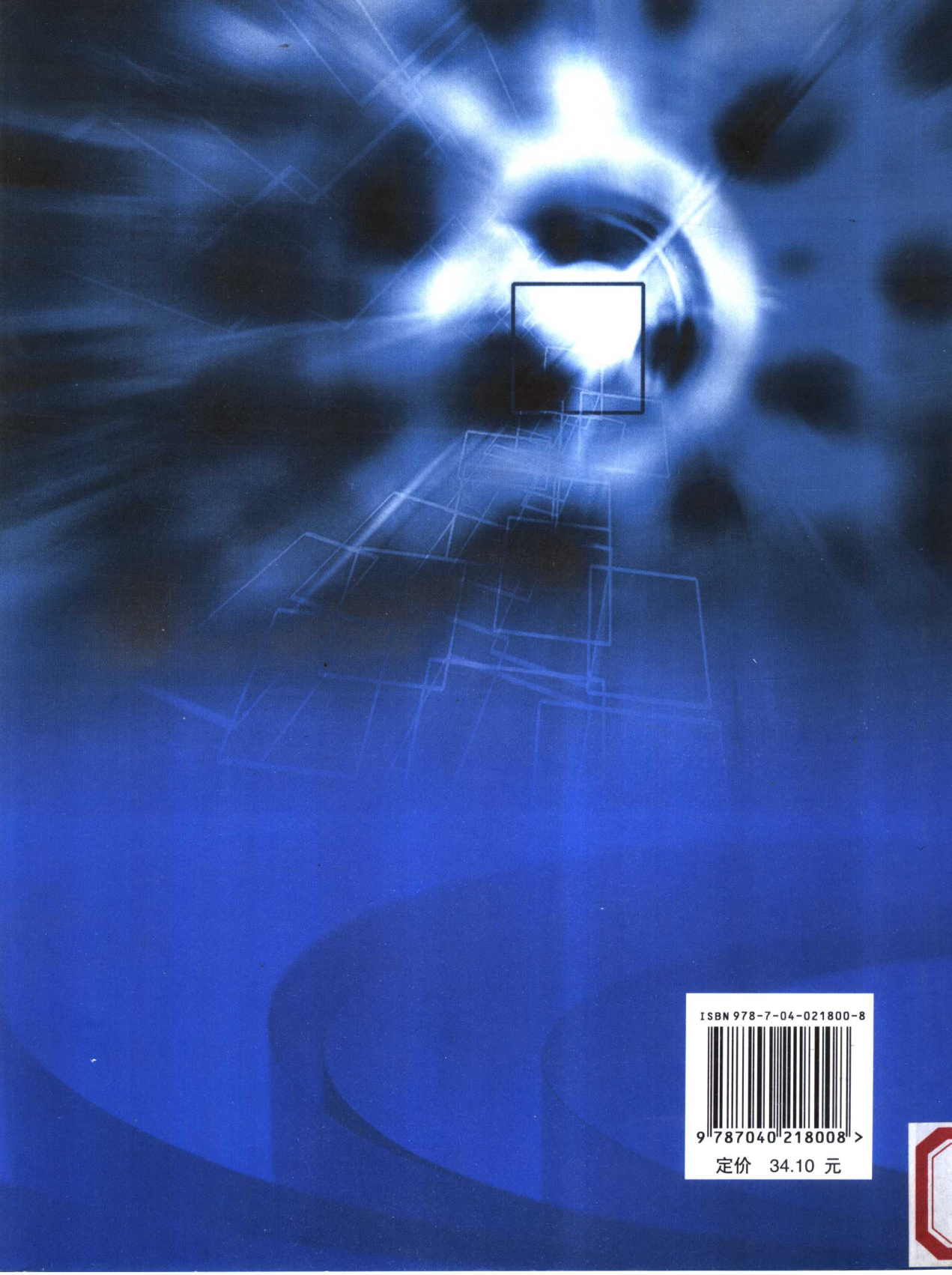
普通高等教育“十五”国家级规划教材配套参考书

基础物理学教程教学参考书

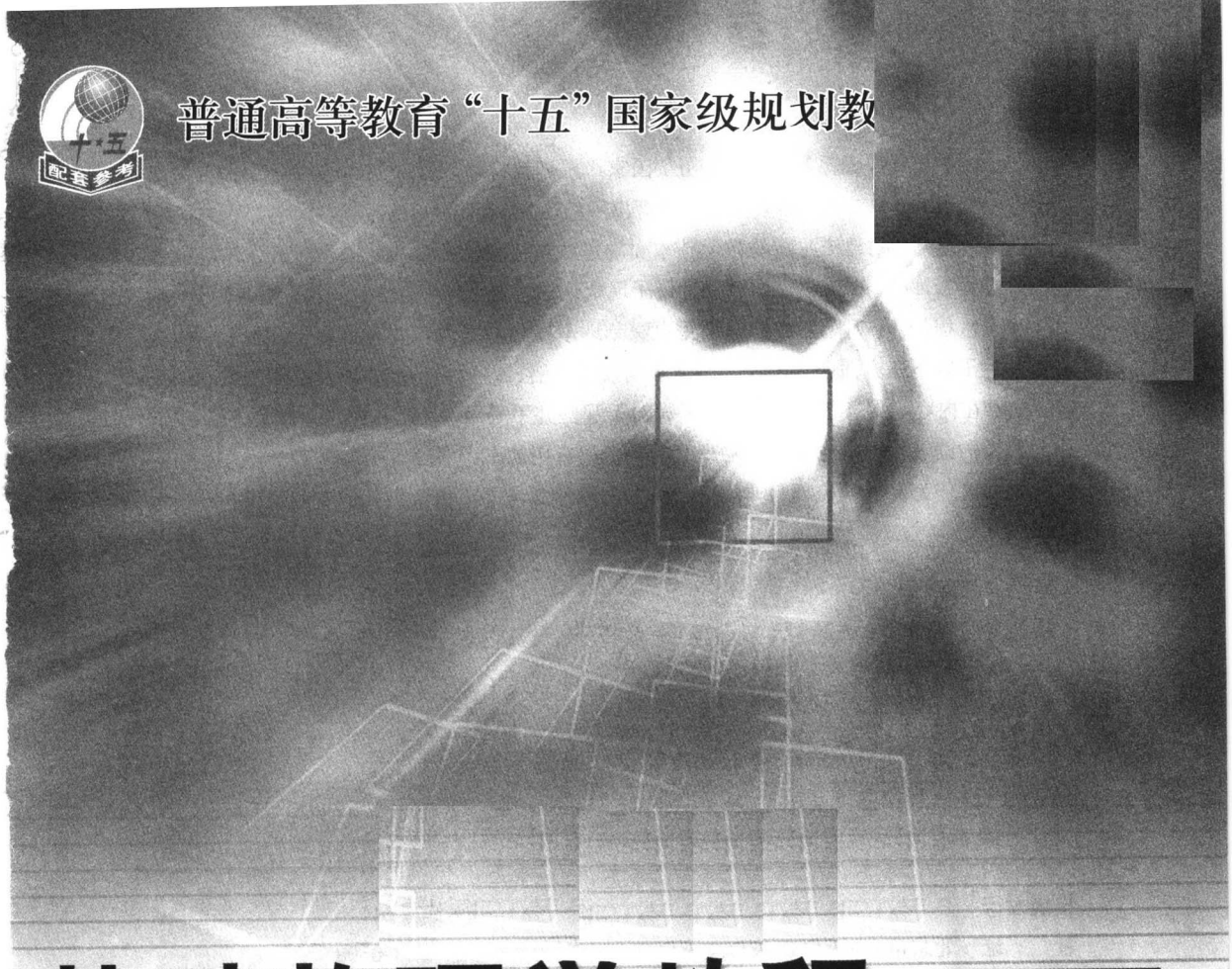
第二版

陆　果　陈凯旋

高等教育出版社
Higher Education Press



ISBN 978-7-04-021800-8
9 787040 218008 >
定价 34.10 元



基础物理学教程 第二版
教学参考书

陆 果 陈凯旋

高等教育出版社
Higher Education Press

内容简介

本书是为配合普通高等教育“十五”国家级规划教材和“面向21世纪课程教材”《基础物理学教程》(第二版) (陆果，高等教育出版社，2006)而编写的教学参考书。《基础物理学教程》(第二版)是依照新的教学基本要求，从现代科学技术的发展及对人才培养的要求出发进行修订的，在内容方面充分体现了现代化的特色，涉及面较广。为了帮助使用《基础物理学教程》(第二版)的教师和学生更深刻地掌握其基本内容并开阔视野，本书简明扼要地讲述了以下三方面的内容：物理学和高技术前沿、习题精析提要以及常用的数学结果等。由于在内容上保持了相对的独立性，对于那些并不采用《基础物理学教程》（第二版）作为教材的读者，本书也是学习物理学的一本很有用的参考书。

本书可作为高等学校理科非物理类专业的教学参考书，也可供其他专业选用和社会读者阅读。

图书在版编目（CIP）数据

基础物理学教程（第2版）教学参考书/陆果，陈凯旋著.—北京：高等教育出版社，2007.6
ISBN 978-7-04-021800-8

Ⅰ.基… Ⅱ.①陆…②陈… Ⅲ.物理学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.04

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第075012号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	**网上订购**	http://www.landraco.com
印　　刷	北京嘉实印刷有限公司		http://www.landraco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2007年6月第1版
印　　张	27.5	**印　　次**	2007年6月第1次印刷
字　　数	510 000	**定　　价**	34.10元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有　侵权必究

物料号　21800-00

前　言

本书是为配合普通高等教育“十五”国家级规划教材和“面向 21 世纪课程教材”《基础物理学教程》(第二版) (陆果，高等教育出版社，2006) 而编写的教学参考书。《基础物理学教程》(第二版) 参照教育部高等学校物理学与天文学教学指导委员会颁发的《非物理类理工学科大学物理课程教学基本要求》，在确保基本要求的基础上，强调了量子物理(包括量子统计)的重要性，进一步增加了从物理前沿进展中提炼出来的部分基础物理内容，力求使非物理类理工学科的大学生也能有扎实的物理基础来面对飞速发展的现代科学技术的挑战。

自 1999 年 10 月《基础物理学教学参考书》出版以来，经过七年的教学实践，感到有必要对全书进行修订。这次修订，首先，将书名更改为《基础物理学教程教学参考书》，纠正了一些错误或不准确的叙述，增加了关于近年来科学技术新进展的内容。其次，配合《基础物理学教程》(第二版)的修订，增删了部分习题。同时，将习题解答分为以下几种不同的类型：一些最基本的习题，只给出答案；一些内涵较丰富的习题充实了解答的物理内容，有的还给出了多种解法；在量子力学和统计物理学部分，给出了较详尽的推导和说明.

在本书的编写和修订过程中，我们阅读了国内外许多同类教材以及相关杂志的文章，受益匪浅。特别是，中国科学院高能物理研究所黄涛先生对本书第一部分第一章“粒子物理的标准模型”进行了修改，许多老师和同学给予了热情的帮助，北京大学薛立新同志、高等教育出版社刘伟、王文颖和陈钧元同志为本书的出版做了大量的工作，我们在此谨致以衷心的感谢。

由于我们的学识有限，缺点和错误在所难免，诚恳地希望读者提出宝贵的意见。

陆　果　　陈凯旋

2007 年元月于北京大学

第一版参考书前言

20 世纪初，物理学家揭开了原子内部结构的奥秘，建立了相对论和量子力学。1995 年，顶夸克的发现向人们宣告，六种夸克及其反粒子和胶子是构成质子和中子等强子的更为基本的粒子。1998 年，“发现号”航天飞机搭载阿尔法磁谱仪首次升空试验取得了成功，开始了直接到太空中探测和寻找宇宙中的反物质和暗物质的大型国际合作科学试验。今天，人们已经建立起了粒子物理的标准模型和宇宙学的标准模型，并继续探求着浩瀚的未知世界。在研究领域不断取得丰硕成果的同时，科学与技术迅速地、创造性地融合在一起，形成了一系列高、新技术部门。

随着科学技术的飞速发展，学科发展的方向日趋综合，新型的交叉学科不断出现并迅速发展。同时，近代物理学的概念、研究方法和实验技术在生物学、化学和地学等学科中已得到了广泛的应用。特别是，近代化学和生物学的发展已经深入到了微观领域，近代数学的发展与近代物理学的发展更是密切相关和相互促进的。因此，物理学，特别是近代物理学，已经成为各类人才所必须具备的基础知识。

我们正在培养 21 世纪的人才，教学和教材内容的更新势在必行。特别是，对于大学理科非物理类专业，除了普通物理课程之外，一般没有物理方面的后继课程。然而，原来的普通物理课程基本上是参照物理专业的普通物理课程设置的，近代物理学的内容很少，更缺少反映当代物理学及其前沿发展的内容。

为此，从现代科学技术的发展以及理科各个学科人才培养的要求出发，我们对物理课程的框架作了较大的变动，编写了《基础物理学》(陆果. 北京：高等教育出版社，1997)，其内容分为五个部分：力学和相对论、电磁学、光学、量子力学、热物理学。在内容上，不论原来是普通物理的内容还是理论物理的内容，不论是经典物理的内容还是近代物理的内容，只要是当今理科大学生应该掌握的物理基础，就在精心选择、重新组织和整理之后编写在本套书中。我们希望，即使是大学低年级的学生，也能够在有限的时间内将发展到今天的物理学的基础和精华学到手，为他们未来的创造性工作打下较好的物理基础。

《基础物理学教程》(陆果. 北京：高等教育出版社，1998)是在面向 21 世纪课程教材《基础物理学》的基础上，根据近年来的教学实践及读者的意见改写而成的，删减了部分涉及数学较深或理论性较强的内容，减少了篇

幅。该教程是教育部“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果，希望能够达到如下的目标：不仅牢牢地把握住《基础物理学》的基本要求，保持并发扬《基础物理学》在课程现代化方面的成功之处，而且更适合于各类高等理工科院校学生使用。

由于近年来物理学在各个领域都有重大的发展，而且《基础物理学》和《基础物理学教程》涉及面很广，因此无论对于教师还是对于学生，在使用这套教材的过程中都会遇到一定的困难。为了帮助有关师生更深刻地掌握其基本内容并开阔视野，我们编写了本书，简明扼要地讲述了以下三个方面的内容：物理学和高技术前沿(包括粒子物理的标准模型、宇宙学的标准模型、非线性科学的基本概念、生命科学中的物理问题和高技术研究等五章)、习题精析提要以及常用的数学结果，最后还给出了诺贝尔物理学奖获得者的简况表。由于在内容上保持了相对的独立性，因此对于那些并不采用《基础物理学》或《基础物理学教程》作为教材的读者，本书也是学习物理学的一本很有用的参考书。

本书的第二部分第一章到第十四章以及第三部分由陈凯旋编写，其余由陆果编写。全书的计算机排版工作由北京大学薛立新同志完成，高等教育出版社胡凯飞同志为本书的出版做了大量的工作。通过立项，我们得到了教育部和北京市教育局的资助。许多专家和学者对我们的工作给予了热情的支持和帮助。《基础物理学》、《基础物理学教程》以及本书的第二部分(习题精析提要)在北京大学多年使用的过程中，广大教师和学生提出了许多宝贵的意见和建议。对于所有这些帮助，我们在此谨致以衷心的感谢。

由于我们的学识有限，缺点和错误在所难免，诚恳地希望读者提出宝贵的意见。

陆 果　　陈凯旋

1999 年 6 月于北京大学

目　录

第一部分　物理学和高新技术前沿

第一章　粒子物理的标准模型 1
§1-1　粒子物理的发展 1
一　第一阶段 1
二　第二阶段 2
三　第三阶段 3
§1-2　粒子的内禀属性和守恒定律 6
一　质量、质量宽度和寿命 7
二　电荷 9
三　自旋 10
四　同位旋 10
五　重子数和轻子数 11
六　奇异数、粲数、底数和顶数 11
七　宇称和 CPT 定理 12
§1-3　粒子物理的标准模型 13
一　粒子的分类和基本性质 13
二　粒子之间的基本相互作用 15
三　粒子世界探秘 16
参考文献 19

第二章　宇宙学的标准模型 20
§2-1　宇宙和宇宙学 20
一　亮星、银河和星系世界 20
二　宇宙大尺度特征的观测事实 21
§2-2　宇宙学的标准模型 30
一　爱因斯坦宇宙和弗利德曼宇宙 30
二　宇宙膨胀的规律和宇宙物质状态的描述 34
三　热大爆炸的观念 36
四　宇宙演化的过程 37
五　宇宙学标准模型的成功和困难 43

参考文献 48

第三章 非线性科学的基本概念 49
§3-1 非线性科学的研究对象 49
§3-2 混沌 51
一 混沌现象 51
二 非线性映射的宏观特性 51
三 洛伦茨方程和奇怪吸引子 56
§3-3 分形 59
一 分形理论的创立 59
二 分形维数 60
三 分维的计算 61
四 分维的测定 64
§3-4 非线性科学的一些研究方法 65
一 重正化群方法 66
二 实验数学方法 68
三 元胞自动机 68
参考文献 69

第四章 生命科学中的物理问题 70
§4-1 生命科学与物理学 70
一 近代生命科学的发展 70
二 生命科学与物理学的交叉 71
§4-2 细胞 73
一 细胞的大小 73
二 细胞的化学组成 74
三 细胞膜 75
四 细胞质和光合作用 77
五 细胞核和遗传基因 80
六 细胞的全能性和克隆 80
§4-3 蛋白质和核酸 82
一 蛋白质 82
二 核酸、遗传和分子生物学的中心法则 85
三 生物大分子中的相互作用 93
四 生物大分子中的电子 94

五　生物大分子的手征性 95
六　结构生物学的形成和发展 96
七　系统生物学的形成和发展 98
§4-4　生命信息的遗传和表达 100
一　遗传密码 100
二　基因工程 101
§4-5　生命过程中的自组织现象 102
一　生命过程的热力学 102
二　生命起源的自组织问题 105
参考文献 107

第五章　高新技术研究 108
§5-1　概述 108
§5-2　信息技术 109
一　计算机技术 109
二　人机交互与智能处理技术 110
三　软件技术 111
四　通信技术 111
五　生物信息与脑科学 112
六　微电子、光电子与微系统技术 112
七　信息存储与显示技术 113
八　信息获取与传感技术 113
九　网络技术 114
十　信息安全技术 114
十一　广播电视技术 114
§5-3　现代通信的新兴领域 115
一　卫星通信 115
二　新型光纤通信 119
三　移动通信 120
§5-4　生物技术 120
一　生物平台技术 121
二　生物检测与仿生技术 121
三　生物催化与生物转化技术 122
四　农业与环境生物技术 122
五　疾病预防和治疗 122

六 新药的发现与开发 123
七 干细胞与再生医学 123
八 脑与认知科学 123
§5-5 新材料技术 124
一 高分子材料 124
二 金属材料 125
三 无机非金属材料 125
四 功能材料 126
五 光电子材料 126
六 纳米材料 128
§5-6 能源技术 129
一 化石能源 研究开发新能源的必要性 129
二 电能 131
三 核能 132
四 氢能 133
五 可再生能源 134
参考文献 136

第二部分 习题精析提要

第一章 质点运动学 137
第二章 动量守恒和质点动力学 144
第三章 机械能守恒 161
第四章 角动量守恒 178
第五章 连续体力学 195
第六章 振动和波 212
第七章 相对论 223
第八章 电相互作用和静电场 237
第九章 静电场中的导体和电介质 244
第十章 电磁相互作用 251
第十一章 恒定磁场和磁介质 267
第十二章 电磁感应 272
第十三章 电路 282

第十四章　电磁场和电磁波 293
第十五章　光的干涉 299
第十六章　光的衍射 306
第十七章　光的偏振 312
第十八章　光的吸收、散射和色散 316
第十九章　从经典物理学到量子力学 319
第二十章　波函数与薛定谔方程 329
第二十一章　力学量与本征态 349
第二十二章　有心力场和电磁场中的粒子 359
第二十三章　自旋和全同粒子 365
第二十五章　热力学基础 371
第二十六章　统计物理学基础 383
第二十七章　热力学第二定律和第三定律 389
第二十八章　均匀物质的统计热力学 394
第二十九章　相变和临界现象 409

第三部分　附　录

附录一　常用的数学结果 413
附录 1.1　偏导数和全微分 413
一　偏导数 413
二　全微分 413
三　复合函数的微分法 414
四　隐函数的微分法 415
附录 1.2　矢量分析和场论 415
一　标量场的梯度 矢量场的散度和旋度 415
二　定理 416
三　常用的运算公式 416
附录 1.3　积分 417
一　高斯积分和 Γ 函数 417
二　其他积分公式 418
附录二　常用的物理常量和数据 419
附录 2.1　基本物理常量(2002 年国际推荐值) 419

附录 2.2 保留单位和标准值 419
附录 2.3 太阳系的基本数据(Ⅰ) 420
附录 2.4 太阳系的基本数据(Ⅱ) 420
附录三 诺贝尔物理学奖获得者简介 421

第一部分　物理学和高新技术前沿

第一章　粒子物理的标准模型

§1－1　粒子物理的发展

粒子物理学(particle physics)又称为**高能物理学**(highenergy physics)，是物理学的一个分支学科．粒子物理学研究比原子核更深层次的微观世界中物质的结构性质，以及在很高能量(GeV)下这些物质相互转化的现象和产生这些现象的原因与规律．

人们一直在探索物质世界微观结构和相互作用的基本规律．在不同的能量尺度上，人们发现了物质世界不同层次的微观结构，最终的层次很可能并不存在．在实验和理论密切结合的发展过程中，大致经历了以下三个阶段．

一　第一阶段

1897 年，汤姆孙(J.J.Thomson, 1856—1940)在实验上发现了电子．1911 年，卢瑟福(E.Rutherford, 1871—1937)利用 α 粒子大角度弹性散射实验，证实了原子中原子核的存在并发现了质子．1932 年，查德威克(J.Chadwick, 1891—1974)在用 α 粒子轰击原子核的实验中，发现了中子．随后，伊凡宁柯(Д.Д.Иваненко, 1904—1980)和海森伯(W.K.Heisenberg, 1901—1976)独立发表了原子核由质子和中子构成的假说．

1905 年，爱因斯坦(A.Einstein, 1879—1955)提出电磁场的基本结构单元是光子，并在 1922 年为康普顿(A.H.Compton, 1892—1962)等人的实验所证实．1930 年，泡利(W.E.Pauli, 1900—1958)从理论上提出了 β 衰变时放出中微子的假说，并在 1956 年为雷恩斯(F.Reines, 1918—)和考恩(C.L.Cowan, 1919—)的实验所证实．

1928 年，狄拉克(P.A.M.Dirac, 1902—1984)提出了电子的相对论性波动方程，其能量和动量满足相对论关系式

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 . \tag{1.1}$$

若给定电子的动量 $\boldsymbol{p}$，则电子可以有正负两个能态，即

$$E = \pm\sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} . \tag{1.2}$$

在正能范围的最小值 m_0c^2 和负能范围的最大值 $-m_0c^2$ 之间，有一个宽度为

$\Delta = 2m_0c^2$ 的能隙．在经典物理中，一切运动和变化都是连续的，一个原先为正能的物体是不可能通过连续变化而越过如此巨大的能隙变为负能的，因此可以只保留正能解而舍去负能解．然而，量子力学不仅允许这种不连续的变化，而且用狄拉克方程可以算出电子从正能态跃迁到负能态的概率．这意味着正能电子是不稳定的，而且由于负能级没有下限，电子可以无限制地跃迁下去．为了克服这个负能困难，狄拉克在 1930 年提出了空穴理论．

狄拉克假设，可以把真空看成是所有负能级都已填满电子的负能电子海．由于泡利不相容原理，正能电子不能跃迁进入负能电子海，从而是稳定的．然而，只要有大于 $2m_0c^2$ 的能量传递给负能电子，就可以把一个负能电子激发到正能态，从而在负能电子海中产生一个**空穴**(hole)．这个空穴相当于负能电子海中的一个正能粒子，它除了电荷和磁矩与电子相反外，质量、自旋及其他性质都与电子相同，称为**正电子**(positron)．1932 年，安德森(C.D. Anderson, 1905—)在**宇宙线**(cosmic ray)中观测到了正电子．

按照狄拉克的空穴理论，一切粒子都有其相应的**反粒子**(antiparticle)．反粒子最突出的特点是会与其相应的粒子发生**湮没**(annihilation)，正、反粒子的**产生**(creation)和湮没是粒子物理中的普遍现象．这个发现所揭示的正、反粒子对称性，是粒子物理最基本的对称性，从此对称性一直是粒子物理研究的基本观念之一．

二　第二阶段

1934 年汤川秀树(H.Yukawa, 1907—1964)提出，强相互作用是由核子(包括质子和中子)之间交换**介子**(meson)引起的，介子质量是电子质量的 200～300 倍①．1936 年，安德森和尼德迈耶(S.H.Nedermeyer, 1907—)在宇宙线中发现了μ子，尽管它的质量是电子质量的 207 倍，但后来发现它并没有强相互作用．1947 年，鲍威尔(C.F. Powell, 1903—1969)等人用核乳胶技术探测宇宙线，发现了称为 π 介子的粒子，质量是电子质量的 273 倍，这正是汤川秀树所预言的介子．

---

① 对于两个核子之间通过交换虚介子而发生相互作用的过程，可以把核子能量的不确定度 ΔE 估计为介子的能量 mc^2，若介子的传播速率用光速 c 估计，则虚介子从一个核子传播到距离 Δx 的另一个核子处所需要的时间约为 $\Delta t \approx \Delta x/c \approx a/c$，其中 a 为强相互作用的力程．若设 $a \approx 2\,\mathrm{fm}$，则由不确定关系 $\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar$ 可得介子的能量约为

$$mc^2 \approx \Delta E \approx \hbar/\Delta t \approx \hbar c/a \approx 100\,\mathrm{MeV} \approx 200 m_e c^2 .$$

汤川介子场论在核力的长程范围内取得了巨大的成功，但是在核力的短程范围内却遇到了严重的困难．从夸克层次研究核力的本质，是现代核物理学的重要研究方向之一．

为了克服宇宙线流强太弱的限制，人们从 20 世纪 30 年代开始建造能量越来越高、流强越来越大的**粒子加速器**(particle accelerator)，并相继发现了新的强有力的探测手段，如**气泡室**(bubble chamber)和**火花室**(spark chamber)等．到 60 年代初，实验上观测到了大量的称为**强子**(hadron)的粒子[①]，并证实了所有粒子都有相应的反粒子[②]，有的粒子的反粒子就是它自身．这些所谓的“基本粒子”的大量发现，使人们对它们的“基本”性产生了怀疑．

自然界中基本相互作用包括四种：**强相互作用**(strong interaction)、**电磁相互作用**(electromagnetic interaction)、**弱相互作用**(weak interaction)和**引力相互作用**(gravitational interaction)．已经发现的粒子，除了各种相互作用的媒介粒子称为**规范玻色子**(gauge boson)以外，按它们是否直接参与强相互作用，可以分为强子和**轻子**(lepton)．

这个阶段理论上的重要进展是**量子场论**(quantum field theory)和**重正化**(renormalization)理论的建立以及关于相互作用中对称性的研究．例如，确立了对称性在弱相互作用中的破坏，提出了强子分类的 SU(3)对称性，确立了**量子电动力学**(quantum electrodynamics, 简称 QED)是微观领域电磁相互作用的基本理论．

三　第三阶段

粒子物理学是 20 世纪 40 年代开始从原子核物理学中分出来的，它从一开始就作为研究场和粒子的性质、运动、相互作用和相互转化规律的学科出现．但它作为研究粒子内部结构规律的学科，则是在 60 年代才充分发展起来的．在 60 年代，它取得了两个重大的突破性进展：一个是强子结构的夸克模型的确立，另一个是电弱统一理论的成功．

(1) 强子结构的夸克模型的建立

强子是参与强相互作用的粒子．强子分为介子(自旋为 $\hbar$ 的整数倍)和**重子**(baryon，自旋为 $\hbar$ 的半奇数倍)．

强子并非基本粒子的想法，最早是由费米(E.Fermi, 1901—1954)和杨振宁(1922—)在 1949 年提出来的．1958 年，能量约为 1 GeV 的电子在核子上的散射实验表明，核子不是一个点粒子，而是在半径为 0.8×10^{-15} m 范围内有着确定的电磁分布的物理实体．

---

① 这包括了大量的**共振态**(resonance state)粒子，通过强相互作用产生和衰变，寿命极短，约 10^{-24} s ~ 10^{-22} s．

② 1996 年 1 月，**欧洲核研究中心**(CERN)宣布制得了 11 个由正电子和反质子组成的反氢原子．

1961 年，盖尔曼(M.Gell-Mann, 1929—)和奈曼(Y.Neeman, 1925—)提出了用 SU(3)对称性对上百种强子分类的“八重法”．这种分类很好地说明了强子的自旋、宇称、电荷、奇异数及质量等性质的规律性，它就是粒子物理中的周期表．在八重法分类中，不但当时已经发现的粒子都有了自己的位置，而且还准确地预言了新的粒子．1964 年，排在重子十重态图(见后，如图 1－3 所示)最后一个位置上的重子 Ω^- 的发现，标志着粒子物理 SU(3)对称性理论的确立．

1964 年，盖尔曼和兹维格(G.Zweig, 1937—)从 SU(3)对称性的三维基础表示的三个基出发，设想它们是一种数学符号，称为三种**夸克**，即**上夸克** u、**下夸克** d 和**奇异夸克** s．由这三个基的叠加可以构成各种八维表示和十维表示．这种一开始只是数学符号的三种夸克一经提出，很多物理学家就从物质结构的思想去理解它．20 世纪 60 年代末实验和理论的进展使物理学家认识到，夸克不再只是一种解释 SU(3)对称性的数学符号，而是真实存在的实体①，所有强子都是由夸克 q 和反夸克 $\bar{q}$ 组成的(见后，如图 1-2 所示)，这就是强子结构的**夸克模型**(quark model)．夸克模型实质上只涉及强子结构的对称性，尚未深入到相互作用的动力学性质．

1973 年，格罗斯(D.J.Gross)、威尔切克(F.Wilczek)和波利泽(H.D.Politzer)等人在色 SU(3)群定域规范不变性的基础上，建立了**量子色动力学**(quantum chromodynamics, 简称 QCD)．量子色动力学认为，夸克有内部的色空间自由度，即每一味夸克有红、绿和蓝三种不同的**色**(color)②，夸克间的色相互作用是通过传递**胶子**(gluon)而产生的．由于胶子带有**色荷**(color charge)，其本身也参与色相互作用，结果起了反屏蔽作用，使耦合强度随着夸克间距离的增大反而增强，夸克在近距离下表现为**渐近自由**(asymptotic freedom)，远离时表现为**夸克禁闭**(quark confinement)或**色禁闭**(color confinement)．因此，我们将看不到带色的自由夸克和胶子，而只能看到色中性的、由夸克或胶子组成

① 1968 年，利用能量高达 20 GeV 的电子作为探针，在研究质子内部结构的电子深度非弹性散射实验中发现，大角度散射的截面比原来估计的要大得多，这意味着质子内部电荷有着点状的结构．另外的一些迹象还表明，这些点状结构在质子内可以认为是自由的．类似的实验后来也在中子上进行了，20 世纪 70 年代还进行了用高能中微子作为探针的实验，都得到了同样的结论．

② 为了解决夸克的自旋统计问题，必须对夸克引入一个新的量子数——色量子数．例如，重子 Ω^- 是由三个处在轨道运动为 s 态的奇异夸克 s 构成的，而按照泡利不相容原理，不可能有三个相同的费米子(s 夸克)处在相同的运动状态中．引入色量子数之后，问题迎刃而解．

的束缚态——强子[①]．量子色动力学经受了许多实验的检验，确立了它作为强相互作用基本理论的地位．

1974 年，丁肇中(1936—)和里希特(B.Richter, 1931—)等人分别发现了一种新的粒子，即 J 或 ψ 粒子．这种粒子有着非常独特的性质，它不能由上述三种夸克及其反夸克构成，而只能解释为它是由一种新的夸克——粲夸克 c 及其反粒子 $\bar{c}$ 构成的．

1977 年，莱德曼(L.M.Lederman, 1922—)等人又发现了一种独特的新粒子 Υ，它的性质只能以它是由另一种新的夸克——底夸克 b 及其反粒子 $\bar{b}$ 构成得到解释．

1995 年 3 月 2 日，美国费米国家实验室正式宣布，该实验室的两个小组各自独立地发现了顶夸克 t．

总之，从强子层次深入到夸克层次，有六味夸克(上夸克、下夸克、奇异夸克、粲夸克、顶夸克和底夸克)，每一味夸克有红、绿和蓝三种不同的色．重子是三个夸克的束缚态，介子由夸克和反夸克组成．

(2) 电弱统一理论的建立

1961 年，格拉肖(S.L.Glashow, 1932—)首先提出了把电磁相互作用和弱相互作用统一起来的对称性模型．1967 年，温伯格(S.Weinberg, 1933—)和萨拉姆(A.Salam, 1926—1996)在格拉肖理论的基础上，独立地发展和完善了**电弱统一理论**(electro-weak unified theory)[②]．

电弱统一理论认为：电磁相互作用和弱相互作用在能量远高于中间玻色子质量时是统一的，它可以用一种统一的量子规范场来描述，这一规范场与夸克和轻子的相互作用遵从规范不变的内部对称性．统一的**电弱相互作用**(electro-weak interaction)通过传递四种体现这种对称性的规范玻色子(光子和

---

① 实验上所观测到的强相互作用，是色荷之间的色相互作用的剩余作用，它不能简单地归结为交换一个胶子．在能量不是非常高的情况下，强相互作用的媒介粒子主要是介子．我们知道，中性原子之间的范德瓦耳斯相互作用，实质上是原子内部电磁相互作用的剩余作用．当两个原子离得足够近时将引起电子分布的变化，电子云相互重叠，相当于两个原子之间靠交换电子而把原子结合起来．与此相似，可以认为色中性的强子相距足够近时，由正、反夸克组成的介子云相互重叠，通过交换介子而构成强相互作用．

② 1954 年杨振宁和米尔斯(R.L.Mills)提出了非阿贝尔定域规范不变性的量子场论，并将它应用到了强相互作用．杨－米尔斯理论提出，传递电磁相互作用的电磁场是矢量场，其相应的粒子——光子是矢量粒子．由于该理论中的规范场粒子的质量必须为零，而实验上没有发现其他质量为零的矢量粒子，因此该理论遇到了困难．1964 年，希格斯(P.W.Higgs)在理论上找到了使规范粒子获得质量的途径，提出了定域规范对称性自发破缺的机理——**希格斯机理**．此后，杨－米尔斯理论成为各种相互作用统一理论的基础．

中间玻色子)来实现，而精确的规范不变性要求它们是无质量的．由对称性自发破缺机制，**中间玻色子**(intermediate boson)获得了质量，统一的电弱相互作用表现出两种不同的相互作用——电磁相互作用和弱相互作用．电弱统一理论预言了：中间玻色子W^+、W^-和Z^0的质量；弱相互作用中存在电荷中性流，即不改变粒子电荷状态的弱相互作用过程；弱中性流(weak neutral current)不改变夸克的味量子数，提出了存在粲夸克 c 的理论；存在**希格斯粒子**(Higgs particle)．

1973 年，实验上发现了弱中性流的反应．1974 年，实验上确认了粲夸克 c 的存在．1983 年，欧洲核研究中心的质子－反质子对撞机实验相继发现了中间玻色子$W^{\pm}$和Z^0，实验测得的它们的质量与电弱统一理论的预言惊人地一致．电弱统一理论的巨大成功，促进了试图把强相互作用和电弱相互作用统一起来的**大统一理论**(grand unified theory)的探索研究．迄今为止，还没有任何一个大统一理论得到了实验的判定性检验．

§1－2　粒子的内禀属性和守恒定律

微观粒子的一个普遍特性是全同性，即属于同一种粒子的内禀属性完全相同，它们之间不可分辨．粒子的内禀属性不随粒子的运动状态及其来源而改变，所有内禀属性的总和是判别粒子种类的依据．各种粒子的千差万别，反映在粒子的运动和相互作用性质的不同，并通过反映粒子特征的许多物理量表现出来．在粒子进行反应的过程中，粒子所具有的质量、电荷、能量、动量和角动量是守恒的．然而，在粒子物理学中，为了描述粒子的各种运动和相互作用性质，还要引入一些新的量，并得出相应的守恒定律．

概括而言，有以下四类对称性或破缺的对称性是重要的：

(1) **交换对称**，包括玻色统计和费米统计．

(2) **连续时空变换**，如平移、旋转和加速．

(3) **分立变换**，如空间反射 P、时间反演 T、粒子反粒子共轭变换 C．

(4) **规范变换**①，包括 U(1)对称(电荷、超荷、重子数和轻子数守恒)、

① 对于与电性质相联系的规范对称性，不同电荷的量子态之间的相位差别是绝对不能够被观测的．在数学上这意味着，如果用任意相因子来乘波函数，即$\psi \to \psi e^{iQ\theta}$(其中$Q$是电荷，$\theta$是实数)，物理世界保持不变，这个对称的结果是电荷守恒．类似可以引出超荷、重子数和轻子数守恒．由于$e^{iQ\theta}$是1×1的幺正矩阵，这个对称性称为 U(1) 对称，推广到2×2或3×3的幺正矩阵，导致 SU(2)或 SU(3)对称．

SU(2) (同位旋)对称、SU(3)(色和味)对称．迄今为止的实验表明，与第一类和第二类变换相联系的对称是精确成立的，第三类中仅 CPT 是严格成立的，第四类中仅有某些 U(1)和色 SU(3)对称是严格成立的．

表 1－1 给出了夸克－轻子层次的“基本粒子”的性质，表 1－2 给出了部分强子的性质，表 1－3 列出了粒子物理中的不变性和守恒量．

表 1-1　夸克－轻子层次的“基本粒子”的性质①

类	符号	mc^2/MeV	寿命/s	Q/e	自旋	I, I_3	L	B	S	Y	C	b	t
规	γ	$<3\times10^{-33}$	稳定	0	1	0, 0							
范	$W^{\pm}$	80.6×10^{3}	2.9×10^{-25}	±1									
玻	Z^0	91.19×10^{3}	2.6×10^{-25}	0									
色	g	0		0	1								
子	G	0		0	2								
	e^-	0.511	稳定	−1	1/2		1	0					
轻	μ^-	105.7	2.2×10^{-6}	−1	1/2		1	0					
	τ^-	1 776.9	2.9×10^{-13}	−1	1/2		1	0					
	ν_e	$<1.9\times10^{-5}$	稳定	0	1/2		1	0					
子	ν_μ	<2.7	稳定	0	1/2		1	0					
	ν_τ	<35	稳定	0	1/2		1	0					
	u	5.6		2/3	1/2	1/2, 1/2	0	1/3	0	1/3	0	0	0
夸	d	9.9		−1/3	1/2	1/2, −1/2	0	1/3	0	1/3	0	0	0
	c	1.35×10^{3}		2/3	1/2	0, 0	0	1/3	0	1/3	1	0	0
	s	1.99×10^{2}		−1/3	1/2	0, 0	0	1/3	−1	−2/3	0	0	0
克	t	1.8×10^{5}		2/3	1/2	0, 0	0	1/3	0	1/3	0	0	1
	b	5×10^{3}		−1/3	1/2	0, 0	0	1/3	0	1/3	0	−1	0

一　质量、质量宽度和寿命

粒子物理学中所说的粒子的质量，都是指粒子的静质量．所有的粒子都具有确定的质量．

在已经发现的质量不为零的粒子中，最重的是 Z^0 粒子，它的质量约为质子的 97 倍，约为电子的 17.8 万倍．迄今为止的实验表明，中微子和反中

① 反粒子和相应的粒子具有相同的质量 m、寿命、自旋 s 以及相反的电荷 Q、轻子数 L、重子数 B、奇异数 S、超荷 Y、粲数 C、底数 b 和顶数 t.

微子的质量不为零．光子的质量为零①，永远以真空中的光速运动．

表 1-2　部分强子的性质

类别		符号	mc^2/MeV	寿命/s	Q/e	自旋	I, I_3	B	S	Y	反粒子
介子		π^+	139.6	2.6×10^{-8}	1	0	1, 1	0	0	0	π^-
		π^0	135.0	8.3×10^{-17}	0	0	1, 0	0	0	0	π^0
		K^+	493.7	1.2×10^{-8}	1	0	1/2, 1/2	0	1	1	$\overline{K^-}$
		K^0	497.7	8.9×10^{-11} 5.2×10^{-8}	0	0	1/2, −1/2	0	1	1	$\overline{K^0}$
		η^0	549	2.5×10^{-10}	0	0	0, 0	0	0	0	η^0
		J/ψ	3 686	3.1×10^{-21}	0	1	0, 0	0	0	0	J/ψ
		Υ	9 460	6.6×10^{-20}	0	1	0, 0	0	0	0	Υ
重子	核子	p	938.3	稳定	1	1/2	1/2, 1/2	1	0	0	$\bar{p}$
		n	938.6	917	0	1/2	1/2, −1/2	1	0	0	$\bar{n}$
	超子	Λ^0	1 115.6	2.6×10^{-10}	0	1/2	0, 0	1	−1	0	$\overline{\Lambda^0}$
		Σ^+	1 189.4	8×10^{-11}	1	1/2	1, 1	1	−1	0	$\overline{\Sigma^+}$
		Σ^0	1 192.5	5.8×10^{-20}	0	1/2	1, 0	1	−1	0	$\overline{\Sigma^0}$
		Σ^-	1 197.3	1.5×10^{-10}	−1	1/2	1, −1	1	−1	0	$\overline{\Sigma^-}$
		Ξ^0	1 314.9	2.9×10^{-10}	0	1/2	1/2, 1/2	1	−2	−1	Ξ^0
		Ξ^-	1 321.3	1.6×10^{-10}	−1	1/2	1/2, −1/2	1	−2	−1	Ξ^+
		Ω^-	1 672.5	8.2×10^{-11}	−1	3/2	0, 0	1	−3	−2	Ω^+

粒子的质量 m 可以用相应的静能 mc^2 来表示．上夸克 u、下夸克 d 和奇异夸克 s 的静能分别为 1.5～4.5 MeV，5～8.5 MeV 和 80～155 MeV，称为**轻夸克**；粲夸克 c、底夸克 b 和顶夸克 t 的静能分别为 1.0～1.4 GeV，4～4.5 GeV 和 174 GeV，称为**重夸克**．

轻子这一名称原先来源于这类粒子的质量比较轻．然而，1975 年帕尔(M.Perl)等人发现的轻子—— τ 子的静能为 1.77 GeV，其质量比质子和中子还要重将近一倍．就同一层次而言，τ 子的质量比某些夸克的质量大的倍数就更多了．因此，轻子的确切定义是：轻子是不参与强相互作用的费米子．

① 按照量子理论，光子的静质量的倒数与电磁相互作用的力程成比例．天文观测表明，直到 7000 l.y.(光年)的距离，仍未观测到电磁相互作用的有限力程效应，即其力程应比 7000 l.y.(光年)还要长．因此，光子质量上限为 $3\times10^{-27}\ \mathrm{eV}/c^2$.

现已发现的能以自由状态存在的粒子共有四五百种之多，其中除了光子、电子、正电子、质子、反质子、三种中微子及其反粒子等 11 种粒子是稳定的以外，其余粒子都是不稳定的.

实验上测得的不稳定粒子的质量不是确定的一个值，而是在某一值附近有一定的分布. 通常把实验测得的粒子质量的平均值称为粒子的质量 m，而把实验测量值在平均值附近的分布宽度称为粒子的宽度Γ.

不稳定粒子在静止时的平均存在时间，称为粒子的**平均寿命**(mean life)或**寿命**(life). 粒子的寿命τ 越短，越不稳定，粒子的宽度 Γ 也就越大，它们的乘积等于 1，即 $\tau\Gamma=1$. 在已知的不稳定粒子中，中子的寿命最长，$\tau=887.0\text{s}$；Z^0 粒子的寿命最短，$\tau=2.643\times10^{-25}\text{s}$.

表 1-3　粒子物理中的不变性和守恒量

不变性	守恒量	适用范围
空间平移	动量 p	全部
空间转动	角动量 J	全部
时间平移	能量 E	全部
电荷规范变换	电荷 Q	全部
空间反射	宇称 P	弱相互作用中破坏
同位旋转动	同位旋 I	电磁和弱相互作用中破坏
	同位旋分量 I_3	弱相互作用中破坏
电子数规范变换	电子轻子数 L_e	全部
μ子数规范变换	μ子轻子数 L_μ	全部
τ子数规范变换	τ子轻子数 L_τ	全部
重子数规范变换	重子数 B	全部
时间反演 T		弱相互作用中破坏
奇异数规范变换	奇异数 S	弱相互作用中破坏
电荷共轭变换 C	C 宇称	弱相互作用中部分破坏
CPT 联合变换		全部

二　电荷

所有已发现的粒子所带的电荷都是质子电荷 e 的整数倍，这就是电荷的量子化. 实验表明，测量精确到 10^{-21} 时仍然没有观测到与整倍数的差别. 具有最大电荷的 Δ 重子，它的电荷是质子电荷 e 的两倍. 尽管夸克带有分数电荷，但由于夸克禁闭，对电荷量子化的论断并无影响. 为什么会有

电荷的量子化，这是一个理论上需要回答的问题.

三　自旋

按照量子力学，自然界中所有的粒子都具有确定的自旋. 自旋角动量的平方等于$s(s+1)\hbar^2$，其中 s 称为自旋量子数. 按自旋量子数 s 的取值，粒子可分为费米子($s=1/2,3/2,5/2,\cdots$)和玻色子($s=0,1,2,\cdots$)两大类.

自旋角动量在粒子运动方向上的投影，称为粒子的**螺旋度**(helicity). 自旋量子数为 s 的粒子的螺旋度，可以取为$s, s-1,\cdots,-s+1,-s$，共计$2s+1$个值.

如果换成在另一个沿粒子运动方向上的、以比该粒子更高的速度运动的参考系上来观测，则这时粒子的运动方向反了过来，粒子的螺旋度的值也将变号，因此这些粒子的螺旋度在不同的参考系里可以不同. 但是，对于光子这样的只能以真空中光速运动的、静质量为零的粒子来说，螺旋度只能取 s 和 $-s$ 两个值，且这两个螺旋度状态实际上是互相独立的，因为不可能通过换一个新的参考系来观测而使得粒子的螺旋度改变符号.

电子、质子、中子和中微子的自旋量子数都是$s=1/2$. 电子、质子和中子都有 1/2 和 −1/2 两个螺旋度，而静质量为零的中微子却只有 −1/2 这一个螺旋度. 中微子的自旋永远与其运动方向相反，服从左手定则，称为左旋中微子；而反中微子则相反，称为右旋中微子. 中微子和反中微子是左右最不对称的粒子，它们的镜像在自然界中都不存在.

光子、$W^{\pm}$和Z^0粒子的自旋量子数都是$s=1$，其中$W^{\pm}$和Z^0都有 1、0 和−1 等三个螺旋度；静质量为零的光子只有 1 和 −1 两个螺旋度. π 介子的自旋为零，只有一个螺旋度. 在已经发现的粒子中，最大的自旋量子数是$s=11/2$.

四　同位旋

质子和中子的自旋量子数都是 1/2，重子数都是 1，它们的质量以及参与强相互作用时的耦合常数都很相近，它们的差别主要表现在所带的电荷不同，从而电磁相互作用的性质不同. 海森伯提出，可以把质子和中子描述为核子这一种粒子的两个不同的带电状态. 仿照电子自旋在空间中两种取向，人们设想在粒子内部存在一种**同位旋空间**(isospin space)，而**同位旋**(isospin)在该空间的不同取向就代表粒子的不同状态. 换言之，可以把质子和中子看成是核子的同位旋在抽象空间中某方向上(通常称为第 3 轴)的朝上和朝下的两种投影状态，这两种状态对强相互作用是一样的，而在考虑电磁相互作用

时它们才显出不同.

设粒子的同位旋为 I，则它在同位旋空间的状态数为 $2I+1$. 对于核子，$I=1/2$，$2I+1=2$，有两种投影状态：$I_3=1/2$ (质子)和 $I_3=-1/2$ (中子). 对于 π 介子，$I=1$，$2I+1=3$，有三种投影状态：$I_3=1(\pi^+)$，$I_3=0(\pi^0)$ 和 $I_3=-1(\pi^-)$.

在强相互作用中，同位旋 I 及其分量 I_3 都守恒；在电磁相互作用中，I 不守恒，但 I_3 守恒；在弱相互作用中，I 和 I_3 都不守恒.

五　重子数和轻子数

电子是最轻的带有一个单位负电荷的稳定粒子，质子是带有一个单位正电荷的稳定粒子，这是客观事实. 按照电荷守恒定律，电子如果能够衰变，这个单位负电荷不能消失，而必须转移到衰变后所产生的某个粒子上去. 但是，电子本身已经是带一个单位负电荷的最轻的粒子了，因此，电荷守恒定律实际上决定了电子的稳定性.

在正电子发现之后人们自然要问，既然质子不是带一个单位正电荷的最轻的粒子，那么为什么质子不能衰变为一个正电子和一个光子呢？为了解决质子的稳定性问题，人们引入了一个新的守恒量，称为重子数 B，并规定质子和中子等重子的重子数 $B=1$，反重子的重子数 $B=-1$，轻子和规范玻色子的重子数 $B=0$. 由于质子是重子数为 1 的最轻的粒子，因此重子数守恒决定了质子的稳定性.

实验表明，如果规定电子 e^- 和电子中微子 ν_e 的电子类轻子数 $L_e=1$，正电子 e^+ 和电子反中微子 $\bar{\nu}_e$ 的电子类轻子数 $L_e=-1$，其他粒子 $L_e=0$；μ 子和 μ 中微子 ν_μ 的 μ 子类轻子数 $L_\mu=1$，$\bar{\mu}$ 和 $\bar{\nu}_\mu$ 的 $L_\mu=-1$，其他粒子 $L_\mu=0$；τ 子和 τ 中微子 ν_τ 的 τ 子类轻子数 $L_\tau=-1$，$\bar{\tau}$ 和 $\bar{\nu}_\tau$ 的 $L_\tau=-1$，其他粒子 $L_\tau=0$，则在任何反应中各类轻子数 L_e、L_μ 和 L_τ 都分别守恒，总的轻子数 L 也必定是守恒的.

六　奇异数、粲数、底数和顶数

由于各种相互作用的强弱很不相同，在引起粒子反应的速度上有明显的差别，因此各种相互作用都有它们各自的很不相同的特征时间. 例如，强相互作用的特征时间为 10^{-23} s，弱相互作用的特征时间为 10^{-10} s.

1947 年以后发现的 K 介子和 Λ^0 超子等奇异粒子，具有以下两个特点：

(1) 产生快、衰变慢，这说明奇异粒子是通过强相互作用产生，而通过弱相互作用衰变的.

(2) 成对产生、单独衰变，说明奇异粒子在产生时服从一种特殊的守恒定律，我们引入奇异数 S 这个新的量子数来描述．我们规定，非奇异粒子的奇异数 $S=0$，奇异粒子 K^+ 和 K^0 的奇异数 $S=1$，奇异粒子 Λ^0，$\Sigma^{\pm}$ 和 Σ^0 的奇异数为 -1，而奇异粒子 Ξ^0 和 Ξ^- 的奇异数 $S=-2$，反粒子的奇异数与其相应的粒子相反．于是，奇异粒子的第二特点可以解释为：在强相互作用过程中奇异数守恒，奇异粒子成对产生；而在弱相互作用过程中奇异数可以不守恒，每个奇异粒子可以单独衰变．

在某些场合，重子数 B 和奇异数 S 总是以其代数和的形式出现，这时引入**超荷**(hypercharge) $Y=B+S$ 来代替奇异数．1974 年以后，为了描述新发现的 J/ψ 粒子和 Υ 粒子的性质，引入了粲数 C、底数 b 和顶数 t 等量子数(见表 1-1)．在强相互作用和电磁相互作用过程中超荷守恒，而在弱相互作用过程中超荷可以不守恒．

七　宇称和 CPT 定理

在量子力学中，具有空间反射对称性的运动状态 $\psi(\boldsymbol{r},t)$ 可以区分为两类：$\psi(-\boldsymbol{r},t)=\psi(\boldsymbol{r},t)$ 的一类称为正(或偶)宇称态，$\psi(-\boldsymbol{r},t)=-\psi(\boldsymbol{r},t)$ 的一类称为负(或奇)宇称态．空间反射不变性表现为宇称守恒或 P 守恒．

在强相互作用和电磁相互作用过程中宇称守恒，即作用前后体系的宇称不变．这表明，强相互作用和电磁相互作用具有空间反射对称性，它们的一切规律在镜子内仍然成立．1956 年，李政道和杨振宁为解决 $\tau-\theta$ 疑难[①]，大胆提出在弱相互作用过程中宇称不守恒．第二年，吴健雄等人就给出了实验验证．

粒子世界有三个分立变换：一个是上述的空间反射变换，简称 P 变换；一个是时间反演变换，简称 T 变换；一个是粒子和反粒子互换的正、反粒子变换，称为电荷共轭变换，简称 C 变换．所谓的时间反演对称性，就是物理规律的时间可逆性；而所谓的电荷共轭对称性，就是指把某过程中的所有粒子都换成其相应的反粒子时，过程的规律性仍保持不变．

实验表明，强相互作用和电磁相互作用都同时具有电荷共轭 C、空间反射 P 和时间反演 T 这三个对称性，但是弱相互作用却不一定具有这些对称

① 一方面，由于 τ 介子和 θ 介子的质量、寿命和电荷都相同，因此它们应该是同一种粒子(现在称为 K^0 介子)．另一方面，从衰变行为来看，由于 τ 介子衰变为三个内禀宇称是负的 π 介子，因此 τ 介子的宇称应该是负的；而由于 θ 介子却衰变为两个内禀宇称是负的 π 介子，因此 θ 介子的宇称应该是正的．如果宇称守恒，则 τ 介子和 θ 介子不可能是同一种粒子．这一明显的矛盾，称为 $\tau-\theta$ 疑难．

性．然而，**CPT 定理**指出，无论是强相互作用和电磁相互作用，还是弱相互作用，在 CPT 联合变换下总是不变的．

§1－3　粒子物理的标准模型

从 20 世纪 60 年代到 90 年代，实验和理论的重大进展是确立了**粒子物理的标准模型**．

粒子物理的标准模型认为：物质世界的基本组成单元是规范玻色子、轻子和夸克，它们之间存在着四种基本的相互作用，即强相互作用、电磁相互作用、弱相互作用和引力相互作用．描述强相互作用的理论是量子色动力学，而描述电磁相互作用和弱相互作用的理论是电弱统一理论．这两种基本理论统称为粒子物理的标准模型理论．

一　粒子的分类和基本性质

物质世界由 60 种基本粒子构成，它们是 12 种规范玻色子和 48 种费米子．

（1）规范玻色子

规范玻色子是各种相互作用的媒介粒子，其性质如表 1－4 所示．胶子和光子的静质量为零，自旋量子数为 1，它们都有两个独立的极化状态．按现有理论，如果引力子存在的话，它的静质量也为零，自旋量子数为 2，只有两个独立的极化状态．$W^{\pm}$ 和 Z^0 粒子的质量都很大，自旋量子数为 1，有三个独立的极化状态．实验上并没有观测到自由胶子，但有充分的实验证据表明胶子在粒子相互作用过程中的存在．此外，由于引力相互作用太弱，现在还没有引力子存在的直接实验证据．

（2）费米子

费米子包括三代共 6 种轻子，18 种夸克，加上反粒子总计 48 种，它们的自旋量子数都是 1/2，其性质如表 1-5 所示．

费米子总是整代地存在的，每一代费米子的电荷之代数和为零．每种夸克有相互作用性质相近的三个不同的类型，称为三色．每一代费米子包含两味一色的轻子以及两味三色的夸克，共有 8 种粒子．迄今还没有观测到夸克和轻子有内部结构．

强子分为两类：自旋量子数为整数、重子数为零的强子称为**介子**；自旋量子数为半整数、重子数为 1 的强子称为**重子**．

表 1-4 规范玻色子

粒子名称	胶子 g	光子 γ	$W^{\pm}, Z^0$	引力子
所传递的相互作用	强	电磁	弱	引力
自旋量子数	1	1	1	2
质量	0	0	80～90 GeV	0
数目	8	1	3	1

表 1-5 费米子

粒子类型	轻　子		夸　克	
色数	1	1	3	3
电荷 / e	0	−1	2/3	−1/3
第一代	ν_e	电子 e	上夸克 u	下夸克 d
第二代	ν_μ	μ子	粲夸克 c	奇异夸克 s
第三代	ν_τ	τ子	顶夸克 t	底夸克 b

按照强子的夸克模型，重子由三个夸克组成，反重子由三个反夸克组成，介子由正、反夸克组成(如 $d\bar{s}$、$s\bar{d}$、$d\bar{u}$ 等). 图 1-1 分别给出了夸克 q 和反夸克 $\bar{q}$ 的权图，其纵坐标为超荷 Y，横坐标为同位旋分量 I_3；图 1-2 给出了由 q 和 $\bar{q}$ 的权图叠加而成的介子八重态图；图 1-3 分别给出了重子的十重态图和八重态图. 通常把图中标出的夸克称为**价夸克**(valence quark).

此外，由于强子内部还存在数目未知的胶子，胶子可以转化为夸克和反夸克对，而夸克和反夸克对又可以湮没为胶子，因此在强子内部还存在数目未知的夸克和反夸克对，通常我们把它们称为**海夸克**(sea quark).

(3) 希格斯粒子

按照电弱统一理论，在实现电弱相互作用的对称性自发破缺后，自然界应有一种中性的、自旋量子数为零的希格斯粒子 H^0 存在. 对于这个粒子的性质和运动行为，理论都有精确的预言，但对它的质量却完全没有预言.

在上述 60 种基本粒子中，能独立存活的稳定粒子共 10 种，它们是电子 e^-，正电子 e^+，中微子 ν_e、ν_μ 和 ν_τ，反中微子 $\bar{\nu}_e$、$\bar{\nu}_\mu$ 和 $\bar{\nu}_\tau$，以及光子 γ. 在复合粒子中，能独立存活的稳定粒子只有质子和反质子.

实验上至今还没有得到它们存在的直接证据的粒子有两种，它们是引力子 G 和希格斯粒子 H^0. 引力子至今未被观测到的原因可能是引力太弱，希格斯粒子是唯一可以被观测到但至今仍未被观测到的粒子. 实验表明，如果

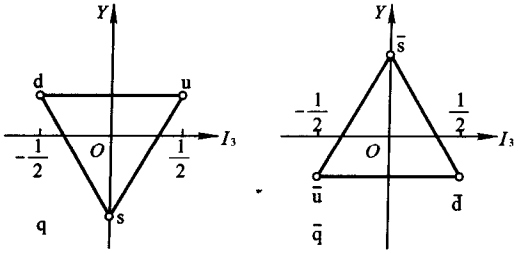


图 1-1　夸克和反夸克的权图

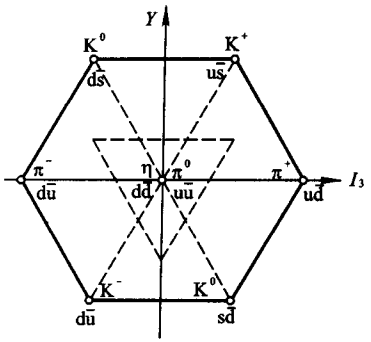


图 1-2　介子八重态的夸克构成

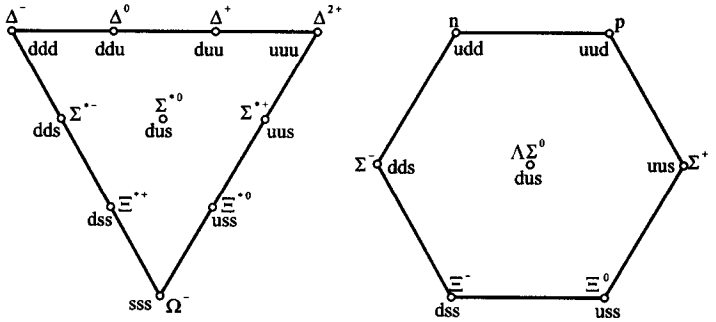


图 1-3　重子十重态和八重态的夸克构成

希格斯粒子存在，则其质量下限为 113 GeV，人们期望在 TeV 级加速器中能找到它.

二　粒子之间的基本相互作用

粒子之间存在着四种基本的相互作用，这些相互作用是通过交换相应的媒介粒子来实现的. 不同的相互作用的区别在于媒介粒子的不同，以及粒子放出和吸收媒介粒子的能力不同.

(1) 强相互作用

夸克有六味，每一味夸克具有红(R)、绿(G)和蓝(B)三色，而每一味反夸克具有反红($\overline{R}$)、反绿($\overline{G}$)和反蓝($\overline{B}$)三色. 三种色混合成无色，重子中的三个夸克必定具有不同的色，介子中的夸克和反夸克的色互补，因而实际上观测到的强子都是无色的.

强相互作用的基本理论是量子色动力学理论，夸克和胶子是强相互作用的基本组成成分. 色荷之间通过媒介粒子——胶子传递相互作用. 胶子本身

带有色，胶子和胶子之间也有直接的色相互作用．色相互作用是一种短程作用，它与夸克的味无关．夸克放出和吸收胶子时其所带色荷可以改变，也可以不改变，这反映为胶子带有 8 种复合色．例如，在红色夸克 R 吸收了 $B\bar{R}$ 胶子后，变成蓝色夸克．

（2）电磁相互作用和弱相互作用

能量低于 250 GeV 时，统一的电弱相互作用分解为性质和行为很不相同的两种：媒介粒子为 γ 的长程电磁相互作用，以及媒介粒子为 $W^{\pm}$ 和 Z^0 的短程弱相互作用．

（3）引力相互作用

粒子之间的引力相互作用是通过交换引力子来实现的，引力子的质量为零，自旋量子数为 2．量子引力理论至今仍不完善，引力子的存在也没有实验证据．由于引力相互作用的强度很弱，在粒子物理中可以忽略．

三　粒子世界探秘

粒子物理的标准模型取得了巨大成功，它与实验结果符合得很好．粒子物理标准模型的成功是当代物理学的一个辉煌的成就．然而，这一标准模型在许多方面还是不完善和不充分的，它也向人们提出了许多需要回答的基本问题．例如：

(1) 夸克禁闭问题被公认为本世纪物理学有待解决的十大难题之一，需要从量子色动力学出发研究非微扰强耦合理论．夸克禁闭也许是由量子色动力学的物理真空性质造成的，对称性自发破缺的本质可能来自于真空的不对称所产生的真空对称性自发破缺机制(即如果把物质和真空包括在一起，那么整个对称性就能够恢复)．两者的关键都在于揭示真空的本质，即在物理真空中“真空不空”[①]．

(2) 新强子态和奇特强子态问题：目前实验上确认的只有由 3 个夸克组成的重子和夸克－反夸克组成的介子，但量子色动力学预言还应存在由 2 个胶子或 3 个胶子组成的胶球，由夸克－反夸克和胶子组成的混杂态，还可能存在 4 夸克态、5 夸克态、6 夸克态等多夸克态，以及由介子－介子组成的分子态．近年来发现了一些可能的后选者，实验和理论研究十分活跃．

(3) 手征对称性的自发破缺与量子色动力学真空性质：手征对称性的自

① 迄今为止，我们没有能力去掉真空中的物理相互作用．真空可以有极大的复杂性，在真空中可以不断地发生正、反粒子对的虚产生和湮没，真空类似于介质．设想给真空照相，如果曝光时间很长，真空可能显出简单的假相；但如果让曝光时间短到可以捕捉到由于相互作用产生的虚激发所引起的涨落，真空就可能显现出复杂的真相．

发破缺对于轻介子的存在，它们之间及轻介子和核子之间的相互作用都有着根本的重要作用．但是手征对称性的自发破缺依然没有在量子色动力学的理论框架内得到深入理解．手征对称性的自发破缺可能与夸克禁闭有着深刻的联系．这需要理论研究和实验探索去进一步验证．

(4) 极端条件下的物质结构：20 世纪 70 年代，李政道教授等科学家倡导研究一种新的物质形态——**夸克胶子等离子态**(QGP)．在高温高密度的条件下，手征对称性恢复，夸克禁闭可能解除，夸克和胶子将会形成等离子状态．从 2000 年 6 月起，美国布鲁克海文国家实验室的研究人员利用相对论重离子对撞机(RHIC)让金原子核以接近光速的速度相撞，试图以相撞产生的巨大能量和温度"融解"质子和中子，使夸克以自由形态释放出来．研究人员在实验室中创造出相当于 15 万倍太阳中心温度的高温及足以形成夸克胶子等离子体的能量．研究人员原以为，在如此高的温度和能量状态下，被释放出来的夸克应当像气体一样．然而，该实验室的科学家在 2005 年 4 月美国物理学会会议上宣布，三年的数据分析结果表明，在相对论重离子对撞机中金原子核相撞产生的物质，更接近于炙热而稠密的、黏性极低的液体，可以用流体动力学方程来解释．这些实验研究工作发现了可能的 QGP 信号，但尚未有定论．现在正在调试的欧洲粒子物理研究中心的 7 TeV－7 TeV **大型强子对撞机**(large hadron collider，简称 LHC)[①]，即将开展更深入的实验研究．理论上，需从量子色动力学得到准确的预言去验证夸克胶子等离子态的存在，准确区分 QGP 物理信号与一般的高能核－核反应信号．需要对有限温度量子场论及非平衡态量子场论进行研究．LHC 实验和超出标准模型的新物理探索，将成为高能物理新的篇章．

(5) 量子色动力学与宇宙学和高能天体物理：在宇宙大爆炸后的瞬间，由于温度非常高，宇宙会处于夸克胶子等离子态(QGP)或夸克物质状态；然后，随着宇宙的膨胀，温度不断降低，夸克又只能在很小的范围内运动了，夸克和胶子演化成了今天被观察到的核子和其他强子．即使是对于目前存在的天体，在那些密度非常高的中子星里，也可能会由于密度效应而存在夸克物质．因此，高温或高密度量子色动力学的研究，有助于深入了解宇宙的演化以及中子星和超新星的物理性质．

(6) 关于超越标准模型预言的新粒子的探索，是粒子物理中十分引人注目的一个前沿课题．

---

① 安装在日内瓦附近地下大约 100 m 的隧道里．在 27 km 长的对撞机圆环中，每个质子在撞向另一个质子时，其携带的能量相当于一辆重 400 t (吨)的火车以每小时 200 km 的速度前进时所具有的能量．科学家们预测，每秒钟可以发生约 8 亿次这样的碰撞．

粒子物理学涉及了许多自然科学的基本问题．例如，什么决定了夸克和轻子的基本性质(如质量等)，弱相互作用的媒介粒子($W^{\pm}$和 Z^0 粒子)的质量是通过对称性自发破缺机制产生的，但为什么实验上至今未观测到希格斯粒子等．目前的解决办法是在理论中引入了多达 20 个的参量，其中半数以上来自希格斯部分，但所预言的希格斯粒子却至今尚未发现．如果实验找到了希格斯粒子存在的证据，则现在对粒子物理世界结构规律认识的标准模型就得到了进一步的检验．反之，如果实验判定不存在希格斯粒子，则是对现有理论的挑战，我们必须进一步研究和回答现有理论应如何修改的问题．

还有一类问题也是目前理论无法回答的．例如，强相互作用与电弱相互作用能够进一步统一起来吗？引力相互作用是否能像其他几种相互作用一样用量子力学的方法来处理？这些基本的相互作用是否能够全部统一起来？[①] 量子力学是否能用来研究涉及越来越小距离的物理问题？[②] 我们能够认识空间和时间的基本属性吗？

在粒子物理的近代发展过程中，几乎所有的实验都要用加速器来产生高能粒子．加速器可以分为两类：一类是传统的加速器，其中粒子束撞击一个静止靶；另一类是对撞机，其中的两束相向运动的高能粒子对头相撞．现在，粒子物理中能量变化的尺度已达到 TeV．为了寻找一些更为基本的问题的答案，在提高探测精度的同时，还需要一些能够提供更为巨大能量的新的对撞机．例如，在美国布鲁克海文实验室正在运行的相对论重离子对撞机(RHIC)就是在极端条件下试图将夸克和胶子从质子和中子中解放出来；2007 年即将运行的大型强子对撞机 LHC 的物理目标之一，就是要回答对称性破缺的本质．科学家正在计划通过直线对撞机和$\mu^+\mu^-$对撞机来实现超高能量的物理实验．此外，科学家也正在发展非加速器物理以弥补加速器物理的不足．我们相信，在 21 世纪，与破解物理学难题相伴随，探索物质深层次结构的手段也会有革命性的突破．

展望未来，21 世纪人们将解开某些物理难题的奥秘，这有可能使现有的物理理论得到进一步的完善和发展，也有可能证明现有的物理理论存在着根本性的困难，从而孕育出新的物理学理论．

---

① 例如有人认为，弦理论是目前最有希望将自然界的基本粒子和四种相互作用统一起来的理论，它将 20 世纪的两大基础理论——广义相对论和量子力学，结合到一个数学的框架内，有可能解决一些长期困扰物理学家的难题，如：黑洞的本质和宇宙的起源．如果弦理论得到了实验的证实，则将从根本上改变人们对物质结构、空间和时间的认识．

② 还没有实验证据说明轻子和夸克是否有大小，只能说它们既使有大小，也将小于 10^{-19} m．

参考文献

[1] 李政道．对称、不对称和粒子世界．北京：科学出版社，1991
[2] 李政道．导言：展望21世纪科学发展前景．见：21世纪100个科学难题编写组．21世纪100个科学难题．长春：吉林人民出版社，1998
[3] 杨振宁．对称与近代物理．见：蔡枢，吴铭磊．大学物理：当代物理前沿专题部分．第2版．北京：高等教育出版社，2004
[4] 赵光达．粒子物理与量子色动力学．在第二届“大学物理课程报告论坛”上的报告，2006
[5] 黄涛．对深层物质结构的探索．见：21世纪100个科学难题编写组．21世纪100个科学难题．长春：吉林人民出版社，1998
[6] 高崇寿．粒子世界探秘．长沙：湖南教育出版社，1994
[7] [美]基本粒子物理专门小组．基本粒子物理学．北京：科学出版社，1992
[8] 陆埮，罗辽复．从电子到夸克：粒子物理．北京：科学出版社，1986
[9] 胡宁．场的量子理论．北京：科学出版社，1964
[10] 罗辽复．量子场论．南京：江苏科学技术出版社，1990
[11] 杨福家．原子物理学．第3版．北京：高等教育出版社，2000
[12] 王正行．近代物理学．北京：北京大学出版社，1995
[13] 徐克尊，陈宏芳，周子舫．近代物理学．北京：高等教育出版社，1993
[14] 杨桂林，江兴方，柯善哲．近代物理．北京：高等教育出版社，2004
[15] 李鉴增，赵峥．近代物理教程．北京：北京师范大学出版社，1992
[16] 张礼．近代物理学进展．北京：清华大学出版社，1997
[17] 郭奕玲，沈慧君．物理学史．第2版．北京：清华大学出版社，2005

第二章　宇宙学的标准模型

§2－1　宇宙和宇宙学

宇宙(cosmos)指的是物质世界的整体，或者说是自然界一切物质的总体，它是物理学中最大的研究对象．**宇宙学**(cosmology)所研究的是宇宙这个整体的物理状况和变化过程，或者说是整个宇宙的性质、结构、运动和演化．作为研究者和观测者，人们不仅置身于宇宙之中，而且也是其中的产物．人们利用已有的物理学原理，在时空框架上构建着宇宙学理论．具体而言，宇宙学以量子论、相对论、原子核物理学和粒子物理学等为理论武器，以射电、红外、紫外、X 射线等技术以及大口径望远镜、空间探测器为观测手段，研究宇宙的历史、现状和未来．

宇宙学之所以成为物理学的一个重要领域的另一个原因是，从早期宇宙不可思议的密度和温度直到星际空间的近似真空，它提供了研究物质属性的极端条件，而地面实验室只能提供很狭窄范围的条件．

宇宙学是建立在观测事实基础上的一门科学，宇宙学理论的正确性是通过将物理技术应用于天文装置来进行实验检验的．宇宙学所取得的进展，在很大程度上要归功于最新的观测结果．例如，在早期的宇宙学研究中，人们所关心的是哈勃常量 H，星系和辐射源的各向同性的空间分布，以及可观测的宇宙中质能密度的估计值等；而在后来的宇宙学研究中，人们所关心的是微波背景辐射的各向同性和微小的各向异性，宇宙中各组分的丰度，核子密度与光子密度的比值，以及反物质、暗物质和暗能量等．2003 年以来，**威耳逊微波背景辐射各向异性探测器**(Wilkinson microwave anisotropy probe，简称 WMAP)、**斯隆数字化巡天观测**(Sloan digital sky survey，简称 SDSS)和最近的**超新星**(supernova，简称 SN)等观测结果，进一步强有力地支持了宇宙大爆炸模型．

一　亮星、银河和星系世界

当我们观察夜间的天空时，首先看到的是几乎均匀分布着的离我们很近的星星，称为亮星．如果没有月亮，在秋季晴朗的夜晚，我们还可以看到较远的星星，称为暗星．银河是由无数暗星形成的光带，其中的恒星分布在一个盘状区域，地球和太阳处在偏离中心较远的地方．图 2－1 (a)和(b)分别给出了银河系的侧视和俯视示意图．

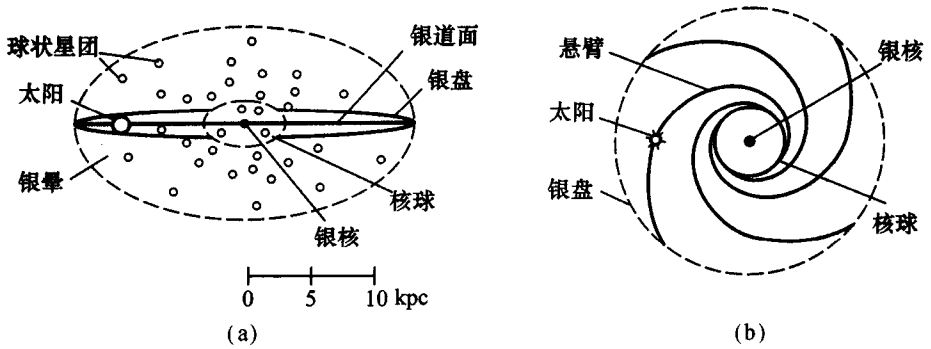


图 2－1　银河系(1 kpc = 3.086×10^{19} m)

利用天文望远镜可以观测到许多与银河系相当的**星系**(galaxy)．星系所包含的恒星数目很多，从几百万颗到几万亿颗．因为它们离我们很远，这么多的恒星总体看起来都是一些并不明亮的小云．尽管星系在天空的分布比暗星的分布均匀得多，但仍有成团聚集的不均匀现象．一些星系会聚集成群、成团，多的可以有几千个星系聚集成**星系团**(cluster of galaxies)，这些星系团的分布就显得均匀了．实际上，还有许多连天文望远镜也看不见的天体．

宇宙学的目标不是研究上述天体本身，而是借助于这些天体带来的信息，研究宇宙的整体行为．它的研究对象决定了它的视野十分宽广，它所涉及的时间十分长久．

在大尺度范围看来，能代表宇宙特征的大尺度物质的分布是均匀和各向同性的．宇宙没有边界，宇宙也没有中心．从每个典型的星系上看到的宇宙是完全一样的．概括而言，在宇观尺度上，任何时刻三维宇宙空间是均匀和各向同性的，通常称此为**宇宙学原理**(cosmological principle)．

宇宙学原理并不排除某一时刻的宇宙和下一时刻的宇宙是不同的，即宇宙学原理并不排除宇宙的演化．而且，宇宙学原理指的是从大尺度角度看，从整体角度看，而不是从细节上看．宇宙各处的细节是可以在演化过程中形成多种多样结构的．

二　宇宙大尺度特征的观测事实

(1) 物质分布和暗物质

所谓看得见的物质，主要是质子、中子和电子．电子的质量很小，而质子和中子统称为重子，因此看得见的物质主要是重子物质．

质光比(mass-to-light ratio)是质量与光度之比．根据天体质光比的规律，由光度测量来确定天体质量，是测量天体质量的一种方法．有一些重子物质

并不直接发光或只能微弱发光，如行星和中子星等．不同恒星的质光比可以相差很大，但整个星系的质光比与太阳的质光比相差不是太大，不同星系的质光比有些不同．如果我们把所有看得见的物质统统打散，并把它们均匀分散到整个空间，则可得宇宙的平均重子物质密度为

$$\rho_b \approx 10^{-28}\ \mathrm{kg/m^3}\ . \tag{2.1}$$

另一种更为直接的方法，是利用万有引力定律来测量天体质量．例如，通过星系的旋转速度与离星系中心的距离之间的关系，可以确定星系的质量．然而，由此我们却发现，除了上述“看得见的物质”外，还存在所谓的“暗物质”．

在研究行星绕太阳的转动时，由万有引力定律可以推论，离太阳越远的行星在轨道上转动速度越慢．然而，在研究宇宙中螺旋状星云时人们却发现，尽管星系上的各点都在绕着星系的质心旋转，但在离星系中心很远的地方转动速度并不减小，这说明随着距离的增大轨道以内的质量也在增大．由于在远离星系中心的地方已经几乎看不到物质，因此质量的增大只能意味着那里存在着大量看不见的物质．

具体而言，考察星系中质量为 m 的某一部分的运动速度 v，利用万有引力定律可作如下粗略的估算：

$$G\frac{m'm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}, \qquad \text{即} \qquad v^2 = Gm'\frac{1}{r}, \tag{2.2}$$

其中 m' 是质量为 m 的星体受到吸引的总质量，也就是星云中处在该星体里面部分的总质量，r 是该星体到星云中心的距离．由式(2.2)可见，如果星云质量比较集中在中心区，则外部星体运动的速度应随 r 的增大而减小．实验观测表明，重子物质的质量分布的确是中心密、外面稀的．然而，根据许多星云的 v^2 随 r 变化并不大这一事实，说明实际上还有许多用光学方法没有观测到的物质也在起引力的作用．这种不能提供任何直接的电磁作用信号但可有引力效应的物质，称为**暗物质**(dark matter)．

暗物质数量很多，分布范围比我们所看到的星云分布范围还要大．由式(2.2)可得，螺旋星云的引力质量分布为

$$m'(r) = \frac{v^2 r}{G}. \tag{2.3}$$

从数十个星云来看，在很大的范围内 v 不随 r 变化，典型值为

$$v \approx 200\,\mathrm{km/s}. \tag{2.4}$$

这表明在相当大的范围内有

$$m'(r) \propto r. \tag{2.5}$$

在银河系中，太阳系到中心的距离为

$$R_0 = (8.0 \pm 0.5)\ \text{kpc}\ . \tag{2.6}$$

其中 pc 称为**秒差距**(parsec)，$1\,\text{pc} = 3.086\times10^{16}\ \text{m}$．而且，太阳相对于银河系中心的速度为

$$v_s = (220 \pm 20)\ \text{km/s}\ . \tag{2.7}$$

由式(2. 3)可估算出银河系中比太阳更近于中心的总质量为

$$m'(R_0) \approx 9\times10^{10}\, m_s\ , \tag{2.8}$$

其中 m_s 是太阳的质量．但是，实际观测到的星体物质总和远小于这个值，从而表明在这样的质量分布中大量的是暗物质．

此外，宇宙结构(恒星和星系)形成所需的物质远多于宇宙核合成定出的重子物质．如果没有暗物质，就没有足够的时间形成今天宇宙的结构．有了暗物质，宇宙的结构就可以在复合期前在暗物质中形成增长．

据估计，宇宙中暗物质的质量至少比观测物质的质量大一个量级，暗物质的存在更增强了宇宙大尺度物质分布的均匀性．

(2) 哈勃定律

对于测定了距离的星系，哈勃(E.P.Hubble)观测和研究了它们的光谱，于 1929 年发现光谱线向红端移动，即遥远星系光谱线的波长增长了，且红移量 Z 与距离 D 成正比，即

$$Z = \frac{\lambda - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{H_0}{c} D\ , \tag{2.9}$$

$$H_0 = 100 h_0\ \text{km}/(\text{s}\cdot\text{Mpc})\ , \tag{2.10}$$

其中 λ_e 是在地球上的实验室内测定的某条谱线的波长，λ 是地球上观测到的星系所发出的这条谱线的波长，即红移量 Z 描述的是同一原子放在星系内与放在实验室内测得的谱线波长的相对差值，c 是真空中光速，H_0 称为**哈勃常量**(Hubble constant)，h_0 为无量纲的**约化哈勃常量**，其观测值[①]为

$$h_0 = 0.71^{+0.04}_{-0.03}\ . \tag{2.11}$$

式(2.9)就是著名的**哈勃定律**(Hubble law)或**哈勃关系**，它表明越远的星系光谱波长越长．

根据多普勒效应原理，红移量 Z 与星体速度 v 的关系是

$$Z = \frac{\lambda - \lambda_e}{\lambda_e} \approx \frac{v}{c}\ , \tag{2.12}$$

① 2003 年由 WMAP 数据分析得到，详见 Spergel D N, et al. ApJS, 2003, 148：175.

由此可得星体速度与距离的关系是

$$v \approx H_0 D, \tag{2.13}$$

该式也常称为**哈勃定律**.

1963 年，施密特(M.Schmidt)发现了具有很大红移的恒星状银河系外天体，称为**类星体**(quasar). 其后，类星体一个接着一个地被发现. 这种星体看不到结构，形似恒星，呈点状. 现在已经观测到了类星体的红移 Z 甚至大于 4，如果这种红移是上述多普勒效应引起的宇宙学红移，则 $Z > 4$ 意味着类星体必定是非常遥远的天体. 如此遥远，又能观测到，光度必定很大，其能源就应该是异乎寻常的了.

哈勃定律是 20 世纪天文学中最杰出的发现之一，它使人们对宇宙的概念又一次发生了巨大的变化，代替静止的宇宙图景的是宇宙膨胀的事实①.

(3) 宇宙微波背景辐射

1964 年，彭齐亚斯(A.A.Penzias, 1933—)和威耳逊(R.W.Wilson, 1936—)安装了一台用以接受“回声”卫星微波信号的喇叭形巨型天线. 为了检验这台天线的低噪声性能，他们避开噪声源而将天线指向天空进行测量. 他们在波长为 7.35 cm 处所做的测量表明，无论天线指向什么天区，总会接收到一定的微波噪声. 这种噪声相当显著，并且几乎与方向无关. 在扣除了大气的吸收以及天线自身的影响之后，剩余噪声还是太大了. 他们日复一日，月复一月地进行测量，结果都一样. 1965 年初，他们对天线进行了彻底的检查，经过种种努力仍无法把噪声降下来，从而确定了这种噪声应当是来自空间的一种背景辐射，这种辐射相当于热力学温度在 2.5～4.5 K 之间的黑体辐射.

宇宙微波背景辐射的发现对人们关于宇宙起源的争论产生了重要的影响. 一些宇宙学家认为宇宙一直是一个稳定的存在，另一些认为宇宙诞生于大爆炸. 宇宙大爆炸假说预言了宇宙背景辐射的存在，所以彭齐亚斯和威耳逊的发现有力地支持了宇宙大爆炸假说. 如果说哈勃的发现开启了探讨宇宙整体时空结构的大门，那么宇宙微波背景辐射的发现则开启了探讨宇宙整体物性演化的大门.

宇宙大爆炸模型还预言了宇宙微波背景辐射的黑体形式，因此进一步的精确的研究工作需要在人造卫星上进行测量，这样不仅可以消除地球大气对

① 当我们把宇宙看成是以星系为“分子”的“气体”时，星系在膨胀的宇宙中同时参与了两种运动. 一种是它随“气体”膨胀而具有的膨胀速度，另一种是它相对于“气体元”的无序运动速度，其典型值为 500 km/s，称为星系的本动速度. 对距离超过 20 Mpc 的星系，它的膨胀速度超过了本动速度. 因而哈勃定律反映的是宇宙整体膨胀的规律，而不是星系作为个体的运动规律.

宇宙微波背景辐射的强烈吸收，而且还可以测量宇宙的各个方向的辐射.

1974 年，美国航空航天局(NASA)邀请科学家们对新的太空实验计划提出建议，这就是**宇宙背景探测器**(cosmic background explorer，简称 COBE)计划. 美国科学家约翰·马瑟(John C. Mather)是这个庞大计划的真正推动者，而且他还负责研制飞船上一种专门用来研究背景辐射黑体光谱的仪器——**远红外绝对分光光度计**(far infrared absolute spectrophotometer). 1986 年，挑战者号航天飞机失事，COBE 计划被延误数年，约翰·马瑟与合作者通过巧妙的谈判为 COBE 计划赢得了一枚火箭，COBE 卫星终于在 1989 年 11 月 18 日发射升空. 首批数据在 COBE 开始观测 9 分钟后得到，证明了实测的宇宙微波背景辐射非常精确地符合于温度为(2.725 ± 0.001) K 的黑体辐射谱(如图 2－2 所示)，且在各个方向极其均匀.

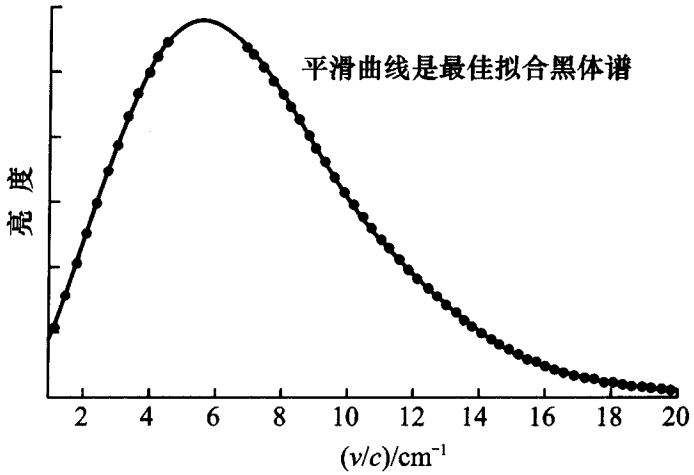


图 2－2　微波背景辐射的 COBE 观测结果

宇宙微波背景辐射是弥漫在整个宇宙空间中的光子气体，在 2.725 K 这么低的温度下光子的平均自由程比我们的可见宇宙还大，它们之间不可能发生碰撞，因此绝不可能处在由热传递而建立起来的平衡态之中；但是，COBE 观测结果却表明，它具有宇宙间我们见到的最精确的黑体辐射谱. 这充分说明，光子气体在遥远的宇宙早期确曾处于高温高密的热平衡状态中，宇宙均匀膨胀并不改变其能谱，这是宇宙曾经历过大爆炸的三大强有力证据之一. 另外两大证据是哈勃红移和宇宙原初轻元素丰度.

1991 年，乔治·斯穆特(George F. Smoot)在分析了 COBE 上安装的**差分微波辐射计**(defferential microwave radiometers)发回的数据之后，发现了**宇宙微波背景辐射的各向异性**，量级为10^{-5}. 物质的凝聚过程需要有个启动机制，

一旦物质的凝聚过程启动，引力就开始发挥作用．宇宙不同方向上微波背景色温的微小差异可以指示出物质在何处聚集，给我们提供了有关星系和恒星形成的新线索：为何宇宙中的物质在某些区域浓缩，而不是平均地四处抛洒？理论上认为宇宙中物质凝聚过程的启动机制源于大爆炸起始时的量子涨落，今天宇宙微波背景辐射的各向异性正是这种量子涨落的结果．

2001 年，威耳逊微波背景辐射各向异性探测器(WMAP)发射升空，计划工作到 2009 年 9 月，目前它距离地球 1.6×10^6 km．与 COBE 相比，WMAP 的灵敏度高出 45 倍，角分辨率高出 33 倍，WMAP 的观测为宇宙学的研究提供了高精度的全天的信息．2003 年初公布的观测数据及结果，还定量地给出了强度比温度各向异性低一个量级的宇宙微波背景辐射的偏振，它来源于光子与自由电子之间的散射，包含了扰动源的信息以及光传播路径中自由电子多少的信息，反映了宇宙的再次电离．

WMAP 的数据分析表明，$\Omega=\rho/\rho_c=1.02\pm0.02$，宇宙非常接近平坦，且真空对宇宙总密度的贡献最大．宇宙中，我们熟知的重子物质大约只占 4%，暗物质占～22%，暗能量(参见本文后面的说明)占～74%．

(4) 宇宙中的光子数与重子数

尽管按质量或能量计算，重子对宇宙的贡献远大于光子，但是按粒子数计算，光子却远多于重子．重子数密度 n_b 可以由重子质量密度 ρ_b [式(2.1)] 除以重子质量 m_b 得到，即

$$n_b\approx\rho_b/m_b\approx10^{-1}\ \mathrm{m}^{-3}.$$

根据量子统计学，在 2.7 K 的宇宙背景平衡辐射中光子的数密度为

$$n_\gamma=3.9\times10^8\ \mathrm{m}^{-3}$$

[(见本书习题精析 28－8)]．因此，宇宙中的重子－光子数之比为

$$\eta=n_b/n_\gamma\approx10^{-10}. \tag{2.14}$$

它是描述宇宙的一个重要的特征量，其不确定性主要在于重子．

(5) 轻核素的宇宙原初丰度

每一种原子核都有其确定的质子数 Z 和中子数 N．质子数和中子数都相同的一类原子，称为一种核素．质子数相同的各种核素统称为一种元素，而一种元素中的不同核素互称为同位素．

太阳和其他恒星内的各种核素，是在经历了复杂的核过程之后演化而成的．例如，主序恒星(见后)内正在进行着四个氢合成一个氦的复杂过程．恒星的进一步演化还会生成更重的核素．恒星演化晚期，在超新星爆发过程中，会生成许多重核素．因此，含有重核素(特别是比铁更重的核素)的天体，必然是在先前的超新星爆发遗留物的基础上生成的．所以，恒星内核素

的测量和研究，只能反映恒星的演化过程，不能反映宇宙的演化过程.

