相对论量子场

[美] J. D. 比约肯
S. D. 德雷尔 著

科学出版社

相对论量子场

〔美〕J. D. 比约肯
S. D. 德雷尔 著

汪克林 郑希特 章正刚 译

朱栋培 校

科学出版社

1984

内 容 简 介

本书是《相对论量子力学》一书的姊妹篇。这两本书是西方流行的研究生教材，是量子场论方面较好的教科书。适于大学物理专业研究生、高年级学生、教师以及有关专业科研工作者参考。

J. D. Bjorken & S. D. Drell
RELATIVISTIC QUANTUM FIELDS
McGraw-Hill Book Company. 1965

相对论量子场

〔美〕J. D. 比约肯
S. D. 德雷尔 著
汪克林 郑希特 章正刚 译
朱栋培 校

责任编辑 张邦固

科学出版社出版
北京朝阳门内大街 137 号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1984 年 9 月第 一 版 开本：787×1092 1/32
1984 年 9 月第一次印刷 印张：14 1/8
印数：0001—7,600 字数：319,000

统一书号：13031・2686
本社书号：3696・13—3
定价：2.20 元

作者为中译本写的序言

很高兴我们的书被译成了中文．希望大学生们在学习相对论量子力学和场论时会从本书中得到帮助．自从本书在1964—1965年第一次出版以来，场论有了许多新的进展，它们远远超出了本书的范围，但是我们仍然希望本书可以作为学习这一美丽而富有成果的领域的基础．

J. D. 比约肯　　S. D. 德雷尔

前　　言

Feynman　在 1949 年所开创的相对论量子理论的传播子方法，为量子电动力学提供了一个既实用又直观的表述方案，同时也为基本粒子理论中广泛的问题给出了一个颇有成效的方法．理论家现今相信量子电动力学的预言，是以整个重整化方案为依据的，它实际上依赖于 Feynman 图分析；在写下色散关系所需的解析性质的证明中取得的显著进展也是如此．所以极而言之可以认为，场论就是全部 Feynman 图的集合．

但是，我们在本书和她的姊妹篇《相对论量子力学》中并不主张这种观点，实际上我们也不想提倡一种观点而排斥其他．目前基本粒子理论不能令人满意的现状也不允许人们这样随便．特别是我们不想低估形式量子场论所取得的进步的重要性，也不想贬低由色散关系导出的对低能介子——核子过程的重要解释．虽然如此，我们还是首先强调 Feynman 规则的发展，它直接来自 Dirac 电子的粒子波动方程与空穴理论边界条件的结合．

导致我们采取这一方法的三个主要信念是我们写这本书的最初动机．它们是

1. Feynman 图和 Feynman 规则一起把量子场论总结成一种形式，它与人们试图去理解的实验数据紧密相联系．虽然用图形表述的理论意味着微扰论，但是图形方法在多体问题中的应用表明，它有足够的伸缩性来处理具有非微扰特征的现象(例如，超导和硬球 Bose 气体)．

2. 定域正则量子场论的基础是把场理想化地定义在时空点上. Feynman 计算规则的某些改进可能比这种场论的精巧数学结构存在得更为长久. 量子场论的表述形式到时候也许会被更多地看作上层建筑而不是基础. 因此，让我们首先不依赖场论形式而独立地发展 Feynman 规则.

3. 这种方法较之演绎的场论方法更为直接而较少形式——也许就不那么为人信服，它将 Feynman 图的定量计算、分析和理解带进更大范围物理学家们的锦囊，而不是只为少数二次量子化的理论家们所掌握. 特别是我们没有忘记搞实验工作的同行和对粒子物理感兴趣的大学生们. 我们相信这是一个健康的方向.

原来我们只想写一本书，结果却发展成了两卷. 在本书的上册《相对论量子力学》中我们建立了 Dirac 粒子、光子和 Klein-Gordon 介子的传播子理论，进行了一系列的计算来演示电磁相互作用、弱相互作用和强相互作用中各种有用的技巧和概念. 这包括定义和实现重整化方案，以及计算象 Lamb 移动那样的低阶辐射修正效应. 阅读上册所需的必要基础是具有一般水平的非相对论量子力学知识，如 Schiff 《量子力学》教科书所提供的那样.

在本书下册《相对论量子场》中我们讨论正则场论. 在用 LSZ 约化技术建立了传播子和散射振幅的封闭表达式后，我们再回到 Feynman 图展开，证明了用正则场论建立的散射振幅的微扰展开等同于本书上册中的 Feynman 规则. 借助于对图形的进一步分析，我们研究到耦合常数的任意阶 Feynman 振幅的解析性质，并阐明色散关系方法. 最后我们证明在相互作用的每一阶，重整化了的量子电动力学都是有限的.

我们不再赘述本书的内容而只在这里列举略去的一些专题. 作用量原理以及主要由 Schwinger 发展起来的量子场论

变分法表述在本书中全然没有提及．我们只是在寻找对称性时才援用了作用量变分．本书既没有详细讨论公理化场论的有力进展，也没有去讨论脱离场论的纯 S 矩阵方法．除了在上册中讨论了氢原子谱和 Lamb 移动外，束缚态问题全被略去了．对于色散关系的动力学应用只作了初步的研讨．本书没有给出带质量矢量介子的量子场论形式，也没有提供带微商耦合的任何量子场理论的表述．最后，我们也没有准备一份与本书提到的许多发展有关的重要原始文献的目录．对这些不足，读者可以从下列精采的书籍或专论中得到弥补．

Schweber, S.: "An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory," New York, Harper and Row, Publishers, Inc., 1961.

Jauch, J. M., and F. Rohrlich: "The Theory of Photons and Electrons," Cambridge, Mass., Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1955.

Bogoliubov, N. N., and D. V. Shirkov: "Introduction to the Theory of Quantized Fields," New York, Interscience Publishers, Inc., 1959.

Akhiezer, A., and V. B. Bereztetski: "Quantum Electrodynamics',, 2d ed., New York, John Wiley and Sons, Inc. ,1963.

Umezawa, H.: "Quantum Field Theory", Amsterdam, North Holland Publishing Company, 1956.

Hamilton, J.: "Theory of Elementary Particles," London, Oxford University Press, 1959.

Mandl, F.: "Introduction to Quantum Field Theory," New York, Interscience Publishers, Inc., 1960.

Roman, P.: "Theory of Elementary Particles", Amsterdam, North Holland Publishing Company, 1960.

Wentzel, G.: "Quantum Theory of Field," New York, Interscience Pubishers, Inc., 1949.

Schwinger, S.: "Quantum Electrodynamics," New York, Dover Publications, Inc., 1958.

Feynman, R. P.: "Quantum Electrodynamics," New York, W. A. Benjamin, Inc., 1962.

Klein, L. (ed.), "Dispersion Relations and the Abstract Approach to Field Theory," New York, Gordon and Breach, Science Publishers, Inc., 1961.

Screaton, G. R. (ed.): "Dispersion Relations; Scottish Universities Summer Schoo!," New York, Interscience Publishers, Inc., 1961.

Chew, G. F.: "S-Matrix Theory of Strong Interactions," New York, W. A. Benjamin, Inc., 1962.

最后，我们感谢我们的学生和同事们，他们是本书由讲义到出版的过程中无与伦比的批评家和评论员. 我们感谢 Leonard I. Schiff 教授对我们编写本书的鼓励和支持，感谢Ellen Mann 和 Rosemarie Stampfel 极好的秘书性合作帮助.

J. D. 比约肯　　S. D. 德雷尔

目　　录

第 11 章　理论的一般表述形式 …… 1

11.1　用定域场描述的含义 …… 2

11.2　正则表述形式和粒子的量子化方法 …… 4

11.3　正则表述形式和场的量子化 …… 11

11.4　对称性和守恒定律 …… 18

11.5　其他表述形式 …… 25

第 12 章　Klein-Gordon 场 …… 27

12.1　量子化和粒子解释 …… 27

12.2　态的对称性 …… 35

12.3　场的可测性和微观因果性 …… 36

12.4　真空涨落 …… 38

12.5　荷电标量场 …… 39

12.6　Feynman 传播子 …… 44

第 13 章　Dirac 场的二次量子化 …… 47

13.1　n 个全同粒子的量子力学 …… 47

13.2　费米子的粒子数表象 …… 49

13.3　Dirac 理论 …… 59

13.4　动量展开 …… 61

13.5　相对论协变性 …… 68

13.6　Feynman 传播子 …… 70

第 14 章　电磁场的量子化 …… 73

14.1　引言 …… 73

14.2　量子化 …… 74

14.3 量子化方法的协变性 …… 78
14.4 动量展开 …… 80
14.5 光子的自旋 …… 83
14.6 横光子的 Feynman 传播子 …… 84
第 15 章 相互作用场 …… 89
15.1 引言 …… 89
15.2 电磁相互作用 …… 89
15.3 Lorentz 不变性和平移不变性 …… 94
15.4 动量展开 …… 96
15.5 真空自能；正规编序 …… 97
15.6 其它相互作用 …… 100
15.7 相互作用的对称性质 …… 103
15.8 π 介子和核子的强相互作用 …… 106
15.9 奇异粒子的对称性 …… 109
15.10 非正规对称性 …… 116
15.11 宇称 …… 116
15.12 电荷共轭 …… 122
15.13 时间反演 …… 129
15.14 $\mathscr{TCP}$ 定理 …… 135
第 16 章 真空期待值和 S 矩阵 …… 142
16.1 引言 …… 142
16.2 物理态的性质 …… 142
16.3 入场和入态的建立；渐近条件 …… 145
16.4 对易子真空期待值的谱表示以及标量场传播子 …… 151
16.5 出场和出态 …… 156
16.6 S 矩阵的定义和一般性质 …… 158
16.7 标量场的约化公式 …… 161

16.8 Dirac 理论的入场和出场以及谱表示 …… 166
16.9 Dirac 场的约化公式 …… 176
16.10 光子的入态和出态及其约化公式 …… 181
16.11 光子的谱表示 …… 184
16.12 自旋和统计的联系 …… 189
第 17 章 微扰论 …… 193
17.1 引言 …… 193
17.2 U 矩阵 …… 194
17.3 τ 函数和 S 矩阵的微扰展开 …… 198
17.4 Wick 定理 …… 202
17.5 图表示 …… 206
17.6 真空振幅 …… 209
17.7 自旋和同位旋；π-核子散射 …… 211
17.8 π-π 散射 …… 215
17.9 量子电动力学的 Feynman 图规则 …… 220
17.10 经典流分布的软光子辐射；红外灾难 …… 226
第 18 章 色散关系 …… 233
18.1 因果性和 Kramers-Krönig 关系 …… 233
18.2 对高能物理的应用 …… 237
18.3 微扰论中顶角图形的解析性质 …… 240
18.4 推广到任意图形和电路类比 …… 245
18.5 传播子的阈奇异性 …… 252
18.6 普遍图形的奇异性和 Landau 条件 …… 256
18.7 顶角图的解析结构；反常阈 …… 261
18.8 顶角函数的色散关系 …… 268
18.9 散射振幅的奇异性 …… 271
18.10 应用于 π 介子-核子向前散射 …… 280
18.11 向前 π 介子-核子色散关系的公理化推导 … 292

18.12 应用色散关系对 π-π散射的动力学计算…… 299
18.13 π 介子电磁结构 …… 310
第 19 章 重整化 …… 316
19.1 引言 …… 316
19.2 正规自能和顶角部分,电子-正电子核 …… 317
19.3 自能和顶角部分的积分方程 …… 323
19.4 τ 函数和核 K 的积分方程; 骨架图形 …… 327
19.5 一个拓扑定理 …… 332
19.6 Ward 恒等式 …… 334
19.7 重整化常数的定义和重整化规定 …… 338
19.8 小结: 重整化的积分方程 …… 345
19.9 解析延拓和中间重整化 …… 348
19.10 发散度;收敛判据 …… 354
19.11 重整化理论为有限的证明 …… 367
19.12 四阶电荷重整化的例子 …… 384
19.13 Compton 散射的低能定理 …… 399
19.14 Feynman 振幅的渐近行为…… 407
19.15 重整化群 …… 411
附录 A 符号 …… 422
附录 B Feynman 图规则 …… 427
附录 C 对易子和传播子函数…… 434

第十一章　理论的一般表述形式

在《相对论量子力学》中，我们曾用直观的和对应的论证发展了传播子方法，并给出了微扰论里计算相对论性粒子相互作用的实际规则．现在我们从量子场的表述形式来系统地导出这些规则．我们的目的是首先把传播子方法论证中的"漏洞"补起来，然后发展一种表述形式，它可以应用于微扰论不适用的问题，诸如包含强耦合的介子和核子的过程．

我们的方法最好以电磁场为例来阐明．势 $A^{\mu}(x)$ 满足 Maxwell 波动方程，并可以认为它描述一个具有无穷自由度的动力学系统．这就是说在空间每一点，$A^{\mu}(x)$ 可看成是一个独立的广义坐标．根据第一章所说的普遍原则[1]，为了从经典理论过渡到量子理论，我们必须把坐标及其共轭动量看作为作用在可能的物理态 Hilbert 空间中的算符，再对它们加上量子条件．这就是正则量子化方法．它是非相对论力学的量子化方法到场函数的直接推广，这些场函数遵从由拉氏量导出的微分波动方程．这样作了以后，我们就得到了 Bohr 互补原理意义下的电磁场的粒子解释．

如果光子能够以这种自然的方式从 Maxwell 场的量子化得出，那么人们会问，在自然界中观察到的其它粒子是否也可以用同样的量子化方法与力场联系起来．基于这一点，汤川从核力的存在预言了 π 介子的存在．反过来，从这一观点出发，自然地也可以将自然界中每一种观察到的粒子与一个

1) 以后凡是讲参考第一章至第十章，均指参考上册《相对论量子力学》．

$\varphi(x)$场联系起来，而$\varphi(x)$满足某一假定的波动方程．在完成了正则量子化的程序以后，我们就会得到场φ的粒子解释．

在这样的程序中，我们必须首先定义场坐标$\varphi(x)$的共轭动量$\pi(x)$．我们利用一个拉氏量，由它可以导出场$\varphi(x)$的波动方程和共轭动量．第一章里的正则量子化方法用的是对易子条件．利用它得到的场量子，例如光子，遵从的是 Bose 统计． 费米子遵从一个有着类似的量子场形式的不相容原理，为了描述它，结果只要把对易子条件用反对易子关系来代替就可以了．

用这方法可从构造一个统一的表述形式，它提供了描述两类粒子的基础．我们将很快看到拉氏量方法的另一个诱人的特点，就是它直接导致守恒定律．

11.1 用定域场描述的含义

在推广并探讨把量子化方法应用于满足波动方程的经典场结果之前，讨论一下这个方案的含义也许是值得的．首先我们得到一个具有微分波动传播的理论．场函数是连续参数$\boldsymbol{x}$和t的连续函数，场在点$\boldsymbol{x}$的改变由无限邻近于该点的那些场的性质来决定．

对于大多数波动场(例如声波和弦及膜的振动)，这样的描述是个理想化，它只在距离大于表征介质颗粒大小的特征长度时成立．对于较小的距离，理论要作深刻的修正．

电磁场是一个值得注意的例外．实际上，在狭义相对论排除机械解释之前，物理学家们曾作了巨大的努力去发现电磁场的这种机械描述的证据． 在放弃了传播光波的“以太”要求之后，当观察到的电子波动性质启发人们引入一个新场$\varphi(x)$时，接受这样的思想就显然不那么困难了．事实上没有任何证据说明以太是电子波$\psi(\boldsymbol{x}, t)$的载体．但是，假定在

大距离上（即原子长度 $\approx 10^{-8}$cm）有效的波动描述可以扩展到量级未定的更小距离（例如小于核的长度$\approx 10^{-13}$cm），这是对现有实验知识的一个粗糙而意义深远的外推.

在相对论性理论中，我们已经看到，场描述在任意小的空间、时间间隔都正确这一假定已导致（在微扰论中）电子自能及“裸电荷”的发散表达式. 重整化理论绕过了这些可能显示微扰展开失效的发散困难. 不过，普遍的感觉是，发散性是理论的小距离行为中一种痼疾的症候.

于是我们可能要问，为什么定域场论，也即是可以用波动传播微分定律描述的场论，能如此广泛地被应用和接受. 这有几个理由，而其中重要的一条是，在一个相当的范围内，理论和观察结果符合. 在上册的讨论中已有这样的一些例子. 但最主要的理由非常简单：不存在令人信服的理论形式，可以避开微分的场方程.

相对论粒子相互作用的理论在数学上必然是很复杂的. 因为存在产生和湮灭过程，所以它同时是一个多体问题的理论. 在现阶段只知道如何寻求这个问题的近似解，因此任何这类理论的预言都是不完全的，在最好的情况下也有某种不定性.

面对这种情况，在构造理论中应遵循的最合理途径就是保持那些先前在更局限的范围内成立的普遍原理. 这里就包括有量子化方法，它强烈地牵涉到哈氏量H的存在. 但是根据 Schrödinger 方程，H生成无穷小时间平移，于是我们就得到时间微分变化的描述. 然后，Lorentz 不变性也要求空间的微分变化. 对于非定域“微粒”理论，哈氏量完全可能不存在；如果它不存在，那么我们对非相对论理论的量子化方法就只能望洋兴叹了.

如果我们简单地保持这样的观念，即借助连续坐标 $\boldsymbol{x}$ 和

t 的微观表述是 Lorentz 不变的，那么我们预期相互作用通过时间——空间的传播速度不大于 C. 这种“微观因果性”的概念强烈地迫使我们进入场的概念. 即使在小距离有微粒性，如果我们保持微观因果性，那么一个“微粒”对另一个的影响必然是推迟的. 对此最自然的描述方法是用附加的场. 这样，问题便变得更加复杂，而在理解上却不会有相应的收获.

小距离上的微粒性没有具体的实验证据[1]，而高能范围内狭义相对论的正确性则有着肯定的证据，而且也已有某种肯定的证据[2]表明，微观因果性概念是一个正确的假定. 因为没有更令人信服的其它理论，今后我们只限于讨论定域因果性场的表述形式. 毫无疑问，一个改进的理论必须把定域场论作为它的适当的大距离近似或对应. 不过我们再次强调一下，我们发展的表述形式也许只能很好地描述具有极不相同的大距离极限外（即是大于 10^{-13}cm 的距离）的亚微观性质的物理世界.

11.2 正则表述形式和粒子的量子化方法

作为以下展开的导引，我们回忆一下大家熟知的粒子力学中经典动力学系统的量子化方法. 作为例子，考虑一个粒子在保守力场中的一维运动. 令 q 是粒子的（广义）坐标，$\dot{q} = dq/dt$ 是速度，$L(q,\dot{q})$ 是拉氏量. 按照哈密顿原理，粒子的动力学决定于条件

$$\delta J = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt = 0 \qquad (11.1)$$

---

1) 在量子电动力学中，对低能和高能过程，理论和实验有着很高精度的符合，参看，*R. P. Feynmann*, Rept. Congr., Brussels, Interscience Publishers, Inc., New York, 1961.

2) 我们指的是向前 π 介子——核子散射的色散关系的实验验证，这将在第八章里讨论.

(11.1) 式表明，粒子从 (q_1,t_1) 到 (q_2,t_2) 走过的真实物理路径 $q(t)$ 是这样的，沿着它，作用量 J 是稳定的。所以路径的微小变分 $q(t)\to q(t)+\delta q(t)$，如图 11.1 所示，使作用量到一阶变分不变。

哈密顿原理直接导致 Euler-Lagrange 运动方程[1)]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}=0 \tag{11.2}$$

为了作出这个方程的形式量子化，我们将它重写成哈氏

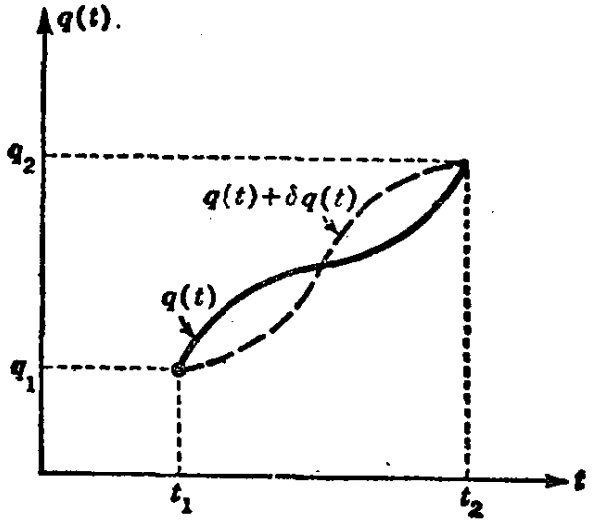


图 11.1 作用量原理的固定端点路径变分

量形式。为了作到这一点，我们定义 q 的共轭动量 p 为

$$p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \tag{11.3}$$

并用 Legendre 变换引入哈氏量

$$H(p,q)=p\dot{q}-L(q,\dot{q}) \tag{11.4}$$

用 H 表示，方程 (11.2) 变为

---

1) 参考 *H. Goldstein* "Classical Mechanics", Addison-Wesley Publishing Company Inc., Reading, Mass., 1950. (11.2) 的形式适用于 L 中没有对坐标微商高于一次的情形。

$$\{H,q\}_{PB}=\frac{\partial H}{\partial p}=\dot{q}$$

和 (11.5)

$$\{H,p\}_{PB}=-\frac{\partial H}{\partial q}=\dot{p}$$

其中 $\{\}_{PB}$ 指 Poisson 括号.

为了对 (11.5) 进行量子化，我们令 q 变成 Hilbert 空间中的厄米算符，并将 p 换成 $-i\partial/\partial q$，使得共轭动量和坐标满足对易关系

$$[p,q]=-i \tag{11.6}$$

它对应于经典 Poisson 括号 $\{p,q\}_{PB}=1$. 在这样的定义下，p 也是厄米的. 粒子的动力学由 Schrödinger 方程给出

$$H(p,q)\Psi(t)=i\frac{\partial\Psi(t)}{\partial t} \tag{11.7}$$

其中 Ψ 是 Hilbert 空间中的波函数或态矢. 如果我们在某一时刻，例如 $t=0$，给定初态 Ψ，则 Schrödinger 方程将决定所有未来时刻的状态并由此决定所有未来时刻的物理期望值.

粒子运动随时间变化的这种描述称为 Schrödinger 表象，其中 ψ 依赖于时间而算符 p 和 q 则与时间无关. 我们也可以把运动随时间的变化用另一种语言来表达，其中算符 $p(t)$ 和 $q(t)$ 依赖于时间而不是态矢 Ψ. 这种表述称为 Heisenberg 表象. 它与 Schrödinger 表象等价. 这可以形式地用构造联系两种表象的幺正变换来证明. 形式地积分 Schrödinger 方程 (11.7)，我们有

$$\Psi_S(t)=e^{-iHt}\Psi_S(0)\equiv e^{-iHt}\Psi_H \tag{11.8}$$

其中对于厄米的 H，算符 e^{-iHt} 是幺正的，并给出 $\Psi_S(t)$ 的时间变化. Ψ_S 在 $t=0$ 的值是 Heisenberg 态矢: $\Psi_H\equiv\Psi_S(0)$. 与时间无关的算符 Q_S 按下式变换成含时间的 Heisenberg 算

符

$$O_H(t) = e^{iHt}O_S e^{-iHt} \tag{11.9}$$

幺正算符变换(11.9)是这样构造的，它应使矩阵元保持不变，因而物理观测量也不变.

量子理论中动力学问题的求解，就是在某一初始时刻，例如 $t = 0$，代表物理观测量的算符矩阵元已给定时，求出这些算符在以后时刻 t 的矩阵元. 为做到这点，在 Schrödinger 表象中我们解波函数随时间变化的方程 (11.7). 而在 Heisenberg 表象中我们则解 Heisenberg 算符随时间变化的运动方程. 由(11.9)式，这方程就是[1)]

$$\frac{dO_H(t)}{dt} = i[H, O_H(t)] \tag{11.10}$$

只要我们讨论的是非相对论理论中的能量本征函数，这两种形式没有多大的实际差别. 按照 (11.9) 式，

$$H_H(t) = H_S = H$$

并且在没有随时间变化的外力情况下，(11.10) 给出

$$dH/dt = 0$$

对于能量本征函数，Schrödinger 波函数是

$$\Psi_n(q, t) = e^{-i\omega_n t}u_n(q)$$

而相应的 Heisenberg 函数是 $u_n(q)$.

在相对论性场论中，我们将发现 Heisenberg 表象要方便一些，因为态矢 Ψ 的明显表达式比在非相对论情形难以处理，而算符的动力学比 Ψ 的动力学易于描述. 此外，由于 Heisenberg 表象把时间与空间坐标一齐放入场算符中，我们将更易于看出场论推演的 Lorentz 不变性.

---

1) 对于是时间坐标显函数的算符，(11.10) 成为

$$\frac{dO_H(t)}{dt} = i[H, O_H(t)] + \frac{\partial O_H}{\partial t}$$

在 Heisenberg 表象中由(11.6)和(11.9)得出，在任一时刻 t，基本对易子条件保持其形式为

$$[p(t),q(t)]=-i \tag{11.11}$$

并且我们可以写出

$$p(t)=-i\frac{\partial}{\partial q(t)} \text{ 及 } q(t)=i\frac{\partial}{\partial p(t)}$$

所以由(11.10)式表示的正则坐标和动量的动力学

$$\frac{dp(t)}{dt}=i[H,p(t)] \quad \frac{dq(t)}{dt}=i[H,q(t)] \tag{11.12}$$

现在可以纳入算符的**经典**运动方程的形式

$$\frac{dp(t)}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q(t)} \quad \frac{dq(t)}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p(t)}$$

借助于 Heisenberg 算符，这种量子动力学问题的表述形式和原始的经典形式十分相似，以后我们将经常求助于这种经典形式并进行模仿. 在量子理论中，动力学变量是厄米算符 $p(t)$ 和 $q(t)$，它们满足和经典方程(11.5)一样的运动方程. 要完全决定动力学问题，我们必须给出初始时刻算符 p 和 q 的矩阵元. 经典理论给出的初始条件 $p(0)$ 和 $q(0)$ 在这里必须补充以这样的要求：在 $t=0$ 时对易子条件(11.11)对于任何物理态都必须满足. 由于假定了一个系统的物理态——例如能量本征态——形成一个完全集合，初始的对易子条件可以叙述为一个算符的要求如(11.11)式.

为了阐明这种方法，我们在 Heisenberg 表象中对一维简谐振子进行量子化. 哈氏量是

$$H=\frac{1}{2}(p^2+\omega_0^2q^2) \tag{11.13}$$

运动方程为

$$p(t)=\frac{dq(t)}{dt}\equiv\dot{q}(t),\ \ddot{q}+\omega_0^2q=0$$

为了对坐标求解，我们引入方便的线性组合

$$a = \sqrt{\frac{1}{2\omega_0}}(\omega_0 q + ip) \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{1}{2\omega_0}}(\omega_0 q - ip) \tag{11.14}$$

借助它，运动方程变为

$$\dot{a}(t) = -i\omega_0 a(t) \quad \dot{a}^\dagger(t) = +i\omega_0 a^\dagger(t)$$

其解是

$$a(t) = a_0 e^{-i\omega_0 t} \quad a^\dagger(t) = a_0^\dagger e^{+i\omega_0 t} \tag{11.15}$$

其中 a_0 和 $a_0^\dagger$ 是不依赖于时间的算符，由 (11.11) 式，它们满足对易关系

$$[a(t), a^\dagger(t)] = [a_0, a_0^\dagger] = 1 \quad [a(t), a(t)] = [a_0, a_0] = 0$$
$$[a^\dagger(t), a^\dagger(t)] = [a_0^\dagger, a_0^\dagger] = 0 \tag{11.16}$$

用 a 及 $a^\dagger$ 表示的哈氏量是

$$H = \frac{1}{2}\omega_0(a^\dagger a + aa^\dagger)$$
$$= \frac{1}{2}\omega_0(a_0^\dagger a_0 + a_0 a_0^\dagger) \tag{11.17}$$

由于任一态 Ψ 可用 H 的稳定的本征函数 Ψ_n 展开，我们只需要找出 Ψ_n 的性质. 从对易关系我们有

$$[H, a_0] = -\omega_0 a_0 \quad [H, a_0^\dagger] = \omega_0 a_0^\dagger \tag{11.18}$$

所以，如果 $H\Psi_n = \omega_n \Psi_n$，则 $Ha_0^\dagger \Psi_n = (\omega_n + \omega_0)a_0^\dagger \Psi_n$. 从对应于能量本征值为 ω_n 的给定 Ψ_n 出发，不断应用算符 $a_0^\dagger$，$a_0^\dagger \Psi_n = \Psi_{n+1}$，我们就可以生成更高能量态的一个无穷序列. 类似地，如果

$$H\Psi_n = \omega_n \Psi_n \text{ 则 } Ha_0 \Psi_n = (\omega_n - a_0)a_0 \Psi_n$$

如此，不断地应用算符 a_0，$a_0 \Psi_n = \Psi_{n-1}$，我们便生成更低的能量态. 但是，因为哈氏量 (11.13) 是厄米算符的平方和，因而不能有负的本征值，序列必须中断. 能量最低的基态由要

求 $a_0\Psi_0 = 0$ 而得到. 于是基态的能量为

$$H\Psi_0 = \frac{1}{2}\omega_0 a_0 a_0^\dagger \Psi_0 = \frac{1}{2}\omega_0[a_0, a_0^\dagger]\Psi_0 = \frac{1}{2}\omega_0\Psi_0$$

而第 n 态

$$\Psi_n \equiv (a_0^\dagger)^n \Psi_0 \tag{11.19}$$

的能量为

$$\omega_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega_0$$

一维振子的能谱是非简并的，且不同的态 (11.19) 相互正交[1]:

$$(\Psi_n, \Psi_m) = \delta_{nm} \quad (n!)(\Psi_0, \Psi_0) \tag{11.20}$$

在这种表象中，$a_0^\dagger$ 的矩阵元由以下的考虑求得

$$\left\langle \Psi_n \left| \frac{H}{\omega_0} + \frac{1}{2} \right| \Psi_n \right\rangle = \langle \Psi_n | a_0 a_0^\dagger | \Psi_n \rangle$$
$$= \langle \Psi_{n+1} | a_0^\dagger | \Psi_n \rangle = n + 1$$

我们可以取作

$$\langle \Psi_{n+1} | a_0^\dagger | \Psi_n \rangle = n + 1 = \langle \Psi_n | a_0 | \Psi_{n+1} \rangle \tag{11.21}$$

在任一时刻 t，Heisenberg 算符的矩阵元是

$$\langle \Psi_{n+1} | a^\dagger(t) | \Psi_n \rangle = e^{i\omega_0 t} \langle \Psi_{n+1} | a_0^\dagger | \Psi_n \rangle$$
$$= \langle e^{-i\omega_{n+1}t}\Psi_{n+1} | a_0^\dagger | e^{-i\omega_n t}\Psi_n \rangle \tag{11.22}$$

在这个特殊的例子中，只有那些使 n 改变 $\Delta n = \pm 1$ 的矩阵元才不为零. (11.3) 到 (11.22) 式构成了完全的量子力学解. 它们描述算符随时间的变化，可能的物理态以及能量表象中算符的矩阵元.

可以直接将前面的讨论推广到 n 个自由度的系统. 我们在 Heisenberg 表象中引入 n 个厄米算符 $q_i(t)$ 和 n 个共轭动

1) 注意 Ψ_n 没有归一化.

量 $p_i(t)$, $i=1,\cdots,n$. 动力学仍由 $2n$ 个经典的运动方程给出

$$-\frac{\partial H}{\partial q_i}=\frac{dp_i}{dt}\quad\frac{\partial H}{\partial p_i}=\frac{dq_i}{dt}\ i=1,\cdots,n \tag{11.23}$$

如果在一个初始时刻,例如 $t=0$, 给出 p_i 和 q_i 的矩阵元, 并且限制它们满足对易子条件

$$\begin{aligned}&[p_i(0),q_i(0)]=-i\delta_{ij}\\&[p_i(0),p_i(0)]=0\\&[q_i(0),q_i(0)=0\end{aligned}\tag{11.24}$$

那就完全确定了量子动力学问题. 如(11.12)中那样, 对于描述 n 自由度系统的 n 个独立坐标和动量中的每一个, (11.23)的量子形式是

$$\dot{p}_i(t)=i[H,p_i(t)]\quad\dot{q}_i(t)=i[H,q_i(t)] \tag{11.25}$$

11.3 正则表述形式和场的量子化[1)]

取极限 $n\to\infty$, 我们就得到场论, 空间每一点的场被考虑为一个独立的广义坐标. 在经典物理中这种极限的一个简单例子是有重量的振动弦. 对于弦上N个有限数目的珠子, 我们需要解N个耦合的振子运动方程;在$N\to\infty$的极限下,我们达到连续弦的极限, 由位移场 $\varphi(\boldsymbol{x},t)$ 来描写,它作为弦上位置 $\boldsymbol{x}$ 和时间 t 的函数而连续地变化. φ的数值度量了弦上 $\boldsymbol{x}$ 点在 t 时刻偏离静止位置的幅度;它的时间导数 $\partial\varphi(\boldsymbol{x},t)/\partial t$ 则度量了它在 $(\boldsymbol{x},t)$ 的速度.

按照这种类比,运用正则形式, 我们预期 $\varphi(\boldsymbol{x},t)$ 起着坐标 $q_i(t)$ 的作用而 $\partial\varphi(\boldsymbol{x},t)/\partial t$ 对应于 $\dot{q}_i(t)$. 不连续的指标

1) W. Heisenberg and W. Pauli *Z. Physik* **56** 1(1929); G. Wentzel «*Quantum Theory of Fields*» *Interscience Publishers Inc., New York*, 1949.

i 用连续的坐标变量 $\boldsymbol{x}$ 来代替，并且在 Heisenberg 表象中场是空间与时间坐标 $x=(\boldsymbol{x},t)$ 的函数. 在这样的处理中，空间和时间坐标处于同样的地位，这使我们看到 Heisenberg 表象的优点，即明显地保持了表述形式的 Lorentz 协变性. 时间坐标的特殊地位的唯一痕迹是初始条件的表述，以及其它如 $t=0$ 时的对易关系. $t=0$ 的面是理论中的一个非协变因素. 但是这一点也可以用类空面的协变观念来去掉. 我们在类空面上给定初始条件及对易子（图 11.2）. 一个类空面是一个三维的面 σ，它的法矢量 η_μ 在任何地方都是类时的，即 $\eta_\mu\eta^\mu=1>0$. 按约定我们总将 η^μ 选在未来光锥内，即 $\eta^0>0$. 在我们以后的讨论中，“在一个给定时刻 t”和“在一个类空面 σ 上”这两句话可以互换；这样我们就可以给我们的初始条件以一个协变的表述.

经典场论的量子化途径是从场方程出发的. 知道了场方程，我们寻找一个拉氏量，使得它通过哈密顿原理会再次导出该方程. 有了拉氏量，就有可能定出正则动量并按(11.24)进行量子化. 随着这一步，场 $\varphi_i(\boldsymbol{x},t)$ 及它们的正则动量 $\pi_i(\boldsymbol{x},t)$ 变成 Hilbert 空间的算符，它们作用在态矢 Φ 上. 我们假定，如第一章开头在单粒子量子力学中提到的那样，态矢 Φ 组成

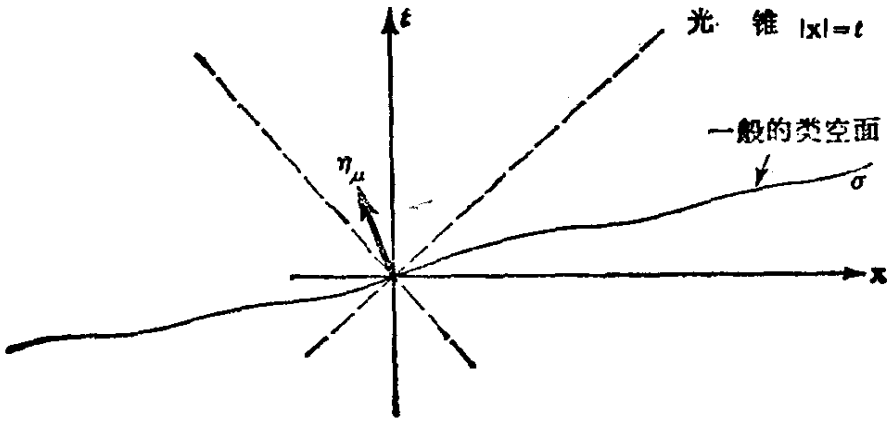


图 11.2 具有法矢量 η_μ 的一般类空曲面 σ

Hilbert 空间中的完全集合. 在 Heisenberg 表象里我们将更经常地看到 Φ 是哈氏量的本征态

$$H(\varphi_i,\pi_i)\Phi_n = E_n\Phi_n$$

这里与粒子的做法类似,哈氏量由场 φ_i 及动量 π_i 构成.

我们首先回忆在经典质点力学中如何由运动方程构造拉氏量 L, 然后我们可以仿照同样的步骤在场论中构造拉氏量. 从 Newton 定律

$$m_i\ddot{q}_i = -\frac{\partial}{\partial q_i}V(q_1,\cdots,q_n)$$

出发,我们乘以 δq_i 并对 $i=1,\cdots,n$ 求和

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\ddot{q}_i\delta q_i = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial q_i}\delta q_i = -\delta V$$

其次对具有固定端点的粒子轨道, 即 $\delta q_i(t_1)=\delta q_i(t_2)=0$, 作时间间隔 t_1 到 t_2 的积分. 经过一次分部积分后,我们得

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{q}_i\delta\dot{q}_i - \delta V\right) = 0$$

这正是具有拉氏量

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{q}_i^2 - V$$

的哈密顿原理.

我们在一个经典场 $\varphi(x)$的情形下,按完全相同的程序进行. 作为例子, 我们取这个经典场满足自由的 Klein-Gordon 波动方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)\varphi = 0 \qquad (11.26)$$

上面对 q_i 的求和在这里换成对空间坐标 $\boldsymbol{x}$ 的三维积分. 首先将场方程 (11.26) 乘以场振幅在 x 处的无穷小变分

$$\delta\varphi(x) = \varphi'(x) - \varphi(x)$$

对所有的坐标 $\boldsymbol{x}$ 及从 t_1 到 t_2 的时间间隔积分

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi + m^2 \varphi \right) \delta\varphi = 0$$

在端点 t_1 和 t_2，变分仍然限制为零：$\delta\varphi(t_1) = \delta\varphi(t_2) = 0$。我们也假定系统局限在一定的空间范围内，所以 $\boldsymbol{x} \to \pm\infty$ 的无穷远面对积分没有贡献．这给出

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \delta \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right] = 0$$

或

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} d^4x \mathscr{L} \left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \right) = 0$$

其中

$$\mathscr{L} \left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \right) \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} - m^2 \varphi^2 \right) \qquad (11.27)$$

$\mathscr{L}$ 是场 φ 及其一次导数 $\partial\varphi/\partial x^\mu$ 的 Lorentz 不变泛函；它叫做拉氏密度．和粒子力学中的角色相同的拉氏量 L 是拉氏密度的体积积分

$$L \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \mathscr{L} \left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \right)$$

在普遍的理论中，我们总是假定场方程可以从某个拉氏密度 $\mathscr{L}$ 导出．类似于粒子力学的哈密顿原理 (11.1)，我们要求作用量对满足真实运动方程的场是稳定的，即

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathscr{L} = 0 \qquad (11.28)$$

如同粒子力学的情形那样，作 (11.28) 的变分时，让场在积分区间内变动，而在 t_1 及 t_2 的边界上保持固定，我们就会得到场的 Euler-Lagrange 方程．特别地，对于由单一的场 φ 及仅仅是 φ 和 $\partial\varphi/\partial x^\mu$ 泛函的拉氏密度 $\mathscr{L}$ 所描述的简单系统，(11.28) 给出

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \left[\mathscr{L}\left(\varphi + \delta\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} + \delta\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\right) - \mathscr{L}\left(\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\right)\right]$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial\varphi/\partial x^\mu)}\delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\right)\right] = 0$$

应用分部积分及关系

$$\delta\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\varphi + \delta\varphi) - \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\delta\varphi)$$

给出

$$\int_{t_1}^{t_2} d^4x\,\delta\varphi \left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial\varphi/\partial x^\mu)}\right] = 0$$

对于任意的变分 $\delta\varphi$，这导致场方程

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial\varphi/\partial x^\mu)} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi} = 0 \qquad (11.29)$$

对 (11.27) 中特殊选择的 $\mathscr{L}$，就会由 (11.29) 得到 Klein-Gordon 方程 (11.26).

由此方法导出的场方程一般地是定域的微分方程. 如果 $\mathscr{L}$ 包含场的高于一阶的导数，则场方程将高于二次[1]. 只要 $\mathscr{L}$ 只包含 $\varphi(x)$的有限次导数，则场满足微分方程，并且理论是"定域"的. 在这里接受定域作用量的假定时，我们回忆一下本章第一节中讨论的保留意见. 如果自然界是非定域的或者在小距离上是微粒性的话，这里给出的正则推演很可能只是在对应原理的意义上对于大距离才适用.

在任何情形下，拉氏量的选择都为所要求的特定场方程所决定. (11.27) 式是为给出 Klein-Gordon 方程而设计的；我们有兴趣的另外例子是 Dirac 和 Maxwell 拉氏量. 对于有多个独立场，例如 $\varphi_r(x), r = 1, \cdots, n$ 描述的系统，独立地

1) 以后我们将要求 $\mathscr{L}$ 只是场及其一次导数的泛函. 此外，$\mathscr{L}$ 不显含空间-时间坐标. 这意味着我们只考虑"封闭"的系统，即只考虑不与外源交换能量、动量的系统.

变分每一个场 $\delta\varphi_r(x)$，从哈密顿原理我们得到 n 个场方程

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_r}-\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial\varphi_r/\partial x^\mu)}=0,r=1,\cdots,n \quad (11.30)$$

现在转向正则形式和量子化方法. 象在粒子力学中那样，我们用拉氏密度 $\mathscr{L}$ 定义正则动量. 为了明显给出场与粒子力学间完全平行的关系，我们把三维空间分割成一些体积元 ΔV_i 并对第 i 个体积元取 $\varphi(x)$的平均值，以此定义第 i 个坐标 $\varphi_i(t)$，

$$\varphi_i(t)\equiv\frac{1}{\Delta V_i}\int_{(\Delta V_i)}d^3x\varphi(\boldsymbol{x},t)$$

这样便将系统转换成一个有限自由度的系统. 将第 i 个体积元 $\partial\varphi(\boldsymbol{x},t)/\partial t$ 的平均值记为 $\dot{\varphi}_i(t)$，我们将拉氏量重新写成

$$L=\int d^3x\mathscr{L}\to\sum_i\Delta V_i\mathscr{L}_i(\dot{\varphi}_i(t),\varphi_i(t),\varphi_{i\pm s}(t),\cdots) \quad (11.31)$$

不同的 φ_i 都是独立的自由度；邻近体积元中的 $\varphi_{i\pm s}(t)$ 的值出现在 $\mathscr{L}_i$ 中，以便可以取适当的差分来形成 $\nabla\varphi$. 因为只有一个时间导数 $\dot{\varphi}_i(t)$出现在每一项 $\mathscr{L}_i$ 中，正则动量就是

$$p_i(t)=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_i(t)}=\Delta V_i\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}_i(t)}\equiv\Delta V_i\pi_i(t) \quad (11.32)$$

于是像 (11.14) 中定义的那样，哈氏量是

$$H=\sum_i p_i\dot{\varphi}_i-L=\sum_i\Delta V_i(\pi_i\dot{\varphi}_i-\mathscr{L}) \quad (11.33)$$

回到连续的标记，我们定义 $\varphi(\boldsymbol{x},t)$ 的共轭动量为

$$\pi(\boldsymbol{x},t)=\frac{\partial\mathscr{L}(\varphi,\dot{\varphi})}{\partial\dot{\varphi}(\boldsymbol{x},t)} \quad (11.34)$$

它对体积元的平均给出 (11.32) 中的 $\pi_i(t)$. 现在哈氏量写成哈氏密度 $\mathscr{H}(\pi,\varphi)$ 的体积积分，$\mathscr{H}$ 由 (11.33) 给出

$$H=\int d^3x\mathscr{H}(\pi(\boldsymbol{x},t),\varphi(\boldsymbol{x},t)) \quad \mathscr{H}=\pi\dot{\varphi}-\mathscr{L} \quad (11.35)$$

写出正则动量以后，我们按照量子化方法将动力学变量 $\varphi_i(t)$，$p_i(t)$ 换成厄米算符，它们满足与 (11.24) 类似的对易关系

$$[\varphi_i(t),\varphi_j(t)]=[p_i(t),p_j(t)]=0$$
$$[p_i(t),\varphi_j(t)]=-i\delta_{ij}$$

或者用 $\pi_i(t)$ 表示为

$$[\pi_i(t),\varphi_j(t)]=-i\frac{\delta_{ij}}{\Delta V_i}$$

用连续的语言表达，它们成为

$$\begin{aligned}&[\varphi(\boldsymbol{x},t),\varphi(\boldsymbol{x}',t)]=0\\&[\pi(\boldsymbol{x},t),\pi(\boldsymbol{x}',t)]=0\\&[\pi(\boldsymbol{x},t),\varphi(\boldsymbol{x}',t)]=-i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\end{aligned}\qquad(11.36)$$

这里 Dirac δ 函数是当 $\Delta V_i\to 0$ 时 $\delta_{ij}/\Delta V_i$ 的极限，按照其定义

$$\int d^3x'\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')f(\boldsymbol{x}')=f(\boldsymbol{x})$$

(11.34) 和 (11.36) 加上运动方程提供了正则量子场论的基础. 为了将这套办法推广到由若干个独立的场 $\varphi_r(\boldsymbol{x},t)$ 描述的物理系统，我们引入每一个场的共轭动量

$$\pi_r(\boldsymbol{x},t)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}_r(\boldsymbol{x},t)}\qquad(11.37)$$

以及哈氏密度

$$\mathscr{H}(\pi_r\cdots,\varphi_r\cdots)=\sum_{r=1}^{n}\pi_r\dot{\varphi}_r-\mathscr{L}\qquad(11.38)$$

关于量子化条件，我们引入对易子

$$\begin{aligned}&[\varphi_r(\boldsymbol{x},t),\varphi_s(\boldsymbol{x}',t)]=0\\&[\pi_r(\boldsymbol{x},t),\pi_s(\boldsymbol{x}',t)]=0\\&[\pi_r(\boldsymbol{x},t),\varphi_s(\boldsymbol{x}',t)]=-i\delta_{rs}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\end{aligned}\qquad(11.39)$$

作为直接仿照质点力学来建立量子场表述形式的最后一步，从(11.37)到(11.39)我们发现，这时(11.25)式变为

$$\pi_r(\boldsymbol{x},t) = i[H,\pi_r(\boldsymbol{x},t)]$$
$$\varphi_r(\boldsymbol{x},t) = i[H,\varphi_r(\boldsymbol{x},t)] \tag{11.40}$$

11.4 对称性和守恒定律

在经典场论中，拉氏量形式提供了一个方便而系统的方法去确定和求得运动常数．从标量拉氏量出发可以证明，对应于每一种使拉氏量密度 $\mathscr{L}$ 和运动方程形式不变的连续对称变换，存在一个运动常数和一个守恒定律．这样一个定理[1)]（称作 Noether 定理）能使自然中观察到的选择定则直接用对 $\mathscr{L}$ 的对称性要求来描述，在发展新理论中，它是引入相互作用项的得力响导，因此我们乐于把它应用到量子场论．

我们首先讨论来自经典场论平移不变性的守恒律．在一个无穷小平移下

$$x'_\mu = x_\mu + \epsilon_\mu \tag{11.41}$$

拉氏量密度改变一个量

$$\delta\mathscr{L} = \mathscr{L}' - \mathscr{L} = \epsilon_\mu \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_\mu} \tag{11.42}$$

另一方面，如果 $\mathscr{L}$ 是平移不变的，它不具有明显的坐标依赖性，我们写成 $\mathscr{L} = \mathscr{L}(\varphi_r, \partial\varphi_r/\partial x_\mu)$，所以

$$\delta\mathscr{L} = \sum_r \left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_r(x)}\delta\varphi_r + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial\varphi_r/\partial x_\mu)}\delta\left(\frac{\partial\varphi_r}{\partial x_\mu}\right)\right] \tag{11.43}$$

其中

$$\delta\varphi_r = \varphi_r(x+\epsilon) - \varphi_r(x) = \epsilon_r \frac{\partial\varphi_r(x)}{\partial x_\nu} \tag{11.44}$$

1) 见 E. Hill, *Rev. Mod. Phys.* **23**, 253 (1957) 有该定理的详细讨论．

将这两种表达式等同起来并应用 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial \varphi_r / \partial x^\mu)} = 0 \tag{11.45}$$

给出

$$\epsilon_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\sum_r \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial \varphi_r / \partial x_\mu)} \epsilon_\nu \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_\nu} \right) \tag{11.46}$$

由于它对任意的位移 ϵ_μ 都成立，我们可写成

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \mathscr{T}_{\mu\nu} = 0 \tag{11.47}$$

其中能量-动量张量 $\mathscr{T}_{\mu\nu}$ 定义为

$$\mathscr{T}_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\mathscr{L} + \sum_r \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial \varphi_r / \partial x_\mu)} \frac{\partial \varphi_r}{\partial x^\nu} \tag{11.48}$$

由此微分守恒定律得到守恒量

$$P_\nu = \int d^3x \mathscr{T}_{0\nu} = \int d^3x \left[\sum_r \pi_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial x^\nu} - g_{0\nu}\mathscr{L} \right] \tag{11.49}$$

$$\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial t} = 0$$

我们已在 (11.37) 和 (11.38) 中看到 $\mathscr{T}_{00}$ 是哈氏量密度

$$\mathscr{T}_{00} = \sum_r \pi_r \dot{\varphi}_r - \mathscr{L} = \mathscr{H} \tag{11.50}$$

并且

$$\int d^3x \mathscr{T}_{00} = H$$

所以我们可以把 P_ν 定为守恒的能量-动量四矢量.

同样地我们可以根据无穷小 Lorentz 变换

$$x'_\nu = x_\nu + \epsilon_{\nu\mu} x^\mu \quad \epsilon_{\mu\nu} = -\epsilon_{\nu\mu} \tag{11.51}$$

构造角动量守恒量. Lorentz 不变性的实际检验是在运动方程中作这样的代换[1)]

$$\varphi_r(x) \to S_{rs}^{-1}(\epsilon)\varphi_s(x') \tag{11.52}$$

1) 今后场分量 r 和 s 的重复指标理解为求和。

并决定运动方程是否在带撇的坐标系统中和在不带撇的系统中取相同的形式. 这里 $S_{rs}(\epsilon)$ 是场 φ_r 在无穷小 Lorentz 变换 (11.51) 下的变换矩阵，如果不是标量场，它就不是单位矩阵. 我们已看过 Dirac 方程的例子. 我们回忆一下那里的 (2.17) 式[1]

$$S_{rs}(\epsilon) = \delta_{rs} + \frac{1}{8}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_{rs}\epsilon_{\mu\nu}$$

我们现在将 (11.52)代入拉氏量理论中，并要求拉氏密度是一个 Lorentz 标量，因此它在代换 (11.52) 下形式不变，即是

$$\mathscr{L}\left(S^{-1}_{rs}\varphi_s(x'), \frac{\partial}{\partial x_\mu} S^{-1}_{rs}\varphi_s(x')\right) = \mathscr{L}\left(\varphi_r(x'), \frac{\partial\varphi_r(x')}{\partial x'_\mu}\right) \tag{11.53}$$

这将保证通过作用量极值原理由 $\mathscr{L}$ 导出的运动方程形式不变. 对于无穷小变换我们有

$$\begin{aligned}\delta\varphi_r(x) &= S^{-1}_{rs}(\epsilon)\varphi_s(x') - \varphi_r(x)\\ &= \varphi_r(x') - \varphi_r(x) - \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}_{rs}\varphi_s(x)\end{aligned}$$

其中定义

$$S_{rs}(\epsilon) = \delta_{rs} + \frac{1}{2}\Sigma^{\mu\nu}_{rs}\epsilon_{\mu\nu} \tag{11.54}$$

在 x 附近展开 (11.53)，应用 Euler-Lagrange 方程 (11.45) 我们得

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(x') - \mathscr{L}(x) &= \epsilon^{\mu\nu}x_\nu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^\mu}\\ &= \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial\varphi_r/\partial x^\mu)}\delta\varphi_r\right]\end{aligned} \tag{11.55}$$

1) 关于 Dirac 理论，见 (2.11)

(11.54)及(11.55)式导致守恒定律

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\mathfrak{M}^{\mu\nu\lambda}=\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[(x^\lambda g^{\mu\nu}-x^\nu g^{\mu\lambda})\mathscr{L}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial\varphi_r/\partial x^\mu)}\left\{\left(x^\nu\frac{\partial}{\partial x_\lambda}-x^\lambda\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)\varphi_r+\Sigma^{\nu\lambda}_{rs}\,\varphi_s\right\}\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[(x^\nu\mathscr{T}^{\mu\lambda}-x^\lambda\mathscr{T}^{\mu\nu})+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial\varphi_r/\partial x^\mu)}\Sigma^{\nu\lambda}_{rs}\,\varphi_s\right]$$

$$=0 \tag{11.56}$$

守恒的角动量是

$$M^{\nu\lambda}=\int d^3x\,\mathfrak{M}^{0\nu\lambda}=\int d^3x\left[(x^\nu\mathscr{T}^{0\lambda}-x^\lambda\mathscr{T}^{0\nu})+\pi_r\,\Sigma^{\nu\lambda}_{rs}\,\varphi_s\right] \tag{11.57}$$

$$\frac{\partial M^{\nu\lambda}}{\partial t}=0$$

用同样的精神来做，如果拉氏量具有“内部对称性”，即是如果在**定域**变换

$$\varphi_r(x)\to\varphi_r(x)-i\epsilon\lambda_{rs}\varphi_s(x) \tag{11.58}$$

下，拉氏密度保持不变，则可以得到另外的守恒定律. 在(11.58)中 λ_{rs} 是不依赖于 x^μ 的常系数，而 ϵ 是无穷小参量. 矩阵 λ 的对角元素对应于场的简单相因子改变，而其他元素则混合了对称地出现在 $\mathscr{L}$ 中的不同场振幅. 如果 $\mathscr{L}$ 在(11.58)的代换下不变，重复(11.42)到(11.46)的步骤我们得

$$0=\delta\mathscr{L}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_r}\delta\varphi_r+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial\varphi_r/\partial x^\mu)}\delta\frac{\partial\varphi_r}{\partial x^\mu}$$

$$=-i\epsilon\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial\varphi_r/\partial x^\mu)}\lambda_{rs}\varphi_s\right] \tag{11.59}$$

于是对每一个使 $\mathscr{L}$ 保持不变的“内部对称”操作(11.58)，有

一个微分守恒流

$$\frac{\partial J^{\mu}(x,\lambda)}{\partial x^{\mu}}=0 \tag{11.60}$$

其中

$$J^{\mu}(x,\lambda)=-i\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial\varphi_r/\partial x^{\mu})}\lambda_{rs}\varphi_s \tag{11.61}$$

由此有一守恒荷

$$Q(\lambda)=-i\int d^3x\pi_r\lambda_{rs}\varphi_s \quad \frac{\partial Q(\lambda)}{\partial t}=0 \tag{11.62}$$

现在转到量子场论，我们必须问，是否还可以应用经典的结果，即标量 $\mathscr{L}$ 能否保证理论的 Lorentz 不变性，以及通过 Noether 定理得到能量-动量守恒量和角动量守恒量．在量子场论中，场振幅成为作用于 Hilbert 空间态函数或态矢上的算符．如果我们将 Lorentz 协变性的要求加在代表两个不同的 Lorentz 系中观察到的物理量的算符矩阵元上，我们就得到对算符 $\varphi_r(x)$ 的一定的限制．对于量子场论，一个标量的 $\mathscr{L}$ 不足以保证相对论不变性，我们还必须证明场满足这些算符要求．

为了显示这些要求是如何出现的，我们将场算符 $\varphi_r(x)$ 在两个态函数间的矩阵元取作物理观测量

$$(\Phi_{\alpha},\varphi_{\gamma}(x)\Phi_{\beta}) \tag{11.63}$$

对于用 α 和 β 标志的任意态，量子场论中振幅的这个完全集合代替了经典场振幅 $\varphi_r(x)$．在 Schrödinger 量子力学中坐标 $q(t)$ 的矩阵元起了类似的作用．对于由坐标变换

$$x'^{\mu}=a^{\mu}_{\nu}x^{\nu}+b^{\mu}$$

联系的另一个 Lorentz 系统中的观察者来说，振幅(11.63)是

$$(\Phi'_{\alpha},\varphi_r(x')\Phi'_{\beta}) \tag{11.64}$$

它由态矢 Φ'_{α} 和 Φ'_{β} 及场算符 $\varphi_r(x')$ 表示出来．Φ'_{α} 和 Φ'_{β} 表

示带撇系统中的观察者看到的同一物理态 α 和 β，$\varphi_r(x')$ 是在变换后点 x' 的场算符．振幅 (11.64) 是带撇系统中经典场 $\varphi'_r(x') \equiv S_{rs}\varphi_s(x)$ 的量子场论对应．这个经典的变换规律现在表示为

$$(\Phi'_\alpha, \varphi_r(x')\Phi'_\beta) = S_{rs}(a)(\Phi_\alpha, \varphi_s(x)\Phi_\beta) \qquad (11.65)$$

它提供了两个 Lorentz 系中观察者之间联络的数学规律．于是我们要求存在一个幺正算符 $U(a,b)$，由它实现两个 Lorentz 系统态矢间所要求的变换，使得

$$\Phi'_\alpha = U(a,b)\Phi_\alpha \qquad (11.66)$$

我们可以将相应的态联系起来．于是由 (11.65) 式，场算符按下式变换

$$U(a,b)\varphi_r(x)U(a,b)^{-1} = S_{rs}^{-1}(a)\varphi_s(ax+b) \qquad (11.67)$$

首先考虑平移，我们有

$$U(b)\varphi_r(x)U(b)^{-1} = \varphi_r(x+b) \qquad (11.68)$$

其中 $U(b)$ 是生成坐标平移的幺正算符．对于无穷小平移 $x^{\mu'} = x^\mu + \epsilon^\mu$，我们可以写成

$$U(\epsilon) = \exp(i\epsilon_\mu \boldsymbol{p}^\mu) \approx 1 + i\epsilon_\mu \boldsymbol{p}^\mu \qquad (11.69)$$

其中 $\boldsymbol{p}_\mu$ 是厄米算符．(11.68) 式现在化为

$$i[\boldsymbol{p}^\mu, \varphi_r(x)] = \frac{\partial \varphi_r(x)}{\partial x_\mu} \qquad (11.70)$$

与经典正则力学和非相对论的 Schrödinger 理论 [(11.10) 式] 的对应提示我们，应把 (11.69) 及 (11.70) 两式中的 $\boldsymbol{p}_\mu$ 与能量-动量四矢量等同起来 $\boldsymbol{p}^\mu \equiv \boldsymbol{P}^\mu$．因为我们已导出了 $\boldsymbol{p}^\mu$ 的明显形式 (11.49)，所以我们可以在任何理论中明确检验这种等同，看它是否符合量子化过程中规定的对易关系．这样，我们可以直接从对易子来计算，看 (11.70) 是否保持为一个算符恒等式，以及 $\boldsymbol{P}$ 的分量是否和 H 对易，即

$$[H, \boldsymbol{P}] = 0 \qquad (11.71)$$

使得 $\boldsymbol{P}$ 保持为运动常数.

如果 (11.70) 和 (11.71) 与对易关系是自洽的,则量子理论是平移不变的. 如若不然，那么，或者是满足 (11.70) 及 (11.71) 式的 $\boldsymbol{p}_\mu$ 必须由别的方法得到,对易条件必须修改;或者是理论应予抛弃. 对于我们考虑的理论，由 Noether 方法得到的 P_μ 及 $M_{\mu\nu}$ 将是令人满意的.

我们对量子场论在 Lorentz 变换下的不变性作类似的论述. 生成无穷小 Lorentz 变换 $x^{\mu'} = x^\mu + \epsilon^\mu_\nu x^\nu$ 的幺正算符写成

$$U(\epsilon_{\mu\nu}) = 1 - \frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu}\boldsymbol{M}^{\mu\nu} \tag{11.72}$$

其中 $\boldsymbol{M}^{\mu\nu}$ 是厄米算符,按照 (11,67), 它满足算符方程

$$\varphi_r(x) - \frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu}[\boldsymbol{M}^{\mu\nu}, \varphi_r(x)] = S^{-1}_{rs}(\epsilon^{\mu\nu})\varphi_s(x + \epsilon x)$$

借助于 (11.54), 上式化为

$$i[M^{\mu\nu}, \varphi_r(x)] = x^\mu\frac{\partial\varphi_r}{\partial x_\nu} - x^\nu\frac{\partial\varphi_r}{\partial x_\mu} + \Sigma^{\mu\nu}_{rs}\varphi_s(x) \tag{11.73}$$

我们仍然依靠与经典的和非相对论理论的对应把生成 Lorentz 变换的 $\boldsymbol{M}^{\mu\nu}$ 与角动量张量(11.57)等同起来: $\boldsymbol{M}^{\mu\nu} \equiv M^{\mu\nu}$. (11.73) 的空间分量不是别的,正是在非相对论量子力学中熟知的生成三维空间转动的角动量算符

$$\boldsymbol{L} = (M^{12}, M^{23}, M^{31})$$

的对易关系. 角动量张量 $\boldsymbol{M}^{\mu\nu}$ 与 $M^{\mu\nu}$ 的等同和对易关系的相容性在这里是对 Lorentz 变换不变性的附加要求. 如对 $\boldsymbol{p}^\mu$ 的讨论那样,这是可以明显检验的.

对于现在物理学中普遍讨论的大多数场论来说，拉氏量方法和 Noether 定理都可以无困难地直接搬到量子领域内.

正如以后的章节表明的那样，这正是它们的实用所在.

11.5 其他表述形式

上面的方法是把经典的拉氏量作为"拐杖"来导出自洽的场方程和对易关系. 我们强调指出，物理就包含在场方程与它们的解、对易关系以及系统的态的性质中.

也有可能一开始就将理论表述为量子作用量原理的形式，在这样的理论中，拉氏量起着更为核心的作用. 这种有力然而更为抽象的对定域理论的处理，在文献中特别在 Schwinger 的工作中有详尽的讨论[1].

相反地，不用拉氏量来表述理论也是可能的. Lehmann, Symanzik 和 Zimmermann 曾给出一种从公理化观点出发的普遍方法[2].

问　　题

有质量的自旋为 1 的粒子的波动方程是

$$\left[g_{\mu\nu}(\Box + \mu^2) - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right]\varphi^\nu(x) = 0$$

由它得

$$\frac{\partial \varphi^\nu}{\partial x^\nu} = 0$$

1. 由这个方程构造拉氏密度

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi^\nu}{\partial x^\mu}\right)\left(\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\mu}\right) + \frac{1}{2}\mu^2\varphi_\nu\varphi^\nu + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi^\nu}{\partial x^\nu}\right)^2$$

2. 构造哈氏密度

---

1) J. Schwinger, *Phys, Rev.* **91** 713 (1953) *and* R. E. Peierls *Proc. Roy. Soc.* (*London*), **A214**, 143(1952).

2) H. Lehmann, K. Symanzik *and* W. Zimmermann, *Nuovo Cimento*, **1**, 1425(1955). **6**, 319(1957).

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}\pi_i^2 - \frac{1}{2}(\nabla\varphi_0)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi^j}{\partial x^i}\right)^2 - \frac{1}{2}\mu^2\varphi_0^2 + \frac{1}{2}\mu^2\varphi_j^2 - \frac{1}{2}\pi_0^2$$

$$= -\frac{1}{2}\pi_\mu\pi^\mu - \frac{1}{2}(\nabla\varphi_\mu)\cdot\nabla\varphi^\mu - \frac{1}{2}\mu^2\varphi_\mu\varphi^\mu$$

其中

$$\pi_\mu = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}^\mu}$$

及

$$\pi_0 = \nabla\cdot\boldsymbol{\phi} = \nabla_i\varphi^i$$

$$\pi_i = \varphi^i$$

3.检验一下 Hamilton 运动方程

$$\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\pi_\mu} = \dot{\varphi}^\mu \quad \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\varphi^\mu} = -\dot{\pi}_\mu$$

以及辅助条件

$$\pi_0 = \nabla\cdot\boldsymbol{\phi} = -\dot{\varphi}_0$$

重新给出原来的波动方程.

4.假定 $\mathscr{L}$ 在象 (11.58) 那样的某种内部对称操作下不是不变的，找出 $\mathscr{L}$ 的改变与相应流的散度的关系.

第十二章　Klein-Gordon 场

12.1　量子化和粒子解释

满足自由的 Klein-Gordon 方程

$$(\Box + m^2)\varphi(x) = 0 \tag{12.1}$$

的实标量场 $\varphi(x)$ 是所有场中最简单的，并且已经作为例子应用过．导致 (12.1) 的拉氏密度为

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} - m^2\varphi^2\right) \tag{12.2}$$

而共轭动量为

$$\pi = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}} = \dot{\varphi} \tag{12.3}$$

利用正则量子化方法，π 和 φ 成为厄米算符，它们满足等时对易子

$$\begin{aligned}&[\varphi(\boldsymbol{x},t),\varphi(\boldsymbol{x}',t)] = [\pi(\boldsymbol{x},t),\pi(\boldsymbol{x}',t)] = 0\\&[\pi(\boldsymbol{x},t),\varphi(\boldsymbol{x}',t)] = -i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\end{aligned} \tag{12.4}$$

正如我们直接计算对易子 (11.70) 和 (11.73) 所证明的那样，所得的量子场论在坐标平移及 Lorentz 变换下不变．由 (12.2) 及 (12.3) 得到的哈氏量是

$$P^0 = H = \int d^3x\mathscr{H}(\pi,\varphi)$$

$$\mathscr{H}(\pi,\varphi) = \pi\dot{\varphi} - \mathscr{L} = \frac{1}{2}$$

$$\times[\pi(\boldsymbol{x},t)^2 + |\nabla\varphi(\boldsymbol{x},t)|^2 + m^2\varphi(\boldsymbol{x},t)^2] \tag{12.5}$$

动量算符是

$$\boldsymbol{P} = -\int \pi\nabla\varphi d^3x \tag{12.6}$$

应用对易关系 (12.4)，我们正好得到所要求的

$$i[P^{\mu}, \varphi(\boldsymbol{x}, t)] = \frac{\partial \varphi(\boldsymbol{x}, t)}{\partial x_{\mu}}$$

类似地我们用 (11.57) 计算 $M^{\mu\nu}$，并且由于对标量场来说

$$\Sigma_{rs}^{\mu\nu} = 0$$

从而肯定关系式 (11.73) 是正确的。

为了进一步讨论量子化的 Klein-Gordon 场的性质，我们用对易子规定的算符代数去构造态矢 Φ 的完全集合。用组成动量和能量的本征矢来作这点是方便的。

为此我们注意，(12.1) 的任意一个解可以展成基本的平面波解的 Fourier 积分：

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{x}, t) &= \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} [a(k)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega t} + a^{\dagger}(k)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+i\omega_k t}] \\ &\equiv \int d^3k [a(k)f_k(x) + a^{\dagger}(k)f_k^*(x)] \qquad (12.7)\end{aligned}$$

其中

$$\omega_k = +\sqrt{k^2 + m^2} \quad 和 \quad f_k(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} e^{-ik\cdot x}$$

对于一个经典的实场 $\varphi(x)$，$a^{\dagger}(k)$ 是 $a(k)$ 的复共轭振幅。在量子场论中振幅成为算符，$a^{\dagger}(k)$ 与 $a(k)$ 互为厄米共轭。用系数 $a(k)$ 重新写出加在 φ 场上的对易子要求 (12.4) 就可决定 $a(k)$ 及 $a^{\dagger}(k)$ 的代数。

将展开式 (12.7) 反转过来并解出系数，我们得[1)]

---

1) f_k 和 f_k^* 满足 (9.6) 的正交条件

$$\int f_k^*(x,t) i\overleftrightarrow{\partial_0} f_{k'}(x,t) d^3x = \delta^3(k - k')$$

$$\int f_k(x,t) i\overleftrightarrow{\partial_0} f_{k'}(x,t) d^3x = 0$$

$$\int f_k^*(\boldsymbol{x},t)\varphi(\boldsymbol{x},t)d^3x = \frac{1}{2\omega_k}[a(k) + a^\dagger(-k)e^{2i\omega_k t}]$$

$$\int f_k^*(\boldsymbol{x},t)\dot{\varphi}(\boldsymbol{x},t)d^3x = \frac{-i}{2}[a(k) - a^\dagger(-k)e^{2i\omega_k t}] \tag{12.8}$$

它给出

$$\begin{aligned} a(k) &= \int f_k^*(\boldsymbol{x},t)[\omega_k\varphi(\boldsymbol{x},t) + i\dot{\varphi}(\boldsymbol{x},t)]d^3x \\ &= i\int d^3x\left[f_k^*\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} - \left(\frac{\partial f_k^*}{\partial t}\right)\varphi(\boldsymbol{x},t)\right] \\ &= i\int d^3x f_k^*(\boldsymbol{x},t)\overleftrightarrow{\partial}_0\varphi(\boldsymbol{x},t) \end{aligned} \tag{12.9}$$

其中最后一行的记号 $\overleftrightarrow{\partial}_0$ 定义为

$$a(t)\overleftrightarrow{\partial}_0 b(t) = a(t)\frac{\partial b}{\partial t} - \left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)b(t)$$

因为 $f_k(\boldsymbol{x},t)$ 和 $\varphi(\boldsymbol{x},t)$ 都是 (12.1) 的解[1]，所以由 Green 定理，(12.9) 的右方与时间无关. 这种形式使人想起第 9 章 Klein-Gordon 方程传播子讨论中遇到的内积.

对易关系现在由 (12.4) 及 (12.9) 而来. 因为 $a(k)$ 与时间无关，利用 (12.3) 和 (12.4) 我们选择一个共同的时间来计算对易子

$$\begin{aligned} [a(k),a^\dagger(k')] &= \int d^3x d^3y[f_k^*(\boldsymbol{x},t)\overleftrightarrow{\partial}_0\varphi(\boldsymbol{x},t),f_{k'}(\boldsymbol{y},t)\overleftrightarrow{\partial}_0\varphi(\boldsymbol{y},t)] \\ &= +i\int d^3x f_k^*(\boldsymbol{x},t)\overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'}(\boldsymbol{x},t) = \delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \end{aligned}$$

类似地

---

1) 如果我们将 $\varphi(x,t)$ 用正交函数展开时把平面波叠加组成波包，则此点在更普遍的情形下也是正确的. 见 H. Lehmann, K. Symanzik 和 W. Zimmermann, *Nuovo Cimento*, **1**, 1425 (1955).

$$[a(k),a(k')]$$

$$= (i)^2\int d^3xd^3y[f_k^*(\boldsymbol{x},t)\overleftrightarrow{\partial}_0\varphi(\boldsymbol{x},t),f_{k'}^*(\boldsymbol{y},t)\overleftrightarrow{\partial}_0\varphi(\boldsymbol{y},t)]$$

$$= -i\int d^3xf_k^*(\boldsymbol{x},t)\overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'}^*(\boldsymbol{x},t) = 0$$

和

$$[a^\dagger(k),a^\dagger(k)] = 0 \qquad (12.10)$$

用这些展开系数来表示的自由 Klein-Gordon 场的总能量和动量有很简单的形式. 应用 (12.5) 及 (12.7) 直接计算给出[1)]

$$H = 1/2\int d^3k\omega_k[a^\dagger(k)a(k) + a(k)a^\dagger(k)]$$

$$\boldsymbol{P} = 1/2\int d^3k\boldsymbol{k}[a^\dagger(k)a(k) + a(k)a^\dagger(k)] \qquad (12.11)$$

在这一阶段我们看到哈氏量是下列项的连续和

$$H_k = \frac{1}{2}\omega_k[a^\dagger(k)a(k) + a(k)a^\dagger(k)]$$

它们中的每一个都具有频率为 ω_k 的简谐振子的哈氏量形式. 的确 $a^\dagger(k)$ 和 $a(k)$ 就是在第 11 章粒子振子的例子中讨论过的上升与下降算符，并且除了归一化的约定外它们满足同样

---

1) 为了形式上的协变性，利用恒等式

$$\int\frac{d^3k}{2\omega_k} = \int d^4k\delta(k^2 - m^2)\theta(k_0)$$

我们可用不变的记号重写平面波展开. 记 $A(k) = \sqrt{2\omega_k}\,a(k)$，我们得

$$\varphi(x,t) = 1/(2\pi)^{3/2}\int d^4k\delta(k^2 - m^2)\theta(k_0)[A(k)e^{-ik\cdot x} + A^\dagger(k)e^{ik\cdot x}]$$

及

$$A(k) = i/(2\pi)^{3/2}\int d^3\sigma\eta_\mu e^{ik\cdot x}\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x_\mu}\varphi(x)$$

其中 σ 是一个平的类空面而 η_μ 是其法矢量. 同样地

$$P^\mu = \frac{1}{2}\int d^4k\delta(k^2 - m^2)\theta(k_0)k^\mu[A^\dagger(k)A(k) + A(k)A^\dagger(k)]$$

如象 φ 一样，$A(k)$ 是 Lorentz 标量.

的对易关系．为了说清楚归一化的方法并为了表明它与我们早先的一维振动粒子的量子描述是完全等价的，我们仍然转到不连续的描述．将 k 空间分成元体积 ΔV_k，我们写出

$$\int d^3k \to \sum_k \Delta V_k \quad 和 \quad \delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \to \frac{\delta_{kk'}}{\Delta V_k} \tag{12.12}$$

于是H成为动量空间中每一元体积振子哈氏量 H_k 的和

$$H = \sum_k H_k = \sum_k \frac{1}{2}\omega_k(a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger)$$

$$a_k = \sqrt{\Delta V_k}\, a(k) \tag{12.13}$$

其中

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'} \quad [a_k, a_{k'}] = [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0 \tag{12.14}$$

由于经典的 Klein-Gordon 波动场可以由它的简正模式展开所描述，这种与谐振子的相似性是不奇怪的．简正模式及坐标正是简谐振子．这里我们做的不过是对这些振子的每一个 $a(k)$ 进行量子化．

在量子化时我们希望经典场能量将成为不连续的振子能量之和．为了决定能量本征值及构造能量本征函数，分别考虑每个振子哈氏量 H_k．因为H是每个波数 k 和频率

$$\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}$$

的相互可对易的项 H_k 之和，所以能量本征函数将是每个 H_k 的本征函数 Φ_k 之积．按照第 1 章中完备性假设转述到场的哈氏量上，这些乘积对所有的 $\boldsymbol{k}$ 值迭加就构成普遍的态矢 Φ．

对于每一个 $\boldsymbol{k}$ 的振子本征值问题的解可以用整数 $n_k = 0, 1, 2, \cdots$ 来标志．利用它们，能量本征函数和本征值是(用不连续的表示)

$$H_k\Phi_k(n_k) = \omega_k\left(n_k + \frac{1}{2}\right)\Phi_k(n_k) \tag{12.15}$$

$$\Phi_k(n_k) = \frac{1}{\sqrt{n_k!}}(a_k^\dagger)^{n_k}\Phi_k(0) \tag{12.16}$$

$\Phi_k(0)$ 是基态，这里定义为

$$a_k\Phi_k(0) = 0 \tag{12.17}$$

态归一为

$$(\Phi_k(n_k),\Phi_k(n'_k)) = \delta_{n_k,n_k'}$$

动量算符可以类似地分解

$$\boldsymbol{P} = \sum_k \boldsymbol{P}_k = \sum_k \frac{1}{2}\boldsymbol{k}(a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger) \tag{12.18}$$

其中

$$\boldsymbol{P}_k\Phi_k(n_k) = \boldsymbol{k}(n_k + 1/2)\Phi_k(n_k) \quad n_k = 0,1,2,$$

能量-动量本征函数 Φ 是每一个动量空间元体积的 Φ_k 之积，对每一个 $\boldsymbol{k}$，Φ_k 由整数 n_k 所标识

$$\Phi(n_{k_1}\cdots n_{k_\alpha}\cdots) = \prod_k \Phi_k(n_k)$$

$$P^\mu\Phi(\cdots n_{k_\alpha}\cdots) = \sum_k k^\mu(n_k + 1/2)\Phi(\cdots n_{k_\alpha}\cdots) \tag{12.19}$$

对于最低能量态，即基态，所有 $n_{k_\alpha} = 0$：

$$\Phi_0 = \prod_k \Phi_k(0) \tag{12.20}$$

在这个态中场的所有简正模式都不激发，它在物理上代表真空。

真空的能量是

$$E = \sum_k \frac{1}{2}\omega_k \tag{12.21}$$

它发散得很厉害，它是无穷多振子的零点能之和。每个振子对应一个简正模式，或场的一个自由度。这是我们将在场论中遇到的一系列发散的第一个。它是最容易消除的，只要简

单地从 H 中减掉一个无穷大的常数而消掉 $\sum_k \frac{1}{2}\omega_k$. 可以这样作是因为绝对能量不是可测的观测量，只有能量的差值才有物理意义. 按照 (12.17) 和 (12.20) 这个无穷大的数正是能量的真空期待值，因此将能量-动量算符写成下式时会自动消除掉

$$P'_\mu = P_\mu - (\Phi_0, P_\mu \Phi_0) = \sum_k k_\mu a_k^\dagger a_k \qquad (12.22)$$

或者用连续的记号

$$P'_\mu = \int d^3k k_\mu a^\dagger(k) a(k) \qquad (12.23)$$

在对易子条件加到场上以前的任一时刻，P_μ 和 P'_μ 是等同的，因为在经典范围内简正模式的振幅可对易且没有零点能.

在量子理论中将 P_μ 换成 P'_μ 等价于重写 L 及 P_μ 中的算符因子，以使 φ 的正能部分

$$\varphi^{(+)}(x) = \int d^3k a(k) f_k(x) \qquad (12.24a)$$

总是位于负能部分

$$\varphi^{(-)}(x) = \int d^3k a^\dagger(k) f_k^*(x) \qquad (12.24b)$$

的右边. 这种因子的排列，叫作正规排列，记为

$$:\varphi\varphi: = \varphi^{(-)}\varphi^{(-)} + 2\varphi^{(-)}\varphi^{(+)} + \varphi^{(+)}\varphi^{(+)} \qquad (12.25)$$

由 (12.17) 及其厄米共轭可知：当一个算符的因子作正规排列时，其真空期待值为零. 这里正规排列的唯一效果是从理论中消除无穷大零点能并定义零点能为真空态 Φ_0 的能量.

由 (12.19) 及 (12.22) 对于 P'_μ 的本征值我们有

$$P'_\mu \Phi(\cdots n_{k_\alpha} \cdots) = \sum_k n_k k_\mu \Phi(\cdots n_{k_\alpha} \cdots)$$

$$n_k = 0, 1, 2, \cdots \qquad (12.26)$$

对每一个简正模式 k 的不同的本征态带有相应于 n_k 个量子

的四动量. 每一个量子按照 Einstein 关系 $k_\mu k^\mu = m^2$ 具有四动量 k^μ 和质量 m. 这里我们看到从正则量子化方法出现一个粒子的图象. 整数 n_k 叫作第 k 个动量态的占有数，量子数目 n_{k_α} 的给定给出了本征态 $\Phi(\cdots n_{k_\alpha}\cdots)$ 的完全描述.

引进一个粒子数算符

$$N_k = a_k^\dagger a_k \tag{12.27}$$

是方便的. 它具有整数的本征值

$$N_k\Phi(\cdots n_k\cdots) = n_k\Phi(\cdots n_k\cdots)$$
$$n_k = 0,1,2,\cdots \tag{12.28}$$

能量-动量算符用它来表示是[1)]

$$P^\mu = \sum_k k^\mu N_k \tag{12.29}$$

由对易子 (12.14)，我们可以证明

$$[N_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}a_{k'}^\dagger \text{ 和 } [N_k, a_{k'}] = -\delta_{kk'}a_{k'} \tag{12.30}$$

结合 (12.29)，这表明 $a_k^\dagger$ 是一个动量为 k^μ 的量子的产生算符，它作用于 n_k 个这样量子的态而产生有 n_k+1 个这样动量量子的态

$$P_\mu a_k^\dagger\Phi(\cdots n_k\cdots) = a_k^\dagger[P_\mu + k_\mu]\Phi(\cdots n_k\cdots)$$
$$= \left(\sum_{k'} n_{k'}k'_\mu + k_\mu\right)a_k^\dagger\Phi(\cdots n_k\cdots)$$

类似地，a_k 消灭一个具有 k^μ 的量子. 特别地，当它作用在不含这种量子的态上时将使该态消失. 按 (12.17)，

$$a_k\Phi_k(0) = 0.$$

我们回忆一下第 11 章的振子的例子就知道算符 a_k 及 $a_k^\dagger$ 仅有的非零矩阵元连结占有数为 $n'_k = n_k \pm 1$ 的态:

$$(\Phi_k(n'_k), a_k\Phi_k(n_k)) \equiv \langle n'_k|a_k|n_k\rangle = \sqrt{n_k}\,\delta_{n_k',n_k-1}$$
$$\langle n'_k|a_k^\dagger|n_k\rangle = \sqrt{n_k+1}\,\delta_{n_k',n_k+1} \tag{12.31}$$

1) 今后，我们去掉正规排列算符的撇号，例如 P^μ.

12.2 态的对称性

正则量子化方法应用到经典的自由的 Klein-Gordon 场上时已经给出由量子数表示的多粒子描述. 对于自由场，N_k 与 H 对易，所以粒子数是运动守恒量. 当我们加上改变占有数 n_k 的相互作用项时就会遇到有趣的物理问题. 在现在的自由场讨论中还需要证明量子遵从对称的，或 Bose-Einstein 统计.

一个任意的态由不同的占有数目 n_k 的

$$\Phi(\cdots n_{k_\alpha}\cdots)=\prod_k \frac{1}{\sqrt{n_k!}}(a_k^\dagger)^{n_k}\Phi_k(0) \tag{12.32}$$

迭加而成. 态 (12.32) 由每个 k 的量子数 n_k 完全描述. 由于按照 (12.14) 所有的 $a_k^\dagger$ 相互对易并且 $a_k^\dagger$ 的次序是无关的，所以各个量子是不能分辨的，这反映在不同态的展开系数的对称性上. 回到连续的归一化[1]，对于一个任意的态我们有

$$\Phi=\left[c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n!}}\int d^3k_1\cdots d^3k_n c_n(k_1,\cdots,k_n)\right.$$
$$\left.\times a^\dagger(k_1)a^\dagger(k_2)\cdots a^\dagger(k_n)\right]\Phi_0 \tag{12.33}$$

因子 $1/\sqrt{n!}$ 是为方便而引入的，它给出 c_n 的归一化条件的简单形式:

$$1=(\Phi,\Phi)=|c_0|^2+\sum_{n=1}^{\infty}\int d^3k_1\cdots d^3k_n|c_n(k_1,k_2,\cdots,k_n)|^2 \tag{12.34}$$

c_n 描述含有 n 个量子的态分量的动量分布. 它们是具有给定 k_α 的 n 个全同粒子的集合的动量空间波函数. 由于 (12.33)

---

1) 这里我们假定两粒子准确地居于同一态 k 的几率是无穷小，所以在连续极限下 $n_k\to 1$ 或 0. 在高度简并的系统中，例如自由 Bose 气体的基态，其中所有的量子都在态 $k=0$ 中，因此，采用不连续的归一化是最容易的. 对于相对论场，有兴趣的态一般是散射态，不会发生这个问题.

中 $a^\dagger(k)$ 之间的可对易性，这些波函数是它们的宗量的对称函数

$$c(\cdots k_i \cdots k_j \cdots) = +c(\cdots k_j \cdots k_i \cdots) \quad (12.35)$$

正如上面提到的，一个态只由具有不同 k 值的量子**数目**所表征. 量子是不可分辨的，所以具有动量 k_i 的量子 a 和具有动量 k_j 的量子 b 的几率和 a、b 交换后的几率是一样的

$$|c(\cdots k_i \cdots k_j \cdots)|^2 = |c(\cdots k_j \cdots k_i \cdots)|^2 \quad (12.36)$$

对称条件 (12.35) 是 $a^\dagger(k)$ 的对易代数的结果，它表明从正则量子化描述中出现的量子遵从对称的，或 Bose-Einstein 统计.

12.3 场的可测性和微观因果性

在经典意义下，场 $\varphi(x)$ 是一个可观测量，而且它在某一点 x 的强度可以测量. 在量子范围内，我们已经引进了定义在点 x 上的定域场算符 $\varphi(x)$ 的概念，虽然我们在第十一章引入场量子化时讨论了一些保留的意见.

和经典理论不同，在量子理论中由于对易关系，我们对场的强度进行精确测量的能力受到限制. 例如，在两个不同的时-空点 x 和 y 处仅当对易子 $[\varphi(x),\varphi(y)]$ 为零时才有可能精确测量该两点的场强.

在找到了 (12.7) 中的自由 Klein-Gordon 场的明显解后，我们可以借助 (12.10) 计算场的对易子

$$\begin{aligned}[\varphi(x),\varphi(y)] &= \int \frac{d^3k\,d^3k'}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_k \cdot 2\omega'_k}} \\ &\quad \times ([a(k),a^\dagger(k')]e^{-ik\cdot x+ik'\cdot y} \\ &\quad + [a^\dagger(k),a(k')]e^{ik\cdot x-ik'\cdot y}) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}(e^{-ik\cdot(x-y)} - e^{ik\cdot(x-y)})\end{aligned}$$

$$= -\frac{i}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{\omega_k} e^{ik\cdot(x-y)} \sin \omega_k(x_0 - y_0)$$

$$\equiv i\Delta(x-y) \tag{12.37}$$

$\Delta(x-y)$ 是我们在附录 c 中许多不变的奇异函数之一. 它的 Lorentz 不变性在 (12.37) 中是很明显的,因为那里是一个不变的指数函数在不变的体积元

$$\int \frac{d^3k}{2\omega_k} = \int d^4k\delta(k^2 - m^2)\theta(k_0)$$

上的积分. 引入奇函数

$$\varepsilon(k_0) = \begin{cases} +1 & k_0 > 0 \\ -1 & k_0 < 0 \end{cases} \tag{12.38}$$

它对于类时矢量 $k^2 > 0$ 是不变的,我们可将Δ写成更紧凑的形式

$$\Delta(x-y) = -i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^3}\delta(k^2 - m^2)\varepsilon(k_0)e^{-ik\cdot(x-y)} \tag{12.39}$$

正如 (12.37) 的左方用对易子表示的定义所要求的,Δ是 Klein-Gordon 方程的一个解并且是其宗量的奇函数

$$(\Box_x + m^2)\Delta(x-y) = 0$$

$$\Delta(x-y) = -\Delta(y-x) \tag{12.40}$$

由 (12.37) 和 (12.4) 得,两个场振幅的等时对易子为零:

$$\Delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, 0) = 0.$$

于是由 Lorentz 不变性我们知道

$$\Delta(x-y) = 0 \text{ 对所有 } (x-y)^2 < 0 \tag{12.41}$$

并且由一个类空间隔隔开的两个场彼此对易. 因此,如果把场强 φ 解释为物理的观测量,那么,只有在不能用光讯号或者任何物理扰动联系的两点,即 $(x-y)^2 < 0$,它才能被精确而彼此独立地加以测量. Δ的时间导数在原点是奇异的

$$\frac{\partial\Delta(x-y)}{\partial x_0}\Big|_{x_0=y_0} = -\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \qquad (12.42)$$

(12.42)结合(12.37)可重新得到正则对易子(12.4).

对于所有类空间隔对易子为零的条件(12.41)，不管间隔有多小，被称作微观因果性条件. 为了将此数学结果与任何物理内容相联系，我们必须假定**某一点**场强的测量具有物理意义，这个概念在前面的章节中已经讨论过[1].

12.4 真空涨落

我们已经注意到场量子化实质上是一个无穷的谐振子集合的量子化；真空能量看作这些振子的零点能. 在一个振子的能量本征态中坐标 q 没有确定值，也就是

$$(\psi_n, q^2\psi_n) > (\psi_n, q\psi_n)^2 = 0 \qquad (12.43)$$

这在场论中也是正确的；坐标 $\varphi(x)$ 有涨落. 例如，在基态中，虽然

$$\langle 0|\varphi(x)|0\rangle = 0 \qquad (12.44)$$

但

$$\Delta_+(x,y) = \langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle \neq 0 \qquad (12.45)$$

我们可以用(12.7)，(12.10)和(12.17)计算 $\Delta_+(x,y)$；我们得

$$\Delta_+(x,y) = \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_k 2\omega_{k'}}} e^{-ik\cdot x}e^{ik'\cdot y}\langle 0|a(k)a^\dagger(k')|0\rangle$$

$$= \int_{(k_0=+\omega_k)} \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{-ik\cdot(x-y)} = \Delta_+(x-y)$$

当 $y \to x$ 时，它趋于真空涨落的平方发散的表达式

$$\langle 0|\varphi^2(x)|0\rangle = \Delta_+(0) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \qquad (12.46)$$

---

1) 对于量子电动力学 N. Bohr *and* L. Rosenfeld, *Kgl. Danske Videnskab. Selskab. Mat.-Fys., Medd* **12**, 8 (1933), *Phys. Rev.*, **78**, 794 (1950)，已经详细分析了用物理测量过程表示的对易关系的物理意义.

不象早先遇到的零点能，这个发散性不能用简单的减除完全去掉．事实上，我们已经看到真空涨落导至 Lamb 移动中可观测的有限物理效应，这已在第四章中用此观点讨论过．

注意到事实上不能测量**在一点**处场振幅的平方，我们可以把上述令人烦恼的结果——(12.46) 的发散性——作得令人愉快一些． 为了测试一个孤立的时-空点，需要无穷大的频率及无限短的波长——而这在能量为有限值的情况下是办不到的． 在实际的计算中 (12.46) 发散的这一事实不会引起严重的困难． 不过要找出我们表达式的全部含义是麻烦的，因为诸如 $\mathscr{L}$ 和 P^μ 象 (12.46) 一样包含着在同一时空点计算的场算符的乘积．应该记住场的乘积只是在有限的空-时区域内求平均时在数学上才存在并具有物理上的观测意义．我们将 (12.46) 那样的结果解释为连续场描述的局限性的一个表示——它是下述理论的理想化情形，这种理论只在大时空间隔对应原理的意义下才提供物理世界的充分描述．留待实验揭示的是在多小的时-空长度时需要作定量的修正．

12.5 荷电标量场[1)]

在讨论了一个实的自由 Klein-Gordon 场的量子理论以后，我们可将结果加以修改来描述在第九章中讨论过的荷电粒子．这样的粒子用复波函数

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)]$$

来描述，其中 φ_1 和 φ_2 是实的． 我们首先考虑两个全同的无相互作用的这种类型的实场．场方程

$$(\Box_x + m^2)\varphi_1(x) = 0 \quad (\Box_x + m^2)\varphi_2(x) = 0 \tag{12.47}$$

1) W. Pauli *and* V. F. Weisskopf, *Helv. Phys. Acta* **7**, 709 (1934)

来自拉氏密度

$$\mathscr{L} = 1/2 : \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_\mu} - m^2 \varphi_1^2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x^\mu} - m^2 \varphi_1^2 \right) : \tag{12.48}$$

其中：···：表示由 (12.24) 及 (12.25) 定义的正规乘积. 得到的正则动量和前面一样

$$\pi_1 = \dot{\varphi}_1 \quad \pi_2 = \dot{\varphi}_2 \tag{12.49}$$

正则对易关系是

$$[\varphi_k(x), \varphi_j(y)] = i\delta_{kj}\Delta(x - y) \tag{12.50}$$

因为哈氏量是两个 (12.23) 那样的项之和，所以能量本征态是第 1 种和第 2 种量子的哈氏量的独立本征态的直乘. 第 1 种和第 2 种的粒子数在没有相互作用时分别守恒，我们仍可以方便地把态用如下的粒子数算符的本征值来标记

$$N_1(k) = a_1^\dagger(k)a_1(k) \quad N_2(k) = a_2^\dagger(k)a_2(k) \tag{12.51}$$

如在 (12.30) 和 (12.31) 中那样，$a_i^\dagger(k)$ 和 $a_i(k)$ 分别产生和消灭第 i 种动量为 k 的量子. 因此它们连结占有数相差为 ± 1 的态.

所有第一节中的要点均可应用于出现在场方程 (12.47) 中的任意质量 m_1 和 m_2. 作为两个质量等同 $m_1 = m_2 = m$ 时的特定结果，我们可以把这两个方程代以一个复数场

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2)$$

$$\varphi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - i\varphi_2) \tag{12.52}$$

的波动方程. φ 和 φ^* 满足 Klein-Gordon 方程

$$(\Box + m^2)\varphi = 0 \quad (\Box + m^2)\varphi^* = 0 \tag{12.53}$$

用复坐标 φ 和 φ^* 表示，$\mathscr{L}$ 成为

$$\mathscr{L} = : \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} - m^2 \varphi^* \varphi : \tag{12.54}$$

这些坐标的正则动量是

$$\pi = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}^* = \frac{\dot{\varphi}_1 - i\dot{\varphi}_2}{\sqrt{2}}$$

和

$$\pi^* = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}^*} = \dot{\varphi} = \frac{\dot{\varphi}_1 + i\dot{\varphi}_2}{\sqrt{2}}$$

于是哈氏密度是

$$\begin{aligned}\mathscr{H} &= \pi\dot{\varphi} + \pi^*\dot{\varphi}^* - \mathscr{L} \\ &= \pi^*\pi + (\nabla\varphi^*)\cdot(\nabla\varphi) + m^2\varphi^*\varphi \end{aligned} \tag{12.55}$$

对易关系是

$$\begin{aligned}&[\varphi(x),\varphi(y)] = 0 = [\varphi^*(x),\varphi^*(y)] \\ &[\varphi(x),\varphi^*(y)] = i\Delta(x-y)\end{aligned} \tag{12.56}$$

在等时的情况下它们化为非零正则对易子

$$\begin{aligned}&[\pi(\boldsymbol{x},t),\varphi(\boldsymbol{x}',t)] = [\pi^*(\boldsymbol{x},t),\varphi^*(\boldsymbol{x}',t)] \\ &= -i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\end{aligned}$$

将解作 Fourier 变换至 k 空间，由 (12.7)，我们写出

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}\left[a_+(k)e^{-ik\cdot x} + a_-^\dagger(k)e^{ik\cdot x}\right] \\ \varphi^*(x) &= \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}\left[a_+^\dagger(k)e^{ik\cdot x} + a_-(k)e^{-ik\cdot x}\right]\end{aligned} \tag{12.57}$$

其中

$$a_+(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}[a_1(k) + ia_2(k)]$$

$$a_+^\dagger(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}[a_1^\dagger(k) - ia_2^\dagger(k)]$$

$$a_-(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}[a_1(k) - ia_2(k)]$$

$$a_{-}^{\dagger}(k)=\frac{1}{\sqrt{2}}[a_1^{\dagger}(k)+ia_2^{\dagger}(k)] \tag{12.58}$$

(12.7)式和(12.57)式的不同在于$\varphi(x)$是一个复场，因此在量子化时成为一个非厄米的算符；由(12.58)

$$a_{-}^{\dagger}(k)\neq a_{+}^{\dagger}(k).$$

平行于(12.10)，容易构造出$a_{\pm}(k)$的对易关系：

$$\begin{aligned}
&[a_{+}(k),a_{+}^{\dagger}(k')]=[a_{-}(k),a_{-}^{\dagger}(k')]=\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\\
&[a_{+}(k),a_{-}^{\dagger}(k')]=[a_{-}(k),a_{+}^{\dagger}(k')]=0\\
&[a_{\pm}(k),a_{\pm}(k')]=[a_{\pm}^{\dagger}(k),a_{\pm}^{\dagger}(k')]=0
\end{aligned} \tag{12.59}$$

显然$a_{\pm}(k)$和$a_1(k)$、$a_2(k)$满足相同的代数，而且由它们组成的粒子数算符具有同样的形式和相同的整数本征值．回到不连续归一化的约定来定义正(+)和负(−)量子的粒子数算符，我们写出

$$N_k^{+}=a_{+,k}^{\dagger}a_{+,k}\qquad N_k^{-}=a_{-,k}^{\dagger}a_{-,k} \tag{12.60}$$

通过它们

$$P_\mu=\sum_k k_\mu(N_k^{+}+N_k^{-}) \tag{12.61}$$

这和前面对单个场的讨论是完全平行的，例如

$$\begin{aligned}
&N_k^{+}[a_{+,k}\Phi(\cdots n_k^{+}\cdots,\cdots n_k^{-}\cdots)]\\
&\quad=a_{+,k}(N_k^{+}-1)\Phi(\cdots n_k^{+}\cdots,\cdots n_k^{-}\cdots)\\
&\quad=(n_k^{+}-1)[a_{+,k}\Phi(\cdots n_k^{+}\cdots,\cdots n_k^{-}\cdots)]
\end{aligned}$$

最低能态，即真空，不包含任何类型的量子，所以

$$a_{\pm,k}\Phi_0=0 \tag{12.62}$$

算符$a_{\pm,k}$分别是动量k的正和负的量子的消灭算符，而$a_{\pm,k}^{\dagger}$是相应的产生算符．在正规排列的形式中如在(12.60)中那样消灭算符位于产生算符的右方．

很清楚，我们用厄米振幅φ_1和φ_2来描述场或是用它们的复数振幅φ、φ^*来描述是无所谓的．这些态用第1种和第

2 种或者用正和负类型的量子数目来标志是一样的.

对复数场 φ 的波动方程，(12.53) 提醒我们，在第九章讨论 Klein-Gordon 方程时，可以定出一个守恒的流

$$j^\mu = i(\varphi^*\nabla^\mu\varphi - \varphi\nabla^\mu\varphi^*)$$

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0$$

和

$$Q = i\int d^3x(\varphi^*\dot{\varphi} - \varphi\dot{\varphi}^*) = \text{const} \qquad (12.63)$$

将 (12.63) 在 k 空间展开并证明 Q 与 H 对易，我们就容易断定在现在从 (12.54) 出发的量子理论中 Q 仍是运动守恒量. 我们得

$$Q = \int d^3k[a_+^\dagger(k)a_+(k) - a_-^\dagger(k)a_-(k)]$$

或者用不连续的记号

$$Q = \sum_k (N_k^+ - N_k^-) \qquad (12.64)$$

由 (12.59)，$[Q,P_\mu] = 0$

按照 (12.64) 每个正和负量子分别带有 $+1$ 和 -1 单位的荷. 于是 $[P_\mu,a_+^\dagger(k)] = +k_\mu a_+^\dagger(k)$ 和

$$[Q,a_+^\dagger(k)] = +a_+^\dagger(k),$$

即 $a_+^\dagger(k)$ 是一个增加能量 k^μ 和荷 $+1$ 的算符，即它是一个四动量为 k^μ，荷为 $+1$ 的量子的产生算符. 类似地，$a_+(k)$ 是一个这样的量子的消灭算符而 $a_-^\dagger(k)$ 和 $a_-(k)$ 分别是具有动量 k^μ 和荷 -1 的量子的产生和消灭算符.

按照 (12.59)、(12.61) 和 (12.64)，理论中荷为 $+1$ 和 -1 的量子对称地出现. 为了给荷以物理意义我们必须引入可以区别荷的不同符号及大小的耦合. 在第九章讨论 Klein-Gordon 方程时，流 j^μ 和电磁场相耦合且 Q 等同于电荷. 更普

遍地，我们把具有 Q 的正本征值的量子定作**粒子**而那些具有 Q 的负本征值的量子定作**反粒子**. 量子场论的荷对称性等价于理论在粒子和反粒子之间交换的对称性. 复数场振幅提供了构造荷本征态的方便基础. 它们可以是 π^+ 和 π^-，分别由 $a_+^\dagger(k)$ 和 $a_-^\dagger(k)$ 作用在真空上而产生. 我们也可用这种理论来描述零自旋的电中性粒子，它们由"奇异"荷来区别，例如 $\bar{K}^0$ 和 K^0.

12.6 Feynman 传播子

在上册里对带荷 Klein-Gordon 粒子的理论的传播子处理中我们用物理边值条件推得了 Feynman Green 函数，该条件是：没有相互作用时只有正频解随时间向前传播. 为了看出带荷 Klein-Gordon 粒子量子场论中 Feynman 传播子起什么作用，我们在这种表述形式中考虑含有一个量子的态的时间空间变化. 为了组成一个带 $+1$ 荷的(未归一化的)单粒子态，我们以 $\varphi^*(\boldsymbol{x},t)$ 作用于真空上

$$\Psi_+(\boldsymbol{x},t) = \varphi^*(\boldsymbol{x},t)\Phi_0 \equiv \varphi^*(\boldsymbol{x},t)|0\rangle \qquad (12.65)$$

按照 (12.62)，在 (12.65) 中只有 $\varphi^*(\boldsymbol{x})$ 的产生部分，或负频部分，才保留下来，因此我们可以写成

$$\Psi_+(\boldsymbol{x},t) = \varphi^{*(-)}(\boldsymbol{x},t)|0\rangle \qquad (12.66)$$

其中

$$\varphi^{*(-)}(\boldsymbol{x},t) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} a_+^\dagger(k) e^{ik\cdot x}$$

$$\varphi^{(-)}(\boldsymbol{x},t) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} a_-^\dagger(k) e^{ik\cdot x} \qquad (12.67)$$

标志产生部分或负频部分，而 $\varphi^{*(+)}$ 和 $\varphi^{(+)}$ 是场 (12.57) 的相应的正频部分.

态 (12.65) 随时间向前传播至 $t' > t$ 的 $(\boldsymbol{x}', t')$ 的振幅

由如下的投影给出

$$\theta(t'-t)\langle\Psi_+(\boldsymbol{x}',t')|\Psi_+(\boldsymbol{x},t)\rangle$$
$$=\langle 0|\varphi(\boldsymbol{x}',t')\varphi^*(\boldsymbol{x},t)|0\rangle\theta(t'-t)$$
$$=\langle 0|\varphi^{(+)}(\boldsymbol{x}',t')\varphi^{*(-)}(\boldsymbol{x},t)|0\rangle\theta(t'-t) \quad (12.68)$$

(12.68) 式是在 $(\boldsymbol{x},t)$ 处产生 $+1$ 荷的量子并在迟一些的时刻 $t'>t$ 在 $\boldsymbol{x}'$ 处重又吸收到真空的矩阵元. 另一个 $(\boldsymbol{x},t)$ 处增加 $+1$ 单位的荷及在 $(\boldsymbol{x}',t')$ 处减少 $+1$ 单位的荷的办法是在 $(\boldsymbol{x}',t')$ 处产生一个荷为 -1 的量子并传播到 $\boldsymbol{x}$, 那里在时刻 $t>t'$ 重又被吸收至真空. 这样的振幅由下式给出

$$\theta(t-t')\langle\Psi_-(\boldsymbol{x},t)|\Psi_-(\boldsymbol{x}',t')\rangle$$
$$=\langle 0|\varphi^*(\boldsymbol{x},t)\varphi(\boldsymbol{x}',t')|0\rangle\theta(t-t')$$
$$=\langle 0|\varphi^{*(+)}(\boldsymbol{x},t)\varphi^{(-)}(\boldsymbol{x}',t')|0\rangle\theta(t-t') \quad (12.69)$$

将振幅 (12.68) 及 (12.69) 加在一起构成 Feynman 传播子:

$$i\Delta_F(x'-x)=\langle 0|\varphi(x')\varphi^*(x)|0\rangle\theta(t'-t)$$
$$+\langle 0|\varphi^*(x)\varphi(x')|0\rangle\theta(t-t') \quad (12.70)$$

将表示式 (12.57) 代入, 我们证明 (12 70) 和早先在第九章中的传播子处理中用过的 Feynman 传播子表达式 (9.10) 及 (9.11) 是等同的:

$$i\Delta_F(x'-x)=\int\frac{d^3k}{2\omega_k(2\pi)^3}[\theta(t'-t)e^{-ik\cdot(x'-x)}$$
$$+\theta(t-t')e^{ik(x'-x)}]$$
$$=i\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-m^2+i\varepsilon}e^{-ik\cdot(x'-x)}$$
$$\times(\Box_{x'}+m^2)\Delta_F(x'-x)=-\delta^4(x'-x) \quad (12.71)$$

在这种形式中 Feynman 传播子的 Lorentz 不变性已经明显地表现出来. 因为按照 (12.37) 及 (12.41) 对于类空间隔场算符可对易, 所以它们的乘积可以像在 (12.70) 中那样以 Lorentz 不变的方式作编时排列. 为了缩写这种编时排列

的操作，我们引入一个 T 算符，其定义为：

$$T(a(x)b(x')) = a(x)b(x')\theta(t-t') + b(x')a(x)\theta(t'-t) \tag{12.72}$$

T 算符具有这样的指令，使处于较早时刻的场算符居于右方，它可以推广应用于任意数目算符的乘积。 于是 Feynman 传播子可以写成

$$i\Delta_F(x'-x) = \langle 0|T(\varphi(x')\varphi^*(x)|0\rangle \tag{12.73}$$

或等价地用厄米场表示为

$$i\delta_{ij}\Delta_F(x'-x) = \langle 0|T(\varphi_i(x')\varphi_j(x))|0\rangle \tag{12.74}$$

正如在单粒子理论中那样，在量子场论的跃迁振幅的计算中 Feynman 传播子起着核心的作用。 当 $t'>t$ 时一个粒子从 $\boldsymbol{x}$ 到 $\boldsymbol{x}'$ 的传播以及当 $t>t'$ 时一个粒子从 $\boldsymbol{x}'$ 到 $\boldsymbol{x}$ 的传播均由 $\Delta_F(x', x)$ 描述。 这和第六章及第九章中对正粒子及反粒子解详细讨论的 Feynman 传播子和边界条件的物理解释是一样的。

问　　题

1. 对于标量场证明 $-(i/2)\epsilon^{\mu\nu}[M_{\mu\nu},\varphi] = \delta\varphi$。

2. 计算

$$\langle 0|\bar{\varphi}^2|0\rangle$$

其中

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{V}\int_V d^3x\varphi(\boldsymbol{x})$$

V 是半径为 R 的球形区域。

第十三章　Dirac 场的二次量子化

13.1　n 个全同粒子的量子力学

我们讨论了按照正则形式把一个经典场量子化后的一些结论．用这方法我们得到了对遵从 Bose-Einstein 统计粒子的一个自洽的描述．这个表述形式，允许粒子的产生和消灭，并成功地绕过了在单粒子理论中负能解和负几率的困难．

在这里，似乎应该从导致非相对论的 Schrödinger 方程或是自旋 1/2 粒子的 Dirac 方程的不同拉氏量出发，运用正则形式来发展类似的多粒子理论．但是这样的方案必然将我们引入歧途，因为我们已看到：从正则量子化方法中要出现遵从 Bose-Einstein 统计的粒子，而诸如电子和核子这些自旋为 1/2 的粒子却遵从 Fermi-Dirac 统计和不相容原理．因此，我们必须改变某些步骤．随后我们将看到，基于其它理由也需要作能导致 Fermi-Dirac 统计的同样的改变，从而得到自旋与统计间的联系．这是量子场论的重要成就之一．

为了直接达到在量子化方法中所需要的改变，我们将反过来，从基于 n 体 Schrödinger 方程的费米子多体理论出发，设法把它重新表述为量子化场的理论．不同于前一章中为得到多粒子理论而把经典场理论量子化，在这里，我们从多粒子理论出发，寻找符合不相容原理的量子场论形式[1]．

我们的出发点是无相互作用的 n 个全同粒子的 Schrödin-

1) P. Jordan *and* O. Klein, *Z. Physik* **45**, 751 (1927); P. Jordan *and* E. P. Wigner, *Z. Physik*, **47**, 631 (1928); V. Fock, *Z. Physik*, **75**, 622 (1932).

ger 方程

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t}(\boldsymbol{x}_1,\cdots\boldsymbol{x}_n;t)=\boldsymbol{H}\Psi \tag{13.1}$$

其中 $\boldsymbol{H}=\sum_{i=1}^{n}H(\boldsymbol{x}_i,p_i)$ 是形式相同的单体项之和. 在这样的问题中自变量可以分离,其一个特解为乘积

$$\Psi(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\ \boldsymbol{x}_n;t)=\prod_{i=1}^{n}u_{\alpha_i}(\boldsymbol{x}_i,t) \tag{13.2}$$

其中 $u_\alpha(\boldsymbol{x}_i,t)$ 是单粒子 Schrödinger 方程

$$Hu_\alpha(\boldsymbol{x},t)=i\frac{\partial u_\alpha(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} \tag{13.3}$$

的解. (13.1) 的通解由解 (13.2) 迭加而得,可写为

$$\Psi(\boldsymbol{x}_1,\cdots\boldsymbol{x}_n;t)=\frac{1}{\sqrt{n!}}\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n=1}^{N}c(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$$
$$\times u_{\alpha_1}(\boldsymbol{x}_1,t)\cdots u_{\alpha_n}(\boldsymbol{x}_n,t) \tag{13.4}$$

这里 $1/\sqrt{n!}$ 的引入是为了以后方便. N 是单粒子能级的数目. 设 $u_{\alpha_i}(\boldsymbol{x}_i,t)$ 属于一个正交系,则展开系数有归一条件

$$\frac{1}{n!}\sum_{\alpha_1,\cdots\alpha_n=1}^{N}|c(\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_n)|^2=1 \tag{13.5}$$

系数 c 的谱在 (13.4) 中决定 n 粒子态,并且必须满足全同粒子的不可分辨原则. 这就要求密度 $|\Psi(\boldsymbol{x}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_n;\ t)|^2$ 对其宗量的所有位置交换不变,因此 Ψ 本身在这样的交换下要么是对称的要么是反对称的[1]. 相应地,$c(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 在交换 α_i 时必须是对称或反对称的

---

1) 如果 Ψ 本身允许是一个列矢量,则更普遍的统计类型是可能的. 参见 H. S. Green, *Phys, Rev.*, **90**, 270 (1953); *and* O. W. Greenberg *and* A. Messiah, 将发表.

$$c(\cdots\alpha_i\cdots\alpha_j\cdots)$$
$$= \pm c(\cdots\alpha_j\cdots\alpha_i\cdots) \tag{13.6}$$

±号分别对应于 Bose-Einstein 统计和 Fermi-Dirac 统计.

在 (13.6) 中含有大量的信息,因为如果知道了 (13.4) 中的一个系数 $c(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, 则 (13.6) 马上给出另外的 $(n! - 1)$ 个系数. 于是可以写出比 (13.4) 更为紧凑的展开式如下: 对各个态 α, 标定一个自然次序并定义

$$\tilde{c}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \begin{cases} c(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) & \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n \\ 0 & \text{其它情形} \end{cases}$$

对 Fermi-Dirac 统计的情形, (13.4) 可重写为

$$\Psi(\boldsymbol{x}_1, \cdots \boldsymbol{x}_n; t)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n=1}^{N} \tilde{c}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$$
$$\times \sum_P \delta_P u_{\alpha_1}(\boldsymbol{x}_1, t) \cdots u_{\alpha_n}(\boldsymbol{x}_n, t)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n=1}^{N} \tilde{c}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$$
$$\times \begin{Vmatrix} u_{\alpha_1}(\boldsymbol{x}_1, t) \cdots\cdots u_{\alpha_n}(\boldsymbol{x}_1, t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{\alpha_1}(\boldsymbol{x}_n, t) \cdots\cdots u_{\alpha_n}(\boldsymbol{x}_n, t) \end{Vmatrix} \tag{13.7}$$

其中 $\sum_P$ = 对 α_i 的所有置换 P 求和

δ_P = 置换 P 的符号.

13.2 费米子的粒子数表象

在波函数 (13.4) 或 (13.7) 中所含有的信息不是说什么粒子具有什么样的量子数, 而是说 n 个全同粒子中有多少个在不同的量子能级上. 这里我们看到和 Klein-Gordon 场的

量子理论描述的相似性. 场或 n-粒子系统的态，是通过在每个单粒子态的量子或粒子数目来描述的. 这里的不同仅在于，对反对称解，这些数目对每个态不是 0 就是 1. 认识到这种平行性，我们用量子场论的语言来表达 n↑ 费米子系统 (13.1) 的动力学.

首先，我们改变 (13.7) 中的记号以便把对能级 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n=1,\cdots,N$ 的求和换成对占有数 n_α 的求和，n_α 表示能级 α 是有粒子占据 ($n_\alpha=1$) 或是空的 ($n_\alpha=0$). 引入符号 $\Psi(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n;n_1,\cdots,n_N,t)$，它表示由单粒子波函数 u_{α_i} 所构成的 Slater 行列式(如 (13.7) 中那样)，其中 n 个粒子在能级 α_i 上；行列式的 n 个列按 $\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n$ 的自然顺序把 $u_{\alpha i}$ 排列起来，并且

$$n_\alpha=\begin{cases}1 & \text{如果对某个 } i,\alpha=\alpha_i\\ 0 & \text{其它情形}\end{cases}$$

例如，假定有 7 个能级并且在第 2,4 和 5 能级上有粒子

$$(\alpha_1=2,\alpha_2=4,\alpha_3=5),$$

$$\Psi(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3;0101100;t)$$

$$=\begin{Vmatrix} u_2(\boldsymbol{x}_1,t) & u_4(\boldsymbol{x}_1,t) & u_5(\boldsymbol{x}_1,t)\\ u_2(\boldsymbol{x}_2,t) & u_4(\boldsymbol{x}_2,t) & u_5(\boldsymbol{x}_2,t)\\ u_2(\boldsymbol{x}_3,t) & u_4(\boldsymbol{x}_3,t) & u_5(\boldsymbol{x}_3,t)\end{Vmatrix} \tag{13.8}$$

现在波函数 (13.7) 简单地为

$$\Psi(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n;t)=\frac{1}{\sqrt{n!}}\sum_{n_1,\cdots,n_N=0}^{1}c'(n_1,\cdots,n_N)$$

$$\times\Psi(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n;n_1,\cdots,n_N;t) \tag{13.9}$$

其中

$$c'(n_1,\cdots,n_N)=\tilde{c}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) \tag{13.10}$$

n_α 定义如前.

归一条件现在为

$$\sum_{n_1,\cdots,n_N=0}^{\infty} |c'(n_1,\cdots,n_N)|^2 = 1 \qquad (13.11)$$

它表明 $c'(n_1,\cdots,n_N)$ 应解释为给定粒子分布$\{n_1,\cdots,n_N\}$的几率振幅.

为了继续把 n-费米子系统转换成量子场论的语言,我们要找一个由真空态来构造 n-粒子波函数的恰当方法. Dirac 空穴理论的传播子方法已经清楚显示出粒子的产生和消灭在动力学中起着核心的作用. 在(13.1)中计入粒子间的相互作用将导致具有不同量子数的态之间的跃迁,因而我们对于在一个 α 态消灭一个粒子并在另一个 α' 态产生一个粒子的振幅感到兴趣.

为此,我们仿照 Klein-Gordon 理论引入消灭和产生算符来构造并联系这些状态. 首先我们定义真空态 Φ_0. 真空不包含粒子,从而没有对应于解(13.1)或(13.3)的能量和动量. 产生算符定义为当它作用在 Φ_0 上时生成一个量子数为 α 的单粒子态 Φ_α

$$a_\alpha^\dagger \Phi_0 = \Phi_\alpha \equiv |00\cdots1\cdots\rangle \qquad (13.12)$$

在把这些态和算符与(13.1)的波函数语言联系起来之前,我们建立一个简单而方便的表示. 由于不相容原理,态 α 或者是空的,或者是满的——我们把这两种可能分别表示成

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_\alpha \text{ 和 } \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_\alpha .$$

于是真空态就是每一个态都空的列矩阵之积

$$\Phi_0 = \prod_{\alpha=1}^{N} \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_\alpha \qquad (13.13)$$

而单粒子态为

$$\Phi_{\alpha'} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{\alpha'} \prod_{\alpha\neq\alpha'} \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_\alpha \qquad (13.14)$$

那么，产生算符 $a^{\dagger}_{\alpha'}$ 可以定义为第 α' 态的空间中的一个 2×2 矩阵，它从 $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_{\alpha'}$ 生成 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{\alpha'}$. 任何一个具有形式 $\begin{bmatrix}x & 1\\ y & 0\end{bmatrix}_{\alpha'}$ (其中 x,y 为任意值)的矩阵都可以作到这点. 由于不相容原理，我们要求 $a^{\dagger}_{\alpha'}$ 作用在已有粒子占据的态 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{\alpha'}$ 时就消灭这个态并给出零矢量. 因而我们令 $x=y=0$:

$$a^{\dagger}_{\alpha'}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}_{\alpha'} \tag{13.15}$$

同样，我们由条件 $a_{\alpha'}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{\alpha'}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_{\alpha'}$ 和 $a_{\alpha'}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_{\alpha'}=0$ 来构造消灭算符 $a_{\alpha'}$ 我们有

$$a_{\alpha'}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}_{\alpha'} \tag{13.16}$$

它是 $a^{\dagger}_{\alpha'}$ 的厄米共轭. 由 (13.15) 和 (13.16) 可得到 $a_{\alpha'}$ 和 $a^{\dagger}_{\alpha'}$ 的反对易关系[1]的简单集合

$$\{a_{\alpha'},a_{\alpha'}\}=0 \tag{13.17a}$$

$$\{a^{\dagger}_{\alpha'},a^{\dagger}_{\alpha'}\}=0 \tag{13.17b}$$

$$\{a_{\alpha'},a^{\dagger}_{\alpha'}\}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\equiv 1 \tag{13.17c}$$

不相容原理导致了产生和消灭算符之间的反对易关系，它们代替了玻色子正则量子化方法中类似的对易子 (12.10). 方程 (13.17a) 和 (13.17b) 表明，在同一个态上移去或引入两个费米子是不可能的. 乘积 $a^{\dagger}_{\alpha'}a_{\alpha'}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ 的两个本征值

1) 从 (13.15) 到 (13.17) 的表示反映出 $a_{\alpha'}$, $a^{\dagger}_{\alpha'}$ 与二分量的 Pauli 矩阵 $\sigma_x-i\sigma_y$, $\sigma_x+i\sigma_y$ 之间的完全类似. 真空态 (13.13) 对应于所有自旋朝下的自旋态; $a^{\dagger}_{\alpha'}$ 把第 α' 态从自旋朝下翻转成自旋朝上，这里，有粒子占据的态对应于自旋朝上的态.

对于有粒子占据的态 α' 是 1 而对于空的态是 0. 它是粒子数算符，记为

$$N_{\alpha'} = a^{\dagger}_{\alpha'} a_{\alpha'}$$

它不同于玻色子的粒子数算符，因为它只有两个本征值 0 和 1.

现在我们可以用一种简单的方式把算符语言和单粒子波函数 $u_\alpha(x)$ 联系起来. 为此，引入如下定义的场算符

$$\chi(\boldsymbol{x},t) = \sum_{\alpha=1}^{N} u_\alpha(\boldsymbol{x},t) a_\alpha$$

$$\chi^*(\boldsymbol{x},t) = \sum_{\alpha=1}^{N} u^*_\alpha(\boldsymbol{x},t) a^{\dagger}_\alpha \tag{13.18}$$

波函数 $u_{\alpha_i}(\boldsymbol{x},t)$ 正好是真空态 Φ_0 和单粒子态 Φ_{α_i} 之间场算符 $\chi(\boldsymbol{x},t)$ 的矩阵元

$$(\Phi_0, \chi(\boldsymbol{x},t), \Phi_{\alpha_i}) = u_{\alpha_i}(\boldsymbol{x},t) \tag{13.19}$$

可以用同样的精神继续做下去，从场来构造 n-粒子波函数 (13.8) 和构造具有与 (13.1) 中的 H 相同本征值谱的哈密顿算符. 为此，我们必须考虑包含有若干粒子的态. 如在 (13.15) 和 (13.16) 中所构造的那样，算符 a_{α_i} 和 $a^{\dagger}_{\alpha_i}$ 与 $j \neq i$ 的 a_{α_j} 和 $a^{\dagger}_{\alpha_j}$ 相对易，因为它们是作用在不同态上的. 例如，对 $i \neq j$

$$a^{\dagger}_{\alpha_i} a^{\dagger}_{\alpha_j} \Phi_0 = \Phi_{\alpha_i \alpha_j} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\alpha_i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\alpha_j} \prod_{\alpha \neq \alpha_i, \alpha_j} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\alpha} = \Phi_{\alpha_j \alpha_i} \tag{13.20}$$

如果我们继续直接用算符 $a^{\dagger}_{\alpha_i}$ 来做，就将得到一种表示，它与各个态 α 的特定顺序相关. 因为尽管 (13.20) 中的 $\Phi_{\alpha_i \alpha_j}$ 在 α_i 和 α_j 交换下对称，上面在 (13.8) 中定义的 Ψ 却是反对称的. 因此，从数学观点看，把算符 $a_\alpha, a^{\dagger}_\alpha$ 修改一下[1]使它们

1) Jordan *and* Wigner 见前节.

对不同的态和相同的态 (13.17) 都一样满足反对易关系是方便的. 这意味着，特别是对不同的态 α 和 α'，修正后的算符 $b_\alpha^\dagger$ 应满足

$$b_\alpha^\dagger b_{\alpha'}^\dagger|0\rangle = -b_{\alpha'}^\dagger a_\alpha^\dagger|0\rangle \tag{13.21}$$

这和 $a_\alpha^\dagger a_{\alpha'}^\dagger|0\rangle = +a_{\alpha'}^\dagger a_\alpha^\dagger|0\rangle$ 相反. 为了作到所要求的符号改变同时保持把 $b_\alpha^\dagger$ 解释为产生算符，我们令

$$b_\alpha^\dagger = a_\alpha^\dagger \eta_\alpha \tag{13.22}$$

这里 η_α 在我们所工作的粒子数表象中是一个对角算符. 把 (13.22) 代入 (13.21) 我们发现，如果

$$\begin{aligned} a_{\alpha_i}^\dagger \eta_{\alpha_j} &= -\eta_{\alpha_j} a_{\alpha_i}^\dagger \\ a_{\alpha_j}^\dagger \eta_{\alpha_i} &= \eta_{\alpha_i} a_{\alpha_j}^\dagger \end{aligned} \qquad \text{对于 } \alpha_i < \alpha_j \tag{13.23}$$

则 (13.21) 可满足. 对角算符 $(1-2N_\alpha)$ 和 $a_\alpha^\dagger$ 反对易[1]；于是我们就有

$$\eta_{\alpha_i} = \prod_{\alpha=1}^{\alpha_i-1} (1-2N_\alpha) = \prod_{\alpha=1}^{\alpha_i-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_\alpha \tag{13.24}$$

因此

$$\eta_{\alpha_i} \Psi(n_1 \cdots n_N) = \prod_{\alpha=1}^{\alpha_i-1} (-1)^{n_\alpha} \Psi(n_1 \cdots n_N)$$

算符

$$b_\alpha = \eta_\alpha a_\alpha = a_\alpha \eta_\alpha$$

是 $b_\alpha^\dagger$ 的厄米共轭，它被解释为消灭算符. 作为产生算符，$b_{\alpha_i}^\dagger$ 可从一个没有粒子占据的态 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\alpha_i}$ 生成一个占据态 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\alpha_i}$，其振幅为 $+1$ 或 -1，视占据 $\alpha < \alpha_i$ 的各个态 α 的粒子数为偶或奇而定；这样，能级 α_i 和 α_j 被占据的态在交换下标 α_i 和 α_j 时是反对称的. b_α 和 $b_\alpha^\dagger$ 这些算符满足和 a_α，$a_\alpha^\dagger$ 同样的反

---

1) 算符 $(1-2N_\alpha)$ 在这里是 Pauli 自旋算符 $-\sigma_z$ 的类比.

对易关系

$$\{b_\alpha^\dagger, b_\alpha^\dagger\} = \{b_\alpha, b_\alpha\} = 0 \quad \{b_\alpha, b_\alpha^\dagger\} = 1 \tag{13.25}$$

根据我们对算符的构造，进一步还有如下普遍的对易关系

$$\{b_\alpha, b_{\alpha'}^\dagger\} = \delta_{\alpha\alpha'} \quad \{b_\alpha, b_{\alpha'}\} = \{b_\alpha^\dagger, b_{\alpha'}^\dagger\} = 0 \tag{13.26}$$

可以明显地验证它们. 例如，对 $\alpha > \alpha'$

$$\begin{aligned} b_\alpha b_{\alpha'} + b_{\alpha'} b_\alpha &= \eta_\alpha a_\alpha a_{\alpha'} \eta_{\alpha'} + \eta_{\alpha'} a_{\alpha'} a_\alpha \eta_\alpha \\ &= -a_\alpha a_{\alpha'} \eta_\alpha \eta_{\alpha'} + a_{\alpha'} a_\alpha \eta_\alpha \eta_{\alpha'} = 0 \quad \alpha > \alpha' \end{aligned}$$

通过 b 表示的粒子数算符是简单的：

$$N_\alpha = a_\alpha^\dagger a_\alpha = b_\alpha^\dagger b_\alpha \tag{13.27}$$

态

$$\begin{aligned} &(b_N^\dagger)^{n_N} \cdots (b_\alpha^\dagger)^{n_\alpha} \cdots (b_1^\dagger)^{n_1} \Phi_0 \\ &\equiv \Phi(n_1, \cdots, n_N) \end{aligned} \tag{13.28}$$

是粒子数算符的本征函数并形成一个完备正交集

$$(\Phi(n_1', \cdots, n_N'), \Phi(n_1, \cdots, n_N)) = \prod_{\alpha=1}^{N} \delta_{n_\alpha n_\alpha'}$$

通过叠加可构成普遍的态，我们写作

$$\Phi = \sum_{n_1, \cdots, n_N = 0}^{1} c'(n_1, \cdots, n_N)(b_N^\dagger)^{n_N} \cdots (b_1^\dagger)^{n_1} \Phi_0 \tag{13.29}$$

其中展开系数 $c'(n_1, \cdots, n_N)$ 是给定粒子分布的几率振幅

$$(\Phi, \Phi) = \sum_{n_1, \cdots, n_N = 0}^{1} |c'(n_1, \cdots, n_N)|^2 \tag{13.30}$$

因之可以和 (13.8)，(13.9) 中的系数相等同.

算符 b_α 和 $b_\alpha^\dagger$ 的非零矩阵元为

$$\begin{aligned} &\langle \Phi(n_1', \cdots, n_N'), b_{\alpha_k}^\dagger \Phi(n_1, \cdots, n_N) \rangle \\ &= \langle \Phi_0, b_{\alpha_1'} \cdots b_{\alpha_n'} b_{\alpha_k}^\dagger b_{\alpha_n}^\dagger \cdots b_{\alpha_1}^\dagger \Phi_0 \rangle \\ &= \begin{cases} (-1)^{n'-k'} & \text{对于 } \alpha \neq \alpha_k, n_\alpha = n_\alpha' \text{ 以及 } n_{\alpha_k} = 0; n_{\alpha_k}' = 1 \\ 0 & \text{其它情形} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\langle \Phi(n'_1,\cdots,n'_N), b_{\alpha_k}\Phi(n_1,\cdots,n_N)\rangle$$
$$= \begin{cases} (-1)^{n-k} & \text{对于 } \alpha \neq \alpha_k, n_\alpha = n'_\alpha \text{ 以及 } n'_{\alpha_k}=0; n_{\alpha_k}=1 \\ 0 & \text{其它情形} \end{cases} \tag{13.31}$$

其中 $n=\sum_{\alpha=1}^{N} n_\alpha$, $n'=\sum_{\alpha=1}^{N} n'_\alpha$, 并且 α_k 是有序集 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_N\}$ 的第 k 个数, $\alpha_{k'}$ 是集 $\{\alpha'_1,\cdots,\alpha'_n\}$ 的第 k' 个数.

用构成单粒子波函数 (13.19) 那样的方法，现在我们能够来构造反对称的 n-粒子波函数了. 为此，引入与 (13.18) 中类似的场算符 $\varphi(\boldsymbol{x},t)$, 但是把 a_α 换成相互反对易的 b_α:

$$\varphi(\boldsymbol{x},t)=\sum_{\alpha=1}^{N} u_\alpha(\boldsymbol{x},t)b_\alpha$$
$$\varphi^*(\boldsymbol{x},t)=\sum_{\alpha=1}^{N} u^*_\alpha(\boldsymbol{x},t)b^\dagger_\alpha \tag{13.32}$$

计算在一个共同的时间 t, n 个场算符 $\varphi(\boldsymbol{x}_i,t)$ 的乘积在真空和由 (13.29) 给出的一个普遍态之间的矩阵元，重复运用 (13.31) 后得到

$$\frac{1}{\sqrt{n!}}(\Phi_0,\varphi(\boldsymbol{x}_1,t)\cdots\varphi(\boldsymbol{x}_n,t)\Phi)$$
$$=\Psi(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n;t) \tag{13.33}$$

其中 Ψ 是 (13.9) 中的反对称 n-粒子波函数. 产生和消灭算符的反对易关系可以重新表示为算符 φ 和 φ^* 的反对易关系[1)]

$$\{\varphi(\boldsymbol{x},t)\varphi(\boldsymbol{x}',t)\}=0$$
$$\{\varphi^*(\boldsymbol{x},t),\varphi^*(\boldsymbol{x}',t)\}=0$$

---

1) 这里我们看到用 $b^\dagger_\alpha$ 算符替代 $a^\dagger_\alpha$ 的好处，假如在 (13.28) 中用了 $a^\dagger_\alpha$ 替代 $b^\dagger_\alpha$ 的话，那就不会有 (13.33) 和 (13.34) 的简单形式了.

$$\{\varphi(\boldsymbol{x},t),\varphi^*(\boldsymbol{x}',t)\}=\sum_{\alpha,\alpha'=1}^{N}\{b_\alpha,b_{\alpha'}^\dagger\}u_\alpha(\boldsymbol{x},t)u_{\alpha'}^*(\boldsymbol{x}',t)$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{N}u_\alpha(\boldsymbol{x},t)u_\alpha^*(\boldsymbol{x}_1',t)=\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \qquad (13.34)$$

已经有了态和算符，我们就能够离开波函数语言，并通过量子场的表述形式来发展动力学，即 (13.1). 方程 (13.3) 可以重新写成 (13.32) 中引入的场算符的线性微分方程

$$H(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x},t)=i\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} \qquad (13.35)$$

与在 Klein-Gordon 理论中运用的程序类似，(13.35) 可以看成是一个经典场 φ 的场方程，它或许是从一个适当的拉氏量导出的. 当加上关系式 (13.34) 时，我们把 (13.35) 重新解释为一个算符方程. 与 Klein-Gordon 方程处理的主要区别在于我们用反对易子代替了对易子，这是 Fermi-Dirac 统计代替了 Bose-Einstein 统计的结果. 这个方法称为**二次量子化.** 在第一次量子化中，经典粒子坐标换成了作用于波函数上的量子力学算符；现在我们把单粒子 Schrödinger 方程拿来，解释为场方程，然后再对场振幅加上量子条件，使它们成为满足 (13.34) 的算符. 但上面我们已表明，这个表述形式的内容和多体 Schrödinger 方程的内容是一样的. (13.9) 和 (13.29)中的展开系数 $c'(n_1,\cdots,n_N)$ 在两种语言中都描述 n-粒子系统的态. 对于总能量，在波函数语言中，由 (13.9)，我们有

$$\int d^3x_1\cdots d^3x_n\Psi^*(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}n;t)$$

$$\times\sum_{i=1}^{n}H(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{p}_i)\Psi(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n;t)$$

$$=\sum_{n_1,\ldots,n_N=0}^{1}|c'(n_1,\cdots,n_N)|^2\left(\sum_{\alpha=1}^{N}n_\alpha E_\alpha\right) \qquad (13.36)$$

转换到算符语言，我们看出 (13.36) 是哈密顿算符

$$\boldsymbol{H}=\int d^3x\varphi^*(\boldsymbol{x},t)H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})\varphi(\boldsymbol{x},t)$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{N}N_\alpha\int d^3xu_\alpha^*Hu_\alpha=\sum_{\alpha=1}^{N}N_\alpha E_\alpha \qquad (13.37)$$

在态 (13.29) 中的期待值. 如我们所预期的，$\boldsymbol{H}$ 正是场的哈密顿算符.

为完满结束我们对这个表述形式的讨论，我们构造一个粒子从 $(\boldsymbol{x},t)$ 传播到 $(\boldsymbol{x}',t')$ 的 Green 函数，以便与第六章进行比较，这里 $t'>t$. 为此，我们需要在 $(\boldsymbol{x},t)$ 点从真空产生一个粒子并随后在 $(\boldsymbol{x}',t')$ 点消灭的振幅.

一个处于 $\boldsymbol{x}$ 点的单粒子的波函数正比于

$$\psi_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}',t)=\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')=\sum_{\alpha=1}^{N}u_\alpha(\boldsymbol{x}',t)u_\alpha^*(\boldsymbol{x},t) \quad (13.38)$$

把 (13.38) 与 (13.9)，(13.39) 相比较，相应的态在二次量子化的描述中为

$$\Psi_1(\boldsymbol{x},t)=\sum_{\alpha=1}^{N}u_\alpha^*(\boldsymbol{x},t)b_\alpha^\dagger\Phi_0=\varphi^*(\boldsymbol{x},t)\Phi_0 \quad (13.39)$$

Green 函数由在 $(\boldsymbol{x},t)$ 产生的粒子 $\Psi_1(\boldsymbol{x},t)$ 在晚些时刻 $t'>t$ 的单粒子态 $\Psi_1(\boldsymbol{x}',t')$ 上的投影给出：

$$G(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)=-i(\Psi_1(\boldsymbol{x}',t'),\Psi_1(\boldsymbol{x},t))\theta(t'-t)$$

$$=-i\theta(t'-t)\langle 0|\varphi(\boldsymbol{x}',t')\varphi^*(\boldsymbol{x},t)|0\rangle$$

运用 (13.31) 和 (13.32)，化为

$$G(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t)=-i\theta(t'-t)\sum_{\alpha}u_\alpha(\boldsymbol{x}',t')u_\alpha^*(\boldsymbol{x},t)$$

它和第六章传播子理论中讨论推迟 Green 函数时引入的 (6.28) 式相符合.

在结束讨论 Schrödinger 理论的多体形式和二次量子化

场论形式间的对应时，我们指出场论形式的两个优点，这些优点在于容易计算物理上感兴趣的矩阵元，它们导致了近年来把场论方法广泛地应用到非相对论性多体问题. 首先，算符 b_α 和 $b_\alpha^\dagger$，根据其代数规则，自然具有保持波函数反对称性所必须的特点. 其次，它们提供了对粒子数可变的物理系统作自然而简单的描述所需要的灵活性.

