mathcal{L}_1$ 与最重要的 Fock 态 $|Q\overline{Q}\rangle$ 联系起来的。我们称通过 $\psi^\dagger \left(\mathrm{i}g\boldsymbol{A} \cdot \nabla \right) \psi$ 或者其复共轭实现的跃迁为电跃迁。从最重要的 Fock 态 $|Q\overline{Q}\rangle$ 到 $|Q\overline{Q}g\rangle$ 态的电跃迁中，$Q\overline{Q}$ 的选择定则满足 $\Delta L = \pm 1$ 和 $\Delta S = 0$。为了确定处于这种 Fock 态的几率，我们利用前述结果，$\mathcal{L}_1$ 导致的二阶微扰将把重夸克偶素的质量改变 Mv^4 的量级。这一质量改变可以表示为 $|Q\overline{Q}g\rangle$ 态的能量 E 与该态的几率 P 的函数。如果动力学胶子的能量是 Mv 量级，则 $E \sim Mv$，于是 $P \sim v^3$。如果动力学胶子的能量是 Mv^2 量级或者更小，则 $E \sim Mv^2$，于是 $P \sim v^2$。

总之，通过 $\Delta L=\pm 1$ 和 $\Delta S=0$ 选择定则得到的 $|Q\overline{Q}g\rangle$ 态中，最重要的动力学胶子是能量为 Mv^2 量级或更小的软胶子，这种态的几率是 v^2 量级。

我们称通过 $\psi^\dagger(\nabla\times g\boldsymbol{A})\cdot\sigma\psi$ 或者其复共轭实现的跃迁为磁跃迁。从最重要的 Fock 态 $|Q\overline{Q}\rangle$ 到 $|Q\overline{Q}g\rangle$ 态的磁跃迁中，$Q\overline{Q}$ 的选择定则满足 $\Delta L=0$ 和 $\Delta S=\pm 1$。可以类似前面的方法来确定处于这种 Fock 态的几率，唯一需要注意的是 $\psi^\dagger(\nabla\times g\boldsymbol{A})\cdot\sigma\psi$ 产生的跃迁振幅与胶子的动量有关。如果动力学胶子的能量是 Mv 量级，$\mathcal{L}_1$ 导致的二阶微扰对重夸克偶素的质量改变为 Mv^4 的量级。此时由于 $E\sim Mv$，于是 $P\sim v^3$。如果动力学胶子的能量是 Mv^2 量级，则质量改变的跃迁振幅被 v^2 压低，对应质量改变 Mv^6 的量级。此时 $E\sim Mv^2$，于是 $P\sim v^4$。因此，通过 $\Delta L=0$ 和 $\Delta S=\pm 1$ 选择定则得到的 $|Q\overline{Q}g\rangle$ 态中，最重要的动力学胶子其能量为 Mv 量级，这种态的几率是 v^3 量级。

类似的讨论可以给出其他 Fock 态的几率。任意 Fock 态都可以从最重要的 Fock 态 $|Q\overline{Q}\rangle$ 出发，做一系列的电跃迁并做一次或零次磁跃迁得到。电跃迁满足选择定则 $\Delta L=\pm 1$ 和 $\Delta S=0$，磁跃迁满足选择定则 $\Delta L=0$ 和 $\Delta S=\pm 1$。电跃迁和磁跃迁都将色单态的 $Q\overline{Q}$ 变为色八重态，而把色八重态的 $Q\overline{Q}$ 变为色单态或者色八重态。一个 Fock 态的几率最主要是由其中 $Q\overline{Q}$ 态所处的颜色和角动量量子数决定。如果一个 Fock 态可以从最重要的 Fock 态 $|Q\overline{Q}\rangle$ 出发做 E 次电跃迁得到，则该态的几率为 v^{2E}。如果一个 Fock 态可以从最重要的 Fock 态 $|Q\overline{Q}\rangle$ 出发做 E 次电跃迁并做一次磁跃迁得到，则该态的几率为 v^{2E+3}。

13.3　重夸克偶素的湮灭衰变

13.3.1　色单态模型中 η_c 的衰变

在应用 NRQCD 有效理论来描述重夸克偶素湮灭衰变之前，我们先看一个简单的模型——色单态模型是如何描述该衰变的。

重夸克偶素衰变最直观的图像是其最重要的 Fock 态 $|Q\overline{Q}\rangle$ 中 $Q\overline{Q}$ 湮灭成胶子或者轻夸克，而末态这些轻部分子最终强子化为实验上可观察的轻强子。$Q\overline{Q}$ 的湮灭总宽度应该能够用微扰 QCD 计算，再结合 Fock 态 $|Q\overline{Q}\rangle$ 的唯象波函数，就可以计算出重夸克偶素的衰变宽度。这一衰变模型被称为色单态模型。

为了介绍色单态模型中如何描述重夸克偶素的衰变，我们以 η_c 的衰变为例。在色单态中，η_c 被模型化为一个具有量子数 ${}^1S_0^{[1]}$ 的 $c\bar{c}$ 对，它的波函数由色因子 $\delta_{ij}/\sqrt{3}$，自旋因子 $(\uparrow\downarrow-\downarrow\uparrow)/\sqrt{2}$ 和一个坐标空间的波函数 $\psi(\boldsymbol{r})=R(r)/\sqrt{4\pi}$ 相乘得到。这种状态的 $c\bar{c}$ 对能够湮灭为两个胶子。如果假设这两个胶子会 100% 地强

子化为轻强子，则 η_c 的衰变宽度为

$$\Gamma(\eta_c)=\frac{1}{2M_{\eta_c}}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2k}\frac{2\pi\delta(M_{\eta_c}-2|\boldsymbol{k}|)}{M_{\eta_c}}|\mathcal{T}[\eta_c\to g(\boldsymbol{k})g(-\boldsymbol{k})]|^2 \tag{13.32}$$

其中衰变的 $\mathcal{T}$ 矩阵元可以用 η_c 的动量空间波函数 $\psi(\boldsymbol{q})$ 表示

$$\mathcal{T}[\eta_c\to g(\boldsymbol{k})g(-\boldsymbol{k})]=\frac{1}{\sqrt{2M_{\eta_c}}}\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\psi(\boldsymbol{q})\mathcal{T}[c(\boldsymbol{q})\bar{c}(-\boldsymbol{q})\to g(\boldsymbol{k})g(-\boldsymbol{k})] \tag{13.33}$$

其中色指标和自旋指标未显式写出。$c\bar{c}$ 的湮灭振幅 $\mathcal{T}$ 只敏感于 $\boldsymbol{q}$ 的值在 m_c 量级或更大的区域，然而波函数只有当 $\boldsymbol{q}$ 是 m_cv 量级时才有较大的值，故而 $\boldsymbol{q}$ 的有效值很小，$\mathcal{T}$ 中可以将其取为零。于是衰变宽度可以表示成因子化的形式：

$$\begin{aligned}\Gamma(\eta_c)\approx&\frac{1}{(2M_{\eta_c})^2}\left|\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\psi(\boldsymbol{q})\right|^2\\&\times\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2k}\frac{2\pi\delta(M_{\eta_c}-2|\boldsymbol{k}|)}{M_{\eta_c}}|\mathcal{T}[c(\boldsymbol{0})\bar{c}(-\boldsymbol{0})\to g(\boldsymbol{k})g(-\boldsymbol{k})]|^2\end{aligned} \tag{13.34}$$

对 $\boldsymbol{q}$ 的积分得到波函数的零点值 $R(0)/\sqrt{4\pi}$，对 $\boldsymbol{k}$ 的积分可以通过计算 $c\bar{c}\to gg$ 的最低阶 QCD 费曼图计算得到。最终的衰变宽度为

$$\Gamma(\eta_c)\approx\frac{8\alpha_s^2}{3M_{\eta_c}^2}|R(0)|^2 \tag{13.35}$$

13.3.2 湮灭衰变的时空结构

在 13.2 节中介绍了 NRQCD 有效场论，并应用它来理解重夸克偶素的性质及其质量谱。这些应用是很直接的，因为重夸克偶素静态性质主要涉及的是 NRQCD 能够正确描述的低能标物理，而高能量的交换一定只能发生在时空的一个很小范围，其效应可以引入高量纲算符，并利用重整化群把它们包含在 Wilson 系数中。

NRQCD 有效场论是否能够用来描述重夸克偶素中 $Q\overline{Q}$ 完全湮灭的衰变，这不是显而易见的事。首先 $Q\overline{Q}$ 的湮灭必然涉及 NRQCD 不能正确描述的高能标物理。如果在振幅水平上尝试把这些高能标物理包含在高量纲算符中，则新引入的高量纲算符必然导致重夸克和重反夸克数单独不守恒，这与 NRQCD 拉氏量满足重夸克数守恒相违背。为了解决这个问题，我们可以考虑限制在重夸克偶素的单举衰变 (inclusive decay)，并用光学定理把衰变宽度与向前散射振幅的虚部联系起来。如果向前散射振幅的虚部中，高能标物理都只发生在时空的一个很小区域，我们可以引入保证 Q 数和 $\overline{Q}$ 数守恒的四费米子算符来描述这种效应。然而，此时高能标物理的定域性要求是一个极其非平凡的假设。接下来，我们将证明重夸克偶素的单举衰变过程确实是定域的，换句话说其中的 $Q\overline{Q}$ 的湮灭发生在 $1/M$ 的尺度范围。

一个重要的事实是，$Q\overline{Q}$ 湮灭后至少会产生两个很硬的轻粒子 (胶子、夸克或者轻子)，且每个粒子的动量都在 M 的量级。这将导致两个效应。第一个效应是，湮灭过程中必然有一个虚度达到 M 量级的中间态粒子的存在，故为了能够湮灭，$Q\overline{Q}$ 必须要跑到 $1/M$ 的尺度范围，这个尺度比重夸克偶素的尺度小很多。因而，总的湮灭振幅是对偶素内部所有可能的湮灭地点进行求和得到。总的湮灭衰变宽度是湮灭振幅的模方，并对所有末态求和得到。第二个效应是，湮灭地点相距超过 $1/M$ 的两个振幅之间几乎没有干涉效应。这看起来有点违背常理，因为湮灭后产生的轻粒子几乎是在壳的 (或者是碎裂成不变质量远小于 M 的喷注)，它们可以传播很远，从而无法限制振幅一边的湮灭地点和复共轭一边的湮灭地点之间的关系。然而，只有振幅和复共轭中湮灭点相距很近时，末态粒子在振幅一边的波函数与复共轭一边的波函数之间才能有足够的重叠范围。这一点在经典力学中是显然的，因为我们可以沿着末态粒子运动的逆方向跟踪其轨迹，必然得到一个确定的湮灭时空点。在量子力学中，由不确定原理得知，由于末态粒子的动量为 M 量级，我们能在 $1/M$ 的精度上确定湮灭地点。在量子场论中，情况会变得复杂很多。

量子场论的一个重要特点是粒子数不守恒，不仅会有各种各样的末态，而且会有各种中间态。如果我们假设中间态和末态的所有粒子都很硬，且任意两个粒子之间都不共线，则情况与量子力学类似。此时中间态粒子的离壳度都在 M 的量级，末态粒子的动量也都在 M 的量级，故不确定原理导致 $Q\overline{Q}$ 湮灭的区域尺度为 $1/M$。

然而，软胶子和共线胶子 (或者轻夸克) 的存在会潜在破坏上述定域的图像。从湮灭前 $Q\overline{Q}$ 中辐射出来的胶子并没危险，因为重夸克质量的存在导致没有共线辐射，而软辐射可以因子化到四费米子算符的矩阵元中。但是我们必须担心从末态硬胶子中辐射出来的软或者共线胶子，因为此时辐射胶子几乎在壳地从 $Q\overline{Q}$ 的湮灭地点传播到其辐射地点。而逆着最终的末态喷注方向将发现胶子的辐射顶点，而非 $Q\overline{Q}$ 的湮灭顶点，这两个地点之间的距离可以很远。幸运的是，对我们所需要的单举衰变，对所有近简并的末态都求和之后，KLN 定理将保证实辐射胶子导致的发散与虚图中胶子导致的发散之间完全相消，故软或者共线辐射的效应可以忽略。这里 KLN 定理保证的发散相消可以看成是一个一般化的不确定原理：如果我们不去了解具体的末态，则可以确定湮灭地点。

上述湮灭点的定域性还有可能被末态窄的胶球共振态破坏[2]，幸运的是，目前并无迹象表明粲偶素或底偶素质量附近有胶球共振态。

13.3.3　NRQCD 因子化

基于上节的讨论可知，单举衰变中 $Q\overline{Q}$ 的湮灭点确实是定域的，故其效应可

以通过在 NRQCD 拉氏量中引入四费米子算符来包含

$$\delta\mathcal{L}_{\text{4-Fermion}}=\sum_n\frac{f_n(\Lambda)}{M^{d_n-4}}\mathcal{O}_n(\Lambda) \tag{13.36}$$

其中 Λ 是重整化标度，d_n 是算符 $\mathcal{O}_n$ 的量纲，其中量纲为 6 的算符有

$$\mathcal{O}(^1S_0^{[1]})=\psi^\dagger\chi\chi^\dagger\psi \tag{13.37a}$$

$$\mathcal{O}(^3S_1^{[1]})=\psi^\dagger\sigma\chi\cdot\chi^\dagger\sigma\psi \tag{13.37b}$$

$$\mathcal{O}(^1S_0^{[8]})=\psi^\dagger T^a\chi\chi^\dagger T^a\psi \tag{13.37c}$$

$$\mathcal{O}(^3S_1^{[8]})=\psi^\dagger\sigma T^a\chi\cdot\chi^\dagger\sigma T^a\psi \tag{13.37d}$$

量纲为 8 的色单态算符有

$$\mathcal{O}(^1P_1^{[1]})=\psi^\dagger\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}\right)\chi\cdot\chi^\dagger\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}\right)\psi \tag{13.38a}$$

$$\mathcal{O}(^3P_0^{[1]})=\frac{1}{3}\psi^\dagger\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}\cdot\sigma\right)\chi\chi^\dagger\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}\cdot\sigma\right)\psi \tag{13.38b}$$

$$\mathcal{O}(^3P_1^{[1]})=\frac{1}{2}\psi^\dagger\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}\times\sigma\right)\chi\cdot\chi^\dagger\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}\times\sigma\right)\psi \tag{13.38c}$$

$$\mathcal{O}(^3P_2^{[1]})=\psi^\dagger\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}^{(i}\sigma^{j)}\right)\chi\chi^\dagger\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}^{(i}\sigma^{j)}\right)\psi \tag{13.38d}$$

$$\mathcal{P}(^1S_0^{[1]})=\frac{1}{2}\left[\psi^\dagger\chi\chi^\dagger\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}\right)^2\psi+\text{h.c.}\right] \tag{13.38e}$$

$$\mathcal{P}(^3S_1^{[1]})=\frac{1}{2}\left[\psi^\dagger\sigma\chi\cdot\chi^\dagger\sigma\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}\right)^2\psi+\text{h.c.}\right] \tag{13.38f}$$

$$\mathcal{P}(^3S_1^{[1]},{}^3D_1^{[1]})=\frac{1}{2}\left[\psi^\dagger\sigma^i\chi\chi^\dagger\sigma^j\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^2\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}^{(i}\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}^{j)}\psi+\text{h.c.}\right] \tag{13.38g}$$

其中 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}$ 表示协变导数作用在右边旋量与作用在左边旋量的差：$\chi^\dagger\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}\psi\equiv\chi^\dagger(\boldsymbol{D}\psi)-(\boldsymbol{D}\chi)^\dagger\psi$，$T^{(ij)}$ 表示无迹对称张量，$T^{(ij)}=(T^{ij}+T^{ji})/2-T^{kk}\delta^{ij}/3$。

利用光学定理，重夸克偶素湮灭衰变为轻强子的总宽度可以写为 NRQCD 因子化的结构：

$$\begin{aligned}\Gamma(H\to\text{LH})&=2\text{Im}\,\langle H|\delta\mathcal{L}_{\text{4-Fermion}}|H\rangle\\&=\sum_n\frac{2\text{Im}\,f_n(\Lambda)}{M^{d_n-4}}\langle H|\mathcal{O}_n(\Lambda)|H\rangle\end{aligned} \tag{13.39}$$

其中重夸克偶素态 $|H\rangle\equiv|H(\boldsymbol{P}=0)\rangle$ 满足 $\langle H(\boldsymbol{P}')|H(\boldsymbol{P})\rangle=(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}')$，此为标准的非相对论归一化。NRQCD 因子化把衰变宽度表示为多项求和的形式，每

一项都因子化为一个短程系数 $\mathrm{Im}f_n(\Lambda)$ 和一个长程矩阵元 $\langle H|\mathcal{O}_n(\Lambda)|H\rangle$ 相乘的结构。短程系数正比于具有确定量子数的初态在壳 $Q\overline{Q}$ 湮灭为硬的胶子或者轻夸克的几率，这部分可以用微扰论计算，并展开为 $\alpha_s(M)$ 的幂级数。而长程矩阵元描述了在重夸克偶素中发现具有确定量子数的 $Q\overline{Q}$ 的几率，它可以用格点理论非微扰地计算。Λ 在这里充当了因子化标度的角色，对其依赖性会在短程系数和长程矩阵元之间按照 $\alpha_s(M)$ 的幂次逐阶相消。

利用表 13.3 中的速度标度率再结合式 (13.31) 中 $|H\rangle$ 的 Fock 态展开中每个 Fock 态的几率，可以得到 $\langle H|\mathcal{O}_n(\Lambda)|H\rangle$ 具有的 v^2 的幂次，故在实际应用中只需要保留有限多个长程矩阵元。由于短程系数是按照 $\alpha_s(M)$ 的幂次展开，长程矩阵元是按照 v^2 的幂次排列，可见 NRQCD 因子化 (13.39) 是按照 $\alpha_s(M)$ 和 v^2 双重展开。我们以 $J^{PC}=0^{-+}$ 的 η_c 为例，来分析如何确定长程矩阵元的 v^2 幂次。η_c 最重要的 Fock 态是具有量子数 ${}^1S_0^{[1]}$ 的 $|Q\overline{Q}\rangle$ 态，而根据速度标度率，$\mathcal{O}({}^1S_0^{[1]})$ 也是 v^2 幂次最低的四费米子算符，故 $\langle\eta_c|\mathcal{O}({}^1S_0^{[1]})|\eta_c\rangle$ 是 v^2 幂次最低的长程矩阵元，而 $\langle\eta_c|\mathcal{P}({}^1S_0^{[1]})|\eta_c\rangle$ 有 v^2 的相对压低。η_c 次重要的 Fock 态是通过色电跃迁到达的具有量子数 ${}^1P_1^{[8]}$ 的 $|Q\overline{Q}g\rangle$ 态，该态在几率上被 v^2 压低，而相应算符 $\mathcal{O}({}^1P_1^{[8]})$ 也被 v^2 压低，故 $\langle\eta_c|\mathcal{O}({}^1P_1^{[8]})|\eta_c\rangle$ 有 v^4 的相对压低。η_c 次次重要的 Fock 态是通过色磁跃迁到达的具有量子数 ${}^3S_1^{[8]}$ 的 $|Q\overline{Q}g\rangle$ 态，该态在几率上被 v^3 压低，而相应算符 $\mathcal{O}({}^3S_1^{[8]})$ 不被压低，故 $\langle\eta_c|\mathcal{O}({}^3S_1^{[8]})|\eta_c\rangle$ 有 v^3 的相对压低。类似地可以分析其他长程矩阵元，可以发现尚未列出的也都至少被 v^4 压低。

因此，在 NRQCD 因子化框架下，S 波重夸克偶素的湮灭衰变可以表示为

$$\begin{aligned}\Gamma(\eta_c\to \mathrm{LH})=&\frac{2\mathrm{Im}\ f({}^1S_0^{[1]})}{M^2}\langle\eta_c|\mathcal{O}({}^1S_0^{[1]})|\eta_c\rangle\\&+\frac{2\mathrm{Im}\ g({}^1S_0^{[1]})}{M^4}\langle\eta_c|\mathcal{P}({}^1S_0^{[1]})|\eta_c\rangle+O(\Gamma v^4)\end{aligned}\tag{13.40}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(\psi\to \mathrm{LH})=&\frac{2\mathrm{Im}\ f({}^3S_1^{[1]})}{M^2}\langle\psi|\mathcal{O}({}^3S_1^{[1]})|\psi\rangle\\&+\frac{2\mathrm{Im}\ g({}^3S_1^{[1]})}{M^4}\langle\psi|\mathcal{P}({}^3S_1^{[1]})|\psi\rangle+O(\Gamma v^4)\end{aligned}\tag{13.41}$$

其中短程系数可以通过计算具有确定量子数的在壳 $Q\overline{Q}$ 向前散射振幅的虚部得到，展开到 $O(\alpha_s^2)$ 的结果为[2]

$$\mathrm{Im}\ f({}^1S_0^{[1]})=\frac{2\pi}{9}\alpha_s^2\tag{13.42}$$

$$\mathrm{Im}\ g({}^1S_0^{[1]})=-\frac{8\pi}{27}\alpha_s^2\tag{13.43}$$

$$\mathrm{Im}\ f({}^3S_1^{[1]})=0\tag{13.44}$$

$$\mathrm{Im}\ g({}^3S_1^{[1]})=0\tag{13.45}$$

其中 $^3S_1^{[1]}$ 态短程系数为零，是被 C 宇称和 Landau-Yang 定理同时禁戒导致的，它们只有到 $O(\alpha_s^3)$ 才不为零。为了把 NRQCD 的结果与色单态模型结果进行比较，我们把 $\langle\eta_c|\mathcal{O}(^1S_0^{[1]})|\eta_c\rangle$ 的 χ 场与 $\chi^\dagger$ 场之间插入一组完备基，并假设求和是由真空态主导 (真空饱和近似)，则得到[2]

$$\langle\eta_c|\mathcal{O}(^1S_0^{[1]})|\eta_c\rangle = |\langle 0|\chi^\dagger\psi|\eta_c\rangle|^2[1+O(v^4)] \tag{13.46}$$

在色单态模型中，上式右边矩阵元可以与波函数联系起来

$$\langle 0|\chi^\dagger\psi|\eta_c\rangle \approx \sqrt{2M_{\eta_c}}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}R(0) \tag{13.47}$$

把这些结果代入式 (13.40) 中，并把 M_{η_c} 取为 $2m_c$，则发现其第一项重复了色单态模型 (13.35) 的结果。但是在 NRQCD 因子化理论中，可以系统地计算 v^2 更高阶的效应。

P 波重夸克偶素的湮灭衰变会稍有不同。以 $J^{PC}=0^{++}$ 的 χ_{c0} 为例，其最重要的 Fock 态是具有量子数 $^3P_0^{[1]}$ 的 $|Q\overline{Q}\rangle$ 态，而根据速度标度率，$\mathcal{O}(^3P_0^{[1]})$ 是 $O(v^2)$ 幂次的四费米子算符，故 $\langle\chi_{c0}|\mathcal{O}(^3P_0^{[1]})|\chi_{c0}\rangle$ 是 $O(v^2)$ 幂次的长程矩阵元。χ_{c0} 次重要的 Fock 态是通过色电跃迁到达的 $Q\overline{Q}$ 具有量子数 $^3S_1^{[8]}$ 的 $|Q\overline{Q}g\rangle$ 态，该态在几率上被 v^2 压低，但相应算符 $\mathcal{O}(^3S_1^{[8]})$ 不被 v^2 压低，故 $\langle\chi_{c0}|\mathcal{O}(^3S_1^{[8]})|\chi_{c0}\rangle$ 也是 $O(v^2)$ 幂次的长程矩阵元。其他长程矩阵元都至少是 $O(v^3)$ 幂次的。因而，χ_{c0} 的湮灭衰变可以表示为

$$\begin{aligned}\Gamma(\chi_{c0}\to \mathrm{LH}) = &\frac{2\mathrm{Im}\ f(^3P_0^{[1]})}{M^4}\langle\chi_{c0}|\mathcal{O}(^3P_0^{[1]})|\chi_{c0}\rangle \\ &+\frac{2\mathrm{Im}\ f(^3S_1^{[8]})}{M^2}\langle\chi_{c0}|\mathcal{O}(^3S_1^{[8]})|\chi_{c0}\rangle + O(\Gamma v^3)\end{aligned} \tag{13.48}$$

其中短程系数展开到 $O(\alpha_s^2)$ 的结果为

$$\mathrm{Im}\ f(^3P_0^{[1]}) = \frac{2\pi}{3}\alpha_s^2 \tag{13.49}$$

$$\mathrm{Im}\ f(^3S_1^{[8]}) = -\frac{\pi n_f}{6}\alpha_s^2 \tag{13.50}$$

其中 n_f 为轻夸克味道数。类似地，可以把 P 波矩阵元做真空饱和近似

$$\langle\chi_{c0}|\mathcal{O}(^3P_0^{[1]})|\chi_{c0}\rangle = |\langle 0|\chi^\dagger\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}\cdot\sigma\right)\psi|\chi_{c0}\rangle|^2[1+O(v^2)] \tag{13.51}$$

在色单态模型中，与波函数的联系为

$$\langle 0|\chi^\dagger\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}\cdot\sigma\right)\psi|\chi_{c0}\rangle \approx \sqrt{2M_{\chi_{c0}}}\sqrt{\frac{9}{2\pi}}R'(0) \tag{13.52}$$

值得指出的是，在色单态模型中并没有式 (13.48) 中第二项色八重态的贡献。在 α_s 的领头阶，这意味着色单态模型会有 $O(1)$ 的修正项；在 α_s 的次领头阶，色单态模型计算中将出现无法消掉的红外发散，而在 NRQCD 因子化的式 (13.48) 中色单态部分的红外发散会被色八重态吸收，最终保证所有的短程系数都是红外安全的。