为了研究宇宙的演化，特别是早期宇宙的演化，重要的是要研究在没有受到恒星核过程影响的原初状态下轻核素的含量.

氦的同位素 ^{4}He 是主序恒星核合成的主要生成物，这是主序恒星得以维持其光彩夺目的能源所在. ^{4}He 的生成过程非常缓慢，太阳在百亿年里生成的 ^{4}He 也不足 5 %，因此 ^{4}He 的丰度受其他因素的影响不大，它是代表宇宙特征的一个物理量. ^{4}He 的丰度 $Y(^4\mathrm{He})$ 以重子物质中按质量计 ^{4}He 所占的百分比来表示，由观测得到的结果是

$$0.22 \leqslant Y(^4\mathrm{He}) \leqslant 0.24\,, \tag{2.15}$$

即按质量计 ^{4}He 约占宇宙全部看得见的物质的 1/4，氢原子核 H (即质子)约占 3/4，所有其他核素的总和只占不足百分之一.

氢的一种重同位素 ^{2}H 或 D(氘)是质子和中子比较松懈的束缚体，在恒星核过程中很容易被破坏. 宇宙条件稍有变化，D 的丰度就会有显著的变化，因此 D 的含量是代表宇宙演化的一个很灵敏的物理量，但很不容易获得. 除了宇宙早期的核过程以外，几乎所有已知的天体物理过程都不能明显地产生 D. 它难以产生，却极易被破坏，所以在星际气体中所观测到的 D 的丰度可以看成是宇宙原初 D 丰度的下限，即

$$y(\mathrm{D}) \geqslant 1.8\times10^{-5}\,, \tag{2.16}$$

其中 y(D) 表示 D 与 H 原子核数目的比值. 此外，还有

$$y(^3\mathrm{He}) \approx n\times10^{-5}\,,$$

$$y(^7\mathrm{Li}) \approx (1.0\sim1.4)\times10^{-10}\,.$$

由于这些量的测量结果误差较大，且 D 被破坏的过程主要是

$$\mathrm{D} + \mathrm{p} \rightarrow {}^3\mathrm{He} + \gamma\,,$$

因此考虑 (D+^{3}He) 的总丰度较为可靠，由其实际测量值可得

$$y(\mathrm{D}+{}^3\mathrm{He}) \leqslant 1.0\times10^{-4}\,. \tag{2.17}$$

(6) 宇宙年龄

通过某些天体年龄的测量，可以给出宇宙年龄的下限. 在地球上，铀的两种放射性同位素的半衰期(以年 a 为单位)分别为

$$T_{1/2}\,(^{235}\mathrm{U}) = 7.038\times10^8\ \mathrm{a}\,,$$

$$T_{1/2}\,(^{238}\mathrm{U}) = 4.468\times10^9\ \mathrm{a}\,. \tag{2.18}$$

由于 ^{235}U 的半衰期短，衰变得快，现在地球上 ^{235}U 的含量远低于 ^{238}U，其丰度比为

$$Y(^{235}\mathrm{U})_\mathrm{f} \,/\, Y(^{238}\mathrm{U})_\mathrm{f} = 7.23\times10^{-3}\,. \tag{2.19}$$

实际上，这些重核素是在太阳系形成以前由上一代的超新星爆发生成的，当初两者之比约为

$$Y(^{235}\mathrm{U})_{\mathrm{i}} / Y(^{238}\mathrm{U})_{\mathrm{i}} = 1.71 . \tag{2.20}$$

由此可推算出从上次超新星爆发到现在的时间大约为 6.6×10^{9} a，这可看做是太阳系年龄的上限.

为了比较各个恒星的年龄，常采用以天文学家赫兹普龙(E.Hertzsprung)和罗素(H.N.Russell)命名的赫－罗图. 如图 2－3 所示，赫－罗图的纵坐标表示恒星的光度，其左边用绝对星等标出，右边以太阳光度 L_{s} 为单位；横坐标分别表示恒星的光谱型(下方)和表面有效温度(上方).

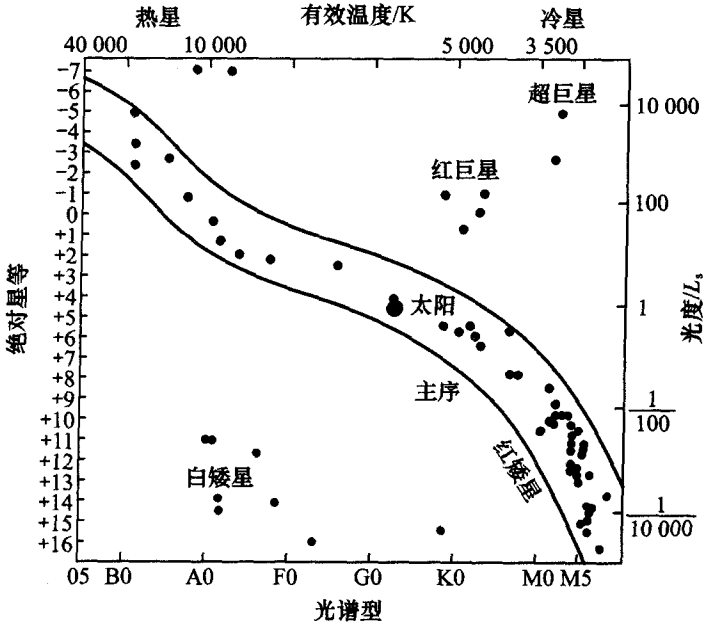


图 2－3　赫－罗图

恒星主要有三大类：主序星、巨星或超巨星、白矮星. 主序星以氢核燃烧聚变生成氦核为能源，过程比较平稳，因此主序阶段维持的时间较长，这种恒星的数目就比较多. 这个过程结束后，氦燃烧等核过程进行得比较猛烈，这时恒星将膨胀，温度下降，光度增加，在赫–罗图上移向右上方. 由于过程比较猛烈，巨星阶段寿命较短，待核能源耗尽，恒星收缩成白矮星. 收缩要升温，因而处在赫–罗图的左下方.

球状星团由10^{4}~10^{7}个恒星组成，这种星团在银河系内已经发现了 100 多个. 球状星团 M3 的所有星体基本上是同时生成的，其赫－罗图如图 2－4

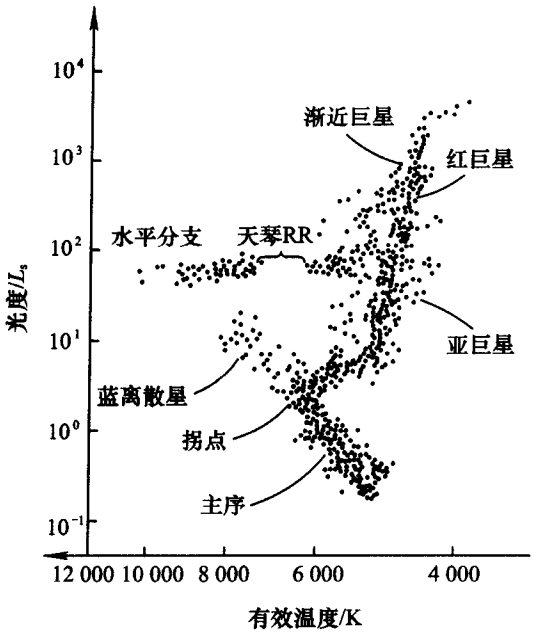


图 2－4　球状星团的赫－罗图

所示．主序带左上方几乎是空着的，说明比较重的这些主序星早已结束主序阶段而脱离主序带．图中拐点处大量的恒星脱离主序带而朝红巨星方向演化，这里的主序寿命标志着球状星团的现时年龄为

$$t_{gc}=(1.5\pm0.4)\times10^{10}\,\mathrm{a}\,, \tag{2.21}$$

因此，在误差允许的范围内，球状星团的年龄至少为 1.1×10^{10} a (110 亿年)，这就是宇宙年龄的下限．

在假定宇宙等速膨胀的情况下，利用哈勃常量的 2002 年值

$$H_0=(71\pm7)\ \mathrm{km/(s\cdot Mpc)}\,, \tag{2.22}$$

可以得到宇宙的**哈勃年龄**(Hubble time)为

$$1/H_0=(1.38\pm0.14)\times10^{10}\,\mathrm{a}\,. \tag{2.23}$$

如果仅仅由于引力而使宇宙减速膨胀，则哈勃年龄所给出的应该是宇宙年龄的上限．

近年来的观测表明，宇宙经历了减速、等速和加速膨胀等三个阶段．因此，哈勃年龄与球状星团年龄所得到的宇宙年龄的上、下限，出现了十分接近甚至可能倒置的情况．

现在，WMAP 给出了最精确的结果，宇宙年龄为 137 亿年，误差范围仅为几十万年．

§2-2　宇宙学的标准模型

一　爱因斯坦宇宙和弗利德曼宇宙

(1) 爱因斯坦宇宙和宇宙常数

为了建立一般的引力理论，首先必须像引入电磁场的概念来代替静电场那样，将遵从牛顿万有引力定律的静引力加以推广；然后还要找出一般引力场对引力源的依赖关系.

为此，爱因斯坦提出，一般引力的物理效果是造成时空的弯曲，四维时空的度规 $g_{\mu\nu}$ 就是描述引力场的场量. 同时，在没有经验规律指引的情况下，爱因斯坦花费了多年的时间，在 1915 年写出了广义相对论中的一般引力场方程

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}=-\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \tag{2.24}$$

式中下标 $\mu,\nu=0,1,2,3$，重复指标表示求和. 在上述场方程中，$g_{\mu\nu}$ 称为**度规张量**(metric tensor)，$R_{\mu\nu}$ 和 R 是由 $g_{\mu\nu}$ 及它对时间和空间变量的一阶和二阶导数构成的完全确定的张量，它们是描写时空几何性质的量；$T_{\mu\nu}$ 是引力源的**能量动量张量**(energy-momentum tensor)，T^{λ}_{λ} 是该张量的迹，G 是牛顿引力常量.

广义相对论在以下两个极端的领域里是重要的：一个是在超高密度物质附近，例如在中子星或黑洞等致密天体附近，时空的弯曲将很显著；另一个是在宇宙尺度上，尽管宇宙的平均密度很低，时空弯曲很小，但因宇宙涉及的尺度极大，时空弯曲在大范围的积累效应不可忽略. 在广义相对论基础上建立的爱因斯坦宇宙模型，为现代宇宙学奠定了基础.

1918 年，爱因斯坦开始想用广义相对论建立宇宙的动力学模型. 这时他“错误地”猜想，宇宙应该是静态的. 然而按他写出的方程(2.24)，只受引力支配的宇宙没有静态解. 于是他提出在方程(2.24)左边加一项($-\lambda g_{\mu\nu}$)，其力学效果是产生排斥效应. 有斥力与引力相配，爱因斯坦所期望的静态宇宙解才可能出现.

方程(2.24)左边所加的项($-\lambda g_{\mu\nu}$)称为**宇宙项**(cosmological term)，它在太阳系的尺度上可忽略，只在宇宙尺度上才有重要效果. λ 称为**宇宙常量**(cosmic constant)，它的大小必须由宇宙学测量来确定.

为了形象地说明爱因斯坦宇宙模型，我们可以先设想一个二维的宇宙，这时的爱因斯坦宇宙的整体是一个三维球的二维球面．在这个有限的球面上，既没有边界，也没有中心，与宇宙学原理一致．定量而言，如图 2－5 所示，球面上的任意一段线元 ds 可表示为

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx^2 + dy^2 + \frac{(x\,dx + y\,dy)^2}{R^2 - (x^2 + y^2)}$$

$$= R^2\left[\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\varphi^2\right], \tag{2.25}$$

其中　$x = \sigma\cos\varphi$，　$y = \sigma\sin\varphi$，　$r = \sigma/R$；　(2.26)

并用到了球面方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2\,. \tag{2.27}$$

对三维的爱因斯坦宇宙，类似地可写出相应于四维球体的三维球面的表达式

$$ds^2 = R^2\left[\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2\right], \tag{2.28}$$

其中 R 在某种意义上相当于宇宙的半径．

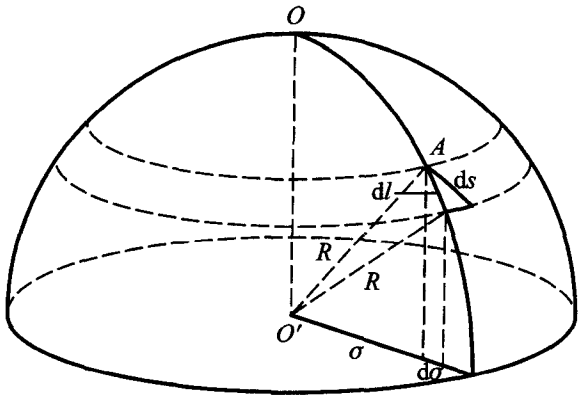


图 2－5　球面上的几何

利用上述关系，可得二维和三维球面相应的关系式如下：

① 径向线元 dl (即沿 OA 方向的线元)

$$dl = \frac{R\,dr}{\sqrt{1-r^2}}\,. \tag{2.29}$$

② r 以内的径向距离 $l(r)$ (即 O 到 A 的弧长)

$$l(r) = R\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} = R\arcsin r\,. \tag{2.30}$$

③ r 处的圆周长 $W(r)$(二维球面)和球面积 $A(r)$(三维球面)分别为

$$W(r)=2\pi Rr,\qquad A(r)=4\pi R^2r^2, \tag{2.31}$$

④ r 内包括的球面积 $S(r)$(二维球面)和球体积 $V(r)$(三维球面)分别为

$$S(r)=\int_0^r W(r)\mathrm{d}l=2\pi R^2(1-\sqrt{1-r^2}), \tag{2.32a}$$

$$V(r)=2\pi R^3(\arcsin r-r\sqrt{1-r^2}). \tag{2.32b}$$

⑤ 二维宇宙的总面积 S 和爱因斯坦宇宙的总体积 V 分别为

$$S=2S_{r=1}=4\pi R^2,\qquad V=2V_{r=1}=2\pi^2R^3. \tag{2.33}$$

爱因斯坦宇宙是一个静态的宇宙，该模型的一个严重缺点是它的不稳定性：宇宙一旦经受了一个即使是非常微小的收缩，则由于引力的增加，必将一直收缩下去；反之，一旦有一个微小的膨胀，则必将一直膨胀下去.

既然爱因斯坦的静态宇宙是不稳定的，也就没有必要再假设宇宙是静止的了. 不妨假设宇宙就处在动态，至于是膨胀还是收缩，则要由观测来决定. 一旦去掉了静止的限制，则上述常量 R 就将变成时间 t 的函数 $R(t)$ [称为罗伯逊(Robertson) - 沃克(Walker)标度因子]，再把式(2.28)中的分母改写为 $(1-kr^2)$，于是满足宇宙学原理的普遍线元公式可以表示为

$$\mathrm{d}s^2=R(t)^2[\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2}+r^2\mathrm{d}\theta^2+r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2], \tag{2.34}$$

其中 k 称为曲率指数，可以取 1，0 和 −1 三个值.

当 $k=1$ 时，r 的取值范围限制在小于 1，否则分母会取零或负值，$\mathrm{d}s$ 可能是虚数. 因此，当 $k=1$ 时，宇宙的尺度范围 $\sigma=Rr$ 是有限的，或者说是封闭的，这时 R 相当于宇宙的半径.

当 $k=-1$ 时，宇宙的尺度范围 $\sigma=Rr$ 可以取任意值，是无限的，或者说是开放的，这时 R 只是宇宙中某个典型的尺度.

当 $k=0$ 时，所描述的是一个平直的宇宙，这种临界情形下的无限宇宙称为爱因斯坦 - 德西特宇宙.

(2) 弗利德曼宇宙

爱因斯坦的静态宇宙是不稳定的. 弗利德曼(A.Friedmann, 1888—1925)在 1922 年假设宇宙在膨胀，并在 1924 年用不包括宇宙项[①]的广义相对论引力场方程建立了膨胀宇宙的动力学模型. 这就是著名的弗利德曼宇宙模型，

① 宇宙常量为零或不为零，至今仍使物理学家困惑，关键原因是量子物理给真空的概念带来了全新的认识.

它是现代宇宙学的基础．1927 年，勒梅特利(G.Lemaitre)进一步指出，当时已发现的星系谱线红移现象，可能就是宇宙膨胀的表现．这些预言，被 1929 年发现的哈勃定律所证实．

为了形象地表示宇宙膨胀的图像，可以把一个气球的表面看成是二维宇宙，表面上的点代表星系．当气球被吹胀起来时，星系之间的空间增大了，任何星系均看见所有其他的星系都正在退离它，但表面上的任何一点都不是膨胀中心．在宇宙膨胀过程中，由化学力或引力束缚在一起的物质集合体(包括星体和星系等)并不膨胀，只是星系团之间的空间在膨胀，因为上述物质集合体各个组成部分之间的这些力要比膨胀的力量更为强大．

对于膨胀的宇宙，$\dot{R}=\mathrm{d}R/\mathrm{d}t>0$，$R(t)$ 随着时间 t 的增长而增大．然而，引力的存在使膨胀速率减慢，故有 $\ddot{R}=\mathrm{d}^2R/\mathrm{d}t^2<0$．因此，可以利用哈勃常量 $H(t)$ 和宇宙减速因子 q 这两个可观测量来描述宇宙的膨胀，即

$$H(t)=\frac{\dot{R}}{R}, \tag{2.35}$$

$$q=-\frac{\ddot{R}}{R\dot{R}^2}=\frac{1}{2}\frac{\rho}{\rho_c}=\frac{1}{2}\Omega, \tag{2.36}$$

其中 ρ 是宇宙密度，ρ_c 是宇宙临界密度，$\Omega=\rho/\rho_c$ 是宇宙密度的无量纲形式．

在宇宙膨胀的情况下，谱线波长将随着空间尺度的膨胀而自然增大．若某星系某谱线 $t=t_e$ 时刻所发射的波长为 λ_e，现在 $(t=t_0)$ 测得的波长为 λ_0，则有

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e}=\frac{R(t_0)}{R(t_e)},$$

$$Z=\frac{\lambda_0-\lambda_e}{\lambda_e}=\frac{R(t_0)-R(t_e)}{R(t_e)},$$

$$Z+1=\frac{R(t_0)}{R(t_e)}, \tag{2.37}$$

由此可见，$Z+1$ 直接表示了宇宙尺度的膨胀比．观测得越远，所代表的宇宙年龄越早，则谱线红移越大．

如果所观测的星系离我们不太远，则 (t_0-t_e) 比起宇宙年龄来只是个小量，这时利用泰勒展开的一级近似可得

$$\frac{R(t_0)-R(t_e)}{R(t_e)}\approx\frac{R(t_0)-R(t_e)}{R(t_0)}\approx H_0(t_0-t_e),$$

其中 $H_0=H(t_0)$ 是现在宇宙的哈勃常量．

弗利德曼宇宙在膨胀，并且膨胀减速．如果倒算回去，R 必在过去某个时刻收缩到零．这个时刻($t=0$)可认为是宇宙诞生的时刻，因为那时宇宙的密度达到了无穷大．为了推算宇宙年龄，可以先设想宇宙膨胀不减速，于是今天的宇宙尺度 R_0 将在

$$\tau_0 = \frac{R_0}{\dot{R}_0} = \frac{1}{H_0} \tag{2.38}$$

时间以前收缩为零．如果实际的宇宙膨胀在减速，即过去的宇宙膨胀速度更大，那么倒算回去 R_0 应在比 τ_0 更短的时间内收缩为零．根据宇宙年龄 t_0，可以推算出人们所能观测到的最大距离为

$$l_{\text{hor}}(t_0) \approx ct_0, \tag{2.39}$$

称为 t_0 时刻的**视界**(horizon)．

二　宇宙膨胀的规律和宇宙物质状态的描述

(1) 宇宙动力学的基本方程

根据爱因斯坦质能关系式，ρc^2 表示单位体积内的能量，$(4/3)\pi R^3 \rho c^2$ 是以 R 为半径的球体内的能量，$4\pi R^2 p$ 为球面上的总压力．因此，当球体膨胀 $\mathrm{d}R$ 距离时，对外所作的功 $4\pi R^2 p\,\mathrm{d}R$ 应等于球体内总能量的减少，即

$$4\pi R^2 p\,\mathrm{d}R = -\mathrm{d}\left(\frac{4\pi}{3}R^3\rho c^2\right),$$

由此即可得到作为宇宙动力学的基本方程之一的**能量方程**

$$\frac{\mathrm{d}(\rho R^3)}{\mathrm{d}R} = -\frac{3pR^2}{c^2}. \tag{2.40}$$

在我们把爱因斯坦引力场方程(2.24)应用到宇宙这个大对象时发现，宇宙学原理使得原来非常复杂的方程变得十分简单，这就是宇宙动力学的另一个基本方程：

$$\dot{R}^2 + kc^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho R^2. \tag{2.41}$$

利用哈勃定律，$\dot{R} = HR$，由式(2.41)可得曲率指数为

$$k = \frac{R^2}{c^2}\left(\frac{8\pi G}{3}\rho - H^2\right). \tag{2.42}$$

由于 k 是常量，上式中的量可以用任何时候的值．若用现在的值表示，则有

$$k = \frac{R_0^2}{c^2}\left(\frac{8\pi G}{3}\rho_0 - H_0^2\right) = \frac{R_0^2}{c^2}\frac{8\pi G}{3}\left(\rho_0 - \frac{3H_0^2}{8\pi G}\right). \tag{2.43}$$

当 $k=0$ 时，上式给出一个重要的宇宙特征量——**临界密度**，即

$$\rho_{0c}=\frac{3H_0^2}{8\pi G}=1.88\times10^{-26}h_0^2\ \text{kg/m}^3=0.95\times10^{-26}\text{kg/m}^3. \quad (2.44)$$

若用 ρ_0 表示现在宇宙的平均密度，则当 $\rho_0>\rho_{0c}$ 时，由式(2.43)可得 $k>0$．由于曲率指数 k 只能取 1，0 和 −1 三个值，因此当 $\rho_0>\rho_{0c}$ 时有 $k=1$，宇宙将是封闭的有限的．此外，当 $\rho_0<\rho_{0c}$ 时，由式(2.43)可得 $k<0$，即 $k=-1$，宇宙将是开放的无限的．当 $\rho_0=\rho_{0c}$ 时，由式(2.43)可得 $k=0$，宇宙将是平直的．

（2）宇宙物态方程

为了构成确定宇宙动力学行为的完备的方程组，还需要一个方程，即描述宇宙物质状态的物态方程，例如

$$p=p(\rho). \quad (2.45)$$

宇宙的物态方程是十分复杂的，在宇宙演化的不同时期往往具有不同的形式，正是它决定了物质世界的丰富多彩．

在宇宙绝热膨胀的过程中，宇宙的尺度 R 在增大，密度 ρ 在变小，温度 T 在降低．我们可以采用便于测量的温度 T 来描述时间 t．在不同的温度下，物质中粒子的热运动能量 k_BT 不同，相应的物质状态和物理过程也就不同．根据宇宙学原理，宇宙在大尺度上是均匀的．可以想象，宇宙在较早时期一定是相当均匀的气体．只要温度给定，这种均匀的气体中各类粒子的物态也就基本上确定了．从微观上来说，这时各类粒子的速度、动量和能量的分布也就确定了．当气体内质量为 m_i 的某种粒子的热运动能量远小于粒子的静能时，即当 $k_BT<<m_ic^2$ 时，这种粒子的物态是非相对论的；反之，当 $k_BT>>m_ic^2$ 时，这种粒子的物态是极端相对论的．

根据粒子物理学，当两个质量为 m_i 的粒子相互碰撞时，如果它们的动能超过 $2m_ic^2$，就有可能产生一对这种正、反粒子．在温度为 T 的气体中，如果 $k_BT>>m_ic^2$，就会有大量的粒子在相互碰撞时带有 $2m_ic^2$ 以上的能量，从而会产生大量的这种 i 粒子对．相反，如果 $k_BT<<m_ic^2$，则这种粒子对就不会大量产生，而已存在的这种粒子对却会大量湮没掉．所以，宇宙演化到温度 T 时 i 粒子及其反粒子大量存在的成分判据是

$$k_BT>m_ic^2. \quad (2.46)$$

不满足上式的粒子可以粗略地认为在宇宙温度为 T 时已几乎不存在了．有一些粒子，即使在 $m_ic^2>k_BT$ 条件下仍然大量存在，一般这都是弱相互作用或超弱相互作用的粒子，它们不容易发生湮没而消失．事实上，这类粒子已不参与热平衡了．如前所述的暗物质的粒子，很可能都是这类粒子．

在宇宙演化的不同时期，诸如式(2.45)的物态方程往往具有不同的具体形式．如果介质由零质量粒子构成(如光子气体)，则其物态方程为

$$p = \rho c^2 / 3 \tag{2.47}$$

把上式代入式(2. 40)，可得

$$\rho R^4 = 常量. \tag{2.48}$$

在宇宙早期，主要物质正是处在这种极端相对论的状态．而在非相对论情形，气体内粒子的热运动能量远小于粒子的静能，热运动可以忽略，压强 $p << \rho c^2$，由式(2.40)可得

$$\rho R^3 = 常量. \tag{2.49}$$

给定了物态，原则上就可以从方程(2.40)和(2.41)求解出宇宙膨胀的规律．尽管物态方程比较复杂，而且它还随着宇宙的膨胀和演化而变化，但是宇宙膨胀总的规律是清楚的．

如图 2－6 所示，对于 $k = 1$ 情形，$\rho_0 > \rho_{0c}$，这意味着宇宙物质多，引力大，减速就大．在 $t = t_s$ 时，引力大到了足以使宇宙膨胀速度减到零，这时的宇宙半径为 R_s，而后转为收缩．对于 $k = -1$ 情形，$\rho_0 < \rho_{0c}$，这意味着宇宙物质少，引力小，这时宇宙膨胀速度虽一直在减小，却始终减不到零，宇宙将无限地膨胀下去．

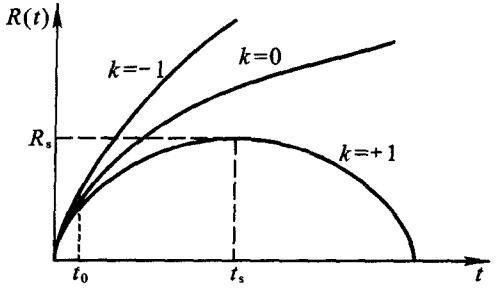


图 2－6　宇宙膨胀规律

三　热大爆炸的观念

如果宇宙长时间地一直在膨胀，那么物质密度就一直在变小．往前追溯至宇宙尺度为今天的百分之一时，宇宙密度将达到今天的 10^6 倍，超过了星系的密度．于是，星系将挤在一起，实际上它们不能存在．由此可见，宇宙的结构在某一时间之前是不存在的，它只能是演化的产物．

在没有结团之前，宇宙一大片由微观粒子构成的均匀气体，在热平衡下有均匀的温度，称为**宇宙温度**．气体的绝热膨胀将使宇宙温度降低，反之往前追溯，越早的宇宙就有越高的温度．这样，甚早期的宇宙就应当是温度很高、密度很大的气体，它以很大的速率膨胀着．这正是宇宙热大爆炸观念的基本看法．

1950 年前后，伽莫夫第一个建立了热大爆炸的观念．他假设宇宙的历史

可以追溯到温度 $T = 10^{10}\,\mathrm{K}$ 以上，这时粒子之间的热碰撞足以使原子核瓦解．因此，原子核作为微观性结团，也只能是宇宙演化的产物．伽莫夫等人成功地解释了氦的宇宙平均丰度高达 1/4 的事实．可是，他的初步理论并没能赢得当时人们的信任．

可以设想，宇宙诞生的时候，物质密度为无限大．这时，空间是高度弯曲的，能量集中为引力能．随着宇宙的膨胀，引力能逐渐转化为粒子能，从而产生出各种各样的粒子来．宇宙继续膨胀，温度继续下降，就会演出一幕幕生动真切的演化画面来．这个大爆炸宇宙学由于只用了已知的物理学规律，非常简单地描述了宇宙的性质、运动和演化，并得到了观测事实的支持，现在已为大多数学者所认可，称之为宇宙学的标准模型．在这个模型中，空间是与物质联系在一起的，爆炸的含义是空间本身在膨胀，并不是说有一团物质在已经存在的空间爆炸碎裂而散开．

四　宇宙演化的过程

(1) 普朗克时代

在 $t = 0$ 时刻，宇宙从高温、高密的奇点状态爆炸演化出来，这是经典物理的概念．按照量子力学的不确定关系，原则上不可能完全精确地测定时间，其测量精度的限制是

$$t_{\mathrm{p}} = \left(\frac{\hbar G}{c^5}\right)^{1/2} = 5.39\times10^{-44}\,\mathrm{s}, \tag{2.50}$$

称为**普朗克时间**(Planck time)；与此相对应的时代，称为**普朗克时代**．光在普朗克时间 t_{p} 内所走过的距离，称为**普朗克长度**(Planck length)，即

$$l_{\mathrm{p}} = c t_{\mathrm{p}} = \left(\frac{\hbar G}{c^3}\right)^{1/2} = 1.62\times10^{-35}\,\mathrm{m}. \tag{2.51}$$

与普朗克时间 t_{p} 相应的能量不确定度为

$$\frac{\hbar}{t_{\mathrm{p}}} = \left(\frac{\hbar c^5}{G}\right)^{1/2} = 1.221\times10^{-19}\,\mathrm{GeV}, \tag{2.52}$$

称为**普朗克能量**；与其相应的质量特征量为

$$m_{\mathrm{p}} = \frac{\hbar}{t_{\mathrm{p}} c^2} = \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{1/2} = 2.17\times10^{-8}\,\mathrm{kg}, \tag{2.53}$$

称为**普朗克质量**(Planck mass)．

图 2－7 和表 2－1 给出了宇宙演化的时间表．我们今天的物质世界，是在约一二百亿年时间内，由一连串的物理过程逐步形成的．物质世界各色各样的粒子是在宇宙刚诞生仅约 $10^{-44}\,\mathrm{s}$ 的普朗克时代产生出来的．

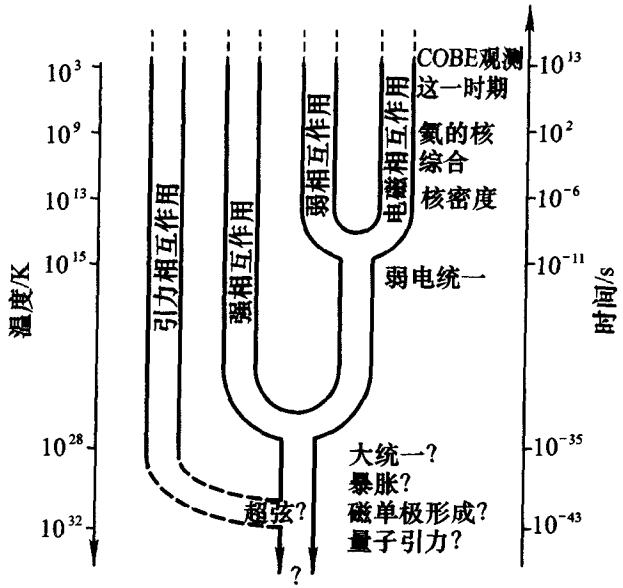


图 2－7　宇宙演化和预期的相互作用的统一

表 2－1　宇宙演化时间表

T/K	E/eV	t	时代	物理过程
10^{32}	10^{28}	10^{-44} s	普朗克时代	粒子产生
10^{28}	10^{24}	10^{-36} s	大统一时代	重子不对称性产生
10^{13}	10^{9}	10^{-6} s	强子时代	大量强子过程
10^{11}	10^{7}	10^{-2} s	轻子时代	轻子过程
5×10^{9}	5×10^{5}	5 s		e^+e^- 湮没
10^{9}	10^{5}	3 min	核合成时代	^{4}He 等生成
4×10^{3}	0.4	4×10^{5} a	复合时代	中性原子生成，光子脱耦，星系形成
2.7	3×10^{-4}	10^{10} a	现在	

（2）大统一时代

到约 10^{-36} s 时，宇宙经历了大统一时代，产生出重子略多于反重子的不对称性(在普朗克时代，粒子的总重子数为零)．今天物质世界的基础，正是来自这每十亿零一个重子被十亿个反重子湮没掉后剩下的那一个．

显然，从宇宙诞生时总重子数 $B=0$，到后来总重子数 $B\neq0$ 的重子－反重子不对称世界，这是与已知的粒子过程应保持重子数守恒这一规律相违背的．然而，强相互作用与电弱相互作用统一的所谓大统一理论(GUT)允许

有总重子数 B 不守恒的过程，即允许对重子和轻子给以同等处理.

大统一理论的能量标度约为 10^{15} GeV，即相应的规范粒子质量的量级，它们所传递的作用在低能下非常弱，一般难以观测到. 例如，由于低能下 B 不守恒的作用非常弱，质子寿命长达 10^{32} a，在装有 150 t 水的池子中 10 a 内只能探测到一个质子发生衰变.

（3）强子时代

宇宙演化到温度约为 5×10^{13} K 时，相应的能量 $k_BT\approx5$ GeV . 这个能量除以 c^2 远大于质子和中子的质量，根据成分判据[式(2.46)]，这时质子和中子以及它们的反粒子大量存在. 由于大部分强子，包括介子、超子和共振子等，它们的质量都在 5 GeV 以下，因此这时它们和它们的反粒子都应大量存在. 换言之，这个温度范围正是各种强子存在的时代，称为**强子时代**. 由于强子是由夸克和反夸克组成的，因此在温度高于这个范围时，宇宙中可能是以夸克和反夸克的形式存在的.

（4）轻子时代

宇宙演化到温度约为 10^{11} K 时，相应的能量约为 10 MeV . 在已知粒子中，满足成分判据[式(2.46)]的只有以下几种粒子：光子 γ、三种中微子及其反粒子 $(\nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau,\bar{\nu}_e,\bar{\nu}_\mu,\bar{\nu}_\tau)$、电子 e^- 和正电子 e^+，它们都处在同一温度的热平衡状态中. 这时，质子和中子不满足成分判据，只剩下很少量. 由于这个温度范围的粒子大多是轻子，因此宇宙演化的这个阶段称为**轻子时代**.

上述轻子是处于热平衡的极端相对论粒子，玻色子平均数密度为

$$n_b=\frac{1.2}{\pi}g_b\left(\frac{k_BT}{\hbar c}\right)^3\approx200\,g_b\left(\frac{T}{2.7\,\mathrm{K}}\right)^3\mathrm{cm}^{-3}, \tag{2.54}$$

其中 g_b 表示玻色子的内部自由度或极化自由度. 若用 g_f 表示费米子的极化自由度，则费米子的平均数密度 n_f 与 n_b 之间的关系为

$$\frac{n_f}{g_f}=\frac{3}{4}\frac{n_b}{g_b}. \tag{2.55}$$

由于光子的极化自由度为 2，中微子和反中微子的极化自由度为 1，电子的极化自由度为 2，因此光子、中微子和电子的数目之比为

$$n_\gamma:n_\nu:n_e=2:(6\times1\times\frac{3}{4}):(2\times2\times\frac{3}{4})=2:4.5:3. \tag{2.56}$$

我们知道，只要粒子之间的碰撞次数足够多，相互之间有足够多的能量交换，则粒子系统就会达到热平衡. 由于宇宙在不断地膨胀，温度在不断地降低，并不是所有的粒子都能在此过程中保持热平衡的. 实际上，如果用哈勃常量 H 标记宇宙膨胀率，则可以把粒子碰撞频率

$$\Gamma = n_i \sigma v > H \tag{2.57}$$

看成是第 i 种粒子能够随着宇宙膨胀而保持处于热平衡的判据，其中 n_i 是第 i 种粒子的数密度，σ 为粒子碰撞截面，v 为粒子运动速度．凡是不满足这个判据的粒子，就会脱离热平衡而获得自由．这些粒子将作为不受其他组分影响的孤立系而存在下去，从而称为**遗迹粒子**①．

随着宇宙的膨胀，在温度降到 10^{10} K 后，尽管中微子仍大量存在，却不再参与碰撞和热耦合，保持自由运动，这个温度称为中微子的脱耦温度．当宇宙演化到 5×10^9 K 时，相应的能量除以 c^2 与电子的质量 m_e 相当．按照成分判据[式(2.46)]，这时正、负电子对将大量湮没而转化为光子，所剩下的少量电子的数目与质子相同，保持宇宙整体的电中性．

(5) 核合成时代

随着宇宙进一步的膨胀，当温度下降到约 10^9 K 时，中子与质子的碰撞就会大量生成 D，并放出能量约为 2.2 MeV 的光子②．这时，氘核相撞会十分有效地生成氦核 ^{4}He．由于中子一旦进入 ^{4}He 核内就不再衰变了，从而为我们物质世界保持了大量的中子．

在生成 ^{4}He 核的同时，也生成了 ^{3}H 和 ^{3}He 等轻核，还进一步合成了 ^{7}Li 和 ^{7}Be 等轻核，这一时期称为**核合成时代**．然而，除 ^{4}He 以外，其余轻核素的丰度并不高．而且，物质世界中比较重的核素，都是在以后的恒星演化和超新星爆发等过程中合成的．由于 ^{4}He 是由二个中子和二个质子构成的，宇宙中 ^{4}He 的总质量应是中子总质量的二倍，即 ^{4}He 的总质量正比于 $2n_n$；又由于宇宙中重子物质的总质量正比于 (n_p+n_n)，所以 ^{4}He 的丰度为

$$Y(^4\mathrm{He}) = \frac{2n_n}{n_p+n_n} \approx 0.27\,, \tag{2.58}$$

上式计算中用到了 10^9 K 时的 $n_n/n_p \approx 0.155$．

总之，大约有四分之一宇宙物质的质量聚合成了氦，这个过程用完了所有可利用的中子．余下的没有聚合的质子，自然就成了氢原子核．因此，这一理论预言宇宙应当由大约 75 %的氢和 25 %的氦组成，这与天文测量结果相符．而且在计及微量副产品时，理论仍与测量结果相符．比起光子来，质

① 今天宇宙中已知的遗迹粒子有光子和中微子，人们感兴趣的是它们对宇宙演化的重要影响．由于退耦时中微子是相对论性的，因此遗迹中微子数密度应与遗迹光子相当．由于中微子静质量不为零，它们与暗物质问题和星系形成问题都有密切的关系．

② 当温度高于 10^9 K 时，宇宙中能量超过 2.2 MeV 的高能光子非常多，使这个过程也能逆向进行，刚生成的 D 核很快又分裂成质子和中子．

子和中子的数目是很少的，重子－光子数之比为

$$\eta = (2.8 \sim 4.0) \times 10^{-10}, \tag{2.59}$$

这相当于重子密度为

$$\rho_{\mathrm{b}} = (1.9 \sim 2.8) \times 10^{-28}\ \mathrm{kg/m^3}. \tag{2.60}$$

在核合成时代，光子的能量约为 100 keV 比重子小约万倍，但数目却比重子多十亿倍．因此，在核合成时代，辐射的质量(即能量/ c^2)远远超过了重子物质的质量．然而，重子物质的密度ρ_{b}正比于温度 T 的三次方，而辐射密度ρ_γ 正比于 T 的四次方．所以，随着宇宙的膨胀降温，辐射密度下降得比重子物质密度要快得多，总有一天会达到$\rho_{\mathrm{b}} = \rho_\gamma$，再降温就会使重子物质占主导地位．今天，重子物质的密度已千倍于辐射密度．

(6) 复合时代

在宇宙温度降到 4 000 K 以前，宇宙物质一直处在质子 p、电子 e^-和 ^4He 组成的等离子体与光子相耦合的热平衡态，并伴有大量脱离了热平衡的中微子．这时，光子与带电粒子之间有很强的相互作用，会与它们发生频繁的碰撞．然而，在温度降到约 4000 K 时，电子和质子开始复合成中性氢原子①，而电子和氦核开始复合成中性氦原子，宇宙物质变成电中性的原子气体．这时，光子就几乎不再受到碰撞，光子脱离热平衡而变成自由气体，宇宙物质对于光子变得透明了，这就是宇宙的**复合时代**.

刚脱耦的时候，光子是 4000 K 的黑体辐射．脱耦以后，随着宇宙膨胀，宇宙尺度在增大，光的波长也相应地增长，因此能量降低，等效温度降低．虽然这时光子已不再处于热平衡态，却仍然保持着与热平衡一样的黑体辐射谱．宇宙膨胀到现在，4000 K 的黑体辐射降到了 2.7 K 的黑体辐射．

怎样在均匀的中性原子气体中形成星系和星系团这些结团的不均匀天体呢？这是宇宙学中极为重要的一个问题．目前对宇宙结构形成模型的理论研究表明，多彩的可观测宇宙敏感地依赖于早期宇宙的特征．宇宙结构形成的基本物理原因是均匀介质具有自引力作用下的不稳定性，早期宇宙存在相变导致的拓扑缺陷或小幅度的原始扰动可以被引力放大．具体而言，只要原初介质中具有哪怕是十分微小的密度扰动，则在进入物质为主的阶段后，原来的微小扰动的幅度开始增大，过密区将因局域引力而收缩，最终形成团块．

按照这一图像，光子在退耦时的介质不应该是完全均匀的，并且它将通

① 电子和质子复合成氢原子并放出 13.6 eV 的光子的过程，在 4000 K ($k_{\mathrm{B}}T \approx 0.4$ eV) 以上的温度下也会发生．但是，由于这时 13.6 eV 以上的高能光子为数仍然不少，因此氢原子分离为电子和质子的逆过程使氢原子积累不起来．只有在温度降到 4000 K 以下时，氢原子才得以有效积累起来，复合过程才能有效地进行．

过光子温度的不均匀性体现出来，从而使宇宙背景辐射场表现出各向异性.

如前所述，宇宙中看不见的物质——暗物质要比看得见的物质多得多，它们具有引力作用，因此它们对于宇宙的运动和演化以及宇宙结构的形成起着极其重要的作用. 组成暗物质的粒子必须是电中性的、有静质量的、寿命长于宇宙年龄的稳定粒子，它们不直接参与电磁相互作用，但可参与弱相互作用. 在粒子物理的标准模型给出的“基本”粒子中，有可能是暗物质粒子的只有**中微子**(neutrino)和**反中微子**(antineutrino). 近年来的观测结果表明，中微子静质量不为零[①]，但它的质量非常小.

实际上，暗物质分为两类，一类的粒子是相对论性的，它们质量很小，运动速度接近光速，称为**热暗物质**，中微子是热暗物质粒子；另一类的粒子是非相对论性的，它们的质量较大，运动速度较小，称为**冷暗物质**. 按照以热暗物质为主的结构形成理论，是先形成大尺度结构然后向小尺度破碎；而按照以冷暗物质为主的结构形成理论，则是从小尺度结构开始逐级并合形成大尺度结构. 目前后者与观测结果符合得较好，是较为流行的理论. 暗物质绝大部分应是冷暗物质，冷暗物质粒子肯定是超出粒子物理标准模型的粒子，理论物理学家猜测，有两个可能性：一个是**轴子**(axion)，另一个是**中性微子**或**中性伴随子**(neutralino). 物理学家们正在筹划一项新的太空计划，将要在飞船中搭载一个原子干涉仪，该设备将用来进行人类首次对量子引力的观测，可以检出“引力子”引起的时空扭曲；另外一个装置将用来寻找不遵循等效原理案例，该装置还用来寻找预言中存在的暗物质粒子“轴子”. 如果该计划得到批准，将于 2015 年发射升空，该计划被称为“大统一和引力探测器”(GAUGE)将由英国和其他欧洲国家的研究者共同参与.

---

①《科技日报》东京 2004 年 6 月 12 日电：来自 10 个国家的科学家组成的研究小组通过实验证实，中微子具有静质量的概率为 99.99%. 日本高能加速器研究机构和东京大学宇宙射线研究所的科学家参与了此项实验. 位于茨城县筑波市的高能加速器研究机构的研究人员利用 120 亿伏的质子加速器产生中微子并向外发射，距发射地 250 千米远的东京大学宇宙射线研究所利用安装在地下 1000 多米深处的超级监测器 SK，观测到了发射的中微子. 根据理论值，研究人员最终应捕获到中微子 150 个，而实际捕获中微子的数量只有 108 个. 他们认为，未能捕获到的中微子在穿过大气和地球时发生了振荡现象，即从一种形态转换为另一种，变为检测不到的 τ 中微子. 根据量子理论，粒子之间的相互转化只有在其具有静质量的情况下才可能发生.

中微子振荡现象是目前唯一超出粒子物理标准模型的新现象，它证明了中微子质量不为零. 在描述中微子振荡的 6 个参量中，目前仍有两个未知：交叉混合角和 CP 相角. 在中国大亚湾核电站，以中国和美国科学家为主的国际合作组正在筹划建设大亚湾反应堆中微子实验站，其实验精度可以比过去提高一个数量级，预计 2010 年全部投入运行.

五　宇宙学标准模型的成功和困难

（1）宇宙学的标准模型的成功

宇宙学的标准模型是以广义相对论为基础，以具有很强观测基础的宇宙学原理为基本出发点建立起来的．这个理论模型应用已知的物理规律，系统地描述了宇宙演化各个时期的物理状态和演化过程，给出了一幅非常自然的图景，并解释了大量的观测事实．这一理论的巨大成功，是 20 世纪科学研究的重大成就之一．

宇宙学的标准模型是几十年的实验和理论研究的结果．用地面和发射到空间的现代望远镜，可探测到远在数十亿光年之外的星系发出的光，它告诉我们宇宙年轻时是何种模样．用粒子加速器可探索宇宙演化初期高能环境的物理学．用人造卫星可探测到宇宙早期膨胀后留下的本底辐射，使我们在能观测到的宇宙最大范围内勾画出它的大致图像．总之，宇宙背景辐射、氦的丰度、天体年龄等的实验测量结果，都是对宇宙学标准模型的重要支持．

（2）宇宙学的标准模型面临的挑战

宇宙学的标准模型在成功地解释了宇宙的基本观测事实之后，也还面临着两方面的挑战．一方面，标准模型本身还存在一些根本性的困难；另一方面，观测技术的进一步改进还会带来新的挑战．

事实上，从宇宙学的标准模型来说，了解得最清楚的是宇宙年龄从 1 ms 到 4×10^5 a 这个阶段．在宇宙早期，如在普朗克时代，由于空间高度弯曲，引力场必须量子化，这属于量子宇宙学问题．20 世纪 80 年代以来，量子宇宙学已有了一些很有思想性的推断，但远未形成成熟的理论．到大统一时代，尽管已经产生了像重子起源和暴胀宇宙这样重大的概念性突破，但是大统一理论本身还带有很大的猜测性和不准确性，它还远远不是一种成熟的理论．而且，由于涉及的粒子能量非常高，不可能通过加速器来取得数据．从天文学角度看，只能通过遗迹来判断大统一时代的情况，这也十分困难．

复合时代以来，宇宙经历着从均匀气体的平庸状态演化到星体世界的过程，这又是一个十分重要的难题．从纯理论的角度看，结构形成理论至少依赖于三个基本的宇宙信息，即宇宙密度有多大，今天宇宙的主要组分是什么，扰动的最初起源是什么．这些信息都密切地与甚早期宇宙的知识和超高能物理的知识相联系，我们对它们的了解至今还不准确．

此外，宇宙的标准模型还存在几个根本性的困难：① 按照大爆炸宇宙学，计算宇宙极早期 (如 10^{-39} s)的热力学过程可以得到一个结论：那时宇宙中至少存在 10^{83} 个无因果关系的区域．这意味着极早期的宇宙是极不均匀的．但是，宇宙学原理和微波背景辐射都表明宇宙是十分均匀的，那么宇宙

是怎样在极短的时间内一下子由极不均匀变得十分均匀了呢？这就是所谓的**视界疑难**．② 根据大爆炸宇宙学和现在的观测事实可以推断，在宇宙年龄接近普朗克时间 t_P 时，应该有 $|\rho-\rho_c|/\rho<10^{-58}$ 作为宇宙演化的初始条件，这就是说宇宙在极早期已经十分接近平直，然而为什么会这样？这就是所谓的**平直性疑难**．③ 理论计算表明，宇宙中磁单极子密度 $n \geqslant 4\times10^{-3}$ /m^3，可是实验观测并没有发现磁单极子．根据实验的精度，如果磁单极子存在的话，其密度 $n < 8\times10^{-19}$ / m^3．理论与迄今为止的实验观测很不一致，这就是所谓的**磁单极疑难**．这些疑难的一个关键是宇宙的膨胀太慢．

1981 年以来，顾斯(A.H. Guth)等人从大统一场论出发，很自然地解决了视界疑难和平直性疑难，提出了**宇宙暴胀**(inflationary universe)**模型**．该模型认为，在最初的10^{-35} s 宇宙开始暴胀，并假定这是一种特殊的相变，持续时间为10^{-32} s，宇宙体积增长10^{100}倍．2006 年 3 月 16 日，美国宇航局公布了 WMAP 探测器 3 年的观测数据，发现了宇宙在大爆炸后不到万亿分之一秒内极速膨胀的新证据．WMAP 通过对微波背景辐射偏振所做的测量，首次验证了暴涨模型提出的预言．据 WMAP 最新观测结果，宇宙已存在 137 亿年，与科学家三年前估算的宇宙年龄相符；同时，科学家认为恒星开始闪烁的时间为大爆炸后 4 亿年，比他们三年前的估算推迟了 2 亿年．

目前，宇宙学还是一门数据贫乏的科学．我们需要更多地知道有关宇宙的现在和它的早期时刻的情形．2005 年，美国宇航局科学家发现，γ射线爆发之辐射源能够释放出十万万亿的太阳光，这解开了 35 年未解之谜：当两颗中子星以每秒几万英里的速度碰撞在一起时，他们释放出γ射线火花．2006 年 6 月 29 日出版的英国《自然》杂志刊登了美国密歇根大学科学小组的文章指出，他们通过钱德拉 X 射线望远镜在我们星系中发现了被命名为 J1655 的黑洞．分析黑洞周围气体所散发的 X 射线，揭开了黑洞吞吐之谜：由黑洞和正常星球组成的双星系统的 X 射线光谱表明，数百万的气体旋风围绕着黑洞在打旋，使大部分的热气以螺旋形向黑洞内部扩展，约有 30% 的气体被驱散到宇宙中；黑洞驱动的磁场风，因磁场压力使气体向圆盘上和向圆盘外扩张，带走能量，保持宇宙物质能量的平衡．

值得强调的是，物理学的两大前沿——粒子物理学和宇宙学，近年来以始料未及的方式汇合到了一起．粒子物理学所研究的是物质基本组分的微小世界，而宇宙学所研究的是包括所有恒星和星系在内的天文世界，或者说是物质世界的整体．本来是在完全不同的领域试图以不同的方式回答不同问题的科学家，现在他们的兴趣和采取的研究方法却紧密地交织在一起了．用深埋在地下的粒子探测器研究物质的最基本的粒子，也许能窥透为什么会存在

星系这一秘密；而用望远镜研究遥远的星光，却也许能阐明那些基本粒子的身份．当我们寻觅宇宙年轻时代的遗迹以期望再现宇宙演化的历史时，我们发现，将人们对物理世界之最大与最小的这两方面的知识汇集到一起，结果就变得更为圆满．如果我们要了解宇宙的开端，那么我们就必须透彻地理解近年来才开始的那种大与小的统一．

1998 年 6 月 3 日，美国“发现号”航天飞机搭载阿尔法磁谱仪(AMS)首次升空试验取得了成功．AMS 是大型国际合作科学试验项目，有中国、美国、俄罗斯、德国、意大利、瑞士、芬兰等十多个国家和地区的 37 个研究机构的物理学家及工程师共同参与．其中，中国科学家为这次试验设计制作了最关键的部件——永磁体．这项科学试验的目的是寻找宇宙中的反物质(特别是反氦原子)和暗物质，进而探索宇宙的成因．AMS 经过在太空测试后，于当月 12 日返回地球进行修正，并将被送上国际联合太空站——阿尔法号，在太空进行正式的实验．

(3) 宇宙常量和暗能量问题

在经典物理中，真空是空间中空无一物的状态．然而，按照量子场论，真空是一切量子场处于基态，真空是复杂的物理状态，真空是否有能量是一个有确切物理含义的尚未解决的问题．原则上，真空能密度就是基态量子场的能量密度，它是可以计算的，但目前做不到．

相对论的质能关系把质量和能量等同成了同一个物理量，它同时描述了三个物理性质：在转换中保持守恒的**能量**，与牛顿第二定律相关的**惯性**，以及作为引力源而产生**引力**．由于基态有能量但不可能输出，因此它是否为零不存在可观测的区别；又由于真空不满足牛顿第二定律，因此它是否有惯性也无法用实验来判断．所以，如果真空有能量，唯一可观测的后果是产生引力，**真空能**是否为零仅是一个引力问题，要用广义相对论来处理．

按照广义相对论，计算真空的引力需要写出它的能量动量张量 $T_{\mu\nu}$ 并加到引力场方程(2.24)的右边，它的形式也是一个常量乘度规 $g_{\mu\nu}$，其效果完全与爱因斯坦想加的宇宙项一样．当我们试探地把两者都考虑进去时，结果方程中只出现两者的综合效果．现今 WMAP 的观测已定量地表明这综合效果不为零，即这样的附加引力场确实存在，但我们仍无法知道它到底来自宇宙常量还是真空能．

现在的观测已经证实，宇宙中物质的空间分布是高度均匀的，宇宙时空的空间部分是平坦的．因此，时空度规中只包含一个待定的尺度因子 $R(t)$，复杂的引力场方程简化成了一个关于 $R(t)$ 的常微分方程．把宇宙物质看成理想气体，它的能量动量张量由其密度 $\rho(t)$ 和压强 $p(t)$ 决定，动力学方程为

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi}{3} G(\rho + \frac{3p}{c^2}) R . \tag{2.61}$$

上式中，等式左边是加速度，右边应是单位质量物质所受的引力，它与牛顿引力的差别仅在于压强也有贡献，这是相对论效应.

宇宙中的引力源可分为三大类：① **实物**的密度主要来自组分粒子的静质量，其压强远小于密度而可以忽略；② **辐射**的组分粒子的静质量为零或可忽略，其密度主要来自组分粒子的热运动，$p=\rho c^2/3$；③ **真空**(包括宇宙项)的行为与 $p=-\rho c^2$ 的理想气体一样. 如果统一写成 $p=w\rho c^2$，则对实物、辐射和真空分别有：$w=0$、$1/3$ 和 -1. 由式(2.61)可见，对于实物，(ρc^2+3p) 总是正的，它产生的引力总是吸引性的；对于真空，(ρc^2+3p) 总是负的，它产生的引力是斥性的. WMAP 发现近期的宇宙膨胀在加速，这只能是由于斥性的引力，只能来自真空，且真空的密度一定比实物的大.

如前所述，观测只能给出真空能和宇宙常量的综合效果. 尽管宇宙常量不可能从理论上算出，但原则上真空能却可以算出，再与观测结果比较，似乎问题可以得到解决. 然而，如要有效地计算真空能，须先搞清楚什么是量子场的基本形态，基本场有哪几种以及基本的相互作用有哪几种. 实际情况是，今天的高能物理理论距离这个要求还差得很远，即使是估算也暴露出了很尖锐的问题：作为一切场的一种，自由标量场可分解为各种不同频率的谐振子的叠加，基态下每个谐振子都有零点能 $h\nu/2$，其总和是无穷大. 即使考虑到这样的估算在量子引力的能量尺度不成立，简单地把它完全扣除，其结果仍比今天实测的宇宙总密度大 100 个量级以上，即真空产生的斥性引力比观测到的综合效果要大 100 个量级以上，因此它的引力一定在极大的程度上被别的因素抵消了.

自然界并不是只有标量场，理论家对此研究了 30 多年. 许多理论家相信，很可能存在某种未知的规律保证着真空能密度为零，但这方面的努力还没有可靠的理论成果，甚至使真空能密度降到足够低的迹象也看不到，这就是所谓的**真空能疑难**. 再一种可能是真空的引力被宇宙项的效果抵消，然而要使两个量抵消后的值比原值小 100 个量级是难以想象的. 因为只要宇宙常量稍微改变一点点，这种抵消的剩余效果就会放大许多量级，宇宙的演化行为就会完全不同，这就是所谓的**微调困难**. 因此，一些理论家认为，WMAP 所观测到的宇宙的加速膨胀，并不是真空能和宇宙常量相互抵消后的综合效果，而是另有原因. 如果认为观测到的斥性引力不是来自真空，则它只能来自某种未知的、性质怪异的物质. 例如，Quintessence(精质，直译为第五元素)模型假定其行为宛如负压理想气体.

鉴于对近年观测结果的这些解释所涉及的不仅仅是真空的问题，人们就把此类问题改称为**暗能量**(dark energy)问题．把产生斥性引力的源称为暗能量，目的是与产生吸引性引力的暗物质相区别．

1998 年，科学家在利用超新星观测宇宙膨胀速度时发现，年龄越大、也就是光线旅行距离越远的超新星，它离开地球的速度比哈勃宇宙膨胀理论预测的慢，而年龄越小的超新星，离开速度要比预测的快[①]．这只有一种可能解释，宇宙正在加速膨胀，而不是先前所认为的减速膨胀．减速膨胀理论是广义相对论的自然结果，曾得到天体物理学家的普遍相信．这就是神秘的暗能量的首次登场，一种未知的力量抵抗着引力并把星系相互分开．

总之，支持暗能量的主要证据有两个：一个证据是对遥远的超新星所进行的观测表明，宇宙不仅在膨胀，而且在加速膨胀，加速膨胀要求压强为负．另一个证据来自于近年对微波背景辐射的研究．近期的观测表明，宇宙中的确存在着斥性引力的源，问题是它来自什么源．对于当前的两种认识(来自真空或来自 Quintessence 之类的经典场)，不管哪一种认识是对的，我们关于真空的概念和对于量子场论的认识，都面临着严峻的挑战，人们离正确答案还很远．

暗能量的本质决定着宇宙的命运．理论研究暗能量问题，并从观测确定其物态方程，是当今宇宙学研究的一个焦点．如果加速膨胀是由真空能或宇宙常量引起的，那么宇宙将永远延续这种加速膨胀的状态，宇宙中的物质和能量将变得越来越稀薄，新的结构不可能再形成．如果导致当今加速膨胀的暗能量是 Quintessence，那么宇宙的未来将由 Quintessence 场的动力学决定，有可能会永远加速膨胀下去，也有可能重新进入减速膨胀的状态，甚至可能收缩．

2006 年 9 月，美国天文学家宣布观测到了暗物质．在遥远的 30 亿光年之外有两个巨大的星系正在发生碰撞，美国 NASA 的钱德拉 X 射线望远镜和哈伯望远镜、欧洲南方天文台的超大望远镜和麦哲伦望远镜都在观察着这个壮丽的宇宙奇观．碰撞的能量非常巨大，以至使暗物质和明物质发生分离，这给了我们一个非常好的研究暗物质的机会．

据美国有关媒体 2006 年 12 月 1 日报道，美国斯坦福大学天体物理学家布拉斯－卡布瑞拉作为负责人的国际科研小组的科学家们表示，通过观测遥远的星系群，以及它们在运动时发出的光波等，他们目前已经找到了宇宙中存在暗物质的直接证据．暗物质无法被直接观测到，但它却能干扰星体发出

① 2007 年 2 月 10 日出版的《天体物理学月刊》，发表了美国约翰·霍普金斯大学天文学教授亚当·里斯等人通过哈勃望远镜取得的 23 颗不同年龄超新星的数据．

的光波或引力等，天文学家们可以明显地感觉到这种物质的存在.

2007 年 5 月 15 日美国宇航局报告说，一个天文学家小组利用哈勃太空望远镜，探测到了位于遥远星系团中呈环状分布的暗物质. 天文学家们称，这是迄今为止能证明暗物质存在的最强有力的证据. 天文学家介绍说，借助“引力透镜”效应探测到的这个奇特暗物质环位于距地球 50 亿光年的一个编号为“CL0024+17”的星系团中. 整个暗物质环的跨度约有 260 万光年.

“引力透镜”效应是指，遥远星系团的恒星发出的光在“路过”被观测区域时，被大质量物质吸引而发生扭曲的现象. 科学家借助这一效应来确定暗物质的存在. 科学家分析发现，在约 10 亿至 20 亿年前，有两个遥远的星系团发生碰撞，并融合为一，它们中的暗物质也因此在猛烈冲击下聚合并重新分布，在向外扩散的过程中由于引力作用形成了这个新的环状结构. 这是第一次探测到有着独特结构的暗物质，它的环状结构与星系团内部星系以及热气体的结构截然不同. 这将有助于天文学家分析暗物质与普通物质的区别，理解引力作用是如何影响暗物质的.

参考文献

[1] 陆埮. 宇宙：物理学的最大研究对象. 长沙：湖南教育出版社，1994
[2] 陆埮. 宇宙幼年的照片——2006 年度诺贝尔物理学奖. 物理，2007，36(3)：185
[3] 俞允强. 关于宇宙中的暗能量. 物理通报，2006(10)：1
[4] 章德海. 宇宙微波背景辐射. 物理，2005，34(5)：341
[5] 范祖辉. 微波背景辐射的各向异性、偏振及宇宙电离的历史. 物理，2005，34(4)：240
[6] [美]引力、宇宙学和宇宙线物理学专门小组. 引力、宇宙学和宇宙线物理学. 北京：科学出版社，1994
[7] [英]史蒂芬·霍金. 时间简史. 长沙：湖南科学技术出版社，1996
[8] 李宗伟，肖兴华. 普通天体物理学. 北京：高等教育出版社，1992

第三章　非线性科学的基本概念

§3－1　非线性科学的研究对象

经典的自然科学从它一产生，就接受了这样一个事实或公理：整体和部分之间是简单的加和关系，也就是说，叠加原理是一个普适性的定理．当我们用数学公式来表达研究对象之间的定量关系时，一开始就毫不犹豫地用线性关系来表达，即两个量之间是成正比那样的线性关系．例如，牛顿力学的基本方程是$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$，刻画电磁场变化的麦克斯韦方程组是线性的偏微分方程组，相对论对牛顿力学的改造是线性的，量子力学的薛定谔方程也是线性的等．

然而，世界在本质上却是非线性的．从整体和局部的关系来看，整体的各部分除了单纯的加和关系外，还存在着极其重要的相干关系，它体现了自然界的本质．从另一方面来看，线性的方法对自然界的理解往往是可逆的，例如经典力学就是对可逆过程的刻画；但是，自然界中一切与热现象有关的实际宏观过程却都是不可逆的，高能粒子的产生和湮没也是不可逆的．

自然现象遵循着不依赖于人类意志的客观规律．然而，数理科学中却有着两套反映自然规律的体系——确定论描述和概率论描述．在这两套描述体系的发展过程中，各有一个典型的问题对于新的概念和方法起着试金石的作用．早先，人们一般认为由伽利略和牛顿所创立的经典力学是确定论和可逆性描述的典范，其试金石是天体力学．这一发展过程的各个阶段，构成了现代数理科学的坚实的知识基础．另一方面，早在 1903 年法国数学家庞加莱(J.H.Poincaré)就认识到，一个系统的状态中的任意小的不确定因素可能会逐渐增大，使未来的状态成为不可预测的．概率论的试金石是布朗运动，1905 年爱因斯坦引用随机过程的概念成功地预言了布朗运动的基本特性．量子力学和相对论的创立，使人们认识到客观世界是复杂的，自然界中除了牛顿力学原来所支配的确定论过程之外，还存在着大量的随机过程．总之，一系列的发展表明，概率论同样是深入研究自然规律，特别是研究复杂系统行为的必要的知识基础．这两套描述体系的发展有着诸多并行之处，而在认识论基础上却存在着深刻的对立．

数学和力学早就有一批可以精确求解的非线性方程，物理学也曾经严格地解决过少数非平庸的模型．数学中微分方程定性理论与无线电技术所需要的非线性线路理论的结合，引起了“非线性振动理论”这一分支的发展．然

而，非线性仍被人们看成是个难以逾越的课题，人们对每一个具体问题似乎都要求发明某种特殊的算法和技巧．当时人们还没有悟出这些问题的内在联系和普遍启示．

20 世纪 60 年代中期，事情从非线性现象的两个极端情况同时发生了变化．一方面，描述浅水波运动的一个偏微分方程的数值计算，揭示了方程的解具有出奇的稳定和保守性质，这启发人们找到了求解一大类非线性偏微分方程的普遍途径，扩展了分析力学中原有的可积性概念．另一方面，在不可积的极端，揭示了在保守系统中随机运动的普遍性，而在耗散系统中则发现了一批奇怪吸引子和混沌运动的实例．混沌动力学的发展表明，确定论与概率论描述之间的界限并不是不可逾越的．对初值细微变化的敏感，使得确定论系统的长时间行为必须借助概率论方法描述．

这些研究迅速融成一片，引发了人们对复杂性问题的研究，逐渐认识到非线性因素是这类复杂性问题的集中表现．随后，计算机技术以及数学和统计物理学的发展，使得对于非线性的研究正在从范例的研究走向一个以探索复杂性为目标的新学科——非线性科学．例如，从随机与结构共存的湍流图像，到自然界中各种图样花纹的选择与生长，以及生物形态的发生过程，都开始展现出其内在的规律性．如果说混沌现象主要是非线性系统的时间演化行为，那么对于这些复杂系统，我们所要研究的是非线性地耦合到一起的大量单元或子系统的空间组织或时空过程．标度变换下的不变性、分形几何学和重正化群技术，在这里都起着重要的作用．

当代科学技术发展的重要特征之一是，在几乎所有的领域中都发现了非线性现象．非线性科学正在成为跨学科的研究前沿，它只研究各门学科中有关非线性的共性问题，特别是那些无法从线性模型稍加修正就可以解决的问题，以及它自身理论发展所需要的概念和方法．换言之，非线性科学的目标是揭示各种非线性现象的共性，发展处理它们的普适方法．

近期非线性科学研究的主要内容有以下几个方面：非线性映射的宏观特性、混沌与分形、动力学系统的时间反演问题、自组织与耗散结构、随机非线性微分方程、湍流、神经网络系统、孤立子与拟序结构、复杂性探索等．一般认为，混沌、分形和孤立波是非线性科学中不可缺少的组成部分，而且它们三者是彼此联系着的．当一个系统或事物里有可调的恒定参量时，参量的不同会引起系统长期动态发生根本性的变化，这是分岔理论所关心的问题；当参量的变化跨越某些临界值(称为分岔点)时，系统将有根本性的转变，例如孤立波的失稳、一种分形结构的改变、混沌过程变成周期振荡等．如果在一个系统或事物的演化中，从时间过程看有混沌，而在空间分布上又有变化着的分形图形，就应把时空联系起来研究图形的动力学．

§3-2 混　　沌

一　混沌现象

混沌一词通常是指宇宙形成之前模糊不清的景象或状态，其英文原词“chaos”系指混乱、无序的状态，在科学技术领域中常用以表示无规运动．实际上，奔腾的小溪、缭绕的轻烟、心脏的跳动、昆虫的繁衍等变化无常而又错落有致的现象，都包含有混沌运动；正常人的脑电图曲线代表了典型的混沌现象．混沌是普遍存在的复杂的运动形式．

在自然界中，人们常会遇到像钟摆周期性振动那样的规则运动，人们也常会遇到像布朗运动那样的带有随机性的无规运动．对于这两类运动的研究，通常分别借助于确定论方法和概率论方法．

早先人们认为，对于一个能够用确定论的方法描述的系统，只要初始条件给定，系统未来的运动状态也就完全确定了；初始条件的细微变化，只能使运动状态产生微小的改变．这就是说，用确定论方法描述的运动都属于规则运动．

然而，20 世纪 60 年代以来人们却发现：即使对于典型的可用确定论方法描述的系统来说，只要该系统稍微复杂一些(通常是指含有非线性因素)，在一定的条件下也会产生非周期性的、表面上看来很混乱的无规运动．这种来自可用确定论方法描述的系统中的无规运动，称为**混沌**或**内禀随机性**(intrinsic stochasticity)．研究表明，混沌现象存在于绝大多数非线性系统中．

混沌运动的最基本特点是不可预言性，即这种运动对初始条件特别敏感．用专门术语来说，初始条件的微小变化也会引起轨道迅速分开，而且是指数分离．由于确定初始条件的任何数据都会有误差，据此对混沌现象所做出的长期预言必然是不准确的．美国气象学家洛伦茨(E.N.Lorenz)在一次讲演中形象地说：“一只蝴蝶在巴西煽动翅膀，可能会在得克萨斯引起一场龙卷风”，通常称此为**蝴蝶效应**(butterfly effect)．混沌运动的不可预言性表明，即使在牛顿力学中确定论也是靠不住的，这对人们的自然观和科学观是一个重大的冲击．

二　非线性映射的宏观特性

(1) 一维非线性映射

在混沌现象研究中起重要作用的是一维非线性映射方程

$$x_{n+1} = f(a, x_n), \tag{3.1}$$

其中 a 为控制参量．恰当地选取 a 值，可以使 x_n 的每一个值**映射**(mapping)为 x_{n+1} 的一个值，且 x_{n+1} 与 x_n 的取值可限制在一定的范围内．在这类映射中，最有典型意义的模型是**逻辑斯谛映射**(logistic map)或**虫口模型**(insect-population model)，其映射方程为

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)\,, \tag{3.2}$$

其中 λ 是与虫口增长率有关的控制参量．这里设 x 在 [0, 1] 范围内变化，且 $0 \leqslant \lambda \leqslant 4$．上述非线性迭代方程表明，第 $n+1$ 代的虫口数除了正比于第 n 代虫口数的项以外，还要减去因食物有限及接触传染导致的昆虫死亡数．式(3.2)还可变换为如下的抛物线迭代方程的形式：

$$Z_{n+1} = C - Z_n^2\,, \tag{3.3}$$

其中　$Z_n = \lambda(x_n - \frac{1}{2})$，　　$C = \frac{1}{4}\lambda(\lambda - 2)$．

1976 年，美国生物学家梅(R.May)在对季节性繁殖的昆虫的年虫口的模拟研究中给出了虫口模型(如果没有非线性项，这就是马尔萨斯方程)，首次揭示了通过倍周期分岔达到混沌这一途径．1978 年，美国物理学家费根鲍姆(M.J.Feigenbaum)重新对虫口模型进行计算机数值实验时，发现了所谓的费根鲍姆常数；美国数学家芒德布罗(B.B.Mandelbrot)用分形几何来描述一大类复杂无规则的几何对象，推进了混沌理论的研究．

(2) 不动点和稳定性

若在式(3.2)中取 $x_0 = 0$，则以后所有的 $x_n\,(n = 1,2,3,\cdots)$ 都将是 0，该点称为式(3.2)的一个**不动点**(fixed point)，它相应于力学中的一个平衡态．一般而言，如果对式 $x_{n+1} = f(x_n)$ 取 $x = \xi$ 可以使其满足 $\xi = f(\xi)$，则 ξ 就是一个不动点．若用 $f'(\xi)$ 表示在 $x = \xi$ 处的 $\mathrm{d}f(x)/\mathrm{d}x$ 值，则当 $|f'(\xi)| < 1$ 时该不动点 ξ 是稳定的，而当 $|f'(\xi)| > 1$ 时该不动点 ξ 是不稳定的，一个不稳定的不动点在物理上或计算实验上都难以观察到．

一般情况下运动将趋于稳定的解．如图 3－1 所示，对于虫口模型式(3.2)，当 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 时，$x_\infty \to 0$；而当 $1 < \lambda \leqslant 3$ 时，$x_\infty \to 1 - 1/\lambda$．当 $\lambda = 2.4$ 时，逐次迭代由图 3－2 中的一系列竖线和横线来实现，不动点 $\xi = 7/12$ 是稳定的．换言之，当 $1 < \lambda \leqslant 3$ 时，不管初始 x_0 取何值，迭代结果的归宿都是同一个确定值，

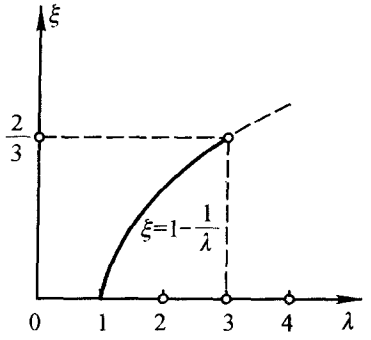


图 3－1　不动点

即周期为 1 的一个不动点．该确定值与参量 λ 有关，与 λ 值存在一一对应的关系．这种周期行为可想象成用式(3.2)表示的每年的虫口数都相同．

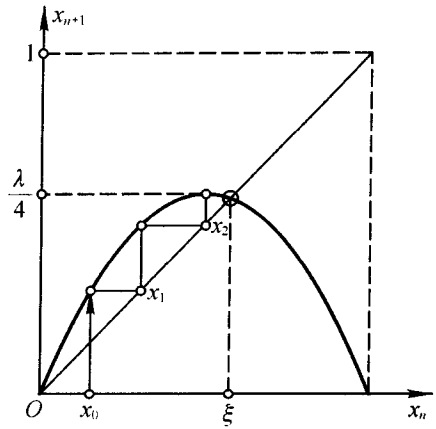


图 3－2　$x_{n+1}=2.4x_n(1-x_n)$

(3) 周期解和倍周期分岔

当 $\lambda = 3.2$ 时，式(3.2)有两个不稳定的不动点 0 和 0.6875．只要初值 x_0 稍微偏离这两个值，迭代多次后就会按照图 3－3(a)所示的“方块”周期性地循环，即 x 在 0.5130 和 0.7995 两个值之间周期性地跳跃，而这两个值就是方程 $x_{n+2} = x_n$ (且 $x_{n+1} \neq x_n$) 的根，这相当于虫口数以两年为周期，如图 3－3(b)所示．可以证明，在 $3 < \lambda \leqslant 1+\sqrt{6} = 3.449$ 范围内，周期 2 解是稳定的．由图 3－2 与图 3－3 可见，由于控制参数 λ 的变化，从以“一年”为周期变为以“两年”为周期，称为**周期加倍**或**倍周期分岔**(period doubling bifurcation)．

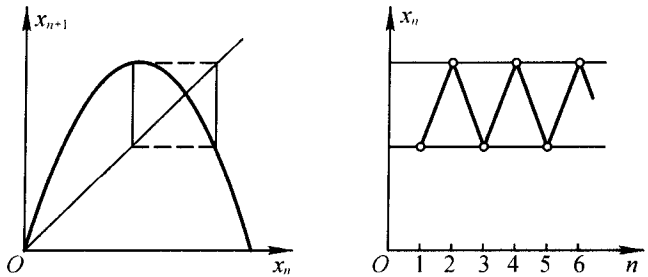


图 3－3　2 倍周期

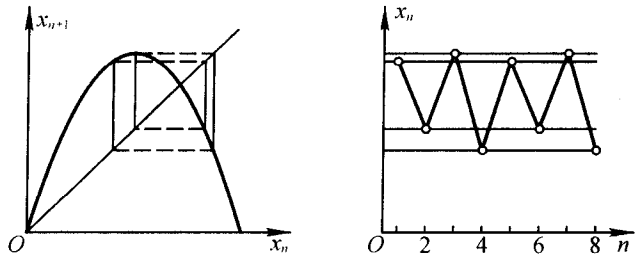


图 3－4　4 倍周期

当 $\lambda > 3.449$ 时，周期 2 的解失稳，迭代过程沿图 3－4(a)中的两个“正方形”周期性循环，即 x_n 在 $x_{n+4} = x_n$ 的根所决定的 4 个值之间周期性跳跃，称为 4 倍周期，如图 3－4(b)所示．与此类似，我们可以推论，当控制参数 $\lambda > 3.544$ 时，周期 4 的解开始失稳，并出现周期 8 的解等等．

如图 3－5 所示，上述倍周期分岔过程没有限制，但相应的控制参数 λ 值却有一个极限，即

$$\lambda_\infty = 3.569\ 945\ 672\cdots \tag{3.4}$$

当 $\lambda = \lambda_\infty$ 时，系统的定常解是周期为 2^∞ 的解，即一个非周期解．在控制参数 $\lambda = \lambda_\infty$ 到 $\lambda = 4$ 之间，周期变为 ∞，最后的归宿可取无穷多个各种不同的值，即系统中将出现混沌现象．

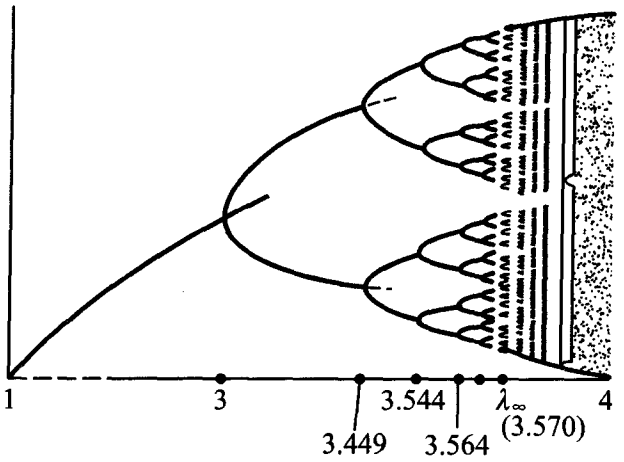


图 3－5　倍周期分岔(未按比例画)

在上述倍周期分岔过程中，如果我们令 $\lambda_1 = 3$ 代表 1 分为 2 的分岔值，$\lambda_2 = 3.449$ 代表 2 分为 4 的分岔值…… λ_m 代表 m 分为 $2m$ 的分岔值，则可以证明其间距之比有一个确定的极限值，即

$$\delta = \lim_{m\to\infty} \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_{m+1} - \lambda_m} = 4.669\ 201\ 660\ 9\cdots, \tag{3.5}$$

称为**费根鲍姆数**(Feigenbaum number)．如图 3－5 所示，如果我们考察分岔后的 x_m 值与 $x=1/2$ 之间的差值 d_m，则有

$$\alpha = -\lim_{m\to\infty} \left(\frac{d_m}{d_{m+1}}\right) = 2.502\ 907\ 875\cdots, \tag{3.6}$$

称为**标度变换因子**．后来，人们用实验证明了上述分岔规律，并且证实了以上两个常数的普适性．

如图 3－5 所示的倍周期分岔和混沌的分布方式，并不是 $y=\lambda x(1-x)$ 这个非线性函数或式(3.2)所特有的．许多其他非线性迭代，甚至非线性的微分方程，都给出了类似的图像．对于不同的非线性方程，尽管参数 λ 的具体取值不同，但它们趋近 λ_∞ 的方式是一致的，都是按几何级数收敛，即

$$\lambda_n=\lambda_\infty-\frac{常数}{\delta^n}. \tag{3.7}$$

这里出现的临界指数 δ 就是费根鲍姆数．

与连续相变类似，非线性迭代和非线性方程也有普适类，其中一大类的临界指数为 $\delta=4.669\,20\cdots$，另一大类的临界指数为 $\delta=8.7210\cdots$．

混沌是确定论系统内禀随机性的表现，它有自己的“秩序”．如上所述，混沌的分岔点的收敛速率是常数，即费根鲍姆数；而且，在混沌区中有周期窗口，把它放大以后会得到与原图相似的模样……如此继续，可以得到无穷嵌套的自相似结构，井然有章法．这种局部与整体相似的特性，称为**自相似性**(self-simiarity)．频谱分析表明，混沌的频谱是有宽峰背景的尖峰．与此不同，噪声的频谱是和频率轴平行的线，表示各种频率成分都有相同的“强度”，因此噪声才是真正的混乱．

(4) 对初值的敏感性

由图 3－5 可见，在 $\lambda<\lambda_\infty$ 的情况下，迭代方程解的最后归宿总是周期性的、确定性的和可预测的，与初始值 x_0 无关．一旦控制参数 λ 的取值介于 λ_∞ 和 4 之间，情况将发生根本性的变化．

当 $\lambda=4$ 时，由表 3－1 可以看到演化过程对初值的敏感性达到了何种程度．尽管表 3－1 中三个初值之差非常小，然而经过 50 次迭代后所得结果彼此之间就相差很大了．换言之，这三个初值的差别是如此之小，以致在物理上无法对它们加以分辨，只能视之为“同一”初值，其结果却是：在前 10 步迭代过程中它们有几乎相同的演化规律，即演化还是可预测的；但是在 50 步迭代之后，由这三个“同一”初值却产生了截然不同的结果，以致似乎在演化规律方面出现了随机性，这就是我们通过对虫口模型的研究所看到的诱发混沌现象的普遍机制．

混沌现象不同于通常的混乱和无规律的现象．混沌现象产生的原因是由于方程的非线性导致在一定条件下出现对初值的敏感性，以及人们对初值的认识所带来的误差．既然它是由于对初值的敏感性产生的，因而需要经过足够长的时间才会显现出来，即系统的行为在短期内是可预测的，从长期来看是不可预测的．所以，混沌现象虽然貌似随机现象，但并非真正的随机现象，因为真正的随机现象即使在短期内也是不可预测的．

表 3－1　$x \to 4x(1-x)$ 对初值的敏感依赖性

n	由 $x_{n+1}=4x_n(1-x_n)$ 确定的 x_n		
0	$x_0=0.1$	$x_0=0.100\,000\,1$	$x_0=0.100\,000\,01$
1	0.36	0.360 000 032 0	0.360 000 003 2
2	0.921 6	0.921 600 358 4	0.921 600 035 8
3	0.289 013 76	0.289 012 551 2	0.289 013 639 1
…	…	…	…
10	0.147 836 559 9	0.147 715 428 1	0.147 824 444 9
…	…	…	…
50	0.277 569 081 0	0.973 249 588 2	0.435 057 399 7
51	0.802 094 386 2	0.104 139 309 1	0.983 129 834 6
52	0.634 955 927 4	0.373 177 253 6	0.066 342 251 5
…	…	…	…

非线性系统从非混沌到混沌态的演化过程有多种形式，上述倍周期分岔过程就是其中比较典型的一类．事实上，对于具有倍周期分岔演化过程的非线性系统，当它进入混沌状态之后，在控制参数的某个范围所构成的混沌区内，并不是每一个控制参数对应的都是混沌态．在控制参数的许多小区间内，可能对应着周期性的、确定性的状态，形成一个个的周期窗口．在周期窗口附近，系统状态变量的变化表现为时而是周期性的，时而又是混乱的，即随机地在两者之间来回跳跃，称为**阵发混沌**(intermittency chaos)．

三　洛伦茨方程和奇怪吸引子

通过对虫口模型的分析我们已经看到，在确定性系统中出现了不规则的、非周期的、错综复杂的、具有自相似结构的非线性现象．然而，上述迭代过程只表达了式(3.2)的离散时间演化过程(若令 n 为时间 t_n，有 $\Delta t=1$)，人们更关心的却是由非线性微分方程描述的动态过程的演化特性．

热对流是一种普遍的物理现象．若在一层流体的垂直方向上有温度差 ΔT，则在该方向上不仅存在热传导，而且会产生热对流．当温度差 ΔT 增大时，流体中会形成类似卷筒的对流元胞，热流体在中间上升(或下降)而冷流体在两边下降(或上升)．随着温度差 ΔT 的进一步增大，对流元胞变得不稳定，开始时沿元胞脊会出现正弦式波动，继而正弦式波动会出现分谐，接着这种倍周期现象还会不断发生，最后对流转变成湍流，形成混沌状态．

1963 年，洛伦茨(E.N.Lorenz)以无限平板间流体热对流运动的简化模型为基础，将原来十分复杂的方程组简化为只包含三个关键变量 x、y 和 z 的方程组：

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-\sigma x+\sigma y,\\ \dot{y}&=rx-y-xz,\\ \dot{z}&=-bz+xy,\end{aligned}\tag{3.8}$$

其中 σ 和 b 是常数，r 是表征温度差 ΔT 的控制参数．洛伦茨方程中 rx 项是驱动力的反映，它总是要使系统离开原有的状态；$-\sigma x$、$-y$ 和 $-bz$ 是耗散力的反映，它们总是要使系统保持整体结构，力图使状态不要演化得太远；xy 和 xz 是非线性项，它们使状态具有几何和拓扑上的多样性．如果我们在含有这三种因素的洛伦茨方程中，设定常数 σ 和 b，则随着标志驱动力的控制参数 r 的增加，就会出现形态的不断分岔．洛伦茨方程从物理上描述了由于浮力引起流体从对流到湍流的转换．

首先，令式(3.8)的右边等于零，可得三个定常状态：

$$\begin{aligned}&O:\quad (x,y,z)=(0,0,0);\\ &A_{1,2}:\quad (x,y,z)=(\pm\sqrt{b(r-1)},\pm\sqrt{b(r-1)},r-1).\end{aligned}\tag{3.9}$$

如果取 $\sigma=10$ 和 $b=8/3$，则当 $0<r<1$ 时，定常态 A_1 和 A_2 在实数空间并不存在，只有平衡态 $O(0,0,0)$ 是方程的一个稳定的结点，在 $t\to+\infty$ 时全部轨线趋于点 O，在物理上表示仅有热传导，不发生对流．分岔值 $r=1$ 对应于临界情况，这时的雷诺数 Re 等于临界雷诺数 Re^{c}，对流即将发生．

当 $1<r<24.06$ (该值只能用数值计算求出)时，系统有三个奇点，其中点 O 是不稳定的，A_1 和 A_2 是稳定的，系统的定常状态是对流．在 $t\to+\infty$ 时相点趋于 A_1 还是趋于 A_2 在物理上是无关紧要的．当 $24.06<r<24.74$ 时，系统的奇点 A_1 和 A_2 仍然是稳定的，系统的定常态或者是定常的对流，或者是混沌解．当 $r>24.74(=470/19)$ 时，所有定常状态都不稳定，驱动力和耗散力竞争的结果就只能是复杂的形态——混沌．

在控制参数 r 的上述变化过程中，出现了多种分岔类型，在某些 r 值范围内也有倍周期分岔序列．这里特别强调的是由洛伦茨方程的数值解所得到的**奇怪吸引子**(strange attractor)，如图 3－6 所示．运动轨迹由两个螺旋线组成，运动轨迹从一个螺旋线由外向内盘绕到奇点附近，然后随机地跃迁到另一螺旋线的外缘，围绕另一奇点继续向内盘绕，再突然跳回到原来的螺旋线的外缘……过程如此往复，但却没有任何周期性．这些不规则的轨迹永不重复，永不相交，但又集中在相空间中特定的区域．从这个区域附近的初始点

出发的轨迹都被吸引到这个区域，这是整体的稳定性．但这样的轨迹对初始条件又特别敏感，初始条件稍微差一点，轨迹就分道扬镳，这是局部不稳定性．一般而言，奇怪吸引子代表一大类混沌运动，许多耗散系统都有奇怪吸引子行为，例如脑电、气候演变和太阳射电爆发等都有相应的奇怪吸引子．

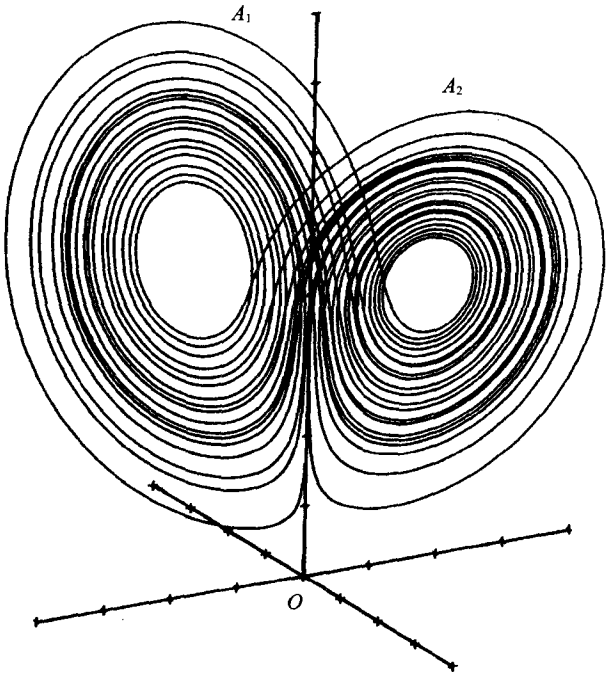


图 3－6　奇怪吸引子

一般而言，一个系统或方程在演化过程中，若相轨被吸引到相空间中一个特定的区域，则此区域称为**吸引子**(attractor)．例如，单摆受到阻力将最终静止下来，在相空间中相轨被吸引到一个点，这个点就是个吸引子．在无阻力的情况下单摆将作周期性运动，相空间中的相轨被吸引到一个封闭的环，这个环称为**极限环**(limit cycle)，它也是一个吸引子，相轨在这个环上循环往复代表单摆的周期运动．

实际上，无耗散系统也有混沌现象，混沌是普遍存在的，混沌理论已渗透到物理、化学、生物、生态和经济等各个领域．混沌理论和有关的奇怪吸引子理论对力学的意义在于，过去总是把牛顿力学和确定论联系起来，似乎只要初条件和受力情况确定，以后的运动就完全确定了．然而，现在人们认识到，由牛顿运动方程所确定的状态，可能由于方程具有内在随机性使其动态实际上不可预测，它具有某种统计的特征．

过去，分析力学着眼于建立一般系统的力学方程及其求解方法，或者当发现大多数方程无法积分时着手研究其解的各种性质．现在，混沌理论指出，高维非线性系统的方程不仅不能积分，而且其解可能对初值有敏感依赖性，因而要用类似于统计力学的观点去处理．在流体力学中，湍流的产生机理是百年难题，人们已开始用奇怪吸引子理论阐明湍流机理，为湍流研究开辟了一条新的思路．在非线性振动理论方面，由于非线性系统即使在周期性激励下也能出现随机运动，那么非线性系统在随机力的作用下就会出现更复杂的动态．

§3－3　分　　形

研究表明，时间结构的复杂性表现在混沌，而空间结构的复杂性表现在分形．分形是可以具有分数维的几何体．分形理论是研究混沌的重要理论工具，已渗透到许多学科．

一　分形理论的创立

数学家虽曾构想出一些奇异的东西，如充满平面的特殊曲线，处处连续而又处处不可微的特殊函数等，但当时他们并不相信自然界里真的存在这些“病态”的怪物．传统的物理学家也大都习惯于和光滑的规则形体打交道．20 世纪 70 年代，芒德布罗创造了 fractal[①](**分形**)这个单词来表征那些被传统的数学和物理学排除在外的、传统的欧几里得几何不能描述的、复杂无规的几何对象．具有分形的物体，称为**分形体**(fractal)．芒德布罗认为，看来貌似杂乱无章的东西，未必毫无自己的特征和内在规律．今天，分形理论已经发展成为一门描述自然界中许多不规则事物的规律性的科学．

到目前为止，科学家们还没有对分形下一个严格的确切的定义．在讨论分形问题时，我们往往只谈它有什么特征，需要满足些什么条件．分形最重要的一个特性是它具有自相似性．分形作为一个数学集，它的内部具有精细结构，即在所有比例尺度上其组成部分应包含整体，而且彼此是相似的．对于一些数学模型，例如康托尔集合和科赫曲线等，这种自相似性是严格的，称为有规分形；在自然界中存在的分形，它们的自相似性是近似的或者是统计意义上的，称为无规分形．

一个具有自相似特性的物体一定会满足标度不变性，或者说这类物体无特征长度．所谓的**标度不变性**(scaling invariance)是指在分形上任选一局部区

① 由拉丁文 fractus 转化而来的，原意是不规则的、分数的、支离破碎的物体．

域对它进行放大(或把测量尺变小)，这时原来看上去是光滑的部分又会呈现出原图的复杂性质．因此，对于分形来说，不论将其放大或缩小，它的形态、复杂程度和不规则性等各种特性均不会发生变化．不论从局部或整体上看，分形都是极其不规则的，一般不能用传统的几何语言来描述．对分形的描述，最主要的参量是它的分数维数，一般把分形理解为具有分数维数的几何体．

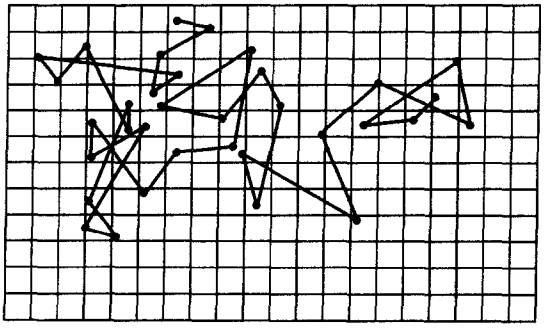


图 3－7　布朗运动

如图 3－7 所示的折线是在显微镜下观测时，每隔 30 s 记录下来的布朗微粒所在位置的连线．显然，这些点与点之间的线段并不是微粒的运动轨迹，微粒的真正轨迹是点与点之间的一条更加细微的折线．如将该折线的某个局部加以放大，则更细微的折线形状又将会显露出来，所得结果是一条与放大以前的折线大体相似的曲曲折折的线，这就是在标度变换下呈现出来的自相似现象．

另一个例子是考察某个国家的海岸线的长度．严格而言，所测得海岸线的长度是与所采用的**比例尺**、**刻度尺**或**标度**(scale)有关的．在比例尺较小的地图上，或用长的标尺测量，海岸线上许多小的曲折被拉直了，因而总的长度肯定要短些；随着比例尺的不断增大，或所用标尺长度的减小，一批批越来越小的海湾开始越来越多地显露了出来，据以测得的海岸线总长度也会越来越长．这种过程可以说是无穷无尽的，即海岸线在标度变换下具有无限嵌套的**自相似性**．

二　分形维数

描述分形的最主要的参量是**分形维数**(fractal dimension)，简称**分维**．在经典的欧几里得空间中，我们直观地知道要用长、宽、高来度量房间，而要用经度与纬度两个量来确定地球表面上的位置．因此，我们认为空间是三维的，平面或球面是二维的，直线或曲线是一维的，点是零维的．概括而言，要确定物体或几何图形中任意一点的位置，所需要的独立坐标的数目，称为该物体或几何图形的**欧几里得维数**(Euclidean dimension)，用 d 表示．

1919 年，德国数学家豪斯多夫(F.Hausdorff)从测量的角度引进了他的关于维数的定义．设有一条长度为 L 的线，若用一长度为 r 的“尺”作为单位

去量它，量度的结果是 N，我们就说这条线有 N“尺”，即

$$N(r)=\frac{L}{r}\propto r^{-1}. \tag{3.10}$$

同理，若用一面积为 r^2 的单位小方块来测量一块面积为 A 的平面，量度的结果 N 是与所用的单位小方块的大小有关的，即

$$N(r)=\frac{A}{r^2}\propto r^{-2}. \tag{3.11}$$

显然，“一块面积有多长？”这样一个问题是没有意义的，用长度为 r 的“尺”是不可能直接测量这块面积的大小的．因此，对于任何一个有确定维数的几何体，若用与它相同维数的物体作为单位去量度，则可得到一确定的数值 N；若用低于它维数的物体作为单位去量度，其结果为无穷大；若用高于它维数的物体作为单位去量度，其结果为零．

概括式(3.10)和式(3.11)，有

$$N(r)\propto r^{-D}\qquad 或\qquad D=\lim_{r\to 0}\frac{\ln N(r)}{\ln(1/r)}, \tag{3.12}$$

式中 D 称为**豪斯多夫维数**(Hausdorff dimension)，它可以是整数，也可以是分数．对于正常几何体，其豪斯多夫维数 D 与欧几里得维数 d 是一致的．我们通常把豪斯多夫维数是分数的物体称为分形体，有时也称 D 为分数维数或分维．所以，维数不是整数就成了分形的第二个特性．

式(3.12)是在假定物体的宏观尺度 L 保持不变而不断改变测量尺的大小 r 的条件下给出的．对于物理学中的某些生长问题，这时构成物体的小单元(如胶体凝聚时的分子等)的尺度 r 不变，但物体的宏观尺度 L 在不断地增大，因此有

$$N(L)\propto L^{D}\qquad 或\qquad D=\lim_{L\to\infty}\frac{\ln N(L)}{\ln L}. \tag{3.13}$$

显然，除了理想的数学模型外，对于实际的物体，上述公式中的 L 不可能趋于无穷大，r 也不可能趋于零．换言之，分形的自相似或标度不变性只在一定的范围内适用，通常取它的下边界到原子尺度，上边界到宏观实物．对一般物体来说，标度变换的范围可以达到好几个数量级．我们把标度不变性适用的空间称为**无标度空间**.