13.3 Dirac 理论

现在转向我们熟悉的特殊情形，即 Dirac 方程. 为了保持与 Klein-Gordon 理论的讨论紧密平行，我们由作用量原理从一个拉氏量来导出它. 场 ψ_α 的四个分量加上它们的共轭 $\bar{\psi}_\alpha$ 作为 8 个独立变量来对待.

从自由 Dirac 方程出发

$$(i\not{\partial} - m)\psi = 0 \tag{13.40}$$

左乘 $\delta\bar{\psi}$ 并对 t_1 与 t_2 之间的全部时空积分来构造拉氏量

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_1}^{t_2} d^4x \delta\bar{\psi}(x)(i\not{\partial} - m)\psi(x) \\ &= \delta \int_{t_1}^{t_2} d^4x \bar{\psi}(x)(i\not{\partial} - m)\psi(x) \end{aligned} \tag{13.41}$$

由此我们得出拉氏密度

$$\mathscr{L}(x) = \bar{\psi}(x)(i\not{\partial} - m)\psi(x) \tag{13.42}$$

作用量对 ψ 的变分 (13.41) 给出共轭方程

$$\bar{\psi}(-i\overleftarrow{\not{\partial}} - m) = 0$$

正则方法给出 ψ 的共轭动量

$$\pi_\alpha = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}_\alpha} = i\psi_\alpha^\dagger \tag{13.43}$$

由于 (13.41) 不含 $\bar{\psi}$ 的导数，我们找不到 $\psi_\alpha^\dagger$ 的共轭动量；方程 (13.43) 表明 $i\psi_\alpha^\dagger$ 本身是 ψ_α 的共轭动量. 结果，哈氏量密

度的形式为

$$\mathscr{H} = \pi\dot{\phi} - \mathscr{L} = \phi^{\dagger}(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla} + \beta m)\phi$$

$$= \phi^{\dagger} i\frac{\partial}{\partial t}\Psi \tag{13.44}$$

最后一步用了 Dirac 方程. $\mathscr{H}$ 的形式有如一个单粒子哈氏量算符夹在场及其厄米共轭之间，这与我们在 (13.37) 的非相对论讨论中得到的形式相符合.

能量、动量和角动量等整套守恒定律自动地从 $\mathscr{L}$ 的平移不变性和 Lorentz 不变性得到并且可以由定义 (11.48) 和 (11.57) 计算出

$$\mathscr{T}^{\nu\mu} = i\bar{\psi}\gamma^{\nu}\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\psi \tag{13.45}$$

由 (11.49) 求得能、动量运动常数，由

$$H = \int \mathscr{T}^{00} d^3x = \int \phi^{\dagger}(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla} + \beta m)\phi d^3x$$

以及

$$\boldsymbol{P} = \int \phi^{\dagger}(-i\boldsymbol{\nabla})\phi d^3x \tag{13.46}$$

角动量密度 $\mathscr{M}^{\mu\nu\lambda}$ 和守恒的角动量 $M^{\nu\lambda}$ 为

$$\mathscr{M}^{\mu\nu\lambda} = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\left(x^{\nu}\frac{\partial}{\partial x_{\lambda}} - x^{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_{\nu}} + \Sigma^{\nu\lambda}\right)\psi \tag{13.47}$$

$$M^{\nu\lambda} = \int d^3x \mathscr{M}^{0\nu\lambda}$$

其中 $\Sigma^{\nu\lambda} = \frac{1}{4}[\gamma^{\nu}, \gamma^{\lambda}]$ 是在 Lorentz 变换下的旋量转动矩阵，它在 $\mathscr{M}^{\mu\nu\lambda}$ 的最后一项中加上了自旋角动量. 特别是对空间分量我们有

$$\boldsymbol{J} \equiv (M^{23}, M^{31}, M^{12})$$

$$= \int d^3x \phi^{\dagger}\left(\boldsymbol{r}\times\frac{1}{i}\boldsymbol{\nabla} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\right)\phi \tag{13.48}$$

看来像是熟悉的自旋和轨道角动量之和 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{S}$.

对于自由 Dirac 理论我们可以得到另一个守恒定律. 忆及 Dirac 方程的解满足条件 $\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi=0$ 并且因之

$$Q=\int d^3x\psi^{\dagger}\psi \tag{13.49}$$

是一个不变的总"荷". 它是非厄米场的 Klein-Gordon 理论中守恒荷 (12.63) 的类似物.

继续按照正则方法，我们可以加上对易关系 (11.39) 来得到量子场论. 但我们知道,这将导致遵从 Bose-Einstein 统计的多粒子量子系统. 为了在构造多电子系统的量子场论中纳入不相容原理，这些对易子必须如前节中那样换成反对易子.

13.4 动量展开

下面将通过产生和消灭算符在动量空间进行量子化. 可以直接应用本章第一部分对 Schrödinger 场的讨论,因为我们仍然需要像 (13.32) 中那样的算符，它们生成与不相容原理相协调的态.

正如在第三章讨论过那样，自由 Dirac 方程 (13.40) 的解的普遍平面波展开取如下的形式

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{x},t)&=\sum_{\pm s}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}\left[b(p,s)u(p,s)e^{-ip\cdot x}\right.\\&\left.+d^{\dagger}(p,s)v(p,s)e^{ip\cdot x}\right]\\\psi^{\dagger}(\boldsymbol{x},t)&=\sum_{\pm s}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}\left[b^{\dagger}(p,s)\bar{u}(p,s)\gamma_0e^{ip\cdot x}\right.\\&\left.+d(p,s)\bar{v}(p,s)\gamma_0e^{-ip\cdot x}\right]\end{aligned}\tag{13.50}$$

其中 $E_p=p_0=+\sqrt{|\boldsymbol{p}|^2+m^2}$. 在第三章中曾对旋量

$u(p,s)$ 和 $v(p,s)$ 建立了如下有用的关系式[1]

(a) Dirac 方程

$$(\not{p}-m)u(p,s)=0 \qquad \bar{u}(p,s)(\not{p}-m)=0$$
$$(\not{p}+m)v(p,s)=0 \qquad \bar{v}(p,s)(\not{p}+m)=0$$

(b) 正交性

$$\bar{u}(p,s)u(p,s')=\delta_{ss'}=-\bar{v}(p,s)v(p,s')$$
$$u^{\dagger}(p,s)u(p,s')=\frac{E_p}{m}\delta_{ss'}=v^{\dagger}(p,s)v(p,s')$$
$$\bar{v}(p,s)u(p,s')=0=v^{\dagger}(p,s)u(-p,s') \qquad (13.51)$$

(c) 完备性

$$\sum_{\pm s}[u_\alpha(p,s)\bar{u}_\beta(p,s)-v_\alpha(p,s)\bar{v}_\beta(p,s)]=\delta_{\alpha\beta}$$
$$\sum_{\pm s}u_\alpha(p,s)\bar{u}_\beta(p,s)=\left(\frac{\not{p}+m}{2m}\right)_{\alpha\beta}\equiv(\Lambda_+(p))_{\alpha\beta}$$
$$-\sum_{\pm s}v_\alpha(p,s)\bar{v}_\beta(p,s)=\left(\frac{m-\not{p}}{2m}\right)_{\alpha\beta}\equiv(\Lambda_-(p))_{\alpha\beta}$$

当 Dirac 场二次量子化时，展开系数 $b(p,s)$，$b^{\dagger}(p,s)$，$d(p,s)$ 和 $d^{\dagger}(p,s)$ 成为消灭和产生粒子的算符．由于我们希望得到不相容原理，所以给它们指定类似于 (13.26) 的反对易关系，在 (13.50) 的连续形式下它们是:

$$\{b(p,s),b^{\dagger}(p',s')\}=\delta_{ss'}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')$$
$$\{d(p,s),d^{\dagger}(p',s')\}=\delta_{ss'}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')$$
$$\{b(p,s),b(p',s')\}=\{d(p,s),d(p',s')\}=0$$
$$\{b^{\dagger}(p,s),b^{\dagger}(p',s')\}=\{d^{\dagger}(p,s),d^{\dagger}(p',s')\}=0 \qquad (13.52)$$
$$\{b(p,s),d(p',s')\}=\{b(p,s),d^{\dagger}(p',s')\}=0$$
$$\{d(p,s),b(p',s')\}=\{d(p,s),b^{\dagger}(p',s')\}=0$$

场 (13.50) 的反对易关系现在可以从 (13.52) 导出． 例

1) 例如 (3.16)，(3.30)． 忆及 $u(-p,s)$ 表示 $u(\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2},-\boldsymbol{p},s)$ 能量的符号在旋量中总取正值． $b,b^{\dagger}$ 的归一化约定是使得量子带的荷为 ±1.

如，借助于(13.51)我们得到

$$\begin{aligned}
&\{\psi_\alpha(\boldsymbol{x},t),\psi_\beta^\dagger(\boldsymbol{x}',t)\}\\
&=\sum_{\pm s,\pm s'}\iint\frac{d^3pd^3p'}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{m}{E_p}\cdot\frac{m}{E_{p'}}}\cdot\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\delta_{s,s'}\\
&\quad\times[u_\alpha(p,s)\bar{u}_\tau(p',s')\gamma^0_{\tau\beta}e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}\\
&\quad+v_\alpha(p,s)\bar{v}_\tau(p',s')\gamma^0_{\tau\beta}e^{-i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}]\\
&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}\{[(\not{p}+m)\gamma^0]_{\alpha\beta}e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}\\
&\quad-[(m-\not{p})\gamma^0]_{\alpha\beta}e^{-i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}\}\\
&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}2E_p\delta_{\alpha\beta}=\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\delta_{\alpha\beta}
\end{aligned}\tag{13.53}$$

和(13.34)类似还有

$$\begin{aligned}
\{\psi(\boldsymbol{x},t),\psi(\boldsymbol{x}',t)\}&=0\\
\{\psi^\dagger(\boldsymbol{x},t),\psi^\dagger(\boldsymbol{x}',t)\}&=0
\end{aligned}\tag{13.54}$$

与 Schrödinger 理论相平行，我们把 $b^\dagger$ 和 d 解释为电子的产生算符. 但是，在 Dirac 理论中我们必须妥善处理负能解；d 产生负能态. 为显示这点，我们把能量和动量算符通过 b，d，$b^\dagger$ 和 $d^\dagger$ 表示出来. 把(13.50)代入(13.46)，借助(13.51)我们得到

$$\begin{aligned}
H&=\int d^3x\sum_{\pm s,\pm s'}\iint\frac{d^3pd^3p'}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{m^2}{E_pE_{p'}}}E_{p'}\\
&\quad\times[b^\dagger(p,s)\bar{u}(p,s)\gamma_0e^{ip\cdot x}+d(p,s)\bar{v}(p,s)\gamma_0e^{-ip\cdot x}]\\
&\quad\times[b(p',s')u(p',s')e^{-ip'\cdot x}\\
&\quad-d^\dagger(p',s')v(p',s')e^{ip'\cdot x}]\\
&=\sum_{\pm s,\pm s'}\int d^3pm[b^\dagger(p,s)b(p,s')u^\dagger(p,s)u(p,s')\\
&\quad-d(p,s)d^\dagger(p,s')v^\dagger(p,s)v(p,s')]\\
&=\sum_{\pm s}\int d^3pE_p[b^\dagger(p,s)b(p,s)-d(p,s)d^\dagger(p,s)]
\end{aligned}\tag{13.55}$$

类似地

$$\boldsymbol{P}=\sum_{\pm s}\int d^3p\boldsymbol{p}[b^\dagger(p,s)b(p,s)-d(p,s)d^\dagger(p,s)] \tag{13.56}$$

由H和$\boldsymbol{P}$的这些形式并由(13.52)可见$d(p,s)$生成具有$(-E_p,-\boldsymbol{p})$的一个负能量粒子，$b^\dagger(p,s)$生成具有$(E_p,\boldsymbol{p})$的一个正能量的粒子. $d^\dagger(p,s)$和$b(p,s)$是相应的消灭算符.

我们还看到在(13.55)中的能量算符不是正定的. 它引起一个显然的困难，因为把更多的粒子加入到负能态中就总可以找到一个状态，能量低于任何取定的基态.但是正如在第五章中我们曾详细讨论过的那样，Dirac 的空穴理论排除了这个困难. 按空穴理论，我们定义真空态为所有负能电子态都被填满了而所有正能态空着的状态. 要能在原则上这样定义真空态就要求应用不相容原理，从而在作 Dirac 场的二次量子化理论中采用反对易关系. 要是我们企图通过对易子按照正则方法进行量子化，那我们就会发现自己处于根本的和不能解脱的困难之中. 按照 Bose-Einstein 统计，我们总可以把无限多数目的粒子引入到一个任意给定的态；因此，对哈氏量(13.55)就不存在最低能量的基态. 反对易关系和 Dirac 理论的这个必要的联系是 Lorentz 定域不变的场论中一个基本定理的特例，这定理是 Pauli 在 1940 年首先证明的. 按照这个定理，半整数自旋的粒子必须遵从 Fermi-Dirac 统计，整数自旋的粒子则遵从 Bose-Einstein 统计[1]. 在第十六章中我们

1) W. Pauli, *Phys. Rev.*, **58** 716 (1940); *Ann. Inst. Henri Poincare*, **6** 137 (1936); 假若我们在(12.14)和(12.15)中对自旋为零的量子作错误的自旋和统计的联系，那么能动量四矢量将不再是其本征值描写物理系统的一个算符，而只会是一个无穷常数.

再来详细讨论这一点.

用 Dirac 理论的空穴理论观点，我们现在把 (13.55) 和 (13.56) 的能-动量四矢量改写成

$$P^\mu = \sum_{\pm s} \int d^3p p^\mu [b^\dagger(p,s)b(p,s) + d^\dagger(p,s)d(p,s) - \{d(p,s), d^\dagger(p,s)\}] \tag{13.57}$$

将它作用在空穴理论的真空上，头两项为零，因为不存在正能量的电子可以被 $b(p,s)$ 消灭以及在负能态中没有空穴可以被 $d(p,s)$ 来填充. 最后一项正是一个无穷常数，我们把它丢掉，因为所有能量和动量都是相对于真空来测量的. 形式上这等价于通过场振幅的正规排列乘积来重新定义 P^μ，在正规排列中场算符的乘积是这样写的：正频部分

$$\psi^{(+)} = \sum_{\pm s} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}}\, b(p,s)u(p,s)e^{-ip\cdot x}$$

$$\bar{\psi}^{(+)} = \overline{\psi^{(-)}} = \sum_{\pm s} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}}\, d(p,s)\bar{v}(p,s)e^{-ip\cdot x}$$

写在负频部分

$$\psi^{(-)} = \sum_{\pm s} \int \frac{\alpha^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}}\, d^\dagger(p,s)v(p,s)e^{ip\cdot x}$$

$$\bar{\psi}^{(-)} = \overline{\psi^{(+)}} = \sum_{\pm s} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}}\, b^\dagger(p,s)\bar{u}(p,s)e^{ip\cdot x}$$

的右边. 对于服从反对易关系的场，在把场写成正规排列时对场振幅的每一次位置交换都要改变一次该项的符号，即如

$$:\bar{\psi}_\alpha\psi_\beta: = \bar{\psi}_\alpha^{(+)}\psi_\beta^{(+)} + \bar{\psi}_\alpha^{(-)}\psi_\beta^{(+)} + \bar{\psi}_\alpha^{(-)}\psi_\beta^{(-)} - \psi_\beta^{(-)}\bar{\psi}_\alpha^{(+)} \tag{13.58}$$

用这个正规排列的定义，诸如能动量四矢量 (13.57) 这样的双线性形式只改变一个 c 数而成为

$$P^{\mu}=\sum_{\pm s}\int d^{3}pp^{\mu}[b^{\dagger}(p,s)b(p,s)+d^{\dagger}(p,s)d(p,s)] \tag{13.59}$$

$b(p,s)$ 和 $b^{\dagger}(p,s)$ 分别消灭和产生具有量子数 (p,s) 的一个正能量电子. 和 Klein-Gordon 理论类似

$$N^{+}(p,s)=b^{\dagger}(p,s)b(p,s)$$

解释为正能量电子的粒子数算符. $N^{+}(p,s)d^{3}p$ 的本征值表明: 有多少个自旋为 s 的电子处于动量间隔 $d^{3}p$ 之中. $d^{\dagger}(p,s)$ 消灭一个负能电子,在空穴理论中这被说成是产生一个正电子. 类似地, $d(p,s)$ 消灭一个正电子,并且在 (13.59) 中

$$N^{-}(p,s)=d^{\dagger}(p,s)d(p,s)$$

是正能量的正电子的粒子数算符. (13.59) 式是一个简单的和

$$P^{\mu}=\sum_{\pm s}\int d^{3}pp^{\mu}[N^{+}(p,s)+N^{-}(p,s)] \tag{13.60}$$

在这表示中荷算符可类似地表示出来. 把 (13.50) 代入守恒荷 (13.49), 现在写成正规次序,通过直接运算可验证

$$\begin{aligned}Q=\int d^{3}x:\psi^{\dagger}\psi:&=\sum_{\pm s}d^{3}p:b^{\dagger}(p,s)b(p,s)\\&+d(p,s)d^{\dagger}(p,s):=\sum_{\pm s}\int d^{3}p\\&\times[N^{+}(p,s)-N^{-}(p,s)]\end{aligned} \tag{13.61}$$

正规次序的作用是排除掉一个无穷常数: 所有负能态都填满了的真空的总荷. (13.60) 和 (13.61) 表明了在 Dirac 场的量子理论中质量相同而电荷相反的电子和正电子对称地出现. 这和第五章正电子理论中确立和讨论过的电荷对称性一样. 在那里守恒流 $\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$ 和电磁势相耦合并且确定荷 (13.61) 为电荷. 这种确定是基于经典类比;但是,在第十五章我们将表

明,对守恒荷作较广泛的解释也是可能的.

下面转向正规排列了的角动量算符 (13.48). 我们证明:一个静止的并且其自旋沿 z 方向的正电子态,即

$$\Psi_{1\text{正电子}} = d^\dagger(p,s)|0\rangle \tag{13.62}$$

其中 $p=(m,0,0,0)$ 以及 $s=(0,0,0,+1)$ 是

$$J_z = \int :\phi^\dagger \left[\left(\boldsymbol{r}\times\frac{1}{i}\boldsymbol{\nabla}\right)_z + \frac{1}{2}\sigma_z\right]\phi: d^3x$$

的本征态,其本征值为 $+\frac{1}{2}$,因此它确实代表沿 z 轴自旋为 $+\frac{1}{2}$ 的一个粒子态. 我们有

$$J_z\Psi_{1\text{正电子}} = [J_z, d^\dagger(p,s)]|0\rangle$$

这里我们用了 $J_z|0\rangle = 0$ 并计算对易子

$$J_z\Psi_{1\text{正电子}} = -\int d^3x\ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}e^{-ip\cdot x}v^\dagger(p,s)$$
$$\times\left[\left(\boldsymbol{r}\times\frac{1}{i}\boldsymbol{\nabla}\right)_z + \frac{1}{2}\sigma_z\right]\phi(x)|0\rangle$$

因为轨道角动量算符 $L_z = -i(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\nabla})_z$ 是厄米的,我们可以把它作用在左边,对一个静止的粒子这时 $L_z\to 0$[1]. 于是,由于在静止系中对我们选择的 (13.62) 的 s [见 (5.7)],

$$v(p,s) = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

我们有

$$v^\dagger(p,s)\sigma_z = -v^\dagger(p,s)$$

以及

1) 为严格地论证这部分积分,用波包代替平面波较好.

$$J_z\Psi_{1正电子} = +\frac{1}{2}\int d^3x\,\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\,e^{-ip\cdot x}\sqrt{\frac{m}{E_p}}\,v^\dagger(p,s)\phi(x)|0\rangle$$
$$= 1/2d^\dagger(p,s)|0\rangle = +1/2\Psi_{1正电子}$$

于是，引入了空穴理论的 Dirac 场的量子表述形式导致了所要求的结果，即产生的正电子的自旋与消失的负能量电子的自旋相反.

13.5 相对论协变性

通过验证反对易关系 (13.53)和 (13.54) 导致 Heisenberg 方程 (11.70) 和 (11.73):

$$i[P^\mu,\phi(x)] = \frac{\partial\phi(x)}{\partial x_\mu}$$
$$i[M^{\mu\nu},\phi(x)] = x^\mu\frac{\partial\phi(x)}{\partial x_\nu} - x^\nu\frac{\partial\phi(x)}{\partial x_\mu}$$
$$+\frac{1}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\phi(x) \qquad (13.63)$$

就可以确定 Dirac 场量子理论的平移不变性及 Lorentz 不变性. 用(13.46)的 P^μ 和(13.47)的 $M^{\mu\nu}$ 可以直接证明(13.63)，这留给读者作为练习.

等时反对易关系可以推广到两个不同时间的自由 Dirac 场，因为我们已有显示解 (13.50) 并且可以写成协变形式. 对于不等时，回到 (13.53) 就有

$$\{\phi_\alpha(x,t),\phi^\dagger_\beta(x',t')\} = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}\{[(\not p + m)\gamma^0]_{\alpha\beta}e^{-ip\cdot(x-x')}$$
$$-[(m-\not p)\gamma^0]_{\alpha\beta}e^{ip\cdot(x-x')}\}$$
$$= ((i\not\nabla_x + m)\gamma^0)_{\alpha\beta}i\Delta(x-x')$$

其中 $\Delta(x-x')$ 是最先在 (12.37) 中遇到过的不变奇异函数.

上式乘以 γ^0 给出

$$\{\psi_\alpha(x),\bar{\psi}_\beta(x')\} = i(i\not{\partial}_x + m)_{\alpha\beta}\Delta(x-x')$$
$$\equiv -iS_{\alpha\beta}(x-x') \tag{13.64}$$

类似地，从 (13.54) 我们得到

$$\{\psi_\alpha(x),\psi_\beta(x')\} = \{\bar{\psi}_\alpha(x),\bar{\psi}_\beta(x')\} = 0 \tag{13.65}$$

我们可以运用 (11.67)，即 Lorentz 变换，来验证这些关系的协变性

$$U(a,b)\psi(x)U(a,b)^{-1} = S^{-1}(a)\psi(ax+b)$$

这里，对于旋量场，S 矩阵满足

$$S^{-1}\gamma^\mu S = a^\mu_\nu\gamma^\nu$$

例如，(13.64) 的右端不是算符，当我们用幺正算符作相似变换 $U(a,b)\cdots U^{-1}(a,b)$ 时它不改变，这里的幺正算符使态作 Lorentz 变换．在左端我们得

$$U(a,b)\{\psi_\alpha(x),\bar{\psi}_\beta(x')\}U^{-1}(a,b)$$
$$= S^{-1}_{\alpha\tau}(a)\{\psi_\tau(ax+b),\bar{\psi}_\lambda(ax'+b)\}S_{\lambda\beta}(a)$$
$$= S^{-1}_{\alpha\tau}(a)(-\not{\partial}_{ax} + im)_{\tau\lambda}S_{\lambda\beta}(a)\Delta(ax-ax')$$
$$= (-\not{\partial}_x + im)_{\alpha\beta}\Delta(x-x')$$

因为 $\Delta(x-x')$ 是坐标间隔的不变函数，并且如第二章已算过的 $S^{-1}(a)\not{\partial}_{ax}S(a) = \not{\partial}_x$．这就验证了 (13.64) 的协变性，因为两端在 Lorentz 变换下作相同的变换．对 (13.65)，这结果马上可得出．

如 (12.41) 中已指出的，对于类空间隔，$(x-y)^2 < 0$，$\Delta(x-y)$ 并因此 $S(x-y)$ 皆为零．由此得出，虽然场本身不对易，在一个点构造的双线性形式之间对于坐标的类空间隔是相互对易的：

$$[\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(x),\bar{\psi}_\lambda(x')\psi_\tau(x')]$$
$$= \bar{\psi}_\alpha(x)\{\psi_\beta(x),\bar{\psi}_\lambda(x')\}\psi_\tau(x')$$
$$- \{\bar{\psi}_\alpha(x),\bar{\psi}_\lambda(x')\}\psi_\beta(x)\psi_\tau(x')$$

$$+\bar{\psi}_\lambda(x')\bar{\psi}_\alpha(x)\{\psi_\beta(x),\psi_\tau(x')\}$$
$$-\bar{\psi}_\lambda(x')\{\bar{\psi}_\alpha(x),\psi_\tau(x')\}\psi_\beta(x)$$
$$=0 \quad \text{对于}\ (x-x')^2<0 \tag{13.66}$$

由于我们赋予物理意义——诸如荷密度或动量密度——的振幅都是由厄米的双线性形式构成并且满足(13.66),和 Klein-Gordon 场一样，Dirac 理论满足我们的微观因果性的直观要求.

13.6 Feynman 传播子

在结束自由 Dirac 场的讨论时,我们来构造单粒子 Green 函数,它相应于正电子理论的 Feynman 传播子. 在 $x=(\boldsymbol{x},t)$ 点产生一个电子的振幅为

$$\Psi_\alpha(x)=\phi_\alpha^\dagger(x)|0\rangle$$

其中下标 $\alpha=1,2,3,4$ 标明特定的旋量分量. 于是对于这个电子传播到 $x'(t'>t)$ 并在该点被消灭的振幅的 β, α 旋量分量为

$$\langle 0|\psi_\beta(x')\phi_\alpha^\dagger(x)|0\rangle\theta(t'-t) \tag{13.67}$$

按照第六章的考虑，当 $t'<t$ 时，Feynman 传播子不为零而且它描述在 x' 点产生的正能量正电子顺时间传播到 x 点被消灭的传播过程. 和 Klein-Gordon 场的情形一样,在 (13.67) 中交换算符的位置就可以做到这一点. 一个正能量的正电子在 x' 点产生而在 x 点湮灭的振幅为

$$\langle 0|\phi_\alpha^\dagger(x)\psi_\beta(x')|0\rangle\theta(t-t') \tag{13.68}$$

两个振幅 (13.67) 和 (13.68) 都在 x' 点增加一个单位的电荷并在 x 点减少一个单位的电荷;它们的差形成一个 Green 函数. 定义 $S_F(x',x)$ 如下

$$(S_F(x',x)\gamma^0)_{\beta\alpha}=-i\langle 0|\psi_\beta(x')\phi_\alpha^\dagger(x)|0\rangle\theta'(t'-t)$$
$$+i\langle 0|\Psi_\alpha^\dagger(x)\psi_\beta(x')|0\rangle\theta(t-t') \tag{13.69}$$

我们得到

$$(i\not\nabla_{x'} - m)_{\lambda\beta}(S_F(x',x)\gamma^0)_{\beta\alpha}$$
$$= \gamma^0_{\lambda\beta}\langle 0|\{\psi_\beta(x'),\psi^\dagger_\alpha(x)\}|0\rangle\delta(t'-t)$$
$$= \gamma^0_{\lambda\alpha}\delta^4(x'-x)$$

或

$$(i\not\nabla_{x'} - m)S_F(x'-x) = \delta^4(x'-x) \qquad (13.70)$$

$S_F(x'-x)$ 恒同于上册正电子理论中所定义并广泛运用过的 Feynman 传播子. (13.69) 的计算给出对波函数同样的和,与 (6.48) 中自由 Feynman 传播子的一样.

在场论形式中，考虑正能量的电子和正电子总是顺着时间传播,我们得到了 Feynman Green 函数. 电子和正电子在(13.69)中对称地出现,两项之间相对的负号是出于在(13.70)中构成反对易子的需要. 在第六章所发展的正电子理论中，我们沿着一个荷电粒子的路径看，顺着时间运动的作为正能量电子，反向的为负能电子. 顺着时间运动的正能量正电子与反向运动的负能量电子恒同,这已在第五章中给出.

如早先的传播子一样，Feynman 传播子(13.69)在场论计算中起着核心作用. 我们可以通过 (12.72) 中对 Klein-Gordon 场所引入的编时乘积来更紧凑地表达 Feynman 传播子. 为了提供 (13.69) 中的负号,我们修改一下符号 T，使它对于用基本的反对易子量子化的一对场的每一次交换给出一个负号. 于是对于两个 Fermi-Dirac 场 $a(x)$和 $b(x')$

$$T(a(x)b(x')) = a(x)b(x')\theta(t-t')$$
$$- b(x')a(x)\theta(t'-t) = -T(b(x')a(x)) \qquad (13.71)$$

Feynman 传播子为

$$S_F(x',x)_{\beta\alpha} = -i\langle 0|T(\psi_\beta(x')\bar{\psi}_\alpha(x))|0\rangle \quad (13.72)$$

问　题

1.当存在两体相互作用势时，用 n-粒子量子力学和场论两种形式写出哈氏量.

2.证明 $\mathfrak{M}^{\mu\nu\lambda}$ 的散度为零 $\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\mathfrak{M}^{\mu\nu\lambda}=0$，并从而证明

$$M^{\nu\lambda}=\int d^3x\mathfrak{M}^{0\nu\lambda}$$

是与时间无关的常数.

3.验证 (13.54) 和 (13.56)

4.证明 (13.63)，并在 p 空间得出该结果.

第十四章　电磁场的量子化

14.1 引言

由于电磁场是经典可观测量，它应该先于其它场按正则方法量子化．具有讽刺意味的是，我们将要考虑的这个场竟是最难量子化的．实际上，由 Gupta 和 Bleuler[1] 所发展的这个场量子化的最普遍的样式之一就放弃了迄今我们所重视的正定几率的概念．但是，电磁场量子化的正则方法是可能的．事实上在 1929 年就有了应用于 Maxwell 场的最初的方法[2]，但它有不是明显协变的缺点．二十年后协变计算的近代方法促进产生了 Gupta-Bleuler 方法，它提供了一个协变的量子化方法，虽然是以牺牲令人信服的物理诠释为代价．

这里我们将追随着正则量子化的历史发展．Gupta-Bleuler 方法在许多教科书中都有讨论．其中包括 Schweber, Jauch 和 Rohrlich, Bogoliubov 和 Shirkov[3].

量子化的困难根源在于用了比独立自由度数目更多的变量．我们希望通过四分量的矢势 A_μ 来描写电磁场．虽然由

---

1) S. N. Gupta, *Proc. Phys. Soc.* (*London*), A **63**, 681(1950); K. Bleuler, *Helv. Phys. Acta*, **23**, 567 (1950).

2) 参看 E. Fermi, *Rev. Mod. Phys.*, **4**, 87 (1932).

3) S. Schweber, "*An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*", *Harper & Row, Publishers, Incorporated, New York* 1961. J. M. Jauch & F. Rohrlich, "*The Theory of Photons and Electrons*" *Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass.*, 1955. N. N. Bogoliubov *and* D. V. Shirkov, "*Introduction to the Theory of Quantized Fields*", *Interscience Publishers, Inc., New York*, 1959 (有中译本).

$$F_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}-\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \tag{14.1}$$

所定义的场强有着直接的物理意义，在上册的计算中我们已经看到，自然地出现在相互作用项和跃迁振幅中的是势 A_μ. 但是，A_μ 的四个分量不能都当作独立变量. 因此，正则量子化方法要遇到某些困难. 在构造 Maxwell 场的经典正则表述时这些困难必定也会被碰到.

换个说法，自由电磁场分解成平面波时只有横波，即其极化矢量类空并与波矢量正交. 这个横向条件是对矢势取向的一个限制. 只有矢势的两个横向分量需要考虑成动力学变量并应该进行量子化. 另一方面，对应于一个给定的波矢量并不存在唯一的不变的方法来选择两个独立的横向极化矢量，因为总存在着那样的一组特殊的 Lorentz 坐标系，其中每一个极化矢量的时间分量为零. 正是这里开始了明显的 Lorentz 协变性的困难. 在详细讨论以后，这点就会十分清楚.

在建立表述形式时，我们将放弃**明显的** Lorentz 协变性，而作出一个关于光子极化的特定选择. 但是，从 Lorentz 协变的 Maxwell 方程出发，当事实搞清楚后，我们最后将回到在第七、八章基于较直观的论证而导出的同样的协变计算规则. 这些规则在所有 Lorentz 系中导致同样的结果.

14.2 量子化

电磁场强 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的分量构成一个反对称的二阶张量，用 $F^{\mu\nu}$ 表示，其分量为

$$F^{\mu\nu}=\begin{array}{c}\\ \mu\downarrow\end{array}\overset{\overset{\nu}{\longrightarrow}}{\begin{bmatrix}0 & E_x & E_y & E_z\\ -E_x & 0 & B_z & -B_y\\ -E_y & -B_z & 0 & B_x\\ -E_z & B_y & -B_x & 0\end{bmatrix}} \tag{14.2}$$

由(14.1)给出的 $F^{\mu\nu}(x)$ 与矢势 $A^{\mu}(x)=(\Phi,\boldsymbol{A})$ 的关系为

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi-\dot{\boldsymbol{A}}\qquad \boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{14.3}$$

它们给出两个 Maxwell 方程

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dot{\boldsymbol{B}}\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{14.4}$$

其它两个 Maxwell 方程在没有荷和流的源时表示为

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}}=0$$

或

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0\qquad \nabla\times\boldsymbol{B}=\dot{\boldsymbol{E}} \tag{14.5}$$

而且,所有场分量满足波动方程

$$\Box F_{\mu\nu}(x)=0 \tag{14.6}$$

对任何一个给定的场强 $F^{\mu\nu}(x)$ 存在着许多势,它们相互之间差一个规范变换

$$\tilde{A}_{\mu}(x)=A_{\mu}(x)+\frac{\partial\Lambda(x)}{\partial x^{\mu}} \tag{14.7}$$

其中 $\Lambda(x)$ 可以是 $\boldsymbol{x}$ 和 t 的任意函数. 方程(14.7)表明了矢势选择中的规范自由度; 如果 $A_{\mu}(x)$ 满足(14.1),则 $\tilde{A}_{\mu}(x)$ 亦然. 目前我们暂不考虑规范的选取.

为了用哈密顿原理从拉氏量导出(14.5). 我们乘以在 t_1 和 t_2 处为零的无穷小变分 $\delta A_{\mu}(x)$,并对时间间隔 (t_1,t_2) 内的所有时空进行积分

$$\begin{aligned}0&=\int_{t_1}^{t_2}d^4x\,\frac{\partial F^{\mu\nu}(x)}{\partial x^{\nu}}\delta A_{\mu}(x)=-\int_{t_1}^{t_2}d^4x\,F^{\mu\nu}\delta\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}}\\&=-\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}d^4x\,F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu}=-\frac{1}{4}\delta\int_{t_1}^{t_2}d^4x\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\end{aligned} \tag{14.8}$$

于是自由 Maxwell 场一个恰当的拉氏量密度为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}&=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}}\right)\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}}\\&=\frac{1}{2}(E^2-B^2)\end{aligned} \tag{14.9}$$

方程 (14.8) 表明，用这个 $\mathscr{L}$，如果 $A^\mu(x)$ 的四个分量中的每一个都处理成独立的动力学自由度，哈密顿原理就给出场方程 (14.5).

现在由 $\mathscr{L}$ 用标准的办法推出共轭动量

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_0} = 0 \quad \pi^k = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_k} = -\dot{A}^k - \frac{\partial A_0}{\partial x^k} = E^k \tag{14.10}$$

这给出哈氏量密度

$$\begin{aligned}\mathscr{H} &= \sum_{k=1}^{3} \pi^k \dot{A}_k - \mathscr{L} \\ &= 1/2(E^2 + B^2) + \boldsymbol{E} \cdot \nabla \Phi \end{aligned} \tag{14.11}$$

哈氏量为

$$H = \int d^3x \mathscr{H} = 1/2 \int d^3x (E^2 + B^2) \tag{14.12}$$

其中去掉最后一项用了分部积分，还用到了 Maxwell 方程

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$$

Maxwell 场的量子化是通过把 $A^\mu(x)$ 处理成算符并且加上 A^μ 和正则动量 π^k 之间的对易关系而进行的. 我们遵循正则方法，从等于零的等时对易子出发

$$\begin{aligned}&[A^\mu(\boldsymbol{x},t), A^\nu(\boldsymbol{x}',t)] = 0 \\ &[\pi^k(\boldsymbol{x},t), \pi^j(\boldsymbol{x}',t)] = 0 \\ &[\pi^k(\boldsymbol{x},t), A^0(\boldsymbol{x}',t)] = 0 \end{aligned} \tag{14.13}$$

这个量子化方法以牺牲显示的协变性为代价而剔出标势 A_0. 因为与 $A^0(x)$ 共轭的动量 $\pi^0(x)$ 为零，$A^0(x)$ 与所有算符对易，它因此可以取成一个纯粹的数 (c 数) 而不是一个算符，这与空间分量 $A^k(x)$ 不同. 正是在这一点上我们牺牲了显示的协变性并且继续采用量子化方法的正则形式. 作这个选择是由于我们确信，我们的出发点——Maxwell 理论是 Lorentz

协变的. 虽然在中途我们会遇到许多既不是 Lorentz 协变也不是规范不变的表达式,但我们最终将发现,物理结果,即跃迁振幅 (S 矩阵元)是 Lorentz 协变的并且与规范无关.

势 $A_i(\boldsymbol{x}',t)$ 与共轭动量 $\pi^k(\boldsymbol{x},t)$ 间的等时对易子可以由正则方法导出[1)]

$$[\pi^i(\boldsymbol{x},t),A_j(\boldsymbol{x}',t)] = -[E^i(\boldsymbol{x},t),A^j(\boldsymbol{x}',t)]$$
$$= -i\delta_{ij}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{14.14}$$

但是,我们现在必须离开直接的正则方法,因为 (14.14) 与 Maxwell 方程不相容. 高斯定律

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$$

不含时间导数,它是对电场的一个约束. 因此,(14.14) 左端对 $\boldsymbol{x}$ 的散度为零. 但是,其右端的 δ 函数对 $\boldsymbol{x}$ 的散度却不为零. 转到动量空间,我们看到

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\delta_{ij}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = i\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}k_j \tag{14.15}$$

为去掉 $\delta_{ij}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$ 的散度,我们修改一下其动量空间的展开式,加上一个比例于 k_j 的项,于是这个项必须比例于 k_ik_j,这是除 δ_{ij} 外我们所能支配的唯一的另一个张量. k_ik_j 的系数由散度为零的这一条件所唯一决定. 这样作修正

$$\delta_{ij}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \to \delta^{tr}_{ij}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$
$$\equiv \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{\boldsymbol{k}^2}\right) \tag{14.16}$$

我们就得到无散度的或横向的 "δ 函数". 于是对易子条件 (14.14) 换成

$$[\pi^i(\boldsymbol{x},t),A^j(\boldsymbol{x}',t)] = +i\delta^{tr}_{ij}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{14.17}$$

注意,这要求 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ 和所有的算符对易,因为 (14.17) 的右端

---

1) 如在 (14.10) 和 (14.11) 中定义的,π^i 共轭于 $A_i = -A^i$.

对 $\boldsymbol{x}'$ 的散度为零. $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ 是一个 c 数这一点由 $\boldsymbol{A}$ 和 Φ 表示的 $\boldsymbol{E}$ 的定义以及 Gauss 定律

$$0 = \nabla \cdot \boldsymbol{E} = -\nabla^2 \Phi - \nabla \cdot \dot{\boldsymbol{A}} \qquad (14.18)$$

得出. 因为已知 Φ 是一个 c 数,除开可能的零频模外, $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ 也必须是 c 数.

于是 $\boldsymbol{A}$ 的纵向部份(在 Fourier 空间平行于波矢量的 $\boldsymbol{A}$ 的分量)和标势确实不是动力学自由度. 事实上,通过适当地选择规范, $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ 和 Φ 都可取为零. 我们分两步作这个规范变换. 先作变换

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \int_0^t \Phi(\boldsymbol{x}, t')\, dt' \qquad (14.19)$$

它去掉标势.

为去掉纵向势,我们找一个 $\Lambda(x)$ 使得

$$0 = \nabla \cdot \boldsymbol{A}'' = \nabla \cdot \boldsymbol{A}' + \nabla^2 \Lambda(x)$$

于是选择

$$\Lambda(x) = \int \frac{d^3x'}{4\pi |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \nabla' \cdot \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{x}', t)$$

就可去掉纵向势. 并且,作为 (14.18) 以及 Φ' 为零的后果,有

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial t} = 0 \text{ 和 } \Phi'' = \Phi' = 0$$

规范:

$$\Phi = 0 \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \qquad (14.20)$$

称为辐射规范;此后, 我们就在此规范中工作,虽然我们将失去显示的 Lorentz 协变性和规范协变性, 但其优点则是在这表述形式中仅只出现幅射场的两个横向自由度.

14.3 量子化方法的协变性

在承认这个修正了的量子化方法是满意的之前, 还必须验证一下具有对易关系 (14.13) 和 (14.17) 的理论在坐标系

平移和空间旋转下不变. Lorentz 变换的唯一效果应该是规范的改变.

通过验证由 Noether 定理 (11.49) 给出的 P_μ

$$P^0 = H = \frac{1}{2}\int d^3x : E^2 + B^2 : = \frac{1}{2}\int d^3x : \dot{A}^2 + (\nabla \times \boldsymbol{A})^2 :$$

$$\boldsymbol{P} = \int d^3x : \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} : = -\int d^3x \sum_{i=1}^{3} : \dot{A}_i \nabla A_i : \quad (14.21)$$

满足 (11.70) 可以确信理论的平移不变性. (14.21) 中的两点符号如在 Klein-Gordon 理论中一样表示正规排列. 类似地, 为验证空间旋转不变性, 我们验证 (11.73) 的空间分量 M^{ij}, $i,j = 1,2,3$, 它们由 (11.57) 给出

$$M^{ij} = \int d^3x : \sum_{r=1}^{3} \dot{A}^r \left(x^i \frac{\partial}{\partial x_j} - x^j \frac{\partial}{\partial x_i} \right) A^r - (\dot{A}^i A^j - \dot{A}^j A^i) : \quad (14.22)$$

并且由 (11.54)

$$\Sigma^{ij}_{rs} = g^{ir} g^j_s - g^i_s g^{jr} \quad (14.23)$$

最后, Lorentz 系统间相对运动时的变换由

$$M^{0k} = \int d^3x : \left[x^0 \sum_{r=1}^{3} \dot{A}^r \frac{\partial A^r}{\partial x_k} - \frac{x^k}{2} (\dot{A}^2 + (\nabla \times \boldsymbol{A})^2) \right] : \quad (14.24)$$

生成. 实际上, 在 Lorentz 变换下 A_μ 并不是像一个四矢量那样变换而是还要加一个附加的规范项[1]. 依照 (11.72) 和 (11.73), 在由 M^{0k} 生成的一个无穷小 Lorentz 变换下得到[2]

$$U(\varepsilon) A^\mu(x) U^{-1}(\varepsilon) = A^\mu(x') - \varepsilon^{\mu\nu} A_\nu(x') + \frac{\partial \Lambda(x', \varepsilon)}{\partial x'_\mu} \quad (14.25)$$

1) 尽管如此, 我们继续把由 (14.24) 生成的变换称为 Lorentz 变换.

2) 见问题 2.

其中 $\Lambda(x',\epsilon)$ 是一个算符规范函数。显然这样一个规范项是必须的，因为如果

$$\Phi(x) = A_0(x) = 0$$

则对任何一个么正变换 U 有

$$U\Phi(x)U^{-1} = 0 \tag{14.26}$$

(14.25) 的结构保证了规范不变的 Maxwell 方程是 Lorentz 协变的。仅有的附加要求是

$$\nabla' \cdot \boldsymbol{A}'(x') = 0 \tag{14.27}$$

以及等时对易关系 (14.13) 和 (14.17) 在变换后的坐标系中仍然正确。这些关系可以明显地加以验证。于是两个作相对运动的观察者 O 和 O' 在各自坐标系中构造的辐射规范下的量子电动力学由 O 和 O' 的态的么正变换所联系。

验证 (14.21) 至 (14.27) 各式以及等时对易关系协变性的证明都留给读者作为练习。

14.4 动量展开

如同在 Klein-Gordon 理论中一样，将势按平面波展开并引入对易关系 (14.13) 和 (14.17) 导致把展开系数诠释成产生和消灭算符。Maxwell 理论的新的特点在于这些量子带有单位自旋。

在辐射规范中 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t)$ 是横向的并有如下平面波展开式：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) = \int d^3k \sum_{\lambda=1}^{2} \boldsymbol{\epsilon}(k,\lambda) A(\boldsymbol{k},\lambda,t) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{14.28}$$

两个单位矢量 $\boldsymbol{\epsilon}(k,\lambda)$ 对每个 $\boldsymbol{k}$ 和对 $\lambda = 1$ 2 都与 $\boldsymbol{k}$ 正交

$$\boldsymbol{\epsilon}(k,\lambda) \cdot \boldsymbol{k} = 0 \tag{14.29}$$

使得 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$。对每一个 $\boldsymbol{k}$，也可以方便地选择得使它们相互正交，

$$\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda')=\delta_{\lambda\lambda'} \tag{14.30}$$

于是$\boldsymbol{\varepsilon}(k,1)$，$\boldsymbol{\varepsilon}(k,2)$和$\hat{\boldsymbol{k}}=\boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|$构成一个三维正交基组，如图 14.1 所示．我们还采用习惯的约定，如图上所标出的，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}(-k,1)&=-\boldsymbol{\varepsilon}(k,1)\\ \boldsymbol{\varepsilon}(-k,2)&=+\boldsymbol{\varepsilon}(k,2)\end{aligned} \tag{14.31}$$

由 (14.30)，这意味着

$$\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(-k,\lambda')=(-)^{\lambda}\delta_{\lambda\lambda'} \tag{14.32}$$

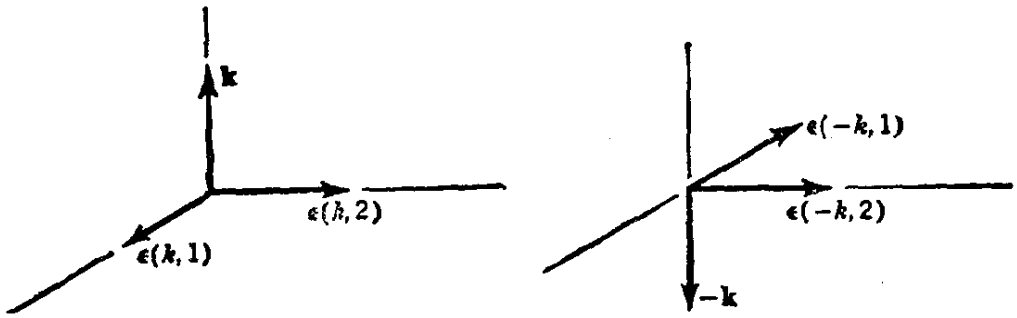


图 14.1　光子动量为 k 和 $-k$ 的极化单位矢量

由 Maxwell 方程，在辐射规范中 $\boldsymbol{A}(x)$ 也满足波动方程

$$\Box\boldsymbol{A}=0$$

并且我们可以作展开

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)=&\int\frac{d^3k}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}}\sum_{\lambda=1}^{2}\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)\\ &\times[a(k,\lambda)e^{-ik\cdot x}+a^{\dagger}(k,\lambda)e^{ik\cdot x}]\end{aligned} \tag{14.33}$$

其中 $k_0=\omega=|\boldsymbol{k}|$ 和 $k^2=k_\mu k^\mu=0$

和 Klein-Gordon 理论中用过的方式一样，我们可以把 (14.33) 翻过来表示 $a(k,\lambda)$，用 (14.30) 和 (14.32) 先得到

$$\begin{aligned}&\omega\int d^3x e^{ik\cdot x}\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)\cdot\boldsymbol{A}(x)\\ &=\sqrt{\frac{(2\pi)^3\omega}{2}}[a(k,\lambda)+(-)^{\lambda}a^{\dagger}(-k,\lambda)e^{2i\omega t}]\end{aligned}$$

$$i\int d^3x e^{ik\cdot x}\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)\cdot\boldsymbol{A}(x)$$

$$=\sqrt{\frac{(2\pi)^3\omega}{2}}\left[a(k,\lambda)-(-)^{\lambda}a^{\dagger}(-k,\lambda)e^{2i\omega t}\right]$$

然后

$$a(k,\lambda)=\int\frac{d^3x e^{ik\cdot x}}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}}\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)\cdot[\omega\boldsymbol{A}(x)+i\dot{\boldsymbol{A}}(x)]$$

$$=i\int\frac{d^3x e^{ik\cdot x}}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}}\overleftrightarrow{\partial}_0\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)\cdot\boldsymbol{A}(x)$$

$$a^{\dagger}(k,\lambda)=-i\int\frac{d^3x e^{-ik\cdot x}}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}}\overleftrightarrow{\partial}_0\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)\cdot\boldsymbol{A}(x)$$

(14.34)

其次由 (14.13) 和 (14.17) 计算 $a(k,\lambda)$ 和 $a^{\dagger}(k,\lambda)$ 的对易关系，我们得到，例如，

$$[a(k,\lambda),a^{\dagger}(k',\lambda')]=\int\frac{d^3x d^3x' e^{i(k\cdot x-k'\cdot x')}}{2(2\pi)^3\sqrt{\omega\omega'}}(\omega'+\omega)$$

$$\times\sum_{i,j=1,2,3}e_i(k,\lambda)e_j(k',\lambda')\delta_{ij}^{tr}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

借助于 (14.16) 和极化矢量的正交关系 (14.30) 与 (14.32)，积分后就得到

$$[a(k,\lambda),a^{\dagger}(k',\lambda')]=\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\delta_{\lambda\lambda'}\qquad(14.35)$$

同样还可以得到

$$[a(k,\lambda),a(k',\lambda')]$$

$$=[a^{\dagger}(k,\lambda),a^{\dagger}(k',\lambda')]=0\qquad(14.36)$$

于是，矢势的两个横向动力学独立分量的展开系数用与 Klein-Gordon 理论中一样的对易关系量子化．哈氏量 (14.12) 可以借助 (14.3)，(14.21) 和 (14.33) 在动量表象中写成

$$H = \int \frac{d^3x}{2} :(E^2 + B^2):$$

$$= \int d^3k\omega \sum_{\lambda=1}^{2} a^\dagger(k,\lambda)a(k,\lambda) \qquad (14.37)$$

类似地，总动量是

$$\boldsymbol{P} = \int d^3x :\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}:$$

$$= \int d^3k\, \boldsymbol{k} \sum_{\lambda=1}^{2} a^\dagger(k,\lambda)a(k,\lambda) \qquad (14.38)$$

不难看出，可以把 $a^\dagger(k,\lambda)$ 和 $a(k,\lambda)$ 诠释为能量 ω 和动量 $\boldsymbol{k}$ 的产生算符和消灭算符.

真空态 Φ_0，即最低能态，是 H 和 $\boldsymbol{P}$ 的本征值为零的本征态并满足

$$a(k,\lambda)\Phi_0 = 0 \qquad (14.39)$$

和 Klein-Gordon 理论的 (12.17) 完全类似. 如果我们构成态

$$\Phi_{1,k\lambda} \equiv a^\dagger(k,\lambda)\Phi_0 \equiv a^\dagger(k,\lambda)|0\rangle \qquad (14.40)$$

并计算

$$P^\mu\Phi_{1,k\lambda} = \int d^3k' k'^\mu \sum_{\lambda'=1}^{2} a^\dagger(k',k')a(k',\lambda')a^\dagger(k,\lambda)|0\rangle$$

$$= k^\mu\Phi_{1,k\lambda} \qquad (14.41)$$

则把 $a^\dagger(k,\lambda)$ 解释为四动量是 k_μ 且 $k^2 = k_\mu k^\mu = 0$ 的光子的产生算符就是很清楚的了.

14.5 光子的自旋

光子在几个方面不同于 Klein-Gordon 量子. 由于它们满足 Einstein 条件 $k_\mu k^\mu = 0$，它们的静止质量为零. 此外，矢势 $\boldsymbol{A}(x)$ 是实的并在量子化后成为厄米算符，所以光子不带电荷而类似于量子化实的 Klein-Gordon 理论时出现的中性介子.

一个新的特点是极化矢量 $\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)$，它标志每一个光子并与自旋角动量相联系．特别是，$\boldsymbol{A}$ 的矢量性质导致光子具有单位自旋，而横向性的约束则去掉一个自由度．自旋角动量沿着传播方向的投影不能是零而只能是 ± 1．为证明这一点，我们用角动量算符 (14.22) 并计算单光子态的角动量的第三分量

$$M^{12}\Phi_{1,k\lambda} = [M^{12}, a^\dagger(k,\lambda)]|0\rangle \tag{14.42}$$

它的波矢量沿第三轴，即 $k\cdot x = \omega(t - x^3)$．$M^{12}$ 包含有两项，第一项可以等同于轨道角动量．它沿着运动方向的投影必须为零，这可直接计算对易子得到验证．只剩下自旋项的贡献，借助于 (14.22) 和 (14.33) 它给出

$$[M^{12}, a^\dagger(k,\lambda)] = \int \frac{d^3x e^{-ik\cdot x}}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}} [\varepsilon^1(k,\lambda)\overleftrightarrow{\partial}_0 A^2(x) - \varepsilon^2(k,\lambda)\overleftrightarrow{\partial}_0 A^1(x)] \tag{14.43}$$

利用 (14.34) 和图 14.1，这正是

$$[M^{12}, a^\dagger(k,\lambda)] = i\varepsilon^1(k,\lambda)a^\dagger(k,2) - i\varepsilon^2(k,\lambda)a^\dagger(k,1) \tag{14.44}$$

作线性组合

$$a_R^\dagger(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}[a^\dagger(k,1) + ia^\dagger(k,2)]$$

$$a_L^\dagger(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}[a^\dagger(k,1) - ia^\dagger(k,2)] \tag{14.45}$$

它们分别代表右旋和左旋的园偏振波，我们得

$$[M^{12}, a_R^\dagger(k)] = +a_R^\dagger(k)$$

$$[M^{12}, a_L^\dagger(k)] = -a_L^\dagger(k) \tag{14.46}$$

它表明右旋极化光子沿着其传播方向有自旋为 1．

14.6 横光子的 Feynman 传播子

为了研究一个横向极化光子态的时空演化，我们构造

Feynman 传播子. 类似于§12.6对 Klein-Gordon 量子的讨论,对横光子我们作一个振幅,它表明光子在时空点 x 产生,极化投影为 μ,然后传播至 x' 点,被湮灭时极化投影为 ν:

$$\langle 0|A_\nu(x')A_\mu(x)|0\rangle\theta(t'-t) \tag{14.47}$$

对 $t>t'$,我们作光子的振幅,它表示在 x' 产生极化投影为 ν 的光子,在 x 湮灭时极化投影为 μ:

$$\langle 0|A_\mu(x)A_\nu(x')|0\rangle\theta(t-t') \tag{14.48}$$

(14.47) 和 (14.48) 之和就定义 Feynman 传播子

$$\begin{aligned} iD_F^{tr}(x',x)_{\nu\mu} &= \langle 0|A_\nu(x')A_\mu(x)|0\rangle\theta(t'-t) \\ &+ \langle 0|A_\mu(x)A_\nu(x')|0\rangle\theta(t-t') \\ &= \langle 0|T(A_\nu(x')A_\mu(x)|0\rangle \end{aligned} \tag{14.49}$$

这里 T 是在 (12.72) 和 (13.71) 中引入的编时算符.

我们把场展成平面波来构造 $D_F^{tr}(x',x)_{\nu\mu}$ 的显示形式

$$\begin{aligned} D_F^{tr}(x',x)_{\nu\mu} = -i\int\frac{d^3k}{2\omega(2\pi)^3}\sum_{\lambda=1,2}\varepsilon_\nu(k,\lambda)\varepsilon_\mu(k,\lambda) \\ \times[\theta(t'-t)e^{-ik\cdot(x'-x)}+\theta(t-t')e^{ik\cdot(x'-x)}] \end{aligned} \tag{14.50}$$

在辐射规范中 $\varepsilon_\nu(k,\lambda)$ 没有时间分量,即

$$\varepsilon^\nu(k,\lambda)=(0,\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda))$$

并且横向性条件仅仅依赖于空间矢量 $\boldsymbol{k}$ 的取向而与频率无关. 在采用这个规范的参照系中,我们可以仿效早先的传播子讨论,把 Feynman 传播子写成四维积分形式

$$D_F^{tr}(x'-x)_{\nu\mu}=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik\cdot(x'-x)}}{k^2+i\varepsilon}\sum_{\lambda=1}^{2}\varepsilon_\nu(k,\lambda)\varepsilon_\mu(k,\lambda) \tag{14.51}$$

这个 Feynman 传播子,我们最先在第六章,随后在第十二章遇到过,在以后的计算中它要经常出现. (14.51) 表明,它不是 Lorentz 协变的,因为 $\varepsilon_\nu(k,\lambda)$ 只在特定的 Lorentz 系中才是只有空间分量. 为了明显地分离出对坐标的依赖关系,我

们在进行量子化的参照系中引入一个类时单位矢量

$$\eta^\mu = (1,0,0,0).$$

对一个给定的 k^μ，引入

$$\hat{k}^\mu = \frac{k^\mu - (k\cdot\eta)\eta^\mu}{\sqrt{(k\cdot\eta)^2 - k^2}} \tag{14.52}$$

它和 $\varepsilon^\mu(k,1)$，$\varepsilon^\mu(k,2)$ 和 η^μ 一道构成一组四个独立正交单位矢量．于是有

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda=1}^{2}\varepsilon_\nu(k,\lambda)\varepsilon_\mu(k,\lambda) &= -g_{\nu\mu} + \eta_\nu\eta_\mu - \hat{k}_\nu\hat{k}_\mu \\ &= -g_{\nu\mu} - \frac{k_\nu k_\mu}{(k\cdot\eta)^2 - k^2} + \frac{(k\cdot\eta)(k_\nu\eta_\mu + \eta_\nu k_\mu)}{(k\cdot\eta)^2 - k^2} \\ &\quad - \frac{k^2\eta_\nu\eta_\mu}{(k\cdot\eta)^2 - k^2}\end{aligned} \tag{14.53}$$

把 (14.53) 代入 (14.51) 得

$$\begin{aligned}D_F^{tr}(x'-x)_{\nu\mu} &= g_{\nu\mu}D_F(x'-x) - \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik\cdot(x'-x)}}{(k^2+i\varepsilon)} \\ &\times\frac{k^2\eta_\nu\eta_\mu - (k\cdot\eta)(k_\nu\eta_\mu + \eta_\nu k_\mu) + k_\nu k_\mu}{(k\cdot\eta)^2 - k^2}\end{aligned} \tag{14.54}$$

在 (14.54) 中第一项

$$g_{\nu\mu}D_F(x'-x) = \lim_{m^2\to 0}(-g_{\nu\mu})\Delta_F(x'-x,m)$$

正是在第七、八、九章中计算电磁相互作用时所广为应用的 Feynman 传播子．$\Delta_F(x'-x,m)$ 是在第九章遇到过的零自旋玻色子的传播子．

$D_{F\nu\mu}^{tr}$ 对 η_μ 的所有依赖关系都在 (14.54) 的第二项中．在场论的物理振幅计算中，如后面几章将要表明的那样，传播子 $D_F^{tr}(x'-x)_{\nu\mu}$ 总是夹在守恒流之间．这些流是电磁场的源．于是在 (14.54) 中包含 k_μ 或 k_ν 的项由于流守恒而为零，和上面 (7.61) 式以及进一步在讨论真空极化 (8.9) 时所表明的一

样. 在(14.54)中剩下的依赖于 η 的项在 $\eta=(1,0,0,0)$ 的特定坐标系中为

$$-\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik\cdot(x'-x)}}{(k\cdot\eta)-k^2}\eta_\nu\eta_\mu$$
$$=\frac{-g_{\nu 0}g_{\mu 0}\delta(t'-t)}{4\pi|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|} \tag{14.55}$$

它有着熟知的两个荷之间静电库仑相互作用的形式. 在计算位于时空点 x 和 x' 的两个荷之间的总相互作用时，(14.55)将被与纯辐射场同时存在的库仑相互作用所抵消. 于是，有效的传播子就归结为(14.54)中 Lorentz 协变的第一项.

这个规则将在第十七章中对普遍的 S 矩阵元作详细证明. 它在真正需要的地方——在物理散射振幅中——恢复表述形式的显示 Lorentz 协变性和规范不变性. $D_F^{tr}(x'-x)_{\nu\mu}$ 表式中附加的依赖于规范的项只对非观测量有贡献，诸如在第八章中遇到的重整化常数 Z_1 和 Z_2，它们不是规范不变的. $D_{F\nu\mu}^{tr}$ 中依赖于规范的项的出现是为了在正则方法框架内作 Maxwell 场量子化所必须付出的代价. 但是，当我们为与实验比较而计算跃迁几率和截面时，这些令人不愉快的项就全都消失了.

问　　题

1. 计算场强间的对易关系，并验证它们对于类空间隔为零.

答案:

$$[B_i(x'),B_j(x)]=\left[\delta_{ij}\nabla'\cdot\nabla-\frac{\partial}{\partial x_i'}\frac{\partial}{\partial x_j}\right]iD(x'-x)$$

$$[E_i(x'),B_j(x)]=-\frac{\partial}{\partial x_0'}\sum_{k=1}^{3}e_{ijk}\frac{\partial}{\partial x^k}iD(x'-x)$$

$$[E_i(x'),E_j(x)]=\left(\delta_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_0\partial x_0'}-\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x'^j}\right)iD(x'-x)$$

2.验证在 (14.21),(14.22) 和 (14.24) 中建立的能量——动量和角动量算符. 试证明在 (14.25) 中对一个 Lorentz 变换所给出的势的变换并给出 $\Lambda(x',\varepsilon)$ 和 $U(\varepsilon)$ 的显示表式. 通过建立 (14.27) 和等时对易子的协变性完成在辐射规范中进行量子化的 Maxwell 理论协变性的证明. 如果 $\varepsilon_{\mu\nu}=\varepsilon_{0k}$

$$\frac{\partial\Lambda(x',\varepsilon)}{\partial x'_\mu}=-\varepsilon_{0k}\frac{\partial}{\partial x'_\mu}\int\frac{d^3x}{4\pi|x-x'|}\frac{\partial A^k}{\partial x_0}$$

通过明显的计算证明 M_{ij} 和 M_{0k} 与 H 对易.

3.从 Maxwell 拉氏量出发,为了以后的方便加上一个 (非协变的) "光子质量"项 $-\lambda^2\boldsymbol{A}^2(x)$ (λ 很小),只用辅助条件 $A_0\equiv 0$ 来把电磁场量子化. 首先建立哈氏量并由哈密顿方程

$$\frac{\partial H}{\partial\pi^k}=\dot{A}_k\qquad\frac{\partial H}{\partial A_k}=-\dot{\pi}^k$$

证明: 当 $\lambda\to 0$ 时得到 Maxwell 方程,但有一个可能的例外是对 *Gauss* 定律

$$\nabla\cdot\dot{\boldsymbol{E}}=-\nabla\cdot\ddot{\boldsymbol{A}}(x)=\lambda^2\nabla\cdot\boldsymbol{A}(x)$$

的额外零频贡献. 加上正则对易关系,例如

$$i[\pi^k(x,t),A_j(x',t)]=\delta_{kj}\delta^3(x-x')$$

并量子化纵向以及横向模式. 特别地,证明这些量子的色散律是

$$\omega^2=\lambda^2.$$

4.(*a*) 在相距为 a 的两个无穷大平行导电板之间的空间中解 Maxwell 方程. 在此区域内把电磁场量子化,对边界条件给以应有的注意. (b)应用仅依赖于频率的截断,计算单位面积的零点能 E_0,并证明

$$E_0=c_1a+c_2+\frac{\pi\hbar c}{a^3}\frac{B_4}{4!}$$

其中 c_1 和 c_2 是依赖于截断的量并且 $B_4=-\frac{1}{30}$ 是第四 Bernoulli数.

(*c*) 证明(中性的)板之间的力仅只来自最后一项,并计算它的大小. [H. Casimir, *Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., Proc., Ser. B*, 793 (1948); M. Fierz, *Helv. Phys. Acta*, **33**, 855 (1960).]

第十五章　相互作用场

15.1　引言

一个理论如果只包含自由场，那是没有什么物理意义的．只有通过场之间的相互作用才能揭示物理世界的种种性质．这正是本章要讨论的内容．

在建立一般的相互作用时，我们经常要拿电磁场来作类比．而且我们首先要做的就是从二次量子化的观点来讨论带电粒子的电磁相互作用．

对于非电磁相互作用，确定耦合项的结构的最好依据是对各种守恒定律的实验观察．这就是说，理论应保证拉氏量具有某些对称性；特别是，对于每一种连续的对称变换，第十一章中的 Noether 定理自动给出一个守恒量．

15.2　电磁相互作用

在前面的讨论中，我们都是采用点电荷经典相互作用的“最小的”替换

$$p_\mu \to p_\mu - eA_\mu \tag{15.1}$$

以引入电磁耦合．我们可以保持这种经典的对应关系，将(15.1)式代入电子与光子场的拉氏密度中去，后者便成为

$$\mathscr{L}(x) = \bar{\psi}(x)(i\not{\partial} - e_0\not{A}(x) - m_0)\psi(x) - 1/4F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{15.2}$$

(15.2)描写电子与光子场在同一个时空点 x 的定域相互作用．由此利用对电子与光子场振幅的独立变分推导出耦合的电子-光子场方程

$$(i\not\partial - m_0)\psi(x) = e_0 \not A \psi(x) \tag{15.3a}$$

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}(x)}{\partial x^\nu} = e_0 \bar{\psi}(x)\gamma^\mu \psi(x) \tag{15.3b}$$

第一个方程形式上和过去讨论过的单粒子理论的一样. 但是现在,场 $A_\mu(x)$ 不是给定的外场,而是包括在我们的动力学系统之中,它通过方程 (15.3b) 和电子流相耦合. 反过来,电子流的运动则受到场 A_μ 的影响,由解运动方程 (15.3a) 确定.

由 (15.3) 可见,在讨论两个场的耦合时,我们面临很复杂的非线性问题. 经典的情形已经如此,例如辐射阻尼以及经典电荷在自己的和彼此的场的影响下运动的脱逸 (*runaway*) 解[1]. 这类问题的量子力学讨论必定更不容易.

(15.3) 中的场的耦合,我们在第七和第八章讨论电子-电子散射、Compton 散射以及电子自能的计算时已经遇到过. 对于电子-电子散射,我们计算了两个电荷在彼此的场的影响下的运动;对于 Compton 散射,我们得到辐射场在有电子存在时的修正. 对于自能问题,我们考虑了电子与它自己产生的场 A_μ 的相互作用.

假如我们想计算电子在一个外电磁场以及辐射场作用下的运动时,我们只需把外场 $A_\mu^{ext}(x)$ 的势加入 (15.1). 这导致如下的方程

$$(i\not\partial - m_0)\psi(x) = e_0[\not A(x) + \not A^{ext}(x)]\psi(x)$$

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}(x)}{\partial x^\nu} = e_0 \bar{\psi}(x)\gamma^\mu \psi(x) \tag{15.4}$$

在写耦合场的拉氏量和场方程时,我们给质量 m_0 和 e_0 加上下标,表示它们并非质量和电荷的物理观测值 m 和 e. 确实,在第八章作微扰计算时,m_0 和 e_0 是要改变的. 我们发

1) 例如参考 P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* (London), **A167**, 148 (1938), *and* G. N. Plass, *Rev. Mod. Phys*, **33**, 37 (1961).

现，对质量和电荷所作 e 的最低阶修正都是对数发散的. 这里，我们不准备讨论，如果作精确计算的话，重整化常数 m_0-m 和 z_3^{-1} 是不是也会是无限的. 重要的是认识到，重整化的**必要性**是和重整化常数的大小无关的. 但是，由于微扰计算中遇到的困难，必须特别小心地把发散从可观察物理量的有限量值中毫不含糊地分离出来. 事实上，自 1948 年以来，量子电动力学已取得很大进展，已能和它的发散和平共存，以致物理振幅可以计算到任意所期望的精度，其限制实际上只是由于计算工作量太大而已[1].

为了把公式由经典推广到量子领域，我们得先确定正则动量以给出等时对易关系. 根据经典对应原理而引入拉氏量 (15.2) 的相互作用项

$$\mathscr{L}_{int} = -e_0\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x) \tag{15.5}$$

不包含场的时间微商，所以正则动量和自由场的情形没有什么不一样，当采用第十四章用过的辐射规范或 Coulomb 规范

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0 \tag{15.6}$$

时，它们由 (13.43) 和 (14.10) 给出. 在此规范下，标量势不再等于零；利用 Gauss 定律和 (15.6) 式

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{E}(x) &= -\nabla\cdot\dot{\boldsymbol{A}}(x) - \nabla^2\Phi(x) = -\nabla^2\Phi(x)\\ &= e_0\psi^\dagger(x)\psi(x) \neq 0\end{aligned} \tag{15.7}$$

然而，标量势仍然不是一个独立的动力学变量，而是由该瞬时的电荷分布 $\rho(\boldsymbol{x},t) = \psi^\dagger(\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x},t)$ 决定

$$\begin{aligned}A_0(\boldsymbol{x},t) = \Phi(\boldsymbol{x},t) &= e_0\int\frac{d^3x'\psi^\dagger(\boldsymbol{x}',t)\psi(\boldsymbol{x}',t')}{4\pi|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|}\\ &= e_0\int\frac{d^3x'\rho(\boldsymbol{x}',t)}{4\pi|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|}\end{aligned} \tag{15.8}$$

---

1) J. Schwinger, *Quantum Electrodynamics*, *Dover Publications, Inc., New York*, 1958.

既然独立变量和自由场理论中的完全一样，我们采用和(13.53),(13.54),(14.13)和(14.17)相同的对易关系：

$$\{\psi_\alpha(\boldsymbol{x},t),\psi_\beta^\dagger(\boldsymbol{x}'t)\}=\delta_{\alpha\beta}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

$$\{\psi_\alpha(\boldsymbol{x},t),\psi_\beta(\boldsymbol{x}',t)\}=\{\psi_\alpha^\dagger(\boldsymbol{x},t),\psi_\beta^\dagger(\boldsymbol{x}',t)\}=0$$

$$[\dot{A}_i(\boldsymbol{x},t),A_j(\boldsymbol{x}',t)]=-i\delta_{ij}^{tr}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\ i,j=1,2,3$$

$$[A_i(\boldsymbol{x},t),A_j(\boldsymbol{x}',t)]=[\dot{A}_i(\boldsymbol{x},t),\dot{A}_j(\boldsymbol{x}',t)]=0 \tag{15.9}$$

为了补足方程组，我们加上 Dirac 场和 Maxwell 场之间的等于零的等时对易关系：

$$[\psi_\alpha(\boldsymbol{x},t)A_i(\boldsymbol{x}',t)]=0$$

$$[\psi_\alpha(\boldsymbol{x},t),\dot{A}_i(\boldsymbol{x}',t)]=0 \tag{15.10}$$

作如上选择的理由是：ψ_α 和 A_i 都是独立的正则变量。至于标量势 Φ，前面已指出，它不是独立变量，而是通过(15.8)由 ψ 决定，因此满足对易关系式：

$$[\Phi(\boldsymbol{x},t),A_i(\boldsymbol{x}',t)]=[\Phi(\boldsymbol{x},t),\dot{A}_i(\boldsymbol{x}',t)]=0$$

$$[\Phi(\boldsymbol{x},t),\psi_\alpha(\boldsymbol{x}',t)]=-\frac{e_0}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\psi_\alpha(\boldsymbol{x}',t) \tag{15.11}$$

通过采用正则描述方式，重复在自由场讨论中的同样步骤，我们得哈氏密度

$$\mathscr{H}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}}\dot{\psi}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}^k}\dot{A}^k-\mathscr{L} \tag{15.12}$$

它导致

$$\mathscr{H}=\psi^\dagger(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla+\beta m_0)\psi+1/2(E^2+B^2)+\boldsymbol{E}\cdot\nabla\Phi+e_0\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu \tag{15.13}$$

于是哈氏量为

$$H=\int d^3x\mathscr{H}=\int d^3x\left\{\psi^\dagger(x)\left[\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\frac{1}{i}\nabla-e_0\boldsymbol{A}\right)+\beta m_0\right]\psi(x)+\frac{1}{2}[E^2(x)+B^2(x)]\right\} \tag{15.14}$$

其中已对 $\boldsymbol{E}\cdot\nabla\Phi$ 作分部积分得 $-e_0\psi^\dagger\psi\Phi$，并丢弃了非实质的表面项[1].

初一看，H的形式似乎有些奇怪，它只包含电子流与横矢量势的耦合．电荷之间的静电相互作用到哪里去了？事实上，它隐含在电场能量项 $\frac{1}{2}\int E^2d^3x$ 中.

为表明这一点，我们把 $\boldsymbol{E}$ 分解为纵场和横场两部分

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_l+\boldsymbol{E}_t\quad \boldsymbol{E}_l=-\nabla\Phi\quad \boldsymbol{E}_t\equiv-\dot{\boldsymbol{A}}\tag{15.15}$$

于是电磁场总能量也分成两部分

$$\begin{aligned}1/2\int d^3x(E^2+B^2)&=1/2\int d^3xE_l^2\\&+1/2\int d^3x(E_t^2+B^2)\end{aligned}\tag{15.16}$$

其中交叉项 $\boldsymbol{E}_l\cdot\boldsymbol{E}_t$ 因分部积分而等于零．(15.16)式右边第一项是 Coulomb 场的总能量．利用 Gauss 定律以电荷来表

---

1) 建立电磁场和荷电 Klein-Gordon 场耦合的量子理论所遇到的问题和本章所讨论的光子-电子场的情形一样，故不再重复．(G. Wentzel, "*Quantum Theory of Fields*", *Interscience Publishers, Inc., New York*, 1949.) 表面项的出现是由于(15.1)的耦合方式引入了带微商的相互作用项．拉氏密度是

$$\begin{aligned}\mathscr{L}&=\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}-ie_0A^\nu\right)\varphi^*\right]\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}+ie_0A_\nu\right)\varphi\right]-m_0^2\varphi^*\varphi-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\\&=\left[\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_\nu}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^\nu}\right)-m_0^2\varphi^*\varphi-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right]\\&+\left[-ie_0A_\nu\times\left(\varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}-\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_\nu}\right)\varphi\right)+e_0^2\varphi^*\varphi A_\nu A^\nu\right]\end{aligned}$$

由于 $\mathscr{L}$ 中的第二项，即相互作用项，包含微商，于是 Klein-Gordon 场的正则动量就变为

$$\pi\equiv\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}}=\dot{\varphi}^*-ie_0A_0\varphi^*$$

$$\pi^*\equiv\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}^*}=\dot{\varphi}+ie_0A_0\varphi$$

示为

$$\frac{1}{2}\int E_l^2 d^3x = \frac{e_0^2}{8\pi}\int d^3x d^3y \frac{\psi^\dagger(\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x},t)\psi^\dagger(\boldsymbol{y},t)\psi(\boldsymbol{y},t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$$

$$= \frac{e_0^2}{8\pi}\int d^3x d^3y \frac{\rho(\boldsymbol{x},t)\rho(\boldsymbol{y},t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$$

(15.16) 中的第二项是和流 $\boldsymbol{j} = \psi^\dagger \boldsymbol{\alpha}\psi$ 耦合的横向辐射场的能量，它具有和自由场能量相同的结构.

15.3 Lorentz 不变性和平移不变性

能量标符 H 经正则方法由 (15.14) 给出. 用同样方法可以得到动量算符的表达式

$$\boldsymbol{P} = \int d^3x(-i\psi^\dagger \nabla\psi + \boldsymbol{E}_t \times \boldsymbol{B}) \qquad (15.17)$$

由于相互作用不含微商，上式和 (13.46) 以及 (14.21) 给出的自由场动量算符之和相符.

Heisenberg 关系式

$$[P_\mu, \psi(x)] = -i\frac{\partial\psi(x)}{\partial x^\mu}$$

$$[P_\mu, A^k(x)] = -i\frac{\partial A^k(x)}{\partial x^\mu} \qquad (15.18)$$

是平移不变理论所必需的，它可以通过对易关系 (15.9)，(15.10) 以及场方程 (15.3) 加以证明. 由此，对易关系和场方程组成一个自洽的方程组，它是我们理论的基础.

为了证明 Lorentz 不变性，我们考虑角动量张量，它由 Noether 定理 (11.56) 和 (11.57) 建立. 其空间分量 $M^{ij}(i, j = 1,2,3)$ 正好是自由粒子角动量张量之和. 因为对易关系也和自由粒子理论的一样，所以关系式 (11.72) 与 (11.73) 对于空间的三维转动是成立的. 相互作用给变换到运动坐标系的 Lorentz 变换的生成元 $M^{0k}(k = 1,2,3)$ 带来附加项. 写

出来就是

$$M^{0k}=P^k t-\int d^3x\left[x^k\mathscr{H}(x)-\frac{i}{2}\bar{\psi}(x)\gamma^k\psi(x)\right] \tag{15.19}$$

式中 $\mathscr{H}$ 是哈氏密度 (15.13). 当 M^{0k} 按 (11.72) 产生一无穷小 Lorentz 变换时，我们再一次发现，电磁势

$$A^\mu(x)=(\Phi(x),\boldsymbol{A}(x))$$

要经受一个规范变换以便在新坐标系中恢复横向规范[1]. 就如在 (14.25) 对自由场那样，这里我们也有

$$U(\varepsilon)A^\mu(x)U^{-1}(\varepsilon)=A^\mu(x')-\varepsilon^{\mu\nu}A_\nu(x')+\frac{\partial\Lambda(x',\varepsilon)}{\partial x'_\mu}$$

其中[2]

$$\Lambda(x,\varepsilon)=\varepsilon_{0k}\int d^3y\,\frac{E^k(y)+e_0\rho(y)(y^k-x^k)}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \tag{15.20}$$

至于 Dirac 场 $\psi(x)$，除了 Lorentz 变换外，还要作一个相因子变换

$$\begin{aligned}&U(\varepsilon)\psi_r(x)U^{-1}(\varepsilon)\\&\quad=[1-ie_0\Lambda(x,\varepsilon)]S^{-1}_{rs}(\varepsilon)\psi_s(x')\end{aligned} \tag{15.21}$$

相变换正是为了使场方程在 U 作用下协变而必须的；例如

$$\begin{aligned}&U(\varepsilon)\bar{\psi}(x)[i\not{\partial}-e_0\not{A}(x)]\psi(x)U^{-1}(\varepsilon)\\&=\bar{\psi}(x')[i\not{\partial}_{x'}-e_0\not{A}(x')]\psi(x')\end{aligned}$$

为了全面检验量子场论公式的 Lorentz 不变性，等时对易关系式 (15.9) 和 (15.10) 的不变性也需加以证明[3].

这些计算相当繁琐而且并不完全是显而易见的，作为练习留给读者. 我们不准备进一步讨论，而是肯定，电磁相互作

---

1) B. Zumino, *J. Math. Phys.*, **1**, 1(1960).

2) 在构成此形式时，在 (15.13) 的 $\mathscr{H}$ 中移走了全微分 $\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\psi)$，而 $\boldsymbol{E}_l\cdot\boldsymbol{E}_l=\nabla\cdot(\dot{A}\psi)$ 却没有.

3) 和自由场情形不一样，这里我们不知道场方程的精确解，所以不能明显写出类时间隔传播子的协变表达式.

用的描述(15.1)是规范不变的，并且确信，虽然我们是在特定的规范下进行量子化，但全部物理结论是相对论协变的.

15.4 动量展开

$\phi(x)$和$\boldsymbol{A}(x)$的自由场动量展开式(13.50)和(14.33)，在有相互作用时要改变. 因为此时，场量的时空坐标依赖关系不再像自由波动方程的解那样. 实际上，耦合的场方程(15.3)没有精确解，我们不知道它们的完全的坐标变化. 在这种情况下，最好是在一个特别的时间(一般选$t=0$)对场算符作$\boldsymbol{x}$依赖性的三维 Fourier 展开. 至于对时间的依赖关系，则由 Heisenberg 方程(15.18)描写. 对(15.18)作形式上的积分，就有:

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{x},t) &= e^{iHt}\phi(\boldsymbol{x},0)e^{-iHt}\\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) &= e^{iHt}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},0)e^{-iHt}\end{aligned}\tag{15.22}$$

如(13.50)和(14.33)那样，将场算符对自由波解的完全集作展开:

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{x},0) &= \sum_{\pm s}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}\,[b(p,s)u(p,s)e^{+i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\\ &\quad + d^\dagger(p,s)v(p,s)e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}]\\ \phi^\dagger(\boldsymbol{x},0) &= \sum_{\pm s}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}\,[b^\dagger(p,s)\bar{u}(p,s)\gamma_0 e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\\ &\quad + d(p,s)\bar{v}(p,s)\gamma_0 e^{+i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}]\\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},0) &= \int\frac{d^3k}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}}\sum_{\lambda=1}^{2}\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)\\ &\quad\times[a(k,\lambda)e^{+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + a^\dagger(k,\lambda)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}]\\ \dot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},0) &= \int\frac{d^3k}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}}(-i\omega)\sum_{\lambda=1}^{2}\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)\\ &\quad\times[a(k,\lambda)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} - a^\dagger(k,\lambda)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}]\end{aligned}\tag{15.23}$$

其中 $E_p=\sqrt{|\boldsymbol{P}|^2+m^2}$, $\omega=|\boldsymbol{K}|$, $u(p,s)$ 由 (13.51) 给出，而 $\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)$ 由 (14.29) 给出等等. 对展开系数 $b(p,s)$, $d(p,s)$, $a(k,\lambda)$ 及其厄米共轭赋予和自由场算符一样的对易关系 (13.52),(14.35) 和 (14.36)；此外，

$$\begin{aligned}&[a(k,\lambda),b(p,s)]\\&\quad=[a^\dagger(k,\lambda),b(p,s)]=[a(k,\lambda),d(p,s)]\\&\quad=[a^\dagger(k,\lambda),d(p,s)]=0\end{aligned}\tag{15.24}$$

这保证场算符在 $t=0$ 时刻满足正则对易关系 (15.9) 和 (15.10)；又因 (15.22) 而在任意时刻也满足.

在 Schrödinger 表象中去掉了场对时间的依赖性，它们与 $t=0$ 时刻的 Heisenberg 表象的场算符一致.

自由场展开式 (12.7), (12.57), (13.50) 和 (14.33) 与相互作用的相应展开式之间的形式上的对应关系总结如下：

$$\begin{array}{ll}\text{自由场} & \text{相互作用场}\\ a(k,\lambda)e^{-i\omega t}\to & e^{iHt}a(k,\lambda)e^{-iHt}\\ a^\dagger(k,\lambda)e^{+i\omega t}\to & e^{iHt}a^\dagger(k,\lambda)e^{-iHt}\\ b(p,s)e^{-i\omega t}\to & e^{iHt}b(p,s)e^{-iHt}\end{array}\tag{15.25}$$

然而，和自由光子的 (14.41) 不一样，算符展开系数不再能物理地解释为具有确定质量 m 的单粒子产生算符和消灭算符.

15.5 真空自能；正规编序

场论遇到的困难是不少的，下面就是一个例子. 取 Gauss 定律 (15.7) 的真空期待值，有

$$\begin{aligned}\langle 0|\nabla\cdot\boldsymbol{E}|0\rangle&=e_0\langle 0|\phi^\dagger(x)\phi(x)|0\rangle\\&=e_0\sum_n|\langle 0|\phi^\dagger(x)|n\rangle|^2\end{aligned}$$

其中求和是对态的完全集合进行的. 可见，甚至真空都具有电荷密度，而且是发散的. 其来源很清楚；这正是负能量电子

海的无穷大电荷．不过，这个不愉快的局面是不难克服的，即把理论适当改变，对真空引入一个均匀的符号相反的外加背景电荷，使真空成为电中性．形式上最方便的办法是在前面各方程中(包括 Maxwell 方程)作如下的替换

$$\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \Rightarrow 1/2[\bar{\psi},\gamma_\mu\psi] \tag{15.26}$$

也就是说，使电流在交换 Dirac 场时反对称化．其结果是，从流算符 $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ 中减掉一个无穷大的 c 数．这一改变也等效于使组成流算符的各个场算符的次序正规化．为看清这一点，让我们回到 (15.22) 的场及其动量展开式 (15.23)．我们看到，几个相互作用场算符在某一时间 t 的乘积可以利用指数 $e^{iHt}\cdots e^{-iHt}$ 平移到 $t=0$ 时刻．这些场算符满足的对易关系和自由场的 (15.24) 情形一样，而正规编序也可以和自由场情形一样定义，例如

$$\begin{aligned}&:b(p,s)d^\dagger(p',s')+b^\dagger(p,s)b(p',s')+d(p,s)a^\dagger(k,\lambda):\\&\quad=-d^\dagger(p',s')b(p,s)+b^\dagger(p,s)b(p',s')\\&\qquad+a^\dagger(k,\lambda)d(p,s)\end{aligned}$$

这就使 (15.26) 中

$$\begin{aligned}&1/2[\bar{\psi}(x),\gamma_\mu\psi(x)]=\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi-1/2\{\bar{\psi}(x),\gamma_\mu\psi(x)\}\\&\quad=:\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x):+\{\bar{\psi}(x)^{(+)},\gamma_\mu\psi(x)^{(-)}\}\\&\qquad-1/2\{\bar{\psi}(x),\gamma_\mu\psi(x)\}=:\psi(x)\gamma_\mu\psi(x):\\&\qquad+2\delta^3(0)g_{\mu 0}-2\delta^3(0)g_{\mu 0}\end{aligned}\tag{15.27}$$

其中，来自 $\mu=0$ 的电荷密度中的高阶奇异项已经作了计算，并发现，借助于由 a、b、d 标志的自由场对易关系可以将这些奇异项消掉．(15.27) 中带上标(+)与(−)的各项分别代表 (15.23) 中正比于 a、b、d 和 $a^\dagger$、$b^\dagger$、$d^\dagger$ 的项．如 (15.25) 所示范的，它们分别对应于自由场的消灭和产生算符．

虽然还不清楚 (15.26) 和 (15.27) 如何去掉背景电荷和怎样使真空成为电中性，但是我们不妨回忆一下对自由 Dirac

场的讨论．在那里，正规乘积的真空期待值确实等于零．下面，在本章的 §15.12 里，当讨论到量子电动力学的电荷共轭不变性时，我们将确信

$$\langle 0|:\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x):|0\rangle = 0$$

就是这一对称操作的结果．现在我们就对流 j_μ 采用这种正规乘积的方式，于是

$$H = \int d^3x\mathscr{H}(x) = \int d^3x:\psi^\dagger(x)[\boldsymbol{\alpha}\cdot(-i\boldsymbol{\nabla} - e_0\boldsymbol{A}(x)) + \beta m_0]\psi(x) + \frac{1}{2}[\dot{\boldsymbol{A}}(x)^2 + (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(x))^2]: + \frac{e_0^2}{8\pi}\int\frac{d^3xd^3y}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}[:\rho(\boldsymbol{x},t)::\rho(\boldsymbol{y},t):] \qquad (15.28)$$

进一步我们从哈氏量中减去真空期待值，因为能量的测量是相对于真空而言的．这就给出

$$\langle 0|H|0\rangle = 0$$

于是就无需去讨论一些麻烦的发散了．

第一个发散就是场振动的零点能；例如

$$\langle 0|\dot{\boldsymbol{A}}^2(x)|0\rangle$$

在 Klein-Gordon 理论中讨论过（见 (12.46)）．

此外，(15.28) 的最后一项还引进一个发散．这是由于荷密度 $:\rho(x):$ 作为一个算符，和 H 并不对易，虽然总荷

$$Q = \int :\rho(x):d^3x$$

与 H 对易：

$$[Q,H] = 0$$

所以，真空电荷密度有涨落．与此相联系，就有一高度发散的 Coulomb 能．

真空涨落能的存在引起了真空本身是否存在的疑问．由于耦合场方程极为复杂，精确解是不知道的，因此也就不能肯

定地说一定存在一个真空态，也就是说是否一定存在一个哈氏量能谱的下限. 而没有实验关于真空态存在的确切证明，任何有意义的物理理论的建立从一开始就成了问题. 真空是否存在，这确实不是显而易见的. 譬如说，让我们考虑一个理论，在该理论中，粒子和反粒子是互相排斥的. 对于这样的理论，真空会不断极化，不断产生正、反粒子对，能量由正、反粒子互相远离所造成的势能的降低来提供[1].

我们上面在(15.28)中对于H的次序正规化的规定，以及对于(15.17)和(15.19)中$\boldsymbol{P}$和$M_{\mu\nu}$的同样的规定，对§15.3里面关于量子电动力学 Lorentz 不变性和平移不变性的讨论的影响是容易确定的. 其影响就是(15.3)式的右面被正规编序的形式取代

$$(i\not{\partial} - m_0)\psi(x) = e_0 :\not{A}\psi(x):$$
$$\frac{\partial F^{\mu\nu}(x)}{\partial x^\nu} = e_0 :\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x): \qquad (15.29)$$

以后，都采用正规编序而不再予以说明. 真空减除不再考虑，因为它只不过是从H的定义中移走了一个(可能是无穷大的)c数.

15.6 其它相互作用

把前面建立的拉氏量形式推广去处理其它粒子，如介子和核子等的相互作用，是很自然的. 一个没有什么想象力的，但是很直截了当的方法就是把每一种粒子和一个场相联系，场所服从的波动方程与粒子的已知性质，诸如自旋、质量和电荷等一致. 这些粒子间的相互作用就仿效 Dirac 粒子或标量粒子与电磁场的相互作用，并且假定相互作用是定域的，可以

1) F. T. Dyson, *Phys. Rev.*, **85**, 631 (1952).

由拉氏密度推出．此外，我们还要求，相互作用具有坐标平移不变性以及正齐次 Lorentz 变换不变性；这就是说，拉氏量密度在正 Lorentz 变换时是一个标量．如果粒子间的相互作用还表现出其它一些对称变换的不变性，如宇称、时间反演或电荷共轭等，则拉氏量密度还要受进一步的限制．最后，各种守恒律，如核子数、轻子数和电荷，以及一些近似守恒律如同位旋及奇异数守恒等，还要进一步限制拉氏密度可能具有的形式．

"简单性"——虽然不太物理——我们也把它作为最后一条准则来建立理论．这一条事实上已经用过，如在第十章讨论介子-核子散射．在那里，在电荷独立近似下，波动方程[(10.33)和(10.34)]建立如下

$$(i\not\partial - M_0)\Psi = g_0 i\gamma_5(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\phi})\Psi$$

$$(\Box + \mu_0^2)\boldsymbol{\phi} = -g_0\bar{\Psi}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}\Psi$$

式中核子场具有同位旋分量

$$\Psi(x) = \begin{bmatrix}\psi_p(x)\\ \psi_n(x)\end{bmatrix}$$

介子场的分量则是

$$\boldsymbol{\phi}(x) = \left(\frac{\varphi_+(x)+\varphi_-(x)}{\sqrt{2}}, i\,\frac{\varphi_+(x)-\varphi_-(x)}{\sqrt{2}}, \varphi_0(x)\right)$$

运动方程组可以从如下的拉氏密度通过对 $\Psi(x)$和 $\boldsymbol{\phi}(x)$的独立变分导出：

$$\mathscr{L} = \bar{\Psi}(i\not\partial - M_0)\Psi + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial x_\mu}\right)\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial x^\mu}\right) - \mu_0^2\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\phi}\right]$$

$$- ig_0\bar{\Psi}\gamma_5\boldsymbol{\tau}\Psi\cdot\boldsymbol{\phi} \qquad (15.30)$$

上面，我们对质量和耦合常数仍加上了下标，以此表明，它们并非直接等同于实验观测质量和耦合常数，它们是要随着重整化效应而改变的，就如在第八章中对光子和电子的相互作

用所做的那样.

(15.30)是一个例子，说明场方程可以容易地从 $\mathscr{L}$ 导出来. 在第十章关于符号的大段议论［如(10.17)，(10.19)，(10.21)，(10.24)］为这里如下的论述所代替，即当 $g_0 \to 0$ 时，$\mathscr{L}$ 应归为自由粒子拉氏密度之和，而它们的符号，则决定于自由粒子哈氏密度必须是正定的要求. (15.30)中的耦合项由下述要求唯一地确定：

1. 不包含微商.

2. 对介子场是线性的，对核子场是双线性的(这意味着如图 10.4 和图 10.5 所画的顶角).

3. 保持自由拉氏密度所满足的同位旋空间旋转不变性.

我们再次强调，拉氏密度(15.30)最多只应被看作是一种粗糙的猜测而已. 别的相互作用项，如

$$\frac{f}{\mu}\bar{\Psi}(x)\gamma_5\gamma_\mu\boldsymbol{\tau}\Psi(x)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\phi}(x)}{\partial x_\mu}\quad\text{或}\quad g\bar{\Psi}(x)\Psi(x)(\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\phi})^4$$

也都是可能的. 第一项是不受人欢迎的，因为它导致一个虽经质量与耦合常数重整化却仍然是发散的微扰理论. 第二个则破坏了"最简单原则"[1]；而且，这一项如果存在的话，那也一定是(15.30)中附加的耦合项，而不是取代它，因为不然就不可能有单介子产生的过程.

消除带微商耦合理论在高能时的某些奇异行为的一个方法是引入形状因子，它将使相互作用弥散开来，譬如说，具有如下形式：

$$\mathscr{L}'(x)=\int d^4y d^4z\, g\bar{\Psi}(z)\gamma_5\gamma_\mu\boldsymbol{\tau}\Psi(y)\times\frac{\partial\boldsymbol{\phi}(z)}{\partial z_\mu}F((x-y)^2,(x-z)^2)$$

1) "最简单"这个概念是有点含糊的. 譬如说，Einstein 的引力场的"简单的"拉式量含有度规张量行列式的平方根，按这里的观点，它显然不是最简单的.

它是 Lorentz 不变的而且是平移不变的. 然而它却是非定域的因为 π 场在 z 点的定域变分要影响到其它时空点的核子场,这就违反了我们在第十一章中确定的原则. 此外,这种形式很难处理[1].

关于更复杂的相互作用拉氏量事实上没有作什么研究. 也缺乏一些令人信服的物理考虑以确定对不同形式拉氏量的取舍. 然而,类似上面举出的那几种可能性是不应该忽视的.

在继续讨论下去之前,我们要强调,对于自然界的每一种粒子分别引入一个场和一种相互作用项的方法之合理性是很值得怀疑的,它至多也应该看作是具有唯象的性质. 现在还不清楚,自然界存在的粒子中哪些粒子是一些更基础的场的"束缚态"或"激发态"[2]. 事实上,最近的趋势是企图重建理论,不用拉氏量而只保留场论的几条基础的场论公理. 过去的方式是: 通过拉氏量引进"裸"粒子,然后给它"穿上衣服",也就是粒子因参与相互作用而具有结构. 与之相反,人们现在接受客观存在的物理粒子,然后,反过来,研究其具有最大空间延展的结构,逐步给它"脱去衣服". 很有理由乐观,这样一种方案,虽然在方法上看起来也是唯象的,但是在物理结果上却是和拉格朗日形式基本等价的[3].

15.7 相互作用的对称性质

实验以及简单性是我们建立相互作用理论的两个主要依

---

1) 关于非定域量子场论中发生的问题可见 M. Chretien 和 R. E. Peierls, *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A223**, 468(1954).

2) 虽然复合粒子的定域性场论是可以建立的 [K. Baumann, *Z. Physik*, **152**, 448(1958); K.Nishijima, *Progr. Theoret. Phys. (Kyoto)*, **11**, 995(1958); *and* W. Zimmermann, *Nuovo Cimento*, **10**, 567(1958)], 然而其波动方程无比的复杂,理论的拉格朗日形式看来是难以应用的.

3) 例如可见 G. F. Chew, *Physics*, **1**, 77(1964).

据。在写出一个物理系统的拉氏量时，对应于实验观测到的每一个守恒定律，我们赋予 $\mathscr{L}$ 以相应的一种对称性质。在第十一章中已经从这个观点讨论了能量、动量和角动量守恒，所以我们写下的拉氏量都具有这种平移不变性和 Lorentz 不变性。此外，电荷守恒以及核子数、同位旋守恒等也可以和拉氏量的某些"内部"对称性相联系。如第十一章[见(11.58)及其后面各式]所表明的，$\mathscr{L}$ 在场作如下形式的定域变换

$$\varphi_r(x) \to \varphi_r(x) - i\epsilon\lambda_{rs}\varphi_s(x) \tag{15.31}$$

(ϵ 是无穷小参数)

时的不变性将导至守恒流

$$J_\mu(x) = -i\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial\varphi_r(x)/\partial x_\mu)}\lambda_{rs}\varphi_s(x)$$

$$\frac{\partial J_\mu(x)}{\partial x_\mu} = 0 \tag{15.32}$$

以及守恒"荷"

$$Q = \int d^3x J_0(x) = -i\int d^3x \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}_r(x)}\lambda_{rs}\varphi_s(x)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \tag{15.33}$$

用这种方式，我们可以得到，譬如说，带电粒子的电磁流。电子和光子的拉氏量在如下的相变换

$$\psi(x) \to \psi(x) - i\epsilon\psi(x) \quad A_\mu(x) \to A_\mu(x) \tag{15.34}$$

下是不变的，这就导致由(15.32)所确定的电磁流

$$j_\mu(x) = -i\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial\psi/\partial x_\mu)}\psi(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x) \tag{15.35}$$

对于荷电的 Klein-Gordon 粒子也有类似的结果。

当转到量子力学时，$j_\mu(x)$ 成为算符。这时，最好把它次序正规化[1]，就如(15.26)和(15.27)那样；这就是说，$j_\mu(x)\to$:

1) 以后牵涉到守恒量时，将认为它们都已经是作了真空减除的。

$\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$:. 我们这样做，并不会改变守恒定律，因为只是减除了一个(可能是无穷大的)常数，它和时空无关

$$\langle 0|j_\mu(x)|0\rangle = \langle 0|e^{iP\cdot x}j_\mu(0)e^{-iP\cdot x}|0\rangle = \langle 0|j_\mu(0)|0\rangle$$

就如 P_μ 和 $M_{\mu\nu}$ 的情形一样，(15.33) 式的守恒量 Q 也就是所要求的变换的**生成元**. 作一个幺正算符

$$U(\varepsilon) = e^{i\varepsilon Q} \approx 1 + i\varepsilon Q \tag{15.36}$$

其中 ε 是无穷小参数，Q 是厄米的. 与 (11.69)、(11.70) 相似，由 (15.31) 我们有

$$\begin{aligned} U(\varepsilon)\varphi_r(x)U^{-1}(\varepsilon) &= \varphi_r(x) + i\varepsilon[Q,\varphi_r(x)] \\ &= \varphi_r(x) - i\varepsilon\lambda_{rs}\varphi_s(x) \end{aligned} \tag{15.37}$$

或

$$[Q,\varphi_r(x)] = -\lambda_{rs}\varphi_s(x)$$

在具有对易关系 (11.39)、(15.37) 的正则场论中给出

$$Q = -i\int d^3x:\pi_r(x)\lambda_{rs}\varphi_s(x): \tag{15.38}$$

和 (15.33) 一致. 对于采用反对易子量子化的理论，可以验证，(15.38) 也是所要求的对称变换的生成元，条件是 λ_{rs} 只连结满足等时**反对易**关系式的 Fermi 场:

$$\begin{aligned} &\{\psi_{i,\alpha}(\boldsymbol{x},t),\psi^\dagger_{j,\beta}(\boldsymbol{x}',t)\} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \\ &\{\psi_{i,\alpha}(\boldsymbol{x},t),\psi_{j,\beta}(\boldsymbol{x}',t)\} = 0 \\ &\{\psi^\dagger_{i,\alpha}(\boldsymbol{x},t),\psi^\dagger_{j,\beta}(\boldsymbol{x}',t\} = 0 \end{aligned} \tag{15.39}$$

其中 $\alpha,\beta = 1,2,3,4$ 标志旋量分量，$i,j = 1,2,\cdots\cdots$ 代表不同的 Fermi 场如质子和中子.

以后我们总是要求：不同 Fermi 场按 (15.39) 相互反对易而不是相互对易；不同 Bose 场则按 (11.39) 相互对易；而 Fermi 场与 Bose 场在同一时刻是对易的[1]. 对于自由场理论，

1) 对于光子，因为电磁势并非全部独立，所以不能完全采用(11.39)式. 在辐射规范下，我们采用(15.9). 光子场和其它场的对易关系则没有什么改变.

上述对易规则的选择只是一种相因子的约定而已．但是，对于相互作用场，如果不采用上面的反对易子，连 Heisenberg 运动方程都会发生困难．例如，在我们的介子—核子相互作用模型 (15.30) 中，哈氏量是

$$H=\int d^3x[\Psi^{\dagger}(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}+\beta M_0)\Psi+1/2(\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{\pi}+\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}+\mu_0^2\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\varphi})+ig_0\bar{\Psi}\gamma_5\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\varphi}\Psi] \tag{15.40}$$

质子场方程是

$$(i\not{\partial}-M_0)\psi_p(x)=ig_0\gamma_5(\sqrt{2}\,\varphi_+(x)\psi_n(x)+\varphi_0(x)\psi_p(x))$$

为了验证 Heisenberg 方程

$$[H,\psi_p(x)]=-i\frac{\partial\psi_p(x)}{\partial t}$$

我们必须假定，$\psi_p(\boldsymbol{x},t)$ 与双线性量 $\psi_n^{\dagger}(\boldsymbol{x},t)\cdots\cdots\psi_n(\boldsymbol{x},t)$ 对易，而且有

$$\{\psi_p(\boldsymbol{x},t),\varphi_+(\boldsymbol{x},t)\psi_n(\boldsymbol{x},t)\}=0 \tag{15.41}$$

容易看出，我们前面关于对易关系的选择正好满足这些要求．不仅如此，对易关系式 (15.39) 在场算符作 (15.37) 的变换时保持不变．而且，理论的形式也不因场算符之变换

$$\varphi_r'(x)=U(\varepsilon)\varphi_r(x)U^{-1}(\varepsilon) \tag{15.42}$$

而与用 $\varphi_r(x)$ 表示的原始形式有什么不同。

15.8 π 介子和核子的强相互作用

对称概念最引人兴趣的应用是在强作用领域里．从 π 介子——核子相互作用开始，我们注意到，按 (15.30) 的模型，拉氏量在中子和质子同时作相变换

$$\Psi\to\Psi-i\varepsilon\Psi \tag{15.43}$$

时是不变的．这一变换对应于 (15.37) 中的 $\lambda_{rs}=\delta_{rs}(r,s=$

1,2) 并导致守恒流，(15.32)，

$$J_\mu^N(x) = \bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi = J_\mu^p(x) + J_\mu^n(x) \tag{15.44}$$

以及常数 (15.33)

$$\begin{aligned} N &= \int d^3x J_0^N(x) = \int d^3x\{\phi_p^\dagger\phi_p + \phi_n^\dagger\phi_n\} \\ &= N_p + N_n \end{aligned} \tag{15.45}$$

我们称它为核子数. 上面这一守恒定律在 (10.39) 和(10.40) 中就已得到过. 对于一个不包含相互作用的理论，N可以解释为质子数和中子数的和减去反质子数和反中子数的和. 当相互作用存在时，不再可能这样严格地计算了. 然而，如果接受§16.6 关于相互作用系统状态性质的合理假定，那末对N作同样的解释仍然是可以的，只要N仍是运动常数.

(15.30) 模型的拉氏量还具有对应于电荷守恒的对称操作. 此时，$\mathscr{L}$ 在全体荷电粒子作一共同的相变换：

$$\begin{aligned} &\phi_p \to \phi_p - i\varepsilon\phi_p \\ &\phi_n \to \phi_n \\ &\varphi_+ \to \varphi_+ - i\varepsilon\varphi_+ \\ &\varphi_- = \varphi_+^* \to \varphi_- + i\varepsilon\varphi_- \\ &\varphi_0 \to \varphi_0 \end{aligned} \tag{15.46}$$

下是不变的. 用同位旋记号，这一变换写成

$$\Psi \to \Psi - i\varepsilon\left(\frac{1+\tau_3}{2}\right)\Psi \quad \boldsymbol{\varphi} \to \boldsymbol{\varphi} - \varepsilon(\boldsymbol{\varphi} \times \hat{\boldsymbol{\varphi}}_0) \tag{15.47}$$

这儿，$\hat{\boldsymbol{\varphi}}_0 = (0, 0, 1)$ 与 (10.36) 中引进的同位旋表示一样. (15.30) 在此变换下的不变性是不难证明的，利用 (15.32) 和 (15.33)，它导致守恒的电磁流，

$$j_\mu(x) = \Psi\gamma_\mu\left(\frac{1+\tau_3}{2}\right)\Psi - \left(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial x^\mu} \times \boldsymbol{\varphi}\right)\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}_0 \tag{15.48}$$

$$Q = \int j_0(x)d^3x = \int d^3x[\psi_p^\dagger(x)\psi_p(x) + \varphi_1(x)\dot{\varphi}_2(x) - \varphi_2(x)\dot{\varphi}_1(x)]$$

这和前面传播子讨论的类似表达式 (10.37) 和 (10.38) 相符合.

(15.30) 的模型 $\mathscr{L}$ 在同位旋空间的转动不变性导致同位旋守恒律. 我们留给读者作为练习，证明 (15.30) 在下面的旋转下是不变的

$$\Psi \to \Psi - i\varepsilon 1/2\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}\Psi \quad \boldsymbol{\varphi}(x) \to \boldsymbol{\varphi}(x) - \varepsilon(\boldsymbol{\varphi}(x)\times\hat{\boldsymbol{\varphi}}) \tag{15.49}$$

式中的 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ 是单位矢量: $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1 = (1,0,0)$、$\hat{\boldsymbol{\varphi}}_2 = (0,1,0)$、$\hat{\boldsymbol{\varphi}}_3 = (0,0,1)$ 的集合. 由 (15.32) 和 (15.49) 推得的守恒同位旋流是

$$\boldsymbol{J}_\mu(x) = 1/2\Psi\gamma_\mu\boldsymbol{\tau}\Psi + \left(\boldsymbol{\varphi}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial x^\mu}\right) \tag{15.50}$$

相应的同位旋的三个分量

$$\boldsymbol{I} = \int d^3x[1/2\Psi^\dagger\boldsymbol{\tau}\Psi + (\boldsymbol{\varphi}\times\dot{\boldsymbol{\varphi}})] \tag{15.51}$$

是运动常数. 这些表达式又和 (10.43)、(10.44) 一致. 把 (15.45) 和 (15.51) 的第三分量加起来，由 (15.48) 我们发现如下的关系

$$Q = \frac{N}{2} + I_3 \tag{15.52}$$

而这也是 (10.41) 所得到的. 从 (15.51) 和对易规则还可以证明，$\boldsymbol{I}$ 的各个分量之间满足角动量的对易关系.

$$[I_i, I_j] = iI_k \tag{15.53}$$

因此，和第十章中传播子的讨论一样，我们可以用 I_3 和 I^2 的本征值来标志一个状态.

利用前面的模型拉氏量 (15.30)，我们发现 (15.43)、

(15.47) 和 (15.49) 三种对称操作分别对应于核子数、电荷以及同位旋的守恒定律. 虽然可以确信 (15.30) 的模型不足以描写 π 介子——核子的全部相互作用，但是，当我们发展更一般的模型来和实验比较时，我们将把这些和其它一些为观察到的选择定则所检验过的对称性保留下来.

15.9 奇异粒子的对称性

当我们在拉氏量中引入也参与强作用的超子和 K 介子时，用对称性的要求来保证观测到的运动常数的存在是很方便的. 实验发现这些粒子具有电荷多重态，而且其强相互作用受某种选择定则制约，很自然，引进的拉氏量应该允许由观测到的运动常数所生成的对称操作.

我们用“奇异粒子”来称呼这些不同于轻子、π 介子和核子的粒子，如果没有弱作用的话，它们是稳定的[1].

这些粒子都表示在图 15.1 的能级图中. 按习惯，对于重子 (N,Σ,Λ,Ξ) 和轻子 (μ,e,ν,ν')，我们只画出粒子而没有画出反粒子. 实验总能提供必要的线索来确定，哪些是粒子，哪些是反粒子. 在现在的情况，这就是观测到的重子数和反重子数差的严格守恒——对轻子也类似. 正是这一点确定了是 Ξ^- 而不是它的带正电的反粒子 $\bar{\Xi}^-$ 应作为重子归入图 15.1 中. 对于介子，粒子和反粒子皆画于图中. π^- 和 K^- 是 π^+ 和 K^+ 的电荷相反的反粒子. π^0 的反粒子是它自身，不带电荷. 而 K^0 却是和它的反粒子 $\bar{K}^0$ 不同的；例如，反应

$$\pi^- + p \to \Lambda^0 + K^0 \qquad (15.54a)$$

是有的，但是

$$K^0 + p \to \Lambda^0 + \pi^+ \qquad (15.54b)$$

1) Σ^0 粒子，虽然它会像 π^0 那样电磁衰变 ($\Sigma^0 \to \Lambda^0 + \gamma$)，也归属于这一类粒子当中；而 Ω^- 则不是.

却从未见过.

除开 Σ^0 和 Ξ^0 外,所有的重子的自旋皆经测定为 1/2, K 的自旋是零.我们假定所有的重子自旋 1/2,在无相互作用时具有一定的质量,由 Dirac 方程描写,而 π 和 K 则服从 Klein-Gordon 方程[1].

图 15.1 中粒子能级的多重结构有力地暗示,对于 π 介子和核子所建立的同位旋理论也可以适用于奇异粒子. 因为迄今所有的实验事实都支持介子一重子间强相互作用的同位旋守恒律,所以,对它们引入同位旋表达方式会是有用的. 为保证同位旋守恒,我们要求在没有电磁相互作用时,拉氏量在同位旋空间旋转不变.

如同 (15.30) 中的介子那样,在同位旋空间中, Σ 场由矢量表示:

$$\boldsymbol{\psi}_{\Sigma}(x)=\left(\frac{\phi_{\Sigma}^{+}(x)+\phi_{\Sigma}^{-}(x)}{\sqrt{2}},\right.$$
$$\left.\frac{i[\phi_{\Sigma}^{+}(x)-\phi_{\Sigma}^{-}(x)]}{\sqrt{2}},\phi_{\Sigma^0}(x)\right) \qquad (15.55)$$

在自由场理论中 $\phi_{\Sigma}^{+}(x)$ 消灭一个 Σ^+ 粒子或产生一个反 Σ^+ 粒子,而 $\phi_{\Sigma}^{-}(x)$ 消灭一个 Σ^- 或产生一个反 Σ^-. 超子和反超子都是可以区分的,即 Σ^+ 不同于反 Σ^-,所以场 $\phi_{\Sigma}(x)$ 不是厄米的,而相应的 π 介子同位旋矢量则是厄米的. (15.55) 的厄米共轭场是

$$\boldsymbol{\psi}_{\Sigma}^{\dagger}(x)=\left(\frac{\phi_{\Sigma}^{\dagger+}(x)+\phi_{\Sigma}^{\dagger-}(x)}{\sqrt{2}},\frac{-i[\phi_{\Sigma}^{\dagger+}(x)-\phi_{\Sigma}^{\dagger-}(x)]}{\sqrt{2}},\phi_{\Sigma^0}^{\dagger}(x)\right)$$

Λ 在同位旋空间是标量,而 Ξ 和 K 则是同位旋空间的旋量,就

1) 见 M. Gell-mann *and* Y. Nee'man, *"The Eightfold Way"*, W, A. Benjamin, *Inc.*, *New York*, 1965, 提出的一个理论方案以研究八个重子间和八个介子间(包括 η 粒子在内)的对称性质.

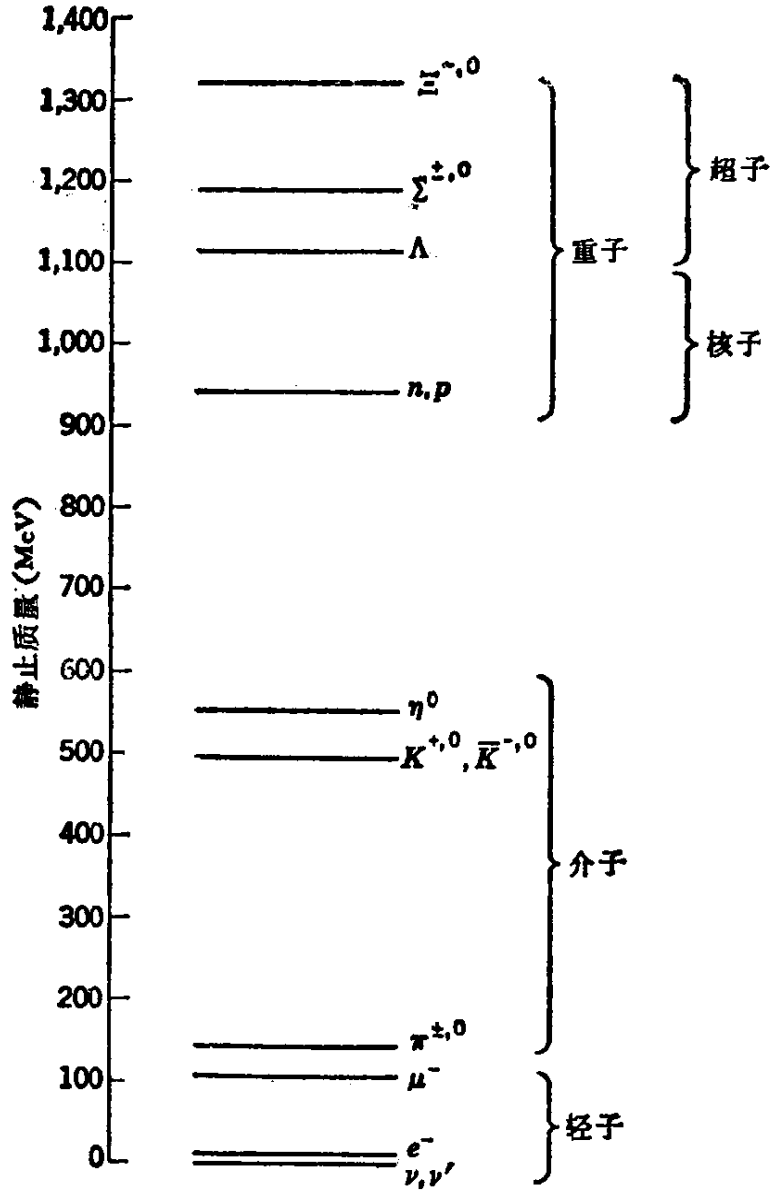


图 15.1　质量最小的重子，介子和轻子的能级图

如核子那样：

$$\Psi_{\Xi}(x) = \begin{bmatrix} \psi_{\Xi^0}(x) \\ \psi_{\Xi^-}(x) \end{bmatrix} \tag{15.56}$$

$$\Phi_K(x) = \begin{bmatrix} \varphi_{K^+}(x) \\ \varphi_{K^0}(x) \end{bmatrix} \tag{15.57}$$

根据上面的规定，在同位旋空间绕任意轴 $\hat{a}$ 作无穷小转动时，

不同的场按下式变换：

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\varphi}_\pi \to \boldsymbol{\varphi}_\pi - \epsilon\boldsymbol{\varphi}_\pi \times \hat{\boldsymbol{u}} \\
&\Phi_K \to \Phi_K - \frac{i\epsilon}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{u}}\Phi_K \\
&\Psi_N \to \Psi_N - \frac{i\epsilon}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{u}}\Psi_N \\
&\Psi_\Lambda \to \Psi_\Lambda \\
&\boldsymbol{\Psi}_\Sigma \to \boldsymbol{\Psi}_\Sigma - \epsilon\boldsymbol{\Psi}_\Sigma \times \hat{\boldsymbol{u}} \\
&\boldsymbol{\Psi}_\Xi \to \Psi_\Xi - \frac{i\epsilon}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{u}}\Psi_\Xi
\end{aligned} \tag{15.58}$$

同位旋守恒流可从 (15.58) 和 (15.32) 或 (15.37) 推出，它是许多项的和[1]：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{J}_\mu(x) &= 1/2\bar{\Psi}_N\gamma_\mu\boldsymbol{\tau}\Psi_N + 1/2\bar{\Psi}_\Xi\gamma_\mu\boldsymbol{\tau}\Psi_\Xi - i\bar{\boldsymbol{\phi}}_\Sigma\gamma_\mu\times\boldsymbol{\Psi}_\Sigma \\
&+ \boldsymbol{\varphi}_\pi \times \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}_\pi}{\partial x^\mu} + 1/2i\left(\Phi_K^\dagger\boldsymbol{\tau}\frac{\partial\Phi_K}{\partial x^\mu} - \frac{\partial\Phi_K^\dagger}{\partial x^\mu}\boldsymbol{\tau}\Phi_K\right)
\end{aligned} \tag{15.59}$$

于是总的同位旋守恒量就是

$$\boldsymbol{I} = \int \boldsymbol{J}_0(x)d^3x$$

(15.59) 是只包含核子和 π 介子的 (15.50) 和 (15.51) 的推广．同位旋第三分量是

$$\begin{aligned}
I_3 = \int d^3x \Big[&1/2\phi_p^\dagger\phi_p - \frac{1}{2}\phi_n^\dagger\phi_n + \frac{1}{2}\phi_{\Xi^0}^\dagger\phi_{\Xi^0} - 1/2\phi_{\Xi^-}^\dagger\phi_{\Xi^-} \\
&+ \phi_{\Sigma^+}^\dagger\phi_{\Sigma^+} - \phi_{\Sigma^-}^\dagger\phi_{\Sigma^-} + (\varphi_{1_\pi}\dot{\varphi}_{2_\pi} - \varphi_{2_\pi}\dot{\varphi}_{1_\pi}) \\
&+ 1/2i(\varphi_{K^+}^\dagger\dot{\varphi}_{K^+} - \dot{\varphi}_{K^+}^\dagger\varphi_{K^+} - \varphi_{K^0}^\dagger\dot{\varphi}_{K^0} + \dot{\varphi}_{K^0}^\dagger\varphi_{K^0})\Big] \\
= 1/2&(N_p - N_n + N_{\Xi^0} - N_{\Xi^-} + N_{K^+} - N_{K^0}) \\
&+ N_{\Sigma^+} - N_{\Sigma^-} + N_{\pi^+} - N_{\pi^-}
\end{aligned} \tag{15.60}$$

不难看出 $\boldsymbol{I}$ 满足角动量对易关系，所以 I_3 和 I^2 可以同时作为

1) $\mathscr{L}$ 不包含有微商的耦合项时，此式是正确的．

系统状态的量子数.

同位旋守恒只是强相互作用的一个近似的守恒定律，它因电磁相互作用而遭到破坏. 例如，图 15.1 中每一多重态的各个成员之间有一个很小的质量差异，起因于电磁效应. 但是在电荷独立近似下，在拉氏量中忽略了这一质量差，所以 (15.58) 是个对称操作.

当考虑到奇异粒子反应时，如 (15.54a)，核子数 (15.45) 不再守恒. 它被严格的，或者说绝对的总重子数守恒所代替. 这就是说，在任何反应中重子数减掉反重子数总是守恒的；或者，用 Feynman 图的语言来说，重子线一定连续地通过顶点；它不会从顶点开始，也不会终止在顶点，如图 15.2 所表示的那样. 这意味着 $\mathscr{L}$ 在重子场同时作如下的相变换时不变：

$$\begin{aligned}
&\Psi_N \to \Psi_N - i\epsilon\Psi_N \\
&\Psi_\Lambda \to \Psi_\Lambda - i\epsilon\Psi_\Lambda \\
&\boldsymbol{\Psi}_\Sigma \to \boldsymbol{\Psi}_\Sigma - i\epsilon\boldsymbol{\Psi}_\Sigma \\
&\Psi_\Xi \to \Psi_\Xi - i\epsilon\Psi_\Xi
\end{aligned} \tag{15.61}$$

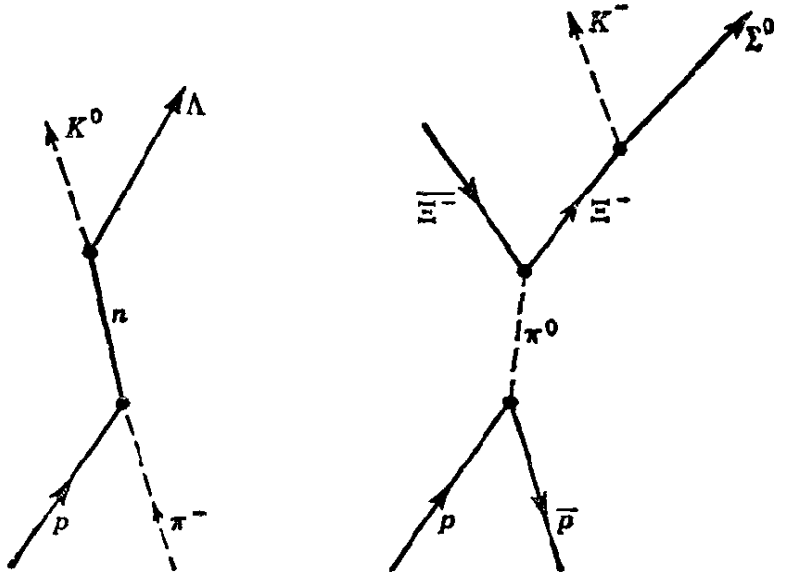


图 15.2　重子减去反重子的总重子数守恒的过程

这就给出守恒的重子数

$$B = N_N + N_\Lambda + N_\Sigma + N_\Xi \tag{15.62}$$

它显然是 (15.45) 的推广.

最后,如 (15.47) 那样，我们把电荷守恒和 $\mathscr{L}$ 在所有带电粒子同时作相变换下的不变性相联系. 这样，$\mathscr{L}$ 对于同位旋空间的如下变换应是不变的:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\varphi}_\pi \to \boldsymbol{\varphi}_\pi - \varepsilon \boldsymbol{\varphi}_\pi \times \hat{\boldsymbol{u}}_3 \\
&\Phi_K \to \Phi_K - \frac{i\varepsilon}{2}(1+\tau_3)\Phi_K \\
&\Psi_N \to \Psi_N - \frac{i\varepsilon}{2}(1+\tau_3)\Psi_N \\
&\Psi_\Lambda \to \Psi_\Lambda \\
&\boldsymbol{\Psi}_\Sigma \to \boldsymbol{\Psi}_\Sigma - \varepsilon \boldsymbol{\Psi}_\Sigma \times \hat{\boldsymbol{u}}_3 \\
&\Psi_\Xi \to \Psi_\Xi - \frac{i\varepsilon}{2}(-1+\tau_3)\Psi_\Xi
\end{aligned} \tag{15.63}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{u}}_3 = (0,0,1)$. 这导致守恒量

$$\begin{aligned}
Q = \int d^3x [& \phi_p^\dagger \phi_p + \phi_{\Sigma^+}^\dagger \phi_{\Sigma^+} - \phi_{\Sigma^-}^\dagger \phi_{\Sigma^-} - \phi_{\Xi^-}^\dagger \phi_{\Xi^-} \\
& + (\varphi_{1\pi}\dot{\varphi}_{2\pi} - \varphi_{2\pi}\dot{\varphi}_{1\pi}) + i(\varphi_{K^+}^\dagger \dot{\varphi}_{K^+} - \dot{\varphi}_{K^+}^\dagger \varphi_{K^+})] \\
= {} & N_p + N_{\Sigma^+} - N_{\Sigma^-} - N_{\Xi^-} + N_{\pi^+} + N_{K^+}
\end{aligned} \tag{15.64}$$

(15.63) 可以理解为是由各个场在同位旋空间绕第三轴作一个无穷小旋转,再加上 K、N、Ξ 三个场作如下的相变换

$$\Phi_K \to \Phi_K - \frac{i\varepsilon}{2}\Phi_K \quad \Psi_N \to \Psi_N - \frac{i\varepsilon}{2}\Psi_N$$

$$\Psi_\Xi \to \Psi_\Xi + \frac{i\varepsilon}{2}\Psi_\Xi \tag{15.65}$$

所组成的. 既然 $\mathscr{L}$ 对于绕同位旋第三轴旋转是不变的并且有相应的守恒量 (15.60)，那末，(15.65) 的变换也应该是一种对称操作,并且导致一个称之为“超荷”的守恒量 Y:

$$Y = N_K + N_N - N_\Xi \tag{15.66}$$

回忆到(15.60)和(15.64)，我们有

$$Q = \frac{Y}{2} + I_3 \tag{15.67}$$

与Y相联系，也可以定义一个"奇异数"S

$$S = Y - B \tag{15.68}$$

这里B就是重子数(15.62)；它在强作用中也守恒. 既然S，Y，B，I_3和Q都是正比于粒子数的常数，因此可以对每一种粒子规定一个相应的量子数，用它们来讨论可加的守恒定律. 下表列出各重子和介子的量子数；反重子的量子数与相应的重子的量子数的符号相反.

	Q	T_3	B	Y	S
π	1,0,−1	1,0,−1	0	0	0
K	1,0	1/2,−1/2	0	1	1
N	1,0	1/2,−1/2	1	1	0
Λ	0	0	1	0	−1
Σ	1,0,−1	1,0,−1	1	0	−1
Ξ	0,−1	1/2,−1/2	1	−1	−2

超荷Y的守恒律，(15.66)，以及奇异数S的守恒律(15.68)，实际上只是Q，I_3和B守恒的结果. 它们给出实验观测到的关联产生的选择定则；例如，K介子只能和Λ或Σ关联产生，如(15.54a)；而(15.54b)则破坏了S或Y的守恒

$$(\Delta S、\Delta Y = \pm 2)^{1)}.$$

直到现在我们只考虑了强作用. 如果引入电磁相互作用时采用"最小相互作用"原则

$$p_\mu \to p_\mu - eA_\mu$$

1) A.Pais, *Phys. Rev.*, **86**, 663 (1952); M. Gell-Mann, *Phys. Rev.*, **92**, 833 (1953); K. Nishijima, *Progr. Theoret. Phys. (Kyoto)*, **12**, 107 (1954).

我们发现，B、Y 和 S 仍然是守恒量，因为相互作用项对于重子数，超荷或奇异数是对角的．因此，由 (15.67)，电荷 Q 守恒就意味着 I_3 守恒；这就是说，引进 $\mathscr{L}$ 的电磁相互作用项在绕同位旋第三轴作旋转时是不变的．但是，同位旋空间旋转的完全对称性却因电磁作用之引入而遭到破坏．例如光生过程

$$\begin{aligned}\gamma + p &\to p + \pi^0 \\ &\to n + \pi^+\end{aligned}$$

导致终态 π 介子-核子态具有 $I = 1/2$ 和 $3/2$．

弱作用破坏 I_3 守恒，而由 (15.67) 和 (15.68)，奇异数守恒和超荷守恒也都遭到破坏．奇异粒子的不稳定性就是由于弱作用，例如

$$K^0 \to \pi^+ + \pi^-$$

至今为止，实验表明只有电荷 Q，重子数 B 以及轻子数 L_e 和 L_μ (见问题 15.22) 才是绝对守恒的量子数．

15.10 非正规对称性

到现在为止，我们考虑的对称操作都是由无穷小变换生成的．除此而外，也存在一些“非正规的”或者说间断的变换，它们不能由一系列无穷小变换生成，但是它们也能提供有用的选择定则以及关于相互作用性质的信息．这类对称变换是空间反演或宇称变换 $\mathscr{P}$，时间反演变换 $\mathscr{T}$ 和电荷共轭变换 $\mathscr{C}$．

15.11 宇称

为说明宇称变换的意义，我们在系统的拉氏密度中加入一相互作用项，一般是电磁相互作用项，它代表量子系统与测量仪器之间的相互作用：

$$\mathscr{L} \to \mathscr{L} - j_\mu(x) A^\mu_{\rm ext}(x) \tag{15.69}$$

式中的 $A^\mu_{\rm ext}(x)$ 是给定的经典外场，它与系统的流算符 $j_\mu(x)$ 相作用. 假如我们把测量仪器在空间倒换一个方向，或者说，考虑一个新的物理系统，为了分析此系统的状态而加入的外场是

$$\begin{aligned}\tilde{A}^\mu_{\rm ext}(x) &= (A^0_{\rm ext}(-\boldsymbol{x},t), -\boldsymbol{A}_{\rm ext}(-\boldsymbol{x},t)) \\ &= A^{\rm ext}_\mu(-\boldsymbol{x},t)\end{aligned} \tag{15.70}$$

那末，如果宇称守恒的话，新系统与原来那个系统的动力学是一样的. 特别是，如果新系统的作用量

$$\tilde{J} = \int d^4x [\mathscr{L} - j_\mu(x)\tilde{A}^\mu_{\rm ext}(x)]$$

与原系统作用量 J 之间是幺正变换 $\mathscr{P}$ 的关系，则运动方程不变. 为保证这一点，$\mathscr{P}$ 应该有性质

$$\mathscr{P}\mathscr{L}(\boldsymbol{x},t)\mathscr{P}^{-1} = \mathscr{L}(-\boldsymbol{x},t) \tag{15.71}$$

以及对于电磁流 $j_\mu(x)$ 有

$$\mathscr{P} j_\mu(\boldsymbol{x},t)\mathscr{P}^{-1} = j^\mu(-\boldsymbol{x},t) \tag{15.72}$$

此外，$\mathscr{P}$ 应该不改变对易关系，在这种情况下新系统与原系统服从同样的动力学规律，我们就说宇称是守恒的.

让我们首先考虑自由粒子理论，按 (15.71) 的要求对自由粒子的拉氏函数 $\mathscr{L}$ 建立 $\mathscr{P}$ 算符. 对于第十二章的自由 Klein-Gordon 理论[见 (12.2),(12.4) 和 (12.63)]，条件

$$\mathscr{P}\varphi(\boldsymbol{x},t)\mathscr{P}^{-1} = \pm\varphi(-\boldsymbol{x},t) \tag{15.73}$$

显然也能满足(15.71)和(15.72)，并且对易关系也不会改变.

(15.73) 式中＋号或－号的选择就决定了该场所描述的粒子的"内禀"宇称；标量粒子取＋号，而赝标粒子取负号，如 (15.30) 中的 π 介子. 对于作用在真空上产生粒子的场

$$\varphi(x)|0\rangle \tag{15.74}$$

(15.73) 中的符号是指定的. 但是，当引入不同粒子间的相互

作用时，它们就被确定了[1]. 内禀宇称有别于轨道宇称，后者与粒子处于某一给定的角动量态的波函数相联系. 按照(15.74)由真空产生，并处于角动量态 l 的粒子的波函数 $f_l(x)$ 以 $|n=1;l\rangle$ 表示，它具有如下性质

$$f_l(\boldsymbol{x},t)=\langle n=1;l|\varphi(\boldsymbol{x},t)|0\rangle= (-)^l\langle n=1;l|\varphi(-\boldsymbol{x},t)|0\rangle=(-)^l f_l(-\boldsymbol{x},t) \tag{15.75}$$

这实际上表明波函数 $f_l(x)$ 具有奇宇称或偶宇称. 另一方面，按约定，真空被赋予偶宇称，即

$$\mathscr{P}|0\rangle=|0\rangle \tag{15.76}$$

而 $|n=1;l\rangle$ 态相对于真空态的宇称由考虑下式而得

$$\langle n=1;l|\mathscr{P}\varphi(\boldsymbol{x},t)|0\rangle=\langle n=1;l|\mathscr{P}\varphi(\boldsymbol{x},t)\mathscr{P}^{-1}|0\rangle = \pm\langle n=1;l|\varphi(-\boldsymbol{x},t)|0\rangle=\pm(-)^l f_l(\boldsymbol{x},t) \tag{15.77}$$

可见，是内禀宇称 $\pm$ 与轨道宇称 $(-)^l$ 的乘积. 所以，处于 p 态的赝标 π 介子具有偶宇称.

利用动量空间的展开式，(12.7) 或 (12.57)，宇称变换 (15.73) 满足[2]

$$\mathscr{P}a(k)\mathscr{P}^{-1}=\pm a(-k)\quad \mathscr{P}a^\dagger(k)\mathscr{P}^{-1}=\pm a^\dagger(-k) \tag{15.78}$$

宇称算符 $\mathscr{P}$，当作用于动量为 $\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n$ 的动量本征态时，产生一个新的态，其动量是 $-\boldsymbol{k}_1,\cdots,-\boldsymbol{k}_n$ 但是其它量子数，如电荷或粒子数，皆保持不变.

决定 $\mathscr{P}$ 的方程 (15.73) 或 (15.78) 在动量空间求解比较方便. 假定

$$\mathscr{P}=e^{iP} \tag{15.79}$$

---

1) (15.73) 里可以加上任意相因子 $e^{i\varphi}$，但是没有什么物理意义，不去讨论它了.

2) 产生、消灭算符中宗量的变换 $k\to -k$，只是指动量的空间分量方向的反向.

可以把 (15.78) 写成

$$\mathscr{P}a(k)\mathscr{P}^{-1} = a(k) + i[P, a(k)] + \frac{i^2}{2!}[P,[P,a(k)]]$$

$$+ \cdots + \frac{i^n}{n!}[P,[\cdots[P,a(k)],]\cdots] + \cdots$$

$$= -a(-k) \tag{15.80}$$

在上式的右端我们对赝标场取了负号. 上述形式意味着如下的选择

$$[P,a(k)] = \frac{\lambda}{2}[a(k) \pm a(-k)] \tag{15.81}$$

其中 λ 值以及符号是待定的. 于是有

$$[P,[P,a(k)]] = 1/2\lambda^2[a(k) \pm a(-k)]$$

代入 (15.80) 得

$$\mathscr{P}a(k)\mathscr{P}^{-1} = a(k)$$

$$+ 1/2\left[i\lambda + \frac{(i\lambda)^2}{2!} + \cdots + \frac{(i\lambda)^n}{n!} + \cdots\right]$$

$$\times [a(k) \pm a(-k)] = 1/2[a(k) \mp a(-k)]$$

$$+ 1/2e^{i\lambda}[a(k) \pm a(-k)] \tag{15.82}$$

在(15.81)中选正号并令 $\lambda = \pi$, 我们继续对赝标场解(15.82). 从 (15.81) 我们就得到所要求的 P_{ps} 是[1)]

$$P_{ps} = -\frac{\pi}{2}\int d^3k[a^\dagger(k)a(k) + a^\dagger(k)a(-k)] = P_{ps}^\dagger$$

以及

$$\mathscr{P}_{ps} = \exp\left\{\frac{-i\pi}{2}\int d^3k\,[a^\dagger(k)\,a(k) + a^\dagger\,(k)\,a(-k)]\right\} \tag{15.83}$$

对于标量场用同样的方法，只是在 (15.80) 式的右端取

1) 要注意，$\boldsymbol{P}$ 与 $\mathscr{P}$ 都不是坐标空间的定域算符，因为按要求它们把一个粒子由 $\boldsymbol{x}$ 点反射到 $-\boldsymbol{x}$ 点. P. Federbush *and* M. Grisaru, *Nuovo Cimento*, **9**, 1058 (1958).

