# 量子色动力学理论

## --简明教程


第一章 引言--强相互作用历史

第二章 夸克-部分子模型

§ 1.强子谱和夸克模型

§ 2 “色”自由度的引入和实验证据

§ 3.深度非弹过程 Scaling 现象和 Parton 模型

§ 4.部分子分布函数和唯象

第三章 规范原理和非阿贝尔规范场

§1. 规范不变性和电磁相互作用

§2. 非阿贝尔规范场

§3. 量子色动力学和胶子

第四章 Yang-Mills 场量子化和费曼规则

§.1 正则量子化的困难和泛函积分方法

§ 2. 协变规范下 QCD 的拉氏函数和费曼规则

第五章 量子色动力学理论的正规化和重整化

§1. 维数正规化

§2. 重整化基本思想(单圈图)

§3 单圈图下重整化常数

第六章 重整化群方程

§1. 单圈图近似$\beta(g)$函数和渐近自由

§2. QCD重整化群函数和$\Lambda_{QCD}$参量

第七章 微扰 QCD 应用举例

§1. 正、负电子湮灭为强子过程中 QCD 单圈修正

§2. 算符乘积展开和 Parton 模型

§3. Scaling 破坏现象和结构函数的演化过程

第八章 微扰 QCD 对遍举过程的应用

§1 强子的光锥波函数

§2.介子电磁形状因子大$Q^2$行为

§3.介子分布振幅的演化方程

§4. 重夸克偶素$(Q\bar{Q})$的衰变

# 第一章　引言

## --強相互作用历史

粒子物理学(或高能物理学)是探索物质结构的最前沿的科学，物质结构的研究已从早先的原子层次深入到夸克和轻子这一新层次。60年代初从加速器实验中发现了100多种基本粒子，这些基本粒子可以分为两类：一类是参与强相互作用的粒子，如质子、中子、π介子、奇异粒子和一系列的共振态粒子等，统称为强子；另一类是不参与强相互作用，只参与电磁、弱相互作用的粒子，如电子、μ子和中微子等，统称为轻子。高能物理实验又进一步揭示上百种强子并不“基本”，是有内部结构的。质子、中子、π介子等强子是由更小的夸克组成的，夸克被看成是物质结构的新层次。并提出了夸克模型理论。这些强子是由三种更基本的夸克(上夸克u、下夸克d和奇异夸克s)组成的。六十年代大量的高能物理实验证实了夸克的存在。1974 年，丁肇中和里克特发现了第四种夸克－粲夸克c，1977年发现了底夸克b，1995年发现了顶夸克t，这6种夸克就是构成所有数百种强子的“基本”单元。同时轻子的发现也达到了6种(电子、电子型中微子、μ子、μ型中微子、τ轻子、τ型中微子)。因此夸克和轻子就是目前阶段我们所认识的物质结构的新层次。

夸克、轻子通过电磁相互作用、弱相互作用、强相互作用和引力等运动规律就构成了自然界万物奥妙无穷、千变万化的物理现象。引力的相互作用强度最弱，在微观世界可以忽略，而强相互作用最强，是理解微观世界基本组成份以及它们之间相互作用运动规律的关键。

19 世纪末麦克斯韦成功地提出了电磁学理论、将原来分开的电和磁学统一起来，预言了电磁波的存在，很快得到了实验的证实。20 世纪，电磁学规律已经对工业、农业、科学技术和军事产生了巨大的影响。1967 年，温伯格和萨拉姆提出了电磁相互作用和弱相互作用统一理论，并预言了弱中性流的存在以及传递弱相互作用的中间玻色子的质量。1983 年 1 月和 6 月分别发现了带电的和中性的中间玻色子。实验上测到的中间玻色子的质量与理论预言惊人地一致。这一发现证实了弱电统一理论的成功，其意义可以与将麦克斯韦电学和磁学统一理论的验证相比拟。弱电统一理论与描述夸克之间强相互作用的量子色动力学理论合在一起统称为粒子物理学中的标准模型理论。在标准模型中传递相互作用的媒介子分别是光子(传递电磁相互作用)、中间玻色子(传递弱相互作用)以及胶子(传递强相互作用)。夸克、轻子以及传递相互作用的媒介子就是物质世界的基本单元，它们遵从的规律是标准模型理论。标准模型理论是近半世纪以来探索物质结构研究的结晶，是 20 世纪最重要的成就之一。上世纪七十年代到世纪末，这一理论已经成功地受到了实验检验并正在继续发展。这一成就可以与本世纪初的玻尔原子模型相比，正是有了玻尔原子模型，才有 20 世纪 20 年代末量子力学理论的建立。可以相信，标准模型理论的发展必将导致深层次动力学规律的发现和建立。

1. 从汤川(Yukawa)理论到夸克模型

1932 年查德威克(J. Chadwick)发现了中子，接着海森堡

(Heisenberg)提出了原子核是由质子和中子构成的模型。自然界中存在三种基本粒子：质子、中子、电子。原子是由原子核和绕核运转的电子组成，自然界万物就是由这三种基本粒子构成的。然而，当时一个很大的困惑是质子和中子如何才能紧密结合在 $10^{-13}$厘米大小的原子核中，试图利用当时已知的电磁相互作用和弱相互作用来解释都不能自圆其说。1935 年汤川提出了质子和中子是通过交换一种未知的介子(其质量介于质子和电子之间)形成原子核内很强的束缚力，这种介子称为π介子，其质量大约为 100-200MeV，它与交换无质量光子的电磁力不同是短程力，这就开创了强相互作用的历史。一年后，1936 年安德森(C. Anderson)在宇宙线中发现了一种粒子，其质量为 105MeV，后来知道这是只参弱相互作用的μ子。直到 1947 年鲍威尔(C. Powell)才发现了参与强相互作用的π介子。汤川的强相互作用理论可以与电磁相互作用类比，所不同的是交换的π介子是有质量的。然而当人们将汤川理论与核力实验相比较时就发现有效相互作用强度远远大于 1，$\frac{g^2}{4\pi}\cong 14(>>1)$，这要比电磁相互作用$\frac{e^2}{4\pi}=\frac{1}{137}$大很多，因此微扰理论不再适用，高阶项的贡献不仅不能忽略，而且使得整个理论计算变成无意义。

五十年代，随着高能加速器的发展，从加速器实验中发现了一大批参与强相互作用的粒子，到五十年代末六十年代初已发现了一百多种参与强相互作用的粒子，统称为强子，它们的寿命极短。显然仅由质子、中子、π介子描述的强相互作用理论是不完备的。同时，理论上放弃微扰论，而发展不依赖于微扰展开的 S-矩阵理论和公理化场

论也有了相当的发展。特别值得提出的是对称性理论的发展极为重要，六、七年代初发现这一百多种强子可以按 SU(3)对称性表示很好地进行分类，这种分类非常像原子按门捷列夫周期表分类一样。加速器实验的发展还发现了质子不是一个点而是有一定大小内部结构的粒子。所有这些实验结果都导致 1964 年盖尔曼(M. Gell-Mann)和茨维格(Zweig)提出了所有强子都由三种夸克(上夸克 u、下夸克 d 和奇异夸克 s)组成的，这就是夸克模型。不久建立了非相对论夸克模型、相对论性层子模型、以及相对论性夸克模型等理论描述强子内部结构。所有这些模型都没有涉及到强相互作用动力学理论。然而人们已在尝试以自由夸克量子场论去探讨强子唯象学的物理规律，例如六十年代发展的流代数在当时就起了重要作用。

2．从无标度规律到量子色动力学理论

夸克模型成功地将强子谱进行了分类并解释了大量的实验事实。1967 年美国斯坦福直线加速器中心(SLAC)在电子打质子的深度非弹性实验中发现了无标度规律(scaling law)。1990 年诺贝尔物理奖颁发给这一规律的发现者J. Friedman, H. Kendall和R. Taylor)。布约肯(J. Bjorken)首先认识到无标度规律意味着大动量迁移下电子是与质子内许多无相互作用自由的点粒子相互作用。费曼(R. Feynman)称质子内的这些点粒子为部分子(Parton)。随后的实验和理论深入研究表明这些部分子就是价夸克和海夸克(夸克－反夸克对)，建立了所谓的夸克一部分子模型，很好地解释了当时的实验现象，这

就告诉人们在动量迁移足够大时，质子内的部分子具有渐近自由的现象。在夸克模型成功的同时，人们为了解释统计性质问题引入了“色”自由度，即假定每种夸克除了味(u、d、s以及后来发现的粲夸克c、底夸克b和顶夸克t)不同外还具有三种不同颜色(红r、绿g、兰b)，由此就可以在夸克模型里，强子遵从相应的费米和玻色统计。每一种夸克含有内部空间(色空间)自由度，即有三种不同的色，不同色夸克之间的强相互作用是通过传递带色的胶子而发生的。轻子不具有内部色空间，它不参与强相互作用。这种“色”自由度的引入立即获得了实验上的证实，例如$\pi^{\circ}\to\gamma\gamma$衰变几率以及$e^{+}e^{-}$对撞中R值的测量，即

$$R=\frac{\sigma(e^{+}e^{-}\to \text{强子})}{\sigma(e^{+}e^{-}\to \mu^{+}\mu^{-})}$$ 。

一方面在夸克模型里 R 值可以直接计算

$$\mathrm{R}=\mathrm{N_c}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N_f}}\mathrm{Q_i^2}=\begin{cases}\dfrac{3}{3}N_c & \text{当}N_f=3(u,d,s)\\ \dfrac{10}{9}N_c & \text{当}N_f=4(u,d,s,c)\\ \dfrac{11}{9}N_c & \text{当}N_f=5(u,d,s,c,b)\end{cases}$$

其中$N_f$是夸克的“味”数，$N_c$是夸克的“色”数。另一方面实验上可以在正、负电子对撞机实验中精确的测量R值。早期在$Q^2<3GeV^2$下的实验证实了“色”$N_c=3$，后来北京谱仪(BES)近几年来的实验都证实了这一结论。

实验上无标度规律的发现以及布约肯在理论上的发展意味着夸克之间很强的相互作用在大动量迁移下变弱，具有渐近自由的特点。这些结果对粒子物理的影响是深远的，人们接着的问题什么样的强相互作用理论具有渐近自由的特点?

电磁相互作用的基本理论是量子电动力学(QED)，人们测量到的电荷($\frac{e^2}{4\pi}=\frac{1}{137}$)是屏蔽以后的有效相互作用，即在小动量迁移下(汤姆逊极限)下确定的，在QED理论中以重整化图象来描述，随着动量迁移Q2 的增加，有效耦合常数(电荷e)随之变化而增大。这样一个行为是由重整化理论中的β函数完全确定，在QED中β函数是正的，有效耦合随能量增加而增大，正、反电子对屏蔽电荷，当$Q^2$很大时，探测电荷的波长很短，直接探测到未被屏蔽的电荷，其电荷自然增大。因此，QED理论不具有上述渐近自由的特点，人们推测只有具有β函数为负的量子场论才是给出渐近自由特点的强相互作用理论。1972 年射曼切克(Symanzik)和特霍夫('t Hooft)在马赛的国际会议上注意到非阿贝尔规范理论(QCD是阿贝尔规范理论)有可能具有负β函数的性质,但他们没有继续做下去。旅美华裔科学家徐以鸿(A. Zee)也做了类似的计算。普林斯顿大学的格罗斯小组和哈佛大学的柯尔曼(S. Coleman)小组研究了所有可能的量子场论以发现什么样的理论可以具有渐近自由的性质。1973 年春天，格罗斯和他的学生维尔切克以及波利策尔(柯尔曼的学生)分别在Phys. Rev. Lett.上发表了两篇划时代的论文,提议了SU(3)色规范群下非阿贝尔规范场论可以作为强相互作用的量子场论,其β函数是负的，具有反屏蔽性质使得有效耦合常数$\alpha_s(Q^3)$随着$Q^2$增大而减小，即渐近自由性质。在这一场论中强相互作用的媒介子是无质量的胶子。在QED中媒介子是光子，它是电中性的,然而这里胶子不是色中性的，正是由于胶子带色荷，因此胶子之间有相互作用从而产生反屏蔽效应，决定了强相互作用的渐近自由性

质。由于他们三人发现了这一性质，导致建立了强相互作用量子场论—量子色动力学(QCD)理论。2004 年诺贝尔物理奖颁发给美国格罗斯(D.J. Gvoss)、泡利策尔 (H.D. Politzer)和维尔切克(F. Wilczek)三位科学家，以奖励他们在 1973 年发现了强相互作用的渐自由性质，这一性质对认识自然界中强相互作用本质极为重要。

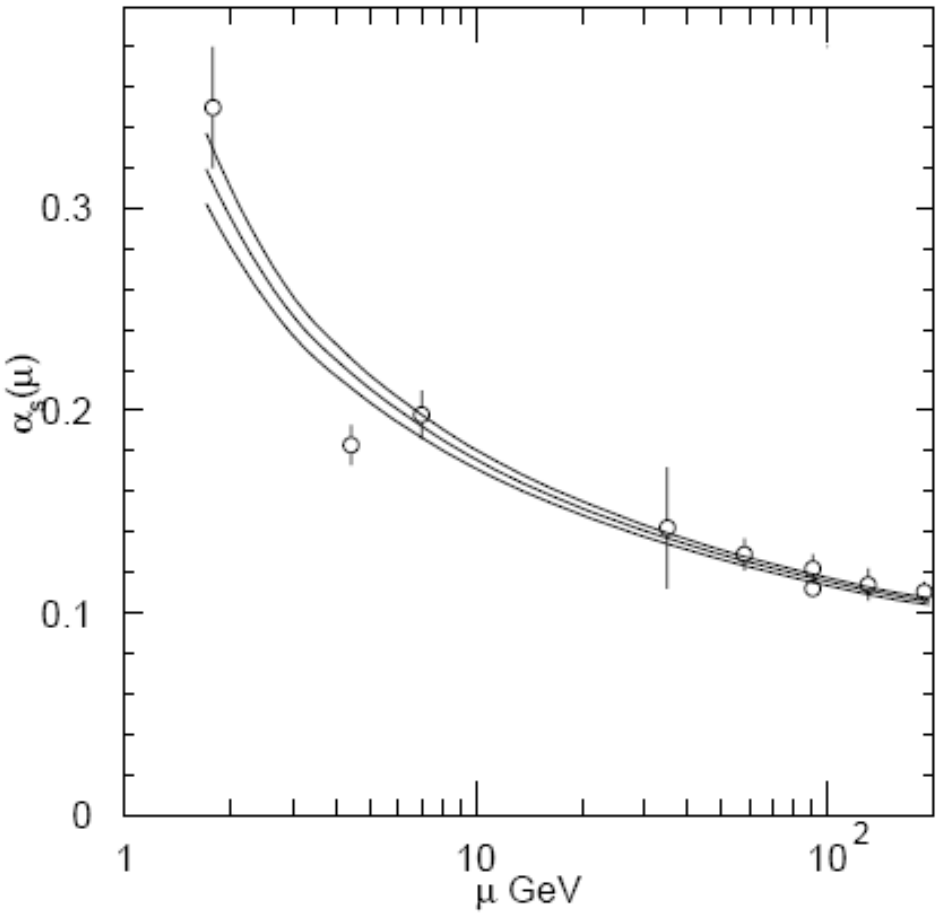
3. 量子色动力学的检验和发展

量子色动力学理论的基本成分是夸克和胶子，它们是紧束缚在强子内部，不能呈现自由的状态，只可能间接地由强子实验观测到它们的存在，例如三喷注的实验结果证实了强子内部存在胶子等。由于实验上不能直接观察到夸克和胶子，对QCD的检验要远比量子电动力学和弱、电统一模型理论的检验困难得多。量子色动力学理论中夸克和胶子除了具有与量子电动力学类似的夸克和胶子相互作用以外，胶子之间还存在三胶子和四胶子相互作用顶点。正是这些顶点决定相互作用耦合强度g随着能量的增加而减小以及与g紧密相关的β函数为负值。最终导致强相互作用的有效耦合常数$g_s$，

$$\alpha_s(Q^2)=\frac{g_s^2}{4\pi}=\frac{4\pi}{\beta_0\log\frac{Q^2}{\Lambda^2}} \qquad (1)$$

其中$\beta_0=-\left(\frac{2}{3}N_f-11\right)$是单圈近似下的β—函数值。$N_f$是夸克的味数。从上式(1)可以见到当能量$Q^2$趋于无穷大时，强相互作用耦合常数$\alpha_s(Q^2)$趋于零， 这意味着夸克之间的相互作用趋于零，式(1)定量地表达了强相互作用渐近自由的性质。31 年的实验充分地证实了反映渐近自

由特点的表达式（1）的正确性。人们形象地将反映这一特点的耦合常数称为跑动耦合常数。




经历了 31 年实验的检验和理论发展，量子色动力学理论已走向精密验证和发展的阶段。

量子色动力学的渐近自由特点致使微扰理论得到了巨大的成功，然而微扰理论仅在高动量迁移下的物理过程中可以得到应用，对于低动量迁移的物理现象和强子结构，它无能为力。自然界的六种夸克中前五种夸克(u、d、s、c、b)只存在于强子束缚态内部，而最重的顶夸克t产生以后寿命极短，很快衰变为底夸克b。从表达式（1）还可

以见到跑动耦合常数当能量$Q^2$变小时它逐渐增大以至于达到无穷大，这可以定性地理解为什么夸克在强子内部不能以自由状态分离出来，因为当两个夸克之间的距离增大时，夸克之间交换胶子的能量$Q^2$变小，跑动耦合常数变大，以至于耦合强度变为无穷大，这意味着夸克之间的相互作用随着分开的距离增加而增加，使得夸克和胶子永远束缚在强子内部，人们形象地称此物理现象为“夸克禁闭”。这正像橡皮筋一样，拉的愈长弹回的强度愈大，永远束缚在一起。物质结构在新层次下的物理图像与先前原子、原子核的层次完全不一样，已不是太阳系在微观世界的重复。这表明支配下一层次的新的物理规律决定了不同的物理图像和观念。目前在量子色动力学框架里，虽然可定性地解释了夸克囚禁在强子内部的结构图像，但是要想定量地解释夸克囚禁疑难和强子结构图像仍是高能物理中一个重大的难题。格点规范理论正试图从量子色动力学理论最终解决夸克禁闭这一难题。由于格点规范理论本质上是非微扰理论，其理论方法不依赖于相互作用的强弱，因此科学家们正努力获得强相互作用的全部解，而不仅是渐近自由解。渐近自由和夸克禁闭是量子色动力学理论的两个重要特点，目前人们对夸克禁闭性质知之不多，夸克囚禁是由量子色动力学物理真空性质而造成的。微扰量子色动力学理论是建立在微扰真空的基础上，而量子色动力学物理真空完全不同于微扰真空。在物理真空中真空不空，它充满着夸克、反夸克对以及胶子，物质与真空中的夸克、反夸克对和胶子不断发生相互作用造成新的强子结构图像。因此揭示真空的本质将导致找到夸克囚禁疑难解。目前美国在布鲁克海文正在

进行的相对论重离子碰撞机就是要从实验上揭示物理真空的性质。就是在极端条件下将夸克和胶子从质子和中子中解放出来，也就是实现从夸克的禁闭相到退禁闭相的跃迁。只有完全掌握了渐近自由和夸克禁闭这两个特点，人们才能说对强相互作用有了深刻的理解。

4. 从弱电统一到大统一理论

人们尝试了许多扩充和发展标准模型的新物理模型和理论。它们大致可分为两类不同的途径。第一类是设想新物理的能标在 1TeV 附近。例如保留标准模型的现有结构，引入新对称性和新粒子来抵消黑格斯场所带来的缺陷。弱电统一理论告诉我们，弱相互作用和电磁相互作用在能量远高于中间玻色子质量时，它们是统一的，在低能时弱电对称性自发破缺表现出两种不同的相互作用。人们很自然地要问，当能量更高时，弱电统一的相互作用与强相互作用是否会形成更大的统一理论？ 超对称大统一理论就是一种尝试，对称性破缺构成低能现实世界的不同类型的相互作用规律。最流行的是最小超对称模型。此模型设想拉氏量具有超对称性（费米-玻色对称性），因而每个现有的粒子都有一个与它自旋相差 1/2 的超对称伙伴。由黑格斯的超对称伙伴来抵消标准模型的缺陷。目前实验上没有发现超对称伙伴，所以超对称伙伴只能很重，即超对称性是破缺的。这样标准模型缺陷的抵消就不是完全的。剩余缺陷必须小到不严重的程度此模型才可被接受。这就要求超对称伙伴的质量不超过 1 TeV，即此模型的 Λ 约为 1 TeV。此外，这理论中有五个可观测的黑格斯粒子，其中最轻的质量

不超过 135 GeV。超对称理论试图将夸克、轻子以及传递四种相互作用的媒介子统一起来描述，虽然它具有很美丽的对称性形式，然而它预言的另一半尚未发现的超对称伴随子，如粒子物理学家猜测超对称中的中性伴随子很可能是宇宙中的暗物质。超对称中预言的粒子至今一个也没有在实验中被发现，这是走向四种相互作用统一理论面临的最大的挑战。

另一类是 20 世纪 80 年代基于量子场论发展起来的超弦理论，能标大大超过TeV而是在普朗克标度（$10^{19}$GeV），将物质粒子描述为弦的各种不同振动模式，而量子引力可以自然地包含在超弦理论中。引力相互作用存在于自然界的万物之中，经典引力相互作用是由爱因斯坦的广义相对论来描述，引力场方程联系了时间、空间和物质。自 20 世纪 60 年代以来，人们尝试建立量子引力理论都遇到了无穷大的困难，通常量子场论中的重整化方法不能解决量子引力中出现的无穷大困难。引力子是传递引力相互作用的媒介子，它的自旋为 2，质量为零。引力场方程量子化的困难很可能不仅仅是数学上的困难，而是对时间、空间、物质和能量的观念上要更新。弦理论提供了一个包含引力在内的四种相互作用的有限量子理论。超弦理论有五种，都是在 10 维时空中得到自洽的描述。近年来发展的 11 维时空中的M理论是以“对偶性”概念为核心对超弦的非微扰研究，它统一了这五种自洽的超弦理论，原来五种看起来基本结构很不相同的微扰弦理论是对偶的,非微扰等价的。值得注意的是超弦是在一个十维时空中自洽理论，那么额外的六维时空与普通物质粒子的关系是什么？一个普遍的看

法认为额外的六维时空紧致化为普朗克标度的一个很小的空间，大大超出于目前实验能量的范围，物质粒子实际所处的时空仍是四维时空。那么很自然地要问，这紧致化的额外时空对物质粒子在四维时空中运动的物理效应是什么？如何观察？超弦理论的研究，在力图深入了解夸克禁闭现象、建立正确的量子引力理论、统一四种基本相互作用和发展近代数学需求的刺激下，沿着非微扰及大范围性质的研究方向，取得了一系列重要进展。如 1994 年，Seiberg-Witten关于 4 维时空超对称规范场论模型的非微扰研究取得了突破性进展。他们充分应用对偶性及全纯性，证明了此模型具有禁闭性质，并对数学界四维流形微分结构的研究产生了极为轰动的影响。又如 1996 年，在M理论及D膜技术的基础上成功地计算出了黑洞的熵，其结果与宏观上由热力学得出的著名的Bekenstein熵结果一致，给出了黑洞物理学定量上一致的微观解释。近年来发展起来的额外维空间理论将能标降到了TeV量级。因此超弦理论的新发展有可能将它与未来的高能加速器实验相结合，也可能与早期宇宙联系起来发展为弦宇宙学，为超弦理论的发展展现新前景。关于黑洞，爱因斯坦的引力理论预言由于引力的自作用，恒星的演化到了一定的时刻必然会塌缩。这个理论允许空间中存在一些区域永远处于我们的视界(horizon)之外，甚至连光线也无法穿越过去的区域，这就是所谓的黑洞。天体物理学的观测支持每个星系的中心可能存在巨大的黑洞，又如银河系中的天鹅座X-1 的两颗恒星之一无法用光学仪器观测，可能是一个黑洞。人们相信正确的量子引力理论将对黑洞物理学的研究提供坚实的基础。

关键的问题仍然是实验的验证。物理学毕竟是一门实验科学，只有经过实验检验的理论才是正确的理论。揭示时间、空间、物质和能量本质的新理论也必须在新的实验结果推动下得以发展。目前的实验结果一再表明粒子物理学中标准模型的成功，物理学家正期待着超高能加速器上的实验结果，特别是 2007 年即将运行的欧洲 LHC 机器可能会揭示出超出于标准模型的新物理。科学家们正在策划的超高能的直线对撞机，μ子对撞机以及 VLHC 都将对新的时空、物质和能量的新理论的发展起决定作用。同时粒子物理学家也正在与宇宙学家和天体物理学家联手从天文观测和宇宙演化中发展新观念和新理论。近年来天文观测中给出宇宙中物质成分：普通重子物质只占 4%，而 23%是非重子的暗物质和 73%的暗能量。暗能量是近年宇宙学研究的一个里程碑性的重大成果。目前理论还不能揭示暗能量的真实本质，科学家们企图从真空结构的的真空能量来解释，但目前的量子场论计算结果差之太远，受到了严重的挑战。正在运行在美国布鲁克海文的 RIHC 有可能部分地揭示真空的性质。同时，科学家们也在发展非加速器物理实验并与天文观测相结合探讨自然界奥秘。最新的发展使得粒子物理学、天文学和宇宙学交叉发展联手解决面临的难题，最终揭示超出于标准模型新的物理规律。总之，我们需要更多跟得上时代发展的高能物理实验（包括加速器和非加速器装置）和天文观测装置，而且这些大科学工程的建立和运行需要国际间更多、更广泛的合作。

# 第二章　夸克一部分子模型

## §1. 强子谱和夸克模型

1. 同位旋

强子就是参与强相互作用的所有粒子的总称，目前有三、四百种之多，是粒子物理家族中最大的一类。对于那些不参与强相互作用只参与电磁和弱互作用的所有粒子称为轻子，例如 e, $\nu_e$, μ, $\nu_\mu$, τ, $\nu_\tau$ 以及它们的反粒子。

在众多的强子中，质子、中子、π介子是最熟知的。质子和中子是同位旋二重态

$$N=\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \qquad T=\frac{1}{2} \quad , \quad T_3=\pm\frac{1}{2}$$

$$--_{-1/2}---_{0}---_{1/2}-\rightarrow T_3$$

统称为核子。而π介子构成同位旋的三重态

$$\pi=\begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} \qquad T=1$$

$$\pi^{\pm}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1 \mp i\pi_2) \qquad T_3=\pm 1$$

$$\pi^0=\pi_3 \qquad T_3=0$$

它们满足电荷一同位旋关系

$$Q=\frac{B}{2}+T_3 \tag{2.1}$$

其中 B 为重子数，质子、中子等重子的重子数为+1，介子的重子数为零。

引入同位旋以后，同位旋对称性包含着动力学内容。例如，由同

位旋空间（SU（2）对称性）不变性导致的可重整化的π-N 相互作拉氏函数形式为

$$L = i g_{\pi NN} \bar{\psi} \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi} \psi \quad , \qquad (2.2)$$

由(2.2)式可以导致耦合常数之间的关系

$$g_{\pi^+ pn} = \sqrt{2}\, g_{\pi^0 pp} = -\sqrt{2}\, g_{\pi^0 nn} \qquad (2.3)$$

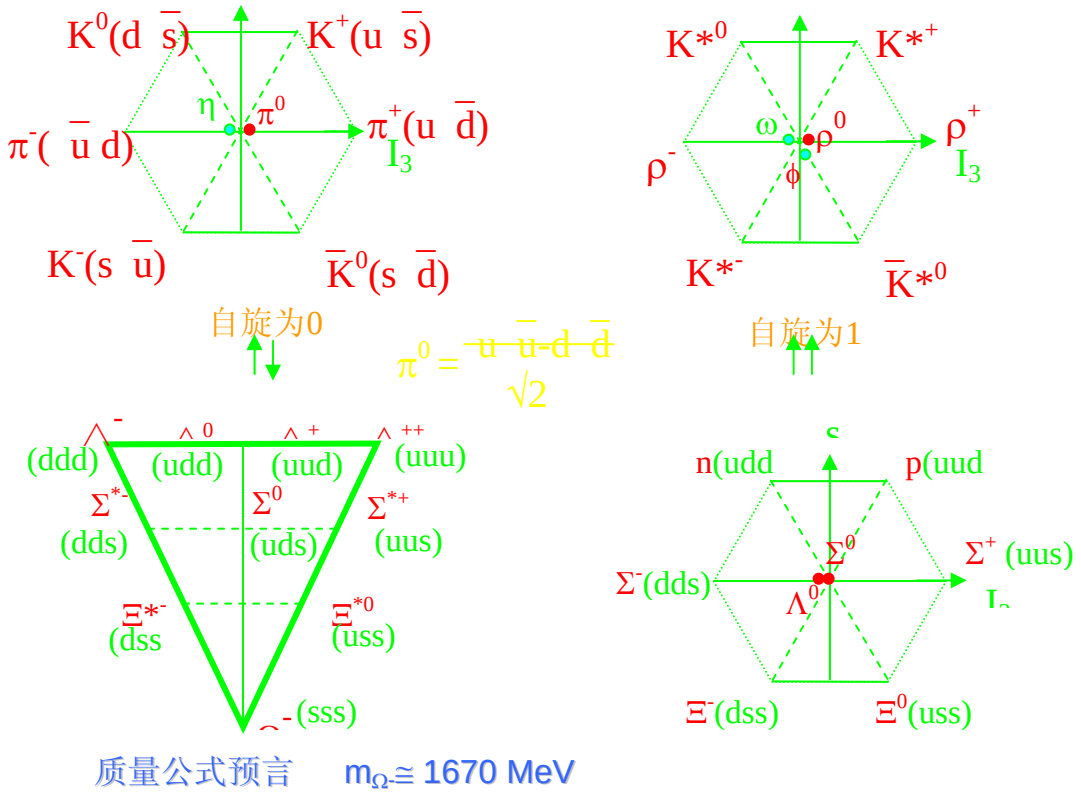
2.SU(3)分类　SU(2)→SU(3)

进一步将奇异粒子(例如 $K^{\pm}, K^0, \bar{K}^0, \Sigma^{\pm}, \Sigma^0, \Lambda, \Xi^0, \Xi^-$ 等)包含在内以后,对称性显然不够,Gell-Mann和Nishijima将(2.1)式推广为

$$Q = \frac{Y}{2} + T_3 \qquad Y = B + S \qquad (2.4)$$

其中 Y 称之为超荷.这样,人们很自然地将 SU(2)对称性推广到 SU(3)对称性.

六十年代初,人们惊人地发现强子谱可以 SU(3)群表示分类,介子可以填充在 SU(3)群的单态和八重态,而重子则填充在八重态和十重态里.例如，




可以见到强子谱可以很好地按照 SU（3）群的表示分类。为了解释上述现象，1964 年 Gell-Mann 和 Zweig 引入三种夸克，对应于 SU（3）群的基础表示的的三个基，即

$$q=\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} u \text{ - up} \\ d \text{ - down} \\ s-\textit{strange} \end{matrix} \qquad (2.5)$$

它们的性质如下：

| Quark | spin | isospin | B | S | $T_3$ | Y | Q |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| u | 1/2 | 1/2 | 1/3 | 0 | 1/2 | 1/3 | 2/3 |
| d | 1/2 | | 1/3 | 0 | -1/2 | 1/3 | -1/3 |
| s | 1/2 | 0 | 1/3 | -1 | 0 | -2/3 | -1/3 |
| $\bar{u}$ | 1/2 | 1/2 | -1/3 | 0 | -1/2 | -1/3 | -2/3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{d}$ | 1/2 | | -1/3 | 0 | 1/2 | -1/3 | 1/3 |
| $\bar{s}$ | 1/2 | 0 | -1/3 | 1 | 0 | 2/3 | 1/3 |

所有的介子和重子都是由这三种夸克组成的，例如π介子，

$\pi^+ = (u\bar{d}),\ \pi^- = (\bar{u}d),\ \pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$；质子和中子 p =（uud） n =（udd），

等。

实验与观察到的强子谱很好地与 quark 模型一致，介子填充在 8 维表示和一维表示里

$$(q\bar{q}) \sim 3 \times 3^* = 1 \oplus 8$$

宇称　p = （-）$^{L+1}$

电荷共轭宇称　C =（-）$^{L+S}$

J = L + S

夸克模型给出的$J^{PC}$见下表

| L | 0 | 0 | 1 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| S | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $J^{PC}$ | $0^{-+}$ | $1^{--}$ | $1^{+-}$，$0^{++}$，$1^{++}$，$2^{++}$ | | $2^{-+}$，$1^{--}$，$2^{--}$，$3^{--}$ | |

从此表可以看出$J^{PC} = 0^{--}$，$0^{+-}$，$1^{-+}$,…不可能由$(q\bar{q})$构成。事实确是如此，自然界不存在这些状态的介子。

对于重子也有类似的情况，重子是由三个夸克组成的，填充在 8 维和 10 维表示里，

$$(qqq) \sim 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$$

夸克模型给出的$J^P$见表

| L = 0 | L = 1 | L = 2 |
|---|---|---|
| $\frac{1^+}{2}$ | $\frac{3^+}{2},\frac{1^-}{2},\frac{3^-}{2},\frac{5^-}{2}$ | $\frac{1^+}{2},\frac{3^+}{2},\frac{5^+}{2},\frac{7^+}{2}$ |

除了轨道激发，还有径向激发，实验上也发现了它们，并很好地填充在 SU（3）群的表示中。

3.重夸克

1974 年 11 月丁肇中和里克特发现 J/Ψ粒子，这一粒子不能按 SU（3）群表示分类，填充不进夸克模型之中。实际上它是由 Charm quark（粲夸克）c 和反粲夸克$\bar{c}$组成的，它的质量要比 u、d、s 重得多。实验上发现了 J/Ψ家族，都是$(c\bar{c})$态的激发态。此后 1976 发现了底夸克 b，ϒ家族是由$(b\bar{b})$组成的。1995 年发现了最重的顶夸克 t，由于它的寿命极短，很快衰变为底夸克 b，实验上观测不到$(t\bar{t})$强子。

$m_u$=1.5-4.5 MeV

$m_d$=5-8.5 MeV

$m_s$=80-155 MeV

$m_c$=1.0-1.4 GeV

$m_b$=4.0-4.5 GeV

$m_t$=174GeV

对$(c\bar{c})$和$(b\bar{b})$，由于是由重夸克组成的，它们可以利用 Schrodinger 方程求解，当引入相互作用势为线性势和库仑势叠加以后，求解结果

与实验上可观察谱相当好地一致。

1995 年发现了顶夸克以后，三种轻夸克（u、d、s）和三种重夸克（c、b、t）就成为自然界中组成物质分的六种最小单元，所有自然界中的强子都是由这六种夸克和它们的反夸克组成的，自旋都是 1/2 的费米子。按它们的性质可以分为三组：

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathrm{t} \\ \mathrm{b} \end{pmatrix} \quad ,$$

其中 u、c、t、的电荷为 2/3，而 d、s、b 的电荷为－1/3。对这三组夸克通常称为标准模型中的三代夸克，以后再详细讨论。

## §2. 色自由度的引入和实验证据

1.夸克模型中的自旋-统计矛盾

重子是由三个价夸克组成的，三个夸克的总波函数应由三部分组成

$$\psi(123)=\psi_{space}(123)\times\psi_{spin}(123)\times\psi_{flavor}(123) \qquad (2.6)$$

其中 $\Psi_{space}(123)$ 是三个夸克的空间波函数， $\Psi_{spin}(123)$ 是三个夸克的自旋波函数， $\Psi_{flavor}(123)$ 是三个夸克的SU(3)波函数,u、d、s是三个基，称为三种不同的味，或者说是味空间的SU(3)波函数，味自由度的引入对于介子和重子分类是很重要的。夸克是自旋为 1/2 的费米子，总波函数应满足Fermi-Dirac统计，即 $\Psi(123)$ 的三个组成夸克中交换任意两个是反对称的。然而在夸克模型中并不是这样，以 $\Delta^{++}$ 为例，它的自旋为 3/2，它由三个u一夸克组成，处于基态(S波)。

$$\Delta^{++}=(u\uparrow u\uparrow u\uparrow)$$

三个夸克自旋向上显然是对称的，味空间是由同一种味u夸克组成，因而也是对称的。这样，如果要求 $\Delta^{++}$ 的总波函数是反夺称的，只有要求空间部分是反对称的，这是不可能的，因为基态波函数总是对称的。还可以从另一个角度看空间波函数，实验上表明质子形状因子中没有节点存在，这意味着空间波函数不可能是反对称的，因此总的波函数只能是对称的，这就与Fermi一Dirac统计相矛盾。

为了解决这一矛盾有两种可能性：一种是修改统计性质引入了综合(para)统计；另一种想法是引入一个新的自由度“色”

(“Color”)(1972, Gell-Mann)。这样尽管空间、自旋、味空间是对称的，然而只要新引入的自由度“色”是反对称的，总的波函数仍是反对称的。设想每一种夸克携带三种颜色红(Red)、绿(Green)、兰(Blue)：

$u_i$、$d_i$、$s_i$　　(i = 1,2,3 分别表示R、G、B)

其重子波函数的色空间反对称性应由下式描述

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \quad \varepsilon_{ijk} \quad u_i \, u_j \, u_k \qquad (2.7)$$

由于$\varepsilon_{ijk}$的反对称性质就保证了总的波函数的反对称性，例如

$$\Delta^{++} = \frac{1}{\sqrt{6}} \varepsilon_{ijk} \, u_i \uparrow u_j \uparrow u_k \uparrow$$

对于介子来讲，在没有引入色自由度时就无自旋统计矛盾。在引入色自由度以后，仅需将色空间的所有色指标求和即可，即

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \bar{q}_i q_i = \frac{1}{\sqrt{3}} (\bar{q}_1 q_1 + \bar{q}_2 q_2 + \bar{q}_3 q_3) \qquad (2.8)$$

可以见到，在引入新的色内部空间以后，自旋一统计的矛盾就自然解决。然而单是为了这一困难而引入新的色空间，赋予每一种夸克有三种颜色，这是人为牵强的。问题在于要从实验上验证新的色空间是必需的。

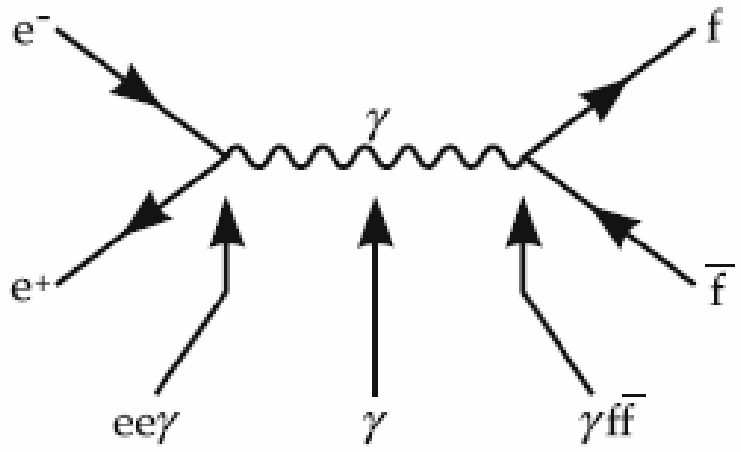
2.色自由度存在的实验证据。

下面以两个实验结果表明新的色空间具有实验上的根据。

(1) $e^+e^- \rightarrow$强子的截面

正负电湮灭为强子的截面是通过产生正、反夸克对转变为

强子，其 Feynmamn 图为




它非常类似于$e^+e^-\rightarrow \mu^+\mu^-$过程。定义截面比R值

$$R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{强子})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \qquad (2.9)$$

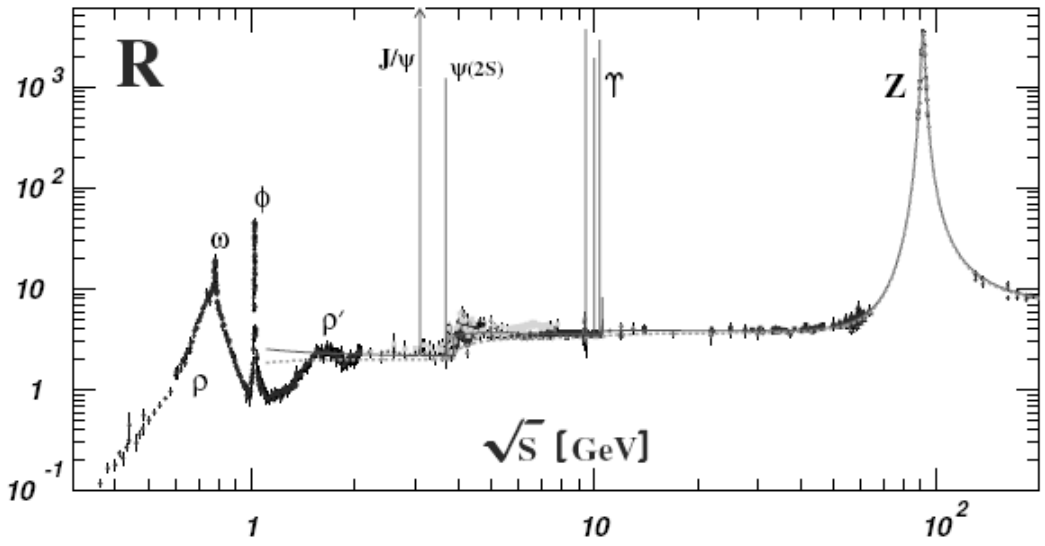
仅考虑主导级费曼图，

$$R \approx \sum_i \quad Q_i^2 \qquad (2.10)$$

i对所有味指标和色指标求和，其中$Q_i$是在一给定能量所能产生的夸克电荷。如果限定能量在 3GeV以下，1GeV以上，正好有足够能量产生u、d、s夸克。因此式(2.10)为

$$R \approx N_c\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right\}=\frac{2}{3}N_c$$

实验上对 R 值的测量可以确定 Nc 值，实验清楚地给出 R≈2，这就从实验上支持色的数目 Nc＝3。当能量在 3GeV 以上，有足够能量产生 c 夸克、b 夸克，R 值将会阶梯上升。




(2) $\pi^0 \to \gamma\gamma$衰变过程

这一衰变过程可以通过计算下列矩阵元得到

$$< 0 | \partial^{\mu} A_{\mu}^{(3)} | \gamma\gamma >$$

其中

$$A_{\mu}^{(3)} = \overline{\psi}\, \gamma_{\mu}\, \gamma_5\, T^3 \psi \tag{2.11}$$

是轴矢流，它的散度具有π°的量子数，因此其主要贡献来自于π°的极点，即

$$\begin{aligned} &< 0 | \partial^{\mu} A_{\mu}^{(3)} | \gamma\gamma > \\ &= < 0 | \partial^{\mu} A_{\mu}^{(3)} | \pi^0 >< \pi^0 | \gamma\gamma > \frac{1}{q^2 - m_{\pi}^2} \end{aligned} \tag{2.12}$$

其中

$$\begin{aligned} &a. < \pi^0 | \gamma\gamma >= e_1^{\mu} e_2^{\nu}\, M_{\mu\nu} \\ &M_{\mu\nu} = (2\pi)^4 \underset{-q^2 \to m_{\pi}^2}{Lim} (q^2 - m_{\pi}^2)\, e^2 \\ &\cdot \int d^4x\, d^4y\, e^{-ik_1 x - ik_2 y} < 0 | T(J_{\mu}(x)\, J_{\nu}(y) \pi^0(0)) | 0 > \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$b.<0|\partial^{\mu}A_{\mu}^{(3)}|\gamma\gamma>=e_1^{\mu}e_2^{\nu}\,\Gamma_{\mu\nu}(k_1,k_2)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}(k_1,k_2)=e^2\int d^4x\,d^4y\,e^{-ik_1x-ik_2y}<0|T(J_{\mu}(x)J_{\nu}(y)\partial^{\rho}A_{\rho}^{(3)}|0>$$

(2.14)

$$c.<0|\partial^{\mu}A_{\mu}^{(3)}|\pi^0>=f_{\pi}m_{\pi}^2 \qquad (2.15)$$

这里$J_{\mu}(x)$是强子的电磁流，$k_1, k_2$分别为两个光子动量，$k_1^2=k_2^2=0$，这样(2.12)式给出

$$\frac{1}{(2\pi)^4}M_{\mu\nu}=\underset{-q^2\to m_{\pi}^2}{Lim}\frac{q^2-m_{\pi}^2}{f_{\pi}m_{\pi}^2}\Gamma_{\mu\nu}(k_1,k_2)|_{k_1^2=k_2^2=0} \qquad (2.16)$$

从(2.14)式可以见到对$\pi^0\to\gamma\gamma$衰变振幅的计算归之于计算$\Gamma_{\mu\nu}(k_1,k_2)$，另一方面利用对易关系可以证明 Ward 恒等式

$$iq^{\rho}\,\Gamma_{\mu\nu\rho}(k_1,k_2)=\Gamma_{\mu\nu}(k_1,k_2) \qquad (2.17)$$

其中

$$\Gamma_{\mu\nu\rho}(k_1,k_2)=e^2\int d^4x\,d^4y\,e^{-ik_1x-ik_2y}<0|T(J_{\mu}(x)J_{\nu}(y)A_{\rho}^{(3)}(0))|0>$$

(2.18)

由 Lorentz 协变性、规范不变性以及光子的 Bose 对称性可得

$$q^{\rho}\Gamma_{\mu\nu\rho}(k_1,k_2)=\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}k_1^{\rho}k_2^{\sigma}\,\Gamma(q^2,k_1^2,k_2^2) \qquad (2.19)$$

而

$$\Gamma(q^2,k_1^2,k_2^2)=A_1\,q^2+2\,k_1\cdot k_2\,A_2+2k_1^2A_3 \qquad (2.20)$$

这意味着

$$\Gamma\,(0,0,0)\;=\;0 \qquad (2.21)$$

即

$$\lim_{q^2\to 0}\ \Gamma_{\mu\nu}(0,0)=0 \qquad (2.22)$$

再注意到 PCAC 近似有算符等式

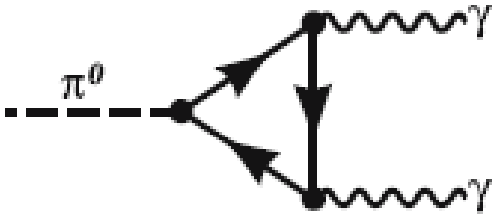
$$\partial^{\mu}A_{\mu}^{i}=f_{\pi}\ m_{\pi}^{2}\ \pi^{i} \qquad (2.23)$$

在软π近似下可以令$q^2\to 0$，这实际上意味着在$|q^2|\le m_{\pi}^2$时除了π介子极点处没有其他的贡献，因此$(q^2-m_{\pi}^2)\Gamma_{\mu\nu}(k_1,k_2)$是缓变函数，令$q^2\to 0$不改变极点计算结果，则有

$$\frac{1}{(2\pi)^4}M_{\mu\nu}\approx\frac{1}{f_{\pi}}\lim_{q^2\to 0}\Gamma_{\mu\nu}(k_1,k_2)|_{k_1^2=k_2^2=0} \qquad (2.24)$$

将(2.22)与(2.24)联系起来就给出$M_{\mu\nu}\approx 0$，即在 PCAC 近似下，$\pi\to\gamma\gamma$的衰变几率为零，这与实验事实不符。

产生上述矛盾的原因在于π°介子是由夸克组成的$\pi^0=\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u}-d\bar{d})$,$\Gamma_{\mu\nu\rho}$是一个轴矢流和两个电磁矢量流的 Green 函数，它除了π极点的贡献，还有包含夸克单圈三角图的贡献，这就是三角




图反常，这样 Ward 等式(2.17)应修改为

$$-ik^{\rho}\Gamma_{\mu\nu\rho}(k_1,k_2)=\Gamma_{\mu\nu}(k_1,k_2)-i(2\pi^2)^{-1}e^2S\ k_1^{\rho}k_2^{\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \qquad (2.25)$$

其中

$$S=\sum_i Q_i^2\ I_{3i} \tag{2.26}$$

$I_{3i}$是第 i 种夸克的同位旋第 3 分量。考虑到包含三角反常的(2.25)式以后，π°介子的衰变宽度为

$$\Gamma=\frac{1}{\tau^{-1}}=\frac{m_\pi^3}{64\pi}|M|^2 \tag{2.27}$$

$$M=\frac{1}{f_\pi}\frac{2\alpha}{\pi}S \tag{2.28}$$

从(2.26)和π°的夸克组成就可以得到

$$S=\begin{cases}\frac{1}{6} & \text{当夸克没有携带“色”时}\\ \frac{1}{2} & \text{当夸克携有三种“色”时}\end{cases} \tag{2.29}$$

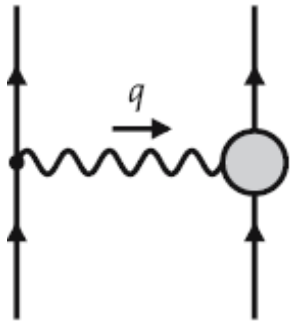
实验上Γ（$\pi^0\to 2\gamma$)=7.6$eV$，由(2.27)和(2.28)可以确定$S=\frac{1}{2}$，因此$\pi^0\to\gamma\gamma$衰变给出夸克有三种颜色的另一个重要根据。

## §3. 深度非弹散射过程和 Parton 模型

夸克模型很好地解释了强子谱。1969 年 SLAC 的电子深度非弹散射实验提示强子内部有很多类点的部分子。这一节首先讨论电子（或一般地讲轻子）与核子的深度非弹性散射过程的运动学，下一节再讨论 Scaling 现象和部分子图象。

首先考察电子-质子弹性散射形状因子，

$$e(k)+P(P)\to e(k')+P(P')$$




按照 QED，单光子交换图是主要的，

电子是点粒子，电子的动量转移为

$$\begin{aligned} q&=(k-k')=(P'-P)\\ q^2&=(k-k')^2=k^2+k'^{\,2}-2k\cdot k'\\ &=2m^2-2k\cdot k' \end{aligned} \qquad (2.30)$$

电子的顶角为

$$\bar{u}(k',s')\gamma^{\mu}u(k,s)$$

在单光子近似下，ep 弹性过程的矩阵元

$$T(ep\to ep)=\bar{u}(k',s')\gamma^{\mu}\ u(k,s)\frac{-1}{q^2}\ \bar{u}(P',r')\Gamma_{\mu}\ u(P,r) \qquad (2.31)$$

其中

$$J_\mu = \bar{u}(P',r')\Gamma_\mu u(P,r)$$
$$= \bar{u}(P',r')[F_1(q^2)\gamma_\mu + \kappa\frac{F_2(q^2)}{2M} i\sigma_{\mu\nu}q^\nu]u(P,r) \quad (2.32)$$

κ是反常磁矩，κ＝1.793。式(2.32)中的$F_1(q^2)$和$F_2(q^2)$是质子的电磁形状因子，描述了质子具有内部结构。如果质子是点粒子，$F_1(q^2)=1,\ \kappa=0$.

