国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

中外物理学精品书系

引进系列·52

统计物理学中的量子场论方法

（第3版）

〔俄〕阿布里科索夫
〔俄〕戈尔可夫　著
〔俄〕加洛辛斯基
郝柏林　译

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS



国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

中外物理学精品书系

引进系列·52

统计物理学中的量子场论方法

（第3版）

〔俄〕阿布里科索夫
〔俄〕戈尔可夫　　著
〔俄〕加洛辛斯基
郝柏林　　译

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

著作权合同登记号　图字：01-2012-5526

图书在版编目(CIP)数据

统计物理学中的量子场论方法：第3版/(俄罗斯)阿布里科索夫, (俄罗斯)戈尔可夫, (俄罗斯)加洛辛斯基著; 郝柏林译. —北京: 北京大学出版社, 2014.12
(中外物理学精品书系)
ISBN 978-7-301-25056-3

Ⅰ. ①统… Ⅱ. ①阿… ②戈… ③加… ④郝… Ⅲ. ①量子场论-研究
Ⅳ. ①O413.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 249674 号

© Абрикосов А.А., Горьков Л.П., Дзялошиский И.Е., 1998
本作品中文版权通过中华版权代理中心取得，由北京大学出版社独家出版。

书　　名：统计物理学中的量子场论方法(第3版)
著作责任者：〔俄〕阿布里科索夫 戈尔可夫 加洛辛斯基 著, 郝柏林 译
责 任 编 辑：王树通
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-25056-3/O · 1018
出 版 发 行：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址：http://www.pup.cn
新 浪 微 博：@北京大学出版社
电 子 信 箱：zpup@pup.pku.edu.cn
电　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752038
　　出版部 62754962
印 刷 者：北京中科印刷有限公司
经 销 者：新华书店
　　730 毫米×980 毫米　16 开本　21 印张　395 千字
　　2014 年 12 月第 1 版　2014 年 12 月第 1 次印刷
定　　价：65.00 元

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有，侵权必究
举报电话：010-62752024　电子信箱：fd@pup.pku.edu.cn

“中外物理学精品书系”
编 委 会

主　任：王恩哥

副主任：夏建白

编　委：（按姓氏笔画排序，标 * 号者为执行编委）

王力军	王孝群	王　牧	王鼎盛	石　兢
田光善	冯世平	邢定钰	朱邦芬	朱　星
向　涛	刘　川*	许宁生	许京军	张　酣*
张富春	陈志坚*	林海青	欧阳钟灿	周月梅*
郑春开*	赵光达	聂玉昕	徐仁新*	郭　卫*
资　剑	龚旗煌	崔　田	阎守胜	谢心澄
解士杰	解思深	潘建伟		

秘　书：陈小红

序　言

物理学是研究物质、能量以及它们之间相互作用的科学。她不仅是化学、生命、材料、信息、能源和环境等相关学科的基础，同时还是许多新兴学科和交叉学科的前沿。在科技发展日新月异和国际竞争日趋激烈的今天，物理学不仅囿于基础科学和技术应用研究的范畴，而且在社会发展与人类进步的历史进程中发挥着越来越关键的作用。

我们欣喜地看到，改革开放三十多年来，随着中国政治、经济、教育、文化等领域各项事业的持续稳定发展，我国物理学取得了跨越式的进步，做出了很多为世界瞩目的研究成果。今日的中国物理正在经历一个历史上少有的黄金时代。

在我国物理学科快速发展的背景下，近年来物理学相关书籍也呈现百花齐放的良好态势，在知识传承、学术交流、人才培养等方面发挥着无可替代的作用。从另一方面看，尽管国内各出版社相继推出了一些质量很高的物理教材和图书，但系统总结物理学各门类知识和发展，深入浅出地介绍其与现代科学技术之间的渊源，并针对不同层次的读者提供有价值的教材和研究参考，仍是我国科学传播与出版界面临的一个极富挑战性的课题。

为有力推动我国物理学研究、加快相关学科的建设与发展，特别是展现近年来中国物理学者的研究水平和成果，北京大学出版社在国家出版基金的支持下推出了“中外物理学精品书系”，试图对以上难题进行大胆的尝试和探索。该书系编委会集结了数十位来自内地和香港顶尖高校及科研院所的知名专家学者。他们都是目前该领域十分活跃的专家，确保了整套丛书的权威性和前瞻性。

这套书系内容丰富，涵盖面广，可读性强，其中既有对我国传统物理学发展的梳理和总结，也有对正在蓬勃发展的物理学前沿的全面展示；既引进和介绍了世界物理学研究的发展动态，也面向国际主流领域传播中国物理的优秀专著。可以说，“中外物理学精品书系”力图完整呈现近现代世界和中国物理

科学发展的全貌，是一部目前国内为数不多的兼具学术价值和阅读乐趣的经典物理丛书。

“中外物理学精品书系”另一个突出特点是，在把西方物理的精华要义“请进来”的同时，也将我国近现代物理的优秀成果“送出去”。物理学科在世界范围内的重要性不言而喻，引进和翻译世界物理的经典著作和前沿动态，可以满足当前国内物理教学和科研工作的迫切需求。另一方面，改革开放几十年来，我国的物理学研究取得了长足发展，一大批具有较高学术价值的著作相继问世。这套丛书首次将一些中国物理学者的优秀论著以英文版的形式直接推向国际相关研究的主流领域，使世界对中国物理学的过去和现状有更多的深入了解，不仅充分展示出中国物理学研究和积累的“硬实力”，也向世界主动传播我国科技文化领域不断创新的“软实力”，对全面提升中国科学、教育和文化领域的国际形象起到重要的促进作用。

值得一提的是，“中外物理学精品书系”还对中国近现代物理学科的经典著作进行了全面收录。20 世纪以来，中国物理界诞生了很多经典作品，但当时大都分散出版，如今很多代表性的作品已经淹没在浩瀚的图书海洋中，读者们对这些论著也都是“只闻其声，未见其真”。该书系的编者们在这方面下了很大工夫，对中国物理学科不同时期、不同分支的经典著作进行了系统的整理和收录。这项工作具有非常重要的学术意义和社会价值，不仅可以很好地保护和传承我国物理学的经典文献，充分发挥其应有的传世育人的作用，更能使广大物理学人和青年学子切身体会我国物理学研究的发展脉络和优良传统，真正领悟到老一辈科学家严谨求实、追求卓越、博大精深的治学之美。

温家宝总理在 2006 年中国科学技术大会上指出，“加强基础研究是提升国家创新能力、积累智力资本的重要途径，是我国跻身世界科技强国的必要条件”。中国的发展在于创新，而基础研究正是一切创新的根本和源泉。我相信，这套“中外物理学精品书系”的出版，不仅可以使所有热爱和研究物理学的人们从中获取思维的启迪、智力的挑战和阅读的乐趣，也将进一步推动其他相关基础科学更好更快地发展，为我国今后的科技创新和社会进步做出应有的贡献。

“中外物理学精品书系”编委会 主任

中国科学院院士，北京大学教授

王恩哥

2010 年 5 月于燕园

中文本第 3 版译者序

阿布里科索夫、戈尔可夫和加洛辛斯基合著的《统计物理学中的量子场论方法》一书，在 20 世纪 60 年代初问世不久即被翻译成英文和中文；阿布里科索夫在 2003 年获得诺贝尔物理学奖，固然是 2006 年在莫斯科印行俄文第 3 版的原因之一，同时也说明本书作为一部经典著作的价值与需求. 作为 1963 年科学出版社印行的中文本的译者，我也很高兴受北京大学出版社委托，在半个多世纪之后重新翻译此书. 事实上，第 3 版只做了少量删减和订正，例如，删去了俄文第 2 版里新增的 §19.6; 参考文献也基本保持了历史原貌. 俄文第 2 版引用朗道和栗弗席兹《理论物理学教程》(俄文老版) 处，我们加了少量中文新译本的信息. 此外，我们还尽量对一些俄文文献给出了英文出处.

译者还想借此机会指出几点：

第一，统计物理学既是物理学、又是方法论. 这本书主要讲述量子场论方法，同时用场论方法刻画了深刻而有趣的物理. 所涉及的现象，有许多是朗道和同事们先猜到物理本质，发展了唯象理论，后来才被更为微观的理论、包括场论方法所证明. 这里包括液氦的超流图像、费米液体的性质、超导理论中的金兹堡 – 朗道方程，还有较少为人知晓的宏观物体间的范德瓦尔斯力等. 钻研这本书，有助于深入掌握相关的物理学知识.

第二，这本书反映了朗道学派的算功. 20 世纪 50 年代后期，正是大规模计算机模拟蓬勃欲出的前夕，也是理论物理高手们靠解析推导解决问题的登峰造极的时代. 钻研这本书，可以补足如今在物理学人中似嫌缺乏的算功锻炼. 只有 “解析” 和 “数值” 两手都硬，才不致沦为跛足而行的理论物理工作者.

第三，本书第 3 章讲述温度大于零的场论方法，主要介绍了松原武生的温度格林函数. 应当说，它并不是最方便的理论形式. J. Schwinger 在 1961 年建议的闭路格林函数框架，后来 L. V. Keldysh, R. Mills 等人曾加以发展. 在周光召倡导下，我们把它发展成为一套完整且实用的、可以统一处理平衡和非平衡问题的方法；特别是引入顶角函数及其方程之后，闭路格林函数方法与量子场论有了高度并行性. 我们发表在国际英文综述刊物《物理学报告》上的长篇文章[①] 是对本书第 3 章的必要而适当的补充.

---

① Kuang-Chao Chou, Zhao-Bin Su, Bai-Lin Hao, Lu Yu. Equilibrium and nonequilibrium formalisms made unified (周光召，苏肇冰，郝柏林，于渌. 处理平衡和非平衡问题的统一方法). *Physics Reports*, **118**(1/2), 1 – 131, 1985.

本书第一作者阿布里科索夫再次同意出版中文译本. 中国科学院理论物理研究所孙莉大夫帮助从莫斯科获取 2006 年俄文第 2 版; 北京大学出版社陈小红编辑、王树通编辑和理论物理研究所刘寄星研究员对于第 3 版中文本出版, 给予了诸多帮助; 英文《理论物理通讯》编辑部程希有编辑对中文 LaTeX 排版技术给予指导. 译者对他们表示衷心感谢.

郝柏林

2014 年 3 月

俄文本第 1 版作者序言

最近由于广泛使用了量子场论中的方法, 统计物理学有相当大的进展. 这些方法的优越性, 在于微扰论的新表述法, 首先是所谓费曼图的广泛应用. 图解法的基本优点是它的直观性. 运用单粒子问题的概念, 这个方法可以确定任意级近似的结构, 并借助对应规则写出所需的表达式. 新方法解决了大量旧理论无法考虑的问题, 还得出了许多新的一般关系. 它是目前量子统计中最有力最有成效的方法.

现在, 关于量子统计中场论方法的表述及其对具体问题的应用, 杂志文献已浩如烟海. 但同时在统计物理工作者中, 新方法却还没有为人所共知. 因此我们认为, 已经有必要系统和尽可能全面地叙述这些问题, 以飨广大读者.

关于本书取材, 我们首先力图显示新方法的实用性. 因此书中除了详细叙述数学工具外, 还讨论了量子统计的各种问题. 当然, 我们涉及的问题, 还远不是近几年来这个领域里新结果的总汇. 材料的取舍, 决定于它们的物理意义和借以演示一般方法的可能性.

我们只限于量子统计的场论表述的一种方案 (例如, 书中未提及所谓三维微扰论等). 照我们看来, 本书采用的格林函数方法是最简便的.

我们假定, 读者知道统计物理学和量子力学的基础. 书中叙述了二次量子化方法和推导场论方法所必需的一切知识. 在推导场论方法之前, 第一章里简述了关于能谱性质的某些现代概念, 并举了一些简单例子.

书中采用 $\hbar = 1$ 的单位制. 温度以能量单位表示 ($k = 1$).

朗道院士和皮达也夫斯基 (L. P. Pitaevski) 对本书涉及的问题做过许多宝贵的讨论, 作者向他们表示感谢.

阿布里科索夫

戈尔可夫

加洛辛斯基

1961 年

英文本作者前言

我们非常高兴看到本书英文版问世, 使其读者面扩大. 自从我们写完本书俄文版以来, 量子统计物理学中又得到一系列新结果, 这主要涉及超导理论和费米液体动力学. 但是由于这些结果的大多数具有特殊的性质, 而且包含极为繁杂的计算, 我们决定在这一版里不予叙述.

§22 和 §23 两节经过完全改写, 因而在本版中的叙述更为现代, 这主要涉及有限温度下的图解技术. 其他各节里有为数不多的增补或更正. 我们感谢西伟曼 (R. A. Silverman) 博士在如此短的出版期限要求下得以在新版中实现这些修正，并且关注了整个新版过程.

阿布里科索夫

戈尔可夫

加洛辛斯基

1963 年

俄文本第 2 版编辑部说明

本版反映了作者们为英文版所做改动和补充, 同时也纠正了俄文第 1 版和英文版中所发现的不确切之处与印刷错误.

中文本第 1 版译者说明

本书根据 1962 年俄文版译出. 原作者为即将出版的英文译本作了若干补充与修正. 这些修正主要涉及 §16、§17、§19、§21、§22 和 §39; §21 和 §22.3 是完全改写了的, §19.6 是新增的. 原作者友好地提供了以上诸节的订正稿, 因而这个中译本中得以作了相应订正, 特此致谢.

译稿承以下同志校阅: 霍崇儒 (第一章), 章思俊 (第二、三章), 霍裕平 (第四章), 陈式刚 (第五章), 陈春先 (第六章), 于渌 (第七章), 谨致谢意.

郝柏林

1963 年 8 月, 北京

目　录

第 1 章　多粒子系统在低温下的一般性质……1
§1　元激发. 液体 He^4 在低温下的能谱和性质……1
§1.1　引言. 准粒子……1
§1.2　玻色液体的能谱……4
§1.3　超流……8
§2　费米液体……12
§2.1　费米液体中的激发……12
§2.2　准粒子能量……14
§2.3　声波……18
§3　二次量子化……22
§4　稀薄玻色气体……25
§5　稀薄费米气体……31
第 2 章　温度等于零时的量子场论方法……37
§6　相互作用表象……37
§7　格林函数……44
§7.1　定义. 自由粒子的格林函数……44
§7.2　解析性质……48
§7.3　极点的物理意义……52
§7.4　系统在外场中的格林函数……56
§8　图解法的基本原则……57
§8.1　从变量 N 到变量 μ 的变换……57
§8.2　维克定理……58
§8.3　费曼图……60
§9　各种类型相互作用的构图规则……64
§9.1　坐标空间中的图解法. 举例……64
§9.2　动量空间中的图解法. 举例……72
§10　戴逊方程. 顶角部分. 多粒子格林函数……77
§10.1　图形求和. 戴逊方程……77
§10.2　顶角部分. 多粒子格林函数……81
§10.3　基态能量……87

第 3 章 温度大于零时的图解法 ····· 89
§11 温度格林函数 ····· 89
§11.1 一般性质 ····· 89
§11.2 自由粒子温度格林函数 ····· 93
§12 微扰论 ····· 95
§12.1 相互作用表象 ····· 95
§12.2 维克定理 ····· 98
§13 坐标空间中的图解法 ····· 102
§14 动量空间中的图解法. 举列 ····· 111
§14.1 动量表象 ····· 111
§14.2 举例 ····· 114
§15 热力学势 Ω 的微扰论级数 ····· 121
§16 戴逊方程. 多粒子格林函数 ····· 126
§16.1 戴逊方程 ····· 126
§16.2 格林函数和热力学势 Ω 的关系 ····· 130
§17 温度大于零时的时间格林函数. 格林函数的解析性质 ····· 134
第 4 章 费米液体理论 ····· 144
§18 动量传递很小时顶角部分的性质. 零声 ····· 144
§19 有效质量. 边界动量和粒子数的关系. 能谱的玻色支. 比热 ····· 149
§19.1 几个辅助关系式 ····· 149
§19.2 费米液体理论基本关系的证明 ····· 152
§19.3 能谱的玻色支 ····· 154
§19.4 费米动量 p_0 和粒子数关系的另一推导法 ····· 155
§19.5 比热 ····· 157
§20 相碰粒子总动量很小时顶角部分的奇异性 ····· 161
§21 温度等于零时电子和声子的相互作用 ····· 164
§21.1 顶角部分 ····· 165
§21.2 声子格林函数 ····· 166
§21.3 电子格林函数 ····· 170
§21.4 电子比热线性项的修正 ····· 175
§22 简并等离子体的某些性质 ····· 177
§22.1 问题提法 ····· 177
§22.2 动量传递小的顶角部分 ····· 178
§22.3 电子能谱 ····· 182
§22.4 热力学函数 ····· 187

第 5 章　相互作用玻色粒子系统……190
§23　绝对温度零度时应用场论方法于玻色粒子系统……190
§24　格林函数……197
§24.1　方程式的结构……197
§24.2　格林函数的解析性质……200
§24.3　动量很小时格林函数的性质……204
§25　稀薄非理想玻色气体……205
§25.1　图解法……205
§25.2　化学势和单粒子格林函数自能部分的关系……207
§25.3　低密度近似……210
§25.4　有效相互作用势……213
§25.5　低密度近似下玻色气体的格林函数. 能谱……216
§26　单粒子激发谱在其终点附近的性质……217
§26.1　问题提法……217
§26.2　方程组……218
§26.3　产生声子的阈点附近谱的性质……220
§26.4　裂变成两个动量平行且不为零的元激发时阈点附近谱的性质……223
§26.5　两个激发以一定角度飞出的裂变……225
§27　温度大于零时场论方法应用于有相互作用的玻色粒子系统……227
第 6 章　吸收介质中的电磁辐射……231
§28　吸收介质中电磁辐射的格林函数……231
§29　介电常数的计算……237
§30　不均匀电介质中的范德瓦耳斯力……240
§31　固体间的分子作用力……245
§31.1　固体间的相互作用力……245
§31.2　溶液中原子间的相互作用力……251
§31.3　固体表面上的薄膜……254
第 7 章　超导理论……256
§32　概论. 模型的选择……256
§32.1　超导现象……256
§32.2　模型. 相互作用哈密顿量……257
§33　库伯现象……259
§33.1　顶角部分的方程……259
§33.2　顶角部分的性质……262
§33.3　转变温度的确定……263

§34　超导体的基本方程组 ····· 265
§34.1　绝对温度零度的超导体 ····· 265
§34.2　有外电磁场存在时的方程. 规范不变性 ····· 270
§34.3　温度高于零的超导体 ····· 271
§35　声子模型中超导理论方程组的推导 ····· 273
§36　超导体的热力学 ····· 276
§36.1　能隙和温度的关系 ····· 276
§36.2　超导体的热力学 ····· 278
§37　在弱电磁场中的超导体 ····· 280
§37.1　弱恒定磁场 ····· 280
§37.2　交变场中的超导体 ····· 287
§38　任意磁场中的超导体在转变温度附近的性质 ····· 291
§39　超导合金理论 ····· 296
§39.1　问题提法 ····· 296
§39.2　正常金属的剩余电阻 ····· 297
§39.3　超导合金的电磁性质 ····· 304
参考文献 ····· 312

第 1 章　多粒子系统在低温下的一般性质

§1　元激发. 液体 He^4 在低温下的能谱和性质

§1.1　引言. 准粒子

统计物理研究由大量粒子组成的系统的行为. 液体、气体和固体的宏观性质最终是由组成这些系统的粒子间的微观相互作用决定的. 显然, 要解决包括决定每个粒子的行为在内的完整问题, 是无法设想的. 但系统的总的宏观特征只由某些平均量决定.

为了确定起见, 让我们讨论热力学性质. 系统的宏观状态可以用三个独立的热力学变量决定, 例如, 可以由给定压力 P、温度 T 和系统内的平均粒子数 N 来决定. 从量子力学观点看, N 个粒子组成的封闭系统由其能级 E_n 描述. 试从系统中分出某个部分, 但要使新的子系还能当做是宏观的. 由于这样一个子系中的粒子数还很多, 而粒子间的作用力只在原子距离上有效, 因此忽略边界效应后, 就可以认为子系是封闭的, 可用子系中粒子数一定时的能级来描述. 事实上, 因为这个子系和原来封闭系统内的其他粒子互相作用着, 因而它的能量和粒子数都不是严格确定的, 它处于任何一个能级上的概率都是大于零的.

由统计物理学知道 (参看 [1])①, 热力学公式的微观推导基于所谓吉布斯分布, 它给出子系处于能量为 E_{nN}, 粒子数为 N 的状态的概率:

$$w_{nN} = Z^{-1}\mathrm{e}^{-\frac{E_{nN}-\mu N}{T}}, \tag{1.1}$$

式中, T 是绝对温度, μ 是化学势, 而 Z 是由以下条件决定的归一因子:

$$\sum_{n,N} w_{nN} = 1. \tag{1.2}$$

由 (1.1) 式得

$$Z = \sum_{n,N} \mathrm{e}^{-\frac{E_{nN}-\mu N}{T}}. \tag{1.3}$$

Z 称为总统计和. 如果能级 E_{nN} 已知, 则统计和可以求出. 由此可立即得到热力学函数, 因为 Z 和热力学势 Ω(以 V, T, μ 为独立变量的势) 的关系是

$$\Omega = -T\ln Z. \tag{1.4}$$

① 参阅 [82], 第 69 页. —— 译者注

理想气体的热力学函数显然很容易用式 (1.4) 算得, 因为其能量是个别粒子能量之和. 对于粒子间有相互作用的多粒子系统, 通常不可能求得能极. 因此直到目前在量子统计中, 只有相互作用充分弱时, 才成功地考虑了粒子间的相互作用. 用微扰论计算热力学函数时, 实际上只能得到前一二级近似. 对于相互作用并不弱的大多数物理问题, 直接利用公式 (1.1)~(1.4) 是一条不现实的途径.

温度极低时情况比较特殊. 当 $T \to 0$ 时, 只有距基态比较近的能级 (低激发态) 才在总统计和中起主要作用. 在这个能量范围内, 根据一些很普遍的、与粒子间相互作用的数值和特点无关的概念, 就可以相当细致地确定系统的能谱.

为了使以后的讨论更为清晰, 我们以晶格振动激发为例. 只要振动是微弱的, 晶格就可以看成耦合简谐振子的集合. 引入简正坐标后, 我们得到 $3N$(N 是原子数) 个本征频率为 $\boldsymbol{\omega}_i$ 的线性振子. 按照量子力学, 这个系统的能谱由公式

$$E = \sum_{i=1}^{3N} \omega_i \left(n_i + \frac{1}{2} \right)$$

给出, 式中 n_i 为任意正整数或零. n_i 的不同取法给出系统的不同能级.

晶格振动可以描写成在晶体内传播的单色平面波的叠加. 每个波有一定的波矢、频率和决定振动类型的标号 s. 由于在晶体内可能有各种类型的波传播, 频率 ω 就不再是波矢 $\boldsymbol{k}$ 的单值函数, 而由几个支 $\omega_s(\boldsymbol{k})$ 合成; 支的总数是 $3r$, r 是每个晶胞内的原子数. 当动量较小时这些支中有三个支 (称为声学支) 的特点是频率与波矢呈线性关系, 即: $\omega_s(\boldsymbol{k}) = u_s(\theta, \varphi)|\boldsymbol{k}|$. 其他各支的曲线 $\omega_s(\boldsymbol{k})$ 开始于 $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$ 时的某个不为零的数值, 同时当波矢较小时, 它与 $\boldsymbol{k}$ 的关系很弱①.

知道频谱、能级和晶格原子位移 (振子坐标) 的矩阵元后, 至少在原则上完全可能算得振动晶格的热力学和动力学特征. 然而实际上更为方便的办法, 是利用从量子力学对应原理得出的另一个等价图像来代替耦合振子图像. 由对应原理知道, 每个平面波相当于运动着的 "粒子" 的集合. 波矢 $\boldsymbol{k}$ 决定这些粒子的动量②, 而频率 $\omega_s(\boldsymbol{k})$ 决定它们的能量③. 晶格激发态可以设想成这些 "粒子" 的总和 (它们称为声子), 它们在物体体积内自由运动. 这正与前面给出的系统的能级表达式一致, 而后者又和理想气体的能量相似.

数字 n_i 可解释为处于状态 $i[i = (\boldsymbol{k}, s)]$ 中的声子数目. 它们可以取任意值. 由此看出, 即令组成晶格的原子具有半整数自旋, 声子还是服从玻色统计.

在极低温度下低能声子起最主要的作用. 从前面关于频谱各支的叙述可知, 能

① 关于晶格振动谱的详细情况, 可参看派尔斯 (R. E. Peierls) 的书 [2]; 译者补注: 还可参看 [84].

② 实际上 $\boldsymbol{k}$ 不是动量, 而是 "准动量" (见 [2]). 但这里这种差别并不重要.

③ 再次提示, 在我们所取的单位制中 $\hbar = 1$. 这就是说能量的量纲是秒$^{-1}$, 而动量的量纲是厘米$^{-1}$. 为了回到通用的单位, 只须将各个能量和动量都乘以 $\hbar$.

量最低的声子相当于声学支的动量较小的部分. 这时 $\omega(\boldsymbol{k})$ 是线性关系. 仅仅由这一个事实就可以作出许多定性结论, 例如晶格比热遵从 T^3 律.

进行定量计算时, 常常用所谓德拜各向同性模型代替实际晶格的频谱. 这个模型把谱的低频部分的三个声学支代之以各向同性物体的频谱, 即能量为 $\omega_l(k)=u_lk$ 的纵声子和能量同为 $\omega_t(k)=u_tk$, 但具有两种可能偏振的横声子. 此外还认为声子动量不能超过某个临界值 k_{D}, 它决定于保持正确自由度数目的归一条件. 显然 $k_{\mathrm{D}}\sim 1/a$, a 是原子间距离. 这个模型导致著名的固体比热德拜内插公式. 以后我们要用这个模型研究金属内的电子声子相互作用.

如果在振动晶格的位能中计入微小的非简谐项, 则前面的能量表达式不再是准确的. 具有不同 n_i 的诸状态间出现一定的跃迁概率. 利用声子概念, 这可以解释为声子间的各种互相作用过程, 其结果是声子互相散射和产生新的声子. 换句话说, 在作严格讨论时, 声子只能近似地看成自由运动的粒子.

温度升高, 振动幅度增加, 非简谐项的作用也随之俱增. 在声子图像中, 温度上升时声子数目增多, 因而声子间作用也益增. 因此, 声子作为自由运动粒子的这种概念, 只适用于温度不太高的范围 (远低于熔点).

现在讨论一般情况. 与上面的例子相似, 探讨系统低激发态能谱图像的基础, 是假定在一级近似下能级与理想气体能级相应. 换言之, 就是假定任何一个能级都是若干 "准粒子" 或元激发的能量之和, 它们在物体内运动并具有动量 $\boldsymbol{p}$ 和能量 $\varepsilon(\boldsymbol{p})$(一般地说, 元激发的色散律 $\varepsilon(\boldsymbol{p})$ 与自由粒子的能量表达式 $\varepsilon_0(\boldsymbol{p})=p^2/2m$ 不同). 应当立即强调指出, 元激发是由于系统内粒子的集体作用而产生的, 因此属于整个系统, 而不属于个别粒子. 元激发数目也完全不必等于系统内的粒子总数.

所有能谱可以分为两大类 —— 玻色型谱和费米型谱. 在第一种情况下元激发具有整数内禀动量矩 (自旋) 并服从玻色统计; 在第二种情况下元激发具有半整数自旋并遵从费米统计. 由量子力学知道, 任何系统的动量矩只能作整数改变. 由此看出, 玻色激发可以单个地出现与消失, 而费米激发必须成对.

前面关于晶格振动的例子中已指出, 元激发的统计不必与组成系统的粒子的统计一致. 显而易见的是, 玻色系统不能具有半整数自旋的激发.

元激发并不对应于系统的准确稳定态, 而是大量能量差别很小的准确稳定态的叠加 (波包). 因此系统有一定概率从一个态跃迁到另一个态, 这就使波包扩散, 元激发衰减. 所以只有当波包的能量宽度 (它决定衰减) 比能量本身小得多时, 用元激发来描述系统才是合理的.

波包的扩散和与之相关的元激发衰减可以视为 "准粒子" 互相作用的结果. 这时能量和动量守恒律是成立的. 这些过程可以分为一个元激发 "裂变" 为几个另外的元激发的过程以及元激发彼此间的 "散射" 过程.

以后我们将看到, 只有能量相当大时才会产生元激发的裂变. 而散射过程仅在

元激发数目足够多时才成为重要的. 由此可见, 在低温下, 当为数极少的低能元激发起主要作用时, 这两类使元激发衰减的过程都是无足轻重的. 低温下元激发间的作用弱, 于是可以将它们看做 "准粒子" 的理想气体.

现在, 基于实验数据和直接的理论计算, 可以认为上述关于能谱结构的概念已是非常确定的事实. 当然各种物理对象 (例如液态氦的同位素 He^3 和 He^4、金属、电介质等) 的能谱也是完全不同的. He^4 的能谱是玻色型, 而 He^3 和金属电子①的能谱却属于费米型.

§1.2　玻色液体的能谱

以下所述关于玻色液体能谱的观念是由朗道首先提出来的[3,4].

具有玻色型能谱的系统的例子之一, 是所谓玻色液体, 即由自旋为整数的原子构成的液体. 在自然界中只存在着一种这样的液体 —— 液体氦 (更确切地讲, 是同位素 He^4), 它在绝对温度零度也不凝固. 由于氦原子 He^4 的自旋为零, 我们实际上只须讨论自旋为零的一种情形.

动量数值很小时, 玻色液体元激发能量与动量的关系可以借助一些相当一般的想法来决定. 小动量的范围相当于液体的长波振动, 而这种振动正是普通声波. 由此立刻得到结论: 小动量的元激发就是声量子 —— 声子, 其能量与动量的关系是熟知的. 实际上注意到声波频率 ω 与波矢的关系 $\omega = uk$, 其中 u 是声速, 我们立即得到所需的关系式

$$\varepsilon = up, \tag{1.5}$$

这样, 动量很小时玻色液体激发能与动量呈线性关系, 比例系数就是声速.

动量增大后, $\varepsilon(p)$ 不再是线性关系, 曲线 $\varepsilon(p)$ 的形状已不能如此简单地确定. 因此, 下面引述的讨论很有意义, 它可以使我们对任意动量得到一系列关于 $\varepsilon(p)$ 的结论②.

液体能量是它的密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ 和流体力学速度 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ 的泛函:

$$E(\rho, \boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\int \rho \boldsymbol{v}^2 \mathrm{d}\boldsymbol{r} + E^{(1)}(\rho), \tag{1.6}$$

式中 $E^{(1)}$ 是与速度无关的那部分能量. 让我们讨论微振动. 这时 $\rho(\boldsymbol{r}) = \bar{\rho} + \delta\rho(\boldsymbol{r})$, 其中 $\bar{\rho}$ 为与坐标无关的平衡密度, 而 $\delta\rho(\boldsymbol{r})$ 和 $\boldsymbol{v}$ 是描述振动的微小量. 注意到, 由定义得

$$\bar{\rho} = \frac{1}{V}\int \rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \quad \int \delta\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0.$$

① 为了避免误解, 我们必须说明, 以后各处讨论的都是各向同性的金属模型, 这与实际情况当然相距很远. 实际金属的电子能谱是显著各向异性的, 因此本书中所述的许多结果对于它们只有定性意义.

② 下述推导是 L. P. Pitaevski 首先给出的[5].

准确到 $\delta\rho$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的二级无穷小量, (1.6) 式右端第一项中的函数 $\rho(\boldsymbol{r})$ 可换成平均值 $\bar{\rho}$. 以同样的准确度可以把 $E^{(1)}$ 写成如下形式:

$$E^{(1)}(\rho)=E^{(1)}(\bar{\rho})+\int\psi(\boldsymbol{r})\delta\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\frac{1}{2}\iint\varphi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\delta\rho(\boldsymbol{r})\delta\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{r}'.$$

函数 $\psi(\boldsymbol{r})$ 和 $\varphi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 仅仅由未受振动扰动的各向同性的均匀液体的性质决定, 因此函数 $\psi(\boldsymbol{r})$ 应当是常数: $\psi(\boldsymbol{r})=$ 常数 $=\psi$, 而 $\varphi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 只与 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ 有关:

$$\varphi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\varphi(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|).$$

所以 $E^{(1)}$ 展开式中的一次项正比于 $\int\delta\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}=0$. 最终有

$$E=E^{(1)}(\bar{\rho})+\frac{\bar{\rho}}{2}\int\boldsymbol{v}^2\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\frac{1}{2}\iint\varphi(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\delta\rho(\boldsymbol{r})\delta\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{r}'.$$

速度 $\boldsymbol{v}$ 和密度振荡的关系由连续性方程式给出:

$$\dot{\rho}+\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v})=0,$$

如果准确到 $\delta\rho$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的一次项, 此式可写为

$$\dot{\rho}+\bar{\rho}\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{v}=0. \tag{1.7}$$

变换到傅里叶表示:

$$\delta\rho(\boldsymbol{r})=\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p}}\rho_{\boldsymbol{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}},\quad \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}},$$
$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p}}\varphi_{\boldsymbol{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}},$$

并且考虑到液体微振动总是纵向的, 即波矢为 $\boldsymbol{p}$ 的波中速度 $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{p}}$ 总平行于 $\boldsymbol{p}$:

$$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{p}}=a_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{p}.$$

现在由 (1.7) 式容易求出

$$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{p}}=\mathrm{i}\frac{\dot{\rho}_{\boldsymbol{p}}}{\bar{\rho}}\frac{\boldsymbol{p}}{p^2}$$

以及

$$E=E^{(1)}(\bar{\rho})+\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p}}\left(\frac{|\dot{\rho}_{\boldsymbol{p}}|^2}{2\bar{\rho}p^2}+\frac{1}{2}\varphi_{\boldsymbol{p}}|\rho_{\boldsymbol{p}}|^2\right). \tag{1.8}$$

(1.8) 式中第一项是未扰动液体的能量, 而第二项分解为许多项之和, 其中每一项正是频率为 $\omega_{\boldsymbol{p}}$ 的简谐振子的能量,

$$\omega_{\boldsymbol{p}}^2 = \bar{\rho} p^2 \varphi_{\boldsymbol{p}}. \tag{1.9}$$

这样, 我们看到液体的任何振动都分解成元振动 —— 由简谐振子方程描述的元激发.

在量子情况下每个这种振子的能量由下式表示:

$$\varepsilon_{\boldsymbol{p}} = \omega_{\boldsymbol{p}} \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0,\ 1,\ 2, \cdots .$$

这样得到的系统的能谱结构完全相当于前面描述过的元激发图像. 系统的能谱是不同数量元激发的能量之和; 元激发能量 $\varepsilon(\boldsymbol{p})$ 与动量的关系由 (1.9) 式和显而易见的关系 $\varepsilon(\boldsymbol{p}) = \omega_{\boldsymbol{p}}$ 决定.

为了彻底地将问题解决, 我们还必须把 $\varphi_{\boldsymbol{p}}$ 通过系统的特征量表示出来. 为此必须注意到, 量子情况下系统的基态能量并不等于 $E^{(1)}(\bar{\rho})$, 这与经典情况是不同的, 其原因在于这时必须考虑振子的所谓零振动能量. 后者对一个振子等于 $\omega_{\boldsymbol{p}}/2$. 这样, 玻色液体的基态能量等于

$$E_0 = E^{(1)}(\bar{\rho}) + \sum_{\boldsymbol{p}} \frac{\omega_{\boldsymbol{p}}}{2},$$

其中 (见 (1.8) 式)

$$V \frac{\omega_{\boldsymbol{p}}}{2} = \frac{1}{2\bar{\rho} p^2} \overline{|\dot{\rho}_{\boldsymbol{p}}|^2} + \frac{1}{2} \varphi_{\boldsymbol{p}} \overline{|\rho_{\boldsymbol{p}}|^2} = \varphi_{\boldsymbol{p}} \overline{|\rho_{\boldsymbol{p}}|^2}. \tag{1.10}$$

从 (1.9) 和 (1.10) 式我们立刻得到①:

$$\varepsilon(\boldsymbol{p}) = \omega_{\boldsymbol{p}} = \frac{p^2}{2mS(\boldsymbol{p})}, \tag{1.11}$$

这里 $S(\boldsymbol{p}) = \dfrac{\overline{|\rho_{\boldsymbol{p}}|^2}}{Vm\bar{\rho}}$ 是所谓密度关联函数

$$S(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = \frac{\overline{[n(\boldsymbol{r}) - \bar{n}][n(\boldsymbol{r}') - \bar{n}]}}{\bar{n}} \tag{1.12}$$

的傅里叶分量, 而 $n(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\rho(\boldsymbol{r})}{m}$ 是单位体积内的粒子数.

① 公式 (1.11) 是费曼[6] 用另一种方法首先推得的. 我们觉得, 他所用的方法复杂得多, 但并不比上述方法具备更大的普遍性.

虽然 $S(\boldsymbol{p})$ 并不能算出来, 从 (1.11) 式还是可以作出许多关于 $\varepsilon(\boldsymbol{p})$ 形状的重要结论. 另外, 知道 $\varepsilon(\boldsymbol{p})$ 的某些性质后, 可以判断函数 $S(\boldsymbol{p})$ 的行为, 而后者正好决定液体和各种粒子 (中子等, 见后面第 3 章 §17) 的相互作用过程.

前面已经提到, 动量较小时元激发能量与动量呈线性关系; $\varepsilon \approx up$. 由此看出, $S(\boldsymbol{p})$ 也与动量呈线性关系: $S \approx p/2mu$.

当距离很近, 或者说动量很大时, 函数 $S(\boldsymbol{p})$ 具有已知的 (见 [1]§114①) 形式:

$$S(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r}) + v(\boldsymbol{r}), \tag{1.13}$$

其中当 $\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{0}$ 时, $v(\boldsymbol{r})$ 没有奇异性. 写成傅里叶分量就得

$$S(\boldsymbol{p}) = 1 + v(\boldsymbol{p}),$$

当 $p \to \infty$ 时, $v(\boldsymbol{p}) \to 0$. 于是动量很大时 $S(\boldsymbol{p}) \longrightarrow 1$, 而

$$\varepsilon(\boldsymbol{p}) \approx \frac{p^2}{2m},$$

也就是元激发能量和液体的自由原子 (He^4 原子) 能量一样.

对于动量的中间数值, 函数 $S(\boldsymbol{p})$ 可能随着 p 的增加而单调地由 0 上升到 1, 也可能在 $p \sim 1/a$ 附近通过极大值, 这里 a 是原子间距离 (这是考虑量纲而得出来的, 因为在液体问题中唯一具有长度量纲的参量是原子间距离). 后一情况下元激发能谱的形状可能如图 1 所示. 朗道[3,4] 首先假设液体 He^4 的激发谱在 $p \sim 1/a$ 附近有极小值.

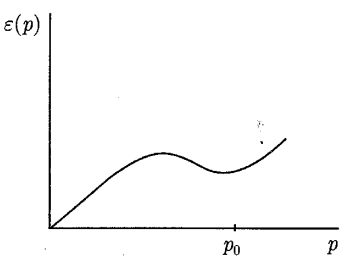


图 1

应当指出, 上面给出的 (1.11) 式的推导基于流体力学近似, 这时液体被看成连续介质. 当数量级为原子间距的距离或数量级为 $1/a$ 的动量起重要作用时, 这种近似就不对了. 由于 (1.11) 式对于小动量是成立的, 所以它应当看成是从小动量范围到极大动量范围的内插公式; 动量极大时, 粒子实际上是自由的, 这时元激发和粒子一致, 具有能量 $p^2/2m$.

液体 He^4 元激发能谱的细节, 自然不能从计算得出. 最近借助中子在液体 He^4 中的散射实验[7], 求得了最准确的 $\varepsilon(\boldsymbol{p})$ 曲线.

知道了能谱, 就可以算出液体 He^4 的热力学函数 (更确切些说, 是算出它们在给定温度时的值与 $T = 0$ 时的值之差). 这时随着 T 的数值不同, 能谱中起最大作用的部分也不同 (见图 1).

① 参阅 [82] 的 §116 节. —— 译者注

在最低温范围内, 只有能谱的小动量部分, 即声子部分最重要. 温度较高时, $\varepsilon(\boldsymbol{p})$ 极小值 $(p=p_0)$ 附近的激发变成最重要的. 将能量 ε 按 $p-p_0$ 展开就得到①:

$$\varepsilon(p)=\Delta+\frac{1}{2m^*}(p-p_0)^2. \tag{1.14}$$

能谱这一部分的元激发称为 "旋子"(roton).

一切热力学量都是 "声子" 部分和 "旋子" 部分的和. 为了求得热力学势, 只须将 (1.1) 和 (1.14) 式代入下式 (见 [1], §53②):

$$\Omega=VT\int \ln(1-\mathrm{e}^{\frac{\mu-\varepsilon(p)}{T}})\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}. \tag{1.15}$$

这时还应当注意到以下情况. 首先, 元激发数目并未给定, 它要从平衡条件, 即自由能对粒子数目变化为极小值确定, 这就给出

$$\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{V,T}=\mu=0 \quad (F=\Omega+\mu N). \tag{1.16}$$

当 $\mu=0$ 时, 热力学势 Ω 和自由能 F 重合. 其次, 由于旋子能量总是大于问题中所能涉及的温度, 它们的玻色分布可以代之以玻尔兹曼分布. 这是因为当 $T\ll\varepsilon_{\mathrm{rot}}$ 时, 可在计算 (1.15) 式的积分时将 $\ln(1-\mathrm{e}^{-\varepsilon_{\mathrm{rot}}/T})$ 按小量 $\mathrm{e}^{-\varepsilon_{\mathrm{rot}}/T}$ 展开而取第一项. 这样就得到玻尔兹曼公式

$$F_{\mathrm{rot}}=-VT\int \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon_{\mathrm{rot}}}{T}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}.$$

考虑以上两点, 就可以算得

$$F_{\Phi}=-V\frac{\pi^2T^4}{90u^3},$$

$$F_{\mathrm{rot}}=-V\frac{2m^{*1/2}T^{3/2}p_0^2}{(2\pi)^{3/2}}\mathrm{e}^{-\frac{\Delta}{T}}. \tag{1.17}$$

从而不难求得其他热力学量.

§1.3　超流

玻色液体最有趣的性质是"超流", 即无摩擦地通过毛细管的本领. 朗道[3] 证明了, 从他所建议的元激发能谱形状, 可以得出这种性质.

设玻色液体在绝对零度下以速度 $\boldsymbol{v}$ 流过毛细管. 在和液体相联系的坐标系中, 液体是静止的, 而毛细管以速度 $-\boldsymbol{v}$ 运动. 由于管壁和液体之间的摩擦, 液体渐被管壁带动. 这就是说, 液体的能量和动量不复为零. 只有在液体中出现了元激发时,

① 对于 He^4, 公式内各常数的值是[7]: $\Delta=11.4\times10^{11}\mathrm{s}^{-1}, p_0=1.92\times10^8\mathrm{cm}^{-1}, m^*=0.16m_{\mathrm{He}^4}$.

② 参阅 [82] 第 §54 节. —— 译者注

才可能发生这种情况. 当出现了一个这种元激发后, 液体就获得了动量 $\boldsymbol{p}$ 和能量 $\varepsilon(\boldsymbol{p})$. 现在再回到与毛细管相连的坐标系中. 液体在这个坐标系中的能量是

$$\varepsilon + \boldsymbol{pv} + \frac{Mv^2}{2}.$$

这样, 元激发的出现使液体能量改变了 $\varepsilon + \boldsymbol{pv}$. 只有这个变化是负数时, 元激发才可能出现, 于是

$$\varepsilon + \boldsymbol{pv} < 0.$$

当 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 方向相反时, 这个量取最小值. 因此至少须有 $\varepsilon - pv < 0$, 即 $v > \varepsilon/p$. 我们于是得到了要使液体中能产生元激发, 其速度必须满足的条件为

$$v > \left(\frac{\varepsilon}{p}\right)_{\min}. \tag{1.18}$$

在曲线 $\varepsilon(p)$ 上 $\dfrac{\varepsilon}{p}$ 最小的点是

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}p} = \frac{\varepsilon}{p}, \tag{1.19}$$

即从坐标原点所引直线与曲线 $\varepsilon(p)$ 相切之处.

这样, 仅当液体速度小于满足条件 (1.19) 式诸点的元激发速度时, 才能出现超流 (注意 $\mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}p$ 是元激发速度).

对于任何玻色液体都至少有一个点满足条件 (1.19). 这就是坐标原点 $p = 0$. p 接近零时, 元激发以声速运动, 因此液体流速超过声速 u 时, 超流条件显然被破坏了.

液体 He^4 的能谱中还有一个危险点. 从图 1 所示曲线看出, 它位于旋子极小值右面. 利用 (1.14) 式容易得出, 超流流速应满足不等式

$$v < \frac{1}{m^*}\left(\sqrt{p_0^2 + 2m^*\Delta} - p_0\right),$$

或者, 考虑到诸常数的数值 (从它们可以看出 $p_0^2 \gg 2m^*\Delta$),

$$v < \frac{\Delta}{p_0}.$$

我们得到了最终结论: 当流速超过 Δ/p_0 时, 液体 He^4 内的运动显然已不是超流.

温度高于零度时, 玻色液体内出现元激发. 不难看出, 上述关于液体流动时能否有新元激发出现的讨论, 并不因之改变. 有意义的是, 探讨已经存在的元激发对液体的运动有何影响.

为此我们设想, “元激发气体” 以某种宏观速度 $\boldsymbol{v}$ 在液体中运动. 分布函数可以从静止气体的分布函数作代换 $\varepsilon \to \varepsilon - \boldsymbol{pv}$ 而求得. 单位体积气体的动量由积分给出:

$$\boldsymbol{P} = \int \boldsymbol{p} n(\varepsilon - \boldsymbol{pv}) \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}. \tag{1.20}$$

对于小速度 $n(\varepsilon - \boldsymbol{pv})$ 可以按 $\boldsymbol{pv}$ 展开. 结果得到

$$\boldsymbol{P} = -\int \boldsymbol{p}(\boldsymbol{pv}) \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} = -\frac{\boldsymbol{v}}{3} \int p^2 \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}. \tag{1.21}$$

从 (1.21) 式看出, 运动着的元激发气体的动量 $\boldsymbol{P}$ 正比于运动速度 $\boldsymbol{v}$. $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的比例系数显然就是运动物体的质量. 这样我们就看出, 元激发气体相对于液体的运动伴随着质量转移. 个别元激发当然可以与器壁作用, 产生散射. 元激发气体在散射时和器壁交换动量. 这就是说, 元激发气体的运动是黏滞的. 既然, 如前面已经看到的, 元激发气体运动时有质量转移, 我们作出如下结论: 在已经有元激发存在的玻色液体中可以发生黏滞流动, 其速度并不破坏超流条件 (1.18). 重要的是, 黏滞流动所转移的质量, 决不等于整个液体的质量; 它由关系式 (1.21) 决定, 与元激发数目有关 (例如, $T = 0$ 时 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{0}$).

现在已经可以讨论流速不破坏超流条件时, 玻色液体运动的一般图像了.

从绝对零度开始讨论. 如果液体在初始时刻处于基态, 即没有元激发存在, 那么, 它们以后也无从产生, 运动始终是超流.

当 $T \neq 0$ 时运动图像有实质改变. 现在液体中存在着元激发, 其数目由相应的统计公式决定. 虽然新的元激发不能产生, 但是如前所述, 没有任何因素会妨碍已经存在着的元激发和器壁碰撞, 和后者交换动量. 与公式 (1.21) 相应, 只有一部分液体质量参与这个黏性流动. 另一部分液体质量还照常流动, 即不与器壁摩擦, 也不与产生黏流的那部分液体摩擦. 这样, $T \neq 0$ 时的玻色液体好像是两种液体 ——“超流的” 和 “正常的”—— 的混合物, 它们互不摩擦地运动.

实际上当然不发生这种分割, 液体中仅仅存在着两种运动, 每种运动有自己的有效质量或有效密度. “正常” 密度就是单位体积运动着的元激发气体动量与其速度的比例系数. 在 (1.21) 式中先后代入玻色分布和玻尔兹曼分布 (前者 $\varepsilon = up$, 后者 ε 由 (1.14) 式给出) 可以求出正常密度的声子和旋子部分:

$$\begin{aligned} \rho_{n\,\Phi} &= \frac{2\pi^2 T^4}{45u^5}, \\ \rho_{n,\mathrm{rot}} &= \frac{2m^{*1/2} p_0^4 \mathrm{e}^{-\frac{\Delta}{T}}}{3(2\pi)^{3/2} T^{1/2}}. \end{aligned} \tag{1.22}$$

剩下的那部分液体密度对应于超流运动. 这样就有

$$\rho = \rho_{\mathrm{n}} + \rho_{\mathrm{s}}. \tag{1.23}$$

元激发气体的宏观速度记做 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}}$, 超流液体速度记做 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}$. 后一速度有一重要性质. 如果将玻色液体放入圆筒内并使圆筒绕轴转动, 正常部分将被筒壁带动而开始与之俱转. 相反, 超流部分仍然静止. 也就是说, 无法使超流部分转动. 换言之, 超流部分的运动总是位流. 其数学表示是

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v}_{\mathrm{s}} = \mathbf{0}. \tag{1.24}$$

对于元激发来说, 液体超流部分的运动起着外界条件的作用. 应当指出, 前面讲到的函数 $\varepsilon(p)$ 的形状, 正是在与超流部分相联系的坐标系中才是那样. 在静止坐标系中显然有

$$\varepsilon' = \varepsilon(p) + \boldsymbol{p}\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}, \tag{1.25}$$

式中 $\boldsymbol{p}$ 是在与超流液体相连的坐标系中的动量.

在为元激发写输运方程式时, 就必须考虑这一点. 因而输运方程式的形状是

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial \boldsymbol{r}}\frac{\partial \varepsilon'}{\partial \boldsymbol{p}} - \frac{\partial n}{\partial \boldsymbol{p}}\frac{\partial \varepsilon'}{\partial \boldsymbol{r}} = I(n), \tag{1.26}$$

这里 $I(n)$ 是碰撞积分.

玻色液体中存在着两种速度不同的运动, 这就导致了十分奇特的流体力学. 流体力学方程可以从输运方程式 (1.26) 求得. 这里不打算引述的这个推导是 I. M. Khalatnikov 完成的, 并叙述在他的总结论文 [8, 9] 里①.

玻色液体的双速度流体力学与普通流体力学差别很大. 例如, 在玻色液体中可以产生两种不同类型的振动, 其传播速度也不一样.

第一种振动是普通声波或称第一声. 在这种声波中液体作为整体运动; 正常和超流部分并不分开. 第一声的传播速度等于 u. 第二种振动 —— 所谓第二声的传播速度是

$$u_2 = \sqrt{\frac{\rho_{\mathrm{s}} T S^2}{\rho_{\mathrm{n}} \rho C}}, \tag{1.27}$$

其中 C 和 S 是单位体积的比热和熵. 在这种波里, 正常部分和超流部分作位相相反的振动, 同时液体的总通量 $\boldsymbol{j} = \rho_n \boldsymbol{v}_n + \rho_s \boldsymbol{v}_s \approx 0$.

我们不准备更详细地讨论有关超流液体的流体力学问题. 在许多专门论文中研究了液体氦中声的传播, 元激发的相互作用以及因之而生的各种耗散过程 (黏滞

① 适用于速度不十分高时的超流 He^4 的流体力学方程是朗道首先得到的[3].

性、热传导等), 其结果在 E. M. Lifshitz[10] 和 I. M. Khalatnikov 的总结文章 [8, 9] 中有详细叙述, 读者可以参阅.

现在我们转而讨论温度更高时玻色液体的特性, 这时元激发数目增多了. 元激发之间的相互作用已经不能省略, 它们不能再看做自由粒子组成的气体. 因此, 对气体模型算出的热力学量的 (1.17) 式也就失去意义. 决定正常密度的 (1.22) 式也不复成立. 然而关于玻色液体内有效密度不同的两种运动的概念, 却与前面所讨论的元激发图像没有直接联系, 可以认为它还适用于比较高的温度. 流体力学方程实际上只是守恒定律的结果, 并可从后者导出 (参看 [8, 9]), 因而也还成立. 随着温度升高, 正常密度 ρ_{n} 也不断增大, 一直达到和 ρ 相等. 在这一温度下氦发生相变 (所谓 λ 点). 相变点下可能有超流, 相变点上不可能有超流, 玻色液体的流体力学也就与普通液体无异.

从 $\rho_{\mathrm{n}} \neq \rho$ 到 $\rho_{\mathrm{n}} = \rho$ 的过渡, 原则上可以是连续的, 也可以是跃变的. 实验表明, 氦的相变是二级相变, 不吸收或放出潜热 (见 [11], §130). 由此得知, 正常密度 ρ_{n} 随温度连续增加, 最后在相变点达到 ρ 值.

温度远高于 λ 点时, 氦不具有任何异于普通液体的特性. 但在 λ 点附近却有理由看到许多本质上新的性质. 系统的各种特征量, 首先是热力学函数在二级相变点附近的行为, 是现在尚未解决的问题, 这是凝聚态物理中最有意义的课题之一.

§2　费米液体

§2.1　费米液体中的激发

现在讨论由遵从费米统计的相互作用粒子组成的系统. 我们只限于自旋为 1/2 的情况, 因为实际上能涉及的也仅是液体氦 He^3、金属中的电子或者核物质. 自旋为 1/2 的有相互作用的费米粒子的系统, 我们将称之为费米液体.

费米液体低激发态的理论是由朗道[12,13] 建立的. 这个理论的基础, 是假定费米液体的激发谱可以按理想费米气体能谱同样原则构成. 因此在开始讨论费米液体之前, 有必要把已知的费米气体激发态图像和元激发概念联系起来.

$T = 0$ 时理想费米气体处于基态, 大家熟知, 这时粒子占据了全部动量小于某个边界值 p_0 的量子态, 而全部动量更大的态是空着的. 在动量空间里被占满的态形成半径为 p_0 的球, 称为费米球. 决定 p_0 的条件: $p < p_0$ 的状态数应等于粒子数

$$p_0 = \left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{1/3}, \tag{2.1}$$

这里 N/V 是粒子密度.

激发态粒子按动量的分布就与上面不同了. 不难看出, 可以逐个将粒子从费米球内移到球外而构成各种激发态. 每个这种元作用所构成的态与原来状态的差别在于 $p > p_0$ 的状态中多了一个粒子, 而 $p < p_0$ 的状态中多了一个 "空穴". 这些 $p > p_0$ 的粒子和 $p < p_0$ 的空穴显然也就起着理想费米气体元激发的作用. 它们具有自旋 1/2, 只能成对地出现或消失, 对于低激发态它们的动量值在 p_0 附近. 这些元激发的能量最好从费米能级 (即 $p_0^2/2m$) 算起. 这时粒子型激发的能量从费米能级向上算, 而空穴能量向下算, 即粒子能量是

$$\xi = \frac{p^2}{2m} - \frac{p_0^2}{2m} \approx v(p - p_0), \quad \text{其中} \quad v = \frac{p_0}{m},$$

而空穴能量等于

$$-\xi = \frac{p_0^2}{2m} - \frac{p^2}{2m} \approx v(p_0 - p).$$

朗道的理论假定费米液体的低激发态与费米气体的低激发态极为相似. 它也能借助自旋为 1/2、动量在 p_0 附近的元激发的集合来描述. 朗道理论中的实质性假定是: p_0 的数值与液体粒子密度的关系也由 (2.1) 式给出, 即与理想气体一致 (这个论断的证明见本书第 4 章). 与气体一样, 液体内的元激发也分两类 —— 动量大于 p_0 的 "粒子" 和动量小于 p_0 的 "空穴", 它们只能成对地出现与消失. 由此可见, "粒子" 数必定等于 "空穴" 数.

尽管费米液体和理想费米气体的元激发十分相似, 二者之间还有重要差别, 它来自液体内元激发的相互作用. 这种相互作用的最明显的表现是存在着超流的 (或超导的, 如果所讨论的是金属内的电子) 费米液体. 不难看出, 上述的费米气体的元激发谱并不导致超流. 事实上, 为了使费米气体激发, 即形成 $p > p_0$ 的 "粒子" 和 $p < p_0$ 的 "空穴", 只需要任意小的能量. 同时这个粒子空穴对总动量却达到 $2p_0$. 因此

$$\left(\frac{\varepsilon}{p}\right)_{\min} = 0,$$

从公式 (1.18) 看出临界速度为零, 故不存在超流. 出现超流是因为准粒子间一定类型的相互作用使能谱根本改变. 原来这种费米液体的激发能不得小于一定数值. 在这种情况下, 通常说, 元激发谱中存在着能隙.

我们暂不研究超流费米液体 (这将在第 7 章中详加论述), 先转而探讨正常费米系统元激发的性质.

元激发间的相互作用, 使得元激发概念本身只在边界动量 p_0 附近才有意义. 前面已经指出过, 只有元激发衰减远小于本身能量时, 才能使用这个概念. 衰减的数值或者取决于一个元激发分成几个的裂变过程, 或者决定于它们之间的碰撞. 如果激发能远高于液体温度, 则以裂变过程为主, 衰减数值正比于裂变概率. 考虑到

能量与动量守恒, 以及 "粒子" 和 "空穴" 数目相等, 不难看出①, 裂变概率正比于 $(p-p_0)^2$. 另外, 激发能正比于 $(p-p_0)$. 由此清楚看出, 仅仅对于动量在 p_0 附近的元激发衰减才是较小的.

如果讨论温度大于零时的平衡费米液体, 则 "粒子" 和 "空穴" 的平均能的数量级为 T. 由于元激发遵从费米统计, 其数目也和 T 正比. 不难看出, 对于这种元激发裂变概率和散射概率是同数量级的②, 二者都正比于 T^2. 由此可知, 只有在足够低的温度下才能用元激发描述费米液体.

利用一个基于和费米气体相似性的模型, 可以使费米液体能谱的性质显得更直观些. 试设想液体基态相当于准粒子的集合, 它们填满了边界动量为 p_0 的费米球. 关系式 (2.1) 可以解释为准粒子数目等于液体粒子数. 这个模型中的元激发完全和 "粒子" 与 "空穴" 的说法一致. "粒子" 和 "空穴" 数相等在这个模型中就表现为准粒子数守恒. 如果引入准粒子分布函数 $n(p)$, 则它的变化应满足条件

$$\int \delta n \mathrm{d}\boldsymbol{p} = 0. \tag{2.2}$$

这里描述的气体模型对进一步研究费米液体的性质也是颇为方便的. 但是必须记住, 准粒子概念本身仅仅在费米球面附近才有意义. 因此, 当远离费米面的准粒子有重要作用时, 从气体模型得到的一切性质都不适用于实际费米液体.

§2.2　准粒子能量

除了上述关于元激发性质的假定, 朗道理论还根据另一条关于准粒子相互作用性质的假定. 这就是假定此种相互作用可以借助于来自周围准粒子的作用在给定

① 最好利用与费米气体的相似性估计概率. 讨论下述过程: 动量为 $\boldsymbol{p}_1(p_1>p_0)$ 的粒子和费米球内动量为 $\boldsymbol{p}_2(p_2<p_0)$ 的粒子作用. 结果得到两个粒子, 其动量为 $\boldsymbol{p}_3$ 和 $\boldsymbol{p}_4=\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_3; p_3, p_4>p_0$. 这样, 动量为 $\boldsymbol{p}_1$ 的粒子 "裂变" 成动量为 $\boldsymbol{p}_3$ 和 $\boldsymbol{p}_4$ 的两个粒子以及动量为 $\boldsymbol{p}_2$ 的空穴. 这一过程的总概率正比于

$$\int \delta(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2\mathrm{d}\boldsymbol{p}_3,$$

$$p_2<p_0,\quad p_3>p_0,\quad p_4=|\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_3|>p_0.$$

其中, 不难看出, 当 $p_1-p_0\ll p_0$ 时, 矢量 $\boldsymbol{p}_2$ 和 $\boldsymbol{p}_3$ 的模的变化范围是

$$p_0<p_3<p_1+p_2-p_0,\quad 2p_0-p_1<p_2<p_0,$$

$\boldsymbol{p}_1$ 与 $\boldsymbol{p}_2$ 之间的夹角可以任意取. $\boldsymbol{p}_3$ 与 $\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2$ 的夹角由能量守恒条件决定, 对这个角度积分就取消了 δ 函数. 剩下的积分对 $\mathrm{d}p_2\mathrm{d}p_3$ 在 $p_2\approx p_3\approx p_0$ 附近取, 就得到因子 $(p_1-p_0)^2$.

② 对于近乎理想的费米气体, 这两个过程实质上是同一现象, 相应的概率正比于

$$\int \delta(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)n(\varepsilon_2)[1-n(\varepsilon_3)][1-n(\varepsilon_4)]\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2\mathrm{d}\boldsymbol{p}_3.$$

形式上可以认为 $|\boldsymbol{p}_2|>p_0$ 相当散射, 而 $|\boldsymbol{p}_2|<p_0$ 相当裂变. 当 $\varepsilon_1-\mu\sim T$ 时, 两种情况下积分都正比于 T^2.

准粒子上的自洽场描述.

这时系统的能量已不等于个别准粒子能量的总和, 而成为它们的分布函数的泛函. 个别准粒子的能量自然要定义作总能量对分布函数的变分导数:

$$\delta E = 2V \int \varepsilon \delta n \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}, \tag{2.3}$$

因子 2 来自对自旋投影的求和.

从这个式子看出, ε 正是增加一个动量为 $\boldsymbol{p}$ 的准粒子所引起的系统的能量变化①.

在 (2.2) 和 (2.3) 式中假设了准粒子的分布是空间均匀的. 实际上这条限制归结为: 空间不均匀只能在远大于准粒子波长的距离上出现, 既然我们只讨论费米能级附近的元激发, 其动量很接近 p_0, 则相应的波长数量级为原子间距离. 这样, 空间均匀的要求实际上未带来任何限制.

有磁场存在时以及对于铁磁系统, 分布函数应当看成作用于自旋角标的算符 (密度矩阵)——$n_{\alpha\beta}$. 和 $n_{\alpha\beta}$ 一样, 准粒子能量也成为算符 $\varepsilon_{\alpha\beta}$. 当没有磁场, 而且系统为非铁磁的, 算符 $n_{\alpha\beta}$ 和 $\varepsilon_{\alpha\beta}$ 都正比于单位矩阵. 因此在一般情形下公式 (2.3) 应当写成

$$\delta\left(\frac{E}{V}\right) = \sum_{\alpha,\beta} \int \boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha\beta} \delta n_{\beta\alpha} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}.$$

这个表达式最好缩写为

$$\delta\left(\frac{E}{V}\right) = \mathrm{Tr} \int \boldsymbol{\varepsilon} \delta \boldsymbol{n} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}, \tag{2.4}$$

这时只须将 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 理解为相应的矩阵; 符号 Tr 和通常一样, 表示矩阵 ε 和 δn 乘积的对角元之和②.

(2.4) 式所定义的准粒子能量, 使得平衡分布函数确是费米函数. 为了证明这一点, 最好利用熟知的熵的表达式③

$$\frac{S}{V} = -\mathrm{Tr} \int [\boldsymbol{n}\ln\boldsymbol{n} + (1-\boldsymbol{n})\ln(1-\boldsymbol{n})] \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}. \tag{2.5}$$

这个式子纯粹来自排列组合, 它之所以适用于费米液体, 是因为假定了准粒子能级分类与理想气体能级分类一致. 由熵最大条件并注意粒子数和能量守恒,

$$\delta N = 0, \quad \delta E = 0,$$

① $n(\boldsymbol{p})$ 是准粒子的动量分布, 所以 $2\int n(\boldsymbol{p}) \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}$ 就是单位体积内的准粒子数.

② 矩阵的阵迹符号在德、俄文献中用 Sp, 本书采用英文文献中常用的 Tr. —— 译者注

③ 与通常一样, $\mathrm{Tr}\ln n$ 表示对角元 $n_{\alpha\alpha}$ 的对数之和.

可以对 δn 变分而求得分布函数

$$n(\varepsilon)=n_{\mathrm{F}}(\varepsilon)=\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}}+1}. \tag{2.6}$$

这里能量 ε 是 n 的泛函, 所以实际上公式 (2.6) 是 $n(\varepsilon)$ 的很复杂的隐函数定义.

由于是 n 的泛函, ε 还与温度有关. 这个关系可以表示如下. $T=0$ 时准粒子的平衡能量记为 $\varepsilon^{(0)}(\boldsymbol{p})$, 当偏离平衡不多而且温度不高时能量表达式是

$$\begin{aligned}\varepsilon(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\sigma})&=\varepsilon^{(0)}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\sigma})+\delta\varepsilon(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\sigma})\\&=\varepsilon^{(0)}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\sigma})+\mathrm{Tr}_{\sigma'}\int f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\sigma};\boldsymbol{p}',\boldsymbol{\sigma}')\delta n(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{\sigma}')\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}'}{(2\pi)^3}.\end{aligned} \tag{2.7}$$

这是 $\delta n=n-n_{\mathrm{F}}(T=0)$, 而算符 f 与两个准粒子的动量和自旋算符有关. (2.7) 式的记法表示了其中各量的矩阵性质. 我们已讲过, ε 和 n 是对自旋变量的矩阵. 为了强调出这一点, 特地将它们写成 $\varepsilon(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\sigma}),n(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\sigma})$, 这里 $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$ 是熟知的泡利矩阵, 它们和准粒子自旋算符 $\boldsymbol{s}$ 的关系是 $\boldsymbol{s}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$. 算符 $\boldsymbol{f}$ 既是 (2.7) 式左面的自旋变量的矩阵, 又是 (2.7) 式右面积分符号下 δn 算符的自旋变量的矩阵. (2.7) 式最详细的写法是

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p})=\varepsilon^{(0)}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p})+\int f_{\alpha\beta;\gamma\delta}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}')\delta n_{\delta\gamma}(\boldsymbol{p}')\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}'}{(2\pi)^3}.$$

这个公式说明了符号 $f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\sigma};\boldsymbol{p}',\boldsymbol{\sigma}')$ 的意义.

这样定义的函数 f 是单位体积能量对 δn 的二阶变分导数 (试比较 (2.7) 和 (2.4) 式), 因此它对于 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{p}',\boldsymbol{\sigma}'$ 的置换是对称的. 函数 f 是费米液体很重要的特征量. 我们以后 (见第 4 章) 会看到, 它与两个准粒子的零角散射振幅有关.

函数 f 与自旋变量的关系可一般地表示为

$$f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\sigma};\boldsymbol{p}',\boldsymbol{\sigma}')=\varphi(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}')+\sigma_i\sigma'_k\zeta_{ik}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'). \tag{2.8}$$

如果自旋相互作用来自交换①, 则此式第二项的形状为 $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\sigma}')\zeta(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}')$.

无磁场存在时准粒子能量与自旋无关. (2.7) 式中的函数 $\varepsilon^{(0)}$ 只依赖于 p 并可按 $p-p_0$ 展开:

$$\xi(p)=\varepsilon^{(0)}(p)-\mu(0)=v(p-p_0), \tag{2.9}$$

这里 $\mu(0)$ 是 $T=0$ 时的化学势, 而 v 是常数. v 是费米面上元激发的速度, 它可写成

$$v=\frac{p_0}{m^*}, \tag{2.10}$$

① 通常粒子间与自旋有关的相互作用分成几类: 与全同粒子可以置换有关的交换作用; 由运动着的磁矩与电场的相对论作用导致的自旋轨道作用; 磁矩间的直接磁作用. 交换作用常大大超过其他各种作用. 交换作用的特点是, 它对于粒子系统总动量矩在空间的转动是不变的. 标量积 $(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}')$ 正好具有这种性质.

式中 m^* 是有效质量. 朗道[12] 证明, m^* 和 f 之间存在着一定关系.

单位液体体积的动量就等于质量通量, 让我们把这个简单事实写成关系式. 费米液体单位体积的动量显然等于准粒子动量, 也就是等于

$$2\int \boldsymbol{p}n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3},$$

另外, 由于假定了费米液体粒子数和准粒子数相等, 液体粒子通量就等于准粒子通量, 即

$$2\int \boldsymbol{v}n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3},$$

式中 $\boldsymbol{v}$ 为准粒子速度. 质量通量密度由此式乘液体原子质量 m 而得. 注意到 $\boldsymbol{v}$ 按定义等于 $\partial\varepsilon/\partial\boldsymbol{p}$, 我们把动量与质量通量相等的条件写为

$$\int \boldsymbol{p}n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} = m\int \frac{\partial\varepsilon}{\partial\boldsymbol{p}}n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}. \tag{2.11}$$

在 (2.11) 式中对 n 变分, 并注意到这时能量变化与 δn 的关系是 (2.7) 式, 后者在没有磁场存在时 (即 n 与 ε 都与自旋无关) 可以写成

$$\delta\varepsilon = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}_\sigma\mathrm{Tr}_{\sigma'}\int f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\sigma};\boldsymbol{p}',\boldsymbol{\sigma}')\delta n'\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}'}{(2\pi)^3},$$

由此得到

$$\begin{aligned}\int \frac{\boldsymbol{p}}{m}\delta n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} &= \int \frac{\partial\varepsilon}{\partial\boldsymbol{p}}\delta n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\\ &\quad+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}_\sigma\mathrm{Tr}_{\sigma'}\int n\delta n'\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{p}}f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\sigma};\boldsymbol{p}',\boldsymbol{\sigma}')\mathrm{d}\boldsymbol{p}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}'}{(2\pi)^6}.\end{aligned}$$

在第二个积分里对 $\boldsymbol{p}$ 作分部积分并将变量置换 $\boldsymbol{p}\boldsymbol{\sigma}\leftrightarrows\boldsymbol{p}'\boldsymbol{\sigma}'$:

$$\begin{aligned}\int \frac{\boldsymbol{p}}{m}\delta n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} &= \int \frac{\partial\varepsilon}{\partial\boldsymbol{p}}\delta n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\\ &\quad-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}_\sigma\mathrm{Tr}_{\sigma'}\iint \delta n f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\sigma};\boldsymbol{p}',\boldsymbol{\sigma}')\frac{\partial n'}{\partial\boldsymbol{p}'}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}\mathrm{d}\boldsymbol{p}'}{(2\pi)^6}.\end{aligned}$$

由于 δn 的任意性, 由此立即得出

$$\frac{\boldsymbol{p}}{m} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\boldsymbol{p}} - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}_\sigma\mathrm{Tr}_{\sigma'}\int f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\sigma};\boldsymbol{p}',\boldsymbol{\sigma}')\frac{\partial n'}{\partial\boldsymbol{p}'}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}'}{(2\pi)^3}.$$

$T=0$ 时能量 ε 在费米面附近有如 (2.9) 式, 而

$$\frac{\partial n'}{\partial\boldsymbol{p}'} \approx -\frac{\boldsymbol{p}'}{p'}\delta(p'-p_0).$$

注意液体是各向同性的, 因而 f 只与 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{p}'$ 间的夹角 χ 有关, 我们得到

$$\frac{1}{m^*}=\frac{1}{m}-\frac{p_0}{2(2\pi)^3}\mathrm{Tr}_\sigma\mathrm{Tr}_{\sigma'}\int f(\chi)\cos\chi\mathrm{d}\Omega, \tag{2.12}$$

其中 $f(\chi)$ 是 f 在 $|\boldsymbol{p}|=|\boldsymbol{p}'|=p_0$ 时的值. (2.12) 式中按矢量 $\boldsymbol{p}'$ 的方向积分. 这个关系式给出了液体原子质量与准粒子有效质量的关系. 除了很小的修正项外, 它对于足够低的温度也还成立.

费米液体的比热通过 m^* 表示, 其公式和普通费米气体一样. 事实上我们从 (2.3) 式就可以得出单位体积的比热

$$C_V=\left(\frac{\partial(E/V)}{\partial T}\right)_{N,V}=2\int\varepsilon\left(\frac{\partial n}{\partial T}\right)_N\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}. \tag{2.13}$$

不难证明, 如果在积分中将 ε 换成 $\varepsilon^{(0)}$, 相对误差的数量级为 $[T/\mu(0)]^3$. 这样, 在对 T 的线性近似下我们就得到了普通的气体公式

$$C_V=\frac{1}{3}m^*p_0T. \tag{2.14}$$

低温下的熵也由同样的公式表达①.

§2.3　声波

和在玻色液体中一样, 声波在费米液体中的传播也有许多特点 (虽然是另一些不同于玻色液体中的特点). 如果讨论频率一定的声波, 则当温度不太低时, 它的传播遵从普通的流体力学规律. 声的衰减这时正比于元激发的碰撞时间 τ. 温度降低, 碰撞概率也减少, 它正比于费米分布表面延展宽度的平方, 因此碰撞时间将按 T^{-2} 律增长. 在 $\tau\sim\dfrac{1}{\omega}$ 的温度下, 声波就不能传播了.

但是继续降低温度时, 又出现了传播声波的可能性. 然而一般说来, 它具有另一速度, 而且也不再是简单的疏密波. 朗道[13] 预言了这个现象, 并称之为 "零声". 由于确定声的本质时, 重要的只是 ω 和 τ 的关系, 这两种声可以分别表述为低频声 ($\omega\tau\ll1$) 和高频声 ($\omega\tau\gg1$).

温度不太低, 条件 $\omega\tau\ll1$ 成立时, 声速和平常情况一样决定于压缩率. 可以证明, 它和函数 f 有本质性联系[12]. 压缩率通过化学势对粒子数的导数 $\dfrac{\partial\mu}{\partial N}$ 表达最为方便. 因为化学势仅与 N/V 有关, 故得

$$\frac{\partial\mu}{\partial N}=-\frac{V^2}{N^2}\frac{\partial P}{\partial V}=\frac{1}{N}\frac{\partial P}{\partial(N/V)}, \tag{2.15}$$

① 可以利用 (2.13) 式从比热的实验数据求 m^*. 根据 (2.1) 式, 动量 p_0 由液体温度决定, 对液体 He^3 可得 (见 [14, 15]): $p_0=0.76\times10^8\mathrm{cm}^{-1}, m^*=2m_{\mathrm{He}^3}$.

其中 P 为压力. 由此得出 $\dfrac{\partial\mu}{\partial N}$ 与 u^2 的关系:

$$u^2=\frac{\partial P}{\partial\rho}=\frac{\partial P}{\partial\left(\dfrac{mN}{V}\right)}=\frac{1}{m}N\frac{\partial\mu}{\partial N}. \tag{2.16}$$

导数 $\dfrac{\partial\mu}{\partial\rho}$ 的算法如下. 因为 $\mu\approx\varepsilon(p_0)$, 所以 p_0 的变化和函数 $\varepsilon(p)$ 本身形状的变化都导致 μ 的改变:

$$\delta\mu=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}_\sigma\mathrm{Tr}_{\sigma'}\int f\delta n'\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}'}{(2\pi)^3}+\frac{\partial\varepsilon^{(0)}(p_0)}{\partial p_0}\delta p_0. \tag{2.17}$$

(我们考虑无磁场的情形). 由 (2.1) 式得 δN 与 δp_0 的关系

$$\delta N=\frac{1}{\pi^2}p_0^2\delta p_0 V.$$

(2.17) 式积分内重要的仅是 δn 在费米面附近的变化, 故可对动量的绝对值积分. 这给出

$$\int f\delta n'\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}'}{(2\pi)^3}=\frac{\delta N}{8\pi V}\int f\mathrm{d}\Omega,$$

从而

$$\frac{\partial\mu}{\partial N}=\frac{1}{16\pi V}\mathrm{Tr}_\sigma\mathrm{Tr}_{\sigma'}\int f\mathrm{d}\Omega+\frac{\pi^2}{p_0m^*V}. \tag{2.18}$$

利用有效质量的表达式 (2.12) 以及 (2.1) 式, 得到

$$u^2=\frac{p_0^2}{3m^2}+\frac{1}{6m}\left(\frac{p_0}{2\pi}\right)^3\mathrm{Tr}_\sigma\mathrm{Tr}_{\sigma'}\int f(\chi)(1-\cos\chi)\mathrm{d}\Omega. \tag{2.19}$$

这样, 在 $\omega\tau\ll1$ 的频段内, 声速由 (2.19) 式决定. 它和无相互作用时的声速 $u^2=\dfrac{p_0^2}{3m^2}$ 不同.

为了研究 $\omega\tau\gg1$ 的频段内声的传播, 我们利用普通的输运方程

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial n}{\partial\boldsymbol{r}}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\boldsymbol{p}}-\frac{\partial n}{\partial\boldsymbol{p}}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\boldsymbol{r}}=I(n), \tag{2.20}$$

其中 $I(n)$ 是碰撞积分. 偏离平衡不大时分布函数可写成

$$n=n_\mathrm{F}+\delta n,$$

其中 n_F 为平衡函数, 而 δn 为小修正项, 它是时间的周期函数

$$\delta n\sim\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{kr}-\omega t)}.$$

碰撞积分的数量级为

$$I(n) \sim \frac{\delta n}{\tau},$$

它与 $\dfrac{\partial n}{\partial t}$ 相比可以略而不计. 使方程式 (2.20) 线性化时还要注意, ε 是 n 的泛函, 所以导数 $\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial \boldsymbol{r}}$ 不等于零. 由 (2.7) 式得

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \boldsymbol{r}} = \mathrm{Tr}_{\sigma'} \int f \frac{\partial \delta n'}{\partial \boldsymbol{r}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}'}{(2\pi)^3}.$$

考虑到这一点后, 我们就得到

$$(\boldsymbol{kv} - \omega)\delta n - \boldsymbol{kv} \frac{\partial n_{\mathrm{F}}}{\partial \varepsilon} \mathrm{Tr}_{\sigma'} \int f \delta n' \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}'}{(2\pi)^3} = 0. \tag{2.21}$$

从这个方程式看出, δn 正比于 $\dfrac{\partial n_{\mathrm{F}}}{\partial \varepsilon} \approx -\delta(\varepsilon - \mu)$. 引入符号 $\delta n = \dfrac{\partial n_{\mathrm{F}}}{\partial \varepsilon} \nu$, 我们就得到

$$(\boldsymbol{kv} - \omega)\nu + \boldsymbol{kv} \frac{1}{2} \mathrm{Tr}_{\sigma'} \int F \nu' \frac{\mathrm{d}\Omega'}{4\pi} = 0, \tag{2.22}$$

其中

$$F(\chi) = f(\chi) \frac{p_0 m^*}{\pi^2}. \tag{2.23}$$

如果取 $\boldsymbol{k}$ 作极轴并引入符号 $\tilde{u} = \dfrac{\omega}{k}$ —— 波的传播速度, $s = \dfrac{\tilde{u}}{v}$, 则方程式 (2.22) 变为

$$(s - \cos\theta)\nu(\theta, \varphi, \boldsymbol{\sigma}) = \cos\theta \, \frac{1}{2} \, \mathrm{Tr}_{\sigma'} \int F(\chi) \nu(\theta', \varphi', \boldsymbol{\sigma}') \frac{\mathrm{d}\Omega'}{4\pi}. \tag{2.24}$$

从方程式 (2.24) 可以看出普通声波和费米液体内 $\omega\tau \gg 1$ 时所传播的声波的基本差别. 第一种情况下在液体作为整体静止不动的坐标系中, 分布函数仍是各向同性的. 这就是说, 费米球的半径改变, 同时其中心相对 $\boldsymbol{p}=0$ 点发生振动. 第二种情况下分布函数的变化更为复杂, 费米面不再是球形. 费米面的改变由函数 v 决定.

先讨论方程式 (2.24) 与自旋无关的解. 这时从整个函数 $F(\chi)$ 中只剩下与 (2.8) 式中函数 φ 有关的部分 $\Phi(\chi)$. 先看最简单的情形, 即 $\Phi = \Phi_0 =$ 常数. 由方程式 (2.24) 得出:

$$\nu = \frac{\mathrm{const} \cdot \cos\theta}{s - \cos\theta} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{kr} - \omega t)}. \tag{2.25}$$

我们即将看到, s 应大于 1. 这就是说, 费米面沿运动方向伸长.

将 (2.25) 式代入 (2.24) 式并令 $F = \Phi_0$, 求出决定 s 的方程式. 积分后有

$$\frac{s}{2} \ln \frac{s+1}{s-1} - 1 = \frac{1}{\Phi_0}. \tag{2.26}$$

由此看出, 如果 s 是实数 (这相当于非衰减波), 则它应当大于 1, 即

$$\tilde{u} > v. \tag{2.27}$$

从方程式 (2.24) 还看出, 这个条件对于任意的函数 Φ 都是成立的. 其次, 由于方程式 (2.26) 左面总是正的, 显然零声的存在条件就是 Φ_0 大于零.

如果 Φ_0 很大, s 也很大. 从方程 (2.26) 得到当 $\Phi_0 \to \infty$ 时, $s \to \sqrt{\dfrac{\Phi_0}{3}}$. 相反, 当 $\Phi_0 \to 0$, $s \to 1$, 即 $\tilde{u} \to v$. 这是接近于理想费米气体的情况.

不难看出, $\Phi \to 0$ 时 s 趋向于 1. 这个结论与 Φ 的形状无关. 其实从 (2.24) 式就可以得出 $\Phi \to 0, s \to 1$, 而 v 只在 θ 很小的范围内不为零. 由 (2.19) 式, 在近似理想的费米气体中 $u^2 = \dfrac{p_0^2}{3m^2}$, 即 $u \approx \dfrac{v}{\sqrt{3}} \approx \dfrac{\tilde{u}}{\sqrt{3}}$. 因此零声速为普通声速的 $\sqrt{3}$ 倍. 应当指出, 在近似理想的费米气体这个极限情况下, τ 大为增加, 结果相当于零声的频段展宽, 相反, 普通声波只能存在于频率很低的范围内.

在任意函数 $\Phi(\chi)$ 的一般情况下, 方程式 (2.24) 已不能这样简单地求解. 如果将 $\nu(\theta, \varphi)$ 和 $\Phi(\chi)$ 按球谐波展成级数, 则相应于不同方位数 m 的球函数 (即因子 $e^{im\varphi}$) 的振幅所满足的方程式也互相分离. 这时数 m 不超过函数 $\Phi(\chi)$ 按拉格朗日多项式展开所得表达式 $\Phi(\chi) = \sum_l \Phi_l P_l(\cos\chi)$ 中最大角标 l. 这样我们就得到结论: 在一般情况下可以产生几种 "零声", 其分布函数在垂直于传播方向 $\boldsymbol{k}$ 的平面中的变化, 并不是各向同性的. 和最简单的情况一样, 出现这些振动的可能性取决于函数 Φ 的形状. 例如当 $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1\cos\chi$ 时, 出现 $v \sim e^{i\varphi}$ 的振动的条件是 $\Phi_1 > 6$.

须要注意, 在这种波里并不发生液体的疏密变化.

当函数 f 与自旋有关时, 液体中还能传播一些特别的波, 它们可称为自旋波. 例如, 设想如下函数 $F(\chi)$(自旋的交换作用):

$$F(\chi) = \Phi(\chi) + Z(\chi)(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}'). \tag{2.28}$$

这时除了与自旋无关的解以外, 形状如下的函数 ν 也满足方程式 (2.24):

$$\nu = \boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\sigma}, \tag{2.29}$$

其中 $\boldsymbol{\nu}$ 是未知矢量. 决定函数 $\boldsymbol{\nu}$ 的方程是

$$(s - \cos\theta)\boldsymbol{\nu} = \cos\theta \int Z\boldsymbol{\nu}' \frac{d\Omega'}{4\pi}. \tag{2.30}$$

矢量 $\boldsymbol{\nu}$ 的分量的方程与和自旋无关的 $\boldsymbol{v}$ 的方程相比, 只是把 Φ 换成了 Z. 所以全部进一步地讨论对自旋波也是成立的. 可以证明[12], Z 按球谐波展开的零次项决定

费米液体的磁化率, 对于液体 He^3, 它是负数, 这很可能是说明, 自旋波不能在这种液体中传播.

金属中的电子是比较特殊的情形. 显然, 仅仅有电子密度变化而晶格不变的波, 是不能在金属中传播的. 这种波将造成未被补偿的电荷, 因此激发这种振动实际上要求很大的能量. 很可能这是意味着, 在库伦力的情况下, 函数 f 包含着一个与角度无关的为无限大的常数 (参看 §22). 根据 (2.26), 这时 $s=\infty$. 然而这些讨论只适用于密度振动; 电子液体中在一定条件下可能传播 $v\sim \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}(m\neq 0)$ 的高阶 "声" 以及与密度变化无关的自旋波.

$T=0$ 时可能有声波传播, 就是说明在液体的激发谱中存在着玻色型的声子支, 其能量与动量呈线性关系 $\varepsilon_i=u_i p$. 但是声子所导致的热力学量的修正项, 含有 T 的更高次幂 (比热 $\sim T^3$), 这在所讨论的近似中没有计入.

以后 (第 4 章) 要证明, 上述理论的基本原则, 可以从具有任意短程相互作用力的费米粒子体系的微观讨论中推导出.

用以上形式陈述的朗道理论, 首先是适用于液体 He^3 在低温下的性质. 粒子间库伦相互作用的存在, 引起一系列特性. 其中有一些将在 §22 中借简单模型说明. 与普通费米液体差得更远的, 是超流 (超导) 费米系统. 超导体的性质将在第 7 章中讨论. 最后还应当指出, 铁磁性的费米系统也与上述模型不同. A. A. Abrikosov 和 I. E. Dzyaloshinski 的论文[16] 研究了这类费米液体的性质, 读者可以参阅.

§3 二次量子化

前面叙述的玻色和费米液体的理论, 在一定意义上具有唯象的性质. 它是根据一些有关温度元激发谱的假设的. 以后我们要从事这一理论的微观论证. 本节中先叙述通常称为二次量子化方法的辅助数学工具①.

设有 N 个没有相互作用的粒子组成的系统, 这些粒子可能处于某些波函数为 $\varphi_1(\xi),\varphi_2(\xi),\cdots$ 的状态中, 这些波函数构成完全正交归一函数系. ξ 表示描述粒子状态的任何变量, 通常用于坐标和自旋投影. 显然可以给定处于状态 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots$ 中的粒子数, 来代替用完全波函数对系统的描述. 这相当于变换到新的表象, 即所谓二次量子化表象. 在这个表象中数字 $N_1,N_2,\cdots$ 起着变量的作用.

先从遵守玻色统计的粒子开始讨论. 大家知道, 玻色粒子系统的完全波函数, 对于不同粒子间的变量置换是对称的. 不难验证, 对应于填充数 $N_1,N_2,\cdots$ 的波函数

① 我们以为在此简述一下二次量子化方法 (参阅 [17]) 是有益的, 因为它是以后发展的全部工具的基础. 译者补注: 可参看中文版 [83] 第 §64 和 §65 节.

是

$$\Phi_{N_1N_2}\cdots=\left(\frac{N_1!N_2!\cdots}{N!}\right)^{1/2}\sum_{p}\varphi_{p_1}(\xi_1)\varphi_{p_2}(\xi_2)\cdots\varphi_{p_N}(\xi_N);\tag{3.1}$$

这里 p_i 是状态编号, 按照 p_i 的一切可能的置换求和. 求和符号前面的因子保证归一,

$$\int|\Phi|^2\prod_i\mathrm{d}\xi_i=1.$$

我们将把 $\Phi_{N_1N_2\cdots}$ 看做变量 N_i 的函数.

设 $F^{(1)}$ 是相对于全部粒子都对称的算符, 其形状为

$$F^{(1)}=\sum_a f_a^{(1)},\tag{3.2}$$

其中算符 f_a 只作用于变量为 ξ_a 的函数. 容易看出, 这样的算符作用到函数 $\Phi_{N_1N_2\cdots}$ 上, 或者使其不改变, 或者将它变换为相应于其中一个粒子的状态有变化的另一函数. 因此 $F^{(1)}$ 对函数 (3.1) 的矩阵元的形状是:

对角元

$$\overline{F^{(1)}}=\sum_i f_{ii}^{(1)}N_i,$$

非对角元

$$(F^{(1)})_{N_i-1,N_k}^{N_i,N_k-1}=f_{ik}^{(1)}\sqrt{N_iN_k},\tag{3.3}$$

其中

$$f_{ik}^{(1)}=\int\varphi_i^*(\xi)f^{(1)}\varphi_k(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

算符 $F^{(1)}$ 对数目 N_i 的作用, 可以引入新的算符 a_i 表示; 这些算符使处于状态 i 的粒子数减少一个, 其矩阵元为

$$(a_i)_{N_i}^{N_i-1}=\sqrt{N_i};\tag{3.4}$$

其厄米共轭算符 a_i^+ 显然具有矩阵元:

$$(a_i^+)_{N_i-1}^{N_i}=\left[(a_i)_{N_i}^{N_i-1}\right]^*=\sqrt{N_i},\tag{3.5}$$

即粒子数增加一个. 不难验证, 算符 $F^{(1)}$ 可写成如下形式:

$$F^{(1)}=\sum_{i,k}f_{ik}^{(1)}a_i^+a_k.\tag{3.6}$$

实际上这个算符的矩阵元也和 (3.3) 式相符. 这就是 $F^{(1)}$ 在二次量子化表象中的表达式.

根据公式 (3.4) 和 (3.5), 算符 a_i 和 a_i^+ 的乘积是对角算符:

$$\begin{aligned} a_i^+ a_i &= N_i, \\ a_i a_i^+ &= N_i + 1. \end{aligned} \tag{3.7}$$

从 (3.4), (3.5) 和 (3.7) 式得到算符 a_i 的对易关系:

$$\begin{aligned} [a_i, a_k^+] &= a_i a_k^+ - a_k^+ a_i = \delta_{ik}, \\ [a_i, a_k] &= [a_i^+, a_k^+] = 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

对称化了的算符

$$F^{(2)} = \sum_{a,b} f_{ab}^{(2)} \tag{3.9}$$

的表达式也是类似的, 这时 $f_{ab}^{(2)}$ 作用到 ξ_a 与 ξ_b 的函数上. 在二次量子化表象中算符 $F^{(2)}$ 的形式为

$$F^{(2)} = \sum_{i,k,l,m} f_{lm}^{(2)ik} a_i^+ a_k^+ a_l a_m, \tag{3.10}$$

其中

$$f_{lm}^{(2)ik} = \int \varphi_i^*(\xi_1)\varphi_k^*(\xi_2) f^{(2)} \varphi_l(\xi_1)\varphi_m(\xi_2) \mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\xi_2.$$

对更复杂的算符, 也可依此类推.

试取处于外场中的有相互作用的粒子系统的哈密顿量

$$H = \sum_a H_a^{(1)} + \sum_{a,b} U^{(2)}(\boldsymbol{r}_a, \boldsymbol{r}_b) + \sum_{a,b,c} U^{(3)}(\boldsymbol{r}_a, \boldsymbol{r}_b, \boldsymbol{r}_c) + \cdots, \tag{3.11}$$

其中 $H_a^{(1)} = -\dfrac{\Delta_a}{2m} + U(\boldsymbol{r}_a)$. 根据上述, 在二次量子化表象中,

$$H = \sum_{i,k} H_{ik}^{(1)} a_i^+ a_k + \sum_{i,k,l,m} U_{lm}^{(2)ik} a_i^+ a_k^+ a_l a_m + \cdots. \tag{3.12}$$

如果取哈密顿量 $H_a^{(1)}$ 的本征函数为 φ_i. 则 (3.12) 式第一项成为

$$H_a^{(1)} = \sum_i \varepsilon_i a_i^+ a_i = \sum_i \varepsilon_i N_i. \tag{3.13}$$

在费米统计情况下系统的完全波函数对于诸变数是反对称的. 这就使不相互作用的粒子的填充数只能是 0 与 1, 而波函数形式为

$$\Phi_{N_1 N_2 \cdots} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P (-1)^P \varphi_{p_1}(\xi_1)\varphi_{p_2}(\xi_2)\cdots\varphi_{p_N}(\xi_N), \tag{3.14}$$

这里所有的数 $p_1, p_2, \cdots, p_N$ 是不同的. 符号 $(-1)^P$ 表示, 奇置换在 (3.14) 的和中取 "−" 号, 为了确定起见, 我们令满足如下顺序的一项取 "+" 号:

$$p_1 < p_2 < \cdots < p_N. \tag{3.15}$$

这时 (3.2) 式的算符 $F^{(1)}$ 有矩阵元:

对角元

$$\overline{F^{(1)}} = \sum_i f_{ii}^{(1)} N_i,$$

非对角元

$$(F^{(1)})_{0_i,\ 1_k}^{1_i,\ 0_k} = \pm f_{ik}^{(1)}, \tag{3.16}$$

式中取 "+" 或 "−" 号, 要视状态 i 和 k 之间的状态中的总粒子数是偶数或奇数而定. 引入算符 a_i, 其矩阵元为

$$(a_i)_{1_i}^{0_i} = (a_i^+)_{0_i}^{1_i} = (-1)^{\sum_{l=1}^{i-1} N_l}. \tag{3.17}$$

借助这些算符可以把算符 $F^{(1)}$ 写成 (3.6) 式的形式.

算符 a_i 和 a_i^+ 的乘积等于

$$\begin{aligned} a_i^+ a_i &= N_i, \\ a_i a_i^+ &= 1 - N_i. \end{aligned} \tag{3.18}$$

因此

$$\{a_i, a_i^+\} = a_i a_i^+ + a_i^+ a_i = 1.$$

所有其他的反对易关系等于零, 即

$$\begin{aligned} \{a_i, a_k^+\} &= \delta_{ik}, \\ \{a_i, a_k\} &= \{a_i^+, a_k^+\} = 0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

更复杂的算符, 其中包括哈密顿量, 都可以通过算符 a_i 和 a_i^+, 写成与玻色粒子情形类似的形式.

§4 稀薄玻色气体

量子液体的简单例子是弱非理想气体, 即粒子间相互作用比较弱的气体. 以后我们将看到, 为此必须要求粒子的散射振幅小于平均波长 $\lambda = \dfrac{1}{p}$, 后者对于简并气体在数量级上等于粒子间距离.

在这种条件下, 由于相碰粒子的动量小, 对最初几级近似只考虑 s 散射就够了. 如果 s 散射幅为 a, 则 p 散射幅的数量级约为 $a\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2$①. 因此, 如果在总能量中 s 散射给出数量级由 a/λ 开始的诸项, 则 p 散射给出的各项不低于 $\left(\frac{a}{\lambda}\right)^3$. 由此可知, 直到精确到这些项, 散射可以认为是各向同性的.

以同样的精确度可以忽略三重碰撞, 而且对于费米气体可以证明, 三重碰撞的贡献还要小, 它 $\sim\left(\frac{a}{\lambda}\right)^5$②. 我们将假定, 粒子间的相互作用是相斥的, 即散射幅符号为 "+". 对于玻色气体, 这是因为, 只要存在着吸引力, 即便很弱, 它就无论如何不能在低温下仍是稀薄气体. 对于费米气体, 粒子间的吸引力导致超流. 我们这里暂不讨论这种情形.

本节中将计算稀薄玻色气体的基态能量和能谱 ($T=0$)③. 下一节中讨论稀薄费米气体. 为了简单起见, 我们假定玻色气体粒子自旋为零. 这时相互作用能可写成

$$H_{\text{int}}=\frac{U}{2V}\sum_{\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{p}_3+\boldsymbol{p}_4}a^+_{\boldsymbol{p}_4}a^+_{\boldsymbol{p}_3}a_{\boldsymbol{p}_2}a_{\boldsymbol{p}_1}. \tag{4.1}$$

我们把 U 从求和号中提出, 是因为任意一对粒子间的相互作用都是一样的, 而且散射幅又与角度无关 (s 散射). 在第一级近似下 U 的数值与散射幅的关系为

$$U=\frac{4\pi}{m}a. \tag{4.2}$$

这个等式不难从以下讨论中得到. 根据 s 散射幅的定义 (见 [17], 第 460, 482 页④), 它与两个等同粒子的有效散射截面的关系为 (在质心系统中)

$$\mathrm{d}\sigma=(2a)^2\mathrm{d}\Omega.$$

另外, 可以借助哈密顿量 (4.1) 决定 $\mathrm{d}\sigma$. 在玻恩近似下得到

$$\mathrm{d}\sigma=\left(\frac{m}{4\pi}\right)^2(2U)^2\mathrm{d}\Omega,$$

(见 [17], 第 466 页⑤) 从而得出 (4.2) 式.

① 如果力的作用半径是 r_0, 则由量子力学 (见 [17] 或中文本 [83]§132) 知道, 当 $\lambda\gg r_0$ 时, 动量矩为 l 的散射幅约为 $r_0\left(\frac{r_0}{\lambda}\right)^{2l}$.

② 最后这个论断的根据是, 三个相碰撞费米粒子的波函数应为反对称的. 为此必须要求第三个粒子相对于前两个粒子中自旋投影与它相同的那个具有奇的动量矩. 结果至少要多出来一个因子 $\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2$.

③ 波戈留博夫[18] 首先得到了稀薄玻色气体的能谱, 黄克孙, 杨振宁和 Luttinger[19] 以及 Brueckner 和 Sawada[20] 决定了基态能量. 本节中我们主要依据论文 [18, 20].

④ 可参看中文本 [83] 第 462, 496 页. —— 译者注

⑤ 可参看中文本 [83] 第 470 页. —— 译者注

波戈留博夫证明[18], 当只涉及稀薄玻色气体的基态或低激发态时, 相互作用能算符 (4.1) 式可以大为化简, 结果得以将哈密顿量对角化并求出能谱. 简化的基本思想如下: 理想玻色气体的粒子在基态中处于能量为零的最低能级上, 或者如通常所说的, 处于凝聚体中. 对于稀薄气体, 由于相互作用弱, 其基态与理想气体基态相差不多, 即处于凝聚体中的粒子数远超过处于其他能级上的粒子数: $N-N_0 \ll N_0$, 低激发态也是这样. 因为玻色算符 a_i 的矩阵元等于 $\sqrt{N_i}$, 则很清楚, 我们可以只考虑凝聚体内诸粒子之间以及激发粒子和凝聚体粒子间的相互作用, 而忽略凝聚体外各粒子间的相互作用. 这就是说, 在 (4.1) 式的和中只要保留以下各项:

$$H_{\text{int}} = \frac{U}{2V}\Bigg[a_0^+ a_0^+ a_0 a_0 + \sum_{\boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{0}}(2a_{\boldsymbol{p}}^+ a_0^+ a_{\boldsymbol{p}} a_0 + 2a_{-\boldsymbol{p}}^+ a_0^+ a_{-\boldsymbol{p}} a_0 + a_{\boldsymbol{p}}^+ a_{-\boldsymbol{p}}^+ a_0 a_0 + a_0^+ a_0^+ a_{\boldsymbol{p}} a_{-\boldsymbol{p}})\Bigg]. \tag{4.3}$$

由于 N_0 很大, 我们有理由将算符 a_0^+ 和 a_0 视为普通数而代之以 $\sqrt{N_0}$. 实际上这些算符彼此之间以及与任何其他算符 a_i, a_i^+ 的对易关系给出 1 或 0, 即无论如何都远小于算符 a_0 和 a_0^+ 的矩阵元. 这样我们就得到

$$H_{\text{int}} = \frac{U}{2V}\Bigg[N_0^2 + 2N_0\sum_{\boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{0}}(a_{-\boldsymbol{p}}^+ a_{-\boldsymbol{p}} + a_{\boldsymbol{p}}^+ a_{\boldsymbol{p}}) + N_0\sum_{\boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{0}}(a_{\boldsymbol{p}}^+ a_{-\boldsymbol{p}}^+ + a_{\boldsymbol{p}} a_{-\boldsymbol{p}})\Bigg]. \tag{4.4}$$

系统内的总粒子数可写成

$$N = N_0 + \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{p}\neq 0}(a_{\boldsymbol{p}}^+ a_{\boldsymbol{p}} + a_{-\boldsymbol{p}}^+ a_{-\boldsymbol{p}}). \tag{4.5}$$

由此可将 (4.4) 式中所有的 N_0 通过 N 表示. 在 H_{int} 中保留不低于 N 的一次幂的各项, 再添上动能算符, 就得到如下的哈密顿量:

$$H = \frac{UN^2}{2V} + \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{0}}\Bigg[\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{UN}{V}\right)(a_{\boldsymbol{p}}^+ a_{\boldsymbol{p}} + a_{-\boldsymbol{p}}^+ a_{-\boldsymbol{p}}) + \frac{UN}{V}(a_{\boldsymbol{p}}^+ a_{-\boldsymbol{p}}^+ + a_{\boldsymbol{p}} a_{-\boldsymbol{p}})\Bigg]. \tag{4.6}$$

哈密顿量的最后一项是非对角的. 为使其对角化, 作算符 $a_{\boldsymbol{p}}$ 和 $a_{\boldsymbol{p}}^+$ 的线性变换:

$$a_{\boldsymbol{p}} = \frac{1}{\sqrt{1-A_{\boldsymbol{p}}^2}}(\alpha_{\boldsymbol{p}} + A_{\boldsymbol{p}}\alpha_{-\boldsymbol{p}}^+),$$

$$a_{\boldsymbol{p}}^{+}=\frac{1}{\sqrt{1-A_{\boldsymbol{p}}^{2}}}(\alpha_{\boldsymbol{p}}^{+}+A_{\boldsymbol{p}}\alpha_{-\boldsymbol{p}}). \tag{4.7}$$

新的算符 $\alpha_{\boldsymbol{p}}$ 和 $\alpha_{\boldsymbol{p}}^{+}$ 满足和原来一样的对易关系. 在 (4.6) 式中将 $a_{\boldsymbol{p}}$ 和 $a_{\boldsymbol{p}}^{+}$ 通过 $\alpha_{\boldsymbol{p}}$ 和 $\alpha_{\boldsymbol{p}}^{+}$ 表示, 就得到

$$\begin{aligned}H=&\frac{UN^{2}}{2V}+\sum_{\boldsymbol{p}\neq 0}\frac{1}{1-A_{\boldsymbol{p}}^{2}}\left[\left(\frac{p^{2}}{2m}+\frac{UN}{V}\right)A_{\boldsymbol{p}}^{2}+\frac{NU}{V}A_{\boldsymbol{p}}\right]\\&+\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{p}\neq 0}\frac{1}{1-A_{\boldsymbol{p}}^{2}}\left[\left(\frac{p^{2}}{2m}+\frac{UN}{V}\right)(1+A_{\boldsymbol{p}}^{2})\right.\\&\left.+2\frac{UN}{V}A_{\boldsymbol{p}}\right](\alpha_{\boldsymbol{p}}^{+}\alpha_{\boldsymbol{p}}+\alpha_{-\boldsymbol{p}}^{+}\alpha_{-\boldsymbol{p}})+\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{p}\neq 0}\frac{1}{1-A_{\boldsymbol{p}}^{2}}\left[\left(\frac{p^{2}}{2m}+\frac{UN}{V}\right)2A_{\boldsymbol{p}}\right.\\&\left.+\frac{UN}{V}(1+A_{\boldsymbol{p}}^{2})\right](\alpha_{\boldsymbol{p}}^{+}\alpha_{-\boldsymbol{p}}^{+}+\alpha_{\boldsymbol{p}}\alpha_{-\boldsymbol{p}}).\end{aligned} \tag{4.8}$$

为了使非对角项成为零, 系数 $A_{\boldsymbol{p}}$ 须满足关系式:

$$\left(\frac{p^{2}}{2m}+\frac{UN}{V}\right)2A_{\boldsymbol{p}}+\frac{UN}{V}(1+A_{\boldsymbol{p}}^{2})=0.$$

由此

$$A_{\boldsymbol{p}}=\frac{V}{UN}\left(-\frac{p^{2}}{2m}-\frac{UN}{V}+\sqrt{\left(\frac{p^{2}}{2m}+\frac{UN}{V}\right)^{2}-\left(\frac{UN}{V}\right)^{2}}\right). \tag{4.9}$$

根号前须取 "+" 号, 是因为激发态应具有正能量. 将 (4.9) 式的系数 $A_{\boldsymbol{p}}$ 代入 (4.8) 式就得到

$$\begin{aligned}H=&\frac{UN^{2}}{2V}-\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{p}\neq 0}\left[\left(\frac{p^{2}}{2m}+\frac{UN}{V}\right)-\sqrt{\left(\frac{p^{2}}{2m}+\frac{UN}{V}\right)^{2}-\left(\frac{UN}{V}\right)^{2}}\right]\\&+\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{p}\neq 0}\sqrt{\left(\frac{p^{2}}{2m}+\frac{UN}{V}\right)^{2}-\left(\frac{UN}{V}\right)^{2}}(\alpha_{\boldsymbol{p}}^{+}\alpha_{\boldsymbol{p}}+\alpha_{-\boldsymbol{p}}^{+}\alpha_{-\boldsymbol{p}}).\end{aligned} \tag{4.10}$$

求得的公式由两项构成. 第一项是常数, 第二项是对角算符, 它可以写成

$$\sum_{\boldsymbol{p}\neq 0}n_{\boldsymbol{p}}\varepsilon(\boldsymbol{p}),$$

其中 $n_{\boldsymbol{p}}$ 是相应于算符 $a_{\boldsymbol{p}}$ 的填充数. 当所有的 $n_{\boldsymbol{p}}$ 都等于零时, 能量最低, 因此 $\sum\limits_{\boldsymbol{p}}n_{\boldsymbol{p}}\varepsilon(\boldsymbol{p})$ 是激发能. 这个式子的形状和无相互作用粒子系统的能量与 (3.13) 式一

样. 由此可见, 稀薄玻色气体的低激发态可以用元激发模型描述, 其能谱为①

$$\varepsilon(\boldsymbol{p})=\sqrt{\left(\frac{p^2}{2m}+\frac{UN}{V}\right)^2-\left(\frac{UN}{V}\right)^2}. \tag{4.11}$$

动量很小时有

$$\varepsilon(\boldsymbol{p})\approx\frac{\sqrt{4\pi aN/V}}{m}p, \tag{4.12}$$

这相当于玻色液体谱的声子部分. 动量很大时 $\varepsilon(\boldsymbol{p})$ 就成为自由粒子能量:

$$\varepsilon(\boldsymbol{p})\approx\frac{p^2}{2m}, \tag{4.13}$$

这也和 §2 中的结论一致.

(4.10) 式中第一项显然是玻色液体基态能量. 不难看出, 式中对 $\boldsymbol{p}$ 的求和在动量大时如 $\sum\limits_{\boldsymbol{p}}\dfrac{1}{p^2}$ 一样发散. 这是因为实际上不能把能量按 U 的幂展开. 从 (4.10) 式直接看出, U 是常数就导致能量为无穷大. 这里重要的是, 散射幅 a 乃是有限的小量, 因此可按它将能量展开.

U 和散射幅之间的关系 (4.2) 式并不是精确的, 而是只对一次项成立. 由于我们关心能量中的高次项, (4.2) 式必须加以修正. 讨论凝聚体内两个粒子散射而转入状态 $\boldsymbol{p},-\boldsymbol{p}$. 在微扰论第二级近似下有

$$U-\frac{U^2}{V}\sum_{\boldsymbol{p}\neq0}\frac{1}{p^2/m}=\frac{4\pi a}{m}. \tag{4.14}$$

由此将 U 通过 a 表示出来, 并代入 (4.10) 式, 就得到基态能量

$$\begin{aligned}E=&\frac{2\pi a}{m}\frac{N^2}{V}+\frac{8\pi^2a^2}{m^2}\left(\frac{N}{V}\right)^2\sum_{\boldsymbol{p}\neq0}\frac{1}{p^2/m}\\&-\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{p}\neq0}\left(\frac{p^2}{2m}+\frac{4\pi aN}{mV}\right)\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{4\pi aN/mV}{p^2/2m+4\pi aN/mV}\right)^2}\right].\end{aligned} \tag{4.15}$$

对于大的 p, (4.15) 式收敛. 对动量积分, 得

$$\frac{E}{V}=\frac{2\pi a}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^2\left[1+\frac{128}{15\sqrt{\pi}}a^{3/2}\left(\frac{N}{V}\right)^{1/2}\right]. \tag{4.16}$$

① 应当指出, 上述推导中使用了玻恩近似. 然而实际上公式 (4.11) 借助 (4.2) 式通过散射幅 a 表达后, 不仅在玻恩近似下成立, 而且在 $\dfrac{a}{\lambda}\ll1$ 的一切情况下都成立. 这将在第 5 章中证明. (4.16), (5.20) 和 (5.21) 式也是如此.

注意, 这里是按 $\left[a\left(\frac{N}{V}\right)^{1/3}\right]^{3/2}$ 展开的.

由此式可得声速为

$$u=\sqrt{\frac{V^2}{mN}\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}}=\frac{\sqrt{4\pi aN/V}}{m}. \tag{4.17}$$

这个表达式和能谱声子部分的公式 (4.12) 内 p 的系数应一致, 事实上也正是如此.

本节初已经讲过, 玻色气体的散射幅 a 应是正数. 这也可以从 (4.17) 式看出, 因为如果 $a<0$, 声速就成为虚数 (状态不稳定).

元激发按动量的分布由普通的玻色公式给出:

$$\bar{n}_{\boldsymbol{p}}=\alpha_{\boldsymbol{p}}^{+}\alpha_{\boldsymbol{p}}=\frac{1}{\mathrm{e}^{\varepsilon(\boldsymbol{p})/T}-1}. \tag{4.18}$$

至于玻色液体粒子本身按动量的分布, 则它可由下式算出:

$$\overline{N}_{\boldsymbol{p}}=\overline{a_{\boldsymbol{p}}^{+}a_{\boldsymbol{p}}}.$$

以 (4.7) 式代入, 得

$$\overline{N}_{\boldsymbol{p}}=\frac{\overline{n}_{\boldsymbol{p}}+A_{\boldsymbol{p}}^2(\overline{n}_{\boldsymbol{p}}+1)}{1-A_{\boldsymbol{p}}^2}. \tag{4.19}$$

当然, 此式只适用于 $\boldsymbol{p}\neq 0$. 能量为零的粒子数由下式给出:

$$N_0=N-\sum_{\boldsymbol{p}\neq 0}\overline{N}_{\boldsymbol{p}}.$$

绝对零度时 $\overline{n}_{\boldsymbol{p}}=0$, 因而从 (4.19) 式求得

$$\overline{N}_{\boldsymbol{p}}=\frac{\dfrac{8\pi^2a^2}{m^2}\left(\dfrac{N}{V}\right)^2}{\varepsilon(\boldsymbol{p})\left[\varepsilon(\boldsymbol{p})+\dfrac{p^2}{2m}+\dfrac{4\pi aN}{mV}\right]}, \tag{4.20}$$

$$\frac{N_0}{N}=1-\frac{8}{3\sqrt{\pi}}a^{3/2}\left(\frac{N}{V}\right)^{1/2}. \tag{4.21}$$

由此清楚看到, 非理想玻色气体, 即使处于基态, 也不是全部粒子的动量都等于零.

§5 稀薄费米气体

现在转而讨论费米气体. 我们要决定基态能量, 元激发的有效质量和 f 函数①, 所得各式精确到数量级为 $\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2$ 之项, 这里 a 是 s 散射幅.

这时相互作用能量算符不能像玻色粒子的情况那样写成 (4.1) 式. 其实只要在 (4.1) 式中 i,k,l,m 不仅代表动量, 而且代表自旋投影, 则由于费米算符反对易, 求和就成为零. 原因在于哈密顿量 (4.1) 式中未计入费米粒子散射之特殊性. 根据量子力学 (见 [17], §114②), 只有自旋反平行时, 自旋为 1/2 的全同粒子才能发生 s 散射. 这时散射幅比粒子不同时增大一倍. 考虑到这种情况, 我们可将相互作用能写成

$$H_{\text{int}}=\frac{U}{V}\sum_{\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{p}_3+\boldsymbol{p}_4} a^+_{\boldsymbol{p}_3,\frac{1}{2}}a^+_{\boldsymbol{p}_4,-\frac{1}{2}}a_{\boldsymbol{p}_2,-\frac{1}{2}}a_{\boldsymbol{p}_1,\frac{1}{2}}, \tag{5.1}$$

或者, 完全等同地写为

$$H_{\text{int}}=\frac{U}{2V}\sum_{\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{p}_3+\boldsymbol{p}_4} a^+_{\boldsymbol{p}_3\alpha}a^+_{\boldsymbol{p}_4\beta}a_{\boldsymbol{p}_2\beta}a_{\boldsymbol{p}_1\alpha}. \tag{5.1'}$$

和从前一样, U 在第一级近似下与 s 散射幅的关系为

$$U=\frac{4\pi a}{m}. \tag{5.2}$$

对 H_{int} 应用微扰论. 基态能量的一级修正项等于 H_{int} 的对角矩阵元:

$$E^{(1)}=\frac{U}{V}\sum_{i,k} n_i n_k Q_{ik}, \tag{5.3}$$

其中角标 i,k 相应于给定的动量和自旋投影, n_i 是 $T=0$ 时的填充数③, 它等于 $1(p<p_0)$ 或 $0(p>p_0)$, $p_0=(3\pi^2N/V)^{1/3}$. (5.3) 式中的因子 Q_{ik} 用以计入 i 和 k 状态中粒子自旋的反平行, 它最好取为

$$Q_{ik}=\frac{1}{4}(1-\boldsymbol{\sigma}_i\boldsymbol{\sigma}_k), \tag{5.4}$$

其中 $\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_i$ 是状态 i 中的粒子自旋算符. 把 (5.2) 和 (5.4) 式代入 (5.3) 式, 得

$$E^{(1)}=\frac{\pi a}{m}\frac{N^2}{V}. \tag{5.5}$$

①杨振宁和黄克孙[21] 以及杨振宁和李政道[22] 计算了基态能量, 有效质量是 A. A. Abrikosov 和 I. M. Khalatnikov[23] 以及 V. M. Galitskii[24] 得到的. 论文 [23] 中算出了 f 函数.

② 可参看中文本 [83]§62 和 §137.—— 译者注

③ 这里 n_i 表示无相互作用粒子的填充数. 不难理解, $T=0$ 时它们和准粒子的填充数一致, 而与相互作用粒子系统的填充数 N_i 不同.

为了求得第二级修正, 我们利用微扰论公式

$$E_n^{(2)} = \sum_{m\neq n} \frac{|(H_{\text{int}})_{nm}|^2}{E_n - E_m}. \tag{5.6}$$

将 (5.1) 式代入后, 我们得到如下之和:

$$\frac{U^2}{V^2} \sum_{i,k,l,m} \frac{n_i n_k (1-n_l)(1-n_m) Q_{ik} Q_{lm}}{(\boldsymbol{p}_i^2 + \boldsymbol{p}_k^2 - \boldsymbol{p}_l^2 - \boldsymbol{p}_m^2)/2m}. \tag{5.7}$$

由于我们的目的是求能量按 a 幂的展开, 则应如在 §4 中一样, 注意到 U 与散射幅的关系式 (5.2) 不是精确的, 而只准确到 U 的一次项. 考虑二次项后得到代替 (5.2) 式的关系:

$$U + \frac{2U^2}{V} \sum_{l,m} \frac{Q_{lm}}{(\boldsymbol{p}_i^2 + \boldsymbol{p}_k^2 - \boldsymbol{p}_l^2 - \boldsymbol{p}_m^2)/2m} = \frac{4\pi a}{m}. \tag{5.2′}$$

如果由此将 U 通过 a 表达出来, 并代入 (5.3) 式, 则在 $E^{(1)}$ 的表达式中也出现比例于 a^2 的项, 它们自然应算是二级修正. 注意到这一点后, 我们就得到能量的二级近似值如下:

$$\begin{aligned} E^{(2)} = & \frac{16a^2\pi^2}{m^2V^2} \sum_{i,k,l,m} \left[\frac{n_i n_k (1-n_l)(1-n_m) Q_{ik} Q_{lm}}{(\boldsymbol{p}_i^2 + \boldsymbol{p}_k^2 - \boldsymbol{p}_l^2 - \boldsymbol{p}_m^2)/2m} - \right. \\ & \left. - \frac{n_i n_k Q_{ik} Q_{lm}}{(\boldsymbol{p}_i^2 + \boldsymbol{p}_k^2 - \boldsymbol{p}_l^2 - \boldsymbol{p}_m^2)/2m} \right]. \end{aligned} \tag{5.7′}$$

和 (5.7) 式相反, 这个表达式在 $\boldsymbol{p}$ 很大时不发散. 由此可见, 和玻色气体一样, U 的重整化消除能量发散.

(5.2′) 式初看是矛盾的, 因为左端与 $\boldsymbol{p}_i$ 和 $\boldsymbol{p}_k$ 的夹角有关, 而右端与之无关. 这好象表明我们取的相互作用能算符不合理. 然而实际上完全不必为此担心, 因为在 (5.2′) 式中未计入的是与高阶动量矩有关的诸项, 而它们对能量的贡献很小, 这在前面已经指出.

(5.7) 式第一项中含有四个 n_i 的那部分等于零, 这是因为分母对于置换 $i,k \leftrightharpoons l,m$ 是反对称的, 而分子是对称的, 同时各求和区间也相同. 剩下的含有三个 n_i 的两项彼此相等. 因而最终有:

$$E^{(2)} = -\frac{32a^2\pi^2}{m^2V^2} \sum_{i,k,l,m} \frac{n_i n_k n_l Q_{ik} Q_{lm}}{(\boldsymbol{p}_i^2 + \boldsymbol{p}_k^2 - \boldsymbol{p}_l^2 - \boldsymbol{p}_m^2)/2m}. \tag{5.8}$$

从求和变成积分, 这个式子可以写成

$$\frac{E^{(2)}}{V} = -\frac{32a^2\pi^2}{m^2(2\pi)^9} \int\limits_{|\boldsymbol{p}_1|<p_0} \mathrm{d}\boldsymbol{p}_1 \int\limits_{|\boldsymbol{p}_2|<p_0} \mathrm{d}\boldsymbol{p}_2 \int\limits_{|\boldsymbol{p}_3|<p_0} \mathrm{d}\boldsymbol{p}_3 \int \mathrm{d}\boldsymbol{p}_4$$

$$\times \frac{\delta(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_3-\boldsymbol{p}_4)}{(\boldsymbol{p}_1^2+\boldsymbol{p}_2^2-\boldsymbol{p}_3^2-\boldsymbol{p}_4^2)/2m}. \tag{5.9}$$

根据 §2, 元激发能的定义为①

$$\varepsilon_i=\frac{\delta E}{\delta n_i}. \tag{5.10}$$

(5.3) 和 (5.8) 式中 n_i 的变分给出:

$$\begin{aligned}\varepsilon(\boldsymbol{p})=&\frac{p^2}{2m}+\frac{2\pi aN}{mV}\\&+\frac{16\pi^2a^2}{m^2(2\pi)^9}\int\limits_{|\boldsymbol{p}_1|<p_0}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\int\limits_{|\boldsymbol{p}_2|<p_0}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2\int\mathrm{d}\boldsymbol{p}_3\left[\frac{\delta(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_3)}{(\boldsymbol{p}^2+\boldsymbol{p}_3^2-\boldsymbol{p}_1^2-\boldsymbol{p}_2^2)/2m}\right.\\&\left.-2\frac{\delta(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_3)}{(\boldsymbol{p}^2+\boldsymbol{p}_1^2-\boldsymbol{p}_2^2-\boldsymbol{p}_3^2)/2m}\right].\end{aligned} \tag{5.11}$$

这样, 为了求得基态能量和元激发的有效质量, 就必须计算积分 (5.9) 和 (5.11). 积分相当繁复, 因为重数太高, 而且积分区域不方便.

可以应用一种更简单的方法, 它基于利用函数 f. 如果引入函数

$$f_{ik}=\frac{\delta^2E}{\delta n_i\delta n_k}, \tag{5.12}$$

则根据 §1.2 的 (2.12) 和 (2.19) 式, 从而可以决定有效质量和低频声速. 由声速经过相应的积分, 可求出基态能量.

因此问题就归结为确定 f. 先对 n_i、再对 n_k 变分 (5.3) 和 (5.8) 式, 我们得到 f 的下列表达式:

$$\begin{aligned}f=&\frac{8a\pi}{m}Q_{\sigma\sigma'}\\&-\frac{64\pi^2a^2}{m^2(2\pi)^3}\int\limits_{|\boldsymbol{p}_1|<p_0}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\int\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2\left[Q_{\sigma\sigma'}\frac{\delta(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)}{(\boldsymbol{p}^2+\boldsymbol{p}'^2-\boldsymbol{p}_1^2-\boldsymbol{p}_2^2)/2m}\right.\\&\left.+\frac{1}{4}\frac{\delta(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}_2)}{(\boldsymbol{p}^2+\boldsymbol{p}_1^2-\boldsymbol{p}'^2-\boldsymbol{p}_2^2)/2m}+\frac{1}{4}\frac{\delta(\boldsymbol{p}'+\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_2)}{(\boldsymbol{p}'^2+\boldsymbol{p}_1^2-\boldsymbol{p}^2-\boldsymbol{p}_2^2)/2m}\right].\end{aligned} \tag{5.13}$$

计算时我们立即认为 $|\boldsymbol{p}|=|\boldsymbol{p}'|=p_0$. (5.13) 式中的积分要比 (5.9) 和 (5.11) 式中简单得多. 结果是

$$f(\chi)=\frac{2\pi a}{m}\left[1+2a\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{1/3}\left(2+\frac{\cos\chi}{2\sin\frac{\chi}{2}}\ln\frac{1+\sin\frac{\chi}{2}}{1-\sin\frac{\chi}{2}}\right)\right]$$

① 初看之下, 此式似不正确, 因为 ε 是 E 对准粒子分布函数的变分导数, 而不是对粒子分布函数. 然而 (5.10) 式中的导数不是对于粒子的真实分布, 而是对无相互作用的粒子的分布; 前面已指出 (见第 38 页之页末注), 后者在 $T=0$ 时与相互作用系统准粒子分布一致.

$$-\frac{2\pi a}{m}(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}')\left[1+2a\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{1/3}\left(1-\frac{\sin\frac{\chi}{2}}{2}\ln\frac{1+\sin\frac{\chi}{2}}{1-\sin\frac{\chi}{2}}\right)\right]. \tag{5.14}$$

所得公式的奇异性值得注意. 当角度 χ 接近 π 时, 对于自旋相反的粒子, 函数 f 具有对数奇异性:

$$f(\chi)\propto(1-\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}')\ln\frac{1}{\pi-\chi}. \tag{5.15}$$

很清楚, 这种情况与前面所述的近似, 严格说来是不能用的. 函数 f 在 $\chi=\pi$ 点的奇异性, 反映了以 π 角相碰的元激发的散射幅的奇异性 (见第 4 章). 为了得到正确的表达式, 须把微扰论级数的主要项求和, 这些项中对数的幂次最高 (比 a 的幂低一级). 如果认为角 χ 准确地等于 π, 但 $\lambda=p^2+p'^2-2p_0^2\neq 0$, 则求和的结果使 f 中出现因子

$$\frac{1}{1+a\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{1/3}\left(\ln\frac{p_0^2}{\lambda}+\frac{\mathrm{i}\pi}{2}\right)} \tag{5.16}$$

(实数部分以对数精确度写出). 根据我们的假定, a 是正数, 故 $\lambda\to 0$ 时此式趋向零.

然而对于费米气体, $a<0$ 的情况原则上也是可能的. 与玻色气体相反, 这时由于泡利原则的限制, 气体仍是稀薄的, 并且看来全部公式仍可应用. 可是查看公式 (5.16), 即知散射幅将在某个 λ 的小虚值下具有极点. 这时基态是不稳定的, 因为要出现动量和自旋相反的准粒子束缚对 (库珀现象), 这乃是金属超导的基本原因 (见第 7 章). 这里我们只限于 $a>0$ 的情况.

总之, 我们求得的 f 的表达式不适用于接近 π 的角度. 但是由于奇异性是对数型的, 它只在奇点的直接邻域中才表现出来. 由于我们感兴趣的各量中只有 f 和正则函数的积分, 函数 f 的对数奇异性并不重要.

把 (5.14) 式代入 (2.12) 式, 得到有效质量的值:

$$\frac{m}{m^*}=1-\frac{8}{15}(7\ln 2-1)a^2\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{2/3}. \tag{5.17}$$

类似地从声速的表达式 (2.19) 得到

$$u^2=\frac{\pi^{4/3}}{3^{1/3}}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}\frac{1}{m^2}+2\frac{\pi a}{m^2}\frac{N}{V}\left[1+\frac{4}{15}a\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{2/3}(11-2\ln 2)\right]. \tag{5.18}$$

由此式不难求得费米液体基态能量. 由此利用关系式 (2.16), 两次积分 (5.18) 式后得

$$u^2=\frac{N}{m}\frac{\partial\mu}{\partial N},$$

$$E=\int \mu \mathrm{d}N=E^{(0)}+\frac{\pi a}{m}\frac{N^2}{V}\left[1+\frac{6}{35}a\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{1/3}(11-2\ln 2)\right]. \tag{5.19}$$

(5.17) 和 (5.19) 式的结果, 也可以从 (5.9) 和 (5.11) 式直接积分求得. 这说明了对这个模型费米液体理论的基本原则是成立的. 这些原则的一般推导将在第 4 章中给出.

在结束之前, 让我们和对待玻色气体一样, 试求粒子的动量分布. 为此须计算矩阵元:

$$\overline{N}_{\boldsymbol{p},\frac{1}{2}}=\overline{N}_{\boldsymbol{p},-\frac{1}{2}}=\langle \Psi^* a^+_{\boldsymbol{p},\frac{1}{2}}a_{\boldsymbol{p},\frac{1}{2}}\Psi\rangle, \tag{5.20}$$

其中 Ψ 是相互作用粒子的真实波函数. 将按微扰论计算到二级项的函数 Ψ(见 [17], 第 161~162 页①):

$$\begin{aligned}\Psi_n=&\Psi_n^{(0)}+{\sum_m}'\frac{(H_{\mathrm{int}})_{mn}\Psi_m^{(0)}}{E_n-E_m}+{\sum_m}'{\sum_k}'\frac{(H_{\mathrm{int}})_{mk}(H_{\mathrm{int}})_{kn}\Psi_m^{(0)}}{(E_n-E_k)(E_n-E_m)}\\&-(H_{\mathrm{int}})_{nn}{\sum_m}'\frac{(H_{\mathrm{int}})_{mn}\Psi_m^{(0)}}{(E_n-E_m)^2}-\frac{\Psi_n^{(0)}}{2}{\sum_m}'\frac{|(H_{\mathrm{int}})_{mn}|^2}{(E_n-E_m)^2}.\end{aligned} \tag{5.21}$$

注意在函数 $\Psi_n^{(0)}$ 的表象中, 算符 $a^+_{\boldsymbol{p}\frac{1}{2}}a_{\boldsymbol{p}\frac{1}{2}}$ 是对角的, 我们就得到

$$\overline{N}_{\boldsymbol{p},\frac{1}{2}}-n_{\boldsymbol{p},\frac{1}{2}}={\sum_m}'\frac{|(H_{\mathrm{int}})_{m0}|^2(n^{(m)}_{\boldsymbol{p},\frac{1}{2}}-n_{\boldsymbol{p},\frac{1}{2}})}{(E_0-E_m)^2}, \tag{5.22}$$

其中 $n^{(m)}_{\boldsymbol{p},\frac{1}{2}}$ 是无相互作用系统的 $\Psi_m^{(0)}$ 状态中动量为 $\boldsymbol{p}$、自旋投影为 $1/2$ 的粒子数, 而 $n_{\boldsymbol{p},\frac{1}{2}}$ 是在基态的相应粒子数. 已经指出过, 无相互作用的粒子的分布 $n_{\boldsymbol{p},\frac{1}{2}}$ 和 $T=0$ 时元激发的分布相同.

从 (5.1) 式代入 H_{int} 后得到

$$\begin{aligned}&\overline{N}_{\boldsymbol{p},\frac{1}{2}}-n_{\boldsymbol{p},\frac{1}{2}}\\&=\begin{cases}-\dfrac{16\pi^2a^2}{(2\pi)^6m^2}\displaystyle\int_{|\boldsymbol{p}_1|<p_0}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\int_{|\boldsymbol{p}_2|>p_0}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2\int_{|\boldsymbol{p}_3|>p_0}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_3\dfrac{\delta(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_3)}{[(\boldsymbol{p}^2+\boldsymbol{p}_1^2-\boldsymbol{p}_2^2-\boldsymbol{p}_3^2)/2m]^2},\\ \quad \text{当}|\boldsymbol{p}|<p_0;\\ \dfrac{16\pi^2a^2}{(2\pi)^6m^2}\displaystyle\int_{|\boldsymbol{p}_1|>p_0}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\int_{|\boldsymbol{p}_2|<p_0}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2\int_{|\boldsymbol{p}_3|<p_0}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_3\dfrac{\delta(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_3)}{[(\boldsymbol{p}^2+\boldsymbol{p}_1^2-\boldsymbol{p}_2^2-\boldsymbol{p}_3^2)/2m]^2},\\ \quad \text{当}|\boldsymbol{p}|>p_0.\end{cases}\end{aligned} \tag{5.23}$$

① 可参阅中文本 [83] 第 §38 节. —— 译者注

这样就看出来, 粒子的动量分布和准粒子的分布 $n_{\boldsymbol{p},\frac{1}{2}}$ 在 a 的第二级近似才出现差别. (5.23) 式对全部 $\boldsymbol{p}$ 的积分显然等于零, 这相当于液体粒子数与准粒子数相等. 有意义的是, 在 $|\boldsymbol{p}|=p_0$ 处函数 $\overline{N}_{\boldsymbol{p},\frac{1}{2}}$ 有一跃变.

第 4 章中将证明, 这是费米液体的普遍性质.

(5.23) 式的积分计算结果①是相当繁杂的, 我们不在此一一写出. 下面引的是某些极限情况的值:

$$
\begin{aligned}
&N_{0,\frac{1}{2}}=1-2a^2\left(\frac{3}{\pi}\frac{N}{V}\right)^{2/3}\left(1-\frac{1}{2}\ln 2\right),\\
&N_{p_0-0,\frac{1}{2}}=1-2a^2\left(\frac{3}{\pi}\frac{N}{V}\right)^{2/3}\left(\frac{1}{3}+\ln 2\right),\\
&N_{p_0+0,\frac{1}{2}}=2a^2\left(\frac{3}{\pi}\frac{N}{V}\right)^{2/3}\left(\ln 2-\frac{1}{3}\right),\\
&N_{p_0-0,\frac{1}{2}}-N_{p_0+0,\frac{1}{2}}=1-4a^2\left(\frac{3}{\pi}\frac{N}{V}\right)^{2/3}\ln 2,\\
&N_{p\gg p_0,\frac{1}{2}}=\frac{16a^2}{9}\left(\frac{3}{\pi}\frac{N}{V}\right)^{2/3}\left(\frac{p_0}{p}\right)^4.
\end{aligned}
\tag{5.24}
$$

这样, 当 $p<p_0$ 时函数 N_p 接近 1, 并且随着 p 从 0 到 p_0 而略有减少. 然后 N_p 跃变减少到数量级为 $a^2\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}$, 当 $p\gg p_0$ 时它比例于 $a^2\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}\left(\frac{p_0}{p}\right)^4$ 而减少.

① 这些计算是 V. A. Belyakov[24] 完成的.

第 2 章　温度等于零时的量子场论方法

本章中的讨论和推导在相当程度上与第 3 章重复. 熟悉量子场论方法、而只对温度图解法感兴趣的读者, 可以直接从第 3 章开始阅读.

§6　相互作用表象

上一章里叙述的二次量子化方法的形式对求解许多问题是不适用的. 事实上它只能用于粒子间弱相互作用的情况. 这时或者可借助微扰论, 或者哈密顿量已大为简化, 以致很容易进行对角化. 但是更常见的情况是, 不能局限于微扰论级数的前几项. 于是必须有一种方法, 使得能按照简单明了的规则写出微扰论级数的任何一项.

常常由于某种物理条件, 使我们可以从微扰论级数的全部项中分出通常是无限序列的所谓“主要项”, 其数量级远超过其他各项, 这时问题就归结为这个序列的求和.

在更一般的情况下, 当微扰论级数各项为同一数量级时, 理论的任务就在于寻求各种普遍关系 (例如将费米边界动量 p_0 和液体粒子数联系起来的 (2.1) 式, 它是朗道的费米液体理论的基础). 本章里发展的图解方法借自量子场论, 它最适用于这些目的①. 为了开始叙述量子场论方法, 我们先把二次量子化工具的表述形式略加改变. 引入 “粒子场” 算符:

$$\begin{aligned}\psi(\xi) &= \sum_i \varphi_i(\xi) a_i, \\ \psi^+(\xi) &= \sum_i \varphi_i^*(\xi) a_i^+,\end{aligned} \tag{6.1}$$

这里 a_i, a_i^+ 是我们在上一章里已见过的二次量子化算符, $\varphi_i(\xi)$ 是粒子在状态 i 的波函数. 算符 $\psi(\xi)$ 和 $\psi^+(\xi)$ 可以相应地解释为在 ξ- 空间中给定点的粒子的消灭和产生算符. 从 §3 得到这些算符之间的对易关系:

$$\begin{aligned}&\psi(\xi)\psi^+(\xi') \mp \psi^+(\xi')\psi(\xi) = \delta(\xi - \xi'), \\ &\psi(\xi)\psi(\xi') \mp \psi(\xi')\psi(\xi) = 0, \\ &\psi^+(\xi)\psi^+(\xi') \mp \psi^+(\xi')\psi^+(\xi) = 0,\end{aligned} \tag{6.2}$$

① 可参阅 [26].

这里 $\mp$ 上面的符号对应于玻色统计, 下面的符号对应费米统计. 单粒子算符 $F^{(1)}$ 在新的表象中写成

$$F^{(1)} = \int \psi^+(\xi) f^{(1)} \psi(\xi) \mathrm{d}\xi. \tag{6.3}$$

双粒子算符以及更复杂的算符都可以类似地写出.

哈密顿量也不难通过算符 ψ 和 ψ^+ 表示. 例如对自旋为 1/2 的粒子的系统, 无磁场存在时, 哈密顿量的形状为

$$\begin{aligned} H = & \int \left[\frac{1}{2m} \nabla \psi_\alpha^+(\boldsymbol{r}) \nabla \psi_\alpha(\boldsymbol{r}) + U(\boldsymbol{r}) \psi_\alpha^+(\boldsymbol{r}) \psi_\alpha(\boldsymbol{r}) \right] \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ & + \frac{1}{2} \int \int \psi_\alpha^+(\boldsymbol{r}) \psi_\beta^+(\boldsymbol{r}') U^{(2)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \psi_\beta(\boldsymbol{r}') \psi_\alpha(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}\boldsymbol{r} \mathrm{d}\boldsymbol{r}' + \cdots, \end{aligned} \tag{6.4}$$

这里假定粒子间的相互作用与自旋无关. 角标 α 和 β 表示自旋的投影, 同时对出现两次的同一角标要进行求和. 自旋为零的玻色粒子系统, 哈密顿量的不同仅在于算符 ψ 不带角标. 推广到更复杂的情形也是不难的.

(6.4) 式的形式相当于 N 粒子系统的平均能量, 这些粒子处于同样的状态 $\psi_\alpha(\boldsymbol{r})$, 状态的归一条件是 $\int |\psi_\alpha|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{r} = N$. 借助这个相似性, 总可以容易地写出二次量子化表象中的哈密顿量.

除了哈密顿量以外, 在给定点的粒子密度算符也有重要意义. 由于在普通表象中它的形状是 $n(\boldsymbol{r}) = \sum_a \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_a)$, 我们就得到

$$n(\boldsymbol{r}) = \int \psi_\alpha^+(\boldsymbol{r}_a) \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_a) \psi_\alpha(\boldsymbol{r}_a) \mathrm{d}\boldsymbol{r}_a = \psi_\alpha^+(\boldsymbol{r}) \psi_\alpha(\boldsymbol{r}). \tag{6.5}$$

粒子数算符相应为

$$N = \int n(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int \psi_\alpha^+(\boldsymbol{r}) \psi_\alpha(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

现在假设有一个哈密顿量为 H 的粒子系统. 为了确定这个系统的状态如何随时间变化, 需要解薛定谔方程:

$$\mathrm{i} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = H \Phi \tag{6.6}$$

(Φ 是系统的波函数). 方程式 (6.6) 的形式解可以写成①

$$\Phi(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} \Phi_{\mathrm{H}}, \tag{6.7}$$

这里 Φ_{H} 是与时间无关的函数.