正号，就有

$$\mathscr{P}_s = \exp\left\{\frac{-i\pi}{2}\int d^3k\,[a^\dagger(k)a(k) - a^\dagger(k)\,a(-k)]\right\} \tag{15.84}$$

$\mathscr{P}$ 的幺正性由(15.83)及(15.84)中 P 的厄米性保证，(15.76)给出的真空态的偶宇称性质的约定则由 P 中算符的正规编序所保证.

对于相互作用场，可以类似地建立宇称算符 $\mathscr{P}$，它也满足(15.73). 但是必需检验，(15.71)和(15.72)是否仍然成立，使得 $\mathscr{P}$，作为理论的一个对称操作，和哈氏量对易

$$[\mathscr{P},H] = 0 \tag{15.85}$$

并且是一个守恒量.

为求得满足(15.73)的 $\mathscr{P}$，我们首先构造算符 $\mathscr{P}_0$，它在 $t = 0$ 时候满足(15.73). 显然，$\mathscr{P}_0$ 的建立和自由场情形没有什么不一样，因为从(15.23)我们知道，相互作用场在 $t = 0$ 时刻的展开系数满足和自由场一样的对易代数. 于是 $\mathscr{P}_0$ 也就由自由场情形的(15.83)或(15.84)给出，其中自由场的产生和消灭算符被相互作用场在 $t = 0$ 时刻的展开系数所取代. 为得到 $\mathscr{P}$，可以利用哈氏量算符作时间平移. 这就是说，如果

$$\mathscr{P}_0\varphi(\boldsymbol{x},0)\mathscr{P}_0^{-1} = \pm\varphi(-\boldsymbol{x},0) \tag{15.86}$$

则

$$\mathscr{P}(t) = e^{iHt}\mathscr{P}_0e^{-iHt} \tag{15.87}$$

在任何时候 t 都满足 (15.73). 假如 $\mathscr{P}$ 是对称操作，即(15.85)成立，从(15.87)立即就有

$$\mathscr{P}(t) = \mathscr{P}(0) = \mathscr{P}_0$$

对于 Dirac 场，如果采用如下选择：

$$\mathscr{P}\psi(\boldsymbol{x},t)\mathscr{P}^{-1} = \gamma_0\psi(-\boldsymbol{x},t) \tag{15.88}$$

则基本条件 (15.71)、(15.72) 以及对易关系的不变性都能被满足. 在 (2.33) 中我们已经表明了，Dirac 方程在上述宇称变换下是不变的;反对易关系 (13.53) 和 (13.54) 的不变性也已经证明过了.

和前面一样,为了得到 Dirac 场的 $\mathscr{P}$ 算符，最好也是利用展开系数来表示,写作

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}\sum_{\pm s}[\mathscr{P}b(p,s)\mathscr{P}^{-1}u(p,s)e^{-iE_pt+ip\cdot x} + \mathscr{P}d^\dagger(p,s)\mathscr{P}^{-1}v(p,s)e^{+iE_pt-ip\cdot x}]$$
$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}\sum_{\pm s}[b(p,s)\gamma_0u(p,s)e^{-iE_pt-ip\cdot x} + d^\dagger(p,s)\gamma_0v(p,s)e^{+iE_pt+ip\cdot x}] \tag{15.89}$$

把 $\boldsymbol{p}$ 换为 $-\boldsymbol{p}$ 并在 (15.89) 的右端利用旋量的性质

$$\gamma_0u(-p,s)=u(p,s)\qquad \gamma_0v(-p,s)=-v(p,s) \tag{15.90}$$

我们得条件

$$\mathscr{P}b(p,s)\mathscr{P}^{-1}=b(-p,s)$$
$$\mathscr{P}d^\dagger(p,s)\mathscr{P}^{-1}=-d^\dagger(-p,s) \tag{15.91}$$

对 $b^\dagger$ 和 d，条件类似.

既然 $b^\dagger$ 作用于真空时产生一个电子或重子态而 $d^\dagger$ 产生一个正电子或反重子，那末由 (15.91) 我们可以说，处于同一轨道角动量状态的电子和正电子具有相反的宇称. 不管 (15.88) 的相因子如何取,在宇称算符作用下电子态如标量一样变换而正电子如赝标量变换. 不管相因子如何，相对角动量是 s 态的正、负电子对具有奇的内禀宇称. 类似地,相对地为 s 态的正、反重子对的宇称也是负的,只要理论的宇称算符像在 (15.85) 中那样是对称操作:

$$\mathscr{P}\int d^3p f(\boldsymbol{p}^2)b^\dagger(p,s)d^\dagger(p,s)|0\rangle$$
$$=-\int d^3p f(\boldsymbol{p}^2)b^\dagger(p,s)d^\dagger(p,s)|0\rangle \qquad (15.92)$$

为建立 Dirac 场的宇称算符的具体表示式只需重复(15.79)到(15.84)的各步,我们有

$$\mathscr{P}_{\text{Dirac}}=\exp(iP_{\text{Dirac}})$$
$$P_{\text{Dirac}}=-\frac{\pi}{2}\int d^3p[b^\dagger(p,s)b(p,s)-b^\dagger(p,s)b(-p,s)$$
$$+d^\dagger(p,s)d(p,s)+d^\dagger(p,s)d(-p,s)] \qquad (15.93)$$

变换式(15.88)中含有 γ_0 这一事实导致 $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ 成为赝标量;即

$$\mathscr{P}\bar{\psi}(\boldsymbol{x},t)\gamma_5\psi(\boldsymbol{x},t)\mathscr{P}^{-1}$$
$$=-\bar{\psi}(-\boldsymbol{x},t)\gamma_5\psi(-\boldsymbol{x},t) \qquad (15.94)$$

这对于介子—核子相互作用是重要的. 例如,当(且仅当)如实验所要求的那样对介子采用赝标算符(15.83)时,(15.30)模型的拉氏量在作用到所有核子和介子上的联合宇称操作

$$\mathscr{P}=\mathscr{P}_p\mathscr{P}_n\mathscr{P}_{\pi^+}\mathscr{P}_{\pi^0}\mathscr{P}_{\pi^-}$$

下才满足(15.71).

电磁场的内禀宇称可用对应论证确定,因为它与经典流耦合. 所以对于光子我们指定

$$\mathscr{P}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\mathscr{P}^{-1}=-\boldsymbol{A}(-\boldsymbol{x},t) \qquad (15.95)$$

它使 Maxwell 拉氏量不变. $\mathscr{P}$ 算符的建立仿照 Klein-Gordon 场的步骤.

15.12 电荷共轭

电荷共轭作为一种对称操作,就是把粒子和反粒子的地位互换. 在第五章,应用于电子时,这归结为改变电荷与电磁

场的符号．这一解释此处仍然适用．用包括观测仪器的外场 A_μ^{ext} 在内的拉氏量 (15.69) 来表示时，这就导致以下的要求：对于一个电荷共轭不变的理论来说，存在一个幺正算符 $\mathscr{C}$ 使得

$$\mathscr{C}\mathscr{L}(x)\mathscr{C}^{-1}=\mathscr{L}(x)\qquad \mathscr{C}j_\mu(x)\mathscr{C}^{-1}=-j_\mu(x) \tag{15.96}$$

其中 $j_\mu(x)$ 是电磁流．$\mathscr{C}$ 也应该把非厄米场所描述的电中性粒子，如 K^0、n 和 Λ 变为它们的反粒子 $\bar{K}^0$、$\bar{n}$ 和 $\bar{\Lambda}$，以使奇异数、核子数和同位旋的守恒律在 $\mathscr{C}$ 作用下是不变的．对于厄米场所描述的光子和 π^0 介子，粒子与其反粒子不能区分，在 $\mathscr{C}$ 作用下厄米场至多只能改变一个 (-1) 的因子．电磁场 $\boldsymbol{A}(x)$ 在 $\mathscr{C}$ 作用下必须作如下变换：

$$\mathscr{C}\boldsymbol{A}(x)\mathscr{C}^{-1}=-\boldsymbol{A}(x) \tag{15.97}$$

使得拉氏量中的 $\boldsymbol{j}(x)\cdot\boldsymbol{A}(x)$ 项保持不变．在动量空间这导致

$$\mathscr{C}a^\dagger(k,\lambda)\mathscr{C}^{-1}=-a^\dagger(k,\lambda) \tag{15.98}$$

仿照求宇称算符的方法可以推得

$$\mathscr{C}=\exp\left[i\pi\int d^3k\sum_{\lambda=1}^{2}a^\dagger(k,\lambda)a(k,\lambda)\right] \tag{15.99}$$

有相互作用时，(15.99) 的 $\mathscr{C}$ 不再是理论的对称算符．此时，可以像 (15.86)、(15.87) 建立 $\mathscr{P}$ 那样，通过

$$\mathscr{C}(t)=e^{iHt}\mathscr{C}_0e^{-iHt} \tag{15.100}$$

建立 $\mathscr{C}$．其中 $\mathscr{C}_0$ 在 $t=0$ 满足 (15.97) 并且由 (15.99) 给出，其中 $a^\dagger$ 与 a 则是 $t=0$ 时刻有相互作用的光子场的展开系数．对于自由场理论，真空 $|0\rangle$ 是非简并的，所以是对称算符 $\mathscr{C}$ 的本征态．我们采用类似于 (15.76) 对 $\mathscr{P}$ 的选择来选取幺正算符的相因子使得

$$\mathscr{C}|0\rangle=+|0\rangle \tag{15.101}$$

就是说，真空是偶的本征态．根据(15.97)以及这里的选择，对于一个 n 光子态 $\mathscr{C}$ 的本征值为 $(-1)^n$．这称为一个态的**荷宇称**．在有相互作用的情况下，只要继续假定真空是非简并的，我们就仍然保留(15.101)的约定．

$\mathscr{C}$ 对 π^0 介子作用时符号的选择由对衰变过程 $\pi^0 \to 2\gamma$ 的实验观察来决定．如果强作用和电磁相互作用是电荷共轭不变的话，那末，因为双光子态按(15.97)具有偶荷宇称，所以 π^0 在 $\mathscr{C}$ 变换下也应该是偶的．

现在考虑荷电 π 介子场．自然是考虑 $\mathscr{C}$ 对 φ 和 φ^* 的作用较为方便，它们分别产生负电荷和正电荷的本征态．因为在 $\varphi \rightleftarrows \varphi^*$ 变换下，$\mathscr{L}(x) \to \mathscr{L}(x)$，$j_\mu(x) \to -j_\mu(x)$，所以能得到 $\mathscr{C}$ 的性质

$$\mathscr{C}\varphi(x)\mathscr{C}^{-1} = \varphi^*(x) \qquad \mathscr{C}\varphi^*(x)\mathscr{C}^{-1} = \varphi(x) \tag{15.102}$$

上式正确到一个任意相因子．用(12.57)的 π^+ 和 π^- 的产生、消灭算符来表示，就有

$$\mathscr{C}a_+^\dagger(k)\mathscr{C}^{-1} = a_-^\dagger(k) \qquad \mathscr{C}a_-^\dagger(k)\mathscr{C}^{-1} = a_+^\dagger(k) \tag{15.103}$$

而如果用(12.52)的厄米场 $\varphi_1(x)$和 $\varphi_2(x)$，则有

$$\mathscr{C}\varphi_1(x)\mathscr{C}^{-1} = \varphi_1(x) \qquad \mathscr{C}\varphi_2(x)\mathscr{C}^{-1} = -\varphi_2(x) \tag{15.104}$$

或者在动量空间有

$$\mathscr{C}a_1(k)\mathscr{C}^{-1} = a_1(k) \qquad \mathscr{C}a_2(k)\mathscr{C}^{-1} = -a_2(k) \tag{15.105}$$

这表明，$\mathscr{C}$ 是同位旋空间相对于(1,3)平面的反射算符．物理上很容易看出，$\mathscr{C}$ 的本征态应该含有等数的 π^+ 和 π^- 介子，因此是电中性的．形式上这可以由如下关系检验：

$$\mathscr{C}Q = -Q\mathscr{C} \tag{15.106}$$

为了对全体 π 介子场 $(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ 求得 $\mathscr{C}$ 算符，从 (15.104) 我们注意到，只有 φ_2 不和 $\mathscr{C}$ 对易．按照应用于光子的方法，我们有

$$\mathscr{C} = \exp\left[i\pi\int d^3k a_2^\dagger(k)a_2(k)\right] \qquad (15.107)$$

对于 $\mathscr{C}$ 不是运动常数的一般情形，我们可象 (15.100) 那样来构造 $\mathscr{C}$．

类似的考虑可应用于 K 介子．上面这些分析可以不加更改地去描述 K^+ 和 K^- 场．由 (15.64)、(15.66) 和 (15.68) 可以看出，对于 K^+ 介子 $Q_{K^+} = S_{K^+} = Y_{K^+}$，由 (15.106) 有 $\mathscr{C}$ 和 S、Y 反对易．此外，K^0 和 $\bar{K}^0$，必须在 $\mathscr{C}$ 作用下互相转换，就如 K^+ 与 K^- 的关系．唯一的差别是现在 Q 等于零．但是 $\mathscr{C}$ 仍然与 S、Y 反对易．由于 $\varphi_{K^0}^*$ 和 φ_{K^0} 产生 K^0 和 $\bar{K}^0$，它们都是 S 的本征态．那末，厄米的线性组合[1]

$$\varphi_{K_1} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\varphi_{K^0} - \varphi_{K^0}^*) \quad \varphi_{K_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_{K^0} + \varphi_{K^0}^*) \qquad (15.108)$$

就如带电 π 介子的 (15.104) 中的 φ_1 和 φ_2 那样，产生具有偶荷宇称和奇荷宇称的态．这些态在中性 K 介子的弱衰变理论中是很重要的[2]．

关于 Dirac 粒子的电荷共轭的讨论已在本书上册中给出．自由 Dirac 方程在作如下替换

$$\psi(x) \to C\bar{\psi}^T(x) \qquad (15.109)$$

时是不变的．其中 C 是 4×4 矩阵，具有下述性质

$$C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T \text{ 或者 } C_{\alpha\beta}\gamma_{\beta\lambda}^\mu C_{\lambda\tau}^{-1} = -\gamma_{\tau\alpha}^\mu \qquad (15.110)$$

---

1) 已知 K^0 具有奇宇称，根据 (15.108) K_1 在联合操作 $\mathscr{C}\mathscr{P}$ 作用下是偶的，K_2 则表现为奇的．

2) 见 Proc. 1964 Intern. Conf. High-energy Phys. (Dubna).

在 $\gamma_0 = \gamma_0^T$ 以及 $\gamma_2 = \gamma_2^T$ 的表示中，我们在 (5.6) 里选择

$$C = i\gamma^2\gamma^0 = -C^{-1} = -C^\dagger = -C^T \qquad (15.111)$$

在场论中我们寻求这样的幺正算符 $\mathscr{C}$，它应能产生 (15.109) 的变换：

$$\mathscr{C}\psi_\alpha\mathscr{C}^{-1} = C_{\alpha\beta}\bar{\psi}_\beta(x) = (C\gamma^0)_{\alpha\beta}\psi^\dagger_\beta(x)$$

以及

$$\mathscr{C}\bar{\psi}_\alpha(x)\mathscr{C}^{-1} = -\psi_\beta(x)C^{-1}_{\beta\alpha} \qquad (15.112)$$

式中的 C 矩阵由 (15.110) 和 (15.111) 给出，可以差一个使人不感兴趣的相因子. (15.112) 中相乘矩阵的次序已用下标表明，务必要注意.

容易检验，在 $\mathscr{C}$ 变换下对易关系式 (13.53)、(13.54) 以及 Dirac 方程是不变的，(13.42) 的 $\mathscr{L}$ 之改变也只是一个无关紧要的全散度.

作用于 $\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$ 时，$\mathscr{C}$ 给出

$$\begin{aligned}\mathscr{C}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\mathscr{C}^{-1} &= -\psi_\alpha(x)C^{-1}_{\alpha\beta}\gamma^\mu_{\beta\lambda}C_{\lambda\tau}\bar{\psi}_\tau(x)\\ &= \psi_\alpha(x)\gamma^\mu_{\tau\alpha}\bar{\psi}_\tau(x) \qquad (15.113)\end{aligned}$$

不过，在 §15.5 中我们已经注意到，为了把 $\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$ 解释为流算符，除非把它的 Dirac 场算符如 (15.26) 那样反对称化(或等价地，正规编序)，否则会出现困难. 令

$$j_\mu(x) = 1/2[\bar{\psi}(x), \gamma_\mu\psi(x)]$$

由 (15.113) 直接推得

$$\mathscr{C}j_\mu\mathscr{C}^{-1} = -j_\mu(x) \qquad (15.114)$$

可见，电磁流在 $\mathscr{C}$ 变换下确实是奇的，符合 (15.96) 的要求. 由此，如果真空是非简并的，它就是 $\mathscr{C}$ 的本征态，并且

$$\langle 0|j_\mu(x)|0\rangle = 0.$$

为了构造 $\mathscr{C}$ 算符，我们采用动量空间. 在第五章中曾给出，电子和正电子的旋量之间有

$$(C\gamma^0)_{\alpha\beta}u^\dagger_\beta(p,s) = v_\alpha(p,s)e^{i\varphi(p,s)}$$

$$(C\gamma^0)_{\alpha\beta}v^\dagger_\beta(p,s) = u_\alpha(p,s)e^{i\varphi(p,s)}$$

作 (15.122) 式的动量展开，我们有

$$\mathscr{C}b(p,s)\mathscr{C}^{-1} = d(p,s)e^{i\varphi(p,s)}$$

$$\mathscr{C}d^\dagger(p,s)\mathscr{C}^{-1} = b^\dagger(p,s)e^{i\varphi(p,s)}$$

这表明，电荷共轭变换确实把粒子算符和反粒子算符互换了，符合电荷共轭变换的定义. $\mathscr{C}$ 算符表达式的构造和前面用过的步骤相类似. 首先，方便的是把 $\mathscr{C}$ 表示为两个幺正算符的乘积

$$\mathscr{C} = \mathscr{C}_2\mathscr{C}_1 \tag{15.115}$$

并选择 $\mathscr{C}_1$ 去掉相因子 φ:

$$\mathscr{C}_1 b(p,s)\mathscr{C}_1^{-1} = e^{i\varphi(p,s)}b(p,s)$$

$$\mathscr{C}_1 d^\dagger(p,s)\mathscr{C}_1^{-1} = e^{i\varphi(p,s)}d^\dagger(p,s)$$

明显地表示出来，就有

$$\mathscr{C}_1 = \exp\left\{-i\int d^3p \sum_{\pm s}\varphi(p,s)[b^\dagger(p,s)b(p,s) - d^\dagger(p,s)d(p,s)]\right\} \tag{15.116}$$

$\mathscr{C}_2$ 的推导可借用类似于确定宇称算符 (15.84) 的同样技术，我们有

$$\mathscr{C}_2 = \exp\left\{\frac{i\pi}{2}\int d^3p \sum_{s=1}^{2}[b^\dagger(p,s) - d^\dagger(p,s)] \times [b(p,s) - d(p,s)]\right\} \tag{15.117}$$

假如 $\mathscr{C}$ 不是运动常数，(15.116) 和 (15.117) 仅在 $t = 0$ 时刻成立；和前面一样，利用 (15.100) 可得任意时刻 t 的 $\mathscr{C}$.

下面的证明我们留给读者作为练习：按模型 (15.30) 引入的 π 介子-核子相互作用，只要 $\mathscr{C}$ 变换同时作用于 $\mathscr{L}$ 所包含的所有场时，电荷共轭不变性不会被破坏. 对于电磁耦合，对称性也是保持的；事实上，电荷共轭对称正是这样被引

入的.

下面我们拿电子偶素（*positronium*）衰变作为电荷共轭不变性用于予言选择定则的例子. 如对中性K介子那样，我们也可以组成在$\mathscr{C}$作用下的偶的或奇的电子偶素本征态. 我们首先从真空中建立一对自由的电子-正电子对，然后把具有不同自旋和动量的自由电子-正电子态迭加以组成具有给定角动量的电子偶素态

$$\Psi_{e^+e^-}=\int d^3pd^3p'\sum_{s,s'}\mathscr{F}(p,s;p',s')b^\dagger(p,s)d^\dagger(p',s')|0\rangle \tag{15.118}$$

虽然在有电磁耦合时（15.118）并不是所要求的真正的态，但是因为电磁相互作用在$\mathscr{C}$作用下的不变性，它具有和真正物理态一样的对称性质. 所以，我们只需确定，什么样的振幅$\mathscr{F}(p,s;p',s')$对应的态在$\mathscr{C}$变换下是偶的，它就应该衰变为两个光子；什么样的态对应于奇态，它就衰变到三个光子. 将$\mathscr{C}$作用于（15.118），并利用$b^\dagger$和$d^\dagger$的反对易代数[1]，得

$$\mathscr{C}\Psi_{e^+e^-}=\int d^3pd^3p'\sum_{s,s'}\mathscr{F}(p,s;p's')d^\dagger(p,s)b^\dagger(p',s')|0\rangle$$

$$=-\int d^3pd^3p'\sum_{s,s'}\mathscr{F}(p',s';p,s)b^\dagger(p,s)d^\dagger(p',s')|0\rangle$$

显然，电子——正电子交换时表现为偶的态

$$\mathscr{F}(p,s;p',s')=+\mathscr{F}(p',s';p,s)$$

在$\mathscr{C}$作用下则表现为奇的(有奇的荷称)；反之，对于电子-正电子交换为奇的态具有偶荷称. 因此，电子偶素的$^3S_1$三重态衰变时放出三个光子而$^1S_0$单态衰变为一对光子.

一个玻色子和反玻色子的对称态在$\mathscr{C}$作用下是偶的，因为由于反对易关系而出现的负号对于玻色子是不存在的. 作

1) 我们略去了相因子$\varphi(p,s)$. 其正确性可见问题 23.

为一般的规律这样来记它是方便的: 粒子-反粒子对的电荷共轭本征值是 $+1$，只要这个态对二个全同粒子也是允许的(对玻色子，偶的；对费米子，奇的)。对于奇的本征函数，情况则刚好相反。

15.13 时间反演

时间反演意味着改变时间进行的方向，由 t 变为

$$t' = -t.$$

对于单粒子的 Dirac 理论我们已经知道，如果在 t' 取代 t 的同时伴以取波函数的复共轭并以矩阵 $T = i\gamma^1\gamma^3$ (在只有 γ^2 是虚的 γ 矩阵的表示中)去乘它，那末时间反演是一个对称操作。在场论中我们的目的是要寻求一个算符 $\mathscr{T}$，它把一个沿时间 t 发展的物理状态变为另一个好像是按时间 $t' = -t$ 倒过来放映的电影上所看到的物理态。量子条件 (11.70) 表明，$\mathscr{T}$ 就如在单粒子理论那样，不会是一个线性算符。譬如说，考虑

$$[H, \varphi_r(\boldsymbol{x}, t)] = -i\frac{\partial \varphi_r(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} \qquad (15.119)$$

我们寻找一个幺正算符 $\mathscr{U}$，它不改变作用量并且变 $\varphi_r(\boldsymbol{x}, t)$ 为 $W_{rs}\varphi_s(\boldsymbol{x}, t') = \mathscr{U}\varphi_r(\boldsymbol{x}, t)\mathscr{U}^{-1}$，有

$$[\mathscr{U}H\mathscr{U}^{-1}, \varphi_s(\boldsymbol{x}, t')] = +i\frac{\partial \varphi_s(\boldsymbol{x}, t')}{\partial t'} \qquad (15.120)$$

为使上式恢复到 (15.119)，就要求 (15.120) 中 $\mathscr{U}$ 把 H 变为 $-H$。但是，这在物理上是不可取的，因为不管是变换前还是变换后，H 的本征值相对于真空态都应该是正的。在这种情况下，我们只能如 (5.14) 那样，用一个非幺正的 $\mathscr{T}$ 来解决这一问题，也就是在幺正算符 $\mathscr{U}$ 上再加一个 K，它使所有的 C

数取复共轭[1]. 这样,如果

$$\mathscr{T}=\mathscr{U}K \text{ 而且 } \mathscr{T}H\mathscr{T}^{-1}=H \qquad (15.121)$$

则(15.119)在 $\mathscr{T}$ 作用下不变. 用含有与外场相互作用的拉氏密度(15.69)来表示,如果存在一个 $\mathscr{T}$,它保持对易关系不变,则理论是时间反演不变的,即:

$$\mathscr{T}\mathscr{L}(\boldsymbol{x},t)\mathscr{T}^{-1}=\mathscr{L}(\boldsymbol{x},-t) \qquad (15.122)$$

以及

$$\mathscr{T}j_\mu(\boldsymbol{x},t)\mathscr{T}^{-1}=j^\mu(\boldsymbol{x},-t) \qquad (15.123)$$

在(15.123)中,电荷在时间反演时不变,但电磁流却方向颠倒. 这是经典对应所要求的,因为外电磁场在时间反演下

$$A_\mu(\boldsymbol{x},t)\to A^\mu(\boldsymbol{x},-t) \qquad (15.124)$$

于是,由(15.123)

$$j_\mu(\boldsymbol{x},t)A^\mu(\boldsymbol{x},t)\to +j_\mu(\boldsymbol{x},-t)A^\mu(\boldsymbol{x},-t)$$

这样 $\mathscr{T}$ 按如下方式改变作用量:

$$\mathscr{T}J(t_2,t_1)\mathscr{T}^{-1}=\int_{t_1}^{t_2}\mathscr{L}(\boldsymbol{x},-t)d^3x\,dt$$

$$=\int_{-t_2}^{-t_1}d^3x\,dt\,\mathscr{L}(x)=J(-t_1,-t_2) \qquad (15.125)$$

$J(-t_1,-t_2)$ 与 $J(t_2,t_1)$ 之差别只在于时间平移,
而这也是理论的对称操作. 所以,(15.122)和(15.123)是时间反演不变的令人满意的判据.

下面我们分别讨论各种自由场理论的 $\mathscr{T}$ 算符并且从电磁场开始. 根据(15.123)

$$\mathscr{T}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\mathscr{T}^{-1}=-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},-t) \qquad (15.126)$$

---

1) '取复共轭'这样一个算符是非线性的;$\mathscr{T}$ 称为反线性或反幺正算符. 见 E. P. Wigner, *Göttinger Nachr.*, **31**, 546 (1932); W. Pauli (*ed.*) "*Niels Bohr and the development of Physics*," *McGraw-Hill Book Company, New York*, 1955; *and* G. Lüders, *Ann. Phys.* (*N. Y.*), **2**, 1(1957).

因为场是流产生的而流因 $\mathscr{T}$ 而反向. 这一变换对于 Maxwell 拉氏量在横向规范下(如 (14.9)) 使 (15.122) 成立. 它也使等时对易关系 (14.13) 和 (14.17) 由于K之存在而保持不变. 为了构造 $\mathscr{T}$, 让我们转向动量空间. 将展开式 (14.33) 代入 (15.126), 我们得到

$$\begin{aligned}\mathscr{T}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\mathscr{T}^{-1}&=\int\frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}}\sum_{\lambda=1}^{2}\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)\\&\times[\mathscr{U}a(k,\lambda)\mathscr{U}^{-1}e^{i\omega t-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\\&+\mathscr{U}a^{\dagger}(k,\lambda)\mathscr{U}^{-1}e^{-i\omega t+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}]\\&=-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},-t)=-\int\frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}}\sum_{\lambda=1}^{2}\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)\\&\times[a(k,\lambda)e^{i\omega t+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}+a^{\dagger}(k,\lambda)e^{-i\omega t-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}]\end{aligned}\tag{15.127}$$

利用 (14.31) 的约定

$$\boldsymbol{\varepsilon}(k,1)=-\boldsymbol{\varepsilon}(-k,1)\qquad\boldsymbol{\varepsilon}(k,2)=+\boldsymbol{\varepsilon}(-k,2)$$

于是就有

$$\begin{aligned}\mathscr{U}a(k,1)\mathscr{U}^{-1}&=+a(-k,1)\\\mathscr{U}a(k,2)\mathscr{U}^{-1}&=-a(-k,2)\end{aligned}\tag{15.128}$$

为求解 (15.128), 我们援引 (15.78),(15.83) 和 (15.84) 对标量和赝标量场求字称算符的方法,得

$$\begin{aligned}\mathscr{U}=\exp\Big\{\frac{-i\pi}{2}\int d^3k[&a^{\dagger}(k,1)a(k,1)\\&-a^{\dagger}(k,1)a(-k,1)+a^{\dagger}(k,2)a(k,2)\\&+a^{\dagger}(k,2)a(-k,2)]\Big\}\end{aligned}\tag{15.129}$$

对于自由、厄米的 Klein-Gordon 场,合乎要求的 $\mathscr{T}$ 的判据 (15.122) 和 (15.123), 在作如下选择时

$$\mathscr{T}\varphi(\boldsymbol{x},t)\mathscr{T}^{-1}=\pm\varphi(\boldsymbol{x},-t)\tag{15.130}$$

即可被满足.对于带电粒子场, $\mathscr{T}$ 把 $j_{\mu}(\boldsymbol{x},t)$ 变为 $j^{\mu}(\boldsymbol{x},-t)$

的要求提示我们作如下选择

$$\mathscr{T}\varphi(\boldsymbol{x},t)\mathscr{T}^{-1}=\pm\varphi(\boldsymbol{x},-t) \tag{15.131}$$

于是，对于 π 介子场的三个厄米分量我们取

$$\mathscr{T}\begin{bmatrix}\varphi_1(\boldsymbol{x},t)\\ \varphi_2(\boldsymbol{x},t)\\ \varphi_3(\boldsymbol{x},t)\end{bmatrix}\mathscr{T}^{-1}=\pm\begin{bmatrix}+\varphi_1(\boldsymbol{x},-t)\\ -\varphi_2(\boldsymbol{x},-t)\\ +\varphi_3(\boldsymbol{x},-t)\end{bmatrix} \tag{15.132}$$

对于三个分量都有一共同的任意相因子。$\mathscr{T}$ 算符的构成与 Maxwell 场情形类似。

对于 Dirac 场我们寻求一个 $\mathscr{T}$ 算符使得

$$\mathscr{T}\psi_\alpha(\boldsymbol{x},t)\mathscr{T}^{-1}=T_{\alpha\beta}\psi_\beta(\boldsymbol{x},-t) \tag{15.133}$$

它必须满足(15.122)和(15.123)并且不改变反对易式 (13.53) 和 (13.54)。容易证明，如果我们让 T 等于单粒子理论中的矩阵 (5.15)，则上面这些要求就会得到满足，即是：

$$T=i\gamma^1\gamma^3 \qquad T\gamma_\mu T^{-1}=\gamma_\mu^T=\gamma^{\mu *}$$

在只有 γ^2 是纯虚的表示中

$$T=T^\dagger=T^{-1}=-T^* \tag{15.134}$$

譬如说，(15.123) 式可以验证如下：

$$\mathscr{T}j_\mu(\boldsymbol{x},t)\mathscr{T}^{-1}=\phi^\dagger(\boldsymbol{x},-t)T^{-1}(\gamma_0\gamma_\mu)^*T\phi(\boldsymbol{x},-t)$$

$$-\langle 0|\bar{\psi}\gamma_\mu\psi|0\rangle=\bar{\phi}(\boldsymbol{x},-t)\gamma^\mu\phi(\boldsymbol{x},-t)$$

$$-\langle 0|\bar{\psi}\gamma_\mu\psi|0\rangle=j^\mu(\boldsymbol{x},-t)$$

(15.133) 与单粒子理论不同，在那里是

$$\phi(\boldsymbol{x},t)\to T\phi^*(\boldsymbol{x},-t),$$

有一个取复共轭的手续。但是在场论里，相似变换 $\phi\to T\phi^\dagger$ 却是不可取的，因为这将导致一个静止的电子变为一个正电子态。

转入动量空间以构造 $\mathscr{T}$，(15.133) 成为

$$\int\frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3}}\sqrt{\frac{m}{E}}\sum_{\pm s}[\mathscr{U}b(p,s)\mathscr{U}^{-1}u^*(p,s)e^{iEt-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}$$

$$+\mathscr{U}d^{\dagger}(p,s)\mathscr{U}^{-1}v^{*}(p,s)e^{-iEt+ip\cdot x}]$$

$$=\int\frac{d^{3}p}{\sqrt{(2\pi)^{3}}}\sqrt{\frac{m}{E}}\sum_{\pm s}[b(p,s)Tu(p,s)e^{iEt+ip\cdot x}$$

$$+d^{\dagger}(p,s)Tv(p,s)e^{-iEt-ip\cdot x}] \tag{15.135}$$

由单粒子理论关于时间反演的讨论[见 (5.16)] 得到

$$Tu(p,s)=u^{*}(-p,-s)e^{i\alpha_{+}(p,s)}$$

$$Tv(p,s)=v^{*}(-p,-s)e^{i\alpha_{-}(p,s)} \tag{15.136}$$

其中 $\alpha_{\pm}$ 是依赖于自旋态的相因子. 对 (15.136) 再作用一次 T 并考虑到 $T^{2}=1$, 得到

$$\alpha_{\pm}(p,s)=\pi+\alpha_{\pm}(-p,-s) \tag{15.137}$$

利用 (15.136) 可知,如果

$$\mathscr{U}b(p,s)\mathscr{U}^{-1}=-b(-p,-s)e^{i\alpha_{+}(p,s)}$$

$$\mathscr{U}d^{\dagger}(p,s)\mathscr{U}^{-1}=-d^{\dagger}(-p,-s)e^{i\alpha_{-}(p,s)} \tag{15.138}$$

(15.135) 就能被满足. 为了容易求得 $\mathscr{U}$, 最好把它写成两个幺正算符的乘积

$$\mathscr{U}=\mathscr{U}_{2}\mathscr{U}_{1} \tag{15.139}$$

$\mathscr{U}_{1}$ 可以选择为其作用只是移走相因子

$$\mathscr{U}_{1}b(p,s)\mathscr{U}_{1}^{-1}=e^{i\alpha_{+}(p,s)}b(p,s)$$

$$\mathscr{U}_{1}d^{\dagger}(p,s)\mathscr{U}_{1}^{-1}=e^{i\alpha_{-}(p,s)}d^{\dagger}(p,s) \tag{15.140}$$

并明显表示如下

$$\mathscr{U}_{1}=\exp\left\{-i\int d^{3}p\sum_{\pm s}[\alpha_{+}(p,s)b^{\dagger}(p,s)b(p,s)\right.$$

$$\left.-\alpha_{-}(p,s)d^{\dagger}(p,s)d(p,s)]\right\} \tag{15.141}$$

此时 $\mathscr{U}_{2}$ 应满足

$$\mathscr{U}_{2}b(p,s)\mathscr{U}_{2}^{-1}=-b(-p,-s)$$

$$\mathscr{U}_{2}d^{\dagger}(p,s)\mathscr{U}_{2}^{-1}=-d^{\dagger}(-p,-s) \tag{15.142}$$

利用类似于求宇称算符 (15.83) 的方法我们得到

$$\mathscr{U}_2 = \exp\left\{-i\frac{\pi}{2}\int d^3p \sum_{\pm s}[b^\dagger(p,s)b(p,s) + b^\dagger(p,s)b(-p,-s) - d^\dagger(p,s)d(p,s) - d^\dagger(p,s)d(-p,-s)]\right\} \tag{15.143}$$

(15.138)表明：一个能量—动量为 E_p、$\boldsymbol{p}$，自旋为 $\boldsymbol{s}$ 的自由电子或正电子的时间反演态是一个具有本征值为 E_p、$-\boldsymbol{p}$、$-\boldsymbol{s}$ 的同样粒子的态，即动量、自旋反号而能量仍然是正的态．这两个态的波函数的关系是[1]：

$$\begin{aligned}
\psi_{E_p,p,s}(\boldsymbol{x},t) &= \langle 0|\phi(\boldsymbol{x},t)|1\text{ 个电子；}\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}\rangle \\
&= \langle K0|K\phi(\boldsymbol{x},t)1\text{ 个电子；}\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}\rangle^* \\
&= \langle K0|\mathscr{U}^{-1}\mathscr{U}K\phi(\boldsymbol{x},t)1\text{ 个电子；}\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}\rangle^* \\
&= \langle 0|\mathscr{T}\phi(\boldsymbol{x},t)\mathscr{T}^{-1}|\mathscr{T}(1\text{ 个电子；}\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})\rangle^* \\
&= -e^{i\alpha_+(p,s)}T^*\langle 0|\phi(\boldsymbol{x},-t)|1\text{ 个电子；}-\boldsymbol{p},-\boldsymbol{s}\rangle^* \\
&= e^{i\alpha_+(p,s)}T\phi^*_{E_p,-p,-s}(\boldsymbol{x},-t)
\end{aligned} \tag{15.144}$$

(15.144)说明，互为时间反演的两个波函数都是和对方的复共轭发生关系，这和单粒子理论一样．

在相互作用场情形，虽然我们只有场算符在 $t=0$ 时的展开式，我们仍然可以借用上面得到的算符．因为 $t=0$ 时的对易关系和自由场的对易式没有什么不同，所以可以构造一个 $\mathscr{T}_0$ 算符，使自由场算符的各种关系式的形式保持不变

$$\begin{aligned}
&\mathscr{T}_0\psi_\alpha(\boldsymbol{x},0)\mathscr{T}_0^{-1} = T_{\alpha\beta}\Psi_\beta(\boldsymbol{x},0) \\
&\mathscr{T}_0\varphi(\boldsymbol{x},0)\mathscr{T}_0^{-1} = \pm\varphi(\boldsymbol{x},0) \\
&\mathscr{T}_0\dot{\varphi}(\boldsymbol{x},0)\mathscr{T}_0^{-1} = \mp\dot{\varphi}(\boldsymbol{x},0) \\
&\mathscr{T}_0\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},0)\mathscr{T}_0^{-1} = -\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},0) \\
&\mathscr{T}_0\dot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},0)\mathscr{T}_0^{-1} = +\dot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},0)
\end{aligned} \tag{15.145}$$

---

1) 注意，在下式第二行，我们通过对矩阵元取复共轭而把 K 算符分离出来，还有 $T^* = -T$ 来自(15.134)．

上式中的 $\mathscr{T}_0$ 就是对自由场推得的 $\mathscr{T}$，其中 $a^\dagger$、b、d 等算符被 $t=0$ 时 (15.23) 的展开系数所取代. 为了得到任意时刻 t 的 $\mathscr{T}$ 我们利用[1]

$$\mathscr{T}=e^{-iHt}\mathscr{T}_0e^{-iHt} \tag{15.146}$$

就有

$$\begin{aligned}\mathscr{T}\psi_\alpha(\boldsymbol{x},t)\mathscr{T}^{-1}&=e^{-iHt}\mathscr{T}_0\psi_\alpha(\boldsymbol{x},0)\mathscr{T}^{-1}e^{iHt}\\&=e^{-iHt}T_{\alpha\beta}\psi_\beta(\boldsymbol{x},0)e^{iHt}=T_{\alpha\beta}\psi_\beta(\boldsymbol{x},-t)\end{aligned}$$

这正是所要求的[见 (15.133)].

类似地，可以得到

$$\mathscr{T}\varphi(\boldsymbol{x},t)\mathscr{T}^{-1}=\pm\varphi(\boldsymbol{x},-t)$$

以及

$$\mathscr{T}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\mathscr{T}^{-1}=-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},-t)$$

如果这样建立的 $\mathscr{T}$ 也满足 (15.122) 和 (15.123)，它就是理论的对称操作，此时

$$[\mathscr{T},H]=0 \tag{15.147}$$

而 (15.146) 简化为

$$\mathscr{T}=\mathscr{T}_0$$

15.14 $\mathscr{T}\mathscr{C}\mathscr{P}$ 定理

可以证明，电磁相互作用和 (15.30) 引入的 π 介子-核子相互作用在对称操作 $\mathscr{T}$、$\mathscr{C}$ 或 $\mathscr{P}$ 的分别作用下是不变的，这些算符对普遍的相互作用都已详细地构造出来. 当然，可以在相互作用项的这里或那里适当的插入一些 i 或 γ_5，而不影响理论的 Lorentz 不变性和平移不变性，但是 $\mathscr{T}$、$\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{P}$ 作为对称操作却会遭到破坏. 值得注意的是，一个理论只要

---

1) 为了得 $\mathscr{P}$ 和 $\mathscr{C}$ 与时间的关系，我们曾作替换 $t\to0\to t$. 这里，对于时间反演，我们作的替换是 $t\to0\to-t$，这就解释了指数函数中指数的不同符号.

满足如下两个条件，则 $\mathscr{T}$、$\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{P}$ 的乘积对于它就必定是对称操作：

1. 在现有的范围内，理论是定域的，也就是存在一个具有适当正规化次序的厄米的拉氏密度，并且在正 Lorentz 变换下是协变的.

2. 理论按通常的自旋与统计的关系量子化；例如，Klein-Gordon 场和 Maxwell 场用对易关系量子化导致 Bose-Einstein 统计，而 Dirac 场则服从反对易关系并导致不相容原理.

这就是 Lüders、Zumino、Pauli 和 Schwinger 的 $\mathscr{T}\mathscr{C}\mathscr{P}$ 定理[1]. 对于相互作用的 Klein-Gordon 场、Maxwell 场以及 Dirac 场我们给出一个证明，也就是表明，连续应用同一时间的三种变换，$\mathscr{T}(t)$、$\mathscr{C}(t)$ 和 $\mathscr{P}(t)$，哈氏量满足

$$\mathscr{P}\mathscr{C}\mathscr{T}H\mathscr{T}^{-1}\mathscr{C}^{-1}\mathscr{P}^{-1}=H \qquad (15.148)$$

我们上面的假定是建立在拉氏密度性质基础上的，所以更方便的是从它出发，然后回过头来证明 (15.148). 首先，我们要表明

$$\mathscr{P}\mathscr{C}\mathscr{T}\mathscr{L}(\boldsymbol{x},t)\mathscr{T}^{-1}\mathscr{C}^{-1}\mathscr{P}^{-1}=\mathscr{L}(-\boldsymbol{x},-t)$$

其中 $\mathscr{P}$、$\mathscr{C}$、$\mathscr{T}$ 皆是在同一时间.

所谓 $\mathscr{L}$ 是 Lorentz 不变的是指，它是由一系列标量所组成的厄米算符，这些标量是 $\varphi_r(x)$、$A_\mu(x)$ 及其微商 $\partial/\partial x^\mu$，加上旋量场的双线性量或其微商 $\bar{\psi}^A\Gamma\psi^B$ (如张量一样变换) 的乘积. 上标 A 和 B 是内部自由度 (p, e^-, ν 等等)，Γ 是矩阵 1、$i\gamma_5$、γ_μ、$\gamma_5\gamma_\mu$、$\sigma_{\mu\nu}$ 中的一个. $\mathscr{P}\mathscr{C}\mathscr{T}$ 对厄米标量场 φ_r 的作用是

$$\mathscr{P}\mathscr{C}\mathscr{T}\varphi_r(\boldsymbol{x},t)\mathscr{T}^{-1}\mathscr{C}^{-1}\mathscr{P}^{-1}=\pm\varphi_r(-\boldsymbol{x},-t) \qquad (15.149)$$

1) G. Lüders, *Ann. Phys.* (*N. Y.*), **2**, 1(1957).

其中±号是任意的，由(15.132)式中符号的选择来决定。用产生电荷本征态的算符表示(15.149)就是

$$\mathscr{P}\mathscr{C}\mathscr{T}\varphi(\boldsymbol{x},t)\mathscr{T}^{-1}\mathscr{C}^{-1}\mathscr{P}^{-1}=\pm\varphi^*(-\boldsymbol{x},-t)$$

$$\mathscr{P}\mathscr{C}\mathscr{T}\varphi^*(\boldsymbol{x},t)\mathscr{T}^{-1}\mathscr{C}^{-1}\mathscr{P}^{-1}=\pm\varphi(-\boldsymbol{x},-t)$$

把$\mathscr{P}$、$\mathscr{C}$和$\mathscr{T}$对旋量场的作用放在一起[(15.88)、(15.112)、(15.133)]，我们有

$$\mathscr{P}\mathscr{C}\mathscr{T}\psi_\alpha^A(\boldsymbol{x},t)\mathscr{T}^{-1}\mathscr{C}^{-1}\mathscr{P}^{-1}=-i(\gamma^0\gamma_5)_{\alpha\beta}\bar{\psi}_\beta^A(-\boldsymbol{x},-t)$$
$$=+i\gamma^5_{\alpha\beta}\psi_\beta^{A\dagger}(-\boldsymbol{x},-t)$$

以及

$$\mathscr{P}\mathscr{C}\mathscr{T}\bar{\psi}_\alpha^A(\boldsymbol{x},t)\mathscr{T}^{-1}\mathscr{C}^{-1}\mathscr{P}^{-1}=-i\psi_\beta^A(-\boldsymbol{x},-t)(\gamma^5\gamma_0)_{\beta\alpha}\tag{15.150}$$

由(15.150)可以得到旋量场双线性量的变换

$$\mathscr{P}\mathscr{C}\mathscr{T}\bar{\psi}_\alpha^A(\boldsymbol{x},t)\Gamma_{\alpha\beta}\psi_\beta^B(\boldsymbol{x},t)\mathscr{T}^{-1}\mathscr{C}^{-1}\mathscr{T}^{-1}$$
$$=-\psi_\lambda^A(-\boldsymbol{x},-t)(\gamma_5\gamma_0\Gamma^*\gamma_0\gamma_5)_{\lambda\tau}\bar{\psi}_\tau^B(-\boldsymbol{x},-t)$$
$$=-\psi_\lambda^A(-\boldsymbol{x},-t)\Gamma'_{\tau\lambda}\bar{\psi}_\tau^B(-\boldsymbol{x},-t)\tag{15.151}$$

其中

$$\Gamma'=+\Gamma\qquad\text{对于}\ \Gamma=1,i\gamma_5,\sigma_{\mu\nu}$$

$$\Gamma'=-\Gamma\qquad\text{对于}\ \Gamma=\gamma_\mu,\gamma_5\gamma_\mu$$

引用我们前面已作过的假定，即独立的费米场ψ^A与ψ^B互相反对易以及$\mathscr{L}$中的旋量场的乘积都已次序正规化了，我们就有

$$\mathscr{P}\mathscr{C}\mathscr{T}:\bar{\psi}_\alpha^A(\boldsymbol{x},t)\Gamma_{\alpha\beta}\psi_\beta^B(\boldsymbol{x},t):\mathscr{T}^{-1}\mathscr{C}^{-1}\mathscr{P}^{-1}$$
$$=+:\bar{\psi}_\tau^B(-\boldsymbol{x},-t)\Gamma'_{\tau\lambda}\psi_\lambda^A(-\boldsymbol{x},-t):\tag{15.152}$$

事实上，只是对于矢量情形$\Gamma=\gamma^\mu$并且是两个全同的费米场$A=B$，从(15.151)到(15.152)的次序正规化才需加以考虑，因为由(15.39)

$$-\psi_\lambda^A(-\boldsymbol{x},-t)\Gamma'_{\tau\lambda}\bar{\psi}_\tau^B(-\boldsymbol{x},-t)$$
$$=+\bar{\psi}_\tau^B(-\boldsymbol{x},-t)\Gamma'_{\tau\lambda}\psi_\lambda^A(-\boldsymbol{x},-t)-\delta_{AB}\delta^3(0)T_\tau(\gamma_0\Gamma')$$

但是，正是用这种在§15.5中讨论的矢量流来定义(15.72)、(15.96)和(15.123)中的$\mathscr{P}$、$\mathscr{C}$和$\mathscr{T}$使得

$$\mathscr{P}\mathscr{C}\mathscr{T}j^{\mu}(\boldsymbol{x},t)\mathscr{T}^{-1}\mathscr{C}^{-1}\mathscr{P}^{-1}=-j^{\mu}(-\boldsymbol{x},-t)$$
$$=-:\bar{\psi}(-\boldsymbol{x},-t)\gamma^{\mu}\psi(-\boldsymbol{x},-t): \tag{15.153}$$

对于电磁场，将(15.95)、(15.96)和(15.126)的$\mathscr{P}$、$\mathscr{C}$和$\mathscr{T}$的作用放在一起，有

$$\mathscr{P}\mathscr{C}\mathscr{T}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\mathscr{T}^{-1}\mathscr{C}^{-1}\mathscr{P}^{-1}$$
$$=-\boldsymbol{A}(-\boldsymbol{x},-t) \tag{15.154}$$

将$\mathscr{T}$、$\mathscr{C}$和$\mathscr{P}$作用在$A_0(\boldsymbol{x},t)$的约束方程(15.8)，给出

$$\mathscr{P}\mathscr{C}\mathscr{T}A_0(\boldsymbol{x},t)\mathscr{T}^{-1}\mathscr{C}^{-1}\mathscr{P}^{-1}=-\int\frac{d^3y}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}j_0(-y,-t)$$
$$=-A_0(-\boldsymbol{x},-t)$$

这可以由(15.152)检验. 于是，我们有

$$\mathscr{P}\mathscr{C}\mathscr{T}A_{\mu}(x)\mathscr{T}^{-1}\mathscr{C}^{-1}\mathscr{P}^{-1}=-A_{\mu}(-x) \tag{15.155}$$

最后，如果出现微商，要注意

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}=-\frac{\partial}{\partial(-x_{\mu})} \tag{15.156}$$

我们可以对$\mathscr{P}\mathscr{C}\mathscr{T}$变换总结如下：

1. 全部坐标x_{μ}变为$x'_{\mu}=-x_{\mu}$；所以

$$\frac{\partial}{\partial x'_{\mu}}=-\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}$$

2. 厄米标量场$\varphi_r(x)$变为$+\varphi_r(x')$(此时，任意相因子固定为$+1$). 电磁场$A_{\mu}(x)$变为$-A_{\mu}(x')$.

3. 所有偶阶张量，包括Fermi场的双线性量或者其微商，变为它们的厄米共轭；所有奇阶张量则变为它们的厄米共轭乘以(-1).

4. 所有C数被其复共轭取代.

因为$\mathscr{L}$是一个标量，$\mathscr{L}$中每一项所含的张量指标必定

都是收缩了的，由上面第三点带来的负号必定是偶数个因而对 $\mathscr{L}$ 也没有影响. 变换的净效果是把 $\mathscr{L}$ 变为它的厄米共轭. $\mathscr{L}$ 中各算符次序的问题也因为 $\mathscr{L}$ 本身已是次序正规化的而消除. 正是这里对自旋和统计的联系提出要求，即互相反对易的自旋 1/2 的场在次序正规化时要引进一个负号，(13.58)，而对自旋为 0 或 1 的 Bose 场引进正号，(12.25). 所以，我们发现，对于一个厄米的 $\mathscr{L}$ 有

$$\begin{aligned}\mathscr{P}\mathscr{C}\mathscr{T}\mathscr{L}(x)\mathscr{T}^{-1}\mathscr{C}^{-1}\mathscr{P}^{-1} &= \mathscr{L}(x') \\ &= \mathscr{L}(-\boldsymbol{x},-t)\end{aligned} \tag{15.157}$$

哈氏量密度由 $\mathscr{L}$ 得来:

$$\mathscr{H}(x) = -\mathscr{L}(x) + \sum_r :\pi_r(x)\dot{\varphi}_r(x): \tag{15.158}$$

求和是对 $\mathscr{L}$ 中出现的全体 Bose 场和 Fermi 场进行的. 因为构造 $\mathscr{P}$、$\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{T}$ 时使它们不改变全部对易关系，包括对于 Bose 场的

$$[\pi_r(\boldsymbol{x},t),\varphi_s(\boldsymbol{x}',t)] = -i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\delta_{rs}$$

以及对于 Fermi 场的

$$\{\pi_r(\boldsymbol{x},t),\varphi_s(\boldsymbol{x}',t)\} = +i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\delta_{rs}$$

因此，如果

$$\mathscr{P}\mathscr{C}\mathscr{T}\varphi_r(\boldsymbol{x},t)\mathscr{T}^{-1}\mathscr{C}^{-1}\mathscr{P}^{-1} = \eta_r\varphi_r(-\boldsymbol{x},-t)$$

以及

$$\begin{aligned}\mathscr{P}\mathscr{C}\mathscr{T}\dot{\varphi}_r(\boldsymbol{x},t)\mathscr{T}^{-1}\mathscr{C}^{-1}\mathscr{P}^{-1} &= -\eta_r\frac{\partial}{\partial(-t)}\varphi_r(-\boldsymbol{x},-t) \\ &= -\eta_r\dot{\varphi}_r(-\boldsymbol{x},-t)\end{aligned} \tag{15.159}$$

则有

$$\mathscr{P}\mathscr{C}\mathscr{T}\pi_r(\boldsymbol{x},t)\mathscr{T}^{-1}\mathscr{C}^{-1}\mathscr{P}^{-1} = -\eta_r^*\pi_r(-\boldsymbol{x},-t)$$

总结以上所得，我们有

$$\mathscr{P}\mathscr{C}\mathscr{T}\mathscr{H}(\boldsymbol{x},t)\mathscr{T}^{-1}\mathscr{C}^{-1}\mathscr{P}^{-1} = \mathscr{H}(-\boldsymbol{x},-t)$$

因此，(15.148) 成立，$\mathscr{TCP}$ 定理得证[1].

问　　题

1.在辐射规范下证明 $\Box A = c_0 j_{tr}$ 并推导出横向流算符.

2.证明：取 c_0 的最低阶近似，真空的电荷密度在次序正规化前是三次发散的.

3.检验 $[Q,H]=0$，以此表明量子电动力学的总电荷守恒.

4.检验 Heisenberg 关系式 (15.18).

5.检验场算符在 Lorentz 变换下的变换规则 (15.20) 和 (15.21).

6.用检验等时对易关系式 (15.9) 和 (15.10) 的不变性来完成量子电动力学在辐射规范下的 Lorentz 不变性的证明.

7.选取 $A_0=0$ 规范并给光子以小的质量项(第十四章问题 3)把带电标量场量子化(拉氏量在 §15.2 的脚注中以及在附录 B 中给出).

8.对荷电的 Dirac 粒子重做题 7.

9.利用 (15.41) 检验 (15.40) 哈氏量给出的电荷独立的介子-核子相互作用的 Heisenberg 运动方程. 以这样的 H 建立量子场论而令质子和中子场互相对易，结果将如何?

10.检验 (15.30) 模型的拉氏量的粒子数，同位旋和电荷的对称性并由 Noether 定理推出相应的守恒量.

11.写出一个一般的拉氏量 $\mathscr{L}$，它对于 8 个重子场是双线性的，对于玻色场是线性的，没有微商耦合项并且在重子数、同位旋和电荷或奇异数变换下是不变的. 引入电磁相互作用并计算守恒流.

12.将场用球面波展开，并利用球谐函数的性质检验轨道宇称 (15.75) 式.

13.检验 Dirac 场的宇称算符表示式 (15.93).

14.推导电磁场的宇称算符并检验量子电动力学的拉氏量和对易

---

1) 在公理的框架内已经建立了一个很漂亮的关于 $\mathscr{JCP}$、自旋和统计以及定域性(弱的定域对易性)之间关系的定理. 关于这一方法的讨论可参见 R. F. Streator *and* A. S. Wightman, *"PCT, spin and Statistics, and All That"*, *W. A. Benjamin, Inc., New York*, 1964.

关系的宇称变换不变性.

15.检验 Dirac 方程和对易关系 (13.53)、(13.54) 的电荷共轭不变性. 计算 (15.115) 式的 $\mathscr{C}$.

16.检验: 由 Dirac 场的双线性形式组成的矢量和张量流在 $\mathscr{C}$ 变换下是奇的,而标量、轴矢量和赝标量流在 $\mathscr{C}$ 变换下是偶的. 试讨论 $\mathscr{C}$ $\mathscr{P}$ 不变的 β 衰变相互作用的可能形式.

17.构成 (15.30) 模型拉氏量的 $\mathscr{C}$ 变换.

18.已知组合算符 $G = e^{i\pi I_2}\mathscr{C}$ 可用以区分粒子. 试确定重子和介子在 G 作用下的变换形式. 证明, $Q = 0$ 的 n 个介子态的 G 宇称是 $(-)^n$.

19.推导能满足 (15.132) 的 π 介子场的 $\mathscr{T}$ 算符.

20.一个右旋园偏振的光子态在时间反演时将如何?

21.检验在 (15.141)、(15.143) 中 Dirac 场的 $\mathscr{T}$ 算符的结构.

22.按照第十章讨论的精神建立一个唯象的轻子、核子和介子间的弱相互作用拉氏量;讨论守恒定律以及 $\mathscr{L}$ 的相应对称性.

23.§15.12 中 Dirac 场电荷共轭变换时, 相因子 $\phi(p,s)$ 对动量 p 和自旋 s 的函数关系如何? 在该小节讨论电子偶素时我们略去了这个相因子. 试利用角动量算符对于给定的 L 和 S 建立 $\mathscr{F}$ 并以此检验略去相因子的正确性.

第十六章　真空期待值和 S 矩阵

16.1　引言

量子场论作为一个物理理论，其目的是描述自然界中所观察到的相互作用粒子的动力学．我们已经看到，在对经典场进行形式的量子化以后，自由粒子的性质是怎样显示出来的；在引入相互作用拉氏量时，对称性是怎么保持的以及运动常数是怎样确定．剩下的任务就是建立描述相互作用粒子动力学行为的一般的矩阵元，研究并计算它们．

我们对单粒子在时空中传播的振幅——即单粒子的 Green 函数——以及相互作用粒子在不同的初态和终态之间的跃迁振幅，即 s 矩阵，都感到兴趣．我们下面将得到的主要结果之一就是以量子场论的形式重新建立上册所发展的一套 Feynman 计算规则．

16.2　物理态的性质

关于相互作用场的耦合非线性方程组如 (15.4) 的精确求解问题，至今已证明是十分困难的．在转向各种近似方法之前，让我们先看一看，要确定精确态 Φ 和传播子的性质只用不变性的论证能走多远．尤其是，平移不变性和 Lorentz 不变性起着重要作用而且是我们感兴趣的所有理论共同的对称性质．

作为开始，我们选择状态 Φ 是能量和动量的本征态．这是可能的，因为一个守恒能量——动量四矢量 P^μ 的存在是由第十一章中讨论的平移不变性假定所保证的．我们采用 He-

isenberg 表象，用 P^μ 以及所有其它相互对易的运动常数来表征 Φ.

此外，我们在某些物理考虑的基础上给 P^μ 的本征谱加上一些条件. 当然，在没有求得 P^μ 的精确解时，这些条件是没有被证明的. 我们假定：

1. 能量和动量本征值全都在向前的光锥内

$$P^2 = P_\mu P^\mu \geqslant 0 \qquad P^0 \geqslant 0 \tag{16.1}$$

2. 存在一个非简并的 Lorentz 不变的能量最低的基态，这就是真空态

$$\Phi_0 \equiv |0\rangle$$

而且按习惯选取能量的零点使

$$P^0|0\rangle = 0 \tag{16.2}$$

由 (16.1) 也就有

$$\boldsymbol{P}|0\rangle = 0$$

真空 (16.2) 的 Lorentz 不变性意味着 $|0\rangle$ 对于所有 Lorentz 系统的观察者来说都是真空.

3. 对每一个质量为 m_i 的稳定粒子都存在稳定的单粒子态

$$\Phi_{1(i)} \equiv |P^{(i)}\rangle$$

其中 $P^{(i)}_\mu P^{(i)\mu} = m_i^2$.

暂时不管与零质量的光子和中微子态相连系的“红外”复杂性，我们再加上第四个要求：

4. 真空和单粒子态组成 P^μ 的间断谱. 这显示在图 16.1 上. 该图给出 π 介子的能量-动量谱. π 介子当然不是稳定粒子；主要通过以下衰变

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu'$$

所观察到的半衰期是 $\sim 2\times 10^{-8}$ 秒，这已在第十章讨论过. 相对于自然频率 $\hbar/m_\pi C^2 \sim 5\times 10^{-24}$ 秒来说这是一个很长的半

衰期．在一级近似下略去弱耦合，可以把 π 介子看作是稳定粒子，就如在前面传播子的讨论中所采取的那样．我们在按照图 16.1 的本征谱建立 π 介子的能量-动量四矢量及拉氏量时用 φ 场来代表它．

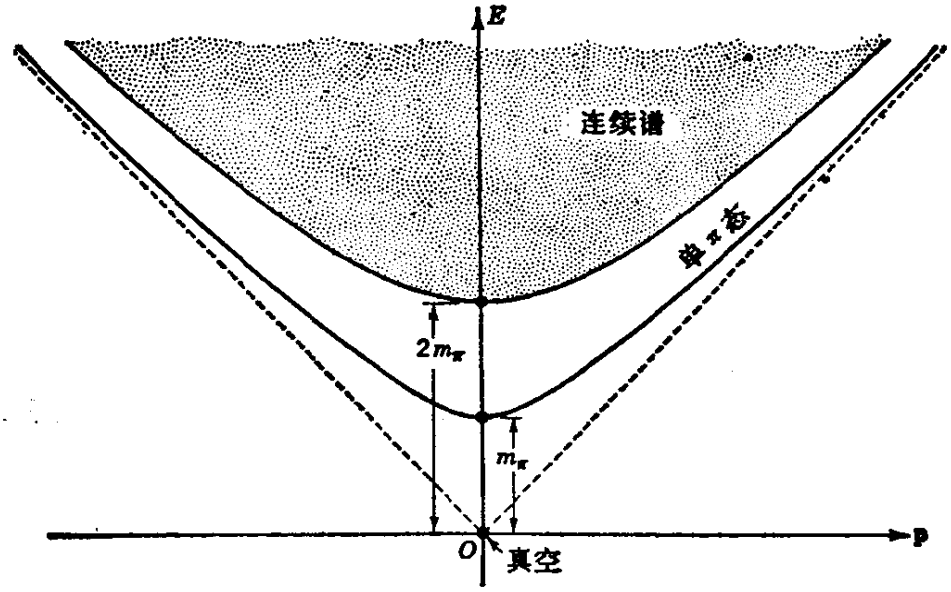


图 16.1　π 介子的能量-动量谱

同样，对 P_μ 谱中出现的每一个不连续（或近似不连续）态，我们都用一个场 $\varphi(x)$ 或 $\psi(x)$ 与之相联系．这一方法的精神和微扰论十分相似．在把一些对应于稳定粒子的场引入拉氏量时，我们假定，它们之间的相互作用并不使状态的谱从原来形式，譬如图 16.1，产生很大的改变．这无疑是一个很强的假定，而且也是这个方法的关键性的限制，因为这样一来束缚态就自然被排除了．Haag、Nishijima 和 Zimmermann[1] 最近用公理化场论的方法得以成功地表明，如何在每一个时空点 x 定义一个定域场并将它和两个给定的基本场的稳定束

1) K. Nishijima, *Phys. Rev.*, **111**, 995(1958).

缚态相联系——譬如，如何表示由两个核子场形成的氘核[1]. 然而，这样一个场和拉氏量中相互作用项的确切关系仍然是不清楚的[2].

16.3 入场和入态的建立;渐近条件

因为我们首先要考虑散射问题，所以先要建立一些态，它能在 $t \to -\infty$ 的初始时刻给物理系统以简单的描述. 此时，系统内参加散射的粒子互相还没有发生作用而只是在自作用的影响下传播. 为建立相互作用理论，我们寻找算符，它能产生独立的粒子态，代表具有一定物理质量在时空中传播的粒子. 按前节讨论的精神我们假定：对应于一切可能的粒子数和动量的这些状态，形成一个完全集合.

对于由自由场拉氏量描述的无相互作用粒子情形，单粒子态是自由场展开式中出现的产生算符之一作用于真空而产生的. 重复应用 n 个产生算符就导致 n 个粒子的态. 关于粒子的解释是由能量-动量算符 P^μ 的谱以及从假定的对易或反对易关系而得到的产生和消灭算符的代数所给出的. 对于相互作用场，我们现在寻找能产生单个物理粒子态的相应的算符. 为简单起见，首先对厄米介子场 $\varphi(x)$ 讨论这些算符. $\varphi(x)$ 满足波动方程

$$(\Box + m_0^2)\varphi(x) = j(x) \tag{16.3}$$

以及等时对易关系

$$[\varphi(\boldsymbol{x},t),\varphi(\boldsymbol{y},t)] = [\pi(\boldsymbol{x},t),\pi(\boldsymbol{y},t)] = 0$$

1) 作法很简单. 假设一个单粒子的"复合态" α 自旋为 0 并与标量场 $A(x)$、$B(x)$ 耦合，则场算符 φ_α 可选为:

$$\varphi_\alpha(x) = \lim_{\substack{\epsilon^2<0 \\ \epsilon\to 0}} \frac{A(x+\epsilon)B(x-\epsilon)}{\sqrt{2E_\alpha(2\pi)^3}\langle 0|A(x+\epsilon)B(x-\epsilon)|\alpha\rangle}$$

2) 关于这一点可见 S. Weinberg 和 A. Salam 的评论: *Proc. 1962 Intern. Conf. High-energy Phys., CERN, Geneva*, 683—687.

$$[\pi(\boldsymbol{x},t),\varphi(\boldsymbol{y},t)] = -i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{16.4}$$

流 $j(x)$ 是个标量算符，是由在 x 点与 $\varphi(x)$ 相互作用的场构成的．假如为了简单起见在 $j(x)$ 中排除微商耦合项，则有

$$\pi(x) = \dot{\varphi}(x)$$

除上述假定外，$j(x)$ 可以具有任意形式．它可以表示和核子源相耦合，也可以表示譬如说如下的自耦合

$$j(x) = \lambda\varphi^3(x)$$

此时，场方程可以由如下的拉氏密度推得：

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} - m_0^2\varphi^2 + \frac{1}{2}\lambda\varphi^4\right)$$

我们用 $\varphi_{in}(x)$代表为建立单个的物理粒子态所要求的算符．$\varphi_{in}(x)$ 应该由 $\varphi(x)$ 的适当的泛函以及 $j(x)$中的其它场所组成，下面将明显地把它构造出来因而也就证明了它的存在．为了使 $\varphi_{in}(x)$确实可以解释为所要求的算符——作用于真空产生一个自由的物理介子，我们赋予它如下的性质，在前几章，我们曾对自由场研究了这类性质：

1．$\varphi_{in}(x)$在坐标平移和 Lorentz 变换下就如对应的 $\varphi(x)$一样变换．这保证了由 $\varphi_{in}(x)$形成的单粒子态的协变性．特别是对于平移，我们有

$$[P^\mu,\varphi_{in}(x)] = -i\frac{\partial\varphi_{in}(x)}{\partial x_\mu} \tag{16.5}$$

2．$\varphi_{in}(x)$ 的时空变化由物理质量 m 的自由粒子 Klein-Gordon 方程描述：

$$(\Box + m^2)\varphi_{in}(x) = 0 \tag{16.6}$$

由上面定义的这两个方程得到：$\varphi_{in}(x)$由真空产生物理的单粒子态．为了确信这一点，让我们考虑一个任意本征态

$$P^\mu|n\rangle = p_n^\mu|n\rangle \tag{16.7}$$

并与真空态$|0\rangle$组成如下的矩阵元：

$$-i\frac{\partial}{\partial x_\mu}\langle n|\varphi_{\rm in}(x)|0\rangle = \langle n|[P^\mu,\varphi_{\rm in}(x)]|0\rangle$$
$$= p_n^\mu\langle n|\varphi_{\rm in}|0\rangle$$

重复这个运算并利用 (16.6)，我们有

$$(\Box + m^2)\langle n|\varphi_{\rm in}|0\rangle = (m^2 - p_n^2)\langle n|\varphi_{\rm in}(x)|0\rangle = 0 \tag{16.8}$$

可见，由 $\varphi_{\rm in}(x)$ 作用于真空产生的只是满足 $p_n^2 = m^2$ 的一些态，即，质量为 m 的单粒子态。$\varphi_{\rm in}(x)$ 的 Fourier 展开和自由场的展开式 (12.7) 一样，并且都是 Klein-Gordon 方程 (16.6) 的解：

$$\varphi_{\rm in}(x) = \int d^3k[a_{\rm in}(k)f_k(x) + a_{\rm in}^\dagger(k)f_k^*(x)] \tag{16.9}$$

其中

$$f_k(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}e^{-ik\cdot x}$$

以及如在 (12.7) 中

$$\omega_k \equiv \sqrt{k^2 + m^2} \equiv k^0$$

和在 (12.9) 中那样

$$a_{\rm in}(k) = i\int d^3x f_k^*(x)\overleftrightarrow{\partial}_0\varphi_{\rm in}(x)$$

由 (16.5) 可知，算符系数 $a_\lambda(k)$ 满足对易关系：

$$[P^\mu,a_{\rm in}(k)] = -k^\mu a_{\rm in}(k) \qquad [P^\mu,a_{\rm in}^\dagger(k)] = +k^\mu a_{\rm in}^\dagger(k) \tag{16.10}$$

将 $a_{\rm in}^\dagger(k)$ 重复作用于真空，我们建立 n-粒子本征态。利用(16.10) 以及关于零能量稳定真空只有一个的假定，有

$$P^\mu a_{\rm in}^\dagger(k_1)\cdots a_{\rm in}^\dagger(k_N)|0\rangle \equiv P^\mu|k_1\cdots k_N{\rm in}\rangle$$
$$= \sum_{i=1}^N k_i^\mu a_{\rm in}^\dagger(k_1)\cdots a_{\rm in}^\dagger(k_N)|0\rangle \tag{16.11}$$
$$a_{\rm in}(k)|0\rangle = 0$$

以及

$$\langle p_1\cdots p_M\text{in}|k_1\cdots k_N\text{in}\rangle = 0$$

除非 $M = N$ 而且 $(p_1,\cdots,p_M)$ 集合与 $(k_1,\cdots,k_N)$ 集合完全一致. 前面已经指出，我们假定，由粒子数 N 和动量 k_i^μ 的所有可能的选择形成的态的集合是完全的.

为了用 $\varphi(x)$ 场来表示 $\varphi_{\text{in}}(x)$，我们利用物理质量 m 改写 (16.3)，加入一个质量抵消项

$$\delta m^2\varphi(x) \equiv (m^2 - m_0^2)\varphi(x) \tag{16.12}$$

到方程 (16.3) 的两边：

$$(\Box + m^2)\varphi(x) = j(x) + \delta m^2\varphi(x) \equiv \tilde{j}(x) \tag{16.13}$$

流 $\tilde{j}(x)$ 在这里被看作是产生散射波的源. 从 $\varphi(x)$ 移走这些散射波，剩下的恰恰就是 $\varphi_{\text{in}}(x)$ 给出的以质量 m 传播的自由波，这启发我们写出[1)]

$$\sqrt{Z}\,\varphi_{\text{in}}(x) = \varphi(x) - \int d^4y\Delta_{\text{ret}}(x - y;m)\tilde{j}(y) \tag{16.14}$$

其中

$$\Delta_{\text{ret}}(x - y;m) = 0 \text{ 对于 } x_0 < y_0 \tag{16.15}$$

是推迟 Green 函数(见附录 C)，它满足

$$(\Box_x + m^2)\Delta_{\text{ret}}(x - y;m) = \delta^4(x - y) \tag{16.16}$$

(16.14) 所定义的 $\varphi_{\text{in}}(x)$ 是满足对入场所要求的两个条件 (16.5) 和 (16.6) 的. 因为 (16.13) 中的 $\tilde{j}(y)$ 是标量算符，我们有

$$\begin{aligned}\sqrt{Z}\,\varphi_{\text{in}}(x + a) &= \varphi(x + a) - \int d^4y\Delta_{\text{ret}}(x + a - y)\tilde{j}(y)\\ &= e^{iP\cdot a}\varphi(x)e^{-iP\cdot a} - \int d^4y'\Delta_{\text{ret}}(x - y')\tilde{j}(y' + a)\\ &= e^{iP\cdot a}\left[\varphi(x) - \int\alpha^4y'\Delta_{\text{ret}}(x - y')\tilde{j}(y')\right]e^{-iP\cdot a}\\ &= e^{iP\cdot a}\sqrt{Z}\,\varphi_{\text{in}}(x)e^{-iP\cdot a}\end{aligned}$$

1) Z 通常记作 Z_3，但我们把这个记号留给光子.

这正是所要求的.

(16.14)式的常数 $\sqrt{Z}$ 是为了归一化 $\varphi_{in}(x)$，使其由真空产生单粒子态的矩阵元具有单位振幅而加入的，下面将给出它的计算. (16.14)的形式是合理的，并且启发我们假定，当 $x_0 \to -\infty$ 时相互作用项按照(16.15)等于零，于是

$$\varphi(x) \xrightarrow{?} \sqrt{z}\,\varphi_{in}(x) \quad \text{当} \quad x_0 \to -\infty \tag{16.17}$$

这和我们对因果性的理解一致，场算符归结为入射的自由波.

类似于(16.17)那样的渐近条件在单粒子量子力学中普遍应用于波函数，并在第六、第九章的传播子讨论中广泛地应用. 在那里，我们采用绝热假设把自由粒子的初态和终态与相互作用隔开. 不过，我们也可以用别的方式达到这一目的，就是用波包代表定域解，它们在散射前和散射后，不和相互作用区重迭.

从另一方面来说，方程(16.17)是**算符**表达式，这就出现了一个矛盾：不可能把 $\varphi(x)$ 从 $\tilde{j}(y)$ 算符分离出来，后者即使在 $x_0 \to -\infty$ 时也包含所有的自作用. 要注意，和"波函数"类比的，在量子场论中是场算符的矩阵元；所以，应该是对场算符的矩阵元而不是对场算符本身应用渐近条件. 正如 Lehmann、Symanzik 和 Zimmermann 所指出，正确的渐近条件应取如下形式[1]. 令 $|\alpha\rangle$ 和 $|\beta\rangle$ 是任意两个可归一化的态，并定义场算符 $\varphi^f(t)$，它是 $\varphi(x)$ 对类空区域的如下弥散

$$\varphi^f(t) = i\int d^3x f^*(\boldsymbol{x},t)\overleftrightarrow{\partial}_0\varphi(\boldsymbol{x},t) \tag{16.18}$$

式中 $f(\boldsymbol{x},t)$ 是 Klein-Gordon 方程

$$(\Box + m^2)f(x) = 0 \tag{16.19}$$

---

1) H. Lehmann, K. Symanzik, *and* W. Zimermann, *Nuovo Cimento*, **1**, 1425 (1955).

的任意可归一化的解．渐近条件可以写成下式[1]

$$\lim_{t\to-\infty}\langle\alpha|\varphi^f(t)|\beta\rangle=\sqrt{Z}\,\langle\alpha|\varphi^f_{\rm in}|\beta\rangle \qquad (16.20)$$

其中 $\varphi^f_{\rm in}$ 定义为

$$\varphi^f_{\rm in}=i\int d^3x f^*(\boldsymbol{x},t)\overleftrightarrow{\partial}_0\varphi_{\rm in}(\boldsymbol{x},t) \qquad (16.21)$$

由 Green 定理，(16.6) 以及 (16.19) 可知，$\varphi^f_{\rm in}$ 与时间 t 无关．

方程 (16.20) 或“弱渐近条件”是 (16.17) 的精确表述．它是代表入射粒子的定域波包应满足的初始条件．由入场产生算符所形成的态 (16.11)

$$\begin{aligned}|k_1\cdots k_n{\rm in}\rangle&=a^\dagger_{\rm in}(k_1)|k_2\cdots k_n{\rm in}\rangle\\&=a^\dagger_{\rm in}(k_1)a^\dagger_{\rm in}(k_2)\cdots a^\dagger_{\rm in}(k_n)|0\rangle\end{aligned} \qquad (16.22)$$

应理解为由 (16.21) 中的 $\varphi^f_{\rm in}$ 在波包 $f^*(\boldsymbol{x},t)$ 趋近 (16.9) 中的单色平面波 $f^*_k(x)$ 时所形成的可归一化的态的极限．为说明 $t\to-\infty$ 时散射实验的初始动力学所需要的全部东西就是一个入态的完全集合以及渐近条件．

只要 $\sqrt{Z}$ 不等于零，方程 (16.14) 就定义了我们为建立散射初态所寻求的场算符．既然我们在这里是企图通过定域的拉氏量和场算符对物理理论作一种数学上的理想化，由于理论在无穷大能量时的不规则行为，我们不能保证 Z 不等于零．而现在的理论形式如果是某种未知的更精致理论的定域极限的话，那末这实际上是可能的．记住这点，下面我们从关于 P^μ 谱的假定，(16.1) 和 (16.2) 以及从正则对易关系式

---

1) 方程(16.20)区别于(16.17)的重要之点在于取极限的次序．方程(16.20)要求建立归一化的波包态并在取极限 $t\to-\infty$ 之前组成矩阵元．见 W. Zimmermann, *Nuovo Cimento*, **10**, 567 (1958)，并见 O. W. Greenberg, *doctorial dissertation, Princeton Univercity, Princeton, N. J.*, 1956.

(16.4) 出发，推导出 Z (也就是 $\varphi(x)$ 从真空产生单粒子态的振幅的平方)的一般表示式.

16.4 对易子真空期待值的谱表示以及标量场传播子

为了推导 Z 的表示式，我们建立两个场对易子的真空期待值的一般形式:

$$i\Delta'(x,x') \equiv \langle 0|[\varphi(x),\varphi(x')]|0\rangle \tag{16.23}$$

这个对易子本身是无法给出的，因为和第十二章自由场理论不一样，这里我们不能解出场方程. 然而，(16.23) 的一般形式可以在不变性论证以及关于 P^μ 谱的假设的基础上推出.

在 (16.23) 的两个场算符之间插入 (16.7) 的本征态的完全集合并利用理论的平移不变性 (16.5)，写出

$$\begin{aligned}\langle n|\varphi(x)|m\rangle &= \langle n|e^{iP\cdot x}\varphi(0)e^{-iP\cdot x}|m\rangle \\ &= e^{i(p_n-p_m)\cdot x}\langle n|\varphi(0)|m\rangle\end{aligned} \tag{16.24}$$

我们有

$$\begin{aligned}\Delta'(x,x') = -i\sum_n \langle 0|\varphi(0)|n\rangle\langle n|\varphi(0)|0\rangle(e^{-ip_n\cdot(x-x')} \\ - e^{ip_n\cdot(x-x')}) = \Delta'(x-x')\end{aligned} \tag{16.25}$$

把对应于同一本征值 p_n 的所有的态集合在一起是方便的. 为此，引入

$$1 = \int d^4q\delta^4(p_n - q)$$

改写 (16.25)

$$\begin{aligned}\Delta'(x-x') = \frac{-i}{(2\pi)^3}\int d^4q\left[(2\pi)^3\sum_n \delta^4(p_n-q)|\langle 0|\varphi(0)|n\rangle|^2\right] \\ \times (e^{-iq\cdot(x-x')} - e^{iq\cdot(x-x')})\end{aligned} \tag{16.26}$$

方括号里面的量称为谱振幅 $\rho(q)$[1]，

1) 用未重整化的场表示.

$$\rho(q) \equiv (2\pi)^3 \sum_n \delta^4(p_n - q)|\langle 0|\varphi(0)|n\rangle|^2 \quad (16.27)$$

它表示所有能量-动量本征值为 q 的态对 Δ' 的贡献. 下面借助于(16.27)中的总和的 Lorentz 不变性可以得出结论: $\rho(q)$ 只是 q^2 的标量函数. 利用真空的 Lorentz 不变性

$$U(a)|0\rangle = |0\rangle$$

以及标量场 $\varphi(0)$ 的 Lorentz 不变性

$$U(a)\varphi(0)U^{-1}(a) = \varphi(0)$$

显然有

$$\rho(q) = (2\pi)^3 \sum_n \delta^4(p_n - q)|\langle 0|\varphi(0)|U(a)n\rangle|^2 \quad (16.28)$$

其中 a 是正 Lorentz 变换的系数矩阵. 至于 δ 函数的 Lorentz 不变性,可以从它的 Fourier 展开式看出,这就允许我们写

$$\delta^4(p_n - q) = \delta^4[(p_n - q)a^{-1}] \quad (16.29)$$

最后,对 $|m\rangle$ 的完全集合求和,其中态 $|m\rangle = |U(a)n\rangle$ 的本征值是

$$\begin{aligned} p_m^\mu &= \langle m|P^\mu|m\rangle = \langle n|U^{-1}(a)P^\mu U(a)|n\rangle \\ &= (p_n a^{-1})^\mu \end{aligned} \quad (16.30)$$

我们得到所要求的结果

$$\rho(q) = (2\pi)^3 \sum_m \delta^4(p_m - qa^{-1})|\langle 0|\varphi(0)|m\rangle|^2 = \rho(qa^{-1})$$

因为根据对 P_μ 谱的假定, $\rho(q)$ 在向前的光锥之外恒等于零,我们可以写为

$$\rho(q) = \rho(q^2)\theta(q_0) \quad (16.31)$$

其中 $\rho(q^2)$ 当 $q^2 < 0$ 时等于零,是实的并对于 $q^2 \geqslant 0$ 是半正定的. 于是可以把方程(16.26)写成自由场对易子函数对质量参数的权重积分形式:

$$\Delta'(x-x') = \frac{-i}{(2\pi)^3}\int d^4q\rho(q^2)\theta(q_0)(e^{-iq\cdot(x-x')} - e^{iq\cdot(x-x')})$$

$$= \frac{-i}{(2\pi)^3}\int_0^\infty d\sigma^2\rho(\sigma^2)\int d^4q\delta(q^2-\sigma^2)\varepsilon(q_0)e^{-iq\cdot(x-x')}$$

$$= \int_0^\infty d\sigma^2\rho(\sigma^2)\Delta(x-x',\sigma) \qquad (16.32)$$

$\theta(q_0)$，$\varepsilon(q_0)$ 以及带质量参数 σ 的不变 Δ 函数的定义皆可见附录 C.

我们称 (16.32) 为对易子真空期待值的谱表示. 它首先是由 Källén 于 1952 年在量子电动力学中推出的，现在这形式则是 1954 年由 Lehmann 给出的[1]. 对于理论的其它各种 Green 函数也都可以作上面的推导而无需作什么实质的变更，特别是

$$\Delta'_F(x-x') = -i\langle 0|T(\varphi(x)\varphi(x'))|0\rangle$$

$$= \int_0^\infty d\sigma^2\rho(\sigma^2)\Delta_F(x-x',\sigma) \qquad (16.33)$$

或者在动量空间

$$\Delta'_F(p) = \int_0^\infty d\sigma^2\rho(\sigma^2)\frac{1}{p^2-\sigma^2+i\varepsilon}$$

权重函数 ρ 与 (16.32) 中的一样.

虽然我们不可能明显计算出 (16.27) 中谱振幅的无穷项的和，但是我们可以通过分离出单粒子态的贡献而证明

$$0 \leqslant Z < 1 \qquad (16.34)$$

并最终导致与 (16.17) 式(作为**算符表述**)的矛盾.

---

1) G. Källén, *Helv. Phys. Acta*, **25**, 417 (1952); H. Lehmann, *Nuovo Cimento*, **11**, 342 (1954). 并见 A. Wightman (未发表，1953) 该文曾为 S. Schweber 所引用，可见其专著 "*An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*", *Harper & Row, Publishers, Incorporated, NewYork*, 1961. 我们随意地交换了积分和求和的次序. 这样作法的合理性可参阅文献.

利用图 16.1 关于 P^μ 谱的假定，对于 $\sigma^2 = m^2$ 的情形可以在 (16.27) 中只考虑单粒子矩阵元 $\langle 0|\varphi(x)|p\rangle$ 的贡献而计算 $\rho(\sigma^2)$. 由 (16.14)

$$\langle 0|\varphi(x)|p\rangle = \sqrt{Z}\,\langle 0|\varphi_{\text{in}}(x)|p\rangle + \int d^4y\,\Delta_{\text{ret}}(x-y;m)\langle 0|\tilde{j}(y)|p\rangle \tag{16.35}$$

(16.35) 中的第二项因为 (16.13) 而等于零:

$$\begin{aligned}\langle 0|\tilde{j}(y)|p\rangle &= \langle 0|(\Box + m^2)\varphi(y)|p\rangle \\ &= (\Box + m^2)e^{-ip\cdot y}\langle 0|\varphi(0)|p\rangle \\ &= (m^2 - p^2)\langle 0|\varphi(y)|p\rangle = 0\end{aligned} \tag{16.36}$$

所以

$$\langle 0|\varphi(x)|p\rangle = \sqrt{Z}\,\langle 0|\varphi_{\text{in}}(x)|p\rangle \tag{16.37}$$

按定义，$\varphi_{\text{in}}(x)$ 应该是归一化了的，它从真空产生单粒子态的矩阵元具有单位振幅，和自由粒子的结果一致. 由 (16.9) 和 (16.11)

$$\begin{aligned}\langle 0|\varphi_{\text{in}}(x)|p\rangle &= \int d^3k\,\frac{e^{-ik\cdot x}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}\,\langle 0|a_{\text{in}}(k)|p\rangle \\ &= \frac{e^{-ip\cdot x}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_p}}\end{aligned} \tag{16.38}$$

(16.37) 中的 $\sqrt{Z}$ 就表示通过 $\varphi(x)$ 由真空产生单粒子态的振幅.

所以，由 (16.37) 和 (16.38)，单粒子态对 (16.27) 求和式的贡献就是

$$\begin{aligned}&(2\pi)^3\int d^3p\,\delta^4(p-q)\,\frac{Z}{(2\pi)^3 2\omega_p} \\ &\quad = Z\delta(q^2 - m^2)\theta(q_0)\end{aligned} \tag{16.39}$$

把此项从谱振幅对所有态的求和中独立出来，(16.32) 就改写为

$$\Delta'(x-x') = Z\Delta(x-x';m) + \int_{m_1^2}^{\infty} d\sigma^2\rho(\sigma^2)\Delta(x-x';\sigma) \qquad (16.40)$$

其中阈值 m_1^2 是对 $\rho(\sigma^2)$ 有贡献的不连续单粒子项以上的最轻连续态的质量平方；譬如在图 16.1 上，$m = m_\pi, m_1^2 = 4m_\pi^2$.

将 (16.40) 对时间取微商并令 $t' \to t$ 就可以得到我们所需的对 Z 的限制 (16.34). 利用正则对易关系 (16.4)、对 Δ' 的定义 (16.23) 以及对 Δ 的定义 (12.42)，我们得到

$$\lim_{t'\to t}\left(i\frac{\partial}{\partial t}\Delta'(x-x')\right) = \langle 0|[\dot{\varphi}(\boldsymbol{x},t),\varphi(\boldsymbol{x}',t)]|0\rangle$$

$$= -i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = \lim_{t'\to t}\left(i\frac{\partial}{\partial t}\Delta(x-x';\sigma)\right) \qquad (16.41)$$

由此

$$1 = Z + \int_{m_1^2}^{\infty}\rho(\sigma^2)d\sigma^2 \qquad (16.42)$$

再考虑到 (16.31)，即 $\rho(\sigma^2)$ 不会是负的，这就给出

$$0 \leqslant Z < 1 \qquad (16.43)$$

与 (16.34) 一致，只要 (16.42) 的积分存在而且计算具有意义. 如果与连续态有任何耦合，$Z = 1$ 的极限就被排除. 这说明 (16.42) 和直观是一致的. 我们期待 $\varphi(x)$ 由真空产生单粒子态的振幅小于自由场的相应的振幅 (后者等于 1)，因为它还可能产生连续态. 然而，如果 $\varphi_{\text{in}}(x)$ 是如 (16.14) 所定义而且象 (16.20) 和 (16.22) 那样建立态是允许的话，那末 Z 不可能等于零. 遗憾的是微扰展开的个别项却违反这一要求.

在有相互作用时，$Z < 1$，我们发现这就和 (16.17) 的强渐近条件相矛盾. 假定 (16.17) 成立，重复 (16.41) 的步骤，我们得到

$$\lim_{t\to-\infty}\langle 0|[\dot{\varphi}(\boldsymbol{x},t),\varphi(\boldsymbol{x}',t)]|0\rangle = -i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

$$\overset{?}{=\!=}\lim_{t\to-\infty} Z\langle 0|[\dot{\varphi}_{\text{in}}(\boldsymbol{x},t),\varphi_{\text{in}}(\boldsymbol{x}',t)]|0\rangle \qquad (16.44)$$

而由 (16.8) 及 (16.38) 得

$$\langle 0|[\varphi_{\text{in}}(x),\varphi_{\text{in}}(x')]|0\rangle = i\Delta(x-x') \qquad (16.45)$$

取 (16.45) 的时间微商并与 (16.44) 比较，就会得到 $Z=1$. 这说明极限过程次序的交换是不允许的.

16.5 出场和出态

在前两节中我们通过引进入场把 $t\to-\infty$ 时的动力学归之为自由粒子动力学；对于 $t\to+\infty$，适当定义出场 $\varphi_{\text{out}}(x)$，我们也可以作同样的事情. 我们需要对物理系统在 $t\to+\infty$ 时的这样一种简单的描述，因为散射过程的终态就是这样.

$\varphi_{\text{out}}(x)$的建立方式和 $\varphi_{\text{in}}(x)$ 的完全一样. 就如 (16.5) 和 (16.6)，我们定义 $\varphi_{\text{out}}(x)$满足

$$[P^\mu,\varphi_{\text{out}}(x)] = -i\frac{\partial\varphi_{\text{out}}(x)}{\partial x_\mu} \qquad (16.46)$$

$$(\Box+m^2)\varphi_{\text{out}}(x) = 0 \qquad (16.47)$$

则 $\varphi_{\text{out}}(x)$就如 (16.8) 一样，只从真空中产生单粒子态. 同样，从类似于 (16.9) 的展开式

$$\varphi_{\text{out}}(x) = \int d^3k[a_{\text{out}}(x)f_k(x) + a^\dagger_{\text{out}}f^*_k(x)] \qquad (16.48)$$

我们有

$$[P^\mu,a_{\text{out}}(k)] = -k^\mu a_{\text{out}}(k) \quad [P^\mu,a^\dagger_{\text{out}}(k)] = k^\mu a^\dagger_{\text{out}}(k) \qquad (16.49)$$

与 (16.10) 类似.

与 (16.10) 相对照，我们要有如下的渐近条件

$$\lim_{t\to+\infty}\langle\alpha|\varphi^t(t)|\beta\rangle=\sqrt{Z}\ \langle\alpha|\varphi^t_{\text{out}}|\beta\rangle \tag{16.50}$$

或是简单地写成

$$\varphi(x)\to\sqrt{Z}\,\varphi_{\text{out}}(x)\ \text{当}\ t\to+\infty \tag{16.51}$$

就如对 $\varphi_{\text{in}}(x)$ 所讨论的那样，(16.51) 应理解为弱算符收敛 (16.50). 于是，代替 (16.14)，对于出场就可以定义

$$\sqrt{Z}\ \varphi_{\text{out}}(x)=\varphi(x)-\int d^4y\Delta_{\text{adv}}(x-y;m)\tilde{j}(y) \tag{16.52}$$

其中 $\Delta_{\text{adv}}(x-y;m)$ 是超前 Green 函数:

$$\begin{aligned}(\Box_x+m^2)\Delta_{\text{adv}}(x-y;m)&=\delta^4(x-y)\\ \Delta_{\text{adv}}(x-y;m)&=0\qquad x_0-y_0>0\end{aligned} \tag{16.53}$$

这里同样引进了归一化常数 $\sqrt{Z}$ 以使 $\varphi_{\text{out}}(x)$ 从真空产生单粒子态的振幅为 1，所以对照 (16.36) 到 (16.38)，它等于 (16.14) 中的 $\sqrt{Z}$:

$$\begin{aligned}\langle0|\varphi(x)|p\rangle&=\sqrt{Z}\langle0|\varphi_{\text{out}}(x)|p\rangle=\sqrt{Z}\langle0|\varphi_{\text{in}}(x)|p\rangle\\&=\sqrt{Z}\,\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_p}}e^{-ip\cdot x}\end{aligned} \tag{16.54}$$

由 (16.54) 可知，$\varphi_{\text{in}}(x)$ 和 $\varphi_{\text{out}}(x)$ 的对易子的真空期待值就和自由场的完全一样:

$$\begin{aligned}\langle0|[\varphi_{\text{in}}(x),\varphi_{\text{in}}(y)]|0\rangle&=i\Delta(x-y)\\ \langle0|[\varphi_{\text{out}}(x),\varphi_{\text{out}}(y)]|0\rangle&=i\Delta(x-y)\end{aligned} \tag{16.55}$$

Zimmermann 证明了[1]，这些对易子事实上是 C 数，因此上式左端无需取真空期待值，

$$\begin{aligned}[\varphi_{\text{in}},(x),\varphi_{\text{in}}(y)]&=[\varphi_{\text{out}}(x),\varphi_{\text{out}}(y)]\\&=i\Delta(x-y)\end{aligned} \tag{16.56}$$

---

1) Zimmermann，见前节注。

上述等式之证明留作练习.

16.6 S 矩阵的定义和一般性质

至此，我们已经有了关于 $\varphi_{\text{in}}(x)$ 和 $\varphi_{\text{out}}(x)$ 的全部所需要的性质和形式理论，因此，可以着手定义和研究实验有兴趣的跃迁振幅，即 S 矩阵元. 我们从 n 个无相互作用(即空间上分隔开的) 物理粒子系统的初态出发，系统状态有量子数 $p_1,\cdots,p_n$，表示为

$$|p_1\cdots p_n\text{in}\rangle = |\alpha\text{in}\rangle \tag{16.57}$$

字母 p 不仅表示动量，还包括粒子的所有内部量子数，如电荷、奇异数等. 这是可能的，因为根据 (16.14) 的定义，在内部对称变换下，$\varphi_{\text{in}}(x)$ 的变换性质和 $\varphi(x)$ 的一样. 具体说，如果

$$[Q,\varphi_r(x)] = -\lambda_{rs}\varphi_s(x)$$

则

$$[Q,\tilde{j}_r(x)] = (\Box + m^2)[Q,\varphi_r(x)] = -\lambda_{rs}\tilde{j}_s(x)$$

所以由 (16.14)

$$[Q,\varphi_r^{\text{in}}(x)] = -\lambda_{rs}\varphi_s^{\text{in}}(x)$$

因此，以后我们可以用自由粒子初态(或终态)的量子数来表示相互作用系统的守恒量. 例如第十五章中对于强耦合粒子建立的各种守恒量都可以直接用来描述这里建立的入态和出态的自由粒子.

从这样一个初态跃迁到具有 m 个粒子，量子数为 $p_1'\cdots p_m'$ 的终态

$$|p_1'\cdots p_m'\text{out}\rangle = |\beta\text{out}\rangle \tag{16.58}$$

的 S 矩阵元由几率振幅

$$S_{\beta\alpha} = \langle\beta\text{out}|\alpha\text{in}\rangle \tag{16.59}$$

给出. 方程 (16.59) 定义了 S 矩阵的 $\beta\alpha$ 元素.

把(16.59)和非相对论的传播子理论的 S 矩阵定义相比较是很有意义的. 在方程(6.16)中，S 矩阵的 (f,i) 元素表示为

$$S_{fi} = \lim_{t\to\infty}\int d^3x\varphi_f^*(\boldsymbol{x},t)\Psi_i^+(\boldsymbol{x},t)$$
$$= \lim_{t\to\infty}(\varphi_f(\boldsymbol{x},t),\Psi_i^+(\boldsymbol{x},t)) \qquad (16.60)$$

式中 $\Psi_i^+(\boldsymbol{x},t)$ 是 Schrödinger 方程(6.14)在“入”边界条件——在 $t\to-\infty$ 时归之为入射平面波——下的精确散射解. S_{fi} 是 Ψ_i^+ 于 $t\to+\infty$ 时在给定的自由终态 $\varphi_f(\boldsymbol{x},t)$ 上投影的振幅. 可以把 S_{fi} 改写成(16.59)的类似形式. 为此，我们引入 $\Psi_f^-(\boldsymbol{x},t)$，它是在“出”边界条件下 Schrödinger 方程的精确散射解，也就是当 $t\to+\infty$ 时趋于具有终态量子数 f 的自由波 $\varphi_f(\boldsymbol{x},t)$. $\Psi_f^-(\boldsymbol{x},t)$ 由自由波以及一系列球面波的和所组成，球面波在过去从散射中心发出而在 $t\to+\infty$ 时消失. 它是 Schrödinger 方程的解，但(6.14)的推迟 Green 函数用超前的代替:

$$\Psi_f^-(x') = \varphi_f(x') + \int d^4x_1' G_0^{\mathrm{adv}}(x';x_1')V(x_1')\Psi_f^-(x_1') \qquad (16.61)$$

$$G_0^{\mathrm{adv}}(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x}_1',t_1') = 0 \quad \text{对于} \quad t' > t_1'$$

于是当 $t'\to+\infty$ 时 $\Psi_f^-(\boldsymbol{x}',t')\to\varphi_f(\boldsymbol{x}',t')$ 而(16.60)给出

$$S_{fi} = \lim_{t\to\infty}(\Psi_f^-(\boldsymbol{x},t),\Psi_i^+(\boldsymbol{x},t))$$
$$= \lim_{t\to\infty}\int d^3x\Psi_f^{-*}(\boldsymbol{x},0)e^{iHt}e^{-iHt}\Psi_i^+(\boldsymbol{x},0)$$
$$= (\Psi_f^-(\boldsymbol{x},0),\Psi_i^+(\boldsymbol{x},0)) \qquad (16.62)$$

$\Psi(\boldsymbol{x},0)$ 是 Heisenberg 表象中的波函数，只是对时间的关系已经移走了. (16.62)形式上与(16.59)类似，不过是以满足“入”和“出”边界条件的波函数来表示的.

根据我们关于入态和出态分别形成完全集合的假设，由(16.59) 我们有一个算符 S 的全部矩阵元，它把入态变为出态：

$$\langle\beta\text{in}|S=\langle\beta\text{out}| \qquad \langle\beta\text{out}|S^{-1}=\langle\beta\text{in}| \tag{16.63}$$

由此得到

$$S_{\beta\alpha}=\langle\beta\ \text{in}|S|\alpha\ \text{in}\rangle$$

S 矩阵正是我们注意的中心，因为其矩阵元表示跃迁振幅并且和物理的测量紧密相关. 由前面关于状态的谱的假设以及 $\varphi_{\text{in}}(x)$和 $\varphi_{\text{out}}(x)$ 的性质可以得出一系列关于 S 的重要性质. 它们可以列举如下：

1. 真空态的稳定性要求$|S_{00}|=1$，或者

$$\langle 0\text{in}|S=\langle 0\text{out}|=e^{i\varphi_0}\langle 0\text{in}|$$

按假定，真空是唯一的，故相因子 φ_0 可以令之为零，于是

$$\langle 0\text{out}|=\langle 0\text{in}|=\langle 0| \tag{16.64}$$

所以 $S_{00}=1$.

2. 单粒子态的稳定性也要求

$$\langle p\text{in}|S|p\text{in}\rangle=\langle p\text{out}|p\text{in}\rangle=\langle p\text{in}|p\text{in}\rangle=1 \tag{16.65}$$

因为由 (16.54)$|p\ \text{in}\rangle=|p\ \text{out}\rangle=|p\rangle$.

3. S 把入场变为出场，即

$$\varphi_{\text{in}}(x)=S\varphi_{\text{out}}(x)S^{-1} \tag{16.66}$$

为证明这点，考虑矩阵元

$$\langle\beta\ \text{out}|\varphi_{\text{out}}(x)|\alpha\ \text{in}\rangle=\langle\beta\ \text{in}|S\varphi_{\text{out}}(x)|\alpha\ \text{in}\rangle$$

而$\langle\beta\ \text{out}|\varphi_{\text{out}}(x)$是一个出态，可以利 (16.63) 把它写为

$$\langle\beta\ \text{out}|\varphi_{\text{out}}(x)=\langle\beta\text{in}|\varphi_{\text{in}}(x)S,$$

于是就有

$$\langle\beta\ \text{in}|\varphi_{\text{in}}(x)S|\alpha\ \text{in}\rangle=\langle\beta\ \text{in}|S\varphi_{\text{out}}|\alpha\ \text{in}\rangle$$

根据入态集合的完全性，我们就得到 (16.66) 式.

4. 我们所定义的 S 矩阵是幺正的. 从 (16.63)

$$S^\dagger|\alpha\,\text{in}\rangle = |\alpha\,\text{out}\rangle \tag{16.67}$$

再次利用(16.63)，就有

$$\langle\beta\,\text{in}|SS^\dagger|\alpha\,\text{in}\rangle = \langle\beta\,\text{out}|\alpha\,\text{out}\rangle = \delta_{\beta\alpha} \tag{16.68}$$

所以

$$SS^\dagger = S^\dagger S = 1 \tag{16.69}$$

5. S 是平移不变和 Lorentz 不变的[1]，即是

$$U(a,b)SU^{-1}(a,b) = S \tag{16.70}$$

其中 $U(a,b)$ 由 (11.66)、(11.69) 和 (11.72) 定义，是幺正算符，它生成如下的变换

$$x'_\mu = x_\mu + a^\nu_\mu x_\nu$$

为了证明(16.70)，把(16.66)引进场算符在 $U(a,b)$ 作用下的场算符变换方程 (11.67):

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{in}}(ax+b) &= U(a,b)\varphi_{\text{in}}(x)U^{-1}(a,b) = US\varphi_{\text{out}}S^{-1}U^{-1}\\ &= USU^{-1}\varphi_{\text{out}}(ax+b)US^{-1}U^{-1}\end{aligned} \tag{16.71}$$

但是 $\varphi_{\text{in}}(ax+b) = S\varphi_{\text{out}}(ax+b)S^{-1}$，所以

$$S = U(a,b)SU^{-1}(a,b)$$

可见 S 是 Lorentz 不变的.

16.7 标量场的约化公式

我们已经了解了 S 的一般性质，也对其矩阵元极感兴趣，因为 $|S_{\beta\alpha}|^2$ 反映了实验观察到的入态 α 和出态 β 之间的跃迁几率；但是 $S_{\beta\alpha}$ 的具体计算却是一个很不寻常的任务.

直到 1954 年，计算 S 矩阵的唯一系统的方法是用 (16.13) 的相互作用流 $\hat{j}(x)$ 作幂级数展开的微扰论. 此后，取得了一些进步，这首先是由于 Low[2] 以及 Lehmann、Symanzik 和

1) 记住，有电磁相互作用时，这是不够的. 因为为了在新参考系内恢复辐射规范，每一个 Lorentz 变换都必须伴随以一个规范变换. 所以在此种情况下必须确定，S 矩阵是规范不变的.

2) F. Low, *Phys. Rev.*, **97**, 1392(1955).

Zimmermann (LSZ)[1] 的工作. 他们指出，如何不依赖于弱耦合的微扰展开而获得 S 所包含的一般讯息. 他们利用了渐近条件 (16.20) 和 (16.50) 并通过场算符的真空期待值以表示物理上感兴趣的矩阵元. 通过场的对易子的 (16.40) 式的推导我们已经看到用真空期待值讨论问题的好处. 在那里，我们通过 Lorentz 不变性以及理论的其它一些性质把 $\Delta'(x-x')$ 表示成一个紧凑的一般形式.

依照上面所说的，我们将发现，场算符乘积的真空期待值要比 (16.59) 形式的矩阵元在某些方面来说更容易处理些. 一方面，可以把场算符 $\varphi(x)$ 直接展开成微扰级数，由此通过自由波入场算符乘积的真空期待值把 S 矩阵元展开；这些表示式的计算规则正好也就是过去传播子方法的 Feynman 规则. 另一方面，研究 Heisenberg 算符 $\varphi(x)$ 在唯一的不变真空态之间的矩阵元时，各种不变性论证(就如在推导 $\Delta'(x-x')$ 时所做的那样)既容易说明又便于使用. 借用于以上这些，在微扰方法之外已取得了相当可观的进展.

为此，我们下面通过一步一步的推导来介绍 LSZ 的“约化技术”. 它从 (16.59) 的物理态抽取出讯息，并在夹于真空态之间的场算符乘积中显示出来.

考虑 S 矩阵元

$$S_{\beta,\alpha p} = \langle \beta \text{ out} | \alpha p \text{ in} \rangle \qquad (16.72)$$

式中 β 代表出态 $|\beta\text{out}\rangle$ 中出现的粒子，$|\alpha p\text{in}\rangle$ 是入态，它代表入态粒子的集合 α 加上一个另外的动量为 p 的入射粒子.

利用渐近条件，我们从“入”态中抽出粒子 p 而代之以适当的场算符. 由 (16.22)、(16.9) 和 (16.48)，我们有[2]

---

1) Lehmann, Symanzik, *and* Zimmermann，见前节注.

2) 严格说，我们应该采用可归一化态并用 (16.21) 的 φ^{in} 代替 $a_{\text{in}}(p)$. 然而在实际应用时一般就用平面波解了，当然要小心.

$$\langle\beta\ \text{out}|\alpha p\ \text{in}\rangle = \langle\beta\ \text{out}|a_{\text{in}}^{\dagger}(p)|\alpha\ \text{in}\rangle$$
$$= \langle\beta\ \text{out}|a_{\text{out}}^{\dagger}(p)|\alpha\ \text{in}\rangle + \langle\beta\ \text{out}|a_{\text{in}}^{\dagger}(p) - a_{\text{out}}^{\dagger}(p)|\alpha\ \text{in}\rangle$$
$$= \langle\beta - p\ \text{out}|\alpha\ \text{in}\rangle - i\langle\beta\ \text{out}|\int d^3x f_p(x)\overleftrightarrow{\partial}_0[\varphi_{\text{in}}(x) - \varphi_{\text{out}}(x)]|\alpha\ \text{in}\rangle \tag{16.73}$$

此处，$|\beta - p\ \text{out}\rangle$代表从集合$\beta$中已经扣除了$p$粒子的出态，如果$\beta$中包含有$p$的话；而如果$\beta$不含有$p$，则(16.73)的第一项就不存在．假如$|\alpha p\ \text{in}\rangle$代表两粒子散射的初态，则$\langle\beta - p\ \text{out}|\alpha\ \text{in}\rangle$只对向前弹性散射有贡献，此时入射粒子束和靶粒子皆保持其各自的量子数．(16.73)的右端各项因 Green 定理而与时间无关，利用渐近条件(16.20)和(16.50)可以在$t\to-\infty$极限下用$(1/\sqrt{Z})\varphi(\boldsymbol{x},x_0)$代替$\varphi_{\text{in}}(\boldsymbol{x},x_0)$，以及当$t\to+\infty$时用$(1/\sqrt{Z})\varphi(\boldsymbol{x},x_0)$代替$\varphi_{\text{out}}(\boldsymbol{x},x_0)$；也就是

$$\langle\beta\ \text{out}|\alpha p\ \text{in}\rangle = \langle\beta - p\ \text{out}|\alpha\ \text{in}\rangle + \frac{i}{\sqrt{Z}}\left(\lim_{x_0\to+\infty} - \lim_{x_0\to-\infty}\right)\int d^3x f_p(\boldsymbol{x},x_0)\overleftrightarrow{\partial}_0 \times\langle\beta\ \text{out}|\varphi(\boldsymbol{x},x_0)|\alpha\ \text{in}\rangle \tag{16.74}$$

这就完成了约化过程的第一步．为了使形式更为方便并且协变，用以下恒等式把(16.74)的时间极限包括进四维体积分：

$$\left(\lim_{x_0\to+\infty} - \lim_{x_0\to-\infty}\right)\int d^3x g_1(x)\overleftrightarrow{\partial}_0 g_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d^4x\,\frac{\partial}{\partial x_0}[g_1(x)\overleftrightarrow{\partial}_0 g_2(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} d^4x\left[g_1(x)\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}g_2(x) - \frac{\partial^2 g_1(x)}{\partial x_0^2}g_2(x)\right] \tag{16.75}$$

将(16.75)代入(16.74)并因为$f_p(x)$满足 Klein-Gordon 方程

$$\frac{\partial^2 f_p(x)}{\partial x_0^2} = (\nabla^2 - m^2)f_p(x) \tag{16.76}$$

对 $\varphi(\boldsymbol{x},x)$ 作分部积分[1],我们得到所要求的形式

$$\langle\beta\ \text{out}|\alpha p\ \text{in}\rangle = \langle\beta - p\ \text{out}|\alpha\ \text{in}\rangle + \frac{i}{\sqrt{Z}}\int d^4x f_p(x)(\Box+m^2)\langle\beta\,\text{out}|\varphi(x)|\alpha\,\text{in}\rangle \quad (16.77)$$

上面这一步骤可以一再重复直至从入态和出态中移走了全部粒子，只剩下场算符乘积的真空期待值. 譬如说，让我们从(16.77)的集合 $\beta = \gamma p'$ 中移走一个“出”粒子 p'. 重复(16.74)的步骤，并取必要的厄米共轭，我们有

$$\begin{aligned}\langle\beta\,\text{out}|\varphi(x)|\alpha\,\text{in}\rangle &= \langle\gamma\ \text{out}|\varphi(x)|\alpha - p'\text{in}\rangle \\ &+ \langle\gamma\ \text{out}|a_{\text{out}}(p')\varphi(x) - \varphi(x)a_{\text{in}}(p')|\alpha_{\text{in}}\rangle \\ &= (\gamma\ \text{out}|\varphi(x)|\alpha - p'\ \text{in}\rangle \\ &- i\int d^3y\langle\gamma\ \text{out}|\varphi_{\text{out}}(y)\varphi(x) \\ &- \varphi(x)\varphi_{\text{in}}(y)|\alpha\ \text{in}\rangle\overleftrightarrow{\partial}_{y_0}f^*_{p'}(y) \qquad (16.78)\end{aligned}$$

利用渐近条件又可以把 (16.78) 矩阵元中的入场和出场分别用 $y_0 \to -\infty$ 和 $+\infty$ 时的 $(1/\sqrt{Z})\varphi(y)$ 代替，于是就可以把(16.78)写成(12.72)的编时乘积的形式

$$\begin{aligned}&\langle\gamma\ \text{out}|\varphi_{\text{out}}(y)\varphi(x) - \varphi(x)\varphi_{\text{in}}(y)|\alpha\ \text{in}\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{Z}}\left(\lim_{y_0\to+\infty} - \lim_{y_0\to-\infty}\right)\langle\gamma\ \text{out}|T(\varphi(y)\varphi(x))|\alpha\ \text{in}\rangle \qquad (16.79)\end{aligned}$$

最后，利用(16.75)、(16.76)我们得到

$$\begin{aligned}\langle\gamma p'\ \text{out}|\varphi(x)|\alpha\ \text{in}\rangle &= \langle\gamma\ \text{out}|\varphi(x)|\alpha - p'\ \text{in}\rangle \\ &+ \frac{i}{\sqrt{Z}}\int d^4y\langle\gamma\ \text{out}|T(\varphi(y)\varphi(x))|\alpha\ \text{in}\rangle \\ &\times(\overleftarrow{\Box_y^2} + m^2)f^*_{p'}(y) \qquad (16.80)\end{aligned}$$

1) 按照通常关于物理系统定域于一定空间的假定，分部积分后的表面积分项等于零.

这样，利用约化技术从初、末态移走全部粒子直至达到场算符乘积的真空期待值的步骤就清楚了：

$$\langle p_1\cdots p_n \text{ out}|q_1\cdots q_m \text{ in}\rangle$$
$$=\left(\frac{i}{\sqrt{Z}}\right)^{m+n}\prod_{i=1}^{m}\int d^4x_i\prod_{j=1}^{n}\int d^4y_j f_{q_i}(x_i)(\overrightarrow{\Box_{x_i}+m^2})$$
$$\times\langle 0|T(\varphi(y_1)\cdots\varphi(y_n)\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_m))|0\rangle$$
$$(\overleftarrow{\Box_{y_j}+m^2})f^*_{p_j}(y_j)\quad\text{对于所有}\quad p_i\neq q_i \qquad (16.81)$$

在写出(16.81)时，为了简单起见，我们已经假定所有的 $p_i\neq q_i$ 并丢掉了(16.77)和(16.80)中的向前散射项；这不会引起问题的，因为它们也可以用同样技术予以约化.

方程(16.81)是近代量子场论全部散射振幅计算的基石. 我们在这里预先指出，$\langle 0|T(\varphi(z_1)\cdots\varphi(z_r))|0\rangle$ 代表在 $(z_1\cdots z_r)$ 点有 r 个粒子产生或消灭的所有 Feynman 图的总和，如图 16.2 所示. 这是 r 个粒子完全的 Green 函数. (16.81)的 $(\Box_i+m^2)$ 因子移走了对应于图中指向相互作用圈的外部腿的传播子. 为了看出这一点，只需指出，在动量空间 $\Box_i^2+m^2$ 成为 $m^2-p_i^2$，正好抵消相应的传播子因子 $i/(p_i^2-m^2)$. 约化公式(16.81)表明：S 矩阵元就是 $r=n+m$ 个粒子的 Green 函数，其外部腿都已拿走而外部动量则在质壳上 $p_i^2=q_i^2=m^2$. 我们将在下一章对此作进一步研究.

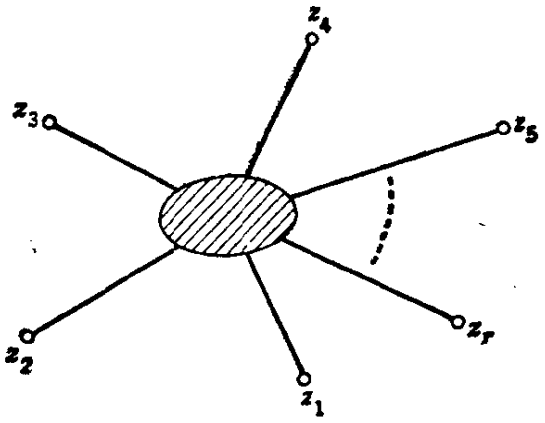


图 16.2 r 个粒子完全的 Green 函数

在把(6.30)的体积分写成四维形式时，容易看出(16.81)和传播子理论中的 S 矩阵极为相似. 利用那里 Green 函数的推迟性质，借助于自由粒子的 Schrödinger 方程

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2m}\nabla^2\right)\varphi=0$$

我们改写(6.30)为

$$\begin{aligned}S_{fi}&=-i\lim_{t'\to\infty}\int d^3x'\int d^4x\varphi_f^*(\boldsymbol{x}',t')\frac{\partial}{\partial t}[G(x';x)\varphi_i(\boldsymbol{x},t)]\\&=\lim_{t'\to\infty}\int d^3x'\int d^4x\varphi_f^*(x')G(x';x)\left(\overleftarrow{-i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\nabla_x^2}{2m}}\right)\varphi_i(x)\\&=-i\int d^4x'\int d^4x\varphi_f^*(x')\left(\overrightarrow{i\frac{\partial}{\partial t'}+\frac{\nabla_{x'}^2}{2m}}\right)\\&\quad\times G(x';x)\left(\overleftarrow{-i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\nabla_x^2}{2m}}\right)\varphi_i(x)\end{aligned}\tag{16.82}$$

与(16.81)相比较，我们看到除了非相对论的替代

$$(\Box+m^2)\to\left(i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\nabla^2}{2m}\right)$$

之外，一般的 r 个粒子的 Green 函数被外场中运动的单粒子的精确推迟 Green 函数 $G(x';x)$ 所取代. 对于正电子理论，由(6.56)以及精确的 Feynman 传播子也可以得到类似的结果. 其推导留作练习.

16.8 Dirac 理论的入场和出场以及谱表示

把已经在前面对于标量场得到的公式推广到旋量场和电磁场时遇到的问题主要是形式上的. 对于 Dirac 场，自旋使代数复杂化，而 Maxwell 场则有规范问题. 但是，在讨论入场和出场，在建立对易子真空期待值的谱形式以及在推导约

化公式时所采用的那些基本思想在这儿也是适用的[1].

为了用物理质量 m 来表示 Dirac 方程，可以采用我们在(16.13)所做的，即给源加上质量修正项：

$$(i\not\partial - m)\psi(x) = \tilde{j}(x) \quad \tilde{j}(x) \equiv j(x) - (m - m_0)\Psi(x) \tag{16.83}$$

赋予场算符 $\psi(x)$ 以熟知的等时反对易关系

$$\{\psi_\alpha(\boldsymbol{x},t),\psi_\beta(\boldsymbol{y},t)\} = 0$$

$$\{\psi_\alpha(\boldsymbol{x},t),\psi_\beta^\dagger(\boldsymbol{y},t)\} = \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\delta_{\alpha\beta}$$

一如(15.9)式.

引进入场 $\psi_{\text{in}}(x)$，定义它为对应于(16.83)的积分方程的非齐次项，即

$$\sqrt{Z_2}\varphi_{\text{in}}(x) = \varphi(x) - \int d^4y S_{\text{ret}}(x-y,m)\tilde{j}(y) \tag{16.84}$$

在此，$S_{\text{ret}}(x)$ 是推迟 Gveen 函数.

$$(i\not\partial_x - m)S_{\text{ret}}(x-y,m) = \delta^4(x-y) \tag{16.85}$$

$$S_{\text{ret}}(x-y) = 0 \qquad \text{当 } x_0 < y_0$$

常数 $\sqrt{Z_2}$ 同样由 $\psi_{\text{in}}(x)$ 的归一化决定，即将 $\psi_{\text{in}}(x)$ 从真空产生单粒子态的矩阵元归一为单位振幅.

正如上面所定义的，$\psi_{\text{in}}(x)$ 满足质量为 m 的自由波方程

$$(i\not\partial - m)\psi_{\text{in}}(x) = 0 \tag{16.86}$$

并具有与 $\psi(x)$ 同样的变换性质，特别是

$$[P_\mu,\psi_{\text{in}}(x)] = -i\frac{\partial\psi_{\text{in}}(x)}{\partial x^\mu} \tag{16.87}$$

从(16.84)可知，$\psi_{\text{in}}(x)$ 的每一个旋量分量都满足 Klein-Gordon 方程. 所以，如(16.8)那样，$\psi_{\text{in}}(x)$ 从真空只产生质

---

1) H. Lehmann，见前书注；M. Gell-Mann *and* F. Low, *Phys. Rev.*, **95**, 1300(1954).

量为 m 的单粒子态.

$\psi_{\text{in}}(x)$ 的 Fourier 展开式和自由 Dirac 场的一样，因此如第十三章那样，可以写成

$$\psi_{\text{in}}(x) = \int d^3p \sum_{\pm s} [b_{\text{in}}(p,s)U_{ps}(x) + d^{\dagger}_{\text{in}}(p,s)V_{ps}(x)] \tag{16.88}$$

其中

$$U_{ps}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}}\, u(p,s)e^{-ip\cdot x}$$

$$V_{ps}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}}\, v(p,s)e^{ip\cdot x}$$

而 $E_p = \sqrt{|\boldsymbol{p}|^2 + m^2}$. 由 (16.88) 及其厄米共轭可得算符系数

$$\begin{aligned} b_{\text{in}}(p,s) &= \int d^3x U^{\dagger}_{ps}(x)\psi_{\text{in}}(x) \\ b^{\dagger}_{\text{in}}(p,s) &= \int d^3x \psi^{\dagger}_{\text{in}}(x)U_{ps}(x) \\ d_{\text{in}}(p,s) &= \int d^3x \psi^{\dagger}_{\text{in}}(x)V_{ps}(x) \\ d^{\dagger}_{\text{in}}(p,s) &= \int d^3x V^{\dagger}_{ps}(x)\psi_{\text{in}}(x) \end{aligned} \tag{16.89}$$

类似于 (16.10)，它们满足对易关系：

$$\begin{aligned} [P^{\mu}, b_{\text{in}}(p,s)] &= -p^{\mu}b_{\text{in}}(p,s) \\ [P^{\mu}, b^{\dagger}_{\text{in}}(p,s)] &= +p^{\mu}b^{\dagger}_{\text{in}}(p,s) \\ [P^{\mu}, d_{\text{in}}(p,s)] &= -p^{\mu}d_{\text{in}}(p,s) \\ [P^{\mu}, d^{\dagger}_{\text{in}}(p,s)] &= +p^{\mu}d^{\dagger}_{\text{in}}(p,s) \end{aligned} \tag{16.90}$$

(16.90) 和自由场的情形是完全一样的；因此，将 $b^{\dagger}_{\text{in}}$ 和 $d^{\dagger}_{\text{in}}$ 重复作用于真空，和 (16.11) 那样就能建立 n 粒子态. 我们这里再重复一次已作过的假定： 真空是唯一稳定的零能量态，

重复应用入场算符就能产生态的一个完全集合.

和标量场情形一样,渐近条件是

$$\phi(x) \to \sqrt{Z_2}\,\phi_{\text{in}}(x) \qquad \text{当 } t \to -\infty$$

不过是指(16.20)那样意义上的弱算符收敛性;这就是说,对于可归一化态,有

$$\lim_{t\to-\infty} \langle\alpha|\phi^f(t)|\beta\rangle = \sqrt{Z_2}\,\langle\alpha|\phi^a_{\text{in}}|\beta\rangle \qquad (16.91)$$

式中 ϕ^f_{in} 由(16.89)第一式定义,$U^\dagger_{p,s}(x)$ 以局域的波包代替;$\phi^f(t)$由同样方程定义而 $\phi_{\text{in}}(x)$被 $\phi(x)$代替.

完全类似地可以引进出场以给出物理系统在 $t \to +\infty$时的简单描述. 代替(16.84)我们有

$$\sqrt{Z_2}\,\phi_{\text{out}}(x) = \phi(x) - \int d^4y S_{\text{adv}}(x-y)j(y) \qquad (16.92)$$

其中

$$\begin{aligned}&(i\not\partial_x - m)S_{\text{adv}}(x-y) = \delta^4(x-y)\\ &S_{\text{adv}}(x-y) = 0 \quad x_0 > y_0\end{aligned} \qquad (16.93)$$

方程(16.86)至(16.89)各式照样有效,只是"入"由"出"取代. 渐近条件现在是

$$\lim_{t\to+\infty} \langle\alpha|\phi^f(t)|\beta\rangle = \sqrt{Z_2}\,\langle\alpha|\phi^f_{\text{out}}|\beta\rangle \qquad (16.94)$$

确定 Z_2 值的方程以及 $\phi(x)$由真空形成质量m的单粒子态的几率,与标量场情形类似,可通过考虑真空期待值

$$S'_{\beta\alpha}(x,x') = i\langle 0|\{\psi_\alpha(x),\bar\psi_\beta(x')\}|0\rangle \qquad (16.95)$$

的谱表示来建立.

在上式中插入态的完备集合

$$P^\mu|n\rangle = p^\mu_n|n\rangle$$

并把场平移至坐标原点,就有

$$\begin{aligned}S'_{\alpha\beta}(x,x') &= S'_{\alpha\beta}(x-x')\\ &= i\sum_n [\langle 0|\psi_\alpha(0)|n\rangle\langle n|\bar\psi_\beta(0)|0\rangle e^{-ip_n\cdot(x-x')}\\ &\quad + \langle 0|\bar\psi_\beta(0)|n\rangle\langle n|\psi_\alpha(0)|0\rangle e^{ip_n\cdot(x-x')}]\end{aligned} \qquad (16.96)$$

和前面一样，把对 n 求和式中所有四动量为 q 的态集合在一起，我们引进谱振幅

$$\rho_{\alpha\beta}(q) = (2\pi)^3 \sum_n \delta^4(p_n - q)\langle 0|\phi_\alpha(0)|n\rangle\langle n|\bar{\phi}_\beta(0)|0\rangle \tag{16.97}$$

并从不变性论证来建立其一般形式. $\rho(q)$ 是个 4×4 的矩阵并且可以用 γ 矩阵的 16 个线性独立的乘积来展开：

$$\begin{aligned}\rho_{\alpha\beta}(q) = {} & \rho(q)\delta_{\alpha\beta} + \rho_\mu(q)\gamma^\mu_{\alpha\beta} + \rho_{\mu\nu}(q)\sigma^{\mu\nu}_{\alpha\beta} \\ & + \tilde{\rho}(q)\gamma^5_{\alpha\beta} + \tilde{\rho}_\mu(\gamma^\mu\gamma^5)_{\alpha\beta}\end{aligned} \tag{16.98}$$

矩阵的系数的结构因 Lorentz 协变的要求而受很强的限制[1]. (16.89) 各项 (在 Lorentz 变换时) 必须按其定义 (16.97) 而变换. 我们已知，在 Lorentz 变换下场算符满足(由 §13.5)

$$\begin{aligned}U(a)\phi_\alpha(0)U^{-1}(a) &= S^{-1}_{\alpha\lambda}(a)\phi_\lambda(0) \\ U(a)\bar{\phi}_\alpha(0)U^{-1}(a) &= \bar{\phi}_\lambda(0)S_{\lambda\alpha}(a)\end{aligned} \tag{16.99}$$

矩阵 S 在第二章中定义作

$$S^{-1}\gamma^\mu S = a^\mu_\nu\gamma^\nu \tag{16.100}$$

代入 (16.97) 并利用开始就已假设的关于真空的 Lorentz 不变性，$U|0\rangle = |0\rangle$，我们得

$$\begin{aligned}\rho_{\alpha\beta}(q) = {} & \sum_n (2\pi)^3\delta^4(p_n - q)S^{-1}_{\alpha\lambda}(a)S_{\delta\beta}(a) \\ & \times\langle 0|\phi_\lambda(0)|U(a)n\rangle\langle U(a)n|\bar{\phi}_\delta(0)|0\rangle\end{aligned} \tag{16.101}$$

如 (16.29) 那样，再利用 $\delta^4(p_n - q)$ 的 Lorentz 不变性，写成对 $|m\rangle = |U(a)n\rangle$ 态的完全集合求和，(16.101) 就是

$$\begin{aligned}\rho_{\alpha\beta}(q) = {} & S^{-1}_{\alpha\lambda}(a)\sum_m (2\pi)^3\delta^4(p_m - qa^{-1}) \\ & \times\langle 0|\phi_\lambda(0)|m\rangle\langle m|\bar{\phi}_\delta(0)|0\rangle S_{\delta\beta}(a)\end{aligned}$$

1) 对于任何与辐射场相耦合的场，在作 Lorentz 变换时必须对它作一个规范变换以恢复辐射场的横向规范——量子化时所用的规范. 但是因 $S'(x,x')$ 不是规范不变的[见方程 (15.21)]，所以本节的考虑对它不适用. 见问题 8.

或者写成简单的形式

$$\rho(q) = S^{-1}(a)\rho(qa^{-1})S(a) \qquad (16.102)$$

方程(16.102)和$\rho(q)$的一般展开式(16.98)一起决定系数ρ和ρ_μ等的结构. 例如,将(16.98)代入(16.102),得到

$$\rho(q) = \rho(qa^{-1})$$

也就是说,ρ是 Lorentz 标量.类似地,

$$\rho_\mu(q) = a_\mu^\nu \rho_\nu(qa^{-1})$$

如 Lorentz 四矢量一样变换,如此等等. 既然$\rho_{\alpha\beta}$只是q的函数,并且在向前的光锥外面等于零,则ρ和$\tilde{\rho}$仅仅依赖于q^2. $\rho_\mu(q)$和$\tilde{\rho}_\mu(q)$是q^2的标量函数乘以q_μ,而$\rho_{\mu\nu}$则正比于$q_\mu q_\nu$. 因此,(16.98)的形式就受到了限制:

$$\rho_{\alpha\beta}(q) = \rho_1(q^2)q_{\alpha\beta} + \rho_2(q^2)\delta_{\alpha\beta} + \tilde{\rho}_1(q^2)(q\gamma^5)_{\alpha\beta} + \tilde{\rho}_2(q^2)\gamma^5_{\alpha\beta} \qquad (16.103)$$

为了进一步约化$\rho_{\alpha\beta}(q)$的形式,我们必须要求理论在宇称变换$\mathscr{P}$下的不变性. 由$\mathscr{P}$的定义,有

$$\mathscr{P}\psi_\alpha(0)\mathscr{P}^{-1} = \gamma^0_{\alpha\lambda}\psi_\lambda(0) \qquad (16.104)$$

将(16.104)代入(16.97),并完成类似于对正 Lorentz 变换的那些步骤,我们得到类似于(16.102)的式子

$$\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{q}, q_0) = \gamma^0_{\alpha\lambda}\rho_{\lambda\delta}(-\boldsymbol{q}, q_0)\gamma^0_{\delta\beta} \qquad (16.105)$$

将(16.103)代入(16.105),由于γ_0与γ_5反对易要多出一个负号,我们得到

$$\tilde{\rho}_1 = \tilde{\rho}_2 = 0 \qquad (16.106)$$

于是(16.103)化为最终形式

$$\rho_{\alpha\beta}(q) = \rho_1(q^2)q_{\alpha\beta} + \rho_2(q^2)\delta_{\alpha\beta} \qquad (16.107)$$

以下的讨论都是基于(16.107)的形式. 当把弱相互作用考虑在内时,$\mathscr{P}$当然不是自然界的对称操作. 所以,较为完全的讨论还是应该用(16.103)的形式;类似地,在(16.84)和(16.92)式中,重整化因子Z_2应该是$a + b\gamma_5$形式的矩

阵．对此有兴趣的读者可以参阅文献[1)]．

(16.96) 第二项的谱振幅可以借助于理论的 $\mathscr{PCT}$ 不变性而直接与(16.97)相联系．引入“取复共轭”这样一个非线性算符 K（它包含在时间反演算符 $\mathscr{T}=\mathscr{U}K$ 中），我们有

$$\begin{aligned}\langle 0|\bar{\psi}_\beta(x')\psi_\alpha(x)|0\rangle &= \langle K0|K\bar{\psi}_\beta(x')\psi_\alpha(x)0\rangle^* \\ &= \langle K\bar{\psi}_\beta(x')\psi_\alpha(x)0|K0\rangle\end{aligned}$$

引进 $1=(\mathscr{PCU})^{-1}(\mathscr{PCU})$ 并利用真空的 $\mathscr{PCT}$ 不变性

$$\mathscr{PCT}|0\rangle \equiv \theta|0\rangle = |0\rangle$$

导致

$$\langle 0|\bar{\psi}_\beta(x')\psi_\alpha(x)|0\rangle = \langle \theta\bar{\psi}_\beta(x')\theta^{-1}\theta\psi_\alpha(x)\theta^{-1}0|0\rangle \tag{16.108}$$

回忆 (15.150)，Dirac 场在 $\mathscr{PCT}$ 作用下变换如下：

$$\theta\psi_\alpha(x)\theta^{-1} = -i(\gamma_0\gamma_5\bar{\psi}(-x))_\alpha = i(\gamma_5\psi^\dagger(-x))_\alpha$$

$$\theta\bar{\psi}_\beta(x')\theta^{-1} = -i(\psi(-x')\gamma_5\gamma_0)_\beta$$

再利用 $\gamma_5=\gamma_5^T$，得到

$$\begin{aligned}&\langle 0|\bar{\psi}_\beta(x')\psi_\alpha(x)|0\rangle \\ &\quad = -(\gamma^5)_{\alpha\tau}\langle 0|\psi_\tau(-x)\bar{\psi}_\lambda(-x')|0\rangle(\gamma^5)_{\lambda\beta}\end{aligned} \tag{16.109}$$

将 (16.109)，(16.107) 代入 (16.96)，最后有

$$\begin{aligned}S'_{\alpha\beta}(x-x') &= i\int\frac{d^4q}{(2\pi)^3}\theta(q_0)([q\rho_1(q^2)+\rho_2(q^2)]_{\alpha\beta}e^{-iq\cdot(x-x')} \\ &\quad -\{\gamma_5[q\rho_1(q^2)+\rho_2(q^2)]\gamma_5\}_{\alpha\beta}e^{iq\cdot(x-x')}) \\ &= i\int\frac{d^4q}{(2\pi)^3}\theta(q_0)[i\not{\nabla}_x\rho_1(q^2)+\rho_2(q^2)]_{\alpha\beta} \\ &\quad\times(e^{-iq\cdot(x-x')}-e^{iq\cdot(x-x')})\end{aligned} \tag{16.110}$$

---

1) K. Sekine, *Nuovo Cimento*, **11**, 87(1959); K. Hiida, *Phys. Rev.*, **132**,1239(1963); **134**, B174(1964).

因为 ρ 对于类空的 q^2 等于零，所以引入下式

$$\rho(q^2)=\int_0^\infty \rho(M^2)\delta(q^2-M^2)dM^2$$

能把它表示成质量谱的积分形式

$$\begin{aligned}S'_{\alpha\beta}(x-x')=&-\int dM^2[i\rho_1(M^2)\not\partial_x\\&+\rho_2(M^2)]_{\alpha\beta}\Delta(x-x';M)\\=&\int dM^2\{\rho_1(M^2)S_{\alpha\beta}(x-x';M)\\&+[M\rho_1(M^2)-\rho_2(M^2)]_{\alpha\beta}\Delta(x-x';M)\}\end{aligned}\tag{16.111}$$

其中不变的 Δ 及 S 函数在附录 C 中已给出.

上面关于谱表示的全部推导对于 Dirac 场编时乘积的真空期待值也完全成立；需要改动的只是 (16.111) 中 S 和 Δ 分别用 Feynman 传播子 S_F 和 Δ_F 代替：

$$\begin{aligned}S'_{F\alpha\beta}(x-x')=&+\int dM^2[i\rho_1(M^2)\not\partial_x\\&+\rho_2(M^2)]_{\alpha\beta}\Delta_F(x-x';M)\end{aligned}\tag{16.112}$$

或者在动量空间

$$S'_F(p)=\int_0^\infty dM^2[\not p\rho_1(M^2)+\rho_2(M^2)]\frac{1}{p^2-M^2+i\varepsilon}$$

对于其它 Green 函数也能写出相似的形式.

将 (16.111) 与 (16.32) 相比，我们发现，Dirac 理论由于具有自旋自由度，其谱的形式不是由对一个而是由对两个未知标量函数的积分给出. ρ_1 与 ρ_2 的性质与 $\rho(q^2)$ 的类似，

(i) $\rho_1(M^2)$ 和 $\rho_2(M^2)$ 是实的.

(ii) $\rho_1(M^2)\geqslant 0$ (16.113)

(iii) $M\rho_1(M^2)-\rho_2(M^2)\geqslant 0$

为证明 (i)，取 (16.97) 的复共轭：

$$\rho^*_{\alpha\beta}(q)=\sum_n(2\pi)^3\delta^4(p_n-q)\langle n|\bar\psi_\tau(0)|0\rangle\gamma^0_{\tau\alpha}\gamma^0_{\beta\lambda}\langle 0|\psi_\lambda(0)|n\rangle$$

$$= [\gamma_0\rho(q)\gamma_0]_{\beta\alpha} = [\rho_1(q^2)\not{q} + \rho_2(q^2)]_{\alpha\beta}$$

为证明 (ii)，我们求迹；从 (16.97) 和 (16.107)

$$\mathrm{Tr}\,\gamma_0\rho(q) = 4q_0\rho_1(q^2)$$

$$= \sum_n (2\pi)^3\delta^4(p_n - q)\sum_{\alpha=1}^{4}\langle 0|\psi_\alpha(0)|n\rangle\langle n|\psi_\alpha^+(0)|0\rangle$$

$$= \sum_n (2\pi)^3\delta^4(p_n - q)\sum_{\alpha=1}^{4}|\langle 0|\psi_\alpha(0)|n\rangle|^2 \geqslant 0$$

因为 $q_0 > 0$，所以 $\rho_1(q^2) \geqslant 0$. (iii) 的证明与此类似，是通过作 $(i\not{\partial} - m)\psi$ 算符之绝对平方来证明的，这留给读者作为练习.