现在计算 ep 弹性散射截面.为简单起见，令质子是点粒子，对初态自旋求平均和对终态自旋求和就可以得到

$$\frac{1}{4}|T(ep\to ep)|^2 = \frac{1}{q^4}\ L^{(e)}_{\mu\nu}L^{\mu\nu}_{(p)} \quad (2.33)$$

其中

$$L^{(e)}_{\mu\nu} = \frac{1}{4}Tr[(\not{k}'+m)\gamma_\mu(\not{k}+m)\gamma_\nu]$$
$$= (k'_\mu k_\nu + k_\mu k'_\nu - g_{\mu\nu}(k\cdot k' - m^2)) \quad (2.34)$$
$$= (k'_\mu k_\nu + k_\mu k'_\nu + \frac{q^2}{2}g_{\mu\nu})$$

$$L^{\mu\nu}_{(p)} = Tr[(\not{P}'+M)\gamma^\mu(\not{P}+M)\gamma^\nu] \quad (2.35)$$

由此可给出 ep→ep 弹性散射截面

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^{10}}\cdot\frac{1}{4}|T|^2\ \frac{\rho_E}{I} \quad (2.36)$$

其中$\rho_E$是能量密度，$I=|v_1-v_2|$单位时间单位面积的入射粒子数，代入计算可得实验室系中质子是点粒子情况下

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott}\frac{E'}{E}(1+\frac{Q^2}{2M^2})\tan^2\frac{\theta}{2} \quad (2.37)$$

其中$\theta$是实验室系中电子的散射角，$Q^2=-q^2,\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott}$是 Mott 截面，是相对论电子在 Coulomb 场中的散射截面，

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott}=\frac{4\alpha^2(E')^2}{Q^4}\cdot\cos^2\frac{\theta}{2} \tag{2.38}$$

式(2.37)也可以记作

$$\frac{d^2\sigma}{dE'd\Omega_e}=\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott}(1+\frac{Q^2}{2M^2}\tan^2\frac{\theta}{2})\delta(\nu-\frac{Q^2}{2M}) \tag{2.39}$$

其中变量ν定义为 $P\cdot q=M\nu$ . 当取实验室系 $\vec{P}=0$ 时， $\nu=q_0=E-E'$ ，$E=k_0$和$E'=k_0'$是实验室系中电子的入射能量和出射能量。(2.39)式在下一节引入部分子模型时是有用的。

如果质子有内部结构， $L_{(p)}^{\mu\nu}$应由(2.34)式确定，类似于(2.37)的计算可以获得

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott}\frac{E'}{E}\left[F_1^2+\frac{k^2Q^2}{4M^2}F_2^2+\frac{Q^2}{2M^2}(F_1+\kappa F_2)^2\tan^2\frac{\theta}{2}\right] \tag{2.40}$$

在 $\vec{p}=0$ 时，方程(2.40)可记为，

$$\frac{d^2\sigma}{dE'd\Omega_e}=\frac{4\alpha^2(E')^2}{Q^4}\delta\left(\nu-\frac{Q^2}{2M}\right)\left[Cos^2\frac{\theta}{2}\left(\frac{G_E^2+\frac{Q^2}{4M^2}G_M^2}{1+\frac{Q^2}{4M^2}}\right)+\frac{Q^2G_M^2}{2M^2}Sin^2\frac{\theta}{2}\right] \tag{2.41}$$

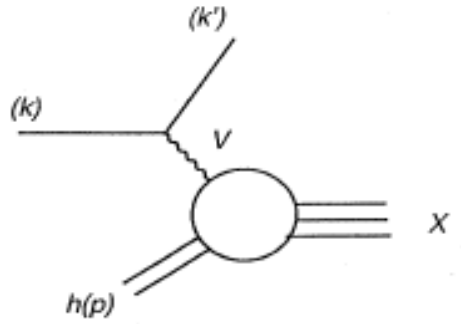
其中

$$\begin{aligned}G_E(Q^2)&=F_1(Q^2)-\frac{\kappa Q^2}{4M^2}F_2(Q^2)\\G_M(Q^2)&=F_1(Q^2)+\kappa F_2(Q^2)\end{aligned} \tag{2.42}$$

当$G_E=G_M=1$时，(2.42)式就回到了(2.39)式。

现在讨论电子-质子深度非弹散射情况，这是一个单举过程，实验上只观察终态电子。

$$e(k)+P(P)\to e(k')+X(P_X)$$




其中 X 代表所有可能的强子， 它们的总动量为 $P_X$ 。

类似的推导给出

$$\frac{d^2\sigma}{dE'd\Omega_e}=\frac{\alpha^2}{Q^4}\frac{E'}{E}L^{(e)}_{\mu\nu}W^{\mu\nu} \tag{2.43}$$

其中

$$W^{\mu\nu}=\frac{1}{4\pi}\sum_{X,\lambda}<P\lambda|J^{\mu}(0)|X><X|J^{\nu}(0)|P\lambda>(2\pi)^4\delta^4(P_X-P-q)$$
$$=\frac{1}{4\pi}\sum_{\lambda}\int d^4x\ e^{iqx}<P\lambda|J^{\mu}(x)J^{\nu}(0)|P\lambda> \tag{2.44}$$

其中$\lambda$是对质子自旋求和，若定义

$$\langle P|O|P\rangle=\frac{1}{2}\sum_{\lambda}\langle P\lambda|O|P\lambda\rangle \tag{2.45}$$

那么(2.44)式可以改写为

$$W^{\mu\nu}=\frac{1}{2\pi}\int d^4x\ e^{iqx}\langle P|j^{\mu}(x)j^{\nu}(0)|P\rangle \tag{2.46}$$

这表明电子-质子深度非弹散射过程的结构函数与电磁流算符乘积矩阵元的Fourier变换相关。由相对论协变性分析给出$W^{\mu\nu}$的一般形式为(P,q)独立变量，

$$W^{\mu\nu}=W_1(q^2,\nu)g^{\mu\nu}+W_2(q^2,\nu)\frac{P^{\mu}P^{\nu}}{M^2}+W_4(q^2,\nu)\frac{q^{\mu}q^{\nu}}{M^2}$$
$$+W_5(q^2,\nu)\frac{1}{M^2}(P^{\mu}q^{\nu}+q^{\mu}P^{\nu}) \tag{2.47}$$

再由规范不变性要求

$$q_\mu W^{\mu\nu}=0 \qquad q_\nu W^{\mu\nu}=0$$

导至

$$\begin{aligned} W_5(q^2,\nu) &= -W_2(q^2,\nu)(P.q/q^2) \\ W_4(q^2,\nu) &= W_2(q^2,\nu)\left(\frac{P.q}{q^2}\right)^2 - W_1(q^2,\nu)\frac{M^2}{q^2} \end{aligned} \qquad (2.48)$$

因此$W^{\mu\nu}$的一般形式从四个不变函数减少到两个不变函数，$W_1$和$W_2$称为质子的结构函数。将(2.48)代入到(2.47)式可以得到，

$$\begin{aligned} W^{\mu\nu} &= W_1(q^2,\nu)(-g^{\mu\nu}+\frac{q^\mu q^\nu}{q^2}) \\ &+W_2(q^2,\nu)\frac{1}{M^2}\left[(p^\mu-\frac{P.q}{q^2}q^\mu)(p^\nu-\frac{P.q}{q^2}q^\nu)\right] \end{aligned} \qquad (2.49)$$

式(2.43)中的$L^{(e)}_{\mu\nu}$与弹性散射情况相同，将(2.34)式代入到(2.43)，经过运算就可以得到

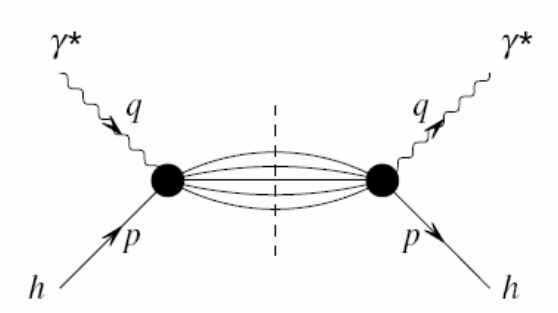
$$L^{(e)}_{\mu\nu}W^{\mu\nu}=4W_1(q^2,\nu)k\cdot k'+\frac{W_2(q^2,\nu)}{M^2}(4P\cdot k\ P\cdot k'-2k\cdot k'M^2) \qquad (2.50)$$

取实验室系，将式(2.50)代入到(2.43),微分截面就变成

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dE'd\Omega_e} &= \frac{4\alpha^2(E')^2}{Q^4}\left[W_2(q^2,\nu)Cos^2\frac{\theta}{2}+2W_1(q^2,\nu)Sin^2\frac{\theta}{2}\right] \\ &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott}\left[W_2(q^2,\nu)+2W_1(q^2,\nu)\tan^2\frac{\theta}{2}\right] \end{aligned} \qquad (2.51)$$

其中$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott}$由(2.38)式给出。

这一节最后讨论结构函数$W_1$和$W_2$与光吸收截面的联系。




对于物理过程来讲$q_0 = E - E' > 0$,可以证明在物理区域内有

$$\begin{aligned}
&\int d^4x\, e^{iqx} \langle P | j_\nu(0) j_\mu(x) | P \rangle \\
&= \int d^4x\, e^{iqx} \sum_X \langle P | j_\nu(0) | X \rangle \langle X | j_\mu(x) | P \rangle \\
&= \int d^4x\, e^{i(q-P+P_X)x} \sum_X \langle P | j_\nu(0) | X \rangle \langle X | j_\mu(0) | P \rangle \\
&= \sum_X (2\pi)^4 \delta^4(q - P + P_X) \langle P | j_\nu(0) | X \rangle \langle X | j_\mu(0) | P \rangle \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.52}$$

在获得(2.51)式的最后一个等式时用到了物理区域内$q - P + P_X \neq 0$的条件。因为如果有$q = P - P_X$，那么$(P-q)^2 = P_X^2 = W^2$或$M^2 + q^2 - W^2 = 2P.q = 2mq_0$（取实验室系$\vec{P} = 0$），而在物理区域有$W^2 \geq M^2, q^2 \leq 0$，这就导至$q_0 < 0$，这是不可能的。因此(2.46)式中的流算符乘积可以改写为流算符的对易关系，即

$$W^{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \int d^4x\, e^{iqx} \langle P | [j^\mu(x), j^\nu(0)] | P \rangle \tag{2.53}$$

按照固果律，对易关系在类空间隔下为零

$$[j^\mu(x), j^\nu(0)] = 0 \qquad \text{当 } x^2 < 0 \tag{2.54}$$

这就意味着(2.53)式的积分的支集是$x^2 \geq 0$。

按照S-矩阵元约化公式，动量为q，极化矢量为$e_\mu$的的虚光子和质子的向前散射振幅正比于$T^{\mu\nu} e_\mu e_\nu$，其中

$$T^{\mu\nu} = i \int d^4x\, e^{iqx} \langle P | T\left( j^\mu(x) j^\nu(0) \right) | P \rangle \tag{2.55}$$

对(2.55)式将 T 乘积展开求$T^{\mu\nu}$的吸收部分，即在$q_0$平面上沿正实轴

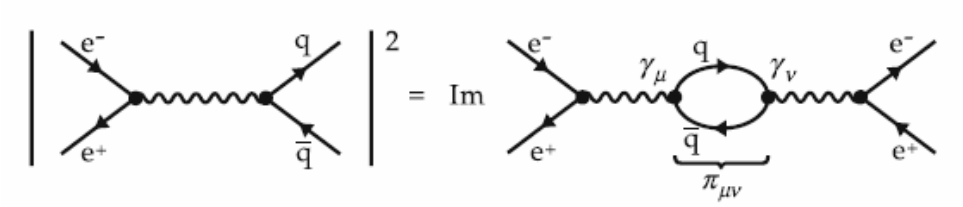
两边的不连续量，$\frac{1}{2i}[T^{\mu\nu}(q_0+i\varepsilon)-T^{\mu\nu}(q_0-i\varepsilon)]$。利用积分等式

$$\begin{aligned}\frac{1}{x\pm i\varepsilon}&=\frac{P}{x}\mp i\pi\delta(x)\\ \frac{1}{x-i\varepsilon}-\frac{1}{x+i\varepsilon}&=2\pi i\delta(x)\end{aligned}\qquad(2.56)$$

（2.56）式中$P$代表对积分取主值，两者相减消去主值部分就可以得到它的不连续量，从而证明$W^{\mu\nu}$就是$T^{\mu\nu}$的虚部，

$$W^{\mu\nu}=\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\,T^{\mu\nu}\qquad(2.57)$$

再注意到光学定理将向前散射振幅虚部与总截面联系起来就得到




$$\sigma_{\pm,0}=\frac{4\pi^2\alpha}{K}e^{*\mu}_{\pm1,0}W_{\mu\nu}e^{\nu}_{\pm1,0}\qquad(2.58)$$

其中极化矢量

$$\begin{aligned}e_{\pm1}&=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\ (0,1,\pm i,0)\\ e_0\ &=\frac{1}{\sqrt{Q^2}}(\sqrt{Q^2+\nu^2},0,0,\nu)\end{aligned}\qquad(2.59)$$

和 K 为光子的入射流，可以取为，

$$K=\nu-\frac{Q^2}{2M}\qquad(2.60)$$

定义光吸收横向截面和纵向截面

$$\sigma_T\equiv\frac{1}{2}(\sigma_{+1}+\sigma_{-1})\qquad\sigma_L=\sigma_0\qquad(2.61)$$

则有

$$W_1 = \frac{K}{4\pi^2\alpha}\sigma_T$$
$$W_2 = \frac{K}{4\pi^2\alpha}(\sigma_T + \sigma_L)\frac{Q^2}{Q^2+\nu^2} \qquad (2.62)$$

定义R值为纵向光子截面$\sigma_L$与横向光子截面之比，

$$R = \frac{\sigma_L}{\sigma_T} = \frac{W_2}{W_1}(1+\frac{\nu^2}{Q^2}) - 1 \qquad (2.63)$$

对R值的测量将从实验上给出$W_2/W_1$的信息。

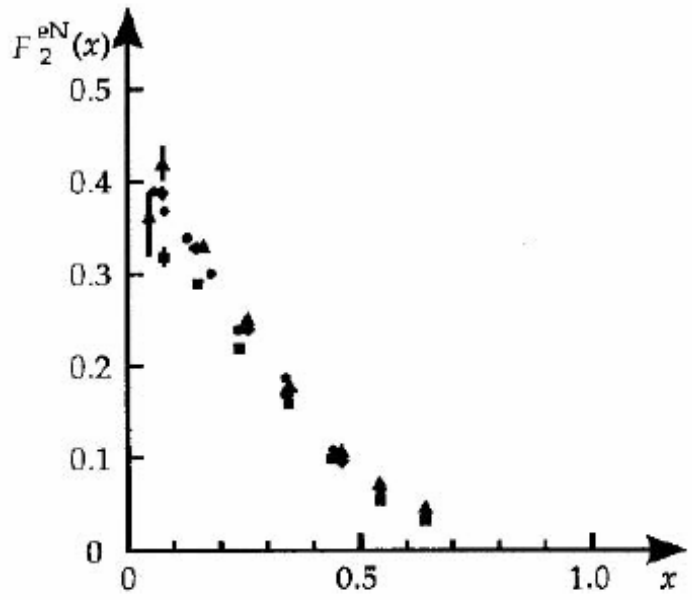
1. Scaling 现象

1969 年 SLAC 的实验结果表明，对于固定的ω(或 x)

$$\omega = \frac{2M\nu}{Q^2} \qquad x = \frac{1}{\omega} = \frac{Q^2}{2M\nu} \qquad (2.64)$$

和$Q^2 > 1GeV^2$能区内存在 Scaling 现象，即

$$MW_1(x,Q^2) \to F_1(x)$$
$$\nu W_2\ (x,Q^2) \to F_2(x) \qquad (2.65)$$

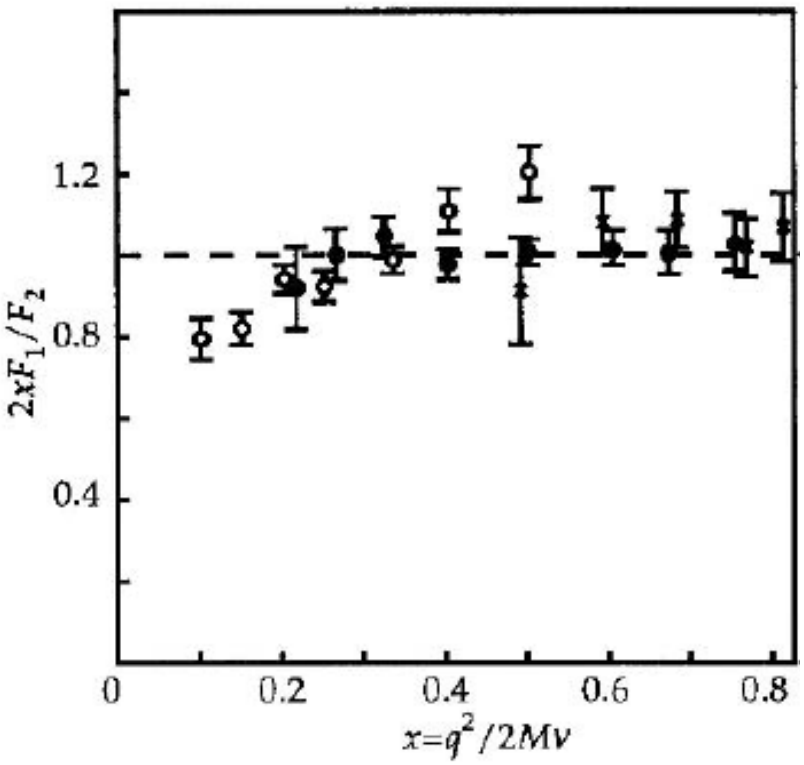



同时实验上还表明

$$\sigma_L << \sigma_T \qquad (R \approx 0.15)$$

式(2.63)意味着存在一个近似的等式

$$F_2(x) = 2x\,F_1(x) \tag{2.66}$$




现在我们讨论(2.65)和(2.66)式实验结果的物理意义。从(2.65)式可知结构函数$W_1$和$W_2$仅是$x$的函数，而与$Q^2$无关。$x$是无量纲量，表明结构函数独立于任何质量标度，这种现象称为Scaling现象。从实验上可知Scaling现象发生在$Q^2$从几个$GeV^2$到$20GeV^2$区域，超过这一能量区域对Scaling现象发生系统偏离。对Scaling现象的解释导致Parton模型，对Scaling现象偏离可以从量子色动力学理论中夸克和胶子相互作用获得解释。

Scaling 现象如何导致 Parton model? 注意到点粒子情况下的散射截面(2.39)式，对比到(2.51)式可知，对于一个电子与点粒子的弹性散射，其结构函数为

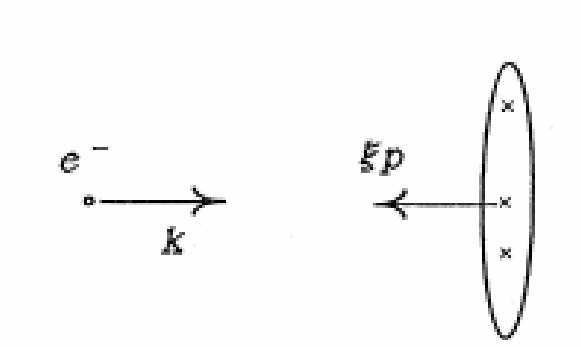
$$2MW_1^{el}(\nu,\ Q^2)=\frac{Q^2}{2M}\delta(\nu-\frac{Q^2}{2M})$$
$$=\frac{Q^2}{2M\nu}\delta(1-\frac{Q^2}{2M\nu}) \qquad (2.67)$$

$$\nu W_2^{el}(\nu,Q^2)=\delta(1-\frac{Q^2}{2M\nu}) \qquad (2.68)$$

(2.67)和(2.68)表明当电子与一个粒子发生弹性散射时，对结构函数的贡献$2M\ W_1^{el}$和$\nu W_2^{el}$只是$\frac{Q^2}{2M\nu}$的函数，即只是无量纲量$x$的函数。

2.部分子

现在实验上的Scaling现象(2.65)式告诉我们，如果电子－质子的非弹散射是由于电子与质子内部的许多类点成分发生不相干的弹性散射所引起的，那么Scaling现象就自然发生。人们将这些类点组成分称为部分子(Parton)。




这样，电子和质子内的点Parton相互作用发生弹性散射就成为电子－质子深度非弹散射的基本过程。质子内的每一个Parton的四动量p仅携带靶四动量P的一个份量x，即

$$p \quad = \quad x\,P$$

如果假定Parton的质量和横动量可忽略，则从电子Parton不相干弹性散射基本过程对电子－质子非弹散射结构函数的贡献为

$$\nu W_2(\nu, Q^2) \to F_2(x) = \sum_i e_i^2 \; x \; f_i(x)dx \; \delta(x - \frac{1}{\omega}) \qquad (2.69)$$

其中i是对所有质子内的Parton求和，$e_i$是第i个Parton的电荷，$f_i(x)dx$是在质子内发现第i个Parton具有动量分量在x→x+dx间隔内的几率。

设想部分子是自旋为 1/2 的点粒子，那么就可以计算电子和部分子的弹性散射截面，这就是(2.14)式，只是(2.14)式的部分子动量应为 xP。

定义变量 s,u,t,

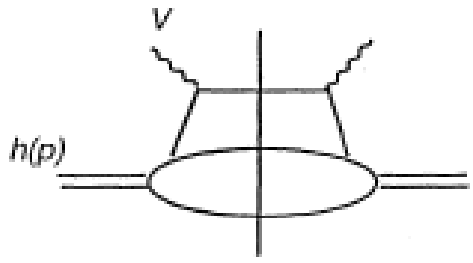
$$\begin{aligned} s &= (p+k)^2 \\ u &= (p-k)^2 \\ t &= (p-p')^2 \end{aligned} \qquad (2.70)$$

三者之和为

$$s+u+t = M^2 + W^2 \qquad (2.71)$$

其中 W 是终态所有 $x$ 的质量。注意到(2.64)式，在忽略了电子质量和部分子的质量、横动量以后，电子一部分子弹性散射截面变为

$$\left(\frac{d^2\sigma}{dt\,du}\right)_{e+parton} = \frac{4\pi\alpha^2}{t^2}\frac{x}{2}\left(\frac{s^2u^2}{s^2}\right) \; \delta(s+t+u) \qquad (2.72)$$




将所有(e+parton)的贡献加起来就给出电子－质子深度非弹散射下的截面，

$$\left(\frac{d^2\sigma}{dt\,du}\right)_{ep\to eX} = \frac{4\pi\alpha^2}{t^2}\frac{1}{2}\frac{s^2+u^2}{s^2}\int dx \sum_i e_i^2\ f_i(x)\frac{1}{s+u}\delta(x-\frac{1}{\omega}) \quad (2.73)$$

另一方面，电子－质子非弹截面可以利用结构函数表示，式(2.51)重写为

$$\left(\frac{d^2\sigma}{dt\,du}\right)_{ep\to eX} = 2M\frac{u}{s}\frac{4\pi\alpha^2}{t^2}\left\{Cos^2\frac{\theta}{2}W_2(q^2,\nu)+2Sin^2\frac{\theta}{2}W_1(q^2,\nu)\right\} \quad (2.74)$$

$$\left(\frac{d^2\sigma}{dQ^2 d\nu} = \frac{\pi}{EE'}\frac{d^2\sigma}{d\Omega\, dE'}\right)$$

注意到在深度非弹区域里，s, t, u, $w^2\to\infty$, 我们有

$$Sin^2\frac{\theta}{2}\ \left(=\frac{Q^2}{4EE'}\right)\ =\ \frac{tM}{su}$$

$$\nu\ =\ \frac{s+u}{2M}$$

$$x\ \equiv\ \frac{Q^2}{2M\nu}\ =\ -\frac{t}{s+u}$$

这样，方程(2.42)就变为

$$\left(\frac{d^2\sigma}{dt\,du}\right)_{ep\to eX} = \frac{4\pi\alpha^2}{t^2}\frac{1}{2}\frac{1}{s^2(s+u)}\left[2x\,F_1(s+u)^2-2us\,F_2\right] \quad (2.75)$$

将此式与(2.73)相比就可得到部分子模型下质子的结构函数 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$

$$2x\,F_1(x)=F_2(x)=\sum_i e_i^2\ x\ f_i(x) \quad (x\equiv\frac{1}{\omega}) \quad (2.76)$$

这意味着，如果部分子的自旋为$\frac{1}{2}$，就可以获得$2x\,F_1(x)=F_2(x)$关系式，此关系式称为 Callen-Gross 关系式，已获得实验上的支持，由此关系式代入到(2.63)式就给出$R=\frac{\sigma_L}{\sigma_T}=0$，这些与电子相互作用的部分子是自旋为$\frac{1}{2}$的点粒子。大家知道，夸克的自旋为$\frac{1}{2}$，人们很自然

地假定质子内自旋为$\frac{1}{2}$的部分子就是夸克和反夸克。这就是所谓的quark-parton model 而那些自旋为$\frac{1}{2}$的部分子就是所有的价夸克和海夸克。

## §.4. Parton 分布函数和唯象

1. Parton 分布函数

前面(2.65)式告诉我们质子结构函数依赖于部分子在质子内的几率$f_i(x)dx$。在质子无穷大动量系里，令u(x)dx是u-quark在 x →x + dx间隔内的几率，$\bar{u}$(x)dx是$\bar{u}$-quark在x→x + dx间隔内的几率。以此类推可以定义d(x)，$\bar{d}$(x)，s(x)，$\bar{s}$(x)，c(x)，$\bar{c}$(x)，b(x)，$\bar{b}$(x)等，称它们为部分子的分布函数。

以质子为例，质子内有两个价 u 夸克，一个价 d 夸克，从分布函数的定义可知

$$\begin{aligned} 2 &= \int_0^1 dx\,[u(x)-\bar{u}(x)\,] \\ 1 &= \int_0^1 dx\,[d(x)-\bar{d}(x)\,] \end{aligned} \tag{2.81}$$

或者由这两个式子组合得到

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^1 dx\,[\frac{2}{3}(u(x)-\bar{u}(x))-\frac{1}{3}(d(x)-\bar{d}(x))\,] \\ 0 &= \int_0^1 dx\,[\frac{2}{3}(d(x)-\bar{d}(x))-\frac{1}{3}(u(x)-\bar{u}(x))\,] \end{aligned} \tag{2.82}$$

(2.82)式的第二个式中相应于中子情况，电荷为零，第一个式子相应于质子情况、电荷为 1。这是因为质子、中子是同位旋的二重态、u、d 夸克也是同位旋的二重态，因此中子中的 u 夸克分布应与质子中的 d一夸克分布一样。

此外，在质子中还应有

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 dx[s(x)-\bar{s}(x)] \\ 0 &= \int_0^1 dx[c(x)-\bar{c}(x)] \end{aligned} \tag{2.83}$$

其中 u(x)、d(x)、s(x)包含有价夸克以及海夸克(夸克－反夸克对)成分的分布函数。

上一节的(2.65)式已表明对于自旋为 1/2 的部分子对于质子深度非弹散射的电磁结构函数有

$$2x\,F_1(x)=F_2(x)=\sum_i e_i x\ f_i(x)$$

因此

$$\frac{1}{x}F_2^{ep}(x)=\frac{4}{9}[u(x)+\bar{u}(x)]+\frac{1}{9}[d(x)+\bar{d}(x)]+\frac{1}{9}[s(x)+\bar{s}(x)]+\cdots \quad (2.84)$$

记住(2.82)式，就可以从(2.84)得到中子的结构函数，

$$\frac{1}{x}F_2^{en}(x)=\frac{4}{9}[d(x)+\bar{d}(x)]+\frac{1}{9}[u(x)+\bar{u}(x)]+\frac{1}{9}[s(x)+\bar{s}(x)]+\cdots \quad (2.85)$$

由(2.58)和(2.59)立刻可以得到两者之比的上下限。

$$\frac{1}{4} \quad \le \quad \frac{F_2^{en}(x)}{F_2^{ep}(x)} \quad \le \quad 4 \qquad (2.86)$$

目前的实验数据都处于这一上、下限之内。

实际上每一种quark分布函数$q_i(x)$ (I=u、d、s、c...)总包含两部分之和，即价夸克和海夸克分布函数

$$q_i(x)=q_i^{(V)}(x)+q_i^{(s)}(x) \qquad (2.87)$$

对于质子来讲，可以猜测

$$s_V(x)=\bar{s}_V(x)=\bar{u}_V(x)=\bar{d}_V=0$$

$$u_s(x)=\bar{u}_s(x)=d_s(x)=\bar{d}_s(x)=s_s(x)=\bar{s}_s(x)=\frac{1}{4}S(x) \qquad (2.88)$$

其中

$$S(x)=u_s(x)+d_s(x)+\bar{u}(x)+\bar{d}(x)+s(x)+\bar{s}(x) \qquad (2.89)$$

是质子中所有海夸克的分布函数之和。定义质子中价夸克分布函V(x)，

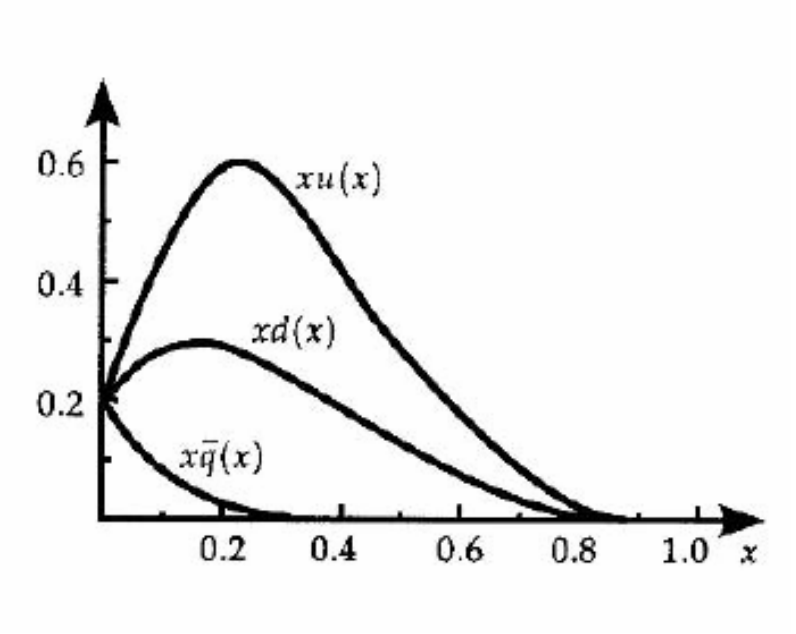
$$V(x)=u_V(x)+d_V(x) \tag{2.90}$$

将(2.87-90)代入到(2.84)和(2.85)就可以得到

$$\frac{1}{x}\left(F_2^{ep}(x)-F_2^{en}(x)\right)=\frac{1}{3}\left(u_V(x)-d_V(x)\right) \tag{2.91}$$

$$\frac{1}{x}\left(F_2^{ep}(x)+F_2^{en}(x)\right)=\frac{5}{9}\left(V(x)+\frac{4}{9}S(x)\right) \tag{2.92}$$

实验上对 $F_2^{ep}(x)$ 和 $F_2^{en}(x)$ 的测量将提供了$u_v(x)$、$d_v(x)$和S(x)的信息。




对于质子内的部分子除了价夸克 V(x)和海夸克 S(x)以外，还有胶子。由于胶子是电中性，不与电子发生相互作用，但它在质子内也有一定的几率分布，设胶子的分布函数为 g(x)。x 是部分子的动量分量，除了夸克携带外,胶子也携带动量，即

$$\int_0^1 dx\left[\sum_i x(q_i(x)+\bar{q}_i(x)+g(x)\right]=1 \qquad (2.93)$$

实验上测量的结果推出

$$\int_0^1 dx\left[\sum_i x(q_i(x)+\bar{q}_i(x))\right]\approx\frac{1}{2} \qquad (2.94)$$

这意味着质子内价夸克和海夸克所携带的动量仅是总动量的一半，而另一半的动量则为中性的胶子所携带。这是胶子在质子内存在的证据之一。

从方程(2.91)可见到质子和中子的结构函数之差只有价夸克贡献，海夸克的贡献恰好相消。这样实验上对质子和中子结构函数的测量将提供价夸克的信息。对(2.91)式积分并借助于(2.81)式有

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}(F_2^{ep}(x)-F_2^{en}(x))=\frac{1}{3} \qquad (2.95)$$

式(2.95)称为 Adler 求和规则。实验上也验证了此式。

实际上，对于结构函数还存在一系列的求和规则，这些求和规则还与中微子深度非弹散射的结构函数相关。对于中微子深度非弹散射来讲，由于弱作用过程中宇称不是一个守恒量，因此比电磁相互作用要多一个结构函数$F_3(x)$。类似于电子－质子深度非弹散射的推导可以获得中微子－质子深度非弹散射的截面公式

$$\frac{d^2\sigma^{\nu}}{dx\,dy}=\frac{G^2S}{2\pi}\left[F_2(x)(1-y)+F_1(x)xy^2+y(1-\frac{y}{2})xF_3(x)\right] \qquad (2.96)$$

(2.96)式是对于中微子成立的。如果是反中微子，(2.96)式中的第三项的＋号变为一号。

2. 求和规则

下面列出一些求和规则

1. Adler 求和规则

$$\int_0^1 \frac{dx}{2x}\left(F_2^{\bar{\nu}p} - F_2^{\nu p}\right) = 1 \tag{2.97}$$

2.Gross-Llewellyn Smith 求和规则

$$\int_0^1 dx\left(F_3^{\nu p} + F_3^{\bar{\nu}p}\right) = \int_0^1 dx\left(F_3^{\nu n} + F_3^{\bar{\nu}n}\right) = -6 \tag{2.98}$$

3.Llewellny Smith 关系

$$F_3^{\nu p} - F_3^{\bar{\nu}p} = 16\left(F_1^{ep} - F_1^{en}\right) \tag{2.99}$$

4.电、弱作用中结构函数关系

$$F_2^{\nu p} + F_2^{\nu n} \le \frac{18}{5}\left(F_2^{ep} + F_2^{en}\right) \tag{2.100}$$

5.动量求和规则

$$\int_0^1 dx\left[\frac{9}{2}\left(F_2^{ep} + F_2^{en}\right) - \frac{3}{4}\left(F_2^{\nu p} + F_2^{\nu n}\right)\right] = 1 - \varepsilon \tag{2.101}$$

此式等价于(2.94)式，其中的$\varepsilon \approx \frac{1}{2}$。

## § 1. 规范不变性和电磁相互作用

整体规范变换群U(1)的参量 θ 不依赖于时空坐标。如果将变换参量 θ 定域化，即 θ(x)，相应的变换称为定域规范变换，又称为第二类规范变换。那么在定域规范变换下理论将具有什么特点呢？

以电子的电磁相互作用为例，系统的拉氏函数 L 为

$$L = \bar{\psi}[i\gamma^{\mu}(\partial_{\mu}+ieA_{\mu})-m]\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \qquad (3.13)$$

其中 $\psi_{\alpha}$ ($\alpha$=1,2,3,4)是四分量的电子场，$F_{\mu\nu}$ 是电磁场张量，定义为

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu} \qquad (3.14)$$

由拉氏函数按变分原理可推出类似于(3.5)式的运动方程，

$$[i\gamma^{\mu}(\partial_{\mu}+ieA_{\mu})-m]\psi = 0 \qquad (3.15)$$

$$\partial^{\mu}F_{\mu\nu} = j_{\nu} = e\bar{\psi}\gamma_{\nu}\psi \qquad (3.16)$$

并且可以证明拉氏函数 L 在整体规范变换(3.7)下是不变的，其守恒流就是(3.16)式定义的流，满足流守恒方程

$$\partial^{\mu}j_{\mu} = 0 \qquad (3.17)$$

现在我们讨论当规范群U(1)的参量 θ 不是常数而是时空点x的函数，在群空间的转动变换可以在任何时空点独立地进行，其相互作用在此变换下是不变的。即场量 ψ 作如下的规范变换

$$\psi(x)\rightarrow e^{-iq\theta(x)}\psi(x) \qquad (3.18)$$

其中q是电子的电荷。可以证明如果场量$A_{\mu}$ 也作如下变换

$$A_{\mu}(x)\rightarrow A_{\mu}(x)+\frac{1}{e}\partial_{\mu}\theta(x) \qquad (3.19)$$

那么拉氏函数(3.13)仍旧是不变的。事实上，由于$\partial_{\mu}\theta\neq 0$，由规范变

换(3.18)引起的变化为变换(3.19)引起$A_\mu$场的变化所抵消。因而

$$(\partial_\mu + iqeA_\mu)\psi \rightarrow e^{-iq\theta}(\partial_\mu + iqeA_\mu)\psi \qquad (3.20)$$

如果定义协变微商$D_\mu$，

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + iqeA_\mu \qquad (3.21)$$

那么(3.20)就可以写成

$$D_\mu\psi \rightarrow e^{-iqe\theta}D\psi \qquad (3.22)$$

此式正同于规范变换(3.18)的 U(1)变换规则。若将拉氏函数(3.13)改写为协变微商形式，

$$L = \bar{\psi}[i\gamma^\mu(D_\mu - m)\psi] - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \qquad (3.13')$$

显而易见，它在此U(1)规范群变换下是不变的。协变微商$D_\mu$ 满足下述关系式，

$$[D_\mu , D_\nu] = iqeF_{\mu\nu} . \qquad (3.20)$$

反过来，如果只要求拉氏函数满足Lorentz不变性，时间反演和空向反射变换下不变以及可重整理论要求，那么(3.13)式还允许光子质量项$-\frac{1}{2}m_\gamma A^\mu A_\mu$的存在。进一步要求拉氏函数是规范变换(3.18)和(3.19)下不变的就不允许这一项存在。因而电磁相互作用的规范不变性是与光子质量为零密切相关的，或者说规范不变性要求导至光子质量为零。可以见到规范不变性在构造电磁相互作用中起了重要作用：1)引入规范场$A_\mu$以协变微商$D_\mu$ 代替偏微商 $\partial_\mu$;2)光子的质量项不出现。因此，Lorentz不变性、时间反演和空间反射变换下不变性、阿贝尔规范不变性以及可重整理论这几条原理在一起就完全决定了电磁作用拉氏函数(3.13)。

从上面的讨论可以见到由规范变换引入的规范场$A_\mu$并不直接是物理场量，物理场量是$F_{\mu\nu}$。电场$E_i$和磁场$B_i$是张量$F_{\mu\nu}$的分量,

$$E_i = F_{i0}$$

$$B_i = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F_{jk}$$

其中i，j，k=1，2，3 是空间坐标。式(3.16)是Maxwell方程的相对论表述。规范变换式(3.19)也表明由规范场$A_\mu$确定$F_{\mu\nu}$不是唯一的，因为只要 θ 是四维x的实函数，$A_\mu$和$A_\mu+\partial_\mu\theta$ 都给出同一个$F_{\mu\nu}$。而且在自由电磁场情况下，(3.16)的Maxwell方程可以等价于规范场$A_\mu$满足下列两个方程

$$\Box A_\mu = 0 \qquad (3.21a)$$

$$\partial^\mu A_\mu = 0 \qquad (3.21b)$$

式(3.21b)中的□是达朗伯(d’Alembert)算符，$\Box=\partial^\mu\partial_\mu$。(3.21b)式就是洛仑兹(Lorentz)条件。即使加上了Lorentz条件，对于同一的电场和磁场仍然可以存在(3.19)规范变换允许的不同的$A_\mu$确定。其中 θ 满足方程 $\Box\theta(x)=0$。Lorentz条件消去了规范变换自由度产生的任意性，我们也称它为规范固定条件。这种规范固定条件还有其它选取方式，如库仑(Coulomb)规范，$\partial_i A_i=0$ (i=1，2，3)，又称为辐射规范。洛仑兹规范是协变的，又称为协变规范。库仑规范是非协变的，它是物理规范，因为当选取库仑规范后，理论中只出现物理自由度。还有一些其它规范条件，将在以后的讨论中引入。

事实上以上讨论的阿贝尔规范原理可以推广到非阿贝尔情况，即两次规范变换是不可对易的。这意味着规范群从 U(1)情况推广到 n

维李群 SU(n)情况。1954 年 Yang-Mills 最早讨论了非阿贝尔情况，他们在质子、中子同位旋空间讨论了定域规范不变性，引入了规范场从 U(1)规范群推广到 SU(2)规范群。Yang-Mills 规范场论在 1967 年建立弱、电统一理论和 1973 年建立量子色动力学理论起了关键作用。正是这两个基本理论构成了极为成功的粒子物理标准模型理论，它描述了夸克和轻子层次的电磁相互作用、弱相互作用和强相互作用基本理论，经历了三、四十年实验的检验和验证了它的成功。本书仅讨论量子色动力学，其规范群 G 为 SU(3)。下一节我们具体取规范群为 SU(3)讨论，所有结果可以推广到任意 SU(n)群。