① 算符 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}$ 是级数 $1 - \mathrm{i}Ht + \cdots + \frac{1}{n!}(-\mathrm{i}Ht)^n + \cdots$ 的形式写法.

任意算符 F 的矩阵元随时间的变化可借助 (6.7) 式求得

$$F_{nm}(t)=\langle\Phi_n^*(t)F\Phi_m(t)\rangle=\langle\Phi_{\mathrm{H}n}^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}F\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\Phi_{\mathrm{H}m}\rangle. \tag{6.8}$$

最后一个表达式可以看成算符

$$\widetilde{F}(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}F\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}. \tag{6.9}$$

对函数 Φ_H 的矩阵元.

这相当于变换到新的表象, 它叫做海森伯表象. 而前面讨论的表象, 其中算符与时间无关 (例如 $\psi(\boldsymbol{r})$ 和 $\psi^+(\boldsymbol{r})$), 称为薛定谔表象. 海森伯表象的最重要的性质是波函数 Φ_{H} 与时间无关. 时间关系都转到了算符上, 从 (6.9) 式得

$$\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial t}=\mathrm{i}(H\widetilde{F}-\widetilde{F}H)\equiv\mathrm{i}[H,\widetilde{F}]. \tag{6.10}$$

在薛定谔表象中情况正好相反. 算符与时间无关 (如果不讨论交变外场), 而波函数随时间变化. 从 (6.9) 式看出, 哈密顿量在两个表象中是一样的.

如果讨论系统的稳定态, 则波函数 $\Phi_{\mathrm{H}n}$ 满足方程

$$H\Phi_{\mathrm{H}n}=E_n\Phi_{\mathrm{H}n}. \tag{6.11}$$

这时从 (6.8) 式得

$$F_{nm}(t)=\langle\Phi_{Hn}^*F\Phi_{Hm}\rangle\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_n-E_m)t}. \tag{6.12}$$

以无自旋的无相互作作用粒子系统为例. 取自由粒子函数 $\dfrac{1}{\sqrt{V}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{pr}}$($V$ 是体积) 为 $\varphi_i(\xi)$. 算符 ψ 在薛定谔表象中的形式是

$$\psi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{pr}}. \tag{6.13}$$

借助 (6.4) 我们看出, 哈密顿量在薛定谔表象中具有 (3.13) 的形式, 即

$$H=\sum\varepsilon_0(\boldsymbol{p})n_{\boldsymbol{p}},$$

其中 $\varepsilon_0(\boldsymbol{p})$ 为自由粒子能量. 因此从 (6.9) 式求出海森伯表象中的算符 $\widetilde{\psi}(\boldsymbol{r},t)$ 为

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}(\boldsymbol{r},t)=&\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum\limits_{\boldsymbol{p}'}\varepsilon_0(\boldsymbol{p}')n_{\boldsymbol{p}'}t}a_{\boldsymbol{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sum\limits_{\boldsymbol{p}''}\varepsilon_0(\boldsymbol{p}'')n_{\boldsymbol{p}''}t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{pr}}\\=&\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\boldsymbol{pr}-\varepsilon_0(\boldsymbol{p})t]}.\end{aligned} \tag{6.14}$$

必须指出, 一般地说, 海森伯算符 $\widetilde{\psi}(\boldsymbol{r},t)$ 并不满足相应的薛定谔算符的对易关系 (6.2). 然而当诸 $\widetilde{\psi}$ 算符取在同一时刻时, 从 (6.9) 和 (6.2) 式看出, 它们的对易关系和薛定谔算符 $\psi(\boldsymbol{r})$ 一致.

除了以上两个表象, 还有一个对以后很重要的中间类型表象, 称为相互作用表象. 这个表象的性质是量子场论方法的基础.

从哈密顿量中分出粒子相互作用的部分 H_{int}:

$$H = H_0 + H_{\mathrm{int}}, \tag{6.15}$$

同时将系统的薛定谔波函数作如下变换:

$$\Phi_{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0 t}\Phi. \tag{6.16}$$

对时间微分函数 Φ_{i}, 我们得到

$$\mathrm{i}\frac{\partial \Phi_{\mathrm{i}}}{\partial t} = -H_0\Phi_{\mathrm{i}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0 t}(H_0 + H_{\mathrm{int}})\Phi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0 t}H_{\mathrm{int}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0 t}\Phi_{\mathrm{i}}. \tag{6.17}$$

因此

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}\frac{\partial \Phi_{\mathrm{i}}}{\partial t} = \boldsymbol{H}_{\mathrm{int}}(t)\Phi_{\mathrm{i}}, \\ &\boldsymbol{H}_{\mathrm{int}}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0 t}H_{\mathrm{int}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0 t}. \end{aligned} \tag{6.18}$$

相互作用表象由 Φ_{i} 函数给出. 这个表象中的任何算符可以从薛定谔表象的算符定义 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{int}}(t)$ 的同一公式 (3.18) 求出. 由此还看出, 这个表象中的任何算符 $\boldsymbol{F}(t)$ 满足方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}(t)}{\partial t} = \mathrm{i}[H_0, \boldsymbol{F}(t)], \tag{6.19}$$

即无相互作用粒子系统海森伯算符所满足的方程. 这样我们就得到结论: 相互作用表象中所有的算符与无相互作用系统的海森伯算符一样, 而波函数满足哈密顿量为 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{int}}(t)$ 的薛定谔方程式, 能够利用 "自由" 算符是这个表象的一大优点.

现在决定相互作用表象中函数 $\Phi_{\mathrm{i}}(t)$ 与时间的关系. 既然不同时刻的诸算符 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{int}}(t)$ 互不对易, 我们就不能把方程式 (6.17) 的解简单写做

$$\Phi_{\mathrm{i}}(t) = \mathrm{const}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\int^{t}\boldsymbol{H}_{\mathrm{int}}(t')\mathrm{d}t'}.$$

必须按下列方式处理. 设我们已知函数 Φ_{i} 在某一时刻 t_0 的值. 在方程式 (6.17) 两端对时间从 t_0 积分到 $t(t > t_0)$, 于是从微分方程式得到积分方程式:

$$\Phi_{\mathrm{i}}(t) = \Phi_{\mathrm{i}}(t_0) - \mathrm{i}\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{H}_{\mathrm{int}}(t')\Phi_{\mathrm{i}}(t')\mathrm{d}t'.$$

我们将这个方程式的解按 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{int}}$ 的值展成级数：

$$\Phi_{\mathrm{i}}(t)=\Phi_{\mathrm{i}}^{(0)}(t)+\Phi_{\mathrm{i}}^{(1)}(t)+\cdots,$$

零级近似下 $\Phi_{\mathrm{i}}^{(0)}(t)=\Phi_{\mathrm{i}}(t_0)$; 一级近似下

$$\Phi_{\mathrm{i}}^{(1)}(t)=-\mathrm{i}\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{H}_{\mathrm{int}}(t_1)\mathrm{d}t_1\,\Phi_{\mathrm{i}}(t_0);$$

第二级近似是

$$\Phi_{\mathrm{i}}^{(2)}(t)=-\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{H}_{\mathrm{int}}(t_1)\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{H}_{\mathrm{int}}(t_2)\mathrm{d}t_2\,\Phi_{\mathrm{i}}(t_0);$$

依此类推, 第 n 级近似是

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathrm{i}}^{(n)}(t)=&(-\mathrm{i})^n\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{H}_{\mathrm{int}}(t_1)\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{H}_{\mathrm{int}}(t_2)\mathrm{d}t_2\\&\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}}\boldsymbol{H}_{\mathrm{int}}(t_n)\mathrm{d}t_n\,\Phi_{\mathrm{i}}(t_0).\end{aligned}$$

从 $\Phi_{\mathrm{i}}(t)$ 的级数结构看出, 整个结果可以记为

$$\Phi_{\mathrm{i}}(t)=S(t,t_0)\Phi_{\mathrm{i}}(t_0),\tag{6.20}$$

式中矩阵 $\boldsymbol{S}(t,t_0)$ 由以下级数定义：

$$\begin{aligned}S(t,t_0)=&1-\mathrm{i}\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{H}_{\mathrm{int}}(t_1)\mathrm{d}t_1+\\&\cdots+(-\mathrm{i})^n\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{H}_{\mathrm{int}}(t_1)\mathrm{d}t_1\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}}\boldsymbol{H}_{\mathrm{int}}(t_n)\mathrm{d}t_n+\cdots.\end{aligned}\tag{6.21}$$

级数 (6.21) 的特点是, 时刻较迟的算符 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{int}}$ 总是位于时刻较早的算符左面, 因为总有

$$t>t_1>t_2>\cdots>t_n>t_0.$$

可以令表达式 (6.21) 更为对称. 讨论级数的第 n 项

$$(-\mathrm{i})^n\int\cdots\cdots\int_{t>t_1>\cdots>t_0}\boldsymbol{H}_{\mathrm{int}}(t_1)\boldsymbol{H}_{\mathrm{int}}(t_2)\cdots\boldsymbol{H}_{\mathrm{int}}(t_n)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n$$

并将积分变量作任意置换 $t_1,t_2,\cdots,t_n\to t_{p_1},t_{p_2},\cdots,t_{p_n}$, 积分的数值自然不因此而改变. 作完一切可能的变量 $t_1,\cdots,t_n$ 的置换, 把结果相加并除以置换数 $n!$, 我们就使每个变量的积分范围都扩展到了从 t_0 到 t 的整个区间, 重要的是要使积分号

下的诸算符 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{int}}$ 总是从左至右按时间的递减顺序排列. 以符号 T 表示这种编时运算, 就可以将级数的第 n 项写成

$$S^{(n)}(t,t_0)=\frac{(-\mathrm{i})^n}{n!}\int_{t_0}^{t}\cdots\int_{t_0}^{t}T\{\boldsymbol{H}_{\mathrm{int}}(t_1)\cdots\boldsymbol{H}_{\mathrm{int}}(t_n)\}\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n. \tag{6.22}$$

现在不难验证, 整个 (6.21) 式可以写成

$$S(t,t_0)=T\exp\left\{-\mathrm{i}\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{H}_{\mathrm{int}}(t')\mathrm{d}t'\right\}, \tag{6.23}$$

为此只须将指数展开并利用编时算符 T 的定义. 算符 $S(t,t_0)$ 显然具有以下性质:

$$S(t_2,t_1)S(t_1,t_0)=S(t_2,t_0),\quad t_2>t_1>t_0. \tag{6.24}$$

(6.16) 和 (6.18) 式确定了薛定谔表象和相互作用表象的关系. 由 (6.20) 式可以求得相互作用表象和海森伯表象的联系. 假设波函数的变换式为

$$\Phi_{\mathrm{i}}(t)=Q(t)\Phi_{\mathrm{H}},$$

其中 Q 是幺正算符. 从 (6.20) 式得

$$Q(t)=S(t,t_0)Q(t_0),$$

由此参考 (6.24) 式得

$$Q(t)=S(t,\alpha)P,$$

其中 α 是某一时刻, 而 P 是与时间无关的算符. 为了确定 P, 我们把 (6.16) 和 (6.7) 式代入关系式 $\Phi_{\mathrm{i}}(t)=Q(t)\Phi_{\mathrm{H}}$, 即把 Φ_{i} 和 Φ_{H} 都通过薛定谔函数 Φ 表示出来. 这就得到

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0t}=S(t,\alpha)P\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}.$$

注意 $S(\alpha,\alpha)=1$, 得

$$P=\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0\alpha}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H\alpha}$$

最好在这一步上利用所谓 "浸渐引入相互作用" 的假定①. 设在时刻 $t\to-\infty$ 粒子间没有相互作用, 以后无限慢地 "引入" 作用. 如果这时令 $\alpha\to-\infty$, 则 $P\to1$, 因此

$$\Phi_{\mathrm{i}}(t)=S(t)\Phi_{\mathrm{H}}, \tag{6.25}$$

① 必须立刻强调指出, 这里利用的 "浸渐引入相互作用" 纯系形式. 利用它可以最快地得到正确结果, 但这一步并非必需 (参看 [27]).

此处

$$\boldsymbol{S}(t)=\boldsymbol{S}(t,-\infty). \tag{6.26}$$

利用性质 (6.24), 得

$$\boldsymbol{S}(t_2,t_1)=\boldsymbol{S}(t_2)\boldsymbol{S}^{-1}(t_1). \tag{6.27}$$

基于 (6.25) 式, 相互作用表象和海森伯表象的算符有如下关系:

$$\widetilde{F}(t)=\boldsymbol{S}^{-1}(t)\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{S}(t). \tag{6.28}$$

以后我们常会遇见几个海森伯算符的编时乘积对系统基态 Φ_{H}^0 的平均值

$$\langle\Phi_{\mathrm{H}}^{0*}T[\widetilde{A}(t)\widetilde{B}(t')\widetilde{C}(t'')\cdots]\Phi_{\mathrm{H}}^0\rangle. \tag{6.29}$$

对费米算符我们把推导 (6.23) 式时所定义的编时算符 T 略为推广, 而对玻色算符仍保留原来定义. 费米算符 $A(t_1)B(t_2)\cdots$ 的 T 乘积的意义是: 按时间递减顺序从左向右排列的乘积, 再乘以 $(-1)^P$, 其中 P 是从 $A(t_1)B(t_2)\cdots$ 变换到编时乘积所需的费米算符置换次数. 例如 $F_1(t_1),F_2(t_2)$ 是费米算符, 而 $B_1(t_3),B_2(t_4)$ 是玻色算符, 则

$$T\{F_1(t_1)F_2(t_2)\}=\begin{cases}F_1(t_1)F_2(t_2), & t_1>t_2,\\ -F_2(t_2)F_1(t_1), & t_1<t_2,\end{cases}$$

$$T\{B_1(t_3)F_1(t_1)\}=\begin{cases}B_1(t_3)F_1(t_1), & t_3>t_1,\\ F_1(t_1)B_1(t_3), & t_3<t_1,\end{cases}$$

$$T\{B_1(t_3)B_2(t_4)\}=\begin{cases}B_1(t_3)B_2(t_4), & t_3>t_4,\\ B_2(t_4)B_1(t_3), & t_3<t_4,\end{cases}$$

对算符 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{int}}(t)$, 新的 T 乘积定义与原来定义重合, 因为在 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{int}}$ 中费米算符总是成对出现. 当然, 编时运算的规则对海森伯表象和相互作用表象中的算符是相同的.

设在 (6.29) 式中时间顺序为

$$t>t'>t''>\cdots,$$

按 (6.28) 式变换到相互作用表象算符. 这时得到

$$\begin{aligned}&\langle\Phi_{\mathrm{H}}^{0*}S^{-1}(t)\boldsymbol{A}(t)S(t)S^{-1}(t')\boldsymbol{B}(t')S(t')\cdots\Phi_{\mathrm{H}}^0\rangle\\ =&\langle\Phi_{\mathrm{H}}^{0*}S^{-1}(\infty)S(\infty,t)\boldsymbol{A}(t)S(t,t')\boldsymbol{B}(t')\cdots\Phi_{\mathrm{H}}^0\rangle\\ =&\langle\Phi_{\mathrm{H}}^{0*}S^{-1}(\infty)T[\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{B}(t')\boldsymbol{C}(t'')\cdots S(\infty)]\Phi_{\mathrm{H}}^0\rangle.\end{aligned} \tag{6.30}$$

显然, 从 (6.29) 式到 (6.30) 式的变换与时间 $t, t', t'', \cdots$ 的顺序无关, 即在任何情况下都成立.

现在我们只须决定 $\Phi_{\mathrm{H}}^{0*} S^{-1}(\infty) = [S(\infty)\Phi_{\mathrm{H}}^{0}]^*$, 即算符 $S(\infty)$ 作用于基态波函数的结果. 从 (6.20) 和 (6.25) 式得

$$\Phi_{\mathrm{H}}^{0} = \Phi_{\mathrm{i}}(-\infty), S(\infty)\Phi_{\mathrm{H}}^{0} = \Phi_{\mathrm{i}}(\infty).$$

这样, $S(\infty)\Phi_{\mathrm{H}}^{0}$ 就是函数 $\Phi_{\mathrm{i}}(\infty)$, 它是由基态波函数 $\Phi_{1}(-\infty)$ 浸渐引入粒子间相互作用而得到的. 大家知道, 系统的基态, 即能量最低的态, 必然是非简并的. 同时由量子力学的一般原理 (见 [17], 第 173 页①) 知道, 处于某个非简并稳定态的系统不能在无限慢扰动影响下跃迁到另一个态. 因此我们的结论是函数 $\Phi_{\mathrm{i}}(\infty) = S(\infty)\Phi_{\mathrm{H}}^{0}$ 与函数 Φ_{H}^{0} 只能差一个相因子, 即

$$S(\infty)\Phi_{\mathrm{H}}^{0} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}L}\Phi_{\mathrm{H}}^{0}. \tag{6.31}$$

由此得到最终结果

$$\begin{aligned}&\langle \Phi_{\mathrm{H}}^{0*} T[\widetilde{A}(t)\widetilde{B}(t')\widetilde{C}(t'')\cdots]\Phi_{\mathrm{H}}^{0}\rangle \\ =&\frac{\langle \Phi_{\mathrm{H}}^{0*} T[\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{B}(t')\boldsymbol{C}(t'')\cdots S(\infty)]\Phi_{\mathrm{H}}^{0}\rangle}{\langle \Phi_{\mathrm{H}}^{0*} S(\infty)\Phi_{\mathrm{H}}^{0}\rangle}.\end{aligned} \tag{6.32}$$

我们在此强调一下, 这个结论只适用于对系统基态的平均值, 因为系统的任何其他能级都是多重简并的, 因而系统可能因粒子间碰撞而跃迁至其他状态. 这就是说, 对激发态平均时成立的是 (6.30) 式, 而不是 (6.32) 式.

在这一章里我们将只讨论处于 $T = 0$, 即基态的系统. 为了简化起见, 我们把相应的平均记为 $\langle\cdots\rangle$, 并用普通字母表示相互作用表象中的算符. 凡是必须写薛定谔算符的地方, 我们将强调指出它们只与坐标有关 (例如 $\psi(\boldsymbol{r})$) 并且临时说明.

§7　格林函数

本节内容大部分取自V. M. Galitzskii和A. B. Migdal的论文 [28].

§7.1　定义. 自由粒子的格林函数

量子场论方法中描述系统微观性质的最重要的量之一是单粒子格林函数②. 它的定义是

$$G_{\alpha\beta}(x, x') = -\mathrm{i}\langle T(\widetilde{\psi}_{\alpha}(x)\widetilde{\psi}_{\beta}^{+}(x'))\rangle, \tag{7.1}$$

① 可参看中文本 [83] 第 136 页. —— 译者注

② 场论中 "格林函数" 一词的意义与线性方程式理论中不同. 虽然它也满足右端为 δ- 函数的方程式, 但后者通常是非线性的 (见 §10). 自由粒子格林函数是例外, 它们真是海森伯算符 $\widetilde{\psi}(\boldsymbol{r}, t)$ 线性方程式的格林函数. "格林函数" 一词最初只用于这种情况, 后来推广到任意相互作用系统的 (7.1) 式.

x(或 x') 是四个变量 —— 坐标 $\boldsymbol{r}$ 和时间 τ 的集合; α 和 β 是自旋角标.

知道了格林函数, 就可以算出任何如 (3.2) 式类型的单粒子算符对基态的平均值. 其实由 (6.3) 式有

$$\overline{F^{(1)}} = \pm \mathrm{i} \int \Big[\lim_{\substack{t' \to t+0 \\ \boldsymbol{r}' \to \boldsymbol{r}}} f^{(1)}_{\alpha\beta}(x) G_{\alpha\beta}(x, x') \Big] \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

(玻色统计取“+”, 费米统计取“−”). 例如粒子密度和粒子流密度相应为

$$n(x) = \pm \mathrm{i} \lim_{\substack{t' \to t+0 \\ \boldsymbol{r}' \to \boldsymbol{r}}} G_{\alpha\alpha}(x, x'),$$

$$j(x) = \pm \frac{1}{m} \lim_{\substack{t' \to t+0 \\ \boldsymbol{r}' \to \boldsymbol{r}}} (\nabla_{\boldsymbol{r}} - \nabla_{\boldsymbol{r}'}) G_{\alpha\alpha}(x, x').$$

以后我们将证明, 借助格林函数可以将能量作为体积的函数求出, 从而得到系统在 $T = 0$ 时的状态方程式 (压力与密度的关系). 此外还要证明, 格林函数 (7.1) 式的傅里叶分量的极点决定元激发谱. 这就使我们有可能求得系统在温度不为零时 (当然, 还要足够低) 的热力学函数.

还有一个情况使得格林函数有重要意义, 这就是可以借助图解方法计算它们 (见 §8 和 §9), 这种方法比普通形式的微扰论方法具有更多优点.

在这一节里我们将分析格林函数的一般性质. 为了简化符号, 我们把角标 α, β 略去不写. 这不会引起误解, 因为没有铁磁性与外磁场时,

$$G_{\alpha\beta} = G\delta_{\alpha\beta}.$$

这里我们只限于讨论此种情形.

我们在本章里只研究费米粒子系统, 这是因为玻色系统在绝对零度下具有许多本质上的特殊之处, 它们与凝聚体的存在有关 (第 5 章专门论述玻色系统). 固体振动的量子 —— 声子是例外. 由于它们的数目不定, 声子气体中不发生凝聚, 因而可以用普通方法研究它们的性质.

空间无限的均匀系统的格林函数, 在没有外场存在时只与坐标差 $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$ 和时间差 $t - t'$ 有关. 将 G 展成傅里叶积分

$$G(x - x') = \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} G(\boldsymbol{p}, \omega) \mathrm{e}^{\mathrm{i}[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') - \omega(t-t')]} \quad (\mathrm{d}^4 p = \mathrm{d}\boldsymbol{p}\mathrm{d}\omega). \tag{7.2}$$

对于无相互作用的粒子系统很容易求出函数 $G(\boldsymbol{p}, w)$. 在费米粒子情况下只须把自由场海森伯算符的表达式 (6.14) 代入 (7.1) 式, 并注意到, 所有 $|\boldsymbol{p}| < p_0$ 的能级被占满, 而 $|\boldsymbol{p}| > p_0$ 的能级空着, 就得到

$$G^{(0)}(x) = -\frac{\mathrm{i}}{V} \sum_{\boldsymbol{p}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}[\boldsymbol{p}\boldsymbol{r} - \varepsilon_0(\boldsymbol{p})t]} \begin{cases} 1 - n_{\boldsymbol{p}}, & t > 0, \\ -n_{\boldsymbol{p}}, & t < 0, \end{cases} \tag{7.3}$$

其中

$$n = a_{\boldsymbol{p}}^{+} a_{\boldsymbol{p}} = \begin{cases} 1, & |\boldsymbol{p}| < p_0, \\ 0, & |\boldsymbol{p}| > p_0. \end{cases}$$

变换到动量表象, 由 (7.3) 式得

$$G^{(0)}(\boldsymbol{p},\omega) = -\mathrm{i}\left\{\theta(|\boldsymbol{p}|-p_0)\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}[\omega-\varepsilon_0(\boldsymbol{p})]t}\mathrm{d}t - \theta(p_0-|\boldsymbol{p}|)\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega-\varepsilon_0(\boldsymbol{p})]t}\mathrm{d}t\right\}, \tag{7.4}$$

其中

$$\theta(z) = \begin{cases} 1, & z > 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

$G(\boldsymbol{p},\omega)$ 的表达式包含如下的两个积分:

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}st}\mathrm{d}t.$$

我们将这类积分定义为极限

$$\lim_{\delta\to+0}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}st-\delta t}\mathrm{d}t = \mathrm{i}\lim_{\delta\to+0}\frac{1}{s+\mathrm{i}\delta}. \tag{7.5}$$

分母中的 $\mathrm{i}\delta$ 决定这个函数积分时绕过极点 $s=0$ 的方式, 即

$$\int F(s)\frac{\mathrm{d}s}{s+\mathrm{i}\delta} = \fint \frac{F(s)}{s}\mathrm{d}s - \mathrm{i}\pi F(0),$$

这里 $\fint$ 表示积分主值. 这样, 就可以写成

$$\frac{1}{s+\mathrm{i}\delta} = \frac{1}{s} - \mathrm{i}\pi\delta(s).$$

有时用符号 $\delta_+(s)$ 表示 $\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\mathrm{i}}{s+\mathrm{i}\delta}$:

$$\delta_+(s) = \delta(s) - \frac{1}{\mathrm{i}\pi s}. \tag{7.6}$$

借助 (7.4) 和 (7.5) 式就得到

$$G^{(0)}(\boldsymbol{p},\omega) = \frac{\theta(|\boldsymbol{p}|-p_0)}{\omega-\varepsilon_0(\boldsymbol{p})+\mathrm{i}\delta} + \frac{\theta(p_0-|\boldsymbol{p}|)}{\omega-\varepsilon_0(\boldsymbol{p})-\mathrm{i}\delta}.$$

注意 $|\boldsymbol{p}| < p_0$ 和 $|\boldsymbol{p}| > p_0$ 时 G 的表达式的全部差别就在于 δ 的符号, 我们可以最终写成

$$G^{(0)}(\boldsymbol{p},\omega) = \frac{1}{\omega-\varepsilon_0(\boldsymbol{p})+\mathrm{i}\delta\mathrm{sign}(|\boldsymbol{p}|-p_0)}. \tag{7.7}$$

现在讨论声子系统. 我们只限于最简单的情况 —— 各向同性连续介质中的纵振动.

首先要决定, 什么是声子场算符.

将介质中点的位移记为 $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r},t)$. 单位体积的动量等于 $\rho\dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{r},t)$, 其中 ρ 是密度. 由量子力学知道, $\boldsymbol{q}$ 和 $\dot{\boldsymbol{q}}$ 要换成具有以下对易关系的算符:

$$\rho[\dot{q}_i(\boldsymbol{r},t),q_k(\boldsymbol{r}',t)]=-\mathrm{i}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta_{ik}. \tag{7.8}$$

对小体积 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 积分 (7.8) 式, 就得出坐标和动量的普通对易规则.

把算符 $\boldsymbol{q}$ 按平面波展开. 这时波矢 $\boldsymbol{k}$ 单值地决定频率, 后者我们记为 $\omega_0(\boldsymbol{k})$. 这样就有

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\{q_{\boldsymbol{k}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}-\omega_0(\boldsymbol{k})t]}+q_{\boldsymbol{k}}^{+}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}-\omega_0(\boldsymbol{k})t]}\}. \tag{7.9}$$

我们讨论纵波, 因此矢量 $\boldsymbol{q}$ 的傅里叶分量与波矢 $\boldsymbol{k}$ 的方向一致. 我们以后将使用 $\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{k}}$ 在 $\boldsymbol{k}$ 方向上的投影, 并将它记做 $q_{\boldsymbol{k}}$.

引入算符 $b_{\boldsymbol{k}}$, 它和 $q_{\boldsymbol{k}}$ 的关系是

$$q_{\boldsymbol{k}}=\frac{b_{\boldsymbol{k}}}{\sqrt{2\rho\omega_0(\boldsymbol{k})}}. \tag{7.10}$$

这时从 (7.8) 式看出, $b_{\boldsymbol{k}}$ 满足玻色产生和消灭算符的普通对易关系.

振动动能算符等于

$$K=\frac{\rho}{2}\int[\dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{r},t)]^2\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \tag{7.11}$$

振动的平均动能等于平均位能, 故可得公式

$$\overline{H}=2\overline{K}=\sum_{\boldsymbol{k}}\omega_0(\boldsymbol{k})\left(n_{\boldsymbol{k}}+\frac{1}{2}\right), \tag{7.12}$$

其中 $n_{\boldsymbol{k}}=\langle b_{\boldsymbol{k}}^{+}b_{\boldsymbol{k}}\rangle$.

本来可以取位移算符 $\boldsymbol{q}$ 为自由声子场算符. 但是为了以后讨论金属中的电声子作用时 (见 §8) 更方便, 我们把定义略加改变:

$$\widetilde{\varphi}(x)=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{\omega_0(\boldsymbol{k})}{2}}\{b_{\boldsymbol{k}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}-\omega_0(\boldsymbol{k})t]}-b_{\boldsymbol{k}}^{+}e^{-\mathrm{i}[\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}-w_0(\boldsymbol{k})t]}\}. \tag{7.13}$$

如果对 $\boldsymbol{k}$ 求和时加上限制条件 $|\boldsymbol{k}|<k_{\mathrm{D}}$, 这就是德拜模型 (见 §1) 中纵声子的公式.

再强调一次, 声子场算符是实的, 因为它们对应晶格原子的实位移. 当考虑了声子之间以及它们和其他粒子的相互用时, 这个性质显然不变.

声子格林函数通常用字母 D 表示. 它的定义和 (7.1) 式相似:

$$D(x,x')=-\mathrm{i}\langle T(\widetilde{\varphi}(x)\widetilde{\varphi}(x'))\rangle. \tag{7.14}$$

将 (7.13) 式的自由算符作为 $\widetilde{\varphi}(x)$ 代入, 并注意基态没有声子, 就得到

$$D^{(0)}(x)=-\frac{\mathrm{i}}{V}\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{\omega_0(\boldsymbol{k})}{2}\begin{cases}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\boldsymbol{kr}-\omega_0(\boldsymbol{k})t]}, & t>0,\\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\boldsymbol{kr}-\omega_0(\boldsymbol{k})t]}, & t<0.\end{cases} \tag{7.15}$$

对 $\boldsymbol{r}$ 和 t 取这个表达式的傅里叶分量, 有

$$\begin{aligned}D^{(0)}(\boldsymbol{k},\omega)=&\frac{\omega_0(\boldsymbol{k})}{2}\left[\frac{1}{\omega-\omega_0(\boldsymbol{k})+\mathrm{i}\delta}-\frac{1}{\omega+\omega_0(\boldsymbol{k})-\mathrm{i}\delta}\right]\\ =&\frac{\omega_0^2(\boldsymbol{k})}{\omega^2-\omega_0^2(\boldsymbol{k})+\mathrm{i}\delta}.\end{aligned} \tag{7.16}$$

§7.2　解析性质

现在讨论相互作用粒子系统格林函数的一般性质. 从费米系统开始, 变换成薛定谔算符, 我们得到

$$\begin{aligned}G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t-t')=&-\mathrm{i}\langle\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\psi(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t-t')}\psi^{+}(\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht'}\rangle\\ =&-\mathrm{i}\sum_s\langle\Phi_{\mathrm{H}}^{0*}\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\psi(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\Phi_s\rangle\langle\Phi_s^{*}\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht'}\psi(\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht'}\Phi_{\mathrm{H}}^{0}\rangle\\ =&-\mathrm{i}\sum_s\psi_{0s}(\boldsymbol{r})\psi_{s0}^{+}(\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_s-E_0)(t-t')},\quad t>t',\\ G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t-t')=&\mathrm{i}\sum_{s'}\psi_{0s'}^{+}(\boldsymbol{r}')\psi_{s'0}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{s'}-E_0)(t-t')},\quad t<t'.\end{aligned}$$

对于均匀系统, 矩阵元 $\psi_{nm}(\boldsymbol{r})$ 和 $\psi_{nm}^{+}(\boldsymbol{r})$ 与坐标关系是

$$\psi_{nm}(\boldsymbol{r})=\psi_{nm}(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}_{nm}\boldsymbol{r}},\quad \psi_{nm}^{+}(\boldsymbol{r})=\psi_{nm}^{+}(0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}_{nm}\boldsymbol{r}},$$

其中 $\boldsymbol{p}_{nm}=\boldsymbol{p}_n-\boldsymbol{p}_m$, 而 $\boldsymbol{p}_n$ 和 $\boldsymbol{p}_m$ 是系统在状态 n 和 m 中的动量①. 令 $\boldsymbol{p}_0=\boldsymbol{0}$, 得

$$G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t-t')=-\mathrm{i}\sum_s|\psi_{0s}(0)|^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}_s(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_s-E_0)(t-t')},\quad t>t',$$

① 这是因为根据量子力学 (见 [17], 第 58 页; 或中文本 [83] 第 41 页), 空间平移算符是 $\mathrm{e}^{i\hat{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{r}}$ ($\hat{\boldsymbol{p}}$ 是动量算符), 因此 $\psi(\boldsymbol{r})=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{r}}\psi(0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{r}}$. 顺便指出, 如果将 $\psi(\boldsymbol{r})$ 表示为 $\psi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum a_{\boldsymbol{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}}$, 则显然得到 $\psi_{nm}(0)=\frac{1}{\sqrt{V}}(a_{-\boldsymbol{p}_{nm}})_{nm}$.

$$G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t-t')=\mathrm{i}\sum_{s'}|\psi_{s'0}(0)|^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}_{s'}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_{s'}-E_0)(t-t')},\quad t<t'. \tag{7.17}$$

算符 $\psi^+(\boldsymbol{r})$ 使粒子数增加一个. 因此 $t>t'$ 时对 s 的求和是按粒子数为 $N+1$ 的态进行, 而 $t<t'$ 时对 s' 的求和是按粒子数为 $N-1$ 的态进行. 引入符号

$$E_s-E_0(N)=\varepsilon_s+\mu, \tag{7.18}$$

其中

$$\varepsilon_s=E_s-E_0(N+1) \tag{7.19}$$

是系统的激发能, 它根据定义就为正量, 而 $\mu=E_0(N+1)-E_0(N)$ 是 $T=0$ 时的化学势. 与此类似

$$\begin{aligned}E_{s'}-E_0(N)=&E_{s'}-E_0(N-1)-[E_0(N)-E_0(N-1)]\\=&\varepsilon_{s'}-\mu'.\end{aligned} \tag{7.18'}$$

最后一式中的 $\varepsilon_{s'}$ 和 μ' 是对粒子数为 $N-1$ 的系统引入的. 然而可以认为 $\varepsilon_s=\varepsilon_{s'}$, $\mu=\mu'$. 这样带来的误差约为 $\dfrac{1}{N}$.

再引入函数

$$\begin{aligned}A(\boldsymbol{p},E)\mathrm{d}E&=(2\pi)^3\sum_s|\psi_{0s}(0)|^2\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_s),\quad E<\varepsilon_s<E+\mathrm{d}E,\\B(\boldsymbol{p},E)\mathrm{d}E&=(2\pi)^3\sum_{s'}|\psi_{s'0}(0)|^2\delta(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}_{s'}),\quad E<\varepsilon_{s'}<E+\mathrm{d}E.\end{aligned} \tag{7.20}$$

现在把函数 G 展成傅里叶积分①

$$G(\boldsymbol{p},\omega)=\int_0^\infty\mathrm{d}E\left[\frac{A(\boldsymbol{p},E)}{\omega-E-\mu+\mathrm{i}\delta}+\frac{B(\boldsymbol{p},E)}{\omega+E-\mu-\mathrm{i}\delta}\right]. \tag{7.21}$$

这个公式中的系数 A 和 B 是正实数. 利用积分表示 (7.21) 可以研究函数 $G(\boldsymbol{p},\omega)$ 的解析性质.

分开函数 G 的实部和虚部, 就得到

$$\mathrm{Re}\ G(\boldsymbol{p},\omega)=\int_0^\infty\mathrm{d}E\left[\frac{A(\boldsymbol{p},E)}{\omega-E-\mu}+\frac{B(\boldsymbol{p},E)}{\omega+E-\mu}\right], \tag{7.22}$$

$$\mathrm{Im}\ G(\boldsymbol{p},\omega)=\begin{cases}-\pi A(\boldsymbol{p},\omega-\mu), & \omega>\mu,\\ \pi B(\boldsymbol{p},\mu-\omega), & \omega<\mu\end{cases} \tag{7.23}$$

① Lehmann[29] 首先在量子场论中得出这类公式.

($\int\!\!\!\!\!\!-$ 表示积分主值). 由此看出, 格林函数的虚部在 $\omega=\mu$ 点变号. 比较 (7.23) 和 (7.22) 式就可以得到虚部与实部之间的关系如下:

$$\mathrm{Re}\ G(\boldsymbol{p},\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\ G(\boldsymbol{p},\omega')\mathrm{sgn}(\omega'-\mu)}{\omega'-\omega}\mathrm{d}\omega'. \tag{7.24}$$

从公式 (7.21) 和 (7.20) 可以求出 $\omega\to\infty$ 时函数 G 的渐近式:

$$\begin{aligned}G(\boldsymbol{p},\omega)&\to\frac{1}{\omega}\int_0^{\infty}\mathrm{d}E[A(\boldsymbol{p},E)+B(\boldsymbol{p},E)]\\&=\frac{1}{\omega}\left[(2\pi)^3\sum_s|\psi_{0s}(0)|^2\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_s)\right.\\&\qquad\left.+(2\pi)^3\sum_{s'}|\psi_{s'0}(0)|^2\delta(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}_{s'})\right].\end{aligned}$$

不难看出, $\dfrac{1}{\omega}$ 的系数等于反对易关系

$$\{\psi(\boldsymbol{r}),\psi^+(\boldsymbol{r}')\}\psi(\boldsymbol{r})\psi^+(\boldsymbol{r}')+\psi^+(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r})=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

的傅里叶分量, 即等于 1. 为此只需将此反对易关系对基态求平均 (其数值当然不因此改变), 再作类似 (7.17) 式的变换, 并对 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$ 取傅里叶分量, 这样就得到

$$G(\boldsymbol{p},\omega)\to\frac{1}{\omega},\quad \text{当}\ \omega\to\infty. \tag{7.21$'$}$$

将 G 作为复变数 ω 的函数, 研究其性质. 从 (7.24) 式可知, $G(\boldsymbol{p},\omega)$ 不是解析函数. 对于在上半平面解析的函数, 要在 (7.24) 式中把 $\mathrm{sgn}(\omega'-\mu)$ 换成 1, 才是真实部与虚部之间的关系; 而对于在下半平面解析的函数, 应把 $\mathrm{sign}(\omega'-\mu)$ 换成 -1.

与 G 同时, 我们再讨论两个函数 G_{R} 和 G_{A}, 它们分别在上半平面和下半平面是解析的. 它们的定义为 (ω 是实数):

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\ G=\mathrm{Re}\ G_{\mathrm{R}}=\mathrm{Re}\ G_{\mathrm{A}},\\&\mathrm{Im}\ G_{\mathrm{R}}=\mathrm{Im}\ G\ \mathrm{sgn}(\omega-\mu),\\&\mathrm{Im}\ G_{\mathrm{A}}=-\mathrm{Im}\ G\ \mathrm{sgn}(\omega-\mu).\end{aligned} \tag{7.25}$$

由 (7.25) 式看出, 在实半轴 $\omega-\mu<0$ 上, G_{R} 与 G^* 重合, 而在 $\omega-\mu>0$ 时, G_{A} 与 G^* 重合. 因此可以定出:

$$\begin{aligned}G_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{p},\omega)&=\begin{cases}G(\boldsymbol{p},\omega), & \omega>\mu,\\ G^*(\boldsymbol{p},\omega), & \omega<\mu,\end{cases}\\ G_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{p},\omega)&=\begin{cases}G^*(\boldsymbol{p},\omega), & \omega>\mu,\\ G(\boldsymbol{p},\omega), & \omega<\mu.\end{cases}\end{aligned} \tag{7.25$'$}$$

从 (7.25′) 式得知, G_{R} 乃是函数 G 从半轴 $\omega>\mu$ 的解析延拓, 而 G_A 是从 G 从半轴 $\omega<\mu$ 的解析延拓.

在坐标表象中, 函数 G_{R} 和 G_{A} 的定义如下:

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{R}}(x-x') &= \begin{cases} -\mathrm{i}\langle\widetilde{\psi}(x)\widetilde{\psi}^{+}(x')+\widetilde{\psi}^{+}(x')\widetilde{\psi}(x)\rangle & (t>t'), \\ 0 & (t<t'), \end{cases} \\ G_{\mathrm{A}}(x-x') &= \begin{cases} 0 & (t>t'), \\ \mathrm{i}\langle\widetilde{\psi}^{+}(x')\widetilde{\psi}(x)+\widetilde{\psi}(x)\widetilde{\psi}^{+}(x')\rangle & (t<t'). \end{cases} \end{aligned} \tag{7.26}$$

只要在上式中完成推导 (7.21) 式时所作的运算, 就得到

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{p},\omega) &= \int_0^{\infty}\mathrm{d}E\left[\frac{A(\boldsymbol{p},E)}{\omega-E-\mu+\mathrm{i}\delta}+\frac{B(\boldsymbol{p},E)}{\omega+E-\mu+\mathrm{i}\delta}\right], \\ G_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{p},\omega) &= G_{\mathrm{R}}^{*}(\boldsymbol{p},\omega). \end{aligned} \tag{7.27}$$

将 G_{R} 和 G_{A} 的实部和虚部与 (7.22), (7.23) 式比较, 容易看出, 这些函数满足关系式 (7.25). G_{R} 和 G_{A} 分别称为推迟和超前格林函数.

现在讨论声子. 声子场算符是实的, 即 $\widetilde{\varphi}(x)=\widetilde{\chi}(x)+\widetilde{\chi}^{+}(x)$. 此外应当注意到, 化学势 $\mu=0$(见 §1), 并且在基态不存在声子. 和前面相似地得到

$$D(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t-t') = \begin{cases} -\mathrm{i}\sum\limits_{s}|\chi_{0s}(0)|^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_s-E_0)(t-t')}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_s(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}, & t>t', \\ -\mathrm{i}\sum\limits_{s}|\chi_{0s}(0)|^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_s-E_0)(t-t')}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_s(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}, & t<t'. \end{cases} \tag{7.28}$$

引入函数

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{k},E)\mathrm{d}E =& (2\pi)^3\sum_{s}|\chi_{0s}(0)|^2\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_s) \\ =& (2\pi)^3\sum_{s}|\chi_{0s}(0)|^2\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}_s), \end{aligned}$$

其中对 s 的求和涉及能量 E_s 处于区间 $E<E_s-E_0<E+\mathrm{d}E$ 内的状态. 将 (7.28) 式展成傅里叶积分, 就得出

$$D(\boldsymbol{k},\omega)=\int_0^{\infty}P(\boldsymbol{k},E)\left\{\frac{1}{\omega-E+\mathrm{i}\delta}-\frac{1}{\omega+E-\mathrm{i}\delta}\right\}\mathrm{d}E. \tag{7.29}$$

这个函数的虚部永远是负的:

$$\mathrm{Im}D(\boldsymbol{k},\omega)=-\pi P(\boldsymbol{k},|\omega|). \tag{7.30}$$

实部和虚部之间的关系, 同函数 $G(\boldsymbol{p},\omega)$ 一样. 由此可见, 声子格林函数的解析性质与 $\mu=0$ 的费米系统格林函数相同.

因此可以构成两个满足关系式 (7.25)($\mu=0$) 的解析函数 D_{R} 和 D_{A}. 它们在坐标表象中的形式为

$$\begin{aligned} D_{\mathrm{R}}(x-x') &= \begin{cases} -\mathrm{i}\langle\widetilde{\varphi}(x)\widetilde{\varphi}(x')-\widetilde{\psi}(x')\widetilde{\varphi}(x)\rangle, & t>t', \\ 0, & t<t', \end{cases} \\ D_{\mathrm{A}}(x-x') &= \begin{cases} 0, & t>t', \\ -\mathrm{i}\langle\widetilde{\varphi}(x')\widetilde{\varphi}(x)-\widetilde{\varphi}(x)\widetilde{\varphi}(x')\rangle, & t<t'. \end{cases} \end{aligned} \tag{7.31}$$

§7.3　极点的物理意义

我们已经指出过, 知道了格林函数, 就可以求得系统的许多物理特性, 其应用之一, 就是确定元激发谱.

讨论费米系统, 它在初始时刻 t' 由波函数

$$\Psi_0(t')=\psi_{\boldsymbol{p}}^{+}(t')\Phi_{\mathrm{i}}(t') \tag{7.32}$$

描述, 其中 $\psi_{\boldsymbol{p}}^{+}(t')$ 是相互作用表象中动量为 $\boldsymbol{p}$ 的粒子的产生算符, 即 $a_{\boldsymbol{p}}^{+}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon_0(\boldsymbol{p})t'}$, 而 $\Phi_{\mathrm{i}}(t')$ 是在相互作用表象中粒子系统的基态波函数. 在时刻 $t>t'$, 系统的波函数为

$$\Psi(t)=S(t,t')\psi_{\boldsymbol{p}}^{+}(t')\Phi_{\mathrm{i}}(t').$$

我们现在求状态 $\Psi_0(t)$ 的概率幅度. 它等于

$$\begin{aligned} \langle\Psi_0^{*}(t)\Psi(t)\rangle =& \langle\Phi_{\mathrm{i}}^{*}(t)\psi_{\boldsymbol{p}}(t)S(t,t')\psi_{\boldsymbol{p}}^{+}(t')\Phi_{\mathrm{i}}(t')\rangle \\ =& \langle\Phi_{\mathrm{H}}^{0*}S^{-1}(t)\psi_{\boldsymbol{p}}(t)S(t,t')\psi_{\boldsymbol{p}}^{+}(t')S(t')\Phi_{\mathrm{H}}^{0}\rangle \\ =& \langle\widetilde{\psi}_{\boldsymbol{p}}(t)\widetilde{\psi}_{\boldsymbol{p}}^{+}(t')\rangle=\mathrm{i}G(\boldsymbol{p},t-t'), \quad t-t'>0. \end{aligned} \tag{7.33}$$

这里已经从相互作用表象变换到海森伯表象.

为了求得函数 $G(\boldsymbol{p},t)$, 必须计算积分

$$G(\boldsymbol{p},t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}G(\boldsymbol{p},\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}. \tag{7.34}$$

由于 $G(\boldsymbol{p},\omega)$ 不是解析函数, 我们把积分分成两部分: 从 $-\infty$ 到 μ, 从 μ 到 $+\infty$. 第一部分积分里 G 和解析函数 G_{A} 重合, 在第二部分积分里和 G_{R} 重合. 前面已经指出, 函数 G_{A} 在下半平面没有奇异点. 因此, 在第一部分积分里可以变换积分路线 (图 2). 如果将此路线水平部分推向下半平面足够远处, 则积分值由于因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 而变得很小, 结果只剩下积分 $\displaystyle\int_{\mu-\mathrm{i}\infty}^{\mu}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}G_A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$.

再看第二部分积分, 一般地说, 函数 G_{R} 在下半平面内是有奇异点的. 假定在复变数 $\omega-\mu$ 平面第四象限内距实轴最近的奇异点, 是位于 $\omega=\varepsilon(\boldsymbol{p})-\mathrm{i}\gamma$ 处的简单极点, 并且 $\gamma\ll\varepsilon(\boldsymbol{p})-\mu$. 令积分路线变形如图 3 所示. 这个路线的水平部分当然高于下一奇异点, 因而不能推移到 $-\mathrm{i}\infty$ 去. 然而可取足够长的时间 t, 使得这个积分很小. 这样, 就剩下了沿垂直路线以及环绕极点的积分:

$$\int_{\mu}^{\mu-\mathrm{i}\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}G_{\mathrm{R}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}-\mathrm{i}a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon(\boldsymbol{p})t-\gamma t},$$

其中 a 是 G_{R} 在极点上的留数. 以后我们将证明, 当 $t\gg[\varepsilon(\boldsymbol{p})-\mu]^{-1}$ 时, 图 2 和图 3 上两个沿垂直路线的积分的贡献都很小. 因此, 对时间很长的极限情况, 我们得到

$$\mathrm{i}G(\boldsymbol{p},t)\approx a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon(\boldsymbol{p})t-\gamma t}. \tag{7.35}$$

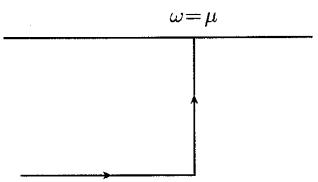


图 2

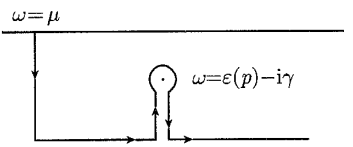


图 3

如果在初始状态只有一个动量为 $\boldsymbol{p}$、能量为 $\varepsilon_0(\boldsymbol{p})$ 的自由粒子, 则类似 (7.33) 式的量应为 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon_0(\boldsymbol{p})(t-t')}$. 由此可知, 在 (7.32) 式所描述的状态中存在着波包, 它相当于能量为 $\varepsilon(\boldsymbol{p})$、并按 $\mathrm{e}^{-\gamma(t-t')}$ 律随时间衰减的准粒子. 因此, 准粒子的能量和衰减, 由函数 G_{R} 在下半平面的极点的实部和虚部决定. 波包的幅度则与函数 G_{R} 在极点的留数有关.

现在我们证明, 积分中省略了的部分, 在动量相当于 $\varepsilon(\boldsymbol{p})\approx\mu$ 的范围内确是小量. 回想 $G_{\mathrm{A}}=G_{\mathrm{R}}^{*}$, 求得图 2 和图 3 沿垂直部分的积分之和为

$$\int_{\mu}^{\mu-\mathrm{i}\infty}(G_{\mathrm{R}}-G_{\mathrm{R}}^{*})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}=2\mathrm{i}\int_{\mu}^{\mu-\mathrm{i}\infty}\mathrm{Im}\ G_{\mathrm{R}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}.$$

根据 §2 所述的唯象讨论, 条件 $\gamma\ll\varepsilon(\boldsymbol{p})-\mu$ 只在 $\varepsilon(\boldsymbol{p})\approx\mu$ 附近成立①, 因而认定 $t\gg\dfrac{1}{\varepsilon(\boldsymbol{p})-\mu}$ 后, 就可以把 G_{R} 换成

$$\frac{a}{\omega-\varepsilon(\boldsymbol{p})+\mathrm{i}\gamma}.$$

① $\varepsilon(\boldsymbol{p})-\mu\to0$ 时, $\gamma\ll\varepsilon(\boldsymbol{p})-\mu$. 这一假定的正确性, 曾在许多具体例子中严格证明 (见 §21 和 §22).

引入新变量 $\mathrm{i}(\omega-\mu)=u$, 得到

$$-\frac{2\gamma a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu t}}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u\mathrm{e}^{-ut}}{\gamma^2+[\varepsilon(\boldsymbol{p})-\mu+\mathrm{i}u]^2}.$$

由于 $t\gg[\varepsilon(\boldsymbol{p})-\mu]^{-1}$, 这个积分等于

$$-\frac{\gamma a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu t}}{\pi t[\varepsilon(\boldsymbol{p})-\mu]^2}.$$

如果认为 t 不比 $1/\gamma$ 大很多, 则这个值比图 3 中绕极点的贡献小得多.

波函数为

$$\Psi'_0(t)=\Psi_{\boldsymbol{p}}(t)\Phi_{\mathrm{i}}(t) \tag{7.36}$$

的状态也可以类似地加以考虑. 讨论在较迟的时刻 t' 的这个状态, 就得到

$$\langle\Psi'^*_0(t')\Psi'(t')\rangle=-\mathrm{i}G(\boldsymbol{p},t-t'),\quad \text{当 } t-t'<0.$$

既然 $t<0$, 则按 (7.34) 式计算 $G(\boldsymbol{p},t)$ 时, 重要的是函数 $G_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{p},\omega)$ 在上半平面中的极点. 当 $|t|\gg|\varepsilon(\boldsymbol{p})-\mu|^{-1}$ 时, 与以前相似地得到

$$-\mathrm{i}G(\boldsymbol{p},t)\approx a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon(\boldsymbol{p})t-\gamma t},$$

其中 $\varepsilon(\boldsymbol{p})<\mu,\gamma<0$. 我们得到了相当于空穴 $\varepsilon(\boldsymbol{p})<\mu$ 的波包. 由此可知, 空穴的能量和衰减由函数 $G_A(\boldsymbol{p},\omega)$ 在上半平面的极点决定. 还须指同, "粒子" 和 "空穴" 的 γ 符号相反.

对于声子, 这些结果也是成立的. 不难从 (7.29) 式看出, 这时函数 $D_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{k},\omega)$ 在下半平面的每个极点, 对应于函数 $D_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{k},\omega)$ 在上半平面的一个极点, 它们的位置对 $\omega=0$ 点是对称的. 因而两种决定激发谱的方法给出同一结果.

除了能谱以外, 还可以借助格林函数求单位体积粒子数和化学势的关系, 求基态能量和粒子按动量的分布 (当然, 这一切都是对费米粒子而言, 我们在本节初就作了这种限制).

从格林函数的定义 (7.1) 式本身得

$$\begin{aligned}\frac{N}{V}=&\langle\widetilde{\psi}^+_\alpha(x)\widetilde{\psi}_\alpha(x)\rangle\\ =&-\mathrm{i}\lim_{\substack{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'\\ t'\to t+0}}G_{\alpha\alpha}(x-x')=-2\mathrm{i}\lim_{\substack{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'\\ t'\to t+0}}G(x-x'),\end{aligned}$$

其中 $G_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}G$.

变换到 G 的动量表象, 就有

$$\frac{N}{V}=-2\mathrm{i}\lim_{t\to+0}\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}\mathrm{d}\omega}{(2\pi)^4}G(\boldsymbol{p},\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}. \tag{7.37}$$

既然 (7.37) 式中的积分只与 μ 有关, 我们就求得了 $N(\mu)$ 关系. 反过来表示成 $\mu(N)$, 再利用公式 $\mu=\left(\dfrac{\partial E_0}{\partial N}\right)_V$, 可由此得基态能量. 的确, 这个方法实际运用起来不是最方便的. 我们在 §10 中还要再回到基态能量问题.

为了求粒子的动量分布, 只须计算

$$N_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{p})=N_{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{p})=\langle\Phi_0^*a^+_{\boldsymbol{p},\frac{1}{2}}a_{\boldsymbol{p},\frac{1}{2}}\Phi_0\rangle=\langle a^+_{\boldsymbol{p},\frac{1}{2}}a_{\boldsymbol{p},\frac{1}{2}}\rangle,$$

其中 $\Phi_0=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_0t}\Phi_{\mathrm{H}}^0$ 是系统基态的薛定谔波函数. 和 (7.17) 式比较 (参看第 (7.17) 式前的脚注), 就得到

$$N_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{p})=N_{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{p})=-2\mathrm{i}\lim_{t\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}G(\boldsymbol{p},\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}. \tag{7.38}$$

从 (7.38) 式可以得到动量分布的一个有趣性质 (A.B.Migdal[30]). 以方程式 $\varepsilon(p_0)=\mu$ 定义激发的边界费米动量 p_0. 在 $|\boldsymbol{p}|=p_0$ 附近研究 $N(\boldsymbol{p})$. 根据 §2 中的假定, 费米液体的激发是动量在 p_0 附近的 "粒子" 和 "空穴". 这些准粒子的衰减比 $|\varepsilon(\boldsymbol{p})-\mu|$ 小. 利用这些知识就可以确定函数 G_{A} 和 G_{R} 的极点. 当 $|\boldsymbol{p}|<p_0$ 时, 函数 G_{A} 在上半平面靠近实轴处有一极点, 而当 $|\boldsymbol{p}|>p_0$ 时, 这个极点消失, 然后在下半平面出现函数 G_{R} 的极点. 将 (7.38) 式中的积分分别表示成 G_{A} 和 G_{R} 的两个回路积分, 就像对 (7.34) 式的积分所作的那样. 图 2 和图 3 上积分路线的水平部分, 我们移入下半平面, 并令其到实轴的距离远大于 $\varepsilon(\boldsymbol{p})-\mu$. 这时沿这段路径的积分对动量 $\boldsymbol{p}$ 的微小变化已不敏感. 沿垂直路径的积分可以合并成

$$2\int_{\mu}^{\mu-\mathrm{i}\,L}\mathrm{Im}G_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{p},\omega)\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}.$$

这个积分可以分成两部分, 即在 $\varepsilon=\mu$ 点附近区域的积分, 和与该点的距离大于 $\varepsilon(\boldsymbol{p})-\mu$ 的区域积分. $|\boldsymbol{p}|$ 的变化对远处的积分影响不大, 而在近处的积分中可代入 $G_{\mathrm{R}}\approx\dfrac{a}{\omega-\varepsilon(\boldsymbol{p})+\mathrm{i}\gamma}$, 于是可以看出它小到能忽略 $\left(\sim\dfrac{\gamma}{\varepsilon(\boldsymbol{p})-\mu}\right)$. 由此可知, $|\boldsymbol{p}|<p_0$ 和 $|\boldsymbol{p}|>p_0$ 时 $N_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{p})$ 的表达式 (7.38) 的全部差别在于, 第一种情况下没有图 3 中绕极点的积分, 第二种情况下它出现了. 因此有

$$N_{\frac{1}{2}}(p_0-0)-N_{\frac{1}{2}}(p_0+0)=a. \tag{7.39}$$

根据 (7.21) 式, 常数 a 必为正数. 这样我们就得出结论: 粒子的动量分布和激发的分布在同一点 $|\boldsymbol{p}|=p_0$ 具有跃变. 根据费米液体理论的基本假定, 激发的费米边界动量 p_0 与粒子数密度的关系是 (2.1) 式 (这个假定的正确性将在第 4 章中证明). 因此, 有相互作用的粒子和无相互作用的粒子的动量分布跃变发生在同一点. 由于 $0\leqslant N_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{p})\leqslant 1$, 对跃变值有

$$0\leqslant a\leqslant 1. \tag{7.40}$$

§5 中得到的稀薄费米气体粒子动量分布就是一例.

§7.4　系统在外场中的格林函数

现在我们讨论处于和时间无关的外场中的系统. 这时格林函数的变量是 $t-t'$, $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$. 代替 (7.17) 式的是

$$\begin{aligned} G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t') &= -\mathrm{i}\sum_s \psi_{0s}(\boldsymbol{r})\psi_{0s}^*(\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_s-E_0)(t-t')}, \quad t>t', \\ G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t') &= \mathrm{i}\sum_s \psi_{s0}^*(\boldsymbol{r}')\psi_{s0}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_s-E_0)(t-t')}, \quad t<t', \end{aligned} \tag{7.41}$$

其中 $\psi(\boldsymbol{r})$ 和 $\psi(\boldsymbol{r}')$ 是薛定谔算符. 如果像在无外场时那样进行运算, 我们就会得到 (7.21) 式的公式, 其中 A,B 是复函数. 为避免这种不便, 可以引入对称组合:

$$\frac{1}{2}[G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')+G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r},t-t')]. \tag{7.42}$$

如果只讨论与 ω 的关系, 则这个函数的傅里叶分量具有无外场时函数 G 的全部性质. 全部公式 (7.21)~(7.27) 对它都成立, 差别只是代替参数 $\boldsymbol{p}$, 所有量将和参数 $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}'$ 有关.

讨论在外场中的彼此无相互作用的费米粒子时, 最好将算符 $\psi(\boldsymbol{r})$ 取为

$$\psi(\boldsymbol{r})=\sum_s a_s\varphi_s(\boldsymbol{r}),$$

其中 $\varphi_s(\boldsymbol{r})$ 是一个粒子在外场中的本征函数. 这时, 代入 (7.17) 式有

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t') = -\mathrm{i}\sum_s \varphi_s^*(\boldsymbol{r}')\varphi_s(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon_s(t-t')}\begin{cases} 1-n_s, & t>0, \\ -n_s, & t<0, \end{cases}$$

其中

$$n_s=\begin{cases} 1, & \varepsilon_s<\mu, \\ 0, & \varepsilon_s>\mu, \end{cases} \tag{7.43}$$

这里 ε_s 表示粒子在状态 φ_s 的能量. 取时间傅里叶分量, 得

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)=\sum_{\varepsilon_s>\mu}\frac{\varphi_s^*(\boldsymbol{r}')\varphi_s(\boldsymbol{r})}{\omega-\varepsilon_s+\mathrm{i}\delta}+\sum_{\varepsilon_s<\mu}\frac{\varphi_s^*(\boldsymbol{r}')\varphi_s(\boldsymbol{r})}{\omega-\varepsilon_s-\mathrm{i}\delta}. \tag{7.44}$$

现在引入类似 (7.20) 式中 A 和 B 的量:

$$A(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',E)\mathrm{d}E=\sum_s \varphi_s^*(\boldsymbol{r}')\varphi_s(\boldsymbol{r}), \quad E<\varepsilon_s<E+\mathrm{d}E.$$

令 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$, 将此关系式对 $\mathrm{d}V$ 积分. 这时由于函数 φ_s 的归一条件我们在右端得到能量间隔 $\mathrm{d}E$ 内的能级数目 $\mathrm{d}N$. 于是

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}A(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',E)=\frac{\mathrm{d}N(E)}{\mathrm{d}E}.$$

(7.44) 式借助 A 表示成

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',E)}{\omega-E+\mathrm{i}\delta\mathrm{sgn}(E-\mu)}\mathrm{d}E.$$

由此知道, $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)$ 的虚部 ($\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$ 时 A 是正实数) 为

$$\mathrm{Im}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r},\omega)=\begin{cases}-\pi A(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r},\omega), & \omega>\mu;\\ \pi A(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r},\omega), & \omega<\mu.\end{cases}$$

从而得到

$$\frac{\mathrm{d}N(E)}{\mathrm{d}E}=-\frac{1}{\pi}\mathrm{sgn}(E-\mu)\int \mathrm{Im}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r},E)\mathrm{d}\boldsymbol{r}. \tag{7.45}$$

§8 图解法的基本原则

§8.1 从变量 N 到变量 μ 的变换

计算格林函数之前, 先变换到新的变量. 迄今我们讨论了粒子数一定的系统. 今后更方便的作法, 是认为粒子数是变量, 而给定化学势. 实际上我们对声子已使用了这种变量, 那里 $\mu=0$, 而系统内的粒子数不定. 然而对于费米系统, 我们正是给定了粒子数, 公式中的化学势 μ, 应视为粒子数的函数. 实际计算中最好认为 μ 是独立变量, 而在最终结果中回到一定粒子数.

从一个变量到另一个变量的变换可按如下方式完成. 系统的波函数和能级可以得自变分原理:

$$\langle\Psi^*\hat{H}\Psi\rangle=\text{最小数}, \tag{8.1}$$

其条件为

$$\langle\Psi^*\hat{N}\Psi\rangle=\text{常数}, \tag{8.2}$$

这里 $\hat{H}$ 和 $\hat{N}$ 是哈密顿量和粒子数算符. 另一作法是利用拉格朗日不定乘子法, 而求下式的绝对极小值:

$$\langle\Psi^*(\hat{H}-\mu\hat{N})\Psi\rangle,$$

其中常数 μ 以后由条件 (8.2) 式决定. 这样, 从给定 N 到给定 μ 的变换, 归结为将哈密顿量换成算符 $\hat{H}-\mu\hat{N}$. 由于算符 $\hat{N}$ 和哈密顿量对易, 极易求得算符 $\widetilde{\psi}(x)$ 的变换公式:

$$\widetilde{\psi}_{\mu}(x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\hat{N}t}\widetilde{\psi}_{N}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\tilde{N}t}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu t}\widetilde{\psi}_{N}(x), \tag{8.3}$$

这里注意到了算符 $\widetilde{\psi}_{N}$ 使粒子数减少一个. 类似地对算符 $\widetilde{\psi}_{\mu}^{+}(x)$ 有

$$\widetilde{\psi}_{\mu}^{+}(x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu t}\widetilde{\psi}_{N}^{+}(x). \tag{8.4}$$

格林函数定义为

$$G_{\mu}(x,x')=G_{N}(x,x')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu(t-t')}. \tag{8.5}$$

由此可见, 只须作变换

$$\omega_{(N)}\to\omega_{(\mu)}+\mu. \tag{8.6}$$

前节里的全部结论就都对 G_{μ} 成立.

既然为了计算粒子数及其动量分布, 只须知道 G 在 $t=t'$ 时的值, 则相应的 (7.37) 和 (7.38) 式显然不变. 新格林函数的极点则给出从化学势算起的元激发能量.

我们已经讲过, 在实际计算中应用函数 G_{μ} 更为方便. 因此, 今后我们通常就这样定义格林函数, 并用字母 G 表示. 有时为了分析函数 G 的一般性质, 须认为粒子数是给定的 (如在上节中), 这时将特别说明.

§8.2　维克定理

现在我们就转而计算格林函数. 借助 §6 中所得到的变换到相互作用表象的公式 (6.32), 可将微扰论级数简单紧凑地表示出. 应用 (6.32) 式于格林函数, 有

$$G(x,x')=\frac{-\mathrm{i}\langle T\psi(x)\psi^{+}(x')S(\infty)\rangle}{\langle S(\infty)\rangle}, \tag{8.7}$$

其中

$$S(\infty)=T\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}H_{\mathrm{int}}\mathrm{d}t}\right). \tag{8.8}$$

再强调一次, (8.7) 式 (以及 H_{int}) 中的算符 ψ 遵从无相互作用粒子的方程.

将 (8.7) 式分子中的 $S(\infty)$ 按 H_{int} 的幂展开, 这就得到

$$S(\infty)=1-\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}H_{\mathrm{int}}\mathrm{d}t+\frac{(-\mathrm{i})^{2}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}T[H_{\mathrm{int}}(t_{1})H_{\mathrm{int}}(t_{2})]\mathrm{d}t_{1}\mathrm{d}t_{2}+\cdots,$$

$$G(x,x')=-\frac{\mathrm{i}}{\langle S(\infty)\rangle}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^{n}}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t_{1}\cdots\mathrm{d}t_{n}$$

$$\times \langle T[\psi(x)\psi^{+}(x')H_{\text{int}}(t_1)\cdots H_{\text{int}}(t_n)]\rangle. \tag{8.9}$$

分母中的 $\langle S(\infty)\rangle$ 我们暂不展开. 通常相互作用哈密顿量 H_{int} 是若干算符 ψ 的乘积对空间的变量, 有时还对时间变量积分 (以后还会见到具体例子). 这样, 级数 (8.9) 式中的第一项都包含着几个相互作用表象中粒子场算符编时乘积的平均值. 因而我们首先应当讨论如下的表达式:

$$\langle T(ABCD\cdots XYZ)\rangle,$$

其中 $A, B, \cdots, X, Y, Z$ 是相互作用表象中的场算符 (再提醒一次, 它们和相应无相互作用粒子的算符是一样的).

每个场算符可分成两项之和. 其中一项作用于基态波函数, 为零. 这部分可称做 "消灭算符". 在声子算符 (7.13) 式中这是系数为 b_k 的和, 而在费米子算符 (6.14) 式中就是 $|\boldsymbol{p}| > p_0$ 的那部分的和. 另一部分可称为 "产生算符", 它的性质是: 其厄米共轭算符作用到基态上给出零. 我们定义正规乘积

$$N(ABCD\cdots XYZ),$$

其中所有 "产生算符" 位于 "消灭算符" 左面, 而乘积的符号由费米算符置换数的奇偶决定. 其次, 我们将差数

$$A^cB^c = T(AB) - N(AB)$$

称为两个算符的 "收缩".

现在证明, $T-$ 乘积永远可以表示为一系列 $N-$ 乘积之和, 其中包括了一切可能方式的算符收缩, 即

$$\begin{aligned} T(ABCD\cdots XYZ) =& N(ABCD\cdots XYZ) \\ &+ N(A^cB^cCD\cdots XYZ) + N(A^cBC^cD\cdots XYZ) \\ &+ \cdots + N(A^cB^aC^a\cdots X^cY^bZ^b). \end{aligned} \tag{8.10}$$

这个关系式就叫作维克定理 (见 [26]).

首先指出, 在等式 (8.10) 两端同时置换算符并不破坏这个关系式. 因此可以假定, (8.10) 式中算符的排列与它们的时间顺序一致而不影响普遍性. 为了从 T 乘积得到 N 乘积, 须依次把所有产生算符置换到消灭算符左面. 这时我们就得到如 (8.10) 式中写出的 N 乘积之和. 但是这个和中只包含了那些在 T 乘积和 N 乘积中顺序不同的算符的收缩. 然而由于对两处顺序全同的算府, 其收缩等于零, 我们还可以认为 (8.10) 式右端的 N 乘积包括了一切可能方式的收缩. 这样, 关系式 (8.10) 得证.

利用 (6.14) 和 (7.13) 式不难看出, 费米算符 $\psi^+(x')$ 和 $\psi(x)$ 以及两个声子算符 $\varphi(x)$ 和 $\varphi(x')$ 的收缩, 乃是普通数, 而所有其他的收缩等于零. 例如:

$$\begin{aligned}\psi^{+c}(x')\psi^c(x) =&\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'}\{a^+_{\boldsymbol{p}'}a_{\boldsymbol{p}} - \underset{|\boldsymbol{p}|>p_0}{a^+_{\boldsymbol{p}'}a_{\boldsymbol{p}}} + \underset{|\boldsymbol{p}|<p_0}{a_{\boldsymbol{p}}a^+_{\boldsymbol{p}'}}\}\\ &\times \mathrm{e}^{\mathrm{i}[\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}-\boldsymbol{p}'\boldsymbol{r}'-\varepsilon_0(\boldsymbol{p})t+\varepsilon_0(\boldsymbol{p}')t']}\\ =&\frac{1}{V}\sum_{|\boldsymbol{p}|<p_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-\mathrm{i}\varepsilon_0(\boldsymbol{p})(t-t')}, \quad \text{当 } t'>t,\\ \psi^{+c}(x')\psi^c(x) =&\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'}\{-a_{\boldsymbol{p}}a^+_{\boldsymbol{p}'} - \underset{|\boldsymbol{p}|>p_0}{a^+_{\boldsymbol{p}'}a_{\boldsymbol{p}}} + \underset{|\boldsymbol{p}|<p_0}{a_{\boldsymbol{p}}a^+_{\boldsymbol{p}'}}\}\\ &\times \mathrm{e}^{\mathrm{i}[\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}-\boldsymbol{p}'\boldsymbol{r}'-\varepsilon_0(\boldsymbol{p})t+\varepsilon_0(\boldsymbol{p}')t']}\\ =&-\frac{1}{V}\sum_{|\boldsymbol{p}|>p_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-\mathrm{i}\varepsilon_0(\boldsymbol{p})(t-t')}, \quad \text{当 } t'<t.\end{aligned}$$

由正规乘积的定义知道, 它对基态的平均值为零. 因此

$$A^cB^c = \langle T(AB)\rangle.$$

在 (8.10) 式两端取对基态的平均值, 得

$$\begin{aligned}\langle T(ABCD\cdots XYZ)\rangle =&\langle T(AB)\rangle\langle T(CD)\rangle\cdots\langle T(YZ)\rangle\\ &\pm\langle T(AC)\rangle\langle T(BD)\rangle\cdots\langle T(YZ)\rangle\pm\cdots.\end{aligned}\tag{8.11}$$

这样, 左端的平均值就分成了各种可能的成对算符对基态平均值的乘积之和. 每一项前面的符号由费米算符的置换次数的奇偶决定. 由 (8.11) 式还得出, 算符乘积 $ABC\cdots$ 中每种场的算符都应为偶数个. 注意到格林函数的定义 (7.1) 式, 我们就得出结论: 任何数目场算符 T 乘积的平均值, 都可表示为自由粒子格林函数乘积之和.

§8.3　费曼图

现在回到 (8.9) 式. 由于 H_{int} 是算符 ψ 乘积的积分, 则 (8.9) 式中的每一项都可以按 (8.11) 式变换. 所得的结果可以借助所谓费曼图表示成极为直观的形式. 最好以具体例子示之. 假设我们讨论的系统由全同的费米粒子组成, 它们之间存在着与自旋无关的双粒子相互作用. 根据 §6, H_{int} 的形式是

$$H_{\mathrm{int}} = \frac{1}{2}\int\psi^+_\alpha(\boldsymbol{r}_1)\psi^+_\beta(\boldsymbol{r}_2)U(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\psi_\beta(\boldsymbol{r}_2)\psi_\alpha(\boldsymbol{r}_1)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2.\tag{8.12}$$

如果引入 $V(x_1-x_2)=U(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\delta(t_1-t_2)$, 则算符 $\int H_{\mathrm{int}}\mathrm{d}t$ 包含两个四维积分.

讨论 (8.9) 式中诸项. 求和的第一项是无相互作用的粒子的格林函数. 下一项是

$$\delta G^{(1)}=-\frac{1}{2\langle S(\infty)\rangle}\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2 \times\langle T(\psi_\alpha(x)\psi^+_\beta(x')\psi^+_\gamma(x_1)\psi^+_\delta(x_2)\psi_\delta(x_2)\psi_\gamma(x_1))\rangle V(x_1-x_2).$$

根据 (8.11) 式, 积分下的矩阵元等于

$$\begin{aligned}&\langle T(\psi_\alpha(x)\psi^+_\gamma(x_1))\rangle\langle\psi^+_\delta(x_2)\psi_\delta(x_2)\rangle\langle T(\psi_\gamma(x_1)\psi^+_\beta(x'))\rangle\\&-\langle T(\psi_\alpha(x)\psi^+_\gamma(x_1))\rangle\langle\psi^+_\delta(x_2)\psi_\gamma(x_1)\rangle\langle T(\psi_\delta(x_2)\psi^+_\beta(x'))\rangle\\&+\langle T(\psi_\alpha(x)\psi^+_\delta(x_2))\rangle\langle\psi^+_\gamma(x_1)\psi_\gamma(x_1)\rangle\langle T(\psi_\delta(x_2)\psi^+_\beta(x'))\rangle\\&-\langle T(\psi_\alpha(x)\psi^+_\delta(x_2))\rangle\langle\psi^+_\gamma(x_1)\psi_\delta(x_2)\rangle\langle T(\psi_\tau(x_1)\psi^+_\beta(x'))\rangle\\&+\langle T(\psi_\alpha(x)\psi^+_\beta(x'))\rangle\langle\psi^+_\gamma(x_1)\psi_\gamma(x_1)\rangle\langle\psi^+_\delta(x_2)\psi_\delta(x_2)\rangle\\&-\langle T(\psi_\alpha(x)\psi^+_\beta(x'))\rangle\langle\psi^+_\gamma(x_1)\psi_\delta(x_2)\rangle\langle\psi^+_\delta(x_2)\psi_\gamma(x_1)\rangle.\end{aligned}$$

注意格林函数的定义 (7.1), 可将此式写成

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}G^{(0)}_{\alpha\gamma}(x,x_1)G^{(0)}_{\delta\delta}(x_2,x_2)G^{(0)}_{\gamma\beta}(x_1,x')\\&-\mathrm{i}G^{(0)}_{\alpha\gamma}(x,x_1)G^{(0)}_{\gamma\delta}(x_1,x_2)G^{(0)}_{\delta\beta}(x_2,x')\\&+\mathrm{i}G^{(0)}_{\alpha\delta}(x,x_2)G^{(0)}_{\gamma\gamma}(x_1,x_1)G^{(0)}_{\delta\beta}(x_2,x')\\&-\mathrm{i}G^{(0)}_{\alpha\delta}(x,x_2)G^{(0)}_{\delta\gamma}(x_2,x_1)G^{(0)}_{\gamma\beta}(x_1,x')\\&-\mathrm{i}G^{(0)}_{\alpha\beta}(x,x')G^{(0)}_{\gamma\gamma}(x_1,x_1)G^{(0)}_{\delta\delta}(x_2,x_2)\\&+\mathrm{i}G^{(0)}_{\alpha\beta}(x,x')G^{(0)}_{\delta\gamma}(x_2,x_1)G^{(0)}_{\gamma\delta}(x_1,x_2).\end{aligned}\tag{8.13}$$

这样, 所讨论的式子就成为若干项之和, 其中每一项包括三个无相互作用粒子的格林函数.

费曼指出, 每个这种项可以和一定图形对照. 画图的原则如下: 表达式中算符 ψ 的时空坐标和自旋投影用平面上的点表示. 然后将相应同一函数 $G^{(0)}$ 的变量的点用实线连接起来, 而函数 $V(x_1-x_2)$ 内的 x_1,x_2 两点用波纹线连起来. 这时 $\delta G^{(1)}$ 就对应图 4. 为简单起见, 图上未标出自旋变量. 图 4 中所示的六个图形, 每个图形有两个外坐标 x 和 x'. 对内点的坐标进行积分, 同时对内自旋变量求和. 在微扰论

的高级近似下以及对于其他形式的相互作用哈密顿量, 公式和图形之间也存在着类似的对应关系. 这种图形就叫做费曼图.

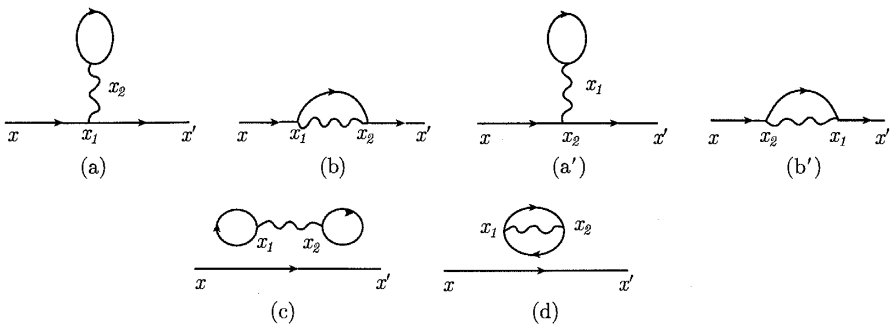


图 4

每个费曼图对应一定的解析表达式. 微扰论级数的计算就归结为: 画出一切可能的费曼图并计算相应的积分. 画图和写式子的规则, 与相互作用的具体形式有关. 然而有一条共同规律却是在一切情况下都成立的, 它使计算大为简化. 我们现在就阐明这条规律.

所有函数 G 的费曼图可分成两种 —— 相连图形和不相连图形. 相连图形中一切点都以某种线与外端点连结. 例如图 4(a), 图 4(a′), 图 4(b), 图 4(b′) 是相连图形, 而图 4(c), 图 4(d) 是不相连图形. 在一般情况下, 微扰论级数 (8.9) 式中的某一项, 凡是 $\psi(x)$ 和 $H_{\rm int}(t_{p_1})$ 中的 ψ^+ 收缩, 而 $H_{\rm int}(t_{p_1})$ 中的 ψ 又与 $H_{\rm int}(t_{p_2})$ 中的 ψ^+ 收缩, 如此不空过任何一个 $H_{\rm int}$ 而达到 $\psi^+(x')$, 所得到的就是相连图形 [图 5(a)]. 所有其他图形中都有一个或几个算符 $H_{\rm int}$ 未与 $\psi(x)$ 和 $\psi^+(x')$ 或与之相连的 $H_{\rm int}$ 中场算符收缩, 它们是不相连的 [图 5(b)].

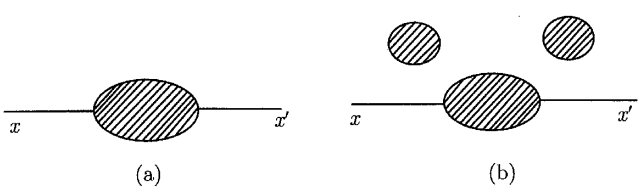


图 5

讨论对应于某个不相连图的格林函数修正项. 它显然由两个因子构成. 第一个因子包括所有与 $\psi(x)$ 和 $\psi^+(x')$ 发生联系的 $H_{\rm int}$; 换言之, 它包括对应于图 5(b) 中所有外线的相连分图. 第二个因子描述图中其他部分. 因此所讨论的修正项表达式为

$$
\begin{aligned}
&-\mathrm{i}\frac{(-\mathrm{i})^n}{n!}\int\cdots\int \mathrm{d}t_1\cdots\\
&\quad\cdots\mathrm{d}t_m\langle T(\psi(x)\psi^+(x')H_{\mathrm{int}}(t_1)\cdots H_{\mathrm{int}}(t_m))\rangle_c\\
&\quad\times\int\cdots\int \mathrm{d}t_{m+1}\cdots\mathrm{d}t_n\langle T(H_{\mathrm{int}}(t_{m+1})\cdots H_{\mathrm{int}}(t_n))\rangle.
\end{aligned}
$$

这里 $\langle\cdots\rangle_c$ 和 $\langle\cdots\rangle$ 表示某种一定的、根据维克定理将乘积分为成对算符 ψ,ψ^+ 的方式. 符号 $\langle\cdots\rangle_c$ 着重指出, 这个式子中的收缩给出相连图形.

不难看出, 有些图形的贡献全同. 其实只要变换收缩的顺序, 使得各 H_{int} 重新分配于两个括弧 $\langle\cdots\rangle_c$ 和 $\langle\cdots\rangle$ 间, 这只等于改写积分变量, 并不改变修正项的数值. 这种图形的数目显然等于 n 个算符 H_{int} 分成各含 m 和 $n-m$ 个算符的两组的组合数, 即 $\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

所有这种图形的总贡献为

$$
\begin{aligned}
&(-\mathrm{i})\frac{(-\mathrm{i})^m}{m!}\int\cdots\int \mathrm{d}t_1\cdots\\
&\quad\cdots\mathrm{d}t_m\langle T(\psi(x)\psi^+(x')H_{\mathrm{int}}(t_1)\cdots H_{\mathrm{int}}(t_m))\rangle_c\\
&\quad\times\frac{(-\mathrm{i})^{n-m}}{(n-m)!}\int\cdots\int \mathrm{d}t_{m+1}\cdots\mathrm{d}t_n\langle T(H_{\mathrm{int}}(t_{m+1})\cdots H_{\mathrm{int}}(t_n))\rangle.
\end{aligned}
$$

我们把包含一定相连部分和任意不相连部分的各级图形的贡献都加起来, 结果显然是

$$
\begin{aligned}
&(-\mathrm{i})\frac{(-\mathrm{i})^m}{m!}\int\cdots\int \mathrm{d}t_1\cdots\\
&\quad\cdots\mathrm{d}t_m\langle T(\psi(x)\psi^+(x')H_{\mathrm{int}}(t_1)\cdots H_{\mathrm{int}}(t_m))\rangle_{\mathrm{c}}\\
&\quad\times\Bigg[1-\mathrm{i}\int \mathrm{d}t_{m+1}H_{\mathrm{int}}(t_{m+1})\\
&\quad-\frac{1}{2}\int\int \mathrm{d}t_{m+1}\mathrm{d}t_{m+2}T(H_{\mathrm{int}}(t_{m+1})\cdots H_{\mathrm{int}}(t_{m+2}))\\
&\quad\cdots+\frac{(-\mathrm{i})^k}{k!}\int\cdots\int \mathrm{d}t_{m+1}\cdots\mathrm{d}t_{m+k}\\
&\quad\times\langle T(H_{\mathrm{int}}(t_{m+1})\cdots H_{\mathrm{int}}(t_{m+k}))\rangle+\cdots\Bigg].
\end{aligned}
$$

回到最初的 (8.7) 式. 如果把分母中的 $\langle S(\infty)\rangle$ 按 H_{int} 的幂展开, 我们恰好得到上式中圆括弧中的级数. 因此有

$$
\langle T(\psi(x)\psi^+(x')S(\infty))\rangle=\langle T(\psi(x)\psi^+(x')S(\infty))\rangle_{\mathrm{c}}\langle S(\infty)\rangle.
$$

而根据 (8.7) 式有

$$
G(x,x')=-\mathrm{i}\langle T(\psi(x)\psi^+(x')S(\infty))\rangle_{\mathrm{c}}. \tag{8.14}
$$

所得的规则不仅对格林函数成立. 它对任何形如 (6.32) 式, 包括任意多场算符的表达式都成立. 这个结果对以后的讨论很重要. 在实际计算中, 这里建立的规则使我们可以省去 (8.9) 式分母中的 $\langle S(\infty)\rangle$, 同时不考虑不相连图形的贡献.

在表达式

$$-\mathrm{i}\frac{(-\mathrm{i})^m}{m!}\int\cdots\int \mathrm{d}t_1\cdots \mathrm{d}t_m\langle T(\psi(x)\psi^+(x')H_{\mathrm{int}}(t_1)\cdots H_{\mathrm{int}}(t_m))\rangle_{\mathrm{c}}$$

中, 各种收缩的差别仅在于 H_{int} 的顺序的置换. 因而我们可以进一步简化, 省去因子 $1/m!$, 只考虑导致拓扑不等价图形的各种收缩, 即不能仅借助算符 H_{int} 的置换求得的诸收缩. 每个这种图形的贡献已经不含有与图形级别 m 密切相关的因子. 结果每个图形又可分解成诸元素, 其中每一元素都可以单独看成是对某种格林函数的修正. 形状如 λ^m 的因子 (其中 λ 是常数), 显然是无关紧要的. 这样的因子并不妨碍把图形分解成元素. 相反, 如果出现了 $1/m$ 型的因子, 它就要妨碍图形的分解和各部分的独立求和.

§9　各种类型相互作用的构图规则

§9.1　坐标空间中的图解法. 举例

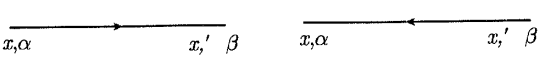
现在我们详细叙述各种情况下费曼图的构图规则. 任何一个图的基础都是表示费米粒子或声子格林函数的线. 我们以实线表示前者, 以虚线表示后者. 每条线上以箭头标出方向: 从坐标为 x、自旋投影为 α 的点走向坐标为 x'、自旋投影为 β 的点. 这样, 图 6(a) 的线表示格林函数

$$G^{(0)}_{\alpha\beta}(x,x')\equiv G^{(0)}_{\alpha\beta}(x-x'),$$

而图 6(b) 表示格林函数

$$G^{(0)}_{\beta\alpha}(x',x)\equiv G^{(0)}_{\beta\alpha}(x'-x).$$

声子线 (图 7) 上可不标出箭头, 因为我们在 §7 中已看到, $D^{(0)}$ 是 $x-x'$ 的偶函数. 对线条所连各点的坐标要进行积分 (按整个空间和从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的时间). 此外还要对这些顶点的自旋变量求和.



(a)　　(b)

图 6

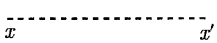


图 7

下面分析各种具体情况.

1. 双粒子相互作用

前面为了阐明图形和公式的对应关系, 我们已讨论了这种相互作用下最简单的费曼图 (图 4). 已经说明, 不相连图形和因子 $\langle S(\infty)\rangle^{-1}$ 可以一起省去. 这样, 第一级近似下就剩下了图 4(a), 图 4(a)′, 图 4(b), 图 4(b)′. 然而因为 x_1 和 x_2 是积分变量 (而对相应的自旋变量要求和), 则图 4(a′) 等于图 4(a), 图 4(b′) 等于图 4(b). 这就抵消了 H_{int} 中的因子 1/2. 高级近似下也是如此. 这样就得出如下作法: 不写这个因子, 同时只讨论拓扑不等价图形.

此外还须注意以下情况. 前面已经指出, 每个图形的正负号取决于费米算符 ψ 置换次数的奇偶. 不难看出, 图形上出现封闭环时才变号. 因此图形的符号由因子 $(-1)^F$ 决定, 其中 F 是封闭环的数目.

还有一种情况值得注意, 这就是某个函数 $G^{(0)}$ 中两个变量的时间重合. 只有同一个哈密顿量 H_{int} 中两个算符收缩时, 才发生这种情况. 由于 H_{int} 中算符顺序已经给定 (所有 ψ^+ 位于 ψ 之左), 这类 $G^{(0)}$ 应理解为极限

$$\lim_{\delta\to+0} G(t,t+\delta)\equiv\lim_{\delta\to0} G(-\delta)=\mathrm{i}\langle\psi^+(\boldsymbol{r}_1)\psi(\boldsymbol{r}_2)\rangle.$$

现在列出计算任何一级修正项的规则:

(1) 画出所有具有 $2n$ 个顶点和两条外线的拓扑不等价图形. 每个顶点连以两条实线和一条波纹线.

(2) 每条实线对应格林函数 $G^{(0)}_{\alpha\beta}(x,x')(x,\alpha$ 是起点坐标, x',β 是终点坐标).

(3) 每条波纹线对应势 $V(x-x')=U(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t')$.

(4) 对所有顶点的坐标积分 $(\mathrm{d}^4x=\mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{d}t)$, 对所有内部自旋变量 α 求和.

(5) 所得的表达式乘以 $\mathrm{i}^n(-1)^F$, 其中 F 是封闭环的数目.

(6) 如果遇见时间变量为零的函数 $G^{(0)}$, 则作为极限 $G^{(0)}(-0)$ 看待.

试以二级修正项为例. 相应的拓扑不等价相连图形示于图 8 中.

$$\lim_{t\to+0} G^{(0)}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2,-t).$$

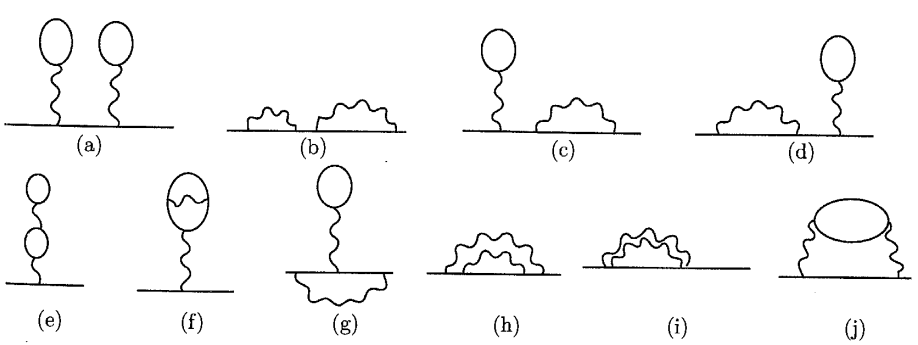


图 8

根据上述规则, 它们对应的解析式依次是

$$
\begin{aligned}
&-\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\mathrm{d}^4x_3\mathrm{d}^4x_4 G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1)G^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(x_1-x_2)\\
&\quad\times G^{(0)}_{\gamma_2\beta}(x_2-x')G^{(0)}_{\gamma_3\gamma_3}(0)G^{(0)}_{\gamma_4\gamma_4}(0)V(x_1-x_3)V(x_2-x_4), \qquad \text{(a)}\\
&-\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_4 G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1)G^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(x_1-x_2)G^{(0)}_{\gamma_2\gamma_3}(x_2-x_3)\\
&\quad\times G^{(0)}_{\gamma_3\gamma_4}(x_3-x_4)G^{(0)}_{\gamma_4\beta}(x_4-x')V(x_1-x_2)V(x_3-x_4), \qquad \text{(b)}\\
&+\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_4 G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1)G^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(x_1-x_2)G^{(0)}_{\gamma_2\gamma_3}(x_2-x_3)\\
&\quad\times G^{(0)}_{\gamma_3\beta}(x_3-x')G^{(0)}_{\gamma_4\gamma_4}(0)V(x_1-x_4)V(x_2-x_3), \qquad \text{(c)}\\
&+\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_4 G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1)G^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(x_1-x_2)G^{(0)}_{\gamma_2\gamma_3}(x_2-x_3)\\
&\quad\times G^{(0)}_{\gamma_3\beta}(x_3-x')G^{(0)}_{\gamma_4\gamma_4}(0)V(x_1-x_2)V(x_3-x_4), \qquad \text{(d)}\\
&-\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_4 G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1)G^{(0)}_{\gamma_1\beta}(x_1-x')G^{(0)}_{\gamma_2\gamma_3}(x_2-x_3)\\
&\quad\times G^{(0)}_{\gamma_3\gamma_2}(x_3-x_2)G^{(0)}_{\gamma_4\gamma_4}(0)V(x_1-x_2)V(x_3-x_4), \qquad \text{(e)}\\
&+\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_4 G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1)G^{(0)}_{\gamma_1\beta}(x_1-x')G^{(0)}_{\gamma_2\gamma_3}(x_2-x_3)\\
&\quad\times G^{(0)}_{\gamma_3\gamma_4}(x_3-x_4)G^{(0)}_{\gamma_4\gamma_2}(x_4-x_2)V(x_1-x_2)V(x_3-x_4), \qquad \text{(f)}\\
&+\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_4 G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1)G^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(x_1-x_2)G^{(0)}_{\gamma_2\gamma_3}(x_2-x_3)\\
&\quad\times G^{(0)}_{\gamma_3\beta}(x_3-x')G^{(0)}_{\gamma_4\gamma_4}(0)V(x_1-x_3)V(x_2-x_4), \qquad \text{(g)}\\
&-\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_4 G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1)G^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(x_1-x_2)G^{(0)}_{\gamma_2\gamma_3}(x_2-x_3)\\
&\quad\times G^{(0)}_{\gamma_3\gamma_4}(x_3-x_4)G^{(0)}_{\gamma_4\beta}(x_4-x')V(x_1-x_4)V(x_2-x_3), \qquad \text{(h)}\\
&-\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_4 G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1)G^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(x_1-x_2)G^{(0)}_{\gamma_2\gamma_3}(x_2-x_3)\\
&\quad\times G^{(0)}_{\gamma_3\gamma_4}(x_3-x_4)G^{(0)}_{\gamma_4\beta}(x_4-x')V(x_1-x_3)V(x_2-x_4), \qquad \text{(i)}\\
&+\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_4 G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1)G^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(x_1-x_2)G^{(0)}_{\gamma_2\beta}(x_2-x')\\
&\quad\times G^{(0)}_{\gamma_3\gamma_4}(x_3-x_4)G^{(0)}_{\gamma_4\gamma_3}(x_4-x_3)V(x_1-x_3)V(x_2-x_4). \qquad \text{(j)}
\end{aligned}
$$

对于双粒子相互作用, 可将微扰论表示成另一种更对称的形式. 当相互作用对自旋有关时, 它更为便利. 此时相互作用哈密顿量为

$$
H_{\mathrm{int}}=\frac{1}{2}\int \psi^+_\alpha(\boldsymbol{r}_1)\psi^+_\beta(\boldsymbol{r}_2)U_{\alpha\beta\gamma\delta}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\psi_\delta(\boldsymbol{r}_2)\psi_\gamma(\boldsymbol{r}_1)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2. \qquad (9.1)
$$

对算符 S 中的积分 $\int H_{\mathrm{int}}\mathrm{d}t$, 我们表示成以下对各变量都对称的形式:

$$\begin{aligned}\int H_{\mathrm{int}}\mathrm{d}t&=\frac{1}{4}\int\cdots\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_4\psi^+_{\gamma 1}(x_1)\psi^+_{\gamma 2}(x_2)\Gamma^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}(x_1,x_2;x_3,x_4)\\&\quad\times\psi_{\gamma_4}(x_4)\psi_{\gamma_3}(x_3).\end{aligned}\tag{9.2}$$

由于算符 ψ 的反对易性, 可以认为函数 $\Gamma^{(0)}$ 对置换 $x_1\gamma_1\rightleftarrows x_2\gamma_2$ 和 $x_3\gamma_3\rightleftarrows x_4\gamma_4$ 是反对称的. 从表达式

$$U_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\delta(t_1-t_2)\delta(x_1-x_3)\delta(x_2-x_4)$$

中减去在其中置换了变量 3 和变量 4 的类似的式子①, 就可以得到函数 $\Gamma^{(0)}$.

计算格林函数的一级修正项:

$$\begin{aligned}\delta G^{(1)}=&-\frac{1}{4}\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_4\Gamma^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}(x_1x_2,x_3x_4)\\&\times\langle T(\psi_\alpha(x)\psi^+_\beta(x')\psi^+_{\gamma 1}(x_1)\psi^+_{\gamma 2}(x_2)\psi_{\gamma_4}(x_4)\psi_{\gamma_3}(x_3))\rangle\end{aligned}$$

(以后在求平均符号 $\langle\cdots\rangle$ 中都省去表示相连图的角标). 由于 $\Gamma^{(0)}$ 对其变量的反对称性, 我们只得出一项:

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\mathrm{d}^4x_3\mathrm{d}^4x_4G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1)G^{(0)}_{\gamma_3\gamma_2}(x_3-x_2)\\&\quad\times G^{(0)}_{\gamma_4\beta}(x_4-x')\Gamma^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2;\gamma_3\gamma_4}(x_1,x_2;x_3,x_4).\end{aligned}$$

我们在图上将以空心方框记 $\Gamma^{(0)}$. 这样, 一级近似的图就如图 9 所示.

第二级近似有三个相连的拓扑不等价图 (图 10). 相应的表达式依次是

$$\begin{aligned}&-\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_8G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1)G^{(0)}_{\gamma_3\beta}(x_3-x')G^{(0)}_{\gamma_4\gamma_5}(x_4-x_5)\\&\quad\times G^{(0)}_{\gamma_7\gamma_2}(x_7-x_2)G^{(0)}_{\gamma_8\gamma_6}(x_8-x_6)\Gamma^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}(x_1,x_2;x_3,x_4)\qquad\text{(a)}\\&\quad\times\Gamma^{(0)}_{\gamma_5\gamma_6,\gamma_7\gamma_8}(x_5,x_6;x_7,x_8),\\&-\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_8G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1)G^{(0)}_{\gamma_3\gamma_5}(x_3-x_5)G^{(0)}_{\gamma_7\beta}(x_7-x')\\&\quad\times G^{(0)}_{\gamma_4\gamma_2}(x_4-x_2)G^{(0)}_{\gamma_8\gamma_6}(x_8-x_6)\Gamma^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}(x_1,x_2;x_3,x_4)\qquad\text{(b)}\\&\quad\times\Gamma^{(0)}_{\gamma_5\gamma_6,\gamma_7\gamma_8}(x_5,x_6;x_7,x_8),\end{aligned}$$

① 对于这种写法, 相当于 "跃迁" $x_1,\boldsymbol{\gamma}_1\to x_3,\boldsymbol{\gamma}_3$; $x_2,\boldsymbol{\gamma}_2\to x_4,\boldsymbol{\gamma}_4$ 的项取 "+" 号. 以后决定图形的符号时必须记住这点.

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_8 G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1)G^{(0)}_{\gamma_3\gamma_5}(x_3-x_5)\\
&\quad\times G^{(0)}_{\gamma_7\gamma_2}(x_7-x_2)G^{(0)}_{\gamma_8\beta}(x_8-x')G^{(0)}_{\gamma_4\gamma_6}(x_4-x_6) \qquad \text{(c)}\\
&\quad\times \Gamma^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}(x_1,x_2;x_3,x_4)\Gamma^{(0)}_{\gamma_5\gamma_6,\gamma_7\gamma_8}(x_5,x_6;x_7,x_8)
\end{aligned}
$$

注意最后一项含有因子 1/2.

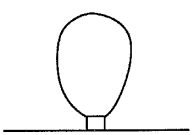


图 9

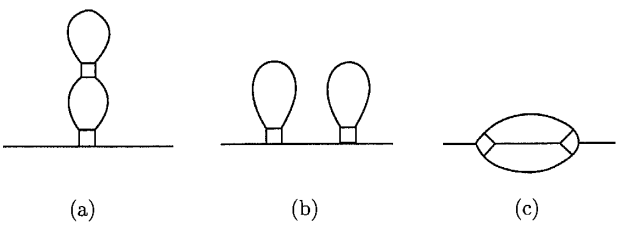


图 10

n 级修正项的计算规则是:

(1) 画出全部拓扑不等价图形 (交换四角形顶点而得的图形是拓扑等价的);

(2) 每条线对应格林函数 $G^{(0)}_{\alpha\beta}(x-x')$;

(3) 每个四角形对应函数 $\Gamma^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}(x_1,x_2;x_3,x_4)$;

(4) 对所有四角形顶点坐标积分, 对自旋变量求和;

(5) 每个图形乘以 $\dfrac{m}{2^n}(\mathrm{i})^n$, 数字 m 等于本图形在不对称图解法中所对应的图形数目, 图形的符号也从与不对称图解法比较而定.

最后一条可以由下列讨论看出. 例如取图 10(a). 在不对称图解法中它对应于图 8(e)$\sim$ 图 8(h), 所以 $m=4$. 至于图 10(c), 则它只对应两个图, 即图 8(i) 和图 8(j), 因而 $m=2$, 相应的表达式①有系数 1/2.

仍以图 10(a) 为例, 说明如何选取符号. 我们将原来点 3 和点 1 重合, 而点 2 和点 4 重合的表达式, 进行反对称化而得 $\Gamma^{(0)}$. 如果在相应于图 10(a) 的表达式中令这些坐标重合, 立刻就得出图 8(e); 它有两个封闭环, 因而系数是 $(\mathrm{i})^2$. 实际计算时最好先写出各 $\Gamma^{(0)}$ 的变量, 再参照图 8 中某个图形, 写出诸 $G^{(0)}$ 的变量.

根据上述规则, 图 11 给出三级图形对应表达式:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{(\mathrm{i})^3}{2}\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_{12} G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1)G^{(0)}_{\gamma_3\gamma_5}(x_3-x_5)\\
&\quad\times G^{(0)}_{\gamma_7\gamma_9}(x_7-x_9)G^{(0)}_{\gamma_{11}\beta}(x_{11}-x')G^{(0)}_{\gamma_4\gamma_{10}}(x_4-x_{10})\\
&\quad\times G^{(0)}_{\gamma_{12}\gamma_6}(x_{12}-x_6)G^{(0)}_{\gamma_8\gamma_2}(x_8-x_2)\Gamma^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}(x_1,x_2;x_3,x_4)
\end{aligned}
$$

① 在复杂图形中这样的办法难以实行. 这时直接从 (8.14) 式求得解析式最为简单, 而图形仅用以指示各种收缩方式.

$$\times \Gamma^{(0)}_{\gamma_5\gamma_6,\gamma_7\gamma_8}(x_5,x_6;x_7,x_8)\gamma^{(0)}_{\gamma_9\gamma_{10},\gamma_{11}\gamma_{12}}(x_9,x_{10};x_{11},x_{12}).$$

显而易见, 如果将 $\Gamma^{(0)}$ 代以它通过势 $U_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)$ 的表达式, 则上面的全部公式都成为不对称理论中的相应公式.

对于和自旋无关的点作用, 即势

$$U_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)=\lambda\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2).$$

各表达式的形式最为简单. 这时 $\Gamma^{(0)}$ 为

$$\begin{aligned}\Gamma^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}=&\lambda(\delta_{\gamma_1\gamma_3}\delta_{\gamma_2\gamma_4}-\delta_{\gamma_1\gamma_4}\delta_{\gamma_2\gamma_3})\\&\times\delta(x_1-x_2)\delta(x_1-x_3)\delta(x_1-x_4)\\=&\lambda L_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}\times\delta(x_1-x_2)\delta(x_1-x_3)\delta(x_1-x_4).\end{aligned}\tag{9.3}$$

图 9 和图 10 上空心四角形四个顶点的积分中只剩下一个. 因此这些四角形可以换成点. 例如图 9、图 10(c) 和图 11 将如图 12 所示, 而相应的表达式依次是

$$\mathrm{i}\lambda L_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}G^{(0)}_{\gamma_3\gamma_2}(0)\int \mathrm{d}^4x_1G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1)G^{(0)}_{\gamma_4\beta}(x_1-x'),\tag{a}$$

$$-\frac{\lambda^2}{2}L_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}L_{\gamma_5\gamma_6,\gamma_7\gamma_8}\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1)G^{(0)}_{\gamma_3\gamma_5}(x_1-x_2)\times G^{(0)}_{\gamma_7\gamma_2}(x_2-x_1)G^{(0)}_{\gamma_8\beta}(x_2-x')G^{(0)}_{\gamma_4\gamma_6}(x_1-x_2),\tag{b}$$

$$-\frac{\mathrm{i}\lambda^3}{2}L_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}L_{\gamma_5\gamma_6,\gamma_7\gamma_8}L_{\gamma_9\gamma_{10},\gamma_{11}\gamma_{12}}\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\mathrm{d}^4x_3G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1)\times G^{(0)}_{\gamma_3\gamma_5}(x_1-x_2)G^{(0)}_{\gamma_7\gamma_9}(x_2-x_3)G^{(0)}_{\gamma_{11}\beta}(x_3-x')\times G^{(0)}_{\gamma_4\gamma_{10}}(x_1-x_3)G^{(0)}_{\gamma_{12}\gamma_6}(x_3-x_2)G^{(0)}_{\gamma_8\gamma_2}(x_2-x_1).\tag{c}$$

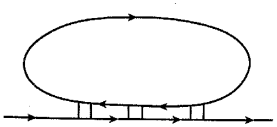


图 11

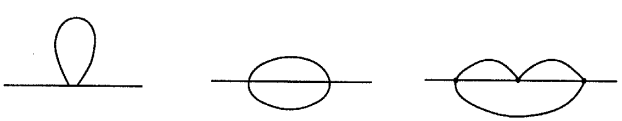


图 12

2. 费米粒子和声子相互作用

考虑到以后的应用, 我们将叙述各向同性金属模型中的电声子作用. 相互作用的机制在于介质的振动导致极化. 结果电子能量的改变值为

$$-e\int n(\boldsymbol{r})K(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{div}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{r}',\tag{9.4}$$

其中 $n(\boldsymbol{r})$ 是点 $\boldsymbol{r}$ 处的电子密度, $\boldsymbol{P}$ 是极化矢量, 而 $K(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ 是相互作用函数.

当 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ 小于晶格常数时, $K(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \approx \dfrac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$. 在更大的距离上, 由于极化电荷被电子屏蔽, $K(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ 迅速减小到零. 因而可能把 $K(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ 换成 $a^2\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$, 其中 a 是数量级为晶格周期的常数. 极化矢量正比于介质位移:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) = C\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}),$$

其中 C 是常数, 其数量级为 $Ze\dfrac{N}{V}\left(\dfrac{N}{V}\text{为单位体积内的离子数}, Ze\text{为离子电荷}.\right)$

即然电子和晶格振动相互作用能中出现的是 $\mathrm{div}\boldsymbol{P} = C\mathrm{div}\boldsymbol{q}$, 可见电子只和纵振动发生作用. 根据 (9.4) 式可以把相互作用能量算符写成

$$ea^2C\int \psi^+(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r})\mathrm{div}\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

由于算符 $q_{\boldsymbol{k}}$ 通过产生和消灭算符表示时要引进某些比例系数, 我们自然可在定义场算符时适当选择附加因子, 使得算符 H_{int} 的形状最为简单. 不难看出, 按 (7.13) 式选取算符 $\varphi(x)$ 时, 电声子作用哈密顿量就成为

$$H_{\mathrm{int}} = g\int \psi_\alpha^+(\boldsymbol{r})\psi_\alpha(\boldsymbol{r})\varphi(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \tag{9.5}$$

其中相互作用常数 g 等于

$$g = \frac{ea^2C}{u_0\sqrt{\rho}}$$

$\left(u_0 = \dfrac{\omega_0(\boldsymbol{k})}{|\boldsymbol{k}|}\text{为声速}\right)$. 如果将各常数的数量级通过电子参数表示, 并代入上式, 我们就得到

$$g^2 = \frac{2\pi^2\eta}{p_0 m}, \tag{9.6}$$

其中 m 是电子质量. 这样的定义中 η 是无量纲常数, 与实验数据比较, 可知对于金属它的数量级为 1.

求格林函数时只需在 $S(\infty)$ 对 H_{int} 的展开式中考虑偶次项. 由于对电子和声子算符可彼此无关地作平均, 电子格林函数的图形就与双费米子相互作用一样. 唯一的改变是把波纹线换成对应声子格林函数的虚线, 而在相应的表达式中作代换:

$$V(x_1-x_2) \to g^2D^{(0)}(x_1-x_2).$$

现在讨论声子格林函数. 它的不为零的最低级修正项来自二级项, 其图解示于图 13 中. 相应的式子是

$$-g^2\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2D^{(0)}(x-x_1)D^{(0)}(x_2-x') \tag{a}$$

$$\times G^{(0)}_{\alpha\beta}(x_1-x_2)G^{(0)}_{\beta\alpha}(x_2-x_1),$$

$$+g^2\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2D^{(0)}(x-x_1)D^{(0)}(x_2-x')G^{(0)}_{\alpha\alpha}(0)G^{(0)}_{\beta\beta}(0). \tag{b}$$

可以证明, 上面式 (b) 应等于零. 事实上, 根据函数 $D^{(0)}$ 的定义, 其中的 φ 正比于 $\mathrm{div}\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{q}$ 是位移矢量. 由此可知函数 $D^{(0)}(x-x_1)$ 正比于

$$\langle T[\varphi(x)\mathrm{div}\boldsymbol{q}(x_1)]\rangle = \mathrm{div}_{\boldsymbol{r}_1}\langle T[\varphi(x)\boldsymbol{q}(x_1)]\rangle.$$

既然图 13(b) 的表达式中坐标 $\boldsymbol{r}_1$ 只引入 $D^0(x-x_1)$, 而后者又是一个散度, 则对 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1$ 的积分可变换成表面积分; 无论假定边界上的位移为零, 或是引入周期性边界条件, 表面积分都等于零. 由于同样的原因, 所有外线被分离开的 D 函数的图形都等于零.

计算电子和声子格林函数修正项的共同规则可表述如下. 为了计算 $2n$ 级修正, 必须:

(1) 画出所有具有 $2n$ 个顶点的拓扑不等价相连图形, 自然, 形如图 13(b) 的图也不出现;

(2) 每条实线对应函数 $G^{(0)}_{\alpha\beta}(x-x')$, 而虚线对应函数 $D^{(0)}(x-x')$;

(3) 对所有顶点的坐标积分, 对自旋求和;

(4) 将所得结果乘以 $g^{2n}(-1)^F(\mathrm{i})^n$, 其中 F 是费米子 $G^{(0)}$ 线所构成的封闭环数目.

例如, 对图 14 给出的图形写出的式子为

$$g^4\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_4D^{(0)}(x-x_1)D^{(0)}(x_2-x_3)D^{(0)}(x_4-x')$$

$$\times G^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(x_1-x_2)G^{(0)}_{\gamma_2\gamma_4}(x_2-x_4)G^{(0)}_{\gamma_4\gamma_3}(x_4-x_3)G^{(0)}_{\gamma_3\gamma_1}(x_3-x_1).$$

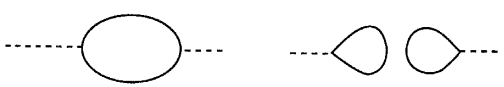


图 13

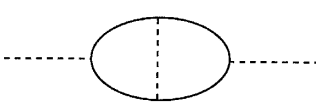


图 14

3. 外场

我们要讨论的最后一例, 是粒子与外场的相互作用. 根据 §6, 相互作用哈密顿量为

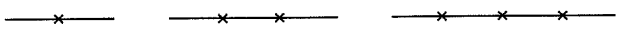
$$H_{\mathrm{int}} = \int \psi^+_\alpha(\boldsymbol{r})V_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r},t)\psi_\beta(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}. \tag{9.7}$$

考虑外磁场对粒子自旋的影响时, 势 V 具有角标 $\alpha\beta$. 这时 $V_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r},t)=\mu_0\boldsymbol{\sigma}_{\alpha\beta}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$, 其中 μ_0 是粒子的磁矩, 而 $\boldsymbol{\sigma}$ 是泡利矩阵.

容易看出, 这种情况下所有的图形都具有图 15 所示的简单形状. 图上小斜叉表示位势 $V_{\alpha\beta}(x)$. 例如图 15(b) 的表达式就是

$$\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2 G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1)G^{(0)}_{\gamma_2\gamma_3}(x_1-x_2)\times G^{(0)}_{\gamma_4\beta}(x_2-x')V_{\gamma_1\gamma_2}(x_1)V_{\gamma_3\gamma_4}(x_2).$$

画图和写表达式的规则也一目了然. 各级图形的系数都等于 1. 唯一应指出的是, 空间和时间的均匀性被破坏. 结果格林函数将分别与 x 和 x' 有关, 而不只是差 $x-x'$ 的函数.



(a)　　(b)　　(c)

图 15

§9.2　动量空间中的图解法. 举例

上述图解法使我们不难把微扰论级数的任何项写成积分形式. 然而由于 $G^{(0)}$ 和 $D^{(0)}$ 是时间变量的不连续函数, 积分的计算就十分困难. 计算格林函数的修正项时, 须把对时间的积分分成许多区间, 其数目在近似的阶数增加时急剧增加. 避免这个困难的办法是把各量都展成傅里叶积分.

首先从双粒子相互作用开始讨论.

1. 双费米粒子相互作用

考虑相应于图 4(b) 表达式:

$$\mathrm{i}\int G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1)G^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(x_1-x_2)G^{(0)}_{\gamma_2\beta}(x_2-x')\times V(x_1-x_2)\mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2.$$

把所有的函数都展成傅里叶积分:

$$G^{(0)}_{\alpha\gamma}(x_1-x_2)=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}G^{(0)}_{\alpha\gamma}(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p(x_1-x_2)},$$

$$V(x_1-x_2)=\int\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}V(q)\mathrm{e}^{\mathrm{i}q(x_1-x_2)},$$

其中 p 和 q 是四维矢量 $p=(\boldsymbol{p},\omega), q=(\boldsymbol{q},\omega)$, 而乘积 $p(x_1-x_2)$ 等于 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)-\omega(t_1-t_2)$. 我们在 §7 中已求得了自由费米粒子格林函数 $G^{(0)}_{\alpha\gamma}(p)$ 的表达式: 只要在 (7.7) 式中将 ω 换成 $\omega+\mu$. 将这些展开式代入上面的修正项, 就有

$$\mathrm{i}(2\pi)^{-16}\int G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(p_1)G^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(p_2)G^{(0)}_{\gamma_2\beta}(p_3)V(q)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1(x-x_1)+\mathrm{i}p_2(x_1-x_2)}$$

$$\times e^{ip_3(x_2-x')+iq(x_1-x_2)}d^4p_1d^4p_2d^4p_3d^4qd^4x_1d^4x_2.$$

对 d^4x_1 和 d^4x_2 积分, 得到

$$i(2\pi)^{-8}\int G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(p_1)G^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(p_2)G^{(0)}_{\gamma_2\beta}(p_3)V(q)\delta(p_1-p_2-q)$$
$$\times\delta(p_2+q-p_3)e^{ip_1x-ip_3x'}d^4p_1d^4p_2d^4p_3d^4q.$$

再对 x 和 x' 取其积分的傅里叶分量, 结果有

$$\delta G^{(1)}_{\alpha\beta}(p,p')=i\int G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(p)G^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(p_2)G^{(0)}_{\gamma_2\beta}(p')V(q)$$
$$\times\delta(p-p_2-q)\delta(p_2+q-p')d^4p_2d^4q.$$

和图 4(b) 比较之后看到, 现在每条实线对应 $G^{(0)}(p)$, 波纹线对应 $V(q)$, 每个顶点对应表示能量和动量守恒的 δ 函数, $\delta(\Sigma p)=\delta(\Sigma\boldsymbol{p})\delta(\Sigma\boldsymbol{\omega})$, 并且对内线的动量进行积分. 完成对 d^4p_2 的积分, 并注意 $G^{(0)}_{\alpha\beta}(p)=G^{(0)}(p)\delta_{\alpha\beta}$, 得

$$\delta G^{(1)}_{\alpha\beta}(p,p')=\delta G^{(1)}(p)\delta(p-p')(2\pi)^4\delta_{\alpha\beta},$$

$$\delta G^{(1)}(p)=iG^{(0)}(p)\int G^{(0)}(p-q)V(q)\frac{d^4q}{(2\pi)^4}G^{(0)}(p).$$

所得的表达式 $\delta G^{(1)}(p)$ 乃是函数 $G(x-x')$ 对变量 $x-x'$ 的傅里叶分量的修正项, 它使我们能很直观地解释费曼图所代表的过程. 可以设想一个动量为 p 的粒子, 在运动过程中放出一个动量为 q 的 "相互作用量子", 本身动量成为 $p-q$. 隔一段时间之后粒子再吸收这个量子, 动量仍成为 p.

其他图形中也可以作类似的变换. 例如, 图 4(a) 对应的修正项 $\delta G^{(1')}(p)$ 是:

$$\delta G^{(1')}=-2iG^{(0)}(p)V(0)\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}G^{(0)}(p_1)e^{i\omega t}G^{(0)}(p),$$

其中 $t\to+0$. 积分下引入因子 $e^{i\omega t}$, 是因为在坐标表象中此处的函数 G 的两个变量重合, 应定义为极限 $G^{(0)}(-0)$. 系数 2 来自对自旋取阵迹. 图 16 中画出了动量表象中 $\delta G^{(1)}$ 和 $\delta G^{(1')}$ 的图形.

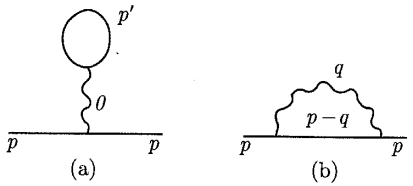


图 16

讨论任意的 n 级图, 它有 n 个顶点, $2n+1$ 条实线和 n 条波纹线. 如果代入 $G^{(0)}$ 和 V 的傅里叶变换, 对 $2n$ 个顶点坐标积分, 我们就得到 $2n$ 个表示守恒律的 $\delta(\Sigma p)$ 型因子. 守恒律之一使外线的动量相等, 结果 $G(x,x')$ 的微扰展开所有各项都只和 $x-x'$ 有关, 这乃是空间均匀性的显然后果. 剩下的 $2n-1$ 个 δ 函数使得 $3n-1$ 个对内线 (实线和波纹线都算在内) 四维动量的积分只留下 n 个.

下面列出按一定图形写表达式的一般规则:

(1) 每条线带有一个四维动量. 两条外线具有相同的外动量, 而内线的动量应在各顶点满足守恒律.

(2) 每条实线表示为

$$G^{(0)}_{\alpha\beta}(p)=\frac{\delta_{\alpha\beta}}{\omega-\xi(\boldsymbol{p})+\mathrm{i}\delta\mathrm{sgn}\xi(\boldsymbol{p})},$$

其中

$$\xi(\boldsymbol{p})=\varepsilon_0(\boldsymbol{p})-\mu=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}-\boldsymbol{\mu},\delta\to+0.$$

(3) 每条波纹线表示为

$$V(q)\equiv U(\boldsymbol{q}).$$

(4) 对 n 个相互无关的四维动量积分.

(5) 在所得表达式前置以因子 $(\mathrm{i})^n(2\pi)^{-4n}(-1)^F$, 其中 F 为封闭环数.

按这些规则不难写出格林函数的任意修正项. 例如图 17 表示的修正项等于

$$\begin{aligned}&-\mathrm{i}\delta_{\alpha\beta}\left(G^{(0)}(p)\right)^2(2\pi)^{-20}\int \mathrm{d}^4q_1\cdots\mathrm{d}^4q_4U(q_1)U(q_2)U(q_3)\\&\quad\times U(q_1+q_2+q_3)U(q_4)G^{(0)}(p-q_1)G^{(0)}(p-q_1-q_2)\\&\quad\times G^{(0)}(p-q_1-q_2-q_4)G^{(0)}(p-q_1-q_2-q_3-q_4)\\&\quad\times G^{(0)}(p-q_4)\int \mathrm{d}^4p_1G^{(0)}(p_1)G^{(0)}(p_1+q_3)G^{(0)}(p_1+q_2+q_3)\\&\quad\times G^{(0)}(p_1+q_1+q_2+q_3).\end{aligned}$$

现在讨论双粒子相互作用的对称图解法. 前面已引入了对称化了的量

$$\Gamma^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}(x_1,x_2;x_3,x_4).$$

根据定义 $\Gamma^{(0)}$ 就只和坐标的差有关. 因此其傅里叶分量必含有 $\delta(p_1+p_2-p_3-p_4)$. 所以最好直接将 $\Gamma^{(0)}$ 的傅里叶分量定义成

$$(2\pi)^4\delta(p_1+p_2-p_3-p_4)\Gamma^{(0)}(p_1,p_2;p_3,p_1+p_2-p_3)$$

$$= \int \mathrm{d}^4x_1 \cdots \mathrm{d}^4x_4 \Gamma^{(0)}(x_1, x_2; x_3, x_4) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1x_1 - \mathrm{i}p_2x_2 + \mathrm{i}p_3x_3 + \mathrm{i}p_4x_4}.$$

图 9 所示的一级修正项的傅里叶变换为

$$-\mathrm{i}\left(G^{(0)}(p)\right)^2 \int \frac{\mathrm{d}^4p_1}{(2\pi)^4} \Gamma^{(0)}_{\alpha\gamma,\beta\gamma}(p, p_1; p, p_1) G^{(0)}(p_1).$$

动量空间中的图形示于图 18 中. 一般构图规则和前面没有任何差别. 例如, n 级图的系数与坐标表象中的系数只差一因子 $(2\pi)^{-4n}$.

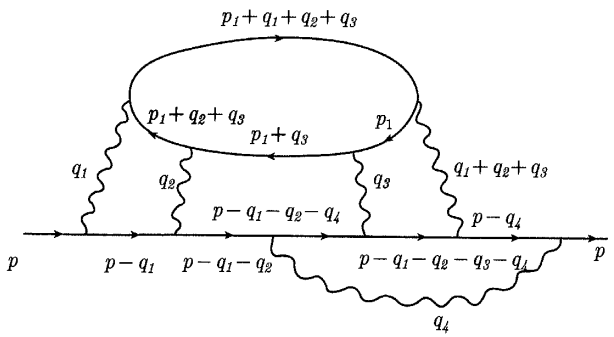


图 17

2. **电声子相互作用**

电子或声子格林函数 $2n$ 级图解的一般规则为:

(1) 每条实线表示为

$$G^{(0)}(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{\omega - \xi(\boldsymbol{p}) + \mathrm{i}\delta\mathrm{sgn}\xi(\boldsymbol{p})},$$

其中 $\delta \to +0$;

(2) 每条声子线 (虚线) 表示 (见 (7.16) 式) 为

$$D_0^{(0)}(k) = \frac{\omega_0^2(\boldsymbol{k})}{\omega^2 - \omega_0^2(\boldsymbol{k}) + \mathrm{i}\delta},$$

其中 $\delta \to +0$;

(3) 对 n 个相互无关的动量进行积分;

(4) 积分结果乘以因子

$$g^{2n}(2\pi)^{-4n}(\mathrm{i})^n(-1)^F,$$

其中 F 是封闭电子环的数目.

例如, 图 19 所示的二级图对应表达式为

$$-2[D^{(0)}(k)]^2 g^2 \mathrm{i} \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} G^{(0)}(p) G^{(0)}(p-k).$$

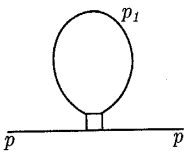


图 18

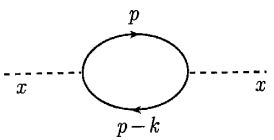


图 19

3. 外场

前面已经指出, 有外场存在时空间不再是均匀的, $G(x,x')$ 也不再只是差 $x-x'$ 的函数. 因此我们将讨论 $G_{\alpha\beta}(x,x')$ 对两个变量所作的傅里叶变换 $G_{\alpha\beta}(p,p')$:

$$G_{\alpha\beta}(x,x') = \int G_{\alpha\beta}(p,p') \mathrm{e}^{\mathrm{i}px - \mathrm{i}p'x'} \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{d}^4 p'}{(2\pi)^4}.$$

将图 15(a) 的表达式

$$\int \mathrm{d}x_1 G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-x_1) G^{(0)}_{\gamma_2\beta}(x_1-x') V_{\gamma_1\gamma_2}(x_1)$$

作傅里叶变换, 得

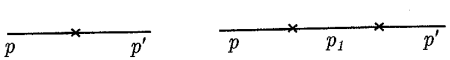
$$G^{(0)}(p) V_{\alpha\beta}(p-p') G^{(0)}(p'),$$

其中 $V_{\alpha\beta}(p)$ 是 $V_{\alpha\beta}(x)$ 的傅里叶分量,

$$V_{\alpha\beta}(x) = \int V_{\alpha\beta}(p) \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4}.$$

动量空间中的相应图形示于图 20(a). 图 20(b) 所示的下一级近似图对应表达式为

$$G^{(0)}(p) \int V_{\alpha\gamma}(p-p_1) G^{(0)}(p_1) V_{\gamma\beta}(p_1-p') \frac{\mathrm{d}^4 p_1}{(2\pi)^4} G^{(0)}(p').$$



(a)　　(b)

图 20

因此, 在 $G(p,p')$ 的 n 级图中:

(1) 左外线表示 $G^{(0)}(p)$, 右外线表示 $G^{(0)}(p')$;

(2) 小斜叉表示外场势的傅里叶分量, 其动量等于左右两条 $G^{(0)}$ 线的动量差;

(3) 对除了两条外线以外的所有 $G^{(0)}$ 线动量积分, 对所有 V 的自旋变量 (外端点除外) 求和;

(4) 积分与求和之后乘以系数 $(2\pi)^{-4(n-1)}$.

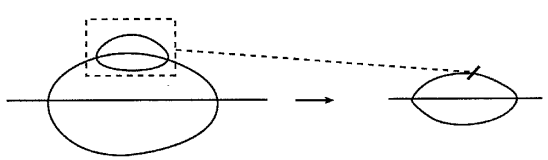
§10 戴逊方程. 顶角部分. 多粒子格林函数

§10.1 图形求和. 戴逊方程

在量子统计的多数问题中, 通常不能只限于考虑微扰论级数的前几项. 这时须把对应所谓 "主要" 图形的无限序列求和, 这些图形由于问题所给的条件, 有同数量级的贡献. 上述格林函数图解法的优越性, 就在于微扰论级数某个无限 (或有限) 项集合的求和, 可与独特的 "图形求和" 相对应. 每个表示这种和的图形, 由多个元素构成, 其中每个元素自己又是求和的结果. 例如, 这种图形的线就可以表示格林函数微扰论无限序列的和 (图形的 "和"). 图形与表达式的对比按照和微扰论中相同的规则进行; 每条线代表相应的图形和等.

图形求和的可能性基于前面所述的按相应图形计算格林函数修正项的规则. 只要略加审视即可看出, 图形及其表达式好像是由个别的砖块 —— 格林函数和顶角算符 —— 构成, 而起连接作用的元素 ("水泥") 则是对坐标 (或动量) 和积分. 这就使我们可能不从最简单的元素, 即零级格林函数 $G^{(0)}$ 和简单项角开始构图, 而立即取由大量简单元素构成的整块结构.

试以图 21(a) 为例. 我们可以按图解法规则写出相应的表达式. 现在换一种作法. 先算出图中以虚线标出的部分图形的贡献, 而后写出对应图 21(b) 的表达式, 但是其中以短线标出的线不对应于 $G^{(0)}$, 而对应于前面算出的更复杂的线. 不难借直接计算验证, 两种作法的结果相同.



(a) (b)

图 21

这个结果具有完全普遍的意义. 我们总可以从 G 的图形中分出不含外线而与其他部分仅以两条 $G^{(0)}$ 线相连的部分, 算出它的贡献, 再利用 "简化" 图形写出整个图的表达式, 这时图中相应的线要代以前面分出部分的贡献.

图形中任何与其他部分以两条 $G^{(0)}$(或 $D^{(0)}$) 线相连的部分, 我们将称为自能部分. 如果它不能再分成以一条 $G^{(0)}$ 线相连的两部分, 就称为不可约自能部分. 例如, 图 9、图 10(a) 和图 10(c) 所示的自能部分是不可约的, 而图 10(b) 是可约的. 函数 G 和 D 的一切图形都是一条基本不可约自能部分线, 其上串着许多不可约自能部分, 它们可按任意顺序重复无穷次.

在一般情况下不可能将格林函数的全部图形求和. 然而可以进行部分求和, 使得在此求和后, 剩下的只是对不可约自能部分求和.

考虑 G 函数的任一图形. 它从 $G^{(0)}$ 线开始. 然后是某个不可约自能部分. 如果将这两个元素分离, 则剩下的图形还是从 $G^{(0)}$ 线开始而且可以包括任何数量的任意自能部分. 因此, 剩下的还是完全 G 函数. 由此得到 G 的如下方程:

$$G = G^{(0)} + G^{(0)}\Sigma G,$$

或者, 同样地:

$$G^{-1} = (G^{(0)})^{-1} - \Sigma, \tag{10.1}$$

其中

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \cdots \tag{10.2}$$

乃是各种不可约自能部分之和. 数量 Σ 我们将称为完全不可约自能部分或质量算符.

Σ 也可借助图形计算, 它与 G 的图形的差别只是没有两条外 $G^{(0)}$ 线. 然而, 在不能只限于计算前几个图形, 而必须将无穷级数求和的情况下, 通常更方便的作法是把 Σ 通过另一个图形集合表示, 后者我们称为顶角部分. 这步手续随相互作用的具体形状而异, 我们仍以 §9 中讨论过的几种相互作用为例.

1. 双粒子相互作用

这时最好利用对称形式的理论. Σ 的一级项对应于没有外 $G^{(0)}$ 线的图 9. 从所有高级项中我们首先分出自能部分仅以一个空心方框 $\Gamma^{(0)}$ 和基本 G 线相连的图形. 例子是图 10(a). 显然 Σ 中所有这类图形可得自一级图. 只须在图中内 $G^{(0)}$ 线上加上各种可能的自能部分. 这时内线就变成了完全 G 线. 因此, Σ 中一切与基本 G 线以一个方框 $\Gamma^{(0)}$ 相连的图形总合等于

$$\Sigma^{(1)}_{\alpha\beta}(p) = \mathrm{i}\int \frac{\mathrm{d}^4 p_1}{(2\pi)^4}\Gamma^{(0)}_{\alpha\gamma,\delta\beta}(p, p_1; p_1, p)G_{\delta\gamma}(p_1). \tag{10.3}$$

我们规定以粗线表示完全 G 函数. 这时 $\Sigma^{(1)}$ 可用图 22 所示的图形表示.

这个序列中未能包括的最简图形, 是图 10(c) 所示的自能部分. 在它的内 $G^{(0)}$ 线中加入自能部分, 可以得到某些更复杂的图形. 但是用这种方法得不到图 11. 然而它还是可以看成图 10(c) 的某种复杂化的结果. 如果我们切断从图 11 左端方框 $\Gamma^{(0)}$ 中伸出的三条内 $G^{(0)}$ 线, 则可以看出, 它是把图 10(c) 右端方框代以图 23 所示的图形的结果.

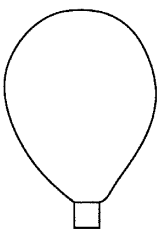


图 22

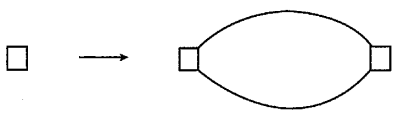


图 23

不难看出①, 在图 10(c) 的内 $G^{(0)}$ 线中插入自能部分, 并把右端方框代以有四个端点的相连图形之集合, 就可以得到所有未包括在 (10.3) 式中的 Σ 的图形. 这种有四个端点的集合, 我们称为顶角部分, 并记为 $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1p_2;p_3p_4)$, 在图上用实心方框表示. 和 $\Gamma^{(0)}$ 一样, Γ 中的四维动量应满足守恒律: $p_1+p_2=p_3+p_4$.

这样, Σ 的第二部分以图 24 表示, 并且等于

$$\Sigma^{(2)}_{\alpha\beta}=-\frac{1}{2}\int\Gamma^{(0)}_{\alpha\xi,\eta\delta}(p,p_1;p_2,p+p_1-p_2)G_{\eta\mu}(p_2)G_{\nu\xi}(p_1)$$
$$\times G_{\delta\gamma}(p+p_1-p_2)\Gamma_{\mu\gamma,\nu\beta}(p_2,p+p_1-p_2;p_1,p)\frac{\mathrm{d}^4p_1\mathrm{d}^4p_2}{(2\pi)^8}. \tag{10.4}$$

把 $\Sigma=\Sigma^{(1)}+\Sigma^{(2)}$ 代入方程式 (10.1), 得到

$$[\omega-\xi(\boldsymbol{p})]G_{\alpha\beta}(p)-\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4p_1}{(2\pi)^4}\Gamma^{(0)}_{\alpha\xi,\eta\gamma}(p,p_1;p_1,p)G_{\eta\xi}(p_1)G_{\gamma\beta}(p)$$
$$+\frac{1}{2}\int\Gamma^{(0)}_{\alpha\xi,\eta\delta}(p,p_1;p_2,p_1+p-p_2)G_{\eta\mu}(p_2)G_{\nu\xi}(p_1)$$
$$\times G_{\delta\gamma}(p+p_1-p_2)$$
$$\times\Gamma_{\mu\gamma,\nu\rho}(p_2,p+p_1-p_2;p_1,p)\frac{\mathrm{d}^4p_1\mathrm{d}^4p_2}{(2\pi)^8}G_{\rho\beta}(p)=\delta_{\alpha\beta}. \tag{10.5}$$

这个联系 G 函数和顶角部分的方程称为戴逊方程. 这里是用图形求和法得到这个方程的. 以后要给出戴逊方程的解析推导, 并更仔细地研究顶角部分.

① 图 9 和图 10(c) 是构成更复杂的图形的基础, 它们有时称为骨架图形.

2. 电声子作用

电子格林函数中 Σ 的最简单图形如图 25(a). 完全和前面类似地可证明, 这是唯一的骨架图形, 也就是说, 在它的内 $G^{(0)}$ 和 $D^{(0)}$ 线上插入自能部分, 并把右顶点换成所谓顶角部分, 就可以得到全部更复杂的图形. 这里顶角部分指的是一切具有一个声子端和两个电子端的图形总和, 记为 $\Gamma(p,p-k;k)$, 在图上用实心三角形表示.

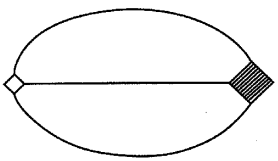


图 24



图 25

因此对于电声子相互作用, 电子的完全不可约自能部分 Σ 用图 25(b) 表示, 它等于

$$\Sigma = \mathrm{i}g \int G(p-k)D(k)\Gamma(p-k,p;k)\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}, \tag{10.6}$$

(式中已令 $G_{\alpha\beta} = G\delta_{\alpha\beta}$).

将 (10.6) 式代入 (10.1) 式, 得戴逊方程式:

$$[\omega - \xi(p)]G(p) - \mathrm{i}g \int G(p-k)D(k) \times \Gamma(p-k,p;k)\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}G(p) = 1. \tag{10.7}$$

声子自能部分我们记为 Π, 它可以类似地从图 26(a) 所示的骨架图形得到, 为此只须将电子 $G^{(0)}$ 线换成完全 G 线, 并把一个常数 g 代成顶角部分. 这时图 26(a) 变成 26(b), 它等于

$$\Pi(k) = -2\mathrm{i}g \int G(p)G(p-k)\Gamma(p,p-k;k)\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}. \tag{10.8}$$

这种情况下戴逊方程式的形式是

$$[\omega_0^2(\boldsymbol{k})]^{-1}[\omega^2 - \omega_0^2(\boldsymbol{k})]D(k) + 2\mathrm{i}g \int G(p)G(p-k)\Gamma(p,p-k;k)\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}D(k) = 1. \tag{10.9}$$

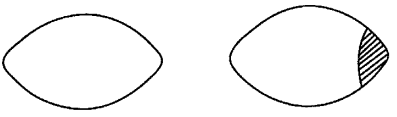


图 26

3. 外场

对处于外场中的费米粒子系统, 也可以写出戴逊方程型的方程. 注意到 G 的所有图形都是如图 15 所示的链, 我们看出, 势 $V_{\alpha\beta}$ 的傅里叶分量就起着 Σ 的作用. 这时戴逊方程式是

$$[\omega-\xi(\boldsymbol{p})]G_{\alpha\beta}(p,p')-\int V_{\alpha\gamma}(p-p_1)G_{\gamma\beta}(p_1,p')\frac{\mathrm{d}^4p_1}{(2\pi)^4}=\delta_{\alpha\beta}. \tag{10.10}$$

§10.2 顶角部分. 多粒子格林函数

戴逊方程式可以直接得自海森伯算符的运动方程式

$$\mathrm{i}\frac{\partial\widetilde{\psi}_\alpha}{\partial t}=[\widetilde{\psi}_\alpha(x),\hat{H}-\hat{N}\mu],$$

$$\hat{H}=-\int\psi_\alpha^+(\boldsymbol{r})\frac{\Delta}{2m}\psi_\alpha(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}+H_{\mathrm{int}}.$$

算符 $\hat{H}$ 和 $\hat{N}$ 即可通过薛定谔算符 $\psi_\alpha(\boldsymbol{r})$ 表示, 也可通过海森伯算符 $\hat{\psi}_\alpha(\boldsymbol{r},t)$ 表示, 反正在两个表象中它们的形状是相同的.