下面要做的是从谱振幅中分出不连续的单粒子态的贡献，就如标量场情形一样，并求得关于 Z_2 的类似于(16.42)的一个条件.对于方程(16.83)取真空到单粒子态 $|ps\rangle$ 的矩阵元

$$(i\not{\partial} - m)\langle 0|\psi(x)|ps\rangle = (\not{p} - m)\langle 0|\psi(0)|ps\rangle e^{-ip\cdot x}$$

$$= \langle 0|\tilde{j}(0)|ps\rangle e^{-ip\cdot x} \qquad (16.114)$$

借助于场算符和态的正 Lorentz 变换性质，考虑到(16.99)表明 $\langle 0|\psi(0)|ps\rangle$ 如动量 p 和自旋 s 的旋量波函数一样变换：

$$\langle 0|\psi_\alpha(0)|ps\rangle = \langle 0|U(a)\psi_\alpha(0)U^{-1}(a)|U(a)ps\rangle$$

$$= S^{-1}_{\alpha\beta}(a)\langle 0|\psi_\beta(0)|p's'\rangle$$

于是就有[1]

$$\langle 0|\psi(0)|ps\rangle = au(p,s) + bv(p,-s)$$

$$= (a + b\gamma_5)u(p,s) \qquad (16.115)$$

加上理论在宇称变换下是不变的这样一个条件可以把上式中带 b 的项去掉. 从 (15.88) 和 (15.91)

$$\langle 0|\psi(0)|p_0,-\boldsymbol{p},s\rangle = (a + b\gamma_5)u(-p,s)$$

$$= \langle 0|\mathscr{P}\psi(0)\mathscr{P}^{-1}|ps\rangle = \gamma_0(a + b\gamma_5)u(p,s)$$

$$= (a - b\gamma_5)u(-p,s) \qquad (16.116)$$

1) 见问题 9.

等式 $u(-p,s)=\gamma_0 u(p,s)$ 是从 Dirac 方程来的[1]. 所以 $b=0$，并且从(16.114)可得

$$\langle 0|\hat{j}(0)|ps\rangle = a(\not{p}-m)u(p,s)=0 \tag{16.117}$$

以及

$$\begin{aligned}\langle 0|\phi(x)|ps\rangle &= \sqrt{Z_2}\langle 0|\phi_{\text{in}}(x)|ps\rangle \\ &= \frac{\sqrt{Z_2}}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}\,u(p,s)e^{-ip\cdot x}\end{aligned} \tag{16.118}$$

$$\langle 0|\phi(x)|ps\rangle = \sqrt{Z_2}\langle 0|\phi_{out}(x)|ps\rangle \tag{16.119}$$

因为入场和出场从真空只产生单粒子态，其矩阵元如(16.118)，类似于(16.55)可以有

$$\langle 0|\{\phi_\alpha^{\text{in}}(x),\bar{\phi}_\beta^{\text{in}}(y)\}|0\rangle = -iS_{\alpha\beta}(x-y) \tag{16.120}$$

与(16.56)一样，反对易子是C数，所以可直接写出

$$\begin{aligned}\{\phi_\alpha^{\text{in}}(x),\bar{\phi}_\beta^{\text{in}}(y)\} &= \{\phi_\alpha^{\text{out}}(x),\bar{\phi}_\beta^{\text{out}}(y)\} \\ &= -iS_{\alpha\beta}(x-y)\end{aligned} \tag{16.121}$$

此式之证明可作为练习.

利用(16.118)，我们分出单粒子态对谱振幅(16.97)的贡献，它是

$$\begin{aligned}&Z_2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_{\pm s}(2\pi)^3\delta^4(p-q)\frac{m}{E_p}u_\alpha(p,s)\bar{u}_\beta(p,s) \\ &\quad = Z_2(q+m)_{\alpha\beta}\delta(q^2-m^2)\theta(q_0)\end{aligned}$$

代入(16.111)，我们得到

$$\begin{aligned}S'_{\alpha\beta}(x-x') &= Z_2 S_{\alpha\beta}(x-x';m) \\ &\quad -\int_{m_1^2}^{\infty}dM^2[i\rho_1(M^2)\not{\nabla}_x+\rho_2(M^2)]_{\alpha\beta}\Delta(x-x';M)\end{aligned} \tag{16.122}$$

式中谱积分从连续谱的阈值 m_1 开始.

1) 和前面一样 $u(-p,s)\equiv u(p_0,-p,s)$.

在 $t=t'$ 时，(16.122) 左端可以直接从假定的 $\psi(x)$ 的等时反对易关系知道

$$S'_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}';0)=i\langle 0|\{\psi_\alpha(\boldsymbol{x},t),\bar{\psi}_\beta(\boldsymbol{x}',t)\}|0\rangle$$
$$=i\gamma^0_{\alpha\beta}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{16.123}$$

于是我们得到关于 Z_2 大小的条件

$$1=Z_2+\int_{m_1^2}^{\infty}dM^2\rho_1(M^2) \tag{16.124}$$

或者由 (16.113)

$$0\leqslant Z_2<1 \tag{16.125}$$

这与 (16.34) 相似.

在推导关于 Z_2，即关于从真空态形成单个 Dirac 粒子态的几率应满足的条件时，我们不少地方依赖于理论的 Lorentz 不变性.既然当电磁作用存在时，每一个 Lorentz 变换必须伴随以规范变换，而 $S'(x-x')$却不是规范不变的，所以(16.125)的条件在量子电动力学里面是不成立的，而 Z_2 作为一个与规范有关的数，也就没有简单的物理解释了.

16.9 Dirac 场的约化公式

§16.6 中关于 S 矩阵一般性质的讨论，不管入态和出态是自旋 1/2 的粒子还是自旋 0 的粒子，同样成立. §16.7 所发展的对于标量场的约化技术应用于有 Dirac 粒子的态之间的矩阵元上时只需要在技术细节上作少量的修改.

从 (16.88)、(16.90) 以及 (16.121) 可以看出，我们可以像对自由 Dirac 理论一样，建立 n 个粒子的入态 (以及出态)，只要对真空重复作用以算符

$$b^\dagger_{\rm in}(p,s)=\int\psi^\dagger_{\rm in}(x)U_{ps}(x)d^3x\quad d^\dagger_{\rm in}(\bar{p},\bar{s})=\int V^\dagger_{\bar{p}\bar{s}}(x)\psi_{\rm in}(x)d^3x \tag{16.126}$$

例如，具有确定量子数的一个一般入态可写成

$$|(\bar{p}_k\bar{s}_k)\cdots(\bar{p}_1\bar{s}_1);(p_is_i)\cdots(p_1s_1);q_1\cdots q_n\ \text{in}\rangle$$
$$= d^\dagger_{\text{in}}(\bar{p}_k\bar{s}_k)\cdots d^\dagger_{\text{in}}(\bar{p}_1\bar{s}_1)b^\dagger_{\text{in}}(p_is_i)\cdots b^\dagger_{\text{in}}(p_1s_1)$$
$$\times a^\dagger_{\text{in}}(q_1)\cdots a^\dagger_{\text{in}}(q_n)|0\rangle \qquad (16.127)$$

式中，按惯例，费米子场的宗量是自右至左按照它们产生的次序排列的，并且粒子 (p_is_i) 先于反粒子 $(\bar{p}_i\bar{s}_i)$. 这个惯例固定了态的符号并照顾到了由于费米子算符的反对易代数而引起的标记问题.

下面开始推导约化公式. 首先，从入态移走一个 Dirac 粒子 (p,s)，代之以场算符的矩阵元. 应用渐近条件 (16.91) 和 (16.94)，重复 (16.73) 和 (16.74) 的步骤，有

$$\langle\beta\ \text{out}|(ps),\alpha\ \text{in}\rangle = \langle\beta-(ps)\text{out}|\alpha\ \text{in}\rangle + \langle\beta\ \text{out}|b^\dagger_{\text{in}}(ps)$$
$$- b^\dagger_{\text{out}}(ps)|\alpha\ \text{in}\rangle = \langle\beta-(ps)\text{out}|\alpha\ \text{in}\rangle$$
$$+\int d^3x\langle\beta\ \text{out}|[\phi^\dagger_{\text{in}}(x)-\phi^\dagger_{\text{out}}(x)]|\alpha\ \text{in}\rangle U_{ps}(x)$$
$$= \langle\beta-(ps)\text{out}|\alpha\ \text{in}\rangle$$
$$-\frac{1}{\sqrt{Z_2}}\int d^4x\langle\beta\ \text{out}\left|\frac{\partial}{\partial x^0}(\bar{\psi}(x)\gamma^0U_{ps}(x))\right|\alpha\ \text{in}\rangle \qquad (16.128)$$

因为 $U_{ps}(x)$ 是自由 Dirac 方程的解，引入

$$\gamma_0\frac{\partial}{\partial x^0}U_{ps}(x) = (-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla}-im)U_{ps}(x)$$

对 (16.128) 中的 $-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla}U_{ps}(x)$ 作分部积分，第二项就给出

$$-\frac{i}{\sqrt{Z_2}}\int d^4x\langle\beta\ \text{out}|\bar{\psi}(x)|\alpha\ \text{in}\rangle(\overleftarrow{-i\not\nabla-m})U_{ps}(x) \qquad (16.129)$$

与此类似，从入态移走一个反粒子将导致

$$\frac{i}{\sqrt{Z_2}}\int d^4x\bar{V}_{\bar{p}\bar{s}}(x)(\overrightarrow{i\not\nabla-m})\langle\beta\ \text{out}|\psi(x)|\alpha\ \text{in}\rangle \qquad (16.130)$$

从出态移走一个粒子导致

$$\frac{-i}{\sqrt{Z_2}}\int d^4x\bar{U}_{p's'}(x)(i\overrightarrow{\not\partial}-m)\langle\beta\,\text{out}|\psi(x)|\alpha\,\text{in}\rangle \tag{16.131}$$

而从出态移走一个反粒子将给出

$$\frac{+i}{\sqrt{Z_2}}\int d^4x\langle\beta\,\text{out}|\bar{\psi}(x)|\alpha\,\text{in}\rangle(\overleftarrow{-i\not\partial}-m)V_{\bar{p}'\bar{s}'}(x) \tag{16.132}$$

(16.129) 和 (16.132) 这对公式的比较表明，在描述入态中一个入射粒子（电子 ps）的相互作用的振幅和出态中出现一个反粒子(正电子 $\bar{p}'\bar{s}'$) 的相互作用振幅之间形式上存在紧密联系；在这两个表示式之间只是 $U_{ps}(x)$与 $-V_{\bar{p}'\bar{s}'}(x)$ 之间的替换，也就是 $u(p,s)e^{-ip\cdot x}$ 与 $-v(\bar{p}',\bar{s}')e^{-i(-\bar{p}')\cdot x}$ 的替换. 这是第六章传播子理论结果的场论描述. 它并且告诉我们，可以用沿时间反向传播的负能量电子来计算正电子过程. 在 (16.130) 和 (16.131) 中，入射正电子和出射电子之间也存在着类似的对应.

为了继续约化过程直至所有粒子都从态矢中移走并得到场乘积的真空期待值，我们如 (16.79) 那样组成编时乘积. 例如从包含标量场和旋量场的矩阵元的入态中移走一个 Dirac 粒子，给出

$$\begin{aligned}
&\langle\beta\,\text{out}|T(x_1\cdots z_p)_{\alpha_1\cdots\beta_p}|(ps)\alpha\,\text{in}\rangle\\
&\quad=\langle\beta\,\text{out}|T(\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\psi_{\alpha_1}(y_1)\cdots\psi_{\alpha_m}(y_m)\\
&\qquad\times\bar{\psi}_{\beta_1}(z_1)\cdots\bar{\psi}_{\beta_p}(z_p))|(ps)\alpha\,\text{in}\rangle\\
&\quad=(-)^{m+p}\langle\beta-(ps)\,\text{out}|T(x_1\cdots z_p)_{\alpha_1\cdots\beta_p}|\alpha\,\text{in}\rangle\\
&\qquad+\langle\beta\,\text{out}|T(x_1\cdots z_p)_{\alpha_1\cdots\beta_p}b^{\dagger}_{\text{in}}(p,s)|\alpha\,\text{in}\rangle\\
&\qquad-\langle\beta\,\text{out}|(-)^{m+p}b^{\dagger}_{\text{out}}(p,s)T(x_1\cdots z_p)_{\alpha_1\cdots\beta_p}|\alpha\,\text{in}\rangle
\end{aligned} \tag{16.133}$$

符号 $(-)^{m+p}$ 决定于费米子场编时的定义所要求的符号改变次数[见方程 (13.71)]:

$$T(\psi_\alpha(x)\psi_\beta(y)) = \psi_\alpha(x)\psi_\beta(y)\theta(x_0 - y_0) - \psi_\beta(y)\psi_\alpha(x)\theta(y_0 - x_0)$$

将渐近条件代入第二项并仿效前面导致 (16.129) 式的讨论我们得到

$$\frac{-i}{\sqrt{Z_2}}\int d^4x\langle\beta\,\text{out}|T(\varphi(x_1)\cdots\psi_{\alpha_1}(y_1)\cdots\bar{\psi}_{\beta_p}(z_p)\bar{\psi}_\lambda(x))|\alpha\,\text{in}\rangle \times(\overleftarrow{-i\not{\nabla}_x - m})_{\lambda\tau}U_{ps}(x)_\tau \tag{16.134}$$

从入态移走一个反粒子的表式是

$$\frac{i}{\sqrt{Z_2}}\int d^4x\bar{V}_{\bar{p}\bar{s}}(x)_\tau(\overrightarrow{i\not{\nabla}_x - m})_{\tau\lambda} \times(-)^{m+p}\langle\beta\,\text{out}|T(\psi_\lambda(x)\varphi(x_1)\cdots\bar{\psi}_{\beta_p}(z_p))|\alpha\,\text{in}\rangle \tag{16.135}$$

从出态移走一个粒子的表式是

$$-\frac{i}{\sqrt{Z_2}}\int d^4x\bar{U}_{p's'}(x)_\tau(\overrightarrow{i\not{\nabla}_x - m})_{\tau\lambda} \times\langle\beta\,\text{out}|T(\psi_\lambda(x)\varphi(x_1)\cdots\bar{\psi}_{\beta_p}(z_p))|\alpha\,\text{in}\rangle \tag{16.136}$$

从出态移走一个反粒子的表式是

$$\frac{i}{\sqrt{Z_2}}\int d^4x\langle\beta\,\text{out}|T(\varphi(x_1)\cdots\bar{\psi}_{\beta_p}(z_p)\bar{\psi}_\lambda(x))|\alpha\,\text{in}\rangle(-)^{m+p} \times(\overleftarrow{-i\not{\nabla}_x - m})_{\lambda\tau}V_{\bar{p}'\bar{s}'}(x)_\tau \tag{16.137}$$

这样,我们最终达到真空期待值

$$\langle 0|T(\varphi(x_1)\cdots\psi(y_1)\cdots\bar{\psi}(z_1)\cdots)|0\rangle \tag{16.138}$$

它对应于所有 Feynman 图的和,正如我们在下章将要表明的那样. 这些 Feynman 图带有外线,分别代表在 x 点进入或离开的标量粒子;在 z_i 点进入的费米子或离开的反费米子;

以及在 y_i 点进入的反费米子或离开的费米子. 在约化公式中，Klein-Gordon 算符及 Dinac 算符以因子

$$\int d^4x f_p(x)(\Box_x + m^2) \quad \int d^4x \bar{U}_{p's'}(x)(i\not{\nabla}_x - m) \text{ 等等.}$$

截断外粒子线并把它们置于质壳上. 每一个玻色子，费米子和反费米子分别具有因子 $i/\sqrt{Z}$、$-i\sqrt{Z_2}$ 和 $i/\sqrt{Z_2}$ 把相应的波函数适当地归一化而使最后的结果直接等于跃迁振幅.

作为一个示例，让我们考虑一个 i 型介子和质子的散射，其运动学示于图 16.3 中. 应用约化技术于 S 矩阵，得

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \langle q'; p's' \text{ out} | q; ps \text{ in} \rangle \\ &= \delta_{fi} + \frac{1}{Z_2 Z}\int d^4x d^4x' d^4z d^4z' f^*_{q'}(x')(\overrightarrow{\Box_{x'} + \mu^2}) \\ &\quad \times [\bar{U}_{p's'}(z')(\overrightarrow{i\not{\nabla}_{z'} - m})]_\sigma \\ &\quad \times \langle 0 | T(\psi_\sigma(z')\bar{\psi}_\tau(z)\varphi_i(x)\varphi_i(x')) | 0 \rangle \\ &\quad \times [(\overleftarrow{-i\not{\nabla}_z - m})U_{ps}(z)]_\tau(\overleftarrow{\Box_x + \mu^2})f_q(x) \end{aligned} \tag{16.139}$$

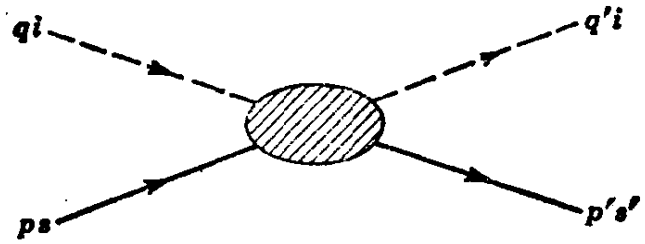


图 16.3 介子-质子散射运动学

在 (16.139) 中 μ 和 m 分别代表介子和质子的质量；只是当入态和出态相同时，也就是对于向前散射才有 $\delta_{fi} \neq 0$. 在作具体计算时，用 (16.9) 和 (16.88) 的平面波代入

$$f_q(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_q}} e^{-iq\cdot x}$$

$$U_{ps}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}\,u(p,s)e^{-ip\cdot x} \qquad (16.140)$$

作为可归一化的波包解的极限情形；这种连续态的归一化为

$$\delta_{fi}=\delta^3(\boldsymbol{q}'-\boldsymbol{q})\delta^3(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p})\delta_{s's}$$

16.10 光子的入态和出态及其约化公式

由于非协变规范的选取以及 Maxwell 理论量子化过程的复杂性使我们在把本章前面几节所取得的结果推广到辐射场时有必要作专门的讨论.

在辐射规范下矢势是横向的并满足波动方程

$$\Box\boldsymbol{A}=e_0\boldsymbol{j}^{tr} \qquad (16.141)$$

式中

$$e_0\boldsymbol{j}^{tr}=e_0\boldsymbol{j}+\frac{\partial\boldsymbol{E}_l}{\partial t}$$

而且

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=e_0\rho=e_0j_0$$

以及

$$\nabla\boldsymbol{j}^{tr}=0$$

定义了横向的流源. 矢势的纵向部分在此规范下等于零，而标量势则由 Gauss 定律决定

$$\nabla^2A_0=e_0\rho$$

因此，我们只有两个动力学独立的矢势分量，它们遵从波动方程(16.141)以及等时对易关系[见(15.9)]

$$[A_i(\boldsymbol{x},t),A_k(\boldsymbol{x}',t)]=[\dot{A}_i(\boldsymbol{x},t),\dot{A}_k(\boldsymbol{x}',t)]=0$$

$$[A_i(\boldsymbol{x},t),\dot{A}_k(\boldsymbol{x}',t)]=i\delta_{ik}^{tr}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \qquad (16.142)$$

这都和标量场的正则理论相似，差别只在于质量为零而且场是横向的，所以 δ 函数也只有横向部分出现，就如(14.16)所定义的那样.

和标量场的讨论类似，我们引进横向的入场(以及出场)，并赋予它像 (16.5)、(16.6) 那样的性质：

$$[P^\mu, \boldsymbol{A}_{\text{in}}(x)] = -i\frac{\partial}{\partial x_\mu}\boldsymbol{A}_{\text{in}}(x) \quad \Box\boldsymbol{A}_{\text{in}}(x) = 0 \tag{16.143}$$

由此，如 (16.8) 那样，$\boldsymbol{A}_{\text{in}}(x)$从真空只产生[1] $P_n^2 = 0$ 的单光子态．并没有质量抵消项引入到 (16.143)，因为入射和出射的物理光子都是无质量的并服从 Einstein 条件

$$k_\mu k^\mu = 0.$$

$\boldsymbol{A}_{\text{in}}(x)$的 Fourier 展开式和自由场的一样：

$$\boldsymbol{A}_{\text{in}}(x) = \int d^3k \sum_{\lambda=1}^{2} [a_{\text{in}}(k,\lambda)\boldsymbol{A}_{k,\lambda}(x) + a_{\text{in}}^\dagger(k,\lambda)\boldsymbol{A}_{k,\lambda}^*(x)]$$

$$\boldsymbol{A}_{k,\lambda}(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2k_0}} e^{-ik\cdot x}\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda) \tag{16.144}$$

作一个逆变换就有

$$a_{\text{in}}(k,\lambda) = i\int d^3x \boldsymbol{A}_{k,\lambda}^*(x) \cdot \overleftrightarrow{\partial}_0 \boldsymbol{A}_{\text{in}}(x)$$

$$= -i\int d^3x A_{k,\lambda}^*(x)_\mu \overleftrightarrow{\partial}_0 A_{\text{in}}(x)^\mu \tag{16.145}$$

重复应用 $a_{\text{in}}^\dagger(k,\lambda)$ 于真空态就建立 n 个光子的入态，如 (16.10) 和 (16.11) 那样．对于出场和出态可作类似的表述．和前面一样，我们假定它们都是完备的．继续仿照对标量场的 (16.14) 和 (16.52) 的讨论，我们可以写出 $\boldsymbol{A}_{\text{in}}(x)$、$\boldsymbol{A}_{\text{out}}(x)$与 $\boldsymbol{A}(x)$的关系：

$$\sqrt{Z_3}\boldsymbol{A}_{\text{in}}(x) = \boldsymbol{A}(x) - e_0\int d^4y D_{\text{ret}}(x-y)\boldsymbol{j}^{tr}(y)$$

---

1) 这里略去了由于可能产生零频率的多光子态而引起的“红外”困难．这问题在具体计算时作个别讨论(如第八章)；第十七章将作进一步讨论．

$$\sqrt{Z_3}\boldsymbol{A}_{\text{out}}(x)=\boldsymbol{A}(x)-e_0\int d^4yD_{\text{adv}}(x-y)\boldsymbol{j}^{\text{tr}}(y) \tag{16.146}$$

D_{ret} 和 D_{adv} 是相应的 Green 函数 Δ_{ret} 和 Δ_{adv} 在 $m\to 0$ 时的极限. $\sqrt{Z_3}$之引入使得真空到单光子态的入或者出矩阵元归一化到 1.

至此，一切都与标量场的讨论类似. 渐近条件（总是从(16.20)的弱算符收敛的意义上说的)是

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\to\sqrt{Z_3}\,\boldsymbol{A}_{\text{in}}(\boldsymbol{x},t)\quad \text{当}\ t\to-\infty\\&\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\to\sqrt{Z_3}\boldsymbol{A}_{\text{out}}(\boldsymbol{x},t)\quad \text{当}\ t\to+\infty\end{aligned} \tag{16.147}$$

为了得到光子的约化公式，只需对标量场的结果(16.81)作一个小小的修改:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{Z}}f_{q_i}(x_i)(\overrightarrow{\Box_{x_i}+m^2})\langle 0|\cdots\varphi(x_i)\cdots|0\rangle\\&\quad\to\frac{1}{\sqrt{Z_3}}\boldsymbol{A}_{k_i,\lambda_i}(x_i)\vec{\Box}_{x_i}\cdot\langle 0|\cdots\boldsymbol{A}(x_i)\cdots|0\rangle\\&=-\frac{1}{\sqrt{Z_3}}A^{\mu}_{k_i,\lambda_i}(x_i)\vec{\Box}_{x_i}\langle 0|\cdots A_{\mu}(x_i)\cdots|0\rangle\end{aligned} \tag{16.148}$$

譬如说，从出态移走一个 $k'\lambda'$ 光子，与标量场情形的(16.80)相对应，这里是

$$\begin{aligned}&\langle\gamma(k'\lambda')\ \text{out}|\varphi(x)|\alpha\ \text{in}\rangle=\langle\gamma\ \text{out}|\varphi(x)|\alpha-(k'\lambda')\ \text{in}\rangle\\&+\frac{-i}{\sqrt{Z_3}}\int d^4y\langle\gamma\ \text{out}|T(A_{\mu}(y)\varphi(x)|\alpha\ \text{in}\rangle\overleftarrow{\Box}_y A^{\mu*}_{k'\lambda'}(y)\end{aligned} \tag{16.149}$$

上式中比(16.80)式多出来的负号来自极化单位矢量的类空性质

$$\varepsilon_{\mu}\varepsilon^{\mu}=-\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}=-1$$

我们的量子化过程缺乏明显协变性这一点，到现在为止

还没有引起新的问题．在下一章，我们将通过相互作用流强度的幂级数展开，逐项分析，表明有电磁相互作用时 S 矩阵是规范不变的，因而由 (16.70) 也是 Lorentz 不变的．对于低阶的情形，在第七、第八章传播子方法中通过具体计算已经讨论过了．

这里我们只是要证明，归一化系数 Z_3 和方程(16.146) 中其它项一样，是规范不变的．

在讨论重整化的一般理论之前我们预先指出，这个重要的性质是带电费米子场和玻色子场的 Z_2 以及 Z 所没有的．回忆第八章的内容，我们记得，在计算 e^3 阶顶角时，把全部有关项加在一起后，留下来的与截断有关的唯一常数是 Z_3，它重整化光子波函数并且按 $e = \sqrt{Z_3}\, e_0$ 使电荷重整化．我们将看到，那里的 Z_3 也就是这里对于光子的 Z_3，而物理电荷值的规范不变性依赖于 Z_3 的规范不变性．

16.11 光子的谱表示

我们再一次仿照标量场的讨论，转向对易子的真空期待值

$$iD'_{ij}(x,x')^{\mathrm{tr}} \equiv \langle 0|[A_i(x),\ A_j(x')]|0\rangle \quad (16.150)$$

在从 D'^{tr}_{ij} 建立谱表示时由于我们对 Maxwell 理论的处理缺乏明显的 Lorentz 不变性而遇到一些困难．让我们首先考虑

$$\langle 0|A_i(x)A_j(x')|0\rangle = \sum_n e^{-ip_n\cdot(x-x')}\langle 0|A_i(0)|n\rangle\langle n|A_j(0)|0\rangle$$

$$= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3}\theta(q_0)e^{-iq\cdot(x-x')}\rho_{ij}(q) \quad (16.151)$$

谱振幅 ρ_{ij} 的定义是我们熟悉的：

$$\rho_{ij}(q) \equiv \sum_n \langle 0|A_i(0)|n\rangle\langle n|A_j(0)|0\rangle(2\pi)^3\delta^4(p_n - q) \quad (16.152)$$

和 (16.37) 一样，可以把单光子态分出来

$$\langle 0|\boldsymbol{A}(x)|p\lambda\rangle = \sqrt{Z_3}\langle 0|\boldsymbol{A}_{\rm in}(x)|p\lambda\rangle \quad (16.153)$$

这给出

$$\rho_{ij}(q) = Z_3\delta(q^2)\sum_{\lambda=1}^{2}\varepsilon_i(q,\lambda)\varepsilon_j(q,\lambda)+\pi_{ij}(q) \quad (16.154)$$

借助于电动力学的 $\mathscr{TCP}$ 不变性，对易子 (16.150) 的第二项也可以用上述谱振幅表示. 在 $\theta = \mathscr{TCP}$ 变换 (15.154) 下

$$\theta\boldsymbol{A}(x)\theta^{-1} = -\boldsymbol{A}(-x) \qquad \text{以及}\ \theta|0\rangle = |0\rangle$$

把 $\mathscr{T}$ 写成 $\mathscr{T} = \mathscr{U}K$，其中 K 代表取复共轭，给出

$$\begin{aligned}\langle 0|A_i(x')A_i(x)|0\rangle &= \langle K0|KA_i(x')A_i(x)0\rangle^* \\ &= \langle 0|\theta A_i(x')\theta^{-1}\theta A_i(x)\theta^{-1}|0\rangle^* \\ &= \langle 0|A_i(-x)A_j(-x')|0\rangle \end{aligned} \quad (16.155)$$

最后一个等式利用了恒等式 $\langle A|B\rangle^* = \langle B|A\rangle$ 以及场振幅的厄米性. 这表明，$\rho_{ij}(q)$ 对于其下标是对称的，再利用 (16.152) 可见它是 q 的实函数：

$$\rho_{ij}(q) = \rho_{ji}(q) = \rho_{ij}(q)^* \quad (16.156)$$

代入 (16.150) 并利用 (16.151) 和 (16.154)，得

$$\begin{aligned}D'_{ij}(x-x')^{\rm tr} &= Z_3 D_{ij}(x-x')^{\rm tr} \\ &\quad - i\int\frac{d^4q}{(2\pi)^3}\theta(q_0)(e^{-iq\cdot(x-x')}-e^{iq\cdot(x-x')})\pi_{ij}(q)\end{aligned} \quad (16.157)$$

其中

$$\begin{aligned}D_{ij}(x-x')^{\rm tr} = -i\int\frac{d^4q}{(2\pi)^3}\theta(q_0)\delta(q^2)(e^{-iq\cdot(x-x')}-e^{iq\cdot(x-x')}) \\ \times\left(\delta_{ij}-\frac{q_iq_j}{|\boldsymbol{q}|^2}\right)\end{aligned}$$

为研究 $\pi_{ij}(q)$ 的性质，我们按照 Evans 和 Fulton 的方法[1]. 他们发现，最好是先不考虑 (16.152)，而考虑下面的规范不

1) L. Evans *and* T. Fulton, *Nucl. Phys* **21**, 492(1960).

变的 Lorentz 张量

$$J_{\mu\nu}(q)=\sum_n\langle 0|j_\mu(0)|n\rangle\langle n|j_\nu(0)|0\rangle(2\pi)^3\delta^4(p_n-q) \tag{16.158}$$

式中的流算符由一些场组成，这些场是电磁场的源．除了作为规范不变的四矢量外，流还满足流守恒微分定律

$$\frac{\partial j_\mu(x)}{\partial x_\mu}=0 \tag{16.159}$$

例如，对于 Dirac 电子

$$j_\mu(x)=\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)-\langle 0|\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)|0\rangle \tag{16.160}$$

由 (16.158)，$J_{\mu\nu}$ 是二阶 Lorentz 张量并且在规范变换下不变．这种规范变换一定伴有一个到新参考系的 Lorentz 变换．连续性方程进一步限制了 $J_{\mu\nu}(q)$ 的形式．从 (16.159) 可知

$$p_n^\mu\langle 0|j_\mu(x)|n\rangle=0 \tag{16.161}$$

在 (16.158) 中这意味着

$$q^\mu J_{\mu\nu}=q^\nu J_{\mu\nu}=0 \tag{16.162}$$

从关于 $J_{\mu\nu}(q)$ 的两个要求：按二阶张量变换以及四度散度为零，根据 (8.16) 对于真空极化张量的类似的讨论，我们可以得出结论，$J_{\mu\nu}$ 具有如下的结构：

$$J_{\mu\nu}(q)=\left(-g_{\mu\nu}+\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)J(q^2) \tag{16.163}$$

下面我们需要的是在一个特殊的 Lorentz 系中用势的辐射规范计算 $J_{\mu\nu}(q)$ 以把 $J_{\mu\nu}(q)$ 和我们感兴趣的谱函数 $\rho_{ij}(q)$ 连系起来．特别是，我们感兴趣的只是流的横向部分．根据 (16.152) 关于 $\rho_{ij}(q)$ 的定义以及波动方程 (16.141)：

$$\begin{aligned}e_0^2\sum_n\langle 0|j_i^{\mathrm{tr}}(0)|n\rangle\langle n|j_j^{\mathrm{tr}}(0)|0\rangle(2\pi)^3\delta^4(p_n-q)\\=(q^2)^2\rho_{ij}(q)=(q^2)^2\pi_{ij}(q)\end{aligned} \tag{16.164}$$

其中最后一个等式来自 (16.154) 以及等式 $x^2\delta(x)=0$。

(16.164) 给出的 $\pi_{ij}(q)$ 的一般形式还受到三维旋转不变要求的限制:

$$\pi_{ij}(q) = \delta_{ij}\pi(q_0, |\boldsymbol{q}|^2) - \frac{q_i q_j}{|\boldsymbol{q}|^2}\tilde{\pi}(q_0, |\boldsymbol{q}|^2) \quad (16.165)$$

(16.141) 的要求

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j}^{\mathrm{tr}}(x) = 0$$

导致如下条件

$$q_i\pi_{ij}(q) = q_j\pi_{ij}(q) = 0$$

因此

$$\pi_{ij}(q) = \left(\delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{|\boldsymbol{q}|^2}\right)\pi(q_0, |\boldsymbol{q}|^2) \quad (16.166)$$

为了把 $\pi_{ij}(q)$ 和 $J_{\mu\nu}(q)$ 相联系，我们注意到，π_{ij} 和 $J_{\mu\nu}$ 的横向部分之间有很简单的关系. 比较两个量

$$\varepsilon_i\varepsilon_j\pi_{ij}(q) \text{ 和 } \varepsilon_\mu\varepsilon_\nu J^{\mu\nu}(q)$$

其中，在特殊的量子化参考系中

$$\varepsilon_\mu = (0, \boldsymbol{\varepsilon}) \qquad \boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{q} = -\varepsilon_\mu q^\mu = 0 \quad (16.167)$$

由 (16.141)

$$e_0\langle 0|\boldsymbol{j}^{\mathrm{tr}}(x)|n\rangle = e_0\langle 0|\boldsymbol{j}(x)|n\rangle - \langle 0|\nabla\dot{\Phi}(x)|n\rangle$$

对于任意满足 $\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{p}_n = 0$ 的态 $|n\rangle$ 可以得到

$$\varepsilon_i\langle 0|j_i^{\mathrm{tr}}(0)|n\rangle = \varepsilon_i\langle 0|j_i(0)|n\rangle \quad (16.168)$$

按照 (16.167) 以及 (16.164) 式的动量 δ 函数，我们对满足上述条件的矩阵元感兴趣. 所以，利用 (16.158)、(16.164) 和 (16.168) 就可以找到 $\pi_{ij}(q)$ 和 $J_{\mu\nu}(q)$ 的关系

$$\begin{aligned}\varepsilon_i\varepsilon_j\pi_{ij}(q) &= \frac{e_0^2}{q^4}\sum_n \langle 0|\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{j}^{\mathrm{tr}}(0)|\mathrm{n}\rangle\langle n|\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{j}^{\mathrm{tr}}(0)|0\rangle \\ &\quad\times(2\pi)^3\delta^4(q - p_n) \\ &= \frac{e_0^2}{q^4}\sum_n \langle 0|\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{j}(0)|n\rangle\langle n|\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{j}(0)|0\rangle(2\pi)^3\delta^4(q - p_n) \\ &= \frac{e_0^2}{q^4}\varepsilon_\mu\varepsilon_\nu J^{\mu\nu}(q) \end{aligned} \quad (16.169)$$

再利用(16.163)和(16.166)的一般形式，可以肯定

$$\pi_{ij}(q)=\left(\delta_{ij}-\frac{q_iq_j}{|\boldsymbol{q}|^2}\right)\pi(q_0,|\boldsymbol{q}|^2)$$

$$=e_0^2\left(\delta_{ij}-\frac{q_iq_j}{|\boldsymbol{q}|^2}\right)\frac{J(q^2)}{q^4} \qquad (16.170)$$

在(16.170)中我们成功地用规范不变的标量振幅 $J(q^2)$ 来表示 $\pi_{ij}(q)$. 把它代入(16.157)，仿照(16.32)的步骤写成

$$J(q^2)=\int dM^2\delta(q^2-M^2)J(M^2)$$

并引入如下表示式

$$\Delta_{ij}(x-x',M^2)^{\mathrm{tr}}=-i\int\frac{d^4k}{(2\pi)^3}\theta(k_0)\delta(k^2-M^2)$$

$$\times\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{|\boldsymbol{k}|^2}\right)(e^{-ik\cdot(x-x')}-e^{ik\cdot(x-x')}) \qquad (16.171)$$

把(16.157)的横向 D_{ij}^{tr} 函数推广到任意质量 M，我们最终达到谱表示的一个紧凑形式：

$$D'_{ij}(x-x')^{\mathrm{tr}}=Z_3D_{ij}(x-x')^{\mathrm{tr}}$$

$$+\int dM^2\Delta_{ij}(x-x',M^2)^{\mathrm{tr}}\Pi(M^2) \qquad (16.172)$$

其中

$$\Pi(M^2)=\frac{e_0^2J(M^2)}{M^4} \qquad (16.173)$$

在动量空间，Feynman 传播子是

$$D'_{F_{ij}}(q)^{\mathrm{tr}}=\left(\frac{Z_3}{q^2+i\varepsilon}+\int_0^\infty\frac{dM^2\Pi(M^2)}{q^2-M^2+i\varepsilon}\right)\left\{\delta_{ij}-\frac{q_iq_j}{|\boldsymbol{q}|^2}\right\}$$

为了把 Z_3 表示成对谱权重 $\Pi(M^2)$ 的积分，如(16.42)式中对标量场所作的那样，我们对(16.171)在 $t=t'$ 时刻取时间微商并利用对易子(16.142)和定义(16.150)，得到

$$1=Z_3+\int_{M_1^2}^\infty dM^2\Pi(M^2) \qquad (16.174)$$

现在 Z_3 的规范不变性和 Lorentz 不变性是明显的了. 从 (16.169) 和 (16.170) 很清楚，$\Pi(M^2)$ 总是非负的:

$$0 \leqslant \varepsilon_i \varepsilon_j \pi_{ij}(q) = \frac{e_0^2 J(q^2)}{q^4} = \pi(q^2)$$

所以

$$0 \leqslant Z_3 = 1 - \int_{M_1^2}^{\infty} dM^2 \Pi(M^2) < 1 \qquad (16.175)$$

可见，$\boldsymbol{A}(x)$ 从真空产生单光子的几率按照 (16.175) 限制在 0 和 1 之间，这和没有电磁相互作用时对自旋为 0 和 1/2 的场所得的结果 (16.34)、(16.125) 十分类似[1].

16.12 自旋和统计的联系[2]

在本章已建立的谱表示的基础上我们可以稍为深入地讨论在第十五章曾提到过的自旋 (0 或 1/2) 和统计 (玻色或费米)之间的联系. 已经证明，对于一个像我们讨论的那样满足 Lorentz 协变要求并且具有唯一基态的定域性场论，如果要求微观因果律被满足的话，那末，整数自旋的场应该按照 Bose 场量子化而半整数的则按 Fermi 场量子化. 根据微观因果律，作为可观测量的算符的定域密度 $\mathcal{O}(x)$

$$\mathcal{O} = \int d^3x \mathcal{O}(\boldsymbol{x}, t)$$

不应该互相干涉，所以对类空间隔应满足对易的要求

$$[\mathcal{O}(x), \mathcal{O}(y)] = 0 \qquad (x-y)^2 < 0 \qquad (16.176)$$

这里我们要证明，如果自旋为 0 的 Klein-Gordon 场用反对易子量子化而自旋为 1/2 的 Dirac 场用对易子量子化，那末这个要求是不能被满足的.

---

1) 关于 $Z_3=0$ 情形的含义见 J. Schwinger, *Phys. Rev.*, **125**, 397 (1962).
2) 见 R. Streator *and* A. Wightman 前节的注.

这些理论中的可观测量，如电荷或流密度等，一般来说都是场振幅的二次型构成的．通过代数运算不难证明，对于双线性形式

$$\mathcal{O}(x) \equiv \varphi_a(x)\varphi_b(x)$$

如果场振幅对于类空间隔对易或者反对易，那末，(16.176)就成立．更确切地说，(16.176)成立的一般条件是

$$[\varphi_r(x),\varphi_s(y)] = 0 \qquad (x-y)^2 < 0 \quad (16.177a)$$

或

$$\{\varphi_r(x),\varphi_s(y)\} = 0 \qquad (x-y)^2 < 0 \quad (16.177b)$$

$\varphi_r(x)$ 和 $\varphi_s(y)$ 对 Klein-Gordon 场代表 φ 和(或) φ^* 的组合，或者对 Dirac 场，代表 ψ 和 $\bar{\psi}$ 的不同旋量分量的组合．

对于 Klein-Gordon 场，在有相互作用时基于 Lorentz 不变性和等时正则对易关系，(16.177a)被满足．相反，如果企图用像 Fermi 场那样的反对易子来量子化 Klein-Gordon 场，当我们考虑真空期待值

$$\langle 0|\{\varphi_r(x),\varphi_s(y)\}|0\rangle \equiv \Delta_J'(x-y) \quad (16.178)$$

并利用从(16.23)导致(16.32)的那些不变性讨论时，我们就会得出与(16.177)相矛盾的结果．这时，我们同样可以推得(16.26)，只是其中的负号用正号代替，于是就有

$$\Delta_J'(x-y) = Z\Delta_1(x-y;m^2) + \int_{m_1^2} d\sigma^2\rho(\sigma^2)\Delta_1(x-y;\sigma^2)$$

$$\Delta_1(x-y) \equiv \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}\left(e^{-ik\cdot(x-y)} + e^{ik\cdot(x-y)}\right)$$

$\Delta_1(x-y)$ 是 $\Delta(x-y)$ 的对称部分，满足 Klein-Gordon 方程，但是对于类空间隔 $(x-y)^2 < 0$，它不等于零．实际上，对于大的间隔如 $-(x-y)^2 > \dfrac{1}{m^2}$

$$\Delta_1(\boldsymbol{x},t,m^2) \sim \frac{\exp\left(-m\sqrt{|\boldsymbol{x}|^2 - t^2}\right)}{|\boldsymbol{x}|^2 - t^2}$$

所以对于大的 x

$$\Delta_1'(x,0) \sim \frac{Ze^{-m|x|}}{|x|^2} + \int_{m_1^2}^{\infty} d\sigma^2 \rho(\sigma^{-2}) \frac{e^{-\sigma|x|}}{|x|^2}$$

可见，(16.177b) 不成立，也就是说微观因果律要遭到破坏. 这就定下了自旋和统计的关系.

如果企图用对易子来量子化 Fermi 场也会出现同样的现象. 对应于算符两个不同次序的两项之间相对符号的改变使得谱表示 (16.111) 式中的 Δ 函数变为 Δ_1，这样就导致与微观因果律的矛盾. 既然自旋高于 1/2 的场可以认为是由自旋 1/2 的场的乘积所构成，这就使上面所得的结果具有一般意义.

值得注意的是，如果，譬如说用反对易子量子化 Bose 场，那末，微观因果律破坏显著的区域仅在可以和有关粒子的 Compton 波长相比较的尺度之内，一般来说～10^{-13} 厘米. 实验和定域场论的这一予期是一致的. 这具有十分重要的意义，它强有力地支持了定域场论的一般见解，至少是在和基本粒子 Compton 波长可比较的距离之内.

问　　题

1. 考虑如下表式

$$\int d^4x d^4y f_\alpha^*(x) f_\beta^*(y)(\Box_x + m^2)(\Box_y + m^2) T(\varphi(x)\varphi(y))$$

利用积分次序之变换证明

$$[\varphi_{in}(x), \varphi_{in}(y)] = [\varphi_{out}(x), \varphi_{out}(y)]$$

再利用三个场算符的乘积 $\varphi(x)\varphi(y)\varphi(z)$ 的同样的积分证明

$$[[\varphi_{in}(x), \varphi_{in}(y)], \varphi(z)] = 0$$

由此建立 (16.56). W. Zimmerman, *Nuovo Cimento*, **10**, 567 (1958)，证明了上述积分次序之交换是允许的. 用类似方法证明 (16.121).

2.证明，类似于(16.82)，S 矩阵(6.56)可以直接用 *Feynman* 传播子 S_F 表示。

3.通过(16.27)的谱权重函数 $\rho(p^2)$ 计算标量场的质量移动 δm^2。假定有关的量都是有限的。

4.证明：$S = \theta_{in}^{-1}\theta$，$\theta = \mathscr{T}\mathscr{C}\mathscr{P}$。

证明：$\langle 0|[\varphi_{in}(x),\varphi_{out}(y)]|0\rangle = +i\Delta(x-y,m)$.

6.当存在旋量场和非厄米标量场时，证明§16.6关于 S 矩阵的性质1至5。

7.证明方程(16.113)的性质(iii)，

8.给出量子电动力学中电子的谱表示，并讨论其权重函数的性质。

9.导出(16.115)。提示：参考§3.1。

10.在无需宇称守恒之条件下对费米子导出自旋——统计的联系[(16.111)中谱函数的形式隐含着宇称守恒的要求]。

第十七章 微 扰 论

17.1 引言

为了把相对论量子场论的结果和实验观测相比较，需要计算物理上有意义的矩阵元和跃迁振幅．目前我们有两种一般的方法．第一种方法是按反映相互作用强度的耦合系数的幂作系统的展开．在这个方法中相互作用场 $\varphi(x)$ 是用我们已经熟悉的入场 $\varphi_{in}(x)$ 来表示的，后者满足自由波动方程和对易关系．S 矩阵的这种展开将导致我们在第七、八、九章传播子讨论中所得到的 Feynman 图和计算规则（包括发散积分）．第二种方法是把我们在上一章所发展的建立场对易子真空期待值的技术推广到三个以上场．此外，一种建筑在解析函数论基础上的近似计算方法也在发展中，它和第一种方法或微扰论方法不一样，不局限于弱耦合强度．我们将在下一章讨论它，这里专门讨论协变的微扰理论．

我们的任务是：把跃迁振幅和矩阵元按相互作用强度作幂级数展开，并求得计算展开式各项的规则．为此，我们需要把相互作用场 $\varphi(x)$ 用渐近场 $\varphi_{in}(x)$ 来表示，后者的性质是我们已掌握的．微扰论的基础是假定精确态的谱和“未扰动”态的谱一一对应．这里“未扰动”态也就是渐近的入态和出态．特别是，我们假定，对应于拉氏量中每一个场 $\varphi(x)$ 存在着一个入场 $\varphi_{in}(x)$．相似的要求在非相对论的势理论中也是有的；为了使散射过程的微扰理论是收敛的，就必须假定在势的作用下不存在束缚态．

微扰论用于包括核子在内的强相互作用领域时，其收敛性是很值得怀疑的．但是，对于展开系数为 $\alpha = 1/137$ 的电磁相互作用，微扰方法的适用性却是可以乐观的．确实，我们在第七、第八章已经看到，微扰方法对于各种电动力学过程导致理论和实验测量的惊人的符合．至于微扰论对于弱作用过程的适用性，则还是一个悬而未决的问题．

场方程的积分形式，如 (16.14)，(16.84) 和 (16.146) 可以作为相互作用场用入场展开的基础，并由此建立一个满意的微扰论．方程右端的流算符 $j(x)$ 也必须要按入场展开．然而，这样做并不能直接导致 Feynman 图[1]，因为在展开式中出现的是 $\Delta_{ret}(x)$ 而不是 $\Delta_F(x)$．为了从场论的观点出发重新建立 Feynman 传播子理论，Dyson[2] 用 U 矩阵建立了一套微扰论，下面我们就讨论它．

17.2 U 矩阵

相互作用场 $\varphi(\boldsymbol{x},t)$ 与其共轭动量 $\pi(\boldsymbol{x},t)$ 之间的等时对易关系和入场 $\varphi_{in}(\boldsymbol{x},t)$[3] 与 $\pi_{in}(\boldsymbol{x},t)$ 之间的等时对易关系是一样的[4]．不仅如此，根据我们的假定，一个态的完全集合能够从真空重复应用 φ 或 φ_{in} 而构成，所以这些场形成完全的算子集合．又因为我们根据微扰论的要求已假定 φ 和 φ_{in} 是一

1) F. J. Dyson, *Phys, Rev.* **82**, 428(1951).
2) F. J. Dyson, *Phys, Rev.*, **75**, 486, 1736 (1949).
3) 我们用 $\varphi(x)$ 统一代表所有的 Bose 场或 Fermi 场．这些场的特殊性质如自旋、同位旋等对于以下的推导．不起关键作用．
4) 这里不去考虑带微商耦合的理论．带电的自旋 0 和自旋 1 粒子的电磁相互作用就是有微商耦合的理论．关于它们在微扰展开中引起的问题的讨论可见 P. T. Matthews, *Phys.Rev.*, **76**, 684, 1489 (1949), F. Rohrlich, *Phys. Rev.*, **80**, 666 (1950), *and* T. D. Lee *and* C. N. Yang, *Phys. Rev.*, **128**, 885(1962).

一对应的，所以能用一个幺正变换 $U(t)$[1] 把它们联系起来[2]：

$$\varphi(\boldsymbol{x},t) = U^{-1}(t)\varphi_{\text{in}}(\boldsymbol{x},t)U(t) \tag{17.1}$$

$$\pi(\boldsymbol{x},t) = U^{-1}(t)\pi_{\text{in}}(\boldsymbol{x},t)U(t) \tag{17.2}$$

既然 $\varphi(x)$和 $\varphi_{\text{in}}(x)$的运动方程都是给定的，所以 $U(t)$ 算符的动力学也可以求得．根据定义，入场满足自由场的对易关系和自由场波动方程，于是有

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi_{\text{in}}(x)}{\partial t} &= i[H_{\text{in}}(\varphi_{\text{in}},\pi_{\text{in}}),\varphi_{\text{in}}]\\ \frac{\partial\pi_{\text{in}}(x)}{\partial t} &= i[H_{\text{in}}(\varphi_{\text{in}},\pi_{\text{in}}),\pi_{\text{in}}]\end{aligned} \tag{17.3}$$

其中 $H_{\text{in}}(\varphi_{\text{in}},\pi_{\text{in}})$ 是物理质量为 m 的自由场哈氏量．此外，对于严格的 Heisenberg 场，平移不变性保证

$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial t} = i[H(\varphi,\pi),\varphi(x)] \tag{17.4}$$

同样也有

$$\frac{\partial\pi(x)}{\partial t} = i[H(\varphi,\pi),\pi(x)] \tag{17.5}$$

于是，我们有

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_{\text{in}}(x) &= \frac{\partial}{\partial t}U(t)\varphi(x,t)U^{-1}(t)\\ &= [\dot{U}(t)U^{-1}(t),\varphi_{\text{in}}(x)] + i[H(\varphi_{\text{in}},\pi_{\text{in}}),\varphi_{\text{in}}(x)]\\ &= \dot{\varphi}_{\text{in}}(x) + [\dot{U}U^{-1} + iH_I(\varphi_{in},\pi_{in}),\varphi_{\text{in}}(x)]\end{aligned} \tag{17.6}$$

---

1) U 也可以协变地定义在一般的类空面上而不是在固定的时间 t，但这并没有什么明显的优越性．对于这种一般的形式可见：J. Schwinger, *Phys. Rev.*, **74**, 1439 (1948), **75**, 651 (1949) *and* **76**, 790 (1949); S. Tomonaga, *Progr. Theoret. Phys.* (*Kyoto*), **1**, 27 (1946).

2) 虽然这是普通量子力学的一个定理，但是那证明对不可数自由度的系统不成立．见 R. Haag, *Kgl. Danske Videnskab. Selskab. Mat.-Fys. Medd.*, **29**(12)(1955)，以及问题 2．这里我们假定 $U(t)$ 存在．

以及

$$\dot{\pi}_{\mathrm{in}}(x) = \dot{\pi}_{\mathrm{in}}(x) + [\dot{U}U^{-1} + iH_I(\varphi_{\mathrm{in}}, \pi_{\mathrm{in}}), \pi_{\mathrm{in}}(x)]$$

其中

$$H_I(\varphi_{\mathrm{in}}, \pi_{\mathrm{in}}) = H(\varphi_{\mathrm{in}}, \pi_{\mathrm{in}}) - H_{\mathrm{in}}(\varphi_{\mathrm{in}}, \pi_{\mathrm{in}}) \equiv H_I(t) \tag{17.7}$$

是由入场表示的相互作用项，在最后的形式中显含了时间，后面要经常用到这一点. $H_I(t)$ 包括了在第七章引入的质量抵消项[1]. 从 (17.6) 可以得到

$$i\dot{U}(t)U^{-1}(t) = H_I(t) + E_0(t)$$

这里 $E_0(t)$和 $\varphi_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x}, t)$ 以及 $\pi_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x}, t)$ 对易，所以是时间 t 的 c 数.

定义

$$H_I'(t) = H_I(t) + E_0(t)$$

得到U的方程

$$\frac{i\partial U(t)}{\partial t} = H_I'(t)U(t) \tag{17.8}$$

用入场表示的U算符的解就是微扰展开的基础. 借助于U我们能够把场算符乘积的真空期待值——所有 S 矩阵元都归之为它——写成入场乘积的无穷级数，对于后者，可以根据

---

1) 对于一个特殊的自耦合标量场拉氏量

$$\mathscr{L}(\varphi) = \frac{1}{2} : \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} - \mu_0^2\varphi^2 + \frac{1}{2}\lambda_0\varphi^4\right] :$$

有

$$\mathscr{L}_{\mathrm{in}}(\varphi_{\mathrm{in}}) = \frac{1}{2} : \left[\frac{\partial \varphi_{\mathrm{in}}}{\partial x_\mu}\frac{\partial \varphi_{\mathrm{in}}}{\partial x^\mu} - \mu^2\varphi_{\mathrm{in}}^2\right] :$$

以及

$$\mathscr{L}_I(\varphi_{\mathrm{in}}) = -\mathscr{H}_I(\varphi_{\mathrm{in}}) = \frac{1}{2} : \left[\frac{1}{2}\lambda_0\varphi_{\mathrm{in}}^4 + (\mu^2 - \mu_0^2)\varphi_{\mathrm{in}}^2\right] :$$

对于费米子，$\mathscr{H}_I(\varphi_{\mathrm{in}})$ 中的质量抵消项是

$$(m_0 - m) : \bar{\psi}_{\mathrm{in}}\psi_{\mathrm{in}} :$$

它的自由场性质而把它计算出来.

下面积分 (17.8) 式. 一个初始条件是需要的，但它可以用下面的算子方便地照顾到:

$$U(t,t') \equiv U(t)U^{-1}(t') \tag{17.9}$$

这算子也是 (17.8) 的解. 并在 $t = t'$ 时成为单位算符[1]:

$$\begin{aligned} i\frac{\partial U(t,t')}{\partial t} &= H_I'(t)U(t,t') \\ U(t,t) &= 1 \end{aligned} \tag{17.10}$$

方程 (17.10) 使我们回想起非相对论量子力学中与时间有关微扰论的 Dirac 形式，并且具有同样形式的解. (17.10) 的积分形式是

$$U(t,t') = 1 - i\int_{t'}^{t} dt_1 H_I'(t_1)U(t_1,t')$$

并有如下展开式

$$\begin{aligned} U(t,t') = 1 &- i\int_{t'}^{t} dt_1 H_I'(t_1) + (-i)^2\int_{t'}^{t} dt_1 H_I'(t_1) \\ &\times \int_{t'}^{t_1} dt_2 H_I'(t_2) + \cdots + (-i)^n \int_{t'}^{t} dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2 \cdots \\ &\int_{t'}^{t_{n-1}} \times\, dt_n H_I'(t_1)\cdots H_I'(t_n) + \cdots \end{aligned} \tag{17.11}$$

相互作用项的每一个乘积是按时序排列的，因为

$$t_1 \geqslant t_2 \cdots \geqslant t_n,$$

所以我们可以把 (17.11) 中的 $H_I'(t_1)\cdots H_I'(t_n)$ 写成

$$T(H_I'(t_1)\cdots H_I'(t_n))$$

而不产生任何问题，

$$\begin{aligned} U(t,t') = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{t'}^{t} dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t'}^{t_{n-1}} dt_n \\ \times\, T(H_I'(t_1)\cdots H_I'(t_n)) \end{aligned} \tag{17.12}$$

上述编时积表示式对于坐标 $t_1, \cdots, t_n$ 中任何一对交换都是

1) 我们总是把 $H_I(\varphi_{in}(t))$ 简写成 $H_I(t)$.

对称的，因为 $H_I'(t_i)$ 出现次序的每一交换都包含了偶数个费米子场的换位；所以共有偶数个负号．我们就利用这个对称性把积分区间相对于 n 个指标对称化．例如，对于 $n=2$ 的情形，我们有

$$\int_{t'}^{t} dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2 T(H_I'(t_1)H_I'(t_2)) = \int_{t'}^{t} dt_2 \int_{t'}^{t_2} dt_1 T(H_I'(t_1)H_I'(t_2))$$
$$= \frac{1}{2}\int_{t'}^{t} dt_1 \int_{t'}^{t} dt_2 T(H_I'(t_1)H_I'(t_2))$$

若为 n 个指标，我们可以类似地对 n 个指标进行 $n!$ 个轮换并且把积分区间扩大到从 t' 到 t 的 n 维立方体． $n!$ 个时序互换区域的贡献都是相同的，因而就有

$$U(t,t') = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t'}^{t} dt_1 \cdots \int_{t'}^{t} dt_n T(H_I'(t_1)\cdots H_I'(t_n))$$
$$\equiv T\left(\exp\left[-i\int_{t'}^{t} H_I'(t)dt\right]\right)$$
$$= T\left(\exp\left[-i\int_{t'}^{t} d^4x \mathscr{H}_I(\varphi_{\text{in}}(x))\right]\right) \qquad (17.13)$$

其中由 (17.13) 定义的指数形式是编时级数的符号表示． 当我们将指数按相互作用作形式的幂级数展开时就得到原来的式子．

U 算符的一个有用的乘法规则是

$$U(t,t') = U(t,t'')U(t'',t') \qquad (17.14)$$

这可以从 (17.9) 的定义或 (17.13) 看出． (17.14) 的一个特殊情形是

$$U(t,t') = U^{-1}(t',t) \qquad (17.15)$$

17.3 τ 函数和 S 矩阵的微扰展开

有了 (17.1) 和 (17.13)，我们就可以把 S 矩阵元表示为

入场的真空期待值，后者可以从它的自由场性质计算出来. 利用上一章的约化技术，S 矩阵元的计算最后归结为一个基本的要点——计算 Heisenberg 场 $\varphi(x)$ 编时乘积的真空期待值

$$\tau(x_1,\cdots,x_n)=\langle 0|T(\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n))|0\rangle \quad (17.16)$$

利用 (17.1) 和 (17.9) 的入-场表示

$$\begin{aligned}\tau(x_1,\cdots,x_n)&=\langle 0|T(U^{-1}(t_1)\varphi_{\text{in}}(x_1)U(t_1,t_2)\varphi_{\text{in}}(x_2)\\&\quad\times U(t_2,t_3)\cdots U(t_{n-1},t_n)\varphi_{\text{in}}(x_n)U(t_n))|0\rangle\\&=\langle 0|T(U^{-1}(t)U(t,t_1)\varphi_{\text{in}}(x_1)U(t_1,t_2)\cdots\\&\quad U(t_{n-1},t_n)\varphi_{\text{in}}(x_n)U(t_n,-t)U(-t))|0\rangle\end{aligned}$$

式中 t 是一个参考时间，将令之趋于∞；此时，t 比所有的 t_i 迟，而 $-t$ 则最早. 这样，把 $U^{-1}(t)$ 和 $U(-t)$ 从编时乘积中抽出来并采用 (17.13) 的简略写法，就有

$$\begin{aligned}\tau(x_1,\cdots,x_n)=\Big\langle 0|U^{-1}(t)T\Big(&\varphi_{\text{in}}(x_1)\cdots\varphi_{\text{in}}(x_n)\\&\times\exp\Big[-i\int_{-t}^{t}H_I'(t')dt'\Big]\Big)U(-t)|0\Big\rangle\end{aligned} \quad (17.17)$$

方程 (17.17) 是用入场表示 τ 函数，也就是用入场表示了 S 矩阵. 至于算符 $U^{-1}(t)$ 和 $U(-t)$，我们可以证明，当 $t\to\infty$ 时，真空 $|0\rangle$ 是它们的本征态，因而就可以把它们去掉. 为此，让我们考虑一个任意的入态 $|\alpha p\ \text{in}\rangle$，它包含一个粒子 p 以及其它任意量 α. 假定 p 是 Klein-Gordon 粒子，利用 (16.9) 和 (16.73)，我们有

$$\begin{aligned}\langle p\alpha\ \text{in}|U(-t)|0\rangle&=\langle\alpha\ \text{in}|a_{\text{in}}(p)U(-t)|0\rangle\\&=-i\int d^3x f_p^*(\boldsymbol{x},-t')\left(\frac{\vec{\partial}}{\partial t'}-\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial t'}\right)\\&\quad\times\langle\alpha\ \text{in}|\varphi_{\text{in}}(\boldsymbol{x},-t')U(-t)|0\rangle\end{aligned} \quad (17.18)$$

对于费米子和光子，则由 (16.126) 和 (16.145) 可以得到类似

的形式．利用(17.1)式，(17.18)成为

$$\langle p\alpha\,\mathrm{in}|U(-t)|0\rangle = -i\int d^3x f_p^*(\boldsymbol{x},-t')\overleftrightarrow{\partial}_0'$$
$$\times\langle\alpha\,\mathrm{in}|U(-t')\varphi(\boldsymbol{x},-t')U^{-1}(-t')U(-t)|0\rangle$$

其中

$$\overleftrightarrow{\partial}_0' \equiv \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial t'} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial t'}$$

跟过去的定义一样．根据渐近条件(16.20)，当 $t = t' \to \infty$ 时就得

$$\sqrt{Z_3}\langle\alpha\,\mathrm{in}|U(-t)a_{\mathrm{in}}(p)|0\rangle + i\int d^3x f_p^*(\boldsymbol{x},-t)$$
$$\times\langle\alpha\,\mathrm{in}|\dot{U}(-t)\varphi(\boldsymbol{x},-t)$$
$$+ U(-t)\varphi(\boldsymbol{x},-t)\dot{U}^{-1}(-t)U(-t)|0\rangle \qquad (17.19)$$

显然

$$a_{\mathrm{in}}(p)|0\rangle = 0$$

因为真空态没有入射粒子，因此(17.19)的第一项等于零．通过简短的计算可以证明，第二项也等于零：

$$\dot{U}\varphi + U\varphi\dot{U}^{-1}U = \dot{U}U^{-1}\varphi_{\mathrm{in}}U + \varphi_{\mathrm{in}}U\dot{U}^{-1}U$$
$$= [\dot{U}U^{-1},\varphi_{\mathrm{in}}]U = -i[H_I,\varphi_{\mathrm{in}}] = 0$$

这里我们用了(17.1)，(17.8)，以及关于 H_I 中没有微商耦合项的假定；共同的时间宗量 $-t$ 在式中略去了．

由此我们得出结论：对于包含一个粒子的所有入态 αp，有

$$\langle\alpha p\,\mathrm{in}|U(-t)|0\rangle \to 0 \quad \text{当 } t\to\infty$$

于是马上有

$$U(-t)\cdot|0\rangle = \lambda_-|0\rangle \qquad \text{当 } t\to\infty \qquad (17.20)$$

完全类似地可以证明

$$U(t)|0\rangle = \lambda_+|0\rangle \qquad \text{当 } t\to\infty$$

当 $t\to\infty$ 时，常数 λ_- 和 λ_+ 在(17.17)式中以如下的形式出

现

$$\begin{aligned}\lambda_-\lambda_+^* &= \langle 0|U^{-1}(t)|0\rangle\langle 0|U(-t)|0\rangle \\ &= \langle 0|U(-t)U^{-1}(t)|0\rangle = \langle 0|U(-t,t)|0\rangle \\ &= \left\langle 0\left|T\left(\exp\left[i\int_{-t}^{t}dt'H_I'(t')\right]\right)\right|0\right\rangle \\ &= \left\langle 0\left|T\left(\exp\left[-i\int_{-t}^{t}dt'H_I'(t')\right]\right)\right|0\right\rangle^{-1}\end{aligned}$$

于是 τ 函数可以改写为

$$\begin{aligned}&\tau(x_1,\cdots,x_n) \\ &= \frac{\left\langle 0\left|T\left(\varphi_{\text{in}}(x_1)\cdots\varphi_{\text{in}}(x_n)\exp\left[-i\int_{-t}^{t}dt'H_I'(t')\right]\right)\right|0\right\rangle}{\left\langle 0\left|T\left(\exp\left[-i\int_{-t}^{t}dt'H_I'(t')\right]\right)\right|0\right\rangle} \qquad (17.21)\end{aligned}$$

$$t\to\infty$$

最后，用 $H_I(t)$ 代替 $H_I'(t)$，从分子、分母消去由 (17.8) 定义的 c 数因子

$$\exp\left[-i\int_{-t}^{t}E_0(t')dt'\right]$$

并取极限 $t\to\infty$：

$$\begin{aligned}&\tau(x_1\cdots,x_n) \\ &= \frac{\left\langle 0\left|T\left((\varphi_{\text{in}}(x_1)\cdots\varphi_{\text{in}}(x_n)\exp\left[-i\int_{-\infty}^{\infty}dtH_I(t)\right]\right)\right|0\right\rangle}{\left\langle 0\left|T\left(\exp\left[-i\int_{-\infty}^{\infty}dtH_I(t)\right]\right)\right|0\right\rangle} \\ &= \left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-i)^m}{m!}\int_{-\infty}^{\infty}d^4y_1\cdots d^4y_m\langle 0|T(\varphi_{\text{in}}(x_1)\cdots\right. \\ &\quad \left.\varphi_{\text{in}}(x_n)\mathscr{H}_I(\varphi_{\text{in}}(y_1))\cdots\mathscr{H}_I(\varphi_{\text{in}}(y_m)))|0\rangle\right] \Big/ \\ &\quad \left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-i)^m}{m!}\int_{-\infty}^{\infty}d^4y_1\cdots d^4y_m\langle 0|T(\mathscr{H}_I(\varphi_{\text{in}}(y_1))\cdots\right. \\ &\quad \left.\mathscr{H}_I(\varphi_{\text{in}}(y_m)))|0\rangle\right] \qquad (17.22)\end{aligned}$$

方程(17.22)是基本的结果. S 矩阵，无论是(16.81)或是(16.139)，首先要表示成 τ 函数，然后才通过(17.22)完全用入场算符来展开. 再进一步推导 Feynman 计算规则和 Feynman 图就只是一个代数问题了.

17.4 Wick 定理

为了把(17.22)中的一项化为可以计算的积分形式，我们要把消灭算符一步一步地移到右边，而产生算符则集中在左边；这样当它们紧挨着真空时就给出零值. 这种把编时乘积化为正规乘积从而给出 Feynman 振幅的方案是由 Dyson[1] 于 1949 年建立的，而后又由 Wick[2] 加以发展，他提出并证明了下述定理:

$$
\begin{aligned}
T(\varphi_{\mathrm{in}}(x_1)\cdots\varphi_{\mathrm{in}}(x_n)) &= :\varphi_{\mathrm{in}}(x_1)\cdots\varphi_{\mathrm{in}}(x_n): \\
&+ [\langle 0|T(\varphi_{\mathrm{in}}(x_1)\varphi_{\mathrm{in}}(x_2))|0\rangle :\varphi_{\mathrm{in}}(x_3)\cdots\varphi_{\mathrm{in}}(x_n): \\
&+ \text{指标置换的项}] + [\langle 0|T(\varphi_{\mathrm{in}}(x_1)\varphi_{\mathrm{in}}(x_2))|0\rangle \\
&\times \langle 0|T(\varphi_{\mathrm{in}}(x_3)\varphi_{\mathrm{in}}(x_4))|0\rangle :\varphi_{\mathrm{in}}(x_5)\cdots\varphi_{\mathrm{in}}(x_n): \\
&+ \text{指标置换的项}] + \cdots \\
&+ \begin{cases} [\langle 0|T(\varphi_{\mathrm{in}}(x_1)\varphi_{\mathrm{in}}(x_2))|0\rangle\cdots\langle 0|T(\varphi_{\mathrm{in}}(x_{n-1}) \\ \quad \times\varphi_{\mathrm{in}}(x_n))|0\rangle + \text{指标置换的项}\ (n\ \text{偶})] \\ [\langle 0|T(\varphi_{\mathrm{in}}(x_1)\varphi_{\mathrm{in}}(x_2))|0\rangle\cdots\langle 0|T(\varphi_{\mathrm{in}}(x_{n-2}) \\ \quad \times\varphi_{\mathrm{in}}(x_{n-1}))|0\rangle\varphi_{\mathrm{in}}(x_n) + \text{指标置换的项}(n\ \text{奇})] \end{cases}
\end{aligned}
\tag{17.23}
$$

真空期待值，或收缩，是在正规化过程中场的对易（或反对易）而引起的；从自由场的讨论中我们已经知道，它们是 Feynman 传播子的场论表示. 我们记得，要作算符的正规乘

1) F. J. Dyson, 见前节的脚注.
2) G. C. Wick, *Phys. Rev*, **80**, 268 (1950).

积

$$:\varphi_{\text{in}}(x_1)\cdots\varphi_{\text{in}}(x_n):$$

首先需要把每个场算符分解为正频率和负频率部分：

$$\varphi_{\text{in}}(x)=\varphi_{\text{in}}^{(+)}(x)+\varphi_{\text{in}}^{(-)}(x) \tag{17.24}$$

其中 $\varphi_{\text{in}}^{(+)}(x)$ 含有消灭算符，而 $\varphi_{\text{in}}^{(-)}(x)$ 则含产生算符．然后把所有产生算符置于所有消灭算符的左边．此时，为了次序正规化而置换每一对 Fermi 场要引进一个负号．为了便于说明，我们把它写出来：

$$:\varphi_{\text{in}}(x_1)\cdots\varphi_{\text{in}}(x_n):=\sum_{A,B}\delta_p\prod_{\substack{i\\ \text{在}A\text{集}}}\varphi_{\text{in}}^{(-)}(x_i)\prod_{\substack{j\\ \text{在}B\text{集}}}\varphi_{\text{in}}^{(+)}(x_j) \tag{17.25}$$

其中，求和是对 n 个指标所有的集合 A 与 B 进行的，每个指标出现一次，δ_p 代表 Fermi 场置换所给出的符号．一个正规乘积的真空期待值总是等于零，这是因为消灭算符往右作用于真空，而产生算符则向左作用于真空：

$$\varphi_{\text{in}}^{(+)}|0\rangle=\langle 0|\varphi_{\text{in}}^{(-)}=0 \tag{17.26}$$

把编时乘积化为正规乘积的 Dyson 方法的用处就是基于这个性质，因为由 (17.22)，为了计算 τ 函数和 S 矩阵元只需计算真空期待值．从 (17.23) 我们有

1. 若 n 是奇数，$\langle 0|T(\varphi_{\text{in}}(x_1)\cdots\varphi_{\text{in}}(x_n)|0\rangle=0$

2. 若 n 是偶数，

$$\begin{aligned}&\langle 0|T(\varphi_{\text{in}}(x_1)\cdots\varphi_{\text{in}}(x_n))|0\rangle\\&=\sum_{\text{所有置换}}\delta_p\langle 0|T(\varphi_{\text{in}}(x_1)\varphi_{\text{in}}(x_2))|0\rangle\\&\quad\times\cdots\langle 0|T(\varphi_{\text{in}}(x_{n-1})\varphi_{\text{in}}(x_n))|0\rangle\end{aligned} \tag{17.27}$$

这样，就通过具有物理质量的自由粒子 Feynman 传播子来表示 S 矩阵，而 Feynman 传播子正是我们熟知的．这就是我们所要求的结果．

导出上述结果 (17.27) 的 Wick 定理可用归纳法予以证

明. 定理(17.23)对于 $n=1$ 显然是成立的; 对于 $n=2$ 也可以验证它是正确的. 先考虑一个厄米 Bose 场 φ_{in}. 我们发现

$$T(\varphi_{in}(x_1)\varphi_{in}(x_2)) = :\varphi_{in}(x_1)\varphi_{in}(x_2): + (c\text{ 数})$$

因为从编时排列转到正规排列只是意味着交换各对产生和消灭算符的次序; 这种交换留下来的对易子是 c 数. 为了确定这个 c 数, 我们对上式取真空期待值. 考虑到正规乘积的真空期待值恒等于零,我们得到

$$T(\varphi_{in}(x_1)\varphi_{in}(x_2)) = :\varphi_{in}(x_1)\varphi_{in}(x_2): + \langle 0|T(\varphi_{in}(x_1)\varphi_{in}(x_2))|0\rangle \quad (17.28)$$

对于 Fermi 场,讨论是同样的. 因此

$$T(\psi_{in}(x_1)\bar{\psi}_{in}(x_2)) = :\psi_{in}(x_1)\bar{\psi}_{in}(x_2): + \langle 0|T(\psi_{in}(x_1)\bar{\psi}_{in}(x_2))|0\rangle \quad (17.29)$$

继而我们假定(17.23)对于某个 n 成立,要证明它对于 $(n+1)$ 也成立. 考虑

$$T(\varphi_{in}(x_1)\cdots\varphi_{in}(x_{n+1}))$$

选择 t_{n+1} 为最早的时间,则

$$\begin{aligned} T(\varphi_{in}(x_1)\cdots\varphi_{in}(x_{n+1})) &= T(\varphi_{in}(x_1)\cdots\varphi_{in}(x_n))\varphi_{in}(x_{n+1}) \\ &= :\varphi_{in}(x_1)\cdots\varphi_{in}(x_n):\varphi_{in}(x_{n+1}) \\ &\quad + \sum_{\text{所有置换}} \langle 0|T(\varphi_{in}(x_1)\varphi_{in}(x_2))|0\rangle \\ &\quad \times :\varphi_{in}(x_3)\cdots\varphi_{in}(x_n):\varphi_{in}(x_{n+1}) + \cdots \end{aligned} \quad (17.30)$$

为了把上式纳入 Wick 展开的形式, 必须找出办法来把 $\varphi_{in}(x_{n+1})$ 引入 n 重正规乘积. 为此, 我们利用(17.25)与(17.26):

$$:\varphi_{in}(x_1)\cdots\varphi_{in}(x_n):\varphi_{in}(x_{n+1}) = \sum_{A,B} \delta_p \prod_{\substack{i \\ \text{在}A\text{集}}} \varphi_{in}^{(-)}(x_i) \prod_{\substack{j \\ \text{在}B\text{集}}} \varphi_{in}^{(+)}(x_j)[\varphi_{in}^{(+)}(x_{n+1})$$

$$+\varphi_{\mathrm{in}}^{(-)}(x_{n+1})]=\sum_{A,B}\delta_{p'}\prod_{\substack{i\\ \text{在}A\text{集}}}\varphi_{\mathrm{in}}^{(-)}(x_i)$$

$$\times\prod_{\substack{j\\ \text{在}B\text{集}}}\varphi_{\mathrm{in}}^{(+)}(x_j)\varphi_{\mathrm{in}}^{(+)}(x_{n+1})$$

$$+\sum_{A,B}\delta_{p'}\prod_{\substack{i\\ \text{在}A\text{集}}}\varphi_{\mathrm{in}}^{(-)}(x_i)\varphi_{\mathrm{in}}^{(-)}(x_{n+1})\prod_{\substack{j\\ \text{在}B\text{集}}}\varphi_{\mathrm{in}}^{(+)}(x_j)$$

$$+\sum_{A,B}\delta_{p'}\prod_{\substack{i\\ \text{在}A\text{集}}}\varphi_{\mathrm{in}}^{(-)}(x_i)\sum_{\substack{k\\ \text{在}B\text{集}}}\prod_{\substack{j\\ \text{在}B\text{集}\\ j\neq k}}\varphi_{\mathrm{in}}^{(+)}(x_j)$$

$$\times\langle 0|\varphi_{\mathrm{in}}^{(+)}(x_k)\varphi_{\mathrm{in}}^{(-)}(x_{n+1})|0\rangle \tag{17.31}$$

$\delta_{p'}$ 是相应项内 Fermi 场置换所给出的符号. (17.31) 说明，在把 $\varphi_{\mathrm{in}}(x_{n+1})$ 吸收入正规乘积的同时，多出来一系列项(上式的最后一行)，它们包括 $\varphi_{\mathrm{in}}^{(-)}(x_{n+1})$ 和 B 集中 $\varphi_{\mathrm{in}}^{(+)}(x_k)$ 的对易子(或反对易子). 这个对易子(或反对易子)已经被相应的真空期待值代替了. 借助于 (17.26) 和前面关于 t_{n+1} 是最早时间的假定，我们进一步把这个真空期待值化为 Feynman 传播子:

$$\begin{aligned}\langle 0|\varphi_{\mathrm{in}}^{(+)}(x_k)\varphi_{\mathrm{in}}^{(-)}(x_{n+1})|0\rangle&=\langle 0|\varphi_{\mathrm{in}}(x_k)\varphi_{\mathrm{in}}(x_{n+1})|0\rangle\\&=\langle 0|T(\varphi_{\mathrm{in}}(x_k)\varphi_{\mathrm{in}}(x_{n+1}))|0\rangle\end{aligned}$$

最后，(17.31) 就写成

$$\begin{aligned}:\varphi_{\mathrm{in}}(x_1)\cdots\varphi_{\mathrm{in}}(x_n):\varphi_{\mathrm{in}}(x_{n+1})&=:\varphi_{\mathrm{in}}(x_1)\cdots\varphi_{\mathrm{in}}(x_{n+1}):\\&+\sum_k\delta_p:\varphi_{\mathrm{in}}(x_1)\cdots\varphi_{\mathrm{in}}(x_{k-1})\varphi_{\mathrm{in}}(x_{k+1})\cdots\varphi_{\mathrm{in}}(x_n):\\&\times\langle 0|T(\varphi_{\mathrm{in}}(x_k)\varphi_{\mathrm{in}}(x_{n+1}))|0\rangle\end{aligned}$$

将它代入到 (17.30) 就能得到 $(n+1)$ 情形的 (17.23) 式，这就证明了 Wick 定理. 为了对上述结果确信无疑，最好的办法是读者自行对 $n=3$ 和 $n=4$ 检验 (17.23) 的正确性.

在把 Wick 定理用于 (17.22) 时，注意到相互作用哈氏量 $\mathscr{H}_I(\varphi_{in}(y))$ 已经是正规化的了[1)]，所以 (17.22) 的编时乘积正规化时，属于同一个相互作用项 $\mathscr{H}_I$、在同一坐标点 y 的两个场振幅之间不再有收缩. 这些场振幅在 (17.22) 中一开始就以正规的次序出现，并且显然有

$$T:\varphi_{in}(y)\varphi_{in}(y):=:\varphi_{in}(y)\varphi_{in}(y): \tag{17.32}$$

17.5 图表示

在化简 (17.22) 时，只有三类收缩不等于零；对于厄米的 Klein-Gordon 场 (12.74)

$$\begin{aligned}\langle 0|T(\varphi_{in}(x)\varphi_{in}(y))|0\rangle &= i\Delta_F(x-y,\mu^2)\\ &= i\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik\cdot(x-y)}}{k^2-\mu^2+i\varepsilon}\end{aligned} \tag{17.33a}$$

或者对于复数场 (12.70)

$$\langle 0|T(\varphi_{in}(x)\varphi^*_{in}(y))|0\rangle = i\Delta_F(x-y,\mu^2) \tag{17.33b}$$

对于 Dirac 场 (13.72)

$$\begin{aligned}\langle 0|T(\psi^{in}_\alpha(x)\bar\psi^{in}_\beta(y))|0\rangle &= iS_F(x-y,m)_{\alpha\beta}\\ &= i\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip\cdot(x-y)}(\not p+m)_{\alpha\beta}}{p^2-m^2+i\varepsilon}\end{aligned} \tag{17.33c}$$

对于电磁场 (14.51) 和 (14.53)

$$\begin{aligned}\langle 0|T(A^{in}_\mu(x)A^{in}_\nu(y))|0\rangle &= iD^{tr}_F(x-y)_{\mu\nu}\\ &= i\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik\cdot(x-y)}}{k^2+i\varepsilon}\left[-g_{\mu\tau}-\frac{k_\mu k_\nu}{(k\cdot\eta)^2-k^2}\right.\\ &\quad\left.+\frac{(k\cdot\eta)(k_\mu\eta_\nu+\eta_\mu k_\nu)}{(k\cdot\eta)^2-k^2}-\frac{k^2\eta_\mu\eta_\nu}{(k\cdot\eta)^2-k^2}\right]\end{aligned} \tag{17.33d}$$

在作量子化的 Lorentz 系中 $\eta=(1,0,0,0)$. 像 Feynman 理论那样，我们把这些传播子用图形表示在图 17.1 中.

1) (15.28) 中的库伦静电相互作用项却是一个例外. 请参考 §17.9. 但是在同一个时空点仍然没有收缩.

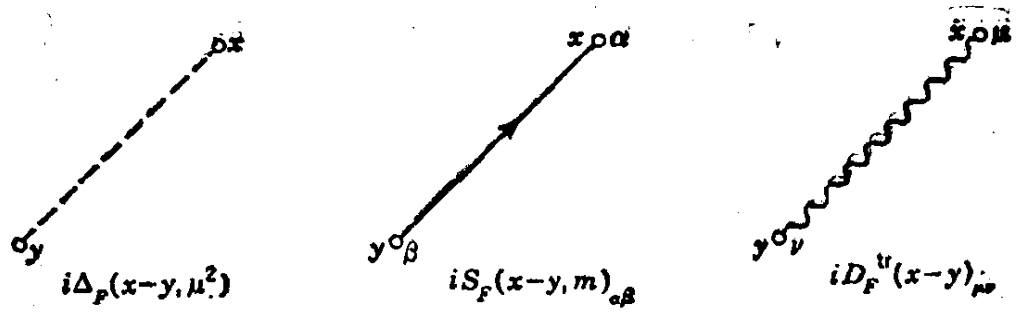


图 17.1 Klein-Gordon 场，Dirac 场和 Maxwell 场的传播子

在写出传播子时，如果不是必需，一般就把质量略去不写了.

利用这些线代表 (17.22) τ 函数的 Dyson-Wick 展开 (17.23) 中出现的每一个收缩，我们就可以对 (17.22) 中的每一项给出一个图形表示. 因为相互作用哈氏量包含同一点的场算符乘积，所以含有这些算符的各个传播子将"汇交"在这一点，这一点称为**顶角**.

我们用自耦合的标量场作为例子来说明上面这些讨论

$$\mathscr{H}_I(\varphi_{\text{in}}(x)) = -1/4\lambda_0 :\varphi_{\text{in}}^4(x): + 1/2(\mu_0^2-\mu^2):\varphi_{\text{in}}^2(x): \tag{17.34}$$

$\tau(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 的展开式中，λ_0 二次而质量修正一次的贡献来自下面那样的项

$$\frac{\lambda_0^2\delta\mu^2}{32}\langle 0|T(\varphi_{\text{in}}(x_1)\varphi_{\text{in}}(x_2)\varphi_{\text{in}}(x_3)\varphi_{\text{in}}(x_4):\varphi_{\text{in}}^4(y_1): \times :\varphi_{\text{in}}^4(y_2)::\varphi_{\text{in}}^2(y_3):)|0\rangle \tag{17.35}$$

从约化这个式子而导出的典型图形画在图 17.2 中.

在这些图形中我们用四线顶角代表 λ_0 相互作用项，用二线顶角表示质量抵消项 (见图 17.3)；每一条由顶点发出的线代表相互作用项 $\mathscr{H}_I$ 中的一个场和其它某个场的收缩. 展开式中不可能出现的一个典型项画在图 17.4 中. 因为 $\mathscr{H}_I$ 已经是正规化的，所以在同一个相互作用顶角两个场之间的

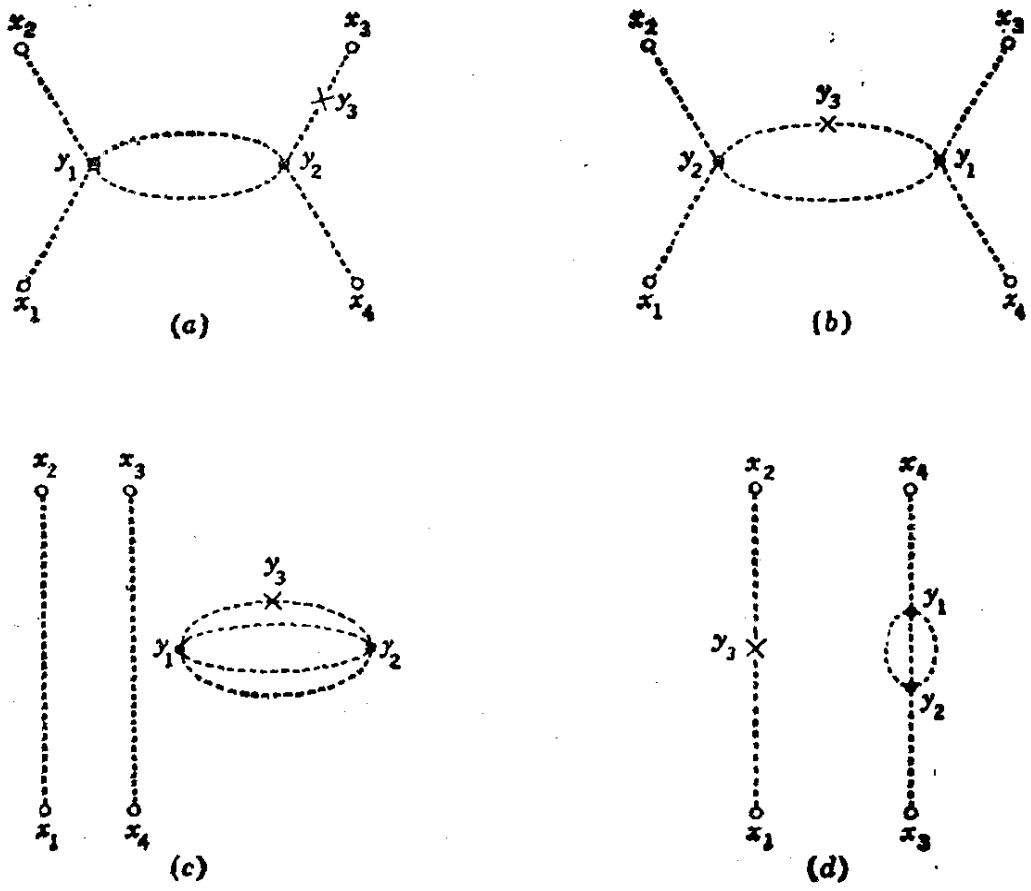


图 17.2　方程 (17.35) 所包含的典型图形

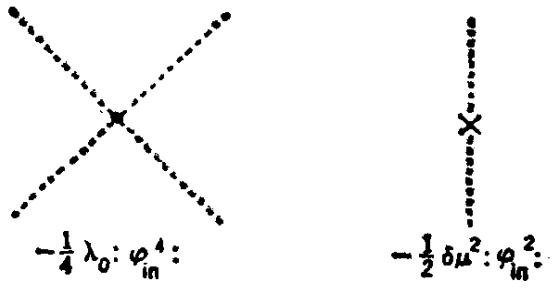


图 17.3　介子—介子散射顶角和质量修正顶角

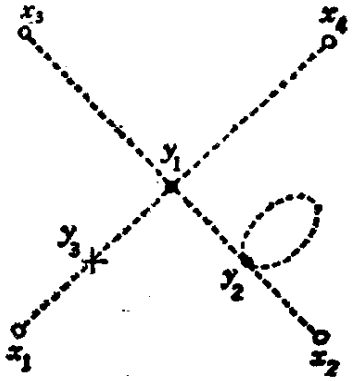


图 17.4　不应在 (17.35) 中出现的自能"蝌蚪"图

收缩是没有的.

上面这些图形表明了 Feynman 图和 τ 函数展开式各项，例如 (17.35)，的一般对应关系. 为了得到我们在传播子理

论中已得到过的 Feynman 图规则，只需要解决一个组合问题．这就是说，确定在 Dyson-Wick 展开 (17.23) 中同类图形（差别只在于顶角的标号）出现的次数．例如，对应于 (17.35) 的约化图形中，共有 3! 个置换顶角宗量 y_1、y_2 和 y_3 的方法，而每一个经过置换的图对 τ 的贡献都是一样的．一般说来，对于 $y_1,\cdots,y_m$，可以有 $m!$ 个置换，它们正好抵消 (17.22) 的 $1/m!$ 因子．对应于图 17.2，每一个带有四个传播子的 λ_0 顶角来自 $1/4\lambda_0:\varphi_{\text{in}}^4:$，其中的四个场算符可以有 4! 个置换，而和自质量顶角 $-\frac{1}{2}\delta\mu^2:\varphi_{\text{in}}^{(2)}:$ 相联系的两个场算符有 2! 个置换．因此，一般规则就是：对于每个相互作用项，其中场振幅是 r 次幂的就乘以 $r!$．

17.6 真空振幅

(17.22) 分母的展开式所对应的某些图形表示在图 17.5

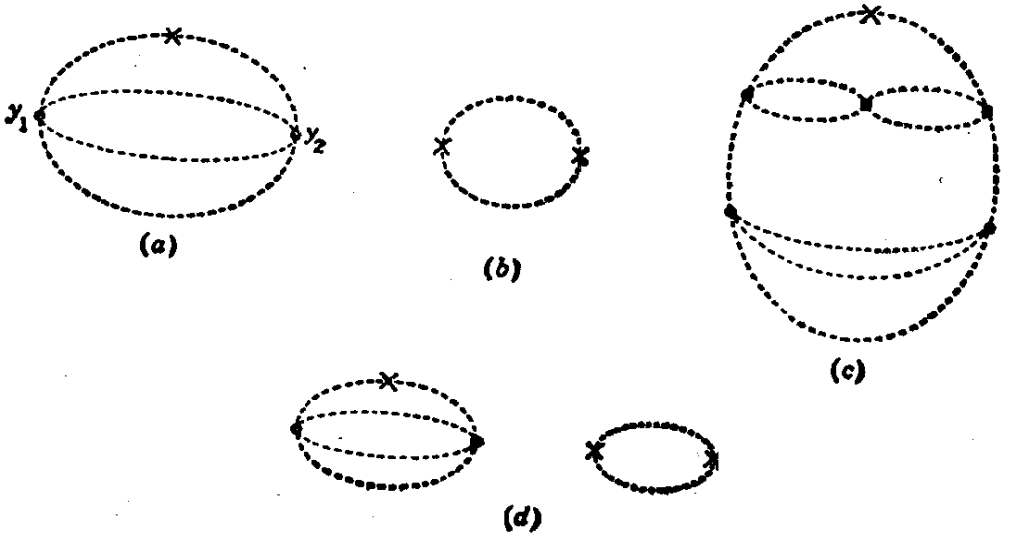


图 17.5 真空泡图

中．这些真空泡图也会在分子的展开式中出现，例如图 17.2c 就是．我们将看到，它们正好把分母消去．

与分子相对应的图不同于与分母对应的图，前者具有**外线**，即与 $\tau(x_1,\cdots,x_n)$ 中的场标符 $\varphi_{\text{in}}(x_1),\cdots,\varphi_{\text{in}}(x_n)$ 有关的收缩. 我们称展开式中出现的不和任何一根外线相联的子图为**不连通部分**. 一个没有不联通部分的图称为是**连通的**. 分子中出现的每一个图能够唯一地分解为连通的和不连通部分；对 τ 函数的贡献也可作相应的分拆.

对于含有 s 阶相互作用 $\mathscr{H}_1$ 的贡献作为其连通部分的所有图形，τ 函数的分子具有如下形式：

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-i)^p}{p!}\int d^4y_1\cdots d^4y_p\langle 0|T(\varphi_{\text{in}}(x_1)\cdots\varphi_{\text{in}}(x_n)\mathscr{H}_I(y_1)\cdots \mathscr{H}_I(y_s))|0\rangle_c\frac{p!}{s!(p-s)!}\langle 0|T(\mathscr{H}_I(y_{s+1})\cdots \mathscr{H}_I(y_p))|0\rangle \tag{17.36}$$

真空期待值的下标 c 表示只包含连通部分. 组合因子

$$\binom{p}{s}=\frac{p!}{s!(p-s)!}$$

反映从 p 个 $\mathscr{H}_I$ 中取出 s 个方法的数目. 可以把 (17.36) 重写成

$$\frac{(-i)^s}{s!}\int d^4y_1\cdots d^4y_s\langle 0|T(\varphi_{\text{in}}(x_1)\cdots\varphi_{\text{in}}(x_n)\mathscr{H}_I(y_1)\cdots \mathscr{H}_I(y_s))|0\rangle_c\times\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-i)^r}{r!}\int d^4z_1\cdots d^4z_r \times\langle 0|T(\mathscr{H}_I(z_1)\cdots\mathscr{H}_I(z_r))|0\rangle \tag{17.37}$$

方程 (17.37) 具有 s 阶连通图乘上一个如图 17.5 所示真空泡图无穷级数的形式. 后者恰好消去 (17.22) 的分母. 一般来说，我们写作

$$\tau(x_1,\cdots,x_n)=\frac{\sum_i G_i(x_1,\cdots,x_n)}{\sum_K D_K}$$

$$= \frac{\sum_i G_i^c(x_1,\cdots,x_n)\sum_K D_K}{\sum_K D_K} = \sum_i G_i^c(x_1,\cdots,x_n) \tag{17.38}$$

其中 G_i^c 是连通图的贡献，而 D_K 则是非连通图的贡献. 总之，(17.38) 意味着我们在计算 τ 函数时可以略去所有的不连通图；τ 函数只是所有**连通** Feynman 图贡献的总和.

17.7 自旋和同位旋；π-核子散射

在大多数物理上有兴趣的计算中，我们碰到的相互作用哈氏量 $\mathscr{H}_I$ 都包含几种类型的场并以指标表明其自旋和同位旋状态. 第十五章引入的 π-核子相互作用，在包括质量抵消项时有下面的形式

$$\mathscr{H}_I = g:\bar{\psi}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\Phi}\psi: - \frac{1}{2}\delta\mu^2:\boldsymbol{\Phi}\cdot\boldsymbol{\Phi}: - \delta M:\bar{\psi}\psi: \tag{17.39}$$

为了弄清楚各种指标的含义，让我们考虑 π-核子散射的最低阶图. 出现在 (16.139) 中相应于此过程的 τ 函数是

$$\langle 0|T(\psi(z_2)_{\alpha p}\bar{\psi}(z_1)_{\beta s}\varphi_i(x_1)\varphi_j(x_2))|0\rangle \tag{17.40}$$

其中 (α,β) 和 (r,s) 分别是核子的自旋和同位旋指标，(i,j) 是 π 介子的同位旋指标. 对散射的最低阶贡献来自：

$$\tau^{(2)}_{ij,\alpha\beta,rs}(x_1,x_2,z_1,z_2) = \frac{(-i)^2}{2!}\int d^4y_1 d^4y_2 \times\langle 0|T(\psi^{in}_{\alpha r}(z_2)\bar{\psi}^{in}_{\beta s}(z_1)\varphi^{in}_i(x_1)\varphi^{in}_j(x_2) \times\mathscr{H}_I(y_1)\mathscr{H}_I(y_2))|0\rangle_c \tag{17.41}$$

根据 (17.38)，下标 c 表明只计连通图，也就是不包括图 17.6 所示的图形. (17.39) 中的质量抵消项都是 g^2 级的，所以在

g^2 级计算中它们只出现一次. 它们用以修正对应于图 17.7 所示各图对 (17.40) 的自能贡献.

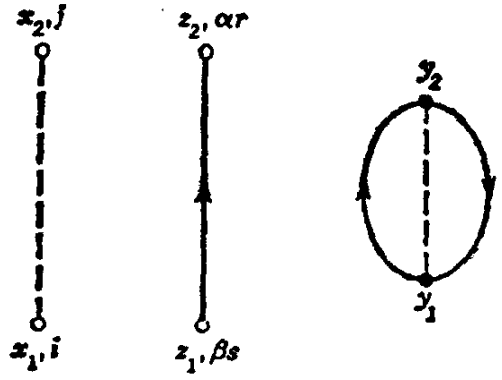


图 17.6 不包含在 π-核子振幅 (17.41) 中的非联通图

在第八章讨论电子散射的辐射修正时已经碰到过这种质量重整化. 这样，图 17.8 的图形将保证 (到 g^2 级) 物理介子或核子是以实验质量 μ 或 M 传播的. 不过，我们现在不关心向前散射，所以图 17.7 和 17.8 都不作贡献.

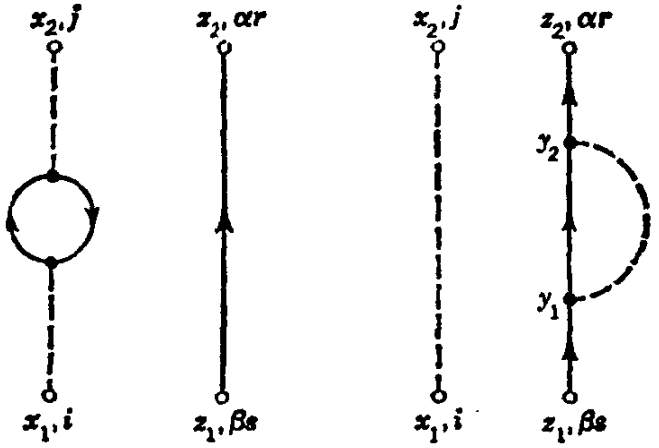


图 17.7 自能对 π-核子振幅的贡献

现在我们讨论 (17.41) 中其余图形(图 17.9) 的贡献. 在这些图形中 π 和核子初态和终态的量子数是不同的，相应的矩阵元如下:

$$\tau^{(2a)}_{ij,\alpha\beta,rs}(x_1,x_2,z_1,z_2) = \frac{(-i)^2}{2!} \times 2!g^2\int d^4y_1 d^4y_2 (\tau_j\tau_i)_{rs} i \times \Delta_F(y_1-x_1) \times i\Delta_F(x_2-y_2)$$

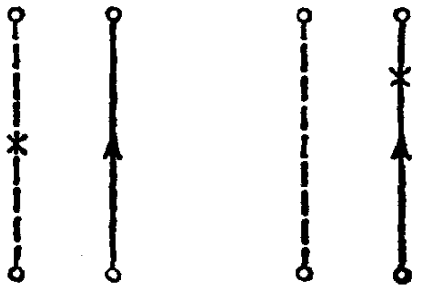


图 17.8 π-核子振幅中的质量抵消项

$$\times [iS_F(z_2 - y_2)i\gamma_5 iS_F(y_2 - y_1)i\gamma_5 iS_F(y_1 - z_1)]_{\alpha\beta} \tag{17.42a}$$

$$\tau^{(2b)}_{ij,\alpha\beta,rs}(x_1, x_2, z_1, z_2)$$
$$= \frac{(-i)^2}{2!} 2! g^2 \int d^4y_1 d^4y_2 (\tau_i\tau_j)_{rs} i\Delta_F(y_2 - x_1)$$
$$\times i\Delta_F(x_2 - y_1)$$
$$\times [iS_F(z_2 - y_2)i\gamma_5 iS_F(y_2 - y_1)i\gamma_5 iS_F(y_1 - z_1)]_{\alpha\beta} \tag{17.42b}$$

除实践而外别无它法！ 建议读者详细推导 (17.42) 式以确信式中包含的每一因子以及自旋、同位旋矩阵的次序.

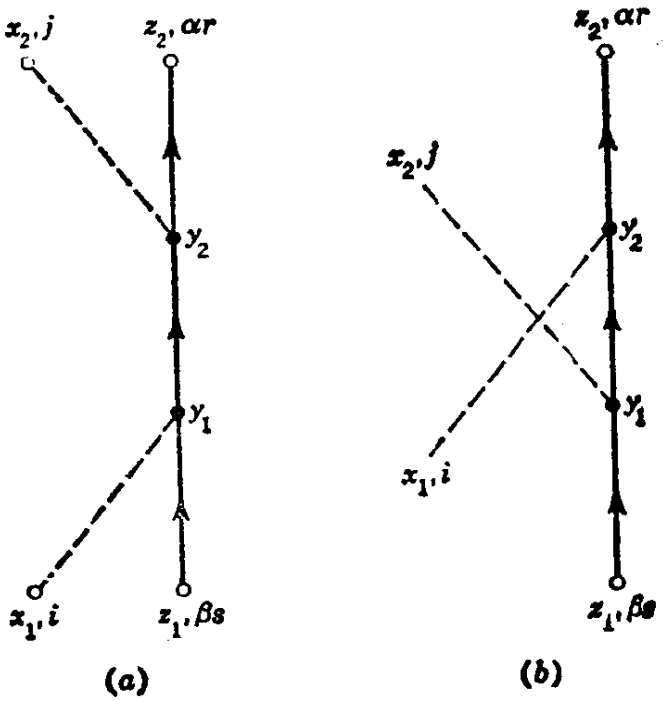


图 17.9 二级 π-核子散射，(17.42)式

为了计算跃迁振幅，需要把 τ 函数 (17.42) 代入把 τ 函数与 S 矩阵联系起来的约化公式 (16.139). 略去向前散射项，就有

$$S^{(2)}(p_2, q_2; p_1, q_1) = \left(\frac{i}{\sqrt{Z_3}}\right)^2 \left(\frac{-i}{\sqrt{Z_2}}\right)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 d^4z_1 d^4z_2$$

$$\times f^*_{q_2}(x_2)\hat{\Phi}^*_{2j}[\vec{U}_{p_2s_2}(z_2)(\overrightarrow{i\not\nabla_{z_2}-M})]_\alpha(\overrightarrow{\Box_{x_2}+\mu^2})$$
$$\times \chi^\dagger_r(2)\tau^{(2)}_{ij,\alpha\beta,rs}(x_1,x_2;z_1,z_2)$$
$$\times \chi_s(1)[(\overleftarrow{-i\not\nabla_{z_1}-M})U_{p_1s_1}(z_1)]_\beta(\overleftarrow{\Box_{x_1}+\mu^2})\hat{\Phi}_{1i}f_{q_1}(x_1) \tag{17.43}$$

其中 f_q 是归一化的玻色子波函数，动量为 q；$U_{ps}(z)$ 是归一化的费米子波函数；$\hat{\Phi}_i$ 和 χ_r 是同位旋波函数

因我们只算到 g^2 级，按照微扰方法的精神，我们令

$$Z_2 = Z_3 = 1.$$

Klein-Gordon 和 Dirac 算符的效果是去掉外线的传播子，因为

$$(\Box_x + \mu^2)\Delta_F(x-y) = -\delta^4(x-y)$$
$$(i\not\nabla_x - M)S_F(x-y) = S_F(x-y)(\overleftarrow{-i\not\nabla_y - M})$$
$$= \delta^4(x-y) \tag{17.44}$$

于是，这些外线传播子就被外部粒子的波函数所代替。对 δ 函数积分并代入波函数，(17.43) 就简化为

$$S^{(2)}(p_2,q_2;p_1,q_1) = -g^2\int\frac{d^4y_1d^4y_2}{(2\pi)^6\sqrt{2\omega_1 2\omega_2}}\sqrt{\frac{M^2}{E_1E_2}}$$
$$\times\begin{cases} e^{i(q_2+p_2)\cdot y_2}[\chi^\dagger(2)\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{\Phi}}^*_2\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{\Phi}}_1\chi(1)] \\ \times[\bar{u}(p_2,s_2)i\gamma_5 iS_F(y_2-y_1)i\gamma_5 \\ \times u(p_1,s_1)]e^{-i(p_1+q_1)\cdot y_1} \\ + e^{i(p_2-q_1)\cdot y_2}[\chi^\dagger(2)\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{\Phi}}_1\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{\Phi}}^*_2\chi(1)] \\ \times[\bar{u}(p_2,s_2)i\gamma_5 iS_F(y_2-y_1)i\gamma_5 u(p_1,s_1)] \\ \times e^{-i(p_1-q_2)\cdot y_1} \end{cases} \tag{17.45}$$

正像我们在第七章到第十章经常做的那样，对上式作 Fourier 变换，转到动量空间，就直接导致 (10.54) 的表达式。

(10.54) 和 (10.55) 指出的 π-核子散射振幅的交叉对称性也可以从约化公式以及 (17.40) 的形式立即看出。显然，

对于 $i \longleftrightarrow j$, $x_1 \longleftrightarrow x_2$, (17.40)是不变的.在约化公式(17.43)中，如果 $\hat{\Phi}_{1i} \longleftrightarrow \hat{\Phi}^*_{2i}$ 和 $f_{q_1}(x_1) \longleftrightarrow f_{-q_2}(x_1)$，$S$ 矩阵也是不变的．上述性质在强作用问题上的第一个重要应用是Gell-mann和 Goldberger[1] 作出的．他们表明，对于 $q_1 = q_2 \to 0$ 的极限情形，π—N 散射是与同位旋无关的．在这种极限情形，交换同位旋指标 i 和 j，S 是不变的． 于是根据电荷独立性就有 $S_{ij} = \delta_{ij}S$． 上面这些讨论的细节留给读者去推导． 交叉对称性的第二个应用是 Pomeranchuk 定理[2]

$$\lim_{E\to\infty}\sigma_{tot}(A + B \to A + B) = \lim_{E\to\infty}\sigma_{tot}(\bar{A} + B \to \bar{A} + B)$$

我们将在第十八章中结合向前散射色散关系来讨论这一定理.

17.8 π-π 散射

作为 Dyson-Wick 约化技术的补充例子，我们应用 (17.39) 的相互作用，考虑 π-π 散射的微扰计算． 最低阶贡献是 g^4 级的，示于图 17.10 中．图 17.11 只对向前散射有贡献，我们不管它．对于图 17.10 的各图形，可令 $Z_3 = 1$ 并略去质量抵消项，对于非向前散射 S 矩阵元是

$$\begin{aligned} S(q_3, q_4; q_1, q_2) = {} & \frac{1}{(2\pi)^6\sqrt{2\omega_1 2\omega_2 2\omega_3 2\omega_4}} \\ & \times \int d^4x_1 \cdots, d^4x_4 \{\exp i[q_3 \cdot x_3 + q_4 \cdot x_4 - q_1 \cdot x_1 - q_2 \cdot x_2]\} \\ & \times \hat{\Phi}_{1i}\hat{\Phi}_{2j}\hat{\Phi}^*_{3k}\hat{\Phi}^*_{4l} K_{x_1}K_{x_2}K_{x_3}K_{x_4}\tau_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, x_4) \end{aligned} \qquad (17.46)$$

$\hat{\Phi}_i$ 仍然表示同位旋波函数，并定义

$$K_x = \Box_x + \mu^2$$

1) M. Gell-Mann *and* M. L. Goldberger, 未发表.
2) Y. Pomeranchuk *J.E.T.P.* (*USSR*), **34**, 725 (1958).

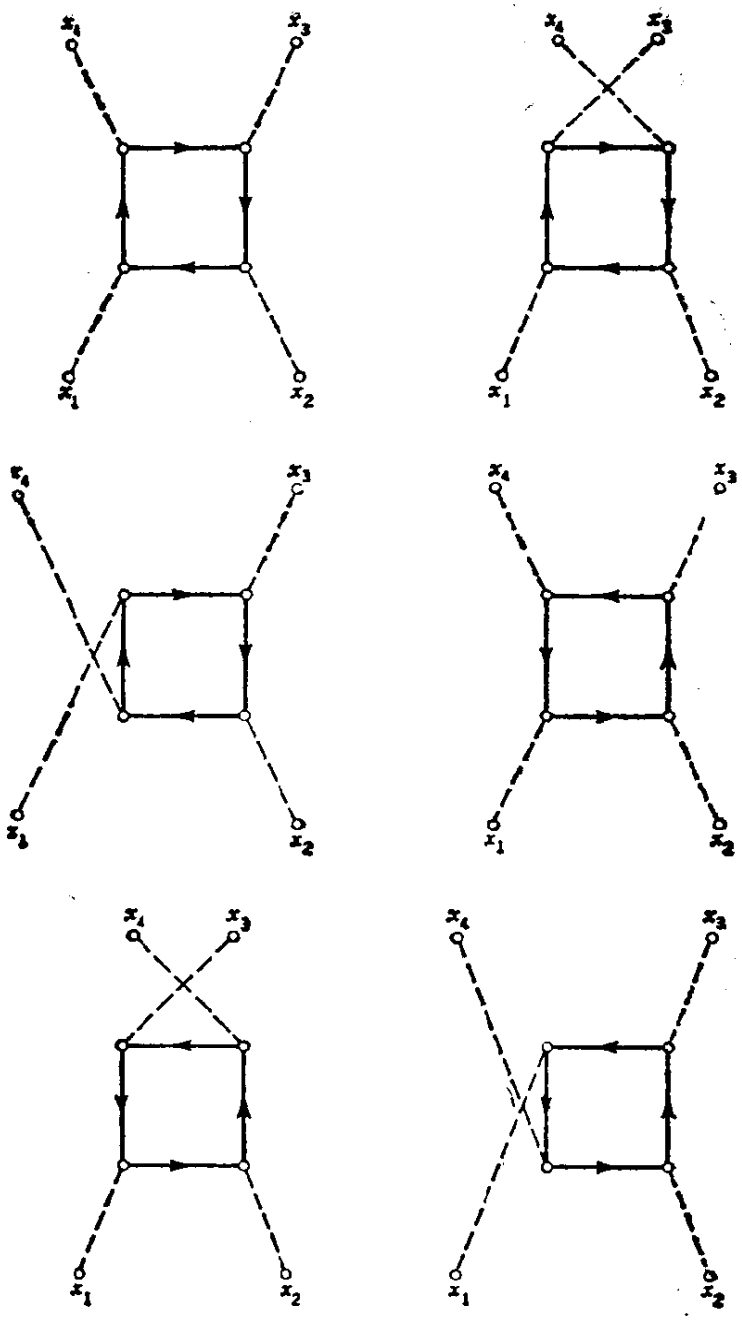


图 17.10　π–π 散射的四级图

对于 g^4 级，有

$$\tau^{(4)}_{ijkl}(x_1,x_2,x_3,x_4)=\frac{(-ig)^4}{4!}4!\int d^4y_1\cdots d^4y_4$$
$$\times\langle 0|T(\varphi_i(x_1)\varphi_r(y_1))|0\rangle\times\langle 0|T(\varphi_j(x_2)\varphi_s(y_2))|0\rangle$$

$$\times \langle 0|T(\varphi_k(x_3)\varphi_s(y_3))|0\rangle\langle 0|T(\varphi_l(x_4)\varphi_u(y_4))|0\rangle$$
$$\times \langle 0|T(:\bar{\psi}(y_1)i\gamma_5\tau_r\psi(y_1)::\bar{\psi}(y_2)i\gamma_5\tau_s\psi(y_2):$$
$$\times :\bar{\psi}(y_3)i\gamma_5\tau_s\psi(y_3)::\bar{\psi}(y_4)i\gamma_5\tau_u\psi(y_4):|0\rangle$$
$$= -g^4\int d^4y_1d^4y_2d^4y_3d^4y_4\Delta_F(x_1-y_1)\Delta_F(x_2-y_2)$$
$$\times \Delta_F(x_3-y_3)\Delta_F(x_4-y_4)\mathrm{Tr}\tau_i\tau_j\tau_k\tau_l$$
$$\times \mathrm{Tr}i\gamma_5 iS_F(y_1-y_2)i\gamma_5 iS_F(y_2-y_3)i\gamma_5 i$$
$$\times S_F(y_3-y_4)i\gamma_5 iS_F(y_4-y_1)$$
$$+ \text{置换外线后得到的五项} \qquad (17.47)$$

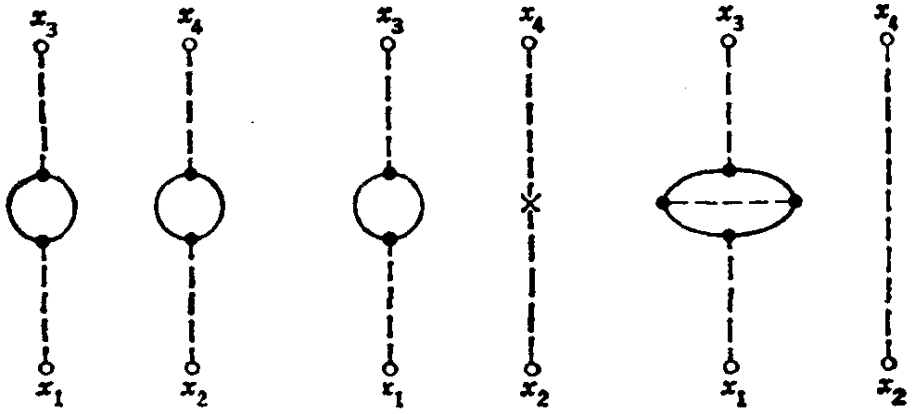


图 17.11　π-π 向前散射的四级图

式中的负号值得注意. 这是由于将 $\psi(y_4)$ 与 $\bar{\psi}(y_1)$ 收缩需要作奇数次置换而产生的. 这是一个一般的规则: 对于图上每一个封闭的费米子圈都要乘一个因子(−1). 其证明同上面一样. 对于一个一般的封闭圈, 如图 17.12, 其 Wick 乘积是

$$+\langle 0|T(\bar{\psi}(y_1)\Gamma\psi(y_1)\bar{\psi}(y_2)$$
$$\times \Gamma\psi(y_2)\cdots\bar{\psi}(y_n)\Gamma\psi(y_n))|0\rangle$$
$$= -\langle 0|T(\psi(y_n)\bar{\psi}(y_1)$$

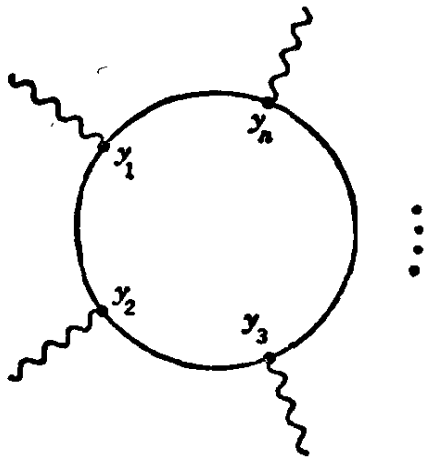


图 17.12　一般图形中的费米子圈图

$$\times \Gamma\phi(y_1)\bar{\phi}(y_2)\Gamma\cdots\phi(y_{n-1})\bar{\phi}(y_n)\Gamma)|0\rangle$$
$$= (-)\mathrm{Tr}\, iS_F(y_n - y_1)\Gamma iS_F(y_1 - y_2)\Gamma\cdots iS_F(y_{n-1} - y_n)\Gamma$$
$$+ \text{置换项} \tag{17.48}$$

合并 (17.47) 和 (17.46) 并转到动量空间，我们得

$$S(q_3, q_4; q_1, q_2) = -\frac{i(2\pi)^4\delta^4(q_3 + q_4 - q_1 - q_2)}{(2\pi)^6\sqrt{16\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}}\mathscr{M}$$

而

$$\mathscr{M} = -ig^4\mathrm{Tr}\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{\Phi}}_1\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{\Phi}}_2\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{\Phi}}_3^*\boldsymbol{\tau}\hat{\boldsymbol{\Phi}}_4^*\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}$$
$$\times \mathrm{Tr}\, i\gamma_5\frac{i}{\not p + \not q_1 - M + i\varepsilon}i\gamma_5$$
$$\times\frac{i}{\not p + \not q_1 + \not q_2 - M + i\varepsilon}i\gamma_5\frac{i}{\not p + \not q_4 - M + i\varepsilon}i\gamma_5$$
$$\times\frac{i}{\not p - M + i\varepsilon} + \text{五个置换项} \tag{17.49}$$

用附录 B 检验就会发现，(17.49) 和直接利用 Feynman 规则写下来的表示是完全一致的.

不幸的是，对内部动量 p 的积分是对数发散的[1]. 这个无穷大导致介子相互作用拉氏量中一个附加的抵消项，其最简单的形式是

$$-\mathscr{L}_I = \mathscr{H}_I(\varphi) = 1/4\delta\lambda:(\boldsymbol{\Phi}\cdot\boldsymbol{\Phi})^2: \tag{17.50}$$

其中 $\delta\lambda$ 是一个无穷大常数以抵消 (17.49) 中的发散.

在拉氏量中加入上述抵消项之后，π-π 散射的有限贡献即可算出. 但是(17.49)中的积分和求迹计算是相当冗长的，而且没有什么意义，因为微扰展开级数不收敛 ($g^2/4\pi = 15$). 尽管如此，从对称性还是可以直接导出散射振幅的某些性质：

1) 量子电动力学由于有规范不变性而没有这种无穷大出现. 规范不变性对光子-光子散射振幅加上附加条件，因而导致有限的结果. 进一步讨论可见 §19.10.

1. $\mathscr{M}$ 是不变量 s、t 和 u 的标量函数.

$$s=(q_1+q_2)^2 \qquad t=(q_1-q_3)^2 \qquad u=(q_1-q_4)^2$$

而

$$s+t+u=4\mu^2 \tag{17.51}$$

对于 $q_1+q_2\to q_3+q_4$ 的物理散射，上述不变量取值范围是 $s\geqslant 4\mu^2$，$t\leqslant 0$，$u\leqslant 0$.

2. 在电荷独立近似下 $\mathscr{M}$ 具有如下的同位旋结构.

$$\begin{aligned}\mathscr{M}=&(\hat{\boldsymbol{\Phi}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{\Phi}}_2)(\hat{\boldsymbol{\Phi}}_3^*\cdot\hat{\boldsymbol{\Phi}}_4^*)A(s,t,u)\\&+(\hat{\boldsymbol{\Phi}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{\Phi}}_3^*)(\hat{\boldsymbol{\Phi}}_2\cdot\hat{\boldsymbol{\Phi}}_4^*)B(s,t,u)\\&+(\hat{\boldsymbol{\Phi}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{\Phi}}_4^*)(\hat{\boldsymbol{\Phi}}_2\cdot\hat{\boldsymbol{\Phi}}_3^*)C(s,t,u)\end{aligned} \tag{17.52}$$

3. $\mathscr{M}$ 具有交叉对称性质，也就是在任何外粒子作交换时是不变的

$$\begin{aligned}&q_2\longleftrightarrow -q_3,\ \hat{\boldsymbol{\Phi}}_2\longleftrightarrow\hat{\boldsymbol{\Phi}}_3^*;\ s\longleftrightarrow t\\&q_2\longleftrightarrow -q_4,\ \hat{\boldsymbol{\Phi}}_2\longleftrightarrow\hat{\boldsymbol{\Phi}}_4^*,\ s\longleftrightarrow u\\&q_3\longleftrightarrow q_4,\ \hat{\boldsymbol{\Phi}}_3^*\longleftrightarrow\hat{\boldsymbol{\Phi}}_4^*,\ t\longleftrightarrow u\end{aligned}$$

这来自 (17.46) 的结构以及 τ 函数的对称性，并且意味着

$$\begin{aligned}A(s,t,u)&=B(t,s,u)=C(u,t,s)=A(s,u,t)\\&=B(u,s,t)=C(t,u,s)\end{aligned} \tag{17.53}$$

最后，把 s 分解成同位旋道常常是很有用的. 我们列出同位旋不变量 P_I 的各种组合，它们对应于 1+2→3+4 反应的一定同位旋态:

$$\begin{aligned}P_0&=1/3(\hat{\boldsymbol{\Phi}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{\Phi}}_2)(\hat{\boldsymbol{\Phi}}_3^*\cdot\hat{\boldsymbol{\Phi}}_4^*)\\P_1&=1/2[(\hat{\boldsymbol{\Phi}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{\Phi}}_3^*)(\hat{\boldsymbol{\Phi}}_2\cdot\hat{\boldsymbol{\Phi}}_4^*)-(\hat{\boldsymbol{\Phi}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{\Phi}}_4^*)(\hat{\boldsymbol{\Phi}}_2\cdot\hat{\boldsymbol{\Phi}}_3^*)]\\P_2&=1/2[(\hat{\boldsymbol{\Phi}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{\Phi}}_3^*)(\hat{\boldsymbol{\Phi}}_2\cdot\hat{\boldsymbol{\Phi}}_4^*)+(\hat{\boldsymbol{\Phi}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{\Phi}}_4^*)(\hat{\boldsymbol{\Phi}}_2\cdot\hat{\boldsymbol{\Phi}}_3^*)]\\&\quad-\frac{1}{3}(\hat{\boldsymbol{\Phi}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{\Phi}}_2)(\boldsymbol{\Phi}_3^*\cdot\boldsymbol{\Phi}_4^*)\end{aligned} \tag{17.54}$$

定义

$$P_I=\hat{\Phi}_{1i}\hat{\Phi}_{2j}\hat{\Phi}_{3k}^*\hat{\Phi}_{4l}^*P_I(ijkl) \tag{17.55}$$

我们可以证明下面的正交性质

$$\sum_{m,n=1}^{3} P_I(ijmn)P_{I'}(mnkl) = P_I(ijkl)\delta_{II'} \qquad (17.56)$$

如何构成这些算符的详细论证留给读者作为练习. 于是我们就有

$$\mathscr{M}(q_3,q_4;q_1,q_2) = A_0P_0 + A_1P_1 + A_2P_2$$

其中

$$A_0 = 3A + B + C \quad A_1 = B - C \quad A_2 = B + C \qquad (17.57)$$

这些 A_I 是对应于总同位旋为 I 的散射振幅;在对称点

$$s = t = u = 4\mu^2/3,$$

由 (17.53) 有 $A = B = C$, 所以

$$A_0 = 5/2A_2 \qquad A_1 = 0 \qquad s = t = u \qquad (17.58)$$

我们将在 §18.12 色散关系技术的应用中用到 s 矩阵的这些一般性质.

17.9 量子电动力学的 Feynman 图规则

到此为止除了量子电动力学外我们已经建立了附录B列出的关于 Feynman 图的全部规则,这些规则在本书上册中使用得很多. 量子电动力学的 Feynman 图规则显然很不同. 我们已经有两类图形, 第一类图是交换一个横光子, 顶角 $-ie_0\gamma_\mu$, 根据 (17.33), 其传播子是

$$iD_F^{\gamma}(q,\eta)_{\mu\nu} = \frac{i}{q^2 + i\varepsilon}\left[-g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{(q\cdot\eta)^2 - q^2} + \frac{(q\cdot\eta)(q_\mu\eta_\nu + \eta_\mu q_\nu)}{(q\cdot\eta)^2 - q^2} - \frac{q^2\eta_\mu\eta_\nu}{(q\cdot\eta)^2 - q^2}\right] \qquad (17.59)$$

其中 η 在作量子化的 Lorentz 参考系中是 $\eta = (1, 0, 0, 0)$. 第二类图是由于 (15.28) 的瞬时 Coulomb 相互作用

$$H_I = \frac{e_0^2}{2}\int \frac{d^3x d^3x' : \bar{\psi}(x)\gamma\psi(x) :: \bar{\psi}(x')\gamma\psi(x') :}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \tag{17.60}$$

现在我们可以实践我们在 §14.6 所许下的诺言了，我们要证明

1. (17.59) 式正比于 q_μ 或 q_ν 的中间三项，由于流守恒而对散射振幅无贡献[1].

2. (17.59) 右边最后一项抵消 (17.60) 的 Coulomb 项.

作为一个推论，在实际计算中我们可以采用协变的传播子

$$iD_F^{\mu\nu} = \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon}$$

因此，量子电动力学散射振幅的协变性也就得到了保证.

为了证明第一点，让我们考虑一根费米子线，有 n 根实的或虚的光子线连在它上面，如图 17.13 所示. 对应的振幅是

$$g(p,p';q_1,a_1,\cdots,q_n,a_n) = \frac{1}{\not p' - m}\not a_n \frac{1}{\not p_{n-1} - m}\not a_{n-1}\cdots\not a_2 \frac{1}{\not p_1 - m}\not a_1 \frac{1}{\not p - m} \tag{17.61}$$

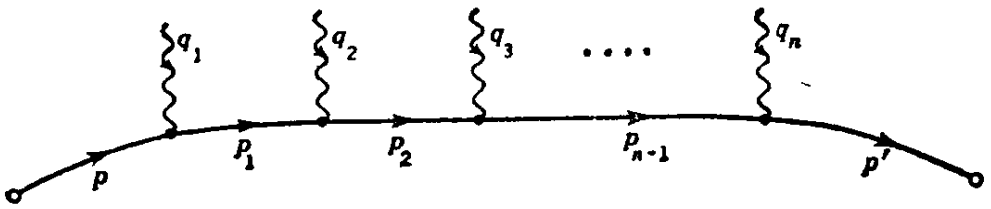


图 17.13 n 根光子线连在一根带电的费米子线上

我们再插入一根实的或虚的光子线，其动量为 q，相互作用顶角 q，如图 17.14 所示. 插入这样一根线的效果是改变

1) 对于实光子外线，这一结论的有效性曾在第七章建立极化求和的 Feynman 技巧中应用过.

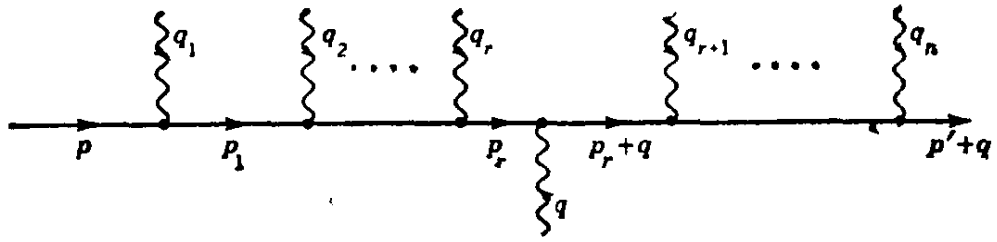


图 17.14　费米子线连有 n 根光子线再加上一个相互作用顶角而引入动量 q

g 为 $\tilde{g}_r$

$$\tilde{g}_r(p,p',q;q_i a_i) = \frac{1}{\not p' + \not q - m} a_n \frac{1}{\not p_{n-1} + \not q - m} a_{n-1} \times \cdots a_{r+1} \frac{1}{\not p_r + \not q - m} \not q \frac{1}{\not p_r - m} a_r \cdots a_1 \frac{1}{\not p - m} \tag{17.62}$$

用恒等式：

$$\frac{1}{\not p_r + \not q - m} \not q \frac{1}{\not p_r - m} = \frac{1}{\not p_r - m} - \frac{1}{\not p_r + \not q - m}$$

q 及其两边的因子可以简化，结果是[1]：

$$\begin{aligned}\tilde{g}_r(p,p',q;q_i a_i) = {} & \frac{1}{\not p' + \not q - m} a_n \cdots \frac{1}{\not p_{r+1} + \not q - m} a_{r+1} \\ & \times \frac{1}{\not p_r - m} a_r \cdots a_1 \frac{1}{\not p - m} - \frac{1}{\not p' + \not q - m} \\ & \times a_n \cdots \frac{1}{\not p_{r+1} + \not q - m} \\ & \times a_{r+1} \frac{1}{\not p_r + \not q - m} a_r \frac{1}{\not p_{r-1} - m} a_{r-1} \cdots a_1 \frac{1}{\not p - m}\end{aligned} \tag{17.63}$$

对于光子所有可能的插入位置 r 求和[2]，我们看到，在

1）若费米子线上有质量抵消项，证明同样可行．这一点的检验留给读者．

2）结果 q 代表一根虚光子线的一端，而这根虚光子线的两端连结在图 17.14 的同一根电子线上，那末，这根虚光子线的两个端点在电子线上所有可能位置所对应的图形的总和等于剩下 $n-2$ 个顶点每一确定次序的 Feynman 图总和的两倍。

(17.63) 中所有项都成对相消；只有两项例外，就是来自光子 q 插到图 (17.14) 中 q_n 的右边和 q_1 左边的两项，于是得到

$$\tilde{g}(p,p',q;q_i,a_i)=\sum_r \tilde{g}_r=\frac{1}{\not p'-m}a_n\frac{1}{\not p_{n-1}-m}$$
$$\times a_{n-1}\cdots a_1\frac{1}{\not p-m}$$
$$-\frac{1}{\not p'+\not q-m}a_n\frac{1}{\not p_{n-1}+\not q-m}a_{n-1}\cdots a_1\frac{1}{\not p+\not q-m}$$
$$=g(p,p';q_1,a_1\cdots q_n,a_n)$$
$$-g(p+q,p'+q;q_1a_1\cdots q_n,a_n) \tag{17.64}$$

如果图 17.14 的费米子线是某 S 矩阵元的一根线，p 和 $p'+q$ 就是实在的外部粒子的动量，它对 S 矩阵的贡献可以从移走 $\tilde{g}$ 中的外传播子腿而得到

$$S\propto\bar{u}(p'+q)\Big[\lim_{\substack{p^2\to m\\(p'+q)^2\to m^2}}(\not p'+\not q-m)\tilde{g}(p,p',q;q_ia_i)$$
$$\times(\not p-m)\Big]u(p)=0 \tag{17.65}$$

另一方面，若费米子线是一个闭合圈，如图 17.15，则其贡献为

$$\mathscr{B}\propto\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\,a_0\tilde{g}(p,p',q;q_ia_i)$$
$$=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\,a_0[g(p,p';q_ia_i)-g(p+q,p'+q;q_i,a_i)] \tag{17.66}$$

只要上述积分收敛，动量空间中的积分原点可以移动，那么 $\mathscr{B}$ 也等于零．类似于第八章讨论真空极化积分情形那样，我们假定，即使积分是发散的，我们也可以把它正常化，以使原点可以移动．

这样我们就证明了第一个结论．因此在计算 S 矩阵元

时，$D_{\mu\nu}^{tr}$ 可以被代替为

$$iD_F^{tr}(q)_{\mu\nu} \to +ig_{\mu\nu}D_F(q) - \frac{i\eta_\mu\eta_\nu}{(q\cdot\eta)^2-q^2} \quad (17.67)$$

正如(14.55)指出的那样，在坐标空间这意味着（在选定的量子化参考系中，

$$\eta = (1,0,0,0))$$

$$iD_F^{tr}(q)_{\mu\nu} \to ig_{\mu\nu}D_F(x) - \frac{i\delta(t)\eta_\mu\eta_\nu}{4\pi|\boldsymbol{x}|} \quad (17.68)$$

上式最后一项具有与 Coulomb 项(17.60)相同的结构。现在证明第二个结论，即(17.68)的最后一项与(17.60)的贡献相消。

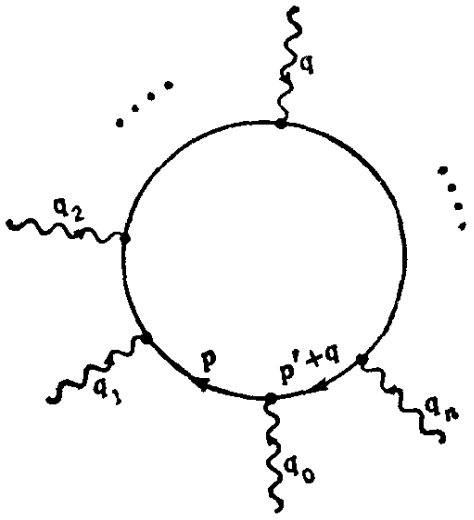


图 17.15　带有光子线的费米子圈图

为此我们只要小心地数图就可以了。(17.22)的 Wick 约化的两个主要因素是横光子的相互作用：

$$\int H_I^{tr}(t)dt = e_0\int d^4y : \bar{\psi}_{in}(y)\gamma_\mu\psi_{in}(y) : A_{in}^\mu(y)$$

$$= e_0\int d^4y j_\mu^{in}(y)A_{in}^\mu(y) \quad (17.69)$$

以及来自(17.60)的瞬时 Coulamb 相互作用

$$\int H_I^{Coul}dt = \frac{1}{2}e_0^2\int d^4zd^4z'\delta(z_0-z_0')j_\mu^{in}(z) \times \frac{\eta^\mu\eta^\nu}{4\pi|\boldsymbol{z}'-\boldsymbol{z}|}j_\nu^{in}(z') \quad (17.70)$$

考虑(17.22)微扰展开式中的一项，它包含 H_I^{tr} 的 $2n$ 级以及 H_I^{Coul} 的 m 级。它出现在 $H_I = H_I^{tr} + H_I^{Coul}$ 的 $(2n+m) = N$ 级展开式中。但是，统计权重不是 $[N!]^{-1} = [(2n+m)!]^{-1}$

而是 $[(2n)!m!]^{-1}$, 因为

$$\frac{1}{N!}\left(\int H_I^{\mathrm{tr}}dt+\int H_I^{\mathrm{Coul}}dt\right)^N=\frac{1}{N!}\sum_{m=0}^{N}\frac{N!}{m!(N-m)!}$$
$$\left[\int H_I^{\mathrm{tr}}dt\right]^{N-m}\cdot\left[\int H_I^{\mathrm{Coul}}dt\right]^m$$

当我们计入所有拓扑不同的图形时，此权重因子就被消去了，因为，在各个 y_i 之间作置换以及在各 z_i 之间作置换总共给出 $(2n)!m!$ 个等同的图. 此外，每一对 z_i 与 z_i' 的互换还可以给出 2^m 个拓扑等价的图形，它消去了所有 H_I^{Coul} 中的因子 $\frac{1}{2}$.

因此，每一个拓扑不同图形的统计权重是 1. 每一个有横光子交换的图(图 17.16a) 都伴随有一个包含瞬时 Coulomb 相互作用的图(图 17.16b)，它们的权重因子相同. 这两种相互作用对 τ 函数的贡献就由 (17.68) 和 (17.70) 给出. 对于横光子，是

$$\int d^4xd^4x'(-ie_0\gamma_\mu)\left[+ig^{\mu\nu}D_F(x-x')-\frac{i\delta(t-t')\eta^\mu\eta^\nu}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right]$$
$$\times(-ie_0\gamma_\nu) \qquad (17.71)$$

对于 Coulomb 力是

$$-ie_0^2\int d^4xd^4x'\gamma_\mu\frac{\delta(t-t')\eta^\mu\eta^\nu}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\gamma_\nu \qquad (17.72)$$

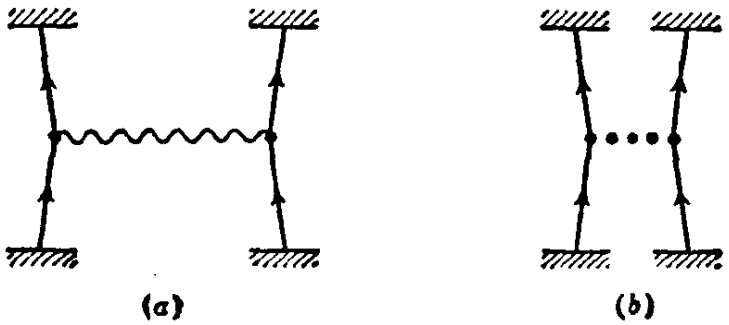


图 17.16 在一个一般图形中交换
(a) 一个横光子 (b) 库仑相互作用

可见，Coulomb 项确实是抵消了(17.71)右端的最后一项，剩下的就只是协变的光子传播子了.

17.10 经典流分布的软光子辐射;红外灾难

作为本章的结束，我们最后讨论量子辐射场与确定的经典流密度的相互作用. 讨论这样的问题是有意义的，它可以精确求解. 我们感兴趣的是计算流辐射的光子数及其频谱. 为此，我们先建立 S 算符，然后再计算感兴趣的矩阵元.