用类似的方法，NRQCD 因子化还可以用来描述重夸克偶素湮灭衰变为轻子的宽度[2]。

13.4　重夸克偶素的高能产生

13.4.1　拓扑因子化假设

NRQCD 有效理论不仅可以用来描述重夸克偶素的湮灭衰变，也可以用来描述重夸克偶素的高能产生。上述讨论中，基于 KLN 定理，湮灭衰变过程的因子化是非常严格的。然而，我们将看到重夸克偶素产生过程的因子化证明依然是一个未解决的问题。

重夸克偶素产生中涉及的标度除了重夸克偶素自身的标度外，还会有一个大的动量转移 Q^2，其值大于或与 M^2 同一量级时，才可能用 NRQCD 因子化来描述。如果 Q^2 远大于 M^2，此时可以用共线因子化的方法把 Q^2 量级的物理因子化出来，表示为微扰可算的系数与单部分子或者 $Q\overline{Q}$ 对碎裂函数之间卷积的形式[9]。故而，我们只需要讨论 Q^2 与 M^2 为同一量级的情况。

在 NRQCD 因子化中，重夸克偶素的产生具有因子化形式

$$\sigma(H)=\sum_n \frac{F_n(\Lambda)}{M^{d_n-4}}\langle \mathcal{O}_n^H(\Lambda)\rangle \tag{13.53}$$

其中 F_n 对应于微扰可算的短程系数，$\langle \mathcal{O}_n^H(\Lambda)\rangle \equiv \langle 0|\mathcal{O}_n^H(\Lambda)|0\rangle$ 对应于非微扰的长程矩阵元，该矩阵元的值需要在重夸克偶素的静止系中计算。极化求和的重夸克偶素的产生算符的一般形式是

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_n^H &= \psi^\dagger \mathcal{K}_n \chi \left(\sum_X \sum_{m_J} |H+X\rangle\langle H+X|\right) \chi^\dagger \mathcal{K}_n' \psi \\ &= \psi^\dagger \mathcal{K}_n \chi \left(a_H^\dagger a_H\right) \chi^\dagger \mathcal{K}_n' \psi \end{aligned} \tag{13.54}$$

其中对所有不观测的末态粒子 X 进行了求和，并对重夸克偶素 H 的 $2J+1$ 个自旋态进行了求和。可以对应地定义 $\mathcal{O}^H(^1S_0^{[1]})$、$\mathcal{O}^H(^3S_1^{[1]})$ 等，只需要把 $\mathcal{K}_n$ 和 $\mathcal{K}_n'$ 用式 (13.37) 和 (13.38) 中对应算符替代即可。

类似于重夸克偶素的湮灭衰变，式 (13.53) 中因子化成立的重要条件是要求 $Q\overline{Q}$ 产生在约 $1/M$ 尺度的区域。为了讨论的简单，我们考虑重夸克偶素在 e^+e^- 对

撞中的产生，此时初态中不涉及强子。类似湮灭时的论证，在振幅或者振幅复共轭中，产生一对 $Q\overline{Q}$ 的过程中必将存在一个虚度约为 M 的粒子，它将把产生区域限制在 $1/M$ 的尺度。如果振幅中涉及的粒子的动量都是 $O(M)$ 的硬粒子，则为了使末态硬粒子的波函数在振幅一边和复共轭一边有足够的重叠度，要求振幅中的产生区域与振幅复共轭中的产生区域相距也是 $1/M$ 的尺度。故我们只需要担心软胶子或者共线胶子辐射。

对于硬的共线胶子辐射，只需要考虑其发生在尺度远大于 $1/M$ 的末态喷注内部，而不必担心它与即将强子化为重夸克偶素的 $Q\overline{Q}$ 相连接，否则必将引入一个虚度为 $O(M)$ 的重夸克传播子，使得共线辐射不产生发散。从而硬的共线辐射一定是与重夸克偶素分离开的，利用 KLN 定理可以保证，对除重夸克偶素之外所有其他末态粒子求和后，这类辐射产生的发散能够相消，故不会破坏上述的定域性。

现在仅剩下的是软胶子辐射，其中包含了既软又共线的辐射。这类辐射又可以分为两类。第一类软胶子的一端连接 $Q\overline{Q}$，另一端连接末态喷注。此时我们没法直接用 KLN 定理对末态所有粒子求和，原因在于我们规定了一个末态粒子——重夸克偶素。但是，即便只对其他粒子求和 (用费曼图的语言，相当于只求和 cut 图的部分 cut)，也应该足以消掉这第一类软胶子导致的发散[2]。第二类软胶子的两端都连接在 $Q\overline{Q}$ 上，此时完全无法用 KLN 定理，但是，这类软胶子已经在拓扑上因子化到了重夸克偶素的产生矩阵元中。我们称上述的因子化论证为拓扑因子化假设。

上述拓扑因子化假设在单圈图水平上完全正确，此时固定重夸克偶素的 cut，并对其他可能的 cut 全求和后，确实能够完全消掉第一类软胶子引起的红外发散。然而，两圈图的计算发现，拓扑因子化假设并不成立。在两圈图时，固定重夸克偶素的 cut 并对其他可能的 cut 全求和后，依然会存在末态喷注与 $Q\overline{Q}$ 之间交换软胶子导致的非拓扑因子化的红外发散。幸运的是，两圈图中发现的非拓扑因子化的红外发散与喷注的运动方向无关[10]，因而可以在产生矩阵元 (13.54) 中引入规范链 (gauge link)，一方面保证了产生矩阵元的规范不变性，另一方面能吸收这类红外发散。然而，引入的规范链能否吸收更高圈中非拓扑因子化的红外发散依然是一个未知的问题。

13.4.2 $\psi(2S)$ 超额产生与色八重态机制

ψ 粒子在强子对撞机中的产生是重夸克偶素领域的一个重要研究方向。基于 NRQCD 因子化 (13.53)，可以得到产生微分截面的表达式

$$\mathrm{d}\sigma_{\psi}(p_T)=\frac{\mathrm{d}F_{^3S_1^{[1]}}(p_T)}{M^2}\langle\mathcal{O}^{\psi}(^3S_1^{[1]})\rangle+\frac{\mathrm{d}G_{^3S_1^{[1]}}(p_T)}{M^4}\langle\mathcal{P}^{\psi}(^3S_1^{[1]})\rangle$$

$$+\frac{\mathrm{d}F_{^1S_0^{[8]}}(p_T)}{M^2}\langle\mathcal{O}^\psi(^1S_0^{[8]})\rangle+\frac{\mathrm{d}F_{^3S_1^{[8]}}(p_T)}{M^2}\langle\mathcal{O}^\psi(^3S_1^{[8]})\rangle$$
$$+\sum_{J=0,1,2}\frac{\mathrm{d}F_{^3P_J^{[8]}}(p_T)}{M^4}\langle\mathcal{O}^\psi(^3P_J^{[8]})\rangle+O(v^5) \tag{13.55}$$

其中 p_T 是 ψ 的横动量。在 NRQCD 中，色单态的产生矩阵元 $\langle\mathcal{O}^\psi(^3S_1^{[1]})\rangle$ 与衰变矩阵元可以近似地关联起来。利用真空饱和近似，可以把 $a_H^\dagger a_H$ 近似为 $|H\rangle\langle H|$，这一近似产生的误差是 v^4 量级，故有

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{O}^\psi(^3S_1^{[1]})\rangle&=\langle 0|\psi^\dagger\sigma\chi\left(\sum_{m_J=0,\pm1}|\psi\rangle\cdot\langle\psi|\right)\chi^\dagger\sigma\psi|0\rangle[1+O(v^4)]\\&=3\langle\psi|\mathcal{O}(^3S_1^{[1]})|\psi\rangle[1+O(v^4)]\end{aligned} \tag{13.56}$$

其中利用了算符的旋转不变性，意味着矩阵元对于 $2J+1$ 个不同角动量 m_J 的态所得值是一样的。利用这一关系，式 (13.55) 中 v^2 的领头项 (第一项) 的贡献能重复色单态模型的结果。

然而，Tevatron 实验发现，当 $\psi(2S)$ 的 p_T 达到 20 GeV 以上时，色单态部分的贡献比实验值小了约 30 倍。于是色单态模型完全无法描述实验行为。这被称为 $\psi(2S)$ 超额产生问题。

在 NRQCD 中，除了色单态贡献之外，式 (13.55) 中还有三种色八重态贡献。这些色八重态贡献虽然被 v^3 或 v^4 压低，但是有其他原因导致其贡献巨大地增强。对于强子对撞机中大 p_T 的 ψ 产生，在 α_s 的领头阶，色单态 $^3S_1^{[1]}$ 的微分截面的标度行为是 $p_T^{-4}(M/p_T)^4$，色八重态 $^1S_0^{[8]}$ 和 $^3P_J^{[8]}$ 的微分截面的标度行为是 $p_T^{-4}(M/p_T)^2$，而色八重态 $^3S_1^{[8]}$ 的微分截面的标度行为是 p_T^{-4}。由此可见，当 p_T 很大的时候，色八重态由于有更加温和的 p_T 行为，从而贡献可以比色单态大很多。利用这样的色八重态机制，NRQCD 成功地解释了强子对撞机中大 p_T 的 $\psi(2S)$ 超额产生问题[11]。

13.4.3　NRQCD 因子化的不足与展望

NRQCD 因子化已经用于重夸克偶素的各种高能环境中的产生，包括强子–强子对撞、电子–强子对撞、正负电子对撞、光子–光子对撞、Z 玻色子衰变、B 介子衰变等，并取得了巨大的成功。特别是近十几年对相关过程计算了 QCD 的次领头阶修正之后，很多实验现象在 NRQCD 的框架下得到了解释，比如 $\psi(2S)$ 超额产生、χ_{c2} 与 χ_{c1} 产生截面比、B 工厂中双粲偶素产生等。然而，重夸克偶素高能产生中所用的 NRQCD 因子化远非完美。实际上，存在一些挑战性的问题，使得我们或许需要修改 NRQCD 因子化框架。

最重要的一个问题是 NRQCD 产生矩阵元的普适性。如果 NRQCD 因子化是正确的，则其产生矩阵元在各种产生环境中都将是相同的，换句话说矩阵元有普适性。然而，当前的研究发现，矩阵元的普适性存在很大的疑问。比如，B 工厂中实验数据要 $\langle \mathcal{O}^{\psi}(^1S_0^{[8]})\rangle$ 和 $\langle \mathcal{O}^{\psi}(^3P_J^{[8]})\rangle$ 非常小，而强子对撞机中要求这两个矩阵元比较大。

另外一个比较受关注的问题是 ψ 极化疑难问题。领头阶 NRQCD 预言，ψ 在强子对撞机中的大 p_T 产生几乎是横极化行为，这被认为是 NRQCD 因子化的一个判定性预言；然而，最终实验发现，ψ 的 p_T 达到了很大的时候，产生的 ψ 依然几乎是无极化的。虽然 QCD 次领头阶在很大程度上能理解 J/ψ 的极化行为，但是对 $\psi(2S)$ 依然解释的不好。

上述两个问题是 NRQCD 因子化当前的最大挑战。这些问题的存在，使我们不得不重新思考 NRQCD 因子化在重夸克偶素产生中是否真的成立。目前虽然没有微扰论所有阶的严格证明，但是至少从两圈图的计算看出，也没有太强的原因导致因子化会被破坏。无论如何，对 NRQCD 因子化在微扰论所有阶的严格证明毫无疑问是极其重要的。

如果 NRQCD 因子化确实到微扰论的所有阶都是成立的，那么上述问题的存在很可能说明 NRQCD 的 v^2 展开收敛性很差。这正是最近提出的软胶子因子化的出发点[12]，该文的观点认为，NRQCD 因子化中的 v^2 展开序列收敛性非常差，故需要对展开序列做重求和。

为了清楚地看出 NRQCD 因子化的展开序列收敛性问题，我们以 ψ 在强子对撞机中大 p_T 产生为例。在微扰论框架下，大 p_T 时候微分截面的标度行为是 p_T^{-4}。然而，在 NRQCD 框架下 v^2 的领头阶计算过程中，直接出现的是 $Q\overline{Q}$ 的横动量 $p_T^{Q\overline{Q}}$，而非 ψ 的横动量 p_T，这两者之间的差异是 $O(v^2)$：$p_T^{Q\overline{Q}} = p_T[1+av^2]$，其中 $a \sim O(1)$。于是 v^2 领头阶的 NRQCD 中把 $p_T^{Q\overline{Q}}$ 近似为 p_T 相当于取了以下展开的第一阶近似：

$$\frac{1}{(1+av^2)^4} = 1 - 4av^2 + 10(av^2)^2 - 20(av^2)^3 + \cdots \tag{13.57}$$

如果取 $av^2 = 0.3$，上式给出

$$0.35 = 1 - 1.2 + 0.9 - 0.54 + \cdots \tag{13.58}$$

可见，NRQCD 中需要计算到 v^2 的很高阶才能给出合理的结果。在软胶子因子化框架下，上述 v^2 展开收敛性级差的项通过重求和的方式全部保留下来，不做这部分的展开。因而，软胶子因子化有希望解决 NRQCD 因子化遇到的困难。

总之，NRQCD 因子化仍然是一个值得认真关注和深入探讨的问题。

参考文献

[1] Caswell W E, Lepage G P. Phys. Lett B., 1986, 167: 437.

[2] Bodwin G T, Braaten E, Lepage G P. Phys. Rev. D, 1995, 51: 1125; Erratum. Phys. Rev. D, 1997, 55: 5853.

[3] Foldy L L, Wouthuysen S A. Phys. Rev., 1950, 78: 29; Tani S. Prog. Theor. Phys., 1951, 6: 267.

[4] Braaten E. hep-ph/9702225.

[5] Georgi H. Ann. Rev. Nucl. Part. Sci., 1993, 43: 209.

[6] Lepage G P, Magnea L, Nakhleh C, Magnea U, Hornbostel K. Phys. Rev. D, 1992, 46: 4052.

[7] Davies C T H, et al. Phys. Rev. Lett., 1994, 73: 2654; Phys. Lett. B, 1995, 345: 42.

[8] Luke M E, Manohar A V. Phys. Rev. D, 1997, 55: 4129.

[9] Kang Z B, Ma Y Q, Qiu J W, Sterman G. Phys. Rev. D, 2014, 90(3): 034006.

[10] Nayak G C, Qiu J W, Sterman G F. Phys. Rev. D, 2005, 72: 114012.

[11] Braaten E, Fleming S. Phys. Rev. Lett., 1995, 74: 3327.

[12] Ma Y Q, Chao K T. arXiv:1703.08402 [hep-ph].

第 14 章　热密 QCD 理论和高能重离子碰撞物理

量子色动力学 (QCD) 是描述强子和核子内部夸克和胶子之间强相互作用的基本理论。量子色动力学的非阿贝尔规范对称性导致其有两个显著的特点：一个是禁闭，另外一个是渐近自由。真空中夸克和胶子由于强相互作用被禁闭在强子中，然而由于 QCD 渐近自由的性质在高温高密极端情况下强子袋会被打破，真空的结构会发生改变而导致相变、对称性破缺并且出现自由的夸克和胶子从而形成一种新的物质形态。这个新的物质态称之为夸克胶子等离子体态 (quark gluon plasma, QGP)。大爆炸理论认为早期宇宙 (1μs 内) 中的物质基本上由 QGP 组成。即使在当今宇宙中的中子星的内核，当重子密度超过了相变临界值时，夸克物质也会存在。利用从第一性原理出发的格点 QCD 的方法人们已经计算得到了强相互作用物质的物态方程，并发现由强子相到夸克胶子解禁闭态相的转变在零重子密度下并不是一个严格意义上的相变，而是一个快速的平滑过渡 (rapid crossover)。这个平滑过渡的相转变温度是 ~154 MeV。

为了更好地研究 QGP 的性质，人们认识到在实验室中可以通过高能重离子碰撞产生出夸克胶子等离子体。这主要是因为高能重离子碰撞可以在大体积内产生高能量密度的物质，在足够高的碰撞能量下可以达到 QCD 相变临界条件，比如能量密度足够高使得环境温度达到发生相转变的临界温度。利用重离子碰撞探测夸克胶子等离子体的实验已经开展了三十多年，碰撞能量逐渐升高。高能重离子碰撞实验始于 20 世纪 80 年代初的伯克利的 Bevalac 加速器，紧接着在 80 年代后期布鲁克海文国家实验室的 AGS 和欧洲核子中心的 SPS 也相继跟进，跨入 21 世纪以后布鲁克海文国家实验室的相对论重离子碰撞机 (RHIC) 开始运行，10 年后在欧洲核子中心更高能量的大型强子对撞机(LHC) 上的重离子碰撞实验也开始产生数据。在 AGS 和 SPS 上的实验中观测到了热密物质所表现的一些丰富的现象，特别是矢量介子的展宽或质量改变和粲夸克偶素的反常压低等。由于很难将强子态的贡献从观察结果中分离出来，是否在 AGS 和 SPS 上的重离子碰撞中已经产生了一个较长时间的 QGP 态尚无定论。RHIC 是世界上第一个专门的高能重离子对撞机，以当时最大的核碰撞能量 (核核碰撞质心系能量为 200 GeV) 开创了极端条件下强相互作用核物质研究的新时代。而在 2010 开始运行的 LHC 重离子碰撞实验，碰撞能量达到了 TeV 量级，使重离子碰撞达到了前所未有的初始能量密度。同时高能量的重离子碰撞中还伴随着在低能碰撞中非常难得的稀有硬过程。这些

都给科学家们提供了研究碰撞中产生的致密物质性质的良好实验条件。

人们通过对 RHIC 前十几年和 LHC 近几年得到的大量数据的分析已经清楚地知道，在高能核-核对心碰撞中产生了高能量密度、近似于局部平衡的强相互作用物质形态。利用硬过程所探测到的碰撞中产生的核物质初始的能量密度估计比冷核物质高出两个数量级，同时也远高于格点 QCD 计算得到的强子相到夸克胶子等离子体相转变的临界能量密度。所观测到强子末态中的集体流效应表明了热密物质的早期的热化，同时其流体动力学的演化与夸克胶子等离子体的物态方程也是一致的。这种新的物质形态显示出了近似于理想的强耦合流体的性质，与 QCD 在渐近高温极限下的理想自由气体完全不同。另外各向异性流对横动量的依赖则呈现出对强子的价夸克数的标度性，体现出致密物质的夸克自由度以及致密物质强子化时的夸克重组机制。这样的夸克自由度及夸克重组机制可以很好地解释 RHIC，特别是 LHC 实验中，粲偶素压低对碰撞能量、碰撞中心度以及粲偶素横动量的依赖。

美国 RHIC 的第一阶段实验测量已经完成，而欧洲 LHC 正在等待能量升级。接下来在 RHIC 上主要是提供对硬过程，特别是重味夸克能量损失及热化等相关过程更精确的实验数据。在 RHIC 束流能量扫描实验中，人们将继续寻找 QCD 在有限重子密度区的相变临界点。而在能量升级后的 LHC 实验将会对集体流及喷注淬火做进一步细致的测量和研究，以便从理论上更精确地提取高温下 QGP 的物理性质。在下面的章节中，将简要地介绍高能核物理中的基本理论研究方法，特别是格点量子色动力学和喷注淬火。

14.1 有限温度场论的介绍

传统的量子场论是建立在零温的基础之上，其理论计算如电子电子碰撞产生粒子的截面的结果与实验测量已经很好地符合。如考虑的体系处于热环境中，例如，在 RHIC 和 LHC 上进行的高能重离子碰撞体系，我们则需要运用到热场理论。热场理论是量子场论与统计力学的结合，它可以用来研究早期宇宙的相变及暴涨，天文体系如白矮星、中子星及我们前面提到的实验室中的高能重离子碰撞体系等非零温平衡体系的性质。我们在这里对有限温度场论理论做一个简要的介绍，详细内容可参考教科书如 [1]。

下面简单回顾一下统计力学。与大热源有能量交换而无粒子数交换的具有固定温度、粒子数和体积的平衡封闭体系可以由正则系统来描述，更一般的体系则是与大热源、粒子源既有能量交换又有粒子交换的开放体系。这个体系有固定温度、化学势能和体积，可由巨正则系综来描述。为了建立在非零温度下的量子场论，我们考察由巨正则系综描述的开放体系。我们将引入和计算与巨正则系综对应的密

度算符和配分函数。

考察哈密顿量为 $\hat{H}$ 的体系，体系的化学势能为 μ，则体系处于平衡态时的性质可由其密度算符来描述

$$\rho = \exp\left(-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})\right) \tag{14.1}$$

这里 $\beta = 1/(k_B T)$, k_B 是玻尔兹曼常数，T 是体系的温度。体系的正则配分函数则可表示为

$$Z = \operatorname{Tr}\rho \tag{14.2}$$

引入巨势

$$\Omega(T, \mu, V) = -\frac{1}{\beta}\ln Z \tag{14.3}$$

巨势与其他热力学量的关系为

$$\Omega = -PV = E - \mu N - TS \tag{14.4}$$

其中 P 是压强，S 是熵，则体系的热力学性质均可以通过巨势由配分函数表示出来。例如，压强 P，熵 S 和平均粒子数 N 与配分函数有如下关系

$$P = -\frac{\partial\Omega}{\partial V} = T\frac{\partial \ln Z}{\partial V} \tag{14.5}$$

$$S = -\frac{\partial\Omega}{\partial T} = T\frac{\partial \ln Z}{\partial T} \tag{14.6}$$

$$N = \langle\hat{N}\rangle = -\frac{\partial\Omega}{\partial\mu} = T\frac{\partial \ln Z}{\partial\mu} \tag{14.7}$$

回顾在零温的量子场论，某一算符 $\hat{O}$ 的期望值可表示为

$$\langle\hat{O}\rangle_{T=0} = \sum_n \langle n|\hat{O}|n\rangle \tag{14.8}$$

其中 $|n\rangle$ 表示的是正交态的完备集。而在非零温的情况下，算符 $\hat{O}$ 的期望值需要考虑一个额外的玻尔兹曼权重因子，即

$$\langle\hat{O}\rangle_\beta = \frac{1}{Z}\sum_n \langle n|\hat{O}|n\rangle \mathrm{e}^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})} = \frac{1}{Z}\operatorname{Tr}(\mathrm{e}^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}\hat{O}) = \frac{\operatorname{Tr}\hat{O}\rho}{\operatorname{Tr}\rho} \tag{14.9}$$

由此可推导出有限温度场论中的一个基本关系式。出发点为两点关联函数，

$$\begin{aligned}
\langle\phi(x,t)\phi(y,0)\rangle_\beta &= \frac{1}{Z}\operatorname{Tr}\left[\mathrm{e}^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}\phi(x,t)\,\phi(y,0)\right] \\
&= \frac{1}{Z}\operatorname{Tr}\left[\phi(x,t)\mathrm{e}^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\mathrm{i}\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})\right)}\phi(y,0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(-\mathrm{i}\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})\right)}\right] \\
&= \frac{1}{Z}\operatorname{Tr}\left[\phi(x,t)\mathrm{e}^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}\phi(y,-\mathrm{i}\beta)\right] \\
&= \langle\phi(y,-\mathrm{i}\beta)\phi(x,t)\rangle_\beta
\end{aligned} \tag{14.10}$$

通过上式可以看到与温度相关的虚数 $-\mathrm{i}\beta$ 处在时间变量的位置上。可引入如下变换

$$t \to -\mathrm{i}\tau \quad 或 \quad \tau = \mathrm{i}t \tag{14.11}$$

即由实时的闵氏空间转换为虚时的欧氏空间，则上述关系式可变为

$$\langle \phi(x,t)\phi(y,0)\rangle_\beta = \langle \phi(y,\beta)\phi(x,\tau)\rangle_\beta \tag{14.12}$$

这关系式即为 Kubo-Martin-Schwinger(KMS) 关系式。由 KMS 关系式可以得出

$$\phi(x,0) = \pm\phi(x,\beta) \tag{14.13}$$

这里的正负号表示的是场算符是对易或反对易算符，即场是玻色场或费米场。同时 KMS 关系表示出了场在虚时空间的周期性或反周期性边界条件。

上述表达式是基于坐标空间，我们亦可将其变换到频率空间

$$\phi(x,\tau) = \sum_n \phi(x,\omega_n)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n\tau} \tag{14.14}$$

在频率空间上述表达式是离散而非连续的。为了满足 KMS 关系，频率 ω_n 只可能是离散的。ω_n 被称为 Matsubara 频率。对于玻色场

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta} \tag{14.15}$$

对于费米场

$$\omega_n = \frac{2\pi(n+1)}{\beta} \tag{14.16}$$

这里 n 为整数，即 $n = -\infty, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2 \cdots, \infty$。

上述讨论都是基于场论的算符框架。为了更方便地研究规范场特别是非阿贝尔 (non-Abelian) 的规范场，如量子色动力学，路径积分的框架也被发展出来了。如配分函数 Z 可用路径积分的形式在欧氏空间中表示如下

$$Z = \int \mathcal{D}\phi\,\langle\phi|\mathrm{e}^{-\beta H}|\phi\rangle = \int \mathcal{D}\phi\,\exp\Big[-\int_0^\beta \mathrm{d}\tau\mathcal{L}(\tau)\Big] \tag{14.17}$$

这里 $\mathcal{L}(\tau)$ 是体系的拉格朗日量密度，场 ϕ 必须满足 (14.13) 所示的边界条件。

下面介绍量子色动力学的配分函数。QCD 的配分函数 $Z(T,V,\vec{\mu})$ 可由对胶子场 (A_ν) 和费米子场 $(\bar{\psi},\ \psi)$ 的路径积分得到。这里的 $\vec{\mu} \equiv (\mu_u, \mu_d, \mu_s, ...)$ 表示上夸克、下夸克、奇异夸克等的化学势能。同时配分函数也依赖于不同味道的夸克的