从 $\hat{H}-\mu\hat{N}$ 中分出 H_{int}, 并利用算符 $\widetilde{\psi}$ 和 $\widetilde{\psi}^+$ 在同一时刻的对易关系, 得

$$\mathrm{i}\frac{\partial\widetilde{\psi}_\alpha}{\partial t}=\left(-\frac{\Delta}{2m}-\mu\right)\widetilde{\psi}_\alpha(x)+[\widetilde{\psi}_\alpha(x),H_{\mathrm{int}}].$$

对第一个时间变量微分 G 函数:

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}G_{\alpha\beta}(x,x')=\frac{\partial}{\partial t}\langle T(\widetilde{\psi}_\alpha(x)\widetilde{\psi}_\beta^+(x'))\rangle.$$

再把 $T(\cdots)$ 表示为

$$\theta(t-t')\widetilde{\psi}_\alpha(x)\widetilde{\psi}_\beta^+(x')-\theta(t'-t)\widetilde{\psi}_\beta^+(x')\widetilde{\psi}_\alpha(x),$$

其中

$$\theta(t)=\begin{cases}1, & t>0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

这时就有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}G_{\alpha\beta}(x,x') \\
&\quad=\theta(t-t')\frac{\partial\widetilde{\psi}_\alpha(x)}{\partial t}\widetilde{\psi}^+_\beta(x')-\theta(t'-t)\widetilde{\psi}^+_\beta(x')\frac{\partial\widetilde{\psi}_\alpha(x)}{\partial t} \\
&\qquad+\delta(t-t')(\widetilde{\psi}_\alpha(\boldsymbol{r},t)\widetilde{\psi}^+_\beta(\boldsymbol{r}',t)+\widetilde{\psi}^+_\beta(\boldsymbol{r}',t)\widetilde{\psi}_\alpha(\boldsymbol{r},t)) \\
&\quad=\left\langle T\left(\frac{\partial\widetilde{\psi}_\alpha(x)}{\partial t}\widetilde{\psi}^+_\beta(x')\right)\right\rangle+\delta(x-x')\delta_{\alpha\beta}.
\end{aligned}$$

这里已经利用了对易规则. 最终结果是

$$\begin{aligned}
&\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\Delta}{2m}+\mu\right)G_{\alpha\beta}(x,x') \\
&\quad=\delta(x-x')\delta_{\alpha\beta}-\mathrm{i}\langle T([\widetilde{\psi}_\alpha(x),H_{\mathrm{int}}],\widetilde{\psi}^+_\beta(x'))\rangle.
\end{aligned}\tag{10.11}$$

右端的形状随具体的相互作用而不同, 因此我们转而讨论几种特例.

1. 双粒子相互作用

算符 H_{int} 由 (9.2) 式给定. 完成计算并将结果化成对称形式 (如推导 (9.3) 式时所作), 我们得到 (10.11) 式最后一项为

$$\begin{aligned}
&-\frac{\mathrm{i}}{2}\int\mathrm{d}^4x_2\mathrm{d}^4x_3\mathrm{d}^4x_4\Gamma^{(0)}_{\alpha\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}(x,x_2;x_3,x_4) \\
&\qquad\times\langle T(\widetilde{\psi}^+_{\gamma_2}(x_2)\widetilde{\psi}_{\gamma_4}(x_4)\widetilde{\psi}_{\gamma_3}(x_3)\widetilde{\psi}^+_\beta(x'))\rangle.
\end{aligned}$$

于是问题就归结为计算四个 ψ 算符编时乘积的平均值. 我们将称这个量为双粒子格林函数:

$$G^{\mathrm{II}}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(x_1,x_2;x_3,x_4)=\langle T(\widetilde{\psi}_\alpha(x_1)\widetilde{\psi}_\beta(x_2)\widetilde{\psi}^+_\gamma(x_3)\widetilde{\psi}^+_\delta(x_4))\rangle.\tag{10.12}$$

根据 (6.32) 式, G^{II} 可以通过相互作用表象的 ψ 算符表示:

$$G^{\mathrm{II}}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(x_1,x_2;x_3,x_4)=\frac{\langle T(\psi_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_2)\psi^+_\gamma(x_3)\psi^+_\delta(x_4))S(\infty)\rangle}{\langle S(\infty)\rangle}.\tag{10.13}$$

这个式子的计算和格林函数的计算完全相似. 分子中的算符 $S(\infty)$ 按 H_{int} 的幂展成级数. 然后利用维克定理, 可将级数的每一项表示成含有 $G^{(0)}$ 函数乘积的若干项之和. 每个这种项对应一个费曼图. 这些图形与格林函数图形的差别, 在于有四个外端点. 和从前一样容易看出, 只须考虑相连图形, 即没有与端点不连接部分的图形; 同时应省去分母中的 $S(\infty)$. 另一条规则也是成立的, 即所有表达式与图形级别的关系都包含在形如 λ^n 的因子中. 因此有可能处理分图并进行部分求和.

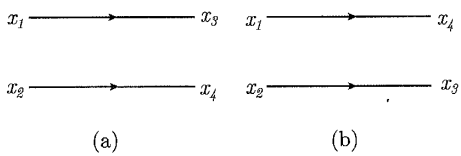
所有 G^{II} 的相连图形又分为两类. 一类图形中 x_1 点通过一系列收缩和 x_3 点相连, 而 x_2 点和 x_4 点相连, 但是例如 x_1 和 x_4 点就是彼此隔离的. 这种图形分解成两个彼此无任何线相连的部分. x_1 和 x_4 相连, x_2 和 x_3 相连, 而 x_1 和 x_3 之间无任何联系的图形, 也属于这一点.

最简单的这类图形出现于 H_{int} 的零级近似, 它们示于图 27 中, 其表达式为

$$G^{(0)}_{\alpha\gamma}(x_1-x_3)G^{(0)}_{\beta\delta}(x_2-x_4), \tag{a}$$

$$-G^{(0)}_{\alpha\delta}(x_1-x_4)G^{(0)}_{\beta\gamma}(x_2-x_3). \tag{b}$$

不难看出, 只须在 $G^{(0)}$ 线上加入自能部分, 就可以得到所有更复杂的这类图形, 换言之, 只要将细的 $G^{(0)}$ 线换成粗的 G 线即可.

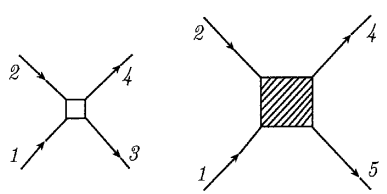


(a) (b)

图 27

另一类包括所有不能分解成独立部分的图形. 最简单的这类图形出现于 H_{int} 的一级近似, 形如图 28(a) 所示. 它对应表达式:

$$\mathrm{i}\int G^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x_1-x_1')G^{(0)}_{\beta\gamma_2}(x_2-x_2')G^{(0)}_{\gamma_3\gamma}(x_3'-x_3)G^{(0)}_{\gamma_4\delta}(x_4'-x_4)$$
$$\times\,\Gamma^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}(x_1',x_2';x_3',x_4')\mathrm{d}^4x_1'\mathrm{d}^4x_2'\mathrm{d}^4x_3'\mathrm{d}^4x_4'.$$



(a) (b)

图 28

令图 28(a) 的外 $G^{(0)}$ 线复杂化, 并把方框换成更复杂的四端结构, 如图 23 之类, 就得出更高级的图形. 这时上式中 $G^{(0)}$ 换成 G, 而 $\Gamma^{(0)}$ 成为代表一切四端图总合的 Γ, 也就是说, 图 28(a) 变成图 28(b).

从以上讨论得出, 最好将 $G^{\mathrm{II}}_{\alpha\beta;\gamma\delta}(x_1,x_2;x_3,x_4)$ 表示成

$$G^{\mathrm{II}}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(x_1,x_2;x_3,x_4)=G_{\alpha\gamma}(x_1-x_3)G_{\beta\delta}(x_2-x_4)$$

$$
\begin{aligned}
&- G_{\alpha\delta}(x_1 - x_4)G_{\beta\gamma}(x_2 - x_3) \\
&+ \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x_1' \cdots \mathrm{d}^4x_4' G_{\alpha\gamma_1}(x_1 - x_1')G_{\beta\gamma_2}(x_2 - x_2') \\
&\times G_{\gamma_3\gamma}(x' - x_3)G_{\gamma_4\delta}(x_4' - x_4)\Gamma_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}(x_1', x_2'; x_3', x_4'),
\end{aligned} \tag{10.14}
$$

这里 Γ 就是前面引入的顶角部分.

方程 (10.11) 最后一项等于

$$
\frac{\mathrm{i}}{2}\int \mathrm{d}^4x_2\mathrm{d}^4x_3\mathrm{d}^4x_4 \Gamma^{(0)}_{\alpha\gamma_2;\gamma_3\gamma_4}(x, x_2; x_3, x_4)G^{\mathrm{II}}_{\gamma_3\gamma_4,\gamma_2\beta}(x_3, x_4; x_2, x').
$$

根据 (10.14) 式展开 $G^{\mathrm{II}}_{\gamma_3\gamma_4;\gamma_2\beta}$, 并注意 $\Gamma^{(0)}$ 对角标 3 和 4 的反对称性, 就从方程式 (10.11) 得到

$$
\begin{aligned}
&\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} - H_0 + \mu\right) G_{\alpha\beta}(x - x') - \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x_2\mathrm{d}^4x_3\mathrm{d}^4x_4 \\
&\quad\times \Gamma^{(0)}_{\alpha\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}(x, x_2; x_3, x_4)G_{\gamma_3\gamma_2}(x_3 - x_2)G_{\gamma_4\beta}(x_4 - x') \\
&\quad+ \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x_2 \cdots \mathrm{d}^4x_8 \Gamma^{(0)}_{\alpha\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}(x, x_2; x_3, x_4) \\
&\quad\times G_{\gamma_4\gamma_6}(x_4 - x_6)G_{\gamma_3\gamma_5}(x_3 - x_5)G_{\gamma_7\gamma_2}(x_7 - x_2)G_{\gamma_8\beta}(x_8 - x') \\
&\quad\times \Gamma_{\gamma_5\gamma_6,\gamma_7\gamma_8}(x_5, x_6; x_7, x_8) = \delta(x - x')\delta_{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{10.15}
$$

由于空间的均匀性, Γ 和 G^{II} 只和三个坐标差有关. 因此这些量的傅里叶分量最好仿照 $\Gamma^{(0)}$ 定义. 例如:

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1, p_2; p_3, p_1 + p_2 - p_3)(2\pi)^4\delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \\
&\quad= \int \Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(x_1, x_2; x_3, x_4)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1x_1 - \mathrm{i}p_2x_2 + \mathrm{i}p_3x_3 + \mathrm{i}p_4x_4}\mathrm{d}^4x_1 \cdots \mathrm{d}^4x_4.
\end{aligned} \tag{10.16}
$$

由 (10.14), G^{II} 和 Γ 的傅里叶分量之间的关系由方程式

$$
\begin{aligned}
&G^{\mathrm{II}}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1, p_2; p_3, p_1 + p_2 - p_3) \\
&\quad= G_{\alpha\gamma}(p_1)G_{\beta\delta}(p_2) \times \delta(p_1 - p_3)(2\pi)^4 - G_{\alpha\delta}(p_1)G_{\beta\gamma}(p_2)\delta(p_2 - p_3)(2\pi)^4 \\
&\quad+ \mathrm{i}G_{\alpha\gamma_1}(p_1)G_{\beta\gamma_2}(p_2)G_{\gamma_3\gamma}(p_3)G_{\gamma_4\delta}(p_1 + p_2 - p_3) \\
&\quad\times \Gamma_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}(p_1, p_2; p_3, p_1 + p_2 - p_3)
\end{aligned} \tag{10.17}
$$

决定.

对方程式 (10.15) 作傅里叶变换, 就得到方程式 (10.5). 这样就解析地导出了戴逊方程式, 并得到决定其中 Γ 的关系式 (10.12), (10.16) 和 (10.17).

Γ 可借图形求和计算. 图形的例子见图 23 以及图 29(a)~ 图 29(c). 仅仅由于 Γ 的图形可以看成 G 函数图形的某种部分, 就知道构图和写表达式的对应规则仍

与计算 G 时一样. 这一点也可以直接验证, 为此只须取 Γ 的解析定义并完成与上节中完全相似的运算.

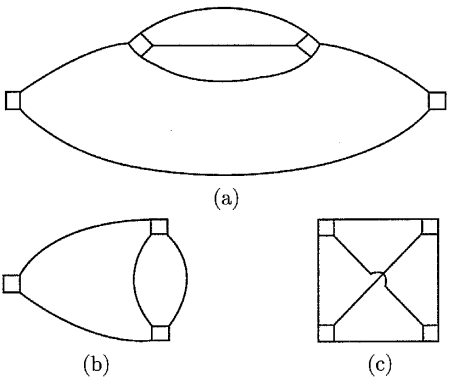


图 29

通常计算 Γ 时, 最好预先进行个别分图的部分求和. 我们为此引入紧致图形 (compact diagram) 概念. 我们将以此称呼不包含自能部分的图形. 例如, 图 23 和图 29(b)、图 29(c) 是紧致的, 而图 29(a) 是非紧致的. 在紧致图形内 $G^{(0)}$ 线上加入自能部分, 即将 $G^{(0)}$ 线换成完全 G 线, 可得 Γ 的全部图形. 因此为了计算 Γ, 只须画出所有紧致图形, 并令图中每条实线对应完全 G 函数.

2. 电子和声子相互作用

取 (9.5) 式的 H_{int}, 得到方程式 (10.11) 的最后一项

$$-\mathrm{i}g\langle T(\widetilde{\psi}_\alpha(x)\widetilde{\psi}^+_\beta(x')\widetilde{\varphi}(x))\rangle.$$

函数

$$P_{\alpha\beta}(x_1,x_2;x_3)=\langle T(\widetilde{\psi}_\alpha(x_1)\widetilde{\psi}^+_\beta(x_2)\widetilde{\varphi}(x_3))\rangle \tag{10.18}$$

也可以对应于具有一个声子端和两个电子端的费曼图集合. 微扰论一级近似给出最简图形 [图 30(a)], 它等于

$$-g\delta_{\alpha\beta}\int \mathrm{d}^4y G^{(0)}(x_1-y)G^{(0)}(y-x_2)D^{(0)}(y-x).$$

通过和前面一样的论述, 我们可令 $P_{\alpha\beta}$ 与图 30(b) 对应, 它等于

$$\begin{aligned}P_{\alpha\beta}(x_1,x_2;x_3)=&\delta_{\alpha\beta}P(x_1,x_2;x_3)\\ =&-\delta_{\alpha\beta}\int \mathrm{d}^4x_1'\mathrm{d}^4x_2'\mathrm{d}^4x_3'G(x_1-x_1')\\ &\times G(x_2'-x_2)D(x_3'-x_3)\Gamma(x_1',x_2';x_3').\end{aligned} \tag{10.19}$$

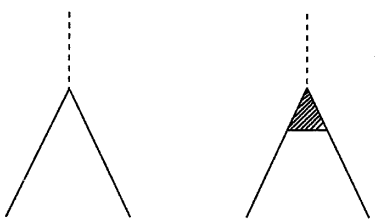
函数 Γ 代表所有具备三条外线 (一条声子线和两条电子线) 的图形. 由此可见, Γ 乃是电声子相互作用的顶角部分. 由于空间的均匀性, Γ 和 P 只与两个坐标差有关. 因此 Γ 可变成如下所示的傅里叶积分:

$$\begin{aligned}&\Gamma(p,p-k;k)(2\pi)^4\delta(p-p'-k)\\&\quad=\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\mathrm{d}^4x_3\Gamma(x_1,x_2;x_3)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px_1+\mathrm{i}p'x_2+\mathrm{i}kx_3}.\end{aligned}\tag{10.20}$$

Γ 和 P 的傅里叶分量的关系是

$$P(p,p-k;k)=-G(p)G(p-k)D(k)\Gamma(p,p-k;k).\tag{10.21}$$

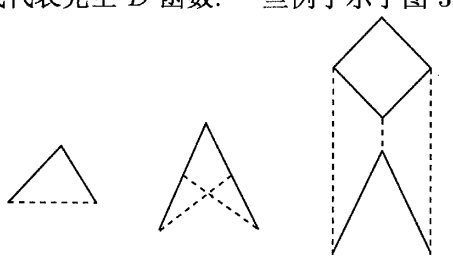
将电声子相互作用的方程式 (10.11) 最末项通过式 (10.18) 和 (10.19) 表示, 就得到坐标空间中 G 的方程式. 借助 (10.20) 式完成傅里叶变换, 我们就求得戴逊方程式 (10.7).



(a)　　(b)

图 30

所有关于计算双粒子相互作用顶角部分的论述, 这时也都成立. 为了计算 Γ, 须画出所有的紧致图形, 并按照与计算 G 一样的规则写出解析式. 每条实线代表完全 G 函数, 每条虚线代表完全 D 函数. 一些例子示于图 31 中.



(a)　　(b)　　(c)

图 31

我们再探讨一下推导戴逊方程式时引入的函数 G^{II} 和 P 的意义. 这些函数以及其他更多场算符编时乘积的平均值, 通称为多粒子格林函数. 而函数 G 与 D 就称为单粒子格林函数. 多粒子格林函数和单粒子格林函数一样, 决定系统的宏观性

质. 例如, 双粒子格林函数 G^{II} 决定电子系统在外电磁场中的行为 (第 6 章). 由于它们是多变量函数, 其解析性质的分析颇为困难. 当某些变量相等时, 情形较简单. 如在函数 G^{II} 中令 $x_1 = x_3, x_2 = x_4$, 则它对变量 $x_1 - x_2$ 的傅里叶分量的解析性质, 等同于声子格林函数 $D(\omega, \boldsymbol{k})$. 由于通常有意义的正是这些特例, 故比较简单的作法是不研究一般情况, 只决定具体格林函数的解析性质.

多粒子格林函数傅里叶分量的极点, 和 $G(p)$ 与 $D(k)$ 的极点一样, 决定系统的激发能谱, 而且其中必然包括了 $G(p)$ 和 $D(k)$ 的所有极点. 然而除此之外, 还会出现新的、对应于激发能谱其他支的极点. 我们对此问题不作一般分析. 第 4 章 §19 将讨论一个具体例子; 那里得出了费米粒子双粒子格林函数极点的方程, 并证明这些极点给出激发能谱的玻色支.

为了计算多粒子格林函数, 原则上可以写出与戴逊方程类似的方程, 它把这些函数和更高价的函数联系起来. 然而实际上这种手续给不出有益的结果, 还是直接求和图形比较简便. 这时常常会发现, 一定的图形序列最为重要. 通常这种情况下图形求和并不困难.

这里再强调一次, 函数 G^{II} 与 P 和顶角部分之间存在着简单联系.

§10.3 基态能量

本节末尾再推导几个公式, 它们有助于计算粒子相互作用对基态能量的修正项.

从方程式 (10.11) 中减去相应的函数 $G^{(0)}$ 的方程式, 这就得到

$$\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\Delta}{2m} + \mu\right)[G_{\alpha\beta}(x - x') - G^{(0)}_{\alpha\beta}(x - x')] = -\mathrm{i}\langle T([\widetilde{\psi}_\alpha(x), H_{\mathrm{int}}], \widetilde{\psi}^+_\beta(x'))\rangle.$$

令 $\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}', t' \to t + 0$. 然后将两端对 $\boldsymbol{r}$ 积分, 这时求得

$$\nu\langle H_{\mathrm{int}}\rangle = -\mathrm{i}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r} \lim_{\substack{\boldsymbol{r}' \to \boldsymbol{r} \\ t' \to t+0}} \left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\Delta}{2m} + \mu\right) \times [G_{\alpha\alpha}(x - x') - G^{(0)}_{\alpha\alpha}(x - x')],$$

其中 ν 是 H_{int} 中算符 ψ^+ 的数目. 假定相互作用哈密顿量正比于某个常数 g(这样的常数总可以引入). 基态能量 (更确切些, 热力学势 $\Omega = E - \mu N$) 作为 μ 的函数就等于 $\Omega = \langle \hat{H} - \mu\hat{N}\rangle$. 由熟知的统计公式 (见朗道和栗弗席兹的书 [1] 或中文本 [82]) 得

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(\hat{H} - \mu\hat{N}) \right\rangle = \frac{1}{g}\langle H_{\mathrm{int}}\rangle.$$

从 0 到 g 积分上式, 得

$$\Omega-\Omega_0=\int_0^g\frac{\mathrm{d}g_1}{g1}\langle H_{\mathrm{int}}\rangle, \tag{10.22}$$

其中 Ω_0 是无相互作用粒子的热力学势. 将前面求得的 $\langle H_{\mathrm{int}}\rangle$ 通过格林函数的表达式代入, 就有

$$\begin{aligned}\Omega-\Omega_0=-\frac{\mathrm{i}}{\nu}\int_0^g\frac{\mathrm{d}g_1}{g_1}\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}\lim_{\substack{\boldsymbol{r}'\to\boldsymbol{r}\\ t'\to t+0}}\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\Delta}{2m}+\mu\right)\\ \times[G_{\alpha\alpha}(x-x')-G^{(0)}_{\alpha\alpha}(x-x')].\end{aligned}$$

令 $G_{\alpha\beta}(x-x')=\delta_{\alpha\beta}G(x-x')$ 并转到动量表象, 再利用 $G^{(0)}$ 方程, 最终求得

$$\begin{aligned}\Omega-\Omega_0=-\frac{2\mathrm{i}}{\nu}V\int_0^g\frac{\mathrm{d}g_1}{g_1}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\\ \times G^{(0)-1}(\boldsymbol{p})[G(p)-G^{(0)}(p)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},\end{aligned} \tag{10.23}$$

其中 $t\to+0, V$ 为系统的体积.

从以下关系 (见 [1]①)

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial m}\right)_{T,V,\mu}=\left\langle\frac{\partial\hat{H}}{\partial m}\right\rangle,$$

还可以得到一个有益公式. 由于

$$\frac{\partial\hat{H}}{\partial m}=\frac{1}{2m^2}\int\psi^+_\alpha(\boldsymbol{r})\Delta\psi_\alpha(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

则

$$\frac{\partial\Omega}{\partial m}=-\frac{\mathrm{i}}{2m^2}\int\left[\Delta_{\boldsymbol{r}}\lim_{\substack{\boldsymbol{r}'\to\boldsymbol{r}\\ t'\to t+0}}G_{\alpha\alpha}(x-x')\right]\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

变换到傅里叶分量, 得到

$$\frac{\partial\Omega}{\partial m}=\frac{\mathrm{i}V}{m^2}\int p^2G(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}, \tag{10.24}$$

其中 $t\to+0$.

最后, 还应再提到 §7 中求得的公式:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}=-N=2\mathrm{i}V\int G(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}. \tag{10.25}$$

① 参看 [82] 中 (11.4), (15.11), (36.2) 等公式及 §80.—— 译者注

第 3 章　温度大于零时的图解法

第 3 章中的讨论和推导在相当程度上与第 2 章重复, 由于这两章对今后很重要, 我们以为保留这种平行叙述是适宜的. 熟悉量子场论方法, 而仅对温度图解法感兴趣的读者, 可以直接从本章开始阅读.

§11　温度格林函数

§11.1　一般性质

迄今我们研究了多粒子系统在绝对温度为零度时的性质. 温度高于零度时问题就复杂多了.

统计物理的普通 "经典" 方法, 是直接计算系统的热力学量 (作为温度和密度的函数). 然而由于任何这类问题都不能准确求解, 答案常表示成某个小参数的幂级数. 应用普通热力学微扰论 (参阅朗道和栗弗席兹的书[1]①), 容易写出自由能 F 微扰展开的前两项:

$$\begin{aligned} F =& F_0 + \sum_n V_{nn} \mathrm{e}^{\frac{F_0 - E_n^{(0)}}{T}} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n,m} \frac{|V_{nm}|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \left[\mathrm{e}^{\frac{F_0 - E_n^{(0)}}{T}} - \mathrm{e}^{\frac{F_0 - E_m^{(0)}}{T}} \right] \\ &+ \frac{1}{2T} \left(\sum_n V_{nn} \mathrm{e}^{\frac{F_0 - E_n^{(0)}}{T}} \right)^2 + \cdots . \end{aligned}$$

可是要写出以后诸项, 就已是颇不容易的事, 更谈不上直接计算这些项了, 而级数的某个无穷项序列的求和就更无希望. 量子场论图解方法运用格林函数, 可以直观地表示出任何一级近似的结构与特性, 因此在温度大于零的统计问题中就特别引人注意.

前一章所述的图解法不能直接推广到温度大于零的情形. 对特殊的量 —— 温度格林函数, 可以建立温度大于零的图解法. 温度格林函数与前面讨论过的和时间 t 有关的格林函数不同, 依赖于虚 "时间" $-\mathrm{i}\tau$, 它在从 $-\dfrac{\mathrm{i}}{T}$ 到零的区间内变化 (松原武生[31]).

① 参阅 [82], §32. —— 译者注

和 $T=0$ 时的方法一样, 松原方法中不是计算热力学量本身, 而是计算前面提及的温度格林函数 $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r},\tau)$. 它的微扰论级数的任何一项由相应的费曼图描述, 并按费曼规则计算: 图中每条线代表自由粒子温度格林函数 $\mathfrak{G}^{(0)}(\boldsymbol{r},\tau)$, 每个顶点代表相互作用算符等等. 唯一和 $T=0$ 情况的不同在于, 在每个顶点不是对时间 t 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 积分, 而是对 τ 从 0 积分到 $1/T$.

$T\neq 0$ 的图解法中的温度格林函数 $\mathfrak{G}$ 定义为

$$\begin{aligned}&\mathfrak{G}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1,\tau_1;\boldsymbol{r}_2,\tau_2)\\&=\begin{cases}-\mathrm{Tr}\left[\mathrm{e}^{\frac{\Omega+\mu\hat{N}-\hat{H}}{T}}\mathrm{e}^{(\hat{H}-\mu\hat{N})(\tau_1-\tau_2)}\psi_\alpha(\boldsymbol{r}_1)\mathrm{e}^{-(\hat{H}-\mu\hat{N})(\tau_1-\tau_2)}\psi^+_\beta(\boldsymbol{r}_2)\right], & \tau_1>\tau_2;\\ \pm\mathrm{Tr}\left[\mathrm{e}^{\frac{\Omega+\mu\hat{N}-\hat{H}}{T}}\mathrm{e}^{-(\hat{H}-\mu\hat{N})(\tau_1-\tau_2)}\psi^+_\beta(\boldsymbol{r}_2)\mathrm{e}^{(\hat{H}-\mu\hat{N})(\tau_1-\tau_2)}\psi_\alpha(\boldsymbol{r}_1)\right], & \tau_1<\tau_2.\end{cases}\end{aligned}\tag{11.1}$$

这里 $\psi_\alpha(\boldsymbol{r})$ 和 $\psi^+_\alpha(\boldsymbol{r})$ 是系统的薛定谔算符, 而 "+" 号和 "−" 号分别对应费米和玻色粒子. 运算 Tr 表示取矩阵对角元之和. 这时既对系统中的粒子数求和, 又对给定粒子数时系统一切可能的状态求和. 因此, $\mathfrak{G}$ 根据定义乃是温度 T 和化学势 μ 的函数. (11.1) 式中指数上的 Ω 是变量为 T,V,μ 的热力学势 ($\mathrm{d}\Omega=-S\mathrm{d}T-P\mathrm{d}V-N\mathrm{d}\mu$). 提醒一下, 运算 $\mathrm{Tr}\{\mathrm{e}^{(\Omega+\mu\hat{N}-\hat{H})/T}\cdots\}$ 正是普通的吉布斯统计平均, 以后我们将记之为 $\langle\cdots\rangle$.

声子温度格林函数 $\mathfrak{D}$ 由类似的关系式定义:

$$\begin{aligned}&\mathfrak{D}(\boldsymbol{r}_1,\tau_1;\boldsymbol{r}_2,\tau_2)\\&=\begin{cases}-\mathrm{Tr}\left[\mathrm{e}^{\frac{\Omega-\hat{H}}{T}}\mathrm{e}^{\hat{H}(\tau_1-\tau_2)}\varphi(\boldsymbol{r}_1)\mathrm{e}^{-\hat{H}(\tau_1-\tau_2)}\varphi(\boldsymbol{r}_2)\right], & \tau_1>\tau_2,\\ -\mathrm{Tr}\left[\mathrm{e}^{\frac{\Omega-\hat{H}}{T}}\mathrm{e}^{-\hat{H}(\tau_1-\tau_2)}\varphi(\boldsymbol{r}_2)\mathrm{e}^{\hat{H}(\tau_1-\tau_2)}\varphi(\boldsymbol{r}_1)\right], & \tau_1<\tau_2,\end{cases}\end{aligned}\tag{11.2}$$

其中 $\varphi(\boldsymbol{r})$ 为声子场的薛定谔算符.

从定义式 (11.1)、(11.2) 立即看出, 温度格林函数只和 "时间" 的差 $\tau_1-\tau_2$ 有关. 如果系统同时又是孤立和均匀的, 则它们自然仅依赖于空间坐标之差:

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{G}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2,\tau_1-\tau_2).$$

$\mathfrak{G}(\tau)$ 是变量 τ 的不连续函数, 它在 $\tau=0$ 处有一跃变, 跃变值可以直接从 $\mathfrak{G}$ 的定义算出. 对费米粒子,

$$\begin{aligned}\Delta\mathfrak{G}=&\mathfrak{G}(\tau)-\mathfrak{G}(-\tau)|_{\tau\to+0}\\=&-\mathrm{Tr}\left\{\mathrm{e}^{\frac{\Omega+\mu\hat{N}-\hat{H}}{T}}[\psi_\alpha(\boldsymbol{r}_1)\psi^+_\beta(\boldsymbol{r}_2)+\psi^+_\beta(\boldsymbol{r}_2)\psi_\alpha(\boldsymbol{r}_1)]\right\},\end{aligned}$$

而根据 φ 和 φ^+ 的对易关系有

$$\Delta\mathfrak{G} = -\delta_{\alpha\beta}\delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2).$$

玻色粒子 $\mathfrak{G}$ 函数的跃变值和费米情况相同.

可以将 (11.1) 和 (11.2) 式表示成类似温度零度时格林函数定义的形式. 为此按以下公式引入与 "时间"τ 有关的粒子的 "海森伯" 算符①:

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}_\alpha(\boldsymbol{r},\tau) &= \mathrm{e}^{\tau(\hat{H}-\mu\hat{N})}\psi_\alpha(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\tau(\hat{H}-\mu\hat{N})},\\
\tilde{\bar{\psi}}_\alpha(\boldsymbol{r},\tau) &= \mathrm{e}^{\tau(\hat{H}-\mu\hat{N})}\psi^+_\alpha(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\tau(\hat{H}-\mu\hat{N})},\\
\tilde{\varphi}(\boldsymbol{r},\tau) &= \mathrm{e}^{\tau\hat{H}}\varphi(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\tau\hat{H}}.
\end{aligned} \tag{11.3}$$

借助这些算符可将 (11.1) 型的繁复表达式写成 (比较 (7.1) 和 (7.14) 式)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{G}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1,\tau_1;\boldsymbol{r}_2,\tau_2) &= -\mathrm{Tr}\left\{\mathrm{e}^{\frac{\Omega+\mu\hat{N}-\hat{H}}{T}}T_\tau(\tilde{\psi}_\alpha(\boldsymbol{r}_1,\tau_2)\tilde{\bar{\psi}}_\beta(\boldsymbol{r}_2,\tau_2))\right\}\\
&\equiv -\langle T_\tau(\tilde{\psi}_\alpha(\boldsymbol{r}_1,\tau_1)\tilde{\bar{\psi}}_\beta(\boldsymbol{r}_2,\tau_2))\rangle.
\end{aligned} \tag{11.4}$$

(11.4) 式中的符号 T_τ 表示前一章中已见过的 T 编时运算. T_τ 乘积中的算符自左至右按 "时间"τ 的递减序排列 (我们为 T 乘积符号加上足标 τ, 以区别于温度 T). 对于费米粒子

$$T_\tau(\psi_1\psi_2\ldots) = \delta_p\psi_{i_1}\psi_{i_2}\ldots,$$

其右端算符 ψ 按时序排列, 而 δ_p 等于 -1 或 $+1$, 视置换

$$1,2,\cdots \to i_1,i_2,\cdots$$

的奇偶而定, 具体有

$$T_\tau(\tilde{\psi}(1)\tilde{\bar{\psi}}(2)) = \tilde{\psi}(1)\tilde{\bar{\psi}}(2),\quad \tau_1 > \tau_2,$$

$$T_\tau(\tilde{\psi}(1)\tilde{\bar{\psi}}(2)) = -\tilde{\bar{\psi}}(2)\tilde{\psi}(1),\quad \tau_1 < \tau_2.$$

松原方法中的多粒子格林函数也以类似关系式定义. 例如双粒子温度格林函数是

$$\mathfrak{G}^{\mathrm{II}}_{\alpha\beta;\gamma\delta}(1,2;3,4) = \langle T_\tau(\tilde{\psi}_\alpha(1)\tilde{\psi}_\beta(2)\tilde{\bar{\psi}}_\gamma(3)\tilde{\bar{\psi}}_\delta(4))\rangle. \tag{11.5}$$

如何推广到变量数目更多的格林函数, 不叙自明.

原则上函数 $\mathfrak{G}$ 决定系统的全部热力学性质. 例如, 自 $\mathfrak{G}$ 的定义以及

$$\hat{N} = \int \psi^+_\alpha(\boldsymbol{r})\psi_\alpha(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

① 立刻要指出, ψ 和 $\tilde{\psi}$ 已不再彼此厄米共轭.

可直接得公式

$$N = \pm \int \mathfrak{G}_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{r}, \tau; \boldsymbol{r}, \tau + 0)\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \tag{11.6}$$

利用此式可以计算粒子数作为化学势 μ 的函数, 而从 (11.6) 式解出 μ, 可求得化学势作为温度和密度 $n = N/V$ 的函数. 然后对熟知的热力学关系 $\dfrac{\partial f}{\partial n} = \mu(n, T)$ 积分, 就能求得单位体积的自由能 $f(n, T)$.

如果系统内只存在着由哈密顿量

$$\begin{aligned}\hat{H} = &-\frac{1}{2m}\int \psi_\alpha^+(\boldsymbol{r})\Delta\psi_\alpha(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ &+\frac{1}{2}\iint \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2\psi_\alpha^+(\boldsymbol{r}_1)\psi_\beta^+(\boldsymbol{r}_2)U(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\psi_\beta(\boldsymbol{r}_2)\psi_\alpha(\boldsymbol{r}_1),\end{aligned}$$

描述的粒子间成对相互作用, 则其能量可通过双粒子温度格林函数表达:

$$\begin{aligned}E(\mu, T) = \langle\hat{H}\rangle = &\mp\frac{1}{2m}\int \Delta\boldsymbol{r}_1\mathfrak{G}_{\alpha\alpha}(1,2)\Big|_{\substack{\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_2 \\ \tau_2=\tau_1+0}}\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1 \\ &-\frac{1}{2}\iint U(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\mathfrak{G}^{\mathrm{II}}_{\alpha\beta,\beta\alpha}(1,2;3,4)\Big|_{\substack{\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_4=\boldsymbol{r}_1 \\ \tau_3=\tau_4+0,\tau_4=\tau_1+0 \\ \tau_1=\tau_2+0}}\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2.\end{aligned}$$

以后还要导出若干联系温度格林函数和热力学量的公式.

能够借助温度格林函数解决的问题不限于热力学问题. 格林函数还决定系统的各种关联性质, 它们表现于凝聚物体和中子、伦琴射线等的相互作用中. 例如, 双粒子格林函数和密度关联函数之间有明显的关系:

$$F(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \overline{n(\boldsymbol{r}_1)n(\boldsymbol{r}_2)} \equiv \langle\psi_\alpha^+(\boldsymbol{r}_1)\psi_\alpha(\boldsymbol{r}_1)\psi_\beta^+(\boldsymbol{r}_2)\psi_\beta(\boldsymbol{r}_2)\rangle.$$

它决定伦琴射线和中子的弹性散射. 此外我们以后还要建立温度格林函数和相应的时间格林函数的关系, 进而可能研究各种非平衡现象.

现在指出温度格林函数 $\mathfrak{G}$ 的一个重要性质. 前面已提及, 温度格林函数依赖于 "时间" 之差 $\tau_1 - \tau_2 = \tau$, 并因而给定在区间 $-\dfrac{1}{T}$ 到 $\dfrac{1}{T}$ 上. 对 (11.1) 式中的 $\mathfrak{G}(\tau < 0)$ 项进行求阵迹符号下算符的循环置换①:

$$\mathfrak{G}(\tau < 0) = \pm\mathrm{Tr}\left\{\mathrm{e}^{\frac{\Omega}{T}}\mathrm{e}^{(\hat{H}-\mu\hat{N})\tau}\psi(\boldsymbol{r}_1)\mathrm{e}^{(-\hat{H}-\mu\hat{N})(\tau+\frac{1}{T})}\psi^+(\boldsymbol{r}_2)\right\}$$

① 直接根据若干算符乘积的阵迹的定义可以看出这种置换的可能性:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(ABC\cdots DF) &= \sum_{i,k,\cdots} A_{ik}B_{kl}C_{lm}\cdots D_{np}F_{pi} \\ &= \sum_{i,k,\cdots} B_{kl}C_{lm}\cdots D_{np}F_{pi}A_{ik} = \mathrm{Tr}(BC\cdots DFA).\end{aligned}$$

$$= \pm \mathrm{Tr}\left\{ \mathrm{e}^{\frac{\Omega+\mu\hat{N}-\hat{H}}{T}} \mathrm{e}^{(\hat{H}-\mu\hat{N})(\tau+\frac{1}{T})} \psi(\boldsymbol{r}_1) \mathrm{e}^{-(\hat{H}-\mu\hat{N})(\tau+\frac{1}{T})} \psi^+(\boldsymbol{r}_2) \right\}. \quad (11.7)$$

将 (11.7) 式和 $\mathfrak{G}$ 在 $\tau > 0$ 时的式子比较, 并注意 $\tau < 0$ 时有 $0 < \tau + \dfrac{1}{T} < \dfrac{1}{T}$, 就得到

$$\mathfrak{G}(\tau < 0) = \mp \mathfrak{G}\left(\tau + \frac{1}{T}\right), \quad (11.8)$$

这是 $\mathfrak{G}$ 在负 "时间" 和 $\tau > 0$ 的值之间的关系. 自然有

$$\mathfrak{D}(\tau < 0) = \mathfrak{D}\left(\tau + \frac{1}{T}\right). \quad (11.8')$$

声子 $\mathfrak{D}$ 函数显然是实函数 (算符 $\varphi(\boldsymbol{r})$ 是实数!), 由此得出另一有用的关系式. 计算 $\mathfrak{D}^*(\tau < 0)$:

$$\mathfrak{D}(\tau < 0) = \mathfrak{D}^*(\tau < 0) = -\mathrm{Tr}\{\mathrm{e}^{\Omega/T} \varphi(\boldsymbol{r}_1) \mathrm{e}^{\hat{H}\tau} \varphi(\boldsymbol{r}_2) \mathrm{e}^{-\hat{H}\tau} \mathrm{e}^{-\hat{H}/T}\}.$$

将所得式子和 $\mathfrak{D}(\tau > 0)$ 比较, 我们看出声子的温度格林函数是 τ 的偶函数:

$$\mathfrak{D}(\tau) = \mathfrak{D}(-\tau). \quad (11.9)$$

这个结论对任何实数场的格林函数都是正确的.

§11.2 自由粒子温度格林函数

在基于图解法的微扰论中, 自由粒子格林函数起着重要作用. 没有相互作用存在时, (11.1) 式中对每个粒子的状态独立地进行统计平均. 系统的能级 E_n(以及热力学势 Ω) 表示成个别粒子能量之和, 它们处于具有一定动量 $\boldsymbol{p}$ 和自旋投影 α 的状态中:

$$E_n^{(0)} = \sum_{\boldsymbol{p},\alpha} n_{\boldsymbol{p}\alpha} \varepsilon_0(\boldsymbol{p}), \Omega_0 = \sum_{\boldsymbol{p},\alpha} \Omega_{\boldsymbol{p}\alpha}^{(0)}.$$

由于泡利原理, 费米统计情形下状态填充数只能是 0 或 1.

利用定义 (11.1) 式计算自由粒子格林函数最为方便. 将薛定谔算符 ψ 的傅里叶展开式

$$\psi_\alpha(\boldsymbol{r}_1) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\boldsymbol{p}_1} a_{\boldsymbol{p}_1\alpha} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{r}_1}, \quad \psi_\beta^+(\boldsymbol{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\boldsymbol{p}_2} a_{\boldsymbol{p}_2\beta}^+ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{r}_2}$$

代入, 就有

$$\mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(0)}(\tau > 0) = -\frac{1}{V} \sum_{\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{p}_2\boldsymbol{r}_2)}$$

$$\times \mathrm{Tr}\left\{\mathrm{e}^{\frac{\Omega_0+\mu\hat{N}-\hat{H}_0}{T}}\mathrm{e}^{\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}a_{\boldsymbol{p}_1\alpha}\mathrm{e}^{-\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}a^+_{\boldsymbol{p}_2\beta}\right\}.$$

再注意到动量表象中哈密顿量 $\hat{H}$ 为

$$\hat{H}_0=\sum_{\boldsymbol{p},\alpha}\hat{n}_{\boldsymbol{p}\alpha}\varepsilon_0(\boldsymbol{p}),\quad \hat{N}=\sum_{\boldsymbol{p},\alpha}\hat{n}_{\boldsymbol{p}\alpha},$$

容易证明以下恒等式：

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}a_{\boldsymbol{p}\alpha}\mathrm{e}^{-\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}&=a_{\boldsymbol{p}\alpha}\mathrm{e}^{-\tau(\varepsilon_0(\boldsymbol{p})-\mu)},\\ \mathrm{e}^{\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}a^+_{\boldsymbol{p}\alpha}\mathrm{e}^{-\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}&=a^+_{\boldsymbol{p}\alpha}\mathrm{e}^{\tau(\varepsilon_0(\boldsymbol{p})-\mu)},\end{aligned}\tag{11.10}$$

为此只须计算出左右端唯一不为零的矩阵元. 因此,

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}^{(0)}(\tau>0)=&-\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{r}_2)-\tau(\varepsilon_0(\boldsymbol{p}_1)-\mu)}\\ &\times\mathrm{Tr}\left\{\mathrm{e}^{\frac{\Omega_0+\mu\hat{N}-\hat{H}_0}{T}}a_{\boldsymbol{p}_1\alpha}a^+_{\boldsymbol{p}_2\beta}\right\}.\end{aligned}$$

只有 $\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{p}_2$,$\alpha=\beta$ 时，乘积 $a_{\boldsymbol{p}_1\alpha}a^+_{\boldsymbol{p}_2\beta}$ 才具有不为零的对角矩阵元，故有

$$\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2,\tau>0)=-\delta_{\alpha\beta}\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)-\tau(\varepsilon_0(\boldsymbol{p})-\mu)}\langle a_{\boldsymbol{p}\alpha}a^+_{\boldsymbol{p}\alpha}\rangle.$$

数值 $\langle a_{\boldsymbol{p}\alpha}a^+_{\boldsymbol{p}\alpha}\rangle$ 通过与温度和化学势有关的平衡填充数 $n(\boldsymbol{p})$ 表示. 对遵从费米统计的粒子:

$$\langle a_{\boldsymbol{p}\alpha}a^+_{\boldsymbol{p}\alpha}\rangle=1-n(\boldsymbol{p}),\quad n(\boldsymbol{p})=\left[\mathrm{e}^{\frac{\varepsilon_0(\boldsymbol{p})-\mu}{T}}+1\right]^{-1};\tag{11.11}$$

而对玻色粒子：

$$\langle a_{\boldsymbol{p}\alpha}a^+_{\boldsymbol{p}\alpha}\rangle=1+n(\boldsymbol{p}),\quad n(\boldsymbol{p})=\left[\mathrm{e}^{\frac{\varepsilon_0(\boldsymbol{p})-\mu}{T}}-1\right]^{-1}.\tag{11.12}$$

现在令体积 V 趋向无穷大, 按一般方式把对动量求和变成积分. 最终得

$$\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r},\tau>0)=-\delta_{\alpha\beta}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}\boldsymbol{p}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}-\tau(\varepsilon_0(\boldsymbol{p})-\mu)}[1\mp n(\boldsymbol{p})].\tag{11.13a}$$

上面的符号对应费米粒子, 下面的符号对应玻色粒子. $\tau<0$ 时的 $\mathfrak{G}^{(0)}$ 最好借助关系式 (11.8) 计算：

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r},\tau<0)&=\mp\,\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\beta}\left(\boldsymbol{r},\tau+\frac{1}{T}\right)\\ &=\pm\,\delta_{\alpha\beta}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}\boldsymbol{p}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}-\tau(\varepsilon_0(\boldsymbol{p})-\mu)}n(\boldsymbol{p}).\end{aligned}\tag{11.13b}$$

自由声子格林函数也可类似地计算. 将算符 $\varphi(\boldsymbol{r})$ 的傅里叶展开式

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{\omega_0(\boldsymbol{k})}{2}}(b_{\boldsymbol{k}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}+b_{\boldsymbol{k}}^{+}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}})$$

(其中 $\omega_0(\boldsymbol{k})$ 是声子能量) 代入 (11.2) 式, 计算得

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}^{(0)}(\boldsymbol{r},\tau)=&-\frac{1}{2(2\pi)^3}\int\mathrm{d}\boldsymbol{k}\omega_0(\boldsymbol{k})\Big\{(N(\boldsymbol{k})+1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}-\omega_0(\boldsymbol{k})|\tau|}\\&+N(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}+\omega_0(\boldsymbol{k})|\tau|}\Big\},\\N(\boldsymbol{k})=&\left[\mathrm{e}^{\frac{\omega_0(\boldsymbol{k})}{T}}-1\right]^{-1}.\end{aligned}\tag{11.14}$$

和 (11.9) 式一致, $\mathfrak{D}^{(0)}$ 是 τ 的偶函数.

§12 微 扰 论

§12.1 相互作用表象

如果组成系统的粒子并不是自由的, 则在温度格林函数的 (11.1) 式中可变换到独特的相互作用表象, 它很像量子场论的相互作用表象 (松原武生[31]). 引入和场论 $\boldsymbol{S}$ 矩阵相似的矩阵 $\mathfrak{S}(\tau)\left(0<\tau<\dfrac{1}{T}\right)$, 它由以下关系式定义:

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\tau(\hat{H}-\mu\hat{N})}&=\mathrm{e}^{-\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}\mathfrak{S}(\tau),\\\mathrm{e}^{\tau(\hat{H}-\mu\hat{N})}&=\mathfrak{S}^{-1}(\tau)\mathrm{e}^{\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}.\end{aligned}\tag{12.1}$$

再引入相互作用表象中的粒子场算符:

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{r},\tau)&=\mathrm{e}^{\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}\psi(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})},\\\bar{\psi}(\boldsymbol{r},\tau)&=\mathrm{e}^{\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}\psi^{+}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})},\end{aligned}\tag{12.2}$$

可见当 $\hat{\boldsymbol{H}}=\hat{\boldsymbol{H}}_0$ 时它们和 §11 中提到的海森伯算符重合.

相互作用表象中其他算符的定义也类似 (12.2) 式. 例如:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{H}}(\tau)&=\mathrm{e}^{\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}\hat{\boldsymbol{H}}\mathrm{e}^{-\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})},\\\hat{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{int}}(\tau)&=\mathrm{e}^{\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}\hat{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{int}}\mathrm{e}^{-\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}.\end{aligned}$$

从这个定义看出, 如果在算符 $\hat{\boldsymbol{H}},\hat{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{int}}$ 中把 $\psi(\boldsymbol{r})$ 和 $\psi^{+}(\boldsymbol{r})$ 相应地换成 $\psi(\boldsymbol{r},\tau)$ 和 $\bar{\psi}(\boldsymbol{r},\tau)$, 就得到 $\hat{\boldsymbol{H}}(\tau)$, $\hat{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{int}}(\tau)$.

此外要注意, $\hat{H}_0$ 和 $\hat{N}(\tau)$ 事实上和 τ 没有关系 (自由粒子哈密顿量和算符 $\hat{N}$ 对易):

$$\hat{\boldsymbol{H}}_0(\tau)=\mathrm{e}^{\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}\hat{\boldsymbol{H}}_0\mathrm{e}^{-\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}=\hat{\boldsymbol{H}}_0,$$
$$\hat{\boldsymbol{N}}(\tau)=\mathrm{e}^{\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}\hat{\boldsymbol{N}}\mathrm{e}^{-\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}=\hat{\boldsymbol{N}}.$$

矩阵 $\mathfrak{S}(\tau)$ 满足简单的方程式, 它可自 $\boldsymbol{S}$ 矩阵的方程式 (6.17) 作代换 $t\to-\mathrm{i}\tau$ 得到. 然而我们将重新导出这个方程式, 为此将 (12.1) 第一式对 τ 微分:

$$\begin{aligned}&-(\hat{\boldsymbol{H}}-\mu\hat{\boldsymbol{N}})\mathrm{e}^{-\tau(\hat{H}-\mu\hat{N})}\\&\quad=\mathrm{e}^{-\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}\frac{\partial\mathfrak{S}(\tau)}{\partial\tau}-(\hat{\boldsymbol{H}}_0-\mu\hat{\boldsymbol{N}})\mathrm{e}^{-\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}\mathfrak{S}(\tau).\end{aligned}$$

在两端乘以 $\mathrm{e}^{\tau(\hat{\boldsymbol{H}}_0-\mu\hat{\boldsymbol{N}})}$, 有

$$\frac{\partial\mathfrak{S}(\tau)}{\partial\tau}=-\hat{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{int}}(\tau)\mathfrak{S}(\tau).\tag{12.3}$$

从 $\mathfrak{S}$ 的定义得条件 $\mathfrak{S}(0)=1$, 方程式 (12.3) 满足此条件的解为

$$\mathfrak{S}(\tau)=T_\tau\exp\left\{-\int_0^\tau\hat{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{int}}(\tau')\mathrm{d}\tau'\right\}.\tag{12.4}$$

(12.4) 式中符号 T_τ 的意义前面已说明, 它要求所有算符自左向右按 τ 的序列递减. 直接微分 (12.4) 式并注意 T_τ 运算, 容易验证此式的正确性.

除 $\mathfrak{S}(\tau)$ 外还讨论矩阵 $\mathfrak{S}(\tau_1,\tau_2)(\tau_1>\tau_2)$:

$$\mathfrak{S}(\tau_1,\tau_2)=T_\tau\exp\left\{-\int_{\tau_2}^{\tau_1}\hat{H}_{\mathrm{int}}(\tau')\mathrm{d}\tau'\right\},$$
$$\mathfrak{S}(\tau)=\mathfrak{S}(\tau,0).$$

$\mathfrak{S}(\tau_1,\tau_2)$ 具有若干显而易见的性质:

$$\begin{aligned}&\mathfrak{S}(\tau_1,\tau_3)=\mathfrak{S}(\tau_1,\tau_2)\mathfrak{S}(\tau_2,\tau_3),\quad\tau_1>\tau_2>\tau_3,\\&\mathfrak{S}(\tau_1,\tau_2)=\mathfrak{S}(\tau_1)\mathfrak{S}^{-1}(\tau_2),\quad\tau_1>\tau_2.\end{aligned}\tag{12.5}$$

现在把 (11.1) 式的格林函数变换到相互作用表象, 将所有包含 $\hat{H}$ 的指数通过 $\hat{H}_0$ 和 $\mathfrak{S}$ 表示, 就有

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}(\tau>0)=-\mathrm{e}^{\frac{\Omega}{T}}\mathrm{Tr}\Big\{&\mathrm{e}^{-\frac{\hat{H}_0-\mu\hat{N}}{T}}\mathfrak{S}\left(\frac{1}{T}\right)\mathfrak{S}^{-1}(\tau_1)\mathrm{e}^{(\hat{H}_0-\mu\hat{N})\tau_1}\psi(\boldsymbol{r}_1)\\&\times\mathrm{e}^{-(\hat{H}_0-\mu\hat{N})\tau_1}\mathfrak{S}(\tau_1)\mathfrak{S}^{-1}(\tau_2)\mathrm{e}^{(\hat{H}_0-\mu\hat{N})\tau_2}\psi^+(\boldsymbol{r}_2)\mathrm{e}^{-(\hat{H}_0-\mu\hat{N})\tau_2}\mathfrak{S}(\tau_2)\Big\},\end{aligned}$$

或者, 考虑到 (12.1) 式和 (12.5) 式有

$$\mathfrak{S}(\tau>0)=-\mathrm{e}^{\frac{\Omega}{T}}\mathrm{Tr}\Big\{\mathrm{e}^{-\frac{\hat{H}_0-\mu\hat{N}}{T}}\mathfrak{S}\left(\frac{1}{T},\tau_1\right)$$

$$\times \psi(\boldsymbol{r}_1,\tau_1)\mathfrak{S}(\tau_1,\tau_2)\bar{\psi}(\boldsymbol{r}_2,\tau_2)\mathfrak{S}(\tau_2)\Big\}. \tag{12.6a}$$

$\tau<0$ 时 $\mathfrak{G}$ 也类似地写成

$$\mathfrak{G}(\tau<0)=\pm\,\mathrm{e}^{\frac{\Omega}{T}}\mathrm{Tr}\Big\{\mathrm{e}^{-\frac{\hat{H}_0-\mu\hat{N}}{T}}\mathfrak{S}\left(\frac{1}{T},\tau_2\right)$$
$$\times\bar{\psi}(\boldsymbol{r}_2,\tau_2)\mathfrak{S}(\tau_2,\tau_1)\bar{\psi}(\boldsymbol{r}_1,\tau_1)\mathfrak{S}(\tau_1)\Big\}. \tag{12.6b}$$

(12.6a) 和 (12.6b) 式可以合而为一：

$$\mathfrak{G}(\tau)=-\mathrm{e}^{\frac{\Omega}{T}}\mathrm{Tr}\left\{\mathrm{e}^{-\frac{\hat{H}_0-\mu\hat{N}}{T}}T_\tau\left(\psi(\boldsymbol{r}_1,\tau_1)\bar{\psi}(\boldsymbol{r}_2,\tau_2)\mathfrak{S}\left(\frac{1}{T}\right)\right)\right\}. \tag{12.6c}$$

它直接得自 T_τ 编序运算的定义和 (12.5) 式.

现在还剩下 $\mathrm{e}^{\Omega/T}$ 要加以变换. 为此由定义

$$\mathrm{e}^{-\frac{\Omega}{T}}=\mathrm{Tr}\left\{\mathrm{e}^{-\frac{\hat{H}-\mu\hat{N}}{T}}\right\}$$

得

$$\mathrm{e}^{-\frac{\Omega}{T}}=\mathrm{Tr}\left\{\mathrm{e}^{-\frac{\hat{H}_0-\mu\hat{N}}{T}}\mathfrak{S}\left(\frac{1}{T}\right)\right\}.$$

相互作用表象中 $\mathfrak{G}$ 的最终表达式为

$$\mathfrak{G}(\boldsymbol{r}_1,\tau_1;\boldsymbol{r},\tau_2)=-\frac{\mathrm{Tr}\left\{\mathrm{e}^{-\frac{\hat{H}_0-\mu\hat{N}}{T}}T_\tau\left(\psi(\boldsymbol{r}_1,\tau_1)\bar{\psi}(\boldsymbol{r}_2,\tau_2)\mathfrak{S}\left(\frac{1}{T}\right)\right)\right\}}{\mathrm{Tr}\left\{\mathrm{e}^{-\frac{\hat{H}_0-\mu\hat{N}}{T}}\mathfrak{S}\left(\frac{1}{T}\right)\right\}},$$

或者，引入对无相互作用粒子系统各态求吉布斯平均的符号，得到

$$\mathfrak{G}(\boldsymbol{r}_1,\tau_1;\boldsymbol{r},\tau_2)=-\frac{\left\langle T_\tau(\psi(\boldsymbol{r}_1,\tau_1)\bar{\psi}(\boldsymbol{r}_2,\tau_2)\mathfrak{S}\right\rangle_0}{\langle\mathfrak{S}_0\rangle}, \tag{12.7}$$

$$\langle\ldots\rangle_0=\mathrm{Tr}\left\{\mathrm{e}^{\frac{\Omega_0+\mu\hat{N}-\hat{H}_0}{T}}\cdots\right\},\quad \mathfrak{S}\equiv\mathfrak{S}\left(\frac{1}{T}\right). \tag{12.8}$$

只要逐步重复以上计算，可以得到声子格林函数以及多粒子格林函数在相互作用表象中的表达式. 得到的声子格林函数为

$$\mathfrak{D}(1,2)=-\frac{\left\langle T_\tau(\varphi(1)\varphi(2)\mathfrak{S}\right\rangle_0}{\langle\mathfrak{S}\rangle_0}, \tag{12.9}$$

而双粒子格林函数为

$$\mathfrak{G}^{\mathrm{II}}(1,2;3,4)=-\frac{\left\langle T_\tau(\psi(1)\psi(2)\bar{\psi}(3)\bar{\psi}(4)\mathfrak{S}\right\rangle_0}{\langle\mathfrak{S}\rangle_0}. \tag{12.10}$$

和更多变量有关的格林函数的式子与 (12.7), (12.9), (12.10) 式的差别只在于 T 乘积中 ψ 算符的数目.

最后, 我们给出热力学势 Ω 和 $\mathfrak{S}$ 矩阵的关系式:

$$\Omega = \Omega_0 - T\ln\langle\mathfrak{S}\rangle_0\,, \tag{12.11}$$

这里 Ω_0 是无相互作用时的热力学势:

$$\Omega_0 = -T\ln\mathrm{Tr}\left\{\mathrm{e}^{-\frac{\hat{H}_0-\mu\hat{N}}{T}}\right\}.$$

§12.2 维克定理

现在回到我们的基本问题 —— 计算相互作用粒子系统的格林函数. 如果粒子间的相互作用可看成是弱的, 则相互作用表象中的温度格林函数可以按 H_{int} 表示成十分简明的微扰论级数.

相互作用哈密顿量 $\hat{H}_{\mathrm{int}}$ 仅仅通过矩阵 $\mathfrak{S}$ 而出现于格林函数中. 将 (12.4) 式右端的指数按 $\hat{H}_{\mathrm{int}}$ 的幂展成级数, 就得到

$$\begin{aligned}\mathfrak{S} &= 1 - \int_0^{1/T} \hat{H}_{\mathrm{int}}(\tau')\mathrm{d}\tau' \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^{1/T}\int_0^{1/T} \mathrm{d}\tau'\mathrm{d}\tau'' T_\tau(\hat{H}_{\mathrm{int}}(\tau')\hat{H}_{\mathrm{int}}(\tau'')) - \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{1/T}\cdots\int_0^{1/T}\mathrm{d}\tau_1\cdots\mathrm{d}\tau_n T_\tau(\hat{H}_{\mathrm{int}}(\tau_1)\cdots\hat{H}_{\mathrm{int}}(\tau_n)).\end{aligned} \tag{12.12}$$

再将此式代入 (12.7) 式的分子, 我们求得格林函数的微扰论级数为

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1,\tau_1;\boldsymbol{r}_2,\tau_2) = &-\frac{1}{\langle\mathfrak{S}\rangle_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)n}{n!}\int_0^{1/T}\cdots\int_0^{1/T}\mathrm{d}\tau_1'\cdots\mathrm{d}\tau_n' \\ &\times\left\langle T_\tau(\psi_\alpha(\boldsymbol{r}_1,\tau_1)\bar{\psi}_\beta(\boldsymbol{r}_2,\tau_2)\hat{H}_{\mathrm{int}}(\tau_1')\ldots\hat{H}_{\mathrm{int}}(\tau_n'))\right\rangle_0,\end{aligned} \tag{12.13}$$

其第一项自然就是 §11 中算出的自由粒子格林函数 $\mathfrak{G}^{(0)} = -\left\langle T_\tau(\psi(1)\bar{\psi}(2))\right\rangle_0$.

我们不展开 (12.13) 式分母 $\langle\mathfrak{S}\rangle_0$ 中的矩阵 $\mathfrak{S}$, 因为它将和分子中同样的因子相消. 加之 $\langle\mathfrak{S}\rangle_0$ 乃是与 $\boldsymbol{r}$ 和 τ 无关的常量, 不能影响以后的讨论.

在一切现实问题中, $\hat{H}_{\mathrm{int}}(\tau)$ 都是若干 (通常不太多) 个算符 $\psi(\boldsymbol{r},\tau),\bar{\psi}(\boldsymbol{r},\tau)$(可能还有 $\varphi(\boldsymbol{r},\tau)$) 的乘积对空间变量的积分. 因此按照微扰论计算格林函数的问题, 就归结为计算若干个取于不同空间和 "时间" 点的算符 T 乘积的平均值:

$$\left\langle T_\tau(\psi_\alpha(\boldsymbol{r},\tau)\cdots\bar{\psi}_{\alpha'}(\boldsymbol{r}',\tau')\cdots)\right\rangle_0. \tag{12.14}$$

我们在前一章里计算绝对温度零度的普通格林函数时, 已经遇见过这类问题, 那里证明了, 任意数量算符的平均值都归结为各种可能的成对平均值乘积之和, 而成对平均值根据定义就等于自由粒子格林函数 (维克定理). 我们即将看到, 类似的定理在新的情况中也成立.

为了证实这一点, 我们在 (12.14) 式中代入算符 ψ 对坐标的傅里叶展开式①:

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{r},\tau)&=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{p}}(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}-\tau(\varepsilon_0(\boldsymbol{p})-\mu)},\\ \bar{\psi}(\boldsymbol{r},\tau)&=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{p}}a^{+}_{\boldsymbol{p}}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}+\tau(\varepsilon_0(\boldsymbol{p})-\mu)},\end{aligned}\tag{12.15}$$

(12.15) 式中的算符 $a_{\boldsymbol{p}}(\tau)$ 和 $a^{+}_{\boldsymbol{p}}(\tau)$ 乃是普通的消灭和产生算符, 事实上与 τ 无关. 然而我们保留字母 τ, 以标明在 T 编时中算符应占的位置.

代入展开式 (12.15) 之后, 如果略掉 (12.15) 式中的指数部分, (12.14) 式就成为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{p}_1}\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{p}_2}\cdots\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{p}'_1}\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{p}'_2}\cdots\\ &\quad\cdots\left\langle T_\tau(a_{\boldsymbol{p}_1}(\tau_1)a_{\boldsymbol{p}_2}(\tau_2)\cdots a^{+}_{\boldsymbol{p}'_1}(\tau'_1)a^{+}_{\boldsymbol{p}'_1}(\tau'_2)\cdots)\right\rangle_0.\end{aligned}\tag{12.16}$$

在对 $\boldsymbol{p}_1,\vec{\boldsymbol{p}}_2,\cdots,\boldsymbol{p}'_1,\vec{\boldsymbol{p}}'_2,\cdots$ 的求和中, 对每个固定动量而言, 只有产生算符和消灭算符数目相等的各项才不为零. 例如只包括动量相同的一个产生算符和一个消灭算符的各项就不为零, 即

$$\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p}_1}\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p}_1\neq\boldsymbol{p}_2\neq\cdots}\sum_{\boldsymbol{p}_2}\cdots\left\langle T_\tau(a_{\boldsymbol{p}_1}(\tau_1)a_{\boldsymbol{p}_2}(\tau_2)\cdots a^{+}_{\boldsymbol{p}_1}(\tau'_1)a^{+}_{\boldsymbol{p}_2}(\tau'_2)\cdots)\right\rangle_0\tag{12.17a}$$

以及其他与 (12.17a) 式区别只是算符 a^{+} 的动量 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots$ 进行了置换的各项, 都不等于零.

当几个 (例如两个) 产生算符具有同一动量时, 求和中不为零的相应诸项的形状是

$$\begin{aligned}&\frac{1}{V}\frac{1}{V}\sum_{\substack{\boldsymbol{p}_1\\ \boldsymbol{p}_1\neq\boldsymbol{p}_2\neq\cdots}}\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p}_2}\cdots\left\langle T_\tau(a_{\boldsymbol{p}_1}(\tau_1)a_{\boldsymbol{p}_1}(\tau_2)a_{\boldsymbol{p}_2}(\tau_3)\cdots\right.\\ &\quad\left.\cdots a^{+}_{\boldsymbol{p}_1}(\tau'_1)a^{+}_{\boldsymbol{p}_1}(\tau'_2)a^{+}_{\boldsymbol{p}_2}(\tau'_3)\cdots)\right\rangle_0.\end{aligned}\tag{12.17b}$$

表达式 (12.17a) 有一个与众不同的特点, 即是在 (12.17a) 式中因子 $1/V$ 的数目与求和的次数相等, 在所有其他各项中前者总多于后者. 设想在完成平均 $\langle\cdots\rangle_0$ 之

① 利用相互作用表象中算符的定义和恒等式 (11.10), 容易证明 (12.15) 式的正确性.

后, 令体积 V 趋向无穷大, 但粒子数密度 N/V 保持不变(这时求和要换成求积分, 其规则是 $V^{-1}\sum\cdots\to(2\pi)^{-3}\int\cdots$). (12.17a) 式中的和在极限 $V\to\infty$ 下仍是不等于零的, 它通过费米函数或玻色函数的各种组合对动量的积分表示 (在 §11 中计算自由粒子格林函数 $\mathfrak{G}^{(0)}=-\langle T_\tau(\psi(1)\bar\psi(2))\rangle_0$ 时, 我们已遇见过这类实例). 相反, 在 (12.17b) 型的表达式中除了如上的对动量的积分外, 还剩下若干个多余的因子 $1/V$, 结果这些表达式在 $V\to\infty$ 时消失.

这样, (12.16) 式求和中所有各项在 $V\to\infty$ 时只剩下形如 (12.17a) 式者, 其中所有产生 (和消灭) 算符具有不同的动量. 这就是说, 在实际计算 $\langle T_\tau\{a_{\boldsymbol{p}_1}(\tau_1)a_{\boldsymbol{p}_2}(\tau_2)\cdots a^+_{\boldsymbol{p}_1}(\tau'_1)a^+_{\boldsymbol{p}_2}(\tau'_2)\cdots\}\rangle_0$ 时, 我们可以将每对算符 $a_{\boldsymbol{p}},a^+_{\boldsymbol{p}}$ 独立地求平均, 大量算符的 T 乘积的平均值就表示成一切可能的成对平均值的和. 例如,

$$\begin{aligned}&\left\langle T_\tau\left\{a_{\boldsymbol{p}_1}(\tau_1)a_{\boldsymbol{p}_2}(\tau_2)a^+_{\boldsymbol{p}'_1}(\tau'_1)a^+_{\boldsymbol{p}'_2}(\tau'_2)\right\}\right\rangle_0\\&\quad=\left\langle T_\tau\left\{a_{\boldsymbol{p}_1}(\tau_1)a^+_{\boldsymbol{p}'_2}(\tau'_2)\right\}\right\rangle_0\left\langle T_\tau\left\{a_{\boldsymbol{p}_2}(\tau_2)a^+_{\boldsymbol{p}'_1}(\tau'_1)\right\}\right\rangle_0\\&\qquad\mp\left\langle T_\tau\left\{a_{\boldsymbol{p}_1}(\tau_1)a^+_{\boldsymbol{p}'_1}(\tau'_1)\right\}\right\rangle_0\left\langle T_\tau\left\{a_{\boldsymbol{p}_2}(\tau_2)a^+_{\boldsymbol{p}'_2}(\tau'_2)\right\}\right\rangle_0\end{aligned}\tag{12.18a}$$

(费米统计取 "−" 号, 玻色统计取 "+" 号).

在坐标表象中这些结果表明, 若干个 ψ 算符 T 乘积的平均值, 可分解成一切可能的成对算符 $\psi,\bar\psi$ 平均值乘积之和. 例如, 代替 (12.18a) 式的是

$$\begin{aligned}&\langle T_\tau\{\psi(\boldsymbol{r}_1,\tau_1)\psi(\boldsymbol{r}_2,\tau_2)\bar\psi(\boldsymbol{r}'_1,\tau'_1)\bar\psi(\boldsymbol{r}'_2,\tau'_2)\}\rangle_0\\&\quad=\frac{1}{V^2}\sum_{\boldsymbol{p}'_1,\boldsymbol{p}'_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{p}'_1\boldsymbol{r}'_1-\boldsymbol{p}'_2\boldsymbol{r}'_2)}\mathrm{e}^{-\tau_1(\varepsilon_0(\boldsymbol{p}_1)-\mu)-\tau_2(\varepsilon_0(\boldsymbol{p}_2)-\mu)}\\&\qquad\times\mathrm{e}^{\tau'_1(\varepsilon_0(\boldsymbol{p}'_1)-\mu)+\tau'_2(\varepsilon_0(\boldsymbol{p}'_2)-\mu)}\left\langle T_\tau\left\{a_{\boldsymbol{p}_1}(\tau_1)a_{\boldsymbol{p}_2}(\tau_2)a^+_{\boldsymbol{p}'_1}(\tau'_1)a^+_{\boldsymbol{p}'_2}(\tau'_2)\right\}\right\rangle_0\\&\quad=\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}'_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{p}'_2\boldsymbol{r}'_2)-\tau_1(\varepsilon_0(\boldsymbol{p}_1)-\mu)+\tau'_2(\varepsilon_0(\boldsymbol{p}'_2)-\mu)}\\&\qquad\times\left\langle T_\tau\left\{a_{\boldsymbol{p}_1}(\tau_1)a^+_{\boldsymbol{p}'_2}(\tau'_2)\right\}\right\rangle_0\\&\qquad\times\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}'_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{p}'_1\boldsymbol{r}'_1)-\tau_2(\varepsilon_0(\boldsymbol{p}_2)-\mu)+\tau'_1(\varepsilon_0(\boldsymbol{p}'_1)-\mu)}\\&\qquad\times\left\langle T_\tau\left\{a_{\boldsymbol{p}_2}(\tau_2)a^+_{\boldsymbol{p}'_1}(\tau'_1)\right\}\right\rangle_0\\&\qquad\mp\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}'_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{p}'_1\boldsymbol{r}'_1)-\tau_1(\varepsilon_0(\boldsymbol{p}_1)-\mu)+\tau'_1(\varepsilon_0(\boldsymbol{p}'_1)-\mu)}\\&\qquad\times\left\langle T_\tau\left\{a_{\boldsymbol{p}_1}(\tau_1)a^+_{\boldsymbol{p}'_1}(\tau'_1)\right\}\right\rangle_0\end{aligned}$$

$$\times \frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_2'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{p}_2'\boldsymbol{r}_2')-\tau_2(\varepsilon_0(\boldsymbol{p}_2)-\mu)+\tau_2'(\varepsilon_0(\boldsymbol{p}_2')-\mu)}$$
$$\times \left\langle T_\tau\left\{a_{\boldsymbol{p}_2}(\tau_2)a^+_{\boldsymbol{p}_2'}(\tau_2')\right\}\right\rangle_0$$
$$= \left\langle T_\tau\left\{\psi(\boldsymbol{r}_1,\tau_1)\bar\psi(\boldsymbol{r}_2',\tau_2')\right\}\right\rangle_0 \left\langle T_\tau\left\{\psi(\boldsymbol{r}_2,\tau_2)\bar\psi(\boldsymbol{r}_1',\tau_1')\right\}\right\rangle_0$$
$$\mp \left\langle T_\tau\left\{\psi(\boldsymbol{r}_1,\tau_1)\bar\psi(\boldsymbol{r}_1',\tau_1')\right\}\right\rangle_0 \left\langle T_\tau\left\{\psi(\boldsymbol{r}_2,\tau_2)\bar\psi(\boldsymbol{r}_2',\tau_2')\right\}\right\rangle_0 . \tag{12.18b}$$

对于更多的算符也有类似关系式成立.

(12.18b) 式右端的平均值和自由粒子温度格林函数只有符号之差. 由此可见, 计算温度格林函数时, 我们遇见和绝对温度零度相同的情形. 格林函数 $\mathfrak{G}$ 的展开式 (12.13) 就外形看, 与函数 G 的展开式 (8.9) 一样 (如果不计因子 i^n 和对 τ 的积分限). 为了计算 (12.13) 式中的平均值 $\langle T_\tau(\cdots)_0\rangle$, 和从前一样可以利用维克定理; 这些平均值通过成对的产生和消灭算符的平均值表示.

应指出, 在所述的方法中没有正规乘积概念. 维克定理不是对 T 乘积本身, 而是对平均值成立.

按维克定理将级数 (12.13) 式的任何一项写出, 并把平均值 $\left\langle T_\tau(\psi\bar\psi)\right\rangle_0$ 换成自由格林函数

$$\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2,\tau_1-\tau_2) = -\left\langle T_\tau\left\{\psi_\alpha(\boldsymbol{r}_1,\tau_1)\bar\psi_\beta(\boldsymbol{r}_2,\tau_2)\right\}\right\rangle_0 ,$$

我们就得到和 $T=0$ 时相应级数结构全同的式子. 因而可以利用第 2 章中的费曼图描述微扰论级数的各种近似. 只是图形元素和表达式的对应规则有所改变. 这时图中每条线不是对应函数 $G^{(0)}$, 而是对应自由粒子温度格林函数 $\mathfrak{G}^{(0)}$, 同时每个图形顶点对应时间从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的积分, 要代以对应 "虚时间"τ 从 0 到 $1/T$ 的积分.

迄今我们不言而喻地假设了, 系统的体积趋向无穷大时 (密度一定), 所有自由粒子格林函数及其积分仍是有限的. 特别是基于这一点, 我们在 $V\to\infty$ 时忽略了所有如 (12.17b) 式之项, 因而能建立维克定理. 对于温度低于凝聚温度 T_c 的玻色粒子系统以及具有超导性质的费米系统, 情况根本变了.

在玻色气体的情况下, $T<T_\mathrm{c}$ 时, 动量为零的状态的粒子产生和消灭算符正比于体积的平方根:

$$a_0 \sim a_0^+ \sim \sqrt{N} \sim \sqrt{V},$$

所以 $V\to\infty$ 时 (12.17b) 式型的各项仍不为零. 对于超导体也有类似情况. 两种情况下都必须利用特别的方法, 这些方法我们将专章叙述.

现在回到可以使用普通图解法的情况. 和前一章相似, 格林函数的图形有两条外线: 一条外线始于点 $\boldsymbol{r}_1$, τ_1, 它相当于算符 $\psi_a(\boldsymbol{r}_1,\tau_1)$ 的坐标, 另一条外线终于

点 $\boldsymbol{r}_2,\tau_2$, 它相当于算符 $\bar{\psi}_\beta(\boldsymbol{r}_2,\tau_2)$ 的坐标. 和从前一样, 函数 $\mathfrak{G}$ 的图形可以分成两类 —— 相连和不相连图. 借助完全类似的讨论可证明, 考虑不相连图形即可消去 (12.7) 式的分母. 结果对 $\mathfrak{G}$ 函数有

$$\mathfrak{G}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1,\tau_1;\boldsymbol{r}_2,\tau_2)=-\left\langle T_\tau\left\{\psi_\alpha(\boldsymbol{r}_1,\tau_1)\bar{\psi}_\beta(\boldsymbol{r}_2,\tau_2)\mathfrak{S}\right\}\right\rangle_{\mathrm{c}},\tag{12.19}$$

其中 $\langle\cdots\rangle_{\mathrm{c}}$ 表示所有的相连图形.

既然推导过程中一点也没有引用图形上外线的数目为 2 的事实, 则上述结果对多粒子格林函数也是成立的. 在相应的公式 (如 (12.10) 式) 中可以省去分母的 $\langle\mathfrak{S}\rangle$, 同时只计算相连图形的贡献.

同样和前一章类似, 每个图形在 $\mathfrak{G}$ 的级数中有一个形如 a^n 的系数, 它与图形级别的关系是不碍事的, 这一点对于图形的无穷序列求和是很重要的.

§13　坐标空间中的图解法

前一节的基本结果是, 确定了在计算温度格林函数 $\mathfrak{G}$ 时, 可以使用普通的费曼图解法. 任何图形的主要元素都是代表自由粒子格林函数或声子格林函数的线. 和在第 2 章里一样, 我们用实线代表粒子格林函数 (图 32); 线上的箭头指明它的方向: 线从坐标为 $\boldsymbol{r}_1,\tau_1$、自旋投影为 α_1 的点 (这个点对应 $\mathfrak{G}$ 函数定义中的算符 ψ)"出来", 而 "进入" 点 $\boldsymbol{r}_2,\tau_2,\alpha_2$(它对应算符 $\bar{\psi}$). "出点" 变量在格林函数中写在左面, "入点" 变量写在右面.

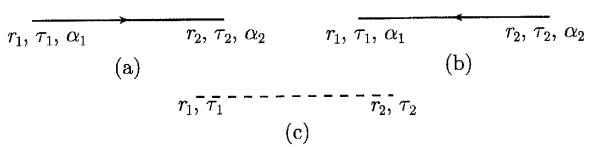


图 32

图 32(a) 的线代表格林函数为

$$\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha_1\alpha_2}(\boldsymbol{r}_1,\tau_1;\boldsymbol{r}_2,\tau_2)\equiv\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha_1\alpha_2}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2,\tau_1-\tau_2),$$

图 32(b) 的线代表格林函数为

$$\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha_2\alpha_1}(\boldsymbol{r}_2,\tau_2;\boldsymbol{r}_1,\tau_1)\equiv\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha_1\alpha_2}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1,\tau_2-\tau_1).$$

声子格林函数我们将以虚线表示 (图 32(c)). 声子线上可以不标明方向, 因为我们在 §11 中已经看到, $\mathfrak{D}^{(0)}$ 乃是 $\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$ 和 $\tau_1-\tau_2$ 的偶函数.

对各线交点 —— "顶点" 的坐标进行积分: $\boldsymbol{r}$ 在整个空间, 对 τ 在区间 0 到 $1/T$ 上. 在顶点还要对自旋变量求和.

图形的具体形状取决于粒子间相互作用的类型. 构图时可以利用维克定理, 根据这个定理, 格林函数的微扰论级数 (12.13) 式中几个算符 T 乘积的平均值, 可表示为成对平均值乘积之和. 后者与自由粒子格林函数的关系如下:

$$\begin{aligned}\left\langle T_\tau\left\{\psi_\alpha(\boldsymbol{r}_1,\tau_1)\bar{\psi}_\beta(\boldsymbol{r}_2,\tau_2)\right\}\right\rangle &= -\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2,\tau_1-\tau_2),\\ \left\langle T_\tau\left\{\bar{\psi}_\beta(\boldsymbol{r}_2,\tau_2)\psi_\alpha(\boldsymbol{r}_1,\tau_1)\right\}\right\rangle &= \pm\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2,\tau_1-\tau_2)\end{aligned} \tag{13.1}$$

(费米粒子取 "+" 号, 玻色粒子取 "−" 号).

两个声子算符乘积的平均值通过函数 $\mathfrak{D}^{(0)}$ 表示:

$$\left\langle T_\tau\left\{\varphi(\boldsymbol{r}_1,\tau_1)\varphi(\boldsymbol{r}_2,\tau_2)\right\}\right\rangle = -\mathfrak{D}^{(0)}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2,\tau_1-\tau_2). \tag{13.2}$$

下面讨论各种类型的相互作用.

1. 双粒子相互作用

设系统内粒子间作用着由势 $U(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)$ 描述的成对力. 相互作用表象中哈密顿量 $\hat{H}_{\text{int}}$ 的形状是

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{int}}(\tau) =& \frac{1}{2}\iint \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2\bar{\psi}_\alpha(\boldsymbol{r}_1,\tau)\bar{\psi}_\beta(\boldsymbol{r}_2,\tau)U(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\\ &\times\psi_\beta(\boldsymbol{r}_2,\tau)\psi_\alpha(\boldsymbol{r}_1,\tau).\end{aligned} \tag{13.3}$$

最好不用势 $U(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)$, 而代之以与 "时间" τ 有关的势 $\mathfrak{A}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2,\tau_1-\tau_2)$, 其定义为

$$\mathfrak{A}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2,\tau_1-\tau_2) = U(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\delta(\tau_1-\tau_2). \tag{13.4}$$

利用 (13.4) 式, 可将矩阵 $\mathfrak{S}$ 的表达式 (12.4) 变成对称形式:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S} =& T_\tau\exp\left\{-\frac{1}{2}\iint \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2\bar{\psi}_\alpha(\boldsymbol{r}_1,\tau_1)\psi_\beta(\boldsymbol{r}_2,\tau_2)\right.\\ &\left.\times\mathfrak{A}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2,\tau_1-\tau_2)\psi_\beta(\boldsymbol{r}_2,\tau_2)\bar{\psi}_\alpha(\boldsymbol{r}_1,\tau_1)\right\}.\end{aligned}$$

计算对格林函数的一级修正项 (按 U), 我们有①

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}^{(1)}_{\alpha\beta}(x-y) =& \frac{1}{2}\iint \mathrm{d}^4z_1\mathrm{d}^4z_2\left\langle T_\tau\left\{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\mathfrak{B}(z_1-z_2)\bar{\psi}_{\gamma_1}(z_1)\bar{\psi}_{\gamma_2}(z_2)\right.\right.\\ &\left.\left.\times\psi_{\gamma_2}(z_2)\psi_{\gamma_1}(z_1)\right\}\right\rangle.\end{aligned} \tag{13.5}$$

根据维克定理, $\langle\cdots\rangle$ 表示为以下四项:

$$\left\langle T_\tau\left\{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\right\}\right\rangle\left\langle\left\{\bar{\psi}_{\gamma_1}(z_1)\psi_{\gamma_1}(z_1)\right\}\right\rangle\left\langle\left\{\bar{\psi}_{\gamma_2}(z_2)\psi_{\gamma_2}(z_2)\right\}\right\rangle, \tag{a}$$

① 本节中以普通拉丁字母记四个变量的集合 $x=(r,\tau)$. 因此 $\mathfrak{G}(x-y)=\mathfrak{G}(x-y,\tau_1-\tau_2)$, $\mathrm{d}^4x=\mathrm{d}r\mathrm{d}\tau$.

$$\mp\left\langle T_\tau\left\{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\right\}\right\rangle\left\langle\left\{\bar{\psi}_{\gamma_2}(z_2)\psi_{\gamma_1}(z_1)\right\}\right\rangle\left\langle\left\{\bar{\psi}_{\gamma_1}(z_1)\psi_{\gamma_2}(z_2)\right\}\right\rangle, \tag{b}$$

$$\left\langle T_\tau\left\{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_{\gamma_1}(z_1)\right\}\right\rangle\left\langle T_\tau\left\{\psi_{\gamma_1}(z_1)\bar{\psi}_\beta(y)\right\}\right\rangle\left\langle\left\{\bar{\psi}_{\gamma_2}(z_2)\psi_{\gamma_2}(z_2)\right\}\right\rangle, \tag{c}$$

$$\mp\left\langle T_\tau\left\{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_{\gamma_1}(z_1)\right\}\right\rangle\left\langle\left\{\bar{\psi}_{\gamma_2}(z_2)\psi_{\gamma_1}(z_1)\right\}\right\rangle\left\langle T_\tau\left\{\psi_{\gamma_2}(z_2)\bar{\psi}_\beta(y)\right\}\right\rangle, \tag{d}$$

以及在以上四式中作置换 $z_1\to z_2,\gamma_1\to\gamma_2$ 后所得另外四项之和. 后四项对 (13.5) 式中积分的贡献显然和前四项相同, 因而消去了积分前的 $1/2$.

按 (13.1) 式将 $\langle T_\tau(\cdots)\rangle$ 换成格林函数 $\mathfrak{G}^{(0)}$, 我们得出: 一级修正项由以下四个表达式相加而成:

$$-\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\beta}(x-y)\iint \mathrm{d}^4z_1\mathrm{d}^4z_2\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_1}(0)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_2\gamma_2}(0)\mathfrak{B}(z_1-z_2), \tag{a}$$

$$\pm\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\beta}(x-y)\iint \mathrm{d}^4z_1\mathrm{d}^4z_2\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(z_1-z_2)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_2\gamma_1}(z_2-z_1)\mathfrak{B}(z_1-z_2), \tag{b}$$

$$\pm\iint \mathrm{d}^4z_1\mathrm{d}^4z_2\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z_1)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_1\beta}(z_1-y)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_2\gamma_2}(0)\mathfrak{B}(z_1-z_2), \tag{c}$$

$$-\iint \mathrm{d}^4z_1\mathrm{d}^4z_2\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z_1)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(z_1-z_2)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_2\beta}(z_2-y)\mathfrak{B}(z_1-z_2). \tag{d}$$

注意在 $\mathfrak{G}^{(0)}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2,0)$ 中永远取 $\tau\to-0$.

我们将在图上以波纹线表示函数 $\mathfrak{B}(z_1-z_2)$. 于是以上四个表达式就对应图 33 上的图形. 图 33(a)、图 33(b) 属于上节中提到的不相连图形. 那里已指出, 计算格林函数时不应考虑它们的贡献.

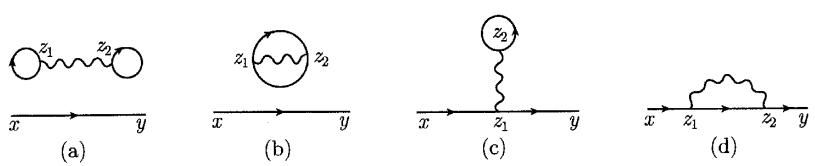


图 33

这样, 只是图 33(c)、图 33(d) 以及由它们经过顶点坐标 z_1,z_2 置换而得的图形才对一级修正项有贡献. 再提醒一下, 这类经顶点坐标置换得到的图形称为拓扑等价的; 所有拓扑等价图形给出相同的贡献.

应当注意, 图 33(c)、图 33(d) 所对应的表达式在费米统计情况下符号相反. 这是由于图 33(c) 上出现了封闭环. 讨论任意级图形, 可以证明, 任何费米子的封闭环 (不必由一条线组成) 在表达式中带 "$-$" 号.

现在列举计算任意级修正项的规则:

(1) 首先画出一切具有 $2n$ 个顶点和两条外线的相连拓扑不等价图形, 每个顶点有两条实线和一条波纹线.

(2) 每条实线代表粒子格林函数 $\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\beta}(x-y)$, $(x,\alpha$ 为起点坐标, y,β 为终点坐标).

(3) 每条波纹线代表广义势 $\mathfrak{B}(x-y)$.

(4) 对每个顶点的坐标 z 积分 $(\mathrm{d}^4z=\mathrm{d}\boldsymbol{z}\mathrm{d}\tau)$ 并对自旋变量 α 求和.

(5) 所得表达式乘以 $(-1)^{n+F}$, 其中 n 为图形的级数, 而 F 是图中封闭费米环的数目.

(6) 如果表达式中出现时间变量重合的格林函数 $\mathfrak{G}^{(0)}(0)$, 则它应理解为

$$\lim_{\tau\to+0}\mathfrak{G}^{(0)}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2,-\tau).$$

讨论二级修正项. 全部具有四个顶点的拓扑不等价图示于图 34 中. 利用规则 (1)~(6), 容易写出这些图形对应的表达式:

$$\int \mathrm{d}^4z_1\mathrm{d}^4z_2\mathrm{d}^4z_3\mathrm{d}^4z_4\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z_1)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(z_1-z_2)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_2\beta}(z_2-y) \tag{a}$$
$$\times\mathfrak{B}(z_1-z_3)\mathfrak{B}(z_2-z_4)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_3\gamma_3}(0)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_4\gamma_4}(0),$$

$$\int \mathrm{d}^4z_1\mathrm{d}^4z_2\mathrm{d}^4z_3\mathrm{d}^4z_4\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z_1)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(z_1-z_2)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_2\gamma_3}(z_2-z_3) \tag{b}$$
$$\times\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_3\gamma_4}(z_3-z_4)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_4\beta}(z_4-y)\mathfrak{B}(z_1-z_2)\mathfrak{B}(z_3-z_4),$$

$$\mp\int \mathrm{d}^4z_1\mathrm{d}^4z_2\mathrm{d}^4z_3\mathrm{d}^4z_4\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z_1)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(z_1-z_2)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_2\gamma_3}(z_2-z_3) \tag{c}$$
$$\times\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_3\beta}(z_3-y)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_4\gamma_4}(0)\mathfrak{B}(z_1-z_4)\mathfrak{B}(z_2-z_3),$$

$$\int \mathrm{d}^4z_1\mathrm{d}^4z_2\mathrm{d}^4z_3\mathrm{d}^4z_4\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z_1)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_1\beta}(z_1-y)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_2\gamma_3}(z_2-z_3) \tag{d}$$
$$\times\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_3\gamma_2}(z_3-z_2)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_4\gamma_4}(0)\mathfrak{B}(z_1-z_2)\mathfrak{B}(z_3-z_4),$$

$$\int \mathrm{d}^4z_1\mathrm{d}^4z_2\mathrm{d}^4z_3\mathrm{d}^4z_4\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z_1)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(z_1-z_2)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_2\gamma_3}(z_2-z_3) \tag{e}$$
$$\times\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_3\gamma_4}(z_3-z_4)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_4\beta}(z_4-y)\mathfrak{B}(z_1-z_4)\mathfrak{B}(z_2-z_3),$$

$$\mp\int \mathrm{d}^4z_1\mathrm{d}^4z_2\mathrm{d}^4z_3\mathrm{d}^4z_4\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z_1)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(z_1-z_2)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_2\gamma_3}(z_2-z_3) \tag{f}$$
$$\times\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_3\beta}(z_3-y)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_4\gamma_4}(0)\mathfrak{B}(z_1-z_3)\mathfrak{B}(z_2-z_4),$$

$$\mp\int \mathrm{d}^4z_1\mathrm{d}^4z_2\mathrm{d}^4z_3\mathrm{d}^4z_4\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z_1)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_1\beta}(z_1-y)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_2\gamma_3}(z_2-z_3) \tag{g}$$
$$\times\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_3\gamma_4}(z_3-z_4)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_4\gamma_2}(z_4-z_2)\mathfrak{B}(z_1-z_2)\mathfrak{B}(z_3-z_4),$$

$$\int \mathrm{d}^4z_1\mathrm{d}^4z_2\mathrm{d}^4z_3\mathrm{d}^4z_4\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z_1)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(z_1-z_2)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_2\gamma_3}(z_2-z_3) \tag{h}$$

$$\times \mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_3\gamma_4}(z_3-z_4)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_4\beta}(z_4-y)\mathfrak{B}(z_1-z_3)\mathfrak{B}(z_2-z_4),$$

$$\mp\int \mathrm{d}^4z_1\mathrm{d}^4z_2\mathrm{d}^4z_3\mathrm{d}^4z_4\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z_1)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(z_1-z_2)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_2\beta}(z_2-y) \quad \text{(i)}$$

$$\times \mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_3\gamma_4}(z_3-z_4)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_4\gamma_3}(z_4-z_3)\mathfrak{B}(z_1-z_3)\mathfrak{B}(z_2-z_4),$$

$$\mp\int \mathrm{d}^4z_1\mathrm{d}^4z_2\mathrm{d}^4z_3\mathrm{d}^4z_4\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z_1)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(z_1-z_2) \quad \text{(j)}$$

$$\times \mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_2\gamma_3}(z_2-z_3)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_3\beta}(z_3-y)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_4\gamma_4}(0)\mathfrak{B}(z_1-z_2)\mathfrak{B}(z_3-z_4).$$

可令双粒子相互作用的微扰论具有更对称的形式；当粒子间的作用力不仅和距离、而且和自旋有关时，它特别方便. 这种相互作用的哈密顿量是

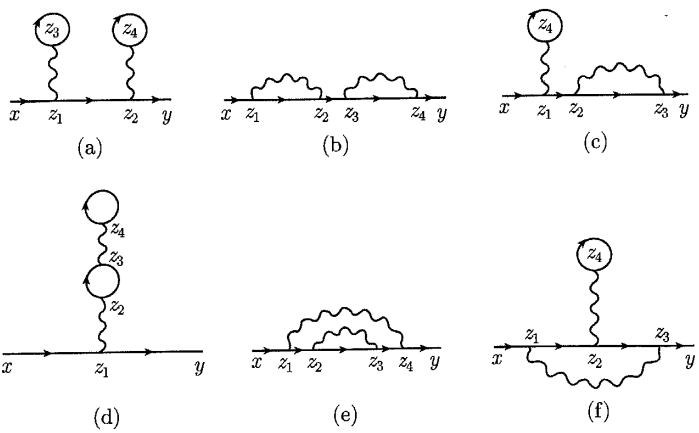
$$\hat{H}_{\mathrm{int}}(\tau)=\frac{1}{2}\iint \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2\bar{\psi}_\alpha(\boldsymbol{r}_1,\tau)\bar{\psi}_\beta(\boldsymbol{r}_2,\tau)U_{\alpha\beta,\delta\gamma}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\psi_\gamma(\boldsymbol{r}_2,\tau)\psi_\delta(\boldsymbol{r}_1,\tau). \quad (13.6)$$

将 $\mathfrak{S}$ 表达式中的积分 $\int_0^{1/T}\hat{H}_{\mathrm{int}}(\tau)\mathrm{d}\tau$ 表示成对所有变量都对称的形式：

$$\frac{1}{4}\int_0^{1/T}\cdots\int_0^{1/T}\mathrm{d}\tau_1\cdots\mathrm{d}\tau_4\int\cdots\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\cdots\mathrm{d}\boldsymbol{r}_4$$
$$\times\bar{\psi}_{\gamma_1}(\boldsymbol{r}_1,\tau_1)\bar{\psi}_{\gamma_2}(\boldsymbol{r}_2,\tau_2)\mathcal{J}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}(\boldsymbol{r}_1,\tau_1,\boldsymbol{r}_2,\tau_2;\boldsymbol{r}_3,\tau_3,\boldsymbol{r}_4,\tau_4)$$
$$\times\psi_{\gamma_4}(\boldsymbol{r}_4,\tau_4)\psi_{\gamma_3}(\boldsymbol{r}_3,\tau_3),$$

或者，引入“四维”记号：

$$\frac{1}{4}\int \mathrm{d}^4z_1\mathrm{d}^4z_2\mathrm{d}^4z_3\mathrm{d}^4z_4\bar{\psi}_{\gamma_1}(z_1)\bar{\psi}_{\gamma_2}(z_2)\mathcal{J}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}(z_1,z_2;z_3,z_4)\psi_{\gamma_4}(z_4)\psi_{\gamma_3}(z_3). \quad (13.7)$$



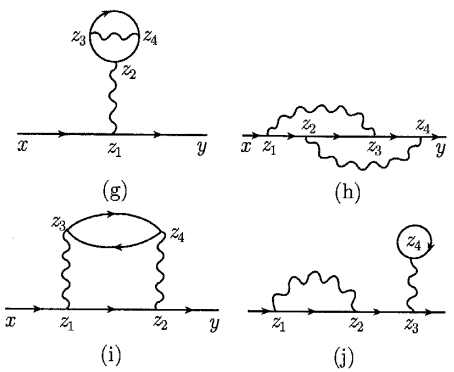


图 34

由于算符 $\bar{\psi}_{\gamma_1}(z_1)$ 和 $\bar{\psi}_{\gamma_2}(z_2)$(相应地 $\psi_{\gamma_3}(z_3)$ 和 $\psi_{\gamma_4}(z_4)$) 随统计不同而反对易或对易, 可以认为 $\mathcal{J}^{(0)}$ 对变量置换 $z_1,\gamma_1 \rightleftarrows z_2,\gamma_2$ 或 $z_3,\gamma_3 \rightleftarrows z_4,\gamma_4$ 是反对称的 (费米粒子), 或对称的 (玻色粒子).

这样定义的函数 $\mathcal{J}^{(0)}$ 可从式

$$\begin{aligned} &U_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\delta(\tau_1-\tau_2)\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_3)\delta(\tau_1-\tau_3)\\ &\quad\times\delta(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_4)\delta(\tau_2-\tau_4) \end{aligned} \tag{13.8}$$

对变量 $z_1\gamma_1, z_2\gamma_2$(和 $z_3\gamma_3, z_4\gamma_4$) 进行反对称化 (费米统计) 或对称化 (玻色统计) 而求得.

计算对格林函数的一级修正项. 我们有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}\int \mathrm{d}^4z_1\cdots\mathrm{d}^4z_4\mathcal{J}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}(z_1,z_2;z_3,z_4)\\ &\quad\times\left\langle T_\tau(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\bar{\psi}_{\gamma_1}(z_1)\bar{\psi}_{\gamma_2}(z_2)\psi_{\gamma_4}(z_4)\psi_{\gamma_3}(z_3))\right\rangle. \end{aligned} \tag{13.9}$$

应用维克定理和 $\mathcal{J}^{(0)}$ 的对称性质, 容易证实 (13.9) 式为以下两项之和:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\beta}(x-y)\int \mathrm{d}^4z_1\cdots\mathrm{d}^4z_4\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_3\gamma_1}(z_3-z_1)\\ &\quad\times\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_4\gamma_2}(z_4-z_2)\mathcal{J}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}(z_1,z_2;z_3,z_4), \qquad \text{(a)}\\ &-\int \mathrm{d}^4z_1\cdots\mathrm{d}^4z_4\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z_1)\mathcal{J}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}(z_1,z_2;z_3,z_4)\\ &\quad\times\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_4\beta}(z_4-y)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_3\gamma_2}(z_3-z_2). \qquad \text{(b)} \end{aligned}$$

在图上以四角形表示 $\mathcal{J}^{(0)}$. 图 35 给出这两个表达式所对应的图形. 图 35(a) 是不相连的, 它的贡献不须考虑. 这样, 在微扰论一级近似只剩下唯一的图形 (图 35(b)), 它的贡献是第二个表达式.

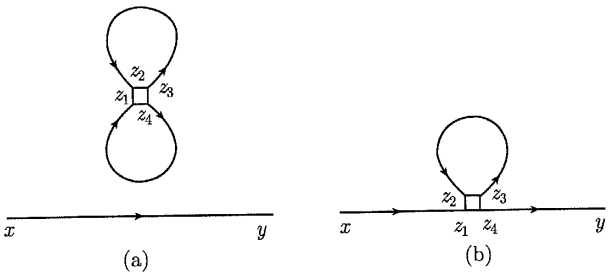


图 35

微扰论第二级近似有三个相连的拓扑不同图形 (图 36). 不难写出这些图形所对应的表达式：

$$\int \mathrm{d}^4 z_1 \cdots \mathrm{d}^4 z_8 \mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z_1)\mathcal{J}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}(z_1,z_2;z_3,z_4) \times \mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_4\gamma_5}(z_4-z_5)\mathcal{J}^{(0)}_{\gamma_5\gamma_6,\gamma_7\gamma_8}(z_5,z_6;z_7,z_8) \times \mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_8\beta}(z_8-y)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_7\gamma_6}(z_7-z_6)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_3\gamma_2}(z_3-z_2), \tag{a}$$

$$\int \mathrm{d}^4 z_1 \cdots \mathrm{d}^4 z_8 \mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z_1)\mathcal{J}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}(z_1,z_2;z_3,z_4)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_4\beta}(z_4-y) \times \mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_3\gamma_6}(z_3-z_6)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_7\gamma_2}(z_7-z_2) \times \mathcal{J}^{(0)}_{\gamma_5\gamma_6,\gamma_7\gamma_8}(z_5,z_6;z_7,z_8)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_8\gamma_5}(z_8-z_5), \tag{b}$$

$$\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4 z_1 \cdots \mathrm{d}^4 z_8 \mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z_1)\mathcal{J}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}(z_1,z_2;z_3,z_4) \times \mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_3\gamma_5}(z_3-z_5)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_4\gamma_6}(z_4-z_6) \times \mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_7\gamma_2}(z_7-z_2)\mathcal{J}^{(0)}_{\gamma_5\gamma_6,\gamma_7\gamma_8}(z_5,z_6;z_7,z_8)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_8\beta}(z_8-y). \tag{c}$$

格林函数的 n 级修正项按以下规则计算：

(1) 画出全部具有 n 个四角形的拓扑不等价图形 (由四角形某些顶点坐标置换而得的图形算是拓扑等价的);

(2) 每条线代表粒子格林函数;

(3) 每个四角形代表函数 $\mathcal{J}^{(0)}$;

(4) 对四角形顶点坐标进行积分.

图形的系数 A_n 的决定, 和 $T=0$ 的图解法中一样 (见 §9). 然而更简单的求系数的方法, 是直接利用维克定理, 将表达式 $\langle T_\tau \{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\cdots\}\rangle$ 通过成对平均值写出.

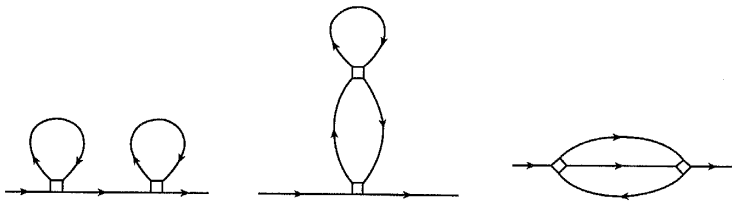


图 36

利用这些规则, 不难写出对应图 37 的表达式:

$$\begin{aligned}
&\mp\frac{1}{4}\int \mathrm{d}^4z_1\cdots\mathrm{d}^4z_{12}\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z_1)\mathcal{J}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}(z_1,z_2;z_3,z_4)\\
&\quad\times\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_3\gamma_5}(z_3-z_5)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_4\gamma_6}(z_4-z_6)\mathcal{J}^{(0)}_{\gamma_5\gamma_6,\gamma_7\gamma_8}(z_5,z_6;z_7,z_8)\\
&\quad\times\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_7\gamma_9}(z_7-z_9)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_8\gamma_{10}}(z_8-z_{10})\\
&\quad\times\mathcal{J}^{(0)}_{\gamma_9\gamma_{10},\gamma_{11}\gamma_{12}}(z_9,z_{10};z_{11},z_{12})\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_{12}\beta}(z_{12}-y)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_{11}\gamma_2}(z_{11}-z_2).
\end{aligned}$$

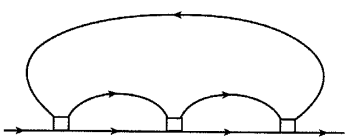


图 37

如果我们考虑由势

$$U_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)=\lambda\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)$$

描述的点相互作用, 则以上方法中出现的庞杂表达式 (其复杂性自然部分地为对称性补偿) 可大为简化. 这时函数 $\mathcal{J}^{(0)}$ 的形式简单:

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}&=\lambda(\delta_{\gamma_1\gamma_3}\delta_{\gamma_2\gamma_4}-\delta_{\gamma_1\gamma_4}\delta_{\gamma_2\gamma_3})\delta(z_1-z_2)\delta(z_1-z_3)\delta(z_1-z_4)\\
&=\lambda L_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}\delta(z_1-z_2)\delta(z_1-z_3)\delta(z_1-z_4).
\end{aligned}$$

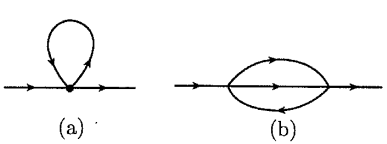


图 38

由于 $\mathcal{J}^{(0)}$ 中有三个 δ 函数, 各修正项中四角形顶点的四个积分只剩下一个. 而图形中的四角形可换成简单的点 (顶点). 例如, 图 35(b) 和图 36(c) 最好画成图 38 所示的那样; 相应的修正项也简化为

$$-\lambda L_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}\int \mathrm{d}^4 z \mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_4\beta}(z-y)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_3\gamma_2}(0), \tag{a}$$

$$\frac{\lambda^2}{2}L_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}L_{\gamma_5\gamma_6,\gamma_7\gamma_8}\int \mathrm{d}^4 z_1\mathrm{d}^4 z_2 \mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z_1)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_3\gamma_5}(z_1-z_2) \tag{b}$$

$$\times\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_4\gamma_6}(z_1-z_2)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_7\gamma_2}(z_2-z_1)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_8\beta}(z_2-y).$$

由上面讨论看出, 这种图解法中的一般计算规则是很明显的.

2. *粒子和声子的相互作用*

粒子和声子的相互作用 (例如液体粒子和声波的相互作用或者金属中电子和晶格振动的相互作用) 由以下哈密顿量描述:

$$\hat{H}_{\mathrm{int}}(\tau)=g\int \bar{\psi}_\alpha(\boldsymbol{r},\tau)\psi_\alpha(\boldsymbol{r},\tau)\varphi(\boldsymbol{r},\tau)\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

其中 g 是相互作用常数.

容易证明, 仅在微扰论偶次近似下对粒子格林函数 $\mathfrak{G}$ 或声子格林函数 $\mathfrak{D}$ 的修正项才不等于零 (奇次修正项的表达式中包含奇数个声子算符 φ). 直接计算粒子格林函数 $\mathfrak{G}$ 的修正项, 可证实它们与双粒子相互作用微扰论第一种方案中 $\mathfrak{G}$ 的修正项完全相同, 只须将后者的位势 $\mathfrak{D}(z_1-z_2)$ 换成 $g^2\mathfrak{D}^{(0)}(z_1-z_2)$. 自然相应的修正项也由图 33 和图 34 上的那些图形描述. 我们为确定起见, 不用波纹线, 而用虚线代表声子格林函数 $\mathfrak{D}^{(0)}$. 声子格林函数的二级修正项由两个相连图形描述 [图 39(a) 和图 39(b)]. 计算表明, 图 39(a) 的修正项是

$$\pm g^2\int \mathrm{d}^4 z_1\mathrm{d}^4 z_2 \mathfrak{D}^{(0)}(x-z_1)\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\beta}(z_1-z_2)\mathfrak{G}^{(0)}_{\beta\alpha}(z_2-z_1)\mathfrak{D}^{(0)}(z_2-y).$$

而图 39(b) 的为

$$g^2\int \mathrm{d}^4 z_1 \mathfrak{D}^{(0)}(x-z_1)\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\alpha}(0)\int \mathrm{d}^4 z_2 \mathfrak{D}^{(0)}(z_2-y)\mathfrak{G}^{(0)}_{\beta\beta}(0).$$

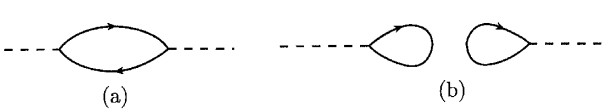


图 39

和 §9 中一样, 可证明图 39(b) 所代表的式子等于零. 基于同样的理由, 可以根本不考虑表达式中出现积分 $\int \mathfrak{D}^{(0)}(z)\mathrm{d}^4 z$ 的图形. 这包括一切分解成两个不相连部分、而每部分有一条外线的 $\mathfrak{D}$ 的图形以及类似图 40 的 $\mathfrak{G}$ 的图形 (后者一定含有无外线而与图形其他部分以一条声子线相连的部分).

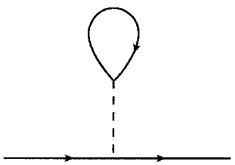


图 40

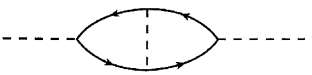


图 41

讨论对 $\mathfrak{D}$ 的高级修正, 并注意 $\mathfrak{G}$ 的上述特点, 就可以列举出以下计算 $2n$ 级近似的图解法规则:

(1) 每条实线代表自由粒子格林函数 $\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\beta}(x-y)$, 每条虚线代表函数 $\mathfrak{D}^{(0)}(x-y)$;

(2) 对所有顶点的坐标 ($\boldsymbol{r}$和τ) 积分;

(3) 所得表达式乘以 $g^{2n}(-1)^{n+F}$, 其中 F 是图中封闭费米环数目.

例如, 由图 41 描述的对声子格林函数的四级修正项为

$$\mp g^4 \int \mathrm{d}^4 z_1 \cdots \mathrm{d}^4 z_4 \mathfrak{D}^{(0)}(x-z_1)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(z_1-z_2)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_3\gamma_1}(z_3-z_1) \times \mathfrak{D}^{(0)}(z_2-z_3)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_2\gamma_4}(z_2-z_4)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_4\gamma_3}(z_4-z_3)\mathfrak{D}^{(0)}(z_4-y).$$

§14 动量空间中的图解法. 举例

§14.1 动量表象

在进行具体计算时, 前节所述的坐标表象中的图解法颇为不便. 在绝对温度零度下量子场论方法之所以成功, 基本上是因为将理论中各量按四维坐标展成傅里叶积分之后, 计算就在很大程度上“自动化”了. 上述松原方法中没有这种自动化, 原因是方法中的变量 τ 在从零到 $1/T$ 的有限区间内变化, 不可能按 τ 变到傅里叶表象.

在坐标表象中 $\mathfrak{G}^{(0)}$ 和 $\mathfrak{D}^{(0)}$ 是变量 τ 的不连续函数; 所有对 τ 的积分事实上分成许多区间, 其数目随近似的级别 n 的增加而迅速增大. 这就使松原方法难以应用.

如果将与 τ 有关的量展开成此变量的傅里叶级数, 整个方法可以大为改进 (Abrikosov, Gorkov, Dzyaloshinski[32] 和 Fradkin[33]).

温度格林函数 $\mathfrak{G}$(或 $\mathfrak{D}$) 是差 $\tau_1-\tau_2$ 的函数, 因而给定在区间 $\left(-\dfrac{1}{T},\dfrac{1}{T}\right)$ 上, 将 $\mathfrak{G}(\tau)$ 展成傅里叶级数:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}(\tau) &= T\sum_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n\tau}\mathfrak{G}(\omega_n), \\ \mathfrak{G}(\omega_n) &= \frac{1}{2}\int_{-1/T}^{1/T} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n\tau}\mathfrak{G}(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad \omega_n = \pi n T. \end{aligned} \tag{14.1}$$

我们的任务是在 §13 所得的格林函数修正项表达式中, 变换到傅里叶表象. 这时当然期望变换本身不为公式带来附加的复杂化 (例如不出现与 "频率"ω_n 有关的附加因子等等).

实际上温度大于零时, 我们遇到的情况仍和 $T=0$ 时一样. 这与 §11 中指出的格林函数的一个普遍性质有关. 那里证明了 $\tau<0$ 时的 $\mathfrak{G}(\tau)$ 和 $\tau>0$ 时的 $\mathfrak{G}(\tau)$ 以简单关系相联系 (见 (11.8) 和 (11.8a) 式). 由这些关系式得出, 玻色粒子和声子格林函数的傅里叶分量 $G(\omega_n)$ 只对于偶频率 $\omega_n=2\pi nT$ 不为零, 而费米粒子的 $\mathfrak{G}$ 只有 $\omega_n=(2n+1)\pi T$ 的分量. 实际上,

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}(\omega_n)&=\frac{1}{2}\int_{-1/T}^{1/T}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n\tau}\mathfrak{G}(\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{2}\int_{0}^{1/T}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n\tau}\mathfrak{G}(\tau)\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2}\int_{-1/T}^{0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n\tau}\mathfrak{G}(\tau)\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

在第二个积分中将 $\mathfrak{G}(\tau<0)$ 通过 (11.8) 式表达, 并作变量代换 $\tau'=\tau+\dfrac{1}{T}$, 就有

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}(\omega_n)&=\frac{1}{2}\int_{0}^{1/T}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n\tau}\mathfrak{G}(\tau)\mathrm{d}\tau\mp\frac{1}{2}\int_{-1/T}^{0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n\tau}\mathfrak{G}\left(\tau+\frac{1}{T}\right)\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{2}(1\mp\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n/T})\int_{0}^{1/T}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n\tau}\mathfrak{G}(\tau)\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

由此立即得出上述论断. 注意我们总有

$$\mathfrak{G}(\omega_n)=\int_{0}^{1/T}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n\tau}\mathfrak{G}(\tau)\mathrm{d}\tau,\tag{14.2}$$

$$\omega_n=\begin{cases}(2n+1)\pi T, & \text{对费米粒子},\\ 2n\pi T, & \text{对玻色粒子}.\end{cases}$$

在微扰论级数各项中完成傅里叶变换, 为此须将相应量按 (14.1) 式展开成傅里叶级数并代入之. 此外我们同时完成对空间变量的傅里叶变换:

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}}\mathfrak{G}(\boldsymbol{p})\mathrm{d}\boldsymbol{p},\\\mathfrak{G}(\boldsymbol{p})&=\int\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}}\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}.\end{aligned}\tag{14.3}$$

对空间变量的变换和 $T=0$ 时完全相同.

注意在每个须进行坐标积分的顶点, 总有偶数条费米线出入, 因而每个顶点对时间变量的积分

$$\int_{0}^{1/T}\mathrm{d}\tau\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau\sum\omega_n}\tag{14.4}$$

中, 指数上 "频率" 之和 $\sum_{\omega_n}$ 总是 "偶数": $\sum_{\omega_n} = 2N\pi T(N$为整数). 对于偶频率积分, (14.4) 式等于

$$\frac{1}{T}\delta_{\sum \omega_n}, \quad \delta_{\omega_n} = \begin{cases} 1, & \omega_n = 0, \\ 0, & \omega_n \neq 0. \end{cases} \tag{14.5}$$

由此可见, 这里情形实质上和 $T = 0$ 时一样. 那里对顶点坐标和时间的积分, 给出频率和动量的 δ 函数, 它们表示虚过程中能量与动量的守恒律. $T \neq 0$ 时频率的 δ 函数换成克罗尼克符号 δ_{ω_n}, 它表示不连续 "频率" 的守恒律.

综上所述, 可以保留我们在 $T = 0$ 时所采用普通费曼图来描述动量空间中的微扰论级数. 唯一的实质性的区别 (除了系数的差别外) 是矩阵元表达式中对频率 ω 的积分换成对离散频率 ω_n 的求和.

在转向具体例子之前, 我们先给出零级格林函数傅里叶分量的表达式. §11 中我们计算了坐标空间中的零级格林函数. 根据 (11.13a) 式, 自由费米粒子格林函数在按 (14.3) 式对坐标完成傅里叶变换后, 当 $\tau > 0$ 时为

$$\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p}, \tau) = -\delta_{\alpha\beta}[1 - n(\boldsymbol{p})]\mathrm{e}^{-\tau(\varepsilon_0(\boldsymbol{p})-\mu)},$$

$$n(\boldsymbol{p}) = [\mathrm{e}^{(\varepsilon_0(\boldsymbol{p})-\mu)/T} + 1]^{-1}.$$

将此式代入 (14.2) 式, 就有 ($\omega_n = (2n+1)\pi T$)

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p}, \omega_n) &= -\delta_{\alpha\beta}[1 - n(\boldsymbol{p})] \int_0^{1/T} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n\tau - \tau(\varepsilon_0(\boldsymbol{p})-\mu)}\mathrm{d}\tau \\ &= -\frac{\delta_{\alpha\beta}}{\mathrm{i}\omega_n - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}) + \mu}[1 - n(\boldsymbol{p})]\{\mathrm{e}^{(2n+1)\pi\mathrm{i} - (\varepsilon_0(\boldsymbol{p})-\mu)/T} - 1\}, \end{aligned}$$

即最终为

$$\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p}, \omega_n) = \delta_{\alpha\beta}\frac{1}{\mathrm{i}\omega_n - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}) + \mu}, \quad \omega_n = (2n+1)\pi T. \tag{14.6}$$

对玻色粒子, 类似的计算给出

$$\mathfrak{G}^{(0)}(\boldsymbol{p}, \omega_n) = \frac{1}{\mathrm{i}\omega_n - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}) + \mu}, \quad \omega_n = 2\pi n T, \tag{14.7}$$

而对声子, 有

$$\mathfrak{D}^{(0)}(\boldsymbol{k}, \omega_n) = -\frac{\omega_0^2(\boldsymbol{k})}{\omega_n^2 + \omega_0^2(\boldsymbol{k})}, \quad \omega_n = 2\pi n T. \tag{14.8}$$

这样, 费米和玻色粒子零级格林函数的差别, 只在于频率 ω 的奇偶不同. 在 $T = 0$ 时的格林函数公式 (7.7), (7.16) 中作代换 $\omega \to \mathrm{i}\omega_n$, 就得到函数 (14.6)~(14.8) 式. 以后我们要证明, 在准确格林函数之间, 也存在类似关系 (当然, 有一些附带条件).

§14.2　举例

我们已经证明, 温度格林函数的计算可以在动量空间中按费曼图解法进行. 费曼图上每条线代表粒子零级格林函数 $\mathfrak{G}^{(0)}(\boldsymbol{p},\omega_n)$ 或声子格林函数 $\mathfrak{D}^{(0)}(\boldsymbol{k},\omega_n)$, 而每个顶点对应 $\delta(\Sigma\boldsymbol{p})\delta_{\Sigma\omega_n}$, 它代表动量和不连续 "频率"$\omega_n$ 的守恒律. 对所有内线的动量积分, 对 "频率"ω_n 求和.

图形和相应表达式的实际形状视相互作用的类型而定. 我们从双粒子相互作用开始讨论.

1. 双粒子相互作用

考虑图 33(d) 对格林函数的修正. 在 §13 中我们得出了它的表达式:

$$-\iint \mathrm{d}^4z_1\mathrm{d}^4z_2\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(x-z_1)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(z_1-z_2)\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_2\beta}(z_2-y)\mathfrak{B}(z_1-z_2).$$

对坐标和 "时间"τ 完成傅里叶变换:

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{G}^{(1)}(\boldsymbol{p},\omega_n)=&\frac{1}{2}\int \mathrm{d}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\\&\times\int_{-1/T}^{1/T}\mathrm{d}(\tau_x-\tau_y)\delta\mathfrak{G}^{(1)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\tau_x-\tau_y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+\mathrm{i}\omega_n(\tau_x-\tau_y)}.\end{aligned}$$

引入势 $\mathfrak{B}(z_1-z_2)$ 的傅里叶分量:

$$\mathfrak{B}(\boldsymbol{r},\tau)=\frac{T}{(2\pi)^3}\sum_{\omega_n}\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}-\mathrm{i}\omega_n\tau}\mathfrak{B}(\boldsymbol{q},\omega_n).$$

由于

$$\begin{aligned}T\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nT\tau}&=\delta(\tau),\\\mathfrak{B}(\boldsymbol{q},\omega_n)&=U(\boldsymbol{q}),\end{aligned}$$

就有

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{G}^{(1)}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p},\omega_n)=&-\frac{1}{2}\left[\frac{T}{(2\pi)^3}\right]^4\sum_{\substack{\omega_{n1},\omega_{n2}\\\omega_{n3},\omega_{n4}}}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2\mathrm{d}\boldsymbol{p}_3\mathrm{d}\boldsymbol{p}_4\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma1}(\boldsymbol{p}_1,\omega_{n1})\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(\boldsymbol{p}_2,\omega_{n2})\\&\times\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_2\beta}(\boldsymbol{p}_3,\omega_{n3})\mathfrak{B}(\boldsymbol{q},\omega_{n4})\int \mathrm{d}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{z}_1\mathrm{d}\boldsymbol{z}_2\\&\times\int \mathrm{d}(\tau_x-\tau_y)\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n(\tau_x-\tau_y)}\\&\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}_1(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_1)+\mathrm{i}\boldsymbol{p}_2(\boldsymbol{z}_1-\boldsymbol{z}_2)+\mathrm{i}\boldsymbol{p}_3(\boldsymbol{z}_3-\boldsymbol{y})}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{n1}(\tau_x-\tau_1)-\mathrm{i}\omega_{n2}(\tau_1-\tau_2)}\\&\times\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{n3}(\tau_2-\tau_y)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}(\boldsymbol{z}_1-\boldsymbol{z}_2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{n4}(\tau_1-\tau_2)}.\end{aligned}$$

在对空间和时间的积分中, 作变量代换 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{x}, \tau_x-\tau_y\to\tau$, 这时得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{z}_1\mathrm{d}\boldsymbol{z}_2\int_{-1/T}^{1/T}\mathrm{d}\tau\\
&\quad\times\int_0^{1/T}\int_0^{1/T}\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{x}(-\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}_1)+\mathrm{i}\boldsymbol{z}_1(-\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{q})+\mathrm{i}\boldsymbol{z}_2(-\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_3-\boldsymbol{q})}\\
&\quad\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau(\omega_n-\omega_{n1})+\mathrm{i}\tau_1(\omega_{n1}-\omega_{n2}-\omega_{n4})+\mathrm{i}\tau_2(\omega_{n2}-\omega_{n3}+\omega_{n4})}\\
&\quad\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_3)+\mathrm{i}\tau_y(-\omega_{n1}+\omega_{n3})}\\
&=\left(\frac{(2\pi)^3}{T}\right)^3\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1)\delta(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{q})\delta(\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_3+\boldsymbol{q})\\
&\quad\times\delta_{\omega_n-\omega_{n1}}\delta_{\omega_{n1}-\omega_{n2}-\omega_{n4}}\delta_{\omega_{n2}-\omega_{n3}+\omega_{n4}},
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
\delta\mathfrak{G}^{(1)}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p},\omega_n)=&-\frac{T}{(2\pi)^3}\sum_{\omega_{n1}}\int\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(\boldsymbol{p},\omega_n)\\
&\times\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2}(\boldsymbol{p}_1,\omega_{n1})\mathfrak{G}^{(0)}_{\gamma_2\beta}(\boldsymbol{p},\omega_n)\mathfrak{B}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1,\omega_n-\omega_{n1}).
\end{aligned}$$

代入零级格林函数的表达式 (14.6), (14.7), 最终得

$$\begin{aligned}
\delta\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\beta}=&-\frac{\delta_{\alpha\beta}}{[\mathrm{i}\omega_n-\varepsilon_0(\boldsymbol{p})+\mu]^2}\frac{T}{(2\pi)^3}\sum_{\omega_{n1}}\int\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\\
&\times\frac{\mathfrak{B}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1,\omega_n-\omega_{n1})}{\mathrm{i}\omega_{n1}-\varepsilon_0(\boldsymbol{p}_1)+\mu}.
\end{aligned}\tag{14.9}$$

类似的计算给出图 33(c) 的贡献为

$$\begin{aligned}
&\pm\frac{\delta\alpha\beta}{(\mathrm{i}\omega_n-\varepsilon_0(\boldsymbol{p})+\mu)^2}\mathfrak{B}(0,0)(2s+1)\frac{T}{(2\pi)^3}\\
&\quad\times\sum_{\omega_{n1}}\int\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{n1}\tau}}{\mathrm{i}\omega_{n1}-\varepsilon_0(\boldsymbol{p}_1)+\mu},
\end{aligned}\tag{14.10}$$

其中 $\tau\to0, s$ 为粒子自旋; 费米粒子 $s=1/2$, 玻色粒子 $s=0$. 我们在求和符号下引入了 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n\tau}(\tau\to+0)$, 是根据 §13 中提到的条件, 即时间变量重合时坐标空间中的 $\mathfrak{G}$ 函数定义为

$$\mathfrak{G}^{(0)}(0,0)=\lim_{\tau\to+0}\mathfrak{G}^{(0)}(0,-\tau).$$

表达式 (14.9), (14.10) 和图 42(a)、图 42(b) 所示的费曼图对应. 这些图的外线带有外动量和频率 ——$\boldsymbol{p},\omega_n$; 每个顶点的动量和频率满足守恒律: “出来” 的动量之和等于 “进入” 的动量之和.

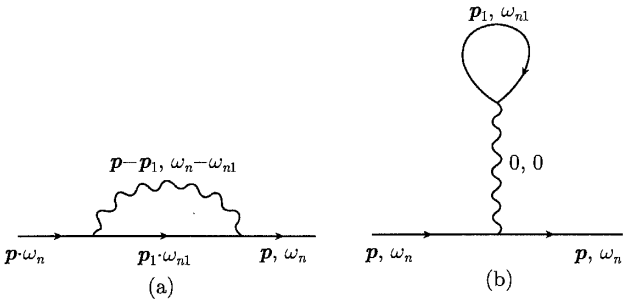


图 42

讨论 $\mathfrak{G}(\boldsymbol{p},\omega_n)$ 的微扰论任意 k 级图. 这个图形有 $2k$ 个顶点, $2k+1$ 条实线和 k 条波纹线. 完成傅里叶变换时, 要对 $2k$ 个顶点的坐标和 "时间" 积分, 并对外端坐标之差积分一次, 结果出现 $2k+1$ 个如 $\delta(\Sigma\boldsymbol{p})\delta_{\Sigma\omega\boldsymbol{n}}$ 的量, 它们代表 $2k+1$ 个守恒律. 容易看出, 两个守恒律保证外线的动量为 $\boldsymbol{p}$、频率为 ω_n. 剩下的 $2k-1$ 个守恒律, 使原来对内线动量与频率的 $3k-1$ 次积分与求和 (包括实线和波纹线) 事实上只留下 k 次.

现在列举按格林函数一定图形写表达式的规则:

(1) 首先应给每条线标出动量与频率; 外线应带有外动量与频率, 而内线的动量与频率应在每个顶点满足守恒律 $\Sigma\boldsymbol{p}'=0, \Sigma\omega_n'=0$. 玻色线的频率总是偶数 ($\omega_n=2n\pi T$), 费米线的频率总是奇数 ($\omega_n=(2n+1)\pi T$).

(2) 对图中所有相互独立的频率和动量求和与积分.

(3) 每条内实线 (动量和频率分别为 $\boldsymbol{p}', \omega_n'$) 代表

$$\frac{1}{\mathrm{i}\omega_n'-\varepsilon_0(\boldsymbol{p}')+\mu},$$

每条波纹线 $(\boldsymbol{q},\omega_n')$ 代表

$$\mathfrak{B}(\boldsymbol{q},\omega_n')\equiv U(\boldsymbol{q}).$$

(4) 两条外线 (动量和频率 $\boldsymbol{p},\omega_n$) 代表

$$\frac{\delta_{\alpha\beta}}{(\mathrm{i}\omega_n-\varepsilon_0(\boldsymbol{p})+\mu)^2}.$$

(5) 所得表达式前加因子

$$(-1)^k\frac{T^k}{(2\pi)^{3k}}(2s+1)^F(\mp1)^F,$$

其中 F 是粒子线所构成的封闭环数.

利用这些规则, 不难写出相应于任何复杂图形的修正项. 例如, 图 43 的贡献为

$$\pm\frac{\delta_{\alpha\beta}}{(\mathrm{i}\omega_n-\varepsilon_0(\boldsymbol{p})+\mu)^2}\frac{T^3}{(2\pi)^9}(2s+1)\sum_{\omega_1,\omega_2,\omega_3}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2\mathrm{d}\boldsymbol{p}_3$$
$$\times\frac{1}{\mathrm{i}(\omega-\omega_1)-\varepsilon_0(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1)+\mu}\frac{1}{\mathrm{i}(\omega_3-\omega_1)-\varepsilon_0(\boldsymbol{p}_3-\boldsymbol{p}_1)+\mu}$$
$$\times\frac{1}{\mathrm{i}\omega_3-\varepsilon_0(\boldsymbol{p}_3)+\mu}\frac{1}{\mathrm{i}\omega_2-\varepsilon_0(\boldsymbol{p}_2)+\mu}$$
$$\times\frac{1}{\mathrm{i}(\omega_1+\omega_2)-\varepsilon_0(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)+\mu}[U(\boldsymbol{p}_1)]^2U(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_3),$$

$$\omega_1=2\pi nT,\quad \omega_2,\omega_3=(2n+1)\pi T.$$

现在讨论双粒子相互作用图解法的第二种方案. 在各表达式中变换到傅里叶表象时, 宜采用以下做法.

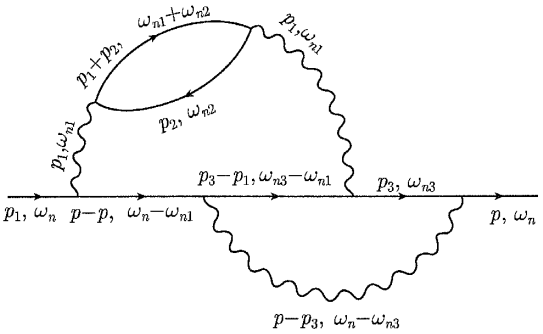


图 43

前面已引入了量 $\mathcal{J}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}(z_1,z_2;z_3,z_4)$. 函数 $\mathcal{J}^{(0)}$ 和四个 "时间" τ_i 有关, 每个时间都在区间 $\left(0,\dfrac{1}{T}\right)$ 内变化. 利用与 $\mathfrak{G}$ 函数的 (11.8) 式类似的关系:

$$\mathcal{J}^{(0)}(\tau_1<0,\tau_2;\tau_3,\tau_4)=\mp\mathcal{J}^{(0)}(\tau_1+1/T,\tau_2;\tau_3,\tau_4)$$

(对 $\tau_2;\tau_3,\tau_4$ 存在类似关系), 将函数 $\mathcal{J}^{(0)}$ 延拓到区间 $\left(-\dfrac{1}{T},\dfrac{1}{T}\right)$ 上. 将傅里叶变换定义为

$$\frac{1}{16}\int_{-1/T}^{1/T}\mathrm{d}\tau_1\cdots\mathrm{d}\tau_4\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1\tau_1+\omega_2\tau_2-\omega_3\tau_3-\omega_4\tau_4)}\mathcal{J}^{(0)}(\tau_1,\tau_2;\tau_3,\tau_4).$$

显然对于费米统计所有四个频率都是 "奇数", 而对玻色统计是 "偶数".

其次要注意, 既然 $\mathcal{J}^{(0)}(\tau_1,\tau_2;\tau_3,\tau_4)$ 根据定义只是坐标和 "时间"τ 之差的函数, 则 $\mathcal{J}^{(0)}$ 对空间和时间变量的傅里叶分量将含有与动量之和有关的 δ 函数 —— $\delta(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_3-\boldsymbol{p}_4)$, 以及与频率之和有关的克罗尼克符号 $\delta_{\omega_1+\omega_2-\omega_3-\omega_4}$. 因此我们直接将傅里叶分量 $\mathcal{J}^{(0)}$ 定义为

$$\begin{aligned}&\frac{(2\pi)^3}{T}\delta(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_3-\boldsymbol{p}_4)\delta_{\omega_1+\omega_2-\omega_3-\omega_4}\\&\quad\times\mathcal{J}^{(0)}(\boldsymbol{p}_1,\omega_1,\boldsymbol{p}_2,\omega_2;\boldsymbol{p}_3,\omega_3,\boldsymbol{p}_4,\omega_4)=\frac{1}{16}\int_{-1/T}^{1/T}\mathrm{d}\tau_1\cdots\mathrm{d}\tau_4\\&\quad\times\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\cdots\mathrm{d}\boldsymbol{r}_4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{p}_3\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{p}_4\boldsymbol{r}_4)+\mathrm{i}(\omega_1\tau_1+\omega_2\tau_2-\omega_3\tau_3-\omega_4\tau_4)}\\&\quad\times\mathcal{J}^{(0)}(z_1,z_2;z_3,z_4).\end{aligned}\tag{14.11}$$

试以图 35(b) 所示的一级修正项为例. 在相应表示式中完成傅里叶变换, 并作简单运算, 就得

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{(\mathrm{i}\omega-\varepsilon_0(\boldsymbol{p})+\mu)^2}\frac{T}{(2\pi)^3}\\&\quad\times\sum_{\omega_1}\int\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\mathcal{J}^{(0)}_{\alpha\gamma,\gamma\beta}(\boldsymbol{p},\omega,\boldsymbol{p}_1,\omega_1;\boldsymbol{p}_1,\omega_1,\boldsymbol{p},\omega)\frac{1}{\mathrm{i}\omega_1-\varepsilon_0(p_1)+\mu},\end{aligned}$$

它对应图 44.

类似的计算为图 45 所示的修正项给出公式①:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{1}{(\mathrm{i}\omega-\varepsilon_0(\boldsymbol{p})+\mu)^2}\frac{T^2}{(2\pi)^6}\\&\quad\times\sum_{\omega_1,\omega_2}\int\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2\mathcal{J}^{(0)}_{\alpha\gamma_1,\gamma_2\gamma_3}(p,p_1+p_2-p;p_1,p_2)\\&\quad\times\frac{1}{\mathrm{i}\omega_1-\varepsilon_0(\boldsymbol{p}_1)+\mu}\frac{1}{\mathrm{i}\omega_2-\varepsilon_0(\boldsymbol{p}_2)+\mu}\\&\quad\times\frac{1}{\mathrm{i}(\omega_1+\omega_2-\omega)-\varepsilon_0(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p})+\mu}\\&\quad\times\mathcal{J}^{(0)}_{\gamma_2\gamma_3,\gamma_1\beta}(p_1,p_2;p_1+p_2-p,p).\end{aligned}$$

$\mathfrak{G}$ 函数的 n 级图含有 n 个四角形 (顶点) 和 $2n+1$ 条线; 其中 $2n-1$ 条内线在每个顶点以守恒律 $\Sigma\boldsymbol{p}'=0,\Sigma\omega'_n=0$ 相联系. 不难验证, 对内线的动量和频率只有 n 个相互独立积分与求和. 在计算任意图形的贡献时, 需要:

① 这里我们采用四维记号 $p=(\boldsymbol{p},\omega_n)$.

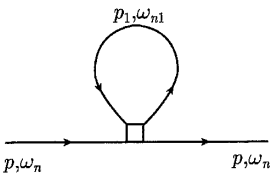


图 44

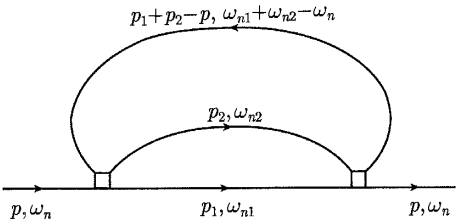


图 45

(1) 令每条内线对应

$$\frac{1}{\mathrm{i}\omega' - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}') + \mu};$$

(2) 令每条外线对应

$$\frac{1}{\mathrm{i}\omega - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}) + \mu};$$

(3) 令每个顶点对应

$$\mathcal{J}^{(0)}_{\alpha\beta;\gamma\delta}(p_1, p_2; p_3, p_1 + p_2 - p_3);$$

(4) 对所有相互独立的内动量与频率求积分与求和;

(5) 对以 $\mathfrak{G}^{(0)}$ 线相连的函数 $\mathcal{J}^{(0)}$ 的足标 $\alpha, \beta, \cdots$ 求和;

(6) 计算结果乘以 $\dfrac{T^n}{(2\pi)^{3n}} A_n$(关于 A_n 见 §13).

例如, 图 46 对应表达式为

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{4}\frac{1}{(\mathrm{i}\omega - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}) + \mu)^2}\frac{T^3}{(2\pi)^9} \\
&\quad\times \sum_{\omega_1,\omega_2,\omega_3} \int \mathrm{d}\boldsymbol{p}_1 \mathrm{d}\boldsymbol{p}_2 \mathrm{d}\boldsymbol{p}_3 \mathcal{J}^{(0)}_{\alpha\gamma_1,\gamma_2\gamma_3}(p, p_1 + p_2 - p; p_1, p_2) \\
&\quad\times \frac{1}{\mathrm{i}\omega_1 - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}_1) + \mu}\frac{1}{\mathrm{i}\omega_2 - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}_2) + \mu} \\
&\quad\times \mathcal{J}^{(0)}_{\gamma_2\gamma_3,\gamma_4\gamma_5}(p_1, p_2; p_3, p_1 + p_2 - p_3)\frac{1}{\mathrm{i}\omega_3 - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}_3) + \mu} \\
&\quad\times \frac{1}{\mathrm{i}(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3) - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_3) + \mu} \\
&\quad\times \mathcal{J}^{(0)}_{\gamma_4\gamma_5,\gamma_1\beta}(p_3, p_1 + p_2 - p_3; p_1 + p_2 - p, p) \\
&\quad\times \frac{1}{\mathrm{i}(\omega_1 + \omega_2 - \omega) - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}) + \mu}.
\end{aligned}$$

对于点相互作用函数 $\mathcal{J}^{(0)}$ 与动量和频率无关.

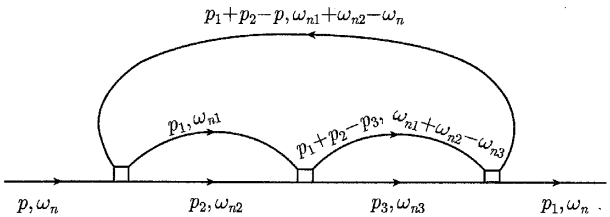


图 46

2. 与声子的相互作用

在与声子相互作用情况下, 只有偶级图才不等于零. 任何 $2n$ 级图含有 $3n+1$ 条 (电子和声子) 内线以及 $2n$ 个顶点, 这相当于

$$3n-1-(2n-1)=n$$

次独立积分. 在计算它的贡献时须:

(1) 令每条内实线对应

$$\frac{1}{\mathrm{i}\omega'-\varepsilon_0(\boldsymbol{p}')+\mu},$$

而两条外实线 (在 $\mathfrak{G}$ 函数修正项的图中) 对应

$$\frac{\delta_{\alpha\beta}}{(\mathrm{i}\omega-\varepsilon_0(\boldsymbol{p})+\mu)^2};$$

(2) 令每条声子 (虚) 线对应

$$-\frac{\omega_0^2(\boldsymbol{k})}{\omega^2+\omega_0^2(\boldsymbol{k})};$$

(3) 计算结果乘以

$$g^{2n}\frac{T^n}{(2\pi)^{3n}}(-1)^n(2s+1)^F(\mp1)^F,$$

其中 g 为相互作用常数, F 为图中封闭环数目, s 为粒子的自旋.