在辐射规范下要解的场方程是[1)]

$$\Box \boldsymbol{A}(x) = \boldsymbol{j}(x) \tag{17.73}$$

其中 $\boldsymbol{j}(x)$ 是给定的 c 数横向流

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j}(x) = 0 \tag{17.74}$$

如在(16.146)中那样，(17.73)的积分是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(x) &= \boldsymbol{A}_{\text{in}}(x) + \int d^4y D_{\text{ret}}(x-y)\boldsymbol{j}(y) \\ &= \boldsymbol{A}_{\text{out}}(x) + \int d^4y D_{\text{adv}}(x-y)\boldsymbol{j}(y)\end{aligned} \tag{17.75}$$

这里，已令 $Z_3 = 1$，因为 A、A_{in} 和 A_{out} 的差只是一个 c 数，而且都满足同样的对易关系. S 矩阵，按(16.66)的定义是

$$S^{-1}\boldsymbol{A}_{\text{in}}(x)S = \boldsymbol{A}_{\text{out}}(x) \tag{17.76}$$

它是下述方程的解:

$$S^{-1}\boldsymbol{A}_{\text{in}}(x)S = \boldsymbol{A}_{\text{in}}(x) + \int d^4y D(x-y)\boldsymbol{j}(y) \tag{17.77}$$

式中(见附录 C)

$$\begin{aligned}-D(z) = D_{\text{adv}}(z) - D_{\text{ret}}(z) &= -i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \\ &\times e^{-ik\cdot z}\delta(k^2)\varepsilon(k_0)\end{aligned} \tag{17.78}$$

1) 注意，我们已经把电荷包含到流 $\boldsymbol{j}$ 里面去了.

在动量空间求解较为方便，因此作 $j(y)$ 的 Fourier 展开

$$j(y)\int_0^\infty \frac{dk_0}{(2\pi)}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{\lambda=1}^{2}\varepsilon(k,\lambda)[j(k,\lambda)e^{-ik\cdot x} + j^*(k,\lambda)e^{ik\cdot x}] \tag{17.79}$$

代入 (17.77) 得

$$a_{\text{out}}(k\lambda) = S^{-1}a_{\text{in}}(k,\lambda)S = a_{\text{in}}(k,\lambda) + \frac{ij(k,\lambda)}{\sqrt{2|\boldsymbol{k}|}}$$

$$S^{-1}a_{\text{in}}^{\dagger}(k,\lambda)S = a_{\text{in}}^{\dagger}(k,\lambda) - \frac{ij^*(k,\lambda)}{\sqrt{2|\boldsymbol{k}|}}\quad k^2 = 0 \tag{17.80}$$

上式表明，S 对算符 $a_{\text{in}}(k,\lambda)$ 的作用是使其移动一个 c 数，因此可以求得 S. 关键在于，当 $[A,B]$ 是 c 数时有下面的恒等式

$$e^{B}Ae^{-B} = A + [B,A] \tag{17.81}$$

如果将 B 选作算符 a_{in} 和 $a_{\text{in}}^{\dagger}$ 的一个线性组合，我们就可以预期达到目的. S 的么正性使我们一定要取下面的形式

$$S = \exp\left\{i\int d^3k\sum_{\lambda=1}^{2}[f(k,\lambda)a_{\text{in}}^{\dagger}(k,\lambda) + f^*(k,\lambda)a_{\text{in}}(k,\lambda)]\right\} \tag{17.82}$$

将 (17.82) 代入 (17.80)，只要

$$f(k,\lambda) = \frac{j(k,\lambda)}{\sqrt{2|\boldsymbol{k}|}} \tag{17.83}$$

我们的结果就是自洽的. 为了计算 S 在入态之间的矩阵元，最好把 S 正规化. 为此，下面的定理是很有用的：

定理

假若 $[A,B] = C$ 是个 c 数，则

$$e^{A+B} = e^{A}e^{B}e^{-\frac{1}{2}[A,B]} \tag{17.84}$$

证明：定义

$$F(\lambda) = e^{\lambda(A+B)}e^{-\lambda B}e^{-\lambda A}$$

则

$$\frac{dF}{d\lambda} = e^{\lambda(A+B)}[A, e^{-\lambda B}]e^{-\lambda A}$$

由 (17.81) 直接可以得到

$$[A, e^{-\lambda B}] = -\lambda C e^{-\lambda B} \text{ 以及 } \frac{dF(\lambda)}{d\lambda} = -\lambda C F(\lambda)$$

因 $F(0) = 1$，可见 $F(\lambda)$ 是 c 数；特别是

$$F(1) = e^{-\frac{1}{2}C}$$

应用此定理于 (17.82)，我们得到

$$S = \exp\left[i\int \frac{d^3k}{\sqrt{2|\boldsymbol{k}|}} \sum_{\lambda=1}^{2} j(k,\lambda) a_{\text{in}}^{\dagger}(k,\lambda)\right]$$

$$\times \exp\left[i\int \frac{d^3k}{\sqrt{2|\boldsymbol{k}|}} \sum_{\lambda=1}^{2} j^*(k,\lambda) a_{\text{in}}(k,\lambda)\right]$$

$$\times \exp\left[-\frac{1}{2}\int \frac{d^3k}{2|\boldsymbol{k}|} \sum_{\lambda=1}^{2} |j(k,\lambda)|^2\right] \qquad (17.85)$$

知道了 S，我们现在就可以计算具有确定极化方向和动量的 n 个光子被流辐射到光子的 $3n$ 维相空间中某个区域 $\mathscr{R}$ 的几率 P_n：

$$P_n(\mathscr{R}, \lambda_1 \cdots \lambda_n) = \sum_{k_i \text{ in } \mathscr{R}} |\langle k_1\lambda_1 \cdots k_n\lambda_n \text{ out} | o \text{ in}\rangle|^2$$

$$= \sum_{k_i \text{ in } \mathscr{R}} |\langle k_1\lambda_1 \cdots k_n\lambda_n \text{ in} | S | o \text{ in}\rangle|^2 \qquad (17.86)$$

在 S 按 (17.85) 的幂级数展开式中，只有包含 n 个产生算符而不含消灭算符的项才会对 (17.86) 有贡献；所以

$$P_n(\mathscr{R}, \lambda_1 \cdots \lambda_n) = \left\{\exp\left[-\int \frac{d^3k}{2|\boldsymbol{k}|} \sum_{\lambda=1}^{2} |j(k,\lambda)|^2\right]\right\}$$

$$\times \sum_{k_i \text{ in } \mathscr{R}} |\langle k_1\lambda_1 \cdots k_n\lambda_n \text{in}| \frac{i^n}{n!}$$

$$\times \left(\int \frac{d^3k}{\sqrt{2|\boldsymbol{k}|}} \sum_{\lambda=1}^{2} j(k,\lambda) a_{\text{in}}^{\dagger}(k,\lambda) \right)^n |o\text{in}\rangle|^2 \quad (17.87)$$

如果要计算光子在一个给定的动量区间 R（也就是 k_1 属于 $R, \cdots k_n$ 属于 R）而极化方向任意的辐射几率，可以用封闭技术把 (17.87) 进一步简化。

$$P_n(R) = P_0 \sum_{\lambda_i=1}^{2} \sum_{k_i \text{ in } R} |\langle k_1\lambda_1 \cdots k_n\lambda_n \text{ in}| \frac{i^n}{n!}$$

$$\times \left[\int_R \frac{d^3k}{\sqrt{2|\boldsymbol{k}|}} \sum_{\lambda=1}^{2} j(k,\lambda) a_{\text{in}}^{\dagger}(k,\lambda) \right]^n |o \text{ in}\rangle|^2 \quad (17.88)$$

其中

$$P_0 = \exp\left[-\int \frac{d^3k}{2|\boldsymbol{k}|} \sum_{\lambda=1}^{2} |j(k,\lambda)|^2 \right] \quad (17.89)$$

是没有辐射任何光子的几率[1]. 既然所有 k_i 都在区域 R 内，所以 (17.88) 中对 $a_{\text{in}}^{\dagger}(k,\lambda)$ 的积分可以限制在这个区域 R 而不会改变 $P_n(R)$. 其次，求和 $\sum_{\lambda_i=1}^{2} \sum_{k_i \text{ in } R}$ 可以扩展到整个 k_i 空间而不限于在 R 内；还有求和也可以扩展到包括所有的入态而不改变 $P_n(R)$：

$$P_n(R) = P_0 \sum_{\alpha} \left| \left\langle \alpha \text{ in} \left| \frac{i^n}{n!} \left[\int_R \frac{d^3k}{\sqrt{2|\boldsymbol{k}|}} \sum_{\lambda=1}^{2} j(k,\lambda) a_{\text{in}}^{\dagger}(k,\lambda) \right]^n \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \left| o \text{ in} \right\rangle \right|^2 = \frac{P_0}{(n!)^2} \left\langle o \text{ in} \left| \left[\int_R \frac{d^3k}{\sqrt{2|\boldsymbol{k}|}} \sum_{\lambda=1}^{2} j^*(k,\lambda) a_{\text{in}}(k,\lambda) \right]^n \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \left[\int_R \frac{d^3k}{\sqrt{2|\boldsymbol{k}|}} \sum_{\lambda=1}^{2} j(k,\lambda) a_{\text{in}}^{\dagger}(k,\lambda) \right]^n \right| o \text{ in} \right\rangle$$

---

1) 对于量子力学的流源，譬如被 Coulomb 势散射的电子(第七章)，我们已看到，那些与中间虚光子有关的图形必需考虑，才能得到有限的结果. 这些图形就替代了因子 $P_0 = \langle o \text{ out} | o \text{ in} \rangle$，因为 $|o \text{ in}\rangle$ 和 $|o \text{ out}\rangle$ 态“包括”电子态在内.

$$= \frac{P_0}{n!}\left[\int_R \frac{d^3k}{2|\boldsymbol{k}|}\sum_{\lambda=1}^{2}|j(k,\lambda)|^2\right]^n \qquad (17.90)$$

假如区域 R 是整个动量空间，我们看到，辐射 n 个光子的总几率 P_n 服从 Poisson 分布：

$$P_n = \frac{e^{-\bar{n}}(\bar{n})^n}{n!} \qquad (17.91)$$

$\bar{n}$ 是辐射光子的平均数

$$\bar{n} = \int \frac{d^3k}{2|\boldsymbol{k}|}\sum_{k=1}^{2}|j(k,\lambda)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n \qquad (17.92)$$

显然，$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$，几率是守恒的。

Poisson 分布规律说明了光子先后辐射的统计独立性。这是我们关于流源是固定的，不受辐射过程影响假定的结果；每个光子是在同等条件下被辐射的。

辐射的总能量可由 (17.86) 式计算；它是

$$\bar{E} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k_1\lambda_1\cdots k_n\lambda_n}|\langle k_1\lambda_1\cdots k_n\lambda_n \text{in}|S|o\text{in}\rangle|^2(k_1+k_2+\cdots+k_n)$$
$$= \langle o\ \text{in}|S^{-1}H_0(A_{\text{in}})S|o\ \text{in}\rangle \qquad (17.93)$$

其中

$$H_0(A_{\text{in}}) = \int d^3k k\sum_{\lambda=1}^{2} a_{\text{in}}^{\dagger}(k,\lambda)a_{\text{in}}(k,\lambda)$$

是自由辐射场的哈氏量。参照 (17.80)，我们有

$$\bar{E} = \left\langle o\ \text{in}\left|\int d^3k k\sum_{\lambda=1}^{2}\left[a_{\text{in}}^{\dagger}(k,\lambda) - \frac{ij^*(k,\lambda)}{\sqrt{2|\boldsymbol{k}|}}\right]\left[a_{\text{in}}(k,\lambda)\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \frac{ij(k,\lambda)}{\sqrt{2|\boldsymbol{k}|}}\right]\right|o\ \text{in}\right\rangle = \frac{1}{2}\int d^3k\sum_{\lambda=1}^{2}|j(k,\lambda)|^2 \qquad (17.94)$$

与一个流源辐射能量的经典结果相符合。

假若流源在 $k\to 0$ 时单位频率间隔内所辐射的能量是有

限的，则当 $k \to 0$ 时 $j(k,\lambda) \sim 1/k$. 譬如说，点电荷在 $t < 0$ 时以速度 $\boldsymbol{\beta}$ 运动，在 $t = 0$ 时刻受到撞击，以后以速度 $\boldsymbol{\beta}'$ 运动

$$\sum_{\lambda=1}^{2} \boldsymbol{\epsilon}(k,\lambda) j(k,\lambda) \sim e\left(\frac{\boldsymbol{\beta}}{k - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\beta}} - \frac{\boldsymbol{\beta}'}{k - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\beta}'}\right)$$

如果当 $k \to 0$ 时，流 j 的行为如 k^{-1}，则辐射光子的平均数是无限大，因为由 (17.92)，频率 $k \sim 0$ 的光子辐射数目是无穷多. 这就是第七、第八章中提到过的“红外灾难”. 虽然对于这样一个流，辐射任意有限数量光子的几率等于零，但 (17.90) 表明，辐射任意数量 $k \sim 0$ 光子的几率的总和是有限的. 譬如说，选择 R 是区域 $0 \leqslant |\boldsymbol{k}| \leqslant \Delta$，则有

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(|\boldsymbol{k}| \leqslant \Delta) = \exp\left[-\int_{k>\Delta} \frac{d^3k}{2|\boldsymbol{k}|} \sum_{\lambda=1}^{2} |j(k,\lambda)|^2\right] \tag{17.95}$$

因为辐射 $(n+1)$ 个光子的几率和辐射 n 个光子几率之比是

$$\frac{1}{n+1} \int d^3k \frac{|j(k,\lambda)|^2}{2|\boldsymbol{k}|} \sim \alpha \int \frac{dk}{k}$$

当 $k \to 0$ 时它是发散的，所以对于一个加速电荷的长波辐射，基于 α 的幂级数展开的微扰论计算是不适用的. 关于这一发散的类似上面这样的分析和解决是由 Bloch 和 Nordsieck[1] 于 1937 年给出的.

问　　题

1. 证明正则动量随时间变化的方程 (17.5).

2. 对于与一个恒定 c 数流耦合的 Klein-Gordon 粒子

$$(\Box + m^2)\varphi = f$$

---

1) F. Bloch *and* A. Nordsieck, *Phys, Rev.*, **52**, 54 (1937); D. Yennie, S. Frautschi, *and* H. Suura, *Ann. Phys.* (*N. Y*) **13**, 379 (1961).

导出其 U 矩阵. Haag 定理(见 §17.2 的脚注)认为，对此种情况 $U(t)$ 不存在，试讨论之，并建立 S 矩阵.

3.证明包含在 (17.38) 中的 $\sum_k D_k$ 的真空泡加起来成为

$$\exp\left(\sum_i \frac{1}{\eta_i} B_i\right),$$

其中 B_i 是连通的泡按附录 B 的规则算得的. η_i 是其阶数.

4.给出 π-核子散射振幅的一般自旋和同位旋结构.

5.详细证明: π-核子散射的 S 矩阵元在 π 介子四动量等于零的极限下与同位旋无关(见 §17.7).

6.计算 (17.49) 的发散部分并表明，一个形如 (17.50) 的抵消项可以抵消此发散.

7.导出 π-π 散射的交叉对称性 (17.53).

8.在有质量抵消项时重复 (17.61) 到 (17.64) 的论证，并表明结果不变.

9.从拉氏量

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_D + \mathscr{L}_S + g{:}\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}{:}$$

出发，其中 $\mathscr{L}_D$ 和 $\mathscr{L}_S$ 分别是 Dirac 粒子和标量粒子的自由拉氏量密度，求解 φ_{in} 和 φ_{out} 并证明 $S = 1$. 自由 Dirac 粒子的传播子与有相互作用的 Dirac 粒子的 Feynman 传播子相等吗，即是否 $S_F' = S_F$?

第十八章　色散关系

18.1　因果性和 Kramers-Krönig 关系

到现在为止计算跃迁振幅的技术都局限于弱耦合的微扰展开，例如，按电荷 $\alpha = 1/137$ 的微扰展开．利用场论工具，我们（形式上）系统地导出了画 Feynman 图和写下相应振幅的规则．

但是，当我们转向强作用的领域时，这些方法就没有多大价值了．早在第十章中讨论介子-核子及核子-核子作用时就阐明了需要发展更适于这种领域的技术．目前看来对于强作用问题的最成功的方法来自“色散关系”，这个方法基于复平面的研究[1]．我们把散射振幅看作能量及动量转移的函数．当这些变量由实验室能得到的物理值解析地延拓到复平面上的非物理区时，场论对易关系的定域结构及场方程给散射振幅的行为以一定的限制．由这些限制可以建立起一些计算这些振幅或用其他可测量量表示这些振幅的有用关系[2]．

这种技术的精神来自光学中的 Kramers-Krönig 关系[3]，我们简短地描述一下这个关系作为一个例子来阐明基本的思想及色散方法的用处．Kramers-Krönig 关系将固定频率 ω

---

1) 译注：近年来理论的发展提出了研究强作用的量子色动力学．普遍认为，由它也许会建立起最终的强作用理论．

2) M. Gell-Mann, M. L. Goldberger, *and* W. Thirring, *Phys. Rev.*, **95**; M. L. Goldberger, *Phys. Rev.*, **99** 979 (1955). 也可参考序言中的引文．

3) R. Krönig, *J. op. Soc. Am.*, **12**, 547 (1926); H.A. Kramers, *Atti Congr. Intern. Fisici Como* (1927).

的光在原子上的向前散射振幅实部表示为所有频率的光在原子上的吸收截面的一个积分．用宏观的术语来讲，即这些原子构成的介质的折射率的实部由其虚部对所有频率的积分给出．这种关系是通过确定向前散射振幅在 ω 复平面的上半平面是解析的这一数学性质导出的．这个性质的基础是一个物理限制，即电磁讯号不能以超过光速的速度传播．

为了确定起见，我们考虑一个单色光波

$$a_{\mathrm{inc}}(\omega)e^{-i\omega(t-x)}$$

沿 x 轴传播并投射在一个散射中心上．沿 x 轴的向前散射波通过向前散射振幅

$$a_{\mathrm{scatt}}(\omega)=f(\omega)a_{\mathrm{inc}}(\omega)$$

与入射波线性地相联系并渐近地成为

$$a_{\mathrm{scatt}}(x,t)\xrightarrow[x\to\infty]{}a_{\mathrm{scat}}(\omega)\frac{e^{-i\omega(t-x)}}{x}$$

迭加不同频率的波以组成一个一般的波包，我们将入射波与向前散射波写成

$$A_{\mathrm{inc}}(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}d\omega' a_{\mathrm{inc}}(\omega')e^{-i\omega'(t-x)} \tag{18.1}$$

$$A_{\mathrm{scatt}}(x,t)\xrightarrow[x\to\infty]{}\frac{1}{x}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega' f(\omega')a_{\mathrm{inc}}(\omega')e^{-i\omega'(t-x)} \tag{18.2}$$

让我们假定入射波包 (18.1) 代表一个当 $x>t$ 时为零的讯号．这个物理条件意味着给 Fourier 振幅一个数学条件

$$a_{\mathrm{inc}}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}dx A_{\mathrm{inc}}(x,0)e^{-i\omega x} \tag{18.3}$$

其中积分上限来自当 $x>0$ 时 $A_{\mathrm{inc}}(x,0)$ 为零的条件．我们观察到 $a_{\mathrm{inc}}(\omega)$ 可以解析延拓到复 ω 平面的上半面，因为对于 $\omega\to\omega+i|\gamma|$

$$a_{\mathrm{inc}}(\omega+i|\gamma|)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}dx A_{\mathrm{inc}}(x,0)e^{-i\omega x-|\gamma||x|} \tag{18.4}$$

积分是绝对收敛的. 因果性的物理要求是

$$A_{\mathrm{scatt}}(x,t)=0 \qquad x>t$$

即,没有讯号传播到 $x>t$,而超过入射波前. 用与上面同样的论证,由 (18.2) 我们得到结论 $a_{\mathrm{inc}}(\omega)f(\omega)$ 也可解析延拓到上半平面. 于是[1], $f(\omega)$ 在上半平面解析而且对于在上半平面上任一 $z=\omega+i|\gamma|$ 和在图 18.1 画出的积分迴路 c 我

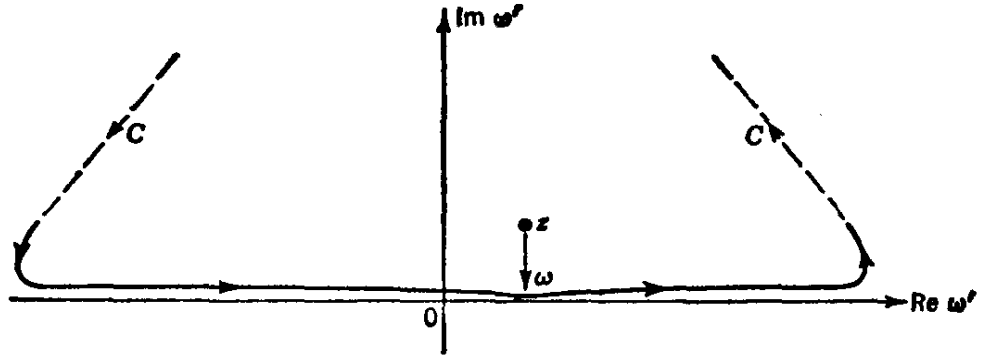


图 18.1 Cauchy关系 (18.5) 在 ω' 的上半面的积分迴路

们可以写出 Cauchy 关系

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c}\frac{d\omega' f(\omega')}{\omega'-z} \tag{18.5}$$

让 z 从上半平面趋于实数值 ω,我们得

$$f(\omega)=\lim_{\epsilon\to 0^{+}}f(\omega+i\epsilon)=\frac{1}{2\pi i}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega' f(\omega')}{\omega'-\omega}$$
$$+\frac{1}{2}f(\omega)+\frac{1}{2}\mathscr{C}_{\infty} \tag{18.6}$$

其中 $P\int$ 指在图 18.1 中沿实数轴由$-\infty$到∞的积分的主值,

1) 因为入射波包的 Fourier 变换 $a_{\mathrm{inc}}(\omega)$ 的形式是相当任意的,所以排除了与 $a_{\mathrm{inc}}(\omega)$ 中的零点相联的 f 的可能极点.

绕 $\omega' = \omega$ 处极点的半圆给出第二项，来自无穷半圆的贡献是复量 $\mathscr{C}_\infty = C_\infty + iC'_\infty$. (18.6) 的实部及虚部是

$$\mathrm{Re}f(\omega) = \frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega' \,\mathrm{Im} f(\omega')}{\omega' - \omega} + C_\infty \qquad (18.7a)$$

$$\mathrm{Im}\, f(\omega) = -\frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega' \mathrm{Re}f(\omega')}{\omega' - \omega} + C'_\infty \qquad (18.7b)$$

方程 (18.7a) 是方程

$$f(\omega) = \lim_{\epsilon\to 0^+} f(\omega + i\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega' \,\mathrm{Im}\, f(\omega')}{\omega' - \omega - i\epsilon} + \mathscr{C}_\infty \qquad (18.8)$$

的实部而且是色散关系更普遍的有用形式.

如果当 $\omega \to 0$ 时 $f(\omega)$ 不趋于零，则来自∞处半圆的贡献 C_∞ 不为零. 它可通过作“减除”而去掉. 我们可以不考虑 $f(\omega)$ 而考虑振幅 $f(\omega)/\omega$ 来建造 Cauchy 关系 (18.5): 仅有的差别是 $f(\omega)/\omega$ 在 $\omega = 0$ 处有一额外的极点但在 ∞ 处有较好的行为. 如果当 $\omega \to \infty$ 时 $f(\omega)$ 不超过一个常数，则代替 (18.7a) 有

$$\frac{\mathrm{Re}f(\omega)}{\omega} = \frac{\mathrm{Re}\, f(0)}{\omega} + \frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega' \,\mathrm{Im} f(\omega')}{\omega'(\omega' - \omega)} \qquad (18.9)$$

我们把它叫做一次减除的色散关系. 如作更强的收敛假定，即当 $\omega \to \infty$ 时 $f(\omega) \to 0$，我们得 (18.7a) 的无减除形式，这时 $C_\infty = 0$.

不管是 (18.7) 或是 (18.9) 的形式，色散关系都允许我们由虚部的知识去计算完全的散射振幅，如果需要减除，则还需要知道其在 $\omega = 0$ 的值. [如果需要更多的减除，则需要知道 $\omega = 0$ 处的 $f(\omega)$ 的导数值]得到这种好处的代价是: 为了计算任一频率处的完全的散射振幅需要知道所有频率的振幅虚部.

实际上，在目前这个例子里它几乎不是一个缺点，因为正频率 ω 向前散射振幅的虚部与该频率光的吸收全截面按光学定理由下式联系起来

$$\mathrm{Im}\, f(\omega) = \frac{\omega}{4\pi}\sigma_{\mathrm{tot}}(\omega) \qquad \omega > 0 \tag{18.10}$$

而且，由 (18.1) 和 (18.2) 看出入射波及散射波的实数性要求

$$a_{\mathrm{inc}}(-\omega) = a^*_{\mathrm{inc}}(\omega) \qquad f(-\omega) = f^*(\omega)$$

因而

$$\mathrm{Im}\, f(-\omega) = -\mathrm{Im}\, f(\omega)$$

因此我们可以从色散积分 (18.7) 中去掉负频 ω 的积分域，于是色散积分只需取正频谱.

$$\mathrm{Re}\, f(\omega) = \frac{2}{\pi} P\int_0^\infty \frac{\omega' d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2}\, \mathrm{Im}\, f(\omega') \tag{18.11a}$$

或

$$\mathrm{Re}\, f(\omega) = \mathrm{Re}\, f(0) + \frac{2\omega^2}{\pi} P\int_0^\infty \frac{d\omega'\, \mathrm{Im}\, f(\omega')}{\omega'(\omega'^2 - \omega^2)} \tag{18.11b}$$

这样，应用光学定理(18.10)，我们得到一个确定的预言，而这只是非常一般地根据光讯号传递的因果性以及通过光学定理表达的散射过程中几率的守恒(幺正性). 原子介质中光的相干散射的实部，即折射率的实部，可以通过色散关系由测量或计算的描写介质中光吸收的较简单量来算得. 这种关系

$$\mathrm{Re}\, f(\omega) = \mathrm{Re} f(0) + \frac{\omega^2}{2\pi^2} P\int_0^\infty \frac{d\omega' \sigma_{\mathrm{tot}}(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} \tag{18.12}$$

就是原来的 Kramers-Krönig 关系.

18.2 对高能物理的应用

色散关系的一般做法紧密地依循着 Kramers-Krönig 关系这个例子. 基本的物理要素是因果性条件，它还是导致有关跃迁振幅解析性质的表述. 解析区域确定以后，这些振幅

通过 Cauchy 定理用任何极点的留数和越过分枝割线的间断量，或"吸收部分"表示，如象在 (18.8) 中那样[1]：

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}[f(\omega+i\epsilon)-f(\omega-i\epsilon)]=2i\,\mathrm{Im}\,f(\omega) \quad (18.13)$$

于是为了有希望得到物理上可观测量之间的关系，应用表示 S 矩阵的幺正性而与 (18.10) 类似的关系将吸收部分与可观测的或可计算的振幅联系起来．虽然在实现这四个步骤的每一步时所遇到的复杂性都较在 Kramers-Krönig 例子中所遇到的更为错综复杂，但其基本概念是一样的．

在场论中对于色散关系的严格推导的共同出发点是在第十六章中讲述过的那些公理，包括关键性的条件：Bose-Einstein 场的对易子及 Fermi-Dirac 场的反对易子对于类空间隔必须为零，即

$$\begin{aligned}&\{\phi_i(x),\bar{\psi}_j(y)\}=\{\phi_i(x),\phi_j(y)\}=0\\&[\varphi_i(x),\varphi_j(y)]=0\\&[\varphi_i(x),\phi_j(y)]=0 \qquad (x-y)^2<0 \qquad (18.14)\end{aligned}$$

这些定域对易关系代替了我们关于光的向前散射讨论中用过的因果性条件．由(18.14)得到，如果间隔是类空的，则 Bose-Einstein 场的振幅的测量及表示 Fermi-Dirac 场的物理算符的定域密度(例如电荷或能量)的双线性形式的测量不会互相干扰；即它们的对易子为零．因此这些对易子条件保证了场论的微观因果性．

由于有微观因果性条件，当一个或多个变量由实轴上的物理值延拓出去时便有可能去考查复平面并确定 Green 函数和 S 矩阵元的解析区域．这是色散理论的普遍程序的主要部分，而解析性质的严格推导较前面谈的光的向前散射例子要

---

1) 我们用 Schwartz 反射原理 $f(\omega^*)=f^*(\omega)$ 来定义下半平面的 f，它和上半平面以一根分枝割线隔开．

复杂和困难得多．严格推导的一个简单例子是第十六章中讨论过的传播子的 Källén-Lehmann 表示．例如，对于玻色子场 $\varphi(x)$，场论的公理，特别是对易子条件 (18.14)，导致谱分解 (16.33)

$$\Delta'_F(x-y) = -i\langle 0|T(\varphi(x)\varphi(y))|0\rangle$$
$$= \int_0^\infty d\sigma^2\rho(\sigma^2)\Delta_F(x-y,\sigma) \qquad (18.15)$$

可看出 Fourier 变换

$$\Delta'_F(q) = \int_0^\infty \frac{d\sigma^2\rho(\sigma^2)}{q^2-\sigma^2+i\varepsilon}$$

除沿正实轴有一割线外在全 q^2 平面上解析．因此 $\Delta'_F(q)$ 完全由谱权重函数 $\rho(\sigma^2)$ 给出的越过割线的间断量决定，该函数实际上可由 (16.27) 求和近似算得

$$\rho(\sigma^2) = (2\pi)^3\sum_n \delta^4(p_n-\sigma)|\langle 0|\varphi(0)|n\rangle|^2 \qquad (18.16)$$

方程 (18.16) 类似于 Kramers-Krönig 例子中的光学定理．它通过具有质量 σ 的虚介子态 $\varphi(0)|0\rangle$ 衰变为能量允许的物理态 $|n\rangle$ 的总几率来表示间断量 $2\pi\rho(\sigma^2)$，而且它具有在色散理论问题中出现的间断量公式的典型形式．

将这方法从传播子推广到顶角函数和散射振幅时，会遇到难以克服的数学困难．要处理的变量增多，奇异性的数目以及它们结构的复杂性迅速增加．不仅复平面的考查变得很费力，而且出现的奇异性常常是不好控制的，它们处于实验上不可及的非物理区．所以用以计算间断量的幺正条件也必须延拓，以处理这些贡献．尽管有这些障碍，在严格处理方面仍作了不少的工作，特别是对于 π-核子散射的固定动量转移色散关系[1]．

1) N. Bogoliubov, B. Medvedev, *and* M. Polivanov, *Fortschr. Physik* **6**, 169 (1958); H. Bremermann, R. Oehme, *and* J.G. Taylor *Phys. Rev.* **109** 2178(1958).

这里我们限于讨论简单得多的问题，即系统地研究个别 Feynman 图的奇异性．对于一个给定的过程所有 Feynman 图共同的解析区域一定包括那些严格的公理化方法给出的区域，但有时也超过它[1]．于是把这些解析性质和 S 矩阵的幺正性相结合，我们将用研究顶角函数和散射振幅的一些具体应用来阐明色散方法的用处．

18.3 微扰论中顶角图形的解析性质

为了阐明确定一般 Feynman 图解析性质的技术，我们首先考虑对来自和中子-反质子对耦合的 π 介子电磁结构的最低级贡献．这是画在图 18.2 中的图形，准确到无关的常数因子，其相应的振幅是

$$(q_2-q_3)_\mu F_\pi(q^2)\sim\int d^4p_1\,\mathrm{Tr}\,\gamma_5\frac{1}{\not p_1-M}\gamma_5\frac{1}{\not p_3-M}\gamma_\mu\frac{1}{\not p_2-M} \tag{18.17}$$

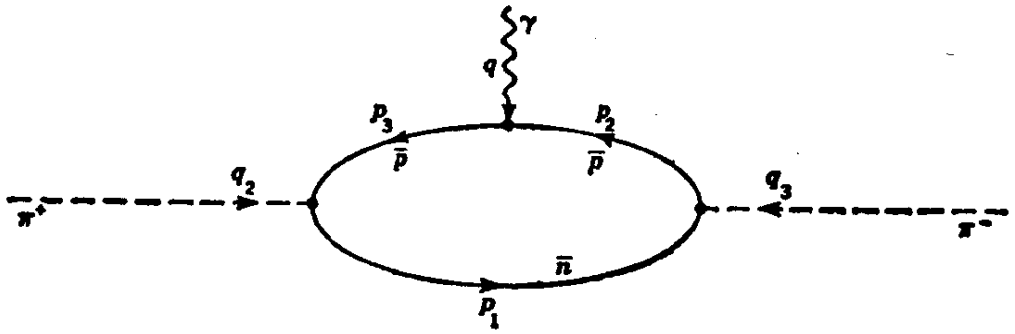


图 18.2 核子圈图对荷电 π 介子电磁结构的贡献

图中注明了动量的标记，其约束是

$$p_2=p_1+q_3\quad p_3=p_1-q_2\quad q=-q_2-q_3 \tag{18.18}$$

1) G. Källen *and* A. S. Wightman *Kgl. Danski Videnskab. Selskab. Mat-Fys. Skrifter* **1** (6) (1958); R. Jost, *Helv Phys. Acta*, **31** 263 (1958).

对实 π 介子外动量的限制是

$$q_2^2 = q_3^2 = \mu^2$$

核子的质量M理解为具有一无穷小的负虚数部分.

Lorentz 不变性决定了(18.17)的矢量形式以及 F_π 只对 q^2 的依赖性. 没有比例于 $q_\mu = -(q_2 + q_3)_\mu$ 的项是由于在第十章中讨论过的流守恒的要求. 这里我们只对 $F_\pi(q^2)$ 的解析结构有兴趣，为了进一步地讨论它，我们引入 Feynman 参量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 以归并 (18.17) 中的分母并作动量积分. 应用公式[1)]

$$\frac{1}{ABC} = 2! \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^1 d\alpha_2 \int_0^1 d\alpha_3 \frac{\delta(1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)}{(A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha_3)^3} \tag{18.19}$$

我们写出

$$(q_2 - q_3)_\mu F_\pi(q^2) \sim \int d^4 p_1 \int_0^1 d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\alpha_3 \delta\left(1 - \sum_{i=1}^{3} \alpha_i\right) \times \frac{T_r \gamma_5 (\not{p}_1 + M)\gamma_5 (\not{p}_3 + M)\gamma_\mu (\not{p}_2 + M)}{\left[\sum_{i=1} (p_i^2 - M^2)\alpha_i\right]^3} \tag{18.20}$$

在 (18.17) 或 (18.20) 中的动量积分具有紫外发散，它相应于在第八章中研究过的无穷顶角重正化. 如在那里讨论的那样可定义一个正常化算子或紫外截断，不过这对于我们现在讨论作为 q^2 的函数的 $F_\pi(q^2)$ 的解析性质是无关的.

我们交换积分次序[2)]并通过移动 p_1 空间的原点首先完成动量积分:

$$p_1 = k_1 + l \quad p_2 = k_2 + l \quad p_3 = k_3 + l \tag{18.21}$$

其中 l 是新的积分变量且 k_i 如象 (18.18) 中的 p_i 一样由动

1) 回忆 (8.59). 注意这个公式也只在 A, B, C 的虚数部分都具有相同符号时才成立.

2) 正常化后动量的积分是绝对收敛的，所以交换是合理的.

量守恒的同样约束相连系

$$k_1 = k_2 - q_3 = k_3 + q_2 \tag{18.22}$$

(18.20) 中被积函数的分母是

$$D = \sum_i (k_i^2 - M^2)\alpha_i + l^2 \sum_i \alpha_i + 2l \cdot \sum_i k_i\alpha_i \tag{18.23}$$

的立方. 为了去掉D中的交叉项,我们令

$$\sum_{i=1}^{3} k_i\alpha_i = 0 \tag{18.24}$$

这四个方程 (18.24) 加上八个动量约束 (18.22) 唯一地确定 k_i 为

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{q_2\alpha_3 - q_3\alpha_2}{\Delta} \qquad & k_3 &= \frac{q\alpha_2 - q_2\alpha_1}{\Delta} \\ k_2 &= \frac{q_3\alpha_1 - q\alpha_3}{\Delta} \qquad & \Delta &= \sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 1 \end{aligned} \tag{18.25}$$

完成了 l 积分以后的结果是[1)]

$$F_\pi(q^2) \sim \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^1 d\alpha_2 \int_0^1 d\alpha_3 \delta\left(1 - \sum_{i=1}^{3} \alpha_i\right) \times \left[\frac{N_1(q^2,\alpha_i)}{J(q^2,\alpha_i)} + N_2(q^2,\alpha_i) \ln \frac{\Lambda^2}{-J(q^2,\alpha_i)}\right] \tag{18.26}$$

N_1 和 N_2 来自(18.20)中的分子并且是 q^2 的线性多项式,其系数是 α_i 的函数. Λ^2 是积分的紫外截断. 解析性质决定于函数 $J(q^2,\alpha_i)$, 它就是分母D经 l 积分以后剩下的部分:

$$\begin{aligned} J(q^2,\alpha_i) &= \sum_{i=1}^{3} (k_i^2 - M^2)\alpha_i \\ &= q^2\alpha_2\alpha_3 + q_3^2\alpha_2\alpha_1 + q_2^2\alpha_1\alpha_3 - M^2 \\ &= q^2\alpha_2\alpha_3 + \mu^2\alpha_1(1 - \alpha_1) - M^2 \end{aligned} \tag{18.27}$$

---

1) 如象在第八章里那样: 见 §16.12 的脚注.

(18.27) 的最后两个形式来自条件 (18.25) 以及 π 介子的质壳条件 $q_2^2 = q_3^2 = \mu^2$.

我们从 (18.26) 看到当且仅当在 α_i 的积分域里 J 为零时 (18.26) 的任一项才都有麻烦. 因为 J 的零点控制了 $F_\pi(q^2)$ 的解析结构，所以 F_π 和下列函数具有同样的解析性质

$$I(q^2) = \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^1 d\alpha_2 \int_0^1 d\alpha_3 \frac{\delta(1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)}{q^2\alpha_2\alpha_3 + \mu^2\alpha_1(1-\alpha_1) - M^2 + i\varepsilon} \tag{18.28}$$

在其中去掉了非本质的分子因子并已将 Feynman 传播子中质量的无穷小负虚数部分明显写出.

因为积分 (18.28) 对所有具有 $v > 0$ 的 $q^2 = u + iv$ 都存在，所以 $I(q^2)$ 因而 $F_\pi(q^2)$，在复 q^2 平面的上半平面解析. 如果存在 q^2 的实数值使 $I(q^2)$ 是实的，我们可用 Schwartz 反射原理将 $F_\pi(q^2)$ 延拓到下半平面去，给出

$$F_\pi(u - iv) = F_\pi^*(u + iv)$$

我们期望，基于物理论证情况正是这样. 当 q^2 是类空时 ($q^2 < 0$)，$F_\pi(q^2)$ 对电子-π 介子散射振幅有贡献，这振幅在按电荷展开的第一级 Born 近似中是实的. 这可以明显验证. 分母 J 在 $q^2 = 0$ 处对于 $\mu^2 < 4M^2$ 是负定的，

$$J(0,\alpha_i) = \mu^2\alpha_1(1-\alpha_1) - M^2 \leqslant \frac{\mu^2}{4} - M^2 < 0$$

$$0 \leqslant \alpha_1 \leqslant 1$$

在 π 介子和核子的物理情形中正是如此[1]. 于是在 $\varepsilon \to 0^+$ 的极限下不会对 (18.28) 贡献一个虚数部分，这个结果显然对 $q^2 < 0$ 也成立.

因而，$F_\pi(q^2)$ 可延拓到 q^2 平面的下半平面，除了沿正实

1) 注意 $\mu^2 < 4M^2$ 正是物理的 π^- 对衰变为 $n\bar{p}$ 是稳定的条件.

q^2 轴由于 J 为零可能有割线外在全复平面上解析. 割线开始于使 $J=0$ 的 q^2 的最低值. 我们可对参量 α_i 求 (18.27) 中 J 的极大值来定这个分枝点. 对 α_2 和 α_3 求极大值,我们得

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1-\alpha_1}{2}$$

及

$$J \leqslant q^2\left(\frac{1-\alpha_1}{2}\right)^2 + \mu^2\alpha_1(1-\alpha_1) - M^2 \quad (18.29)$$

(18.29) 的右方或者在 $\alpha_1=0$ 处或者在 0 与 1 之间某处达到其极大值. 然而,用直接的计算得到 对于 $q^2 > 2\mu^2$, 极大值必须在端点 $\alpha_1=0$ 处出现. 对于 π 和 N 质量的物理值, $\mu^2/M^2 \cong 0.022$, 在 $q^2=2\mu^2$ 处 J 仍然是负定的; 因此当 J 为零时, 分枝割线开始的阈值 q_t^2 出现在 $q_t^2=4M^2$ 处[1],相应于 α_i 参数空间的点

$$\alpha_1=0 \quad \alpha_2=\alpha_3=1/2 \quad q_t^2=4M^2 \qquad (18.30)$$

此时 J 为零. 这个阈能值 $q_t^2=4M^2$ 正是这样一个能量, 在该能量下一个类时虚光子, 如象电子-正电子碰撞产生的那样,可以产生一对实的核子-反核子, 然后它们又如图 18.2 所示湮灭为一对 π^+-π^-. 因此看出在讨论顶角函数 $F_\pi(q^2)$的解析性质时要求同时研究粒子对的产生以及 π 介子的散射——当质量为 μ 的 π 介子在正能态间散射时动量转移是类空的而从负能态到正能态散射,即对产生时动量转移是类时的.

(18.30) 的结果表明 Green 函数的奇异性出现在物理上允许有吸收过程的动量值. 这种奇异性与吸收过程的可能性之间的普遍联系是色散方法的很大优点.

---

1) 对于 $\mu^2>2M^2$, 割线开始于 $q_t^2=4\mu^2(1-\mu^2/4M^2)$, 称作反常阈值. 我们在以后讨论这种情形.

18.4 推广到任意图形和电路类比

从这个特殊的微扰例子进展到任意图形时，把重要的因素与非本质的复杂性相分离并对动量变量和积分参量作出一套标准的符号和约定对我们将是有用的. 其中有几点应该是清楚的了:

1.一个一般的矩阵元将取形式

$$\mathfrak{M}=\sum_i \vartheta_i F_i(q_1,\cdots,q_m) \tag{18.31}$$

其中 ϑ_i 是外动量，旋量矩阵和波函数的适当的乘积而 F_i 是外动量标量积的不变函数. 我们的兴趣在于研究 F_i 的解析结构.

2.诸如(18.20)中的迹那样的被积函数的分子是无关的，因为当被积函数参量化并对内动量完成积分以后它们仅导致外动量的多项式因子. 这些多项式因子仅以标量积 $q_i\cdot q_j$ 的多项式出现在 F_i 中.

3.紫外发散的问题在这里并不重要. 如果象在(18.20)中的情形那样，在分母中需要动量变量的更高的幂，它们可以通过对外动量的微商或对内线的质量的微商给出. 这并不改变该积分表示的函数的解析结构. 例如(18.20)中分母的更高的幂将使对 P_1 的积分收敛而无论如何不会改变奇异性结构，奇异性只决定于(18.27)中的 J 的零点.

我们将总是以 $q_1,\cdots,q_m$ 来标记所研究图形中的外动量，它们是定义为进入图形的动量，仅考虑连通图，对于这些图

$$\sum_{i=0}^{m} q_i=0$$

代表整体的动量守恒. 对于每一条内线，象图 18.3 所示的那样赋予一个具有确定的方向和质量 m_i 的动量 p_i. 在每一个

顶角处，我们有动量守恒律，形式为

$$\sum_{j=1}^{n} \epsilon_{ij} p_j + \sum_{s=1}^{m} \tilde{\epsilon}_{is} q_s = 0 \qquad (18.32)$$

其中

$$\epsilon_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{如果内线 } j \text{ 进入顶角 } i \\ -1 & \text{如果内线 } j \text{ 离开顶角 } i \\ 0 & \text{其它情形} \end{cases}$$

$\tilde{\epsilon}_{is}$ 是对外线作的类似的定义，按规定我们总把外线取作是进入顶角的.

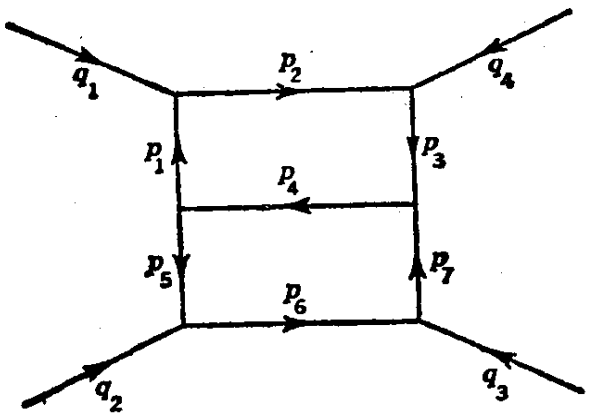


图 18.3 一般的 Feynman 图，其内线用 p_j 标记而进入图形的外线标记为 q_s

每一个图形具有一定数目 k 的内圈或封闭路径，在其上完成对叫做 l_r 的内部变量的动量积分. 虽然独立 l_r 的数目是确定的，但如何选择它们则具有任意性. 例如在图 18.4 中显示了图 18.3 的两个圈图的两种可能的选择. 在用一定办法选定了圈图以及对它们规定了一个方向以后，我们的任务是引入 Feynman 参量，然后

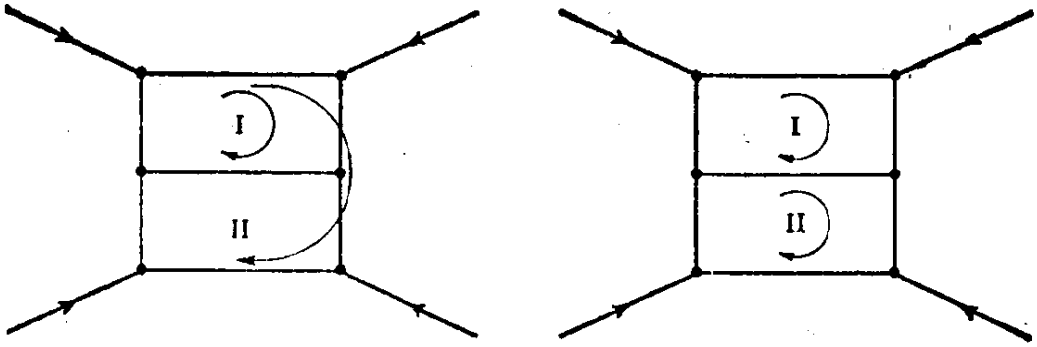


图 18.4 圈图的两种可能的选择

适当地挑出 l_r 使得我们可以进行动量积分. 在具有一个圈的微扰例子 (18.20) 里我们移动了积分原点使分母 D 成为完全平方 [方程 (18.21) 到 (18.24)]. 普遍的程序是对每一个圈作同样的事. 我们写出

$$p_i = k_i + \sum_{r=1}^{k} \eta_{ir} l_r \tag{18.33}$$

其中

$$\eta_{ir} = \begin{cases} +1 & \text{如果第 } i \text{ 根内线在第 } r \text{ 圈上且 } p_i \text{ 和 } l_r \text{ 平行} \\ -1 & \text{如果第 } i \text{ 根内线在第 } r \text{ 圈上而 } p_i \text{ 和 } l_r \text{ 反平行} \\ 0 & \text{其它情形} \end{cases}$$

在引入 Feynman 参量 α_i 并将分母归并后再作 k_l 的最佳选择.

为要确定一给定图形的 (18.31) 中的标量"形状因子" F_i 的解析结构,研究下面的积分就足够了

$$I(q_1, \cdots, q_m) = \int \frac{d^4 l_1 \cdots d^4 l_k}{(p_1^2 - m_1^2) \cdots (p_n^2 - m_n^2)}$$

$$\sim \int d^4 l_1 \cdots d^4 l_k \int_0^1 \frac{d\alpha_1 \cdots d\alpha_n \delta\left(1 - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\right)}{\left[\sum_{j=1}^{n} (p_j^2 - m_j^2)\alpha_j\right]^n}$$

$$= \int d^4 l_1 \cdots d^4 l_k \int_0^1 d\alpha_1 \cdots d\alpha_n \delta\left(1 - \sum_j \alpha_j\right)$$

$$\times \frac{1}{\left[\sum_j (k_j^2 - m_j^2)\alpha_j + 2\sum_{j,r} k_j \alpha_j \eta_{jr} \cdot l_r + \sum_{j,r,r'} \alpha_j \eta_{jr} \eta_{jr'} l_r \cdot l_{r'}\right]^n} \tag{18.34}$$

为了消掉 (18.34) 分母中的交叉项,我们选择

$$\sum_{j=1}^{n} k_j \alpha_j \eta_{jr} = 0 \qquad \text{对于每一圈 } r = 1, \cdots, k \tag{18.35}$$

将厄米矩阵

$$z_{rr'} = \sum_{j=1}^{n} \eta_{jr}\eta_{jr'}\alpha_j$$

对角化后就可以完成对 l_r 的积分并得结果

$$I \propto \int_0^\infty \frac{d\alpha_1 \cdots d\alpha_n \delta\left(1 - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\right)}{\Delta^2 \left[\sum_{j=1}^{n} (k_j^2 - m_j^2)\alpha_j\right]^{n-2k}} \tag{18.36}$$

其中

$$\Delta = \det\|z\|$$

动量 k_j 是外动量 q_s 和 Feynman 参量的函数. 它们由(18.35)和在每个顶角用 k_j 代替了 p_j 的动量守恒定律 (18.32)

$$\sum_{j=1}^{n} \epsilon_{ij}k_j + \sum_{s=1}^{m} \tilde{\epsilon}_{is}q_s = 0 \tag{18.37}$$

来决定, (18.37) 由 (18.32) 及

$$\sum_j \epsilon_{ij}\eta_{jr} = 0$$

而来,后一等式系 (18 32) 及 (18.33) 中给出的 ϵ_{ij} 及 η_{jr} 的定义的推论.

当我们将 (18.35) 及 (18.37) 写成更直观的形式(不计负号)

$$\sum_{\text{圈 } r \text{ 中的 } k_j} k_j\alpha_j = 0 \tag{18.38a}$$

$$\sum_{\text{进入顶角 } i \text{ 的 } k_j, q_s} (k_j + q_s) = 0 \tag{18.38b}$$

时, 决定 k_j 的这两个方程提示了一种和电路理论的精确相似. 将 Feynman 图想象为一个电路而把动量自然地比作是电流. k_j 是流经电路的内部电流而 q_s 是进入该电路的外电流. 如果我们将参量 α_j 比作第 j 根线的电阻, 则 (18.38) 在

这种电路类比中简单地变成了 Kirchhoff 定律[1]. 方程(18.38a)表述沿任一封闭迴路"电压降"之和为零，而 (18.38b) 表述进入一个顶点的"电流"之和为零[2].

记住这种电路类比再回到由 (18.34)到(18.36) 的计算是有启发的. 除掉常数项一 $\sum_j m_j^2\alpha_j$ 外，我们把(18.34)中 的分母

$$\sum_j p_j^2\alpha_j$$

看作具有外流源 q_s 与内源 l_r 的电路中耗掉的功率. 根据能量守恒它恰是外源及内源输出的功率之和.

$$\sum_j p_j^2\alpha_j = \sum_j k_j^2\alpha_j + \sum_{rr'} l_r \cdot l_{r'} z_{rr'}$$

其中 k_j 是由 Kirchhoff 定律给定的流，它在无内源 l_r 时流经内线.

在我们的图象中我们是把电流及电阻和物理动量及 Feynman 参量作类比. 要使这一图象完整，我们要问"电压降"的物理类比又是什么？因为"电压"是一种势而且显然是一个顶角的性质，自然要将电压与顶角的坐标 x_μ 联系起来. 于是 Kirchhoff 第一定律 (18.38a) 翻译过来就是如下的简单的表述：沿 Feynman 图中任一封闭迴路的坐标位移之和为零.

我们可以追究欧姆定律

$$V = IR$$

的物理含义来继续建造电路类比的物理图象. 用物理的语言它成为

$$\Delta x_\mu = k_\mu \alpha \qquad (18.39)$$

其中 k_μ 是某一根线的动量，α 是相应的 Feynman 参量而 Δx_μ

1) α_j 是实数：因此在电路中没有电容或电感.

2) 这种电路类比保证了 k_j 是唯一确定的.

是这根线连接的两顶角的坐标位移．（18.39）式正是一个自由粒子的运动方程，在分量形式中可以看得更清楚：

$$\Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{k}\alpha \quad \Delta t = k_0\alpha \quad \frac{\Delta \boldsymbol{x}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{k}}{k_0} \tag{18.40}$$

因为参量 α 不会为负，粒子的因果性传播是保证了的

$$\frac{\Delta t}{k_0} = \alpha > 0$$

当粒子按（18.40）在 $\boldsymbol{k}$ 方向传播时，它随时间向前或向后运动依能量 k_0 是正或负而定．这就是在第六章 Feynman 传播子理论中我们用到的同样解释．$\alpha \geqslant 0$ 实际上是采用在其质量上加一负虚数 $i\varepsilon$ 的 Feynman 传播子的直接结果．回头去参看（8.12）和（8.18）可以最好地看到这点．

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\alpha_j + i\varepsilon} = i^{-n} \int_0^\infty d\alpha_1 \cdots d\alpha_n \left\{ \exp\left[i \sum_j \alpha_j\alpha_j - \varepsilon \left(\sum_j \alpha_j \right) \right] \right\}$$

$$\times \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \delta\left(1 - \frac{\sum_j \alpha_j}{\lambda} \right)$$

$$= (n-1)! \int_0^\infty d\alpha_1 \cdots d\alpha_n \frac{\delta\left(1 - \sum_j \alpha_j \right)}{\left(\sum_j \alpha_j\alpha_j + i\varepsilon \right)^n} \tag{18.41}$$

因此，用下列的对应表我们得到电路类比的一个完整的物理图象：

坐标 $\longleftrightarrow$ 电压

动量 $\longleftrightarrow$ 电流

Feynman 参量 $\alpha = \dfrac{\text{固有时间}}{\text{质量}} \longleftrightarrow$ 电阻 > 0

自由粒子运动方程 $\longleftrightarrow$ 欧姆定律

以及与粒子传播的因果性相联系的正“电阻”α 的要求．

这种电路类比对我们是很有价值的，因为我们可以在分

析 Feynman 图时应用直观的理解和电路理论的已有知识与定理. 例如，再次考虑具有三根外线和任意内部复杂性的顶角函数. 内部只有电阻器的这种黑箱总可以约化为图 18.5 的等效的集总电路[1]. 在这样的电路中耗散的功率是

$$P = \zeta_1 q_1^2 + \zeta_2 q_2^2 + \zeta_3 q_3^2 \qquad \zeta_i \geqslant 0 \tag{18.42}$$

其中集总电路的等效电阻 ζ_i 是原始的网络电阻 α_j 的非负函数. 这个结果可直接加以利用，因为由 (18.36) 我们可写出

$$I(q_1, q_2, q_3) \sim \int_0^1 \frac{d\alpha_1 \cdots d\alpha_n \delta(1 - \sum \alpha_j)}{\Delta^2 (\zeta_1 q_1^2 + \zeta_2 q_2^2 + \zeta_3 q_3^2 - \sum m_j^2 \alpha_j + i\varepsilon)^{n-2k}} \tag{18.43}$$

其中我们又明显地给出了 $i\varepsilon$ 行为. 方程 (18.43) 表明了对最低级的图 18.2 中得出的结果到任意级微扰论的推广. 因为 ζ_i 是非负的，当三个外动量中的任意两个保持为实的常数，$I(q_1^2, q_2^2, q_3^2)$ 作为另一个外动量的函数在复 q_i^2 面的整个上半平面解析. 事实上，当三个变量同时扩充到上半平面时 $I(q_1^2, q_2^2, q_3^2)$是所有三个变量的解析函数.

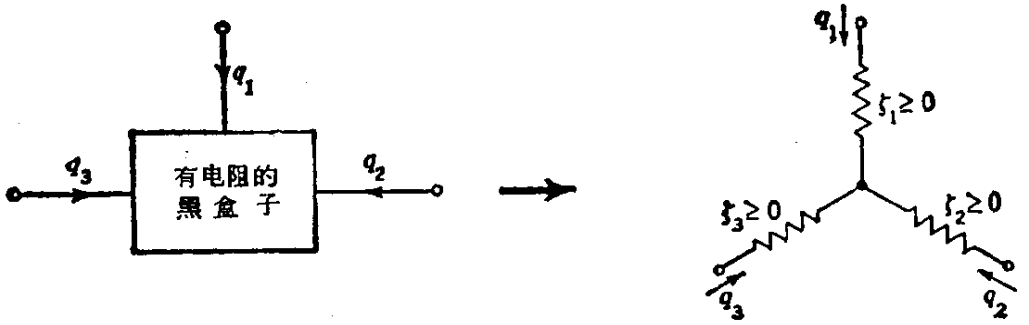


图 18.5 具有三根外线的顶角的等效集总电路图

我们从用于建立 Kramers-Krönig 关系的因果性要求达到这些解析性质的方法是一个较长的过程. 尽管如此，仍然

1) E. Guillemin, *Introductory Circuit theory, John Wiley & Sons, Inc., New York*, 1953.

是在自由粒子运动方程 (18.40) 中的因果性，它表述为 $\alpha \geqslant 0$，保证了 (18.42) 中的条件因而导致所推得的解析性质。

18.5 传播子的阈奇异性

我们现在从传播子出发，着手研究确定一个一般图形的奇异性的必要条件问题．我们继续应用电路类比作为我们穿越一个一般图形中传播子线迷宫的向导，并从出现在 (18.36) 及 (18.43) 中的分母

$$J = \sum_j (k_j^2 - m_j^2)\alpha_j \tag{18.44}$$

的结构找到形状因子 F_i 的奇异性。

象在第十六章中讨论的那样，在 Källén-Lehmann 表示 (18.15) 中给出了零自旋粒子的传播子的解析性质，非零自旋粒子具有类似的结果．不过用电路类比重新推导一下这些解析性质是有益的，因为我们发展的这套技术以后可用于顶角函数及散射振幅． 在自能图情形下只有一个外动量 q，形状因子 F_i 的解析性和积分 (18.36) 是一样的，

$$I(q^2) = \int_0^\infty \frac{d\alpha_1 \cdots d\alpha_n \delta\left(1 - \sum_j \alpha_j\right)}{\Delta^2\left(\zeta q^2 - \sum_j m_j^2 \alpha_j + i\varepsilon\right)^{n-2k}} \tag{18.45}$$

(18.45) 分母中的量 ζq^2 是相应于自能图的两端网络中耗掉的功率，因此等效的集总电阻 ζ 必须是非负的．应用我们在顶角的微扰例子中作过的同样论证，由 (18.45) 我们得出结论[1](1) I 在上半 q^2 平面解析，(2) 对于 q^2 为实的负数时 I 是实的，(3)按 Schwartz 反射原理 I 在下半 q^2 平面内解析，最多具有从 $q^2 = 0$ 到 $q^2 = \infty$ 的一条分枝割线。

1) 还有，除了当所有 $\alpha_i = 0$ 外，对 $\alpha_i \geqslant 0$，$\Delta > 0$ (问题 1)，Δ 在讨论解析性质时不起作用。

为了找到分枝割线的阈值 q_i^2，我们找寻使(18.45)中分母 J 为零的 q^2 的最低值. 从零出发，渐增 q^2 直到到达 q_i^2：在这个值处 n-维 α 空间中至少有一点 $(\alpha_1^0,\cdots,\alpha_n^0)$ 使 J 为零.

$$J(q_i^2;\alpha_1^0,\alpha_2^0,\cdots,\alpha_n^0)=0 \tag{18.46}$$

这点可以选得满足约束 $\sum_j \alpha_j = 1$，因为 J 满足无标度律

$$J(\lambda\alpha_j)=\lambda J(\alpha_j) \tag{18.47}$$

这个无标度律来自形式(18.44)以及下面的观察：如果对于固定的外电流电路中所有的电阻加倍时，则功率也加倍. 因此可以不再考虑对于 n 个参量 α_j 的 δ-函数约束，我们可以把 J 看作为 n 个独立的非负参量 α_j 的函数.

虽然当 $q^2=q_i^2$ 及 α_j 取作等于 α_j^0 时 J 为零，由于对 q^2 变量的连续性，J 在积分区里不能大于零

$$J(q_i^2;\alpha_1^0,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_n^0)\leqslant 0 \quad \text{对于所有的 } \alpha_j\geqslant 0 \tag{18.48}$$

我们得到结论，或者对于各别的 α_j，J 在 $\alpha_j=\alpha_j^0$ 处达到极大值或者 α_j^0 位于端点. 这就是说对于每一个 α_j 或者是

$$\left.\frac{\partial J(q_i^2;\alpha_1^0,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_n^0)}{\partial\alpha_j}\right|_{\alpha_j=\alpha_j^0}=0 \quad \text{如 } \alpha_j^0\neq 0 \tag{18.49a}$$

或者是

$$\alpha_j^0=0 \tag{18.49b}$$

这两种情形示于图 18.6 中. 条件 $\alpha_j^0=0$ 相应电路类比的短路情形. 用零电阻这样的分路联结的顶角具有同一电压——或坐标. 缩并所有按条件(18.49b)是短路的顶角在一起，我们得到一个“约化图形”. 在约化图形里剩下的线其 α_j^0 不为零. 例如，在 §18.3 节中讨论的顶角微扰计算中，相应于条件(18.49)的 α_j^0 由(18.30)给出：短路由内线 1($\alpha_1=0$)联结的顶角时，其约化图示于图 18.7 中.

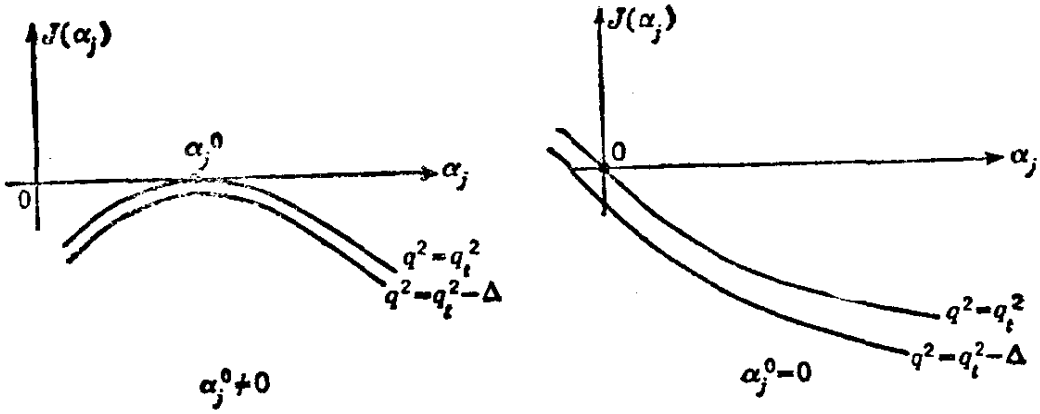


图 18.6 “作用量” $J(\alpha)$ 在阈奇异点 $q^2 = q_t^2$ 处为零，在 α_j^0 处或在端点 $\alpha_j^0 = 0$ 处有极大值

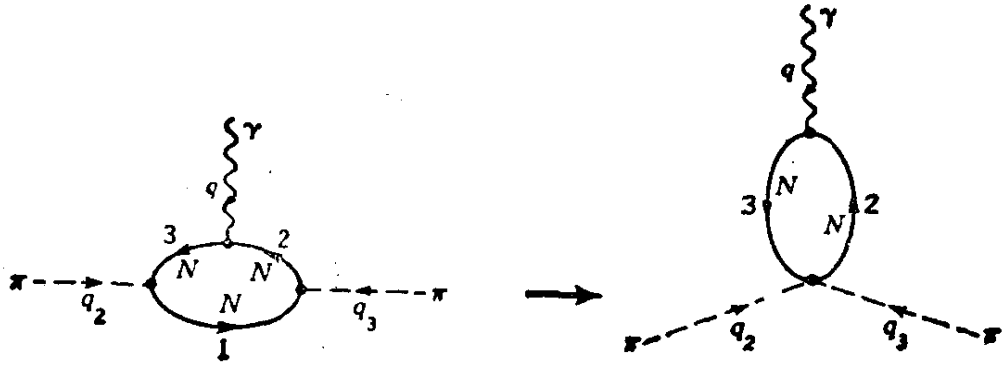


图 18.7 线 1 短路时的约化图形

如图 18.7 中一样，约化图中剩下的所有线上 α_j^0 都不为零. 因此，按照 (18.49a) J 对于这些不为零的 α_j^0 的变分是稳定的

$$\delta J = \delta\left[\sum_j (k_j^2 - m_j^2)\alpha_j\right]$$

$$= \sum_j (k_j^2 - m_j^2)\delta\alpha_j + 2\sum_j k_j\alpha_j^0 \cdot \delta k_j \quad \text{在 } \alpha_j = \alpha_j^0 \tag{18.50}$$

因为通过 Kirchhoff 定律 k_j 是 α_j 的函数，所以出现第二项，但因为在“配完全平方”过程中已使 J 对内动量的变分是稳定

的[1]，所以它为零．为了看到这点，我们注意因为外部流并不变分（$\delta q_s = 0$）而且因为在顶角处 δk_j 满足动量守恒，所以可找到圈图变量 $\delta\hat{l}_r$，通过它 δk_j 表示为

$$\delta k_j = \sum_r \eta_{jr}\delta\hat{l}_r \tag{18.51}$$

符号因子 η_{jr} 如（18.33）所定义，将（18.51）代入（18.50）并应用 Kirchhoff 定律（18.35），我们得到预期的抵消，且有

$$\delta J = \sum_j (k_j^2 - m_j^2)\delta\alpha_j = 0 \quad \text{在 } \alpha_j = \alpha_j^0 \text{ 处} \tag{18.52}$$

于是对于约化图的每一根线，$k_j^2 = m_j^2$．我们看到存在 $I(q^2)$ 的阈奇异性 $q^2 = q_i^2$ 的必要条件是

1. 图形必须约化到短路的团，团中所有的 α_j 为零，团间由在质壳上 $k_j^2 = m_j^2$ 的“真实的”线相联结．

2. 在所有线上具有正的电阻 α_j 的 Kirchhoff 定律必须满足；即是，保持了正确的因果性行为．

条件 1 的物理意义应该是清楚的．如果相互作用在空间和/或时间上是无限制的则在振幅中出现奇异性．一般说测不准原理限制了一个过程的空间-时间延伸区域．然而如果中间粒子成为“真实的”粒子是可能的话，即它满足一个自由粒子的运动学关系，则过程将在时间-空间上变得无限制而相应的振幅便是奇异的．条件 2 中正电阻的限制保证真实的中间粒子的因果性的传播，这时 Kirchhoff 定律表达了对过程的几何的和运动学的约束．

倘若我们对于确定真实中间态的可能存在能提供一些图象的或直观的判据，那末这些结果将是有用的．对于传播子，这并非难事．对于类时 q^2，我们选择坐标系，其中

$$q_\mu = (q, 0, 0, 0)$$

1) J 在电路理论中也是作用量函数：Kirchhoff 定律可由满足动量约束（18.38b）的变分原理 $\delta J = 0$ 导出．

因为流源仅具有类时分量，所以为了满足 Kirchhoff 定律所有内部流 k_i 必须也是类时的. 对于传播子的一个奇点我们必须容许象图 18.8 中的真实中间态. Kirchhoff 定律允许我们给约化图形的每一个顶角指定一个"时间". 所有电流按欧姆定律中的"因果性"(α_i 是正的). 从 t_1 到 t_2 到 t_3 向同一方向流动. 电流的大小恰是中间粒子的质量，因此与约化图形相联系的可能奇异性是这样一些 q 的值，对于它

$$q = \Sigma m_i$$

其中求和遍及出现在约化图形中中间态的质量. 因此阈值 q_t 由与有关外粒子耦合的最轻的中间态的总质量给出. 这个结果和第十六章中由一个更普遍的出发点得到的结果一样[1].

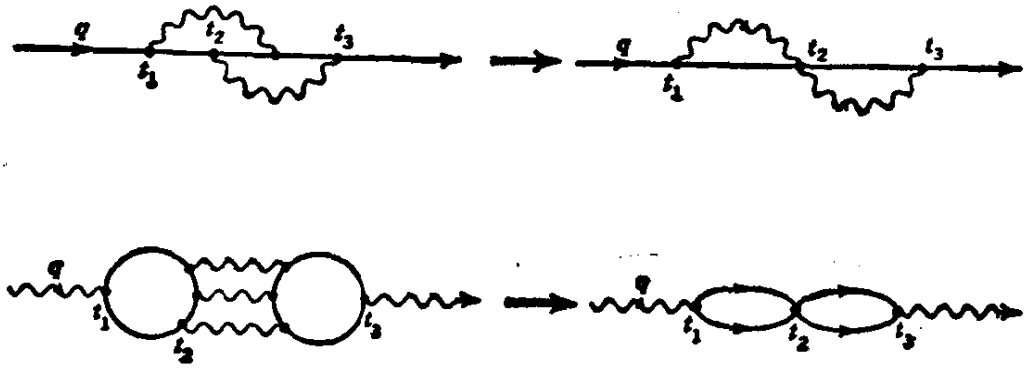


图 18.8 一些传播子的约化图

18.6 普遍图形的奇异性和 Landau 条件

由传播子的例子进而讨论任意 Feynman 图，我们期望 (18.52) 关于阈奇点的位置的结论仍然可用. 我们将在这里证明事实上正是如此，条件 (18.52) 不仅具有可直观理解的特征，而且它可以由在 (18.46) 发展到 (18.52) 中的一种很普

1) 它实际上走得更远一点，因为它说明如果在计算电子传播子 S'_p 时忽略规范项（如果兴趣只在计算 S 矩阵元这是合理的办法）则传播子也满足谱表示.

遍的方法导出. 注意振幅(18.36)

$$I(q_1,\cdots,q_m)=\int_0^1\frac{d\alpha_1\cdots d\alpha_n\delta(1-\Sigma\alpha_j)}{\Delta^2\left[\sum_j(k_j^2-m_j^2)\alpha_j+i\varepsilon\right]^{n-2k}} \tag{18.53}$$

对任意的 Feynman 图提供了一个共同出发点. 按(18.37) Kirchhoff 动量 k_j 是外动量 q_s 的线性函数，我们可将(18.53)中的分母 J 重新写成

$$\begin{aligned}J&=\sum_j(k_j^2-m_j^2)\alpha_j+i\varepsilon\\&=\sum_{i,j=1}^m\zeta_{ij}q_iq_j-\sum_j m_j^2\alpha_j+i\varepsilon\end{aligned} \tag{18.54}$$

其中系数 ζ_{ij} 仍是 α_j 参量的多重线性函数. 方程(18.53)和(18.54)形成所谓 Nambu[1] 表示；传播子(18.45)和顶角(18.43)是它的特殊情形. 因为这个 Nambu 表示为研究作为复变量 $q_i\cdot q_j$ 的函数的任意 Feynman 振幅提供一个共同的形式，所以毫不奇怪我们能够普遍地证明对一个给定 Feynman 图的任一奇异性的必要条件是:

1. 相应于每一奇异性有一个“约化图形”，它由一些内线的子集收缩为一点而得到.

2. 约化图形中的中间粒子必须是真实的，即按(18.52)有

$$k_j^2=m_j^2 \tag{18.55}$$

其中 k_j 是用 Feynman 参量 α_j 对每一根内线赋予的 Kirchhoff 动量且满足 Kirchhoff 定律(18.35)和(18.37)或者符号地表示为(18.38).

---

1) Y. Nambu, *Nuovo Cimento*, **9**, 610 (1958).

上述要求被称作 Landau 条件[1]并且把找寻 Feynman 图的奇异性问题归结为代数问题. 对于在“物理叶”上的实的 $q_i \cdot q_j$ 的 $o(\epsilon)$ 奇点（即是在这些变量延拓到复平面之前）还有另外的因果性限制

$$\text{对于所有 } j \quad \alpha_j \geqslant 0 \quad \operatorname{Im} \alpha_j = 0 \tag{18.56}$$

当我们将 I 延拓到 $q_i \cdot q_j$ 的复数值，也许结束在非物理的第七叶上，只要 α_j 允许成为复数，则 Landau 条件仍保留作为决定奇异性的必要条件.

当 Nambu 表示 (18.53) 和 (18.54) 应用于不象传播子与顶角那样而有多于三根外线的，例如，散射图那样的 Feynman 图时，它的作用是较有限的. 这是因为这时 $q_i \cdot q_j$ 的数目超过了所能形成的独立不变量的数目. 不过仍可作一些表述，这些将在 18.9 节中对于散射振幅加以讨论. 尽管如此，(18.53) 和 (18.54) 在一般情形下允许对于不变量的所有实数值进行延拓，即使它们是非物理的，由此可知，通过代换规则可以彼此得到的所有振幅——例如，Compton 散射，对湮灭到两个光子，和通过两个光子的对产生——都可以用不同宗量值的同一个解析函数来描写.

现在回到确定在 (18.53) 的积分 I 里出现的奇异性的必要条件这个主要问题上来，我们仍用前面的无标度性质 (18.47) 来去掉加在 α 上的 δ 函数约束. 我们在 (18.34) 及 (18.36) 中作一致的标度改变

$$\alpha_j \to \frac{\alpha_j}{\lambda} \qquad \lambda > 0$$

因此可以把 (18.53) 重新写成

---

1) L. D. Landau, *Nucl. Phys.* **13** 181 (1959); J. D. Bjorken, *Doctoral dissertation, Stanford University*, 1959.

$$I=\int_0^\infty \frac{d\alpha_1\cdots d\alpha_n\,\delta\left(1-\sum_j \alpha_j/\lambda\right)}{\Delta^2(\alpha_j)[J(\alpha_j)]^{n-2k}}$$

在(18.34)中 I 显然不依赖于 λ，且 δ 函数约束可以通过如下的技巧去掉.

$$I=\int_0^\infty d\lambda e^{-\lambda}I=\int_0^\infty \frac{d\alpha_1\cdots d\alpha_n\left(\sum_j \alpha_j\right)\exp\left(-\sum_j \alpha_j\right)}{\Delta^2(\alpha_j)[J(\alpha_j)]^{n-2k}} \tag{18.57}$$

在(18.57)中首先考虑把 $\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 固定并且不变量 $q_i\cdot q_i$ 保持固定实数时对 α_1 积分

$$\mathscr{I}_2(\alpha_2,\cdots,\alpha_n;q_i\cdot q_i)=\int_0^\infty \frac{d\alpha_1\left(\sum_j \alpha_j\right)\exp\left(-\sum_j \alpha_j\right)}{\Delta^2[J(\alpha_j)]^{n-2k}}$$

$$=\int_0^\infty d\alpha_1\mathscr{I}_1(\alpha_1\cdots\alpha_n;q_i\cdot q_i) \tag{18.58}$$

显然，除非对 α_1 的某些正数值 $J=0$，即是，除非 $\mathscr{I}_1$ 是奇异的，$\mathscr{I}_2$ 才存在. 即使在这种情形下一般也可如图 18.9 所示通过改变复 α_1 平面的积分迴路来避开奇点. 这时 $\mathscr{I}_2$ 将仍然是解析的，即是，对于 q_i 或 $\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的一个小的变化将引起 α_1 平面内奇点的位置及强度的一个小的变化，其结果是积分及其微商存在. 仅在 $\mathscr{I}_1$ 的奇点位于端点 $\alpha_1=0$ 或如图 18.10 所示两个奇点重合并在 $\alpha_1=\alpha_1^0$ 处夹住迴路时，迴路才无法绕过而最终 $\mathscr{I}_2$ 积分才奇异. 这两种情形导致 $\mathscr{I}_2$ 中出现奇点的必要条件是

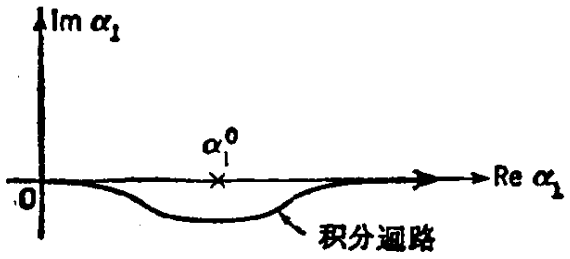


图 18.9 为了避开在 α_1^0 处的奇点 α_1 积分迴路的变形

$$J(\alpha_1^0,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n;q_i\cdot q_j)=0 \tag{18.59a}$$

以及

$$\alpha_1^0 = 0 \quad \text{或是} \quad \left.\frac{\partial J}{\partial \alpha_1}\right|_{\alpha_1=\alpha_1^0} = 0 \qquad (18.59b)$$

因为在后一种情形里在 $\alpha_1 = \alpha_1^0$ 处有双重零点. 我们开始看到 Landau 条件出现了,因为(18.59)具有(18.49)那样的形式.

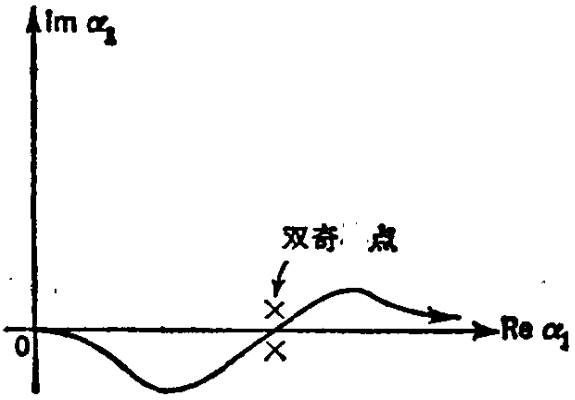


图 18.10 双生奇点夹住积分迴路

我们继续进行 α_2 的积分

$$\mathscr{I}_3(\alpha_3,\cdots,\alpha_n;\ q_i\cdot q_j) = \int_0^\infty d\alpha_2 \times \mathscr{I}_2(\alpha_2,\cdots,\alpha_n;q_i\cdot q_j) \qquad (18.60)$$

$\mathscr{I}_3$ 仍然只能在 $\mathscr{I}_2$ 具有如图 18.10 中彼此相距 $o(\varepsilon)$ 的双生奇点或者奇点在端点 $\alpha_2 = 0$ 处时才能是奇异的. 在前一种情形下

$$J(\alpha_1^0,\alpha_2^0,\alpha_3,\cdots,\alpha_n;q_i\cdot q_j) = 0 \qquad (18.61a)$$

和

$$\left.\frac{dJ}{d\alpha_2}\right|_{\alpha_2=\alpha_2^0} = 0 \qquad (18.61b)$$

方程(18.61b)包含着 α_1^0 隐含的变化,因为 α_1^0 按(18.59a)决定于 α_2 及其它变量. 因此,由于(18.59b)

$$\left.\frac{dJ}{d\alpha_2}\right|_{\alpha_2=\alpha_2^0} = 0 = \left(\frac{\partial J}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial J}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_2}\right)_{\alpha_2=\alpha_2^0} = \left.\frac{\partial J}{\partial \alpha_2}\right|_{\alpha_2=\alpha_2^0}$$

利用归纳法这个程序可以继续进行到完成所有的 α-积分,从而导致条件

$$\text{或是} \quad \left.\frac{\partial J}{\partial \alpha_j}\right|_{\alpha_j=\alpha_j^0} = (k_j^2 - m_j^2) = 0$$
$$\text{或是} \quad \alpha_j^0 = 0 \qquad (18.62)$$

回到(18.52)我们看到这正是 Landau 条件. 我们注意到如果 $q_i \cdot q_j$ 不允许进入复平面，则 α 迴路不能变形，因为 $i\varepsilon$ 阻止 J 的任何零点与实轴靠近超过 $o(\varepsilon)$. 这样由(18.56)给出的附加因果性约束 $\alpha_j \geqslant 0$ 可以应用到这些奇异性上，而它们包括了物理上感兴趣的奇异性的大部.

如果 $q_i \cdot q_j$ 可以进入复平面，则 J 的零点可以接近积分迴路，而迴路如图 18.11 所示必须变形以避开它们. 然而积分 I 成为奇异的唯一途径仍然是靠夹住 α 积分迴路或者奇点在端点 $\alpha_j = 0$ 处. 于是只要 α 允许成为复数，则 Landau 条件在推广的情形下仍然成立[1].

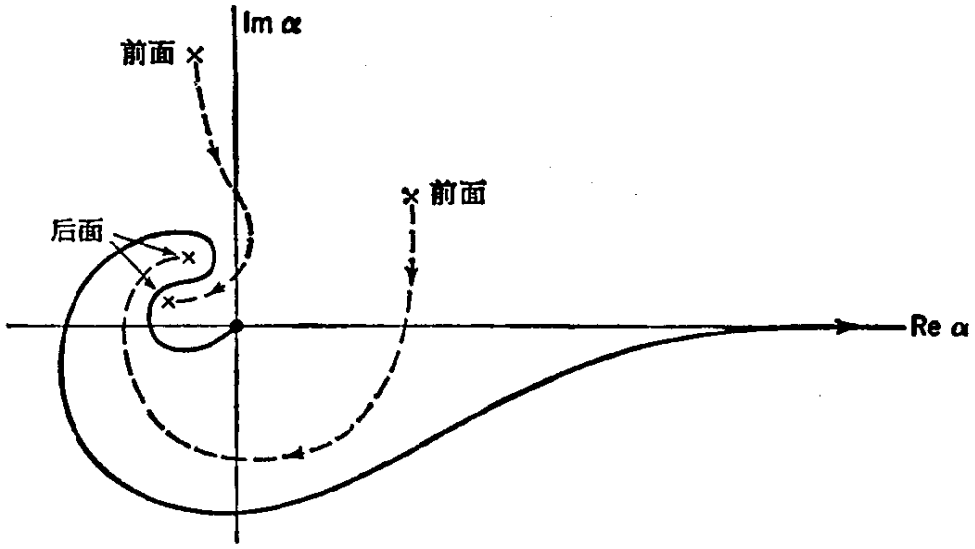


图 18.11 J 的零点从实数 $q_i \cdot q_j$ 的"前面"移到可能的复数值的"后面"

18.7 顶角图的解析结构;反常阈

我们现在应用普遍的 Landau 条件去找寻顶角图形的奇异性，它们比传播子的奇异性要多样化一些. 回到我们早先

1) 由于是代数方程，Landau 条件只有有限数目的解。因此当 $q_i \cdot q_j$ 延拓到复平面的其它叶时并无自然的边界出现。与 $\alpha = \infty$ 联系的奇异性曾由 Fairlee 等人处理过，*J. Math Phys.*, **3** 594 (1962).

的 π 介子电磁形状因子的例子，我们从表示(18.43)得出结论，到微扰论的所有级 $F_\pi(q^2)$ 在上半 q^2 平面上都解析. 此外，在如 18.3 节中对微扰例子讨论的同样物理基础上，我们希望到强作用的所有级，对 $q^2<0$，$F_\pi(q^2)$ 都是实的. 我们可通过这样的观察来建立这个结论: 从运动学的角度看当 $q_\mu=0$ 时顶角图实质上成为传播子图. 然而，就象在 18.5 节中那样在任何一个这样的传播子图形中分母 J 在质壳

$$q_2^2=q_3^2=\mu^2$$

上都是负定的，因为 $\mu<\sum_i m_i$，其中 m_i 是任意一个与 π 介子相耦合的中间态的质量. 因此在对 F_π 作出贡献的任一 Feynman 积分中出现的分母 $J(q^2)$ 在 $q^2=0$ 处都是负定的，从而对 $q^2<0$ 也是负定的. 在 18.3 节中用过的 Schwartz 反射原理仍可用来定义在下半 q^2 平面的 $F_\pi(q^2)$，于是 $F_\pi(q^2)$ 的奇异性被限制为最多是一条从 $q^2=0$ 到 $q^2=\infty$ 的分枝割线.

要找到这条割线的阈值 q_t^2 以及位于这根割线上的分枝点，我们必须研究所有对 $F_\pi(q^2)$ 的奇异性有贡献的约化图. 在微扰例子里图 18.12 的约化图形对在 $q^2=4M^2$ 处的奇异性有贡献. 正如在传播子约化图的情形那样，它可以看作坐

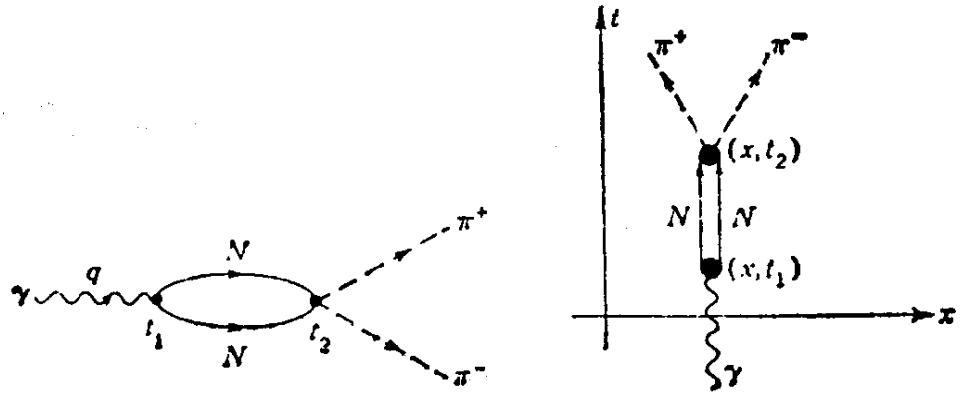


图 18.12 π 介子电磁顶角的约化图和坐标空间图象

标空间的一个实在的图象.具有 $q_\mu=(q,0,0,0)$ 的类时光子在时间 t_1 衰变为静止的核子——反核子对. 核子对在那儿停留一个任意长的时间直到它们在时间 t_2 重新组合成两个逃逸的介子. 这只能在阈值 $q_0=2M$ 时发生.

当我们在微扰近似以外来继续考察图形时，出现类似于图 18.12 的附加的约化图形，它们将割线的阈值从 $q_i^2=4M^2$ 降低到 $q_i^2=4\mu^2$. 这样的图形包括示于图 18.13 的最后两个介子的再散射. $q^2=4\mu^2$ 也是诸如反应

$$e^-+e^+\longleftrightarrow\pi^++\pi^-$$

中实验研究 $F_\pi(q^2)$ 的物理区的阈值. 对于类空 $q^2<0$，弹性的电子-介子散射测量 F_π，但在其间，对 $0\leqslant q^2\leqslant 4\mu^2$，有一个非物理区域.

要研究非物理区的约化图形，我们必须将 π 介子外动量 q_2 和 q_3 取作复数并看看会出现什么类型的约化图. 为方便起见我们这样选择坐标系使在其中动量分量是

$$q=(q,0,0,0)\qquad q_2=\left(-\frac{q}{2},i\sqrt{\mu^2-\frac{q^2}{4}},0,0\right)$$

$$q_3=\left(-\frac{q}{2},-i\sqrt{\mu^2-\frac{q^2}{4}},0,0\right)\qquad(18.63)$$

因为有 Kirchhoff 定律,所有内部"流"或动量 k 必须具有如下形式

$$k=(k_0,ik_1,0,0)\qquad(18.64)$$

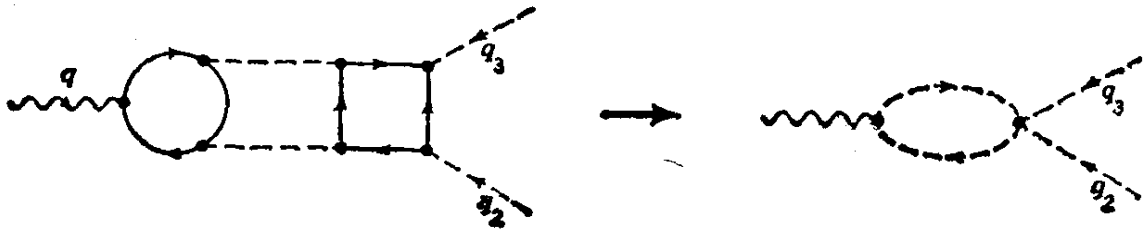


图 18.13 在 $q_i^2=4\mu^2$ 处具有阈奇异性的高阶约化图

其中 k_0 和 k_1 是实的。 在第二或第三分量的方向上没有流源时，在 k 的这两个方向就没有内部流流动。 由 Kirchhoff 定律知，如在 (18.64) 中那样， 流源在一个分量方向上全部是虚数时，内部流的这一分量也全是虚数。 因为在 (18.63) 及 (18.64) 中所有的空间动量都是纯虚数,所以，倘如同时去掉空间分量的 i，我们可以将度规张量 $g_{\mu\nu}$ 改变为适合于欧氏空间的度规 $\delta_{\mu\nu}$。 对于在 $k_j^2 = m_j^2$ 处的真实中间态有关图形的奇异性 Landau 条件仍可应用,因为是欧氏几何，所以仍然可以用很简单的办法在平面上几何地定出这些条件。在约化图形的每个顶角上我们仍可赋予两维的实数“电压”或坐标，而且仍然是仅当可能画出具有在质壳上内粒子适合的几何约束的图形时奇异性才能存在。例如，仍然考虑 18.3 节中讨论的微扰例子而且假定两维的约化图形是可能的，如图 18.14 所示，角度 θ 由动量守恒的要求及中间粒子是“真实的”条件确定。

$$q_3^2 = \mu^2 = (k_1 - k_2)^2 = k_1^2 + k_2^2 - 2k_1k_2\cos(\pi - \theta)$$
$$= 2M^2(1 + \cos\theta)$$

然而，为了真的画出图来，θ 必须小于 $\pi/2$，或 $\mu^2 > 2M^2$，而这个条件是 π 介子和核子所不具备的[1]。因此，这个约化图对 $F_\pi(q^2)$ 不贡献奇点。 我们强调指出，在画这些其角由每一顶角上的动量(或流)守恒决定的封闭图形时，其边的长度由它联结的顶角间的电压降(或电流与电阻之积)给定。

到任意高阶的相互作用，我们都能够排除由两维约化图形引起的 $F_\pi(q^2)$ 里的奇点。 因为注意到任何候选的约化图形可用一个三角形来封闭，它的顶角 x_1，x_2 和 x_3 是外粒子第一次作用点的坐标。 三角形的边不能膨胀，即如图 18.15 所

1) 与(18.29)及§18.3的脚注比较。

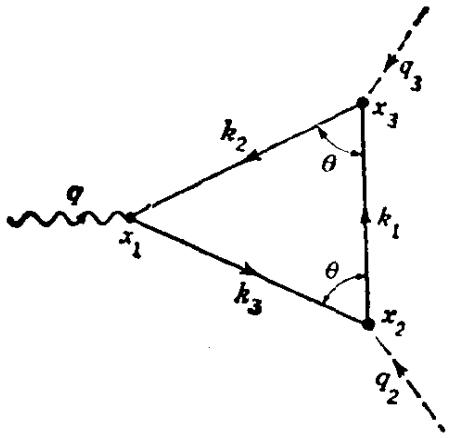


图 18.14　二维约化图形

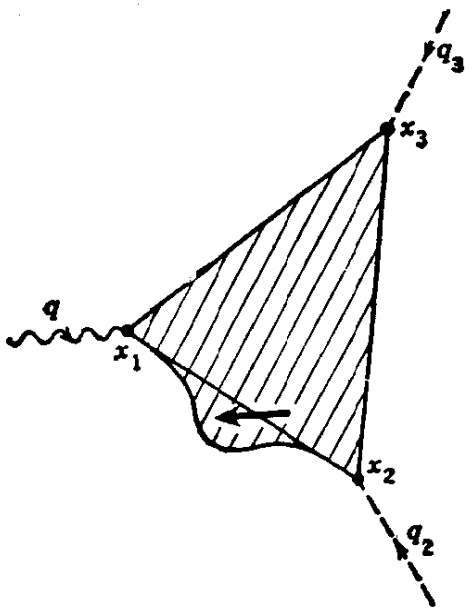


图 18.15　具有膨胀边的二维约化图形，一种不可能的情形

示没有内线能穿过三角形的边．假如这真的发生了一个粒子通过边穿出，则它将继续向外，因为没有外动量能将它推回到一个顶角而加以吸收．建立了这种三角形后，我们看到至少在一个 π 介子顶角处三角形的角 θ 是锐角．在这个顶角处，外 π 介子分解为一簇具有动量 k_i 和质量 m_i 的粒子，且

$$q^2 = \mu^2 = \left(\sum_i k_i\right)^2 = \sum_i k_i^2 + \sum_{i \neq j} k_i \cdot k_j > \sum_i m_i^2$$

因此如果有奇异性，则必定存在一个与 π 介子相耦合的态，对于它

$$\mu^2 > \sum_i m_i^2 \tag{18.65}$$

倘如我们忽略弱作用及附加的电磁作用，则这个态是不存在的．这是很显然的，如仍只考虑强作用，则在区域

$$0 \leqslant q^2 < 4\mu^2$$

里没有一维约化图形对 $F_\pi(q^2)$ 有贡献，因为 2π 是组成与光子耦合的强作用粒子的最轻组态．因此我们得出结论，在强

作用里到微扰论的所有阶 $F_\pi(q^2)$ 在有割线的 q^2 平面内是解析的，阈值是 $q_i^2 = 4\mu^2$，相应于含 2π 中间态的约化图.

与二维约化图相联系的奇异性叫做“反常阈”. 虽然在我们讨论中没有遇到这种情形，但它们本身是相当有趣的. 它们在“弱束缚”或复合粒子以及满足 (18.65) 的不稳定粒子的形状因子里出现. 例如，如果在 $F_\pi(q^2)$ 中包括进弱相互作用，则在物理区 $q^2 < 0$ 内出现一个反常阈，它对应于图 18.16 中的约化图形. 简略地讲，其物理过程如下：在 Berkeley 产生的 π 介子正好有动量 $\boldsymbol{q}/2$ 使得衰变的 μ 介子保持静止而中微子以动量 $\boldsymbol{q}/2$ 跑向 Stanford. 在那儿它被一个电磁势所散射，以动量 $-\boldsymbol{q}/2$ 回到 Berkeley 并抓住 μ 介子以产生另一个 π 介子. 使 F_π 为奇异的动量传递 $\boldsymbol{q}$ 由下式给出

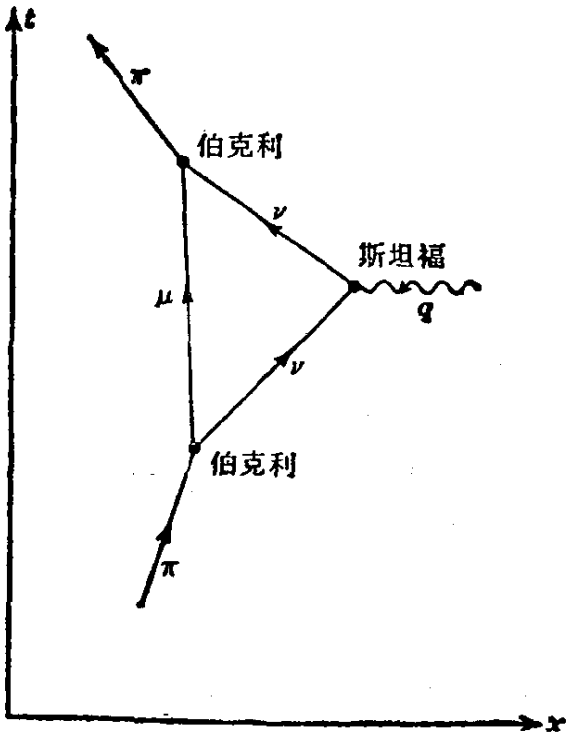


图 18.16 例如，在物理区内对应于一个不稳定粒子的反常阈的约化图形

$$\frac{|\boldsymbol{q}|^2}{4} = E_\pi^2 - \mu^2$$

同时有

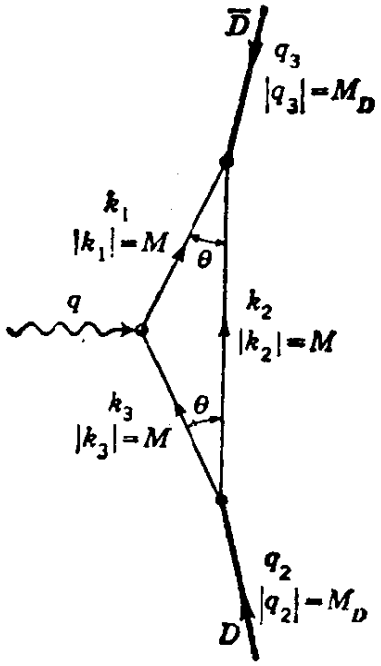
$$m^2 + \mu^2 - 2mE_\pi = 0$$

其中 m 是 μ-介子的质量；因此

$$|\boldsymbol{q}| = \frac{(\mu + m)(\mu - m)}{m} = 79 \quad \text{MeV}/c \qquad (18.66)$$

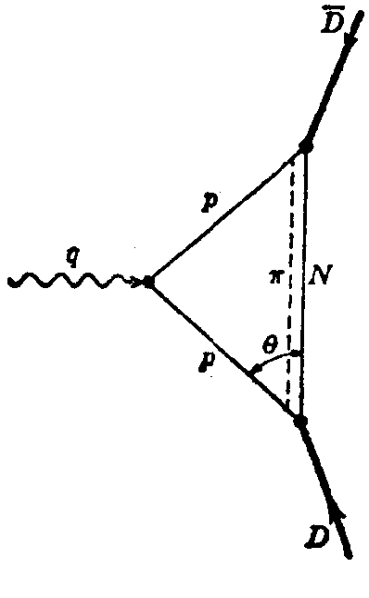
这个奇点的强度的确很弱，但原则上它是存在的.

当从不稳定粒子变到稳定粒子时，反常阈由类空的 q^2 移



$$\cos\theta=\frac{M_D^2-2M^2}{2M^2}\approx 1-\frac{2\epsilon}{M}$$

(a)



$$\cos\theta=\frac{M_D^2-M^2-(M+\mu)^2}{2M(M+\mu)}\approx 1-\frac{2\mu}{M}$$

(b)

图 18.17　对氘核形状因子有反常阈值贡献的约化图形

动到类时的 q^2，而对于象氘核这样的系统在欧氏区域里存在两维约化图．在图 18.17 中显示了两个这样的图形．对于图 18.17a，因为氘核的结合能 ϵ 小，所以角 θ 很小：

$$\cos\theta \cong 1 - \frac{\theta^2}{2} \cong \frac{(2M - \varepsilon)^2 - 2M^2}{2M^2} \approx 1 - \frac{2\varepsilon}{M}$$

由图我们看到奇异性出现在

$$q = 2M \sin\theta \approx 2M\theta \approx 4\sqrt{M\varepsilon} \qquad (18.67)$$

而且当氘核的结合能为零时，它移至 $q = 0$. 这个结果表明氘核的形状因子在类时动量转移与氘核波函数的平均动量 k 可比拟时成为奇异的：

$$\frac{k^2}{2M} \sim \varepsilon$$

正如我们在前面联系着 π 介子形状因子 (18.65) 加以讨论的那样，反常阈的必要条件是存在一个态，其中粒子的质量为 m_i，当外粒子具有质量 μ 时，(18.65) 被满足

$$\mu^2 > \sum_i m_i^2$$

于是对于强作用，在 π 介子，K 介子和核子的顶角函数中不出现反常阈，而对于 Λ，Σ，和 Ξ 超子则存在反常阈. 在类时动量转移的物理区域里，对于稳定粒子不出现反常阈，并且只有一维约化图形有贡献. 我们应当强调所有这些结果对于物理的质量参量和在顶角处粒子相互作用的选择规则的依赖性. 为了决定奇异性的区域，除了理论的纯粹数学方面以外，还有更多的要求.

18.8 顶角函数的色散关系

因为 π 介子电磁形状因子 $F_\pi(q^2)$ 的奇异性到微扰论的所有阶都限于实数轴上从 $q^2 = 4\mu^2$ 到 $q^2 = \infty$ 的一根割线，所以我们能够将色散关系写成这样的形式

$$F_\pi(q^2) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dq'^2 F_\pi(q'^2)}{q'^2 - q^2} \qquad (18.68)$$

q^2 是包含在图 18.18 中所画的迴路 C 中复平面上的任一点. 由于 $F_\pi(q^2)$ 对于实的 $q^2 < 4\mu^2$ 是实的并且 Schwartz 反射原理成立，我们可以将跨过分枝割线的间断量用 $F_\pi(q^2)$ 的虚部表出. 当 q^2 由上半平面趋近实轴时，我们写成

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} F_\pi(q^2+i\epsilon) = \mathrm{Re}\, F_\pi(q^2) + i\,\mathrm{Im}\, F_\pi(q^2) \quad q^2 \text{ 是实数}$$

和

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}[F_\pi(q^2+i\epsilon) - F_\pi(q^2-i\epsilon)] = 2i\,\mathrm{Im}\, F_\pi(q^2) \tag{18.69}$$

于是色散积分 (18.68) 可以分成由割线而来的贡献和来自无穷远处的圆的贡献 C_∞:

$$\begin{aligned} F_\pi(q^2) &= \lim_{\epsilon\to 0^+} F_\pi(q^2+i\epsilon) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{4\mu^2}^{\infty}\frac{2i\,\mathrm{Im}\, F_\pi(q'^2)dq'^2}{q'^2-q^2-i\epsilon} + C_\infty \end{aligned} \tag{18.70}$$

乐观地假定 $F_\pi(q^2)$ 在无穷远处为零，我们就有无减除的色散关系

$$F_\pi(q^2) = \frac{1}{\pi}\int_{4\mu^2}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\, F_\pi(q'^2)dq'^2}{q'^2-q^2-i\epsilon} \tag{18.71}$$

如果我们保守一点并按微扰论指出的去作，则我们必须作一次减除而且对 $F_\pi(q^2)/q^2$ 写出色散关系，使得当 $q^2\to\infty$ 时有足够的收敛性，因而可以忽略无穷远处的迴路. 照 Kramers-Krönig 例子 (18.9) 那样进行，我们得

$$F_\pi(q^2) = F_\pi(0) + \frac{q^2}{\pi}\int_{4\mu^2}^{\infty}\frac{dq'^2\,\mathrm{Im}\, F_\pi(q'^2)}{q'^2(q'^2-q^2-i\epsilon)} \tag{18.72}$$

方程 (18.71) 和 (18.72) 是 Kramers-Krönig 关系 (18.11) 的类比. Kramers-Krönig 关系所以有用，在于它在 (18.12) 中通过一个幺正性表述——光学定理把实验量联系起来. 直到现在我们对形状因子已经得到的是这样一个关系，它把计算 $F_\pi(q^2)$ 的工作化为对正的 $q^2 > 4\mu^2$ 计算其间断量. 这有

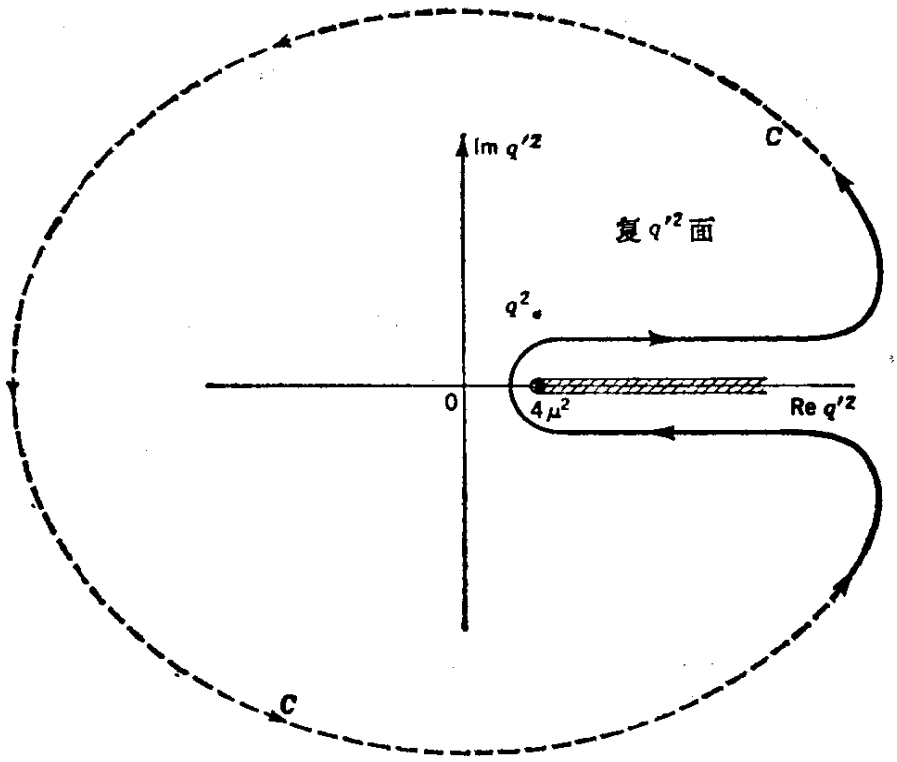


图 18.18　在复 q'^2 面内 $F_\pi(q^2)$ 的色散积分的迴路

什么实际价值呢？ 我们在本书的讨论表明在 F_π 中出现奇异性的必要条件是存在约化图形，在其中虚的类时光子和真实的中间态相耦合.特别是,对于 π 介子的形状因子不出现反常阈,所有的约化图形都是一维的,并在物理区 $q^2 > 4\mu^2$ 内. 所以间断量 Im $F(q^2)$ 的计算包括计算一个光子分解为一个真实态 $|n\rangle$ 的物理振幅再乘以这个态 $|n\rangle$ 形成一对 π^+—π^- 的跃迁振幅. 这样的间断量公式，与表示传播子跨过割线间断量的公式(18.16)类似;当我们进入色散理论的实际计算时还要对它详细地讨论. 不过,我们已能看到在 $(2\mu)^2 < q^2 \leqslant (4\mu)^2$ 区域里只有双 π 介子态才有贡献，因为三 π 介子态在形成最后的 π 介子对时,量子数不对.

正是基于象这样的论证，发展了实际进行色散理论计算的近似方法. 例如，用一次减除关系 (18.72) 对于小 q^2 值计

算 $F_\pi(q^2)$ 时，由于在吸收部分的积分中有一个因子 $1/q'^4$ 而使低 q^2 的阈值区域更为重要，因此我们可以集中精力计算最低质量态，即 2π 态本身. 在仅保留双 π 态对 $\mathrm{Im}\, F_\pi(q^2)$ 的贡献的极端近似下，(18.72) 提供了 π 介子电磁形状因子和 π-π 散射振幅间的联系，后者可通过实验来检验. 在本章后面我们将详细表明这是如何作的. 这里要强调的一点是色散关系以一定的方式将不同的物理振幅联系起来并且提供一种与按大耦合常数的幂展开无关的近似方法的基础.

不幸的是，与实验参量的关系常常没有现在的例子那样直接. 在研究质子的电磁形状因子时将碰见图 18.19 中的约化图形，它给出的贡献正比于 π 介子形状因子与

$$\pi^+ + \pi^- \to \bar{P} + p$$

的振幅之积. 可惜的是约化图形出现在 $q^2 = 4\mu^2$ 的欧氏的非物理区内；物理的湮灭过程仅在阈值 $4M^2$ 以上出现，因此必须将物理的湮灭振幅解析延拓到非物理区，同时当应用色散方法时也必须解析延拓用于计算间断量的任何幺正性表述. 我们现在转到这些问题上并研究散射振幅的解析性质.

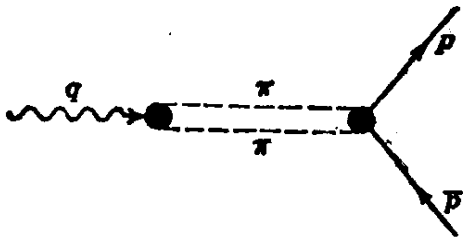


图 18.19 质子电磁顶角的约化图形

18.9 散射振幅的奇异性

我们可用同样的方法建立散射振幅的一些解析性质. 就象我们在方程 (18.56) 后面曾提到的，在这种应用中这个方法变得威力较小，原因在于由外动量变量 q_i 组成的各不变量间的约束. 代替内积 $q_i \cdot q_j$，我们可把这些标量变量选为

$$s = (q_1 + q_2)^2 \quad t = (q_1 + q_3)^2 \quad u = (q_1 + q_4)^2 \tag{18.73}$$

运动学的情况示于图 18.20 中。

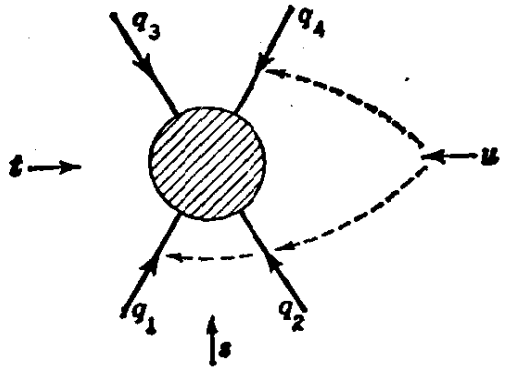


图 18.20　散射振幅的运动学变量

s 是具有入射动量 q_1 和 q_2 以及出射动量 $-q_3$ 和 $-q_4$ 的“s 反应”质心能量的平方。t 和 u 是“交叉”反应的相应的量。根据代换规则，同一个 Feynman 图可表示三个分别以 s, t, u 为质心能量的反应的集合。现在我们把 Nambu 表示 (18.53) 和 (18.54) 写成

$$I(s,t,u)=\int_0^\infty \times \frac{d\alpha_1,\cdots,d\alpha_n\delta\left(1-\sum_j \alpha_j\right)}{\Delta^2\left(\zeta_1 s+\zeta_2 t+\zeta_3 u+\sum_{i=1}^4 \zeta_i' m_i^2-\sum_j m_j^2\alpha_j+i\varepsilon\right)^{n-2k}} \tag{18.74}$$

按照它，同一解析函数表示这些反应的每一个振幅，(18.74) 的结构——即，那个 $i\varepsilon$——保证了对于所有实数的 s, t, u 存在解析延拓。由于量 s,t,u 并非全部独立，它们通过约束

$$s+t+u=\sum_{i=1}^4 m_i^2 \tag{18.75}$$

相联系，所以从 (18.74) 的普遍结构去推断解析性质是比较困难的。例如，由于有约束 (18.75) 在 t 固定时，当 s 进入上半平面时，u 便跑到下半平面，因此，尽管有 ζ_1, ζ_2 和 ζ_3 可证明为正的这个事实[1]，(18.74) 的形式本身仍不能保证在复 s 平面的任何地方都没有奇异性。

1) 见问题 2。

因此决定散射振幅的奇异性的问题以及由它建立色散关系的问题较之顶角函数的同类问题要困难得多，而且也没有完全解决．已经知道的奇异性的性质是有关粒子质量的灵敏函数；为了将运动学的复杂性减低到最低限度，我们考虑 π-π 散射．

在这种情形下 s，t，u 三个反应的物理区用图 18.21 中的阴影区域表示． s,t,u 的值可用我们集中讨论的 s 反应的质心三动量 $\boldsymbol{k}$ 和散射角 θ 简单地给出来

$$s = 4(\boldsymbol{k}^2 + \mu^2) \quad t = -2\boldsymbol{k}^2(1 - \cos\theta)$$
$$u = -2\boldsymbol{k}^2(1 + \cos\theta) \tag{18.76}$$

$t = 0$ 的线表示向前 π-π 散射，我们首先研究它．我们先对散射振幅 $A(s,t)$ 把表示 (18.74) 写成更紧凑的形式

$$A(s,t) = \int_0^\infty \frac{d\alpha_1 \cdots d\alpha_n F(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)}{(\zeta s + \zeta' t - \sigma^2 + i\epsilon)^{n-2k}} \tag{18.77}$$

不论是 ζ，ζ' 还是 σ^2 都不是正定的，为了建立 $A(s,0)$ 的解析性质，我们将它分成两项：

$$A(s,0) = \int_0^\infty \frac{d\alpha_1 \cdots d\alpha_n F(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)}{(\zeta s - \sigma^2 + i\epsilon)^{n-2k}} [\theta(\zeta) + \theta(-\zeta)]$$
$$\equiv A_+(s) + A_-(s) \tag{18.78}$$

这样我们把 $A(s,0)$ 搞成由两部分组成，其中一部分 $A_+(s)$，当 $\epsilon \to 0^+$ 时在复 s 面的上半平面解析，而另一部分在下半平面解析．如果在实数 s 的某个区域 (18.78) 中的分母 J 不为零，则 $A_+(s)$ 和 $A_-(s)$ 在这一区域都是实数．于是根据 Schwartz 反射原理，我们可以将 A_+ 延拓到下半 s 平面而将 A_- 延拓到上半平面．如果正是这样，我们能证明，除了实数轴上使分母为零的部分——割线外，$A(s,0)$ 在全部 s 平面内解析．因而也可写出要求的色散关系．

问题的关键在于存在一个实数 s 的区域，对于它 $A(s,0)$

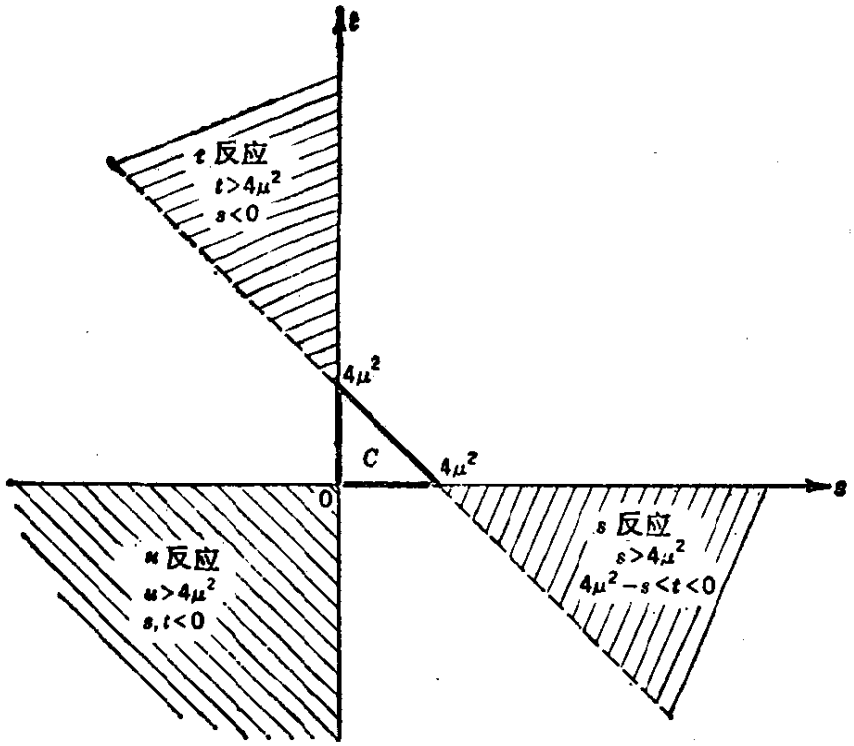


图 18.21　π-π 散射中 s, t, u 反应的物理区

的分母不为零并且通过它可作 $A_+(s)$ 及 $A_-(s)$ 的延拓. 在图 18.21 中我们看到区间 $0 \leqslant s \leqslant 4\mu^2$ 是唯一适合的区域，通过它可延拓 $A(s,0)$. 对于 $s \geqslant 4\mu^2$ 是 s 反应的物理区. 我们知道那儿散射振幅是复数，它是各分波形如 $e^{i\delta}\sin\delta$ 的项的总和. 类似地，当 $s \leqslant 0$ 时有 $u \geqslant 4\mu^2$，我们就在 u 反应的物理区，根据代换规则也由同一解析函数 $A(s,t)$ 描述. 当 $t = 0$ 时区间 $\Delta \leqslant s \leqslant 4\mu^2$ 是非物理区，因为在图 18.21 中用 C 标记的三角形 $s \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, $u \geqslant 0$ 是非物理区. 这个区域很象讨论顶角函数时的欧氏区域，并且在这里可用类似的论证.

我们现在证明 (18.77) 中的分母 J 在这个区域 C 没有零点并且是负定的. 所以可作 A_+ 和 A_- 的解析延拓，和顶角的讨论一样，在三角形 C 内我们改变成欧氏度规. 由于 s,t,u 全是正的，我们可以根据 (18.73) 在一个特殊的参考系里选择

动量.

$$\begin{aligned} q_1 &= 1/2\,(\sqrt{s}\,, i\sqrt{t}\,, i\ \sqrt{u}\,, 0) \\ q_2 &= 1/2\,(\sqrt{s}\,, -i\sqrt{t}\,, -i\sqrt{u}\,, 0) \\ q_3 &= 1/2\,(-\sqrt{s}\,, i\sqrt{t}\,, -i\sqrt{u}\,, 0) \\ q_4 &= 1/2\,(-\sqrt{s}\,, -i\sqrt{t}\,, i\sqrt{u}\,, 0) \end{aligned} \tag{18.79}$$

并通过去掉 q_i 空间分量的所有 i，将度规由 $g_{\mu\nu}$ 变为 $\delta_{\mu\nu}$ 而转换到欧氏度规. 仍然是 Kirchhoff 定律保证所有的内动量都是实数，且通过这种度规的改变解析性质不变. 在三角形区域 C 中决定奇异性的办法与研究顶角时类似. 然而按照(18.79)现在顶角处的动量,因而坐标("电压")是三维的，于是约化图形同样将是三维的或者低些. 就象图 18.22 所示那样，我们可以立即排除掉一维的约化图形，因为与两个 π 介子相耦合的最轻态的质量是 2μ，对于(18.79)中的 s、t 和 $u < 4\mu^2$ 由于动量守恒这个态不能构成. 其论证和前面讨论 π 介子电磁形状因子用过的论证是一样的；入射到 A 上的两个外 π 介子，从运动学角度看等价于一个质量为

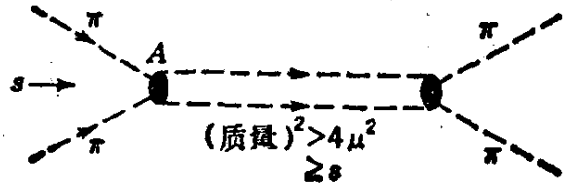


图 18.22 一维约化图形

$$\sqrt{s} < 2\mu$$

的光子. 在这样的区域里形状因子 F_π 是没有奇异性的. 类似地，根据同样的理由图 18.23 中的二维约化图形也不能在欧氏三角形 C 中贡献反常阈：在

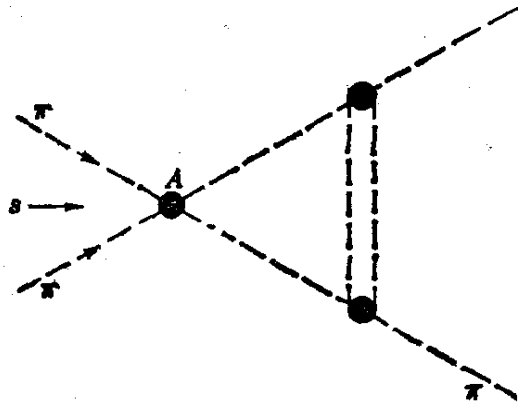


图 18.23 二维约化图形

计算 π 介子顶角时什么也没有得到过.

转到三维的约化图形，我们必须把所有的线局限在一个四面体内，在其顶角处外粒子被吸收，如图 18.24 所示. 和对顶角函数给出的理由相同，边鼓出去是不允许的. 欧氏立体几何的一个事实是至少有一个顶角是锐角，即是，其所有三个面角是锐角. 因此，我们只能在下述情况下用真实内线画成一个四面体，即内线的质量能使一个锐角存在. 假定它是图 18.24 中的顶角 A. 于是在 A 处 π 介子分解成具有动量 k 的任何两个粒子，其动量矢量的方向必须夹成一个锐角. (18.65) 的论证可用，但得不到条件

$$\mu^2 = \left(\sum_i k_i\right)^2 > \sum_i m_i^2 \qquad (18.80)$$

因此，对于 π-π 散射图 18.21 的欧氏三角形 C 中没有奇异性. 要完成色散关系的证明，我们还必须证明 $A_\pm(s, 0)$ 在区间 $0 \leqslant s \leqslant 4\mu^2$ 内是实数，然后才会如我们所期望的用 Schwartz 反射原理将 A_+ 延拓到 s 下半面和将 A_- 延拓到 s 上半平面. 为了作到这点，我们证明在欧氏区域内某一点，例如 $s=t=u$，一致地去掉外动量 q_i^2 时分母 J 是负的；即作

$$q_i \to \lambda q_i \qquad \lambda \to 0$$

当 λ 减少时不可能得到奇异性，因为 (18.80) 变得更不可及了. 在极限 $\lambda = 0$ 时分母 $J = -\sum_i m_i^2 \alpha_i < 0$. 当外流恢复回来时，$J$ 保持是负定的，因为如果在回来的路上 J 变成 0，则必定有相应于该条件的约化图形. 我们已证明不存在这样的图形.

我们现在能够写出向前 π-π 散射的色散关系. $A(s, 0)$ 在区间 $0 \leqslant s \leqslant 4\mu^2$ 内的实数性允许我们通过这段间隙延拓 A_+ 和 A_-；我们得到结论，$A(s,0)$ 的唯一奇异性是图 18.25 中显示的由 $s = 4\mu^2$ 到 $s = \infty$ 及由 $s = 0$ 到 $s = -\infty$ 的分枝

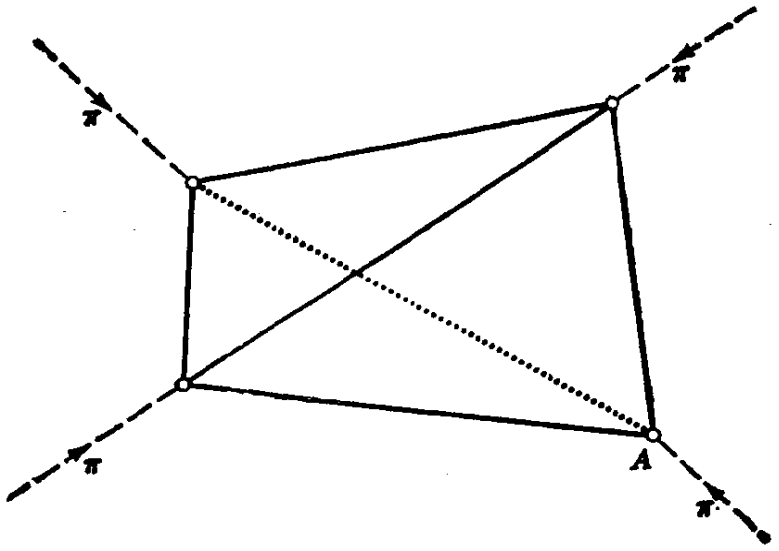


图 18.24　三维约化图形

割线．暂时略去减除项的问题，色散关系具有形式

$$A(s,0)=\frac{1}{\pi}\int_{4\mu^2}^{\infty}\frac{ds'\,\mathrm{Im}\,A(s',0)}{s'-s-i\varepsilon}+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{ds'\,\mathrm{Im}\,A(s',0)}{s'-s-i\varepsilon}+C_{\infty}\qquad(18.81)$$

方程(18.81)在形式及内容上都和原始的 Kramers-Krönig 关系(18.8)很相似，整个色散关系的研究就从那里开始的．我们又将向前散射振幅 $A(s,0)$ 表示为对其虚部的色散积分，这个虚部具有属于 Kramers-Krönig 关系和 π 介子形状因子 $F_\pi(q^2)$ 色散关系的吸收部分的全部妙处，即对于散射过程仅在物理区它才不为零．因此光学定理可用来联系 $\mathrm{Im}\,A(s,0)$ 与 s 及 u 反应中的总散射截面，于是我们得到(原则上)可测量之间的一个关系．$\mathrm{Im}\,A(s,0)$ 和总截面之间明显的联系来自加在 S 矩阵上的幺正性条件 $S^+S=1$，只要仔细考虑归一因子．在 18.12 节里将讨论它，我们将这里导出的解析性质应用到 π-π 系统的物理上时要用到幺正性和交叉对称．

直到现在我们是用 $A(s,0)$ 沿着欧氏三角形的边沿的实

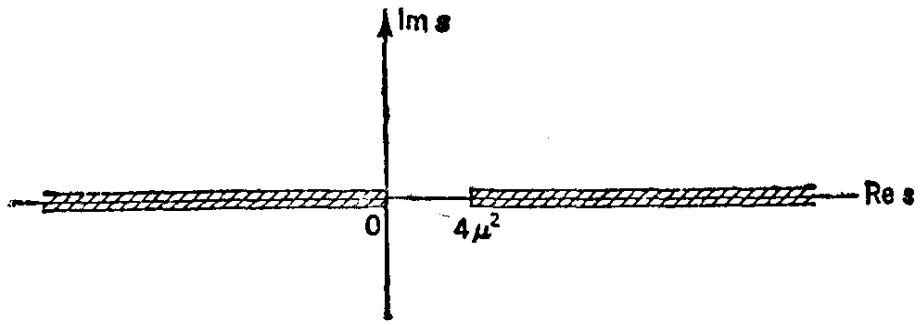


图 18.25　对于 π-π 向前散射 s 内的分枝割线

数性以及表示 (18.77) 来建造 $t=0$ 处的向前散射色散关系. 用同样的表示我们也能建立 $A(s,t)$ 的个别分波的色散关系，这是一个极为有用的结果. 分波振幅 $A_l(s)$ 用下列展开定义

$$A(s,t)=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)A_l(s)P_l(\cos\theta)$$

$$A_l(s)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}d(\cos\theta)P_l(\cos\theta)\hat{A}(s,\cos\theta)\quad(18.82)$$

其中 $\hat{A}(s,\cos\theta)\equiv A(s,t)$ 而 θ 是质心散射角. 为了找到 $A_l(s)$ 的解析性质，(18.82) 告诉我们去研究固定 $\cos\theta$ 时 $\hat{A}(s,\cos\theta)$ 的解析性质. 应用 (18.76) 将 t 用 $\cos\theta$ 和 s 解出，我们得

$$t=-1/2(s-4\mu^2)(1-\cos\theta)$$

将这个结果代入 $A(s,t)$ 的积分表示 (18.77)，我们看到在那里分母 J 可以写成

$$J=\hat{\zeta}s-\hat{\sigma}^2+i\epsilon\qquad(18.83)$$

现在 $\hat{\zeta}$ 和 $\hat{\sigma}^2$ 依赖于 $\cos\theta$ 和"电阻" α_i. 因此 $\hat{A}(s,\cos\theta)$ 具有和向前散射振幅 $A(s,0)$ 一样的表示 (18.78). 在 st 平面内固定 $\cos\theta$ 时的路径是一根直线，示于图 18.26 中，它穿过我们已证明其中 J 不会为零的欧氏区域 C. 因此象对 $A(s,0)$ 作

过的那样可将 $\hat{A}(s,\cos\theta)$ 分成两部分，循着由 (18.78) 到 (18.81) 的程序得到结论，对于任何 $\cos\theta$，$\hat{A}(s,\cos\theta)$ 在 s 平面内解析，可能的例外是由 $s=4\mu^2$ 到 ∞ 和 $s=0$ 到 $-\infty$ 的分枝割线. 因此我们可以对图 18.27 中的任一迴路 C 写出一个 Cauchy 关系.

$$\hat{A}(s,\cos\theta)=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{ds'\hat{A}(s',\cos\theta)}{s'-s-i\varepsilon} \qquad (18.84)$$

该迴路避掉了分枝割线并将点 s 包含在内. 然后将其乘以 $P_l(\cos\theta)$ 并从 -1 到 1 积分以构成分波振幅 $A_l(s)$. 因为积分是绝对收敛的，所以可交换积分顺序且对于任何包含 s 并避开割线的迴路 C，$A_l(s)$ 满足同样的 Cauchy 关系:

$$A_l(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{ds'A_l(s')}{s'-s-i\varepsilon} \qquad (18.85)$$

因此，$A_l(s)$ 具有与向前散射振幅一样的解析结构并满足和

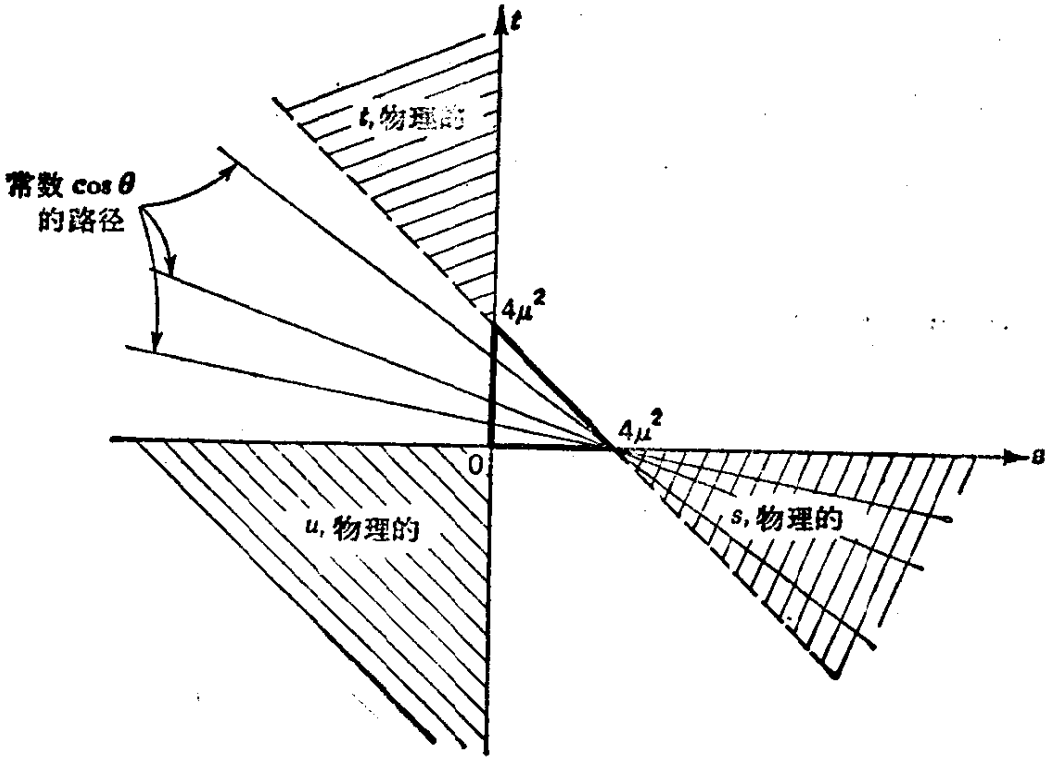


图 18.26 在 π-π 散射中分波振幅的 $\cos\theta$ 为常数的路径

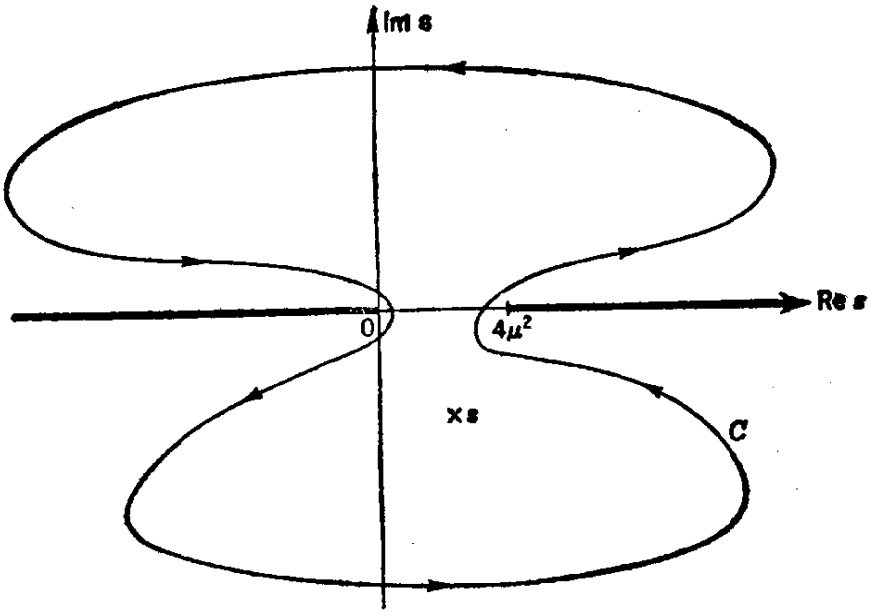


图 18.27　s 面内 π-π 分波振幅的色散关系的积分迴路

(18.81) 类似的色散关系. 这个结果具有相当重要的实用性.

对于其它的散射振幅，如向前 π-核子散射，核子-核子散射以及核子-核子散射中的分波振幅，前面用过的技术决定类似的解析区域和导致色散关系. 当质量不同的粒子作为外线进入时，运动学的复杂性以及反常阈效应带来的麻烦迅速增加.

18.10　应用于 π 介子-核子向前散射

色散关系的最重要和最成功的应用是 π 介子-核子向前散射振幅的分析[1]. 象在所有色散理论用于实际计算时那样需完成三个主要步骤:

1. 象在 (18.31) 里那样分离旋量及同位旋因子来作标量不变量的函数 F_i.

2. 用约化图形或其它的代数方法找出来自 (18.54) 中分

1) M. L. Goldberger, *Phys. Rev.* **97** 508(1955); **99** 979(1955).

母 J 的奇异性从而导出形状因子 F_i 的解析性质.

3. 应用幺正性计算跨过分枝割线的间断量，因而可作出一些有物理意义的表述——如在(18.11)及(18.12)中对 Kramers-Krönig 关系所作的那样.

我们将特别地讨论 π^+-质子散射，因而无需作同位旋通分解. 为了得到对应于图 18.28 中运动学的不变振幅 $\mathfrak{M}(q_2, p_2, s_2; q_1, p_1, s_1)$ 的结构，我们构造所有嵌入 Dirac 旋量之间时成为 Lorentz 标量的量. 它们归纳为这样的结构

$$\mathfrak{M}(q_2,p_2,s_2;q_1,p_1,s_1) = \bar{u}(p_2,s_2)[A(s,t) + 1/2(q_1 + q_2)B(s,t)]u(p_1,s_1) \tag{18.86}$$

因为所有含 $\not{p}_1$ 和 $\not{p}_2$ 的其它因子通过应用 Dirac 方程都可以纳入这种形式，例如

$$\not{p}_1 u(p_1,s_1) = M u(p_1,s_1)$$

不变量 s 和 t 象在 π-π 散射中一样地定义(见图 18.28)

$$s = (p_1 + q_1)^2 \qquad t = (q_2 - q_1)^2 \tag{18.87}$$

在向前散射的特殊情况下，将振幅用 π 介子的实验室能量 ω 表示更方便些:

$$\omega = \frac{p_1 \cdot q_1}{M} = \frac{s - M^2 - \mu^2}{2M} \tag{18.88}$$

在这个极限下两个形状因子 A 和 B 可以合并成一个形状因子 T; 我们得

$$\mathfrak{M}(q_1,p_1,s) = 4\pi\bar{u}(p_1,s_1)T(\omega)u(p_1,s_1) \tag{18.89}$$

其中

$$4\pi T(\omega) \equiv A(s,0) + \omega B(s,0) \tag{18.90}$$

是标量，我们就是希望对它建造一个色散关系.