## §2. 非阿贝尔规范场

为了方便起见，首先引入SU(3)群的的基本性质。SU(3)是李群，它是行列式为 1 的么正群，是单纯和紧致的。它有三个生成元，$T^a$ (a=1,2,3)，满足以下对易关系

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T_c \tag{3.22}$$

其中重复指标为求和，$f^{abc}$是SU(3)群的结构函数。由$T^a$ 张成的线性矢量空间在乘法和加法运算下封闭构成SU(3)群的李代数。$f^{abc}$具有全反对称性质，即交换其中任意两个指标改变符号，

$$f^{abc} = -f^{bac}$$

且有下列 Jacobi 恒等式。

$$[T^a,[T^b,T^c]]+[T^b,[T^c,T^a]]+[T^c,[T^a,T^b]]=0 \tag{3.23}$$

将(3.22)代入到(3.23)可以得到结构函数$f^{abc}$满足的条件

$$f^{abd}f_{dce}+f^{bcd}f_{dae}+f^{cad}f_{dbe} = 0 \tag{3.24}$$

一般地讲，李代数有它任意维空间R的表示，在这些表示空间中的线性算符(群元素g的矩阵实现)满足(3.21)式的李代数对易关系。这里介绍下面要用到的三种表示：正则表示、基础表示和伴随表示。SU(3)群的生成元在三维线性空间中就有它的矩阵表示，如八个Gell-Mann矩阵 $\lambda^a=2T^a$。SU(3)群的任何一个元素g都可以记成李代数中元素$T^a$的指数形式表示，

$$\{g\} = \{\exp(-iT^a\theta_a)\} \tag{3.25}$$

这种表示称为SU(3)群的正则表示。李代数表示中维数最小的称为基础表示。另外由Jacobi恒等式(3.23)可知若生成元$T^a$

$$(T^a)^{bc} = -if^{abc} \tag{3.26}$$

显然满足李代数对易关系。由此得到的表示称为SU(3)群的伴随表示。将(3.26)代入到(3.21)就得到结构函数 f 满足的(3.24)式。这是自然的，因为伴随表示的李代数就是由结构函数来表示的。因此我们说一个场量属于伴随表示就是指它在规范变换下变换性质由结构函数决定。

现在我们将U(1)规范群不变的拉氏函数(3.13)推广到SU(3)规范群不变的拉氏函数。令费米子场 $\psi$ 属于SU(3)的基础表示,$\psi$场有三个分量$\psi_i$(i=1,2,3 相应于三种色夸克)。相应于(3.18)的U变换为

$$\psi_i(x) \rightarrow U_{ij}\psi_j(x) \qquad U=\exp(-iT^a\theta^a) \tag{3.27}$$

其中 $\theta^a$ 是SU(3)群的参量，对于定域规范变换它是x的函数；如果是整体规范变换它是常参量。类似地定义协变微商$D_\mu$，

$$D_\mu = \partial_\mu - igT^aA^a_\mu \tag{3.28}$$

其中$A^a_\mu$ 是相应于规范群SU(3)引入的规范场，g是相应于U(1)群电荷的规范荷，它标记着费米子场 $\psi$ 和规范场 A之间的耦合强度。对于非阿贝尔规范场，若要求(3.23)式成立，规范场A的规范变化就不能像U(1)规范场变换(3.19)那么简单。亦即费米子场在规范变换(3.27)下引起的变化如何为规范场在新的规范变换下引起的变化所抵消。可以证明在非阿贝尔规范群下，若定义规范场的规范变换

$$T^aA^a_\mu \rightarrow U(T^aA^a_\mu - \frac{i}{g}U^{-1}\partial_\mu U)U^{-1} \tag{3.29}$$

刚好保证了$\bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi$ 在规范变换(3.27)和(3.29)下是不变的。

至于(3.13)中第二项 $-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$，其中$F^{\mu\nu}$按(3.14)定义在(3.29)规范变换下显然不是不变的。为此必须修改拉氏函数中的动能项使之满是在(3.29)规范变换下不变。换句话说，非阿贝尔规范群下定义的$F^{\mu\nu}$应该是规范变换下协变的，即

$$F^{\mu\nu}\rightarrow UF^{\mu\nu}U^{-1} \tag{3.30}$$

注意到 $D_\mu\rightarrow UD_\mu U^{-1}$以及(3.20)式，我们可选择 $[D^\mu, D^\nu]$来定义$F^{\mu\nu}$来保证它在规范变换下协变性的要求。由于

$$\begin{aligned}[D_\mu, D_\nu] &= -igT^a(\partial_\mu A^a{}_\nu-\partial_\nu A^a{}_\mu+gf^{abc}A^b{}_\mu A^c{}_\nu)\\ &= -igT^aF^a{}_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{3.31}$$

其中

$$F^a{}_{\mu\nu} \equiv (\partial_\mu A^a{}_\nu-\partial_\nu A^a{}_\mu+gf^{abc}A^b{}_\mu A^c{}_\nu) \tag{3.32}$$

或者定义

$$A_\mu\equiv T^aA^a{}_\mu \qquad F_{\mu\nu}\equiv T^aF^a{}_{\mu\nu}$$

那么(3.32)可以改写为

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu-ig[A_\mu, A_\nu] \tag{3.32'}$$

可以证明由(3.32)定义的$F^{\mu\nu}$在非阿贝尔规范变换下是协变的，即满是式(3.30)。这样按非阿贝尔规范不变性原理建立的拉氏函数为

$$L = \bar{\psi}_i(i\gamma^\mu D_\mu-m)\psi_i - \frac{1}{4}F^{a,\mu\nu}F^a{}_{\mu\nu} \tag{3.33}$$

它从形式上完全类似于规范群为 U(1)的(3.13)式。为了验证(3.24)式拉氏函数在规范变换(3.27)和(3.29)下是不变的，可以考虑作一个无穷小变换，即参量 是无穷小，规范变换 U 中只取线性项，

$$U = I-iT^a\theta^a \tag{3.34}$$

其中 I 是单位矩阵。那么(3.27)和(3.29)无穷小规范变换就变成

$$\delta\psi_i = -iT^a\theta^a \tag{3.35}$$

$$\delta A^a{}_\mu = f^{abc}\theta^b A^c{}_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a \tag{3.36}$$

在获得上式时已用到了生成之$T^a$ 的对易关系式(3.21)。因此

$$\begin{aligned}\delta(\partial_\mu A^a{}_\nu - \partial_\nu A^a{}_\mu) &= \partial_\mu\delta A^a{}_\nu - \partial_\nu\delta A^a{}_\mu \\ &= f^{abc}\theta^b(\partial_\mu A^a{}_\nu - \partial_\nu A^a{}_\mu) + f^{abc}[(\partial_\mu\theta^b)A^c{}_\nu - (\partial_\nu\theta^b)A^c{}_\mu]\end{aligned} \tag{3.37}$$

另一方面，(3.32)式的第二项在无穷小变换下

$$\begin{aligned}\delta(gf^{abc}A^b{}_\mu A^c{}_\nu) &= gf^{abc}[(\delta A^b{}_\mu)A^c{}_\nu + A^b{}_\mu(\delta A^c{}_\nu)] \\ &= f^{abc}[g(f^{cde}A^b{}_\mu A^e{}_\nu + f^{bde}A^c{}_\nu A^e{}_\mu)\theta^d \\ &\quad - A^b{}_\mu\partial_\nu\theta^c - A^c{}_\nu\partial_\mu\theta^b]\end{aligned} \tag{3.38}$$

应用 Jacobi 恒等式(3.24)就可以得到

$$\delta(gf^{abc}A^b{}_\mu A^c{}_\nu) = f^{abc}(gf^{cde}A^d{}_\mu A^e{}_\nu - A^b{}_\mu\partial_\nu\theta^c - A^c{}_\nu\partial_\mu\theta^b) \tag{3.39}$$

从(3.38)和(3.39)式可以见到两式相加的结果正好将 $\partial\theta$ 的项相消给出$F^{\mu\nu}$在无穷小变换下的表达式，

$$\delta F_{\mu\nu} = f^{abc}\theta^b F^c{}_{\mu\nu} \tag{3.40}$$

因此，考虑到结构常数的全反对称性将导致$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$的无穷小变换为零

$$\begin{aligned}\delta(F^{a\mu\nu}F^a{}_{\mu\nu}) &= 2F^{a\mu\nu}\delta F^a{}_{\mu\nu} \\ &= 2f^{abc}\theta^b F^a{}_{\mu\nu}F^{c\mu\nu} = 0\end{aligned} \tag{3.41}$$

这意味着规范场的动能项是规范变换下的不变量。这就证明了拉氏函数(3.33)在规范变换(3.27)和(3.29)的变换下是不变的。从(3.36)可以见到当 $\theta$ 与x无关时，即整体规范变换下$A_\mu$的变换性质由结构函数确定，$A_\mu$属于伴随表示。式(3.40)表明即使在定域规范变换下$F_{\mu\nu}$的

变换性质由结构常数确定。正是拉氏函定域规范不变这一特点，人们才能证明理论的可重整性和自洽性。

值得强调指出，拉氏函数(3.33)的一个重要特点是出现了规范场的自相互作用，它们来自于规范场动能项 $-\frac{1}{4}F^{a,\mu\nu}F^{a}_{\mu\nu}(F^{a}_{\mu\nu}\equiv(\partial_\mu A^{a}_{\nu}-\partial_\nu A^{a}_{\mu}+gf^{abc}A^{b}_{\mu}A^{c}_{\nu}))$。拉氏函数中具有三个规范场和四个规范场的相互作用。这一特点是非阿贝尔规范场所特有的，在电磁相互作用中不存在规范场的自作用。正是规范场自作用的存在使得非阿贝尔规范场论出现完全崭新的世界。例如量子色动力学中的渐近自由就是规范场自作用的必然结果，这将在第五章中讨论。

本节一开始就提到为了满足基础表示场量 $\psi$ 定域规范变换下不变引入了规范势，真正有物理意义的是场量 $F_{\mu\nu}$。特别地，从 $F_{\mu\nu}$ 的定义(3.32)可以见到存在一类规范势使得

$$F_{\mu\nu} = 0 \qquad (3.42)$$

即满足方程(3.42)的解。

$$A_\mu = \frac{i}{g}U^{-1}\partial_\mu U \qquad (3.43)$$

可以证明(3.43)和(3.42)互为充要条件。我们称这一类解为纯规范势。

## §3. 量子色动力学和胶子

上一节以 SU(3)规范群为例讨论了非阿贝尔规范场一般理论。这一节将具体引入夸克之间的相互作用，量子色动力学理论。

1972 年 Gell-Mann 提出色自由度的同时假定可观察的强子态是无色的，因为实验上并未观察到带色的强子，亦即强子具有零色量子数(或称为白色的)。在数学上描述无色量子数的强子态有两种可能性，对于介子和重子分别为

$$M \sim \bar{q}_i q_i$$

$$B \sim \varepsilon_{ijk} q_i q_j q_k$$

这里 i,j,k = 1,2,3，求和是对所有颜色求和，M 和 B 都是无色量子数的强子态。这就是说由三种色量子数作为基张开的色空间，在色空间内作任一变换 U 不会使强子态变出颜色来，而是变换到强子态自身，设夸克场量 $q_i$(i=1,2,3 是夸克的三种不同颜色)是 SU(3)群的三个基，它的八个生成元 $T^a=\frac{\lambda^a}{2}$，$\lambda^a$ 是 Gell-Mann 矩阵 $\lambda_a(a=1,2,\cdots 8)$，它们满足对易关系

$$[\lambda_a,\ \lambda_b]=2i\ f_{abc}\lambda_c \tag{3.44}$$

其中 $f_{abc}$ 是 SU(3)群的结构常数，还有

$$\begin{aligned} &Tr(\lambda_a)=0 \\ &Tr(\lambda_a\ \lambda_b)=2\,\delta_{ab} \end{aligned} \tag{3.45}$$

在 SU(3)空间中作一变换 U

$$q_i \to q_i^{'} \equiv U_{ij}\ q_j \tag{3.46}$$

U 矩阵的么正性保证了态矢的正交归一性，且行列式为 1，因此物理

上的需求选择了 SU(3)规范群。在变换(3.27)下显然有

$$\sum_i \bar{q}_i' q_i' = \sum_{ij} \bar{q}_i U_{ji}^* U_{jk} q_k = \sum_{i,j} \bar{q}_i U_{ji}^+ U_{jk} q_k = \sum_i \bar{q}_i q_i$$

$$\sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} q_i q_j q_k = \varepsilon_{ijk} U_{im} U_{jn} U_{kp} q_m q_n q_p$$

$$= \varepsilon_{mnp} q_m q_n q_p$$

即介子态和重子态在变换(3.46)下的确变回到自身。对于那些在 U 变换下变为自身的态称为色单态。所有强子态都是色单态。三种色的夸克 $q_i$ 属示规范群 SU（3）的基础表示。

当然以三种色为基的群，除了 SU(3)群处，还可以选择 U(3)和 SO(3)群。对于 U(3)情况，差别在于矩阵的行列式不要求为 1，人们可能因子化出一个位相(因为 $U^+U=1$)。这种位相除了电荷以外就是重子数，实验上并没有观察到除了 SU(3)以外的位相耦合(像库仑力一样的长程耦合)因此 U(3)群被排除。如果是 SO(3),在这一模型里无法区分 quark 和 antiquark，这就是说介子态和双夸克态应该一样多，然而自然界中并没有观察到双夸克态，所以也应排除。只有一个选择 SU(3)群。进而,实验上并未观察到带色量子数的强子,因此色群 SU(3)是精确的对称性。不像 SU(3)味对称性是近似对称性。

这样就提出一个问题：为什么带色量子数的物质在实验上观察不到，实验上只观察到无色(色单态)的强子态。这一问题显然依赖于 quark 之间的相互作用力。强相互作用的定域规范理论认为夸克之间的相互作用是通过规范场玻色子 $A^a_\mu$ 传递的，SU(3)群有八个规范场玻色子，称为胶子，强子内部的基本自由度是夸克和胶子，它们之间的

相互作用遵从 SU(3)色对称性，这就是在上述的色空间内的规范变换可以在任何时空点独立地进行，其相互作用在此变换下是不变的。这就是量子色动力学理论。其拉氏函数就是由(3.33)来描述，

$$L = \bar{\psi}_i(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi_i - \frac{1}{4}F^{a,\mu\nu}F^a_{\mu\nu}$$

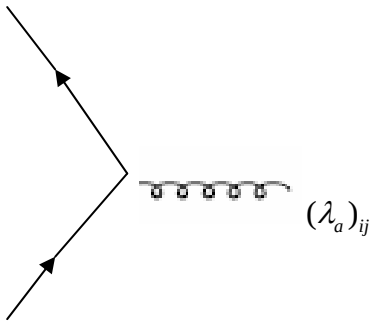
其中夸克场和规范场分别属于SU(3)群的基础表示和伴随表示。(3.33)式中 m 是夸克质量矩阵（味空间）。当忽略 m 时，式(3.33)具有明显的手征对称性。上述拉氏函数是在一种味夸克下写出的，若包括不同味(f=u、d、s、c、b、t)仍要加上对味指标求和。类似于电磁相互作用，我们可以定义色电场 $E_i$ 和色磁场 $B_i$，

$$E^a_i = F^a_{i0}$$

$$B^a_i = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F^a_{jk}$$

其中 i，j，k=1，2，3 是空间坐标。

定性地讲，八个胶子分别对应于 SU(3)群的八个生成元$\lambda_a$，属于色八重态。因此胶子是带色的，它们产生不同色夸克之间的转换，传递强相互作用。




相应的八个生成元$\lambda_a$

$$\lambda_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda_2=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\lambda_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda_5=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \tag{3.47}$$

$$\lambda_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}\quad \lambda_8=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

形象地说以 R(红)、B(兰)、G(绿)代表 1，2，3，则有 3×3 矩阵

$$\begin{pmatrix}R\overline{R}&R\overline{B}&R\overline{G}\\B\overline{R}&B\overline{B}&B\overline{G}\\G\overline{R}&G\overline{B}&G\overline{G}\end{pmatrix}$$

抽去迹

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left(R\overline{R}+B\overline{B}+G\overline{G}\right)$$

这八个胶子分别对应 $B\overline{R}$、$G\overline{R}$、$R\overline{B}$、$R\overline{G}$、$G\overline{B}$、$B\overline{G}$

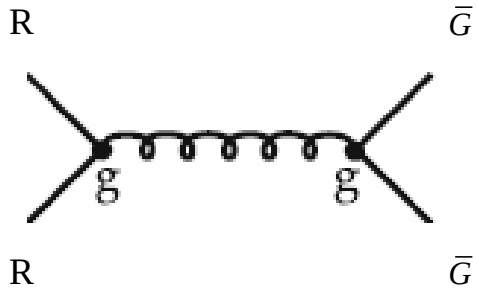
$$\frac{R\overline{R}-B\overline{B}}{\sqrt{2}}、\ \frac{1}{\sqrt{6}}\left(R\overline{R}+B\overline{B}-2G\overline{G}\right)$$

其中

$$\begin{aligned}&B\overline{R}=\frac{1}{2}(\lambda_1+i\lambda_2)、\cdots\\&\frac{R\overline{R}-B\overline{B}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_3\\&\frac{1}{\sqrt{6}}(R\overline{R}+B\overline{B}-2G\overline{G})=\lambda_8\end{aligned} \tag{3.48}$$

因此，夸克之间由于交换色八重态胶子产生颜色转换。以正反夸克态

为例，如果正、反夸克态不是无色态，而是有色介子$(q_R\bar{q}_G)$，正、反夸克之间交换的胶子只能是相应于$\lambda_8$(色八重态)的胶子




那么相互作用能

$$\varepsilon_8 \sim \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)(-)\left(\frac{-2}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{3} > 0$$

$\varepsilon_8 > 0$意味着是排斥力、能量高。然而如果是无色介子，

$$M \sim (q_R\ \bar{q}_R) + (q_G\ \bar{q}_G) + (q_B\ \bar{q}_B)$$

若以$(q_G\bar{q}_G)$成分为例，交换的胶子有$\frac{1}{\sqrt{6}}(R\bar{R} + B\bar{B} - 2G\bar{G})$、$\bar{G}R, \bar{G}B$，这样对色单态介子的贡献应是相应于三种胶子交换图之和

$$\frac{-2}{\sqrt{6}}(-)\left(\frac{-2}{\sqrt{6}}\right) + (1)(-)(1) + (1)(-)(1) = -\frac{2}{3} - 1 - 1$$

即

$$\varepsilon_1 = -\frac{8}{3} < 0$$

所以正、反夸克结合形成色单态时相互作用是吸引力,能量低。这样定性地看出正、反夸克形成的束缚态都是色单态。对于三夸克 qqq 态也有类似的结果。这是 SU(3)规范群不变性假定必然的结果。

# 第四章 Yang-Mills 场量子化和费曼规则

## §.1 正则量子化的困难和泛函积分方法

拉氏函数(3.31)式表达了非阿贝尔规范变换下不变的拉氏函数的一般形式。其规范场部分

$$\mathsf{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}{}^{a}F^{a\mu\nu} \qquad (4.1)$$

也定义了规范场的自相互作用，这不同于阿贝尔规范场情况(如QED)。正是这种自相互作用(三规范场顶点和四规范场顶点)的存在使得量子色动力学(QCD)理论不能按QED情况绕开正则量子化的困难，也正是这些自作用的存在导致QCD理论的一些重要特点。

首先回顾一下自由电磁场正则量子化的困难，困难产生的原因在于物理场量是$F_{\mu\nu}$，而规范场$A_\mu$ 的引入是为了描述理论的规范不变性。这样困难基本上来源于规范场$A_\mu$含非物理自由度。量子化首先要定义$A_\mu$的正则动量 $\pi_\mu=\frac{\partial L}{\partial \dot{A}^{\mu}}=-F_{0\mu}$ ，其中 $\dot{A}^{\mu}=\partial_0 A^{\mu}$。显然 $\pi_0\equiv 0$，无法通过正则量子化定义正则对易关系。这是因为$A_\mu$作为动力学场量，拉氏函数中不含$A_\mu$的时间微商，因此与$A_0$相应的正则动量为零。为此，人们选取规范固定条件消去非物理自由度，如取库仑规范消去非动力学场变量，使物理动力学场变量满足正则对易关系实现量子化。然而由于库仑规范条件不是协变的，因而量子化方案也不具有协变性，在计算物理过程中是不方便的。为了保持理论的协变性在量子电动力学中常选用洛仑兹规范条件(3.21b)。它是洛仑兹不变的，理论中动力学变量$A_\mu$包含了非物理自由度，使得电磁场量子化成为有约束条件的量子化，而此约束条件不是规范不变的。这种有约束条件的量子化通常

选取拉格朗日乘子法，即取拉氏函数为

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}{}^{a}F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(\partial^{\mu}A_{\mu})^{2} \qquad (4.2)$$

附加的项是规范固定项，α是规范参数。由于这一项的存在，定义的正则动量$\pi_0$不再为零，而是

$$\pi_{\mu} = -F_{0\mu} - \frac{1}{\alpha}g_{0\mu}(\partial^{\nu}A_{\nu})$$

因而就绕过了量子化困难。然而附加项的存在使得拉氏函数不再是规范不变的，物理结果应该是规范无关的，为了消除非物理态效应，在量子电动力学中对附加的洛仑兹条件取物理态的平均值，即对于物理态$|\psi\rangle$，算符等式$\partial^{\mu}A_{\mu}=0$ 修改为

$$\langle\psi|\ \partial^{\mu}A_{\mu}\ |\psi\rangle = 0$$

并采用不定度规方法实现正则量子化。

对于非阿贝尔规范场，若采用正则量子化方法同样会遇到上述困难，人们曾尝试以类似于量子电动力学方法实现正则量子化，然而由于非阿贝尔理论的非线性(存在三规范场、四规范场相互作用)使得问题复杂化不易实现正则量子化。在一些非协变的规范下，如库仑规范($\partial_i A^a{}_i=0$)，时性规范($A^a{}_0=0$)，光锥规范($A^{a+}=A^{a0}+A^{a3}=0$)可以实现正则量子化。我们将在以后的章节中讨论。但这些规范是非协变的，不能保持理论的协变性。既能保持理论的规范不变性又能保持协变性使得非阿贝尔规范理论量子化方法是 1967 年法捷耶夫(Faddeev)和波波夫(Popov)提出的，在路径积分量子化方法中实现的。

泛函积分(路径积分)量子化方法首先是由费曼(Feynman)在量子力学体系中奠定了基础，将几率振幅表达为路径积分的形式。廿世纪

七十年代初，人们将泛函积分量子化方法应用到非阿贝尔规范场量子化对标准模型的建立起了很重要的作用，因为此方法可以很方便地保持理论的洛仑兹不变性、规范不变性和其它对称性。

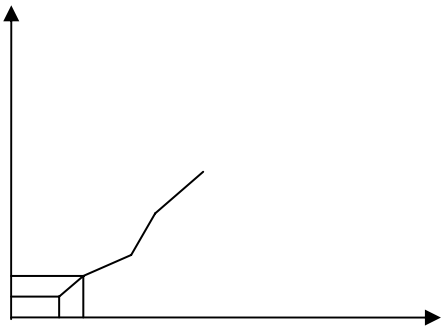
人们可以不困难地将非相对论有限自由度体系的泛函积分形式直接推广到相对论的无穷多自由度体系。这里不打算从介绍量子力学的路径积分体开始，而是直接讨论量子场论中泛函积分表述。为了简便起见，先以中性标量场体系为例。设中性标量粒子质量为 m 的场量 $\phi(x)$，其拉氏函数密度 L，

$$L = \frac{1}{2}(\partial^{\mu}\phi(x)\partial_{\mu}\phi(x) - m^{2}\phi^{2}) - V(\phi) \qquad (4.3)$$

其中 V(Φ)是相互作用势。系统的作用量

$$S = \int d^{4}x \; L(x) \qquad (4.4)$$

为了直接将量子力学中泛函积分形式推广到场论，首先将连续变量时间和空间变成分立形式，在有限体积V中将空间分割成N个小正方格，体积为 ε，$V=N\varepsilon$。然后固定V，取 $\varepsilon \to 0$ 和 $N \to \infty$ 极限，再取 $V \to \infty$ 就回到连续空间极限。场量$\phi(x)$定义在这些分立的小格子 ε 上，在初始时刻$t^{i}$，$\phi^{i}_{j} = \phi(t^{i}, x_{j})$。进一步再使时间t分成M个时间间隔，每一间隔为 δ 形成分立时间系列$\{t^{m}\}$,(m=0,1,2…M)。$t^{i}=t^{0}$，$t^{1}=t^{0}+\delta$，$t^{2}=t^{1}+\delta \cdots t^{f}=t^{M}=t^{0}+M\delta$。当 $\delta \to 0$ 时，时间趋于连续极限。



现在计算从初态$t_i$, $\phi_i$到终态$t_f$, $\phi_f$的跃迁矩阵元，

$$\langle\phi_f, t_f|\phi_i, t_i\rangle=\langle\phi_f|U(t_f, t_i)|\phi_i\rangle \qquad (4.5)$$

其中$U(t_f, t_i)=\exp[-iH(t_f-t_i)]$。当时间分成小间隔时，U矩阵就是一系列小间隔U矩阵$\exp(-iH\delta)$的乘积。在固定某一时间间隔$t^m$，空间j个小方格上状态为$\phi_j$存在完备性条件

$$\int d\phi^m{}_j \,|\, \phi^m{}_j, t^m\rangle\langle\phi^m{}_j, t^m| = 1 \qquad (4.6)$$

这样，上述从初态到终态的跃迁元可以表达为

$$\langle\phi_f, t_f|\phi_i, t_i\rangle=\lim\langle\phi_{f1}, \phi_{f2}, \cdots\phi_{fN}, t_f|\phi_f, \phi_{f2}, \cdots\phi_{fN}, t_i\rangle$$

$$=\lim\int\prod_{j=1}^{N}\{d\phi^M{}_j\cdots d\phi^1{}_j\langle\phi_{fj}, t_f|\phi^M{}_j, t_M\rangle\langle\phi^M{}_j, t_M|\phi^{M-1}{}_j, t_{M-1}\rangle$$

$$\cdots\langle\phi^1{}_j, t_1|\phi_{ij}, t_i\rangle\} \qquad (4.7)$$

(4.7)式中的lim意义是取空间和时间的连续极限。在获得(4.7)式时已对每个时刻用到(4.6)式。现在的问题是计算(4.7)式中每一个小时间间隔$\delta$内的$\langle\phi^{m+1}{}_j, t_{m+1}|\phi^m{}_j, t_m\rangle$(m=1,2…M)，

$$\langle\phi^{m+1}{}_j, t_{m+1}|\phi^m{}_j, t_m\rangle=\langle\phi^{m+1}{}_j, t_m|\exp(-iH\delta)|\phi^m{}_j, t_m\rangle \qquad (4.8)$$

注意到$H=\int d^3x\mathcal{H}(x)$，

$$L=\int d^3x\mathcal{L}(x)=\sum_j \varepsilon\, L_j \qquad (4.9)$$

$$H=\int d^3x\mathcal{H}(x)=\sum_j \varepsilon\, \mathcal{H}_j \tag{4.10}$$

对于每一个小方格ε，相应于$\phi_j$的正则动量为

$$p_j=\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_j}=\varepsilon\,\dot{\phi}_j=\varepsilon\,\pi_j \tag{4.11}$$

式(4.9)中的$\mathcal{L}_j$是$\phi_j$，$\dot{\phi}_j$和$\phi_{j+1}$的函数，相应地式(4.10)中$\mathcal{H}_j$是$\phi_j$, $\pi_j$和$\phi_{j+1}$的函数。之所以它们依赖于最邻近方格点是因为分立化以后微分变差分的缘故。这样在一个小时间间隔δ内跃迁矩阵元(4.8)可以表达为

$$\begin{aligned}\langle\phi^{m+1}_j, t_{m+1}|\phi^m_j, t_m\rangle&=\langle\phi^{m+1}_j, t_m|\exp(-i\mathcal{H}\delta)|\phi^m_j, t_m\rangle\\&=\int\frac{\varepsilon d\pi^m_j}{2\pi}\exp[i\,\varepsilon\pi^m_j(\phi^{m+1}_j-\phi^m_j)-i\,\varepsilon\,\delta\,\mathcal{H}^m_j]\\&=\int\frac{\varepsilon d\pi^m_j}{2\pi}\exp\{i\,\varepsilon\,\delta[\pi^m_j\frac{\phi^{m+1}_j-\phi^m_j}{\delta}-\mathcal{H}^m_j]\}\end{aligned} \tag{4.12}$$

其中$\mathcal{H}^m_j=\langle p^m_j|\mathcal{H}_j|p^m_j\rangle$，它是动量表象中哈密顿密度。将(4.7)中每一个时间间隔的跃迁矩阵元都按(4.12)式表示插入就可将它写成

$$\begin{aligned}&\langle\phi_f, t_f|\phi_i, t_i\rangle\\&=\lim\int\prod_{j=1}^{N}(\prod_{m=1}^{M}d\phi^m_j\prod_{m'=0}^{M}\frac{\varepsilon d\pi^m_j}{2\pi})\exp\{i\sum_{m=0}^{M}\delta\sum_{j=1}^{N}\varepsilon(\pi^m_j\frac{\phi^{m+1}_j-\phi^m_j}{\delta}-\mathcal{H}^m_j)\}\end{aligned} \tag{4.13}$$

同样这里取极限是对时空都做的。式(4.13)可以写成下面的泛函积分形式，

$$\langle\phi_f, t_f|\phi_i, t_i\rangle=\int[d\phi][\frac{\varepsilon d\pi}{2\pi}]\exp\{i\int_{t_i}^{t_f}dt\int d^3x(\pi(x)\dot{\phi}(x)-\mathcal{H}(x))\} \tag{4.14}$$

其中$\int[d\phi][\frac{\varepsilon d\pi}{2\pi}]$写成了紧致的形式，

$$[d\phi][\frac{\varepsilon d\pi}{2\pi}]=\lim\prod_{m=1}^{M}d\phi^m_j\prod_{m=0}^{M}\frac{\varepsilon d\pi^m_j}{2\pi} \tag{4.15}$$

注意到

$$H(x)=\pi(x)\dot{\phi}(x)-L(x)$$
$$=\frac{1}{2}\pi^2+\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2+\frac{1}{2}m^2\phi^2+V(\phi) \qquad (4.16)$$

将(4.16)式代入到(4.13)式并对π(x)作高斯积分就得到

$$\langle\phi_f, t_f|\phi_i, t_i\rangle=C\int[d\phi]\exp\left(i\int_{t_i}^{t_f}dt\int d^3x L(x)\right) \qquad (4.17)$$

$$= C\int[d\phi]\exp\left(i\int_{t_i}^{t_f}dt L(t)\right)$$

其中 C 是一常数，此常数可以由高斯积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}dpe^{\pm ip^2}=\sqrt{\pm i\pi} \qquad (4.18)$$

完全确定，由于它在理论计算中不重要这里只用C替代。当$t_i\to-\infty$,$t_f\to\infty$时，我们有

$$\langle\phi_f, \infty|\phi_i, -\infty\rangle=C\int[d\phi]\exp(iS) \qquad (4.17')$$

表达式(4.17)或(4.17’)对于计算量子场论中任意n点格林函数是很重要的，下面可以证明量子场论中任意n点格林函数$G_n(x_1, x_2\cdots x_\tau)$可以借助于(4.18)式表达为

$$G_n(x_1, x_2\cdots x_n)\equiv\langle 0|T(\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n))|0\rangle$$
$$=\frac{\int[d\phi]\phi(x_1)\ldots\phi(x_n)\exp(iS)}{\int[d\phi]\exp(iS)} \qquad (4.19)$$

为此首先计算跃迁矩阵元$\langle\phi_f, t_f|\phi(x)|\phi_i, t_i\rangle$，$\phi(x)=\phi(t,\mathbf{x})$，其中t介于$t_i$和$t_f$之间，当$t=t_m$时利用(4.7)式的分解可以将它记为

$$\langle\phi_f, t_f|\phi(x)|\phi_i, t_i\rangle$$

$$=\lim\int\prod_{j,m}\{d\phi^M{}_j\cdots d\phi^1{}_j\langle\phi_{fj}, t_f|\phi^M{}_j, t_M\rangle$$

$$\cdots\langle\phi^{m+1}{}_j, t_{m+1}|\phi(x)|\phi^{m}{}_j, t_m\rangle\cdots\langle\phi^{1}{}_j, t_1|\phi_{ij}, t_i\rangle\} \qquad (4.20)$$

注意到$\phi(x)|\phi^{m}{}_j, t_m\rangle=\phi^{m}{}_j|\phi^{m}{}_j, t_m\rangle$，代入到上式并重复推导(4.17)的步骤就可以得到

$$\langle\phi_f, t_f|\phi(x)|\phi_i, t_i\rangle= C\int[d\phi]\phi(x)\exp(i\int_{t_i}^{t_f}dt\int d^3x\mathbf{L}(x)) \qquad (4.21)$$

类似的方法可以证明

$$\langle\phi_f, t_f|T(\phi(x_1)\phi(x_2))|\phi_i, t_i\rangle$$

$$= C\int[d\phi]\phi(x_1)\phi(x_2)\exp(i\int_{t_i}^{t_f}dt\int d^3x\mathbf{L}(x)) \qquad (4.22)$$

其中编时乘积定义为

$$T(\phi(x_1)\phi(x_2))=\theta(t_1-t_2)(\phi(x_1)\phi(x_2)+\theta(t_2-t_1)(\phi(x_2)\phi(x_1) \qquad (4.23)$$

式(4.23)中的$\theta(t)$是阶梯函数，

$$\theta(t)=1 \qquad \text{当 } t>0$$

$$=0 \qquad \text{当 } t<0$$

进一步类似的推导可以证明

$$\langle\phi_f, t_f|T(\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n))|\phi_i, t_i\rangle$$

$$= C\int[d\phi]\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\exp(i\int_{t_i}^{t_f}dt\int d^3x\mathbf{L}(x)) \qquad (4.24)$$

以上的讨论是对于任意的初态$|\phi_i, t_i\rangle$和终态$|\phi_f, t_f\rangle$都是成立的。下面将讨论初态和终态都是基态，真空态$|0\rangle$，如何从(4.24)式抽出真空平均值的表达式，亦即证明格林函数满足(4.19)式。在(4.24)式左边插入哈密顿量H的本征态$|E_n\rangle$，$H|E_n\rangle=E_n|E_n\rangle$，

$$\langle\phi_f, t_f|T(\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n))|\phi_i, t_i\rangle$$

$$=\sum_{m,n} \langle\phi_f, t_f|E_m\rangle\langle E_m|T(\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n))|E_n\rangle\langle E_n|\phi_i, t_i\rangle$$

$$=\sum_{m,n} e^{iE_n t_i - iE_m t_f} \langle\phi_f|E_m\rangle\langle E_m|T(\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n))|E_n\rangle\langle E_n|\phi_i\rangle \quad (4.25)$$

为了抽出基态的贡献，令$t_i=iT$，$t_f=-iT$和$T\to\infty$，这意味着在时间t复平面上顺时针转动 $90^\circ$。表达式(4.25)的右边只有基态$|E_0\rangle=|0\rangle$的贡献，即

$$\langle\phi_f, t_f|T(\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n))|\phi_i, t_i\rangle$$

$$\underset{T->\infty}{\to} \langle\phi_f|0\rangle\langle 0|T(\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n))|0\rangle\langle 0|\phi_i\rangle \quad (4.26)$$

同样的方法应用到(4.17)的左边

$$\langle\phi_f, t_f|\phi_i, t_i\rangle \underset{T->\infty}{\to} \langle\phi_f|0\rangle\langle 0|\phi_i\rangle \quad (4.27)$$

这样，在$T\to\infty$的情况下我们有下列等式，

$$\langle 0|T(\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n))|0\rangle$$

$$=\lim_{T\to\infty} \frac{\int[d\phi]\phi(x_1)\ldots\phi(x_n)\exp(i\int_{iT}^{-iT} dtL(t))}{\int[d\phi]\exp(i\int_{iT}^{-iT} dtL(t))} \quad (4.28)$$

只要在时间复平面上没有奇异性就可以将表达式(4.28)解析延拓回去，即反转 $90^\circ$，这时(4.28)式就是(4.19)式，完成了(4.19)式的证明。注意到在推导过程中并没有要求$\phi_j$，$\pi_j$之间满足正则对易关系而获得了计算任意格林函数的表达式，这意味着量子场论中任一编时乘积算人符的真空平均值都可以通过泛函积分来表达。上述讨论是在中性标量场情况下得到的，可以推广到复标量场或者说有n个分量的标量场情况下得到类似的表达式。

## § 2. 协变规范下 QCD 的拉氏函数和费曼规则

在上一节的最后(4.96)式给出了量子色动力学理论的生成泛函，这一节将讨论协变规范下的费曼规则。协变规范，即$G^\mu=\partial^\mu$，这时$M_G$由(4.68)式描述，$(M_G(x,y))^{ab}=-\frac{1}{g}(\delta^{ab}\Box-gf^{abc}\partial^\mu A^c{}_\mu)\delta^4(x-y)$。协变规范下可以保持费曼规则和整个理论的协变性。显然在协变规范下$M_G$依赖于规范场$A_\mu$，它的行列式$\det M_G$不是常数，在(4.96)式中的行列式按(4.93)式指数化处理以便合并到拉氏函数L中。为此，Faddeev-Popov引入满足Grassmann代数的虚构的复场$C(x)$使得

$$\det M_G=\int[dC][dC^*]\exp\left\{-i\int d^4xd^4yC^{a*}(x)(M_G(x,y))^{ab}C^b(y)\right\} \qquad (4.97)$$

对于协变规范$M_G(x-y)$由(4.63)式描述，注意到

$$\partial^\mu D^{ab}_\mu=\delta^{ab}\Box-gf^{abc}\partial^\mu A^c_\mu$$

代入到(4.97)式进行分部积分就可得到

$$\int d^4xd^4yC^{a*}(x)(M_G(x,y))^{ab}C^b(y)=-\int d^4x(\partial^\mu C^a(x))^*D^{ab}_\mu C(x) \qquad (4.98)$$

将(4.98)代入到(4.97)后插入到(4.94)就可以得到全部指数化的生成泛函：

$$\begin{aligned}&Z(J,\xi,\xi^*,\eta,\bar\eta)=\int[dA][d\psi][d\bar\psi][dC]\left[dC^*\right]\\&\exp\left\{i\int d^4x(L_{eff}+AJ+C^*\xi+\xi^*C+\bar\psi\eta+\bar\eta\psi)\right\}\end{aligned} \qquad (4.99)$$

其中$L_{eff}$是有效拉氏函数，

$$L_{eff}=L_G+L_F+L_{GF}+L_{FP} \qquad (4.100)$$

(4.100)中各项分别为规范场、费米子场、规范固定项以及Faddeev-Popov鬼场项。其形式分别为

$$L_G = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} \qquad (4.101)$$

$$L_F = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \qquad (4.102)$$

$$L_{GF} = -\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A^a_\mu)^2 \qquad (4.103)$$

$$L_{FP} = (\partial^\mu C^{a*})D^{ab}_\mu C^b \qquad (4.104)$$

在式(4.100)中的 $J$、$\eta$、$\bar{\eta}$、$\xi$、$\bar{\xi}$分别是A、$\bar{\psi}$、$\psi$、C̄、C 的源函数。而 $AJ$、$C^*\xi$、$\xi^*C$分别是$A^a_\mu J^{a\mu}$、$C^{a*}\xi^a$、$\xi^{a*}C^a$ (a=1,2,…8)的缩写。$\psi$ 是 SU(3)规范群的基础表示，$\bar{\psi}=\psi^\dagger\gamma_0$。$\bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi$ 是的缩写，$D^{ij}_\mu$ 是基础表示的协变微商。方程(4.99-104)就是我们讨论协变规范下 QCD 拉氏函数和费曼规则的基本出发点。

对于鬼场 C(x)满足 Grassmann 代数，它又是复标量场，我们可以引入两个独立的实场$C^a_1$ 和 $C^a_2$来描述，$C^a_1$ 和 $C^a_2$仍然满足 Grassmann 代数，它们自身的平方为零，即

$$(C^a_1)^2 = (C^a_2)^2 = 0 \qquad (4.105)$$

令

$$C^a = (C^a_1 + iC^a_2)/\sqrt{2} \qquad (4.106)$$

那么(4.104)式就可用此两个实场来表示

$$L_{FP} = (\partial^\mu C^{a*})D^{ab}_\mu C^b = i(\partial^\mu C^a_1)D^{ab}_\mu C^b_2 \qquad (4.107)$$

在写出最后一个等式时已忽略了全散度项。

为了讨论协变微扰论和费曼规则，首先将式(4.100-104)中拉氏函数分为自由部分和相互作用部分：

$$L_{eff} = L^0_{eff} + L^I_{eff} \qquad (4.108)$$

其中 $L^0_{eff}$包括$L^0_G$、$L^0_F$、$L^0_{FP}$三部分，它们分别是由（4.101）（4.102）（4.104）中与耦合常数 g 无关的部分组成，剩下与 g 有关的部分包

含在相互作用拉氏函数 $L^I_{eff}$ 中。亦即

$$L^0_{eff} = L^0_G + L^0_F + L^0_{FP} \tag{4.109}$$

$$L^0_G = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A^a_\mu)^2 \tag{4.110}$$

$$L^0_F = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \tag{4.111}$$

$$L^0_{FP} = (\partial^\mu C^{a*})(\partial_\mu C^a) \tag{4.112}$$

$$\begin{aligned} L^I_{eff} &= L_I(A^a, C^a, C^{a*}, \psi, \bar{\psi}) \\ &= -\frac{g}{2} f^{abc}(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu) A^{b\mu} A^{c\nu} - \frac{g^2}{4} f^{abc} f^{cde} A^a_\mu A^b_\nu A^{c\mu} A^{d\nu} \\ &\quad + g\bar{\psi} T^a \gamma^\mu \psi A^a_\mu - g f^{abc}(\partial^\mu C^{a*}) C^b A^c_\mu \end{aligned} \tag{4.113}$$

在（4.107）中已包含了规范固定项。至于鬼场项，其动能部分是无质量的玻色子具有的形式，它与规范场相互作用部分包含在（4.113）式中。如此分割后有效拉氏量的相互作用部分全部包含在（4.113）式中，而与相互作用无关的部分包含在（4.109）式的自由部分中。这样，我们就可以按第三节中对 $\phi^4$ 理论曾用的办法定义自由场的生成泛函 $Z_0[J...]$ 和整个系统的生成泛函 $Z[J...]$，并类似于（4.39-41）式将 $Z[J...]$ 用 $Z_0[J...]$ 来表示。

相应于（4.110-112）定义自由场生成泛函，

$$\begin{aligned} &Z_0(J, \xi, \xi^* \eta, \bar{\eta}) = \int [dA][d\psi][d\bar{\psi}][dC]\left[dC^*\right] \\ &\exp\left\{i\int d^4x(L^0{}_{eff} + AJ + C^*\xi + \xi^* C + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi)\right\} \end{aligned} \tag{4.114}$$

将（4.109）代入到（4.114）就可以得到

$$Z_0(J, \xi, \xi^* \eta, \bar{\eta}) = Z^G_0(J) Z^{FP}_0(\xi, \xi^*) Z^F_0(\eta, \bar{\eta}) \tag{4.115}$$

其中

$$Z^G_0(J) = \int [dA] \exp\left\{i\int d^4x(L^0_G + AJ)\right\} \tag{4.116}$$

$$Z_0^{FP}(\xi,\xi^*)=\int [dC]\left[dC^*\right]\exp\left\{i\int d^4x(L_{FP}^0+C^*\xi+\xi^*C)\right\} \quad (4.117)$$

$$Z_0^F(\eta,\bar{\eta})=\int [d\psi][d\bar{\psi}]\exp\left\{i\int d^4x(L_F^0+\bar{\psi}\eta+\bar{\eta}\psi)\right\} \quad (4.118)$$

这样就可以类似于(4.40)式将有相互作用的生成泛函(4.99)式用自由场的生成泛函表达，

$$Z(J,\xi,\xi^*\eta,\bar{\eta})=$$
$$\exp\left\{i\int d^4xL_{eff}^i\left(\frac{\delta}{i\delta J^{a\mu}},\frac{\delta}{i\delta\xi^{a*}},\frac{\delta}{i\delta(-\xi^a)},\frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}},\frac{\delta}{i\delta(-\eta)}\right)\right\}Z_0[J,\xi,\xi^*,\eta,\bar{\eta}] \quad (4.119)$$

对此式的证明是直接的，只需做指数展开进行泛函微商即可。这样就归之于计算$Z_0(J,\xi,\xi^*\eta,\bar{\eta})$中的$Z_0^G(J),Z_0^{FP}(\xi,\xi^*)$和$Z_0^F(\eta,\bar{\eta})$。类似于(4.42)式对(4.119)中的$L_G^0$项进行分部积分就将它变换为

$$Z_0^G(J)=\int[dA]\exp\left\{i\int d^4x(-\frac{1}{2}A_\mu^aK^{ab\mu\nu}A_\nu^b+AJ)\right\} \quad (4.120)$$

其中

$$K_{\mu\nu}^{ab}=\delta^{ab}(-g_{\mu\nu}\Box+(1-\frac{1}{\alpha})\partial_\mu\partial_\nu) \quad (4.121)$$