例如, 对应图 47 的声子 $\mathfrak{D}$ 函数二级修正项可写成

$$\begin{aligned}\pm&\left[\frac{\omega_0^2(\boldsymbol{k})}{\omega^2+\omega_0^2(\boldsymbol{k})}\right]^2 g^2(2s+1)\frac{T}{(2\pi)^3}\\&\times\sum_{\omega'}\int\mathrm{d}\boldsymbol{p}'\frac{1}{\mathrm{i}\omega'-\varepsilon_0(\boldsymbol{p}')+\mu}\\&\times\frac{1}{\mathrm{i}(\omega'-\omega)-\varepsilon_0(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{k})+\mu}.\end{aligned}$$

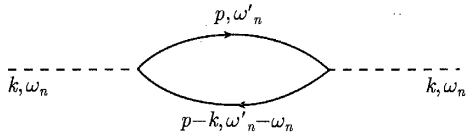


图 47

本节列举的规则和 $T=0$ 时计算格林函数修正项的相应规则有简单关系. 容易验证, 只须在 $T=0$ 时格林函数 G 修正项的表达式中将所有频率 ω 换成 $\mathrm{i}\omega_n$(对玻色粒子 $\omega_n=2n\pi T$, 费米粒子 $\omega_n=(2n+1)\pi T$), 并将对频率的积分换成求和:

$$\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}\omega\cdots\to \mathrm{i}T\sum_{\omega_n}\cdots,$$

就可以得到对温度格林函数 $\mathfrak{G}$ 的修正项.

最后讨论, 上述方法如何过渡到 $T=0$ 的情形. 当 T 趋近零时对频率的求和中大的 n 起主要作用, 因而这些和可换成积分. 注意 $\Delta\omega=\omega_{n+1}-\omega_n=2\pi T$, 就得到

$$T\sum_{\omega_n}\to\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}\omega.$$

应强调指出, $T=0$ 时 $\mathfrak{G}(\omega)$ 决不和 $G(\omega)$ 重合. 以后将确定它们之间的关系.

§15 热力学势 Ω 的微扰论级数

有时直接计算热力势 Ω, 比先找格林函数, 再求热力学量要方便. 势力学势的修正项通过 $\mathfrak{S}$ 矩阵的平均值表示 (见 (12.11) 式):

$$\begin{aligned}&\Delta\Omega=-T\ln\langle\mathfrak{S}\rangle,\\&\mathfrak{S}=\exp\left\{-\int_0^{1/T}\hat{H}_{\mathrm{int}}(\tau)\mathrm{d}\tau\right\}.\end{aligned}\tag{15.1}$$

原来 (15.1) 式中的对数可以用一般形式写出; 更确切些说, 可以建立直接计算 Ω 的图解法. 从以前所述显而易见, 描述 Ω 的微扰论级数的图形乃是封闭环. 双粒子相互作用两种方案的典型图形示于图 48(a) 和图 48(b), 与声子作用的图形示于图 49(事实上图 49(a) 的图形等于零).

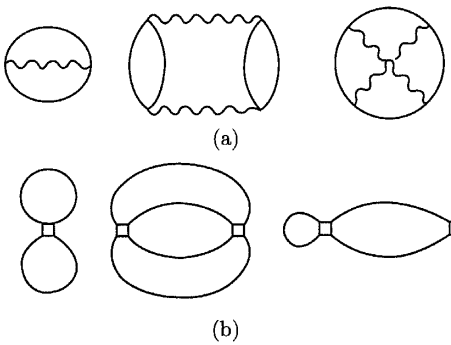


图 48

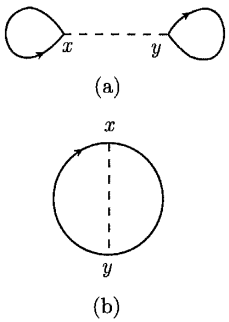


图 49

微扰论一定级图形分为两类 —— 相连和不相连图形. 后者乃是两个或更多无任何线相连的封闭环. 如果按照维克定理将 $\langle \mathfrak{S} \rangle$ 级数的任意项

$$\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{1/T}\cdots\int_0^{1/T}\mathrm{d}\tau_1\cdots\mathrm{d}\tau_n\left\langle T_\tau\left(\hat{H}_{\mathrm{int}}(\tau_1)\cdots\hat{H}_{\mathrm{int}}(\tau_n)\right)\right\rangle \tag{15.2}$$

写开, 从 $\hat{H}_{\mathrm{int}}(\tau_1)$ 中的某个算符开始收缩, 最后不空过任何一个 $\hat{H}_{\mathrm{int}}$ 而回到 $\hat{H}_{\mathrm{int}}(\tau_1)$, 则得到相连图形. 任何其他情况下都出现不相连图形.

设 n 级不相连图形由 k 个封闭环构成. 先假定 k 个环都含有不同数目的顶点. 这样的图对应:

$$\begin{aligned}&\frac{(-1)^n}{n!}\int\mathrm{d}\tau_1^{(1)}\cdots\mathrm{d}\tau_{m_1}^{(1)}\left\langle T_\tau\left(\hat{H}_{\mathrm{int}}(\tau_1^{(1)})\cdots\hat{H}_{\mathrm{int}}(\tau_{m_1}^{(1)})\right)\right\rangle_{\mathrm{c}}\\&\quad\times\int\mathrm{d}\tau_1^{(2)}\cdots\mathrm{d}\tau_{m_2}^{(2)}\left\langle T_\tau\left(\hat{H}_{\mathrm{int}}(\tau_1^{(2)})\cdots\hat{H}_{\mathrm{int}}(\tau_{m_2}^{(2)})\right)\right\rangle_{\mathrm{c}}\\&\quad\cdots\int\mathrm{d}\tau_1^{(k)}\cdots\mathrm{d}\tau_{m_k}^{(k)}\left\langle T_\tau\left(\hat{H}_{\mathrm{int}}(\tau_1^{(k)})\cdots\hat{H}_{\mathrm{int}}(\tau_{m_k}^{(k)})\right)\right\rangle_{\mathrm{c}},\end{aligned} \tag{15.3}$$

其中

$$m_1+m_2+\cdots+m_k=n(m_1\neq m_2\neq\cdots\neq m_k),$$

符号 $\langle\cdots\rangle_{\mathrm{c}}$ 表示对应于一定相连图形的求平均. 现在将一切包含我们选定的 k 种封闭环的拓扑等价图形求和. 为此只须将 (15.3) 式乘以这类图形的数目 F_k. 后者等于将 n 个不同算符 $\hat{H}_{\mathrm{int}}$ 按 k 个同 "容器" $\langle\cdots\rangle_{\mathrm{c}}$ 分配的排列数, 其中每个 "容器" 可容纳 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 个算符, 即

$$F_k=\frac{n!}{m_1!m_2!\cdots m_k!}.$$

结果为

$$\frac{(-1)^{m_1}}{m_1!}\int \mathrm{d}\tau_1^{(1)}\cdots\mathrm{d}\tau_{m_1}^{(1)}\left\langle T_\tau\left\{\hat{H}_{\mathrm{int}}(\tau_1^{(1)})\cdots\hat{H}_{\mathrm{int}}(\tau_{m_1}^{(1)})\right\}\right\rangle_{\mathrm{c}}$$
$$\times\frac{(-1)^{m_2}}{m_2!}\int \mathrm{d}\tau_1^{(2)}\cdots\mathrm{d}\tau_{m_2}^{(2)}\left\langle T_\tau\left\{\hat{H}_{\mathrm{int}}(\tau_1^{(2)})\cdots\hat{H}_{\mathrm{int}}(\tau_{m_2}^{(2)})\right\}\right\rangle_{\mathrm{c}}$$
$$\cdots\frac{(-1)^{m_k}}{m_k!}\int \mathrm{d}\tau_1^{(k)}\cdots\mathrm{d}\tau_{m_k}^{(k)}\left\langle T_\tau\left\{\hat{H}_{\mathrm{int}}(\tau_1^{(k)})\cdots\hat{H}_{\mathrm{int}}(\tau_{m_k}^{(k)})\right\}\right\rangle_{\mathrm{c}}. \tag{15.4}$$

注意, 我们实质上可以立即放弃关于每个求平均 $\langle\cdots\rangle_{\mathrm{c}}$ 对应一定类型相连图的假定, 而简单地认为 $\langle\cdots\rangle_{\mathrm{c}}$ 乃是所有具有给定顶点数目的相连图形之和. 因而可以肯定, 一切包含有 $m_1,m_2,\cdots,m_k$ 个顶点的 k 个封闭环的图形之和乃是

$$\Xi_{m_1}\Xi_{m_2}\cdots\Xi_{m_k},$$

其中

$$\Xi_m=\frac{(-1)^m}{m!}\int \mathrm{d}\tau_1\cdots\mathrm{d}\tau_m\left\langle T_\tau\left\{\hat{H}_{\mathrm{int}}(\tau_1)\cdots\hat{H}_{\mathrm{int}}(\tau_m)\right\}\right\rangle_{\mathrm{c}}, \tag{15.5}$$

就是 $\langle\mathfrak{S}\rangle$ 中所有 m 级相连图形之和. 显然,

$$1+\Xi_1+\Xi_2+\cdots=\langle\mathfrak{S}\rangle_{\mathrm{c}}. \tag{15.6}$$

如果数字 $m_1,m_2,\cdots,m_k$ 中有相同者, 则图形分解成 $p_1+p_2+\cdots+p_k$ 个闭环, 它们各有 $m_1,m_2,\cdots,m_k$ 个顶点 ($m_1\neq m_2\neq\cdots\neq m_k$), 则可以证明, (15.5) 式应换成①

$$\frac{1}{p_1!}\Xi_{m_1}^{p_1}\frac{1}{p_2!}\Xi_{m_2}^{p_2}\cdots\frac{1}{p_k!}\Xi_{m_k}^{p_k}, \tag{15.7}$$

或者, 相同地

$$\frac{1}{p_1!}\Xi_1^{p_1}\frac{1}{p_2!}\Xi_2^{p_2}\cdots\frac{1}{p_l!}\Xi_l^{p_l}, \tag{15.8}$$

其中数字 $p_l(p_l=0,1,2\cdots)$ 表明, 在整个不相连图形中含有多少个 l 级闭环. 将 (15.8) 式对所有的 p_l 求和 (不同 p_l 的求和显然是彼此无关的), 就得到:

$$\langle\mathfrak{S}\rangle=\sum_{p_1,p_2,\cdots}\frac{1}{p_1!}\Xi_1^{p_1}\frac{1}{p_2!}\Xi_2^{p_2}\cdots$$

① 这个论断的正确性可检验如下. 当数字 $m_1,m_2,\cdots,m_k$ 中有相同者时, F_k 就等于把 $p_1m_1+p_2m_2+\cdots+p_km_k=n$ 个算符 $\hat{H}_{\mathrm{int}}$, 按各含 $m_1,m_2,\cdots,m_k$ 个位置的 $p_1+p_2+\cdots+p_k$ 个容器 $\langle\cdots\rangle_{\mathrm{c}}$ 排列的数目, 而且每 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 个容器是相同的. 这时 F_k 等于

$$F_k=\frac{n!}{p_1!(m_1!)^{p_1}p_2!(m_2!)^{p_2}\cdots p_k!(m_k!)^{p_k}}.$$

$$=\sum_{p_1}\frac{1}{p_1!}\Xi_1^{p_1}\sum_{p_2}\frac{1}{p_2!}\Xi_2^{p_2}\cdots=e^{\Xi_1}e^{\Xi_2}\cdots$$
$$=\exp\{\Xi_1+\Xi_2+\cdots\}. \tag{15.9}$$

最后将 (15.9) 式代入 (15.1) 式, 就有

$$\Delta\Omega=-T(\Xi_1+\Xi_2+\cdots)=-T\{\langle\mathfrak{S}\rangle_{\mathrm{c}}-1\}. \tag{15.10}$$

这样我们就得到了十分重要的结果: 为了计算热力学势的修正项, 只须求得相连图形对 $\langle\mathfrak{S}\rangle$ 的贡献.

我们已经指出过, $\langle\mathfrak{S}\rangle$ 的图形是封闭环, 其计算规则基本上同于 $\mathfrak{G}$ 函数. 唯一的差别在于图形的系数.

我们在 §12 中指出, 如果考虑拓扑等价图形 (其数目正好是 $n!$ 个) 的贡献, 则 $\mathfrak{G}$ 函数的微扰论级数 (12.13) 的系数 $\frac{1}{n!}$ 正好消去. 计算 $\langle\mathfrak{S}\rangle_{\mathrm{c}}$ 时情况变了. 级数 (12.12) 式 n 级项的等价图形数目等于 $(n-1)!$①, 结果每个图形(如果认为只有拓扑不等价图形才是不同的) 前面出现系数 $\frac{1}{n}$. 由于出现了和 n 密切相关的系数, 就使 Ω 的微扰论级数的计算颇为不便, 特别是当不能局限于级数的有限项, 而必须对图形的无穷序列求和时.

我们举几个计算修正项 $\Delta\Omega$ 的例子, 为了简单起见, 只限于和声子相互作用的情况. 在微扰论第二级近似只有图 49(b) 的相连图形不为零. 按维克定理计算它的贡献, 得到 $\Omega_2=-T\Xi_2$(使用四维符号):

$$\Omega_2=\pm\frac{1}{2}Tg^2\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\beta}(x-y)\mathfrak{G}^{(0)}_{\beta\alpha}(y-x)\mathfrak{D}^{(0)}(x-y).$$

只要在积分中引入新变量 $x'=x-y$, 就容易看出 Ω_2 正比于系统的体积 V. 在任何一级近似都是这样. 事情也正应如此, 因为我们知道热力学势 Ω 的形式是

$$\Omega=-VP(\mu,T),$$

其中 P 是压力, 为化学势和温度的函数. 因此我们以后只给出 ΔP 的公式;

$$P=P_0(\mu,T)+\Delta P,$$

其中 P_0 是自由粒子系统的压力.

① 在 (12.12) 式中以一切可能方式置换 $n-1$ 个算符 $\hat{H}_{\mathrm{int}}$, 就得到所有拓扑等价图. $\hat{H}_{\mathrm{int}}$ 算符之一应固定. 在计算 $\mathfrak{G}$ 时, 外线的首尾, 即 (12. 13) 式中算符 $\psi_\alpha(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{\tau}_1)\bar{\psi}_\beta(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{\tau}_2)$ 是固定的.

对 ΔP_2 有

$$\Delta P_2 = \mp\frac{1}{2}g^2\int \mathrm{d}^4x\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\beta}(x)\mathfrak{G}^{(0)}_{\beta\alpha}(x)(-x)\mathfrak{D}^{(0)}(x). \tag{15.11}$$

变换到动量表象, 我们得到

$$\begin{aligned}\Delta P_2 = \mp\frac{1}{2}g^2\frac{T^2}{(2\pi)^6}(2s+1)\sum_{\omega_1,\omega_2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\mathrm{d}\boldsymbol{k}\\ \times\frac{1}{\mathrm{i}\omega_1-\varepsilon_0(\boldsymbol{p})+\mu}\frac{1}{\mathrm{i}(\omega_1+\omega_2)-\varepsilon_0(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})+\mu}\\ \times\frac{\omega_0^2(\boldsymbol{k})}{\omega_2^2+\omega_0^2(\boldsymbol{k})}.\end{aligned}$$

其图形示于图 50.

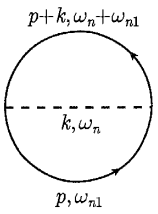


图 50

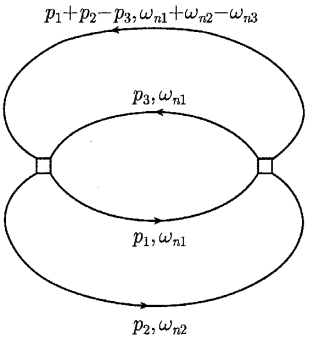


图 51

讨论任意 $2n$ 级图形. 这样的图形有 $3n$ 条线和 $2n$ 个顶点. 然而 $2n$ 个守恒律中有一个是恒等式, 只要其他 $2n-1$ 个守恒律成立. 这样, $2n$ 级图中共有 $n+1$ 个独立积分. 多出的一个守恒律使 $\langle\mathfrak{S}\rangle$ 的图中出现附加因子 $\delta(\boldsymbol{p}=0)$, 它正比于系统的体积 V①. 图形各元素和格林函数 (以及其他相互作用时的顶角部分) 的对应规则, 仍同于 $\mathfrak{G}$ 函数的图. ΔP 的 $2n$ 级修正项的系数等于

$$M_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n}g^{2n}\left(\frac{T}{(2\pi)^3}\right)^{2n}(\mp1)^F(2s+1)^F,$$

其中 F 是由一条 $\mathfrak{G}$ 粒子线组成的封闭环数目.

① 根据定义:

$$\delta(\boldsymbol{p}=0) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{V}{(2\pi)^3}.$$

下面给出双粒子相互作用时 ΔP 的表达式. 对于形如 (13.7) 式的相互作用, 压力的二级修正项对应图 51. 它等于:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{4}\frac{T^3}{(2\pi)^9}\sum_{\omega_1,\omega_2,\omega_3}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2\mathrm{d}\boldsymbol{p}_3\frac{1}{\mathrm{i}\omega_1-\varepsilon_0(\boldsymbol{p}_1)+\mu}\\
&\quad\times\frac{1}{\mathrm{i}\omega_2-\varepsilon_0(\boldsymbol{p}_2)+\mu}\frac{1}{\mathrm{i}\omega_3-\varepsilon_0(\boldsymbol{p}_3)+\mu}\\
&\quad\times\frac{1}{\mathrm{i}(\omega_1+\omega_2-\omega_3)-\varepsilon_0(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_3)+\mu}\\
&\quad\times\mathcal{J}^{(0)}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1,p_2;p_1+p_2-p_3,p_3)\\
&\quad\times\mathcal{J}^{(0)}_{\gamma\delta;\beta\alpha}(p_1+p_2-p_3,p_3;p_2,p_1).
\end{aligned}
$$

§16 戴逊方程. 多粒子格林函数

§16.1 戴逊方程

在 $T\neq 0$ 的统计问题中和温度等于零时一样, 几乎永远不能只限于微扰论级数的前几项作为对格林函数的修正. 实际上任何物理提法正确的问题中, 图解法的形式上的展开参数 —— 相互作用哈密顿量 $\hat{H}_{\mathrm{int}}$—— 都并不小, 因而微扰论级数中某些无穷项序列可能给出同一数量级的贡献.

前一章里我们看到了量子场论方法中借助图解进行无穷级数的求和. 在此方法中级数之和可表示成一个图形, 其元素 —— 线和顶点 —— 本身又是无穷个图形之和. 这种图形元素和表达式的对应规则, 与微扰论图形一样. 因此可能为格林函数建立各种方程式. 第 2 章里我们已遇到过一个这种方程式 —— 戴逊方程式, 它把格林函数通过系统的质量算符表示.

图解法的两个性质对于建立这种方程式颇为重要, 这就是图形的拓扑结构和图形与解析式的对应规则. $T=0$ 时的图形与松原方法中的一样, 而对应规则的差别仅在于前者中是对频率的积分, 在后者中换成对不连续虚 "频率"$\mathrm{i}\omega_n$ 的求和; 更确切些说, 对应一定图形的温度格林函数 $\mathfrak{G}$ 的修正项, 可从对应同一图形的 $T=0$ 时的格林函数 G 的修正项得出, 为此只须在后者中换 ω 为 $\mathrm{i}\omega_n$, 并将积分按下式换成求和:

$$
\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}\omega\cdots\to \mathrm{i}T\sum_{\omega n}\cdots
$$

(参阅 §14 末尾).

上述情况使我们只改变一下记号, 就能直接把 §10 的全部结果用于 $T\neq 0$ 时. 例如, 在松原方法中戴逊方程式仍成立. 对于有双粒子相互作用的系统, 它的形状

是

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}_{\alpha\beta}(p) =&\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\beta}(p) - \frac{T}{(2\pi)^3}\sum_{\omega_1}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}_1 \mathcal{J}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}(p,p_1;p_1,p)\\ &\times \mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(p)\mathfrak{G}_{\gamma_3\gamma_2}(p_1)\mathfrak{G}_{\gamma_4\beta}(p) + \frac{1}{2}\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\gamma_1}(p)\frac{T^2}{(2\pi)^6}\sum_{\omega_1,\omega_2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2\\ &\times \mathcal{J}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}(p,p_1+p_2-p;p_1,p_2)\mathfrak{G}_{\gamma_3\gamma_5}(p_1)\mathfrak{G}_{\gamma_4\gamma_6}(p_2)\\ &\times \mathfrak{G}_{\gamma_7\gamma_2}(p_1+p_2-p)\mathcal{J}^{(0)}_{\gamma_5\gamma_6,\gamma_7\gamma_8}(p_1,p_2;p_1+p_2-p,p)\mathfrak{G}_{\gamma_8\beta}(p). \qquad (16.1)\end{aligned}$$

这里 $\mathcal{J}$ 是准确顶角部分, 其意义和 $T=0$ 的方法中相同. 它等于所有具备四条外线的紧致图形之和, 而且每条线代表准确格林函数 $\mathfrak{G}$(图 52 上举了一些例子).

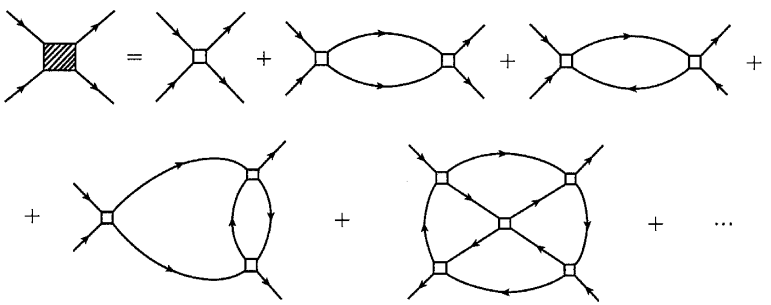


图 52

戴逊方程式 (16.1) 的图解 (图 53) 和第 2 章中相应方程式一样. 粗线表示 $\mathfrak{G}$, 细线表示 $\mathfrak{G}^{(0)}$, 而画斜线的方框表示顶角部分 $\mathcal{J}$.

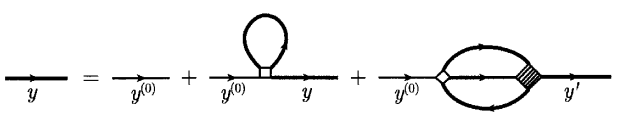


图 53

如果引入 $\mathfrak{G}_{\alpha\beta}$ 的逆矩阵 $\mathfrak{G}^{-1}_{\alpha\beta}$, 则方程式 (16.1) 可写成

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}^{-1}_{\alpha\beta}(p) =&(\mathrm{i}\omega - \varepsilon(\boldsymbol{p}) + \mu)\delta_{\alpha\beta} + \frac{T}{(2\pi)^3}\sum_{\omega_1}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\\ &\times \mathcal{J}^{(0)}_{\alpha\gamma_1;\gamma_2\beta}(p,p_1;p_1,p)\mathfrak{G}_{\gamma_1\gamma_2}(p_1) - \frac{T^2}{2(2\pi)^6}\sum_{\omega_1,\omega_2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2\\ &\times \mathcal{J}^{(0)}_{\alpha\gamma_1,\gamma_2\gamma_3}(p,p_1+p_2-p;p_1,p_2)\mathfrak{G}_{\gamma_2\gamma_4}(p_1)\mathfrak{G}_{\gamma_3\gamma_5}(p_2)\\ &\times \mathfrak{G}_{\gamma_6\gamma_1}(p_1+p_2-p)\mathcal{J}_{\gamma_4\gamma_5,\gamma_6\beta}(p_1,p_2;p_1+p_2-p,p). \qquad (16.2)\end{aligned}$$

与声子相互作用的情形中 $\mathfrak{G}$ 和 $\mathfrak{D}$ 的方程组也类似地写为 (图 54)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{G}^{-1}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p},\omega_n) =&(\mathrm{i}\omega_n-\varepsilon(\boldsymbol{p})+\mu)\delta_{\alpha\beta}\\
&+\frac{gT}{(2\pi)^3}\sum_{\omega'_n}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}'\mathfrak{G}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p}',\omega'_n)\mathfrak{D}(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p},\omega'_n-\omega_n)\times\mathcal{J}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}';\omega_n,\omega'_n),\\
\mathfrak{D}^{-1}(\boldsymbol{k},\omega_n) =&-\omega_0^{-2}(\boldsymbol{k})(\omega_n^2+\omega_0^2(\boldsymbol{k}))\\
&\mp\frac{gT}{(2\pi)^3}\sum_{\omega'_n}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}'\mathfrak{G}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p}',\omega'_n)\mathfrak{G}_{\beta\alpha}(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{k},\omega'_n-\omega_n)\\
&\times\mathcal{J}(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{k};\omega'_n,\omega'_n-\omega_n).
\end{aligned}\tag{16.3}$$

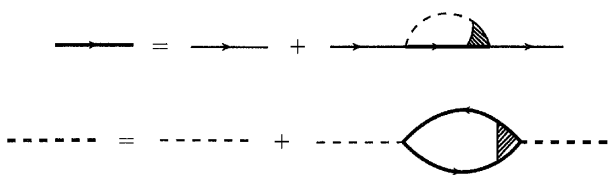


图 54

(16.3) 中的函数 $\mathcal{J}$ 乃是完全顶角部分. 它描述所有具备两条粒子外线和一条声子外线的紧致图形之和 (图 55).

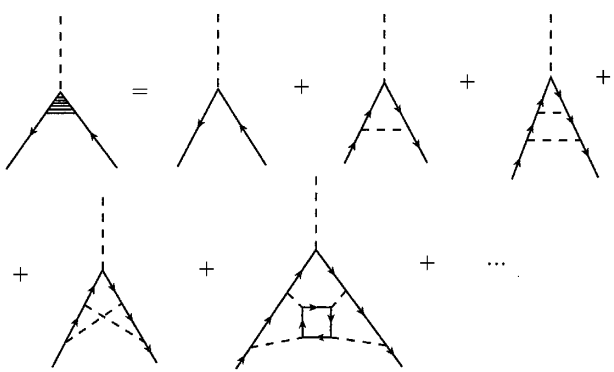


图 55

和在绝对零度时一样, $T\neq 0$ 的完全顶角部分与多粒子温度格林函数有一定关系. 后者在松原方法中的式子如 (11.1)~(11.4) 式, 它们和 $T=0$ 时的相应公式一致. 另外注意到, 两种情况下维克定理的表述是等价的, 我们立刻就得出结论: 可以借助多端图形计算多粒子格林函数 $\mathfrak{G}$, 并 (在 $\boldsymbol{r},\tau$ 空间中) 保留 §14 中所有对应规则.

为了变换到动量表象, 下面的作法是有益的.

例如, 讨论双粒子格林函数

$$\mathfrak{G}^{\mathrm{II}}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(1,2;3,4)=\left\langle T_\tau\left(\tilde{\psi}_\alpha(1)\tilde{\psi}_\beta(2)\bar{\tilde{\psi}}_\gamma(3)\bar{\tilde{\psi}}_\delta(4)\right)\right\rangle \tag{16.4}$$

($\tilde{\psi}$ 为 "海森伯算符"(11.3)), 它与四个 "时间"$\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4$ 有关, 其中每一个从零变到 $1/T$, 将 (16.4) 式对 τ_1 延拓到区间 $\left(-\dfrac{1}{T},0\right)$上去, 令 $\mathfrak{G}^{\mathrm{II}}(1,2;3,4)$ 在 $\tau_1<0$ 和 $\tau_1>0$ 的值以 (11.8) 式相联系; 类似地完成对 τ_2,τ_3,τ_4 的延拓. 然后对每个 τ 完成傅里叶变换 (14.2) 式, 我们立刻看出, 每个 "费米" 变量 ((16.4) 式中的费米算符) 的频率只能取奇数值: $(2n+1)\pi T$, 而 "玻色" 变量的频率只取偶数值 $2n\pi T$.

自然, 对任何多粒子格林函数, 都可以完成类似的延拓手续.

和 §14 中一样容易验证, 微扰论级数每一项都能对 τ 进行傅里叶变换. 这时得到的对应规则和 §14 中单粒子格林函数的规则一致. 本节初提到的 $T=0$ 和 $T\neq 0$ 时图解法的关系, 也保留下来. $\mathfrak{G}^{\mathrm{II}}(1,2;3,4)$ 的修正项可由对应同一图形的 $\mathfrak{G}^{\mathrm{II}}(1,2;3,4)$ 的表达式借助于前面提过的代换 $\omega\to \mathrm{i}\omega_n$, $(2\pi)^{-1}\int \mathrm{d}\omega\to \mathrm{i}T\sum_{\omega n}\cdots$ 而得. 由于这种联系的存在, 我们得以逐字复述 §10 中关于多粒子函数图形所说的一切. $\mathfrak{G}^{\mathrm{II}}(1,\,2;\,3,\,4)$ 的微扰论级数, 可以归结为仅仅由代表准确格林函数 $\mathfrak{G}(1,2)$ 的粗线所构成的紧致图形之和. 这些图形和完全顶角部分 $\mathcal{J}$ 的图形一致, 由此看出, $\mathfrak{G}^{\mathrm{II}}(1,2;3,4)$ 和 $\mathcal{J}$ 之间应存在一定关系. 不难证明, 它仍是①

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}^{\mathrm{II}}_{\alpha\beta;\gamma\delta}(p_1,p_2;p_3,p_4)=&\frac{(2\pi)^3}{T}\left\{\frac{(2\pi)^3}{T}[\mathfrak{G}_{\alpha\delta}(p_1)\mathfrak{G}_{\beta\gamma}(p_2)\delta_{\omega_1\omega_2}\right.\\&\times\delta(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_4)\mp\mathfrak{G}_{\alpha\gamma}(p_1)\mathfrak{G}_{\beta\delta}(p_2)\delta_{\omega_1\omega_3}\delta(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_3)]\\&\left.\pm\mathfrak{G}_{\alpha\lambda}(p_1)\mathfrak{G}_{\beta\mu}(p_2)\mathcal{J}_{\lambda\mu,\nu\tau}(p_1,p_2;p_3,p_4)\mathfrak{G}_{\nu\gamma}(p_3)\mathfrak{G}_{\tau\delta}(p_4)\right\}\\&\times\delta_{\omega_1+\omega_2-\omega_3-\omega_4}\delta(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_3-\boldsymbol{p}_4).\end{aligned}\tag{16.5}$$

与声子相互作用时的顶角部分 $\mathcal{J}(p_1p_2)$ 和格林函数

$$\mathfrak{G}_{\alpha\beta}(1,2;3)=\left\langle T_\tau\left(\tilde{\psi}_\alpha(1)\bar{\tilde{\psi}}_\beta(2)\tilde{\varphi}(3)\right)\right\rangle$$

的傅里叶分量的关系为

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}_{\alpha\beta}(p_1,p_2;k)=&\frac{(2\pi)^3}{T}\mathfrak{G}_{\alpha\gamma}(p_1)\mathfrak{G}_{\gamma\beta}(p_2)\mathfrak{D}(k)\\&\times\mathcal{J}(p_1,p_1+k)\delta(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{k})\delta_{\omega_1-\omega_2+\omega}.\end{aligned}\tag{16.6}$$

正如我们所期待的, 关系式 (16.5) 和 (16.6) 与相应的 (10.17), (10.21) 式的差别只是系数.

① 为了验证 (16.5), (16.6) 式的系数, 最简单的方法是以一级微扰论计算等式两端.

应强调, 图形求和法只适用于 $\mathfrak{G}$ 函数的图形. §15 中讨论的热力学势 Ω的微扰论级数就不能如此求和, 因为那里相应 n 级图的项中含有系数 $\frac{1}{n}$. 这样的图形显然已不能像 $\mathfrak{G}$ 的图形那样分解成为个别分图, 而某个无穷图形序列求和的结果也不能简单地归结为把细线换成粗线. 例如, 图 56 所示的加图过程就是完全不能成立的.

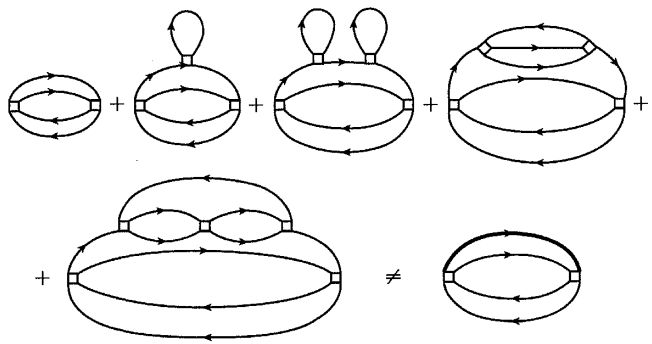


图 56

§16.2　格林函数和热力学势 Ω 的关系

我们在本节末尾推导热力学势 Ω 和温度格林函数间的若干关系. 从粒子间成对相互作用的情形开始. 引入势 $\lambda\mathcal{J}^{(0)}(0<\lambda<1)$ 代替 $\mathcal{J}^{(0)}$, 并对 λ 微分, Ω 的表达式为

$$\Omega=\Omega_0-T\ln\langle\mathfrak{S}\rangle,$$

得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}=&\frac{T}{4}\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_4\mathcal{J}^{(0)}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(x_1,x_2;x_3,x_4)\\&\times\langle T_\tau\{\bar\psi_\alpha(x_1)\bar\psi_\beta(x_2)\psi_\delta(x_4)\psi_\gamma(x_3)\mathfrak{S}(\lambda)\}\rangle/\langle\mathfrak{S}(\boldsymbol{\lambda})\rangle.\end{aligned}$$

而根据定义 (16.4) 式, 有

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}=&\frac{T}{4}\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_4\mathcal{J}^{(0)}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(x_1,x_2;x_3,x_4)\\&\times\mathfrak{G}^{\mathrm{II}}_{\delta\gamma,\alpha\beta}(x_4,x_3;x_1,x_2).\end{aligned}$$

完成傅里叶变换并利用 (16.5) 式, 就有 ($\mathfrak{G}(p,\lambda)$ 是 $\lambda\neq1$ 时的格林函数)

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}=&\frac{VT}{2\lambda(2\pi)^3}\sum_\omega\int\mathrm{d}\boldsymbol{p}\Big\{\frac{T}{(2\pi)^3}\sum_{\omega_1}\int\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\quad,\\&\times\lambda\mathcal{J}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}(p,p_1;p,p_1)\mathfrak{G}_{\gamma_3\gamma_1}(p,\lambda)\mathfrak{G}_{\gamma_4\gamma_2}(p_1,\lambda)\end{aligned}$$

$$\pm\frac{T^2}{2(2\pi)^6}\sum_{\omega_1,\omega_2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2\lambda\mathcal{J}^{(0)}_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_3\gamma_4}(p,p_1+p_2-p;p_1,p_2)$$
$$\times\mathfrak{G}_{\gamma_3,\gamma_6}(p_1,\lambda)\mathfrak{G}_{\gamma_4\gamma_5}(p_2,\lambda)\mathfrak{G}_{\gamma_8\gamma_2}(p_1+p_2-p,\lambda)$$
$$\times\mathcal{J}_{\gamma_5\gamma_6,\gamma_7\gamma_8}(p_2,p_1;p,p_1+p_2-p)\mathfrak{G}_{\gamma_7\gamma_1}(p,\lambda)\Big\}. \tag{16.7}$$

注意 (16.7) 式圆括弧中的表达式正好是戴逊方程式 (16.1) 的右端, 只是相互作用势换成了 $\lambda\mathcal{J}^{(0)}$, 即

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}=\pm\frac{VT}{2\lambda(2\pi)^3}\sum_{\omega}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\mathfrak{G}^{(0)-1}_{\alpha\beta}(p)\{\mathfrak{G}_{\beta\alpha}(p,\lambda)-\mathfrak{G}^{(0)}_{\beta\alpha}(p)\}. \tag{16.8}$$

对 λ 积分 (16.8) 式并注意条件 $\Omega(\lambda=0)=\Omega_0$, 就得到我们所需的关系:

$$\Omega=\Omega_0\pm\frac{1}{2}V\int_0^1\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}\frac{T}{(2\pi)^3}\sum_{\omega}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\mathfrak{G}^{(0)-1}_{\alpha\beta}(p)\{\mathfrak{G}_{\beta\alpha}(p,\lambda)-\mathfrak{G}^{(0)}_{\beta\alpha}(p)\}. \tag{16.9}$$

对于和声子相互作用, 也有类似的关系成立, 它把 Ω 通过 $\mathfrak{G}$ 函数对参量 g 的积分表示. 和以上推导 (16.9) 式完全相同的计算给出

$$\Omega=\Omega_0\pm V\int_0^g\frac{\mathrm{d}g_1}{g_1}\frac{T}{(2\pi)^3}\sum_{\omega_n}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}(\mathrm{i}\omega_n-\varepsilon(\boldsymbol{p})+\mu)$$
$$\times(\mathfrak{G}_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{p},\omega_n)-\mathfrak{G}^{(0)}_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{p},\omega_n))=\Omega_0+V\int_0^g\frac{\mathrm{d}g_1}{g_1}\frac{T}{(2\pi)^3}$$
$$\times\sum_{\omega_n}\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\frac{\omega_n^2+\omega_0^2(\boldsymbol{k})}{\omega_0^2(\boldsymbol{k})}(\mathfrak{D}(\boldsymbol{k},\omega_n)-\mathfrak{D}^{(0)}(\boldsymbol{k},\omega_n)). \tag{16.10}$$

Ω 对粒子质量 m 的微商和系统总哈密顿量 $\hat{H}$ 对 m 的微商间存在着熟知的关系 (见朗道和栗弗席兹的书 [1]①):

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial m}\right)_{T,V,\mu}=\left\langle\frac{\partial\hat{H}}{\partial m}\right\rangle.$$

由此得出另一个有益的公式. 既然

$$\frac{\partial\hat{H}}{\partial m}=\frac{1}{2m^2}\int\psi^+_\alpha(\boldsymbol{r})\Delta\psi_\alpha(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

则根据 $\mathfrak{G}$ 函数的定义 (11.1), 我们立刻得到

$$\frac{\partial\Omega}{\partial m}=\pm\frac{1}{2m^2}\int[\Delta_{\boldsymbol{r}}\mathfrak{G}_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';-0)]_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'}\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

① 参看第 2 章 (10.23) 式后面的脚注. —— 译者注

或者写成傅里叶分量[①]：

$$\frac{\partial \Omega}{\partial m}=\mp\frac{VT}{m(2\pi)^3}\sum_{\omega_n}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}\mathfrak{G}_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{p},\omega_n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n\tau},\quad \tau\to+0. \tag{16.11}$$

利用 (16.9)~(16.11) 式以及写成傅里叶分量的 (11.6) 式：

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}=-N=\mp\frac{VT}{(2\pi)^3}\sum_{\omega_n}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\mathfrak{G}_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{p},\omega_n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n\tau}(r\to+0), \tag{16.12}$$

我们可以计算 Ω 对各种参数的微商. 这些关系式把热力学势 Ω 通过格林函数表示出来.

最后, 我们再推导一个公式, 它把热力学势 Ω 通过准确格林函数 $\mathfrak{G}$ 表示出来. 前面已指出, Ω 的微扰论图形中出现了因子 $1/n$, 因而对 §15 中的级数不能应用图形求和法. 然而也还有一种有趣的途径, 使我们得以完成部分求和, 并把 Ω 写成仅仅由表示准确 $\mathfrak{G}$ 函数的粗线所组成的无穷个图形之和 (Luttinger 和 Ward[34]).

为了简单起见, 我们只考虑粒子间有成对相互作用, 并认为系统是非铁磁性的: $\mathfrak{G}_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}\mathfrak{G}$. 从热力学势 Ω 的微扰论图形中, 取出所有的紧致图形, 即内部不再含有相当于对 $\mathfrak{G}$ 的修正的分图者 (请与 §10 第二小节比较), 将其中所有细线换成粗线. 例如, 从图 48(b) 的三个图中只取前两个. 这样得到的所有图形之和 (每个图形都有系数 $1/n$), 我们记做 Ω'.

根据这个定义, Ω' 乃是准确格林函数 $\mathfrak{G}$ 的泛函. 将 Ω' 的图展开逐项对 $\delta\mathfrak{G}(p)$ 变分, 不难看出, 这样所得的级数 (准确到因子), 就是准确格林函数修正项的级数, 但后者中对应左右两端线的格林函数乘积 $\mathfrak{G}^{(0)}(p)\mathfrak{G}(p)$ 换成了 $\delta\mathfrak{G}(p)$. 更确切些就是

$$\delta\Omega'=\pm 2TV\sum_n\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\Sigma(p)\delta\mathfrak{G}(p), \tag{16.13}$$

其中 $\Sigma(p)$ 是准确格林函数 $\mathfrak{G}(p)$ 的自能部分. 它的定义同于 $T=0$ 的图解中的自能函数 (见 §10 第一小节), 而且与 $\mathfrak{G}$ 有以下关系：

$$\mathfrak{G}^{-1}=\left(\mathfrak{G}^{(0)}\right)^{-1}-\Sigma. \tag{16.14}$$

如果将 Σ 理解为由粗线构成的相应图形之和, 则 (16.14) 式就是戴逊方程 (16.2).

我们写出以下表达式：

$$\begin{aligned}\bar{\Omega}=&\Omega_0\pm 2TV\sum_n\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\{\ln[1-\mathfrak{G}^{(0)}(p)\Sigma(p)]\\&+\Sigma(p)\mathfrak{G}(p)\}+\Omega',\end{aligned} \tag{16.15}$$

① 我们将在 §17 末说明, 如何计算此处对 ω_n 的求和.

并且证明 $\bar{\Omega}=\Omega$. 为此首先须指出, $\bar{\Omega}$ 作为 $\mathfrak{G}$(或作为 Σ) 的泛函, 具有稳恒性, 即

$$\frac{\delta\bar{\Omega}}{\delta\Sigma}=0, \tag{16.16}$$

条件是 $\mathfrak{G}$ 满足戴逊方程 (16.14) 式. 事实上, 变分 (16.15) 式, 并注意到 (16.13) 式, 我们立即得到

$$\begin{aligned}\delta\bar{\Omega}=&\pm 2TV\sum_n\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\Big\{-\frac{\delta\Sigma(p)}{[\mathfrak{G}^{(0)}(p)]^{-1}-\Sigma(p)}+\mathfrak{G}(p)\delta\Sigma(p)\\&+\Sigma(p)\delta\mathfrak{G}(p)\Big\}\pm 2TV\sum_n\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\Sigma(p)\delta\mathfrak{G}(p)\\=&\pm 2TV\sum_n\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\Big\{\mathfrak{G}(p)-\frac{1}{(\mathfrak{G}^{(0)})^{-1}(p)-\Sigma(p)}\Big\}\delta\Sigma(p),\end{aligned}$$

由此得出 (16.16) 式.

与前面作法类似, 以 $\lambda\mathcal{J}^{(0)}$ 代替相互作用势 $\mathcal{J}^{(0)}$, 并计算 $\dfrac{\partial\bar{\Omega}}{\partial\lambda}=0$. 由于刚才所证明的 (16.16) 式, 我们可不考虑 $\mathfrak{G}$ 和 Σ 与 λ 的关系. 因此

$$\frac{\partial\bar{\Omega}(\lambda)}{\partial\lambda}=\frac{\partial\Omega'(\lambda)}{\partial\lambda},$$

而且计算 $\dfrac{\partial\Omega'(\lambda)}{\partial\lambda}$ 时, $\mathfrak{G}(\lambda)$ 不必微分.

另一方面, 由图形的结构知道, 当 $\lambda=1$ 时泛函 $\Omega'(\lambda)$ 和 Ω 相同, 只须在后者中以 $\sqrt{\lambda}\mathfrak{G}(\lambda)$ 代替 $\mathfrak{G}(\lambda=1)$. 由此注意到 (16.13) 式得

$$\frac{\partial\Omega'(\lambda)}{\partial\lambda}=\pm 2TV\sum_n\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{\Sigma(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\frac{\partial}{\partial\lambda}[\sqrt{\lambda}\mathfrak{G}(\lambda)],$$

在此处令 $\dfrac{\partial\mathfrak{G}(\lambda)}{\partial\lambda}\to 0$, 我们就得出

$$\frac{\partial\bar{\Omega}(\lambda)}{\partial\lambda}=\pm\frac{TV}{\lambda}\sum_n\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\Sigma(\lambda)\mathfrak{G}(\lambda).$$

将此式与 (16.8) 式比较, 并且注意到 Σ 的定义, 我们就得出结论:

$$\frac{\partial\bar{\Omega}(\lambda)}{\partial\lambda}=\frac{\partial\Omega(\lambda)}{\partial\lambda}. \tag{16.17}$$

另外, 根据定义 (16.5) 式, $\bar{\Omega}(0)=\Omega(0)$, 故积分 (16.16) 式, 并令 $\lambda=1$, 我们证实 $\bar{\Omega}=\Omega$.

Ω 的 (16.15) 式实际上对粒子间任意的 (而不仅是成对的) 相互作用都成立. 这时只要求 Ω' 是具有 (16.13) 式性质的泛函. 逐步重复 §19 第四小节中对 $T=0$ 情形的讨论, 就可以确知这样的泛函是存在着的. 然而, 实际构成这样一个泛函却是很费事的, 我们也就不予讨论了.

顺便指出, 可以证明 (见前面引用过的 Luttinger 和 Ward 的论文[34])

$$\Omega_0 = \pm 2TV \sum_n \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} \{\ln \mathfrak{G}^{(0)}(p)\} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n \tau} \quad (\tau \to +0).$$

因此 (16.15) 式可改写成

$$\Omega = \pm 2TV \sum_n \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} (\ln \mathfrak{G}^{(0)} - \Sigma \mathfrak{G}) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n \tau} \Omega'(\tau \to +0). \tag{16.18}$$

§17 温度大于零时的时间格林函数. 格林函数的解析性质

除了前面研究的温度格林函数 $\mathfrak{G}$, 第 2 章里引入的时间格林函数 G 在 $T>0$ 时仍有意义. 以后将以实例证明, 后者决定系统的非平衡性质, 例如作为外场频率函数的电阻和复数介电常数 ε. 函数 G 还描述粒子在凝聚体中的非弹性散射过程.

温度不为零时, 单粒子格林函数 $G(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, t_1 - t_2)$ 应定义为

$$G_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, t_1 - t_2; E_n, N) = -\mathrm{i}\langle E_n, N | T_t \{\tilde{\psi}_\alpha(\boldsymbol{r}_1, t_2) \tilde{\psi}^+_\beta(\boldsymbol{r}_2, t_2)\} | E_n, N \rangle, \tag{17.1}$$

其中 $\tilde{\psi}, \tilde{\psi}^+$ 是系统的海森伯算符. (17.1) 式中对能量为 E_n, 粒子数为 N 的系统状态求平均. $T=0$ 时 G 的定义作为特例包括在定义 (17.1) 内, 那时是对系统基态求平均. 格林函数 (17.1) 依赖于系统的总能量 E 和其粒子数. 量子统计中更方便的作法, 是将诸量看成温度和化学势 μ 的函数, 这相当于从微正则分布变换到巨正则分布 (见 [1]①). 按吉斯分布平均 (17.1) 式, 我们得到

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, t_1 - t_2; T, \mu) &= \sum_{N,n} \mathrm{e}^{\frac{\Omega + \mu N - E_n}{T}} G_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, t_1 - t_2; E_n, N) \\ &= -\mathrm{i}\mathrm{Tr}\left\{ \mathrm{e}^{\frac{\Omega + \mu\hat{N} - \hat{H}}{T}} T_t[\tilde{\psi}_\alpha(\boldsymbol{r}_1, t_1) \tilde{\psi}^+_\beta(\boldsymbol{r}_2, t_2)] \right\}. \end{aligned} \tag{17.2}$$

多粒子格林函数也按类似公式定义, 声子格林函数为

$$D(1,2) = -\mathrm{i}\mathrm{Tr}\left\{ \mathrm{e}^{\frac{\Omega - \hat{H}}{T}} T_t[\tilde{\varphi}(1)\tilde{\varphi}(2)] \right\}, \tag{17.3}$$

而双粒子格林函数为

① 参阅 [82]§35 节. —— 译者注

$$G^{\mathrm{II}}(1,2;3,4)=\mathrm{Tr}\left\{\mathrm{e}^{\frac{\Omega+\mu\hat{N}-\hat{H}}{T}}T_t[\tilde{\psi}(1)\tilde{\psi}(2)\tilde{\psi}^+(3)\tilde{\psi}^+(4)]\right\}. \tag{17.4}$$

格林函数的傅里叶分量 $G(\omega,\boldsymbol{p})$ 满足一个颇为普遍的关系式 (朗道[35]). 为推导此式, 我们注意海森伯算符矩阵元的时间关系由以下式子表达:

$$\begin{aligned}&\tilde{\psi}_{nm}(\boldsymbol{r},t)=\psi_{nm}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{nm}t},\\&\tilde{\psi}^+_{nm}(\boldsymbol{r},t)=\psi^+_{nm}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{nm}t},\\&\omega_{nm}=E_n-E_m-\mu(N_n-N_m),\end{aligned} \tag{17.5}$$

这里总有 $N_n=N_m\pm1$.

如果所讨论的系统是均匀而无限的, 则算符 $\psi(\boldsymbol{r})$ 的矩阵元与坐标的关系为①

$$\begin{aligned}&\psi_{nm}(\boldsymbol{r})=\psi_{nm}(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}_{nm}\boldsymbol{r}},\\&\psi^+_{nm}(\boldsymbol{r})=\psi^+_{nm}(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}_{nm}\boldsymbol{r}},\\&\boldsymbol{p}_{nm}=\boldsymbol{P}_n-\boldsymbol{P}_m,\end{aligned} \tag{17.6}$$

其中 $\boldsymbol{P}_n,\boldsymbol{P}_m$ 为系统在状态 n,m 的动量. (17.6) 式中的 $\psi_{nm}(0)$ 和 $\psi^+_{nm}(0)$ 已与坐标无关. 将 (17.5) 和 (17.6) 式代入 (17.1) 式, 得

$$\begin{aligned}G_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r},t>0)&=-\mathrm{i}\sum_{n,m}\mathrm{e}^{\frac{\Omega+\mu N_n-E_n}{T}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{nm}t-\mathrm{i}\boldsymbol{p}_{nm}\boldsymbol{r}}(\psi_\alpha(0))_{nm}(\psi^+_\beta(0))_{mn},\\G_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r},t<0)&=\pm\mathrm{i}\sum_{n,m}\mathrm{e}^{\frac{\Omega+\mu N_m-E_m}{T}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{mn}t+\mathrm{i}\boldsymbol{p}_{mn}\boldsymbol{r}}(\psi_\alpha(0))_{nm}(\psi^+_\beta(0))_{mn}.\end{aligned}$$

从格林函数的空间表象变换到傅里叶分量:

$$G(\boldsymbol{p},\omega)=\iint G(\boldsymbol{r},t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}+\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{d}t.$$

对空间的积分给出 $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}_{nm}$ 的 δ 函数. 对时间的积分须在区间 $(-\infty,0)$ 和 $(0,\infty)$ 上分开进行. 这时应利用熟知的公式

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}x=\pi\delta(\alpha)+\frac{\mathrm{i}}{\alpha}.$$

对 t 从 0 积分到 ∞, 得到 ($N_n=N_m-1$)

$$(2\pi)^3\sum_{n,m}\mathrm{e}^{\frac{\Omega+\mu N_n-E_n}{T}}(\psi_\alpha(0))_{nm}(\psi^+_\beta(0))_{mn}\delta(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}_{nm})\times\left[\frac{1}{\omega+\omega_{nm}}-\mathrm{i}\pi\delta(\omega+\omega_{nm})\right].$$

$t<0$ 区间上的积分为

$$\pm(2\pi)^3\sum_{n,m}\mathrm{e}^{\frac{\Omega+\mu N_m-E_m}{T}}(\psi_\alpha(0))_{nm}(\psi^+_\beta(0))_{mn}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_{mn})$$

① 参看 §7.2 中 (7.17) 式前的脚注.

$$\times\left[\frac{1}{\omega-\omega_{mn}}+\mathrm{i}\pi\delta(\omega-\omega_{mn})\right],$$

由此得

$$\begin{aligned}G_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p},\omega)=&-(2\pi)^3\sum_{n,m}\mathrm{e}^{\frac{\Omega+\mu N_n-E_n}{T}}(\psi_\alpha(0))_{nm}(\psi^+_\beta(0))_{mn}\\&\times\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_{mn})\left\{\frac{1}{\omega_{mn}-\omega}[1\pm\mathrm{e}^{-\omega_{mn}/T}]\right.\\&\left.+\mathrm{i}\pi\delta(\omega-\omega_{mn})[1\mp\mathrm{e}^{-\omega_{mn}/T}]\right\}.\end{aligned}\tag{17.7}$$

以下的讨论随 $G_{\alpha\beta}$ 和自旋变量的关系而异. 我们只讨论系统是非铁磁的这一情形, 此时从对称性考虑得知, $G_{\alpha\beta}$ 应比例于单位张量 $\delta_{\alpha\beta}$:

$$G_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}G,\tag{17.8}$$

$$\begin{aligned}G(\boldsymbol{p},\omega)=&\frac{1}{2s+1}G_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{p},\omega)\\=&-(2\pi)^3\sum_{n,m}\mathrm{e}^{\frac{\Omega+\mu N_n-E_n}{T}}\frac{1}{2s+1}\sum_\alpha|(\psi_\alpha(0))_{nm}|^2\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_{mn})\\&\times\left\{\frac{1}{\omega_{mn}-\omega}[1\pm\mathrm{e}^{-\omega_{mn}/T}]+\mathrm{i}\pi\delta(\omega-\omega_{mn})[1\mp\mathrm{e}^{-\omega_{mn}/T}]\right\},\end{aligned}\tag{17.9}$$

s 是粒子自旋.

比较 (17.9) 式花括弧内的两项, 我们发现格林函数的实部 G' 和虚部 G'' 之间存在着一定关系 (朗道[35]). 对费米统计得

$$G'(\boldsymbol{p},\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{cth}\frac{x}{2T}\frac{G''(\boldsymbol{p},x)}{x-\omega}\mathrm{d}x,\tag{17.10}$$

其中积分取主值; 对玻色统计有

$$G'(\boldsymbol{p},\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{th}\frac{x}{2T}\frac{G''(\boldsymbol{p},x)}{x-\omega}\mathrm{d}x.\tag{17.11}$$

此外从 (17.9) 式看出, 玻色粒子的 G'' 永为负值. 相反, 费米系统的 G 函数在 $\omega=0$ 点变号; $\omega<0$ 时它取正值, 而 $\omega>0$ 时取负值.

从 (17.10) 和 (17.11) 式得出, G 不是复变量 ω 的解析函数. 然而函数 G 和另外两个函数 ——G^{R} 和 G^{A}—— 有简单关系①, 后者分别在变量 ω 的上半和下半平面上解析. 函数 G^{R} 通过 G 的实部 G' 和虚部 G'' 表示, 对费米粒子有

$$G^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{p},\omega)=G'(\boldsymbol{p},\omega)+\mathrm{icth}\frac{\omega}{2T}G''(\boldsymbol{p},\omega).\tag{17.12}$$

① 参看 §7.2 中 (5.23) 式前脚注.

对玻色粒子有

$$G^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{p},\omega)=G'(\boldsymbol{p},\omega)+\mathrm{ith}\frac{\omega}{2T}G''(\boldsymbol{p},\omega). \tag{17.13}$$

类似地, 有

$$G^{\mathrm{A}}(\boldsymbol{p},\omega)=G'(\boldsymbol{p},\omega)-\mathrm{icth}\frac{\omega}{2T}G''(\boldsymbol{p},\omega),$$
$$G^{\mathrm{A}}(\boldsymbol{p},\omega)=G'(\boldsymbol{p},\omega)-\mathrm{ith}\frac{\omega}{2T}G''(\boldsymbol{p},\omega).$$

函数 G^{R} 和 G^{A} 满足色散关系:

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\ G^{\mathrm{R}}(\omega)&=\frac{1}{\pi}\fint_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}G^{\mathrm{R}}(x)}{x-\omega}\mathrm{d}x,\\ \mathrm{Re}\ G^{\mathrm{A}}(\omega)&=-\frac{1}{\pi}\fint_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}G^{\mathrm{A}}(x)}{x-\omega}\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{17.14}$$

由此根据复变函数论的已知定理, 得出它们的解析性.

不难验证, G^{R} 就是所谓推迟格林函数:

$$G^{\mathrm{R}}(1,2)=\begin{cases}-\mathrm{iTr}\{\mathrm{e}^{\frac{\Omega+\mu\hat{N}-\hat{H}}{T}}(\tilde{\psi}(1)\tilde{\psi}^{+}(2)\pm\tilde{\psi}^{+}(2)\tilde{\psi}(1))\}, & t_1>t_2,\\ 0, & t_1<t_2.\end{cases} \tag{17.15}$$

而 G^{A} 是超前格林函数:

$$G^{\mathrm{A}}(1,2)=\begin{cases}0, & t_1>t_2,\\ \mathrm{iTr}\{\mathrm{e}^{\frac{\Omega+\mu\hat{N}-\hat{H}}{T}}(\tilde{\psi}(1)\tilde{\psi}^{+}(2)\pm\tilde{\psi}^{+}(2)\tilde{\psi}(1))\}, & t_1<t_2.\end{cases} \tag{17.16}$$

其实只要对 (17.15) 式完成前面对 G 所作的运算, 就得到

$$\begin{aligned}G^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{p},\omega)=&-(2\pi)^3\sum_{n,m}\mathrm{e}^{\frac{\Omega+\mu N_n-E_n}{T}}|\psi_{nm}(0)|^2(1\pm\mathrm{e}^{-\omega_{mn}/T})\\ &\times\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_{mn})\left\{\mathrm{i}\pi\delta(\omega-\omega_{mn})-\frac{1}{\omega-\omega_{mn}}\right\}.\end{aligned} \tag{17.17}$$

函数 (17.17) 式显然满足关系式 (17.14).

G^{R} 的 (17.17) 式 (以及 G^{A} 的类似公式) 可以改写成略有不同的形式:

$$\begin{aligned}G^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{p},\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(\boldsymbol{p},x)}{x-\omega-\mathrm{i}\delta}\mathrm{d}x,\\ G^{\mathrm{A}}(\boldsymbol{p},\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(\boldsymbol{p},x)}{x-\omega+\mathrm{i}\delta}\mathrm{d}x,\delta\to+0.\end{aligned} \tag{17.18}$$

其中 ρ 是实函数

$$\rho(\boldsymbol{p},\omega)=-(2\pi)^3\sum_{n,m}\mathrm{e}^{\frac{\Omega+\mu N_n-E_n}{T}}|\psi_{nm}(0)|^2 \times(1\pm\mathrm{e}^{-\omega_{mn}/T})\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_{mn})\delta(\omega-\omega_{mn}). \tag{17.19}$$

Lehmann[29] 首先为量子电动力学的格林函数得出了 (17.18) 型的表示式. 借助它们可以判断 G^{R} 和 G^{A} 在 ω 很大时的行为. 注意积分 $\int_{-\infty}^{\infty}\rho\mathrm{d}x$ 是有限的, 我们得

$$G^{\mathrm{R}}\approx G^{\mathrm{A}}\approx-\frac{1}{\omega}\int_{-\infty}^{\infty}\rho\mathrm{d}x.$$

另外, 利用 G^{R} 的定义 (17.15) 式, 可以算出对 ρ 的积分, 事实上, 由海森伯算符在 $t_1=t_2$ 时的对易规则得

$$G^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;t_1=t_2+0)=-\mathrm{i}\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2),$$
$$G^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{p};t_1=t_2+0)=-\mathrm{i}.$$

将 $G^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{p};t_1=t_2+0)$ 通过 $G^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{p},\omega)$ 表达:

$$G^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{p};t_1=t_2+0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega G^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{p},\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\alpha},\quad\alpha\to+0,$$

并以 G^{R} 的 (17.18) 式代入, 得

$$-\mathrm{i}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\rho(x,\boldsymbol{p})\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\alpha}}{x-\omega-\mathrm{i}\delta}=\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x,\boldsymbol{p})\mathrm{d}x.$$

因此

$$\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x,\boldsymbol{p})\mathrm{d}x=-1. \tag{17.20}$$

函数 G^{R} 和 G^{A} 在 ω 很大时为

$$G^{\mathrm{R}}\approx G^{\mathrm{A}}\approx\frac{1}{\omega}, \tag{17.21}$$

即与无相互作用粒子的相应函数一样.

推迟和超前函数满足一个无穷方程组 (Bogoliubov, Tiablikov[36] 和 Zubarev[37]). 然而没有类似温度格林函数的图解法来计算它. 因而确定 G^{R} 和 $\mathfrak{G}$ 的关系是有意义的. 我们为此建立 $\mathfrak{G}$ 的类似 (17.18) 式的积分表示.

利用定义 (11.1) 式, 我们可以写出 ($\tau>0$)

$$\mathfrak{G}(\boldsymbol{p},\tau)=-\sum_{n,m}\mathrm{e}^{\frac{\Omega+\mu N_n-E_n}{T}}\mathrm{e}^{\omega_{nm}\tau-\mathrm{i}\boldsymbol{p}_{nm}\boldsymbol{r}}|\psi_{nm}(0)|^2. \tag{17.22}$$

在 (17.22) 式中按公式

$$\mathfrak{G}(\boldsymbol{p},\omega_k)=\int_0^{1/T}\mathrm{d}\tau\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k\tau-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}}\mathfrak{G}(\boldsymbol{r},\tau),$$

变换到傅里叶分量, 其中对费米粒子 $\omega_k=(2k+1)\pi T$, 对玻色粒子 $\omega_k=2k\pi T$, 我们得到

$$\mathfrak{G}(\boldsymbol{p},\omega_k)=-(2\pi)^3\sum_{n,m}\mathrm{e}^{\frac{\Omega+\mu N_n-E_n}{T}}|\psi_{nm}(0)|^2\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_{mn})\times\frac{1\pm\mathrm{e}^{-\omega_{mn}/T}}{\omega_{mn}-\mathrm{i}\omega_k}.\tag{17.23}$$

函数 (17.23) 可表示成①

$$\mathfrak{G}(\boldsymbol{p},\omega_n)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(\boldsymbol{p},x)}{x-\mathrm{i}\omega_n}\mathrm{d}x,\tag{17.24}$$

其中 ρ 仍和 (17.19) 式中一样, 由此得到 $\omega_n>0$ 时 $\mathfrak{G}$ 和 $G^R(\omega)$ 的关系:

$$\mathfrak{G}(\omega_n)=G^{\mathrm{R}}(\mathrm{i}\omega_n),\quad\omega_n>0.\tag{17.25}$$

另一方面, 从 (17.24) 式得到

$$\mathfrak{G}(\omega_n)=\mathfrak{G}^*(-\omega_n).\tag{17.26}$$

由此可见, 知道了在上半平面解析的函数 $G^{\mathrm{R}}(\omega)$, 我们可以利用 (17.25) 和 (17.26) 式确定所有 "频率" ω_n 温度格林函数 $\mathfrak{G}$.

然而更有意义的是逆命题: 根据已知的 $\mathfrak{G}$ 确定函数 G^{R}. 设想我们已知所有频率 ω_n 的 $\mathfrak{G}$, 并建立了在上半个 ω 平面解析的函数 $F(\omega)$, 它具有以下性质:

$$F(\mathrm{i}\omega_n)=\mathfrak{G}(\omega_n),\quad\omega_n>0.$$

这时根据复变函数论的熟知定理②, 我们立刻得出, 在整个上半平面 $F(\omega)$ 和 $G^{\mathrm{R}}(\omega)$ 重合.

这样, 求函数 $G^{\mathrm{R}}(\omega)$ 的问题就归结为把 $\mathfrak{G}(\omega_n)$ 从不连续点集上解析延拓到整个上半平面 (Abrikosov, Gorkov, Dzyaloshinski[32] 和 Fradkin[33]). 虽然这个问题并没有一般解, 在各种具体情况中解析延拓还是可以完成的. 以后各章里我们将遇到若干这种例子.

① 在玻色情况下 $\omega_n=0$ 时积分 (17.24) 式似在 $x=0$ 点有奇异性. 然而从 (17.19) 式看出, x 很小时 $\rho\sim x$.

② 所提到的定理是: 设在无穷点的序列上两个解析函数取相同值, 且序列的极限点在解析区内, 则两个函数重合. 这里整数点 $\mathrm{i}\omega_n$ 构成无穷序列, 而无穷远点是极限点.

知道了推迟格林函数 $G^{\mathrm{R}}(\omega), D^{\mathrm{R}}(\omega)$ 或电磁场推迟格林函数 $D^{\mathrm{R}}_{\alpha\beta}(\omega)$(见 §29), 可以决定系统的许多非平衡性质. 例如, 求得金属中电子 $G^{\mathrm{R}}(\omega)$ 函数的极点, 就可以算出电子自由程与能量之关系, 而声子 $D^{\mathrm{R}}(\omega)$ 函数的极点, 可给出声吸收系数. 函数 $D^{\mathrm{R}}_{\alpha\beta}(\omega)$ 决定系统的介电系点 $\varepsilon(\omega)$, 同时也就决定了金属的低频电导 ($\omega \to 0$ 时有 $\varepsilon(\omega) \to \dfrac{4\pi \mathrm{i}\sigma}{\omega}$). 于是温度格林函数方法中的解析延拓, 使我们能越出计算热力学势这个纯统计问题, 在计算 Ω 的同时, 还可以确定某些非平衡特性.

然而许多输运系数 (如黏滞性、热传导等) 与多粒子格林函数有关. 原则上为后者也能求得类似 (17.24) 式的关系. 可是由于这些函数与许多频率有关 (例如, 双粒子函数含有三个频率), 一般关系式常常很复杂. 在大多数有重要实际意义的情形中, 所需格林函数的部分变量重合 (在讨论超导的第 7 章中就将遇到类似的例子). 这时它们的解析性质无异于单粒子函数, 也不难为之求出时间量和温度量的关系.

例如考虑慢中子在液体中的散射. 为简单起见, 我们设液体由无自旋的玻色粒子组成. 大家知道, 慢中子和液体原子的相互作用可以借助点作用描述 (例如参阅 [17]①):

$$V(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}) = 2\pi \frac{m+m_n}{mm_n} a\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}), \tag{17.27}$$

其中 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R}$ 为入射中子和液体原子的径矢, m_n, m 分别为它们的质量, a 为散射幅. 对所有液体原子求和 (17.27) 式, 我们就得到慢中子和液体的相互作用能量:

$$V(\boldsymbol{r}) = 2\pi \frac{m+m_n}{mm_n} a \sum_k \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}_k). \tag{17.28}$$

在液体粒子的二次量子化表象中 $V(\boldsymbol{r})$ 的形式是

$$V(\boldsymbol{r}) = 2\pi \frac{m+m_n}{mm_n} a\psi^+(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r}),$$

其中 ψ, ψ^+ 是薛定谔表象中液体粒子的算符.

动量传递为 $\boldsymbol{q}$ 的中子散射跃迁矩阵元正比于

$$a\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}} \left\langle \mathrm{i}|\psi^+(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r})|f\right\rangle \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

(i 为液体始态, f 为终态). 由此得微分散射截面 (Δ 是能量传递):

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\sigma \sim & a^2 \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1 \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)} \left\langle \mathrm{i}|\psi^+(\boldsymbol{r}_1)\psi(\boldsymbol{r}_1)|f\right\rangle \\ & \times \left\langle f|\psi^+(\boldsymbol{r}_2)\psi(\boldsymbol{r}_2)|\mathrm{i}\right\rangle \delta(E_i - E_f + \Delta).\end{aligned}$$

① 可参阅中文本 [83]. —— 译者注

将上式对终态 f 求和, 然后对始态 i 求吉布斯平均:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\sigma \sim & a^2 \sum_{i,f} \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1 \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)} \mathrm{e}^{\frac{\Omega+\mu N_i-E_i}{T}} \langle \mathrm{i}|\psi^+(\boldsymbol{r}_1)\psi(\boldsymbol{r}_1)|f\rangle \\ & \times \langle f|\psi^+(\boldsymbol{r}_2)\psi(\boldsymbol{r}_2)|\mathrm{i}\rangle \delta(E_f - E_i - \Delta).\end{aligned}$$

最后将算符 $\psi(\boldsymbol{r})$ 的表达式 (17.6) 代入, 结果有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\sigma \sim & a^2(2\pi)^3 V \sum_{i,f} \mathrm{e}^{\frac{\Omega+\mu N_i-E_i}{T}} |\langle \mathrm{i}|\psi^+(0)\psi(0)|f\rangle|^2 \\ & \times \delta(\boldsymbol{p}_{fi} - \boldsymbol{q})\delta(\omega_{fi} - \Delta),\end{aligned} \tag{17.29}$$

其中 V 为系统体积, $\omega_{fi} = E_f - E_i$, $\boldsymbol{p}_{fi} = \boldsymbol{p}_f - \boldsymbol{p}_i$.

容易证明, (17.29) 式与函数

$$K(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, t_1 - t_2) = -\mathrm{i}\mathrm{Tr}\left\{\mathrm{e}^{\frac{\Omega+\mu\hat{N}-\hat{H}}{T}} T_t(\tilde{\psi}^+(\boldsymbol{r}_1,t_1)\tilde{\psi}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\tilde{\psi}^+(\boldsymbol{r}_2,t_2)\tilde{\psi}(\boldsymbol{r}_2,t_2))\right\}$$

的傅里叶分量的虚部只差一个因子, 即

$$\mathrm{d}\sigma \propto -Va^2 \frac{\mathrm{Im}K(\boldsymbol{q},\Delta)}{1+\mathrm{e}^{-\Delta/T}}. \tag{17.30}$$

函数 K 乃是变量成对重合的双粒子格林函数, 其解析性质无异于单玻色粒子格林函数 G. 如果和 G^{R} 与 $\mathfrak{G}$ 类似地引入 K^{R} 和 $\mathfrak{K}$, 则对后者可以逐字重复关于函数 G, G^{R} 和 $\mathfrak{G}$ 所说的一切, 只须将 (17.1)~(17.21) 式中算符 $\psi(1), \psi^+(2)$ 相应地换成 $\psi^+(1)\psi(1)$ 和 $\psi^+(2)\psi(2)$.

因此为了求 $\mathrm{d}\sigma$, 只须求得温度格林函数 $\mathfrak{K}$, 并确定它在上半平面的解析延拓 K^{R}. 此后得

$$\mathrm{d}\sigma \propto -Va^2 \frac{\mathrm{Im}K^R(\boldsymbol{q},\Delta)}{1-\mathrm{e}^{-\Delta/T}}. \tag{17.30'}$$

有时将 (17.30′) 式写成另一形式:

$$\mathrm{d}\sigma = A\frac{S(\boldsymbol{q},\Delta)}{1-\mathrm{e}^{-\Delta/T}},$$

其中 A 是常数, 而 $S(\boldsymbol{q},\Delta)$ 是所谓结构函数:

$$S(\boldsymbol{q},\Delta) = 2\pi \mathrm{Im}K^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{q},\Delta).$$

不难验证, 函数 $S(\boldsymbol{q},\Delta)$ 乃是密度算符对易子平均值的傅里叶分量:

$$\langle[\rho(0),\rho(x)]\rangle = (2\pi)^{-4}\int S(\boldsymbol{q},\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\boldsymbol{q}\mathrm{d}\omega.$$

对函数 $S(\boldsymbol{q},\omega)$ 存在着一个有用的公式 (Cohen, Feynman[38] 和 Nozières, Pines[39]), 它对于玻色和费米粒子都成立:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega S(\boldsymbol{q},\omega)\mathrm{d}\omega=\frac{\bar{n}\boldsymbol{q}^2}{2m}, \tag{17.31}$$

$\bar{n}$ 乃是系统内粒子数密度: $\bar{n}=\langle\rho(x)\rangle$, 而 m 是自由原子质量.

为了推导 (17.31) 式, 最好利用粒子数密度算符和密度通量算符所满足的连续性方程:

$$\frac{\partial\rho(x)}{\partial t}+\mathrm{div}\boldsymbol{j}(x)=0, \tag{17.32}$$

其中 $\rho(x)=\psi^+(x)\psi(x)$; 如果液体粒子间的相互作用与其速度无关, 则密度通量算符为

$$\boldsymbol{j}(x)=-\frac{\mathrm{i}}{2m}(\psi^+\nabla\psi-(\nabla\psi^+)\psi).$$

方程 (17.32) 表示物质守恒律. 先应用此方程于对易子 $[\rho(1),\rho(2)]$, 当 $t_1=t_2$ 时有

$$\frac{\partial}{\partial_{t_1}}[\rho(1),\rho(2)]_{t_1=t_2}=-\mathrm{div}_1[\boldsymbol{j}(1),\rho(2)]_{t_1=t_2},$$

再利用时间变量相同时算符 ψ 和 ψ^+ 的对易关系 (6.2), 就得到

$$\frac{\partial}{\partial_{t_1}}[\rho(1),\rho(2)]_{t_1=t_2}=\frac{\mathrm{i}}{m}\mathrm{div}_1\left(\rho(1)\nabla_1\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)-\frac{1}{2}\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\nabla_1\rho(1)\right).$$

取此算符等式之平均值, 并注意由于系统的空间均匀性 $\nabla\bar{n}=0$, 求得傅里叶分量应满足等式

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega S(\boldsymbol{q},\omega)\mathrm{d}\omega=\frac{\bar{n}\boldsymbol{q}^2}{m},$$

然而 $S(\boldsymbol{q}-\omega)=-S(\boldsymbol{q},\omega)$, 故得 (17.31) 式. 由 (17.29) 式还得出

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S(\boldsymbol{q},\omega)}{1-\mathrm{e}^{-\omega/T}}\mathrm{d}\omega=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}\langle\rho(0)\rho(\boldsymbol{r})\rangle\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\bar{n}S(\boldsymbol{q}),$$

式中 $S(\boldsymbol{q})$(当 $\boldsymbol{q}\neq0$ 时) 就是我们在 §1 中引入的关联函数. 最后一个关系式变换成以下形式更为方便:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}S(\boldsymbol{q},\omega)\coth\frac{\omega}{2T}\mathrm{d}\omega=\bar{n}S(\boldsymbol{q}).$$

最后我们说明, 如何计算 (16.12) 型的对 ω_n 的求和. 注意对很大的 ω_n 函数 $\mathfrak{G}$ 为

$$\mathfrak{G}\approx\frac{1}{\mathrm{i}\omega_n} \tag{17.33}$$

(它直接得自 (17.24) 式和 (17.20) 式), 因而和

$$T\sum_{\omega_n}\mathfrak{G}(\omega_n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n\tau} \tag{17.34}$$

在 $\tau=0$ 时发散. 实际上从 $\mathfrak{G}(\tau)$ 的定义看出, 这表示它在 $\tau=0$ 处有一跃变.

我们令 τ 任意小, 但不为零. 这时级数 (17.34) 式收敛. 注意 (17.26) 式, 将它写成

$$2T\sum_{\omega_n\geqslant 0}{}' \cos\,\omega_n\tau\mathrm{Re}\,\mathfrak{G}(\omega_n)+2T\sum_{\omega_n\geqslant 0}{}' \sin\,\omega_n\tau\mathrm{Im}\,\mathfrak{G}(\omega_n)$$

(求和符号上的 "$'$" 表示 $\omega_n=0$ 的项取权重为 1/2). 由 (17.33) 式知, 当$\omega_n\to\infty$ 时 Re $\mathfrak{G}$ 比 $\dfrac{1}{\omega_n}$更快地趋向零, 故第一个和中可令 $\tau=0$. 为计算第二个和须注意, 在对 ω_n 求和时只有 $\omega_n\tau\sim 1$ 起主要作用, 即 $\tau\to 0$ 时大 ω_n 起作用. 因此对ω_n 的求和可换成求积分 $\left(T\Sigma\cdots\to\dfrac{1}{2\pi}\int\cdots\right)$, 当然 $\mathfrak{G}(\omega_n)$ 应取渐近值 (17.33) 式. 这样就有

$$\lim_{\tau\to 0}2T\sum_{\omega_n\geqslant 0}{}' \sin\,\omega_n\tau\mathrm{Im}\,\mathfrak{G}(\omega_n)=-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\,\tau x}{x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\mathrm{sgn}\,\tau.$$

我们由此得到计算和 (17.34) 式的如下规则:

$$\lim_{\tau\to 0}T\sum_{\omega_n}\mathfrak{G}(\omega_n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n\tau}=2T\sum_{\omega_n\geqslant 0}{}' \mathrm{Re}\,\mathfrak{G}(\omega_n)-\frac{1}{2}\mathrm{sgn}\tau. \tag{17.35}$$

第 4 章　费米液体理论

在本章里我们首先说明, 量子场论方法如何为费米液体一般理论提出根据.

§18　动量传递很小时顶角部分的性质. 零声

本节在相当程度上基于朗道[40] 所得的结果.

我们首先讨论 $T=0$ 时具有任意短程相互作用力的费米粒子系统. 本章里将格林函数的频率变量记为 ε 比较方便. 这种情况下格林函数的性质已在 §7 中研究过. 那里证明了, 函数 G^{R} 在复变数 ε 下半平面正实半轴① 附近的极点对应 "粒子" 型元激发, 而函数 G^{A} 在上半平面 $\varepsilon<0$ 半轴附近的极点对应空穴. 由于这两个函数都是 G 函数 (从变量 ε 的不同实半轴) 的解析延拓, 可以肯定, 在 $\varepsilon=0, |\boldsymbol{p}|=p_0$ 点的邻域中函数 G 的形状是②

$$G(\boldsymbol{p},\varepsilon)=\frac{a}{\varepsilon-v(|\boldsymbol{p}|-p_0)+\mathrm{i}\delta\mathrm{sgn}(|\boldsymbol{p}|-p_0)}, \tag{18.1}$$

其中系数 a 的意义已在 §7 中说明 [见 (7.40) 式]; $\delta\to+0$; $v(|\boldsymbol{p}|-p_0)$ 是差 $\varepsilon(\boldsymbol{p})-\mu$ 在 $|\boldsymbol{p}|=p_0$ 附近的展开式 [注意 p_0 由方程 $\varepsilon(p_0)=\mu$ 定义]. 展开系数 v 是元激发在费米面上的速度, 它等于 p_0/m^*, 其中 m^* 为元激发的有效质量.

我们讨论顶角部分 Γ 的性质. 在费米液体理论中这个函数和 G 一道起着重要作用. 我们考虑 p_1 接近 p_3, 而 p_2 接近 p_4 时顶角部分的行为. 引入记号:

$$\Gamma(p_1,p_2;p_1+k,p_2-k)\equiv\Gamma(p_1,p_2,k), \tag{18.2}$$

其中能量动量传递 $k=(\boldsymbol{k},\omega)$ 是很小的四维矢量 (即 $|\boldsymbol{k}|\ll p_0, |\omega|\ll\mu$). 我们来研究表示于图 57 的这种顶角部分中的最简图形. 这些图形的表达式包含两个格林函数的积分. 对于图形 57(a) 和图 57(b), $k=0$ 并不是特殊情况, 然而图形图 57(c) 中两个格林函数的极点在 $k\to0$ 时彼此接近起来. 我们以后将看到, 这使 Γ 中出现奇异性. 应当指出, 虽然图 57 诸图形式上只适用于成对作用力, 事实上图 57(c) 型对任何相互作用都是特殊的.

①对于 §7 中定义的给定 N 的格林函数, 这相当于 $\varepsilon>\mu$.

②本章所讨论的内容只适用于排斥力为主的正常费米系统. 在吸引力情况下将出现超导现象, 因而 (18.1) 式不适用 (见第 7 章).—— 译者注

以 $\Gamma^{(1)}$ 记一切可能的不包括 "奇异元素"($G(p)G(p+k)$ 线) 的 Γ 之图形总合. 不难看出, 对图 58 所表示的 "阶梯" 求和, 其中顶点是 $\Gamma(1)$, 而所有的线都是奇异的, 就可以得出完全的 Γ. 这种求和可用如下积分方程表示:

$$\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1,p_2;k)=\Gamma^{(1)}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1,p_2)-\mathrm{i}\int\Gamma^{(1)}_{\alpha\xi,\gamma\eta}(p_1,q)G(q)\times G(q+k)\Gamma_{\eta\beta,\xi\delta}(q,p_2,k)\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}. \tag{18.3}$$

由于 $k=0$ 时函数 $\Gamma^{(1)}$ 没有奇异性 (短程作用力), 我们已令其中 $k=0$.

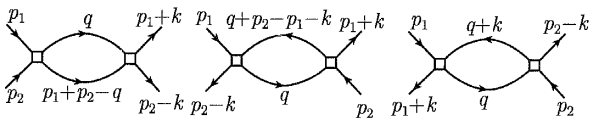


图 57

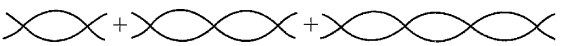


图 58

现在讨论 (18.3) 式中的积分. 它由两项合成, 一项来自距 $\varepsilon=0$, $|\boldsymbol{p}|=p_0$ 点很远的区域, 另一项是在此点邻域的积分, 后一项决定整个表达式的奇异性. 如果 k 很小, 这个邻域也可以取得很小, 在相应的积分里只有在 G 函数极点的邻域的积分才是重要的. 由于两个 G 的变量接近, 可认为积分号下其他量都随 q 缓慢变化. 仅当极点处于实轴的不同侧面时, 它们才有贡献. 为此必须 $|\boldsymbol{q}|<p_0$, $|\boldsymbol{q}+\boldsymbol{k}|>p_0$, 或相反. 注意到 k 很小, 就不难看出, 这时 $|\boldsymbol{q}|\approx p_0$ 而 $\varepsilon\approx 0$. 因此, 在对 q 的积分里与围绕极点有关的那部分中, 乘积 $G(q)G(q+k)$ 可换成 $A\delta(\varepsilon)\delta(|\boldsymbol{q}|-p_0)$.

对 ε 和 $|\boldsymbol{q}|$ 积分 $G(q)G(q+k)$, 就定出系数 A:

$$A=\frac{2\pi\mathrm{i}a^2}{v}\frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{k}}{\omega-\boldsymbol{v}\boldsymbol{k}},$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 是绝对值为 v、方向为 $\boldsymbol{q}$ 的矢量. 故乘积 $G(q)G(q+k)$ 可写成

$$G(q)G(q+\kappa)=\frac{2\pi\mathrm{i}a^2}{v}\frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{\kappa}}{\omega-\boldsymbol{v}\boldsymbol{\kappa}}\delta(\varepsilon)\delta(|\boldsymbol{q}|-p_0)+\varphi(q). \tag{18.4}$$

其中 $\varphi(\boldsymbol{q})$ 代表乘积 $G(q)G(q+k)$ 的正规部分, 它只在远区域的积分中重要 (因而已令其中 $k=0$).

当 $\boldsymbol{k},\omega\to 0$ 时, 表达式 (18.4) 的极限和 ω 与 $\boldsymbol{k}$ 之比密切相关. $\omega\to 0$, $\boldsymbol{k}\to 0$ 时 Γ 的极限也是这样.

先讨论 $\omega \to 0, \dfrac{|\boldsymbol{k}|}{\omega} \to 0$ 时 Γ 的极限. 这个极限我们记为 Γ^{ω}. 从 (18.3) 和 (18.4) 式得到

$$\begin{aligned}\Gamma^{\omega}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1,p_2) =&\Gamma^{(1)}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1,p_2) - \mathrm{i}\int \Gamma^{(1)}_{\alpha\xi,\gamma\eta}(p_1,q)\varphi(q)\\ &\times \Gamma^{\omega}_{\eta\beta,\xi\delta}(q,p_2)\frac{\mathrm{d}^4 q}{(2\pi)^4}.\end{aligned} \tag{18.5}$$

从 (18.3) 和 (18.5) 两个方程可消去 $\Gamma^{(1)}$. 为此我们有条件地将这些方程写成算符形式 (乘积应理解为积分):

$$\begin{aligned}&\Gamma^{\omega} = \Gamma^{(1)} - \mathrm{i}\Gamma^{(1)}\varphi\Gamma^{\omega},\\ &\Gamma = \Gamma^{(1)} - \mathrm{i}\Gamma^{(1)}(\mathrm{i}\Phi + \varphi)\Gamma.\end{aligned} \tag{18.6}$$

这里 $\mathrm{i}\Phi$ 表示 (18.4) 的第一项. 从 (18.6) 式的第一个方程式得到

$$\Gamma^{\omega} = (1 + \mathrm{i}\Gamma^{(1)}\varphi)^{-1}\Gamma^{(1)}.$$

在 (18.6) 式的第二个方程式中将含有 φ 的项移至左面, 并以算符 $(1+\mathrm{i}\Gamma^{(1)}\varphi)^{-1}$ 作用之, 然后得

$$\Gamma = \Gamma^{\omega} + \Gamma^{\omega}\Phi\Gamma.$$

将此关系写成明显的形式, 就有

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1,p_2;k) =&\Gamma^{\omega}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1,p_2) + \frac{a^2p_0^2}{(2\pi)^3 v}\int \Gamma^{\omega}_{\alpha\xi,\gamma\eta}(p_1,q)\\ &\times \Gamma_{\eta\beta,\xi\delta}(q,p_2)\frac{\boldsymbol{vk}}{\omega - \boldsymbol{vk}}\mathrm{d}\Omega.\end{aligned} \tag{18.7}$$

现在取另一极限, 即 $|\boldsymbol{k}| \to 0, \dfrac{\omega}{|\boldsymbol{k}|} \to 0$. 这个量我们记为 Γ^{k}. 从方程 (18.7) 求得 Γ^{k} 与 Γ^{ω} 的关系:

$$\begin{aligned}\Gamma^{k}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1,p_2) =&\Gamma^{\omega}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1,p_2) - \frac{a^2p_0^2}{(2\pi)^3 v}\int \Gamma^{\omega}_{\alpha\xi,\gamma\eta}(p_1,q)\\ &\times \Gamma^{k}_{\eta\beta,\xi\delta}(q,p_2)\mathrm{d}\Omega.\end{aligned} \tag{18.8}$$

让我们研究 $\boldsymbol{k},\omega$ 很小时函数 $\Gamma(p_1,p_2;k)$ 的极点. 由于在极点邻域 $\Gamma(p_1,p_2;k) \gg \Gamma^{\omega}(p_1,p_2)$, 可略去方程式 (18.7) 右端的 Γ^{ω}. 然后注意变量 p_2 以及脚标 β 和 δ 在方程式中起着参数的作用. 因此在极点附近函数 Γ 可以表示成两个函数的乘积 $\chi_{\alpha\gamma}(p_1;k)\chi'_{\beta\delta}(p_2;k)$. 此后方程 (18.7) 两端的 $\chi'_{\beta\delta}(p_2;k)$ 消去. 引入记号:

$$\nu_{\alpha\gamma}(\boldsymbol{n}) = \frac{\boldsymbol{nk}}{\omega - v\boldsymbol{nk}}\chi_{\alpha\gamma}(p_1;k),$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是沿 $\boldsymbol{p}_1$ 方向的单位矢量. $\nu_{\alpha\gamma}$ 的方程式为

$$(\omega - v\boldsymbol{nk})\nu_{\alpha\gamma}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{nk}\frac{p_0^2 a^2}{(2\pi)^3}\int \Gamma^{\omega}_{\alpha\xi,\gamma\eta}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})\nu_{\eta\xi}(\boldsymbol{l})\mathrm{d}\Omega. \tag{18.9}$$

关系式 (18.9) 和零声与自旋波的方程式的形状一致 (见 §2, (2.24) 式). 下一节中我们证明, 这是完全合乎规律的, 因为 Γ 的极点决定费米液体的声子型元激发能谱.

方程式 (18.9) 中 $a^2\Gamma^{\omega}$ 起着费米液体理论 (见 §2) 中引入的函数 f 的作用. 这个量本身并没有直接的物理意义. 然而它借 (18.8) 式而与 $a^2\Gamma^k$ 相联系. 我们现在就要证明, 这个量与两个 $|\boldsymbol{p}_1| = |\boldsymbol{p}_2| = p_0$ 的准粒子向前散射的幅度只差常数因子.

考虑关于两个粒子在真空中散射的辅助问题. 设在时刻 $t = -\infty$ 这个系统的波函数等于 $a^+_{p_3\gamma}a^+_{p_4\delta}\Phi_0$, Φ_0 是真空波函数. 当 $t = \infty$ 时系统转入状态 $S(\infty)a^+_{p_3\gamma}a^+_{p_4\delta}\Phi_0$. 因而粒子跃迁到状态 $\boldsymbol{p}_1\alpha, \boldsymbol{p}_2\beta$ 的散射幅比例于

$$-\mathrm{i}\langle a_{\boldsymbol{p}_1\alpha}a_{\boldsymbol{p}_2\beta}S(\infty)a^+_{\boldsymbol{p}_3\gamma}a^+_{\boldsymbol{p}_4\delta}\rangle_0, \tag{18.10}$$

其中 $<\cdots>_0$ 表示对真空平均. 算符 $S(\infty)$ 由 (8.8) 式决定, 也就是说, 它展成 H_{int} 的级数之后, 乃是 ψ 算符 T 乘积的积分之和.

根据 (8.10) 式, 每个这样的 T 乘积可表示成 N 乘积的集合. 显然在我们的矩阵元中, 只有含有四个 ψ 算符的各种收缩的 N 乘积才是重要的. 由于收缩是普通数字, 它们不参与求平均. 这时有两个粒子, 因而

$$N(\psi^+(x_3)\psi^+(x_4)\psi(x_1)\psi(x_2)) = \psi^+(x_3)\psi^+(x_4)\psi(x_1)\psi(x_2).$$

把矩阵元 (8.10) 式对真空求平均时, 这个 N 乘积给出因子

$$\exp\{\mathrm{i}(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{r}_3\boldsymbol{p}_3 - \boldsymbol{r}_4\boldsymbol{p}_4) - \mathrm{i}(\varepsilon_0(\boldsymbol{p}_1)t_1 + \varepsilon_0(\boldsymbol{p}_2)t_2 - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}_3)t_3 - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}_4)t_4)\}.$$

在 (18.10) 式中这个因子和只包含收缩的表达式一起对坐标积分, 结果我们得到一切具有四个顶点的图形的总合, 而且每个端点的能量和动量的关系为 $\varepsilon = \varepsilon_0(\boldsymbol{p})$.

这样的量相当于以前引入的双粒子格林函数 (10.17) 式的最后一项去掉外端 $G^{(0)}$ 线. 在我们所讨论的两个粒子在真空中散射问题里, 这些 $G^{(0)}$ 函数和完全 G 函数重合. 实际上根据 (7.3) 式有

$$G^{(0)}(\boldsymbol{r}, t) = 0, \quad \text{当} \quad t < 0.$$

而 G 的修正项的任何图中至少有一对线方向相反①(即一条 $G^0(t > 0)$, 一条 $G^{(0)}(t < 0)$), 故 $G^{(0)}$ 的任何修正都等于零.

①图 4(a) 型的图是例外. 但是 §8 中已指出, 这些图中的 $G^{(0)}(0)$ 应理解为极限 $\lim\limits_{t\to+0} G^{(0)}(-t)$, 当 $T \to 0$ 时, 它在我们的情况下等于零.

由于同样的原因, 顶角部分的图形中只剩下所有 $G^{(0)}$ 线指向一方的图, 如图 57(a) 之类.

由所有这些得出①, 散射幅 (18.10) 式等于 $\Gamma'_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1p_2;p_3p_4)|_{\varepsilon_i=\varepsilon_0(p_i)}$, 其中 Γ' 是所讨论问题的顶角部分.

表达双粒子格林函数和顶角部分的关系的 (9.17) 式这时成为

$$\begin{aligned}
&G^{\mathrm{II}'}_{\alpha\beta'\gamma\delta}(p_1,p_2;p_3,p_4)\\
&\quad=G^{(0)}(p_1)G^{(0)}(p_2)(2\pi)^4\\
&\qquad\times[\delta(p_1-p_3)\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}-\delta(p_1-p_4)\delta_{\beta\gamma}\delta_{\alpha\delta}]\\
&\qquad+\mathrm{i}G^{(0)}(p_1)G^{(0)}(p_2)G^{(0)}(p_3)G^{(0)}(p_4)\Gamma'_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1,p_2;p_3,p_4).
\end{aligned}\tag{18.11}$$

此式中的动量满足守恒律. $G^{\mathrm{II}'}$ 可以看成两个粒子的格林函数 (其名称亦由此而来). (18.11) 式第一项对应粒子的自由运动, 第二项对应其彼此散射.

回到费米液体, 比较式 (10.17) 和 (18.11). 当 ε 很小而 $|\boldsymbol{p}|$ 接近 p_0 时, 根据 (18.1) 式, 格林函数的形状很接近自由粒子的函数. 为了使 G^{II} 能够被视为两个相互作用粒子的格林函数, 它应当除以 a^2. 这时自由项的归一化与能量为 $\varepsilon(\boldsymbol{p})$ 的实际粒子的归一化完全相同.

(10.17) 式中第二项对应准粒子的散射. 与实际粒子的公式比较后, 我们得出结论:

$$a^2\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1,p_2;p_3,p_4)|_{\varepsilon_i=\varepsilon(p_i)-\mu}\tag{18.12}$$

起着准粒子散射幅的作用.

在 $|\boldsymbol{p}_1|=|\boldsymbol{p}_2|=p_0$ 的特殊情形下, 所有 $\varepsilon_i=0$. 这时动量传递很小的散射幅等于 $a^2\Gamma(p_1,p_2;k)(\omega=0)$, 而向前散射幅是 $a^2\Gamma^k$.

如果假定粒子间与自旋有关的相互作用纯粹来自交换, 则联系 $a^2\Gamma^k$ 和函数 $f=a^2\Gamma^\omega$ 的关系式 (18.8) 可以解出. 这时我们可将 $a^2\Gamma^k$ 写成

$$\frac{p_0^2}{\pi^2v}a^2\Gamma^k=A(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2)+B(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2)\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2,\tag{18.13}$$

而根据 (2.28) 式, 有

$$\frac{p_0^2}{\pi^2v}f=F.$$

Φ 和 Z 的方程 (见 (2.28) 式) 分离:

$$\begin{aligned}
A(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2)&=\Phi(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2)-\int\Phi(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}')A(\boldsymbol{n}',\boldsymbol{n}_2)\frac{\mathrm{d}\Omega'}{4\pi},\\
B(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2)&=Z(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2)-\int Z(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}')B(\boldsymbol{n}',\boldsymbol{n}_2)\frac{\mathrm{d}\Omega'}{4\pi}.
\end{aligned}\tag{18.14}$$

①所有的公式中我们省去了常数因子. 与微扰论比较 (见第 1 章), 就看出它等于 $\dfrac{4\pi}{m}$.

对于各向同性液体, 费米面上所有的量只和 $\cos(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2)=\cos\chi$ 有关. 把它们按拉格朗日多项式展开, 例如 $A(\chi)=\sum_l A_l P_l(\cos\chi)$. 然后立刻得到展开系数之间的关系:

$$A_l=\frac{\Phi_l}{1+\dfrac{\Phi_l}{2l+1}},\quad B_l=\frac{Z_l}{1+\dfrac{Z_l}{2l+1}}. \tag{18.15}$$

§19 有效质量. 边界动量和粒子数的关系. 能谱的玻色支. 比热

本节的这些结果是朗道和 Pitaevskii 得到的, 部分发表于文献 [41] 中.

§19.1 几个辅助关系式

我们首先为函数 G 推导几个有用的关系式. 设系统处于无限弱的场$\delta U(t)$ 中, 这个场是空间均匀但随时间缓慢变化的. 相互作用哈密顿量为 $H_{\rm int}=\int\psi_\alpha^+(\boldsymbol{r})\delta U(t)\psi_\alpha(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}$. 如果对 $H_{\rm int}$ 变换到相互作用表象, 则 G 函数对 δU 的级数展开第一级项为

$$\begin{aligned}\delta G_{\alpha\beta}(x,x')=-\int \mathrm{d}^4y\delta U(t_y)\{&\langle T(\tilde\psi_\alpha(x)\tilde\psi_\gamma^+(y)\tilde\psi_\gamma(y)\tilde\psi_\beta^+(x'))\rangle\\&-\langle T(\tilde\psi_\alpha(x)\tilde\psi_\beta^+(x'))\rangle\langle\tilde\psi_\gamma^+(y)\tilde\psi_\gamma(y)\rangle\}.\end{aligned}$$

这里 $\tilde\psi$ 是无外场 δU 时相互作用粒子的海森伯算符. 利用 (10.17) 式得

$$\begin{aligned}\delta G_{\alpha\beta}(x,x')=&\delta_{\alpha\beta}\int \mathrm{d}^4y\delta U(t_y)G(x-y)G(y-x')\\&-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4y\mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_4\delta U(t_y)G(x-x_1)G(y-x_2)\\&\times G(x_3-x')G(x_4-y)\Gamma_{\alpha\gamma,\beta\gamma}(x_1,x_2;x_3,x_4).\end{aligned}$$

变换为傅里叶分量, 有

$$\begin{aligned}\delta G_{\alpha\beta}=&\delta_{\alpha\beta}G(p)\delta U(\omega)G(p+k_1)-\mathrm{i}G(p)G(p+k_1)\\&\times\int\Gamma_{\alpha\gamma,\beta\gamma}(p,q;k_1)G(q)\delta U(\omega)G(q+k_1)\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4},\end{aligned}$$

其中 $k_1=(0,\omega)$.

由于外场 δU 不影响粒子自旋, $\delta G_{\alpha\beta}$ 应正比于 $\delta_{\alpha\beta}$. 取 $\frac{1}{2}\mathrm{Tr}$, 得

$$\delta G=G(p)\delta UG(p+k_1)-\mathrm{i}G(p)G(p+k_1)$$

$$\times \frac{1}{2}\int \Gamma_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p,q;k_1)G(q)\delta U(\omega)G(q+k_1)\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}.$$

另外, 如果在哈密顿量中增加一项:

$$\delta U(t)\int \psi_\alpha^+(\boldsymbol{r})\psi_\alpha(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\delta U(t)\hat{N},$$

则在 $\delta U\to$ 常数的极限情况下, 函数 G 只是乘上$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta U(t-t')}$, 这相当于在 ε 上增加一项 $-\delta U$. 因此 $\omega\to 0$ 时, $\dfrac{\delta G}{\delta U}\to -\dfrac{\delta G}{\delta\varepsilon}$. 因而求得

$$\frac{\delta G}{\delta\varepsilon}=-\{G^2(p)\}_\omega\left[1-\frac{\mathrm{i}}{2}\int \Gamma^\omega_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p,q)\{G^2(q)\}_\omega\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}\right],$$

其中 $\{G^2(p)\}_\omega=\varphi$[见 (18.4)] 表示 $G(p)G(p+k_1)$ 在 $\omega\to 0$ 时的极限. 我们来讨论在 $G(p)$ 的极点附近的这个关系. 这时 $G(p)$ 可写成 (18.1) 式的形状. 除以 $-\{G^2(p)\}_\omega$ 后, 得到第一个关系式:

$$\frac{\partial G^{-1}(p)}{\partial\varepsilon}=\frac{1}{a}=1-\frac{\mathrm{i}}{2}\int \Gamma^\omega_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p,q)\{G^2(q)\}_\omega\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}. \tag{19.1}$$

第二个关系式我们推导如下. 设粒子具有无限小电荷 δe, 而系统处于空间略有不均匀但不随时间变化的磁场中. 这时哈密顿量中动量算符要加上一项 $-\dfrac{\delta e}{c}\boldsymbol{A}$. 如果电荷 δe 非常小, 则哈密顿量的变化为 $-\dfrac{\delta e}{mc}\int \psi_\alpha^+(\boldsymbol{r})\hat{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\psi_\alpha(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V$, 其中 $\hat{\boldsymbol{p}}$ 是动量算符, 和前面一样得到格林函数的变化:

$$\begin{aligned}\delta G=&-G(p)\frac{\delta e}{m}(\boldsymbol{p}\boldsymbol{A})G(p+k_2)+\frac{\mathrm{i}}{2}G(p)G(p+k_2)\\&\times\int \Gamma_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p,q;k_2)G(q)\frac{\delta e}{m}(\boldsymbol{q}\boldsymbol{A})G(q+k_2)\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4},\end{aligned}$$

其中 $k_2=(\boldsymbol{k},0)$(我们假定这时 $\boldsymbol{k}$ 很小). 另一方面, 由规范不变性知道, $k\to 0$ 时, 动量的任何函数都应成为 $\boldsymbol{p}-\boldsymbol{A}\delta e$ 的函数. 因此, $k\to 0$ 时 $\dfrac{\delta G}{\boldsymbol{A}\delta e}=-\dfrac{\delta G}{\delta\boldsymbol{p}}$.

因而在 $\delta e\to 0,\boldsymbol{k}\to 0$ 的极限情况下, 我们得到 $G(p)$ 在极点附近的第二个关系式:

$$\begin{aligned}\frac{\partial G^{-1}}{\partial\boldsymbol{p}}&=-\frac{\boldsymbol{v}}{a}=-\frac{\boldsymbol{p}}{m^*a}\\&=-\frac{\boldsymbol{p}}{m}+\frac{\mathrm{i}}{2}\int \Gamma^k_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p,q)\frac{\boldsymbol{q}}{m}\{G^2(q)\}_k\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}.\end{aligned} \tag{19.2}$$

考虑系统作为整体以很小的缓慢变化的速度 $\delta\boldsymbol{u}(t)$ 运动时函数 G 的变化, 我们就得到第三个关系式.

系统哈密顿量的变化在于增加了一项

$$-\delta\boldsymbol{u}\hat{\boldsymbol{P}}=-\delta\boldsymbol{u}\int\psi_\alpha^+(\boldsymbol{r})\hat{\boldsymbol{p}}\psi_\alpha(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

其中 $\hat{\boldsymbol{P}}$ 是系统的总动量算符. 函数 G 的变化表示如下:

$$\begin{aligned}\delta G=&-G(p)\boldsymbol{p}\delta\boldsymbol{u}(\omega)G(p+k_1)+\frac{\mathrm{i}}{2}G(p)G(p+k_1)\\&\times\int\Gamma_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p,q;k_1)\boldsymbol{q}\delta\boldsymbol{u}(\omega)G(q)G(q+k_1)\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4},\end{aligned}$$

其中 $k_1=(0,\omega)$. 另外, $\omega=0$ 时这个变换就等于过渡到以恒定速度 $\delta\boldsymbol{u}$ 运动的坐标系. 根据伽俐略公式, 这时系统的能量变化是 $-\delta\boldsymbol{u}\boldsymbol{p}$. 频率 ε 变成 $\varepsilon+\delta\boldsymbol{u}\boldsymbol{p}$, 因而格林函数的变化是 $\dfrac{\partial G}{\partial\varepsilon}\boldsymbol{p}\delta\boldsymbol{u}$.

这样, 当 $\omega\to0,\delta\boldsymbol{u}\to0$, 在极点附近就得到

$$\boldsymbol{p}\frac{\partial G^{-1}}{\partial_\varepsilon}=\frac{\boldsymbol{p}}{a}=\boldsymbol{p}-\frac{\mathrm{i}}{2}\int\Gamma^\omega_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p,q)\boldsymbol{q}\{G^2(q)\}_\omega\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}.\tag{19.3}$$

最后, 如果考虑函数 G 在不随时间变化、但空间略有不均匀的弱场 $\delta U(\boldsymbol{r})$ 影响下的变化, 就得到最后一个关系式. 这时 G 的变化为

$$\begin{aligned}\delta G=&G(p)\delta U(\boldsymbol{k})G(p+k_2)-\frac{\mathrm{i}}{2}G(p)G(p+k_2)\\&\times\int\Gamma_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p,q;k_2)G(q)\delta U(\boldsymbol{k})G(q+k_2)\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4},\end{aligned}$$

其中 $k_2=(\boldsymbol{k},0)$.

另一方面, 在恒定外场中如下的平衡条件应成立:

$$\mu+\delta U=\text{常数}.$$

在 $\boldsymbol{k}\to0$ 的极限, 化学势改变是小常量 $-\delta U$.

所以在 $\boldsymbol{k}\to0,\delta U\to0$ 时我们得到

$$\frac{\partial G^{-1}}{\partial\mu}=1-\frac{\mathrm{i}}{2}\int\Gamma^k_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p,q)\{G^2(q)\}_k\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4.}.\tag{19.4}$$

这式子对任何动量都成立.

§19.2 费米液体理论基本关系的证明

借助式 (19.1)—(19.4) 以及联系 Γ^k和Γ^ω 的 (18.8) 式, 可以导出费米液体理论的基本关系式. 顺便指出, (18.8) 式适用于 p_1与p_2 为任意动量时的 Γ, 它们完全不必在费米面附近.

首先把 (18.8) 式代入 (19.2) 式, 这时得到

$$-\frac{\boldsymbol{p}}{m^*a}+\frac{\boldsymbol{p}}{m}=\frac{\mathrm{i}}{2}\int\Gamma^\omega_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p,q)\frac{\boldsymbol{q}}{m}\{G^2(q)\}_k\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi^4)}$$
$$-\frac{1}{2}\frac{p_0^2a^2}{(2\pi)^3v}\int\Gamma^\omega_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p,q)\left(-\frac{\boldsymbol{q}}{m^*a}+\frac{\boldsymbol{q}}{m}\right)\mathrm{d}\Omega.$$

从 (18.4) 式得

$$\{G^2(p)\}_k=\{G^2(p)\}_\omega-\frac{2\pi\mathrm{i}a^2}{v}\delta(\varepsilon)\delta(|\boldsymbol{p}|-p_0). \tag{19.5}$$

将它代入前式第一个积分中并利用 (19.3) 式. 消去共同因子后, 在 $|\boldsymbol{p}|=p_0,\varepsilon=0$ 点得到

$$\frac{1}{m}=\frac{1}{m^*}+\frac{p_0}{2(2\pi)^3}\int a^2\Gamma^\omega_{\alpha\beta,\alpha\beta}(\chi)\cos(\chi)\mathrm{d}\Omega. \tag{19.6}$$

不难看出, 这个公式和 (2.12) 式一致, 而且 $a^2\Gamma^\omega_{\alpha\beta,\alpha\beta}=\mathrm{Tr}_{\sigma,\sigma'}(\chi,\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\sigma}')$.

现在证明 (2.1) 式. 讨论函数 G 在极点, 即 $|\boldsymbol{p}|\to p_0,\varepsilon\to0$ 点附近的表达式 (18.1). 此式中系数 a,v 和动量 p_0 与化学势 μ 有关. 对 μ 微分 G 式, 容易看出, 由于对 μ 微分 a 和 v 而产生的项在极点附近 ($\sim(|\boldsymbol{p}|-p_0)/\mu$ 或 ε/μ), 比微分 p_0 而产生的项小. 这样就得到

$$\frac{\partial G}{\partial\mu}\approx-G^2\frac{v}{a}\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}\mu}.$$

由此

$$v\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}\mu}=a\left(\frac{\partial G^{-1}}{\partial\mu}\right)_{\substack{\varepsilon=0\\|\boldsymbol{p}|=p_0}}.$$

将 (19.4) 式代入, 并把 Γ^k 通过 (18.8) 式表达, 这给出

$$\frac{v}{a}\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}\mu}=1-\frac{\mathrm{i}}{2}\int\Gamma^\omega_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p,q)\{G^2(q)\}_k\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}$$
$$-\frac{1}{2}\frac{p_0^2a^2}{(2\pi)^3v}\int\Gamma^\omega_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p,q)\left(\frac{v}{a}\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}\mu}-1\right)\mathrm{d}\Omega.$$

根据 (19.5) 式代入 $\{G^2\}_k$, 并引用 (19.1) 式, 简化后得出

$$v\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}\mu}=\left[1+\frac{p_0^2}{2(2\pi)^3v}\int a^2\Gamma^\omega_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p,q)\mathrm{d}\Omega\right]^{-1}. \tag{19.7}$$

系统中的总粒子数由 (7.37) 式给定. 对 μ 微分该式, 得到①

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(N/V)}{\mathrm{d}\mu}&=-2\mathrm{i}\int\frac{\partial G(p)}{\partial\mu}\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\\&=2\mathrm{i}\int\frac{\partial G^{-1}(p)}{\partial\mu}\{G^2(p)\}_k\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}.\end{aligned}$$

将 (19.4) 式代入, 并借助 (18.8) 式将 Γ^k 通过 Γ^ω 表示, 这时得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(N/V)}{\mathrm{d}\mu}=&2\mathrm{i}\int\{G^2(p)\}_k\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\\&+\int\{G^2(p)\}_k\Gamma^\omega_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p,q)\{G^2(q)\}_k\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\\&-\frac{\mathrm{i}p_0^2a^2}{(2\pi)^3v}\int\{G^2(p)\}_k\Gamma^\omega_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p,q)\left(\frac{v}{a}\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}\mu}-1\right)\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{d}\Omega.\end{aligned}$$

再代入 (19.5) 式, 并利用 (19.1) 式, 结果得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(N/V)}{\mathrm{d}\mu}=&2\mathrm{i}\int\{G^2(p)\}_\omega\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}+\int\{G^2(p)\}\omega\Gamma^\omega_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p,q)\\&\times\{G^2(q)\}_\omega\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}+\frac{8\pi ap_0^2}{(2\pi)^3v}-\frac{8\pi p_0^2(a-1)}{(2\pi)^3v}v\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}\mu}\\&-8\pi\left[\frac{p_0^2a^2}{(2\pi)^3v}\right]^2\frac{1}{2}\int\Gamma^\omega_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p,q)\frac{v}{a}\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}\mu}\mathrm{d}\Omega.\end{aligned}$$

根据 (19.1) 式, 上式右端前两项乃是

$$-2\mathrm{i}\int\frac{\partial G}{\partial\varepsilon}\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}=-2\mathrm{i}\int[G(\varepsilon=\infty)-G(\varepsilon=-\infty)]\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^4},$$

然而此式等于零, 因为按照 (7.21) 式 $\varepsilon\to\pm\infty$ 时, $G\to0$. 这还可从另一个事实看出, 即所写出的式子等于改变计算能量的起点时, 系统内粒子数的变化.

在剩下的最后一项里根据 (19.7) 式算出 $\int a^2\Gamma^\omega\mathrm{d}\Omega$, 我们得到

$$\frac{\mathrm{d}(N/V)}{\mathrm{d}\mu}=\frac{8\pi p_0^2}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}\mu}.\tag{19.8}$$

以后要证明, 此式可以对 μ 积分, 最终有

$$\frac{N}{V}=\frac{8\pi}{3}\frac{p_0^3}{(2\pi)^3}.$$

借助 (19.7) 可以验证声速的公式 (2.19). 为此只须指出, 由于 (19.8) 式, (19.7) 式就和 (2.18) 式一致.

①这里为简单起见, 省去了积分下的因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon t}(t\to+0)$.

§19.3　能谱的玻色支

现在讨论声子元激发问题. 为此我们作类似 (7.32), (7.33) 式的分析. 系统的状态在时刻 $t=t'$ 由波函数

$$\Psi_0(t')=\frac{1}{V}\sum_{p,\alpha}\psi_{\boldsymbol{p}\alpha}(t')\psi^{+}_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}\alpha}(t')\,\Phi_{\mathrm{i}}(t') \tag{19.9}$$

(这里 $|\boldsymbol{k}|\ll p_0$; $\psi_{\boldsymbol{p}\alpha}$ 表示相互作用表象中动量为 $\boldsymbol{p}$ 的粒子的场算符) 描述, 考虑它如何随时间变化. 依次作与 (7.32)—(7.33) 式一样的运算, 得出概率幅度

$$\begin{aligned}\langle\Psi_0^{*}(t)\,\Psi(t')\rangle&=\frac{1}{V^2}\sum_{\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\alpha,\beta}\langle\tilde{\psi}_{\boldsymbol{p}_2\beta}(t)\tilde{\psi}^{+}_{\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{k}\beta}(t)\tilde{\psi}_{\boldsymbol{p}_1\alpha}(t')\tilde{\psi}^{+}_{\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{k}\alpha}(t')\rangle\\&=-\int G^{\mathrm{II}}_{\alpha\beta,\alpha\beta}(\boldsymbol{p}_1,t',\boldsymbol{p}_2,t;\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{k},t',\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{k},t)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2}{(2\pi)^3}\\&=-\int G^{\mathrm{II}}_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p_1,p_2;p_1+k,p_2-k)\frac{\mathrm{d}^4p_1}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4p_2}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t')}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi},\\&\qquad k=(\boldsymbol{k},\omega).\end{aligned}$$

以 G^{II} 的 (10.17) 式代入, 这时我们得到

$$\begin{aligned}\langle\Psi_0(t)\,\Psi(t)\rangle=\int\Bigg[&2\int G(p)G(p+k)\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\\&-\mathrm{i}\int G(p_1)G(p_1+k)\Gamma_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p_1,p_2;k)\\&\times G(p_2)G(p_2-k)\frac{\mathrm{d}^4p_1}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4p_2}{(2\pi)^4}\Bigg]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t')}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}.\end{aligned}\tag{19.10}$$

方括弧内的表达式 (我们记为 $\mathrm{i}a\Pi$) 可借助 (18.4), (18.7) 和 (19.1) 诸式继续变换. 变换的目的在于消去包含离 $|\boldsymbol{p}|=p_0$, $\varepsilon=0$ 点很远区域的积分项. 其作法一如本节中其他推导. 顶角部分 Γ 借助 (18.7) 式通过 Γ^{ω} 表示, 而 $\int\Gamma^{\omega}\varphi$ 型积分按 (19.1) 式代换.

结果函数 Π 为

$$\begin{aligned}\Pi=&\frac{2p_0^2}{(2\pi)^3v}\int\frac{\boldsymbol{vk}}{\omega-\boldsymbol{vk}}\mathrm{d}\Omega+\left(\frac{p_0^2}{(2\pi)^3v}\right)^2\int\frac{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{k}}{\omega-\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{k}}\\&\times a^2\Gamma_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p_1,p_2;k)\frac{\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{k}}{\omega-\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{k}}\mathrm{d}\Omega_1\mathrm{d}\Omega_2.\end{aligned}$$

直接验证表明, Π 可以写成 $\dfrac{p_0^2}{(2\pi)^3v}\int\Pi_{1\alpha\alpha}\mathrm{d}\Omega$, 其中 $\Pi_{1\alpha\gamma}$ 满足方程式:

$$(\omega-\boldsymbol{vk})\Pi_{1\alpha\gamma}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{n},\omega)-\frac{p_0^2(\boldsymbol{vk})}{(2\pi)^3v}\frac{1}{2}\int a^2\Gamma^{\omega}_{\gamma\eta,\alpha\xi}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}')$$

$$\times \mathit{\Pi}_{1\eta\xi}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{n}',\omega)\mathrm{d}\Omega' = (\boldsymbol{vk})\delta_{\alpha\gamma}. \tag{19.11}$$

和在 §7 中一样, 从公式 (19.10) 看出 $t\to\infty$ 时 $\langle\Psi_0^*(t)\Psi(t)\rangle$ 的数值取决于函数 $\mathit{\Pi}$ 在复变数 ω 下半平面上的极点. 如果在 (19.11) 式中抛去右端, 就得到极点的方程. 将所得方程和 (18.9) 式比较, 我们看出数值 $\mathit{\Pi}_1$ 相当于 ν. 既然我们关心的不是 $\mathit{\Pi}_1$, 而是 $\mathrm{Tr}_\sigma\int\mathit{\Pi}_1\mathrm{d}\Omega$, 则只须从 (18.9) 式的解中取在垂直矢量 $\boldsymbol{k}$的平面中各向同性的解. 改换函数 $\Psi_0(t)$ 的取法, 我们可借同一方法求出函数 $\nu_{\alpha\gamma}$ 所有分量 (既对角度, 又对自旋) 的方程式.

这样就证明了, 费米液体中可能存在一类元激发, 其能谱由函数 $\mathit{\Gamma}$ 的极点, 即方程式 (18.9) 给定. 这些元激发遵从玻色统计, 因为它们对应的算符是费米算符的二次型 (见 (19.9) 式). 在 §2 里已说明, 这类元激发乃是零声谱的各支. 这就阐明了函数 $\mathit{\Gamma}$ 在动量与能量传递很小的区域内的极点的物理意义, 同时证明了方程式 (18.9) 和 (2.24) 等价.

从 (19.9) 式得知, 声子的元激发可以看成动量接近的准粒子和空穴束缚对.

§19.4 费米动量 p_0 和粒子数关系的另一推导法

这里我们叙述 (2.1) 式的另一推导法. 这个推导直接给出 (2.1) 式, 而不是微分关系 (19.8) 式. 本段采用了 Luttinger 和 Ward[34] 的结果.

将决定密度的 (7.37) 式写成如下形式:

$$\frac{N}{V} = 2\mathrm{i}\int\left[\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\ln G(p) - G(p)\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Sigma(p)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon t}\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}, \tag{19.12}$$

其中 $t\to+0$, 而且 Σ 是完全不可约自能部分 $[G=(\varepsilon-\xi-\Sigma)^{-1}]$. 我们证明, 方括弧中第二项的积分等于零. 为此首先要指出, $\Sigma(p)$ 可看成 G 的某个泛函对 $G(p)$ 的变分导数, 即

$$\delta X = \int\Sigma(p)\delta G(p)\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}. \tag{19.13}$$

计算变分导数 $\dfrac{\delta\Sigma(p)}{\delta G(p)}$. 为此讨论相应于 Σ 的图形, 并在每个图形中依次变分各条 G 线, 取图 10(c) 的自能部分为例. 如果依次将三条 G 线之一分出, 每次将这条 G 线的频率和动量记为 ε_q 和 q, 则不难看出, 结果等于这个 G 函数乘上两个图形之和, 这两个图形正是 §18 中引入的函数 $\mathit{\Gamma}^{(1)}(p,q)$ 的二级近似, 即函数 $\mathit{\Gamma}(p,q)$ 中不含有两个相同 G 函数的 "奇异元素" 的那部分的二级近似. 对构成 Σ 的全部图形完成同一手续, 就得到

$$\delta\Sigma(p) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\int\mathit{\Gamma}^{(1)}_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p,q)\delta G(q)\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}.$$

由此得

$$\frac{\delta\Sigma(p)}{\delta G(q)} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\Gamma^{(1)}_{\alpha\beta,\alpha\beta}(p,q). \tag{19.14}$$

这个量对置换 $p \rightleftharpoons q$ 是对称的, 我们知道, 这是泛函 X 存在的充分条件.

泛函 X 可以表示成只包括完全 G 线的图形的总和. 从 (19.13) 式看出, 将 Σ 的每个图形 (由 G 线构成的骨架图) 以完全 G 线 "封闭" 之, 就得出所需的图形. 但为了得到由 (19.13) 式定义的 X 的正确表达式, 还应引入与图形类型有关的系数 (例如只有一种相互作用时, 系数等于 $\frac{1}{n}$, 此处 n 是顶点数目).

如果所有 G 线的频率都改成小量 $\delta\varepsilon^{(0)}$, 构成 X 的图形并不改变, 这是因为对频率的积分限仍是 $(-\infty,+\infty)$, 而每个顶点的 δ 函数中带 "+" 号和 "−" 号的 ε_i 一样多. 由此得出

$$\frac{\delta X}{\delta\varepsilon^{(0)}} = \int \Sigma(p)\frac{\partial G(p)}{\partial\varepsilon}\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4} = 0.$$

回到 (19.12) 式. 方括弧中第二项的积分可写成

$$-2\mathrm{i}\int G(p)\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Sigma(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon t}\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4} = -2\mathrm{i}\int G(p)\Sigma(p)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^4}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} + 2\mathrm{i}\int\Sigma(p)\frac{\partial G(p)}{\partial\varepsilon}\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}.$$

这里右边第二项等于零. 至于第一项, 则根据(7.21) 式, $\varepsilon\to\infty$ 时,

$$G(\boldsymbol{p},\varepsilon)\approx G^{(0)}(\boldsymbol{p},\varepsilon)\approx\frac{1}{\varepsilon},$$

即 $\Sigma(p)$ 不可能是正比于 ε 而增长, 因而 $\varepsilon\to\infty$ 时 $G(p)\Sigma(p)\to 0$. 所以我们就证明了 (9.12) 式第二个积分为零. 因此

$$\frac{N}{V} = 2\mathrm{i}\int\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\ln G(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon t}\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}. \tag{19.15}$$

§7 中已指出, G 不是解析函数, 可存在着在上半平面解析的函数 $G_{\mathrm{R}}(\varepsilon)$, 它在 $\varepsilon>0$ 时等于 $G(\varepsilon)$, 而在 $\varepsilon<0$ 时等于 $G^*(\varepsilon)$. 还可以证明, 函数 G_{R} 在上半平面没有极点①. 由此得

$$\begin{aligned}\frac{N}{V} &= 2\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\ln G_{\mathrm{R}}(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon t}\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\\ &\quad + 2\mathrm{i}\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{2\pi}\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\ln\frac{G(p)}{G^*(p)}\\ &= 2\mathrm{i}\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{2\pi}\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\ln\frac{G(p)}{G^*(p)}\end{aligned}$$

①其证明与证明复数介电常数 $\varepsilon(\omega)$ 在变量 ω 上半平面没有零点同 (见 [42], §62).

$$= \frac{\mathrm{i}}{\pi}\int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\ln\frac{G(p)}{G^*(p)}\Bigg|_{-\infty}^{0}$$

(含有 G_{R} 的积分中可将积分路线移至 $\mathrm{Im}\varepsilon\to\infty$ 的区域, 于是它趋向零).

以 φ 记 G 函数的相角, 则

$$\frac{N}{V} = -\frac{2}{\pi}\int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}[\varphi(0)-\varphi(-\infty)].$$

讨论从 $\varepsilon=0$ 到 $\varepsilon=-\infty$ 时 G 函数相角的变化. 从 §7 知道, $\varepsilon<0$ 时 $\mathrm{Im}G>0$, 而在 $\varepsilon=0$ 时 $\mathrm{Im}\,G=0$. 当 $\varepsilon\to-\infty$ 时, $\mathrm{Im}\ G$ 比 $\mathrm{Re}\,G$ 减小得更快, 而 $\mathrm{Re}G\approx\dfrac{1}{\varepsilon}<0$. 由于 $\mathrm{Im}\ G$ 的符号一定, 在 G 的复数平面上代表对应给定ε 的 $\mathrm{Im}\ G$ 和 $\mathrm{Re}\ G$ 的点, 只能在上半平面移动, 即相角只能从 0 变成 π. 既然 $\varepsilon\to-\infty$ 时, $\dfrac{\mathrm{Im}\,G}{\mathrm{Re}\,G}\to-0$, 则 $\varphi(-\infty)=\pi$. $\varepsilon=0$ 点的相角, 决定 $\mathrm{Re}\,G(\boldsymbol{p},0)\equiv G(\boldsymbol{p},0)$ 的符号. 如果 $G(\boldsymbol{p},0)>0$, 则$\varphi(0)=0$. 如果 $G(\boldsymbol{p},0)<0$, 则$\psi(0)=\pi$.

这样我们就从 (19.15) 式得到

$$\frac{N}{V} = 2\int_{G(\boldsymbol{p},0)>0}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}. \tag{19.16}$$

$\boldsymbol{G(p,0)>0}$ 的区域由某个表面包围, 在这个表面上函数 G 或趋近零, 或趋向无穷大. $G(\boldsymbol{p},0)$ 趋近零 ($\Sigma\to\infty$), 可能对应超导 (见 §34). 至于 $G(\boldsymbol{p},0)$ 趋向无穷大, 则这发生在普通费米液体的费米面上.

在费米面 (这里是费米球 $|\boldsymbol{p}|=p_0$) 附近, $G(\boldsymbol{p},0)=-\dfrac{a}{\xi}$, 其中 $a>0$, 即 $G(\boldsymbol{p},0)>0$ 的区域相当于 $\xi<0$(费米球内部). 算出 (19.16) 式的积分, 就得到 (2.1) 式.

§19.5 比热

迄今我们讨论了 $T=0$ 时的费米液体. 研究温度大于零时费米液体的性质也是有意义的. 自然应期待, 温度很低时所有的量仍由 $T=0$ 时费米液体的特征量决定. 我们以比热的计算为例子说明这一点. 我们为此目的而采用的分出温度修正项的方法, 在其他计算中也是有用的.

我们从系统总粒子数作为 μ 和 T 的函数的表达式 (16.12) 出发:

$$\frac{N(\mu,T)}{V} = 2T\sum_{\varepsilon}\int_{\tau\to+0}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\mathfrak{G}(\boldsymbol{p},\varepsilon)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon\tau}. \tag{19.17}$$

知道了这个函数就可能利用热力学公式

$$\left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_{\mu} = \left(\frac{\partial S}{\partial \mu}\right)_{T} \tag{19.18}$$

决定熵.

考虑 N 的公式中的 $\mathfrak{G}$ 函数. 如果注意到, 这是完全 $\mathfrak{G}$ 函数, 它是含有对频率求和的一切可能图形相加的结果, 则很清楚, $\mathfrak{G}(\boldsymbol{p},\varepsilon)$ 和温度的关系不仅仅在于离散变量 $\varepsilon=\pi T(2n+1)$. 因此我们将它记做 $\mathfrak{G}(T;\boldsymbol{p},\varepsilon)$. 从第 3 章知道, 函数 $\mathfrak{G}$ 和自能部分 Σ 的关系是

$$\mathfrak{G}^{-1}(T;\boldsymbol{p},\varepsilon)=\mathfrak{G}^{(0)-1}(\boldsymbol{p},\varepsilon)-\Sigma(T;\boldsymbol{p},\varepsilon). \tag{19.19}$$

注意函数 $\mathfrak{G}^{(0)}(\boldsymbol{p},\varepsilon)$ 仅仅通过 ε 和温度发生关系. 设 $T\to 0$, 但 $\varepsilon=$ 常数. (19.19) 式变成

$$\mathfrak{G}^{-1}(0;\boldsymbol{p},\varepsilon)=\mathfrak{G}^{(0)-1}(\boldsymbol{p},\varepsilon)-\Sigma(0;\boldsymbol{p},\varepsilon). \tag{19.20}$$

从 (19.19) 和 (19.20) 式求得

$$\mathfrak{G}^{-1}(T;\boldsymbol{p},\varepsilon)=\mathfrak{G}^{-1}(0;\boldsymbol{p},\varepsilon)-[\Sigma(T;\boldsymbol{p},\varepsilon)-\Sigma(0;\boldsymbol{p},\varepsilon)]. \tag{19.21}$$

函数 $\Sigma(0;\boldsymbol{p},\varepsilon)$和$\Sigma(T;\boldsymbol{p},\varepsilon)$ 的差别在于, 所有对频率的求和按公式

$$T\sum_{\varepsilon}\cdots\to\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\varepsilon\cdots$$

换成了积分.

可以用如下方法求得低温下的差 $\Sigma(T)-\Sigma(0)$. 讨论 $\Sigma(T)$ 和 $\Sigma(0)$ 的两个相同图形, 例如, $\Sigma_1(T)$ 和 $\Sigma_1(0)$. 我们将认为, 这些图形是由完全 $\mathfrak{G}$ 线构成的. 如果在 $\Sigma_1(T)$ 中将所有的求和换成积分, 则所得图形仍然与 $\Sigma_1(0)$ 不同, 这是因为构成此图的各条 $\mathfrak{G}(T)$线与$\mathfrak{G}(0)$ 不同. 在一级近似下只须考虑一条 $\mathfrak{G}(T)$ 线与 $\mathfrak{G}(0)$ 的差别, 而令其他线等于 $\mathfrak{G}(0)$. 求和与积分的差别也对 $\Sigma_1(T)-\Sigma_1(0)$ 有贡献. 只有当相应频率很低, 即数量级为 T 时, 后一差别才表现出来. 一级近似下有重要意义的频率范围, 是 $\mathfrak{G}$ 线中某一线具有数量级为 T 的频率, 而其余的频率高得多. 因此可从图形中分出一条频率低的 $\mathfrak{G}$ 线, 而在其余地方将求和换成积分, 将 $\mathfrak{G}(T)$换成$\mathfrak{G}(0)$.

因此我们必须对 Σ_1 图所有的 $\mathfrak{G}$ 线求变分. 计算完全和上节相同. 对构成 Σ 的全部图形完成这一手续, 就得到

$$\begin{aligned}\Sigma(T;\boldsymbol{p},\varepsilon)-\Sigma(0;\boldsymbol{p},\varepsilon)=&\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{2\pi}\mathcal{J}^{(1)}_{\alpha\beta,\alpha\beta}(0;\boldsymbol{p},\varepsilon;\boldsymbol{q},\varepsilon_1)[\mathfrak{G}(T;\boldsymbol{q},\varepsilon_1)-\mathfrak{G}(0;\boldsymbol{q},\varepsilon_1)]\\&+\frac{1}{2}\left[T\sum_{\varepsilon_1}-\frac{1}{2\pi}\int\mathrm{d}\varepsilon_1\right]\\&\times\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3}\mathcal{J}^{(1)}_{\alpha\beta,\alpha\beta}(0;\boldsymbol{p},\varepsilon;\boldsymbol{q},\varepsilon_1)\mathfrak{G}(0;\boldsymbol{q},\varepsilon_1).\end{aligned}$$

应用 (19.21) 式, 并对 $\Sigma(T)-\Sigma(0)$ 解此方程 (为此只须写出与 (18.3) 式相似的 $\mathcal{J}$ 的方程), 我们就求得

$$\Sigma(T;\boldsymbol{p},\varepsilon)-\Sigma(0;\boldsymbol{p},\varepsilon)\approx\frac{1}{2}\left[T\sum_{\varepsilon_1}-\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}\varepsilon_1\right]\times\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3}\mathcal{J}_{\alpha\beta,\alpha\beta}(0;\boldsymbol{p},\varepsilon;\boldsymbol{q},\varepsilon_1)\mathfrak{G}(0;\boldsymbol{q},\varepsilon_1). \tag{19.22}$$

由此根据 (19.21) 式得到 $\mathfrak{G}(T)$ 的第一级近似:

$$\mathfrak{G}(T;\boldsymbol{p},\varepsilon)=\mathfrak{G}(0;\boldsymbol{p},\varepsilon)+\frac{1}{2}\mathfrak{G}^2(0;\boldsymbol{p},\varepsilon)\times\left[T\sum_{\varepsilon_1}-\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}\varepsilon_1\right]\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3}\mathcal{J}_{\alpha\beta,\alpha\beta}(0;\boldsymbol{p},\varepsilon;\boldsymbol{q},\varepsilon_1)\mathfrak{G}(0;\boldsymbol{q},\varepsilon_1).$$

将此式代入(19.17) 式, 然后减去 $\frac{1}{V}N(\mu,0)$. 显然我们可写出准确到一级项的式子:

$$\begin{aligned}\frac{1}{V}[N(\mu,T)-N(\mu,0)]=&2\left[T\sum_{\varepsilon}-\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}\varepsilon\right]\mathfrak{G}(0;\boldsymbol{p},\varepsilon)\\&+\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}\varepsilon\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\mathfrak{G}^2(0;\boldsymbol{p},\varepsilon)\left[T\sum_{\varepsilon_1}-\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}\varepsilon_1\right]\\&\times\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3}\mathcal{J}_{\alpha\beta,\alpha\beta}(0;\boldsymbol{p},\varepsilon;\boldsymbol{q},\varepsilon_1)\mathfrak{G}(0;\boldsymbol{q},\varepsilon_1)\\=&2\left[T\sum_{\varepsilon}-\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}\varepsilon\right]\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\mathfrak{G}(0;\boldsymbol{p},\varepsilon)\\&\times\left[1+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\varepsilon_1}{2\pi}\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3}\mathcal{J}_{\alpha\beta,\alpha\beta}(0;\boldsymbol{p},\varepsilon;\boldsymbol{q},\varepsilon_1)\mathfrak{G}^2(0;\boldsymbol{q},\varepsilon_1)\right].\end{aligned} \tag{19.23}$$

最后一个等式里应用了对称性质:

$$\mathcal{J}_{\alpha\beta,\alpha\beta}(\boldsymbol{p},\varepsilon;\boldsymbol{q},\varepsilon_1)=\mathcal{J}_{\alpha\beta,\alpha\beta}(\boldsymbol{q},\varepsilon_1;\boldsymbol{p},\varepsilon).$$

这个表达式还可以略加变换. 与 (19.4) 式的推导完全类似, 我们可以在 "温度方法"①中求出相应的公式:

$$\frac{\partial\mathfrak{G}^{-1}(T;\boldsymbol{p},\varepsilon)}{\partial\mu}=1+\frac{1}{2}T\sum_{\varepsilon_1}\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3}\mathcal{J}_{\alpha\beta,\alpha\beta}(T;\boldsymbol{p},\varepsilon;\boldsymbol{q},\varepsilon_1)\mathfrak{G}^2(T;\boldsymbol{q},\varepsilon_1).$$

①"温度方法" 指 "温度格林函数方法" 或 "$T>0$ 时的量子场论方法", 我们按原著直译, 以下均同.—— 译者注

在 $T\to 0,\varepsilon=$ 常数的极限为

$$\frac{\partial}{\partial_\mu}\mathfrak{G}^{-1}(T;\boldsymbol{p},\varepsilon)=1+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\varepsilon_1}{2\pi}\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3}\mathcal{J}_{\alpha\beta,\alpha\beta}(0;\boldsymbol{p},\varepsilon;\boldsymbol{q},\varepsilon_1)\mathfrak{G}^2(0;\boldsymbol{q},\varepsilon_1).$$

代入 (19.23) 式, 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{V}[N(\mu,T)-N(\mu,0)]&=2\left[T\sum_\varepsilon-\frac{1}{2\pi}\int\mathrm{d}\varepsilon\right]\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\mathfrak{G}(0;\boldsymbol{p},\varepsilon)\frac{\partial}{\partial\mu}\mathfrak{G}^{-1}(0;\boldsymbol{p},\varepsilon)\\&=-2\left[T\sum_\varepsilon-\frac{1}{2\pi}\int\mathrm{d}\varepsilon\right]\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\mu}}\ln\mathfrak{G}(0;\boldsymbol{p},\varepsilon).\end{aligned}$$

在 $\mu=$ 常数条件下对温度微分上式, 与 (19.18) 式比较得

$$\frac{S}{V}=-2\frac{\partial}{\partial T}\left[T\sum_\varepsilon\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\ln\mathfrak{G}(0;\boldsymbol{p},\varepsilon)\right].\tag{19.24}$$

可用以下方式作进一步计算. 借助温度函数 $\mathfrak{G}$ 和推迟与超前格林函数的关系, 将熵的表达式写成两个回路积分之和:

$$\begin{aligned}\frac{S}{V}=&-2\frac{\partial}{\partial T}\left\{\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\left[\frac{1}{4\pi\mathrm{i}}\int_{C_1}\left(\mathrm{th}\frac{\varepsilon}{2T}\right)\ln G_\mathrm{R}(\boldsymbol{p},\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon+\frac{1}{4\pi\mathrm{i}}\int_{C_2}\left(\mathrm{th}\frac{\varepsilon}{2T}\right)\ln G_\mathrm{A}(\boldsymbol{p},\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon\right]\right\}\\=&2\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}T}\left\{\int_{C_1}\varepsilon\left[-\frac{\partial n_\mathrm{F}(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right]\ln G_\mathrm{R}(\boldsymbol{p},\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon\right.\\&\left.+\int_{C_2}\varepsilon\left[-\frac{\partial n_\mathrm{F}}{\partial\varepsilon}\right]\ln G_\mathrm{A}(\boldsymbol{p},\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon\right\},\end{aligned}$$

其中 n_F 为费米函数, 而回路 C_1 和 C_2 示于图 59(a). 函数 G_R 在上半平面没有极点, 而函数 G_A 在下半平面没有极点①. 利用这个性质和 $G_\mathrm{R},G_\mathrm{A}$ 在相应半平面中的解析性, 以及 $\varepsilon\to\pm\infty$ 时 $\dfrac{\partial n_\mathrm{F}}{\partial_\varepsilon}$ 迅速趋向零, 可令回路 C_1,C_2 沿实轴伸展 [见图 59(b)]. 这时得到

$$\frac{S}{V}=2\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}T}\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon\left(-\frac{\partial n_\mathrm{F}(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)[\ln G_\mathrm{R}(\boldsymbol{p},\varepsilon)-\ln G_\mathrm{A}(\boldsymbol{p},\varepsilon)]\mathrm{d}\varepsilon.$$

利用普通的费米函数积分规则②, 得

$$\begin{aligned}\frac{S}{V}&=\frac{2\pi^2T}{3}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\left[G_\mathrm{R}^{-1}\frac{\partial G_\mathrm{R}}{\partial\varepsilon}-G_\mathrm{A}^{-1}\frac{\partial G_\mathrm{A}}{\partial\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0}\\&=\frac{2\pi^2T}{3}\frac{1}{2\pi}\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}2\mathrm{Im}\left[G_\mathrm{R}^{-1}\frac{\partial G_\mathrm{R}}{\partial_\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0}.\end{aligned}$$

①见前面 (19.15) 式后的脚注.