质量 $\vec{m} \equiv (m_u, m_d, m_s, ...)$。从闵氏空间由 Wick 转动 $t \to -\mathrm{i}\tau(\tau \in \mathbb{R})$ 到欧氏空间，QCD 的拉氏量可表示为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^E_{\mathrm{QCD}} &= \mathcal{L}^E_{\mathrm{gluon}} + \mathcal{L}^E_{\mathrm{Fermion}} \\ &= -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}_a(x)F^a_{\mu\nu} - \sum_{f=u,d,s,\ldots} \bar{\psi}^\alpha_f(x)\left(\not{D}^E_{\alpha\beta} + m_f\delta_{\alpha\beta}\right)\psi^\beta_f(x)\end{aligned} \tag{14.18}$$

其中 E 表示欧氏空间，希腊字母 α, β 表示的是旋量角标，$a = 1, \cdots, N_c^2 - 1$ 是颜色指标。N_c 是颜色的数目，对于 QCD 其 $N_c = 3$。m_f 是味道为 f 的夸克的质量。协变导数 $\not{D}^E$ 和场张量 $F^a_{\mu\nu}$ 具体可表示为

$$\not{D}^E = \gamma^E_\mu D^E_\mu = \left(\partial_\mu + \mathrm{i}g\frac{\lambda_a}{2}A^a_\mu\right)\gamma^E_\mu \tag{14.19}$$

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu \tag{14.20}$$

这里 A^a_μ 是规范场，ψ^α_f ($\bar{\psi}^\alpha_f$) 是夸克 (反夸克) 场，λ^a 是 $\mathrm{SU}(N_c)$ 群的生成元，f_{abc} 为对应的结构常数。γ^E_μ 是欧氏空间中的 γ 矩阵，它们满足 $\{\gamma^E_\mu, \gamma^E_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}$。$g$ 是裸耦合常数。

由此在欧氏空间中路径积分的框架下，QCD 的配分函数可表示为

$$\mathcal{Z}(T, V, \vec{\mu}) = \int \prod_\mu \mathcal{D}A_\mu \prod_{f=u,d,s,\ldots} \mathcal{D}\psi_f \mathcal{D}\bar{\psi}_f \, \mathrm{e}^{-S_E(T,V,\vec{\mu})} \tag{14.21}$$

所需要的边界条件如下：

$$\begin{aligned}A_\mu(x, 1/T) &= A_\mu(x, 0) \\ \psi_f(x, 1/T) &= -\psi_f(x, 0) \\ \bar{\psi}_f(x, 1/T) &= -\bar{\psi}_f(x, 0)\end{aligned} \tag{14.22}$$

欧氏空间中的作用量

$$S_E(T, V, \vec{\mu}) \equiv -\int_0^{1/T} \mathrm{d}x_0 \int_V \mathrm{d}^3\boldsymbol{x} \, \mathcal{L}^E(\vec{\mu}), \quad \vec{\mu} = \mu_u, \mu_d, \mu_s, \cdots \tag{14.23}$$

此处我们并没写出欧氏空间中的拉格朗日量对场 $(A_\mu, \bar{\psi}_f, \psi_f)$ 的依赖，而是强调其与化学势能的如下关系：

$$\mathcal{L}^E(\vec{\mu}) = \mathcal{L}^E_{\mathrm{QCD}} + \sum_{f=u,d,s,\ldots} \mu_f \bar{\psi}_f \gamma_0 \psi_f \tag{14.24}$$

由此某一物理观测量 $\mathcal{O}$ 的热场平均可由下式求得

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z(T,V,\vec{\mu})} \int \prod_{\mu} \mathcal{D}A_{\mu} \prod_{f} \mathcal{D}\psi_f \mathcal{D}\bar{\psi}_f \, \mathcal{O} \, \mathrm{e}^{-S_E(T,V,\vec{\mu})} \tag{14.25}$$

因此 QCD 基本热力学量如压强 (P)，能量密度 (ϵ) 和净夸克数密度 n_f 可由配分函数表示出来

$$\frac{P}{T^4} = \frac{1}{VT^3} \ln Z(T,V,\vec{\mu}) \tag{14.26}$$

$$\frac{\epsilon}{T^4} = -\frac{1}{VT^4} \left. \frac{\partial \ln Z(T,V,\vec{\mu})}{\partial 1/T} \right|_{\vec{\mu}/T} \tag{14.27}$$

$$\frac{n_f}{T^3} = \frac{1}{VT^3} \frac{\partial \ln Z(T,V,\vec{\mu})}{\partial \hat{\mu}_f} \tag{14.28}$$

其中 $\hat{\mu}_f = \mu_f/T$。

14.2　格点 QCD 的应用

在长程或低能区间的格点量子色动力学能非常有效地、系统地研究强相互作用核物质在极端条件，如有限温度、有限密度下的性质。格点量子色动力学是一个从第一性原理出发并系统地包含了强相互作用所有性质的数值模拟方法。它首先对验证量子色动力学本身作为一个描述强相互作用的理论有很重要的价值，其次它能预言和发现量子色动力学在强耦合的长程区域内新的物理现象。在非零温和有限重子化学势下，格点量子色动力学的研究一方面对在美国的 RHIC 和在欧洲的 LHC 重离子碰撞实验中寻找夸克胶子等离子体和研究其性质有十分重要的指导意义，另一方面对早期宇宙学的动力演化及天体物理的研究也有很重要的价值。它具体的应用主要包含 QCD 热力学性质、输运性质、热密物质中强子的性质、外磁场下的性质以及 QCD 相结构的研究等[2]。

格点计算的所需的资源随着动力学海夸克质量的减少而迅速增大，随着计算机硬件的发展和格点计算算法和程序的发展和优化，目前热密格点 QCD 领域中模拟含有动力学夸克对应着具有物理质量的 π 介子 (即 $m_\pi \approx 140$ MeV) 的 QCD 系统已经非常普遍。同时计算都集中在 $N_f = 2+1$ 和 $N_f = 2$ QCD，这里“2”是表示简并的上夸克和下夸克，“1”表示的是奇异夸克。这里最常用的离散方式是改进的交错 (staggered) 费米子，如 stout 和高度改进的交错费米子 (highly improved staggered quarks, HISQ)。Wilson 费米子的计算也有发展，主要问题是模拟具有物理质量的 π 介子的情形还有很大的困难[3]；手征费米子如畴壁 (domain wall) 费米子和重叠 (overlap) 费米子还没有广泛的应用，主要集中在研究 QCD 中 $U(1)_A$ 对称性破缺及 QCD 拓扑结构等方面[4]。

目前热密物质格点 QCD 计算领域最显著的结果就是：①确定了强子物质形态转变到夸克胶子等离子体相的相转变温度及相转变的类型；②确定得到了 QCD 物质的状态方程。我们将在下面一一介绍。

14.2.1 高温高密条件下的格点 QCD

有限温度场论可以定义在一个有限时间长度的平面上。考虑一个超立方格，格点间距为 a，则格子时间方向上的长度和空间的体积分别为

$$T^{-1} = N_\tau a, \quad V = (N_\sigma a)^3 \tag{14.29}$$

这里 N_τ 表示的是欧氏空间中时间方向上的格点的数目，N_σ 表示的则是空间方向上的格点数目。$N_\tau a \to \infty$ 对应的是零温极限。

在有限温度时，规范链变量和夸克场分别满足周期性和反周期性边界条件

$$U_\mu(n_4 + N_\tau, \boldsymbol{n}) = U_\mu(n_4, \boldsymbol{n}), \quad \psi(n_4 + N_\tau, \boldsymbol{n}) = -\psi(n_4, \boldsymbol{n}) \tag{14.30}$$

目前有两种不同的方法可被用来改变格点 QCD 模拟中的温度。第一种方法是固定格点间距 a 和 N_σ 并改变 N_τ。由于 N_τ 的改变不是连续的，因此 T 的变化是离散的。但好处是在对应的零温模拟中只需要考虑调整这一对应格点间距的参数。第二种方法是假设空间方向上的格点数足够多 (一般来说 $N_\sigma/N_\tau > 4$)，固定 N_σ 和 N_τ，通过改变格点间距来改变温度。改变 a 等同于改变格点规范常数 $\beta(a)$。格点规范常数是格点 QCD 模拟中的直接输入参数，与耦合常数 $g(a)$ 有紧密联系：$\beta(a) = 6/g^2(a)$。小的 $\beta(a)$ 对应着大的耦合常数 $g(a)$ 和大的格点间距 a 以及低的温度。另外，例如，在弱耦合展开的零头阶，温度与耦合常数有如下关系：

$$T \simeq \frac{\Lambda_{\mathrm{LAT}}}{N_\tau} \exp\left(\frac{1}{2\beta_0 g^2(a)}\right) \tag{14.31}$$

从上面这个式子可以看出通过改变 $g(a)$ 可以连续地改变温度的大小。由于格点间距不同，为了得到相同的物理 (如对应零温时体系的 m_π 和 m_K 大小不变)，裸夸克质量必须随格点间距 (格点规范常数 β) 的变化而变化。我们将这样的裸夸克质量随 β 的变化关系称为“恒定物理曲线”(line of constant physics)。目前第一种方法多用于淬火近似下 (quenched) 的 QCD 的情形，而第二种方法常应用在含动力学海夸克 (dynamic QCD) 的情形。

在零重子化学势能下，费米子矩阵 M 满足如下关系

$$(\gamma_5 M)^\dagger = \gamma_5 M \tag{14.32}$$

利用上式可得

$$\begin{aligned}(\det[M])^* &= \det[M^*] = \det[M^\dagger] = \det[\gamma_5 M \gamma_5] \\ &= \det[\gamma_5]\det[M]\det[\gamma_5] = \det[M]\end{aligned} \tag{14.33}$$

因此费米子矩阵的行列式值 $\det[M]$ 是实数。在非零重子化学势能的情况下费米子矩阵 D 不满足 $(\gamma_5 D)^\dagger = \gamma_5 D$, 因此费米子矩阵行列式的值 $\det(D)$ 为复数，一般采用的重要抽样的蒙特卡罗模拟方法不再适用。目前尝试性的方法有郎之万方程[5] 和 Lefschetz thimble[6] 等方法。通常采用的有将实数的化学势能转化为虚数化学势能[7] 和泰勒展开[8] 的方法。

14.2.2　QCD 的热力学性质

QCD 热力学性质的研究主要为其状态方程 (equation of state), 即压强 (p)，能量 (E) 和熵 (S) 等热力学量随温度 T 等外参量的变化。QCD 的状态方程一直以来是格点 QCD 领域内一个长期的研究目标。目前在零重子数密度下 (2+1) 味的 QCD 状态方程在连续极限下已经被精确地确定了。为了了解在格点 QCD 中状态方程是如何计算得到的，我们先来回顾一下热力学量与系统配分函数 Z 的关系。它们的关系可表示如下：

$$F = -T\ln Z, \quad p = \frac{\partial(T\ln Z)}{\partial V} \tag{14.34}$$

$$S = \frac{\partial(T\ln Z)}{\partial T}, \quad N_i = \frac{\partial(T\ln Z)}{\partial \mu_i} \tag{14.35}$$

$$E = -pV + TS + \mu_i N_i \tag{14.36}$$

由于吉布斯自由能 F, 熵 S, 粒子数 N_i 和内能 E 是广延量, 同时当讨论一个统计系统的时候我们关心的是其在热力学极限下 (即体系的粒子数 $N \to \infty$, $V \to \infty$ 且 N/V 有限) 的性质，我们讨论广延量的时候通常是考虑它们的密度，即

$$f = \frac{F}{V}, \quad \epsilon = \frac{E}{V} \tag{14.37}$$

$$s = \frac{S}{V}, \quad n_i = \frac{N_i}{V} \tag{14.38}$$

由此可以进一步可得如下关系式：

$$p = -f = \frac{T}{V}\ln Z, \quad s = \frac{\partial p}{\partial T} \tag{14.39}$$

$$n_i = \frac{\partial p}{\partial \mu_i}, \quad \epsilon = -\frac{1}{V}\frac{\partial \ln Z}{\partial T^{-1}} + \mu_i n_i \tag{14.40}$$

要得到上述热力学量，一个关键的物理量是体系的能动量张量的迹。它通常被称为迹反常 (trace anomaly), 可以表示为

$$\begin{aligned}\Theta^{\mu\mu}(T) &\equiv T^5 \frac{\partial\, p(T)/T^4}{\partial T} = \frac{\partial\, \ln Z/VT^3}{\partial T} \\ &= \epsilon - 3p\end{aligned} \tag{14.41}$$

通过对上式进行积分可得

$$\frac{p(T)}{T^4}-\frac{p(T_0)}{T_0^4}=\int_{T_0}^{T}\mathrm{d}T'\ \frac{\epsilon-3p}{T'^5} \tag{14.42}$$

由此就可以得到压强 p, 能量密度 ϵ 以及熵密度 $s=(\epsilon+p)/T$。因此在格点量子色动力学计算中，唯一的独立的量是 $\Theta^{\mu\mu}(T)$。只要这一物理量被确定，其他热力学量就可以得到了。

改进的 Staggered 费米子作用量, 如 Stout 和 HISQ 作用量，被广泛地用来研究强相互作用物质的状态方程。图 14.1 中左图给出的是利用两种不同离散方式、连续极限外推得到的零重子数密度下 (2+1) 味的 QCD 能动量张量的迹 $(\epsilon-3p)/T^4$, 压强 p/T^4 及熵密度 $s/4T^3$ 随温度的变化关系[9]。这两种离散方式即为 Stout 跟 HISQ。可以看到，利用两种不同离散方式计算的得到结果具有很好的一致性。右图给出了利用 HISQ 作用量计算得到的 $3p/T^4$, ϵ/T^4 和 $3s/4T^3$ 随温度的变化关系。其中黄颜色的区间标明了手征相转变 (chiral crossover) 发生的温度 T_c 区间，即 $T_c=(154\pm9)$ MeV。不同颜色的实线给出的是强子气 (hadron resonance gas, HRG) 模型计算得到的对应物理量。从图中可以看出，在低于 T_c 时 HRG 能对这些物理量给出很好的描述。黑色点线给出的是这些物理量在高温时相同的极限值。这表明在 $T\simeq380$ MeV 时夸克胶子等离子体尚未变成理想气体。从右图中我们也可以得到，在临界温度 T_c 区间时的能量密度 $\epsilon_c=(0.34\pm0.16)\ \mathrm{GeV/fm^3}$。我们知道核物质的能量密度 $\epsilon^{\mathrm{nuclear}}\simeq0.15\ \mathrm{GeV/fm^3}$; 如果假定核子的半径为 $R_N\simeq0.8\ \mathrm{fm}$, 则核

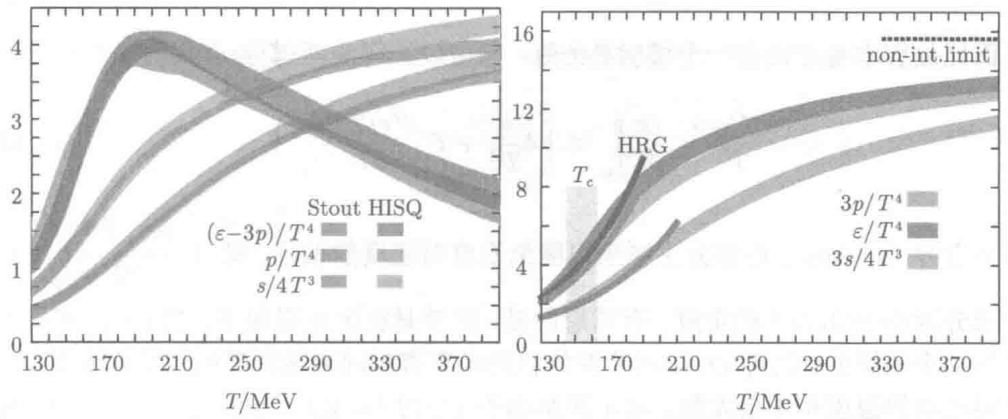


图 14.1 左图: 比较利用两种不同的离散方式 (HISQ[9] 和 Stout[10]) 计算得到 (2+1) 味 QCD 的 $(\epsilon-3P)/T^4$, 压强和熵密度的差别。右图: 利用 HISQ 作用量计算得到的在连续极限下的压强; 能量密度和熵密度随温度的变化关系[9]。实线表示的是强子气体模型计算得到的结果，点线表示的是在理想夸克胶子气中的结果

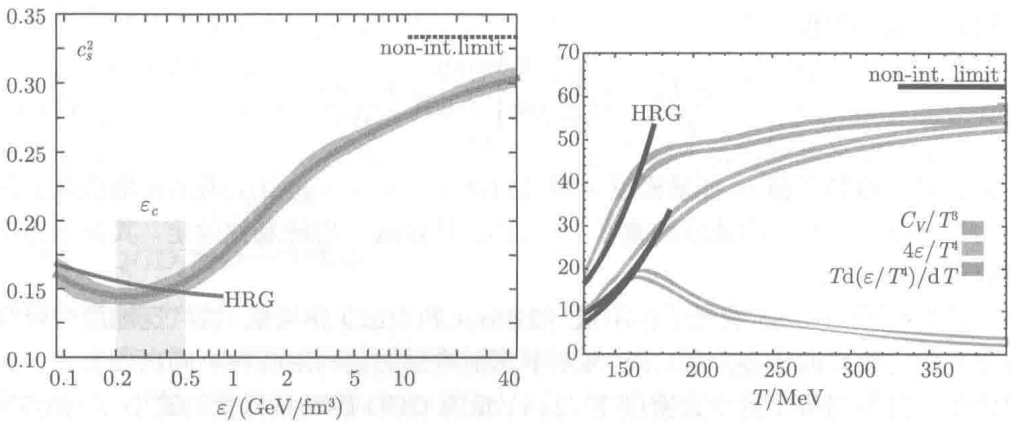


图 14.2　左图: (2+1) 味 QCD 的声速; 右图: 比热容及方程 (14.44) 中 "≡" 右边的两项随温度的变化关系, 在低温和高温的黑色实线分别代表强子气与无相互作用的夸克胶子气中的结果

子内的能量密度为 $\epsilon^{\mathrm{nucleon}} \simeq 0.45\ \mathrm{GeV/fm^3}$。由此得知 ϵ_c 非常接近在 $R_N \simeq 0.8\mathrm{fm}$ 时的核子的能量密度。

图 14.2 左图中给出的是 (2+1) 味的 QCD 中声速 $c_s^2 = \mathrm{d}p/\mathrm{d}\epsilon$ 随温度的变化关系。它随着温度的升高先减小后变大。声速也反比于比热容 $C_V = \mathrm{d}\epsilon/\mathrm{d}T$,

$$c_s^2 = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\epsilon} = \frac{\mathrm{d}p/\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\epsilon/\mathrm{d}T} = \frac{s}{C_V} \tag{14.43}$$

然而比热容本身并没有一个很明显的峰。它可以分解为两部分:

$$\frac{C_V}{T^3} = \left.\frac{\partial\epsilon}{\partial T}\right|_V \equiv \left(4\frac{\epsilon}{T^4} + T\left.\frac{\partial(\epsilon/T^4)}{\partial T}\right|_V\right) \tag{14.44}$$

其中奇异 (singular) 的部分主要来自能量密度对温度的偏导, 即 $T\left.\dfrac{\partial(\epsilon/T^4)}{\partial T}\right|_V$, 但这部分远小于 $4\epsilon/T^4$ 的贡献。有意思的是, 即使是在手征极限下, 当 QCD 可能存在与一个三维的、具有 $O(4)$ 对称性的自旋模型有相同普适性质的二阶相变时, 比热容在临界温度也不会发散。这主要是由于 $C_V/T^3 \sim (|T - T_c|/T_c)^{-\alpha} + \mathrm{const.}$, 而临界指数 α 在这个普适类中为非正数。

另外, 在非零重子数密度下 QCD 的状态方程并没有得到确定的结果。这主要是由于数值计算中存在着符号问题。目前通过格点量子色动力学的状态方程并不能直接被得到。通常采用的有将实数的化学势能转化为虚数化学势能[7] 的方法和泰勒展开[8] 的方法。这里我们以泰勒展开的方法为例。

泰勒展开的方法是将体系的压强在重子化学势能 μ_B, 电荷化学势能 μ_Q 及奇异数化学势能 μ_S 为零附近进行泰勒展开,

$$\frac{P}{T^4}=\frac{1}{VT^3}\ln\mathcal{Z}(T,V,\hat{\mu}_u,\hat{\mu}_d,\hat{\mu}_s)=\sum_{i,j,k=0}^{\infty}\frac{\chi_{ijk}^{BQS}}{i!j!\,k!}\hat{\mu}_B^i\hat{\mu}_Q^j\hat{\mu}_S^k \tag{14.45}$$

其中 $\chi_{000}^{BQS}\equiv P(T,0)/T^4$。这些与守恒量子数对应的化学势能与夸克化学势能 μ_u, μ_d 及 μ_s 有如下关系

$$\begin{aligned}\mu_u&=\frac{1}{3}\mu_B+\frac{2}{3}\mu_Q\\ \mu_d&=\frac{1}{3}\mu_B-\frac{1}{3}\mu_Q\\ \mu_s&=\frac{1}{3}\mu_B-\frac{1}{3}\mu_Q-\mu_S\end{aligned} \tag{14.46}$$

泰勒展开系数 χ_{ijk}^{BQS}, 也称为广义磁化率 (generalized susceptibilities), 可以在化学势能为零的情况下计算得到

$$\chi_{ijk}^{BQS}\equiv\chi_{ijk}^{BQS}(T)=\left.\frac{\partial P(T,\hat{\mu})/T^4}{\partial\hat{\mu}_B^i\partial\hat{\mu}_Q^j\partial\hat{\mu}_S^k}\right|_{\hat{\mu}=0} \tag{14.47}$$

利用压强表达式 (14.45), 我们可以很容易地计算得到各种守恒量的数密度 n_X

$$\frac{n_X}{T^3}=\frac{\partial P/T^4}{\partial\hat{\mu}_X},\quad X=B,\ Q,\ S \tag{14.48}$$

为了得到能量密度 (ϵ) 和熵密度 (s), 我们需要压强对温度的偏导

$$\Delta(T,\hat{\mu}_B,\hat{\mu}_Q,\hat{\mu}_S)\equiv\frac{\epsilon-3P}{T^4}=T\frac{\partial P/T^4}{\partial T}=\sum_{i,j,k=0}^{\infty}\frac{\Xi_{ijk}^{BQS}}{i!j!\,k!}\hat{\mu}_B^i\hat{\mu}_Q^j\hat{\mu}_S^k \tag{14.49}$$

其中 i,j,k 之和为偶数且

$$\Xi_{ijk}^{BQS}(T)=T\frac{\mathrm{d}\chi_{ijk}^{BQS}(T)}{\mathrm{d}T} \tag{14.50}$$

能量密度 (ϵ) 和熵密度 (s) 可以最终表示为

$$\frac{\epsilon}{T^4}=\sum_{i,j,k=0}^{\infty}\frac{\Xi_{ijk}^{BQS}+3\chi_{ijk}^{BQS}}{i!\,j!\,k!}\hat{\mu}_B^i\hat{\mu}_Q^j\hat{\mu}_S^k \tag{14.51}$$

$$\begin{aligned}\frac{s}{T^3}&=\frac{\epsilon+p-\mu_Bn_B-\mu_Qn_Q-\mu_Sn_S}{T^4}\\ &=\sum_{i,j,k=0}^{\infty}\frac{\Xi_{ijk}^{BQS}+(4-i-j-k)\chi_{ijk}^{BQS}}{i!j!\,k!}\hat{\mu}_B^i\hat{\mu}_Q^j\hat{\mu}_S^k\end{aligned} \tag{14.52}$$

由此关键的问题就是求解出零化学势能下的广义磁化率。

另外，高温极限下体系可近似为由质量为零的夸克和胶子组成的理想气体。这个极限下体系的压强可表示为一个最高为二阶化学势能的多项式

$$\frac{P_{\text{ideal}}}{T^4}=\frac{8\pi^2}{45}+\sum_{f=u,d,s}\left[\frac{7\pi^2}{60}+\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_f}{T}\right)^2+\frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{\mu_f}{T}\right)^4\right] \tag{14.53}$$

这与领头阶 ($\mathcal{O}(g^2)$) 的微扰理论计算结果相同[11]。此时压强对化学能的四阶以上的展开系数均为零。更高阶的微扰计算会变得非常复杂，这主要是由于需要考虑反映电磁屏蔽长度的 $\mathcal{O}(gT)$ 和 $\mathcal{O}(g^2T)$ 的非微扰尺度[12]，因此要用到诸如硬热圈微扰理论 (hard thermal loop)[13] 或维数缩减 (dimenional reduction)[14] 的方法。

图 14.3 给出了在 $\mu_Q=\mu_S=0$ 的情况下压强的二阶泰勒展开系数，四阶与二阶泰勒展开系数的比值，六阶与二阶泰勒系数的比值随温度的变化关系。可以看到