三　分维的计算

(1) 科赫曲线

三分法**科赫曲线**(Koch curve)的构成如图 3－8 所示．先把一条单位长的直线段等分成三段，去掉中间一段并用等边三角形的两条边来代替，称为一

个**生成元**(generators). 然后，再将每条直线按生成元进行代换，经无穷多次迭代后就呈现出一条有无穷多弯曲的科赫曲线. 用它可以模拟自然界中的海岸线或雪花的周边. 科赫曲线具有典型的分形特性，它的局部与整体相似(自相似)，且不存在典型的特征长度，它是一条连续的、处处不可微的、具有复杂结构的曲线.

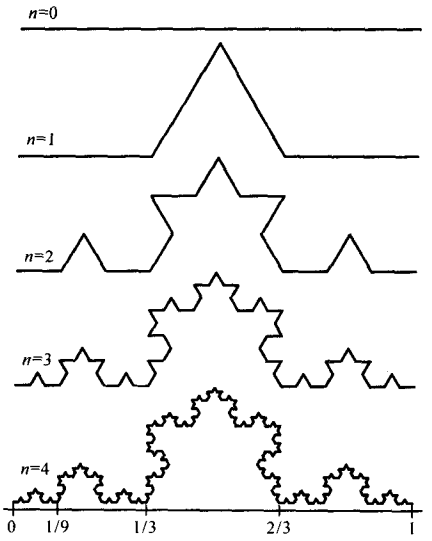


图 3－8　科赫曲线

根据式(3.13)，在三分法科赫曲线的生成过程中，迭代 k 次后有

$$r=(1/3)^k,$$

$$N(r)=4^k,$$

$$D=\frac{\ln 4^k}{\ln 3^k}=1.26. \tag{3.14}$$

这个非整数维数表明，在迭代次数趋于无穷大(即 $r\to 0$)时，科赫曲线的长度趋于无穷大，即

$$L(r)=rN(r)=r^{1-D}\to\infty,$$

这说明曲线长度的数值与测量尺的大小 r 有关. 因此，一条在平面上的科赫曲线，它的长度是无穷大，它的面积是零. 所以，经典的长度和面积都不能用来描述科赫曲线的大小，而 $D=1.26$ 恰好反映了它的不规则性和复杂程度. 从某种意义上说，分形维数的大小是物体不规则性的一种度量.

(2) 康托尔集

如图 3－9 所示，取一单位长度的线段，将其三等分后除去中间一段，留下左右两段；然后，再把剩下来的两段再各分成三段，除去各自的中间一段. 将此操作无限地重复下去，所得到的是无限多的点子分散在原来的直线段范围内，点与点之间永远也不会连接起来，而且点子的分布是疏密不均的，称为**康托尔集**(Cantor set)或**康托尔尘粉**.


图 3－9　康托尔集

为了计算康托尔集的分形维数，考虑到在第一次分割直线段时得到了 2

条线段，每条线段的长度为 1/3；在第二次分割时得到了 2^2 条线段，每条线段的长度为 $(1/3)^2$；在第 k 次分割时得到的线段数为 2^k，每条线段的长度为 $(1/3)^k$. 根据式(3.12)，有

$$D = \frac{\ln 2^k}{\ln 3^k} = 0.630\,9\,. \tag{3.15}$$

（3）谢尔平斯基镂垫

如图 3－10 所示的是**谢尔平斯基镂垫**(Sierpinski gasket)，它起始于一个黑色等边三角形. 第一步是把三角形的每一边长平分为二，再把平分点连接起来，构成四个小的等边三角形，然后去掉中间的一个小三角形. 照此方法，把留下的黑色三角形继续分割下去，一直到无穷次分割. 于是，在极限情况下，所剩下的黑色部分便微不可见了，而成为典型的分形曲线. 由此可见，谢尔平斯基镂垫实质上是康托尔集在二维空间中的一种广义的变体.

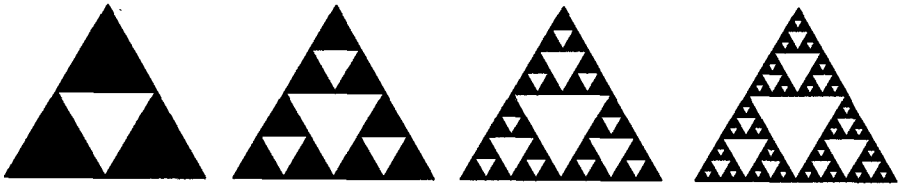


图 3－10　谢尔平斯基镂垫

在构造谢尔平斯基镂垫的过程中，黑色三角形的边长每次都是平分为 2，而剩下的是三个相同的等边的黑色小三角形. 因此，谢尔平斯基镂垫的分形维数为

$$D = \frac{\ln 3^k}{\ln 2^k} = 1.585\,. \tag{3.16}$$

（4）有规生长模型

在二维平面上考虑一个正在生长的物体，构成此物体的最小微粒的尺度为 a. 随着生长过程的进行，物体的宏观尺寸也不断地增大. 若生长在二维方形点阵上，在中心处放一种微粒，第一次迭代时在种子微粒的四个近邻各长出一个微粒构成一个集团，第二次迭代时在集团的四个顶角处生长出相似的集团，k 次迭代后就生长成一个分形图形，如图 3－11(a)所示. 设物体的宏观尺度为 L，在式(3.13)中代入 $L = 3^k$ 和 $N(L) = 5^k$ 可得

$$D = \frac{\ln 5^k}{\ln 3^k} = 1.465\,. \tag{3.17}$$

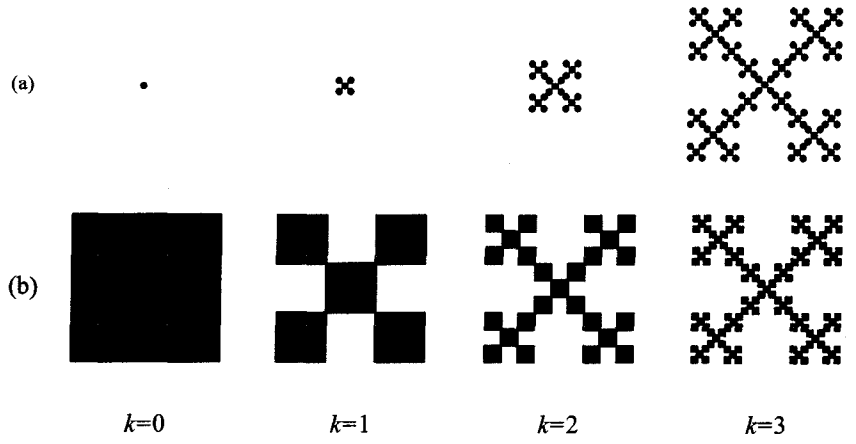


图 3－11　有规生长模型

我们也可以用另一种方法生产出类似的分形，如图 3-11(b)所示．将一块边长为 L 的正方形划分成 9 个相同的小正方形，然后除去各边中间的一块，即在 9 个小方块中保留 5 块作为一个生成元，依此操作就可生成这种分形．在这个分形中 L 是固定的，即测量小块边长 r 在不断地缩小，因此由式(3.12)可得

$$r=(\frac{1}{3})^k,\qquad N(r)=5^k,\qquad D=\frac{\ln 5^k}{\ln 3^k}=1.465.$$

四　分维的测定

对于规则的分形，由于它是严格的自相似分形，因此只要适当地用反映它自相似特征的量作为变化参量，就能够利用上述方法确切地计算出其分形维数的数值．然而，对于无规分形，它所具有的只是统计意义下的自相似性，因此用不同的近似方法进行计算往往会得到不同的分形维数．目前，人们只能用不同的名称把它们区别开来，这里介绍几种常用的测定分形维数的方法．

（1）用改变标尺来确定豪斯多夫维数 D

这种方法是用线段、正方形或圆、立方体或球等有特征长度的图形来近似地测量分形图形．例如，用长度为 r 的线段集合来测定不规则的海岸线，具体可用圆规来完成这一测量；这种方法是用一条每段长度为 r 的折线来代替待测的不规则曲线，该折线的线段总数记为 $N(r)$．根据式(3.12)，有

$$D=\lim_{r\to 0}\frac{\ln N(r)}{\ln(1/r)},$$

而该曲线的长度 L 为

$$L = rN(r) \propto r^{1-D}.$$

显然，所测的长度 L 是不确定的，它与所用标尺的大小有关．一般而言，所用的标尺越小，测得的长度就越大．用这种方法测得的维数，有时称为**圆规维数**(compasses dimension)．

（2）用测度关系确定容量维数 D_B

测度(measure)理论告诉我们，对于一个维数为 D 的待测物体，只能用“体积”为 ε^D 的几何体积作为单位对它进行测量，才能测量出一个有限的数值．当我们用半径为 ε 的 D 维小球去填充该物体时，若 $N(\varepsilon)$ 是所需小球的数目，则定义**容量维数** D_B (capacity dimenson)为

$$D_B = \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}. \tag{3.18}$$

这里的 ε 的大小是固定，这是该方法与改变标尺法的区别所在．

（3）点子分布的分形维数

一种方法是首先把空间分割成边长为 r 的大小相同的许多小立方体，然后计数覆盖某一形状所需的小立方体数目．如果所研究的分形位于平面上，则把平面分割成边长 r 的许多小方格．例如，可以用这种方法测量平面上点子分布的分形维数．对于无规则分布在平面上的点子，可以计数至少包括一个点子的方格数目，用 $N(r)$ 表示，于是当 r 变化时，有

$$D = \lim_{r\to 0}\frac{\ln N(r)}{\ln(1/r)}. \tag{3.19}$$

另一种方法是设想在空间有一半径为 r 的球，其中包括 $M(r)$个点子．若点子均匀分布在一条直线上，则有 $M(r) \propto r^1$；若点子均匀分布在一个平面上，则有 $M(r) \propto r^2$；若点子均匀分布在空间中，则有 $M(r) \propto r^3$．把这些关系推广到分形，则有

$$M(r) \propto r^D. \tag{3.20}$$

§3－4　非线性科学的一些研究方法

非线性科学正处在形成和发展的初期，它的研究内容既广泛又困难，单凭某一种方法解决这些跨越学科界线的交叉、边缘和前沿理论问题，显然是不可能的．在非线性问题的研究中，逐渐形成和正在发展着一些有效的方法，这里仅简要介绍其中的三种．

一 重正化群方法

重正化群(renormalization group)方法是威耳逊(K.G.Wilson, 1936—)在 20 世纪 70 年代初研究相变时提出来的，基本思想源于卡丹诺夫(L.P.Kadanoff)的标度概念．由于对连续相变理论所做出的重大贡献，威耳逊获得了 1982 年诺贝尔物理学奖．重正化群可分为“动量空间重正化群”和“实空间重正化群”两大类，这里我们仅扼要介绍后者．

重正化群方法是在改变物体的粗视化程度或物体的长度标尺时，观测物体中各物理量的变化规律．在物体发生连续相变的临界点处，关联长度变为无穷大，这时不管用多大的尺度测量仍然是无穷大．因此，物体不存在特征尺度，物体的特性具有尺度变换下的不变性——标度不变性，相变中的各种临界指数就是这种不变量．这时，物体的结构必然具有自相似性．我们可以利用标度不变性，求出临界点处的各种临界指数．当一个物理系统的控制参量——温度接近临界温度 T_c 时，关联长度 ξ 趋于发散，如果不断地变换观测尺度，就可以消除发散困难，精确地确定相变时的各种特性参量．

考虑一个点阵，其点阵常量为 a，与格点相应的某物理量为 P，当将尺度由 a 变为 $2a, 3a, \cdots$ 时，在物理上相当于把点阵模型改变为原子团模型，与原子团相应的物理量为 P_i，这就是标度变换．威耳逊假定，P_i 与 P 之间有非线性关系，即

$$P_i = T_{i+1}(P) \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots). \tag{3.21}$$

这就是说，存在变换元 T_i，使得

$$T_i \cdot T_j = T_{i+j}, \qquad T_1 = I. \tag{3.22}$$

在一般情况下，变换元 T_i 不存在逆变换 T_i^{-1}，则 $\{T_i\}$ 构成了一个半群——重正化群．

重正化群理论的一个重要定理是不动点定理．即如果极限

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P^* \tag{3.23}$$

存在，则有

$$P^* = T(P^*). \tag{3.24}$$

重正化群方法的基本步骤是把点阵模型归并为集团模型的粗粒平均和标度变换．在统计物理学的一个著名的理论模型——**伊辛模型**(Ising model)中，粗粒平均就是把一个 d 维自旋系统中的每 S^d 个自旋格点归并为一个集团自旋；粗粒平均之后，系统以集团自旋构成有效晶格，晶格常量扩大为原

来的 S 倍，相当于把量度长度的尺寸放大 S 倍，这就是重正化群方法中的标度变换概念．如图 3－12 所示，将 2^2 个自旋格点归并为一个集团自旋，给出了有效晶格．

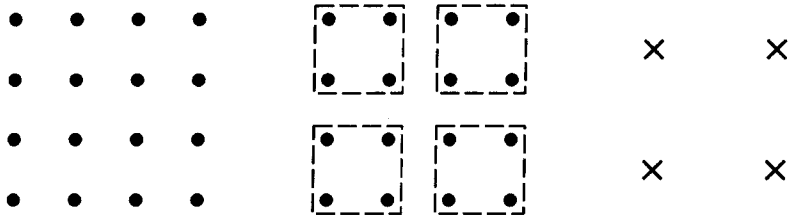


图 3－12　自旋格点的归并

在伊辛体系的相变中，重要的参量是最近邻自旋之间的耦合常量 J 与热力学温度 T 的比值，即

$$K=\frac{J}{kT}, \tag{3.25}$$

式中 k 为玻耳兹曼常量．对铁磁相变，从无序顺磁相到有序铁磁相的转变，实际上是相互作用能 J 与热运动能 kT 之间的竞争过程．所以，大的 K 值相应于有序的铁磁相，小的 K 值相应于无序的顺磁相，相变发生在其临界值 K_c．在伊辛模型中，格点 i 上的自旋 σ_i 有两个相反的取值方向，记为 $\sigma_i=\pm1$．考虑最近邻自旋的相互作用，则能量为

$$E(\sigma)=-J\sum_{i,j}\sigma_i\sigma_j\ . \tag{3.26}$$

当耦合常量 J 趋于临界值 J_c 时，关联长度 ξ 为

$$\xi(J)\propto(J-J_c)^{-\nu}, \tag{3.27}$$

式中 ν 为临界指数．经过一次粗粒平均后，产生有效晶格，其集团自旋之间的最近邻相互作用耦合常量用 J_1 表示，且

$$J_1=f(J)\ . \tag{3.28}$$

由于标度扩大了 S 倍，所以相应的有效关联长度缩短了 S 倍，因此有

$$\xi(J_1)=\xi[f(J)]=\xi(J)/S\ . \tag{3.29}$$

还可以进行新的一次归并，如此重复进行至第 n 次归并，则可得

$$J_n=f(J_{n-1}),\qquad \xi(J_n)=\xi(J_{n-1})/S\ . \tag{3.30}$$

当系统进入临界状态时，$J=J_c$，根据不动点定理[式(3.24)]，有

$$J_c=f(J_c), \tag{3.31}$$

即 J_c 为重正化变换的不动点．

根据式(3.27)和式(3.31)，有

$$\xi(J_{n-1}) \propto (J_{n-1} - J_c)^{-\nu}, \tag{3.32}$$

$$\xi(J_n) \propto (J_n - J_c)^{-\nu} = [f(J_{n-1}) - f(J_c)]^{-\nu}. \tag{3.33}$$

由以上两式，可得

$$\frac{\xi(J_n)}{\xi(J_{n-1})} = [\frac{f(J_{n-1}) - f(J_c)}{J_{n-1} - J_c}]^{-\nu}$$

$$= [f'(J_c)]^{-\nu} = \lambda^{-\nu}. \tag{3.34}$$

考虑到式(3.30)，有

$$\lambda^{-\nu} = 1/S, \qquad \text{即} \qquad \nu = \frac{\ln S}{\ln \lambda}. \tag{3.35}$$

二　实验数学方法

在非线性科学的形成过程中，实验数学方法起了关键的作用．奇怪吸引子的发现，分维复杂图形的制作，无穷嵌套的自相似结构，三体问题中的混沌轨迹……都与计算机的应用密切相关．对于绝大多数变系数、非线性、不规则几何等复杂问题，数学的解析方法几乎已无能为力．非线性微分方程的求解，它所描述的复杂现象及其演化过程和动态行为的研究，只能依靠计算机和实验数学方法．总之，实验数学方法是非线性科学中最重要的研究方法之一．

三　元胞自动机

生物个体的发育过程本质上是单细胞的自我复制过程．20 世纪 50 年代初，冯诺伊曼(Von Neumann)曾希望通过特定的程序在计算机上实现与此类似的过程．他提出了一个简单的模式，即把一长方形平面分成若干个网格，每一格点表示一个细胞或系统的基元，它们的状态赋值为 0 (空格)或 1 (实格)．在事先设定的规则下，细胞或基元的演化用网格中的空格与实格的变动来描述，该模型称为**元胞自动机**(cellular automaton)．

1970 年，康韦(J.H.Conway)编制了一个名为“生命”的游戏程序，由几条简单法则的组合，细胞或基元在网格中就能产生无法预测的延伸、变形和停止等复杂的模式，这种意想不到的奇妙结果吸引了一大批计算机科学家研究“生命”程序的特点，最后证明了只要给定适当的初始条件，“生命”模型就能模拟任何一种计算机．

20 世纪 80 年代，由于这类简单的模型能十分方便地复制出复杂的现象或动态演化过程中的吸引子、自组织和混沌现象，物理学家和计算机科学家

对元胞自动机模型的兴趣大增．同时，元胞自动机模拟神经系统功能结构的发育过程取得了可喜的进展，还有人建议用它来模拟湍流．

参考文献

[1] 赵凯华．什么是非线性科学．烟台会议报告，1997
[2] 郝柏林．从抛物线谈起：混沌动力学引论．上海：上海科技教育出版社，1993
[3] 刘式达等．自然科学中的混沌和分形．北京：北京大学出版社，2003
[4] 卓崇培主编．非线性物理学．天津：天津科学技术出版社，1996
[5] 赵松年．非线性科学：它的内容、方法和意义．北京：科学出版社，1994
[6] 郝柏林．混沌现象．见：蔡枢，吴铭磊．大学物理：当代物理前沿专题部分．北京：高等教育出版社，1996. 135～150
[7] 刘式达．从蝴蝶效应谈起．长沙：湖南教育出版社，1994
[8] 刘式达，刘式适．孤波和湍流．上海：上海教育出版社，1994
[9] 林鸿溢，李映雪．分形论：奇异性探索．北京：北京理工大学出版社，1992
[10] 李福利．复杂现象与未来技术．见：马俊如，余翔林．高技术研究前沿展望．合肥：中国科学技术大学出版社，1995
[11] 席德勋．非线性物理理学．南京：南京大学出版社，2000
[12] 周凌云等．非线性物理理论及应用．北京：科学出版社，2000
[13] 张济忠．分形．北京：清华大学出版社，1995
[14] 张建树．混沌生物学．西安：陕西科学技术出版社，1998
[15] 张志三．漫谈分形．长沙：湖南教育出版社，1993
[16] 张三慧．混沌：决定性的混乱．物理通报，1995(7)：31

第四章　生命科学中的物理问题

§4－1　生命科学与物理学

一　近代生命科学的发展

生命是一种极其复杂的运动形式．即使是像细菌那样最简单的生物，也都具有高度有序和复杂的结构．至今，有科学记载的生物已有 170 多万种，最保守的估计全球也有 500～1000 万种生物．生物的功能，则更是多姿多彩的．生命科学的研究对象就是这些形形色色的生物体及其复杂的生命活动的规律．多少世纪以来，生命科学研究的主体一直是观察和认识生命世界的多样性．

20 世纪数理科学广泛而深刻地渗入生命科学的结果，全面地改变了生命科学以描述性为主的面貌，逐步发展成为一门实验性和分析性的学科，开辟了在分子水平上研究生命现象的新学科——分子生物学．分子生物学的兴起首先建立在对组成生物体的基本物质——蛋白质和核酸的认识上．20 世纪 50 年代，DNA 双螺旋结构的确定和用 X 射线衍射方法对蛋白质晶体空间结构的测定，使生物学研究进入了分子水平，奠定了分子生物学的基础．分子生物学的研究涉及了生命现象最核心最本质的内容，使生命科学得以从本质上去探讨生命活动的规律，并把各个层次的生命活动有机地联系了起来，从而在新的高度上揭示出生命的奥秘．分子生物学的发展揭示了生命本质的高度一致性，这是人类认识自然和认识自己的极大飞跃．

分子生物学渗入生命科学每一分支的结果，全面推动了生命科学的发展．作为生命基本单位的细胞以及作为生命活动最高形式的神经活动，是现代生物学研究最活跃的领域．今天，细胞生物学和神经生物学由于采用了分子生物学的新思想和新手段而获得了新的生命力．

即使是最古老的生物分类学和进化论，也因分享了分子生物学的成果而焕发了青春．人们发现，不同生物体中担负相同功能的蛋白质和核酸在序列上的相似性，与它们在亲缘关系上的远近有直接的联系．由于生物体适应环境的能力及其形态和生理受它们所生活的环境影响很大，而蛋白质和核酸序列则反映了不同生物体进化演变中更为根本的性质，较少受环境影响，因此更为可靠．

1973 年科恩(S.N.Cohen)和博耶(H.Boyer)重组 DNA 获得成功，打破了

传统的种间遗传物质不能交换的重重壁垒，开创了**基因工程**或**遗传工程**．以此为基础，生物技术作为前途远大的高技术产业在全世界范围内兴起，生物工程逐渐发展成为现代化的大工业．与此同时，它还极大地推动了医学和农业应用科学的发展，在这些领域中正展示出广阔的应用前景．

二　生命科学与物理学的交叉

物理学研究物质结构和运动的普遍规律，这些规律可以由少量关键实验证实．物理理论从数学框架到实验检验两方面受到严格的制约．观测与理论的矛盾，通常表明理论还不够普遍，预示着理论的突破，而新的理论总是把旧理论的正确部分作为特例包含在内．在当前的认识水平上，物理定律被认为是放之宇宙而皆准的，适用于它的过去和未来．然而，生命科学研究的对象却极为特殊，迄今还没有发现任何其他天体上有类似地球上的生命现象．就宇宙尺度而言，这个研究对象只存在于有限的历史时期和微乎其微的地球“生物圈”的有限空间里，存在于狭窄的温度范围内．为这种特殊现象建立理论是更困难的，但其内容却可能极其丰富．而且，生命科学的理论和规律往往有例外，它们既不能简单地还原成物理法则，也不会违反基本的物理规律．生命是复杂的综合过程，一方面只有阐明了生命过程中的物理和化学规律，才能揭示生命的本质；另一方面生命系统的整体属性还与其组成部分在系统中的特定地位和相互关系，即与生物体的有序结构密切相关，因此还必须把生物体当做一个整体来研究．

今天，生命科学家的任务是运用人类所有的对自然的知识，运用人类已经掌握的全部技术，来研究生命活动．科学作为整体会极大地超过它的各部分之和．新的学科正在从物理学与数学、化学、生命科学、地学和材料科学的交叉中产生．物理学已用其全新的方式对这些学科做出贡献，反过来又从这些学科的发展中获益．生命科学中的物理学或生物物理学的内容，包含着在物理学与生命科学交界上的物理学的应用以及物理学的基本课题．有时人们还把生命科学中的物理学与传统的生物物理学区分开来，这是为了强调后者是用物理学手段所揭示的生物学，而前者是突出生命科学研究所产生的和将要产生的物理学．

物理科学和生命科学的相互作用由来已久，历史上几乎是同时诞生了电学(C.A.de Coulomb, 1785)与电生理学(L.Galvani, 1791)．生物学为物理学启示了能量守恒定律，而物理学在推动近代生命科学发展中的贡献主要在两个方面，一是为生命科学的研究提供了从显微镜、X 射线、示踪原子、电子和中子衍射、核磁共振、同步辐射和扫描隧道显微镜等各种现代化的实验手段；二是为生命科学提供了重要的理论概念、原理和方法．特别是，基础生物科

学的挑战激励了理论物理的新应用，物理学已经进展到开始能够在分子水平和多体组织水平两个层次上对付基本生物科学所特有的高度复杂性了.

例如，细胞和有机体在各种物理条件限制下的进化过程，必然包含或反映了物理学. 研究重点从细胞的生化组分到细胞的信息存储和处理的转移，开创了把结构和功能定量地联系起来的阶段，这对分子生物学的革命具有根本意义. 这个革命正在行为生物学中发生，包括研究感觉传感作用：细胞、细胞器和有机体是怎样接受和解释源于外部环境的信号并随之做相应的动作的. 即使是生活在肠内的最简单的细菌，对其所在的化学环境的变化也出奇地敏感，它们能以目标明确的方式游来游去. 更高级的有机体对刺激的反应面更广，包括化学、热、力、光、电和磁等；它们所使用的器件具有接近于物理极限的灵敏度. 要理解这些器件，人们必须了解生物学和物理学两方面的知识，既要在细胞水平上考虑感觉传感作用，又要从系统设计上把握. 例如，有人研究了内耳毛发细胞探测机械应变的过程；有人研究了蝙蝠回声定位的声音系统. 开始人们对弱电鱼并不太了解，后来集中了相当的注意力研究电磁场可能对生命系统产生的影响，人们发现这些动物在产生、接收和翻译电信号等方面简直称得上是专家. 生命现象中最复杂的是人脑，它具有高连通网络构成的简单神经系统所不具备的智能. 我们的问题是，人脑是怎样计算的？脑的组织和基本的分子机制是怎样的？能否建立简单的神经网络动力学的物理模型，从而找出这个问题的关键所在？神经生物学的某些特殊细节会是重要的吗？

一般蛋白质的复杂性以及某些特殊蛋白质的功能问题也是一个热点问题. 植物体用来将太阳能转变为化学能的蛋白质，是怎样将能量从捕光色素转移到反应中心的？这些中心是怎样进行电子转移的？有人将蛋白质看成是物理意义上的复杂性的模型. 例如，有人认为玻璃和自旋玻璃可能是真正复杂系统的两个最简单的模型. 尽管长期以来物理学家、化学家和材料学家从未放弃对玻璃态的研究，但直到目前仍有很多问题尚不清楚. 对生物系统特别是生物大分子的研究可能为某些问题提供答案. 有人认为蛋白质可能是研究复杂性概念的理想系统，因为它们介于经典物理和量子物理之间，许多蛋白质的结构已知，可在分子水平上通过基因工程进行蛋白质改性，它们包含有许多光谱学取样点. 蛋白质的构象丰富多彩，人们怎样区分这些状态？这些状态的占有率又是怎样随时间演化的？

现在，生命科学积累的大量事实和数据，以及物理科学在研究复杂系统方面取得的长足进展，已经把物理学和生命科学密切结合的任务提上了日程. 只有到了把生命过程和生命物质作为真正的物理对象加以研究之时，理论物理的思维方法和数学工具才会在生物学研究中发挥更大的作用. 理论物

理学家对生命科学的极大兴趣和广泛介入，使人们有理由相信，这两门科学在新的基础上的进一步结合，必将为这两门科学乃至整个自然科学的发展，带来前所未有的崭新局面．在 20 世纪，凝聚态物理学依托于材料科学取得了巨大的进展．有人预言，在 21 世纪，活物质和生命现象将成为物理学的重要研究对象，物理学将以生命科学为新的依托，从基本原理出发广泛地探讨生命系统的复杂性，这将是使物理学本身得到进一步发展的新的机遇．

§4－2 细　　胞

细胞是大多数生命的有严整结构的基本单位，一切生命活动都首先是在细胞中发生的．细胞可分为原核细胞和真核细胞．细菌和蓝藻是原核细胞，其他生物体都是由真核细胞构成的．真核细胞比原核细胞大，结构也复杂得多，它们主要由细胞膜、细胞质和细胞核构成．以下主要介绍真核细胞．

一　细胞的大小

细胞的最小尺度受到各种物理因素的限制．表 4－1 中列出了细胞半径 R 与可能包含的分子数之间的关系，表中第二、三列分别给出了细胞中可能包含的小分子(约有 20 个原子)和大分子(约有 4 000 个原子)的数目．由于细胞中 75 %为水，所以大分子数将有所减少，表中最后一列给出了细胞中实际可能包含的大分子数 n．

表 4－1　细胞的大小及其可能包含的分子数

半径 R / nm	小分子数	大分子数	n
5	2550	12.8	3.2
10	20500	102	25.5
50	2.5×10^{6}	12750	3187.5
100	2.05×10^{7}	1.05×10^{5}	2.6×10^{4}

细胞分裂中最常见的一种方式是有丝分裂，在这过程中原来细胞中的几个大分子必须分配到两个新的细胞甲和乙中．显然，n 个大分子全部落入细胞甲或细胞乙的概率均为 $(1/2)^n$．然而，每个细胞的存活都需要此类分子，因此这种分裂方式是失败的．换言之，分裂失败的概率为 $2(1/2)^n$，成功的概率为 $1-2(1/2)^n$．如果在 n 个大分子中有 k 类，而且各类是独立的，那么细胞分裂成功的概率就是 $[1-2(1/2)^{n/k}]^k$．对应于 20 种氨基酸，

取 $k = 20$，则利用上述结果可以得到如下结果：当 $R = 10\,\text{nm}$ 时，细胞分裂成功的概率只有 6×10^{-16}；而当 $R = 50\,\text{nm}$ 时，细胞分裂成功概率就非常接近于 1．更准确的讨论表明，细胞半径在 40 nm 以下，不大可能进行成功的有丝分裂．因此，细胞要具有比较完整的功能，其直径至少要 100 nm．

另一方面，细胞要通过它的表面不断与周围环境或相邻的细胞进行物质交换，没有足够的表面积就不能正常进行代谢作用．由于表面积和体积之比反比于细胞的直径，因此随着细胞的长大，这个比值将逐渐减小．而且，细胞核和细胞质之间，也要维持正常的比例关系．所以，细胞也不能无限制地长大，其大小不仅有下限，还有个上限．一般而言，细胞直径取 1～10 μm 的量级是生命功能的需要所规定的．

以上是一般性的讨论，实际上细胞形态千姿百态，大小不一．例如，属于细菌类的支原体是最小的细胞，直径仅 0.1 μm；然而，鸵鸟的卵黄的直径可达 7～8 cm；棉花纤维细胞的长度可达 3～4 cm；神经细胞的细胞体直径不过 0.1 mm，但从细胞体伸出的神经纤维的长度却可达到 1 m 以上．

二　细胞的化学组成

组成细胞的除了占 96%的碳、氢、氮和氧等元素外，还有磷、硫、钙、钾、钠和氯等必不可少的元素．此外，铁、锰、铜、锌、镁和钼等是酶的辅助因子，其他还有碘、硒、镍和钴等．上述元素的原子以各种不同的化学键互相结合而形成各种分子，其中碳原子具有特别重要的作用．碳原子比较小，有 4 个外层电子，能与别的 4 个原子形成 4 个强共价键．尤其重要的是，碳原子能互相键接成链或环，从而生成各种大分子．

不同生物的细胞的分子组成大体是相同的，即都包含有核酸、蛋白质、脂类、糖、无机盐离子和水，但它们在不同类型细胞中的相对含量可以相差很大．核酸分为脱氧核糖核酸(DNA)和核糖核酸(RNA)两类，DNA 是遗传信息的携带者，主要存在于细胞核内的染色体中，线粒体和叶绿体中也有；RNA 在细胞核内产生，然后进入细胞质中，在蛋白质(生命活动的主要承担者)合成中起重要作用．此外，脂类是生物膜的重要成分和储存能的分子，有些脂类还是重要的生物学活性物质；糖是生命活动所需的能源，又是重要的中间代谢物，有些糖是构成生物大分子的成分．

水是生命的介质，没有水就没有生命，地球上最早的生命是在原始海洋中孕育的．生物离不开水，是因为水的特性符合生物生存的需要．水是极性分子，每个水分子带负电的氧都与它周围的另一些水分子的带正电的氢相吸引而形成氢键．这种氢键很脆弱，破开得快形成得也快，总的结果是水分子

总是以不稳定的氢键连成一片，从而使水有了较强的内聚力和表面张力，因此水可以在根、茎和叶的导管中形成连续的水柱，从根部一直上升到参天大树的树梢．由于提高水温和水的汽化都必须打开氢键，因此水具有高的热容和高的汽化热，这就使生物体的温度和代谢速率以及生态环境得以保持稳定．水分子的极性还使活细胞中的水可以附着在纤维素、淀粉和蛋白质等多种分子上，保证代谢活动正常进行；同时，还可以使糖类分子等溶于水，使水成为生命系统中各化学反应的理想介质．此外，在水温降至4 ℃时，分子间距离最小，各水分子几乎都能与另外 4 个水分子形成氢键．水温再下降，各水分子彼此稍稍离开以保持最大数量氢键的存在；水温降至0 ℃时，所结成的冰的密度将低于液态水．这一特点对水生生物至为重要，否则水会层层结冰而下沉，水生生物将无存身之地．

三　细胞膜

尽管细胞表面姿态万千，形状多变，但细胞始终被一层膜裹住，保持为整体．这层膜约 7～8 nm，称为**细胞膜**或**质膜**．许多极为重要的生命活动都与膜结构紧密相关．近年对于膜研究的极大重视主要来自细胞与其周围环境的相互作用．细胞膜最重要的特性之一是半透性或选择性透性，即有选择地允许物质通过扩散、渗透和主动运输等方式出入细胞，以保证细胞正常代谢的进行．同时，细胞还要通过膜接受外界传来的信息，调整自己的生命活动以适应环境的变化．

按照 1972 年由辛格(S.J.Singer)和尼科尔森(G.Nicolson)提出的**流体镶嵌模型**，细胞膜是由脂双层和嵌入的球蛋白分子构成的，脂双层是主要由磷脂分子构成的双分子层，其表面是磷脂分子的亲水端，内部是磷脂分子疏水的脂肪酸链[①]，如图 4－1 所示．磷脂分子可在脂双层面上自由流动，因此细胞膜具有柔软性和流动性；细胞膜还具有自我封闭性，可以分裂和融合．

由于膜外层的亲水性和内部的疏水性，脂双层有屏障作用，使膜两侧的水溶性分子不能自由通过，从而保留住细胞的成分而不致泄漏，保护了细胞内部环境的相对稳定性，这对细胞正常结构和功能的保持是很重要的．但是，细胞又需要不断与外部环境进行相互作用，这就要靠镶嵌在脂双层中的蛋白质分子来执行．如通过穿透膜的蛋白质从外部吸取必需的营养成分，通过表面被称为受体的蛋白质从外部接受信息并做出必要的反应等．

脂双层中还有以不同方式镶嵌在其间的蛋白质分子，细胞膜的许多重要

① 这种排列方向有序的流体正是分子处于液晶态的宏观特征．在正常的生理条件下，细胞膜处于液晶态．因此，对膜的研究离不开液晶物理这一基础．

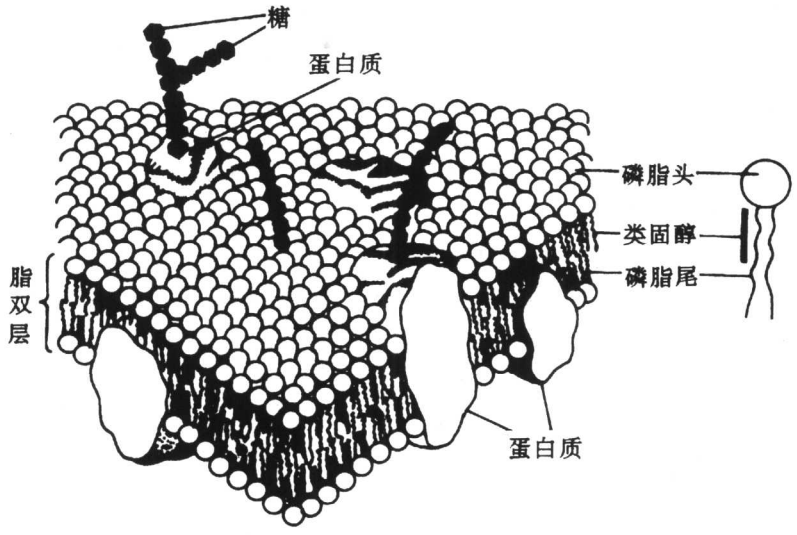


图 4－1　生物膜[①]模式图

功能都是由这些蛋白质分子来执行的．有的蛋白质分子与物质运输有关，有的本身就是酶或重要的电子传递体，有的是激素或其他有生物学活性物质的受体．脂双层中所嵌入的蛋白质大致分为两种，一种是横跨脂双层的跨膜蛋白，一种是像流水一样漂浮在脂双层上的膜外侧蛋白．维持细胞的各种物质，例如糖、氨基酸和其他营养物质必须进入细胞，而废物和分解产物则必须排出，这些都是在跨膜蛋白构成的管道中进行的．另外，人体细胞内液体 K^+ 离子浓度高于细胞外液，Na^+ 离子情况相反；但是，细胞仍不断地积累 K^+，排出 Na^+，以维持钾钠离子浓度．这种反着浓度梯度方向的主动输运过程，是靠嵌入的泵蛋白分子进行的．而且，这两种离子出入细胞各有其自己的跨膜的通道蛋白．实际上，跨膜蛋白通过分子构象的变化控制离子出入神经细胞，正是神经生物学研究的一项重要内容．

除物质交换外，细胞与外界环境以及细胞间的信息传递，也依赖于处在细胞表面的或跨膜的蛋白质——受体蛋白质．例如，动物的视觉、味觉和嗅觉等都有自己的受体蛋白质．这些受体蛋白质不但具有极高的专一性，并且以极高的亲和力与配体结合，这就是动物体感觉的高分辨力和高灵敏度的分子基础．

细胞膜的表面除了有脂类和蛋白质以外，还有糖类分子，称为膜糖．研

① 真核细胞有一个复杂的膜系统，除表面的质膜外，还有多种膜结构把细胞分成执行不同功能的小单位，这些膜统称为**生物膜**．

究表明，糖与细胞间的识别及信息传递有关，它的重要性正在开始受到重视．膜糖大多与蛋白质分子结合成为糖蛋白，也可与脂类分子结合成糖脂．膜外侧蛋白大都是糖蛋白，它们作为受体捕获和摄入食物．细胞膜形成一个局部坑状凹陷，将受体和吸入物拖进去形成囊泡——吞噬或吞饮小泡．当小泡接触包含各种水解酶的溶酶体时，两者融合成消化泡，大分子就在消化泡中被水解，使连接大分子基本成分的键断开．消化后的产物再通过膜扩散到细胞质里用于生命过程．此外，活细胞所制造的细胞外结构单元、血浆蛋白质、各种分泌物质及一些酶，通过泡吐作用而输送出去．

细胞力学中的黏着、融合以及一些独特的表面超分子结构(如微绒毛、被膜纹孔和突触接点等)的稳定等都与细胞膜有关．每一细胞膜总共可能包含 10^{12} 个分子，可是其中有许多种类的分子，其群体只要有几千个分子就能发挥它们的功能．细胞的这种以膜为基础的纤细的机器需要用非常灵敏的生物物理学测量方法来揭示它的基本机制．

通常的细胞膜流体镶嵌模型里的膜糖蛋白是浸在二维脂类液体中的．流体膜的流体动力学理论认为扩散率仅微弱地依赖于分子尺度，因此任何分子都应能在不到一分钟内扩散越过细胞．然而，借助于对荧光光致漂白恢复进行的时间分辨荧光显微光度测量，已对分子迁移率做了广泛的物理测量，结果表明，由于细胞膜中到处存在的自然约束，细胞膜中所有蛋白质的扩散本领将比自由扩散所预期的小许多个数量级．

碟状液晶提供了可以研究膜相互作用、局部缺陷和相变的膜模型系统．它们类似于一叠完整的膜，中间被薄层的水分隔开．这里可以应用相变的现代物理学理论．膜上分子的迁移率也会由于像液晶里那样的相变而发生深刻的改变．

在膜融合、摩尔渗透压浓度控制和酶调节等过程的机制中，都涉及了与带电磷脂的相变相联系的膜缺陷．在这方面，也是用灵敏的物理学方法提供关键性的信息：荧光和 NMR 可以探测它的动力学和空间分离，同步辐射 X 射线衍射对结构的测定特别有用，速冻断裂分段的电子显微镜分析则能描绘出一些宏观图形．

四　细胞质和光合作用

细胞膜内、细胞核外的全部物质称为**细胞质**．为了完成一个完整细胞所有的复杂功能，细胞质内有多种与细胞浆相对隔离的、由膜包含的小体——**细胞器**，每一种细胞器都具有其相对独立的、特定的功能，如图 4－2 所示的内质网、高尔基体和溶酶体等．溶酶体含有多种水解酶，仅在特定情况下发挥其功能，如果溶酶体不被膜结构所包围，那么这些水解酶将迅速破坏细

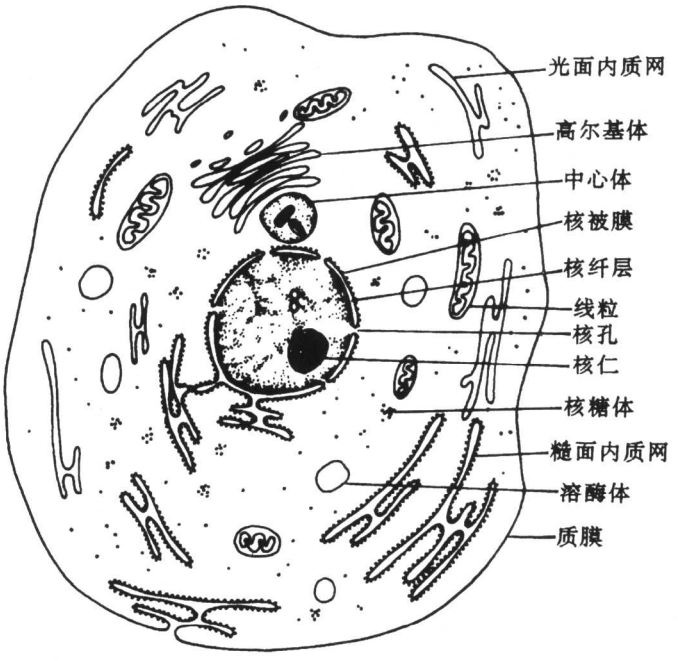


图 4－2　动物细胞结构模式图

胞内部的许多重要物质，如水解许多蛋白质，从而导致细胞死亡.

在活细胞内进行着数以千计的化学反应，它们大多数都不能在体外人工条件下重演，除非在生命所无法忍受的高温、高压、酸性等特殊环境中才能进行. 这些反应之所以能在活细胞内进行，原因是几乎每一反应都有起催化作用的蛋白质——酶参加. 合成生物大分子，既需要经过酶的催化，还需要吸取能量. 生物合成的吸能反应必须靠和高能化合物的放能反应偶联起来，才能进行下去. 发生在活生物体内的所有化学变化的总和，称为**新陈代谢**，它分为合成代谢和分解代谢. 合成代谢包括一切需能的过程，其主要功能是生物合成；分解代谢由产生能量的过程组成. 生命活动中为了连续不断地实现各种功能，需要大量的能量.

生物体中最重要的储能场所，是腺苷三磷酸分子(ATP)的高能磷酸键. 细胞中的能量代谢过程是由许多化学反应[①]组成的，它们分为两类：一类是通过一系列分解代谢反应将糖、氨基酸和脂肪等食物分解氧化，以其释

① 由于作为细胞成分的蛋白质和核酸等分子都是相当脆弱的，遇到高温就要变性，因此细胞和生物体本质上是一个恒温系统，不可能利用其热能来作功. 所以，在细胞和生物体的能的转换中起重要作用的是化学能.

放的能量支持腺苷二磷酸 ADP 磷酸化，合成 ATP；另一类是 ATP 的水解，释放出能量用于生物的各种需能反应.

原始地球大气中是缺少氧气的，生物起源于一个无氧世界．在溶解了一部分 CO_2 和 NH_3 的海水中，阳光中的紫外线的光化作用合成出了作为生命前兆的有机化合物．约在 30 亿年前原始绿色植物出现后，才在光合作用中释放出了游离的氧．缓慢的氧化作用使大气中的 CO 变成 CO_2，把 CH_4 氧化成水汽和 CO_2，把 NH_3 氧化成水汽和 N_2，于是 CO_2 和 N_2 在大气中占了优势．由于光合作用长期而持续地进行，氧才从 CO_2 中分解出来，使大气中的氧逐渐积累到现在约 20 % 的水平.

30 多亿年前的微生物是厌氧细菌，它们是通过无氧的机理而获得能量的．今天的高等生物中的糖酵解正是这种无氧的产能过程，它可简单地看成是微生物把葡萄糖分子分成两半．在此过程中包含了十几个过程，总的来说 1 mol 葡萄糖的酵解可释放出 234 kJ 能量．一个关键的步骤是磷酸甘油醛氧化为磷酸甘油酸，这种氧化方式中的氧来自 ADP 磷酸化为 ATP 过程中的水．另一方面，上述糖酵解所释放的能量中的一部分，又提供了 ADP 磷酸化所需要的能量．于是，实现了氧化和磷酸化的偶联．具体而言，1 mol 葡萄糖与 2 mol ATP 偶联，糖酵解可产生 234 kJ 能量，其中 61 kJ 储存在 ATP 中供生命活动需要使用.

当地球大气中出现了氧气后，给当时的生命带来了极大的威胁，使那些厌氧物种灭绝，而那些幸存的生物则改造了自己，适应了氧气．这主要归功于在线粒体和许多现代细菌的细胞膜中存在的磷酸化呼吸链，所进行的代谢过程的主体是三羧酸循环过程和氧化–磷酸化的偶联，是有氧的氧化过程．以葡萄糖为例，在活细胞中通过磷酸化呼吸链氧化一个葡萄糖分子而变成 CO_2 和水的过程中，总共产生 38 个 ATP，其中 30 个 ATP 发生于三羧酸循环．这个有氧糖酵解过程所产生的 ATP 几乎是无氧糖酵解的 20 倍．从另一个角度看，1 mol 葡萄糖氧化可产生 2 870 kJ 热量，而无氧酵解只释放 234 kJ 热量．因此，经过漫长的进化历程，生命学会了更高效率取得能量的方式．在这过程中，线粒体起着巨大的作用.

和线粒体类似的是植物的叶绿体，它是光合作用的细胞器．光合作用通过吸光色素(叶绿素)捕获光能，并将它转变为化学键能．在光合作用的第一阶段(光反应阶段)中，氧原子从水分子中脱下，使一种叫做辅酶 II($NADP^+$)的化学物质还原而放出氧，同时一部分光能转变为化学能，储存在 NADPH 中．另外，叶绿素参与了一系列化学反应所构成的循环过程，每一循环平均 1 mol 高能电子失去 209 kJ 能量．与此过程偶联的是无机磷和 ADP 转化成 2 分子 ATP，形成高能磷酸键，这称为光合磷酸化．在光合作用的第二阶段

(暗反应阶段)中，利用光反应的高能产物 ATP 和 NADPH 等作为能源使 CO_2 还原成葡萄糖，从而把活跃的化学能转化为稳定的化学能；同时，NADPH 又被氧化为 $NADP^+$，ATP 又分解为 ADP 和磷酸，供下一次反应使用．每年地球上约有 7.5×10^{13} kg 碳原子通过光合作用从 CO_2 转移到有机分子，如糖类、氨基酸和其他化合物中．大气中的氧主要来自海洋的浮游藻类和陆地森林所进行的光合作用．

五　细胞核和遗传基因

孟德尔(G.Mendel, 1822—1884)在 19 世纪证明了生殖细胞中的遗传“因子”决定着生物体的性状，后来托汉森(W.Tohannsen)将这些因子称为**基因**(gene)．20 世纪初，人们将基因定义为线性次序排列在染色体上的独立的因子．现代分子生物学的发展提出，基因是 DNA 分子的片段，是以 300～2000 个碱基对组成的一个信息功能单元．

所有真核细胞都有细胞核，细胞核就是细胞的基因库．细胞核含有担负遗传功能的染色体，它被膜所包围，以保持染色体的相对独立性和稳定性．具体而言，细胞核约占细胞体积的十分之一强，由核膜和核质组成，核仁和染色体悬浮在其中．核仁所产生的核糖体经过核膜的小孔进入细胞质内，蛋白质的合成就在这里进行．染色体由 DNA 和蛋白质组成，是遗传信息的存储所，并在这里进行 DNA 的复制(见后)．

各种生物染色体的数目是恒定的．例如，人有 23 对染色体，鸡有 39 对染色体，玉米有 10 对染色体．染色体的数目如果因某种原因而发生了异常，生物的性状就要发生异常，人有些疾病就是由于染色体数目的异常而引起的．

近年来发现组成多细胞生物体的各个细胞都有一定的寿命，这一信息也储存在特定的基因之中．各个细胞以自身的有限生命换取整体生命延续的这种机制，称为**细胞编程死亡**．从分子水平看，细胞编程死亡是由基因编码的两种蛋白质的产生所控制．这一新的生命现象本质的阐明具有重大的意义．

六　细胞的全能性和克隆

一个人的受精卵细胞中，含有 2 m 长的由 5.8×10^9 个核苷酸对组成的核酸序列．通过细胞分裂，该细胞变成 4 个、8 个、16 个……细胞，每一分裂出来的细胞核都有同样的核酸序列．开始这些细胞是相同的，但不久以后它们就分别变成为神经细胞、肌肉细胞、视网膜细胞、肝细胞……这叫做细胞分化．成人大约有 10^{13} 个细胞，表面形态千差万别，各司其职，但都是从一个受精卵变化过来的．

细胞分化的关键是在某个时期和某个场合，只有一小部分基因被打开、被表达(转录)．无论是生命周期，基本发育过程，还是更短的伤口愈合和对气候的适应性变化，凡是要花几个小时以上才能表现出来的慢反应，一般都是 DNA 在起作用，是 DNA 中一定段落表达的结果．至于快速反应，例如许多由激素或神经冲动激起的反应，依靠的是其他调节机制而不是 DNA．

实际上，生物体的每一个细胞都具有同样的或基本相同的遗传物质，而且含有发育为完整有机体或分化为任何细胞所必要的全部基因．在合适的条件下，每一个细胞都能产生一个完整的有机体，称为**细胞的全能性**．一个已分化细胞的细胞核，尽管它的基因组中与功能无关的部分已经关闭，用完的发育程序也已关闭，但是关闭并不等于死亡，它还可在细胞质的信息作用下重新苏醒过来．

不同类型的体细胞可以含有相同的基因，然而这些细胞的形状、功能和代谢特征却可以是很不相同的．这是因为，基因表达是在严格的调控下进行的．一个受精卵之所以能发育成为一个成熟的个体，是由于对基因表达严格调节控制的结果．但是，基因表达的调控机理还是一个迄今远没有弄清的问题，特别是对于高等生物更是如此．

基于细胞核移植的无性生殖——**克隆**(clone)技术，在近代有了迅速的发展．这种方法充分体现出了细胞发育的潜能性和细胞的全能性．克隆技术是先将施主细胞(胚胎细胞或体细胞)用显微注射针转移到已去除细胞核的卵子中，然后用电脉冲刺激或仙台病毒使细胞与卵子融合在一起成为一个完整的卵子，最后移植到一个寄母体的输卵管中，待其出生．

20 世纪 50 年代，美国科学家在两栖类动物中研究细胞发育潜能性的工作中，创造了细胞核移植方法．60 年代，以英国科学家戈登(J.B.Gurdon)为代表，用已分化的细胞如肠上皮细胞和角化细胞等进行细胞核移植．80 年代，美国科学家用红血球作为施主细胞进行细胞核移植，进一步说明了细胞发育分化的可能性，即已分化的细胞核在除去遗传物质的卵子中，可以被卵细胞质所调控，进行重编序而恢复到与受精卵的合子一样的功能状态，从而进行正常程序的发育．

近年来，克隆技术有了引人注目的发展．1981 年，瑞士科学家伊尔门斯(Illmensee)和美国科学家霍庇(Hoppe)，首先在哺乳动物中用细胞核移植方法构成了核移植卵，最后得到核移植的幼仔．1986 年以后，英国科学家魏拉特森、美国科学家罗伯、史蒂斯和泼拉舍相继用胚胎细胞作为施主细胞克隆产生了羊、牛、兔和猪．1991 年后，中国科学院发育所等单位的科学家相继用胚胎细胞作为施主细胞克隆产生了兔、羊和牛．1993 年，美国科学家西姆斯和弗斯特用扩增的内细胞团细胞克隆产生了牛．1996 年，英国科学家盖柏背

尔用胚盘细胞克隆产生了羊. 1997 年，英国科学家威尔莫特(I.Wilmut)等人用绵羊乳腺细胞克隆产生了羊. 1998 年 7 月，日本科学家宣布利用成年牛体细胞培育出了克隆牛. 1998 年 7 月 23 日出版的英国《自然》杂志报道，一个国际科学家小组采用一种新的克隆技术，用成年鼠的体细胞成功地培育出了三代共 50 多只克隆鼠，它们在基因构成上完全一致，这是人类第一次用克隆动物克隆出了克隆动物. 威尔莫特指出，这一研究意味着，完全可能利用不同的动物品种和不同种类的体细胞克隆动物.

§4-3 蛋白质和核酸

分子生物学的兴起首先建立在对组成生物体的基本物质的认识上. 构成生物体的物质种类很多，但其中最重要的是两类生物大分子——蛋白质和核酸. 生物大分子是组成细胞的基本单位，是生命大厦的基本砖石. 这些生物大分子分开来看，它们是没有生命的，但是生命过程却是由它们组合、相互作用而表现出来的.

从最低级、最简单的单细胞生物，到最高等、最复杂的人，所有生物体的基本组成物质都是蛋白质和核酸，它们的蛋白质由 20 种(或其中的几种)氨基酸以肽键连接而成，它们的核酸由 4 种核苷酸以核苷酸键构成. 而且，氨基酸顺序和核苷酸顺序之间的对应关系——遗传密码，除极少数例外，在整个生物界也是基本一致的. 如果没有这种一致性，就不可能实现基因在不同生物体之间的转移和表达. 此外，尽管生物体从外界取得能量的方式明显不同，但它们在分子水平上的机制却是极其相似的，整个生命世界都由腺苷三磷酸 ATP 分子为细胞的各种活动提供能量. 总之，生命世界中最本质的东西，在不同的生物体中是高度一致的. 对生物大分子的结构和功能的研究，正是深入到了生命现象的核心和本质.

一 蛋白质

蛋白质是生命活动的主要承担者，或者说是生命功能的执行者和表演者，一切生命活动都与蛋白质有关. 生物体的各种活动，如生长、运动、呼吸、免疫、消化、光合作用，以及对外界环境变化的感知并做出必要的反应等，都必须依靠蛋白质来实现. 新陈代谢是生命活动的主要特征，而构成新陈代谢的所有化学变化都是在酶的催化作用下进行的. 除了最近发现的极少数具有催化功能的核糖核酸以外，所有的酶都是蛋白质. 例如，在胃里消化食物，靠的是胃液中的胃蛋白酶；呼吸时把氧带到全身，靠的是血液中的血红蛋白；动物活动靠的是肌纤维的伸缩，而肌纤维由肌动蛋白和肌球蛋白组

成；与入侵微生物作斗争的免疫系统的抗体，也是蛋白质．虽然遗传信息的携带者是核酸，但遗传信息的传递和表达不仅仍然是在酶的催化下，并且也是在蛋白质的调控之下进行的．

地球上有 150 万种生物，估计蛋白质总数约 $10^{10}\sim10^{12}$ 种．例如，人体中有 10^5 种蛋白质，简单生命大肠杆菌中也有 3000 种．一个细胞中有几千种蛋白质，占细胞湿重的 20%，干重的 50% 以上．每一个蛋白质分子都有它自己特定的氨基酸序列和特定的空间结构．蛋白质的相对分子质量(以前称为分子量)约为 $10^4\sim10^7$．蛋白质分子是由相对分子质量约为 100 的氨基酸聚合成的长链(称为**多肽链**)，其间的联结称为**肽键**．

蛋白质中每一氨基酸单位 $\begin{matrix}NH-CH-CO\\ \quad\ |\\ \quad\ R\end{matrix}$ 称为**残基**，R 称为**侧链**．由 R 的不同构成了 20 种氨基酸，此外还有一些衍生物．与侧链 R 相连的碳原子称为α 碳(记作 C^α)，围绕 C^α 有两种可能的相对位置关系．如图 4－3 所示，左图中的氨基酸称为 L－氨基酸或左手氨基酸，右图中的氨基酸称为 D－氨基酸或右手氨基酸．实际上，所有蛋白质中的氨基酸都是 L 型的，D－氨基酸只存在于细菌细胞壁和其他细菌产物中．



图 4－3　氨基酸的手性

在蛋白质的多肽链中，除去各残基的侧链 R 外，由骨架 $NH-C^\alpha-CO\cdots NH-C^\alpha-CO$ 形成的重复结构称为**主链**，其中氨基酸的序列决定了蛋白质的性质．从 1957 年测定了含有 51 个氨基酸残基的胰岛素分子的氨基酸序列后，到 1995 年底已经测定了不同蛋白质的氨基酸序列近 10 万种，其中最大的由一条肽链构成的蛋白质是一种肌肉蛋白——肌巨蛋白，它含有约 2.7 万个氨基酸残基，相对分子质量高达 3×10^6．有的蛋白质有两条以上的肽链，如血红蛋白有 4 条肽链．肽链中的氨基酸顺序和肽链的数目，称为蛋白质的一级结构．在生物体内，每一条多肽链还在空间卷曲折叠，形成特定排布的三维空间结构，分好几个层次．形成一级结构的肽键是共价键，形成高级结构的力是弱力．

最常见的二级结构是 α 螺旋和 β 折叠．α 螺旋是指多肽主链盘绕成螺线状，旋转和前进方向之间是右手螺旋关系．如果组成分子的原子基团由于绕共价单键的不同形式的旋转而形成不同的空间排布，则称它们的**构象**(conformation)不同．构象的改变不破坏化学键，分子的手性也不变．

如图 4－4 所示，肽链折叠成螺旋线的力是靠第 i 个肽单位的 CO 基团与

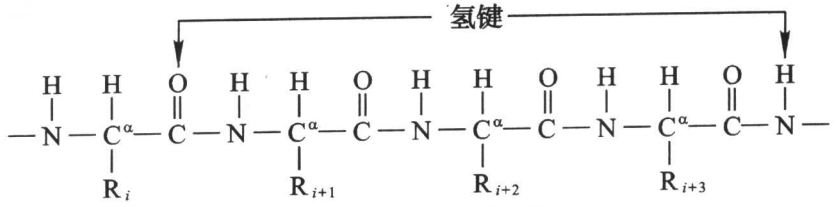


图 4－4　α 螺旋中的氢键

第$(i+3)$个肽单位的 NH 基团之间的氢链 H－N…O；而 β 折叠是指借助于氢键 H－N…O＝C 作为桥梁，把两条多肽链连接起来，使充分伸展的多肽链形成楼梯形的片状结构.

蛋白质的三级结构是指它的三维构型，确定该结构的重要因素是疏水作用. 在 20 种氨基酸中，有些是极性的、亲水的，而有些则是非极性的、疏水的. 在形成球蛋白时，亲水氨基酸倾向于出现在表面，而疏水氨基酸则倾向于集结在内部，这是蛋白质折叠的主要机理.

蛋白质在行使其生物功能时，必须具有特定的三维空间结构. 从伸展的肽链折叠起来，这个过程的第一步是坍缩. 但是，蛋白质并不是分子原子的最紧密堆积. 与此相联系的是蛋白质的分维. 具有分维的几何对象称为**分形**，其特点是处处稀松，处处中空，破碎复杂，具有局部和整体的自相似性. 如第三章图 3－10 所示的谢尔平斯基镂垫的维数是

$$D=\frac{\ln 3^k}{\ln 2^k}=1.585,$$

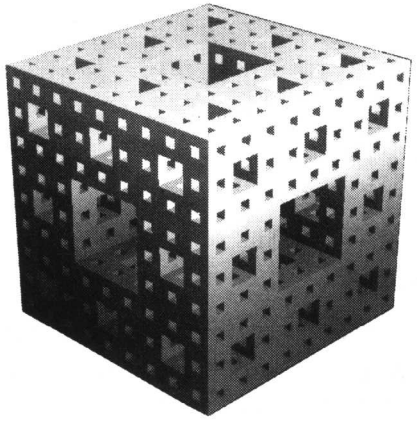


图 4－5　谢尔平斯基海绵

如图 4－5 所示的**谢尔平斯基海绵**(Sierpinski sponge)的维数是 2.727. 由血红蛋白等的铁离子 Fe^{3+} 的自旋－晶格弛豫具有反常温度关系推断，蛋白质的维数是 1.3～1.7，所以蛋白质是具有分维的几何对象.

在体外，许多蛋白质能在合适的条件下，从完全伸展的肽链自发地调整成具有生物活性的天然构象，也就是说，蛋白质的复杂的多层次结构形成的信息包含在自身的一维序列——氨基酸序列所规定的一级结构中. 在生理条件下，一级结构还决定了二级结构和更高级结构. 尽管原则上可以由氨基酸序列来预测蛋白质的高级结构，但是实际上由氨基酸序列所决定的是若干个有微小差别的空间结构(称为**构象子态**).

从理论上讲，蛋白质的功能在很大程度上是由分子构象决定的．序列决定构象也就意味着序列决定功能，由序列而构象，由构象而功能，这样就可以使生物学建立在一个富有预见性的逻辑体系中．从实用上讲，蛋白质的测序要比测定其立体结构容易得多．从 1959 年肌红蛋白晶体结构的测定开始到 1996 年底，在目前已测序的约 10 万种蛋白质中，仅约 5 000 种测定了空间结构．如果由序列能够快速预测构象，就可以使我们关于蛋白质立体结构的知识扩充好几倍．

结构与功能关系的研究一直是蛋白质研究的核心问题之一．现在，体外基因突变技术，特别是定点突变的发明，可以任意改变蛋白质分子中特定的氨基酸残基，并研究其对生物功能的影响．另一个重要的问题是蛋白质空间结构与其生物活性的关系．研究表明，空间结构对酶的功能至关紧要，即使是极其细微的扰乱也会导致酶的活力丧失，因此空间结构具有严格性和准确性．只有处在特定的空间结构中的蛋白质分子，才是能够发挥生物功能的活性蛋白．因此，即使肽链的氨基酸序列不变，只要空间结构被破坏，就会导致蛋白质功能的丧失．蛋白质在肽链保持完整下空间结构的破坏，称为**蛋白质的变性**．而且，蛋白质的空间结构在一定程度上是处于不断运动之中，其功能也依赖于结构的这种运动性能或柔性．实际上，这正是酶充分发挥其催化功能所必须的．

二　核酸、遗传和分子生物学的中心法则

(1) 脱氧核糖核酸(DNA)和核糖核酸(RNA)

核酸是生命信息的负荷者和储存者．核酸有胸腺核酸和酵母核酸两种，它们之间的差别仅在于五碳糖成分．五碳糖的结构是一个五角的环，胸腺核酸的五碳糖环的第 2 位上比酵母核酸的少了一个氧原子．因此，人们把胸腺核酸称为**脱氧核糖核酸**(DNA)，而把酵母核酸改名为**核糖核酸**(RNA)．

核酸分子是由许许多多核苷酸通过磷酸二脂键聚合成的长链．核酸的相对分子质量约为 6×10^6，而核苷酸的相对分子质量约为 1000．每一个核苷酸分子都包含有一个五碳糖、一个碱基和一个磷酸根．碱基有 4 种，对于 DNA 有：A(腺嘌呤)、G(鸟嘌呤)、C(胞嘧啶)、T(胸腺嘧啶)；对于 RNA 有：A、G、C、U(尿嘧啶)．因此，每一个核酸大分子中包含有 4 种核苷酸．一般而言，DNA 都是双链，RNA 都是单链．从信息论的角度看，它们都是由 4 个字母排列而成的语言——遗传语言．

(2) DNA 的双螺旋模型

1953 年 3 月，沃森(J.D.Watson, 1928—)和克里克(F.H.Crick, 1916—)提出了 DNA 的双螺旋模型，这是分子生物学诞生的标志．分子生物学的诞生是

三个学派通力协作的结果，它们是结构学派、信息学派和生化学派．结构学派由一批晶体物理学家组成，利用 X 射线衍射技术从事生物大分子结构的研究．信息学派的成员沃森，作为一个遗传学家来到了主要从事蛋白质结构方面研究的剑桥卡文迪什实验室，带来了生物学的基本观念，使结构论者豁然开朗．在原有工作的基础上，沃森和克里克密切合作，进行了一系列的推测，多次建立和修改了模型，终于取得了成功．

为了证实沃森－克里克模型中的复制模式，科学界又花费了五年的时间．1956 年，科恩伯格(A.Kornberg)从大肠杆菌中分析出 DNA 聚合酶，次年用 4 种核苷酸合成了 DNA．1958 年，梅塞尔森(Meselson)和斯塔尔(Stahl)用放射性同位素 ^{15}N 标记的染色体追踪细胞分裂过程中的 DNA 复制情况，证实了复制是半保留式的，即每一条旧链冻结一条新合成的 DNA 链．

DNA 的二级结构有右旋的 A 型、B 型和 C 型，以及左旋的 Z 型．生物体内的 DNA 通常是 B 型的，B 型结构每圈 10 个核苷酸，螺距为 3.36 nm，沿轴向相邻两对碱基间的距离为 0.336 nm．A 型、C 型结构与 B 型大体相同，A 型结构是每圈 11 个核苷酸，C 型结构是每圈 9.3 个核苷酸．由于碱基中 A 和 G 的体积很大，而相邻两对碱基又靠得很近，使实际的双螺旋结构出现了局部的偏差．蛋白质正是以这种偏差来认识它们，在这里和 DNA 结合起来，从而控制它的表达．因此，通过由碱基序列对核酸分子构象的预测，有可能帮助确定遗传过程的调节和控制．

染色体由 DNA 和蛋白质组成，是遗传信息的存储所，并在这里进行 DNA 的复制．洁白如雪的染色体易与多种碱性染料结合而显得五彩缤纷．染色体由许多纤维组成，人类细胞核中有 46 条长度约为 0.25～2 mm 的这种纤维．这些绳状的纤维由多股更细的、自相缠绕的双股螺旋 DNA 分子链盘绕在一种特殊的蛋白质组成的八聚体上构成．如图 4－6 所示，DNA 分子由两股互补的逆平行分子链组成，分子链由 4 种核苷酸组成，每种核苷酸有它特有的碱基．遗传信息就包含在表示这 4 个碱基的字母 A, C, G, T 所编写的语言中．所谓双股的互补性，是指碱基 A 和 T 之间存在着通过氢键结合起来的作用力，碱基 G 和 C 之间也一样．因此，从一股的碱基排列就可推知另一股，它们之间有一定的对应关系．

DNA 双螺旋的每股通常都是右向盘绕的，股线直径为 2 nm，每圈间距为 10 个核苷酸对，1 μm 的 DNA 约有 300 圈和 3 000 个核酸对．对于病毒这样的简单生命，DNA 的长度约为 1.5～80 μm；对于细菌，DNA 的长度约为 1 mm；对于人，46 条染色体 DNA 的总长约为 2 m，包含 5.8×10^9 个核苷酸对，这部由 4 个字母 A, C, G, T 写成的长达 60 亿个文字的生命之书，便是人所具有的全部遗传信息的记录．为了让这些信息传递下去，需要对 DNA 进

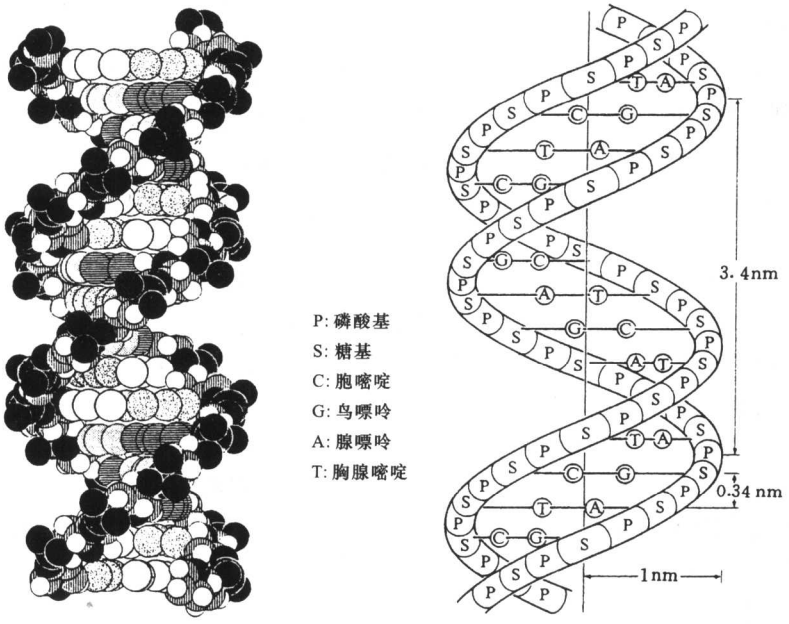


图 4－6　DNA 双螺旋模型[①]

行复制．复制时可先令氢键断开，两条链松开分离后各自成为形成新链的模板，然后根据碱基配对原理生成两条完全一样的 DNA 双螺旋．

DNA 是遗传信息的承担者，它存在于细胞核中；蛋白质是生命功能的执行者，它在细胞质的核糖体里合成，两者之间隔一层核膜．为使蛋白质的合成以 DNA 为模板，需先以 DNA 为模板拷贝出副本——信使 RNA (mRNA) 单链．由于两者都是四种核苷酸组成，好像是一种文字的两种写法，因此称此过程为**转录**．然后，按照副本规定的程序合成相应的蛋白质．由于 RNA 和蛋白质分别由核苷酸和氨基酸构成，好像是两种文字，因此称此过程为**翻译**．翻译任务的执行者是转移核糖核酸(tRNA)，它具有识别 mRNA 上密码的能力，可将一段 mRNA 序列翻译成一段氨基酸序列，从而生产出相应的蛋白质．

(3) 结构生物学的中心法则

人们发现，在核酸中的核苷酸序列与蛋白质中的氨基酸序列之间，存在着以三个特定顺序的核苷酸与一个氨基酸相对应的关系，即遗传的**三联密**

① Alonso M, Finn E J. Fundamental University Physics: Vol.1 Mechanics. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1980. Fig. 1-4 .

码．根据这个密码，可以从具有特定核苷酸序列的核酸中合成有特定氨基酸序列的蛋白质．现在，有人把从多肽链的氨基酸序列到蛋白质的空间结构之间的关系，称为第二部遗传密码．作为分子生物学研究的核心，遗传信息由 DNA 到 RNA 再到蛋白质的传递过程，通常称为**分子生物学的中心法则**．人们现在普遍认为结构生物学的时代已经开始，它已经发展成为分子生物学的主流．**结构生物学的中心法则**是由序列到蛋白质的空间结构再到功能的信息传递过程．

现在，遗传信息由 DNA 到 RNA 再到多肽链的合成过程已经基本清楚，问题在于这一过程是怎样得到调节控制以适应生物体在不同发育阶段和不同环境下的需要的．这不但是细胞发育分化的基础，也和生物体与各种环境因素的相互作用有密切关系．现在看来，调节主要发生在转录阶段，通过某些特定蛋白质与 DNA 的结合，从而控制 mRNA 的合成．另一个问题是，为了体现一定的生物功能，怎样使按一定氨基酸顺序排列的多肽链生成有一定空间结构的蛋白质，即新生肽链的折叠问题．总之，遗传信息传递的调节控制和新生肽链的折叠，是分子生物学研究中两个尚未解决的核心问题．

(4) DNA 的复制和转录

DNA 复制和转录的动力学过程十分复杂，有多种酶参与．在转录过程中，RNA 聚合酶插入两条 DNA 链使其分开，并包裹在一条链上以其作为模板而装配出一条互补的 RNA 链．随着 RNA 聚合酶的移动，RNA 链在其尾部逐渐伸长，已转录的 DNA 恢复原状．转录作用的前进速度为 1 μm/min，即每分钟必须旋转 300 圈，这意味着 RNA 链以每秒 50 个核苷酸的速度生长．复制过程比转录更为复杂，其中有解链酶、拓扑异构酶、引发酶和 DNA 聚合酶的参与．对于真核细胞，复制作用前沿——复制叉的移动速度与转录速度差不多，并可同时在数以百计的复制单元中进行；对于原核细胞，复制叉的移动速度可达到每秒 1 500 个核苷酸．

由于 DNA 双螺旋的线度是微观尺度，应该用量子力学来解释．按照量子力学，双螺旋并不等同于两根绳子的相互缠绕，解旋只是从一种构象到另一种构象的量子跃迁，每秒 50～1500 个核苷酸的速度仅对应于 2×10^{-8}～5×10^{-7} m/s，与溶液中微粒的扩散速度相当．然而，与扩散运动的随机性不同，解链过程是整齐的、确定的、转录误差为 10^{-4}，复制的误差还要小，这可以用相干的量子运动来解释．实际上，生命发生于微观和宏观之间，微观运动遵从量子规律，宏观运动遵从经典规律．复制是遗传的基本过程，转录是遗传信息表达的基本过程，它们既有经典特征，又有量子特征．因此，罗辽复[1]指出，转录和复制过程的图像可能是这样的：首先是经典的扩散运动，经过相变到达相干态，然后是量子跃迁．

DNA 的复制过程极为可靠，发生错误的可能性仅为一万亿分之一．然而，错误毕竟还是可能发生的．如果 DNA 的复制过程是绝对可靠的，绝对没有任何错误，那么生物体的突变就只能靠外界因素才能引起，生物的进化和生物界的面貌也就不是今天这个样子了．

1953 年 DNA 双螺旋结构的发现，使人们对生命的认识发生了重大的飞跃，逐渐积累了大量分子水平上生命活动的规律．1973 年诞生的 DNA 重组技术使得分离某个特定基因成为可能，这一突破促使 1977 年强有力的 DNA 测序技术的发明．到 1995 年底，大肠杆菌全部基因含有的 472 万个碱基对(简称 bp)的序列已经测定，酵母基因的 1250 万个碱基对的序列测定也已完成．一种最简单的支原体细菌的基因组仅有 58 万个碱基对、482 个基因，它已能够进行基本上独立的生活．

近年来，RNA 成为分子生物学领域一个非常热门的研究方向．因为科学家发现，RNA 在细胞的生命中起着重要作用，而在 10 年前人们还认为，生命的基础是蛋白质和 DNA，基因研究中最重要的对象是 DNA 和蛋白质，而 RNA 只起到传送 DNA 信息的作用．但到 2000 年，科学家在线虫幼虫体内发现了一类由 20 多个核苷酸组成的单链微小 RNA，并将其命名为小 RNA．此后，科学家又发现了小 RNA 调控基因的功能，但小 RNA 起如此大的作用还是在 2005 年首次发现．这些新发现表明，RNA 在细胞机制中所起的作用远超出先前的认识．

在 2005 年 1 月 14 日发表于美国《细胞》杂志的论文中，美国怀特黑德生物医学研究所和马萨诸塞理工学院的科学家指出，人类基因组中大约有三分之一负责蛋白质合成的基因是由一类微小的 RNA 控制的．小 RNA 能通过阻断蛋白质合成的方式调控基因表达．他们借助一个计算模型来确定小 RNA 和对应的基因，发现了小 RNA 控制很大一部分生命功能的证据．基因合成蛋白质的过程，需要由信使 RNA 来传递信息，作为蛋白质合成的模板．而小 RNA 能粘附在特定的信使 RNA 上，使其不能再参与这一过程，从而减少蛋白质合成的数量．在这次研究中，科学家还确定了小 RNA 和信使 RNA 上各有哪些部分对上述进程具有决定性的影响．

在 2006 年 12 月的《科学》杂志上发表了美国生物学家的最新研究成果，他们在大肠杆菌上发现了新的基因调控机理，在这种机理的作用下，大肠杆菌在资源不足时会暂停自己的基因调控工作，而当环境改善后，其基因调控功能将会恢复．一种被称为 6SRNA 的特殊分子在这一过程中起到了关键作用，该分子能有效阻断 RNA 聚合酶与启动子序列结合，阻断蛋白的表达．这表明，建立在 DNA 与 RNA 之间、控制 RNA 聚合酶的基因调控系统，是对“RNA 世界”的一种回应．

在研究 6SRNA 的结构时，科研人员发现，该分子的大部分都形成了双螺旋结构，但中间包含了一段单链的 RNA 凸环结构，这个结构类似基因的启动子上开放性复合体结构，这意味着这些 RNA 分子可能会与启动子竞争性结合 RNA 聚合酶(RNAP).

进一步实验表明，RNA 聚合酶的确接受了存在于 6SRNA 上的核苷酸片段，阻止 RNA 聚合酶与启动子序列结合，中断了蛋白的表达. 为了从这个故障中解脱出来，RNA 聚合酶开始以 6SRNA 为基合成 6SRNA 分子，当合成的 RNA 片段达到 20 个核甙酸时，这个片段开始与原来的 6SRNA 相互作用，进而与 RNA 聚合酶发生分离. 分离后的 RNA 聚合酶恢复了原有的功能，仍然以 DNA 为基合成 RNA，完成遗传信息的转录.

研究人员认为，上述现象表明，在 RNA 上合成短链 RNA 时，大肠杆菌的 RNA 聚合酶“回忆”起了自己早先的工作，这是对“RNA 世界”的一种回应. 那时，在 RNA 基础上组成的生物，已经开始将 DNA 作为更可靠的遗传信息存放库来使用. 在这个时期，“RNA 基因”与“DNA 基因”已经展开了控制 RNA 聚合酶的竞赛，这一竞争的发展过程，则是后来各种基因调控系统的基础.

(5) 人类基因组计划

核酸的全自动序列测定仪的出现和不断改进，不但已使蛋白质氨基酸序列的测定逐渐被它的编码 DNA 的序列测定来代替，而且使人类基因组 DNA 全序列的测定得以提上日程. 从 1987 年，起始于美国国家项目的**人类基因组计划**(human genome project，简称 HGP)正式启动. 人类基因组计划的目标是完成人类 24 条染色体的基因组作图和 DNA 全长序列分析，并进行基因鉴定和功能分析. 对人类基因组进行精确测序是这项计划至关重要的一步.

2001 年 2 月，人类基因组计划完成了里程碑意义的重大进展. 国际人类基因组测序联盟(IHGSC)和私人测序机构美国塞莱拉公司分别在《自然》和《科学》杂志发表了“人类基因组序列草图”，但限于当时技术和数据分析手段的限制，草图还远不能称为“完美”.

2004 年 10 月 21 日出版的《自然》杂志，以 15 页的篇幅发表了 IHGSC 的最新成果. 这篇名为“完成人类基因组常染色质测序”的文章公布了人类基因组迄今为止最精确的序列，这篇文章的发表标志着人类基因组计划又迈出了具有里程碑意义的一步. 2001 年的草图中有 15 万个空隙，而这份新序列图只留下了 341 个空隙. 整合后的基因组序列包含有 28.5 亿个碱基对，覆盖了 99%的常染色质区，其错误率只有 $1/10^5$. 作为 IHGSC 的成员之一，中国科学家做出了应有的贡献.