②$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(\varepsilon)\frac{\partial n_\mathrm{F}(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\mathrm{d}\varepsilon=-f(0)-\frac{\pi^2}{6}T^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial\varepsilon^2}\right]_{\varepsilon=0}+\cdots$.

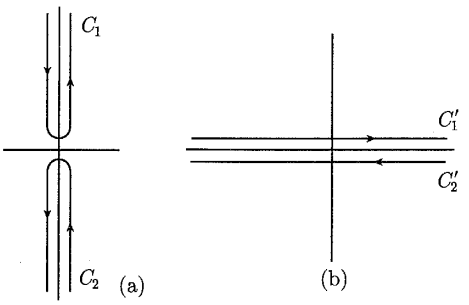


图 59

后一等式是由于实轴上 $G_{\mathrm{R}}^{*}=G_{\mathrm{A}}$. 不难看出, 对 $\boldsymbol{p}$的积分主要取在费米面附近. 代以 $G_{\mathrm{R}}\approx\dfrac{a}{\varepsilon-\xi+\mathrm{i}\delta}$, 得

$$\frac{S}{V}=\frac{p_0m^*}{3}T, \tag{19.25}$$

显然比热就等于熵.

注意在计算温度修正项时, 只有 $\varepsilon=0,\xi=0$ 点 [即函数 G_{R}(或 G) 在 $T=0$ 的实极点] 的邻域才是重要的. 看来, 这是计算任何温度修正项的共同规律. 即在第一级近似下温度修正项永远由函数 G(或 Γ) 在 $T=0$ 的极点决定. 换言之, 它们由元激发能谱决定.

§20 相碰粒子总动量很小时顶角部分的奇异性

本节基于 A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov, L. D. Landau 和 I. M. Khalatnikov 的未发表的结果.

除了能量和动量传递很小时的奇异性, 顶角部分还有一个奇异性; 以后将看到 (第 7 章), 它对超导理论是有意义的. 现在我们考虑总动量 $\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2$ 很小的情况, 这时能量 ε_1和ε_2 以及动量之和 $\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{s}$ 都小.

讨论图 57 所示的图形. 不难看出, 这时图 57(a) 是奇异图形. 正是这个图形中积分下两个 G 函数的极点彼此接近.

我们用与 §18 类似的方法处理这个顶角部分. 引入记号:

$$\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1,p_3;s)=\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1,-p_1+s;p_3,-p_3+s).$$

再以 $\Gamma^{(2)}$ 记所有 "非奇异" 图形之和. 在 $\Gamma^{(2)}$ 中可令 $s=0$. 为了得到完全的 Γ, 须对图 58 型的 "阶梯" 图形求和. 在这样作以前, 先对 s 的第四个分量 (记作 λ) 微分 Γ. 每个阶梯图这时给出若干项之和, 每一项中只有一个 "台阶" 被微分. 如果

固定所微分的 "台阶", 则其左右两端的图形分成两个独立阶梯, 每侧阶梯之和又是完全顶角部分. 这样就得到方程式

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1,p_3;s)=\frac{\mathrm{i}}{2}\int\Gamma_{\alpha\beta,\xi_\eta}(p_1,q;s)G(q)\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\right.$$
$$\left.\times G(-q+s)\right]\Gamma_{\xi_\eta,\gamma\delta}(q,p_3;s)\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}. \tag{20.1}$$

积分下的表达式 $G(q)\dfrac{\partial}{\partial\lambda}G(-q+s)$ 在 $\varepsilon=0,|\boldsymbol{q}|=p_0$ 附近为

$$-\frac{a^2}{[\varepsilon-v(|\boldsymbol{q}|-p_0)+\mathrm{i}\delta\mathrm{sgn}(|\boldsymbol{q}|-p_0)]}$$
$$\times\frac{1}{[\varepsilon-\lambda+v(|\boldsymbol{q}-\boldsymbol{s}|-p_0)-\mathrm{i}\delta\mathrm{sgn}(|\boldsymbol{q}-\boldsymbol{s}|-p_0)]^2}. \tag{20.2}$$

由此看出, 对 $\dfrac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}\to\dfrac{p_0^2\mathrm{d}|\boldsymbol{q}|\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\varepsilon}{(2\pi)^4}$的积分基本上取在 $|\boldsymbol{q}|=p_0,\ \varepsilon=0$ 的邻域中. 如果假定 Γ 在这个积分区间里变化不快, 则对 $\mathrm{d}|\boldsymbol{q}|$ 和 $\mathrm{d}\varepsilon$ 积分时, 可认为 Γ 是常量而只积分 (20.2) 式. 结果我们得到

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\beta}(p_1,p_3;s)=\frac{a^2p_0^2}{2(2\pi)^3v}\int\Gamma_{\alpha\beta,\xi_\eta}(p_1,q;s)\Gamma_{\xi_\eta,\gamma\delta}(q,p_3;s)\frac{\lambda}{\lambda^2-(\boldsymbol{vs})^2+\mathrm{i}\delta}\mathrm{d}\Omega. \tag{20.3}$$

现在求 Γ对$\boldsymbol{s}$ 的梯度. 微分第二个 G 函数时不应忘记, $\boldsymbol{vs}$ 不仅直接出现在分母中, 而且还决定虚部的符号. 因此在 $\varepsilon=0,|\boldsymbol{q}|=p_0$ 附近 $G(q)\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{s}}G(-q+s)$ 的形状是

$$-\frac{a^2\boldsymbol{v}}{[\varepsilon-v(|\boldsymbol{q}|-p_0)+\mathrm{i}\delta\mathrm{sgn}(|\boldsymbol{q}|-p_0)]}$$
$$\times\frac{1}{\left[\varepsilon-\lambda+v(|\boldsymbol{q}|-p_0)-\boldsymbol{vs}-\mathrm{i}\delta\mathrm{sgn}\left(|\boldsymbol{q}|-p_0-\dfrac{(\boldsymbol{vs})}{v}\right)\right]^2}$$
$$+\frac{2\pi\mathrm{i}a^2\delta(\varepsilon-\lambda)\delta(\boldsymbol{vs}-v(|\boldsymbol{q}|-p_0))\boldsymbol{v}}{\lambda-\boldsymbol{vs}+\mathrm{i}\delta\mathrm{sign}(\boldsymbol{vs})}.$$

此式对 $\mathrm{d}\varepsilon\mathrm{d}|\boldsymbol{q}|$ 积分给出 Γ 的如下关系式:

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{s}}\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1,p_3;s)=-\frac{a^2p_0^2}{2(2\pi)^3v}\int\Gamma_{\alpha\beta,\xi_\eta}(p_1,q;s)$$
$$\times\Gamma_{\xi_\eta,\gamma\delta}(q,p_3;s)\frac{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{vs})}{\lambda^2-(\boldsymbol{vs})^2+\mathrm{i}\delta}\mathrm{d}\Omega. \tag{20.4}$$

合并 (20.3) 和 (20.4) 式得到

$$\left(\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}+\boldsymbol{s}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{s}}\right)\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1,p_3;s)$$
$$=\frac{a^2p_0^2}{2(2\pi)^3v}\int\Gamma_{\alpha\beta,\xi\eta}(p_1,q;s)\Gamma_{\xi\eta,\gamma\delta}(q,p_3;s)\mathrm{d}\Omega. \tag{20.5}$$

如果不考虑磁相互作用, 则粒子间的力只与自旋的相对取向有关, 如果再注意到粒子相互作用中总自旋守恒, 则方程式 (20.5) 分离成两个独立方程式. 一个方程式对应自旋相反 $\left(\text{例如}\alpha=\frac{1}{2},\beta=-\frac{1}{2}\right)$ 的粒子相互作用, 另一个对应自旋平行粒子的相互作用. 这两个方程式完全等同, 唯一差别来自初始条件 (即来自 $\Gamma^{(2)}$). 因此以后各处将两个不同分量都简单地记作 Γ.

先作一个以后会得到证实的假定, 即 $\Gamma(p_1,p_3;s)$ 和夹角 $(\widehat{\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{s}})$与$(\widehat{\boldsymbol{p}_3,\boldsymbol{s}})$ 无关. 这时它可按 $\cos\theta$ 的拉格朗日多项式展开, 其中 θ 是 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_3$ 的夹角:

$$\Gamma(p_1,p_3;s)=\sum_l\Gamma_lP_l(\cos\theta). \tag{20.6}$$

注意 $\Gamma_{\alpha\beta,\xi\eta}(p_1,p_3;s)$ 对反平行自旋是反对称的, 而对平行自旋是对称的. 初始粒子的动量置换相应于把 $\cos\theta$ 换成 $-\cos\theta$. 由于 $\Gamma_{\alpha\beta,\xi\eta}(p_1,p_2;p_3,p_4)$ 应对置换 $p_1\alpha\rightleftarrows p_2\beta$ 反对称, 故在展开式 (20.6) 中, 自旋平行时只有奇谐波, 自旋相反时只有偶谐波.

方程式 (20.5) 对个别的 Γ_l 分离而有

$$\lambda\frac{\partial\Gamma_l}{\partial\lambda}+\boldsymbol{s}\frac{\partial\Gamma_l}{\partial\boldsymbol{s}}=\frac{4\pi a^2p_0^2}{(2\pi)^3v}\frac{\Gamma_l^2}{2l+1} \tag{20.7}$$

((20.5) 式中对自旋求和导致因子 2).

方程式 (20.7) 的解为

$$\Gamma_l(\lambda,|\boldsymbol{s}|)=-\frac{(2\pi)^3v(2l+1)}{2\pi a^2p_0^2}\cdot\frac{1}{\ln\lambda|\boldsymbol{s}|+f_l\left(\dfrac{\lambda}{|\boldsymbol{s}|}\right)}, \tag{20.8}$$

其中 f_l 是任意函数.

方程式 (20.3) 和 (20.4) 使我们有可能得到 $x\to0$和$x\to\infty$ 时 $f_l(x)$ 的极限表达式. 在方程式 (20.3) 中令 $|\boldsymbol{s}|\to0$, 按球谐波展开 Γ 得

$$\lambda\frac{\mathrm{d}\Gamma_l}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{4\pi a^2p_0^2}{(2\pi)^3v(2l+1)}\Gamma_l^2. \tag{20.9}$$

这个方程式的解是

$$\Gamma_l(\lambda,0)=-\frac{(2\pi)^3v(2l+1)}{4\pi a^2p_0^2}\frac{1}{\ln\dfrac{\lambda}{c_1^l}},\tag{20.10}$$

其中 c_1^l 为常数. 因此 $x\to\infty$ 时 $f_l(x)\to\ln\dfrac{x}{(c_1^l)^2}$. 类似地, 从方程 (20.4) 在 $\lambda\to 0$ 时得到

$$\Gamma_l(0,|\boldsymbol{s}|)=-\frac{(2\pi)^3v(2l+1)}{4\pi a^2p_0^2}\frac{1}{\ln\dfrac{v|\boldsymbol{s}|}{c_2^l}}.\tag{20.11}$$

可见 $x\to 0$ 时, $f_l(x)\to\ln\dfrac{v^2}{(c_2^l)^2x}$.

常数 c_1^l 和 c_2^l 表示能量, 并且可能是复数. 如果常数 c_1^l表示费米能量, 则从 (2.10) 式得出, 当 $\lambda\to 0$ 时, $\Gamma_l(\lambda,0)$ 按 $\dfrac{1}{\ln\dfrac{c_1^l}{\lambda}}$律趋向零. 然而这个常数很小的特殊情况也是可能的. 这时 $\Gamma_l(\lambda,0)$ 在 λ 的某个值 (一般说来是复数值) 处有极点. 这种情形和超导现象有密切联系, 其意义将在第 7 章中阐明.

我们研究了相碰粒子总动量很小时的 Γ, 并就此结束各向同性费米液体的微观讨论.

目前只知道一种各向同性费米液体 —— 液体 He^3. 各向异性费米液体是更广的一类 —— 这就是金属中的电子. 然而除了各向异性之外, 金属中的电子液体还具有一些特殊性, 如远程库仑力, 与晶格振动的相互作用等. 以下两节中将以电子和声子相互作用的各向同性模型和简并等离子体为例, 讨论这些特殊性的一些方面.

毫无疑问, 金属中电子费米液体的一般讨论属于最重要的应当用量子场论方法解决的问题. 例如对超导现象就应当进行更深入的研究, 目前这种研究还只基于十分简单的模型 (见第 7 章).

§21 温度等于零时电子和声子的相互作用

本节基于 A. B. Migdal[43] 和 G. M. Eliashberg[44] 的工作.

在本节中将以各向同性模型为例, 讨论金属中电子和声子的相互作用. 我们假定金属处于以下温度范围内:

$$T_{\mathrm{c}}\ll T\ll\omega_{\mathrm{D}},\tag{21.1}$$

其中 T_{c} 为超导转变温度, 而 ω_{D} 是声子的德拜频率. 第一个不等式之所以必要, 是因为在这个模型中, 温度足够低时要出现超导 (见第 7 章).

当然, 这样的模型和正常金属相去甚远. 这是因为, 实际金属是各向异性的, 而且电子之间还有库仑相互作用. 在本节末尾, 我们将指出, 库仑作用引起那些质的变化.

§21.1 顶角部分

在 §16 中已得出了温度高于零时电子和声子的戴逊方程. 先讨论这些方程中的顶角部分 $\mathcal{J}$. 我们现在证明, 它和零级近似值 g 之差, 是数量级为 $\sqrt{\dfrac{m}{M}}$ 的小量, 其中 m 为电子质量, 而 M 是原子核的质量. 计算图 55 所示的 $\mathcal{J}$ 的一级修正项. 我们将认为, 电子的动量值约为 p_0, 而声子的动量和能量为条件[①] $k \lesssim k_{\mathrm{D}} \sim p_0, \omega \lesssim \omega_{\mathrm{D}}$ 所限.

根据 §14, 一级图形等于

$$\mathcal{J}^{(1)}(p+q,p;q) = -g^3 T \sum_{\varepsilon_1} \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1}{(2\pi)^3} \mathfrak{D}^{(0)}(p-p_1)\mathfrak{G}^{(0)}(p_1+q)\mathfrak{G}^{(0)}(p_1), \tag{21.2}$$

其中 $\mathfrak{D}^{(0)}$ 和 $\mathfrak{G}^{(0)}$ 由以下公式给出:

$$\mathfrak{G}^{(0)}(p) = \frac{1}{\mathrm{i}\varepsilon - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}) + \mu}, \tag{21.3}$$

$$\varepsilon = (2n+1)\pi T, \quad \varepsilon_0(\boldsymbol{p}) = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}, \quad \mu = \frac{p_0^2}{2m},$$

$$\mathfrak{D}^{(0)}(q) = -\frac{\omega_0^2(\boldsymbol{k})}{\boldsymbol{\omega}^2 + \omega_0^{(2)}(\boldsymbol{k})}. \tag{21.4}$$

我们将假定, 声子谱是有限的, 即 $k < k_{\mathrm{D}} \sim p_0$. 动量更大时, $\mathfrak{D}^{(0)} \to 0$. 这条限制的物理意义是: 波长小于原子间距离的振动不能存在.

当 $|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_1| \sim p_0$, 而 $|\varepsilon - \varepsilon_1| \ll \omega_{\mathrm{D}}$ 时, (21.2) 式中的函数 $\mathfrak{D}^{(0)}$ 可换成常数 $\mathfrak{D}^{(0)} = -1$. 在 $|\varepsilon - \varepsilon_1| \gg \omega_{\mathrm{D}}$ 的范围内, 函数 $\mathfrak{D}^{(0)}$ 按 $(\varepsilon - \varepsilon_1)^{-2}$ 衰减. 因此我们可以估计 $\mathcal{J}^{(1)}$ 的积分值:

$$\mathcal{J}^{(1)} \approx -g^3 T \sum_{|\varepsilon-\varepsilon_1|<\omega_{\mathrm{D}}} \int_{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1|<k_{\mathrm{D}}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1}{(2\pi)^3} \mathfrak{G}^{(0)}(p_1+q)\mathfrak{G}^{(0)}(p_1). \tag{21.5}$$

对 ε_1 的求和给出因子 $\omega_{\mathrm{D}} \sim u p_0 \sim \mu\sqrt{\dfrac{m}{M}}$, 其中 u 为声速. 结果 $\mathcal{J}^{(1)}$ 的数量级为 (参阅 §9 中 (9.6) 式)

$$\mathcal{J}^{(1)} \sim g^3 \frac{p_0^2}{v}\sqrt{\frac{m}{M}} \sim g\eta\sqrt{\frac{m}{M}},$$

①本节中我们把声子的四维动量记为 $q = (\boldsymbol{k}, \omega)$, 而以字母 k 表示 $|\boldsymbol{k}|$.

其中 $v=\dfrac{p_0}{m}$ 且 $(\eta\sim 1)$, 只要对 $\boldsymbol{p}_1$ 的积分不给出因子 $1/\omega_{\mathrm{D}}$.

在这里值得怀疑的情形是 $k\ll p_0$, 而 $\boldsymbol{\omega}\ll\omega_{\mathrm{D}}$. 这时 $\mathcal{J}^{(1)}$ 的积分中, 两个 $\mathfrak{G}^{(0)}$ 函数的极点彼此靠近起来. 不难看出, 对动量的积分主要区间在 $|\boldsymbol{p}|\sim p_0$ 附近, 而对能量的求和主要在 $\varepsilon\ll\mu$ 范围. 这时 $\mathfrak{G}^{(0)}$ 可换成

$$\mathfrak{G}^{(0)}=\frac{1}{\mathrm{i}\varepsilon-v(|\boldsymbol{p}|-p_0)},\tag{21.6}$$

这里的形势和 §18 中讨论过的情况很相似，然而也有一些本质差别. 和 §18 相似, 两个 $\mathfrak{G}^{(0)}$ 函数的乘积在 $|\boldsymbol{p}_1|\approx p_0$ 而 ε_1 很小时, 有一个尖锐的极大值. 两个 $\mathfrak{G}^{(0)}$ 函数在无穷区间上的积分和求和形式上是发散的, 因而与积分顺序关系甚大. 在 §18 中我们先对频率积分, 然后再对 $\xi=v(|\boldsymbol{p}|-p_0)$ 积分. 这是因为, 对 ε 的积分确实取在无穷区间上, 而对 ξ 的积分实质上为 $|\xi|\ll\mu$ 所限. 在我们现在所讨论的情形中, $\mathfrak{D}^{(0)}$ 函数的存在使得积分收敛, 如 (21.5) 式所示. 因此, 对频率求和与对 ξ 求积的顺序是任意的, 我们将先对 ξ_1 积分, 再对 ε_1 求和. 结果得到 (注意条件 $T\ll\omega_{\mathrm{D}}$ 很重要)

$$-\frac{p_0^2}{(2\pi)^3 v}\int \mathrm{d}\Omega\frac{\mathrm{i}\omega}{\boldsymbol{vk}-\mathrm{i}\omega}.$$

只有当 $\omega\gtrsim vk$ 时, 这个量才不是小量. 我们将看到, 这种情形对今后并不重要.

考虑更高级的图形, 并不改变以上估值. 因此

$$\mathcal{J}=g\left[1+O\left(\sqrt{\frac{m}{M}}\right)\right].\tag{21.7}$$

§21.2　声子格林函数

现在求声子格林函数. 戴逊方程由 (16.3) 式给出. 讨论方程中的不可约自能部分:

$$\pi(q)=2g^2T\sum_{\varepsilon}\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\mathfrak{G}(p)\mathfrak{G}(p-q).\tag{21.8}$$

将 π 解析延拓到实频率区域. 设声子频率 $\omega=2\pi nT$ 为正数. 这时 (21.8) 式中对 ε 的求和可变换成回路积分

$$\pi(q)=\frac{g^2}{2\pi\mathrm{i}}\int_c \mathrm{d}\varepsilon\mathrm{th}\frac{\varepsilon}{2T}\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}G_{\mathrm{RA}}(\boldsymbol{p},\varepsilon)G_{\mathrm{RA}}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k},\varepsilon-\mathrm{i}\omega),$$

积分路线示于图 60 中. 在 $\mathrm{Im}\varepsilon=0$ 和 $\mathrm{Im}(\varepsilon-\mathrm{i}\omega)=0$ 两条线上, 格林函数具有奇异性, 因此积分中的函数 $G_{\mathrm{RA}}(\varepsilon)$ 在 $\mathrm{Im}\varepsilon>0$ 时应理解为 $G_{\mathrm{R}}(\varepsilon)$, 而在 $\mathrm{Im}\varepsilon<0$ 时取作 $G_{\mathrm{A}}(\varepsilon)$. 由于沿大圆的积分趋近零, 只剩下沿 $\mathrm{Im}\varepsilon=0$ 和 $\mathrm{Im}\varepsilon=\omega$ 两条线的

积分. 在后一积分中作代换 $\varepsilon - \mathrm{i}\omega \to \varepsilon$, 同时利用 $\mathrm{th}\left(\dfrac{\varepsilon}{2T} + ni\pi\right) = \mathrm{th}\dfrac{\varepsilon}{2T}$. 此外, 再注意到 $G_{\mathrm{R}}(\varepsilon) = G_{\mathrm{A}}^{*}(\varepsilon)$, 结果我们得到

$$\pi = \frac{g^2}{\pi(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\varepsilon\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}[\mathrm{Im}G_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{p},\varepsilon)G_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k},$$
$$\varepsilon - \mathrm{i}\omega) + \mathrm{Im}G_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k},\varepsilon)G_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{p},\varepsilon+\mathrm{i}\omega)]\mathrm{th}\frac{\varepsilon}{2T}. \tag{21.9}$$

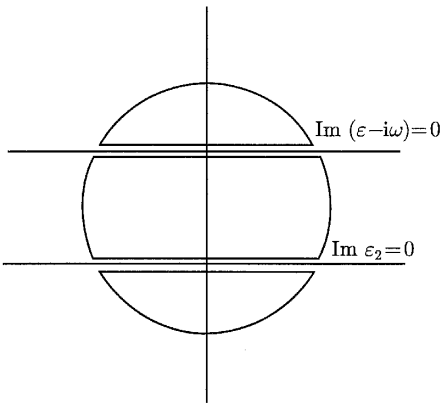


图 60

现在已不难将解析延拓到 ω 的实数值. 结果得到推迟函数 Π_{R}. 分出这个函数的实部和虚部, 就得到

$$\mathrm{Re}\Pi_{\mathrm{R}} = \frac{2g^2}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4p[\mathrm{Im}G_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{p},\varepsilon)\mathrm{Re}G_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k},$$
$$\varepsilon-\omega) + \mathrm{Im}G_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k},\varepsilon)\mathrm{Re}G_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{p},\varepsilon+\omega)]\mathrm{th}\frac{\varepsilon}{2T}, \tag{21.10}$$

$$\mathrm{Im}\Pi_{\mathrm{R}} = -\frac{2g^2}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4p\mathrm{Im}G_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{p},\varepsilon)\mathrm{Im}G_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k},\varepsilon-\omega)\left(\mathrm{th}\frac{\varepsilon}{2T} - \mathrm{th}\frac{\varepsilon-\omega}{2T}\right).$$

以后要证明, 函数 G_{R} 的形状为

$$G_{\mathrm{R}} = \frac{1}{\varepsilon - \xi(\boldsymbol{p}) - \Sigma_{\mathrm{R}}(\varepsilon)}, \tag{21.11}$$

其中 Σ 只和 ε 有关. 当 $\varepsilon < \omega_{\mathrm{D}}$ 时, $\Sigma(\varepsilon) \approx -b\varepsilon$, 其中 b 是数量级为 1 的常数, 而当 $\varepsilon \gg \omega_{\mathrm{D}}$ 时, $\Sigma(\varepsilon) \approx$ 常数 $\sim \omega_{\mathrm{D}}$.

先讨论长波声子的情形 $k \ll p_0$. 这时可近似地写 $\xi(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}) = \xi(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{v}\boldsymbol{k}$, 同时由于积分中的主要区域是 $\xi \sim vk$, 可认为 $\xi(\boldsymbol{p}) = \varepsilon_0(\boldsymbol{p}) - \mu \approx v(|\boldsymbol{p}| - p_0)$. 对于以后将讨论到的 $k \sim p_0$ 的声子, 这种近似是不能用的.

将 G_{R} 代入 (21.10) 后, 可完成对 ξ 的积分. $\mathrm{Re}\Pi_{\mathrm{R}}$ 的积分形式上是发散的, 因此我们应注意到, 对 ξ 的积分区间是有限的, 并把积分限记为 $-L_1, L_2$. 这些积分限的数量级为 $\mu \sim vp_0$, 即远大于 Σ. 因此我们得

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\Pi_{\mathrm{R}} = &-\frac{p_0^2}{(2\pi)^3 v}\int \mathrm{d}\Omega \fint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\varepsilon \mathrm{th}\frac{\varepsilon}{2T}\\ &\times\left\{\frac{\theta(L_2-\varepsilon)\theta(\varepsilon+L_1)}{-\omega+\boldsymbol{vk}-\Sigma(\varepsilon-\omega)+\Sigma(\varepsilon)}\right.\\ &\left.+\frac{\theta(L_2-\boldsymbol{vk}-\varepsilon)\theta(\varepsilon+L_1+\boldsymbol{vk})}{\omega-\boldsymbol{vk}-\Sigma(\varepsilon+\omega)+\Sigma(\varepsilon)}\right\},\end{aligned}$$

其中 $\fint$ 和通常一样表示主值积分, 而

$$\theta(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

既然 $\Sigma(\varepsilon) \lesssim \omega_{\mathrm{D}}$, 对 ε 的积分的主要区间是 $\varepsilon = -L_1, L_2$ 的邻域, 而在这两个区域中 $\Sigma(\varepsilon \pm \omega_{\mathrm{D}}) \approx \Sigma(\varepsilon)$. 注意这一点, 并认为 $\omega \sim uk \ll vk$, 就得到

$$\mathrm{Re}\Pi_{\mathrm{R}} = -\frac{2g^2p_0^2}{(2\pi)^3 v}\int \mathrm{d}\Omega \frac{\boldsymbol{vk}}{\boldsymbol{vk}-\omega} \approx -\frac{g^2 m p_0}{\pi^2}. \tag{21.12}$$

$\mathrm{Im}\Pi_{\mathrm{R}}$ 的积分 (21.10) 是收敛的, 因此可认为对 ξ 的积分限是无穷的. 这样就有

$$\mathrm{Im}\Pi_{\mathrm{R}} = -\frac{\pi g^2 p_0^2}{(2\pi)^3 v}\int \mathrm{d}\Omega \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\varepsilon \delta(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k}-\omega+\Sigma(\varepsilon)-\Sigma(\varepsilon-\omega))\left(\mathrm{th}\frac{\varepsilon}{2T}-\mathrm{th}\frac{\varepsilon-\omega}{2T}\right),$$

当 $\omega \ll T$ 时, 积分中重要的是 $\varepsilon \sim T$, 而当 $\varepsilon \gg T$ 时, 积分中重要的是 $\varepsilon \sim \omega$. 在我们所讨论的情形中 $\omega \sim uk \ll \omega_{\mathrm{D}} (k \ll p_0 \sim k_{\mathrm{D}})$, 因而无论如何 $\varepsilon \ll \omega_{\mathrm{D}}$. 所以在 δ 函数的变量中可置 $\Sigma(\varepsilon) = -b\varepsilon$, 其中 b 为常数 (见后面), 而有 $\delta(\boldsymbol{vk} - (1+b)\omega)$. 对 ε 的积分给出 2ω, 于是得

$$\mathrm{Im}\Pi_{\mathrm{R}} = -\frac{g^2 p_0 m}{2\pi}\frac{\omega}{vk}. \tag{21.13}$$

应指出, $\mathrm{Re}\Pi_{\mathrm{R}}$ 和 $\mathrm{Im}\Pi_{\mathrm{R}}$ 二者都同微扰论一级近似, 即在 (21.8) 中以 $\mathfrak{G}^{(0)}$ 代 $\mathfrak{G}$ 所得者相同. 对于 $\mathrm{Re}\Pi_{\mathrm{R}}$, 这是因为积分区间对应高频率, 那里自能 Σ 已和频率无关, 而对于 $\mathrm{Im}\ \Pi_{\mathrm{R}}$, 这是来自 $\varepsilon \ll \omega_{\mathrm{D}}$ 时 $\Sigma(\varepsilon)$ 的线性关系.

现在讨论 $k \sim k_{\mathrm{D}} \sim p_0$ 的情形. 这时 $vk \gg \omega_{\mathrm{D}}$ 总成立. 既然 $\Sigma \lesssim \omega_{\mathrm{D}}$, 则 (21.10) 式中的 G 函数可换成自由函数 $G^{(0)}$. 因为 $\omega \sim \omega_{\mathrm{D}} \gg T$, $\mathrm{th}\dfrac{\varepsilon}{2T}$ 可代之以 $\mathrm{sgn}\ \varepsilon$. 在

$\mathrm{Re}\Pi_{\mathrm{R}}$ 的积分中可令 $\omega=0$. 然而这时 $\xi=\dfrac{\boldsymbol{p}^2}{2m}-\dfrac{p_0^2}{2m}$ 不能以近似式代替. 结果得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\Pi_{\mathrm{R}}&=-\frac{2g^2\pi}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\{\mathrm{Re}G_{\mathrm{R}}^{(0)}[\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k},\xi(\boldsymbol{p})]\mathrm{sgn}\xi(\boldsymbol{p})\\&\quad+\mathrm{Re}G_{\mathrm{R}}^{(0)}[\boldsymbol{p},\xi(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})]\mathrm{sgn}\xi(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})\}\\&=-\frac{4g^2}{(2\pi)^3}\int\limits_{\substack{\xi(\boldsymbol{p}+\frac{\boldsymbol{k}}{2})>0\\ \xi(\boldsymbol{p}-\frac{\boldsymbol{k}}{2})<0}}\mathrm{d}\boldsymbol{p}\frac{1}{\xi\left(\boldsymbol{p}+\dfrac{\boldsymbol{k}}{2}\right)-\xi\left(\boldsymbol{p}-\dfrac{\boldsymbol{k}}{2}\right)}\\&=-\frac{g^2mp_0}{2\pi^2}h\left(\frac{k}{2p_0}\right),\end{aligned}\tag{21.14}$$

其中

$$h(x)=1+\frac{1-x^2}{2x}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|.$$

现在讨论 $\mathrm{Im}\Pi_{\mathrm{R}}$. 只保留来自 $\mathrm{th}\dfrac{\varepsilon-\omega}{2T}$ 的 ω, 得

$$\mathrm{Im}\Pi_{\mathrm{R}}=-\frac{g^2\omega}{(2\pi)^2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\delta(\xi(\boldsymbol{p})-\xi(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}))=-\frac{g^2p_0m}{2\pi}\cdot\frac{\omega}{vk}\theta(2p_0-k).\tag{21.15}$$

这里所得的表达式, 包含了公式 (21.12) 和 (21.13), 作为在 $k\ll p_0$ 时成立的特例, 因此, 它们可被看成普适公式. 利用温度戴逊方程的解析延拓, 得到

$$D_{\mathrm{R}}^{-1}(\boldsymbol{k},\omega)=(D_{\mathrm{R}}^{(0)})^{-1}-\Pi_{\mathrm{R}}=\frac{1}{\omega_0^2(k)}\left\{\omega^2-\omega_0^2(\boldsymbol{k})\left[1-\eta h\left(\frac{k}{2p_0}\right)-\eta\frac{\mathrm{i}\pi m\omega}{p_0k}\theta(2p_0-k)\right]\right\},\tag{21.16}$$

式中以常数

$$\eta=\frac{g^2p_0m}{2\pi^2}\sim 1$$

代替了 g^2.

函数 D_{R} 的极点决定真正的声子能谱及其衰减:

$$\omega(\boldsymbol{k})=\omega_0(\boldsymbol{k})\sqrt{1-\eta h\left(\frac{k}{2p_0}\right)},\tag{21.17}$$

$$\gamma_1(\boldsymbol{k})=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\omega_0^2(k)m}{p_0k}\theta(2p_0-k).\tag{21.18}$$

根据 (21.17), 当 $k\ll p_0$ 时有 $\omega(k)\approx\omega_0(k)\sqrt{1-2\eta}$.

在 $k=2p_0$ 附近, 导数 $\dfrac{\mathrm{d}\omega(k)}{\mathrm{d}k}$ 具有对数奇异性:

$$\frac{\mathrm{d}\omega(k)}{\mathrm{d}k}=\frac{\omega(2p_0)}{4p_0}\frac{\eta}{1-\eta}\ln\frac{4p_0}{|2p_0-k|},\tag{21.19}$$

在这点衰减突变为零. 应当指出, $\omega(k)$ 和 γ_1 的这种性质, 是推导 Π 的过程中引入近似的结果. 例如, 在 (21.10) 式的 $G^{(0)}$ 函数中不忽略 ω, 则这些奇异性就消失, 而有

$$\gamma_1 \sim \arctan\frac{\omega m}{p_0(k-2p_0)} \quad (k>2p_0),$$

即渐趋近零, 而非突变为零①. 显然, 对以上所得诸式的修正项, 只在 $|k-2p_0| \sim \frac{\omega}{v} \sim \frac{\omega_{\mathrm{D}}}{v} \ll p_0$ 范围内才是重要的. 为了在这个范围内准确地计算 $\omega(\boldsymbol{k})$ 和 γ_1, 不仅在 (21.10) 式中不能忽略 ω, 而且不能把 G 换成 $G^{(0)}$. 此外, $\mathcal{J}$ 和 g 的差别也必须计入了. 因此, 计算变得极为复杂. 由于这里涉及的范围很窄, 就不值得花费很大力量去求这些结果了.

从 (21.18) 和 (21.17) 式看出, 当 η 不十分接近 1/2 时, 衰减 $\gamma_1(k)$ 的相对值很小. 实际有

$$\frac{\gamma_1(k)}{\omega(k)} = \frac{\pi\eta\omega_0^2(k)}{2p_0\kappa\omega(k)} \sim \frac{\pi}{2}\frac{u}{v}\frac{\eta}{1-2\eta} \sim \sqrt{\frac{m}{M}}(1-2\eta)^{-1}. \tag{21.20}$$

声子格林函数 $D_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{k},\omega)$ 可写成以下形式:

$$D_{\mathrm{R}}(k,\omega) = \frac{\omega_0^2(k)}{2\omega(k)}\left(\frac{1}{\omega-\omega(k)+\mathrm{i}\gamma_1(k)} - \frac{1}{\omega+\omega(k)+\mathrm{i}\gamma(k)}\right). \tag{21.21}$$

由此可见, 函数 $D_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{k},\omega)$ 和 $D_{\mathrm{R}}^{(0)}(\boldsymbol{k},\omega)$ 的差别, 在于改变频率和常数因子.

§21.3　电子格林函数

我们转而讨论电子格林函数. 函数 $\mathfrak{G}$ 的戴逊方程 (16.3) 中包含有自能 Σ, 它满足如下方程:

$$\Sigma(\boldsymbol{p},\varepsilon) = -\frac{g^2T}{(2\pi)^3}\sum_{\varepsilon_1}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\mathfrak{G}(\boldsymbol{p}_1,\varepsilon_1)\mathscr{D}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1,\varepsilon-\varepsilon_1). \tag{21.22}$$

和前面一样, 我们完成向实频率区域的解析延拓. 为此将 (21.22) 写成回路积分:

$$\begin{aligned}\Sigma(\boldsymbol{p},\varepsilon) =& \frac{\mathrm{i}g^2T}{2(2\pi)^4}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\int \mathrm{d}\varepsilon_1(\boldsymbol{p}_1,\varepsilon_1)\mathscr{D}_{\mathrm{RA}}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1,\mathrm{i}\varepsilon-\varepsilon_1)\mathrm{th}\frac{\varepsilon_1}{2T}G_{\mathrm{RA}}\\ &-\frac{g^2T}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\mathfrak{G}(\boldsymbol{p}_1,\varepsilon)\mathfrak{D}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1,0),\end{aligned} \tag{21.23}$$

积分路线和图 60 所示者相似 ($\varepsilon>0$). G_{RA} 和 D_{RA} 的意义也与前面一样. 回路积分中未包括 (21.22) 式中 $\varepsilon_1=\varepsilon$ 的那项, 因此式 (21.23) 中出现了第二项. 我们再提醒一次, $\mathfrak{D}$ 函数只具有偶频率 $2\pi nT$.

① $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$ 所能达到的最大值约为 v.

又和前面一样, 沿大圆的积分消失, 只剩下沿水平线 $\varepsilon_1=0$ 和 $\varepsilon_1=\mathrm{i}\varepsilon$ 的积分. 注意 $G_{\mathrm{A}}=G_{\mathrm{R}}^*$, 而 $\mathrm{th}\left(\dfrac{\varepsilon+\mathrm{i}\pi T(2n+1)}{2T}\right)=\mathrm{cth}\dfrac{\varepsilon}{2T}$, 与 π 类似地变换 (21.23) 式. 这时围绕 $\varepsilon_1=\mathrm{i}\varepsilon$ 的积分正好与 (21.23) 式第二项相消. 此后不难延拓到变量 ε 的上半平面. 结果就得到

$$\begin{aligned}\Sigma_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{p},\varepsilon)=&-\frac{g^2}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\varepsilon_1[\mathrm{Im}G_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{p}_1,\varepsilon_1)]D_{\mathrm{R}}\\&\times(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1,\varepsilon-\varepsilon_1)\mathrm{th}\frac{\varepsilon_1}{2T}-\frac{g^2}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\varepsilon_1\\&\times G_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{p}_1,\varepsilon-\varepsilon_1)[\mathrm{Im}D_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1,\varepsilon_1)]\mathrm{cth}\frac{\varepsilon_1}{2T}.\end{aligned}\tag{21.24}$$

根据 (17.14) 和 (17.18) 式有

$$G_{\mathrm{R}}(\varepsilon,\boldsymbol{p})=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}G_{\mathrm{R}}(\varepsilon_1,\boldsymbol{p})}{\varepsilon_1-\varepsilon-\mathrm{i}\delta}\mathrm{d}\varepsilon_1,\tag{21.25}$$

类似的式子对 D_{R} 也成立. 将 (21.25) 式代入 (21.24) 式, 并作变量代换, 得

$$\begin{aligned}\Sigma_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{p},\varepsilon)=&-\frac{g^2}{(2\pi)^4\pi}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\varepsilon_1\\&\times\frac{\mathrm{Im}G_{\mathrm{R}}(\varepsilon_1,\boldsymbol{p}_1)\mathrm{Im}D_{\mathrm{R}}(\omega,\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1)}{\omega+\varepsilon_1-\varepsilon-\mathrm{i}\delta}\\&\times\left(\mathrm{th}\frac{\varepsilon_1}{2T}+\mathrm{cth}\frac{\omega}{2T}\right).\end{aligned}\tag{21.26}$$

先完成对 p_1 的积分. 为此引入新变量 $\xi_1=\dfrac{p_1^2}{2m}-\dfrac{p_0^2}{2m}$, $k=|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1|$, 则

$$\int_0^{\infty}|\boldsymbol{p}_1|^2\mathrm{d}|\boldsymbol{p}_1|\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x=\frac{m}{|\boldsymbol{p}|}\int_0^{k_{\mathrm{D}}}k\mathrm{d}k\int_{\xi(|\boldsymbol{p}|-k)}^{x(|\boldsymbol{p}|+k)}\mathrm{d}\xi_1.\tag{21.27}$$

以 (21.11) 的形式求 G_{R}. 此式虚部的形状为

$$\mathrm{Im}G_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{p},\varepsilon_1)=\frac{\mathrm{Im}\Sigma_{\mathrm{R}}(\varepsilon_1)}{[\varepsilon_1-\xi_1-\mathrm{Re}\Sigma_{\mathrm{R}}(\varepsilon_1)]^2+[\mathrm{Im}\Sigma_{\mathrm{R}}(\varepsilon_1)]^2}.\tag{21.28}$$

如果认为动量 $|\boldsymbol{p}|$ 接近 p_0, 则由 (21.27) 式知, ξ_1 的变化范围与 k 有关. 当积分中重要的是 $k\sim k_{\mathrm{D}}$ 时, 实际上可认为 ξ_1 的变化范围为 $(-\infty,+\infty)$. 以后还会遇到另一情形, 即重要的是动量 $k\ll p_0$. 然而这时积分中所有能量的数量级都约为 $\omega(\boldsymbol{k})\ll\omega_{\mathrm{D}}$. 在两种情形下都有 $\mathrm{Im}\Sigma(\varepsilon)\ll\varepsilon$, 因而

$$\mathrm{Im}G_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{p}_1,\varepsilon_1)\approx\pi\delta[\varepsilon_1-\mathrm{Re}\Sigma_{\mathrm{R}}(\varepsilon_1)-\xi_1]\mathrm{sgn}\,\mathrm{Im}\Sigma_{\mathrm{R}}(\varepsilon_1)=-\pi\delta[\varepsilon_1-\mathrm{Re}\Sigma_{\mathrm{R}}(\varepsilon_1)-\xi_1].$$

将此式代入 (21.24) 式得

$$\Sigma_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{p},\varepsilon)=\frac{g^2}{(2\pi)^3}\frac{m}{|\boldsymbol{p}|}\int_0^{k_{\mathrm{D}}}k\mathrm{d}k\int_{\varepsilon'}^{\varepsilon''}\mathrm{d}\varepsilon_1\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega \times\frac{\mathrm{Im}D_{\mathrm{R}}(\omega,k)}{\omega+\varepsilon_1-\varepsilon-\mathrm{i}\delta}\left(\mathrm{th}\frac{\varepsilon_1}{2T}+\mathrm{cth}\frac{\omega}{2T}\right),\tag{21.29}$$

其中

$$\varepsilon''-\mathrm{Re}\Sigma_{\mathrm{R}}(\varepsilon'')=\xi(|\boldsymbol{p}|+k),\quad \varepsilon'-\mathrm{Re}\Sigma_{\mathrm{R}}(\varepsilon')=\xi(|\boldsymbol{p}|-k).$$

以后要看到, 起主要作用的值是 $\varepsilon_1\lesssim\omega_{\mathrm{D}}$. 为了使这些小值包含在 ε_1 的变化范围内, k 必须小于 $2p_0$. 因此, 对 k 的积分上限实际上是 $k_1=\min(\kappa_{\mathrm{D}},2p_0)$.

讨论 $\mathrm{Re}\Sigma_{\mathrm{R}}$. 我们先假定, 对 k 的积分中重要的是 $k\sim k_{\mathrm{D}}\sim p_0$, 这个假定的正确性将在后面被证实. 这时可令对 ε_1 的积分限为无穷大. 从 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega$ 变到 $\int_0^{\infty}\mathrm{d}\omega$:

$$\mathrm{Re}\Sigma_{\mathrm{R}}=\frac{g^2}{(2\pi)^3}\frac{m}{p_0}\int_0^{k_1}k\mathrm{d}k\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\varepsilon_1\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{Im}D_{\mathrm{R}}(\omega,k)}{\omega+\varepsilon_1} \times\left(\mathrm{th}\frac{\varepsilon+\varepsilon_1}{2T}+\mathrm{th}\frac{\varepsilon-\varepsilon_1}{2T}\right)\mathrm{d}\omega.$$

这里应用了反对称性

$$\mathrm{Im}D_{\mathrm{R}}(\omega)=-\mathrm{Im}D_{\mathrm{R}}(-\omega).$$

由于 $\mathrm{Im}D_{\mathrm{R}}$和$\mathrm{Re}D_{\mathrm{R}}$ 之间的关系 (见 (21.25) 式) 以及 $\mathrm{Im}D_{\mathrm{R}}$ 的反对称性, $\mathrm{Re}\Sigma_{\mathrm{R}}$ 的式子可写成

$$\mathrm{Re}\Sigma_{\mathrm{R}}=\frac{g^2}{16\pi^2}\frac{m}{p_0}\int_0^{k_1}k\mathrm{d}k\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\mathrm{Re}D_{\mathrm{R}}(\omega,k) \times\left(\mathrm{th}\frac{\varepsilon+\omega}{2T}+\mathrm{th}\frac{\varepsilon-\omega}{2T}\right).\tag{21.30}$$

将 (21.21) 式代入, 得到

$$\mathrm{Re}\Sigma_{\mathrm{R}}=\frac{g^2}{16\pi^2}\frac{m}{p_0}\int_0^{k_1}k\mathrm{d}k\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}\frac{\omega_0^2(k)}{\omega^2-\omega^2(k)} \times\left(\mathrm{th}\frac{\varepsilon+\omega}{2T}+\mathrm{th}\frac{\varepsilon-\omega}{2T}\right).$$

由此立刻看出, 重要的是 $k\sim k_1$, 这就证实了前面所作的假定. 至于说 ω, 则当 $\varepsilon\gg T$ 时, 重要的是 $\omega\sim\varepsilon$或$\omega\sim\omega_{\mathrm{D}}$, 而当 $\varepsilon\ll T$ 时, 重要的是 $\omega\sim T\ll\omega_{\mathrm{D}}$. 在一切情形下都可以写为

$$\mathrm{Re}\Sigma_{\mathrm{R}}=\frac{g^2}{8\pi^2}\frac{m}{p_0}\int_0^{k_1}k\mathrm{d}k\!\!\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\mathrm{d}\omega\frac{\omega_0^2(k)}{\omega^2-\omega^2(k)}. \tag{21.31}$$

对 ω 积分得

$$\mathrm{Re}\Sigma_{\mathrm{R}}=-\frac{g^2}{8\pi^2}\frac{m}{p_0}\int_0^{k_1}k\mathrm{d}k\frac{\omega_0^2(k)}{\omega(k)}\ln\left|\frac{\varepsilon+\omega(k)}{\varepsilon-\omega(k)}\right|. \tag{21.32}$$

这个积分中重要的是 $k\sim k_1$, 即 $\omega(k)\sim\omega_{\mathrm{D}}$. 如果 $\varepsilon\ll\omega_{\mathrm{D}}$, 则

$$\mathrm{Re}\Sigma_{\mathrm{R}}\approx-\frac{g^2}{4\pi^2}\frac{m}{p_0}\int_0^{k_1}k\mathrm{d}k\frac{\omega_0^2(k)}{\omega(\kappa)}=-b\varepsilon, \tag{21.32$'$}$$

其中 b 是数量级为 1 的正常数. 当 $\varepsilon\gg\omega_{\mathrm{D}}$ 时有

$$\mathrm{Re}\Sigma_{\mathrm{R}}\approx-\frac{g^2}{4\pi^2\varepsilon}\frac{m}{p_0}\int_0^{k_1}k\mathrm{d}k\omega_0^2(k)\sim-\frac{\omega_{\mathrm{D}}^2}{\varepsilon}\to 0.$$

现在考虑 Σ_{R} 的虚部. 显然, 它来自 (21.29) 式围绕分母零点的积分:

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\Sigma_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{p},\varepsilon)=&\frac{g^2\pi}{(2\pi)^3}\frac{m}{p_0}\int_0^{k_1}k\mathrm{d}k\int_{\varepsilon'}^{\varepsilon''}\mathrm{d}\varepsilon_1\mathrm{Im}D_{\mathrm{R}}(\varepsilon-\varepsilon_1,k)\\&\times\left(\mathrm{th}\frac{\varepsilon_1}{2T}+\mathrm{cth}\frac{\varepsilon-\varepsilon_1}{2T}\right).\end{aligned} \tag{21.33}$$

根据 (21.21) 式, $\mathrm{Im}D_{\mathrm{R}}$ 为

$$\mathrm{Im}D_{\mathrm{R}}(\omega,k)=-\frac{2\omega_0^2(k)\omega\gamma_1(k)}{[\omega^2-\omega^2(k)]^2+4\omega^2\gamma_1^2(k)}, \tag{21.34}$$

把 (21.34) 代入 (21.33) 式后, 原则上可能遇见两种情形. 如果 ω 的变化范围远大于 $\gamma_1(k)$, 则

$$\mathrm{Im}D_{\mathrm{R}}(\omega,k)\approx-\pi\omega_0^2(k)\delta(\omega^2-\omega^2(k))\mathrm{sgn}\omega. \tag{21.35}$$

如果 ω 的变化范围远小于 $\gamma_1(k)$, 则在 (21.34) 式分母中, ω 和其他量相比, 可以忽略不计, 这时有

$$\mathrm{Im}D_{\mathrm{R}}(\omega,k)\simeq-\frac{2\omega_0^2(k)\omega\gamma_1(k)}{\omega^4(k)}. \tag{21.36}$$

将 (21.35) 代入 (21.33), 并作变量替换 $\varepsilon_1-\varepsilon=\omega$. 因子 th 和 cth 的存在, 使 $\omega\sim\max(\varepsilon,T)$ 起重要作用. 另外, δ 函数又要求 $\omega\sim\omega(k)\sim uk$. 由此可知, 重要的是 $k\sim\dfrac{\varepsilon}{u}$, 即 $\boldsymbol{v}k\gg\varepsilon$. 这表明, 对 ω 的积分限可推至无穷大. 这就给出

$$\mathrm{Im}\Sigma_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{p},\varepsilon)=\frac{g^2m}{16\pi p_0}\int_0^{k_1}\frac{k\mathrm{d}k\omega_0^2(k)}{\omega(k)}\left[\mathrm{th}\frac{\omega(k)+\varepsilon}{2T}-\mathrm{th}\frac{\varepsilon-\omega(k)}{2T}-2\mathrm{cth}\frac{\omega(k)}{2T}\right]. \tag{21.37}$$

当 $\max(\varepsilon, T) \ll \omega_{\mathrm{D}}$ 时, 我们得到

$$\mathrm{Im}\Sigma_{\mathrm{R}}(\varepsilon) = -\frac{\pi\eta T^3}{4(1-2\eta)p_0^2u^2} f_1\left(\frac{\varepsilon}{T}\right), \tag{21.38}$$

其中声速 $u = \left.\dfrac{\mathrm{d}\omega(k)}{\mathrm{d}k}\right|_{k=0}$, 而函数

$$f_1(x) = \int_0^\infty z^2 \mathrm{d}z \left[\mathrm{cth}\frac{z}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{th}\frac{z+x}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{th}\frac{z-x}{2}\right]. \tag{21.39}$$

当 $\varepsilon \ll T \ll \omega_{\mathrm{D}}$ 时, 由 (21.39) 式得

$$\mathrm{Im}\Sigma_{\mathrm{R}}(\varepsilon) = -\frac{7\pi\zeta(3)}{8}\frac{\eta}{1-2\eta}\frac{T^3}{p_0^2u^2}; \tag{21.40}$$

而当 $T \ll \varepsilon \ll \omega_D$ 时, 有

$$\mathrm{Im}\Sigma_{\mathrm{R}}(\varepsilon) = -\frac{\pi}{12}\frac{\eta}{1-2\eta}\frac{|\varepsilon|^3}{p_0^2u^2}. \tag{21.41}$$

在 $\varepsilon \gg \omega_{\mathrm{D}}$ 的情形下 (根据本节初的条件, $T \ll \omega_{\mathrm{D}}$), 我们得到

$$\mathrm{Im}\Sigma_{\mathrm{R}}(\varepsilon) = \text{常数} \sim \omega_{\mathrm{D}}. \tag{21.42}$$

以上推导中重要的是 $\omega \sim \max(\varepsilon, T)$ 的值. 因此根据以前所述, 只有在

$$\max(\varepsilon, T) \gg \max\gamma_1(k) \sim \sqrt{\frac{m}{M}}\omega_{\mathrm{D}}$$

时, 将 (21.34) 式换成 (21.35) 式才是合法的. 在相反的极限情形, 应当用 (21.36) 式. 这时积分中重要的是 $k \sim k_1$, 因而

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\Sigma_{\mathrm{R}}(\varepsilon) = &-\frac{g^2m}{2\pi^2p_0}\int_0^{k_1} k\mathrm{d}k\frac{\omega_0^2(k)\gamma_1(k)}{\omega^4(k)}\int_0^\infty \omega\mathrm{d}\omega \\ &\times\left[\mathrm{cth}\frac{\omega}{2T} - \frac{1}{2}\mathrm{th}\frac{\omega+\varepsilon}{2T} - \frac{1}{2}\mathrm{th}\frac{\omega-\varepsilon}{2T}\right].\end{aligned} \tag{21.43}$$

对频率的积分可以算出来. 结果当 $\max(\varepsilon, T) \ll \omega_{\mathrm{D}}\sqrt{\dfrac{m}{M}}$ 时有

$$\mathrm{Im}\Sigma_{\mathrm{R}}(\varepsilon) = -\frac{A}{p_0v}(\pi^2T^2 + \varepsilon^2), \tag{21.44}$$

其中

$$A = \frac{g^2p_0}{4\pi^2}\int_0^{k_1} k\mathrm{d}k\frac{\omega_0^2(k)\gamma_1(k)}{\omega^4(k)} = \text{常数} \sim 1.$$

(21.38) 和 (21.44) 式对应不同的衰减机理. 前者决定的衰减, 来自电子吸收与辐射声子. 然而当准粒子能量十分接近费米面对: $\varepsilon \ll \omega_{\mathrm{D}}\sqrt{\dfrac{m}{M}}$, 电子间通过交换声子而致的相互作用就更重要了, 这是 (21.44) 式衰减的来源. 由以前所述 (见 §2) 可知, 费米粒子相互作用而致的衰减, 正好应具有这种形式.

由 G_{R} 函数极点的实部, 可以决定电子激发能. 根据 (21.11) 式有 $\varepsilon-\Sigma_{\mathrm{R}}(\varepsilon)=\xi$. 当 $\varepsilon \ll \omega_{\mathrm{D}}$ 时, 应用 (21.32) 式得

$$\varepsilon = \frac{v}{1+b}(|\boldsymbol{p}|-p_0). \tag{21.45}$$

因此, 费米面上准粒子速度减小 ($b>0$). 此外, 在极点附近 G 函数具有 (18.1) 的形式, 其中

$$a=(1+b)^{-1}<1.$$

由 (21.41) 式知, 当 $\varepsilon \sim \omega_{\mathrm{D}}$ 时, 准粒子的衰减和能量变得差不多大. 然而不难看出 (见 (21.42) 式), 激发能继续增加时, 衰减不复增长, 而又变得小于准粒子能量. 由此可见, 一共有两个区间, 其中准粒子这个概念是有意义的, 这就是: $|\varepsilon| \ll \omega_{\mathrm{D}}$ 和 $|\varepsilon| \gg \omega_{\mathrm{D}}$. 在两个区间里, 电子能量的形状都是 $v(|\boldsymbol{p}|-p_0)$, 然而速度 v 却是不同的.

现在定性地讨论一下, 考虑电子间直接的库仑相互作用, 会有什么影响. 由于库仑力在约为晶格周期 $\left(\text{即} \sim \dfrac{1}{p_0}\right)$的距离上就被屏蔽, 它仍可认为是短程力. 考虑这些力以后, 费米面上的电子速度以及 G 函数在极点附近的系数 a, 要有所改变.

衰减的数值将有质的变化. 库仑互相作用给出由 (19.30) 式表示的衰减. 在 $(\varepsilon,T) \ll \omega_{\mathrm{D}}\sqrt{\dfrac{m}{M}}$ 范围内, 它将与 (21.44) 式相加, 后者具有相同的结构和数量级, 然而在 $(\varepsilon,T) \gg \omega_{\mathrm{D}}\sqrt{\dfrac{m}{M}}$ 的范围内, 声子衰减起决定作用. 前面已指出过, 当 $\varepsilon \gg \omega_{\mathrm{D}}$ 时, 声子衰减成为数量级为 ω_{D} 的常数. 库仑衰减在此区间内也存在着, 而且当以下不等式成立后, 起主要作用:

$$|\varepsilon| \gg \sqrt{p_0 v \omega_{\mathrm{D}}} \sim \omega_{\mathrm{D}}\sqrt[4]{\frac{M}{m}} > \omega_{\mathrm{D}}.$$

可见在 $|\varepsilon| \gg \omega_{\mathrm{D}}$ 范围内, 当电子激发谱已取决于库仑相互作用时, 声子衰减在一段区域里还超过电子衰减.

§21.4 电子比热线性项的修正

由前面各段所得结果, 可以得出关于电子比热的有意义的结论. 初看之下, 会以为对电子比热线性项 (19.25) 的修正, 相对数量级应为 $\left(\dfrac{T}{\mu}\right)^2$. 实际上电声子作用导致更大的修正项 (Eliashberg[45]).

考虑 $\mathrm{Re}\Sigma_{\mathrm{R}}$ 的一般公式 (21.32). 当 $\varepsilon \ll \omega_{\mathrm{D}}$ 时, 我们在第一级近似下得 (21.33) 式. 不难看出, 将 (21.32) 积分下的对数展至 ε^3 项, 就导致对 k 的对数发散积分. 我们以对数准确度为限, 得①

$$\delta \mathrm{Re}\Sigma_{\mathrm{R}} = -\frac{1}{6}\frac{\eta}{1-2\eta}\frac{\varepsilon^3}{p_0^2 u^2}\ln\frac{\omega_{\mathrm{D}}}{|\varepsilon|}.$$

在求熵时 (见 §19) 计入此修正项, 得

$$\delta\left(\frac{S}{V}\right) = 2\int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{\partial n_{\mathrm{F}}(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)\varepsilon \mathrm{Im}G_{\mathrm{R}}\delta\mathrm{Re}\Sigma_{\mathrm{R}}(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon.$$

代入

$$\mathrm{Im}\Sigma_{\mathrm{R}} = -\pi\delta[\xi - \varepsilon - \Sigma_{\mathrm{R}}(\varepsilon)],$$

并取含费米函数之积分, 得

$$\delta\left(\frac{S}{V}\right) = -\frac{7\pi^2}{180}\frac{\eta}{1-2\eta}\frac{m}{p_0^2 u^2}T^3\ln\frac{\omega_{\mathrm{D}}}{T}.$$

对 T 微分得

$$\delta\left(\frac{C}{V}\right) = T\frac{\partial}{\partial T}\left(\delta\frac{S}{V}\right) = \frac{7\pi^2}{60}\frac{\eta}{1-2\eta}\frac{m}{p_0^2 u^2}T^3\ln\frac{\omega_{\mathrm{D}}}{T}. \tag{21.46}$$

因此, 对比热线性项的修正的数量级为

$$\frac{\zeta}{1-2\eta}\frac{T^2}{\omega_{\mathrm{D}}^2}\ln\frac{\omega_{\mathrm{D}}}{T}.$$

应将此修正项与来自晶格振动的立方项作一比较. 晶格比热的数量级为 $\dfrac{T^3}{u^3}$. 由此可知, 以上修正项与晶格比热的比值为

$$\frac{\eta}{1-2\eta}\frac{u}{v}\ln\frac{\omega_{\mathrm{D}}}{T}, \tag{21.47}$$

故通常很小. 然而这里数量级的出入约为 10^{-1}, 因而可能在个别金属中, 这个修正项也给出相当显著的贡献②.

①可以指出, $\delta\mathrm{Re}\Sigma_{\mathrm{R}}$ 和衰减 (21.41) 式是分别同一个解析函数

$$\delta\Sigma_{\mathrm{R}} = -\frac{1}{12}\frac{\eta}{(1-2\eta)}\frac{\varepsilon^3}{p_0^2u^2}\ln\left[\frac{\omega_{\mathrm{D}}^2}{-(\varepsilon+\mathrm{i}\delta)^2}\right]$$

的实部和虚部.

②金属转入超导态时 (见第 7 章), 可能发现这项的存在. 这个转变不影响晶格比热, 然而却使电子比热在 $T\to 0$ 时指数下降. 比较超导转变温度 T_{c} 以上以及 $T\to 0$ 时比热立方项的数值, 可以发现 T_{c} 以上立方项中是否出现了修正项 (21.46).

§22 简并等离子体的某些性质

§22.1 问题提法

我们讨论等离子体, 即电子和离子气体的混合物, 作为具有库仑相互作用的系统的例子. 相互作用哈密顿量的形状是

$$\begin{aligned} H_{\text{int}} =& \frac{e^2}{2}\int \psi_\alpha^+(\boldsymbol{r})\psi_\beta^+(\boldsymbol{r}')\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\psi_\beta(\boldsymbol{r})\psi_\alpha(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \\ &- Ze^2\int \psi_\alpha^+(\boldsymbol{r})\Phi^+(\boldsymbol{r}')\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\Phi(\boldsymbol{r}')\psi_\alpha(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \\ &+ \frac{Z^2e^2}{2}\int \Phi^+(\boldsymbol{r})\Phi^+(\boldsymbol{r}')\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\Phi(\boldsymbol{r}')\Phi(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{r}', \end{aligned} \tag{22.1}$$

其中 $\psi_\alpha(\boldsymbol{r})$ 为电子场算符, 而 Φ 为离子场算符. 我们设电子气体是简并的, 而离子是玻尔兹曼气体. 为此温度须满足不等式:

$$\frac{1}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} \gg T \gg \frac{1}{M}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}. \tag{22.2}$$

在计算中我们可以假定离子是费米气体, 因为两种统计的玻尔兹曼极限情况是一样的.

假定库仑相互作用是弱效应, 为此须要求:

$$\frac{e^2}{\bar{E}\bar{r}} \ll 1,$$

其中, $\bar{E}$ 是某个平均能量, 而 $\bar{r}$ 是粒子间的平均距离. 对离子 $\bar{E}\sim T$, 而对电子 $\bar{E}\sim\dfrac{p_0^2}{2m}$. 因此, 这个条件和以下要求等价:

$$\frac{T}{e^2} \gg \left(\frac{N}{V}\right)^{1/3} \gg e^2m. \tag{22.3}$$

不难看出, 条件 (22.3) 和关于电子气体简并的假定不矛盾.

当条件 (22.3) 成立时, 库仑相互作用几乎总是对等离子体的影响很小. 动量传递很小的粒子碰撞起主要作用的情况是例外. 由于库仑位势的傅里叶分量为[①]

$$U(k) = -\frac{4\pi e^2}{k^2}, \tag{22.4}$$

动量传递很小的碰撞有极为重要的作用.

①本节中不用四维矢量, 因此我们以普通拉丁字母记三维矢量的绝对值.

首先应讨论一个与库仑相互作用有关的表观上的困难. §8 中 G 函数的图形中包括形如图 4(a) 类型的图, 它们含有 $U(0)$. 温度 $\mathfrak{G}$ 函数也有类似的图形. 根据 (22.4) 这些图趋向无穷大. 我们从给定化学势变换到给定粒子数, 并将库仑位势换成位势 $U(r)=e^2\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha r}}{r}$. 我们假定 α 的数值很小, 而在最终结果中令其等于零. 为了避免在给定粒子数目时发生的困难, 我们将在 $\boldsymbol{r},\tau$ 空间中进行讨论.

试取电子线 $\mathfrak{G}_{\mathrm{e}}$ 为例. 将所有以一条波纹线和主 $\mathfrak{G}$ 线相连的不可约自能部分, 如图 4(a)、图 8(e)、图 8(f) 之类, 加到一起. 不难看出, 由所有这些图形之和得

$$\begin{aligned}\Sigma'(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',\tau-\tau')=&2e^2\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1[\mathfrak{G}_{\mathrm{e}}(0,-0)-Z\mathfrak{G}_{\mathrm{i}}(0,-0)]\\&\times\frac{\mathrm{e}^{-\alpha|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(\tau-\tau')\\=&\frac{N_{\mathrm{e}}-ZN_{\mathrm{i}}}{V}\frac{4\pi e^2}{\alpha^2}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(\tau-\tau')\equiv 0,\end{aligned}\tag{22.5}$$

这是因为电性中和条件 $N_{\mathrm{e}}=ZN_{\mathrm{i}}$.

$\mathfrak{G}_{\mathrm{i}}$ 线的类似修正项也同样等于零. 这表明, 应简单地令所有包括库仑势空间积分 (零傅里叶分量) 的图形等于零.

然后可借助以下的形式方法回到给定 μ 的表象. 将图中所有 $\mathfrak{G}^{(0)}$ 线表示成

$$\mathfrak{G}_N^{(0)}=\mathfrak{G}_\mu^{(0)}\mathrm{e}^{-\mu(\tau_1-\tau_2)}.\tag{22.6}$$

不难验证, 最终的 $\mathfrak{G}$ 函数由含有 $\mathfrak{G}_\mu^{(0)}$ 的图形描述, 只是乘上了同一因子 $\mathrm{e}^{-\mu(\tau_1-\tau_2)}$. 以此因子除之, 我们就得到 $\mathfrak{G}_\mu$.

由此看出, 处理库仑势的方法是扔掉所有含 $U(0)$ 的图. 但是必须注意, 只有化学势的选择满足条件 $N_{\mathrm{e}}(\mu_{\mathrm{e}},\mu_{\mathrm{i}})=ZN_{\mathrm{i}}(\mu_{\mathrm{e}},\mu_{\mathrm{i}})$, 或者等价条件

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\mu_{\mathrm{e}}}=Z\frac{\partial\Omega}{\partial\mu_{\mathrm{i}}}\tag{22.7}$$

时, 这样得到的结果才是正确的.

§22.2 动量传递小的顶角部分

先考虑动量传递小的顶角部分. 由于离子在这里有重要意义, 我们采用温度方法. (22.4) 式的一级修正项由图 61(a) 型的两个图形描述. 一个图中的封闭环由电子线组成, 另一个由离子线组成. 虽然这个修正项有附加因子 e^2, 但是它包含着 $\left(\dfrac{1}{k^2}\right)^2$. 因此传递动量很小时它可能极重要, 我们必须求和如图 61(b) 所示的图形的链, 其中有任意数目的电子环和离子环①.

①对于具有库仑相互作用系统的这种求和, 是由 Gell-Mann和Brueckner[46] 首先完成的.



(a) (b)

图 61

结果发现所有的顶点 (电子–电子, 离子–离子和离子–电子) 都乘上同一因子

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{12}(\boldsymbol{k},\omega_m)&=\frac{4\pi e^2Z_1Z_2}{k^2\left[1-\dfrac{4\pi_{\mathrm{e}}^2}{k^2}(\pi_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{k},\omega_m)+Z^2\pi_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{k},\omega_m))\right]}\\&=\frac{4\pi e^2Z_1Z_2}{k^2-4\pi e^2[\pi_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{k},\omega_m)+Z^2\pi_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{k},\omega_m)]};\end{aligned}\tag{22.8}$$

这里 $\omega_m=2\pi Tm$, m 是整数, π_{e} 对应电子环, π_{i} 对应离子环.

已经指出, 我们暂时认为离子是费米体. 因此 π_{e} 和 π_{i} 的计算在第一阶段是等同的, 即

$$\begin{aligned}\pi=&2T\sum_n\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{(\mathrm{i}\varepsilon_n-\varepsilon_0(\boldsymbol{p})+\mu)(\mathrm{i}\varepsilon_n+\mathrm{i}\omega_m-\varepsilon_0(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})+\mu)}\\=&2T\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\mathrm{i}\omega_m-\varepsilon_0(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})+\varepsilon_0(\boldsymbol{p})}\\&\times\sum_n\left[\frac{1}{\mathrm{i}\varepsilon_n-\varepsilon_0(\boldsymbol{p})+\mu}-\frac{1}{\mathrm{i}(\varepsilon_n+\omega_m)-\varepsilon_0(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})+\mu}\right]\\=&-2T\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\mathrm{i}\omega_m-\varepsilon_0(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})+\varepsilon_0(\boldsymbol{p})}\\&\times\sum_{n>0}\left[\frac{2(\varepsilon_0(\boldsymbol{p})-\mu)}{\pi^2T^2(2n+1)^2+(\varepsilon_0(\boldsymbol{p})-\mu)^2}\right.\\&\left.-\frac{2(\varepsilon_0(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})-\mu)}{\pi^2T^2(2n+1)^2+(\varepsilon_0(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})-\boldsymbol{\mu})^2}\right]\\=&-\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\mathrm{i}\omega_m-\varepsilon_0(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})+\varepsilon_0(\boldsymbol{p})}\\&\times\left[\mathrm{th}\frac{\varepsilon_0(\boldsymbol{p})-\mu}{2T}-\mathrm{th}\frac{\varepsilon_0(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})-\mu}{2T}\right]\\=&-2\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{n(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})-n(\boldsymbol{p})}{\mathrm{i}\omega_m-\varepsilon_0(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})+\varepsilon_0(\boldsymbol{p})},\end{aligned}\tag{22.9}$$

式中对电子 $n(\boldsymbol{p})=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{\varepsilon_0(\boldsymbol{p})-\mu}{T}}+1}$, 而对于离子 $2n(\boldsymbol{p})=\mathrm{e}^{\frac{\mu-\varepsilon_0(\boldsymbol{p})}{T}}$. 这里已用过了公式

$$\sum_{n>0}\frac{1}{(2n+1)^2+x^2}=\frac{\pi}{4x}\mathrm{th}\frac{\pi x}{2}.\tag{22.10}$$

我们将假定 $|\boldsymbol{k}| \ll p_0$. 离子平均动量约为 $\sqrt{MT}$, 根据 (22.2) 式它远大于 p_0. 因此, 将 (22.9) 式按 $\boldsymbol{k}$ 展开后, 可简化为

$$\pi(\boldsymbol{k},\omega_m) = -2\int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{\partial_n}{\partial\varepsilon}\frac{\boldsymbol{vk}}{\mathrm{i}\omega_m - \boldsymbol{vk}}. \tag{22.11}$$

所讨论的顶角部分只和 $\boldsymbol{k}$ 与 ω_m 有关. 因此它可和传递粒子间电磁相互作用的 $\mathfrak{D}$ 函数对应. 其实, 试取如下的量:

$$\mathfrak{D}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2,\tau_1-\tau_2) = \langle T\lambda(\widetilde{\bar{\psi}}_\alpha(\boldsymbol{r}_1\tau_1)\widetilde{\bar{\psi}}_\beta(\boldsymbol{r}_2,\tau_2)\tilde{\psi}_\alpha(\boldsymbol{r}_1\tau_1)\tilde{\psi}_\beta(\boldsymbol{r}_2,\tau_2))\rangle,$$

其中 $\langle\cdots\rangle$ 表示普通的温度平均. 不难验证, 它对变量 $\tau_1-\tau_2$ 和 $\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$ 的傅里叶变换具有玻色温度格林函数的一切性质. 另外, 其傅里叶分量显然等于

$$\mathfrak{D}(\boldsymbol{k},\omega_m) = \pi_\mathrm{e}(\boldsymbol{k},\omega_m)\mathcal{J}_\mathrm{ee}(\boldsymbol{k},\omega_m)\pi_\mathrm{e}(\boldsymbol{k},\omega_m).$$

其他传递动量很小的顶点也是这样.

现在可以清楚地看出应该如何从温度函数变换到时间函数. 我们知道, 为了在格林函数情况下完成这种变换, 只须求得在变量 ω 上半平面上解析, 并在 $\mathrm{i}\omega_m = \mathrm{i}2\pi TM$ 点和温度格林函数重合的函数. 这样定义的是推迟函数 D_R. 真正的格林函数在 $\omega>0$ 时等于 D_R, 而在 $\omega<0$ 时对函数 π_e 和 π_i 也容易完成这步手续 (这样得到的函数我们记作 $\mathit{\Pi}_\mathrm{e}, \mathit{\Pi}_\mathrm{i}$). 从积分 (22.11) 得知, 为此须作代换 $\mathrm{i}\omega_m \to \omega + \mathrm{i}\delta\mathrm{sgn}\omega$. 既然在构成函数 $\mathfrak{D}(\boldsymbol{k},\omega_m)$ 的图形中, 只有因子 π^n 和 ω_m 有关, 则以同法可求得函数 $D(\boldsymbol{k},\omega)$. 显然对于函数 $\mathit{\Gamma}(\boldsymbol{k},\omega)$ 也是如此①. 因此时间顶角部分 $\mathit{\Gamma}(\boldsymbol{k},\omega)$ 也同样由公式 (22.8), (22.11) 表达, 只是式中应作代换 $\mathrm{i}\omega_m \to \omega + \mathrm{i}\delta\mathrm{sgn}\omega$. $\mathit{\Gamma}$ 的分母中出现了对 k^2 的补充项, 这正是库仑相互作用的德拜屏蔽. 在一般情况下它使相互作用成为推迟的 (即 $\mathit{\Gamma}$ 和 ω 有关).

现在讨论 $\mathit{\Gamma}$ 随 ω 和 k 比值的变化. 当 $\omega \ll v_\mathrm{i}k$ 时, (22.11) 式给出:

$$\pi_\mathrm{e} = \mathit{\Pi}_\mathrm{e} = -\frac{1}{V}\frac{\partial N_\mathrm{e}}{\partial\mu_\mathrm{e}}, \quad \pi_\mathrm{i} = \mathit{\Pi}_\mathrm{i} = -\frac{1}{V}\frac{\partial N_\mathrm{i}}{\partial\mu_\mathrm{i}}. \tag{22.12}$$

就数量级说 $\dfrac{1}{V}\dfrac{\partial N}{\partial\mu} \sim \dfrac{N}{V\mu}$. 对电子 $\mu_\mathrm{e} \sim \dfrac{p_0^2}{m}$, 而对离子 $\mu_\mathrm{i} \sim T\ln T$, 因此 $\mathit{\Pi}_\mathrm{i} \gg \mathit{\Pi}_\mathrm{e}$.

从 (22.8) 和 (22.11) 式得到

$$\mathit{\Gamma}_{12} = \frac{4\pi e^2 Z_1 Z_2}{k^2+\mathcal{N}_\mathrm{i}^2}, \tag{22.13}$$

其中 $\mathcal{N}_\mathrm{i} = \sqrt{\dfrac{4\pi Z^2 e^2 N_\mathrm{i}}{VT}}$ 是离子的德拜半径倒数.

①对级数个别项成立的这种手续, 可能不适用于级数的和. 但这里可以验证导致正确的结果.

下一个区间：$v_{\mathrm{e}}k \gg |\omega| \gg v_{\mathrm{i}}k$. 在这个区间里

$$\Pi_{\mathrm{i}} = -\frac{k^2}{\omega^2}\frac{N}{MV}, \quad \Pi_{\mathrm{e}} = -\frac{1}{V}\frac{\partial N_{\mathrm{e}}}{\partial \mu} = -\frac{p_0 m}{\pi^2}. \tag{22.14}$$

代入 (22.8) 得

$$\Gamma_{12} = \frac{4\pi e^2 Z_1 Z_2 \omega^2}{(k^2+\mathcal{N}_e^2)\omega^2 - k^2\omega_{p1}^2}, \tag{22.15}$$

其中 $\mathcal{N}_{\mathrm{e}} = \sqrt{\dfrac{4p_0 m e^2}{\pi}}$ 是电子的德拜蔽半径的倒数, 而

$$\omega_{p1} = \sqrt{\frac{4\pi N_{\mathrm{i}} Z^2 e^2}{MV}}. \tag{22.16}$$

函数 Π_{12} 的极点为

$$\omega = \frac{\omega_{p1} k}{\sqrt{k^2+\mathcal{N}_{\mathrm{e}}^2}}. \tag{22.17}$$

当 $k \gg k_{\mathrm{e}}$ 时, $\omega(k)$ 是线性函数. 这就是所谓离子声波. 声速

$$\frac{\omega}{k} = \frac{\omega_{p1}}{\mathcal{N}_{\mathrm{e}}} = p_0\sqrt{\frac{Z}{3Mm}}. \tag{22.18}$$

当 $k \gg \mathcal{N}_{\mathrm{e}}$ 时, ω 趋向常数：$\omega \approx \omega_{p1}$. 直到 $k \sim \dfrac{\omega_{p1}}{v}$, Γ_{12}的极点还是实数, 因此, 当 $\omega_{p1} \gg v_{\mathrm{i}}\mathcal{N}_{\mathrm{e}}$ 时, ω 达到 ω_{p1} 值. 这个条件因 (22.2) 第一不等式而成立.

这些振荡的衰减由 Π_{i} 和 Π_{e} 的虚部决定. 将电子和离子的平衡分布代入 (22.11) 式 ($\mathrm{i}\omega_m \to \omega + \mathrm{i}\delta\mathrm{sgn}\omega$), 得到

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\Pi_{\mathrm{i}} &= -\frac{|\omega|}{k}\frac{N_{\mathrm{i}}}{V}\sqrt{\frac{2\pi M}{T^3}}\mathrm{e}^{-\frac{M\omega^2}{2k^2T}}, \\ \mathrm{Im}\Pi_{\mathrm{e}} &= \frac{|\omega}{k}\frac{m^2}{2\pi}. \end{aligned} \tag{22.19}$$

$\mathrm{Im}\Pi_{\mathrm{i}}$ 的指数幂约为 $\dfrac{p_0^2}{mT}$ 或略小, 而 $\mathrm{Im}\Pi_{\mathrm{i}}$ 和 $\mathrm{Im}\Pi_{\mathrm{e}}$ 的指数前因子之比值约为

$$\left(\frac{p_0^2}{mT}\right)^{3/2}\left(\frac{M}{m}\right)^{1/2}.$$

因此, 二者都可能是重要的. 确定 Γ_{12} 极点的虚部, 求得振荡的衰减为

$$\gamma = \frac{\omega^4}{k^3}\left[\left(\frac{\pi}{8}\right)^{1/2}\left(\frac{M}{m}\right)^{3/2}\mathrm{e}^{-\frac{M\omega^2}{2k^2T}} + \frac{m^2e^2}{\omega_{p1}^2}\right], \tag{22.20}$$

其中 ω 由 (22.17) 式给出.

当 $v_{\mathrm{e}}k \gg \omega \gg \omega_{p1}$, 根据 (22.15) 式有

$$\Gamma_{12} = \frac{4\pi e^2 Z_1 Z_2}{k^2 + \mathcal{N}_{\mathrm{e}}^2}. \tag{22.21}$$

在 $\omega \sim \kappa v_{\mathrm{e}}$ 的情形下, 电子环超过离子环. 根据 (22.11) 式, 完全的 Π_{e} 为

$$\Pi_{\mathrm{e}} = -\frac{p_0^2}{\pi^2 v_{\mathrm{e}}}\left[1 - \frac{\omega}{2kv_{\mathrm{e}}}\ln\left|\frac{\omega + kv_{\mathrm{e}}}{\omega - kv_{\mathrm{e}}}\right| + \frac{\mathrm{i}\pi|\omega|}{2kv_{\mathrm{e}}}\theta(kv_{\mathrm{e}} - |\omega|)\right]. \tag{22.22}$$

在 $\omega \gg kv_{\mathrm{e}}$ 区间中, 由此得到

$$\Pi_{\mathrm{e}} = \frac{p_0^3}{\pi^2 m}\frac{k^2}{3\omega^2}\left[1 + \frac{3}{5}\frac{v_{\mathrm{e}}^2 k^2}{\omega^2}\right].$$

将它代入 (22.8) 式就得到

$$\Gamma_{12}(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{4\pi e^2 Z_1 Z_2}{k^2\left\{1 - \dfrac{4\pi e^2 N_{\mathrm{e}}}{m\omega^2 V}\left[1 + \dfrac{3}{5}\dfrac{v_{\mathrm{e}}^2 k^2}{\omega^2}\right]\right\}}. \tag{22.23}$$

这个表达式的极点在

$$\omega^2 = \omega_{p2}^2 + \frac{3}{5}v_{\mathrm{e}}^2 k^2 \tag{22.24}$$

处, 式中,

$$\omega_{p2}^2 = \frac{4\pi e^2 N_{\mathrm{e}}}{mV}, \quad v_{\mathrm{e}}k \ll \omega_{p2}. \tag{22.25}$$

极点对应电子的所谓等离子振荡. 和离子的等离子振荡一样, 频率几乎与波长无关. 振荡的频散由小修正项描述. 衰减的计算也同前一种情况一样, 即在经过变换的积分 (22.11) 中, 考虑围绕极点所给出的指数小的贡献. 它正比于 $\mathrm{e}^{-\frac{m\omega_{p2}^2}{2k^2T}}$. 在温度很低时这个式子不对, 因为 e^2 的下一级近似给出更大的项.

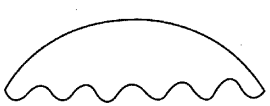


图 62

从 (22.23) 式看出, 当 $\dfrac{k}{\omega} \to 0, \omega \to 0$ 时, $\Gamma \to -\infty$. 因此在图 62 这个例子中看到, 对于库仑相互作用 Γ^{ω} 含有为无穷大的常数.

§22.3　电子能谱

现在求电子格林函数①. 这是对自能部分的一级修正项. 它的解析表达式为

$$\Sigma_1 = -4\pi e^2 T \lim_{t \to +0}\sum_{\varepsilon_1}\int \frac{1}{(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_1)^2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon_1 t}\mathfrak{G}^{(0)}(p_1, \varepsilon_1). \tag{22.26}$$

①本小节是基于论文 [47] 以及 A. Kochkin 为 $T \neq 0$ 情形所作的计算.

根据 (17.33) 和 (22.10) 式完成对 ε_1 的求和, 得到

$$\Sigma_1 = -4\pi e^2 \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1}{(2\pi)^3} n_{\mathrm{F}}(\boldsymbol{p}_1) \frac{1}{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1)^2},$$

其中 n_{F} 为费米函数.

从上式减去再加上同一表达式, 其中取 $n_{\mathrm{F}}(T=0)$. 离开费米面时, 差 $n_{\mathrm{F}}(\boldsymbol{p},T)-n_{\mathrm{F}}(\boldsymbol{p},0)$ 迅速趋近零. 因而可以在相应积分中将 $\xi_1 = \frac{p_1^2}{2m} - \frac{p_0^2}{2m}$ 换成 $v(p_1-p_0)$. 于是完成对角度的积分后得①

$$\Sigma_1 = -\frac{e^2}{\pi p}\int_0^{p0} p_1 \mathrm{d}p_1 \ln\left|\frac{p_1+p}{p_1-p}\right| - \frac{e^2}{\pi v}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}\xi_1}{\mathrm{e}^{\xi_1/T}+1} \ln\frac{\xi_1+\xi}{|\xi_1-\xi|}.$$

算出第一个积分并略作变换, 我们就得出

$$\Sigma_1 = \frac{e^2 m}{\pi p}\left[\xi\left(\ln\frac{(p+p_0)^2}{2mT}-1\right) - Tf\left(\frac{\xi}{T}\right)\right] - \frac{e^2}{\pi}p_0, \tag{22.27}$$

其中

$$\xi_1 = \frac{p^2}{2m} - \frac{p_0^2}{2m},$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \mathrm{d}z \ln z \left[\mathrm{th}\frac{z+x}{2} - \mathrm{th}\frac{z-x}{2}\right].$$

由于这个表达式和 ε 无关, 它乃是对准粒子能量的修正. 既然费米动量不因相互作用而改变, 同时它与化学势的关系为 $\varepsilon(p_0)=\mu, p=p_0$ 时的 Σ_1 值应看成化学势的改变:

$$\Delta\mu = -\frac{e^2}{\pi}p_0. \tag{22.28}$$

剩下的 $\Sigma_1 - \Delta\mu$, 当 $||\boldsymbol{p}|-p_0| \ll p_0$ 时为

$$\Sigma_1 - \Delta\mu = \frac{e^2 m}{\pi v}\left[\xi\left(\ln\frac{2vp_0}{T}-1\right) - Tf\left(\frac{\xi}{T}\right)\right]. \tag{22.29}$$

由此得到

$$\begin{aligned} \Sigma_1 - \Delta\mu &= \frac{e^2}{\pi v}\xi \ln\frac{2vp_0}{\xi}, \quad \xi \gg T, \\ \Sigma_1 - \Delta\mu &= \frac{e^2}{\pi v}\xi\left(\ln\frac{4\gamma v p_0}{\pi T}-1\right), \quad \xi \ll T, \end{aligned} \tag{22.30}$$

式中 $\gamma = \mathrm{e}^c \simeq 1.78$($c$ 为欧尤拉常数).

从 (22.30) 式看出, 对于很小的 $\xi(\boldsymbol{p})$ 和 T, 表达式 (22.27) 是不够确切的. 对准

①本小节中以字母 v 记费米面上的电子速度 $\frac{p_0}{m}$.

粒子速度的修正项 $\dfrac{\partial\Sigma_1}{\partial \boldsymbol{p}}$, 在费米面附近当 $T\to 0,\xi\to 0$ 时, 正比于 $\ln\dfrac{vp_0}{T}$ 或 $\ln\dfrac{vp_0}{\xi}$ 而趋向无穷大. 这种结果之所以产生, 是因为当 $p\to p_0$ 时, 积分 (22.26) 顶角中的小动量传递变得更重要了. 这时必须考虑全部贯穿于基本虚线上的环, 换言之, 须将 $\dfrac{4\pi e^2}{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1)^2}$ 换成对应 (22.8) 式的 $\Gamma_{\mathrm{ee}}(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p},\varepsilon_1-\varepsilon)$.

更方便的作法, 不是计算整个 Σ, 而是求 Σ 与上面已算出的 Σ_1 之差. 这个差仍由 (22.26) 式表示, 只是其中 $\dfrac{4\pi e^2}{(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p})^2}$ 换成了 $\Gamma_{\mathrm{ee}}-\dfrac{4\pi e^2}{(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p})^2}$. 应当指出, 在此积分中考虑 $\mathfrak{G}$ 函数的高级近似, 并不导致重要的修正, 因为在修正之后的 $\mathfrak{G}$ 函数中, p_0 仍和从前一样对应费米动量.

前面已指出过, Γ_{ee} 作为频率的函数, 具有玻色粒子格林函数的一切性质. Γ_{ee} 及其零级近似的差仍然如此. 由此可见, 我们的问题和上节中计算与声子作用着的电子自能, 极为相似. 然而这里重要的是小动量值 k. 将 $\Gamma_{\mathrm{ee}}(\omega,k)-\dfrac{4\pi e^2}{k^2}$ 记为 $D(\omega,k)$. 那么前节 (21.29) 式就完全适用于我们所讨论的情形 (g^2 须换成 1). 注意 $\Sigma(\varepsilon)\ll\varepsilon$, 而且重要的是 $k\ll p_0$, 我们就得到

$$\begin{aligned}\Sigma_{\mathrm{R}}=&\frac{1}{(2\pi)^3v}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\beta\int_0^{\infty}k\mathrm{d}k\int_{\xi-vk-\varepsilon}^{\xi+vk-\varepsilon}\mathrm{d}\omega\frac{\mathrm{Im}D_{\mathrm{R}}(\beta,k)}{\beta+\omega-\mathrm{i}\delta}\\&\times\left(\mathrm{th}\frac{\omega+\varepsilon}{2T}+\mathrm{cth}\frac{\beta}{2T}\right).\end{aligned}\tag{22.31}$$

由于我们只关心能谱, 其零级近似为 $\varepsilon=\xi$, 因而可认为对 ω 的积分限是 $(-vk,+vk)$. Σ_{R} 的实部等于积分 (22.31) 的主值. 作若干变换, 并注意 $\mathrm{Im}D_{\mathrm{R}}(\beta,k)$ 的反对称性以及 $\mathrm{Im}D_{\mathrm{R}}(\beta,k)$ 和 $\mathrm{Re}D_{\mathrm{R}}(\beta,k)$ 的关系, 我们求出:

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\Sigma_{\mathrm{R}}=&\frac{\pi}{(2\pi)^3v}\int_0^{\infty}\mathrm{d}\omega\int_{\omega/v}^{\infty}k\mathrm{d}k\mathrm{Re}D_{\mathrm{R}}(\omega,k)\\&\times\left(\mathrm{th}\frac{\varepsilon+\omega}{2T}+\mathrm{th}\frac{\varepsilon-\omega}{2T}\right).\end{aligned}\tag{22.32}$$

类似地由 (22.31) 中环绕极点的积分得

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\Sigma_{\mathrm{R}}=&\frac{\pi}{(2\pi)^3v}\int_0^{\infty}\mathrm{d}\omega\int_{\omega/v}^{\infty}k\mathrm{d}k\ \mathrm{Im}D_{\mathrm{R}}(\omega,k)\\&\times\left(2\mathrm{cth}\frac{\omega}{2k}-\mathrm{th}\frac{\omega+\varepsilon}{2T}-\mathrm{th}\frac{\varepsilon-\omega}{2T}\right).\end{aligned}\tag{22.33}$$

和从前一样, 含有 th 和 cth 函数的括弧表明, ε 和 T 两个变量中只有大者起决定作用 (有一个例外情形, 即 D_{R} 的极点重要, 见下文). D_{R} 的值由 ω 所处的区

间决定, 可分为 3 种情况: $\omega \ll kv_{\mathrm{i}}$, $kv_{\mathrm{i}} \ll \omega \ll kv_{\mathrm{e}}$ 和 $\omega \sim kv_{\mathrm{e}}$. 不难看出, 与此相应 $\max(\varepsilon, T)$ 的值也有三个区间: (a) 小于 ω_{p1}, (b) 处于 ω_{p1} 和 ω_{p2} 之间, (c) 大于 ω_{p2}. 根据不等式 (22.2) 和 (22.3), $T \gg \omega_{p1}$. 因此我们只须讨论区间 (b) 和 (c).

先考虑 $\omega_{p1} \ll \max(\varepsilon, T) \ll \omega_{p_2}$ 的情形. 将 $\mathrm{Re}\Sigma_{\mathrm{R}}$ 中对 k的积分区间分成两段: $\dfrac{\omega}{v_{\mathrm{e}}} \lesssim k \lesssim \dfrac{\omega}{v_{\mathrm{i}}}$ 和 $\dfrac{\omega}{v_{\mathrm{i}}} \lesssim k < \infty$, 代入

$$D_{\mathrm{R}} = \frac{(4\pi e^2)^2(Z^2\Pi_{\mathrm{i}} + \Pi_{\mathrm{e}})}{k^2[k^2 - 4\pi e^2(Z^2\Pi_{\mathrm{i}} + \Pi_{\mathrm{e}})]}, \tag{22.34}$$

我们看出, 区间 $\dfrac{\omega}{v_{\mathrm{i}}} \lesssim k < \infty$ 的贡献的数量级为 $\dfrac{e^2}{v}\omega_{p1}\mathrm{th}\dfrac{\varepsilon}{2T}$, 即远小于 Σ_1. 相反, 区间 $\dfrac{\omega}{v_{\mathrm{e}}} \lesssim k \lesssim \dfrac{\omega}{v_{\mathrm{i}}}$却给出重要贡献. 注意到重要的值是 $\omega \sim \max\{\varepsilon, T\} \gg \omega_{p1}$, 可认为 $\Pi_{\mathrm{i}} \ll \Pi_{\mathrm{e}}, 4\pi e^2\Pi_{\mathrm{e}} = -\mathcal{N}_{\mathrm{e}}^2$, 从而得

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\Sigma_{\mathrm{R}} &= -\frac{e^2}{2\pi v}\int_0^\infty \mathrm{d}\omega \int_{\omega/v}^\infty \frac{k_{\mathrm{e}}^2 \mathrm{d}k}{k(k^2+\mathcal{N}_{\mathrm{e}}^2)}\left(\mathrm{th}\frac{\varepsilon+\omega}{2T} + \mathrm{th}\frac{\varepsilon-\omega}{2T}\right) \\ &= -\frac{e^2}{\pi v}\left[\varepsilon \ln\frac{v\mathcal{N}_{\mathrm{e}}}{T} - Tf\left(\frac{\varepsilon}{T}\right)\right].\end{aligned} \tag{22.35}$$

$\mathrm{Im}\Sigma_{\mathrm{R}}$ 的积分区间也能如此分段. 在区间 $\dfrac{\omega}{v_{\mathrm{e}}} \lesssim k \lesssim \dfrac{\omega}{v_{\mathrm{i}}}$ 中, 函数 D_{R} 具有对应于离子声波的极点. 环绕极点的积分对 $\mathrm{Im}\Sigma_{\mathrm{R}}(\omega, k)$ 的贡献为

$$\begin{aligned}&-\frac{\varepsilon^2\omega_{p1}}{4v}\int_0^\infty \mathrm{d}\omega \int_{\frac{\omega}{v}}^{\sim\frac{\omega}{v_{\mathrm{i}}}} \frac{k^2\mathrm{d}k}{(k^2+\mathcal{N}_{\mathrm{e}}^2)^{3/2}}\delta\left(\omega - \omega_{p1}\frac{k}{\sqrt{k^2+\mathcal{N}_{\mathrm{e}}^2}}\right) \\ &\times\left(2\mathrm{cth}\frac{\omega}{2T} - \mathrm{th}\frac{\omega+\varepsilon}{2T} - \mathrm{th}\frac{\omega-\varepsilon}{2T}\right) = -\frac{e^2T}{v}\ln\frac{\mathcal{N}_{\mathrm{i}}}{\mathcal{N}_{\mathrm{e}}}\end{aligned} \tag{22.36}$$

(此结果以对数准确度①算出).

与此同时, Π_{i} 和 Π_{e} 的虚部也可能有重要贡献. 代入之后有

$$\begin{aligned}&\frac{e^2}{2\pi v}\int_0^\infty \mathrm{d}\omega \int_{\omega/v}^\infty \frac{k\mathrm{d}k 4\pi e^2 \mathrm{Im}(\Pi_{\mathrm{e}} + Z^2\Pi_{\mathrm{i}})}{[k^2 - 4\pi e^2(\Pi_{\mathrm{e}} + Z^2\Pi_{\mathrm{i}})]^2} \\ &\times\left(2\mathrm{cth}\frac{\omega}{2T} - \mathrm{th}\frac{\omega+\varepsilon}{2T} - \mathrm{th}\frac{\omega-\varepsilon}{2T}\right).\end{aligned}$$

由于 $\mathrm{Im}\Pi_{\mathrm{i}}$ 之指数性质, 相应积分中重要的是 $k \gtrsim \dfrac{\omega}{v_{\mathrm{i}}}$. 估值表明这个积分对 $\mathrm{Im}\Sigma_{\mathrm{R}}$ 的贡献约为 $\dfrac{e^2}{v}T$. 即在对数准确度下小于 (22.36) 式.

①对数准确度的意思是: 比值 $\dfrac{k_{\mathrm{i}}}{k_{\mathrm{e}}}$ 要足够大, 以致 $\ln\dfrac{k_{\mathrm{i}}}{k_{\mathrm{e}}}$ 也相当大, 而误差的数量为 $\left(\ln\dfrac{k_{\mathrm{i}}}{k_{\mathrm{e}}}\right)^{-1}$——译者注.

另一个虚部 $\mathrm{Im}\Pi_{\mathrm{e}}$ 给出区间为 $\omega\sim\max(\varepsilon,T), k\sim\mathcal{N}_{\mathrm{e}}$ 的积分, 因此可令对 k 的积分下限等于零, 则

$$-\frac{e^2}{4v^2}\int_0^\infty \omega\mathrm{d}\omega\left(2\mathrm{cth}\frac{\omega}{2T}-\mathrm{th}\frac{\omega+\varepsilon}{2T}-\mathrm{th}\frac{\omega-\varepsilon}{2T}\right)\times\int_0^\infty\frac{\mathcal{N}_{\mathrm{e}}^2\mathrm{d}k}{(k^2+\mathcal{N}_{\mathrm{e}}^2)^2}=-\frac{\pi e^2}{16v^2\mathcal{N}_{\mathrm{e}}}[\varepsilon^2+(\pi T)^2]. \tag{22.37}$$

此式第二项小于 (22.36), 然而含有 ε^2 的第一项可能大于离子衰减.

再考虑区间 $\omega_{p2}\ll\max(\varepsilon,T)$. 讨论 $\mathrm{Re}D_{\mathrm{R}}$ 的积分 (22.35). 不难看出, 它只给出约为 $\dfrac{e^2}{v}\omega_{p2}\mathrm{th}\dfrac{\varepsilon}{2T}$ 的次要贡献. 因此, Σ_{R} 的实部基本上等于 Σ_{R1}. 至于虚部, 则 D_{R} 的离子声波极点的贡献仍是 (22.36). $\mathrm{Im}\Pi_{\mathrm{i}}$ 的贡献也照旧, 即无足轻重.

来自 $\mathrm{Im}\Pi_{\mathrm{e}}$ 的电子衰减由一积分表达, 其中重要的是 $k\sim\mathcal{N}_{\mathrm{e}},\omega\sim v\mathcal{N}_{\mathrm{e}}\sim\omega_{p2}$. 如果 $T\gg\omega_{p2}$, 则积分的数量极为 $\dfrac{e^2}{v}T$, 即可不予考虑. 如果 $T\ll\omega_{p2}$, 则在积分中可令 $T=0$. 由于现在 $\omega\sim vk$, 应代入 Π_{e} 的完全表达式 (22.22). 首先要利用的是, $T=0$ 时 (22.32) 和 (22.33) 两式的温度括弧相同等于 2. 结合此二式, 得

$$(\Sigma_{\mathrm{R}}-\Sigma_{\mathrm{R1}})\big|_{\substack{T=0\\ \varepsilon\gg\omega_{p2}}}=\frac{1}{(2\pi)^2v}\int_0^\infty\mathrm{d}\omega\int_{\omega/v}^\infty k\mathrm{d}kD_{\mathrm{R}}(k,\omega).$$

将 (22.34) 和 (22.22) 代入上式, 求得

$$-e^2\mathrm{Re}(\beta_1+\mathrm{i}\beta_2), \tag{22.38}$$

其中常数 β_1 和 β_2 分别等于以下积分的实部和虚部:

$$\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}x\left[1-u\left(\mathrm{arcth}u-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}\right)\right]^{1/2}. \tag{22.39}$$

此处取虚部为正值的根号. (22.38) 式的虚部就是所求的衰减.

由方程 $\varepsilon-\xi-\Sigma+\Delta\mu=0$, 求得各不同区间中电子激发的能谱和衰减如下:

(a) $\omega_{p1}\ll\max\{\xi,T\}\ll\omega_{p2}$:

$$\begin{aligned}\varepsilon(\boldsymbol{p})&=\xi(\boldsymbol{p})\left[1+\frac{e^2}{\pi v}\left(\ln\frac{2p_0}{\mathcal{N}_{\mathrm{e}}}-1\right)\right],\\ \gamma(\boldsymbol{p})&=\frac{e^2}{v}\left[T\ln\frac{\mathcal{N}_{\mathrm{i}}}{\mathcal{N}_{\mathrm{e}}}+\frac{\pi\xi^2(\boldsymbol{p})}{16v\mathcal{N}_{\mathrm{e}}}\right];\end{aligned} \tag{22.40}$$

(b) $\omega_{p2}\ll\max(\xi,T)$:

$$\varepsilon(\boldsymbol{p})=\xi(\boldsymbol{p})\left[1+\frac{e^2m}{\pi p}\left(\ln\frac{(p+p_0)^2}{2mT}-1\right)\right]-\frac{e^2mT}{\pi p}f\left[\frac{\xi(\boldsymbol{p})}{T}\right],$$

$$\gamma(\boldsymbol{p}) = \frac{e^2}{v} T \ln \frac{\mathcal{N}_\mathrm{i}}{\mathcal{N}_\mathrm{e}} + e^2 \mathcal{N}_\mathrm{e} \beta_2.$$

作为 (22.40) 式的特例, 在 $\dfrac{p_0^2}{2m} \gg T \gg \max\{\xi(\boldsymbol{p}), \omega_{p2}\}$ 时有

$$\varepsilon(\boldsymbol{p}) = \xi(\boldsymbol{p}) \left[1 + \frac{e^2}{\pi v} \left(\ln \frac{4\gamma v p_0}{\pi T} - 1 \right) \right],$$

而在 $\xi(\boldsymbol{p}) \gg \max\{T, \omega_{p2}\}$ 时有

$$\varepsilon(\boldsymbol{p}) = \xi(\boldsymbol{p}) \left[1 + \frac{e^2 m}{\pi p} \ln \left| \frac{p + p_0}{p - p_0} \right| \right]. \tag{22.41}$$

§22.4 热力学函数

我们要讨论的最后一个问题是简并等离子体的热力学函数①. 根据 (10.22) 式有

$$\begin{aligned} \Delta\Omega = \Omega - \Omega_0 = \frac{1}{2} \int_0^{e^2} \mathrm{d}(e^2) \int \mathrm{d}\boldsymbol{r} \mathrm{d}^4 x' \frac{\delta(\tau - \tau')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \Big[& \langle \widetilde{\bar{\psi}}_\alpha(x) \widetilde{\bar{\psi}}_\beta(x') \\ & \times \tilde{\psi}_\beta(x') \tilde{\psi}_\alpha(x) \rangle - 2Z \langle \widetilde{\bar{\psi}}_\alpha(x) \widetilde{\bar{\Phi}}(x') \tilde{\Phi}(x') \tilde{\psi}_\alpha(x) \rangle \\ & + Z^2 \langle \widetilde{\bar{\Phi}}(x) \widetilde{\bar{\Phi}}(x') \tilde{\Phi}(x') \tilde{\Phi}(x) \rangle \Big]. \end{aligned} \tag{22.42}$$

括弧 $\langle \cdots \rangle$ 内的式子可以通过函数 $\mathfrak{G}$ 和 $\mathcal{J}$ 表示, 例如:

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{\bar{\psi}}_\alpha(x) \widetilde{\bar{\psi}}_\beta(x') \tilde{\psi}_\beta(x') \tilde{\psi}_\alpha(x) \rangle = & -2\mathfrak{G}_\mathrm{e}^{(0)}(x - x') \mathfrak{G}_\mathrm{e}^{(0)}(x' - x) \\ & + \left(\frac{N_\mathrm{e}}{V} \right)^2 - \int \mathrm{d}^4 x_1 \mathrm{d}^4 x_2 \mathrm{d}^4 x_3 \mathrm{d}^4 x_4 \mathfrak{G}_\mathrm{e}^{(0)}(x - x_1) \mathfrak{G}_\mathrm{e}^{(0)}(x' - x_2) \\ & \times \mathfrak{G}_\mathrm{e}^{(0)}(x_3 - x) \mathfrak{G}_\mathrm{e}^{(0)}(x_4 - x') \mathcal{J}_{\alpha\beta,\alpha\beta}^{\mathrm{ee}}(x_1, x_2; x_3, x_4). \end{aligned}$$

$\left(\dfrac{N_\mathrm{e}}{V} \right)^2$ 项可省去, 因为它在 (22.42) 式中与来自电子–离子以及离子相互作用的类似项消去, 这是电性中和条件的表现. 在展开来自电子–离子以及离子–离子相互作用的四个算符平均值时, 不必写出有两条 $\mathfrak{G}$ 线的那项. 这项来自交换作用. 离子和电子不可能交换, 而离子间的交换作用很小, 因为离子组成玻尔兹曼气体.

因此所得的式子由两项构成. 一项来自两个电子 $\mathfrak{G}$ 函数的乘积 (它相当于电子交换能), 另一项乃是各种不同 $\mathfrak{G}$ 线的诸项之和.

先讨论第一项. 它在动量表象中为

$$\frac{\Delta\Omega_1}{V} = -4\pi e^2 T^2 \sum_{\tau_1, \tau_2 \to +0} \sum_{n_1, n_2} \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1 \mathrm{d}\boldsymbol{p}_2}{(2\pi)^6} \frac{1}{(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2)^2}$$

①简并等离子体的热力学函数是 A. A. Vedenov[48] 算得的.

$$\times \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon_{n_1}\tau_1}}{\mathrm{i}\varepsilon_{n_1}-\varepsilon_0(\boldsymbol{p}_1)+\mu}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon_{n_2}\tau_2}}{\mathrm{i}\varepsilon_{n_2}-\varepsilon_0(\boldsymbol{p}_2)+\mu}.$$

因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon_n\tau}$ 指示哈密顿量 (22.1) 中算符 ψ 的顺序. 对 n_1 和 n_2 的求和是相互无关的. 回忆 $\mathfrak{G}$ 函数傅里叶分量的定义, 我们得到

$$T\sum_{\substack{n\\ \tau\to+0}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon_n\tau}}{\mathrm{i}\varepsilon_n-\varepsilon_0(\boldsymbol{p})+\mu}=\mathop{\mathfrak{G}_{\mathrm{e}}^{(0)}}_{\tau\to+0}(\boldsymbol{p},-\tau)=n(\boldsymbol{p}).$$

因此求得

$$\frac{\Delta\Omega_1}{V}=-4\pi e^2\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2 n(\boldsymbol{p}_1)n(\boldsymbol{p}_2)}{(2\pi)^6(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)^2}. \tag{22.43}$$

对于玻尔兹曼气体这项很小, 因为其中占据数 $n\ll 1$. 这就是忽略离子交换的根据.

现在讨论其他各项. 在动量表象中得到

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\Omega_2}{V}=&-\frac{4\pi}{2}\int_0^{e^2}\mathrm{d}(e^2)T^3\sum_{n_1,n_2,m}\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2}{(2\pi)^9}\frac{1}{k^2}\\
&\times\{4\mathfrak{G}^{\mathrm{e}}_{n_1}(\boldsymbol{p}_1)\mathfrak{G}^{\mathrm{e}}_{n_1+m}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{k})\mathfrak{G}^{\mathrm{e}}_{n_2}(\boldsymbol{p}_2)\mathfrak{G}^{\mathrm{e}}_{n_2+m}(\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{k})\mathcal{J}_{\mathrm{ee}}(\boldsymbol{k},\omega_m)\\
&-8Z\mathfrak{G}^{\mathrm{i}}_{n_1}(\boldsymbol{p}_1)\mathfrak{G}^{\mathrm{i}}_{n_1+m}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{k})\mathfrak{G}^{\mathrm{e}}_{n_2}(\boldsymbol{p}_2)\mathfrak{G}^{\mathrm{e}}_{n_2+m}(\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{k})\mathcal{J}_{\mathrm{ei}}(\boldsymbol{k},\omega_m)\\
&+4Z^2\mathfrak{G}^{\mathrm{i}}_{n_1}(\boldsymbol{p}_1)\mathfrak{G}^{\mathrm{i}}_{n_1+m}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{k})\mathfrak{G}^{\mathrm{i}}_{n_2}(\boldsymbol{p}_2)\mathfrak{G}^{\mathrm{i}}_{n_2+m}(\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{k})\mathcal{J}_{\mathrm{ii}}(\boldsymbol{k},\omega_m)\}.\end{aligned}$$

由于顶角部分 $\mathcal{J}$ 本身的数量级为 e^2, 这项在形式上是 e 的四次方项. 但这里重要的是, 在对 k 的积分和对 m 的求和中小的 k 和 m 起主要作用. 与 (22.9) 式比较, 我们可写出:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\Omega_2}{V}=&-2\pi\int_0^{e^2}\mathrm{d}(e^2)T\sum_{\omega}\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{k^2}\{\pi_{\mathrm{e}}^2(\omega_m,\boldsymbol{k})\mathcal{J}_{\mathrm{ee}}(\omega_m,\boldsymbol{k})\\
&+2Z\pi_{\mathrm{i}}(\omega_m,\boldsymbol{k})\pi_{\mathrm{e}}(\omega_m,\boldsymbol{k})\mathcal{J}_{\mathrm{ei}}(\omega_m,\boldsymbol{k})\\
&+Z^2\pi_{\mathrm{i}}^2(\omega_m,\boldsymbol{k})\mathcal{J}_{\mathrm{ii}}(\omega_m,\boldsymbol{k})\}=-8\pi^2\int_0^{e^2}e^2\mathrm{d}(e^2)T\\
&\times\sum_{\omega}\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{(3\pi)^3}\frac{1}{k^2}\frac{\pi_{\mathrm{e}}^2+2Z^2\pi_{\mathrm{i}}\pi_{\mathrm{e}}+Z^4\pi_{\mathrm{i}}^2}{k^2-4\pi e^2(\pi_{\mathrm{e}}+Z^2\pi_{\mathrm{i}})}\\
=&-\frac{1}{\pi}\int_0^{e^2}e^2\mathrm{d}(e^2)T\sum_{\omega}\int\frac{\mathrm{d}k}{(2\pi)^3}\frac{1}{k^2}\\
&\times\frac{(\pi_{\mathrm{e}}+Z^2\pi_{\mathrm{i}})^2}{k^2-4\pi e^2(\pi_{\mathrm{e}}+Z^2\pi_{\mathrm{i}})}.\end{aligned} \tag{22.44}$$

这里起主要作用的 k^2 值约为 $4\pi e^2(\pi_{\mathrm{e}}+Z^2\pi_{\mathrm{i}})$. 我们须确定 $v_{\mathrm{e}}k, v_{\mathrm{i}}k$ 和 $\omega_m=2m\pi T$ 各量的关系. 不难看出, (22.44) 式中对 k 的积分随 $4\pi e^2(\pi_{\mathrm{e}}+Z^2\pi_{\mathrm{i}})$ 增加.

讨论 π 的 (22.11) 式. 如果设 $vk \ll T$, 则 $\omega_m = 0$ 时 $\pi(\omega_m, k)$的值最大. 这时最重要的是

$$\pi_{\mathrm{i}} \sim \frac{N_{\mathrm{i}}}{TV}$$

的离子环, 因而

$$4\pi e^2(\pi_{\mathrm{e}} + Z^2\pi_{\mathrm{i}}) \sim \frac{e^2}{V}\frac{N_{\mathrm{i}}Z^2}{T}.$$

由此得出

$$(v_{\mathrm{i}}k)^2 \sim \frac{T}{M}\frac{N_{\mathrm{i}}}{V}\frac{e^2}{T} \sim \frac{e^2N_{\mathrm{i}}}{VM} \ll T^2.$$

因此我们的假设是对的. 我们可在 (22.36) 中只取 $m = 0$ 的项, 并且令

$$\pi_{\mathrm{e}} + Z^2\pi_{\mathrm{i}} \approx -\frac{Z^2}{V}\frac{\partial N_{\mathrm{i}}}{\partial\mu}.$$

然后对 k^2 积分得

$$\frac{\Delta\Omega_2}{V} = -\frac{2\sqrt{\pi}}{3}(Ze)^3T\left(\frac{1}{V}\frac{\partial N_{\mathrm{i}}}{V\partial\mu}\right)^{3/2} = -\frac{2\sqrt{\pi}}{3}(Ze)^3\frac{(N_{\mathrm{i}}/V)^{3/2}}{T^{1/2}}. \tag{22.45}$$

在条件 (22.2), (22.3) 成立时, 这项比 (22.43) 式小. 然而这是唯一数量级为 e^3 的项, 因为 $\Delta\Omega_1$ 的修正项数量级为 e^4.

如果不要求电子气体满足强简并条件, 则 $\Delta\Omega_2$ 可能达到与 $\Delta\Omega_1$ 同数量级. 然而这时还应计入电子环. 因此得到

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\Omega}{V} = &-4\pi e^2\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2}{(2\pi)^6}\frac{n(\boldsymbol{p}_1)n(\boldsymbol{p}_2)}{(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)^2}\\ &-\frac{2\sqrt{\pi}}{3}e^3T\left(\frac{Z^2}{V}\frac{\partial N_{\mathrm{i}}}{\partial\mu}+\frac{1}{V}\frac{\partial N_{\mathrm{e}}}{\partial\mu}\right)^{3/2}.\end{aligned}$$

这个公式在满足以下条件时适用:

$$e^2m\left(\frac{V}{N}\right)^{1/3} \ll 1, \quad T \gg \max\left\{e^2\left(\frac{N}{V}\right)^{1/3}, \frac{1}{M}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}\right\}. \tag{22.46}$$

第 5 章　相互作用玻色粒子系统

§23　绝对温度零度时应用场论方法于玻色粒子系统

推广量子场论方法到温度低于“玻色凝聚”点的玻色粒子系统有很大困难. 然而相应的理论形式已经建立 (S. T. Belyaev[49]), 我们将在本章里加以研究. 和以前一样, 先讨论绝对温度零度的情形.

前面各处论述中建立图解法的基础在于, 几个不相互作用的 ψ 算符乘积的平均值可以归结为算符 $\psi\psi^+$ 成对平均值的乘积. 这乃是维克定理的后果. 根据这个定理, 任何数量场算符的编时乘积的平均值, 都分解为及正规乘积的乘积之和. 对于费米粒子系统, 其基态 ——“真空”(我们暂时只讨论绝对零度的情形) 具有这样的性质, 即改变产生和消灭算符的定义, 可令正规乘积的平均值为零, 对于玻色粒子系统完全是另一回事. 由于统计的性质, 玻色气体在低温之下在动量为零的状态里能集中任意多的粒子. 理想气体温度 $T=0$ 时最低能级上的粒子数就等于系统内的粒子总数. 因此玻色凝聚状态的特点就是, 当总粒子数 N 和系统的体积趋向无穷大时, 动量为零的基态能级上的粒子数密度趋向有限值. 故而算符 a_0^+ 和 a_0 的正规乘积如 $(a_0^+)^n a_0^n$ 的平均值, 不仅不为零, 反而可能任意大.

先假设系统处于绝对温度零度. 我们方才说过, 理想玻色气体所有粒子都处于动量为零的能级上. 从相互作用表象的算符 $\psi(x)$ 和 $\psi^+(x)$ 中, 分出相当于在 $\rho=0$ 的状态中产生和消灭粒子的算符:

$$\psi(x)=\xi_0+\psi'(x),\psi^+(x)=\xi_0^++\psi'^+(x) \tag{23.1}$$

$\left(\text{以后我们采用记号}\xi_0=\dfrac{a_0}{\sqrt{V}},\xi_0^+=\dfrac{a_0^+}{\sqrt{V}}\right)$.

当 $V\to\infty$ 时总粒子数 $N=V\xi_0^+\xi_0$ 可能任意大. 因此如果在对易关系

$$\xi_0\xi_0^+-\xi_0^+\xi_0=\frac{1}{V}$$

中省略右端, 则算符 ξ_0 和 ξ_0^+ 在第一级近似里可看成普通数, 第 1 章里正是这样做的. 然而我们将看到, 这只对于充分弱的相互作用才是有意义的.

系统的总哈密顿量可写成

$$H=H_0+H_{\text{int}},$$

其中

$$H_0 = \frac{1}{2m}\int \nabla\psi^+(x)\nabla\psi(x)\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

而 H_{int} 是相互作用哈密顿量, 其形状我们暂不具体化. 所有场论中熟知的、借助 S 矩阵将海森伯表象和相互作用表象算符联系起来的公式以及 S 矩阵本身的定义

$$S = T\exp\left\{-\mathrm{i}\int H_{\mathrm{int}}(x)\mathrm{d}^4x\right\}. \tag{23.2}$$

都还有效, 单粒子格林函数 $G(x,x')$ 通过海森伯表象的算符定义

$$G(x-x') = -\mathrm{i}\langle T(\tilde{\psi}(x)\tilde{\psi}^+(x'))\rangle, \tag{23.3}$$

而在相互作用表象中为

$$G(x-x') = -\frac{\mathrm{i}\langle T(\psi(x)\psi^+(x')S)\rangle}{\langle S\rangle}. \tag{23.3'}$$

(23.3) 式中对 N 个有相互作用粒子的基态求平均, 而 (23.3') 式中对 N 个无相互作用粒子的基态求平均. 然而, 不用 (23.3) 式, 而讨论格林函数 $G(x-x')$ 的两部分却更为方便, 即

$$\begin{aligned} G'(x-x') &= -\mathrm{i}\langle T(\tilde{\psi}'(x)\tilde{\psi}'^+(x'))\rangle \\ &= -\frac{\mathrm{i}\langle T(\psi'(x)\psi'^+(x')S)\rangle}{\langle S\rangle}, \end{aligned} \tag{23.4}$$

以及

$$\begin{aligned} G_0(t-t') &= -\mathrm{i}\langle T(\tilde{\xi}_0(t)\tilde{\xi}_0^+(t'))\rangle \\ &= -\frac{\mathrm{i}\langle T(\xi_0(t)\xi_0^+(t')S)\rangle}{\langle S\rangle}; \end{aligned} \tag{23.5}$$

$G'(x-x')$ 是“凝聚体外”粒子的格林函数, $G_0(t-t')$ 是凝聚体粒子的格林函数. 显然 $G_0(t-t')$ 和空间坐标之差无关, 因而可定义成总格林函数的动量为零的傅里叶分量:

$$G_0(t-t') = \int G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}', t-t')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'.$$

凝聚体中粒子数密度为

$$n_0 = \mathrm{i}G_0(t-t'), \quad t' = t+0.$$

至于总粒子数密度, 则它总是等于:

$$n = n' + n_0 = \mathrm{i}(G'(0,t-t') + G_0(t'-t)), \quad t' = t+0. \tag{23.6}$$

和 §4 一致，我们再次指出，有相互作用存在时，凝聚体内的粒子数不同于总粒子数.

现在直接转到建立相互作用粒子微扰论的图解法. 考虑到凝聚体粒子所起的特殊作用，我们将假定在哈密顿量 H_{int} 中已作代换 (23.1)，算符 ξ_0 和 ξ_0^+，ψ' 和 ψ'^+ 分别出现于 H_{int} 中，类似地将假定，S 矩阵的定义 (23.2) 中 H_{int} 也整理成这种形式. 我们以后的叙述适用于具有任意相互作用规律的粒子、任意数目的算符 ψ 和 ψ^+ 的乘积所构成的哈密顿量 $H_{\text{int}}(x)$.

作了以上分离之后，编时运算 T 以及对无相互作用粒子基态的求平均，都可以表示成两个相继的运算，分别对凝聚体内和凝聚体外的粒子进行：

$$T = T^0 \cdot T', \langle \cdots \rangle = \langle \langle \cdots \rangle' \rangle^0, \tag{23.7}$$

其中 T^0 和 $\langle \cdots \rangle^0$ 应用于算符 ξ_0 和 ξ_0^+. 把 S 矩阵展开为相互作用的幂级数，则每个展开项都包括算符 ξ_0, ξ_0^+, ψ' 和 ψ'^+ 各种乘积的组合，对于自由粒子的算符 ψ' 和 ψ'^+，可应用普通的维克定理，因为凝聚体外粒子的正规乘积的平均值为零. $\psi'\psi'^+$ 的成对编时平均值我们记为 $G^0(x-x')$，它不为零而等于：

$$\begin{aligned} G^0(x-x') &= -\mathrm{i}\langle T'(\psi'(x)\psi'^+(x'))\rangle' \\ &\equiv -\mathrm{i}\langle T(\psi'(x)\psi'^+(x'))\rangle. \end{aligned} \tag{23.8}$$

相应的傅里叶分量为

$$\begin{aligned} G^{(0)}(x-x') &= (2\pi)^{-4}\int G^{(0)}(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p(x-x')}\mathrm{d}^4p, \\ G^{(0)}(p) &= \frac{1}{\omega - \dfrac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + \mathrm{i}\delta}. \end{aligned} \tag{23.9}$$

因此，如果将算符 ξ_0 和 ξ_0^+ 看成某种 (数字) 参量，则它们在图形的各种顶点上将起着外场的作用.

考虑如何计算任意数量凝聚体外粒子的格林函数. 格林函数的形状为

$$\begin{aligned} &G_n(x_1, \cdots, x_n; x_1', \cdots, x_n') \\ =&\frac{(-\mathrm{i})^n\langle T(\psi'(x_1)\cdots\psi'(x_n)\psi'^+(x_1')\cdots\psi'^+(x_n')S)\rangle}{\langle S\rangle}. \end{aligned} \tag{23.10}$$

根据 (23.7) 将运算 T 和 $\langle \cdots \rangle$ 分成 T'，T^0 以及 $\langle \cdots \rangle'$，$\langle \cdots \rangle^0$，先研究以下量的微扰论级数：

$$\bar{G}_n(x_1, \cdots, x_n; x_1', \cdots, x_n') = (-\mathrm{i})^n\langle T'(\psi'(x_1)\cdots\psi'(x_n)\psi'^+(x_1')\cdots\psi'^+(x_n')S)\rangle'. \tag{23.11}$$

既然运算 T' 和 $\langle \cdots \rangle'$ 不涉及算符 ξ_0 和 ξ_0^+，后者对于这些运算就只是参量，而毫不影响凝聚体外粒子算符各种乘积的编时与求平均. 因而相应的矩阵元可按普通

的费曼图规则写出, 它包含编时平均值 (23.8) 的乘积以及算符 ξ_0 和 ξ_0^+ 的幂. 在 S 矩阵按 $H_{\rm int}$ 幂的某一级展开项中 ξ_0 和 ξ_0^+ 的数目取决于相互作用哈密顿量 $H_{\rm int}$ 的形状, 还和在 $H_{\rm int}$ 中代入 (23.1) 后具体项的选择有关. 例如, 相互作用 (见 §25)

$$H_{\rm int}=\frac{1}{2}\int \psi^+(x)\psi^+(x')U(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\psi(x')\psi(x)\mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \tag{23.12}$$

在做了代换

$$\psi\to\xi_0+\psi';\psi^+\to\xi_0^+ +\psi'^+$$

之后, 分成八项, 从 ξ_0 和 ξ_0^+ 的四次幂 $\frac{1}{2}(\xi_0^+)^2(\xi_0)^2\int U(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 开始, 直到

$$\frac{1}{2}\int \psi'^+(x)\psi'^+(x')U(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\psi'(x')\psi'(x)\mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{r}'.$$

图 63 上画出了函数 $\bar{G}(x-x')$ 二级图的一个例子. 图中实线代表 (23.9) 式中的函数 $G^{(0)}(x-x')$, 两点间的波纹线是相互作用势 $U(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$, 而自由折线代表算符 ξ_0 和 ξ_0^+, 而且 指向相应顶点的是 ξ_0^+, 背向顶点的是 ξ_0. 这个图的矩阵元为

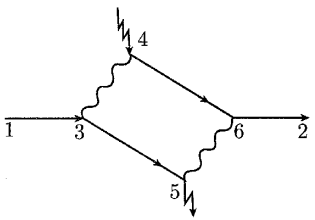


图 63

$$\begin{aligned}\bar{G}(x_1-x_2)=&\mathrm{i}\int G^{(0)}(x_1-x_3)G^{(0)}(x_3-x_5)\xi_0(t_5)U(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_4)\\&\times\xi_0^+(t_4)G^{(0)}(x_4-x_6)U(\boldsymbol{r}_6-\boldsymbol{r}_5)G^{(0)}(x_6-x_2)\mathrm{d}^4x_3\cdots\mathrm{d}^4x_6.\end{aligned} \tag{23.13}$$

在 (23.10) 式的一般情况下, $\bar{G}_n(x_1,\cdots,x_n;x_1',\cdots,x_n')$ 的 m 级矩阵元包括任意数目的算符 ξ_0 和 ξ_0^+ 的乘积. 须指出, ξ_0 和 ξ_0^+ 的幂一定相等. 这是因为相互作用 $H_{\rm int}$ 不改变总粒子数. 因此如果算符 ξ_0 和 ξ_0^+ 的数目不等, 则平均值 $\langle\cdots\rangle'$ 中算符 ψ' 和 ψ'^+ 的数目也彼此不等; 结果它等于零.

设 $M_n(x_1,\cdots,x_n;x_1',\cdots,x_n')$ 是 (23.11) 式中的一个相连图形, 它有对应 m 个算符 ξ_0 和 ξ_0^+ 的 $2m$ 个顶点. 这里相连图形的意义仍同平常一样, 指不能分解成无任何线相连的部分的图形. 和 M_n 同时讨论所有与它只差"真空"环 (即各种不相连图) 的图形. 从场论中熟知, 所有这些图形的总和是矩阵元乘上 S 矩阵的平均值. 这里是 M_n 乘以 $\langle S\rangle'$. 因此建立 (23.11) 式的微扰论级数时只须讨论相连图形, 而相应矩阵元乘以 $\langle S\rangle'$.

现在从计算 $\bar{G}_n(x_1,\cdots,x_n;x_1',\cdots,x_n')$ 回到计算

$$G_n(x_1,\cdots,x_n;x_1',\cdots,x_n')\equiv\frac{\langle T^0\bar{G}_n(x_1,\cdots,x_n;x_1',\cdots,x_n')\rangle^0}{\langle S\rangle}.$$

这一步中 ξ_0 和 ξ_0^+ 的算符性质就有意义了. 迄今可以忽略这一点, 是因为运算 T' 和 $\langle\cdots\rangle'$ 不涉及 ξ_0 和 ξ_0^+, 它们又和 ψ' 与 ψ'^+ 对易. $\bar{G}_n$ 的每个矩阵元 M_n 都和 (23.13) 式相象, 在积分下含有一定数目的算符 ξ_0 和 ξ_0^+ 乘以如 (23.8) 式的平均值. 设包含在 M_n 中的一项是

$$\xi_0(t_1)\cdots\xi_0(t_m)\xi_0^+(t_1')\cdots\xi_0^+(t_m').$$

为了最终求得 $G(x_1,\cdots,x_n;x_1',\cdots,x_n')$, 必须计算如

$$\frac{\langle T^0(\xi_0(t_1)\cdots\xi_0(t_m)\xi_0^+(t_1')\cdots\xi_0^+(t_m')\langle S\rangle')\rangle^0}{\langle S\rangle}$$

的平均值 $\langle\cdots\rangle^0$. 既然运算 T^0 和 $\langle\cdots\rangle^0$ 又不涉及凝聚体外的粒子, 则我们看出, 所求的平均值乃 m 个凝聚体粒子的格林函数, 即

$$G_{0m}(t_1,\cdots,t_m;t_1',\cdots,t_m')=\frac{\langle T(\xi_0(t_1)\cdots\xi_0(tm)\xi_0^+(t_1')\cdots\xi_0^+(t_m')S)\rangle}{\langle S\rangle}. \tag{23.14}$$

因此, 为了确定凝聚体外粒子格林函数的微扰论级数, 必须知道凝聚体的准确 m 粒子格林函数.

直接从 (23.14) 之类的公式出发, 将这些量通过无相互作用的凝聚体粒子数密度计算出来, 这是很复杂的. 这是由于对于算符 ξ_0 和 ξ_0^+ 的乘积, 按维克定理展成正规乘积是没有意义的, 因为如像 $N(a_0\cdots a_0^+\cdots)$ 之类的正规乘积对基态的平均值不仅不等于零, 而且还很大. 同时在 (23.14) 式中不能忽略算符 ξ_0 和 ξ_0^+ 的非对易性. 事实上 $\langle S\rangle'$ 可以写成①

$$\langle S\rangle'=\exp\sigma, \tag{23.15}$$

其中 Σ 是所有单连通 (不分成无关部分的) "真空" 环之和, 并为 ξ_0 和 ξ_0^+ 的泛函. 这个和正比于体积 (凝聚体粒子数密度 $n=\xi_0^+\xi_0$ 是有限量). 在 (23.15) 式中将 $\langle S\rangle'$ 展成 σ 的幂级数时, 要出现 V 的任意次幂. 因此虽然在对易关系

$$\xi_0\xi_0^+-\xi_0^+\xi_0=\frac{1}{V}$$

中右端的数量级为 $\frac{1}{V}$, 省略它还是不适当的: 小量 $\frac{1}{V}$ 可能被 (23.15) 式的展开式中 V 的相应幂补偿.

因而宜换用另一种方法. 注意表达式 (23.14) 可以直接通过海森伯算符写出:

$$G_{0m}(t_1,\cdots,t_m;t_1',\cdots,t_m')=\langle T(\tilde{\xi}_0(t_1)\cdots\tilde{\xi}_0(t_m)\tilde{\xi}_0^+(t_1')\cdots\tilde{\xi}_0^+(t_m'))\rangle, \tag{23.16}$$

①在场论中证明 $\langle S\rangle$ 表示成 (23.15) 式的可能性时, 须假设 ξ_0 和 ξ_0^+ 是无算符性质的外参量, 然而我们看到, 在 (23.14) 式中 $\langle S\rangle'$ 处于对算符 ξ_0 和 ξ_0^+ 的编时符号之下. 处于 T 乘积符号之下的玻色算符可以互相置换. 因此上述场论的假设成立.

式中算符乘积是对相互作用粒子的基态取平均值. 先讨论平均值 $V\langle\tilde{\xi}_0^+\tilde{\xi}_0\rangle$, 它乃是动量为零的准确粒子数. 在理想气体里, 这个数当 $T=0$ 时简单地等于总粒子数 N, 所有粒子处于 $\boldsymbol{p}=0$ 的能级上. 粒子间的相互作用 (在足够小的距离上相斥或相吸会使系统不稳定) 减少动量为零的粒子数. 然而在第 1 章里已着重指出过, 这时凝聚体并不消失, 系统的总粒子数任意大时, 动量为零的平均粒子数也可能任意多 (如果 $V\to\infty$, 则对于粒子间的任何相互作用, 凝聚体粒子数密度 n_0 都不等于零). 从物理看, 这是显而易见的事实, 然而逻辑上不能排除对于某种相互作用 n_0 会等于零的可能性, 我们不在这里去证明这个论断, 何况唯一的物理对象是氦. 读者可在 Belyaev 的论文 [49] 里找到这个证明.

凝聚体内总粒子数由于相互作用而改变, 这正是前面不能把自由算符 ξ_0 和 ξ_0^+ 看成普通数字的原因.

如此建立的凝聚体外格林函数的微扰论级数含有准确海森伯算符 $\tilde{\xi}_0$ 和 $\tilde{\xi}_0^+$ 的平均值. 如果凝聚体不消失, 则算符 $\tilde{\xi}_0$ 和 $\tilde{\xi}_0^+$ 就其对相互作用粒子基态的作用而言, 在第一级近似下仍是普通数字. 可以利用这一点来简化凝聚体粒子格林函数的表达式.

当然不应忘记, 算符 $\tilde{\xi}_0$ 消灭, 而算符 $\tilde{\xi}_0^+$ 产生一个粒子. 因此严格说来, 以后有重要意义的是, 从 N 粒子系统 ($N\to\infty$) 基态跃迁到 $N\pm1$ 个粒子系统基态的算符 $\tilde{\xi}_0,\tilde{\xi}_0^+$ 的矩阵元; 从物理观点看, 在玻色凝聚体的无穷个粒子中增减一个, 事实上不改变系统的基态, 除了系统的能量要改变一个化学势 μ 的值. 以后将算符 $\tilde{\xi}_0$ 和 $\tilde{\xi}_0^+$ 看成数字时, 总应注意到这种情形.

试以单粒子格林函数

$$G_0(t-t')=-\mathrm{i}\langle T(\tilde{\xi}_0(t)\tilde{\xi}_0^+(t'))\rangle\approx-\mathrm{i}\langle\tilde{\xi}_0(t)\tilde{\xi}_0^+(t')\rangle$$

为例详细讨论之. 将最后一式表示成中间态矩阵元乘积之和, 即

$$\begin{aligned}\langle\Phi_N^*|\tilde{\xi}_0(t)\tilde{\xi}_0^+(t')|\Phi_N\rangle=&\langle\Phi_N^*|\tilde{\xi}_0(t)|\Phi_{N+1}\rangle\langle\Phi_{N+1}^*|\tilde{\xi}_0^+(t')|\Phi_N\rangle\\&+\sum_s\langle\Phi_N^*|\tilde{\xi}_0(t)|\Phi_{N+1}^s\rangle\langle\Phi_{N+1}^{s*}|\tilde{\xi}_0^+(t')|\Phi_N\rangle,\end{aligned}$$

其中, Φ_N 和 Φ_{N+1} 是 N 个和 $N+1$ 个相互作用粒子系统的基态, 而 Φ_{N+1}^s 是 $N+1$ 个粒子系统与基态不同的状态. 式中求和的各项很小, 例如 $\tilde{\xi}_0^+\Phi_N\simeq\Phi_{N+1}$, 而 Φ_{N+1} 和 Φ_{N+1}^s 正交. 至于从基态到基态的跃迁矩阵元, 则其与时间的关系可从普通的量子力学公式

$$-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\langle\Phi_N^*|\tilde{\xi}_0(t)|\Phi_{N+1}\rangle=\langle\Phi_N^*|[\hat{H},\tilde{\xi}_0(t)]|\Phi_{N+1}\rangle$$

得出, 成为

$$\tilde{\xi}_0(t)=\xi_0(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_{N+1}-E_N)t}.$$

利用化学势的定义 $\mu = \dfrac{\partial E}{\partial N}$, 并作代换 $\xi_0(0) \to n_0^{1/2}$, 得

$$\mathrm{i}G_0(t-t') = n_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu(t-t')}. \tag{23.17}$$

换言之, 函数 $G_0(t-t')$ 分解成两个独立因子之积, 因子 $\sqrt{n_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu t}$ 对应 $\tilde{\xi}_0(t')$, 而 $\sqrt{n_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu t'}$ 对应 $\tilde{\xi}_0^+(t')$. 显然, 对于凝聚粒子的任何格林函数情形也是类似的: 将算符 $\tilde{\xi}_0(t)$, $\tilde{\xi}_0^+(t)$ 换成数字时, 每一算符须与上述因子对应. 这样计算凝聚体外粒子格林函数的图解法就还原为普通图解法, 其中算符 $\tilde{\xi}_0$ 和 $\tilde{\xi}_0^+$ 起着外场的作用:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_0(t) &= \sqrt{n_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu t}, \\ \tilde{\xi}_0^+(t) &= \sqrt{n_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu t}. \end{aligned} \tag{23.18}$$

和平常一样, 在写微扰论级数时只须考虑相连图形. 我们证明了, 考虑不相连图形归结为将理想气体凝聚体内粒子数密度, 换成有相互作用的气体凝聚体准确粒子数密度, 并且出现频率因子 (23.18). 在其他方面所有图形在相互作用哈密顿量 H_{int} 中代入算符 (23.1) 之后, 假定相互作用表象中的算符 ξ_0 和 ξ_0^+ 是外参数, 而在计算 (23.10) 式时只 (在相连图中) 对凝聚体外粒子作平均 $\langle\cdots\rangle'$ 和编时 T'. 为求得最终表达式, 须按 (23.18) 式将 ξ_0 和 ξ_0^+ 作交换. 再指出一次, 相互作用粒子气体凝聚体中粒子数密度 n_0 和理想气体的相应数值不同.

借助以上发展的费曼图方法计算凝聚体外粒子的格林函数, 所得的表达式中有两个参数, n_0 和化学势 μ, 除了用微扰论直接计算这些量和系统总粒子数密度的关系, 还可以求助于一般性关系. 首先, 系统总粒子数与 n_0, μ 之间有显而易见的关系:

$$n = n_0 + \mathrm{i}G'(x-x')(\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}', t'=t+0). \tag{23.19}$$

第二个关系式的自基态能量相对于 n_0 有最小值的条件. 借助上述方法计算基态能量 $E = \langle\hat{H}\rangle$, 得出和参数 n_0 与 μ 有关的表达式. 在总粒子数不变 (n 是常数) 条件下对 n_0 变分 E 式, 得第二个关系:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial n_0}\right)_n = 0 \tag{23.20}$$

(23.19) 和 (23.20) 式两个条件原则上解决了问题. 实际计算中利用 (24.17) 式常比 (23.20) 式方便.

在结束本节之前, 简单地讨论一下热力学变量的选择问题. 至今我们采用系统中总粒子数作独立变量. 这是由于在建立微扰论时我们从理想玻色气体的特征出发, 在理想玻色气体里, 在化学势不为零时没有玻色凝聚. 大家知道, 在从零度到凝聚点 T_0 的整个温度范围内, 理想玻色气体的化学势恒等于零. 对于相互作用粒

子系统化学势不等于零, 因而 μ 和总粒子数一样是热力学变量. 和平常一样, 要求系统中的平均粒子数等于给定的实际粒子数, 就可确定 μ 的值. 实质上 (23.19) 式正是表示这个条件. 变换到化学势作为独立参量的表象, 有一个形式上的方便之处, 就是可以摆脱 (23.18) 式中的附加时间关系, 后者由于含 $\tilde{\xi}_0(t)$ 和 $\tilde{\xi}_0^+(t)$ 的顶点而出现在矩阵元中.