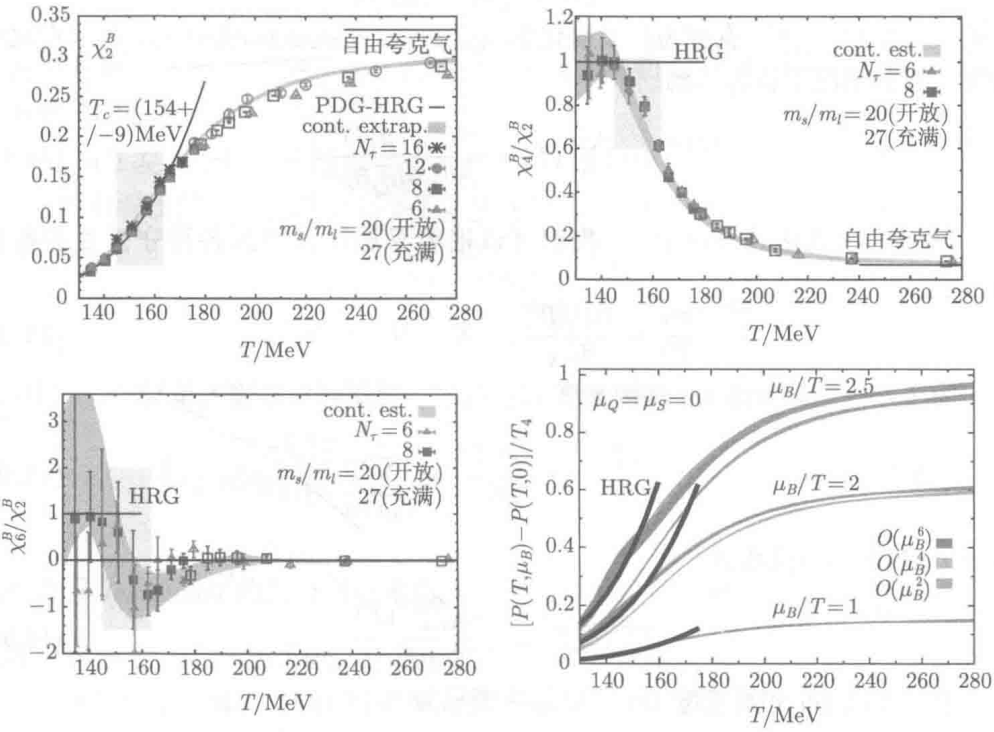


图 14.3　泰勒展开系数及压强依赖于重子化学势能的部分在 $\mu_Q=\mu_S=0$ 的情况下随温度的变化关系。上面两张图表示的是二阶泰勒展开系数 χ_2^B 及四阶与二阶泰勒展开系数比值 χ_4^B/χ_2^B 随温度的变化关系。下面左图与右图分别表示的是六阶与二阶泰勒展开系数比值 χ_2^B/χ_2^B 及压强中依赖于重子化学势能 μ_B 的部分随温度的变化关系。黄色长方框区间表示的是相转变温度区间 $T_c=154\pm9$ MeV，图取自文献 [15]

二阶泰勒展开系数随温度的升高而变大，在温度为 280 MeV 时与高温极限的结果仍有 3% 的差别，而 χ_4^B/χ_2^B 和 χ_6^B/χ_2^B 均在较低的温度已趋于高温极限。χ_4^B/χ_2^B 本身可以作为 QCD 中重子退禁闭转变为夸克的一个重要的信号。这是因为在低温强子相的时候，体系的自由度为强子，而强子携带的重子数为整数；在高温夸克胶子等离子体相时，强子退禁闭为夸克，而夸克携带的重子数为分数。由此 χ_4^B/χ_2^B 在温度低于相转变温度时等于 1，而在高于相转变时为 $(1/3)^2$。从图 14.3 中的上右图可以看出，χ_4^B/χ_2^B 的值在相转变温度区间就开始偏离 1 了，进而趋于极限值 1/9。而另外一个有意思的发现是 χ_6^B/χ_2^B 的值在相转变温度区间有一个符号的改变，这与 $O(4)$ 二阶相变的普适行为类似[16]。

从图 14.3 中可以看出，四阶及六阶的贡献随着温度的升高变得越来越小，同时从压强中依赖于重子化学势能 μ_B 的部分 $(P(T,\mu_B)-P(T,0))/T^4$ 随温度在不同大小的 μ_B/T 的变化关系 (右下图) 可以看到，在 $\mu_B/T\leqslant 2$ 的时候，仅考虑四阶展开系数时压强就已经有了很好的收敛行为。

在高能重离子碰撞实验中，初始的净奇异数为零，同时净重子数跟净电荷数的比例固定。这表明了奇异化学势能 μ_S 与电荷化学势能 μ_Q 并不为零，而是依赖于重子化学势能的函数。同样地利用泰勒展开的方法，通过格点量子色动力学计算可以得到 μ_S 和 μ_Q 在小重子化学势能的情况下对 μ_B 的依赖关系。这将会给压强等热力学量带来较小的变化。考虑 μ_S 和 μ_Q 均不为零的情况下压强泰勒展开系数的行为，目前格点量子色动力学计算已经达到 $\mathcal{O}((\mu_B/T)^6)$，这表明当前格点量子色动力学计算的结果可适用于高能重离子碰撞质心系能量 $\sqrt{s_{\rm NN}}\gtrsim 12$ GeV 的情形[15, 17]。

14.2.3 QCD 的输运性质

强相互作用核物质的输运性质可由它的输运系数，如电导率 σ、体黏滞系数 ξ、切向黏滞系数 η 等来描述。它们是动态的量，但是由线性反馈理论 (linear response theory)，可以与平衡态中的静态的两点关联函数联系到一起。

在格点量子色动力学中人们可以计算某种流 $J(\tau,\boldsymbol{x})$ 之间的关联函数

$$G_J^{\alpha\beta}(\tau,\boldsymbol{p})=\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\langle J^\alpha(0,0)J^{\beta\dagger}(\tau,\boldsymbol{x})\rangle \tag{14.54}$$

其中 α, β 为表示某种标量、矢量或张量流的指标。这个两点的关联函数与其对应的谱函数 $\rho^{\alpha\beta}(\omega,\boldsymbol{p},T)$ 有如下关系

$$G_J^{\alpha\beta}(\tau,\boldsymbol{p})=\int \mathrm{d}\omega\frac{\cosh(\omega(\tau-1/2T))}{\sinh(\omega/2T)}\rho^{\alpha\beta}(\omega,\boldsymbol{p},T) \tag{14.55}$$

这些输运系数通过 Kubo 方程可由其对应流的谱函数在零能量极限下得到。例如，对于热密物质的电导率来说

$$\sigma = \frac{C_{em}}{6} \lim_{\omega\to 0} \lim_{\boldsymbol{p}\to 0} \sum_{i=1}^{3} \frac{\rho^{ii}(\omega, \boldsymbol{p}, T)}{\omega} \tag{14.56}$$

其中 C_{em} 是夸克电荷平方的和，$C_{em} = \sum_f Q_f^2$。电导率对应的为电磁流 $J^\mu(t, \boldsymbol{x}) \equiv J_V(t, \boldsymbol{x}) = \bar{\psi}(t, \boldsymbol{x})\gamma^\mu\psi(t, \boldsymbol{x})$。

热密物质的体黏滞系数 ξ、切向黏滞系数 η 可由体系能动量张量 $T^{\mu\nu} = F^{\mu\alpha}F^{\nu\alpha} - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$ 的关联函数所对应的谱函数来确定

$$\eta = \pi \lim_{\omega\to 0} \lim_{\boldsymbol{p}\to 0} \frac{\rho^{12,12}(\omega, \boldsymbol{p})}{\omega} \tag{14.57}$$

$$\zeta = \frac{\pi}{9} \lim_{\omega\to 0} \lim_{\boldsymbol{p}\to 0} \sum_{k,l} \frac{\rho^{kk,ll}(\omega, \boldsymbol{p})}{\omega} \tag{14.58}$$

通过格点量子色动力学计算方程 (14.54) 中的两点函数，人们便可以通过方程 (14.55) 得到对应的谱函数，从而抽取其在零能量极限下的行为得到强相互作用核物质的输运系数。以胶子等离子体的电导率为例，目前得到了在连续极限下的结果[18]。首先通过假定不同的谱函数的形式如 $\rho_{\rm ans}$ 和 $\rho_{\rm cut}$ 由关系式 (14.55) 来拟合连续外推得到的电磁流两点关联函数。所得谱函数形式在 T =1.1、1.3 和 1.5 T_c 情况下如图 14.4 所示。然后利用关系式 (14.56) 便可以得到电导率 σ 如右下图所示：在胶子等离子体中 $\sigma/(C_{em}T)$ 在 $1.1T_c$ 到 $1.5T_c$ 的温度区间内基本不随温度变化[18]。

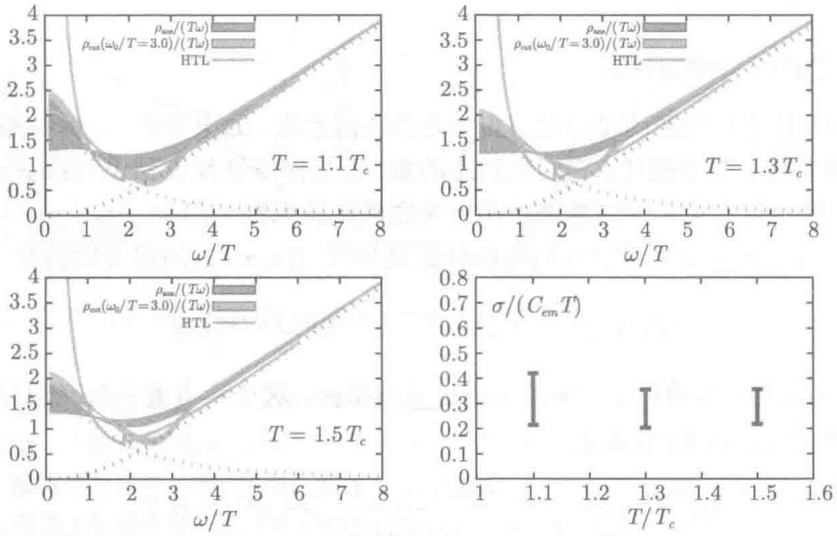


图 14.4　由拟合得到的在 T=1.1, 1.3 和 $1.5T_c$ 情况下的对应于电磁流两点关联函数的谱函数。右下：通过 Kubo 公式由谱函数 ρ 得到的胶子等离子体的电导率，图取自文献 [18]

14.2.4 热密物质中强子的性质

矢量介子 ρ 和轴矢量介子 a_1 在特定温度下会简并, 可反映量子色动力学手征对称性的恢复。而另外，在 QCD 相转变后，强子发生了离解，退禁闭为夸克。这也反映 QCD 相转变的退禁闭性质。例如，重夸克偶素或带粲强子等重强子，如 J/ψ 和 Υ, 由于它们质量较大同时尺寸较小, 当处于热物质中时, 可能会在不同的、高于或就在 QCD 相转变温度区间内离解, 由此可以作为探测热密物质温度的温度计[19, 20]。

强子在热环境中的性质可反映在强子的屏蔽质量 (screening mass) 和其谱函数上。强子的屏蔽质量与强子的空间两点关联函数 (spatial correlation function) 相关，而实时的谱函数与虚时的空间、时间两点关联函数 (temporal correlation function) 均相关。强子的谱函数包含了强子的所有信息，物理上比屏蔽质量显得更为重要，同时它的抽取也更为复杂。谱函数的计算涉及从虚时空间到实时空间的解析延拓，即数值反演。

利用格点量子色动力学仅能直接计算出强子的时间两点关联函数

$$G(\tau,T)=\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\left\langle\Big(\bar{q}(\tau,\boldsymbol{x})\,\Gamma\,q(\tau,\boldsymbol{x})\Big)\Big(\bar{q}(0,\mathbf{0})\,\Gamma\,q(0,\mathbf{0})\Big)^{\dagger}\right\rangle \tag{14.59}$$

及空间两点关联函数

$$G(z,T)=\int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}_{\perp}\mathrm{d}\tau\left\langle\Big(\bar{q}(\tau,\boldsymbol{x})\,\Gamma\,q(\tau,\boldsymbol{x})\Big)\Big(\bar{q}(0,\mathbf{0})\,\Gamma\,q(0,\mathbf{0})\Big)^{\dagger}\right\rangle \tag{14.60}$$

强子的时间两点关联函数与谱函数有如下关系

$$G(\tau,T)=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\rho(\omega,T)\frac{\cosh\left(\omega\left(\tau-1/2T\right)\right)}{\sinh\left(\omega/2T\right)} \tag{14.61}$$

而强子的空间关联函数与谱函数的关系更为复杂

$$G(z,T)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}p_z}{2\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_z z}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\,\frac{\rho(\omega,p_z,T)}{\omega} \tag{14.62}$$

因此人们一般利用时间两点关联函数来抽取谱函数。由于在格点上计算得到两点关联函数点的数目即 N_τ, 远远小于能够精确描述一个在能量空间上连续的谱函数所需的点数，谱函数的抽取必须要考虑到解析延拓所带来的不确定性。目前使用的解析延拓的方法包括最大熵方法 (maximum entropy method)[21], 贝叶斯方法[22], 以及随机分析方法[23] 和 Backus-Gilbert 方法[24] 等。

另外，时间两点关联函数的时间方向的长度最大为 $1/(2T)$, 而空间两点关联函数的空间长度不受限于温度的大小，一般用于抽取介质的屏蔽质量 M_{src}。当空间长度 z 很大时，强子空间关联函数以如下形式指数衰减：

$$G(z,T)\sim\exp(-M_{\mathrm{src}}\,z) \tag{14.63}$$

由于在温度很低的时候强子关联函数主要贡献来自于质量最轻的强子, 谱函数因此也是由这一最轻的强子态主导

$$\rho(\omega, p_z, T) \sim \delta(\omega^2 - m_0^2 - p_z^2) \tag{14.64}$$

此时屏蔽质量 $M_{\rm src}$ 与强子的极点质量 (pole mass) 相同。当温度足够高时，强子会离解，这时空间两点关联函数可描述一对自由的夸克、反夸克对在介质中的传播，同时屏蔽质量变为

$$M_{\rm src}^{\rm free} = \sqrt{m_{q_1}^2 + (\pi T)^2} + \sqrt{m_{q_2}^2 + (\pi T)^2} \tag{14.65}$$

这里 $m_{q_{1,2}}$ 表示组成介子的夸克的质量。

图 14.5 中给出的是利用最大熵方法从时间两点关联函数抽取的粲夸克偶素的谱函数随温度的变化关系。其中在温度为 $0.73T_c$ 时基态 (J/ψ 和 η_c) 共振态峰的宽度远大于它们在真空时的宽度，这很大部分是由解析延拓时带来的非物理的效应。目前利用解析延拓的方法，如最大熵方法，抽取得到的谱函数中更可靠的是第一个峰 (从左往右数) 的位置。在 $0.73T_c$ 时，第一个峰的位置对应着格点量子色动力学模拟中设置的 J/ψ 和 η_c 处于真空中的质量。当温度逐渐升高时，可以发现第一个峰变得越来越宽，同时它的位置移动到了更高的能量区间。从图 14.5 中看出在温度大于等于 $1.5T_c$ 时似乎矢量和赝标量粲夸克偶素的基态 J/ψ 和 η_c 均已经离解。利用含有动力学夸克的格点量子色动力学计算得到了类似的结果[26, 27]。然而计算均没有外推到连续极限粲夸克偶素的离解温度并没有定论，仍需进一步的研究。

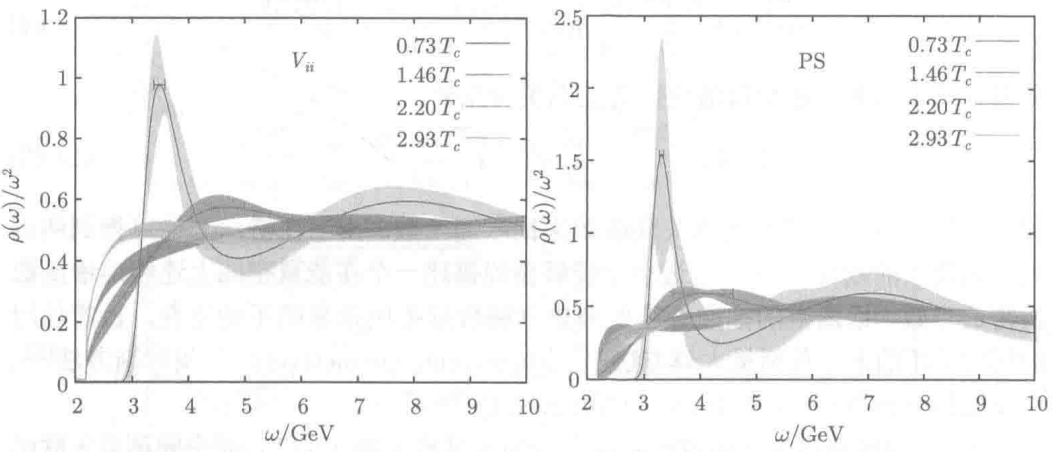


图 14.5　矢量 (左) 和赝标量 (右) 粲夸克偶素谱函数随温度的变化关系[25]。图中阴影带表示的是统计误差并标出了谱函数中对应着能量最低的峰的位置的误差。此处格点量子色动力学计算是在淬火极限、在同一个格点间距下进行的，同时谱函数的抽取利用到了最大熵方法[21]

对于底夸克偶素的离解温度的研究人们一般是采用非相对论的作用量 (NRQCD)[28]。这主要是由于底夸克的质量 m_b 太大，而格点量子色动力学模拟中格点的间距要满足 $a < 1/m_b$。在非相对论量子色动力学的框架下将底夸克变为静态可以避免格点间距太小的限制，从而导致计算量太大的问题。好处是时间方向上的长度不受温度大小的限制，同时两点关联函数与谱函数的关系更为简单

$$G(\tau, T) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \rho(\omega, T) \mathrm{e}^{-\omega\tau} \tag{14.66}$$

但这个框架不足的地方是计算结果不可能有连续极限，这是因为在 am_b 趋于零的情况下 NRQCD 拉氏量中有关辐射修正的系数会发散。目前相关研究集中在将上下夸克或奇异夸克处理为相对论性的海夸克，而将底夸克认为是非相对论的价夸克[29]。

图 14.6 中给出的是 $s\bar{c}$ 介子 (左) 和粲夸克偶素 (右) 基态的屏蔽质量随温度的变化关系。可以看到，所有的开粲介子的屏蔽质量在相转变温度区间已经与其在真空时的质量发生了很大差别。在 $T \lesssim 1.1\ T_c$ 时，J/ψ 和 η_c 的屏蔽质量与在其真空中的质量几乎一致，而 χ_{c0} 和 χ_{c1} 的屏蔽质量在温度低于 T_c 时便已经发生了变化，这表明在 T_c 时 χ_{c0} 和 χ_{c1} 由于热效应的影响已经发生了剧烈的变化。在温度 $T \gtrsim 2T_c$ 时所有道的屏蔽质量几乎与温度呈线性的增长，这与一对自由的正反夸克对的屏蔽质量在高温极限的行为一致。

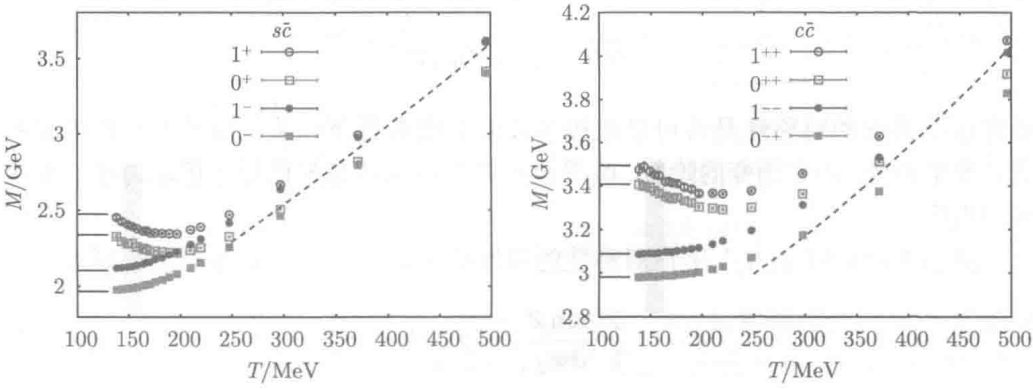


图 14.6 $s\bar{c}$ 介子 (左) D_{s1}^* (1^+), D_{s0}^* (0^+), D_s^* (1^-), D_s (0^-) 和粲夸克偶素 (右) χ_{c_1} (1^{++}), χ_{c_0} (0^{++}), J/Ψ (1^{--}), η_c (0^{-+}) 的屏蔽质量随温度的变化关系[30]。黑色的实线表示的是各个介子在真空中的质量，虚线表示的是高温极限下屏蔽质量 $M_{\mathrm{src}}^{\mathrm{free}}$ 随温度的变化关系。黄色区域表示的是 (2+1) 味 QCD 的相转变温度区间 $T_c = 154(9)$ MeV

14.3 QCD 的相结构

强相互作用核物质的相结构是强相互作用核物质热力学领域非常基本而重要的研究内容，它们对描述在高能重离子碰撞中产生的热密物质以及早期宇宙的流

体力学演化起着至关重要的作用。强相互作用核物质的相结构与 QCD 的整体对称性密切相关。在手征极限下的经典 QCD 中，QCD 拉氏量除了 SU(3) 的局域规范对称性外，还具有整体对称性

$$\mathrm{SU}_L(N_f) \times \mathrm{SU}_R(N_f) \times U_V(1) \times U_A(1) \tag{14.67}$$

其中 $U_V(1)$ 整体对称导致重子数守恒，手征对称性 $\mathrm{SU}_L(N_f) \times \mathrm{SU}_R(N_f)$ 给 QCD 带来了很多独特的性质。如果把夸克场分解为左旋和右旋分量，有三个无质量夸克的 QCD 拉格朗日量在手征旋转下是不变的。根据 Noether 定理，这一对称性会导致矢量和轴矢量两种不同种类的守恒流 (或它们的叠加)。如果将每个守恒流和具有相同量子数的物理态等同起来，标量和赝标量介子以及矢量和轴矢量介子态都应该是简并的。这样的对偶双重简并态在现实中并不存在，这是因为 QCD 真空的手征对称性自发破缺，其具体的表现就是非零的夸克真空凝聚。这个对称性自发破缺的直接的后果就是出现 9 个无质量的戈德斯通 (Goldstone) 玻色子。但是量子关联或量子反常会导致 $U_A(1)$ 对称性破缺，使得第九个戈德斯通玻色子 (η') 不复存在。这种反常量在真空的非零期望值则起源于真空的拓扑感应率。另外夸克的质量不为零，手征对称性也存在着明显的破缺，因此 8 个戈德斯通玻色子 ——$\pi^{\pm}$, π^0, $K^{\pm}$, K^0, $\overline{K^0}$, η 的质量不为零。因此真实的 QCD 在真空中的整体对称性群变为

$$SU(N_f)_V \times U_V(1) \tag{14.68}$$

研究这些丢失的对称性是否可以在极端高温高密条件下恢复，以及对称性恢复时是否发生相变，还有相变的阶数、临界温度及普适性质是格点量子色动力学一个重要的应用。

$\mathrm{SU}_L(N_f) \times \mathrm{SU}_R(N_f)$ 手征对称性的自发破缺会产生一个非零的手征凝聚，

$$\langle \psi\bar{\psi} \rangle_f = \frac{T}{V} \frac{\partial \ln Z}{\partial m_f}, \quad f = 1, \cdots, N_f \tag{14.69}$$

因此戈德斯通玻色子的非零质量可理解为手征对称性的自发破缺与不为零的夸克质量带来的手征对称性的明显破缺导致的。这反映在 Gell-Mann-Oakes-Renner 关系中

$$f_\pi^2 m_\pi^2 = \frac{1}{2}(m_u + m_d)\langle \psi\bar{\psi} \rangle \tag{14.70}$$

在极端条件下，$\mathrm{SU}_L(N_f) \times \mathrm{SU}_R(N_f)$ 手征对称性恢复，因此手征凝聚也会消失。这使得手征凝聚成为手征相变的序参量，即在手征极限下

$$\langle \psi\bar{\psi} \rangle = \begin{cases} 0, & T \geqslant T_c \\ \neq 0, & T < T_c \end{cases} \tag{14.71}$$

这里 T_c 是手征相变的相变温度。如果体系发生的手征相变是二阶相变，那么根据相变理论，体系的自由能密度 f 可以表示成奇异部分 $f_{\rm sing}$ 和常规部分 $f_{\rm reg}$ 之和

$$f=-\frac{T}{V}\ln Z\equiv f_{\rm sing}(t,h)+f_{\rm reg}(T,m_l,m_s,\vec{\mu}) \tag{14.72}$$

在临界相变区间，$f_{\rm sing}$ 占主导地位，$f_{\rm reg}$ 可以忽略不计。这里 h 表示的是无量纲的明显地使手征对称性破缺的 (磁或夸克质量) 场，而 t 则包含了所有的不明显地使手征对称性破缺的、反映“热”效应的变量。h 和 t 反映了体系与临界区间的距离。在领头阶下，h 和 t 可以表示为

$$h=\frac{1}{h_0}\frac{m_l}{m_s} \tag{14.73}$$

$$t=\frac{1}{t_0}\left[\frac{T-T_c}{T_c}+\kappa_q\left(\frac{\mu_q}{T}\right)^2\right] \tag{14.74}$$

其中 $\mu_q=\mu_u=\mu_d$ 表示夸克化学势能，T_c 表示在夸克质量 $m_l/m_s\to 0$ 和 $\mu_q=0$ 时的手征相变温度。t_0 和 h_0 是标度变量 t 和 h 的归一化常数，κ_q 表征了临界温度 $T_c(\mu_q)$ 随 μ_q 的变化关系。这四个常量 T_c, h_0, t_0 和 κ_q 对 QCD 来说是唯一的，正如手征拉氏量中低能常量 (low energy constants) 一样。这些常量可以通过利用格点量子色动力学来研究临界区间的奇异行为、手征序参量及其磁化率得到。

我们可以构造重整化群不变 (renormalization group invariant) 的、无量纲的序参量及其磁化率

$$M_b=\frac{m_s\langle\psi\bar{\psi}\rangle}{T^4}=h^{1/\delta}f_G(z)+M_{\rm reg} \tag{14.75}$$

$$\chi_m=\frac{m_s^2\chi_t}{T^4}=\frac{1}{h_0}h^{1/\delta-1}\frac{1}{\delta}\left(f_G(z)-\frac{z}{\beta}\frac{{\rm d}f_G(z)}{{\rm d}z}\right)+\chi_{m,{\rm reg}} \tag{14.76}$$