除了获得人类基因组更为精确的序列，这项研究也澄清了人们长久以来

一些模糊或错误的判断．例如，人类基因组只有 20000 到 25000 个基因，而不是以前估计的 27000 到 40000 个基因．在人类基因组中有一些称为“重复片段”的序列，这些序列一般大于 1kbit，相似度大于 90%．这些重复片段可能由一个基因复制或进化而来，这种序列一直是基因组测序的难点．

2005 年 4 月，美国国家人类基因组研究所宣布，对人类第 2 号、第 4 号染色体的详细破译工作已完成．这不仅标志着人类基因组项目的分析、测序工作已全部完成，也是人类基因研究的重大突破．

美国国家人类基因组研究所在破译中发现，人类第 2 号染色体是由古猿的两条染色体融合而来的，这一点证实了人类与黑猩猩的同源性，同时也修正了此前关于第 2 号染色体形成过程的一些推测．人类与黑猩猩的同源性超过了 95%，在基因数、基因结构与功能、染色体与基因组构造上，人类和黑猩猩几乎相同．但在漫长的进化过程中，这不到 5%的差别，决定了人类和黑猩猩的根本区别．

在此次破译的第 4 号染色体中，不仅含有目前发现的人类基因组上最大的“基因沙漠”，而且很可能包含着与肌肉萎缩症、先天性智障等疾病相关的信息．我们知道，蛋白质起着维持生命的功能．染色体中绝大部分区域的基因序列都能翻译成蛋白质结构，但却有一小段区域的基因序列不能翻译成蛋白质，这个区域就叫基因沙漠．其实，在每条染色体上，都会有一段这样的区域，但第 4 号染色体的基因沙漠区域很长、很突出．既然不产生蛋白质，那么这段区域有什么特殊作用，到现在还是个谜．

目前，全部染色体的序列已由各国科学家共同破译完成．其中，15 对染色体的基因密码更被详细分析破译．序号靠前的大染色体破译难度较大，因此，第 2、3、4 号染色体破译，标志着人类基因组研究的重大突破．

但是，尽管人类已完成了对自身染色体的序列分析，却还远没有真正掌握基因的奥秘．排序只是掌握基因奥秘的第一步，一对染色体从完成序列破译到发表完整的学术论文还需要经过很长时间．

2006 年，美国科学家乔治 · M · 邱奇利用自己开发的基因组测序技术，将基因组测序的费用从 2 000 万美元降低到了 14 万美元．邱奇的技术是以碱基的物理性质差别为基础，他将这种物理差别转换成可检测的物理信号，从而进行测序．目前，基因组研究的重点开始转向疾病的起源以及作用机制，邱奇的测序技术无疑为后续研究奠定了基础．随着基因组测序价格的急剧下降，基因组测序将进入家庭，使个性化医疗成为可能．

2006 年 11 月，刚刚落下帷幕的国际基因组学会大会上传来了激动人心的消息：“肿瘤基因组计划”已经在美国启动，而中国也即将加入这次科技领域的国际协作．该计划预计在未来 13 年里找出肺癌、脑癌、卵巢癌等所有

困扰人类癌症的致癌基因元凶，从而诊断、治疗这一“绝症”．研究人员表示，癌症有很多种．每个肿瘤都有自己独特的基因蓝图．同时，即使是同一种癌症致病的原因也不尽相同．而通过“肿瘤基因组计划”，全球科学家希望协力逐一解开所有癌症的秘密，进而建立一个共享数据库，造福于人类．

人类基因组计划之后，全球科技界开始向另一项更艰巨、更宏大的任务——人类蛋白质组研究发起冲击．

（6）非编码基因

编码的蛋白质基因只约占人类基因组的 3%，其余 97%左右的 DNA 序列的功能目前仍不清楚，这些非编码 DNA 的表达产物是许多对生命过程具有调控能力的信息载体，称为非编码基因(ncRNA gene)．2004 年 12 月 17 日发表的《科学》杂志中，以“隐藏的 DNA 财富”为题，将非编码 DNA 的研究工作列为 2004 年度十大科学突破之一．

美国哈佛医学院的研究人员在酵母基因组的“垃圾 DNA”中发现了一种新基因，它的名字叫 SRG1．与其他基因不同，它并不编码蛋白质或者酶表现出功能．但当这个基因开启时，它将调控临近基因的表达．它能够利用转录获得 RNA 屏蔽或者压制酵母基因组中临近基因的功能．他们认为肯定有其他基因以同样的方式起作用，其他生物体的基因组中也应该存在这种基因，包括人类．

很久以来，人们一直认为在人类基因组的众多基因中，只有能编码蛋白质或者酶的基因才能表现出功能．换句话说，只有这样的基因才是传达人类遗传信息、生物特性的有用基因．但随着人类基因组计划的完成，DNA 图谱的排列成型，人们发现只有不到 10%的 DNA 序列参与了编码蛋白质或者酶，而剩下 90%没有显示出那些功能，于是就有人认为它们是没有用的垃圾．SRG1 基因研究的重要意义在于发现了一种新的关于 DNA 转录调控的机制，而这种转录调控正是由以往所认为的“垃圾 DNA”参与的．SRG1 基因不编码任何蛋白质，目前研究看来，这个基因启动转录的唯一功能就是关闭它下游附近的基因．因此，SRG1 基因可以被理解为一个基因调控网络中的一个开关，它是转录水平上的一个开关，可以调控一个基因是否转录．原来被认作垃圾的 DNA 不是垃圾，而是发出指令的幕后指挥者．这种调控功能可能对基因组的进化起非常重要的作用．

如今大多数科学家认为不编码蛋白质的基因不是垃圾．这部分基因中包含非常重要的调控元件，掌握它们之间的关系可以从根本上提高对生命规律的认识．因为 DNA 序列本身处在不断的演化过程中，需要用系统的眼光看问题，把单个基因还原到基础，再综合起来．患者之所以表现出癌症的症状，是因为人体内的癌基因和抑癌基因失衡导致的．如果这时候起调控作用

的“垃圾 DNA”们发出指令，进行调控，就有可能进行治疗．同样，糖尿病和帕金森症都是因为相应基因的调控失常所导致的．因此，对于“垃圾 DNA”的深入研究，可以为进一步了解这些重大疾病的发生原因以及解决方法带来新的认识．

三　生物大分子中的相互作用

作为生命大厦基石的蛋白质和核酸等生物大分子，是由普通的原子和电子组成的多粒子系统，它包含有极多的变量．在生命活动中，这些变量不是平权的：有的重要，有的无足轻重，有的在生命活动中保持不变．因此，实际上需要研究的只是少数几个变量．尽管各种生命活动的具体情节千差万别，但存在一个普遍的控制机理，这就是蛋白质和核酸分子的一系列顺序衔接的构象变化，即分子形状的变化．

若一个生物大分子由 n 个原子组成，则可用 $3n$ 个变量完全描述这个大分子的运动，其中 6 个变量描述整体的平动和转动，余下的 $3n-6$ 个描述形状．在 $3n-6$ 个变量中，一部分涉及分子内原子之间的相对距离，称为**键长**；一部分涉及原子的相对方位，称为**键角**．对于多于 3 个原子的分子，还需要引入**扭角**描述对平面的偏离．根据不同的问题，在键长、键角和扭角这些生命运动的基本变量中，有一些是更易变化、更重要的．

这里涉及到的原子和分子间的相互作用力都是电磁相互作用力，按结合能的大小可以区分为“强力”和“弱力”两大类．原子结合成分子的共价键和离子键属于“强力”，结合能约为 200～400 kJ/mol；“弱力”在生物体系中也起了重要的作用，例如在核酸中碱基 C 和 G 之间的氢键结合能约为 20 kJ/mol，A 和 T 之间的氢键结合能约为 5 kJ/mol，而水溶液中的离子键的结合能约为 20 kJ/mol，涉及到键长和键角变化的能量约为 4～30 kJ/mol，涉及到扭角变化的能量约为 0.4～4 kJ/mol[①]，它们都在“弱力”的范围内．

在生理温度(25°C)下平均热能为 2.5 kJ/mol，它远小于强作用键能，因此热运动无法改变强作用键．而且，生物体能源 ATP 所储存的能量(≈59 kJ/mol)也只有强作用键能的几分之一，所以利用 ATP 水解释放的能量也不易改变它．这就是说，生物体内由强力形成的键都是稳固的，所储存的键能不是活性能，除非用酶来催化．至于弱力，情况就不同了．即使是最强的弱键，其能量也不过是平均热能的 10 倍，弱键是容易受热运动影响的，利用 ATP 的

① 该能量换算成频率约为 1012 ~ 1013 Hz，这正是微波范围．因此，这个频段的微波会对生命运动产生重要的影响．低频的扭转振动在传输生物大分子的信息方面起了特殊的重要作用．

能量就更容易改变弱键了．因此，在生理温度下，总有一部分弱键容易断裂或产生，一个弱键的平均寿命只有几分之一秒，弱键是敏感的、易变的，储存在弱键中的能量是活性能．总之，生物大分子的构象决定于弱力，弱键在生命活动中起了重要的作用．

弱键主要有范德瓦耳斯键、氢键和“疏水键”．范德瓦耳斯键能对于中等大小的原子约为 4 kJ/mol，氢键能约为 10～30 kJ/mol．“疏水键”是等效意义上的键，它表征水排斥非极性基团的倾向以及水中非极性基团缔结在一起的倾向．我们知道，生物体系中全部分子都处在水环境中，而水具有很强的极性，它的氢原子和氧原子都能形成强的氢键．由于氢键能量远高于范德瓦耳斯键的能量，因此能形成氢键的各个分子一定会优先形成氢键．通常一个水分子有四个近邻分子，它们之间有氢键相连．如果把水和不能形成氢键的非极性基团混合，则两者将迅速分开，各个水分子之间将互相形成氢键而连在一起，从而具有了使水中的非极性基团缔结在一起的倾向．例如，蛋白质中的氨基酸分为极性的(亲水的)和非极性的(疏水的)两大类，于是在“疏水键”的作用下，非极性基团趋向于相互接触，而极性基团则趋向于和水接触，结果使蛋白质折叠起来．因此，“疏水键”与蛋白质的立体构象密切相关．

四　生物大分子中的电子

20 世纪 50 年代，法国的普尔曼夫妇用量子力学理论研究生物大分子的电子结构，建立了量子生物学．

多原子分子分为两类：一类是非共轭分子，电子轨道局域在个别原子的周围；另一类是共轭分子，具有非局域的电子轨道．核酸的碱基嘌呤(A, G)是共轭分子，其中除了 σ 电子[①] 形成分子的刚性骨架外，还有一些在骨架上流动的 π 电子，这些非局域的 π 电子对生物大分子的生化性质起着十分重要的作用．由于 π 电子在整个分子(如嘌呤环、嘧啶环)中运动，它的坐标不确定性大，根据量子力学中的不确定关系，它的动量不确定性就小，因而体系的允许动量值减小，能量降低．这部分降低的能量叫做**共振能**，起稳定的作用．四种碱基 A，G，C，T(U) 中的每一个 π 电子共振能的比值为 0.32:0.27:0.23:0.17(0.19)，这和四种碱基抗辐射电离稳定性的顺序完全一

① 当两个原子沿键轴(z 轴)靠近而形成分子时，由两个原子的 1s 轨道或 $2p_z$ 轨道形成的分子轨道称为 σ 轨道，其分布是以 z 轴为对称轴圆柱形对称的；而两个原子的 $2p_x$ 或 $2p_y$ 轨道形成的分子轨道称为 π 轨道，其分布不再是以 z 轴为对称轴圆柱形对称的，但处于该分子轨道上的电子的轨道角动量在 z 轴上的投影为 $\hbar$，即 $m=1$．

致．其次，由 π 电子能级的计算，可得出最高满分子轨道和最低空分子轨道的能量．这些能量值可提供电子在两个分子间转移的信息，能级间的电子跃迁可给出光谱的知识．此外，由 π 电子波函数的计算可得出电子在共轭分子中分布的信息，由此可得出分子的电荷、偶极矩等性质，这些对生物大分子结构的研究十分重要．用量子生物学还可以说明，某些芳香族碳氢化合物具有强的致癌性，DNA 的半导体性等．

为了说明蛋白质(电介质)传递能量的机制，可以考虑这样一个过程：分子凝聚态中一个原子的电子从激发态跳回基态，释放出来的能量传递给相邻的原子使其电子从基态跃迁到激发态，接着第二个原子中的电子又跳回基态，又把释放出来的能量传给第三个原子……这种运动形式叫做**激子**．但是，激子的运动是不稳定的，其激发能会很快地变成热能而耗散掉．然而，依靠蛋白质分子构象的变化可以使激子的运动稳定化，这种构象变化和电子激发的耦合的运动形式叫做**孤子**或**孤波**．

尽管强键是稳固的，但靠着酶的催化，新陈代谢的每一步总伴随着某些化学基团从一个分子到另一个分子的转移，伴随着一个强键的破裂和另一个强健的生成．酶的催化能力与酶的构象变化密切相关．当底物接近酶时，酶的形状会发生诱导变化而使两者靠得很近，宛如手套和手那样配合默契．因为任何化学反应总是与电子运动有关的，因此酶的催化作用也与构象和电子两种运动的关联有关．化学反应是反应物通过一定的能量屏障——势垒而转变成生成物的过程，如果势垒又高又厚，单靠升高温度就不可能促使该化学反应完成．然而，如果酶和底物复合在一起，就可使化学反应势垒大大降低，从而实现从反应物到生成物的转变．

概括起来，在生物活性中电子所扮演的重要角色有以下几个：π 电子，电子传递链，与构象耦合在一起的各种电子激发的运动，以及酶催化反应中构象–电子系统的运动．总之，分子构象和生物化学反应中的前沿电子是生命活动中最重要的两类变量，它们是微观水平上生命的基本变量，活动能就储存在它们之中．

五　生物大分子的手征性

物质立体结构上的左右不对称性，使它们具有不同的光学性质，称为**光学活性**或**旋光性**．旋光性灵敏地依赖于分子的**手征性**(chirality，简称**手性**)，即具有不能重叠的三维镜象对映异构体，宛如左手和右手那样．对映异构体的很多性质都有很大的差别．例如，一种手性的物质是有毒的，相反手性的物质却是无毒的；D 型天冬氨酸是甜的，L 型天冬氨酸却是无味的．

生物体内蛋白质的所有氨基酸(除甘氨酸外)都是左手性的，称为 L－氨

基酸；核酸中的五碳糖都是右手性的，称为 D－糖．实际上，生物体内不仅大分子的原子基团具有左右不对称性，而且整个大分子的高级构象也具有左右不对称性．例如，蛋白质的 α 螺旋是右手螺旋，还没有发现左手型的 α 螺旋；核酸的 B 型 DNA 是右手双螺旋，还没有发现对应的左手 B 型构象．人们还发现，原子基团的左右不对称性和高级构象的左右不对称性是有关系的．例如，用一部分 D－氨基酸来取代蛋白质中的 L－氨基酸，α 螺旋就要破坏成散乱的螺旋圈．因此，蛋白质和核酸组成成分——原子基团的立体不对称性是高级构象不对称性的基础，是有效地发挥生物功能的要求，是生命物质高度组织化的反映，也是化学进化和生物进化的结果．

地球是在大约 46 亿年前诞生的．从那时开始到 31 亿～33 亿年前的这段时期里，地球上发生了通过非生物途径合成有机物的过程，这个阶段称为**化学进化**．在有机物产生、复杂化和组织化的同时，光学活性物质的产生加速了物质组织化的进程，随之而来的是原始生命的产生和生物进化的阶段．1969 年对落地陨石的分析表明，左右旋成分大致相同，可见“蛋白质的氨基酸都是 L 型的”是与地球上的生命进化密切相关的．如果我们要探索宇宙中其他地方有无生命，现在唯一的指标就是用有无分子手征性破缺来判断，目前基本上否定了在我们可及的宇宙中有地球外生命物质的存在．

关于生物体分子手征性破缺的问题，有两个方面是人们十分感兴趣的．第一方面是破缺的起源问题，即亿万年前引起该破缺的微小扰动是如何发生的；第二方面是这样的系统有哪些特性使得它与生命现象有如此密切的关系．

六 结构生物学的形成和发展

如前所述，几十年来分子生物学的飞速发展已经使它成为整个生命科学的带头学科，全面改变了生物学的面貌．生物学各学科的发展，反过来又对分子生物学提出了更多的要求，促使近年来在分子生物学中的一个新的前沿学科——结构生物学的形成．结构生物学主要采用物理学方法，配合各种生物化学和分子生物学的方法，研究生物大分子的空间结构以及它们的相互作用和运动规律，以阐明生物大分子的生物功能．生物大分子(主要是生命活动承担者的蛋白质，包括受体蛋白、酶蛋白、通道蛋白以及与基因调控密切关联的核酸结合蛋白等)的结构和功能的研究，是阐明生命活动规律和本质的基础，也是当前结构生物学研究的主要内容．

结构生物学当前的主要研究手段有 X 射线晶体衍射分析，二维及多维核磁共振波谱分析，电子晶体学和电子显微镜三维重组，中子衍射，以及圆二色、红外、拉曼和荧光等波谱技术．特别是，核磁共振方法已经成为生物大

分子溶液构象测定最有力的手段，电子晶体学和电子显微镜三维重组近年来也开始在复杂大分子组装体的结构测定上显示威力．但是，X 射线晶体衍射分析在未来一段时间内仍将是生物大分子精细结构测定的主要手段．

近年来，由于高强度、高单色度的同步辐射光源的应用，大面积面探测仪和大容量计算机的出现，使 X 射线晶体结构分析的速度大大提高．到 1995 年，空间结构已研究清楚并已储存到国际数据库的溶液中的蛋白质的数目已超过 3100 种，并以每天增加一个结构的速度迅速发展．与此形成对照的是，从 1985 年第一次完整解析了紫菌光合反应中心到 1995 年，在原子分辨水平上结构被研究清楚的膜蛋白不超过 10 个．然而，膜蛋白结构的研究却是从分子水平上了解生命基本过程的关键，未来的结构生物学将以更大的精力注重难度更高的膜蛋白的研究．

生物大分子通过进化而发展到能执行各种特殊的功能．为了在遗传工程中能遵循同样的选择原理，我们必须以生物大分子的化学和几何结构为根据，去认识它们的功能．在结构生物学的时代，结构的测定完全是直接地瞄准在阐明生物大分子功能的目标上．现代结构生物学的兴趣主要集中在与功能紧密联系的生物大分子复合物结构的阐明上．

如果说以往诸如溶菌酶与其抑制剂$(NAG)_3$ 复合结构分析为揭示酶的作用机制提供了重要信息，紫菌光合作用中心三维结构的解析为阐明光合作用机制以及膜蛋白的空间结构分析开辟了道路；那么现在 DNA 聚合酶与 DNA、人生长激素与其受体、TATAbox 与其结合蛋白、核小体、核糖体等复合物结构的阐明，则又为 DNA 复制、激素作用、基因调控、遗传信息转录和翻译等重要生命活动的分子机制提供了关键的信息．

现代结构生物学的另一个特点是不再满足于静态分子结构的测定，而是追求与生物大分子发挥生物功能相伴随的动态结构的变化．生物大分子及其复合体的结构不是刚性的，而是柔性的，存在着不同层次的不同自由度的运动，它们是生物大分子发挥生物功能的基础和条件．另一方面，生物大分子发挥功能的过程就是和其他分子相互作用的过程，也是构象变化的过程，因此生命物质的结构必然是运动的结构，结构分析也必须分析结构的运动．X 射线晶体结构分析正努力在第四维坐标——时间坐标上跟踪、分辨和描述生物大分子的结构变化，即所谓四维结构测定．由于同步辐射所提供的 X 射线光源可以达到很高的强度，因而可以在秒的时间范围内收集一套完整的衍射数据，这使在秒时间范围内的结构动态测定成为可能．目前，核磁共振方法是测定生物大分子动态结构，尤其是在蛋白质折叠研究中的最佳手段．

许多蛋白质能够在数秒钟内反复伸展开和再折叠，这意味着它们所经历的是某种遵循一定规律的动力学途径，而不是在所有可能设想的构型之间随

机经历的结果．弄清这种动力学过程的机制具有根本的意义．生物大分子，不论从它们的大小、它们的直链聚合物结构和它们独特的原子间力来看，都与凝聚态物理的标准固体或液体不同．一个生物大分子典型地含有 10^4 以上个原子；它的结构能容许巨大的、合作性的构象涨落，并由这些构象涨落提供基本的功能．由于生物高聚物的主链包含有相当强的共价键，而侧链基团之间的相互作用又非常弱，它们的简正模频率覆盖了 10^{11}～10^{14} Hz 这样宽的范围．原则上，所有这些模式和较缓慢的热激活跃迁都有可能在化学动力学上有重要的作用，有一些反应在低温下就能作出近似的描绘，其中只用少数几个相对运动．有希望在涨落动力学和化学反应动力学之间找到具有一致性的联系．这些不寻常的涨落动力学，即研究振幅大、特征频率范围很宽的问题，现在是通过分子动力学的计算机模拟来研究的，它所依据的理论概念是从流体力学的研究中建立起来的．

今天，在揭示生命活动本质的研究中，现代生物物理学、生物化学、分子生物学和结构生物学的相互交叉和融合，使得在这些学科之间几乎不能划分绝对的界线，这是现代生命科学发展的特点和必然趋势．罗辽复还指出："传统生物学的研究是由形态到细胞，再到分子水平的结构，由宏观生理到微观调控，由表型到基因型．伴随着理论生物物理学的建立，将有可能建立反向生物学．它是由基因入手，由分子序列到分子构象，由结构到功能．从统一原理出发，广泛利用数学工具，定量地阐明千变万化的生命现象．"

七 系统生物学的形成和发展

1986 年，美国科学家率先提出了人类基因组计划(HGP)，把研究目标锁定在测定人类遗传信息载体 DNA 的所有核苷酸的排列顺序，以破译人类全部的遗传信息．在该计划的推动下，许多与各种生物大分子或小分子相关的"组学"相继涌现，如蛋白质组学(proteomics)、转录组学(transcriptomics)、代谢组学(metabolomics)等，从而标志着生命科学步入了后基因时代(post-genome era)．

在 20 世纪下半叶，生命科学依赖于以还原论和线性思维为指导思想的分子生物学研究技术，主要目标是寻找特定的基因或蛋白质，从而根据个别基因或蛋白质的行为在分子水平上解释生命活动．随着生命科学的进步和后基因时代的到来，人们逐渐认识到，过去得到的图景过于简单，生命实际上是一个由成千上万种基因、蛋白质和其他化学分子相互作用构成的复杂系统．对于高等动物这样的复杂系统来说，除了分子层面的复杂行为外，还有着细胞、组织和器官等不同层面的复杂活动，生命现象是这样一种复杂系统的整体行为．

过去的分子生物学仅限于研究细胞内个别的基因和蛋白质，而基因组学和蛋白质组学的目标则是细胞内全部的基因和蛋白质．这些“组学”的出现，在生命科学领域形成了不同于以往经典实验生物学的全新研究方式——生物大科学，其核心思想是整体研究，即以生物体内某一类物质为对象进行完整的研究．经典实验生物学属于“小科学”，其实施离不开具体的生物学问题或科学假设，被称为假设驱动的科学；生物大科学通常不针对具体的生物学问题或科学假设，其目标主要是把全部研究对象测定清楚，被称为发现的科学(discovery science)．两者研究思路不同，各有所长，前者深而后者广．如何把两者有机地结合起来，深刻而全面地揭示生命的复杂体系和行为，是后基因时代的重要课题，系统生物学作为一门新兴学科应运而生．

系统生物学(systems biology)是在经典实验生物学、生物大科学、系统科学和计算数学等科学基础上形成的一门交叉科学，它的主要研究目标是：了解一个生物复杂系统中所有组成成分(基因、mRNA、蛋白质、代谢小分子等)的构成，以及在特定条件下这些组分间的相互关系，并分析该系统在一定时间内的动力学过程．

发展适用于复杂生命系统研究和定量化分析的系统生物学技术，具有重要的战略意义．系统生物学技术的核心是整合：一方面，将经典的实验生命科学与新兴的生命大科学(“组学”)整合；另一方面，将实验科学与包括计算科学和数学等在内的理论科学进行整合．

系统生物学的基本工作流程有如下四个阶段：

(1) 根据已知的信息和科学问题，选择特定的生物系统(亚细胞、细胞、组织或个体)，建立初步的系统模型．

(2) 进行经典实验生物学与各种组学的研究，包括系统地改变被研究对象的内部组成成分(如基因突变)或外部生长条件，然后观测在这些情况下系统组分或结构相应的变化，包括基因表达、蛋白质表达和相互作用、代谢途径的变化等，把得到的有关信息进行整合．

(3) 把通过实验得到的数据与根据初始模型预测的情况进行比较，然后对模型进行修正．

(4) 根据修正后的模型的预测或假设，设定和实施新的改变改变系统状态的实验，重复第(2)、(3)阶段的工作，不断地对模型进行修正和精炼．

系统生物学从复杂的、整体的角度对生命系统的各种活动和重大疾病的机理进行研究，为克服经典的生命科学的研究方法的局限性提供了一个有力的工具．系统生物学的理想就是要得到一个尽可能接近真正生物复杂系统的理论模型，需要实验室内的研究与计算机模拟和理论分析的有机结合．由于对研究中海量数据的巨大的计算需求以及复杂生命系统的非线性动力学特

征，现有的数学和计算科学都还不能完全胜任，因此发展满足于系统生物学研究需求的新的算法和数学工具也将是一个巨大的挑战.

近年来，系统生物学逐渐得到了生物学家的认可，并引起了生物学研究领域以外的科学家的关注. 1999 年，世界上第一个系统生物学研究所成立于美国的西雅图. 2000 年，首届国际系统生物学大会在日本东京召开. 2002 年 3 月，美国《科学》周刊登载了系统生物学专集. 2003 年 9 月，美国哈佛大学医学院成立了世界上第一个系统生物学系. 包括中国在内的世界上许多国家，也都相继成立了系统生物学的研究机构. 2004 年，生物医学与其他学科的交叉为生命科学的前进提供了强大的动力，蛋白质组学、干细胞与组织器官工程等方面的研究都取得了突破性进展，系统生物学逐渐成为生命科学发展热点.

§4-4 生命信息的遗传和表达

一 遗传密码

生物体既不具有周期性，又不是无序系统，这种具有复杂结构的系统的特点是包含有极其丰富的信息. 而且，在时间推移的过程中，它还要逐渐展开. 实际上，代表这动态结构的信息正是生命的精髓. 任何一个生命都是从父母遗传给他的 DNA 开始的. 尽管人的生殖细胞的 DNA 只有 6×10^{-15} kg，从物质组成来讲这一点质量可以说是微不足道的，从能量角度来看也没有蕴藏什么稀奇的能量，但是它却包含了生命发育、成长到死亡的全部信息，即 DNA 的意义在于包含信息.

从生命起源的观点看，现代的生命是从原始生命进化而来的，每一点滴的进化都必须通过信息存储在 DNA 中，通过 DNA 序列的变化来实现. 因此，无论从个体发生还是从种系发生的角度看，生命皆与信息休戚相关. 生物体是一个由信息网络构成的系统，适应于内外环境变化实现调控，并且不断新陈代谢，自我完善. 这个信息系统还具有自我复制、遗传到下一代、并且在世代更叠中不断进化的功能.

沃森–克里克的 DNA 双螺旋模型，说明了遗传信息存储在 DNA 的碱基序列之中，DNA 的复制保证了细胞分裂过程中遗传信息忠实地传递. 蛋白质是生命功能的执行者，是基因的产物. 遗传信息是如何从信息分子 DNA 传递到功能分子蛋白质的，这个问题成为分子生物学的关键问题. 核酸是用 4 种碱基书写的语言，蛋白质是用 20 种氨基酸书写的语言，这两种语言之间的联系就是遗传密码问题.

1955 年物理学家伽莫夫(G.Gamow)推测，用 4 种碱基来编码 20 种氨基酸，至少需要用 4 个碱基的三联体，即编码一个氨基酸的碱基数不能小于 3. 三个碱基决定一个氨基酸编码，称为**三联体密码**或**密码子**，共有 $4^3 = 64$ 种. 1961 年，尼仑伯格(M. Nirenberg)等人用人工合成的 RNA 作为模板，进行无细胞蛋白质合成，检验各种可能的核苷酸三联体，以便建立密码子和氨基酸之间的对应关系. 1966 年，柯拉纳进一步将有机化学合成和酶合成方法结合起来，通过人工模拟氨基酸的生物合成，证实了尼仑伯格等人的实验，从而完全破译了遗传密码.

遗传密码的破译揭示了信息如何从核酸传递到蛋白质的秘密. 遗传信息存储在由 A、C、G、T (DNA)或 A、C、G、U (RNA)四个文字书写的核酸序列中，序列是遗传信息的载体. 1955 年桑格发表了氨基酸序列分析技术，1977 年吉伯特和桑格等人发展了 DNA 快速测序技术并测定了噬菌体 ΦX-174 的全部顺序，此后蛋白质和核酸的序列的资料迅速积累. 例如，1990 年 12 月基因文库的第 66 版软盘共包含了 5.13×10^7 个核苷酸. 一个基因 DNA 序列的平均长度约 1200 对碱基，哺乳类的基因大约包含 10^9 对碱基. 研究核酸序列中蕴含的巨量生命信息，以及探索这些信息表达的动力学，不仅是今天生命科学的重大问题，而且对于物理学的发展也有十分重要的意义.

氨基酸序列决定了蛋白质的一级结构、高级结构和功能，核苷酸的序列又指导着氨基酸序列的形成，决定着基因的表达和调控，它们决定了包括生命形成和演化以及个体发育和新陈代谢等在内的一切生命活动的基本方面. 而且，这每一种由长达千万个单位组成的序列都是稳定的. 一个微小的变更，哪怕是某一碱基的取代、缺失和插入，往往会引起生命活动的严重障碍. 由此可见，这些丰富的序列资料向研究者提供了生命系统最重要的信息. 展开在我们面前的是一本厚厚的生命之书. 然而直到今天，人们只是发现了这本“天书”的若干片断，离开读懂它和理解它就更远了. 大自然是如何写下这本生命之书的，人们几乎还是一无所知. 只有经过生命科学家、物理学和数学家的共同努力，读懂生命之书的任务才有解决的希望.

二　基因工程

在人类掌握了生命中核酸和蛋白质相互作用的奥秘之后，立即开发了基因工程的新技术. 20 世纪 50 年代初，麦克林托克在玉米中发现了转位基因，这是一种可转移的 DNA 片段. 后来发现，很多有机体都有这种可转移的基因，长度为数百至数千对碱基不等，它们能在同一细胞的不同染色体间或同一染色体的不同位点间转移，且原位点的这种 DNA 序列不丢失. 有时还利用转位因子的可移动性，先把某种基因植入，然后一道转移到新的地

方．因此，人们可以利用这些可移动元素作为载体，运送经专门挑选的基因到预定的地方去，在那里繁殖后代，生产基因产物——蛋白质．

为了能对基因进行人工操作，为了对 DNA 序列进行剪切、修饰和连接等处理，首先必须要有工具．人们发现，生物体中的酶可以充当这种工具，基因工程中常用的工具酶多达几十种，每一种都有特定的功能．有的像手术刀，有的像粘合剂，还有的像砌砖机，可以合成完整的双链 DNA 分子．最有名的一类叫做限制性内切酶，是 1970 年阿伯尔(Arber)首先预言，并由史密斯(Smith)首先发现的．次年，内森斯(Nathans)把这种酶用来切割一种猴病毒的环状 DNA，进行遗传学研究．迄今发现的限制性内切酶已达 400 多种，在基因工程中常用的有 10 多种．

1972 年，伯格(P.Berg)用 DNA 连接酶把 λ 噬菌体的 DNA 接到猿猴病毒 SV40 的 DNA 上，成功地实现了第一个体外重组的人工 DNA 分子．1973 年，科恩(S.N.Cohen)和博耶(H.Boyer)把体外重组的 DNA 分子导入大肠杆菌中复制，这种无性繁殖的操作称为**分子克隆**，基因工程就从此诞生了．

把外源 DNA 运进宿主细胞必须要有载体，常用的载体有细菌质粒、噬菌体和病毒三类．用工具酶把目的基因插入质粒或其他载体，构建重组 DNA，导入宿主细胞(称为转化或转染)，使目的基因在宿主细胞内复制(称为**克隆**)和表达，以便获得人们所需要的表达产物——蛋白质或多肽，这便是基因工程的全过程．除了生产新型蛋白质、生物制剂、新型疫苗等应用外，用 DNA 重组技术还可在分子水平上对基因进行改造，培育新的动植物品种．这里的问题已不是改造单个细胞的遗传特性，而是跨越细胞改造整个机体的遗传特性了．

§4－5　生命过程中的自组织现象

一　生命过程的热力学

(1) 信息量

信息是对事物的状态、存在方式和相互联系进行描述的一组文字、符号、语言、图像或情态．信息的特征在于消除事物的不确定性．在信息论中，用

$$u=-\sum_{i=1}^{n}P_i\ln P_i=\sum_{i=1}^{n}P_i\ln\frac{1}{P_i} \tag{4.1}$$

来度量不确定性，其中 P_i 表示某事件出现某种可能结果 x_i 的概率．显然，有

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1. \tag{4.2}$$

信息的获得，可以减少或消除事物的不确定性；不确定性减少得越多，说明所获得的信息的信息量越大．如果在获得某信息的前后，事物的不确定性分别为

$$u_1 = -\sum_{i=1}^{n} P_{1i} \ln P_{1i} \quad \text{和} \quad u_2 = -\sum_{i=1}^{n} P_{2i} \ln P_{2i}\ , \tag{4.3}$$

则可以定义信息的信息量为

$$I = -K(u_2 - u_1) = K(u_1 - u_2). \tag{4.4}$$

如果某事件出现每种可能结果的概率都相等，即

$$P_1 = P_2 = \cdots = P_i = \cdots = P_n = P = \frac{1}{n}, \tag{4.5}$$

则上述各式可以分别简化为

$$u = -\ln P = -\ln \frac{1}{n} = \ln n, \tag{4.6}$$

$$I = K \ln \frac{P_2}{P_1} = K \ln \frac{n_1}{n_2}. \tag{4.7}$$

例如，在某人投掷硬币之前，有 $n_1 = 2$, $u_1 = \ln 2 = 0.693$；如果他在投掷硬币之后告诉我们："国徽朝上"，则有 $n_2 = 1$, $u_2 = \ln 1 = 0$．所以，我们说"国徽朝上"这个信息的信息量为

$$I = K \ln 2 = 1 \text{ bit}, \tag{4.8}$$

其中 bit (比特)是信息量的单位，显然有 $K = 1 \text{ bit} / \ln 2$．又如，计算机采用二进制，每一位数都可以有 0 和 1 这两种结果，N 位数就可以有 $n_1 = 2^N$ 种可能的结果．一但我们给出了一个 N 位数，即 $n_2 = 1$，则其信息量为

$$I = K \ln 2^N = N \text{ bit}, \tag{4.9}$$

这样就把信息量 I 与二进制序列的位数 N 对应了起来．

(2) 信息与熵

1948 年，香农(C.E. Shannon)把与度量不确定性的量 u 成正比的

$$S = -K \sum_{i=1}^{n} P_i \ln P_i \tag{4.10}$$

称为信息熵．熵的概念的这一推广，为熵从热力学进入信息、生物以至经济和社会领域铺平了道路．与信息量的定义式(4. 4)比较，可得

$$I = -K(u_2 - u_1) = -K(S_2 - S_1) = -\Delta S\,, \tag{4.11}$$

即信息的信息量就是信息熵的减少量或负熵的增加量.

如果用 W 表示可能出现的结果总数，若不确定事件的每个可能结果出现的概率相等，即 $P_1 = P_2 = \cdots = P_i = \cdots = P_W = P = \dfrac{1}{W}$，则信息熵可写为

$$S = -K\ln P = K\ln W\,;$$

再令 $K = k_B$ (玻耳兹曼常量)，则上式就是统计物理学中的玻耳兹曼关系式

$$S = k_B \ln W\,, \tag{4.12}$$

其中 W 表示系统的微观态数. 利用 $K = 1\ \text{bit}/\ln 2 = k_B$，我们还可以得到

$$1\ \text{bit} = k_B \ln 2 = (1.38\times10^{-23}\ \text{J/K})\ln 2\,, \tag{4.13}$$

这就是 bit 与热力学单位 J/K 之间的换算关系.

一般而言，熵 S 是系统内部无序性或混乱性的度量，也是热量传递过程中能量的度量. 能量是作功的潜在能力，然而能量却不一定都能作功. 系统中可用来作功的那一部分能量称为自由能，而不能作功的无效部分能量就是用熵来度量的. 现在，我们还可以从信息熵的角度来讨论这些问题.

一个大肠杆菌含有 2.1×10^4 个 DNA 分子，4.2×10^4 个 RNA 分子. 每个 DNA 或 RNA 分子平均有 4 000 个核苷酸，而每个核苷酸有 4 种碱基，其信息量为 $\log_2 4 = 2$ bit，因此一个大肠杆菌的核苷酸信息量为 5×10^8 bit. 一个大肠杆菌还含有 4.7×10^6 个蛋白质分子，而每个蛋白质分子平均有 1 000 个氨基酸(有 20 种)，考虑到每个氨基酸有 $\log_2 20 = 4.3$ bit 的信息量，所以一个大肠杆菌的蛋白质信息量为 2×10^{10} bit. 两项合在一起，一个大肠杆菌的总信息量为 2×10^{10} bit，相应于 2×10^{-13} J/K 的熵减少. 换句话说，由于序列形成中物质的有序化，系统的熵减少 2×10^{-13} J/K. 若核酸和蛋白质序列形成的热力学效率为 12 %，那么实际排出的熵为

$$\Delta S = (2\times10^{-13}/0.12)\ \text{J/K} = 1.7\times10^{-12}\ \text{J/K}\,.$$

如果细菌培养是在 300 K 温度下进行的，那么使系统熵减少 ΔS 而排出的热量为 $1.7\times10^{-12}\times310\ \text{J} = 5\times10^{-10}\ \text{J}$. 每个大肠杆菌的干重为 6.7×10^{-13} g，复制时间为 1200 s，因此每克大肠杆菌在成长过程中所耗散的功率为 0.6 W，这个理论结果与实验完全一致.

(3) 生命过程的热力学

早在 1943—1944 年间薛定谔就提出，作为开放系的生命是自组织的低熵状态. 上述例子表明，生长中物质的有序化要求减少熵，或者说从环境中不断地吸取负熵，因而必须向外发散热量. 实际上对于任何一个成熟细胞，为了维持它的生命功能，为了维持它的自组织的低熵状态，也必须从环境中

不断地吸取负熵，耗散一定的热功率．普遍而言，任何不可逆的物理和化学过程都每分每秒地产生熵，要活着的唯一办法就是不断地从环境中吸取负熵，即生命以负熵为生．新陈代谢的实质就在于，它使有机体成功地消除了当它自身活着的时候不得不产生的全部熵．

1969 年，在“理论物理学与生物学”国际会议上，普里高津(I.Prigogine, 1917—)提出了耗散结构的理论．耗散结构有以下几个特点：第一，耗散结构发生在开放系中，要靠外界不断提供能量和物质来维持，还要在系统内部进行着某种不可逆的非平衡过程，不断产生熵并排出熵．因为它要靠耗散过程来维持，所以称为耗散结构．第二，只有当控制参数达到一定阈值时才突然出现．第三，它是旧状态不稳定的产物，一旦产生就具有相当的稳定性，不被任何小扰动所破坏．第四，它具有时空有序的特点，说明它是一种低熵的有组织状态，因此耗散结构的出现是一种物质在时空中再组织的过程．第五，当控制参数达到一定阈值时系统所进入的时空耗散结构解往往是多重的，它们不再具有原先的单一对称性，且在偶然地自发选择了其中的一个解之后就按此解演化．由于耗散结构的多重解一般不具有对称性，所以选择其中的一个解称为对称性的自发破缺，它是产生有序性的根源．第六，耗散结构是通过很小的扰动或涨落的正反馈放大而出现的．正是这种随机涨落把非线性系统推向新的有序结构，作为一个高度的组织系统，生命处处受着随机规律的支配．总之，自组织理论的发展表明，复杂的生命系统组织可以利用理论物理学和数学的方法来研究．

与物质的自组织相联系，活机体中还有一个能量的自组织问题．例如，眼睛的网膜视紫质具有单光子敏感性，吸收一个光子后产生的脉冲能量 10^8 倍于被吸收光子，这些能量是如何在 10^{-2} s 的时间内集中起来的？又如，肌肉收缩机理是由于肌球蛋白头部和肌动蛋白纤维的交替作用，要举起 1 kg 物体 1 cm，需要 10^{17} 个 ATP 分子水解而来的能量，这些原来存储于如此众多分子的能量如何同时释放出来用于肌肉收缩而不至于中途耗散？总之，生物体中的能量可以沿一定路径长距离输运而不耗散，生物体中的能量还可以快速产生、相干叠加而不耗散，物理学家做了各种尝试来解决这些问题．

物理学中用熵产生(即系统内部不可逆过程产生的熵)来度量热耗散，而生命机器正是遵从物理学中的最小熵产生原理而活动着的．因此，生命以负熵为生，生命以熵产生最小而活，这两句话构成了生命的热力学基础．

二　生命起源的自组织问题

地球上的万千物种是进化的结果，这种多样性表明了遗传的差异性因子(基因突变和重组等)和自然选择的惊人的造成分岔的能力．更令人惊讶的

是，这万千物种具有统一的普适的遗传密码，基本一致的翻译机构，以及相同的分子手性．分析表明，在达尔文物种进化前有一个分子进化阶段，它可能位于化学进化的后期，在这个阶段中形成普适密码和翻译机构．

为了使一个分子序列成为信息载体，首先它必须具有差异性，因为用一个字母书写的语言所包含的信息量极少，必须有突变机构使之变成若干个字母(实际上是 4 个字母)书写的千变万化的语句．其次它必须具有选择性，在用 4 个字母书写的长度为 N 的语句的 4^N 种可能性中，只应保留少数几种可通过复制而稳定地存活下去，大部分应在选择中被淘汰，这样才能在信息空间出现对称性的自发破缺，才能出现某种确定的序，这就是**分子进化模型**．

对于实际的进化过程而言，分子进化模型是太简单了．关键的问题是，核酸和蛋白质是相互作用的体系，它们应协同进化，应该使一组功能上耦合的自复制体整合起来并一起进化．这里所说的一组，至少必须是两类，一类代表核酸，一类代表蛋白质．前者提供实现遗传连续性的信息分子，后者提供高效利用环境中化学物质的机制．最初的自复制体可能是较短的核酸链，但为了保证复制的精确性，必须有催化支持．因为复制的物理基础是碱基的氢键结合，从这个能量和热运动能量的比较可知，复制的准确性最高只有 10^{-3} 的量级，而实际复制的准确性达到了 10^{-8} 以上．因此，必须有校读机制，需要核酸外切酶和连接酶等几种酶参与．所以，伴随着核酸的进化，必须有催化剂——酶的进化，并且翻译机构也必须随之进化．此外，从自然选择的角度讲，选择力是直接作用于蛋白质这些功能分子的，蛋白质也必须与核酸协同进化．

为了给出核酸和蛋白质协同进化的模型，1977 年前后艾根提出了超循环理论．超循环是一种自我进化的循环过程．为了实现进化，必须把自复制体组织在一起，并能够实现相干进化，即每一个体的优势都能被所有成员利用．从某种随机事件开始，通过循环反馈到起点，变成放大作用的原因，通过因果的多重循环，向高度有序的宏观组织进化．因此，超循环提供了一种“一旦－永存”的选择机制，这可用来解释普适密码的某些规律性．

在核酸和蛋白质协同进化的基础上，产生高度自组织的系统，这就是原始生命，于是进入了生物学进化的阶段．按照物理学中的自组织理论，当系统的控制参量变化达到某一阈值时，在涨落力的驱动下原来的稳定态开始失稳，于是系统被推向一种新的结构．把这个观点运用到分子序列的进化模型中，在遗传差异性因子的作用下，序列会进化到一定的稳态．究竟取什么稳态，依赖于选择力．因此，随着选择力的变化，物种的结构也会跟着变化，这里选择力就相当于控制参量．当选择力变化到超过某一阈值时，旧物种失稳，新物种在遗传差异性因子的驱动下开始产生．与选择力变化的因素相联

系着的是竞争排斥原理[①]，它使亲缘关系本来密切或其他方面相似的物种之间产生愈来愈明显的生态分离，这些生物所受到的选择力将出现明显的差异，导致它们的基因序列向不同的稳定态演变，最后在不同的生态条件下固定为不同的物种.

参考文献

[1] 罗辽复. 物理学家看生命. 长沙：湖南教育出版社，1994
[2] 《技术预见报告》编委会. 技术预见报告 2005. 北京：科学出版社，2005
[3] 甘子钊，韩汝珊，张学群. 生命科学中的物理学. 北京：北京大学出版社，1996
[4] [美]学科交叉和技术应用专门小组. 学科交叉和技术应用. 北京：科学出版社，1994
[5] 郝柏林，刘寄星. 理论物理与生命科学. 上海：上海科学技术出版社，1997
[6] 朱玉贤，李毅. 现代分子生物学. 北京：高等教育出版社，1997
[7] 阎隆飞，张玉麟. 分子生物学. 北京：中国农业大学出版社，1997
[8] 刘培楠，吴国利. 基础分子生物学. 北京：高等教育出版社，1983
[9] 冯端，冯步云. 熵. 北京：科学出版社，1992
[10] 邹承鲁. 第二遗传密码. 长沙：湖南科学技术出版社, 1997
[11] 欧阳钟灿，刘寄星. 从肥皂泡到生物膜. 长沙：湖南科学技术出版社，1997
[12] 鲁润龙，顾月华. 细胞生物学. 合肥：中国科学技术大学出版社，1991
[13] 汪堃仁，薛绍白，柳惠图. 细胞生物学. 北京：北京师范大学出版社，1990
[14] 黄裕泉，樊正忠，陈彩安. 遗传学. 北京：高等教育出版社，1989
[15] 寿天德主编. 现代生物学导论. 合肥：中国科学技术大学出版社，1998
[16] 卢光莹，华子千. 生物大分子晶体学基础. 北京：北京大学出版社，1995

① 生态学中把物种栖息的空间(包括温度和湿度等的广义的空间)称为**生态位**. 由于竞争，具有同样生态位需求的两个物种，在同一区域内不能形成稳定的种群. 换言之，不能由两个以上的种群占据同一实际的生态位，这就是竞争排斥原理，与物理学中的泡利不相容原理相似.

第五章　高新技术研究

§5－1　概　　述

20 世纪 50 年代以来，世界范围内高新技术研究及其产业化的崛起，对当代经济和社会生活的各个方面产生了巨大的影响，正在深刻地改变着社会的进程．技术是社会生产和改造自然的物质手段、智能手段和信息手段的总和．高新技术是人类用当代最新科学成就有目的地改造世界和认识世界的物化形式．它以基础研究所揭示的自然界的新知识为背景，进行技术的创新；它以人的智力和才能为主导，形成不同于传统技术的知识和资金密集的新兴技术；它开拓全新的技术领域，而不是对原有技术的渐进式改造．高新技术与现代的单项尖端技术或新兴技术不同，它总是与产品和产业相联系，是对产品和产业中技术的含量和水平的评价．

今天，高新技术已经成为一个国家综合国力的象征，成为各个国家发展战略中的一个重要的组成部分．一般而言，高新技术主要是指信息技术、生物技术、新材料技术和能源技术．

高新技术与基础科学研究有着十分密切的关系．19 世纪末和 20 世纪初，由于 X 射线、铀的天然放射性和电子的发现，以及相对论和量子论的创立，导致了物理学和其他自然科学的革命性变革，在此基础上物理学、化学、生物学、天文学和地学等基础科学从经典形态发展到现代形态．这一庞大的现代自然科学群为高新技术的诞生和发展提供了基础理论背景和前题条件．高新技术本质上是现代自然科学成果的技术表现．

1983 年 10 月，我国提出了关于新技术革命的对策．1986 年 3 月，著名科学家王大珩等人提出了对世界高新技术进行战略跟踪的建议．经过众多专家的论证，我国提出了“高新技术研究发展计划”，又称“863 计划”，包括生物技术、航天技术、信息技术、激光技术、自动化技术、能源技术和新材料技术等 7 个领域以及相应的 15 个主题项目．

为了把握科技发展趋势，提高科技创新能力，中国科学院启动了“中国未来 20 年技术预见研究”，《技术预见报告 2005》[1] 是中国科学院科学与技术预见系列报告的第一本．

高新技术研究的内容十分广泛，本文仅就某些方面的内容作一简要的介绍，部分内容节选自《技术预见报告 2005》．

§5-2　信息技术

当代信息技术主要是指信息的获取、传递、处理、存储和显示等技术．当代信息技术的发展，大大提高了人类思维劳动的效率，从根本上改变了人类从事生产、工作和经营活动的方式．

一　计算机技术

摩尔定律[①]反映了计算机产业的发展具有强劲的技术驱动力，而工业标准的形成是计算机得以广泛应用的重要原因．CPU、网络、内存、磁盘都以每 18 个月左右性能(速度、带宽或容量)便翻一番的速度发展，这使得越来越多的应用能够在计算机上实现，并且效果越来越好．

应用需求的增长与扩大，是计算机技术发展的最大驱动力．除传统的科学计算外，工业仿真、生物制药、细粒度精确天气预报、海量信息服务等应用都对计算机发展提出了新的需求．例如，当前世界上最快的计算机 NEC Earth Simulator 以模拟全球气候变化为设计目标，IBM 正在研制的 BlueGene 千万亿次计算机以预测蛋白质折叠为第一需要，IBM 万亿次 Cell CPU 以能在游戏中模拟真实的人物和环境为驱动力．未来 10～15 年内计算机领域发展最快的是计算机与其他学科交叉的领域，如生物计算或生物信息学、Compute-X 和 X-Info 将成为未来的研究重点．

高性能计算机是国家的战略需要，也是计算机工业技术进步的火车头．当前的大规模并行机或机群聚集了成千上万个计算机部件的计算和存储能力，但包含数千个以上处理器的高性能计算机的平均无故障时间一般只有几小时，已经无法完成需要几天计算时间的大规模计算．此外，CPU 功耗的不断增加，使高性能计算机的可靠性问题进一步加剧．今后的发展方向是如何利用大量不太可靠的零部件构成可靠的高性能计算机．采用容错、自修复等技术将成为研制高可用性计算机的必由之路．

未来 15 年的另一个主要努力方向是提高计算机各种终端设备的易用性和智能化程度．计算机终端的发展无所不在，人们将越来越感觉不到计算机的存在．从现在的 PC 发展到 UC(ubiquitous computing)，从“人围着计算机转”发展到“计算机围着人转”．

---

① 计算机芯片的集成密度随年代而呈指数式的增长，服从被称为摩尔(Moore)定律的经验规律：集成电路的晶体管数量每 18 个月增长一倍．到了 2015 年左右，集成电路的尺寸将达到其物理极限，芯片厂的投资量也会超出了社会的承担能力．

具体而言，网络是未来 20 年计算机领域最重要的技术之一，2020 年以前我国要建成低成本的信息共享与协同工作的网络系统，使全国至少 8 亿人能上网．开发出以 Pb 级(10^{15}bit)海量信息为处理对象的计算技术．开发出数千万亿次甚至更高性能的超级计算机．开发出万亿次以上的高性能 64～128 位处理器．研究可显著提高计算机系统效能(包括计算机的效率、研制成本与时间、运行和维护成本、系统的可靠性和稳定性等)的技术，使其得到数量级的提高．

二　人机交互与智能处理技术

人机交互与智能处理技术是为了使计算机拥有类似人的感知和思维能力而开发的技术，它包括语音处理、自然语言理解、图像识别、多媒体、生物认证和机器翻译等技术．这些技术实质就是下一代数字技术的核心竞争力所在，因为它们使计算机需求的无所不在成为可能．

具体而言，多模交互成为人机界面的主流方式，亦即计算机输入的方法将不再只是鼠标、触摸屏和键盘，人们还可以通过语音、手势等向计算机发号施令；文本机器翻译系统成为信息交流的重要工具，廉价实用的多语言机器翻译将得到实际应用；意识将会有限地应用在人机交互中……

在未来 20 年内，这方面的研究和应用重点包括：

(1) **生物特征识别**(biometrics)技术是指利用计算机根据人体所固有的生物特征来进行个人身份鉴定．生物特征是生理特征和行为特征的总称，包括指纹、掌纹、虹膜、脸像、声音和笔迹等．网络信息化时代的一大特征就是身份的数字化和隐性化，如何准确鉴定一个人的身份并保护其信息安全是信息化时代必须解决的一个关键性的社会问题．

(2) **多用途无线无源智能卡**不仅能够用于证明个人身份，给出个人的健康、医疗、从业和技能资格等信息，而且可以存储信用等级、消费限额等有价信息．

(3) **语音技术**是未来人机交互的一个关键核心技术，因为口语是人们日常生活中主要的交流手段．目前得到实际应用的语音技术主要是语音识别技术和语言合成技术两类：语音识别技术使人们可以通过语音完成各种操作，而语言合成技术则可以把文字转换成语言，使计算机能发出自然清晰的话音．在未来的 20 年内，语音技术将从传统的语音命令识别发展到人机对话识别，计算机将可以在特定的领域内理解人所说的话的语义，并按照语义去知识库中搜索所需要的信息，然后反馈给用户或完成相应的任务．同时，未来机器合成的声音也将更加自然并初步具备感情色彩．此外，语音技术的导入还会在计算机输入、输出以及口语同声翻译等方面带来极大的便利．

三　软件技术

经济和社会各方面需求的不断变化，对软件技术提出了越来越高的要求，促使人们研究新形态的软件理论和技术，在新的计算机环境中实现灵活、可信、高效的软件.

软件技术可以划分为软件运行平台和软件开发平台两大类. 操作系统、数据库和中间件构成软件运行平台的主要部分；基于构件化的软件工程方法和软件质量保证技术与体系研究，是软件开发平台的两项核心内容；软件服务是未来软件系统发展的一个重要表现形态.

软件技术的网络化、构件化和并行化是过去 10 年的发展热点，也将是未来 5～10 年的发展主题. 支持无线移动计算乃至支持普适计算的网络化软件技术是未来的发展趋势. 随着信息技术向高性能低成本、普适计算和智能化三个主要方向的持续发展，软件将面临换代，软件技术的需求也将发生重大转折. 网络化、服务化、平台化、智能化、普适化和高可信性是未来软件的发展方向.

具体而言，未来 20 年前后软件领域中将发展以下几项技术：开发出能模仿人类认知能力的计算机系统，开发出支持多数据模型的智能数据库系统，实现面向普及软件服务的高可信网络环境，普及软件工业化生产方法，广泛应用无平台障碍的软件技术.

四　通信技术

从当前通信技术发展的潮流来看，数据化、宽带化、综合化已成趋势，通信网络向更加智能化、多业务、高性能、低成本、兼容性、灵活性和高可靠性发展已成必然. 未来通信技术的发展将受需求驱动，通信网络将利用移动通信、光纤通信、卫星通信、微波通信等多种先进的通信技术，提供高效、优质的多层次、多方位、多形式的信息服务.

具体而言，(1) 随着网络应用加速向 IP (internet protocol，**因特网协议**或**互联网协议**)汇集，网络将逐渐向着对 IP 业务最佳的分组化网的方向演进和融合，融合将成为下一代通信网络发展的主旋律. 融合将体现在语音技术与数据技术的融合，电路交换与分组交换的融合，传输与交换的融合，电与光的融合，最终导致传统的三网(电信网、计算机网和有线电视网)的有机融合. (2) 业务的个性化与集成的互动性. (3) 光波分复用技术的出现和发展，为通信网提供了巨大的传输容量和低成本，同时也要求传统的光网络向新一代智能化光网络演进. (4) 面对核心网和用户方带宽的快速增长，接入网的宽带化和 IP 化将成为发展的主要趋势.

未来通信技术的发展，需着重研究下一代网络(NGN)及开放的业务平台，多功能、多模式、智能化的个人终端，新一代光网络技术，新一代移动通信系统，量子通信技术，各种宽带接入技术等.

五 生物信息与脑科学

生物信息学和神经信息学，是生物学和脑科学与信息科学交叉形成的新学科，人类基因组计划和人类脑计划则大大推动了这两门学科的发展.

生物信息学的研究目标是揭示基因组信息结构的复杂性及遗传语言的根本规律，基因组信息学是生物信息学的源头和基础. 基因组信息学包含基因组信息的获取、处理、存储、分配、分析和解释.

人类基因组计划不仅试图解释人体内产生的所有蛋白质，而且试图理解编码蛋白质的基因如何表达，以及这些基因如何集合起来对抗其他类似的基因，还要理解人类个体之间的基因差异如何，以及 DNA 序列如何翻译成可见的表型，构建于 DNA 序列之上的多层信息将揭示隐藏于 DNA 中的信息. 当人们面对数百亿个测序数据基础上建立起来的约 30 亿个碱基长的人类基因组全序列图谱及其初步分析结果时，人们在惊叹巨大成就的同时深感生物信息学所面临的新挑战的严峻.

在未来 20 年里，在以下几个方面可能取得突破：初步阐明与分析基因网络的机理和功能，借助于图论、拓扑学、动力学系统、突变理论等方面的成果，基本实现对一些模式生物的整个调控网络进行动态地系统地描述，随着基因电路、人造生命等方向的深入，人们将获得从部件到系统的更深层的知识，使系统生物学的研究取得实质性进展；开发出**非编码基因**[①]的识别和分析方法；初步探明蛋白质折叠机理；人类神经组计划和人类脑计划取得实质性进展；心理过程的人工采集、分析与调控技术的开发.

六 微电子、光电子与微系统技术

随着新的微纳米加工技术(如极紫外曝光技术、投影电子束曝光技术和微压印技术等)的突破和相继进入商业化应用，在未来 20 年内，微纳米电子技术将跨过 10 nm 技术节点，使芯片速度逼近 1000GHz. 同时，集成电路的主要发展方向是将电子系统集成为片上系统，以满足各个领域的集成化、信息化、智能化的全方位需求.

---

① 编码的蛋白质基因只约占人类基因组的 3%，其余 97%左右的 DNA 序列的功能目前仍不清楚，这些非编码 DNA 的表达产物是许多对生命过程具有调控能力的信息载体，称为非编码基因(ncRNA gene).

为了满足通信网带宽及传输速率不断增长的需求，光电子技术要提供可调谐分布反馈激光器与电吸收调制器集成光源及其阵列，采用先进的加工技术制造出大规模光开关阵列、全光波长转换器、超宽带光放大器等光子集成电路，开发高性能光子集成器件及其封装系统.

微机电系统技术要在各类集成传感器系统、光网信息接口与转换用的大规模光开关阵列和波导光栅阵列、生物医学采集系统、智能信息输入输出系统以及高密度微机械硬盘等方面取得商业化的应用，就必须融合传统 IC (integrated circuit，集成电路)技术，发展先进的表面硅工艺、体硅工艺、牺牲层工艺等多种微细加工技术. 因此，功能/智能集成技术将成为微电子、光电子与微机械技术今后发展的主导方向.

为了满足 IT (information technology，信息技术)不断发展的需求，固态电子器件不得不继续向着小尺度、低维度方向发展，使得其有源区最终成为一种量子结构，人们开始研制由具有某种特殊量子效应的器件集成起来的电路. 同样，光和电磁波的传播与控制技术也出现了重大的变革，例如由介电材料在空间上作周期性排列就构成了人工光子晶体，它具有光子禁带的特异性，使一定频率范围内的电磁波不能沿结构的任何方向传播，这引发了新概念光子器件和部件(光子晶体激光二极管、光子存储器等)的探索研究. 20 世纪 90 年代以来科学家提出的量子计算机和量子通信，更是建立在量子力学基础上的、以量子波函数作为信息载体的新技术，此外还有半导体自旋电子技术和 DNA 分子计算技术等，它们的实现必将呈现出跨越式的突破.

具体而言，以下三个技术课题具有特殊的重要性：微磁光机电系统将在微型光学仪器、光学检测系统和光通信系统等方面得到实际应用，全固态半导体白光照明技术将成为照明技术的主流，

七　信息存储与显示技术

在信息存储方面，随着集成电路技术的发展，功耗小、可靠性高的固态随机存储器将得到广泛应用，其他各种存储技术也将并行发展.

平板显示器件将成为主要显示器件，大部分可能采用液晶显示(LCD)器件，但等离子体显示(PDP)器件也有其大尺寸显示的优势，还有其他新型显示器件正在研制中.

八　信息获取与传感技术

信息获取与传感技术依赖于在器件结构中实现物质运动形态的转化，其科学基础是光电、电光、光光转化过程及其规律，以及特定器件结构的设计和制备技术.

未来 20 年主要有以下三方面的重要发展趋势：(1) 发展高灵敏大规模红外焦平面阵列，提高其工作温度，并探索新型红外焦平面阵列技术，开发出红外－可见直接转化型的红外观察镜技术．红外焦平面阵列是当代最先进的第三代红外传感器，它通过红外辐射在固体二维敏感元列阵中激发光生载流子而获取信息，并经信号处理后可以凝视方式直接获取目标物体的清晰的红外图像及光谱．(2) 发展多种类信息传感、多频谱信息传感以及它们的融合技术，并使其集成化、微型化．(3) 发展先进的信息获取与传感技术，如星载高分辨红外相机、人体信息检测仪、智能化红外系统芯片组件、偏振遥感和探测技术等．

九 网络技术

1987 年，我国科学家发出了首封电子邮件．1994 年，我国完成 CNFC 网建设，互联网开始进入中国人的生活．在未来的 20 年里，互联网将与电信网相融合为下一代网络 NGN．随着互联网与电信网从技术到业务的融合，IP 将成为下一代网络的核心承载协议．基于 IP 的以有线无线综合接入为特征的宽带接入，以及多功能、多模式的个人信息终端将得到广泛应用．由遍布各处的大量传感器组成的传感器网络，将突破人与人之间交流的固有模式，实现机器与机器之间的对话，并向无线传感器网络的方向发展．

十 信息安全技术

在未来 10～20 年内，原来已经开发和应用的某些技术将更加成熟并得到广泛应用，信息安全积极防御技术、信息应用服务安全技术、量子技术在信息安全中的应用等将会取得突破性进展．

十一 广播电视技术

广播电视领域最重大的变革是从模拟到数字的革命，数字化从技术基础上推动广播电视演化为综合娱乐、体验和服务平台．数字电视是广播电视领域数字化浪潮中承前启后的里程碑．广播电视的数字化将带动音视频产业全面起步．

2003 年，我国完成地面数字电视标准的制定，大城市开播数字电视；2005 年，卫星传输全部实现数字化；2010 年，地面电视基本实现数字化；2015 年，我国广播电视全面实现数字化．

数字广播电视的主要核心技术包括音视频节目的编码压缩技术、节目传输(卫星直播、互联网等)技术以及数字媒体节目的保护技术等．

§5－3　现代通信的新兴领域

这里对卫星通信、光纤通信和移动通信等现代通信三大新兴领域，作较具体的介绍.

一　卫星通信

卫星通信技术对人类社会起着十分重要的作用，是社会信息化的主要支柱之一. 卫星通信具有覆盖面广、通信距离远、不受自然环境制约、通信质量高、组网和扩容灵活、投资与通信距离无关等独特的优点，从而得到了迅速的发展和广泛的应用. 面向 21 世纪，多功能长寿命的空间静止平台、高功率大容量的广播卫星以及低轨道全球数字移动卫星通信系统等都将一一实现，为人类提供一个良好的通信环境，迎接全球个人通信时代的到来.

(1) 概述

1957 年 10 月，前苏联发射了世界上第一颗人造地球卫星. 人造地球卫星是按一定轨道围绕地球运转的人造天体，而卫星通信就是利用人造地球卫星做中继站，对来自地球站的无线电信号进行转发，使两个或多个地球站之间能实现无线电通信. 这种人造地球卫星，称为通信卫星.

1945 年 10 月，英国科学家阿瑟·克拉克首次提出了利用静止卫星进行全球无线电通信的设想. 1965 年 4 月，国际卫星通信组织发射“晨鸟”号(即 INTELSAT - I，简称 IS - I)静止卫星成功，使卫星通信进入了实用阶段并得到了迅速的发展. 20 世纪 70 年代，国际海事卫星通信系统揭开了利用卫星实现移动通信的序幕. 70 年代末甚小口径终端技术的出现，以及 90 年代综合业务数字网的发展，又为卫星通信开创了新的局面. 现在，国际卫星通信(INTELSAT)系统已承担了国际通信业务的三分之二以上. 随着通信卫星向着增加通信容量、加大转发器带宽、延长设计寿命和提高等效全向辐射功率的方向不断发展，INTELSAT 系统的地球站正在向着小型化、简单化和低成本方向发展，将会拥有越来越多的用户.

卫星通信开设的业务项目不断增加，除传统的电话、电报、传真等业务外，又涌现出会议电视、数据传输、用户电报、移动电话、高速传真、电子邮件、国际商用业务和国际网业务等上百种业务项目. 目前，全世界发射的静止卫星已超过 200 颗，利用卫星的国家和地区已达 170 多个.

卫星通信系统主要有以下几种：按卫星运行轨道的不同，可分为运动卫星通信系统和静止卫星通信系统；按通信覆盖范围的不同，可分为国际卫星通信系统、国内卫星通信系统和区域卫星通信系统；按业务项目的不同，可

分为固定卫星业务、移动卫星业务和广播卫星业务等等.

卫星通信中，工作频段的选择主要考虑以下几个因素：要避开其他宇宙通信和地面微波通信的干扰；电波传输损耗、吸收和外界噪声的影响要小；要有足够宽的通信频带；能充分利用已有的微波设备和技术. 从传输损耗等因素考虑，实用的频段是 1 ~ 10 GHz，随着卫星通信业务的迅速发展，频段已扩展到 20 ~ 30 GHz，并已开发研究 40 ~ 50 GHz 频段. 为了合理使用有限的无线电频率资源，国际电信联盟对于不同条件下不同类别的无线电通信所使用的频段作了具体的分配.

(2) 通信卫星

把通信卫星发射到赤道上空 35 860 km 高的圆形轨道上并与地球自转同向运行，这时卫星绕地球一周的时间与地球自转一周的时间刚好相等(24 h)，从地球上看卫星静止不动，故称为**静止卫星**或**同步卫星**. 静止卫星、地球站和传输线路，就构成了静止卫星通信系统.

起微波中继站作用的通信卫星，一般由有效载荷(通信转发器和天线)和辅助系统(保证卫星正常运行的设备，如姿态和轨道控制系统、遥测指令系统和能源系统等)两大部分组成. 由于空间技术的发展，卫星可以更大更复杂，允许在卫星上进行信号处理，从而使卫星通信系统功能更强，使地球站更简化.

静止卫星的发射比低轨道卫星要复杂，它既需要有先进的火箭技术，又需要有精确的遥测遥控技术. 目前，发射静止卫星一般都使用三级火箭和远地点发动机. 如图 5 - 1 所示，首先第一、二级火箭将卫星送到离地面一百多千米或数百千米的倾斜圆形起始轨道；经过一段惯性飞行及调整姿态后，当卫星快到起始轨道与赤道平面的交点(近地点)时，点燃第三级火箭，把卫星推入倾斜椭圆转移轨道见 [《基础物理学教程》(第二版)习题 4 - 12]. 它与赤道平面的另一交点必为远地点，远地点发动机点火，将卫星送入静止轨道. 最后，利用卫星上的小推力喷嘴，进行位置误差修正，使卫星精确地进入静止轨道上的预定位置.

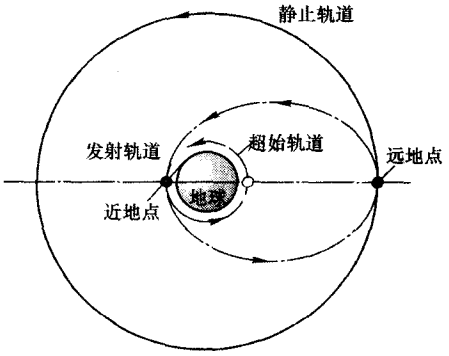


图 5 - 1　卫星发射示意

由于静止通信卫星的全球波束宽度为 17.4°，因此地球上最远的通信距离为 18 101 km，覆盖地球总表面积的 1/3 以上. 只要地球赤道上空等间隔地安放三颗静止卫星，即可实现除两极地区以外的全球通信. 目前正在使用的

国际卫星通信系统，三颗静止卫星分别位于大西洋、印度洋和太平洋上空.

(3) 地球站

卫星通信系统的地球站，主要起微波收、发信站的作用. 用户可以通过地球站接入卫星通信线路，经过卫星转发，实现远距离通信. 当两个地球站通信时，如图 5-2 所示，发信站加上发信天线到卫星的空间路径称为上行线路；卫星到收信天线及收信地球站构成下行线路. 单工通信时，地球站固定为发信站或收信站，双工通信时，地球站既能发信又能收信，天线公用.

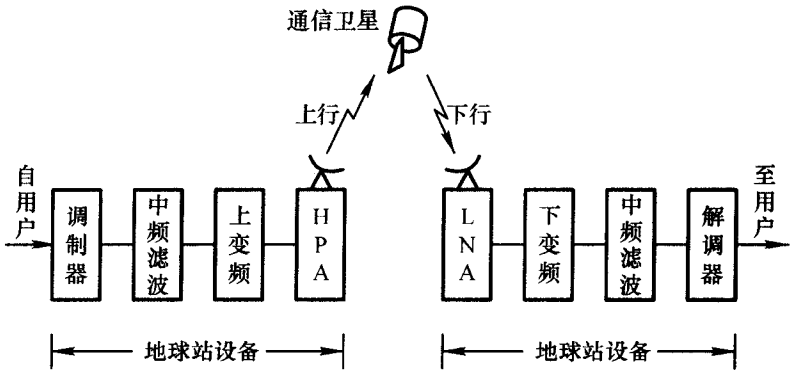


图 5-2　卫星通信线路模型

地球站一般由天线、跟踪伺服设备、发射与接收设备、终端设备、电源设备及监控设备组成. 地球站的天线要求方向性强，还必须有跟踪卫星的能力. 它既能将地球站发射机输出的电磁波准确地射向卫星，又能把指定的通信卫星所发射的微波信号接收下来传给接收机的低噪声放大器. 目前，标准地球站用的大多是两次反射型抛物面天线，其接收效率可达 75%～80 %.

(4) VSAT 卫星通信网

甚小口径终端(very small aperture terminal，简称 VSAT)卫星通信网是 20 世纪 70 年代末出现，80 年代发展起来的一种灵活方便、多用途的卫星通信系统. 它们是一类天线口径非常小(< 2.4 m)的智能卫星地球站，一般与大型中心地球站及空间段的通信卫星组成一个 VSAT 网络，可以提供单向或双向数据通信、视频广播及语音通信等. VSAT 一般使用 0.6 ~ 2.4 m 偏馈抛物面元线；室外单元完成射频信号的发送和接收，功率 1 ~ 5 W；室内单元由调制解调器和基带处理器组成，提供用户接口和卫星信道接口. 特别是，微波单片集成电路技术在射频部件中的应用、数字信号处理和卫星多址技术的应用、无线小型化技术的应用以及许多公用数据通信协议的支持，提高了 VSAT 网络的性能，降低了成本，为卫星通信产业开创了新的局面.

(5) 卫星通信技术的应用

在当今的信息时代，卫星通信技术是信息化的重要支柱．卫星通信对远距离、大容量、高速度、多功能的信息传递和处理发挥了巨大的作用．同时，卫星通信以其特有的灵活性，在移动卫星通信、军事卫星通信、卫星电视广播及全球导航定位中大显身手．

卫星通信已成为现代军事通信的主要传输方式，它可以完成多种任务，例如话音与数据传输、收集照片与信号情报、收集态势信息、敌方火箭发射的预警以及提供气象数据等．然而，由于处在轨道中的卫星是公开暴露的，易受敌方窃收、干扰乃至摧毁，因此保密技术、抗干扰和抗核爆技术等是军事卫星通信中的关键技术．

卫星电视广播系统是利用卫星作为空间电台，发送或转发电视信号，提供广大用户直接或间隔接受的系统．由于传统的原因，当前世界上采用的电视传输制式有 NTSC, PAL 和 SECAM 等三种，它们互不兼容，且不适于以调频方式传送信息的卫星广播．因此各国都在研究新的传输制式，目前已集中到 MAC 制，又因伴音、数据调制方式的不同分为几种．传输制式的标准化必将推进卫星广播事业的发展．

卫星全球定位系统(global positioning system, 简称 GPS)是美国在 1973 年开始实施的高精度卫星导航系统，它能为用户提供高精度的三维位置、三维速度和时间信息，实现全天候、全球实时导航定位．GPS 由空间卫星网、地面控制站网和用户设备三大部分组成．空间卫星网由配置在 6 个轨道平面上的 18 颗导航卫星和 3 颗备用卫星组成；地面控制站网的主要任务是跟踪和监视全部导航卫星，把接收到的数据汇集到主控站进行处理，准确地计算并预报卫星运行的精确轨道和时间，测定星历和原子钟的误差，并对卫星上的原子钟进行校正使它们同步．GPS 既有卫星、飞机、舰船、导航等大用户，也有汽车、坦克和个人等小用户．GPS 根据卫星播发的导航信号到达用户接收机的时间，算出它们之间的传输距离而进行定位．具体办法是，用户根据卫星发射的星历表信息，选择四颗能提供最佳定位的卫星．测出其中两颗卫星信号到达用户的时间差，以计算出用户至两颗卫星的距离差，由此可作出以这两颗卫星的位置为焦点的双曲面，用户必定位于此双曲面的一叶上．四颗卫星可以得到三组这样的双曲面，它们的交点就是用户位置．用同样的办法，用户测量从四颗卫星所接受的载波信号频率的多普勒频移，就可以求解出用户的运动速度．显然，多用几颗卫星，可以定位得更精确．

目前世界上只有少数国家具备自主建设卫星导航系统的能力，正在运行的有美国的 GPS 系统和俄罗斯的 GLONASS 系统，欧洲的伽利略全球卫星定位计划正在紧锣密鼓地进行．

据 2006 年 11 月 9 日人民日报报道，我国开始建设拥有自主知识产权的

全球卫星导航系统——北斗卫星导航系统(COMPASS)，其空间段由 5 颗静止轨道卫星和 30 颗非静止轨道卫星组成，这是我国自主建立的第一代卫星导航定位系统．第一颗北斗导航卫星已于 2007 年 4 月 14 日发射成功，发射约 14 分钟后星箭分离，卫星准确进入了高度为 21500 km 的预定轨道．

二　新型光纤通信

(1) 光纤通信概述

光纤通信利用激光作为传递信息的载波，通信容量比用无线电波要大得多．光导纤维(简称光纤)是利用全反射现象制成的用来传光的透明玻璃或塑料纤维，其载面一般为圆形，直径在几微米到几十微米之间，分内外两层，内层的折射率大于外层的折射率．激光由一端射入光纤，在两层间的界面上经多次全反射后从另一端射出．通常把许多根光纤组成一根光缆，则通信容量就更大了．此外，光纤通信还有抗干扰性好、保密性强、重量轻、能节省金属材料等许多优点．

光纤可以用来直接传输图像．把上万根光纤合成一束，并使两端的光纤按严格相同的次序排列，就可以直接把图像从一端输送到另一端．由于光纤细而柔软，能弯曲成任何形状，因此可伸入机器或人体内部进行窥视，如医学上的胃镜等．

除了以下将介绍的光纤孤立子通信外，人们也在发展和探讨其他有一定竞争力的光纤通信技术，例如色散位移光纤通信、非线性非孤子光纤通信以及折射率周期补偿的非线性光纤通信等．

(2) 光纤孤立子通信

光纤通信是 20 世纪最重要的科技成就之一，而光纤孤立子通信将使光纤通信发生新的飞跃．

1834 年，英国造船工程师拉塞尔(J.S. Russell)曾观察到一种奇妙的水波，称为孤立波．1965 年，美国数学家克鲁斯科尔(M. Kruskal)和物理学家扎布斯基(N. Zabusky)用数值模拟方法，发现孤立波碰撞后并不改变形状，具有类似粒子的性质，因此将这种孤立波称为**孤立子**(soliton)．1973 年，长谷川(Hasegawa)等人从理论上证明，超短光脉冲在光纤中也可以形成孤立子，并在传输过程中保持脉冲形状或面积不变．1980 年，美国贝尔实验室的莫勒瑙尔(Mollenauer)等人用 700 m 长的光纤实现了光学孤立子传输．1990 年，美国已使光学孤立子在光纤中循环传输上万千米，日本实现了一百万千米的孤立子循环传输，单程的上千千米的光纤孤立子通信实验也已演示成功．

在光纤中光学孤立子的形成来源于光纤的色散效应和非线性效应．具体而言，当超短脉冲在光纤中传输时，石英玻璃等光纤材料的色散效应使其散

开，而非线性光学效应则使其收缩，两者互相抵销或平衡便形成光学孤立子，并以不变的形状和速度传输.

光纤孤立子通信与普通光纤通信比较，有以下优点：① 由于光纤的损耗和色散使光信号脉冲衰减并加宽，因此普通光纤通信系统每隔 30～50 km 需要设一个中继站，进行接力式通信. 中继站包括检测器、调制器和激光器等，这是复杂而昂贵的电子-光学系统. 光纤孤立子通信则不需要中继站，只需用光纤激光放大器或其他增益补偿方法对脉冲补充能量. ② 因为孤立子在光纤中传输时，非线性效应抵消了色散，光脉冲宽度不会明显加宽，可实现超远距离的通信. ③ 由于孤立子光脉冲的脉宽很窄，而且重复率高，在传输过程中又无畸变，因此光纤孤立子通信可以是传输速率超过 10 Gbit/s 的最佳选择. ④ 在一根光纤中，可以同时传输频率接近的多路信息. ⑤ 可以利用光开关进行光学信息的编码，代替电子学的编码技术.

三 移动通信

移动通信属于无线通信的范畴，它是指无线用户的设备安装在汽车、火车、飞机、船舶和卫星等移动体上时，可以在行进中进行移动体之间的信息交换，或进行移动体与市话用户、长途用户之间的通信以及人与人、人与固定点、人与移动体之间的通信. 在成百上千万迅速增长的用户需求中，移动通信必须依托大容量、高速率的传输网以及智能化的快速交换，而这一部分则是有线的. 因此，移动通信是当代有线通信和无线通信的最新技术成就的综合. 现代移动通信不仅可以传输话音信息，还可以作为综合业务数字网的一个无线终端，用于传输数据、文字和图像等. 当今时代的移动通信，已经构成了一个高新技术密集的复杂系统，它包括：移动电台、基地台、控制终端、无线入网及交换、智能管理软件环境、计算机数据库以及集中控制、与综合业务数字网的连接和兼容等.

民间陆地移动通信系统，包括公用无线电话系统、调度系统、无线寻呼系统、无绳电话系统和个人通信网系统等. 卫星移动通信系统包括国际海事卫星通信系统、军事移动卫星通信系统和民用移动卫星通信系统. 全球移动卫星通信系统通过小型化移动地球站进入个人通信网(PCN)系统和综合业务数字网(ISDN)，就有可能形成未来个人移动卫星通信，成为 21 世纪通信高新技术发展的重要趋势之一.

§5-4 生物技术

生物技术是当代高新技术竞争的一个极为重要的领域，它利用先进的生

物技术定向创造人类所需的各种产品，包括医药和动植物新品种以及在科学研究中为达到某种特定目的的生物产品．生物技术的发展，为人类所面临的关于资源、食品、营养、健康和环境等方面问题的解决开辟了新的途径，从而会对人类未来社会的经济发展起巨大的推动作用．

一　生物平台技术

生物平台技术是指根据生物学科研究和发展的需要，按照生物学理论和实践的规律建立和发展起来的，具有一定影响力和适用性的技术，例如大规模 DNA 测序技术平台、蛋白质相互作用技术平台、蛋白组学分析技术平台、高通量蛋白质表达技术平台、生物芯片设计和制造平台、生物大分子结构解析平台、基因重组和转移技术平台等等．生物平台技术的基础是由一系列组学(基因组学、转录组学、蛋白质组学、代谢组学等)构成的系统生物学．这是一项学科交叉、技术整合的大科学工程，它能在细胞、器官和机体整体水平上阐明和模拟生物现象和生物体行为．

生物平台技术的主要发展方向是：(1) 在分子层面上全面阐明核酸、蛋白质、多糖等生物大分子结构与功能关系，例如核酸结构与功能关系的阐明可使人们深入了解生物个体差异以及各种遗传病发生的分子机制，蛋白质和多糖结构与功能关系的阐明有助于药物作用靶点的发现以及新药的筛选和设计．(2) 通过实验在基因、RNA、蛋白质三个不同层面上对生物体内各种分子的代谢过程、结构和构象变化修饰规律、运输和转移通道、相邻分子间的识别和相互作用等进行分析，解释生物体内各种分子之间相互作用规律、信号传导方式、时空次序和生物学功能意义．(3) 高灵敏度、高通量、超微量和快速实时的生物样品检测及分析和筛选．(4) 实现基因表达，调节控制基因表达及其产物形式，使特定的细胞或个体产生在自然状态下不可能或不大可能产生的具有功能的特定蛋白质并加以利用．(5) 数字化生物平台技术．

二　生物检测与仿生技术

生物检测技术包括生化分析技术、免疫检测技术、分子生物学技术等．与此密切相关的有生物传感器技术，它们将生物体内的分子信号进行特异识别、分析和放大，从而做出相应的反应．

仿生技术是生物技术与机械工程和电子技术等相互交叉的领域．仿生学正在从形态仿生进入到功能和分子仿生阶段．新一代的仿生技术将基于现代生物学对生命分子结构与功能的了解，实现在分子水平上的功能的仿生．这种微纳技术的发展，有可能为人类提供全新的生物分子材料和人工智能材料．随着生物学技术、纳米技术和微电子技术的进步和相互融合，利用生物大分子自组装

的特点，开发出具有自组装和自恢复功能的分子和纳米材料、分子器件、微系统和微装置，将使新一代智能化的仿生成为可能．例如，模仿生物膜选择性吸收和释放特异物质的特性，人们可以开发出靶向给药系统，并可以选择性清除有害物质．随着对光合作用的深入研究，人类有可能模仿其原理生产出使光能转化为生物能源的器件，实现高效的洁净能源．

三 生物催化与生物转化技术

生物催化与生物转化正在成为继生物医药、转基因植物之后的第三次生物技术浪潮．以生物催化剂取代化学催化剂，并逐步以生物可再生资源为原料，是工业可持续发展的必然趋势．以生物催化剂为核心内容的工业生物技术已成为发达国家的重要科技与产业发展战略．例如，利用生物技术改造现在的化学工业过程，通过工业生物技术降低原料、水资源和能量的消耗，减少污染物的排放和扩散，利用木质纤维素废物生产乙醇．

四 农业与环境生物技术

农业生物技术是以农业生物为主要研究对象，以农业应用为目的，以基因工程、细胞工程、发酵工程、蛋白质工程等现代生物技术为主体的综合性的技术体系．

目前，在高等真核生物中，已经完成果蝇、线虫和拟南芥全序列测定，人类和水稻基因组草图已相继发表，猪、鸡和蚕的基因组测序正在进行．在大规模测序工作完成以后的“后基因组时代”，主要的研究内容是系统地发现基因、了解基因表达模式、理解基因功能．此外，以现代生物技术为依托，将给生物遗传育种带来理论与方法的革命．

在今后 20 年内，应该在以下几个方面的研究有所突破：重要农作物功能基因组、动植物生物反应器、植物生物技术育种体系、环境及生物安全性监控诊断和评价体系、动物生物技术、海洋生物工程、环境生物技术．

五 疾病预防和治疗

近年来，与疾病预防和治疗相关的生物技术不断取得激动人心的进展，如分子诊断技术、新型疫苗制备技术、药物和疫苗输送技术、病原体基因组测序技术、治疗性蛋白质低成本制备技术、转基因动物生物反应器技术等．

在未来 20 年间，主要有以下三个发展方向：基于基因组学和蛋白质组学的新诊断技术和疾病预测模型、基因工程改造过的新预防疫苗和其他疾病预防手段、基于分子生物学、代谢组学的新药物和治疗手段．

为了发现人类的基因、环境和生活方式如何影响我们的健康，2006 年 8 月 22 日英国宣布，将展开一项世界上规模最大的医学实验．这项名为“英国

生物银行"的项目将收集全英 50 万人的 DNA 样本，希望借此发现癌症、心脏病、关节炎等常见疾病的基因组成.

六　新药的发现与开发

人类基因组计划的完成，以及后续功能基因组、结构基因组和蛋白质组计划的实施，彻底改变了药物发现和开发的思路和策略，逐渐形成了一种崭新的从基因到药物的研究模式，即首先从分子和细胞水平阐明疾病发生发展的机制，确证药物作用的靶标，然后有的放矢地寻找新药. 因此，创新药物研究呈现出以下两个特点：一是生命科学前沿技术与药物研究紧密结合，以发现和验证新型药物靶标为主要目标；二是一些新兴科学(化学、物理学、理论和结构生物学、计算机和信息科学等)越来越多地参与到新药发现和前期研究之中. 创新药物研究的关键环节是药物吸收代谢和毒副作用.

在减少或避免化学合成药物的毒副反应和抗药性方面，我国传统中药有着明显的优势. 作为中药现代化的重要内容，人们将利用各种先进的科学手段，规范中药材的种植、采集和加工技术，发现中药的有效成分和药理机制，开发出新型中药并在中药剂型和代谢研究方面有所突破.

七　干细胞与再生医学

干细胞是人体及其各种组织细胞的最初来源，具有高度的自我复制能力、高度增殖能力和多向分化潜能等特征. 干细胞既可以通过细胞分裂维持自身细胞群的大小，又可以进一步分化成为各种不同的组织细胞，进而构成机体各种复杂的组织器官. 通常将干细胞分为全能干细胞(如胚胎干细胞，能分化形成所有的成体组织细胞)、多能干细胞(如造血干细胞、神经干细胞、皮肤干细胞等)和专能干细胞(如角膜干细胞).

近年来，干细胞领域的研究发展迅速，主要体现在：动物生殖性克隆技术的诞生和成熟；人胚胎干细胞系的获取和建立，并使之诱导分化为神经细胞、造血细胞、肌肉细胞和胰岛细胞等；组织或成体干细胞跨系、甚至跨胚层分化能力的证实等. 干细胞及其在再生医学领域中的应用技术，几乎涉及人体所有的重要组织和器官，也涉及人类所面临的大多数医学难题. 要想使干细胞研究能够安全有效地用于疾病治疗，还有一系列问题需要研究解决.

八　脑与认知科学

人脑是由上千亿神经元和更大数量的胶质细胞组成的、极其复杂而精细的系统. 人脑构成了一个多层次、超复杂的智能信息处理系统，完成感知与识别、知觉与注意、学习与记忆、运动与控制、语言与思维、情感与意识、智力与创造等功能. 脑与认知科学是心智的科学(science of mind)，主要研究

人、动物和机器的认知与智能的本质与规律，揭示脑与智力和创造性的关系．近年来，大量的相关实验数据呈指数增长，新的理论概括和更高层次的生物学法则正在被揭示，新的实验手段和脑成像技术还在不断地开拓创新．

脑与认知科学的四大基本问题是：脑的本质是什么？脑的智力是怎样发育的？疾病和衰老能够避免吗？向人脑学习些什么？

具体而言，可以归纳为以下四个研究方向：

(1) 脑发育：研究脑如何发育和成熟，智力和创造性怎样产生，脑的退化和神经细胞死亡的原因，怎样促进脑的再生和修复等等．

例如，人的智力和创造性究竟是由先天的基因组决定的，还是后天的可塑性决定的，还是二者共同决定的？了解人类大脑的一个关键是了解脑的结构和功能是如何发育的，在重复使用和损伤后发生什么变化(可塑性)．人类与猩猩的基因团只有微小的差别(DNA 序列的同源性相差 1.7%)，然而人脑的体积比猩猩大 3 倍，在结构和功能上比猩猩复杂得多．在 DNA 序列上微小的差异所包含的信息，远远不足以满足为人脑的结构和功能进行编码的巨大需要，所以人类的智力必然不完全是由遗传因素造成的．

(2) 脑功能：研究脑的高级认知功能的机制．

(3) 脑疾病：神经和精神疾病占我国疾病总负担的 20%．

(4) 脑模拟：脑式人工智能是脑科学与人工智能的结合．人脑与计算机的根本区别在于人脑可以自组织地发展信息处理程序，脑的智能和学习能力是现代计算机无法达到的．

§5－5 新材料技术

新型材料的研究开发，往往是一个时代到来的重要标志之一．例如，原始社会称为陶瓷时代，奴隶社会称为青铜时代，封建社会称为铁器时代，而近代社会可称为钢铁塑料时代．

当代新材料的研究与发展是建立在物理学、化学、生物学、材料科学等学科的突破性进展的基础之上的．同时，各新兴技术群体的发展也对新材料提出了新的要求并刺激其发展．

一 高分子材料

以合成纤维、塑料和合成橡胶为代表的高分子材料的出现，极大地改变了人类的生产和生活方式．目前，这三大高分子合成材料的世界年产量已高达 2.3 亿吨，按体积计算已超过所有金属材料年产量的总和．高分子复合材料已成为高分子材料领域最重要的发展方向．高分子材料正在向高性能化、

高功能化、复合化、精细化、智能化、环境友好的方向发展，并出现了所谓的高分子分子设计和材料设计的概念，即根据需要合成具有指定性能的高分子材料.

在未来 20 年，可能在以下一些方面取得进展：用于制备具有信息传输、接收、处理、存储、显示等功能器件的有机光电子材料；能够自由控制有机聚合物超分子结构的技术；耐高温的聚合物材料；智能和仿生的聚合物材料；具有超高密度信息容量特性的生物计算机所需要的蛋白质、DNA 和手性分子；热塑性树脂基复合材料；高强度通用树脂；新型橡胶；特种有机纤维；探索沟通生命与信息的高分子材料；利用非石油资源制备聚合物的技术；低成本可全降解塑料的制备技术；回收再利用技术；智能结构材料的工程应用；高分子材料的关键技术等.

二　金属材料

金属材料领域的研究主要包括以下几个方面：

(1) 轻质高强结构材料，主要包括镁合金、铝合金、钛合金以及金属基复合材料.

(2) 新一代钢铁材料及其先进先进制造技术.

(3) 高温合金材料的设计和制备加工技术.

(4) 粉末冶金材料的先进制备、成形与加工技术.

(5) 先进的材料制备、成形和加工技术.

(6) 材料寿命周期评估和延寿技术.

三　无机非金属材料

无机非金属材料，包括各类陶瓷和玻璃、无机建材、耐火材料、炭材料、无机高聚物基复合材料、无机胶粘剂等. 这类材料应用很广，不足之处是抗拉强度低、韧性差.

精密陶瓷材料是一种金属氧化物的非晶材料. 实际上，有的纳米材料和高温超导材料就是这种材料. 这里我们所说的精密陶瓷材料，主要是指结构材料，它们一般具有耐腐蚀、耐高温、高硬度等特点，有的还有一定的韧性，目前已可以用来制造汽车发动机而不需要冷却系统. 利用精密陶瓷材料还可以做高硬度的刀具，可以在部分领域里替代金属材料. 作为功能材料它可用作宇宙飞船的隔热瓦、高压绝缘瓷、电子器件的衬底和封装材料，以及生命科学中的人工器官材料等.

从未来发展的角度来看，先进的陶瓷(结构陶瓷和功能陶瓷)材料是最重要的无机非金属材料，例如高性能陶瓷基复合材料在航空航天发动机、核聚

变、燃气轮机、刹车、高温气体过滤等领域有广泛的应用前景.

四 功能材料

功能材料是具有特殊的电、磁、光、声、热、力、化学或生物功能的一大类新材料，是信息技术、生物技术、能源技术等高新技术领域和国防建设的重要基础材料，也是对改造某些传统产业起着重要作用的材料.

除光电子材料(见下文)外，功能材料的发展重点为研究以下各种材料的制备与应用技术：高温超导材料、稀土功能材料、新型能量转换材料、生物医用材料、催化材料、分离膜材料、生态环境材料、智能材料等.

1986 年开始，世界上掀起了一场高温超导热，超导体的临界温度提高到了 77 K 以上的液氮温区，这使人类有可能在不久的将来实现液氮温区超导强电的应用，如发电机、电动机、磁悬浮列车、超导输电和超导强磁场等. 2006 年 7 月，美国在钇钡铜氧化物 100 m 长的"第二代"高温超导导线上，首次实现了商业电网级电流的传导. 同时，人类还将实现超导电子学的应用，如超导量子干涉仪、特斯拉计、用于微波接收的超导隧道结、超导谐振腔和超导天线等. 超导计算机及快速逻辑元件也有着广阔的前景.

五 光电子材料

信息光电子技术正处在一个新概念、新结构、新方法、新技术层出不穷的极为活跃的发展时期. 随着低维物理研究的深入，超薄层材料生长技术(分子束外延 MBE、金属有机物化学气相淀积 MOCVD)的突破，以半导体量子阱、超晶格为代表的低维半导体材料，基于低维半导体材料的量子阱激光器、探测器、调制器、高迁移率晶体管、异质结晶体管等器件的研制成功，促进了信息化时代的来临.

光电子材料的发展呈现低维度化特征，由体材料发展到薄层、超薄层微结构材料，并正向着纳米结构材料方向发展. 同时，伴随着材料系统由均匀到非均匀、由线性到非线性、由平衡态到非平衡态的发展，材料生长制备的控制精度有向单原子单分子尺度发展的趋势.