实际上我们已经不只一次地看到, 将系统的总哈密顿量 H 换成 $H-\mu N$, 就实现了从变量 N 到变量 μ 的变换. 既然算符 ψ 和 ψ^+ 与总粒子数 N 的对易关系是

$$N\psi-\psi N=-\psi,\quad N\psi^+-\psi^+N=\psi^+,$$

哈密顿量的变化就导致算符 ψ 和 ψ^+ 的附加时间关系:

$$\psi\to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu t}\psi,\quad \psi^+\to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu t}\psi^+. \tag{23.21}$$

格林函数也同时变化, 例如总单粒子格林函数

$$G(x-x')\to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu(t-t')}G(x-x'). \tag{23.22}$$

对于傅里叶分量, 这种变换表示将原来表达式中所有的频率 ω 代以 $\omega+\mu$. 因此凝聚体粒子格林函数经过变换 (23.21) 式而由新热力学变量表示后, 就不再与时间有关, 在图形的相应顶点可以省去 (23.18) 式的时间因子. 读者可以根据 (23.22) 式重新定义格林函数, 直接研究其微扰论级数因变换 (23.21) 和 (23.22) 式而引起的变化, 得出上面所说的结果. 以后各处都取 μ 作独立热力学变量.

§24 格林函数

§24.1 方程式的结构

我们现在比较详细地讨论凝聚体外粒子的单粒子格林函数微扰论级数的结构. 任何一级的图可以分成几个不可约部分, 它们之间以一条代表函数 $G^{(0)}(x-x')$ 的线相连. 因此格林函数的任何级图形都是由零级格林函数联系起来的自能图形链. 图 64 上举了几个例子, 圆圈表示不可约自能部分, 其结构我们不具体化.

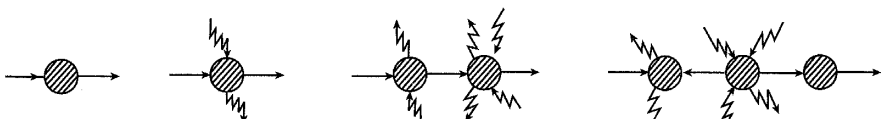


图 64

凝聚体的存在使自能图形中出现了新的一类, 这在前面几章中没有见过. 这些图形来自凝聚体外粒子和凝聚体粒子的相互作用, 而在某些顶点含有算符 $\tilde{\xi}_0$ 和 $\tilde{\xi}_0^+$.

根据上节结果, 它们起着某种外场的作用: $\tilde{\xi}_0, \tilde{\xi}_0^+ \to \sqrt{n_0}$. 从图 64 容易看出, 每个不可约自能图中出来和进去的总线数相等 (总线数中包括代表凝聚体粒子产生和消灭算符的折线). 既然所有自能部分以直线相连, 即包括两个进去或出来的凝聚体外粒子, 则可以将所有的不可约自能图分类如下:

(1) 具有代表凝聚体外粒子的出入线各一条的图形. 在这些图形中进去和出来的折线数目 (算符 $\tilde{\xi}_0$ 和 $\tilde{\xi}_0^+$ 的幂) 应相等. 我们将坐标表象中所有这类图形的矩阵元之和记做 $\Sigma_{11}(x-x')$, 并以图 65(a) 的实心圆圈表示.

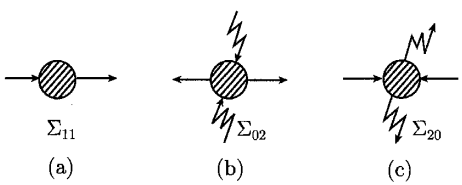


图 65

(2) 具有两条出来的凝聚体外粒子线的图形. 这种图形中进去的折线比出来的多两条. 相应的矩阵元之和我们记做 $\Sigma_{02}(x-x')$. 并以具有两条进去的折线的实心圆代表, 如图 65(b).

(3) 具有两条进去的凝聚体外粒子线的图形. 这些图形和上面相反, 出来的折线比进去的多两条. 其矩阵元之和我们记做 $\Sigma_{20}(x-x')$; 图 65(c) 以具有两条出来的折线的圆表示这些自能图之和.

在格林函数 $G'(x-x')$ 的图中, 所有这三类不可约自能部分可以用任何顺序组合. 唯一的明显条件是, 图中遇见 Σ_{20} 型矩阵元和 Σ_{02} 型矩阵元的次数应相等. 图 66 中举了几个凝聚体外粒子格林函数图的例子.

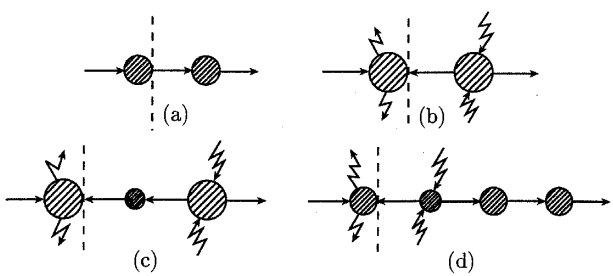


图 66

现在我们可以为凝聚体外粒子格林函数写出类似戴逊方程的方程式. 先用图形推导. 我们在图形上沿链条从左向右移动, 并分出首次遇见的不可约自能部分. 与前几章中讨论的情形不同, 这时可能遇见两种类型的不可约自能部分: Σ_{11} 和 Σ_{20}. 图 66 上以垂直虚线将某个任意图形分成两部分. 图 66(a) 虚线右面是线条和自能

部分构成的链, 其总和又是完全格林函数 $G'(x-x')$. 图 66(b)、图 66(c)、图 66(d) 虚线和自能部分 Σ_{20} 之右的结构, 求和之后是某个新的函数, 我们记做 $\hat{G}(x-x')$. 从图形观点看, 它的特点是有两条出来的凝聚体外粒子线. 为方便起见, 我们在图中连接 x 点和 x' 点的线上加两个箭头, 标明它对每个点的进去关系. 根据定义, 不相互作用粒子格林函数 $G^{(0)}(x-x')$ 是相互作用表象中算符 $\psi'(x)\psi'^{+}(x')T$ 乘积的平均值, 见 (23.8) 式. 在 x 点我们置出来的箭头 [算符 $\psi'(x)$], 而在 x' 点我们置进去的箭头 [算符 $\psi'^{+}(x')$]. 格林函数 $G'(x-x')$ 显然是和零级 (无相互作用) 格林函数一样具有两个箭头的粗线 [图 67(a)]. 至于函数 $\hat{G}(x-x')$, 则从图 66(b)、图 66(c)、图 66(d) 看出, 它的图形是具有两个出来箭头的粗线, 见图 67(b). 将格林函数 $G'(x-x')$ 和 $\hat{G}(x-x')$ 联系起来的方程式示于图 68 中. 这些方程式的结构不敘自明. 我们在这里再次指出, 函数 $\hat{G}(x-x')$ 之出现于理论中, 是凝聚体外粒子和凝聚体粒子相互作用的结果, 因此不相互作用粒子不具备相似的函数. 至于自能部分 Σ_{11}, Σ_{20} 和 Σ_{02}, 则和平常一样, 它们不能通过函数 G 和 $\hat{G}$ 写成封闭形成. 费曼图方法给出它们的级数展开, 其每一项对应一定的图形. 图 69 中对相互作用哈密顿量 (23.12) 列举了 Σ_{11} 和 Σ_{20} 的几个低级图形.

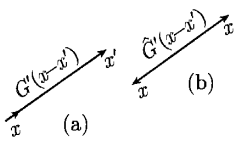


图 67

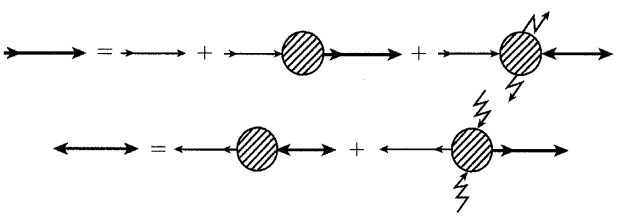


图 68

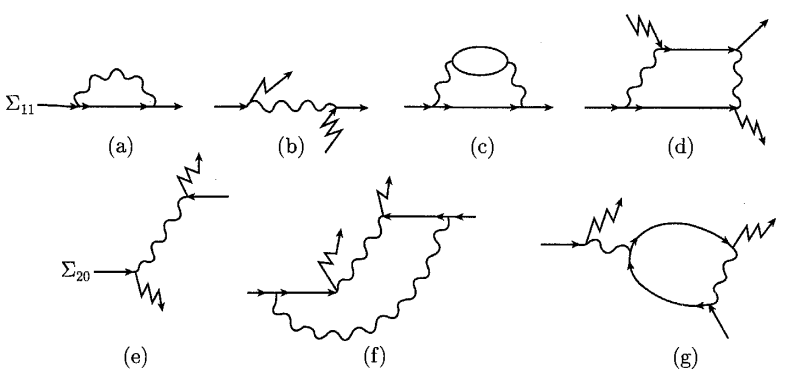


图 69

我们写出图 68 所示的方程式①:

$$\begin{aligned} G'(x-x') &= G^{(0)}(x-x') + \iint G^{(0)}(x-y)\big[\Sigma_{11}(y-z)G'(z-x') \\ &\quad + \Sigma_{20}(y-z)\hat{G}(z-x')\big]\mathrm{d}^4z\mathrm{d}^4y, \\ \hat{G}(x-x') &= \iint G^{(0)}(y-x)\big[\Sigma_{11}(z-y)\hat{G}(z-x') + \\ &\quad + \Sigma_{02}(y-z)G'(z-x')\big]\mathrm{d}^4z\mathrm{d}^4y. \end{aligned} \tag{24.1}$$

在这些方程式中对所有的量完成傅里叶变换, 得

$$\begin{aligned} G'(p) &= G^{(0)}(p) + G^{(0)}(p)\Sigma_{11}(p)G'(p) + G^{(0)}(p)\Sigma_{20}(p)\hat{G}(p), \\ \hat{G}(p) &= G^{(0)}(-p)\Sigma_{11}(-p)\hat{G}(p) + G^{(0)}(-p)\Sigma_{02}(p)G'(p). \end{aligned} \tag{24.2}$$

利用无相互粒子格林函数 $G^{(0)}(p)$ 的 (23.9) 式, 可将方程式 (24.2) 写成更方便的形式:

$$\begin{aligned} &[\omega - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}) + \mu - \Sigma_{11}(p)]G'(p) - \Sigma_{20}(p)\hat{G}(p) = 1, \\ &[-\omega - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}) + \mu - \Sigma_{11}(-p)]\hat{G}(p) - \Sigma_{02}(p)G'(p) = 0, \end{aligned} \tag{24.3}$$

这里 $\varepsilon_0(\boldsymbol{p}) = \dfrac{\boldsymbol{p}^2}{2m}$. 引入符号

$$S(p) = \frac{\Sigma_{11}(p) + \Sigma_{11}(-p)}{2}, \quad A(p) = \frac{\Sigma_{11}(p) - \Sigma_{11}(-p)}{2}$$

并从方程 (24.3) 中将 $G'(p)$ 和 $\hat{G}(p)$ 通过 Σ_{11}, Σ_{02}, Σ_{20} 表示, 就得到

$$G'(p) = \frac{\omega + \varepsilon_0(\boldsymbol{p}) + S(p) + A(p) - \mu}{(\omega - A(P))^2 - (\varepsilon_0(\boldsymbol{p}) + S(p) - \mu)^2 + \Sigma_{20}(p)\Sigma_{02}(p)}, \tag{24.4}$$

$$\hat{G}(p) = -\frac{\Sigma_{02}(p)}{(\omega - A(P))^2 - (\varepsilon_0(\boldsymbol{p}) + S(p) - \mu)^2 + \Sigma_{20}(p)\Sigma_{02}(p)}, \tag{24.5}$$

这些公式推广了将单粒子格林函数通过它的自能部分表达的普通关系式.

§24.2　格林函数的解析性质

迄今函数 $\hat{G}(p)$ 是一定图形求和的结果. 现在给出它通过算符 ψ'^{+} 的定义. 为此我们取如下的量

$$-\mathrm{i}\langle T(\tilde{\xi}_0\tilde{\xi}_0\tilde{\psi}'^{+}(x)\tilde{\psi}'^{+}(x'))\rangle,$$

并证明它的微扰论级数和函数 $\hat{G}(x-x')$ 的展开一致. 我们将和在上节末尾一样地假定, 所有算符的定义都包含因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu t}$ 或 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu t}$[(23.21) 式], 并变换到相互作用表象:

①方程式中系数的选择和自能部分 Σ_{ik} 的定义一致 (见 §25).

$$\frac{-\mathrm{i}\langle T(\xi_0\xi_0\psi'^{+}(x)\psi'^{+}(x'))S\rangle}{\langle S\rangle}.$$

将运算 T 和 $\langle\cdots\rangle$ 分解成 $T=T^0T'$ 和 $\langle\langle\cdots\rangle'\rangle^0$. 把 ξ_0 和 ξ_0^+ 视为外参数, 对凝聚体外的粒子求均, 就看出所有的图形和函数 $\hat{G}(x-x')$ 的图重合, 而矩阵元含有两个多出来的算符 ξ_0. 前面已经说过, 对凝聚体粒子的求均, 就是把相互作用表象中的算符 ξ_0 和 ξ_0^+ 换成海森伯算符 $\tilde{\xi}_0$ 和 $\tilde{\xi}_0^+$, 再把后者换成数字 $\tilde{\xi}_0\to\sqrt{n_0}$ 和 $\tilde{\xi}_0^+\to\sqrt{n_0}$. 因此对于函数 $\hat{G}(x-x')$ 可采用两个等价的定义:

$$\hat{G}(x-x')=\frac{-\mathrm{i}}{n_0}\langle T(\tilde{\xi}_0\tilde{\xi}_0\tilde{\psi}'^{+}(x)\tilde{\psi}'^{+}(x'))\rangle, \tag{24.6}$$

或者

$$\hat{G}(x-x')=-\mathrm{i}\langle N+2|T(\tilde{\psi}'^{+}(x)(\tilde{\psi}'^{+}(x'))|N\rangle, \tag{24.7}$$

其中 (24.7) 式中 $\hat{G}(x-x')$ 表示成 $T(\tilde{\psi}'^{+}(x)\tilde{\psi}'^{+}(x'))$ 在具有 $N+2$ 个和 N 个粒子的系统基态间的矩阵元.

我们研究格林函数 $G'(x-x')$ 和 $\hat{G}(x-x')$ 的性质. 和在第 2 章中所做的那样, 利用函数 $G'(x-x')$ 的定义 (23.4) 将其表示为中间态矩阵元之和:

$$G'(x-x')=-\mathrm{i}\sum_m\langle N|\tilde{\psi}'(x)|m\rangle\langle m|\tilde{\psi}'^{+}(x')|N\rangle,\quad t>t',$$

$$G'(x-x')=-\mathrm{i}\sum_n\langle N|\tilde{\psi}'^{+}(x')|n\rangle\langle n|\tilde{\psi}'(x)|N\rangle,\quad t<t'.$$

用通常的方法从矩阵元中分出坐标和时间关系, 就得到

$$G'(x-x')=\begin{cases}-\mathrm{i}\sum\limits_m|\psi_{Nm}|^2\exp\{\mathrm{i}\boldsymbol{p}_m(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-\mathrm{i}\omega_{mN}(t-t')+\mathrm{i}\mu(t-t')\},\quad t>t',\\ -\mathrm{i}\sum\limits_n|\psi_{Nn}|^2\exp\{\mathrm{i}\boldsymbol{p}_n(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})-\mathrm{i}\omega_{nN}(t'-t)-\mathrm{i}\mu(t-t')\},\quad t<t'.\end{cases} \tag{24.8}$$

这里 $\boldsymbol{p}_m$ 和 $\boldsymbol{p}_n$ 是系统在中间态的动量, $\omega_{mN}=E_m-E_{N0}$, $\omega_{nN}=E_n-E_{N0}$, 其中 E_n 和 E_m 是系统在状态 n 和 m 的能量, E_{N0} 是粒子数为 N 的系统基态能量. 根据算符 ψ' 和 ψ'^{+} 的性质, 在状态 m 中系统有 $N+1$ 个粒子, 而在状态 n 中粒子数等于 $N-1$. (24.8) 式中的因子 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\mu t}$ 正由此而来. 利用定义 $\mu\simeq E_{N+1,0}-E_{N0}$, 将 (24.8) 式表示成以下形式:

$$G'(x-x') = \begin{cases} -\mathrm{i}\sum\limits_m |\psi_{Nm}|^2 \exp\{\mathrm{i}\boldsymbol{p}_m(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') - \mathrm{i}(E_m - E_{N+1,0})(t-t')\}, & t > t', \\ -\mathrm{i}\sum\limits_n |\psi_{Nn}|^2 \exp\{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}_n(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + \mathrm{i}(E_n - E_{N-1,0})(t-t')\}, & t < t'. \end{cases} \tag{24.9}$$

能量差 $E_m - E_{N+1,0}$ 和 $E_n - E_{N-1,0}$ 乃是具有 $N+1$ 个和 $N-1$ 个粒子系统的能谱或激发能量. 粒子数很大时这些系统的能谱一直重合到数量级为 $1/N$ 的项. 对坐标和时间差取 (24.9) 式的傅里叶分量, 得出动量表象中的格林函数:

$$G'(p) = (2\pi)^3 \left[\sum_m \frac{\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_m)|\psi_{Nm}|^2}{\omega - (E_m - E_{N+1,0}) + \mathrm{i}\delta} - \sum_n \frac{\delta(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}_n)|\psi_{Nn}|^2}{\omega + (E_n - E_{N-1,0}) - \mathrm{i}\delta} \right]. \tag{24.10}$$

$\omega = \pm(E_m - E_0)$ 对应函数 $G'(p)$ 的极点, 它总是决定系统的能谱 (准确到符号). 它们对 ω 实轴的相对位置, 可从 (24.10) 式中绕极点的规则看出.

现在对函数 $\hat{G}(x-x')$ 作类似的按中间态展开, 利用 (24.7) 式得

$$\hat{G}(x-x') = \begin{cases} -\mathrm{i}\sum\limits_m \langle N+2|\tilde{\psi}'^{+}(x)|m\rangle\langle m|\tilde{\psi}'^{+}(x')|N\rangle & t > t', \\ -\mathrm{i}\sum\limits_m \langle N+2|\tilde{\psi}'^{+}(x')|m\rangle\langle m|\tilde{\psi}'^{+}(x)|N\rangle & t < t'. \end{cases}$$

或者

$$\hat{G}(x-x') = \begin{cases} -\mathrm{i}\sum\limits_m \psi^{+}_{N+2,m}\psi^{+}_{mN} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}_m(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') - \mathrm{i}(E_m - E_{N+2,0}+\mu)t + \mathrm{i}(E_m - E_{N0}-\mu)t'}, & t > t', \\ -\mathrm{i}\sum\limits_m \psi^{+}_{N+2,m}\psi^{+}_{mN} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}_m(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}) - \mathrm{i}(E_m - E_{N+2,0}+\mu)t' + \mathrm{i}(E_m - E_{N0}-\mu)t}, & t < t'. \end{cases} \tag{24.11}$$

以脚标 m 表示的状态对应粒子数为 $N+1$ 的系统, 在 (24.11) 式中引入其基态能量 $E_{N+1,0}$, 并再次利用化学势的定义将 (24.11) 式变换成

$$\hat{G}(x-x') = \begin{cases} -\mathrm{i}\sum\limits_m \psi^{+}_{N+2,m}\psi^{+}_{mN} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}_m(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') - \mathrm{i}(E_m - E_{N+1,0})(t-t')}, & t > t', \\ -\mathrm{i}\sum\limits_m \psi^{+}_{N+2,m}\psi^{+}_{mN} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}_m(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}) - \mathrm{i}(E_m - E_{N+1,0})(t'-t)}, & t < t'. \end{cases}$$

函数 $\hat{G}(x-x')$ 的傅里叶分量等于：

$$\hat{G}(p)=(2\pi)^3\sum_m \psi^+_{N+2,m}\psi^+_{mN}\left[\frac{\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_m)}{\omega-(E_m-E_{N+1,0})+\mathrm{i}\delta}-\frac{\delta(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}_m)}{\omega+(E_m-E_{N+1,0})-\mathrm{i}\delta}\right]. \tag{24.12}$$

比较公式 (24.10) 和 (24.12), 可以看出函数 $G'(x-x')$ 和 $\hat{G}(x-x')$ 的极点重合. 特别是, 回到 $G'(P)$ 和 $\hat{G}(P)$ 通过不可约自能部分的表达式 (24.4) 和 (24.5), 我们看到系统的谱 $\omega=\varepsilon(\boldsymbol{p})$ 决定于方程式：

$$[\varepsilon(\boldsymbol{p})-A(p))^2-(\varepsilon_0(\boldsymbol{p})+S(p)-\mu]^2+\Sigma_{20}(p)\Sigma_{02}(p)=0$$

($p\equiv\{\varepsilon(\boldsymbol{p}),\boldsymbol{p}\}$). 与函数 $\hat{G}(x-x')$((24.6), (24.7) 式) 平行, 还应该引入函数

$$\begin{aligned}\check{G}(x-x')&=-\frac{\mathrm{i}}{n_0}\langle T(\tilde{\psi}'(x)\tilde{\psi}'(x')\tilde{\xi}^+_0\tilde{\xi}^+_0)\rangle\\&\equiv-\mathrm{i}\langle N|T(\tilde{\psi}'(x)\tilde{\psi}'(x'))|N+2\rangle.\end{aligned} \tag{24.13}$$

在 $\check{G}(x-x')$ 的表达方式中作对中间态的展开, 就像对函数 $\check{G}(x-x')$ 所作的那样, 得到和 (24.12) 式相似的傅里叶分量 $\check{G}(p)$：

$$\check{G}(p)=(2\pi)^3\sum_m \psi_{Nm}\psi_{m,N+2}\left[\frac{\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_m)}{\omega-(E_m-E_{N+1,0})+\mathrm{i}\delta}-\frac{\delta(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}_m)}{\omega+(E_m-E_{N+1,0})-\mathrm{i}\delta}\right]. \tag{24.14}$$

可见函数 $\check{G}(p)$ 的极点 (以及这些极点的绕法) 和函数 $\hat{G}(p)$, $G'(p)$ 一致. 至于系数, 即极点的留数, 则对 $G'(p)$ 是实数, 而对 $\hat{G}(p)$, $\check{G}(p)$, 在同一极点是复数共轭的.

函数 $\check{G}(x-x')$ 的图形表示是带有两个方向相对的箭头的直线. 联系 $\check{G}(x-x')$ 和普通格林函数的方程式的图解见图 70. 在这些方程式中, 格林函数 $G'(x'-x)$ 的线上, 箭头画法和前面相反.

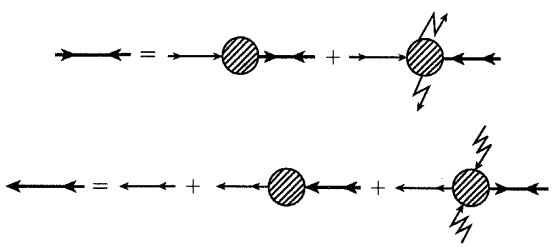


图 70

图 70 中方程的傅里叶分量写出就是

$$\check{G}(p)=G^{(0)}(p)\Sigma_{11}(p)\check{G}(p)+G^{(0)}(p)\Sigma_{20}(p)G'(-p),$$

$$G'(-p)=G^{(0)}(-p)+G^{(0)}(-p)[\Sigma_{11}(-p)G'(-p)+\Sigma_{02}(p)\breve{G}(p)].$$

对 $\breve{G}(p)$ 解这些方程, 得

$$\breve{G}(p)=-\frac{\Sigma_{20}(p)}{[\omega-A(p)]^2-[\varepsilon_0(\boldsymbol{p})+S(p)-\mu]^2+\Sigma_{20}(p)\Sigma_{02}(p)}. \tag{24.15}$$

$\hat{G}(p)$ 和 $\breve{G}p$ 的 (24.5) 式与 (24.15) 式的差别, 在于前者分子中 $\Sigma_{20}(p)$ 换成了后者的 $\Sigma_{02}(p)$.

§24.3 动量很小时格林函数的性质

在结束本节之前, 对以上所得的结果作几条一般性的评述. 因为空间均匀性, 所有的量只与矢量 $\boldsymbol{p}$ 的绝对值有关. 从 (24.12) 式和 (24.14) 式看出, $\hat{G}(P)$ 和 $\breve{G}(p)$ 是频率 ω 的偶函数. 由此容易得出 $\Sigma_{20}(p)=\Sigma_{02}(p)$. 实际上, 既然相互作用哈密顿量保证总粒子数守恒, 则它对算符 ψ 和 ψ^+ 是对称的. 因此每个 Σ_{20} 的图形, 都对应完全相同的 Σ_{02} 的图形, 只是所有的出线与入线互相对换了, 因此所有内线的方向也反过来了, 然而在给定的 $\Sigma_{20}(p)$ 图形的矩阵元中将 $\boldsymbol{p}$ 换成 $-\boldsymbol{p}$, 也改变所有内线的方向. 既然从 (24.15) 式知 $\Sigma_{20}(p)$ 是偶函数, 则

$$\Sigma_{20}(p)=\Sigma_{02}(p),\quad \text{而}\quad \hat{G}(p)=\breve{G}(p).$$

现在我们观察决定格林函数极点的方程

$$[\omega-A(p)]^2-[\varepsilon_0(\boldsymbol{p})+S(p)-\mu]^2+\Sigma_{02}^2(p)=0. \tag{24.16}$$

从物理上考虑很清楚, 这个方程应对任意小的 ω 和 $\boldsymbol{p}$ 有解. 事实上, 在激发能谱的一切可能解中, 当 $\boldsymbol{p}$ 很小时应存在着声谱 $\omega=c|\boldsymbol{p}|$, 即长波密度振动谱. 因此, 在方程 (24.16) 中令 ω 和 $\boldsymbol{p}$ 等于零. 结果我们得到联系化学势 μ 以及 $\Sigma_{11}(0)$, $\Sigma_{20}(0)$ 和 $\Sigma_{02}(0)$ 的条件:

$$[\mu-\Sigma_{11}(0)]^2=\Sigma_{02}^2(0).$$

从下一节的结果将看出, 从这个方程的两个解中, 应取

$$\mu=\Sigma_{11}(0)-\Sigma_{02}(0). \tag{24.17}$$

为求得 ω 和 $\boldsymbol{p}$ 很小时格林函数的形状, 在 (24.4) 式, (24.5) 式和 (24.15) 式中将分母展开到 ω 和 $\boldsymbol{p}$ 的二次项. 注意 (24.17) 式, 得

$$G'(p)=\frac{\Sigma_{11}(0)-\mu}{B(\omega^2-c^2|\boldsymbol{p}|^2)}=\frac{\Sigma_{20}(0)}{B(\omega^2-c^2|\boldsymbol{p}|^2)},$$

$$\hat{G}(p)=\breve{G}(p)=-\frac{\mathrm{i}t\Sigma_{20}(0)}{B(\omega^2-c^2|\boldsymbol{p}|^2)}, \tag{24.18}$$

其中

$$B=\left[1-\frac{\partial\Sigma_{11}(0)}{\partial\omega}\right]^2-\frac{\partial^2\Sigma_{11}(0)}{\partial\omega^2}\Sigma_{20}(0)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\Sigma_{20}^2(0),$$

$$Bc^2=2\Sigma_{20}(0)\left\{\frac{1}{2m}+\frac{\partial\Sigma_{11}(0)}{\partial|\boldsymbol{p}|^2}-\frac{\partial\Sigma_{20}(0)}{\partial|\boldsymbol{p}|^2}\right\}.$$

c 显然是声速. 如果 $\Sigma_{20}(0)$ 等于零, 声速也趋向零. 事实也正应如此, 因为理想玻色气体的声速为零.

将 (24.18) 式的结果和格林函数的一般展开式 (24.10), (24.12) 和 (24.14) 比较, 看出比值 $\dfrac{\Sigma_{20}(0)}{B}$ 是正实数. 因此对于很小的 ω 和 $\boldsymbol{p}(\omega\sim cp)$, 三个格林函数 $G'(p)$, $\hat{G}(p)$, $\check{G}(p)$ 的形式都是

$$G(p)=\frac{\text{常数}}{\omega^2-c^2|\boldsymbol{p}|^2}. \tag{24.19}$$

§25 稀薄非理想玻色气体

§25.1 图解法

为了演示以上所述的方法, 现在更详细地研究一个特例, 即粒子间的相互作用归结为成对粒子间力的情况 (Belyaev[50]). 相互作用哈密顿量为

$$H_{\text{int}}=\frac{1}{2}\iint\psi^+(\boldsymbol{r})\psi^+(\boldsymbol{r}')U(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{r}'. \tag{25.1}$$

根据 (23.1) 式在 H_{int} 中把凝聚体粒子算符 ξ_0 和 ξ_0^+ 明显地分出来. 结果哈密顿量 H_{int} 表示成八项之和:

$$H_{\text{a}}=\frac{1}{2}\iint\psi'^+(\boldsymbol{r})\psi'^+(\boldsymbol{r}')U(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\psi'(\boldsymbol{r}')\psi'(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{r}',$$

$$H_{\text{b}}=\frac{1}{2}V(\xi_0^+)^2\xi_0^2\int U(\boldsymbol{R})\mathrm{d}\boldsymbol{R},$$

$$H_{\text{c}}=\frac{1}{2}\iint[\xi_0^+\psi'^+(\boldsymbol{r}')+\psi'^+(\boldsymbol{r})\xi_0^+]\psi'(\boldsymbol{r})\psi'(\boldsymbol{r}')\times U(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{r}',$$

$$H_{\text{d}}=\frac{1}{2}\iint\psi'^+(\boldsymbol{r})\psi'^+(\boldsymbol{r}')[\psi'^+(\boldsymbol{r}')\xi_0+\xi_0\psi'(\boldsymbol{r})]\times U(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{r}',$$

$$H_{\text{e}}=\frac{1}{2}\iint[\xi_0^+\psi'^+(\boldsymbol{r}')\xi_0\psi'(\boldsymbol{r})+\xi_0^+\psi'^+(\boldsymbol{r})\xi_0\psi'(\boldsymbol{r}')]\times U(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{r}',$$

$$H_{\text{f}}=\frac{1}{2}\iint[\xi_0^+\psi'^+(\boldsymbol{r})\xi_0\psi'(\boldsymbol{r})+\xi_0^+\psi'^+(\boldsymbol{r}')\xi_0\psi'(\boldsymbol{r}')]\times U(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{r}',$$

$$H_{\text{g}}=\frac{1}{2}\iint\xi_0^+\xi_0^+\psi'(\boldsymbol{r})\psi'(\boldsymbol{r}')U(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{r}',$$

$$H_{\mathrm{h}}=\frac{1}{2}\iint \xi_0\xi_0\psi'^{+}(\boldsymbol{r})\psi'^{+}(\boldsymbol{r}')U(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{r}'. \tag{25.2}$$

对应每一项的元过程示于图 71 中. 以通常方式应用维克定理于凝聚体外粒子算符, 可得出任何矩阵元. 根据前两节的结果, 只需取所研究过程的相连图形, 并令算符 ξ_0 和 ξ_0^+ 的外参量, 代之以 $\xi_0,\ \xi_0^+\to\sqrt{n_0}$(所有参与过程的粒子的频率从化学势算起). 我们只限于列举动量表象中单粒子格林函数图形和矩阵元的对应规则. 讨论某个格林函数, 例如 $G'(x-x')$ 的微扰论 m 级图, 它有进去和出来的凝聚体粒子线各 s 条 (我们已不只一次地指出, 任何图形上出入线的数目应当相等). 所讨论的图形包含在如下的表达式中:

$$(-\mathrm{i})\frac{(-\mathrm{i})^m}{m!}\Big\langle T\Big(\psi'(x)\int H_{\mathrm{int}}(t_1)\cdots \cdots H_{\mathrm{int}}(t_m)\psi'^{+}(x')\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_m\Big)\Big\rangle.$$

m 个哈密顿量 $H_{\mathrm{int}}(t_i)$ 不破坏图形收缩顺序的置换数为 $m!$. ψ' 算符的数目 (即 ψ'^{+} 算符的数目) 显然等于 $2m-s+1$.

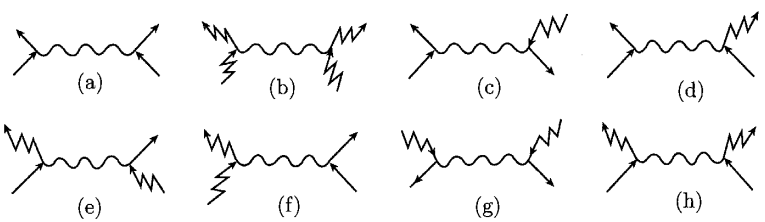


图 71

根据格林函数 $G^{(0)}$ 的定义, 每个收缩 $\overbrace{\psi'\psi'^{+}}$ 带来因子 $-\mathrm{i}$. 令实线代表格林函数 $G^{(0)}$, 波纹线代表势, 则

$$V(x-x')=U(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t').$$

根据 (25.1) 式和图 71, 三端顶点 (即有一条波纹线出来的顶点) 的总数比微扰论的级数多一倍. 不难看出, 如果引入各量的傅里叶分量:

$$G'(x-x')=\frac{1}{(2\pi)^4}\int G'(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p(x-x')}\mathrm{d}^4p,$$
$$V(x-x')=\frac{1}{(2\pi)^4}\int U(\boldsymbol{q})\mathrm{e}^{\mathrm{i}q(x-x')}\mathrm{d}^4q$$

等, 则对格林函数微扰论任何 m 级图写矩阵元的规则如下:

(1) 每条从左至右的实线在 $G'(p)$ 中代表函数 $G^{(0)}(p)=[\omega-\varepsilon_0(\boldsymbol{p})+\mu+\mathrm{i}\delta]^{-1}$(方向相反的线代表 $G^{(0)}(-p)$).

(2) 每条动量为 $\boldsymbol{q}$ 的波纹线代表相互作用势的傅里叶分量 $U(\boldsymbol{q})$.

(3) 进去或出来的凝聚体线代表因子 $\sqrt{n_0}$.

(4) 在每个三端顶点波纹线的动量 $\boldsymbol{q}$ 等于粒子线动量之差. 对未由守恒律限制的动量进行积分, 每个积分带着因子 $(2\pi)^{-4}$.

(5) 整个矩阵元乘以 $A_{s,m}(-\mathrm{i})^{s-m}$, 其中 $A_{s,m}$ 视图中有哪些 (25.2) 式的项而定. 如果 s 理解为给定 m 级图中因子 n_0 的幂次, 则这些规则对函数 $\hat{G}$ 和 $\check{G}$ 也成立. 实际上如 $\hat{G}$ 的一个图中有 l 条进去的凝聚体线, 则根据 $\hat{G}$ 的定义 (24.7) 式, 它有 $l+2$ 条出来的线. 算符 ψ' 和 ψ'^{+} 的收缩数 (函数 $(G^{(0)})$ 的个数) 显然等于 $2m-l$. 既然每个格林函数按定义具有因子 $-\mathrm{i}$, 则矩阵元应乘的因子为

$$(-\mathrm{i})^{l+1-m},$$

而 $l+1$ 正是来自凝聚体线的因子 n_0 的幂次 s.

§25.2 化学势和单粒子格林函数自能部分的关系

现在来证明化学势的公式 (24.17) 讨论海森伯表象中的算符 $\tilde{\xi}_0(t)$(设 $-\mu N$ 项已并入总哈密顿量). 就时间依赖性说, $\tilde{\xi}_0(t)$ 满足普通算符形式的量子力学方程:

$$\mathrm{i}\frac{\partial\tilde{\xi}_0(t)}{\partial t}=[\tilde{\xi}_0(t),H]=-\mu\tilde{\xi}_0(t)-[H_{\mathrm{int}},\tilde{\xi}_0(t)].$$

利用这个方程, 对凝聚体粒子格林函数 $G_0(t-t')$ 求得

$$\frac{\partial G_0(t-t')}{\partial t}=\mathrm{i}\mu G_0(t-t')-\langle T([\tilde{\xi}_0(t),H_{\mathrm{int}}]\tilde{\xi}_0^{+}(t))\rangle.$$

然而根据前几段的结果, $G_0(t-t')$ 与时间无关, 就等于 n_0. 由此得

$$\mu n_0=-\langle T([H_{\mathrm{int}},\tilde{\xi}_0(t)]\tilde{\xi}_0^{+}(t'))\rangle. \tag{25.3}$$

计算此式右端的平均值, 转入相互作用表象:

$$\langle T([H_{\mathrm{int}},\tilde{\xi}_0(t)]\tilde{\xi}_0^{+}(t'))\rangle=\frac{\langle T([H_{\mathrm{int}},\xi_0(t)]\xi_0^{+}(t'))\rangle}{\langle S\rangle}.$$

再简略重复一次 §23 的论据. 在运算 T 和 $\langle\cdots\rangle$ 中先完成对凝聚体外粒子的平均与编时. 根据一般方法, 这时只需考虑所有的相连图形, 认为算符 ξ_0 和 ξ_0^{+} 是外参量. 所涉及的相连图形乃是各种真空环; 将只对 H_{int} 中凝聚体外粒子求平均的结

果记做 $\bar{H}_{\text{int}}^{\text{相连}}$. 函数 $\bar{H}_{\text{int}}^{\text{相连}}$ 与参量 ξ_0 和 ξ_0^+ 有关. 为求得最终结果, 须将 $\bar{H}_{\text{int}}^{\text{相连}}$ 中所有的算符 ξ_0 和 ξ_0^+, 换成准确的海森伯算符 $\tilde{\xi}_0$ 和 $\tilde{\xi}_0^+$, 结果从 (25.3) 得到

$$\mu n_0 = -\frac{\langle T^0([\bar{H}_{\text{int}}^{\text{相连}}, \xi_0]\xi_0^+\langle S\rangle')\rangle^0}{\langle S\rangle} = -\langle T([\tilde{\bar{H}}_{\text{int}}^{\text{相连}}, \tilde{\xi}_0]\tilde{\xi}_0^+)\rangle. \tag{25.4}$$

对易关系 $[\bar{H}_{\text{int}}^{\text{相连}}, \xi_0]$ 中含有 ξ_0 和真空平均值 $\bar{H}_{\text{int}}^{\text{相连}}$ 中算符 ξ_0, ξ_0^+ 各种乘积的对易. 计算 $\bar{H}_{\text{int}}^{\text{相连}}$ 时, 对凝聚体外粒子按维克定理作了普通平均. 由于这是算符 ψ' 和 ψ'^+ 的成对平均, 所以算符 ξ_0 和 ξ_0^+ 的数目也彼此相等.

试取 m 级微扰论真空环为例, 它含有算符 ξ_0 和 ξ_0^+ 各 S 个. ξ_0 和一个算符 ξ_0^+ 对易的结果是 $[\xi_0^+, \xi_0] = -\dfrac{1}{V}$, 而 ξ_0 可与所有 S 个算符 ξ_0 对易. 因此, 如果将含有 n_0^s 的 m 级真空图对基态能量的修正记做 $\langle H_{\text{int}}\rangle_{m,s}^{\text{相连}}$(它和 $\bar{H}_{\text{int}}^{\text{相连}}$ 的差别, 在于算符 ξ_0 和 ξ_0^+ 换成了 $\sqrt{n_0}$), 则容易看出, (25.4) 式就是

$$\mu n_0 = \sum_{m,s} \frac{s}{V}\langle H_{\text{int}}\rangle_{m,s}^{\text{相连}}$$

或者

$$\mu = \sum_{m,s} \frac{\partial}{\partial n_0}\frac{\langle H_{\text{int}}\rangle_{m,s}^{\text{相连}}}{V} = \frac{\partial}{\partial n_0}\frac{\langle H_{\text{int}}\rangle}{V} \tag{25.5}$$

(真空平均值 $\langle H_{\text{int}}\rangle$ 是参数 μ 和 n_0 的函数, 因此 (25.5) 式右端指 μ 恒定时对 n_0 的偏微商). 后面证明的思想 (Hugengoltz 和 Pines[51]), 基于相互作用哈密顿量中算符 ξ_0, ξ_0^+ 和算符 ψ', ψ'^+ 的对称性. 因此每个具有一定数量凝聚体线的 $\langle H_{\text{int}}\rangle$ 真空环, 可以形式地对应一些不可约自能部分 $\Sigma_{11}(0)$, $\Sigma_{20}(0)$ 的图形, 这时只须在真空环中将适当数目进去与出来的凝聚体线 (算符ξ_0^+ 和 ξ_0), 换成进去和出来的实线 (算符ψ'^+和ψ'). 图 72 中举了几个微扰论低级图形的简单例子①. 由于凝聚体粒子的进出线具有四维动量 $p = 0$, 则当 $p = 0$ 时, 以上对应关系对 $\Sigma_{11}(p)$, $\Sigma_{20}(p) = \Sigma_{02}(p)$ 的矩阵元也是成立的.

任意不可约图 $\langle H_{\text{int}}\rangle_{m,s}$ 矩阵元的对应规则, 和前面列举的格林函数规则一样. 容易验证, 唯一的差别是整个积分所应乘上的数值因子等于

$$(-\mathrm{i})^{s-m-2},$$

其中, m 是微扰论的级别, s 是图中 n_0 的幂次. 自能部分矩阵元的相应因子为

$$(-\mathrm{i})^{s-m}.$$

①图形中有些等于零, 但这无损于我们的示例.

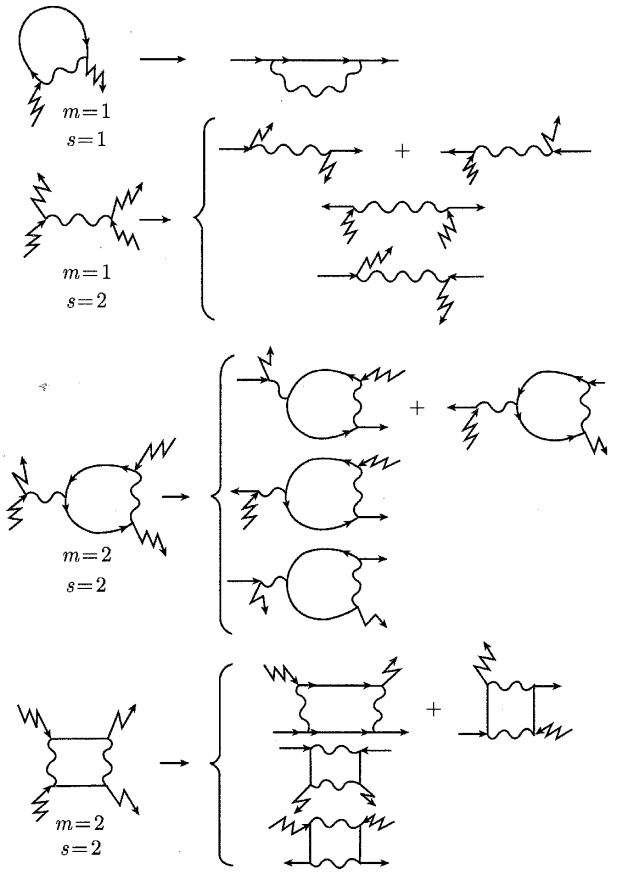


图 72

对 n_0 微分真空环时, n_0 的幂次减少一次. 讨论一切可能的、具有 $s-1$ 个因子 n_0(以及同样多条进出凝聚体粒子线) 的 m 级微扰论 $\Sigma_{11}(0)$ 图形. 所有这些图形可以从真空环 $\langle \bar{H}_{\text{int}}^{\text{相连}} \rangle_{m-1,s}$ 得出, 只须将 s 个算符 ξ_0^+ 中的一个换成进去的实线, 而一个 ξ_0 换成出来的实线, 也就是说, 这些图形可用 s^2 种方式得到

$$(\Sigma_{11}(0))_{m,s-1} = \frac{s^2}{n_0 V} \langle H_{\text{int}} \rangle_{m-1,s}^{\text{相连}}.$$

将 $(\bar{H}_{\text{int}}^{\text{相连}})_{m-1,s}$ 中两条进去的折线换成实线, 就得到 $\Sigma_{20}(0)$ 的图形. 这种图形的数目即代换方式的总数, 等于 $s(s-1)$. 因此

$$(\Sigma_{20}(0))_{m,s-1} = \frac{s^2 - s}{n_0 V} \langle H_{\text{int}} \rangle_{m-1,s}^{\text{相连}}.$$

将差 $\Sigma_{11}(0) - \Sigma_{20}(0)$ 和 (25.5) 式比较, 直接得出

$$\mu = \Sigma_{11}(0) - \Sigma_{20}(0) \tag{25.6}$$

显而易见, 这个关系式的正确性, 绝不局限于我们所讨论的粒子间成对相互作用. 我们在前节里已指出过这一点.

方程式 (25.6) 以及联系系统内总粒子数密度和化学势的方程式 (23.19), 是确定参数 μ 和 n_0 数值的条件. 我们不在这里证明条件 (23.20) 和 (25.6) 的等价性, 而仅仅指出, 在微扰论 (即对弱相互作用粒子的气体) 计算中, 条件 (25.6) 更方便些, 因为它把 μ 直接通过理想玻色气体的已知量表示出来.

§25.3　低密度近似

应用以上方法于有相互作用的玻色粒子的气体, 其哈密顿量为 (25.1) 式. 我们已在第 1 章里讨论过这个例子, 那里假定粒子间相互作用力很小. 因此在激发谱的表达式 (4.11) 中, 出现了势的傅里叶分量, 它在玻恩近似下和粒子彼此散射的幅度成正比. 我们现在证明, 这个结果实际上适用于更普遍的情况, 即不假设相互作用弱, 而假定气体的密度低, 也就是粒子的尺寸比气体粒子间的平均距离小得多 (如果以 S 散射幅, f_0 描述粒子的尺寸, 则小参数是 $f_0 n^{1/3} \ll 1$). 讨论微扰论一级近似下 $\Sigma_{11}(p)$ 和 $\Sigma_{20}(p)$ 的图形 (图 73a). Σ_{11} 的三个图中, 第一个来自相互作用哈密顿量 (25.1) 中 H_a 项 (见 (25.2) 式) 的平均. 这个图等于零, 因为图中内线代表平均值 $-\mathrm{i}\langle\psi'^{+}(\boldsymbol{r}')\psi'(\boldsymbol{r})\rangle \equiv 0$(注意波纹线代表相互作用势 $V(x-x') = U(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t')$, 而 H_a 中算符 ψ'^{+} 和 ψ' 的顺序由 (25.1) 式给定).

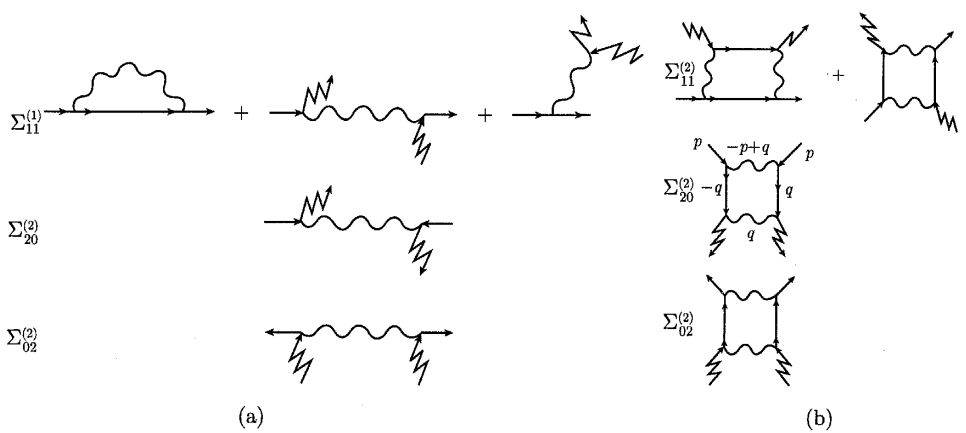


图 73

剩下的各项给出:

$$\Sigma_{11}^{(1)}(p) = n_0[U(0) + U(\boldsymbol{p})],$$
$$\Sigma_{20}^{(1)}(p) = \Sigma_{02}^{(1)}(p) = n_0 U(\boldsymbol{p}),$$

其中 $U(\boldsymbol{p})$ 是相互作用势的傅里叶分量. 根据 (25.6) 式, 有

$$\mu = n_0 U(\dot{0}).$$

所有微扰论二级图形中只有图 73(b) 所示者不为零. 其他图形, 例如图 74 所示的 $\Sigma_{11}^{(2)}(p)$ 都等于零, 因为每个图中都有格林函数的乘积 $G^{(0)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}', t_1-t_2)\cdot G^{(0)}(\boldsymbol{r}''-\boldsymbol{r}''', t_2-t_1)$(在坐标表象中). 而在这两个格林函数之中, 我们已经知道, 当 $t_1 < t_2$ 时,

$$G^{(0)}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2, t_1-t_2) \equiv 0.$$

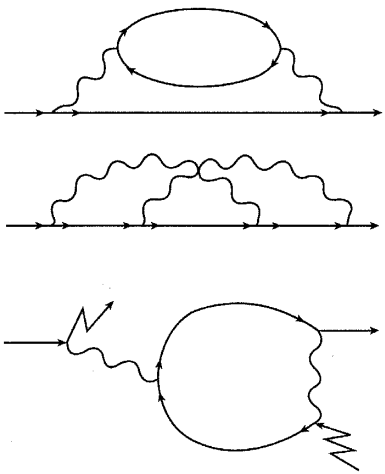


图 74

为了估计图 73(b), 我们作简化假设, 认为相互作用势傅里叶分量为

$$U(\boldsymbol{p}) \begin{cases} U_0, & |\boldsymbol{p}| \ll \dfrac{1}{a}, \\ 0, & |\boldsymbol{p}| \gg \dfrac{1}{a}, \end{cases}$$

其中 $a \sim f_0$, 约为粒子半径的数量级. 在任何图形的估值中可能包含出现于问题中的以下参量: 描述相互作用 U_0 和 a, 质量 m 和凝聚体粒子密度 n_0 这些参量可以构成两个无量纲组合:

$$\zeta \sim \frac{mU_0}{a}, \quad \beta = \sqrt{n_0 a^3}.$$

ξ 是微扰论 (玻恩展开) 参量, 而 β 是"气体"参量. 形式上微扰论是对 $\xi \ll 1$ 的幂展开式, 然而我们今后只要求 $\beta \ll 1$.

为了更简单起见, 考虑图 73(b) 中的 $\Sigma_{20}^{(2)}(p)$ 图形. 对它们有

$$\Sigma_{20}^{(2)}(p) \sim n_0 \int G^{(0)}(q) G^{(0)}(-q) U(\boldsymbol{q}) U(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \mathrm{d}\boldsymbol{q}\mathrm{d}w,$$

或者, 将格林函数 $G^{(0)}$ 的值 (23.9) 代入, 并对 ω 积分, 得

$$\Sigma_{20}^{(2)}(p) \sim n_0 U_0^2 \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\mu - \varepsilon_0(\boldsymbol{q})}.$$

在积分中起主要作用的是大的 $|\boldsymbol{q}| \sim \dfrac{1}{a}$, 这时 $\dfrac{\mu}{\varepsilon_{0(\boldsymbol{q})}} \sim mn_0 U_0 a^2 = \zeta\beta^2 \ll 1$, 因而

$$\Sigma_{20}^{(2)} \sim \frac{mn_0 U_0^2}{a} \sim \Sigma_{20}^{(1)}\xi.$$

对图形 $\Sigma_{11}^{(2)}$ 的类似估值表明 $\Sigma_{11}^{(2)} \sim \Sigma_{11}^{(1)}\xi$.

现在讨论图 75(a) 所示的三级图 $\Sigma_{20}^{(3)}$. 由它得到

$$\begin{aligned}\Sigma_{20}^{(3)} &\sim n_0^2 \int G^{(0)}(-q)[G^{(0)}(q)]^2[U(\boldsymbol{q})]^2 U(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\mathrm{d}\boldsymbol{q}\mathrm{d}\omega \\ &\sim n_0^2 U_0^3 \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{(\mu - \varepsilon_0(\boldsymbol{q}))^2}.\end{aligned}$$

和前面不同, 这个积分在上限收敛, 起主要作用的区间是 $|\boldsymbol{q}| \sim \sqrt{m\mu} \sim \sqrt{n_0 U_0 m}$, 因而

$$\Sigma_{20}^{(3a)} \sim \frac{n_0^2 U_0^3 m^{3/2}}{\mu^{1/2}} \sim \Sigma_{20}^{(1)}\zeta^{3/2}\beta. \tag{25.7}$$

同时图 75(b) 的三级图形值为

$$\Sigma_{20}^{(3b)} \sim \Sigma_{20}^{(1)}\zeta^2. \tag{25.8}$$

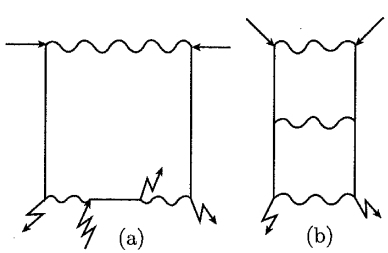


图 75

从 (25.7) 和 (25.8) 式看出来, $\Sigma_{20}^{(3a)} \sim \beta\zeta^{-1/2}\Sigma_{20}^{(3b)}$. 这个结果之所以得出, 是因为 $\Sigma_{20}^{(3b)}$ 含有两个 $G^{(0)}$ 函数乘积的积分, 其中每一个积分形式上都是在上限发散的, 而 $\Sigma_{20}^{(3a)}$ 中对三个 $G^{(0)}$ 函数积分, 积分不须截断即已收敛, 其值则由被积表达式在动量 $|\boldsymbol{q}| \sim \sqrt{m\mu}$ 附近决定. 在图形中这个差别表现为, 封闭环 (由实线和波纹线组成者) 中实线的数目不同.

因此, Σ_{ik} 中每一个实线数目超过 2 的封闭环带来小参数 β, 具有两条实线的环不含 β. 因此在最低级近似只须考虑第二类图形. 形式上这表明, 从 Σ_{11} 和 Σ_{20}

的全部图形中只须取具有两条进去或出来的凝聚体线者, 即含 n_0 一次幂的图. 其实从量纲考虑就清楚知道, 含有高次 n_0 的图, 必补充性地含有小参数 β. 全部所需的图属于阶梯型 (图 76). 将图 77 的总合在动量表象中记做 $\Gamma^{(0)}(p_1,p_2;p_3,p_4)$. 按此做法, 对 β 的一级近似与微扰论一级近似的差别在于, 微扰论中势的傅里叶分量 $U(\boldsymbol{q})$(梯子的第一"横杠") 换成 $\Gamma^{(0)}(p_1,p_2;p_1-q,p_2+q)$. 显然在一切更复杂的图形中, "阶梯" 环的求和也导致 $\Gamma^{(0)}$ 的出现 (然而对我们来说, 讨论这些图形是多余的, 因为它们给出 β 的更高次项). 这样, 势 $U(\boldsymbol{q})$ 就从问题中除去; $\Gamma^{(0)}$ 起着有效势的作用.

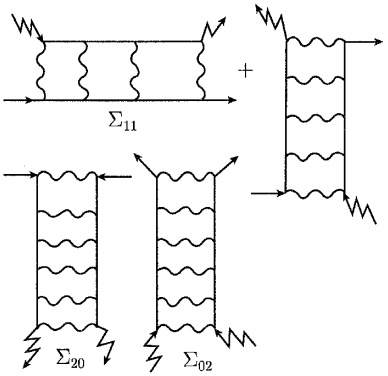


图 76

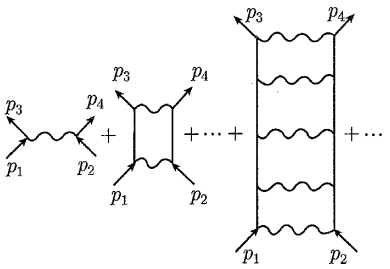


图 77

$\Gamma^{(0)}(p_1,p_2;p_3,p_4)$ 的积分方程可直接从图 77 的结构得出:

$$\Gamma^{(0)}(p_1,p_2;p_3,p_4)=U(\boldsymbol{p}_3-\boldsymbol{p}_1)+\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int U(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{k})G^{(0)}(k)\times G^{(0)}(p_1+p_2-k)\Gamma^{(0)}(k,p_1+p_2-k;p_3,p_4)\mathrm{d}^4k \quad (25.9)$$

§25.4 有效相互作用势

现在着手研究方程式 (25.9). 引入总动量和相对动量:

$$p_1+p_2=p_3+p_4=P,\ p_1-p_2=2k,\ p_3-p_4=2k'.$$

然后 $\Gamma^{(0)}(p_1,p_2;p_3,p_4)\equiv\Gamma^{(0)}(k,k';P)$ 的方程 (25.9) 就变换成

$$\Gamma^{(0)}(k,k';P)=U(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')+\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int U(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})\times G^{(0)}\left(\frac{P}{2}+p\right)G^{(0)}\left(\frac{P}{2}-p\right)\Gamma^{(0)}(p,k';P)\mathrm{d}^4p. \quad (25.10)$$

相互作用势 $V(x-x')$ 不包括推迟效应: $V(x-x')=U(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t')$. 傅里叶分量 $V(q)\equiv U(\boldsymbol{q})$ 也与四维矢量 q 的第四分量无关. 因此 $\Gamma^{(0)}(p_1,p_2;p_3,p_4)$ 也只和第四

分量的一个组合 $\omega_1+\omega_2=\omega_3+\omega_4=\varpi$ 有关 ($P=\{\boldsymbol{P},\varpi\}$). 可见 $\Gamma^{(0)}(k,k';P)$ 与前两个变量的第四分量无关, 因而在方程式 (25.10) 中可完成对 $\mathrm{d}\omega$ 的积分:

$$\int \mathrm{d}\omega G^{(0)}\left(\frac{P}{2}+p\right)G^{(0)}\left(\frac{P}{2}-p\right)=-\frac{2\pi\mathrm{i}}{\Omega-\dfrac{\boldsymbol{P}^2}{4m}+2\mu-\dfrac{\boldsymbol{p}^2}{m}+\mathrm{i}\delta}.$$

代入 (25.10) 式后, $\Gamma^{(0)}(k,k';P)$ 的方程成为

$$\Gamma^{(0)}(k,k';P)=U(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')+\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{U(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})\Gamma^{(0)}(p,k';P)}{\dfrac{\mathcal{N}^2}{m}-\dfrac{\boldsymbol{p}^2}{m}+\mathrm{i}\delta}\mathrm{d}\boldsymbol{p}, \tag{25.11}$$

$$\frac{\mathcal{N}^2}{m}=\varpi-\frac{\boldsymbol{p}^2}{4m}+2\mu.$$

对于任意的相互作用律, 不能一般地解出这个方程, 然而它的解可以通过两个粒子在真空中彼此散射的幅度表示.

我们在此提醒一下读者, 怎么处理粒子在势场 $U(\boldsymbol{r})$ 中的散射. 粒子在场 $U(\boldsymbol{r})$ 中的薛定谔方程可写成

$$(\nabla^2+\boldsymbol{k}^2)\psi_k(\boldsymbol{r})=2mU(\boldsymbol{r})\psi_k(\boldsymbol{r}),$$

其中 $\dfrac{\boldsymbol{k}^2}{2m}$ 是粒子能量本征值, $\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})$ 是其波函数. 最好将此方程通过泊松方程的解表示:

$$\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})=-\frac{m}{2\pi}\int\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}U(\boldsymbol{r}')\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'+\psi_{0k}(\boldsymbol{r}), \tag{25.12}$$

其中 ψ_{0k} 是具有同一能量的自由粒子波函数. 决定散射幅的条件是, 距离散射中心很远时, 波函数应为平面波 (自由粒子) 和散射球面波之和①:

$$\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}-f(\theta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{r}|}}{|\boldsymbol{r}|},$$

其中 θ 是相对于矢量 $\boldsymbol{k}$ 的方向的散射角. 将 (25.12) 式在 $|\boldsymbol{r}|$ 很大时的行为与这个定义比较, 就得到

$$f(\theta)=\frac{m}{2\pi}\int\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}'}U(\boldsymbol{r}')\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}',$$

其中矢量 $\boldsymbol{k}'$ 沿 $\boldsymbol{r}$ 的方向. 把波函数变换到动量表象:

$$\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{(2\pi)^{-3}}\int\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{p},$$

①这里散射幅的定义和通常使用习惯差一符号 (参阅 [17] 或参看中文本 [83] 第 460 页).

就得到

$$f(\theta)\equiv f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')=\frac{m}{(2\pi)^4}\int U(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{p})\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{p})\mathrm{d}\boldsymbol{p} \tag{25.13}$$

($\boldsymbol{k}$的方向是粒子的入射方向). 通常散射幅指的是 (25.13) 式在 $|\boldsymbol{k}|=|\boldsymbol{k}'|$ 时的值. 我们将对任意的矢量 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{k}'$, 根据 (25.13) 式定义广义散射幅 $f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')$. 在动量表象中方程式 (25.12) 的形状是

$$\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{p})=(2\pi)^3\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})+\frac{4\pi f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{p})}{\boldsymbol{k}^2-\boldsymbol{p}^2+\mathrm{i}\delta}. \tag{25.14}$$

将 (25.14) 式代入 (25.13) 式后得

$$\frac{2\pi}{m}f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')=U(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k})+\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{U(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{p})\left[\dfrac{2\pi}{m}f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{p})\right]}{\dfrac{\boldsymbol{k}^2}{2m}-\dfrac{\boldsymbol{p}^2}{2m}+\mathrm{i}\delta}\mathrm{d}\boldsymbol{p}. \tag{25.15}$$

现在回到方程式 (25.11). 两个以势能 $U(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ 相互作用的粒子彼此散射, 可以归结为一个折合质量为 $m^*=\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ 的粒子在势场 $U(\boldsymbol{r})$ 中的散射. 在方程式 (25.15) 中作代换 $m\to m^*=\dfrac{m}{2}$, 可将其改写为

$$U(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')=\left[\frac{4\pi}{m}f(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k})\right]-\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{U(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})\left[\dfrac{4\pi}{m}f(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{p})\right]\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\dfrac{\boldsymbol{k}'^2}{m}-\dfrac{\boldsymbol{p}^2}{m}+\mathrm{i}\delta}\equiv\hat{L}\left(\frac{4\pi}{m}f\right), \tag{25.16}$$

式中以 $\hat{L}$ 记 (25.16) 式右端的算符. 从方程 (25.11) 的左、右两端减去同样的表达式, 可得

$$\begin{aligned}&\Gamma^{(0)}(k,k';P)-\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{U(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})\Gamma^{(0)}(p,k';p)}{\dfrac{\boldsymbol{k}'^2}{m}-\dfrac{\boldsymbol{P}^2}{m}+\mathrm{i}\delta}\mathrm{d}\boldsymbol{p}\\&=U(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')+\frac{1}{(2\pi)^3}\int U(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})\left\{\frac{1}{\dfrac{\mathcal{N}^2}{m}-\dfrac{\boldsymbol{p}^2}{m}+\mathrm{i}\delta}\right.\\&\left.-\frac{1}{\dfrac{\boldsymbol{k}'^2}{m}-\dfrac{\boldsymbol{p}^2}{m}+\mathrm{i}\delta}\right\}\Gamma^{(0)}(p,k';P)\mathrm{d}\boldsymbol{p}.\end{aligned}$$

此式左面是 $\hat{L}(\Gamma^{(0)})$. 以算符 $\hat{L}^{-1}$ 作用之, 得到 $\Gamma^{(0)}$ 的方程为

$$\Gamma^{(0)}(k,k';P)=\frac{4\pi}{m}f(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k})+\frac{1}{(2\pi)^3}\int\left[\frac{4\pi}{m}f(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})\right]$$

$$\times\left\{\frac{1}{\dfrac{\mathcal{N}^2}{m}-\dfrac{\boldsymbol{p}^2}{2m}+\mathrm{i}\delta}-\frac{1}{\dfrac{\boldsymbol{k}'^2}{m}-\dfrac{\boldsymbol{p}^2}{m}+\mathrm{i}\delta}\right\}\Gamma^{(0)}(p,k';P)\mathrm{d}\boldsymbol{p}. \tag{25.17}$$

由此看出, $\Gamma^{(0)}(k,k';P)$ 在第一级近似就等于 $\dfrac{4\pi}{m}f(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k})$. 甚至当假定 f 和 $\Gamma^{(0)}$ 是常数时, (25.17) 式右端的积分也是收敛的, 因而其数量为 $\sim\dfrac{|\boldsymbol{k}|}{m}f^2$. 以后会看到, 有用的动量区间是 $|\boldsymbol{k}|\sim\sqrt{m\mu}\sim\sqrt{n_0 f}$, 即 $|\boldsymbol{k}|f\ll 1$. 故对于 $\Gamma^{(0)}(k,k';P)$ 只取第一级近似就够了, 此外要指出, 这时可忽略 $f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')$ 与 $\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{k}'$ 的依赖性. 能量很小时, 这个依赖关系乃是粒子尺寸 a 和波长 $\lambda\sim\dfrac{1}{|\boldsymbol{k}|}$ 之比的幂展开. 由于 a 的数量级与散射幅 f 相同, 而 $|\boldsymbol{k}|f\ll 1$, 最终可写成

$$\Gamma^{(0)}(k,k';P)\simeq\frac{4\pi}{m}f(0,0)\equiv\frac{4\pi}{m}f_0. \tag{25.18}$$

§25.5 低密度近似下玻色气体的格林函数. 能谱

根据以上所述, 我们有

$$\Sigma_{11}(p)=\frac{8\pi}{m}f_0 n_0,\quad \Sigma_{20}(p)=\Sigma_{02}(p)=\frac{4\pi}{m}f_0 n_0,$$

$$\mu=\frac{4\pi}{m}f_0 n_0. \tag{25.19}$$

这些式子代入 (25.4) 和 (24.5) 式, 得

$$G(p)=\frac{\omega+\dfrac{\boldsymbol{p}^2}{2m}+\dfrac{4\pi n_0 f_0}{m}}{\omega^2-\varepsilon^2(\boldsymbol{p})+\mathrm{i}\delta},$$

$$\hat{G}(p)=-\frac{4\pi n_0 f_0}{m}\frac{1}{\omega^2-\varepsilon^2(\boldsymbol{p})+\mathrm{i}\delta},$$

其中

$$\begin{aligned}\varepsilon(\boldsymbol{p})&=\sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}+\frac{4\pi n_0 f_0}{m}\right)^2-\frac{16\pi^2 n_0^2 f_0^2}{m^2}}\\&=\sqrt{\frac{\boldsymbol{p}^2}{4m^2}+\frac{4\pi n_0 f_0}{m^2}\boldsymbol{p}^2}\end{aligned} \tag{25.20}$$

是动量小时系统的能谱. (25.20) 式和第 1 章中求得的能谱表达式 (4.11) 的差别是, 玻恩幅度换成了准确的散射幅. 从 (25.20) 式得, 当 $|\boldsymbol{p}|\ll\sqrt{n_0 f_0}$ 时, 准粒子具有声子色散律 $\varepsilon(\boldsymbol{p})\simeq|\boldsymbol{p}|\sqrt{\dfrac{4\pi n_0 f_0}{m^2}}$, 而当 $|\boldsymbol{p}|\gg\sqrt{n_0 f_0}$ 时, 它成为 "几乎自由" 的粒子,

$$\varepsilon(\boldsymbol{p})\simeq\varepsilon_0(\boldsymbol{p})+\frac{4\pi n_0 f_0}{m}$$

(这种形状的谱, 相当在具有一定折射率的连续介质中运动的粒子). 色散律从声子区域到 "自由粒子" 区域的转变, 发生在 $|\boldsymbol{p}| \sim \sqrt{n_0 f_0} \ll \dfrac{1}{f_0}$ 处, 因此在两个区域中将散射幅看成常数, 都是合法的近似.

最后要指出, 这里所讨论的模型无论如何不能和实际氦的性质相应. 即使不考虑低密度近似之不适用于 He II, 还须强调, 其实形如 (25.20) 式的能谱对于小动量 $\boldsymbol{p}$ 是不稳定的. 事实上 $|\boldsymbol{p}| \neq 0$ 时, 激发的速度 $\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial |\boldsymbol{p}|}$ 超过声速, 即元激发可以产生声子 (见下节). 这就使能谱中出现衰减, $\boldsymbol{p}$ 很小时元激发寿命和 $|\boldsymbol{p}|^5$ 成反比. 氦的能谱在 $\boldsymbol{p}$ 很小时并不具有这种不稳定性.

§26 单粒子激发谱在其终点附近的性质

§26.1 问题提法

实际玻色液体, 即氦的单粒子激发谱, 当然不能从理论上计算出来. 只有动量很小时, 能量与动量才呈直接关系 (谱的声子部分), 动量大时谱就偏离线性, 其进一步变化取决于液体粒子间相互作用的具体性质.

玻色液体中的激发谱不同于费米液体谱的一个特点, 是可能存在不衰减的玻色激发. 从数学观点看, 这表明方程式 (24.16) 的解是实数. 温度大于零时激发的衰减, 是因为它们可能彼此碰撞. 在绝对零度不存在真正的激发. 因此唯一导致有限寿命的机制, 是它裂变成能量更小的激发, 只要能量和动量守恒律允许这种过程存在. 在费米液体中总可能裂变成粒子和空穴, 因而准粒子的寿命有限, 反比于 $(|\boldsymbol{p}| - p_0)^2$. 在玻色液体中动量充分小的元激发可以不衰减地存在下去. 随着动量的增加, 能量最终达到某个阈值, 超过它以后元激发就不稳定了, 而裂变成两个或更多的能量较小的元激发. 这种阈值我们称为谱的终点. 它乃是能谱曲线的一个奇异点. 下面我们试图阐明这个奇异点的性质; 而且以后将看到, 可以不作任何关于相互作用弱的假定, 而以一般形式作完整的研究 (Pitaevskii[52]). 我们只限于一个假定 (看来它具有足够的物理普遍性), 即谱的终点相当于裂变成两个 (而不更多) 元激发的阈值.

元激发裂变为二的过程中, 能量和动量守恒律应成立. 这个条件可写成方程式:

$$\varepsilon(\boldsymbol{p}) = \varepsilon(\boldsymbol{q}) + \varepsilon(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}), \tag{26.1}$$

这里 $\boldsymbol{p}$ 和 $\varepsilon(\boldsymbol{p})$ 是裂变前元激发的动量和能量, $\boldsymbol{q}$ 和 $\varepsilon(\boldsymbol{q})$ 是裂变中产生的元激发之一的动量和能量, $\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}$ 和 $\varepsilon(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q})$ 是另一个裂变产物的动量和能量. 如果方程式 (26.1) 对于给定的 $\boldsymbol{p}$ 没有 $\boldsymbol{q}$ 的解, 则表示裂变不可能. 裂变阈 (元激发在阈点的动量记为 p_c, 能量记为 $\varepsilon_c = \varepsilon(p_c)$) 的特点是, (26.1) 式在 $\varepsilon < \varepsilon_c$ 时对 $\boldsymbol{q}$ 无解, 而在

$\varepsilon=\varepsilon_{\mathrm{c}}$ 时有解. 为此必须要求 (26.1) 式右端在 $|\boldsymbol{p}|=p_{\mathrm{c}}$ 时, 作为矢量 $\boldsymbol{q}$ 的函数在某个 $\boldsymbol{q}$ 处具有极小值, 当 $|\boldsymbol{p}|=p_{\mathrm{c}}$ 时 (26.1) 式右端和两个变量有关: 矢量 $\boldsymbol{q}$ 的绝对值和 $\cos\theta$, 其中 θ 是矢量 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 的夹角. 上述表达式的极小值可能出现在 $\theta=0$ 处, 也可能出现在 $\theta\neq 0$ 处.

设 (26.1) 式右端在某个动量 $\boldsymbol{q}$ 处有极小值. 对 $\Delta\boldsymbol{q}$ 展开到二次项:

$$\begin{aligned}\varepsilon(\boldsymbol{q}+\Delta\boldsymbol{q})+\varepsilon(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}-\Delta\boldsymbol{q})\approx{}&\varepsilon(\boldsymbol{q})+\varepsilon(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\\&+\frac{\partial\varepsilon(\boldsymbol{q})}{\partial\boldsymbol{q}_i}\Delta\boldsymbol{q}_i-\frac{\partial\varepsilon(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})}{\partial\boldsymbol{p}_i}\Delta\boldsymbol{q}_i\\&+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varepsilon(\boldsymbol{q})}{\partial\boldsymbol{q}_i\partial\boldsymbol{q}_k}\Delta\boldsymbol{q}_i\Delta\boldsymbol{q}_k+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varepsilon(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})}{\partial\boldsymbol{p}_i\partial\boldsymbol{p}_k}\Delta\boldsymbol{q}_i\Delta\boldsymbol{q}_k.\end{aligned}$$

在极小点应无线性项. 显然有两种可能性:

(1) $\dfrac{\partial\varepsilon(\boldsymbol{q})}{\partial\boldsymbol{p}}=\dfrac{\partial\varepsilon(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})}{\partial\boldsymbol{p}}\neq 0$. 这相当于裂变成两个以同一速度 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\boldsymbol{q}}$ 沿矢量 $\boldsymbol{k}$ 方向传播的元激发. 这时又可能有两种情况. 第一, 元激发之一的动量可能任意地接近零. 这相当于在 p_c 点元激发的速度接近于声速 c, 因而元激发可以产生声子 (情况 a). 第二, 两个元激发都具有大于零的动量 (情况 b).

(2) $\dfrac{\partial\varepsilon(\boldsymbol{q})}{\partial\boldsymbol{q}}=0,\dfrac{\partial\varepsilon(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})}{\partial\boldsymbol{p}}=0$, 为此须使每个元激发产生时都具有动量 p_0, 而且元激发能量 $\varepsilon(\boldsymbol{p})$ 为极小, 对于液体氦, 这个点相当于谱上 $p_0=1.98\times10^8\mathrm{cm}^{-1}$. 在这个点的邻域谱 $\varepsilon(\boldsymbol{p})$ 具有所谓旋子形式:

$$\varepsilon(\boldsymbol{p})=\Delta+\frac{(|\boldsymbol{p}|-p_0)^2}{2m^*},\quad ||\boldsymbol{p}|-p_0|\ll p_0. \tag{26.2}$$

如果 $\varepsilon_c=2\Delta$, 则激发裂变成两个动量为 $\boldsymbol{q}$ 和 $\boldsymbol{q}_1$ 的旋子, 而且 $|\boldsymbol{q}|=|\boldsymbol{q}_1|=p_0$; $\varepsilon(\boldsymbol{q})$, $\varepsilon(\boldsymbol{q}_1)=\Delta$. 决定两个旋子分出的角度 θ 的条件是, 其动量和应等于 p_{c}(情况 c). 上面列举的三种情况, 包括了裂变成两个元激发的阈点的全部类型.

§26.2 方程组

我们采用前面介绍的量子场论方法研究谱在阈点附近的形状, 也就是说, 我们将寻求格林函数在谱终点附近的形状, 因为谱本身决定于格林函数的极点. 从物理上看很清楚, 描述格林函数奇异的图形中, 必有一条线分成两条, 即形象地表示出元激发裂变为二的过程. 试以图 78 所示的图形为例. 各种格林函数 G', $\hat{G}$ 和 $\check{G}$ 都出现在这些图形中. 图中每个环都是自能部分, 其特征是由两个三端顶点 (只算凝聚体外粒子线) 组成, 二顶点由两条实线相连. 这种环的相应积分是

$$\int \mathrm{d}\omega'\mathrm{d}\boldsymbol{q}G(q)G(q-p)\Gamma_1\Gamma_2, \tag{26.3}$$

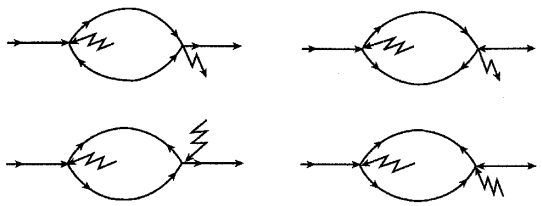


图 78

其中函数 G 可以代表任何一个格林函数 G', $\hat{G}$ 或 $\check{G}$, 而 Γ_1 和 Γ_2 乃是图中左面和右面顶点, 设外端线的 ω 和 $\boldsymbol{p}$ 值在极点 $\omega=\varepsilon(\boldsymbol{p})$ 附近 (我们已经证明, 三个格林函数的极点重合). 如果积分 (26.3) 有奇异点, 则与之有关的对 ω' 和 $\boldsymbol{q}$ 的积分区域里, 函数 $G(q)$ 和 $G(p-q)$ 都处于自己的极点附近. 根据 (24.10) 式, (24.12) 式和 (24.14) 式, 在极点附近两个函数的形状是

$$\begin{aligned} G(q)&=\frac{A_1}{\omega'-\varepsilon(\boldsymbol{q})+\mathrm{i}\delta}\ \text{或}\frac{A_2}{\omega'+\varepsilon(\boldsymbol{q})-\mathrm{i}\delta},\\ G(p-q)&=\frac{B_1}{\omega-\omega'-\varepsilon(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})+\mathrm{i}\delta}\ \text{或}\frac{B_2}{\omega-\omega'+\varepsilon(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})-\mathrm{i}\delta}, \end{aligned} \tag{26.4}$$

视我们在正极点或在负极点讨论每个函数而定. 将这些式子代入 (26.3) 式, 我们就看到, 对我们有意义的是 A_1B_1 型的交错项. 在这些项中可对 ω' 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 完成积分, 剩下的对 $\boldsymbol{q}$ 的积分取在 $\boldsymbol{q}$ 值的某个范围内, 其形状是

$$\int\frac{\Gamma_1\Gamma_2AB\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\varepsilon(\boldsymbol{q})+\varepsilon(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})-\omega}. \tag{26.5}$$

只要对某个 q 值被积函数的分母为零, 积分就有奇异性. 当 $\omega<\varepsilon(p_{\mathrm{c}})$ 时, 由以上分析知分母总大于零; 当 $\omega=\varepsilon(p_{\mathrm{c}})$ 时被积表达式第一次趋向无穷大, 因而 $\omega=\varepsilon(p_{\mathrm{c}})$ 是这个积分在数学意义上的奇异点. 因此, 这个奇异点的性质仅仅由格林函数的解析性质决定, 不论我们取图 78 中哪一个具体的自能部分图. 后一情况使以后的讨论大为简化. 实际上, 为了确定奇异点的性质, 像我们刚刚已证明的一样, 须知格林函数在极点附近的表达方式. 在极点附近三个格林函数形状相同. 因此, 如果我们不关心正规项的具体数值与各种次要的系数, 则三个格林函数的图形是同构的, 因而在极点附近可以不区别函数 G', $\hat{G}$ 和 $\check{G}$. 例如将方程式 (24.2) 加到一起, 并引入新函数 $G_1(p)=G'(p)+\hat{G}(p)$. 对函数 $G_1(p)$ 得到下列方程式:

$$G_1(p)=G^{(0)}(p)+G^{(0)}(p)[\Sigma_{11}(p)+\Sigma_{20}(p)]G_1(p).$$

将自能部分 $\Sigma=\Sigma_{11}+\Sigma_{20}$ 的全部图形, 分成在 $\omega=\varepsilon_{\mathrm{c}}$ 点无奇异性的图形 Σ_0 以及有奇异性的图 Σ_1, 后者的图解如图 78. 引入如下的函数 $\tilde{\boldsymbol{G}}^{(0)}(p)$:

$$\tilde{\boldsymbol{G}}^{(0)}(p)=\frac{1}{(G^{(0)})^{-1}(p)-\Sigma_0(p)}.$$

这时剩下的方程式可写成如图 79 所示的戴逊方程形式. 既然奇异点性质决定于极点所有的格林函数的形状, 而它们在极点处只有系数之差, 我们将所有的内线 G', $\hat{G}$ 或 $\check{G}$ 都换成 G_1. 封闭环左面是某个“引发”顶点 $\Gamma^{(0)}$, 从一般图解法观点看, 它乃是三个凝聚体外粒子和凝聚体粒子相互作用的结果 (如图 78 各图形所示); 环右面是三端顶点 Γ, 是在 $\Gamma^{(0)}$ 的向外线条中加入相互作用而得到的.

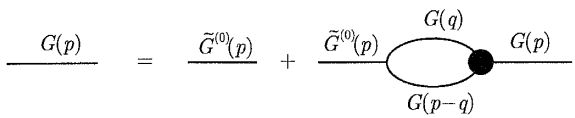
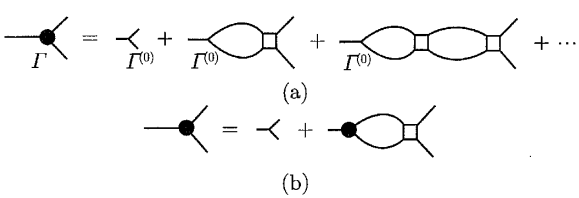


图 79

将 $\Gamma(p,p-q,q)$ 通过 $\Gamma^{(0)}(p,p-q,q)$ 表达的图解示于图 80(a), 图中方框代表两个凝聚体外粒子彼此散射的完全不可约顶角部分 $\Gamma(p_1,p_2,p_3,p_4)$. 这些图形的求和由图 80(b) 的简单方程式实现, 这乃是所有端点 p_1,p_2 和 p_3,p_4 之间不能再分成以一条或两条线相连的两部分的四粒子图的结合. 省去 G_1 的脚标, 写出方程的解析式:

$$\begin{aligned} G^{-1}(p)-\tilde{G}^{(0)-1}(p)=&\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int\Gamma^{(0)}(p,p-q,q)G(q)\\ &\times G(p-q)\Gamma(p,p-q,q)\mathrm{d}^4q, \qquad (26.6)\\ \Gamma(p,p-q,q)=&\Gamma^{(0)}(p,p-q,q)+\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int\Gamma(p,p-k,k)\\ &\times G(k)G(p-k)\Gamma(k,p-k;p-q,q)\mathrm{d}^4k. \qquad (26.7)\end{aligned}$$



(a)

(b)

图 80

在本节初指出的三类阈附近, 方程组 (26.6) 和 (26.7) 的性质完全不同, 我们应当分别讨论这些情况.

§26.3　产生声子的阈点附近谱的性质

讨论在元激发速度等于声速的点附近激发谱的性质. 从这个点开始, 元激发可以产生声子. 这时守恒律 (26.1) 式的形状是

$$\varepsilon(\boldsymbol{p})=\varepsilon(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})+\omega(\boldsymbol{q}), \qquad (26.1')$$

其中 $\omega(\boldsymbol{q})$ 是声子频率, $\boldsymbol{q}$ 是其波矢. $\boldsymbol{q}$ 很小时频率 $\omega(\boldsymbol{q})$ 为

$$\omega(\boldsymbol{q}) = c|\boldsymbol{q}| - \alpha|\boldsymbol{q}|^3. \tag{26.8}$$

我们可以认为 $a > 0$, 即声子谱是稳定的, 然而以后用不到 $\omega(\boldsymbol{q})$ 中的三次幂项. $|\boldsymbol{p}| = p_{\mathrm{c}}$ 时函数 $\varepsilon(\boldsymbol{p})$ 有奇点. 我们假定奇异性出现比 $\Delta p = |\boldsymbol{p}| - p_{\mathrm{c}}$ 的二次幂更高的小项中 (这将被最终结果证实), 即在 p_{c} 附近

$$\varepsilon(\boldsymbol{p}) \simeq \varepsilon_{\mathrm{c}} + c\Delta p + \beta(\Delta p)^2 \tag{26.9}$$

$\left(\text{按假定, } |\boldsymbol{p}| = p_{\mathrm{c}}\text{时元激发速度} v = \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial|\boldsymbol{p}|}\text{等于声速}\right)$.

当 $|\boldsymbol{p}| = p_{\mathrm{c}}$ 而 $\cos\theta = 1$(θ 为 $\boldsymbol{q}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 的夹角) 时, 注意 (26.8) 和 (26.9) 式, (26.1′) 式右端成为

$$\varepsilon_{\mathrm{c}} + \beta|\boldsymbol{q}|^2. \tag{26.10}$$

只有 (26.10) 式在 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$ 处有极小值, $|\boldsymbol{p}| = p_{\mathrm{c}}$ 才是真正的阈, 为此须要求 $\beta > 0$.

既然 $|\boldsymbol{p}| = p_{\mathrm{c}}$ 时, 元激发能产生动量 $\boldsymbol{q}$ 充分小的声子, 为寻求积分 (26.6) 的奇异性, 只有格林函数之一, 例如 $G(q)$ 的变量很小的范围才是重要的. 当 ω 和 $\boldsymbol{q}$ 很小时, 格林函数等于 (24.19) 式,

$$G(q) = \frac{a}{\omega^2 - \omega^2(\boldsymbol{q}) + \mathrm{i}\delta}, \tag{26.11}$$

正比于声子的传播函数 (不能使用函数 G 的 (26.4) 式, 因为 $\boldsymbol{q}$ 很小时两个极点几乎重合).

在 $|\boldsymbol{p}| = p_{\mathrm{c}}, \varepsilon = \varepsilon_{\mathrm{c}}$ 点附近, 格林函数具有奇异性. 然而我们假定, 相应于 (26.9) 式, $G^{-1}(p)$ 在零点附近 (即 $G(p)$ 在极点附近) 的形状是

$$G^{-1}(p) = A^{-1}[\Delta\varepsilon - c\Delta p - \beta(\Delta p)^2 + \mathrm{i}\delta]$$
$$(\Delta p = |\boldsymbol{p}| - p_{\mathrm{c}}, \Delta\varepsilon = \omega - \varepsilon_{\mathrm{c}}). \tag{26.12}$$

我们应当确定 $G^{-1}(p)$ 中含有奇异性的更高次项.

讨论顶角部分 $\Gamma(p, p-q, q)$ 的性质. 当 $\boldsymbol{q}$ 很小时这个顶点代表的过程是, 动量为 $\boldsymbol{p}$ 的粒子发射出长波元激发或声子. 这种顶点必须正比于所发射声子的动量值 $|\boldsymbol{q}|$, 因为从宏观角度看, 这个过程乃是元激发在密度振荡 (声波) 上的散射. 在声振动波长无穷大的极限情况下, 相互作用应等于零, 因为在均匀介质中元激发不被散射. 因此我们在 $|\boldsymbol{q}|$ 很小的区域内采用 $\Gamma(p, p-q, q)$ 的如下表达式:

$$\Gamma(p, p-q, q) = g|\boldsymbol{q}|. \tag{26.13}$$

现在考虑方程式 (26.6) 右端的积分. 根据 Γ 和 $\Gamma^{(0)}$ 的定义, 这个积分对 Γ 的每级近似, 都是由四粒子顶角函数连成的封闭环所组成的链 (图 81). 每个闭环都

对格林函数的奇异性有贡献, 然而既已假定奇异项很小, 每个闭环的贡献只须考虑一次.

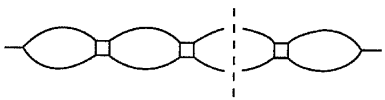


图 81

固定一个闭环, 则其左右两侧的图形可以独立求和, 并且根据准确三端顶角函数 $\Gamma(p,p-q,q)$ 的定义, 封闭环的两个顶点都成为三粒子函数 $\Gamma(p,p-q,q)$. 因此, 讨论表达式

$$\int \Gamma^2(p,p-q,q)G(q)G(p-q)\mathrm{d}^4q$$

的非正规部分, 就可以求得对逆格林函数 $G^{-1}(p)$ 的小的奇异修正项. 讨论比式中 $\boldsymbol{q}$ 很小的区域, 并将 $\Gamma(p,p-q,q)$, $G(q)$ 和 $G(p-q)$ 的值 (26.11) 式 ~(26.13) 式代入, 得到

$$Aag^2\int\frac{|\boldsymbol{q}|^4\mathrm{d}|\boldsymbol{q}|\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega'}{(\omega'^2-c^2\boldsymbol{q}^2+\mathrm{i}\delta)(\omega'-\omega+\varepsilon(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})-\mathrm{i}\delta)},$$

可在区间 $(-\infty,+\infty)$ 对 ω' 积分, 它归结为在 $\omega'=c|\boldsymbol{q}|$ 点取留数. 以后省去对我们无关紧要的系数, 将对 ω' 积分的结果写成

$$\int\frac{|\boldsymbol{q}|^3\mathrm{d}|\boldsymbol{q}|\mathrm{d}\cos\theta}{c|\boldsymbol{q}|+\varepsilon(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})-\omega}.$$

虽然积分在上限收敛, 其奇异性决定于被积表达式在小 $|\boldsymbol{q}|$ 区的行为. 利用 (26.10) 式将分母展开. 对确定奇异性有重要意义的是小角 $\theta\ll1$, 因而在所要求的准确度下可令平方项中 $\cos\theta=1$. 结果有

$$\begin{aligned}&\int\frac{|\boldsymbol{q}|^3\mathrm{d}|\boldsymbol{q}|\mathrm{d}\cos\theta}{x+c|\boldsymbol{q}|(1-\cos\theta)-2\beta\Delta p|\boldsymbol{q}|+\beta|\boldsymbol{q}|^2}\\&\quad\propto\int|\boldsymbol{q}|^2\ln(x-2\beta|\boldsymbol{q}|\Delta p+\beta|\boldsymbol{q}|^2)\mathrm{d}|\boldsymbol{q}|.\end{aligned}$$

这里引入了记号 $x=c\Delta p-\Delta\varepsilon+\beta(\Delta p)^2$. 将对数下的表达式展成因子并积分, 得到

$$a_1\left(\frac{k_1}{2}\right)^3\ln k_1+a_2\left(\frac{k_2}{2}\right)^3\ln k_2, \tag{26.14}$$

其中

$$k_{1,2}=\beta\Delta p\pm\sqrt{(\beta\Delta p)^2-\beta x}.$$

从 (26.14) 式看出, $G^{-1}(p)$ 的奇异性真包含在比推导此式时所用各项次数更高的项中, 这就证实了前面所作的、关于非正规项很小的假定.

在 $G(p)$ 的极点邻近, 即

$$|x| \ll \beta(\Delta p)^2,$$

决定最后几项. 这时可忽略含 k_2 的项. 从 (26.14) 得出

$$(\Delta p)^3 \ln(-\Delta p). \tag{26.15}$$

根据 (26.12) 和 (26.15) 式, 格林函数在极点附近的形状是

$$G(p)\frac{A}{\omega - \varepsilon_c - c\Delta p - \beta(\Delta p)^2 - a(\Delta p)^3 \ln(-\Delta p)}.$$

这个函数决定阈附近元激发的能量. 阈点之下无衰减:

$$\varepsilon(\boldsymbol{q}) = \varepsilon_c + c(|\boldsymbol{p}| - p_c) + \beta(|\boldsymbol{p}| - p_c)^2 + a(|\boldsymbol{p}| - p_c)^3 \ln(p_c - |\boldsymbol{p}|).$$

阈点之上 $|\boldsymbol{p}| > p_c$, 激发能量有负虚部, 它等于 $-a\pi(\Delta p)^3$:

$$\varepsilon(\boldsymbol{p}) = \varepsilon_c + c(|\boldsymbol{p}| - p_c) + \beta(|\boldsymbol{p}| - p_c)^2 + a(|\boldsymbol{p}| - p_c)^3 \ln|p_c - |\boldsymbol{p}|| - a\pi\mathrm{i}(|\boldsymbol{p}| - p_c)^3.$$

由此得出的结果之一是, $a > 0$. 因此当 $|\boldsymbol{p}| > p_c$ 不存在不衰减的元激发: 元激发寿命反比于 $(|\boldsymbol{p}| - p_c)^3$. 阈附近衰减小是因为, 由于 Γ 中有因子 $|\boldsymbol{q}|$, 与长波声子的相互作用总是弱的.

§26.4 裂变成两个动量平行且不为零的元激发时阈点附近谱的性质

从物理考虑知道, 在 (26.6) 式中对 $\boldsymbol{q}$ 积分时, 重要的是阈点附近产生的元激发所具有的动量 $\boldsymbol{q}$ 和频率 ω' 的值. 然而对于正在产生的元激发, 这些值并不是其格林函数的奇点. 这种点的唯一特殊性在于, 在它附近一个激发能和另一个激发"粘"在一起, 这种过程在绝对零度下是不可能的, 因为不存在真正的元激发. 因此 (26.6) 式积分下的格林函数在极点附近具有简单形状 (见 (26.4) 式):

$$G(q) = \frac{A}{\omega - \varepsilon(\boldsymbol{q}) + \mathrm{i}\delta},$$

其中 $\varepsilon(\boldsymbol{p})$ 是实数, 而且在所讨论的矢量 $\boldsymbol{q}$ 的值附近没有奇异性. 这就使问题易于研究了.

根据图 81 或方程式 (26.7), 方程式 (26.6) 右端是链形图的总合, 考虑链中的一环. 出现于环的顶点的量是 $\Gamma(p_1, p_2; p_3, p_4)$ 或者 $\Gamma^{(0)}(p, p-q, q)$, 显然不具有任何奇异性. 它们在计算中只导致无关紧要的系数或格林函数的正规修正项, 我们将略

而不写. 在所讨论的环中分出对 $\boldsymbol{q}$ 的积分区间, 其值接近元激发产生时所具有的动量 $\boldsymbol{p}_0$ 和能量 ε_0. 代入格林函数的表达式 (26.4), 对 ω' 积分, 环中含有奇异性的那部分积分可表示成

$$\int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\varepsilon(\boldsymbol{q})+\varepsilon(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})-\omega}.$$

由于在 $|\boldsymbol{p}|=p_{\mathrm{c}}$ 处表达式 $\varepsilon(\boldsymbol{q})+\varepsilon(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})$ 应有极小值, 当 $|\boldsymbol{p}|$ 接近 p_{c} 时, 它的形状是

$$\varepsilon(\boldsymbol{q})+\varepsilon(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \simeq \varepsilon_{\mathrm{c}}+v_{\mathrm{c}}\Delta p+\alpha(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_0)^2+\frac{\beta[(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_0)\boldsymbol{p}_{\mathrm{c}}]^2}{p_{\mathrm{c}}^2},$$

其中 v_{c} 是每个产生于阈点的元激发的速度, $\boldsymbol{q}_0$ 是元激发之一的动量 (注意, 裂变后飞出的元激发, 具有沿矢量 $\boldsymbol{p}_{\mathrm{c}}$ 方向的动量). 在此展开式中的系数 α 和 β 决定于函数 $\varepsilon(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})$ 和 $\varepsilon(\boldsymbol{q})$ 的形式:

$$\alpha=\frac{v_{\mathrm{c}}p_c}{2q_0(p_{\mathrm{c}}-q_0)},$$

$$\beta=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\boldsymbol{q}^2}\right)_{\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_0}+\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\boldsymbol{q}^2}\right)_{\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}_{\mathrm{c}}-\boldsymbol{q}_0}-\frac{v_{\mathrm{c}}p_{\mathrm{c}}}{q_0(p_{\mathrm{c}}-q_0)}\right\}.$$

引入新变量 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_0, (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{p}_{\mathrm{c}})=up_{\mathrm{c}}\cos\psi$, 得到

$$\int \frac{u^2\mathrm{d}u\mathrm{d}\cos\psi}{v_c\Delta p-\Delta\varepsilon+\alpha u^2+\beta u^2\cos^2\psi}\propto\sqrt{v_{\mathrm{c}}\Delta p-\Delta\varepsilon}.$$

环的求和不改变奇异点的性质, 因为与声子情况不同, 完全三粒子函数 $\Gamma(p,p-q,q)$ 对于我们所关心的值 $|\boldsymbol{q}|\sim q_0$, 即不应等于零, 也不应趋向无穷大. 因此, 逆格林函数在 p_c 和 ε_c 附近的非正规部分是

$$a\sqrt{v_{\mathrm{c}}\Delta p-\Delta\varepsilon}.$$

既然根据假设, $|\boldsymbol{p}|=p_{\mathrm{c}}$, $\varepsilon=\varepsilon_{\mathrm{c}}$ 是谱内的点, 则 $\Delta p=0$ 和 $\Delta\varepsilon=0$ 时, 函数 $G^{-1}(p)$ 应等于零, 于是对于小 Δp 和 $\Delta\varepsilon$, $G^{-1}(p)$ 的正规部分是 $a_1\Delta p+b_1\Delta\varepsilon$. 最终有

$$G^{-1}(p)=A^{-1}[a\Delta p+\Delta\varepsilon+b\sqrt{v_{\mathrm{c}}\Delta p-\Delta\varepsilon}].$$

决定激发能量的方程是

$$G^{-1}(p)=0. \tag{26.16}$$

形式地解此方程, 得到两个根:

$$\Delta\varepsilon_{1,2}=-a\Delta p-\frac{b^2}{2}\pm\sqrt{ab^2\Delta p+\frac{b^4}{4}+b^2v_{\mathrm{c}}\Delta p},$$

从中应取根号前为 "+" 号的 $\Delta\varepsilon_1$, 以期 $\Delta p \to 0$ 时 $\Delta\varepsilon \to 0$. 在阈点附近对小 Δp 展开根号下的表达式, 得

$$\varepsilon \simeq \varepsilon_{\mathrm{c}} + v_{\mathrm{c}}(|\boldsymbol{p}| - p_{\mathrm{c}}) - \left(\frac{a + v_{\mathrm{c}}}{b}\right)^2 (\Delta p)^2.$$

将此式代入 (26.16) 式就看出, 方程 (26.16) 对小的和负的 Δp(阈前) 有解的必要条件是

$$\frac{a + v_{\mathrm{c}}}{b} > 0.$$

当 $|\boldsymbol{p}| > p_{\mathrm{c}}, a\Delta p + \Delta\varepsilon$ 和 $b\sqrt{v_{\mathrm{c}}\Delta p - \Delta\varepsilon}$ 两项都是正的, 方程根本无解 —— 不论实数解或复数解. 因此在这种情况下能谱曲线不能延伸过阈点, 它在此以斜率 v_{c} 结束.

§26.5 两个激发以一定角度飞出的裂变

这种情况下, 积分时重要的 $|\boldsymbol{q}|$ 值的范围, 也是阈点附近产生的元激发所具有的动量值. 基于和前面一样的原因, 格林函数在此区间有普通的形状 (26.4). 然而现在已不能断定, 顶点 Γ 在 $\varepsilon = \varepsilon_{\mathrm{c}}$ 时是否有限.

先考虑图 81 中的一个环. 根据定义, 环顶点的各量不包含危险的积分. 因此很自然地假定, 这些量在阈点仍是有限的, 和平常一样讨论 ω' 和 $\boldsymbol{q}$ 的积分区间, 其值接近阈点产生的元激发所具有的值. 这种环的奇异性归结为如下积分的奇异性:

$$\int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\varepsilon(\boldsymbol{q}) + \varepsilon(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) - \omega},$$

其中$\varepsilon(\boldsymbol{q})$ 和 $\varepsilon(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q})$ 可用 $\varepsilon(\boldsymbol{q})$ 在谱的旋子部分展开式 (26.2)(注意情况 b 相当于裂变成两个动量为 p_0 的旋子, 彼此间有大于零的角 $\theta_0, \cos\dfrac{\theta_0}{2} = \dfrac{p_{\mathrm{c}}}{2p_0}$). 以 (26.2) 式代入后, 上式变为

$$\int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{2\Delta - \omega + \dfrac{(|\boldsymbol{q}| - p_0)^2}{2m^*} + \dfrac{(|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}| - p_0)^2}{2m^*}}. \tag{26.17}$$

将以下公式变换到柱坐标 q'_z, q'_ρ, φ(z 轴沿矢量 $\boldsymbol{p}$ 的方向), 即

$$q_z = p_0 \cos\frac{\theta_0}{2} + q'_z, \quad q_x = \left(p_0 \sin\frac{\theta_0}{2} + q'_\rho\right)\cos\varphi,$$
$$q_y = \left(p_0 \sin\frac{\theta_0}{2} + q'_\rho\right)\sin\varphi. \tag{26.18}$$

将 (26.18) 式代入 (26.17) 式并省略 q'_z, q'_ρ 的高次项, 得到

$$\int \frac{\mathrm{d}q'_\rho \mathrm{d}q'_z}{2\Delta - \omega + \dfrac{1}{m^*}\left(\sin^2\dfrac{\theta_0}{2}q'^2_\rho + \cos^2\dfrac{\theta_0}{2}q'^2_z\right)}.$$

在此式中宜引入极坐标 r 和 ϑ:

$$\frac{1}{\sqrt{m^*}}q'_\rho \sin\frac{\theta_0}{2} = r\cos\vartheta, \quad \frac{1}{\sqrt{m^*}}q'_z \cos\frac{\theta_0}{2} = r\sin\vartheta.$$

结果求得

$$\int \frac{r\mathrm{d}r}{2\Delta - \omega + r^2} \propto \ln(2\Delta - \omega).$$

因此, 每个环导致一个大项 $\ln(2\Delta - \omega)$, 它只与外端频率 ω 有关. 固定某一个环, 根据图 80(a) 和方程式 (26.7), 其左右两侧的环的总合是准确的三粒子顶点 Γ. 可见方程式 (26.6) 右端在 $2\Delta - \omega$ 很小时的主要项为

$$\Gamma^2(p, p; q_0, q_0)\ln(2\Delta - \omega), \tag{26.19}$$

其中 $\boldsymbol{q}_0$ 是矢量 $\boldsymbol{q}$ 的临界值, 即阈点裂变所生旋子的动量.

$\boldsymbol{q} \sim \tilde{\boldsymbol{q}}_0$, 附近的 $\Gamma(p, p; q, q)$, 可从解方程 (26.7) 而得. 然而更简单的作法是直接求和方程式的对应的级数的主要项, 注意前面提到的情况, 即每个环的主要项只与外端频率 ω 有关, 因而它对所有的环都是相同的. 形式上这是一个几何级数, 其和为

$$\Gamma(p, p; q_0, q_0) \propto \frac{P}{1 + Q\ln\left(\dfrac{2\Delta - \omega}{2\Delta}\right)}.$$

以此式代替 (26.19) 式的顶角 $\Gamma(p, p; q_0, q_0)$, 我们就看出, 根据方程式 (26.6), 函数 $G^{-1}(p)$ 在阈点附近的基本非正规项乃是

$$\frac{a}{\ln\left(\dfrac{2\Delta - \omega}{\alpha}\right)}.$$

考虑到假定 $G^{-1}(p_c) = 0$, 最终有

$$G^{-1}(p) = A^{-1}\left\{|p| - p_c - \frac{a}{\ln\left(\dfrac{2\Delta - \omega}{\alpha}\right)}\right\}. \tag{26.20}$$

这时方程

$$G^{-1}(p) = 0.$$

给出 $|\boldsymbol{p}| < p_0$ 时能谱曲线的如下表达式：

$$\varepsilon(\boldsymbol{p}) = 2\Delta - \alpha \mathrm{e}^{-\frac{a}{p_c - |\boldsymbol{p}|}}$$

($\varepsilon(\boldsymbol{p}) - 2\Delta$ 是指数式小量，使我们得以在 (26.20) 式中展开 $G^{-1}(p)$ 的正规部分时忽略 $\Delta\varepsilon$ 的幂). 由此可见，在这种情况下曲线 $\varepsilon(\boldsymbol{p})$ 也结束于 $|\boldsymbol{p}| = p_c$ 点，并在此点具有无限价水平切线.

应指出，在全部以上讨论的情况中，格林函数在 $\omega = \varepsilon_c$, $|\boldsymbol{p}| = p_c$ 处有一支点.

再强调一次，以上的分析既未基于粒子间相互作用的具体形式，也未要求相互作用弱. 我们只利用了图解法所决定的准确量之间的普通基本关系.①

§27 温度大于零时场论方法应用于有相互作用的玻色粒子系统

最后我们在本节中讨论推广上述方法到 $T > 0$ 时有相互作用的玻色粒子系统的可能性，自然应试图以一般方法为基础来作这种推广. 为此我们立即转到系统的热力学描述，以化学势 μ 作独立变量，来代替系统中的总粒子数 N. 我们已经在前面指出过，对于理想玻色气体当温度低于玻色凝聚点时，这种描述是不可能的，因为在这个温度范围里，从系统平均粒子数不变条件所确定的气体化学势，恒等于零.

大家知道，理想气体玻色粒子按动量为 $\boldsymbol{p}$ 的状态的分布为

$$n_p = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{\varepsilon_0(p)-\mu}{T}} - 1}.$$

这个分布只对负 μ 有意义. 温度足够高时 $\mu < 0$; 化学势成为零的点正好决定玻色凝聚温度. 温度更低时必须令 μ 恒等于零. 系统内平均粒子数不变条件，由于粒子“凝聚”到基态上而继续成立. 我们已不只一次指出，凝聚体粒子数和系统内总粒子数相近，即正比于系统体积.

在热力学方法中，形式上运用无相互作用粒子的格林函数，其傅里叶分量为

$$\mathfrak{G}^{(0)}(p) = \frac{1}{\mathrm{i}\omega - \varepsilon_0(\boldsymbol{p}) + \mu}.$$

在系统的玻色凝聚温度，其特征为，在函数

$$\frac{1}{\mu - \varepsilon_0(\boldsymbol{p})}$$

中，首先出现动量值 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$ 的极点. 如果试图将这个式子延拓到 $\mu > 0$ 的区域，就会出现在任意的 $\boldsymbol{p}$ 值下变号并趋向无穷大的量. 同时如 $\mu < 0$，则从前面所述可知，无相互作用的粒子系统处于玻色凝聚温度之上.

①实验数据 [53, 54] 表明，实际 He^4 中实现的是裂变成两个旋子.

实际上这些困难是虚拟的. 这种情况之所以出现, 是因为对于相互作用玻色粒子气体, 微扰论不适用于玻色凝聚点之下的温度范围. 例如, 我们在 §25 中已看到, 动量很小时微扰论个别项导致发散表达式. 为求得物理结果, 必须对微扰论主要项序列求和. 在所有类似的情形下, 理论中诸量间的一般方程式和关系式有更广泛的意义, 超出了微扰论的应用范围. 格林函数之类的准确量, 在考虑了相互作用之后, 低于玻色凝聚点时仍具有合理的性质.

至于化学势, 决定它的条件则是, 系统中的平均粒子数应等于给定值. 粒子间有相互作用存在时, μ 在任何地方都不恒等于零, 因而一开始就可取其为独立变量, 然后从上述粒子数不变的条件, 确定其对本系统的值. 低于凝聚点时, 相互作用玻色粒子的化学势的符号, 不能从一般性考虑确定.①

我们已经在 §23 中看到, $T=0$ 的微扰论表述中出现准确的凝聚体粒子数; 理论由之出发的理想气体凝聚体粒子数却不在任何地方遇见. 我们即将看到, 温度大于零时情形仍如此. 这一点十分重要. 它使我们得以确切断定, 应如何理解相互作用粒子系统的玻色凝聚温度. 完全清楚, 可称之为 λ 转变点的温度不必与理想气体玻色凝聚温度一致, 凝聚体粒子数密度成为零, 才是 λ 转变温度的物理定义. 从一般考虑无法预言, 有相互作用存在时转变温度将向那一方向移动. 因此原则上既可能有这样的情况, 即物理凝聚体存在于高于理想气体凝聚点的温度下, 也可能存在相反的情况, 即在较低的温度下引入相互作用, 反而使原来能存在于理想玻色气体中的凝聚体消失.

在这里要着重指出, §23 所述图解法中, 实质上并未应用理想气体中动量为零的粒子数等于无穷大的这一事实. 那里叙述的微扰论的特点是, 既然动量为零的粒子起着特殊作用, 我们在推导中就力图准确地考虑算符 ξ_0 和 ξ_0^+. 换言之, 对于这些粒子我们未作通常的统计假定, 即它们的贡献比较小. 至于其他粒子, 则我们以平常方式作了讨论.

温度大于零时还可能以上述方式处理, 我们从格林函数的如下表示式出发:

$$\frac{\langle T(\psi_1\psi_2\cdots\psi_1^+\psi_2^+\cdots\mathfrak{G})\rangle}{\langle\mathfrak{G}\rangle},$$

去建立微扰论. 这个表示式中求平均符号 $\langle\cdots\rangle$ 代表, 对不相互作用粒子哈密顿量 $H_0-\mu N$ 的状态取迹:

$$\langle\cdots\rangle=\frac{\mathrm{Tr}(\mathrm{e}^{\frac{\mu N-H0}{T}}\cdots)}{\mathrm{Tr}\,\mathrm{e}^{\frac{\mu N-H0}{T}}}. \tag{27.1}$$

①在 §25 中所讨论的模型根据 (25.19) 式 μ 是正的 ($f>0; f<0$ 相当粒子间相吸, 此近似下这种系统是不稳定的). 实际的氦在温度低于 λ 点时 $\mu<0$, 否则在低温下不能与自己的蒸汽保持平稳. 大家知道, 两个相平衡时化学势相等氦蒸气是稀薄玻尔兹曼气体, 其化学势取负值.

既然使用变量 μ 时总粒子数不守恒, (27.1) 式中进行的热力学平均对所有的粒子, 包括动量为零的粒子, 是彼此无关的. 因此完全和在 §23 中一样, 运算 T 和 $\langle\cdots\rangle$ 分别可以表示成两个相继的运算 $T=T^0T'$, $\langle\cdots\rangle=\langle\langle\cdots\rangle'\rangle^0$, 相应地对于动量为零的粒子和其他粒子进行. 这种分解的意义仍是同从前一样: 处于动量为零状态中的粒子起着特殊作用, 因而我们将作准确讨论. 在绝对零度的论述中, 将运算 T 和 $\langle\cdots\rangle$ 分解为二的可能性, 起重要作用.

几乎逐步重复导致 (23.14) 式的论据, 我们发现, 在松原方法中为了计算任何凝聚体外粒子的格林函数, 必须知道处于动量为零的状态中全部 "准确" m- 粒子格林函数. 和 (23.14) 式一样, 决定凝聚体粒子格林函数的关系是

$$\mathfrak{G}_{0m}(\tau_1,\cdots,\tau_n;\tau_1',\cdots,\tau_m')=\frac{\langle T(\xi_0(\tau_1)\cdots\xi_0(\tau_m)\xi_0^+(\tau_1')\cdots\xi_0^+(\tau_m')\mathfrak{S})\rangle}{\langle\mathfrak{S}\rangle},$$

其中 τ 是 $T\neq 0$ 的方法中的"时间"参量. 此式可写成与 (23.16) 式相似的形式, 即通过"海森伯算符"表达:

$$\mathfrak{G}_{0m}(\tau_1,\cdots,\tau_m;\tau_1',\cdots,\tau_m')=\frac{\mathrm{Tr}\{\mathrm{e}^{\frac{\mu N-H}{T}}T(\tilde{\xi}_0(\tau_1)\cdots\tilde{\xi}_0(\tau_m)\tilde{\xi}_0^+(\tau_1')\cdots\tilde{\xi}_0^+(\tau_m'))\}}{\mathrm{Tr}\{\mathrm{e}^{\frac{\mu N-H}{T}}\}},\tag{27.2}$$

其中 "海森伯算符" $\tilde{\xi}_0(\tau)$ 和 $\tilde{\xi}_0^+(\tau)$ 满足方程式:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\tilde{\xi}_0(\tau)=[H-\mu N,\tilde{\xi}_0(\tau)],$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\tilde{\xi}_0^+(\tau)=[H-\mu N,\tilde{\xi}_0^+(\tau)],$$

并和普通的薛定谔算符有如下关系:

$$\tilde{\xi}_0(\tau)=\mathrm{e}^{(H-\mu N)\tau}\xi_0\mathrm{e}^{-(H-\mu N)\tau},$$
$$\tilde{\xi}_0^+(\tau)=\mathrm{e}^{(H-\mu N)\tau}\xi_0^+\mathrm{e}^{-(H-\mu N)\tau}.$$

因此, 格林函数 $\mathfrak{G}$ 乃是算符 $\tilde{\xi}_0$ 和 $\tilde{\xi}_0^+$ 编时乘积的吉布斯平均值.

我们在此提醒一下: 量子统计中物理量的求平均可用两种等价方式完成. 一方面, 它可以看成对系统所处的实际状态的量子力学平均. 这个状态由一定的能量和粒子数描述. 另一方面可借助吉布斯分布求平均, 这时系统视为不封闭的, 这一点使它在给定温度下能以一定概率处于具有不同能量和不同粒子数的状态中. 两种平均方法等效性的基础, 是吉布斯分布在能量和粒子数的平均值附近具有极窄的极大值, 因此, 例如能量的相对涨落为 $\sqrt{(E-\bar{E})^2}/\bar{E}\propto 1/\sqrt{\bar{N}}$, 它在系统的尺寸无穷大时趋向零. 封闭系统作量子力学平均时的能量和粒子数值, 显然和吉布斯分布的相应平均值一致. 从热力学观点看, 两种平均方法的差别仅仅在于, 第一种情况下

物理量的平均值通过能量 (作为热力学参量) 表达, 而第二种情况下通过与温度的关系表达. 统计中引入化学势时, 意义也是如此. 考虑到这些, 我们将 (27.2) 式视为对系统的量子力学状态的平均值, 即

$$\mathfrak{G}_{0m}(\tau_1,\cdots,\tau_m;\tau_1',\cdots,\tau_m')=\langle\Phi^*|T(\tilde{\xi}_0(\tau_1)\cdots\tilde{\xi}_0(\tau_m)\tilde{\xi}_0^+(\tau_1')\cdots\tilde{\xi}_0^+(\tau_m'))|\Phi\rangle. \tag{27.3}$$

因此, 根据 (27.2) 式, 任何凝聚体外粒子格林函数的微扰论级数, 都含有处于动量为零的状态的粒子的准确格林函数, 而后者在写成 (27.3) 式的形状后, 只取决于算符 $\tilde{\xi}_0$ 和 $\tilde{\xi}_0^+$ 相对于有相互作用的粒子状态 Φ 的性质. 因而如果在此状态中存在着凝聚体, 则算符 $\tilde{\xi}_0$ 和 $\tilde{\xi}_0^+$ 可看成数字, 相应地所有如 (27.2) 的格林函数都应换成因子 $\sqrt{n_0(T)}$ 的乘积:

$$\mathfrak{G}_{0m}(\tau_1,\cdots,\tau_m;\tau_1',\cdots,\tau_m')=[n_0(T)]^m. \tag{27.4}$$

最后一式正确性的检验, 完全与 §23 中推导绝对温度为零度的类似公式相同.

(27.4) 式中 $n_0(T)$ 乃是给定温度下的粒子数密度. 决定转变温度 T_1 的条件是 $n_0(T_\lambda)=0$. 我们已经说过, 这个温度既可能高于、也可能低于理想气体的 "玻色凝聚" 温度 T_0. 在后一种情况下, 当 $T_0>T>T_\lambda$, 微扰论展开完全具有平常的形式, 虽然在相互作用表象中存在着凝聚体, 而且算符 ξ_0 和 ξ_0^+ 很大. 再强调一次, 这是由于微扰论展开包含着凝聚体粒子的准确格林函数.

第 6 章　吸收介质中的电磁辐射

§28　吸收介质中电磁辐射的格林函数

在统计物理学所涉及的现象中, 电磁场起着基本作用. 所有凝聚介质 —— 固体和液体粒子间的作用力, 实际上具有电磁本质. 这些力的特点是短程作用, 它们约在原子间距离上衰减, 并基本上决定粒子间的结合力.

在本章里我们不涉及短程力, 而只限于讨论和波长远超过原子间距离的电磁辐射有关的问题. 这里既包括电磁辐射穿过物质时的现象, 也包括和长程电磁力 (所谓范德瓦耳斯力) 有关的各种效应.

大家知道, 长波电磁辐射和物质的相互作用可以纯宏观地描述, 方法是引入和辐射频率 ω 有关的复数介电常数 $\varepsilon(\omega)=\varepsilon'(\omega)+\mathrm{i}\varepsilon''(\omega)$[①](见 [42]). 在本节中我们将求得吸收介质电磁辐射的格林函数, 它通过介质的介电常数表示.

量子力学中通常以矢量势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 和标量势 $\varphi(\boldsymbol{r})$ 这些薛定谔算符描述电磁场. 我们将采用这些算符的"四维"记号 $A_\alpha=(\boldsymbol{A},\varphi);\alpha=1,2,3,0$[②]. 和薛定谔表象中的算符平行, 我们还采用海森伯算符 $A_\alpha(\boldsymbol{r},t)$, 其定义和平常一样, 即

$$A_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{r},t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}t}A_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{\boldsymbol{H}}t}. \tag{28.1}$$

算符 $A_\alpha(\boldsymbol{r},t)$, 与电场和磁场强度算符 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$, $H(\boldsymbol{r},t)$ 以熟知的关系式相联系:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)&=-\frac{\partial}{\partial t}A(\boldsymbol{r},t)-\operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{r},t),\\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)&=\operatorname{rot}A(\boldsymbol{r},t).\end{aligned} \tag{28.2}$$

电磁场的矢量势 (以及二次量子化表象中代表它的算符) 的定义是非单值的. 总是存在着与所谓理论的规范不变性有关的任意性, 后者表现为可对 $A_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{r},t)$ 作变换:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)&\to\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)+\operatorname{grad}\chi(\boldsymbol{r},t),\\ \varphi(\boldsymbol{r},t)&\to\varphi(\boldsymbol{r},t)-\frac{\partial}{\partial t}\chi(\boldsymbol{r},t),\end{aligned}$$

①我们认为磁导率 $\mu(\omega)$ 等于 1, 因为它只在很窄的频率范围内才和 1 有相当差别, 而这些频率通常对我们不重要.

②本章里以希腊字母记四维矢量势的分量. 有时用英文脚标 $i,k,\cdots$ 记其空间分量, 对所有重复两次的英文和希腊脚标求和.

其中 χ 是任意算符. 不难验证, 在这种通常称之为规范变换的作用下, 具有直接物理意义的量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 是不改变的.

电磁场的波长很长的表现是, 对于电场和磁场的平均值① $\langle\boldsymbol{E}\rangle$, $\langle\boldsymbol{H}\rangle$, 存在着封闭的方程组 —— 麦克斯韦方程:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\langle\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\rangle &= \frac{\partial}{\partial t}(\hat{\varepsilon}\langle\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\rangle),\\ \operatorname{rot}\langle\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\rangle &= -\frac{\partial}{\partial t}\langle\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\rangle.\end{aligned}\tag{28.3}$$

方程式 (28.3) 中的介电常数 $\hat{\varepsilon}$ 只和介质性质有关, 在吸收介质中它是算符, 按以下规则作用于时间的函数:

$$\hat{\varepsilon}\langle\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\rangle = \langle\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\rangle + \int_{-\infty}^{t} f(\boldsymbol{r},t-t')\langle\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t')\rangle \mathrm{d}t'.\tag{28.4}$$

在傅里叶表象中算符 $\hat{\varepsilon}$ 的作用归结为在 $\langle\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)\rangle$ 上乘以介质的介电常数 $\varepsilon(\boldsymbol{\omega})$:

$$\varepsilon(\boldsymbol{r},\omega) = 1 + \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} f(\boldsymbol{r},t)\ \mathrm{d}t,\tag{28.5}$$

而方程组 (28.3) 成为

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\langle\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega)\rangle &= -\mathrm{i}\omega\varepsilon(\boldsymbol{r},\omega)\langle\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)\rangle,\\ \operatorname{rot}\langle\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)\rangle &= \mathrm{i}\omega\langle\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega)\rangle.\end{aligned}\tag{28.6}$$

可以证明 (参阅朗道和栗弗席兹 [42]) (28.5) 式所定义的 $\varepsilon(\omega)$ 在复变量 ω 的上半平面是解析函数, 并在此半平面内无零点.

温度大于零时电磁辐射的性质由温度格林函数② $\mathfrak{D}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1,\tau_1;\boldsymbol{r}_2,\tau_2)$ 决定:

$$\begin{aligned}&\mathfrak{D}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;\tau_1-\tau_2)\\ &\quad= \begin{cases} -\operatorname{Tr}\{\mathrm{e}^{(F-\hat{H})/T}\mathrm{e}^{\hat{H}(\tau_1-\tau_2)}A_\alpha(\boldsymbol{r}_1)\mathrm{e}^{-\hat{H}(\tau_1-\tau_2)}A_\beta(\boldsymbol{r}_2)\}, & \tau_1>\tau_2,\\ -\operatorname{Tr}\{\mathrm{e}^{(F-\hat{H})/T}\mathrm{e}^{-\hat{H}(\tau_1-\tau_2)}A_\beta(\boldsymbol{r}_2)\mathrm{e}^{\hat{H}(\tau_1-\tau_2)}A_\alpha(\boldsymbol{r}_1)\}, & \tau_1<\tau_2.\end{cases}\end{aligned}\tag{28.7}$$

为了将 $\mathfrak{D}_{\alpha\beta}$ 通过介质的介电常数 $\varepsilon(\omega)$ 表示, 我们利用第 3 章中确定的温度格林函数和推迟函数的关系, 后者在我们的情形下定义为

①这里的平均是统计平均:

$$\langle\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\rangle = \operatorname{Tr}\left\{\mathrm{e}^{\frac{F-\hat{H}}{T}}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right\}.$$

②(28.7) 式中以自由能 F 代替了热力学势 Ω(比较 (11.1), (11.2) 式). 这种变换之所以可能, 是因为电磁场的化学势恒等于零.

$$D^{\mathrm{R}}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;t_1-t_2)$$
$$=\begin{cases}-\mathrm{i}\mathrm{Tr}\{\mathrm{e}^{(F-\hat{H})}/T[A_\alpha(\boldsymbol{r}_1,t_1)A_\beta(\boldsymbol{r}_2,t_2)-A_\beta(\boldsymbol{r}_2,t_2)A_\alpha(\boldsymbol{r}_1,t_1)]\}, & t_1>t_2;\\ 0, & t_1<t_2.\end{cases}\tag{28.8}$$

由于我们以后要把所得结果运用于不均匀物体, 这里就不再认为 $\mathfrak{D}$ 和 D^{R} 是空间坐标差的函数. 与此相应, 我们认为物体各处介电常数不同: $\varepsilon=\varepsilon(\boldsymbol{r},\omega)$.

重复 §17 的全部计算, 只是不对空间坐标过渡到傅里叶分量. 这时容易得出 $\mathfrak{D}$ 和 D^{R} 的 Lehmann 型展开如下:

$$\mathfrak{D}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;\omega_n)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;x)}{x-\mathrm{i}\omega_n}\mathrm{d}x,\tag{28.9}$$

$$D^{\mathrm{R}}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho\alpha\beta(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;x)}{x-\omega-\mathrm{i}\delta}\mathrm{d}x,\tag{28.10}$$

其中

$$\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;\omega)$$
$$=-(2\pi)^3\sum_{n,m}\mathrm{e}^{\frac{F-E_n}{T}}(A_\alpha(\boldsymbol{r}_1))_{nm}(A_\beta(\boldsymbol{r}_2))_{mn}(1-\mathrm{e}^{-\omega_{mn}/T})\delta(\omega-\omega_{mn}).$$

从 (28.10) 式得出, $D^{\mathrm{R}}(\omega)$ 是在 ω 上半平面的解析函数. 比较 (28.10) 和 (28.9) 式, 我们看出当 $\omega_n>0$ 时,

$$\mathfrak{D}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;\omega_n)=D^{\mathrm{R}}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;\mathrm{i}\omega_n).\tag{28.11}$$

为求得 $\omega_n<0$ 时的 $\mathfrak{D}$, 须注意 $\mathfrak{D}(\tau)$ 是 τ 的偶函数, 这是因为电磁场算符是实数 $(A^+_\alpha=A_\alpha)$(见 § 11). 因此它的傅里叶分量 $\mathfrak{D}(\omega_n)$ 是 ω_n 的偶函数, 由此得出对一切 ω_n 成立的关系式①:

$$\mathfrak{D}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;\omega_n)=D^{\mathrm{R}}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;\mathrm{i}|\boldsymbol{\omega}_n|).\tag{28.12}$$

现在计算推迟函数. 这时矢量势的规范问题有重要意义. 张量 $D^{\mathrm{R}}_{\alpha\beta}$ 有 10 个独立分量 (和任何二阶对称张量一样). 然而还存在着与规范不变性有关的相当大的任意性. 实际上具有物理意义的不是由矢量势分量构成的 $D^{\mathrm{R}}_{\alpha\beta}$, 而只是由算符 $E_i(\boldsymbol{r},t)$, 按照由 $A_\alpha(\boldsymbol{r},t)$ 构成 $D^{\mathrm{R}}_{\alpha\beta}$ 的同样规则 (见 (28.8) 式), 所构成的 6 个量. 因此 10 个量 $D^{\mathrm{R}}_{\alpha\beta}$ 只加上了 6 个物理条件, 即我们还有 4 个任意函数. 利用这个任意

①注意和任何玻色粒子的格林函数一样, $\mathfrak{D}(\boldsymbol{\omega}_n)$ 只对"偶"次频率 $\omega_n=2n\pi T$ 才有不为零的分量.

性, 可令分量 D^{R}_{00}, D^{R}_{i0} 等于零. 这显然相当取标量势为零的规范. 这时算符 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的关系是

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t},\quad \boldsymbol{H}=\mathrm{rot}\boldsymbol{A}. \tag{28.2'}$$

为了将 D^{R}_{ik} 通过 $\varepsilon(\omega)$ 表示, 我们作如下讨论. 设想由物体和平衡电磁辐射构成的系统, 处于外界电流 $\boldsymbol{j}^{\mathrm{CT}}(\boldsymbol{r},t)$ 所造成的外场中①. 平均场的麦克斯韦方程这时成为

$$\begin{aligned}&\mathrm{rot}\langle \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega)\rangle = 4\pi \boldsymbol{j}^{\mathrm{CT}}(\boldsymbol{r},\omega)-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{r},\omega)\langle \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)\rangle,\\ &\mathrm{rot}\langle \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)\rangle = \mathrm{i}\omega\langle \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega)\rangle.\end{aligned} \tag{28.6'}$$

规范 (28.2') 下的平均势 $\langle \boldsymbol{A}^{\mathrm{CT}}(\boldsymbol{r},t)\rangle$ 满足方程式:

$$[\varepsilon(\boldsymbol{r},\omega)\omega^2\delta_{il}-\mathrm{rot}_{im}\mathrm{rot}_{ml}]\langle A_l(\boldsymbol{r},\omega)\rangle=-4\pi j_i^{\mathrm{CT}}(\boldsymbol{r},\omega). \tag{28.13}$$

方程式 (28.13) 的解是

$$\langle A_i^{\mathrm{CT}}(\boldsymbol{r},\omega)\rangle=-\int \overline{D}_{il}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';\omega)j_l^{\mathrm{CT}}(\boldsymbol{r}',\omega)\mathrm{d}\boldsymbol{r}', \tag{28.14}$$

其中 $\overline{D}$ 是方程式 (28.13) 的所谓格林函数. 它是方程式

$$[\varepsilon(\boldsymbol{r},\omega)\omega^2\delta_{il}-\mathrm{rot}_{im}\mathrm{rot}_{ml}]\overline{D}_{lk}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';\boldsymbol{\omega})=4\pi\delta_{ik}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{28.15}$$

的解. 由于 $\varepsilon(\omega)$ 在上半平面解析, $\overline{D}$ 也是在上半平面解析的函数.

另外, 有外界电流存在时的 $\langle \boldsymbol{A}^{\mathrm{CT}}\rangle$, 可以直接从定义 (28.1) 算得. 这时系统的哈密顿量为 $\hat{H}+\hat{H}^{\mathrm{CT}}$, 其中 $\hat{H}$ 是物体和辐射的哈密顿量, 而

$$\hat{H}^{\mathrm{CT}}=-\int \boldsymbol{j}^{\mathrm{CT}}(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

有外场存在时的算符以角标 "CT" 示之, 就有 (无外场的算符仍用原来无此角标的记号)

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{CT}}(\boldsymbol{r},t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\hat{H}+\hat{H}^{\mathrm{CT}})t}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\hat{H}+\hat{H}^{\mathrm{CT}})t}.$$

然后如第 2 章所作, 将 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\hat{H}+\hat{H}^{\mathrm{CT}})t}$ 表示成

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\hat{H}+\hat{H}^{\mathrm{CT}})t}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t}S_{\mathrm{CT}}(t).$$

如果外界电流满足条件 $\boldsymbol{j}^{\mathrm{CT}}(t\to-\infty)\to\boldsymbol{0}$, 则 $S_{\mathrm{CT}}(t)$ 为 (比较第 2 章)

$$S_{\mathrm{CT}}(t)=T_{\mathrm{t}}\ \exp\left\{-\mathrm{i}\int_{-\infty}^{t}\hat{H}^{\mathrm{CT}}(t')\mathrm{d}t'\right\}.$$

这时矢量势算符在有外电流存在时的平均值是

①CT是俄文 "外界" 和 "电流" 的首字母.—— 译者注

$$\langle \boldsymbol{A}^{\mathrm{CT}}(\boldsymbol{r},t)\rangle = \langle S_{\mathrm{CT}}^{-1}(t)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)S_{\mathrm{CT}}(t)\rangle.$$

将 S_{CT} 按 $\hat{H}^{\mathrm{CT}}$ 展成级数, 只保留 $\boldsymbol{j}^{\mathrm{CT}}$ 的一级项, 得到

$$\langle A_i^{\mathrm{CT}}(\boldsymbol{r},t)\rangle = -\mathrm{i}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t'\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}' j_k^{\mathrm{CT}}(\boldsymbol{r}',t')\langle[A_k(\boldsymbol{r}',t')A_i(\boldsymbol{r},t)-A_i(\boldsymbol{r},t)A_k(\boldsymbol{r}',t')]\rangle. \tag{28.16}$$

这个量可通过前面引入的电磁场推迟函数 D_{ik}^{R} 表达. 根据定义 (28.8) 有

$$\langle A_i^{\mathrm{CT}}(\boldsymbol{r},t)\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t'\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}' D_{ik}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';t-t')j_k^{\mathrm{CT}}(\boldsymbol{r}',t').$$

在此式中对时间变换到傅里叶分量, 最后得

$$\langle A_i^{\mathrm{CT}}(\boldsymbol{r},\omega)\rangle = -\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}' D_{ik}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';\boldsymbol{\omega})j_k^{\mathrm{CT}}(\boldsymbol{r}',\omega). \tag{28.17}$$

比较 (28.14) 和 (28.17) 式, 我们看出由于 $\boldsymbol{j}^{\mathrm{CT}}$ 是任意的, D_{ik}^{R} 和以前引入的方程式 (28.13) 的格林函数 $\overline{D}_{ik}$ 相等. 这样我们就作出结论: D_{ik}^{R} 也满足方程式 (28.15) (Dzyaloshinski 和 Pitaevskii[55]). 函数 D_{ik}^{R} 的解析性质自然和 $\varepsilon(\omega)$ 的解析性质完全一致.

如果在 (28.15) 式中将 ω 换成 $\mathrm{i}|\omega_n|$, 就得到 $\mathfrak{D}_{ik}(\omega_n)$ 的方程式:

$$[\varepsilon(\boldsymbol{r},\mathrm{i}|\omega_n|)\boldsymbol{\omega}_n^2\delta_{il}+\mathrm{rot}_{im}\mathrm{rot}_{ml}]\mathfrak{D}_{lk}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';\omega_n) = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta_{ik}. \tag{28.18}$$

此式中虚频率的介电常数和实频率下介电常数 $\varepsilon(\omega)$ 的虚部 $\varepsilon''(\omega)$ 有简单关系 (例如见 [42], §58):

$$\varepsilon(\mathrm{i}|\omega_n|) = 1+\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\omega\varepsilon''(\omega)}{\omega^2+\omega_n^2}\mathrm{d}\omega. \tag{28.19}$$

既然总有 $\varepsilon''>0$, 则从 (28.19) 式看出, $\varepsilon(\mathrm{i}|\omega_n|)$ 是单调下降正实函数.

解方程式 (28.14) 或 (28.18), 就将电磁场格林函数通过介电常数的虚部表示出来. 一般说来, 对于不均匀介质这是颇为复杂的问题. 以后几节里我们将讨论分层介质的特殊情况, 在分层介质里, 这个问题可解到底.

先看均匀介质的情形, 这时 ε 和坐标无关. 既然 D^{R}, $\mathfrak{D}$ 现在只是坐标差 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$ 的函数, 则在 (28.15) 式中作傅里叶变换后得

$$\{[\omega^2\varepsilon(\omega)-k^2]\delta_{il}+k_ik_l\}D_{lj}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{k},\omega) = 4\pi\delta_{ij}. \tag{28.20}$$

这个方程决定在标量势为零的规范下的 D^{R}. 为求得任意规范的 D^{R}, 我们利用 (28.20) 式计算函数 $D_{ik}^{\mathrm{E}}=\omega^2D_{ik}^{\mathrm{R}}$, 其中 D_{ik}^{R} 是规范的 $\varphi=0$ 时的推迟函数. 这样确定的量已是规范不变的, 因为它和由电场强度算符分量构成的推迟函数, 只差一个常数项 $4\pi\delta_{ik}$. 函数 D_{ik}^{E} 满足方程式:

$$\{[\omega^2\varepsilon(\omega)-k^2]\delta_{il}+k_ik_l\}D_{lj}^{\mathrm{E}}(\boldsymbol{k},\omega) = 4\pi\boldsymbol{\omega}^2\delta_{ij}, \tag{28.21}$$

并和任意规范下的函数 $D^{\mathrm{R}}_{\alpha\beta}$ 有如下明显的关系 (比较 (28.2) 式):

$$D^{\mathrm{E}}_{ik}=\omega^2 D^{\mathrm{R}}_{ik}-\omega k_i D^{\mathrm{R}}_{0k}-\omega k_k D^{\mathrm{R}}_{i0}+k_i k_k D^{\mathrm{R}}_{00} \tag{28.22}$$

(此后以 $D^{\mathrm{R}}_{00}, D^{\mathrm{R}}_{i0}, D^{\mathrm{R}}_{ik}$ 记任意规范中 $D^{\mathrm{R}}_{\alpha\beta}$ 的时间分量、混合分量和空间分量). 从对称考虑知, 矢量 D^{R}_{i0} 应沿 $\boldsymbol{k}$ 的方向, 因为它是 (28.21) 式和 (28.22) 式中的唯一矢量:

$$D^{\mathrm{R}}_{i0}=D^{\mathrm{R}}_{0i}=\mathrm{d}k_i. \tag{28.23}$$

基于同样的原因:

$$D^{\mathrm{R}}_{ik}=a\delta_{ik}+bk_ik_k. \tag{28.24}$$

将 (28.22) 式 ~(28.24) 式代入 (28.21) 式, 我们得到两个决定 D^{R}_{00} 和 a, b, d 的方程式:

$$\begin{aligned} &a[\varepsilon(\omega)\omega^2-k^2]=4\pi,\\ &a+\varepsilon(\omega)(\omega^2 b+D^{\mathrm{R}}_{00}-2\omega d)=0. \end{aligned} \tag{28.25}$$

这样我们看到, 均匀情况下 $D^{\mathrm{R}}_{\alpha\beta}$ 可以确定有两个任意函数的准确度, 而对任意不均匀介质要有四个函数.