其中 $\chi_t=\partial\langle\psi\bar{\psi}\rangle/\partial m$, $M_{\rm reg}$ 和 $\chi_{m,{\rm reg}}=h_0^{-1}{\rm d}M_{\rm reg}/{\rm d}h$ 是常规部分；“+”与其最邻近的“=”之间的项表示的是序参量中的奇异部分，它是 h 和 $z=t/h^{1/(\beta\delta)}$ 的函数。因此临界指数 β、δ 和 $f_G(z)$ 标度函数唯一地确定了手征相变的普适性质。例如，手征对称性 ${\rm SU}_L(2)\times{\rm SU}_R(2)$ 与 $O(4)$ 对称性同构，则连续极限下 QCD 的普适类应该与三维的具有 $O(4)$ 对称性的自旋模型相同。即临界指数 β、δ 和 $f_G(z)$ 标度函数应由三维的 $O(4)$ 普适类唯一确定。但是在格点 QCD 中，情况会变得有点不同。例如，在格点量子色动力学模拟中广泛采用的 Staggered 作用量，在格点间距不为零和手征极限的情况下体系只有一个戈德斯通玻色子，因此相关的普适类是与三维的具有 $O(2)$ 对称性的自旋模型相同。

量子色动力学在零重子化学势能下的相结构可以用“哥伦比亚图”(Columbia plot) 来表示，如图 14.7 中左图。强相互作用核物质相转变的性质在很大程度上取

决于夸克质量的大小及味自由度的数目 (N_f)[31]。图中给出了在零重子化学势能下相变性质随简并的上下夸克质量 $m_{u,d} \equiv m_l = m_u = m_d$ 与奇异夸克质量 m_s 的变化示意图。此示意图中已假设 $U(1)_A$ 对称性一直是破缺的。在 $m_l \to \infty$ 和 $m_s \to \infty$ 的情况下，费米子对体系的热力学性质没有贡献，此时系统热力学性质即为 $N_f = 0$ 的纯 SU(3) 规范理论具有的性质。纯 SU(3) 规范理论具有 $Z(3)$ 整体对称性，其相变为一阶的禁闭–退禁闭相变。在 $m_l \to 0$ 和 $m_s \to 0$ 的情况下，系统的相变为一阶的手征相变。这两个一阶相变，如图 14.7 左图中左下角跟右上角所示，均会扩展到一定的、有限的夸克质量。当夸克质量由无穷大逐渐变小，或由 0 逐渐变大时，一阶相变强度逐渐变弱，相变终结在二阶相变曲线上 (如红色实线所示)。这个二阶相变的普适类与三维的具有 $Z(2)$ 对称性的 Ising 模型相同[32]。这两个具有 $Z(2)$ 群普适性质的二阶相变被平滑过渡相转变区域所分离。我们所处的真实的物理世界，即物理点 (对应着 $m_\pi \approx$140 MeV), 已经被格点量子色动力学计算证实没有发生真实相变，而是一个快速平滑过渡的相转变。在 $N_f = 2$ QCD 的手征极限下，系统也会发生一个二阶的相变，但这个二级相变的普适类与三维的 $O(4)$ 群相同。因此具有 $O(4)$ 群普适类的二阶相变曲线，具有 $Z(2)$ 群普适类的二阶相变曲线以及一阶的手征相变区间会在一个三阶相变点 $(m_s^{\rm tri})$ 汇合。当 $U(1)_A$ 对称性恢复时，它会对 2 味 QCD 的手征相变产生影响。此手征相变则不再服从三维 $O(4)$

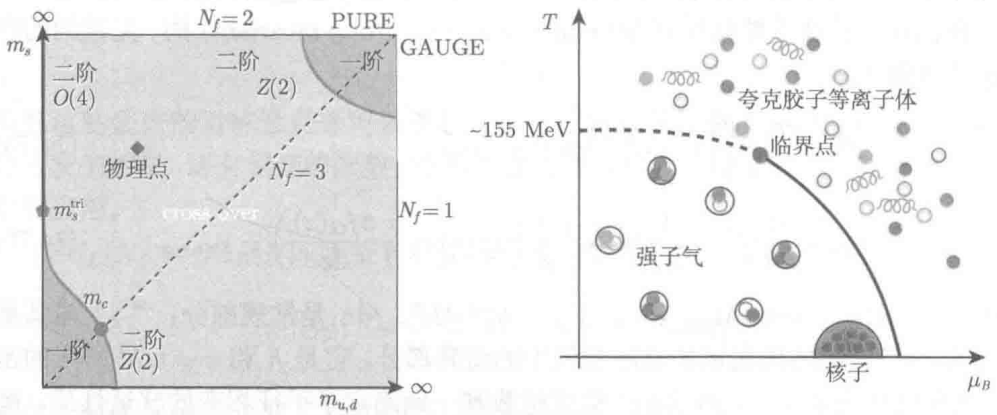


图 14.7　左图：QCD 相变在零重子化学势能下的性质随夸克质量，即轻夸克质量 $m_u = m_d = m_l$ 和奇异夸克质量 m_s 的变化关系示意图[2]。右图：QCD 在温度 T 和重子化学势能 μ_B 平面的相结构示意图[2]。在零重子化学势能的时候格点量子色动力学计算表明从强子相到夸克胶子等离子体的相转变并不是一个真正的相变，而是一个快速的平滑过渡。在 $\mu_B > 0$ 时，QCD 的平滑过渡可能在一个二阶相变临界点 (critical end point，CEP) 终止，而在更大 μ_B 时 QCD 的相变变为一阶相变。这个二阶相变点是否存在尚未确定。理论上对 CEP 位置的限制需要利用格点量子色动力学的计算

普适类的二阶相变，而可能是一阶相变[31] 或服从 $O(2) \times O(4)$ 普适类的二阶相变[33]。

在 (2+1) 味的量子色动力学中，当轻夸克的质量趋于零而保持奇异夸克的质量不变时，人们利用改进的 Staggered 作用量和 Wilson 作用量计算发现了部分证据。这些证据很可能表明在轻夸克手征极限下量子色动力学的相变为二阶相变，其相变行为服从 $O(2)$ 群的普适行为[34]。在 3 味简并夸克的量子色动力学中利用改进的 Staggered 作用量的格点计算发现临界 π 介子的质量为 45MeV 左右[35]。这些结果表明服从 $O(4)$ 群的二阶手征相变而不是一阶手征相变与在非零重子数密度下的强相互作用物质相结构可能更为相关。值得注意的是，上述这些计算尚未得到连续极限下的结果。

研究 $U(1)_A$ 对称性在高温情况下的恢复与否是一个难点，这主要是因为采用在有限格点间距下仍具有手征对称性的作用量尤为重要。利用保持了量子色动力学手征对称性的畴壁费米子的作用量研究表明：具有物理夸克质量的量子色动力学体系的轴对称性的恢复温度比 SUL(2)×SUR(2) 手征对称性恢复的温度要高[36]。但是利用 Wilson 作用量和最近的利用畴壁费米子的作用量的计算表明在手征极限下 $U(1)_A$ 对称性的恢复温度似乎与 SU(2)×SU(2) 手征对称性恢复温度较为接近[3, 4]。

由于真正的相变只发生在手征极限或 $m_q \to \infty$，在真实的物理世界中强相互作用物质从强子相到夸克胶子等离子体相的转变为一个快速的平滑过渡[37]。在零重子数密度下，HotQCD 合作组采用高度改进的交错费米子 (HISQ) 作用量，通过在手征极限下量子色动力学的普适行为，即利用关系式 (14.75) 和 (14.76)，确定在物理夸克质量 (对应 $m_\pi \approx 140$ MeV) 时手征磁化率随温度的变化关系 (如图 14.8 中左图所示)。通过手征磁化率峰的位置在某一格点间距下确定相转变的温度，进一步如图 14.8 中右图所示做连续极限外推得到了此平滑过渡的赝临界温度为 154(9) MeV[38]。这一结果与另一格点量子色动力学合作组 Wuppertal-Budapest 利用另一类的 Staggered 改进作用量得到的结果一致[39]。由于 Staggered 作用量存在着非物理的 Goldstone 玻色子并只保留了部分的手征对称性，HotQCD 合作组同时利用完全包含了手征对称性的畴壁费米子作用量也得到了一致的结果[36]。

在非零重子数密度下，平滑过渡的赝临界温度也可以利用量子色动力学在手征极限下的普适行为 (见式 (14.74)) 计算得到[40]。结合这一结果与高能重离子碰撞实验中得到的粒子冻结曲线可以用来推断是否从实验上可以观测到量子色动力学临界点。另外，比较格点量子色动力学计算得到的高阶磁化率与高能重离子碰撞实验观测到的守恒量的涨落，可以得到粒子的冻结温度及化学势能随温度的变化关系[41]。

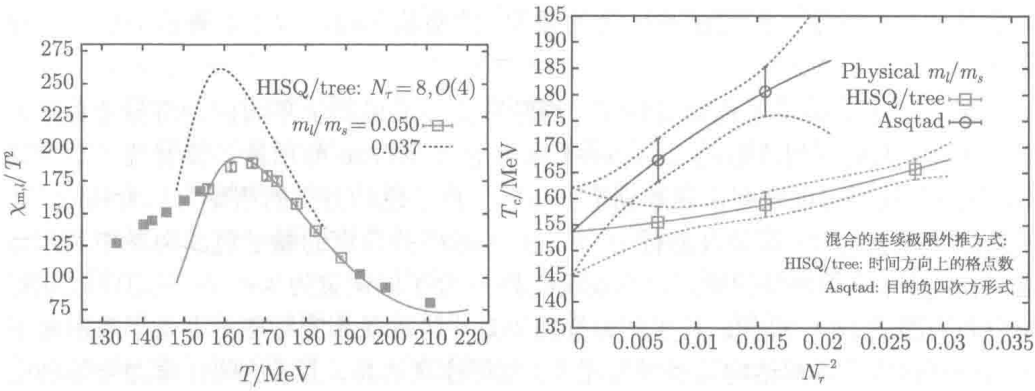


图 14.8　左图：通过对手征磁化率的标度律分析外推到物理的轻夸克 (m_l/m_s=0.037 对应着 $m_\pi \approx 140$ MeV) 的情形。右图：(2+1) 味 QCD 的相转变温度的连续极限外推，由此得到连续极限下的相转变温度 $T_c = 154(9)$ MeV

在量子色动力学相图中是否存在着一个二阶相变的临界点是当前强相互作用物质热力学领域一个研究热点。美国 RHIC 的能量扫描实验正是围绕着这一课题进行的。这一实验也是由格点量子色动力学计算结果所激发的，即守恒量的高阶涨落对相变比较敏感[8]。由于存在着符号问题，在格点量子色动力学中并不能直接去计算在非零重子数密度下的热力学量。因此量子色动力学相图中是否存在着一个二阶相变的临界点至今尚无定论[2, 15]。目前在利用泰勒展开去计算小重子数密度下六阶的守恒量涨落是一个较为理想的方法[16]。图 14.9 给出了最新的关于 QCD 临界点可能存在的位置的预言。计算表明 QCD 临界点不大可能在 $\mu_B/T \lesssim 2$ 的位置出现[15]。

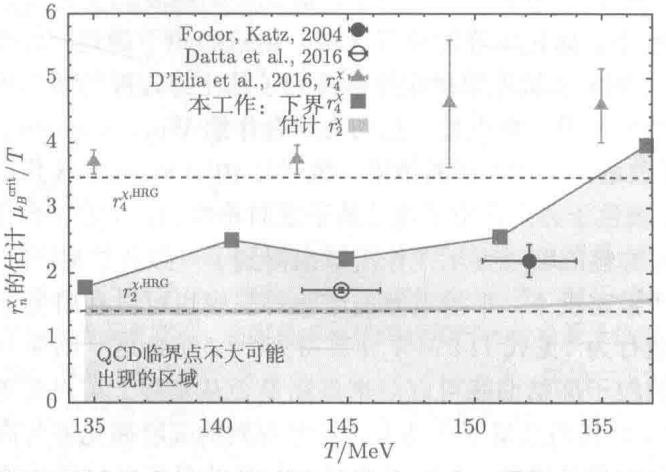


图 14.9　泰勒展开的收敛半径随温度的变化关系，灰色区域内表示的是 QCD 临界点不大可能存在的位置[15]

14.4 微扰 QCD 的应用

QCD 中由 SU(3) 规范场的相互作用而导致渐近自由，其最大的实用价值是它的微扰计算可以应用并成功地描述很多在短距离下的强相互作用过程。在短距离或大的动量转移下，强相互作用的耦合常数变小，它就可以当成一个小的参数用来对物理过程的散射截面进行系统的微扰展开计算。在有限温度场论中，我们是将拉格朗日密度分为自由和相互作用两部分

$$S_E(T,V,\vec{\mu}) \equiv -\int_0^{1/T} \mathrm{d}x_0 \int_V \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,(\mathcal{L}_0^E + \mathcal{L}_{\mathrm{I}}^E) = S_0 + S_{\mathrm{I}} \tag{14.77}$$

某一静态物理观测量的期望值则可做微扰展开表示为

$$\begin{aligned}
\langle\mathcal{O}\rangle &= \frac{\int \mathrm{d}[\phi]\mathcal{O}\,\mathrm{e}^{-(S_0+S_{\mathrm{I}})}}{\int \mathrm{d}[\phi]\,\mathrm{e}^{-(S_0+S_{\mathrm{I}})}} \\
&= \frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int \mathrm{d}[\phi]\,\mathcal{O}\,\mathrm{e}^{-S_0}(-S_{\mathrm{I}})^n}{\int \mathrm{d}[\phi]\,\mathcal{O}\,\mathrm{e}^{-S_0}} \frac{\int \mathrm{d}[\phi]\,\mathcal{O}\,\mathrm{e}^{-S_0}}{\int \mathrm{d}[\phi]\,\mathrm{e}^{-(S_0+S_{\mathrm{I}})}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\langle\mathcal{O}\cdot(-S_{\mathrm{I}})^n\rangle_0 \frac{Z_0}{Z} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\langle\mathcal{O}\cdot(-S_{\mathrm{I}})^n\rangle_0^{\mathrm{c}}
\end{aligned} \tag{14.78}$$

这里 $\mathrm{d}[\phi] = \prod_{\mu}\mathcal{D}A_\mu \prod_f \mathcal{D}\psi_f\mathcal{D}\bar{\psi}_f$，$Z_0 = \int \mathrm{d}[\phi]\,\mathrm{e}^{-S_0}$，$\langle\cdots\rangle_0^{\mathrm{c}}$ 表示的是 $\langle\cdots\rangle_0$ 的费曼图中的连通部分。S_{I} 便包含了耦合常数不同幂次的项。

通过引入有限温度下的 QCD 费曼规则[1]，利用式 (14.78) 便可微扰求出热力学量或其他静态量。而为了研究热力学体系的动力学量，如黏滞系数等，我们则需要考虑在各种边界条件下的实时格林函数。微扰热场理论的应用非常广泛，如热力学量压强、强子谱函数以及体系输运系数计算。下面主要以喷注淬火为例，介绍微扰计算在其中的应用。

14.4.1 喷注淬火

在重离子碰撞的早期阶段，从两个原子核中的部分子散射出来的喷注对研究在碰撞中产生的 QGP 的输运性质起着至关重要的作用。在它们穿过热密介质的传

播过程中，这些高能喷注和有色介质之间的相互作用会导致部分子能量损失或喷注淬火现象[42, 43]。喷注淬火在高能重离子碰撞实验中，相对于基本的质子–质子碰撞会有许多特有的信号。这些都已在 RHIC 和 LHC 的实验里观察到，如高横动量 (p_T) 强子谱的压低。二十多年来，许多理论都对相对论重离子碰撞的喷射淬火现象进行了广泛和深入的研究[44–50]。这里我们将对其中的高扭度框架[49, 51] 做一个系统的介绍，并简单地介绍一下近年来的唯象研究。

与 QED 中带电粒子能量损失情况不同，强相互作用中的部分子的能量损失是不可直接测量的，因为部分子不是最后实验观测到的粒子。但传统上以相位空间中强子簇团而定义的有限锥角的喷注的总能量会因介质的韧致辐射而产生变化。即使对于一个很大锥角的喷注，它既包含领头部分子也包含了辐射出的胶子，但多重散射和导致的韧致辐射也会改变喷注内部的能量分布。这样我们可以通过对喷注的末态分布以及喷注内的粒子分布，如喷注碎裂函数 $D_{a\to h}(z,\mu^2)$，在介质中的修正，来研究分子在 QCD 介质中的能量损失，这里 z 是末态粒子 h 携带的部分子 a 的分数能量。

在深度非弹性散射 (DIS) 中产生的夸克远离质壳，其末态辐射会导致碎裂函数的能量尺度依赖，并由 Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi (DGLAP) QCD 演化方程而决定。一个产生在介质中的部分子，在它的传播过程中同时也会经历多重散射和韧致辐射，这将在部分子碎裂函数的 DGLAP 演化方程中产生一个额外的项。这个额外项通过 DGLAP 演化将导致碎裂函数产生介质修正。其结果是修正后的碎裂函数变软，这个修正可以直接转化为领头夸克的能量损失。

14.4.2　广义因子化

要研究 eA DIS 中的夸克能量损失，我们得考虑半单举过程，$e(L_1)+A(p)\longrightarrow e(L_2)+h(\ell_h)+X$，其中 L_1 和 L_2 是初态和末态轻子的四动量，ℓ_h 是观测到的强子动量。这个半单举过程的微分截面可以表示为

$$E_{L_2}E_{\ell_h}\frac{\mathrm{d}\sigma^h_{\mathrm{DIS}}}{\mathrm{d}^3L_2\mathrm{d}^3\ell_h}=\frac{\alpha^2_{\mathrm{EM}}}{2\pi s}\frac{1}{Q^4}L_{\mu\nu}E_{\ell_h}\frac{\mathrm{d}W^{\mu\nu}}{\mathrm{d}^3\ell_h} \tag{14.79}$$

其中 $p=[p^+,0,\mathbf{0}_\perp]$ 是核中的每个核子的动量，$q=L_2-L_1=[-Q^2/2q^-,q^-,\mathbf{0}_\perp]$ 是动量转移，$s=(p+L_1)^2$ 是质心碰撞能量，α_{EM} 是电磁 (EM) 耦合常数。轻子张量是 $L_{\mu\nu}=1/2\,\mathrm{Tr}(\gamma\cdot L_1\gamma_\mu\gamma\cdot L_2\gamma_\nu)$，而半单举强子张量定义为

$$\begin{aligned}E_{\ell_h}\frac{\mathrm{d}W_{\mu\nu}}{\mathrm{d}^3\ell_h}=&\frac{1}{2}\sum_X\langle A|J_\mu(0)|X,h\rangle\langle X,h|J_\nu(0)|A\rangle\\&\times2\pi\delta^4(q+p-p_X-\ell_h)\end{aligned} \tag{14.80}$$

其中 $\sum\limits_X$ 是对所有可能的末态求和，$J_\mu=\sum\limits_q e_q\bar\psi_q\gamma_\mu\psi_q$ 是强子的电磁流。

在共线因子化的部分子模型中，半单举反应截面的领头扭曲度贡献可以被分解成部分子分布函数、部分子碎裂函数和部分子散射横截面的乘积。来自包括所有主要的对数辐射修正的 $\gamma^* + q$ 单个硬散射的最低阶 $\mathcal{O}(\alpha_s^0)$ 贡献，可以写成

$$\frac{\mathrm{d}W_{\mu\nu}^S}{\mathrm{d}z_h} = \sum_q e_q^2 \int \mathrm{d}x f_q^A(x,\mu_I^2) H_{\mu\nu}^{(0)}(x,p,q) D_{q\to h}(z_h,\mu^2) \tag{14.81}$$

$$H_{\mu\nu}^{(0)}(x,p,q) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\gamma\cdot p\gamma_\mu\gamma\cdot(q+xp)\gamma_\nu)\,\frac{2\pi}{2p\cdot q}\delta(x-x_B) \tag{14.82}$$

其中强子带有的动量分量定义为 $z_h = \ell_h^-/q^-$，$x_B = Q^2/2p^+q^-$ 是 Bjorken 变量，μ_I^2 和 μ^2 分别是原子核中的初始夸克分布函数 $f_q^A(x,\mu_I^2)$ 和夸克碎裂函数 $D_{q\to h}(z_h,\mu^2)$ 中的因子化标度。只考虑如图 14.10 所示对碎裂过程的领头对数近似下的辐射修正，重整化后的夸克碎裂函数 $D_{q\to h}(z_h,\mu^2)$ 将满足下面的 DGLAP QCD 演化方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial D_{q\to h}(z_h,\mu^2)}{\partial \ln\mu^2} = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{2\pi}\int_{z_h}^1 \frac{\mathrm{d}z}{z}\,\big[&\gamma_{q\to qg}(z) D_{q\to h}(z_h/z,\mu^2) \\ &+ \gamma_{q\to gq}(z) D_{g\to h}(z_h/z,\mu^2)\big]\end{aligned} \tag{14.83}$$

其中

$$\gamma_{q\to qg}(z) = C_F\left[\frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2}\delta(1-z)\right] \tag{14.84}$$

$$\gamma_{q\to gq}(z) = \gamma_{q\to qg}(1-z) \tag{14.85}$$

是劈裂函数。“+”函数定义为

$$\int_0^1 \mathrm{d}z \frac{F(z)}{(1-z)_+} \equiv \int_0^1 \mathrm{d}z \frac{F(z)-F(1)}{1-z} \tag{14.86}$$

$F(z)$ 是在 $z=1$ 下足够平滑的一个任意函数。

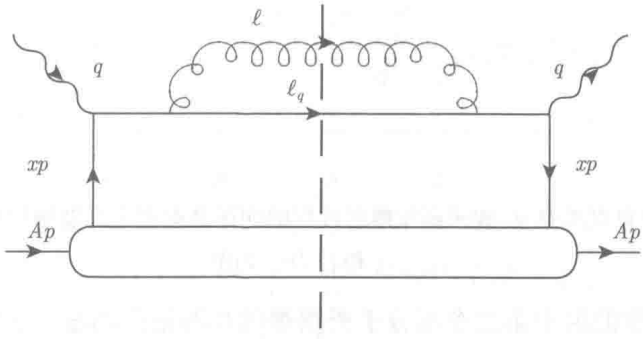


图 14.10 对碎裂过程中第一阶辐射校正的硬部分子散射

在电子与核靶 (eA) 的 DIS 中，初始散射出的夸克将会在核介质中继续传播而与核中的其他部分子发生再次散射。这些再次散射有可能引起额外的胶子辐射而导致领头夸克有能量损失。这种韧致胶子辐射在 QCD 演化方程中将给出额外的项而导致末态的有效碎裂函数的核介质修正。我们称这些为高扭曲度修正，因为它们涉及高阶扭曲度的矩阵元而且是幂次压低的。这里将仅考虑那些涉及来自两个不同核子的两部分子关联对高扭曲度矩阵元的贡献，它们与核的大小成正比。因此，相对于来自同一个核子的两部分子关联，它们会有一个核因子 $A^{1/3}$ 的增强。像以前的研究一样[49, 51]，我们会忽略那些没有核介质增强的贡献。

我们将采用对多重散射过程的广义因式化[52]。在这个近似下，来自如图 14.11 所示的双重散射过程的辐射校正贡献可以写成以下形式：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}W_{\mu\nu}^{D}}{\mathrm{d}z_h}=&\sum_q\int_{z_h}^1\frac{\mathrm{d}z}{z}D_{q\to h}(z_h/z)\int\frac{\mathrm{d}y^-}{2\pi}\,\mathrm{d}y_1^-\,\mathrm{d}y_2^-\,\frac{\mathrm{d}^2y_T}{(2\pi)^2}\mathrm{d}^2k_T\\&\times\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_T\cdot\boldsymbol{y}_T}\overline{H}_{\mu\nu}^{D}(y^-,y_1^-,y_2^-,k_T,p,q,z)\\&\times\frac{1}{2}\langle A|\bar{\psi}_q(0)\,\gamma^+\,A^+(y_2^-,0_T)\,A^+(y_1^-,y_T)\,\psi_q(y^-)|A\rangle\end{aligned}\tag{14.87}$$

这里 $\overline{H}_{\mu\nu}^{D}(y^-,y_1^-,y_2^-,k_T,p,q,z)$ 是部分子硬过程 $\widetilde{H}_{\mu\nu}(x,x_1,x_2,k_T,p,q,z)$ 在动量空间的傅里叶变换，

$$\begin{aligned}\overline{H}_{\mu\nu}^{D}(y^-,y_1^-,y_2^-,k_T,p,q,z)=&\int\mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{d}x_1}{2\pi}\,\frac{\mathrm{d}x_2}{2\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_1p^+y^-+\mathrm{i}x_2p^+y_1^-}\\&\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-x_1-x_2)p^+y_2^-}\,\widetilde{H}_{\mu\nu}^{D}(x,x_1,x_2,k_T,p,q,z)\end{aligned}\tag{14.88}$$

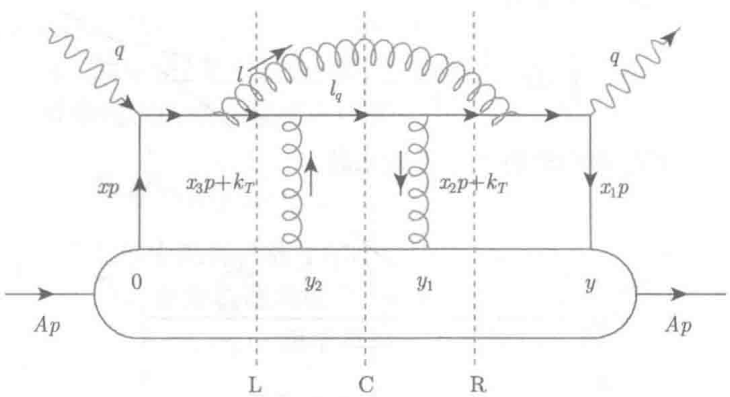


图 14.11　一个典型的夸克–胶子再次散射过程的切图具有三个可能的切割：中心 (C)，左 (L) 和右 (R) 切图

其中 k_T 是在双重散射中第二个部分子所携带的相对横向动量。分数动量 x, x_1 和 x_2 的值由硬部分子过程中的 δ 函数和极点所决定。它们通常依赖于 k_T。