同样在(4.118)和(4.119)式做分部积分可得

$$Z_0^{FP}(\xi,\xi^*)=\int [dC]\left[dC^*\right]\exp\left\{i\int d^4x(-C^{a^*}K^{ab}C^b+C^*\xi+\xi^*C)\right\} \quad (4.122)$$

$$Z_0^F(\eta,\bar{\eta})=\int [d\psi][d\bar{\psi}]\exp\left\{i\int d^4x(-\bar{\psi}R\psi+\bar{\psi}\eta+\bar{\eta}\psi)\right\} \quad (4.123)$$

其中

$$K^{ab}=\delta^{ab}\Box \quad (4.124)$$

$$R=-i\gamma^\mu\partial_\mu+m \quad (4.125)$$

进一步利用下列等式定义$K_{\mu\nu}^{ab},K^{ab}$和R的逆函数$D_{\mu\nu}^{ab},D^{ab}$和S

$$\int d^4z\ K_{\mu\lambda}^{ac}(x-z)g^{\lambda\rho}D_{\rho\nu}^{cb}(z-y)=\delta^{ab}g_{\mu\nu}\delta^{(4)}(x-y) \quad (4.126)$$

$$\int d^4z\ \mathrm{K}^{\mathrm{ac}}(x-z)D^{cb}(z-y)=\delta^{ab}\delta^{(4)}(x-y) \quad (4.127)$$

$$\int d^4z\ R(x-z)S(z-y)=\delta^{(4)}(x-y) \quad (4.128)$$

求解三个方程可得

$$D_{\mu\nu}^{ab}=\delta^{ab}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ikx}}{k^2+i\varepsilon}(g_{\mu\nu}-(1-\alpha)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}) \tag{4.129}$$

$$D^{ab}(x)=\delta^{ab}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{-1}{k^2+i\varepsilon}e^{-ikx} \tag{4.130}$$

$$S(x)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{m-\not{p}}e^{-ipx} \tag{4.131}$$

这三个逆函数分别是胶子场、鬼场(Faddeev-Popov)和夸克场的传播子。进一步在(4.116-118)对 $A,C,C^*,\psi,\bar{\psi}$ 做泛函积分，与分立状况做类似的讨论利用高斯积分就得到

$$Z_0^G(J)=\exp\left\{\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ^{a\mu}(x)D_{\mu\nu}^{ab}(x-y)J^{b\nu}(y)\right\} \tag{4.132}$$

$$Z_0^{FP}(\xi,\xi^*)=\exp\left\{i\int d^4xd^4y\xi^{a*}(x)D^{ab}(x-y)\xi^b(y)\right\} \tag{4.133}$$

$$Z_0^F(\eta,\bar{\eta})=\exp\left\{i\int d^4xd^4y\bar{\eta}(x)S(x-y)\eta(y)\right\} \tag{4.134}$$

在得到(4.132-134)时已忽略了无关的常数。按照前面(4.48)定义有

$$\langle 0|T(A_\mu^a(x)A_\nu^b(y))|0\rangle=\frac{(-i)^2}{Z_0^G(0)}\frac{\delta^2Z_0^G(J)}{\delta J^{a\mu}(x)\delta J^{b\nu}(y)}\Big|_{J=0}=-iD_{\mu\nu}^{ab}(x,y) \tag{4.135}$$

$$\langle 0|T(C(x)C^*(y))|0\rangle=\frac{(-i)^2}{Z_0^{FP}(0,0)}\frac{\delta^2Z_0^{FP}(\xi,\xi^*)}{\delta\xi^{a*}\delta(-\xi^b)}\Big|_{\xi=\xi^*=0}=-iD^{ab}(x,y) \tag{4.136}$$

$$\langle 0|T(\psi(x)\bar{\psi}(y))|0\rangle=\frac{(-i)^2}{Z_0^F(0,0)}\frac{\delta^2Z_0^F(\eta,\bar{\eta})}{\delta\bar{\eta}\delta(-\eta)}\Big|_{\eta=\bar{\eta}=0}=-iS(x,y) \tag{4.137}$$

这三个两点格林函数是从自由场的生成泛函给出的，相应于三种自由场的传播子。它们在动量空间的表达式分别为

$$D_{\mu\nu}^{ab}(k)=\delta^{ab}\frac{d_{\mu\nu}(k^2)}{k^2}\qquad d_{\mu\nu}(k^2)=g_{\mu\nu}-(1-\alpha)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \tag{4.138}$$

$$D^{ab}(k)=\delta^{ab}\frac{-1}{k^2} \tag{4.139}$$

$$S(p)=\frac{1}{m-\not{p}} \tag{4.140}$$

同样对于相互作用顶点可以通过(4.119)对具有相互作用的生成泛函$Z[J,\xi,\xi^*,\eta,\bar{\eta}]$展开求泛函导数得到，即

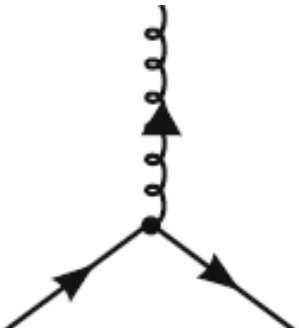
$$\begin{aligned}&Z(J,\xi,\xi^*\eta,\bar{\eta})=\\&\left\{1+i\int d^4xL^i_{eff}\left(\frac{\delta}{i\delta J^{a\mu}},\frac{\delta}{i\delta\xi^{a*}},\frac{\delta}{i\delta(-\xi^a)},\frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}},\frac{\delta}{i\delta(-\eta)}\right)\right\}Z_0[J,\xi,\xi^*,\eta,\bar{\eta}]\end{aligned} \tag{4.141}$$

将(4.113)中相应的相互作用项代入就得到相应的顶角。

例如夸克-胶子-夸克最低阶顶角的三点格林函数为

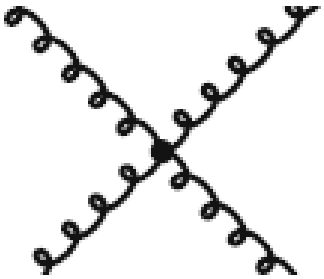
$$\begin{aligned}\left\langle 0\left|T(\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)A^a_\mu(x_3))\right|0\right\rangle=-gT^a\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}e^{i(-p_1x_1+p_2x_2+kx_3)}\\\times\frac{1}{m-\not{p}_1}\gamma^\nu\frac{1}{m-\not{p}_2}\frac{d_{\mu\nu}(k)}{k^2}\end{aligned} \tag{4.142}$$

其中$k=p_1-p_2$。



类似地从(4.132)可以获得三胶子、四胶子顶角的格林函数。





对于三胶子顶点在对(4.132)外源做三次泛函微分并将$D_{\mu\nu}(x_1-x_2)$的Fourier变换式代入即得

$$\langle 0|T(A_{\mu_1}^{a_1}(x_1)A_{\mu_2}^{a_2}(x_2)A_{\mu_3}^{a_3}(x_3)|0\rangle = i\int \frac{d^4k_1d^4k_2}{(2\pi)^4(2\pi)^4}e^{i(k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3)}\frac{d_{\mu_1\nu_1}(k_1)d_{\mu_2\nu_2}(k_2)d_{\mu_3\nu_3}(k_3)}{k_1^2k_2^2k_3^2}$$
$$\times gf^{a_1a_2a_3}V_{\nu_1\nu_2\nu_3}(k_1,k_2,k_3) \qquad (4.143)$$

其中$k_3=-(k_1+k_2)$和

$$V_{\nu_1\nu_2\nu_3}(k_1,k_2,k_3)=g_{\nu_1\nu_2}(k_1-k_2)_{\nu_3}+g_{\nu_2\nu_3}(k_2-k_3)+g_{\nu_3\nu_1}(k_3-k_1) \qquad (4.144)$$

同样对于四胶子顶角，其结果为

$$\langle 0|T(A_{\mu_1}^{a_1}(x_1)A_{\mu_2}^{a_2}(x_2)A_{\mu_3}^{a_3}(x_3)A_{\mu_4}^{a_4}(x_4))|0\rangle = -ig^2\int \frac{d^4k_1d^4k_2d^4k_3}{(2\pi)^4(2\pi)^4(2\pi)^4}e^{i(k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3+k_4x_4)}$$
$$\times\frac{d_{\mu_1\nu_1}(k_1)d_{\mu_2\nu_2}(k_2)d_{\mu_3\nu_3}(k_3)d_{\mu_4\nu_4}(k_4)}{k_1^2k_2^2k_3^2k_4^2}W^{a_1a_2a_3a_4;\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$$

(4.145)

其中

$$W_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}^{a_1a_2a_3a_4}=g_{\mu_1\mu_2}g_{\mu_3\mu_4}(f^{a_1a_3a}f^{a_2a_4a}-f^{a_1a_4a}f^{a_3a_2a})$$
$$+g_{\mu_1\mu_3}g_{\mu_2\mu_4}(f^{a_1a_2a}f^{a_3a_4a}-f^{a_1a_4a}f^{a_2a_3a})$$
$$+g_{\mu_1\mu_4}g_{\mu_2\mu_3}(f^{a_1a_3a}f^{a_4a_2a}-f^{a_1a_2a}f^{a_3a_4a}) \qquad (4.146)$$

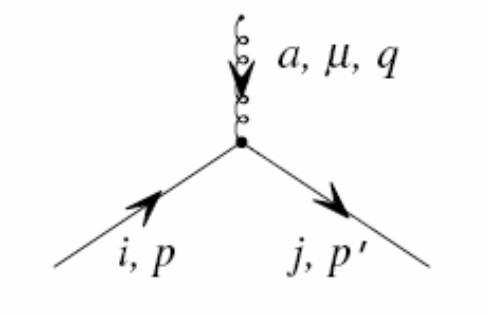
对于鬼粒子和胶子顶角

$$\langle 0|T(\chi^{a_1*}(x_1)\chi^{a_2}(x_2)A_\mu^{a_3}(x_3)|0\rangle = igf^{a_1a_2a_3}\int\frac{d^4k_1d^4k_2}{(2\pi)^4(2\pi)^4}e^{i(-k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3)}\frac{d_{\mu\nu}(k_3)}{k_1^2k_2^2k_3^2}k_1^\nu \qquad (4.147)$$

其中$k_3=k_1-k_2$，而$k_1$是鬼场$\chi^*$粒子的动量。

由上面的讨论可以得到 QCD 的 Feynman 规则

1. 夸克－胶子顶角




$$g\gamma_\mu \left(T^a\right)_{jk}$$

2．三胶子顶角



$$-ig \quad f^{abc}V_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2,k_3)$$

3．四胶子顶角



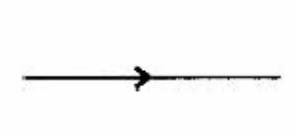
$$-g^2W^{abcd}_{\mu\nu\lambda\sigma}$$

4．鬼一胶子顶角



$$-ig \quad f^{abc}k_\mu$$

5．夸克传播子



$$S^{ij}(P)=\delta^{ij}\frac{1}{m-\not{p}}$$

6．胶子传播子




$$D^{ab}_{\mu\nu}(q)=\frac{\delta^{ab}d_{\mu\nu}(k^2)}{q^2+i\varepsilon}$$

7．鬼场传播子



$$\frac{-\delta^{ab}}{k^2+i\varepsilon}$$

一共有四个顶角和三个传播子，所有鬼场出现在圈图内，由于 Grassmann 代数的结果，鬼场圈贡献一个负号。四个顶角都具有普适的 g，且 g 与味无关。这里三胶子顶角和四胶子顶角是阿贝尔规范场中所没有的，这是因为胶子具有色荷的原因。三胶子和四胶子顶角的存在使得 QCD 不同于 QED，例如渐近自由就是 QCD 的一个重要特点。





# 第五章 量子色动力学理论的正规化和重整化

正像 QED 一样，QCD 中当计算圈图时，就会出现发散积分，必须对理论进行重整化以得到有限物理量。重整化是由两部分组成的：正规化和重整化。所谓正规化就是从一给定的 Feynmann 图计算，正确定义发散积分并抽出无穷大的方法。这可以通过很多方法达到，这些方法大致可以分为三类：1)截断法。在动量空间中积分限不积到无穷大而代之以一个大的截断参量 λ 或使空间、时间坐标分立化有一个最小的格距 a(例如格点理论)。2)增大被积函数分毋的幂次使积分收敛，例如 Pauli-Villars 正规化和解析正规化。3)降低时空的维数。这是 t Hooft 和 Veltman 提出的维数正规化方法，这一方法的要点是将四维发散积分定义在 D(=4-ε)维空间计算，当$\varepsilon \neq 0$时积分是收敛的。无穷大项作为$\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon^2}, \cdots$极点出现。不管哪一种方法都要引入一个参量使发散积分收敛。然而只有维数正规化可以保持理论的规范不变性和洛仑兹不变性。因此在 QCD 中我们应用维数正规化。

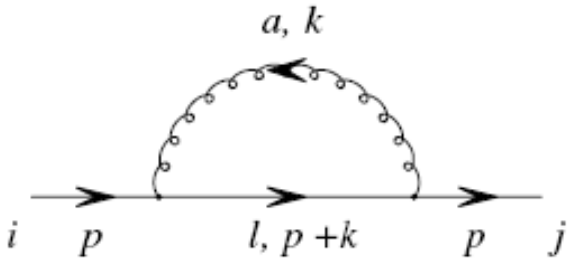
重整化通常可以有两种等价的方式进行：(a) 首先以裸参量($g_0$,…)计算各级费曼图，重新定义重整化参量使得费曼图所对应的发散积分表达式重整定义后获得有限的结果。这些重新定义的有限的重整化参量吸收了所有的发散积分，给出可观察的物理结果；(b) 以重整化参量(g,…)来计算费曼图，其发散积分表达式利用某种方式减去奇异性而获得有限的物理结果。这两种方式都可以使得微扰论能逐阶计算下去给出有意义的物理可观察量。本书将采用后一种重整化方法。

## §.1 维数正规化

这里仅以夸克自能单圈图为例解释正规化，在前一章中(4.134)和(4.137)已给出夸克自由场传播子，以下以$S_0(p)$来标记(4.137)，

$$S_0(P)=1/(m-\not{p}) \tag{5.1}$$

按照上面给出的 Feynman 规则可以计算单圈图的贡献，




$$S_0(p)\Sigma_{ij}^{(2)}(p)S_0(p) \tag{5.2}$$

其中$\Sigma_{ij}^{(2)}(p)$由下式给出

$$\begin{aligned}\Sigma_{ij}^{(2)}(p)&=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4 i}g\gamma_\mu T_{il}^a\frac{\delta_{lm}}{m+\not{k}-\not{p}}g\gamma_\nu T_{mj}^b\frac{\delta_{ab}}{k^2}d^{\mu\nu}(k^2)\\&=g^2C_F\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4 i}\gamma_\mu\frac{m-\not{k}+\not{p}}{k^2(m^2-(p-k)^2)}\gamma_\nu d^{\mu\nu}(k^2)\end{aligned} \tag{5.3}$$

这里已定义了 SU(N)群因子

$$T_{il}^a\delta_{lm}\delta_{ab}T_{mj}^b=(T^aT^a)_{ij}=\delta_{ij}C_F\qquad C_F=\frac{N^2-1}{2N} \tag{5.4}$$

对于 QCD，$C_F=\frac{4}{3}$ $(N=3)$。显然(5.3)式积分是发散的，为了简单起见取 Feynman 规范$d_{\mu\nu}(k)=g_{\mu\nu}$ 和 $m=0$，则有$\Sigma_{ij}^{(2)}(p)=\delta_{ij}\Sigma^{(2)}(p)$

$$\Sigma^{(2)}(p)=g^2C_F\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4 i}\gamma_\mu\frac{\not{k}-\not{p}}{k^2(p-k)^2}\gamma^\mu \tag{5.5}$$

对于四维积分，当积分限为无穷大时积分(5.5)式是发散的，第一项是线性发散，第二项是对数发散。实上此积分是对数发散，因为被积函数的对称性由积分变量的平移变换可证明线性发散部分为零。然而从

数学上讲积分(5.5)无定义不能对发散积分做变量代换的，否则会改变积分的性质得到无意义的结果。

现在将上述积分(5.5)式延拓到 D 维空间

$$\Sigma^{(2)}(p)=g^2C_F\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^Di}\gamma_\mu\frac{\not k-\not p}{k^2(p-k)^2}\gamma^\mu \tag{5.6}$$

注意到在 D 维空间中$\gamma$-矩阵代数性质仍保持不变，

$$\begin{aligned}
&(1)\quad g^\mu_\mu=g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}=D,\qquad g^{\mu\nu}=(+,-,\cdot\cdot,-)\\
&(2)\quad \left\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\right\}=2g^{\mu\nu}\\
&(3)\quad \gamma_\mu\gamma^\mu=D\\
&(4)\quad \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\mu=(2-D)\gamma_\nu\\
&(5)\quad Tr(1)=4\\
&(6)\quad \left\{\gamma_5,\gamma^\mu\right\}=0
\end{aligned}\tag{5.7}$$

式(5.6)在$\gamma$矩阵收缩后变为

$$\Sigma^{(2)}(p)=g^2C_F(2-D)\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^Di}\frac{\not k-\not p}{k^2(p-k)^2} \tag{5.8}$$

在 D<3 情况下此积分是收敛的。为了积出它，应用 Feynman 参数法

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta}=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1dxdy\frac{x^{\alpha-1}y^{\beta-1}}{(xA+yB)^{\alpha+\beta}}\delta(1-x-y) \tag{5.9}$$

将积分(5.8)化为

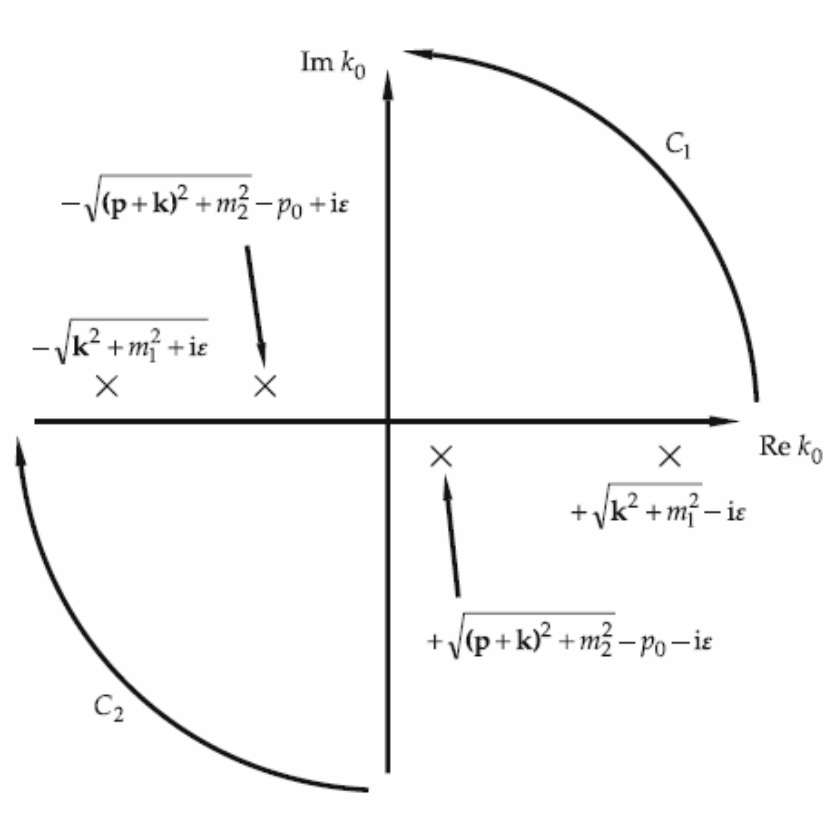
$$\Sigma^{(2)}(p)=g^2C_F(2-D)\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^Di}(\not k-\not p)\int_0^1\frac{dx}{[x(k-p)^2+(1-x)k^2]^2} \tag{5.10}$$

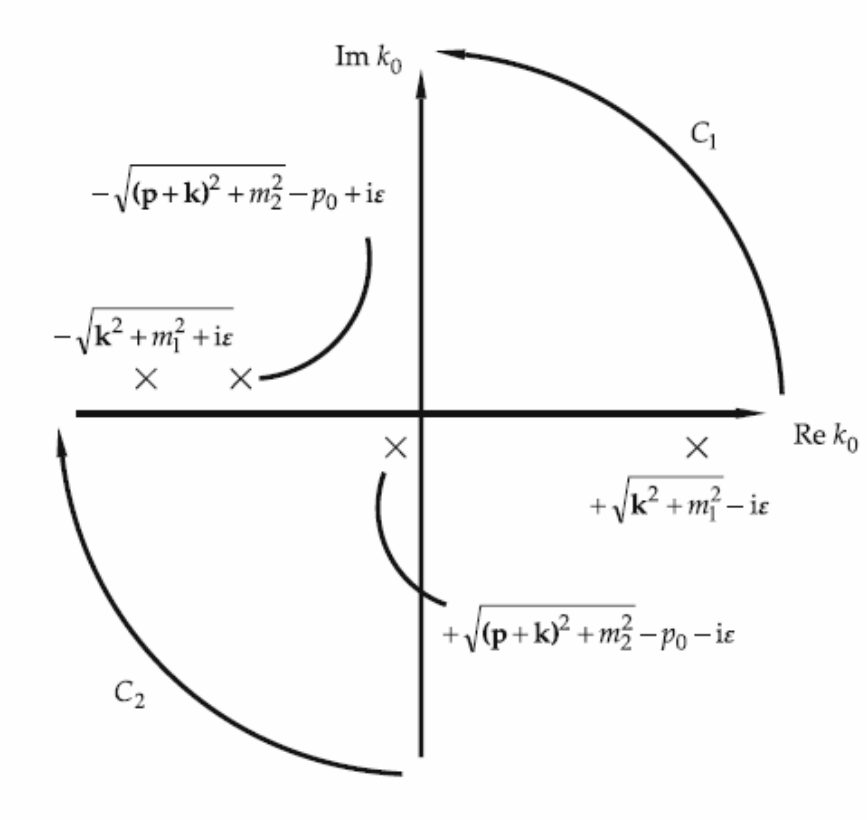
由于此积分是收敛的，可以对它进行$x$和k 积分次序交换和积分变量代换($k\to k-xp$)，因此积分(5.10)变为

$$\Sigma^{(2)}(p)=g^2C_F(2-D)\not p\int_0^1dx(1-x)\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^Di}\frac{1}{[k^2+x(1-x)p^2]^2} \tag{5.11}$$

首先对$k$积分，注意到$d^Dk=dk_0dk_1\cdot\cdot dk_{D-1}$和$k^2=k_0^2-k_1^2-\cdots-k_{D-1}^2$，因而对$k$

的积分是在闵氏(Minkowski)空间进行，被积函数在 D 维空间不是解析的，其积分比较复杂。考虑到对$k_0$积分，被积函数是解析的，我们可以在$k_0$平面做 Wick 转动，从实轴转到虚轴，那么对$k$的积分就转变为在欧氏(Euclidean)空间进行。






这是普通的 D 维空间积分。令

$$k_0 \to k^D = -ik^0 \qquad k^D \text{是实数}$$

那么有

$$d^D k = dk^0 dk^1 \cdot\cdot dk^{D-1} \to i d^D k_E = i dk^1 \cdot\cdot dk^D \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned} &k^2 = (k^0)^2 - (k^1)^2 \cdots - (k^{D-1})^2 \to -k_E^2 = -(k^1)^2 - \cdots - (k^D)^2 = -K^2 \\ &K = |k_E| \end{aligned} \tag{5.13}$$

这样在 Wick 转动以后上述积分(5.11)就变为普通欧氏空间的 D 维积分

$$\Sigma^{(2)}(p) = g^2 C_F (2-D) p \int_0^1 dx (1-x) \int \frac{d^D k_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{[K^2 + L]^2} \tag{5.14}$$

其中

$$L = -x(1-x)p^2 \tag{5.15}$$

在 $p^2 < 0$($p$是类空矢量)情况下，积分(5.14)没有任何奇异性，很容易在欧氏空间做 D 维积分。引入 D 维空间多重积分极坐标，

$$d^D k_E = K^{D-1} dK d\Omega_D$$

$$d\Omega_D = \prod_{i=1}^{D-1} \sin^{D-1-l}\theta_l d\theta_l$$

$$\int d\Omega_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \tag{5.16}$$

将(5.16)代入到(5.17)，再注意到 Beta 函数

$$B(p,q) = \int_0^\infty dt \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} \tag{5.17}$$

以及 Beta 函数和 Gamma 函数的关系

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

计算可得

$$\int \frac{d^D k_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{(K^2+L^2)} = \frac{B(D/2, 2-D/2)}{(4\pi)^{D/2}\Gamma(D/2)} L^{D/2-2} = \frac{\Gamma(2-D/2)}{(4\pi)^{D/2}} L^{D/2-2}$$

将此式和(5.15)代入到(5.14)可得

$$\Sigma^{(2)}(p) = g^2 C_F (2-D) \not{p} \frac{\Gamma(2-D/2)}{(4\pi)^{D/2}} (-p^2)^{D/2-2} \times \int_0^1 dx\, x^{D/2-2}(1-x)^{D/2-1} \tag{5.18}$$

利用 Beta 函数的另一表达式

$$B(p,q) = \int dx\, x^{p-1}(1-x)^{q-1}$$

就可将(5.18)式 $x$ 积分化简为

$$\Sigma^{(2)}(P^2) = \frac{2C_F g^2}{(4\pi)^{D/2}} \not{p} \frac{\Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right)}{\left(-p^2\right)^{2-D/2}} (D-1) B\left(\frac{D}{2}, \frac{D}{2}\right) \tag{5.19}$$

此积分是在D<3 和$p^2$<0 的条件下获得的。我们需要将此积分对D和p作延拓至复平面。积分在延拓以后在$p^2$的复平面正实轴上有割线，当D=4

时积分发散。当D=4 时$\Gamma(2-\frac{D}{2})$是发散的。表达式（5.6）中已将所有奇异部分已经分离出来包含在$\Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right)$中，将Γ函数对$\varepsilon(=\frac{4-D}{2})$展开就有

$$\Gamma(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}-\gamma_E+o(\varepsilon) \tag{5.20}$$

$$B(N-\varepsilon,1-\varepsilon)=\frac{1}{N}\left[1+2\varepsilon S_N-\varepsilon S_{N-1}\right]+o(\varepsilon^2) \tag{5.21}$$

其中

$$S_N=\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j} \qquad \gamma_E=0.5772 \quad \textit{E}\text{uler 常数} \tag{5.22}$$

由于空间维数为 D，四维空间无量纲的 g 在 D 维空间中就不再是无量纲的耦合常数。在 D 维空间里，作用量 S 应是无量纲，由作用量定义

$$S=\int d^4x\, L(x)$$

可知

$$\dim[L]=D,\quad \dim[\psi]=\frac{D-1}{2},\quad \dim[A_\mu^a]=\frac{D-2}{2} \tag{5.23}$$

因此应有

$$\dim[g]+2\dim[\psi]+\dim[A_\mu^a]=D \tag{5.24}$$

这就导至 g 的量纲为

$$\dim[g]=2-\frac{D}{2}=\varepsilon\text{。} \tag{5.25}$$

为了使它无量纲化，引入一量纲为 1 的标度参量$\mu_0$，对g 作下列代换$g=g_0\mu_0^{\varepsilon}$。这里$g_0$是无量纲耦合常数。注意到(5.20)和(5.21)作ε＝0 展

开，(忽略ε及高次项)就得到

$$\Sigma^{(2)}(P^2)=\frac{g_0^2}{16\pi^2}C_F\not{p}\left[\frac{1}{\varepsilon}-\log\frac{-p^2}{\mu_0^2}+1+\log 4\pi-\gamma_E\right]+O(\varepsilon) \qquad (5.26)$$

此式表达了延拓后的性质，括号中第一项是对数发散项（D=4），而且在 D 维空间有确切的定义，第二项在 $p^2$ 复平面上沿正实轴有割线。

此外，前面在获得（5.5）式时取了 Feynman 规范，即 $\alpha=1$。当 $\alpha\neq 1$ 时，直接计算(5.3)式可以证明在 m=0 的情况下（5.6）和（5.26）式修改为

$$\Sigma^{(2)}(P^2)=\alpha\frac{2C_Fg^2}{(4\pi)^{D/2}}\not{p}\frac{\Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right)}{\left(-p^2\right)^{2-D/2}}(D-1)B\left(\frac{D}{2},\frac{D}{2}\right)$$

$$=\alpha\frac{g_0^2}{16\pi^2}C_F\not{p}\left[\frac{1}{\varepsilon}-\log\frac{-p^2}{\mu_0^2}+1+\log 4\pi-\gamma_E\right]+O(\varepsilon) \qquad (5.27)$$

## §．2 重整化基本思想(单圈图)

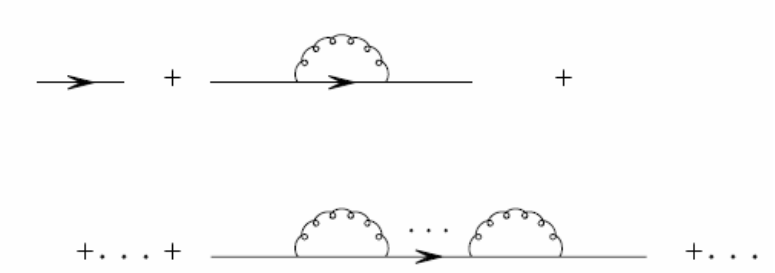
这一节仍以上一节中夸克自能单圈图解释重整化的基本思想。(5.26)或(5.27)式就是讨论重整化的基础。正像在量子电动力学讨论中的那样，正规化使得发散积分有了确切的定义，然后通过减出步骤将分离出来的奇异部分吸入并重新定义质量和电荷之中使得微扰圈图计算只给出有限高阶修正结果。这也可以从另一个角度去理解，一开始就以重整化场量和重整化参量(g,…)来计算费曼图，其发散积分表达式利用某种方式减去奇异性而获得有限的物理结果。一旦减出方式被指定，重整化常数 Z 就可以被确定。

上一节讨论了夸克单圈自能图$\Sigma^{(2)}(p)$，因此

$$\Sigma(p)=\Sigma^{(2)}(p)+O(g^4)$$

在链近似下夸克传播子可写作下面的展开形式，

$$S(p)=S_0(p)+S_0(p)\Sigma(p)S_0(p)+S_0(p)\Sigma(p)S_0(p)\Sigma(p)S_0(p)+\cdots$$



或将此无穷级数收敛为($S_0(p)=-1/\not{p}$)

$$S(p)=-\frac{1}{\not{p}}\frac{1}{1+\sigma(p)} \qquad (5.28)$$

其中$\sigma(p)$可从(5.27)式去掉$\not{p}$可得

$$\sigma(p^2)=-\frac{\alpha g_0^2}{16\pi^2}C_F\left[\frac{1}{\varepsilon}-\log\frac{-p^2}{\mu_0^2}+1+\log 4\pi-\gamma_E\right]+O(g_0^4) \quad (5.29)$$

(5.28)式表明无质量夸克传播子在单圈图修正以后仍是无质量夸克传播子。在$\sigma(p^2)$中包含着发散积分(当$\varepsilon \to 0$)。

定义重整化的夸克场量和夸克传播子，

$$\psi_R = Z_2^{-1/2}\psi, \qquad S_R(p) = Z_2^{-1}S(p) \tag{5.30}$$

其中$Z_2$是重整化常数。

$$S_R(p) = -\frac{1}{p}\frac{1}{Z(1+\sigma(p^2)} \tag{5.28'}$$

将Z按$g_0^2$幂次展开并在上式分母中仅保留$g_0^2$项，忽略高阶项

$$Z_2 = 1 - z_2 + O(g_0^4)$$
$$Z_2 \cdot (1+\sigma(p^2)) = 1 + \sigma(p^2) - z_2 + O(g_0^4)$$

因而给出在保留$g_0^2$阶的重整化传播子$S_R(p)$的表达式，

$$S_R(p) = -\frac{1}{p}\frac{1}{(1+\sigma(p^2) - z_2)} \tag{5.31}$$

它应是有限的，这意味着$z_2$中的发散部分应与$\sigma(p^2)$中的发散部分相消，这就确定了$z_2$中的发散部分，但还不能确定它的有限部分。通常为了确定$z_2$有下述几种减出方式(scheme)。

(1) 固定动量点减出方式(MOM)：这一种减出方式是在动量空间里的某一点上定义重整化的传播子和顶角具有确定值。例如可以选择任一动量点μ，当$p^2 = -\mu^2$时，重整化的传播子$S_R^{-1}(P)$在$P^2 = -\mu^2$点上有

$$S_R^{-1}(P) = \not{P} \qquad \text{当 } p^2 = -\mu^2 (\mu^2 > 0)$$

由此重整化归一条件可以得到

$$z_2 = Z_2 - 1 = \sigma(p^2 = -\mu^2)$$
$$= -\frac{\alpha g_0^2}{16\pi^2} C_F \left[ \frac{1}{\varepsilon} - \log\frac{\mu^2}{\mu_0^2} + 1 + \log 4\pi - \gamma_E \right]$$

$$Z_2 = 1 + \frac{\alpha g_0^2}{16\pi^2} C_F \left[ \frac{1}{\varepsilon} - \log\left( \frac{\mu^2}{\mu_0^2} \right) + 1 + \log 4\pi - \gamma_E \right] \qquad (5.32)$$

固定动量点减出方式就是选择$P^2 = -\mu^2$，以$\sigma(P^2)$减去$\sigma(-\mu^2)$，即

$$\sigma(p^2) - z_2 = \sigma(p^2) - \sigma(-\mu^2)$$

$$= \frac{\alpha g_0^2}{16\pi^2} C_F \left[ \log \frac{-p^2}{\mu^2} \right]$$

由此而给出夸克传播子包括$g_0^2$阶修正的表达式为

$$S_R(p) = -\frac{1}{p} \left( 1 + \alpha \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} C_F \log \frac{-p^2}{\mu^2} \right)^{-1} \qquad (5.33)$$

(2) 最小减出方式（MS）：在动量减出方式中，$\sigma(p^2)$中不仅减去了发散项$\frac{1}{\varepsilon}$，而且减去了常数项，致使$Z_2$包含常数项比较复杂，这在计算重整化群参数和反常量纲时很不方便。1973 年‘t Hooft提出一种最小减出方式，即减出时仅减去那些发散项$\frac{1}{\varepsilon}$。例如在上面的例子中仅减去$\sigma(p^2)$中的发散项而得到

$$\sigma(p^2) - z_2 = -\frac{\alpha g_0^2}{16\pi^2} C_F \left[ \log \frac{-P^2}{\mu_0^2} - 1 - \log 4\pi + \gamma_E \right]$$

以及

$$Z_2 = 1 + \frac{\alpha g_0^2}{16\pi^2} C_F \frac{1}{\varepsilon}$$

这样，$Z_2$比较简单，$S_R(p)$要复杂一些

$$S_R(p) = -\frac{1}{p} \left( 1 + \alpha \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} C_F (\log \frac{-p^2}{\mu_0^2} - 1 - \log 4\pi + \gamma_E) \right)^{-1} \qquad (5.34)$$

由于$Z_2$简单，便于计算重整化参数和反常量纲。这里很自然要提出一个问题，不同的减出方式给出的$S_R(p)$不一样，是否会影响物理结果？回答是肯定，不影响，因$S_R(p)$依赖于减出方式，而物理量是由$\Sigma_R^{(2)}$和

其它依赖于减出方式的表达式组成的，相消的结果就给出不依赖于减出方式的物理量。

(3) 修正的最小减出方式($\overline{MS}$): 在(5.34)中$(\log 4\pi - \gamma_E)$是 MS 减出方式所特有的常数项。1978 年 Bardeen 等人提出引入一修正的最小减出方式$(\overline{MS})$在$S_R(p)$中挪掉这一常数项，即

$$Z_2 = 1 + \frac{\alpha g_0^2}{16\pi^2} C_F (\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \log 4\pi)$$

$$S_R(p) = -\frac{1}{p}\left(1 + \alpha \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} C_F (\log \frac{-p^2}{\mu_0^2} - 1)\right)^{-1} \qquad (5.35)$$

这对于在计算双圈图修正中改善微扰级数收敛性是有好处的。

以上三种减出方式虽不同，但其共同点是从计算中挪去发散项重新定义重整化的场量和参量。所以重整化方案包括两部分：正规化和减出。正规化是使发散积分有确切的定义，减出是消去理论的发散而获得确定有限的结果，为此引入合适的抵消项和自然的物理归一化条件是必要的。

比较(5.28)和(5.31)式可以见到重整化后的夸克传播子是将未重整化传播子中

$$p\sigma(p^2) \rightarrow p(\sigma(p^2) - z_2) = p(\sigma(p^2) - (Z_2 - 1))，$$

$\sigma(p^2)$中的发散项正好与($Z_2$-1)中的发散项相消。不同的减出方式只相差其中的常数如何定义。仔细考察(5.28)式如何计算得到的就可以见到(5.31)式也可以通过下述方式获得：(1) 将拉氏函数中场量和参量代之以重整化的场量和参量，(2)在拉氏函数中附加抵消项的拉氏量，为了构造抵消项必须将发散积分正规化使得积分有意义，找出相应的

抵消项附加到拉氏函数上。如对于无质量夸克自能其抵消项为

$$(Z_2-1)\bar{\psi}_R i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R \qquad (5.35)$$

(3)抵消项的系数完全由加在 Green 函数上的归一化条件所确定，即对 Green 函数要求满足归一化条件不仅确定了抵消项的发散部分而且也确定了有限部分。在这样带有抵消项的重整化拉氏函数出发计算就自然获得了(5.31)式有限的结果。对于可重整化理论这样的步骤不仅在微扰论的单圈图成立而且对微扰论的所有阶成立。这就是重整化的基本思想。

本节是以无质量夸克自能为例解释维数正规化和重整化并引入了抵消项(5.35)，对于 QCD 完全的拉氏函数还应引入相应于胶子自能、顶角、鬼粒子等相关的抵消项。这将在下一节中逐一给出。

这一节对于无质量夸克介绍了三种减出方式，在量子电动力学中电子有质量，还有另一种减出方式，即质壳减出方式。这种方式是将(5.23)式定义改为

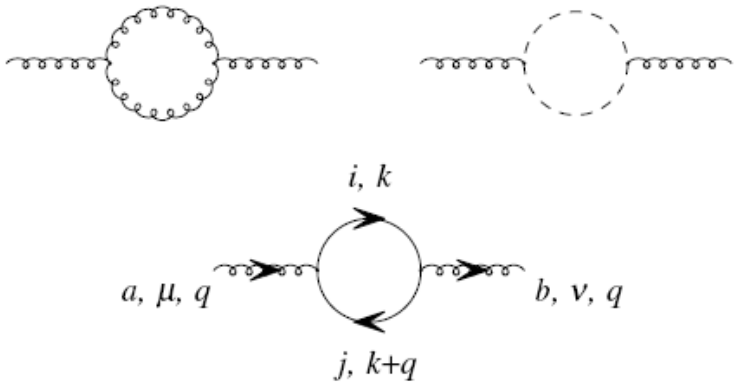
$$S_R^{-1}(p)=\not{p}-m \qquad \text{当 } \not{p}\to m \qquad (5.36)$$

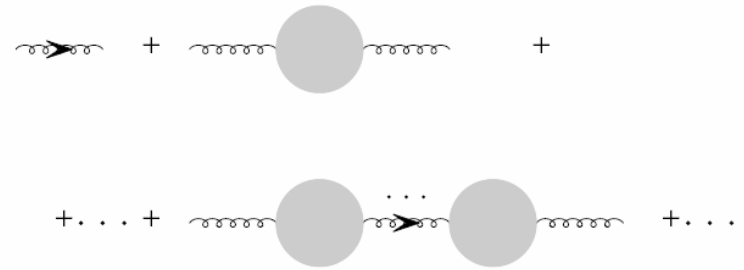
由此定义 $z_2=\sigma(m^2)$，这是量子电动力学(QED)中所用的方法。由于 QED 中存在 Thompson 极限来定义实验上的电荷 $\alpha=\frac{e^2}{4\pi}$，而在 QCD 中即使考虑到夸克质量不为零，由于存在非微扰效应无法定义低能行为，人们也不能采用质壳减出方式。

本节以夸克自能为例在单圈近似下引入重整化常数 $Z_2$，重新定义重整化场量 $\psi_R$，在拉氏量中附加

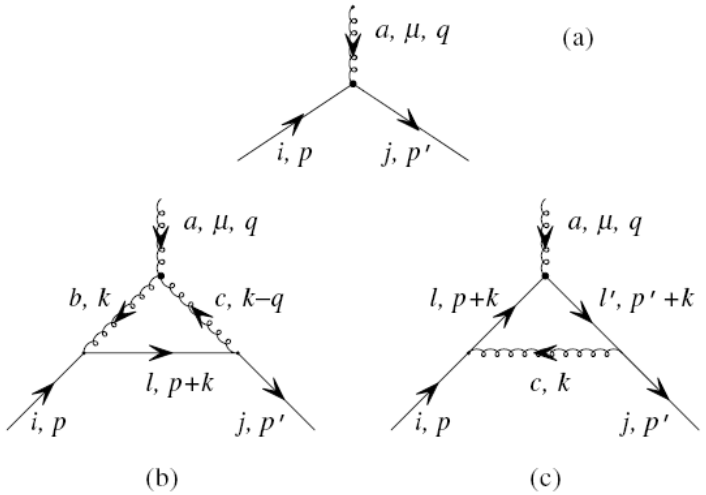
抵消项 $(Z_2-1)\bar{\psi}_R i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R$。

同样地对于胶子、鬼场、顶角等做单圈图计算可以得到相应的重整化常数和抵消项。这里不采取一一计算，而是按此方法先引入重整化常数和相应的抵消项，然后在第四节中再做具体计算给出重整化常数和抵消发散后的有限结果。对于胶子自能计算



引入重整化常数$Z_3$，定义重整化场量$A_R$，对于鬼场计算引入重整化常数$\tilde{Z}_3$，定义重整化场量$\chi_R$，对于顶角耦合常数$g$计算引入重整化常数$Z_g$，定义重整化耦合常数$g_R$。




如果保持夸克质量项$m$，还需引入重整化常数$Z_m$，定义重整化质量$m_R$。因此在 QCD 中我们将定义下述重整化场量和参量

$$\psi = Z_2^{1/2}\psi_r \ , \ A_\mu^a = Z_3^{1/2}A_{r\mu}^a \ , \ \chi_{1,2}^a = \tilde{Z}_3^{1/2}\chi_{1,2r}^a \qquad (5.37)$$

$$g = Z_g g_r \ , \ \alpha = Z_3\alpha_r \ , \ m = Z_m m_r \qquad (5.38)$$

这里选择了规范参数$\alpha$的重整化常数与胶子的相同，这就使得规范固定项在重新定义后具有相同的形式。这里引入了五个重整化常数，本节只给出了$Z_2$，其它常数具体形式将在第四节中讨论。

按照前面提到的重整化后的结果可以将拉氏函数(4.108-4.113)中场量和参数代以重整化的场量和参数，并引入相应的抵消项$L_C$，而得到新的拉氏函数，

$$L = L_{eff}^{r0} + L_{eff}^{rI} + L_C \qquad (5.39)$$

其中$L_{eff}^{r0} + L_{eff}^{rI}$就是(4.108-113)中将裸的场量和参数代之以重整化的场量和参数，而引入的抵消项$L_C$由下式定义

$$
\begin{aligned}
L_C = & -(Z_3-1)\frac{1}{4}(\partial_\mu A^a_{r\nu}-\partial_\nu A^a_{r\mu})(\partial^\mu A^{a\nu}_r-\partial^\nu A^{a\mu}_r) \\
& +(\tilde{Z}_3-1)i(\partial^\mu C^a_{1r})(\partial_\mu C^a_{2r})+(Z_2-1)\bar{\psi}^i_r(i\gamma^\mu\partial_\mu-m_r)\psi^i_r \\
& -Z_2(Z_m-1)m_r\bar{\psi}^i_r\psi^i_r \\
& -(Z_gZ_3^{3/2}-1)\frac{1}{2}g_r f^{abc}(\partial_\mu A^a_{r\nu}-\partial_\nu A^a_{r\mu})A^{b\mu}_r A^{c\nu}_r \\
& -(Z_g^2Z_3^2-1)\frac{1}{4}g_r^2 f^{abe}f^{cde}A^a_{r\mu}A^b_{r\nu}A^{c\mu}_r A^{d\nu}_r \\
& -(Z_g\tilde{Z}_3Z_3^{1/2}-1)ig_r f^{abc}(\partial^\mu C^a_{1r})C^b_{2r}A^c_{r\mu} \\
& +(Z_gZ_2Z_3^{1/2}-1)g_r\bar{\psi}^i_r T^a_{ij}\gamma^\mu\psi^j_r A^a_{r\mu}
\end{aligned}
\tag{5.40}
$$

这五个重整化常数$Z_2$、$Z_3$、$\tilde{Z}_3$、$Z_g$、$Z_m$的确定就像前面讨论夸克自能时确定$Z_2$一样消去圈图的发散部分。而且不仅在单圈下还要在含有高阶图中消去发散，使得整个理论自洽地得到有限的结果。由于完成重整化的证明比较复杂，本章第八节只给出对微扰论所有阶重整化成立的直观性的解释，有兴趣的读者可以参考有关文献。

## §3. 单圈图下重整化常数

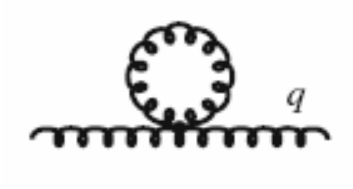
在§2中计算了单圈图下夸克传播子并由此计算了重整化常数$Z_2$，由式(5.32)给出夸克质量为零时$Z_2$的表达式。这一节将给出单圈图下其它重整化常数。