问题的第二步是确定 $T(\omega)$ 的解析性质. 这和 π-π 散射振幅的分析是平行的. 就象在(18.78)中那样，任何图形对

$T(\omega)$ 的贡献具有结构

$$I(\omega)=\int_0^\infty \frac{d\alpha_1\cdots d\alpha_n F(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)}{(\zeta\omega-\sigma^2+i\varepsilon)^n} \qquad (18\,91)$$

如果我们找得到一个实数 ω 的区域使分母 J 不为零因此 $T(\omega)$ 是实数的话，则我们可以用对向前 π-π 振幅及 π-π 分波振幅用过的论证在有割线的 ω 平面内确定 $I(\omega)$ 的解析性.

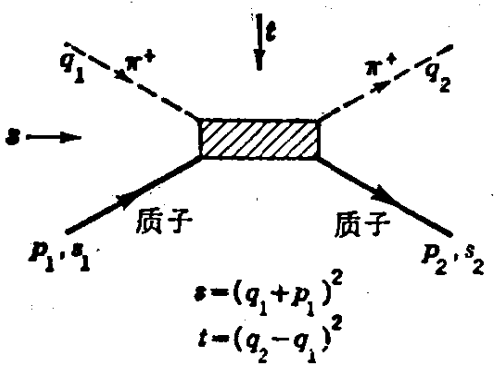


图 18.28 π^+-质子散射的运动学

当 $\omega>\mu$ 时，或根据 (18.88)，$s>(M+\mu)^2$ 时，$T(\omega)$ 肯定不是实数；因为这时我们在 π^+-质子散射的物理区. 类似地，对于 $u=(p_2-q_1)^2>(M+\mu)^2$，或 $\omega<-\mu$，$T(\omega)$ 不是实数，因为我们这时在交叉的“u 反应”的物理区，按照在 (17.45) 下面讨论的代换规则该反应就是 π^--质子散射. 因此沿实 ω 轴 $T(\omega)$ 可能是实数的唯一区域就是区间 $-\mu\leqslant\omega\leqslant+\mu$.

该区域内的极点贡献在第十章讨论 π-核子散射的图 18.29 的 Born 近似贡献时已经得到过，对于 π^+-质子散射只有交叉极点有贡献. 在找寻任何另外的贡献时，我们选择特殊的坐标系统

$$p_1=p_2=(M,0,0,0)$$
$$q_1=q_2=(\mu\cos\varphi,i\mu\sin\varphi,0,0) \qquad (18.92)$$

同时转到欧氏度规去掉 i. 由讨论 π-π 系统的同一种几何理由知，不可能存在象图 18.30 那样的二维约化图形；只有“单核子交换”，或者是前面叙述过的 Born 贡献. 因此如对 π-π 散射那样再用外流的解析延拓，$p_i, q_i\rightleftharpoons\lambda p_i, \lambda q_i\rightleftharpoons 0$，我们得出结论，除了出现在

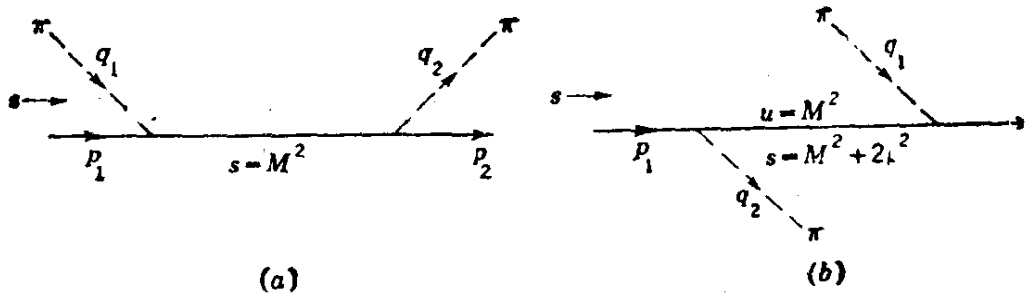


图 18.29　向前 π-核子散射中的极点项

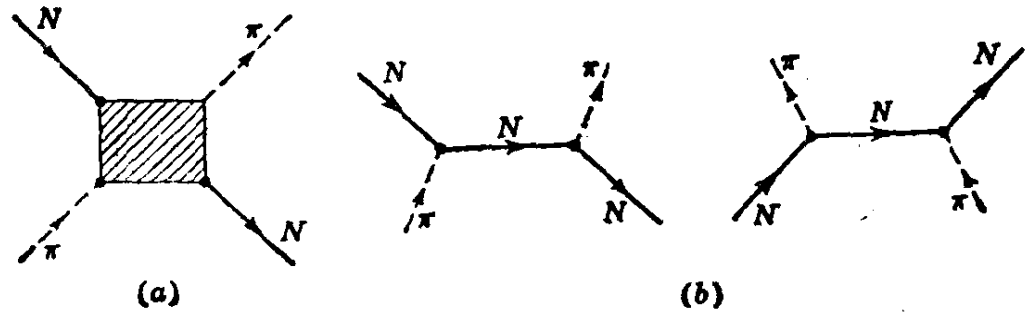


图 18.30　π-核子散射的约化图：(a) 二维的；(b) 一维的.

$$(p_1 - q_2)^2 = M^2 \quad 或 \quad \omega = +\frac{\mu^2}{2M} = +\omega_B \tag{18.93}$$

处的极点贡献外，分母 J 在区域 $-\mu < \omega < \mu$ 内是负定的.

现在到微扰论的任何阶我们确定了，在 ω 面内除了由 $+\mu$ 到 $+\infty$ 及 $-\mu$ 到 $-\infty$ 的割线及位于 $\omega = +\mu^2/2M$ 的一个极点外，振幅 $T(\omega)$ 是解析的. 因此，应用图 18.31 所示的积分迴路 C 我们可以写出联系着完全的振幅与其虚部和极点贡献的色散关系.

这就把我们带到色散问题的第三部分——应用幺正性条件将向前散射振幅的虚部用总截面表示从而建立起观测量之间的联系. 我们曾在 (16.69) 中普遍地证明了 S 矩阵是幺正的，所以我们可写出

$$S^\dagger S = 1$$

或等价地，对从初态 i 到末态 f 的跃迁，可写成

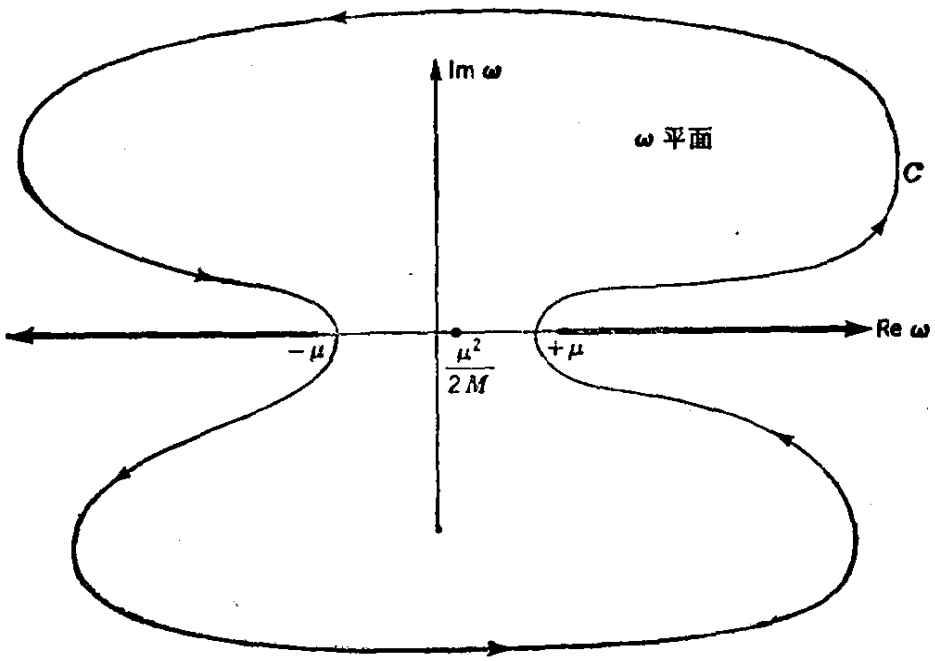


图 18.31　在 ω 平面内 π^+-质子向前散射的色散关系的积分迴路

$$\sum_{\text{所有}n} S_{nf}^* S_{ni} = \delta_{fi} \tag{18.94}$$

用由

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i(2\pi)^4\delta^4(P_f - P_i)\mathscr{T}_{fi} \tag{18.95}$$

定义的跃迁振幅 $\mathscr{T}$ 表示，对于现在向前散射的情况 $f = i$ 么正性条件成为

$$\mathscr{T}_{ii} - \mathscr{T}_{ii}^* = -i\sum_n (2\pi)^4\delta^4(P_i - P_n)\mathscr{T}_{ni}^*\mathscr{T}_{ni} \tag{18.96}$$

(18.96) 左边恰好是向前散射振幅虚部的两倍，右边则和总截面相联系．回忆一下第七章中我们的归一化约定[特别是方程(7.35)到(7.42)]，我们看到，在将 (18.96) 右边与给定核子极化的 π 介子-核子总截面联系起来时，只需要除掉一个入射流因子及某些 (2π) 的因子

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{(2\pi)^6}{v_{\text{lab}}}\sum_n (2\pi)^4\delta^4(P_i - P_n)|\mathscr{T}_{ni}|^2 \tag{18.97}$$

因子 v_{lab} 是 π 介子在实验室参考系里的速度，而因子 $(2\pi)^6$ 去掉由按构造截面的规则伴随入射粒子波函数而来的因子 $(2\pi)^{-3/2}$. 于是由 (18.96) 我们有

$$\mathrm{Im}\,\mathscr{T}_{ii}(\omega) = -\frac{1}{2} v_{lab} \frac{\sigma_{tot}^{\pi^+ p}(\omega)}{(2\pi)^6} \quad \omega \geqslant \mu \tag{18.98}$$

接着通过提出外波函数的归一因子及核子自旋波函数我们把跃迁振幅 J_{ii} 和感兴趣的不变振幅联系起来. 于是和方程 (10.54) 完全类似，从定义 (18.86) 及 (18.89) 我们有

$$\mathscr{T}_{ii} = \frac{1}{(2\pi)^6 2\omega} \mathfrak{M}(q_1, p_1, s_1) = \frac{1}{(2\pi)^6 2\omega} \times [4\pi \bar{u}(p_1, s_1) T(\omega) u(p_1, s_1)] \tag{18.99}$$

且因此根据 (18.98) 有

$$\mathrm{Im}\,T(\omega) = -\frac{k}{4\pi} \sigma_{tot}^{\pi^+ p}(\omega) \quad k = \omega v_{lab} = \sqrt{\omega^2 - \mu^2} \quad \omega \geqslant \mu \tag{18.100}$$

在这样的归一化下，从光学定理可以看出 T 和向前微分弹性散射振幅简单地联系在一起

$$\left(\frac{d\sigma(\omega)}{d\Omega}\right)^{\pi^+ p}_{\theta_{lab}=0} = |T(\omega)|^2 \tag{18.101}$$

这个结果可由 (10.54) 和 (10.68) 得到的微分截面直接验证.

方程 (18.100) 考虑到了物理区 $\omega \geqslant \mu$ 内的间断量. 但还有来自左边割线 $\omega \leqslant -\mu$ 和极点的贡献. 因为左边割线位于交叉反应，或 u 反应的物理区，该反应是 π^--质子散射，所以我们用交叉对称把跨过左边割线的间断量与 $\pi^- p$ 的总截面联系起来. 如在 17.7 节中所讨论的，严格的 π-核子散射振幅在 π 介子同位旋指标交换(粒子$\longleftrightarrow$反粒子)和入射 π 介子四动量 q_1 与出射 π 介子四动量的负值 $-q_2$ 交换下不变. 在向前的方向上，这种对称意味着在 $\pi^+ \longleftrightarrow \pi^-$ 交换的同时有

$\omega \longleftrightarrow -\omega$ 的交换.

$$T(\omega) \equiv T^{(\pi^+ p)}(\omega) = T^{(\pi^- p)}(-\omega) \qquad (18.102)$$

即当物理的 π^+-质子散射振幅位于右割线 $\omega' \geqslant \mu$ 之上时，则物理的 π^--质子散射振幅位于左割线 $\omega \leqslant -\mu$ 之下. 这可由 (18.91) 的形式看出，它与向前 π-π 散射的 (18.78) 相合并且象在那儿对 $\zeta > 0$ 和 $\zeta < 0$ 作过的那样可以分成两部分. 我们通过将 (18.102) 重新写作

$$T^{(\pi^+ p)}(-\omega - i\varepsilon) = T^{(\pi^- p)}(\omega + i\varepsilon)$$

明显地显示出这一点，因此有

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\, T^{(\pi^+ p)}(-\omega) &\equiv \frac{1}{2i}\left[T^{(\pi^+ p)}(-\omega + i\varepsilon) - T^{(\pi^+ p)}(-\omega - i\varepsilon)\right] \\ &= +\frac{k}{4\pi}\sigma_{\mathrm{tot}}^{\pi^- p}(\omega) \end{aligned} \qquad (18.103)$$

通过物理截面计算了左边割线的间断量之后，我们在将向前散射振幅用实验数值表示之前，仅需再计算极点

$$\omega = \omega_B = \mu^2/2M$$

处的留数了. 极点的贡献与第十章中用 Feynman 图作的二阶计算相同，差别仅在于用重正化的耦合常数 g 代替裸耦合常数 g_0.

要确定这个结果要求计算和图 18.29 相似的所有 Feynman 图，即，在顶角间只有一个核子传播子的图. 进一步按照我们对 (18.93) 前面的约化图形的讨论，我们只需要在与核子传播子相联系的极点附近计算这些图形. 因为仅交叉图，图 18.29 b，对 π^+-质子散射有贡献，我们得到相应于该图的不变振幅 $\mathfrak{M}_{\mathrm{pole}}$ 的普遍结构为

$$\begin{aligned} -i\mathfrak{M}_{\mathrm{pole}}(q_1, p_1, s_1) &= Z_2 Z(-ig_0\sqrt{2})^2 \bar{u}(p_1, s_1) i\Gamma_5(p_1, p) \\ &\times iS'_F(p) i\Gamma_5(p, p_1) u(p_1, s_1) \quad p = p_1 - q_1 \end{aligned} \qquad (18.104)$$

运动学和描述向前散射的图中一样 $p_2 = p_1$ 和 $q_2 = q_1$，Z_2 与

Z 按照约化公式 (16.81) 和 (17.43) 是核子和 π 介子的波函数归一化因子. 当我们从出现在约化公式 (17.43) 中的典型组合切去图形中每一条外传播子腿时，我们在 (18.104) 中得到因子 $\sqrt{Z}$：

$$\int d^4x \frac{1}{\sqrt{Z_2}} e^{ip_1\cdot x}\bar{u}(p_1)(i\not{\partial}_x - M)S'_F(x-y)\cdots$$
$$= \sqrt{Z_2}\, e^{ip_1\cdot y}\bar{u}(p_1)\cdots$$

按照谱表示 (16.122)，当 $\not{p}_1 \to M$ 在质壳上时严格的传播子 $S'_F(p_1)$ 趋于 $Z_2/(\not{p}_1 - M)$ 并且 Dirac 算符恰好抵消这个 $\not{p}_1 - M$ 因子，以致 在分子上剩下 $\sqrt{Z_2}$. 对 π 介子传播子和波函数得到类似的结果. 同样，(18.104) 中的中间核子的传播子 $S'_F(p)$，由于 Källén-Lehman 表示 (16.122) 在极点处趋于 $Z_2/(\not{p} - M)$.

$\Gamma_5(p_1,p)$ 是所有正规顶角图形之和，所谓正规顶角图是指不能由移去一根介子线或核子线就分成不连接部分的顶角图形. 因为在中间核子的极点处 $\not{p} \to M$，由类似于前面 (10.157) 给出的程序可将 $\Gamma_5(p_1,p)$ 约化为 γ_5 的倍数. 所有 $\not{p}_1$ 的因子可以移至 $\bar{u}(p_1)$ 或 $u(p_1)$ 的旁边并使其等于 M. 所有因子 $\not{p}$ 可以移至中间，邻接 $S'_F(p)$ 而用 M 代替：比例于 $\not{p} - M$ 的修正消掉我们感兴趣的极点. 在极点处，可以证 Γ_5 中的不变形状因子的标量宗量等于数值 $p^2 = p_1^2 = M^2$ 和 $q_1^2 = (p - p_1)^2 = \mu^2$. 这样作过以后，在计算 (18.104) 的极点贡献时可以让 Γ_5 等于 γ_5 的倍数. 该倍数由移去极点项的所有 Z 因子来确定

$$g\gamma_5 = Z_2 Z^{1/2} g_0 \Gamma_5(p_1,p)\Big|_{\substack{p^2\to M^2\\ p_1^2\to M^2\\ q_1^2=\mu^2}} \qquad (18.105)$$

将 (18.105) 代入 (18.104)，我们得到将 g 代替裸耦合常数 g_0

的微扰论结果 (10.56)

$$\mathfrak{M}_{\text{pole}}(q_1, p_1, s_1) = 4\pi T(\omega)$$
$$= -2g^2 \frac{\bar{u}(p_1, s_1)\gamma_5(\not{p}_1 - \not{q}_1 + M)\gamma_5 u(p_1, s_1)}{(p_1 - q_1)^2 - M^2}$$
$$= \frac{2g^2\omega\bar{u}(p_1, s_1)u(p_1, s_1)}{2M\omega - \mu^2} = \frac{8\pi f^2}{\omega - \omega_B}$$
$$\text{当 } (p_1 - q_1)^2 \to M^2 \qquad (18.106)$$

其中

$$\left(\frac{g^2}{4\pi}\right)\frac{\mu^2}{4M^2} \equiv f^2$$

是有理化和重正化的 π 介子-核子耦合常数.

用 Cauchy 公式和图 18.31 的迴路 C，我们写出一个色散关系，它类似于对向前 π-π 散射的 (18.81)，不过要附加一个极点项. 合并 (18.100), (18.103) 和 (18.106)，我们得

$$T(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-\mu}\frac{d\omega' \operatorname{Im} T(\omega')}{\omega' - \omega - i\varepsilon} + \frac{1}{\pi}\int_{\mu}^{\infty}\frac{d\omega' \operatorname{Im} T(\omega')}{\omega' - \omega - i\varepsilon}$$
$$+ \frac{2f^2}{\omega - \omega_B} + C_\infty$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{-\mu}\frac{d\omega'\sqrt{\omega'^2 - \mu^2}\,\sigma_{\text{tot}}^{\pi^- p}(-\omega')}{(\omega' - \omega - i\varepsilon)}$$
$$- \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mu}^{\infty}\frac{d\omega'\sqrt{\omega'^2 - \omega^2}\,\sigma_{\text{tot}}^{\pi^+ p}(\omega')}{\omega' - \omega - i\varepsilon}$$
$$+ \frac{2f^2}{\omega - \omega_B} + C_\infty$$

取实数部分并及合并第一和第二项，我们得到对于 π^+-P 和 π^--P 散射的色散关系的最终形式

$$\operatorname{Re} T^{(\pi^+ p)}(\omega) = \frac{2f^2}{\omega - \omega_B} - \frac{1}{4\pi^2}P\int_{\mu}^{\infty}\frac{d\omega'\sqrt{\omega'^2 - \mu^2}}{\omega'^2 - \omega^2}$$
$$\times \{\omega'[\sigma_{\text{tot}}^{\pi^+ p}(\omega') + \sigma_{\text{tot}}^{\pi^- p}(\omega')]$$
$$+ \omega[\sigma_{\text{tot}}^{\pi^+ p}(\omega') - \sigma_{\text{tot}}^{\pi^- p}(\omega')]\} + C_\infty$$

$$\operatorname{Re} T^{(\pi^- p)}(\omega) = -\frac{2f^2}{\omega + \omega_B} - \frac{1}{4\pi^2} P \int_\mu^\infty \frac{d\omega' \sqrt{\omega'^2 - \mu^2}}{\omega'^2 - \omega^2}$$
$$\times \{\omega'[\sigma_{\text{tot}}^{\pi^+ p}(\omega') + \sigma_{\text{tot}}^{\pi^- p}(\omega')]$$
$$- \omega[\sigma_{\text{tot}}^{\pi^+ p}(\omega') - \sigma_{\text{tot}}^{\pi^- p}(\omega')]\} + C_\infty \qquad (18.107)$$

引入和与差

$$T^+ = 1/2[T(\omega) + T(-\omega)]$$
$$= 1/2[T^{(\pi^+ p)}(\omega) + T^{(\pi^- p)}(\omega)]$$
$$T^- = -1/2[T(\omega) - T(-\omega)]$$
$$= 1/2[T^{(\pi^- p)}(\omega) - T^{(\pi^+ p)}(\omega)] \qquad (18.108)$$

我们得到色散关系的一个更方便的形式. 特别是对于奇振幅 T^-, 假定不需要减除, 我们得到一个重要的关系

$$\frac{\operatorname{Re} T^-(\omega)}{\omega} = \frac{-2f^2}{\omega^2 - \omega_B^2} + \frac{1}{4\pi^2} P \int_\mu^\infty$$
$$\times \frac{d\omega' \sqrt{\omega'^2 - \mu^2}[\sigma_{\text{tot}}^{\pi^+ p}(\omega') - \sigma_{\text{tot}}^{\pi^- p}(\omega')]}{\omega'^2 - \omega^2} \qquad (18.109)$$

倘如

$$\lim_{\omega \to \infty} [\sigma_{\text{tot}}^{\pi^+ p}(\omega) - \sigma_{\text{tot}}^{\pi^- p}(\omega)] \to 0 \qquad (18.110)$$

则可以用调整一个参量去符合所有能量值的数据. 而 (18.110) 在 10Bev 范围内是近似成立的, 在该范围内这个差值低到

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = \frac{\sigma_{\text{tot}}^{\pi^- p}(\omega) - \sigma_{\text{tot}}^{\pi^+ p}(\omega)}{\sigma_{\text{tot}}^{\pi^+ p}(\omega)} \approx \frac{1.2 \times 10^{-27}\text{cm}^2}{25 \times 10^{-27}\text{cm}^2} \approx 0.05$$

实验检验了色散关系 (18.109), f^2 测得为[1)]

$$f^2 = 0.080 \pm 0.001 \qquad (18.111)$$

是理论的严格推论的最主要成功之处.

当 $\omega \to \infty$ 时这个结果对截面的行为不很敏感. 不过如果

1) U. Haber-Schaim, *Phys. Rev.* **104**, 1113 (1956); T. D. Spearman, *Nuovo. Cimento* **15**, 147(1960).

在将来在高能下实验证明(18.110)不成立，则必须作减除并且对 $T^-(\omega)/\omega(\omega^2-\omega_0^2)$ 写出色散关系，其中 $\omega_0^2 \leqslant \mu^2$ 是某个方便的减除点. 选择 $\omega_0=\mu$，于是，代替(18.109)我们得

$$\frac{\mathrm{Re}\,T^-(\omega)}{\omega}=\frac{T^-(\mu)}{\mu}+\frac{2f^2(\omega^2-\mu^2)}{(\omega^2-\omega_B^2)(\mu^2-\omega_B^2)}$$
$$-\frac{\omega^2-\mu^2}{4\pi^2}P\int_\mu^\infty \frac{d\omega'[\sigma_{\mathrm{tot}}^{\pi^+p}(\omega')-\sigma_{\mathrm{tot}}^{\pi^-p}(\omega')]}{\sqrt{\omega'^2-\mu^2}\,(\omega'^2-\omega^2)} \qquad (18.112)$$

现在色散积分在无穷远处收敛得较好，但付出的额外的代价是阈振幅 $T^-(\mu)$ 必须由测量输入.

当 $\omega\to\infty$，π^+-p 和 π^--p 的总截面趋于同一极限这个条件(18.110)被破坏时，会引导我们至一个佯谬，这个佯谬虽然尚未严格地排除，但至少从物理的观点看它是很奇怪的. 例如，让我们假定，外延现在观察到的趋势，当 $\omega\to\infty$ 时 $\sigma_{\mathrm{tot}}^{\pi^+p}$ 和 $\sigma_{\mathrm{tot}}^{\pi^-p}$ 保持有限，而且差 $\Delta\sigma$ 也有限. 由色散关系(18.112)对于 $\bar{\omega}\gg\mu$ 及 $\omega/\bar{\omega}\gg 1$，有

$$\mathrm{Re}\,T^-(\omega)\cong-\frac{\omega^2}{4\pi^2}\Delta\sigma P\int_{\bar{\omega}}^\infty\frac{d\omega'}{\omega'(\omega'^2-\omega^2)}$$
$$\sim\frac{\omega}{4\pi^2}\Delta\sigma\log\frac{\omega}{\bar{\omega}} \qquad (18.113)$$

$\bar{\omega}$ 是这样选择的，使得当 $\omega>\bar{\omega}$ 时其截面可用渐近的极限来近似. 然而，光学定理告诉我们，对于 $\omega\gg\mu$，π^+ 和 π^- 被质子散射的两种情形都有

$$\mathrm{Im}\,T(\omega)\sim\frac{\omega}{4\pi}\sigma_{\mathrm{tot}}^{\pi p}(\omega)$$

因此从(18.113)我们不得不得出结论，对于 π^+-质子弹性散射，当 $\omega\to\infty$ 时 $T(\omega)$ 的实部压倒虚部. 这个结论和物理的直观相抵触. 在几个 Bev 的范围内观察到的总截面[1]超过弹

1) S. J. Lindenbaum, *Rept. 1964 Intern. Conf. High-Energy Physics (Dubna).*

性截面，是它的 3 倍多．因此我们期望伴随着吸收到若干非弹性道(它们在大的 ω 时会增加)，入射 π 介子波的衍射散射将给向前弹性截面以一个压倒性的而且是虚的贡献．高能弹性散射实验[1]支持刚才谈到的直观图象．

由这个 Pomeranchuk[2] 最早提出的物理论证得出结论，(18.110)式，因而未减除的色散关系 (18.109) 是有效的．Weinberg 和其他的人[3]在较弱的假定下证明了这个称为 Pomeranchuk 定理的结论．对于其它的粒子-反粒子截面也可用同样的方法推导，例如

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{tot}}^{pp}(\omega)-\sigma_{\mathrm{tot}}^{\bar{p}p}(\omega)\to 0\\ \sigma_{\mathrm{tot}}^{K^+p}(\omega)-\sigma_{\mathrm{tot}}^{K^-p}(\omega)\to 0\end{aligned}\right\}\quad \omega\to\infty$$

并且看来为实验所支持．

用同样的方法可以写出偶振幅 $T^+(\omega)$ 的类似色散关系．在这种情况下截面之和 $\sigma_{\mathrm{tot}}^{\pi^-p}(\omega)+\sigma_{\mathrm{tot}}^{\pi^+p}(\omega)$ 出现在色散积分中，减除的确需要了．将 (18.107) 中的两个色散关系加在一起并在阈值处 ($\omega=\mu$) 作一减除，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,T^+(\omega)=T^+(\mu)-\frac{f^2\mu^2(\omega^2-\mu^2)}{M(\omega^2-\omega_B^2)(\mu^2-\omega_B^2)}\\ -\frac{\omega^2-\mu^2}{4\pi^2}P\int_\mu^\infty\frac{d\omega'\omega'[\sigma_{\mathrm{tot}}^{\pi^+p}(\omega')+\sigma_{\mathrm{tot}}^{\pi^-p}(\omega')]}{(\omega'^2-\omega^2)\sqrt{\omega'^2-\mu^2}}\end{aligned}\qquad(18.114)$$

实验已经证明了这个关系[4]在向前方向上对于自旋反向振幅

---

1) 同前页注 1)

2) I. Ya. Pomeranchuk *J. E. T. P (USSR)*, **34**, 725 (1958).

3) S. Weinberg, *Phys. Rev.* **124**, 2049 (1961); D. Amati, M. Fierz *and* V. Glaser, *Phys. Rev. Letters* **4**, 89 (1960); N. N. Meiman. *J. E. T. P (USSR)*, **16**, 1609(1963).

4) H. L. Anderson, W.C. Davidon, *and* U. W. Kruse, *Phys. Rev.* **100**, 339(1955), J. Hamilton, *Phys. Rev.* **110**, 1134(1958).

类似的结论也是可能的[1].

18.11 向前 π 介子-核子色散关系的公理化推导

因为色散关系(18.109)和(18.114)是可观察量之间的确定的联系，我们可以问与实验不符合时意味着什么. 要想作一个回答，我们首先回顾一下其要点. 我们曾把在量子场论中的 S 矩阵的讨论建筑在第十六章的非常普遍的假定上，特别是建筑在平移不变性和 Lorentz 不变性上. 平移不变性意味着存在一个能量-动量的四矢量 P_μ. 进一步，我们要求存在一个唯一的归一化的基态，真空态，同时存在一个很好定义了的入态或出态的完全谱. 最后我们假定理论是定域的，场服从微分方程而 P_μ 由定域密度来作出. 基本的 Bose 场对易子和 Fermi 场反对易子对于类空间隔为零，所有由场组成的"可观察量"的定域密度的对易子对于类空间隔也为零. 我们叫这样的理论具有微观因果性.

所有这些都是很基本的概念，不到最后不得已我们是不愿意放弃它们的. 不过，我们的讨论还有另一方面，在必要的情况下可以用以补救我们的理论，这就是 Feynman 图微扰展开的收敛性. 也许图形的无穷和具有与个别项不同的解析性质. 但是，这个漏洞是可以堵住的，而且向前 π-核子色散关系的一个严格的推导已由 Symanzik 和 Bogoliubov 给出[2]. 在这里我们按照他们的方法讲.

我们的出发点是对于向前散射的 S 矩阵(16.77)，从入态与出态中移去两个介子将其化为真空期待值的形式

---

1) W.C. Davidon *and* M. L. Goldberger, *Phys. Rev.* **104**, 119(1956).

2) K. Symanzik, *Phys. Rev.* **105**, 743 (1957); N. N. Bogoliubov *and* D. V. Shirkov *"Introduction to theory of quantized fields" Interscience Publishers, Inc., New York,* 1959.

$$\langle q_2 p_1 s_1 \text{ out} | q_1 p_1 s_1 \text{ in} \rangle = \delta_{q_2 q_1} - \frac{1}{Z} \int \frac{d^4x d^4y e^{+(iq_2\cdot y - iq_1\cdot x)}}{(2\pi)^3 \sqrt{4\omega_2\omega_1}}$$
$$\times (\Box_y + \mu^2)(\Box_x + \mu^2)$$
$$\times \langle p_1 s_1 \text{ out} | T(\varphi(y)\varphi^+(x)) | p_1 s_1 \text{ in} \rangle$$
$$= \delta_{q_2 q_1} - \frac{i(2\pi)^4 \delta^4(q_2 - q_1)}{(2\pi)^6 2\omega} \mathfrak{M}(q_1, p_1, s_1) \qquad (18.115)$$

其中 $\mathfrak{M}$ 像在微扰讨论 (18.95) 及 (18.99) 中定义的那样由下式给定

$$\frac{\mathfrak{M}(q,p,s)}{(2\pi)^3} = \frac{-i}{Z} \int d^4y e^{+iq\cdot y} (\Box_y + \mu^2)^2$$
$$\times \langle ps | T(\varphi(y)\varphi^\dagger(0)) | ps \rangle \qquad (18.116)$$

φ 是 π^+ 场；即 $\varphi^\dagger(x)$作用在一个态上使电荷增加 1. 在作 (18.116) 时，我们应用了理论的平移不变性将 $\varphi(x)$ 移至原点，使一个四维空间积分可以作出. 下一步是借助下列恒等式变 T 乘积为对易子，把它变成适于色散分析的因果性形式

$$T(a(t)b(0)) = \theta(t)a(t)b(0) + \theta(-t)b(0)a(t)$$
$$= \theta(t)[a(t), b(0)] + b(0)a(t) \qquad (18.117)$$

因而有

$$\frac{\mathfrak{M}(q,p,s)}{(2\pi)^3} = \frac{-i}{Z} \int d^4y e^{+iq\cdot y} (\Box_y + \mu^2)^2$$
$$\times \{\theta(y_0)\langle ps | [\varphi(y), \varphi^\dagger(0)] | ps \rangle$$
$$+ \langle ps | \varphi^\dagger(0)\varphi(y) | ps \rangle\} \qquad (18.118)$$

因为质子的稳定性，第二项为零，这可由以下看出，在场算符之间插入一组完全态集$|n\rangle$ 并完成 y 的积分

$$\int d^4y e^{+iq\cdot y} (\Box_y + \mu^2)^2 \sum_n \langle ps | \varphi^\dagger(0) | n \rangle \langle n | \varphi(y) | ps \rangle$$
$$= \sum_n (q^2 - \mu^2)^2 |\langle ps | \varphi^\dagger(0) | n \rangle|^2 (2\pi)^4 \delta^4(q + p_n - p)$$
$$(18.119)$$

因为 q_0 是正的，所以不会有态 $|n\rangle$ 使 $p = q + p_n$.

对于 q_μ 是实数及 $q^2 = \mu^2$，方程 (18.118) 和 (18.116) 在质壳上重合. 然而它们到复 $q_0 = \omega$ 平面的解析延拓是不同的，且 (18.118) 中的推迟对易子具有因果性形式，我们可利用它建造色散关系. 这个形式使人回想起本章开始的经典讨论. 在那里由要求散射波速度不能超过真空中的光速，我们建立了一个色散关系. 这里我们用要求

$$[\varphi(y),\varphi^+(0)] = 0 \qquad y^2 < 0 \tag{18.120}$$

加上因果性条件. 有了这样的限制，色散关系所要求的解析延拓现在就是可能的了.

为了看清这点，我们进入核子的静止参考系 $p = (M, 0, 0, 0)$ 并应用 $\mathfrak{M}$ 是标量及对于向前散射，它与自旋 s 无关的事实. 因此 (18.116) 中的矩阵元仅是 $|\boldsymbol{y}|^2$ 和 y_0 的函数，角度积分就可以作出. 用 (18.99) 中定义的振幅 $T(\omega)$ 来讨论，由 (18.118) 我们得

$$T(\omega) = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{M}(q,p,s) = \int_0^\infty y dy\, Y(\omega,y) \tag{18.121}$$

其中函数

$$Y(\omega,y) \equiv -\frac{(2\pi)^3 i}{Z}\frac{\sin\sqrt{\omega^2-\mu^2}y}{\sqrt{\omega^2-\mu^2}}\int_{-\infty}^{\infty} dy_0 e^{i\omega y_0}$$
$$\times(\Box_y + \mu^2)^2\theta(y_0)\langle Ms|[\varphi(y),\varphi^\dagger(0)]|Ms\rangle \tag{18.122}$$

在上半 ω 平面内解析. 它在 $\omega = i\mu$ 处没有分枝点因为

$$(1/\sqrt{z})\sin\sqrt{z}$$

依赖 z 而非 $\sqrt{z}$. 同样，类似于 Kramers-Krönig 例子，阶梯函数 $\theta(y_0)$ 保证了在 ω 移入上半平面时 y_0 积分指数下降. 如果 $\theta(y_0)$ 在 (18.122) 中的 Klein-Gordon 算符的左边，这就是

显然的，因为积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy_0\theta(y_0) = \int_0^{\infty} dy_0 \qquad (18.123)$$

仅包括非负的区间 $0 \leqslant y_0 \leqslant \infty$. 当 $\theta(y_0)$ 移至左边时 Klein-Gordon 算符里的时间导数 $\partial/\partial y_0$ 的作用是通过 $d/dy_0\theta(y_0) = = \delta(y_0)$ 引入 δ 函数及其导数. 这些附加项除了无害的场的等时 C-数对易子外别无它物，如象

$$[\varphi(\boldsymbol{y},0),\varphi^{\dagger}(0)] = 0 \quad [\dot{\varphi}(\boldsymbol{y},0),\varphi^{\dagger}(0)] = -i\delta^3(\boldsymbol{y}) \qquad (18.124)$$

且加在 (18.121) 中 $T(\omega)$ 的表达式上除 ω 的实多项式外没有更坏的什么了. 对于建造色散关系，在作解析延拓时可放心地将它们略去，此外，因果性条件 (18.120) 保证了当上半平面内 $\omega \to \infty$ 时 $Y(\omega,y)$ 的良好行为，因为如果我们在向前的光锥 $y_0 \geqslant y$ 里，(18.122) 中的指数因子是无害的. 这就是

$$\exp[i(\omega y_0 \pm \sqrt{\omega^2 - \mu^2}\, y)] \approx \{\exp[i\omega(y_0 \pm y)]\}\left[\exp\left(\mp i\frac{\mu^2}{2\omega}y\right)\right] \quad \text{对于 } |\omega| \to \infty \qquad (18.125)$$

当 $\mathrm{Im}\,\omega \geqslant 0$ 及 $y_0 \geqslant y$ 时并不引起麻烦. 虽然第二个因子对于很大的 y 可以给出一个指数上升的行为，

$$\sim \exp(+\mu^2 y/2|\omega|),$$

但可以在 (18.121) 里对 dy 的积分中引入一个收敛因子 $e^{-\varepsilon y^2}$ 而将它压低，最后再令 $\varepsilon \to 0$.

建立了 $Y(\omega,y)$ 的这些很好的性质以后，我们可以对于上半平面内的所有 ω 完成 y 积分，因之确定 $T(\omega)$ 的解析性. 我们因此可以写出色散关系

$$\mathrm{Re}\,T(\omega) = \frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega'}{\omega' - \omega}\int_0^{\infty} dy y e^{-\varepsilon y^2}\,\mathrm{Im}\,Y(\omega',y) + C_{\infty} \qquad (18.126)$$

其中∞处半圆的贡献 C_∞ 可以通过作有限数目的减除而排除掉[1].

我们还必须在完成积分之前，在(18.126)的色散积分中取极限 $\varepsilon \to 0$. 对于 $|\omega| \geqslant \mu$ 这不成为问题，因为因子

$$(\sin\sqrt{\omega^2-\mu^2}\,y)/\sqrt{\omega^2-\mu^2}$$

安全地振荡且对于跃迁振幅 $T(\omega)$ (18.121) 中的积分，对于 ω 的实的物理值是存在的. 在这个区域里，不再需要用 $e^{-\varepsilon y^2}$ 来对消 (18.125) 第二个因子对复 ω 的指数上升. 但是，在所有的色散研究的最讨厌的东西，即非物理区 $|\omega| < \mu$ 中，我们不能令 $\varepsilon \to 0$，因为那里需要压低 $\sinh\sqrt{\mu^2-\omega^2}\,y$. 我们因此期望对于 $\varepsilon \to 0$ 及 $|\omega| < \mu$ 时(18.126)中有一个激烈的行为. 另一方面，我们已从上一节的 Feynman 图分析知道吸收振幅在非物理区有一个简单的行为：除了对于在 $\omega = \mu^2/2M$ 处的一个单极点外 $\mathrm{Im}\,T(\omega)$ 为零. 在现在这种形式下如何获得这个结果呢?

回到 (18.122)，我们可以在非物理区 $|\omega| < \mu$ 里提出 $Y(\omega, y)$ 的虚数部分. 我们只限于讨论这个区域，同时象通常一样令 ω 从上半平面趋于实数轴. 在对易子里的场 φ 和 $\varphi^\dagger$ 之间插一个态的完全集合，它具有熟知的关系

$$1 = \sum_n |n\rangle\langle n|,$$

然后将场 φ 的坐标移至原点并完成 y_0 积分[2]:

$$\mathrm{Im}\,Y(\omega,y) = \mathrm{Im}\left[\frac{(2\pi)^3}{Z}\,\frac{\sinh\sqrt{\mu^2-\omega^2}\,y}{\sqrt{\mu^2-\omega^2}}\right.$$

1) 任何更坏的情况都要求 (18.122) 中的对易子在 $y \to 0$ 时有一个本性奇点以引入 ω 的一个无穷幂.

2) (18.122)中对 $\theta(y_0)$ 的时间导数仅导至 ω 的实多项式，所以不在(18.127)中出现. 因子 $(\sin p_n y)/p_n$ 是在我们对自旋 s 的取向求平均以后引入的.

$$\times \sum_n \frac{\sin p_n y}{p_n y} [(E_n - M)^2 - p_n^2 - \mu^2]^2$$
$$\times \left(\frac{|\langle n|\varphi^\dagger|Ms\rangle|^2}{\omega + M - E_n + i\varepsilon} - \frac{|\langle n|\varphi|Ms\rangle|^2}{\omega - M + E_n + i\varepsilon} \right)] \tag{18.127}$$

只有当

$$E_n = M \pm \omega \tag{18.128}$$

时分母才为零而且 $Y(\omega, y)$ 获得虚部. 然而，(18.127) 中的态 $|n\rangle$ 必须与态 $\varphi^\dagger|Ms\rangle$ 耦合，它具有核子数 +1 和电荷 +2，或者与 $\varphi|Ms\rangle$ 耦合，它具有核子数 +1 和电荷 0. 具有这些量子数和具有当 $|\omega| < \mu$ 时如 (18.128) 所要求的能量

$$E_n < M + \mu$$

的唯一的态是单中子态，它们对 (18.127) 的第二项有贡献. 在非物理区里没有来自阈在 $M + \mu$ 处的核子和 π 介子连续谱的贡献. 来自单中子态的贡献显然与上一节得到的对 $T(\omega)$ 的极点贡献有关.

如果我们企图直接从(18.127)计算非物理区的 Im $Y(\omega, y)$，则我们将被引入多少有点繁杂的计算[1]. 我们用 Bogoliubov 引进的一种技巧来避开它[2]. 对于 $\omega < \mu$, $Y(\omega, y)$ 的虚部由下式给出

$$\text{Im } Y(\omega, y) = \int d^3k f(\boldsymbol{k}, y)\delta(\omega - M + \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + M^2})$$
$$= \int d^3k F(\boldsymbol{k}, y)\delta\left(\omega - \frac{\omega^2 - |\boldsymbol{k}|^2}{2M}\right) \tag{18.129}$$

其中 $\boldsymbol{k}$ 标志中子的动量，$f(\boldsymbol{k}, y)$ 和 $F(\boldsymbol{k}, y)$ 包含所有的非本

1) K. Symanzik, 见前注. H. Lehmann, *Nuovo Cimento* **10**, 579(1958) 和 Suppl. 1, **14**, 153(1959). 如果进入非向前散射的色散关系，麻烦还会更大.

2) Bogoliubov *and* Shirkov, 见前注.

质的因子，在(18.127)中作了 $\sum_n \to \int d^3k$. Bogoliubov 观察到，通过构造一个辅助函数 $\tilde{T}(\omega)$ 和相应的 $\tilde{Y}(\omega, y)$，它具有允许建立色散关系(18.126)的一切好的性质，但在(18.129)中有

$$F(\boldsymbol{k},y) \to \tilde{F}(\boldsymbol{k},y) = \left(\omega - \frac{\omega^2 - |\boldsymbol{k}|^2}{2M}\right) F(\boldsymbol{k},y) \tag{18.130}$$

这样就可能避掉该项. 于是，由 $x\delta(x) = 0$，$\tilde{T}(\omega)$ 在非物理区内完全没有使我们烦恼的贡献.

所要的去掉中子极点的辅助函数简单地是

$$\tilde{T}(\omega) = \left(\omega - \frac{\mu^2}{2M}\right) T(\omega) \tag{18.131}$$

通过包含进附加因子，重复整个计算可以验证. 在(18.116)中我们将 $\mathfrak{M}(q,p,s)$ 乘以因子

$$\omega - \frac{\mu^2}{2M} = \omega - \frac{\omega^2 - |\boldsymbol{q}|^2}{2M}$$

可以将其代入右端的积分之中并换成作用在 $\varphi(y)$ 上的定域微分算符

$$\omega - \frac{\omega^2 + \nabla_y^2}{2M} \tag{18.132}$$

因此，对于 $\tilde{T}(\omega)$ 可重复由(18.116)到色散关系(18.126)的所有步骤，唯一的改变是作代换

$$\varphi(y) \to \left(\omega - \frac{\omega^2 + \nabla_y^2}{2M}\right) \varphi(y) \tag{18.133}$$

在从(18.127)计算吸收部分 $\mathrm{Im}\,\tilde{Y}(\omega,y)$ 时，在(18.129)中唯一的改变是出现了如(18.130)中指出的附加的因子

$$\omega - (\omega^2 - |\boldsymbol{k}|^2)/2M.$$

结果，

$$\mathrm{Im}\,\tilde{Y}(\omega,y)=0 \qquad |\omega|\leqslant\mu \tag{18.134}$$

并且没有别的麻烦，$\tilde{T}(\omega)$ 满足色散关系，显示它在有割线的 ω 平面内的解析性

$$\mathrm{Re}\,\tilde{T}(\omega)=\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{-\mu}\frac{d\omega'\,\mathrm{Im}\,\tilde{T}(\omega')}{\omega'-\omega}$$
$$+\frac{1}{\pi}P\int_{\mu}^{\infty}\frac{d\omega'\,\mathrm{Im}\,\tilde{T}(\omega')}{\omega'-\omega}+\tilde{C}_{\infty} \tag{18.135}$$

为了去掉 $\tilde{C}_{\infty}$，大概需要附加的减除去补偿掉 (18.132) 中 ω 的幂，不过这不会带来特别的困难.

因此物理振幅

$$T(\omega)\equiv\frac{\tilde{T}(\omega)}{\omega-\mu^2/2M}$$

除了在 $\omega=\mu^2/2M$ 处有一单极点外具有和 $\tilde{T}(\omega)$ 一样的解析性质. 这个极点的留数可以通过与 π-核子顶角函数相联系的矩阵元 $\langle\sqrt{k^2+M^2}\,s'|\varphi(0)|Ms\rangle$ 表示. 这个工作我们留给读者去作；其结果与我们以前对约化图形的分析一致.

到此很明显我们已回到我们在上一节的结论，但是我们已经不依赖于微扰展开的存在及收敛性了. 显然要是向前 π 介子-核子色散关系不成立将会具有很深远的后果.

18.12 应用色散关系对 π-π 散射的动力学计算

在 π 介子-核子向前散射色散关系的成功中我们有色散理论方法在某个方面最引人注目的例子：用以检验一个理论的基本结构的实验可观测量之间的一个关系. 近年来在色散理论方法的第二个方面也已作了很多努力，这就是用色散方法作为计算相互作用粒子动力学的基础. 特别是在强作用领域，那里弱耦合微扰方法没有多大价值，目前色散方法是最成

功的[1].

动力学计算领域里取得进展的代价是很强的近似，而且计算的方法仍在改变并受到批评. 很少(如果有的话)从纯理论的基础论证这些近似的有效性，而是转向突出的实验特征以诱导出近似的线索. 近似的结果给出预言，其价值只有再一次和观察相比较来判断. 甚至对于近似分析的修正项常常是没有很好的定义而且在一般情况下计算很难处理. 因此我们并不特别详细讨论这些问题. 在这里我们的目的是勾划出一些涉及到的主要概念以给出色散图象的概貌，就象是透过最乐观假定的玫瑰色眼镜看到的那样.

我们考虑具有最简单运动学的问题——即，π-π 散射——并对相移和 π 介子电磁顶角作动力学计算. 如在向前 π-核子散射色散关系中那样，散射振幅的幺正性或几率守恒、交叉对称同时还有解析性质起着关键性的作用.

如在 17.8 节中那样，提出运动学及同位旋因子，在入射 π 介子的质心系中对 π-π 散射振幅我们写出

$$S_{fi} = \delta_{fi} - \frac{i(2\pi)^4\delta^4(q_1+q_2-q_3-q_4)}{(2\pi)^6(2\omega)^2}\sum_{I=0}^{2} A_I(s,t,u)P_I \tag{18.136}$$

其中运动学情况示于图 18.32 中，$\omega = \sqrt{\boldsymbol{q}^2+\mu^2}$，同位旋投影算符 P_I 由 (17.54) 及 (17.55) 给出. 我们将集中讨论 s 反应，对于它，物理区是 $4\mu^2 \leqslant s \leqslant \infty$，且 $t,u \leqslant 0$. 如果需要，可以用交叉关系 (17.52) 及 (17.53) 来构造 t 反应及 u 反应的物理振幅.

对于固定的动量转移 t，或 u，虽然我们还没有 $A(s,t,u)$

1) C. F. Chew, "*S Matrix Theory of strong interactions*" *New York*, W. A. Benjamin, *Inc.*, *New York*, 1962; S. Mandelstam, *Rept. Progr. phys.*, **25**, 99(1962).

解析行为的普遍结果，我们却得到了 18.9 节中总结于(18.84)式的重要结果，$\tilde{A}_I(s,\cos\theta)\equiv A_I(s,t,u)$ 对于固定的 $\cos\theta$ 除了 $-\infty\leqslant s<0$ 和

$$4\mu^2\leqslant s<\infty$$

的割线外，在 s 平面内解析。此外，由此按照(18.82)及(18.85)，分波振幅

$$A_l^I(s)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}d(\cos\theta)\times P_l(\cos\theta)\hat{A}_I(s,\cos\theta) \tag{18.137}$$

具有同样引人入胜的解析性质，我们将把它和幺正性及交叉对称一起加以利用。

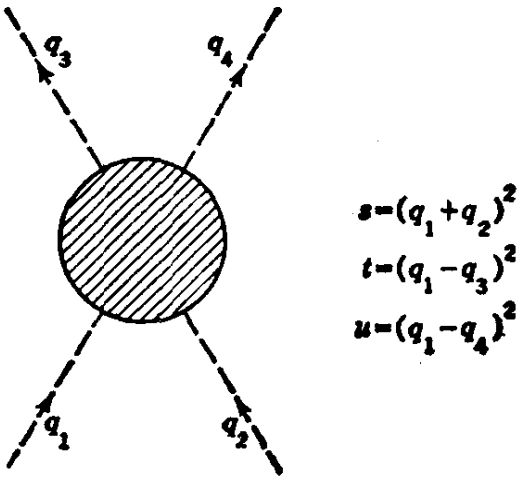


图 18.32 π-π 散射的运动学变量

为了应用幺正性条件，我们需要把在向前 π-N 色散关系中用过的(18.96)推广到向不同的可能终态的跃迁并因此得到类似(18.100)跨过割线 $s\geqslant 4\mu^2$ 的 $A_l^I(s)$ 间断量的一个关系。我们暂时引进记号

$$S_{ni}^{(+)}\equiv\langle n\ \text{out}|i\ \text{in}\rangle=\delta_{ni}-(2\pi)^4 i\delta^4(P_n-P_i)\mathscr{T}_{ni}^{(+)} \tag{18.138}$$

它联系着熟悉的 S-矩阵及跃迁振幅。如果 $|n\rangle$ 及 $|i\rangle$ 表示一个双 π 态，$\mathscr{T}_{ni}^{(+)}$ 是 π-π 弹性散射的跃迁振幅且与振幅 $\hat{A}(s,\cos\theta)$ 差一正比于 s^{-1} 的整体因子。特别是在物理区 $s\geqslant 4\mu^2$，按 Nambu 表示，$\mathscr{T}_{ni}^{(+)}$ 由 s 从上半平面趋于实轴上的割线时的极限给出。

$$\mathscr{T}_{(ni)}^{+}(s,\cos\theta)\equiv\mathscr{T}_{ni}(s+i\varepsilon,\cos\theta)$$

类似地，我们可以定义

$$S_{fn}^{(-)}\equiv\langle f\ \text{in}|n\ \text{out}\rangle=S_{nf}^{(+)*} \tag{18.139}$$

S 矩阵的幺正性条件可以写成

$$\sum_n S_{fn}^{(-)} S_{ni}^{(+)} = \delta_{fi} \tag{18.140}$$

与 (18.138) 类似，我们引入

$$S_{fn}^{(-)} = \delta_{fn} + i(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_n)\mathscr{T}_{fn}^{(-)} \tag{18.141}$$

并与 (18.140) 归并得到幺正性条件

$$\mathscr{T}_{fi}^{(+)} - \mathscr{T}_{fi}^{(-)} = -i \sum_n (2\pi)^4 \delta^4(P_n - P_i)\mathscr{T}_{fn}^{(-)} \mathscr{T}_{ni}^{(+)} \tag{18.142}$$

由 (18.139) 中给出的定义得到，$\mathscr{T}^{(-)}$ 与物理跃迁振幅 $\mathscr{T}^{(+)}$ 之间的联系如下

$$\mathscr{T}_{fi}^{(-)} = \mathscr{T}_{if}^{(+)*}$$

通过它对于 $i = f$ 时 (18.142) 化为 (18.96).

在证明了 s 面内 $\mathscr{T}_{fi}^{(-)}$ 是解析延拓到物理割线 $s \geqslant 4\mu^2$ 下面的点 $s - i\varepsilon$ 的 $\mathscr{T}_{fi}^{(+)}$ 之后可以得到一个更有用的形式。那时 (18.142) 的左边恰是跨过物理能量处割线的 $\mathscr{T}(s)$ 的间断量。通过回到第十六章中的约化程序以及重复 16.7 节中方程 (16.72) 到 (16.81) 的步骤，并每处交换入态与出态就可以证明这个结果. 主要的改变是时间流动的方向反转，所以编时乘积 $T(AB\cdots)$ 成为反编时乘积 $\bar{T}(AB\cdots)$. 例如代替 (16.78) 到 (16.80)，我们有

$$\begin{aligned}\langle \gamma p \text{ in}|\varphi(x)|\alpha \text{ out}\rangle &= \langle \gamma \text{ in}|\varphi(x)|\alpha - p \text{ out}\rangle \\ &+ \langle \gamma \text{ in}|a_{\text{in}}(p)\varphi(x) - \varphi(x)a_{\text{out}}(p)|\alpha \text{ out}\rangle \\ &= \langle \gamma \text{ in}|\varphi(x)|\alpha - p \text{ out}\rangle - \frac{i}{\sqrt{Z}}\int d^4y \\ &\times \langle \gamma \text{ in}|\bar{T}(\varphi(x)\varphi(y)|\alpha \text{ out}\rangle(\overleftarrow{\Box_y + m^2})f_p^*(y)\end{aligned} \tag{18.143}$$

其中

$$\begin{aligned}\bar{T}(\varphi(x)\varphi(y)) &\equiv \varphi(x)\varphi(y)\theta(y_0 - x_0) \\ &+ \varphi(y)\varphi(x)\theta(x_0 - y_0)\end{aligned} \tag{18.144}$$

定义了反编时乘积. 在缩并所有粒子以后重新得到结果(16.81)，仅有的改变是入→出，$T \to \bar{T}$，及

$$(i)^{m+n} \to (-i)^{m+n}.$$

为了得到给出 τ 函数按入场展开的(17.21)的类似结果，我们取(17.21)的厄米共轭，我们看到这仅仅把编时改变为反编时，同时在 $\exp\left(-i\int H_I dt\right)$ 中把 $-i$ 改为 $+i$. 于是重复第十七章的 Wick 约化就是很直接的事了，现在是对入场的反编时乘积，即，对于标量场

$$i\bar{\Delta}_F(x-y) = \langle 0|\bar{T}(\varphi_{\text{in}}(x)\varphi_{\text{in}}(y)|0\rangle$$
$$= -i\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{e^{-iq\cdot(x-y)}}{q^2-\mu^2-i\varepsilon} \qquad (18.145)$$

这个反因果传播子 $\bar{\Delta}_F(x-y)$ 与 Feynman 传播子 $\Delta_F(x-y)$ 的差别是整体符号的改变和分母中 $i\varepsilon \to -i\varepsilon$. 对于旋量及矢量场得到同样的结果，并且我们可得到结论，除了整体符号问题外，从 $\mathscr{T}^{(+)}$ 到 $\mathscr{T}^{(-)}$ 的仅有改变是传播子分母中的 $i\varepsilon$ 用 $-i\varepsilon$ 代替.

关于符号，由(18.145)对于每一个传播子我们有一个相对因子 -1 和由改变

$$T\exp\left(-i\int H_I dt\right) \to \bar{T}\exp\left(+i\int H_I dt\right) \qquad (18.146)$$

来的对每个顶角函数的相对因子 -1，最后，按(18.143)对于每一个缩并的外场有一个因子 -1，(18.143)给出算符差 $(a_{in}\varphi\cdots)-(\varphi a_{\text{out}}\cdots)$ 代替(16.79)中出现的它的负值[1]. 这个负号的集合在我们达到 Nambu 表示(18.74)时抵消了. 对于三线性耦合，当插进一个辐射修正项时顶角函数及费米

1) 还有 $\bar{T}\to T$.

子传播函数常常成对加入[1]. 每个附加的玻色子传播子引入一个附加的封闭圈. 对每一个圈动量 d^4l 的积分与 $i\varepsilon$ 一起改变了符号(因为迴路沿相反方向旋转)于是总的来说我们有偶数个符号的改变,故可略去. 因此我们只需考虑 $\mathscr{T}^{(-)}$ 相对于 $\mathscr{T}^{(+)}$ 的整体符号改变. 在 τ 函数中外传播子腿的负号抵消象 (18.143) 中那样与波函数一起引进的负号,于是给我们剩下的就是在最低阶微扰论中比较 $\mathscr{T}^{(-)}$ 和 $\mathscr{T}^{(+)}$ 的简单工作了,并且发现它们有相同的符号,就像从 (18.138) 及 (18.141) 定义得到的那样. 这些论断的仔细推敲留给读者作为练习.

因此,我们[2]已经证明了从 $\mathscr{T}^{(+)}$ 得到 $\mathscr{T}^{(-)}$,只要简单地改变 Nambu 表示 (18.74) 中的 $i\varepsilon$ 的符号,即是,在 s 平面内从割线的上方跑到割线的下方[3].建立了这个结果以后我们转到 (18.142) 并把幺正性条件应用到具有好的解析性质的同位旋振幅 $\hat{A}_I(s, \cos\theta)$. 在能量间隔 $4\mu^2 \leqslant s \leqslant 16\mu^2$ 里幺正性方程特别简单,因为仅仅双 π 态对 (18.142) 右方的态的求和 $\sum_n$ 有贡献. 这个方程于是化成加在弹性振幅上的一个非线性条件:

$$\frac{1}{(2\pi)^6 s}\left[\hat{A}_I(s+i\varepsilon, \cos\theta_{fi}) - \hat{A}_I(s-i\varepsilon, \cos\theta_{fi})\right]$$

$$= \frac{-i}{(2\pi)^{12}s^2}\int \frac{d^3k_1 d^3k_2}{2}(2\pi)^4\delta^4(q_1+q_2-k_1-k_2)$$

$$\times \hat{A}_I(s-i\varepsilon, \cos\theta_{fk})\hat{A}_I(s+i\varepsilon, \cos\theta_{ki}) \quad (18.147)$$

其中我们用到同位旋投影算符的封闭性质 (17.56). 在对态

1) 对于 $\lambda\varphi^4$ 理论得到相似的结果,因为为了计算负号,该理论可以看作具有三线性耦合的极限.

2) "我们"包括读者.

3) 注意在导出这个结果时没有用到时间反演不变性.

的求和换为积分时，由于具动量 k_1 和 k_2 的两个 π 介子的全同性，(18.147) 中的那个 1/2 的因子是必须的．在质心系中

$$k_1 + k_2 = (\sqrt{s}, 0)$$

及

$$\cos\theta_{fi} = \frac{\boldsymbol{q}_3 \cdot \boldsymbol{q}_1}{|\boldsymbol{q}_3||\boldsymbol{q}_1|} \quad \cos\theta_{fk} = \frac{\boldsymbol{q}_3 \cdot \boldsymbol{k}_1}{|\boldsymbol{q}_3||\boldsymbol{k}_1|}$$

$$\cos\theta_{ki} = \frac{\boldsymbol{q}_1 \cdot \boldsymbol{k}_1}{|\boldsymbol{q}_1||\boldsymbol{k}_1|}$$

右边继续化简为一个角度积分

$$\mathrm{Im}\,\hat{A}_I(s, \cos\theta_{fi}) = -\frac{1}{128\pi^2}\sqrt{\frac{s-4\mu^2}{s}}\int d\Omega_k \times \hat{A}_I^*(s, \cos\theta_{fk})\hat{A}_I(s, \cos\theta_{ki}) \tag{18.148}$$

其中理解为 s 由上半平面趋于实数轴．用分波振幅 (18.137) 表示，幺正性条件是

$$\mathrm{Im}\,A_l^I(s) = -\frac{1}{32\pi}\sqrt{\frac{s-4\mu^2}{s}}\,|A_l^I(s)|^2 \tag{18.149}$$

所以在这个弹性区里 $A_l^I(s)$ 具有形式

$$A_l^I(s) = -32\pi\sqrt{\frac{s}{s-4\mu^2}}\{\exp[i\delta_l^I(s)]\}\sin\delta_l^I(s) \tag{18.150}$$

其相移 δ_l^I 是实数

由于 (18.142) 中 $\sum_n$ 里非弹性道的存在，对于四 π 介子阈值 $s = 16\mu^2$ 以上的能量，幺正性条件不再是这样简单，一般写成

$$\mathrm{Im}\,A_l^I(s) = -\frac{1}{32\pi}\sqrt{\frac{s-4\mu^2}{s}}\,|A_l^I(s)|^2 f_l^I(s) \tag{18.151}$$

其中 $f_l^I(s)$ 是一个实的比例因子，对于 $s \leqslant 16\mu^2$ 它等于 1，在

高能时它是所有角动量 l 的弹性及非弹性道的贡献与弹性道的贡献之比：它可以写成

$$f_l^I(s) = \frac{\sigma_{\text{tot}}^{l,I}(s)}{\sigma_{\text{el}}^{l,I}(s)} = 1 + \frac{\sigma_{\text{incl}}^{l,I}(s)}{\sigma_{\text{el}}^{l,I}(s)} \qquad (18.152)$$

用于强作用的色散方法的精神是将散射振幅用函数来参数化，这些函数是解析的并且在感兴趣的变量范围内是缓慢变化的，其目的是以这个方法建造一个等效的区间理论，它尽最大的可能承受整个理论的解析性，幺正性和交叉对称等性质。为了阐明这个办法，我们构造邻近阈值的 π-π 散射振幅的一个这样的参数化(图 18.33)。我们知道 $A_l^I(s)$ 在 $s = 4\mu^2$ 处有一个分枝点和一个决定于幺正性的跨过割线 $4\mu^2 \leqslant s \leqslant \infty$ 的间断量。如果我们用没有这个分枝点及割线的函数将 $A_l^I(s)$ 参数化，我们就有可能预言在 $s = 4\mu^2$ 的附近的 $A_l^I(s)$ 的主要能量依赖关系。

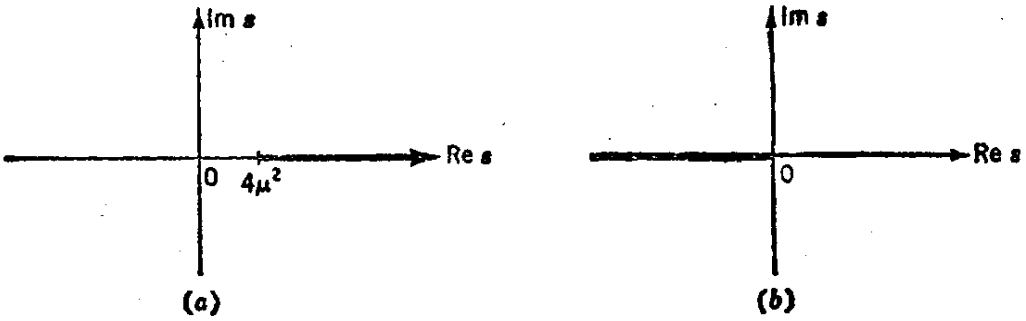


图 18.33 在 π-π 散射中分波振幅的解析性质；(a)示明 $D_l^I(s)$ 的右切割和 (b) $N_l^I(s)$ 的左切割

势散射的 Fredholm 理论提出这样一种用分子及分母函数之比的参数化

$$\frac{1}{32\pi} A_l^I(s) = \frac{N_l^I(s)}{D_l^I(s)} \qquad (18.153)$$

分子函数除了对于左割线 $-\infty \leqslant s \leqslant 0$ 外在 s 割线平面内是解析的且对于实数 $s > 0$ 是实数，同时 $D_l^I(s)$，类似于

Fredholm 行列式[1]，除了右割线 $4\mu^2 \leqslant s \leqslant \infty$ 外是解析的且对于实数 $s < 4\mu^2$ 是实数. 对于一个给定的或假定的 $N_l^I(s)$，$D_l^I(s)$ 的结构由幺正性条件加上它的已知的解析性质决定. 按照 (18.153)

$$\frac{1}{32\pi}\operatorname{Im} A_l^I(s) = -\frac{N_l^I(s)}{|D_l^I(s)|^2}\operatorname{Im} D_l^I(s) \qquad s \geqslant 4\mu^2 \tag{18.154}$$

及通过 (18.151)

$$\operatorname{Im} D_l^I(s) = \sqrt{\frac{s-4\mu^2}{s}}\, N_l^I(s) f_l^I(s) \qquad s \geqslant 4\mu^2 \tag{18.155}$$

$D_l^I(s)$ 的解析性质以及上面关于它跨过割线间断量的表达式使我们可以写出一个色散关系，其减除的数目决定于我们对于 $N_l^I(s)$ 和 $f_l^I(s)$ 的渐近行为的假定. 在非相对论的势散射问题里，当作用趋于零时 $N_l^I(s)$ 的类似函数趋于 Born 近似，$D_l^I(s)$ 趋于 1；而在这个情形里当 $s \to \infty$ 时，$N_l^I(s) \to 0$ 和 $D_l^I \to 1$. 如果我们为了简单起见，在这里作同样的假定. 同时还假定

$$f_l^I(s) \xrightarrow[s\to\infty]{} \text{const}$$

我们可以写出

$$D_l^I(s) = 1 + \frac{1}{\pi}\int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{ds'}{s'-s-i\varepsilon}\sqrt{\frac{s'-4\mu^2}{s'}}\, N_l^I(s') f_l^I(s') \tag{18.156}$$

---

1) R. Jost *and* A. Pais, *Phys. Rev.* **82**, 840 (1951) D 被称作 Jost 函数. 下列定义保证了这种分解的存在

$$D_l^I = \exp\left[-\frac{1}{\pi}\int \frac{\delta_l^I(s')ds'}{s'-s-i\varepsilon}\right]$$

这样

$$A_l^I D_l^I = N_l^I$$

对于 $0 < s < 16\mu^2$，即，低于非弹性阈值是实的.

其中归一化 $D_l^I(\infty)=1$ 是任意的，$N_l^I(s)$ 的归一化也是一样．将 (18.156) 代入 (18.153) 我们有分波振幅的参数化

$$\frac{1}{32\pi}A_l^I(s)=\frac{N_l^I(s)}{1+\frac{1}{\pi}\int_{4\mu^2}^{\infty}ds'\sqrt{\frac{s'-4\mu^2}{s'}}\frac{N_l^I(s')\not\!f_l^I(s')}{s'-s-i\varepsilon}} \tag{18.157}$$

考虑到这个形式是在关于 $A_l^I(s)$ 的渐近行为和 (18.156) 的简单形式的乐观的假定前提下取的，我们必须相当保留．将 A_l^I 写成 (18.157) 中的形式的优点是它自动是幺正的并具有正确的解析性质．此外，我们引进的猜测和近似是加在分子函数 N_l^I 身上，它在 $s=4\mu^2$ 的感兴趣的附近具有完整的解析行为．作为第一个粗略的猜测，可以通过对介子线之间的相互作用，即对产生散射的力，作最低级微扰理论来估计 $N_l^I(s)$．于是当耦合趋于零时，$A_l^I(s)\to 32\pi N_l^I(s)$ 并且是实数．希望对于强一些的耦合，通过加进分母函数的修正以保证幺正性而使近似得到明显的改进．用在 (18.150) 中定义的相移来解 (18.157)，我们有

$$\sqrt{\frac{s-4\mu^2}{s}}\cot\delta_l^I(s)$$

$$=-N_l^I(s)^{-1}\left[1+\frac{1}{\pi}P\int_{4\mu^2}^{\infty}ds'\sqrt{\frac{s'-4\mu^2}{s'}}\frac{N_l^I(s')\not\!f_l^I(s')}{s'-s}\right] \tag{18.158}$$

因为 $N_l^I(s)$ 仅有左边割线，所以可能将 (18.158) 右方在

$$s=4\mu^2$$

附近用幂级数展开[1)]，其收敛半径为 $4\mu^2$，因之得到推广的等效区域公式．

1) 参看问题 10.

为了作得好一点，我们必须在 $N_l^I(s)$ 本身的计算上作更多的努力，沿左边割线有大量奇点，对应于各种可能的约化图形和 Landau 奇异性．不过，恰如右边割线的低能部分对应图 18.34*a* 中的简单一维约化图形一样，左边割线的低能部分只是由于图 18.34*b* 所示它们的交叉对应部分的存在．应用适当解析延拓了的 t 道和 u 道里弹性幺正性，有可能得到相应于这些奇异性的间断量．这间断量仍通过弹性 π-π 散射表示；如果认为单是这些奇点(图 18.34) 在决定 $A_l^I(s)$ 的性质中起决定性的作用，那就得到求解 $A_l^I(s)$ 的积分方程的封闭集．对这个方程的封闭集已作过广泛的研究，但只保留图 18.34 中的那些奇点的贡献这种近似不是没有疑问的．左边割线的较远部分的结构，特别是其渐近行为仍然是一个谜．该贡献

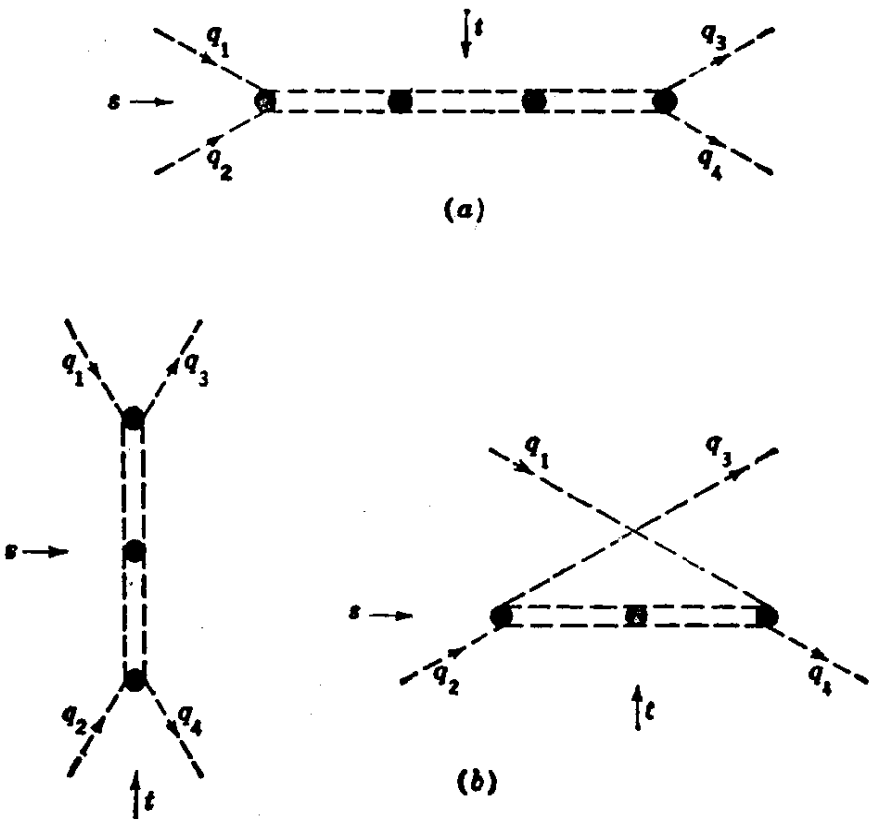


图 18.34　π-π 散射中一维约化图形

来自非物理区的深部，在那里直观和数学都难于应用.

(18.157) 中给出的 $A_l^I(s)$ 的参数化的一个另外的后果是，束缚态和/或共振态的存在是由分母函数 $D_l^I(s)$ 的行为显示的. 如果分子函数的符号和大小使得在 $s = s_R > 4\mu^2$ 处 $\mathrm{Re}D_l^I(s_R)$ 有零点，则相移 δ_l^I 越过 90°，于是出现一个共振态. 类似地，对于 $s < 4\mu^2$，$D_l^I(s)$ 为零导至 $A_l^I(s)$ 内的一个极点，它对应一个束缚态. 显然希望在 π-π 问题中避开它，而获得一个与 ρ 介子相联系的 P 波共振.

18.13 π 介子电磁结构

在上面的精神下，我们可以将 π 介子电磁结构的计算同 π 介子散射联系起来[1]. 如我们在 18.8 节中所讨论的那样，对于 $q^2 < 16\mu^2$，只有象图 18.35 所示那样的约化图对 $F_\pi(q^2)$ 在 $q^2 < 16\mu^2$ 的奇异性有贡献. 它们是 π 介子电磁顶角本身与 π-π 散射的乘积. 我们用幺正性条件把它变换为对计算有利的数学形式.

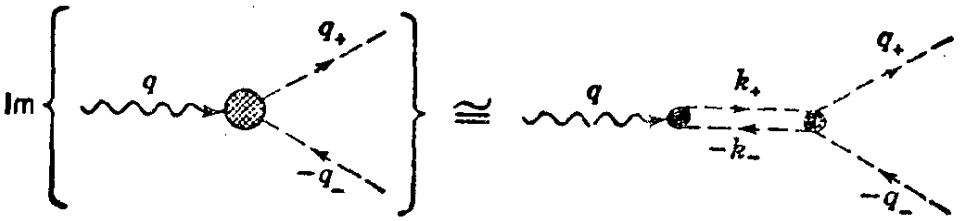


图 18.35 π 介子电磁顶角

回想一下 18.8 节的内容，π 介子顶角 $F_\pi(q^2)$ 具有在构造向前或分波散射振幅时有本质意义的解析性. 实际上，$F_\pi(q^2)$ 没有左边割线，它唯一的奇异性是从 $4\mu^2$ 延伸到∞的割线. 因

1) P. Federbush, M. Goldberger, *and* S. Treiman, *Phys. Rev.*, **112**, 642 (1958); W. Frazer *and* J. Fulco, *Phys. Rev.*, **117**, 1609 (1960).

此我们可以重复由 (18.36) 导至 (18.142) 的幺正性讨论，现在应用到具有如图 18.35 所示的运动学的顶角上去

$$V_\mu^{(+)} = \langle \pi^+(q_+)\pi^-(q_-)\text{out}|j_\mu(q)|0\rangle$$
$$= \frac{-i(2\pi)^4\delta^4(q-q_+-q_-)}{(2\pi)^3\sqrt{4\omega_+\omega_-}}(q_+-q_-)_\mu F_\pi(q^2+i\varepsilon) \tag{18.159}$$

其中[1]$\Box A_\mu(x) = ej_\mu(x)$和 $j_\mu(q)$ 是 $j_\mu(x)$的 Fourier 变换. 割线下的顶角计算给出为

$$V_\mu^{(-)} = \langle \pi^+(q_+)\pi^-(q_-)\text{in}|j_\mu(q)|0\rangle$$
$$= +\frac{i(2\pi)^4\delta^4(q-q_+-q_-)}{(2\pi)^3\sqrt{4\omega_+\omega_-}}(q_+-q_-)_\mu F_\pi(q^2-i\varepsilon) \tag{18.160}$$

幺正性条件成为

$$\langle f\,\text{out}|j_\mu|0\rangle - \langle f\,\text{in}|j_\mu|0\rangle$$
$$= -\sum_n [\langle f\,\text{in}|n\,\text{out}\rangle - \delta_{fn}]\langle n\,\text{out}|j_\mu|0\rangle \tag{18.161}$$

如果将 $\sum_n$ 限制为只对 π^+-π^- 态并进到两个 π 介子的质心系，我们由定义 (18.141) 及 (18.159) 得到

$$2(q_+-q_-)^\mu \,\text{Im}\, F_\pi(q^2)$$
$$= -i\int d^3k_+d^3k_-(2\pi)^4\delta^4(q-k_+-k_-)$$
$$\times(-i)\mathscr{T}_{fn}^{(-)}(k_+-k_-)^\mu F_\pi(q^2+i\varepsilon) \tag{18.162}$$

我们看到在 (18.162) 中的角度积分中只留下 P 波 π^+-π^- 散射振幅. 由 π 介子的 Bose 统计得到，振幅是纯碎的 $I=1$. 于是我们对 $\mathscr{T}$ 的展开 (18.136) 中选出 $I=1$ 的贡献，并且如果我们没有忘记由 (17.54) 而来的

$$\langle \pi^+\pi^-|P_1|\pi^+\pi^-\rangle = \frac{1}{2}$$

1) 到电磁耦合的最低阶，如现在的情形那样，我们可以令 $e=e_0$ 和 $Z_3=1$.

则在用类空矢量 $e^\mu=(0,\boldsymbol{\varepsilon})$ 缩并 V_μ 后我们得

$$\cos\theta\,\mathrm{Im}\,F_\pi(q^2)=-\sqrt{\frac{q^2-4\mu^2}{q^2}}\int\frac{d\Omega_n}{128\pi^2}\hat{A}_1(q^2-i\varepsilon,\cos\theta_{fn})\times\cos\theta_n F_\pi(q^2+i\varepsilon)\qquad(18.163)$$

其中

$$\frac{\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{q}_+}{|\boldsymbol{\varepsilon}||\boldsymbol{q}_+|}=\cos\theta\quad\frac{\boldsymbol{q}_+\cdot\boldsymbol{k}_+}{|\boldsymbol{q}_+||\boldsymbol{k}_+|}=\cos\theta_{fn}$$

$$\frac{\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{k}_+}{|\boldsymbol{\varepsilon}||\boldsymbol{k}_+|}=\cos\theta_n$$

方程(18.163)在角度积分后简化为

$$\mathrm{Im}\,F_\pi(q^2)=-\frac{1}{32\pi}\sqrt{\frac{q^2-4\mu^2}{q^2}}A_1^1(q^2-i\varepsilon)F_\pi(q^2+i\varepsilon)$$

$$=\{\exp[-i\delta_1^1(q^2)]\}\sin\delta_1^1(q^2)F_\pi(q^2+i\varepsilon)\qquad(18.164)$$

这个简单关系是所期望的图 18.35 的数学表达式.由(18.164)得到(因为 $\mathrm{Im}\,F_\pi(q^2)$ 是实数) $F_\pi(q^2+i\varepsilon)$ 具有和 P 波 π-π 散射振幅相同的位相,这个结果在势散射中[1]称作末态定理.

现在间断量公式(18.164)与色散关系(18.72)一起可用于决定 $F_\pi(q^2)$. 这个问题的解决[2]实质上集中于建造一个具有下列性质的函数:

1. $F_\pi(q^2)$ 在 q^2 割平面上解析,只有右边割线

$$\infty\geqslant q^2\geqslant 4\mu^2.$$

2. 对于 $q^2\geqslant 4\mu^2$, $F_\pi(q^2)$ 具有位相 $\exp(i\delta_1^1)$.

3. 对于实的 $q^2<4\mu^2$, $F_\pi(q^2)$ 是实的.

4. $F_\pi(0)=1$

---

1) 例如,参看, M. L. Goldberger *and* K. M. Watson, *"Collision theory", John wiley & Sons, Inc., New York*, 1964.

2) R. Omnes, *Nuovo Cimento*, **8**, 316 (1958); N. I. Muskhelishvili, *"Singular integral equations" Erven P. Noordhoff, NV. Groningen, Netherlands*, 1953.

我们已经在上一节构造了一个满足性质1到3的函数，即 $1/D_1^1(q^2)$. 所以 $F_\pi(q^2)$ 的一个解由 $D_1^1(q^2)$ 给出，差一个实系数的多项式 $P(q^2)$:

$$F_\pi(q^2) = \frac{D_1^1(0)P(q^2)}{D_1^1(q^2)P(0)} = \frac{P(q^2)}{P(0)} \times \left[\frac{1 + \frac{1}{\pi}\int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{ds'}{s'} \sqrt{\frac{s'-4\mu^2}{s'}} N_1^1(s')}{1 + \frac{1}{\pi}\int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{ds'}{s'-q^2} \sqrt{\frac{s'-4\mu^2}{s'}} N_1^1(s')} \right] \quad (18.165)$$

解的一个更实用的形式来自用相移 $\delta_1^1(q^2)$ 直接解 F_π，这个解与 $N_1^1(s)$ 的计算相联系的近似无关. 我们看到，因为

$$\frac{F_\pi(q^2+i\varepsilon)}{F_\pi(q^2-i\varepsilon)} = \exp[2i\delta_1^1(q^2)] \quad (18.166)$$

$\log F_\pi(q^2)$ 的间断量恰好是 $\delta_1^1(q^2)$. 这启发我们定义函数

$$P(q^2) = F_\pi(q^2)\exp\left[-\frac{q^2}{\pi}\int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{ds'\delta_1^1(s')}{s'(s'-q^2)}\right] \quad (18.167)$$

最坏情形下 P 具有和 $F_\pi(q^2)$ 一样的解析性质. 然而对于 $q^2 > 4\mu^2$, P 是实的，因此是整函数. 因为我们不考虑在∞的本性奇异性，象在(18.165)中那样 $P(q^2)$ 只能是一个多项式[1]. 因此

$$F_\pi(q^2) = \frac{P(q^2)}{P(0)}\exp\left[\frac{q^2}{\pi}\int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{ds'\delta_1^1(s')}{s'(s'-q^2)}\right] \quad (18.168)$$

倘如　　对于 $q^2 \to \infty$　　$\dfrac{\delta_1^1(q^2)}{q^2} \to 0$

我们再强调一下导至(18.165)或等价地(18.168)的整个计算的近似性质. 对幺正性条件的较高质量

$$q^2 \geqslant 16\mu^2$$

---

1) L. Castillejo, R. Dalitz, *and* F. Dyson, *Phys. Rev.*, **101**, 543(1956).

的贡献被忽略了.仍和 π-π 散射的计算一样,这实质是一个等效区域理论.倘如允许 $P(q^2)$ 具有一条分枝割线 $16\mu^2 \leqslant q^2 \leqslant \infty$,则方程 (18.168) 也可当作严格的. $F_\pi(q^2)$ 因之可用相移[1] $\delta_1^1(q^2)$ 和一个未知函数 $P(q^2)$ 参数化, $P(q^2)$ 的能量依赖性希望在小的 $q^2 \leqslant 16\mu^2$ 区域里是小的. 虽然我们不能为这个假定的有效性辩护,但它仍然是有用的,因为它简单和容易被实验检验. 特别是 (18.168),或者更明显一点 (18.165) 预言在 $F_\pi(q^2)$ 里,对于能量值 $\sqrt{q^2}$ 接近于观察到的 p 波 π-π 共振态或 ρ 介子的能量时有一个峰. 急切期待着对这个问题的实验检验.

同时,曾沿着上述的路线作过广泛的研究,考察了核子电磁形状因子的行为. 在这里展示了基本方法以后, 我们介绍读者去看这个方面的专门参考文献[2].

问　　题

1. 证明对于一个一般的 Feynman 图,纲络行列式 Δ 可写成

$$\Delta = \sum_s \prod_{j \in s} \alpha_j$$

其中求和遍及 k 根内线 j 的全部集合 s (k 是需要积分的内动量 d^4l 的数目)这些集合具有这样的性质,从图形移去线 $j \in s$ 仍留下一个连通的图形. 这表明除非所有 $\alpha_j = 0$, 否则 $\Delta > 0$.

2. 证明,对于一个 Feynman 图在Nambu 表示 (18.74) 中

$$\xi_1 = \sum_{s'} \frac{1}{\Delta} \prod_{i \in s'} \alpha_i$$

---

1) 对于 $q^2 \geqslant 16\mu^2$ 可以以不同的方式定义 δ_1^1, 例如

$$A = \frac{2i\delta - 1}{2i} \quad 或 \quad A = \eta e^{i\delta} \sin\delta \quad \eta \text{ 是实的}$$

这是一个爱好问题.

2) 例如 S. D. Drell *and* F. Zachariasen "*Electromagnetic structure of nucleons*" *Oxford University Press, Fair Lawn, N. J.*, 1961.

其中 s' 遍及 $k+1$ 根内线的全部集合（Δ 由 $k\alpha_i$ 的乘积组成），这些集合具有这样的性质，从图形移掉线 $i\in s'$ 时留下两个且仅有两个不连通的图形，一个包含外线 p_1 和 p_2，另一个包含 p_3 和 p_4。如（18.75）后面肯定的那样，这证明 $\xi_1>0$。

3.证明，到 π-π 散射的微扰论的所有阶，对于 $s<4\mu^2$，$t<4\mu^2$，和 $u<4\mu^2$，$A(s,t)$ 是实的，因之对于 $0<t<4\mu^2$ 确定 s 的固定 t 色散关系。

4.将（18.91）和（18.93）之间的论证精确化，这论证确定到微扰论的所有阶的向前 π-N 散射振幅的解析性质。

5.导出 π^+-p 散射的向前自旋反向色散关系。如何测量其吸收部分？

6.到微扰论的所有阶，导出 K^+-p 向前散射色散关系。除了物理散射振幅及总截面外，要实验地检验这个关系，还必须知道什么？

7.考虑核子 β 衰变的轴矢流 $\mathcal{J}_\mu$［方程（10.151）］。假定它的散度满足未减除的色散关系，给出 Goldberger-Treiman 关系（10.161）成立的论证。

8.当弱作用略去时，不借助微扰论，证明对于 $q^2<0$，π 介子电磁形状因子 $F_\pi(q^2)$ 是实的。

9.对于 Σ 的电磁形状因子找出分枝割线的起点。

10.用 $N_l^I(s)$ 的色散关系，叙述并证明（18.158）下面讨论的等效区域公式。将 N_0^I 用一个极点近似，计算 $A_0^I(s)$ 和等效区域参数。

第十九章 重 整 化

19.1 引言

在第八章的低阶计算中，我们查明了在 Feynman 图的自能和顶角部分中出现的发散，并给出了一个程序把它们分离到电子的电荷和质量重整化中去．到 e^2 阶，观测的电子电荷和质量与引入运动方程的参量之差是无穷大．但是，利用重整化以后的电荷与质量，物理振幅计算的可观测预言却是有限的．

如同在第八章的计算中我们已经看到的，在任何一个相互作用场的物理理论中，重整化都是必须的．而作了重整化之后，S 矩阵应是有限的，这点也是任何一个可接受的理论所必须的．

我们假定 S 矩阵的微扰展开式是收敛的，因而要求：在按相互作用强度所作的幂级数展开式中 S 在每一阶都是有限的．重要性并不亚于此的另外一个问题是验证重整化了的微扰展开式的收敛性．这个问题将不在这里讨论．我们把注意力限于证明：在 τ 函数和 S 矩阵展开式中的所有依赖于截断的项可以集中到重整化常数中去．我们将在微扰论的框架中工作，运用第十七章发展的 Feynman 图规则以及第十六章讲过的 Z_2 和 Z_3 的普遍性质．更具体些，我们只限于讨论电子和光子的量子电动力学．

我们的方案分为三部分[1]．首先，我们讨论图形的拓扑

1) 这个方案，它的方程和可重整性判据是 Dyson 和 Salam首先给出的。见 F. J. Dyson, *Phys. Rev.*, **75**, 486, 1736 (1949) 和 A. Salam, *Phys. Rev.*, **82**, 217,**84**, 426, (1951).

学，并引入对一般的 Feynman 图进行分类和分析时所必须的一组术语．其次，我们给出重整化一个普遍的 n 阶图形的规则．最后，运用数学归纳法我们证明：这些规则足以从 S 矩阵展开式中消除所有的发散量[1]（即依赖于截断的项）．

19.2 正规自能和顶角部分，电子-正电子核

首先，我们把在上册中到 e^2 阶已经遇到过的重整化常数 Z_1，Z_2，Z_3 和 δm 与 Feynman 图的关系推广到相互作用的所有阶．忆及 Z_2 和 δm 是与图 19.1a 所示的自能图形相联系的，Z_3 出现在真空极化图 19.1b 的计算中，以及 Z_1 出现在顶角部分图 19.1c 之中．所有这些数直到 e^2 阶都是对数发散的；在第八章中计算过它们．

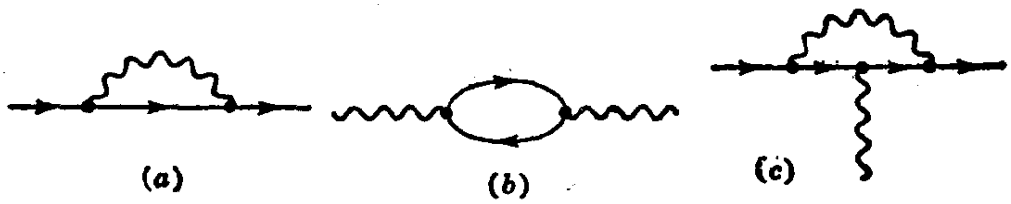


图 19.1 (a) 电子自能，(b) 真空极化和 (c) 顶角部分的二阶图形

先看图 19.1a，我们从第十七章的微扰论讨论知道，它是电子传播子

$$iS'_F(x-x') \equiv \langle 0|T(\psi(x)\bar{\psi}(x'))|0\rangle \qquad (19.1)$$

展开式中的一项．我们以图 19.2 中的斑图表示电子传播子．S'_F 是所有连通图形之和，它们有一根电子线在 x' 进入，在 x 离开，并且没有外光子线；它具有在第十六章中广泛讨论过的普遍结构．组成 S'_F 的图形可以唯一地分



图 19.2 全电子传播子

1) 红外发散除外，对它我们认为已经了解了．见 D. Yennie, S. Frautschi, *and* H. Suura, *Ann. Phys.* (*N. Y.*), **13**, 379, (1961).

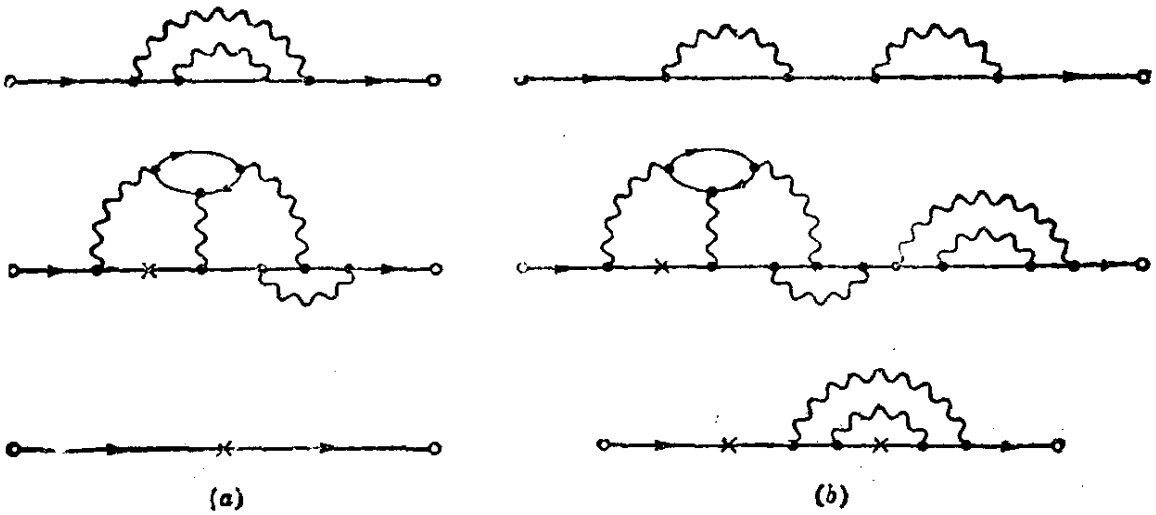


图 19.3 (*a*) 正规和 (*b*) 非正规电子自能图的例子

为不同的两类：**正规**图形和**非正规**图形．正规图形不能够靠只去掉一根费米子线而分离成两个不连接部分，而非正规图形则可以．它们相应地示于图 19.3*a* 和 *b* 中．

变换到动量空间并去掉外腿的因子

$$iS_F(p) = i(\not{p} - m)^{-1},$$

我们以 $-i\Sigma(p)$ 代表动量为 p 的一个电子的所有正规图形[1]之和，于是 $S'_F(p)$ 可以通过 $\Sigma(p)$ 表示为

$$iS'_F(p) = iS_F(p) + iS_F(p)[-i\Sigma(p)]iS_F(p) + iS_F(p)[-i\Sigma(p)]iS_F(p)[-i\Sigma(p)]iS_F(p) + \cdots \tag{19.2}$$

用图形表示，这个方程示于图 19.4 中，它可以形式地求和而给出方程

$$S'_F(p) = \frac{1}{\not{p} - m - \Sigma(p)} \tag{19.3}$$

1) $\Sigma(p)$ 的定义由于质量抵消项 δm 的计入，不同于在第八章中所用的定义．在上册中 S'_F 是按裸传播子 $(\not{p} - m_0)^{-1}$ 展开的，而这里我们出发的近似是物理质量为 m 的入粒子传播子 $(\not{p} - m)^{-1}$．



$$iS'_F = iS_F + iS_F[-i\Sigma]iS_F + iS_F[-i\Sigma]iS_F[-i\Sigma]iS_F + \cdots$$

图 19.4 (19.2)式中电子传播子是作为正规自能插入之和的级数的图形表示

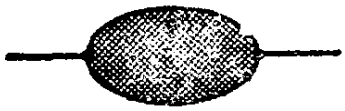


图 19.5 电子正规自能部分，或质量算符 Σ



图 19.6 全光子传播子

$\Sigma(p)$ 是图 19.5 所示的去掉了外线的所有正规电子自能图形之和，它又叫作电子的质量算符.

我们用同样的办法讨论光子传播子. 图 19.1*b* 给出全光子传播子

$$iD'_F(x-x')^{\mu\nu} = \langle 0|T(A^\mu(x)A^\nu(x'))|0\rangle + \text{规范项和 Coulomb 项} \tag{19.4}$$

的微扰展开式中 e^2 阶的项，全光子传播子由具有两条外光子线而没有外电子线的所有连通图形之和构成. D'_F 由图 19.6 所示的斑图表示. 把不能够通过去掉一根单光子线而使图形变成不连通的图形定义为正规图形. 我们仍然把正规图形挑出. 某些正规图形示于图 19.7*a* 中，非正规图形示于图 19.7*b*. 去掉了外光子线的所有正规图形之和定义为 $ie_0^2\Pi_{\mu\nu}$，即正规光子自能部分. $\Pi_{\mu\nu}$ 是 $\Sigma(p)$的类比；它又称为真空极化张量，曾在第八章中涉及到. 类似于电子的 (19.2) 式，我们可以把全光子传播子通过 $\Pi_{\mu\nu}$ 表示，如图 19.8 所示

$$iD'_F(q)^{\mu\nu} = iD_F(q)^{\mu\nu} + iD_F^{\mu\lambda}[ie_0^2\Pi_{\lambda\sigma}]iD_F^{\sigma\nu} + \cdots$$

$$= -\frac{ig^{\mu\nu}}{q^2} - \frac{ie_0^2}{q^2}[i\Pi^{\mu\nu}]\frac{(-i)}{q^2} - \frac{ie_0^4}{q^2}[i\Pi^{\mu\nu}]\frac{(-i)}{q^2}$$

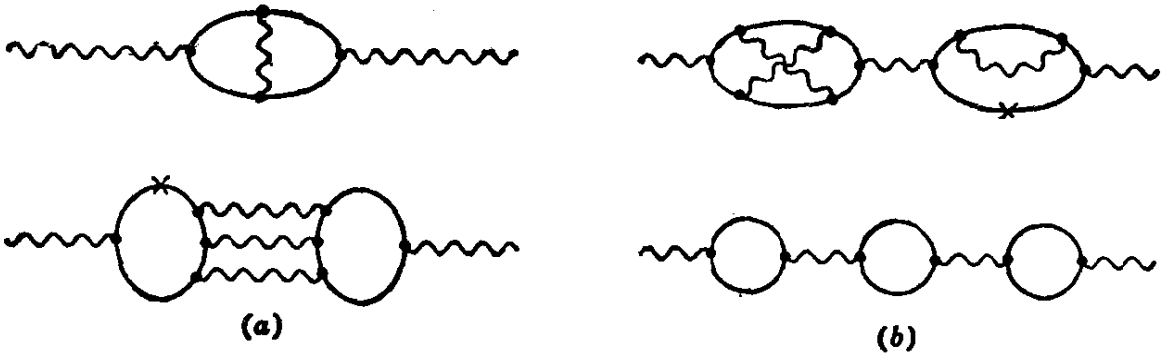


图 19.7 (*a*) 正规和 (*b*) 非正规光子自能图的例子

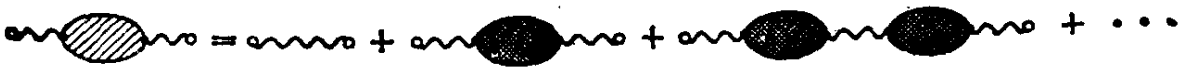


图 19.8 (19.5) 式光子传播子作为正规自能部分 $\Pi_{\mu\nu}$ 之和的级数，$\Pi_{\mu\nu}$ 又叫作真空极化张量

$$\times [i\,\Pi^{\nu}_{\lambda}]\frac{(-i)}{q^2} + \cdots \qquad (19.5)$$

在 (16.172) 式中研究过的 $D'_F(q)^{\mu\nu}$ 的普遍形式含有带 η_μ 的项，η_μ 是表征参考系的类时矢量，我们是在该参考系中进行横向规范量子化的. 这里我们借助于 §17.9 中的讨论，在写出自由光子传播子时略去比例于 $q_\mu\eta_\nu$，$\eta_\mu\eta_\nu$，$q_\mu q_\nu$ 的项，因为我们知道它们对 S 矩阵元没有贡献. 形式上把 (19.5) 的级数求和，我们写出

$$D'_F(q)_{\mu\nu} = -\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{e_0^2}{q^2}\Pi_{\mu\lambda}(q)D'_F(q)^{\lambda}_{\nu}$$

和

$$[q^2 g_{\mu\lambda} - e_0^2\Pi_{\mu\lambda}(q)]D'_F(q)^{\lambda}_{\nu} = -g_{\mu\nu} \qquad (19.6)$$

它类似于 (19.3).

在第八章的二阶重整化讨论中遇到的最后一个要素是与 Z_1 相联系的顶角修正，即图 19.1*c*. 我们把有两根外费米子线和一个外光子线的所有正规连通图之和定义为正规顶角

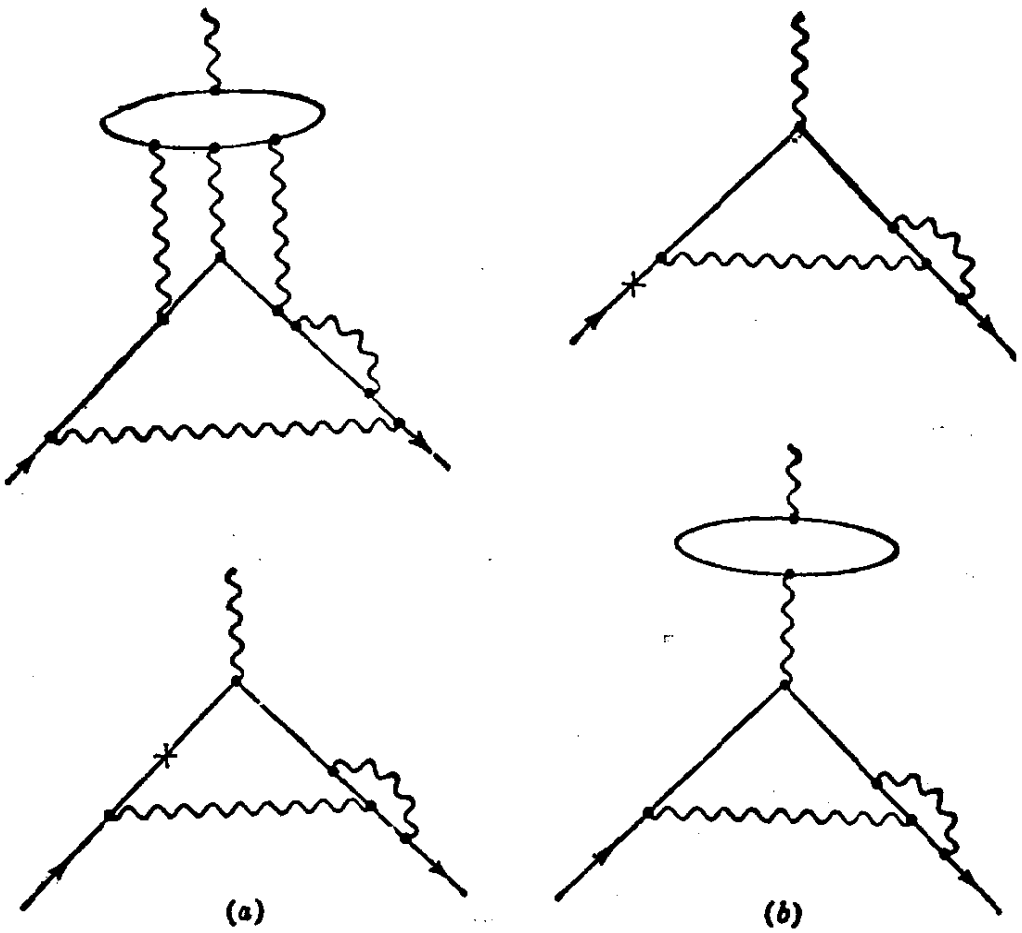


图 19.9 (*a*) 正规和 (*b*) 非正规顶角图形的例子

部分，所谓正规图是指不会由于去掉一根单电子线或单光子线而成为不连通的图形. 正规和非正规顶角图形的例子分别示于图 19.9*a* 和 *b* 中. 由它们可明显看出，在外线中插入电子和光子自能就把正规顶角部分变成了非正规的. 我们用 $\Gamma_\mu(p',p)$ 表示动量空间中所有正规顶角图形之和，这里 p' 和 p 分别为出来和进去的电子线的四动量. 在定义 $\Gamma_\mu(p',p)$ 时去掉了外费米子线与光子线的传播子以及 $-ie_0$ 因子，这因子来自第十七章中我们对微扰展开式给出的规则. 于是，正规顶角图形就这样来归一，以使在最低阶 $\Gamma_\mu(p',p)=\gamma_\mu$；普遍地我们写成

$$\Gamma_\mu(p',p) = \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p',p) \qquad (19.7)$$

为完成重整化方案，我们需要另外一个量，它在第八章的二阶计算中没有明显出现．这个量是电子-正电子散射核，或简称为核．在动量空间把它表示为

$$K(p,p',q)_{\alpha\beta,\gamma\delta}$$

并以图 19.10 的斑图代表．K 由具有两条外电子线和两条外正电子线的图形构成；p 和 p' 代表初始正电子和电子动量，q 代表来自电子的动量传递，α，β，γ 和 δ 是相应的旋量分量，如图 19.10 所示．具有上述性质的所有图形都包含在 K 的定义之中，但有两类图形例外，它们是外线 (p,α) 和 (p',β) 与图形的一部分 A 连接，同时另两根外线 $(p-q,\gamma)$ 和 $(p'-q,\delta)$ 与另一部分 B 连接，并且 A 和 B 是只由一根光子线或一个电子-正电子对连接的图形．我们从 K 中略去这些图形．图

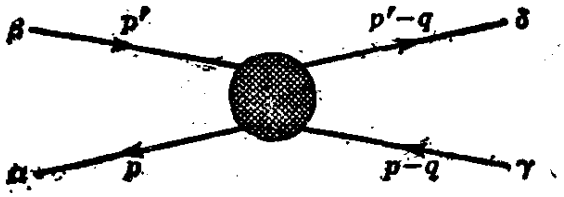


图 19.10　电子-正电子散射核 K

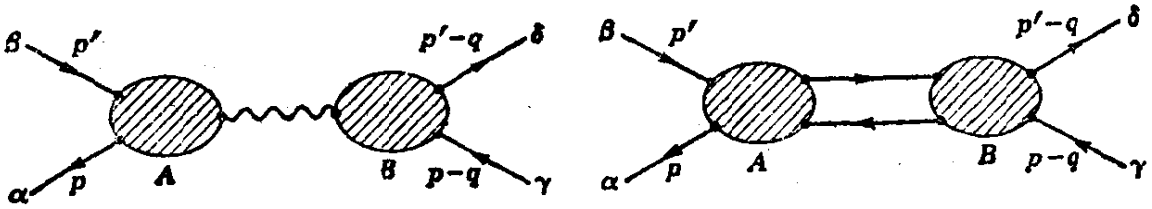


图 19.11　从核 K 中排除的两类图形

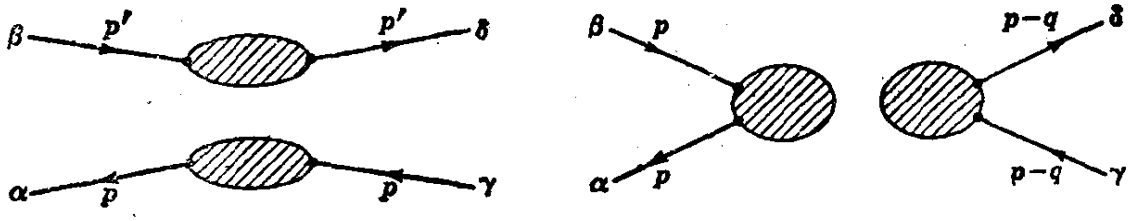


图 19.12　从核 K 中排除了的不连接自能部分

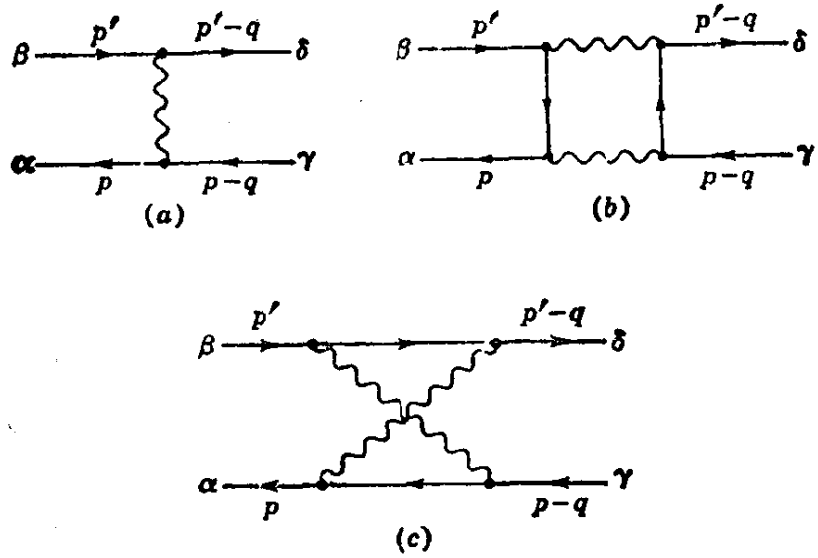


图 19.13　包含在核 K 中的图形的例子

19.11 显示了由这些限制而从 K 中排除了的图形．此外还排除了在图 19.12 中所示的图形，它们由两个不连接的自能部分所组成．在图 19.13 中给出了包含在核 K 中的图形的例子，图 19.13a 给出对 K 的最低阶贡献；它是

$$K^{(0)}(p,p',q)_{\alpha\beta,\gamma\delta} = \frac{ie_0^2}{q^2}(\gamma_\mu)_{\alpha\gamma}(\gamma^\mu)_{\delta\beta} \qquad (19.8)$$

与 Σ，$\Pi_{\mu\nu}$ 和 Γ_μ 的定义一样，外费米子线的传播子，包括在外腿上的所有自能插入，在定义 K 时都去掉了．

19.3　自能和顶角部分的积分方程

用在上节中给出的 Σ，$\Pi_{\mu\nu}$，和 Γ_μ 的定义，我们可以着手写下把这些量相互联系起来的积分方程．例如，电子正规自能部分满足图 19.14 所示的积分方程．

$$-i\Sigma(p) = (-ie_0)^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}iD'_F(k)_{\mu\nu}\Gamma^\mu(p,p-k)$$
$$\times iS'_F(p-k)\gamma^\nu \qquad (19.9)$$

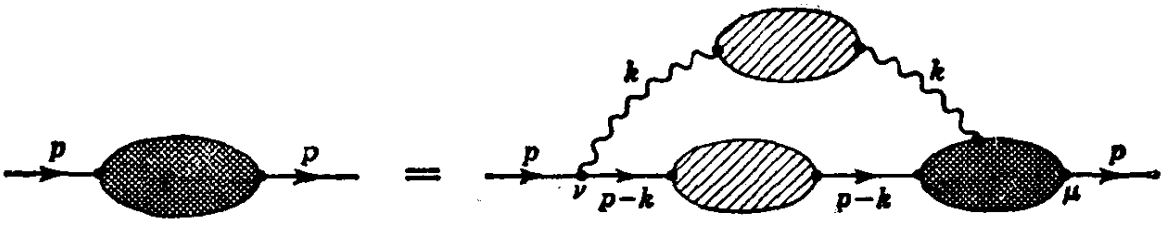


图 19.14　电子正规自能部分 $\Sigma(p)$ 的积分方程(19.9)的图形表示

为了确信这个方程是正确的，我们注意：在顶点 ν 的第一次相互作用后，出现一个电子和光子，它们必须以光子最后被吸收的所有可能的方式相互作用．在考虑到电子和光子的完全传播后，这正好是正规顶角部分的定义．注意，在 ν 点放上完全顶角 Γ_ν 是不对的；例如，那样一来，图 19.15 中的图形就会被计算两次．

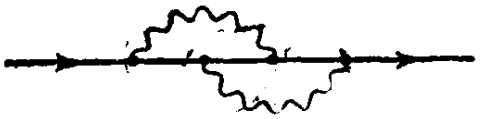


图 19.15　对 $\Sigma(p)$ 的贡献

正规光子自能部分 $\Pi_{\mu\nu}(q)$ 满足与 (19.9) 类似的方程，它示于图 19.16 中

$$ie_0^2\Pi_{\mu\nu}(q) = (-ie_0)^2(-1)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\gamma_\mu iS'_F(k)$$
$$\times\Gamma_\nu(k,k+q)iS'_F(k+q) \qquad (19.10)$$

如果知道了 Γ_μ，那么方程(19.9) 和 (19.10)，加上对 S'_F 和 D'_F 的 (19.3) 和(19.6)，就给出一个封闭的非线性积分方程组，而它们，例如说，可以按 e_0^2 的幂迭代求解．借助于图 19.17 所示的另一积分方程

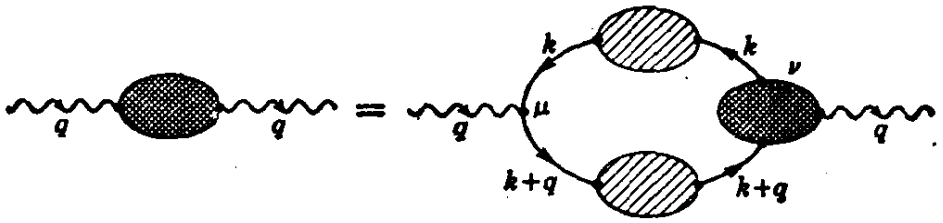


图 19.16　光子正规自能部分 $\Pi_{\mu\nu}(q)$ 的方程 (19.10)

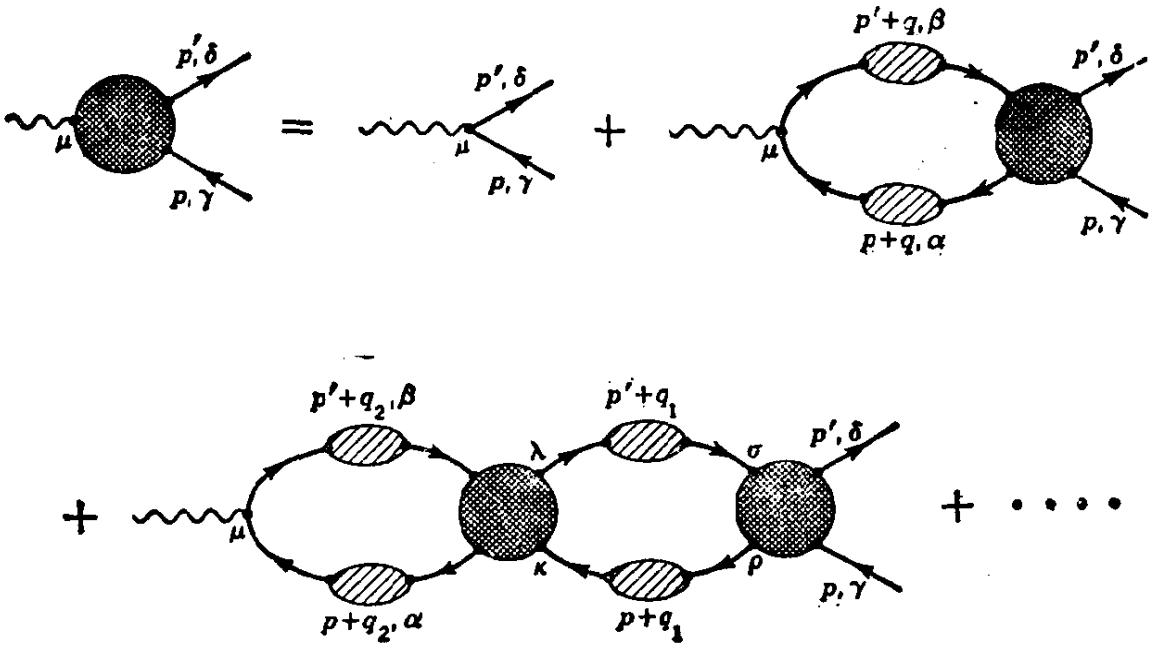


图 19.17　顶角部分 Γ_μ 在方程 (19.11) 中通过核 K 展开的级数

$$\Gamma_\mu(p',p)_{\delta\gamma} = (\gamma_\mu)_{\delta\gamma} + \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} [iS'_F(p'+q)\gamma_\mu iS'_F(p+q)]_{\beta\alpha} \times K_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p+q,p'+q,q) + \int \frac{d^4q_1 d^4q_2}{(2\pi)^8} \times [iS'_F(p'+q_2)\gamma_\mu iS'_F(p+q_2)]_{\beta\alpha} K_{\alpha\beta,\kappa\lambda}(p+q_2,p' + q_2,q_2-q_1) \times iS'_F(p'+q_1)_{\sigma\lambda} iS'_F(p+q_1)_{\kappa\rho} K_{\rho\sigma,\gamma\delta}(p + q_1,p'+q_1,q_1) + \cdots \tag{19.11}$$

我们可以把 Γ_μ 用电子-正电子核 K 表示出来. 我们常把(19.11)简写为

$$\Gamma = \gamma - \int \gamma S'_F S'_F K + \iint \gamma S'_F S'_F K S'_F S'_F K + \cdots$$

为确信(19.11)是正确的,我们注意到,在外光子被吸收后马上有电子-正电子对出现,它们必须以所有可能的方式散射以给出完全顶角 Γ. 这散射可以发生于具有 0, 1, 2, … 个不

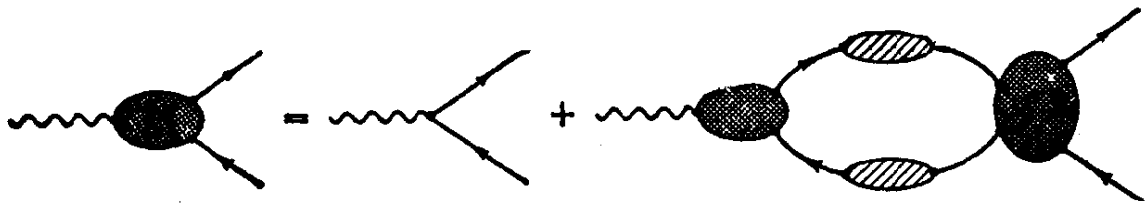


图 19.18　顶角部分的积分方程 (19.12)

同的虚中间电子-正电子对态的情形，它给出级数[1] (19.11). 在非相对论性势散射理论中玻恩级数求和成为一个封闭的积分方程，用同样的方式，这里的级数也可以形式上求和. 这样我们得到积分方程(图 19.18)

$$\Gamma_\mu(p',p)_{\delta\tau} = (\gamma_\mu)_{\delta\tau} + \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \times [iS'_F(p'+q)\Gamma_\mu(p'+q,p+q)iS'_F(p+q)]_{\beta\alpha} \times K_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p+q,p'+q,q) \tag{19.12}$$

或简写为

$$\Gamma = \gamma - \int \Gamma S'_F S'_F K$$

读者在这里会感到奇怪，写下这些积分方程究竟完成了些什么. 从进行实际计算的观点来说，我们完成的东西很少；只是把不知道的量 S'_F, D'_F 和 Γ_μ 通过另外的也是未知的量——核 K 表达了出来. 但是，从重整化理论的观点看，通过 K 表示 S'_F, D'_F 和 Γ_μ 是相当有用的. 原因是 K 中的发散**仅仅**来

---

1) 这级数类似于在第六章中对格林函数所发展的多重散射级数. 联系完全电子-正电子(质壳外)散射振幅 T 和核 K 的相应方程为

$$-iT = K + \int KiS'_F iS'_F K + \int KiS'_F iS'_F KiS'_F iS'_F K + \cdots$$

$$= K + \int KiS'_F iS'_F(-iT)$$

它就是 Bethe-Salpeter 方程. 它是两体 Schrödinger 方程积分形式的相对论类比，iK 是势 V 的类比. E. Salpeter *and* H. Bethe, *Phys. Rev.*, **84**, 1232 (1951).

自内线中的自能或顶角插入. 如果没有这种插入，K 将是有限的；以后我们将详细讨论这点. 于是，在计算 K 中包含的重整化问题要相对地容易些，并且涉及 Σ，$\Pi_{\mu\nu}$ 和 Γ_μ 中发散的更困难问题可以从它们之间以及与 K 相互联系的积分方程的角度进行讨论.

19.4 τ 函数和核 K 的积分方程；骨架图形

在 §§19.2，19.3 中引入的重整化方案的核心要素是 Σ，

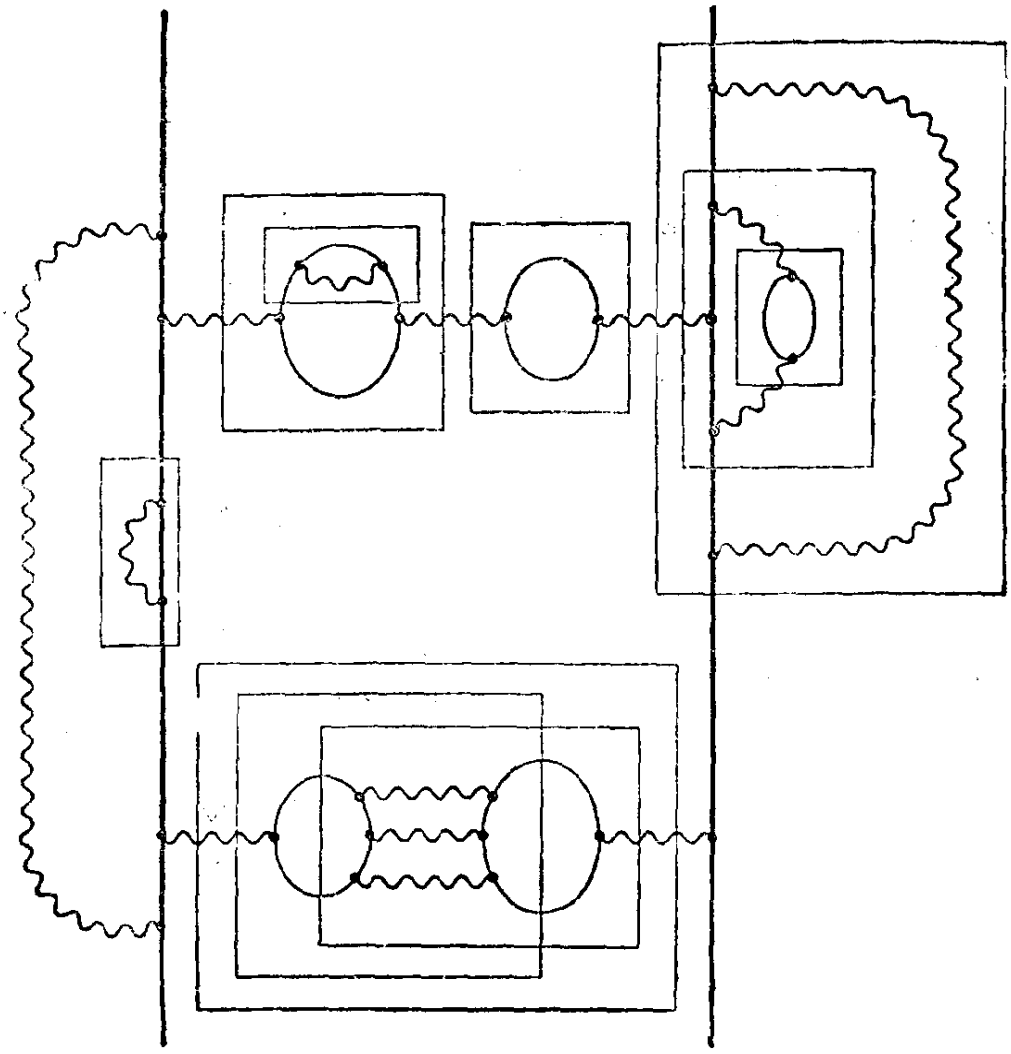


图 19.19 绕每一个自能和顶角插入画上一个方框的一个图形

$\Pi_{\mu\nu}$，和 Γ_μ. 理论中所有其它的量，诸如 S 矩阵元、τ 函数，特别是，核 K 将通过这三者，或更明确地，通过 S'_F，D'_F 和 Γ_μ 来表示. 但是，我们不能象上节那样，对 τ 和 K 写下封闭的积分方程，而只能在图形展开式中把那些只是自能和顶角插入不同的项集合到一起；正是这些插入关系到使理论成为有限的问题.

首先，我们考虑构成核 K 的那些图形，并且在每一个图形中把自能和顶角插入分离出来. 作到这点的一个简单办法是绕着每一个这样的插入画一个方框；图 19.19 给出这个办法的一个例子. 在这个例子中我们看到，这些方框或者是分离的，或者是套迭的(即一个方框完全包含在另一个之中). 只有一个例外：在自能插入中，方框可能重迭. 实际上这个拓扑性质对所有图形都成立；除开对于自能部分中的顶角插入外，包括顶角和自能插入的方框总可以画得使它们不重迭. 对这个论断的证明，我们推迟到 §19.5 给出.

作为这个不重迭性质的一个后果，我们可以用唯一的方式把构成 K 的每一个图形 $\mathcal{G}$ 与另个称为 $\mathcal{G}$ 的骨架图的 $\mathcal{G}$ 相联系. 把我们所画的各方框与方框内所有的东西一道收缩成点，亦即去掉所有顶角和自能插入，就得到了骨架. 于是图 19.20 就是图 19.19 的骨架图. 反过来，从 K 的骨架图出发，加上肌肉部分，即加上顶角和自能辐射修正，我们可以作出构成 K 的任何一个图形.

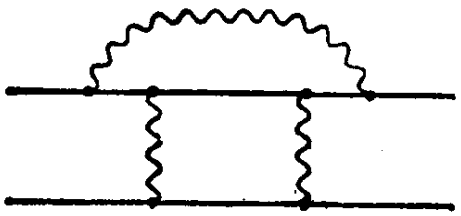


图 19.20 图 19.19 的骨架图

如果一个普通的 Feynman 图 $\mathcal{G}$ 就是它自己的骨架图 ($\mathcal{G} = \mathcal{S}$)，我们就用 $K^{\mathcal{G}}(p,p',q;S_F,D_F,\gamma_\mu,e_0)$ 表示它对核的贡献，我们可以把全核 K 写成仅只是骨架图之和，只不过在

每一根电子线、光子线和顶角上相应地换上完全的 S'_F, D'_F 和 Γ_μ:

$$K_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p,p',q) = \sum_{\text{骨架}\mathcal{G}} K^{\mathcal{G}}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p,p',q;S'_F,D'_F,\Gamma_\mu,e_0)$$
$$= (-ie_0)^2\Gamma^\mu_{\alpha\gamma}(p,p-q)iD'_F(q)_{\mu\nu}\Gamma^\nu_{\delta\beta}(p'-q,p') + \cdots \tag{19.13}$$

方程 (19.13) 用图表示于图 19.21 中; 注意, 图 19.22 的骨架图没有包含在K的展开式中. 普遍地, 按在 §19.2 中给出的

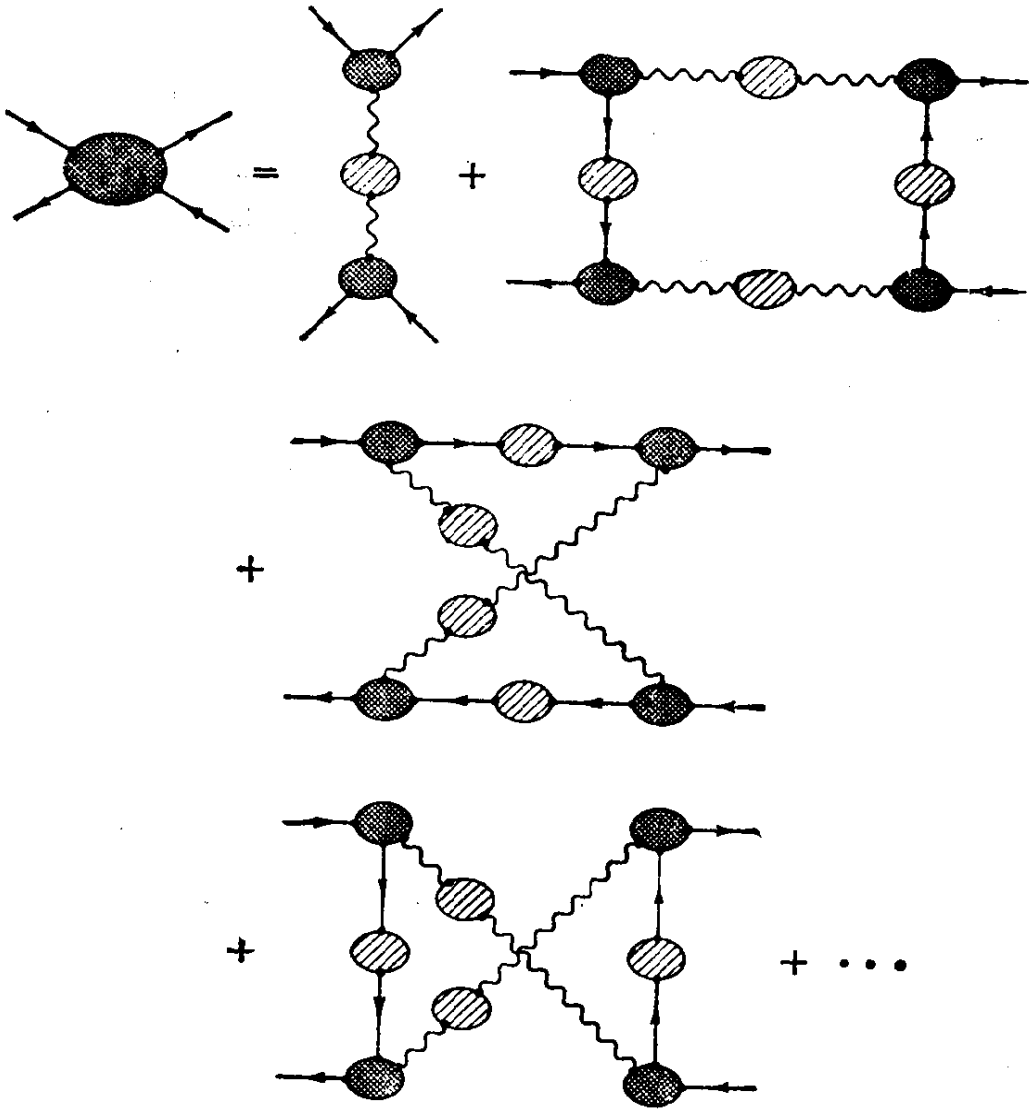


图 19.21 核K的级数展开, (19.13) 式

K的定义，从(19.13)的展开式中略去了那样一些骨架图，它们能分成仅由单一光子线或一个电子-正电子对所连接起来的两个部分.

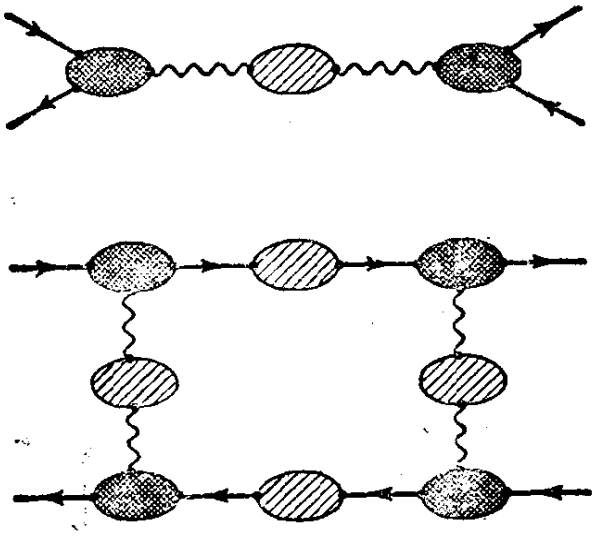


图 19.22　在图 19.21K的级数中未曾计入的骨架图形

为验证(19.13)的正确性，我们注意，构成K的任何一个Feynman图$\mathcal{G}$在骨架展开式中出现且仅只出现一次，因为(1)$\mathcal{G}$的骨架$\mathcal{S}$是唯一地确定的，(2)在$K^{\mathcal{G}}$的图形展开式中有一个且仅有一个图形对应于$\mathcal{G}$. 后一论断是由在K的图形中确定顶角和自能插入的方式是唯一的而得到的推论.

普遍的τ函数(除开传播子和自能部分)的骨架展开式可以用对核K一样的方法作出. 我们(在动量空间)写出有m个外费米子腿和n个外光子的τ函数

$$\tau(p_1\cdots p_m,q_1\cdots q_n)_{\alpha_1\cdots\alpha_m,\mu_1\cdots\mu_n}$$
$$=\sum_{\text{骨架}\mathcal{S}}\tau^{\mathcal{S}}(p_1\cdots p_m,q_1\cdots q_n;S_F',D_F',\Gamma,e_0)_{\alpha_1\cdots\alpha_m,\mu_1\cdots\mu_n}$$
$$m+n>3 \qquad (19.14)$$

这里$\tau^{\mathcal{S}}(p_1\cdots p_m,q_1\cdots q_n;S_F,D_F,\Gamma,e_0)$是对应于骨架$\mathcal{S}$的Feynman图对$\tau$的贡献.

对顶角Γ_μ，骨架展开式也可以写成[1]

$$\Gamma_\mu(p',p)=\gamma_\mu+\sum_{\text{骨架}\mathcal{S}}\Lambda_\mu^{\mathcal{S}}(p',p;S_F',D_F',\Gamma,e_0) \qquad (19.15)$$

1) 这里理解为：在绕内部顶角部分画方框时，绕整个顶角不要再画方框.

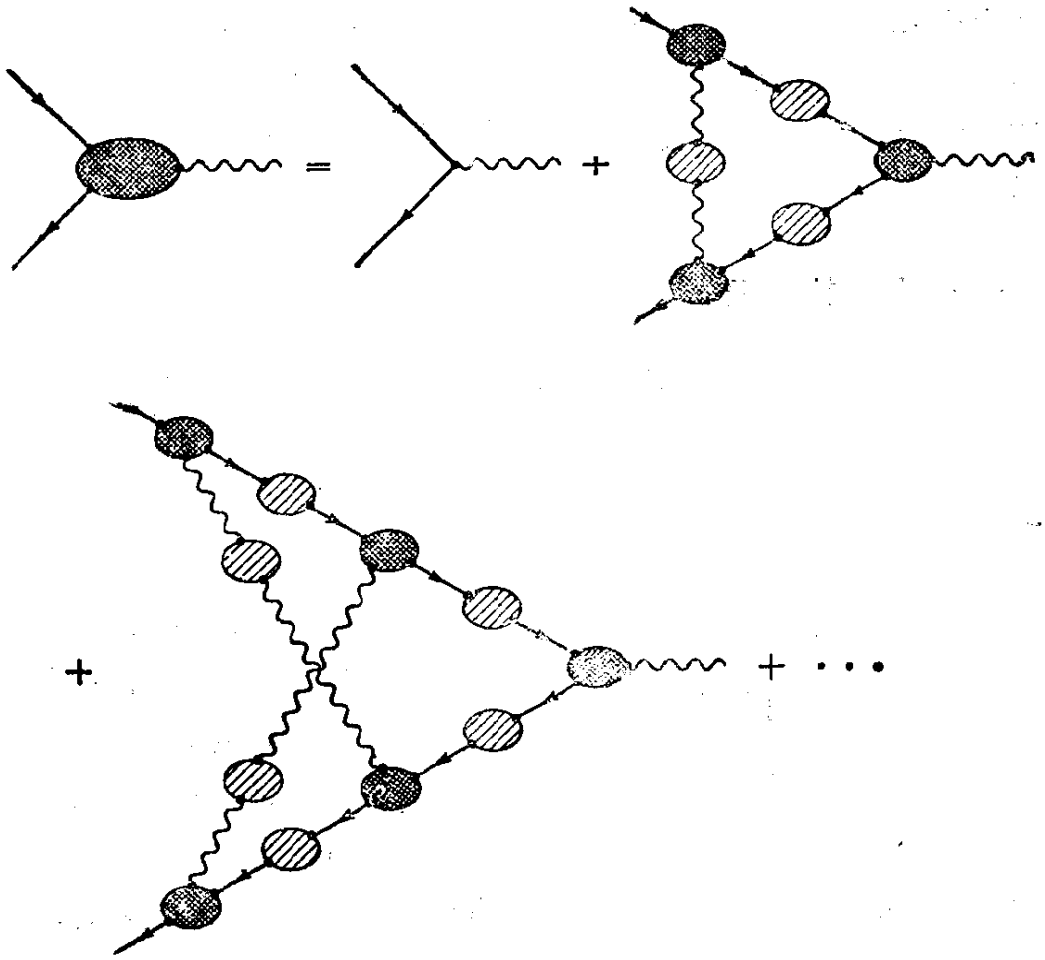


图 19.23　顶角 Γ_μ 的方程 (19.15) 的级数

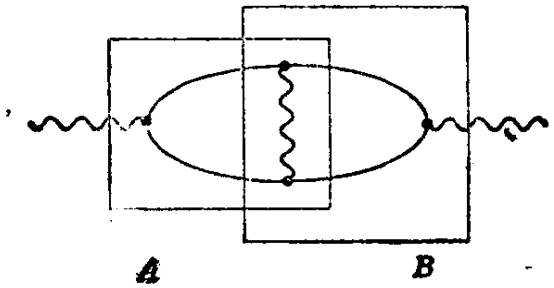


图 19.24　具有重迭顶角修正的自能插入的例子

(19.15) 式示于图 19.23 之中.