具体而言，光电子材料的重要发展方向和前景可分述如下：

(1) 半导体材料及器件技术：为了提高计算机的运算速度以及使电子技术向更高频段的方向发展，急需解决高电子迁移率的材料，这就是化合物半导体. 例如，砷化镓材料的电子迁移率是硅材料的 5～6 倍，可作计算机的高速开关及毫米波接收器件、红外敏感器及光电子元件. 21 世纪前期，半导体异质结构和量子结构材料仍将是光电功能材料的主流. 集成电路产业的发展仍将以硅材料为主体，化合物半导体材料及高温超导材料与其共同发展.

GaN 基蓝、紫光材料以及有机半导体发光材料的研制成功，使高效率白光发光二极管作为新型高效节能固体光源成为可能，它们的使用将比白炽灯节电 5～10 倍，寿命超过 10 万小时，这将引发照明光源的划时代的革命①.

随着光电信息技术的发展，对器件的集成要求越来越高，而不同材料之间晶格常量和热膨胀系数的差异会引发大量的位错和缺陷，这是异质结材料面临的主要挑战.

(2) 人工晶体和全固态激光器技术：性能优异的以激光晶体、非线性光学晶体和大功率半导体激光器为基础的全固态激光器，正在取代传统的激光器市场，并不断开拓新的应用领域. 激光晶体的发展趋势是以全固态高量子效率、高储能晶体和高质量大体积晶体的研制和开发为主. 新晶体材料的研发趋势是解决深紫外、中红波段频率变换问题.

(3) 光子晶体：光子晶体是在光学尺度上具有周期性介电结构的人工设计和制备的晶体. 光子带隙材料能够调制具有相应波长的电磁波. 现在已经有多种基于光子晶体的全新的光子学器件被相继提出，预计将能够获得在可见光范围内具有完全带隙和各种可控微结构和缺陷的光子晶体，在此基础上研制出包括光源、导波元件、逻辑元件等各种光子信息器件，并能够使其集成化，使信息处理技术进入一个新的时代.

(4) 高密度信息存储材料：目前在维度和分辨率上的研究已有重大突破，已经成功研制出记录密度在 4～5 Gbit/cm^2 的磁盘，同时已实现存储密度达到 100 Gbit/cm^3 的三维光存储器. 随着新原理、新方法和新技术的提出、发展和应用，将使海量信息的存储达到前所未有的水平，如量子磁盘和多维海量光存储器可使记录密度提高到 50～150 Gbit/cm^2. 1988 年，发现巨磁电阻(GMR)新材料. 在 GMR 读出头的推动下，计算机记录密度从 10 Mbit/cm^2 发展到 15 Gbit/cm^2，提高了近 1500 倍.

---

① 全球电力有 22%消耗在照明上，以发光二极管为代表的新一代固态光源如果得到推广，全球电力消耗将可以节约 10%. 如果用新型固态光源取代基于燃料的照明，那么节能效果将更加显著. 同时，这也减少了矿物能源的消耗和温室气体排放. 此外，如果对固态光源的特性如光谱构成、发光方式、偏振性、色温和亮度等加以控制，这种光源将有更广泛的用途. 比如，调节蓝色系照明光的色温，就能调节控制人体的生理节奏，对人类健康、情绪和工作效率产生有益影响；高频闪动的灯光，可以用来发射交通信号；将这种光源用于显微术照明，将提高成像清晰度；调节这种照明光的光谱构成，可以在自然光照下不宜种植蔬菜水果的地带进行农业开发等. 目前发光二极管等固态光源的改进方向在于：寻找能发出不同颜色光谱的新发射材料，在量子水平上继续提高其发光效率；研究将固态光源封装入灯泡、灯具的更好方式，加快向日常生活推广；提高发光二极管芯片尺寸、电流密度和应用温度范围等.

分子磁体是当前凝聚态物理和化学研究领域中富有挑战性和广泛应用前景的材料之一．高自旋分子磁体可能被用于高密、高效的存储器件，将信息位的存储推到分子水平，满足量子计算的要求．

(5) 有机/无机光电功能材料：这类新材料结合了有机材料和无机材料的优点及协同效应，可以通过发展新型复合技术、自组装技术制备．现代通信中广泛使用的光通信材料是一种无机石英材料，具有很小的色散和很小的损耗(约 2×10^{-4} dB/m)．一种新的掺铒光纤材料还可能作为光的放大材料，它的开发将有可能实现 100 km 以上的无中继的光传输．另外一种新的光纤材料已可实现 6 000 km 无中继的光孤子通信．

六 纳米材料

最初人们把三维空间内至少一维处在纳米尺度范围(1～100 nm)的结构单元，或由它们按一定规律构筑而成的材料或结构定义为纳米材料．随着研究的逐渐深入，现在人们认识到，纳米材料的价值不仅仅是几何尺寸的减小，而且取决于这一小尺寸材料或结构是否具有某些与宏观块体材料截然不同的物理和化学特性，以及这些特性是否随尺度发生连续的改变或突变．

纳米材料的理论基础是介观物理、界面物理与化学，其应用的领域十分广阔．例如，用纳米材料压制成的金属块的硬度和韧性远远超过结晶形态或非晶形态的金属材料，用纳米材料制成的永磁体具有更高的磁场强度．目前，纳米材料的研究在世界上还刚开始，还没有形成统一的理论、方法及其学科的主攻方向．纳米科技的研究使科学家对物质和能源的研究进入了分子水平，将会对计算机、通信、材料技术和药物的研究带来革命性的进步．

随着纳米科学和技术的发展，人们将深入了解纳米尺度的现象及其原理，发展成熟的纳米尺度控制技术，逐步具备在原子水平上设计和合成纳米材料的能力．人们希望通过纳米材料获得前所未有的光、热、电、磁等材料性能，为解决材料科学研究中的问题开辟新的途径．

未来 20 年内，我国将可能在以下关键领域取得突破性进展：

(1) 纳米材料的可控制备与生长技术．

(2) 纳米特种功能材料的开发．例如，纳米特种功能纤维材料、润滑及防护用纳米材料、稀土纳米功能材料、环境和安全监测用纳米传感材料、高效轻质阻燃聚合物纳米复合材料和金属等材料的表面纳米功能化技术．

(3) 纳米能源材料的实际应用．例如，低成本固态太阳能电池、高性能可充电电池、温差电池、燃料电池等所用的纳米材料与技术的研究．

(4) 纳米复合材料的实际应用．例如，将纳米晶、纳米线、纳米带等与有机或无机材料组装形成纳米功能材料，它可以是力学上具有优异性能的涂

层或部件，也可以是电磁学上的吸波材料.

(5) 纳米结构材料的广泛应用. 通过材料结构的纳米化和参杂复合，使结构材料的各种性能得到大幅度提高. 例如，纳米弥散强化、形变诱导纳米化金属制品、高弹性高模量纳米复合材料、纳米强韧化陶瓷复合材料、超塑性纳米陶瓷材料.

(6) 纳米环境净化材料的广泛应用. 如纳米催化、净化、吸附材料.

(7) 基于碳纳米管的场发射器件的实际应用.

(8) 分子器件的实际应用. 目前，分子开关、分子存储器、单分子整流器等原型分子器件已在实验室研制成功，预计特殊用途的分子器件将得到实际应用.

(9) 新的纳米材料的集成检测和表征技术的开发. 将会有新的表面、界面纳米结构的表征、测量与控制技术问世. 例如，发展实时与原位表征方法，探索空间分辨率达到 0.1 nm 的立体表征技术，发展新的单原子、单分子、单光子检测、操纵技术与方法.

§5－6　能源技术

能源是人类赖以生存、社会不断进步、经济持续发展的重要物质基础，能源的每一次突破，都会引起社会和生产的变革. 但是，随着社会的发展，能源的消耗急剧上升，能源供需失衡的矛盾十分尖锐. 因此，制定合理的能源政策，寻找提供新能源的途径，已成为世界各国急待解决的问题. 目前，中国能源消耗的特点是人均水平低，产值能耗高，且以煤为主.

一　化石能源　研究开发新能源的必要性

能量的人年平均消耗量是一个国家工业发展程度和人们生活水平的标志. 随着社会的发展和人们生活水平的不断提高，对能量的需求量也在急剧地增加. 据估计，世界能量的总需求量，到 2050 年将达到 26.9 TW，相当于 1975 年的 3.3 倍. 同时，能源结构也在发生变化. 1860 年，全世界能耗中木材占近 3/4，煤、石油和天然气只占 1/4；1900 年，木材在能耗中的比重降到 40 %以下，煤上升到 57.6 %，石油和天然气只占 3.2 %；1950 年，煤在能源结构中的比重占 61.5 %，石油达到 27 %；1965 年，石油占 39.4 %，首次超过煤的比重 38.7 %；1970 年，石油达到 43 %，煤降到 35 %；此后，发生了以石油价格上涨为标志的能源危机，使煤所占的比重有所抬头. 实际上，直到 20 世纪中叶，人类用的都是煤、石油和天然气等化石能源，它们和木材都属于天然能源. 全世界已探明可以开采的煤炭、原油和天然气的储

量，预计分别还可以开采 200 年、30～40 年和 60 年．尽管所探明的能源资源的储量还会有所增加，但总是有限的，它们的短缺已经成为人类必须正视的重大问题．

从目前到 2020 年，全球主要的一次能源仍将是化石能源(主要是煤炭、石油和天然气)，其比例将一直保持在 90%左右．

实际上，化石燃料又是极其宝贵的化工原料，可以加工提炼诸如化学纤维、塑料、尼龙、橡胶和化肥等化工产品，因此仅仅为了利用其燃烧时放出的热量而付之一炬是很可惜的．

以煤和石油这些化石燃料为主体的能源结构还给人类带来了另外一个严重的问题——环境污染．化石燃料在燃烧过程中都要放出二氧化硫、一氧化碳、烟尘、三(或四)苯并芘、放射性飘尘、氮氧化物、二氧化碳等．在这些排放物中，一氧化碳和烟尘直接危害人畜；三(或四)苯并芘是强致癌物质；放射性飘尘使生物受辐射损伤；二氧化硫和氮氧化物会产生酸雨，使植物死亡、建筑物遭侵蚀、饮用水变质．尽管这些排放物危害了生态环境，但毕竟是局部的，而且有办法减少其释放量．然而，二氧化碳这种排放物却不同，只要燃烧就会产生二氧化碳，而且它会不断在大气中积聚，使大气层中二氧化碳浓度增加．我们知道，臭氧层的破坏会使地球上的人类受到很强的紫外线辐照而有致皮肤癌的危险，而由于二氧化碳对短波长的辐射(紫外线)是透明的，大气层中二氧化碳浓度的增加就会使这种危害更加严重．特别是，由于二氧化碳对太阳的长波辐射是不透明的，因此二氧化碳浓度的增加就像给地球加了一个保温层，使地球向宇宙散发的热量减少，从而使地球的气温上升，这就是危及全人类的“温室效应”．温室效应将使一些谷物产区变得干热，雨量减少，农业减产；同时，还将使地球南北极冰山融化，海平面上升，导致洪水泛滥，使沿海城市有遭受水灾的可能．1989 年 5 月，82 国签署了赫尔辛基宣言；接着又在加拿大和荷兰相继举行了国际会议，呼吁减少二氧化碳排放量．

人类要生存，要发展，就需要能源．然而，上述常规能源所造成的环境污染却又危及了人类的生存．要从根本上解决问题，唯一的办法是开发新能源，特别是可再生能源，例如太阳能、风能、波浪能、潮汐能、海洋温差发电、地热、裂变核能和聚变核能等．

我国煤炭储量相对较丰富，石油和天然气等优质资源储量不足．目前，我国已探明的煤炭、石油和天然气的储量，分别占世界总储量的 11%、2.4%和 1.2%．2003 年，我国化石能源用量为 16.78 亿吨标准煤，其中煤炭、石油和天然气分别占 72%、21%和 2.7%，石油进口量超过 1 亿吨，约为自产量的 60%．预计到 2020 年，我国化石能源用量为 25～29 亿吨标准煤，其中煤

炭约占 60%，石油和天然气约占 30%，石油进口量将达到 2 亿吨以上.

目前，我国煤炭的主要利用方式是直接燃烧，效率低，污染严重. 我国在未来 20 年内将大力发展洁净煤技术，提高发电效率，减少环境污染，加速发展煤基液体燃料制备技术，加快石油、天然气以及天然气水合物资源的勘探和开发.

二　电能

电能技术主要包括发电、输电、配电和用电等各个环节所涉及的关键技术，这些技术主要用于实现发电和用电的动态平衡、输配电网络的安全可靠运行及其有效应对事故和灾变的能力.

为了保障我国电网的安全、稳定和经济运行，保障供电的可靠性，提高电能质量和能源的使用效率，将重点发展以下技术课题：

(1) 大电网安全稳定运行控制技术. 例如，广域测量技术将为电力系统的运行控制提供实时信息来源，它主要包括微型电磁传感技术、光纤测量技术、基于 GPS 的同步测量技术和通信技术等；电力系统实时仿真分析技术与广域测量技术的应用，将为实现电力系统在线动态安全分析与控制提供重要的技术基础.

(2) 大容量电力输送技术. 特高压交流、直流输电技术所涉及的关键技术有：高压绝缘技术、大容量快速开关技术、短路电流限制技术、多相交流输电技术、多端直流输电技术、超导电缆等.

(3) 分布式电源技术. 这是以可选择的多种发电模式为基础，以各种电力储能技术(超级电容器储能、超导储能、电池储能和飞轮储能等)为支撑，构建与大电网互联、相对独立的电网，从而使用户的电力质量和供电可靠性大大提高.

(4) 电力电子技术. 该技术主要包括碳化硅电力电子器件、大功率高电压电力电子器件及其在电力变换中的应用，未来的发展将使其损耗降低、开关频率提高. 电力电子技术是实现灵活交流输电技术(在交流输电系统中引入可控设备以提高电网的稳定性)、大电网安全稳定运行、微型电网技术和高压直流输电的物质基础，它与现代控制技术结合将在电力电能变换、对功率进行灵活控制方面发挥重要作用.

(5) 超导电力技术. 它是基于具有无阻高密度载流能力的超导材料开发的相关电力应用技术，主要包括超导限流器、超导储能系统、超导电缆、超导变压器、超导同步电机等. 基于超导电感和电力电子技术的新型灵活交流输电技术是一个重要的发展方向，同时还要研究超导电力装置的动力学建模及其与电网的相互作用和影响，开发新型实用化高温超导材料和高效、长寿

命、大冷量制冷机等.

(6) 电力储存技术. 该技术的发展重点包括超级电容器储能、超导储能、飞轮储能和电池储能等. 燃料电池既可以作为一种新型发电方式，也是一种重要的储能方式.

(7) 智能配电技术. 该技术包括实现配电设备、配电管理、电能质量控制和配电系统的智能化.

(8) 节电技术. 该技术包括新材料和新器件的研制，变频调速技术和新型电机(如磁场可调节式永磁电机)电器的应用等.

三 核能

核能包括重核的裂变能和轻核的聚变能. 目前已经商用化的是热中子堆核电站，将要实现商用化的是快中子堆技术. 将来聚变能一旦实现商用化，将为人类提供无穷无尽的洁净能源.

核能是现实的、可大规模替代常规能源的、既干净又经济的现代能源. 一座百千瓦核电站每年约可代替 300 万吨标准煤，每年可减排约 1000 万吨 CO_2、20 万吨 SO_2 和 3 万吨 NO_2，不会造成温室效应及大气污染.

自 1957 年世界上第一座以商用为目标的原型核电站在美国建成以来，全世界正在运行的核动力堆共有 438 座，总装机容量为 351GW. 核电占总电力的比例，全球为 16%，法国为 75%，日本为 34%，德国为 31%，英国为 22%，美国为 20%，中国仅为 1.7%.

核电站的发展，20 世纪 50～60 年代的原型堆被称为第一代，20 世纪 70～90 年代的商用动力堆被称为第二代，目前正在开发的先进水冷堆和先进气冷堆被称为第三代，将于 2030 年以后大规模采用的新型核能系统被称为第四代，它们应同时满足资源的持久性、良好的经济性、高度的安全性、废物最少化和可靠的防扩散性等要求.

轻原子核带的正电少，它们相互靠近时的静电斥力较小，容易聚变. 而且，轻原子核聚变时放出的能量也多，因此目前研究的都是氢同位素之间的聚变. 在这些同位素中，氚－氚聚变最容易，其次是氚－氘聚变，其他就更难了. 氘从水中提取，较容易获得；但氚必须用锂来人工制造，且其半衰期只有 12.26 a (年)，因此通常只研究氚－氘聚变. 由于地球上水和锂都十分丰富，因此如能实现人工控制的核聚变，则可不必顾虑能源资源枯竭的问题. 此外，核聚变还是安全、清洁的能源，聚变堆活化产生的放射性废物主要是固体，且没有半衰期很长的锕系元素，不会对后代产生威胁. 所以，世界上许多科学家正在做出巨大的努力，希望早日实现人工控制的核聚变.

为了使聚变核达到足够高的能量，最方便的途径是将大量核燃料在极短

时间内加热到 10^8 K 温度，这时氘核的速度可达 1 000～2 000 km/s. 目前发展了两种方法，第一种是在磁约束装置托卡马克(又称环流器)中，使等离子体保持在圆环中央不与内壁接触，然后用感应产生大电流、注入高能中性束以及离子回旋共振等方法，将等离子体加热到所需要的温度；另一种是用多路强激光同时照射直径 1 mm 的氘－氚实心或空心小丸，在十亿分之几秒的时间里激光被靶丸吸收而周围形成几千万开的冕区，使大部分外层靶材向外喷射，反冲力形成的聚心冲击波将靶芯千百倍地压缩并产生上亿开的高温.

聚变能的利用目前还处在基础研究阶段，仍有一段漫长的道路. 经过 30 年的发展，已经形成了以托卡马克为重点途径的磁约束聚变研究，它是科学和技术基础最成熟的磁约束位形，并已具备开展燃烧等离子体和聚变堆集成技术研究的条件. 基于托卡马克途径的国际热核聚变实验堆(ITER)[①]的即将建设，标志着国际核聚变能研究由基础性研究进入了实验堆研究阶段.

四　氢能

氢可由化石能源、核能和可再生能源等多种一次能源制取，形成多元化的一次能源供给结构，有利于摆脱对石油的过分依赖.

氢作为二次能源，是与电力互补的终端能源载体. 氢作为燃料可以直接在传统的燃烧设备中利用，与现有的能源设备具有很好的兼容性；利用燃料电池作为转化环节，氢能体系将具有更高的效率并减少了 CO_2 的排放，因此燃料电池是打开氢能经济大门的关键.

实现氢能经济需要突破许多技术难关，如氢的大规模高效制备和储运技术，降低燃料电池的成本，提高燃料电池的可靠性和可使用性等.

2003 年 11 月，包括我国在内的 15 个国家和欧盟签署了国际氢能伙伴计划(international partnership for hydrogen economy，IPHE)，旨在加强国际合作，加速氢能经济的发展.

---

① 目前参加国际热核聚变实验堆(international thermonuclear experimental reactor，简称 ITER)计划的国家包括欧盟、中国、美国、俄罗斯、日本和韩国，反应堆将建于欧洲法国南部的卡达拉什(Cadarache). ITER 项目于 2006 年底启动，2015 年建成，总投资上百亿欧元，欧盟投资一半，其他五个成员各出资 10%. 超导线圈产生的强大磁场将高温等离子体限制在环形管中，ITER 等离子腔的容积为 837 m^3，比目前最大的托克马克 JET 要大 5 倍. ITER 的设计装机容量为 500 MW，这是人类开发核聚变能源的一项重要尝试. 一个聚变反应堆仅用 100 g 氘和 3 t 普通的锂就可以产生 1 GW 的输出功率，这相当于一个大型电站，锂作用是为了产生氚.

五　可再生能源

传统的可再生能源包括大水电和生物质的传统利用，新的可再生能源包括用现代技术开发的小水电、太阳能、风能、生物质能、地热能和海洋能．可再生能源的利用主要通过热利用和发电这两种途径：热利用技术主要包括太阳能热水器、太阳能采暖、地热供暖、生物质沼气和生物质气化供气等；发电技术主要包括小水电、风力发电、生物质能发电、地热发电、光伏发电、太阳能热发电、海洋能发电等．

保护环境和可持续发展、保证能源安全以及保持经济竞争力，是国际社会发展可再生能源的共同动机．

（1）太阳能发电技术

太阳能是一种遍及全球的、巨大而洁净的能源．据估算，太阳每天投向地球的能量为1.2×10^{22} J，十分巨大．但是，太阳能的利用还刚刚开始．例如，用非晶硅做成的太阳能电池，它的能量转换效率只有 12%．1990 年全世界非晶硅电池只有 30 万千瓦的功率．

太阳能的利用可分为直接利用和间接利用两大类．直接利用又可分为将太阳能转变成热能(直接利用或再转变成机械能或电能)以及直接转变成电能两种方式；间接利用是采用光化学方法制氢和利用光合作用加速并高效地生成生物质燃料．目前，前者的转换效率要比后者高得多．

地球大气层外投射在与阳光相垂直的单位面积上的太阳辐射功率称为太阳常量，其年平均值为$I_0 = 1\,353\ \mathrm{W/m^2}$．由于在通过大气层及云层时部分太阳辐射被吸收、反射和散射，因此地面上单位面积所接受到的太阳辐射的功率与 I_0 相比要小得多．即使是清澈无云的晴天，也要小 30%左右；在多云的情况下，可衰减 90%以上．太阳辐射的能量约 95%包含在 0.3μm～2.5 μm 波长范围内，在短于 0.3 μm 和大于 2.5 μm 的波长范围内的能量分别只占全部能量的 1.2% 和 4%．相比之下，太阳能集热器的吸热面所发出的热辐射，则主要集中在 2.5μm～30 μm 的波长范围内．因此，有可能采用对不同波段的辐射具有不同辐射性质的选择性材料来提高能量转换效率．

太阳能热利用的核心装置是太阳集热器，分为平板型集热器和带聚光镜的集热器两大类．热能的储存采用显热储存、相变热(潜热)储存及化学反应热储存等三种方式．利用太阳能提供热水、热空气及蒸汽，属于太阳能供热过程．利用聚光集热器获得高温热能，使水在蒸汽发生器中变成高温高压蒸汽，可实现太阳能热发电．此外，还有太阳热动力水泵站等．

1973 年出现的世界性的石油危机，兴起了研究太阳能利用的热潮．目前，综合了现代科技成就的太阳能热力发电站不仅已经建成并可靠地运行，

而且证明在经济上是可行的．到 1991 年，美国太阳能热发电的总装机容量已超过 4×10^5 kW．美国已安装的低热损窗就可以在其 25 年使用寿命期间节能 30 亿美元，进一步的发展可以大幅度地降低约占美国 20%总能耗的采暖和空调用能．在夏季收集太阳能供冬天使用的大型季节性储热技术已经成熟．美国的一项研究首次成功地将太阳辐射强度聚集到了 6×10^4 kW/m^2，从而得到了比地面上的太阳辐射强度高 6 万倍的超高聚集的太阳辐射强度值，它已接近太阳表面的辐射强度．此外，还有集 20 世纪太阳能研究中三项最突出的成果(选择性表面、真空管集热器和复合抛物面聚集器)于一体的高效集热器，新型透明隔热材料、家用全能系统，空间飞行器的热动力系统等．可以相信，太阳能利用的研究在 21 世纪将取得更惊人的成就．

中国的太阳能资源异常丰富，而且今后太阳能发电有较大降价空间，尤其是太阳能光伏发电比太阳能热发电有更为迅速的价格下降的空间．除了降低成本外，光伏发电技术的发展主要是提高效率．这些年来人们对太阳能光电池所做的努力，已经使多晶硅光电池转化率达到 15%，单晶硅光电池转化率是 20%，砷化镓光电池转化率达到了 25%，在实验室中特制的砷化镓光电池的转化率甚而已高达 35%～36%．今后还将逐步过渡到薄膜太阳电池和各种新型太阳电池(如纳米晶 TIO_2 太阳电池)．太阳能热发电是利用集热器将太阳辐射能转换成热能并通过热力循环过程进行发电，现在大致有三类系统：槽式线聚焦系统、塔式系统和碟式系统．太阳能聚光镜或定日镜成本的大幅度降低，将使太阳能热发电站的投资大幅降低，从而加快其发展步伐．

(2) 风力发电技术

据估计，全世界风力资源是水力资源的 7～10 倍，现已开发的风力发电只占风力资源的 8%，单机发电已可达到 20 kW 以上，还有很大的潜力．特别是在牧场、高山、海岛及无电力供应的地方，风能是一种方便的能源．

风力发电技术的核心是风力发电机组，其发展趋势是单机容量大型化和新型机组的研制．变速恒频和变浆距方案是技术发展的重要方向．海上风能的资源量及其质量都优于陆地，海上风电场开发是今后更大规模利用风能的途径．风力与海浪联合载荷、海上风电机组基础结构以及部件耐腐蚀性能等都是大规模发展海上风电的关键技术．

(3) 生物质能利用技术

生物质资源的重要来源是农业废弃物、森林废弃物和城市垃圾等．生物质能可以利用热化学方法或生物化学方法进行转化，目前最具应用前景的是生物质发电和生物质液体燃料．生物质直接燃烧发电技术已基本成熟，生物质气化发电是更洁净的利用方式，经过净化及组分调整后的合成气经催化合成还可转化为甲醇、二甲醚和汽油等液体燃料．生物质的气化制氢和质子膜

燃料电池联用是未来的一种理想电源.

目前，美国主要是利用玉米来生产酒精. 2007 年 5 月美国科学促进会网站报道，美国密歇根州立大学的科学家培育出了两个玉米新品种，不仅玉米粒，而且秆和叶都可用来提炼酒精. 2007 年 1 月 3 日美联社报道，已有人在美国中西部建起一家生物燃料工厂，计划把一直颇受冷落的鸡脂肪加工成生物燃料，动物脂肪的使用将有助于生物燃料产业发展为成熟的能源来源.

德国现在利用最多的生物燃料是"花能源"：每年 7 月份油菜籽成熟后进行收获，然后菜籽被榨成食用油，再将菜油转变成甲基酯，合成后成为生物柴油. 它排放的有害气体仅是普通柴油的一半，不含硫，不污染地下水.

(4) 其他可再生能源

世界上已开发的水力资源仅占总量的 16.5%，水力发电量约占世界总发电量的 23%，因此水力发电仍有广阔的发展前景.

全世界的海洋潮汐能每年应该可以发电 2.2×10^{13} kW·h，其中可经济开发的只有 2×10^{11} kW·h，现在已开发的还不到 6×10^{8} kW·h. 能够在海上风浪中实现自我保护、输出稳定、具有良好环境适应性的海洋能利用系统是今后的发展方向.

地热能的利用可以用来解决建筑物采暖、供热和提供生活热水，其高效梯级综合利用可使其利用率达到 70%～80%. 尽管早在远古时代人类就已开始利用地热，但直到 1988 年利用地热所产生的热能和电能还不到世界总能耗的 0.2%.

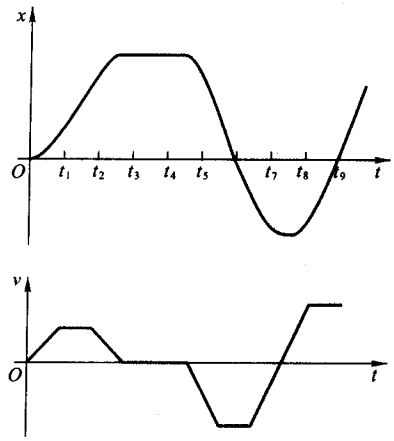
参考文献

[1] 《技术预见报告》编委会. 技术预见报告 2005. 北京：科学出版社, 2005
[2] 马俊如, 余翔林. 高新技术研究前沿展望. 合肥：中国科学技术大学出版社，1995
[3] 蔡枢，吴铭磊. 大学物理：当代物理前沿专题部分(第二版). 北京：高等教育出版社，2004
[4] 李银安. 受控热核聚变. 长沙：湖南教育出版社，1994
[5] 《现代物理知识》编辑部. 现代物理知识(增刊). 北京：科学出版社, 1996
[6] 彭吉虎，吴伯瑜. 光纤技术及应用. 北京：北京理工大学出版社，1995
[7] 李启斌. 能源的希望：天体剧烈活动的多波段测量和研究. 长沙：湖南科学技术出版社，1997
[8] 严东生，冯端. 材料新星：纳米材料科学. 长沙：湖南科学技术出版社，1997

第二部分　习题精析提要

第一章　质点运动学

1－1. 试根据如图所示的描述质点运动的 $x-t$ 和 $v-t$ 关系曲线，画出相应的 $a-t$ 关系曲线，并标出质点作加速运动和减速运动的时间间隔．(解略)



题 1－1 图

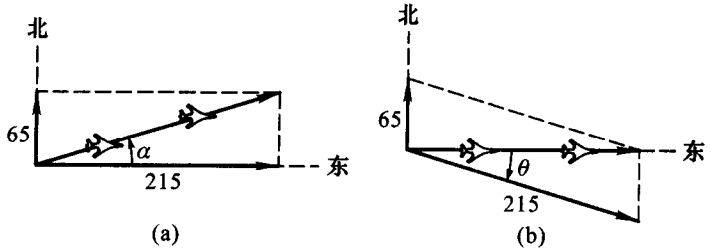
1－2. 一架飞机从 A 处向东飞向 B 处，然后又向西飞回 A 处．已知飞机相对于空气的速度为 v，空气相对于地面的速度为 u，A 和 B 之间的距离为 d，并设飞机相对于空气的速率 v 保持不变，试问在下述情况下飞机来回飞行的总时间是多少？假定：(1) 空气静止；(2) 空气的速度为向东或向西；(3) 空气的速度为向北或向南．

[解] (1) $t_0=\dfrac{2d}{v}$．　　(2) $t_1=\dfrac{d}{v+u}+\dfrac{d}{v-u}=\dfrac{t_0}{1-u^2/v^2}$．

(3) $t_2=\dfrac{2d}{\sqrt{v^2-u^2}}=\dfrac{t_0}{\sqrt{1-u^2/v^2}}$．

1－3. 飞机上的罗盘显示，机头指向正东．这时的风向是正南，风速为 65 km/h，而飞机上空气流速表的读数为 215 km/h，试求该飞机相对于地面的速度．如果飞行员打算朝正东飞行，那么机头应指向什么方位？

[解] (1) 如图所示，飞机对地面的速度和方位角分别为



题 1－3 图

$$v_1 = \sqrt{215^2 + 65^2}\ \text{km/h} = 225\ \text{km/h},$$

$$\alpha = \arctan\frac{65}{215} = 16.8^\circ.$$

(2) 若飞行员打算朝正东飞行，机头指的方位角为

$$\theta = \arcsin\frac{65}{215} = 17.6^\circ,$$

飞机对地面而言的实际航速为

$$v_1 = \sqrt{215^2 - 65^2}\ \text{km/h} = 205\ \text{km/h}.$$

1－4. 如果把两个物体 A 和 B 分别以初速 v_A 和 v_B 抛掷出去，v_A 与水平面的夹角为α，v_B 与水平面的夹角为β，试证明在任何时刻物体 B 相对于物体 A 的速度是常矢量.

[证明] 物体 A 和 B 的速度分别为

$$\boldsymbol{v}_A(t) = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{g}t, \qquad \boldsymbol{v}_B(t) = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{g}t.$$

在任何时刻 t，物体 B 相对于物体 A 的速度为

$$\boldsymbol{v}_{BA}(t) = \boldsymbol{v}_B(t) - \boldsymbol{v}_A(t) = \boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_{BA}.$$

与时间无关的常矢量 $\boldsymbol{v}_{BA}$ 在直角坐标系中的分量表达式为

$$v_x = v_B\cos\beta - v_A\cos\alpha,$$

$$v_y = v_B\sin\beta - v_A\sin\alpha.$$

1－5. 湖面上有一条船，在岸边高崖上的船夫通过绞车以匀速率 v 收绳，将船拉向岸边. 如果绳子的质量可忽略，试问船的速率 u 比收绳速率 v 是大还是小？船的加速度如何？

[解] (1) 解法一：采用直角坐标系.

因小船作直线运动，故可取其运动轨迹为直角坐标系的 x 轴，取绞车对水面的垂足 O 为坐标原点，如图(a)所示. 在任意时刻 t，小船的位置 x 满足关系

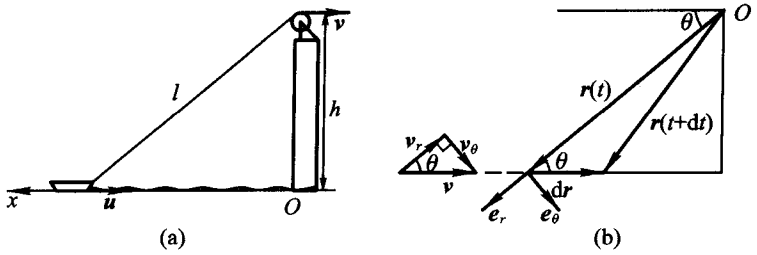
$$x^2 = l^2 - h^2.$$

将上式的两边对时间求导数，可得

$$2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}.$$

由于崖上的船夫以匀速率 v_0 收绳，因此有 $\mathrm{d}l/\mathrm{d}t = -v_0$. 所以，由上式可得船的速度和加速度的分量分别为

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{x}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = -\frac{l}{x}v_0 = -\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}v_0, \qquad v_y = 0;$$



题 1－5 图

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{v_0h^2}{x^2\sqrt{x^2+h^2}}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{v_0^2h^2}{x^3},\qquad a_y=0.$$

由此可见，船的速度和加速度的方向均与 x 轴的正方向相反，且加速度的数值随着 x 的减小而迅速增大.

(2) 解法二：采用平面极坐标系.

如图(b)所示，以绞车 O 为原点，水平向左为极轴建立平面坐标系. 船的位置矢量和速度分别为

$$\boldsymbol{r}(t)=r\boldsymbol{e}_r,\qquad \boldsymbol{v}(t)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\boldsymbol{e}_r).$$

利用式(1.17)，可得

$$\boldsymbol{v}(t)=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r+r\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r+r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta=v_r\boldsymbol{e}_r+v_\theta\boldsymbol{e}_\theta.$$

船夫的收绳速率 v_0 就是上式中的船的径向速率，即

$$v_r=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=v_0.$$

由图(b)左下方的速度矢量三角形可得，船的运动速率为

$$v=\frac{v_0}{\cos\theta},$$

方向沿水面指向岸边. 再利用式(1.19)，经过稍许繁琐的计算，还可以得到船的加速度公式，这里不再赘述.

1－6. 在数据表中列出了各行星轨道的平均半径 R (以 10^6 km 为单位)和绕日公转的周期 T [以 a (年)为单位]. 如果把行星轨道近似看成圆形，试根据表中所列的数据，计算太阳系内八大行星[①]的向心加速度 a，并用双对数坐

① 根据国际天文学联合会第 26 届大会的决定，以前被称为第九大行星的冥王星已被排除在行星行列之外，从而太阳系内只有八大行星. 详见本书第二部分第四章题 4－7 题解的有关部分.

标作出半径与周期以及向心加速度与半径之间的关系曲线，从这里找出 $R-T$ 以及 $a-R$ 之间的函数关系．实际上，它们分别就是开普勒第三定律和万有引力的平方反比律．

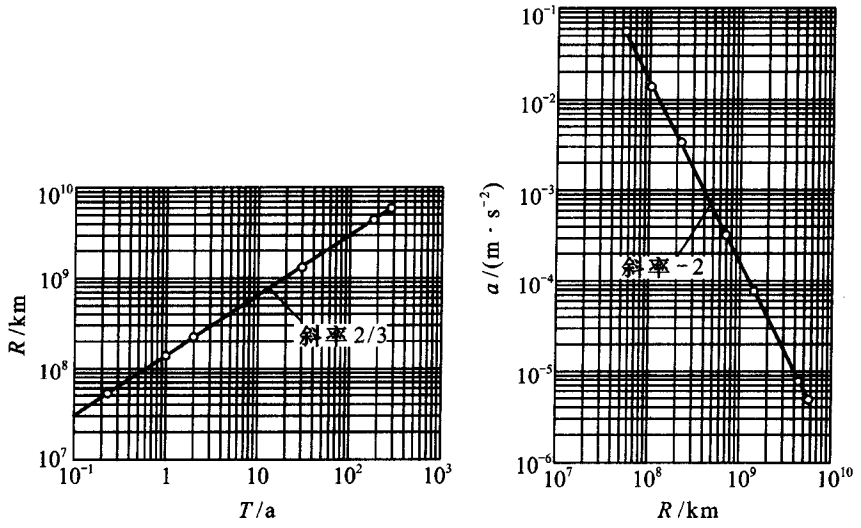
[解] 太阳系内八大行星的速率和向心加速度分别为

$$v=\frac{2\pi R}{T},\qquad a=\frac{v^2}{R}=\frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

利用上式以及表中列出的数据，所算得的各行星的向心加速度列于表中最后一栏．据此可作出如图所示的 $R-T$ 和 $a-R$ 双对数坐标图．

题 1－6 表　行星轨道的平均半径 R、绕日公转的周期 T 和向心加速度 a

行星	$R/(10^6\ \mathrm{km})$	T/a	$a/(\mathrm{m\cdot s^{-2}})$
水星	57.9	0.24	3.99×10^{-2}
金星	108	0.615	1.13×10^{-2}
地球	149.6	1.00	5.93×10^{-3}
火星	228	1.88	2.56×10^{-3}
木星	778	11.9	2.18×10^{-4}
土星	1 430	29.5	6.52×10^{-5}
天王星	2 870	84.0	1.61×10^{-5}
海王星	4 500	165	6.56×10^{-6}



题 1－6 图

两图都呈线性关系，相应的直线斜率分别为 2/3 和 −2．这表明，$R-T$ 以及 $a-R$ 之间的函数关系分别为

$$R \propto T^{2/3}, \qquad a \propto R^{-2}.$$

前者是开普勒第三定律，后者是万有引力的平方反比律．对于圆轨道，由开普勒第三定律导出平方反比律是直接了当的．

1－7. 试问地球的自转角速度最大增加到多少倍时，赤道上的物体仍能保持在地球上而不致离开？已知赤道上物体的向心加速度为 $a_1 = 3.4\ \text{cm/s}^2$，赤道上的重力加速度为 $g = 9.80\times10^2\ \text{cm/s}^2$.

[解] 利用 $a = R\omega^2$ 及 $a_2 = g$，可得 $\omega_2/\omega_1 = 17$.

1－8. 如果设想在氢原子中电子绕质子作匀速圆周运动，它的轨道半径为 5.3×10^{-11} m，速率为 2.2×10^6 m/s，试求氢原子中电子的加速度.

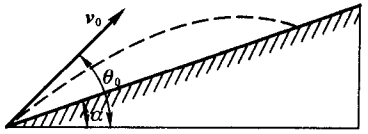
[解] $a = v^2/r_0 = 9.1\times10^{22}\ \text{m/s}^2$.

1－9. 如图所示，大炮向小山上的目标开火，此山的山坡与地平线的夹角为 α，试问发射角 θ_0 为多大时炮弹沿山坡射得最远？

[解] 设炮弹在山坡上的落地点 P 与炮口 O 点间的距离为 d，则 P 点的直角坐标为

$$x_P = d\cos\alpha,$$

$$y_P = d\sin\alpha.$$



题 1－9 图

将它们代入抛体运动的轨迹方程，可得炮弹落地点 P 与炮口 O 点间的距离为

$$d = \frac{2v_0^2}{g\cos^2\alpha}\cos^2\theta_0(\cos\alpha\tan\theta_0 - \sin\alpha).$$

于是，由极值条件 $\mathrm{d}d/\mathrm{d}\theta_0 = 0$，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta_0}[\cos^2\theta_0(\cos\alpha\tan\theta_0 - \sin\alpha)] = \cos2\theta_0\cos\alpha + \sin2\theta_0\sin\alpha = 0,$$

即　　$\tan2\theta_0 = -\cot\alpha$，

$$\theta_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}.$$

1－10. 设一根细棒在水平面内以恒定的角速度 ω 绕棒的顶点 O 旋转，有一只昆虫从点 O 出发，以恒定的速率 u 沿棒向外爬行，试求昆虫的爬行速度和加速度.

[解] 昆虫沿着旋转着的棒爬行，其运动轨迹比较复杂．这里采用平面极坐标系来描述，较为简明．若以棒的顶点 O 为原点，并以 $t = 0$ 时刻棒的位置为极轴，则当昆虫离 O 点的距离为 r 时，按题意有

$$r = ut,$$

$$\theta = \omega t.$$

根据式(1.21)，昆虫的速度和加速度分别为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r+r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta=u\boldsymbol{e}_r+ut\omega\boldsymbol{e}_\theta,$$

$$\boldsymbol{a}=[\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}-r(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t})^2]\boldsymbol{e}_r+[2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}]\boldsymbol{e}_\theta$$

$$=-ut\omega^2\boldsymbol{e}_r+2u\omega\boldsymbol{e}_\theta.$$

由此可见，昆虫的径向速度的大小等于常量，而其横向速度的大小随时间线性地增加；昆虫的径向加速度(指向原点 O)的大小随时间线性地增加，而其横向加速度的大小等于常量.

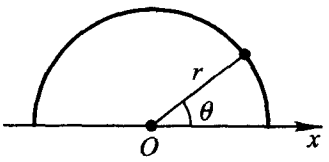
1－11. 某质点在半径为 r 的半圆上运动，它在直径 Ox 轴上的投影作匀速运动，速率为 v_0. 如以圆心为平面极坐标系的原点，试求 $\boldsymbol{a}_r$ 和 $\boldsymbol{a}_\theta$ 以 θ 为自变量的表达式.

[解] 如图所示，选取以圆心 O 为原点的平面极坐标系，则有

$$v_r=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=0,$$

$$v_\theta=r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{v_0}{\sin\theta},$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{v_0}{r\sin\theta};$$

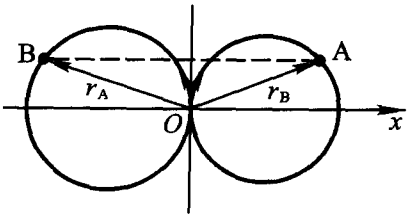


题 1－11 图

$$a_r=-r(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t})^2=-\frac{v_0^2}{r\sin^2\theta},$$

$$a_\theta=r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{v_0^2\cos\theta}{r\sin^3\theta}.$$

1－12. 两个质点 A 和 B 在 Oxy 坐标系中均以角速度 ω 作半径为 R 的圆周运动，且在 $t=0$ 时刻都从原点 O 出发沿 y 轴向上运动，但二者的转动方向相反. 试问质点 B 相对于质点 A 的运动规律如何？



题 1－12 图

[解] 按题意，在直角坐标系 Oxy 中，有

$$x_A=-R+R\cos\omega t,\qquad y_A=R\sin\omega t;$$

$$x_B=R-R\cos\omega t,\qquad y_B=R\sin\omega t.$$

于是，质点 B 相对于质点 A 的位矢及其分量分别为

$$\boldsymbol{r}_{BA}=\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A=2R(1-\cos\omega t)\boldsymbol{i}\,.$$

$$x_{BA}=2R(1-\cos\omega t),\qquad y_{BA}=0\,.$$

因此，相对于质点 A 来说，质点 B 沿 x 轴方向作简谐运动，其速度和加速度分别为

$$\boldsymbol{v}_{BA}=(2R\omega\sin\omega t)\boldsymbol{i}\,,$$

$$\boldsymbol{a}_{BA}=(2R\omega^2\cos\omega t)\boldsymbol{i}\,.$$

1－13. 测量上抛物体两次经过两个给定点的时间，可以确定该处的重力加速度．若物体两次经过水平线 a 的时间间隔为 Δt_a，而两次经过水平线 b 的时间间隔为 Δt_b，水平线 a 和 b 之间的高度差为 h，并假定在物体运动的范围内重力加速度为常量，试求该重力加速度的大小．

1989 年，包括我国在内的十个国家，在法国巴黎附近的国际计量局(BIPM)，用不同的方法进行了 43 694 次观测，得到重力加速度 g 的平均值为 9.809 259 748 m/s^2，误差仅为$\pm 7.4\times10^{-8}$ m/s^2.

[解] 对于上抛运动来说，物体从一水平线开始运动到最高点和从该点回落到同一水平线所需要的时间是相同的．因此，我们可以只考虑物体从最高点下落的过程，按题意可以写出关系式

$$\frac{1}{2}g\left(\frac{1}{2}\Delta t_a\right)^2-\frac{1}{2}g\left(\frac{1}{2}\Delta t_b\right)^2=h\,,$$

由此可得

$$g=\frac{8h}{(\Delta t_a)^2-(\Delta t_b)^2}\,.$$

第二章　动量守恒和质点动力学

2－1. 质量都是 70 kg 的两个滑冰者 A 和 B，各以 1 m/s 的速率互相趋近. 滑冰者 A 拿着一个质量为 10 kg 的木球，两人都能以相对于他们自己 5 m/s 的速率扔球. 为了避免相撞，他们在相距 10 m 时开始来回地扔球. 如果球在每个人的手里只停留 1 s，试问扔一次够吗？扔两次如何？如果球的质量为原来的一半，但他们能够扔得快一倍，他们需扔多少次？请把全部情节分别画在两张时间–位移图上，图中滑冰者的位置以横坐标 x 来表示，时间的进展用纵坐标 t 的增长来表示. 实际上，这里所描绘的情景为粒子之间的排斥相互作用提供了一个直观的模型.

[解] 令 m, m_A, m_B 分别代表木球以及滑冰者 A 和 B 的质量，而 $v_0, v_1, v_2, \cdots$，$v_{A0}, v_{A1}, v_{A2}, \cdots$ 和 $v_{B0}, v_{B1}, v_{B2}, \cdots$ 分别代表木球以及滑冰者 A 和 B 各次的速度，Δv 为木球的相对出手速度. 按题意，有

$$v_1 = v_{A1} + \Delta v, \qquad v_2 = v_{B2} - \Delta v, \cdots;$$

根据动量守恒定律，我们有

$$(m_A + m)v_{A0} = m_A v_{A1} + m v_1,$$

$$m_B v_{B0} + m v_1 = (m_B + m)v_{B1} = m_B v_{B2} + m v_2,$$

$$m_A v_{A1} + m v_2 = (m_A + m)v_{A2} = \cdots,$$

解得

$$v_1 = v_{A0} + \frac{m_A \Delta v}{m_A + m}, \qquad v_{A1} = v_{A0} - \frac{m \Delta v}{m_A + m},$$

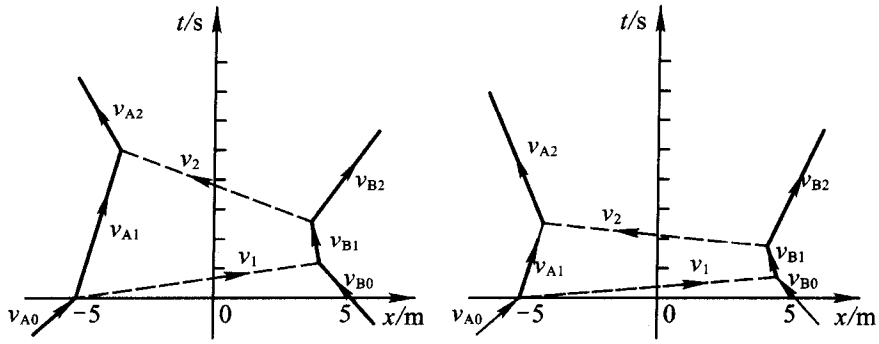
$$v_{B1} = \frac{m_B v_{B0} + m v_1}{m_B + m}, \qquad v_{B2} = v_{B1} + \frac{m \Delta v}{m_B + m},$$

$$v_2 = v_{B1} - \frac{m_B \Delta v}{m_B + m}, \qquad v_{A2} = \frac{m_A v_{A1} + m v_2}{m_A + m}, \cdots.$$

将两种情况下的数据代入以上各式，可得数据表以及图(a)和(b)如下：

题 2-1 表

	$v_1/(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$	$v_{A1}/(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$	$v_{B1}/(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$	$(v_{B1}-v_{A1})/(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$
图(a)	5.38	0.38	−0.20	−0.58
图(b)	10.33	0.33	−0.24	−0.58
	$v_2/(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$	$v_{B2}/(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$	$v_{A2}/(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$	$(v_{B2}-v_{A2})/(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$
图(a)	−4.58	0.42	−0.24	0.66
图(b)	−9.58	0.42	−0.33	0.75



题 2－1 图

在两种情况下结果类似：在第一次 A 扔球给 B 后相对速度仍为负，即两人继续接近；而在第一次 B 扔球给 A 后相对速度变为正，即两人开始远离.

2－2. 一辆装煤火车以 3.0 m/s 的速率从煤斗下面通过，煤通过漏斗以 5.0 t/s 的速率竖直注入车厢. 如果车厢的速率保持不变，车厢与钢轨间的摩擦忽略不计，试求煤车的牵引力.

[解] (1) 解法一：选煤车为系统，这时系统的质量在改变.

由于煤的不断注入，系统的质量在改变，这是个变质量的问题. 这时，牛顿第二定律应写为

$$F=\frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}.$$

因煤车作匀速运动，$\mathrm{d}v/\mathrm{d}t=0$，故煤车的牵引力为

$$F=v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=3.0\times5.0\times10^3\ \mathrm{N}=1.5\times10^4\ \mathrm{N}.$$

(2) 解法二：选煤车和煤为系统，这时系统的总质量不变.

设 t 时刻系统的质量为 m，在时间间隔 $\mathrm{d}t$ 内注入车厢的煤的质量为 $\mathrm{d}m$，煤车的牵引力为 F，则应用动量定理可得

$$F\,\mathrm{d}t=(m+\mathrm{d}m)v-mv=v\,\mathrm{d}m,$$

$$F=v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=3.0\times5.0\times10^3\ \mathrm{N}=1.5\times10^4\ \mathrm{N}.$$

2－3. 在光滑平面上，质量为 m 的质点以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 沿半径为 R 的圆周作匀速运动. 试分别用积分法和动量定理，求出在 θ 从 0 到 $\pi/2$ 的过程中合力的冲量.

[解] 质点所受到的合力为

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\frac{v^2}{R}(-\boldsymbol{e}_r) = -m\omega^2\boldsymbol{R}.$$

在$\theta = 0 \to \pi/2$的过程中，可按定义用积分法求出合力冲量，即

$$\boldsymbol{I} = \int \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}(-m\omega^2 R)(\cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j})\frac{1}{\omega}\mathrm{d}\theta$$

$$= -m\omega R(\sin\theta\boldsymbol{i} - \cos\theta\boldsymbol{j})\Big|_0^{\pi/2} = -m\omega R(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}).$$

此外，也可按动量定理求出合力的冲量，即

$$\boldsymbol{I} = m(\boldsymbol{v}_{\pi/2} - \boldsymbol{v}_0) = m(-v\boldsymbol{i} - v\boldsymbol{j}) = -m\omega R(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}).$$

即在θ从 0 到$\pi/2$的过程中，合力冲量的大小为$I = \sqrt{2}\,m\omega R$，其方向与极轴间的夹角为$5\pi/4$.

2－4. 质量为 m = 2.5 g 的小球以初速度 v_1 射向并撞击桌面后以速度 v_2 弹开.

(1) 测得v_1=20 m/s，v_2=16 m/s，$\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 与桌面法线方向间的夹角分别为α_1= 45°和α_2=30°，试求小球受到的冲量；

(2) 若撞击时间为 0.01 s，试求桌面施于小球的平均冲击力.

[解] (1) 小球在撞击桌面过程中它所受到的冲量为

$$\boldsymbol{I} = m\boldsymbol{v}_2 + (-m\boldsymbol{v}_1).$$

取直角坐标系的 x 轴和 y 轴分别平行和垂直于桌面，则有

$$I_x = m(v_1\sin\alpha_1 - v_2\sin\alpha_2)$$

$$= 2.5\times10^{-3}\times(10\sqrt{2} - 8)\ \mathrm{N\cdot s} = 1.54\times10^{-2}\ \mathrm{N\cdot s},$$

$$I_y = m(v_1\cos\alpha_1 + v_2\cos\alpha_2)$$

$$= 2.5\times10^{-3}\times(10\sqrt{2} + 8\sqrt{3})\ \mathrm{N\cdot s} = 7.00\times10^{-2}\ \mathrm{N\cdot s}.$$

于是，小球所得到的冲量的大小及其与 x 轴间的夹角分别为

$$I = \sqrt{I_x^2 + I_y^2} = 7.16\times10^{-2}\ \mathrm{N\cdot s},$$

$$\beta = \arctan\frac{I_y}{I_x} = \arctan\frac{7.00}{1.54} = 77°35'.$$

这说明小球受到了桌面的支持力和摩擦力的作用.

(2) $\overline{F} = I/\Delta t = 7.16\,\mathrm{N}$，它比重力 2.5×10^{-2} N 大得多，因此在撞击时间内可以忽略重力的作用.

2－5. 飞机以 300 m/s 的速度飞行，撞到一质量为 2.00 kg 的鸟，鸟的长度为 0.30 m. 假定鸟撞上飞机后随同飞机一起运动，试估算它们相撞时的平

均冲击力的大小．为了安全，现在有的机场已采用特殊声响或纵放猛禽等办法，驱逐在机场附近的飞鸟．

[解] 以地面为参考系，把鸟看成质点，它在与飞机碰撞前后的速度分别为 $v_0=0$ 和 $v=300\ \mathrm{m/s}$．由动量定理可得

$$mv-mv_0=I=\overline{F}(t-t_0)\,.$$

假定碰撞经历的时间等于飞机飞行距离为 l(鸟的长度)时所需的时间，可得

$$\overline{F}=\frac{m(v-v_0)}{t-t_0}=\frac{mv(v-v_0)}{l}=6.0\times10^5\ \mathrm{N}\,.$$

平均冲击力竟如此之大！即令与鸟相撞，飞机也有被破坏的危险[①]．

2－6. 一物体以初速度 v_0 从地面斜抛入空中，求落地时的动量，并证明其动量增量在数值上等于物体的重量乘以飞行时间．

[解] 设 v_0 与地面间的夹角为 θ_0，则斜抛物体的运动速度为

$$v_x=v_0\cos\theta_0\,,$$

由于在落地时有

$$y_\mathrm{m}=(v_0\sin\theta_0)t_\mathrm{m}-\frac{1}{2}gt_\mathrm{m}^2=0\,,$$

故有　$t_\mathrm{m}=2v_0\sin\theta_0/g\,,$

$$v_{x\mathrm{m}}=v_0\cos\theta_0\,,\qquad v_{y\mathrm{m}}=-v_0\sin\theta_0\,.$$

所以，抛体落地时的动量以及动量的增量分别为

$$\boldsymbol{p}_\mathrm{m}=mv_0(\cos\theta_0\,\boldsymbol{i}-\sin\theta_0\,\boldsymbol{j})\,,$$

$$\boldsymbol{p}_\mathrm{m}-\boldsymbol{p}_0=-2mv_0\sin\theta_0\,\boldsymbol{j}=mgt_\mathrm{m}(-\boldsymbol{j})\,.$$

2－7. 一架喷气式飞机以 v=210m/s 的速度水平飞行，它的引擎每秒吸入75kg 空气并与3.0kg 燃料混合燃烧后，以相对于飞机 u=490m/s 的速度向后喷出，试求该引擎对飞机的推力．

[解] (1) 解法一：以引擎吸入的空气、消耗的燃料以及喷出的废气为所

---

① 新华社华盛顿 2003 年 7 月 7 日电：据美国媒体报道，在 7 日于得克萨斯州圣安东尼奥西南研究所进行的一次模拟实验中，一块重约 0.75 kg 的泡沫隔热材料，以 850 km/h 的速度，撞上真正的航天飞机机翼部件，结果形成了直径约 40 cm 的孔洞．据报道，在这次实验中，泡沫材料撞击如此猛烈，以至于用来拍摄实验过程的一架相机的镜头都被震飞．接受撞击的增强型碳基复合材料板曾随美“阿特兰蒂斯”号航天飞机 27 次进入太空．事故调查委员会目前已基本认定，这一撞击在机翼上形成孔洞，使超高温气体得以进入，这是“哥伦比亚”号 2 月 1 日解体坠毁的最可能原因．

2001 年的“9.11”事件，飞机质量约 1.5×10^5 kg，飞速 1000 km/h，装有几万升汽油，撞击世贸大楼，如何估算其破坏力？

考虑的系统．尽管在燃烧前后，系统的质量均为

$$m=[(75+3.0)\,\mathrm{kg/s}]\,\Delta t=(78\,\mathrm{kg/s})\,\Delta t,$$

但是在空气被吸入引擎之前，空气对地面的速度为零，动量为零；而质量为 $m'=(3.0\,\mathrm{kg/s})\,\Delta t$ 的燃料对地面的速度与飞机相同，$v_{\mathrm{i}}=v=210\,\mathrm{m/s}$，动量为

$$m'v_{\mathrm{i}}=(3.0\,\mathrm{kg/s})\,v\,\Delta t.$$

燃烧后系统的速度为

$$v_{\mathrm{f}}=-u+v=(-490+210)\,\mathrm{m/s}=-280\,\mathrm{m/s}.$$

设系统受到的外力为 F，根据动量定理则有

$$F\,\Delta t=mv_{\mathrm{f}}-m'v_{\mathrm{i}},$$

$$F=(mv_{\mathrm{f}}-m'v_{\mathrm{i}})/\Delta t$$

$$=(78\,\mathrm{kg/s})\times(-280\,\mathrm{m/s})-(3.0\,\mathrm{kg/s})\times(210\,\mathrm{m/s})=-2.25\times10^{4}\,\mathrm{N}.$$

向后的力 $\boldsymbol{F}$ 为气体系统所受到的力，与它施于飞机引擎的力大小相等，方向相反．因此，引擎对飞机的向前推力的大小为

$$F_{\text{推}}=2.25\times10^{4}\,\mathrm{N}.$$

(2) 解法二：以飞机、引擎吸入的空气、消耗的燃料以及喷出的废气为所考虑的系统．设在某一时刻 t 飞机和燃料的总质量为 m，系统的总动量为 mv．经过时间间隔 $\mathrm{d}t$，引擎吸入的空气的质量为 $\mathrm{d}m''$，动量为零；引擎喷出了质量为 $\mathrm{d}m'+\mathrm{d}m''$ 的废气，它相对于飞机引擎的喷出速度为 u．在 $t+\mathrm{d}t$ 时刻，飞机对地面参考系的速度增加到 $v+\mathrm{d}v$，系统总动量的大小为

$$(\mathrm{d}m'+\mathrm{d}m'')(v+\mathrm{d}v-u)+(m-\mathrm{d}m')(v+\mathrm{d}v).$$

由于所喷出的燃料气体的质量 $\mathrm{d}m'$ 等于飞机质量的减少量，即 $\mathrm{d}m'=-\mathrm{d}m$，上式可写为

$$(-\mathrm{d}m+\mathrm{d}m'')(v+\mathrm{d}v-u)+(m+\mathrm{d}m)(v+\mathrm{d}v).$$

忽略空气阻力，根据动量守恒定律，有

$$(-\mathrm{d}m+\mathrm{d}m'')(v+\mathrm{d}v-u)+(m+\mathrm{d}m)(v+\mathrm{d}v)=mv.$$

展开该等式，可得

$$m\mathrm{d}v=(u-v)\,\mathrm{d}m''-u\,\mathrm{d}m,$$

$$F_{\text{推}}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=(u-v)\frac{\mathrm{d}m''}{\mathrm{d}t}+u\frac{\mathrm{d}m'}{\mathrm{d}t}=2.25\times10^{4}\,\mathrm{N}.$$

2－8. 火箭起飞时的总质量为 $1.20\times10^{4}\,\mathrm{kg}$，每秒消耗燃料 $1.25\times10^{2}\,\mathrm{kg}$，喷出气体的速率为 1830 m/s，试求：(1) 火箭所受到的推进力 F；(2) 火箭垂直地面向上起飞时的加速度．

[解] (1) 如果以喷出的气体 $\mathrm{d}m'$ 为所考虑的系统，则在 $\mathrm{d}t$ 时间内它的动量在火箭速度 $\boldsymbol{v}$ 方向投影的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}m'[(v-u)-v]}{\mathrm{d}t} = -u\frac{\mathrm{d}m'}{\mathrm{d}t}(\text{或} = u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}).$$

实际上，这就等于所喷出气体受到的火箭体的推力，因此火箭体受到了大小相等的反向推力，即

$$F = u\frac{\mathrm{d}m'}{\mathrm{d}t} = 1.83\times10^3\times125\,\mathrm{N} = 2.29\times10^5\,\mathrm{N}.$$

(2) 这时火箭起飞时受到了重力的作用，其加速度的大小为

$$a_\mathrm{i} = \frac{F-m_\mathrm{i}g}{m_\mathrm{i}} = \frac{F}{m_\mathrm{i}} - g = 9.28\ \mathrm{m/s^2}.$$

2－9. (1) 一级火箭的总质量为1.300×10^4 kg，其中燃料为9.75×10^3 kg，喷出物质相对于火箭的速度为 u. 若重力和空气阻力均可忽略不计，试求燃料燃尽时火箭的速度. (2) 一枚两级火箭的总质量也是1.300×10^4 kg，第一级的总质量为1.200×10^4 kg，其中燃料为9.00×10^3 kg；第二级的总质量为1.00×10^3 kg，其中燃料为7.5×10^2 kg. 发射时，第一级火箭携带第二级火箭一起上升，喷出物质相对于火箭的速度仍为定值 u. 试问第一级火箭的燃料燃尽时的速度是多少？在第一级火箭燃料燃尽后，第一级火箭的剩余物质自动被抛弃掉，第二级火箭自动点火，试求第二级火箭燃料燃尽时火箭的速度. 试问 u 为何值时，才能使第二级火箭获得8.00×10^3 m/s的速度？

[解] (1) $v_\mathrm{f} = v_\mathrm{i} + u\ln\dfrac{m_\mathrm{i}}{m_\mathrm{f}} = 1.39u$.

(2) 在第一、二级燃料燃尽时，火箭的速度分别为

$$v_{\mathrm{f}1} = v_{\mathrm{i}1} + u\ln\frac{m_\mathrm{i}}{m_{\mathrm{f}1}+m_{\mathrm{i}2}} = 1.18u;$$

$$v_{\mathrm{f}2} = v_{\mathrm{i}2} + u\ln\frac{m_{\mathrm{i}2}}{m_{\mathrm{f}2}} = 2.57u.$$

因此，为了使二级火箭获得$v_{\mathrm{f}2}=8.00\times10^3$ m/s的速度，应该有

$$u = v_{\mathrm{f}2}/2.57 = 3.11\times10^3\ \mathrm{m/s}.$$

2－10. 测量两物体之间的静摩擦系数μ_s的一种方法是：将两长方块物体叠放在一个倾角可以调节的斜面上，并将下面的物体固定在斜面上，逐渐增大斜面的倾角θ，当$\theta=\theta_0$时，上面的物体开始滑动. 试根据上述实验求出这两个物体之间的静摩擦系数μ_s.

[解] 当斜面的倾角增大到$\theta=\theta_0$时物体开始滑动，这时有

$$\mu_\mathrm{s} m g\cos\theta_0 = m g\sin\theta_0, \qquad \text{即} \qquad \mu_\mathrm{s} = \tan\theta_0.$$

2－11. 在水平桌面上顺次放着三块靠在一起的、质量均为 2.0 kg 的长方形物体 A、B 和 C，它们与桌面间的静摩擦系数 μ_s 均为 0.50，并近似认为滑动摩擦系数 $\mu = \mu_s$．如果沿物体的排列方向对物体 A 施加一水平推力 $F_1 = 5.0\text{N}$，试问各物体间的相互作用力如何？受到桌面的摩擦力是多少？如果水平推力的大小改为 $F_2 = 50\text{N}$，则情况又将如何？

[解] 各物体可能受到的最大静摩擦力和滑动摩擦力为

$$F_{sA} = F_{sB} = F_{sC} = F_s = \mu_s m g = 9.8\text{N}.$$

当推力 $F_1 = 5.0\text{N}$ 小于 $F_s = 9.8\text{N}$ 时，三个物体都没有滑动．这时，只有物体 A 受到了大小为 $F_1 = 5.0\text{N}$ 的桌面的静摩擦力；物体 B 和 C 既没有受到推力的作用，也没有受到摩擦力的作用．

当推力 $F_2 = 50\text{N} > 3F_s$ 时，三个物体将在力 $F - 3F_s$ 的作用下作匀加速运动，其加速度为

$$a = \frac{F - 3F_s}{3m} = 3.4\,\text{m/s}^2.$$

这时，三个物体所受到的滑动摩擦力均为 9.8N，此外物体 A 还受到了推力 $F_2 = 50\text{N}$ 的作用，A 和 B 两物体间的相互作用力为

$$F_{AB} = F_2 - F_s - ma = 33.4\,\text{N},$$

B 和 C 两物体间的相互作用力为

$$F_{BC} = F_{AB} - F_s - ma = 16.8\,\text{N}.$$

2－12. (1) 长为 l、质量为 m 并均匀分布的绳子静置于光滑的水平面上．在绳的一端以恒力 F 沿绳长方向拉绳，试求绳中的张力．

(2) 如果该绳在恒定重力场中沿绳长方向竖直自由下落，则张力表达式如何变化？

(3) 用绳子使一质量为 m' 的物体加速运动，试计算在水平和竖直两种情况下绳中的张力．

[解] (1) 若以恒力 $F = ma$ 沿绳长方向拉绳，并设 x 是从绳的另一端算起的沿绳的距离，则绳中的张力 $F_T(x)$ 应满足

$$F_T(x) = m\frac{x}{l}a = \frac{x}{l}F.$$

(2) 竖直下落时绳中的张力变为 $F_T(x) = 0$．

(3) 当我们使物体加速运动时，对于在光滑的水平面上运动的绳子，有

$$F = (m + m')a,$$

绳中的张力满足

$$F_T(x)=(m\frac{x}{l}+m')a=\frac{F}{m+m'}(m\frac{x}{l}+m').$$

对于在竖直方向上运动的绳子，则有

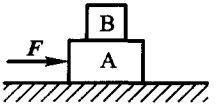
$$F-(m+m')g=(m+m')a$$

和　　$$F_T(x)-(m\frac{x}{l}+m')g=(m\frac{x}{l}+m')a,$$

由此可解得与水平面上运动的绳子相同的结果.

2－13. 如图所示，一质量为 m_1 的木块 A 放置在光滑的水平面上，A 上放置另一质量为 m_2 的木块 B，已知 A 与 B 之间的滑动摩擦系数为 μ，现施力沿水平方向推 A，试问推力至少多大时才能使 A 和 B 间发生相对运动.

[解] 在沿水平方向推力 F 的作用下，A 和 B 两木块将在光滑的水平桌面上作加速运动，而 B 木块的加速运动是靠它与 A 木块之间的摩擦力维持着的，因此有



题 2－13 图

$$a_B=\mu m_2 g/m_2=\mu g.$$

为了达到和超过这一加速度从而使 A 和 B 间发生相对运动，应有

$$F\geqslant(m_1+m_2)\mu g.$$

2－14. 质量为 m 的跳水运动员，初速为零地从 10 m 跳台上跳下. 假定作用在运动员身上水的黏性阻力为 bv^2，浮力与其重力正好抵消. 试求：(1) 运动员的入水速度 v_0；(2) 运动员的速度作为水面下深度 x 的函数；(3) 运动员在水面下的深度 x 作为水下时间 t 的函数. 如果 $b/m=0.4\ \mathrm{m^{-1}}$，试求当 $v=v_0/10$ 时的深度.

[解] (1) 跳水运动员入水前的运动可以认为是自由落体运动，初速为零地从 $h=10\mathrm{m}$ 跳台上跳下，落到水面的速度为

$$v_0=\sqrt{2gh}=14\ \mathrm{m/s}.$$

(2) 由于人体的密度与水几乎相同，因此入水后运动员所受到的浮力与其重力大小几乎相等，正好抵消. 若取水面为坐标原点，竖直向下为 x 轴正方向，则对于质量为 m 的跳水运动员，有

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-bv^2. \tag{a}$$

由于

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x},$$

因此可将式(a)化为

$$m v \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -bv^2 \qquad \text{即} \qquad \frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{b}{m}\mathrm{d}x . \tag{b}$$

将式(b)两边积分，可得

$$\int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v'}{v'} = -\frac{b}{m}\int_0^x \mathrm{d}x' ,$$

$$\ln\frac{v}{v_0} = -\frac{b}{m}x \qquad \text{即} \qquad x = \frac{m}{b}\ln\frac{v_0}{v} , \tag{c}$$

$$v = v_0 \mathrm{e}^{-\frac{bx}{m}} . \tag{d}$$

(3) 利用式(d)，可得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0 \mathrm{e}^{-\frac{bx}{m}} , \qquad \text{即} \qquad \mathrm{e}^{\frac{bx}{m}}\mathrm{d}x = v_0 \mathrm{d}t . \tag{e}$$

将式(e)两边积分，可得

$$x = \frac{m}{b}\ln(1-\frac{b}{m}v_0 t) . \tag{f}$$

如果 $b/m = 0.4\ \mathrm{m}^{-1}$，由式(c)可得当 $v = v_0/10$ 时的深度为

$$x = \frac{m}{b}\ln\frac{v_0}{v} = \frac{1}{0.4}\ln 10\,\mathrm{m} = 5.8\,\mathrm{m} .$$

一般而言，跳水运动员在速度为 $v = 2\ \mathrm{m/s} = v_0/7$ (即 $x = 4.9\,\mathrm{m}$)时翻身，并以脚蹬游泳池底为好，所以设计池深为 $4.5\,\mathrm{m} \sim 5.0\,\mathrm{m}$ 是恰当的.

2－15. 在半径为 R 的光滑球形碗内，质量为 m 的球以角速度 ω 在一水平面内作匀速圆周运动，试求该小球运动平面距碗底的高度 h.

[解] 小球以速率 $v = r\omega$ 沿碗壁作匀速圆周运动，维持该运动的向心力 $F = mr\omega^2$ 等于重力和碗的支持力的合力. 由几何关系可得

$$\frac{F}{mg} = \frac{r}{R-h} ,$$

即

$$\frac{mr\omega^2}{mg} = \frac{r}{R-h} .$$

所以，该小球的运动平面距碗底的高度为

$$h = R - \frac{g}{\omega^2} .$$

2－16. (1) 超速离心机以每秒 1000 转的转速高速转动，试求离转轴 10 cm 处的分子所受到的惯性力与重力之比.

(2) 在超速离心机的小室中，为了把悬浮分子从其周围的液体中分离出

来，两者的密度必须不同．如果悬浮分子的密度 ρ_1 与液体的密度 ρ 的比值为 1.01，试问使它们分离的力将把悬浮分子集中到什么地方？如果该比值是 0.99，情况又将怎样？

[解] (1) 考虑悬浮在超速离心机小室液体里的一个分子，它位于离转轴 $r=0.10\,\mathrm{m}$ 的地方．当超速离心机高速转动时，悬浮分子绕轴运动的角速度、线速度和向心加速度分别为

$$\omega = 6.3\times10^3\ \mathrm{rad/s},$$

$$v = \omega r = 6.3\times10^2\ \mathrm{m/s},$$

$$a = \omega^2 r = 3.9\times10^6\ \mathrm{m/s}.$$

因此，与转动相联系的向心加速度与重力加速度之比为

$$a/g = 4.0\times10^5,$$

即超速离心机中的加速度几乎比重力加速度大四十万倍．

(2) 在超速离心机的小室中，悬浮分子由于其密度 $\rho_1 = m/V$ 与周围液体的密度 ρ 不同，将受到一个很强的驱动力的作用，把它们从液体中分离出来．在通常的地球重力场中，浸在液体中的物体所受到的浮力等于该物体所排出的液体的重量．与此相仿，在超速离心机小室中悬浮分子所受到的上述驱动力为

$$\boldsymbol{F} = (\rho_1 - \rho)V a\boldsymbol{e}_r = (1 - \frac{\rho}{\rho_1})ma\boldsymbol{e}_r.$$

由此可见，如果与转动相联系的向心加速度 a 越大，则可以分离 ρ_1 和 ρ 差别越小的悬浮分子．如果 $\rho_1/\rho = 1.01$，即 $(1-\rho/\rho_1)>0$，则使悬浮分子分离的驱动力是向外的，悬浮分子将集中到超速离心机小室的外边；然而，如果 $\rho_1/\rho = 0.99$，即 $(1-\rho/\rho_1)<0$，则使悬浮分子分离的驱动力是向里的，悬浮分子将集中到超速离心机小室的里面．

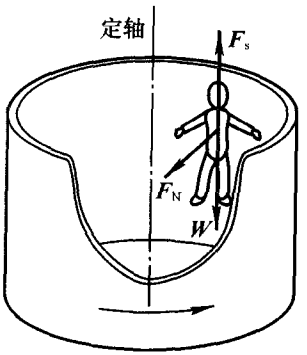
例如，某种细菌的半径为 $r=1\mu\mathrm{m}$，质量为 $m=5\times10^{-15}\,\mathrm{kg}$，超速离心机所产生的向心加速度为 $a=400g$．在 $\rho_1/\rho = 1.1$ 的情况下，超速离心机试验小室中液体对该细菌所产生的驱动力为 $F=2\times10^{-12}\,\mathrm{N}$．当液体的黏度为 $\eta=1.1\,\mathrm{mPa\cdot s}$ 时，利用斯托克斯黏滞公式，可得该细菌在液体中移动的速度或终极速度为

$$v_t = \frac{F}{6\pi\eta r} = 1\times10^{-4}\ \mathrm{m/s}.$$

实际上，对于一个静止在超速离心机试验小室中的观测者来说，每一个悬浮分子的行为就好像是受到了一个向外的惯性离心力 $m\omega^2 r$ 的作用．在 $\rho_1>\rho$ 的情况下，悬浮分子在该力作用下的向外运动由于周围液体对悬浮分

子的拖曳而受到反抗．因为不同种类的分子各受到不同数值的惯性离心力和不同的阻力，所以它们将以不同的速率在试验小室中向外运动．在超速离心机小室这个非惯性系中，惯性离心力就像是向外的人造重力，它的强度随着离轴距离的增加而增大．不同种类的各种分子在这个不寻常的“引力场”中最终会按照它们的密度依次排列成一系列层次．这样，超速离心机就提供了一种把不同种类的分子加以分离的非常好的方法．这种方法对于大分子特别有效，而它们往往正好是生物学上极其重要的分子．

2－17．转笼是公园里的一种乘坐娱乐设施．一个竖立的圆筒形笼子，以适当高的速率绕其中心轴旋转，以致若将地板撤去以后，笼子中的每一个人都能紧贴在笼壁上不掉下来．若要在撤去地板后保证游人的安全，试问转笼的最小角速度 ω 是多少？设笼子的半径为 R，人的质量为 m，人与笼壁之间的静摩擦系数为 μ_s．



题 2－17 图

[解] 如图所示，作用于人身上的力为其重力 W，摩擦力 F_s 和笼壁所施加的法向力 F_N，且有

$$mg = F_s \leqslant \mu_s F_N = \mu_s m R \omega^2 ,$$

即　　$$mg \leqslant \mu_s m R \omega^2 .$$

因此，在正常工作时转笼角速度的最小值为

$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{g}{\mu_s R}} .$$

如果笼子的半径为 $R = 1.8\,\mathrm{m}$，衣服与木材间 $\mu_s \geqslant 0.3$，则有

$$\omega_{\min} = 4.3\,\mathrm{rad/s} ,$$

即转笼每秒转 0.68 周．

2－18．地球赤道上空的同步卫星每 24 h 绕地球一周，它相对于卫星地面站是静止的．试以地球半径 R_e 为单位，求出环绕地球的同步卫星轨道的半径．1984 年 4 月，我国首次发射试验同步通信卫星成功，定点于东经 125° 的赤道上空．目前世界上已有几十颗同步卫星在赤道上空运行，全球的电视转播就是靠这些卫星实现的．

[解] 设地球质量为 m_1，同步卫星质量为 m_2，则同步卫星所受到的向心力恰好等于它所受到的地球引力，即同步条件为

$$m_2 \omega^2 r = \frac{G m_1 m_2}{r^2} .$$

因此，环绕地球的同步卫星轨道的半径为

$$r=\sqrt[3]{\frac{Gm_1}{\omega^2}}=\sqrt[3]{\frac{Gm_1T^2}{4\pi^2}}=4.2\times10^7\ \text{m}\ .$$

或者，利用地球半径 R_e，可得

$$m_2g=\frac{Gm_1m_2}{{R_e}^2},$$

即

$$R_e=\sqrt{\frac{Gm_1}{g}}\ ,$$

$$\frac{r}{R_e}=\sqrt[3]{\frac{Gm_1T^2}{4\pi^2}}\frac{1}{R_e}=\sqrt[3]{\frac{gT^2}{4\pi^2R_e}}=6.6\ ,$$

即环绕地球的同步卫星轨道的半径是地球半径的 6.6 倍.

在赤道上空运转的人造地球卫星，如果角速度和地球自转的角速度相同，在地球上的人看来，它是悬在空中不动的，称为同步卫星．上述计算表明，对于同步卫星距地面的高度以及飞行速度，都有极其严格的要求．实际上，同步卫星的角速度 ω、离地面的高度 h 和线速度 v 分别为

$$\omega=\frac{2\pi}{24h}=7.27\times10^{-5}\ \text{rad/s}\ ,$$

$$h=\sqrt[3]{\frac{Gm_1}{\omega^2}}-R_e=3.59\times10^7\ \text{m}\ ,$$

$$v=\omega r=3.07\ \text{km/s}\ .$$

当同步卫星的 h 和 v 数值稍有偏离时，必须立即自动开启姿态控制火箭加以纠正.

2－19. (1) 有一密度均匀的球体，以角速度 ω 围绕自身的几何对称轴旋转．若维持其表面物质不因快速旋转而被甩掉的力只有万有引力，这球体的密度至少要多大？(2) 蟹状星云中有一颗脉冲星每秒转 30 周，以此数据估算这颗脉冲星的最小密度(这是 1054 年在中国被观察到的一个超新星爆发的遗迹)．(3) 若此脉冲星的质量约为一个太阳的质量，试问它的最大可能半径是多少？(4) 设核子半径为 1.5×10^{-15} m，若此脉冲星的密度与核物质的密度相当，它的半径是多少？

[解] (1) 按题意，质量为 m' 的球体表面物质与质量为 m 的球体间的万有引力，应大于或等于它作匀速圆周运动所需要的向心力．设球体半径为 R，密度为 ρ，则有

$$\frac{Gmm'}{R^2}=\frac{4\pi G\rho Rm'}{3}\geqslant m'\omega^2R\ ,$$

即　　$\rho \geqslant \dfrac{3\omega^2}{4\pi G}$.

(2) 脉冲星的 $\omega = 60\pi\,\mathrm{rad/s}$，由上式可得

$$\rho_{\min} = \frac{3\omega^2}{4\pi G} = 1.3\times10^{14}\ \mathrm{kg/m^3}.$$

(3) 质量约为一个太阳的质量的脉冲星的可能半径为

$$R \leqslant \sqrt[3]{\frac{Gm_{日}}{\omega^2}} = 155\ \mathrm{km}.$$

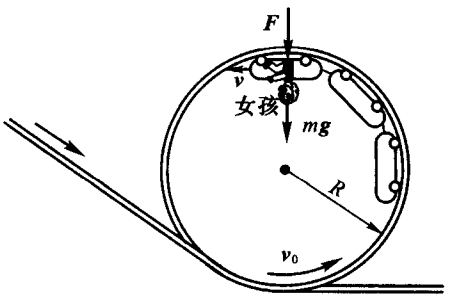
(4) 核子的半径 R_n、质量 m_n 和密度 ρ_n 分别为

$$R_n = 1.5\times10^{-15}\ \mathrm{m},\quad m_n = 1.7\times10^{-27}\ \mathrm{kg},\quad \rho_n = 1.2\times10^{17}\ \mathrm{kg/m^3}.$$

若此脉冲星的密度与核物质的密度相当，它的半径是

$$R = \sqrt[3]{\frac{m_{日}}{m_n}}\,R_n = 16\ \mathrm{km}.$$

2－20. 如图所示，总质量为 m 的飞车和演员沿光滑的倾斜轨道自由滑下，进入半径为 R 的竖直圆形轨道．试求：(1) 能使飞车安全地沿圆形轨道滑行的最小速率 v_0．(2) 飞车和演员在圆形轨道上各处给予轨道的压力 $\boldsymbol{F}$.



题 2－20 图

[解] (1) 只需考虑飞车和演员在圆形轨道顶部的情况，这时演员不致下落的条件是轨道支持力不小于零，即

$$F_N = m\frac{v^2}{R} - mg \geqslant 0.$$

而根据机械能守恒定律，又有

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mg(2R).$$

联立以上两式，可得能使飞车沿圆形轨道安全滑行的最小速率为

$$v_0 = \sqrt{5gR}.$$

(2) 按题意，飞车和演员是在作变速圆周运动．我们以地面为参考系，将飞车和演员一起隔离出来考虑．演员和飞车受到的重力 mg 的法向分量及轨道的支持力 F_N 提供了他们作圆周运动的向心力，而重力的切向分量使他

们的运动速率发生变化，因此有

$$F_N - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R}, \tag{a}$$

$$-mg\sin\theta = m\frac{dv}{dt}. \tag{b}$$

设 h 表示飞车和演员所处位置的高度，则利用

$$\sin\theta = \frac{dh}{ds} \quad 和 \quad \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds},$$

可将式(b)改写为

$$-mg\frac{dh}{ds} - mv\frac{dv}{ds} = 0 \quad 或 \quad mg\,dh = -mv\,dv,$$

积分后可得

$$v^2 = 2gh_0 - 2gh = 2gh_0 - 2gR(1-\cos\theta).$$

将此结果代入式(a)，即得

$$F_N = \frac{2mgh_0}{R} - 2mg + 3mg\cos\theta.$$

显然，飞车和演员在圆形轨道上各处给予轨道的压力 $\boldsymbol{F}$ 的大小与 F_N 相同，方向与其相反．顺便指出，只要 $F_N \geqslant 0$，则飞车和演员就不会跌落下来，由此可得条件

$$h_0 \geqslant 5R/2,$$

这时有

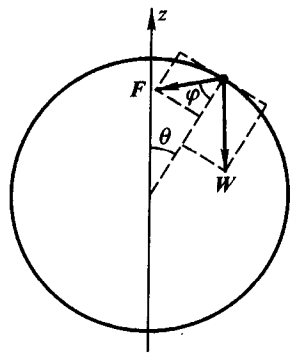
$$F_N \geqslant 3mg(\cos\theta + 1).$$

2－21. 飞机作特技表演，在竖直平面内以匀速率 v 作半径为 R 的圆周运动．飞机驾驶员的质量为 m，试求他施于飞机座垫的压力多大？

[解] 按题意，飞机是在作匀速圆周运动．由于作用力与反作用力大小相等，因此飞机驾驶员施于座垫的压力(即他在飞机中的“重量”)在数值上等于座垫支持驾驶员的力 $\boldsymbol{F}$ 的大小，而支持力 $\boldsymbol{F}$ 的方向并不一定与座垫垂直．如图所示，将驾驶员隔离出来，在自然坐标系中可列出其切向和法向运动方程如下：

$$F\sin\varphi - mg\sin\theta = 0,$$

$$F\cos\varphi + mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R}.$$



题 2－21 图

由此可解得

$$F=\sqrt{m^2g^2-2m^2\frac{v^2}{R}g\cos\theta+m^2\frac{v^4}{R^2}},$$

$$\varphi=\arctan\frac{g\sin\theta}{v^2/R-g\cos\theta}.$$

因此，驾驶员“重量”最大、超重最甚的情况发生于$\theta=\pi$，这时有

$$F=mg+\frac{mv^2}{R},\qquad \varphi=0,$$

即座垫支持力与驾驶员重力之差提供了所必须的向心力；而驾驶员“重量”最小、失重最甚的情况，发生于$\theta=0$，这时有

$$F=\frac{mv^2}{R}-mg,\qquad \varphi=0,$$

即座垫支持力与驾驶员重力之和提供了所必须的向心力．如果飞机速度不足，以致“重量”$mv^2/R-mg<0$，则在最高点或甚至还不到最高点，驾驶员就不能稳坐在座垫上而要掉落下来了．

2－22. 若太阳和月球的质量分别为 m_1 和 m_2，太阳和月球到地球表面的距离分别为 r_1 和 r_2，试证明：

(1) 太阳施加的力 F_1 与月球施加的力 F_2 之比为 $\frac{F_1}{F_2}=\frac{m_1r_2^2}{m_2r_1^2}$；

(2) 由 r 的微小改变引起 F 的相对变化为 $\frac{\mathrm{d}F}{F}=-\frac{2\mathrm{d}r}{r}$；

(3) 对于微小改变 Δr_0，太阳和月球施加力的改变量之比为 $\frac{\Delta F_1}{\Delta F_2}\approx\frac{m_1r_2^3}{m_2r_1^3}$.

代入数据后，可求出以上各比值，试说明其物理意义.

[解] (1) 利用万有引力定律及有关数据可得

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{m_1r_2^2}{m_2r_1^2}=(2.7\times10^7)\left(\frac{1}{390}\right)^2=178.$$

(2) 对公式 $F=G\frac{m'm}{r^2}$ 两边求导数，可得

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}=Gm'm\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{1}{r^2}=Gm'm\left(\frac{-2}{r^3}\right)=\left(-\frac{2}{r}\right)F,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}F}{F}=-\frac{2\mathrm{d}r}{r}.$$

(3) 对于已知距离的微小改变Δr_0，利用上式可得

$$\frac{\Delta F_1}{F_1}=-\frac{2\Delta r_0}{r_1},\qquad \frac{\Delta F_2}{F_2}=-\frac{2\Delta r_0}{r_2},$$

即
$$\frac{\Delta F_1}{\Delta F_2}=\frac{F_1 r_2}{F_2 r_1}=\frac{m_1 {r_2}^3}{m_2 {r_1}^3}=178\times\frac{1}{390}=0.46.$$

结果表明：太阳和月球都对地球上的海洋施加万有引力的作用，从而形成**潮汐**(tide)．尽管太阳对地球上海洋所施加的力 F_1 比月球所施加的力 F_2 大得多(178 倍)，但月球对潮汐的影响却比太阳大 1.2 倍．因为这一影响的大小取决于，当地球自转所引起的它们与海洋的距离的改变 Δr_0 等于地球的半径的两倍时，力 F_1 和 F_2 的改变量 ΔF_1 和 ΔF_2 的大小．换言之，潮汐力与引力场的梯度有关，月亮离地球近，它的引力场横过地球时的变化相当大；而对于相距甚远的太阳的引力场，则在它横过地球时几乎是恒定的．

2－23. 升降机中光滑水平桌面上有一质量为 $m_1=100\,\mathrm{g}$ 的物体 A，通过绕过滑轮的细绳与质量为 $m_2=200\,\mathrm{g}$ 的物体 B 相连，如图所示．当升降机以加速度 $a=g/2=4.9\,\mathrm{m/s^2}$ 上升时，试问机内的人看到的 A 和 B 两物体的加速度多大？在地面上机外的人看到 A 和 B 两物体对地面的加速度多大？

[解] 若以升降机为参考系，惯性力为

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{i}}=-m\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{g}/2,$$

则对物体 A 和 B 可分别列出方程

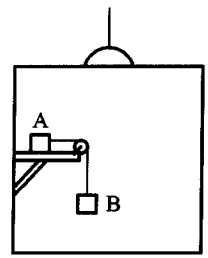
$$F_{\mathrm{T}}=m_1 a_{\mathrm{A}}$$

和
$$m_2 g+\frac{1}{2}m_2 g-F_{\mathrm{T}}=m_2 a_{\mathrm{B}},$$

由此可解得物体 A 和 B 的加速度的大小为

$$a_{\mathrm{A}}=a_{\mathrm{B}}=\frac{3}{2}\frac{m_2}{m_1+m_2}g=g,$$

物体 A 的加速度向右，物体 B 的加速度竖直向下．



题 2－23 图

若以地面为参考系，则物体 A 的加速度的大小及其与水平方向的夹角分别为

$$a_{\mathrm{A}}'=\sqrt{a^2+a_{\mathrm{A}}^2}=\sqrt{(\frac{1}{2}g)^2+g^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}g,$$

$$\theta_{\mathrm{A}}'=\arctan\frac{a}{a_{\mathrm{A}}}=\arctan\frac{1}{2}=26.6^\circ;$$

而物体 B 的加速度的方向竖直向下，其大小为

$a_B' = a_B - a = g/2$.