首先计算单圈图下胶子传播子因此给出重整化常数$Z_3$的表达式。单圈图下对于胶子自能的贡献$\Pi^{ab}_{\mu\nu}$来自于下述五个图形：

i)　　胶子圈图(三胶子顶点)$\Pi^{ab}_{G\mu\nu}$




ii)胶子蝌蚪圈图(四胶子顶点)$\Pi^{ab}_{T\mu\nu}$




iii)鬼粒子圈图$\Pi^{ab}_{FP\mu\nu}$



iv)夸克圈图$\Pi^{ab}_{F\mu\nu}$




v)单圈图抵消项$\Pi^{ab}_{C\mu\nu}$

i)　胶子圈图$\Pi^{ab}_{G\mu\nu}$

$$\Pi^{ab}_{G\mu\nu}(k)=\frac{1}{2!}\int\frac{d^Dq}{(2\pi)^Di}(-i)g_r f^{acd}V_{\mu\lambda\rho}(-k,q+k,-q)\frac{d^{\lambda\tau}(q+k)}{(q+k)^2}$$
$$\times\frac{d^{\rho\sigma}(q)}{q^2}(-i)g_r f^{bdc}V_{\nu\sigma\tau}(k,q,-q-k)$$
$$=\frac{g_r^2}{2}f^{acd}f^{bcd}\int\frac{d^Dq}{(2\pi)^Di}\frac{1}{q^2(q+k)^2}\left[A_{\mu\nu}+(1+\alpha_r)B_{\mu\nu}+(1-\alpha_r)^2C_{\mu\nu}\right]\quad(5.58)$$

其中

$$A_{\mu\nu}=(2q^2+2k\cdot q+5k^2)g_{\mu\nu}+(4D-6)q_\mu q_\nu$$
$$+(2D-3)(q_\mu k_\nu+q_\nu k_\mu)+(D-6)k_\mu k_\nu\qquad(5.59)$$

$$B_{\mu\nu}=-\frac{(q^2+2k\cdot q)^2}{q^2}g_{\mu\nu}+\frac{q^2+2k\cdot q-k^2}{q^2}q_\mu q_\nu+\frac{q^2+3k\cdot q}{q^2}(q_\mu k_\nu+q_\nu k_\mu)$$
$$-k_\mu k_\nu+(q\to q+k,k\to -k)\qquad(5.60)$$

$$C_{\mu\nu}=(k^2q_\mu-k\cdot qk_\mu)(k^2q_\nu-k\cdot qk_\nu)/[q^2(q+k)^2]\qquad(5.61)$$

注意到$D=4-2\varepsilon$以及

$$f^{acd}f^{bcd}=\delta^{ab}C_G\qquad(5.62)$$

其中$C_G=N$， $N$是规范群$SU(N)$的阶数。在对(5.58)做$D$维积分以后可得

$$\Pi^{ab}_{G\mu\nu}(k)=\frac{g_r^2}{2(4\pi)^{2-\varepsilon}}\delta^{ab}C_G(-k^2)^{-\varepsilon}\frac{\Gamma(\varepsilon)B(2-\varepsilon,2-\varepsilon)}{1-\varepsilon}$$
$$\times[(19-12\varepsilon)k^2g_{\mu\nu}-2(11-7\varepsilon)k_\mu k_\nu$$
$$+(k^2g_{\mu\nu}-k_\mu k_\nu)(3-2\varepsilon)(1-\alpha_r)(2(1-4\varepsilon)+(1-\alpha_r)\varepsilon)]\qquad(5.63)$$

这是三胶子顶点单圈图对胶子自能的贡献，显然它不是规范不变的，只有将全部图形的贡献加在一起才能保证规范不变性。

ii)胶子蝌蚪圈图$\Pi^{ab}_{T\mu\nu}$

$$\Pi^{ab}_{T\mu\nu}(k)=\frac{1}{2!}\int\frac{d^Dq}{(2\pi)^Di}(-g_r^2W^{abcd}_{\mu\nu\lambda\rho})\delta_{cd}\frac{d^{\lambda\rho}(q)}{q^2}$$
$$=g_r^2C_G\delta_{ab}\int\frac{d^Dq}{(2\pi)^Di}\frac{1}{q^2}[-(D-1)g_{\mu\nu}+(1-\alpha_r)(g_{\mu\nu}-\frac{q_\mu q_\nu}{q^2})]$$
$$=g_r^2C_G\delta_{ab}g_{\mu\nu}\frac{D-1}{D}(-D+1-\alpha_r)\int\frac{d^Dq}{(2\pi)^Di}\frac{1}{q^2}\qquad(5.64)$$

正像在附录中讨论的维数正规化下$D$维积分有

$$\int \frac{d^D q}{q^2} = 0 \qquad (5.65)$$

因此四胶子顶角单圈图对胶子自能的贡献为零。

$$\Pi^{ab}_{T\mu\nu}(k) = 0 \qquad (5.66)$$

注意在胶子无质量下有(5.65)式成立，在胶子有质量情况下贡献将不为零。

iii)鬼粒子圈图 $\Pi^{ab}_{FP\mu\nu}$

$$\begin{aligned}\Pi^{ab}_{FP\mu\nu}(k) &= -\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D i}(-i)g_r f^{acd} q_\mu \frac{-1}{(q+k)^2}(-i)g_r f^{bdc}(q+k)_\nu \frac{-1}{q^2} \\ &= -g_r^2 C_G \delta_{ab} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D i} \frac{q_\mu (q+k)_\nu}{q^2 (q+k)^2} \qquad (5.67)\end{aligned}$$

在对(6.67)做 D 维积分以后变为

$$\begin{aligned}\Pi^{ab}_{FP\mu\nu}(k) &= \frac{g_r^2}{2(4\pi)^{2-\varepsilon}} \delta_{ab} C_G (-k^2)^{-\varepsilon} \frac{\Gamma(\varepsilon) B(2-\varepsilon, 2-\varepsilon)}{1-\varepsilon} \\ &\times [k^2 g_{\mu\nu} + 2(1-\varepsilon) k_\mu k_\nu] \qquad (5.68)\end{aligned}$$

从(5.68)可以见到它也不是规范不变的。将(5.63)与(5.68)相加正好消去那些非规范不变的部分而给出规范不变的表达式，

$$\begin{aligned}&\Pi^{ab}_{G\mu\nu}(k) + \Pi^{ab}_{FP\mu\nu}(k) \\ &= \frac{g_r^2}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \delta_{ab} C_G (-k^2)^{-\varepsilon} (k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \frac{\Gamma(\varepsilon) B(2-\varepsilon, 2-\varepsilon)}{1-\varepsilon} \\ &\times [2(5-3\varepsilon) + (1-\alpha_r)(1-4\varepsilon)(3-2\varepsilon) + (1-\alpha_r)^2 \frac{\varepsilon}{2}(3-2\varepsilon)] \qquad (5.69)\end{aligned}$$

在(5.69)式中出现了一个共同因子 $(k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu)$ 就保证了规范不变性

$$k^\mu (k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) = 0 \qquad 或 \qquad k^\nu (k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) = 0 \qquad (5.70)$$

iv)夸克圈图 $\Pi^{ab}_{F\mu\nu}$

$$\Pi^{ab}_{F\mu\nu}(k) = -N_f \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D i} Tr\left[ g_r \gamma_\mu T^a \frac{1}{m - \not{p} - \not{k}} g_r \gamma_\nu T^b \frac{1}{m - \not{p}} \right] \qquad (5.71)$$

其中 $N_f$ 是贡献到夸克圈图的味数。在式(5.71)中求迹既对旋量空

间$\gamma_\mu$又对 SU(N)空间中的产生子$T^a$。注意到$Tr(T^aT^b)=T_R\delta_{ab}$, $T_R=1/2$，利用费曼参数化和求迹公式可得

$$\Pi^{ab}_{F\mu\nu}(k)=-4g_r^2T_RN_f\delta_{ab}\int_0^1dx\int\frac{d^Dp}{(2\pi)^Di}\frac{N_{\mu\nu}}{(-p^2+K)^2} \tag{5.72}$$

其中

$$N_{\mu\nu}=\left[m^2+x(1-x)k^2+(\frac{2}{D}-1)p^2\right]g_{\mu\nu}-2x(1-x)k_\mu k_\nu \tag{5.73}$$

$$K=m^2-x(1-x)k^2 \tag{5.74}$$

对(5.72)式做 D 维积分后给出$\Pi^{ab}_{F\mu\nu}$的表达式，

$$\Pi^{ab}_{F\mu\nu}(k)=-\frac{8g_r^2}{(4\pi)^{2-\varepsilon}}\delta_{ab}T_RN_f\Gamma(\varepsilon)(k^2g_{\mu\nu}-k_\mu k_\nu)$$
$$\times\int_0^1dx\,x(1-x)[m^2-x(1-x)k^2]^{-\varepsilon} \tag{5.75}$$

此表达式满足(5.70)，表明夸克圈图自身满足规范不变性。

v)单圈图抵消项$\Pi^{ab}_{C\mu\nu}$，直接应用前面抵消项的费曼规则给出

$$\Pi^{ab}_{C\mu\nu}(k)=-(Z_3-1)\delta_{ab}(k^2g_{\mu\nu}-k_\mu k_\nu) \tag{5.76}$$

显然它也满足规范不变性。

将上述五个图形的贡献相加就得到单圈图下对胶子自能的贡献,

$$\Pi^{ab}_{\mu\nu}(k)=\delta_{ab}(k_\mu k_\nu-k^2g_{\mu\nu})\Pi(k^2) \tag{5.77}$$

其中$\Pi(k^2)$为

$$\Pi(k^2)=\frac{g_r^2}{(4\pi)^{2-\varepsilon}}(-k^2)^{-\varepsilon}\Gamma(\varepsilon)B(2-\varepsilon,2-\varepsilon)$$
$$\times\left\{-\frac{C_G}{1-\varepsilon}\left[10-6\varepsilon+(1-\alpha_r)(3-2\varepsilon)(1-4\varepsilon+\frac{\varepsilon}{2}(1-\alpha_r)\right]\right.$$
$$\left.+\frac{8T_RN_f}{B(2-\varepsilon,2-\varepsilon)}\int_0^1dx\,x(1-x)(x(1-x)-\frac{m^2}{k^2})^{-\varepsilon}\right\}$$
$$+Z_3-1 \tag{5.78}$$

在(5.78)式中对小量$\varepsilon$做展开并略去$O(\varepsilon)$项就可得到

$$\Pi(k^2)=-\frac{g_R^2}{(4\pi)^2}C_G\left[(\frac{13}{6}-\frac{\alpha_r}{2})(\frac{1}{\varepsilon}-\gamma-\ln\frac{-k^2}{4\pi\mu^2})+\frac{31}{9}-(1-\alpha_r)+\frac{(1-\alpha_r)^2}{4}\right]$$
$$+\frac{g_R^2}{(4\pi)^2}T_RN_f\frac{4}{3}\left[(\frac{1}{\varepsilon}-\gamma-\ln\frac{-k^2}{4\pi\mu^2}-6\int_0^1 dx\,x(1-x)\ln\left(x(1-x)-\frac{m}{k^2}\right)\right]$$
$$+Z_3-1 \qquad (5.79)$$

其中无量纲的重整化耦合常数$g_R=g_r\mu^{-\varepsilon}$。从(5.77)式可以见到由于规范不变性，胶子传播子出现一个规范不变的因子$(k^2g_{\mu\nu}-k_\mu k_\nu)$，它的量纲为 2，使得胶子传播子振幅$\Pi_{\mu\nu}^{ab}$表面发散度$d=2$降为对数发散$1/\varepsilon$。注意到重整化常数$Z_3$是由发散项决定的，在*MS*方案中将(5.79)式中$1/\varepsilon$发散项抽出来($\varepsilon\to0$)，剩下的是有限项(在$\varepsilon\to0$情况下$g_R\to g_r$)。

$$\Pi(k^2)=\frac{g_R^2}{(4\pi)^2}\left[\frac{4}{3}T_RN_f-\frac{1}{2}C_G(\frac{13}{3}-\alpha_r)\right]\frac{1}{\varepsilon}+Z_3-1+\text{有限项} \qquad (5.80)$$

因此单圈图下胶子场的重整化常数(*MS*方案)

$$Z_3=1-\frac{g_R^2}{(4\pi)^2}\left[\frac{4}{3}T_RN_f-\frac{1}{2}C_G(\frac{13}{3}-\alpha_r)\right]\frac{1}{\varepsilon}+O(g_R^4) \qquad (5.81)$$

胶子传播子振幅$\Pi_{\mu\nu}^{ab}$的规范不变性结构(5.77)保证了无质量的胶子在辐射修正以后仍然是无质量的。显然这样获得的发散常数是依赖于减出方案的，因而依赖于标度参量$\mu$。实际上发散项$\frac{1}{\varepsilon}$就相当于通常正规化中的$\ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2}$，这里$\Lambda$就是紫外截断参量。

类似地可以计算鬼粒子传播子、三胶子顶角、鬼粒子-胶子顶角、夸克-胶子顶角、四胶子顶角的单圈图修正并获得相应的重整化常数，它们的结果直接列在下面：

a) 鬼粒子传播子振幅和$\tilde{Z}_3$

$$\tilde{\Pi}^{ab}(k)=\delta_{ab}k^2\left[-\frac{g_R^2}{(4\pi)^2}C_G\frac{3-\alpha_r}{4}\frac{1}{\varepsilon}+\tilde{Z}_3-1\right]+\text{有限项} \qquad (5.82)$$

$$\tilde{Z}_3=1+\frac{g_R^2}{(4\pi)^2}C_G\frac{3-\alpha_r}{4}\frac{1}{\varepsilon}+O(g_R^4) \qquad (5.83)$$

b）三胶子顶角振幅和$Z_1$

$$\Lambda^{abc}_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2,k_3)=-ig_R f^{abc}V_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2,k_3)$$
$$\times\left[\frac{g_R^2}{(4\pi)^2}\left(C_G(-\frac{17}{12}+\frac{3\alpha_r}{4})+\frac{4}{3}T_R N_f\right)\frac{1}{\varepsilon}+Z_1-1\right]+\text{有限项} \qquad (5.84)$$

$$Z_1=1-\frac{g_R^2}{(4\pi)^2}\left[C_G\left(-\frac{17}{12}+\frac{3\alpha_r}{4}\right)+\frac{4}{3}T_R N_f\right]\frac{1}{\varepsilon}+O(g_R^4) \qquad (5.85)$$

c）鬼粒子-胶子顶角振幅和$\tilde{Z}_1$

$$\tilde{\Lambda}^{abc}_{\mu}(k,p,p')=-ig_R f^{abc}p_\mu\left[\frac{g_R^2}{(4\pi)^2}C_G\frac{\alpha_r}{2}\frac{1}{\varepsilon}+\tilde{Z}_1-1\right]+\text{有限项} \qquad (5.86)$$

$$\tilde{Z}_1=1-\frac{g_R^2}{(4\pi)^2}C_G\frac{\alpha_r}{2}\frac{1}{\varepsilon}+O(g_R^4) \qquad (5.87)$$

d）夸克-胶子顶角振幅和$Z_{1F}$

$$\Lambda^{aij}_{F\mu}(k,p,p')=g_R\gamma_\mu T^a_{ij}\left[\frac{g_R^2}{(4\pi)^2}\left(\frac{3+\alpha_r}{4}C_G+\alpha_r C_F\right)\frac{1}{\varepsilon}+Z_{1F}-1\right]$$
$$+\text{有限项} \qquad (5.88)$$

$$Z_{1F}=1-\frac{g_R^2}{(4\pi)^2}(\frac{3+\alpha_R}{4}C_G+\alpha_r C_F)\frac{1}{\varepsilon}+O(g_R^4) \qquad (5.89)$$

e）四胶子顶角振幅和$Z_4$

$$\Lambda^{a_1a_2a_3a_4}_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1,k_2,k_3,k_4)=-g_R^2W^{a_1a_2a_3a_4}_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$$
$$\times\left[\frac{g_R^2}{(4\pi)^2}\left((-\frac{2}{3}+\alpha_r)C_G+\frac{4}{3}T_R N_f\right)\frac{1}{\varepsilon}+Z_4-1\right]+\text{有限项} \qquad (5.90)$$

$$Z_4=1-\frac{g_R^2}{(4\pi)^2}\left[\left(-\frac{2}{3}+\alpha_r\right)C_G+\frac{4}{3}T_R N_f\right]\frac{1}{\varepsilon}+O(g_R^4) \qquad (5.91)$$

其中$(\sum_a T^aT^a)_{ij}=\delta_{ij}C_F$。

至于$Z_2$在夸克无质量情况下已有(5.32)式给出，在夸克有质量m

的情况下，需考虑质量重整化，重复以前的计算可得夸克自能的表达式应修改为

$$\Sigma^{ij}(p)=\delta_{ij}\left[\left(Am_r-Bp\!\!\!/\right)-\left(Z_2Z_m-1\right)m_r+\left(Z_2-1\right)p\!\!\!/\right]+\text{有限项} \qquad (5.92)$$

其中 $A$、$B$、$Z_2$和$Z_m$分别为

$$A=-\frac{g_R^2}{(4\pi)^2}C_F(3+\alpha_r)\frac{1}{\varepsilon}+O(g_R^4) \qquad (5.93)$$

$$B=-\frac{g_R^2}{(4\pi)^2}C_F\alpha_r\frac{1}{\varepsilon}+O(g_R^4) \qquad (5.94)$$

$$Z_2=1+B=1-\frac{g_R^2}{(4\pi)^2}C_F\alpha_r\frac{1}{\varepsilon}+O(g_R^4) \qquad (5.95)$$

$$Z_m=1+A-B=1-\frac{3g_R^2}{(4\pi)^2}C_F\frac{1}{\varepsilon}+O(g_R^4) \qquad (5.96)$$

比较(5.32)和(5.90)可以见到在夸克有质量的情况下$Z_2$不变，多出一个质量重整化常数$Z_m$。这是因为夸克自能(5.87)式包含两种类型的发散：质量型$Am_r$和动能型$Bp\!\!\!/$，这就需要两个发散常数来抵消。

至此，我们已经在$MS$方案计算了上一节列出的七个单圈发散图形以及给出了七个发散常数，而且证明了当引入相应的抵消项以后的确可以消去发散部分而获得有限的修正。这就证明了量子色动力学在单圈图下是可重整的。

在结束此节以前再引伸两点讨论。

从单圈图下发散常数表达式可以见到它们满足下面的关系式(见(5.55)式)

$$\frac{Z_1}{Z_3}=\frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3}=\frac{Z_{1F}}{Z_2}=\frac{Z_4}{Z_1}=1-\frac{g_R^2}{(4\pi)^2}C_G\frac{3+\alpha_r}{4}\frac{1}{\varepsilon}+O(g_R^4) \qquad (5.97)$$

它正是由规范不变性导至的 Slavnov-Taylor 等式。实际上是规范不变性要求这些发散常数满足 Slavnov-Taylor 等式。由于 QCD 拉氏函

数在维数正规化过程保持规范不变的性质，因而在计算中自动地出现规范不变因子，由此定义的重整化常数也自动满足(5.97)式。

前面(5.54)和(5.55)式已指出不同发散图形所定义的$Z_g$应相同，即

$$Z_g = Z_1 Z_3^{-3/2} = \tilde{Z}_1 \tilde{Z}_3^{-1} Z_3^{-1/2} = Z_{1F} Z_2^{-1} Z_3^{-1/2}$$
$$=1-\frac{g_R^2}{(4\pi)^2}\left(\frac{11}{6}C_G - \frac{4}{6}T_R N_f\right)\frac{1}{\varepsilon}+O(g_R^4) \qquad (5.98)$$

此式不依赖于具体规范。实际上

$$Z_g =1-\frac{g_R^2}{2(4\pi)^2}\beta_0\frac{1}{\varepsilon}+O(g_R^4) \qquad (5.99)$$

其中

$$\beta_0 = (\frac{11}{3}C_G - \frac{4}{3}T_R N_f) = (11-\frac{2}{3}N_f) \qquad (5.100)$$

就是$\beta(g)$函数单圈近似下的系数。

## §1. 单圈图近似$\beta(g)$函数和渐近自由

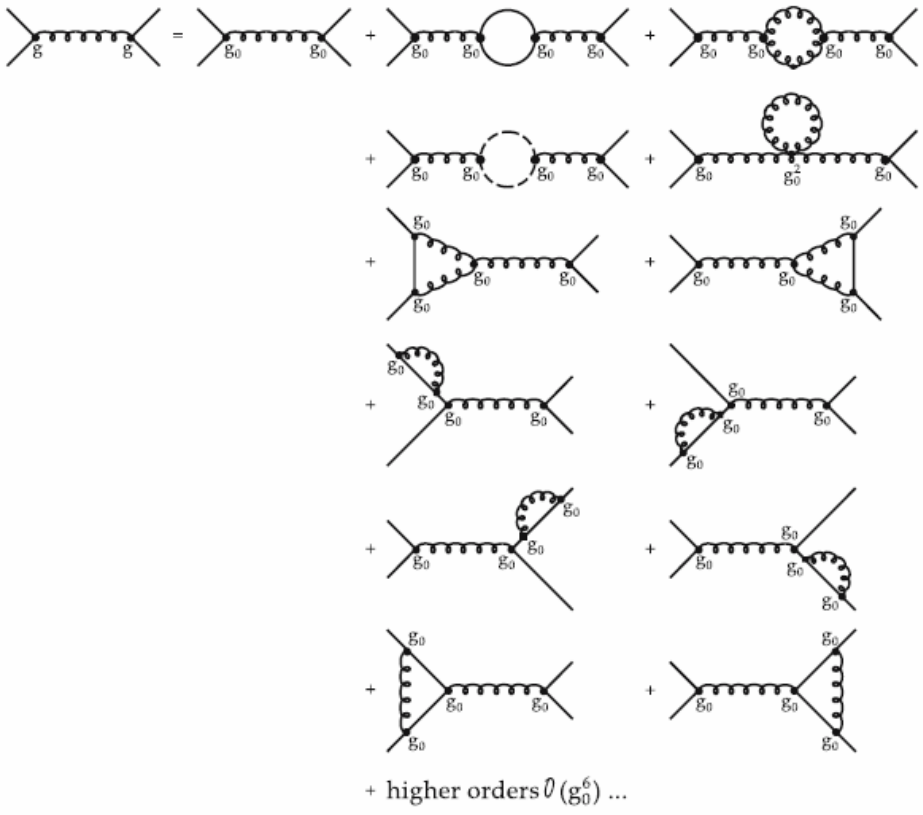
由前面(5.98)的定义$g_r = Z_g^{-1} g$和上一节中无量纲化耦合常数$g_R = \mu^{-\varepsilon} g_r$可知

$$g_R = \mu^{-\varepsilon} Z_g^{-1} g \tag{5.101}$$

如果固定$g, g_R$是标度参量$\mu$的函数$g_R(\mu)$。在上式两边对$\mu$微分并定义$\beta(g_R)$函数，

$$\beta = \mu \frac{\partial g_R}{\partial \mu}\bigg|_g = -\varepsilon g_R - \frac{\mu}{Z_g}\frac{dZ_g}{d\mu} g_R \tag{5.102}$$

将(5.99)式代入到(5.102)式就可以得到单圈图近似下的$\beta(g_R)$函数，



$$\begin{aligned}\beta(g_R) &= -\frac{1}{(4\pi)^2}\beta_0 g_R^3 + O(g_R^5) \\ &= -\frac{1}{(4\pi)^2}\left(\frac{11}{3}C_G - \frac{4}{3}T_R N_f\right)g_R^3 + O(g_R^5) \\ &= -\frac{1}{(4\pi)^2}\left(11 - \frac{2}{3}N_f\right)g_R^3 + O(g_R^5)\end{aligned} \tag{5.103}$$

对于任何一个大动量转移$Q^2 = -q^2$的物理过程，我们可以引入一个无量纲的标度参量$\lambda\left(=\sqrt{\frac{\mu^2}{Q^2}}\right)$，在计及圈图修正以后有效耦合常数从$g_R(\mu) \to \bar{g}(\mu,\lambda)$。相应于(5.102)式，代之以标度$\mu/\lambda$的微商

$$\frac{\mu}{\lambda}\frac{d\bar{g}}{d(\mu/\lambda)} = \beta(\bar{g}) \tag{5.104}$$

将变量$\mu$代之以$\lambda$，并定义

$$t = -\ln\lambda \tag{5.105}$$

则可将(5.104)改写为

$$\frac{d\bar{g}}{dt} = \beta(\bar{g}) \tag{5.106}$$

对此式积分可得

$$t = \int_{g_R}^{\bar{g}(t)} \frac{dg'}{\beta(g')} \tag{5.107}$$

其中

$$\bar{g}(t=0) = g_R \tag{5.108}$$

在单圈近似下将(5.103)代入到(5.107)式积分可得

$$\bar{g}(t)^2 = \frac{g_R^2}{1 + \frac{2}{(4\pi)^2}\beta_0 g_R^2 t} \tag{5.109}$$

(5.109)式表明$\bar{g}(t) \to 0$, 当$t \to -\infty$。式(5.109)也可以记作

$$\frac{1}{\bar{g}(t)^2} = \frac{1}{g_R^2} + \frac{2}{(4\pi)^2}\beta_0 t \tag{5.110}$$

若定义有效耦合常数

$$\alpha_{eff}(t)=\frac{\bar{g}(t)^2}{4\pi} \qquad (5.111)$$

那么(5.110)变为

$$\frac{1}{\alpha_{eff}(t)}=\frac{1}{\alpha(\mu^2)}+\frac{2}{(4\pi)^2}\beta_0 t \qquad (5.112)$$

其中 $\alpha(\text{t=0})=\frac{g_R^2}{4\pi}=\alpha(\mu^2)$，或者以(5.109)式记为

$$\alpha_{eff}(t)=\frac{\alpha(\mu^2)}{1+\alpha(\mu^2)\frac{2\beta_0}{(4\pi)}t} \qquad (5.113)$$

注意到(5.105)式，可以将(5.113)式写成明显的 $Q^2$ 依赖关系

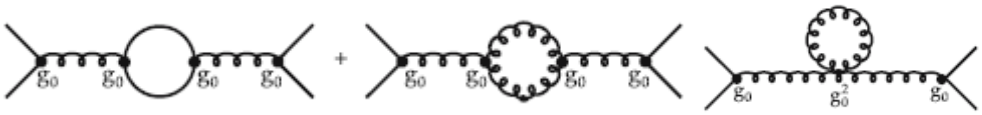
$$\alpha_{eff}^{s}(Q^2)=\frac{\alpha(\mu^2)}{1+\alpha(\mu^2)\frac{\beta_0}{4\pi}\log\frac{Q^2}{\mu^2}} \qquad (5.114)$$

其中 $\beta_0=(\frac{11}{3}C_G-\frac{4}{3}T_R N_f)=(11-\frac{2}{3}N_f)$（见(5.100)）。可以见到当 $N_f\le 16$ 时，式(5.114)的分母中第二项恒为正，在$Q^2$增加时，分母增大，有效耦合常数减小，且有

$$\alpha_{eff}(Q^2)\to 0 \qquad \text{当 } Q^2\to\infty\ (t\to-\infty) \qquad (5.115)$$

式(5.114)意味着，当$Q^2$趋于无穷时，夸克和胶子之间的耦合(相互作用)渐近地减弱到无相互作用。这就是QCD中的一个根本特点－渐近自由(Asymptotic freedom)。这一特点告诉我们，在QCD里当$Q^2$增加时，耦合常数变小，可以应用微扰论；当$Q^2$减小到低$Q^2$时，耦合常数变大，不能应用微扰论。我们称它为跑动耦合常数。这与QED正好相反，在QED中 $\beta_0$ 是负的。正是低$Q^2$下耦合常数变大这性质可以定性地理解强子内夸克和胶子的禁闭性质。

QCD 的渐近自由性质在物理上可以作如下的理解。



圈图中的图a是产生夸克、反夸克对，其效果与QED相同，真空极化产生屏蔽效应，使得色荷减弱。真空极化图b和c是产生胶子圈，是三胶子相互作用顶点的贡献，主要是图c的真空极化图产生反屏蔽效应，色荷可以向外辐射。仅当胶子的$Q^2$增大时，波长变短，“探测”的胶子仅“看”到越来越小的空间间隔，才“发现”小的色荷，即有效电荷变弱，因此呈现出QCD渐近自由的特点。

由于$g_R$依赖于重整化参量$\mu^2$，$\mu^2$是任意的，物理结果应不依赖于重整化参量$\mu^2$的选择。这意味着，不同减出点$\mu^2$，$\mu'^2$的选择，其物理可观察量$\alpha_{eff}^{s}(Q^2)$应相同，即(5.112)式导至

$$\frac{1}{\alpha_s(\mu^2)} - a\ \log\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) = \frac{1}{\alpha_s(\mu'^2)} - a\ \log\left(\frac{Q^2}{\mu'^2}\right) \qquad (5.116)$$

其中$a = -\frac{2\beta_0}{(4\pi)^2}$，或者消去$Q^2$,仅留下不同重整化点之间的关系并定义Λ参量,

$$\frac{1}{a\ \alpha_s(\mu^2)} + \log\ \mu^2 = \frac{1}{a\ \alpha_s(\mu'^2)} + \log\ \mu'^2 = \cdots = \log \Lambda^2 \qquad (5.117)$$

将式(5.117)代入到(5.114)就可以得到

$$\alpha_{eff}(Q^2) = \alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0 \log\frac{Q^2}{\Lambda^2}} \qquad (5.118)$$

由(5.117)式定义的参量Λ标志着所有不同重整化点的结果，不依赖于重整化点$\mu^2$的选择，这一对称性质就是下一章要讨论的重整化群。所

以Λ是 QCD 真正的物理参量，应由物理过程的实验数据来确定。从(5.117)定义可得到

$$\Lambda^2=\mu^2\exp\left[\frac{-(4\pi)^2}{\beta_0 g^2(\mu^2)}\right] \tag{5.119}$$

参数Λ是 QCD 理论所固有的能量标度，当$Q^2\le\Lambda^2$时，上述所有表达式不再成立。以上所有结果都是单圈图计算下得到。计算到双圈图的结果是

$$\alpha_s(Q^2)=\frac{4\pi}{\beta_0\log\frac{Q^2}{\Lambda^2}}\left[1-\frac{\beta_1}{\beta_0^2}\frac{\log\left(\log\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)}{\log\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)}\right]+\cdots$$

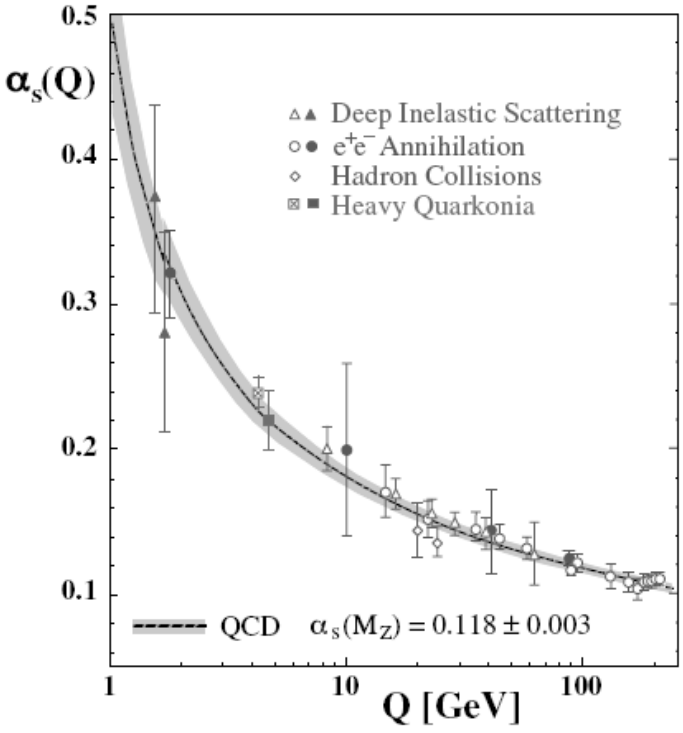
$$\beta_0=11-\frac{2n_f}{3} \tag{5.120}$$

$$\beta_1=\frac{2}{3}(153-19\,n_f)$$

跑动耦合常数$\alpha_s(Q^2)$中仅有的参数是Λ，Λ将由实验上物理过程来确定，从低能到高能所确定的Λ值是自洽的，其范围在

$$100\text{ MeV}\le\Lambda\le 200\text{ MeV} \tag{5.121}$$

而且在实验误差范围内，从几个GeV$^2$一直到$Q^2=M_z^2$都符合得比较好。这是实验上对QCD理论的直接验证。


0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
$\alpha_s(Q)$
Deep Inelastic Scattering
$e^+e^-$ Annihilation
Hadron Collisions
Heavy Quarkonia
QCD $\alpha_s(M_Z) = 0.118 \pm 0.003$
1
10
100
Q [GeV]

# § 2. QCD重整化群函数和$\Lambda_{QCD}$参量

在第二节中（6.44）-（6.48）式给出量子色动力学中重整化群函数$\beta,\gamma_m,\gamma_A,\gamma_\psi$和$\delta$的定义，利用第五章第五节中给出的单圈近似下重整化常数的计算结果(罗列如下)

$$Z_1=1-\frac{g_R^2}{(4\pi)^2}\left[C_G\left(-\frac{17}{12}+\frac{3\alpha_R}{4}\right)+\frac{4}{3}T_RN_f\right]\frac{1}{\varepsilon}+O(g_R^4)$$

$$Z_2=1-\frac{g_R^2}{(4\pi)^2}C_F\alpha_R\frac{1}{\varepsilon}+O(g_R^4)$$

$$Z_3=1-\frac{g_R^2}{(4\pi)^2}\left[\frac{4}{3}T_RN_f-\frac{1}{2}C_G(\frac{13}{3}-\alpha_R)\right]\frac{1}{\varepsilon}+O(g_R^4)$$

$$Z_4=1-\frac{g_R^2}{(4\pi)^2}\left[\left(-\frac{2}{3}+\alpha_R\right)C_G+\frac{4}{3}T_RN_f\right]\frac{1}{\varepsilon}+O(g_R^4)$$

$$\tilde{Z}_1=1-\frac{g_R^2}{(4\pi)^2}C_G\frac{\alpha_R}{2}\frac{1}{\varepsilon}+O(g_R^4)$$

$$\tilde{Z}_3=1+\frac{g_R^2}{(4\pi)^2}C_G\frac{3-\alpha_R}{4}\frac{1}{\varepsilon}+O(g_R^4)$$

$$Z_{1F}=1-\frac{g_R^2}{(4\pi)^2}(\frac{3+\alpha_R}{4}C_G+\alpha_RC_F)\frac{1}{\varepsilon}+O(g_R^4)$$

$$Z_g=Z_1Z_3^{-3/2}=\tilde{Z}_1\tilde{Z}_3^{-1}Z_3^{-1/2}=Z_{1F}Z_2^{-1}Z_3^{-1/2}$$

$$=1-\frac{g_R^2}{(4\pi)^2}\left(\frac{11}{6}C_G-\frac{4}{6}T_RN_f\right)\frac{1}{\varepsilon}+O(g_R^4)$$

$$Z_m=1-\frac{3g_R^2}{(4\pi)^2}C_F\frac{1}{\varepsilon}+O(g_R^4)$$

直接代入到（6.44）-（6.48）就可得到 QCD 中单圈近似下重整化群函数，

$$\beta(g_R)=\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{11C_G-4T_RN_f}{3}g_R^3+O(g_R^5) \tag{6.94}$$

$$\gamma_m(g_R)=\frac{6}{(4\pi)^2}C_Fg_R^2+O(g_R^4) \tag{6.95}$$

$$\gamma_F(g_R,\alpha_R)=\frac{1}{(4\pi)^2}C_F\alpha_Rg_R^2+O(g_R^4) \tag{6.96}$$

$$\gamma_G(g_R,\alpha_R)=-\frac{1}{(4\pi)^2}\left[\frac{1}{2}C_G\left(\frac{13}{3}-\alpha_R\right)-\frac{4}{3}T_RN_f\right]g_R^2+O(g_R^4) \tag{6.97}$$

$$\delta(g_R,\alpha_R)=\frac{1}{(4\pi)^2}\left[C_G\left(\frac{13}{3}-\alpha_R\right)-\frac{8}{3}T_RN_f\right]\alpha_Rg_R^2+O(g_R^4) \tag{6.98}$$

这些重整化群函数是在 MS scheme 中给出的，一个明显的方便之处是$\beta(g_R)$和$\gamma_{\rm m}(g_R)$与规范选择无关，而且当取 Landau 规范($\alpha_R=0$)时，$\gamma_F=0,\ \delta=0$。

关于 Landau 规范再补充一点说明如下。类似于讨论跑动耦合常数$\bar{g}(t)$，也可以通过定义

$$\frac{d\bar{\alpha}(t)}{dt}=\delta(\bar{g},\bar{\alpha}) \tag{6.99}$$

研究跑动规范参量的行为。在单圈近似下（6.98）和（6.99）表明当

$$13C_G-8T_RN_f<0\ （或\ N_f>10\ ） \tag{6.100}$$

时 Landau 规范是$\bar{\alpha}(t)$的**紫外固定点。**将(6.98)和$\bar{g}(t)$的解(5.107)代入到微分方程(6.99)可得到$\bar{\alpha}(t)$的解，

$$\bar{\alpha}(t)=\frac{a\alpha_R}{\alpha_R+(a-\alpha_R)(1+2bg_R^2t)^c} \tag{6.100}$$

其中

$$a=\frac{13}{3}-\frac{8T_RN_f}{3C_G} \tag{6.101}$$

$$b=\frac{\beta_0}{(4\pi)^2} \tag{6.102}$$

$$c=-\frac{13C_G-8T_RN_f}{22C_G-8T_RN_f} \tag{6.103}$$

方程（6.100）表明当$c>0$时，$\bar{\alpha}(t)$随$t\to\infty$而趋于零。条件$c>0$相应于$13C_G-8T_RN_f<0$，结合渐近自由条件给出

$$10<N_f<16 \tag{6.104}$$

重整化群方程依赖于减出方案(scheme)。前面的讨论是在最小减出方案(MS scheme)中进行的，在这一方案中的优点是所有重整化常数计算结果不依赖于重整化标度$\mu$，同样对$\overline{MS}$方案也成立。显然在不同重整化减出方案中所得到的重整化群方程也不同。历史上有 Gell-Mann-Low 方程和 Callan-Symanzik 方程都是在不同减出方案下获得的重整化群方程，这里不一一讨论。侭管 scheme 不同得到的重整化群方程不同，但重整化群方程解给出的 Green 函数的渐近行为是相同的。

很自然要问由(5.118)或(6.78)定义的$\Lambda$是否依赖于减出方案，回答是肯定的，参量$\Lambda$依赖于减出方案。上一节的讨论已告诉我们在量子色动力学中通过唯一的具有质量量纲参量$\Lambda$来代替了无量纲参量耦合常数$g$，并定义了跑动耦合常数$\alpha_s(t)=\bar{g}^2(t)/4\pi$。任何一个物理量都可以按$\alpha_s(Q^2)$展开，逐阶计算。如果可以计算到微扰论的所有阶并求和给出物理量，其结果不依赖于减出方式。然而遗憾地目前只能计算到有限阶，那么计算结果一定依赖某一减出方式中$\Lambda$的选择。

例如，下一章将见到深度非弹过程中计算非单态矩$M_n(Q^2)$，它按$\alpha_s(Q^2)$展开

$$M_n(Q^2)=A_n\left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^{\gamma_0^n/2\beta_0}\left[1+C_1^n\left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)+\cdots\right] \tag{6.105}$$

设想Λ参量改变$\Lambda\to\Lambda'$，令$\Lambda=K\Lambda'$，上述表达式方括号中的第一项不变，第二项

$$C_1^n\to C_1^{n'}=C_1^n+\gamma_0^n\cdot\log K \tag{6.106}$$

由于Λ的变化，$\alpha_s$也相应地变化

$$\alpha_s\to\alpha_s'=\alpha_s-\left(\frac{\beta_0}{2\pi}\log K\right)\alpha_s^2+\cdots \tag{6.107}$$

这是由于计算双圈图时选择重整化方式的任意性引起的。在 MS 减出方式里，

$$C_1^{n(MS)}=C_1^n+\frac{1}{2}\gamma_0^n(\log 4\pi-\gamma_E) \tag{6.108}$$

上式中多出的一项，即第二项是 MS 减出方式所特有的常数项。1978 年 Bardeen 等人提出引入一修正的最小减出方式$(\overline{MS})$挪掉这一常数项，即

$$C_1^{n(\overline{MS})}=C_1^{n(MS)}-\frac{1}{2}\gamma_0^n(\log 4\pi-\gamma_E) \tag{6.109}$$

这仅相当改变参数Λ，即令

$$K=\exp\left[-\frac{1}{2}(\log 4\pi-\gamma_E)\right] \tag{6.110}$$

即相应的跑动耦合常数

$$\alpha_{(\overline{MS})} = \alpha_{MS} + \frac{\beta_0}{2\pi}(\log 4\pi - \gamma_E)\alpha_{MS}^2 + \cdots \tag{6.111}$$

这意味着在 $\overline{MS}$ 方式里，α值增加了，系数 $C_1^n$ 值减小了，改进了微扰级数的收敛性。1979 年 Celmaster 和 Gensalves 为了改进收敛性提出了动量减出方式。他们重新定义耦合常数，使之包含部分高阶修正，使得

$$C_1^{n(mom)} = C_1^{n(\overline{MS})} - \frac{1}{2}\gamma_0^n[3.55 - (\log 4\pi - \gamma_E)] \tag{6.112}$$

以上这三种方式所相应的Λ定义不同，其相互关系如下：

$$\begin{aligned} \Lambda_{\overline{MS}} &= \Lambda_{MS} \exp\left[\frac{1}{2}(\log 4\pi - \gamma_E)\right] = 2.66\Lambda_{MS} \\ \Lambda_{mom} &= 2.16\Lambda_{\overline{MS}} \end{aligned} \tag{6.113}$$

# 第七章 微扰 QCD 应用举例

## §.1 正、负电子湮灭为强子过程中 QCD 单圈修正

正、负电子湮灭为强子过程是最简单的物理过程，因为它的一个顶点是电磁顶角，可以很好地用量子电动力学来描述，另一个顶点与强相互作用相关。如果以 $X$ 代表各种可能的强子，这一过程可以由下列方式代表

$$e^+(k_2)+e^-(k_1)\to X$$

在最低级近似下，正、负电子湮灭为单光子再转变为强子终态，其费曼振幅为

$$\langle X|T|e^+e^-\rangle=\bar{v}_{\lambda_2}(k_2)e\gamma^\mu u_{\lambda_1}(k_1)\frac{-e}{q^2}\langle X|j_\mu(0)|0\rangle \tag{7.1}$$

其中 $u_{\lambda_1}(k_1)$ 是动量为 $k_1$ 自旋为 $\lambda_1$ 的电子旋量波函数，$\bar{v}_{\lambda_2}(k_2)$ 是动量 $k_2$ 自旋为 $\lambda_2$ 的正电子旋量波函数，$j_\mu(x)$ 是电磁流算符。定义

$$\begin{aligned} q&=k_1+k_2\\ S&=q^2=(k_1+k_2)^2 \end{aligned} \tag{7.2}$$

计算正、负电子湮灭为强子过程的总截面，对正负电子初态自旋求平均和对终态所有可能强子态求和就得到

$$\sigma=\frac{1}{2S}\frac{1}{4}\sum_{\lambda_1,\lambda_2}\sum_X(2\pi)^4\delta^4(P_X-q)\left|\langle X|T|e^+e^-\rangle\right|^2 \tag{7.3}$$

将(7.3)代入到(7.1)式并直接做求迹运算就将(7.3)式简化为

$$\sigma=\frac{e^4}{2S^3}l^{\mu\nu}w_{\mu\nu} \tag{7.4}$$

其中 $l^{\mu\nu}$ 是纯轻子顶角

$$l^{\mu\nu}=k_1^\mu k_2^\nu+k_1^\nu k_2^\mu-\frac{1}{2}q^2g^{\mu\nu} \tag{7.5}$$

$w_{\mu\nu}$是终态强子相关的顶角

$$w_{\mu\nu} = \sum_X (2\pi)^4 \delta^4(P_X - q)\langle 0|j_\mu(0)|X\rangle\langle X|j_\nu(0)|0\rangle$$

$$= \int d^4x\, e^{iqx}\langle 0|j_\mu(x)j_\nu(0)|0\rangle \qquad (7.6)$$

在获得(7.6)式时已用到了完备性和平移不变性，或者说在(7.6)式中插入$\sum_X |X\rangle\langle X| = 1$和利用$\langle 0|j_\mu(x)|X\rangle = e^{-iP_X x}$代入积分就得到验证。注意到正、负电子湮灭物理过程来讲，$q_0 > 0$，那么

$$\int d^4x\, e^{iqx}\langle 0|j_\nu(0)j_\mu(x)|0\rangle = \sum_X (2\pi)^4 \delta^4(P_X + q)\langle 0|j_\nu(0)|X\rangle\langle X|j_\mu(0)|0\rangle = 0$$

因此将（7.6）式的流乘积改写为流对易关系，

$$w_{\mu\nu} = \int d^4x\, e^{iqx}\langle 0|[j_\mu(x), j_\nu(0)]|0\rangle \qquad (7.7)$$

也就是说在物理区域内（7.6）和（7.7）两式是等价的。（7.7）式告诉我们正、负电子湮灭的总截面是与电磁流算符对易关系的 Fourier 变换相关。进一步由于因果性定律，流对易关系仅在类时区不等于零，

$$\left[j_\mu(x), j_\nu(0)\right] = 0 \qquad x^2 < 0$$

这意味着（7.7）式有一个支集$x^2 \geq 0$。

$w_{\mu\nu}(q)$是 Lorentz 张量，注意到电磁流是守恒流满足

$$q^\mu w_{\mu\nu}(q) = 0 \quad 或 \quad q^\nu w_{\mu\nu}(q) = 0 \qquad (7.8)$$

那么由 Lorentz 协变性和电磁流守恒条件，$w_{\mu\nu}(q)$的一般张量结构应为

$$w_{\mu\nu}(q) = \frac{1}{6\pi}(q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu})w(q^2) \qquad (7.9)$$