下面给出几个特殊情形的公式. 令 $d=b=0$, 则有

$$D^{\mathrm{R}}_{ik}=\frac{4\pi\delta_{ik}}{\varepsilon(\omega)\omega^2-k_2},\quad D^{\mathrm{R}}_{00}=-\frac{4\pi}{\varepsilon(\omega)(\varepsilon(\omega)\omega^2-k^2)},\quad D^{\mathrm{R}}_{i0}=0. \tag{28.26a}$$

$\varphi=0$ 相当于:

$$D^{\mathrm{R}}_{ik}=\frac{4\pi}{\varepsilon(\omega)\omega^2-k^2}\left(\delta_{ik}-\frac{k_ik_k}{\varepsilon(\omega)\omega^2}\right),\quad D^{\mathrm{R}}_{00}=D^{\mathrm{R}}_{i0}=0. \tag{28.26b}$$

最后, 在所谓横规范 ($\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$) 下有

$$D^{\mathrm{R}}_{ik}=\frac{4\pi}{\varepsilon(\omega)\omega^2-k^2}\left(\delta_{ik}-\frac{k_ik_k}{k^2}\right),\quad D^{\mathrm{R}}_{00}=\frac{4\pi}{\varepsilon(\omega)k^2},\quad D^{\mathrm{R}}_{i0}=0. \tag{28.26c}$$

在 (28.26) 式中作代换 $\omega\to \mathrm{i}|\omega_n|$, 得到温度格林函数 $\mathfrak{D}$ 的公式:

$$\begin{cases} \mathfrak{D}_{ik}=-\dfrac{4\pi\delta_{ik}}{\varepsilon(\mathrm{i}|\omega_n|)\omega_n^2+k^2},\\ \mathfrak{D}_{00}=\dfrac{4\pi}{\varepsilon(\mathrm{i}|\omega_n|)(\varepsilon(\mathrm{i}|\omega_n|)\omega_n^2+k^2)},\quad \mathfrak{D}_{i0}=0, \end{cases} \tag{28.27a}$$

$$\begin{cases} \mathfrak{D}_{ik}=-\dfrac{4\pi\delta_{ik}}{\varepsilon(\mathrm{i}|\omega_n|)\omega_n^2+k^2}\left(\delta_{ik}+\dfrac{k_ik_k}{\omega(\mathrm{i}|\omega_n|)\omega_n^2}\right),\\ \mathfrak{D}_{00}=\mathfrak{D}_{i0}=0, \end{cases} \tag{28.27b}$$

$$\begin{cases} \mathfrak{D}_{ik} = -\dfrac{4\pi\delta_{ik}}{\varepsilon(\mathrm{i}|\omega_n|)\omega_n^2 + k^2}\left(\delta_{ik} - \dfrac{k_i k_k}{k^2}\right), \\ \mathfrak{D}_{00} = \dfrac{4\pi}{\varepsilon(\mathrm{i}|\omega_n|)k^2}, \quad \mathfrak{D}_{i0} = 0. \end{cases} \tag{28.27c}$$

在某些问题中电磁场的普通时间格林函数可能有用, 其定义为

$$D_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, t_1 - t_2) = -\mathrm{i}\ \mathrm{Tr}\left\{\mathrm{e}^{\frac{F-\hat{H}}{T}} T_{\mathrm{t}}[A_\alpha(\boldsymbol{r}_1, t_1), A_\beta(\boldsymbol{r}_2, t_2)]\right\}. \tag{28.28}$$

我们在 §17 中已看到, 它的傅里叶分量和 $D^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{k}, \omega)$ 的关系是

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\ D(\boldsymbol{k}, \omega) = \mathrm{Re}\ D^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{k}, \omega), \\ &\mathrm{Im}\ D(\boldsymbol{k}, \omega) = \mathrm{cth}\frac{\omega}{2T}\mathrm{Im}\ D^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{k}, \omega). \end{aligned} \tag{28.29}$$

我们不引用由此得到的 D 的庞杂分式了.

绝对温度零度时函数 D 有特别意义, 这时它可用普通的量子场论方法算得 (第 2 章). 在 (28.29) 式中取极限 $T = 0$, 得

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\ D(\boldsymbol{k}, \omega) = \mathrm{Re}\ D^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{k}, \omega), \\ &\mathrm{Im}\ D(\boldsymbol{k}, \omega) = \mathrm{sgn}\ \omega\ \mathrm{Im}\ D^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{k}, \omega). \end{aligned} \tag{28.30}$$

考虑到 $\varepsilon(\omega)$ 的实部是 ω 的偶函数, 而虚部是奇函数 (参阅 [42]), 不难验证, 为了在 $T = 0$ 时从 D^{R} 过渡到 D, 须在 (28.26) 式中将 ω 换成 $|\omega|$. 例如, 对规范 (28.26a) 得到

$$\begin{aligned} D_{ik} &= \frac{4\pi\delta_{ik}}{\varepsilon(|\omega|)\omega^2 - k^2}, \\ D_{00} &= -\frac{4\pi}{\varepsilon(|\omega|)(\varepsilon(|\omega|)\omega^2 - k^2)}, \quad D_{0i} = 0. \end{aligned} \tag{28.31}$$

公式 (28.31) 是量子电动力学中光子格林函数通常公式 (参见 [26]) 的推广. 在透明介质 ($\varepsilon''(\omega) = 0$) 的特殊情况下, Riazanov[56] 用另一方法得到了这些公式.

§29 介电常数的计算

为了计算吸收介质中电磁场温度格林函数 $\mathfrak{D}$, 可走另一条路, 即采用第 3 章所发展的图解法. 由于有意义的只是波长远超过原子间距离的电磁场, 我们将粒子和场的相互作用哈密顿量分成两部分之和:

$$\hat{H}_{\mathrm{int}} = \hat{H}_{\mathrm{int}}^{(1)} + \hat{H}_{\mathrm{int}}^{(2)},$$

并将不相互作用粒子和自由光子的能量归入零级哈密顿量 $\hat{H}_0$, 导致上节初提到的短程力的相互作用归入 $\hat{H}_{\mathrm{int}}^{(1)}$. $\hat{H}_{\mathrm{int}}^{(2)}$ 是长波电磁场和粒子的相互作用哈密顿量.

对于标量势为零的规范,

$$\hat{H}_{\text{int}}^{(2)} = -\int \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \tag{29.1}$$

其中 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ 是粒子电流密度算符. (29.1) 式中长波表现为: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 的傅里叶级数展开式中, 只有模数不超过某个边界动量 k_0 的动量 $\boldsymbol{k}$ 出现, 而 k_0 远小于原子间距离的倒数 $1/a$. 结果图解法中所有对 $\boldsymbol{k}$ 的积分都应在 $k_0 \ll \dfrac{1}{a}$ 处截断.

粒子具有非相对论速度时 (这个条件在一切宏观系统中成立), 电流密度算符是 (参见 [17]①)

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \sum_{\boldsymbol{a}} \left\{ -\mathrm{i}\frac{e_a}{2m_a}(\psi_a^+(\boldsymbol{r})\nabla\psi_a(\boldsymbol{r}) - \nabla\varphi_a^+(\boldsymbol{r})\psi_a(\boldsymbol{r})) - \frac{e_a^2}{2m_a}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\psi_a(\boldsymbol{r})\psi_a(\boldsymbol{r}) \right\},$$

式中对各种粒子求和.

我们将以长波光子线的数目来区分辐射格林函数修正项的图形. 图中不含长波光子线的部分将简单地以实心多角形代表. 显然这些多角形可以理解成一切可能的具有同一性质的部分之和, 这样就把按电荷 e 的微扰论级数归结成按长波光子线数目的级数. 这个级数的各种类型的图形示于图 82 中. 多角形所对应的量完全由凝聚物体的性质决定, 这些凝聚体是因短程力的作用而形成.

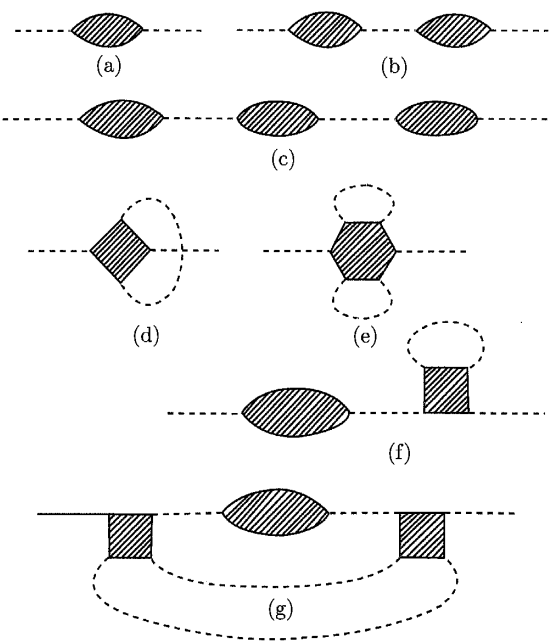


图 82

①可参看中文版 [83], §115.—— 译者注

从物理考虑立刻清楚, 图 82(d)~ 图 82(g) 的贡献是可以略而不计的, 因为它们对应各种光–光散射型的非线性效应. 这个论断可证明如下. 已经指出, 所有对长波光子线动量的积分应在某个 $k_0 \ll \frac{1}{a}$ 处截断. 从量纲考虑得知, 每条对其动量积分的光子线, 给出数量级为 $k_0 a$ 的小因子. 唯一不对长波光子线动量积分的图形, 是图 82(a)~ 图 82(c) 这类.

这种图形序列的求和, 我们已在 §10 中推导戴逊方程式时作过. 因此我们直接写出 $\mathfrak{D}_{ik}$ 的方程式:①

$$\mathfrak{D}_{ik}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;\omega_n)=\mathfrak{D}^{(0)}_{ik}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2;\omega_n)+\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}_3\mathrm{d}\boldsymbol{r}_4\mathfrak{D}^{(0)}_{il}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_3;\omega_n)\pi_{lm}(\boldsymbol{r}_3,\boldsymbol{r}_4;\omega_n)\mathfrak{D}_{mk}(\boldsymbol{r}_4,\boldsymbol{r}_2;\boldsymbol{\omega}_n). \tag{29.2}$$

代表图 82 中实心环贡献的量 π, 称为极化算符. 从以前的讨论看出, 它完全决定于介质的性质.

我们将极化算符 π 通过系统的介电常数表示. 为此我们注意, 长波辐射的格林函数 $\mathfrak{D}_{ik}$(规范 $\varphi=0$) 满足方程式 (28.18). 以算符

$$\omega_n^2\delta_{ik}+\mathrm{rot}_{il}\mathrm{rot}_{lk}$$

从左边作用到方程式 (29.2), 并注意 $\mathfrak{D}^{(0)}$ 满足 $\varepsilon=1$ 的方程式 (28.18), 经简单计算后得到

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\pi_{il}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}';\omega_n)\mathfrak{D}_{lk}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}_2;\omega_n)=\frac{\varepsilon(\boldsymbol{r}_1,\mathrm{i}|\omega_n|)-1}{4\pi}\omega_n^2\mathfrak{D}_{ik}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;\boldsymbol{\omega}_n),$$

由此得到所要求的公式为

$$\pi_{ik}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;\omega_n)=\frac{1}{4\pi}[\varepsilon(\boldsymbol{r}_1,\mathrm{i}|\omega_n|)-1]\omega_n^2\delta_{ik}\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2). \tag{29.3}$$

极化算符正比于 $\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)$ 这一事实, 与宏观理论中忽略空间关联效应有关. 后者只在所谓反常趋肤效应的频段才是重要的. π 在这个频段的性质将在第 7 章讨论. 今后在本章里要紧的是更高的频率, 那时没有反常趋肤效应.

如果讨论均匀物体, 则 π 只是 $\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$ 的函数, 而 ε 和 $\boldsymbol{r}$ 无关. 在 (29.3) 式中对 $\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$ 作傅里叶变换, 我们得到联系系统的极比算符 $\pi(\boldsymbol{k},\omega_n)$ 和介电常数的简单公式:

$$\pi_{ik}(\boldsymbol{k},\omega_n)=\frac{1}{4\pi}(\varepsilon(\mathrm{i}|\omega_n|)-1)\omega_n^2\delta_{ik}. \tag{29.4}$$

(29.4) 式使我们能借助量子场论方法计算 $T\neq 0$ 时物体的介电常数. 实际上计算了系统的极化算符, 我们就在虚轴的不连续点集 $\omega_n=2n\pi T\mathrm{i}$ 上求得了 $\varepsilon(\omega)$. 注

①考虑到不均匀物体的情形, 我们在坐标表象中写出了方程式 (29.2), 只对 τ 作了傅里叶变换.

意到 $\varepsilon(\omega)$ 是在 ω 上半平面没有奇点的解析函数, 并对 ε 逐字重复 §17 中关于 $\mathfrak{G}$ 和 G^{R} 的论述, 我们就得出结论: 为了求得 $\varepsilon(\omega)$, 只需从正虚半轴不连续点集上将函数

$$\frac{4\pi}{3\omega_n^2}\pi_{ii}(\omega_n)$$

解析延拓到整个半平面. 虽然这个问题没有一般解, 但是在各种具体情况中可以完成上述解析延拓.

温度等于零时, $\varepsilon(\omega)$ 的计算大为化简. 这时为了计算极化算符, 可以采用第 2 章描述的场论方法. 对时间图解法重复本节中所作的全部计算, 再考虑到 §28 中关于函数 $D_{ik}(\boldsymbol{k},\omega)$ 的论述, 就得到公式 (规范 $\varphi=0$):

$$\Pi_{ik}(\omega)=\frac{1}{4\pi}(\varepsilon(|\omega|)-1)\omega^2\delta_{ik}. \tag{29.5}$$

然后回想 $\varepsilon'(\omega)=\varepsilon'(-\omega)$, 而 $\varepsilon''(\omega)=-\varepsilon''(-\omega)$, 将 ε 通过 Π 表示:

$$\varepsilon'(\omega)=1+\frac{4\pi}{3\omega^2}\,\mathrm{Re}\Pi_{ii}(\omega),\quad \varepsilon''(\omega)=\frac{4\pi}{3\omega|\omega|}\mathrm{Im}\;\Pi_{ii}(\omega). \tag{29.6}$$

因此 $T=0$ 时 $\varepsilon(\omega)$ 的计算就归结为确定系统的极化算符.

§30 不均匀电介质中的范德瓦耳斯力

长波电磁场是一种特殊长程作用力的来源, 它们可以称为范德瓦耳斯力, 因为其本质同于分子间在远距离上的吸引力. 虽然这些力对物体自由能的贡献, 远小于短程结合力的贡献, 然而它们引起本质上新的效应 —— 自由能的非相加性. 正是这种与范德瓦耳斯力长程作用有关的非相加性, 使我们能从热力学量中分出它们的贡献.

回到前面提及的范德瓦耳斯力和长波电磁场的关系, 就容易理解这种非相加性. 实际上在某个区域内的密度变化以及随之产生的介质电性质的变化, 由于麦克斯韦方程而在区域外也引起场的变化. 因此和长波辐射有关的那部分自由能, 不仅仅决定于给定点物质的性质, 也就是说, 它是非相加性的.

这就使固体表面上液体薄膜的化学势与膜的厚度有关. 另外, 范德瓦耳斯力是固体间相互作用的来源, 换言之, 自由能和物体间的距离有关. 显然, 波长约为膜的厚度或物体间距离的电磁场, 将在这些现象中起主要作用, 因此能够将我们关心的量通过物体的介电常数 $\varepsilon(\omega)$ 表示.

为了计算长波电磁场对自由能的修正项, 我们采用 §15 中发展的热力学势 Ω(对于光子它等于自由能) 的图解法. 重复上节的论述, 我们证实, 只有图 83 上的图形序列才对 F 有贡献. 这时考虑到 §15 关于 F 图形前系数的讨论, 我们会觉得, 图

83 中的实心框似乎不能理解成一切可能的不含长波声子线的图形之和. 然而不难看出, 情形并非如此. 原来图形前的系数等于 $1/m$, 其中 m 是光子线数目①. 这就使我们能将实心框求和, 并令图 83 上的实心环对应 §29 中算出的极化算符 π.

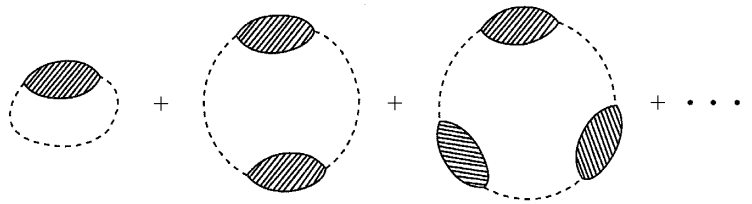


图 83

图 83 的序列对应以下的自由能 F 的级数:

$$\begin{aligned} F =& F_0 - \frac{T}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Bigg\{\int \pi_{ik}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;\omega_n)\mathfrak{D}^{(0)}_{ki}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1;\omega_n) \\ &\times \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 + \frac{1}{2}\int \pi_{ik}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;\omega_n)\mathfrak{D}^{(0)}_{kl}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_3;\omega_n) \\ &\times \pi_{lp}(\boldsymbol{r}_3,\boldsymbol{r}_4;\omega_n)\mathfrak{D}^{(0)}_{pi}(\boldsymbol{r}_4-\boldsymbol{r}_1;\omega_n)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2\mathrm{d}\boldsymbol{r}_3\mathrm{d}\boldsymbol{r}_4 + \cdots \\ &+ \frac{1}{m}\int \pi_{ik}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;\boldsymbol{\omega}_n)\mathfrak{D}^{(0)}_{kl}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_3;\omega_n)\cdots \\ &\times \pi_{qr}(\boldsymbol{r}_{2m-1},\boldsymbol{r}_{2m};\omega_n)\mathfrak{D}^{(0)}_{ri}(\boldsymbol{r}_{2m}-\boldsymbol{r}_1;\omega_n)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\cdots\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{2m}+\cdots\Bigg\}, \end{aligned} \tag{30.1}$$

其中 F_0 是物体的自由能 (一切和短程力有关的修正都已归入 F_0).

级数 (30.1) 不能直接求和. 我们不用自由能决定来自物体和长波电磁场相互作用的附加压力 (更确切些说, 附加拉伸张量). 为此我们设想物体受到小形变, 其位移矢量是 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$. 这时自由能的变化 $\delta\boldsymbol{F} = -\int \boldsymbol{f}\boldsymbol{u}\mathrm{d}V$, 其中 $\boldsymbol{f}$ 是物体形变时作用于单位体积上的力. F_0 的相应变化是

$$\delta F_0 = \int \boldsymbol{u}\ \mathrm{grad}\ p_0\mathrm{d}V,$$

其中 $p_0(\boldsymbol{\rho},T)$ 是密度和温度一定时未考虑修正项的压力.

在这种位移下级数 (30.1) 中只有极化算符改变, 因为仅是它与介质的性质有关, 即 (见 (29.3) 式)

$$\delta\pi_{ik}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;\omega_n) = \frac{1}{4\pi}\omega_n^2\delta_{ik}\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\delta\varepsilon(\boldsymbol{r}_1,\mathrm{i}|\omega_n|).$$

①在 §15 中我们看到, n 级拓扑等价图的数目是 $(n-1)!$, 这就导致因子 $1/n(1/n=(n-1)!/n!)$. 现在 $\hat{H}_{\mathrm{int}} = \hat{H}^{(1)}_{\mathrm{int}} + \hat{H}^{(2)}_{\mathrm{int}}$(见 §29), 指数展开的系数于 $1/l!(2m)!$, 其中 m 是光子线数, 而 l 是和 $\hat{H}^{(1)}_{\mathrm{int}}$ 有关的顶点数. 和 §15 类似的计算表明, 拓扑等价图的数目等于 $l!(2m-1)!$, 由此得出正文中的论断.

变分 (30.1) 式时, 系数 $1/m$ 消去, 我们得到

$$\begin{aligned}\delta F =&\delta F_0 - \frac{T}{8\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\omega_n^2\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\delta\varepsilon(\boldsymbol{r},\mathrm{i}|\omega_n|)\\ &\times\left\{\mathfrak{D}_{ii}^{(0)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r};\omega_n)+\int\mathfrak{D}_{ik}^{(0)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1;\omega_n)\pi_{kl}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;\omega_n)\right.\\ &\times\mathfrak{D}_{li}^{(0)}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r};\omega_n)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2+\int\mathfrak{D}_{ik}^{(0)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1;\omega_n)\pi_{kl}\\ &\times(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;\omega_n)\mathfrak{D}_{lp}^{(0)}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_3;\omega_n)\pi_{pq}(\boldsymbol{r}_3,\boldsymbol{r}_4;\omega_n)\\ &\left.\times\mathfrak{D}_{qi}^{(0)}(\boldsymbol{r}_4-\boldsymbol{r};\omega_n)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2\mathrm{d}\boldsymbol{r}_3\mathrm{d}\boldsymbol{r}_4+\cdots\right\}.\end{aligned}$$

圆括弧中的级数, 正是对应图 82(a)$\sim$ 图 82(c) 的序列的长波光子格林函数 $\mathfrak{D}$. 因此

$$\delta F=\delta F_0-\frac{T}{8\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\omega_n^2\int\mathfrak{D}_{ii}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r};\omega_n)\delta\varepsilon(\boldsymbol{r},\mathrm{i}|\omega_n|)\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

回想 $\mathfrak{D}$ 是 ω_n 的偶函数, 最终得

$$\delta F=\delta F_0-\frac{T}{4\pi}{\sum_{n=0}^{\infty}}'\omega_n^2\int\mathfrak{D}_{ii}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r};\omega_n)\delta\varepsilon(\boldsymbol{r},\mathrm{i}\omega_n)\mathrm{d}\boldsymbol{r}. \tag{30.2}$$

求和符号的上撇表示, $n=0$ 项的权重为 $1/2$. 注意 $\omega_n=2n\pi T$.

变分 $\delta\varepsilon$ 和位移 $\boldsymbol{u}$ 的关系为①

$$\delta\varepsilon=-\boldsymbol{u}\ \mathrm{grad}\ \varepsilon-\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}$$

将它代入 (30.2) 式并作分部积分, 得到 $\boldsymbol{f}$ 的表达式:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}=&-\mathrm{grad}\rho_0-\frac{T}{4\pi}{\sum_{n=0}^{\infty}}'\omega_n^2\mathfrak{D}_{ii}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r};\omega_n)\mathrm{grad}\ \varepsilon(\boldsymbol{r},\mathrm{i}\omega_n)\\ &+\frac{T}{4\pi}{\sum_{n=0}^{\infty}}'\omega_n^2\mathrm{grad}\left[\mathfrak{D}_{ii}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r};\omega_n)\rho\frac{\partial\varepsilon(\boldsymbol{r},\mathrm{i}\omega_n)}{\partial\rho}\right].\end{aligned} \tag{30.3}$$

①给定点 ε 的变化由两部分组成. 第一部分和 ε 随物体的移动有关:

$$\delta_1\varepsilon=\varepsilon(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{u})-\varepsilon(\boldsymbol{r})=-\boldsymbol{u}\ \mathrm{grad}\ \varepsilon,$$

而第二部分与形变时的密度变化有关:

$$\delta_2\varepsilon=\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\delta\rho=-\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\rho\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{u}.$$

由此式容易算出对系统化学势的附加项. 为此须注意, 力学平衡时 $\boldsymbol{f}=0$. 令 (30.3) 式等于零, 并考虑到温度一定时有以下关系成立:

$$\operatorname{grad}\varepsilon(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{T})=\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\operatorname{grad}\boldsymbol{\rho},\quad \mathrm{d}p_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{T})=\rho\mathrm{d}\mu_0(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{T}),$$

其中 μ_0 是单位质量的未受扰动的化学势, 简单变换后得到

$$-\rho\ \operatorname{grad}\left[\mu_0(\rho,T)-\frac{T}{4\pi}{\sum_n}'\omega_n^2\mathfrak{D}_{ii}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r};\omega_n)\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right]=0. \tag{30.4}$$

大家知道, 任何不均匀物体的力学平衡条件是化学势在物体内不变. 因此从 (30.4) 式立即得

$$\mu(\rho,T)=\mu_0(\rho,T)-\frac{T}{4\pi}{\sum_n}'\omega_n^2\mathfrak{D}_{ii}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r};\omega_n)\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}. \tag{30.5}$$

现在计算拉伸张量. 为此须将力 $\boldsymbol{f}$ 的表达式 (30.3) 变成如下形式:

$$f_i=\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}. \tag{30.6}$$

除了格林函数 $\mathfrak{D}_{ik}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';\omega_n)$, 先引入两个其他函数:

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}^{\mathrm{E}}_{ik}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';\omega_n)&=-\omega_n^2\mathfrak{D}_{ik}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';\omega_n),\\ \mathfrak{D}^{\mathrm{H}}_{ik}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';\omega_n)&=\mathrm{rot}_{il}\mathrm{rot}'_{km}\mathfrak{D}_{lm}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';\omega_n),\end{aligned} \tag{30.7}$$

它们由电场和磁场算符构成, 其规则同于由矢量势算符构成 $\mathfrak{D}$ 的方式.

利用新的记号将力的表达式写成

$$\begin{aligned}f_i=&-\frac{\partial p_0}{\partial x_i}+\frac{T}{4\pi}{\sum_{n=0}^{\infty}}'\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[\varepsilon(\boldsymbol{r},i\omega_n)\mathfrak{D}^{\mathrm{E}}_{kk}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r};\omega_n)\\ &-\rho(\boldsymbol{r})\frac{\partial\varepsilon(\boldsymbol{r},\mathrm{i}\omega_n)}{\partial\rho}\mathfrak{D}^{\mathrm{E}}_{kk}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r};\mathrm{i}\omega_n)\Big]\\ &-\frac{T}{4\pi}{\sum_{n=0}^{\infty}}'\varepsilon(\boldsymbol{r},\mathrm{i}\omega_n)\frac{\partial}{\partial x_i}\mathfrak{D}^{\mathrm{E}}_{kk}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r};\omega_n).\end{aligned} \tag{30.8}$$

由此可见, 我们只须改造 (30.8) 式的最后一项. 将它写成如下形式 (先不管求和与因子 $\dfrac{T}{4\pi}$):

$$\varepsilon(\boldsymbol{r}')\frac{\partial}{\partial x_i}\mathfrak{D}^{\mathrm{E}}_{kk}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+\varepsilon(\boldsymbol{r})\frac{\partial}{\partial x'_i}\mathfrak{D}^{\mathrm{E}}_{kk}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'), \tag{30.9}$$

计算完毕后将令 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$.

经过显而易见的变换, 从 (30.9) 得

$$2\frac{\partial}{\partial x_k}\varepsilon(\boldsymbol{r})\mathfrak{D}^{\mathrm{E}}_{ik}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r})-\frac{\partial}{\partial x_k}\varepsilon(\boldsymbol{r})\mathfrak{D}^{\mathrm{E}}_{ki}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')-\frac{\partial}{\partial x'_k}\varepsilon(\boldsymbol{r}')\mathfrak{D}^{\mathrm{E}}_{ik}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$$
$$+\varepsilon(\boldsymbol{r}')\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\mathfrak{D}^{\mathrm{E}}_{kk}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')-\frac{\partial}{\partial x_k}\mathfrak{D}^{\mathrm{E}}_{ik}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\right]$$
$$+\varepsilon(\boldsymbol{r})\left[\frac{\partial}{\partial x'_i}\mathfrak{D}^{\mathrm{E}}_{kk}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')-\frac{\partial}{\partial x'_k}\mathfrak{D}^{\mathrm{E}}_{ki}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\right]. \tag{30.10}$$

从格林函数 $\mathfrak{D}$ 的方程 (28.18) 式可以得到以下恒等式:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\varepsilon(\boldsymbol{r})\mathfrak{D}^{\mathrm{E}}_{ki}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-4\pi\frac{\partial}{\partial x_i}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_k}\varepsilon(\boldsymbol{r}')\mathfrak{D}^{\mathrm{E}}_{ik}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=4\pi\frac{\partial}{\partial x_i}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\mathfrak{D}^{\mathrm{H}}_{ik}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\frac{\partial}{\partial x'_k}\mathfrak{D}^{\mathrm{H}}_{ik}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-4\pi\frac{\partial}{\partial x_i}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),$$

$$\varepsilon(\boldsymbol{r}')\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\mathfrak{D}^{\mathrm{E}}_{ik}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')-\frac{\partial}{\partial x_i}\mathfrak{D}^{\mathrm{E}}_{kk}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\right]$$
$$=-\frac{\partial}{\partial x'_k}\mathfrak{D}^{\mathrm{H}}_{ik}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+\frac{\partial}{\partial x'_i}\mathfrak{D}^{\mathrm{H}}_{kk}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+8\pi\frac{\partial\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\partial x_i},$$
$$\varepsilon(\boldsymbol{r})\left[\frac{\partial}{\partial x'_k}\mathfrak{D}^{\mathrm{E}}_{ik}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')-\frac{\partial}{\partial x'_i}\mathfrak{D}^{\mathrm{E}}_{kk}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\right]$$
$$=-\frac{\partial}{\partial x_k}\mathfrak{D}^{\mathrm{H}}_{ik}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+\frac{\partial}{\partial x_i}\mathfrak{D}^{\mathrm{H}}_{kk}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')-8\pi\frac{\partial\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\partial x_i}.$$

将它们代入 (30.10) 式并令 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$, 得

$$\varepsilon(\boldsymbol{r})\frac{\partial}{\partial x_i}\mathfrak{D}^{\mathrm{E}}_{kk}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r})=2\frac{\partial}{\partial x_k}\varepsilon(\boldsymbol{r})\mathfrak{D}^{\mathrm{E}}_{ik}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r})+2\frac{\partial}{\partial x_k}\mathfrak{D}^{\mathrm{H}}_{ik}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r})-\frac{\partial}{\partial x_i}\mathfrak{D}^{\mathrm{H}}_{kk}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}).$$

再把此式代入 (30.8) 式, 我们终于证明力 $\boldsymbol{f}$ 可表示成 (30.6) 式的形式, 其拉伸张量为

$$\sigma_{ik}=-\delta_{ikp_0}(\rho,T)-\frac{T}{2\pi}{\sum_{n=0}^{\infty}}'\left\{-\frac{1}{2}\delta_{ik}\left[\varepsilon(\boldsymbol{r},\mathrm{i}\omega_n)-\boldsymbol{\rho}\frac{\partial\varepsilon(\boldsymbol{r},\mathrm{i}\omega_n)}{\partial\rho}\right]\mathfrak{D}^{\mathrm{E}}_{ll}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r};\omega_n)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\delta_{ik}\mathfrak{D}^{\mathrm{H}}_{ll}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r};\omega_n)+\varepsilon(\boldsymbol{r},\mathrm{i}\omega_n)\mathfrak{D}^{\mathrm{E}}_{ik}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r};\omega_n)+\mathfrak{D}^{\mathrm{H}}_{ik}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r};\omega_n)\right\}. \tag{30.11}$$

(30.11) 式还没有直接的物理意义, 因为其中 $\mathfrak{D}^{\mathrm{E}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 和 $\mathfrak{D}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 在 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$ 处趋向无穷大. 这是由于, 如果不引入相应的截断, 则短波电磁振动对 σ_{ik} 作出无穷大贡献. 然而短波振动与物体的不均匀性引起的效应无关, 因而只要在所讨论的点 ε 值一样, 这些振动对均匀物体和不均匀物体的贡献就是相同的.

我们关心的长波振动的贡献实际上与截断的性质无关, 它们可从 (30.11) 式作适当削减而得. 这就是, 式中的格林函数 $\mathfrak{D}^{\mathrm{E}}_{ik}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r})$(以及类似的 $\mathfrak{D}^{\mathrm{H}}_{ik}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r})$), 应理解为差的极限:

$$\lim_{\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{r}'}[\mathfrak{D}^{\mathrm{E}}_{ik}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')-\overline{\mathfrak{D}}^{\mathrm{E}}_{ik}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')],$$

其中 $\overline{\mathfrak{D}}^{\mathrm{E}}$ 是均匀无限介质的格林函数, 其介电常数值与非均匀物体中计算拉伸张量的那点的介电常数值相同. 为避免使公式过于繁杂, 我们以后将把 (30.11) 式写成原来形式, 但认为已作过上述的削减.

这条意见也涉及化学势的 (30.5) 式, 考虑了 (30.7) 式后它可以写成

$$\mu(\rho,T)=\mu_0(\rho,T)+\frac{T}{4\pi}{\sum_{n=0}^{\infty}}'\frac{\partial\varepsilon(\boldsymbol{r},\mathrm{i}\omega_n)}{\partial\rho}\mathfrak{D}^{\mathrm{E}}_{ii}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r};\omega_n). \tag{30.12}$$

注意在不均匀物体这一概念中, 我们还包含由几个均匀物体构成的系统. 这种情况下解方程式 (28.18) 时, $\mathfrak{D}_{ik}$ 分量应在物体之间的边界上满足一定条件. 方程式 (28.18) 的独立变量是 $\boldsymbol{r}$, 而 $\boldsymbol{r}'$ 起着参量作用. 因此这里讲的是对变量 $\boldsymbol{r}$ 的边界条件. 这些条件相当电场和磁场的切线分量连续. 既然 $\boldsymbol{r}$ 点对应张量 $\mathfrak{D}_{ik}$ 的一个下角标 (i), 则张量 $\mathfrak{D}^{\mathrm{E}}_{ik}$ 和 $\mathfrak{D}^{\mathrm{H}}_{ik}$ 对此角标的切线分量应当是连续的.

Dzyaloshinski 和 Pitaevskii[55] 得到的 (30.11) 和 (30.12) 式, 原则上解决了计算物体热力学量中范德瓦耳斯部分的问题. 问题归结为解格林函数 $\mathfrak{D}_{ik}$ 的方程式 (28.18).

§31 固体间的分子作用力

§31.1 固体间的相互作用力

我们运用以上发展的一般理论, 计算固体间的范德瓦耳斯作用力, 这些固体表面间的距离很小. 这时物体间的空隙可能充满某种液体. 以后将以脚标“1”, “2”代表两个固体的量, 而以脚标“3”代表空隙中的介质的量.

我们将假设空隙是无限和平行的, 然而必须注意, 实际上为了正确提出物体间的相互作用力问题, 至少物体之一应当具有有限的尺寸, 四面被介质 3 包围, 然后计算作用于其上的总力. 可是由于分子力随距离迅速减少, 事实上这个合力可以完全归结为作用在两个物体之间的狭缝里的力.

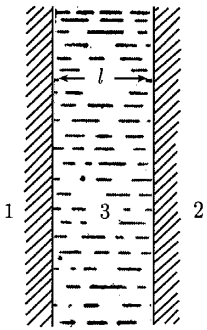


图 84

作用于物体 2 上的总力, 可以作为从介质 3 流入物体的总动量通量算出, 它等于通量密度对包含物体在内的任何表面的积分. 这时应注意, 介质 3 处于热力学平衡, 其条件之一是化学势恒定: $\mu =$ 常数, 其中 μ 由 (30.12) 式给出.

由于和场的长波涨落有关的介质密度修正很小, 可以认为介质 3 中密度 ρ 不变; 这时化学势 $\mu_0(\rho,T)$ 的变化 (由于 (30.4) 式) 和 $p_0(\rho,T)/\rho$ 的变化一致. 因此条件 $\mu =$ 常数可以改写成

$$p_0(\rho,T)+\frac{T}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}{}'\rho\frac{\partial\varepsilon_3(\mathrm{i}\omega_n)}{\partial\rho}\mathfrak{D}_{ll}^{\mathrm{E}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r};\omega_n)=\text{常数}. \tag{31.1}$$

这个条件使总拉伸张量 (30.11) 的一部分成为在液体内不变的均匀压力, 它对作用于物体之上的总力无任何贡献; 为了确定所求的力, 实际上只需将介质 3 中的拉伸张量写成

$$\begin{aligned}\sigma'_{ik}=-\frac{T}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}{}'\Bigg\{&\varepsilon_3(\mathrm{i}\omega_n)\left[\mathfrak{D}_{\mathrm{ik}}^{\mathrm{E}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r};\omega_n)-\frac{1}{2}\delta_{ik}\mathfrak{D}_{ll}^{\mathrm{E}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r};\omega_n)\right]\\&+\mathfrak{D}_{ik}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r};\omega_n)-\frac{1}{2}\delta_{ik}\mathfrak{D}_{ll}^{\mathrm{E}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r};\omega_n)\Bigg\}.\end{aligned} \tag{31.2}$$

令 x 轴垂直缝隙平面, 隙的宽度记为 l(因而平面 $x=0$ 和 $x=l$ 就是固体 1 和 2 的表面). 这时作用于物体 2 表面单位面积的力为

$$\begin{aligned}F(l)=&\sigma'_{xx}(l)=\frac{T}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}{}'\{\varepsilon_3(\mathrm{i}\omega_n)[\mathfrak{D}_{yy}^{\mathrm{E}}(l,l;\omega_n)\\&+\mathfrak{D}_{zz}^{\mathrm{E}}(l,l;\omega_n)-\mathfrak{D}_{xx}^{\mathrm{E}}(l,l;\omega_n)]+\mathfrak{D}_{yy}^{\mathrm{H}}(l,l;\omega_n)\\&+\mathfrak{D}_{zz}^{\mathrm{H}}(l,l;\omega_n)-\mathfrak{D}_{xx}^{\mathrm{H}}(l,l;\omega_n)\}.\end{aligned} \tag{31.3}$$

正力相当于吸引, 负力相当于排斥.

由于 y,z 方向的均匀性, 格林函数 $\mathfrak{D}_{ik}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\omega_n)$ 只和 $y-y'$ 与 $z-z'$ 有关. 对这些变量作傅里叶变换:

$$\mathfrak{D}_{ik}(x,x';\boldsymbol{q};\omega_n)=\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_y(y-y')-\mathrm{i}q_z(z-z')}\mathfrak{D}_{ik}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';\omega_n)\times \mathrm{d}(y-y')\mathrm{d}(z-z'),$$

并令 y 轴沿矢量 $\boldsymbol{q}$ 的方向. 格林函数的方程式 (28.18) 成为

$$\left(w^2-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right)\mathfrak{D}_{zz}(x,x')=-4\pi\delta(x-x'),$$

$$\left(\varepsilon\omega_n^2-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right)\mathfrak{D}_{yy}(x,x')+\mathrm{i}q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathfrak{D}_{xy}(x,x')=-4\pi\delta(x-x'),$$

$$w^2\mathfrak{D}_{xy}(x,x')+\mathrm{i}q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathfrak{D}_{yy}(x,x')=0,$$

$$w^2\mathfrak{D}_{xx}(x,x')+\mathrm{i}q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathfrak{D}_{xy}(x,x')=-4\pi\delta(x-x'),$$

$$\left(\varepsilon\omega_n^2-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right)\mathfrak{D}_{xy}(x,x')+iq\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathfrak{D}_{xx}(x,x')=0,$$

其中 $w=\sqrt{\varepsilon\omega_n^2+q^2}$, 而 x' 起着参量作用 (格林函数的分量 $\mathfrak{D}_{xz},\mathfrak{D}_{yz}$ 等于零, 因为它们的方程式是齐次的).

这个方程组的求解, 归结为解两个方程式:

$$\begin{aligned}\left(w^2-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right)\mathfrak{D}_{zz}(x,x')&=-4\pi\delta(x-x'),\\ \left(w^2-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right)\mathfrak{D}_{yy}(x,x')&=-\frac{4\pi w^2}{\varepsilon\omega_n^2}\delta(x-x'),\end{aligned}\tag{31.4}$$

然后 $\mathfrak{D}_{xy}$ 和 $\mathfrak{D}_{xx}$, 由下式定出:

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_{xy}&=-\frac{\mathrm{i}q}{w^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathfrak{D}_{yy},\\ \mathfrak{D}_{xx}&=-\frac{\mathrm{i}q}{w^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathfrak{D}_{xy}-\frac{4\pi}{w^2}\delta(x-x').\end{aligned}\tag{31.5}$$

电场和磁场切线分量连续的边界条件, 归结为要求 $\mathfrak{D}^{\mathrm{E}}_{yk},\mathfrak{D}^{\mathrm{H}}_{yk},\mathfrak{D}^{\mathrm{E}}_{zk},\mathfrak{D}^{\mathrm{H}}_{zk}$ 连续, 或者等价地要求 $\mathfrak{D}_{yk},\mathfrak{D}_{zk},\mathrm{rot}_{yl}\mathfrak{D}_{lk},\mathrm{rot}_{zl}\mathfrak{D}_{lk}$ 连续. 利用 (31.5) 式的第一个等式得出, 边界上应连续的量为

$$\mathfrak{D}_{zz},\frac{\mathrm{d}\mathfrak{D}_{zz}}{\mathrm{d}x},\mathfrak{D}_{yy},\frac{\varepsilon}{w^2}\frac{\mathrm{d}\mathfrak{D}_{yy}}{\mathrm{d}x}.\tag{31.6}$$

由于我们只关心隙内的格林函数, 可以只限于 $0 < x' < l$. 在区域 $3(0 < x < l)$ 中函数 $\mathfrak{D}_{yy}$ 和 $\mathfrak{D}_{zz}$ 由方程式 (31.4) 决定, 其中 $\varepsilon = \varepsilon_3, w = w_3 = \sqrt{\varepsilon_3\omega_n^2 + q^2}$. 在区域 $1(x < 0)$ 和 $2(x > l)$ 中, 它们满足同样的方程式, 但无右端 (因为这里 $x \neq x'$), 同时将 ε, w 相应换成 ε_1, w_1 和 ε_2, w_2.

§30 末尾提到的削减, 归结为从缝隙区域所有的函数 $\mathfrak{D}$ 中, 要减去它们在 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3, w_1 = w_2 = w_3$ 时的值. 结果 (31.5) 式第二项中可立即省去含 δ 函数之项, 因而隙内的 $\mathfrak{D}_{xy}, \mathfrak{D}_{xx}$ 由下式决定:

$$\mathfrak{D}_{xy} = -\frac{\mathrm{i}q}{w_3^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathfrak{D}_{yy}, \quad \mathfrak{D}_{xx} = -\frac{\mathrm{i}q}{w_3^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathfrak{D}_{xy}. \tag{31.7}$$

在解方程式前, 还要注意一点. 方程式 (31.4) 一般解的形状是 $f_1(x - x') + f_2(x + x')$. 利用方程式 (31.4), (31.7) 以及函数 $\mathfrak{D}^{\mathrm{E}}$ 和 $\mathfrak{D}^{\mathrm{H}}$ 的定义, 可以证明, 格林函数中与和 $x + x'$ 有关的部分, 对力的表达式 (31.3) 无任何贡献. 我们不在这里详细论证, 因为这个结果从物理考虑是显然如此的: 在形如 $f_2(x + x')$ 的解中令 $x = x'$, 我们将求得与坐标有关的隙内动量通量, 这和它的守恒律矛盾. 因此今后我们通常只引用和 $x - x'$ 有关的那部分格林函数 $\mathfrak{D}^+$.

现在求函数 $\mathfrak{D}_{zz}$. 它满足方程:

$$\left(w_3^2 - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right)\mathfrak{D}_{zz} = -4\pi\delta(x - x'), \quad 0 < x < l,$$

$$\left(w_1^2 - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right)\mathfrak{D}_{zz} = 0, \quad x < 0,$$

$$\left(w_2^2 - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right)\mathfrak{D}_{zz} = 0, \quad x > l.$$

由此得到

$$\mathfrak{D}_{zz} = A\mathrm{e}^{w_1 x}, \quad \text{当 } x < 0, \quad \mathfrak{D}_{zz} = B\mathrm{e}^{-w_2 x}, \quad x > l.$$

$$\mathfrak{D}_{zz} = C_1\mathrm{e}^{w_3 x} + C_2\mathrm{e}^{-w_3 x} - \frac{2\pi}{w_3}\mathrm{e}^{-w3}|x - x'|, \quad 0 < x < l.$$

从边界条件, 即 $\mathfrak{D}_{zz}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}\mathfrak{D}_{zz}}{\mathrm{d}x}$ 的连续性, 定出常数 A, B, C_1, C_2, 得到 $\mathfrak{D}_{zz}^+$ 为

$$\mathfrak{D}_{zz}^+ = \frac{4\pi}{w_3\Delta}\mathrm{ch}\ w_3(x - x') - \frac{2\pi}{w_3}\mathrm{e}^{-w_3|x-x'|}, \quad 0 < x < l,$$

其中

$$\Delta = 1 - \mathrm{e}^{2w_3 l}\frac{(w_1 + w_3)(w_2 + w_3)}{(w_1 - w_3)(w_2 - w_3)}. \tag{31.8}$$

减去 $\mathfrak{D}^+_{zz}$ 在 $w_1=w_2=w_3$ 的值 (这时 $\Delta\to 0$), 最终得

$$\mathfrak{D}^+_{zz}=\frac{4\pi}{w_3\Delta}\operatorname{ch} w_3(x-x'). \tag{31.9}$$

类似地解 $\mathfrak{D}_{yy}$ 的方程, 得到 (已作削减)

$$\mathfrak{D}^+_{yy}=\frac{4\pi w_3}{\omega_n^2\varepsilon_3\bar{\Delta}}\operatorname{ch} w_3(x-x'), \tag{31.10}$$

$$\bar{\Delta}=1-\mathrm{e}^{2w_3 l}\frac{(\varepsilon_1 w_3+\varepsilon_3 w_1)(\varepsilon_2 w_3+\varepsilon_3 w_2)}{(\varepsilon_1 w_3-\varepsilon_3 w_1)(\varepsilon_2 w_3-\varepsilon_3 w_2)}. \tag{31.11}$$

而利用 (31.7) 式得

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}^+_{xy}&=-\frac{4\pi iq}{\omega_n^2\varepsilon_3\bar{\Delta}}\operatorname{sh} w_3(x-x'),\\ \mathfrak{D}^+_{xx}&=-\frac{4\pi q^2}{\omega_n^2\varepsilon_3 w_3\bar{\Delta}}\operatorname{ch} w_3(x-x').\end{aligned} \tag{31.12}$$

算出 $\mathfrak{D}^{\mathrm{E}}_{ik}(x,x';q,\omega_n)$ 和 $\mathfrak{D}^{\mathrm{H}}_{ik}(x,x';q,\omega_n)$, 并将其代入 (31.3) 式得

$$F(l)=-\frac{T}{2\pi}{\sum_{n=0}^{\infty}}'\int_0^\infty q\mathrm{d}qw_3\left(\frac{1}{\Delta}+\frac{1}{\bar{\Delta}}\right).$$

引入新的积分变量 $q=\sqrt{\varepsilon_3}\omega_n\sqrt{p^2-1}$ 并回到普通单位制, 我们就得到最终表达式 (Dzyaloshinski, Lifshitz, Pitaevskii[57]): 两个物体以充满介质的隙相隔, 隙的宽度为 l, 作用在每个物体单位面积上的力为

$$\begin{aligned}F(l)=&\frac{T}{\pi c^3}{\sum_{n=0}^{\infty}}'\varepsilon_3^{3/2}\omega_n^3\int_1^\infty p^2\mathrm{d}p\left\{\left[\frac{(s_1+p)(s_2+p)}{(s_1-p)(s_2-p)}\exp\left(\frac{2p\omega_n}{c}l\sqrt{\varepsilon_3}\right)-1\right]^{-1}\right.\\ &\left.+\left[\frac{(s_1+p\varepsilon_1/\varepsilon_3)(s_2+p\varepsilon_2/\varepsilon_3)}{(s_1-p\varepsilon_1/\varepsilon_3)(s_2-p\varepsilon_2/\varepsilon_3)}\exp\left(\frac{2p\omega_n}{c}l\sqrt{\varepsilon_3}\right)-1\right]^{-1}\right\},\end{aligned} \tag{31.13}$$

其中

$$s_1=\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_3-1+p^2},\quad s_2=\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_3-1+p^2},\quad \omega_n=\frac{2\pi nT}{\hbar},$$

而 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$, 是虚频率 $\mathrm{i}\omega_n$ 的函数 $[\varepsilon=\varepsilon(\mathrm{i}\omega_n)]$. 对于 $\varepsilon_3=1$, 即物体以空隙相隔的情形, 此式是 Lifshitz[58] 首先用另一种办法得到的, 当时没有利用量子场论方法.

一般公式 (31.13) 相当复杂. 然而因为温度对物体相互作用力的影响, 通常是完全无关紧要的, 这个公式可以大为化简①.

①这里讲的温度的影响, 不包括简单地来自介电常数本身与温度关系的影响.

问题在于 (31.13) 式中含有指数, 因而和中起主要作用的项为 $\omega_n \sim \dfrac{c}{l}$ 或 $n \sim \dfrac{c\hbar}{lT}$. 因此当 $\dfrac{lT}{c\hbar} \ll 1$ 时, 大 n 值重要, 在 (31.13) 式中可从求和变到对 $\mathrm{d}n = \dfrac{\hbar}{2\pi T}\mathrm{d}\omega$ 积分. 这时公式中已不明显地含有温度, 我们得出以下结果 $[\varepsilon = \varepsilon(\mathrm{i}\omega)]$:

$$F(l) = \frac{\hbar}{2\pi^2 c^3}\int_0^\infty \mathrm{d}\omega \int_1^\infty \mathrm{d}p\, p^2\omega^3\varepsilon_3^{3/2}\left\{\left[\frac{(s_1+p)(s_2+p)}{(s_1-p)(s_2-p)}\exp\left(\frac{2p\omega}{c}l\sqrt{\varepsilon_3}\right)-1\right]^{-1}\right.$$
$$\left.+\left[\frac{(s_1+p\varepsilon_1/\varepsilon_3)(s_2+p\varepsilon_2/\varepsilon_3)}{(s_1-p\varepsilon_1/\varepsilon_3)(s_2-p\varepsilon_2/\varepsilon_3)}\exp\left(\frac{2p\omega}{c}l\sqrt{\varepsilon_3}\right)-1\right]^{-1}\right\}. \tag{31.14}$$

公式 (31.14) 还是很复杂. 在两个重要的极限情况下它还可以进一步化简.

先讨论"近"距离极端情况, 我们指的是比给定物体吸收光谱特征波长 λ_0 小得多的距离. 凝聚物体能涉及的温度, 无论如何比这里的 $\hbar\omega$(例如在可见光频段) 小得多, 因而不等式 $\dfrac{Tl}{\hbar c} \ll 1$ 早就成立.

由于被积表达式分母中有指数因子 $\exp(2p\omega l\sqrt{\varepsilon_3}/c)$, 对 p 积分时起基本作用的 p 值为 $\dfrac{p\omega l}{c} \sim 1$. 这时 $p \gg 1$, 因此确定主要项时可令 $s_1 \approx s_2 \approx p$. 在这个近似下, (31.14) 式中圆括弧内第一项等于零. 第二项在引入积分变量 $x = 2lp\omega\sqrt{\varepsilon_3}/c$ 后给出:

$$F(l) = \frac{\hbar}{16\pi^2 l^3}\int_0^\infty\int_0^\infty x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\omega\left[\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_3)(\varepsilon_2+\varepsilon_3)}{(\varepsilon_1-\varepsilon_3)(\varepsilon_2-\varepsilon_3)}\mathrm{e}^x-1\right]^{-1} \tag{31.15}$$

(对 x 的积分下限在同级近似中为零). 这种情况下力和距离的立方成反比; 从两个原子间范德瓦耳斯力的普通规律, 本来就应期待这种立方关系. 函数 $\varepsilon(\mathrm{i}\omega) - 1$ 随 ω 的增加而单调下降至零. 因此从某个 $\omega \sim \omega_0$ 开始, ω 的值不再对积分有显著贡献; l 小的条件表明, 应有 $l \ll \dfrac{c}{\omega_0}$.

现在回到相反的极限, $l\lambda_0$ 的"远"距离. 然而我们仍假定距离还不是太大, 不等式 $\dfrac{lT}{\hbar c} \ll 1$ 仍成立. 在一般公式 (31.14) 中引入新的积分变量 $x = 2pl\omega/c$; 而第二个积分变量与上面不同, 不取 ω 而取 p, 即

$$F(l) = \frac{\hbar c}{32\pi^2 l^4}\int_0^\infty \mathrm{d}x\int_1^\infty \mathrm{d}p\frac{x^3}{p^2}\varepsilon_3^{3/2}\left\{\left[\frac{(s_1+p)(s_2+p)}{(s_1-p)(s_2-p)}\mathrm{e}^{x\sqrt{\varepsilon_3}-1}\right]^{-1}\right.$$
$$\left.+\left[\frac{(s_1+p\varepsilon_1/\varepsilon_3)(s_2+p\varepsilon_2/\varepsilon_3)}{(s_1-p\varepsilon_1/\varepsilon_3)(s_2-p\varepsilon_2/\varepsilon_3)}\mathrm{e}^{x\sqrt{\varepsilon_3}-1}\right]^{-1}\right\},$$

$$\varepsilon=\varepsilon\left(\mathrm{i}\frac{xc}{2pl}\right).$$

由于分母中的 $\exp(x\sqrt{\varepsilon_3})$, 对 x 的积分中起作用的 x 值为 $x\approx\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_3}}\ll 1$, 而因为 $p\geqslant 1$, 则函数 ε 的变量在整个积分主要区域内很接近零. 与此相应, 可将 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$, 换成它们在 $\omega=0$ 时的值, 即静电介电常数值. 然后作代换 $x\to\dfrac{x}{\sqrt{\varepsilon_{30}}}$, 得以下最终结果:

$$\begin{aligned}F(l)=&\frac{\hbar c}{32\pi^2l^4\sqrt{\varepsilon_{30}}}\int_0^\infty \mathrm{d}x\int_1^\infty \mathrm{d}p\frac{x^3}{p^2}\left\{\left[\frac{(s_{10}+p)(s_{20}+p)}{(s_{10}-p)(s_{20}-p)}\mathrm{e}^x-1\right]^{-1}\right.\\&\left.+\left[\frac{(s_{10}+p\varepsilon_{10}/\varepsilon_{30})(s_{20}+p\varepsilon_{20}/\varepsilon_{30})}{(s_{10}-p\varepsilon_{10}/\varepsilon_{30})(s_{20}-p\varepsilon_{20}/\varepsilon_{30})}\mathrm{e}^x-1\right]^{-1}\right\},\qquad(31.16)\\ s_{10}=&\sqrt{\frac{\varepsilon_{10}}{\varepsilon_{30}}-1+p^2},\quad s_{20}=\sqrt{\frac{\varepsilon_{20}}{\varepsilon_{30}}-1+p^2},\end{aligned}$$

其中 $\varepsilon_{10},\varepsilon_{20},\varepsilon_{30}$, 是静电介电常数.

再看一下高温情形. 当 $\dfrac{lT}{\hbar c}\gg 1$, (31.13) 式的和中只须保留第一项. 然而这项中不能直接令 $n=0$, 因为会出现不定性 (因子 ω_n^3 等于零, 而积分发散). 先引入新积分变量 $x=2p\omega_n l\sqrt{\varepsilon_{30}/c}$ 以代替 p(因子 ω_n^3 因而消失), 就可以绕过这个困难. 然后令 $\omega_n=0$, 得

$$F(l)=\frac{T}{16\pi l^3}\int_0^\infty x^2\left[\frac{(\varepsilon_{10}+\varepsilon_{30})(\varepsilon_{20}+\varepsilon_{30})}{(\varepsilon_{10}-\varepsilon_{30})(\varepsilon_{20}-\varepsilon_{30})}\mathrm{e}^x-1\right]^{-1}\mathrm{d}x.\qquad(31.17)$$

因此在足够大的距离上相互作用力的下降减慢, 重新遵从 l^{-3} 律, 其系数依赖于温度和静电介电常数值.

§31.2 溶液中原子间的相互作用力

现在说明, 如何从宏观公式 (31.14) 过渡到真空中个别原子间的相互作用. 为此我们形式地假设, 两个物体都足够 "稀薄". 从宏观电动力学的角度看, 这就是说它们的介电常数接近 1, 即差 ε_1-1 和 ε_2-1 很小.

从"近"距离情况开始. 从 $\varepsilon_3=1$ 的 (31.15) 式以应有的准确度得

$$\begin{aligned}F(l)&=\frac{\hbar}{64\pi^2l^3}\int_0^\infty\int_0^\infty x^2\mathrm{e}^{-x}(\varepsilon_1-1)(\varepsilon_2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}\omega\\&=\frac{\hbar}{32\pi^2l^3}\int_0^\infty[\varepsilon_1(\mathrm{i}\omega)-1)(\varepsilon_2(\mathrm{i}\omega)-1]\mathrm{d}w.\end{aligned}\qquad(31.18)$$

根据 (28.19) 式将 $\varepsilon(\mathrm{i}\omega)$ 通过实轴上的 $\varepsilon''(\omega)$ 表示, 得到

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty [\varepsilon_1(\mathrm{i}\omega)-1][\varepsilon_2(\mathrm{i}\omega)-1]\mathrm{d}\omega\\&=\frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\omega_1\omega_2\varepsilon_1''(\omega_1)\varepsilon_2''(\omega_2)}{(\omega_1^2+\omega^2)(\omega_2^2+\omega^2)}\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2\mathrm{d}\omega\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\varepsilon_1''(\omega_1)\varepsilon_2''(\omega_2)}{\omega_1+\omega_2}\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2,\end{aligned}$$

由此得为

$$F(l)=\frac{\hbar}{16\pi^3 l_3}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\varepsilon_1''(\omega_1)\varepsilon_2''(\omega_2)}{\omega_1+\omega_2}\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2. \tag{31.19}$$

这个力相应于原子间的相互作用能①:

$$U(R)=-\frac{3\hbar}{8\pi^4R^6N_1N_2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\varepsilon_1''(\omega_1)\varepsilon_2''(\omega_2)}{\omega_1+\omega_2}\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2, \tag{31.20}$$

其中 R 是原子间的距离, N_1, N_2 为第一和第二物体单位体积内的原子数. 介电常数的虚部和光谱学中熟知的 "振子力" 谱密度 $f(\omega)$ 的关系为 (参看 [42], §62)

$$\omega\varepsilon''(\omega)=\frac{2\pi^2e^2}{m}Nf(\omega).$$

将它代入 (31.20) 式, 得到

$$U(R)=-\frac{3\hbar e^4}{2m^2R^6}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f_1(\omega_1)f_2(\omega_2)}{\omega_1+\omega_2}\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2. \tag{31.21}$$

这个表达式和著名的伦敦公式 (London[59]) 准确一致, 它是对原子间的偶极相互作用运用普通微扰论而得到的. 试以两个氢原子的相互作用为例. 利用状态 E_0 和 E_n 间跃迁振子力的熟知表达式

$$f_{0n}=\frac{2m}{\hbar^2}(E_n-E_0)|x_{0n}|^2$$

(x_{0n} 是原子内电子坐标的相应矩阵元), 并在 (31.19) 式中从对频率积分变到对原子能级求和, 得到氢原子的伦敦公式:

$$U(R)=-\frac{6e^4}{R^6}\sum_{n,m}\frac{|x_{0n}|^2|x_{0m}|^2}{E_n-E_0+E_m-E_0}.$$

①如果分子 1 和 2 的相互作用位能是 $U=-a/R^6$, 则两个以隙 l 相隔的半空间中所有分子成对相互作用的总能量是

$$U=-\frac{a\pi N_1N_2}{12l^2},$$

而力 F 为

$$F=-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}l}=\frac{a\pi N_1N_2}{6l^3}.$$

(31.19) 和 (31.20) 式的对应关系就是如此.

在“远”距离上两个“稀薄”物体的吸引力公式为

$$F(l)=\frac{\hbar c}{32\pi^2 l^4}(\varepsilon_{10}-1)(\varepsilon_{20}-1)\int_0^\infty x^3\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\int_1^\infty\frac{1-2p^2+2p^4}{8p^6}\mathrm{d}p$$
$$=\frac{\hbar c}{l^4}\frac{23}{640\pi^2}(\varepsilon_{10}-1)(\varepsilon_{20}-1). \tag{31.22}$$

这个力相应于两个原子间的相互作用能

$$U(R)=-\frac{23\hbar c}{4\pi R^7}\alpha_1\alpha_2, \tag{31.23}$$

其中 α_1,α_2 是两个原子的静极化率 ($\varepsilon_0=1-4\pi Na$). 公式 (31.23) 和 Casimir 与 Polder 的量子力学计算结果 [60] 一致, 他们计算了相当远距离上两个原子的吸引, 这时推迟效应已经变得重要了.

现在讨论两个处于液体中的原子的相互作用 (Pitaevkii[61]). 首先, 设想两种不同原子在同一溶剂中的稀溶液, 其浓度 (每立方厘米中的粒子数) 各为 N_1 和 N_2. 其次, 假定缝隙被纯溶剂充满. 被溶解原子的浓度很小时, 溶液的介电常数 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 和纯溶剂的介电常数 $\varepsilon_3=\varepsilon$ 相去不远. 准确到浓度的一级项, 有

$$\varepsilon_1=\varepsilon+N_1\left(\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial N_1}\right)_{N_1=0},$$

$$\varepsilon_2=\varepsilon+N_2\left(\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial N_2}\right)_{N_2=0}.$$

在“近”距离力的 (31.15) 式中保留同级小量, 得到 [和 (31.18) 式的推导相似]

$$F(l)=\frac{\hbar}{32\pi^2 l^3}N_1N_2\int_0^\infty\left(\frac{\partial\varepsilon_1(\mathrm{i}\omega)}{\partial N_1}\right)_{N_1=0}\left(\frac{\partial\varepsilon_2(\mathrm{i}\omega)}{\partial N_2}\right)_{N_2=0}\frac{\mathrm{d}\omega}{\varepsilon^2(\mathrm{i}\omega)}.$$

这个力相当于溶质原子间的相互作用能:

$$U(R)=-\frac{3\hbar}{16\pi^3R^6}\int_0^\infty\left(\frac{\partial\varepsilon_1(\mathrm{i}\omega)}{\partial N_1}\right)_{N_1=0}\left(\frac{\partial\varepsilon_2(\mathrm{i}\omega)}{\partial N_2}\right)_{N_2=0}\frac{\mathrm{d}\omega}{\varepsilon^2(\mathrm{i}\omega)}. \tag{31.24}$$

类似地为“远”距离的能量求得

$$U(R)=-\frac{23\hbar c}{64\pi^3\varepsilon_0^{5/2}R^7}\left(\frac{\partial\varepsilon_{10}}{\partial N_1}\right)_{N_1=0}\left(\frac{\partial\varepsilon_{20}}{\partial N_2}\right)_{N_2=0}. \tag{31.25}$$

我们看到, 当溶质分子和溶剂的作用强时, 它们之间的相互作用力已不由极化率决定.

§31.3　固体表面上的薄膜

以上发展的范德瓦耳斯力一般理论可用以计算固体表面上液体薄膜的热力学量, 自然应设膜的厚度 l 远大于原子间距离.

以前得出了将单位质量液体的化学势通过其中长波电磁辐射格林函数表达的 (30.12) 式. 可是此式不方便, 其原因有二: 第一, 它含有整个频率范围内的 $\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}$, 这是实验上完全未研究过的量; 第二, 它将化学势作为密度 ρ 的函数给出, 而通常需知道 μ 和压力 p 的关系.

讨论固体 1 表面上的膜 3, 它和自己的蒸汽 2 处于平衡 (图 85). 我们将在电磁性质上, 把蒸汽当成真空, 并在各处令其介电常数 $\varepsilon_2 = 1$.

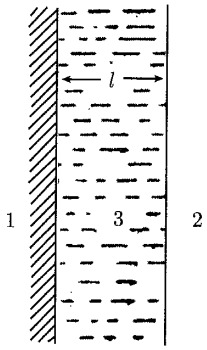


图 85

根据力学平衡条件, 应力张量的法线分量 σ_{xx} 应在膜表面上连续①. 由此得出方程:

$$p = p_0(\rho, T) - \bar{\sigma}_{xx},$$

其中 p 是蒸汽压, $p_0(\rho, T)$ 是密度和温度一定时大量液体的压力, 而 $\bar{\sigma}_{xx}$ 表示膜的应力张量表达式 (30.11) 中除第一项外其他各项之和. 对 ρ 解此方程, 求出密度作为压力的函数.

$$\rho = \rho_0(p + \bar{\sigma}_{xx}, T).$$

将此式代入化学势的 (30.12) 式, 得到

$$\mu = \mu_0(p + \bar{\sigma}_{xx}, T) + \frac{T}{4\pi}{\sum_{n=0}^{\infty}}' \frac{\partial\varepsilon(\mathrm{i}\omega_n)}{\partial\rho}\mathfrak{D}_{ii}^{\mathrm{E}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}; \omega_n),$$

其中 $\mu_0(p, T)$ 是大量液体的化学势. 将 μ_0 按小量 $\bar{\sigma}_{xx}$ 的幂级展开, 并注意热力学

①$\bar{\sigma}_{xx}$ 也是 ρ 的函数, 但由于它是对压力的小修正项, 我们可令其 $\rho = \rho_0(p, T)$.

关系式 $\left(\dfrac{\partial\mu}{\partial p}\right)_T = \dfrac{1}{\rho}$, 上式变成

$$\mu(p,T) = \mu_0(p,T) + \frac{1}{\rho}\bar{\sigma}_{xx} + \frac{T}{4\pi}{\sum_{n=0}^{\infty}}' \frac{\partial\varepsilon(\mathrm{i}\omega_n)}{\partial\rho}\mathfrak{D}_{ii}^{\mathrm{E}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r};\omega_n).$$

最后将 $\bar{\sigma}_{xx}$ 的 (30.11) 式代入, 含有 $\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}$ 的项消去而剩下:

$$\mu(p,T) = \mu_0(p,T) + \frac{1}{\rho}\sigma'_{xx}.$$

这里 σ'_{xx} 是应力张量 (31.2) 的分量. 此量不沿膜的厚度变化 (由于动量通量恒定), 根据 (31.3) 式, 正是它决定力 $F(l)$.

为液体膜单位体积化学势的"范德瓦耳斯部分"引入符号 ζ:

$$\mu = \mu_0 + \frac{\zeta}{\rho}. \tag{31.26}$$

根据以上所述:

$$\zeta = \sigma'_{xx} = F(l). \tag{31.27}$$

l 趋向无限大, 即对大量液体, ζ 等于零.

因此, 为了确定我们关心的量 ζ, 没有必要重新作任何计算. 它由前面求得的 $F(l)$ 的式子决定 (一般公式 (31.13) 以及后面的各种极限公式), 只须在式中令 $\varepsilon_2 = 1$.

对 §30, §31 中涉及的问题感兴趣的读者, 可参阅 Lifshitz[58] 以及 Dzyaloshinski, Lifshitz 和 Pitaevskii[57,62] 的详细论文.

第7章　超导理论

§32　概论. 模型的选择

§32.1　超导现象

超导是量子统计中最重要而艰难的问题之一. 大家知道, 许多金属在温度足够低时经过相变而转变到新的“超导”态. 这种状态中金属的热力学和电磁性质, 与它在正常状态中的性质极为不同. 实验上这个转变最直观的表现是, 冷却至临界温度时金属突然失去电阻. 换言之, 电流在超导体中流过时, 不发生能量损耗.

实验研究表明, 超导体在磁场中的性质和正常金属比较简单的性质有很大差别. 磁场不能穿透到大块超导体内部 (Meissner-Ochsenfeld 效应). 从处于恒磁场中的超导体表面算起, 磁场不为零的有效深度 (所谓穿透深度) 很小, 约为 $10^{-5} \sim 10^{-6}$cm. 从正常态到超导态的热力学转变是二级相变, 其特点是金属的比热在转变温度有跃变.

最近几年对此现象的理解有相当进展. 超导理论的发展要求广泛利用量子场论方法. 以后几节将叙述这些方法, 本节中我们先比较详细地讨论一下问题的物理方面.

很久以来就已经清楚, 超导现象和超流现象有相近之处. 这首先是因为, 为了在超导体中保持电流, 不需外电势差, 即不需外源作功. 金属中的载流子是电子, 上述性质乃是电子液体的超流.

第 1 章中讨论氦的超流时, 我们详细地研究了为产生超流所必须的元激发能谱性质. 然而应当立即指出, 动量很小时超导体能谱不能具有和液体氦相应的形状. 实际上液体氦能谱的初始段是声子支. 我们知道, 声的传播和密度的长波振动相联系. 然而对于金属中的电子液体, 密度的改变要消耗相当大的能量, 这是因为电子和晶格间以及电子本身之间的库仑力妨碍这种改变. 电子液体密度的改变要破坏电中性条件, 因此相应的长波振动谱和等离子体中振动相似, 从某个不为零的频率开始. 事实上在金属中这个频率很高 (~ 1 eV$\approx 10^4$ K). 这些论点当然不涉及波矢约为原子间距离倒数的短波振动. 我们已经知道, 正是这些电子激发在正常金属中起着基本作用. 根据第 1 章的结果, 为了存在超流, 只须要求激发态和基态之间有一能隙, 即能谱应有如图 86 所示的形状. 要注意, 除了这里引述的论点之外, 低温下电子比热的实验数据给出了比热和温度的关系 $e^{-\Delta/T}$, 这也指明超导体的能谱有上

述形状.

我们不在此叙述若干唯象理论, 它们常常能很好地描述实验材料. 我们仅指出, 这些理论不能阐明现象的微观机制.

对理解金属中各种作用对发生超导的相对重要性的关键, 是 1950 年发现的同位素效应 [63,64]. 已经证实, 临界温度 T_c(从正常态到超导态的转变温度) 和同位素质量的关系是 $T_c \sim (M)^{-1/2}$. 弗留里希 [65] 也曾独立地提出假定, 认为引起超导的基本相互作用应当是电声子作用. 这个相互作用和离子质量密切相关.

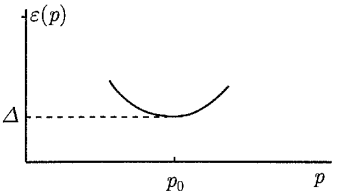


图 86

§32.2 模型. 相互作用哈密顿量

我们知道, 第 2 章里已讲过的相互作用哈密顿量的形状是

$$H_{\text{int}} = g \int \psi_\alpha^+(\boldsymbol{r})\psi_\alpha(\boldsymbol{r})\varphi(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}. \tag{32.1}$$

计算两个电子交换一个声子的相互散射矩阵元. 这个过程的图解如图 87 所示. 虚线代表交换一个声子, 它在矩阵元中对应声子的 D 函数:

$$g^2 D(\varepsilon_3 - \varepsilon_1; \boldsymbol{p}_3 - \boldsymbol{p}_1) = g^2 \frac{u^2(\boldsymbol{p}_3 - \boldsymbol{p}_1)^2}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 - u^2(\boldsymbol{p}_3 - \boldsymbol{p}_1)^2},$$

其中 $\varepsilon_3 - \varepsilon_1, \boldsymbol{p}_3 - \boldsymbol{p}_1$ 分别为碰撞电子之一的能量和动量变化. 在费米面附近碰撞时的动量变化一般地为 p_0 的数量级 (即 $u|\boldsymbol{p}_3 - \boldsymbol{p}_1|$ 约为德拜频率 ω_{D}, 因为 $p_0 \sim a^{-1}$), 而电子的能量变化可能不大. 在这个区域内, 即当 $|\varepsilon_3 - \varepsilon_1| \ll \omega_{\text{D}}$ 时, 上式所决定的有效相互作用简单地归结为常数 $-g^2$, 即具有相吸性质.

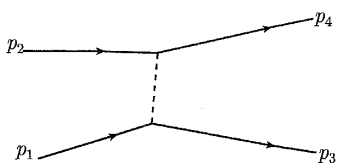


图 87

库伯 [66] 在 1956 年证明 (Cooper[66]), 费米面附近电子间因电声子作用而致的有效吸引, 无论多弱都必定导致电子束缚对的形成. 既然成对在能量上有利, 加入相互作用后系统基态就会发生改组. 为了使这种系统激发, 必须消耗一定的能量, 它等于电子对的结合能, 并在能谱中起能隙的作用. 以这个思想为基础, 已证明有可能建立完整的超导理论, 来解释几十年紧张研究所积累的大量事实.

我们选定的理论表述和最初的形式 (Bardeen, Cooper, Schrieffer[67] 和 Bogoliubov[68,36])①不同, 因为我们觉得量子场论方法在这个问题中有相当大的优越性. 除了简单严整之外, 以下叙述的方法还给出了许多重要的新结果.

在继续叙述之前应指出, 电声子相互作用并不是金属中电子间的唯一相互作用. 电子之间作用着库仑排斥力. 因此它们之间的有效相互作用是吸引还是排斥, 取决于电声子吸引和电子库仑排斥的数值比较. 在一般情况下对具体金属考虑两种相互作用, 是异常复杂的问题. 加之实际超导体是各向异性的. 因此应声明, 现代超导理论中实质上讨论的是具有平方色散律电子的简单模型, 而且事先设电子相互作用在费米面附近的狭窄能量范围中是吸引. 这个能量范围显然约为所辐射声子的最大能量, 即 $\sim \omega_{\mathrm{D}}$, ω_{D} 是德拜频率. 除此之外, 我们以后为简化起见假定相互作用在这个范围内是恒定的, 并且足够弱.

直到现在为止, 还没有建立基于费米液体概念, 同时又考虑了各向导性的超导理论. 有意义的是, 目前模型虽很粗糙, 但理论不仅定性地解释了现象, 而且还与现有的实验数据有相当好的定量符合.

写出二次量子化表象中电子间相互作用和的有效哈密顿量如下:

$$H_{\mathrm{int}} = \frac{\lambda}{2(2\pi)^3} \sum_{\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{p}_3+\boldsymbol{p}_4} a^+_{\boldsymbol{p}_1\sigma_1} a^+_{\boldsymbol{p}_2\sigma_2} a_{\boldsymbol{p}_3\sigma_2} a_{\boldsymbol{p}_4\sigma_1} \theta_{\boldsymbol{p}_1}\theta_{\boldsymbol{p}_2}\theta_{\boldsymbol{p}_3}\theta_{\boldsymbol{p}_4}, \tag{32.2}$$

其中 $\lambda < 0$, 而 $\theta_{\boldsymbol{p}}$ 是截断因子:

$$\theta_{\boldsymbol{p}} = \begin{cases} 1, & |\varepsilon(\boldsymbol{p}) - \varepsilon_{\mathrm{F}}| < \omega_{\mathrm{D}}, \\ 0, & |\varepsilon(\boldsymbol{p}) - \varepsilon_{\mathrm{F}}| > \omega_{\mathrm{D}}. \end{cases}$$

这些因子的存在表明, 只有能量在费米面附近宽度为 $2\omega_{\mathrm{D}}(\omega_{\mathrm{D}} \ll \varepsilon_{\mathrm{F}})$ 的窄层内的电子才参与相互作用. 以后我们常将这个哈密顿量通过在坐标表象中的算符 $\psi_\alpha(\boldsymbol{r})$ 和 $\psi^+_\beta(\boldsymbol{r})$ 写出:

$$H_{\mathrm{int}} = \frac{\lambda}{2} \int \psi^+_\alpha(\boldsymbol{r})\psi^+_\beta(\boldsymbol{r})\psi_\beta(\boldsymbol{r})\psi_\alpha(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \tag{32.3}$$

这时当然还须注意到, (32.3) 式中四个 ψ 算符的变量实际上略有差别. 这是因为哈密顿量的 (32.2) 式中有因子 $\theta_{\boldsymbol{p}}$ 存在. (32.3) 式更确切的写法是

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{int}} =& \frac{\lambda}{2} \int \theta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\xi}_1)\theta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\xi}_2)\theta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\xi}_3)\theta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\xi}_4) \\ & \times \psi^+_\alpha(\boldsymbol{\xi}_1)\psi^+_\beta(\boldsymbol{\xi}_2)\psi_\beta(\boldsymbol{\xi}_3)\psi_\alpha(\boldsymbol{\xi}_4)\mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_1\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_2\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_3\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_4, \end{aligned} \tag{32.4}$$

其中 $\theta(\boldsymbol{x})$ 是 $\theta_{\boldsymbol{p}}$ 的傅里叶反演:

①参看 [69].

$$\theta(\boldsymbol{x})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}\theta_{\boldsymbol{p}}\mathrm{d}\boldsymbol{p}. \tag{32.5}$$

转入傅里叶表象后, 容易证明 $\theta(\boldsymbol{x})$ 具有 δ 函数的性质:

$$\int \theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x}),$$

只要函数 $f(\boldsymbol{x})$ 具有仅在动量 $\boldsymbol{p}$ 在费米面附近时才不为零的傅里叶分量 $f_{\boldsymbol{p}}$. 在以下所述的理论中我们正好遇见这样的函数. (32.3) 式也应在此意义下理解.

§33 库伯现象

本节讨论库伯现象, 即无相互作用费米粒子系统基态对粒子间任意弱吸引的不稳定性.

§33.1 顶角部分的方程

讨论具有相互作用 (32.3) 的系统的性质. 先研究绝对零度时的顶角部分 $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1,p_2;p_3,p_4)$. 写出此量的微扰论级数. 第一级近似下顶角部分是

$$\lambda(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}-\delta_{\alpha\delta}\delta_{\gamma\beta}). \tag{33.1}$$

对应微扰论级数前几项的图形示于图 88 中. 我们已经知道, 图 88(a) 和图 88(c) 与顶角部分中“零声”型奇异性有关, 也就是说, 这些奇异性在动量传递小时重要. 与图 88(b) 相联系的, 是 $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1,p_2;p_3,p_4)$ 中总四维动量 $q=p_1+p_2$ 很小时的奇异性. 我们较详细地研究后一情形. 利用所讨论模型的具体性质, 我们可以得出比一般结果 (20.8) 式更细致有关的顶角部分的知识.

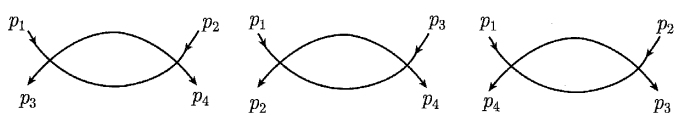


图 88

图 88(b) 的矩阵元等于

$$\lambda^2\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}-\delta_{\alpha\delta}\delta_{\gamma\beta})\int \mathrm{d}^4kG(k)G(q-k),$$

其中 $q=\{\omega_0,\boldsymbol{q}\}=\{\omega_1+\omega_2,\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2\}$. 代入格林函数的表达式并对频率积分得

$$\frac{\lambda^2}{(2\pi)^3}(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}-\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})\int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\omega_0-\varepsilon_0(\boldsymbol{k})-\varepsilon_0(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})+2\mu+i\delta},$$

$$\varepsilon_0(\boldsymbol{k})>\mu,\quad \varepsilon_0(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})>\mu;$$
$$-\frac{\lambda^2}{(2\pi)^3}(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}-\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\omega_0-\varepsilon_0(\boldsymbol{k})-\varepsilon_0(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})+2\mu-\mathrm{i}\delta},$$
$$\varepsilon_0(\boldsymbol{k})<\mu,\varepsilon_0(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})<\mu. \tag{33.2}$$

在我们所讨论的模型中, 只有费米面 $\varepsilon_{\mathrm{F}}\simeq\mu$ 附近很窄的能量范围内的电子才有相互作用. 因此 (33.2) 式中对 $\boldsymbol{k}$ 的积分受条件 $|\varepsilon_0(\boldsymbol{k})-\mu|<\omega_0,|\varepsilon_0(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})-\mu|<\omega_{\mathrm{D}}$ 限制. 设 $\omega_0|\boldsymbol{q}|v\ll\omega_{\mathrm{D}}$, 和通常一样转到对 $\xi=v(|\boldsymbol{k}|-p_0)$ 积分. 同时在积分中忽略上限数量级约为 $\omega_0,|\boldsymbol{q}|v$ 的变化, 将 (33.2) 式改写成

$$-\frac{\lambda^2mp_0}{2\pi^2}(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}-\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})\int_0^{\omega_{\mathrm{D}}}\mathrm{d}\xi\int_0^1\left[\frac{1}{\omega_0+2\xi+v|\boldsymbol{q}|x-\mathrm{i}\delta}+\frac{1}{2\xi+v|\boldsymbol{q}|x-\omega_0-\mathrm{i}\delta}\right]\mathrm{d}x$$

(式中 $x=\cos\theta,\theta$ 是矢量 $\boldsymbol{q}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 的夹角). 剩下的积分极为简易. 选择对数支的条件是, $\omega_0>0$ 时方括弧内第一项的积分为正, 而 $\omega_0<0$ 时第二项的积分为正. 我们得到

$$\begin{aligned}&-\frac{\lambda^2mp_0}{2\pi^2}(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}-\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})\left[1+\frac{1}{2}\ln\frac{2\omega_D-\mathrm{i}\delta}{\omega_0+v|\boldsymbol{q}|-\mathrm{i}\delta}\right.\\&+\frac{1}{2}\ln\frac{2\omega_{\mathrm{D}}-\mathrm{i}\delta}{-\omega_0+v|\boldsymbol{q}|-\mathrm{i}\delta}\\&\left.+\frac{\omega_0}{2v|\boldsymbol{q}|}\left(\ln\frac{\omega_0-\mathrm{i}\delta}{\omega_0+v|\boldsymbol{q}|-\mathrm{i}\delta}+\ln\frac{v|\boldsymbol{q}|-\omega_0-\mathrm{i}\delta}{-\omega_0-\mathrm{i}\delta}\right)\right].\end{aligned} \tag{33.3}$$

在 ω_0 和 $|\boldsymbol{q}|v$ 很小时, 此式主要项为

$$-\lambda^2\frac{mp_0}{2\pi^2}(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}-\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})\ln\frac{\omega_{\mathrm{D}}}{\max\{\omega_0,v|\boldsymbol{q}|\}}.$$

因此当 $\omega_{\mathrm{D}}\gg\omega_0,v|\boldsymbol{q}|$ 时, 相互作用常数 λ 虽很小, 但可能被大的对数值所补偿, 结果这项和微扰论第一项 (33.1) 式成为同数量级. 可见, 为求得 ω_0 和 $v|\boldsymbol{q}|$ 小值附近, 即

$$\lambda\ln\frac{\omega_{\mathrm{D}}}{\max\{\omega_0,v|\boldsymbol{q}|\}}\sim1$$

时的顶角部分, 必须和第 4 章一样, 对微扰论级数主要项求和.

为此目的我们写出顶角部分的方程, 其中 $q=p_1+p_2$ 很小时引起 $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1,p_2;p_3,p_4)$ 奇异性的诸项, 特别分出:

$$\begin{aligned}&\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1,p_2;p_3,p_4)=\widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1,p_2;p_3,p_4)\\&+\frac{\mathrm{i}}{2(2\pi)^4}\int\widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta,\xi\eta}(p_1,p_2;k,q-k)G(k)G(q-k)\end{aligned}$$

$$\times \Gamma_{\xi\eta,\gamma\delta}(k, q-k; p_3, p_4)\mathrm{d}^4k. \tag{33.4}$$

方程中 $\widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1, p_2; p_3, p_4)$ 是在我们关心的意义下不可约的图形矩阵元之和, 即这些图形不能分割成仅以两条电子线相联的两部分, 其中一部分只含进去的外线, 另一部分只含出来的外线. 积分方程 (33.4) 的核包含来自两个格林函数积分的大对数项. 由于相互作用常数很小, 只须取前几个微扰项作为 $\tilde{\Gamma}$ 就够了, 因为 $\tilde{\Gamma}$ 的相应表达式不包括数值很大的量. 然而我们的目的不仅要算出方程式 (33.4) 核中数量级为 $\lambda\ln\dfrac{\omega_\mathrm{D}}{\omega_0} \sim 1$ 的项, 还要试图求得准确到 λ 诸项的表达式. 因此初看之下会觉得, 为此须知道准确到微扰论中 λ^2 项的 $\tilde{\Gamma}$ 值, 因为由 (33.4) 式中积分得出的对数可能补偿一个 λ. 考虑 $\tilde{\Gamma}$ 的微扰论二级近似项. 相应图形示于图 89 中. 试估计图 89(a) 的矩阵元值. 省去数字系数, 得到

$$\lambda^2 \int G(l)G(l-k+p_1)\mathrm{d}^4l.$$

代入格林函数的表达式, 对频率积分, 有

$$\begin{aligned}
&\lambda^2 \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\omega_k - \omega_1 + \varepsilon_0(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}_1) - \varepsilon_0(\boldsymbol{l})},\\
&\varepsilon_0(\boldsymbol{l}) > \mu, \quad \varepsilon_0(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}_1) < \mu,\\
&-\lambda^2 \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Omega + \varepsilon_0(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}_1) - \varepsilon_0(\boldsymbol{l})},\\
&\varepsilon_0(\boldsymbol{l}) < \mu, \quad \varepsilon_0(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}_1) > \mu.
\end{aligned} \tag{33.5}$$

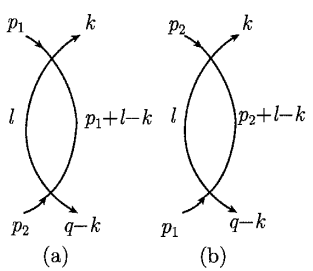


图 89

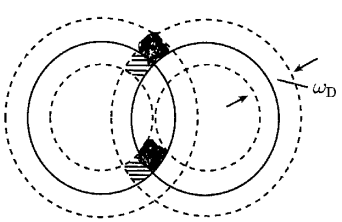


图 90

事实上对 $\boldsymbol{l}$ 的积分区域比上面条件所决定的窄得多. 这是因为根据模型的性质, 只有动量在费米动量附近的电子 $|v(|\boldsymbol{p}| - p_0)| < \omega_\mathrm{D}$ 才能参与相互作用. 实际积分区域在图 90 中标出, (33.5) 式第一条件以横线条示出, 第二条件以黑色表示之 ($|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}_1|) < 2p_0$: 如果 $|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}_1| > 2p_0$, 积分区域为零). 两种情形下被积表达式分母中的差 $\varepsilon_0(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}_1) - \varepsilon_0(\boldsymbol{l})$ 的值, 就数量级说等于 ω_D, 而积分区域的体积是

$\sim \dfrac{m^2\omega_{\mathrm{D}}}{p_0}$. 因此图 89 矩阵元的数量级是 $\lambda^2\dfrac{m^2\omega_{\mathrm{D}}^2}{p_0}$, 即与它们简单顶点的比值约为 $(\lambda m p_0)\dfrac{\omega_{\mathrm{D}}}{\varepsilon_{\mathrm{F}}}$ (从 (33.3) 式看出, 所研究的模型中的无量纲的小参量是 $\lambda m p_0 \ll 1$). 既然根据物理条件 $\omega_{\mathrm{D}} \ll \varepsilon_{\mathrm{F}}$, 则在所讨论的区域内这个附加小量不能被大对数值补偿. 因此方程式 (33.4) 中的 $\tilde{\Gamma}$ 可只限于用微扰论一级近似的普通顶点 (33.1) 式.

这样得到的顶角部分方程不难求解. 为此应注意, 从 (33.3) 式容易看出, $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1,p_2;p_3,p_4)$ 只依赖于变量之和 $q=p_1+p_2$. 因此方程式 (33.4) 右端的积分, 还原成我们已算出的微扰论二级矩阵元的积分 (33.3) 式. 结果得到 ($\omega_0 > v|\boldsymbol{q}|$)

$$\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1,p_2;p_3,p_4) \equiv \Gamma(q)(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}-\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}),$$

$$\Gamma(q) = \lambda\left\{1+\left(\frac{\lambda m p_0}{2\pi^2}\right)\left[\ln e\left|\frac{2\omega_{\mathrm{D}}}{\omega_0}\right| + \frac{\pi \mathrm{i}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - v^2|\boldsymbol{q}|^2}\right| + \frac{\omega_0}{2v|\boldsymbol{q}|}\ln\left|\frac{\omega_0 - v|\boldsymbol{q}|}{\omega_0+v|\boldsymbol{q}|}\right|\right]\right\}^{-1}. \tag{33.6}$$

§33.2　顶角部分的性质

为了简单起见, 先在 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0}$ 时讨论 (33.6) 式. 对于 ω_0 的正实数值得

$$\Gamma(\omega_0) = \frac{\lambda}{1+\left(\dfrac{\lambda m p_0}{2\pi^2}\right)\left[\ln\left|\dfrac{2\omega_{\mathrm{D}}}{\omega_0}\right| + \dfrac{\pi \mathrm{i}}{2}\right]}. \tag{33.7}$$

现在将 $\Gamma(\omega_0)$ 看成复变量 ω_0 的函数, 将它定义为 (33.7) 式向上半平面 $\operatorname{Im}\omega_0 > 0$ 的解析延拓. 这时得到

$$\Gamma(\omega_0) = \frac{\lambda}{1+\left(\dfrac{\lambda m p_0}{2\pi^2}\right)\left[\ln\left|\dfrac{2\omega_{\mathrm{D}}}{\omega_0}\right| + \dfrac{\pi \mathrm{i}}{2} - \mathrm{i}\varphi\right]}.$$

因此, 如果相互作用具有吸引性质 ($\lambda < 0$), 则 $\Gamma(\omega_0)$ 在 $\omega_0 = \mathrm{i}\varpi$ 处有极点, 其中

$$\varpi = 2\omega_{\mathrm{D}} \mathrm{e}^{\left(-\frac{2\pi^2}{|\lambda| m p_0}\right)}. \tag{33.8}$$

极点邻域中 $\Gamma(\omega_0)$ 的形状是

$$\Gamma(\omega_0) = -\frac{2\pi^2}{m p_0}\frac{\mathrm{i}\varpi}{\omega_0 - \mathrm{i}\varpi}.$$

这个结果应和前面提及的库伯关于两个电子形成束缚对的思想联系起来. 顶角部分 $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1,p_2;p_3,p_4)$ 由 (10.17) 式通过双粒子格林函数的傅里叶分量确定.

因此 Γ 的极点, 导致双粒子格林函数的同样极点. 形成束缚对, 表明相互作用使我们由之出发的费米气体基态不稳定. 在粒子间加上无论多弱的互相吸引力, 就使整个系统改组. 不稳定性表现为, 顶角函数在变量 $\omega_0=\omega_1+\omega_2$ 的上半平面出现极点. 这个纯虚极点决定不稳定基态的弛豫时间. 这个时间由于测不准原理而对应实际束缚对的结合能. 在改组过的基态中, 束缚对有如玻色粒子, 也能和普通玻色粒子相似地以任意数目集聚在最低的能级上. 在超导态里它们处于总动量为零的能级上, 这和普通玻色粒子的"玻色凝聚"完全相似.

$v|\boldsymbol{q}|\neq 0$ 时, (33.6) 式可写成以下形式 ($\omega_0>v|\boldsymbol{q}|$):

$$\Gamma(\boldsymbol{q},\omega_0)=\lambda\left\{1+\left(\frac{\lambda mp_0}{2\pi^2}\right)\left[\ln e\left|\frac{2\omega_{\mathrm{D}}}{\omega_0}\right|+\frac{\pi \mathrm{i}}{2}-\mathrm{i}\varphi\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{v^2|\boldsymbol{q}|^2}{\omega_0^2}\right)+\frac{\omega_0}{2v|\boldsymbol{q}|}\ln\left(\frac{\omega_0-v|\boldsymbol{q}|}{\omega_0+v|\boldsymbol{q}|}\right)\right]\right\}^{-1}.$$

延拓到半平面 $\mathrm{Im}\ \omega_0>0$, 并利用 ϖ 的定义 (33.8) 得

$$\Gamma(\boldsymbol{q},\omega_0)=-\frac{2\pi^2}{mp_0}\left\{\ln\frac{\omega_0}{\mathrm{i}\varpi}-1+\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{v^2|\boldsymbol{q}|^2}{\omega_0^2}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{\omega_0}{2v|\boldsymbol{q}|}\mathrm{In}\left(\frac{\omega_0-v|\boldsymbol{q}|}{\omega_0+v|\boldsymbol{q}|}\right)\right\}^{-1}. \tag{33.9}$$

当 $v|\boldsymbol{q}|\ll\varpi$ 时

$$\Gamma(\boldsymbol{q},\omega_0)=-\frac{2\pi^2}{mp_0}\frac{\mathrm{i}\varpi}{\omega_0-\mathrm{i}\varpi+\mathrm{i}(v^2|\boldsymbol{q}|^2/6\varpi)}.$$

令 (33.9) 式的分母等于零, 就定出 $\Gamma(\boldsymbol{q},\omega_0)$ 作为 $|\boldsymbol{q}|$ 函数的极点. $|\boldsymbol{q}|s$ 很小时有

$$\omega_0=\mathrm{i}\varpi\left(1-\frac{v^2|\boldsymbol{q}|^2}{6\varpi^2}\right),$$

即 ω_0 的绝对值减小. 在 $v|\boldsymbol{q}|_{\max}$ 变成零, $v|\boldsymbol{q}|$ 更大时 Γ 没有极点. 容易确定使 $\omega_0=0$ 的 $v|\boldsymbol{q}|_{\max}$ 值:

$$v|\boldsymbol{q}|_{\max}=e\varpi. \tag{33.10}$$

由于 $\boldsymbol{q}$ 是两个粒子系统整体的动量, 这个结果说明, 只有几乎相向运动的电子才表现出形成束缚对的趋势.

§33.3 转变温度的确定

再指出一次, 上述论点证明, 在低温下"相吸"粒子系统的普通基态是不稳定的. 这种不稳定性表现为, 惯性中心几乎静止的粒子能够组成束缚对, 即某种玻色粒子, 它们"凝聚"在基态上.

首次出现这种不稳定性的温度, 就是金属从正常态到超导态的转变温度.

为了确定转变温度, 可利用前面提到的与玻色气体的相似性. 在忽略粒子彼此散射的近似下 (弱作用模型), 束缚对形成理想气体. 已经知道, 理想玻色气体的温度格林函数是

$$\mathfrak{G}(\boldsymbol{q},\mathrm{i}\omega_n)=\left[\mathrm{i}\omega_n-\frac{\boldsymbol{q}^2}{2m}+\mu\right]^{-1}.$$

它在 $\omega=\mathrm{i}\omega_n=\mathrm{i}2n\pi T$ 处等于在 ω 上半平面解析的函数 $G^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{q},\omega)$ 的值. 当 $\omega_n=0$ 时, 它等于 $\left[\mu-\dfrac{\boldsymbol{q}^2}{2m}\right]^{-1}$. 在某个温度, $T=T_0$, 即所谓"玻色凝聚"温度时, 此量初次在 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0}$ 点趋向无穷大. 决定温度 T_0 的条件是 $\mu=0$.

对束缚对来说, 与这种玻色粒子格林函数相应的是双粒子费米–格林函数 (16.5) 式. 后者对束缚对惯性中心的变量 $\omega_{0n}=(\omega_1+\omega_2)_n$ 和 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2$ 的关系来说, 应在转变点附近具有类似的性质. (16.5) 式的费米格林函数对这些变量没有任何奇异性. 因此我们讨论顶角部分 $\mathcal{J}(\boldsymbol{q},\omega_0)$(各处都省去自旋变量, $\boldsymbol{q}$ 和 ω_0 的意义已在前面说明), 将它定义为在 ω_0 上半平面的解析函数, 而在 $\omega_0=\mathrm{i}(\omega_1+\omega_2)_n$ 处和热力学方法中的顶角部分一致. 换句话说, 函数 $\mathcal{J}(\boldsymbol{q},\omega_0)$ 乃是热力学顶角分:

$$\mathcal{J}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_1,\omega_1,\boldsymbol{p}_2,\omega_2;\boldsymbol{p}_3,\omega_3,\boldsymbol{p}_4,\omega_4)\equiv\mathcal{J}(\boldsymbol{q},\omega_0)(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}-\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})$$

的解析延拓 (以后将证明, 和 (33.9) 式相似, 这个量在我们所考虑的近似下其实只与变量 $\boldsymbol{q}$ 和 ω_0 有关). 我们根据前述假定, 温度低于转变温度时 $\mathcal{J}(\boldsymbol{q},\omega_0)$ 在 $\operatorname{Im}\omega_0>0$ 处有极点. 在温度等于转变温度时, 函数 $\mathcal{J}(\boldsymbol{q},\omega_0)$ 首次出现极点 $\omega_0=0$.

热力学顶角部分的方程和 (33.4) 式结构相同, 即

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_1\omega_1,\boldsymbol{p}_2,\omega_2;\boldsymbol{p}_3,\omega_3,\boldsymbol{p}_4,\omega_4)&=\widetilde{\mathcal{J}}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_1,\omega_1,\boldsymbol{p}_2,\omega_2;\boldsymbol{p}_3,\omega_3,\boldsymbol{p}_4,\omega_4)\\&-\frac{T}{2(2\pi)^3}\sum_{\omega'}\int\widetilde{\mathcal{J}}_{\alpha\beta,\xi\eta}(\boldsymbol{p}_1,\omega_1,\boldsymbol{p}_2,\omega_2;\boldsymbol{k},\omega',q-\boldsymbol{k}\omega_0-\omega')\\&\times\mathfrak{G}(k)\mathfrak{G}(q-k)\mathcal{J}_{\xi\eta,\gamma\delta}(\boldsymbol{k},\omega',\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k}\omega_0-\omega';\boldsymbol{p}_3,\omega_3,\boldsymbol{p}_4,\omega_4)\mathrm{d}\boldsymbol{k},\end{aligned}\tag{33.11}$$

其中 $\tilde{\mathcal{J}}$ 又是所有不能以一条垂直割线分成仅以两条同向电子线相连的两部分的图形矩阵元之和. 基于和前面相同的理由, 对 $\widetilde{\mathcal{J}}_{\alpha\beta\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_1\omega_1,\boldsymbol{p}_2,\omega_2;\boldsymbol{p}_3,\omega_3,\boldsymbol{p}_4,\omega_4)$ 只须取微扰论第一级近似即可. 求顶角部分的问题, 这时就归结为计算矩阵元中的求和与积分:

$$-\frac{\lambda^2}{(2\pi)^3}T\sum_{\omega'}\int\mathfrak{G}(k)\mathfrak{G}(q-k)\mathrm{d}\boldsymbol{k}.\tag{33.12}$$

将格林函数的 (14.6) 式代入后, 容易完成对频率的简单求和.

我们将不对任意的 $\omega_0,|\boldsymbol{q}|$ 值计算 (33.12) 式. 从均匀性考虑得知, 同玻色体一样, $\mathcal{J}(\boldsymbol{q},\omega_0)$ 中初次出现极点的值是 $\omega_0=|\boldsymbol{q}|=0$. 因此只须在 $|\boldsymbol{q}|=\omega_0=0$ 处求得

方程 (33.11) 的解. 这个函数趋向无穷大的时刻, 决定从正常态到超导态的转变温度. 当 $|\boldsymbol{q}| = \omega_0 = 0$ 时, 积分 (33.12) 式可以变换成

$$-\frac{\lambda^2}{2\pi^2} mp_0 \int_0^{\omega_\mathrm{D}} \mathrm{th}\left(\frac{\xi}{2T}\right)\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} = -\lambda^2 \frac{mp_0}{2\pi^2}\left(\ln\frac{\omega_\mathrm{D}}{2\mathrm{T}} - \int_0^\infty \frac{\ln x \mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^2\, x}\right) \tag{33.13}$$

(分部积分后, 由于所剩下的积分收敛, 极限 $x = \dfrac{\omega_\mathrm{D}}{2T}$ 可换成无穷大. 积分等于 $-\ln(2\gamma/\pi)$, 其中 $\ln\gamma = C = 0.577$). 因此

$$\Gamma_T(0,0) = \mathcal{J}(0,0) = \frac{\lambda}{1 + \dfrac{\lambda mp_0}{2\pi^2}\ln\left(\dfrac{2\omega_\mathrm{D}\gamma}{\pi T}\right)}.$$

在转变温度附近此式可写成

$$\mathcal{J}(0,0) = -\frac{2\pi^2}{mp_0}\frac{T_\mathrm{c}}{T - T_\mathrm{c}}, \tag{33.14}$$

其中转变温度 T_c 为

$$T_\mathrm{c} = \frac{\gamma}{\pi} 2\omega_\mathrm{D} \mathrm{e}^{-\left(\frac{2\pi^2}{|\lambda| mp_0}\right)}. \tag{33.15}$$

前面引入的频率 ϖ 描述系统在绝对零度时的不稳定性, 它的值为

$$\varpi = \frac{\pi}{\gamma} T_\mathrm{c}. \tag{33.16}$$

§34 超导体的基本方程组

§34.1 绝对温度零度的超导体

现在着手推导描述金属超导态性质的格林函数的方程组 (Gorkov[70]). 先限于绝对温度零度的情形. 在我们所讨论的模型中, 电子系统的总哈密顿量在二次量子化表象中的形式是

$$\hat{H} = \int \left\{ -\left(\psi^+ \frac{\nabla^2}{2m}\psi\right) + \frac{\lambda}{2}(\psi^+(\psi^+\psi)\psi)\right\} \mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

其中 $(\psi^+\psi) \equiv \psi_\alpha^+\psi_\alpha$, 而薛定谔表象的算符 $\psi(\boldsymbol{r})$ 和 $\psi^+(\boldsymbol{r})$ 满足普通的对易关系:

$$\begin{aligned} &\{\psi_\alpha(\boldsymbol{r}), \psi_\beta^+(\boldsymbol{r}')\} = \delta_{\alpha\beta}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'), \\ &\{\psi_\alpha(\boldsymbol{r}), \psi_\beta(\boldsymbol{r}')\} = \{\psi_\alpha^+(\boldsymbol{r}), \psi_\beta^+(\boldsymbol{r}')\} = 0. \end{aligned} \tag{34.1}$$

转入海森伯表象, 其中算符 $\tilde{\psi}$ 和 $\tilde{\psi}^+$ 与时间有关并遵从以下算符方程式:

$$\begin{aligned} &\left\{\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla^2}{2m}\right\}\tilde{\psi}_\alpha(x) - \lambda(\tilde{\psi}^+(x)\tilde{\psi}(x))\tilde{\psi}_\alpha(x) = 0, \\ &\left\{\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\nabla^2}{2m}\right\}\tilde{\psi}_\alpha^+(x) + \lambda\tilde{\psi}_\alpha^+(x)(\tilde{\psi}^+(x)\tilde{\psi}(x)) = 0. \end{aligned} \tag{34.2}$$

系统的格林函数的方程

$$G_{\alpha\beta}(x,x') = -\mathrm{i}\langle T(\tilde{\psi}_\alpha(x)\tilde{\psi}^+_\beta(x'))\rangle$$

可用显而易见的方式得自 (34.2) 式:

$$\left\{\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla^2}{2m}\right\} G_{\alpha\beta}(x,x') + \mathrm{i}\lambda\langle T((\tilde{\psi}^+(x)\tilde{\psi}(x))\tilde{\psi}_\alpha(x)\tilde{\psi}^+_\beta(x'))\rangle = \delta(x-x')\delta_{\alpha\beta}. \quad (34.3)$$

这个方程式中出现的四个 $\tilde{\psi}$ 算符乘积的平均值, 对于不相互作用电子系统, 按维克定理分解为算符 $\tilde{\psi}$ 和 $\tilde{\psi}^+$ 的成对平均值. 而对于有相互作用的粒子, 四个 $\tilde{\psi}$ 算符的乘积要通过顶角部分表示, 即包括了各种散射过程的贡献. 在我们考虑的弱相互作用模型中, 可以忽略粒子的彼此散射. 同时应考虑到, 系统基态和满费米球的普通态的差别, 在于存在着束缚电子对. 前节里已指出, 这些对乃是玻色子, 因而能以任何数量聚集在最低能级上. 在没有外场存在, 并且忽略对之间的散射过程时, 它们显然 "凝聚" 到束缚对作为整体静止不动的状态中. 讨论算符乘积 $\tilde{\psi}\tilde{\psi}$ 或 $\tilde{\psi}^+\tilde{\psi}^+$. 前者消灭、后者产生两个电子. 其特殊情形之一, 是这两个电子处于束缚态, 换言之, 算符 $\tilde{\psi}\tilde{\psi}$ 和 $\tilde{\psi}^+\tilde{\psi}^+$ 中包含有消灭和产生束缚对的项, 其中包括处于基态的对. 由于这种对很多 (其数目正比于总粒子数), 就可以和玻色系统类似地认为它们对算符 $\tilde{\psi}\tilde{\psi}$ 和 $\tilde{\psi}^+\tilde{\psi}^+$ 的相应贡献是普通数. 还须指出, 在金属中有特殊理由不去考虑处于基态之外的束缚对. 实际上总动量不为零的束缚电子对, 乃是自旋为零的玻色激发. 我们已经提到过, 金属中的电中性条件使得从 "玻色凝聚体" 中激发一个这种对时, 需要相当大的能量 (~1 eV), 它比建立超导理论时所能遇见的特征能量要大得多.

回到格林函数的方程式 (34.3). 考虑到以上种种, 可将四个 $\tilde{\psi}$ 算符乘积的平均值用一定方式写出. 例如有

$$\begin{aligned}
&\langle T(\tilde{\psi}_\alpha(x_1)\tilde{\psi}_\beta(x_2)\tilde{\psi}^+_\gamma(x_3)\tilde{\psi}^+_\delta(x_4))\rangle \\
&\quad = -\langle T(\tilde{\psi}_\alpha(x_1)\tilde{\psi}^+_\gamma(x_3))\rangle\langle T(\tilde{\psi}_\beta(x_2)\tilde{\psi}^+_\delta(x_4))\rangle \\
&\quad + \langle T(\tilde{\psi}_\alpha(x_1)\tilde{\psi}^+_\delta(x_4))\rangle\langle T(\tilde{\psi}_\beta(x_2)\tilde{\psi}^+_\gamma(x_3))\rangle \\
&\quad + \langle N|T(\tilde{\psi}_\alpha(x_1)\tilde{\psi}_\beta(x_2))|N+2\rangle \\
&\quad \times \langle N+2|T(\tilde{\psi}^+_\gamma(x_3)\tilde{\psi}^+_\delta(x_4))|N\rangle, \qquad (34.4)
\end{aligned}$$

其中 $|N\rangle$ 和 $|N+2\rangle$ 是粒子数为 N 和 $N+2$ 的系统基态. 这种写法表明, 我们忽略了全部粒子间的散射效应. 相互作用的存在, 只在形成束缚对的意义上计入. 等式 (34.4) 右端第三项和玻色气体情况下的相应项完全相似, 因为大量束缚对 "凝聚" 在基态上. 显然,

$$\langle N|T(\tilde{\psi}\tilde{\psi})|N+2\rangle\langle N+2|T(\tilde{\psi}^+\tilde{\psi}^+)|N\rangle$$

的数量级为束缚对密度.

容易验证, 这样引入的量可写成

$$\begin{aligned}\langle N|T(\tilde{\psi}_\alpha(x)\tilde{\psi}_\beta(x'))|N+2\rangle &= \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\mu t}F_{\alpha\beta}(x-x'),\\ \langle N+2|T(\tilde{\psi}^+_\alpha(x)\tilde{\psi}^+_\beta(x'))|N\rangle &= \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\mu t}F^+_{\alpha\beta}(x-x').\end{aligned} \tag{34.5}$$

对于均匀的问题 (无外场), 格林函数 $G(x-x')$ 只和坐标差 $x-x'$ 有关. (34.5) 式中对时间 t 的附加关系来自量子力学中任何算符 $\tilde{A}(t)$ 对时间微分的一般公式:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle N|\tilde{A}(t)|N+2\rangle = \mathrm{i}(E_N - E_{N+2})\langle N|\tilde{A}(t)|N+2\rangle.$$

根据定义, 化学势 $\mu = \dfrac{\partial E}{\partial N}$, 因此, 能量差 $E_{N+2} - E_N = 2\mu$.

把格林函数的表达式 (34.4) 代入方程式 (34.3) 时, 我们将在各处省去 (34.4) 式右端的前两项, 因为不难验证, 它们只在函数 G, F 和 F^+ 的方程式中导致化学势的附加修正项, 因而无重大意义. 结果我们得到联系函数 G 和 F^+ 的如下方程式:

$$\left\{\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla^2}{2m}\right\}\hat{G}(x-x') - \mathrm{i}\lambda\hat{F}(0+)\hat{F}^+(x-x') = \delta(x-x'). \tag{34.6}$$

这里 $\hat{G}, \hat{F}, \hat{F}^+$ 是函数 $G_{\alpha\beta}, F_{\alpha\beta}, F^+_{\alpha\beta}$ 对自旋脚标的矩阵写法, 其乘积乃是矩阵乘积.

$\hat{F}(0+)$ 定义如下:

$$\begin{aligned}F_{\alpha\beta}(0+) &= \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\mu t}\langle N|\tilde{\psi}_\alpha(x)\tilde{\psi}_\beta(x)|N+2\rangle\\ &\equiv \lim_{\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{r}',t\to t'+0} F_{\alpha\beta}(x-x').\end{aligned} \tag{34.7}$$

$\hat{F}^+(x-x')$ 的方程可利用 (34.2) 式的第二个方程类似地求得

$$\left\{\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\nabla^2}{2m} - 2\mu\right\}\hat{F}^+(x-x') + \mathrm{i}\lambda\hat{F}^+(0+)\hat{G}(x-x') = 0, \tag{34.8}$$

和 (34.7) 式对应:

$$F^+_{\alpha\beta}(0+) = \mathrm{e}^{-02\mu t}\langle N+2|\tilde{\psi}^+_\alpha(x)\tilde{\psi}^+_\beta(x)|N\rangle. \tag{34.9}$$

不存在与粒子自旋有关的相互作用时, 格林函数 $\hat{G}(x-x')$ 正比于自旋变量的单位矩阵:

$$\hat{G}_{\alpha\beta}(x-x') = \delta_{\alpha\beta}G(x-x').$$

函数 $\hat{F}$ 和 $\hat{F}^+$ 比例于反对称矩阵 $\hat{I}$. 其实由于算符 $\tilde{\psi}_\alpha(x)$ 和 $\tilde{\psi}_\beta(x')$ 在同一时刻反对易, 则 $F_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',0)=-F_{\beta\alpha}(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r},0)$. 由此得

$$\{F^+_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',0)\}^*=-F_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',0). \tag{34.10}$$

其特例为

$$\{F^+_{\alpha\beta}(0+)\}^*=-F_{\alpha\beta}(0+). \tag{34.11}$$

$\hat{F}$ 和 $\hat{F}^+$ 宜写成以下形式:

$$\begin{aligned}\hat{F}^+(x-x')&=\hat{I}F^+(x-x'),\\ \hat{F}(x-x')&=-\hat{I}F(x-x'),\end{aligned} \tag{34.12}$$

其中

$$(\hat{I}^2)_{\alpha\beta}=-\delta_{\alpha\beta}.$$

从 (34.10) 式看出, $F^+(x-x')$ 和 $F(x-x')$ 满足关系式

$$\{F^+(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',0)\}^*=F(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',0).$$

$\hat{F}$ 和 $\hat{F}^+$ 对自旋变量的反对称, 和束缚对处于单重态一致. 显然, 可以把函数 $F_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',0)$ 看成是准确到数值因子的束缚对的波函数 (束缚对的惯性中心静止).

消去对自旋变量的依赖性, 将方程组写成

$$\begin{aligned}&\left\{\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\nabla^2}{2m}\right\}G(x-x')-\mathrm{i}\lambda F(0+)F^+(x-x')=\delta(x-x'),\\ &\left\{\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\nabla^2}{2m}-2\mu\right\}F^+(x-x')+\mathrm{i}\lambda F^+(0+)G(x-x')=0,\end{aligned} \tag{34.13}$$

其中

$$(F(0+))^*=F^+(0+).$$

引入诸量的傅里叶分量, 得①

$$\begin{aligned}&\left(\omega-\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}\right)G(p)-\mathrm{i}\lambda F(0+)F^+(p)=1,\\ &\left(\omega+\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}-2\mu\right)F^+(p)+\mathrm{i}\lambda F^+(0+)G(p)=0.\end{aligned} \tag{34.14}$$

以上讨论是用粒子数一定的热力学变量进行的. 以化学势 μ 作独立变量更为方便. 和平常一样, 形式上可借代换 $\omega=\omega'+\mu$ 转到新的变量. 以后我们省去频率上的一撇, 将方程组 (34.14) 写成

①这个方程组与玻色系统中函数 G' 和 $\hat{G}$ 的方程组极为相似. 然而应注意, 与凝聚体粒子算符 ξ_0 和 ξ_0^+ 相似的, 是函数 F 和 F^+. 因此我们采用有别于玻色粒子 G' 和 $\hat{G}$ 的记号 G 和 F^+.

$$(\omega-\xi)G(p)-\mathrm{i}\lambda F(0+)F^{+}(p)=1,$$

$$(\omega+\xi)F^{+}(p)+\mathrm{i}\lambda F^{+}(0+)G(p)=0, \tag{34.15}$$

其中 $\xi=v(|\boldsymbol{p}|-p_0), p_0\simeq\sqrt{2m\mu}$ 是费米边界动量, $v=\dfrac{p_0}{m}$.

解方程组得

$$G(p)=\frac{\omega+\xi}{\omega^2-\xi^2-\Delta^2},\quad F^{+}(p)=-\mathrm{i}\lambda\frac{F^{+}(0+)}{\omega^2-\xi^2-\Delta^2},$$

以及

$$\Delta^2=\lambda^2|F^{+}(0+)|^2. \tag{34.16}$$

方程组 (34.15) 左端的行列式在点 $\omega=\pm\,\varepsilon(\boldsymbol{p}),\varepsilon(\boldsymbol{p})=\sqrt{\xi^2+\Delta^2}$ 处等于零. 因此 (34.15) 式的解只准确到形如

$$A_1(\boldsymbol{p})\delta(\omega-\varepsilon(\boldsymbol{p}))+A_2(\boldsymbol{p})\delta(\omega+\varepsilon(\boldsymbol{p}))$$

的任意项. 决定函数 G 和 F^{+} 中 A_1 和 A_2 取法的边界条件, 是朗道定理 (第 2 章), 根据这个定理格林函数 G 的虚部和 ω 的符号相反, 而函数

$$G^{\mathrm{R}}(\omega,\boldsymbol{p})=\mathrm{Re}\;G(\omega-\boldsymbol{p})+\mathrm{i}\varepsilon(\omega)\mathrm{Im}\;G(\omega,\boldsymbol{p})$$

应是解析的并在上半平面无奇点. 不难证明, 满足这些条件的解是②

$$G(p)=\frac{u_{\boldsymbol{p}}^2}{\omega-\varepsilon(\boldsymbol{p})+\mathrm{i}\delta}+\frac{v_{\boldsymbol{p}}^2}{\omega+\varepsilon(\boldsymbol{p})-\mathrm{i}\delta}, \tag{34.17}$$

$$F^{+}(p)=-\mathrm{i}\lambda\frac{F^{+}(0+)}{[\omega-\varepsilon(\boldsymbol{p})+\mathrm{i}\delta)(\omega+\varepsilon(\boldsymbol{p})-\mathrm{i}\delta]}, \tag{34.18}$$

其中函数 $u_{\boldsymbol{p}}^2$ 和 $v_{\boldsymbol{p}}^2$ 为

$$u_{\boldsymbol{p}}^2=\frac{1}{2}\left[1+\frac{\xi}{\varepsilon(\boldsymbol{p})}\right],\quad v_{\boldsymbol{p}}^2=\frac{1}{2}\left[1-\frac{\xi}{\varepsilon(\boldsymbol{p})}\right]. \tag{34.19}$$

格林函数 (34.17) 的正极点 $\omega=\varepsilon(\boldsymbol{p})$ 决定元激发谱 $\varepsilon(\boldsymbol{p})=\sqrt{\xi^2+\Delta^2}$. 这个谱中有能隙 Δ, 它可从关系式

$$F^{+}(0)=(2\pi)^{-4}\int F^{+}(p)\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\boldsymbol{p} \tag{34.20}$$

②我们取 $F^{+}(0+)$ 为实数. 这在无外场时总是可能的, 因为方程式 (34.13) 允许有相位是常数的变换 $\{F(x-x'),F(0+)\}\to\{F(x-x')\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi},F(0+)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}\}$, 而 $\{F^{+}(x-x'),F^{+}(0+)\}\to\{F+(x-x')\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\varphi},F^{+}(0+)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\varphi}\}$.

决定. 以 (34.18) 式代入, 得

$$1=-\frac{\lambda}{2(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\sqrt{\xi^2+\Delta^2}}. \tag{34.21}$$

截断这个发散积分的条件是, 所研究的模型中只有能量在费米面附近厚度为 $2\omega_{\mathrm{D}}$ 层内的电子才参与相互作用. 完成积分, 得

$$1=-\frac{\lambda}{2\pi^2}mp_0\ln\frac{2\omega_{\mathrm{D}}}{\Delta}.$$

结果我们得到

$$\Delta=2\omega_{\mathrm{D}}\mathrm{e}^{-1/\eta}, \tag{34.22}$$

其中 $\eta=\dfrac{|\lambda|mp_0}{2\pi^2}$. 将此式和前一节的结果比较, 我们发现, 绝对温度零度时能谱中能隙的值和转变温度的关系为

$$\Delta=\frac{\pi}{\gamma}T_{\mathrm{c}}. \tag{34.23}$$

§34.2　有外电磁场存在时的方程. 规范不变性

如果超导体处于外场, 例如电磁场中, 则方程组 (34.13) 将稍复杂些. 首先应指出, 在外场中所有各函数已不仅是坐标差的函数. 在方程式 (34.13) 中引入电磁场的方法, 仍是平常的代换:

$$\nabla\to\nabla-\mathrm{i}e\boldsymbol{A}\quad\text{或}\quad\nabla\to\nabla+\mathrm{i}e\boldsymbol{A}, \tag{34.24}$$

视对算符 $\tilde{\psi}$ 或 $\tilde{\psi}^+$ 微分而定 (通常采用标量势 φ 等于零的规范比较方便). 函数 G 和 F^+ 在外场中的方程式为

$$\left\{\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}-\mathrm{i}e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right)^2+\mu\right\}G(x,x')-\mathrm{i}\lambda F(x,x)F^+(x,x')=\delta(x-x'),$$

$$\left\{\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}+\mathrm{i}e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right)^2-\mu\right\}F^+(x,x')+\mathrm{i}\lambda F^+(x,x)G(x,x')=0. \tag{34.25}$$

这些方程式显然是规范不变的. 当矢量势作规范变换

$$\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}+\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{r}} \tag{34.26}$$

时, 函数 G, F 和 F^+ 各自变为

$$\begin{aligned}
&G(x,x')\to G(x,x')\mathrm{e}^{\mathrm{i}e[\varphi(\boldsymbol{r})-\varphi(\boldsymbol{r}')]},\\
&F(x,x')\to F(x,x')\mathrm{e}^{\mathrm{i}e[\varphi(\boldsymbol{r})+\varphi(\boldsymbol{r}')]},\\
&F^+(x,x')\to F^+(x,x')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}e[\varphi(\boldsymbol{r})+\varphi(\boldsymbol{r}')]},
\end{aligned} \tag{34.27}$$

而“隙” $|\lambda|F(x,x)$ 或 $|\lambda|F^+(x,x)$ 在外场中一般是 x 的函数, 它变换为

$$\begin{aligned} F(x,x) &\to F(x,x)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}e\varphi(\boldsymbol{r})}, \\ F^+(x,x) &\to F^+(x,x)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}e\varphi(\boldsymbol{r}')}. \end{aligned} \tag{34.28}$$

这些方程式的规范不变性, 使我们能彻底地研究超导体在磁场中的性质. 在指出方程式 (34.25) 的规范不变性时, 还应强调, 这个事实与哈密顿量的写法 (32.3) 有关. 严格说来, 哈密顿量 (32.2) 并非规范不变的, 这当然是模型本身的性质. 容易验证, 这个模型中出现于方程式 (34.13) 中的函数 F 和 F^+ 在自变量重合时的值, 不是 $F(x,x)$, 而是

$$\overline{F(x,x)} = \int \theta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{y})\theta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{z})F(y,z)\mathrm{d}\boldsymbol{z}\mathrm{d}\boldsymbol{y}$$

和相应的 $\overline{F^+(x,x)}$. $F(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z};t=t')$ 作为束缚对的波函数, 其关联半径约为束缚对的尺寸 $\xi_0 \sim \dfrac{v}{T_\mathrm{c}}$, 而当 $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}| \gg \xi_0$ 时迅速下降. §32 中已指出, 函数 θ 具有 δ 函数性质, 其最大值宽度约为 v/ω_D. 因此, 将 $\overline{F(x,x)}$ 换成 $F(x,x)$ 所引起的误差数量级为 $T_\mathrm{c}/\omega_\mathrm{D}$, 这在实际超导体中总是很小的.

§34.3 温度高于零的超导体

在本节结束前, 我们讨论如何推广以上方法至温度高于零的情形. 这种推广显然应以第 3 章所述 $T \neq 0$ 的方法为基础. 系统在超导态的特性由不等于零的平均值

$$\mathfrak{F}(x,x') = \frac{\langle T_\tau(\psi(x)\psi(x')\mathfrak{S}')\rangle}{\langle\mathfrak{S}\rangle},$$

$$\mathfrak{F}^+(x,x') = \frac{\langle T_\tau(\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(x')\mathfrak{S})\rangle}{\langle\mathfrak{S}\rangle}$$

描述 (求平均的意义以及算符 $\psi(x)$ 和 $\psi^+(x)$ 的定义同第 3 章, 注意化学势已经被取作独立的热力学变量). 如果将 $\mathfrak{F}(x,x')$ 和 $\mathfrak{F}^+(x,x')$ 定义中的吉布斯平均, 看成对能量等于平均能 $\bar{E}$, 而粒子数等于平均数的状态的量子力学平均, 这就表明, 电子对的产生和消灭实际上对状态没有影响. 为此须要求上述电子对属于处在 “玻色凝聚” 态的束缚对. 由于这种对的数目很多 (比例于系统整个体积内的总粒子数), 则增减一个对不影响系统的状态. 换言之, 和在绝对零度时一样, 系统处于超导态时, 算符乘积 $\psi\psi$ 和 $\overline{\psi\psi}$ 中有些项可看成普通数字. 我们假定, 四个 ψ 算符乘积的 (热力学) 平均值, 可以和绝对零度的 (34.4) 式一样, 通过格林函数

$$\mathfrak{G}(x,x') = -\langle T_\tau(\psi(x)\bar{\psi}(x')\mathfrak{S})\rangle/\langle\mathfrak{S}\rangle$$

以及函数 $\mathfrak{F}(x,x')$ 和 $\mathfrak{F}^+(x,x')$ 表示出来. 和前面一样, 这表明忽略了粒子间的散射效应. 我们有

$$\begin{aligned}&\frac{\langle T_\tau(\psi_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_2)\bar{\psi}_\gamma(x_3)\bar{\psi}_\delta(x_4)\mathfrak{S})\rangle}{\langle\mathfrak{S}\rangle}\\&=-\mathfrak{G}_{\alpha\gamma}(x_1,x_3)\mathfrak{G}_{\beta\delta}(x_2,x_4)+\mathfrak{G}_{\alpha\delta}(x_1,x_4)\mathfrak{G}_{\beta\gamma}(x_2,x_3)\\&\quad+\mathfrak{F}_{\alpha\beta}(x_1,x_2)\mathfrak{F}^+_{\gamma\delta}(x_3,x_4).\end{aligned}\tag{34.29}$$

我们在此不重复函数 $\mathfrak{G}$ 和 $\mathfrak{F}^+$ 的方程式的推导, 它和方程式 (34.13) 的推导完全相似. 下面给出这些方程式的最终形式:

$$\begin{aligned}&\left\{-\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right\}\mathfrak{G}(x-x')+\Delta\mathfrak{F}^+(x-x')=\delta(x-x'),\\&\left\{\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right\}\mathfrak{F}^+(x-x')-\Delta^*\mathfrak{G}(x-x')=0,\end{aligned}\tag{34.30}$$

其中

$$\Delta=|\lambda|\mathfrak{F}(0+),\quad \Delta^*=|\lambda|\mathfrak{F}^+(0+).\tag{34.31}$$

有时须决定函数 $\mathfrak{F}(x-x')$. 容易得出相应方程式:

$$\left\{-\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right\}\mathfrak{F}(x-x')-\Delta\mathfrak{G}(x'-x)=0.$$

不难验证, 函数 $\mathfrak{G}(x-x')$, $\mathfrak{F}^+(x-x')$, $\mathfrak{F}(x-x')$ 和 $\mathfrak{G}(x'-x)$ 的四个方程式可写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix}\left\{-\dfrac{\partial}{\partial\tau}+\dfrac{\nabla^2}{2m}+\mu\right\} & \Delta\\ -\Delta^* & \left\{\dfrac{\partial}{\partial\tau}+\dfrac{\nabla^2}{2m}+\mu\right\}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathfrak{G}(x-x') & \mathfrak{F}(x-x')\\ \mathfrak{F}^+(x-x') & -\mathfrak{G}(x'-x)\end{pmatrix}=\hat{1}.\tag{34.32}$$

换言之, 这四个函数组成 (34.30) 式左端算符的矩阵格林函数.

我们知道, 在温度方法中不把各量展开成频率的傅里叶积分, 而展成傅里叶级数, 从写出的方程式看出, 如果像在第 3 章中引入格林函数的傅里叶分量那样, 引入 $\mathfrak{F}$ 和 $\mathfrak{F}^+$ 的傅里叶分量:

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}^+(x-x')&=(2\pi)^{-3}T\textstyle\sum_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n\tau}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{pr}}\mathfrak{F}^+_{\omega n}(\boldsymbol{p})\mathrm{d}\boldsymbol{p},\\ \mathfrak{F}(x-x')&=(2\pi)^{-3}T\textstyle\sum_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n\tau}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{pr}}\mathfrak{F}_{\omega n}(\boldsymbol{p})\mathrm{d}\boldsymbol{p},\end{aligned}\tag{34.33}$$

其中 $\omega=(2n+1)\pi T$, 则与方程组 (34.15) 对应的是

$$\begin{aligned}(\mathrm{i}\omega-\xi)\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{p})+\Delta\mathfrak{F}^+_\omega(\boldsymbol{p})&=1,\\(\mathrm{i}\omega+\xi)\mathfrak{F}^+_\omega(\boldsymbol{p})+\Delta^*\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{p})&=0,\end{aligned}\tag{34.34}$$

满足这个方程组的函数是

$$\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{p}) = -\frac{\mathrm{i}\omega + \xi}{\omega^2 + \xi^2 + \Delta^2}, \quad \mathfrak{F}^+_\omega(\boldsymbol{p}) = \frac{\Delta^*}{\omega^2 + \xi^2 + \Delta^2}. \tag{34.35}$$

还要指出, 无外场时函数 $\mathfrak{F}$ 和 $\mathfrak{F}^+$ 彼此相等, 而 Δ 是实数. 和方程组 (34.15) 情形不同, 这里的解是单值的. 这是因为热力学函数的解析性质已单值地确定. 决定能隙的条件是

$$1 = \frac{|\lambda|T}{(2\pi)^3} \sum_n \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\omega_n^2 + \xi^2 + \Delta^2}. \tag{34.36}$$

对频率的级数不难求和. 结果代替 $T = 0$ 时的条件 (34.21) 我们得到一个新的关系式, 它决定温度高于零时能隙的值:

$$1 = \frac{|\lambda| m p_0}{2\pi^2} \int_0^{\omega_\mathrm{D}} \mathrm{d}\xi \frac{\mathrm{th}\dfrac{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2(T)}}{2T}}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2(T)}}. \tag{34.37}$$

在相变点, 即 $T = T_\mathrm{c}$ 处, 能隙 $\Delta(T)$ 成为零, 而条件 (34.37) 就成为决定转变温度的条件 (33.15).

§35 声子模型中超导理论方程组的推导

现在考虑电子彼此间通过电声子作用而发生关系的模型, 并用它推导出超导理论的方程组. 自然, 这个模型和前面一样具有同一缺点, 即未计入金属内的库仑作用力. 它当然比四费米子相互作用模型有更直接的物理意义, 虽然后者更便于得出实际结果. 声子模型的基本优点, 首先在于电声子相互作用哈密顿量 (32.1) 从一开始就是规范不变的, 这就不同于四费米子相互作用哈密顿量 (32.2), 后者只在 $T_\mathrm{c} \ll \omega_\mathrm{D}$ 条件下才近似地规范不变. 而一般说来, 这个条件只在弱耦合[①]近似下成立. 我们以后要证明, 弱耦合在超导理论中并不是本质性的限制, 而理论中实际的小参量是比值 $\dfrac{\omega_\mathrm{D}}{\varepsilon_\mathrm{F}} \ll 1 (\dfrac{\omega_\mathrm{D}}{\varepsilon_\mathrm{F}} \sim \dfrac{u}{v} \sim 10^{-2} - 10^{-3}$, 其中 u 是物体中的声速, 而 v 是费米面上的电子速度).[②] 我们只限于推导在绝对温度零度时的方程式.

这样, 设电子和声子系统的相互作用哈密顿量为

$$H_\mathrm{int} = g \int (\psi^+(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r}))\bar{\varphi}(\boldsymbol{r}).$$

如果系统处于超导态, 则除了格林函数 G 之外, 还需两个函数 F 和 F^+ 来描述它的性质. 因此一般说来, 必须研究联系三个函数

$$\hat{G}_{\alpha\beta}(x, x') = -\mathrm{i}\langle T(\tilde{\psi}_\alpha(x)\tilde{\psi}^+_\beta(x'))\rangle = \delta_{\alpha\beta} G(x - x'),$$

①然而实际超导体中总有 $T_\mathrm{c} \ll \omega_\mathrm{D}$.

②[68], [69] 研究了超导理论中的电声子相互作用.

$$\hat{F}^{+}_{\alpha\beta}(x,x') = \langle T(\tilde{\psi}^{+}_{\alpha}(x)\tilde{\psi}^{+}_{\beta}(x'))\rangle = I_{\alpha\beta}F^{+}(x-x'), \tag{35.1}$$

$$\hat{F}_{\alpha\beta}(x,x') = \langle T(\tilde{\psi}_{\alpha}(x)\tilde{\psi}_{\beta}(x'))\rangle = -I_{\alpha\beta}F(x-x')$$

的三个方程式, 以代替普通的戴逊方程式 (§21). 至于声子格林函数

$$D(x_1-x_2) = -\mathrm{i}\langle T(\varphi(x_1)\varphi(x_2))\rangle$$

的方程式, 则我们将看到, 它几乎无需改变.

可从微扰论图解法得到格林函数的方程式. 和低于 "玻色凝聚" 点的玻色系统相似, 由于出现了代表函数 F 和 F^{+} 的线, 微扰论中可能有的图形增多了. 我们约定在图上以具有两个箭头的粗线来代表函数 G, F^{+} 和 F, 它在点 x 和 x' 处的方向与 (35.1) 式取一致, 即 $\tilde{\psi}$ 算符对应离开此点的箭头, 而算符 $\tilde{\psi}^{+}$ 对应进入此点的箭头. 所有三种线示于图 91 中. 容易看出, 和玻色气体完全相似, 存在着三类不可约自能部分, 我们分别记为 $\Sigma_{11}(x,x'), \Sigma_{20}(x,x')$, 和$\Sigma_{02}(x,x')$. 图 92 中给出了 Σ_{ik} 的图形, 其中虚线代表声子的 D 函数, 点代表普通顶点或因子 g, 而实心圆或长方形代表因各种电子声子作用而改变了的普通顶点.

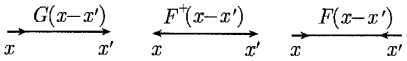


图 91

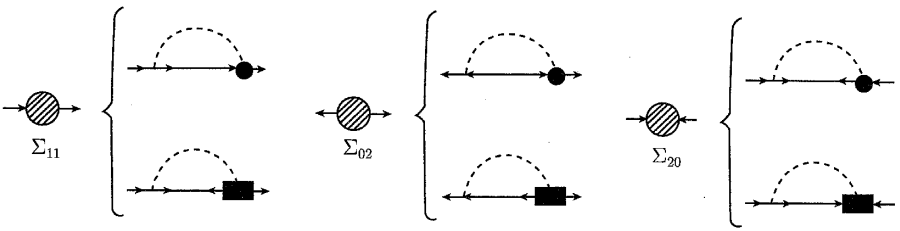


图 92

引入各函数的傅里叶分量, 并讨论任一个自能图形, 如 $\Sigma_{11}(p)$. 不难看出, 在 $\Sigma_{11}(p)$ 的最简单图形 93 中, 若准确到 $\omega_{\mathrm{D}}/\varepsilon_{\mathrm{F}}$, 可以忽略所有对端顶角部分的声子修正. 实际上我们在 §21 中已经证明, 在相应的被积表达式中, 只有动量约为电子费米动量的声子的 D 函数 (和声子顶角) 值才是重要的.



图 93

基于这个原因, §21 中所作的电声子相互作用对声子顶角修正项的估值, 在现在讨论的情况中仍成立, 因为这些修正项决定于能量和动量远离费米面的格林函数值. 同时完全清楚, 只有在费米面附近的窄范围内, 当激发能不超过声子最大能量的数量级, 即不超过 ω_{D} 的数量级时, 超导态金属电子格林函数的傅里叶分量才不同于正常态. 同样的, 超导态所特有的函数 F 和 F^{+}, 也仅在上述范围内不为零. 图 92 上对每个自能部分 Σ_{11}, Σ_{20}和Σ_{02} 画出了两类可能的图形, 其差别在于声子顶角的不同选择. 基于以上所述, 我们可以立即忽略第二类图形, 其声子顶角以实心长方形表示, 因为这类图形只能借助超导格林函数 F 和 F^{+} 构成. 因此, 不可约部分 Σ_{11}, Σ_{20}和Σ_{02} 中的声子顶角, 可只限于微扰论零级近似.

由于同样的原因, 声子格林函数 $D(x_1-x_2)$ 也不变, 其傅里叶分量可直接利用表达式 (21.14). 函数 G 和 F^{+} 的方程式的结构示于图 94 中, 其意义不需更多解释. 我们写出这些方程的解析形式. 在坐标表象中有

$$\begin{aligned}
&\left\{\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right\}G(x-x')\\
&\quad=\delta(x-x')+g^2\mathrm{i}\int G(x-z)D(x-z)G(z-x')\mathrm{d}^4z\\
&\qquad+g^2\mathrm{i}\int F(x-z)D(x-z)F^{+}(z-x')\mathrm{d}^4z,\\
&\left\{-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right\}F^{+}(x-x')\\
&\quad=g^2\mathrm{i}\int G(x-z)D(z-x)F^{+}(z-x')\mathrm{d}^4z\\
&\qquad+g^2\mathrm{i}\int F^{+}(x-z)D(x-z)G(z-x')\mathrm{d}^4z.
\end{aligned}\tag{35.2}$$

在这些方程中可引入电磁场, 其方法同于 §34. 应着重指出, 这样得到的方程组是完全规范不变的, 这是不同于方程组 (34.13) 之处, 后者的规范不变性只是准确到 $T_{\mathrm{c}}/\omega_{\mathrm{D}}$ 项的近似结果. 可惜的是, 方程组 (35.2) 形状更复杂了, 它含有非线性积分项, 这就使它不便在坐标表象中求解, 而这正是在许多有不均匀磁场存在的问题中所必须作的. 两个模型中得到的实际结果, 通常是等价的.

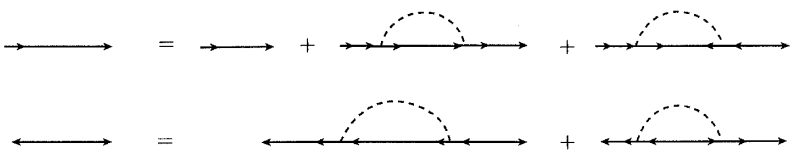


图 94

对于无磁场存在的均匀问题, 在方程 (35.2) 中转到动量表象, 不难得到各函数

的傅里叶分量的方程式：

$$\begin{aligned}(\omega-\xi-g^2\mathrm{i}\bar{G}_\omega)G(p)-g^2\mathrm{i}\bar{F}_\omega F^+(p)=1,\\(-\omega-\xi-g^2\mathrm{i}\bar{G}_{-\omega})F^+(p)-g^2\mathrm{i}\overline{F^+_\omega}G(p)=0.\end{aligned}\tag{35.3}$$

这里引入了记号：

$$\begin{aligned}\bar{G}_\omega&=\frac{1}{(2\pi)^4}\int G(p-k)D(k)\mathrm{d}^4k,\\\bar{F}_\omega&=\frac{1}{(2\pi)^4}\int F(p-k)D(k)\mathrm{d}^4k,\\\overline{F^+_\omega}&=\frac{1}{(2\pi)^4}\int F^+(p-k)D(k)\mathrm{d}^4k,\\\bar{G}_{-\omega}(\boldsymbol{p})&=\bar{G}_\omega(-\boldsymbol{p}).\end{aligned}\tag{35.4}$$

这个方程组和前面得到的方程组 (34.15) 完全相似. 唯一的不同是, 方程式 (34.15) 中 $\overline{G}_\omega$, $\bar{F}_\omega$ 和 $\overline{F^+_\omega}$ 在费米面附近 $|v|(|\boldsymbol{p}|-p_0)<\omega_\mathrm{D}$ 区域内是常量, 而在区域外等于零, 然而 (35.4) 式中诸量一般说来是 ω 和 p 的函数, 它们在 ω, $|v(|\boldsymbol{p}|-p_0)|\gg\omega_\mathrm{D}$ 时平滑地降至零.