对于自能部分,由于重迭问题,骨架展开式没有用处. 例如,对图 19.24,辐射修正既可以看成是在 A,又可以看成是在

B（但不是二者同时）的顶角修正. 那么，如何从骨架图[1]构造完全自能部分就有任意性. 实际上，对 $\Pi_{\mu\nu}$ 的积分方程(19.10)就消除了这个任意性，因此，我们不需要继续讨论这个问题.

19.5 一个拓扑定理

在前一节中判定顶角和自能插入时我们说：绕它们的方框可以这样画：除了自能部分中的顶角插入这一情形外，框壁总不重迭. 绕自能插入的方框可以画得或者是分离的，或者是套迭的，但决不重迭，我们认为这是不言自明的. 在证明顶角插入仅只在自能插入中才重迭这点之前，

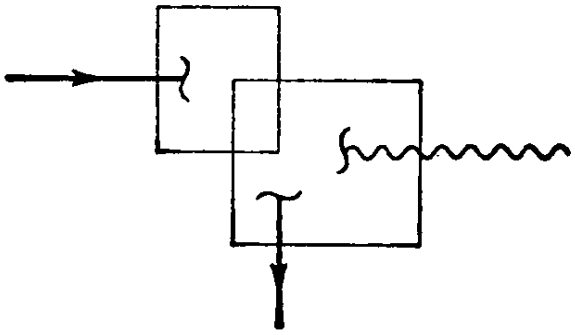


图 19.25 顶角插入的例子

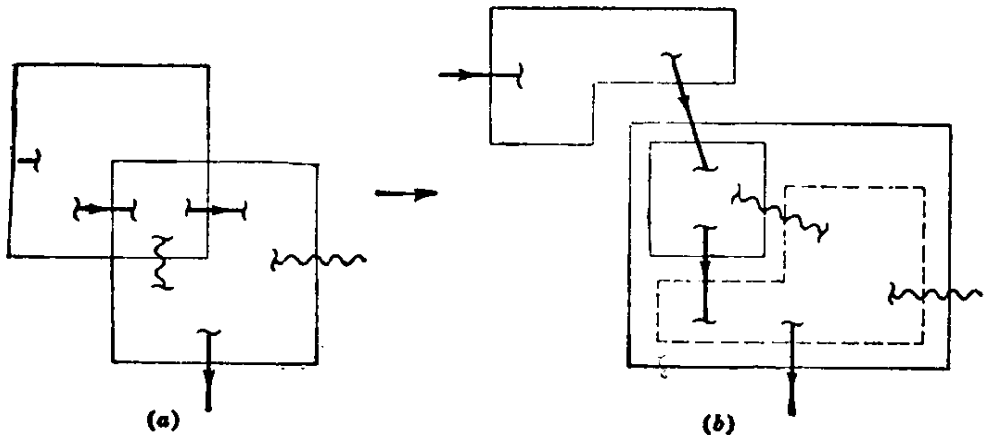


图 19.26 在 (a) 的顶角部分内部企图画出重迭的顶角插入，但它可化为 (b) 中的不相连接的自能和顶角插入. 交换光子和入射电子线导致相同的结果

1) 二阶图形是 $\Pi_{\mu\nu}$ 和 Σ 仅有的骨架图.

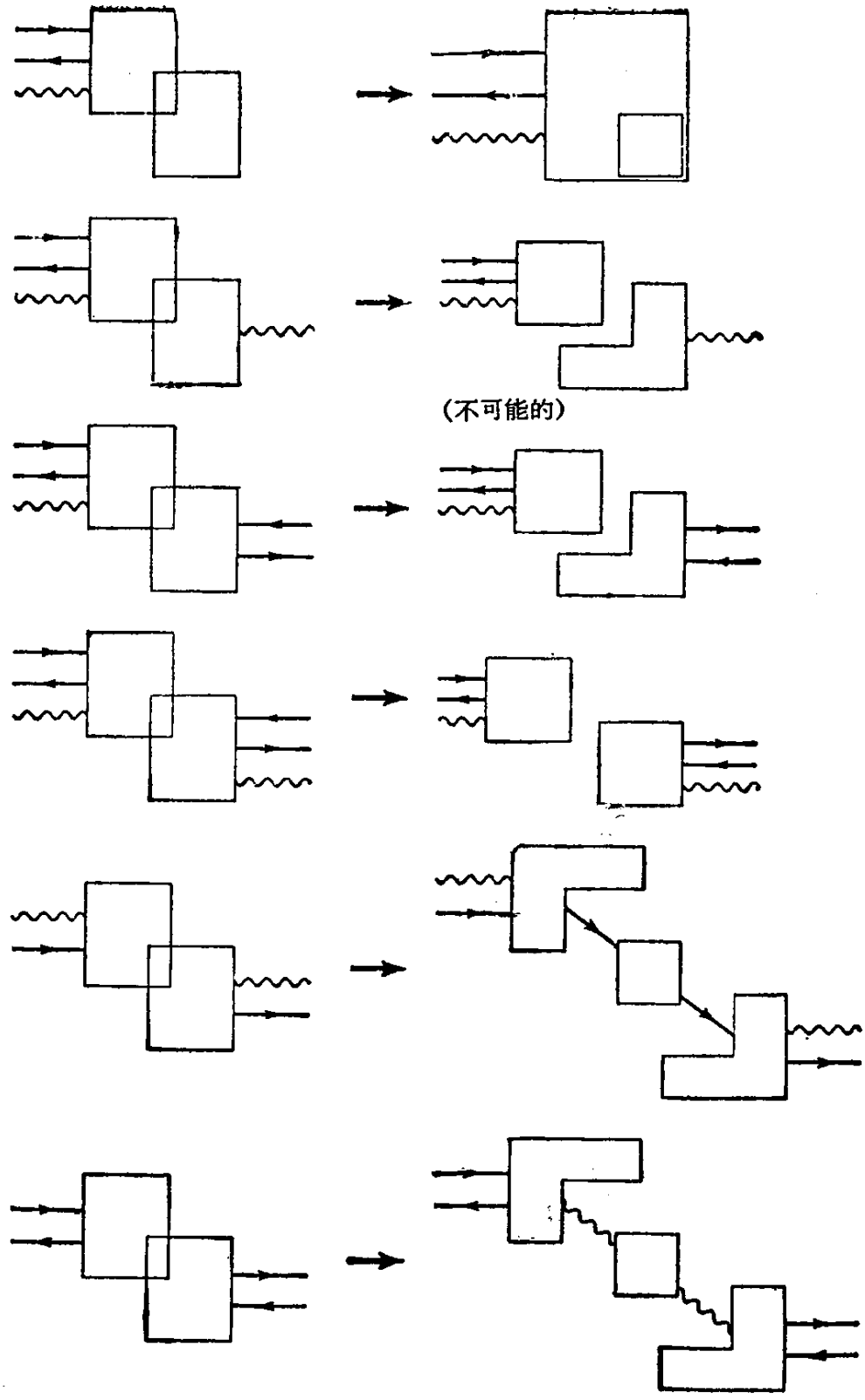


图 19.27　除开在图 19.24 中的自能部分内部的顶角插入外，一一列举了图形，表明在所有情形中重迭的消除

先考虑一下图 19.25 的例子. 由定义，通过猜想是绕顶角插入画的每个方框壁的外线只有两根电子线和一根光子线. 假定通过框壁的非重迭部分的所有线都已画在图上，我们必须画出剩下的三根内线的位置如图 19.26*a* 所示. 但是，如同在图 19.26*b* 中改画的那样，这约化为分离的自能和顶角插入.

为证明上述定理，即证明顶角方框仅只在自能插入之中才要重迭，我们将直接采用构造图形的方法. 在所有其它情况下，我们能够逐步地去掉一对对方框之间的重迭. 在图 19.27 中就对除了图 19.25 所示情形以外的所有其它情形完成了这一点. 经过方框壁的不重迭部分；没有线出来或有一根线出来的方框是不可能的，而具有两根这种线的自能方框已经排除，不需包含在这个例子中.

19.6 Ward 恒等式[1)]

在量子电动力学的重整化方案中，一个重要的助手是广义 Ward 恒等式，它使我们能直接从 Γ_μ 计算 S'_F. 这个关系是

$$(p'-p)_\mu \Gamma^\mu(p',p) = [S'^{-1}_F(p') - S'^{-1}_F(p)] \tag{19.16}$$

它是微分的流守恒的结果. 对裸顶角 γ_μ 和自由传播子

$$S_F(p) = (\not{p} - m)^{-1},$$

它显然是成立的，因此，借助 (19.3) 和 (19.7)，它可以通过顶角修正和正规自能部分表示出来.

$$(p'-p)_\mu \Lambda^\mu(p',p) = -[\Sigma(p') - \Sigma(p)] \tag{19.17}$$

这恒等式的关键在于：$\Lambda_\mu(p',p)$ 可以从 $-\Sigma(p)$ 用如下办法得到，用带动量 $p'-p$ 的 γ_μ 插接到出现在 $\Sigma(p)$ 中的任一自由费曼传播子上，并对所有可能的插入求和. 图 19.28 中对

1) J. C. Ward, *Phys. Rev.*, **78**, 1824 (1950); Y. Takahashi, *Nuovo Cimento*, **6**, 370 (1957).

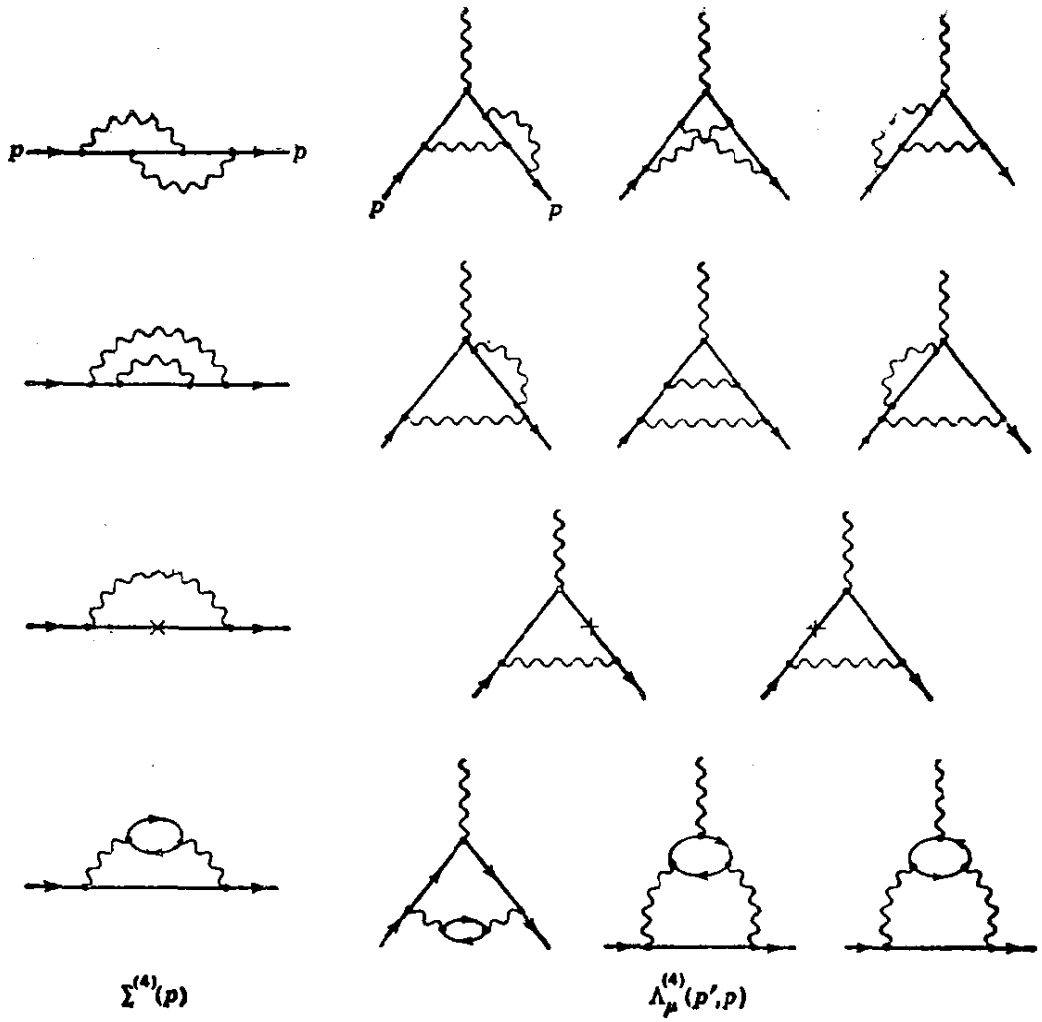


图 19.28　四阶自能图形中的光子插入

于四阶自能图形演示了这一点.

如果如 (19.17) 左端所需要的，我们只计算 $\Lambda^\mu(p',p)$ 的散度，即 $(p'-p)_\mu\Lambda^\mu(p',p)$，就可以使问题简化得多. 在这情形下,我们可以用第十七章中横光子传播子讨论的结果,特别是 (17.64) 和 (17.66). (17.66) 式表明对封闭圈的插入之和为零，而 (17.64) 式说: 对进入和离开图形的费米子线的插入之和正好给出 (19.17) 右端的两项，这就给出了 Ward 恒等式.

从 (19.16) 我们可以计算 $S'^{-1}_F(p)$，从而取 $\not{p}$ 趋近于质壳时自能的已知极限来计算 $\Sigma(p)$本身. 从第八章微扰讨论和第十六章讨论过的谱表示，我们记得[1]，当 $\not{p}$ 趋于电子的物理质量 m 时

$$S'_F(p) \to \frac{Z_2}{\not{p} - m} \tag{19.18}$$

因此，我们可以在 (19.16) 中把 $\not{p}$ 取在质壳上并且右乘以自由粒子旋量 $u(p)$，从而推导出对任意 p'，$S'^{-1}_F(p')$ 一个表达式：即

$$\begin{aligned}(p'-p)_\mu \Gamma^\mu(p',p)u(p) &= S'^{-1}_F(p')u(p) - Z_2^{-1}(\not{p}-m)u(p) \\ &= S'^{-1}_F(p')u(p)\end{aligned} \tag{19.19}$$

因为基于洛仑兹不变性和宇称守恒，$S'^{-1}_F(p')$ 有如下结构

$$S'^{-1}_F(p') = \not{p}' A(p'^2) + B(p'^2)$$

所以在 (19.19) 的左端分别提出 $\not{p}'u(p)$和 $u(p)$的系数后就可以通过 Γ_μ 把两个标量函数 $A(p'^2)$ 和 $B(p'^2)$ 定出来.

Ward 恒等式不仅可以在给定 $\Gamma_\mu(p', p)$ 后计算 $S'_F(p)$，而且对 $p' \to p$ 的特殊情形，即给予电磁场的动量传递趋于零的情形，还可以通过 S'_F 定 Γ_μ. 在这极限下 (19.16) 成为

$$\Gamma_\mu(p,p) = \frac{\partial S'^{-1}_F(p)}{\partial p^\mu} \quad 或 \quad \Lambda_\mu(p,p) = -\frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p^\mu} \tag{19.20}$$

这是 Ward 最初给出的形式. 到 (19.16) 的推广是 Takahashi 在 1957 年证明的. 他直接从场方程做而没有求助于图形展开.

这里值得一提的 Ward 恒等式进一步的一个成果，是它

---

1) 这里略去了 Z_2 中的红外发散问题. 事实上，用 §19.9 中引入的中间重整化或通过引入光子质量，可以完全避免它. 我们还忽略了与 Z_1 相关的规范问题. 参看 §18.5 最后一个注.

对真空极化积分 $\Pi_{\mu\nu}$ 的结构加上了一个条件. 取 (19.10) 的散度并用 Ward 恒等式 (19.16), 我们得

$$q^{\nu}\Pi_{\mu\nu}(q) = i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\mathrm{Tr}\,\gamma_{\mu}[S'_F(k) - S'_F(k+q)] \tag{19.21}$$

再假设[1]我们对积分这样截断, 使得 (19.21) 中积分的原点可以移动, 甚至对形式上平方发散的二阶项也是如此, 那么我们得到

$$q_{\nu}\Pi^{\mu\nu}(q) = 0 \tag{19.22}$$

作为二阶张量的 $\Pi^{\mu\nu}(q)$ 的变换性质加上条件 (19.22), 使我们可以如同在二阶计算 (8.20) 中那样写出

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = (q_{\mu}q_{\nu} - g_{\mu\nu}q^2)\Pi(q^2) \tag{19.23}$$

而且根据在第十八章中关于解析性质[2]的讨论, 到 e_0^2 的任何有限阶, $\Pi(q^2)$ 在 $q^2 = 0$ 都没有极点.

把 (19.23) 代入 (19.6), 联系 $\Pi_{\mu\nu}$ 和 $D'_F(q)_{\mu\nu}$ 的方程给出

$$q^2[1 + e_0^2\Pi(q^2)]D'_F(q)_{\mu\nu} - e_0^2\Pi(q^2)q_{\mu}q^{\lambda}D'_F(q)_{\lambda\nu} = -g_{\mu\nu}$$

其解为

$$D'_F(q)_{\mu\nu} = -\frac{g_{\mu\nu}}{q^2[1 + e_0^2\Pi(q^2)]} - \frac{q_{\mu}q_{\nu}e_0^2\Pi(q^2)}{q^4[1 + e_0^2\Pi(q^2)]} \tag{19.24}$$

由于 D'_F 耦合于守恒流, 在实际计算中, (19.24) 中的 $q_{\mu}q_{\nu}$ 项将没有贡献. 在任何情况下, D'_F 的结构完全决定于 $\Pi_{\mu\nu}(q)$ 的表达式 (19.23) 中的标量函数 $\Pi(q^2)$. 因为 $\Pi(q^2)$ 在

---

1) 见 (8.10) 和 (17.66) 式. 亦见 K. Johnson, *Nucl. Phys.*, **25**, 431 (1961).

2) 实际上, $\Pi(q^2)$ 有一条从 $q^2 = 0$ 开始延伸至 $q^2 = +\infty$ 的割线. 对于求和到 e_0^2 所有阶的严格 $\Pi(q^2)$ 中极点的可能性及其注释见 J. Schwinger, *Phys. Rev.*, **125**, 397(1962).

$q^2 = 0$ 没有极点，(19.24) 就表明，光子传播子描述一个零质量的量子.

19.7 重整化常数的定义和重整化规定

终于，我们能够开始讨论重整化方案本身了.利用第十六章给出的重整化常数的定义，以及我们在第八章的二阶计算中的经验，我们来重新标度传播子 S'_F, D'_F, 顶角 Γ_μ, 以及电荷 e_0. 由这个重新标度所定义的重整化常数可以反过来与 Σ, Π, 和 Γ_μ 相联系. 于是，这一章前面各节中的整套积分方程和定义的理论将通过重整的量予以重新讨论和改写. 这把我们带到问题的关键之处，即证明：至重整后的电荷 e 的每一阶，这些量和方程都是有限的，如同先前在二阶计算中所曾看到的那样，所有依赖于截断的项在重新标度定律中都被吸收了.

在 (16.84) 中引入的常数 Z_2 是在物理的单电子态中找到一个“裸”电子态的几率，如 (16.118) 中所示. 当 $\not{p} \to m$ 时，从在 (16.122) 中讨论过的 S'_F 的普遍结构我们得

$$S'_F \to -\frac{Z_2}{\not{p} - m} \quad \text{对 } \not{p} \to m \tag{19.25}$$

根据 (19.3) 给出的 $\Sigma(p)$ 的定义，这意味着

$$\Sigma(p) \to -(\not{p} - m)(Z_2^{-1} - 1) \quad \text{对 } \not{p} \to m \tag{19.26}$$

于是，当 $\not{p} \to m$ 时，$\Sigma(p)$ 必须为零. 质量抵消项

$$\delta m = m - m_0$$

的存在保证了这一点. 按第十七章中导出的规则，这个质量抵消项是必须计入的相互作用项之一. 到任一阶，我们都这样调节 δm 以使 (19.26) 得到满足

$$\Sigma(\not{p} = m, \delta m) = 0 \tag{19.27}$$

除开这一章我们在 $\Sigma(p)$ 的定义中包含了质量抵消项外，

(19.26) 具有在二阶计算中得到的 (8.42) 的同样结构.

同样地,重整化常数 Z_3 是与单光子态对光子传播子的贡献相联系的,并且它是在 $q^2=0$ 处极点的留数,根据 (16.172) 当 $q^2\to 0$ 时

$$D'_F(q^2)_{\mu\nu}\to -\frac{Z_3 g_{\mu\nu}}{q^2}+\text{规范项} \tag{19.28}$$

如通常所作的那样,我们略去对 S 矩阵没有贡献[1]的规范项. 于是从 D'_F 与真空极化相联系的 (19.24) 的形式,我们得到

$$e_0^2\,\Pi(0)=Z_3^{-1}-1 \tag{19.29}$$

利用在 (8.23) 中的二阶计算,到这一阶我们得到

$$\Pi(0)\approx\frac{1}{12\pi^2}\log\frac{M^2}{m^2}$$

其中 M 是截断质量.

最后,与顶角相联系的重整化常数 Z_1,如在微扰例子 (8.50) 中那样,是通过对质壳上电子线的 Γ_μ 的零动量传递极限来定义的. 即

$$\bar u(p)\Gamma_\mu(p,p)u(p)=Z_1^{-1}\bar u(p)\gamma_\mu u(p) \tag{19.30}$$

(19.30) 的右端是零动量传递的最普遍形式,如 (10.88) 所示. 利用 Ward 恒等式,可以普遍地证明微扰论 (8.54) 中建立的一个很有用的等式

$$Z_1=Z_2 \tag{19.31}$$

如在 (19.19) 中那样,对 $p'=p+q$ 和 $p^2=m^2$ 我们写出

$$\bar u(p)q^\mu\Gamma_\mu(p',p)u(p)=\bar u(p)S_F'^{-1}(p')u(p) \tag{19.32}$$

取 (19.32) 的导数 $\dfrac{\partial}{\partial q_\alpha}$ 和在 $q^2\to 0$ 极限下用(19.30)和(19.25),

---

1) 应该看到: 这些规范项要改变如 (19.14) 所定义的 τ 函数. 这里我们把 τ 函数视为可以由它计算出 S 矩阵元的东西. 从这个观点看,由规范项所引起的修正可以放心地略去.

我们导出

$$Z_1^{-1}\bar{u}(p)\gamma_\mu u(p) = Z_2^{-1}\bar{u}(p)\gamma_\mu u(p)$$

由此得出 Z_1 和 Z_2 相等.

重整化的思想是: **重新标度**传播子和顶角函数，以使在质壳附近,以及在顶角情形下对于零动量传递,这些量趋于自由粒子的相应的量. 为此,依 Dyson[1] 的做法,通过如下的方程引入重整的传播子和顶角函数, $\tilde{S}'_F$, $\tilde{D}'_F$ 和 $\tilde{\Gamma}_\mu$ 以及重整的电荷 e:

$$\begin{aligned} S'_F(p) &= Z_2\tilde{S}'_F(p) \\ D'_F(q)_{\mu\nu} &= Z_3\tilde{D}'_F(q)_{\mu\nu} \\ \Gamma_\mu(p',p) &= Z_1^{-1}\tilde{\Gamma}_\mu(p',p) \\ e_0 &= \frac{Z_1 e}{Z_2\sqrt{Z_3}} = Z_3^{-1/2}e \end{aligned} \tag{19.33}$$

于是

$$\begin{aligned} &\tilde{S}'_F(p) \to \frac{1}{\not{p} - m} \quad \not{p} \to m \\ &\tilde{D}'_F(q)_{\mu\nu} \to \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2} + \text{规范项}, \quad q^2 \to 0 \\ &\tilde{\Gamma}_\mu(p,p) \to \gamma_\mu \quad \not{p} \to m \end{aligned} \tag{19.34}$$

我们面临的重整化理论的最大问题是证明由 (19.33) 所定义的 $\tilde{S}'_F$, $\tilde{D}'_F$ 和 $\tilde{\Gamma}_\mu$ 是有限的,即当它们通过重整的电荷 e 表示时是不依赖于截断的函数. 使得这个任务困难的因素在于,如我们在第八章中发现的,这些 Z 是发散的，它们是依赖于截断的量.

为确定 $\tilde{S}'_F$, $\tilde{D}'_F$ 和 $\tilde{\Gamma}_\mu$ 以及由它们构成的 τ 函数是有限的，我们将广泛运用本章第一部分中所建立的积分方程和骨架图展开. 因此，只用重整的量把这些方程的元素重新表示出来

---

1) F. J. Dyson, *Phys. Rev.*, **75**, 486, 1736 (1949).

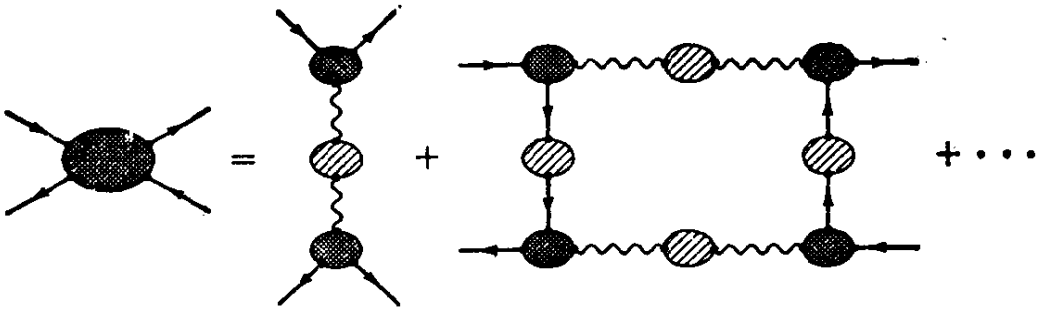


图 19.29　K的骨架展开式的头两项

是有意义的. 我们可以不按 e_0^2 而是把方程按重整的荷 e^2 的幂级数来迭代. 对重整化方案幸运的是，重新标度并不使各个积分方程的结构复杂化.

首先，我们考虑核 K，它通过 S_F', D_F', Γ 和 c_0 由骨架展开式 (19.13) 来表示，用简化方式表示出展开式(图 19.29) 的头两项

$$K = ie_0^2\Gamma D_F'\Gamma + e_0^4\int [\Gamma S_F'\Gamma]D_F'D_F'[\Gamma S_F'\Gamma)+\cdots \quad (19.35)$$

应用重整化规则 (19.33)，这可重写成:

$$K = ie_0^2Z_1^{-2}Z_3\tilde{\Gamma}\tilde{D}_F'\tilde{\Gamma}+e_0^4Z_1^{-4}Z_2^2Z_3^2\int [\tilde{\Gamma}\tilde{S}_F'\tilde{\Gamma}]\tilde{D}_F'\tilde{D}_F'[\tilde{\Gamma}\tilde{S}_F'\tilde{\Gamma}] + \cdots$$

$$= Z_2^{-2}\left\{ie^2\tilde{\Gamma}\tilde{D}_F'\tilde{\Gamma} + e^4\int [\tilde{\Gamma}\tilde{S}_F'\tilde{\Gamma}]\tilde{D}_F'\tilde{D}_F'[\tilde{\Gamma}\tilde{S}_F'\tilde{\Gamma}]\right\} + \cdots$$

可见未重整化的量都换成了它们的重整的对应量，并且在前面出现一个整体因子 Z_2^{-2}.

不难证明这对每一个骨架都是如此，所以骨架展开式 (19.13) 成为

$$K(p,p',q) = Z_2^{-2}\sum_{\text{骨架}\mathcal{G}} K^{\mathcal{G}}(p,p',q;\tilde{S}_F',\tilde{D}_F',\tilde{\Gamma},e) \quad (19.36)$$

在各个骨架图中属于每一个顶角的有一条光子线的一半和两条电子线的各一半，这些线的另一半归之于其它的顶角或者

是外线．于是，由于 $\tilde{\Gamma}_\mu$ 按(19.33)重整化而在一个顶角出现每一个 Z_1^{-1} 时，从邻接的电子线要出来一个 $(\sqrt{Z_2})^2$ 和从光子线出来一个 $\sqrt{Z_3}$，倘若这些线是内线的话．与顶角处出现的 e_0 一起，这对每一个顶角给出一个整体因子

$$e_0 Z_1^{-1} Z_2 \sqrt{Z_3} = e$$

由于在 K 的定义中没有包括外线的传播子，所以在每一个邻接外电子和正电子线的顶角，每一根线要少写一个因子 $\sqrt{Z_2}$．于是，重整化规则引入一个整体因子 Z_2^{-2}，如 (19.36) 所示．这个结果提示我们定义一个重整的核 $\tilde{K}$ 如下

$$\tilde{K}(p,p',q) \equiv Z_2^2 K(p,p',q) = \sum_{\text{骨架}\mathcal{G}} K^{\mathcal{G}}(p,p',q;\tilde{S}_F',\tilde{D}_F',\tilde{\Gamma},e) \tag{19.37}$$

类似的标度定律可以对具有任意数目外线的普遍 Feynman 振幅写出．例如，对有 m 个外费米子腿和 n 个外光子的 τ 函数，由它的骨架展开式 (19.14) 而来的重整化规则是

$$\begin{aligned}\tau(p_1\cdots p_m,q_1\cdots q_n)_{\alpha_1\cdots\alpha_m;\mu_1\cdots\mu_n} &= Z_2^{m/2}Z_3^{n/2} \\ &\times \sum_{\text{骨架}\mathcal{G}} \tau^{\mathcal{G}}(p_1\cdots p_m,q_1\cdots q_n;\tilde{S}_F',\tilde{D}_F',\tilde{\Gamma},e)_{\alpha_1\cdots\mu_n} \\ &\equiv Z_2^{m/2}Z_3^{n/2}\tilde{\tau}(p_1\cdots p_m,q_1\cdots q_n)_{\alpha_1\cdots\mu_n} \quad (m+n>3)\end{aligned} \tag{19.38}$$

(19.38) 的证明和 (19.36) 的证明一样，只需作一点小的变更．在 τ 函数中包含了与外腿相联系的传播子，而在 K 的定义中它们是割断了的．因此，现在有足够的 $\sqrt{Z}$ 因子可用来完全地重整所有的顶角，事实上，每一根外线还剩下一个 $\sqrt{Z}$ 因子．

对于 S 矩阵元，情况还要简单些．如第十六章中导出的约化公式，例如 (16.139) 和 (16.148) 所示，从 τ 函数计算不变 S 矩阵元是这样进行的，对于每一个电子，把 τ 乘以

$$(\not{p}-m)/\sqrt{Z_2}$$

对每一个光子则乘以 $q^2/\sqrt{Z_3}$，过渡到质壳上 $\not{p}\to m, q^2\to 0$，并且与各种 i 因子一道，在外线上插入自由粒子波函数．由于在外腿上的重整的传播子趋于自由粒子传播子 $(\not{p}-m)^{-1}$ 和 $-(q^2)^{-1}g_{\mu\nu}$，我们就得到对计算 S 矩阵元的一个相当简单的规则：

1 画下所有骨架图

2 在顶角上代入 $e\tilde{\Gamma}_\mu$，在线上代入 $\tilde{S}'_F$ 和 $\tilde{D}'_F$，按 Feynman 规则计算振幅．

3 对于所有不被任何 Z 因子或自能插入所修正的外线，相应代入自由粒子波函数

$$\frac{\epsilon_\mu}{\sqrt{2k(2\pi)^3}}\quad \sqrt{\frac{m}{E(2\pi)^3}}u(p)\quad \bar{u}(p)\sqrt{\frac{m}{E(2\pi)^3}}\ \text{等}$$

在 (19.38) 中的各 $\sqrt{Z}$ 因子被约化公式中出现的各 $\sqrt{Z}$ 因子所抵消．因而，S 矩阵元的有限性问题就与 Z 因子分开而归之于研究 $\tilde{S}'_F$，$\tilde{D}'_F$ 和 $\tilde{\Gamma}_\mu$ 的有限性以及对各骨架图形中内动量所作积分的收敛性问题．

定义顶角 Γ_μ 的积分方程，以及通过顶角 Γ_μ 决定电子传播子 S'_F 的 Ward 恒等式也可以加以重整．对于顶角，我们把 (19.33) 代入 (19.12)；用符号简写，我们得到

$$\tilde{\Gamma}_\mu = Z_1\gamma_\mu - \int \tilde{\Gamma}_\mu \tilde{S}'_F\tilde{S}'_F\tilde{K} \qquad (19.39)$$

这里 Z_1 理解为由条件 (19.34)

$$\tilde{\Gamma}_\mu(p,p)\big|_{p=m} = \gamma_\mu \qquad (19.40)$$

所决定．Ward 恒等式 (19.16) 在重整化时保持其形式，因为 $Z_1 = Z_2$：

$$(p'-p)_\mu\tilde{\Gamma}^\mu(p',p) = \tilde{S}'^{-1}_F(p') - \tilde{S}'^{-1}_F(p) \qquad (19.41)$$

特别是，(19.19) 给出的式子成为

$$\tilde{S}_F'^{-1}(p') = (p' - p)_\mu \tilde{\Gamma}^\mu(p', p)|_{\not p = m} \qquad (19.42)$$

这里符号

$$|_{\not p = m}$$

指 $p^2 = m^2$ 并且在 Γ_μ 右边的任何因子 $\not p$ 都应令其等于 m.

由于 Ward 恒等式通过 Γ_μ 完全确定 S_F'，所以对于电子自能部分的方程不须再考虑；我们把它们的重整化留作为练习.

对光子传播子和真空极化的方程也可以重整化. 应用规则 (19.33) 于 (19.24) 式，我们得到

$$\tilde{D}_F'(q)_{\mu\nu} = \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2[Z_3 + Z_3 e_0^2 \Pi(q^2)]} - \frac{q_\mu q_\nu e_0^2 \Pi(q^2)}{q^4[Z_3 + Z_3 e_0^2 \Pi(q^2)]} \qquad (19.43)$$

忆及 Z_3 的定义 (19.29)，并且把 $\Pi(q^2)$ 的 $q^2 = 0$ 的极限分出，写为

$$\Pi(q^2) = \Pi(0) + \Pi_c(q^2)$$

这里

$$\Pi_c(0) = 0$$

和

$$\Pi(0) = e_0^{-2}(Z_3^{-1} - 1) = \frac{1}{e^2} - \frac{1}{e_0^2} \qquad (19.44)$$

我们得到

$$\tilde{D}_F'(q)_{\mu\nu} = -\frac{g_{\mu\nu}}{q^2[1 + e^2 \Pi_c(q^2)]} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\left[\frac{1}{Z_3 q^2} - \frac{1}{q^2[1 + e^2 \Pi_c(q^2)]}\right] \qquad (19.45)$$

记得由于流守恒、比例于 $q_\mu q_\nu$ 的项对 S 矩阵元没有贡献，在计算 S 矩阵元时只有 (19.45) 的第一项留下来. 因此，$\tilde{D}_F'(q)_{\mu}$

的计算实际上简化为计算 $\Pi_c(q^2)$，它可以通过(19.10)，(19.23)，(19.33)和(19.44)由重整化后的量表示出来

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2)[\Pi(0) + \Pi_c(q^2)]$$
$$= iZ_1\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu \tilde{S}'_F(k)\tilde{\Gamma}_\nu(k,k+q)\tilde{S}'_F(k+q) \tag{19.46}$$

19.8 小结：重整化的积分方程

为完成重整化方案所需的大多数工具现在已经齐备．这里我们扼要讲一下为计算 S 矩阵元所必须的那些方程．在重整化前，它们有如下的形式[1)]

(a) $$\tau(p_1\cdots p_m, q_1\cdots q_n)_{\alpha_1\cdots\mu_n} = \sum_{\text{骨架}\mathcal{G}} \tau^{\mathcal{G}}(p_1\cdots p_m, q_1\cdots q_n; S'_F, D'_F, \Gamma_\mu, e_0)_{\alpha_1\cdots\mu_n}$$

(b) $$K_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p,p',q) = \sum_{\text{骨架}\mathcal{G}} K^{\mathcal{G}}{}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p,p',q; S'_F, D'_F, \Gamma_\mu, e_0)$$

(c) $$\Gamma_\mu(p',p)_{\gamma\delta} = (\gamma_\mu)_{\gamma\delta} + \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$$
$$\times [iS'_F(p'+q)\Gamma_\mu(p'+q,p+q)iS'_F(p+q)]_{\beta\alpha}$$
$$\times K_{\alpha\beta,\delta\gamma}(p+q,p'+q,q) \equiv \gamma_\mu - \int \Gamma_\mu S'_F S'_F K$$
$$\equiv \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p',p)$$

(d) $$S'^{-1}_F(p') = (p'-p)_\mu \Gamma^\mu(p',p)|_{p=m}$$

(e) $$D'_F(q)_{\mu\nu} = \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2[1+e_0^2\Pi(q^2)]} + q_\mu q_\nu \text{ 项}$$

(f) $$\Pi_{\mu\nu}(q) = (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2)\Pi(q^2)$$
$$= i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu S'_F(k)\Gamma_\nu(k,k+q)S'_F(k+q) \tag{19.47}$$

---

1) (a)，(b)，(c)，(d)，(e)和(f)分别地与(19.14)，(19.13)，(19.12)，(19.19)，(19.24)和(19.10)进行比较．

这些方程可以完全决定所有作为 e_0^2 的幂级数的 τ 函数. 在计算 (19.47a), (19.47b) 和 (19.47f) 中的 τ 函数，K 和 Π 时，到不为零的 e_0^2 最低阶，S'_F, D'_F 和 Γ_μ 可以换成 S_F, D_F 和 γ_μ. 运用 (19.47c) Γ_μ 可以算到 e_0^2 阶，再由 (19.47d) S'_F 可以算到相同的阶. 同样，把 (19.47f) 中 Π 的零阶计算结果代入 (19.47e) 可以把 D'_F 算到 e_0^2 阶. 实际上，这正是我们在第八章中作过的. 于是，这些改进了的准确到 e_0^2 阶的 S'_F, D'_F 和 Γ_μ 可以再代回到 (19.47a), (19.47b) 和 (19.47f) 中去，并且整个过程可以重复进行，一直达到所需要的精确度为止.

我们注意到在 (19.47) 中没有包含电子自能部分 $\Sigma(p)$ 的方程

$$S'_F = \frac{1}{\not p - m - \Sigma(p)}$$

$$\Sigma(p) = ie_0^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D'_F(k)_{\mu\nu}\Gamma^\mu(p, \not p - \not k)S'_F(p-k)\gamma^\nu \tag{19.48}$$

这些方程并不需要，因为 Ward 恒等式 (19.47d) 由 Γ_μ 完全决定了 S'_F.

将重整化[1]

$$\begin{aligned} e_0 &= \sqrt{Z_3^{-1}}\, e \\ S'_F(p) &= Z_2 \tilde{S}'_F(p) \\ D'_F(q)_{\mu\nu} &= Z_3 \tilde{D}'_F(q)_{\mu\nu} \\ \Gamma_\mu(p', p) &= Z_1^{-1}\tilde{\Gamma}_\mu(p', p) \\ K(p, p', q) &= Z_2^{-2}\tilde{K}(p, p', q) \end{aligned} \tag{19.49}$$

$$\tau(p_1 \cdots p_m, q_1 \cdots q_n)_{\alpha_1 \cdots \mu_n} = Z_2^{m/2} Z_3^{n/2} \tilde{\tau}(p_1 \cdots p_m, q_1 \cdots q_n)_{\alpha_1 \cdots \mu_n}$$

以及作为 Ward 恒等式的推论的

$$Z_1 = Z_2 \tag{19.50}$$

1) 比较 (19.31), (19.33), (19.37.)和 (19.38).

一道代入(19.47)，我们得到如下的方程组[1)]

$$\tilde{\tau}(p_1\cdots p_m,q_1\cdots q_n)_{\alpha_1\cdots\mu_m}$$
$$=\sum_{\text{骨架}\mathcal{G}}\tau^{\mathcal{G}}(p_1\cdots p_m,q_1\cdots q_n;\tilde{S}'_F,\tilde{D}'_F,\tilde{\Gamma}_\mu,e)_{\alpha_1\cdots\mu_n} \quad (19.51a)$$

$$\tilde{K}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p,p',q)=\sum_{\text{骨架}\mathcal{G}}K^{\mathcal{G}}{}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p,p',q;\tilde{S}'_F,\tilde{D}'_F,\tilde{\Gamma}_\mu,e) \quad (19.51b)$$

$$\tilde{\Gamma}_\mu(p',p)_{\gamma\delta}=Z_1(\gamma_\mu)_{\gamma\delta}-\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}$$
$$\times[\tilde{S}'_F(p'+q)\tilde{\Gamma}_\mu(p'+q,p+q)\tilde{S}'_F(p+q)]_{\beta\alpha}$$
$$\times\tilde{K}_{\alpha\beta,\delta\gamma}(p+q,p'+q,q) \quad (19.51c)$$

或

$$\tilde{\Gamma}_\mu\equiv Z_1\gamma_\mu-\int\tilde{\Gamma}_\mu\tilde{S}'_F\tilde{S}'_F\tilde{K}\equiv\gamma_\mu+\Lambda^c_\mu(p',p)$$
$$\tilde{S}'^{-1}_F(p')=(p'-p)_\mu\tilde{\Gamma}^\mu(p',p)|_{p=m} \quad (19.51d)$$

$$\tilde{D}'_F(q)_{\mu\nu}=\frac{-g_{\mu\nu}}{q^2[1+e^2\{\Pi(q^2)-\Pi(0)\}]}+q_\mu q_\nu\text{项} \quad (19.51e)$$

$$\Pi_{\mu\nu}(q)=(q_\mu q_\nu-g_{\mu\nu}q^2)\Pi(q^2)$$
$$=iZ_1\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\operatorname{Tr}\gamma_\mu\tilde{S}'_F(k)\tilde{\Gamma}_\nu(k,k+q)\tilde{S}'_F(k+q) \quad (19.51f)$$

这里 $\Pi(q^2)\equiv\Pi(0)+\Pi_c(q^2)$，$\Pi_c(0)=0$

与这六个方程一起的还有计算 S 矩阵元的规则：在(19.51a)所给出的重整的 τ 函数 $\tilde{\tau}$ 中去掉外传播子 $\tilde{S}'_F$ 和 $\tilde{D}'_F$，并把它们换成不被任何 Z 因子所修正的自由粒子波函数.

(19.51) 的六个方程与决定 Z_1 和 Z_3 的边界条件[2)]

$$\tilde{\Gamma}_\mu(p,p)|_{p=m}=\gamma_\mu \qquad \frac{1}{e_0^2}=\frac{1}{e^2}-\Pi(0)=\frac{Z_3}{e^2} \quad (19.52)$$

---

1) 比较(19.38)，(19.37)，(19.39)和(19.42)，(19.45)和(19.46).

2) 比较(19.40)和(19.44).

一道构成一套完全的方程组，它们决定了按重整的荷 e 展开的 τ 函数和 S 矩阵元. 如同我们对未重整量的展开式所讲的那样，可以依循同样的迭代程序. 从 (19.51a)，(19.51b) 和 (19.51f) 计算到 e 的最低阶开始，把 $\tilde{K}$ 和 $\tilde{S}'_F \approx (\not{p} - m)^{-1}$ 代入 (19.51c)，并且用重整化条件 (19.52)，Γ_μ 和 Z_1 可算到 e^2 阶；然后用 Ward 恒等式 (19.51d) 把 $\tilde{S}'_F$ 算到 e^2 阶，把 $\Pi_{\mu\nu}$ 的零阶表达式代入 (19.51e)，可把 $\tilde{D}'_F$ 算到 e^2 阶. 在把 $\tilde{S}'_F$，$\tilde{D}'_F$，$\tilde{\Gamma}_\mu$ 和 Z_1 算到 e^2 阶后，$\tilde{K}$ 和 $\tilde{\tau}$ 函数可算到 e^2 的高一阶. 于是，这过程可继续迭代下去[1].

但是，重整化方程 (19.51) 是否有限，即是否不依赖于截断，这点仍然是不清楚的. 在顶角方程 (19.51c) 的非齐次项中 Z_1 的出现相对地是无害的，看来可以用在方程右端积分的发散部分作减除来排除它. 但是，如何处理定义 $\Pi_{\mu\nu}(q)$ 的积分前的 Z_1 因子确实是不清楚的. 这将是我们面临的最困难的问题. 类似的问题也出现在通过 (19.48) 直接计算电子自能中；这问题由于我们运用 Ward 恒等式而避开了. 正是由于这个缘故，引入了 Ward 恒等式并证明它是很有价值的.

19.9 解析延拓和中间重整化

现在已完成了代数和拓扑的准备. 在 §19.8 中我们得到 $\tilde{S}'_F$，$\tilde{D}'_F$，$\tilde{\Gamma}_\mu$，$\tilde{K}_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ 和 $\tilde{\tau}$ 的一套完整的方程组，通过计算 Feynman 积分的有限和，方程组可以用迭代法解到重整的荷 e^2 的任意有限阶. 现在我们到了重整化问题的难点：我们必须考察这些 Feynman 积分并证明它们收敛，从而，证明重整的微扰展开式逐项是有限的——亦即，不依赖于截断. 这里将

1) 这一节没有陷于图形的拓扑迷宫和从属于它的大量术语，我们作的一个最大胆的假设是：尽管需要用截断依赖关系来定义所有的 Z_i 和 S_F，D_F 和 Γ_μ 的无穷积分，但存在着 e^2 和 e_0^2 二者的一致收敛幂级数.

不考虑到 e^2 所有幂的无穷级数的收敛性问题.

首先让我们来处理在试图定出 Feynman 积分的上界时要出现的一个技术问题. 它与重整化问题的真正实质关系不大. 如在第十八章中曾仔细讨论过的，在这些积分中出现的 Feynman 分母 $(p^2-m^2)^{-1}$ 依赖于问题的运动学而可能变为零. 显然,对这些积分给一个界限是相当困难的. 另一方面，对重整化问题,我们只考虑当 $p^2\to m^2$ 时的紫外发散问题，而不考虑在第十八章色散关系理论讨论中我们主要关心的产生吸收部分的奇异性的问题[1]. 因此,我们一开始可设法排除这个问题: 对进入 Feynman 振幅的外动量作解析延拓,延拓到其分母肯定不会为零的区域. 一旦我们确定了积分在这个区域是收敛的,我们就可以解析延拓回到外动量的物理值,除了对有限数目的 Landau 奇异性外，可以确信积分必定几乎是各处都存在的.

Feynman 积分的 (18.53) 表示使我们可以进行这个延拓，其中分母 J 要用 (18.35) 和 (18.37) 通过外动量而重新表达出来. 根据 (18.34) 到 (18.36)，有 m 个外动量 q_s 和 n 个内动量 p_j 的图形的 Feynman 积分写为

$$
\begin{aligned}
I(q_1,\cdots,q_m) &= \int \frac{d^4l_1\cdots d^4l_k}{(p_1^2-m_1^2)\cdots(p_n^2-m_n^2)}P(q_s,l_r)\\
&= \int_0^\infty \frac{d\alpha_1\cdots d\alpha_n\delta\left(1-\sum_j\alpha_j\right)Q(\alpha_j,q_s)}{[\Delta(\alpha_1\cdots\alpha_n)]^2\left[\sum_{j=1}^n\alpha_j(k_j^2-m_j^2+i\epsilon)\right]^p}\\
&= \int_0^\infty \frac{d\alpha_1\cdots d\alpha_n\delta\left(1-\sum_j\alpha_j\right)Q(\alpha_j,q_s)}{\Delta^2\left[\sum_{i,j=1}^m\zeta_{ij}q_iq_j-\sum_{j=1}^n m_j^2\alpha_j+i\epsilon\right]^p}
\end{aligned}
\tag{19.53}
$$

1) 也不涉及红外问题,而且我们将看到,这问题用本节的方法就解决了.

这里 P 和 Q 是其宗量的多项式，并且同样可以包含 γ 矩阵和极化矢量. 如同在 (18.35) 和 (18.37) 中所定义的那样，Kirchhoff 动量 k_j 是 q_s 的线性组合，其系数依赖于 α_j，并且 ζ_{ij} 是与 α 有关的系数，其构成如 (18.35) 以后所示.

如果 (19.35) 中的动量能够通过如下的代换

$$k_j^0 \to ik_j^0$$
$$\boldsymbol{k}_j \to \boldsymbol{k}_j$$
$$k_j^2 \to -[|k_j^0|^2 + |\boldsymbol{k}_j|^2]$$

而都变到欧氏区，那么，分母将都是负定的，就不会出现奇异性来麻烦我们. 这就是我们的目的. 为完成这个方案，从 (18.32)，(18.33) 和 (18.37) 中 p_j，k_j 和 l_r 的线性关系我们看到对外动量 q_s 所作的这种类型的任何移动都可以同样对 k_j 和 l_r 做. 让我们对所有外动量作代换

$$q_s^0 \to q_s^0 e^{i\varphi} \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$$
$$\boldsymbol{q}_s \to \boldsymbol{q}_s$$

可以验证积分 I 仍然存在，因为 Kirchhoff 动量 k_j 也以同样的方式变换

$$k_j^0 \to k_j^0 e^{i\varphi} \qquad \boldsymbol{k}_j \to \boldsymbol{k}_j$$

而 (19.53) 中的分母成为

$$\begin{aligned} J &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (k_j^2 - m_j^2 + i\varepsilon) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \{[(k_j^0)^2 \cos 2\varphi - \boldsymbol{k}_j^2 - m_j^2]\alpha_j + i[(k_j^0)^2 \sin 2\varphi + \varepsilon]\alpha_j\} \end{aligned} \tag{19.54}$$

因为在积分 (19.53) 中对所有 $\alpha_j \geqslant 0$ 有

$$\mathrm{Im}\, J > 0$$

所以 I 对所有 $0 < \varphi < \pi/2$ 都存在，只要它是按要求规则化了的. 现在我们在 (19.54) 中取极限 $\varphi = \frac{\pi}{2}$，并从 (19.53) 的

最后一个形式回到第一个形式，我们有

$$\bar{I}(\bar{q}_1,\cdots,\bar{q}_m)=\int\frac{d^4\bar{l}_1\cdots d^4\bar{l}_k P(\bar{q}_s,\bar{l}_r)}{(\bar{p}_1^2-m_1^2)\cdots(\bar{p}_n^2-m_n^2)} \quad (19.55)$$

这里 $\bar{p}_\mu=(ip_0,\mathbf{p})$ 和 $\bar{p}^2=-(p_0^2+\mathbf{p}^2)<0$，并且所有积分是对四维欧氏空间 $d^4\bar{l}$ 进行.

用这个解析延拓程序，我们在 (19.55) 中构造了一个具有负定分母的 $\bar{I}$ 的形式，它更便于讨论收敛性. 如果我们能够证明 $\bar{I}(\bar{q})$ 的存在，那么，除开象在第十八章中讨论的使 I 有 Landau 奇异性的那些特定值外，我们也就对物理动量 q_s 演示了 $I(q)$ 的存在. 这是因为我们知道，我们可以反过来令 $\bar{q}_0\to\bar{q}_0e^{-i\varphi}$ 并取极限 $\varphi=\pi/2$ 而从 $\bar{q}_s$ 解析延拓回到物理的 q_s. 由于我们是从一个很好定义了的解析函数出发的，这个解析延拓过程，只有碰到 $\varphi=\pi/2$ 极限的自然边界时才会停住. 但是，§18.4 的讨论指出，仅只 $I(q_s)$ 的 Landau 奇异性处在这个延拓的路线上. 我们已经对只有一个外动量变量 q^2 的顶角明确地证明了这一点. 如果我们忽略质壳限制，即 (19.52)，并且如那里所作的，把所有变量延拓到欧氏区，那么，我们可以把延拓程序推广到有更多外腿的散射图形. 因为 Landau 奇异性的数目小于或等于可能的约化图形的数目，这数目是有限的，所以如果 $\bar{I}(\bar{q}_s)$ 存在，则 $I(q_s)$ 对物理 q_s 几乎处处都存在.

此后，我们抛开 q_s 和 $\bar{q}_s$ 的区别，并且假定，每当讨论收敛性问题时，我们总已经作了从物理动量到欧氏动量的解析延拓.

定义重整化常数 Z_1 或 Z_2 的 Feynman 积分要求特殊的讨论，因为它们是在令外动量 p^2 等于 m^2 时计算的. 在这些值时，我们不能应用马上要讨论的收敛性判据，它只适用于

$p^2 \leqslant m^2$ 的欧氏四矢量[1]. 为迴避这个问题所附加的麻烦，我们将首先在欧氏区边界上的 $p_\mu = 0$ 点作使理论成为有限的减除. 我们称这规定为**中间重整化**. 从而传播子和顶角不再是在质壳 $p^2 = m^2$ 上正规地归一的了. 但如果我们能证明下面各点，我们就将达到所期望的目的，即显示 $\tilde{S}'_F$ 和 $\tilde{D}'_F$ 是有限的：

1. 传播子和顶角不是在 $p^2 = m^2$ 而是在 $p_\mu = 0$ 作中间重整化的理论是收敛的.

2. 联系在 $p_\mu = 0$ 作中间重整化的传播子和顶角与在 $p^2 = m^2$ 重整的 $\tilde{S}'_F$ 和 $\tilde{\Gamma}_\mu$ 的重整化常数是有限的(即与截断无关).

我们的程序因之将在 $p_\mu = 0$ 重整 $S'_F(p)$ 和 $\Gamma_\mu(p, p)$；于是我们可以对限于欧氏区的积分应用任何收敛性定理. 但是，我们必须研究这样的中间重整化对定义方程 (19.51) 和 (19.52) 以及对理论的物理解释的影响，然后证明，计算 $\tilde{S}'_F$ 和 $\tilde{D}'_F$ 所必须的附加的重整化也是有限的.

利用未重整和重整后的自能和顶角部分，我们引入中间重整化量如下：

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{S}}'_F(p) &= Z_2'^{-1} S'_F(p) = z_2^{-1} \tilde{S}'_F(p) \\ \tilde{\tilde{\Gamma}}'_F(p', p) &= Z'_1 \Gamma_\mu(p', p) = z_1 \tilde{\Gamma}_\mu(p', p) \end{aligned} \tag{19.56}$$

这样定义使得：当 $p_\mu \to 0$ 时

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{S}}'_F(p) &\to \frac{1}{\not{p} - \overline{m}} \\ \tilde{\tilde{\Gamma}}_\mu(p, p) &\to \gamma_\mu \end{aligned} \tag{19.57}$$

定义方程 (19.51) 和 (19.52) 因之可以写成这个重整的形式，这时在 $\tilde{S}'_F$ 和 $\tilde{D}'_F$ 上多加一个短波线，把 Z_1 和 Z_2 改成 Z'_1 和 Z'_2，并把边界条件 $|_{\not{p}=m}$ 改为 $|_{p_\mu=0}$. 特别是，我们仍保持 Ward 恒

1) 对于 Z_3 不存在问题，因为光子传播子已在 $q^2 = 0$ 重整化了.

等式和等式

$$Z_1' = Z_2'$$

因为(19.20)和(19.57)在 $p_\mu \to 0$ 极限下给出

$$(Z_2')^{-1} \frac{\partial}{\partial p^\mu} (\not{p} - \bar{m}) = (Z_1')^{-1} \gamma_\mu$$

或

$$Z_1' = Z_2'$$

本章剩下部分的讨论将证明中间重整化的理论是有限的. 然后,为了证明 $\tilde{S}_F'$ 和 $\tilde{\Gamma}_\mu$ 有限,由(19.56)和(19.57)我们必须先证明 z_1, z_2 和 $\bar{m}$ 有限. 为此,从推广的 Ward 恒等式

$$\tilde{\tilde{S}}_2'^{-1}(p) - \tilde{\tilde{S}}_F'^{-1}(0) = p^\mu \tilde{\tilde{\Gamma}}_\mu(p,0)$$

我们注意到,由于 $\tilde{\tilde{S}}_F'^{-1}(p)$ 在 $\not{p} = m$ 为零,参量 $\bar{m}$ 由下式给出

$$\bar{m} = p_\mu \tilde{\tilde{\Gamma}}^\mu(p,0)|_{\not{p}=m} \tag{19.58}$$

还有,从 $\tilde{\Gamma}_\mu$ 的归一化条件和从(19.56)我们导出

$$z_1 \gamma_\mu = z_1 \tilde{\Gamma}_\mu(p,p)|_{\not{p}=m} = \tilde{\tilde{\Gamma}}_\mu(p,p)|_{\not{p}=m} \tag{19.59}$$

于是,如果 $\tilde{\tilde{\Gamma}}_\mu$ 有限,则 $z_1 = z_2$ 和 $\bar{m}$ 亦然. 那么,如果中间重整化的理论(双波线)为有限,则真正重整的理论(单波线)亦然. 而且,假若我们证明了 $\tilde{\tilde{\Gamma}}_\mu(p',p)$ 对欧氏的 p' 和 p 为有限,则它对物理值 p', p 也是有限的. 这是由于在本节前一半已证明了存在可以回到 p' 和 p 的物理值的解析延拓.

以后在讨论积分的收敛性时,我们将不顾中间重整化的这个"数学严格性"以及向欧氏动量四矢的解析延拓. 当需要时总可以假定已经完成了它们. 量子电动力学中更有关的一点涉及中间重整化对红外问题的实际应用. 由于光子没有质量,当我们在 $p^2 = m^2$ 完成通常的重整化程序时,我们实际上就处于要在分枝点处将函数归一化的数学上为难的境地. 在二阶自能部分(8.40),和在(8.42)中 $z_1 = z_2$ 的计算中都明显

看到这点，在 $p^2 \to m^2$ 时二者都是红外发散的. 在 $p_\mu \to 0$ 的中间重整化方案中，就没有出现这样的复杂性.

19.10 发散度；收敛判据

现在我们能集中注意于建立 Feynman 振幅收敛性的判据和鉴定量子电动力学中发散图形的判据问题[1]. 在第八章的二阶计算中，我们遇到自能和顶角积分，它们收敛性的判据是简单地计算内动量幂次；分子中动量的幂次加上内动量积分 d^4l 的幂次 4，等于或大于分母中的方幂时，这些积分对 $l_\mu \to \infty$ 都有紫外发散. 在作了重整化方案的减除后，余下部分在分母中 $l_\mu \to \infty$ 的方幂较分子为高，因而是有限的.

当我们作若干个或更多内动量积分 d^4l_r 的高阶计算时，仅只计算分子分母中内动量变量的总幂次是否能决定 Feynman 积分的收敛性是不清楚的. 但这强烈地提示我们，幂次计数与决定 Feynman 积分发散得如何这问题有某种联系. 因此，在研究收敛性判据时，我们要把对任意图形的幂次计数程序系统化.

首先我们引入一个图形 $\mathcal{G}$ 的发散度，它等于分子上内部动量的幂次加上每个 d^4l_r 的幂次 4，再减去分母中内部动量的幂次，以 $D(\mathcal{G})$ 表示之. 每一个内光子，或玻色子线的传播子对分母贡献二次方幂，而每个内电子、或费米子线贡献一次方幂，于是，在量子电动力学中我们可以写出

$$D = 4k - 2b - f \tag{19.60}$$

这里 b = 内光子线数目，

f = 内电子线数目，

k = 内动量积分数目.

---

1) F. Dyson, 见 §19.7 的引文.

(19.60)的一个值得注意的特性，也是重整化方案成功的关键，是D实际上与 Feynman 图的所有内部详情无关，而只依赖于图形**外**线的数目和种类(光子或电子)．本质上的原因是由于耦合强度e是无量纲的这一事实．电子质量m是理论中唯一有量纲的常数，但是在$l_\mu \to \infty$计数动量方幂时，我们忽略了它．当我们通过插入越来越多的内光子线以对一个任意给定的振幅作越来越高阶的计算时，其量纲不会改变．为明显验证这点，我们观察到，在图中每插入一根内光子线意味着产生两个追加的 Feynman 传播子以及多出一个$\int d^4 l_\mu$．由(19.60)知道这在发散度中引起的改变为

$$\Delta D = 4\Delta k - 2\Delta b - \Delta f = 4 - 2 - 2 = 0 \quad (19.61)$$

我们于是得到，D由总的量纲考虑所决定．对于在相互作用中包含有导数耦合和带量纲的耦合常数的理论，上述论据以及传统的重整化方案都失效．

基于(19.61)，我们可以把任何一个正规图形的内线去掉，一直达到一个如图 19.30 所示的任意简单的图形，从而找

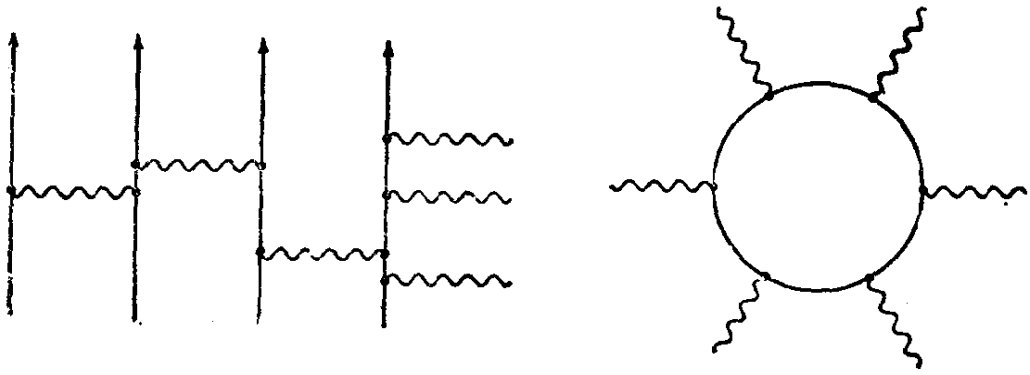


图 19.30　为计算发散度D而去掉了多余内线的正规图形

出D．如果我们现在这这图上加上另外一根**外**光子线，则产生了一根另外的内费米子线，D减少 1，即$\partial D/\partial B = -1$，这

B 指外光子或外玻色子线数. 类似地，如果加上一根另外的外费米子线，则结果要有两条费米子线外腿，一根追加的费米子内线和一根追加的内光子线. 因此，D 减少 3，或对每一根追加的外费米子线 F 减少 3/2；$\partial D/\partial F = -3/2$. 我们于是得到一个通过 B 和 F 来决定发散度的方程：

$$D = 4 - \frac{3}{2}F - B \tag{19.62}$$

这里常数 4 是由考虑一个任意特定的图形而得出的. 例如，电磁正规顶角，到 e 的最低阶，有 $F = 2$，$B = 1$ 和 $D = 0$，因为它是一个没有动量积分的一个常数.

在重整化方案中，我们也将要处理作了一次或多次“减除”的 Feynman 积分. 上面我们已经提到，在第八章的二阶计算中曾遇到，其效果是以在分子中引人外动量因子为代价而在分母中增加额外的内动量幂次. 这显然是普遍正确的，为在发散度的定义中包括进这样的减除效果，我们增加一个规则：对于 Feynman 积分的某个外动量 q_s 的集合的每一次减除，这个特定积分的发散度也相应减 1.

如果 $D < 0$，Feynman 图在分母中有足够的动量幂次使积分为有限，我们说它是表观收敛的. 但是它不一定是有限的. 因为在这图中插入一个顶角并不改变 D，但却足以使它发散. 这表明，除了要求总发散度是负的，$D<0$，为使 Feynman 振幅收敛，必须要每一个子积分的收敛条件得到满足.

另方面，如果对每一个图形 $D \geqslant 0$，则几乎没有可能使其有限. 在量子电动力学中只有非常有限的一类图形具有非负的发散度. 它们列举于下并示于图 19.31 中.

(a) 电子正规自能部分 $\Sigma(p)$ $D = 1$

(b) 正规顶角部份 $\Gamma_\mu(p', p)$ $D = 0$

(c) 光子正规自能部分或真空极化 $\Pi_{\mu\nu}(q)$ $D = 2$

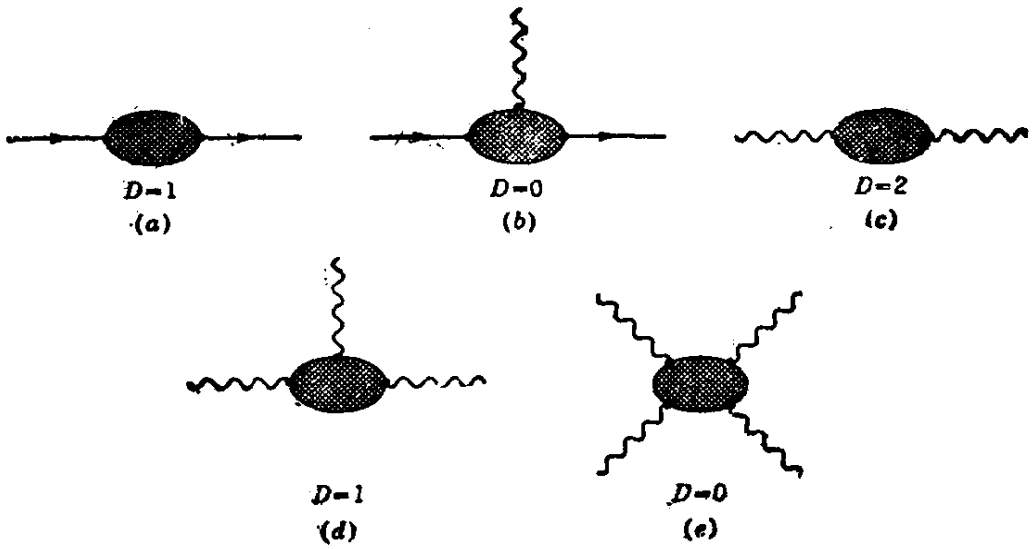


图 19.31　在量子电动力学中具有非负发散度的图形

(*d*) 三光子正规顶角　　$D=1$

(*e*) 光子-光子散射振幅　　$D=0$

这五个当中，只 (*b*) 和 (*c*) 要特别着重研究. 电子自能 (*a*) 可以通过 Ward 恒等式从 Γ_μ 定出，因而不须单独讨论. 三光子顶角 (*d*) 恒等于零，因为在电荷共轭下它是奇的. 我们从 (15.96) 和 (15.97) 回忆一下: 存在一个幺正算符 $\mathscr{C}$，它是运动常数，$[\mathscr{C}, H]=0$，并且在它的作用下，电磁场是一个奇算符:

$$\mathscr{C}\, A_\mu(x)\mathscr{C}^{-1} = -A_\mu(x)$$

如果像通常 (16.2) 中那样对量子电动力学假定真空态是唯一的，则它是 $\mathscr{C}$ 的本征态，$\mathscr{C}|0\rangle = |0\rangle$，从而

$$\begin{aligned}&\langle 0|T(A_\mu(x)A_\nu(y)A_\lambda(z))|0\rangle\\ &\quad=\langle 0|T(\mathscr{C}A_\mu(x)A_\nu(y)A_\lambda(z))|0\rangle\\ &\quad=-\langle 0|T(A_\mu(x)A_\nu(y)A_\lambda(z))|0\rangle=0\end{aligned}$$

因此三光子顶角为零. 这个结果推广到只有奇数外光子线的

任意图形，就是在 1937 年证明的 Furry 定理[1].

虽然对于光子自能部分 (c) $D=2$，平方发散项可与光子质量相联系，借助于 (19.21) 和 (19.22) 的 Ward 恒等式，可以证明它是零. 于是 $\Pi_{\mu\nu}(q)$ 中的两个动量方幂全用来构成 (19.51) 中的 $q_\mu q_\nu$ 因子，剩下 $\Pi(q^2)$ 具有有效的 $D_{\text{eff}}=0$，是较弱的发散问题.

至于光子-光子散射振幅 (e)，情况要更好一些. 在构成电磁场强度 $F_{\mu\nu}(q)\sim(q_\mu\epsilon_\nu-q_\nu\epsilon_\mu)$ 时我们少了内动量的四个幂次，四个外光子的每一个各少一次，正如对一个规范不变的振幅所要求的那样. 这使得有效的发散度不是零而是

$$D_{\text{eff}}=-4,$$

从而在微扰论中导致有限振幅，Karplus 和 Neumann[2] 以明确的计算验证了这一点. 真正的光子-光子散射截面极小；在低能下

$$\sigma_{\gamma\gamma}\sim\frac{\alpha^4}{\pi^4}\frac{\omega^6}{m^8}\quad \omega=\text{质心能量}\ \omega\ll m$$

而对于相对论能量，$\omega\gg m$，它如 $\sim 1/\omega^2$ 那样减小.

于是剩下 $D\geq 0$ 我们要考虑的只有两个量，Γ_μ 和 $\Pi_{\mu\nu}$；二者的有效发散度是 $D_{\text{eff}}=0$. 把发散困难集中到两个量上，它们在微扰理论中的行为不比对数截断依赖关系更坏，这是一个很大的简化.

由这里并不能得出所有 $D<0$ 的量都是有限的结论；实际上，任何自能或顶角的插入都不改变 D，但是却引入了无穷大. 显然，需要有比简单的方幂计数更为周到的收敛性判据，即必须讨论关于在 Feynman 图形中对流经圈的内动量

---

1) W. H. Furry, *Phys. Rev.*, **51**, 125(1937).

2) R. Karplus and M. Neumann, *Phys. Rev.*, **80**, 380, **83**, 776(1950).

群，或子集，的积分．这个在 1949 年为 Dyson[1] 建立，而在 1951 年为 Salam[2] 完成的判据，在 1960 年被 Weinberg[3] 所证明．我们即将讨论的 Weinberg 定理给出了 Feynman 积分收敛性的精确判据，并且是 Dyson-Salam 重整化方案[4]成功的基础． Weinberg 定理除了应用于重整化方案外，它还有更多的作用，对于任一给定的趋于无穷的外动量集合，它决定这些积分的渐近行为到对数方幂．这里我们只讨论与重整化方案理论有关的部分，而把渐近行为的考虑留待到 §19.14．

为了表述和解释 Weinberg 定理的基本思想，必须引入子图和子积分的概念．对某个内圈动量 l_r 的子集 S 的积分称为子积分．与子积分相联系的是子图形，它是去掉所有与子集 S 中内动量 l_r 无关的线而得到的图形．例如，图 19.32 有图 19.33 中所示的三个可能的子图形．它们在 (a) 中对应于 l_2 固定，对 l_1 的子积分；在 (b) 中 l_1 固定，对 l_2 的子积分；和在 (c) 中 l_1—l_2 固定对 l_1 积分．我们可以如同对总图形进行幂次计数那样，通过幂次计数把发散度 $D(S)$ 与每一个子图形和子积分联系起来；于是，对在图 19.33 中的三个子图形 (a)，(b) 和 (c) 分别有 $D = -3, 0$，和 -5．

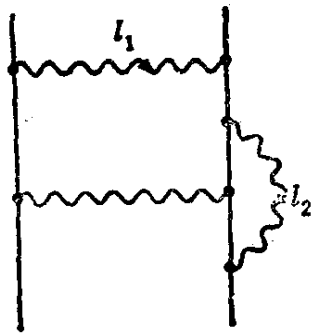


图 19.32 有两个内圈动量 l_1 和 l_2 的图形

应注意：在图形 $\mathcal{G}$ 上的一个总的减除一般地并不减少 $D(S)$．只有当减除中包含的外动量完全在子图形内流过时才出现例

1) F. J. Dyson 见 §19.7 的引文．
2) A. Salam, *Phys. Rev.*, **82**, 217; **84**, 426(1951).
3) S. Weinberg, *Phys. Rev.*, **118**, 838 (1960).
4) 同时，Bogoliubov 和他的合作者用某种不同的技术证明了可重整性；见 Н Н. Боголюбов и д. в. Ширков *"Введение в Теорию Квантованных Полей"* Москва, 1957.

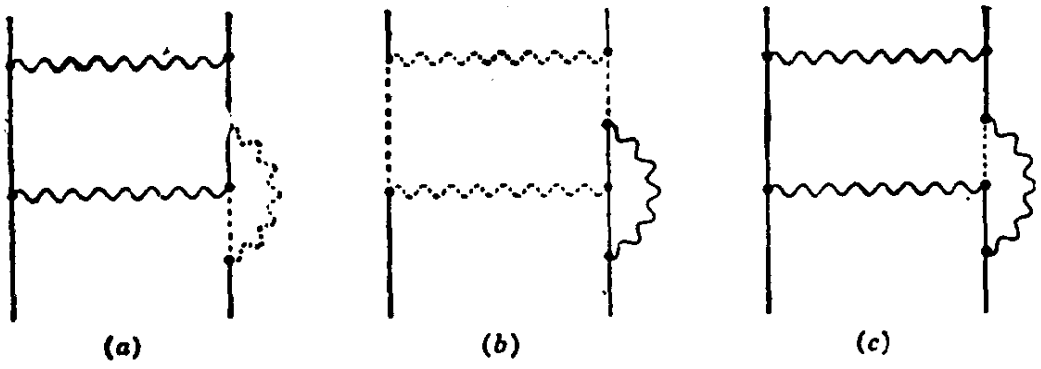


图 19.33　图 19.32 的三个子图形，(a) l_2 固定，(b) l_1 固定和 (c) l_1-l_2 固定．通过子图中点线部分的内动量变量不进行积分

外．

但是，在给定子积分的发散度时，有另外的复杂性．这是由于：在按 e 的幂级数展开的重整方程 (19.51) 的展开式中出现的 Feynman 积分也包含有减除项，这些减除项与定义 $\tilde{\Gamma}_\mu$ 和 $\tilde{D}'_F$ 的重整化条件 (19.51c)、(19.51e) 及 (19.52) 相关联．为演示这一点，我们回到图 19.33 的例子并明显地写出顶角插入

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}_\mu(p,p+l_1)\sim\int d^4l_2\gamma_\nu S_F(p-l_2)\gamma_\mu S_F(p+l_1-l_2)\gamma^\nu D_F(l_2)$$

$$-\int d^4l_2\gamma_\nu S_F(\tilde{p}-l_2)\gamma_\mu S_F(\tilde{p}-l_2)\gamma^\nu D_F(l_2)|_{\tilde{p}=m}$$

在第一项的分母中有 l_1 的一次方，它对 l_1 子积分的发散度

$$D(l_1)=-3$$

的估计有贡献．但第二项与 l_1 无关，因之这一项的贡献

$$D(l_1)=-2.$$

为了普遍地处理这样的情况，我们对相应于在其中有这样的减除项的 Feynman 积分的图形，用绕着作了减除的图形部分画一虚线方框的办法来标记它．在图 19.34a，和 19.34b 中显示了我们的例子．这两个图形是与顶角减除项相联系的仅有

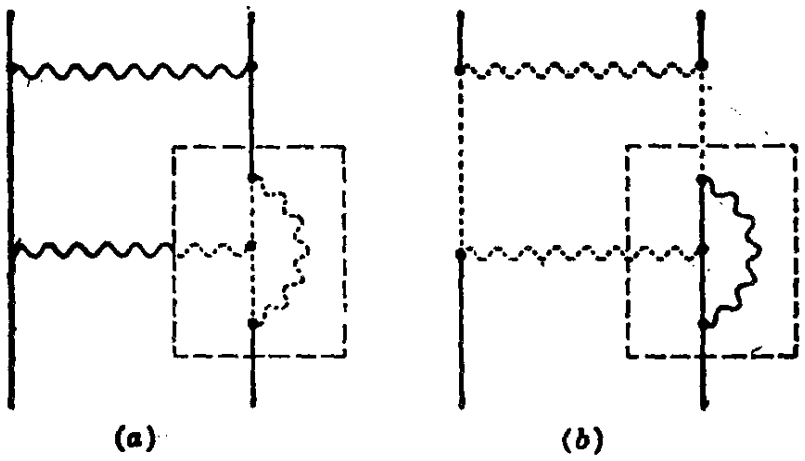


图 19.34　绕图 19.32 的两个可能的子图形中作了减除的部分的虚线方框

的两个可能的子图形．其发散度分别为 $D = -2$ 和 0．

按照我们的重整化程序，我们得到确定与其中有减除项的 Feynman 图相联系的子积分的发散度的直接规则．

1. 画出绕对应于减除项的顶角和自能插入的虚线方框．

2. 对于被积动量是如图 19.34b 中那样完全包含在方框中的子积分，像通常那样计算幂次．

3. 对于如图 19.34a 中那样的进入和离开方框的动量积分，在计算方幂时，完全略去方框，即把方框收缩成一点并完全忘掉它的存在．这等价于说：在方框内的所有东西都忽略掉，因为从方框内部出来的动量为减除所固定．

然后，我们必须对顶角方框指定为零次幂，对电子自能部分为 +1，对光子自能部分为 +2，分别对应于对这三种插入比例于 γ_μ，$\not{p}$ 和 $(q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2)$ 的减除．但是，这些方幂正好被相应的自能插入所引进的追加的费米子和玻色子传播子所抵消，这结果就像是我们完全抹去对应于减除项的虚线方框．

现在我们可以表述 Weinberg 定理：如果图形的发散度以及与每一个可能子图形相联系的发散度是负的，则 Feynman

积分收敛. 因此,图 19.32 是发散的,因为图 19.33b 的顶角插入有 $D(S)=0$. 但是,当重整化规定用之于顶角部分时,其 $D=0$ 的发散部分可以减除出来(图 19.34b)并归入重新标度定律中去,只剩下

$$D(S)=-1$$

的有限部分,因此,Weinberg 定理肯定整个积分是收敛的.

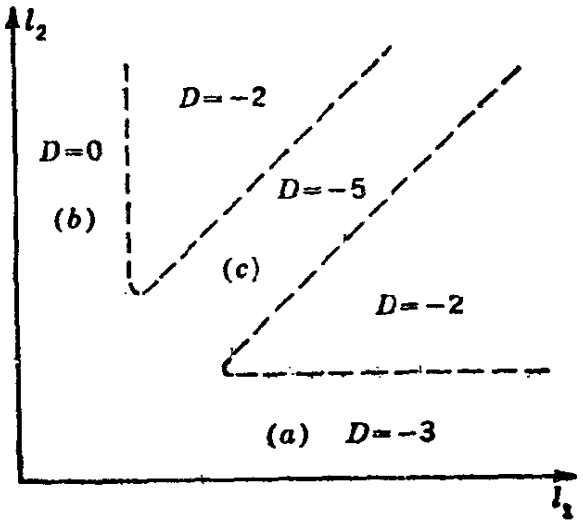


图 19.35 l_1—l_2 空间中具有相应发散度的区域

证明 Weinberg 定理的思想可以在图 19.32 的例子中看出. 积分 $d^4l_1d^4l_2$ 可以看成是在 l_1—l_2 八维空间中进行的,以二维图形把它表示于图 19.35 中. 总发散度按 (19.62) 是 $D=-2$,这对应于一个事实: 当我们在 l_1—l_2 空间从原点向∞作径向积分时,在大多数方向积分行为有如

$$I\sim\int\frac{d^8l}{l^{10}}$$

分母 l^{10} 来自四个费米子和三个光子的传播子. 但存在着四维的"管子"区域,在那里被积式有不同行为. 它们对应于三个区域:

(a) 小 l_2, $I\sim\left(\int_{\text{有限体积}}d^4l_2\right)\left(\int\frac{d^4l_1}{l_1^7}\right)$, 有 $D(a)=-3$

(b) 小 l_1, $I\sim\left(\int_{\text{有限体积}}d^4l_1\right)\left(\frac{d^4l_2}{l_2^4}\right)$ 有 $D(b)=0$

(c) 小 l_1-l_2, $I\sim\left(\int_{\text{有限体积}}d^4(l_1-l_2)\right)\left(\int\frac{d^4l_1}{l_1^9}\right)$ 有 $D(c)=-5$

显然，这些区域正好是那些与图 19.33 中的 (a)，(b) 和 (c) 子图形相联系的子积分所覆盖的区域. 类似地，与减除项相联系的图 19.34a 和 b 的子图形对应于两个区域

$$(a)\ \text{小}\ l_2, I \sim \left(\int_{\text{有限体积}} d^4l_2\right)\left(\frac{d^4l_1}{l_1^6}\right) \quad \text{有}\ D(a) = -2$$

$$(b)\ \text{小}\ l_1, I \sim \left(\int_{\text{有限体积}} d^4l_1\right)\left(\frac{d^4l_2}{l_2^4}\right) \quad \text{有}\ D(b) = 0$$

可以有效地把 Feynman 积分分割成对应于严格有界区域的几部分，这一问题是 Weinberg 解决的. 特别是，他的定理肯定了我们上面基于“有限体积”积分而作出的估计.

在这个例子中表明的思想在高阶时可用来理解 Weinberg 定理的结果. 如果有 k 个内动量 l_r，积分体积的维数是 $4k$. 当在这个 $4k$ 维空间作径向积分至∞时，被积函数的行为在几乎所有方向上有如 l^{D-4k}，这里 D 是图形总发散度. 但是，这里仍然有对应于这样一些子图形的不同维数的“管子”，在这些子图形的每一个中，不含于子图形中的传播子分母保持很小，并且无助于积分的收敛. 为决定来自这些管子的贡献，可以通过略去不在子图形中的线并对子图形中的的线作幂次计算而决定其发散度 $D(S)$. Weinberg 定理证实这个规定的正确性. 这个定理的证明包含着 Heine-Borel 定理的冗长而繁复的应用，有兴趣了解详情的读者可查看原始文献[1].

有了这个定理，我们知道，确定重整化后的微扰论中各项收敛性的任务就在于找出所有的 $D(S) \geqslant 0$ 的子图形 S 和子积分. 而且，由 (19.62) 的结果，即只有顶角和自能部分有非负的发散度，使我们可以直接确定哪些是 Feynman 积分中发

1) S. Weinberg, 见本节前面的引文

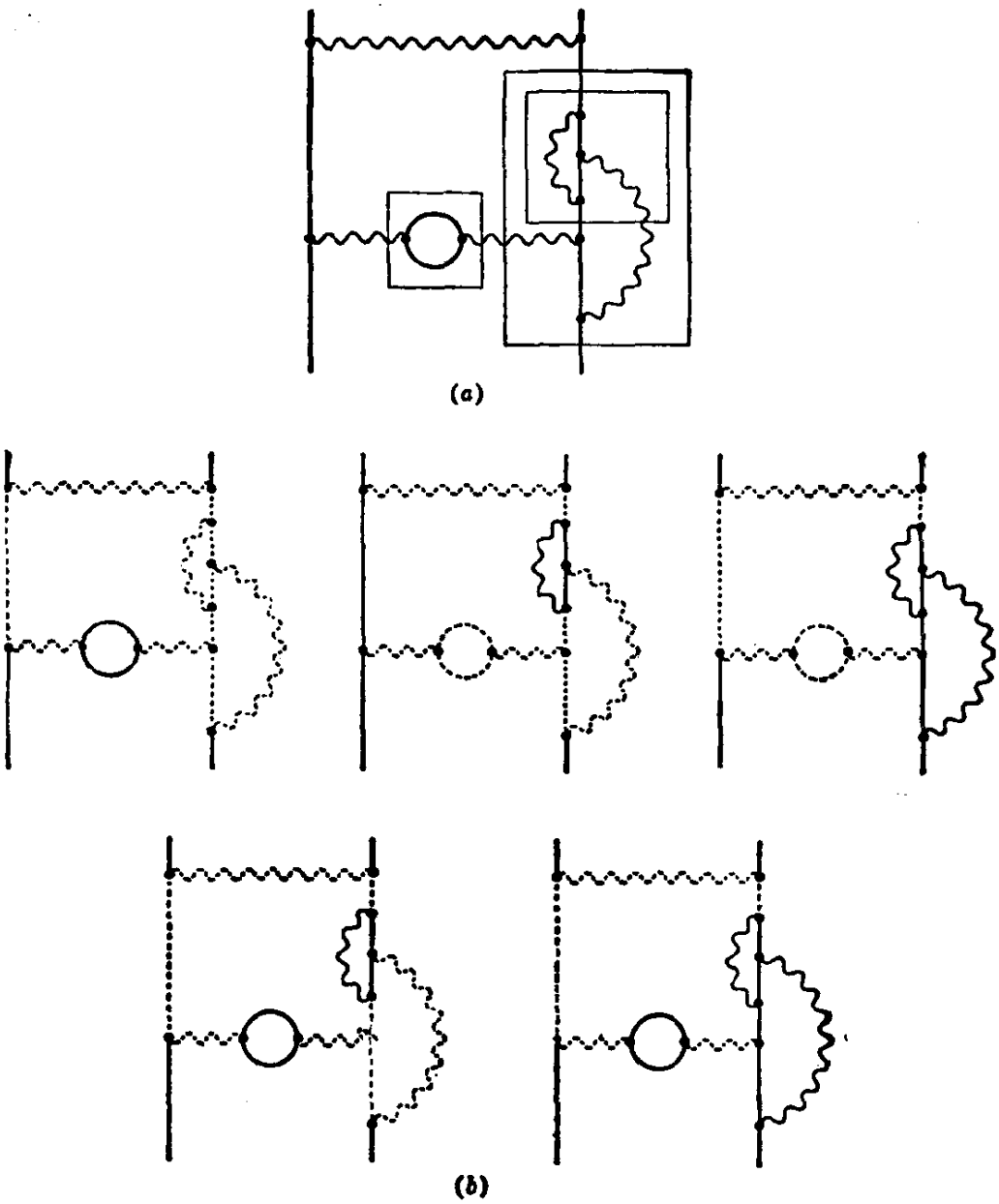


图 19.36　图形 (a) 和它的与发散子积分对应的子图形 (b)

散困难的潜在根源的子图形和子积分. 事实上，它们正是在 §19.4 中在确认和分离顶角和自能插入的方框中所包含的图形的那些部分. 如同那里已得到的，这些顶角和自能插入，除了在自能部分内部以外，可以用确定的和不重迭的方式完成.

例如，我们在图 19.36b 中给出了图 19.36a 的对应于发散

子积分的所有子图形．这些图形中的某些部分看来是由分离的部分构成的．但我们只需要明确地考虑连通子图形，因为，如果所有连通子图形的发散度是负的，那么，所有非连通子图形的发散度也将是负的． 在图 19.37*a* 中我们还给出一个由虚线方框所包围的顶角插入[1]的减除项，在图 19.37*b*、*c*、*d* 中给出相关联的发散子积分，图 19.37*b* 的子积分现在是发散的，它在图 19.36的未减除项中曾是收敛的．这个发散发生在顶角插入内部，并且从前面的讨论显见，只有在顶角和自能插

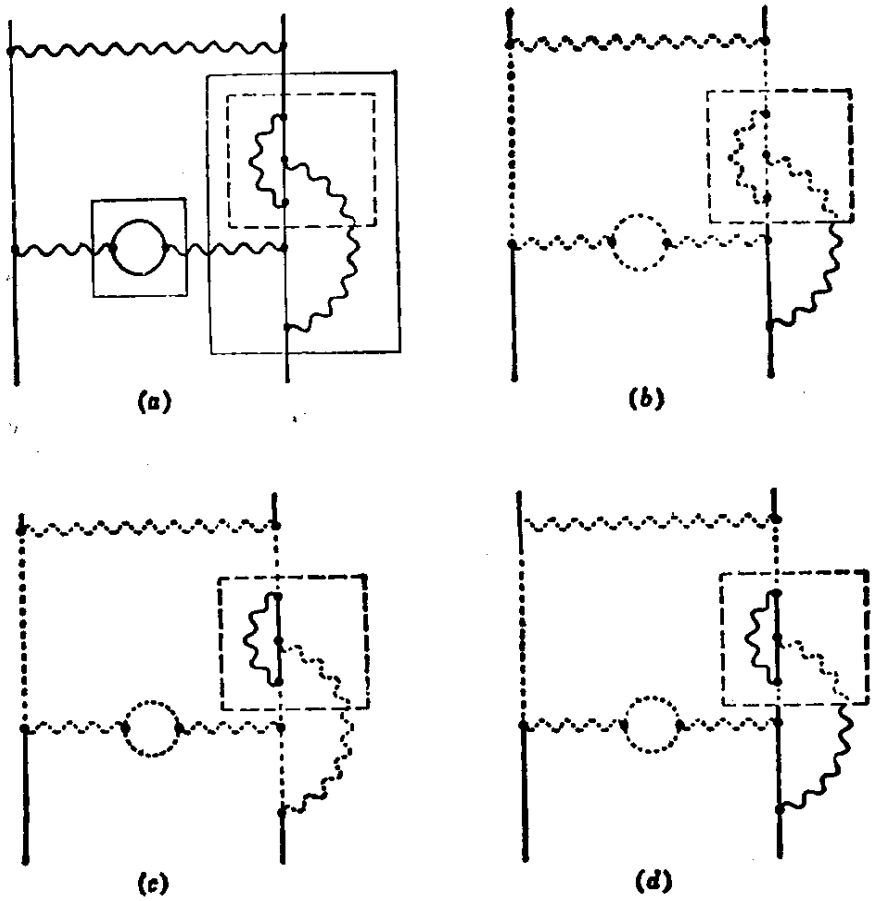


图 19.37 顶角插入的减除项 (*a*) 和与之相联系的发散子积分 (*b*),(*c*) 和 (*d*)

1) 与真空极化插入相联系的子图形没有什么新的性质或问题，我们将不考虑它们．

入的内部减除项才会使收敛的子积分发散.

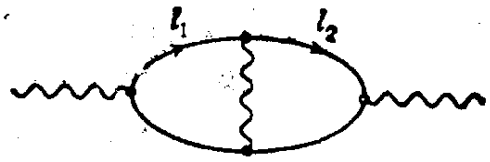


图 19.38　四阶光子自能图

在自能部分内部的重迭顶角子图形提出了特殊的问题，它可以借助于电子-正电子核 $\tilde{K}$ 来解决. 以四阶光子自能图形作为这个重迭问题的例子示于图 19.38 中. 为构成在 (19.51) 式中 $\Pi(q^2)$ 与 $q_\mu q_\nu$ 相乘的因子需减除掉动量的二次幂，再根据 (19.62) 式，总发散度是 $D=0$. 此外，在图 19.39 中画出三个特殊管子，具有对应于图 19.40a, b 和 c 的发散度:

(a) 小[1] l_1-l_2　$D(a)=-2$

(b) 小 l_2　$D(b)=0$

(c) 小 l_1　$D(c)=0$

在图 19.40 的 d, e, f 中也画出与减除项相关的子图形，这些减除项由顶角插入的重整而来. 它们对应于下面 l_1-l_2 空间的区域

(d) 小 l_1　$D(d)=0$

(e) 小 l_2　$D(e)=0$

(f) 小 l_1　$D(f)=0$

(g) 小 l_2　$D(g)=0$

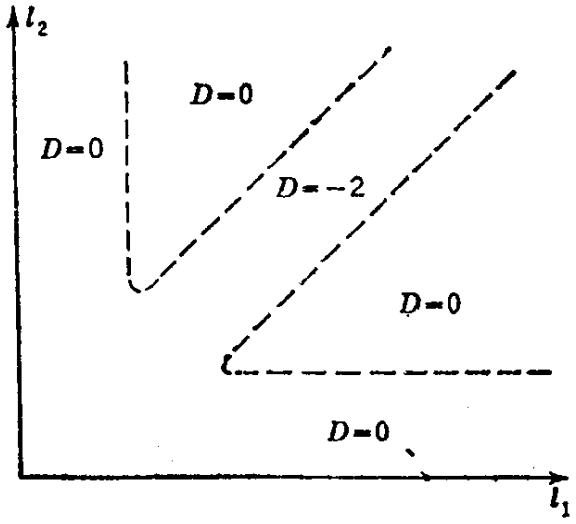


图 19.39　l_1-l_2 空间的区域和相关的发散度

在减除掉发散部分时，每个子图形的发散度必须通过顶角减除而降到零以下，整个图形的 D 则同样要通过自能减除而降到零以下；对这种重迭情形的详

1) 由于外动量可以选得完全流通在这个子图形中，$D(a)$ 被总的减除所降低.

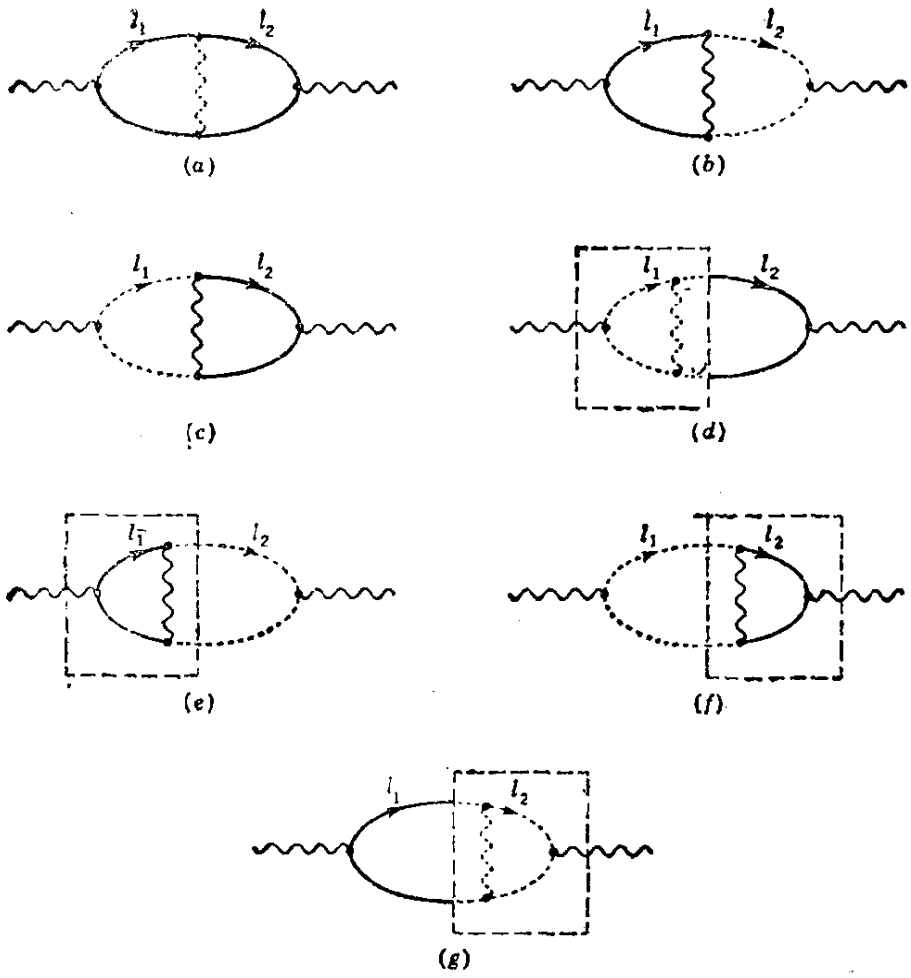


图 19.40　四阶光子自能图 19.38 的子图形

细规定是 Salam 最先给出的[1]。

19.11　重整化理论为有限的证明

我们现在可以证明，在量子电动力学中，S 矩阵到按重整的电荷 e 展开的任何有限阶都是有限的。（19.51）中的迭代程序允许我们通过 Feynman 积分的有限和来计算按 e 展开的重整的 $\tilde{\Gamma}_\mu$, $\tilde{S}'_F$, $\tilde{D}'_F$ 和 $\tilde{\tau}$ 函数以及 S 矩阵元。Weinberg 定

1) A. Salam 见本节前面的文献.

理给我们提供了这些 Feynman 积分的收敛性判据：如果所有子图形以及图形本身的发散度为负，则积分收敛.

证明运用了数学归纳法，如在第八章中曾由直接计算所验证的那样，到 e^2 的最低阶，$\tilde{\Gamma}_\mu$ 和 $\Pi_c(q^2) = \Pi(q^2) - \Pi(0)$ 的发散度是负的，并且它们由收敛的(即不依赖于截断的)积分给出.同样，对 $\tilde{S}'_F$ 和 $\tilde{D}'_F$ 也是如此，它们是通过 $\tilde{\Gamma}_\mu$ 和 $\Pi_c(q^2)$ 表示的.我们**假定**到 e 的 $n-2$ 阶这点都是对的；$\tilde{\Gamma}_\mu$ 和 $\Pi_c(q^2)$ 的所有子图形的发散度假定都是负的，因此，到 e 的这个阶，它们以及 $\tilde{S}'_F$ 和 $\tilde{D}'_F$ 都是有限的，我们于是用 (19.51) 的迭代程序和 Weinberg 定理证明这个假定到 n 阶成立，并且证明所有 S 矩阵元到 n 阶收敛.

我们从有四根或更多外腿的 $\tilde{\tau}$ 以及核 $\tilde{K}$ 的骨架展开 (19.51a) 和 (19.51b) 开始. 如果我们计算 $\tilde{\tau}$ 和 $\tilde{K}$ 到任何有限阶 e^n，那么在骨架图的求和中出现有限数目的项.而且，所考虑的核 $\tilde{K}$ 和 $\tilde{\tau}$ 函数至少含有两个相互作用顶角，当 $e^2 \to 0$ 时至少是 e^2 阶. 因此，到 e^n 阶，我们仅需插入到 e^{n-2} 阶的重整传播子和顶角函数. 但由归纳假定，所有这样的插入 S 具有 $D(S) < 0$，因为我们在 (19.51a) 和 (19.51b) 的骨架和中是代入重整的顶角和自能部分. 因此，由于 $D(S) \geqslant 0$ 的子图形 S 只能从顶角和自能部分[1]的集合中出现，故没有发散的子图形和子积分. 这也适用于来自有减除常数的项的贡献. 像前面所指出的那样，仅当子图形是处于某个顶角或自能插入之中时，对这项的子积分的发散度才能是非负的. 而且，这些 $\tilde{\tau}$ 和 $\tilde{K}$ 函数的总发散度是负的，因为，如像 §19.10 讨论过的

1) 仍然是由于规范考虑，光子-光子散射部分可以不管. 它们可以唯一地确认和用方框图围绕它们予以分离，并且用如 §19.5 中的考虑证明方框不重迭，当四个外光子线连接于荷电线的地方进行了所有置换的图形都加起来时，有效发散度从 $D = 0$ 降到 $D = -4$.

那样，顶角和自能部分保留有 $D \geqslant 0$ 的不确定的特性. 于是我们得出结论: 核 $\tilde{K}$ 和有四条或更多腿的 $\tilde{\tau}$ 函数，或 S 矩阵元，到 e^n 阶都是有限的，因为它们由有限数目的图 $\mathcal{G}$ 所构成，这 $\mathcal{G}$ 的所有子图形 S 有 $D(S) < 0$，并且对于它总的积分有 $D(\mathcal{G}) < 0$.

我们还没有证完，因为我们必须运用(19.51c)和(19.51f)到 e^n 阶对 $\tilde{\Gamma}_\mu$ 和 $\Pi_c(q^2)$，或同样对 $\tilde{D}'_F$，证明归纳假设. 作为 Ward 恒等式的结果，只要对 $\tilde{\Gamma}_\mu$ 证明了收敛性，$\tilde{S}'_F$ 的收敛性就为 (19.51d) 所保证.

为了从 (19.51c) 计算顶角 $\tilde{\Gamma}_\mu$ 到 e^n 阶，我们可以再代入至 e^{n-2} 阶的 $\tilde{S}'_F$，$\tilde{\Gamma}_\mu$ 和 $\tilde{K}$

$$\int \tilde{S}'^{(n-2)}_F \tilde{\Gamma}^{(n-2)}_\mu \tilde{S}'^{(n-2)}_F \tilde{K}^{(n-2)} = Z_1^{(n)} \gamma_\mu - \tilde{\Gamma}^{(n)}_\mu = -\Lambda^{(n)}_\mu \tag{19.63}$$

这里上标 (n) 指明计算到 e 的阶次. 我们的任务在于证明：在一次减除后 $\Lambda^{(n)}_\mu$ 为有限(减除是对 $\tilde{\Gamma}_\mu$ 的重整化条件所要求的)，即

$$\Lambda^{c(n)}_\mu(p',p) = \Lambda^{(n)}_\mu(p',p) - \Lambda^{(n)}_\mu(p,p)|_{p=m}$$

为唯一的，与截断无关的积分之和所给出. 为了应用 Weinberg 定理，我们首先确定，(19.63) 是否有非负发散度的任何子图形. 不论什么 $D \geqslant 0$ 的子图形 S 都不能藏匿在顶角 $\tilde{\Gamma}_\mu$、传播子 $\tilde{S}'_F$ 或核 $\tilde{K}$ 之中，因为根据归纳假设，重整化方案[1]到所指定的 e^{n-2} 阶已经排除了这个问题. 剩下只需要考虑这样的子积分 $\mathcal{L}$，在它们中有传播子 $\tilde{S}'_F$ 的动量 l 参予，如图 19.41 所示.

如在图 19.41a 中对子积分所画出的，从这两个电子传播

1) 同样，(19.63) 由有限的 Feynman 图构成，每个图有有限数目的顶角和自能插入.

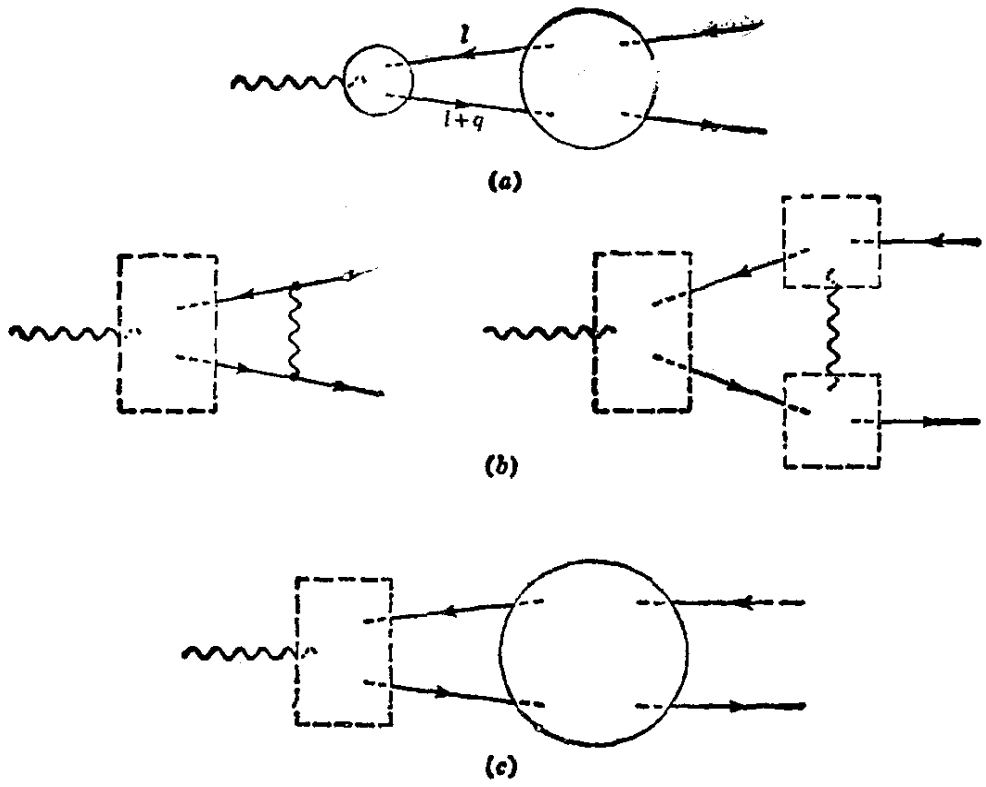


图 19.41　顶角子积分，在其中有传播子 S_F 的动量 l 参加

子，在分母中我们至少得到动量的二次方．因此，为得到发散子图形 $\mathscr{L}$，在 $\tilde{K}$ 中间的部分必须有发散度 $D(\tilde{K}) \geqslant -2$．在找这种子图形时，我们找到一类候选者，它们是最低阶的微扰贡献伴以如图 19.41*b* 中所示的一类减除项；它们有

$$D(\tilde{K}) = -2,$$

也有类似的高阶项，在其中，$\tilde{K}$ 的**所有**线（可能与减除相联系的虚线方框中的某些除外）属于子图形；所有这样的图形由于计算规则 (19.62) 而有 $D(\tilde{K}) = -2$．其次，我们在 $\tilde{K}$ 中找 $D(\tilde{K}) \geqslant -2$ 的**子图形**而不包括无害的减除项；这些图形不能由在 (19.63) 中一个总的减除来解决．我们描写图 19.42*a* 中这样的子图形的办法是把核分成 A 和 B 两部分．在子图形[1]

1）所有外线都接到 A 的情况容易从考虑中排除．

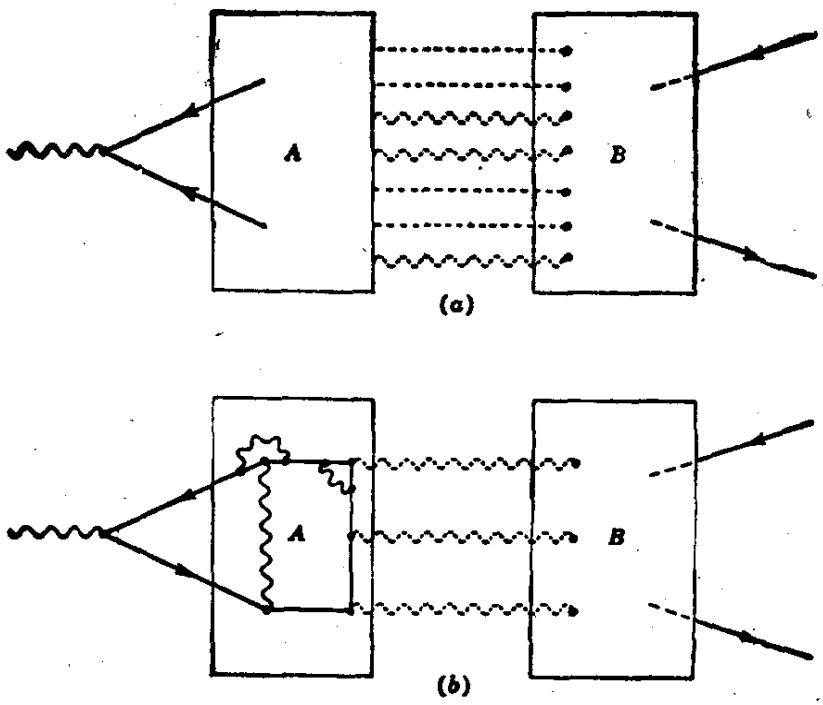


图 19.42　可能有危险的子图形

$\mathscr{L}$ 中的所有线通过 A，而那些不在子图形中的线[1]组成 B 以及 A 与 B 之间的联接线．显然，只有当 A 部分能导致

$$D(\tilde{K}) \geqslant -2$$

的贡献时，子图形 $\mathscr{L}$ 才发散．但是，计算规则表明这是不可能的．仅有的可能性是对把 A 和 B 连起来的两个费米子和零个光子线或者零个费米子和一个、二个或三个光子线．但是，由于图 19.11 的 $\tilde{K}$ 的定义，二费米子和单光子的例子被排除了．由电荷共轭，双光子的可能性为零，因为和顶角连接后它对应于有三条外光子线的封闭圈．在图 19.42*b* 中所示三光子线的最后可能性由于四个受欢迎的幂次而保留了下来，由于前面讨论过的流守恒发散度降低了 4[2]．

1) 仅只需要考虑连接图形；见上节．

2) 当然，我们需要计入为使振幅规范不变所要求的附加的光子-光子子图形．

于是，我们证明了，$\tilde{K}$ 对所考虑的任一子积分 $\mathscr{L}$ 的发散度 $D(\mathscr{L})$ 的贡献是 $\leqslant -2$；仅有的 $D(\tilde{K})=-2$ 的贡献是在 $\tilde{K}$ 内部所有线的集合(在减除项内的那些除外)．因此，如果一个子积分 $\mathscr{L}$ 发散，则顶角 $\tilde{\Gamma}_{\mu}^{(n-2)}$ 内部子图形部分对发散度的贡献必是零．但是，由归纳法假设，在 $\tilde{\Gamma}_{\mu}^{(n-2)}$ 内的所有子积分有 $D<0$，这使我们只剩下一个可能性：　没有一根 $\tilde{\Gamma}_{\mu}^{(n-2)}$ 内的线出现在子图形 $\mathscr{L}$ 中，只有对总的减除项才能出现这样的一个子图形，如图 19.41c 所示．但因为 $\tilde{K}$ 中的所有线都参加子图形，根据重整化方案，在对 (19.63) 作总减除后发散度降至 -1．这个减除也把图形的总发散度降至 -1，并且 Weinberg 定理保证了[1)]

$$\Lambda_{\mu}^{c(n)}(p',p)=\Lambda_{\mu}^{(n)}(p',p)-\Lambda_{\mu}^{(n)}(p,p)\big|_{\not p=m} \tag{19.64}$$

为唯一的、收敛(即不依赖于截断的)积分所给出．因为按结构

$$\Lambda_{\mu}^{c(n)}(p,p)\big|_{\not p=m}=0 \text{ 和 } \Lambda_{\mu}^{(n)}(p,p)\big|_{\not p=m}=L^{(n)}\gamma_{\mu} \tag{19.65}$$

其中 $L^{(n)}$ 是依赖于截断的常数，由 (19.52) 和 (19.63) 到 e^n 阶我们有

$$Z_1^{(n)}=1-L^{(n)} \tag{19.66}$$

于是到这一阶

$$\tilde{\Gamma}_{\mu}^{(n)}(p',p)=\gamma_{\mu}+\Lambda_{\mu}^{c(n)}(p',p)$$

是有限的，根据 (19.51d)，电子传播子 $\tilde{S}_F'$ 亦然．

现在剩下的是有重迭发散困难的真空极化 $\Pi^c(q^2)$ 的更为棘手的问题．如在 §19.5 中所看到的，对于在自能部分内的顶角插入，围绕顶角部分的方框有重迭，这个问题现在来麻烦我们了．　在图 19.43 中画出了一个真空极化的典型图形．

1) 忆及，$|_{\not p=m}$ 指当站在右边时 $\not p=m$．

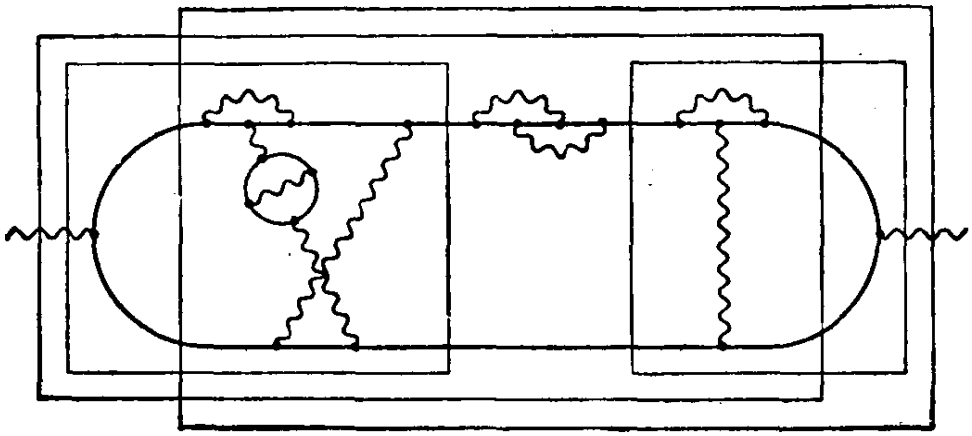


图 19.43　一个真空极化图形

在这个例子中可能发散的子图形是那些在图形的任一端的顶角插入，并且这些图形可能会重迭，如图中画的方框所示．因此，不能像对分离的或套迭的插入那样在级数中分别地、一个一个地减除掉．此外，许多收敛子图形在引入减除项后会发散——按图形说法，即把图 19.43 中的一个或多个方框换成虚线方框[1]．我们也必须分析这些子图形并证明它们有负的发散度．对于 $\tilde{S}'_F$ 我们曾用 Ward 恒等式绕过这些困难．在这里我们却必须和它们打交道——并且这是我们引入核 K 时的主导思想．

这些重迭发散的效应是去掉在 (19.51f) 中出现的因子 Z_1，为看到这如何发生，我们回到 (19.51c)，对 $Z_1\gamma^\mu$ 求解并代入 (19.51f)，得到简化表示的下式[2]

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = i\int \tilde{\Gamma}_\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \tilde{\Gamma}_\nu + i\int \tilde{\Gamma}_\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \tilde{K} \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \tilde{\Gamma}_\nu \quad (19.67)$$

我们想证明的是：在 (19.67) 右端两项的这个组合中重迭发

1) 但是，把这些方框取得重迭是没有意义的．

2) 在迹中指标的次序和动量宗量从 (19.51c) 和 (19.51f) 看是清楚的，当需要时可以明确写出它们．

散已被去掉了[如果像在我们的 Feynman 图形规则中那样传播子总是以 iS'_F 的组合形式引入，则 (19.67) 作为两项之差就显得更为自然]，为此，从 $\tilde{\Gamma}^{\mu}_{(0)} \approx \gamma^{\mu}$ 出发，对顶角插入构造一个不是按 e^2 而是按核 $\tilde{K}$ 的幂作的迭代是有用的. (19.51c) 中的第一次迭代给出

$$\tilde{\Gamma}^{\mu}_{(1)} = Z_{1(1)}\gamma^{\mu} - \int \gamma^{\mu} \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \tilde{K} \tag{19.68}$$

除开对应于光子-光子散射插入的子图形外，根据在 (19.63) 的讨论中所采用的完全一样的论据，(19.68) 中的子

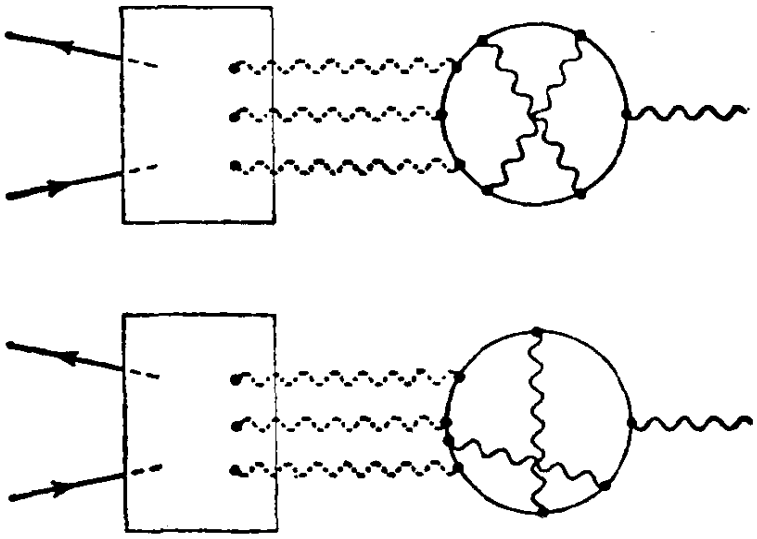


图 19.44 对应于按 $\tilde{K}$ 迭代的不同阶的光子-光子散射子图形的例子

积分收敛. 光子-光子散射插入的子图形仅当对应于核 $\tilde{K}$ 的迭代的不同阶的所有项加在一起时才收敛. 图 19.44 演示一个例子，它要求 $\tilde{K}$ 的一次和二次迭代二者归并到一起. 但是，这里我们不用担心光子-光子子图形. 我们知道，(19.51c) 在 $\tilde{K}$ 的迭代的不同阶之间存在着一个唯一的子图形集合，它们抵消掉这些发散项，并且把它们的有效发散度降到

$$D_{\text{eff}} = -4.$$

这适用于真空极化以及顶角图形中的光子-光子散射子图形.

对于随后剩下的论证,我们将忘掉光子-光子散射子积分并集中注意于顶角子积分的更为复杂的问题. 此后,"收敛"一词用于指"对于顶角子积分收敛",由于光子-光子散射插入,单独的各项实在是发散的,而仅当到 e 的一个给定阶但在 $\tilde{K}$ 迭代中属于不同阶的所有部分都加在一起时才是收敛的. 不过,我们不用担心,因为我们的程序是按照 Weinberg 定理**依次**考虑每一个子积分的. 被积函数对于其它子积分的行为比起我们正在考虑的子积分来说是可以略去的[1].

我们现在回到 (19.68); 归纳假设保证了到所要求的 e^n 阶在 $\tilde{K}$ 中没有发散子积分,对于通过 $\tilde{S}'_F$ 的动量,除开上面讨论的限制外,本节前面的分析是适用的而不需改变. 因此,对 (19.68) 的一次减除给出一个收敛的结果

$$-\int \gamma^\mu \tilde{S}'_F \tilde{S}'_F \tilde{K} = L_1 \gamma^\mu + \Lambda_1^\mu(p',p) \qquad (19.69)$$

这里 $\Lambda_1^\mu(p',p)$ 是 $\tilde{K}$ 中到第一阶的"有限"部分.像通常一样[2],减除在 $\not{p}' = \not{p} = m$ 进行,所以

$$\Lambda_1^\mu(p,p)|_{\not{p}=m} = 0 \qquad (19.70)$$

于是我们在 (19.68) 中到 $\tilde{K}$ 的第一阶有

$$\tilde{\Gamma}^\mu_{(1)}(p',p) = (Z_{1(1)} + L_1)\gamma^\mu + \Lambda_1^\mu(p',p) \qquad (19.71)$$

依重整化条件 (19.52), 这里

$$Z_{1(1)} = 1 - L_1 \qquad (19.72)$$

把这个改进了的 $\tilde{\Gamma}^\mu$ 代回 (19.51c), 现在到 $\tilde{K}$ 的第二阶,我们

---

1) 读者现在已经看到了重整化问题需要讨论的限制和枝节问题之多. 这是用"列举所有可能性"进行证明的特征. 很容易——如作者将很容易证实的那样——从考虑中漏掉某些特殊的情况. 类似的情形也发生在把"它还能是什么?"论证方法用到构造与指定对称性相容的振幅普遍形式时. 如果你不小心,那么,就会有人告诉你,它还能是什么.

2) 比较 §19.7.

得到

$$\tilde{\Gamma}^{\mu}_{(2)}(p',p) = Z_{1(2)}\gamma^{\mu} - \int [\gamma^{\mu} + \Lambda^{\mu}_{1}(p',p)]\tilde{S}'_{F}\tilde{S}'_{F}\tilde{K}$$

$$= Z_{1(2)}\gamma^{\mu} + L_{1}\gamma^{\mu} + \Lambda^{\mu}_{1}(p',p) - \int \Lambda^{\mu}_{1}(p',p)\tilde{S}'_{F}\tilde{S}'_{F}\tilde{K}$$

与 (19.69) 类似，我们写出

$$-\int \Lambda^{\mu}_{1}\tilde{S}'_{F}\tilde{S}'_{F}\tilde{K} = L_{2}\gamma^{\mu} + \Lambda^{\mu}_{2}(p',p)$$

这里

$$\Lambda^{\mu}_{2}(p,p)|_{\not{p}=m} = 0$$

由类似于对 $\Lambda^{\mu}_{1}(p',p)$ 所给出的那些论据，$\Lambda^{\mu}_{2}(p',p)$ 收敛，并且到 $\tilde{K}$ 的第二阶

$$\tilde{\Gamma}^{\mu}_{(2)}(p',p) \approx \gamma^{\mu} + \Lambda^{\mu}_{1}(p',p) + \Lambda^{\mu}_{2}(p',p)$$

和

$$Z_{1(2)} \approx 1 - L_{1} - L_{2}$$

显然在 n 次迭代后我们得到

$$\tilde{\Gamma}^{\mu}_{(n)}(p',p) = \gamma^{\mu} + \sum_{i=1}^{n} \Lambda^{\mu}_{i}(p',p) \qquad (19.73)$$

这里

$$Z_{1(n)} = 1 - \sum_{i=1}^{n} L_{i} \qquad \Lambda^{\mu}_{i}(p,p)|_{\not{p}=m} = 0 \quad (19.74)$$

和

$$-\int \Lambda^{\mu}_{i}\tilde{S}'_{F}\tilde{S}'_{F}\tilde{K} = L_{i+1}\gamma^{\mu} + \Lambda^{\mu}_{i+1} \quad \Lambda^{\mu}_{0} \equiv \gamma^{\mu} \quad (19.75)$$

我们这里得到了作为收敛积分之和的 $\tilde{\Gamma}^{\mu}(p',p)$的一个级数. 决定 Z_{1} 的减除常数 L_{i} 的作用是从 (19.75) 中 $D = 0$ 的总顶角积分中去掉发散，以及去掉藏匿在积分中并与减除项相联系的发散子积分. 级数 (19.73) 现在代入 $\Pi^{\mu\nu}(q)$ 的 (19.67) 式，导致如图 19.45 所示的图形展开. 我们的任务是

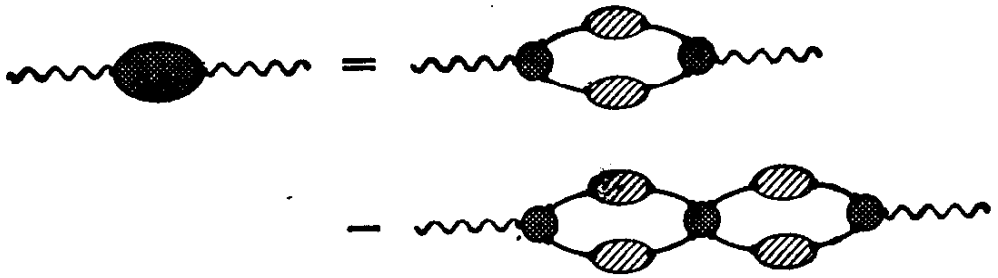


图 19.45　$\Pi^{\mu\nu}(q)$ 的图形展开

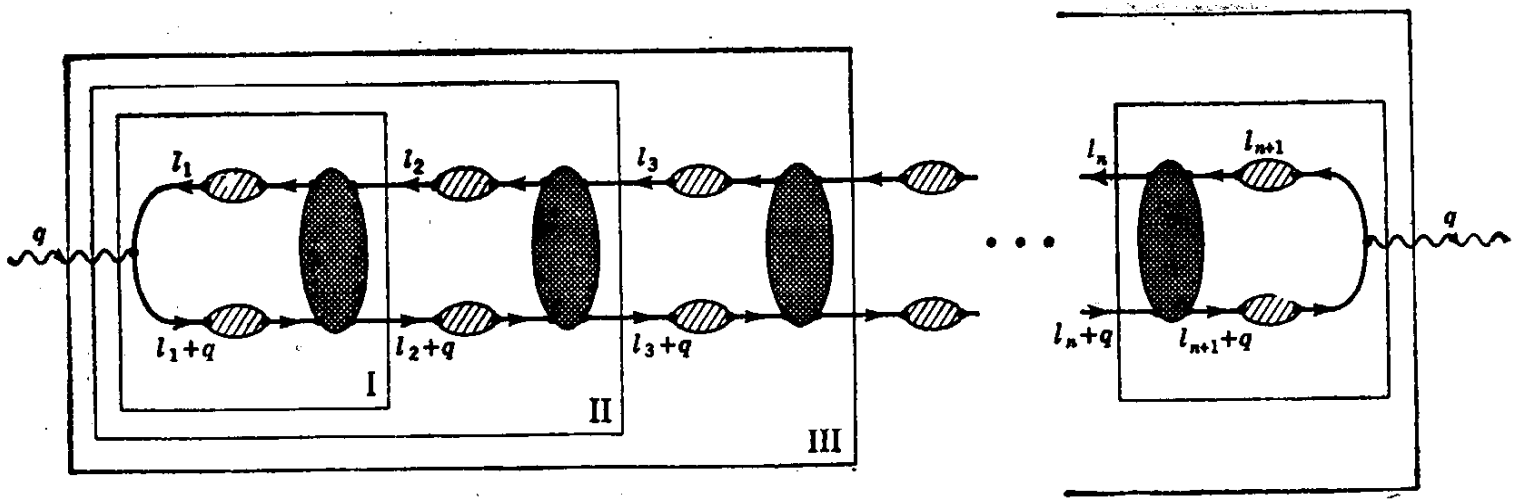


图 19.46　带着动量 l_i 通过电子传播子 $S_F(l_i)$ 的子图形

证明，在一个给定图形中的所有子积分都收敛．一旦我们做到了这点，Weinberg 定理就保证了在 (19.51f) 中总的减除 $\Pi_c(q^2) = \Pi(q^2) - \Pi(0)$ 给出有限的 $\Pi_c(q^2)$，其有效的 $D = -1$.

把 (19.73) 代入 (19.67) 并集合核 $\tilde{K}$ 的同阶的所有项，我们有

$$\Pi^{\mu\nu} = i\int [\gamma^\mu + \Lambda_1^\mu + \Lambda_2^\mu + \cdots]\tilde{S}'_F\tilde{S}'_F[1 + \tilde{K}\tilde{S}'_F\tilde{S}'_F][\gamma^\nu + \Lambda_1^\nu + \cdots] = \Pi_0^{\mu\nu} + \Pi_1^{\mu\nu} + \Pi_2^{\mu\nu} + \cdots \tag{19.76}$$

这里

$$\Pi_0^{\mu\nu} = i\int \gamma^\mu \tilde{S}'_F\tilde{S}'_F\gamma^\nu$$

$$\Pi_1^{\mu\nu} = i\int \gamma^\mu \tilde{S}'_F\tilde{S}'_F\Lambda_1^\nu + i\int \Lambda_1^\mu \tilde{S}'_F\tilde{S}'_F\gamma^\nu + i\int \gamma^\mu \tilde{S}'_F\tilde{S}'_F\tilde{K}\tilde{S}'_F\tilde{S}'_F\gamma^\nu$$

$$\Pi_n^{\mu\nu} = i\sum_{r+s=n}\int \Lambda_r^\mu \tilde{S}'_F\tilde{S}'_F\Lambda_s^\nu + i\sum_{r+s=n-1}\int \Lambda_r^\mu \tilde{S}'_F\tilde{S}'_F\tilde{K}\tilde{S}'_F\tilde{S}'_F\Lambda_s^\nu \tag{19.77}$$

组成 $\Pi_n^{\mu\nu}$ 的每一个图形有 $\tilde{K}$ 的 n 次迭代，如图 19.46 所示：由 (19.75) 的结构，Λ_r^μ 包含着 $\tilde{K}$ 的 r 次迭代，并且显然在 (19.77) 的右端的每一项中 $\tilde{K}$ 出现 n 次.

为证明 $\Pi_c(q^2)$ 是收敛的，必须证明所有子图形的发散度为负．但是，根据归纳假设，完全藏匿在 Λ^μ 或 $\tilde{K}$ 中的所有子图形是收敛的．因此，在图 19.46 中以 l_i 标志的通过 $\tilde{S}'_F$ 的某个动量子集必须对任何发散子积分有贡献．我们把与方框 I 相联系的子积分称为 l_1 子积分，与方框 II 相联系的称为 l_1l_2 子积分，等等．我们也还必须讨论 l_2l_3，$l_2l_3l_4\cdots$子积分，但是不考虑例如 $l_1l_2l_4l_5$ 之类的子积分，因为相应的子图形是分离的．明显写出动量 l_i 而在 $\tilde{K}$ 和 Λ^μ 中略而不写自旋和其它指标，我们以更清楚的符号重写 (19.77)

$$\Pi_n^{\mu\nu}(q) = i\sum_{r+s=n}\int\frac{d^4l_{r+1}}{(2\pi)^4}\Lambda_r^{\mu}(l_{r+1}+q,l_{r+1})\tilde{S}_F'(l_{r+1})$$
$$\times\tilde{S}_F'((l_{r+1}+q)\Lambda_s^{\nu}(l_{r+1},l_{r+1}+q)$$
$$+i\sum_{r+s=n-1}\int\frac{d^4l_{r+1}}{(2\pi)^4}\frac{d^4l_{r+2}}{(2\pi)^4}\Lambda_r^{\mu}(l_{r+1}+q,l_{r+1})\tilde{S}_F'(l_{r+1})$$
$$\times\tilde{S}_F'(l_{r+1}+q)\times\tilde{K}\tilde{S}_F'(l_{r+2})\tilde{S}_F'(l_{r+2}+q)\Lambda_s^{\nu}(l_{r+2},l_{r+2}+q) \tag{19.78}$$

由 l_1 子积分开始，我们只需考虑 $r=0$ 的项并且

$$\Lambda_0^{\mu}=\gamma^{\mu},$$

因为 l_1 子积分藏匿在 $r\geqslant 1$ 的 $\Lambda_r^{\mu}(l_{r+1},l_{r+1}+q)$ 之中，根据在 (19.73) 中的结构，它显然是收敛的. 在 (19.78) 中 $r=0$ 的可疑项，根据 (19.75) 对于 Λ_n^{ν} 的迭代，可用简写符号写成

$$i\int\gamma^{\mu}\tilde{S}_F'\tilde{S}_F'\Lambda_n^{\nu}+i\int\gamma^{\mu}\tilde{S}_F'\tilde{S}_F'\tilde{K}\tilde{S}_F'\tilde{S}_F'\Lambda_{n-1}^{\nu}=-i\int\gamma^{\mu}\tilde{S}_F'\tilde{S}_F'\gamma^{\nu}L_n$$
$$=-i\int\frac{d^4l_1}{(2\pi)^4}\gamma^{\mu}\tilde{S}_F'(l_1)\tilde{S}_F'(l_1+q)\gamma^{\nu}L_n \tag{19.79}$$

减除常数 L_n 虽然发散，但它与 l_1 子积分的收敛性问题无关，因为 L_n 是剩下的变量 $l_2,\cdots,l_n$ 的积分. 和通常一样，(19.79) 中的积分有 $D=+2$. 但是，当我们提出 $q_\mu q_\nu$ 二次幂以构成 $\Pi(q^2)$ 的系数后，等效地，$D=0$. 如在 (19.51f) 中那样构造 $\Pi_c(q^2)=\Pi(q^2)-\Pi(0)$，把 D 降到 -1 并使 l_1 子积分有限，因为在 (19.79) 中 $\tilde{S}_F'$ 里面的所有子积分都收敛.

我们接着继续看 l_1l_2 子积分. 类似于我们对 l_1 子积分的讨论，我们只需要考虑 $r=0$ 和 1 的项，因为对 $r\geqslant 2$，l_1l_2 子积分藏匿在 Λ_r^{μ} 之中，并且是自动地收敛的.

在 (19.77) 中现在要研究的项为

$$i\int\gamma^{\mu}\tilde{S}_F'\tilde{S}_F'\Lambda_n^{\nu}+i\int\Lambda_1^{\mu}\tilde{S}_F'\tilde{S}_F'\Lambda_{n-1}^{\nu}$$
$$+i\int\gamma^{\mu}\tilde{S}_F'\tilde{S}_F'\tilde{K}\tilde{S}_F'\tilde{S}_F'\Lambda_{n-1}^{\nu}+i\int\Lambda_1^{\mu}\tilde{S}_F'\tilde{S}_F'\tilde{K}\tilde{S}_F'\tilde{S}_F'\Lambda_{n-2}^{\nu}$$

$$= -i\int \gamma^{\mu}\tilde{S}'_F\tilde{S}'_F\gamma^{\nu}L_n - i\int \Lambda_1^{\mu}\tilde{S}'_F\tilde{S}'_F\gamma^{\nu}L_{n-1}$$

这里我们又用了迭代(19.75)，明显写出动量宗量，但仍略而不写旋量指标，我们有

$$i\int \frac{d^4l_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4l_2}{(2\pi)^4}\gamma^{\mu}\tilde{S}'_F(l_1)\tilde{S}'_F(l_1+q)$$
$$\times[\tilde{K}(\tilde{p},\tilde{p},\tilde{p}-l_2)\tilde{S}'_F(l_2)\tilde{S}'_F(l_2)\Lambda^{\nu}_{n-1}(l_2,l_2)]_{\not p=m}$$
$$-i\int \frac{d^4l_2}{(2\pi)^4}\Lambda_1^{\mu}(l_2+q,l_2)\tilde{S}'_F(l_2)\tilde{S}'_F(l_2+q)\gamma^{\nu}L_{n-1} \tag{19.80}$$

其中对 l_2 的发散积分明显地写了出来，在对第一项中的 l_1 积分计算幂次时，我们可以减掉 2，这是由于提出了 $q_\mu q_\nu$ 的系数 $\Pi(q^2)$ 之故，当我们作总减除[1]以构成$\Pi_c(q^2)$时还要减去另外的幂次. 所有 l_2 线都在方括号中，当我们计算其幂次时，由于这是个顶角插入，在任何情况下，我们都得不到大于零的发散度. 因此，对第一项 l_1l_2 的子积分的发散度是 -1 或更小. 同样，在第二项中总的减除把 l_1l_2 子积分的发散度降至 -1 或更低[2]. 应当强调：单独取(19.80)的第一项或第三项对于 l_2 子积分都不收敛. 但我们不必耽心，因为我们问的问题是 l_1l_2 子积分是否有负发散度，而不是问 l_2 子积分. 我们对提出的问题给予肯定的回答. 必须依次注意每一个子积分，用 Weinberg 定理加以考察，而其它的子积分则暂时放在一边.

把这个结果推广到 $l_1\cdots l_r$ 子积分的办法现在已清楚了.

---

1) 必须记住，在(19.80)的方括号中的每一项是常数乘以 γ.

2) 必须认识到 Π 的总的减除并不降低所有 l_1l_2 子图形的 D. 但是，仅在其中所有 $\tilde{K}$ 的线都参加的子图形和如图 19.40a 中那样的子图形才需要减除以使它们收敛. 对它们作减除实际上降低 D，因为外动量 q 仅在子图形内通过. 其余的子图形已经有 $D\leqslant -1$.

由于 $l_1\cdots l_r$ 子积分完全在 Λ_k^μ 之中，在 (19.77) 中包含 $k\geqslant r$ 的 $\Lambda_r^\mu(l_{k+1}+q,l_{k+1})$ 因子的所有项由于归纳法将自动地收敛. 剩下的项可以写成

$$\sum_{k=0}^{r-1}\left(i\int\Lambda_k^\mu\tilde{S}_F'\tilde{S}_F'\Lambda_{n-k}^\nu+i\int\Lambda_k^\mu\tilde{S}_F'\tilde{S}_F'\check{K}\tilde{S}_F'\tilde{S}_F'\Lambda_{n-k-1}^\nu\right)$$

$$=-i\sum_{k=0}^{r-1}\int\Lambda_k^\mu\tilde{S}_F'\tilde{S}_F'\gamma^\nu L_{n-k}$$

$$=-i\sum_{k=0}^{r-1}\int\frac{d^4l_{k+1}}{(2\pi)^4}\Lambda_k^\mu(l_{k+1}+q,l_{k+1})\tilde{S}_F'(l_{k+1})\times\tilde{S}_F'(l_{k+1}+q)\gamma^\nu L_{n-k}$$

对 $l_1\cdots l_k$ 的积分已包含在 Λ_k^μ 中去了，而从 l_{k+2} 到 l_r 的积分，如果有的话，则包含在重整化常数 L_{n-k} 中. 因为 L_{n-k} 是一个顶角插入，这后一个子积分的发散度是零或者为负. 另方面，$l_1\cdots l_{k+1}$ 子积分的发散度，如同前面一样，在构成 $\Pi_c(q^2)$ 时从 +2 降至 −1. 因此所有子积分 $l_1\cdots l_r$ 收敛.