其中$w(q^2)$仅是$q^2$的不变函数。将(7.5)和(7.9)式代入到(7.4)式给出

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3S} w(S) = \sigma_0 w(S) \qquad (7.10)$$

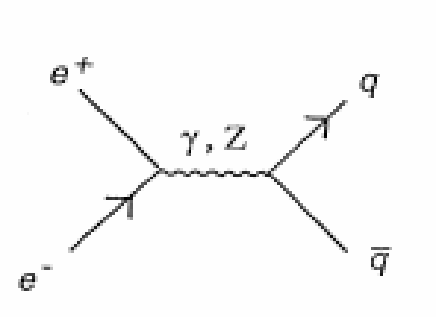
其中$\sigma_0$是在最低级近似下(即 Born 近似)忽略电子和$\mu$子质量的截面，

$$\sigma_0 = \frac{4\pi\alpha^2}{3S} \tag{7.11}$$

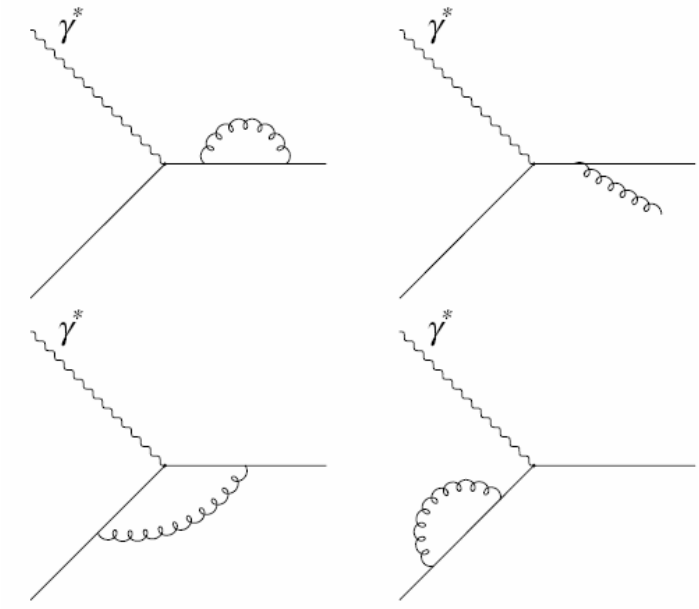
比较上两个公式就可以见到$R = w(S)$。在(7.9)式两边乘以$g^{\mu\nu}$就得到

$$\begin{aligned} w(S) &= -\frac{2\pi}{q^2} g^{\mu\nu} w_{\mu\nu} \\ &= -\frac{2\pi}{q^2} \int d^4x \, e^{iqx} \langle 0 | j_\mu(x) j^\mu(0) | 0 \rangle \end{aligned} \tag{7.12}$$

在正、负电子湮灭为強子的过程中主要子过程是正、负电子湮灭为夸克、反夸克对，然后夸克、反夸克对转化为強子，由于 QCD 是渐近自由理论，当$S$很大时最低级费曼图就是正、负电子湮灭为光子而光子产生一对正、反夸克，正、夸克对转变为各种强子态。




QCD 所有可能的其它图形都为$\alpha_s$所压低。



这个图形很容易计算，完全类似于$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$，计算下列过程

$$e^+(k_2)+e^-(k_1)\to q(p_1)+\overline{q}(p_2)$$

由 Feynman 规则知两者仅相差夸克电荷$e_q = Qe$，

$$\langle p_1, p_2 | k_1, k_2 \rangle = -e_q^2 \overline{u}_{s_1}(p_1)\gamma_\mu v_{s_2}(p_2)\frac{1}{q^2}\overline{v}_{\lambda_2}(k_2)\gamma^\mu u_{\lambda_1}(k_1) \qquad (7.13)$$

其中$u_{s_1}(p_1)$是动量为$p_1$自旋为$s_1$的夸克旋量波函数，$\overline{v}_{s_2}(p_2)$是动量$p_2$自旋为$s_2$的反夸克旋量波函数。直接计算就可以给出树图下微分截面

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = Q^2\frac{\alpha^2}{4S}\sqrt{\frac{S-4m_q^2}{S-4m_e^2}}\left[1+\frac{4(m_q^2+m_e^2)}{S}+(1-\frac{4m_q^2}{S})(1-\frac{4m_e^2}{S})\cos^2\theta\right] \qquad (7.14)$$

和总截面

$$\sigma = Q^2\frac{4\pi\alpha^2}{3S}\sqrt{\frac{S-4m_q^2}{S-4m_e^2}}(1+\frac{2m_q^2}{S})(1+\frac{2m_e^2}{S}) \qquad (7.15)$$

当$S \gg m_e^2, m_q^2$时忽略电子、$\mu$子和夸克的质量效应，即$O(m^2/S)$，(7.14)和(7.15)式就变为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = Q^2\frac{\alpha^2}{4S}(1+\cos^2\theta) \qquad (7.16)$$

$$\sigma = \sigma_B = Q^2\frac{4\pi\alpha^2}{3S} = Q^2\sigma_0 \qquad (7.17)$$

这一结果正相应于第二章的第二节中曾提到过正、负电子河湮灭为强子的过程部分子模型(Parton model)中定义的截面比 R 值(见(2.9-10)式)

$$R = \frac{\sigma(e^+e^-\to \text{强子})}{\sigma(e^+e^-\to\mu^+\mu^-)} = N_c\sum_i Q_i^2\theta(S-4m_q^2) \qquad (7.18)$$

其中$e_q = Q_i e$是相应夸克的电荷，$N_c$是夸克的三种颜色，$\theta(S-4m_q^2)$是表示夸克的阈运动学效应，对 q 求和是指在$S$允许下对所有可能产生的

夸克味求和。式(7.18)是 QCD 树图的贡献，即正、负电子湮灭为强子是通过产生正、反夸克对转变为强子的结果。

很自然地要问 QCD 高阶图形对树图的修正应是多大?(7.12)式告诉我们一般地讲

$$R = w(S) = -\frac{2\pi}{q^2}\int d^4x\, e^{iqx}\left\langle 0\middle| j_\mu(x) j^\mu(0)\middle|0\right\rangle \tag{7.19}$$

R 值在利用重整化了的 QCD 拉氏函数计算 QCD 高阶修正后 R 值应是能量 $S=Q^2$，重整化标度 $\mu^2$ 以及重整化耦合常数 $g_R$ 的函数，$R(S,\mu^2,g_R)$。由于 $R$ 值是无量纲的，

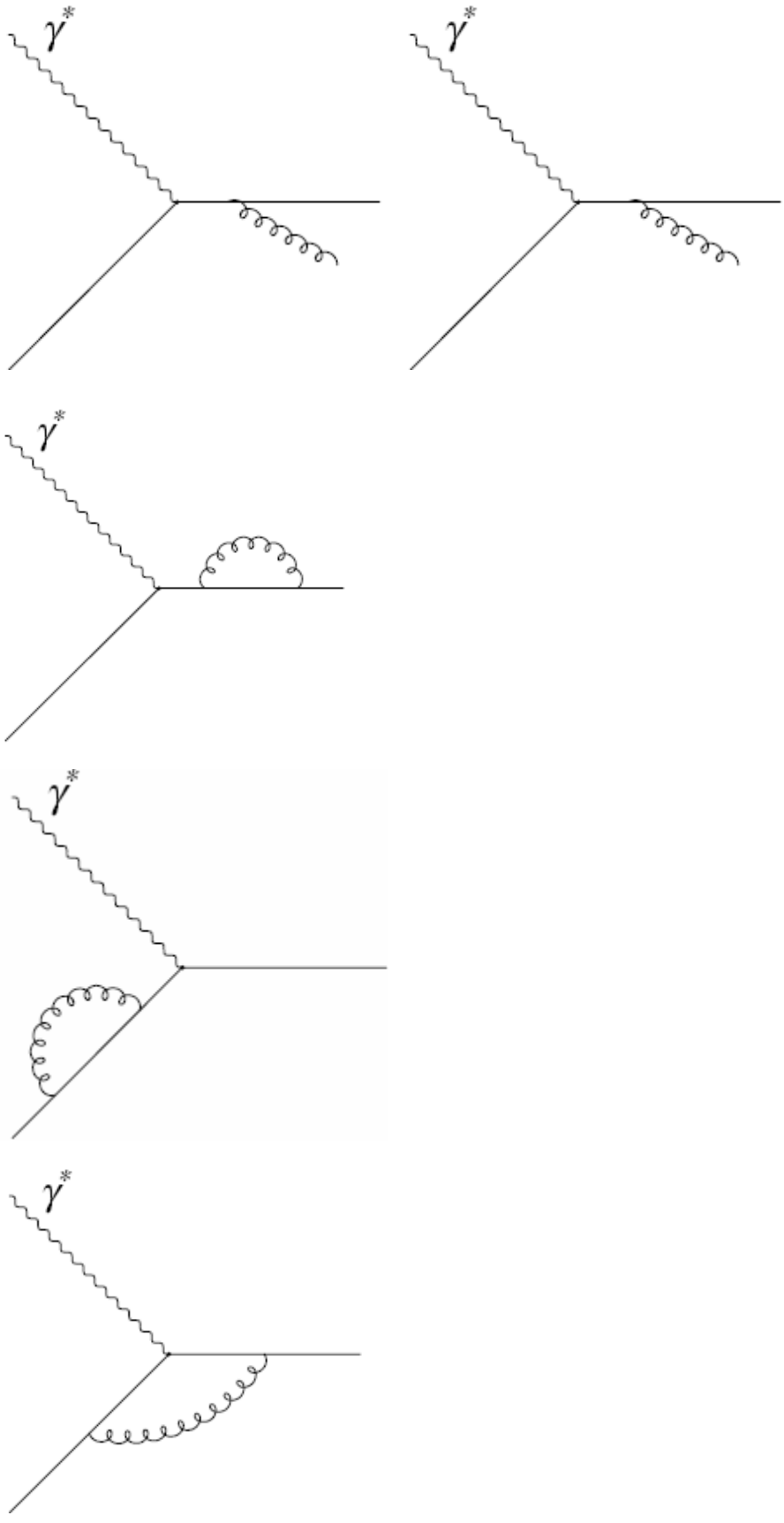
$$R(S,\mu^2,g_R) = R(S/\mu^2,g_R) \tag{7.20}$$

为了下一节讨论 QCD 修正方便起见，这里给出相应 $D(=4-2\varepsilon)$ 维时空树图对 $\sigma(e^+e^-\to \text{强子})$ 贡献的表达式(忽略了夸克质量)。

$$\begin{aligned}\sigma_B &= \sigma(e^+e^-\to \text{强子})\big|_{Tree}\\ &= \frac{4\pi\alpha^2}{3S}\left(\sum_q Q_q^2\right)\left(\frac{4\pi}{S}\right)^{\varepsilon}\frac{3(1-\varepsilon)\Gamma(2-\varepsilon)}{(3-2\varepsilon)\Gamma(2-2\varepsilon)}\\ &= \sigma_0\left(\sum_q Q_q^2\right)\left(\frac{4\pi}{S}\right)^{\varepsilon}\frac{3(1-\varepsilon)\Gamma(2-\varepsilon)}{(3-2\varepsilon)\Gamma(2-2\varepsilon)}\end{aligned} \tag{7.21}$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时回到了四维时空，(7.21)式就回到了(7.17)式。这里应记住在写下(7.21)式时没有计及颜色因子 $N_c$。

这一节将以单圈图为例应用 QCD 计算 $\alpha_s$ 级对树图结果(7.21)式的修正。显然对 $e^+e^-\to q\bar{q}$ 过程的 QCD 最低级修正有下列五个图形


$\gamma^*$
$\gamma^*$
$\gamma^*$
$\gamma^*$
$\gamma^*$

前两个图形是发射两个实胶子，后三个图形是虚胶子的交换图。现在分别计算这五个最低级修正的图形。在 QCD 中胶子质量为零，又由于考虑高能行为计算中忽略了夸克质量，因此对两个实胶子发射图存在红外发散，对单圈图计算既存在紫外发散又有红外发散。为此采用前面讨论过的维数正规化方法在 $D(=4-2\varepsilon)$ 维空间计算这些物理截面 ($MS$ scheme)。

现在计算图 a 和图 b 两个实胶子发射的图形，定义

$$q = P_1 + P_2 + P_3$$
$$Q = E_1 + E_2 + E_3 \tag{7.22}$$

$$x_i = \frac{2E_i}{Q} \qquad (\mathrm{i} = 1, 2, 3)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2 \tag{7.23}$$

$$s = (P_1 + P_3)^2 = P_1^2 + P_3^2 + 2P_1 \cdot P_3 \approx 2P_1 \cdot P_3$$

$$t = (P_2 + P_3)^2 = P_1^2 + P_3^2 + 2P_2 \cdot P_3 \approx 2P_2 \cdot P_3$$

$$u = (P_1 + P_2)^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2P_1 \cdot P_2 \approx 2P_1 \cdot P_2$$

它们满足关系式(已忽略了夸克质量)

$$s + u + t = Q^2 = S \tag{7.24}$$

一般地讲

$$
\begin{aligned}
P_iP_j &= \frac{1}{2}\left[(P_i+P_j)^2 - P_i^2 - P_j^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[(q-P_k)^2 - P_i^2 - P_j^2\right] \\
&= \frac{1}{2}[Q_2 - 2p_k\cdot q + p_k^2 - p_i^2 - p_j^2] \\
&\cong \frac{1}{2}\left[Q^2 - 2\,P_k\cdot q\right] \\
&= \frac{1}{2}Q^2(1-x_k)
\end{aligned}
$$

则有

$$
s = Q^2(1-x_2)\ ,\qquad t = Q^2(1-x_1)\ ,\qquad u = Q^2(1-x_3) \tag{7.25}
$$

直接计算图 a 和 b 可得到振幅

$$
|T_R|^2 = 8g_{\mathrm{R}}^2(1-\varepsilon)\frac{x_1^2+x_2^2-\varepsilon x_3^2}{(1-x_1)(1-x_2)} \tag{7.26}
$$

以及微分截面(图 a +图 b)，

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{d^2\sigma}{dx_1dx_2}\right)_R &= \left(\sum_q e_q^2\right)\frac{3\alpha_s}{2\pi}\sigma_0 C_F\left(\frac{4\pi\mu}{S}\right)^{2\varepsilon}\prod_i (1-x_i)^{-\varepsilon} \\
&\times \frac{(1-\varepsilon)^2}{(3-2\varepsilon)\Gamma(2-2\varepsilon)}\frac{x_1^2+x_2^2-\varepsilon x_3^2}{(1-x_1)(1-x_2)}
\end{aligned} \tag{7.27}
$$

其中 $\alpha_s = g_R^2/4\pi$，从式(7.27)可以见到此微分截面在 $\varepsilon = 0$ 情况下 $x_1, x_2$ 趋于 1 时是发散的，此发散是红外发散，来源于取了 $m_g = m_q = 0$。在忽略了夸克和胶子质量的情况下，我们有

$$
t \cong 2P_2\cdot P_3 = 2E_2\omega(1-Cos\ \theta_{23}) \tag{7.28}
$$

存在两种情况使得 $t \to 0$

a. $\omega \to 0$ 软胶子发射引起的红外发散($m_g = 0$，尽管 $m_q \neq 0, E_2 \neq 0$)

b. Cos $\theta_{23} \to 1$，即 $\theta_{23} \to 0$ 这意味着 $\vec{P}_3 // \vec{P}_2$，即发射出的胶子与夸克平行，是共线发散。这时带有动量 $(\vec{P}_2 + \vec{P}_3)$ 的 $(qg)$ 态与带有

$(\vec{P}_2+\vec{P}_3)$动量的夸克态简并$(m_g=m_q=0)$。发射胶子的动量可以是很大(以至于$|\vec{P}_3|\sim|\vec{P}_2+\vec{P}_3|$)仍会出现发散行为，这种发散称之为质量奇异性(mass singularity)，此时胶子可以不是软的，而是硬的。

对(7.27)式积分并注意到(7.21)式就得到图 a 和图 b 对截面的贡献

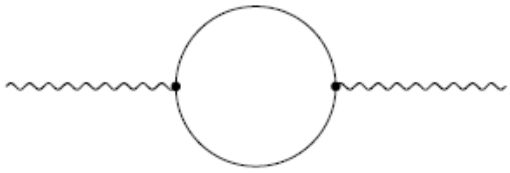
$$\sigma_R = A_R\sigma_B \tag{7.29}$$

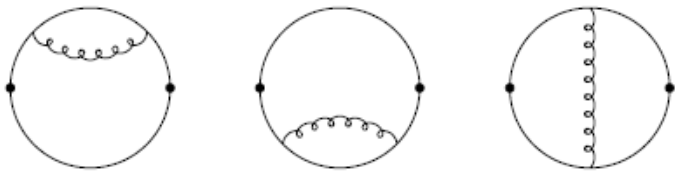
其中$\sigma_B$由(7.21)式给出，$A_R$由下式定义

$$A_R=\frac{\alpha_s}{\pi}C_F\left(\frac{4\pi\mu^2}{S}\right)^{\varepsilon}\frac{\cos\pi\varepsilon}{\Gamma(1-\varepsilon)}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{3}{2\varepsilon}+\frac{19}{4}+O(\varepsilon)\right) \tag{7.30}$$

从式(7.29)和(7.30)可以见到当$\varepsilon\to 0$时$\sigma_R\to\infty$，是红外发散。当计算了虚胶子修正的图形以后就可以发现这些虚胶子修正的图形给出对截面的贡献正好与式(7.30)中的红外发散项相消，而给出有限的修正。

现在转到计算虚胶子单圈图修正，除了虚胶子顶角修正图(c+d+e)外，还应考虑终态为正、反夸克的夸克线上的自能图形，





它们加在一起消去紫外发散，经过冗长的计算给出它们对正、负电子湮灭为强子过程截面的贡献为

$$\sigma_V = A_V \sigma_B \tag{7.31}$$

其中

$$A_V = \frac{\alpha_s}{\pi} C_F \left( \frac{4\pi\mu^2}{S} \right)^{\varepsilon} \frac{\cos \pi\varepsilon}{\Gamma(1-\varepsilon)} \left( -\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{3}{2\varepsilon} - 4 + O(\varepsilon) \right) \tag{7.32}$$

将(7.31)和(7.29)相加消去红外发散是有限的。令$\varepsilon = 0$就可以给出 QCD 在最低级修正下对截面的贡献为

$$\begin{aligned} &\sigma_R + \sigma_V \\ &= \frac{3}{4} C_F \frac{\alpha_s}{\pi} \sigma_B = \frac{\alpha_s}{\pi} \sigma_B \end{aligned} \tag{7.33}$$

因此对 R 值的 QCD 修正为$\alpha_s / \pi$，总的结果是，

$$\begin{aligned} R &= N_c \sum_q e_q^2 \left[ 1 + \frac{3}{4} C_F \frac{\alpha_s}{\pi} + O(\alpha_s^2) \right] \\ &= 3 \sum_q e_q^2 \left[ 1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + O(\alpha_s^2) \right] \end{aligned} \tag{7.34}$$

这里定义的$\alpha_s$是依赖于重整化标度$\mu$，即$\alpha_s(\mu^2)$。由于重整化标度的任意性，很难保证微扰论的可应用性。但对于大$Q^2$区域内$R$值的渐近行为我们可应用上一章中讨论的重整化群方程一般解(6.66)式，$R$值将由跑动耦合常数$\bar{\alpha}_s(Q^2)$确定。

注意到电磁流是守恒流它的反常量纲为零。那么(7.3)式$R$值所满足的重整化群方程应为

$$\left[ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g_R) \frac{\partial}{\partial g_R} \right] R\left( \frac{S}{\mu^2}, g_R \right) = 0 \tag{7.35}$$

由(6.70)式给出(7.35)的一般解

$$R\left( \frac{S}{\mu^2}, g_R \right) = R(1, \bar{g}(S)) \tag{7.36}$$

因此(7.34)式在大$Q^2$区域内变为

$$\begin{aligned} R &= N_c \sum_q e_q^2 \left[ 1 + \frac{3}{4} C_F \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} + O(\alpha_s^2(Q^2)) \right] \\ &= 3 \sum_q e_q^2 \left[ 1 + \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} + O(\alpha_s^2(Q^2)) \right] \end{aligned} \tag{7.37}$$

其中跑动耦合常数$\alpha_s(Q^2) = \bar{g}^2(S)/4\pi$在单圈近似下

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\bar{g}^2(S)}{4\pi} = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}} \tag{7.38}$$

从单圈图下对 R 值的修正(7.37)式可以见到

a. 由于 QCD 是惭近自由理论，高阶修正是可计算的，而且所有同级图形相加后无红外发散问题。

b. 修正项大于零，实验上可以确定 Λ 值的大小。一级修正 $\frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} \sim (10-15)\%$，当$Q^2 > 2GeV^2$。

c. 随着$Q^2$增加，QCD 修正将以对数行为减小。当$Q^2 \to \infty$时$R$值回到了部分子模型的结果。

如果进一步考虑双圈图修正，其结果为

$$R = 3 \sum_q e_q^2 \left[ 1 + \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} + (B + A\ N_f) \left( \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} \right)^2 + \cdots \right] \tag{7.39}$$

其中$AN_f$项起源于夸克圈的贡献，常数$A$和$B$依赖于减出方案。在$MS$方案里计算是

$$\begin{aligned} B &= \frac{365}{24} - 11\zeta(3) + \frac{33}{12}(\ln 4\pi - \gamma_E) = 7.36 \\ A &= \frac{2}{3}\zeta(3) - \frac{11}{12} - \frac{1}{6}(\ln 4\pi - \gamma_E) = -0.44 \end{aligned} \tag{7.40}$$

其中$\varsigma$是 Riemann zeta 函数,$\varsigma(3)=1.202$,$\gamma_E=0.5772$是 Euler 常数。正像第五章第二节介绍的在$\overline{MS}$方案里只相差$(\ln 4\pi-\gamma_E)$项,即在(7.40)式中去掉第三项即得$\overline{MS}$方案里常数$A$和$B$,

$$B=\frac{365}{24}-11\varsigma(3)=1.99$$
$$A=\frac{2}{3}\varsigma(3)-\frac{11}{12}=-0.12 \qquad (7.41)$$

在(7.39)式参量$N_F$是夸克的味数，它的选取取决于过程的能量$S=q^2$，因为在计算过程中已忽略了夸克的质量，即(7.39)式仅在$S\square m_q^2$时成立，略去了$O(m_q^2/S)$。此项修正要与$\alpha_s$级修正相匹配，因此在某种味夸克产生阈附近用(7.39)式计算 QCD 修正的准确性就差。仅在正负电子湮灭过程能量$S\square m_b^2$时，五种味夸克都有可能在终态产生。将具体的$N_F$数代入就可以发现$\alpha_s^2$阶的系数在$\overline{MS}$方案里要比$MS$方案里小很多,因此微扰级数的收敛性比较好,$\overline{MS}$方案更合适于讨论$R$值的 QCD 高阶修正。

## §3　复合算符和算符乘积展开

在第二章中已给出电子深度非弹散射截面公式(2.46)和(2.51)式。其中$W_{\mu\nu}$可以是相关于虚光子－强子向前散射的吸收部分，

$$W_{\mu\nu}=\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\ T_{\mu\nu}$$

$$T_{\mu\nu}=i\int d^4x\ e^{iqx}<P|T(J_\mu(x)J_\nu(0))|P>$$

此式对弱作用下中微子深度非弹散射也成立。利用 Lorentz 协变性和流守恒条件可得$T_{\mu\nu}$的一般形式，

$$\begin{aligned}T_{\mu\nu}=&\left(-g_{\mu\nu}+\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)T_1(q^2,\nu)\\&+\frac{1}{M^2}\left(P_\mu-\frac{\nu q_\mu}{q^2}\right)\left(P_\nu-\frac{\nu q_\nu}{q^2}\right)T_2(q^2,\nu)\\&-\frac{\mathrm{i}}{2M^2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}P^\alpha q^\beta\ T_3(q^2,\nu)\end{aligned}\qquad(7.42)$$

当附加上宇称守恒条件时，则有$T_3=0$，所以$T_3\neq0$仅在弱相互作用过程中出现。将$T_{\mu\nu}$与$W_{\mu\nu}$相比较，则有

$$W_i(q^2,\nu)=\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\,T_i(q^2,\nu)\qquad(7.43)$$

注意到 Bjorken 极限

$$\begin{aligned}Q^2=-q^2&\to\infty\\\nu&\to\infty\end{aligned}\qquad x=\frac{Q^2}{2M\nu}\text{固定}\qquad(7.44)$$

下结构函数$W_i$的行为将取决于流算符$J_\mu(x)J_\nu(0)$的编时乘积或对易子在Bjorken极限下对$d^4x$积分后的行为。而对$d^4x$积分有一个因子$e^{iqx}$，实际上对积分有贡献的区域限制在$q\cdot x\approx1$的区域内。现在考察$q\cdot x$在Bjorken极限下的行为。取靶静止的参考系内，

$$
\begin{aligned}
&P=(M,\overline{O})\\
&P\cdot q=M\ q^0 \qquad\qquad \mathrm{q}^0=\nu\\
&Q^2=\nu^2-(q^3)^2 \qquad \mathrm{q}^3=\sqrt{\nu^2+Q^2}
\end{aligned}
\tag{7.45}
$$

$$
\begin{aligned}
q\cdot x=&\frac{1}{2}\left(\nu-\sqrt{(\nu^2+Q^2)}\right)(x^0+x^3)\\
&+\frac{1}{2}\left(\left(\nu+\sqrt{(\nu^2+Q^2)}\right)\right)(x^0-x^3)\\
&\to -\frac{1}{2}Mx(x^0+x^3)+\nu(x^0-x^3)
\end{aligned}
\tag{7.46}
$$

对积分有贡献的区域$(q\cdot x\sim 1)$则是

$$
\begin{aligned}
&|\,x^0+x^3\,|\sim\frac{2}{Mx}\\
&|\,x^0-x^3\,|\sim\frac{1}{\nu}
\end{aligned}
$$

这相当于

$$
\begin{aligned}
x^2=(x^0-x^2)(x^0+x^3)-x_\perp^2&\approx\frac{2}{M\nu x}-x_\perp^2\\
&=\ \frac{4}{Q^2}-x_\perp^2<\frac{4}{Q^2}
\end{aligned}
\tag{7.47}
$$

第二章中已指出上述积分有支集$x^2>0$，当$Q^2\to\infty$时，必有$x^2$□$0$。这意味着对$x$积分的贡献主要来自于$x^2$接近光锥的区域，更确切地说，只有那些在光锥上流算符的对易子或者光锥上的流算符编时乘积才对积分起主要贡献。因此这些流算符的对易子和编时乘积在光锥上的行为就很重要。

类似地讨论对正负电子湮灭过程也成立。从(7.6)和(7.7)式

$$
\begin{aligned}
w_{\mu\nu}&=\int d^4x\ e^{iqx}\left\langle 0\middle|\, j_\mu(x)\,j_\nu(0)\middle|0\right\rangle\\
&=\int d^4x\ e^{iqx}\left\langle 0\middle|[\,j_\mu(x),\,j_\nu(0)]\middle|0\right\rangle
\end{aligned}
$$

可以见到取正负电子的质心系$\vec{q}=0$，当$q_0\to\infty$时对上述积分主要贡献

来自于$x_0 \to 0$的区域，由于$w_{\mu\nu}$的支集是$x^2 \geq 0$就有$\vec{x} \to 0$，因此对上述积分主要贡献就来自于$x \to 0$的区域，也就是说来自于小距离区域。

总之，无论是电子-质子深度非弹过程还是正、负电子湮灭过程在高能下的行为都取决于流算符乘积在$x \to 0$或$x^2 \to 0$对矩阵元的贡献。因此研究流算符乘积在短距离下的主导项和非主导项就非常重要。

一般地讲，算符乘积是一个复合算符，当$x \to 0$或$x^2 \to 0$时它是奇异的，对于具有发散性质的复合符需要有确切的定义。例如在自由场论里，我们知道标量场算符的$T$乘积由 Wick 定理定义为

$$T\left(\phi(x)\phi(y)\right) = \langle 0|T\left(\phi(x)\phi(y)\right)|0\rangle + :\phi(x)\phi(y): \qquad (7.48)$$

其中$:\phi(x)\phi(y):$是正规乘积，真空平均值$\langle 0|T\left(\phi(x)\phi(y)\right)|0\rangle$就是中性标量场$\phi(x)$的自由传播子

$$\langle 0|T\left(\phi(x)\phi(y)\right)|0\rangle = -i\Delta(x-y) = -i\int \frac{d^4k}{(4\pi)^4}\frac{e^{-ik(x-y)}}{m^2-k^2-i\varepsilon} \qquad (7.49)$$

显然$\Delta(x-y)$在$y \to x$时是奇异的。为了见到这一点，可以将(7.49)式右边动量积分完全积出就得到

$$\Delta(x-y) = \frac{1}{4\pi}\delta((x-y)^2) + i\frac{m}{4\pi^2}\frac{K_1(m\sqrt{-(x-y)^2+i\varepsilon})}{\sqrt{-(x-y)^2+i\varepsilon}} \qquad (7.50)$$

其中$K_1(a)$是第二类修正的 Bessel 函数。由(7.50)式可以抽出$\Delta(x-y)$在光锥区域的行为，

$$\Delta(x-y) \xrightarrow[(x-y)^2\to 0]{} \frac{i}{4\pi^2}\frac{1}{-(x-y)^2+i\varepsilon} \qquad (7.51)$$

此式告诉我们$T(\phi(x)\phi(y))$可以展开为两项，第一项是奇异的，与质量无关，第二项是正则的。如果流算符就是由标量场构成的，

$J(x)=:\phi^2(x):$，当忽略相互作用按自由场展开时，则有

$$T\left[J\left(\frac{x}{2}\right)J\left(-\frac{x}{2}\right)\right]_{x^2\to 0}=-2\left[\Delta(x,m^2)\right]^2$$
$$+4\ \Delta(x,m^2):\phi\left(\frac{x}{2}\right)\phi\left(-\frac{x}{2}\right):$$
$$+:\phi^2\left(\frac{x}{2}\right)\phi^2\left(-\frac{x}{2}\right): \qquad (7.52)$$

其中第一项是最奇异的，第二次是次奇异的，第三项是正则的。从式(7.52)可以见到在自由场情况下光锥上流算符编时乘积展开是由两部分组成的：定域正则算符和奇异的展开系数。其中第一项的正则算符是 1,而后两项则是正规乘积，光锥奇异性被包含在展开系数内。这样上述算符乘积展开很好地定义了复合算符。

前面提到的流算符是由夸克场量构成的，在费米场的情况下

$$T\left(\psi(x)\bar{\psi}(y)\right)=\langle 0|T\left(\psi(x)\bar{\psi}(y)\right)|0\rangle+:\psi(x)\bar{\psi}(y): \qquad (7.53)$$

其中第一项真**空平均值在自由场的情况下就是夸克传播子**，

$$\langle 0|T\left(\psi(x)\bar{\psi}(y)\right)|0\rangle=-iS(x-y)=-i\int\frac{d^4p}{(4\pi)^4}\frac{e^{-ip(x-y)}}{m-\not{p}-i\varepsilon} \qquad (7.54)$$

同样当 $y=x$ 时是奇异的。而第二项正规乘积定义的复合算符是正则的。注意到

$$S(x)=(i\not{\partial}+m)\Delta(x) \qquad (7.55)$$

由 $\Delta(x)$ 的表达式（7.50）可以抽出 $S(x)$ 的最奇异项（忽略夸克质量），

$$S(x)\xrightarrow[x^2\to 0]{}\frac{1}{4\pi^2}\frac{i\not{x}}{[x^2-i\varepsilon]^2} \qquad (7.56)$$

以正规乘积定义夸克流算符

$$j_\mu(x)=:\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x):$$

在自由场下应月 Wick 定理就可以得到流算符乘积展开式，

$$\begin{aligned} T(j_\mu(x)j_\nu(0)) = &-Tr\left(\langle 0|T(\psi(0)\bar{\psi}(x))|0\rangle\gamma_\mu\langle 0|T(\psi(x)\bar{\psi}(0))|0\rangle\gamma_\nu\right) \\ &+:\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\langle 0|T(\psi(x)\bar{\psi}(0))|0\rangle\gamma_\nu\psi(0): \\ &+:\bar{\psi}(0)\gamma_\nu\langle 0|T(\psi(0)\bar{\psi}(x))|0\rangle\gamma_\mu\psi(x): \\ &+:\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)\bar{\psi}(0)\gamma_\nu\psi(0): \end{aligned} \tag{7.57}$$

同样地此展开式表达了第一项是最奇异的，第二、三项是次奇异的，第四项是正则的。将（7.56）代入到（7.57）式并应用等式

$$\begin{aligned} &\gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\nu = (s_{\mu\lambda\nu\rho} + i\varepsilon_{\mu\lambda\nu\rho}\gamma_5)\gamma^\rho \\ &s_{\mu\lambda\nu\rho} = g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} + g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} - g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho} \\ &Tr(\gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\nu\gamma_\rho) = 4(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho} + g_{\mu\rho}g_{\lambda\nu}) \end{aligned} \tag{7.58}$$

就可以获得 $x^2 \to 0$ 的展开式，

$$\begin{aligned} T(j_\mu(x)j_\nu(0)) = &\frac{x^2 g_{\mu\nu} - 2x_\mu x_\nu}{\pi^4(x^2 - i\varepsilon)^4} + \frac{ix^\lambda}{2\pi^2(x^2 - i\varepsilon)^2}s_{\mu\lambda\nu\rho}O_V^\rho(x,0) \\ &+ \frac{x^\lambda}{2\pi^2(x^2 - i\varepsilon)^2}\varepsilon_{\mu\lambda\nu\rho}O_A^\rho(x,0) + O_{\mu\nu}(x,0) \end{aligned} \tag{7.59}$$

其中正规乘积算符定义如下：

$$O_V^\mu(x,0) =: \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(0) - \bar{\psi}(0)\gamma^\mu\psi(x): \tag{7.60}$$

$$O_A^\mu(x,0) =: \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(0) + \bar{\psi}(0)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x): \tag{7.61}$$

$$O_{\mu\nu}(x,0) =: \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)\bar{\psi}(0)\gamma_\nu\psi(0): \tag{7.62}$$

这样，（7.59）式给出的算符乘积展开式逐项的系数包含了短距离的奇异性。如果在（7.59）式两边取矩阵元，那么相应于（7.59）式右边正规乘积算符矩阵元就包含了物理过程大距离的物理信息。

一般地讲，场量不是自由场而具有相互作用，在有相互作用的情况下算符乘积展开应该不同于自由场的情况。然而，一个渐近自由的场论，例如 QCD，原则上可以应用微扰论将两者的差别计算出来。因此由自由场所给出的算符乘积展开结构仍然是十分重要的。Wilson 提议对于有相互作用的场算符利用算符乘积的展开定义复合

算符，设$A(x)$和$B(y)$为任意两个算符，它们的乘积可以用下列算符乘积展开来定义，

$$A(x)B(y)=\sum_N C_N(x-y)O_N(x,y) \qquad (7.63)$$

其中展开系数$C_N(x-y)$在$y=x$时是奇异的，双定域算符$O_N(x,y)$是正则的。而第一项**算符$O_0(x,y)=I$是单位算符，其系数$C_0(x-y)$在$y\to x$时是最奇异的，第二项系数比第一项次奇异，依次一项比一项奇异性减小。这一展开式的证明曾由 Zimmermann 利用 BPHZ 方法在微扰论框架内完成。本书不作叙述。**

进一步注意$O_N(x,y)$是正则的，当$y\to x$时可以对它进行 Taylor 级数展开而给出算符乘积的 Lorentz 结构。例如对于中性标量场

$$:\phi(x)\phi(0):\underset{x\to 0}{=}\sum_N \frac{1}{2N}x_{\mu_1}\cdots x_{\mu_n}\phi(0)\ \overleftrightarrow{\partial}_{\mu_1}\cdots\overleftrightarrow{\partial}_{\mu_N}\phi(0) \qquad (7.64)$$

将(7.64)代入到(7.63)式就可以得到算符的 T 乘积小距离展开的一般表达式为

$$iT(A(x)B(0))_{x\to 0}\approx\sum_{j,N} C_{j,N}(x)\ x_{\mu_1}\cdots x_{\mu_N}\ O^j_{\mu_1\cdots\mu_N}(0) \qquad (7.65)$$

在 A(x)和 B(x)是由标量场Φ(x)组成的流算符的情况下，则双定域算符$O^j_{\mu_1\cdots\mu_1}(0)=\phi(0)\overleftrightarrow{\partial}_{\mu_1}\cdots\overleftrightarrow{\partial}_{\mu_N}\phi(0)$。在旋量场的情况下，那些正则的双定域算符除了微商算符外还应有γ矩阵，例如$O_{\mu\nu}=\bar{\psi}(0)\gamma_\mu\partial_\nu\psi(0),\cdots$。由于展开式(7.65)中$x_{\mu_1}\cdots x_{\mu_N}$是对称的，因此其相应的算符$O_{\mu_1\cdots\mu_N}(0)$应是对称无迹的张量算符。

实际上算符乘积展开式也确定了奇异展开系数在$x^2\to 0$时的奇异行为，因为展开式左边的量纲是一定的，由量纲分析就可以确定展

开系数的行为。例如，式(7.59)的第一项的算符是 I，展开系数~$\left(\frac{1}{x^2}\right)^2$，第二项的展开系数~$\frac{1}{x^2}$。 这些系数与质量无关，其量纲唯一由 $x^2$ 决定。由(7.65)式知

$$d_A + d_B = d_{C_{j,N}} + d_{O_N^j} - N \tag{7.66}$$

其中 N 是算符 $O_N^j$ 的自旋，因此展开系数 $C_{j,N}$ 的量纲

$$d_{c_{j,N}} = (d_A + d_B) - (d_{O_N^j} - N) \tag{7.67}$$

$$= (d_A + d_B) - Twist$$

$$Twist = d_{O_N^j} - N \tag{7.68}$$

可以见到算符 $d_{O_N^j} - N$ 的 Twist 大小直接确定了 $C_N^J(x)$ 的奇异行为，Twist 值越小，奇异度越大。相同的 Twist 算符具有相同的奇异性。对于高能现象，$Q^2 \to \infty$，仅那些最奇异的项贡献是主要的，因此具有最低 Twist 的算符的贡献是最重要的。

## §.3 Scaling 破坏现象和结构函数的演化过程

前面已经指出，从理论上讲 Scaling 现象存在是从假定强子内部的部分子为点粒子且它们之间无相互作用导出的。因此任何对这两个假定的偏离都会导致 Scaling 现象的破坏。实验上告诉我们 Scaling 现象仅在一定的$Q^2$范围内保持，当$Q^2$再继续增加时，强子的结构函数明显地依赖于$Q^2$，即$F_i(x) \to F_i(x,Q^2)$。如果 Parton 不是点粒子，那么每一个 parton 都有大小，或者说具有形状因子$f_i(Q^2)$，那么结构函数自然依赖于$Q^2$。然而直至目前能量范围内并没有迹象表明部分子对点粒子假定的偏离。从量子场论的角度很自然地考虑部分子之间的相互作用，量子色动力学的渐近自由性质提供了这种相互作用的理论基础，当$Q^2$很高时耦合常数趋于零，那么可以将部分子模型的结果作为零级近似，微扰 QCD 的高阶修正应给出 Scaling 的破坏行为，即结构函数随$Q^2$的依赖行为。反过来，Scaling 破坏现象的实验结果也将验证量子色动力学理论的正确性。

为了描述 Scaling 破坏现象，我们将描写结构函数的(2.65)式改写为$x$和$Q^2$的函数，

$$F_2(x) \to F_2(x,Q^2) = \sum_i e_{q_i}^2 x G_{P\to q_i}(x,Q^2) \qquad (7.98)$$

其中$G_{P\to q_i}(x,Q^2)$ $(q_i = q,\bar{q},g)$是质子中含部分子为夸克、反夸克、胶子的分布函数$G_{P\to q}(x,Q^2)$，$G_{P\to \bar{q}}(x,Q^2)$，$G_{P\to g}(x,Q^2)$。

定义单态分布函数

$$G^s(x,Q^2) = \sum_i^{n_f}\left[G_{P\to q_i}(x,Q^2) + G_{P\to \bar{q}_i}(x,Q^2)\right] \qquad (7.99)$$

和非单态分布函数

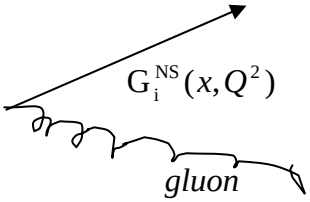
$$G_i^{NS}(x,Q^2)=G_{P\to q_i}(x,Q^2)-G_{P\to \bar{q}_i}(x,Q^2) \qquad (7.100)$$

此外还有胶子分布函数$G_{P\to g}(x,Q^2)$。单态分布函数$G^s(x,Q^2)$和胶子分布函数$G_{P\to g}(x,Q^2)$是味无关的结构函数，两者相互关联，定义

$$\underline{G}(x,Q^2)=\begin{pmatrix} G^s(x,Q^2) \\ G_{p\to g}(x,Q^2)\end{pmatrix} \qquad (7.101)$$

现在分别应用量子色动力学理论计算$\underline{G}(x,Q^2)$和$G_i^{NS}(x,Q^2)$.对于$G^{NS}(x,Q^2)$不会有来自胶子产生正、反夸克对的贡献，仅有来自夸克或反夸克发射胶子引起的分布函数$G_i^{NS}(x,Q^2)$随$Q^2$的改变，这一改变以下述图示方程来表示

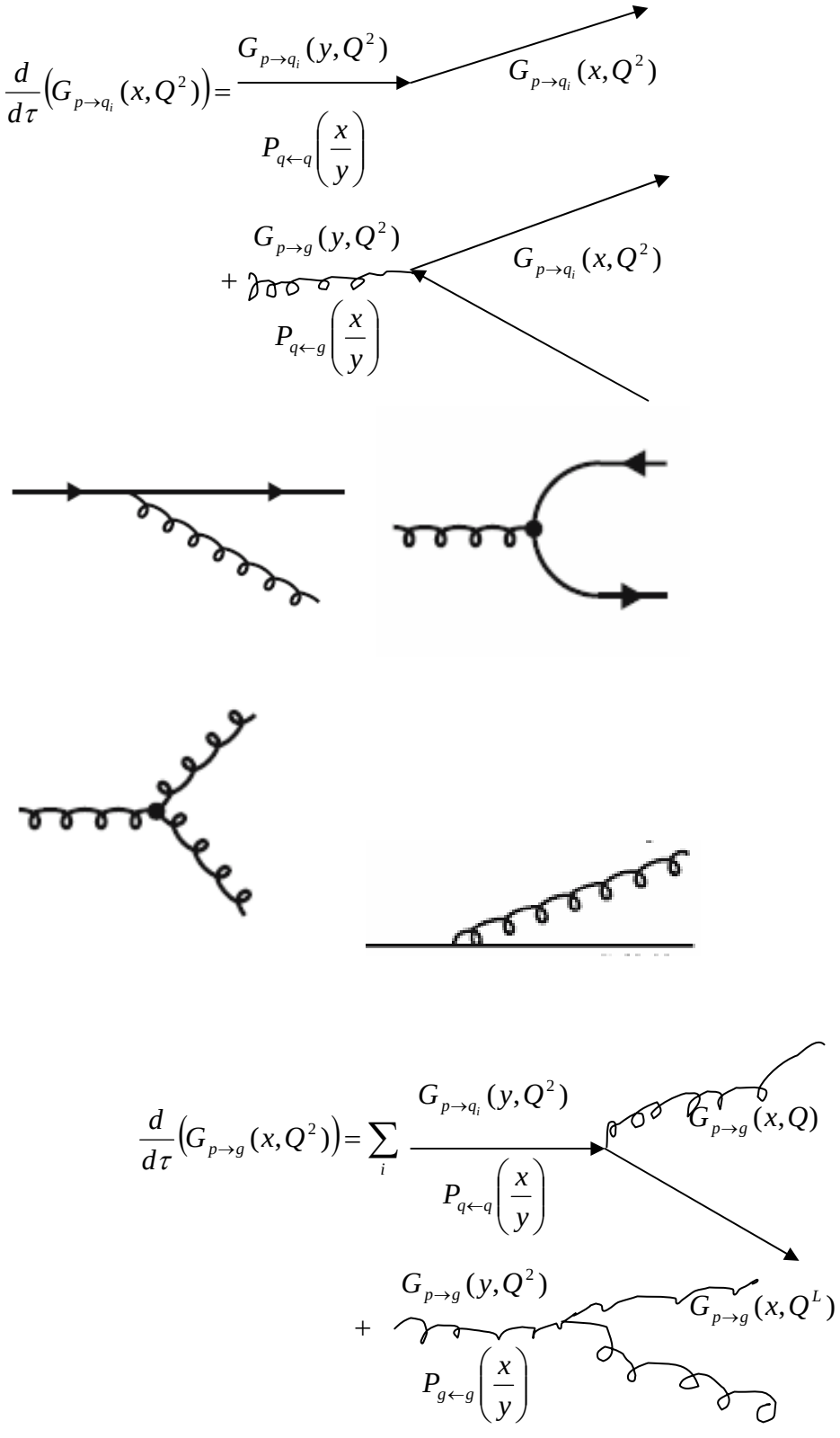
$$\frac{d}{d\tau}\left(G_i^{NS}(x,Q^2)\right)=\frac{G_i^{NS}(y,Q^2)}{P_{q\leftarrow q}\left(\frac{x}{y}\right)}$$