为了提取次领头扭曲度的贡献，把部分子硬散射部分在 $k_T=0$ 附近展开

$$\begin{aligned}
&\overline{H}^D_{\mu\nu}(y^-,y_1^-,y_2^-,k_T,p,q,z)\\
=&\overline{H}^D_{\mu\nu}(y^-,y_1^-,y_2^-,k_T=0,p,q,z)\\
&+\left.\frac{\partial\overline{H}^D_{\mu\nu}}{\partial k_T^\alpha}\right|_{k_T=0}k_T^\alpha+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2\overline{H}^D_{\mu\nu}}{\partial k_T^\alpha\partial k_T^\beta}\right|_{k_T=0}k_T^\alpha\,k_T^\beta+\cdots
\end{aligned}\tag{14.89}$$

这被称为共线扩展。在方程 (14.89) 的右侧，第一项给出对领头扭曲结果的直线近似 (eikonal) 贡献。它不对应于物理意义上的双重散射，而只贡献到单次散射中领头扭曲度矩阵元的规范链，从而使其规范不变。对于非极化的初态和末态，上面展开的第二项 (线性项) 在对 k_T 积分后将会消失。第三项将给出对双重散射过程的有限贡献。将等式 (14.89) 代入方程 (14.87)，积分 d^2k_T 和 d^2y_T 后，我们得到

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}W^D_{\mu\nu}}{\mathrm{d}z_h}=&\sum_q\int_{z_h}^1\frac{\mathrm{d}z}{z}D_{q\to h}(z_h/z)\int\frac{\mathrm{d}y^-}{2\pi}\,\mathrm{d}y_1^-\,\mathrm{d}y_2^-\\
&\times\frac{1}{2}\langle A|\bar\psi_q(0)\,\gamma^+\,F_\sigma{}^+(y_2^-)\,F^{+\sigma}(y_1^-)\,\psi_q(y^-)|A\rangle\\
&\times\left(-\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\right)\left[\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial k_T^\alpha\partial k_T^\beta}\,\overline{H}^D_{\mu\nu}(y^-,y_1^-,y_2^-,k_T,p,q,z)\right]_{k_T=0}
\end{aligned}\tag{14.90}$$

其中 $k_T^\alpha A^+k_T^\beta A^+$ 通过部分积分被转换为场强 $F^{\alpha+}F^{\beta+}$。

14.4.3 双重部分子散射

在 eA DIS 中，对夸克碎裂函数的领头 4- 扭曲度修正有贡献的共有 23 个切图。为了简化计算，我们可以使用在软胶子辐射极限下的螺旋度振幅近似[49, 51]。这样的近似能够简化辐射振幅的计算。Zhang 和 Wang 也在没有螺旋度振幅近似下对所有切图进行了完整计算[53] 。在列出最后的结果之前，为了给读者演示具体计算的过程，首先考虑来自图 14.11 的贡献。

使用常规的费曼规则，我们可以写下图 14.11 中中间切图的部分子硬散射部分

$$\begin{aligned}
&\overline{H}^D_{C\,\mu\nu}(y^-,y_1^-,y_2^-,k_T,p,q,z)\\
=&\int\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}x_1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}x_2}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_1p^+y^-+\mathrm{i}x_2p^+y_1^-}\\
&\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-x_1-x_2)p^+y_2^-}\int\frac{\mathrm{d}^4\ell}{(2\pi)^4}\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[p\cdot\gamma\gamma_\mu p^\sigma p^\rho\widehat{H}_{\sigma\rho}\gamma_\nu\right]\\
&\times2\pi\delta_+(\ell^2)\,\delta\left(1-z-\frac{\ell^-}{q^-}\right)
\end{aligned}\tag{14.91}$$

$$\widehat{H}_{\sigma\rho}=\frac{C_F}{2N_c}g^4\frac{\gamma\cdot(q+x_1p)}{(q+x_1p)^2-\mathrm{i}\epsilon}\gamma_\alpha\frac{\gamma\cdot(q+x_1p-\ell)}{(q+x_1p-\ell)^2-\mathrm{i}\epsilon}\gamma_\sigma\gamma\cdot\ell_q\gamma_\rho$$
$$\times\varepsilon^{\alpha\beta}(\ell)\frac{\gamma\cdot(q+xp-\ell)}{(q+xp-\ell)^2+\mathrm{i}\epsilon}\gamma_\beta\frac{\gamma\cdot(q+xp)}{(q+xp)^2+\mathrm{i}\epsilon}2\pi\delta_+(\ell_q^2) \tag{14.92}$$

其中 $\varepsilon^{\alpha\beta}(\ell)$ 是在轴规范下, $n\cdot A=0$, $n=[1,0^-,\mathbf{0}_\perp]$, 胶子传播子的极化张量 ℓ 及 $\ell_q=q+(x_1+x_2)p+k_T-\ell$ 分别是胶子和末态夸克的 4- 动量。$z=\ell_q^-/q^-$ 是末态夸克的纵向的分数动量 (大负分量)。

为了简化计算，我们应用共线近似来完成 γ 矩阵乘积的求迹，

$$p^\sigma\widehat{H}_{\sigma\rho}p^\rho\approx\gamma\cdot\ell_q\frac{1}{4\ell_q^-}\mathrm{Tr}\left[\gamma^-p^\sigma\widehat{H}_{\sigma\rho}p^\rho\right] \tag{14.93}$$

利用围道曲线积分对 x，x_1，x_2 对应的动量和 $\ell^\pm$ 做动量积分以及 δ 函数，部分子硬散射部分可以分解为 γ^* 夸克散射矩阵元 $H^{(0)}_{\mu\nu}(x,p,q)$ [方程 (14.82)] 和夸克–胶子再次散射部分 $\overline{H}^D$ 的乘积，

$$\overline{H}^D_{\mu\nu}(y^-,y_1^-,y_2^-,k_T,p,q,z)=\int\mathrm{d}xH^{(0)}_{\mu\nu}(x,p,q)$$
$$\times\overline{H}^D(y^-,y_1^-,y_2^-,k_T,x,p,q,z) \tag{14.94}$$

所有切图的贡献都有这种因子化形式。因此，下面只列出对应不同切图的再次散射的部分 $\overline{H}^D$。对图 14.11 的中间切割[49, 51]

$$\overline{H}^D_{C(\text{Fig.14.11})}(y^-,y_1^-,y_2^-,k_T,x,p,q,z)$$
$$=\int\frac{\mathrm{d}\ell_T^2}{\ell_T^2}\frac{\alpha_s}{2\pi}C_F\frac{1+z^2}{1-z}$$
$$\times\frac{2\pi\alpha_s}{N_c}\overline{I}_{C(\text{Fig.14.11})}(y^-,y_1^-,y_2^-,\ell_T,k_T,x,p,q,z) \tag{14.95}$$
$$\overline{I}_{C(\text{Fig.14.11})}(y^-,y_1^-,y_2^-,\ell_T,k_T,x,p,q,z)$$
$$=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+x_L)p^+y^-+\mathrm{i}x_Tp^+(y_1^--y_2^-)}\theta(-y_2^-)$$
$$\times\theta(y^--y_1^-)(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_Lp^+y_2^-})(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_Lp^+(y^--y_1^-)}) \tag{14.96}$$

这里，分数动量定义为

$$x_L=\frac{\ell_T^2}{2p^+q^-z(1-z)},\quad x_T=\frac{k_T^2-2\vec{k}_T\cdot\vec{\ell}_T}{2p^+q^-z} \tag{14.97}$$

$x=x_B=Q^2/2p^+q^-$ 是 Bjorken 变量。

上述的贡献类似于一个偶极子的散射横截面，包含有四项。第一个对角项对应于所谓的硬–软过程, 这里的胶子辐射是由虚光子和带有分动量 x 的初始夸克之间

的硬散射引起。夸克被虚光子撞出质壳，通过胶子辐射再变成在壳。之后，在壳的夸克 (或辐射胶子) 与来自原子核中的另一个软胶子发生二次散射。第二个对角项是来自双重硬散射过程。这里，夸克在和虚光子硬散射之后是在壳的。然后通过和另一个携带有限分动量 $x_L + x_T$ 的硬胶子散射而导致胶子辐射。另外两个非对角项是硬–软过程和双重硬过程的干涉项。在共线辐射极限下 ($x_L \to 0$) 或当辐射胶子的形成时间 $\tau_f \equiv 1/x_L p^+$ 远大于原子核的直径时，这两个过程有相消干涉，而导致 Landau-Pomeranchuk-Migdal(LPM) 干涉效应。

我们可以类似地获得在图 14.12 中其他中间剪图 (a)~(d) 的再次散射部分 $\overline{H}^D$：

$$
\begin{aligned}
&\overline{H}^D_{C(a)}(y^-, y_1^-, y_2^-, k_T, x, p, q, z) \\
=&\int \frac{\mathrm{d}\ell_T^2}{(\vec{\ell}_T - \vec{k}_T)^2} \frac{\alpha_s}{2\pi} C_A \frac{1+z^2}{1-z} \\
&\times \frac{2\pi\alpha_s}{N_c} \overline{I}_{C(a)}(y^-, y_1^-, y_2^-, \ell_T, k_T, x, p, q, z) \\
&\overline{I}_{C(a)}(y^-, y_1^-, y_2^-, \ell_T, k_T, x, p, q, z) \\
=&\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+x_L)p^+y^- + \mathrm{i}x_T p^+(y_1^- - y_2^-)}\theta(-y_2^-) \\
&\times\theta(y^- - y_1^-)[\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_T p^+ y_2^-/(1-z)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_L p^+ y_2^-}] \\
&\times[\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_T p^+(y^- - y_1^-)/(1-z)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_L p^+(y^- - y_1^-)}]
\end{aligned}
\tag{14.98}
$$

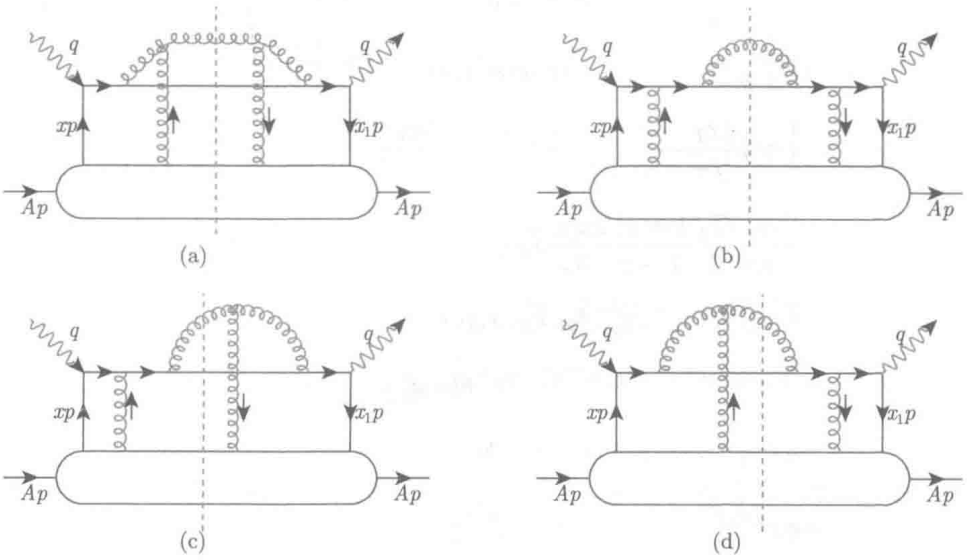


图 14.12 对最后结果有贡献的四个中间切图

$$
\begin{aligned}
&\overline{H}^{D}_{C(b)}(y^-,y_1^-,y_2^-,k_T,x,p,q,z)\\
=&\int\frac{\mathrm{d}\ell_T^2}{(\boldsymbol{\ell}_T-(1-z)\boldsymbol{k}_T)^2}\,\frac{\alpha_s}{2\pi}\,C_F\frac{1+z^2}{1-z}\\
&\times\frac{2\pi\alpha_s}{N_c}\overline{I}_{C(b)}(y^-,y_1^-,y_2^-,\ell_T,k_T,x,p,q,z)\\
&\overline{I}_{C(b)}(y^-,y_1^-,y_2^-,\ell_T,k_T,x,p,q,z)\\
=&\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+x_L)p^+y^-+\mathrm{i}x_Tp^+(y_1^--y_2^-)}\theta(-y_2^-)\\
&\times\theta(y^--y_1^-)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_Lp^+(y^--y_1^-)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_Lp^+y_2^-}
\end{aligned}
\tag{14.99}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overline{H}^{D}_{C(c)}(y^-,y_1^-,y_2^-,k_T,x,p,q,z)\\
=&\int\mathrm{d}\ell_T^2\frac{(\boldsymbol{\ell}_T-\boldsymbol{k}_T)\cdot(\boldsymbol{\ell}_T-(1-z)\boldsymbol{k}_T)}{(\boldsymbol{\ell}_T-\boldsymbol{k}_T)^2(\boldsymbol{\ell}_T-(1-z)\boldsymbol{k}_T)^2}\\
&\times\frac{\alpha_s}{2\pi}\,\frac{C_A}{2}\,\frac{1+z^2}{1-z}\,\frac{2\pi\alpha_s}{N_c}\overline{I}_{C(c)}(y^-,y_1^-,y_2^-,\ell_T,k_T,x,p,q,z)\\
&\overline{I}_{C(c)}(y^-,y_1^-,y_2^-,\ell_T,k_T,x,p,q,z)\\
=&\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+x_L)p^+y^-+\mathrm{i}x_Tp^+(y_1^--y_2^-)}\,\theta(-y_2^-)\\
&\times\theta(y^--y_1^-)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_Lp^+y_2^-}\\
&\times[\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_Tp^+(y^--y_1^-)/(1-z)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_Lp^+(y^--y_1^-)}]
\end{aligned}
\tag{14.100}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overline{H}^{D}_{C(d)}(y^-,y_1^-,y_2^-,k_T,x,p,q,z)\\
=&\int\mathrm{d}\ell_T^2\frac{(\boldsymbol{\ell}_T-\boldsymbol{k}_T)\cdot(\boldsymbol{\ell}_T-(1-z)\boldsymbol{k}_T)}{(\boldsymbol{\ell}_T-\boldsymbol{k}_T)^2(\boldsymbol{\ell}_T-(1-z)\boldsymbol{k}_T)^2}\\
&\times\frac{\alpha_s}{2\pi}\,\frac{C_A}{2}\,\frac{1+z^2}{1-z}\,\frac{2\pi\alpha_s}{N_c}\overline{I}_{C(d)}(y^-,y_1^-,y_2^-,\ell_T,k_T,x,p,q,z)\\
&\overline{I}_{C(d)}(y^-,y_1^-,y_2^-,\ell_T,k_T,x,p,q,z)\\
=&\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+x_L)p^+y^-+\mathrm{i}x_Tp^+(y_1^--y_2^-)}\,\theta(-y_2^-)\\
&\times\theta(y^--y_1^-)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_Lp^+(y^--y_1^-)}\\
&\times[\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_Tp^+y_2^-/(1-z)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_Lp^+y_2^-}]
\end{aligned}
\tag{14.101}
$$

要得到一个完整的计算，我们也要考虑对应的单次和三次散射之间的干涉的不对称切图 (左切和右切)。它们都可以用类似于上面的计算得到。我们建议读者

到文献 [53] 中查看所有这些不对称切图的重散射部分 $\overline{H}^D$。

要得到在方程 (14.90) 中双重散射对强子生产的半单举过程的贡献，我们需要计算再次散射部分 $\overline{H}^D$ 的二阶导数。仔细检查这些再次散射部分后，可以发现所有来自不对称切图的贡献都具有下面的形式：

$$\overline{H}^D_{\text{asym}} = \frac{\boldsymbol{\ell}_T \cdot [\boldsymbol{\ell}_T - f(z)\boldsymbol{k}_T]}{\boldsymbol{\ell}_T^2[\boldsymbol{\ell}_T - f(z)\boldsymbol{k}_T]^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}Xp^+Y^-} \tag{14.102}$$

其中 $f(z) = 0, 1, 1-z, z$，X 是分数纵动量，Y^- 代表空间坐标。可以证明这个表达式的二级导数在 $k_T = 0$ 时为零，

$$\nabla^2_{k_T} \frac{\boldsymbol{\ell}_T \cdot (\boldsymbol{\ell}_T - f(z)\boldsymbol{k}_T)}{\boldsymbol{\ell}_T^2(\boldsymbol{\ell}_T - f(z)\boldsymbol{k}_T)^2} = 0 \tag{14.103}$$

因此，当只保留幂次展开的领头项 $\mathcal{O}(x_B/Q^2\ell_T^2)$ 时，所有来自不对称切图 (右切和左切) 的贡献在对 k_T 进行二阶偏导后都会消失，

$$\nabla^2_{k_T} \overline{H}^D_{\text{asym}}|_{k_T=0} = 0 + \mathcal{O}(x_B/Q^2\ell_T^2) \tag{14.104}$$

同样，我们也会发现一些中间切图对最后的结果也没有贡献。其实，对 k_T 进行二阶偏导后，只有如图 14.12 所示的四个中间切图对最后的结果有贡献。

只包括那些于 k_T 的二阶求导后不为零的贡献，我们得到

$$\begin{aligned}
\nabla^2_{k_T} \overline{H}^D|_{k_T=0} = \int \mathrm{d}\ell_T^2 \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{1+z^2}{1-z} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+x_L)p^+y^-} \frac{2\pi\alpha_s}{N_c} \theta(-y_2^-)\theta(y^- - y_1^-) \\
\times \Bigg[\frac{4C_A}{\ell_T^4}(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_L p^+ y_2^-})(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_L p^+(y^- - y_1^-)}) \\
+ \frac{4C_F(1-z)^2}{\ell_T^4} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_L p^+(y^- - y_1^-)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_L p^+ y_2^-} \\
+ \frac{2C_A(1-z)}{\ell_T^4} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_L p^+ y_2^-}(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_L p^+(y^- - y_1^-)}) \\
+ \frac{2C_A(1-z)}{\ell_T^4} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_L p^+(y^- - y_1^-)}(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_L p^+ y_2^-}) \\
+ \mathcal{O}(x_B/Q^2\ell_T^2) \Bigg]
\end{aligned} \tag{14.105}$$

方程 (14.105) 右边的第一项来自 $\overline{H}^D_{C(a)}$ 的贡献，它是在螺旋度振幅近似下[49, 51]的主要贡献。它包含硬–软、双重硬过程及其干涉。其他三项分别来自图 14.12 中的 (b)~(d)，它们组成对第一项的 $1-z$ 幂次修正。第二项与 $(1-z)^2$ 成正比，来自如图 14.12(b) 所示的双重硬散射过程中夸克的末态辐射。第三和第四项的结

果来自夸克和其他末态辐射过程 (初态辐射和来自胶子的辐射) 的干涉。它们包含图 14.12(c) 和 (d) 中的双重硬过程，以及硬–软和双重硬过程的干涉。

将等式 (14.105) 代入方程 (14.94) 和 (14.90)，得到来自夸克–胶子双重散射的半单举张量，这里包括超出螺旋度振幅近似之外的贡献，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}W_{\mu\nu}^{D,q}}{\mathrm{d}z_h}=&\sum_q\int\mathrm{d}xH_{\mu\nu}^{(0)}(xp,q)\int_{z_h}^1\frac{\mathrm{d}z}{z}D_{q\to h}(z_h/z)\frac{\alpha_s}{2\pi}C_A\frac{1+z^2}{1-z}\\&\times\int\frac{\mathrm{d}\ell_T^2}{\ell_T^4}\frac{2\pi\alpha_s}{N_c}\left[T_{qg}^A(x,x_L)+(1-z)T_{qg}^{A(1)}(x,x_L)\right.\\&\left.+\frac{C_F}{C_A}(1-z)^2T_{qg}^{A(2)}(x,x_L)\right]\end{aligned}\tag{14.106}$$

其中

$$\begin{aligned}T_{qg}^A(x,x_L)=&\int\frac{\mathrm{d}y^-}{2\pi}\,\mathrm{d}y_1^-\mathrm{d}y_2^-(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_Lp^+y_2^-})(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_Lp^+(y^--y_1^-)})\\&\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+x_L)p^+y^-}\theta(-y_2^-)\theta(y^--y_1^-)\\&\times\frac{1}{2}\langle A|\bar\psi_q(0)\gamma^+F_\sigma{}^+(y_2^-)F^{+\sigma}(y_1^-)\psi_q(y^-)|A\rangle\end{aligned}\tag{14.107}$$

$$\begin{aligned}T_{qg}^{A(1)}(x,x_L)=&\int\frac{\mathrm{d}y^-}{2\pi}\,\mathrm{d}y_1^-\mathrm{d}y_2^-\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+x_L)p^+y^-}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_Lp^+(y^--y_1^-)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_Lp^+y_2^-}\right.\\&\left.-2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_Lp^+(y^--y_1^-+y_2^-)}\right]\theta(-y_2^-)\theta(y^--y_1^-)\\&\times\frac{1}{4}\langle A|\bar\psi_q(0)\gamma^+F_\sigma{}^+(y_2^-)F^{+\sigma}(y_1^-)\psi_q(y^-)|A\rangle\end{aligned}\tag{14.108}$$

$$\begin{aligned}T_{qg}^{A(2)}(x,x_L)=&\int\frac{\mathrm{d}y^-}{2\pi}\,\mathrm{d}y_1^-\mathrm{d}y_2^-\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xp^+y^-+\mathrm{i}x_Lp^+(y_1^--y_2^-)}\theta(-y_2^-)\theta(y^--y_1^-)\\&\frac{1}{2}\langle A|\bar\psi_q(0)\gamma^+F_\sigma{}^+(y_2^-)F^{+\sigma}(y_1^-)\psi_q(y^-)|A\rangle\end{aligned}\tag{14.109}$$

是原子核的 4- 扭曲度部分子矩阵元。显然这些部分子矩阵元不是相互独立的。$T_{qg}^A(x,x_L)$ 包含所有的软 - 硬、双重硬过程以及它们的干涉项。因此它基本上包含了四个独立的部分子矩阵元。$T_{qg}^{A(1)}(x,x_L)$ 和 $T_{gq}^{A(2)}(x,x_L)$ 是来自对螺旋度振幅近似的修正。但这两个矩阵元已经包含在 $T_{qg}^A(x,x_L)$ 中。

在共线展开中，我们在有限 ℓ_T 的条件下取 $k_T\to 0$ 的极限。因此，在方程 (14.107)~(14.109) 中，其中的一个 4- 扭曲度部分子矩阵元里的胶子场在软–硬过程中是带有零动量的。但是，零动量的胶子分布 $xf_g(x)$ $(x=0)$ 在 QCD 中是没有定义的。参考文献 [49, 51] 中提到，这是因为共线展开中的高阶项被忽略了。作为一

个补救办法, 我们可以把共线展开中的一部分高扭曲度项重新求和, 这样就会得到一个 $\exp(\mathrm{i}x_T p^+ y^-)$ 相因子, 其中 $x_T \equiv (k_T^2 - 2\boldsymbol{k}_T \cdot \boldsymbol{\ell}_T)/2p^+q^- z$ 由式 (14.97) 定义, 它与初态部分子的内在横向动量有关。这样, 在部分子矩阵元中的软胶子场将带有分数动量 x_T。

一般可把部分子矩阵元写为

$$T_{qg}^A(x, x_L) \equiv \int \frac{\mathrm{d}^2 k_T}{(2\pi)^2} T_{qg}^A(x, x_L, k_T) \tag{14.110}$$

其中横动量依赖的部分子矩阵元定义为

$$\begin{aligned} T_{qg}^A(x, x_L, k_T) = & \int \frac{\mathrm{d}y_0^-}{2\pi}\, \mathrm{d}y_1^- \mathrm{d}y_2^- \mathrm{d}^2\xi_T \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+x_L)p^+ y_0^-} \\ & \times (1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_L p^+ y_2^-})(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_L p^+ (y_0^- - y_1^-)}) \\ & \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_T p^+ \xi^- - \mathrm{i}k_T \cdot \xi_T} \theta(-y_2^-)\theta(y_0^- - y_1^-) \\ & \times \langle A|\bar{\psi}_q(0)\, \frac{\gamma^+}{2} F_\sigma{}^+(y_2^-)\, F^{+\sigma}(y_1^-)\, \psi_q(y_0^-)|A\rangle \end{aligned} \tag{14.111}$$

这里 $\xi = y_1 - y_2$, y_0, y_1 及 y_2 是夸克及胶子场的时空坐标。相对横坐标 ξ_T 是在胶子分布函数中横动量 k_T 的傅里叶共轭变量。

下面假定上面的部分子矩阵元可以因子化[49, 51] 为原子核夸克和核子胶子的 2- 扭曲度分布函数的乘积,

$$\begin{aligned} \frac{T_{qg}^A(x, x_L, k_T)}{f_q^A(x)} = & \int \mathrm{d}y^- \rho_N(y) \int \frac{\mathrm{d}\xi^-}{2p^+} \mathrm{d}^2\xi_T \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_T p^+ \xi^- - \mathrm{i}k_T \cdot \xi_T} \\ & \times \langle p|F_\sigma{}^+(y_2^-)\, F^{+\sigma}(y_1^-)|p\rangle \\ & \times \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_L p^+ \xi^-}(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_L p^+ y^-}) + c(x_L)(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_L p^+ y^-})\right] \\ = & \pi \int \mathrm{d}y^- \rho_N(y) \left[1 - \cos(x_L p^+ y^-)\right] \\ & \times \left[\phi_N(x_T + x_L, k_T) + c(x_L)\phi_N(x_T, k_T)\right] \end{aligned} \tag{14.112}$$