2－24. 如图所示，水平光滑圆盘以大小为ω的角速度作匀速转动．质量为m的质点放置在半径为R的光滑圆槽里，相对于地面以速率v作匀速圆周运动，$R\omega > v$，试以圆盘为参考系写出质点m所受到的各种力．

[解] 质点受到以下各种力：

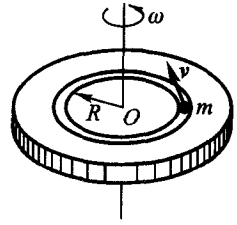
(1) 重力mg，竖直向下；

(2) 圆盘支持力$F_N = mg$，竖直向上；

(3) 圆槽提供的向心力$F_1 = mv^2/R$；

(4) 惯性离心力$F_2 = m\omega^2 R$；

(5) 科里奥利力$F_3 = 2m(\omega R - v)\omega$，指向圆心．



题 2－24 图

注意：若以地面为参考系，则质点除了受到相互抵消的重力和支持力外，只受到圆槽提供的向心力的作用．

第三章　机械能守恒

3－1. 两艘冰船，质量分别为 m 和 $2m$，在力 F 的作用下，从静止开始运动同样的距离 s，试问最终哪一艘冰船动能大？动量呢？

[解] 由于同样大小的力使两艘冰船移动相同的距离，作功相同，因此最终它们的动能也相同．然而，质量分别为 m 和 $2m$ 的两艘冰船，前者(质量为 m)最终的速度是后者(质量为 $2m$)的 $\sqrt{2}$ 倍，因此动量是后者的 $\sqrt{2}/2$ 倍．

3－2. (1) 一位大学生平均每天约消耗能量 1.0×10^7 J，其中大脑消耗的约占 20%，心脏一昼夜平均作功约 7.8×10^5 J．试问脑力劳动和心脏作功的平均功率各是多少？

(2) 水泵每分钟将 $0.10\,\mathrm{m}^3$ 的水送到 20 m 高的水塔，该水泵一昼夜作了多少功？如果水泵的效率为 75%，那么水泵马达的功率是多少？

[解] (1) 脑力劳动 $\overline{P}_\mathrm{b}=23\,\mathrm{W}$，心脏 $\overline{P}_\mathrm{h}=9.0\,\mathrm{W}$．

(2) 水泵一昼夜作功 2.8×10^7 J，马达功率是 $\overline{P}_\mathrm{p}=0.43\,\mathrm{kW}$．

3－3. (1) 地震的**里氏**(Richter)震级公式为

$$\lg E = 5.24 + 1.44\,M\,,$$

式中 E 是某次地震释放出来的能量(以 J 为单位的数值)，M 是该次地震的震级．1679 年 9 月 2 日，北京地区发生过一次八级地震，试问该次地震释放的能量是多少？(2) 长江的长度居世界第三，它的主源头是青海高原昆仑山南麓的托托河，从这里经 5000 m 落差注入东海，它的水利资源的储藏量是 1.125×10^8 kW，试据此计算长江的平均流量，并比较上述地震释放的能量与长江在一天里所提供的水利资源的能量．

[解] (1) 一次八级地震释放的能量 $E=5.75\times10^{16}$ J．

(2) 长江的平均质量流量为 $q_\mathrm{m}=2.30\times10^6\,\mathrm{kg/s}$．长江在一天里所提供的水利资源的能量是

$$E' = 1.125\times10^{11}\times24\times3600\ \mathrm{J} = 9.72\times10^{15}\ \mathrm{J}\,,$$

八级地震所释放的能量是它的 5.9 倍．

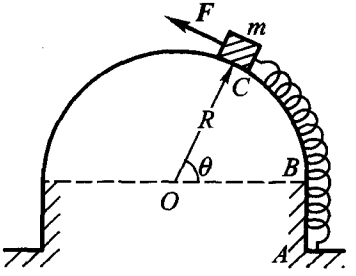
3－4. 任何一个带有电荷量 e 的粒子，只要经过一个电势差为 1 V 的区间就获得了一个电子伏特(eV)的能量，即 $1\,\mathrm{eV}=1.60\times10^{-19}$ J．(1) 已知电子和质子的质量分别为 9.1094×10^{-31} kg 和 1.6726×10^{-27} kg，若它们的速度均为 $2.1\times10^6\,\mathrm{m/s}$，试求以 eV 为单位表示的电子和质子的动能．(2) 在电

视显像管内，若一个电子以能量1.8×10^4 eV打在电视屏上，试求该电子的速度．(3) 若一个质子从加速器中射出时的能量为3×10^5eV，试求该质子的速度．

[解] (1) $E_{ke}=12.6\text{eV}$，$E_{kp}=23.05\text{keV}$；

(2) 电子$v_e=0.27c$；(3) 质子$v_p=0.025c$．

3－5. 如图所示，劲度系数为 k、原长为 AB 的弹簧，一端固定于 A 点，另一端连接一个质量为 m、靠在光滑的半径为 R 的圆柱体表面上的物体．在变力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下，物体缓慢地沿表面从位置 B 移到位置 C ($\angle BOC=\theta$)，试求力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功．



题 3－5 图

[解] 变力 $\boldsymbol{F}$ 的大小为

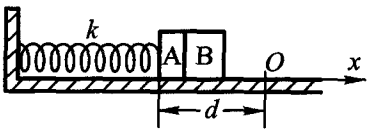
$$F=mg\cos\theta+kR\theta,$$

它所作的功为

$$A=\int_B^C F\,\mathrm{d}l=\int_0^\theta(mg\cos\theta+kR\theta)R\,\mathrm{d}\theta=mgR\sin\theta+\frac{1}{2}kR^2\theta^2.$$

3－6. 如图所示，把弹簧的一端固定在墙上，另一端系一物体 A．当把弹簧压缩 d 后，在它的右边再放一物体 B，然后撤去外力．设物体 A 和 B 均被放置在光滑的水平面上，质量分别为 m_A 和 m_B，弹簧的劲度系数为 k．试问：(1) 物体 A 和 B 分离时，物体 B 以多大速度运动？(2) 物体 A 移动的最大距离是多少？

[解] (1) 除去外力后，在 $x=-d$ 到 $x=0$ 范围内，物体 A 和 B 一起在弹性推力 $F=-kx$ 作用下作加速运动，在弹簧恢复到原长时物体 A 与 B 分离，这时物体 B 的运动速度 v_{Bm} 满足



题 3－6 图

$$\frac{1}{2}(m_A+m_B)v_{Bm}^2=\frac{1}{2}kd^2,$$

即

$$v_{Am}=v_{Bm}=d\sqrt{\frac{k}{m_A+m_B}}.\qquad(a)$$

(2) 经过原点 O 后，物体 B 作匀速直线运动，而物体 A 则在弹性拉力 $F=-kx$ 的作用下作减速运动，继续往前运动一段距离 x_{Am} 之后停了下来，然后再往回运动．由能量守恒定律可得

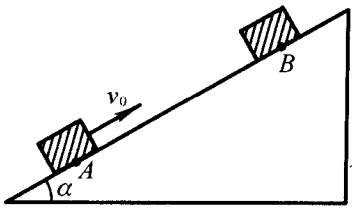
$$\frac{1}{2}m_{\mathrm{A}}v_{\mathrm{Am}}^2=\frac{1}{2}k\,x_{\mathrm{Am}}^2,\qquad(\mathrm{b})$$

将式(a)代入式(b)，即可得物体 A 移动的最大距离为

$$d+x_{\mathrm{Am}}=d\,(1+\sqrt{\frac{m_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}}})\,.$$

3－7. 倾角为α 的斜面与物体之间的摩擦系数为μ. 当我们沿斜面向上给物体以冲量，使物体在 A 点产生初速度 v_0 时，试问物体是否能返回 A 点？如果能返回，试问物体返回至 A 点时的速率 v 等于多少？

[解] 在物体将沿斜面上升的过程中，重力和摩擦力都作负功，支持力不作功，因此物体的动能将逐渐减小．在达到最高点 B 时，物体的运动速度和动能均为零．这时，只要重力的切向分量 $mg\sin\alpha$ 大于摩擦力 $\mu mg\cos\alpha$，即 $\tan\alpha>\mu$，物体就会下滑．



题 3－7 图

将动能定理分别应用于物体向上和向下的运动过程，可得

$$-mgl\sin\alpha-\mu mgl\cos\alpha=0-\frac{1}{2}mv_0^2,$$

$$mgl\sin\alpha-\mu mgl\cos\alpha=\frac{1}{2}mv^2,$$

由此可解得

$$v=v_0\sqrt{\frac{\sin\alpha-\mu\cos\alpha}{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}}\,.$$

3－8. 一小环套在光滑细杆上，细杆以固定的倾角θ和角速度ω绕通过其一端 O 的竖直轴转动，试求小环在光滑细杆上的平衡位置，并分析平衡的稳定性．

[解] (1) 解法一：利用向心力求解．

在地面参考系中，小环作匀速圆周运动所需要的向心力是由光滑细杆的支持力 F_{N} 提供的，即

$$F_{\mathrm{N}}\cos\theta=m\omega^2R\,.\qquad(\mathrm{a})$$

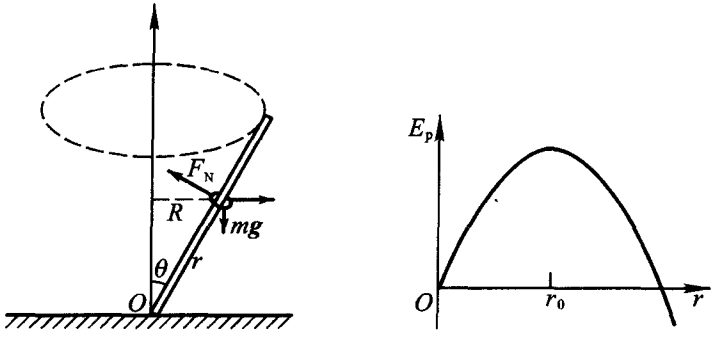
由图可见，光滑细杆的支持力 F_{N} 的竖直分力与小环重力 mg 抵消，即

$$F_{\mathrm{N}}\sin\theta=mg\,.\qquad(\mathrm{b})$$

联立式(a)和式(b)，可解得小环在光滑细杆上的平衡位置为

$$R=\frac{g}{\omega^2\tan\theta}\qquad 或\qquad r_0=\frac{g}{\omega^2\tan\theta\sin\theta}.\qquad (c)$$

为了讨论稳定性，必须考虑小环偏离该位置时的受力情况．当扰动使 r 或 R 增大时，$F_N\cos\theta$ 不足以提供小环作圆周运动的向心力，小环有进一步远离的趋势；当扰动使 r 或 R 减小时，$F_N\cos\theta$ 的一部分就足以以提供小环作圆周运动的向心力，$F_N\cos\theta$ 的另一部分就有令小环进一步沿细杆滑向中心的趋势．显然，用这种解法来分析并不简明．



(a)　　(b)

题 3－8 图

(2) 解法二：利用等效势能求解．

如图(a)所示，从细杆这个转动参考系看来，小环是“静止”的，这时重力 $m\boldsymbol{g}$、细杆支持力 F_N 及惯性离心力 $\boldsymbol{F}_i=-m\omega^2\boldsymbol{R}$ 相互“平衡”，或者说重力和惯性离心力的合力与细杆支持力抵消．以下我们用势能的观点来讨论稳定性问题．

小环的重力势能为 $E_p=mgz$ 与 $z=r\cos\theta$ 成正比．

惯性离心力 $\boldsymbol{F}_i=m\omega^2\boldsymbol{R}$ 的大小与 R 成正比，它类似于弹性恢复力，可以引入等效势能(规定 $R=0$ 为势能零点)

$$E'_p=-\int_0^R m\omega^2R'\mathrm{d}R'=-\frac{1}{2}m\omega^2R^2.$$

加上小环的重力势能，总势能为

$$E_p=mgz-\frac{1}{2}m\omega^2R^2=mgr\cos\theta-\frac{1}{2}m\omega^2r^2\sin^2\theta.$$

由　　$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r}=mg\cos\theta-m\omega^2r\sin^2\theta=0,$$

可解得小环的平衡位置为 $r_0=\dfrac{g}{\omega^2\tan\theta\sin\theta}$，此即解法一中的式(c)．再由

$$\frac{\mathrm{d}^2E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r^2}=-m\omega^2\sin^2\theta<0,$$

可判断小环在光滑细杆上的平衡为不稳定平衡，如图(b)所示．

3－9．如图所示，质量为 $m=4.0\,\mathrm{kg}$ 的物体自由下落一段高度 $h=3.0\,\mathrm{m}$ 后，与一劲度系数 $k=500\,\mathrm{N/m}$ 的弹簧相碰，试求弹簧被压缩的最大距离 y．

[解] 物体下落的总高度为 $h+y$，其间的势能关系为

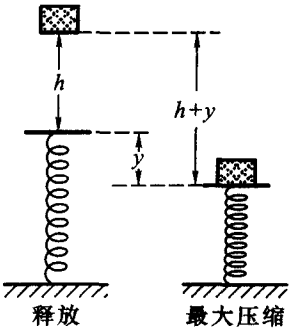
$$mg(h+y)=\frac{1}{2}ky^2,$$

即　　$$y^2-\frac{2mg}{k}y-\frac{2mgh}{k}=0,$$

其解为

$$y=\frac{mg}{k}\pm\sqrt{(\frac{mg}{k})^2+\frac{2mgh}{k}},$$

舍去负号解，即得 $y=0.77\,\mathrm{m}$．



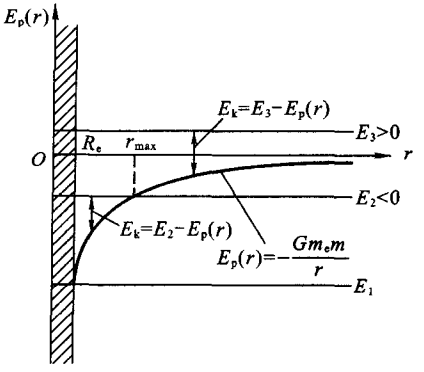
题 3－9 图

3－10．在地球引力作用下，物体的势能 E_p (以无穷远处为零点)作为位置函数的能量曲线如图所示，一些水平线标出了总能量 E 的不同取值．因为动能 $E_\mathrm{k}=E-E_\mathrm{p}$ 永远不能为负值，故系统的运动被限制在 $E_\mathrm{p}\leqslant E$ 的范围内．图中的阴影区域代表地球的内部．若从地面上以动能 $E_\mathrm{k}=E_2-E_1<|E_1|$ 竖直向上发射物体，则物体将上升到能量线 E_2 所确定的 r_max 后再落回地面．能量线 E_3 描述物体摆脱地球的引力后还有多余的能量 E_3．若地球和物体的质量分别为 m_e 和 m，地球的半径为 R_e，

(1) 试写出 E_1 的表达式；

(2) 试问能量线 $E=0$ 说明了什么？

(3) 试问在地球表面以上沿一圆形轨道绕地球运动的物体，其动能与引力势能之间有什么关系？怎样在图中表示出在圆形和椭圆形轨道上运动的卫星？



题 3－10 图

[解] (1) 利用高斯定理(§8－2)

可以证明，从地球的外部来看万有引力的分布，就和地球的质量 m_e 都集中在球心上一样．因此，静置于地球表面上的质量为 m 的物体的能量 E_1 的表达式为

$$E_1 = -G\frac{mm_e}{R_e}.$$

(2) 能量线 $E = 0$ 说明，若从地面上以动能

$$E_k = G\frac{mm_e}{R_e}$$

竖直向上发射物体，则物体将刚好能摆脱地球的引力而不再落回地面．于是，当物体的总能 E 小于零时，则总能直线将与势能曲线相交于某个 r 值处，物体的运动总是受到局限的，这样的系统称为**束缚系统**；然而，当物体的总能 E 大于零时，则总能直线与势能曲线将不再相交，这样的系统称为**非束缚系统**.

(3) 在地球表面以上沿一圆形轨道绕地球运动的物体，有

$$G\frac{mm_e}{r^2} = ma = \frac{mv^2}{r}.$$

因此，沿圆周轨道运动的物体的动能与引力势能之间关系为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}G\frac{mm_e}{r} = \frac{1}{2}\left|E_p(r)\right| = -\frac{1}{2}E_p(r),$$

或　　$E_p = -2E_k$.

该物体的总能量为

$$E = E_k + E_p = -E_k = \frac{1}{2}E_p \qquad 或 \qquad E_k = -E.$$

总之，沿圆周轨道运动的物体的动能为势能大小的一半，总能量等于动能的负值或势能的一半．这个结论，对于平方反比力场中的任意圆形轨道都成立．所以，在如图所示的能量图上，一个轨道卫星的总能量恰好在 $-Gmm_e/r$ 和零的正中间．为使轨道卫星能够逸出地球，必须另外提供的最少能量是 $Gmm_e/2r$，即轨道卫星的动能至少必须加倍才行．

值得强调的是，上述结果表明，对于沿圆周轨道运动的物体来说，越从系统提取能量，即系统的总能量 E 越低(即 E 的绝对值越大)，则系统的动能 E_k 越大．在椭圆轨道的情况下，尽管 E_k 和 $E_p(r)$都不是常量，但若用它们在一个周期里的平均值 $\overline{E_k}$ 和 $\overline{E_p(r)}$ 来代替，则可以证明上述结论对于沿椭圆轨道运动的物体也是成立的，即

$$\overline{E_p(r)} = 2\overline{E_k} \qquad \text{和} \qquad \overline{E_k} = -E,$$

这就是万有引力的**位力定理**(virial theorem)的表达式.

位力定理的一个最生动的例证，是陨石坠落或人造卫星再入大气时，在空气阻力作用下不是减速而是加速的过程. 我们知道，气体中微观粒子动能越大，在宏观上表现为它的温度越高. 然而，按照位力定理，天体这样一个自引力系统却具有如下异乎寻常的性质：得到能量时动能减小，从而温度降低；失掉能量时动能增加，从而温度升高. 在热学中，把温度升高一度所需要的热量叫做物体的热容量. 对于自引力系统来说，需要减小能量来提高它们的温度，这就是说，它们具有负的热容量. 负热容系统都是不稳定的，所以自引力系统是不稳定的. 例如，当有的恒星在其核燃料耗尽后，它们不但不冷下来，反而在急剧的引力坍缩过程中产生大量的光和热，这就是天文上观测到的超新星爆发.

圆形轨道运动可用势能曲线上的一个点来表示，而椭圆轨道运动则可用势能曲线上在 r_{min} 和 r_{max} 之间的一段曲线来表示.

3－11. 从地面上空发射航天器，使之脱离太阳引力范围所需的最小速度，称为**第三宇宙速度**(third cosmic velocity). 已知太阳的质量为地球质量的 3.33×10^5 倍，地球到太阳的平均距离为地球半径的 2.35×10^4 倍，地球的公转速度为 29.8 km / s，试求第三宇宙速度.

[解] 从相对于太阳静止的参考系上看，从地面上空发射航天器飞离太阳进入太空，将经历以下两个过程：(1) 航天器应有足够的动能，以克服地球引力作用进入不受地球引力的区域，但航天器仍沿地球绕太阳运动的轨道运动. (2) 航天器仍有足够的动能，以克服太阳引力的束缚，飞离太阳进入太空. 为充分利用地球的轨道速度，此初速度必与地球轨道速度同方向.

设想航天器已脱离地球引力作用，在地球轨道上以速度 u 相对于太阳运动. 只要给航天器以与太阳引力势能同样大小的动能，航天器就能摆脱太阳的引力，于是有

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{Gmm_s}{r}, \qquad u = \sqrt{\frac{2Gm_s}{r}} = 42.0\,\text{km/s}. \tag{a}$$

设航天器脱离地球引力作用前，地球相对于太阳的速度为 v_e，在地球表面附近的航天器相对于太阳的速度为 u_0；而在航天器脱离地球引力作用后，地球相对于太阳的速度为 v_e'，航天器相对于太阳的速度为 u. 我们所要求的第三宇宙速度 v_3，与 u_0 和 v_e 有简单关系

$$u_0 = v_3 + v_e. \tag{b}$$

根据机械能守恒定律，有

$$\frac{1}{2}m_e v_e^2+\frac{1}{2}mu_0^2-\frac{Gm_e m}{R_e}=\frac{1}{2}m_e v'^2_e+\frac{1}{2}mu^2. \tag{c}$$

将式(b)代入式(c)，并考虑到

$$v'^2_e-v_e^2=(v'_e+v_e)(v'_e-v_e)\approx 2v_e(v'_e-v_e),$$

可得

$$\frac{1}{2}m(v_3+v_e)^2=\frac{Gm_e m}{R_e}+\frac{1}{2}m_e(v'^2_e-v_e^2)+\frac{1}{2}mu^2$$

$$\approx\frac{Gm_e m}{R_e}+m_e v_e(v'_e-v_e)+\frac{1}{2}mu^2. \tag{d}$$

由于航天器脱离地球引力作用的过程所经历的时间很短，在这过程中太阳引力的冲量很小，因此可以认为地球和航天器仍作直线运动，且动量守恒，即

$$m_e v_e+mu_0=m_e v'_e+mu. \tag{e}$$

将式(b)代入式(e)，可得

$$v'_e=v_e+\frac{m}{m_e}(v_e+v_3-u). \tag{f}$$

将式(f)代入式(d)，整理后可得

$$v_3^2=\frac{2Gm_e}{R_e}+(u-v_e)^2=v_2^2+(u-v_e)^2. \tag{g}$$

最后，将 $v_2=11.2\,\mathrm{km/s}$，$u=42.0\,\mathrm{km/s}$ 和 $v_e=29.8\,\mathrm{km/s}$ 代入上式，即可得第三宇宙速度为

$$v_3=16.6\,\mathrm{km/s}.$$

实际上，从航天器与地球所构成的体系的质心系中考察航天器飞离地球的过程，可以简单得多．由于地球的质量比航天器大得多，可以认为地球–航天器体系的质心与地球中心重合．因此，在质心系中，不论航天器尚未飞离地球还是已经飞离地球，地球的速率都几乎为零．利用质心系中的机械能守恒定律，可得

$$\frac{1}{2}mv_3^2=\frac{Gm_e m}{R_e}+\frac{1}{2}m(u-v_e)^2,$$

由此立即可得式(g).

3－12. 汤川势(Yukawa potential)描述两个核子之间的核力，可用下述理论公式表示：

$$E_p=-E_{p0}\frac{r_0}{r}e^{-\frac{r}{r_0}},$$

其中 E_{p0} 和 r_0 为常量．试用参量值

$E_{p0}=4.0\times10^{-12}\ \mathrm{J}$　　和　　$r_0=2.5\times10^{-15}\ \mathrm{m}$，

(1) 画出势能曲线 E_p-r；(2) 求出力 F_r 的表达式；(3) 比较当间距分别为 $r=r_0, 2r_0, 5r_0$ 时力 F_r 的大小.

[解] (1) (图略). (2)和(3) 所要求的各个结果如下：

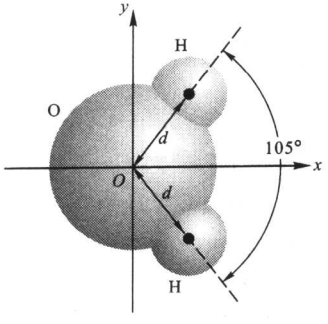
$$F_r=-\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r}=-E_{p0}\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{r_0}}\left(\frac{r_0}{r^2}+\frac{1}{r}\right)=-E_{p0}\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{r_0}}\frac{r_0+r}{r^2};$$

$$F_r(r_0)=-E_{p0}\,\mathrm{e}^{-1}\frac{r_0+r_0}{r_0^2}=-0.736\frac{E_{p0}}{r_0}=-1.18\ \mathrm{kN},$$

$$F_r(2r_0)=-\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-2}\frac{E_{p0}}{r_0}=0.138\ F_r(r_0)=-163\ \mathrm{N},$$

$$F_r(5r_0)=-\frac{6}{25}\mathrm{e}^{-5}\frac{E_{p0}}{r_0}=0.0022\,F_r(r_0)=-2.6\ \mathrm{N}.$$

3－13. 水分子结构如图所示. 氢原子质量为 1.0 u (原子质量单位)，氧原子质量为 16.0 u，它们的中心之间的距离为 $d=9.57\times10^{-11}\ \mathrm{m}$，试求水分子的质心位置.



题 3－13 图

[解] 取如图所示的坐标系，根据质心定义和水分子结构的对称性，可得质心的坐标为

$$x_c=\frac{2d\cos52.5^\circ}{18}=6.48\times10^{-12}\ \mathrm{m},$$

$$y_c=0.$$

3－14. 已知地球的质量约为月亮的 81 倍，地月距离是地球半径的 60 倍，试确定地月系统的质心 C 的位置.

[解] 根据对称性分析，两质点系统的质心必定在它们的连线上. 可选该联线为 x 轴，并选质心为坐标原点. 于是，有

$$\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}=0\qquad 或\qquad \frac{x_1}{x_2}=-\frac{m_2}{m_1}.$$

令 $r_1=|x_1|$ 和 $r_2=|x_2|$ 分别为地球和月球中心到质心 C 的距离，m_1 和 m_2 分别为地球和月亮的质量. 按题意，有

$$m_1=81m_2,\qquad r=r_1+r_2=60R_e,$$

故有　　$r_1=\dfrac{r_1+r_2}{82}=\dfrac{60}{82}R_e\approx\dfrac{3}{4}R_e.$

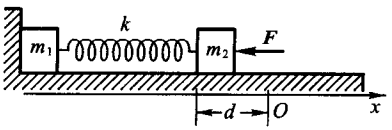
3－15. 长为 l 的细杆的密度ρ 按关系式 $\rho=\rho_0 x/l$ 随 x 而变化，其中 x 是从杆的一端算起的距离，ρ_0 为常量．试求该细杆质心的位置．

[解] $$x_C=\frac{\int_0^l x\rho_0\frac{x}{l}\,\mathrm{d}x}{\int_0^l \rho_0\frac{x}{l}\mathrm{d}x}=\frac{\int_0^l x^2\,\mathrm{d}x}{\int_0^l x\,\mathrm{d}x}=\frac{2}{3}l\,.$$

3－16. 如图所示，用劲度系数为 k 的弹簧将质量分别为 m_1 和 m_2 的物体连接起来，放置在光滑的水平面上．设 m_1 紧靠墙，在 m_2 上施力将弹簧压缩了 d．若以物体 m_1、m_2 和弹簧为系统，试求在外力撤去之后，(1) 系统质心加速度的最大值；(2) 系统质心速度的最大值．

[解] (1) 选取 O 点为 x 轴的原点．按题意，物体 m_1，m_2 和弹簧所组成的系统，在受到了外力 $F_{1x}=-kd$ 而使弹簧压缩了 d 之后，墙壁对该系统的作用力为 $F_{2x}=kd$．在外力 F_{1x} 撤去之后，在力 F_{2x} 的作用下，该系统质心加速度的最大值为

$$a_{\mathrm{cmax}}=\frac{kd}{m_1+m_2}\,.$$



题 3－16 图

(2) 在外力 F_{1x} 撤去之后的最初阶段，物体 m_2 在力 $F_x=-kx$ 作用下作加速运动，在 $x=0$ 时力 F_x 减小到零，然而物体 m_2 的速度却达到了它的最大值 $v_{2\mathrm{max}}$，其动能等于弹簧的弹性势能，由此可得

$$v_{2\mathrm{max}}=\sqrt{k/m_2}\;d\,.$$

这时，系统的质心速度也达到了它的最大值，即

$$v_{\mathrm{cmax}}=\frac{m_2 v_{2\mathrm{max}}}{m_1+m_2}=\frac{\sqrt{km_2}\;d}{m_1+m_2}\,.$$

在此之前，系统一直受到墙壁的作用力，系统的质心速度一直在增加；而在此之后，系统不再受到外力的作用，系统的质心速度将不再改变．

3－17. 以速率 v_0 和仰角 θ_0 发射一发炮弹，假设它在到达弹道最高点时爆炸成为质量相等的两块，其中一块以速率 v_1 垂直下落，试求另一块的速度(忽略空气阻力)．

[解] 在弹道最高点，质量为 $2m$ 的炮弹以速率 $v_0\cos\theta_0$ 沿水平方向运动．我们假定，当质量为 m 的一块(炮弹体)以速率 v_1 垂直下落时，质量为 m 的另一块(炮弹头)以速率 v_2 沿仰角 α 运动，如图所示．按动量守恒定律，它

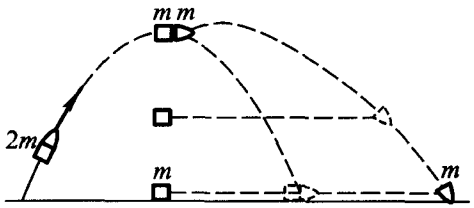
们的总动量应等于质量为 $2m$ 的炮弹的动量，因此，由这三个动量所构成的直角三角形可得

$$(mv_2)^2 = (2mv_0\cos\theta_0)^2 + (mv_1)^2 .$$

由此可得，炮弹头的速率 v_2 和仰角 α 分别为

$$v_2=\sqrt{4v_0^2\cos^2\theta_0+v_1^2} ,$$

$$\alpha=\arctan\frac{v_1}{2v_0\cos\theta_0} .$$



题 3－17 图

3－18. 在 1932 年发现中子的过程中，曾做过下述实验来确定中子的质量．让中子分别冲击石蜡 C_xH_y 和仲氰$(CN)_n$，使之分别与其中的氢核和氮核发生弹性碰撞，从这些物质中把氢核和氮核打出来，然后测出它们的速率之比为 $v_H / v_N = 7.5$．试由此计算出中子的质量．

[解] 设中子的质量为 m_n，碰撞前中子的速度为 v，氢核和氮核的速度为零．对于弹性碰撞，可令恢复系数 $e = 1$，得到

$$v_H = \frac{2m_n v}{m_n + m_H} , \qquad v_N = \frac{2m_n v}{m_n + m_N} .$$

将已知条件 $m_N = 14m_H$ 和 $v_H / v_N = 7.5$ 代入以上两式，即可得

$$m_n = 1.00m_H ,$$

即在上述精度范围内中子的质量与质子的质量相等．

3－19. 在放射性衰变中，一个 α 粒子(氦原子核)由最初处于静止状态的 ^{238}U 核中以速率 1.4×10^7 m/s 发射出来，试求剩余质量(^{234}Th)的反冲速率．

[解] $$v_{Th} = \frac{m_\alpha v_\alpha}{m_{Th}} = \frac{4}{234}\times1.4\times10^7\ \mathrm{m/s} = 2.4\times10^5\ \mathrm{m/s} .$$

3－20. (1) 试求出中子(质量为 m_1)在和静止原子核(质量为 m_2)的一维弹性碰撞中，动能减少的分数．(2) 试求出中子分别和铅原子核、碳原子核、氘原子核以及氢原子核按上述方式碰撞时，动能减少的分数．所得结果表明，在减低中子速度方面氢最有效．但是，由于氢原子易于俘获中子而形成氘，因此常用重水(由氘和氧组成)或碳(石墨)作为核反应堆中的减速剂，以使裂变过程中发射的中子减速，使 ^{235}U 产生裂变的概率增大，从而维持链式反应的持续进行．

[解] (1) 由动量守恒和能量守恒定律，可得

$$m_1 v_{10} = m_1 v_1 + m_2 v_2 , \tag{a}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 . \tag{b}$$

由式(a)可得 $v_2 = m_1 (v_{10} - v_1) / m_2$，将上式代入式(b)后可得

$$m_1 v_{10}^2 = m_1 v_1^2 + m_2 \frac{m_1^2 (v_{10} - v_1)^2}{m_2^2} ,$$

即　　$(m_1 + m_2) v_1^2 - 2 m_1 v_{10} v_1 + (m_1 - m_2) v_{10}^2 = 0$.

由上式可解得

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{10} ,$$

这里已舍去了不合题意的根．再利用式(b)可得，在该一维弹性碰撞中，中子动能减少的分数为

$$\frac{E_{k0} - E_{k1}}{E_{k0}} = 1 - \frac{v_1^2}{v_{10}^2} = 1 - \frac{(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} .$$

(2) 将查表所得到的中子以及铅、碳、氘和氢原子核的质量代入上式，可得一个中子与一个铅原子核、碳原子核、氘原子核或氢原子核按上述方式碰撞时，中子动能减少的分数分别为：铅 0.019，碳 0.28，氘 0.89，氢 1.00.

由此可见，在弹性碰撞中，仅当两个物体的质量接近相等时，动能的传递才是比较大的，这个结果在核反应堆内使中子慢化方面得到了应用．我们知道，在裂变过程中发射的中子都是快速运动的．然而，只有当中子运动极慢时，才能使 ^{235}U 产生裂变的概率较大．因此，为了维持链式反应，就必须采取措施使快中子在逸出反应堆以前减速，而使中子减速的主要手段就是弹性碰撞．

3－21. 两个质点的质量分别为 $m_1 = 100\,g$ 和 $m_2 = 40\,g$，它们各具有初速度

$$\boldsymbol{v}_{10} = (2.8\boldsymbol{i} - 3.0\boldsymbol{j})\ cm/s \qquad 和 \qquad \boldsymbol{v}_{20} = (7.5\boldsymbol{j})\ cm/s ;$$

它们发生碰撞后的速度分别为

$$\boldsymbol{v}_1 = (1.2\boldsymbol{i} - 2.0\boldsymbol{j})\ cm/s \qquad 和 \qquad \boldsymbol{v}_2 = (4.0\boldsymbol{i} + 5.0\boldsymbol{j})\ cm/s .$$

(1) 试求该系统的总动量；(2) 试求该系统总动量在其中为零的参考系的速度；(3) 试问碰撞后不再作为动能出现的那部分能量占初始动能的几分之几？这个碰撞是弹性碰撞吗？

[解] (1) $\boldsymbol{p} = (280\boldsymbol{i})\ g \cdot cm/s$.

(2) 在质心参考系中，两个质点的总动量为零．因此，总动量在其中为

零的参考系的速度即质心速度，即

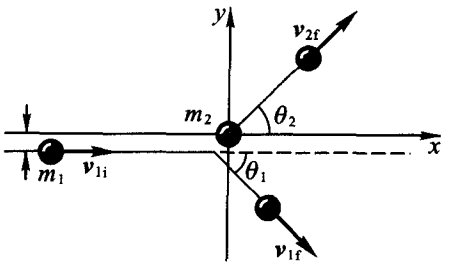
$$\boldsymbol{v}_c = \frac{\boldsymbol{p}}{m_1+m_2} = (2.0\boldsymbol{i})\,\text{cm/s}\,.$$

(3) 碰撞后不再作为动能出现的能量占初始动能的百分数为

$$\frac{\Delta E_k}{E_{k0}} = 1 - \frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2}{m_1 v_{10}^2 + m_2 v_{20}^2} = 44.5\%\,,$$

所以这个碰撞不是弹性碰撞.

3－22. 如图所示，一个质量为 m_1 的质点原以速度 $\boldsymbol{v}_{1i}$ 运动，与另一个静止的质量为 m_2 的质点发生碰撞后速度为 $\boldsymbol{v}_{1f}$，偏转了一个角度 θ_1；这时，质量为 m_2 的质点则发生反冲，其速度与质量为 m_1 的质点原来的运动方向之间的夹角为 θ_2．试证明



题 3－22 图

$$\tan\theta_2 = \frac{v_{1f}\sin\theta_1}{v_{1i} - v_{1f}\cos\theta_1}\,.$$

为了得到这一结果，是否必须假定这个碰撞是弹性碰撞？

[证明] 如图所示，由碰撞过程的动量守恒关系

$$m_1\boldsymbol{v}_{1i} = m_1\boldsymbol{v}_{1f} + m_2\boldsymbol{v}_{2f}\,,$$

可得其分量关系式分别为

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f}\cos\theta_1 + m_2 v_{2f}\cos\theta_2\,,$$

$$0 = m_1 v_{1f}\sin\theta_1 - m_2 v_{2f}\sin\theta_2\,.$$

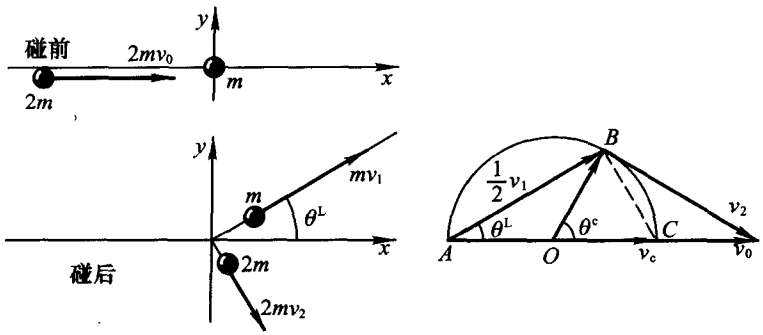
以上两式可以改写成

$$m_2 v_{2f}\cos\theta_2 = m_1(v_{1i} - v_{1f}\cos\theta_1)\,,$$

$$m_2 v_{2f}\sin\theta_2 = m_1 v_{1f}\sin\theta_1\,,$$

以第二式的两边分别除以第一式的两边，即可得到所要证明的关系式．由于在上述证明过程中只用到了动量守恒关系，并没有用到能量守恒关系，因此为了得到上述结果不需要假定是弹性碰撞.

3－23. 在实验室参考系中，一个质量为 m 的质点开始是静止的，而另一个质量为 $2m$ 的质点以速度 v_0 向着静止的质点运动．试求：(1) 质心系相对于实验室系的速度是多少？(2) 在一次完全非弹性碰撞中，在实验室系和在质心系中动能的损失分别是多少？(3) 在一次弹性碰撞中，质量为 m 的质点在实验室系和在质心系中的偏角(散射角)之间的关系式是什么？



题 3－23 图

[解] (1) 质心系相对于实验室系的速度是

$$v_c = \frac{2mv_0}{m+2m} = \frac{2}{3}v_0 .$$

(2) 在完全非弹性碰撞中，由动量守恒关系

$$2mv_0 = 3mv'$$

可以确定，质量为 $3m$ 的复合质点的运动速度为

$$v' = \frac{2}{3}v_0 .$$

于是，在实验室系中动能的损失为

$$\Delta E_k^L = \frac{1}{2}(2m)v_0^2 - \frac{1}{2}(3m)(\frac{2}{3}v_0)^2 = \frac{1}{3}mv_0^2 .$$

在质心系中，在碰撞前质量为 m 和 $2m$ 的质点的速度分别为

$$-\frac{2}{3}v_0 \qquad 和 \qquad \frac{1}{3}v_0 ;$$

在碰撞后，质量为 $3m$ 的复合质点的速度为零．因此，在质心系中两质点动能的损失为

$$\Delta E_k^c = \frac{1}{2}m(\frac{2}{3}v_0)^2 + \frac{1}{2}2m(\frac{1}{3}v_0)^2 = \frac{1}{3}mv_0^2 = \Delta E_k^L .$$

在实验室系中的总动能等于随质心作整体运动的动能与两质点的相对动能之和，前者在碰撞反应前后是不变的，而后者正是在质心系中两质点的动能(资用能)，因此 $\Delta E_k^c = \Delta E_k^L$ 是自然的．

(3) 两粒子系统的质心速度为

$$v_c = \frac{2mv_0}{m+2m} = \frac{2}{3}v_0 ,$$

因此在质心系中质量为 m 和 $2m$ 的质点在弹性碰撞前后的速度分别为

$$v_{10}^{c}=-\frac{2}{3}v_0,\qquad v_{20}^{c}=\frac{1}{3}v_0;$$

$$v_1^{c}=v_1-\frac{2}{3}v_0,\qquad v_2^{c}=v_2-\frac{2}{3}v_0.$$

利用动量守恒关系

$$mv_{10}^{c}+2mv_{20}^{c}=mv_1^{c}+2mv_2^{c},$$

可得　$v_0=\frac{1}{2}v_1+v_2,$

由此可画出如图所示的矢量图．由矢量图可见

$$v_2-\frac{2}{3}v_0=-(\frac{1}{2}v_1-\frac{1}{3}v_0)=\overrightarrow{OB}.$$

进一步利用弹性碰撞的能量守恒关系

$$\frac{1}{2}m(\frac{2}{3}v_0)^2+\frac{1}{2}(2m)(\frac{1}{3}v_0)^2$$

$$=\frac{1}{2}m(v_1-\frac{2}{3}v_0)^2+\frac{1}{2}(2m)(v_2-\frac{2}{3}v_0)^2,$$

可得　$(v_2-\frac{2}{3}v_0)^2=(\frac{1}{2}v_1-\frac{1}{3}v_0)^2=(\frac{1}{3}v_0)^2.$

因此，矢量图中的 A, B 和 C 三点，都在以 O 点为圆心、以 $v_0/3$ 为半径的圆周上．所以，在一次弹性碰撞中，质量为 m 的质点在实验室系和在质心系中的偏角(散射角)之间的关系式是

$$\theta^{L}=\frac{1}{2}\theta^{c}.$$

3－24 (补充题). 可以证明：如果力 $\boldsymbol{F}$ 是保守力，则有

$$\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial x},\qquad \frac{\partial F_y}{\partial z}=\frac{\partial F_z}{\partial y},\qquad \frac{\partial F_z}{\partial x}=\frac{\partial F_x}{\partial z},$$

而且相反的论断也成立．因此，这提供了确定某一力场是否是保守力场的一种重要方法．试利用上述论断，判断下列各力是否是保守力：

$$\boldsymbol{F}_1=x^n\boldsymbol{e}_x,$$

$$\boldsymbol{F}_2=y^n\boldsymbol{e}_x,$$

$$\boldsymbol{F}_3=(x^2-y^2)\boldsymbol{e}_x+3xy\boldsymbol{e}_y,$$

$$\boldsymbol{F}_4=2xy\boldsymbol{e}_x+x^2\boldsymbol{e}_y,$$

$$\boldsymbol{F}_5=yz\boldsymbol{e}_x+zx\boldsymbol{e}_y+xy\boldsymbol{e}_z,$$

$$\boldsymbol{F}_6 = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z .$$

[解] $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$是非保守力，$\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_4$, $\boldsymbol{F}_5$, $\boldsymbol{F}_6$是保守力. 另附证明如下：

保守力沿任意闭合回路作功为零，即

$$\oint \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0 , \tag{a}$$

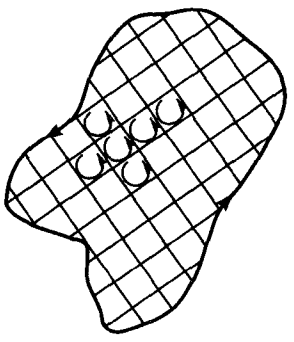
这就是一个力是保守力的必要和充分的条件. 如果把上述线积分分割成许多环绕微小环路的小积分，则当我们把环绕每一个小环路所作的功加起来时，如图(a)所示，一切内部路径上的贡献均将彼此抵消，总的功仍与沿原始回路所作的功相等，即

$$\oint \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \sum_i \oint_i \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} . \tag{b}$$

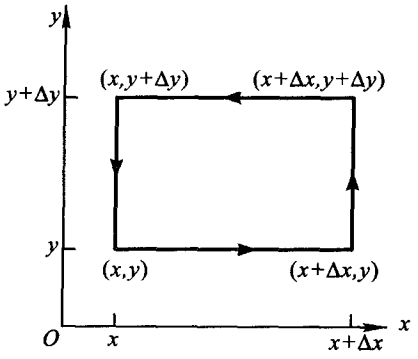
因此，只要对于任意微小环路的小积分都有

$$\oint_i \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0 , \tag{c}$$

则式(a)必定成立.



(a)



(b)

题 3－24 图

如图(b)所示，考虑 Oxy 平面中一个边长为 Δx 和 Δy 的矩形回路，围绕此回路的线积分为

$$\oint \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_1 \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} + \int_2 \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} + \int_3 \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} + \int_4 \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} .$$

其中积分 1 和 3 都包含沿 x 方向的路径，而积分 2 和 4 都包含沿 y 方向的路径. 若 Δx 和 Δy 足够小，只考虑 x 和 y 的变化的一阶效应，忽略其二阶效应，则有

$$\int_1 \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{x,y}^{x+\Delta x,y} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \approx F_x(x,y,z)\Delta x ,$$

$$\int_3 \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\int_{x,y+\Delta y}^{x+\Delta x,y+\Delta y} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} \approx -F_x(x,y+\Delta y,z)\Delta x,$$

$$\int_1 \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} + \int_3 \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} \approx -[F_x(x,y+\Delta y,z) - F_x(x,y,z)]\Delta x.$$

在 $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ 的极限情况下，有

$$F_x(x,y+\Delta y,z) - F_x(x,y,z) = \frac{\partial F_x}{\partial y}\Delta y,$$

$$\int_1 \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} + \int_3 \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\frac{\partial F_x}{\partial y}\Delta x\Delta y.$$

同理可得

$$\int_2 \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} + \int_4 \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \frac{\partial F_y}{\partial x}\Delta x\Delta y,$$

所以围绕 Oxy 平面中微小矩形环路的线积分为

$$\oint_{xy} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y.$$

利用循环置换变量的方法，可得

$$\oint_{yz} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\Delta y\Delta z,$$

$$\oint_{zx} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\Delta z\Delta x.$$

由于围绕任意取向的一个微小环路的线积分，都可以分解为上述三个坐标平面中的线积分，因此只要

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}, \qquad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} \tag{d}$$

在力场中处处都得到满足，则绕任何小环路的线积分为零，并由此得出结论，对任何闭合回路式(a)必定成立，力 $\boldsymbol{F}$ 就是保守力．反之，如果力 $\boldsymbol{F}$ 是保守力，对于任意闭合回路式(a)成立，则必有式(d).

实际上，式(d)意味着，矢量 $\boldsymbol{F}$ 的旋度为零，即

$$\nabla\times\boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} = 0.$$

第四章　角动量守恒

4－1. 在光滑的水平面上，质量为 m、长为 l 的均匀细棒，沿垂直于棒的方向以速度 v 作匀速运动，试求细棒对于其端点 O 的角动量.

[解] 如图所示，在任意时刻，设相应于细棒左端点的空间固定点为原点 O，沿细棒方向为 x 轴正方向，$\boldsymbol{i}$ 为其单位矢量，坐标为 x 的质元 $\mathrm{d}m$ 的速度 $\boldsymbol{v}$ 竖直向上.



题 4－1 图

对于点 O，质元 $\mathrm{d}m$ 的角动量为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = x\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}m,$$

方向垂直纸面向外. 若设速度 $\boldsymbol{v}$ 方向沿 y 轴，则 $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ 沿 z 轴，其大小可表示为

$$\mathrm{d}L = xv\,\mathrm{d}m = xv\left(\frac{m}{l}\mathrm{d}x\right) = v\frac{m}{l}x\,\mathrm{d}x.$$

细棒对于点 O 的角动量方向沿 z 轴，其大小为

$$L = \int \mathrm{d}L = \int_0^l v\frac{m}{l}x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}mlv.$$

4－2. 地球的质量为 $m_1 = 5.98\times10^{24}\,\mathrm{kg}$，地球与太阳之间的平均距离为 $r_1 = 1.496\times10^{11}\,\mathrm{m}$，地球绕太阳的公转周期为 $T_1 = 3.156\times10^{7}\,\mathrm{s}$；电子的质量为 $m_2 = 9.11\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$，电子到氢原子核的平均距离为 $r_2 = 5.29\times10^{-11}\,\mathrm{m}$，电子轨道运动的角速度为 $\omega_2 = 4.13\times10^{16}\,\mathrm{s}^{-1}$. 假定它们的轨道都是圆形的，试计算地球绕太阳运动的角动量，以及经典图像中电子绕氢原子核运动的角动量.

[解] (1) 地球相对于太阳的角动量为

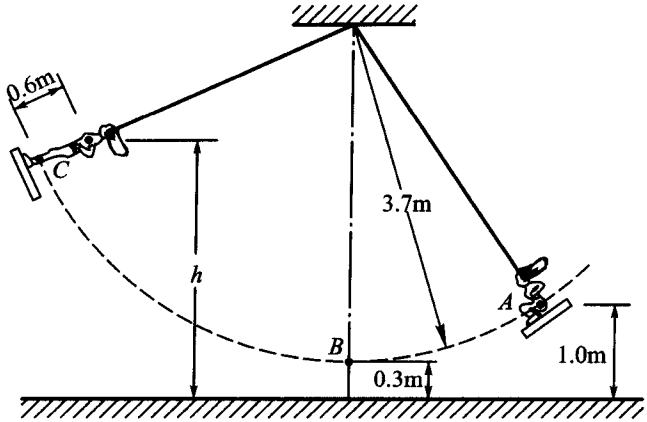
$$L_1 = m_1 r_1^2\omega_1 = m_1 r_1^2\frac{2\pi}{T_1} = 2.67\times10^{40}\ \mathrm{kg\cdot m^2/s}.$$

(2) 经典图像中电子绕氢原子核运动的角动量为

$$L_2 = m_2 r_2^2\omega_2 = 1.05\times10^{-34}\ \mathrm{kg\cdot m^2/s},$$

这个量值用符号 $\hbar$ 表示. 在量子力学中，人们以 $\hbar$ 为单位来表示微观粒子的角动量，并称 $h = 2\pi\hbar$ 为普朗克常量.

4－3. 在秋千吊绳拉直的情况下，家长把蹲在秋千座板上的女孩拉到其质心距地面 1.0 m 高处后从静止释放，这时她的质心离秋千吊绳上方的支点 3.7 m. 当女孩往下运动到弧线底部时其质心距地面 0.3 m 高，这时她突然站立起来使其质心沿吊绳上升 0.6 m. 已知女孩重 400 N，试问当她运动到弧线最高处时，她的质心距地面有多高？(注：本题数据与教材有所不同.)



题 4－3 图

[解] (1) 重力矩是唯一作用在秋千支点的外力矩．在女孩从 A 点往下运动到弧线底部到达 B 点并突然站立起来的过程中，该力矩为零，角动量守恒．设女孩站立起来前后其质心升高了 $d=0.6\,\mathrm{m}$，距支点的距离分别为

$$R_1=3.7\,\mathrm{m}\qquad 和\qquad R_2=R_1-d=3.1\,\mathrm{m}.$$

女孩站立起来前后，角动量守恒关系式可写为[①]

$$mR_1v_{B1}=mR_2v_{B2}. \tag{a}$$

(2) 在女孩从 A 点往下运动到弧线底部到达 B 点的过程中，以及在 B 点站立起来后到达 C 点的过程中，机械能守恒，因此有

$$\frac{1}{2}mv_{B1}^2=mg(h_A-h_B), \tag{b}$$

$$\frac{1}{2}mv_{B2}^2=mg(h_C-h_B-d). \tag{c}$$

(3) 联立式(a)—式(c)，可得

$$h=h_C=\frac{R_1^2}{R_2^2}(h_A-h_B)+h_B+d=1.9\,\mathrm{m}.$$

注意：在做题过程中，最好先得出文字关系式，然后再代入数据，以清晰地表明各物理量之间的关系．特别是，实际问题中往往会出现已知条件并不需要完全用上的情况．例如，本题已知条件 $mg=400\,\mathrm{N}$ 就是多余的．

---

① 实际上，还应考虑到女孩站立起来前后关于自己质心的转动惯量(见 § 5-2)，它们分别为 I_{c1} 和 I_{c2}，角动量守恒关系式应写为 $(I_{c1}+mR_1^2)\omega_{B1}=(I_{c2}+mR_2^2)\omega_{B2}$．由于 R_1 和 R_2 远大于女孩身高，因此有 $I_{c1}\ll mR_1^2$，$I_{c2}\ll mR_2^2$．再利用女孩站立起来前后的角速度与质心速度之间的关系 $v=R\omega$，角动量守恒关系式可近似写为式(a).

4－4. 两个质量分别为 m_1 和 m_2 的质点，用质量可以忽略不计的长为 l 的绳子连在一起，以角速度ω 绕它们的质心转动．试求绳子突然断开前后，它们对质心的角动量．

[解] 按照质心的定义，这个两质点系统的质心 C 到质点 m_1 和 m_2 的距离分别为

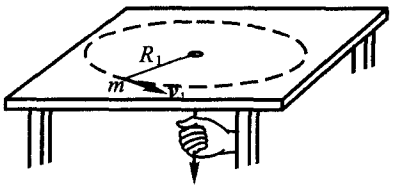
$$r_1=\frac{m_2 l}{m_1+m_2}\qquad 和\qquad r_2=\frac{m_1 l}{m_1+m_2}.$$

因此，这两个质点对质心 C 的角动量分别为

$$L_1=m_1 r_1^2\omega=\frac{m_1 m_2^2 l^2\omega}{(m_1+m_2)^2},\qquad L_2=m_2 r_2^2\omega=\frac{m_2 m_1^2 l^2\omega}{(m_1+m_2)^2}.$$

在绳子突然断开之后，原先借以维持这两个质点绕质心作匀速圆周运动的向心力——绳子的张力失去了，但是这并没有造成对质心的力矩有什么变化，因此这两个质点对质心的角动量并不会由于绳子的突然挣断而改变．

4－5. 如图所示，质量为 m = 0.40 kg 的小球系于轻绳的一端，并置于光滑的桌面上，绳的另一端穿过桌面上的光滑小孔后下垂并用手握住．开始时，小球以速率 v_1 = 4.0 m/s 作半径为 R_1 = 0.50 m 的圆周运动；然后将手缓慢下移，直至小球运动半径变为 R_2 = 0.10 m．(1) 试求这时小球的运动速率以及手的拉力所作的功，并写出拉力 F 与角动量 L、质量 m 和半径 r 之间的关系式．(2) 试问如果这时放开绳子小球将如何运动？



题 4－5 图

[解] (1) 在于缓慢下移的过程中，手作用在小球上的拉力对小孔的力矩为零，因此小球对小孔的角动量是守恒的．于是，当小球运动半径变为 r_2 = 0.10 m 时，小球的运动速率变为

$$v_2=\frac{L}{mr_2}=\frac{mr_1v_1}{mr_2}=\frac{r_1}{r_2}v_1=20\ \mathrm{m/s}.$$

向心力 mv^2/r 是由手的拉力 F 提供的，它所作的功为

$$A=\int_{r_1}^{r_2}F(-\mathrm{d}r)=-\int_{r_1}^{r_2}mv^2\frac{1}{r}\mathrm{d}r=-\int_{r_1}^{r_2}\frac{L^2}{m}\frac{1}{r^3}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{L^2}{m}\frac{1}{2r^2}\Bigg|_{r_1}^{r_2}=\frac{1}{2}mr_1^2v_1^2\left(\frac{1}{r_2^2}-\frac{1}{r_1^2}\right)=77\ \mathrm{J}.$$

拉力 F 与角动量 L、质量 m 以及半径 r 之间的关系式为

$$F = m\frac{v^2}{r} = \frac{L^2}{mr^3}.$$

由此可见，角动量对径向运动的作用相当于一个等效的排斥力，在把质点从较远的距离移向较近的距离时，如果要求角动量在这个过程中守恒，我们就必须对质点作额外的功.

(2) 若在小球运动半径变为 0.10 m 时放开绳子，小球将以速度 v_2 作匀速直线运动，以保持对 O 点的角动量守恒.

4－6. 根据万有引力定律，试按以下步骤推导太阳系中行星运动的轨道方程.

(1) 试证明，在平面极坐标系中，质点的动能可表示为

$$E_k = \frac{1}{2}m[(\frac{dr}{dt})^2 + \omega^2 r^2],$$

其中 m 质点的质量，$\omega = d\theta/dt$ 为质点运动的角速度；在有心力场 $E_p(r)$ 中运动的质点的总能量可以表示为

$$E = \frac{1}{2}m(\frac{dr}{dt})^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + E_p(r),$$

其中 L 是质点绕垂直于运动平面的固定轴的角动量，它是运动常量.

(2) 试证明：在引力场中，当 $E<0$ 时，代表总能量 E 的水平线与有效势能曲线的交点位置为

$$r_{\pm} = -\frac{Gm_1m_2}{2E} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{G^2m_1^2m_2^2}{E^2} + \frac{2L^2}{m_2E}}.$$

这里的 r_+ 和 r_- 分别是 r 的极大值 r_{max} 和极小值 r_{min}.

(3) 试证明

$$\frac{L}{r^2}\frac{dr}{\sqrt{2m_2(E+\frac{Gm_1m_2}{r}) - \frac{L^2}{r^2}}} = d\theta.$$

上式经过积分运算后，并取 $\theta=0$ 对应于 r_{min} 位置，则可得圆锥曲线方程为

$$r = \frac{p}{1+e\cos\theta},$$

其中　$p = \frac{L^2}{Gm_1m_2^2}$，　$e = \sqrt{1+\frac{2EL^2}{G^2m_1^2m_2^3}}$，

p 称为**半正焦弦**，e 称为**偏心率**(eccentricity). 圆锥曲线上的任意点至一固定

点(焦点)的距离，与它至一条直线(准线)的距离之比(偏心率)恒定.

(4) 试由偏心率的表达式说明，在机械能小于、等于或大于零，决定了偏心率 e 可以小于、等于或大于 1，圆锥曲线有椭圆、抛物线和双曲线等三种类型.

(5) 试说明，在地球上海拔高度 z 处沿水平方向发射人造地球卫星时，卫星运行轨道类型随发射速率 v_0 的变化.

[证明] (1) 在平面极坐标系中，质点的运动速率可表示为

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 ,$$

其中　$v_r = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$　　和　　$v_\theta = r\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = r\omega$

分别为质点的径向和横向运动速率. 因此，质点的动能可表示为

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}m_2 v^2 = \frac{1}{2}m_2 v_r^2 + \frac{1}{2}m_2 v_\theta^2 = \frac{1}{2}m_2\left[\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \omega^2 r^2\right].$$

由于质点相对于平面极坐标原点 O 的角动量或质点绕垂直于运动平面的固定轴的角动量的大小为

$$L = m_2 r v_\theta = m_2 r^2 \omega ,$$

因此在有心力场 $E_\mathrm{p}(r)$ 中运动的质点的总能量可以表示为

$$\begin{aligned} E = E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p}(r) &= \frac{1}{2}m_2\left[\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \omega^2 r^2\right] + E_\mathrm{p}(r) \\ &= \frac{1}{2}m_2\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{L^2}{2m_2 r^2} + E_\mathrm{p}(r) \\ &= \frac{1}{2}m_2\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \tilde{E}_\mathrm{p}(r) . \end{aligned}$$

(2) 当 $E<0$ 时，代表总能量 E 的水平线与有效势能曲线的交点位置 r_+ 和 r_- 取决于

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 0 ,$$

即　　$E = \tilde{E}_\mathrm{p}(r)$.

利用　　$\tilde{E}_\mathrm{p}(r) = \dfrac{L^2}{2m_2 r^2} + E_\mathrm{p}(r) = \dfrac{L^2}{2m_2 r^2} - \dfrac{Gm_1 m_2}{r}$,

可得　　$E = \dfrac{L^2}{2m_2 r^2} - \dfrac{Gm_1 m_2}{r}$,

或　$r^2+\frac{Gm_1m_2}{E}r-\frac{L^2}{2m_2E}=0$，

由此可解得

$$r_{\pm}=-\frac{Gm_1m_2}{2E}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{G^2m_1{}^2m_2{}^2}{E^2}+\frac{2L^2}{m_2E}}\,.$$

(3) 求解行星和卫星运动问题的基本方程是

$$L=m_2r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\text{常量}$$

和　$$E=\frac{1}{2}m_2(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t})^2+\frac{1}{2}m_2r^2(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t})^2-\frac{Gm_1m_2}{r}=\text{常量}.$$

由以上两式可分别得到

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{L}{m_2r^2},$$

和　$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{2E}{m_2}+\frac{2Gm_1}{r}-\frac{L^2}{m_2{}^2r^2}},$$

则有　$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}\sqrt{\frac{2E}{m_2}+\frac{2Gm_1}{r}-\frac{L^2}{m_2{}^2r^2}}=\frac{L}{m_2r^2},$$

$$\frac{L}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2m_2(E+\frac{Gm_1m_2}{r})-\frac{L^2}{r^2}}}=\mathrm{d}\theta.$$

由于上式中的$\frac{\mathrm{d}r}{r^2}=-\mathrm{d}(\frac{1}{r})$，引入变量$\rho=\frac{1}{r}$，则上式可化为

$$-\frac{1}{\sqrt{\frac{2m_2E}{L^2}+\frac{2Gm_1m_2}{L^2}\rho-\rho^2}}\mathrm{d}\rho=\mathrm{d}\theta,$$

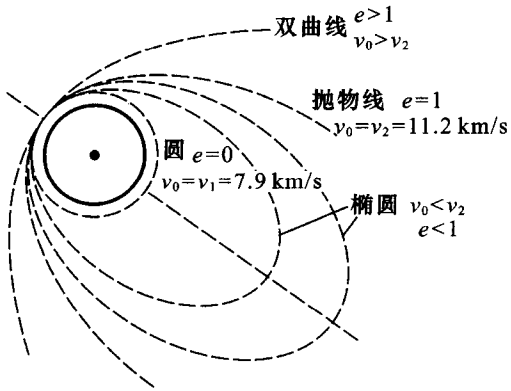
$$\mathrm{d}\rho=-\sqrt{\frac{2m_2E}{L^2}+\frac{2Gm_1m_2}{L^2}\rho-\rho^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

对上式作积分运算，并取$\theta=0$对应于$r_{\min}$位置，则可得圆锥曲线方程为

$$r=\frac{p}{1+e\cos\theta},$$

其中　$p=\frac{L^2}{Gm_1m_2{}^2}$，　$e=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{G^2m_1{}^2m_2{}^3}}$.

(4) 从偏心率的表达式可以看出，由于式中的$\frac{2L^2}{G^2m_1^2m_2^3}>0$，因此机械能 E 小于、等于或大于零，决定了偏心率 e 可以小于、等于或大于 1，从而决定了圆锥曲线有椭圆、抛物线和双曲线等三种类型，如图所示.



题 4－6 图

(5) 在地球上海拔高度 z 处沿水平方向发射人造地球卫星时，随着发射速率 v_0 的变化，轨道偏心率及卫星运行轨道类型随之改变.

当发射速率 v_0 等于第一宇宙速度时，$e=0$，卫星运行轨道是圆；当发射速率 v_0 大于第一宇宙速度但小于第二宇宙速度时，$0<e<1$，卫星运行轨道是椭圆；当发射速率 v_0 等于第二宇宙速度时，$e=1$，卫星运行轨道是抛物线；当发射速率 v_0 大于第二宇宙速度时，$e>1$，卫星运行轨道是双曲线的一支.

4－7. (1) 如果我们用 a 和 b 分别表示椭圆的半长轴和半短轴，用 c 表示两焦点间距之半，则几何学告诉我们，

$$e=c/a\,,\qquad b=a\sqrt{1-e^2}\,,\qquad S=\pi ab\,,$$

其中 S 为椭圆面积. 试给出 a 和 b 与 $r_{\max}$ 和 $r_{\min}$ 之间的关系，并将它们以及比值 $r_{\max}/r_{\min}$ 用 p 和 e 表示出来.

(2) 试证明：半长轴 a 只与机械能 E 有关，而与角动量无关. 具体而言，半长轴所给出的轨道的“尺寸”由机械能决定；而对于一给定的机械能，偏心率所给出的轨道的“形状”由角动量决定. 在一个平方反比力场中，一个给定的机械能，可以对应于许多不同的角动量态.

[解] (1) 由 $r=\frac{p}{1+e\cos\theta}$ 可得

$$r_{\max}=\frac{p}{1-e},\qquad r_{\min}=\frac{p}{1+e},$$

因此有

$$a=\frac{1}{2}(r_{\max}+r_{\min})=\frac{p}{1-e^2},$$

$$b=a\sqrt{1-e^2}=\frac{p}{\sqrt{1-e^2}},$$

$$\frac{r_{\max}}{r_{\min}}=\frac{1+e}{1-e}.$$

(2) 利用本题(1)的结果以及 p 和 e 的表达式

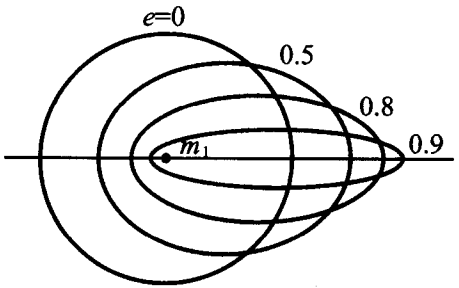
$$a=\frac{p}{1-e^2},\qquad p=\frac{L^2}{Gm_1m_2{}^2},\qquad e=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{G^2m_1{}^2m_2{}^3}},$$

可得　$a=-\dfrac{Gm_1m_2}{2E}$

或　$E=-\dfrac{Gm_1m_2}{2a}.$

上述结果表明，半长轴 a 只与机械能 E 有关，而与角动量无关.

具体而言，半长轴所给出的轨道的“尺寸”由机械能决定；而对于一给定的机械能，偏心率所给出的轨道的“形状”由角动量决定. 在一个平方反比力场中，一个给定的机械能，可以对应于许多不同的角动量态. 在初始能量 E 给定的情况下，相应于偏心率 e 分别为 0，0.5，0.8，0.9 的椭圆轨道如图所示.



题 4－7 图

观测表明，除了水星(e = 0.206)的轨道偏心率较大外，其他行星的轨道偏心率都很小(0.007 ≤ e ≤ 0.093)，这些轨道几乎是圆形的.

2006 年 8 月 24 日，国际天文学联合会(IAU)宣布，通过投票表决做出最终决定，将冥王星排除在行星行列之外，从而太阳系行星的数量将由九颗减为八颗，它们分别是水星、金星、地球、火星、木星、土星、天王星和海王星，1900 年以前它们就都被发现了.

根据国际天文学联合会大会通过的新定义，**行星**指的是围绕太阳运转、

自身引力足以克服其刚体力而使天体呈圆球状、并且能够清除其轨道附近其他物体的天体．而冥王星椭圆形的轨道同海王星轨道交叠，显然不符合这一定义．

事实上，原来位居太阳系九大行星末席 70 多年的冥王星，自发现之日起地位就备受争议．随着一颗比冥王星更大、更远的天体的发现，使得冥王星大行星地位的争论愈演愈烈．1930 年美国天文学家汤博发现冥王星，当时错估了冥王星的质量，以为冥王星比地球还大，所以命名为大行星．然而，经过近 30 年的进一步观测，发现它的直径只有 2300 km，比月球还要小．冥王星的质量远比其他行星小，甚至在卫星世界中它也只能排在第七、第八位左右．冥王星的表面温度很低，因而它上面绝大多数物质只能是固态或液态．

在太阳系边缘一个被称为柯伊伯带(Kuiper Belt)的区域里，存在有大量冰和构成岩石的天体，就目前发现的直径在 1000 km 以上的天体有 9 颗，而直径超过 100 km 以上的至少有 3.5 万颗，冥王星和它的卫星冥卫一是其中体积最大的天体．冥王星和一些类似的星体将被重新归类为**矮行星**，类似于此前所谓的小行星．国际天文学联合会还定义了第三类围绕太阳运转的小星体，名称为**太阳系小天体**(small solar system bodies)，主要包括无数的小行星、彗星和其他自然形成的卫星．

4－8. 试证明：绕以太阳为焦点的椭圆轨道运行的所有行星，其周期的平方与椭圆轨道半长轴的立方之比是一个常量，此即开普勒第三定律．

[证明] 对于沿着以太阳为焦点的椭圆轨道运行的所有行星来说，它们的角动量 $L = m_2 r^2 \omega$ 都是守恒量，在 dt 时间内径矢所扫过的面积为

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2} r^2 \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2} r^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2} r^2 \omega \mathrm{d}t = \frac{L}{2m_2}\mathrm{d}t .$$

由此可得，行星绕太阳一周所经历的时间即周期为

$$T = \int \mathrm{d}t = \int \frac{2m_2}{L}\mathrm{d}S = \frac{2m_2}{L}\pi a b = \frac{2m_2}{L}\pi a^2 \sqrt{1-e^2} ,$$

即

$$T^2 = \frac{4\pi^2 {m_2}^2}{L^2} a^4 (1-e^2) . \tag{a}$$

由题 **4－7**(1)中的式 $a = \dfrac{p}{1-e^2}$，可得

$$(1-e^2)a = p = \frac{L^2}{G m_1 {m_2}^2} . \tag{b}$$

将式(b)代入式(a)，可得

$$T^2=\frac{4\pi^2 m_2^{\,2}}{L^2}a^4(1-e^2)=\frac{4\pi^2 m_2^{\,2}}{L^2}a^3\frac{L^2}{Gm_1m_2^{\,2}}$$
$$=\frac{4\pi^2}{Gm_1}a^3.$$

因此，绕以太阳为焦点的椭圆轨道运行的所有行星，其周期的平方与椭圆轨道半长轴的立方之比是一个常量，此即开普勒行星运动第三定律.

4－9. (1) 当 6 月 21 日地球处在距离太阳为 $r_{\max}=1.52\times10^{11}$ m 的远日点时，地球的轨道运动速率为 $v_1=2.93\times10^4$ m/s．试问半年后，当地球处在距离太阳为 $r_{\min}=1.47\times10^{11}$ m 的近日点时，地球的轨道运动速率 v_2 多大？在上述两种情况下地球绕太阳运动的角速度 ω_1 和 ω_2 多大？

(2) 哈雷彗星在偏心率为 $e=0.967$ 的椭圆轨道上运行，绕太阳一周所需的时间为 76 a，试求哈雷彗星在近日点和远日点时与太阳之间的距离，以及在近日点时的速率与远日点时的速率之比.

[解] (1) 在远日点和近日点处有 $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{v}$，因此由角动量守恒关系可得，地球在近日点处的轨道运动速率为

$$v_2=\frac{r_1}{r_2}v_1=\frac{1.52}{1.47}\times2.93\times10^4\ \text{m/s}=3.03\times10^4\ \text{m/s};$$

而在远日点和近日点处地球绕太阳的角速度分别为

$$\omega_1=\frac{v_1}{r_1}=\frac{2.93\times10^4}{1.52\times10^{11}}\text{rad/s}=1.93\times10^{-7}\ \text{rad/s},$$

$$\omega_2=\frac{v_2}{r_2}=\frac{3.03\times10^4}{1.47\times10^{11}}\text{rad/s}=2.06\times10^{-7}\ \text{rad/s}.$$

(2) 哈雷彗星的椭圆轨道的偏心率 $e=0.967$，周期 $T=2.4\times10^9$ s．利用题 4－7 的结果以及

$$a=\frac{p}{1-e^2}\qquad\text{和}\qquad p=\frac{L^2}{Gm_1m_2^{\,2}},$$

可得

$$p=\frac{L^2}{Gm_1m_2^{\,2}}=\frac{1}{Gm_1}\frac{4\pi^2}{T^2}\frac{p^4}{(1-e^2)^3},$$

即

$$p=\sqrt[3]{\frac{Gm_1T^2}{4\pi^2}}(1-e^2).$$

因此，哈雷彗星在近日点和远日点时与太阳之间的距离分别为

$$r_{\min}=\frac{p}{1+e}=\sqrt[3]{\frac{Gm_1T^2}{4\pi^2}}(1-e)=8.9\times10^{10}\ \text{m}\,,$$

$$r_{\max}=\frac{p}{1-e}=\sqrt[3]{\frac{Gm_1T^2}{4\pi^2}}(1+e)=5.3\times10^{12}\ \text{m}\,.$$

由于在远日点和近日点处有$\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{v}$，因此由角动量守恒关系可得，哈雷彗星在近日点时的速率v_1与远日点时的速率v_2之比为

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{r_{\max}}{r_{\min}}=60\,.$$

4－10. 1970 年 4 月 23 日，我国发射了第一颗人造地球卫星，它的质量是 173 kg，近地点的高度是 439 km，远地点的高度是 2384 km. 试求：(1) 卫星运行轨道的偏心率. (2) 卫星在轨道上运动的机械能 E 和角动量 L. (3) 卫星在近地点和远地点的速度. (4) 卫星运行的周期.

[解] (1) 按题意有

$$r_{\min}=R_{\text{e}}+z_{\min}=6.81\times10^{6}\ \text{m}$$

和　　$r_{\max}=R_{\text{e}}+z_{\max}=8.75\times10^{6}\ \text{m}\,,$

可得该卫星运行轨道的偏心率 e 和半正焦弦 p 分别为

$$e=\frac{r_{\max}-r_{\min}}{r_{\max}+r_{\min}}=0.125\,,$$

$$p=(1-e)r_{\max}=7.66\times10^{6}\ \text{m}\,.$$

(2) 该卫星在轨道上运动的机械能 E 和角动量 L 分别为

$$L=m\sqrt{Gm_{\text{e}}p}=9.56\times10^{12}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}\,,$$

$$E=-(1-e^2)\frac{G^2m_{\text{e}}{}^2m^3}{2L^2}=-(1-e^2)\frac{Gm_{\text{e}}m}{2p}=-4.43\times10^{9}\ \text{J}\,.$$

(3) 卫星在近地点的速率 v_1 和远地点的速率 v_2 分别为

$$v_1=\frac{L}{mr_{\min}}=8.11\,\text{km/s}\,,$$

$$v_2=\frac{L}{mr_{\max}}=6.32\,\text{km/s}\,.$$

(4) 卫星运行轨道的偏心率 $e=0.125$，周期 T 为

$$T=\frac{2\pi m}{L}a^2\sqrt{(1-e^2)}=\frac{2\pi m}{L}\frac{p^2}{(1-e^2)^{3/2}}=6.83\times10^{3}\ \text{s}\,.$$

4－11. 1961 年 4 月 12 日，前苏联的加加林成为第一个宇宙航行员．当时采用的卫星宇宙飞船的质量为 m = 4725 kg，近地点 P 和远地点 A 的高度分别为 $z_P = 180\,\text{km}$ 和 $z_A = 327\,\text{km}$．试求卫星通过海拔为 z 时的速度 v 与 z、z_P、z_A，地球质量 m_e，地球半径 R_e 和引力常数 G 之间的函数关系．

[解] 由于卫星在轨道上运行过程中总能量 E 是守恒的，且有

$$E = -(1-e^2)\frac{Gm_em}{2p} = -\frac{Gm_em}{2a},$$

因此卫星通过海拔为 z 时有

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{Gm_em}{R+z} = -\frac{Gm_em}{2R+z_P+z_A},$$

可得　$v = \sqrt{2Gm_e\left(\dfrac{1}{R+z} - \dfrac{1}{2R+z_P+z_A}\right)}$．

卫星宇宙飞船在近地点 P 和远地点 A 的速率分别为

$$v_P = 7.85\ \text{km/s},$$

$$v_A = 7.67\ \text{km/s}.$$

4－12. 近代宇航技术的发展已使人们能够从地球向其他行星发射人造天体(宇宙飞船)，其中最简单的一种发射方案称为**双切轨道方案**或**霍曼**(Hohman)**轨道方案**．如图所示，一宇宙飞船在环绕地球的圆形轨道上运行，它的质量为 3000 kg，轨道半径为地球半径 R_e 的 3 倍．现在，我们利用双切轨道方案，使飞船经过半椭圆轨道转换到半径为 13 R_e 的圆形轨道上来．试问：(1) 这种转换所需要的最小的能量消耗是多少？(2) 在两个交点处的速度需要改变多少？

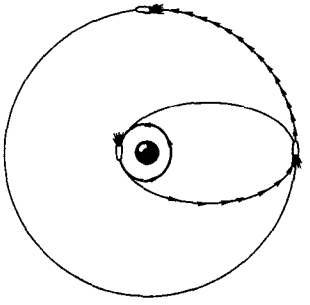
[解] (1) 按题意，宇宙飞船运行的圆形轨道的半径分别为

$$r_1 = 3R_e, \qquad r_2 = 13R_e,$$

相应的总能量分别为

$$E_1 = -\frac{Gm_em}{6R_e},$$

$$E_2 = -\frac{Gm_em}{26R_e}.$$



题 4－12 图

轨道转换所需要的最小能量消耗为

$$\Delta E = E_2 - E_1 = -\frac{Gm_em}{26R_e} + \frac{Gm_em}{6R_e} = \frac{10}{78}\frac{Gm_em}{R_e} = 2.4\times10^{10}\ \text{J}.$$

(2) 在两个交点处的速率分别为

$$v_1=\sqrt{\frac{Gm_e}{3R_e}}=4.6\,\mathrm{km/s},$$

$$v_2=\sqrt{\frac{Gm_e}{13R_e}}=2.2\,\mathrm{km/s},$$

即在轨道转换中宇宙飞船速率减小了 2.4 km/s .

4－13. 地球可看做是半径为 $r_e=6400\,\mathrm{km}$ 的球体，一颗人造地球卫星在地面上空 $h=800\,\mathrm{km}$ 的圆形轨道上，速度 $v_1=7.5\,\mathrm{km/s}$. 今在卫星外侧点燃一支火箭，其反冲力指向地心，因而给卫星附加一个指向地心的分速度 $v_2=0.2\,\mathrm{km/s}$. 试求此后卫星轨道的近地点和远地点的高度.

[解] 卫星外侧点燃的火箭使卫星的合速度为 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$，它不再与地心引力垂直，从而使卫星运动轨道改为椭圆.

在点燃火箭的瞬时，可认为卫星对地心的位置 $\boldsymbol{r}$ 不变；但当卫星运行到远地点或近地点 $\boldsymbol{r}'$ 时，$\boldsymbol{r}'$ 与该处卫星的速度 $\boldsymbol{v}'$ 垂直. 由于引力始终指向地心，因此卫星在作椭圆运动时角动量守恒，即

$$\boldsymbol{r}\times m(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)=\boldsymbol{r}'\times m\boldsymbol{v}'. \tag{a}$$

按题意 $\boldsymbol{v}_2$ 指向地心，$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}_2=0$，上式可化为 $\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{r}'\times m\boldsymbol{v}'$；又由于 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{v}_1$ 垂直，$\boldsymbol{r}'$ 与 $\boldsymbol{v}'$ 垂直，所以有

$$rv_1=r'v'. \tag{b}$$

卫星运动时只受到保守力——万有引力的作用，机械能守恒，因此有

$$\frac{1}{2}m(v_1^2+v_2^2)-G\frac{m_{地}m}{r}=\frac{1}{2}mv'^2-G\frac{m_{地}m}{r'}. \tag{c}$$

根据牛顿第二定律，对于圆轨道运动还有

$$G\frac{m_{地}m}{r^2}=m\frac{v_1^2}{r}\qquad 即\qquad Gm_{地}=rv_1^2. \tag{d}$$

联立式(b)、式(c)和式(d)，可得

$$(v_1^2-v_2^2)r'^2-2v_1^2r'r+v_1^2r^2=0,$$

即　　$$[(v_1+v_2)r'-v_1r][(v_1-v_2)r'-v_1r]=0.$$

由此可得 r' 的两个解分别为

$$r'_{近}=\frac{v_1r}{v_1+v_2}=\frac{7.5\times(6400+800)}{7.5+0.2}\,\mathrm{km}=7013\,\mathrm{km},$$

$$r'_{远}=\frac{v_1r}{v_1-v_2}=\frac{7.5\times(6400+800)}{7.5-0.2}\,\mathrm{km}=7397\,\mathrm{km},$$

该卫星椭圆轨道的近地点和远地点分别位于地面上空 613 km 和 997 km 处.

4－14. 一颗质量为 5000 kg 的卫星，在地球表面上方 8000 km 高度沿圆轨道运行．由于大气的摩擦，几天后轨道收缩到高度为 650 km．因为收缩非常缓慢，假定在每一时刻轨道基本上是圆的．

(1) 试计算卫星的速度、角速度、动能、势能和总能量的变化．

(2) 假定空气阻力可以用一个 17.5 N 的平均力来代表．试计算这个力所产生的力矩以及能量的耗散速率，并由此估算上述高度下降所需要的时间．

[解] (1) 对于沿圆周轨道运动的卫星，存在如下的关系式：

$$v=\sqrt{\frac{Gm_e}{R+z}},\qquad \omega=\frac{v}{R+z},\qquad E_k=\frac{Gm_em}{2(R+z)},$$

$$E_p=-2E_k,\qquad E=-E_k.$$

因此，在大气摩擦所造成的卫星轨道收缩过程中，卫星的速度、角速度、动能、势能和总能量的变化分别为

$$\Delta v=2.27\ \text{km/s},\qquad \Delta\omega=7.08\times10^{-4}\ \text{s}^{-1},$$

$$\Delta E_k=7.3\times10^{10}\ \text{J},\qquad \Delta E_p=-1.46\times10^{11}\ \text{J},$$

$$\Delta E=-7.3\times10^{10}\ \text{J}.$$

(2) 按题意，有

$$z_1=8.0\times10^6\ \text{m},\qquad z_2=6.5\times10^5\ \text{m},\qquad R=6.37\times10^6\ \text{m},$$

空气阻力可用平均力 $\overline{F}=17.5\ \text{N}$ 来代表，这个力所产生的平均力矩为

$$\overline{M}=\overline{F}(R+\bar{z})=17.5\times10.7\ \text{N·m}=187\ \text{N·m}.$$

卫星绕地球作圆周运动的周期为

$$T=\frac{2\pi(R+z)}{v}=\frac{2\pi(R+z)^{3/2}}{(Gm_e)^{1/2}},$$

即　　$T_1=1.71\times10^4\ \text{s}$，

$$T_2=5.9\times10^3\ \text{s},$$

其平均值为

$$\overline{T}=(T_1+T_2)/2=1.15\times10^4\ \text{s}.$$

在卫星环绕一周的过程中，总能量 E 的变化等于阻力所作的功，其平均值为

$$\overline{\Delta E_1}=-\overline{F}\,2\pi\bar{r}=-\overline{F}\,2\pi(R+\bar{z})=1.18\times10^9\ \text{J}.$$

由此可得，卫星的能量耗散速率为

$$\frac{\overline{\Delta E_1}}{\overline{T}}=\frac{1.18\times10^9\ \text{J}}{1.15\times10^4\ \text{s}}=1.03\times10^5\ \text{J/s}.$$

卫星高度从 $z_1=8.0\times10^6\ \text{m}$ 下降到 $z_2=6.5\times10^5\ \text{m}$，所需时间约为

$$t=\frac{\Delta E}{\Delta E_1}\overline{T}=\frac{7.3\times10^{10}}{1.03\times10^{5}}\text{s}=7.1\times10^{5}\text{ s}=197\text{ h}.$$

实际上，由 $E=-Gm_em/2r$ 可得

$$\Delta E=\Delta(-\frac{Gm_em}{2r})=\frac{Gm_em}{2r^2}\Delta r=-F2\pi r,$$

因此卫星每环绕地球一周高度变化为

$$\Delta r=\Delta z=-\frac{F4\pi r^3}{Gm_em}=-\frac{F4\pi(R+z)^3}{Gm_em}.$$

在卫星高度下降 $|\Delta r|$ 的过程中，引力势能和动能的改变分别为

$$\Delta E_{\text{p}}=\Delta(-\frac{Gm_em}{r})=2\Delta E,$$

$$\Delta E_{\text{k}}=\Delta E-\Delta E_{\text{p}}=-\Delta E=F2\pi r=F2\pi(R+z).$$

这就是说，虽然阻力对卫星作负功，导致卫星高度下降；但在卫星高度下降的过程中，地球的引力作正功，引力势能减小，其值为阻力负功的绝对值的二倍，从而总的功是正的，所以卫星加速.

4－15. 在有心力 $F(r)$ 的作用下，质量为 m 的质点以力心 O 为圆心，作半径为 r_0 的匀速圆周运动．在质点受到扰动而使轨道半径变为 $r_0+\Delta r$ 或 $r_0-\Delta r$ 后，试利用角动量守恒关系，比较质点所受向心力与有心力的大小，说明原轨道的稳定性，并求出稳定条件．如果 $F(r)=k/r^n$，试给出稳定条件，说明相应于平方反比引力的轨道是稳定的.

[解] 根据牛顿第二定律，对于未经扰动的圆轨道运动，有

$$mr_0\dot{\theta}_0^2=F(r_0),\tag{a}$$

其中 θ_0 是平面极坐标系中质点的位置矢量的辐角，且 $\dot{\theta}_0=\text{d}\theta_0/\text{d}t$.

设扰动使质点的轨道半径由 r_0 变为 $r_0+\Delta r$，由于扰动是径向的，因此角动量守恒，有

$$r_0^2\dot{\theta}_0=(r_0+\Delta r)^2\dot{\theta}.\tag{b}$$

为了使原来的圆轨道是稳定的，即质点要有恢复到原来未受扰动轨道的趋势，则受扰动后质点运动所需要的向心力就应该小于扰动后质点所受到的引力，即

$$m(r_0+\Delta r)\dot{\theta}^2<F(r_0)+F'(r_0)\Delta r.\tag{c}$$

将式(b)代入式(c)，消去 $\dot{\theta}$ 并利用式(a)，可得

$$\frac{r_0^3}{(r_0+\Delta r)^3}F(r_0)<F(r_0)+F'(r_0)\Delta r,$$

或　$$\frac{r_0^3-(r_0+\Delta r)^3}{(r_0+\Delta r)^3}F(r_0)<F'(r_0)\Delta r\,.$$

假定扰动很微小，$\Delta r \ll r_0$，则稳定条件化为

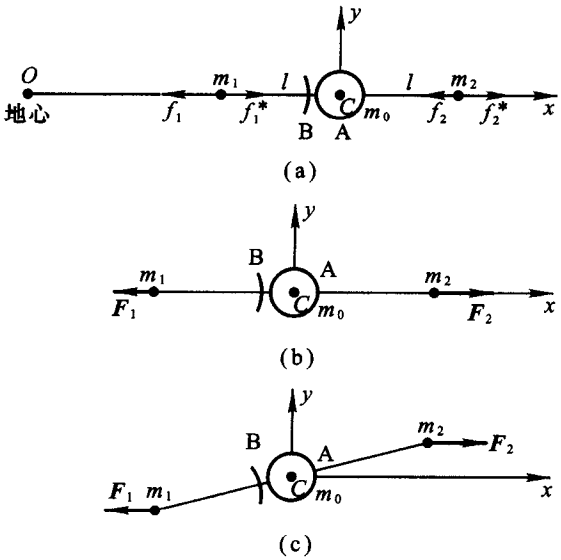
$$\frac{-3r_0^2\Delta r}{r_0^3}F(r_0)<F'(r_0)\Delta r\,,$$

即　$$F(r_0)>-\frac{r_0}{3}F'(r_0)\,. \tag{d}$$

若扰动使质点的轨道半径由 r_0 变为 $r_0-\Delta r$，同样可得式(d).

式(d)表明，若 $F(r)=k/r^n$，则稳定条件为 $n<3$，所以相应于平方反比引力的轨道是稳定的.

4－16. 同步卫星姿态的稳定性问题[①]. 在赤道平面内作圆轨道运动的卫星，若其周期与地球自转周期相同，则从地面观察它对地面的位置不变. 这种与地球自转同步运行的卫星，称为**同步卫星**(synchronous satellite). 设同步卫星 A 与天线 B 构成的系统的质量为 m_0，质心为 C. 沿地球球心 O 与卫星质心 C 的连线方向，在卫星两边分别安装一根长度同为 l 的刚性轻杆，杆端各有一质量为 m 的质点，整个系统的质心仍为 C 点. 试说明，如果同步卫星受到扰动而略偏离其正确姿态，则刚性轻杆杆端质点受到的力所形成的力矩，将会使系统返回正确姿态.



题 4—16 图

[解] 用作通讯卫星的同步卫星，除要求它必须在精确的同步轨道上运行外，还要求它的抛物面天线必须永远面向地球，保持它的运行姿态稳定. 本题涉及的是一种利用引力不均匀性而设计的方案.