其中

$$\tau=\log\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right) \qquad (7.102)$$

然而当考虑到单态分布函数的改变时就不能与胶子分布函数分开，因为胶了产生一对正、反夸克也引起分布函数的改变。(7.101)意味着单态分布函数$G^s(x,Q^2)$的改变与胶子分布函数$G_{p\to g}(x,Q^2)$的改变是一个联立的方程。单态分布函数和胶子分布函数的改变都包含两项，一项是夸克发射胶子产生的，另一项是胶子转变为正、反夸克对产生的。可用下述物理图示方程表示，




上述图示方程描述了单态、非单态、胶子分布函数随$Q^2$的变化。其中包含了四个劈裂(splitting)函数$P_{q\leftarrow q}(z)$、$P_{q\leftarrow g}(z)$、$P_{g\leftarrow q}(z)$、$P_{g\leftarrow g}(z)$，它们确定了上述 Parton 分布函数的改变率。问题就在于如何在 QCD 中计算

这些劈裂函数。

1972 年 Gribov 和 Lipatov 在 QED 中计算了电子-光子相应的分布函数的改变率。QED 中高能极限下电子质量可忽略，一个电子发射一个光子或者一个光子转变为一对正、反电子。显然在这些计算中存在共线发散，即由电子发射共线光子的质量奇异性。一个高能电子发射一个共线光子将贡献一个质量奇异性因子 $\alpha \log(S/m^2)$，这在第二节讨论正、负电子湮灭过程红外发散相消已见到这一情况。初态电子发射共线光子导至电子内的 parton 分布函数，而分布函数随 $Q^2$ 的改变率给出了分布函数的微分方程对求出 QCD 中劈裂函数是很类似的。高能电子有足够能量发射 n 个共线光子，给出相应的贡献 $(\alpha \log(S/m^2))^n$。关键是如何将发射 n 个共线光子的贡献求和起来改进微扰论的计算。Gribov 和 Lipatov 在 QED 中做梯形近似并将所有发射 n 个共线光子的贡献求和给出了主导级贡献。人们可以设想一个电子劈裂为一个虚电子加上一个光子是一个连续演化的过程，在 QED 中一个高能电子与靶发生相互作用前发射共线光子的计算可以看作一束具有一定份额能量的实光子，这就是 Weizsacker-Williams 等效光子近似，相应地给出入射电子中发现具有一定能量份额的光子的几率，即 Weizsacker-Williams 分布函数。这一过程依赖于 $Q^2$，当 $Q$ 变化到 $Q+\Delta Q$ 时，电子在此间隔内辐射一个光子引起几率分布函数的改变，每一个 $\Delta Q$ 间隔内分布函数的改变率(即分布函数的微分)都可通过子过程的计算给出。将所有连续发射过程加起来就相当于梯形近似下求和从而给出分布函数演化的结果。在发射光子的同时也发射一个虚

电子也可计算在入射电子中的电子分布函数。此外在辐射光子同时还需考虑光子转化为一对几乎共线电子和正电子，对电子和光子分布函数都有同量级的效应。对于这些计算有兴趣的读者可以参阅　　，这里只列出 QED 中劈裂函数的结果，

$$\begin{aligned} P_{e\leftarrow e}(z) &= \frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2}\delta(1-z) \\ P_{\gamma\leftarrow e}(z) &= \frac{1+(1-z)^2}{z} \\ P_{e\leftarrow \gamma}(z) &= z^2 + (1-z)^2 \\ P_{\gamma\leftarrow \gamma}(z) &= -\frac{2}{3}\delta(1-z) \end{aligned} \tag{7.103}$$

其中$1/(1-z)_+$形式上定义为

$$\frac{1}{(1-z)_+} = \frac{1}{1-z}\theta(1-z-\beta) + \log\beta\delta(1-z-\beta) \tag{7.104}$$

上式中$\beta$可以理解为使得红外发散有定义而引入的($\beta = m_g^2/Q^2$)。因为当$z\to 1$时积分发散，$\beta$的引入使得积分在$z<1$时进行，即对于任一平滑函数$f(z)$，其积分为

$$\int_0^1 dz \frac{f(z)}{(1-z)_+} = \int_0^1 dz \frac{f(z)-f(1)}{1-z} \tag{7.105}$$

这些结果非常类似于 parton 模型的图象。Parton 模型是 QCD 的零级近似具有 scaling 性质。考虑到夸克-胶子相互作用，QCD 的辐射修正将破坏 scaling 现象。与 QED 类似，QCD 中无质量夸克和胶子当计算共线胶子和夸克时也发生质量奇异性，$\alpha_s(Q^2)\log(Q^2/\mu^2)$，它给出了分布函数演化方程的积分核，由此导致分布函数随$Q^2$的依赖关系。从 QED 推到 QCD 中对(7.103)式中的前三个劈裂函是直接的，只需加上 QCD 中的色因子。由于 QED 中光子没有自作用第四个劈裂

函数$P_{\gamma\leftarrow\gamma}(z)$推到胶子情况不是直接的，因为 QCD 中还必须计算胶子的自作用以及不同味费米子的贡献。现列出 QCD 中劈裂函数的结果：

$$P_{q\leftarrow q}(z)=\frac{4}{3}\left[\frac{1+z^2}{(1-z)_+}+\frac{3}{2}\delta(1-z)\right] \tag{7.106}$$

$$P_{q\leftarrow g}(z)=\frac{1}{2}\left[z^2+(1-z)^2\right] \tag{7.107}$$

$$P_{g\leftarrow q}(z)=\frac{4}{3}\ \frac{1+(1-z)^2}{z} \tag{7.108}$$

$$P_{g\leftarrow g}(z)=6\left[\frac{z}{(1-z)_+}+\frac{1-z}{z}+z(1-z)+\frac{(11-\frac{2}{3}n_f)}{12}\delta(1-z)\right] \tag{7.109}$$

其中$n_f$是夸克的味数。这样就可将 QCD 中上述分布函数改变率的图形化方程精确地用微分方程来表示，

$$\frac{d\ G_i^{NS}(x,Q^2)}{d\tau}=\frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi}P_{q\leftarrow q}\otimes G_i^{NS}(x,Q^2) \tag{7.110}$$

和

$$\frac{d\underline{G}(x,Q^2)}{d\tau}=\frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi}\underline{P}\otimes\underline{G}(x,Q^2) \tag{7.111}$$

其中

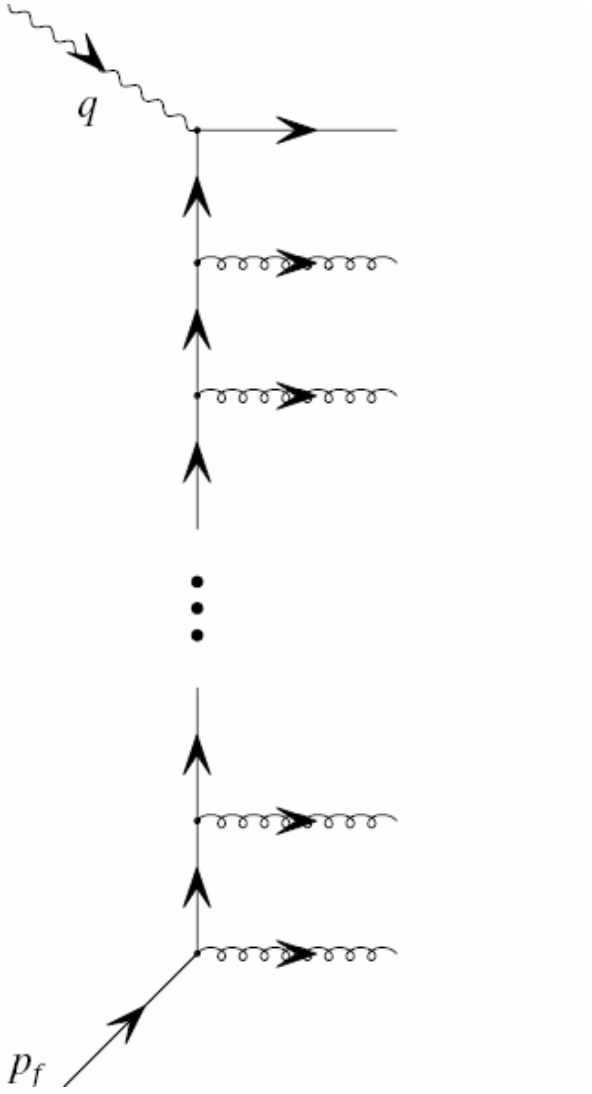
$$\underline{P}(z)=\begin{pmatrix}P_{q\leftarrow q}(z) & 2n_f & P_{q\leftarrow g}(z)\\ P_{g\leftarrow q}(z) & & P_{g\leftarrow g}(z)\end{pmatrix} \tag{7.112}$$

(7.110)和(7.111)式中的卷积⊗定义为

$$C(z)=A\otimes B=\int_z^1\frac{dy}{y}A(z/y)\ \ B(y) \tag{7.113}$$

方程(7.110)和(7.111)称为分布函数的$Q^2$演化方程，亦称 Altarelli-Parisi 演化方程。这一组方程表明夸克分布函数，胶子分布函数随$Q^2$的变

化是由夸克与光子相互作用以前或以后辐射胶子或胶子变为正、反夸克的几率所决定的，这也就从物理上给出了 Scaling 破坏的机制。




为了简便起见，定义

$$K=\frac{2}{\beta_0}\log\left\{\alpha_s(Q_0^2)/\alpha_s(Q^2)\right\} \tag{7.114}$$

因此

$$\frac{dK}{d\tau}=\frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \tag{7.115}$$

这样演化方程(7.110)和(7.111)就变为

$$\frac{dG^{NS}(x,Q^2)}{dK} = P_{q\leftarrow q} \otimes G^{NS}(x,Q^2) \tag{7.116}$$

和

$$\frac{d\underline{G}(x,Q^2)}{dK} = \underline{P} \otimes \underline{G}(x,Q^2) \tag{7.117}$$

其一般解为

$$G^{NS}(x,Q^2) = \exp\left[KP_{q\leftarrow q} \otimes\right] G^{NS}(x,Q_0^2) \tag{7.118}$$

$$\underline{G}(x,Q^2) = \exp\left[K\underline{P} \otimes\right] \underline{G}(x,Q_0^2) \tag{7.119}$$

形式解明显地依赖于初始条件$G^{NS}(x,Q_0^2)$和$\underline{G}(x,Q_0^2)$，一旦知道初始条件就可以获得一般解。形式解(7.118)和(7.119)的定义

$$\begin{aligned} G^{NS}(x,Q^2) &= \exp\left[KP \otimes\right] G^{NS}(x,Q^2) \\ &= \mathrm{G}^{\mathrm{NS}}(x,Q_0^2) + KP \otimes G^{NS}(x,Q_0^2) \\ &\quad + \frac{1}{2}K^2 P \otimes G^{NS}(x,Q_0^2) + \cdots \end{aligned} \tag{7.120}$$

所以$Q^2$的演化方程就给出任意$Q^2$时分布函数的行为，也就给出了结构函数$\mathrm{F}_1$和$\mathrm{F}_2$的行为。这里初始位置$Q_0^2$，是一个标度参量，当$Q^2 > Q_0^2$时，微扰论可用，演化方程成立，就可给出分布函数随$Q^2$的演化行为。因而实际上初始条件$G(x, Q_0^2)$包含了所有非微扰效应，即包含了由束缚态动力学所决定的非微扰部分，可以利用参数化方法从实验上确定下来。这样利用实验上选定的$Q_0^2$下所确定的$G(x, Q_0^2)$代入到演化方程就给出结构函数随$Q^2$的变化关系。再与高$Q^2$下的实验相比较，就可以验证QCD所给出Scaling破坏机制是否正确。由演化方程所给出的随$Q^2$的行为可以定性地从下述图形来表示，当$Q^2 > Q_0^2$时，在小$x$处的结构函数增加，而在大$x$处的结构函数减小。随着$Q^2$增大，

夸克发射出较多的共线胶子而减少它的动量，因此夸克分布函数向小 $x$ 方向移动，同时由于 $Q^2$ 增大更多的胶子转化为共线的夸克、反夸克对致使具有小 $x$ 的parton增加。这两种效应都使得在小 $x$ 处的结构函数增加，由于结构函数是归一的必然迫使在大 $x$ 处的结构函数减小。实验上确实验证了结构函数的演化行为。

# 第八章　微扰 QCD 对遍举过程的应用

上一章中讨论了微扰 QCD 应用到几个经典过程例子，这几个过程有一个共同的特点就是实验上不特指观测某一強子，其截面对终态所有強子求和（喷注现象除外）而依赖于算符乘积的平均值。这样部分子模型或算符乘积展开提供了因子化的基础使得硬子过程在微扰 QCD 框架内可计算。这一章着重讨论微扰应用到遍举（exclusive）过程，所谓遍举过程是指实验上观测所有终态粒子的过程。最简单的遍举过程是大动量迁移$Q^2$下强子（$h$）形状因子（$\gamma^* h \to h$）。強子形状因子微扰分析的早期工作起始于 1979-1980 年 Brodsky-Lepage，Efremov-Radyushin，Duncan-Muller 的文章。这一章将主要以 Brodsky-Lepage 所采用的光锥微扰论讨论强子形状因子在大$Q^2$下的行为。

## §1　强子的光锥波函数

量子色动力学的基本自由度是夸克和胶子，实验上观测的是強子，这就构成了微扰 QCD 理论应用到物理过程的一个主要困难。这一困难在遍举过程中显得更突出了，因为实验上是要分别测量终态強子，这就需要理解強子的内部结构来描述夸克、胶子自由度如何转化为实验上观测到的強子。对于任一强子态$|H\rangle$，描述它的内部结构最方便的表象是定义光锥上等时的$\tau = t + Z$的相对论波函数-光锥波函数。

为此，选择第四章中第七节介绍的光锥量子化，　对于任一强子态$|H\rangle$，采用物理的光锥规范，$A^+ = A^0 + A^3 = 0$，这样強子内所有部分子都是物理的夸克和胶子。定义光锥上等时的$\tau = t + z$的相对论波函数，$\psi_n(x_i, k_{\perp i}, \lambda_i)$，其中$k_{\perp i}$是第

$i$个部分子(夸克和胶子)的横动量，当$P^3 \to \infty$时，即无穷大参考系，$x_i$是第$i$个部分子的纵向动量分量，

$$x_i = \frac{k_i^+}{P^+} = \frac{(k^0 + k^3)_i}{P^0 + P^3} \quad 。 \tag{8.1}$$

动量守恒要求满足下列等式：

$$\sum_{i=1}^{n} k_{\perp i} = 0 \tag{8.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \qquad (0 < x_i < 1) \tag{8.3}$$

其中每个部分子都在质壳上，即$k_i^2 = m_i^2$或$k_i^- = \frac{k_{\perp i}^2 + m_i^2}{k_i^+}$，在波函数中$\lambda_i$是每个部分子的自旋投影。按照光锥量子化定义一组描述強子内部分子的福克态$|n\rangle$，

$$\begin{aligned} &|0\rangle \\ &|q\bar{q}\rangle = b^*(x_1, k_{\perp 1}, \lambda_1) d^*(x_2, k_{\perp 2}, \lambda_2)|0\rangle \\ &|q\bar{q}g\rangle = b^*(x_1, k_{\perp 1}, \lambda_1) d^*(x_2, k_{\perp 2}, \lambda_2) c^*(x_3, k_{\perp 3}, \lambda_3)|0\rangle \\ &\quad \vdots \\ &|n : x_i, k_{\perp i}, \lambda_i\rangle \end{aligned} \tag{8.4}$$

以$\pi$-介子为例，其展开式为

$$|\pi\rangle = \psi_{q\bar{q}}|q\bar{q}\rangle + \psi_{q\bar{q}g}|q\bar{q}g\rangle + \psi_{q\bar{q}q\bar{q}}|q\bar{q}q\bar{q}\rangle + \cdots \tag{8.5}$$

或者由$\pi$-介子态在组态$|n\rangle$上的投影定义了$\pi$-介子光锥波函数，

$$\psi_n^{\pi}(x_i, k_{\perp i}, \lambda_i) = \langle n|\pi\rangle$$

一般地讲，对于任一强子态$|h\rangle$，可以对福克态$|n\rangle=|n;x_i,k_{\perp i},\lambda_i\rangle$展开

$$|h\rangle=\sum_{n,\lambda_i}\int[dx][dk_\perp]\psi_n(x_i,k_{\perp i},\lambda_i)\prod_{fermions}\frac{u(x_i,k_{\perp i},\lambda_i)}{\sqrt{x_i}}\prod_{gluons}\frac{\varepsilon(x_i,k_{\perp i},\lambda_i)}{\sqrt{x_i}}|n\rangle \tag{8.6}$$

显然$\psi_n$表示在给定$\tau$时刻强子$h$中找到具有纵向动量$x_i$，横向动量$k_{\perp i}$和自旋$\lambda_i$的福克态$|n\rangle$的几率振幅。由此展开式，再利用强子态归一条件$\langle h|h\rangle=1$,就导至福克组态波函数满足的归一条件

$$\sum_n\int[dx][dk_\perp]\sum_{\lambda_i}|\psi_n(x_i,k_{\perp i},\lambda_i)|^2=1 \tag{8.7}$$

其中$n$是对所有可能的福克态求和，对于介子来讲$n=2,\cdots,\infty$，对于重子来讲$n=3,\cdots,\infty$。方程(8.4)中的$[dx],[dk_\perp]$分别定义为

$$\begin{aligned}[dx]&=\delta(1-\sum_i^n x_i)\prod_{i=1}^n dx_i\\ [dk_\perp]&=16\pi^2\delta^{(2)}(\sum_{i=1}^n k_{\perp i})\prod_{i=1}^n\frac{d^2k_{\perp i}}{16\pi^3}\end{aligned} \tag{8.8}$$

这两个因子给出三动量守恒。从式（8.6）可以见到介子内光锥波函数$\psi_n(x_i,k_{\perp i},\lambda_i)$与$\pi$介子动量无关，因为$x_i$代表部分子所携带的纵向动量成分，$k_{\perp i}$是部分子相对于$\pi$介子运动方向的横向动量，自然，它们是与$\pi$介子总动量参考系无关的(可以取$P^+=1$)。前面第四章第七节已提到这些福克组态都是离壳（光锥坐标下定义的能量$\varepsilon_n$）的，因而

$$\varepsilon_n=P^--\sum_{i=1}^n k_i^-=\frac{M^2}{P^+}-\frac{1}{P^+}\sum_{i=1}^n\frac{k_{\perp i}^2+m_i^2}{x_i}<0 \tag{8.9}$$

任一强子态，除了真空态以外，它们都是QCD总哈密顿量的本征态。

如像$\pi$介子，它必须是哈密顿量的本征态，即

$$(M_\pi^2 - H_{L.C})|\pi\rangle = 0 \qquad (8.10)$$

这里已取了$P_\pi = (1, P^-, 0_\perp), P^- = M_\pi^2$ 。利用式(8.6)和(8.10)，可以获得一个联立的积分方程

$$\left(M_\pi^2 - \sum_i \frac{\vec{k}_{\perp i}^2 + m_i^2}{x_i}\right)\begin{bmatrix}\psi_{q\bar{q}/\pi}\\ \psi_{q\bar{q}g/\pi}\\ \vdots\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\langle q\bar{q}|V|q\bar{q}\rangle & \langle q\bar{q}|V|q\bar{q}g\rangle & \cdots\\ \langle q\bar{q}g|V|q\bar{q}\rangle & \langle q\bar{q}g|V|q\bar{q}g\rangle & \cdots\\ \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_{q\bar{q}/\pi}\\ \psi_{q\bar{q}g/\pi}\\ \vdots\end{bmatrix} \qquad (8.11)$$

其中 V 是相互作用部分，由方程（4.179）描述。它包括了各种可能的相互作用项，仅仅是所有不可约图形。原则上讲，这些无穷的联立方程组确定了强子谱和强子波函数。当然要想解这个方向是相当困难的，然而从方程（8.11）可以得到强子组态波函数的一些重要特点。首先从方程（8.11）可知所有强子组态波函数具有一般形式

$$\begin{aligned}\psi_n(x_i, k_{\perp i}, \lambda_i) &= \frac{1}{M^2 - \sum_i^n [\frac{k_\perp^2 + m^2}{x}]_i}(V\psi)\\ &= \frac{1}{\varepsilon_n}(V\psi)\end{aligned} \qquad (8.12)$$

$$\varepsilon_n = M^2 - \sum_i^n [\frac{k_\perp^2 + m^2}{x}]_i$$

参量$\varepsilon_n$是标志着一个福克组态远离能量壳的程度。注意到在展开式8.6）中每一组态内的裸量子是处于质壳上，但它们是离能壳的，即$\varepsilon_n \neq 0$。显然，当$\varepsilon_n \to -\infty$时，组态波函数$\psi_n \to 0$。一般地讲，当$k_{\perp i}^2$和$m_i^2$变大，$x$变小时，$\varepsilon_n$变大，波函数$\psi_n$变小。这就是说对一个物理强子来讲，很少的几率处于离壳的福克组态。

形式上，这些性质可以转化为波函数的边界条件。例如要求自由哈密顿量的平均值有限，这就导致条件

$$\begin{cases} k_{\perp i}^2 \psi_n(x_i, k_{\perp i}, \lambda_i) \to 0 & \text{当} k_{\perp i}^2 \to \infty \\ \psi_n(x_i, k_{\perp i}, \lambda_i) \to 0 & \text{当} x_i \to 0 \end{cases} \tag{8.13}$$

实际上，这两个约束条件在微扰 QCD 里并不能满足。因为在微扰 QCD 里有

$$\begin{cases} \psi_{q\bar{q}} \sim \frac{1}{k_\perp^2} \\ \psi_{q\bar{q}g} \sim \frac{1}{k_\perp} \end{cases} \quad \text{大} k_\perp \tag{8.14}$$

显然方程(8.14)给出的波函数渐近行为是破坏边界条件(8.13)，因而无法满足规一化条件（8.7)、出现一系列的无穷大问题，这当然不是人们所期望的，这是因为整个理论还是未重整化的，从微扰论计算的波函数行为也是未重整化的结果。

为了使理论消除发散给出有限的结果，引入截断量 $\Lambda$，去掉那些具有光锥能量 $|\varepsilon| \geq \Lambda^2$ 的福克组态。这样一个参量可以用 Pauli-Villars 正规化方法引入，当 $k_\perp^2 \geq \Lambda^2$ 时，波函数的行为将变为

$$\begin{cases} \psi_{q\bar{q}} \sim \frac{1}{k_\perp^4} \\ \psi_{q\bar{q}g} \sim \frac{1}{k_\perp^3} \end{cases} \quad \text{当} k_\perp^2 \gtrsim \Lambda^2 \tag{8.15}$$

因而也满足边界条件（8.13)。

对于一个重整化理论，只要截断参量 $\Lambda$ 相对于所有质量标度以及相关过程的能量来讲足够地大，任何过程的结果将不依赖于截断参量 $\Lambda$。具有能量 $|\varepsilon| \geq \Lambda^2$ 的福克组态无需考虑，它们所引起的低能效应可以被吸收到耦合常数、质量中给出理论上有效拉氏函数

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(\Lambda)} &= \bar{\psi}(i\hat{D} - g(\Lambda)\hat{A} - m(\Lambda))\psi - \frac{1}{4}F^2 \\ &\quad + O(\frac{1}{\Lambda}\bar{\psi}\sigma \cdot F\psi + \cdots\cdots)\end{aligned} \tag{8.16}$$

这些裸参量随 Λ 变化由下述方程确定：

$$\Lambda^2 \frac{d}{d\Lambda^2}\alpha_s(\Lambda) = \beta(\alpha_s(\Lambda), \frac{m(\Lambda)}{\Lambda}) \tag{8.17}$$

一般地讲，在方程（8.16）中不可重整化相互作用也会出现，但从量纲分析可知，这些项将以$\frac{1}{\Lambda}$幂次被压低。值得注意的是当 Λ 刚好通过新的重夸克阈，或夸克有下一层次结构时，有效拉氏函数可能会发生根本的变化。

裸参量 g(Λ)，m(Λ)，…是理论在 Λ 量级范围内$\left(\text{亦即距离}\sim\frac{1}{\Lambda}\right)$的有效耦合常数和有效质量。如果一个过程和一个物理量仅与一个简单的标度 Q 相关，那么最简单的选择将是 Λ ～Q 作用截断参量给出有效拉氏数中的裸参量耦合常数和质量，而物理量将以这些参量和波函数来表示。当然原则上人们必须计算 Λ□ Q 的贡献，但是顶角函数和自能修正的主要效应是由 g（Q），m(Q)，$\psi^{(Q)}$…给出。这样，当 Q 增加时，在理论中的参量和波函数永远包含了较精细的结构。由于 Q 是有限的，因此这是一个有限截断参量的理论，耦合常数，质量和波函数具有确定的定义和行为。

波函数$\psi_n^{(\Lambda)}(x_i, k_{\perp i}, \lambda_i)$，在固定$x_i$和$k_{\perp i}(k_{\perp i}^2 \square \Lambda^2)$时，对 Λ 的依赖是相乘关系

$$\psi_n^{(\Lambda)}(x_i, k_{\perp i}, \lambda_i) = \prod_j \left[\frac{Z_j^{(\Lambda)}}{Z_j^{(\Lambda_0)}}\right]^{\frac{1}{2}} \psi_n^{(\Lambda_0)}(x_i, k_{\perp i}, \lambda_i) \tag{8.18}$$

其中 $Z_j^{(\Lambda)}$ 是第 j 个部分子波函数重整化常数。它也是在物理部分子内发现裸部分子的几率，$0 \le Z_j^{(\Lambda)} \le 1$。当 Λ 增加时，在一个物理的部分子内，多重部分子福克组态增加，由于总几率不变，因而福克组态之间的几率分配变化，其效果是 $Z_j^{(\Lambda)}$ 随着 Λ 增加而减少。对于有限的 Λ，归一化条件为

$$\sum_{n,\lambda_i} \int \tilde{\Pi}_i \frac{dx_i d^2 k_{\perp i}}{16\pi^3} \mid \psi_n^{(\Lambda)}(x_i, k_{\perp i}, \lambda_i) \mid^2 = 1 + O[\frac{m^2}{\Lambda^2}] \tag{8.19}$$

此外，在光锥规范里，胶子的极化求和

$$\sum_{\lambda} \varepsilon_\mu(\mathbf{k}, \lambda) \varepsilon_\nu^*(\mathbf{k}, \lambda) = -g_{\mu\nu} + \frac{\eta_\mu k_\nu + \eta_\nu k_\mu}{x} \tag{8.20}$$

当 $x \to 0$ 时，它是奇异的，因而具有胶子的福克组态波函数也是发散的。这是由于选择光锥规范人为造成的，可以通过下述步骤正规化得到

$$\frac{1}{x^n} \to \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{(x + i\delta)^n} + \frac{1}{(x - i\delta)^n} \right\} \tag{8.21}$$

这里 δ 是一个足够小的常数，物理振幅或截面与 δ 无关。这样，具有有限的 δ 和 Λ 截断参量，当 $x_i \to 0$ 和 $k_{\perp i} \to 0$ 时，福克组态函数都是具有好的行为。

对于两体价夸克的光锥波函数与 Bethe-Salpeter 束缚态波函数紧密相关。将自旋部分加上后一个两体价夸克束缚态福克组态波函数 $\psi_n(x_i, k_{\perp i}, \lambda_i)$ 为

$$\psi(x_i,k_{\perp i},\lambda) = \frac{u_{\lambda}^{(1)}(x_1P^+,\mathbf{k}_\perp+x_1\mathbf{P}_\perp)}{\sqrt{x_1}}\frac{u_{\lambda'}^{(2)}(x_2P^+,-\mathbf{k}_\perp+x_2\mathbf{P}_\perp)}{\sqrt{x_2}}$$
$$\psi(x_i,\mathbf{k}_\perp) \tag{8.22}$$

两体价夸克束缚态携有总四动量 $P^\mu=(P^+,\frac{M^2+P_\perp^2}{P^+},P_\perp)$。由于洛仑兹不变性，$\psi_n(x_i,k_{\perp i},\lambda_i)$ 是与 $P^+,P_\perp$ 无关的，因此可以令 $P^\mu=(1,M^2,0_\perp)$ 并不失一般性。此波函数是熟悉的 Bethe-Salpeter 波函数在等“时”$\tau=x^0+x^3$ 上数值的正能投影，即

$$\int\frac{dk^-}{2\pi}\psi_{BS}(k) = \frac{u^{(1)}(x_1,\mathbf{k}_\perp)}{\sqrt{x_1}}\cdot\frac{u^{(2)}(x_2,\mathbf{k}_\perp)}{\sqrt{x_2}}$$
$$+\text{负能部分} \tag{8.23}$$

$\psi_n(x_i,k_{\perp i},\lambda_i)$ 满足精确的束缚态方式：

$$[M^2-\frac{\mathbf{k}_\perp^2+m_1^2}{x_1}-\frac{\mathbf{k}_\perp^2+m_2^2}{x_2}]\psi(x_i,\mathbf{k}_\perp)$$
$$=\int_0^1[dy]\int\frac{d^2\mathbf{l}_\perp}{16\pi^3}\tilde{K}(x_i,\mathbf{k}_{\perp i};y_i,\mathbf{l}_{\perp i},M^2)\psi(y_i,\mathbf{l}_{\perp i}) \tag{8.24}$$

其中 $\tilde{K}$ 是对双粒子散射振幅贡献的所有双粒子不可约图形之和。例如，对于正、负电子偶素的福克组态 $\left|e^+e^-\right\rangle$，这时可以用单光子交换的核作近似

$$\tilde{K}\approx\frac{-16e^2m^2}{(k_\perp-l_\perp)^2+(x-y)^2m^2} \tag{8.25}$$

在非相对论区域里 $k_\perp,l_\perp\sim O(\alpha m),x\equiv(x_1-x_2)\sim O(\alpha),y\equiv(y_1-y_2)\sim O(\alpha)$，再注意到 $M^2\approx 4m^2+4me$，将式（8.25）代入到式（8.24）可以得到一个近似方程

$$\left\{\varepsilon-\frac{\mathbf{k}_{\perp}^{2}+x^{2}m^{2}}{m}\right\}\psi(x_i,\mathbf{k}_{\perp}) = (4x_1x_2)\int_{-1}^{1}mdy\int_{0}^{\infty}\frac{d^{2}\mathbf{l}_{\perp}}{(2\pi)^{3}} \cdot\frac{-e^{2}}{(\mathbf{k}_{\perp}-\mathbf{l}_{\perp})^{2}+(x-y)^{2}m^{2}}\psi(y_i,\mathbf{l}_{\perp}) \tag{8.26}$$

这个方程有一个基态能量$\varepsilon = -\alpha^2 m/4$，相应的非相对论波函数是

$$\psi=\sqrt{\frac{m\beta^{3}}{\pi}}\frac{64\pi\beta x_1x_2}{[\mathbf{k}\perp^{2}+(x_1-x_2)^{2}m^{2}+\beta^{2}]^{2}}\begin{cases}\frac{u_{\uparrow}\bar{v}_{\downarrow}-u_{\downarrow}\bar{v}_{\uparrow}}{\sqrt{2x_1x_2}} & \text{Para positronium}\\ \frac{u_{\uparrow}\bar{v}_{\uparrow}}{\sqrt{x_1x_2}} & \text{Ortho positronium}\end{cases} \tag{8.27}$$

其中参数$\beta=\frac{\alpha m}{2}$。

## §.2　介子电磁形状因子的大$Q^2$行为

在第二章第三节中曾讨论了电子-质子弹性散射($e+h\to e+h$)情况，强子矩阵元$\langle P|J^{\mu}(0)|P+q\rangle$定义了质子形状因子(2.32)式。这一节讨论任一强子$h$(包括介子、重子)形状因子的一般描述。对于任一强子的电磁形状因子，设其动量为$P$，虚光子动量为$q$

$$P^{\mu}=\left(P^{+},P^{-},P_{\perp}\right)=\left(P^{+},\frac{M^{2}}{P^{+}},O_{\perp}\right) \tag{8.28}$$

$$q^{\mu}=\left(q^{+},q^{-},q_{\perp}\right)=\left(O,\frac{2P\cdot q}{P^{+}},q_{\perp}\right) \tag{8.29}$$

其中强子$H$的横向动量为零，沿运动方向，满足质壳条件$P^{2}=(P+q)^{2}=M^{2}$。类空光子

$$-q^{2}=Q^{2}=q_{\perp}^{2}。 \tag{8.30}$$

显然，从强子波函数的定义可知所有福克组态都会对强子形状因子矩阵元有贡献。从图形上来讲，只有那些光子直接连到组成夸克的流$e_j\bar{u}_j\gamma^{+}u_j$的那些时间次序图有贡献

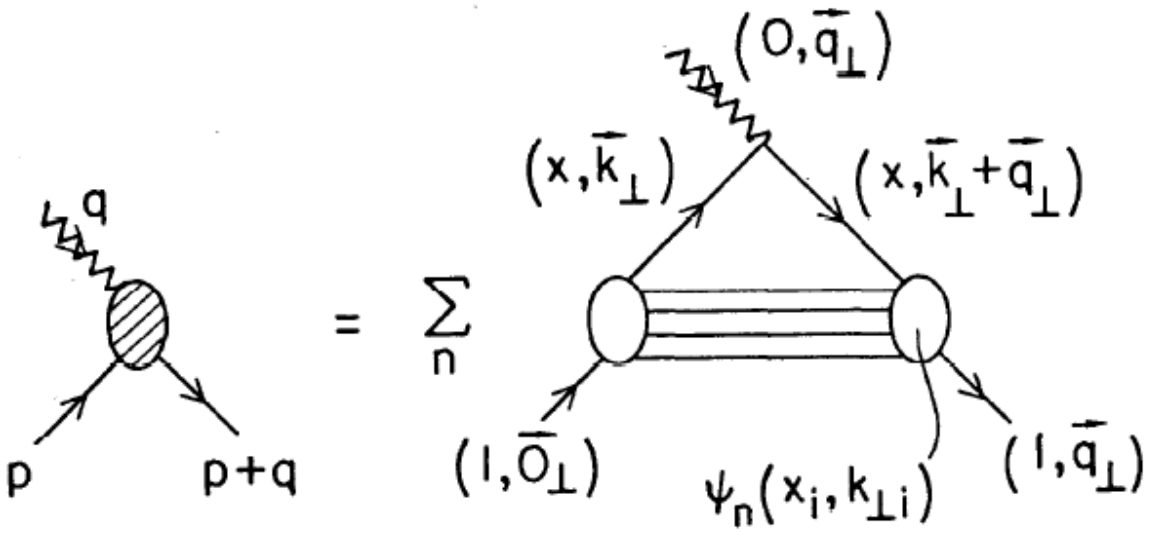



图 4　强子的电磁顶角

按照无穷大动量系波函数分解，自旋平均的形状因子应来自所有福克组

态$|n\rangle=|n;x_i,k_{\perp i},\lambda_i\rangle$的贡献

$$F_h\left(Q^2\right)=\sum_n\sum_j e_j\int[dx][dk_\perp]\sum_{\lambda_i}\psi^{*K}_{n/h}\left(x_i,k'_{\perp i},\lambda_i\right)\psi^{K}_{n/h}\left(x_i,k_{\perp i;}\lambda_i\right) \qquad (8.31)$$

这个表达式中$k'_{\perp i}$是相对于终态强子方向的横动量，

$$k'_{\perp i}=\begin{cases}k_{\perp i}+\left(1-x_j\right)q_\perp & \text{对于光子击出的夸克}\\ k_{\perp i}-x_i q_\perp & \text{对于旁观夸克}\end{cases} \qquad (8.32)$$

其中$K$是截断参量，选择$K^2>>Q^2$，$M^2$。从式（8.31）可以见到在所选择的福克组态基上计算流$J^+$矩阵元比较简单，只有对角元素。

(8.31)式是强子形状因子的精确公式，需要对所有福克组态贡献求和，因此要想从此式计算形状因子是很困难的，因为人们不可能从理论上获得所有福克组态的波函数$\psi_{n/h}$。

在大$Q^2$情况下，具有大动量转移的虚光子与击出夸克相互作用使得击出夸克获得大动量，再与旁观夸克构成终态介子，介子内每一个组成成份都应转到终态方向，击出夸克和旁观者夸克之间必须有胶子相联系使得它们之间相对动量较小组成终态介子。在大$Q^2$的情况下，价夸克组态的贡献是主要的，因为大$Q^2$时，高福克态需要多一个胶子联系束缚在一起形成终态介子，多交换一个胶子将会多一个因子$\alpha_s(Q^2)/Q^2$，这就是说比起价夸克组态来讲是$1/Q^2$压低可以忽略的。可以选择$K^2=Q^2$，由于 QCD 走动耦合常数变小，使用脉冲近似，人们可以用 QCD 微扰论计算大$Q^2$形状因子的行为。为了简便起见，仍以$\pi$介子为例，对于$Q^2$的主导级来讲，价夸克态为主就是正、反夸克态$|q(k_1)\bar{q}(k_2)\rangle$，（8.31）中主要来自第一项的贡献，

$$F_\pi\left(Q^2\right)=\int_0^1 dx\int_0^Q\frac{d^2k_\perp}{16\pi^3}\psi^{Q}\left(x,k_\perp\right)\psi^{Q*}\left(x,k_\perp+\left(1-x\right)q_\perp\right)$$

+高福克组态的贡献 （8.33）

其中已令$x=x_1,1-x=x_2,k_\perp=k_{\perp1},k_{\perp2}=-k_\perp$。由于束缚态波函数的分布主要集中在低横动量$k_\perp^2$区域，亦即小离壳能量$\varepsilon=\frac{k_\perp^2+m_1^2}{x_1}+\frac{k_\perp^2+m_2^2}{x_2}$区域，因此大$Q^2$下的主导贡献来自于下列两个区域：

1) $k_\perp^2<<q_\perp^2$

2) $(k_\perp + (1-x)q_\perp)^2 << q_\perp^2$

对于第一种情况，则有

$$F_\pi\left(Q^2\right) = \int_0^1 dx\ \phi\left(x, Q\right)\psi^{(Q)*}\left(x, (1-x)q_\perp\right) \qquad (8.34)$$

其中

$$\phi\left(x, Q\right) = \int_0^Q \frac{d^2k_\perp}{16\pi^3}\psi^{(Q)}\left(x, k_\perp\right) \qquad (8.35)$$

它是$\pi$介子内发现价福克组态$|q\bar{q}\rangle$的振幅，考虑两个价夸克共线一直到标度$Q^2$。对于式（5.11）的$\psi^{(Q)*}(x,(1-x)q_\perp)$可以用单胶子交换近似而得到

$$\psi^{Q}\left(x, (1-x)q_\perp\right) = \int_0^1 dy \int_0^Q \frac{d^2l_\perp}{16\pi^3}\frac{V_1\left(x, (1-x)q_\perp; y, l_\perp\right)\psi^{(Q)}\left(y, l_\perp\right)}{-q_\perp^2(1-x)/x}$$

$$= \int_0^1 dy\ \frac{V_1\left(x, (1-x)q_\perp; y, 0_\perp\right)}{-q_\perp^2(1-x)/x}\phi\left(y, Q\right) \qquad (8.36)$$

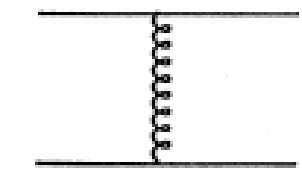
将式（5.13）代入到（5.12）可以得到

$$F_\pi\left(Q\right) = \int_0^1 dx dy \phi\left(x, Q\right)\frac{V_1\left(x, (1-x)q_\perp; y, 0_\perp\right)}{-q_\perp^2(1-x)/x}\phi\left(y, Q\right) \qquad (8.37)$$

在情况 2）也可以得到类似的表达式。这两种情况（$k_\perp^2 << q_\perp^2$ 和 $(k_\perp + (1-x)q_\perp)^2 << q_\perp^2$）下与初、终态介$\pi$子相联结的是共线的$q\bar{q}$对给出(8.37)式中硬散射振幅。因此，可以将形状因子写作下列因子化的形式，

$$F_\pi\left(Q\right) = \int_0^1 dx \int_0^1 dy\ \phi^*\left(x, Q\right)T_H\left(x, y; Q\right)\phi\left(y, Q\right) \qquad (8.38)$$

其中$T_H(x,y;Q)$是微扰论可计算的部分。入射共线的$q\bar{q}$对到出射共线的$q\bar{q}$对的硬散射振幅$T_H$在单胶子交换下的贡献为



$$T_H = \frac{16\pi C_F \alpha_s\left(Q^2\right)}{Q^2}\left[\frac{e_1}{(1-y)(1-x)}+\frac{e_2}{xy}\right] \qquad (8.39)$$

其中 $C_F = \frac{N_c^2-1}{2n_c} = \frac{4}{3}$。图中的胶子的动量转移为 $xyQ^2$ 或 $(1-x)(1-y)Q^2$。顺便指出，$\alpha_S(Q^2)$ 的实际宗量应由胶子的动量决定，亦即

$$\alpha_s(Q^2) \to \alpha_s((1-x)(1-y)Q^2) = \alpha_S(\tilde{Q}) \qquad (8.40)$$

式（8.38）给出了大 $Q^2$ 下 $F_\pi(Q^2)$ 的行为，它依赖于介子分布振幅 $\phi(x,Q)$ 与硬散射振幅 $T_H(x,y;Q)$ 的积分值。所有非微扰效应部分都包含在分布振幅 $\phi(x,Q)$ 内，$\phi(x,Q)$ 是反映了每个强子内价夸克的分布，它与过程无关。它反映了强子内价夸克（$q$ 和 $\bar{q}$）共线到 $k_\perp \sim Q$ 时的分布，它对 $Q$ 的关系可以从光锥上算符乘积展开来确定，或从 QCD 演化方程来确定。

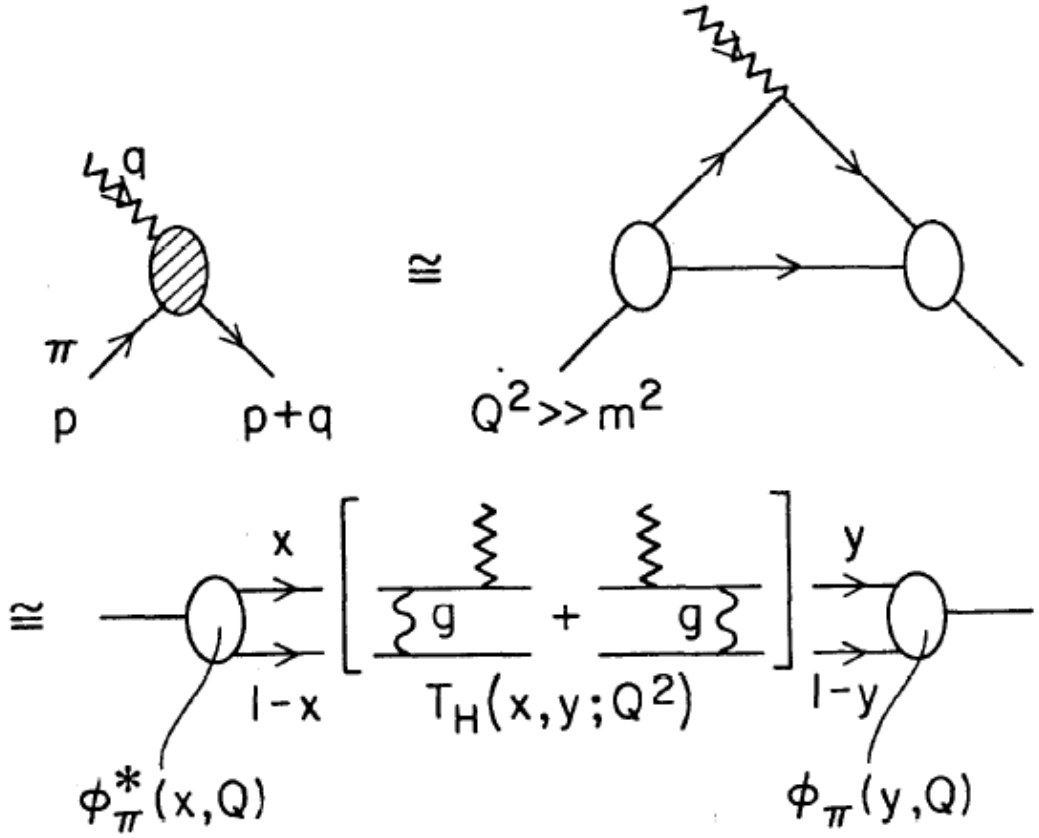



图 5　大动量迁移下介子的电磁顶角

下一小节将详细讨论分布振幅 $\phi(x,Q)$。这意味着大 $Q^2$ 下 $F_\pi(Q^2)$ 可以表达为因子化的形式。以上只是 Born 图近似下的结果，严格地讲 Born 近似下的因子化是无意义的，因为当考虑到 $\alpha_s(Q^2)$ 高阶效应时**就包含了软胶子效**

应和质量奇异性$\alpha_s^n(Q^2)\left[\log\frac{Q^2}{m^2}\right]^n$。需要证明在微扰论的任何阶下这些红外发散的因子都可吸收到介子分布振幅$\phi(x,Q)$中去，重整化群方程给出领头阶求和结果正是介子分布振幅$\phi(x,Q)$随$Q^2$的演化行为。由此给出的介子分布振幅$\phi(x,Q)$是规范不变的且是过程无关的，介子分布振幅$\phi(x,Q)$的初始行为由介子的波函数$\psi(x,k_\perp)$确定。关于因子化的证明有兴趣的读者可以参考原始文献。

从上面的推导可以见到当$x\to 0,1$端点区域时，(8.39)式具有明显的端点奇异性，(8.38)式积分的有限性依赖于介子分布振幅$\phi(x,Q)$在端点的行为。