这里我们只考虑胶子和夸克来自核中的不同的核子, $\rho_N(y)$ $(y = (y_1 + y_2)/2)$ 是核中的核子分布, $c(x_L) = f_q^A(x + x_L)/f_q^A(x)$。核子的横动量依赖的胶子分布函数定义为

$$\phi_N(x, p_T) = \int \frac{\mathrm{d}\xi^-}{2\pi p^+} \mathrm{d}^2\xi_T\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}xp^+\xi^- - \mathrm{i}k_T \cdot \xi_T} \langle N|F^{\sigma+}(0) F_\sigma^+(\xi^-, \xi_T)|N\rangle \tag{14.113}$$

$$x f_g^N(x) = \int \frac{\mathrm{d}^2 k_T}{(2\pi)^2} \phi_N(x, p_T) \tag{14.114}$$

这里, $f_q^A(x)$ 是核中的夸克分部函数, $f_g^N(x)$ 是核子的胶子分布。

在同样的扭曲度展开的框架下，可以计算夸克的横动量展宽

$$\langle \Delta p_T^2 \rangle = \frac{4\pi\alpha_s C_R}{N_c^2-1}\frac{T_{qg}^A(x,0)}{f_q^A(x)} = \int \mathrm{d}y^- \, \hat{q}_R(0,y) \tag{14.115}$$

这里，$C_R = C_F = (N_c^2-1)/2N_c$ 是夸克的色因子，

$$\hat{q}_R(x_L,y) = \frac{4\pi^2\alpha_s C_R}{N_c^2-1}\rho_N(y)\int \frac{\mathrm{d}^2 k_T}{(2\pi)^2}\phi_N(x_T+x_L,k_T) \tag{14.116}$$

定义为广义的部分子喷注输运参数。

假定核分布在光锥坐标下是一高斯分布 $\rho_N(y^-) = (p^+\rho_0/\sqrt{\pi})\exp(y^{-2}/2R_A^{-2})$，我们可以把核的 4- 扭曲度部分子矩阵元表达为

$$\begin{aligned} T_{qg}^A(x,x_L) = {} & \frac{C}{x_A}(1-\mathrm{e}^{-x_L^2/x_A^2})[f_q^A(x+x_L)\,x_T f_g^N(x_T) \\ & + f_q^A(x)(x_L+x_T)f_g^N(x_L+x_T)] \end{aligned} \tag{14.117}$$

其中 $C = 2\pi\rho_0$ 是一常数，$x_A = 1/m_N R_A$，$R_A^- = \sqrt{2}R_A m_N/p^+$，$m_N$ 是核子质量。我们强调一下，这个核 4- 扭曲度矩阵元正比于 $1/x_A = R_A m_N$，也就是与核的大小成正比。在这个高斯近似下，在核中心的喷注输运参数为 $\hat{q}_F(0,0) = (\sqrt{\pi}p^+C/N_c)\alpha_s x_T f_g^N(x_T)$，而夸克的总横动量展宽为 $\langle \Delta p_T^2 \rangle = (2\pi C/N_c x_A)\alpha_s x_T f_g^N(x_T)$。

可以看到对应于硬–软和双硬过程之间干涉的非对角矩阵元有一 $\exp(-x_L^2/x_A^2)$ 因子的压低。这是因为在硬–软和双硬过程的干涉中，实际上在包含初态夸克和胶子的两个核子之间有一个 $x_L p^+$ 的动量流动。在没有强长距离双核子关联的原子核内，这个动量流 $x_L p^+$ 的大小应该局限于由不确定性原理所允许的范围内，$1/R_A^- \sim p^+/R_A M$。类似地，在方程 (14.108) 和 (14.109) 中的其他双部分子矩阵元可以近似为

$$\begin{aligned} T_{qg}^{A(1)}(x,x_L) = {} & \frac{C}{2x_A}\Big\{\big[f_q^A(x+x_L)\,x_T f_g^N(x_T) \\ & + f_q^A(x)(x_L+x_T)f_g^N(x_L+x_T)\big]\,\mathrm{e}^{-x_L^2/x_A^2} \\ & - 2f_q^A(x)(x_L+x_T)f_g^N(x_L+x_T)\Big\} \end{aligned} \tag{14.118}$$

$$T_{qg}^{A(2)}(x,x_L) = \frac{C}{x_A}f_q^A(x)(x_L+x_T)f_g^N(x_L+x_T) \tag{14.119}$$

从上面对矩阵元的估算，$T_{qg}^A(x,x_L)$ 以及 $T_{qg}^{A(1)}(x,x_L)$ 都因为 LPM 的干涉效应而包含一个因子 $1-\mathrm{e}^{-x_L^2/x_A^2}$。这个干涉因子在方程 (14.106) 中对横动量积分在 $x_L \sim x_A$ 附近提供一个有效的截断。在下面的有效能量损失的计算中，我们将看到，有这样来自 LPM 干涉效应的一个限制，横动量积分将导致除了系数 $f_q^A(x)/x_A$

之外的一个因子 $1/x_A$。所以，在方程 (14.106) 中与 $T_{qg}^{A}(x,x_L)$ 和 $T_{qg}^{A(1)}(x,x_L)$ 相关的双重散射的贡献与 $R_A^2 f_q^A(x)$ 成正比。这些是在大核极限下双重散射的领头阶贡献。另一方面，方程 (14.106) 中的第三项 $T_{qg}^{A(2)}(x,x_L)$ 不包含任何干涉效应，只会对与 $R_A f_q^A(x)$ 成正比的修正项有贡献。在对大核极限下 $A^{1/3}\gg 1$ 的双重散射过程的研究中我们将忽略这一项贡献。

14.4.4 虚修正

到目前为止，我们还没有考虑到虚修正，以确保最后的结果是红外安全的。虚修正可以像辐射修正一样计算，但它们也可以通过幺正性条件而得到。在 DGLAP 演化方程 (14.83) 中，实修正可以解释为夸克辐射出一个带有分数动量 $1-z$ 胶子的几率。那么为了保证幺正性，我们还必须考虑到在演化过程中没有胶子辐射几率。这个幺正性条件可以给出和从虚图算出的一样的虚修正。例如，双重散射过程对夸克碎裂的虚贡献为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}W_{\mu\nu}^{D(v),q}}{\mathrm{d}z_h}=&-\sum_q\int \mathrm{d}x H_{\mu\nu}^{(0)}(xp,q)D_{q\to h}(z_h)\\&\times\frac{\alpha_s}{2\pi}C_A\int_0^1\mathrm{d}z\,\frac{1+z^2}{1-z}\int\frac{\mathrm{d}\ell_T^2}{\ell_T^4}\frac{2\pi\alpha_s}{N_c}T_{qg}^{A(m)}(x,x_L)\end{aligned}\tag{14.120}$$

其中

$$T_{qg}^{A(m)}(x,x_L)\equiv T_{qg}^{A}(x,x_L)+(1-z)T_{qg}^{A(1)}(x,x_L)\tag{14.121}$$

如果一个函数 $F(z)$ 在 $z=1$ 时是足够平滑的，以下积分的红外发散部分可以单独提取出来

$$\begin{aligned}&\int_0^1\mathrm{d}z\,\frac{1+z^2}{1-z}F(z)=F(1)\int_0^1\mathrm{d}z\frac{2}{1-z}-\Delta F\\&\Delta F\equiv\int_0^1\mathrm{d}z\frac{1}{1-z}\left[2F(1)-(1+z^2)F(z)\right]\end{aligned}\tag{14.122}$$

因为 $F(z)$ 是一个在 $z=1$ 附近的平滑函数，所以第二项 ΔF 是有限的。

我们可以把这个步骤用在修正碎裂函数里的积分上。其中的发散项可以和方程 (14.106) 中的辐射贡献合并，而消除红外发散。利用“+”函数，最后的结果可以表示为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}W_{\mu\nu}^{D,q}}{\mathrm{d}z_h}=&\sum_q\int\mathrm{d}x H_{\mu\nu}^{(0)}(xp,q)\frac{2\pi\alpha_s}{N_c}\int\frac{\mathrm{d}\ell_T^2}{\ell_T^4}\int_{z_h}^1\frac{\mathrm{d}z}{z}D_{q\to h}(z_h/z)\frac{\alpha_s}{2\pi}C_A\\&\times\left[\frac{1+z^2}{(1-z)_+}T_{qg}^{A(m)}(x,x_L)+\delta(z-1)\Delta T_{qg}^{A(m)}(x,\ell_T^2)\right]\end{aligned}\tag{14.123}$$

$$\Delta T_{qg}^{A(m)}(x,\ell_T^2)\equiv\int_0^1 \mathrm{d}z\frac{1}{1-z}\left[2T_{qg}^{A(m)}(x,x_L)|_{z=1}-(1+z^2)T_{qg}^{A(m)}(x,x_L)\right] \tag{14.124}$$

这里，$T_{qg}^{A(m)}(x,x_L)$ 的隐含 z 依赖性在最后结果中起了重要的作用。如果忽略 $T_{qg}^{A}(x,x_L)$ 对 z 的依赖，上述被积函数将正比于单次散射的劈裂函数。类似地，来自胶子碎裂贡献的最后结果是

$$\frac{\mathrm{d}W_{\mu\nu}^{D,g}}{\mathrm{d}z_h}=\sum_q\int \mathrm{d}xH_{\mu\nu}^{(0)}(xp,q)\frac{2\pi\alpha_s}{N_c}\int\frac{\mathrm{d}\ell_T^2}{\ell_T^4}\int_{z_h}^1\frac{\mathrm{d}z}{z}D_{g\to h}(z_h/z)\times\frac{\alpha_s}{2\pi}C_A\left[\frac{1+(1-z)^2}{z_+}T_{qg}^{A(m)}(x,x_L)+\delta(z)\Delta T_{qg}^{A(m)}(x,\ell_T^2)\right] \tag{14.125}$$

在这里我们利用了方程 (14.97) 中的 x_L 以及 $T_{qg}^{A}(x,x_L)$ 在变换 $z\to 1-z$ 下是不变的。

14.4.5　修正碎裂函数及部分子能量损失

把这些虚修正和单次散射的贡献包括进来，我们可把半单举张量用修正碎裂函数 $\widetilde{D}_{q\to h}(z_h,\mu^2)$ 写出来

$$\frac{\mathrm{d}W_{\mu\nu}}{\mathrm{d}z_h}=\sum_q\int \mathrm{d}x\widetilde{f}_q^A(x,\mu_I^2)H_{\mu\nu}^{(0)}(x,p,q)\widetilde{D}_{q\to h}(z_h,\mu^2) \tag{14.126}$$

这里 $\widetilde{f}_q^A(x,\mu_I^2)$ 是夸克的分布函数，原则上也应该包括来自初态散射的高扭曲的贡献。夸克的有效修正碎裂函数定义为

$$\widetilde{D}_{q\to h}(z_h,\mu^2)\equiv D_{q\to h}(z_h,\mu^2)+\int_0^{\mu^2}\frac{\mathrm{d}\ell_T^2}{\ell_T^2}\frac{\alpha_s}{2\pi}\int_{z_h}^1\frac{\mathrm{d}z}{z}\left[\Delta\gamma_{q\to qg}(z,x,x_L,\ell_T^2)D_{q\to h}(z_h/z)+\Delta\gamma_{q\to gq}(z,x,x_L,\ell_T^2)D_{g\to h}(z_h/z)\right] \tag{14.127}$$

其中 $D_{q\to h}(z_h,\mu^2)$ 和 $D_{g\to h}(z_h,\mu^2)$ 是真空中领头扭曲度的碎裂函数。核介质中修正的劈裂函数是

$$\Delta\gamma_{q\to qg}(z,x,x_L,\ell_T^2)=\left[\frac{1+z^2}{(1-z)_+}T_{qg}^{A(m)}(x,x_L)+\delta(1-z)\Delta T_{qg}^{A(m)}(x,\ell_T^2)\right]\times\frac{2\pi\alpha_s C_A}{\ell_T^2N_c\widetilde{f}_q^A(x,\mu_I^2)} \tag{14.128}$$

$$\Delta\gamma_{q\to gq}(z,x,x_L,\ell_T^2)=\Delta\gamma_{q\to qg}(1-z,x,x_L,\ell_T^2) \tag{14.129}$$

为了进一步简化计算，假设 $x_T \ll x_L \ll x$。修正后的矩阵元可以近似为

$$T_{qg}^{A(m)}(x, x_L) \approx \frac{\widetilde{C}}{x_A}(1 - \mathrm{e}^{-x_L^2/x_A^2}) f_q^A(x) \left[1 - \frac{1-z}{2}\right] \tag{14.130}$$

其中系数 $\widetilde{C} \equiv 2Cx_T f_g^N(x_T)$ 原则上应该依赖于 Q^2 和 x_T。在这里我们将它简化为一个常数。

在上式的矩阵元中，$1/x_L p^+ = 2q^- z(1-z)/\mu^2$ 是辐射胶子的形成时间。当形成时间远大于核的尺度时，由于典型的 LPM 干涉效应，上面的矩阵元将会消失。这是因为在这个长的形成时间内，在核中传播的领头夸克及辐射出的胶子仍然是一个相干的体系。额外的散射不会导致更多的胶子辐射，从而限制了领头夸克的能量损失。

LPM 干涉效应减少了辐射胶子的可用相空间，这对于我们可以在这里利用 LQS 的因子化至关重要。在最初的 LQS 方法中 [52]，利用末态大横动量 $\ell_T^2 \sim Q^2$ 过程的广义因子化，我们可只考虑领头 $1/Q^2$ 的贡献，因为这些贡献被核的尺度 $R_A \sim A^{1/3}$ 所增强。在大的 Q^2 和 A 下，领头的核修正来自两个部分子双重散射的高扭曲度贡献，它正比于 $\alpha_s R_A/Q^2$。两个以上的部分子多重散射可以忽略不计。但在推导修正碎裂函数时，我们必须采取在 $\ell_T^2 \ll Q^2$ 极限下的领头对数近似，这里 ℓ_T 是辐射胶子的横动量。由于 LPM 干涉压低了那些在我们所选的坐标系下形成时间 ($\tau_f \sim Q^2/\ell_T^2 p^+$) 远大于核尺度 $m_N R_A/p^+$ 的胶子辐射，ℓ_T^2 则应该有一个极小值 $\ell_T^2 \sim Q^2/m_N R_A \sim Q^2/A^{1/3}$，这里 m_N 是核子质量。因此，对数近似对大原子核 ($m_N R_A \gg 1$) 仍然有效。同时，对于大的 Q^2，正比于 $\alpha_s R_A/\ell_T^2 \sim \alpha_s R_A^2/Q^2$ 的领头高扭曲贡献仍然可以小到让我们可以忽略多于两个部分子的过程。这样，与 LQS [52] 研究的具有大横动量过程中的 $\alpha_s A^{1/3}/Q^2$ 相比，核内碎裂过程的扭曲度展开参数则为 $\alpha_s A^{2/3}/Q^2$。这就是为什么这里得出的碎裂函数的核修正依赖于核尺度 R_A 的二次方。

由于动量守恒，在核子中的部分子分动量有一个上限 $x_L < 1$。虽然核中的费米运动效应可以允许 $x_L > 1$，但在这个区间的部分子分布仍然有很大的压低。因此，它在式 (14.127) 里的 z 和 ℓ_T 的积分中提供了一个对 x_L 的自然的截断。假设核中的 4- 扭曲度部分子矩阵元具有一个因子化的形式，其中只剩下一个自由参数 $\widetilde{C}(Q^2)$ 来代表核内的夸克–胶子关联强度。一旦固定这个参数，我们可以预言碎裂函数在介质中的修正对动量 z、能量 ν 以及核 A 的依赖。图 14.13 和图 14.14 是计算出的碎裂函数的核修正因子和以 ^{14}N 和 ^{84}Kr 为靶的 HERMES 实验数据[54] 的比较。这些计算也考虑到了 HERMES 数据中 Q^2，ν 和 z 的值之间的关联。计算出的对 z 和 ν 的依赖形状与实验数据符合得很好。理论预言的一个明显的特征是对核尺度的二阶依赖 $A^{2/3}$，这是第一次被实验验证。这种二阶依赖是 QCD 胶子辐射

谱和 LPM 干涉对 ℓ_T 或 x_L 可用相空间的改变的联合效应。注意，这里给出的数值结果是在原来的螺旋度振幅近似下[49, 51] 得到的。超出螺旋度振幅近似的数值计算结果只有百分之几的区别 [53]。

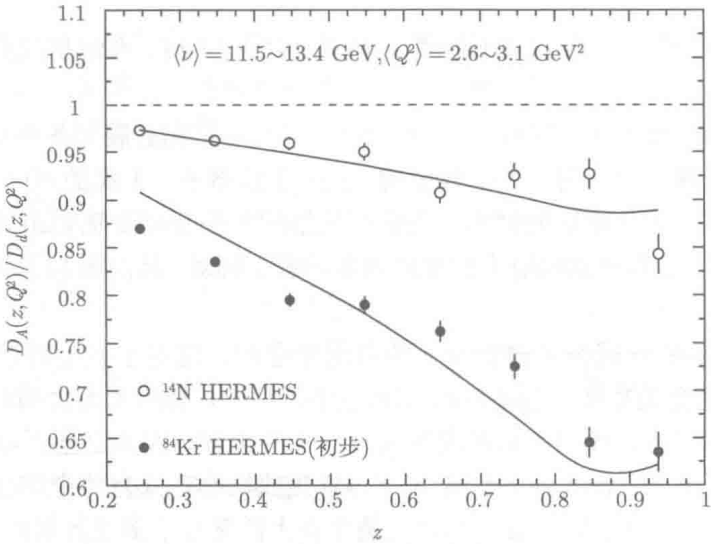


图 14.13　碎裂函数核修正的理论预言与 HERMES 在 DIS 中的 A 和 d 靶之间的强子分布比率的数据[54] 的比较

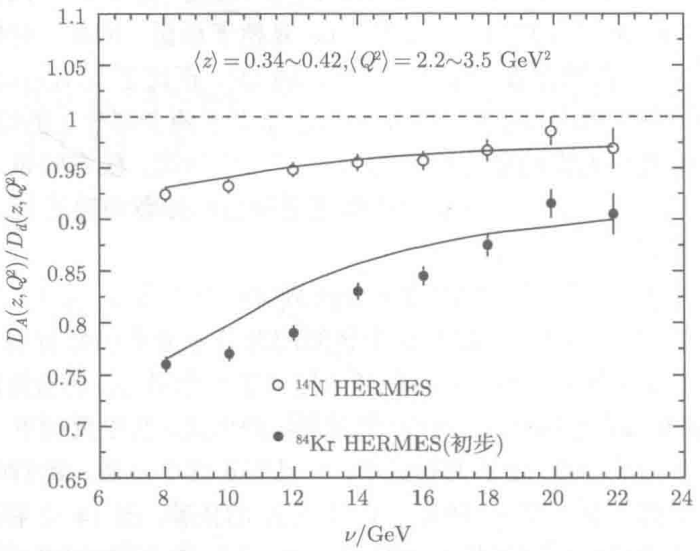


图 14.14　核修正因子的能量依赖与 HERMES[54] 实验数据的比较

通过对一个核靶中整体压低的拟合，我们可以得到理论中的唯一参数，$\widetilde{C}(Q^2) = 0.0060\ \mathrm{GeV}^2$，这里在 $Q^2 \approx 3\ \mathrm{GeV}^2$ 下，我们取了 $\alpha_s(Q^2) = 0.33$ 。这个参数也和

在 pA 碰撞中 Drell-Yan 双轻子的横动量展宽有关，$\langle \Delta q_\perp^2 \rangle \approx \widetilde{C}\pi\alpha_s/N_c x_A$。利用实验值 $\langle \Delta q_\perp^2 \rangle = 0.016 A^{1/3}\ \mathrm{GeV}^2$ 以及 $\alpha_s(M_{ll}^2) = 0.21$ ($\langle M_{ll}^2 \rangle \approx 40\ \mathrm{GeV}^2$)，可以得到 $\widetilde{C}(M_{ll}^2) = 0.013\ \mathrm{GeV}^2$，这大约是我们从拟合 HERMES 数据获得的值的 2 倍。在 $Q^2 = 4p_T^2 \approx 64\ \mathrm{GeV}^2$ 时，从光子-喷注产生中的核展宽所提取的 $\widetilde{C}$ 的值更大[52]。$\widetilde{C}(Q^2)$ 这样大的标度依赖也是预期的，因为它与核中的小 x 胶子分布函数有关 $xg(x,Q^2)$。利用 $\widetilde{C}(Q^2)$，我们可以估算出喷注输运参数在静止系下 ($p^+ = m_N$) 核中心的值

$$\begin{aligned}\hat{q}_F(0,0) &= \frac{\sqrt{\pi}p^+ C}{N_c}\alpha_s x_T f_g^N(x_T) = \frac{\sqrt{\pi}}{2N_c}\alpha_s m_N \widetilde{C} \\ &\approx 0.003\ \mathrm{GeV}^2/\mathrm{fm}\end{aligned} \tag{14.131}$$

原则上，碎裂函数的核修正是多重散射引起的胶子辐射的唯一实验效应。领头夸克的能量损失永远不可直接测量。能量损失的净效应一方面是领头粒子的压低，另一方面是软粒子的增强，从而导致碎裂函数的修正。所以在实验上，可以通过碎裂函数中从大到小的动量区的动量转移，来描述部分子的能量损失。

仔细检查式 (14.127)，我们发现第一项是真空中重整化后的碎裂函数。其余是由夸克穿过核介质时再次散射所导致。尤其是最后一项，是从二次散射诱发的胶子通过碎裂而产生的粒子。这样的粒子生产是以领头夸克的能量损失为代价的。所以，可以通过辐射胶子所带的分动量来衡量夸克的能量损失，

$$\begin{aligned}\langle \Delta z_g \rangle(x_B,\mu^2) &= \int_0^{\mu^2}\frac{\mathrm{d}\ell_T^2}{\ell_T^2}\int_0^1 \mathrm{d}z\frac{\alpha_s}{2\pi}z\,\Delta\gamma_{q\to gq}(z,x_B,x_L,\ell_T^2) \\ &= \frac{C_A\alpha_s^2}{N_c}\int_0^{\mu^2}\frac{\mathrm{d}\ell_T^2}{\ell_T^4}\int_0^1 \mathrm{d}z[1+(1-z)^2]\frac{T_{qg}^{A(m)}(x_B,x_L)}{\widetilde{f}_q^A(x_B,\mu_I^2)}\end{aligned} \tag{14.132}$$

利用式 (14.130) 中对修正 4- 扭曲度部分子矩阵元的近似，我们得到

$$\begin{aligned}\langle \Delta z_g \rangle(x_B,\mu^2) = \widetilde{C}\frac{C_A\alpha_s^2}{N_c}\frac{x_B}{x_A Q^2}\int_0^1 \mathrm{d}z\frac{1+(1-z)^2}{z(1-z)} \\ \times\int_0^{x_\mu}\frac{\mathrm{d}x_L}{x_L^2}(1-\frac{z}{2})\,(1-\mathrm{e}^{-x_L^2/x_A^2})\end{aligned} \tag{14.133}$$

其中，当我们选择因式化标度为 $\mu^2 = Q^2$，$x_\mu = \mu^2/2p^+q^-z(1-z) = x_B/z(1-z)$。当 $x_A \ll x_B \ll 1$ 时，可以估算出领头夸克的能量损失为

$$\langle \Delta z_g \rangle(x_B,\mu^2) \approx \widetilde{C}\frac{C_A\alpha_s^2}{N_c}\frac{x_B}{Q^2x_A^2}5\sqrt{\pi}\left(\ln\frac{1-2x_B}{x_B}-\frac{1}{2}\right) \tag{14.134}$$

$$= \frac{C_A\alpha_s}{\nu}\hat{q}_F(0,0)R_A^2 5\left(\ln\frac{1-2x_B}{x_B}-\frac{1}{2}\right) \tag{14.135}$$

由于 $x_A = 1/m_N R_A$, 能量损失 $\langle \Delta z_g \rangle$ 将依赖于核尺度的二次方。

在核的静止坐标系下，$p^+ = m_N$, $q^- = \nu$, $x_B \equiv Q^2/2p^+q^- = Q^2/2m_N\nu$。平均总能量损失为 $\Delta E = \nu\langle \Delta z_g \rangle \approx \widetilde{C}(Q^2)\alpha_s^2(Q^2)m_N R_A^2(C_A/N_c)5\ln(1/2x_B)$。利用从和 HERMES 实验[54] 对比所确定的 $\widetilde{C}$ 在 $\langle x_B \rangle \approx 0.124$ 的值, 以及假定的高斯分布中的平均核长度 $\langle L_A \rangle = R_A\sqrt{2/\pi}$，可以得到夸克在金核中的平均能量损失 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}L \approx 0.5$ GeV/fm。

14.4.6　QGP 中的喷注淬火

在高能重离子碰撞过程中，初始部分子的硬散射会产生大横动量的末态部分子或喷注。这些高能部分子会在重离子碰撞中形成的夸克胶子等离子体中传播。通过和热密物质的相互作用以及韧致辐射，这些高能部分子会损失能量，而导致末态的喷注或大横动量粒子的压低。这个现象被称为喷注淬火[42, 43]。