将函数 G 和 F^+ 通过 $\bar{G}_\omega$ 和 $\bar{F}_\omega$, $\overline{F^+_\omega}$ 表示：

$$G(p)=\frac{\omega-g^2\mathrm{i}\bar{G}_\omega+\xi}{[\omega-\xi-g^2\mathrm{i}\bar{G}_\omega][\omega+\xi+g^2\mathrm{i}\bar{G}_{-\omega}]-g^4|\overline{F^+_\omega}|^2},$$

$$F^+(p)=\frac{-\mathrm{i}g^2\overline{F^+_\omega}}{[\omega-\xi-g^2\mathrm{i}\bar{G}_\omega][\omega+\xi+g^2i\bar{G}_{-\omega}]-g^4|\overline{F^+_\omega}|^2}.$$

将这些式子代入 $\overline{G}_\omega$ 和 $\overline{F^+_\omega}$ 的定义 (35.4) 式后, 我们得到两个积分方程式. Eliashberg[71] 得到了这些方程式的解. 我们省去计算, 引用最终结果. 可以证明, 能量小时激发谱的形状是

$$\varepsilon(\boldsymbol{p})=\sqrt{\xi^2+\Delta^2},$$

然而其中 $\xi=v_1(|\boldsymbol{p}|-p_0)$, 却根据 (21.45) 式含有费米面上的重整速度 v_1. 绝对零度时能隙和 $\overline{F^+_{\omega=0}}$ 的关系是

$$\Delta=g^2\frac{v_1}{v_0}|\overline{F^+_{\omega=0}}|.$$

在弱作用极限 $g^2\ll1$, 这些公式和前节的结果一致.

§36 超导体的热力学

§36.1 能隙和温度的关系

我们比较详细地研究能隙值和温度的关系. 先讨论低温 $T\ll T_\mathrm{c}$ 情形, 并将条

件 (34.37) 作相应展开, 我们有恒等式:

$$\frac{1}{\eta}=\int_0^{\omega_{\mathrm{D}}}\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi^2+\Delta^2}}-2\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi^2+\Delta^2}}\frac{1}{\exp(\sqrt{\xi^2+\Delta^2}/T)+1}, \tag{36.1}$$

其中 $\eta=|\lambda|\dfrac{mp_0}{2\pi^2}$(第二个积分收敛, 因而可令积分上限等于无穷大). 在第二个积分号下展开指数项, 变到对 ε 积分, 并利用贝塞尔函数的定义, 可将方程式 (36.1) 写成零阶贝塞尔函数的级数:

$$\mathrm{In}\frac{\Delta_0}{\Delta}=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}K_0\left(\frac{n\Delta}{T}\right), \tag{36.2}$$

这里 $\Delta_0\equiv\Delta(T=0)$.

低温下 $\Delta\gg T$, 利用贝塞尔函数的渐近展开得

$$\Delta=\Delta_0-\sqrt{2\pi T\Delta_0}\left(1-\frac{T}{8\Delta_0}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\Delta_0}{T}}. \tag{36.3}$$

能隙在温度接近转变温度 T_{c} 时的行为, 宜从 (34.36) 式决定. 在 T_{c} 附近能隙很小, 因此 (34.36) 式中可对 $\dfrac{\Delta^2}{T^2}$ 的幂展开, 即

$$\frac{1}{\eta}=T\sum_n\int_{-\omega_{\mathrm{D}}}^{\omega_{\mathrm{D}}}\mathrm{d}\xi\left\{\frac{1}{\omega_n^2+\xi^2}-\frac{\Delta^2}{(\omega_n^2+\xi^2)^2}+\frac{\Delta^4}{(\omega_n^2+\xi^2)^3}+\cdots\right\}.$$

在右端的收敛项中改变对频率求和与对 ξ 积分的顺序, 得

$$\frac{1}{\eta}=\int_0^{\omega_{\mathrm{D}}}\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}\mathrm{th}\frac{\xi}{2T}-\frac{\Delta^2}{(\pi T)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}+\frac{3}{4}\frac{\Delta^2}{(\pi T)^4}\sum_0^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^5}+\cdots. \tag{36.4}$$

这里的级数通过黎曼的 ζ 函数表示:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^z}=\frac{2^z-1}{2^z}\zeta(z). \tag{36.5}$$

代入前式得

$$\ln\frac{T}{T_{\mathrm{c}}}=-\frac{7\zeta(3)}{8}\frac{\Delta^2}{(\pi T)^2}+\frac{93\zeta(5)}{128}\frac{\Delta^4}{(\pi T)^4}+\cdots.$$

在 T_{c} 附近第一级近似下能隙为

$$\Delta=\pi T_{\mathrm{c}}\sqrt{\frac{8}{7\zeta(3)}}\sqrt{1-\frac{T}{T_{\mathrm{c}}}}\simeq 3.06T_{\mathrm{c}}\sqrt{1-\frac{T}{T_{\mathrm{c}}}}. \tag{36.6}$$

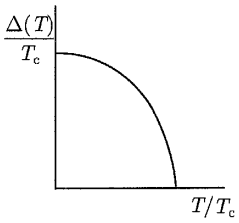


图 95

图 95 给出了整个温度范围内能隙与温度的关系.

§36.2　超导体的热力学

为了求得各种热力学量, 我们利用从前导出的热力学势对相互作用常数的微分公式:

$$\frac{\delta\Omega}{\delta\lambda}=\frac{1}{\lambda^2}\langle H_{\rm int}\rangle,$$

这里 $H_{\rm int}$ 由 (32.3) 式给出. 若在平均值中保留只在超导态中不为零的项, 得到 (注意 $\lambda<0$):

$$\frac{\delta\Omega}{\delta|\lambda|}=-\frac{1}{\lambda^2}|\Delta|^2.$$

温度一定时 $\dfrac{1}{|\lambda|}$ 和 Δ 的关系由 (36.1) 式决定. 因此金属的热学势 Ω 在超导态和正常态之差为

$$\Omega_{\rm s}-\Omega_{\rm n}=\int_0^{\Delta}\left(\frac{{\rm d}\dfrac{1}{|\lambda|}}{{\rm d}\Delta}\right)\Delta^2{\rm d}\Delta.$$

根据统计物理的一般原理, 这个修正项, 以相应变量表示, 对所有的热力学函数是一样的. 根据 (36.2) 式有

$$\frac{1}{|\lambda|}=\frac{mp_0}{2\pi^2}\left\{\ln\frac{2\omega_{\rm D}}{\Delta}-2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}K_0\left(\frac{n\Delta}{T}\right)\right\}.$$

再利用贝塞尔函数理论中熟知的公式 $K_0'(x)=-K_1(x)$, 得

$$F_{\rm s}-F_{\rm n}=-\left(\frac{mp_0}{2\pi^2}\right)\left\{\frac{\Delta^2}{2}-2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{T^2}{n^2}\int_0^{\frac{n\Delta}{T}}K_1(x)x^2{\rm d}x\right\}.$$

低温下 $\dfrac{\Delta}{T}\gg1$. 这时有

$$\int_0^{\frac{n\Delta}{T}}K_1(x)x^2{\rm d}x=2-\int_{\frac{n\Delta}{T}}^{\infty}K_1(x)x^2{\rm d}x.$$

后一积分仅需对 $n=1$ 算出, 为此须利用 $K_1(x)$ 的渐近展开式. 剩下的级数极易对 n 求和. 结果得

$$F_{\rm s}-F_{\rm n}=\frac{mp_0T^2}{6}-\frac{mp_0}{2\pi^2}\left[\frac{\Delta^2}{2}+\sqrt{2\pi\Delta_0^3T}\left(1+\frac{15}{8}\frac{T}{\Delta_0}\right){\rm e}^{-\Delta_0/T}\right].\qquad(36.7)$$

右端第一项和正常金属自由能对 T 展开的基本项差一符号. 我们知道, 这项导致正常态电子比较热的线性律:

$$C_{\mathrm{n}} = \frac{mp_0 T}{3}.$$

以 (36.3) 式代入, 求出低温下超导态的熵等于

$$S_{\mathrm{s}} = \frac{mp_0}{\pi^2}\sqrt{\frac{2\pi\Delta_0^3}{T}}\mathrm{e}^{-\frac{\Delta_0}{T}},$$

而比热等于:

$$C_{\mathrm{s}} = \frac{mp_0}{\pi^2}\sqrt{\frac{2\pi\Delta_0^5}{T^3}}\mathrm{e}^{-\frac{\Delta_0}{T}}.$$

利用 (34.23) 式, 由此得到超导态在 $T \ll T_{\mathrm{c}}$ 的比热和正常态在 $T = T_{\mathrm{c}}$ 时比热的比值:

$$\frac{C_{\mathrm{s}}(T)}{C_{\mathrm{n}}(T_c)} = \frac{3}{\gamma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\Delta_0}{T}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{\Delta_0}{T}\right). \tag{36.8}$$

为了求得温度接近 T_{c} 时的渐近公式, 我们从展开式 (36.4) 出发:

$$\delta\frac{1}{|\lambda|} = -\left(\frac{mp_0}{2\pi}\right)\frac{7\zeta(3)}{(2\pi T)^2}\Delta\delta\Delta.$$

利用 (36.6) 式得自由能之差为

$$F_{\mathrm{s}} - F_{\mathrm{n}} = -\left(\frac{mp_0}{2\pi^2}\right)\frac{7\zeta(3)}{16(\pi T)^2}\Delta^4 = -\frac{2mp_0T_{\mathrm{c}}^2}{7\zeta(3)}\left(1-\frac{T}{T_{\mathrm{c}}}\right)^2. \tag{36.9}$$

由此得超导态的熵等于

$$S_{\mathrm{s}} = -\frac{4mp_0T_{\mathrm{c}}}{7\zeta(3)}\left(1-\frac{T}{T_{\mathrm{c}}}\right) + S_{\mathrm{n}}.$$

再微分一次并保留主要项, 得到在转变点的超导体的比热:

$$C_{\mathrm{s}}(T_{\mathrm{c}}) = C_{\mathrm{n}}(T_{\mathrm{c}}) + \frac{4mp_0}{7\zeta(3)}T_{\mathrm{c}}.$$

因此, 在金属转入超导态的相变点, 比热有跃变, 它等于 $\dfrac{4mp_0T_{\mathrm{c}}}{7\zeta(3)}$. 在展开式 (36.9) 中考虑 $T_{\mathrm{c}} - T$ 的更高次项, 得出比热 $C_{\mathrm{s}}(T)$ 和正常态在 T_{c} 附近的比热 $C_{\mathrm{n}}(T_{\mathrm{c}})$ 之比:

$$\frac{C_{\mathrm{s}}(T)}{C_{\mathrm{n}}(T_{\mathrm{c}})} = 2.43 + 3.77\left(\frac{T}{T_{\mathrm{c}}} - 1\right).$$

金属电子比热在 T_{c} 附近的这种变化示于图 96 中.

超导理论中重要的热力学量是所谓临界磁场 H_c. 在给定的温度 $T < T_c$ 下, 金属在磁场中既可以处于超导态, 也可以处于正常态.

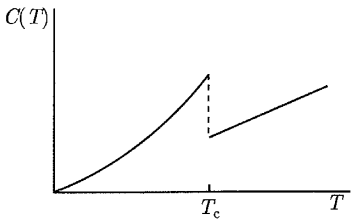


图 96

如果将超导体放入磁场, 则屏蔽这个场的表面电流造成磁矩, 后者与外场相互作用. 由这个相互作用而来的附加能量是 $-\dfrac{\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{M}}{2}$(每单位体积). 考虑超导圆柱, 处于平行其轴线的场中. 从超导体内磁场为零条件计算表面电流值, 再决定这个电流造成的磁矩, 得出附加磁能为 $\dfrac{H^2}{8\pi}$, 即超导体在磁场中的自由能为 $F_{sH} = F_s + \dfrac{H^2}{8\pi}$. 因此在一定温度下增加磁场, 就发生从超导态到正常态的转变; 这种转变是一级相变. 临界磁场的值等于

$$\frac{H_c^2}{8\pi} = F_n - F_s.$$

还是以极端情形为限. 对于低温 ($T \ll T_c$) 情况, 从 (36.3) 式和 (36.7) 式忽略小指数项而得

$$H_c(0) = \sqrt{\frac{2mp_0}{\pi}}\Delta_0 = T_c\frac{\pi}{\gamma}\sqrt{\frac{2mp_0}{\pi}} \tag{36.10}$$

以及

$$H_c(T) = H_c(0)\left(1 - \frac{\gamma^2}{3}\frac{T^2}{T_c^2}\right). \tag{36.11}$$

利用 (36.9) 式, 并借助 (36.10) 式将转变点附近的 $H_c(T)$ 通过 $H_c(0)$ 表示, 求得 $H_c(T)$ 在 T_c 附近与温度的关系:

$$H_c(T) = H_c(0)\gamma\sqrt{\frac{8}{7\zeta(3)}}\left(1 - \frac{T}{T_c}\right) \simeq 1.73H_c(0)\left(1 - \frac{T}{T_c}\right). \tag{36.12}$$

还须指出, 实验数据通常遵循以下关系:

$$H_c(T) = H_c(0)\left(1 - \frac{T^2}{T_c^2}\right). \tag{36.13}$$

在两个极端情形下理论公式 (36.11) 和 (36.12) 与经验关系 (36.13) 符合得相当好 (可参阅 [67] 和 [72]).

§37　在弱电磁场中的超导体

§37.1　弱恒定磁场

现在转到超导体的电磁性质. 本节中我们只限于讨论超导体在相当弱的场中

的行为, 外场的值要远小于临界磁场. 假定具有平表面的超导体充满半空间 $z<0$ (图 97), 恒定磁场平行其表面. 引入矢量势 $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{H}=\mathrm{rot}\boldsymbol{A}.$$

真空中 $H=$ 常量, 矢量势可取如:

$$A_{\boldsymbol{y}}=-H_z,\quad A_{\boldsymbol{x}}=A_z=0. \tag{37.1}$$

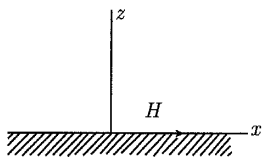


图 97

在磁场的作用下超导体内产生电流; 超导体内场的分布遵从麦克斯韦方程:

$$\Delta\boldsymbol{A}=-4\pi\boldsymbol{j}. \tag{37.2}$$

由于电流本身是外场引起的, 则在对外场的线性近似下电流密度的值比例于 $\boldsymbol{A}$. 从无限超导体的均匀性考虑, 一般情况下电流密度和场的关系应为

$$\boldsymbol{j}(x)=-\int Q(x-y)\boldsymbol{A}(y)\mathrm{d}^4y \tag{37.3}$$

或以傅里叶分量表示:

$$\boldsymbol{j}(k)=-Q(k)\boldsymbol{A}(k). \tag{37.3'}$$

我们不打算详细论述, 如何解方程式 (37.2) 和 (37.3) 所决定的电磁问题, 而只限于推导核 $Q(x-y)$ 的表达式, 以便演示量子场论方法对此种情况的应用. 在给定点电流密度 $\boldsymbol{j}$ 的值, 乃是熟知的二次量子化电流算符 $\hat{\boldsymbol{j}}(x)$ 的量子力学表达式的热力学平均值:

$$\hat{\boldsymbol{j}}(x)=\frac{\mathrm{ie}}{2m}(\nabla_{\boldsymbol{r}'}-\nabla_{\boldsymbol{r}})_{\boldsymbol{r}'\to\boldsymbol{r}}\tilde{\bar{\psi}}(x')\tilde{\psi}(x)-\frac{e^2\boldsymbol{A}(x)}{m}\tilde{\bar{\psi}}(x)\tilde{\psi}(x). \tag{37.4}$$

因此电流密度 $\boldsymbol{j}(x)$ 可以直接通过系统的格林函数写出:

$$\boldsymbol{j}(x)=2\left\{\frac{\mathrm{ie}}{2m}(\nabla_{\boldsymbol{r}'}-\nabla_{\boldsymbol{r}})\mathfrak{G}(x,x')-\frac{e^2\boldsymbol{A}(x)}{m}\mathfrak{G}(x,x')\right\}_{\boldsymbol{r}'\to\boldsymbol{r},\tau'=\tau+0}. \tag{37.5}$$

我们着手求格函数, 更确切些, 求格林函数的一级 (就外场值说) 修正项. 在恒定磁场中所有的格林函数 $\mathfrak{G}$ 和 $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}^+$ 都只和“时间”坐标的差 $\tau=\tau_1-\tau_2$ 有关. 变换到傅里叶分量 $\mathfrak{G}_\omega$ 和 $\mathfrak{F}_\omega$. 在恒定磁场中这些量的方程组为

$$\begin{aligned}&\left\{\mathrm{i}\omega+\frac{1}{2m}\left(\nabla_{\boldsymbol{r}}-\mathrm{i}e\boldsymbol{A}(r)\right)^2+\mu\right\}\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\\&\quad+\Delta(\boldsymbol{r})\mathfrak{F}^+_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\\&\left\{-\mathrm{i}\omega+\frac{1}{2m}\left(\nabla_{\boldsymbol{r}}+\mathrm{i}e\boldsymbol{A}(r)\right)^2+\mu\right\}\mathfrak{F}^+_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\\&\quad-\Delta^*(\boldsymbol{r})\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=0.\end{aligned}\tag{37.6}$$

将格林函数 $\mathfrak{G}$ 和 $\mathfrak{F}^+$ 写成

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_0+\mathfrak{G}^{(1)},\quad \mathfrak{F}=\mathfrak{F}_0+\mathfrak{F}^{(1)},\quad \mathfrak{F}^+=\mathfrak{F}^+_0+\mathfrak{F}^{+(1)},$$

其中 $\mathfrak{G}_0,\mathfrak{F}_0,\mathfrak{F}^+_0$ 是无外场时的格林函数, 而 $\mathfrak{G}^{(1)},\mathfrak{F}^{(1)},\mathfrak{F}^{+(1)}$ 是线性 (对外场) 修正项. 将方程组 (37.6) 线性化, 得

$$\begin{aligned}&\left\{\mathrm{i}\omega+\frac{\nabla^2_{\boldsymbol{r}}}{2m}+\mu\right\}\mathfrak{G}^{(1)}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+\Delta_0\mathfrak{F}^{+(1)}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\\&\quad=-\Delta^{(1)}(\boldsymbol{r})\mathfrak{F}^+_{0\omega}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')+\frac{\mathrm{i}e}{2m}(\nabla_{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\nabla_{\boldsymbol{r}})\mathfrak{G}_{0\omega}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\\&\left\{-\mathrm{i}\omega+\frac{\nabla^2_{\boldsymbol{r}}}{2m}+\mu\right\}\mathfrak{F}^{+(1)}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')-\Delta_0\mathfrak{G}^{(1)}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\\&\quad=\Delta^{*(1)}(\boldsymbol{r})\mathfrak{G}_{0\omega}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-\frac{\mathrm{i}e}{2m}(\nabla_{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\nabla_{\boldsymbol{r}})\mathfrak{F}^+_{0\omega}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').\end{aligned}\tag{37.7}$$

由这些方程式很容易将 $\mathfrak{G}^{(1)}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r})$ 和 $\mathfrak{F}^{+(1)}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 通过 (37.7) 式右端的量表示. 为此宜利用方程组 (37.7) 左端算符的逆算符表达式 (34.32). 然而在写出 $\mathfrak{G}^{(1)}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 的相应结果之前, 先要比较详细地讨论一下方程组 (37.7) 的结构.

方程组 (37.6) 是规范不变的, 因之 (37.7) 式也是规范不变的, 即对变换 (34.26) 和 (34.27) 不变. 因此在线性近似下计算电流

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})=\frac{\mathrm{i}e}{m}T\sum_\omega(\nabla_{\boldsymbol{r}'}-\nabla_{\boldsymbol{r}})_{\boldsymbol{r}'\to\boldsymbol{r}}\mathfrak{G}^{(1)}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')-\frac{e^2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})N}{m}\tag{37.8}$$

时, 最终结果只能和矢量势的横分量有关. 换言之, 在 $\boldsymbol{A}$ 上附加任意标量 φ 的梯度: $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{r}}$, 不能改变电流 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ 的值.

至于函数 $\mathfrak{G}^{(1)}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 和 $\mathfrak{F}^{+(1)}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$, 则根据 (34.27) 式, 它们对矢量势的这种变化并不是不变的. (37.7) 式右端的量 $\Delta^{(1)}(\boldsymbol{r})$ 和 $\Delta^{*(1)}(\boldsymbol{r})$ 也是这样, 它们应从积分方程式

$$\Delta^{*(1)}(\boldsymbol{r})=|\lambda|T\sum_\omega\mathfrak{F}^{+(1)}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$$

决定. 对任意的 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$, 一般说来 $\Delta(\boldsymbol{r})$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的未知函数. 然而可以断定, 在对外场的线性近似下由于问题的均匀性, 函数 $\Delta^{*(1)}(\boldsymbol{r})$ 是标量, 只和 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$ 有关. 因此, 如

果取矢量势的规范为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=0,$$

则可能令 $\Delta^{*(1)}(\boldsymbol{r})$ 恒等于零, 从而使问题大为简化. 以下所得结果都只对纯 "横" 矢量势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 成立.

在无外场时已不存在空间均匀性的问题中 (例如在磁场里的有限尺寸超导体), 还可能推广以上令 $\Delta^{*(1)}$, $\Delta^{(1)}$ 为零的方法. 在这种情形下可用场 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 和矢量 $\boldsymbol{r}$ 或某个问题中的特征矢量构成标量. 因此在不均匀问题的一般情况下, 方程式 (37.7)(其中 $\mathfrak{G}_0$ 和 $\mathfrak{F}_0$ 应理解为满足相应边界条件的格林函数) 中的 $\Delta^{(1)}(\boldsymbol{r})$, $\Delta^{*(1)}(\boldsymbol{r})$, 既和矢量势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 的纵分量, 又和横分量有关. 然而总能如此选出纵部分 $\boldsymbol{A}_{\text{纵}}=\mathrm{grad}\varphi$, 以令 $\Delta^{(1)}(\boldsymbol{r})$, $\Delta^{*(1)}(\boldsymbol{r})$ 等于零. 至于能满足此条件的函数 φ, 则它可由 $\mathrm{div}\boldsymbol{j}=0$, 即电荷守恒条件决定.

现在还回到无限超导体的方程式 (37.7). 令 $\Delta^{(1)}(\boldsymbol{r})=0$ 并利用 (34.32) 式, 得到格林函数线性修正项 $\mathfrak{G}^{(i)}_{\omega}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 的如下表达式:

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}^{(1)}_{\omega}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=&\frac{\mathrm{i}e}{m}\int\{\mathfrak{G}_{0\omega}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{l})(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{l})\nabla_{\boldsymbol{l}})\mathfrak{G}_{0\omega}(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{r}')\\&+\mathfrak{F}_{0\omega}(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{r})(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{l})\nabla_{\boldsymbol{l}})\mathfrak{F}^{+}_{0\omega}(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{l})\}\mathrm{d}\boldsymbol{l}.\end{aligned}\tag{37.9}$$

在此式中已用过条件 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=0$, 故 $[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{l})\nabla_{\boldsymbol{l}}]$ 中的微分只作用在函数 $\mathfrak{G}_{0\omega}(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{r}')$ 和 $\mathfrak{F}^{+}_{0\omega}(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{l})$ 上. 根据 (37.8) 式, 电流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ 为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})=&\frac{e^2}{m^2}T\sum_{\omega}(\nabla_{\boldsymbol{r}}-\nabla_{\boldsymbol{r}'})\int\{\mathfrak{G}_{0\omega}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{l})(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{l})\nabla_{\boldsymbol{l}})\mathfrak{G}_{0\omega}(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{r}')\\&+\mathfrak{F}_{0\omega}(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{r})(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{l})\nabla_{\boldsymbol{l}})\mathfrak{F}^{+}_{0\omega}(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{l})\}_{\boldsymbol{r}'\to\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{l}-\frac{Ne^2}{m}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}).\end{aligned}\tag{37.10}$$

这里宜转到傅里叶表象, 仍以普通方式引入电流密度 $\boldsymbol{j}(r)$ 和矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 的傅里叶分量:

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}d\boldsymbol{k},\quad\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{k}.$$

分量 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k})$ 和 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})$ 以如下方程式相联系:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k})=&-\frac{2e^2T}{(2\pi)^3m^2}\sum_{\omega}\int\boldsymbol{p}(\boldsymbol{p}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}))\{\mathfrak{G}_{\omega}(\boldsymbol{p}_+)\mathfrak{G}_{\omega}(\boldsymbol{p}_-)\\&+\mathfrak{F}_{\omega}(\boldsymbol{p}_+)\mathfrak{F}^{+}_{\omega}(p_-)\}\mathrm{d}\boldsymbol{p}-\frac{Ne^2}{m}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}),\end{aligned}\tag{37.11}$$

其中 $\boldsymbol{p}_{\pm}=\boldsymbol{p}\pm\dfrac{\boldsymbol{k}}{2}$. 再强调一次, 这些结果只适用于矢量势的横规范 (然而可以证明,

所得公式在任意规范下成立, 即纵部分不出现在最终结果里).

超导体中的场 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 和电流 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ 在数量级为穿透深度 δ 的距离上变化, 其通常值约为 $\sim 10^{-5}$(即远大于原子间距离). 因此 (37.11) 式中重要的只是在 $k \sim \dfrac{1}{\delta} \ll p_0$ 区域内的分量 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k})$ 和 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})$. 我们以后将看到, (37.11) 式核中的积分基本上在费米面附近 $|\boldsymbol{p}|$ 值的窄区间 $||\boldsymbol{p}| - p_0| \sim |\boldsymbol{k}|$ 内进行. 其次, (37.11) 式中只有两个矢量 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})$, 而且 $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{A} = 0$. 取矢量 $\boldsymbol{k}$ 为积分变量 $\boldsymbol{p}$ 的坐标极轴, 并在方位面内对角度平均, 立刻看出矢量 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k})$ 平行于矢量 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})$. 基于以上所述, 并将函数 $\mathfrak{S}$ 和 $\mathfrak{F}$ 的表达式 (34.35) 代入, 得

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k}) = -\frac{Ne^2}{m}\bar{Q}(\boldsymbol{k})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}),$$

其中

$$\begin{aligned}\bar{Q}(\boldsymbol{k}) =& 1 + \frac{3T}{4}\sum_{\omega}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\xi \\ &\times \frac{(\mathrm{i}\omega + \xi_+)(\mathrm{i}\omega + \xi_-) + \Delta^2}{[\omega^2 + \xi_+^2 + \Delta^2][\omega^2 + \xi_-^2 + \Delta^2]}\end{aligned} \tag{37.12}$$

$\left(\text{我们利用了}\dfrac{p_0^3}{3\pi^2} = N\right)$. 当 $\boldsymbol{k}$ 的值很小时, $\xi_{\pm} = \xi \pm \dfrac{\boldsymbol{vk}}{2}$.

为了作进一步计算, 须注意 (37.12) 式右端的被积表达式. 当 ω 和 ξ 很大时的变化为: 当 $\omega \gg \xi$ 时, 如 ω^{-2}, 而当 $\xi \gg \omega$ 时, 如 ξ^{-2}. 因此严格说来, 对 ξ 的积分和对 ω 的求和是发散的. 为了理解问题何在, 我们考虑对正常金属 (即 $\Delta = 0$) 此式中的奇异性:

$$\frac{3}{4}T\sum_{\omega}\int\mathrm{d}\xi\int_0^{\pi}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta\frac{1}{(\mathrm{i}\omega - \xi_+)(\mathrm{i}\omega - \xi_-)}. \tag{37.13}$$

首先要注意, 此式中对频率求和与对 ξ 的积分的顺序极为重要. 实际上当先对 ξ 积分时, 不管 ω 的符号如何, 被积表达式的极点总处于实轴一侧, 因而结果为零. 现在先对频率 $\omega = (2n+1)\pi T$ 求和. 容易验证, 这个简单级数求和的结果是

$$\frac{3}{8}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta\int\frac{\mathrm{d}\xi}{\boldsymbol{vk}}\left[\mathrm{th}\frac{\xi_-}{2\mathrm{T}} - \mathrm{th}\frac{\xi_+}{2T}\right] = -1. \tag{37.14}$$

由积分和求和顺序改变而引起的非单值性, 其原因在于整个表达式形式上是发散的. 然而可以看出, 问题的实质是, 先对频率求和时, 其结果只在费米面附近很窄的能量范围内才不为零 (从 (37.14) 式知, 这个范围的宽度约为 $\sim \boldsymbol{vk}$). 在这个范围内对动量的积分很快收敛, 正因为如此, 从费米面算起的激发能才可近似地写成 $\xi = \dfrac{\boldsymbol{p}^2 - p_0^2}{2m} \simeq v(|\boldsymbol{p}| - p_0)$. 由于这个原因, 在所有这类积分中永远应先对频率求和,

再对 ξ 积分, 因为在相反的情形下, 对 ξ 的积分涉及 $||\boldsymbol{p}|-p_0|\sim p_0$ 的区域, 其中所有在费米面附近的展开式都不适用.

然而可以避免在 (37.12) 式中作复杂的对频率求和. 为此我们作如下处理. 在 (37.12) 式被积表达式中加上再减去正常金属的表达式 (37.13). 这时两个被积表达式之差的积分和对频率求和迅速收敛, 因而可以变换积分和求和顺序. 正常金属的表达式已在 (37.14) 式中算出, 它消去了 (37.12) 式中的 1. 对 ξ 积分, 得

$$\bar{Q}(\boldsymbol{k})=\frac{3\pi T}{4}\sum_{\omega}\int_{-1}^{+1}\frac{(1-\beta^2)\mathrm{d}\beta}{\sqrt{\omega^2+\Delta^2}}\cdot\frac{\Delta^2}{\omega^2+\Delta^2+\dfrac{1}{4}v^2|\boldsymbol{k}|^2\beta^2}. \tag{37.15}$$

如果不对 $|\boldsymbol{k}|$ 的值作任何假设, 很难继续变换这个核. 从被积表达式的结构看出, 起作用的只是 $v|\boldsymbol{k}|$ 值和转变温度 T_c 之比. 事实上当 $T\ll T_\mathrm{c}$, 能隙 Δ_0 的数量级为 T_c; 在 T_c 附近, 即 $|T-T_\mathrm{c}|\ll T_\mathrm{c}$, 能隙很小, 但 $\omega=(2n+1)\pi T\sim T_\mathrm{c}$. 具有长度量纲的量 $\xi_0\sim\dfrac{v}{T_\mathrm{c}}$ 是现代超导理论的特征参量, 这是束缚电子的关联半径. 穿透深度 δ 可能大于, 也可能小于 ξ_0. 在第一种情况下, 主要的 $|\boldsymbol{k}|\sim\dfrac{1}{\delta}$ 满足不等式 $v|\boldsymbol{k}|\ll T_\mathrm{c}$, 而第二种情况由相反的不等式 $v|\boldsymbol{k}|\gg T_\mathrm{c}$ 描述.

先讨论第一种情况. 设 $v|\boldsymbol{k}|\ll T_\mathrm{c}$. 在 (37.15) 式中只保留对 $v|\boldsymbol{l}|T_\mathrm{c}$ 的第一个不为零的展开项:

$$\bar{Q}(\boldsymbol{k})=\frac{3\pi}{4}\Delta^2T\sum_{\omega}\int_{-1}^{+1}\frac{(1-\beta^2)\mathrm{d}\beta}{(\omega^2+\Delta^2)^{3/2}}=\pi T\Delta^2\sum_{\omega}\frac{1}{(\omega^2+\Delta^2)^{3/2}}. \tag{37.16}$$

因此, 当 $\delta\gg\xi_0$, 核 $\bar{Q}(\boldsymbol{k})$ 与 $\boldsymbol{k}$ 无关, 电流和场的关系是局域性的, 即在点 $\boldsymbol{r}$ 的电流值只由同一点的场值 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 决定:

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})=-\frac{e^2N_\mathrm{s}}{m}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}). \tag{37.17}$$

H. London 和 F. London[73] 首先建议了这样的方程. 因此超导体中 $\delta\gg\xi_0$ 的情形, 自然地称为伦敦情形. 函数 $N_\mathrm{s}(T)$ 起着 "超导" 电子数目的作用. (37.16) 式将比值 $\dfrac{N_\mathrm{s}(T)}{N}$ 作为温度的函数表出. 应着重指出, 这里的能隙 Δ 是一定温度下无外场存在时的平衡能隙, 它由条件 (34.37) 决定. $T=0$ 时对频率的求和可以换成积分: $2\pi T\delta n=\mathrm{d}\omega$. 计算积分得出, $T=0$ 时超导电子的数目等于电子总数 N.

在 T_c 附近, $\Delta(T)$ 的值远小于 T_c 和 ω. 省去分母中的 Δ^2, 得级数:

$$\frac{N_\mathrm{s}(T)}{N}=\frac{2\Delta^2}{\pi^2T^2}\sum_{n>0}\frac{1}{(2n+1)^3},$$

它已在 §36 中算过. 利用 T_{c} 附近能隙的表达式 (36.6), 在所讨论的情况下, 得到

$$\frac{N_{\mathrm{s}}(T)}{N}=2\left(1-\frac{T}{T_{\mathrm{c}}}\right).$$

现在讨论第二种极限情况 $v|\boldsymbol{k}|\gg T_{\mathrm{c}}$. 被积表达式在点

$$\frac{v|\boldsymbol{k}|\beta}{2}=\pm\mathrm{i}\sqrt{\omega^2+\Delta^2}$$

处有极点. 既然 $v|\boldsymbol{k}|$ 很大, 这就说明被积表达式在相应于 $\beta\simeq\dfrac{T_{\mathrm{c}}}{v|\boldsymbol{k}|}\ll 1$ 的角度范围内有尖锐的极大值. 因此分子中有 β^2 的项与 1 相比, 可略而不计. 剩下的式子是迅速收敛的对 β 的积分, 而且在区间 $\dfrac{T_{\mathrm{c}}}{v|\boldsymbol{k}|}\ll\beta\ll 1$ 内, 积分下的式子减小如 $1/\beta^2$. 作代换 $v|\boldsymbol{k}|\beta=x$, 并令积分限等于无穷大, 借助留数理论算出积分得

$$\bar{Q}(\boldsymbol{k})=\frac{3T\pi^2}{v|\boldsymbol{k}|}\sum_{\omega>0}\frac{\Delta^2}{\omega^2+\Delta^2}=\frac{3\pi^2}{4v|\boldsymbol{k}|}\Delta\mathrm{th}\frac{\Delta}{2T}. \tag{37.18}$$

我们看到, 这种情形下核 $\bar{Q}(\boldsymbol{k})$ 与 $\boldsymbol{k}$ 有密切关系. 因此如果场的穿透深度 $\delta\ll\xi_0$, 则 (37.3) 式是非局域性的, 换言之, 给定点电流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ 的值, 由这个点附近线度为 ξ_0 的邻域内矢量势的值决定. Pippard[74] 以实验数据的分析为基础, 首先预言了某些超导体中电流和场的非局域性关系. 以后 $\delta\ll\xi_0$ 时的这种情形我们将称为 Pippard 情形.

立刻须指出以下重要情况. 我们已经讲过, 为了确定实际存在的是哪一种情形, 重要的只是穿透深度 δ 和参量 $\xi_0\sim\dfrac{v}{T_{\mathrm{c}}}$ 的比. 因此如果在足够低的温度下条件 $\delta\ll\xi_0$ 成立, 则 δ 随温度接近 T_{c} 而增加, 在足够接近 T_{c} 的温度区间内发生相反的情形, 即 $\delta\gg\xi_0$. 换言之, 在邻近 T_{c} 的温度区间内总是伦敦情形. 相当多的已知的超导体在几乎整个温度范围内都是 Pippard 型的, 而只在很窄的区域 $|T-T_{\mathrm{c}}|\ll T_{\mathrm{c}}$ 内, 才变成伦敦型. 其他超导元素在低温下处于中间情形, 因此在 T_c 附近有相当显著的伦敦区域. 我们在这里未涉及合金的问题 (见 §39).

有了核 $\bar{Q}(\boldsymbol{k})$ 的表达式 (37.15), 可以借助麦克斯韦方程式求解磁场穿透平面超导体的问题. 在伦敦情形下特别容易求解: 将 (37.17) 式代入 (37.2) 式, 并认为所有的量都只是坐标 z 的函数, 我们求得矢量势在超导体内的分布为

$$\boldsymbol{A}_y(z)=-H(0)\delta\mathrm{e}^{\frac{z}{\delta}},$$

其中 δ 是伦敦穿透深度:

$$\delta=\sqrt{\frac{m}{4\pi N_{\mathrm{s}}\mathrm{e}^2}} \tag{37.19}$$

或以普通单位写出:

$$\delta = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi N_{\mathrm{s}} e^2}}.$$

在 Pippard 情形下解类似问题就复杂得多, 须引用特别的数学方法. 我们不在此叙述, 而建仪直接对超导理论感兴趣的读者去阅读原始文献 (参阅 [67] 和 [72]).

§37.2 交变场中的超导体

迄今我们只限于讨论超导体在恒定磁场中的性质. 然而超导体在交变电磁场中的行为, 具体说, 电磁辐射在超导体表面吸收和反射的特点, 也有很重要的物理意义. 在交变场情形下, 不能直接使用前面的热力学的、平衡的处理方法. 这时第 3 章中推导出的, 将各种时间函数和热力学方法中相应函数联系起来的解析关系, 就极为有益了. 设频率为 ω 的交变场 $\boldsymbol{A}$(和从前一样令 $\varphi = 0$) 存在于无限超导体内. 超导体内在场的影响下产生的电流, 显然仍以 (37.3) 型的关系式和场相联系. 差别只在于对交变场须知道频率 ω 不为零的傅里叶分量 $Q(\boldsymbol{k}, \omega)$[前面定义的核 $\bar{Q}(\boldsymbol{k})$, 显然就是 $\bar{Q}(\boldsymbol{k}) \equiv \bar{Q}(\boldsymbol{k}, 0)$]. 仍从电流算符的量子力学表达式出发:

$$\begin{aligned}\hat{\tilde{\boldsymbol{j}}}(x) &= \frac{\mathrm{i}e}{2m}(\nabla_{\boldsymbol{r}'} - \nabla_{\boldsymbol{r}})_{\boldsymbol{r}'\to\boldsymbol{r}}\tilde{\psi}^{+}(x')\tilde{\psi}(x') - \frac{e^2}{m}\boldsymbol{A}(x)\tilde{\psi}^{+}(x')\tilde{\psi}(x') \\ &\equiv \hat{\tilde{\boldsymbol{j}}}_1(x) - \frac{e^2}{m}\boldsymbol{A}(x)\tilde{\psi}^{+}(x)\tilde{\psi}(x),\end{aligned}$$

式中算符在海森伯表象中写出, 它们与外场有关. 根据 (6.28) 式, 和相互作用表象相应算符的关系是

$$\hat{\tilde{\boldsymbol{j}}} = S^{-1}(t)\boldsymbol{j}S(t),$$

其中

$$S(t) = T\exp\left\{\mathrm{i}\int_{-\infty}^{t}[\boldsymbol{j}(x)\boldsymbol{A}(x)]\mathrm{d}^4x\right\}.$$

在对外场的线性近似下:

$$\begin{aligned}\hat{\tilde{\boldsymbol{j}}}_\alpha(x) =& \hat{\boldsymbol{j}}_{1\alpha}(x) - \frac{e^2}{m}\boldsymbol{A}_\alpha(x)\psi^{+}(x)\psi(x) \\ &+ \mathrm{i}\int_{-\infty}^{t}[\hat{\boldsymbol{j}}_{1\alpha}(x), \hat{\boldsymbol{j}}_{1\beta}(y)]\boldsymbol{A}_\beta(y)\mathrm{d}^4y.\end{aligned}$$

超导体中一定点在一定时刻的电流值乃是平均值:

$$\boldsymbol{j}(x) = \langle\hat{\tilde{\boldsymbol{j}}}(x)\rangle = \sum_m \mathrm{e}^{\frac{\Omega+\mu N_m - E_m}{T}}\langle m|\hat{\tilde{\boldsymbol{j}}}(x)|m\rangle.$$

由于 $\langle\hat{\boldsymbol{j}}_1(x)\rangle \equiv \boldsymbol{0}$, 有

$$\boldsymbol{j}_\alpha(x) = -\frac{e^2N}{m}\boldsymbol{A}_\alpha(x) + \int P^{\mathrm{R}}_{\alpha\beta}(x-y)\boldsymbol{A}_\beta(y)\mathrm{d}^4y, \tag{37.20}$$

式中我们引入了记号：

$$P^{\mathrm{R}}_{\alpha\beta}(x-y)=\begin{cases}\mathrm{i}\langle[\hat{\boldsymbol{j}}_\alpha(x),\hat{\boldsymbol{j}}_\beta(y)]\rangle, & t_x>t_y,\\ 0, & t_x<t_y.\end{cases}\tag{37.21}$$

变到傅里叶分量后, 积分关系 (37.3) 的核为

$$Q_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega)=\frac{\mathrm{e}^e N}{m}\delta_{\alpha\beta}-P^{\mathrm{R}}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega).$$

现在以温度大于零的方法处理同一问题, 形式地认为场 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\tau)$ 和 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},\tau)$ 是“时间”参量 τ 的函数. 这时代替 (37.20) 式的是

$$\boldsymbol{j}_\alpha(\boldsymbol{r},\tau)=-\frac{e^2N}{m}\boldsymbol{A}_\alpha(\boldsymbol{r},\tau)+\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}\int_0^\beta\mathscr{P}_{\alpha\beta}(x-y)\boldsymbol{A}_\beta(y)\mathrm{d}\tau_y,$$

其中

$$\mathscr{P}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',\tau-\tau')=\langle T\tau(\hat{\boldsymbol{j}}_{\alpha1}(\boldsymbol{r},\tau),\hat{\boldsymbol{j}}_{1\beta}(\boldsymbol{r}',\tau'))\rangle.\tag{37.22}$$

引入热力学量的傅里叶分量, 我们求得

$$Q_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega_0)=\frac{e^2N}{m}\delta_{\alpha\beta}-\mathscr{P}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega_0),$$

上式起着核 $Q_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega_0)$ 的作用, 其中 ω_0 取不连续值, $\omega_0=2n\pi T$.

现在我们以一般形式证明, 傅里叶分量 $P^{\mathrm{R}}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega)$ 和 $\mathscr{P}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega_0)$ 乃是同一个在上半 ω 平面解析的复变函数的值, 前者取在实轴上, 后者取在点 $\omega=\mathrm{i}\omega_0$ 处. 证明和前几章中作过的完全相同. 将 (37.21) 式和 (37.22) 式按中间态求和展开, 这时为 $P^{\mathrm{R}}_{\alpha\beta}$ 和 $\mathscr{P}_{\alpha\beta}$ 两种情形下定义的傅里叶分量：

$$P^{\mathrm{R}}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega)=-\sum_{m,p}\rho_{pm}(\boldsymbol{k})\frac{1}{\omega-\omega_{pm}+\mathrm{i}\delta},$$

$$\mathscr{P}^{\mathrm{R}}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega_0)=-\sum_{m,p}\rho_{pm}(\boldsymbol{k})\frac{1}{i\omega_0-\omega_{pm}},\tag{37.23}$$

其中

$$\rho_{pm}(\boldsymbol{k})=\mathrm{e}^{\frac{\Omega+\mu N_m-E_m}{T}}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\omega_{pm}}{T}}\right)(\boldsymbol{j}_{\alpha1})_{mp}(\boldsymbol{j}_{\beta1})_{pm}(2\pi)^3\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_{pm}).$$

从 (37.23) 式看出, 在 $\mathscr{P}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega_0)$ 中作代换 $\omega_0\to-\mathrm{i}\omega$, 就得到 $P^{\mathrm{R}}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega)$, 而且它在实轴上的值是 ω 从上面趋向实轴的极限.

这样, 以松原方法算得 $\mathscr{P}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega_0)$, 将其解析延拓到实频率 $P^{\mathrm{R}}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega)=\mathscr{P}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},-\mathrm{i}\omega)$, 并要求所得的函数在 ω 上半平面无奇点, 原则上就可以求得交变场中决定 $\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 关系的核 $Q_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega)$.

以此为目的, 我们形式地讨论在对 τ 交变的场 $A(\boldsymbol{r},\tau)=A(\boldsymbol{k},\omega_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}-\mathrm{i}\omega_0\tau}$ 中, 热力学函数 $\mathfrak{G}$ 和 $\mathfrak{F}^+$ 的方程式. 电流的傅里叶分量的表达式不是 (37.11) 式, 而是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k},\omega_0)=&-\frac{2e^2}{(2\pi)^3m^2}T\sum_{\omega'}\int\boldsymbol{p}[\boldsymbol{p}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k},\omega_0)][\mathfrak{G}(p_+)\mathfrak{G}(p_-)\\&+\mathfrak{F}(p_+)\mathfrak{F}^+(p_-)]\mathrm{d}\boldsymbol{p}-\frac{Ne^2}{m}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k},\omega_0),\end{aligned}$$

这里 $p_\pm=\left(\boldsymbol{p}\pm\dfrac{\boldsymbol{k}}{2};\omega'\pm\dfrac{\omega_0}{2}\right)$. 重复在恒定场中导致 (37.15) 式的论点, 对 ξ 积分后得

$$\begin{aligned}\overline{Q}(\boldsymbol{k},\omega_0)=&\frac{3\pi T}{4}\sum_{\omega'}\int_{-1}^{+1}(1-\beta^2)\mathrm{d}\beta\\&\times\left\{\frac{\mathrm{i}(\omega_+-\sqrt{\omega_+^2+\Delta^2})[\mathrm{i}(\omega_--\sqrt{\omega_+^2+\Delta^2})-v|\boldsymbol{k}|\beta]+\Delta^2}{\sqrt{\omega_+^2+\Delta^2}[\omega_-^2+\Delta^2+(v|\boldsymbol{k}|\beta-\mathrm{i}\sqrt{\omega_+^2+\Delta^2})^2]}\right.\\&\left.+\frac{\mathrm{i}(\omega_--\sqrt{\omega_-^2+\Delta^2})[\mathrm{i}(\omega_+-\sqrt{\omega_-^2+\Delta^2})+v|\boldsymbol{k}|\beta]+\Delta^2}{\sqrt{\omega_-^2+\Delta^2}[\omega_+^2+\Delta^2+(v|\boldsymbol{k}|\beta+\mathrm{i}\sqrt{\omega_-^2+\Delta^2})^2]}\right\}.\end{aligned}\tag{37.24}$$

和前面一样, 为了进一步化简此式, 须对 $v|\boldsymbol{k}|$ 的值作一些假定. 我们限于最有实际意义的情形, 即 $v|\boldsymbol{k}|\gg(T_\mathrm{c},\omega_0)$. 这时和从前一样, 对 $\overline{Q}(\boldsymbol{k},\omega_0)$ 的基本贡献来自相应 $\beta\sim\dfrac{T_\mathrm{c}}{v|\boldsymbol{k}|},\dfrac{\omega'}{v|\boldsymbol{k}|}$ 的角度范围, 因此积分下分子中可省去 β^2 项, 剩下的圆括弧中的表达式在 $\beta\gg\dfrac{T_\mathrm{c}}{v|\boldsymbol{k}|},\dfrac{\omega'}{v|\boldsymbol{k}|}$ 时, 比 $T=0$ 时下降得慢, 即如 $1/\beta$. 因此宜改组 (37.24) 式各项, 以分出下降较慢者:

$$\begin{aligned}\overline{Q}(\boldsymbol{k},\omega_0)=&\frac{3\pi T}{4}\sum_{m'}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\beta\\&\times\left\{\frac{\Delta^2-(\omega_++\sqrt{\omega_+^2+\Delta^2})(\omega_-+\sqrt{\omega_-^2+\Delta^2})}{\sqrt{\omega_+^2+\Delta^2}[\omega_-^2+\Delta^2+(v|\boldsymbol{k}|\beta-\mathrm{i}\sqrt{\omega_+^2+\Delta^2})^2]}\right.\\&+\frac{\Delta^2-(\omega_-+\sqrt{\omega_-^2+\Delta^2})(\omega_++\sqrt{\omega_+^2+\Delta^2})}{\sqrt{\omega_-^2+\Delta^2}[\omega_+^2+\Delta^2+(v|\boldsymbol{k}|\beta+\mathrm{i}\sqrt{\omega_-^2+\Delta^2})^2]}\\&\left.-\mathrm{i}\frac{\omega_++\sqrt{\omega_+^2+\Delta^2}}{\sqrt{\omega_+^2+\Delta^2}[v|\boldsymbol{k}|\beta-\mathrm{i}(\sqrt{\omega_+^2+\Delta^2}+\sqrt{\omega_-^2+\Delta^2})]}\right.\end{aligned}$$

$$+\mathrm{i}\frac{\omega_- + \sqrt{\omega_-^2+\Delta^2}}{\sqrt{\omega_-^2+\Delta^2}[v|\boldsymbol{k}|\beta+\mathrm{i}(\sqrt{\omega_+^2+\Delta^2}+\sqrt{\omega_-^2+\Delta^2})]}\Bigg\}.$$

完成积分并取极限 $v|\boldsymbol{k}|\to\infty$, 得到

$$\overline{Q}(\boldsymbol{k},\omega_0)=\frac{3\pi^2T}{4v|\boldsymbol{k}|}\sum_{\omega'}\left[1+\frac{\Delta^2-\omega'(\omega'-\omega_0)}{\sqrt{\omega'^2+\Delta^2}\sqrt{(\omega'-\omega_0)^2+\Delta^2}}\right]. \tag{37.25}$$

当 $\omega_0=0$, 这个结果回到 (37.18) 式.

既然 (37.25) 式求和时 ω' 取值 $v=(2n+1)\pi T$, $\overline{Q}(\boldsymbol{k},\omega_0)$ 可表示成回路积分:

$$\overline{Q}(\boldsymbol{k},\omega_0)=\frac{3\pi\mathrm{i}}{16v|\boldsymbol{k}|}\int_C\left\{1+\frac{\Delta^2-\omega'(\omega'-\omega_0)}{\sqrt{\omega'^2+\Delta^2}\sqrt{(\omega'-\omega_0)^2+\Delta^2}}\right\}\tan\frac{\omega'}{2T}\mathrm{d}\omega', \tag{37.26}$$

其中回路 C 由图 98 所示的两部分 C_+ 和 C_- 组成. 函数 $\sqrt{\omega'^2+\Delta^2}$ 和 $\sqrt{(\omega'-\omega_0)^2+\Delta^2}$ 的解析支的选取也示于同一图中: 在割线上这些函数取纯虚值, 而且在上割线右侧和下割线左侧, 虚部是正的.

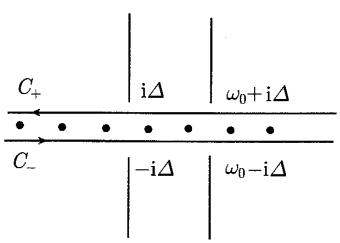


图 98

从对回路 C_+ 和 C_- 的积分变到对四条回路 $C_+^{(1,2)}$ 和 $C_-^{(1,2)}$ 积分 (图 99). 容易看出, 沿 $C_+^{(2)}$ 和 $C_-^{(2)}$ 的积分形式地作为 ω_0 的函数, 在 $\omega_0=(2n+1)\pi T$ 处有奇异性, 因为这时积分回路经过点 $\omega'=(2n+1)\pi T$, 该处 $\tan\dfrac{\omega'}{2T}$ 等于无穷大. 因此为了确定在变量 $\omega=\mathrm{i}\omega_0$ 上半平面解析的函数支, 须在特殊值 $\omega=2n\pi T_i$ 处变换 (37.26) 式, 以便此式推广到任意 ω 值后, 积分回路不通过被积表达式的奇点. 为此我们注意到, 当 $\omega_0=2n\pi T$ 时, 由于 $\tan\dfrac{\omega'}{2T}$ 的周期性, 沿 $C_-^{(2)}$ 的积分等于沿 $C_+^{(1)}$(沿 $C_+^{(2)}$ 和 $C_-^{(1)}$ 的积分亦等). 只要在沿 $C_-^{(2)}$ 的积分中作变量代换 $\omega'-\omega_0=-u$, 就容易证明上述论断. 因此 (37.26) 式可改写成

$$\overline{Q}(\boldsymbol{k},\omega_0)=\frac{3\pi\mathrm{i}}{8v|\boldsymbol{k}|}\left(\int_{C_-^{(1)}}+\int_{C_+^{(1)}}\right)\times\left[1+\frac{\Delta^2-\omega'(\omega'-\omega_0)}{\sqrt{\omega'^2+\Delta^2}\sqrt{(\omega'-\omega_0)^2+\Delta^2}}\right]\tan\frac{\omega'}{2T}\mathrm{d}w'.$$

所得表达式作为参量 $\omega=\mathrm{i}\omega_0$ 的函数, 乃是在 ω 上半平面解析的函数, 因为这种情形下 $\mathrm{Im}\omega>0$ 时的积分回路不通过被积表达式的任何奇点.

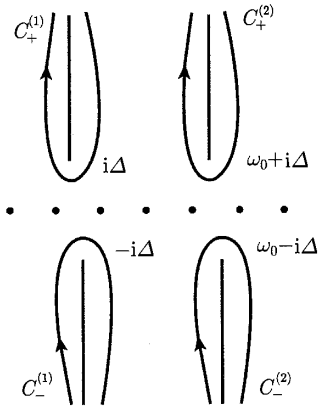


图 99

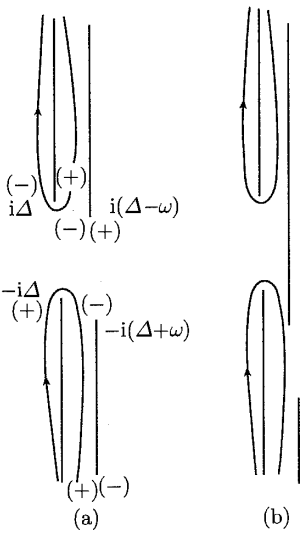


图 100

我们关心的 $\omega>0$ 时的 $\overline{Q}(\boldsymbol{k},\omega)$ 可以直接写出. 这时出现两种情形: (a) $\omega<2\Delta$ 和 (b) $\omega>2\Delta$. 两种情况下的计算可简单地按图 100 完成, 图中括弧里指明了割线各侧函数虚部的符号. 下面给出最终结果[75,76]:

$$\overline{Q}(\boldsymbol{k},\omega)=\frac{3\pi}{4v|\boldsymbol{k}|}\left\{\int_{\Delta}^{\Delta+\omega}\mathrm{th}\frac{\omega'}{2T}\frac{\omega'(\omega'-\omega)+\Delta^2}{\sqrt{\omega'^2-\Delta^2}\sqrt{\Delta^2-(\omega'-\omega)^2}}\mathrm{d}\omega',\right.$$
$$\left.+\mathrm{i}\int_{\Delta}^{\infty}\left[\mathrm{th}\frac{\omega'}{2T}-\mathrm{th}\frac{\omega'+\omega'}{2T}\right]\frac{\omega'(\omega'+\omega)+\Delta^2}{\sqrt{\omega'^2-\Delta^2}\sqrt{(\omega'+\omega)^2-\Delta^2}}\mathrm{d}\omega'\right\},$$

$\omega<2\Delta$,

$$\overline{Q}(\boldsymbol{k},\omega)=\frac{3\pi}{4v|\boldsymbol{k}|}\left\{\int_{\omega-\Delta}^{\omega+\Delta}\mathrm{th}\frac{\omega'}{2T}\frac{\omega'(\omega'-\omega)+\Delta^2}{\sqrt{\omega'^2-\Delta^2}\sqrt{\Delta^2-(\omega'-\omega)^2}}\mathrm{d}\omega'\right.$$
$$+\mathrm{i}\int_{\Delta}^{\omega-\Delta}\mathrm{th}\frac{\omega'}{2T}\frac{\omega'(\omega'-\omega)+\Delta^2}{\sqrt{\omega'^2-\Delta^2}\sqrt{(\omega'-\omega)^2-\Delta^2}}\mathrm{d}\omega'$$
$$\left.+\mathrm{i}\int_{\Delta}^{\infty}\left[\mathrm{th}\frac{\omega'}{2T}-\mathrm{th}\frac{\omega'+\omega}{2T}\right]\frac{\omega'(\omega'+\omega)+\Delta^2}{\sqrt{\omega'^2-\Delta^2}\sqrt{(\omega'+\omega)^2-\Delta^2}}\mathrm{d}\omega'\right\},$$

$\omega<2\Delta$.

§38 任意磁场中的超导体在转变温度附近的性质

超导体在临界温度附近的性质是一种特殊情形. 这时能隙足够小, 因而所有的

方程式大为简化. 从 §36 节的结果 (36.4) 式容易看出, 可将方程式按 $1-\dfrac{T}{T_{\mathrm{c}}}\ll 1$ 展开. 此外我们已在上节指出, 在 T_{c} 附近弱磁场的穿透深度 $\delta\gg\xi_0$, 即所有在场中的量, 包括场本身, 在远大于理论中参量 $\xi_0\sim\dfrac{v}{T_{\mathrm{c}}}$ 的距离上才有显著变化. 由于这种情况, 在这个温度范围内可以建立描述超导体在任意磁场 (数量级为临界磁场) 中性质的理论 (Gorkov[77]).

我们为此重新写出方程式 (37.6):

$$\begin{aligned}&\left\{\mathrm{i}\omega+\frac{1}{2m}\left(\nabla_{\boldsymbol{r}}-\mathrm{i}e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right)^2+\mu\right\}\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\\&\quad+\triangle(\boldsymbol{r})\mathfrak{F}^+_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\\&\left\{-\mathrm{i}\omega+\frac{1}{2m}\left(\nabla_{\boldsymbol{r}}+\mathrm{i}e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right)^2+\mu\right\}\mathfrak{F}^+_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\\&\quad-\triangle^*(\boldsymbol{r})\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=0,\end{aligned}$$

以及决定能隙数值的方程式:

$$\triangle^*(\boldsymbol{r})=|\lambda|T\sum_{\omega}\mathfrak{F}^+_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}).\tag{38.1}$$

既然 $|\Delta|$ 很小, 我们将函数 $\mathfrak{F}^+_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 按 $|\Delta|$ 的幂展开并代入 (38.1) 式, 就求得 $\triangle^*(\boldsymbol{r})$ 的方程式. 这时宜引入正常金属 (在场 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 中) 的电子格林函数的傅里叶分量 $\widetilde{\mathfrak{G}}^{(0)}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$. $\widetilde{\mathfrak{G}}^{(0)}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 满足的方程式可以两种方式写出:

$$\left\{\mathrm{i}\omega+\frac{1}{2m}\left(\nabla_{\boldsymbol{r}}-\mathrm{i}e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right)^2+\mu\right\}\widetilde{\mathfrak{G}}^{(0)}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\tag{38.2}$$

或者

$$\left\{\mathrm{i}\omega+\frac{1}{2m}\left(\nabla'_{\boldsymbol{r}}+\mathrm{i}e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}')\right)^2+\mu\right\}\widetilde{\mathfrak{G}}^{(0)}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').\tag{38.2'}$$

借助函数 $\widetilde{\mathfrak{G}}^{(0)}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 和方程式 (38.2'), 将 $\mathfrak{G}_\omega$ 和 $\mathfrak{F}^+_\omega$ 的方程式写成积分形式:

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')&=\tilde{\mathfrak{G}}^{(0)}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')-\int\widetilde{\mathfrak{G}}^{(0)}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{l})\triangle(\boldsymbol{l})\mathfrak{F}^+_\omega(\boldsymbol{l},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{l},\\\mathfrak{F}^+_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')&=\int\widetilde{\mathfrak{G}}^{(0)}_{-\omega}(\boldsymbol{l},\boldsymbol{r}')\triangle^*(\boldsymbol{l})\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{l},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{l}.\end{aligned}\tag{38.3}$$

先求函数 $\widetilde{\mathfrak{G}}^{(0)}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$. 无磁场时 $\widetilde{\mathfrak{G}}^{(0)}_\omega(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ 等于 $(R=|R|=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)$:

$$\mathfrak{G}^{(0)}_\omega(R)=\begin{cases}-\dfrac{m}{2\pi R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_0R-\frac{|\omega|}{v}R}, & \omega>0,\\-\dfrac{m}{2\pi R}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_0R-\frac{|\omega|}{v}R}, & \omega<0.\end{cases}\tag{38.4}$$

为证明此式, 可直接将 (38.4) 式代入无外场的方程式 (38.2), 或者利用我们已知的傅里叶分量的表达式 $\mathfrak{G}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{p})=[\mathrm{i}\omega-\xi]^{-1}$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}_\omega^{(0)}(R)&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\mathfrak{G}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{p})\mathrm{d}\boldsymbol{p}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\boldsymbol{R}}\\&=\frac{m}{(2\pi)^2\mathrm{i}R}\int\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_0R+\mathrm{i}\frac{\xi}{v}R}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_0R-\mathrm{i}\frac{\xi}{v}R}}{\mathrm{i}\omega-\xi}\mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

自然我们关心函数 $\mathfrak{G}_\omega^{(0)}(R)$ 在远大于原子距离即 $Rp_0\gg1$ 时的值. 对 ξ 积分, 直接得 (38.4) 式.

函数 $\mathfrak{G}_\omega^{(0)}(R)$ 迅速起伏. 由于 $Rp_0\gg1$, 我们可以采用一种独特的准经典近似来决定磁场中函数 $\widetilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$. 我们求如下形式的 $\mathfrak{G}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$:

$$\widetilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}\mathfrak{G}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\tag{38.5}$$

其中 $\varphi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=0$. 将 (38.5) 式代入 (38.2) 式并只微分主要项, 得到作用量的附加项 $\varphi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 的方程式:

$$\boldsymbol{n}\nabla_{\boldsymbol{r}}\varphi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=e\boldsymbol{n}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}),\quad\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|}.\tag{38.6}$$

在这个方程中我们忽略了 $\boldsymbol{A}$ 的平方项, 因为在我们关心的场强下电子绕圈的半径 $\frac{ep_0}{H}$ 比穿透深度大得多: $p_0\gg eA\sim eH\delta$(δ 为穿透深度的数量级).

回到方程式 (38.3), 作对 $|\Delta(\boldsymbol{r})|$ 的展开. 从 (38.4) 和 (38.6) 式看出 $\mathfrak{F}_\omega^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 只须展开到 $|\Delta|$ 的三次项在内. 至于格林函数 $\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$, 则到 $|\Delta|$ 的二次项就够了:

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=&\widetilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')-\int\widetilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{l})\Delta(\boldsymbol{l})\widetilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{r}')\\&\times\Delta^*(\boldsymbol{m})\widetilde{\mathfrak{G}}_{-\omega}^{(0)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{l})\mathrm{d}\boldsymbol{m}\mathrm{d}\boldsymbol{l}.\end{aligned}\tag{38.7}$$

将 (38.7) 式代入 (38.3) 式第二个方程, 求得 $\mathfrak{F}_\omega^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 的展开式, 借助此展开式, 从 (38.1) 式得到定 $\Delta^*(\boldsymbol{r})$ 的以下方程式:

$$\begin{aligned}\Delta^*(\boldsymbol{r})=&|\lambda|T\sum_\omega\int\widetilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{l},\boldsymbol{r})\Delta^*(\boldsymbol{l})\widetilde{\mathfrak{G}}_{-\omega}^{(0)}(\boldsymbol{l},\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{l}\\&-|\lambda|T\sum_\omega\iiint\widetilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{l},\boldsymbol{m})\Delta(\boldsymbol{m})\widetilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\\&\times\Delta^*(\boldsymbol{s})\widetilde{\mathfrak{G}}_{-\omega}^{(0)}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{m})\Delta^*(\boldsymbol{l})\widetilde{\mathfrak{G}}_{-\omega}^{(0)}(\boldsymbol{l},\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{l}\mathrm{d}\boldsymbol{m}\mathrm{d}\boldsymbol{s}.\end{aligned}\tag{38.8}$$

这个方程式中积分中的主要距离约为 ξ_0, 因为从 (38.4) 和 (38.5) 式看出, 函数 $\widetilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 在 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|>\xi_0$ 时指数式地减小. 同时能隙 $\Delta(\boldsymbol{r})$ 和场 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 的变化发生

在数量经为穿透深度的距离上, 后者在临界温度附近远大于 ξ_0. 基于同样的原因, (38.5) 式中的相位 $\varphi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 可写成

$$\varphi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \simeq e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').$$

在 T_c 附近 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \sim H\delta \propto \sqrt{1-\dfrac{T}{T_\mathrm{c}}}$, 因此相位 $\varphi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 很小而指数项可按 φ 展开.

先讨论右端第一项. 设

$$K(\boldsymbol{l},\boldsymbol{r}) = T\sum_{\omega} \widetilde{\mathfrak{G}}_{\omega}^{(0)}(\boldsymbol{l},\boldsymbol{r})\widetilde{\mathfrak{G}}_{-\omega}^{(0)}(\boldsymbol{l},\boldsymbol{r}) = K_0(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{2\mathrm{i}e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{r})}.$$

利用格林函数在坐标空间中的表示 (38.4) 式, 并完成对频率的求和, 得到 $K_0(R)$ 的表达式如下:

$$K_0(R) = \frac{m^2T}{(2\pi R)^2}\frac{1}{\mathrm{sh}\dfrac{2\pi TR}{\upsilon}}. \tag{38.9}$$

我们已经指出, 所有的量在距离 ξ_0 上变化很小, 在积分

$$\int K_0(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{2\mathrm{i}e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{r})}\Delta^*(\boldsymbol{l})\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

中可将各量在点 $\boldsymbol{r}$ 附近按 $(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{r})$ 幂展开. 以 $(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{r})$ 的二次项为限, 得到

$$\Delta^*(\boldsymbol{r})\int K_0(R)\mathrm{d}\boldsymbol{R} + \frac{1}{6}\left(\nabla_{\boldsymbol{r}} + 2\mathrm{i}e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right)^2\Delta^*(\boldsymbol{r})\int K_0(R)R^2\mathrm{d}\boldsymbol{R}.$$

根据 (38.9) 式, 在 $R=0$ 处函数 $K_0(R)$ 如 $1/R^3$ 趋向无穷大. 因此上式第一积分形式上是发散的. 最好在动量空间中截断发散表达式. 结果我们得到已知的式子:

$$\int K_0(R)\mathrm{d}\boldsymbol{R} = \frac{mp_0}{2\pi^2}\int_0^{\omega_D}\mathrm{th}\left(\frac{\xi}{2T}\right)\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}.$$

第二项在 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{0}$ 附近积分时无奇异性. 直接在坐标表象中算此积分, 得

$$\int R^2K_0(R)\mathrm{d}\boldsymbol{R} = \frac{7\zeta(3)\upsilon^2}{8(\pi T)^2}\frac{mp_0}{2\pi^2}.$$

在方程式 (38.8) 中 $|\Delta|$ 的三次项中可忽略 $\Delta(\boldsymbol{r})$. 与坐标的关系. 因此这项等于

$$\left(\frac{mp_0}{2\pi^2}\right)\Delta^*(\boldsymbol{r})|\Delta(\boldsymbol{r})|^2T\sum_{\omega}\int\mathrm{d}\xi\frac{1}{(\omega^2+\xi^2)^2}$$
$$= \left(\frac{mp_0}{2\pi^2}\right)\frac{7\zeta(3)}{8(\pi T)^2}\Delta^*(\boldsymbol{r})|\Delta(\boldsymbol{r})|^2.$$

将以上结果合并, 我们求出在临界温度附近函数 $\Delta^*(\boldsymbol{r})$ 满足以下方程式:

$$\left\{\frac{1}{4m}\left(\nabla_{\boldsymbol{r}}+2\mathrm{i}e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right)^2+\frac{1}{\eta}\left[\frac{T_\mathrm{c}-T}{T_\mathrm{c}}-\frac{7\zeta(3)}{8(\pi T_\mathrm{c})^2}|\Delta(\boldsymbol{r})|^2\right]\right\}\times\Delta^*(\boldsymbol{r})=0, \tag{38.10}$$

其中

$$\eta=\frac{7\zeta(3)}{6(\pi T_\mathrm{c})^2}\varepsilon_\mathrm{F}.$$

无外场时 Δ 不在空间变化, 方程式 (38.10) 和展开式 (36.4) 前几项一致.

现在计算电流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$. 前节的 (37.5) 式当然仍成立. 然而由于 $\Delta\ll T_\mathrm{c}$, 可对 $\boldsymbol{A}$ 和 Δ 展至不等于零的首次项. 注意, 电流密度 (37.5) 式中

$$-\frac{2e^2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})}{m}\mathfrak{G}_{t'=t+0}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r})\equiv-\frac{e^2}{m}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})N.$$

这里 N 是总电子数密度, 它等于在正常金属中的值. N 如改变, 将和电中性条件矛盾 [(38.7) 式的解满足这个要求, 即如果 $\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\widetilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+\delta\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$, 则 $T\sum\limits_\omega\delta\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r})\equiv0$)]. 将 (38.7) 式代入 (37.5) 式, 得

$$T\sum_\omega\frac{\mathrm{i}e}{m}(\nabla_{\boldsymbol{r}'}-\nabla_{\boldsymbol{r}})_{\boldsymbol{r}'\to\boldsymbol{r}}\mathfrak{G}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')-\frac{e^2}{m}N\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\equiv0,$$

这是因为正常金属在恒定磁场中电流为零. 因此

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})=\frac{\mathrm{i}e}{m}(\nabla_{\boldsymbol{r}'}-\nabla_{\boldsymbol{r}})_{\boldsymbol{r}'\to\boldsymbol{r}}T\sum_\omega\delta\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'),$$

其中

$$\delta\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\int\widetilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{l})\Delta(\boldsymbol{l})\widetilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{r}')\Delta^*(\boldsymbol{m})\widetilde{\mathfrak{G}}_{-\omega}^{(0)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{l})\mathrm{d}\boldsymbol{m}\mathrm{d}\boldsymbol{l}.$$

以 (38.5) 式代入此式, 将各量在 $\boldsymbol{r}$ 附近展至一次项, 并省去对角度积分时给出零的各项, 我们得到

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})=\left[\frac{\mathrm{i}e}{m}\left(\Delta\frac{\partial\Delta^*}{\partial\boldsymbol{r}}-\Delta^*\frac{\partial\Delta}{\partial\boldsymbol{r}}\right)-\frac{4e^2|\Delta|^2}{m}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right]C, \tag{38.11}$$

其中

$$C=\frac{1}{3}T\sum_\omega\iint\left\{[\nabla_{\boldsymbol{r}}\mathfrak{G}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{r})\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\mathfrak{G}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{l})-\mathfrak{G}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{l})\times\nabla_{\boldsymbol{r}}\mathfrak{G}_\omega^{(0)}(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{r})]\cdot\boldsymbol{m}\right\}\mathfrak{G}_{-\omega}^{(0)}(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{l})\mathrm{d}\boldsymbol{m}\mathrm{d}\boldsymbol{l}.$$

C 的计算宜用傅里叶分量作, 只要作普通变换 $\boldsymbol{r} \to \mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}$. 我们省去这个很简单的计算, 给出最终结果:

$$C = \frac{7\zeta(3)N}{16(\pi T_{\mathrm{c}})^2}.$$

方程组 (38.10) 和 (38.11) 描述 T_{c} 附近恒定磁场中超导体的性质. 引入正比于 $\Delta(\boldsymbol{r})$ 的波函数 $\psi(r)$:

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \sqrt{\frac{7\zeta(3)N}{8(\pi T_c)^2}}\Delta(\boldsymbol{r}), \tag{38.12}$$

取 (38.10) 式的复数共轭方程式, 各处代以 (38.12) 式, 将这些方程式改写成

$$\begin{aligned} &\left\{\frac{1}{4m}\left[\nabla\boldsymbol{r} - 2\mathrm{i}e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right]^2 + \frac{1}{\eta}\left[\frac{T_{\mathrm{c}} - T}{T_{\mathrm{c}}} - \frac{1}{N}|\psi|^2\right]\right\}\psi(\boldsymbol{r}) = 0, \\ &\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = -\frac{2\mathrm{i}e}{4m}\left(\psi^*\nabla\boldsymbol{r}\psi - \psi\nabla\boldsymbol{r}\psi^*\right) - \frac{(2e)^2}{2m}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})|\psi|^2. \end{aligned} \tag{38.13}$$

现在波函数 $\psi(\boldsymbol{r})$ 的意义就清楚了: 所得方程式的形状很像质量为 $2m$、电荷为 $2e$ 的粒子的量子力学方程式. 既然 $\Delta(\boldsymbol{r})$ 的意义是比例于束缚对波函数的量, 或更确切些, 比例于相对惯性中心坐标的波函数, 则以上的结果从物理上看是明白的, 有意义的是, 在金兹堡和朗道的唯象理论 [78] 中已提出了类似的方程式, 只是那里只有一个元电荷. 除了这个本质性的改变, 新的超导理论证实了金兹堡和朗道理论在 T_{c} 附近的正确性, 还提供了计算这个理论中出现的常数的可能性.

在结束之前再次指出, 我们在推导中利用了各量在距离 ξ_0 上变化甚小这一事实, 既然从 (38.13) 式和 (37.19) 式容易看出, 一般情况下在 T_{c} 附近, 各量在约为伦敦穿适深度的距离上显著变化, 而对于 Pippard 型金属, 这个穿透深度只在极为接近 T_{c} 的区域内才变得大于 ξ_0, 则以上方程式对 Pippard 型金属的适应用范围, 只是转变温度附近很窄的温度区间. 对于 London 型和中间型金属, 这些方程式适用于 T_{c} 附近相当宽的温度区间. 从实验观点看来, 这是很有趣的温度范围. 应当指出, 方程式 (38.13) 的推论和这个温度区间内的测量结果相当好地符合.

§39 超导合金理论

§39.1 问题提法

超导理论中的有意义的问题之一, 是关于 "合金" 性质的问题, 即含有其他元素或晶格缺陷的超导体性质 (Abrikosov 和 Gorkov[79]).

在正常态这些晶格缺陷导致金属的所谓剩余电阻. 在超导态杂质有新作用. 我们已经指出过, 超导体电子的相互作用引起它们的空间关联. 例如, 随着金属从正

常态转变到超导态, 坐标表象中各种格林函数对空间变量的关系在数量级为 ξ_0(对的有效尺寸) 的距离上有本质变化. 其他元素的原子以及晶格缺陷的存在, 引起电子在杂质上的散射. 由于散射是偶然地发生, 散射角也是任意的, 而被散射的电子又具有很短的波长, 可见电子间的关联对散射很敏感. 换言之, 电子在杂质原子上的散射应削弱电子间的空间关联.

浓度很小时杂质的作用不大. 杂质浓度的增加, 显然导致超导体内电子关联半径的减小. 对浓度足够大的合金, 电子自由程代替 ξ_0 起关联参量的作用. 在这种浓度下我们可以期待超导体显出新的特性. 本书不以系统叙述超导合金理论为目的, 我们只在此涉及一个问题 —— 合金在弱恒定磁场中的性质. 然而这已足以显示独特的场论方法, 对研究这类对象是如何有益.

在前面 §37 中已指出过, 就在弱场中的电磁性质而论, 多数实际超导体属于非局域型 (Pippard 型或中间型). 换言之, 超导体放入电磁场后, 其一定点的电流值由此点整个邻域的场值决定. 当然, 以库伯关于电子形成束缚对这一思想为基础的理论, 其本身已包含了这种非局域性. 束缚对的尺寸引起电子在约为 $\xi_0 \sim 10^{-4}$ 距离上的关联; 如果场在远小于 ξ_0 的距离 (其数量级约为穿透深度) 上显著变化, 则 ξ_0 就要出现在电流与场的非局域关系中. 在相反的伦敦情况下, 场在积分关系 (37.3) 式的主要距离 $\sim \xi_0$ 上, 几乎不变, 因而可在 $\boldsymbol{r}$ 点提出到积分符号之外.

上述关于杂质在超导体中作用的想法表明, 杂质浓度足够大时, 超导合金应属于第二种类型. 既然随着杂质浓度的增加, 自由程开始起关联长度的作用, 则在某一时刻, 自由程会变得小于穿透深度, 于是出现了伦敦情形.

在继续叙述之前, 还须阐明一点. 在实际超导体中 $\xi_0 \approx 10^{-4}$. 然而从前面得知, 超导体出现新性质的浓度, 相当于自由程和穿透深度相等之时, 而后者约为 10^{-5}. 十分重要的是, 这些浓度还很小 ($\sim 1\%$). 问题在于, 浓度很大时我们实质上是有了一种新物质, 其性质可与初始的超导体毫无共同之处. 例如, 电声子相互作用的性质会改变, 因而超导转变温度也要改变. 在浓度足够小时可以忽略这些晶格基本性质的变化.

然而这样小的浓度, 已使超导体在磁场中的行为发生本质性的改变. 有趣的是, 实验表明, 这时它的热力学性质实际上变得和纯超导体没有差别.

为了解决上面提出的问题, 利用输运方程式的普通方法已不适用. 这个方法常用以研究如正常金属的剩余电阻等性质. 因此我们在下面重新回到量子场论方法.

§39.2 正常金属的剩余电阻

为了使以后的叙述更为明白, 我们先以计算绝对零度下有杂质的正常金属的剩余电阻为例, 表述后面采用的方法 (Abrikosov, Gorkov[79] 和Edwards[80]). 自然, 这样得出的结果, 和借助输运方程得到的人所共知的结果, 是完全等价的.

大家知道, 杂质的存在导致正常金属的有限电导率 σ, 因而在外加均匀电场 $\boldsymbol{E}$ 频率足够低时, 电流密度 $\boldsymbol{j}$ 由下式给出:

$$\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E}.$$

以普通方式引入矢量势 $\boldsymbol{A}(t),\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$, 可将上式写成 (对场的单色分量)

$$\boldsymbol{j}_\omega=\mathrm{i}\omega\sigma\boldsymbol{A}\omega.$$

这个关系式的形式和 (37.3′) 式一致. 这时核 $Q(\boldsymbol{k},\omega)$ 就等于

$$Q(\boldsymbol{k},\omega)=-\mathrm{i}\omega\sigma.$$

下面我们用量子场论方法决定 $Q(\boldsymbol{k},\omega)$.

考虑到场论方法中格林函数定义在绝对零度和 $T\neq 0$ 时的差别, 代替 (37.5) 式我们得到

$$\boldsymbol{j}(x)=\frac{\mathrm{ie}}{m}(\nabla_{\boldsymbol{r}'}-\nabla_{\boldsymbol{r}})_{\boldsymbol{r}'\to\boldsymbol{r}},\quad \lim_{t'=t+0}G(x,x')-\frac{Ne^2}{m}\boldsymbol{A}(x).$$

将函数 $G(x,x')$ 展至外场的线性项, 得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j}(x)=&-\frac{\mathrm{ie}^2}{2m^2}(\nabla_{\boldsymbol{r}'}-\nabla_{\boldsymbol{r}})_{\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}}\int\boldsymbol{A}(y),(\nabla_{y'}-\nabla_y)_{y'\to y}G^{(0)}(x,y')\\&\times G^{(0)}(y,x')\mathrm{d}^4y-\frac{Ne^2}{m}\boldsymbol{A}(x).\end{aligned}\tag{39.1}$$

在这个关系式中 $G^{(0)}(x,y)$ 是正常金属无外场时的格林函数. 注意这些量已不再只和变量之差 $x-y$ 有关, 我们令函数 $G^{(0)}(x,y)$ 考虑了电子和杂质原子的相互作用 (以后含杂质的金属格林函数记为 $G(x,y)$, 而纯金属的函数记为 $G^{(0)}(x,y)$, 其他依此类推). 电子和杂质原子相互作用的哈密顿量是

$$H_{\mathrm{int}}=\sum_a H_a,$$

$$H_a=\int u(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a)\psi^+(x)\psi(x)\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

继续变换 (39.1) 式之前, 先求函数 $G(x,x')$.

有杂质存在时, 格林函数和 (7.7) 式不一样. 将它写成

$$G(x,x')=(2\pi)^{-4}\int G(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}';\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}-\mathrm{i}\boldsymbol{p}'\boldsymbol{r}'-\mathrm{i}\omega(t-t')}\mathrm{d}\boldsymbol{p}\mathrm{d}\boldsymbol{p}'\mathrm{d}\omega.\tag{39.2}$$

根据熟知的场论规则, 函数 $G(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}';\omega)$ 表示为图 101 所示的图形之和. 每条线代表 $G_{(0)}(p)$. 我们用斜十字表示杂质顶角. 它对应的因子为 $\sum\limits_{\boldsymbol{r}a}u(\boldsymbol{q})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}_a}\delta(\omega-\omega')$, 其中 $u(\boldsymbol{q})$ 是势 $u(\boldsymbol{r})$ 的傅里叶分量, 而 $\boldsymbol{q}$ 是传递的动量.

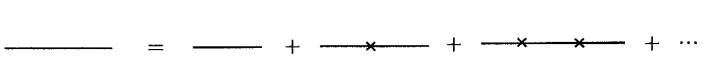


图 101

图形的求和导致决定 $G(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}';\omega)$ 的积分方程式为

$$G(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}';\omega)=\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')G^{(0)}(p)+\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_a G^{(0)}(p)\int u(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'')\boldsymbol{r}_a}G(\boldsymbol{p}'',\boldsymbol{p}';\omega)\mathrm{d}\boldsymbol{p}''. \tag{39.3}$$

我们不关心 (39.3) 式的准确解. 由于杂质原子在金属中无规则分布, 我们应将整个表达式对每个杂质原子的位置平均. 这时重要的是, 根据杂质原子浓度很小的前提, 杂质原子间的平均距离, 远大于金属晶格的原子距离, 因此求平均时所取体积的尺度比原子间距离大得多. 完成这种平均之后, 格林函数显然成为

$$\overline{G(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}';\omega)}=G(p)\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'). \tag{39.4}$$

我们关心的动量 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'$ 的值约为费米边界动量 p_0, 后者本身的数量级是原子间距离的倒数. 这就立即使求平均容易多了.

我们将在玻恩近似下作计算, 即假设 $p_0^3\int u(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}\ll\varepsilon_{\mathrm{F}}$. 可以证明, 最终结果通过碰撞时间表示之后, 在一般情况下也是成立的.

$G(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}';\omega)$ 的最简图形只包含一个斜十字. 对杂质原子位置平均后的值是常数 $\overline{u(\boldsymbol{q})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}_a}}=u(0)$, 它可以纳入基态能量并在今后视为零. 下一个图形含有两个斜十字 [图 102(a)]. 如果斜十字分属不同的原子, 则矩阵元含有因子

$$u(\boldsymbol{p}''-\boldsymbol{p}')u(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'')\boldsymbol{r}_a+\mathrm{i}(\boldsymbol{p}''-\boldsymbol{p}')\boldsymbol{r}_b},$$

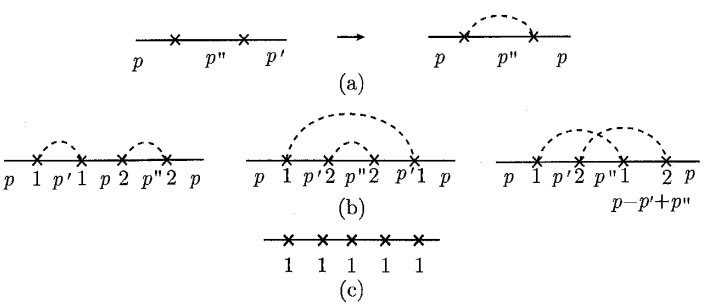


图 102

其平均值等于零. 如果两个斜十字都描述在同一原子上的散射, 而 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}'$, 则此图 [除去外线 $G^{(0)}(p)$] 的平均值不等于零而是

$$\frac{1}{V}\int |u(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')|^2 G^{(0)}(p')\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}'}{(2\pi)^3}, \tag{39.5}$$

其中 V 是系统的体积 (为得此结果, 宜在 (39.2) 式和 (39.3) 式中把对动量积分变成对不连续的值求和, 平均之后再变换回来).

以后我们将关心绝对值接近 p_0 的 $\boldsymbol{p}$. 和在 §21 中一样, (39.5) 式中的积分可以分成两部分: 对离费米面很远的 $\boldsymbol{p}'$ 值的积分以及在费米面附近的 $\boldsymbol{p}'$ 值的积分 (后者对 $|\boldsymbol{p}'|$ 的积分限可取对称于 $|\boldsymbol{p}'|-p_0$ 的值). 对远区间的积分给出实常数, 它与 $u(0)$ 同为化学势的重整化, 故可不予考虑. 第二个积分里可认为 $u(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')$ 是变化很慢的函数. 代入 $G^{(0)}(p)$ 的 (7.7) 式, 并对杂质原子求和 (这意味着简单地乘以原子数), 得出对 G 函数的主要贡献:

$$\frac{\mathrm{i}\mathrm{sgn}\omega}{2\tau},$$

其中

$$\frac{1}{\tau}=\frac{nmp_0}{(2\pi)^2}\int |u(\theta)|^2\mathrm{d}\Omega, \tag{39.6}$$

θ 是矢量 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{p}'$ 的夹角. 根据 (39.6) 式, τ 是玻恩近似下的碰撞时间, n 是单位体积的杂质原子数. 由此可见, 积分中起主要作用的是费米面附近的区间 $\left(v(|\boldsymbol{p}|-p_0)\sim\dfrac{1}{\tau}\right)$.

从这个观点看, 并不是所有的图形都是等价的. 例如, 试比较图 102(b) 所示的三个图形 (虚线连接属于同一原子的斜十字). 不难看出, 前两个式子中对 $\boldsymbol{p}'$ 和 $\boldsymbol{p}''$ 的积分可在费米面附近对动量间的任意夹角进行. 相反, 在第三个积分中要求所有 G 函数的变量接近费米面, 这就限制了角度. 结果这个图形的贡献比前者少 $\dfrac{1}{vp_0G}$ 倍. 因为我们今后需要的值是 ω 和 $\xi\sim\dfrac{1}{\tau}$, 其中 τ 是碰撞时间, 则 "相交" 图形贡献小的程度可估为 $\dfrac{1}{p_0l}$, 其中 $l=v\tau$—— 自由程.

容易证明, 有两个以上斜十字来自同一杂质原子的图形, 贡献也小. 试比较图 102(b) 第一图和图 102(c) 的总贡献 (来自全部杂质原子的贡献). 第一类图形约给出

$$\frac{1}{\tau^2}G^{(0)}(p)\sim\frac{1}{\tau},$$

而第二类图形约为

$$\frac{1}{\tau}\frac{u^2(\boldsymbol{q})}{v^2}p_0^4\sim\frac{1}{\tau}\left[\frac{\int u\mathrm{d}\boldsymbol{r}p_0^3}{\varepsilon_\mathrm{F}}\right]^2\ll\frac{1}{\tau}$$

(这是玻恩近似的后果). 由此可知, 我们只须讨论每个杂质原子给出两个斜十字的图形.

将一切主要图形 (即 "成对" 而不含如图 102(b) 第三图的 "相交" 者) 求和, 得 G 函数的如下方程式:

$$G(p)=G^{(0)}(p)+\frac{n}{(2\pi)^3}G^{(0)}(p)\int|u(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')|^2G(p')\mathrm{d}\boldsymbol{p}'G(p). \tag{39.7}$$

如果不用玻恩近似, 则须考虑一个杂质原子给出许多斜十字的图形. 可以证明, 由此而来的全部变化是将玻恩散射幅 $u(\theta)$ 换成完全散射幅. 这个论断对以后的全部计算都成立. 因此所有公式中的 $u(\theta)$ 可理解为完全散射幅.

方程式 (39.7) 的解是

$$G(p)=\frac{1}{\omega-\xi-\overline{G}_\omega},$$

其中 $\overline{G}_\omega$ 满足方程式:

$$\overline{G}_\omega=\frac{n}{(2\pi)^3}\int|u(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')|^2\frac{1}{\omega-\xi'-\overline{G}_\omega}\mathrm{d}\boldsymbol{p}'.$$

设 $\overline{G}_\omega$ 是纯虚数 $\overline{G}_\omega=-\mathrm{i}\beta$, 并以同于 (39.5) 式的方法计算右端积分, 得到

$$\beta=\frac{\mathrm{sgn}\beta}{2\tau},$$

其中 τ 由 (39.6) 式决定. 将这样得到的 $G(p)$ 和杂质很少时的结果 $G[(p)\to G^{(0)}(p)]$ 比较, 得 $\beta=\dfrac{\mathrm{sgn}\omega}{2\tau}$ 或者

$$G(p)=\frac{1}{\omega-\xi+\dfrac{\mathrm{i}\omega}{2|\omega|\tau}}. \tag{39.8}$$

转到 x 表象, 不难看出, G 不同于 $G^{(0)}$ 的全部变化, 在于乘上了指数衰减因子:

$$G(x-x')=G^{(0)}(x-x')\mathrm{e}^{-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{2l}}. \tag{39.9}$$

实际上对角度积分后有

$$G(x-x')\propto\int p\mathrm{d}p\mathrm{d}\omega\frac{\sin pR\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t')}}{R\left(\omega-\xi+\dfrac{\mathrm{i}\omega}{2|\omega|\tau}\right)}$$

$$\propto m\int\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\omega\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t')}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_0+\frac{\xi}{v})R}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p0+\frac{\xi}{v})R}}{R\left(\omega-\xi+\dfrac{\mathrm{i}\omega}{2|\omega|\tau}\right)}.$$

对 ξ 积分并取留数, 得 (39.9) 式.

现在计算核 $Q(\boldsymbol{k},\omega)$. 变到傅里叶分量后, 宜把得自 (39.1) 式的 Q 的表达式写成

$$Q_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega)=\frac{Ne^2}{m}\delta_{\alpha\beta}-\frac{2ie^2}{m^2}\int \boldsymbol{p}'_\alpha \boldsymbol{\Pi}_\beta(p'_+,p'_-)\mathrm{d}\boldsymbol{p}'\mathrm{d}\omega', \tag{39.10}$$

其中 $p\pm=\left(\boldsymbol{p}'\pm\dfrac{\boldsymbol{k}}{2};\omega'\pm\dfrac{\omega}{2}\right)$. (39.10) 式中分出了一个光子顶角, 第二个光子顶角包含在 $\prod\limits_\beta(p+,p-)$ 中, 后者准确到系数, 可看成是在电子线中加入光子顶角 $\boldsymbol{p}'_\beta$ 的结果. 将这个顶角插入电子格林函数 $G(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}';\omega)$, 得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Pi}(p'_+,p'_-)=&\frac{1}{(2\pi)^3}\int G\left(\boldsymbol{p}'_+,\boldsymbol{p}''_+;\omega'+\frac{\omega}{2}\right)\boldsymbol{p}''\\&\times G\left(\boldsymbol{p}''_-,\boldsymbol{p}'_-;\omega'-\frac{\omega}{2}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{p}''.\end{aligned}\tag{39.11}$$

这里的函数 $G(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}';\omega)$ 对应图 101 之和并满足方程式 (39.3). 对杂质原子位置求平均时应注意, 两个格林函数乘积的平均值不等于两个平均值的乘积.

对纯金属, (39.11) 式对应图 103(a). 对杂质原子位置平均之后, 除了对应从零级格林函数 $G^{(0)}(p)$ 变到函数 $G(p)$(39.8) 式的简单图形外, 图 103(b) 的图形对 (39.11) 式也是重要的. 这些修正项贡献之所以较大, 是因为顶角光子动量 $k\ll p_0$, 因此费米面附近的动量对积分要取在距费米面很远的动量区间. 因此, (39.11) 式的平均就归结为图 103(b) 的 "阶梯" 图形之求和.

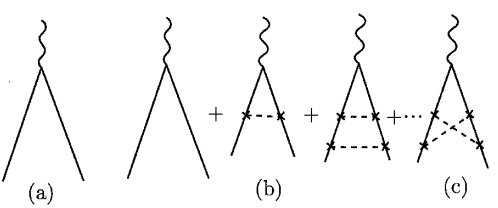


图 103

$\boldsymbol{\Pi}(p_+,p_-)$ 的积分方程式如下:

$$\boldsymbol{\Pi}(p_+,p_-)=G(p_+)G(p_-)\left[\boldsymbol{p}+\frac{n}{(2\pi)^3}\int|u(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')|^2\boldsymbol{\Pi}(p'_+,p'_-)\mathrm{d}\boldsymbol{p}'\right]. \tag{39.12}$$

可能有两种极限情形:

(1) 反常趋肤效应 $\left(|\boldsymbol{k}|\upsilon\gg\dfrac{1}{\tau}\right)$, 容易验证, 这时 (39.12) 式右端的积分小得可以略而不计 $\sim\dfrac{1}{|\boldsymbol{k}|\upsilon\tau}\ll 1$;

(2) 正常趋肤效应 $\left(|\boldsymbol{k}|\upsilon\ll\dfrac{1}{\tau}\right)$, 正是这个情形对我们有意义, 这时方程式 (39.12)

中可令 $\boldsymbol{p}_+ = \boldsymbol{p}_-$.

从 (39.12) 式右端积分得到的矢量, 显然平行于 $\boldsymbol{p}$. 引入记号:

$$\boldsymbol{p}\Lambda(\omega',\omega) = \frac{n}{(2\pi)^3}\int |u(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')|^2 \boldsymbol{\Pi}(p'_+,p'_-)\mathrm{d}\boldsymbol{p}'. \tag{39.13}$$

由于 $|\boldsymbol{p}| \simeq p_0$, 可认为 $\Lambda(\omega',\omega)$ 与 $|\boldsymbol{p}|$ 无关. 将 (39.12) 式乘以 $\dfrac{n}{(2\pi)^3}|u(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{p})|^2$ 并对 $\mathrm{d}\boldsymbol{p}$ 积分:

$$\boldsymbol{l}\Lambda(\omega',\omega) = \frac{n}{(2\pi)^3}\int |u(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{p})|^2 \boldsymbol{p} G(p_+)G(p_-)[1+\Lambda(\omega',\omega)]\mathrm{d}\boldsymbol{p}. \tag{39.14}$$

以 $G(p)$ 的表达式 (39.8) 代入, 容易求得, 只有 $|\omega'| < \dfrac{\omega}{2}$ 时 $\Lambda(\omega',\omega)$ 才不等于零, 因为在相反的情况下, 由 (7.7) 式知, (39.14) 式积分时两个极点处于同一半平面内. 在这个区间内 $\Lambda(\omega',\omega)$ 和 ω' 也无关. 对 ξ 积分并利用关系式:

$$\cos\theta = \cos\theta'\cos\theta'' + \sin\theta'\sin\theta''\cos(\varphi'-\varphi''), \tag{39.15}$$

得到

$$\Lambda(\omega',\omega) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{i}}{\tau_1}\dfrac{1}{\omega+\dfrac{\mathrm{i}}{\tau_{\mathrm{tr}}}}, & \omega'^2 < \dfrac{\omega^2}{4}, \\ 0, & \omega'^2 > \dfrac{\omega^2}{4}, \end{cases} \tag{39.16}$$

其中

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_{tr}}, \\ &\frac{1}{\tau_{tr}} = \frac{nmp_0}{(2\pi)^2}\int |u(\theta)|^2(1-\cos\theta)\mathrm{d}\Omega. \end{aligned} \tag{39.17}$$

将 (39.16) 式代入 (39.12) 和 (39.10) 式并积分, 得 ($\omega\tau \ll 1$)

$$Q_{\alpha\beta}(\omega) = -\mathrm{i}\omega\sigma\delta_{\alpha\beta}.$$

正如所期待, 电导率 $\sigma = \dfrac{Ne^2\tau_{\mathrm{tr}}}{m}$ 中含有碰撞间的 "输运" 时间.

这样我们就看到了, 可能用场论方法计算对杂质原子位置平均后金属的各种特征量. 在我们所讨论的情形中, 平均就归结为对同一原子两次散射的成对平均, 在图上以连结两个斜十字的虚线代表. 具有动量 $\boldsymbol{q}$ 的这种线, 在矩阵元中对应因子 $n|u(\boldsymbol{q})|^2$, 它对虚线起 D 函数的作用. 在有虚线进出的顶角, 电子线频率不变. 重要的是, 跨过任何电子线动量变化很大的顶角的虚线 ($q \sim p_0$), 贡献很小. 其特例是可以忽略一切有相交虚线的图形. 这些图形贡献小的相对程度是 $\dfrac{1}{p_0 l} \ll 1$.

§39.3　超导合金的电磁性质

现在我们应用上述方法来研究含有杂质的超导体. 直接讨论任意温度的情形. 写出超导体在杂质的场中的方程组:

$$\left\{\mathrm{i}\omega+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu-\sum_{r_a}u(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a)\right\}\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+\Delta(\boldsymbol{r})\mathfrak{F}^+_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),$$

$$\left\{-\mathrm{i}\omega+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu-\sum_{r_a}u(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a)\right\}\mathfrak{F}^+_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')-\Delta^*(\boldsymbol{r})\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=0,$$

和前面一样, 我们自然只关心按杂质平均后的 $\mathfrak{G}$ 和 $\mathfrak{F}^+$ 值. 为了求得平均值, 须将所有的格林函数展成与杂质相互作用位势的幂级数, 这和方程 (39.3) 相似 (见图 101). 这时还应注意到, 加入杂质之后, 能隙 $\Delta(\boldsymbol{r})$ 和 $\Delta^*(\boldsymbol{r})$ 一般也应有所变化. 这本来会使图解法大为复杂化, 因为由于条件 $\Delta(\boldsymbol{r})=|\lambda|\mathfrak{F}(x,x)$, 对 Δ 的修正项也应由某种积分方程决定. 然而我们发现, 平均之后 $\overline{\Delta(\boldsymbol{r})}=\Delta^{(0)}$, 所有的修正项都等于零. 只须直接研究 $\Delta(\boldsymbol{r})$ 诸修正项的结构, 就可以证实这一点. 我们在此事先假定这个事实成立, 认为 $\Delta(\boldsymbol{r})=\Delta^{(0)}$. 这个假定以后将为最终结果证实, 那时将看到, 加入非磁性杂质后, 任何 $\mathfrak{F}(x,x)$ 型的量都不改变. 因此, 和前面所述的全部差别就在于, 超导体由三个格林函数描述, 即函数 $\mathfrak{G},\mathfrak{F}$ 和 $\mathfrak{F}^+$. 这就使图解法略有改变. 容易看出, 这种改变完全与 §35 中类似, 即 $\mathfrak{G}$ 的图形中出现 $\mathfrak{F}$ 和 $\mathfrak{F}^+$ 线, 而且类似地, $\mathfrak{F}$ 和 $\mathfrak{F}^+$ 的图形中出现 $\mathfrak{G}$ 线.

与杂质相互作用的哈密顿量中包含算符乘积 $\overline{\psi}\psi$. 因此在每条电子线中插入杂质顶角时, 对每种 $\mathfrak{G},\mathfrak{F}$ 和 $\mathfrak{F}^+$ 线都出现两种可能性. 这些可能情形示于图 104 中. 其结果可写成

$$\mathfrak{G}(x,x')\to\mathfrak{G}(x,y)\mathfrak{G}(y,x')-\mathfrak{F}(x,y)\mathfrak{F}^+(y,x'),$$

$$\mathfrak{F}^+(x,x')\to\mathfrak{F}^+(x,y)\mathfrak{G}(y,x')+\mathfrak{G}(y,x)\mathfrak{F}^+(y,x'),$$

$$\mathfrak{F}(x,x')\to\mathfrak{G}(x,y)\mathfrak{F}(y,x')+\mathfrak{F}(x,y)\mathfrak{G}(x',y).$$

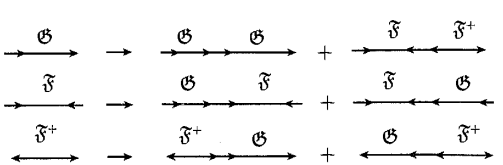


图 104

代替方程式 (39.3) 的是函数 $\mathfrak{G}$ 和 $\mathfrak{F}^+$ 的以下方程式:

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p};\omega)=&\mathfrak{G}^{(0)}(p)\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\\&+\frac{1}{(2\pi)^3}\Big\{\mathfrak{G}^{(0)}(p)\int u(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'')\sum_a \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'')\boldsymbol{r}_a}\mathfrak{G}(\boldsymbol{p}'',\boldsymbol{p}';\omega)\mathrm{d}\boldsymbol{p}''\\&-\mathfrak{F}^{(0)}(p)\int u(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'')\sum_a \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'')\boldsymbol{r}_a}\mathfrak{F}^+(\boldsymbol{p}'',\boldsymbol{p}';\omega)\mathrm{d}\boldsymbol{p}''\Big\},\end{aligned}\tag{39.18}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}^+(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}';\omega)=&\mathfrak{F}^{+(0)}(p)\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\\&+\frac{1}{(2\pi)^3}\Big\{\mathfrak{F}^{+(0)}(p)\int u(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'')\sum_a \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'')\boldsymbol{r}_a}\mathfrak{G}(\boldsymbol{p}'',\boldsymbol{p}';\omega)\mathrm{d}\boldsymbol{p}''\\&+\mathfrak{G}^{(0)}(-p)\int u(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'')\sum_a \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'')\boldsymbol{r}_a}\mathfrak{F}^+(\boldsymbol{p}'',\boldsymbol{p}';\omega)\mathrm{d}\boldsymbol{p}''\Big\}.\end{aligned}\tag{39.19}$$

原则上还应当考虑函数 $\mathfrak{F}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}';\omega)$ 的方程式. 纯超导体无外场时

$$\mathfrak{F}^{(0)}(x,x')=\mathfrak{F}^{+(0)}(x,x').$$

我们省去证明, 仅在此指出, 合金的方程式 (39.18) 和 (39.19), 在对杂质原子位置求平均后, 也给出同样的结果.

很容易将上段的求平均方法推广到温度高于零的情形并应用于超导体. 电子在静止杂质上散射时, 只有其动量的三个分量改变. 因此虚线仍然代表因子 $n|u(\boldsymbol{q})|^2$, 而在杂质顶角电子线的频率守恒. 所有为省略相交虚线和跨越动量传递约为费米动量的顶点的虚线, 所作的估值都还成立. 在这些估值中起重要作用的, 是正常金属的格林函数的性质, 其超导转变温度甚低. 平均了的函数 $\mathfrak{G}(p)$ 和 $\mathfrak{F}^+(p)$ 的方程式示于图 105 中. 它们的结构不须阐述. 我们指出, 从图形角度看图 105 的方程式和 §35 中电声子相互作用系统的方程式 (图 94) 相似. 差别只在于, 图 105 中出现了各种 "零级" 线: $\mathfrak{G}^{(0)}(p),\mathfrak{F}^{+(0)}(p)$ 和 $\mathfrak{F}^{(0)}(p)$. 利用纯超导体函数 $\mathfrak{G}^{(0)}$ 和 $\mathfrak{F}^{+(0)}$ 的明显表达式, 我们将图 105 的方程组写成以下简单形式:

$$(\mathrm{i}\omega-\xi-\overline{\mathfrak{G}}_\omega)\mathfrak{G}(p)+(\Delta+\overline{\mathfrak{F}^+_\omega})\mathfrak{F}^+(p)=1,$$

$$(\mathrm{i}\omega+\xi+\overline{\mathfrak{G}}_{-\omega})\mathfrak{F}^+(p)+(\Delta+\overline{\mathfrak{F}^+_\omega})\mathfrak{G}(p)=0,$$

其中

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{G}}_\omega&=\frac{n}{(2\pi)^3}\int|u(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')|^2\mathfrak{G}(p')\mathrm{d}\boldsymbol{p}',\\\overline{\mathfrak{F}^+_\omega}&=\frac{n}{(2\pi)^3}\int|u(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')|^2\mathfrak{F}^+(p')\mathrm{d}\boldsymbol{p}',\\\overline{\mathfrak{G}}_{-\omega}(p)&=\overline{\mathfrak{G}}_\omega(-p),\end{aligned}\tag{39.20}$$

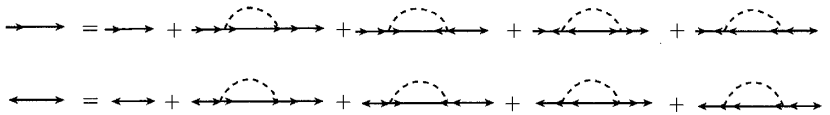


图 105

这里使用了记号 $p'=(\boldsymbol{p}';\omega)$. 这个方程组的解是 (以后将证明 $\overline{\mathfrak{G}}_\omega=-\overline{\mathfrak{G}}_{-\omega}$)

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}(p)&=-\frac{\mathrm{i}\omega-\overline{\mathfrak{G}}_\omega+\xi}{(\mathrm{i}\omega-\overline{\mathfrak{G}}_\omega)^2+\xi^2+(\Delta+\overline{\mathfrak{F}^+_\omega})^2},\\ \mathfrak{F}^+(p)&=\frac{\Delta+\overline{\mathfrak{F}^+_\omega}}{(\mathrm{i}\omega-\overline{\mathfrak{G}}_\omega)^2+\xi^2+(\Delta+\overline{\mathfrak{F}^+_\omega})^2}.\end{aligned}\tag{39.21}$$

将这些式子代入 (39.20) 式, 就得出决定 $\overline{\mathfrak{G}}_\omega$ 和 $\overline{\mathfrak{F}^+_\omega}$ 的两个方程式, 和从前一样我们看出, $\overline{\mathfrak{G}}_\omega$ 含有常数项, 它是化学势的附加项. 这项与温度无关, 而来自远离费米面处对 $\mathrm{d}\boldsymbol{p}'$ 的积分. 因此它和在正常金属中一样:

$$\delta\mu\simeq\frac{n}{(2\pi)^3}\int|u(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')|^2\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}.$$

从方程式 (39.20) 和 (39.21) 看出, 除了这项之外, $\overline{\mathfrak{G}}_\omega$ 的其他部分和 $\overline{\mathfrak{F}^+_\omega}$ 由同一积分决定. 因此

$$-\frac{\overline{\mathfrak{G}}_\omega}{\mathrm{i}\omega}=\frac{\overline{\mathfrak{F}^+_\omega}}{\Delta}.$$

引入符号:

$$\widetilde{\Delta}=\Delta+\overline{\mathfrak{F}^+_\omega}=\Delta\eta_\omega,\quad \mathrm{i}\widetilde{\omega}=\mathrm{i}\omega-\overline{\mathfrak{G}}_\omega=\mathrm{i}\omega\eta_\omega.$$

这时对函数 η_ω 得到方程式:

$$\eta_\omega=1+\frac{\eta_\omega}{2\pi\tau}\int\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi^2+(\omega^2+\Delta^2)\eta_\omega^2},$$

其解为

$$\eta_\omega=1+\frac{1}{2\tau\sqrt{\omega^2+\Delta^2}}.\tag{39.22}$$

由此可见, 在纯超导体的函数中作代换:

$$\{\omega,\Delta\}\to\{\omega\eta_\omega,\Delta\eta_\omega\},\tag{39.23}$$

就可以得出对杂质原子位置作了平均的函数 $\mathfrak{G}(p)$ 和 $\mathfrak{F}^+(p)$. 不难证明, 和正常金属的情形一样, 这些公式表明坐标空间里零级函数乘上了因子 $\mathrm{e}^{-R/2l}$. 由此可得出, 合金中的量

$$\Delta=|\lambda|\mathfrak{F}^+(x,x)$$

和纯超导体中的 Δ 一致. 既然我们在 §36 中已见到, 超导体的热力学量只和 Δ 有关, 这就证实了前面所作的论断, 即杂质浓度足够小时, 超导体的热力学性质不变.

严格说来, 在我们所考虑的电子 – 电子相互作用模型中, 以上结论只准确到量级为 $1/\omega_{\mathrm{D}}\tau \sim 10^{-6}\mathrm{cm/l}$ 的项. 在更为现实的声子模型中存在频率截断, 因此这样的项根本不出现. 两种模型中其他结果是相同的. 还可以指出, 对各向异性的超导体而言, 它们的热力学依赖于杂质浓度. 例如①, 当 $1/T_{\mathrm{c}}\tau \ll 1$ 时临界温度 T_c 的相对改变为

$$\frac{T_{\mathrm{c}0}-T_{\mathrm{c}}}{T_{\mathrm{c}0}}=\frac{\pi}{8}\frac{\overline{\Delta^2}-(\overline{\Delta})^2}{(\overline{\Delta})^2}\frac{1}{T_{\mathrm{c}0}\tau},$$

其中 $\overline{\Delta}$ 和 $\overline{\Delta^2}$ 分别代表按各个动量方向平均后的 $\Delta(p)$ 和 $\Delta^2(p)$. 在已知的各向异性超导体中, $\dfrac{\overline{\Delta^2}-(\overline{\Delta})^2}{(\overline{\Delta})^2}$ 的数量级为 10^{-2}.

现在讨论弱静磁场对超导合金穿透深度的温度依赖性. 根据 (37.10) 式, 电流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ 在对外场的线性近似下为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})=&\frac{e^2}{m^2}T\sum_{\omega}(\nabla_{\boldsymbol{r}}-\nabla_{\boldsymbol{r}'})_{\boldsymbol{r}'\to\boldsymbol{r}}\int\{\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{l})[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{l}),\nabla_l]\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{l},\boldsymbol{r}')\\&+\mathfrak{F}_\omega(\boldsymbol{l},\boldsymbol{r})[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{l}),\nabla_l]\mathfrak{F}^+_\omega(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{l})\}\mathrm{d}\boldsymbol{l}-\frac{Ne^2}{m}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}),\end{aligned}$$

然而式中的函数 $\mathfrak{G}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 和 $\mathfrak{F}^+_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 包括了与杂质原子的相互作用. 将此式对杂质位置求平均, 并转到傅里叶表象, 把核 $Q_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k})$ 表示如下:

$$Q_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k})=\frac{Ne^2}{m}\delta_{\alpha\beta}+\frac{2e^2T}{(2\pi)^3m^2}\sum_{\omega'}\int\boldsymbol{p}'_\alpha\boldsymbol{\Pi}^{(1)}_\beta(p'_+,p'_-)\mathrm{d}\boldsymbol{p}'. \tag{39.24}$$

$\left[p'\pm=p'\pm\dfrac{k}{2},k=(\boldsymbol{k},0)\right]$, 其中 $\boldsymbol{\Pi}^{(1)}(p_+,p_-)$ 是下式的傅里叶分量:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Pi}^{(1)}(x-y,y-x')\\&\quad=-\frac{\mathrm{i}}{2}(\nabla_y-\nabla_{y'})_{y'\to y}[\overline{\mathfrak{G}(x,y')\mathfrak{G}(y,x')}-\overline{\mathfrak{F}^+(y',x')\mathfrak{F}(x,y)}],\\&\boldsymbol{\Pi}^{(1)}(x-y,y-x')=\frac{T^2}{(2\pi)^6}\sum_{\omega_+,\omega_-}\int\Pi^{(1)}(p_+,p_-)\\&\quad\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}_+(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-\mathrm{i}\omega_+(\tau_x-\tau_y)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}_-(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}')-\mathrm{i}\omega_-(\tau_y-\tau_{x'})}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_+\mathrm{d}\boldsymbol{p}_-.\end{aligned}$$

和正常金属一样, 两个格林函数乘积的平均值不等于平均值的乘积. 为了对杂质原子位置平求均, 又须求和若干图形的集合. 由于超导性只在费米面附近才使格

①参看 [81]; 还有 P. Hohenberg 的私人通信.

林函数变形, 所需的图形仍和前段一样, 属于 "阶梯" 型. 然而, 超导体中存在着三种不同的格林函数, 这就使所有的方程式比表示图 103 求和的方程式更复杂些. 从图 106 看出, 为了确定 $\boldsymbol{\Pi}^{(1)}(p_+,p_-)$, 还需要知道三个量, 它们和 $\boldsymbol{\Pi}^{(1)}(p_+,p_-)$ 的差则在于电子线上箭头方向不同. 每个这种量对应 $\mathfrak{G}$ 和 $\mathfrak{F}^+$ 的一定组合:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Pi}^{(2)}(x-y,y-x')\\
&\quad=-\frac{\mathrm{i}}{2}(\nabla_y-\nabla_{y'})_{y'\to y}[\overline{\mathfrak{F}^+(x,y')\mathfrak{G}(y,x')}+\overline{\mathfrak{G}(y,x)\mathfrak{F}^+(y',x')}],\\
&\boldsymbol{\Pi}^{(3)}(x-y,y-x')\\
&\quad=-\frac{\mathrm{i}}{2}(\nabla_y-\nabla_{y'})_{y'\to y}[\overline{\mathfrak{G}(y,x)\mathfrak{G}(x',y')}-\overline{\mathfrak{F}^+(x,y')\mathfrak{F}(y,x')}],\\
&\boldsymbol{\Pi}^{(4)}(x-y,y-x')\\
&\quad=-\frac{\mathrm{i}}{2}(\nabla_y-\nabla_{y'})_{y'\to y}[\overline{\mathfrak{G}(x,y')\mathfrak{F}(y,x')}+\overline{\mathfrak{G}(x,y)\mathfrak{G}(x',y')}].
\end{aligned}$$

因此, 在我们所讨论的情形中, 不是解简单的方程式 (39.12), 而是解傅里叶分量 $\boldsymbol{\Pi}^{(i)}(p_+,p_-)(i=1,2,3,4)$ 的四个联立方程式.

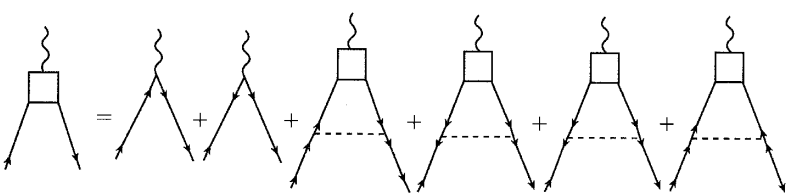


图 106

引入符号:

$$\Lambda^{(i)}(\omega')=\frac{n}{(2\pi)^3}\int|u(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')|^2\boldsymbol{\Pi}^{(i)}(p'_+,p'_-)\mathrm{d}\boldsymbol{p}'\quad(i=1,2,3,4),\tag{39.25}$$

构成方程式的原则由图 106 可直接看出. 例如有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Pi}^{(1)}(p_+,p_-)=&\boldsymbol{p}[\mathfrak{G}(p_+)\mathfrak{G}(p_-)+\mathfrak{F}(p_+)\mathfrak{F}^+(p_-)]\\
&+\mathfrak{G}(p_+)\mathfrak{G}(p_-)\Lambda^{(1)}(\omega)-\mathfrak{F}^+(p_+)\mathfrak{G}(p_-)\Lambda^{(2)}(\omega)\\
&-\mathfrak{F}(p_+)\mathfrak{F}^+(p_-)\Lambda^{(3)}(\omega)-\mathfrak{G}(p_+)\mathfrak{F}(p_-)\Lambda^{(4)}(\omega).
\end{aligned}$$

其他三个方程式也是类似的. 将它们代入 (39.25) 式, 得到诸 $\Lambda^i(\omega)$ 的方程组. 我们不把它完全写出来, 因为在一般情形下只有对球对称散射才能求解. 同时我们也不关心对各量的比例为任意时的解. 杂质浓度很小时, 超导合金的性质接近纯超导体. 我们已经讲过, 大部分纯超导体属于 Pippard 型或中间型. 掺入杂质使关联半径减小, 在杂质浓度相当小时, 超导体就变成 London 型超导合金, 其电动力学已是

局域性的. 这时局域性判据是穿透深度 δ 和杂质散射自由程 l 之比 (或者是特征值 $|\boldsymbol{k}| \sim \frac{1}{\delta}$ 与 $\frac{1}{l}$ 之比). 以后我们认为杂质浓度已使合金成为 London 型 ($|\boldsymbol{k}|l \ll 1$). 这种情形下, 上述方程组大为化简. 在 $\boldsymbol{\Pi}^{(1)}(p_+, p_-)$ 中可忽略 $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{p}_+ = \boldsymbol{p}_-)$, 结果发现:

$$\boldsymbol{\Lambda}^{(1)}(\omega) = -\boldsymbol{\Lambda}^{(3)}(\omega),$$
$$\boldsymbol{\Lambda}^{(2)}(\omega) = \boldsymbol{\Lambda}^{(4)}(\omega),$$

以及

$$\boldsymbol{\Lambda}^{(1)}(\omega) = \boldsymbol{p}\Lambda^{(1)}(\omega),$$
$$\boldsymbol{\Lambda}^{(2)}(\omega) = \boldsymbol{p}\Lambda^{(2)}(\omega).$$

因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Pi}^{(1)}(p,p) =& \boldsymbol{p}\{\mathfrak{G}^2(p) + [\mathfrak{F}(p)]\}[1 + \Lambda^{(1)}(\omega)] \\ & - 2\boldsymbol{p}\mathfrak{G}(p)\mathfrak{F}^+(p)\Lambda^{(2)}(\omega),\end{aligned} \tag{39.26}$$

而 $\Lambda^i(\omega)$ 的方程组成为

$$\Lambda^{(1)}(\omega) = [\overline{\mathfrak{G}_\omega^2} + (\overline{\mathfrak{F}_\omega^{+2}})][1 + \Lambda^{(1)}(\omega)] - 2\overline{\mathfrak{G}_\omega\mathfrak{F}_\omega^+}\Lambda^{(2)}(\omega),$$
$$\Lambda^{(2)}(\omega) = 2\overline{\mathfrak{G}_\omega\mathfrak{F}_\omega^+}[1 + \Lambda^{(1)}(\omega)] - [\overline{\mathfrak{G}_\omega^2} + (\overline{\mathfrak{F}_\omega^{+2}})]\Lambda^{(2)}(\omega),$$

其中

$$\boldsymbol{p}\overline{\mathfrak{G}_\omega^2} = \frac{n}{(2\pi)^3}\int |u(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')|^2\mathfrak{G}^2(p')\boldsymbol{p}'\mathrm{d}\boldsymbol{p}' = \frac{\boldsymbol{p}\Delta^2}{4\tau_1\eta_\omega(\sqrt{\omega^2+\Delta^2})^3},$$

$$\boldsymbol{p}\overline{(\mathfrak{F}_\omega^{+2})} = \frac{n}{(2\pi)^3}\int |u(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')|^2[\mathfrak{F}^+(p')]^2\boldsymbol{p}'\mathrm{d}\boldsymbol{p}' = \frac{\boldsymbol{p}\Delta^2}{4\tau_1\eta_\omega(\sqrt{\omega^2+\Delta^2})^3},$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}\overline{\mathfrak{F}_\omega^+\mathfrak{G}_\omega} =& \frac{n}{(2\pi)^3}\int |u(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')|^2\mathfrak{F}^+(p')\mathfrak{G}(p')\boldsymbol{p}'\mathrm{d}\boldsymbol{p}' \\ =& \frac{\mathrm{i}\Delta\omega\boldsymbol{p}}{4\tau_1\eta_\omega(\sqrt{\omega^2+\Delta^2})^3}.\end{aligned}$$

解得 $\Lambda^{(1)}(\omega), \Lambda^2(\omega)$ 的表达式:

$$\Lambda^{(1)}(\omega) = \frac{\Delta^2}{2\tau_1(\omega^2+\Delta^2)\left(\sqrt{\omega^2+\Delta^2}+\dfrac{1}{2\tau_{\mathrm{tr}}}\right)},$$

$$\Lambda^{(2)}(\omega) = \frac{\mathrm{i}\Delta\omega}{2\tau_1(\omega^2+\Delta^2)\left(\sqrt{\omega^2+\Delta^2}+\dfrac{1}{2\tau_{\mathrm{tr}}}\right)}.$$

将后者代入 (39.26) 式, 同时以 $\boldsymbol{\Pi}^{(1)}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p})$ 代入 (39.24) 式, 得到核 $Q(\boldsymbol{k})$, 即

$$\begin{aligned} Q \equiv Q(\boldsymbol{k}) = & \frac{Ne^2}{m}\left\{1 + T\sum_{\omega}\int \mathrm{d}\xi\left[(\xi^2 - \omega^2\eta_\omega^2 + \Delta^2\eta_\omega^2)\right.\right. \\ & \times\left(1 + \frac{\Delta^2}{2\tau_1(\omega^2+\Delta^2)^{3/2}\eta_{\omega,\mathrm{tr}}}\right) + \left.\frac{2\Delta^2\omega^2\eta_\omega^2}{2\tau_1(\omega^2+\Delta^2)^{3/2}\eta_{\omega,\mathrm{tr}}}\right] \\ & \left.\times\frac{1}{[\xi^2 + (\omega^2+\Delta^2)\eta_\omega^2]^2}\right\} \end{aligned} \tag{39.27}$$

$\left(\text{我们引入了记号}\eta_{\omega,\mathrm{tr}} = 1 + \dfrac{1}{2\tau_{\mathrm{tr}}\sqrt{\omega^2+\Delta^2}}\right)$. 这里又和 §37 一样, 遇见了形式上发散的积分. 基于同样的理由应先对频率求和. 将圆括弧内的项组合成

$$\xi^2 + (\omega^2+\Delta^2)\eta_\omega^2 - 2\omega^2\eta_\omega^2,$$

并利用 Abel 变换, 后者乃是分部积分原理对级数的推广, 即

$$\sum_{n=1}^{k}(B_n - B_{n-1})u_n = B_k u_k - B_0 u_1 - \sum_{n=1}^{k-1}(u_{n+1} - u_n)B_n.$$

应用此式于级数

$$2\pi T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\xi^2 + (\Delta^2+\omega^2)\eta_\omega^2},$$

其中

$$B_n = (2n+1)\pi T = \omega,$$

$$B_n - B_{n-1} = 2\pi T,$$

可以消去 (39.27) 式的形式上发散的项. 然后得

$$Q = \frac{Ne^2}{m}2\pi T\Delta^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\omega^2+\Delta_2)\left(\sqrt{\omega^2+\Delta^2} + \dfrac{1}{2\tau_{\mathrm{tr}}}\right)}. \tag{39.28}$$

此式中只有碰撞间的 "输运" 时间. 对穿透深度 δ 有

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{4\pi Q}}.$$

当 $\dfrac{1}{\tau} \to 0$ 时, 此式成为普通的伦敦公式:

$$\delta = \sqrt{\frac{m}{4\pi N_{\mathrm{s}}e^2}},$$

其中 N_s 是 "超导电子数".

在相反的情形下, $l \ll \xi_0$, 可忽略 (39.28) 式括弧中的根号. 剩下的级数不难求和. 结果得到 "脏" 合金的穿透深度为

$$\delta = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{\Delta\sigma \mathrm{th}\dfrac{\Delta}{2T}}}.$$

其中 σ 是正常金属的电导率.

参考文献①

[1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифщиц, Статистическая физика, ГТТИ, 1951; 汉译本请参阅 [82].

[2] Р. Е. Пайерлс, Квантовая теория твердых тел, ИЛ, 1956; R. Peierls, *Quantum Theory of Solids*, Oxford University Press, 1955.

[3] Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **11**, 592, 1941.

[4] L. D. Landau, J. Phys. **11**, 91, 1947.

[5] Л. П. Питаевский, ЖЭТФ **31**, 536 1956; L. P. Pitaevskii, On the derivation of a formula for the energy spectrum of liquid helium He^4, Soviet Phys. JETP, **4**, 439, 1957.

[6] R. P. Feynman, Phys. Rev. **94**, 262, 1954.

[7] J. L. Yarnell, G. P. Arnold, P. J. Bendt, E. C. Kerr, Phys. Rev. **113**, 1379, 1959.

[8] И. М. Халатников, УФН **59**, 673, 1956.

[9] И. М. Халатников, УФН **60**, 69, 1956.

[10] Е. М .Лифщиц, 为 W. H. Keesom 的书 [11] 俄文译本所写的附录.

[11] В. Кеезом, Гелий, ИЛ 1949; W. H, Keesom, *Helium*, Elisevier, New York, 1942.

[12] Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **30**, 1058, 1956; L. D. Landau, The thoery of a Fermi liquid, Soviet Phys. JETP**3**, 920 – 925, 1957.

[13] Л. Д. Ланлау, ЖЭТФ **32**, 59, 1957; L. D. Landau, Oscillations in a Fermi liquid, Soviet Phys. JETP**5**, 101 – 108, 1957.

[14] D. F. Brewer, J. G. Daunt, A. K. Sreedhar, Phys. Rev**115**, 836, 1959.

[15] E. C. Kerr. Phys. Rev. **96**, 551, 1954.

[16] А. А. Абрикосов, И. Е. Дзялощинский, ЖЭТФ **35**, 771, 1958; A. A. Abrikosov, I. E. Dzyaloshinski, Spin waves in a ferromagnetic metal, Soviet Phys. JEPT, **8**, 535 – 537, 1958.

[17] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифщиц, Квантовая механика, ГТТИ, 1948; 汉译本请参阅 [83].

[18] Н. Н. Боголюбов, Изв. АН СССР, сер. физ. **11**, 77, 1947.

[19] K. Huang, C. N. Yang, J. M. Luttinger, Phys. Rev. **105**, 776, 1957.

[20] K. Brueckner, K. Sawada, Phys. Rev. **106**, 1117, 1957.

[21] K. Huang, C. N. Yang, Phys. Rev. **105**, 767, 1957.

[22] T. D. Lee, C. N. Yang, Phys, Rev. **105**, 1119, 1957.

①有 * 号者系译者补入. 原书引用的俄文文献, 尽可能补录了美国物理学会 (AIP) 英文译刊的卷页码.

[23] А. А. Абрикосов, И. М. Халатников, ЖЭТФ **33**, 1154, 1957; A. A. Abrikosov, I. M. Halatnikov, Concerning a model for a non-ideal Fermi gas, Soviet Phys. JETP, **6**, 888 – 892, 1958.

[24] В. М. Галицкий, ЖЭТФ **34**, 151, 1958; V. M. Galitskii, The energy spectrum of a non-ideal Fermi gas, Soviet Phys. JETP**34**, 104 – 112, 1958.

[25] В. А. Беляков, ЖЭТФ **40**, 1210, 1961; V. A. Belyakov, The momentum distribution of particles ina dilute Fermi gas, Soviet Phys. JETP**13**, 850 – 851, 1961.

[26] А. И. Ахиезер и В. Б. Берестецкий, Квантовая Электродинамика. Физматгиз., 1959; 建议参阅朗道《理论物理学教程》第四卷《量子电动力学》，第 4 版. 高等教育出版社.

[27] M. Gell-Mann, F. Low, Phys. Rev. **84**, 350, 1951.

[28] Б. М. Галицкий, А. Б. Мигдал, ЖЭТФ **34**, 139, 1958; V. M. Galitskii, A. B. Migdal, Application of quantum field theory method to the many body problem, Soviet Phys. JETP, **34**, 96 – 104, 1958.

[29] H. Lehmann, Nuovo Cimento **11**, 342, 1954.

[30] А. Б. Мигдал, ЖЭТФ, **32**, 399, 1957; A. B. Migdal, The momentum distribution of interacting Fermi particles, Soviet Phys. JETP, **5**, 333 – 334, 1957.

[31] T. Matsubara, Prog. Theor. Phys. **14**, 351, 1955.

[32] А. А. Абикосов, Л. Ц. Горьков, И. Е. Дзялощинский, ЖЭТФ **36**, 900 – 908, 1959; A. A. Abrikosov, L. C. Gorkov, I. E. Dzyaloshinski, On the application of quantum field theory method to problems of quantum statistics at finite temperature, Soviet Phys. JETP**9**, 636 – 641, 1959.

[33] Е. С. Фрадкин, ЖЭТФ **36**, 1286, 1959; E. S. Fradkin, The Green's function method in quantum statistics, Soviet Phys. JETP, **9**, 912 – 918, 1959.

[34] J. M. Luttinger, J. C. Ward, Phys. Rev. **118**, 1417, 1960; J. M. Luttinger, Phys. Rev. **119**, 1153, 1960.

[35] Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **34**, 262, 1958; L. D. Landau, The propertie of the Green function for particles in statistics, Soviet Phys. JETP**7**, 182 – 184, 1958.

[36] Н. Н. Боголюбов, С. В. Тябликов, ДАН **126**, 53, 1959.

[37] Д. Н. Зубарев, УФХ **71**, 71, 1960; N. Zubarev, Double time Green functions in statistical physics, Soviet Phys. Uspkhi, **3**, 320 – 345, 1960.

[38] M. Cohen, R. P. Feynman, Phys, Rev. **107**, 13, 1957.

[39] P. Nozières, D. Pines, Phys. Rev.**109**, 714, 1958.

[40] Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **35**, 97, 1958; L. D. Landau, On the theory of Fermi liquid, Soviet Phys. JETP, **8**, 70 – 74, 1959.

[41] Л. П. Питаевский, ЖЭТФ **37**, 1794, 1959; L. P. Pitaevskii, On the superfluidity of liquid helium He^4, Soviet Phys. JETP**10**, 1267 – 1275, 1960.

[42] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифщиц, Электродинамика сплощных сред, ГТТИ, 1957; 汉译本请参阅朗道、栗弗席兹,《理论物理学教程》第八卷《连续介质电动力学》, 第 4 版, 高等教育出版社, 将出版.

[43] А. В. Мигдал, ЖЭТФ **34**, 1438, 1958; A. B. Migdal, Interaction between electrons and lattice vibrations in a normal metal, Soviet Phys. JETP**7**, 996 – 1001, 1958.

[44] Г. М. Элиащберг, ЖЭТФ **39**, 1437, 1960; G. M. Eliashberg, Temperature Greens functions in a superconductor, Soviet Phys. JETP**12**, 1000 – 1002, 1961.

[45] Г. М. Элиащберг, ЖЭТФ **43**, 1105, 1962; G. M. Eliashberg, The low temperature specific heat of metals, **16**, 780 – 781, 1962.

[46] M. Gell-Mann, K. Brueckner, Phys, Rev. **106**, 364, 1957.

[47] А. А. Абрикосов, ЖЭТФ **41**, 569, 1961; A. A. Abrikosov, Contribution to the theory of highly compressed matter II, Soviet Phys. JETP**14**, 408 – 416, 1962.

[48] А. А. Веденов, ЖЭТФ **36**, 641, 1959; A. A. Vedenov, Thermodynamic properties of a degenerated plasma, Soviet Phys. JETP**9**, 446 – 447, 1959.

[49] С. Т. Беляев, ЖЭТФ **34**, 417, 1958; S. T. Belyaev, Application of the method of quantum field theory to a system of bosons, Soviet Phys. JETP**7**, 289 – 299, 1958.

[50] С. Т. Беляев, ЖЭТФ **34**, 433, 1958; S. T. Belyaev, Energy spectrum of a non-ideal Bose gas, Soviet Phys. JEYP**7**, 299 – 307, 1958.

[51] N. M. Hugengoltz, D. Pines, Phys. Rev. **116**, 489, 1959.

[52] Л. П. Питаевский, ЖЭТФ **36**, 1168, 1959; L. P. Pitaevskii, Properties of the spectrum of elementary exitations near the disintegration threshold of the exitations, Soviet Phys. JETP**9**, 830 – 837, 1959.

[53] Л. П. Питаевцкий, ЖЭТФ **36**, 126, 1960.

[54] D. G. Henshaw, A. D. B. Woods, B. N. Brockhouse, Bull. Am, Phys. Soc. 5, 12, C3, 1960.

[55] И. Е. Дзялощинский, Л. П. Питаевский, ЖЭТФ **36**, 1797, 1959; I. E. Dzyaloshinski, L. P. Pitaevskii, Van der Waals forces in inhomogeneous dielectric, Soviet Phys. JETP**9**, 1282 – 1287, 1959.

[56] М. И. Рязанов, ЖЭТФ **32**,1244, 1957; M. I. Riazanov, Phenomenological study of the effect of a non-conducting medium in quantum electrodynamics, Soviet Phys. JETP**5**, 1013 – 1015, 1957.

[57] И. Е. Дзялощинский, Е. М. Лифщиц, Л. П. Питаевский, ЖЭТФ **37**, 229, 1959; I. E. Dzyaloshinski, E. M. Lifshitz, L. P. Pitaevskii, Van der Waals forces in liquid films, Soviet Phys. JETP**10**, 161 – 170, 1960; Advances in Physics, **10**, 165, 1961.

[58] Е. М. Лифщиц, ЖЭТФ**29**, 94, 1955; E. M. Lifshitz, The theory of molecular attractive forces between solids, Soviet Phys. JETP**2**, 73 – 83, 1956.

[59] R. Eizenschitz, F. London , Z. für Physik **60**, 491, 1930.

[60] H. B. C. Casimir, D. Polder, Phys, Rev. **73**, 360, 1948.

[61] Л. П. Питаевцкий, ЖЭТФ **37**, 577, 1959; L. P. Pitaevskii, Attraction of small particles suspended in a liquid at large distances, Soviet Phys. JETP**10**, 408 – 409, 1960.

[62] I. E. Dzyaloshinski, E. M. Lifshitz, L. P. Pitaevski, Advances in Physics, **10**, 165, 1961.

[63] E. Maxwell. Phys. Rev. **78**, 447, 1949;**79**, 173, 1950.

[64] C. A, Reynolds et al, Phys, Rev. **78**, 487, 1950.

[65] H. Frohlich, Phys. Rev. **79**, 845, 1950.

[66] L. N. Cooper, Phys. Rev. **104**, 1189, 1956.

[67] J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **108**, 1175, 1957.

[68] Н. Н. Боголюбов, ЖЭТФ **34**, 58, 73, 1958; N. N. Bogoliubov, A new method in the theory of superconductivity I, Soviet Phys. JETP**7**, 41 – 46, 1958.

[69] Н. Н Боголюбов, В. В. Толмачев, Д. В. Ширков, Новый метод в теории сверхцроводимости, Изд-во АН СССР, 1958; 汉译本: 波戈留波夫等著,《超导理论中的新方法》, 科学出版社, 1959.

[70] Л. П. Горьков, ЖЭТФ **34**, 735, 1958; L. P. Gorkov, On the energy spectrum of superconductors, Soviet Phys. JETP**7**, 505 – 508, 1958.

[71] Г.М. Элиащберг, ЖЭТФ **38**, 966, 1960; G. M. Eliashberg, Intercations between electrons and lattice vibrations in a superconductor, Soviet Phys. JETP**11**, 696 – 702, 1960.

[72] А. А. Абрикосов, И. М. Халатников, УФХ **65**, 551, 1958; I. M. Khalatnikov, A. A. Abrikosov, Advances in Physics**8**, 45, 1959.

[73] H. London, F. London, Proc. Roy. Soc. ***A*149**, 71, 1935; Physica **2**, 3, 1935.

[74] A. B. Pippard, Proc. Roy. Soc. ***A*216**, 547, 1953.

[75] D. C. Mattis, J. Bardeen, Phys, Rev. **111**, 412, 1958.

[76] А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. М. Халатников, ЖЭТФ **35**, 265, 1958; **37** , 187, 1959; A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov, Khalatnikov, A superconductor in a high-frequency field, Soviet Phys. JETP, **8**, 182 – 189, 1959; Analysis of experimental data relating to the surface impedance of superconductors, Soviet Phys. JETP**10**, 132 – 134, 1959.

[77] Л. П, Горьков, ЖЭТФ **36**, 1918, 1959; L. P. Gorkov, Microscopic derivation of the Landau-Ginzburg equations in the theory of superconductivity, Soviet Phys. JETP, **9**, 1364 – 1367, 1959.

[78] В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **20**, 1064, 1950.

[79] А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, ЖЭТФ **35**, 1558, 1959; A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov, On the theory of superconducting alloys, Soviet Phys. JETP, **8**, 1090 – 1098, 1959.

[80] S. F. Edwards, Phil. Mag. **3**, 1020, 1958.

[81] T. Tsuneto, Technical Report of the Institute of Solid State Physics, University of Tokyo, Series A, No. 47, 1962.

[82]* 朗道, 栗弗席兹. 《理论物理学教程》第五卷《统计物理学 I》, 第 5 版. 高等教育出版社, 2011.

[83]* 朗道, 栗弗席兹.《理论物理学教程》第三卷《量子力学 (非相对论理论)》, 第 6 版. 高等教育出版社, 2008.

[84]* 玻恩, 黄昆. 晶格动力学理论. 葛惟锟, 贾惟义译. 北京大学出版社, 1989.

中外物理学精品书系·引进系列52

统计物理学中的量子场论方法

(第3版)

阿列克塞·阿列克谢维奇·阿布里科索夫 (Alexei Alexevich Abrikosov)，1928年生于莫斯科，是以朗道为首的苏联理论物理学派的杰出代表。1951年在物理问题研究所获博士学位，1964年当选苏联科学院通讯院士，1987年当选院士，1989年因《统计物理学中的量子场论方法》一书获苏联科学院奖，1991年加入美国籍。2003年因对第二类超导体理论的贡献获得诺贝尔物理学奖。

郝柏林，1959年毕业于乌克兰哈尔科夫国立大学物理数学系。1961—1963年在莫斯科大学物理系和苏联科学院物理问题研究所做研究生，在此期间翻译《统计物理学中的量子场论方法》。1978—2005年任中国科学院理论物理研究所研究员，2005—2011年任美国圣菲研究所外聘教授，2005年以来任复旦大学教授。1980年11月当选中国科院院士。1995年当选第三世界科学院院士。1993和2000年获国家自然科学奖二等奖，2007年获国家科技进步奖二等奖。

ISBN 978-7-301-25056-3



定价：65.00元