① 管靖. 《基础物理学》中关于力学稳定性问题的讨论. 大学物理，2002，21(6)：45－47

如图(a)所示，由于系统在地球引力作用下运动，因此有

$$a_C = G\frac{m_{地}}{r_C^2}.$$

令 Cx 沿 OC 方向，建立 $Cxyz$ 坐标系．因讨论限制在较小的时空范围内，故可略去 OC 的转动，$Cxyz$ 坐标系可视为平动非惯性系．

把卫星和天线视为位于质心 C 的质点 m_0，则其受到的引力与惯性力 $m_0 a_C \boldsymbol{i}$ 抵消．质点 m_1 所受到的引力 $\boldsymbol{f}_1$ 和惯性力 $\boldsymbol{f}_1^*$ 分别为

$$\boldsymbol{f}_1 = -G\frac{m_{地}m_1}{r_1^2}\boldsymbol{i},$$

$$\boldsymbol{f}_1^* = G\frac{m_{地}m_1}{r_C^2}\boldsymbol{i}.$$

由于 m_1 距地心较近，因此有 $|\boldsymbol{f}_1| > |\boldsymbol{f}_1^*|$，它们的合力 $\boldsymbol{F}_1$ 指向地心．对于质点 m_2，由于 m_2 距地心较远，因此有 $|\boldsymbol{f}_2| < |\boldsymbol{f}_2^*|$，它们的合力 $\boldsymbol{F}_2$ 背离地心，如图(b)所示．

如果同步卫星受到微小扰动而略偏离正常姿态，如图(c)所示，则 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 对 Cz 轴形成一个使系统沿顺时针方向转动的力矩，从而使系统返回正确姿态．$\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 是由引力场的不均匀性产生的，称为潮汐力或引潮力，因为海洋的潮汐现象是由同样性质的力引起的．

同步卫星要满足双重同步条件：卫星轨道运动周期与地球自转周期相同，卫星自转周期与其轨道运动周期相同．月球不是地球的同步卫星，但它满足一个同步条件，即月球自转周期与其轨道运动周期相同，所以月球永远以一个确定的面朝向地球．实际上，月球是一个椭球，其长轴沿地月连线方向，月球姿态稳定的机理与上述同步卫星姿态稳定的机理相同．

第五章　连续体力学

5－1. 一圆盘绕垂直于盘面的固定轴 O 转动，设圆盘上任意两点 A，B 的速度和加速度分别为 $\boldsymbol{v}_A$，$\boldsymbol{v}_B$ 和 $\boldsymbol{a}_A$，$\boldsymbol{a}_B$．试证明 $\boldsymbol{v}_A$ 与 $\boldsymbol{a}_A$ 之间的夹角 θ_A 等于 $\boldsymbol{v}_B$ 与 $\boldsymbol{a}_B$ 之间的夹角 θ_B．

[证明] 由刚体上任一质元的线速度和线加速度公式可得，对于该圆盘上任一点有

$$\boldsymbol{v}_i = R_i\,\omega \boldsymbol{e}_\theta,$$

$$\boldsymbol{a}_i = R_i\,\beta \boldsymbol{e}_\theta + R_i\,\omega^2 \boldsymbol{e}_r = R_i\,(\beta \boldsymbol{e}_\theta + \omega^2 \boldsymbol{e}_r).$$

由以上两式可以看出，角速度 ω 和角加速度 β 对圆盘上任意点都是相同的，与所考虑的质元位置有关的量 R_i 可作为公因子提出来，因此 $\boldsymbol{v}_i$ 和 $\boldsymbol{a}_i$ 间的夹角对圆盘上任一点来说都是相同的．

5－2. 如果在 DVD 驱动器停下来的过程中，转速由 27.5 rad/s 减小到 0，角加速度为 $-10.0\ \text{rad/s}^2$，在 $t = 0$ 时 PQ 沿 x 轴，试问 $t = 0.300$ s 时 PQ 的位置怎样？

[解] 按题意，$\omega_1 = 27.5\ \text{rad/s}$，$\omega_t = 0$，$\alpha = -10.0\ \text{rad/s}^2$．设 $\theta(t)$ 为 t 时刻 PQ 与 x 轴之间的夹角，$\theta(0) = 0$．因此，在 $t = 0.300$ s 时 PQ 的位置为

$$\theta(t) = (\omega_1 t + \frac{1}{2}\alpha t^2) - 2n\pi = 1.5\ \text{rad} = 86^\circ,$$

其中取 $n = 1$．

5－3. 一张致密光盘(CD)音轨区域的内、外半径分别为 $R_1 = 2.2$ cm 和 $R_2 = 5.6$ cm，径向音轨密度为 $n = 650/\text{mm}$．在驱动器内，激光头以 $v = 1.3$ m/s 的恒定线速度沿音轨运动，光盘每转一圈激光头沿径向向外移动一条音轨．试问，这张光盘的全部放音时间是多少？激光束到达距离盘心 $r = 4.5$ cm 时，光盘转动的角速度和角加速度各是多少？

[解] 光盘所作的是线速度恒定的转动，当激光头沿径向向外移动时，其角速度逐渐减小．因此，光盘的全部放音时间 t，等于激光头沿音轨运动的路径的总长度 l 除以线速度 $v = 1.3$ m/s，即

$$t = \frac{1}{v}\int_{R_1}^{R_2} 2\pi r n\,\mathrm{d}r = \frac{2\pi n}{v}\frac{1}{2}(R_2^2 - R_1^2) = 69.4\ \text{min}.$$

激光束到达距离盘心 $r = 4.5$ cm 时，光盘转动的角速度为

$$\omega = \frac{v}{r} = 29\ \text{rad/s}.$$

为了计算角加速度，我们考虑当激光头在 $\Delta t = 2\pi r/v$ 时间内沿音轨运动一周时，就会沿径向向外移动一条音轨，$\Delta r = 1/n$，这时角速度改变

$$\Delta\omega = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r}\Delta r = -\frac{v}{nr^2}.$$

因此，激光束到达距离盘心 $r=4.5\,\mathrm{cm}$ 时，光盘转动的角加速度为

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r}\frac{\Delta r}{\Delta t} = -\frac{v^2}{2\pi n r^3} = 4.5\times10^{-3}\,\mathrm{rad/s^2}.$$

(提示：运算中必须注意各物理量单位的统一．更正：原书 $v=1.3\,\mathrm{cm/s}$ 的单位有误，正确值应为 $v=1.3\,\mathrm{m/s}$．)

5－4. 测量光速的一种方法是利用旋转的齿轮．一束光线通过轮边齿间空隙到达远处的镜面上，然后调节齿轮转速，使得光束在反射回来时刚好能够通过相邻的轮边齿间空隙．设齿轮的半径为 6.0 cm，齿轮边上共有 500 个齿，当镜面与齿轮间的距离为 500 m 时，所测得的光速为 $3.0\times10^5\,\mathrm{km/s}$，试问齿轮旋转的角速度为多大？齿轮边缘上一点的线速度为多大？

[解] 按题意，当光束以速率 c 经过路程 $l = 2\times500$ m 时，半径为 R 的具有 N 个齿的齿轮转动了一个齿，因此有

$$\frac{l}{v} = \frac{1}{N}\frac{2\pi}{\omega}.$$

由此可得，齿轮的角速度 ω 和齿轮边缘一点的线速度 v 分别为

$$\omega = \frac{2\pi c}{Nl} = 3.8\times10^3\,\mathrm{rad/s},$$

$$v = R\omega = 2.3\times10^2\,\mathrm{m/s}.$$

5－5. 太阳绕其自转轴的旋转周期为 22 d．可以设想，倘若太阳坍缩为中子星，试估算它的自转角速度和周期．假定中子星的物质可以简单地看成是密排的中子，估计其密度为 $\rho_\mathrm{n} = 1.18\times10^{17}\,\mathrm{kg/m^3}$.

[解] 太阳若坍缩成中子星，其半径将变为

$$R = \sqrt[3]{\frac{m_\mathrm{s}}{4\pi\rho_\mathrm{n}/3}} = 1.59\times10^4\,\mathrm{m}.$$

由自转角动量守恒，可得其自转角速度和周期分别为

$$\omega' = \frac{I}{I'}\omega = \frac{\frac{2}{5}mR^2}{\frac{2}{5}mR'^2}\omega = \frac{R^2}{R'^2}\omega = 6.33\times10^3\,\mathrm{rad/s},$$

$$T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{R'^2}{R^2}T = 9.94\times10^{-4}\ \mathrm{s} = 1.15\times10^{-8}\ \mathrm{d}\ .$$

5－6. (1) 试求地球表面上纬度为φ 的一点，相对于地心参考系的线速度和加速度的数值和方向．(2) 由于潮汐对海岸的摩擦作用，地球自转是在逐渐变慢的．例如，在 1987 年地球完成 365 次自转比 1900 年长 1.14 s．试求在上述时间内地球自转的平均角加速度．若假定这种减缓速率不变，试问在一亿年前地球的一年有多少天？(3) 地球两极的冰帽含有2.3×10^{19} kg 的冰块．由于这些冰块位于两极，紧靠转动轴，所以对地球的转动惯量基本上没有影响．如果冰帽消融，并把所化成的水均匀地分布在地球表面上，试估计由此引起的每天时间长度的改变．

[解] (1) 地球表面上纬度为φ 的一点，相对于地心参考系的线速度和加速度分别为

$$v_\varphi = 4.63\times10^{2}\cos\varphi\ \mathrm{m/s}\ ,$$

$$a_\varphi = 3.37\times10^{-2}\cos\varphi\ \mathrm{m/s^2}\ .$$

(2) 1900 年到 1987 年，地球自转的平均角加速度为

$$\beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{2\pi}{T_\mathrm{d}}\right) = -\frac{2\pi}{T_\mathrm{d}^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T_\mathrm{d} = -\frac{2\pi}{T_\mathrm{d}^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{T_\mathrm{y}}{365}$$

$$= -\frac{2\pi}{(24\times3600)^2}\frac{1}{365}\frac{1.14}{(87\times365\times24\times3600)}\ \mathrm{rad/s^2}$$

$$= -9.58\times10^{-22}\ \mathrm{rad/s^2}\ .$$

若假定这种减缓速率不变，则在一亿年前地球的一年有 380 天，因为

$$\omega_2 = \omega_1 + \beta\Delta t = \left(\frac{2\pi}{24\times3600} + 9.58\times10^{-22}\times10^{8}\times365\times24\times3600\right)\mathrm{rad/s}$$

$$= 7.57\times10^{-5}\ \mathrm{rad/s}\ ,$$

$$x = \frac{24\times3600}{2\pi/\omega_2}\times365\text{天} = 380\text{天}\ .$$

(3) 地球自转时的转动惯量为$I_\mathrm{e} = 2m_\mathrm{e}R_\mathrm{e}^{\,2}/5$．在地球两极的冰帽消融后，质量为$m = 2.3\times10^{19}$ kg 的冰帽所化成的水将在地球表面上形成一个球壳，其转动惯量为$I_\mathrm{w} = 2mR_\mathrm{e}^{\,2}/3$．由于地球的自转角动量守恒，因此有

$$L = I_\mathrm{e}\omega_1 = (I_\mathrm{e} + I_\mathrm{w})\omega_2\ ,$$

即

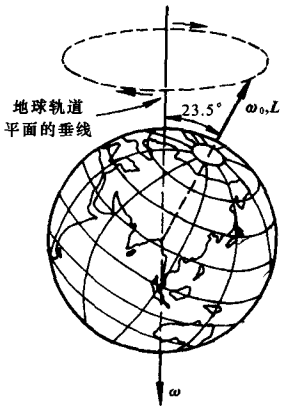
$$I_\mathrm{e}\frac{2\pi}{T_1} = (I_\mathrm{e} + I_\mathrm{w})\frac{2\pi}{T_2}\ .$$

由上式可得，冰帽消融所引起的每天时间长度的改变为

$$T_2-T_1=\frac{I_w}{I_e}T_1=\frac{2mR_e^{\ 2}/3}{2m_eR_e^{\ 2}/5}T_1$$

$$=\frac{5}{3}\frac{m}{m_e}T_1=0.55\text{s}\ .$$

5－7. (1) 试求地球的自转角动量及其绕太阳旋转的轨道角动量的大小，后者是前者的多少倍？(2) 如图所示，地球的自转轴与它绕太阳的轨道平面的垂线之间的夹角是23.5°. 由于太阳和月亮对地球的引力产生力矩，地球的自转轴绕轨道平面的垂线进动，进动周期为 27 725 a (年). 试求地球自转角动量变化率的大小 $|\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t|$ 以及太阳和月亮的合力矩的大小.



题 5－7 图

[解] (1) 地球的自转角动量 L_1 及轨道角动量 L_2 分别为

$$L_1=\frac{2}{5}mR_1^2\frac{2\pi}{T_1}=7.07\times10^{33}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}\ ,$$

$$L_2=mR_2^2\frac{2\pi}{T_2}=2.66\times10^{40}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}\ ,$$

即 L_2 是 L_1 的 3.76×10^6 倍.

(2) 地球自转轴绕轨道平面的垂线进动的角速度为

$$\omega_p=\frac{2\pi}{27\,725\times365\times24\times60^2}\ \text{rad/s}=7.19\times10^{-12}\ \text{rad/s}\ ,$$

太阳和月亮对地球的合力矩 M 以及地球自转角动量的变化率为

$$M=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}\right|=\omega_pL_1\sin23.5^\circ=2.02\times10^{22}\ \text{N}\cdot\text{m}\ .$$

5－8. 为了测量物体的转动惯量，可将待测物体装在如图所示装置的转动架上，并使其轴与转动架的轴重合. 转动架的轮轴半径为 r，拉线与轴垂直. 拉线的另一端通过一个小滑轮，并悬挂一重物 m. 若转动架对转动轴的转动惯量为 I_0，并测得重物 m 从静止开始下降高度 h 时所用的时间 t，试求出待测物体对转动轴的转动惯量 I. 假定小滑轮的质量以及轮轴处的摩擦都可以忽略不计.

[解] 按题意，对于质量为 m 的重物，有

$$mg - F_{T1} = ma\,, \qquad h = \frac{1}{2}at^2\,;$$

对于转动架和待测物体这个作定轴转动的子系统，总外力矩完全由 F_{T2} 产生，有

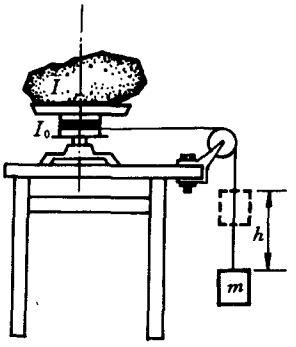
$$rF_{T2} = (I + I_0)\beta\,;$$

再考虑到拉线与转动架间无相对滑动，并忽略小滑轮的质量，有

$$a = r\beta\,, \qquad F_{T1} = F_{T2}\,.$$

联立以上各式，可解得待测物体对转轴的转动惯量为

$$I = mr^2\left(\frac{gt^2}{2h} - 1\right) - I_0\,.$$



题 5－8 图

5－9. 在如图(a)所示的阿特伍德机中，已知两个物体的质量分别为 $m_1 = 0.100$ kg 和 $m_2 = 0.200$ kg，定滑轮质量为 $m_3 = 0.025$ kg，半径为 $R = 0.050$ m. 假定绳子的形变可以忽略且在滑轮上没有滑动. (1) 试求物体的加速度和定滑轮的角加速度，以及两边绳子中的张力. (2) 当物体 m_2 从静止开始落下一段距离 $h = 0.500$ m 时，试求两物体和定滑轮的动能.

[解] (1) 在如图(a)所示的阿特伍德机中，忽略绳子的形变，发生平移的物体 m_1 和 m_2 的加速度的大小相同，它们遵从下列运动方程：

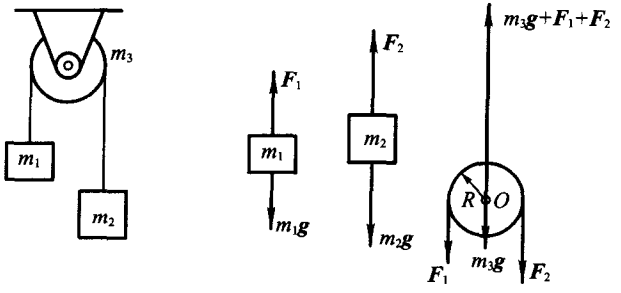
$$m_2 g - F_2 = m_2 a\,, \tag{a}$$

$$F_1 - m_1 g = m_1 a\,. \tag{b}$$

如图(b)所示，对于定滑轮 m_3 这个定轴转动刚体来说，它受到重力 $m_3 g$，支撑力 F_N 和滑轮两侧绳中张力 F_1' 和 F_2' 的作用. 若忽略绳子的质量，则有

$$F_1' = F_1\,, \qquad F_2' = F_2\,.$$

由于重力和支撑力都通过固定轴 O，对该轴的力矩为零，因此定滑轮的转动



(a)　　(b)

题 5－9 图

方程为

$$R(F_2-F_1)=I\beta, \qquad \text{(c)}$$

其中 $I=m_3R^2/2$ 是定滑轮对 O 轴的转动惯量，β 是定滑轮绕 O 轴转动的角加速度．当绳子与滑轮间无相对滑动时，有 $R\beta=a$，式(c)化为

$$F_2-F_1=\frac{1}{2}m_3a\,. \qquad \text{(d)}$$

可见，在定滑轮的质量不能忽略时，作用于定滑轮两侧的绳中张力的大小是不同的，除非 $a=0$．联立式(a), (b)和(d)可解得

$$a=\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2+m_3/2}g=3.14\ \text{m/s}^2,$$

$$\beta=\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2+m_3/2}\frac{g}{R}=63\ \text{rad/s}^2,$$

$$F_1=\frac{2m_2+m/2}{m_1+m_2+m_3/2}m_1g=1.29\ \text{N},$$

$$F_2=\frac{2m_1+m/2}{m_1+m_2+m_3/2}m_2g=1.33\ \text{N}.$$

(2) 当 m_2 从静止开始落下一段距离 $h=0.500$ m 时，两物体和滑轮的动能分别为

$$E_{k1}=\frac{1}{2}m_1v^2=\frac{1}{2}m_1 2ah=\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2+m_3/2}m_1gh=0.157\ \text{J},$$

$$E_{k2}=\frac{1}{2}m_2v^2=\frac{1}{2}m_2 2ah=\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2+m_3/2}m_2gh=0.314\ \text{J},$$

$$E_{k3}=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_3R^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2=\frac{1}{2}m_3ah$$

$$=\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2+m_3/2}\frac{m_3}{2}gh=0.020\ \text{J}.$$

5－10. 一根长为 l、质量为 m 的静止细长棒，可绕其一端在水平面内转动．现以质量为 m'、速率为 v 的子弹在水平面内沿与棒垂直的方向射入棒的另一端，若击穿后子弹的速率减为 $v/2$，试求棒的旋转角速度．

[解] 在子弹击穿细棒的短暂时间内，除了 O 轴的作用力外，它们并没有受到其他外来冲击力的作用，因此系统对 O 轴的角动量守恒．于是，有

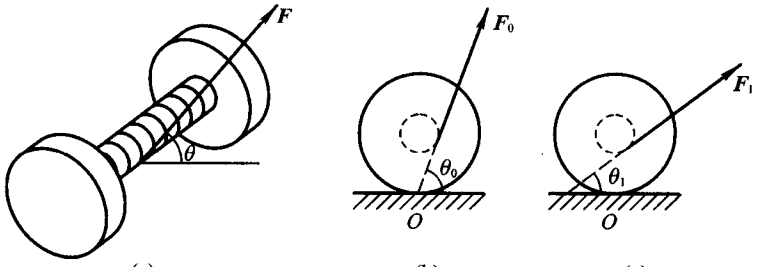
$$m'lv=I\omega+\frac{1}{2}m'lv=\frac{1}{3}ml^2\omega+\frac{1}{2}m'lv,$$

可得棒的角速度为

$$\omega=\frac{m'lv/2}{ml^2/3}=\frac{3m'v}{2ml}.$$

5－11. 如图所示，水平地面上有一线轴，今用与地面成θ角的力 $\boldsymbol{F}$ 拉线，假定线轴与地面之间无滑动，试证明：当$\theta<\arccos(r/R)$时线轴向前滚动，而当$\theta>\arccos(r/R)$时线轴向后滚动.

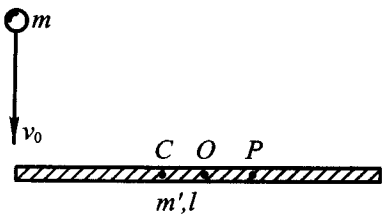
[证明] 考虑绕线轴从静止状态开始运动的瞬间，我们可以把线轴的运动看做是以接触线OO'为轴的转动. 如图(a)所示，对OO'轴来说，不但摩擦力不产生力矩，而且重力 $m\boldsymbol{g}$ 和正压力 $\boldsymbol{F}_N$ 也因通过轴线而不产生力矩，只有一定方向的拉力 $\boldsymbol{F}$ 产生力矩. 如果拉力的方向如图(b)中的 $\boldsymbol{F}_0$ 所示，即$\theta_0=\arccos(r/R)$，则由于这时拉力 $\boldsymbol{F}_0$ 的作用线通过OO'轴，所产生的力矩为零，因此这时即使$\boldsymbol{F}_0$较大也不能使绕线轴转动，但可能出现滑动.



题 5－11 图

若拉力 $\boldsymbol{F}_1$ 的方向为$\theta_1<\arccos(r/R)$，则如图(c)所示，拉力 $\boldsymbol{F}_1$ 产生的相对于OO'轴的力矩 $\boldsymbol{M}_1$ 将使线轴产生一个平行于OO'指向里的角加速度，这一角加速度的时间积累效果是使原来静止的线轴向前滚动. 显然，若拉力 $\boldsymbol{F}_2$ 的方向为$\theta_2>\arccos(r/R)$，则拉力 $\boldsymbol{F}_2$ 产生的力矩 $\boldsymbol{M}_2$ 将使线轴产生一个平行于OO'指向外的角加速度，从而使线轴向后滚动.

5－12. 质量为 m 的小球，以速度$\boldsymbol{v}_0$在水平冰面上滑动，撞在与小球运动方向垂直的一根细木棍的一端，并黏附在木棍上. 设木棍的质量为m'、长度为 l. (1) 忽略冰的摩擦，试定量地描述小球附在木棍上之后，系统的运动情况. (2) 刚刚发生碰撞之后，木棍上有一点 P 是瞬时静止的，试问该点在何处？



题 5－12 图

[解] (1) 在完全非弹性碰撞过程中，小球和木棍所组成的系统不受水平外力的作用，系统的动量守恒. 如图所示，设 C 为碰撞后系统的质心，O 为

木棍的质心，则有

$$|OC| = \frac{m}{m+m'}\frac{l}{2} \qquad 或 \qquad x = \frac{m'}{m+m'}\frac{l}{2},$$

其中 x 是质心 C 到碰撞点的距离．选取冰面为参考系，以小球初速度 v_0 方向为正方向，则由小球和木棍组成的系统的动量守恒关系式

$$mv_0 = (m+m')v_c,$$

可得该系统的质心速度为

$$v_c = \frac{m}{m+m'}v_0 .$$

碰撞前，小球相对于系统质心 C 的速度为

$$v_0 - v_c = v_0 - \frac{m}{m+m'}v_0 = \frac{m'}{m+m'}v_0,$$

小球相对于过系统质心 C 的竖直轴的角动量为

$$m(v_0 - v_c)\frac{m'}{m+m'}\frac{l}{2} = \frac{mm'^2 v_0}{(m+m')^2}\frac{l}{2},$$

木棍相对于系统质心 C 的速度为

$$0 - v_c = -\frac{m}{m+m'}v_0,$$

木棍相对于过系统质心 C 的竖直轴的角动量为

$$m'v_c\frac{m}{m+m'}\frac{l}{2} = \frac{m^2 m' v_0}{(m+m')^2}\frac{l}{2}.$$

碰撞后系统相对于过质心 C 的竖直轴的转动惯量和角动量分别为

$$I = m(\frac{m'}{m+m'})^2\frac{l^2}{4} + \frac{1}{12}m'l^2 + m'(\frac{m}{m+m'})^2\frac{l^2}{4}$$

$$= (\frac{mm'}{m+m'} + \frac{m'}{3})\frac{l^2}{4},$$

$$L = I\omega = (\frac{mm'}{m+m'} + \frac{m'}{3})\frac{l^2}{4}\omega .$$

在碰撞过程中，在水平方向上系统并没有受到外力的作用，也就没有受到外力矩的作用，因此系统的角动量是守恒的，即

$$\frac{mm'^2 v_0}{(m+m')^2}\frac{l}{2} + \frac{m^2 m v_0}{(m+m')^2}\frac{l}{2} = (\frac{mm'}{m+m'} + \frac{m'}{3})\frac{l^2}{4}\omega .$$

由上式可解得，系统绕过质心 C 的竖直轴逆时针旋转的角速度为

$$\omega = \frac{6v_0}{l}\frac{m}{4m+m'}.$$

为了给出在质心参考系中处理问题的较规范的方法，以上我们具体求出了小球和木棍相对于质心 C 的速度和角动量．由于质心 C 的速度不为零，计算不太简捷．事实上，如果我们采用冰面这一惯性参考系，并在碰撞即将发生的瞬间以**空间固定点** C 为参考点，考虑到这时系统的总角动量就等于小球相对于固定点 C 的角动量 mv_0x，而系统的质心与参考点 C 重合，因此系统在质心系中的角动量就等于角动量 mv_0x，于是不必通过具体求解小球和木棍相对于质心 C 的速度，就可以直接得到与上述角动量守恒关系式等价的关系式，即

$$mv_0x = [mx^2 + \frac{1}{12}m'l^2 + m'(\frac{1}{2}l - x)^2]\omega,$$

由此式即可得到上述结果．

(2) 假定在刚发生碰撞之后，木棍上瞬时静止的点 P 与质心 C 之间的距离为 l_0，则由 $v_c - \omega l_0 = 0$ 和 v_c 的表达式，可解得

$$l_0 = \frac{v_c}{\omega} = \frac{4m+m'}{m+m'}\frac{l}{6}.$$

5－13. 质量为 m、长为 l 的均匀细棒，其一端有一固定的光滑水平轴．设细棒静止在水平位置，试求：(1) 细棒由此下摆 θ 角时的角速度 ω；(2) 细棒摆到铅垂位置时轴对它的作用力．

[解] (1) 在细棒下摆过程中，除了已用势能表达的重力外，没有其他外力作功，因此机械能守恒．如图(a)所示，若选择细棒在铅垂位置时的质心位置为势能零点，则有

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + mgh_c = \frac{1}{2}mgl = 常量, \qquad (a)$$

其中 ω 为细棒由水平位置下摆 θ 角时的角速度．利用

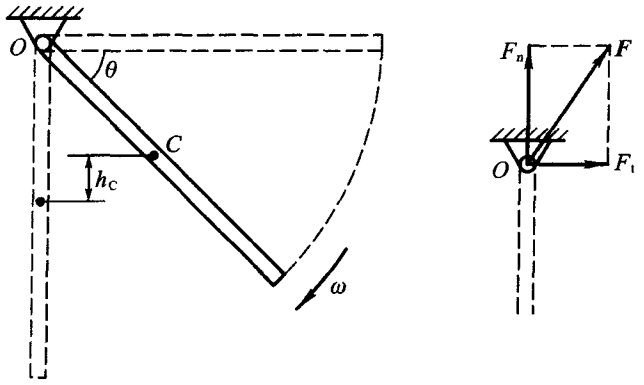
$$\frac{l}{2} - h_c = \frac{l}{2}\sin\theta \qquad 和 \qquad I = \frac{1}{3}ml^2,$$

则由式(a)可得

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = mg(\frac{l}{2} - h_c) = \frac{1}{2}mgl\sin\theta,$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl\sin\theta}{I}} = \sqrt{\frac{3g\sin\theta}{l}}. \qquad (b)$$

(2) 如图(b)所示，设轴 O 对细棒的作用力 $\boldsymbol{F}$ 可分解为法向分量 F_n 和切



(a)　　(b)

题 5－13 图

向分量 F_t. 当细棒摆到铅垂位置时，根据质心定理有

$$F_n - mg = \frac{mv_c^2}{r_c} = mr_c\omega^2,$$

$$F_t = ma_{ct}.$$

当细棒摆到铅垂位置时，对于轴 O 来说，细棒没有受到力矩的作用，由转动定理可知其角加速度应为零，故有

$$a_{ct} = 0, \qquad F_t = 0.$$

再利用 $\theta = \pi/2$ 时 $\omega = \sqrt{3g/l}$，以及 $r_c = l/2$ 和 $v_c = r_c\omega$，有

$$F_n = mg + m\frac{l}{2}\frac{3g}{l} = \frac{5}{2}mg. \tag{c}$$

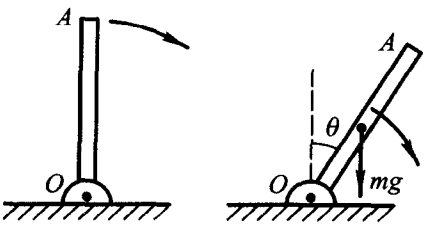
所以，细棒在竖直位置时，轴对细棒的作用力竖直向上，数值上等于细棒重量的 2.5 倍.

5－14. 质量为 m、长为 l 的均匀细棒 OA 直立在地面上，底端 O 用无摩擦轴承固定，试求从静止开始倒下的细棒在接触地面时的角速度以及端点 A 的速度，并与 A 端质元自由下落到达地面时的速度作比较. 由此说明，烟囱从底部爆破而倒下时，将会在烟囱的什么位置附近折断.

[解] (1) 解法一：对细棒运用转动定理.

如图(a)所示，细棒只受到重力矩的作用，其转动惯量为

$$I = \frac{1}{3}ml^2,$$



题 5－14 图(a)

按刚体定轴转动的转动定理，有

$$m g \frac{l}{2}\sin\theta = \frac{1}{3} m l^2 \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} . \tag{a}$$

由于　$\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\omega$，

因此式(a)可改写为

$$\frac{1}{2} g \sin\theta = \frac{1}{3} l \omega \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta},$$

$$\omega \mathrm{d}\omega = \frac{3g}{2l}\sin\theta \mathrm{d}\theta ,$$

$$\int_0^{\omega_\mathrm{f}} \omega \mathrm{d}\omega = \frac{3g}{2l}\int_0^{\pi/2} \sin\theta \mathrm{d}\theta .$$

由上式积分可得，细棒在接触地面时的角速度为

$$\omega_\mathrm{f} = \sqrt{\frac{3g}{l}} .$$

这时，端点 A 的速度为

$$v_A = \sqrt{3gl} ,$$

它比 A 端质元自由下落到达地面时的速度 $v_{A自} = \sqrt{2gl}$ 大，这是刚体其他部分对它施加了横向作用力的结果．均匀细棒距 O 端 $\sqrt{2/3}\,l \sim 0.8l$ 处的质元，其速度与自由下落到达地面时的速度相同．

(2) 解法二：对细棒运用动能定理．

在细棒倒下过程中，仅重力矩作功，

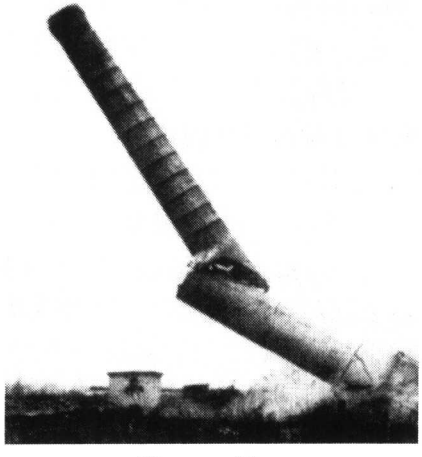
$$\int_0^{\pi/2} mg\frac{l}{2}\sin\theta \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2} m g l$$

由动能定理可得

$$\frac{1}{2} m g l = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} m l^2\right)\omega_\mathrm{f}^2 ,$$

$$\omega_\mathrm{f} = \sqrt{\frac{3g}{l}} .$$

对细棒、地球体系运用机械能守恒定律，即重力势能的减少等于转动动能的增加，同样可得上述结果．



题 5－14 图(b)

(3) 为了大致说明烟囱在什么位置

附近折断，可以考虑均匀细杆上部长度为 x 的一段．除了重力外，该段细杆还受到下部细杆对它的切向力 F_t(设指向斜下方为正)的作用．运用质心运动定理，有

$$F_t + \frac{x}{l}mg\sin\theta = \frac{x}{l}ma_c = \frac{x}{l}m\frac{2l-x}{2}\beta . \tag{b}$$

将式(a)的 $\beta = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t = 3g\sin\theta/2l$ 代入式(b)，可解得

$$F_t = \frac{mgx\sin\theta}{4l^2}(2l-3x) . \tag{c}$$

当 $x=2l/3$ 时，$F_t=0$．在该部位上、下所受的切向力方向相反，最易折断．

5－15. 质量为 $m=5.0\,\mathrm{kg}$、半径为 $R=0.15\,\mathrm{m}$ 的圆盘形均质飞轮，自静止开始在恒力矩 $M=2.4\,\mathrm{N\cdot m}$ 的作用下绕垂直于盘面的水平轴加速旋转．在 $t=15\,\mathrm{s}$ 时撤去该力矩，飞轮开始近似作匀速转动．假定飞轮质心与转动轴间的距离为 $d=1.0\,\mathrm{mm}$，试求飞轮的末角速度，以及飞轮作用于轴承的压力的大小．

[解] 根据平行轴定理，飞轮对不经过质心的转轴的转动惯量为

$$I = \frac{1}{2}mR^2 + md^2 \approx \frac{1}{2}mR^2 .$$

若飞轮的角加速度为 β，则根据转动定理，有

$$M = I\beta \approx \frac{1}{2}mR^2\beta .$$

在恒力矩作用下，飞轮由静止开始作匀加速转动，其末角速度为

$$\omega = \beta t = \frac{2Mt}{mR^2} = 640\ \mathrm{rad/s} .$$

由于飞轮质心偏离转轴，因此当飞轮匀速(近似)转动时，其质心沿半径为 d 的圆周运动，向心加速度为 $a_c = \omega^2 d$．这时，如果我们仅计算由于飞轮的转动使轴承受到的压力，而不考虑飞轮所受重力对该压力的影响，即飞轮仅受到轴承的弹性支持力 $\boldsymbol{F}$ 的作用，则根据质心运动定理，有

$$F = m\omega^2 d = 2.05\ \mathrm{kN} .$$

所以，作为由飞轮质心指向轴承的支持力 $\boldsymbol{F}$ 的反作用力，飞轮作用于轴承的“压力” $\boldsymbol{F}' = -\boldsymbol{F}$ 的大小为 2.05 kN，方向由轴承指向质心，它随着飞轮的转动而不断改变其空间取向．

由于转动体质心偏离转轴，轴承和支座受到时而上下、时而左右的周期力，从而使机座产生有害振动．质心偏离转轴越远，力 $\boldsymbol{F}$ 越大，振动越激烈．为减弱机座的振动，应设法减小质心至转轴的距离．若质心恰好落在转

轴上，则转动体达到了静平衡．许多转动体，例如内燃机的飞轮和砂轮，都需要调整静平衡．然而，转动体质心偏离轴线引起的振动并不总是有害的，某些机械恰好要利用这种振动进行工作，例如振动打桩机和振动泵．

5－16. 转动惯量为 $2.5\ \mathrm{kg\cdot m^2}$、直径为 60 cm 的圆盘形均质飞轮，正以 $130\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ 的角速度旋转．现用闸瓦将其制动，如果闸瓦对飞轮的正压力为 500 N，闸瓦与飞轮之间的摩擦系数为 0.50，试求从开始制动到停止飞轮转过的角度，以及闸瓦对飞轮施加的摩擦力矩所作的功．

[解] 如图所示，取角速度矢量的方向为 z 轴正方向(垂直与纸面向外)．

闸瓦对飞轮施加的摩擦力 $\boldsymbol{F}_\mathrm{f}$ 的方向如图所示，大小为

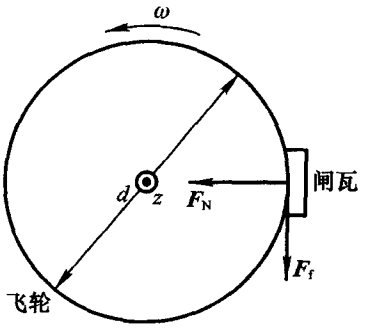
$$F_\mathrm{f}=\mu F_\mathrm{N}=2.5\times10^2\ \mathrm{N}\ ;$$

施加的摩擦力矩 $\boldsymbol{M}_z$ 沿 z 轴负方向，

$$M_z=-F_f\frac{d}{2}=-75\ \mathrm{m\cdot N}\ .$$

根据转动定理，飞轮受到摩擦力矩作用而获得的角加速度为

$$\alpha=\frac{M_z}{I}=-30\ \mathrm{rad/s^2}\ .$$



题 5－16 图

从开始制动到停止($\omega=0$)，飞轮经历的是匀变速运动，它所转过的角度为

$$\theta=\frac{\omega^2-\omega_0^2}{2\alpha}=\frac{0-\omega_0^2}{2\alpha}=2.8\times10^2\ \mathrm{rad}\ ,$$

闸瓦对飞轮施加的摩擦力矩所作的功为

$$A=M_z\theta=-2.1\times10^4\ \mathrm{J}\ .$$

5－17. 一位滑雪者正站在 30°的雪坡上享受着山中清新的空气，突然看到在 100 m 外有一个巨大的雪球以 25 m/s 的初速向他滚来，他立刻以 10 m/s 的初速下滑．设他下滑的加速度已达到了他的最大可能值，即

$$g\sin30^\circ=g/2\ ,$$

试问他能免遭雪球的袭击吗？

[解] 按题意，雪球所作的是纯滚运动．因此，雪球质心是作匀加速运动．为了求出其加速度的大小，可利用纯滚条件下的机械能守恒关系

$$mgh+\frac{1}{2}mv_\mathrm{c}^2+\frac{1}{2}I\omega^2=mgh_0\ ,$$

以及　$I=\dfrac{2}{5}mR^2$　　和　　$\omega=\dfrac{v_\mathrm{c}}{R}\ ,$

得到　$v_c^2 = \frac{10}{7} g(h_0 - h)$；

再利用匀加速运动公式

$$v_c^2 = \frac{2a_c(h - h_0)}{\sin\theta},$$

可得

$$a_c = \frac{v_c^2 \sin\theta}{2(h_0 - h)} = \frac{5}{7} g \sin\theta = \frac{5}{14} g .$$

现在，我们来考察人与雪球之间的相对距离 s 随时间 t 的变化．我们已知在 t_0 时刻人和雪球的初速度分别为

$$v_{01} = 10\ \text{m/s} \qquad \text{和} \qquad v_{02} = 25\ \text{m/s},$$

加速度分别为

$$a_1 = \frac{1}{2} g \qquad \text{和} \qquad a_2 = \frac{5}{14} g .$$

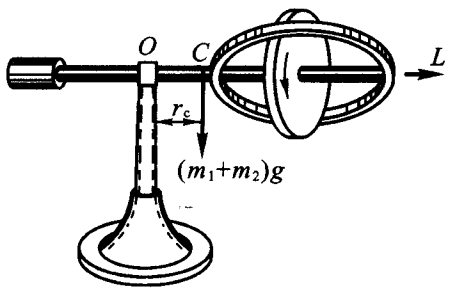
这就是说，与雪球相比，尽管人的初速度较小，但加速度却比较大，因此人是否能免遭雪球的袭击，取决于两者的具体数值．为了比较，我们写出人与雪球之间的相对距离 s 的数值表达式

$$s = 100 + (v_{01} - v_{02})t + \frac{1}{2}(a_1 - a_2)t^2 = 0.70t^2 - 15t + 100 .$$

令　$s = 0.70t^2 - 15t + 100 = 0$，

此方程无实数解．所以，只要滑雪者以加速度 $g/2$ 滑行，就可以免遭雪球的袭击．

5－18. 如图所示，回转仪圆盘转子的质量为 $m_1 = 0.150$ kg，转动惯量为 $I = 1.50\times10^{-4}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$，支撑在支点 O 上的架子的质量为 $m_2 = 0.030$ kg，它和圆盘两者的质心 C 到支点 O 点的距离为 $r_c = 0.040$ m．当圆盘快速自转时，回转仪在一水平面内进动，进动角速度为 $\omega_p = (\pi/3)\ \text{rad/s}$．试求圆盘转子自转的角速度 ω．



题 5－18 图

[解] 利用陀螺进动的角速度公式可得，圆盘转子自转的角速度为

$$\omega = \frac{(m_1 + m_2) g r_c}{I \omega_p}$$

$$= 449\ \text{rad/s}.$$

5－19. 不锈钢丝长为 3.0 m，截面积为 0.15 cm^2，如果悬挂一质量为 200 kg 的重物，试问钢丝伸长多少？直径缩小多少？若改用同样尺寸的铝丝，情况将如何？

[解] 对于钢丝和铝丝，杨氏模量和泊松比分别为

$$E_1 = 1.97\times10^{11}\ \text{Pa}, \qquad \mu_1 = 0.30;$$

$$E_2 = 6.8\times10^{10}\ \text{Pa}, \qquad \mu_2 = 0.355.$$

因此，在拉力

$$F = mg = 200\times9.80\ \text{N} = 1.96\times10^3\ \text{N}$$

的作用下，钢丝的伸长和直径缩小量分别为

$$\Delta l_1 = \frac{F}{S}\frac{l_0}{E_1} = 2.0\times10^{-3}\ \text{m},$$

$$|\Delta b_1| = |\varepsilon_{t1}|\, b_0 = \mu_1\varepsilon_1\sqrt{\frac{4S}{\pi}} = \mu_1\frac{2\Delta l_1}{l_0}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

$$= \mu_1\frac{2F}{E_1\sqrt{\pi S}} = 8.7\times10^{-7}\ \text{m};$$

而铝丝的伸长和直径缩小量分别为

$$\Delta l_2 = \frac{F}{S}\frac{l_0}{E_2} = 5.8\times10^{-3}\ \text{m},$$

$$|\Delta b_2| = \mu_2\frac{2F}{E_2\sqrt{\pi S}} = 3.0\times10^{-6}\ \text{m}.$$

5－20. 一座层高为 4.0 m 的大楼，由铺设在地下的同一自来水管道供水．打开二楼的水龙头时，测得水的流速为12.0 m/s．试求打开一楼水龙头时测得的水的流速．假定在这两种情况下管道中水的流速不变.

[解] 设一楼和二楼水龙头的高度分别为 z_1 和 z_2，相应的流速分别为 v_1 和 v_2，大气压强为 p_0, 水的密度为 ρ，则由伯努利方程可得

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2,$$

$$v_1 = \sqrt{v_2^2 + 2g(z_2 - z_1)} = 14.9\ \text{m/s}.$$

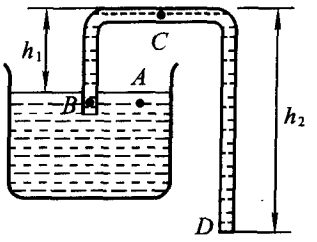
5－21. 在如图所示的**虹吸管**(syphon)装置中，已知 h_1 和 h_2．试问：(1) 当截面均匀的虹吸管下端被塞住时，*A*, *B* 和 *C* 处的压强各为多大？(2) 当虹吸管下端开启时，*A*, *B* 和 *C* 处的压强又各为多少？这时水流出虹吸管的速率多大？

[解] (1) 当虹吸管的下端被塞住时，A, B 和 C 处的压强分别为

$$p_A^0 = p_B^0 = p_0,$$

$$p_C^0 = p_0 - \rho g h_1,$$

其中 p_0 为大气压强.



题 5－21 图

(2) 当虹吸管的下端 D 开启时，D 和 A 处的压强为 p_0，而按照伯努利方程，相应于 B, C 和 D 处，有

$$p_B + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g(h_2 - h_1) = p_C + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h_2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2.$$

所以，A, B 和 C 处的压强分别为

$$p_A = p_0,$$

$$p_B = p_0 - \rho g(h_2 - h_1),$$

$$p_C = p_0 - \rho g h_2.$$

在水容器截面积远大于虹吸管的情况下，比较 A 和 D 处的单位体积理想流体的势能和动能，可得水流出虹吸管的速率为

$$v = \sqrt{2g(h_2 - h_1)}.$$

5－22. 试证明：盛在圆柱形容器内以角速度 ω 绕中心轴作匀角速旋转的流体，其表面为一旋转抛物面.

[证明] 在流体表面任取一质元，其质量为 Δm. 如图所示，该质元受到两个力的作用，即重力 $\boldsymbol{W} = \Delta m \boldsymbol{g}$ 和其他部分流体对它的作用力的合力 $\boldsymbol{F}$. 由于该质元并未沿它所在处液面的切向流动，因此 $\boldsymbol{F}$ 的方向沿该处液面的法向. 若以圆柱形容器中心轴与液面的交点 O 为原点，取坐标系 Oxy, 则当液体以角速度 ω 绕中心轴作匀角速旋转时，质元 Δm 将以 O' 为圆心，以 x 为半径作匀速圆周运动，其向心加速度为

$$a_n = x\omega^2.$$

根据牛顿第二定律，有

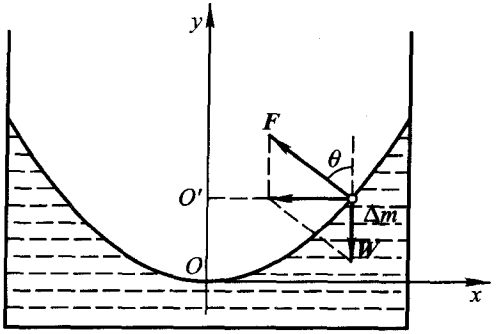
$$F\sin\theta = \Delta m x \omega^2,$$

$$F\cos\theta - \Delta m g = 0,$$

由以上两式可解得

$$\tan\theta = \frac{x\omega^2}{g}.$$

因为 $\tan\theta = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，所以有



题 5－22 图

$$\mathrm{d}y=\frac{x\omega^2}{g}\mathrm{d}x\,.$$

对上式两边积分，即

$$\int_0^y \mathrm{d}y'=\frac{\omega^2}{g}\int_0^x x'\mathrm{d}x'\,,$$

可得　$y=\dfrac{\omega^2}{2g}x^2\,,$

此式代表一抛物线.

根据旋转圆筒的轴对称性，以及由抛物线绕 y 轴旋转可得一旋转抛物面，即可得出结论：盛在圆柱形容器内以角速度 ω 绕中心轴作匀角速旋转的流体，其表面为一旋转抛物面.

5－23. 一个直径为 6.04 mm、密度为 2.56 g / cm^3 的玻璃球，在盛甘油的筒中自静止下落，甘油的密度为 1.26 g / cm^3．现测得小球降落的终极速度为 3.14 cm/s，试计算甘油的黏度．如果未计入浮力，将会引进多大的误差？

[解] 按照斯托克斯黏滞公式，有

$$\rho_1\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)g-\rho_2\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)g-6\pi\eta r v=0\,,$$

所以甘油的黏度为

$$\eta=\frac{\rho_1-\rho_2}{6\pi r v}\frac{4}{3}\pi r^3 g=\frac{2(\rho_1-\rho_2)}{9v}r^2 g=0.82\,\mathrm{Pa\cdot s}\,.$$

如果未计入浮力，则有

$$\eta=\frac{\rho_1}{6\pi r v}\frac{4}{3}\pi r^3 g=\frac{2\rho_1}{9v}r^2 g=1.62\,\mathrm{Pa\cdot s}\,,$$

几乎引进了 100%的误差．但在空气中(如教材中例题 2.6)，浮力几乎可以略去不计.

第六章　振动和波

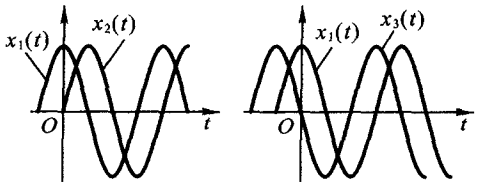
6－1. 设一物体沿 x 轴作简谐振动，振幅为12 cm，周期为2.0 s；在 $t=0$ 时刻物体正在向着 x 轴的正方向运动，这时的位移为6.0 cm．试求：(1) 初相位；(2) $t=0.5$ s 时该物体的位置、速度和加速度；(3) 在 $x=-6.0$ cm 处、且向 x 轴负方向运动时，物体的速度和加速度，以及它从这个位置到达平衡位置所需要的时间．

[解] (1) $\varphi_0=5\pi/3$ 或 $-\pi/3$．

(2) $x=10.4$ cm，$v=-18.8$ cm/s，$a=-103$ cm/s^2．

(3) $v=-32.6$ cm/s，$a=-59.2$ cm/s^2，$\Delta t=0.83$ s．

6－2. 试确定如图所示三个简谐振动的相位差 $\varphi_2-\varphi_1$，$\varphi_3-\varphi_1$ 和 $\varphi_3-\varphi_2$．



题 6－2 图

[解] 由图可见，

$\varphi_2-\varphi_1=-\pi/2$，

$\varphi_3-\varphi_1=\pi/2$，

$\varphi_3-\varphi_2=\pi$．

6－3. 两质点沿同一直线作频率和振幅均相同的简谐振动，当它们每次沿相反方向互相通过时，它们的位移均为它们振幅的一半，求这两个质点振动的相位差．

[解] 设两质点所作的简谐振动分别表示为

$$x_1=A\cos\omega t,\qquad x_2=A\cos(\omega t+\varphi).$$

按题意，当 $t=t_0$ 时，有

$$A\cos\omega t_0=A\cos(\omega t_0+\varphi)=\frac{1}{2}A,$$

$$A\omega\sin\omega t_0=-A\omega\sin(\omega t_0+\varphi).$$

显然，满足以上两式的解是

$$\omega t_0=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\qquad \omega t_0+\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi.$$

所以，这两个质点振动的相位差为 $\varphi=2\pi/3$．

6－4. 一个质点同时参与了两个一维的简谐振动 $\sqrt{3}\cos(\omega t+\frac{\pi}{2})$ 和 $\cos\omega t$，试求该质点的合振动的振幅 A 及初相位 φ_0．

[解] 合振动的振幅及初相位分别为

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_{20}-\varphi_{10})}=2,$$

$$\varphi_0=\arctan\frac{A_1\sin\varphi_{10}+A_2\sin\varphi_{20}}{A_1\cos\varphi_{10}+A_2\cos\varphi_{20}}=\frac{\pi}{3}.$$

6－5. 设有下列两对相互垂直的振动：

(1) $x=a\sin\omega t$，　$y=b\cos\omega t$；

(2) $x=a\cos\omega t$，　$y=b\sin\omega t$.

试问它们的合成分别代表什么运动，两者有何区别？

[解] (1) $x=a\sin\omega t$，　$y=b\cos\omega t$ 的合振动是顺时针旋转的正椭圆；

(2) $x=a\cos\omega t$，　$y=b\sin\omega t$ 的合振动是逆时针旋转的正椭圆.

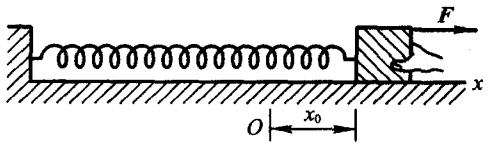
6－6. 两支 C 调音叉，其一是标准的 256.00 Hz，另一是待校准的. 同时轻敲这两支音叉，在 25 s 内听到 10 拍. 试问待校音叉的频率是多少？

[解] 拍的频率为

$$\nu_b=\pm(\nu-\nu_0)=\frac{10}{25\,\mathrm{s}}=0.40\,\mathrm{Hz}.$$

因此，待校音叉的频率是 $\nu=(256.00\pm0.40)\,\mathrm{Hz}$.

6－7. 如图所示，弹簧振子水平放置，弹簧的劲度系数为 k，振子质量为 m. 假定从弹簧原长处开始对振子施加一恒力 F，经一段距离 x_0 后撤去外力. 试问在外力撤去后，振子将作何种运动？试求出系统的总能量，并写出振子位移函数的表达式.



题 6－7 图

[解] 在外力撤去以后，振子将作角频率为 $\omega=\sqrt{k/m}$ 的简谐运动. 弹性振子的能量来自外力作功，系统的总能量为

$$E=Fx_0,$$

振幅为 $A=\sqrt{2Fx_0/k}$. 设从 x_0 处开始计时，这时振子的速度沿 x 轴正方向，因此有

$$x_0=A\cos\varphi_0 \qquad \text{和} \qquad v_0=-A\omega\sin\varphi_0>0,$$

其中　$\varphi_0=-\arccos\sqrt{\dfrac{kx_0}{2F}}$.

于是，可以写出振子位移函数的表达式为

$$x=A\cos(\omega t+\varphi_0)=\sqrt{\frac{2Fx_0}{k}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t-\arccos\sqrt{\frac{kx_0}{2F}}\right).$$

6－8. 在光滑的桌面上，有劲度系数分别为 k_1 和 k_2 的两个弹簧及质量为 m 的物体，构成两种弹簧振子，如图所示．试求这两个系统的固有角频率．



题 6－8 图

[解] 对于图(a)所示的系统，选择弹簧处在自由状态时物体 m 的位置为 x 轴的原点，考虑到两个弹簧作用在 m 上的弹性恢复力是同方向的，因此有

$$-k_1 x - k_2 x = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}.$$

与谐振子的微分方程比较，即可得该系统的固有角频率为

$$\omega_{0a} = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}.$$

对于图(b)所示的系统，选择两个弹簧的平衡位置分别为 x_1 和 x_2 轴的原点，这时物体 m 的位置为 x 轴的原点．作用在物体 m 上的弹性恢复力为

$$F = -k_1 x_1 = -k_2 x_2,$$

可得　$x = x_1 + x_2 = (1+\frac{k_1}{k_2})x_1$.

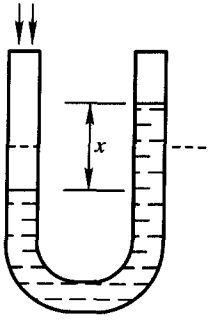
于是，振子的运动方程为

$$-k_1 x_1 = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}, \qquad 或 \qquad -\frac{k_1 k_2}{k_1+k_2}x = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2},$$

由此可得该系统的固有角频率为

$$\omega_{0b} = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1+k_2)}}.$$

6－9. 密度为 ρ 的液体装在一截面积为 S、两端开口的 U 形管中，液体柱总长为 L．(1) 向管的一端吹气，使另一端中的液面比吹气端高 x，试问该流体获得多少势能？(2) 如果停止吹气而去掉压力，液体柱的振动周期为多少？



题 6－9 图

[解] (1) 如图所示，液体在另一端上升距离 x 后，该流体获得的势能为

$$E_p = \int_0^{x/2} \rho g S x \mathrm{d}x - \int_{-x/2}^{0} \rho g S x \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\rho g S x^2 .$$

(2) 若停止吹气而去掉压力，液体柱振动的能量由上述势能提供，即

$$\frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{4}\rho g S x^2 .$$

由于 $m=\rho SL$，$A=\frac{x}{2}$，$T=\frac{2\pi}{\omega}$，所以由上式可得

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}} .$$

6－10. 在简谐振动中，当位移是振幅的一半时，总能量中有多大一部分是动能，多大一部分是势能？在多大位移处，总能量的一半是动能，另一半是势能？

[解] 当 $x = A/2$ 时，相位因子

$$\cos\varphi = \cos(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2} .$$

因此有

$$E_p = \frac{1}{4}E , \qquad E_k = \frac{3}{4}E .$$

同理可得，在 $x = \pm\sqrt{2}/2$ 处，总能量中动能和势能各占一半.

6－11. 火车在铁轨上行驶，每经过铁轨接轨处即受到一次震动，从而使装在弹簧上面的车厢上下振动. 设每段铁轨长 12.5 m，弹簧的平均负重为 5.4×10^4 N，而弹簧每受到 9.8×10^3 N 的力将压缩 16 mm. 试问火车速度多大时，车厢的振动特别强？

[解] 按题意，弹簧的劲度系数为

$$k = \frac{9.8\times10^3\ \mathrm{N}}{1.6\times10^{-2}\ \mathrm{m}} = 6.1\times10^5\ \mathrm{N/m} ,$$

该系统振动的固有角频率为 $\omega = \sqrt{k/m}$. 因此，当火车速度 v 满足关系

$$\frac{2\pi v}{l} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

时，即当

$$v = \frac{l}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{12.5}{2\pi}\sqrt{\frac{6.1\times10^5}{5.5\times10^3}}\ \mathrm{m/s} = 21\ \mathrm{m/s}$$

时，火车车厢的振动特别强.

6－12. 由于地球的自转以及地球不是正球体，重力加速度 g 随着地球上的位置而改变. 早在 17 世纪人们就发现，一个经过仔细调节的摆钟，在巴黎能准确计时，而在赤道附近每天约慢 90 s. (1) 试求证 g 的微小变化会使摆的周期 T 产生一个微小的变化，其大小取决于 $\Delta T/T \approx -\Delta g/2g$. (2) 要使周期每天改变 90 s，$g$ 值需改变多大？

[解] (1) 钟摆的周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

故有 $$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}g}=2\pi\sqrt{l}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}g}g^{-\frac{1}{2}}=2\pi\sqrt{l}\,(-\frac{1}{2})g^{-\frac{3}{2}}=T(-\frac{1}{2g}),$$

即 $$\frac{\Delta T}{T}\approx-\frac{\Delta g}{2g}.$$

(2) 为了使周期有每天 90 s 的变化，g 值的改变应为

$$|\Delta g|\approx 2g\frac{\Delta T}{T}=2\times9.8\times\frac{90}{8.64\times10^4}\,\mathrm{m/s^2}=0.020\,\mathrm{m/s^2}.$$

6－13. 将 $x_\mathrm{A}=A\cos\omega t$ 和 $x_\mathrm{B}=B\cos\omega t$ 直接代入

$$m\frac{\mathrm{d}^2x_\mathrm{A}}{\mathrm{d}t^2}=-k\,x_\mathrm{A}+K(x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A}),\tag{6.37a}$$

和 $$m\frac{\mathrm{d}^2x_\mathrm{B}}{\mathrm{d}t^2}=-k\,x_\mathrm{B}-K(x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A}),\tag{6.37b}$$

求出简正频率.

[解] 将 $x_\mathrm{A}=A\cos\omega t$ 和 $x_\mathrm{B}=B\cos\omega t$ 直接代入式(6.37a)和式(6.37b)，可得

$$-\omega^2A\cos\omega t=-\frac{k+K}{m}A\cos\omega t+\frac{K}{m}B\cos\omega t,$$

$$-\omega^2B\cos\omega t=-\frac{k+K}{m}B\cos\omega t+\frac{K}{m}A\cos\omega t,$$

即 $$(\omega^2-\frac{k+K}{m})A+\frac{K}{m}B=0,\qquad \frac{K}{m}A+(\omega^2-\frac{k+K}{m})B=0.$$

只有当系数行列式为零时，即当

$$\begin{vmatrix}\omega^2-\dfrac{k+K}{m} & \dfrac{K}{m}\\ \dfrac{K}{m} & \omega^2-\dfrac{k+K}{m}\end{vmatrix}=0$$

时，上述线性方程组才有解．由此可得角频率 ω 满足的方程为

$$(\omega^2-\frac{k+K}{m})^2-(\frac{K}{m})^2=0,$$

由此即可解出简正频率

$$\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}},\qquad \omega_2=\sqrt{\frac{k+2K}{m}}. \tag{6.38}$$

6－14. 设平面波的表达式分别为

$$\xi_1=0.0500\cos(1980t-600x),$$

$$\xi_2=2.0\cos 2\pi(\frac{t}{0.010}-\frac{x}{30}),$$

其中 ξ、x 和 t 的单位分别是 cm 和 s，试求它们的振幅、波长、频率和波速，以及 $x=0$ 和 $x=10$ cm 处振动的初相位．

[解] 两平面波的振幅、波长、频率和波速分别为

$$A_1=0.0500\text{ cm},\qquad \lambda_1=\frac{2\pi u_1}{\omega_1}=0.0105\text{ cm},$$

$$\nu_1=315.1\text{ Hz},\qquad u_1=3.3\text{ cm/s};$$

$$A_2=2.0\text{ cm},\qquad \lambda_2=\frac{2\pi u_2}{\omega_2}=30\text{ cm},$$

$$\nu_2=1.0\times10^2\text{ Hz},\qquad u_2=3.0\times10^3\text{ cm/s}.$$

在 $x=0$ 处振动的初相位为 $\varphi_{10}=0$，$\varphi_{20}=0$；在 $x=10$ cm 处振动的初相位为 $\varphi_{10}=0.44$，$\varphi_{20}=-2\pi/3$．

6－15. 试证明：在振动着的弦线上任一点 x 处，弦线的斜率在数值上等于该点处质点与波的速率之比．

[证明] 振动弦线上任一点 x 处质点的位移和速率分别为

$$\xi(x,t)=A\cos\omega(t-\frac{x}{u}),$$

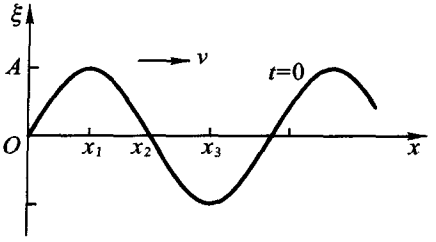
$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}=-A\omega\sin\omega(t-\frac{x}{u}),$$

其中 u 为波的传播速率；而弦线的斜率为

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}=-A(-\omega\frac{1}{u})\sin\omega(t-\frac{x}{u})=\frac{A\omega\sin\omega(t-\frac{x}{u})}{u},$$

本命题得证．

6－16. 已知平面简谐波 $\xi(x,t)$ 在 $t=0$ 时刻的空间波形图如图所示，试画出在 $t=T/4$，$T/2$，$3T/4$ 等时刻的空间波形图，以及在 $x=0$，x_1，x_2，x_3 等处介质质元随时间的振动图. (解略)



题 6－16 图

6－17. 在均匀介质中，平面简谐波以速度 $u=20\text{m/s}$ 沿 x 轴正方向传播. 在 x 轴上顺序有 A、B 和 C 三个点，已知 A 点处的振动方程为 $\xi=3\times10^{-4}\cos(4\pi t)$(其中时间 t 的单位为 s，位移 ξ 的单位为 m)，$x_B-x_A=5\text{m}$，$x_C-x_B=8\text{m}$. 试求以 A 点和 B 点为坐标原点的波动表达式，以及 B 和 C 两点的振动之间的相位差.

[解] (1) $\xi_A(x,t)=3\times10^{-4}\cos\pi(4t-\dfrac{x}{5})$；

$$\xi_B(x,t)=3\times10^{-4}\cos\pi(4t-\frac{x}{5}-1).$$

(2) B 和 C 两点间的相位差为 $\varphi_B-\varphi_C=8\pi/5$ 或 $-2\pi/5$.

6－18. 试问下列平面电磁波向哪个方向传播：

(1) $E=-E_0\cos[2\pi(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{\lambda})]$，　(2) $E=-E_0\cos[2\pi(-\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{\lambda})]$，

(3) $E=-E_0\cos[2\pi(-\dfrac{t}{T}+\dfrac{y}{\lambda})]$，　(4) $E=E_0\sin[2\pi(\dfrac{t}{T}+\dfrac{y}{\lambda})]$，

(5) $E=E_0\sin(\omega t-\dfrac{2\pi}{\lambda}z)$，　(6) $E=-E_0\sin[2\pi(-\dfrac{t}{T}-\dfrac{z}{\lambda})]$.

[解] (1), (3), (5)分别沿 x, y, z 轴正方向传播；(2), (4), (6)分别沿 x, y, z 轴负方向传播.

6－19. 在一个两端固定的3.0 m 长的弦上激发起了一个驻波，该驻波有三个波腹，其振幅为 1.0 cm，弦上的波速为100 m/s. (1) 试计算该驻波的频率；(2) 若把它视为入射波与反射波叠加而成的理想驻波，试写出产生此驻波的两个行波的表达式.

[解] (1) 驻波的频率为 $\nu_3=3u/2l=50\text{Hz}$.

(2) 产生此驻波的两个行波的表达式分别为

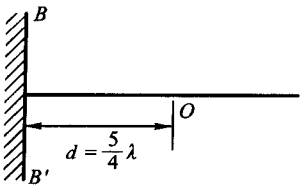
$$y_1=0.005\cos(314t-3.14x)$$

和　$y_2=0.005\cos(314t+3.14x+\pi)$，

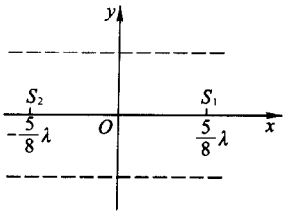
其中 x，y_1，y_2 表示以 m 为单位的数值，t 表示以 s 为单位的数值.

6－20. 如图所示，波源位于点 O 处，由波源向左右两边发出振幅为 A、角频率为 ω、波速为 u 的简谐波. 若波密介质的反射面 BB' 与点 O 之间的距离为 $d=5\lambda/4$，试讨论合成波的性质.

[解] $-5\lambda/4<x\leqslant 0$ 时，合成驻波 $y_1=2A\cos\dfrac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t$；$x>0$ 时，合成简谐波，$y_2=2A\cos(\omega t-\dfrac{2\pi x}{\lambda})$.



题 6－20 图



题 6－21 图

6－21. 如图所示，弹性介质沿 x 轴分布，在 $x=\pm 5\lambda/8$ 的点 S_1 和 S_2 处有两个波源，它们独立存在时的振动方程分别为

$$y_1(t)=A\cos(\omega t+\frac{\pi}{4}),\qquad y_2(t)=A\cos(\omega t-\frac{\pi}{4}).$$

试求它们的合成波的性质，以及 $t=T/2$ 时的波形图.

[解] (1) 在 $x<-5\lambda/8$ 时，有

$$y_1=2A\cos(\omega t+\frac{2\pi}{\lambda}x+\pi);$$

在 $-5\lambda/8\leqslant x\leqslant 5\lambda/8$ 时，有

$$y_2=2A\cos(\omega t-\frac{5\pi}{4})\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x+\frac{\pi}{4});$$

在 $x>5\lambda/8$ 时，有 $y_3=0$.

(2) $t=T/2$ 时的波形图略.

6－22. 蝙蝠利用超声脉冲导航可以在洞穴中飞来飞去. 超声脉冲持续时间约 1 ms，每秒重复发射数次. 若蝙蝠发射的超声频率为 39 kHz，在朝着表面平坦的墙壁飞扑的期间，蝙蝠的运动速率为空气中声速的 1/40，试问蝙蝠听到的从墙壁反射回来的脉冲波的频率是多少？

[解] 蝙蝠既是波源也是观测者，若设声波在介质中的传播速度为 u，则有 $v_s=v_o=u/40$，$\nu=39\,\text{kHz}$. 于是，蝙蝠所听到的从墙壁反射回来的脉冲波的频率为

$$\nu' = \frac{u+v_o}{u-v_s}\nu = \frac{1+1/40}{1-1/40}\times 39\ \text{kHz} = 41\ \text{kHz}.$$

所谓“脉冲波的频率”，只是一种不严格的说法．脉冲波是波包，它可以看成是由许多频率的简谐波叠加而成的．

6－23. 装在海底的超声波探测器发出一束频率为30000Hz的超声波，被迎面驶来的潜水艇反射回来．反射波与原来的波合成后，得到频率为241Hz的拍．设超声波在海水中的传播速度为1500m/s，试求潜水艇的行驶速度．

[解] 若潜水艇的行驶速度为$v_{潜}$，海底的超声波探测器发出的超声波频率为ν，潜水艇接收到的超声波的频率为ν'，潜水艇反射回来的超声波频率为ν''，则有

$$\nu'' = \frac{u}{u-v_{潜}}\nu' = \frac{u}{u-v_{潜}}\frac{u+v_{潜}}{u}\nu = \frac{u+v_{潜}}{u-v_{潜}}\nu,$$

而潜水艇反射回来的超声波与波源发出的超声波所形成的拍频为

$$\nu_b = \nu''-\nu = \frac{u+v_{潜}}{u-v_{潜}}\nu-\nu = \frac{2v_{潜}}{u-v_{潜}}\nu,$$

即　　$\nu_b(u-v_{潜}) = 2v_{潜}\nu$．

所以，迎面驶来的潜水艇的行驶速度为

$$v_{潜} = \frac{\nu_b}{2\nu+\nu_b}u = \frac{241}{2\times 30000+241}\times 1500\ \text{m/s} = 6.00\ \text{m/s}.$$

6－24. 一辆汽车以速度v_c=10.0 m/s向着正前方的山崖壁驶去，并发出频率ν=1001Hz的声波．设空气中的声速为u = 344.0 m/s，试问位于汽车后方相对于地面静止的观测者用仪器能测到什么信号？

[解] 经山崖反射传到汽车后方的声波频率为

$$\nu_1' = \frac{u}{u-v_{s1}}\nu = \frac{344.0}{344.0-10.0}\times 1001\ \text{Hz} = 1031\ \text{Hz},$$

而汽车直接发出的、传到汽车后方的声波的频率为

$$\nu_2' = \frac{u}{u-v_{s2}}\nu = \frac{344.0}{344.0+10.0}\times 1001\ \text{Hz} = 973\ \text{Hz}.$$

因此，位于汽车后方相对于地面静止的观测者用仪器观测到的是拍，其拍频和载频分别为

$$\nu_b = \nu_1'-\nu_2' = 58\ \text{Hz},\qquad \nu' = \frac{\nu_1'+\nu_2'}{2} = 1003\ \text{Hz}.$$

6－25. 以光速行进的波长为λ = 0.100 m的微波，从正在远处向微波源

趋近的飞机上反射回来，与波源发出的波形成频率为 990 Hz 的拍，试求飞机趋近微波源的速度.

[解] 若飞机的速度为 v_a，微波源发出微波的频率为 ν，飞机接收到微波的频率为 ν'，飞机上反射回来微波的频率为 ν''，则有

$$\nu''=\sqrt{\frac{c+v_a}{c-v_a}}\nu'=\frac{c+v_a}{c-v_a}\nu=\frac{c+v_a}{c-v_a}\frac{c}{\lambda},$$

而飞机上反射回来的波与波源发出的波所形成的拍频为

$$\nu_b=\nu''-\nu=\left(\frac{c+v_a}{c-v_a}-1\right)\nu=\frac{2v_a}{c-v_a}\frac{c}{\lambda},$$

由此可解得

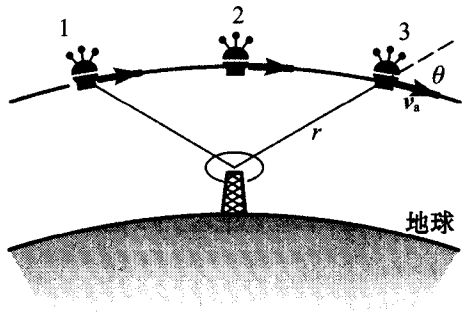
$$v_a=\frac{\lambda\nu_b c}{2c+\lambda\nu_b}=\frac{\lambda\nu_b}{2+\lambda\nu_b/c}\approx\frac{\lambda\nu_b}{2}=49.5\ \mathrm{m/s}.$$

6－26. 如图所示，距地面 r 处的人造卫星以速度 v_a 运动，卫星上的振荡器发出一固有频率为 ν_0 的信号. 当电磁波源和观测者之间的相对速度 v_a 与它们之间的连线成 θ 角时，观测者所测得的频率为

$$\nu'=\frac{\sqrt{1-v_a^2/c^2}}{1-(v_a/c)\cos\theta}\nu.$$

(1) 试利用上式以及条件 $v_a\ll c$，求出卫星地面站接收到的频率 ν'.

(2) 如果卫星地面站有一个和卫星上相同的振荡器，则利用简单的电子学方法可测得频率差(拍频) $\nu'-\nu_0$. 试求出卫星的径向速度 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ 与频率差 $\nu'-\nu_0$ 之间的关系.



题 6－26 图

(3) 试将上述结果对时间积分，求出在时间 t_1 和 t_2 之间卫星在径向所移动的总距离与频率差 $\nu'-\nu_0$ 以及拍的周期 $T=1/(\nu'-\nu_0)$ 之间的关系.

(4) 试利用上述结果说明，卫星的径向距离每增加一个波长时，拍信号的波形总是减少一个周波. 如果人造卫星通讯系统工作于 10 cm 的典型波长，而且拍频信号可测至零点几个周波，则追踪卫星的精度可达 1 cm.

[解] (1) $v_a\ll c$，题目所给公式中只保留 v_a/c 的一次项，有

$$\nu'\approx\frac{\nu_0}{1-(v_a/c)\cos\theta}\approx(1+\frac{v_a}{c}\cos\theta)\nu_0.$$

(2) $\nu' - \nu_0 \approx \frac{v_a}{c}\cos\theta\nu_0 = -\frac{\nu_0}{c}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$，

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \approx -\frac{c}{\nu_0}(\nu' - \nu_0) = -\lambda_0(\nu' - \nu_0).$$

(3) 对上式两边求时间积分，可得

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \approx -\lambda_0\int_{t_1}^{t_2}(\nu' - \nu_0)\mathrm{d}t.$$

由于$T=1/(\nu'-\nu_0)$是拍的周期，因此

$$\int_{t_1}^{t_2}(\nu' - \nu_0)\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t/T = N_{21}$$

表示在时间t_1和t_2之间拍的周波总数．又由于

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = r_2 - r_1,$$

所以在时间t_1和t_2之间卫星在径向所移动的总距离$r_2 - r_1$与频率差$\nu' - \nu_0$以及拍的周期$T=1/(\nu'-\nu_0)$之间的关系为

$$r_2 - r_1 \approx -\lambda_0\int_{t_1}^{t_2}(\nu' - \nu_0)\mathrm{d}t = -\lambda_0 N_{21}.$$

(4) 上式中的负号表明，卫星的径向距离每增加一个波长，拍信号的波形总是减少一个周波．如果人造卫星通讯系统工作于$\lambda_0 = 0.10\,\mathrm{m}$的典型波长，而且拍频信号可测至$\Delta N \sim 0.1$，那么利用上式可得，追踪卫星的精度就可以达到$\Delta r \sim 0.01\,\mathrm{m}$．

在上述应用中，如果卫星和地面站没有各自固定在同一个频率上，则拍频中会有误差．为了避免这个困难，可以从地面站向卫星发出一信号，然后卫星将接收到的信号放大，再转播回地面站．这种系统称为双向多普勒追踪系统，它具有倍增多普勒频移的附加优点，使辨别能力增大一个因子2.

一个多普勒追踪系统可以同时给出卫星的径向位置和瞬时径向速度，这在实际应用中是很方便的．因为在校验卫星的轨道时，位置和速度二者都是需要的．警戒雷达速率监视器所利用的也是这个原理，它使微波信号从一个接近的汽车上反射回来，于是反射信号的拍频就显示出该汽车的速率．

以上概述的是在经典条件$v_a << c$下多普勒导航的基本原理．对于某些追踪的应用，精密度的要求很高，所以必须考虑相对论性效应．

第七章　相 对 论

7－1. 设有一宇宙飞船 A 以速率 $0.9c$ 匀速向东飞行，另一宇宙飞船 B 以速率 $0.8c$ 匀速向西飞行．试问乘坐在宇宙飞船 B 上的宇航员所测得的宇宙飞船 A 的速率是多少？

[解] 如果把由西向东的方向设为 x 轴的正方向，把飞船 B 看成 S 系，而把地面看成 S' 系，则有 $u=0.8c$，$v_x'=0.9c$．

由相对论的速度加法公式可得，乘坐在宇宙飞船 B 上的宇航员所测得的宇宙飞船 A 的速率为

$$v_x=\frac{v_x'+u}{1+uv_x'/c^2}=\frac{0.9c+0.8c}{1+0.8\times0.9}=0.988c\,.$$

7－2. 在地面上测得两个飞船分别以 $+0.95c$ 和 $-0.95c$ 的速度平行于地面向相反方向飞行，求两飞船的相对速度．试问，相对于地面来说，两飞船的距离将以多大的速率增加？在地面上的观测者看来，两飞船的“相对速度”多大？

[解] 两飞船的相对速度的大小为

$$v_x=\frac{v_x'+u}{1+uv_x'/c^2}=\frac{0.95c+0.95c}{1+0.95\times0.95}=0.9987c\,.$$

然而，相对于地面来说，两飞船的距离将以 $1.9c$ 的速率增加．在地面上的观测者看来，两飞船的“相对速度”的大小等于 $1.9c$．

7－3. 一放射性原子核相对于实验室以速率 $0.1c$ 运动并发射一个电子，该电子相对于原子核的速率为 0.8 c．如果相对于固定在衰变核上的参考系，该电子：(1) 沿核的运动方向发射，(2) 沿相反方向发射，(3) 沿垂直方向发射，试求它相对于实验室坐标系的速度．

[解] 设实验室坐标系为 S 系，放射性原子核为 S' 系，则有 $u=0.1c$．在上述三种情况下，电子在 S' 系中的速度分别为

$$v_{x1}'=0.8c\,,\quad v_{y1}'=0\,,\quad v_{z1}'=0\,;$$
$$v_{x2}'=-0.8c\,,\quad v_{y2}'=0\,,\quad v_{z2}'=0\,;$$
$$v_{x3}'=0\,,\quad v_{y3}'=0.8c\,,\quad v_{z3}'=0\,.$$

于是，由相对论速度加法公式，可得各非零速度分量为

$$v_{x1}=\frac{v_{x1}'+u}{1+uv_{x1}'/c^2}=\frac{0.8c+0.1c}{1+0.1\times0.8}=0.83c\,,$$

$$v_{x2}=\frac{v_{x2}'+u}{1+uv_{x2}'/c^2}=\frac{-0.8c+0.1c}{1-0.1\times0.8}=-0.76c,$$

$$v_{x3}=\frac{v_{x3}'+u}{1+uv_{x3}'/c^2}=0.1c,$$

$$v_{y3}=\frac{v_{y3}'\sqrt{1-u^2/c^2}}{1+uv_{x3}'/c^2}=0.80c.$$

因此，电子相对于实验室的速率和方向分别为：(1) 当电子沿核运动方向发射时，电子沿该发射方向以$0.83c$的速率运动；(2) 当电子沿与核运动方向相反的方向发射时，电子沿该发射方向以$0.76c$的速率运动；(3) 当电子沿与核运动方向垂直的方向发射时，电子沿与核运动方向成$82.9°$的方向以$0.81c$的速率运动.

7－4. 在折射率为 n 的静止连续介质中，光速$u_0=c/n$. 已知水的折射率为$n=1.3$，试问当水管中的水以速率 v 流动时，沿着水流方向通过水的光速 u 多大？结果表明，光好像是被运动介质所拖动，但又不是完全地拖动，只是运动介质速率的一部分$f=1-1/n^2$加到了光速$u_0=c/n$中. 1851 年，菲佐(A.H.L.Fizeau, 1819—1896)从实验上观测到了这个效应. 然而，直到相对论出现以后，该效应才得到满意的解释.

[解] 在与水一起运动的S'系中观测时，水中的光速为

$$u'=\frac{c}{n}.$$

由相对论速度加法公式可得，在实验室系 S 中观测到的光速为

$$u=\frac{u'+v}{1+u'v/c^2}=\frac{c/n+v}{1+v/nc}=\frac{c}{n}\left(\frac{1+nv/c}{1+v/nc}\right).$$

如果按级数展开，并略去$(v/c)^2$项及更小的项，则得

$$u=\frac{c}{n}\left(1+\frac{nv}{c}-\frac{v}{nc}\right)=\frac{c}{n}+v\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

7－5. 1947 年，在用乳胶研究高空宇宙射线时，发现了一种不稳定的粒子，称为π介子，其质量约为电子质量的 273.12 倍，π^+和π^-分别带有电荷$+e$和$-e$. 设有一束以速度$v=0.99c$运动的$\pi^{\pm}$介子，它们静止时的平均寿命为2.60×10^{-8} s. 试问：

(1) 在实验室中测定的这些$\pi^{\pm}$介子的寿命增长到了静止时的多少倍？

(2) 这些$\pi^{\pm}$介子衰减到最初数目的一半时，需要多长时间？

(3) 在这段时间内，这些$\pi^{\pm}$介子行进了多远？

[解] (1) 已知 π 介子在静止时的平均寿命为 $\tau_0 = 2.60\times10^{-8}\,\mathrm{s}$，于是在 $v = 0.99c$ 时 π 介子的平均寿命为

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 7.09\,\tau_0 = 1.84\times10^{-7}\,\mathrm{s}.$$

(2) 原子核物理学指出，单独存在的放射性元素的衰变以及不稳定粒子的蜕变，遵从以下的规律：

$$N = N_0\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = N_0\,2^{-\frac{t}{T}},$$

其中 N_0 和 N 分别是 0 和 t 时刻的原子核数或粒子数，τ 称为原子核或粒子的平均寿命(简称寿命)，T 称为原子核或粒子的半衰期．显然，当 $t = \tau$ 时 $N = N_0/\mathrm{e}$；而当 $t = T$ 时 $N = N_0/2$．利用上述结果，可得 $\pi^{\pm}$ 介子的半衰期为

$$T = \tau\ln 2 = 0.693\,\tau = 1.28\times10^{-7}\,\mathrm{s}.$$

(3) 在 $1.28\times10^{-7}\,\mathrm{s}$ 这段时间内，这些 π 介子行进的距离为

$$s = Tv = 1.28\times10^{-7}\times0.99\times3.0\times10^{8}\,\mathrm{m} = 38\,\mathrm{m}.$$

7－6. 来自地球外的宇宙射线中含有大量质子，与大气中的原子核进行反应生成许多次级中子，它们又与大气中的氮进行反应而产生 $^{14}\mathrm{C}$，$^{14}\mathrm{C}$ 自发地进行 β^- 衰变，其半衰期为 $T = 5730\,\mathrm{a}$．经过相当时间后，$^{14}\mathrm{C}$ 的产生和衰变达到平衡，其数目保持不变，大气中 $^{14}\mathrm{C}$ 和 $^{12}\mathrm{C}$ 数目之比为 1.3×10^{-12}．生物活体与大气中的碳经常进行着交换，其体内的 $^{14}\mathrm{C}$ 和 $^{12}\mathrm{C}$ 的比例与大气中的一样．但是，死亡后的生物体内的 $^{14}\mathrm{C}$ 就只会因 β 衰变而减少，其下降率与 $^{14}\mathrm{C}$ 的半衰期 T 有关．利用衰变定律

$$N(t) = N(0)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = N(0)\,2^{-\frac{t}{T}},$$

可以估算该生物体死亡的时间，这称为 **^{14}C 鉴年法**.

现测得某古墓骸骨 100 g 碳的 β 衰变率为 $\mathrm{d}N/\mathrm{d}t = -900/\mathrm{min}$，试估算此墓的年代.

[解] 利用衰变定律

$$N(t) = N(0)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = N(0)\,2^{-\frac{t}{T}}, \tag{a}$$

可得

$$t = -\frac{T}{\ln 2}\ln\frac{N(t)}{N(0)}, \tag{b}$$

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\ln 2}{T}N(t) \quad \text{或} \quad N(t) = -\frac{T}{\ln 2}\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{c}$$

按题意，已知$T=5730\text{a}$，$\mathrm{d}N(t)/\mathrm{d}t=-900/\text{min}=-4.7304\times10^{8}/\text{a}$，再利用大气中 ^{14}C 和 ^{12}C 数目之比为1.3×10^{-12}，可得墓主死亡时骸骨100g碳中 ^{14}C 的原子数为

$$N(0)=1.3\times10^{-12}\times\frac{100\times6.022\times10^{23}}{12}=6.5\times10^{12}\,.$$

利用式(c)，可得现在该古墓骸骨100g碳中 ^{14}C 的原子数为

$$N(t)=-\frac{T}{\ln2}\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{5730}{0.693}\times4.7304\times10^{8}=3.91\times10^{12}$$

利用式(b)，可得该古墓距今的年代为

$$t=-\frac{T}{\ln2}\ln\frac{N(t)}{N(0)}=-\frac{5730}{0.693}\ln\frac{3.91}{6.5}=4.2\times10^{3}\,\text{a}\,.$$

本题结果表明，经 ^{14}C 鉴年法测定，该古墓的年代约为公元前2200年.

7－7. 试问以0.60 c 速度运动的米尺，沿着运动方向的长度是多少？

[解]　$l=\sqrt{1-v^2/c^2}\;l_0=0.80\,\text{m}$.

7－8. 1929年，在研究了24个距离已知的星系的谱线红移后哈勃(E.P.Hubble)提出，遥远星系逐渐离开我们银河系而后退，其退行速度 v_s 与它离开我们的距离 r 成正比，即

$$v_\text{s}=Hr\,,$$

这就是**哈勃定律**(Hubble law). 式中的比例常量 H 称为**哈勃常量**，其倒数具有时间的量纲. 哈勃定律表明，离我们越远的星系，远离我们的速度越大，这意味着我们的宇宙正在膨胀着. 若类星体光谱线的红移高达本征频率的1/3，试问类星体的退行速度 v_s 有多大？根据哈勃常量$1/H_0=1.38\times10^{10}\,\text{a}$ (宇宙年龄的上限)，算出上述类星体距离我们有多远？

[解] 在光源趋近时光的多普勒效应的表达式中，用$-v_\text{s}$代替v_1，即得光源退行时的表达式为

$$\nu'=\sqrt{\frac{c-v_\text{s}}{c+v_\text{s}}}\,\nu\,,$$

其中 ν 为退行着的光源——类星体的频率，ν' 为地球上测得的频率. 按题意有 $\nu'=2\nu/3$，于是有

$$v_\text{s}=\frac{\nu^2-\nu'^2}{\nu^2+\nu'^2}c=\frac{5}{13}c=0.38c\,.$$

利用上述结果及哈勃定律，可得该类星体与我们的距离为

$$r=v/H_0=0.38c\times1.38\times10^{10}\text{a}=5.0\times10^{25}\,\text{m}\,.$$

退行或趋近的星是否会由于多普勒效应而改变它们的颜色呢？答案是否定的．巴依斯－巴洛特(C.H.D.Buys-Ballot)等人指出，当退行星体的蓝色部分红移时，其紫色部分将移向蓝区．

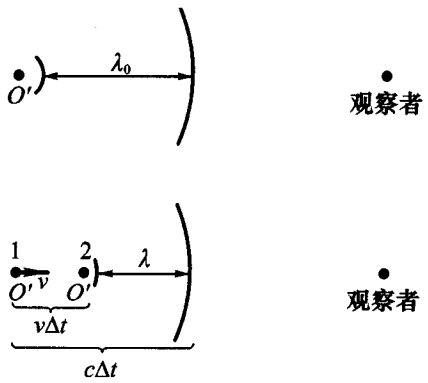
7－9. 试推导相对论性多普勒效应公式(6.63).

[解](1) 解法一：用相对论时空变换分析[①].

电磁波的波长、频率和波速满足关系 $\lambda\nu=c$，因此相对于不同的参考系测得的光的频率和波长都不同，但两者的乘积与参考系无关.

① 接收器在相对运动方向上的多普勒效应　纵向多普勒效应

选取相对于观测者静止的参考系为S系，相对于光源静止的参考系为S'系，S'系相对于S系以速度 v 沿 x 轴正方向运动．如图(a)所示，设想光源位于 O' 点，在 t' 时刻发出一光波，频率为 ν_0，则在时刻 $t'+1/\nu_0$ 此光源又发出第二个同相位的等相面，发生在同一地点($x'=0$)的两事件的时间间隔为 $\tau_0=1/\nu_0$.



题 7－9 图(a)

相对于S系而言，第一和第二等相面发出的时刻和地点分别为

$$t=\frac{t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\qquad x=\frac{vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}};$$

$$t+\Delta t=\frac{t'+1/\nu_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\qquad x+\Delta x=\frac{vt'+v/\nu_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

若光源以速度 v 向着观测者运动，则在第二等相面发出的时刻，第一等相面已行进了 $c\Delta t$ 的距离，两等相面之间的距离为 $c\Delta t-\Delta x$，观测者接收到的这两个等相面的时间间隔和频率分别为

$$\tau=\frac{c\Delta t-\Delta x}{c}=\frac{1}{\nu_0\sqrt{1-v^2/c^2}}-\frac{v/c}{\nu_0\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{1-v/c}{\nu_0\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

$$\nu=\nu_0\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-v/c}=\nu_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}.$$

① 郑永令等．力学．第2版．北京：高等教育出版社，2002

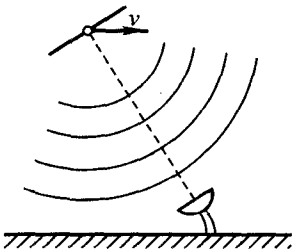
若光源以速度 v 背离观测者运动，则有

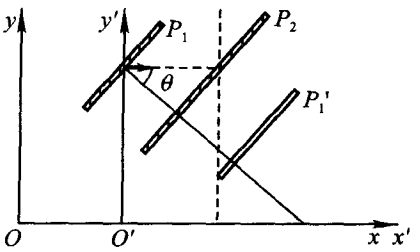
$$\nu=\nu_0\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+v/c}=\nu_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}.$$

接收器在相对运动方向上的多普勒效应，有时称为**纵向多普勒效应**.

② 接收器不在相对运动方向上的多普勒效应

如图(b)所示，设想光源位于S'系$(0, y')$点，在 t' 时刻发出一等相面 P_1，频率为 ν_0，则在时刻 $t'+1/\nu_0$ 此光源又发出第二个同相位的等相面 P_2 (这时等相面 P_1 已传播到 P'_1)，它们是发生在同一地点$(0, y')$的两个事件，其时间间隔为 $\tau_0=1/\nu_0$.





题 7－9 图(b)

相对于S系而言，第一和第二等相面发出的时刻和地点分别为

$$t=\frac{t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\qquad x=\frac{vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\qquad y=y';$$

$$t+\Delta t=\frac{t'+1/\nu_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\qquad x+\Delta x=\frac{vt'+v/\nu_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\qquad y=y'.$$

若光源以速度 v 向着观测者运动，则在第二等相面发出的时刻，第一等相面已行进了 $c\Delta t$ 的距离，两等相面 P'_1 和 P_2 之间的距离为 $c\Delta t-\Delta x\cos\theta$，观测者接收到的这两个等相面的时间间隔和频率分别为

$$\tau=\frac{c\Delta t-\Delta x\cos\theta}{c}=\frac{1}{\nu_0\sqrt{1-v^2/c^2}}-\frac{v\cos\theta/c}{\nu_0\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{1-v\cos\theta/c}{\nu_0\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

$$\nu=\nu_0\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-v\cos\theta/c}.$$

即使 $\theta=\pi/2$，仍有所谓的“横向多普勒效应”，这时有

$$\nu=\nu_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

(2) 解法二：用四维矢量的不变性分析[①].

相对性原理指出，物理规律在所有惯性系中是相同的，电磁规律也不例外．为了明显地表现出电磁规律的协变性，最好的办法是将它们写成四维形式，使得方程中的每一项都是同类协变量．首先，引入变换矩阵

$$A=(a_{\mu\nu})=\begin{bmatrix}\gamma & 0 & 0 & \mathrm{i}\beta\gamma\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -\mathrm{i}\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma\end{bmatrix},$$

可将洛伦兹变换写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}x'_1\\ x'_2\\ x'_3\\ x'_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\gamma & 0 & 0 & \mathrm{i}\beta\gamma\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -\mathrm{i}\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix},$$

用矩阵元写出就是

$$x'_\mu=a_{\mu\nu}x_\nu,$$

这就是洛伦兹变换的四维形式．由间隔不变性可知

$$x'_\mu x'_\mu=x_\mu x_\mu,\qquad a_{\mu\rho}x_\rho\,a_{\mu\tau}x_\tau=x_\mu x_\mu,$$

$$a_{\mu\rho}a_{\mu\tau}x_\rho x_\tau=\delta_{\rho\tau}x_\rho x_\tau,\qquad a_{\mu\rho}a_{\mu\tau}=\delta_{\rho\tau},$$

$$\tilde{a}_{\rho\mu}a_{\mu\tau}=\delta_{\rho\tau},\qquad \tilde{A}A=1\text{(单位矩阵)},$$

此即正交变换条件(保持距离不变的线性变换——四维空间中的转动所满足的充分必要条件).