现在我们必须用同样的办法研究 l_2, l_2l_3, $\cdots$ 子积分. 我们的任务是把这些子积分变成这样的形式，它允许我们对 $\Pi_{\mu\nu}$ 的图形运用总减除以证明这些子图形收敛. 从 l_2 子积分出发，我们发现在 (19.77) 中仅有的可疑项是这样的三项，它们的 l_2 子积分并不是无害地包在 Λ_r 或 Λ_s 之中. 在写出这几项时，我们在出现动量 l_2 的因子的下面划上一根横线，

$$[\text{可疑项}]_{l_2}=i\int\underline{\Lambda_1^\mu\tilde{S}_F'\tilde{S}_F'\Lambda_{n-1}^\nu}+i\int\gamma^\mu\tilde{S}_F'\tilde{S}_F'\underline{\tilde{K}\tilde{S}_F'\tilde{S}_F'\Lambda_{n-1}^\nu}$$

$$+i\int\underline{\Lambda_1^\mu\tilde{S}_F'\tilde{S}_F'\tilde{K}}\tilde{S}_F'\tilde{S}_F'\Lambda_{n-2}^\nu$$

$$=-iL_1\int\underline{\gamma^\mu\tilde{S}_F'\tilde{S}_F'\Lambda_{n-1}^\nu}+i\int\underline{\Lambda_1^\mu\tilde{S}_F'\tilde{S}_F'\tilde{K}}\tilde{S}_F'\tilde{S}_F'\Lambda_{n-2}^\nu \quad (19.81)$$

再次运用迭代 (19.75)，把 (19.81) 的最后一项改写为

$$i\int \underline{\Lambda_1^\mu \tilde{S}'_F\tilde{S}'_F\tilde{K}\tilde{S}'_F\tilde{S}'_F}\,\Lambda^\nu_{n-2} = -iL_1\int \underline{\gamma^\mu \tilde{S}'_F\tilde{S}'_F\tilde{K}\tilde{S}'_F\tilde{S}'_F}\Lambda^\nu_{n-2}$$
$$-i\int \gamma^\mu \tilde{S}'_F\tilde{S}'_F\underline{\tilde{K}\tilde{S}'_F\tilde{S}'_F\tilde{K}}\tilde{S}'_F\tilde{S}'_F\,\Lambda^\nu_{n-2} \qquad (19.82)$$

(19.82) 最后一项中的 l_2 子积分显然收敛，因为其中划了横线的四个因子对于任何 l_2 子积分都相应于 $D(l_2)\leqslant -2$. 把 (19.82) 的第一项与 (19.81) 的第一项合并，对剩下的可疑项我们得到

$$[\text{可疑项}]_{l_2} = -iL_1\int \underline{\gamma^\mu \tilde{S}'_F\tilde{S}'_F}\,\Lambda^\nu_{n-1} - iL_1\int \underline{\gamma^\mu \tilde{S}'_F\tilde{S}'_F\tilde{K}\tilde{S}'_F\tilde{S}'_F}\Lambda^\nu_{n-2}$$
$$= iL_1\int \underline{\gamma^\mu\tilde{S}'_F\tilde{S}'_F\gamma^\nu}L_{n-1}$$

在提出 $\Pi_c(q^2)$ 后，它对于 l_2 子积分显然收敛.

同样的技术可用于研究普遍的 $l_2\cdots l_s$ 子积分. 在 $\Pi^{\mu\nu}$ 的展开式 (19.77) 中唯一对 $l_2\cdots l_s$ 子积分有非负发散度的项，借助于 (19.75)，可简写为

$$[\text{可疑项}]_{l_2\cdots l_s} = \sum_{k=1}^{s-1} i\int \Lambda^\mu_k \tilde{S}'_F\tilde{S}'_F\,\Lambda^\nu_{n-k}$$
$$+ i\sum_{k=0}^{s-1}\Lambda^\mu_k\tilde{S}'_F\tilde{S}'_F\tilde{K}\tilde{S}'_{F_1}\tilde{S}'_F\Lambda^\nu_{n-k-1}$$
$$= -i\sum_{k=1}^{s-1}L_k\int\gamma^\mu\tilde{S}'_F\tilde{S}'_F\Lambda^\nu_{n-k} + i\int\Lambda^\mu_{s-1}\tilde{S}'_F\tilde{S}'_F\tilde{K}\tilde{S}'_F\tilde{S}'_F\,\Lambda^\nu_{n-s} \qquad (19.83)$$

如同对 l_2 子积分所作的那样，我们注意 (19.83) 的最后一项. 仍然运用 (19.75) 迭代，把 Λ^μ_{s-1} 通过 Λ^μ_{s-2} 和 L_{s-1} 表示；然后把 Λ^μ_{s-2} 通过 Λ^μ_{s-3} 和 L_{s-2} 重新表示，如此继续下去，直至得到如下级数

$$i\int \underline{\Lambda^\mu_{s-1}\tilde{S}'_F\tilde{S}'_F\tilde{K}\tilde{S}'_F\tilde{S}'_F}\,\Lambda^\nu_{n-s}$$

$$= i\sum_{k=1}^{s-1}(-1)^{s-k}\underline{L_k}\int \underline{\gamma_\mu \tilde{S}'_F\tilde{S}'_F\tilde{K}\tilde{S}'_F\tilde{S}'_F\cdots\tilde{K}\tilde{S}'_F\tilde{S}'_F}\,\Lambda^\nu_{n-s}$$

$$+ i(-1)^{s-1}\int \gamma^\mu \tilde{S}'_F\tilde{S}'_F\underline{\tilde{K}\tilde{S}'_F\tilde{S}'_F\cdots\tilde{K}}\,\tilde{S}'_F\tilde{S}'_F\Lambda^\nu_{n-s} \quad (19.84)$$

这里我们又在展开式中的依赖于动量变量 $l_2\cdots l_s$ 的那些项下划了横线[1].

(19.84) 的最后一项显然有负发散度因而可以丢掉. 在求和符号中出现的项可以简化，即通过迭代 (19.75)，把 Λ^ν_{n-s} 用 Λ^ν_{n-s+1}，Λ^ν_{n-s+2} 等重新表示出来，直至 $\tilde{K}$ 的所有因子都被吸收为止. 这样得到的包含减除常数的所有项将有如下的结构

$$\underline{L_k}\int \underline{\gamma^\mu \tilde{S}'_F\tilde{S}'_F\tilde{K}\cdots\tilde{S}'_F\tilde{S}'_F\gamma^\nu}\ \underline{L_l}$$

从 $\Pi^{\mu\nu}$ 中提出 $\Pi_c(q^2)$，把这个被积函数的总发散度降至 -1，并且由于在重整化常数 L_k 中的子积分都有 $D\leqslant 0$，在所有这些项中的 $l_2\cdots l_s$ 子积分有负发散度. 因此，(19.84) 简化为

$$i\int \Lambda^\mu_{s-1}\,\tilde{S}'_F\tilde{S}'_F\tilde{K}\tilde{S}'_F\tilde{S}'_F\,\Lambda^\nu_{n-s} = i\sum_{k=1}^{s-1}L_k\int \gamma^\mu\,\tilde{S}'_F\tilde{S}'_F\,\Lambda^\nu_{n-k}$$

$$+ D<0 \text{ 的项} \quad (19.85)$$

在 (19.85) 中明显写出的项与 (19.83) 中令人讨厌的项相互消去，从而完成了 $l_2\cdots l_s$ 子积分收敛性的证明. 具有

$$1<r<s<n$$

的普遍的 $l_2\cdots l_s$ 子积分的发散度用完全一样的方法可证明为负. 这点我们留给读者作为练习.

于是，$\Pi(q^2)$ 的顶角和自能子积分收敛并且 $\Pi_c(q^2)$ 的总发散度为负，$D=-1$. 还有，用类似于顶角情形的论证，

---

1) 在第一项中我们理解 L_1 下不应划线.

对于表观上发散的光子-光子散射子积分，当一起考虑这种子图形的规范不变组合时，以 $D \leqslant -4$ 收敛. 因此，由 Weinberg 定理得出，$\Pi_c(q^2)$ 到 e^2 的任意阶为有限. 由 (19.51e)，$\widetilde{D}'_F(q)_{\mu\nu}$ 也是如此，因此我们的任务就完成了. 由归纳法，我们已经证明了，如果 $\tilde{\Gamma}_\mu$, $\widetilde{S}'_F$, $\widetilde{D}'_{F\mu\nu}$ 和 S 矩阵元到 e^{n-2} 阶是有限的话，那么，它们到 e^n 阶也为有限. 而到 e^2 阶从直接的计算我们已知道它们是有限的.

在结束这一节的时候我们再次强调，这个结果一点儿也不意味着重整的微扰展开式的收敛性. 例如，在高能时，如在第八章所讨论的，展开参量不是 α 而是 $\alpha\log(E/m)$，它表明展开可能是渐近的，最多只在低能时收敛.

19.12 四阶电荷重整化的例子[1)]

在第八章的最低阶运算中，演示了重整化程序是如何进行的. 但是，那里我们未曾遇到上面分析的重迭问题，它们在 e^4 计算中才第一次出现. 作为如何仔细地进行这个分析的演示，我们这里明显地计算真空极化并证明 $\Pi_c(q^2)$ 到 e^2 是有限的，从而由 (19.51e)，$\widetilde{D}'_F$ 到 e^4 亦为有限. 从 (19.67) 出发

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = i\int \tilde{\Gamma}_\mu \widetilde{S}'_F \widetilde{S}'_F \tilde{\Gamma}_\nu + i\int \tilde{\Gamma}_\mu \widetilde{S}'_F \widetilde{S}'_F \widetilde{K} \widetilde{S}'_F \widetilde{S}'_F \tilde{\Gamma}_\nu \tag{19.86}$$

我们引入迭代程序 (19.51) 来集合所有 e^2 阶的项. (19.86) 的右端第一项示于图 19.47a 中，并且到 e^4 我们必须一次一个地计入二阶自能和顶角插入，它单独示于图 19.48 中. 实际上两个顶角插入 (a_1) 和 (a_2) 相等，自能插入 (a_3) 和 (a_4) 相等，因为 $q \to -q$ 和 $\mu \longleftrightarrow \nu$ 的变换使 $\Pi_{\mu\nu}(q)$ 不变，但把

1) R. Jost *and* J. M. Luttinger, *Helv. Phys. Acta.* **23**, 201 (1950).

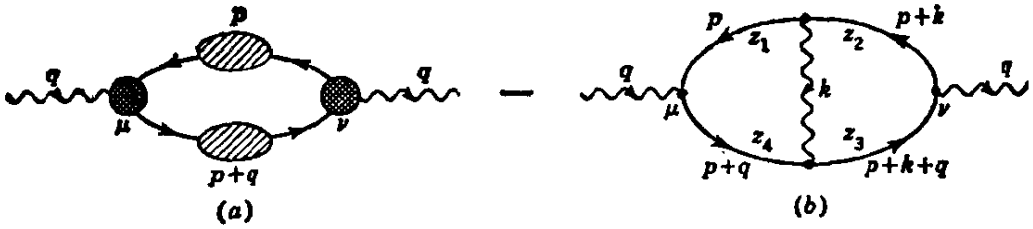


图 19.47　在方程 (19.86) 中 $\Pi_{\mu\nu}(q)$ 到 e^4 阶的两项

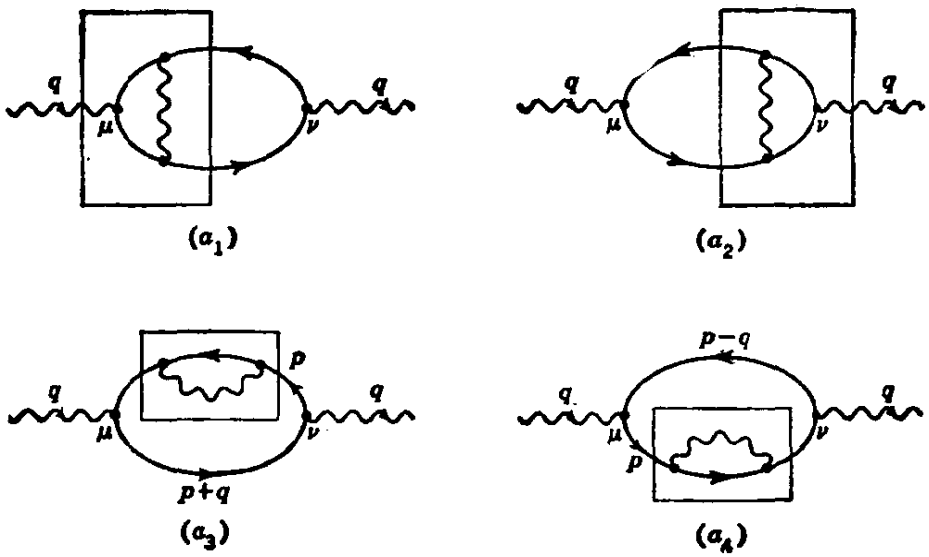


图 19.48　在图 19.47a 中到 e^4 阶的二阶自能和顶角插入

(a_1) 变到 (a_2),(a_3) 变到 (a_4) 以及相反. 因而我们可以只取一个顶角和一个自能插入,再乘以 2 . (19.86) 的第二项已是 e^2 阶,如果我们把所有 $\tilde{\Gamma}_\mu$ 和 $\tilde{S}'_F$ 相应换成 γ_μ 和 S_F,并把 $\tilde{K}$ 近似换成表示于图 19.47b 中的最低阶骨架,合起来并利用展开式 (19.51),我们有

$$\Pi^{(2)}_{\mu\nu}(q) = 2i\int \gamma_\mu[\tilde{S}'^{(2)}_F - S_F]S_F\gamma_\nu + 2i\int \gamma_\mu S_F S_F[\tilde{\Gamma}^{(2)}_\nu - \gamma_\nu]$$
$$+ i\int \gamma_\mu S_F S_F K^{(0)} S_F S_F \gamma_\nu = 2i\int \gamma_\mu \delta\tilde{S}'^{(2)}_F S_F \gamma_\nu$$
$$- 2i\int \gamma_\mu S_F S_F \gamma_\nu L^{(2)} - i\int \gamma_\mu S_F S_F K^{(0)} S_F S_F \gamma_\nu \qquad (19.87)$$

这里 $L^{(2)} \equiv 1 - Z_1$，它在 (19.65) 和 (19.66) 中是对顶角重整化的二阶贡献，并且 $\delta \tilde{S}_F'^{(2)} \equiv \tilde{S}_F'^{(2)} - S_F$. 利用 (19.63)，(19.87) 的最后一项通过未重整的 e^2 阶的顶角函数

$$-\int K^{(0)} S_F S_F \gamma_\nu = \Lambda_\nu^{(2)}$$

重新表示，并且我们可以把 (19.87) 重写成便于计算的方便形式——最后从图 19.47 和 19.48 代入运动学关系

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(q) = {} & 2i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \operatorname{Tr} \gamma_\mu \delta \tilde{S}_F'^{(2)}(p) \gamma_\nu S_F(p+q) \\ & + i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \operatorname{Tr} \gamma_\mu S_F(p) \Lambda_\nu^{(2)}(p, p+q) S_F(p+q) \\ & - 2i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \operatorname{Tr} \gamma_\mu S_F(p) \gamma_\nu S_F(p+q) L^{(2)} \end{aligned} \quad (19.88)$$

(19.88) 的第一项包含自能插入的效应. 它不包含重迭发散. 我们预期，并将要证明，没有太多困难就可以完成自能重整化并得到 $\Pi_c(q^2)$ 的收敛积分. 后两项的组合含有二阶未重整顶角插入 $\Lambda_\nu^{(2)}$，由它必须减除掉两个在 $\Pi_{\mu\nu}$ 的任一顶角上可能的发散顶角子积分以得到对 $\Pi_c(q^2)$ 的收敛的贡献. 因为在这两项中有着重迭发散，做这些积分的技巧更为复杂，但是在最后是成功的.

我们从计算自能插入图 19.48(a_3) 和 (a_4) 的较为容易的任务开始，它们是

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2a)}(q) = 2i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \operatorname{Tr} \gamma_\mu \delta \tilde{S}_F'^{(2)}(p) \gamma_\nu S_F(p+q) \quad (19.89)$$

在作这计算时，在第十六章和十八章中讨论过的 $\delta S_F'^{(2)}(p)$ 的谱表示将是有用的. 从 (16.122) 我们忆及在动量空间中的未重整的传播子有谱表示形式

$$S'_F(p) = \frac{Z_2}{\not p - m} + \frac{1}{\pi}\int_{(m+\lambda)^2}^{\infty} \frac{d\sigma^2[\not p\rho_1(\sigma^2) + \rho_2(\sigma^2)]}{p^2 - \sigma^2 + i\varepsilon} \tag{19.90}$$

重整化后它成为

$$\tilde{S}'_F(p) = \frac{1}{\not p - m} + \frac{1}{\pi}\int_{(m+\lambda)^2}^{\infty} \frac{d\sigma^2[\not p\tilde{\rho}_1(\sigma^2) + \tilde{\rho}_2(\sigma^2)]}{p^2 - \sigma^2 + i\varepsilon} \tag{19.91}$$

这里 $\tilde{\rho} \equiv Z_2^{-1}\rho$，谱函数是 e^2 阶，并且到这个阶，它们可以从第八章的最低阶计算[1]而得到，特别是，从 (8.34) 式

$$\tilde{S}'^{(2)}_F(p) = \frac{1}{\not p - m} + \frac{1}{\not p - m}\left[-ie^2\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \times \frac{\gamma_\alpha(\not p - \not k + m)\gamma^\alpha}{(k^2 - \lambda^2)[(p-k)^2 - m^2]} - \delta m + L^{(2)}(\not p - m)\right]\frac{1}{\not p - m} \tag{19.92}$$

在 (19.92) 中的质量抵消项包含在传播子 (19.1) 的定义中，因为在裸传播子 $[\not p - m]^{-1}$ 中出现的是物理质量[2]. 在(19.92)中出现波函数重整化常数 $L^{(2)}$，因为已经做了 $\tilde{S}'^{(2)}_F$ 的重整化. 如在 (8.38) 中已作的那样，(19.92) 中的动量积分导致二阶修正

$$\delta\tilde{S}'^{(2)}_F(p) = \frac{1}{\not p - m}\left[\frac{\alpha}{4\pi}\int_0^1 dz\,\gamma_\mu[\not p(1-z) + m]\gamma^\mu \times \ln\frac{\Lambda^2(1-z)}{m^2z + \lambda^2(1-z) - p^2z(1-z) - i\varepsilon} - \delta m + (\not p - m)L^{(2)}\right]\frac{1}{\not p - m} \tag{19.93}$$

我们只需要提出 (19.93) 的吸收部分以得到到 e^2 阶的谱函数

---

1) 光子质量 λ 用来把连续谱与分立单粒子极点对 S'_F 的贡献分开. 这是已经在第八章用到了的红外问题处理法.

2) 见 §19.2 中的脚注.

$\tilde{\rho}_1$ 和 $\tilde{\rho}_2$，它们构成 (19.90) 的吸收部分：

$$-[\not{p}\tilde{\rho}_1(p^2)+\tilde{\rho}_2(p^2)]=\frac{\alpha}{4\pi}\frac{\not{p}+m}{p^2-m^2}\int_0^1 dz\,\gamma_\mu[\not{p}(1-z)+m]\gamma^\mu$$

$$\times\pi\theta[p^2z(1-z)-m^2z-\lambda^2(1-z)]\frac{\not{p}+m}{p^2-m^2} \quad (19.94)$$

这里 θ 是阶梯函数

$$\theta(z)=\begin{cases}1 & z>0\\ 0 & z<0\end{cases}$$

把这个谱振幅代入 (19.91) 和 (19.89)，我们可以计算对真空极化的自能修正

$$\Pi^{(2a)}_{\mu\nu}(q)=2i\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{\pi}\int_{(m+\lambda)^2}^{\infty}\frac{d\sigma^2}{p^2-\sigma^2+i\epsilon}$$

$$\times\mathrm{Tr}\left[\frac{\gamma_\mu[\not{p}\tilde{\rho}_1(\sigma^2)+\tilde{\rho}_2(\sigma^2)]\gamma_\nu(\not{p}+\not{q}+m)}{(p+q)^2-m^2}\right] \quad (19.95)$$

我们对 (19.95) 中 $q_\mu q_\nu$ 的系数 $\Pi^{(2a)}(q)$ 感兴趣，并用通常的程序分离它，借助 Feynman 参量合并分母、并在动量空间移动积分的原点

$$\Pi^{(2a)}(q^2)=-\frac{16i}{\pi}\int\frac{d^4p'}{(2\pi)^4}\int_{(m+\lambda)^2}^{\infty}d\sigma^2\tilde{\rho}_1(\sigma^2)\int_0^1 dz\,z(1-z)$$

$$\times\frac{1}{[p'^2+q^2z(1-z)-m^2z-\sigma^2(1-z)]^2} \quad (19.96)$$

d^4p' 积分对数发散，反映了真空极化的有效发散度 $D=0$. 但是，在 $\Pi^{\mu\nu}(q^2)$ 重整化时，我们只需要计算

$$\Pi_c(q^2)=\Pi(q^2)-\Pi(0),$$

并且由于这个减除，动量积分收敛到

$$\Pi^{(2a)}_c(q^2)=\frac{1}{\pi^3}\int d\sigma^2\tilde{\rho}_1(\sigma^2)\int_0^1 dz\,z(1-z)\ln$$

$$\times\left[\frac{m^2z+\sigma^2(1-z)}{m^2z+\sigma^2(1-z)-q^2z(1-z)}\right] \quad (19.97)$$

这个自能插入的表达式现在看来是有限的，因为，对 $\sigma^2 \to \infty$，对数的行为有如 $1/\sigma^2$. 按 (19.94)，$\tilde{\rho}_1(\sigma^2)$ 也是如此，从而谱积分收敛. 方程 (19.97) 在 $-q^2 \gg m^2$ 极限下可以通过初等函数来积分，其贡献为

$$\Pi_c^{(2a)}(q^2) = -\frac{\alpha}{48\pi^3}\ln^2\left(\frac{-q^2}{m^2}\right) + \frac{\alpha}{6\pi^3}\ln\left(\frac{-q^2}{m^2}\right) \times \left[\ln\left(\frac{m}{\lambda}\right) - \frac{13}{24}\right] + \text{量级为 1 的项，对}\left|\frac{q^2}{m^2}\right| \gg 1 \tag{19.98}$$

因为不出现重迭发散，在证明自能插入导致 $\Pi_c(q^2)$ 的一个收敛积分方面没有多少困难. 我们可以先作自能重整化，然后把结果代入真空极化积分. 来自顶角插入的 (19.88) 的第二和第三项没有这样简单，在

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2b)}(q) \equiv i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu S_F(p)\Lambda_\nu^{(2)}(p, p+q)S_F(p+q) \tag{19.99}$$

中的重迭发散性，被应按 (19.88) 减除的下式

$$2\Pi_{\mu\nu}^{(2c)}(q) \equiv 2i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu S_F(p)\gamma_\nu S_F(p+q)L^{(2)} \tag{19.100}$$

中两个可能的发散顶角子积分消去. 由在 $q^2 = 0$ 点作减除以构成 $\Pi_c^{(2b)}(q^2) - 2\Pi_c^{(2c)}(q^2)$ 而实现总的重整化之后，它们的差应由一个收敛积分给出. 为了明显地看出这个抵消，现在较详细地给出这个计算.

根据 Feynman 规则，$\Pi_{\mu\nu}^{(2b)}(q)$由下式给出

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2b)}(q) = e^2\int \frac{d^4k\,d^4p}{(2\pi)^8(k^2-\lambda^2)} \times \mathrm{Tr}\{[\gamma_\mu(\not p + m)\gamma_\alpha(\not p + \not k + m)\gamma_\nu(\not p + \not k + \not q + m)\gamma^\alpha(\not p + \not q + m)]\}/\{(p^2-m^2)[(p+k)^2 - m^2][(p+k+q)^2-m^2][(p+q)^2-m^2]\} \tag{19.101}$$

其运动学见图 19.47*b*. 我们当前的任务是通过提出 $q_\mu q_\nu$ 项的系数 $\Pi^{(2b)}(q^2)$ 而去掉 (19.101) 中不定的平方发散. 为此，我们用恒等式

$$\frac{1}{a_1a_2a_3a_4} = 3!\int_0^1 dz_1\cdots dz_4\,\frac{\delta\left(1-\sum_{i=1}^4 z_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^4 a_iz_i\right)^4} \tag{19.102}$$

来把与荷电粒子圈相联系的四个分母合并起来. 令 (19.102) 中的 a_i 为在给定顺序的四个电子分母，如图 19.47*b* 所示. 为了配成完全平方并从 (19.102) 的分母中去掉积分变量的奇次项，用以下变换[1]

$$p' = p + k(z_2 + z_3) + q(z_3 + z_4)$$

移动积分原点而完成对 p 的积分. 分子上求迹中的各项可以按 p' 的幂并项和分类. 带 p' 奇次幂的项积分为零，带 p' 的四次方的项显然导致比例于 $g_{\mu\nu}$ 的贡献而可以去掉；这是 p 积分唯一的不收敛部分. p' 的平方项在作了相当繁的代数运算之后 (!)[2] 导致一个简单的迹 $\propto p'^2(k_\mu k_\nu - q_\mu q_\nu)$ 加上一个 $\propto g_{\mu\nu}$ 的非本质的项. 暂时把与 p' 无关的 (19.101) 中的分子各项仍写作迹的形式，作 $\int d^4p'$ 得到

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2b)}(q) = \frac{i\alpha}{4\pi}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\int\frac{dz_1\cdots dz_4\,\delta\left(1-\sum_i\alpha_i\right)}{k^2-\lambda^2}$$
$$\times\left\{\frac{16(k_\mu k_\nu - q_\mu q_\nu)}{D_1} + \frac{N_{\mu\nu}}{D_1^2}\right\} + g_{\mu\nu}\text{项} \tag{19.103}$$

---

1) 对一个很好定义的有限数学表达式，应该把动量积分正常化. 作动量积分的一个规范不变的方法曾在上册 (见 (8.20) 式) 的二阶计算中给出，在此可照样重复.

2) 在 $(z_1,z_2)\longleftrightarrow(z_3,z_4)$ 交换下，反对称的项可以去掉.

这里

$$D_1 = k^2(z_1+z_4)(z_2+z_3) + q^2(z_1+z_2)(z_3+z_4) + 2k\cdot q(z_1z_3 - z_2z_4) - m^2 + i\varepsilon$$

和

$$\begin{aligned} N_{\mu\nu} = {} & \mathrm{Tr}\gamma_\mu[-\not{k}(z_2+z_3) - \not{q}(z_3+z_4) + m]\gamma_\alpha \\ & \times [\not{k}(z_1+z_4) - \not{q}(z_3+z_4) + m]\gamma_\nu[\not{k}(z_1+z_4) \\ & + \not{q}(z_1+z_2) + m]\gamma^\alpha \times [-\not{k}(z_2+z_3) \\ & + \not{q}(z_1+z_2) + m] \end{aligned} \tag{19.104}$$

下一步作 k 积分，作法如下：

1. 在两个剩下的分母合并之前，对光子传播子的 k^2 给以和 D_1 中 k^2 项相同的因子，即写出

$$\frac{1}{k^2-\lambda^2} = \frac{(z_1+z_4)(z_2+z_3)}{(z_1+z_4)(z_2+z_3)(k^2-\lambda^2)}$$

当我们类似于 (19.102) 作参数化，把 Feynman 参量 x 与 D_1，$y=1-x$ 与光子传播子联系后，就导致一个更为简洁的形式.

2. 光子传播子用

$$\frac{1}{k^2-\lambda^2} \to \frac{1}{k^2-\lambda^2} - \frac{1}{k^2-\Lambda^2} \tag{19.105}$$

正常化，以使在 (19.103) 中来自比例于 k^2/D 和 k^4/D_1^2 项的对数发散贡献为有限. 当我们作总的减除以构造 $\Pi_c(q^2)$ 时这些与截断有关的项最终都会去掉.

3. 平移 k 空间积分的原点，令

$$k' = k + \frac{qx(z_1z_3 - z_2z_4)}{(z_1+z_4)(z_2+z_3)}$$

使得分母中能配成完全平方.

在 k' 积分后，我们有三个不同的项：$\Pi_{\mu\nu}^{(2b_1)}$ 来自(19.103)比例于 D_1^{-1} 的第一项；$\Pi_{\mu\nu}^{(2b_2)}$ 和 $\Pi_{\mu\nu}^{(2b_3)}$ 来自 D_1^{-2} 项并且分别对

应于 $N_{\mu\nu}$ 中与 k' 无关的和比例于 $(k')^2$ 的项的贡献. $N_{\mu\nu}$ 中 $(k')^4$ 项只给出一个非本质的 $g_{\mu\nu}$ 贡献.

对第一项 $q_\mu q_\nu$ 的系数为下式给出

$$\Pi^{(2b_1)}(q^2)=\frac{\alpha}{4\pi^3}\int_0^1 dx\int_0^1\frac{dz_1\cdots dz_4\,\delta\left(1-\sum_i z_i\right)}{(z_1+z_4)(z_2+z_3)}$$
$$\times\left[1-\frac{x^2(z_1z_3-z_2z_4)^2}{(z_1+z_4)^2(z_2+z_3)^2}\right]\ln\frac{D_2(\Lambda^2,q^2)}{D_2(\lambda^2,q^2)}\quad(19.106)$$

其中

$$D_2(\lambda^2,q^2)=\lambda^2(1-x)(z_1+z_4)(z_2+z_3)+m^2x$$
$$-q^2x\left[(z_1+z_2)(z_3+z_4)-\frac{x(z_1z_3-z_2z_4)^2}{(z_1+z_4)(z_2+z_3)}\right]\quad(19.107)$$

参数积分不会在 (19.106) 中引起什么发散麻烦. 当

$$z_1+z_4\to 0,\quad z_2+z_3\to 1,$$

并且在小 z_1 和 z_4 区,下列积分收敛

$$\int_0^\epsilon dz_1\int_0^\epsilon dz_4\frac{1}{z_1+z_4}\sim 2\epsilon\ln 2\qquad(19.108)$$

当分母中有更多 z_i 方幂时会出现疑难,这点我们随后将会看到. 作一次减除,

$$\Pi_c^{(2b_1)}(q^2)=\Pi^{(2b_1)}(q^2)-\Pi^{(2b_1)}(0)$$

收敛并可以计算出来; 这是对发奋学习的学生的一个挑战. 这里我们对 $-q^2\gg m^2$ 给出渐近的极限

$$\Pi_c^{(2b_1)}(q^2)=\frac{17\alpha}{72\pi^3}\ln\left(\frac{m^2}{-q^2}\right)+O(1)\qquad(19.109)$$

其次,我们来看 $\Pi^{(2b_2)}$,它来自 (19.104) 中 $N_{\mu\nu}$ 与 k' 无关的部分. 这里 d^4k' 积分对大的 k' 的行为有如 $\sim d^4k'/k'^6$,甚至不作光子正常化也是明显收敛的. 我们得到 $q_\mu q_\nu$ 的系数

$$\Pi^{(2b_2)}(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi^3}\int_0^1 x dx \int \frac{dz_1\cdots dz_4\,\delta\left(1-\sum_i z_i\right)m^2}{(z_1+z_4)(z_2+z_3)D_2(\lambda^2,q^2)}$$
$$\times\left[(z_1+z_2)^2-\frac{x^2(z_1z_3-z_2z_4)^2(1+z_2+z_3)}{(z_1+z_4)(z_2+z_3)^2}\right] \quad (19.110)$$

其中 $D_2(\lambda^2,q^2)$ 为 (19.107) 给出. 当 $-q^2\to\infty$ 时算(19.110)中的积分,我们得到

$$\Pi^{(2b_2)}(q^2)\sim\frac{m^2}{q^2}\ln\frac{-q^2}{m^2} \quad (19.111)$$

只剩下来自 $N_{\mu\nu}$ 中 $(k')^2$ 项的部分 $\Pi^{(2b_3)}_{\mu\nu}$ 需要计算. 不仅 (19.103) 和 (19.104) 的这部分在 $\int d^4k'$ 时导致一个发散对数,而且它还必定藏匿有重迭发散,只有在包括了顶角重整化抵消项 (19.100) 后才会收敛. 作 (19.105) 的正常化,在求迹(!!)和 k' 积分后,我们得到通过 (19.107) 的 D_2 表示的对 (19.103) 中 $q_\mu q_\nu$ 系数的贡献为

$$\Pi^{(2b_3)}(q^2)=\frac{\alpha}{4\pi^3}\int_0^1 dx x\int_0^1\frac{dz_1\cdots dz_4\,\delta\left(1-\sum_i z_i\right)}{(z_1+z_4)^2(z_2+z_3)^2}$$
$$\times(z_1-z_3)(z_4-z_2)\ln\frac{D_2(\Lambda^2,q^2)}{D_2(\lambda^2,q^2)} \quad (19.112)$$

在 $q^2=0$ 的减除去掉在 (19.112) 中对 Λ^2 的依赖关系,但是代替的却是在参数子积分中引入了发散——这正是重迭困难. 于是,在 (19.112) 中当 z_2、$z_3\to 0$ (以及由 δ 函数限制 $z_1+z_4\approx 1$) 时,其行为是

$$\int_0^1 dz_1dz_4\delta(1-z_1-z_4)z_1z_4\int_0^\varepsilon\frac{dz_2dz_3}{(z_2+z_3)^2}$$
$$\times\ln\frac{m^2x-q^2xz_1z_4+\Lambda^2(1-x)(z_2+z_3)}{m^2x-q^2xz_1z_4+\lambda^2(1-x)(z_2+z_3)} \quad (19.113)$$

对有限 λ 和 Λ,如在 (19.106) 中一样,它是收敛的. 但是,

为构成不依赖于截断的 $\Pi_c^{(2b_3)}(q^2)$，在 $q^2=0$ 点的减除把 (19.112) 中的对数改变为 $\ln[D_2(\lambda^2,0)/D_2(\lambda^2,q^2)]$，现在当 $z_2,z_3\to 0$ 时

$$\ln\frac{D_2(\lambda^2,0)}{D_2(\lambda^2,q^2)}\bigg|_{z_2,z_3\to 0}\approx\ln\frac{m^2}{m^2-q^2z_1z_4}$$

并且在 (19.113) 中引入了发散因子 $\int_0^\varepsilon\frac{dz_2}{z_2}$.

这个发散困难可以追溯到存在在顶角插入中的发散子积分. 回头参看图 19.47b 并忆及在第十八章中发展的电路类比，我们看到，对于 z_2 和 $z_3\to 0$，在动量 $p+k$ 和 $p+k+q$ 的两根线上的电阻趋于消失. 这意味着，非常大量的电流在与 ν 点的顶角插入相联系的圈中流动. 来自 $(z_2,z_3)\approx 0$ 区的 $\Pi_c^{(2b_3)}(q^2)$ 中的对数发散显然关系到与这个圈相联系的子积分. 在 $(z_1,z_4)\approx 0$ 的类似发散与在 μ 的顶角子积分相联系. 这些发散准确地被重整化方案所要求的 (19.100) 的两次减除所消去.

为显示这些消除，我们重新计算抵消项 (19.100). $\Pi^{(2c)}\cdot(q^2)$ 实际上已在第八章计算过了，但是，这里我们以尽可能接近地模拟 $\Pi^{(2b_3)}(q^2)$ 的方式重复其计算. 于是，在完成所有参数积分之前就能证明与 (19.112) 的抵消.

我们从 (19.65) 把 $L^{(2)}\gamma_\nu$ 的定义代入 (19.100)，利用 Feynman 规则

$$\begin{aligned}L^{(2)}\gamma_\nu&=\Lambda_\nu^{(2)}(p,p)\big|_{\not p=m}\\&=-ie^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4(k^2-\lambda^2)}\\&\times\left[\frac{\gamma_\alpha(\tilde{\not p}+\not k+m)\gamma_\nu(\tilde{\not p}+\not k+m)\gamma^\alpha}{[(\tilde p+k)^2-m^2]}\right]\Bigg|_{\not p=m}\end{aligned}$$

在图 19.47*b* 中给出了对 ν 顶角的运动学. 量 $\not p$ 不是积分变

量，但是，当它在括号[ ]的右边或左边时，有 $\tilde{p}^2 = m^2$ 和 $\tilde{\not{p}} = m$，因为顶角减除是在质壳上进行的．这给出[1]

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2c)}(q) = e^2 \int \frac{d^4k d^4p}{(2\pi)^8 (k^2 - \lambda^2)} \mathrm{Tr}\, \gamma_\mu \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \times \left[\frac{\gamma_\alpha (\tilde{\not{p}} + \not{k} + m) \gamma_\nu (\tilde{\not{p}} + \not{k} + m) \gamma^\alpha}{[(\tilde{p} + k)^2 - m^2]^2} \right] \Bigg|_{\not{p} = m} \times \frac{\not{p} + \not{q} + m}{(p + q)^2 - m^2} \tag{19.114}$$

尽管 $\tilde{p}$ 不是积分变量，我们像在 (19.101) 和 (19.102) 中那样组合四个荷电粒子分母以尽可能地接近 $\Pi_{\mu\nu}^{(2b)}$ 的原来的结果．作原点移动

$$p' = p + \frac{q z_4}{z_1 + z_4},$$

然后在分母中配成完全平方，就可完成 p' 积分

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2c)}(q) = -\frac{i\alpha}{2\pi} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 \frac{dz_1 \cdots dz_4\, \delta\left(1 - \sum_i z_i\right) z_1 z_4}{(k^2 - \lambda^2)(z_1 + z_4)^4} q_\mu \times \mathrm{Tr} q \left[\frac{\gamma_\alpha (\tilde{\not{p}} + \not{k} + m) \gamma_\nu (\tilde{\not{p}} + \not{k} + m) \gamma^\alpha}{[(\tilde{p}+k)^2 (z_2+z_3) + q^2 z_1 z_4/(z_1+z_4) - m^2]^2} \right] \Bigg|_{\not{p} = m} + g_{\mu\nu} \text{ 项} \tag{19.115}$$

为进行 k 积分，我们重写光子传播子为

$$\frac{1}{k^2 - \lambda^2} = \frac{z_2 + z_3}{(z_2 + z_3)(k^2 - \lambda^2)}$$

并利用参数 x 使其与 (19.115) 的分母组合．在 k 空间移动原点

$$k' = k + \tilde{p}x$$

后作 d^4k' 积分，约化迹，我们得到作为 $\Pi_{\mu\nu}^{(2c)}(q)$ 中 $q_\mu q_\nu$ 系数的两项 $\Pi^{(2c_1)}(q^2)$ 和 $\Pi^{(2c_2)}(q^2)$．

---

1) 对方括号中的分子部分，直至其被换为常数乘 γ_ν 之前，最好不用管它．

$\Pi^{(2c_1)}(q^2)$ 来自 (19.115) 的分子中不依赖于 k' 的部分，

$$\Pi^{(2c_1)}(q^2) = -\frac{\alpha}{4\pi^3}\int_0^1 xdx\int_0^1 \frac{dz_1\cdots dz_4\delta(1-\sum z_i)m^2z_1z}{(z_1+z_4)^4(z_2+z_3)}$$
$$\times [2-2x-x^2]/[m^2x - m^2x(1-x)(z_2+z_3)$$
$$- q^2xz_1z_4/(z_1+z_4) + \lambda^2(1-x)(z_2+z_3)] \quad (19.116)$$

这个积分对 z_1z_4 子积分发散，

$$\int_0^\varepsilon dz_1\int_0^\varepsilon dz_4\frac{z_1z_4}{(z_1+z_4)^4} = \int_0^\varepsilon\frac{dz_1}{z_1}\int_0^1\frac{ydy}{(1+y)^4}$$

但通过在 $q^2=0$ 的减除给出收敛结果. 按电路类比和图 19.47*b*，我们把这个发散联系于真空极化子积分乘以在顶角 v 插入 $L^{(2)}$ 的有限部分. 虽然它是紫外收敛的，但由于在顶角重整化常数 $L^{(2)}$ 本身中的红外发散，$\Pi_c^{(2c_1)}(q^2)$ 是红外发散的. 在 $-q^2 \gg m^2$ 极限下，我们计算 (19.116) [和在 (19.88) 中一样乘以 -2]，给出

$$-2\Pi_c^{(2c_1)}(q^2) = +\frac{\alpha}{6\pi^3}\ln\left(\frac{m^2}{-q^2}\right)\left[\ln\left(\frac{m}{\lambda}\right)-\frac{5}{4}\right]+O(1) \quad (19.117)$$

$\Pi^{(2c_2)}(q^2)$ 来自在 (19.115) 的分子中比例于 $(k')^2$ 的部分，并且是对数发散的. 运用和前面一样的正常化规定 (19.105)，我们得到

$$\Pi^{(2c_2)}(q^2) = \frac{\alpha}{4\pi^3}\int_0^1 xdx\int_0^1\frac{dz_1\cdots dz_4\,\delta\left(1-\sum_i z_i\right)z_1z_4}{(z_1+z_4)^4(z_2+z_3)^2}$$
$$\times \ln[\Lambda^2(1-x)(z_2+z_3) + m^2x - m^2x(1-x)(z_2+z_3)$$
$$- q^2xz_1z_4/(z_1+z_4)]/[\lambda^2(1-x)(z_2+z_3) + m^2x$$
$$- m^2x(1-x)(z_2+z_3) - q^2xz_1z_4/(z_1+z_4)] \quad (19.118)$$

它甚至在如对真空极化的有限部分那样作 $\Pi^{(2c_2)}(0)$ 减除以构成 $\Pi_c^{(2c_2)}(q^2)$ 后仍是发散的. 当 $z_2, z_3 \to 0$ 时在 z_2, z_3 子积分中可以看出(19.118)的发散，并可追踪到(19.115)中顶角重整

化常数 $L^{(2)}$ 的发散. 那里 $L^{(2)}$ 是乘在真空极化积分上，后者在 $q^2=0$ 的减除后给出有限结果.

在 (19.112) 中，在 $q^2=0$ 处作减除之后出现完全一样的发散，并且在那里通过电路类比可以追踪到同样的根源. 当我们如在 (19.88) 中按重整化方案所要求的那样作 (19.112) 和 (19.118) 的差时，发散抵消了. 在 $q^2=0$ 处作减除后，我们有

$$
\begin{aligned}
&\Pi_c^{(2b_3)}(q^2)-2\Pi_c^{(2c_2)}(q^2)\\
&\quad=\frac{\alpha}{4\pi^3}\int_0^1 x\,dx\int_0^1\frac{dz_1\cdots dz_4\,\delta\left(1-\sum_i z_i\right)}{(z_1+z_4)^2(z_2+z_3)^2}\\
&\quad\times\Big[(z_1-z_3)(z_4-z_2)\\
&\quad\times\ln\frac{m^2}{m^2-q^2\left[(z_1+z_2)(z_3+z_4)-\dfrac{x(z_1z_3-z_2z_4)^2}{(z_1+z_4)(z_2+z_3)}\right]}\\
&\quad-\frac{z_1z_4}{(z_1+z_4)^2}\ln\frac{m^2[1-(1-x)(z_2+z_3)]}{m^2[1-(1-x)(z_2+z_3)]-q^2\dfrac{z_1z_4}{z_1+z_4}}\\
&\quad-\frac{z_2z_3}{(z_2+z_3)^2}\ln\frac{m^2[1-(1-x)(z_1+z_4)]}{m^2[1-(1-x)(z_1+z_4)]-q^2\dfrac{z_2z_3}{z_2+z_3}}\Big]
\end{aligned}
\tag{19.119}
$$

这里光子质量 λ 被忽略了，因为这里没有红外困难，并由于这个组合与 Λ 无关，我们取 $\Lambda\to\infty$. 我们还通过交换

$$z_1,z_4\longleftrightarrow z_2,z_3$$

把减除项 $\Pi_c^{(2c_2)}(q^2)$ 对称化，这种交换相当于在真空极化图形的两个顶角的每一个上，顶角插入减除了一次. 方程(19.119)现在是有限的，并且完全没有重迭发散；对于 $z_2,z_3\to 0$ 和 $z_1+z_4\to 1$ 头两项中的发散相互抵消，因为当 $\varepsilon\to 0$ 时

$$\int_0^\varepsilon dz_2\int_0^\varepsilon dz_3\,\frac{1}{(z_2+z_3)^2}\left[z_1z_4\ln\frac{m^2}{m^2-q^2z_1z_4}+O(z_2,z_3)\right.$$
$$\left.-z_1z_4\ln\frac{m^2}{m^2-q^2z_1z_4}+O(z_2,z_3)\right]\sim\varepsilon$$

并且第三项是有限的. 类似地,对于 $z_1,z_4\to 0$, $z_2+z_3\to 1$, 第一和第三项抵消掉发散部分,并且第二项是有限的. 因此,这两个减除项如所要求地抵消了在因子 $\Pi_c^{(2b_3)}$ 中所含的顶角插入的发散部分,在 $q^2=0$ 的总的减除使真空极化成为有限. 这里我们较详细地看到了重整化方案必然成功的例子,同样也看到了为完成它而花的显然不可避免的辛劳.

为真正计算 (19.119), 我们引入非常有用的变量

$$z_1+z_4=z\quad z_1=zu\quad z_2=(1-z)v\quad 0\leqslant z,u,v\leqslant 1$$

并在 $-q^2\gg m^2$ 极限下得到

$$\Pi_c^{(2b_3)}(q^2)-2\Pi_c^{(2c_2)}(q^2)=\frac{\alpha}{48\pi^3}\ln^2\left(\frac{-q^2}{m^2}\right)$$
$$+\frac{\alpha}{18\pi^3}\ln\left(\frac{-q^2}{m^2}\right)+O(1)\qquad(19.120)$$

把 (19.98),(19.109),(19.111), (19.117) 和 (19.120) 各部分加起来,我们得到 $-q^2\gg m^2$ 极限下完全的四阶真空极化

$$\Pi_c^{(2)}(q^2)=\frac{-\alpha}{16\pi^3}\ln\left(\frac{-q^2}{m^2}\right)+O(1)\qquad(19.121)$$

$\ln^2(-q^2/m^2)$ 项被抵消掉了,以及自能插入的 $\Pi^{(2a)}$ 与顶角部分的 $\Pi^{(2b)}$ 和 $\Pi^{(2c)}$ 之间的红外项也一样地被抵消掉了. 把 (19.121) 代入光子传播子(19.51e)的方程,与二阶真空极化一道[见(8.29)式],至 e^4 我们得到(丢掉规范项)

$$i\tilde{D}'_F(q^2)_{\mu\nu}=-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2}\left[\frac{1}{1-\frac{\alpha}{3\pi}\ln\left(\frac{-q^2}{m^2}\right)-\frac{\alpha^2}{4\pi^2}\ln\left(\frac{-q^2}{m^2}\right)+\cdots}\right]$$
$$-q^2\gg m^2\qquad(19.122)$$

这个结果是 Jost 和 Luttinger[1] 在 1950 年首先导出的. 两个修正项有相同符号，并趋向于**增加**在小距离上粒子之间的作用力. 从第十六章对 $\widetilde{D}'_F(q^2)$ 所构造的谱表示中曾得到了到 α 所有阶的同样的普遍结论. 它来自于 (16.172) 和(16.173) 中权函数的正定性.

19.13 Compton 散射的低能定理

Ward 恒等式和重整化方案合起来给出关于 Compton 散射振幅低能行为的一个定理，它到 e^2 的所有阶正确成立. Thirring[2] 在 1950 年首先证明一个光子在一个电子上的散射振幅当光子能量趋于零时趋于经典 Thomson 极限. 在这个极限下，其数值为 α/m，这里 $\alpha = \frac{1}{137}$ 和 m 没有作近似，简单地就是电子重整化否的电荷和质量. 在第七章中[见 (7.74) 式]作为一个近似我们用二阶微扰论计算了这个结果.

这个定理的证明基于对 Ward 恒等式的一个观察，即零能量光子的完全顶角函数 $\Gamma_\mu(p,p)$ 可以从严格的电子传播子倒数的微商得出:

$$\Gamma_\mu(p,p) = \frac{\partial}{\partial p^\mu} S'^{-1}_F(p) \tag{19.123}$$

于是，零能量光子可以通过对电荷线上流过的动量求微商而插入该电荷线.

仅仅基于规范不变性我们就可以简单地理解这个结果. 一个单独自由电子的 τ 函数为

$$\tau(p) \equiv iS'_F(p) \tag{19.124}$$

我们可以由此计算在一个**恒定**外电磁势 A_μ 中传播的，具有

1) Jost *and* Luttinger, 引文见前.
2) W. Thirring, *Pil. Mag.*, **41**, 1193 (1950).

裸电荷 e_0 的荷电粒子的 τ 函数. 通过作规范不变的代换

$$p_\mu \to p_\mu - e_0 A_\mu$$

把 $\tau(p)$ 变到

$$\tau(p) \to \tau(p - e_0 A) = \tau(p) - e_0 A^\mu \frac{\partial}{\partial p^\mu}\tau(p) + \frac{1}{2} e_0^2 A^\mu A^\nu \frac{\partial^2}{\partial p^\mu \partial p^\nu}\tau(p) + \cdots \tag{19.125}$$

除 e_0 因子外，A^μ 的系数

$$-e_0 \frac{\partial}{\partial p^\mu}\tau(p) = ie_0 S'_F(p)\left[\frac{\partial}{\partial p^\mu} S'^{-1}_F(p)\right] S'_F(p)$$
$$= iS'_F(p) e_0 \Gamma_\mu(p,p) S'_F(p) \tag{19.126}$$

正好是在零能量的非正规顶角函数，其电子腿上具有自能部分而光子腿被去掉了，如图 19.49 所示. $\frac{1}{2} A_\mu A_\nu$ 的系数[1]是 Compton 散射的 τ 函数，代表着散射前后两个零能光子与两

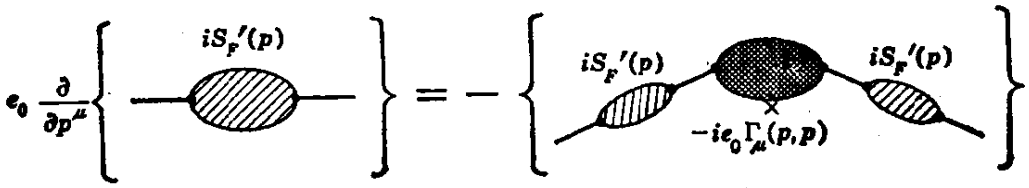


图 19.49　通过微商插入零能光子以阐明 Ward 恒等式

个外线的二阶相互作用. 电子腿和通常一样，包含在 τ 函数的定义中，但光子腿没有，如图 19.50 所示. 于是我们写出

$$\tau^{(c)}(p)^{\mu\nu} = ie_0^2 \frac{\partial^2}{\partial p^\mu \partial p^\nu} S'_F(p) \tag{19.127}$$

通过把从 (19.48) 得来的恒等式

$$\frac{\partial^2}{\partial p_\mu \partial p_\nu} S'^{-1}_F(p) = -\frac{\partial^2}{\partial p_\mu \partial p_\nu}\Sigma(p)$$

1) 在这个定义中引入因子 1/2 是考虑到两根外光子线与因子

$$A_\mu A_\nu \to A_\mu^{(+)} A_\nu^{(-)} + A_\nu^{(+)} A_\mu^{(-)}$$

结合有两种可能方式.

(19.123)，以及

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu} S'_F(p) = -S'_F(p)\left[\frac{\partial}{\partial p_\mu} S'^{-1}_F(p)\right] S'_F(p)$$

代入 (19.127)

$$\Gamma^{(c)}(p)^{\mu\nu} = +[iS'_F(p)]\left[(-ie_0)\Gamma^\mu(p,p)iS'_F(p)(-ie_0)\Gamma^\nu(p,p)\right.$$
$$+ (-ie_0)\Gamma^\nu(p,p)iS'_F(p)(-ie_0)\Gamma^\mu(p,p) - ie_0^2\left.\frac{\partial^2\Sigma}{\partial p_\mu \partial p_\nu}\right]$$
$$\times [iS'_F(p)] \qquad (19.128)$$

就能最好地看出 Compton 振幅与图形的对应. (19.128) 中的三项代表着有两个零能光子插入到带着外粒子的电荷与动

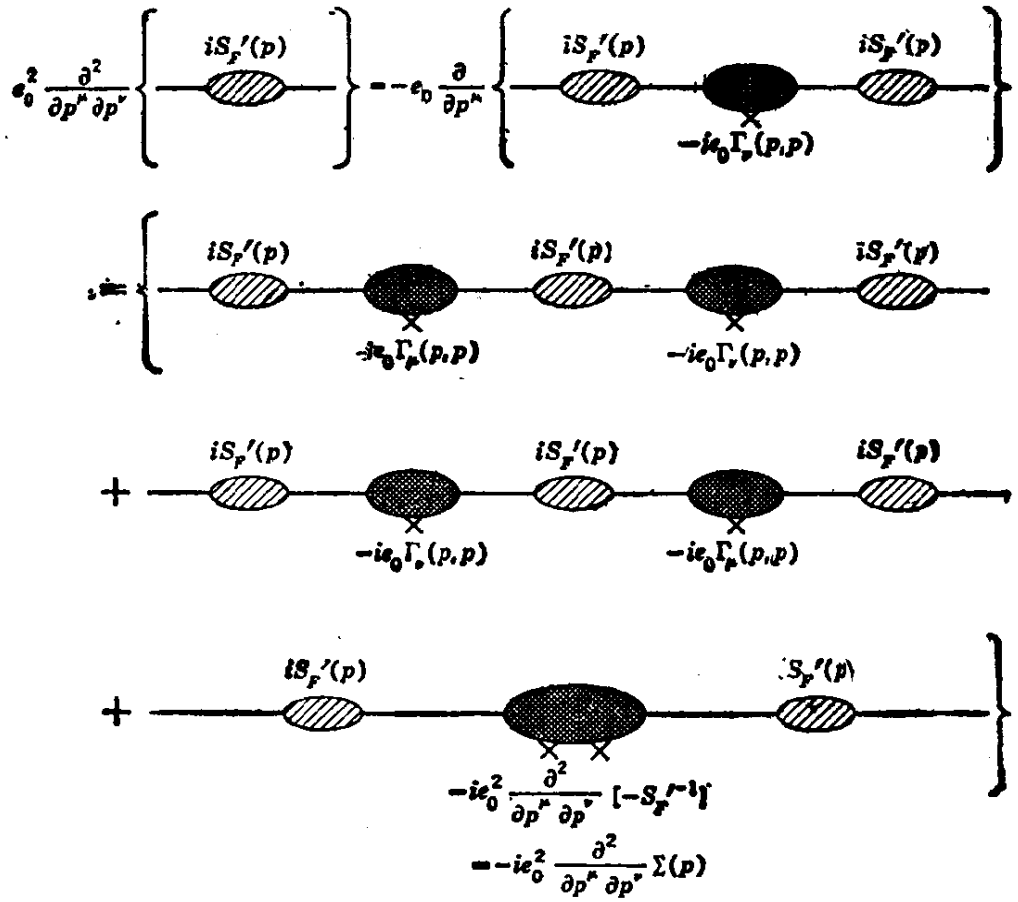


图 19.50 二次导数给出零能 Compton 极限

量 p_μ 的连续传播子线上的所有图形之和. 沿着这根线的传播子有 $(\not p + \not k_i - m)^{-1}$ 的形式，这里 k_i 在与自能斑图中的内部光子的每一次作用后发生改变. 按照

$$e_0 \frac{\partial}{\partial p_\mu} \frac{i}{\not p + \not k_i - m} = -\frac{i}{\not p + \not k_i - m} \times (-ie_0\gamma^\mu) \frac{i}{\not p + \not k_i - m} \tag{19.129}$$

沿着这根线在每个地方一次微分 $\frac{\partial}{\partial p_\mu}$ 就插入一个零能光子. 在封闭圈中零能光子的插入为零，其理由已在 §19.10 中讨论过了[1]. 规范不变性要求一个封闭圈的振幅必须比例于场强 $\sim(q_\mu\varepsilon_\nu - q_\nu\varepsilon_\mu)$，这个在 $q_\mu = 0$ 时为零. 于是，(19.127) 的确包含了零能时的全部 Compton 图形，并且，例如说，按照我们在 (17.43) 所给出的式子，去掉外电子传播子并乘以入射和散射光子及电子的波函数而构造 S 矩阵元. 用图 19.51 的运动学，这对于静止电子和光子动量 $k, k' \to 0$ 时给出

$$S(p',k',\varepsilon';p,k,\varepsilon) = \frac{\varepsilon_\mu\varepsilon'_\nu}{(2\pi)^6\sqrt{4kk'}}\mathfrak{M}^{\mu\nu}(p',k';p,k) \tag{19.130}$$

这里

$$\mathfrak{M}^{\mu\nu}(p,0;p,0) = \frac{-ie_0^2}{Z_2Z_3}\lim_{k\to 0}\bar{u}(p)(\not p + \not k - m)\frac{\partial^2 S'_F(p+k)}{\partial p_\mu \partial p_\nu} \times (\not p + \not k - m)u(p) = -ie^2\lim_{k\to 0}\bar{u}(p)\not\varepsilon\frac{\partial^2\tilde{S}'_F(p+k)}{\partial p_\mu\partial p_\nu} \times \not\varepsilon u(p) \tag{19.131}$$

在上面第二等式中按重整化规定(19.49)把 Z_2 和 Z_3 吸收掉了.

---

1) 即，在这极限下我们可以写 $\int d^4p \frac{\partial}{\partial p_\mu} F(p, k_1, \cdots, k_n) = 0$ 这里 F 是封闭圈的贡献.

微分截面可以从这 S 矩阵计算. 对于一个约定的光子极化,它是

$$d\sigma = \frac{1}{2k}|\epsilon_\mu \epsilon'_\nu \mathfrak{M}^{\mu\nu}|^2 \frac{d^3k'}{2k'} \frac{md^3p'}{E'} \frac{(2\pi)^4\delta^4(p+k-p'-k')}{(2\pi)^6}$$

或当 $k,k' \to 0$ 时

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{16\pi^2}|\epsilon_\mu \epsilon'_\nu \mathfrak{M}^{\mu\nu}|^2 \tag{19.132}$$

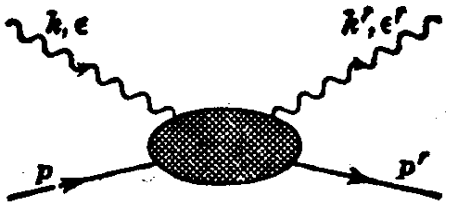


图 19.51 Compton 散射的运动学

显然,如果在零能时 $\mathfrak{M}^{\mu\nu}$ 有限,则 $d\sigma/d\Omega$ 在零能时也有限,并且在 (19.131) 中我们必须计算 $\partial^2\tilde{S}'_F(p+k)/\partial p_\mu \partial p_\nu$ 中 k^{-2} 阶的项. 按照重整化条件,我们写出重整的传播子的普遍形式为

$$\tilde{S}'_F(p') = \frac{\not{p}' A(p'^2) + mB(p'^2)}{p'^2 - m^2} \quad \text{而且 } A(m^2) = B(m^2) = 1 \tag{19.133}$$

如果我们一开始在电子静止系中选择横向规范,则可大为简化(19.133) 的二阶导数的计算. 这时

$$\epsilon \cdot p = 0 \qquad \epsilon' \cdot p = 0 \tag{19.134}$$

并且所有比例于 p_μ 或 p_ν 的项不需要计算,完成微商,我们得到如下结构

$$\frac{\partial^2\tilde{S}'_F(p+k)}{\partial p_\mu \partial p_\nu} = -2g^{\mu\nu}\left[\frac{\not{p}+m}{4(p\cdot k)^2} + O\left(\frac{1}{k}\right)\right] + p^\mu \Phi^\nu + p^\nu \Phi^\mu + p^\mu p^\nu \not{k} \tag{19.135}$$

Φ^μ 是许多项之和,其中没有大于 $O(1/k^2)$ 的,但是,由于 (19.134) 的规范选择,它们都是无关的. $\not{k}$ 可能是 $O(1/k^3)$ 阶,来自对分母

$$(p+k)^2 - m^2 = 2p\cdot k$$

的二次微商. 假如流不是永远精确地守恒，那么它是一个可能破坏电磁计算的危险暗礁的预兆. 这里我们立刻通过方便的规范选择 (19.134) 处理掉了这个奇异贡献，并且我们相信，对于任何规范选择，它也必定消失.

为确定 (19.135) 中各项的量级，我们假定在 $p^2 = m^2$ 处存在着 A 和 B 的导数. 这是由 $\tilde{S}'_F(p)$ 的谱表示 (16.112) 所保证的，倘若我们代入光子质量 λ 把在 $(m+\lambda)^2 \leqslant p^2 \leqslant \infty$ 区的割线与在 $p^2 = m^2$ 的极点分开的话. 用这种手段 $A(p^2)$ 和 $B(p^2)$ 对于在 $p^2 = m^2$ 附近的幂级数展开有 $\sim 2m\lambda$ 的收敛半径. 这在令 $\lambda \to 0$ 时有问题，我们转过头来简短地讨论它们.

利用 (19.134) 和 (19.135)，由 (19.131) 我们得到

$$\varepsilon_\mu \varepsilon_\nu \mathfrak{M}^{\mu\nu}(p,0;p,0) = 2ie^2 \varepsilon \cdot \varepsilon' \lim_{k\to 0} \frac{\bar{u}(p)\not{\varepsilon}(\not{p}+m)\not{\varepsilon}u(p)}{4(p\cdot k)^2}$$

$$= \frac{ie^2 \varepsilon \cdot \varepsilon'}{m} \tag{19.136}$$

这正是通过物理荷 e 和质量 m 所表示的 Thomson 振幅. 从 (19.132) 得截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{m^2}(\varepsilon \cdot \varepsilon')^2 \quad \text{对 } k \to 0 \tag{19.137}$$

它表明：在 S 矩阵的重整展开式中出现的精细结构常数

$$\alpha = 1/137$$

可以由零能 Compton 散射的 Thomson 极限来实验地确定. 把这个定理推广，通过费米子的静态特性，即其电荷和磁矩，来计算 $\mathfrak{M}_{\mu\nu}$ 中 k 的线性项，是 Low，以及 Gellman 和 Goldberger[1]

1) F. Low, *Phys. Rev.*, **96**, 1428 (1954); M. Gell-Mann *and* M. L. Goldberger, *Phys. Rev.*, **96**, 1433 (1954). 有关的讨论见 N. M. Kroll *and* M. A. Ruderman, *Phys. Rev.*, **93**, 233 (1954)，他们首先导出了一个光生介子产生的低能定理；A. Klein, *Phys. Rev.*, **99**, 998(1955)；和 K. Kazes, *Nuovo Cimento*, **13**, 1226 (1959).

所给出的. 这给出磁矩为 μ 的中性粒子,例如中子,的严格的低能极限 $\propto k^2$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 4k^2\mu^2\left(1+\frac{1}{2}\sin^2\theta\right) \quad \text{当 } k\to 0 \text{ 时}$$

对于荷电粒子, Thomson 和 Rayleigh 散射间的干涉也 $\propto k^2$, 它不能通过粒子的静态特性严格地计算出, 并且不能与一开始就以 k^2 量级出现[1]的磁矩贡献相分离. 于是 k^2 项的完整分析要求研究相互作用的动力学细节,例如,象借助于 Kramers-Krönig 关系所能作的那样.

在我们可以和上面一样讨论低能定理(19.137)的实验含义之前, 我们应该处理在上面分析中 $\lambda\to 0$ 时出现的红外问题. 在证明(19.136)时必须假定在(19.133)中

$$(p'^2-m^2)\tilde{S}'_F(p')$$

有光滑的行为. 但是, 这只对 $p'^2-m^2\leqslant 2m\lambda$ 正确, λ 为假想的光子质量. 这个条件把光子能量限制于

$$(p+k)^2-m^2=2mk_0+\lambda^2\lesssim 2m\lambda \text{ 或 } k_0<\lambda$$

但是,如果光子有质量 $\lambda>0$, 极限(19.132)甚至没有意义, 因为可观测的物理截面对于 $k_0<\lambda$ 会等于零. 因此, 我们必须把这些不等式中的一个反过来, 并且对于一个物理上有意义的有用定理我们要把(19.137)推广到能区

$$m\gg k,\ k'\gg\lambda.$$

基于 §17.10 对 Bloch-Nordsieck 模型红外问题的分析,一个有启发性的论证将提供这个推广的基础. 到 e^2 阶, 同样的结果可以在第七、第八章作过的计算中找到. 按照(17.89)和(17.95), 我们期望当光子质量趋于零时,弹性 Compton 散射振幅将趋于零,其行为有如

---

1) 对于一个未极化的靶粒子.

$$\mathfrak{M}_{\mu\nu} = \frac{ie^2}{m} g_{\mu\nu} \exp\left[-\frac{e^2}{2(2\pi)^3} \sum_{\epsilon} \int \frac{d^3q}{2q_0} \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\beta}}{q_0 - \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\beta}} - \frac{\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\beta}'}{q_0 - \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\beta}'} \right)^2 \right]$$
$$\cong \left(\frac{ie^2}{m} g_{\mu\nu} \right) \exp\left[\frac{-\alpha}{8\pi^2} \sum_{\omega} \int \frac{d^3q}{q_0^3} (\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\beta}')^2 \right] \quad (19.138)$$

这里

$$\boldsymbol{\beta}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}' = \frac{1}{m}(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}') = \text{反冲电子速度}$$

$$\boldsymbol{\beta} = 0$$

$$q_0 = \sqrt{|\boldsymbol{q}|^2 + \lambda^2}$$

(19.138) 式的得到是通过经典地处理从“硬”光子 k 散射所产生的电子流分布，并且把 Thomson 振幅乘以没有另外光子辐射时的振幅 $\langle 0\ \text{out}|0\ \text{in}\rangle$，如 (17.89) 中所给出的那样。这个程序与第八章 [(8.62) 式] 中的顶角修正一致，也与 Brown 和 Feynman[1] 所得到的对 Compton 散射的二阶辐射修正一致.

对于向前散射，$\boldsymbol{\beta}' = 0$，指数因子为 1，并且在 (19.138) 中没有红外问题. 但是对于所有非向前方向，对于任一 $k \neq 0$，$|\boldsymbol{\beta}'| \neq 0$；并且 $\lambda \to 0$ 时，指数中的红外发散引起 $\mathfrak{M}_{\mu\nu} \to 0$. 低能定理 (19.137) 不再成立. 因为它是当 $k_0/\lambda \to 0$ 时在 $k_0 \to 0$ 的极限下被证明的，但这里我们却是当 $k_0 \to 0$ 时 $\lambda/k_0 \to 0$.

但是，从我们前面对红外问题的经验知道，弹性振幅 $\mathfrak{M}_{\mu\nu}$ 的消失是被放出任何数目的软光子，$q < \Delta k$，的非弹性振幅所补偿的. 把这些反过来加进电子的经典流近似，就把指数 (17.89) 换成了 (17.95)，并且代替 (19.138)，导致如下一个微分截面

1) L. M. Brown *and* R. P. Feynman, *Phys. Rev.*, **85**, 231 (1952).

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{rad}} = \frac{\alpha^2}{m^2}(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}')\exp$$
$$\times\left[-\frac{\alpha}{4\pi^2}\int_{\sim\Delta k}^{\sim m}\frac{dq}{q}\int d\Omega_q\sum_{\epsilon}(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\beta}')^2\right]$$
$$\approx\frac{\alpha^2}{m^2}(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}')\exp\left[\frac{-2\alpha}{3\pi}\beta'^2\ln\left(\frac{m}{\Delta k}\right)\right] \qquad (19.139)$$

其中 $\beta'=(2k/m)\sin^2(\theta/2)$. 下端截断，$\sim\Delta k$，是探测器的能量分辨率，即不能被测量仪器所探测到的软光子所带走的最大能量值. q 积分的上端截断取为[1] $1/\Delta t\sim m$，这里 Δt 是电子从零加速到 β' 的时间间隔. 为了简单起见这里采用了电子的经典流模型，因此必须要引入这个截断.

根据(19.139)，原则上可以设计一个实验，对任一给定光子能量 k，它具有如此小的能量分辨率 Δk，使得微分截面由于辐射修正而显著偏离 Thomson 极限. 但是，对一个固定的能量分辨的百分率，即 $\Delta k/k$ 为常数，事实上在 $k\to 0$ 时(19.139)趋于 Thomson 极限. 如同对大多数电动力学过程的情形那样，在能作准确预言之前，必须仔细地考查实验条件.

19.14 Feynman 振幅的渐近行为

在 §19.10 中联系 Feynman 积分的收敛性质所讨论过的 Weinberg 定理[2]所包含的内容实际上比我们在那里已用到的要多. 当外动量的某个子集，或所有子集，被允许趋向于无穷时，Weinberg 定理给出一个确定 Feynman 振幅渐近行为的简单规则. 为表述这个基于 §19.10 中所讨论过的思想的定理，我们必须略为推广先前引进的子图形的概念. 让我们考

1) 忆及 Conpton 散射在非相对论极限下通过具有能量分母 $-2m$ 的负能态进行.

2) S. Weinberg, *Phys. Rev.*, **118**, 838(1960).

虑进入图形的外动量 q_s 的某个子集 $\{Q_s\}$；这些动量 Q_s 随后允许趋于∞．于是，以某种方式选择了内动量变量 $\{l_r\}$ 后，我们把至少有一个 L_r 或 Q_s 通过的内线集合定义为对应于内部动量子集 $\{L_r\}$ 和外部变量子集 $\{Q_s\}$ 的子图形，倘若这样得到的图形是连通的话．作为子图形的一个例子，在图 19.52 中给出一个电子-正电子散射的六阶图．我们将研究当电子动量 q_1 和 q_3 趋于无穷时这个振幅的行为．对应于这个情况的子图形示于图 19.53 中．对如上定义的每个子图形，我们给定一个“渐近系数” α，它是 §19.10 讨论过的发散度在这里的类比．这个渐近系数是通过计算子图形中所有各线的方幂而得到的：每个光子线为 −2，每个电子线为 −1，子图形中的每个内动量积分为 +4

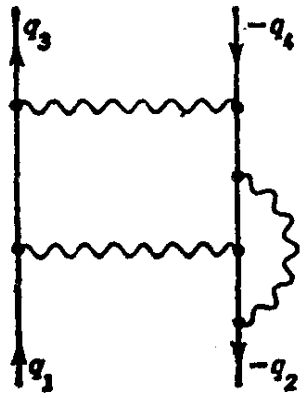


图 19.52 六阶电子-正电子散射图

$$\alpha(g) = 4k - f - 2b$$

这里 b = 子图形 g 中的光子线数目，

f = 子图形 g 中的电子线数目，

k = 子图形 g 中的内动量积分数目．

例如，考虑图 19.52 为一个**正规**图形（无外传播子腿），图 19.53 中所示各子图形的渐近系数分别是 −1，−3，−5，−2，−6，−8，和 −5．Weinberg 定理说：如果

1. 外动量 q_s 和内动量 l_r，如在 §19.9 中所描述的那样，延拓至具有欧氏度规的区域，

2. 外动量子集 $\{Q_s\}$ 被允许按照

$$Q_s \to \chi Q_s \qquad \chi \to \infty$$

而趋于无穷，那么振幅 $\mathfrak{M}(\chi Q_1 \cdots \chi Q_J, q_{J+1} \cdots q_m)$ 当 $\chi \to \infty$

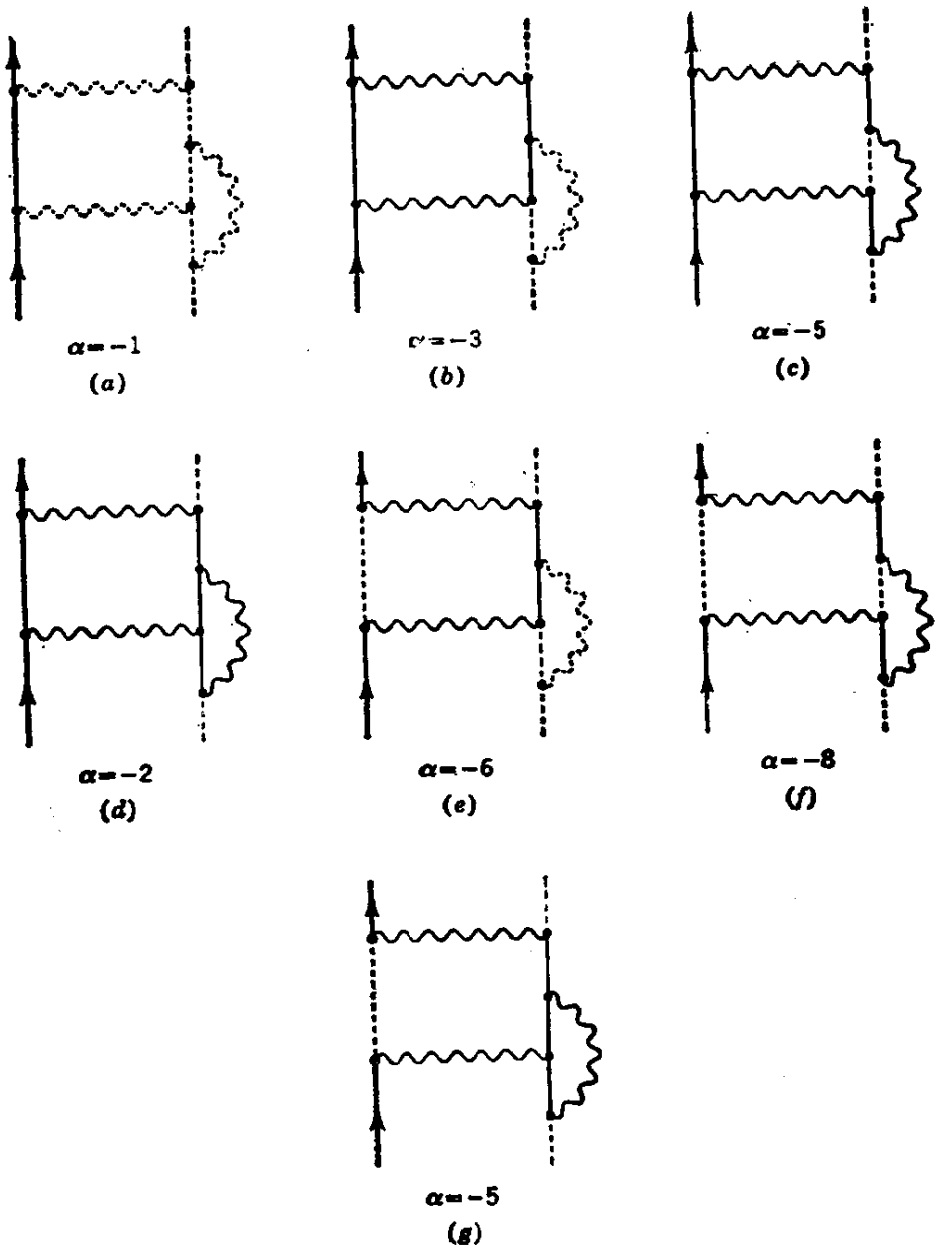


图 19.53　图 19.52 的子图形及其渐近系数

时的渐近行为是

$$\mathfrak{M} \sim \chi^{\alpha}(\log \chi)^{\beta}$$

这里

$$\alpha = \max_{\text{子图形}g} \alpha(g)$$

$\alpha(g)$ 是子图形的渐近系数。 系数 β 不由 Weinberg 分析决

定．于是，对图 19.52 的例子，振幅 $\mathfrak{M}$ 的行为渐近地如

$$\mathfrak{M} \sim \frac{1}{\chi}(\log \chi)^{\beta}$$

其主要贡献来自这样的积分区域，在该区域中除开图 19.53 的子图形 (a) 中所示的粗体内电子线外，内线上的所有动量都很小．

进行证明的思想和在 §19.10 中讨论收敛性定理时的一样．对应每个子图形有一个对内动量变量 $\{L_r\}$ 的子积分，其余的内部变量 l_r 依然保持“小”．子积分由通过子图形的大动量 χQ_s 在下限截断，而贡献的大小将由总的维数考虑，即由幂次计算而得到．显然，在子图形中，但**不是**在任一子积分中，的每根线对渐近行为贡献 -2 或 -1．因此要求得渐近行为就要考查如 §19.10 中那样对应于内动量 $4k$ 维空间中的“管子”的所有可能子图形，并挑出主要的贡献．

重整化并不改变这个定理的结论；如果重整的顶角和自能部分(为了定义积分!!)插入进来，则可以通过我们已经给出的规则[1]决定其渐近行为．根据定理，顶角和自能部分的渐近行为，除了带上对数因子外，到 e 的任何有限阶与其裸的对应部分是一样的

$$\Sigma(p) \to \not{p}(\log(-p^2))^{\beta} \quad \text{当 } p^2 \to -\infty$$

$$\Pi_{\mu\nu}(q) \to (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2)(\log(-q^2))^{\beta'} \quad \text{当 } q^2 \to -\infty$$

$$\Gamma_\mu(p,p',q) \to \begin{cases} \gamma_\mu(\log(-p^2))^{\beta''} & \text{当 } p^2 \to -\infty \\ \dfrac{\not{p}\gamma_\mu\not{p}}{p^2}(\log(-p^2))^{\beta'''} & p'^2 \to -\infty \\ & q \text{ 固定} \end{cases} \tag{19.140}$$

当 p,p' 和 q 的其它组合趋于∞时，对于它们的渐近行为有类似的表述．从重整化方案的成功我们已经可以猜到 Σ，Π，

1) 这个论述的表面上的循环性可以通过作归纳论证而排除，见书中随后句子的解释．

和 Γ_μ 的这个行为;如果渐近行为变坏，则加上更多的顶角和自能插入后图形发散度会增加，定理所预言的渐近行为与第八章中二阶计算以及在 §19.12 中的四阶计算所得的结果相同.

这个定理的威力被两个因素所限制，首先，完全没有谈到求和至 e 的所有阶的精确函数的渐近行为问题. 例如，如果我们对 $S'_F{}^{-1}(p)$ 作一个假想的展开，它除了两阶外无疑是**错的**

$$S'_F{}^{-1}(p) \cong \not{p}\left[1-\frac{\alpha}{4\pi}\log\left(\frac{-p^2}{m^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{4\pi}\right)^2\log^2\left(\frac{-p^2}{m^2}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{6}\left(\frac{\alpha}{4\pi}\right)^3\log^3\left(\frac{-p^2}{m^2}\right)+\cdots\right]=\not{p}\exp\left[\frac{-\alpha}{4\pi}\log\left(\frac{-p^2}{m^2}\right)\right]$$
$$=\not{p}\left(\frac{m^2}{-p^2}\right)^{\alpha/4\pi},\ \text{当 } p^2\to\infty \text{ 时}$$

就会导致 S'_F 的一个渐近行为，它与在 e 的有限阶展开中得到的完全不同.

对 Weinberg 定理用处的第二个限制是它限于在 §19.9 中描述的通过解析延拓而定义的非物理欧氏动量. 例如说，我们希望估计当外动量 q_s 保持在质壳上，$q_s^2=m_s^2$，而能量 S 或动量传递 t 趋于无穷时的物理散射振幅的渐近行为. 这个更困难的问题已有人[1]着手考虑了，但还没有完全解决.

19.15 重整化群

重整化方案的发展是建立在如下的可能性上的，即传播子、顶角函数和 τ 函数可以按照标度律 (19.49) 通过其对应的裸量的重整化而重新标度. 除这个(可能是无穷的)重新标

1) J. Polkinghorne, *J. Math. Phys.*, **4**, 503 (1963); P. Federbush *and* M. Grisaru, *Ann. Phys.*, (*N. Y.*), **22**, 263 (1963); J. Bjorken *and* T. T. Wu, *Phys. Rev.*, **130**, 2566 (1963); G. Tiktopolous, *Phys. Rev.*, **131**, 480 (1963).

度外，还可以作有限的重新标度．我们已经遇到过这样一个例子，即 §19.9 的中间重整化．这些进一步的重新标度反映了我们选择什么地方来归一我们的传播子和顶角的任意性．物理的 S 矩阵元应该不受它们的影响．

作为这些标度变换存在的一个副产物——称为重整化群——就有可能得到高阶图形的增长率的讯息而不需作详细的计算．用这个办法可以改善微扰论，把按 e^2 幂的展开式变成另一种展开式，其单独的每一项具有与重整化群的标度定律相一致的动量依赖性．重整化群的研究还促成关于严格理论的结构以及裸荷与重整荷之间关系[1]的某些有趣的猜测．

这里我们通过研究光子传播子和相关的电荷重整化来演示重整化群方法．在 (19.51e) 中重整的光子传播子的结构为

$$e^2\widetilde{D}'_F(q)_{\mu\nu} = \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2} d(q^2,0,e^2) + \text{规范项}$$

这里标量函数 $d(q^2,0,e^2)$ 为

$$d(q^2,0,e^2) = \frac{e^2}{1 + e^2\Pi_c(q^2,0,e^2)} \qquad (19.141)$$

d 和Π的第一个宗量是动量变量．这里取为零的第二个宗量指的是在该点对 $\Pi_c(q^2)$ 作减除的动量之值，即

$$\Pi_c(q^2,0,e^2) \equiv \Pi(q^2,0,e^2) - \Pi(0,0,e^2)$$
$$\Pi_c(0,0,e^2) = 0 \qquad (19.142)$$

第三个宗量 e^2 是以这种方式作的重整微扰论中的展开参数．它是物理可观测荷，测定为

$$e^2 = \frac{4\pi}{137}$$

---

1) M. Gell-Mann *and* F. E. Low, *Phys. Rev.*, **95**, 1300 (1954), Н. Н. Боголюбов *и* Д. В, Ширков *"Введение в Теорию квантованных полей" Москва*, (1957).

例如说，按照 (19.141) 和 (19.142) 当 $q^2 \to 0$ 和

$$d(0,0,e^2) = e^2 \tag{19.143}$$

时可以正确预言 Coulomb 截面，还有在 §19.13 中讨论的 Compton 散射的 Thomson 极限.

假定说我们现在想通过在另外某一点 $q^2 = \lambda_1^2 \neq 0$ 作减除而改变总结在 (19.51) 中的整个重整化方案 [为保证 d 仍为实数，我们选 $\lambda_1^2 < 0$ 并且避开在谱表示 (16.172) 中不为零的吸收振幅的区域]，那么这将如何影响我们已经作出的结果呢?

根据 (19.49)，组合

$$e^2\tilde{D}'_F(q)_{\mu\nu} = e_0^2 D'_F(q)_{\mu\nu} \tag{19.144}$$

在重整化理论标度律下是一个不变量，因此，在一个任意点 $q^2 = \lambda_1^2 < 0$ 作减除的重整化方案将导致相似的形式

$$\begin{aligned} e^2\tilde{D}'_F(q)_{\mu\nu} &= -\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} d(q^2,0,e^2) + \text{规范项} \\ &= -\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} d(q^2,\lambda_1^2,e_1^2) + \text{规范项} \end{aligned} \tag{19.145}$$

这里

$$d(q^2,\lambda_1^2,e_1^2) = \frac{e_1^2}{1 + e_1^2[\Pi(q^2,\lambda_1^2,e_1^2) - \Pi(\lambda_1^2,\lambda_1^2,e_1^2)]} \tag{19.146}$$

新的“荷”或展开参量 e_1^2 为

$$d(\lambda_1^2,\lambda_1^2,e_1^2) = e_1^2 \tag{19.147}$$

从 (19.145) 中去掉规范项，我们得到

$$d(q^2,0,e^2) = d(q^2,\lambda_1^2,e_1^2) \tag{19.148}$$

它化为一个联系 e_1^2 与 $q^2 = 0$ 时的 $e^2 = 4\pi/137$ 间的一个方程

$$e^2 = d(0,\lambda_1^2,e_1^2) \tag{19.149}$$

用同样的办法我们还可以在另外一个减除点 $\lambda_2^2 < 0$ 进行重整，得到对于两个任意点的传播子振幅之间类似于(19.147)到(19.149)的关系式

$$d(q^2,\lambda_1^2,e_1^2) = d(q^2,\lambda_2^2,e_2^2)$$

$$e_2^2 = d(\lambda_2^2,\lambda_2^2,e_2^2) = d(\lambda_2^2,\lambda_1^2,e_1^2)$$

它们组合起来给出一个单一的泛函方程

$$d(q^2,\lambda_1^2,e_1^2) = d(q^2,\lambda_2^2,d(\lambda_2^2,\lambda_1^2,e_1^2)) \qquad (19.150)$$

这是对所有 λ_2^2 都必须成立的关系.

到这一步对于上面完成的一切可以合理地怀疑. 泛函方程(19.150)把传播子 d 反过来与其自己相联系，但是只靠引入一个外参量 λ^2. 这本身很难说是个进展. 事实上，在我们能期望达到进展之前，我们必须提供某种新的东西输入到 d 的方程中去. 我们用如下的**假设**来做到这一点：如果

$$-\lambda^2 \gg m^2,\ -\lambda_2^2 \gg m^2$$

和 $-q^2 \gg m^2$，则略去传播子 d 对质量 m 的依赖关系是一个有效的近似. 在对理论的结构作更详细的研究以支持这个假设之前，让我们来看看，从它会导出什么样的结论来.

一个直接的结论只要基于维数论证. 如果硬性去掉 m 的依赖关系，d 只能是两个变量，q^2/λ^2 和这一节开始就用的 e^2 的函数. 但是，泛函方程(19.150)把 d 对这两个变量的依赖关系联系起来，并从而依据重整化群限制着 d 的 e^2 展开式中单独的每一项在高动量下的行为.

按照上面的假定，我们可以定义

$$d(q^2,\lambda_1^2,e_1^2) \equiv d\left(\frac{q^2}{\lambda_1^2},e_1^2\right) \quad \text{对 } -q^2,-\lambda_1^2 \gg m \qquad (19.151)$$

重写(19.150)为(去掉下标，写 $\lambda_2 = \lambda$)

$$d\left(\frac{q^2}{\lambda_1^2},e_1^2\right) = d\left(\frac{q^2}{\lambda^2},d\left(\frac{\lambda^2}{\lambda_1^2},e_1^2\right)\right) \qquad (19.152)$$

加上对所有 e_1^2 的边界条件

$$d(1,e_1^2)=e_1^2 \tag{19.153}$$

值得注意的是方程(19.152)和(19.153)易于求解. 我们先对 q^2 微分然后令 $q^2=\lambda^2$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda^2}d\left(\frac{\lambda^2}{\lambda_1^2},e_1^2\right)=\frac{1}{\lambda^2}\Phi\left(d\left(\frac{\lambda^2}{\lambda_1^2},e_1^2\right)\right) \tag{19.154}$$

这里,由(19.153)

$$\Phi(e^2)=\frac{\partial}{\partial x}d(x,e^2)\Big|_{x=1} \tag{19.155}$$

先写

$$\int_{\lambda_1^2}^{q^2}\frac{d\lambda^2}{\lambda^2}=\int_{e_1^2}^{d(q^2/\lambda_1^2,e_1^2)}\frac{d[d(\lambda^2/\lambda_1^2,e_1^2)]}{\Phi(d(\lambda^2/\lambda_1^2,e_1^2))}$$

对于固定的 e_1^2,λ_1^2, 方程(19.154)可积并给出泛函形式

$$\ln\frac{q^2}{\lambda_1^2}=\int_{e_1^2}^{d(q^2/\lambda_1^2,e_1^2)}\frac{du}{\Phi(u)}=F\left(d\left(\frac{q^2}{\lambda_1^2},e_1^2\right)\right)-F(e_1^2) \tag{19.156}$$

反过来求解 d, 我们找到泛函方程(19.152)的普遍解:

$$d\left(\frac{q^2}{\lambda_1^2},e_1^2\right)=F^{-1}\left[F(e_1^2)+\ln\left(\frac{q^2}{\lambda_1^2}\right)\right] \tag{19.157}$$

假定 F^{-1} 存在, 我们得到(19.157)中 d 的一个形式, 它显出只是一个变量的函数. 如早先指出的, 对大的 $-q^2\gg m^2$, 传播子的动量依赖关系关联于其对电荷的依赖关系.

在开始时,利用已知的估计作为我们的输入,我们可以用这个结果一般地求解 d. 其步骤为:

1. 取一个对 $d(x,e_1^2)$ 的估计,运用(19.155),解出 $\Phi(e_1^2)$.

2. 积分(19.156), 并如在(19.157)中那样计算改进了的 $d(x,e_1^2)$.

为演示这个步骤, 假定关于 d 我们全部所知道的就是它

可以展开成 e_1^2 的幂级数.

$$d(x,e_1^2)=e_1^2+e_1^4f(x)+O(e_1^6) \quad (19.158)$$

于是,利用 (19.155),我们得到

$$\Phi(e_1^2)=e_1^4f'(1)+O(e_1^6)$$

并代入 (19.156) 得到

$$\ln\frac{q^2}{\lambda_1^2}=\int_{e_1^2}^{d(q^2/\lambda_1^2,e_1^2)}\frac{du}{\mu^2f'(1)}+O\left(\ln\frac{d}{e_1^2}\right)$$

或

$$\frac{1}{d.(x,e_1^2)}=\frac{1}{e_1^2}-f'(1)\ln x+O\left(\ln\frac{d}{e_1^2}\right)$$

和

$$d(x,e_1^2)=\frac{e_1^2}{1-e_1^2f'(1)\ln x+O(e_1^4\ln x)} \quad (19.159)$$

因此,不用考查 Feynman 积分我们便确定了二阶真空极化在大 q^2 时的行为有如 $\ln(q^2/\lambda^2)$,以及四阶真空极化的行为也不坏于 $\ln(q^2/\lambda^2)$. 于是,我们不用作进一步的计算就可以得出结论: 在 §19.12 的四阶计算中出现的各 $\ln^2(q^2/m^2)$ 项应该被抵消,就像经过相当的努力后在 (19.121) 中我们确实发现的那样.

用相似的办法,我们可以从四阶计算中得到的传播子 d,即 (19.122)

$$d(x,e_1^2)=\frac{e_1^2}{1-\frac{e_1^2}{12\pi^2}\ln x-\frac{e_1^4}{64\pi^4}\ln x+O(e_1^6)} \quad (19.160)$$

出发,由 (19.155) 计算 Φ,和由 (19.156) 计算 d,我们得到

$$d(x,e_1^2)=\frac{e_1^2}{1-\frac{e_1^2}{12\pi^2}\ln x+\frac{3e_1^2}{16\pi^2}\ln\left(1-\frac{e_1^2}{12\pi^2}\ln x\right)+O\left(e_1^2,\ln\frac{1+d}{1+e_1^2}\right)}$$

$$\frac{e_1^2}{1-\frac{e_1^2}{12\pi^2}\ln x-\frac{e_1^4}{64\pi^4}\ln x-\frac{e_1^6}{1536\pi^6}\ln^2 x+O(e_1^6\ln x)}$$

$$\text{对}\ \frac{e_1^2}{12\pi^2}\ln x \ll 1 \tag{19.161}$$

于是，仅仅由重整化群方程[1]，就完全决定了对大 q^2 的六阶计算中领头项的形式和数字系数.

(19.157) 的另一个值得注意的性质是当 $-q^2\to\infty$ 时

$$d\left(\frac{q^2}{\lambda_1^2}, e_1^2\right)\to F^{-1}(\infty) \tag{19.162}$$

这表明传播子在大动量时趋于一个极限，这极限不依赖于重整化点 λ_1 和电荷 e_1. 但是，光子传播子的谱表示则提示我们，在这极限下应把 d 解释为裸荷 e_0^2. 按照 (16.172) 完全的未重整传播子满足一个谱表示

$$D'_F(q)_{\mu\nu}=-g_{\mu\nu}\left[\frac{Z_3}{q^2}+\int_0^\infty\frac{dM^2\Pi(M^2)}{q^2-M^2}\right]+\text{规范项} \tag{19.163}$$

这里 $\Pi(M^2)\geqslant 0$ 以及当 $q^2\to\infty$ 时有求和规则

$$1=Z_3+\int_0^\infty dM^2\Pi(M^2),$$

倘若谱积分存在的话. 因此，准确到差规范项，严格的传播子应趋于裸传播子，即当 $q^2\to\infty$ 时

$$D'_F(q)_{\mu\nu}\to\frac{-q_{\mu\nu}}{q^2}+\text{规范项} \tag{19.164}$$

忆及 $e_0^2D'_F(q)_{\mu\nu}$ 是一个重整化不变的乘积，我们综合 (19.162) 和 (19.164) 得到

---

1) 类似地应用这个方法， Fermi 传播子和顶角函数的微扰展开式在紫外和红外区都得到了改进，详细的讨论见 Боголюбов 和 Ширков 的书见上节的注.

$$e_0^2 = F^{-1}(\infty) \tag{19.165}$$

我们碰到了一个两难的情况：在这一节中所有我们的论据是基于微扰论的重整化方案，它使我们可以把传播子、顶角函数等按重整的荷 e 和裸荷 e_0 展开成幂级数．但是，在 (19.165) 中我们得到一个结果，它给 e_0 的值加了一个条件，表明它不能任意选择．这个行为是与微扰方法完全不适合的，因而迫使我们作出结论：在这方面我们的假定到少有一个是不对的[1]．特别是当 $q^2 \to \infty$ 时我们还用微扰展开，这是可以怀疑的，因为 (19.161) 表明，当

$$\ln \frac{q^2}{\lambda_1^2} \gtrsim \frac{12\pi^2}{e_1^2} \tag{19.166}$$

时，相继的各项增长得越来越大．

看了这个重整化群应用的实例，让我们回到把物理引入群方程 (19.150) 的基本假定，即，对于 $-q^2, -\lambda^2 \gg m^2$，传播子变成与 m^2 无关．为支持这个假定，我们希望证明：如果是在 $-\lambda^2 \gg m^2$ 点作重整化，那么重整化的积分方程 (19.51) 的渐近解对质量 m 不敏感．证明此点的论据是基于在 §19.14 中讨论过的关于 Feynman 振幅渐近行为的 Weinberg 定理，并运用归纳法．

我们假定 $\tilde{\Gamma}_\mu(p', p, \lambda)$、$\tilde{S}'_F(p, \lambda)$ 和 $\tilde{D}'_F(q, \lambda)$ 都在某个大质量 $-\lambda^2 \gg m^2$ 处重整了，当计算到按重整荷的微扰展开式的 e_λ^{n-2} 阶时，它们在 $p, p', q \to \infty$ 时趋于不依赖于 m 的函数．于是我们从 Weinberg 定理证明：这到 e_λ^n 阶也成立．例如，

---

1) 关于此点，除上一节注的文献外，尚见朗道及其合作者的工作［见 W. Pauli 编 "*Niels Bohr and the Development of Physics*" McGraw-Hill *Book Company, New York*, (1955) 中 L. D. Landau 的工作］以及 P. J. Redmond, *Phys. Rev.*, **112**, 1404 (1958), 和 P. J. Redmond *and* J. L. Uretski, *Ann. Phys.* (*N. Y.*), **9**, 106 (1960).

Weinberg 渐近定理断言：

$$\tilde{S}'^{-1}_F(p,\lambda) \to (\text{常数})\cdot \not{p} \cdot (\text{对数}) \quad \text{当 } p \to \infty \text{时} \tag{19.167}$$

我们假定到 e^{n-2}_λ 阶有：$\tilde{S}'^{-1}_F(p,\lambda)$ 的渐近部分与 m^2 无关，即在 (19.167) 中的常数和对数对于 $-\lambda^2 \gg m^2$ 和 $m^2 \to 0$ 是有限的；并想证明此点到 e^n_λ 阶都成立. 回头比较 (8.39) 式并且在 $-\lambda^2 \gg m^2$ 作减除，我们验证这个假定到 e^2_λ 阶是对的. 关于顶角和光子自能部分到 e^{n-2}_λ 阶作类似的归纳假定. 回头参考[1]第八章，可以直接验证：当任何虚动量组合$\to\infty$时，对 Γ_μ 和 $\Pi_{\mu\nu}$ 的渐近部分我们想要证明到 e^n_λ 阶的东西到 e^2_λ 阶是正确的.

让我们从顶角开始并运用 (19.51) 计算到 e^n_λ 阶并理解为不是在质壳而是在大 λ 处减除. 我们只对渐近部分感兴趣，按照 Weinberg 定理，渐近部分的行为有如 (19.140) 所示的(常数)×(对数). 根据 Weinberg 定理，这主导部分来自与那些渐近系数 $\alpha = 0$ 的子图形相对应的子积分. 唯一具有非负渐近系数的子图形的候选者显然是顶角和自能部分. 然而，如果它们作为子图形出现在顶角图形之中，那么把它们联系于图形其它部分的外传播子腿中至少有两条携带"大"动量并因此贡献一个负的渐近系数. 这就仅剩下完全的顶角图形本身[2]. 因为它自己的外线在定义正规顶角部分时没有计入，所以它的渐近系数为零. 顶角图形也有零发散度，对应于 $\alpha = 0$，并且有关的积分区域由所有内传播子分母是大的那

---

1) 用归一化约定

$$\tilde{S}'_F(p,\lambda) = \frac{1}{\not{p} - \bar{m}(\lambda)}\Big|_{p=\lambda\gg m}$$

和 $$\tilde{\Gamma}_\mu(p,p,\lambda)|_{p=\lambda} = \gamma_\mu$$

我们仍然保有那里用过的 Ward 恒等式 $Z_1(\lambda) = Z_2(\lambda)$.

2) 在减除项中的子图形除外，这里的情况和重整化讨论中的一样.

些内部动量所构成．因此，我们可以把传播子和顶角插入的渐近形式用到图形中去，于是看到：质量 m 并不以一种危险的方式在积分的任何地方出现，并且 Γ_μ 的积分在重整化后存在．而且，当 $m \to 0$ 时其渐近部分存在，因为截断对数的下限将是参数 $-\lambda^2 \gg m^2$ 或外动量．

继续这个论证，如同这里不严格地作的那样，我们可以转向 Ward 恒等式从 $\tilde{\Gamma}_\mu$ 计算 $\tilde{S}'_F(p,\lambda)$，因而它也不依赖于 m．最后，我们可以对光子传播子重覆对顶角的类似论证．依(19.140)我们找渐近系数 $+2$ 的子图形，并且，通过用于顶角的论证，我们发现，唯一的候选者是完全图形自身．于是这就证明了归纳的论断．

由上述论证的支持，我们可能感到在大动量时把重整化群论证用于改进微扰理论的估计是合理的．但是，在我们的论证中隐含着假定：在微扰级数中渐近部分的逐阶求和给出它们和的渐近行为．在每一个个别阶的计算中，因在高动量时是相对地小而沿途抛掉的各项，很可能实际上在微扰级数求和时相对于那些保留下来的项却成为主导项．因此，基于重整化群所论证的，关于理论求和到所有阶时的行为的那些结论是危险的，必须以应有的谨慎去看待．

对定域相对论场论的所有结论也是如此．

问　　题

1．通过构造三个场的真空期待值

$$\langle 0|T(\phi(x)\bar{\psi}(y)j_\mu(z)|0\rangle$$

和运用流守恒及场方程，证明广义 Ward 恒等式(19.16)．

2．给出 $\Gamma^\mu(p',p)$ 的普遍结构并决定由 Ward 恒等式和 T，C，P 不变性所加上的限制．

3．用证明普遍的 $l_r\cdots\cdots l_s$ 子积分收敛来完成在 §19.11 中给出的可

重整性的证明.

4.推导(19.109),(19.111),(19.117)和(19.118)中的结果.

5.验证(19.120)和(19.122)式并找出在极限 $-q^2/m^2 \ll 1$ 下的类似结果.

6.验证(19.131)式.

7.计算 Φ 和 $\mathfrak{t}$ 验证(19.135)的结构.

8.用 Källén-Lehmann 表示证明(19.157)式中的 F^{-1} 存在.

9.验证(19.161)式.

10.写出出现在其质壳上的电子和光子($p^2 = m^2$, 和 $l^2 = 0$)的电磁流普遍表达式,运用广义 Ward 恒等式证明它可以通过变量

$$W^2 = (p + l)^2$$

的四个标量函数 $F_i(W^2)$ 写出. 对 $F_i(W^2)$ 构造适当的色散关系并且把它们与问题 2 中出现的不可约顶角函数相联系. 特别是,从物理上讨论和解释作为这个流色散关系中一个必须的减除常数 e 的出现.

11.证明与核子非导数耦合的赝标介子理论的可重整性. 规范不变性不再能用来避开 π—π 散射子图形的问题.

附录A 符　　号

坐标和动量

时—空坐标 $(t,x,y,z)\equiv(t,\boldsymbol{x})$ 用逆变四矢量 ($c=\hbar=1$)

$$x^{\mu}\equiv(x^0,x^1,x^2,x^3)\equiv(t,x,y,z)$$

表示. 协变四矢量 x_{μ} 由改变空间分量的符号而得

$$x_{\mu}\equiv(x_0,x_1,x_2,x_3)\equiv(t,-x,-y,-z)=g_{\mu\nu}x^{\nu}$$

这里

$$g_{\mu\nu}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$$

除特别声明外，我们采用重复指标意味着求和的约定. 如果两个相同的指标(要求和)都在上标或下标位置，那就错了. 内积为 $x^2=x_{\mu}x^{\mu}=t^2-\boldsymbol{x}^2$.

动量矢量类似地定义为

$$p^{\mu}=(E,p_x,p_y,p_z)$$

内积为

$$p_1\cdot p_2=p_1^{\mu}p_{2\mu}=E_1E_2-\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2$$

同样

$$x\cdot p=tE-\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p}$$

四矢量 p 总是用细体字而三维矢量 $\boldsymbol{p}$ 则用粗体字印出.

在坐标表象中动量算符写为

$$p^{\mu}=i\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\equiv\left(i\frac{\partial}{\partial t},\ \frac{1}{i}\nabla\right)\equiv i\nabla^{\mu}$$

并且其变换有如一个逆变四矢量

$$p^\mu p_\mu = -\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv -\Box$$

在所采用的单位中 Compton 波长是 $1/m$（对电子 $\cong 3.86\times 10^{-11}$cm），并且静止能量为 m（对电子 $\cong 0.511$MeV）.

电磁场的四矢量势定义为

$$A^\mu = (\phi, \boldsymbol{A}) = g^{\mu\nu}A_\nu$$

场强定义为

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}A^\mu - \frac{\partial}{\partial x_\mu}A^\nu$$

电场和磁场用非协变的符号表示为

$$\boldsymbol{E} = (F^{01}, F^{02}, F^{03})$$
$$\boldsymbol{B} = (F^{23}, F^{31}, F^{12})$$

Dirac 矩阵和旋量

以 $u_\alpha(p,s)$ 表示具有物理动量 p 和极化 s 的粒子的 Dirac 旋量，而以 $v_\alpha(p,s)$ 表示反粒子的. 二者的能量

$$p_0 \equiv E_p = +\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$$

是正的. 矢量 s^μ 在静止系中有形式

$$s^\mu = (0, \hat{\boldsymbol{s}}) \qquad \hat{\boldsymbol{s}}\cdot\hat{\boldsymbol{s}} = 1$$

它代表静止系中物理粒子的自旋方向.

Dirac 方程中的 γ 矩阵满足反对易关系

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

与 α、β 矩阵的关系是 $\boldsymbol{\gamma} = \beta\boldsymbol{\alpha}$; $\gamma_0 = \beta$. 一个熟悉的表示为

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$\{\gamma^i\} \equiv \boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{bmatrix}$$

这里

$$\sigma^1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\quad \sigma^2=\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix}\quad \sigma^3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

是熟悉的 2×2 Pauli 矩阵，$1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 是 2×2 单位矩阵.

经常出现组合

$$\sigma^{\mu\nu}=\frac{i}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]$$

和

$$\gamma^5=i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3=\gamma_5$$

在这个表示中 $\sigma^{\mu\nu}$ 的分量为

$$\sigma^{ij}=\begin{bmatrix}\sigma^k & 0\\ 0 & \sigma^k\end{bmatrix}$$

这里 $i,j,k=1,2,3$ 进行循环排列，而

$$\sigma^{0i}=i\alpha^i=i\begin{bmatrix}0 & \sigma^i\\ \sigma^i & 0\end{bmatrix}\quad \gamma_5=\gamma^5=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

常遇到 γ 矩阵与普通四矢量的内积，表示为

$$\gamma_\mu A^\mu\equiv \not{A}=\gamma_0A^0-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{A}$$

$$p_\mu\gamma^\mu\equiv \not{p}=E\gamma^0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}$$

$$p_\mu\gamma^\mu\equiv i\not{\nabla}=i\gamma_0\frac{\partial}{\partial t}+i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla}=i\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

旋量 u 和 v 满足 Dirac 方程

$$(\not{p}-m)u(p,s)=0$$

$$(\not{p}+m)v(p,s)=0$$

并明显地由 (3.7) 式给出，但对于大多数应用，如下的投影算符就够用了. 共轭旋量

$$\bar{u}=u^\dagger\gamma^0$$

$$\bar{v}=v^\dagger\gamma^0$$

满足方程

$$\bar{u}(p,s)(\not{p}-m)=0$$
$$\bar{v}(p,s)(\not{p}+m)=0$$

利用它们,投影算符可表示为

$$\begin{aligned} u_\alpha(p,s)\bar{u}_\beta(p,s) &= \left[\frac{\not{p}+m}{2m}\cdot\frac{1+\gamma_5\not{s}}{2}\right]_{\alpha\beta} \\ v_\alpha(p,s)\bar{v}_\beta(p,s) &= -\left[\frac{m-\not{p}}{2m}\cdot\frac{1+\gamma_5\not{s}}{2}\right]_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{A.1}$$

这些导致归一条件

$$\begin{aligned} \bar{u}(p,s)u(p,s) &= 1 \\ \bar{v}(p,s)v(p,s) &= -1 \end{aligned} \tag{A.2}$$

和完备性关系

$$\sum_s\left[u_\alpha(p,s)\bar{u}_\beta(p,s)-v_\alpha(p,s)\bar{v}_\beta(p,s)\right]=\delta_{\alpha\beta}$$

在求迹时我们要作矩阵元的厄米共轭

$$[\bar{u}(p',s')\Gamma u(p,s)]^\dagger=\bar{u}(p,s)\bar{\Gamma}u(p',s')$$

这里

$$\bar{\Gamma}\equiv\gamma^0\Gamma^\dagger\gamma^0$$

例如

$$\bar{\gamma}^\mu=\gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0=\gamma^\mu$$
$$\bar{\sigma}^{\mu\nu}=\gamma^0\sigma^{\mu\nu\dagger}\gamma^0=\sigma^{\mu\nu}$$
$$\overline{i\gamma^5}=\gamma^0(i\gamma_5)^\dagger\gamma^0=i\gamma^5$$

把投影算符 (A.1) 对自旋求和导致能量投影算符

$$\begin{aligned} [\Lambda_+(p)]_{\alpha\beta} &\equiv \sum_{\pm s}u_\alpha(p,s)\bar{u}_\beta(p,s)=\left(\frac{\not{p}+m}{2m}\right)_{\alpha\beta} \\ [\Lambda_-(p)]_{\alpha\beta} &\equiv -\sum_{\pm s}v_\alpha(p,s)\bar{v}_\beta(p,s)=\left(\frac{-\not{p}+m}{2m}\right)_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{A.3}$$

流的 Gordon 分解是经常有用的一个恒等式

$$\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p)=\bar{u}(p')\left[\frac{(p+p')^\mu}{2m}+\frac{i\sigma^{\mu\nu}(p'-p)_\nu}{2m}\right]u(p)$$

求迹定理和 γ 恒等式

$$\not{a}\not{b}=a\cdot b-i\sigma_{\mu\nu}a^\mu b^\nu$$

奇数个 γ_μ 的迹为零

$$\mathrm{Tr}\,\gamma_5 = 0$$

$$\mathrm{Tr}\,\mathbf{1} = 4$$

$$\mathrm{Tr}\,\not{a}\not{b} = 4a \cdot b$$

$$\mathrm{Tr}\,a_1a_2a_3a_4 = 4[a_1 \cdot a_2a_3 \cdot a_4 - a_1 \cdot a_3a_2 \cdot a_4 + a_1 \cdot a_4a_2 \cdot a_3]$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma_5\not{a}\not{b} = 0$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma_5\not{a}\not{b}\not{c}\not{d} = 4i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$$

$$\gamma_\mu\not{a}\gamma^\mu = -2\not{a}$$

$$\gamma_\mu\not{a}\not{b}\gamma^\mu = 4a \cdot b$$

$$\gamma_\mu\not{a}\not{b}\not{c}\gamma^\mu = -2\not{c}\not{b}\not{a}$$

另外的规则见 §7.2。

附录 B　Feynman 图规则

散射截面的表达式可分为两部分：第一部分是不变振幅 $\mathfrak{M}$，它是 Lorentz 标量，并反映物理实质．第二部分是相空间和运动学因子．通过 $\mathfrak{M}$，对于无自旋粒子和仅对光子，微分截面的表达式 $d\sigma$ 为

$$d\sigma = \frac{1}{|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2|}\left(\frac{1}{2\omega_{p1}}\right)\left(\frac{1}{2\omega_p}\right)|\mathfrak{M}|^2 \frac{d^3k_1}{2\omega_1(2\pi)^3}\cdots\frac{d^3k_n}{2\omega_n(2\pi)^3}$$

$$\times (2\pi)^4\delta^4\left(p_1 + p_2 - \sum_{i=1}^{n} k_i\right)S \qquad (B.1)$$

这里 $\omega_p = \sqrt{|\boldsymbol{p}|^2 + m^2}$ 和通常一样，$\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 是共线入射粒子的速度．然后，把这表达式对末态粒子所有未探测的动量 $k_1\cdots k_n$ 积分．如果在末态中有 m 个全同粒子，则计入因子 $\frac{1}{m!}$ 而得到统计因子 S：

$$S = \prod_i \frac{1}{m_i!}$$

对 Dirac 粒子[1]$1/2\omega_p$ 因子换成 m/E_p，并且统计因子 S 仍然计入；其它因子不变．

质量为 M 的粒子在其静止系中的微分衰变率为

$$d\omega = d\left(\frac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{2M}|\mathfrak{M}|^2 \frac{d^3k_1}{2\omega_1(2\pi)^3}\cdots\frac{d^3k_n}{2\omega_n(2\pi)^3}$$

---

1) 如果采用把 Dirac 旋量归一到 $2m$ 的约定，而不是如 (A.2) 中归一到 1，则 (8.1) 式仍适用于费米子．于是代替 (A.3)，能量投影算符简单地是 $(m \pm \not{p})$.

$$\times (2\pi)^4\delta^4\left(p-\sum_{i=1}^{n}k_i\right)S$$

各因子定义同前，对于末态中的任何费米子，仍然

$$1/2\omega_i \to m/\varepsilon_i;$$

如果初态粒子是一个费米子，因子 $1/2M$ 要去掉.

如果需要，极化可对末态求和并对初态平均.

为计算不变振幅 $\mathfrak{M}$，画下有关过程的所有 Feynman 图，除开那些具有不连通的真空图以及在外线上有自能插入的图. 对应于图形 G 的振幅 $\mathfrak{M}(G)$ 是通过把一定的因子赋于图形的元素而构造出来的. 与相互作用细节无关的这些因子是:

1. 对进入图形的每一个零自旋玻色子赋予因子 $\sqrt{Z}$. $\sqrt{Z}$ 通过在 $p^2 \to m^2$ 极限下计算严格的介子传播子 $\Delta_F'(p)$ 而得到；当 $p^2 \to m^2$ 时，$\Delta_F'(p) \to Z\Delta_F(p)$.

2. 对进入图形的每个初态或末态费米子线赋予因子

$$\sqrt{Z_2}u(p,s) \quad 或 \quad \sqrt{Z_2}v(p,s);$$

同样，对每一个离开的费米子线赋予因子

$$\sqrt{Z_2}\bar{u}(p,s) \quad 或 \quad \sqrt{Z_2}\bar{v}(p,s).$$

Z_2 由如下极限所定义:

$$\lim_{p\to m} S_F'(p) = Z_2 S_F(p)$$

3. 对每一个外光子线赋予因子 $\varepsilon_\mu\sqrt{Z_3}$，这里当 $q^2 \to 0$ 时

$$D_F'(q)_{\mu\nu} = -\frac{Z_3 g_{\mu\nu}}{q^2} + 规范项$$

在最低阶的微扰计算中，这些 Z 因子可以取为 1. 在高阶时，和自能及顶角插入一道，它们把电荷从其裸值重整到物理值.

4. 对每个动量为 p 的内费米子线有因子

$$iS_F(p)\frac{i}{\not p - m + i\varepsilon} = \frac{i(\not p + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

5. 对每个动量为 p 的零自旋内介子线有因子

$$i\Delta_F(q) = \frac{i}{q^2 - \mu^2 + i\varepsilon}$$

6. 对每个动量为 q 的内光子线赋予因子

$$iD_F(q)_{\mu\nu} = -\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon}$$

在流守恒的理论中，可略去比例于 $q_\mu q_\nu$、$q_\mu \eta_\nu$ 等的规范项.

对于介子—核子物理，在每个内介子线上出现一个同位旋因子 δ_{ij}，并且对外线有如下因子：

7. 对初态和末态核子旋量有 χ 或 $\chi^\dagger$：对于质子

$$\chi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

对于中子 $\chi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$（对于 K 和 Ξ 介子出现类似的因子）.

8. 在初态和末态对 π 的同位旋波函数分别是 $\hat{\boldsymbol{\Phi}}$ 或 $\hat{\boldsymbol{\Phi}}^*$，这里

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\pi^\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \pm i, 0) \quad \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\pi^0} = (0,0,1)$$

（对 Σ 粒子有类似因子）.

9. 对每一个不为顶角动量守恒约束所定死的内动量 l，有因子

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4}$$

10. 对每一个封闭费米子圈有因子 -1.

11. 两个图形的差别只是交换两个全同外费米子线时，则

它们之间有因子 -1. 这不仅包括末态全同粒子的交换，而且也包括例如初态粒子和末态反粒子的交换. 包含费米子的图形的总符号通过回到 Dyson-Wick 规则最容易得到.

相互作用决定顶角的结构和类型. 这里我们给出四种典型理论的规则:

旋量电动力学

这里有两种类型的顶角，示于图 B.1. 它们对应于正规编序的相互作用哈氏密度

$$\mathscr{H}_I = -\mathscr{L}_I$$
$$= :e_0\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu:$$
$$-\delta m:\bar{\psi}\psi:$$

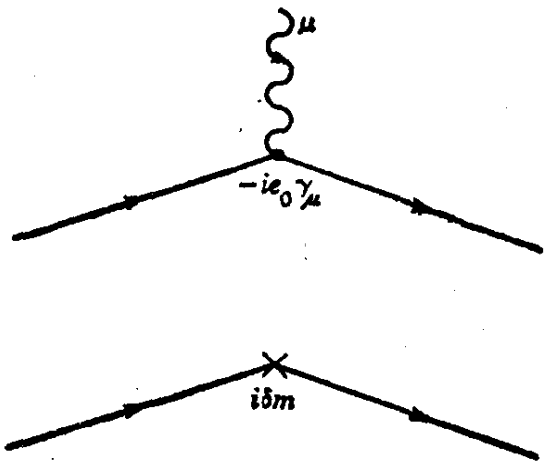


图 B.1

对它们的规则是

1. 在每个顶角上有因子 $-ie_0\gamma_\mu$.

2. 对每个质量抵消项有因子 $i\delta m$

3. 以 $e=Z_2Z_1^{-1}\sqrt{Z_3}\,e_0=\sqrt{Z_3}e_0$ 重整电荷. 这里对

$$p=p=m$$

精确的顶角 $\Gamma_\mu(p', p)\to Z_1^{-1}\gamma_\mu$，并由 Ward 恒等式，$Z_1=Z_2$.

零自旋玻色子电动力学

这里有三种顶角，示于图 B.2. 它们对应于相互作用拉氏密度

$$\mathscr{L}_I = -ie_0:\varphi^\dagger\left(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_\mu}-\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_\mu}\right)\varphi:A_\mu + e_0^2:A^2::\varphi^\dagger\varphi:$$
$$+\delta\mu^2:\varphi^\dagger\varphi:$$

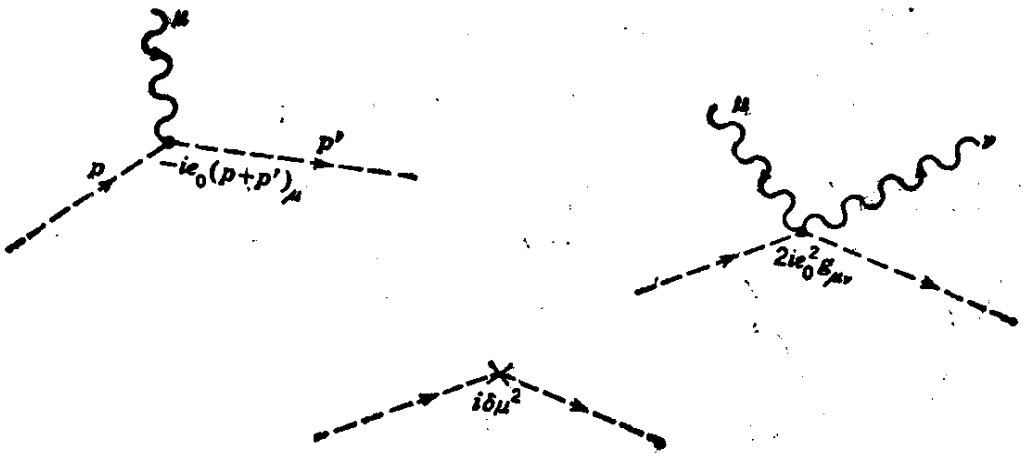


图 B.2

对这些顶角的规则是

1. 因子 $-ie_0(p+p')_\mu$ 对应三线顶角，p 和 p' 是荷电线的动量.

2. 对每个"海鸥"图有 $+2ie_0^2 g_{\mu\nu}$

3. 对每个质量抵消项有因子 $i\delta\mu^2$

4. 对每一个如图 B.3 所示只含两根光子线的封闭圈图有因子 1/2.

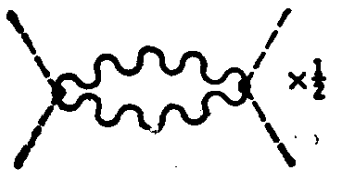


图 B.3

5. 和旋量电动力学一样重整电荷.

γ_5介子——核子散射

在电荷无关理论中，有四个相互作用项

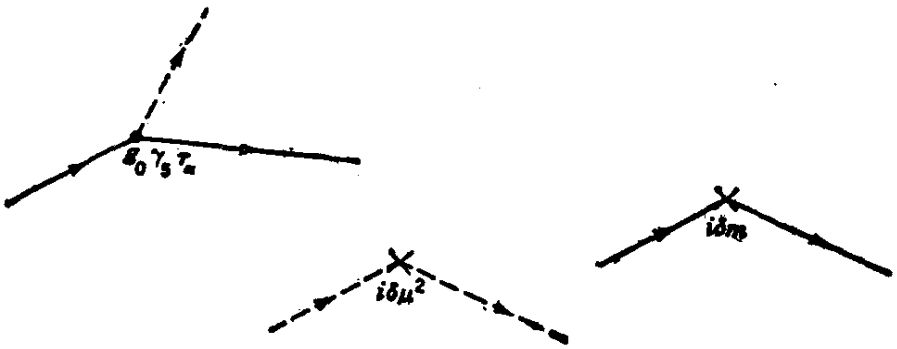


图 B.4

$$\mathscr{H}_I = -\mathscr{L}_I = :ig_0 \cdot \bar{\Psi}\gamma_5\tau \cdot \boldsymbol{\Phi}\Psi: -\delta m:\bar{\Psi}\Psi:$$

$$-\frac{1}{2}\delta\mu^2:\boldsymbol{\Phi}\cdot\boldsymbol{\Phi}: +\frac{1}{4}\delta\lambda:(\boldsymbol{\Phi}\cdot\boldsymbol{\Phi})^2:$$

它们示于图 $B.4$ 和图 $B.5$ 中．点线表示只有 $I=0$ 从介子对 ij 传到 rs 对，如下面规则 2 所示．质量抵消项的处理同前．我们有

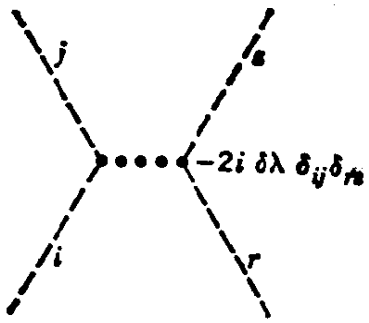


图 B.5

1. 在每个介子——核子顶角有因子 $g_0\gamma_5\tau_a$，这分别给出介子与质子和中子的相对耦合强度，对荷电介子它是 $\sqrt{2}\,g_0$，而对中性介子则为 $\pm g_0$.

2. 对于每个图 $B.5$ 中的四介子顶角有因子 $-2i\delta\lambda\delta_{ij}\delta_{rs}$.



图 B.6

3. 如图 $B.6$ 中包括两个介子线的每个封闭圈图有因子 $1/2$.

自旋为 1 的玻色子电动力学

矢量玻色子传播子是 $[-g_{\mu\nu}+k_\mu k_\nu/m^2](k^2-m^2)^{-1}$. 它代替了无质量光子的 $-g_{\mu\nu}/k^2$，外线和光子一样有极化因子 e_μ.

对应于相互作用拉氏密度

$$\mathscr{L}' = -ie_0:\left[\left(\frac{\partial\varphi_\nu^*}{\partial x_\mu}\right)(A^\nu\varphi_\mu - A_\mu\varphi^\nu)\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_\mu}\right)(A^\nu\varphi_\mu^* - A_\mu\varphi^{\nu*})\right]:$$

$$+e_0^2:[A_\mu A^\mu\varphi_\nu^*\varphi^\nu - A_\mu\varphi^\mu A^\nu\varphi_\nu^*]: +\delta\mu^2:\varphi_\nu^*\varphi^\nu:$$

有示于图 B.7 中的电动力学顶角，它们的规则为

1. 因子 $-ie_0(p'+p)_\mu g_{\alpha\beta}+ie_0 g_{\beta\mu}p'_\alpha+ie_0 p_\beta g_{\alpha\mu}$.

2. 因子 $+ie_0^2[2g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}-g_{\mu\alpha}g_{\beta\nu}-g_{\mu\beta}g_{\alpha\nu}]$

3. 对每一个质量抵消项有因子 $i\delta\mu^2 g_{\alpha\beta}$

4. 对只含两条光子线的每个封闭圈有因子 1/2.

5. 关于这些规则从正则理论的推导，反常磁矩项的效应和正常化方案皆见 T. D. Lee 和 C. N. Yang, *Phys, Rev.*,

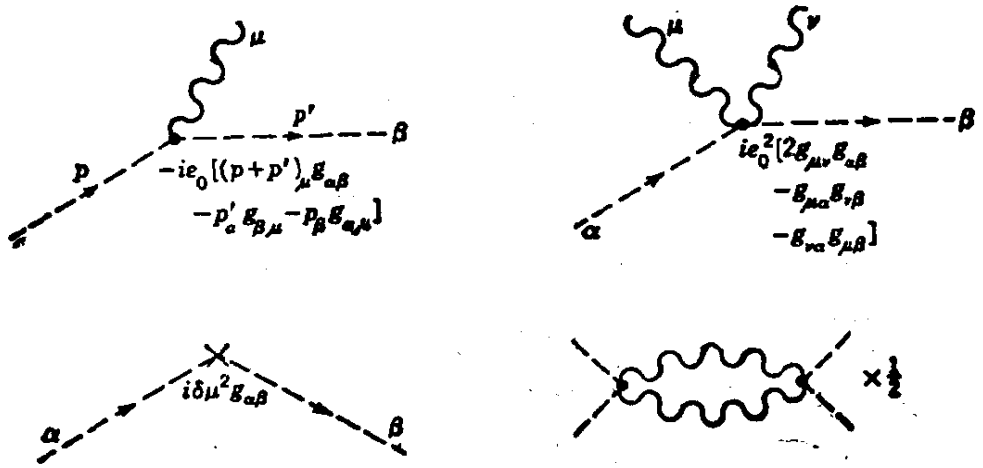


图 B.7

128, 885 (1962).

在所有上述例子中，矩阵是按"自然顺序"排列的. 对于封闭圈这意味着要取迹. 同位旋指标与它们在玻色子线另一端的对偶缩并. 对光子极化求和时

$$\sum_\lambda \epsilon_\mu(k,\lambda)\epsilon_\nu(k,\lambda) \Rightarrow -g_{\mu\nu}$$

对矢量介子

$$\sum_\lambda \epsilon_\mu(k,\lambda)\epsilon_\nu(k,\lambda) \Rightarrow -g_{\mu\nu}+\frac{k_\mu k_\nu}{m^2}$$

附录 C　对易子和传播子函数

在本书中遇到的不变对易子和传播子函数汇集如下：

对自由 Dirac 方程的 Feynman 传播子为

$$S_F(x'-x) = -i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{m}{E}[\theta(t'-t)\Lambda_+(p)e^{-ip\cdot(x'-x)} + \theta(t-t')\Lambda_-(p)e^{ip\cdot(x'-x)}]$$

$$= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot(x'-x)} \frac{\not p + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

分母中的 $i\varepsilon$ 理解为极限 $\varepsilon \to 0^+$，并表示在对 p_0 作积分时用图 C.1 所示的迴路．$\theta(t'-t)$ 为单位阶梯函数

$$\theta(t'-t) = \begin{cases} +1 & t' > t \\ 0 & t' < t \end{cases} = \frac{-1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega + i\varepsilon} e^{-i\omega(t'-t)}$$

S_F 满足 Green 函数微分方程

$$(i\not\partial_{x'} - m)S_F(x'-x) = \delta^4(x'-x)$$

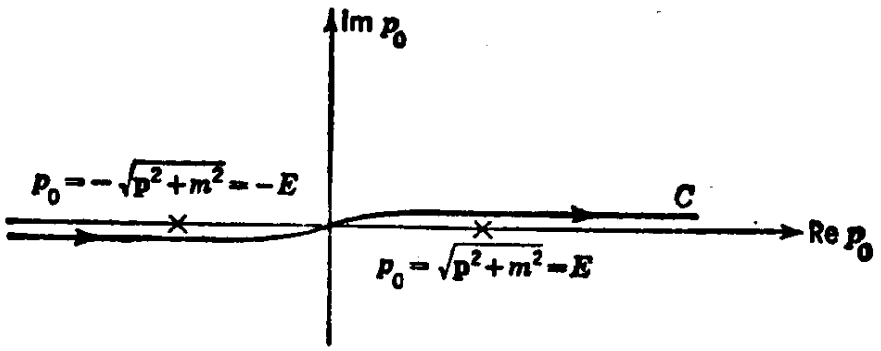


图 C.1　$S_F(p)$ 的积分迴路的奇异性

在动量空间

$$S_F(p) = \frac{\not p + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} = \frac{1}{\not p - m + i\varepsilon}$$

Klein-Gordon 方程的 Feynman 传播子为

$$\Delta_F(x'-x) = -i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}\,[\theta(t'-t)e^{-ik\cdot(x'-x)} + \theta(t-t')e^{ik\cdot(x'-x)}]$$

$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik\cdot(x'-x)} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

并且满足

$$(\Box_{x'} + m^2)\Delta_F(x'-x) = -\delta^4(x'-x)$$

在动量空间 $\Delta_F(k) = \dfrac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}$. Δ_F 与 S_F 有如下关系:

$$S_F(x'-x) = +(i\not\partial_{x'} + m)\Delta_F(x'-x) \qquad (C.1)$$

对 $m \to 0$ 的 d'Alembert 方程我们定义（注意相对于 Δ_F 的符号改变）

$$\Box_{x'} D_F(x'-x) = +\delta^4(x'-x)$$

我们有光子的 Feynman 传播子

$$D_F(q)_{\mu\nu} = +g_{\mu\nu}D_F(q) = -\frac{g_{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon}$$

齐次波动方程的奇、偶解分别为

$$\Delta(x'-x) = -i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}\,(e^{-ik\cdot(x'-x)} - e^{ik(x'-x)})$$

$$\Delta_1(x'-x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}(e^{-ik\cdot(x'-x)} + e^{ik\cdot(x'-x)})$$

它们满足

$$(\Box_{x'} + m^2)\Delta(x'-x) = 0 \quad \Delta(x'-x) = -\Delta(x-x')$$

$$(\Box_{x'} + m^2)\Delta_1(x'-x) = 0 \quad \Delta_1(x'-x) = +\Delta_1(x-x')$$

通过它们,我们可以写出

$$2\Delta_F(x'-x) = -i\Delta_1(x'-x) + \varepsilon(t'-t)\Delta(x'-x)$$

这里

$$\varepsilon(t'-t)\equiv 2\theta(t'-t)-1=\begin{cases}+1 & t'>t\\ -1 & t'<t\end{cases}$$

奇函数 Δ 在光锥外为零

$$\Delta(x'-x)=0 \qquad \text{对所有 } (x'-x)^2<0$$

并在光锥上是奇异的

$$\left(\frac{\partial\Delta(x'-x)}{\partial x_0'}\right)_{x_0'-x_0=0}=-\delta^3(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})$$

普遍地有

$$\Delta(x'-x)=\frac{1}{4\pi r}\frac{\partial}{\partial r}\begin{cases}J_0(m\sqrt{t^2-r^2}) & t>r\\ 0 & -r<t<r\\ -J_0(m\sqrt{t^2-r^2}) & t<-r\end{cases}$$

这里 $\qquad r=|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}| \qquad t\equiv x_0'-x_0$

J_0 是正常 Bessel 函数.

偶函数 Δ_1 在光锥外不为零，但是按指数下降:

$$\left(\frac{\partial\Delta_1(x'-x)}{\partial x_0'}\right)_{x_0'-x_0=0}=0$$

$$\Delta_1(x'-x)=\frac{1}{4\pi r}\frac{\partial}{\partial r}\begin{cases}Y_0(m\sqrt{t^2-r^2}) & |t|>r\\ -\frac{2}{\pi}K_0(m\sqrt{t^2-r^2}) & r>|t|\end{cases}$$

这里 Y_0 和 K_0 是柱函数，见 G. N. Watson: "*Theory of Bessel Functions*", *2d ed., Cambridge University Press, London*, 1952.

对于电磁场 $m\to 0$ 和

$$-D(x'-x)=\lim_{m\to 0}\Delta(x'-x)$$

$$=-\frac{1}{4\pi r}[\delta(r-t)-\delta(r+t)]$$

$$-D_1(x'-x)=\lim_{m\to 0}\Delta_1(x'-x)=\frac{1}{4\pi^2 r}\left(P\frac{1}{r-t}+P\frac{1}{r+t}\right)$$

这里 $r = |\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|$, $t = x_0' - x_0$, P 表示取主值.

我们可以把 Δ 和 Δ_1 通过对应于上面积分中的两项的正频和负频部分来表示:

$$\Delta_1(x' - x) = \Delta_+(x' - x) + \Delta_-(x' - x)$$
$$i\Delta(x' - x) = \Delta_+(x' - x) - \Delta_-(x' - x)$$

对 Dirac 方程,我们定义

$$\begin{aligned} S(x' - x) &= -(i\not{\nabla}_x + m)\Delta(x' - x) \\ S_1(x' - x) &= -(i\not{\nabla}_x + m)\Delta_1(x' - x) \end{aligned} \tag{C.2}$$

和

$$2S_F(x' - x) = +iS_1(x' - x) - \varepsilon(t' - t)S(x' - x)$$

在定义 (C.1)和(C.2)之间出现的符号差异是我们在 Feynman 图规则中选择符号约定的结果,其意图在于尽量减少实际计算中的负号. 这些函数与自由 Klein-Gordon、Maxwell 和 Dirac 场的编时乘积的关系为:

$$\langle 0|T(\varphi_i(x')\varphi_j(x))|0\rangle = i\delta_{ij}\Delta_F(x' - x)$$
$$\langle 0|T(\varphi(x')\varphi^*(x))|0\rangle = i\Delta_F(x' - x)$$
$$\langle 0|T(A_\nu(x')A_\mu(x))|0\rangle = iD_F^{\mathrm{tr}}(x' - x)_{\nu\mu}$$
$$= i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik\cdot(x'-x)}}{k^2 + i\varepsilon}\sum_{\lambda=1}^{2}\varepsilon_\nu(k,\lambda)\varepsilon_\mu(k,\lambda)$$
$$= ig_{\nu\mu}D_F(x' - x) + \text{规范项} - \text{Coulomb 项}$$
$$\langle 0|T(\psi_\beta(x')\bar{\psi}_\alpha(x))|0\rangle = iS_{F\beta\alpha}(x' - x)$$

此外,推迟和超前 Green 函数定义为

$$\Delta_{\mathrm{ret}}(x' - x) = -\Delta(x' - x)\theta(t' - t)$$
$$\Delta_{\mathrm{adv}}(x' - x) = +\Delta(x' - x)\theta(t - t')$$

Δ_{ret} 在向前光锥外边为零; 而 Δ_{adv} 在向后光锥外为零. 它们满足非齐次波动方程

$$(\Box_{x'} + m)\Delta^{\mathrm{ret}}_{\mathrm{adv}}(x' - x) = \delta^4(x' - x)$$

类似地

$$S_{\substack{\mathrm{ret}\\ \mathrm{adv}}}(x'-x)=-(i\not\partial_{x'}+m)\Delta_{\substack{\mathrm{ret}\\ \mathrm{adv}}}(x'-x)$$

以及

$$D_{\substack{\mathrm{ret}\\ \mathrm{adv}}}(x'-x)=+\lim_{m\to 0}\Delta_{\substack{\mathrm{ret}\\ \mathrm{adv}}}(x'-x)$$

最后，通过自由厄米无自旋场的真空期望值表示

$$\langle 0|[\varphi(x'),\varphi(x)]|0\rangle = i\Delta(x'-x)$$

$$\langle 0|\{\varphi(x'),\varphi(x)\}|0\rangle = \Delta_1(x'-x)$$

$$\langle 0|\varphi(x')\varphi(x)|0\rangle = \Delta_+(x'-x)$$

$$\langle 0|\varphi(x)\varphi(x')|0\rangle = \Delta_-(x'-x)$$

$$\langle 0|T(\varphi(x')\varphi(x))|0\rangle = i\Delta_F(x'-x)$$

$$\langle 0|\overline{T}(\varphi(x')\varphi(x))|0\rangle = +i\overline{\Delta}_F(x'-x)$$

$$\langle 0|[\varphi(x'),\varphi(x)]|0\rangle\theta(t'-t) = -i\Delta_{\mathrm{ret}}(x'-x)$$

$$\langle 0|[\varphi(x'),\varphi(x)]|0\rangle\theta(t-t') = +i\Delta_{\mathrm{adv}}(x'-x)$$

对 Dirac 场和 Maxwell 场有类似的结果。