在下一节讨论介子分布振幅$\phi(x,Q)$的演化行为时可以见到它将由初始条件$\phi(x,Q_0)$确定。由于強子结构的非微扰性质目前尚不能获得它的解的形式，它们的初始行为$\phi(x,Q_0)$只能依赖于模型给出。对于端点的性质，由上一节对光锥波函数性质的讨论可知

$$\psi(x,k_\perp)\to 0 \qquad \text{当} x\to 0 \tag{8.41}$$

因此应有分布振幅$\phi(x,Q_0)$的性质

$$\phi(x,Q_0)\to 0 \qquad \text{当} x\to 0 \tag{8.42}$$

另一方面对$\pi$介子来讲存在同位旋对称性，即在$x_1\leftrightarrow x_2$互换下是不变的，

$$\phi(x_1,x_2)=\phi(x_2,x_1) \quad \text{或} \quad \phi(x,Q_0)=\phi(1-x,Q_0) \tag{8.43}$$

由性质（8.42）和（8.43）不妨假设它具有下列形式，

$$\phi(x,Q_0)=a_0(x_1x_2)^\varepsilon \qquad \varepsilon>0 \tag{8.44}$$

当$\varepsilon\geq 1$时，分布振幅就可消去硬散射振幅的端点奇异性。

在推导(8.38)式时已假定了夸克的横向动量$k_\perp$相对于大动量 Q 可忽略，然而当$x\to 0,1$端点区域时会出现$k_\perp \sim (1-x)Q$，$k_\perp$不可忽略。这就必须考虑端点的贡献。由(8.33)式可以估计端点区域对介子形状因子的贡献为

$$F_\pi(Q^2)\big|_{End-point} \sim \int_{1-\frac{\lambda}{Q}}^{1} dx\left|\psi(x,\lambda)\right|^2 \qquad (8.45)$$

其中 $\lambda^2 \sim \left\langle k_\perp^2 \right\rangle$。显然端点区域对形状因子的贡献随着 $Q^2$ 增大而减小，当 $Q\to\infty$ 时端点的贡献趋于零。在有限 $Q^2$ 下端点区域的贡献依赖于強子波函数在端点区域的行为。例如強子波函数对 $x$ 分布集中在 $x=1/2$ 附近，其端点贡献就会远小于对 $x$ 分布很宽的模型波函数。然而如果端点贡献太大，人们必然怀疑微扰 QCD 对遍举过程的可应用性，因为端点区域贡献（8.45）式是不可因子化的振幅破坏了微扰 QCD 对遍举过程的可应用性的前提。

为了回答这一质疑，从上面的讨论可以见到一个自然的方法是保留夸克的横向动量 $k_\perp$。因为这时介子电磁形状因子可因子化的条件要求

$$xy > \frac{\left\langle k_\perp^2 \right\rangle}{Q^2} = a^2 \quad , \qquad (1-x)(1-y) > \frac{\left\langle k_\perp^2 \right\rangle}{Q^2} = a^2 \qquad (8.46)$$

这就排除了端点区域的贡献，表现在（8.38）式的积分将受条件（8.46）式限制，代之以

$$F_\pi(Q) = \int_b^{1-b} dx \int_{\frac{a}{x}}^{1-\frac{a}{1-x}} dy\ \phi^*(x,Q) T_H(x,y;Q)\phi(y,Q) \qquad (8.47)$$

其中 $b=\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4a})$。（8.47）式保证了 QCD 因子化不受端点贡献被破坏。这样对 $x$ 和 $y$ 积分区域的截断的贡献（8.47）式应比未截断的（8.38）式至少**要大于 50%方可认为**微扰 QCD 对该遍举过程是可应用的。从而对每一**特定过程就存在**微扰 QCD 可应用的 $Q^2$ 区域，这一区域又依赖于光锥波函数的性质。例如文献[ ]中利用 $\pi$ 介子的谐振子光锥波函数（接近于渐近波函数）得出微扰 QCD 对 $\pi$ 介子形状因子过程的可应用能区为 $Q^2 > 4GeV^2$ 范围，目前的实验是可以检验 QCD 的正确性。

类似地，文献[ ]在硬散射振幅和光锥波函数中保留夸克横向动量 $k_\perp$，由此必须考虑价夸克弹性散射相关的对高阶效应重求和的形状因子，Sudakov 形状因子。正是 Sudakov 形状因子压低端点区域的贡献。由此导至对（8.38）式的修改，在碰撞参量 b 空间内有下列表达式，

$$F_\pi(Q^2) = \int_0^1 dx_1 dx_2 \frac{d\mathbf{b}_1}{(2\pi)^2}\frac{d\mathbf{b}_2}{(2\pi)^2}\varphi(x_1,\mathbf{b}_1,P_1,\mu) \times T_H(x_1,x_2,Q,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mu)\varphi(x_2,\mathbf{b}_2,P_2,\mu) \tag{8.48}$$

其中硬散射振幅 $T_H(x_1,x_2,Q,b_1,b_2)$ 是动量空间内

$$T_H(x_1,x_2,Q,\mathbf{k}_{T_1},\mathbf{k}_{T_2}) = \frac{16\pi C_F\alpha_s(\mu)}{x_1x_2Q^2+(\mathbf{k}_{T_1}+\mathbf{k}_{T_2})^2} \tag{8.49}$$

的 Fourier 变换

$$f(k_\perp) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2b\ e^{ik_\perp\cdot b} f(b)$$

式(8.48)中的 $\varphi(x,b,P,\mu)$ 由下式给出

$$\varphi(x,b,P,\mu) = \exp\left[-s(x,b,Q) - s(1-x,b,Q) - 2\int_{1/b}^{\mu}\frac{d\bar{\mu}}{\bar{\mu}}\gamma_q(g(\bar{\mu}))\right]\phi\left(x,\frac{1}{b}\right) \tag{8.50}$$

其中 $\phi(x,\frac{1}{b})$ 就是(8.35)中定义的光锥分布振幅。两者通过 Sudakov 形状因子 $s(\xi,b,Q)$ 联接，

$$s(\xi,b,Q) = \frac{A^{(1)}}{2\beta_1}\hat{q}\ln\left(\frac{\hat{q}}{-\hat{b}}\right) + \frac{A^{(2)}}{4\beta_1^2}\left(\frac{\hat{q}}{-\hat{b}}-1\right) - \frac{A^{(1)}}{2\beta_1}(\hat{q}+\hat{b}) - \frac{A^{(1)}\beta_2}{4\beta_1^3}\hat{q}\left[\frac{\ln(-2\hat{b})+1}{-\hat{b}} - \frac{\ln(-2\hat{q})+1}{-\hat{q}}\right] - \left(\frac{A^{(2)}}{4\beta_1^2} - \frac{A^{(1)}}{4\beta_1}\ln(\frac{1}{2}e^{2\gamma-1})\right)\ln\left(\frac{\hat{q}}{-\hat{b}}\right) + \frac{A^{(1)}\beta_2}{8\beta_1^3}\left[\ln^2(2\hat{q}) - \ln^2(-2\hat{b})\right], \tag{8.51}$$

式(8.50)中的 $\gamma_q = -\alpha_s/\pi$ 是轴规范下的反常量纲，式(8.51)中各项系数由下式给出

$$\hat{q} = \ln[\xi Q/(\sqrt{2}\Lambda)], \quad \hat{b} = \ln(b\lambda),$$
$$\beta_1 = \frac{33 - 2n_f}{12}, \quad \beta_2 = \frac{153 - 19n_f}{24},$$
$$A^{(1)} = \frac{4}{3}, \quad A^{(2)} = \frac{67}{9} - \frac{1}{3}\pi^2 - \frac{10}{27}n_f + \frac{8}{3}\beta_1 \ln(\frac{1}{2}e^{\gamma}).$$

其中 $\gamma$ 是 Euler 常数。

## §.3 介子分布振幅的演化方程

式（8.38）和（8.39）已经给出了π介子形状因子的预言，在这个预言里除了幂次规律$\frac{1}{Q^2}$以外，还依赖于$\alpha_s(Q^2)$和$\phi(x,Q)$。注意到式（8.38）中$T_H$已经包含了顶角和费米子自能的修正，那么在波函数的两条腿上也应包含费米子自能修正，因此定义（8.35）应修改为

$$\phi(x,Q)=D_F^{-1}(Q)\int^{Q}\frac{d^2k_\perp}{16\pi^3}-\psi^{(Q)}(x,k_\perp) \qquad (8.72)$$

其中$D_F(Q)$定义为

$$D_F^{-1}(Q)=\frac{d_F(Q^2)}{d_F(Q_0^2)}=\frac{Z_2(Q^2)}{Z_2(Q_0^2)}$$

$d_F(Q^2)$是夸克场算符的重整化因子，它满足重整化群方程

$$Q^2\frac{d}{d\,Q^2}\log d_F^{-1}(Q^2)=-\tilde{\gamma}(a_s(Q^2)) \qquad (8.73)$$

$$\tilde{\gamma}(a_s(Q^2))=\frac{a_s(Q^2)}{4\pi}\gamma_F+\cdots$$

在光锥规范里，

$$\gamma_F=C_F\left\{1+4\int_0^1 dx\frac{x}{1-x}\right\} \qquad (8.74)$$

方程（8.73）的解为

$$d_F(Q^2)=\left(\log\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)^{\frac{\gamma_F}{\beta}} \qquad (8.75)$$

当$Q^2\to\infty$时$d_F(Q^2)\to Z_2$，$Z_2$是费米子自能的重整化常数。

对方程（8.72）两边微商就可得到$\phi(x,Q)$所满足的微分方程

$$Q^2\frac{\partial}{\partial Q^2}\phi(x_I,Q)=\left(\log\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)^{-\frac{\gamma_F}{\beta}}\frac{Q^2\psi^{(Q)}(x,q_\perp)}{16\pi^2}$$

$$+\frac{d}{d\log Q^2}-\log d_F(Q^2)\cdot\phi(x,Q) \qquad (8.76)$$

考虑单胶子交换图，从运动方程可以得到

$$\frac{\psi(x_i,q_\perp)Q^2}{16\pi^2}=\frac{a_s(Q^2)}{4\pi}-\int_0^1[dy]V(x_i,y_i)\cdot\frac{\phi(y_i,Q)}{y_1y_2}$$

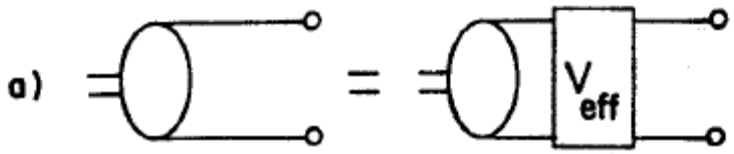
其中$V(x_i,y_i)$是由单胶子交换图给出

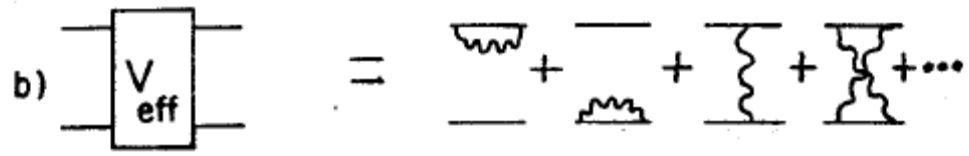
$$V(x_i,y_2)=2C_F\left\{x_1y_2\theta(y_1-x_1)\left(\delta_{h_1\bar{h}_2}+\frac{1}{y_1-x_1}\right)+(1\longleftrightarrow 2)\right\} \qquad (8.77)$$

$$\delta_{h\overline{h2}}=\begin{cases}1 & \uparrow\downarrow\rightarrow\uparrow\downarrow\\ 0 & \uparrow\uparrow\rightarrow\uparrow\uparrow\end{cases} \qquad (8.78)$$

从方程（8.77）可以见到$V(x_i,y_i)$中当$x_i=y_i$时是红外发散的，它将精确地与方程（8.76）右边的第二项中的红外发散相消。这意味着在波函数$\psi(x_i,q_\perp)$中的红外发散与$\gamma_F$中的红外发散相消，从而使得由（8.72）定义的$\phi(x,Q)$是无红外发散的，这正是介子色单态的后果。最终地可以得到方程

$$Q^2\frac{\partial}{\partial Q^2}\phi(x_i,Q)=\frac{a_s(Q)}{4\pi}\left\{\int_0^1[dy]\,\tilde{V}(x_i,y_i)\frac{\phi(y_i,Q)}{y_1y_2}-C_F\phi(x_i,Q)\right\} \qquad (8.79)$$




其中

$$\tilde{V}(x_i,y_i)=2C_F\{x_1\cdot y_2\theta(y_1-x_1)\left(\delta_{h1\overline{h2}}+\frac{\Delta}{y_1-x_1}-\right)+(1\longleftrightarrow 2)\} \qquad (8.80)$$

$$\Delta\phi(y_i,Q)=\phi(y_i,Q)-\phi(x_i,Q)$$

如果定义

$$\xi=\frac{\beta}{4\pi}\int^Q\frac{dk_\perp^2}{k_\perp^2}a_s(k_\perp^2) \qquad (8.81)$$

$$\phi(x_i,Q)=x_1x_2\tilde{\phi}(x_1,Q) \qquad (8.82)$$

那么方程（8.76）将变成

$$x_1x_2\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\tilde{\phi}(x_1,Q)+\frac{C_F}{\beta}\tilde{\phi}(x_1,Q)\right\}$$

$$=\frac{C_F}{\beta}\int_0^1[dy]\tilde{V}(x_i,y_i)\tilde{\phi}(y_i,Q) \qquad (8.83)$$

方程（8.83）表明，如果给定一个初始条件$\phi(x_i,Q_0)$那么由QCD微扰论所给出的方程（8.83）将确定$Q^2>Q_0^2$时的演化$\phi(x_i,Q_0)$。

演化方程（8.83）的普遍解是

$$\phi(x_i,Q)=x_1x_2\sum_{n=0}^{\infty}a_nC_n^{3/2}(x_1-x_2)\cdot e^{-\gamma_n\xi}$$

$$=x_1x_2\sum_{n=0}^{\infty}a_nc_n^{3/2}(x-x)(\log\frac{Q^2}{\Lambda^2})^{-\gamma_n} \qquad (8.84)$$

其中

$$\gamma_n=\frac{C_F}{\beta}\left\{1+4\sum_2^{n+1}\frac{1}{k}-\frac{2\delta_{h\bar{h}}}{(n+1)(n+2)}\right\}\geq 0 \qquad (8.85)$$

它是$\tilde{V}(x_1-x_2)$的本征值，其本征函数是$C_n^{3/2}(x_1-x_2)$，正是Gegenbauer多项式。从式（8.85）可见到本征值$\gamma_n$就是深度非弹散射过程中非单态结构函数的反常量纲。这些结果也可以通过对分布振幅$\phi(x,Q)$应用算符乘积展开得到，因为由定义知

$$\phi(x,Q)=\Lambda^+\int\frac{dZ^-}{2\pi}e^{ixZ^-/2}i<0|\overline{\Psi}(z)\Psi(0)|\pi>^Q|_{Z^+=0,Z^2=-Z_\perp^2} \qquad (8.86)$$

其中$\Lambda^+$是正能旋量投影算符，$Z_\perp^2\sim O(\frac{1}{Q^2})$，当$Q^2\to\infty$时，$q$和$\bar{q}$的相对间隔$Z^2=0$，所以可应用光锥展开而给出方程（8.84）和（8.85）的结果。

当$Q^2\to\infty$时，方程（8.84）中仅有主导项$\gamma_0=0$存在，因此主导项给出了分布振幅的渐近形为，

$$\lim_{Q^2\to\infty}\phi(x,Q^2)=a_ox_1x_2 \qquad (8.87)$$

其中常数$a_0$将由$\pi$介子衰变常数来确定。进一步由Gegenbauer的正交关系，从式（8.84）可得

$$a_n\left(\log\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)^{-\gamma_n}=\frac{2(2n+3)}{(2+n)(1+n)}\int_{-1}^1 d(x_1-x_2)C_n^{3/2}(x_1-x_2)\phi(x_i,Q) \qquad (8.88)$$

因此

$$\frac{a_o}{6}=\int_0^1 dx\phi(x_i,Q)=\int_0^1 dx\int^Q \frac{d^2k_\perp}{16\pi^3}\Psi^Q(x,k_\perp) \qquad (8.89)$$

显见（8.89）式右边就是$\pi$介子的零点波函数，它可以通过$\pi\to\mu\gamma$衰变过程来确定，因为在此过程中相互作用顶点仅有$(q\bar{q})$福克态有贡献，其它图形都包含在非微扰的波函数中。事实上$\pi\to\mu\gamma$衰变过程矩阵元，

$$\begin{aligned}&\langle 0|\bar{\psi}_u\gamma^+(1-\gamma_5)\psi_d|\pi\rangle=-\sqrt{2}P^+f_\pi\\&=\int\frac{dxd^2k_\perp}{16\pi^3}\overset{\Lambda}{\psi}_{q\bar{q}}(x,k_\perp)\sqrt{\frac{N_c}{2}}\left\{\frac{\bar{v}_\downarrow}{\sqrt{1-x}}\gamma^+(1-\gamma_5)\frac{u_\uparrow}{\sqrt{x}}-(\downarrow\leftrightarrow\uparrow)\right\}\end{aligned} \qquad (8.90)$$

定义了$\pi$介子的衰变常数$f_\pi$，（8.58）式的右边应与截断参量$\Lambda$无关。这样$\pi$介子的衰变常数$f_\pi$提供了对$\pi$介子的价夸克光锥波函数很强的归一化限制，从而也保证了$\pi$介子内发现价夸克的几率是有限的。由（8.89）和（8.90）式可得一约束条件

$$\frac{a_o}{6}=\int_0^1 dx\phi(x_i,Q)=\int_0^1 dx\frac{d^2k_\perp}{16\pi^3}\psi(x,k_\perp)=\frac{1}{2\sqrt{N_c}}f_\pi \qquad (8.91)$$

其中$f_\pi=93MeV$是$\pi$介子衰变常数。当$Q^2\to\infty$时，将（8.88）和（8.91）代入到$F_\pi(Q^2)$可以得到形状因子在大$Q^2$的渐近行为

$$F_\pi(Q^2)=16\pi f_\pi^2\cdot\frac{a_S(Q^2)}{Q^2} \quad 。 \qquad (8.92)$$

类似地可以得$K$介子、$\rho$介子等介子的形状因子以及渐近行为。

从理论上来讲，这个渐近行为在$Q^2\to\infty$时精确成立，在有限$Q^2$下或者说在目前实验能量所达到的区域内(8.92)式仅是介子形状因子的近似表达式，其近似好坏的程度取决于下述几个方面的修正。

（1）高福克组态的贡献。对于介子来讲，高福克态是$|q\bar{q}g>$，$|q\bar{q}q\bar{q}\rangle$……，它们要比式（8.92）多幂次下降，$\alpha_2(Q^2)/Q^2$，随着$Q^2$的增加，高福克组态的贡献越来越小。

（2）软胶子的贡献。由于我们计算的物理矩阵元是色单态矩阵元，所有红外奇异性和从$l_\perp\to O$的软胶子贡献将相消。（值得注意的一个有趣的事实，夸克形状因子（Sudakov 形状因子）在大$Q^2$下比$F_\pi(Q^2)$下降快得多）

（3）顶角和真空极化对$T_H$的修正。由于这里已经选择$K^2=Q^2$，所以顶角和真空极化对$T_H$的修正是$\alpha_s(Q^2)$的高级效应。（实际上$\alpha_s(Q^2)$的宗量应

是$xyQ^2$或$(1-x)(1-y)Q^2$，因为这才是胶子实际上所携带的动量迁移）。

（4）具有$|\varepsilon|>\Lambda^2$硬胶子贡献以及其它不可约图形的贡献。从$\phi(x,Q)$的定义可知它已经包含了$|q\bar{q}\rangle$价夸克态波函数中所有低动量迁移胶子交换的贡献，所以具有$|\varepsilon|>\Lambda^2$的硬胶子交换以及不可约交叉图对$T_H$的贡献都是$\alpha_s(Q^2)$的高级修正。

（5）端点奇异性。从式（8.39）可以见到，当$x\to 0$，1时，存在端点奇异性，这种奇异性并不破坏对$\pi$介子形状因子的预言，因为束缚态波函数在端点的行为（8.44）将足以抵消$T_H$中的端点奇异性。从（8.33）式可以见到当夸克横向动量$k_\perp$不可忽略时，端点行为将为$k_\perp$的引入而改变并对形状因子的贡献有所修正。

这里只给出主导级下介子形状因子的结果，对于高阶修正计算依赖于减出方案（scheme），这里仅列出单圈修正的结果，

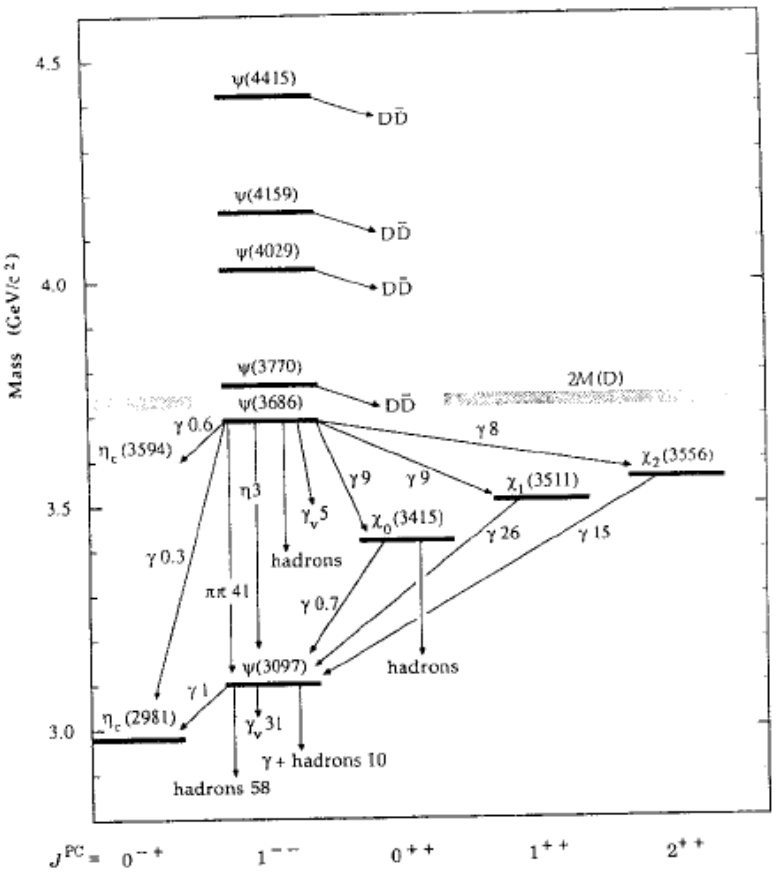
$$F_\pi(Q^2)=16\pi f_\pi^2\cdot\frac{a_S(Q^2)}{Q^2}\left[1+2.1\alpha_s(Q^2)+\cdots\right]\quad(\overline{MS}\ scheme)\qquad(8.93)$$

$$F_\pi(Q^2)=16\pi f_\pi^2\cdot\frac{a_S(Q^2)}{Q^2}\left[1+0.72\alpha_s(Q^2)+\cdots\right]\quad(Mom\ scheme)\qquad(8.94)$$

至于其它各种修正的讨论已超出本书的范围。

## §4. 重夸克偶素$(Q\bar{Q})$的衰变

QCD对重夸克偶素$(Q\bar{Q})$的衰变的应用是检验QCD的一个重要的领域。能夠形成重夸克偶素束缚态的重夸克有粲夸克 c 和□夸克 b，它们的质量分别为$1.4-1.5GeV$和$4.6-4.9GeV$，都比強子的标度$1GeV$大，比QCD 标度参量$\Lambda_{QCD}\approx 200MeV$大很多，即$m_b^2$□ $m_c^2$□ $\Lambda_{QCD}^2$。自从 1974 年发现粲夸克 c 和 1977 年发现□夸克 b 以来，实验上已很好地观察到重夸克偶素$(c\bar{c})$和$(b\bar{b})$的能谱，例如$J/\psi$、$\eta_c$、$\chi_c$和ϒ、$\eta_b$、$\chi_b$以及$\psi'$、ϒ′等激发态（见图　　）




这些能谱表明了重夸克偶素$(Q\bar{Q})$ $(Q=c、b)$具有下述特点：

1）重夸克偶素$(Q\bar{Q})$能谱正像正、负电子偶素(positronium)一样构成基态、轨道激发、徑向激发完整的图象。

2) 重夸克在重夸克偶素$(Q\bar{Q})$内的运动可以看作是非相对论的，因为

$$\left\langle \frac{v^2}{c^2} \right\rangle \sim \frac{\Delta E}{m_Q} \sim \begin{cases} 0.25 & J/\psi \\ 0.1 & \Upsilon \end{cases} \tag{8.114}$$

其中$\Delta E$是$(Q\bar{Q})$径向激发态质量和基态质量之差。

3) 非相对论势模型描写重夸克偶素$(Q\bar{Q})$相当好，尽管人们可以采取不同参量化势模型，通过求解 Schrodinger 方程在可观察态的标度范围内都相自洽。

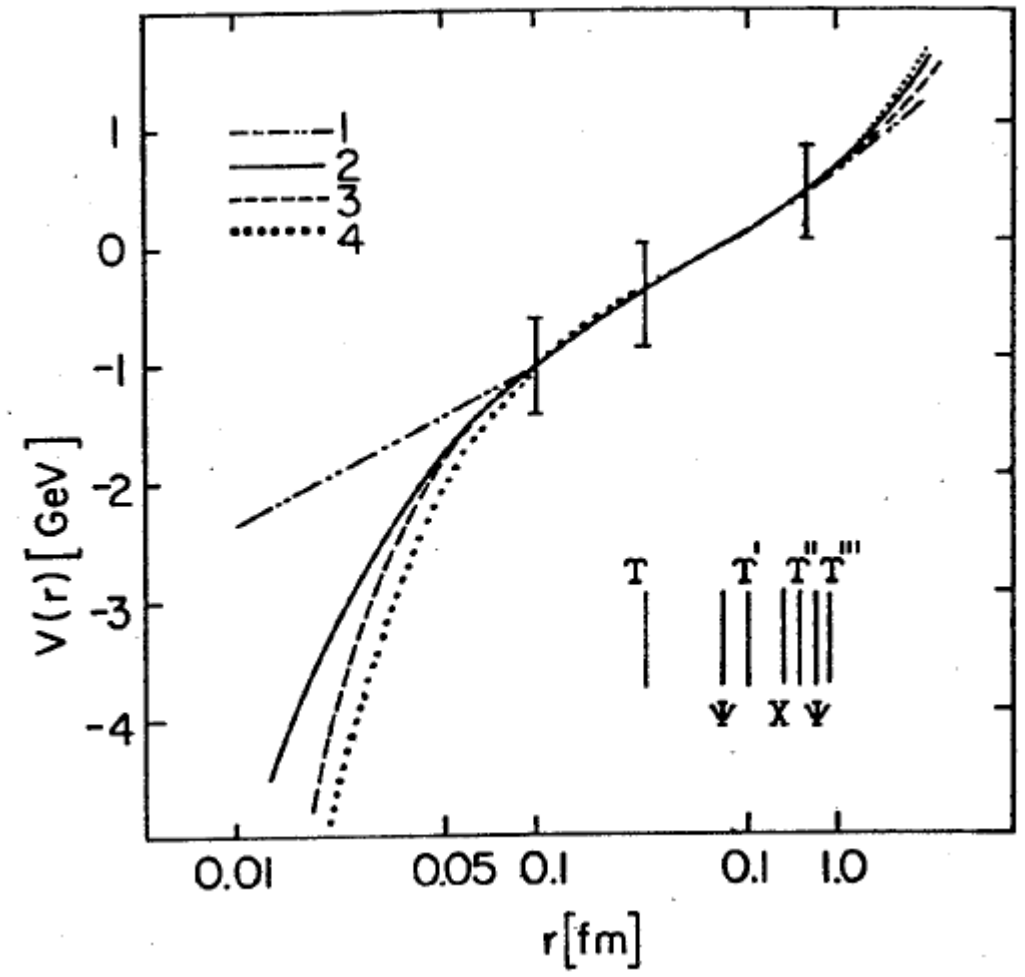
这些特点很强地表明在重夸克偶素内价夸克$(Q\bar{Q})$占主导成分。事实上$J/\psi$和$\Upsilon$的径向激发谱和格点规范理论的计算提议了相互作用势在长距离下是线性势，在短距离下是库仑势，

$$V(r) = \begin{cases} Kr & r \to \infty \\ \frac{\alpha_s(1/r)}{r} & r \to 0 \end{cases} \tag{8.115}$$

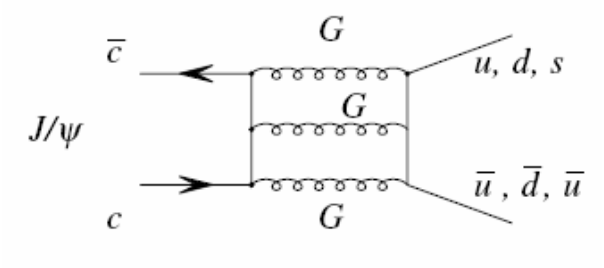
有兴趣的是(8.115)式简单地迭加构成 Cornell 势

$$V(r) = Kr - \frac{a}{r} \tag{8.116}$$

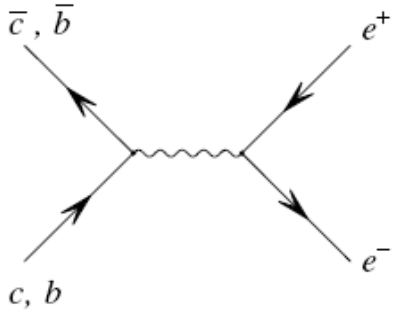
其中参量$a \sim 0.52, b \sim 0.18 GeV^2$，就能很好地解释$J/\psi$和$\Upsilon$家族的能谱。其它还有 Richardson 势和幂次势等参数化的势模型。




注意到重夸克偶素内价夸克$Q=c,b$具有不同于轻夸克$q=u$、$d$、$s$的量子数$c$和$b$，重夸克$Q=c,b$仅能通过弱相互作用直接衰变到轻夸克$q=u$、$d$、$s$。重夸克偶素的电磁衰变是通过$(Q\bar{Q})$湮灭为光子再耦合到轻夸克。重夸克偶素的强衰变由于Okubo-Zweig-Iizuka(OZI)禁戒规则不能直接衰变到轻强子而是通过$(Q\bar{Q})$湮灭为胶子再耦合到轻夸克。由于这一湮灭过程发生在很短的距离内$\sim 1/M_Q$，重夸克偶素通过强衰变到轻强子是微扰可计算的，随着重夸克质量$M_Q$愈大，其微扰计算的结果的可靠性就愈大。由于$J/\psi$和$\Upsilon$的$J^{PC}=1^{--}$和轻强子的色单态性质，因此它们衰变到轻强子不能通过单胶子和双胶子交换而最主**要贡献**是通过交换三个胶子发生的，其振幅$\sim \alpha_s^6(M_Q)$（见图　）。




首先计算$J/\psi$和$\Upsilon$衰变到一对轻子$l\bar{l}=e^+e^-,\mu^+\mu^-$，由于它们是$(Q\bar{Q})$自旋为 1 的 s-波束缚态，$J^{PC}=1^{--}$的矢量粒子，主导级是通过交换单光子图发生的。




在不考虑 QCD 辐射修正情况下其领头阶衰变宽度为

$$\begin{aligned}\Gamma_{(Q\bar{Q})\to l\bar{l}} &= \frac{16\pi\alpha^2}{(2m_Q)^2}e_Q^2\left|\psi_n(0)\right|^2\left(1+\frac{2m_l^2}{M_Q^2}\right)\left(1-\frac{4m_l^2}{M_Q^2}\right)\\ &= \frac{16\pi\alpha^2}{(2m_Q)^2}e_Q^2\left|\psi_n(0)\right|^2\end{aligned} \qquad (8.117)$$

其中$\psi_n(0)$是重夸克偶素$(Q\bar{Q})$相应的基态(n=1)和径向激发态(n=2, 3…)零点波函数。这是因为$(Q\bar{Q})$湮灭就一定与它的零点波函数相关，$\left|\psi_n(0)\right|^2$正是$(Q\bar{Q})$湮灭的几率。$e_Q$是重夸克的电荷($e_c=2/3,\ e_b=-1/3$)式(8.117)的第二式是忽略轻子质量的结果。事实上(8.117)式对所有$J^{PC}=1^{--}$的矢量介子成立，不同矢量介子衰变为轻子的实验宽度$\Gamma_{V\to l\bar{l}}$倾向于有下列关系式成立，

$$\left|\psi_V(0)\right|^2 \propto M_V^3 \qquad (8.118)$$

下一步计算$J/\psi$和$\Upsilon$衰变到所有轻强子的宽度，这可以通过$J/\psi$和$\Upsilon$衰变到三个胶子来表达，而不管三个胶子是如何衰变到轻强子的。这一计算也是很直接的，第一部分是$(Q\bar{Q})$湮灭的几率$|\psi_n(0)|^2$，这是重夸克偶素的非微扰部分，第二部分是正、反重夸克对$Q\bar{Q}$耦合到三个胶子的衰变率$\Gamma(Q\bar{Q}\to ggg)$，正像正、负电子对转化为三个光子过程一样这是微扰可计算的，第三部分是三个胶子转化为各种可能强子态的几率，$P(ggg\to\text{强子})=1$，这意味着假定了各种可能强子态的产生近似地看作必须是三个胶子生成的。综合三部分结果 QCD 领头阶贡献为

$$\begin{aligned}\Gamma_{(Q\bar{Q})\to ggg}&=|\psi_n(0)|^2\,\Gamma(Q\bar{Q}\to ggg)P(ggg\to\text{强子})\\&=|\psi_n(0)|^2\frac{160(\pi^2-9)}{81(2m_Q)^2}\alpha_s^3(m_Q)\end{aligned}\qquad(8.119)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{(Q\bar{Q})\to\gamma\gamma\gamma}&=|\psi_n(0)|^2\,\Gamma(Q\bar{Q}\to\gamma\gamma\gamma)\\&=|\psi_n(0)|^2\frac{64(\pi^2-9)}{3(2m_Q)^2}e_Q^6\alpha^3\end{aligned}\qquad(8.120)$$

将(8.118)与(8.117)式相比就可消去非微扰的$|\psi_n(0)|^2$，给出了纯粹微扰 QCD 领头阶的理论预言，

$$\frac{\Gamma_{(Q\bar{Q})\to ggg}}{\Gamma_{(Q\bar{Q})\to l\bar{l}}}=\frac{10(\pi^2-9)}{81\pi}\frac{\alpha_s^3(m_Q)}{\alpha^2e_Q^2}\qquad(8.121)$$

式(8.121)的左边可以由实验值确定，由此可定出跑动耦合常数$\alpha_s(m_Q)$。式(8.121)的一个直接推论是

$$\frac{\Gamma_{\psi'\to\text{强子}}}{\Gamma_{J/\psi\to\text{强子}}}\approx\frac{\Gamma_{\psi'\to e^+e^-}}{\Gamma_{J/\psi\to e^+e^-}}\qquad(8.122)$$

其中$\psi'$是$J/\psi$的径向激发态(2S)。由于$J/\psi$和$\Upsilon$的$J^{PC}=1^{--}$和轻强子的色单态性质，因此它们衰变到轻强子除了通过交换三个胶子还可以通

过二个胶子和一个光子发生。类似的计算 QCD 领头阶给出

$$\Gamma_{(Q\bar{Q})\to gg\gamma}=|\psi_n(0)|^2\frac{128(\pi^2-9)}{9(2m_Q)^2}e_Q^2\alpha\alpha_s^2(m_Q) \qquad (8.123)$$

和

$$\frac{\Gamma_{(Q\bar{Q})\to gg\gamma}}{\Gamma_{(Q\bar{Q})\to ggg}}=\frac{36}{5}\frac{e_Q^2\alpha}{\alpha_s(m_Q)} \qquad (8.124)$$

或

$$\frac{\Gamma_{(Q\bar{Q})\to gg\gamma}}{\Gamma_{(Q\bar{Q})\to l\bar{l}}}=\frac{8(\pi^2-9)}{9\pi}\frac{\alpha_s^2(m_Q)}{\alpha} \qquad (8.125)$$

式(8.117,129-125)给出 $J/\psi$和$\Upsilon$ 以及径向激发态 QCD 领头阶下不同衰变道的基本关系式。例如，（8.124）式就给出 $(Q\bar{Q})$ 的辐射衰变对強衰变的比。例如对于粲夸克来讲这个比值约等于

$$\frac{\Gamma_{J/\psi\to gg\gamma}}{\Gamma_{J/\psi\to ggg}}=\frac{16}{5}\frac{\alpha}{\alpha_s(m_Q)}\approx 0.09$$

为了精确起见考虑(8.117,129-125)式的下一阶 QCD 修正，在 $\overline{MS}$ 减出方案里其结果为

$$\Gamma_{(Q\bar{Q})\to l\bar{l}}=\frac{16\pi\alpha^2}{(2m_Q)^2}e_Q^2|\psi_n(0)|^2\left[1-\frac{16}{3\pi}\alpha_s(m_Q)\right] \qquad (8.126)$$

$$\Gamma_{(Q\bar{Q})\to ggg}=|\psi_n(0)|^2\frac{160(\pi^2-9)}{81(2m_Q)^2}\alpha_s^3(m_Q)\left[1-4.9\frac{\alpha_s(m_Q)}{\pi}\right] \qquad (8.127)$$

$$\Gamma_{(Q\bar{Q})\to\gamma\gamma\gamma}=|\psi_n(0)|^2\frac{64(\pi^2-9)}{3(2m_Q)^2}e_Q^6\alpha^3\left[1-12.6\frac{\alpha_s(m_b)}{\pi}\right] \qquad (8.128)$$

$$\frac{\Gamma_{(Q\bar{Q})\to ggg}}{\Gamma_{(Q\bar{Q})\to l\bar{l}}}=\frac{10(\pi^2-9)}{81\pi}\frac{\alpha_s^3(m_Q)}{\alpha^2e_Q^2}\left[1+0.43\frac{\alpha_s(m_Q)}{\pi}\right] \qquad (8.129)$$

$$\Gamma_{(Q\bar{Q})\to gg\gamma}=|\psi_n(0)|^2\frac{128(\pi^2-9)}{9(2m_Q)^2}e_Q^2\alpha\alpha_s^2(m_Q)\left[1-1.7\frac{\alpha_s(m_Q)}{\pi}\right] \qquad (8.130)$$

$$\frac{\Gamma_{(Q\bar{Q})\to gg\gamma}}{\Gamma_{(Q\bar{Q})\to ggg}}=\frac{36}{5}\frac{e_Q^2\alpha}{\alpha_s(m_Q)}\left[1-2.6\frac{\alpha_s(m_Q)}{\pi}\right] \qquad (8.131)$$

上面提到重夸克偶素衰变到轻强子的总宽度近似地看作是通过衰变到胶子发生的。如果特指终态为某一过程也是如此，则对所有遍举过程微扰 QCD 预言近似地有下列等式成立，

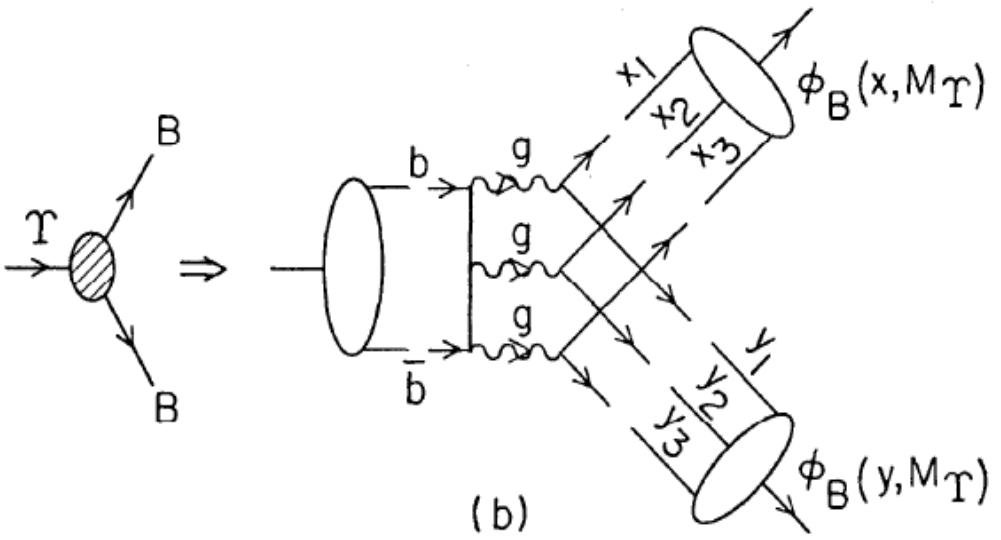
$$R_h = \frac{Br(\psi' \to h)}{Br(J/\psi \to h)} \approx \frac{Br(\psi' \to e^+e^-)}{Br(J/\psi \to e^+e^-)} = (14.8 \pm 2.2)\% \qquad (8.132)$$

其中 $h$ 是指特定的终态轻强子。上式中最后等式的数值取自于实验值，这就是人们俗称的 15%规则。应注意这是一个近似规则，并非严格成立。例如实验上发现终态为 $h = \rho\pi$ 就破坏了上述规则要比 15%小很多。其原因在于 $J/\psi \to \rho\pi$ 没有遵从第六节中讨论的螺旋度守恒规则，即 $J/\psi \to \rho\pi$ 过程虽是螺旋度守恒规则压低的过程但未被压低。实验上还发现了一些轻强子终态破坏螺旅度守恒压低的过程，其物理根源尚未清楚。

举一个例子说明微扰 QCD 应用到 $J/\psi$(或$\Upsilon$) 及其徑向激发态衰变到特定终态轻强子过程的理论计算。例如 $J/\psi$(或$\Upsilon$) $\to B\bar{B}(P\bar{P}、n\bar{n}、\cdots)$ 过程按照第八章第五节的讨论其角分布应 $\propto 1+\beta^2\cos^2\theta_{c.m.}$，其 $\beta$ 应近似等于 1，$\theta_{c.m.}$ 是质心系中散射角。这是因为 $J/\psi$(或$\Upsilon$) 在 $e^+e^-$ 碰撞中产生，它们必然沿束流方向具有螺旋**度** $\pm 1$ **然后通过交换三个矢量胶子转变为** $B\bar{B}$ **遵从螺旋度守恒规则。由于角分布已知，可以选择** $\theta_{c.m.} = 0$ 大大简化计算。**因子化定理分离非微扰的波函数部分，重夸克偶素湮灭为胶子贡献零点波函数** $|\psi_n(0)|^2$ **，三个胶子转变为** $B\bar{B}$ **的硬散射振幅将通过下列图形发**生(见图 )，与强子形状因子类似具有下述表达式

$$T(S = M_V^2, \theta = 0) = \int_0^1 [dx][dy]\phi_B(y_i, S)T_H(x_i, y_i, S)\phi_B(x_i, S) \qquad (8.133)$$

其中重子分布振幅 $\phi_B(x_i,S)$ 吸收了所有共线质量奇异性 ,由非微扰决定的与过程无关的物理量。在领头阶近似下微扰 QCD 计算硬散射振幅给出




$$T_H=-\frac{32C\left[4\pi\alpha_s(S)\right]^3}{S^{5/2}}\psi_n(0)\frac{1}{y_1y_2y_3}\frac{x_1y_3+x_3y_1}{\left[x_1(1-y_1+y_1(1-x_1)\right]\left[x_3(1-y_3)+y_3(1-x_3)\right]}\frac{1}{x_1x_2x_3}$$

(8.134)

其中色因子

$$C=\frac{(N_c+1)(N_c+2)}{8N_c^2\sqrt{N_c}}=\frac{5}{18\sqrt{3}} \qquad (8.135)$$

在获得(8.134)时已近似地取了 $m_Q=\frac{1}{2}M_V$(如$m_c=\frac{1}{2}M_{J/\psi}$)。此过程的衰变宽度 $\Gamma(J/\psi(或\Upsilon)\to P\bar{P})$ 为

$$\Gamma(\Upsilon\to P\bar{P})=\frac{\left|\vec{P}_{c.m.}\right|}{6\pi\sqrt{S}}\left|T(S,\theta=0)\right|^2 \qquad S=M_\Upsilon^2 \qquad (8.136)$$

将此式与(8.119)式相比消去零点波函数给出分支比

$$Br(\Upsilon\to P\bar{P})=\frac{\Gamma(\Upsilon\to P\bar{P})}{\Gamma(\Upsilon\to hadrons)}=(3.2\times10^6)\alpha_s^3(S)\frac{\left|\vec{P}_{c.m.}\right|}{\sqrt{S}}\frac{\langle T\rangle^2}{S^4} \qquad (8.137)$$

其中 $\langle T\rangle$ 的定义为

$$\langle T\rangle=\int_0^1[dx][dy]\frac{\phi_P(y_i,S)}{y_1y_2y_3}\frac{x_1y_3+x_3y_1}{\left[x_1(1-y_1+y_1(1-x_1)\right]\left[x_3(1-y_3)+y_3(1-x_3)\right]}\frac{\phi_P(x_i,S)}{x_1x_2x_3}$$

(8.138)

(8.137)式对 $J/\psi$、$\Upsilon$以及它们的径向激发态都成立。由此获得一个关系式

$$\frac{Br(\psi'\to P\bar{P})}{Br(J/\psi\to P\bar{P})}=\left(\frac{M_{J/\psi}}{M_{\psi'}}\right)^8 \tag{8.139}$$

$$\frac{Br(\Upsilon'\to P\bar{P})}{Br(\Upsilon\to P\bar{P})}=\left(\frac{M_{\Upsilon}}{M_{\Upsilon'}}\right)^8 \tag{8.140}$$

它们与实验测量结果相自洽。