上面几节中推导出的在 DIS 中夸克的生产、传播、部分子能量损失以及碎裂函数的核修正也适用于高能量重离子碰撞中的大横动量部分子。在这种情况下，我们假设夸克胶子等离子体的寿命比其形成的初始时间和膨胀时间尺度长得多，因此可以把热密物质里面的热部分子当成渐近态对待。同时，认为大横动量部分子的初始产生和后来的在热密物质中的传播是可以因子化的。这样，我们只需要把核中的核子分布 $\rho_N(y)$ 用 QGP 中的热粒子分布 $\rho(y) = 1/(2\pi)^3 \int \mathrm{d}^3k/f(k,y)$ 代替，而核子的胶子分布 $\phi_N(x,k_T)$ 用 QGP 中热部分子的有效胶子分布 $\phi_k(x,k_T)$ 代替。这样，QGP 中的夸克–胶子关联函数将具有下面因子化的形式[55]：

$$\frac{T_{qg}^A(x,x_L,k_T)}{f_q^A(x)} = \pi \int \mathrm{d}y^- \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} f(k,y)\left[1-\cos(x_L k^+ y^-)\right] \times \left[\phi_k(x_T+x_L,k_T) + c(x_L)\phi_k(x_T,k_T)\right] \tag{14.136}$$

这里 $f(k,y)$ 是 QGP 介质中带有色荷的热粒子的相空间分布，DIS 中的 $c(x_L) = f_q(x+x_L)/f_q(x)$ 将由重离子碰撞中初始喷注产生率的比值代替。而 $\phi_k(x_T,k_T)$ 则是 QGP 中热粒子色荷中的横动量依赖的胶子分布函数。利用 QGP 中的广义的喷注输运参数

$$\hat{q}_R(x_L,y) = \frac{4\pi^2\alpha_s C_R}{N_c^2-1}\int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} f(k,y) \int \frac{\mathrm{d}^2k_T}{(2\pi)^2}\phi_k(x_T+x_L,k_T) \tag{14.137}$$

可以把夸克–胶子关联函数写成

$$\frac{T_{qg}^A(x,x_L)}{f_q^A(x)} = \frac{N_c^2-1}{4\pi\alpha_s C_R}\frac{1+z}{2}\int \mathrm{d}y^- 2\sin^2\left[\frac{y^-\ell_T^2}{4Ez(1-z)}\right] \times \left[\hat{q}_R(x_L,y) + c(x,x_L)\hat{q}_R(0,y)\right] \tag{14.138}$$

把上面的夸克–胶子关联函数代入式 (14.127), 就可以得到在 QGP 介质中的夸克修正碎裂函数 $\widetilde{D}_{q\to h}(z_h,\mu^2)$。类似的，也可以得到胶子在 QGP 介质中的修正碎裂函数 $\widetilde{D}_{g\to h}(z_h,\mu^2)$。只不过我们需要把其中的喷注输运参数换成胶子的，其中真空中的劈裂函数也需要换成胶子的。利用广义的喷注输运参数，我们也可以把部分子的总能量损失写为

$$\frac{\Delta E}{E}=\frac{\alpha_s N_c}{4\pi}\int \mathrm{d}y^-\mathrm{d}z\mathrm{d}\ell_\perp^2\frac{1+(1-z)^2}{\ell_T^2(\ell_T^2+\mu_T^2)}\frac{1+z}{2}[\hat{q}_R(x_L,y) +c(x_L)\hat{q}_R(0,y)]\sin^2\left[\frac{\ell_T^2 y^-}{4Ez(1-z)}\right] \tag{14.139}$$

在高能核子碰撞中，初始产生的喷注谱可以用线性因子化的微扰 QCD(pQCD) 的部分子模型计算。在 $p+p$ 碰撞中，强子产生的单举截面可以因子化为核子中的部分子分布函数、基本的部分子散射截面以及部分子碎裂函数的卷积，

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{pp}^h}{\mathrm{d}y\mathrm{d}^2p_T}=\sum_{abcd}\int \mathrm{d}x_a\mathrm{d}x_b f_{a/p}(x_a,\mu^2)f_{b/p}(x_b,\mu^2) \times\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\hat{t}}(ab\to cd)\frac{D_{h/c}^0(z_c,\mu^2)}{\pi z_c}+\mathcal{O}(\alpha_s^3) \tag{14.140}$$

其中 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\hat{t}(ab\to cd)$ 是领头阶下 (LO)α_s^2 基本部分子的散射截面。次领头阶 (NLO) 的贡献包括 $2\to3$ 树图贡献和 1- 圈图对 $2\to2$ 树图过程的虚修正。质子的部分子分布函数 (PDF)$f_{a/p}(x_a,\mu^2)$ 可以由 CTEQ6M 的参数化给出，其中 x_a 是束流部分子携带的分数动量。真空中由部分子 c 到强子 h 的碎裂函数 (FF) $D_{h/c}^0(z_c,\mu^2)$，由 AKK 参数化给出，这里 z_c 是末态强子所带的分数动量。

我们可以使用基于 NLO 蒙特卡罗积分的程序来计算上面的单个强子谱。在这个 NLO 程序中，把因子化和重整化标度选为相同 (μ 代表)，并且都与末态强子的横动量 p_T 成正比。在这个 NLO pQCD 部分子模型中用 $\mu=0.9\sim1.5p_T$ 计算出的单举 π 谱与 RHIC 能量下的 $p+p$ 碰撞实验数据符合很好。特别是在 $\mu=1.2p_T$ 的标度下，在 $p+p$ 中计算出的 π^0 谱可以非常好地描述 RHIC 数据。在 $A+A$ 碰撞中, 我们可以使用相同的标度。

进一步假设，可以用同样的线性因子化 NLO pQCD 部分子模型来计算重离子碰撞中的大横动量单强子谱

$$\frac{1}{N_{\mathrm{bin}}^{AB}(b)}\frac{\mathrm{d}\sigma_{AB}^h}{\mathrm{d}y\mathrm{d}^2p_T}=\sum_{abcd}\int \mathrm{d}x_a\mathrm{d}x_b f_{a/A}(x_a,\mu^2)f_{b/B}(x_b,\mu^2) \times\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\hat{t}}(ab\to cd)\frac{\langle\tilde{D}_c^h(z_h,Q^2,E,b)\rangle}{\pi z_c}+\mathcal{O}(\alpha_s^3) \tag{14.141}$$

其中 $N_{\rm bin}^{AB}(b)$ 是给定对撞参数 b 下 $A+B$ 核碰撞中的成对核子–核子碰撞数，$\langle \tilde{D}_c^h(z_h,Q^2,E,b)\rangle$ 是对初始生产位置和喷注传播方向平均后的部分子修正碎裂函数，$f_{a/A}(x_a,\mu^2)$ 是核中每个核子的有效部分子分布。部分子分布的核修正效应对大横动量强子的生产影响很小，在这里可以忽略不计。

在给定对撞参数 $\boldsymbol{b}$ 的重离子碰撞中，初始喷注生产截面与两个碰撞核的重叠函数 $\int \mathrm{d}^2 r t_A(r) t_B(|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{r}|)$ 成正比。在程函 (eikonal) 近似下，喷注是沿着一条直线传播。根据式 (14.137) 中喷注输运参数的定义，它应该与传播路径上在 $\boldsymbol{r}_j=\boldsymbol{r}+(\tau-\tau_0)\boldsymbol{n}$ 点的 QGP 或强子相中的局部粒子密度成正比。这里 τ_0 是介质的形成时间，喷注传播的方向由其在横平面上的方位角 ϕ 定义。式 (14.136) 中的夸克–胶子关联函数决定介质中的修正碎裂函数，它涉及沿喷注传播路径的一个积分。所以最后的修正碎裂函数依赖沿喷注传播路径上热密物质的演化，而且也依赖初始生产位置 $\boldsymbol{r}$ 和传播方向 $\boldsymbol{n}$。所以，为了得到有效的介质修正部分子碎裂函数，我们必须对初始喷注生产的位置和传播方向做平均

$$\begin{aligned}\langle \tilde{D}_a^h(z_h,Q^2,E,b)\rangle = &\frac{1}{\displaystyle\int \mathrm{d}^2 r t_A(|\boldsymbol{r}|) t_B(|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{r}|)}\\ &\times \int \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi}\mathrm{d}^2 r t_A(|\boldsymbol{r}|) t_B(|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{r}|)\tilde{D}_a^h(z_h,Q^2,E,r,\phi,b)\end{aligned} \tag{14.142}$$

给定了喷注输运参数的时空演化，我们可以用上面的有效介质修正碎裂函数来计算大横动量强子谱的压低因子 (或核修正因子)

$$R_{AB}(b)=\frac{\mathrm{d}\sigma_{AB}^h/\mathrm{d}y\mathrm{d}^2p_T}{N_{\rm bin}^{AB}(b)\mathrm{d}\sigma_{pp}^h/\mathrm{d}y\mathrm{d}^2p_T} \tag{14.143}$$

用来描述喷注淬火对重离子碰撞中强子谱的影响。对上述强子压低因子的实验数据的唯象研究反过来会给我们提供喷注输运参数 $\hat{q}_R(E,y)$ 的时空分布信息。

根据喷注输运参数的定义，我们可以假设它正比于 QGP 中的局部部分子密度或强子气体中的强子密度。因此，在一个动力学演化的介质中，一般可以表达为

$$\hat{q}_R(\tau,r)=\left[\hat{q}_R^0\frac{\rho_{\rm QGP}(\tau,r)}{\rho_{\rm QGP}(\tau_0,0)}(1-f)+\hat{q}_R^h(\tau,r)f\right]\cdot\frac{p\cdot u}{p_0} \tag{14.144}$$

其中 $\rho_{\rm QGP}$ 是在给定温度下理想气体中的部分子 (夸克和胶子) 密度，$f(\tau,r)$ 是任意给定空间和时间下的强子相的份额，$\hat{q}_R^0$ 代表在最初时间 τ_0 在 QGP 介质中心位置的喷注输运参数，p^μ 是喷注的四动量，u^μ 是碰撞坐标系下的四分量流速。介质的强子相假定为强子共振气体，其中喷注输运参数可近似为

$$\hat{q}_R^h=\frac{\hat{q}_N}{\rho_N}\left[\frac{2}{3}\sum_M\rho_M(T)+\sum_B\rho_B(T)\right] \tag{14.145}$$

其中 ρ_M 和 ρ_B 分别是给定温度下强子共振气体中的介子和重子密度，在一个大核的中心，$\rho_N = n_0 \approx 0.17\ \mathrm{fm}^{-3}$，因子 2/3 描述介子和重子中组分夸克数的比值。

上面几节我们已经讨论过在 DIS 中夸克在一个重核中心的喷注输运参数。最近对 HERMES 实验数据最新的分析得到[56] $\hat{q}_N \approx 0.02\ \mathrm{GeV}^2/\mathrm{fm}$。在给定温度 T 和零化学势下的强子密度包括了所有质量小于 1 GeV 的强子共振态。3 + 1 维理想流体动力学演化模型可以用来提供在重离子碰撞中沿喷注传播路径上的局部温度和流速及其演化。实验测量的带电强子的快度密度可以用来确定在对心重离子碰撞的中心位置的初始温度 T_0。初始能量密度的空间分布遵循 Glauber 模型中的 Wood-Saxon 核分布。在 RHIC 的 Au + Au 和 LHC 的 Pb + Pb 碰撞中，在初始的时间 $\tau_0 = 0.6\ \mathrm{fm}\ /\ c$ 下的初始温度分别为 $T_0 = 373\mathrm{MeV}$ 和 473 MeV。

如图 14.15 所示，我们可以利用上面的介质修正碎裂函数和喷注输运系数对

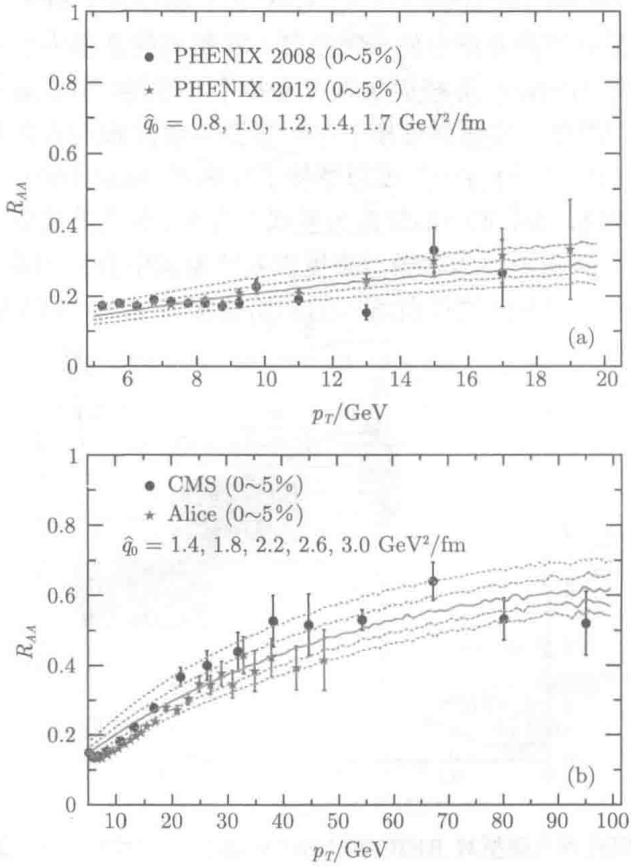


图 14.15 在 $\sqrt{s} = 200\ \mathrm{GeV/n}$ 0~5% Au + Au 对心碰撞 (上图) 和在 $\sqrt{s} = 2.76\ \mathrm{TeV/n}$ 0~5% Pb + Pb 对心碰撞 (下图) 中中心快度区中性 π 介子的核修正因子与 RHIC PHENIX [57, 58] 和 LHC ALICE [59] 及 CMS [60] 实验数据的比较。图中的理论计算采用了一定范围内的夸克喷注输运参数 $\hat{q}_0$ 在对心碰撞中心位置的初始值 ($\tau_0 = 0.6\ \mathrm{fm}/c$)

温度的依赖来计算大横动量强子谱的核修正因子，并与实验数据进行比较。从与 RHIC 和 LHC 的实验数据的 χ^2 拟合，可以提取在最对心 $A+A$ 碰撞的中心位置夸克喷注输运参数 $\hat{q}_0$ 在初始时间 τ_0 的数值。对 PHENIX 在能量 $\sqrt{s}=0.2$ TeV/n 下 0~5% Au + Au 对心碰撞中中性 π 介子数据[57, 58] 的最佳拟合给出 $\hat{q}_0 = 1.20\pm0.30\text{GeV}^2/\text{fm}$ (在 $\tau_0 = 0.6\text{fm}/c$)。同样，对 ALICE[59] 和 CMS [60] 在 $\sqrt{s}=$ 2.76TeV/n 下 0~5 % Pb + Pb 对心碰撞中带电强子谱数据的最佳拟合给出 $\hat{q}_0 = 2.2\pm0.5\ \text{GeV}^2/\text{fm}$(在 $\tau_0 = 0.6\ \text{fm}/c$)。

以上所描述的理论框架被称为伯克利–武汉–高扭曲度模型 (HT-BW)。近来，美国能源部资助的喷注合作组 (JET Collaboration) 利用包括 HT-BW 在内的 5 个不同的能量损失理论模型，对 RHIC 和 LHC 上强子压低实验数据进行了类似上面的系统唯象分析[61]。其他的 4 个模型分别为: CUJET, HT-M, MARTINI 以及 McGill-AMY [62, 63]。CUJET [64] 是 GLV [65] 模型的一种数值算法，它利用势能模型来描述部分子在介质中的多重散射，其影响能量损失的主要模型参数为强耦合常数、德拜 (Debye) 屏蔽质量以及碰撞中心密度。HT-M [66] 是高扭曲度模型的另一个数值算法。高扭曲度模型中的参数为喷注输运参数和强耦合常数。MARTINI [62] 和 McGill-AMY [63] 模型是基于硬热圈 (hard-thermal-loop, HTL) 重求和的有限温度场论，其中唯一的常数为强耦合常数。所有的模型计算中都利用了 2+1 维或 3+1 维相对论流体力学模型来提供喷注输运中介质的演化信息。

图 14.16 是这 5 个不同模型所给出的初始能量为 $E = 10$ GeV 的夸克初始喷

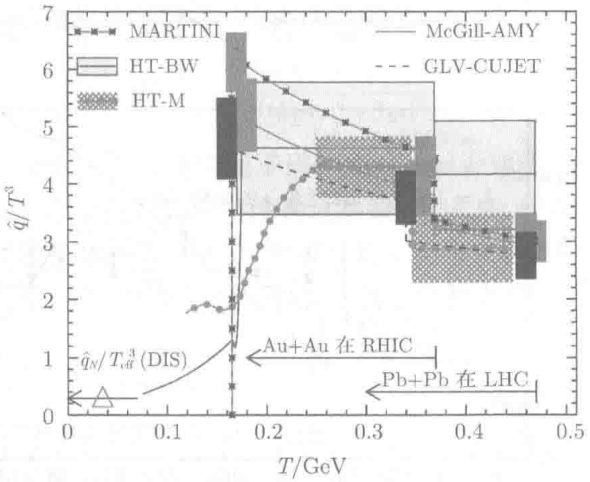


图 14.16　由不同喷注淬火模型对 RHIC 和 LHC 中强子压低因子实验数据分析所得到的夸克初始喷注输运参数 $\hat{q}_0/T^3$。所得到的 $\hat{q}_0$ 值是在对心核–核碰撞的中心位置，在初始时间 $\tau_0 = 0.6$ fm/c，夸克初始能量为 $E = 10$ GeV。在 RHIC 和 LHC 的 3 个不同的初始温度下的拟合误差用实心框盒标识，箭头代表在对心核–核碰撞的中心位置的温度范围，三角符号标示由深度非弹散射 (DIS) 实验得出的冷核内 $\hat{q}_N/T^3_{\text{eff}}$ 值

注输运参数 $\hat{q}_0$ 与初始温度的依赖。在 GLV-CUJET，MARTINI 及 McGill-AMY 模型中，实验数据误差范围可以允许不同的模型参数，用来它们来计算的 $\hat{q}_0$ 值也代表了唯象分析的理论系统误差。两个不同的高扭曲度模型都假定 QGP 相中 $\hat{q}_0$ 不依赖喷注的能量。

14.4.7 喷注淬火小结

在以上几节中，我们对 RHIC 和 LHC 上超相对论重离子碰撞中的喷注淬火理论和唯象研究提供了一个简要的综述。我们仔细地介绍了基于高扭曲度框架下部分子在介质中传播时的能量损失以及碎裂函数修正的理论计算，并简要介绍了通过对重离子碰撞中喷注淬火的唯象研究而提取的 QGP 中的喷注输运参数。在过去几年里，重离子碰撞中喷注淬火研究取得了重大进展，然而，仍然存在许多尚未解决的问题。例如，为了降低领头阶喷注淬火研究的系统不确定性，需要研发一个完整的次领头阶的喷注能量损失研究框架。尽管这方面近来有了非常大的进展，但在实际应用中还需进一步完善和系统的研究。同时，还应该开发一个通用的框架，结合更真实的流体动力学模型以及喷注能量损失的计算，来模拟喷注的输运和对应的介质响应。这些都是前段时期美国能源部 JET 合作组以及现在美国国家基金委的 JETSCAPE 合作组的合作研究目标，同时也包括了中国在内的许多研究机构的研究方向。

参考文献

[1] Kapusta J I, Gale C. Finite-Temperature Field Theory: Principles and Applications (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). 2nd edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

[2] Ding H -T, Karsch F, Mukherjee S. Int. J. Mod. Phys. E, 2015, 24: 1530007.

[3] Brandt B B, et al. JHEP, 2016, 12: 158.

[4] Tomiya A, et al. Phys. Rev. D, 2017, 96: 034509.

[5] Sexty D. PoS LATTICE2014, 2014, 016, arXiv:1410.8813.

[6] Scorzato L. PoS LATTICE2015, 2016, 016, arXiv:1512.08039.

[7] D'Elia M, Lombardo M -P. Phys. Rev. D, 2003, 67: 014505.

[8] Allton C, et al. Phys.Rev. D, 2005, 71: 054508.

[9] Bazavov A, et al. Phys.Rev. D, 2014, 90: 094503.

[10] Borsanyi S, et al. Phys.Lett. B, 2014, 730: 99.

[11] Vuorinen A. Phys. Rev. D, 2003, 68: 054017.

[12] Linde A D. Phys. Lett. B, 1980, 96: 289.

[13] Haque N, et al. JHEP, 2014, 1405: 027.

[14] Hietanen A, Kajantie K, Laine M, et al. Phys. Rev. D, 2009, 79: 045018.

[15] Bazavov A, et al. Phys. Rev. D, 2017, 95: 054504.
[16] Friman B, Karsch F, Redlich K, et al. Eur. Phys. J. C, 2011, 71: 1694.
[17] Bazavov A, et al. HotQCD. 2017, arXiv:1708.04897.
[18] Ding H -T, Kaczmarek O, Meyer F. Phys. Rev. D, 2016, 94: 034504.
[19] Matsui T, Satz H. Phys.Lett. B, 1986, 178: 416.
[20] Karsch F, Kharzeev D, Satz H. Phys. Lett. B, 2006, 637: 75.
[21] Asakawa M, Hatsuda T, Nakahara Y. Prog. Part. Nucl. Phys., 2001, 46: 459.
[22] Burnier Y, Rothkopf A. Phys. Rev. Lett., 2013, 111: 182003.
[23] Shu H -T, Ding H -T, Kaczmarek O, et al. PoS LATTICE2015, 2016, 180, arXiv:1510.02901.
[24] Brandt B B, Francis A, Meyer H B, et al. Phys. Rev. D, 2015, 92: 094510.
[25] Ding H, et al. Phys. Rev. D, 2012, 86: 014509.
[26] Aarts G, Allton C, Oktay M B, et al. Phys. Rev. D, 2007, 76: 094513.
[27] Borsanyi S, et al. JHEP, 2014, 1404: 132.
[28] Lepage G P, Magnea L, Nakhleh C, et al. Phys. Rev. D, 1992, 46: 4052.
[29] Aarts G, et al. Phys. Rev. Lett., 2011, 106: 061602.
[30] Bazavov A, Karsch F, Maezawa Y, et al. 2014, arXiv:1411.3018.
[31] Pisarski R D, Wilczek F. Phys. Rev. D, 1984, 29: 338.
[32] Saito H, et al. Phys. Rev. D, 2014, 89: 034507.
[33] Pelissetto A, Vicari E. Phys. Rev. D, 2013, 88: 105018.
[34] Li S -T, Ding H -T. PoS LATTICE2016, 2017, 372, arXiv: 1702.01294.
[35] Bazavov A, et al. Phys. Rev. D, 2017, 95: 074505.
[36] Buchoff M I, et al. Phys. Rev. D, 2014, 89: 054514.
[37] Aoki Y, Endrodi G, Fodor Z, et al. Nature, 2006, 443: 675.
[38] Bazavov A, et al. Phys. Rev. D, 2012, 85: 054503.
[39] Wuppertal-Budapest, Borsanyi S, et al. JHEP, 2010, 1009: 073.
[40] Kaczmarek O, et al. Phys. Rev. D, 2011, 83: 014504.
[41] Bazavov A, et al. Phys. Rev. Lett., 2012, 109: 192302.
[42] Gyulassy M, Plumer M. Phys. Lett. B, 1990, 243: 432.
[43] Wang X -N, Gyulassy M. Phys. Rev. Lett., 1992, 68: 1480.
[44] Gyulassy M, Wang X -N. Nucl. Phys. B, 1994, 420: 583.
[45] Baier R, Dokshitzer Y L, Mueller A H, et al. Nucl. Phys. B, 1997, 484: 265.
[46] Zakharov B G. JETP Lett., 1996, 63: 952.
[47] Gyulassy M, Levai P, Vitev I. Nucl. Phys. B, 2000, 571: 197.
[48] Wiedemann U A. Nucl. Phys. B, 2000, 588: 303.
[49] Guo X -F, Wang X -N. Phys. Rev. Lett., 2000, 85: 3591.
[50] Arnold P B, Moore G D, Yaffe LG. JHEP, 2002, 06: 030.
[51] Wang X -N, Guo X -F. Nucl. Phys. A, 2001, 696: 788.

[52] Luo M, Qiu J -W, Sterman G F. Phys. Lett. B, 1992, 279: 377.
[53] Zhang B -W, Wang X -N. Nucl. Phys. A, 2003, 720: 429.
[54] Hermes, A. Airapetian, et al. Eur. Phys. J. C, 2001, 20: 479.
[55] Casalderrey-Solana J, Wang X -N. Phys. Rev. C, 2008, 77: 024902.
[56] Deng W -T, Wang X -N. Phys. Rev. C, 2010, 81: 024902.
[57] Adare A, et al. Phys. Rev. Lett., 2008, 101: 232301.
[58] Adare A, et al. Phys. Rev. C, 2013, 87: 034911.
[59] Abelev B, et al. Phys. Lett. B, 2013, 720: 52.
[60] Chatrchyan S, et al. Eur. Phys. J. C, 2012, 72: 1945.
[61] JET, K. M. Burke, et al. Phys. Rev. C, 2014, 90: 014909.
[62] Schenke B, Gale C, Jeon S. Phys. Rev. C, 2009, 80: 054913.
[63] Qin G -Y, et al. Phys. Rev. Lett., 2008, 100: 072301.
[64] Buzzatti A, Gyulassy M. Phys. Rev. Lett., 2012, 108: 022301.
[65] Gyulassy M, Levai P, Vitev I. Nucl. Phys., B, 2001, 594: 371.
[66] Majumder A, Shen C. Phys. Rev. Lett., 2012, 109: 202301.

（0-7302.31）

21世纪理论物理及其交叉学科前沿丛书

量子色动力学专题

www.sciencep.com

ISBN 978-7-03-057353-7

9 787030 573537 >

科学出版社互联网入口
科学数理分社：（010）64017957
E-mail: qianjun@mail.sciencep.com
销售分类建议：高等物理

定 价：198.00元