由于电磁波的相位是不变量，可以引进四维波矢量．既然 $\varphi=\varphi'$ (即 $\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}=\omega' t'-\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}'$)是洛伦兹变换(即四维空间转动变换)下的不变量，而四维位矢($\boldsymbol{x},\mathrm{i}ct$)是四维空间的矢量，可见($\boldsymbol{k},\mathrm{i}\omega/c$)也组成一个四维矢量，称为**四维波矢量** $k_\mu=(\boldsymbol{k},\mathrm{i}\omega/c)$．四维波矢与四维位矢的标积 $k_\mu x_\mu=k'_\mu x'_\mu$ 在四维空间转动下不变，即 $\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}=\omega' t'-\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}'$．四维波矢量的变换为

$$k'_\mu=a_{\mu\nu}k_\nu,$$

由相应的矩阵元相等可得

$$k'_1=\gamma[k_1-(v/c^2)\omega],\quad k'_2=k_2,\quad k'_3=k_3,\quad \omega'=\gamma(\omega-vk_1).$$

$$k_1=\gamma[k'_1+(v/c^2)\omega'],\quad k_2=k'_2,\quad k_3=k'_3,\quad \omega=\gamma(\omega'+vk'_1).$$

设光源的固有参考系是S'系，$\omega'=\omega_0$ 是光源的固有角频率，θ 和 θ' 分

① 刘连寿．理论物理基础教程．北京：高等教育出版社，2003

别为 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{k}'$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的夹角，则有

$$k_1 = k\cos\theta = (\omega/c)\cos\theta,$$

$$k'_1 = k'\cos\theta' = (\omega_0/c)\cos\theta',$$

$$\omega_0 = \gamma(\omega - vk_1) = \gamma[\omega - (v\omega/c)\cos\theta],$$

$$\omega = \omega_0 \frac{1}{\gamma(1-\beta\cos\theta)} = \omega_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta},$$

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-(v/c)\cos\theta}.$$

（3）解法三：用能量－动量变换关系分析[①].

选取相对于光源静止的参考系为S系，相对于观测者静止的参考系为S'系，S'系相对于S'系以速度 v 沿 x 轴正方向运动．如果运动粒子是光子，利用能量-动量在不同参考系之间的变换关系．有

$$E = \frac{hc}{\lambda} = p_x c,$$

$$E' = \frac{hc}{\lambda'} = \gamma(E - vp_x) = \gamma\left(\frac{hc}{\lambda} - \frac{vh}{\lambda}\right),$$

$$\frac{1}{\lambda'} = \left(\frac{1-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)\frac{1}{\lambda} = \sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}\,\frac{1}{\lambda},$$

$$\nu' = \sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}\,\nu,$$

这相当于光源和接收器相互背离的情况．

7－10. 试求静止质量为 m_0 的质点在恒力 F 作用下的运动速度和位移，画出它们随时间变化的曲线，并将相对论结果与经典结果进行比较．

[解] 利用力的定义和相对论的动量公式，可得

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

因此，以质点静止时为计时零点，在恒力 F 作用下，有

$$\frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = Ft.$$

于是，在恒力 F 作用下的运动速度为

---

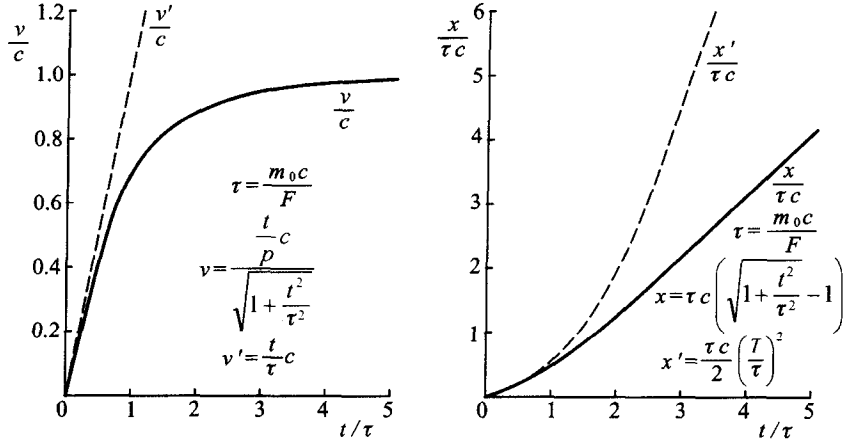
① 杨桂林等．近代物理．北京：高等教育出版社，2004；Kleppner D, Kolenkow R J．力学引论．宁远源等译．北京：人民教育出版社，1980

$$v=\frac{Ftc}{\sqrt{m_0^2c^2+F^2t^2}};$$

而在此变速运动过程中，质点的位移为

$$x=\int_0^t v\,\mathrm{d}t=\int_0^t\frac{Ftc}{\sqrt{m_0^2c^2+F^2t^2}}\mathrm{d}t=\frac{c}{F}(\sqrt{m_0^2c^2+F^2t^2}-m_0c).$$

上述相对论结果和经典结果($v'=Ft/m_0$，$x'=Ft^2/2m_0$)示于图中.



题 7－10 图

7－11. 同位素 ^{3}He 核由两个质子和一个中子组成，它的静质量为 3.01493u．(1) 以 MeV 为单位，^{3}He 的静能为多少？(2) 取出一个质子使 ^{3}He 成为 ^{2}H 加一个质子，试问需要多少能量？(3) 太阳的辐射能来源于内部的一系列核反应，其中之一是氢核和氘核聚变为 ^{3}He 核并放出 γ 光子，试估算 γ 光子的能量.

[解] (1) ^{3}He 的静能为

$$E_0=3.01493\,\mathrm{u}\times931.4940\,\mathrm{MeV/u}=2.80839\times10^3\,\mathrm{MeV}.$$

(2) 从 ^{3}He 中取出一个质子所需要的能量为

$$\Delta E=(m_{0\mathrm{d}}+m_{0\mathrm{p}}-m_{0\,^3\mathrm{He}})c^2$$

$$=(2.013553\,\mathrm{u}+1.007276\,\mathrm{u}-3.01493\,\mathrm{u})c^2$$

$$=5.90\times10^{-3}\,\mathrm{u}c^2=5.49\,\mathrm{MeV}.$$

(3) 聚变为 ^{3}He 所放出 γ 光子的能量就是(2)中 ΔE 值，即

$$E=\Delta E=5.49\,\mathrm{MeV}.$$

7－12. 在原子核聚变中，两个 ^2H 原子结合而产生 ^4He．试求：(1) 该反应中的质量亏损为多少 u？(2) 在这一反应中释放的能量是多少？(3) 这种反应每秒必须发生多少次才能产生 1 W 的功率？

[解] 在原子核聚变中，质量亏损和释放的能量分别为

$$\Delta m_0 = 2m_0(^2H) - m_0(^4He) = 2.561\times10^{-2}\ \text{u}\ ,$$

$$\Delta E = \Delta m_0 c^2 = 2.561\times10^{-2}\ \text{u}\times931.4943\ \text{MeV/u} = 23.86\ \text{MeV}\ .$$

为了要产生 1 W 的功率，这种反应每秒必须发生的次数为

$$n = \frac{1}{23.86\times1.602\times10^{-13}}\text{s}^{-1} = 2.616\times10^{11}\ \text{s}^{-1}\ .$$

7－13. 已知 Na 的质量为 23 u，Cl 的质量为 35.5 u．当 Na 和 Cl 结合成 NaCl 时，释放 4.2 eV 的能量．试问：(1) 当一个 NaCl 分子分解为一个 Na 原子和一个 Cl 原子时，质量增加多少？(2) 忽略这一质量差所造成的误差是百分之几？

[解] (1) 当一个 NaCl 分子分解为一个 Na 原子和一个 Cl 原子时，所需要的能量是 $\Delta E = 4.2\ \text{eV}$，相应的静质量的增量为

$$\Delta = \frac{\Delta E}{c^2} = 4.2\times10^{-6}\times0.0010735\,\text{u} = 4.5\times10^{-9}\ \text{u}\ .$$

(2) 忽略这一质量差所造成的误差是

$$\frac{4.5\times10^{-9}}{23+35.5} = (7.7\times10^{-9})\%\ .$$

7－14. 设太阳的质量为 2.0×10^{30} kg，辐射功率为 3.8×10^{26} W．如果这些巨大的辐射能量是由碳被燃烧成二氧化碳这一化学反应所产生的，并假定可将太阳质量视为所生成的 CO_2 的质量，已知生成每千克 CO_2 的反应热为 7.9×10^6 J，试计算太阳可能存在的时间．实际上，这些能量是氢转变为氦的热核反应产生的，并且在此反应中所放出的能量为静能的 0.7%，试根据这种情况重新计算太阳可能存在的时间．

[解] 如果太阳放出的能量都是由碳被燃烧成二氧化碳这一化学反应所产生的，则太阳能够辐射出的总能量 E_1 以及太阳可能存在的时间 t_1 分别为

$$E_1 = 7.9\times10^6\times2.0\times10^{30}\ \text{J} = 1.6\times10^{37}\ \text{J}\ ,$$

$$t_1 = \frac{E_1}{P} = \frac{1.6\times10^{37}}{3.8\times10^{26}}\text{s} = 4.2\times10^{10}\ \text{s} = 1.3\times10^3\ \text{a}\ .$$

如果氢转变为氦的热核反应所放出的能量为静能的 0.7%，则太阳能够辐射出

的总能量 E_2 以及太阳可能存在的时间 t_2 分别为

$$E_2 = 0.7\%\, m_s c^2 = 1.3\times10^{45}\ \text{J}\,,$$

$$t_2 = \frac{E_2}{P} = \frac{1.3\times10^{45}}{3.8\times10^{26}}\ \text{s} = 3.4\times10^{18}\ \text{s} = 1.1\times10^{11}\ \text{a}\,.$$

7－15. 当一个粒子所具有的动能恰好等于它的静能时，试问这个粒子的速度有多大？在加速器中质子被加速到动能为其静能的 400 倍，试问这时质子的速度有多大？比值 E/pc 是多少？

[解] 当一个粒子所具有的动能恰好等于它的静能时，有

$$E_k = (\gamma-1)m_0c^2 = m_0c^2\,,$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}} = 2\,,$$

由此可得这粒子的速度的大小为

$$v_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}c = 0.866c\,.$$

当质子被加速到动能为其静能的 400 倍时，有

$$\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1-v_2^2/c^2}} = 401\,,$$

由此可得质子的速度的大小为

$$v_2 = \frac{\sqrt{401^2-1}}{401}c = 0.999\,996\,89\,c\,.$$

这时，质子的能量 $E_2 = 401m_0c^2$，因此有

$$\frac{E_2}{p_2c} = \frac{E_2}{\sqrt{E_2^2-m_0^2c^4}} = \frac{1}{\sqrt{1-1/401^2}} = 1.000\,003\,.$$

这就是说，当质子被加速到动能为其静能的 400 倍时，质子的动量 p 已经比 m_0c 大得多，于是 $E = cp$ 近似适用.

7－16. 设 K 介子处在静止状态时的半衰期为 1.0×10^{-8} s，在一束 K 介子中每个 K 介子的动能为 330 MeV，静能为 495 MeV. 试问：(1) 每个 K 介子的总能量为多大？(2) 每个 K 介子的静质量为多少？(3) 这些 K 介子的速度为多大？(4) 这些 K 介子的相对论性质量与静质量之比值为多大？(5) 在这 K 介子束中所观测到的 K 介子的半衰期为多长？

[解] (1) 每个 K 介子的总能量为 $E = E_k + E_0 = 825\ \text{MeV}$.

(2) 每个 K 介子的静质量为

$$m_0 = 495\times1.78268\times10^{-30}\ \text{kg} = 8.82\times10^{-28}\ \text{kg}.$$

(3) 由 $E=\gamma E_0$ 可解出这些 K 介子的速度为

$$v=\sqrt{1-\frac{E_0^2}{E^2}}\,c=\sqrt{1-\frac{495^2}{825^2}}\,c=0.8c.$$

(4) 这些 K 介子的相对论性质量与静质量之比值为

$$\gamma=\frac{E}{E_0}=1.67.$$

(5) 在这束 K 介子中所观测到的 K 介子的半衰期为

$$T=\gamma T_0=1.7\times10^{-8}\ \text{s}.$$

7－17. 动能为 6000 MeV 的质子与静止质子碰撞时，能形成质子－反质子对．若用动能相同的两质子对撞机来实现此反应，试求动能最小值．已知质子的静能为 938 MeV．

[解] 在动能为 E_{1k} = 6000 MeV 的质子(总能量为 E_1 = 6938 MeV)与静止质子碰撞时，两质子的四维动量分别为

$$(p_{x1},\ p_{y1},\ p_{z1},\ \mathrm{i}E_1/c),$$

$$(0,\ 0,\ 0,\ \mathrm{i}m_{\mathrm{p}}c);$$

这时两质子总四维动量的模方为

$$-m_{\mathrm{p}}{}^2c^2-m_{\mathrm{p}}{}^2c^2-2m_{\mathrm{p}}E_1=-2m_{\mathrm{p}}{}^2c^2-2m_{\mathrm{p}}E_1.$$

若用动能均为 E_{2k}(总能量为 $E_2=E_{2k}+m_{\mathrm{p}}c^2$)的两质子对撞来实现此反应，则两质子的四维动量分别为

$$(p_{x2},\ p_{y2},\ p_{z2},\ \mathrm{i}E_2/c),$$

$$(-p_{x2},\ -p_{y2},\ -p_{z2},\ \mathrm{i}E_2/c);$$

这时两质子的总动量为零，它们的总四维动量的模方为

$$-4E_2^2/c^2.$$

于是，利用两质子总四维动量的模方是不变量这一性质，可得

$$2m_{\mathrm{p}}^2c^2+2m_{\mathrm{p}}E_1=4E_2^2/c^2,$$

$$E_2=\sqrt{\frac{m_{\mathrm{p}}c^2(m_{\mathrm{p}}c^2+E_1)}{2}}=1922\ \text{MeV},$$

即动能的最小值为

$$E_{2k}=E_2-m_{\mathrm{p}}c^2=984\ \text{MeV}.$$

7－18. 两个静质量相同的质点进行相对论性碰撞．碰撞前，一个质点具有能量 E_{10}，另一个质点是静止的；碰撞后，两个质点具有相同的能量 E，并具有数值相同的偏角 θ．(1) 试用 E_{10} 表示碰撞后每个质点的相对论性动量；(2) 试导出以下关系式：

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{2m_0c^2}{E_{10}+3m_0c^2}}\,.$$

[解] (1) 利用 $E^2=p^2c^2+m_0^2c^4$，考虑到碰撞前后两个质点的能量守恒关系 $E_{10}+m_0c^2=2E$，可用 E_{10} 表示碰撞后每个质点的相对论性动量为

$$p=\frac{1}{c}\sqrt{E^2-m_0^2c^4}=\frac{1}{c}\sqrt{\frac{(E_{10}+m_0c^2)^2}{4}-m_0^2c^4}$$
$$=\frac{1}{2c}\sqrt{E_{10}^2+2m_0E_{10}c^2-3m_0^2c^4}\,.$$

(2) 利用上述结果和

$$p_0=\frac{1}{c}\sqrt{E_{10}^2-m_0^2c^4}\,,$$

以及碰撞前后两个质点的动量守恒关系

$$p_0=2p\cos\theta\,,$$

可得 $$\frac{1}{c}\sqrt{E_{10}^2-m_0^2c^4}=\frac{1}{c}\sqrt{E_{10}^2+2m_0E_{10}c^2-3m_0^2c^4}\cos\theta\,,$$

由此可以导出所要求的关系式

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{\frac{2m_0c^2(E_{10}-m_0c^2)}{E_{10}^2+2m_0E_{10}c^2-3m_0^2c^4}}$$
$$=\sqrt{\frac{2m_0c^2}{E_{10}+3m_0c^2}}\,.$$

7－19. 在康普顿散射中，静质量为零的光子在碰撞前后的能量和动量分别为

E_{10}，$p_{10}=E_{10}/c$　　和　　E_1，$p_1=E_1/c$；

自由电子在碰撞前后的能量和动量分别为

$E_{20}=m_0c^2$，$p_{20}=0$　　和　　$E_2=c\sqrt{m_0^2c^2+p_2^2}$，$p_2$．

试证明，光子能量与其散射角 θ 之间满足以下关系式：

$$\frac{1}{E_1}-\frac{1}{E_{10}}=\frac{1}{m_0c^2}(1-\cos\theta)\,.$$

[证明] 在相对论性碰撞——康普顿散射的过程中，能量和动量守恒关系分别为

$$E_{10}+m_0c^2=E_1+c\sqrt{m_0^2c^2+p_2^2}\ , \tag{a}$$

$$\boldsymbol{p}_{10}=\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2\ . \tag{b}$$

为了消去 $\boldsymbol{p}_2$，可将式(b)改写为 $\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{p}_{10}-\boldsymbol{p}_1$．将此式平方，可得

$$p_2^2=p_{10}^2+p_1^2-2\boldsymbol{p}_{10}\cdot\boldsymbol{p}_1=\frac{E_{10}^2}{c^2}+\frac{E_1^2}{c^2}-2\frac{E_{10}E_1}{c^2}\cos\theta\ .$$

另一方面，由式(a)可以解得

$$\begin{aligned}p_2^2&=\frac{1}{c^2}(E_{10}+m_0c^2-E_1)^2-m_0^2c^2\\&=\frac{E_{10}^2}{c^2}+\frac{E_1^2}{c^2}+\frac{2(E_{10}-E_1)m_0c^2}{c^2}-\frac{2E_{10}E_1}{c^2}\ .\end{aligned}$$

令 p_2^2 的上述两个式子相等，可得

$$\frac{2(E_{10}-E_1)m_0c^2}{c^2}-\frac{2E_{10}E_1}{c^2}=-2\frac{E_{10}E_1}{c^2}\cos\theta\ ;$$

再用 $\dfrac{1}{2E_{10}E_1m_0}$ 乘上式两边，移项后即得所要求证明的关系式

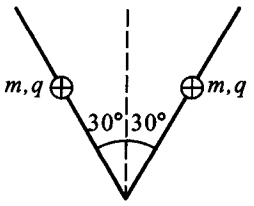
$$\frac{1}{E_1}-\frac{1}{E_{10}}=\frac{1}{m_0c^2}(1-\cos\theta)\ .$$

第八章　电相互作用和静电场

8－1. 卢瑟福在他的 α 粒子散射实验(例题 4.3)中证明了：当两个原子核之间的距离小到 10^{-15} m 时，它们之间的排斥力仍然遵守库仑定律．具有足够高能量的 α 粒子，能够到达与金原子核相距 2.0×10^{-14} m 的地方．试计算在这一距离时 α 粒子所受到的金原子核的斥力的大小，此力相当于质量多大的物体所受到的重力？由此可见，在原子尺度内电相互作用力是非常强的．

[解] $F=91\text{N}$，相当于 9.3 kg 物体所受到的重力．

8－2. 两个小球各带电 $q=2.0\times10^{-7}$ C，可在如图所示的无摩擦的棒上自由滑动．若每个小球的质量都为 $m=0.10\text{g}$，试求它们的平衡位置及棒上的反作用力．



题 8－2 图

[解] 当小球平衡时，有

$$\boldsymbol{F}_\text{e}+\boldsymbol{F}_\text{g}+\boldsymbol{F}_\text{N}=0,$$

其中 $\boldsymbol{F}_\text{e}$、$\boldsymbol{F}_\text{g}$ 和 $\boldsymbol{F}_\text{N}$ 分别表示作用在小球上的静电力、重力和棒上的反作用力．于是，有

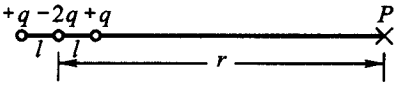
$$mg=F_\text{e}\tan30^\circ=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{(2l\sin30^\circ)^2}\tan30^\circ,$$

可解得

$$l=q\sqrt{\frac{\tan30^\circ}{4\pi\varepsilon_0 mg}}=0.46\text{ m},$$

$$F_\text{N}=\frac{mg}{\sin30^\circ}=2mg=1.96\text{ N}.$$

8－3. 一种线性**电四极子**(electric quadrupole)如图所示，它由在同一直线上的两个相同的电偶极子 $\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{l}$ 组成．这两个电偶极子的电矩方向相反，它们的负电荷重合在一起．试证明：当 $r>>l$ 时，在它们的延长线上离中心为 r 的 P 点处的场强为



题 8－3 图

$$E=\frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 r^4},$$

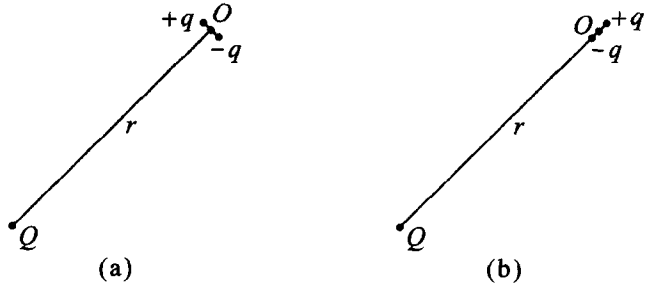
式中的 $Q=2ql^2$ 称为**电四极矩**(electric quadrupole moment).

[解] 这个系统的总电荷和电偶极矩均为零，但其电四极矩并不为零．该电四极矩在 P 点产生的电场为

$$E_P=\frac{2ql}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(r-l/2)^3}-\frac{1}{(r+l/2)^3}\right]=\frac{2ql}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l(3r^2+l^2/4)}{(r^2-l^2/4)^3}.$$

在 $r>>l$ 的情况下略去 l^2/r^2 项，即可得所要求证明的结果.

8－4. 把电矩为 $\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{l}$ 的电偶极子放在点电荷 Q 的电场中，$\boldsymbol{p}$ 的中心 O 到 Q 的距离为 $r(r>>l)$．在 $\boldsymbol{p}\,//\,\overrightarrow{QO}$ 和 $\boldsymbol{p}\perp\overrightarrow{QO}$ 的情况下，分别求出电偶极子所受到的力和力矩.



题 8－4 图

[解] 如图(a)所示，若电偶极矩 $\boldsymbol{p}\perp\overrightarrow{QO}$，则由于其 $\pm q$ 到 Q 的距离相等，它们所受到的力大小相等、方向相反，因此电偶极子所受到的合力 $F_\perp=0$，而所受到的力矩的方向是垂直纸面向里的，其大小为

$$M_\perp=2\frac{l}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2+l^2/4}\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{pQ}{r^2}.$$

如图(b)所示，若电偶极矩 $\boldsymbol{p}\,//\,\overrightarrow{QO}$，则它所受到的力为

$$F_{//}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-qQ}{(r-l/2)^2}+\frac{qQ}{(r+l/2)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-2rlqQ}{(r^2-l^2/4)^2}\approx-\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{pQ}{r^3}.$$

由于 $\pm q$ 所受到的力都是沿着 QO 连线的，因此电偶极子所受到的力矩的平行分量 $M_{//}=0$．在以上两式的最后都利用了条件 $r>>l$，只适用于电偶极子处在点电荷 Q 的电场中距离较远的地方的情况.

8－5. 半径为 R 的无穷长直薄圆筒面上均匀带电，沿轴线单位长度上的电荷量为η，试求出其场强分布，并画出 $E-r$ 图.

[解] 作与带电圆柱面同轴的高为 l 的圆柱形高斯面，可得

$r>R$ 时，　$\Phi_E=\oiint_{(S)}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=E2\pi rl=\dfrac{\eta l}{\varepsilon_0}$，　$E=\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{\eta}{r}$；

$r<R$ 时，　$\Phi_E=\oiint_{(S)}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=E2\pi rl=0$，　$E=0$.

8－6. 两个均匀带电的同轴无限长直薄圆筒，半径分别为 R_1 和 R_2，在内、外筒的相对两面上的面电荷密度分别为$+\sigma$和$-\sigma$，试求与轴相距为 r 的 P 点处的场强，并分别就以下三个区域进行讨论：(1) $r<R_1$；(2) $R_1<r<R_2$；(3) $r>R_2$.

[解] 利用习题 8－5 的结果以及场强叠加原理，可以得到

$r<R_1$ 时，　$E=0$;

$R_1<r<R_2$ 时，　$E=\dfrac{\sigma R_1}{\varepsilon_0 r}$，方向沿径向;

$r>R_2$ 时，　$E=\dfrac{\sigma(R_2-R_1)}{\varepsilon_0 r}$，方向与径向相反.

8－7. 设圆柱内的体电荷分布可用下式表示：

$$\rho(r)=\frac{\rho_0}{[1+(r/a)^2]^2},$$

式中 r 是到轴线的距离，ρ_0 是轴线上的ρ 值，a 是常量，试求圆柱内场强分布.

[解] 在圆柱体内作与其同轴的长为 l 的圆柱形高斯面，可得

$$\Phi_E=\oiint_{(S)}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=E2\pi rl,$$

按照高斯定理，可得

$$\Phi_E=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{(V)}\frac{\rho_0}{[1+(r/a)^2]^2}\mathrm{d}V=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r\frac{2\pi rl\rho_0}{[1+(r/a)^2]^2}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi r^2 l\rho_0}{\varepsilon_0[1+(r/a)^2]}.$$

联立以上两个式子，即可得

$$E=\frac{1}{2\pi rl}\frac{\pi r^2 l\rho_0}{\varepsilon_0[1+(r/a)^2]}=\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\frac{r}{[1+(r/a)^2]}.$$

8－8. 根据量子力学，正常状态的氢原子可看成由一个电荷量为$+e$的点电荷，以及球对称地分布在其周围的电子云构成. 已知电子云的电荷密度为

$$\rho(r) = -Ce^{-2r/a_0},$$

其中$a_0 = 5.3\times10^{-11}$ m称为玻尔半径，$C = e/\pi a_0^3$是为了使电荷总量等于$-e$所需要的常量，试问在半径为a_0的球内净电荷是多少？距核a_0远处的电场强度是多大？

[解] 按题意，在半径为a_0的球内的净电荷为

$$q_0 = e + \iiint \rho(r)\,dV = e - \frac{4e}{a_0^3}\int_0^{a_0} e^{-2r/a_0} r^2\,dr$$

$$= 0.677e = 1.08\times10^{-19}\ \text{C}.$$

利用同心球高斯面及上述结果可得，距核a_0远处的电场强度为

$$E_0 = \frac{1}{4\pi a_0^2}\frac{q_0}{\varepsilon_0} = 3.46\times10^{11}\ \text{V/m}.$$

8－9. 实验表明，在靠近地面处有相当强的电场$\boldsymbol{E}$垂直于地面向下，大小约为$100\ \text{V}\cdot\text{m}^{-1}$. 在离地面 1.5 km 高的地方，$\boldsymbol{E}$也是垂直于地面向下的，大小约为$25\ \text{V}\cdot\text{m}^{-1}$. (1) 试计算地面上的面电荷密度，设地球上的电荷全部均匀分布在地球表面上；(2) 试计算从地面到 1.5 km 高度大气中的平均体电荷密度.

[解] (1) 在地球表面处作同心球高斯面，利用高斯定理可得

$$4\pi R_1^2 E_1 = 4\pi R_1^2 \sigma/\varepsilon_0.$$

考虑到电场$\boldsymbol{E}_1$的方向垂直于地面向下，即$E_1 = -100$ V/m，由此可得地面上的面电荷密度为

$$\sigma = \varepsilon_0 E_1 = -8.85\times10^{-10}\ \text{C/m}^2.$$

(2) 假定从地面到 1.5 km 高(半径为R_2)的大气的平均体电荷密度为ρ，考虑到$R_2 - R_1 \ll R_1$，

$$\frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3) = \frac{4}{3}\pi(R_2 - R_1)(R_2^2 + R_2R_1 + R_1^2) \approx 4\pi R_1^2(R_2 - R_1),$$

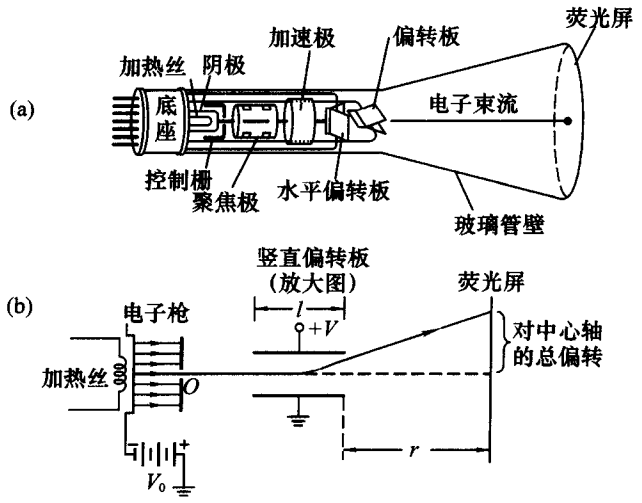
利用高斯定理可得

$$4\pi R_2^2 E_2 = \frac{1}{\varepsilon_0}[4\pi R_1^2\sigma + 4\pi R_1^2(R_2 - R_1)\rho].$$

已知$E_1 = -100$ V/m，$E_2 = -25$ V/m，由上式可解得

$$\rho = \frac{\varepsilon_0 4\pi R_2^2 E_2 - 4\pi R_1^2\sigma}{4\pi R_1^2(R_2 - R_1)} = \frac{\varepsilon_0(E_2 - E_1)}{R_2 - R_1} = 4.43\times10^{-13}\ \text{C/m}^3.$$

8－10. 如图所示，示波管偏转电极的长度为 l = 1.5 cm，两极间的均匀电场垂直于管轴，其大小为 $E=1.2\times10^{4}\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$．一个初速 $v_0=2.6\times10^{7}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的电子沿管轴注入，已知电子的质量为 $m=9.1\times10^{-31}\ \mathrm{kg}$，电荷为 $-e=-1.60\times10^{-19}\ \mathrm{C}$．(1) 试求电子经过电极后发生的偏转 y；(2) 若偏转电极的边缘到荧光屏的距离为 r = 10 cm，并假定一离开偏转电极区域后电场立即变为零，试求电子打在荧光屏上产生的光点偏离中心轴的距离 y'．



题 8－10 图

[解] (1) 在 $\Delta t_1 = l/v_0$ 时间内，电子只在垂直于管轴的方向上受到了电场的恒定作用力，在该方向上的分运动是以 eE/m 为加速度的匀加速运动，因此电子经过电极后的偏转为

$$y=\frac{1}{2}\frac{eE}{m}\left(\frac{l}{v_0}\right)^2=3.5\times10^{-4}\ \mathrm{m}.$$

(2) 电子在从偏转电极的边缘到荧光屏的距离内所作的是匀速直线运动，速度的水平分量仍为 v_0，而其垂直分量为

$$v=\frac{eE}{m}\frac{l}{v_0}.$$

由于这段时间间隔为 $\Delta t_2 = r/v_0$，因此电子打在荧光屏上产生的光点偏离中心 O 的距离为

$$y'=y+\frac{eE}{m}\frac{l}{v_0}\frac{r}{v_0}=\left(1+\frac{2r}{l}\right)y=5.02\times10^{-3}\ \mathrm{m}.$$

8－11. 在夏季雷雨的一次闪电中，两点间的电势差约为 10^{10} V，通过的

电荷量约为 30 C．试问在这次闪电中消耗的能量是多少？已知水的比热为 $c=4.2\times10^3\,\mathrm{J/(kg\cdot K)}$，若用这些能量来烧水，能把多少质量的水从 0°C 加热到 100°C？

[解] 在一次闪电中消耗的能量是 $W=QU=3\times10^{11}\,\mathrm{J}$，该能量可以把质量为 $m=W/c\Delta t=7\times10^5\,\mathrm{kg}$ 的水从 0°C 加热到 100°C.

8－12. 一电偶极子原来与一均匀电场平行，将它转到与电场反平行时，外力作的功为 0.1 J，试求当此电偶极子与场强成 45°角时，作用在它上面的力矩.

[解] 由于 $M_\theta=pE\sin\theta$，在电偶极子与场强之间的夹角 θ 从 $0\to\pi$ 的过程中外力所作的功为

$$A_\pi=\int_0^\pi M_\theta\,\mathrm{d}\theta=\int_0^\pi pE\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=2pE=0.1\mathrm{J},$$

即　　$pE=A_\pi=0.05\,\mathrm{J}$.

由此可得，当此电偶极子与场强成 45°角时，作用在它上面的力矩为

$$M_{45^\circ}=pE\sin45^\circ=\frac{A_\pi}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=3.5\times10^{-2}\,\mathrm{N\cdot m}.$$

8－13. 求均匀带电圆环轴线上的电势分布，并画出 $V-r$ 曲线．设圆环半径为 R，所带电荷量为 Q.

[解] 在圆环上任取一线元 $\mathrm{d}l$，则它的电荷量以及它在圆环轴线上距环心 x 的任一点 P 产生的电势分别为

$$\mathrm{d}q=\frac{Q}{2\pi R}\mathrm{d}l,\qquad \mathrm{d}V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{R^2+x^2}}.$$

因此，整个带电圆环在 P 点产生的电势为

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi R}\frac{Q\,\mathrm{d}l}{2\pi R\sqrt{R^2+x^2}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2+x^2}}.$$

当 $x>>R$ 时，$V\approx\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{x}$，这时带电圆环可以近似地看成是一个点电荷；

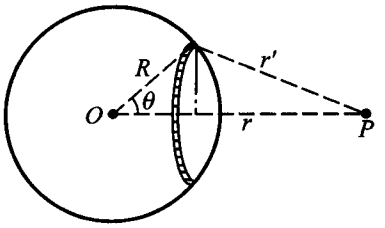
而当 $x=0$ 时，$V=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{R}$.

8－14. 一均匀带电球壳，它的面电荷密度为 σ，半径为 R．试求球壳内、外的电势分布，并画出 $V-r$ 曲线.

[解] (1) 解法一：利用均匀带电球壳场强分布的结果，可以由电势的定义式求解．因此，球壳外距球心 O 为 r 的任意一点 P 处的电势为

$$V=\int_P^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^{\infty}\frac{Q}{r'^2}\mathrm{d}r'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}=\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r}.$$

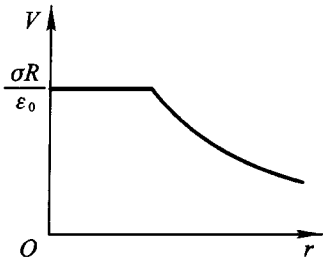
由此可见，一个均匀带电球壳在球外任意一点所产生的电势，相当于将所有的电荷都集中在球心时，在该点所产生的电势.



考虑到球壳内的场强为零，对于球壳内的 P 点则有

$$V=\int_P^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_R^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}'$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}=\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}.$$



题 8－14 图

(2) 解法二：为了求解球壳外距球心 O 为 r 的任意一点 P 处的电势，可以把球壳看成由许多以 OP 为轴线的圆环带组成. 每个圆环带的面积为

$$\mathrm{d}S=2\pi R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta,$$

它在 P 点的电势为

$$\mathrm{d}V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma 2\pi R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta}{r'}.$$

其中 r' 是圆环上一点到 P 点的距离. 由图可见，

$$r'^2=r^2+R^2-2Rr\cos\theta,$$

上式两边微分得

$$r'\mathrm{d}r'=Rr^2\sin\theta\mathrm{d}\theta,\qquad \text{即}\qquad \frac{\sin\theta\mathrm{d}\theta}{r'}=\frac{\mathrm{d}r'}{Rr}.$$

把上式代入 $\mathrm{d}V$ 的表达式并对整个球壳积分，可得 P 点的电势为

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{\sigma 2\pi R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta}{r'}$$

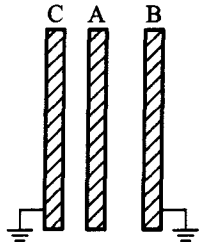
$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r-R}^{r+R}\frac{\sigma 2\pi R}{r}\mathrm{d}r'=\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r}.$$

对球壳内的 P 点，只需把上述积分上、下限分别改为 $R+r$ 和 $R-r$，即可得

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R-r}^{R+r}\frac{\sigma 2\pi R}{r}\mathrm{d}r'=\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}.$$

第九章　静电场中的导体和电介质

9－1. 如图所示，三块平行金属板 A，B 和 C 的面积都是 20 cm^2，其中 A 和 B 相距 4.0 mm，A 和 C 相距 2.0 mm，B 和 C 两板都接地. 如果使 A 板带正电，电荷量为 3.0×10^{-7} C，并忽略边缘效应，试求金属板 B 和 C 上的感应电量，以及金属板 A 相对于地的电势.



题 9－1 图

[解] 利用

$$Q_B + Q_C + Q_A = 0$$

和

$$\frac{Q_B}{Q_C}=\frac{C_{AB}U}{C_{AC}U}=\frac{d_{AC}}{d_{AB}}=\frac{1}{2},$$

可解得

$$Q_B=-1.0\times10^{-7}\ \text{C},\quad Q_C=-2.0\times10^{-7}\ \text{C}.$$

$$V_A=\frac{Q_C}{C_{AC}}=\frac{Q_C d_{AC}}{\varepsilon_0 S}=2.3\times10^4\ \text{V}.$$

9－2. 一导体球壳的直径为 1.0 m，空气的击穿场强为 30 kV/cm，试问该球壳最多能达到多高的电势？

[解] 导体球壳所能达到的最高的电势为

$$V_{max}=\frac{q_{max}}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{\sigma_{max}R}{\varepsilon_0},$$

其中 $2R=1.0$ m 为导体球壳的直径，σ_{max} 为面电荷密度，它由导体球壳表面附近的场强 E_{max} 达到空气的击穿场强来决定，即

$$E_{max}=\frac{\sigma_{max}}{\varepsilon_0}=3.0\ \text{kV/mm},$$

$$V_{max}=E_{max}R=1.5\times10^6\ \text{V}.$$

9－3. 地球的半径为 6 370 km，假设可把地球当做真空中的导体球，试求它的电容.

[解] 把地球当做真空中的导体球时，它的电容为

$$C=4\pi\varepsilon_0 R=7.087\times10^{-4}\ \text{F}.$$

9－4. (1) 把直径为 1.0 m 的孤立金属球的电势提高到 4.5×10^6 V，问所需电荷是多少？对于直径为 1.0 cm 的球则将如何？既然把较少的电荷放在小球上就可以达到相同的电势，为什么在静电起电机中要用很大的金属球？

(2) 一台静电起电机的高压电极电势为 $+9.0\times10^6$ V，其中气体的电击穿

场强为1.2×10^6 V/m．为防止击穿，对球壳的半径必须作什么限制？

(3) 如果在该起电机中充以高压氮气，其电击穿场强为9.0×10^6 V/m，则情况将如何？

(4) 这时若使传送带以3.0×10^{-4} C/s的速率向金属球壳迁移电荷，从而使球壳的电势因漏电而保持恒定，问迁移电荷所需的最小功率是多少？

[解] (1) 导体球的电势V和表面附近的电场强度E之间的关系可表示为

$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}=ER.$$

当$R_1=0.50$ m时，$Q_1=4\pi\varepsilon_0 R_1 V=2.5\times10^{-4}$ C；而当$R_2=0.0050$ m时，$Q_2=4\pi\varepsilon_0 R_2 V=2.5\times10^{-6}$ C．当小球达到与大球相同的电势时，小球的表面电荷密度较大，场强较高，易使周围的气体击穿．因此，在静电起电机中为了达到很高的电势，要用很大的金属球．

(2) 当$V=9.0\times10^6$ V，$E_{max1}=1.2\times10^6$ V/m时，为防止击穿，金属球壳的半径必须大于$R_{min1}=V/E_{max1}=7.5$ m．

(3) 当$V=9.0\times10^6$ V，$E_{max2}=9.0\times10^6$ V/m时，金属球壳的半径只须大于$R_{min2}=1.0$ m就可以了．

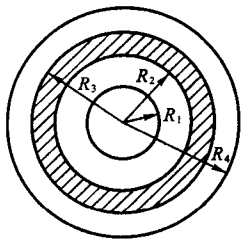
(4) 当$\mathrm{d}q/\mathrm{d}t=3.0\times10^{-4}$ C/s时，传送带所需最小功率为

$$P_{min}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(qV)=V\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=2.7\ \mathrm{kW}.$$

9－5. 如图所示，一球形电容器内、外壳的半径分别为R_1和R_4，在两壳之间放一内、外半径分别为R_2和R_3的同心导体球壳．

(1) 给内壳R_1以电荷Q，求R_1与R_4两壳之间的电势差；

(2) 求以R_1和R_4为两极的电容．



题9－5图

[解] (1) 给内壳R_1以电荷Q，则在R_2和R_3表面上将分别有感应电荷$-Q$和Q，它们在导体壳之间产生的场强为$\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$，而在导体内的场强为$E=0$．于是，$R_1$与$R_4$两球壳之间的电势差为

$$U_{14}=\int_1^2 \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_3^4 \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r+\int_{R_3}^{R_4}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_4}\right).$$

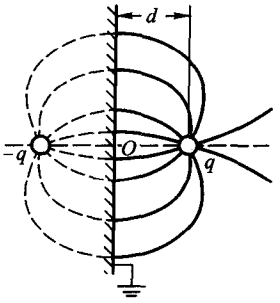
(2) 以 R_1 和 R_4 为两极的电容为

$$C=\frac{Q}{U}=4\pi\varepsilon_0\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_4}\right)^{-1}.$$

9－6. 点电荷 q 放在与无限大平面导体相距为 $x=d$ 处. 可以证明，在这无限大平面前方的总电场，与用一负电荷 $-q$ 放在距离 $x=-d$ 处代替该平面(见图)，所得结果相同. 这第二个点电荷 $-q$ 称为第一个点电荷 q 的**像**(image). 试证明：(1) 电场垂直于该平面；(2) 该平面上离开 O 点的径向距离为 r 处的电荷密度为

$$\sigma_e=\frac{-qd}{2\pi\sqrt{(r^2+d^2)^3}};$$

(3) 该平面上的总电荷等于 $-q$.



题 9－6 图

[解] 在距离一定的正负点电荷的中垂面上，电场强度的大小为

$$\frac{qd}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{(r^2+d^2)^3}},$$

其方向垂直于该平面并指向导体内. 这时，该平面上的电荷密度和总电荷量分别为

$$\sigma_e=\frac{-qd}{2\pi\sqrt{(r^2+d^2)^3}},$$

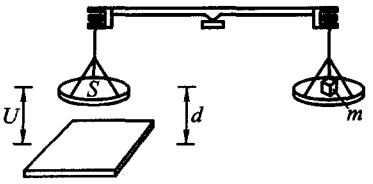
$$q_{面}=-\frac{qd}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{2\pi r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{(r^2+d^2)^3}}=-qd\int_{d^2}^{\infty}\frac{\mathrm{d}(r^2+d^2)}{2(r^2+d^2)^{3/2}}=-q.$$

这种方法称为**电像法**，它用虚设的像电荷的电场模拟界面上的感应电荷或极化电荷对电场的贡献. 电像法具有尝试的性质，而且往往只适用于少数简单的情况. 具体而言，电像法假设一个或几个像电荷，使它们与给定点电荷(称为**源电荷**)在某区域中共同产生的电场，满足已给定的导体或电介质界面上的边界条件. 于是，源电荷和像电荷在该区域中产生的电场分布就是所要求的解，这正是静电场的唯一性定理的一个具体应用.

9－7. 如图所示，可以用来测定电势差的静电计由一天平构成. 天平的左盘是一面积为 S 的圆盘，此圆盘至一水平导体板的距离为 d，二者构成了一个电容器. 当一电势差施加在圆盘和导体板之间时，圆盘将受到一个向下的力. 这时，我们把一质量为 m 的物体放在天平的另一盘中，以使天平恢复平衡. 试证明，待测电势差为

$$U = d\sqrt{\frac{2mg}{\varepsilon_0 S}}.$$

在实际仪器中，圆盘为一圆环所环绕，该圆环与圆盘保持着同样的电势，以保证在整个圆盘上电场是均匀的.



题 9－7 图

[解] 在圆盘和水平导体板所构成的电容器中，$U = Ed$，电场 E 是均匀的. 这里要求的是圆盘受到的导体板对它的作用力，该作用力取决于导体板上的电荷 q 在圆盘位置上产生的电场 E_1，它等于电容器中场强 E 的一半，即 $E_1 = E/2$. 再利用 $C = \varepsilon_0 S/d$，可得

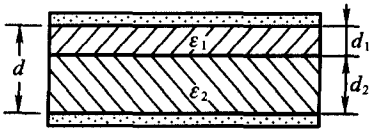
$$mg = qE_1 = CU\frac{1}{2}\frac{U}{d} = \frac{\varepsilon_0 S}{2d^2}U^2,$$

由此即可得到所要证明的结果.

9－8. 如图所示，一平行板电容器的极板面积为 S，间距为 d，两极板间有厚度各为 d_1 与 d_2 的电介质，其电容率分别为 $\varepsilon_1 = \varepsilon_0\varepsilon_{r1}$ 和 $\varepsilon_2 = \varepsilon_0\varepsilon_{r2}$. 试求两个金属极板上的面电荷密度分别为 $\pm\sigma$ 时，两层介质中的电位移 D 和两层介质间分界面上的束缚面电荷密度 σ'，以及该电容器的电容 C.

[解] 根据有电介质时的高斯定理以及平行板电容器的对称性，作如图中虚线所示的柱形高斯面，即可求得两层介质中的电位移 $\boldsymbol{D}$ 的大小均为

$$D = \frac{Q}{S} = \sigma.$$



题 9－8 图

因此，每层介质表面上的束缚面电荷密度为

$$\sigma_1' = P_1 = D - \varepsilon_0 E_1 = (1 - \frac{1}{\varepsilon_{r1}})D = (1 - \frac{1}{\varepsilon_{r1}})\sigma,$$

$$\sigma_2' = P_2 = D - \varepsilon_0 E_2 = (1 - \frac{1}{\varepsilon_{r2}})D = (1 - \frac{1}{\varepsilon_{r2}})\sigma.$$

所以，两层介质间分界面上的束缚面电荷密度为

$$\sigma' = [(1 - \frac{1}{\varepsilon_{r1}}) - (1 - \frac{1}{\varepsilon_{r2}})]\sigma = \frac{\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}\varepsilon_{r1}}\sigma.$$

最后，由于

$$E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}, \qquad E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}},$$

所以该电容器的电容为

$$C=\frac{Q}{U}=\frac{\sigma S}{E_1d_1+E_2d_2}=\frac{\sigma S}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}d_1+\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}d_2}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}S}{\varepsilon_{r2}d_1+\varepsilon_{r1}d_2}.$$

9－9. 一半径为 R 的导体球带有电荷 Q，球外有一层同心球壳的均匀电介质，其内外半径分别为 r_1 和 r_2，电容率为ε. 试求电介质内外的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和电位移 $\boldsymbol{D}$，以及电介质内的极化强度 $\boldsymbol{P}$ 和表面上的极化面电荷密度 σ'.

[解] 无论是电介质内部还是外部，作球形高斯面可求得电位移 $\boldsymbol{D}$ 均为

$$\boldsymbol{D}=\frac{Q\boldsymbol{r}}{4\pi r^3}.$$

然而，由 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$ 可得，电介质内、外的电场强度不同，它们分别为

$$\boldsymbol{E}_{内}=\frac{Q\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon r^3},\qquad \boldsymbol{E}_{外}=\frac{Q\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

按照定义式 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$，电介质内的极化强度为

$$\boldsymbol{P}=\frac{Q\boldsymbol{r}}{4\pi r^3}\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}.$$

再由 $\sigma=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e}_r$，可得电介质两个表面上的极化面电荷密度分别为

$$\sigma_1'=-\frac{Q}{4\pi r_1^2}\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon},\qquad \sigma_2'=\frac{Q}{4\pi r_2^2}\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}.$$

9－10. 神经细胞膜是 $\varepsilon_r=7.0$ 的绝缘体，其内、外侧的液体都是导电的电解液. 在静息状态下，细胞膜内、外侧各分布一层负、正离子. 今测得厚度为 $d=6.0\,\text{nm}$ 的细胞膜两侧的电势差为 $U=70\,\text{mV}$，试求神经细胞膜中的场强及其两侧的面电荷密度.

[解] 神经细胞膜中的场强及其两侧的面电荷密度分别为

$$E=\frac{U}{d}=1.2\times10^7\ \text{V/m},$$

方向由膜外侧指向膜内侧；

$$\sigma=P_n=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\frac{U}{d}=6.2\times10^{-4}\ \text{C/m}^2.$$

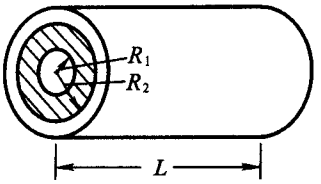
9－11. 如图所示，圆柱形电容器由半径为 R_1 的导线以及与其同轴的导体圆筒构成，圆筒内半径为 R_2，长为 L，其间充满相对电容率为ε_r 的电介质，沿轴线单位长度上导线和圆筒的电荷分别为η 和$-\eta$，并忽略边缘效应. 试求该圆柱形电容器的：(1) 介质中的电位移 $\boldsymbol{D}$、电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和极化强度 $\boldsymbol{P}$；(2) 介质表面的极化面电荷密度 σ'；(3) 两极板间的电势差 U；(4) 电容 C 及其与真空时电容 C_0 的比值.

[解] (1) 圆柱形电容器介质中的电位移 $\boldsymbol{D}$、电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和极化强度 $\boldsymbol{P}$ 分别为

$$\boldsymbol{D}=\frac{\eta}{2\pi r^2}\boldsymbol{r},$$

$$\boldsymbol{E}=\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\boldsymbol{r},$$

$$\boldsymbol{P}=\frac{\eta(\varepsilon_r-1)}{2\pi\varepsilon_r r^2}\boldsymbol{r}.$$



题 9－11 图

(2) 介质内、外表面的极化面电荷密度分别为

$$\sigma'_{内}=-\frac{\eta(\varepsilon_r-1)}{2\pi\varepsilon_r R_1},\qquad \sigma'_{外}=\frac{\eta(\varepsilon_r-1)}{2\pi\varepsilon_r R_2}.$$

(3) 两极间的电势差为

$$U=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}\mathrm{d}r=\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\frac{R_2}{R_1}.$$

(4) 电容 C 为

$$C=\frac{Q}{U}=\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln(R_2/R_1)}=\varepsilon_r C_0.$$

9－12. 一平行板电容器极板面积为 S，分别带电 $\pm Q$ 的两极板的间距为 d. 若将一厚度为 d，电容率为 ε 的电介质板插入极板间隙，试求：(1) 静电能的改变；(2) 电场力对电介质板所作的功.

[解] 在电介质板插入电容器的过程中，电容器电容的改变为

$$\Delta C=(\varepsilon_r-1)C_0=\frac{(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0 S}{d}.$$

在极板电荷 Q 恒定的条件下，电介质板的插入将使电容器的静电能减少，即

$$\Delta W=\frac{Q^2}{2C}-\frac{Q^2}{2C_0}=\frac{Q^2}{2C_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_r}-1\right)=-\frac{Q^2 d}{2S}\left(\frac{1}{\varepsilon_0}-\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

电场力对介质极板所作的功，来源于电容器静电能的减少，即

$$A=-\Delta W=\frac{Q^2 d}{2S}\left(\frac{1}{\varepsilon_0}-\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

9－13. 半径为 r_1 的导体圆柱外面套有一半径为 r_2 的同轴导体圆筒，它们的长度都是 L，其间充满了电容率为 ε 的均匀电介质. 设圆柱带电为 Q，圆筒带电为 $-Q$，并忽略边缘效应. 试求整个介质内的电场的总能量 W.

[解] 由习题 9－11 的结果可得，电介质内的电位移和场强分别为

$$\boldsymbol{D}=\frac{Q}{2\pi r^2 L}\boldsymbol{r},\qquad \boldsymbol{E}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon r^2 L}\boldsymbol{r}.$$

所以，整个电介质内电场的总能量为

$$W=\iiint\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}V=\frac{Q^2}{4\pi L\varepsilon}\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r}\mathrm{d}r=\frac{Q^2}{4\pi L\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

显然，这是与$W=Q^2/2C$一致的.

9－14. 平行板电容器的两极板之间有两层电介质，它们的相对电容率分别为$\varepsilon_{r1}=4.0$和$\varepsilon_{r2}=2.0$，厚度分别为$d_1=2.0\,\mathrm{mm}$和$d_2=3.0\,\mathrm{mm}$，极板面积为$S=50\,\mathrm{cm}^2$，两极板之间的电压为$U=200\mathrm{V}$．试求每层电介质中的能量密度和能量，以及电容器的总能量.

[解] 类似于习题9-8，可得

$$D=\frac{Q}{S},\qquad E_1=\frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}S},\qquad E_2=\frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}S}.$$

本题已知的是两极板间的电压，即

$$U=E_1d_1+E_2d_2=\frac{Q}{\varepsilon_0 S}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}}+\frac{d_2}{\varepsilon_{r2}}\right)$$

或

$$Q=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}SU}{d_1\varepsilon_{r2}+d_2\varepsilon_{r1}}.$$

因此，每层电介质中的能量密度和能量分别为

$$w_1=\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}_1=\frac{Q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon_{r1}S^2}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}^2U^2}{2(d_1\varepsilon_{r2}+d_2\varepsilon_{r1})^2}=1.1\times10^{-2}\,\mathrm{J/m^3},$$

$$W_1=\iiint\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}_1\right)\mathrm{d}\tau=\frac{Q^2Sd_1}{2\varepsilon_0\varepsilon_{r1}S^2}=w_1Sd_1=1.1\times10^{-7}\,\mathrm{J};$$

$$w_2=\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}_2=\frac{Q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon_{r2}S^2}=\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}w_1=2w_1=2.2\times10^{-2}\,\mathrm{J/m^3},$$

$$W_2=\iiint\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}_2\right)\mathrm{d}\tau=\frac{Q^2Sd_2}{2\varepsilon_0\varepsilon_{r2}S^2}=w_2Sd_2=3.3\times10^{-7}\,\mathrm{J}.$$

电容器的总能量为

$$W=W_1+W_2=4.4\times10^{-7}\,\mathrm{J}.$$

此外，利用电容器的能量和电容的公式

$$W=\frac{1}{2}CU^2\qquad\text{和}\qquad C=\frac{Q}{U}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}S}{d_1\varepsilon_{r2}+d_2\varepsilon_{r1}},$$

同样可得上述结果.

第十章　电磁相互作用

10－1. 电子以速率 $v = 3.0\times10^{7}$ m/s 射入 $B = 1.0$ T 的均匀磁场，速度方向与 $\boldsymbol{B}$ 垂直，试求该电子所受到的洛伦兹力的大小，并与它在地面上受到的重力作比较.

[解] 查附录的物理常量表可得，电子的电荷为 $-e = -1.6\times10^{-19}$ C，质量为 $m = 9.1\times10^{-31}$ kg．该电子受到的洛伦兹力和重力的大小及其比值分别为

$$F_{\mathrm{m}} = evB = 4.8\times10^{-12}\ \mathrm{N},$$

$$mg = 8.9\times10^{-30}\ \mathrm{N},$$

$$\frac{F_{\mathrm{m}}}{mg} = 5.4\times10^{17}.$$

10－2. 动能为 10eV 的电子，在垂直于匀强磁场的平面内作圆周运动．已知磁感应强度 $B=1.0\times10^{-4}$ T，试求电子运动的轨道半径和回旋周期，以及顺着 $\boldsymbol{B}$ 的方向看，电子的回旋方向.

[解] 电子的轨道半径为

$$R = \frac{mv}{eB} = \frac{\sqrt{2mE_{\mathrm{k}}}}{eB} = 0.11\ \mathrm{m},$$

电子回旋周期与电子速度的大小无关，即

$$T = \frac{2\pi m}{eB} = 3.6\times10^{-7}\ \mathrm{s}.$$

由于电子受到的洛伦兹力提供了指向回旋中心的向心力，所以顺着 $\boldsymbol{B}$ 的方向看，电子是顺时针回旋的.

10－3. 在 $B=0.10$ T 的均匀磁场中，动能为 $E_{\mathrm{k}}=2.0\times10^{3}$ eV 正电子沿着与 $\boldsymbol{B}$ 成 60°角的方向运动，试求该正电子所作的螺旋线运动的周期 T、半径 R 和螺距 d.

[解] 按题意，有

$$v_{\perp} = \frac{\sqrt{3}}{2}v = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{2E_{\mathrm{k}}}{m}}, \qquad v_{//} = \frac{1}{2}v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2E_{\mathrm{k}}}{m}},$$

$$T = \frac{2\pi m}{eB} = 3.6\times10^{-10}\ \mathrm{s},$$

$$R=\frac{mv_{\perp}}{eB}=\frac{\sqrt{6mE_k}}{2eB}=1.3\times10^{-3}\,\mathrm{m},$$

$$d=\frac{2mv_{//}}{eB}=\frac{\pi\sqrt{2mE_k}}{eB}=4.7\times10^{-3}\,\mathrm{m}.$$

10－4. 在电视显象管里，动能为1.2×10^4 eV的电子沿水平方向从南到北运动，设该处地球磁场在竖直方向上的分量是向下的，其大小为0.55×10^{-4} T．试问：(1) 电子受到地磁场的影响而往哪个方向偏转？(2) 电子在电视显象管内前进20 cm时的偏转约有多大？

[解] (1) 电子受到地磁场的影响往东偏转.

(2) 由于地球磁场很弱，电子在电视显象管内前进20 cm时其偏转很小，在估算其大小时，我们可以把电子的在磁力作用下所作的运动的横向部分，近似地看成是匀加速运动，其加速度的大小和偏转的距离分别为

$$a\approx\frac{evB_{\perp}}{m}=eB_{\perp}\sqrt{\frac{2E_k}{m^3}}=6.3\times10^{14}\,\mathrm{m/s^2},$$

$$d\approx\frac{1}{2}a\left(\frac{s}{v}\right)^2=\frac{eB_{\perp}s^2}{2\sqrt{2mE_k}}=3.0\times10^{-3}\,\mathrm{m}.$$

如果我们比较严格地考虑电子在地磁场中的圆周运动，则计算表明该圆周的半径为$R=6.72$ m，通过几何关系所得到的电子的偏转为1.5 mm，是上述估算值的一半．实际上，在地磁场下电子的这么小的整体偏转对看电视并没有影响.

10－5. 已知质子的质量为1.67×10^{-27} kg，电荷为1.6×10^{-19} C，回旋加速器D形电极的圆周半径为$R=60$cm.

(1) 如果要把质子从静止加速到具有4.0 MeV的能量，试求所需要的磁感应强度$\boldsymbol{B}$的大小；

(2) 设两D形电极间的电压为20 kV，试求质子要作多少周的回旋运动才能被加速到上述能量？

[解] 磁感应强度的大小及质子作回旋运动的周数分别为

$$B=\frac{mv}{eR}=\frac{\sqrt{2mE_k}}{eR}=0.48\,\mathrm{T},$$

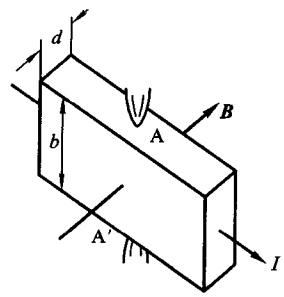
$$N=\frac{E_k}{2eU}=\frac{4.0\times10^6}{2\times2.0\times10^4}=100.$$

10－6. 如图所示，$b=0.35$cm，$d=0.10$cm的半导体样品放置$B=0.30$T

的均匀磁场中，表面与磁场方向垂直，通电流 $I=1.0\,\text{mA}$ 时测得 $U_{AA'}=6.55\,\text{mV}$.

(1) 试问这块半导体是正电荷导电(p 型)还是负电荷导电(n 型)?

(2) 试求载流子的浓度.



题 10－6 和 10－7 图

[解] (1) 这是正电荷导电的 p 型半导体.

(2) 该半导体的载流子浓度为

$$n=\frac{IB}{qdU_{AA'}}=2.9\times10^{20}\,\text{m}^{-3}.$$

10－7. 如图所示，厚度 $d=1.0\,\text{mm}$ 的铜片放置在 $B=1.5\,\text{T}$ 的均匀磁场中，表面与磁场方向垂直. 已知铜的自由电子浓度为 $n=8.4\times10^{28}\,\text{m}^{-3}$，试求在通过电流 $I=200\,\text{A}$ 时铜片两侧的电势差 $U_{AA'}$. 试问铜片的宽度 b 对 $U_{AA'}$ 有无影响？为什么？

[解] 利用霍尔电压公式，可得

$$U_{AA'}=\frac{1}{n(-e)}\frac{IB}{d}=-2.2\times10^{-5}\,\text{V}=-22\,\mu\text{V}.$$

霍尔效应取决于载流子所受到的静电力与洛伦兹力达到平衡，即

$$q\frac{U_{AA'}}{b}=quB;$$

而在电流 I 一定的情况下，载流子的运动速率

$$u=\frac{I}{bdnq}\propto\frac{1}{b}.$$

比较以上两式可见，铜片的宽度 b 对 $U_{AA'}$ 没有影响.

10－8. 已知某掺砷硅片是电子浓度为 $n=2.0\times10^{21}/\text{m}^3$ 的 n 型半导体，硅片的尺寸为 0.50cm×0.20cm×0.0050cm，电阻率为 $\rho=1.6\times10^{-2}\,\Omega\cdot\text{m}$. 我们用此硅片做成霍尔探头来测量磁场. 将此片长度的两端接入电压为 1.0 V 的直流电路中，当探头放在磁场某处并使其最大表面与磁场方向垂直时，测得宽度为 0.20cm 两侧的霍尔电压为 1.05 mV，试求磁场中该处的磁感应强度.

[解] $B=\dfrac{nqdU_{AA'}}{I}=\dfrac{nqd\rho lU_{AA'}}{US}=1.3\times10^{-2}\,\text{T}.$

10－9. 在 S 系中，一个点电荷 q_1 以匀速 $\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{i}$ 运动，在 $t=0$ 时通过原点 O；另一点电荷 q_2 静止于 z 轴上的点(0, 0, z). 试求 $t=0$ 时 q_2 受到 q_1 的作用力 $\boldsymbol{F}_{21}$.

[解] 利用运动电荷的电场公式，考虑到$\theta=\pi/2$，可得

$$\boldsymbol{E}_1=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\boldsymbol{e}_r.$$

由于点电荷q_2是静止的，因此有

$$\boldsymbol{F}_{21}=q_2\boldsymbol{E}_1=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\boldsymbol{e}_r.$$

10－10. 考虑沿着两条相距10^{-1} m的平行直线运动的两个电子．试问：

(1) 如果这两个电子以10^6 m/s的相同速率并排地同向运动，对于一位实验室观测者来说，它们之间的电力和磁力(非相对论的)有多大？

(2) 对于一位和电子一起运动的观测者来说，这些力有多大？

(3) 若电子的运动速率等于2.4×10^8 m/s(相对论的)，重新回答上述问题．

[解] (1) 在非相对论的情况下，电力和磁力的大小分别为

$$F_{e1}=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2}=2.3\times10^{-26}\ \text{N},$$

$$F_{m1}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1q_2v_1^2}{r_0^2}=2.6\times10^{-31}\ \text{N}.$$

(2) 对于和电子一起运动的观测者来说，电力和磁力的大小分别为

$$F_{e1}'=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2}=2.3\times10^{-26}\ \text{N},$$

$$F_{m1}'=0.$$

(3) 在相对论的情况下，考虑到

$$\gamma=1/\sqrt{1-v_2^2/c^2}=1.7,$$

所以一个实验室观测者所看到的电力和磁力的大小分别为

$$F_{e2}=\frac{\gamma q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2}=\gamma F_{e1}=3.9\times10^{-26}\ \text{N},$$

$$F_{m2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\gamma q_1q_2v_2^2}{r_0^2}=2.5\times10^{-26}\ \text{N};$$

而对于和电子一起运动的观测者来说，电力和磁力的大小分别为

$$F_{e2}'=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2}=F_{e1}'=2.3\times10^{-26}\ \text{N},$$

$$F_{m2}' = F_{m1}' = 0 .$$

由以上结果可以看出，它们满足如下普遍的关系：

$$\frac{F_{m1}}{F_{e1}} = \frac{v_1^2}{c^2}, \qquad \frac{F_{m2}}{F_{e2}} = \frac{v_2^2}{c^2} .$$

10－11. 北京正负电子对撞机的储存环是周长为 240 m 的近似圆形的轨道．已知电子的速率接近光速，当环中电子流强度为 8 mA 时，试问整个环中有多少电子在运行．

[解] 运行在整个环中的电子数为 $N = \frac{L}{c}\frac{I}{e} = 4\times10^{10}$.

10－12. 一根铜棒的横截面积为 3.5 cm^2，长为 4.0 m，两端的电势差为 100 mV．已知铜的电导率 $\sigma=5.7\times10^7\ S/m$，其内自由电子的电荷密度为 $1.36\times10^{10}\ C/m^3$，试求：(1) 铜棒的电阻 R；(2) 电流 I；(3) 电流密度 j 的大小；(4) 铜棒内电场强度 E_i 的大小；(5) 所消耗的功率 P；(6) 1 小时消耗的能量；(7) 铜棒内电子的漂移速度 v_d .

[解] (1) $R = \frac{\rho l}{S} = \frac{l}{\sigma S} = 2.0\times10^{-4}\ \Omega$，

(2) $I = \frac{U}{R} = 5.0\times10^2\ A$，

(3) $j = \frac{I}{S} = 1.4\times10^6\ A/m^2$，

(4) $E_i = \frac{U}{l} = 2.5\times10^{-2}\ V/m$，

(5) $P = IU = 50W$，

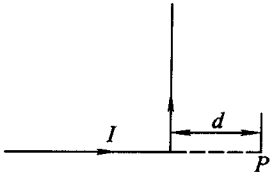
(6) $P\times3600s/h = 1.8\times10^5\ J/h$，

(7) $v_d = \frac{I}{\rho_e S} = 1.1\times10^{-4}\ m/s$.

10－13. 如图所示，被折成直角的无限长直导线载有 20 A 电流，P 点在折线的延长线上，d = 5 cm，试求 P 点的磁感应强度．

[解] 按照毕奥－萨伐尔定律，折线的水平段在 P 点所产生的磁感应强度为零，因此 P 点的磁感应强度只取决于竖直段，所以有

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} = 4.0\times10^{-5}\ T .$$



题 10－13 图

10－14. 载流正方形线圈的边长为 $2l$，电流为 I，(1) 试求轴线上距中心 x 处的磁感应强度；(2) 当 $l=1.0\text{cm}$，$I=5.0\text{A}$ 时，试计算 $x=0$ 和 $x=10\text{cm}$ 处的磁感应强度.

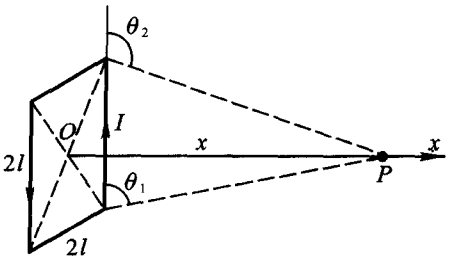
[解] (1) 如图，由几何关系

$$\cos\theta_1=\frac{l}{\sqrt{x^2+2l^2}}$$

和

$$\cos\theta_2=\frac{-l}{\sqrt{x^2+2l^2}},$$

可得正方形每一边在 P 点所产生的磁感应强度的大小均为



题 10-14 图

$$B_1=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)=\frac{\mu_0 I}{4\pi\sqrt{x^2+l^2}}\frac{2l}{\sqrt{x^2+2l^2}}.$$

考虑到对称性，正方形的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的方向沿 x 轴正方向，大小为

$$B=4B_1\cos\alpha=\frac{\mu_0 I}{\pi\sqrt{x^2+l^2}}\frac{2l}{\sqrt{x^2+2l^2}}\frac{l}{\sqrt{x^2+l^2}}$$

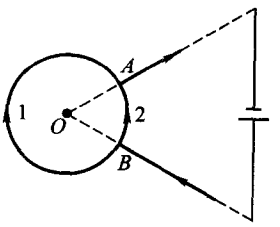
$$=\frac{2\mu_0 I l^2}{\pi(x^2+l^2)\sqrt{x^2+2l^2}}.$$

(2) $x=0$ 和 $x=10\text{cm}$ 处的磁感应强度 B_0 和 B_{10} 分别为

$$B_0=2.8\times10^{-4}\,\text{T},\qquad B_{10}=3.9\times10^{-7}\,\text{T}.$$

10－15. 如图所示，两根长直导线沿半径方向接到铁质圆环上的 A 和 B 两点，并与很远处的电源相接，试求环中心 O 点处的磁感应强度.

[解] 图中两根长直导线在 O 点产生的磁感应强度为零，即 O 点的磁感应强度取决于电流方向如图所示的两段圆环. 由于圆环上的任一线元在 O 点所产生的 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 都在垂直于纸面的方向上，因此若选取指向读者的方向单位矢量为 $\boldsymbol{k}$，则有



题 10－15 图

$$\boldsymbol{B}_1=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_B^A\frac{I_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{R}}{R^3}=\frac{\mu_0 I_1 l_1}{4\pi R^2}\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{B}_2=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_B^A\frac{I_2\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\times\boldsymbol{R}}{R^3}=-\frac{\mu_0 I_2 l_2}{4\pi R^2}\boldsymbol{k}.$$

设两段圆环的长度分别为 l_1 和 l_2，通过的电流分别为 I_1 和 I_2，则有

$$I_1 / I_2 = l_2 / l_1, \qquad \text{即} \qquad I_1 l_1 = I_2 l_2,$$

所以有

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2 = 0.$$

10－16. 半径为 R 的木球上密绕有漆包细导线，以单层线圈盖住半个球面，线圈共有 N 匝，通有电流 I，试求在球心 O 处的磁感应强度.

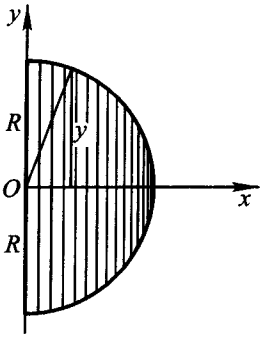
[解] 如图所示，在与球面上与所绕的漆包细导线垂直的弧线上，N 匝漆包细导线是沿木球 $\pi R/2$ 长的弧线(而不是半径)均匀密排的，因此单位弧长范围内包含的漆包细导线数均为 $2N/\pi R$，面电流密度为 $2NI/\pi R$.

我们可以把弧线分割成许多弧元 $\mathrm{d}s$，每一弧元 $\mathrm{d}s$ 所包括的线圈中通过的电流为

$$\mathrm{d}I = (2NI/\pi R)\mathrm{d}s.$$

如果把整个面电流看成是一个个半径不同的载流圆线圈，则可利用圆线圈轴线上的磁场分布公式，得到

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 y^2 \mathrm{d}I}{2R^3} = \frac{\mu_0 NI}{\pi R^4} y^2 \mathrm{d}s.$$



题 10－16 图

又由　$x^2 + y^2 = R^2$

可得　$2x\mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}y = 0$，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\frac{x}{y},$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \mathrm{d}x\sqrt{1 + (\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2} = \mathrm{d}x\sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{R}{y}\mathrm{d}x.$$

所以，球心 O 处磁感应强度的大小为

$$B = \int \mathrm{d}B = \frac{\mu_0 NI}{\pi R^3}\int_0^R y\,\mathrm{d}x = \frac{\mu_0 N I}{4R},$$

其方向沿 x 轴正方向.

如果采用平面极坐标系，则有

$$\mathrm{d}s = R\,\mathrm{d}\theta, \qquad y = R\sin\theta,$$

由此可以更简捷地得到上述结果，即

$$B = \int \mathrm{d}B = \frac{\mu_0 N I}{\pi R}\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \mathrm{d}\theta = \frac{\mu_0 NI}{\pi R}\frac{\pi}{4} = \frac{\mu_0 NI}{4R}.$$

10－17. 半径为 R 的球面上均匀带电，面电荷密度为 σ，该球面以匀角速度 ω 绕它的直径旋转，试求球心处的磁感应强度.

[解] 如图所示，任取一宽度为弧元 ds 的球带元，旋转时它等效于载流 dI 的圆线圈．为了求出 dI 的表达式，可以任意选取一截线 EF，以此为准来考虑 dt 时间内经过该截线的球带面积，即

$$dA = R\sin\theta\,\omega\,dt\,ds = R^2\sin\theta\,\omega\,d\theta\,dt\,.$$

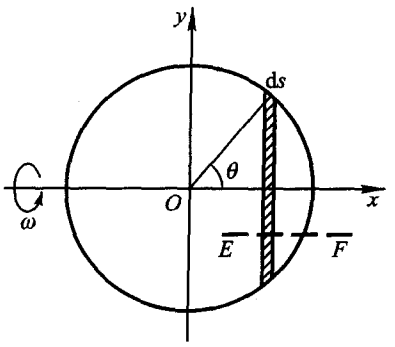
显然，在 dt 时间内通过截线 EF 的电量为 $dQ=\sigma dA$．所以，有

$$dI = \frac{dQ}{dt} = \sigma\omega R^2\sin\theta\,d\theta,$$

$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0\,dI}{2}\frac{y^2}{R^3}$$

$$= \frac{\mu_0}{2}\sigma\omega R\,2\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\,d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\mu_0\sigma\omega R\,.$$



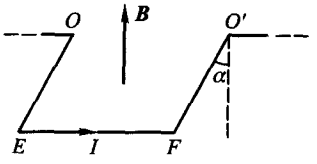
题 10－17 图

10－18. 有一根长 0.70 m 的金属直导线，质量为 10 g，用两根细线平挂在与其垂直的均匀磁场中，B = 0.40 T．试求当它们达到平衡且绳子的张力为零时，导线中电流的大小和方向．

[解] 这时有 $IlB = mg$，导线中电流的大小为

$$I = \frac{mg}{lB} = 0.35\text{A}\,.$$

10－19. 如图所示，截面积为 $S=2.0\text{mm}^2$、密度为 $\rho=8.9\text{g/cm}^3$ 的铜导线被弯成正方形的三边，可绕水平轴转动．将它放在方向竖直向上的均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中，当电流为 I = 10 A 时，导线所在的平面离开原来的竖直位置偏转 $\alpha = 15°$ 角而平衡，试求磁感应强度的大小．



题 10－19 图

[解] 只有 EF 边所受到的安培力对力矩 M_m 有贡献．磁力矩和重力矩分别为

$$M_\text{m} = IlBl\cos\alpha = IBl^2\cos\alpha,$$

$$M_\text{g} = \rho S g(l^2\sin\alpha + 2\times\frac{1}{2}l^2\sin\alpha) = 2\rho S g l^2\sin\alpha\,.$$

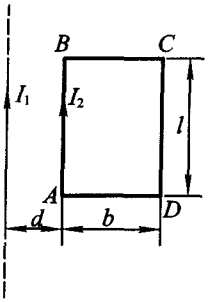
所以，平衡时的磁感应强度的大小为

$$B = \frac{2\rho S g\tan\alpha}{I} = 9.3\times10^{-3}\,\text{T}\,.$$

10－20. (1) 如图所示，无限长直导线载有电流 $I_1=30\,\mathrm{A}$，与它共面的矩形回路 $ABCD$ 的长边与直导线平行，并载有电流 $I_2=20\,\mathrm{A}$．矩形的长为 $l=12\,\mathrm{cm}$，宽为 $b=8.0\,\mathrm{cm}$．矩形靠近直导线的一边与直导线间的距离为 $d=1.0\,\mathrm{cm}$，试求 I_1 作用在矩形回路上的合力．

(2) 试证明：当矩形线圈足够小时，线圈受到的合力的大小为

$$F_x=IS\frac{\partial B}{\partial x}=m\frac{\partial B}{\partial x}.$$



题 10－20 图

[解] (1) AB 和 CD 两边受到的安培力的大小分别为

$$F_{AB}=I_2 l\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d},$$

$$F_{CD}=I_2 l\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d+b)},$$

前者指向长直导线，后者与之相反．此外，作用在 AD 和 BC 两边上的安培力大小相等，方向相反，相互抵消．因此，I_1 作用在矩形回路上的指向长直导线的合力的大小为

$$F=\frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{d+b}\right)=1.3\times10^{-3}\,\mathrm{N}.$$

(2) 当矩形线圈足够小时，即当 $b\ll d$ 时，上式可化为

$$F_x=-I_2 l(B_d-B_{d+b})=-I_2 lb\left(\frac{\Delta B}{\Delta x}\right)=m\frac{\partial B}{\partial x},$$

其中 F_x 是线圈受到的合力在 x 轴上的投影．普遍而言，任何一个线度足够小的磁矩为 $\boldsymbol{m}$ 的线圈，它在不均匀磁场中所受到的力为

$$\boldsymbol{F}=-\nabla V_{\mathrm{m}}=-\nabla(-\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B})=\nabla(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}).$$

此外，线圈还受到力矩的作用．

10－21. 磁秤装置如图所示，它是一个测定载流导线所受磁场作用力的天平．在天平的一臂下面挂有一矩形线圈，其宽度为 b，长为 l，共有 N 匝．线圈下端放在待测的均匀磁场中，且与磁感应线垂直．在线圈未通入电流时，先调节天平使其平衡，然后在线圈中通入已知电流 I，这时在天平的右盘中加入砝码 m 使天平达到平衡．

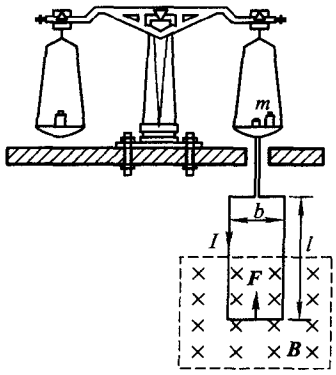
(1) 试求待测磁场 B 的表达式．

(2) 若 $N=10$，$b=10\,\mathrm{cm}$，$I=100\,\mathrm{mA}$，$m=5.00\,\mathrm{g}$，$g=9.80\,\mathrm{m/s^2}$，试求这时所测得的 B 值．

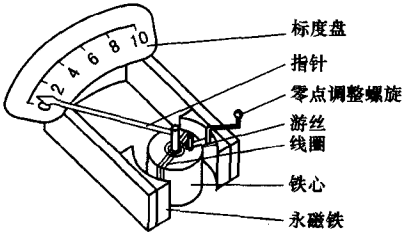
[解] 由图可见，作用在矩形线圈两侧的安培力大小相等，方向相反，相

互抵消；而作用在线圈底边上的安培力的大小为 $F_m = NIbB$．当天平平衡时，这个力与砝码的重量 mg 相等，由此可求得待测的磁感应强度 B 的表达式及其数值为

$$B=\frac{mg}{NIb}=0.49\,\mathrm{T}.$$



题 10－21 图



题 10－22 图

10－22. 一种磁电式电流计的结构如图所示．长为 3.0 cm、宽为 2.0 cm 的线圈由 50 匝细导线绕制而成，磁极间隙的磁感应强度为 $B=1.0\times10^{-2}\,\mathrm{T}$，提供扭转力矩的游丝的扭转常量为 $D=5.73\times10^{-7}\,\mathrm{N\cdot m/rad}$．试求当线圈中通有电流为 I = 1.0 mA 时，线圈所受到的磁力矩的大小，以及线圈平衡时的偏转角的大小．

[解] 在辐射状磁场中，线圈受到的磁力矩及平衡时的偏转角度分别为

$$M_m = 2N\frac{b}{2}IlB = NIlbB = 3.0\times10^{-7}\,\mathrm{N\cdot m},$$

$$\alpha=\frac{M_m}{D}=0.524\,\mathrm{rad}=30^\circ.$$

10－23. 如图(a)所示，两个相互共轴平行放置的圆线圈具有相同半径 R，通过的电流均为 I，二者之间的距离为 $2d$.

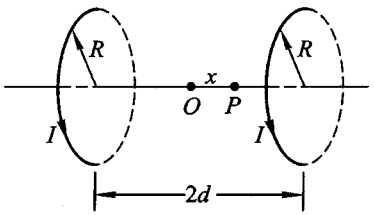
(1) 试证明轴线上一点 P 的磁场为

$$B=\frac{\mu_0 IR^2}{\sqrt{(R^2+d^2)^3}}\left[1+\frac{3}{2}\frac{(4d^2-R^2)}{2(R^2+d^2)^2}x^2+\right.$$

$$\left.\frac{15}{8}\frac{(8d^4-12R^2d^2+R^4)}{(R^2+d^2)^4}x^4+\cdots\right],$$

式中 x 是 OP 的长度.

(2) 试说明使 O 点附近磁场最均匀的条件为：调节 d 使得 $2d=R$，从而在 $x=0$ 处导数 $\mathrm{d}B/\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}^2B/\mathrm{d}x^2$ 都为零．满足该条件的这样一组线圈，称为**亥姆霍兹线圈**(Helmholtz coils)，在实验室中可用它在一有限的空间区域中产生一个比较均匀的磁场．



题 10－23 图(a)

(3) 如果将一个线圈中通过的电流反向，则磁场分布将会有什么特点？实际上，由于原子都具有磁矩，这一对线圈所形成的非均匀磁场可以捕陷热运动速度很低的中性原子，在激光冷却和捕陷中性原子技术中用它作为磁阱(magnetic trap，见教材中的例题 24.1)．

[解] (1) 利用载流圆线圈轴线上磁场分布的公式，可以得到两个圆线圈在轴线上任一点 P 处产生的磁感应强度分别为：

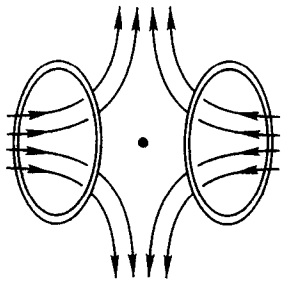
$$B_1=\frac{\mu_0R^2I}{2[R^2+(d+x)^2]^{3/2}},\qquad B_2=\frac{\mu_0R^2I}{2[R^2+(d-x)^2]^{3/2}},$$

式中 x 是 OP 的长度．于是，点 P 处总的磁感应强度的大小为

$$B=B_1+B_2=\frac{\mu_0R^2I}{2[R^2+(d+x)^2]^{3/2}}+\frac{\mu_0R^2I}{2[R^2+(d-x)^2]^{3/2}}.$$

利用泰勒展开公式，可将上式化为所要求证明的公式．

(2) 根据对称性分析，中心 O 点($x=0$)处 $\mathrm{d}B/\mathrm{d}x=0$，因此轴线上的 $B-x$ 曲线在 O 点有水平的切线．由本题(1)所要证明的关于 B 的展开式可以看出，当两线圈之间的间距 $2d$ 与线圈半径 R 相比较大时，在 $x=0$ 处 $\mathrm{d}^2B/\mathrm{d}x^2>0$，磁感应强度 B 在 O 点处有极小值；而当 $2d$ 与 R 相比较小时，在 $x=0$ 处 $\mathrm{d}^2B/\mathrm{d}x^2<0$，磁感应强度 B 在 O 点处有极大值．因此，当 $2d$ 取值适中时，即当 $2d=R$ 时，在 $x=0$ 处 $\mathrm{d}^2B/\mathrm{d}x^2=0$，磁感应强度 B 在 O 点的值为由极小向极大过渡的转变点之值，这就是使 O 点附近磁场最均匀的条件．计算表明，在满足条件 $2d=R$ 的情况下，在 $R/8>x>-R/8$ 范围内，B 值的变化在 0.03%之内；在 $R/4>x>-R/4$ 范围内，B 值的变化在 0.4%之内．


题 10－23 图(b)

(3) 如果将一个线圈中通过的电流反向，则磁场分布将如图(b)所示，称为**四极磁阱**

(quadrupole trap)，其特点是：中心点磁场为零，沿各个方向离开中心点磁场都逐渐增大．或者说，这种磁场分布使原子“感受”到了这样一种“势场”区域，在该区域的内部某处势能有极小值，原子离开势能极小点总会受到迫使它返回的恢复力．

10－24. 为了使得测量仪器能够朝向适当的方向，人造卫星上需要安装一种可以产生力矩的装置．已知在赤道上空 700 km 的高空轨道上运行的卫星所在处的地磁场的大小为 4.0×10^{-5} T，卫星的直径为 1.14 m，在其外表面绕上 N 匝线圈并通以电流 I．当地磁场的方向与线圈的法线方向间的夹角为 $\theta=5°$ 时，如果所需的力矩为 1.5×10^{-3} N·m，试求绕在卫星表面的线圈所需要的安培匝数 NI.

[解] 已知 $M=1.5\times10^{-3}$ N·m，$D=1.14$ m，$B=4.0\times10^{-5}$ T，$\theta=5°$．于是，利用式 $\boldsymbol{M}=NI\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{B}$，可得

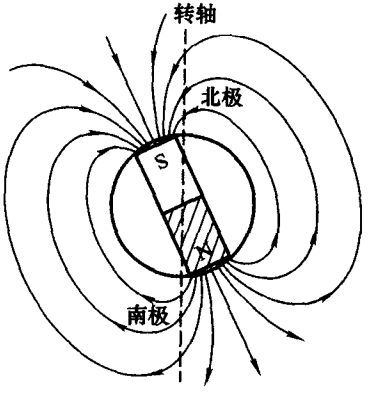
$$NI=\frac{4M}{\pi D^2 B\sin\theta}=4.2\times10^{2}\ \text{A}.$$

10－25. 地理两极是地球自转轴与地面的交点，地磁两极的中心点与地理的两极并不重合．现时地磁两极的中心，北半球的 S 极位于北纬 78.2°、西经 102.9°处，而南半球的 N 极位于南纬 65.6°、东经 139.4°处．如果采用以地心为球心的球面坐标系，则平行于地面的 B_θ 分量一般与地理子午线之间有一个夹角 α (取偏东为正)，称为**磁偏角**(declination)；而磁感应强度矢量 $\boldsymbol{B}$ 与水平面之间的夹角 $\gamma=\arctan(B_r/B_\theta)$，则称为**磁倾角**(geomagnetic inclination)．在北京地区，地磁场的磁感应强度大小为 $B=0.548\times10^{-4}$ T，磁倾角为 57.1°，磁偏角为 −6°．在地球表面和更远的地方，地磁场近似地可以看成是一个置于地心处的磁偶极子所产生的场，或者看成是如图所示的磁体所产生的场．

(1) 在地理北极附近的地磁 S 极处，垂直向下的地磁场的大小为 $B=0.62\times10^{-4}$ T，试据此求出该磁偶极矩的大小．

(2) 如果设想地磁场是由流经赤道的电流产生的，试问要有多大的电流流经赤道，才能得到产生上述地磁场的磁偶极矩？

实际上，地磁场的场源并不是接近于地球表面的电流分布，而是在地



题 10－25 图

心附近导电性流体的运动所形成的电流分布．同时，这样产生的主场还受到局域地壳性质的反常以及其他外来因素的影响．此外，地面磁场的大小和方向，不但由于高空电离层中的电流以及与太阳活动相关的磁暴而有短期的变化，而且还由于地磁极的移位等而有长期的变化．在有大磁暴时，磁极中心短期间可移位 150 km．由于磁偏角在地面上的变化，磁罗盘在导航中的应用已逐渐被回转罗盘或陀螺仪所代替．

[解] (1) 已知 $B = 0.62\times10^{-4}\ \mathrm{T}$，$R = 6.37\times10^{6}\ \mathrm{m}$．于是，利用

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2m}{R^3},$$

可得　$m = \dfrac{2\pi}{\mu_0}BR^3 = 8.0\times10^{22}\ \mathrm{A\cdot m^2}$．

(2) 为了产生这么大的磁矩，所设想的流经赤道的电流应为

$$I = \frac{m}{\pi R^2} = \frac{2BR}{\mu_0} = 6.3\times10^{8}\ \mathrm{A}.$$

10－26. (补充题)一长直带电直线沿线的方向以速度 v 运动时，试证明：与直线距离为 r_0 的一点的场强方向与该直线垂直，大小为

$$E = \frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0 r_0},$$

式中 η 为运动直线的线电荷密度．

[解] 按题意，可选取惯性参考系 S，使得沿 x 轴放置的带电直线沿其正方向以速度 v 运动．由对称性考虑可知，与直线距离为 r_0 的一点的场强方向是与直线垂直的．考虑到只有各线元电场强度的 y 分量对合电场有贡献，于是有

$$E = \int\frac{\eta\,\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1-v^2/c^2}{[1-(v^2/c^2)\sin^2\theta]^{3/2}}\frac{1}{r^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$= \frac{\eta}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{1-v^2/c^2}{[1-(v^2/c^2)\sin^2\theta]^{3/2}}\frac{1}{r^2}\sin\theta\,\mathrm{d}x.$$

再利用变量代换关系

$$x = -r_0\cot\theta,\quad \mathrm{d}x = r_0\,\mathrm{d}\theta/\sin^2\theta \quad 和 \quad r = r_0/\sin\theta,$$

考虑到整个定积分等于 θ 从 0 到 $\pi/2$ 的定积分的两倍，因此有

$$E = \frac{\eta(1-v^2/c^2)}{2\pi\varepsilon_0 r_0}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{[1-(v^2/c^2)\sin^2\theta]^{3/2}}$$

$$= \frac{-\eta(1-v^2/c^2)}{2\pi\varepsilon_0 r_0}\int_1^0 \frac{\mathrm{d}\cos\theta}{[1-(v^2/c^2)\sin^2\theta]^{3/2}}$$

$$= \frac{\eta(1-v^2/c^2)}{2\pi\varepsilon_0 r_0}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}X}{[(v^2/c^2)X^2+(1-v^2/c^2)]^{3/2}}$$

$$= \frac{\eta(1-v^2/c^2)}{2\pi\varepsilon_0 r_0}\left.\frac{X}{(1-v^2/c^2)[(v^2/c^2)X^2+(1-v^2/c^2)]^{1/2}}\right|_0^1$$

$$= \frac{\eta(1-v^2/c^2)}{2\pi\varepsilon_0 r_0}\frac{1}{1-v^2/c^2} = \frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0 r_0}.$$

如果已知的η是运动直线在与其相对静止的惯性参考系S'中的线电荷密度，则由于在随带电直线一起运动的惯性参考系S'中，任一固有长度为$\mathrm{d}l_0$的线元，其带电量为$\eta\mathrm{d}l_0$；而在惯性参考系S中，沿x轴放置的带电直线沿其正方向以速度v运动，尽管上述线元的带电量仍为$\eta\mathrm{d}l_0$，然而其长度却为

$$\mathrm{d}l = \mathrm{d}l_0\sqrt{1-v^2/c^2},$$

故有　$$\eta\mathrm{d}l_0 = \frac{\eta\mathrm{d}l}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

由此可得与直线距离为r_0的一点的场强的大小为

$$E = \frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0 r_0\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

10－27.（补充题）沿参考系S的x轴放置一通有电流的长直金属导线．导线中正电荷不动，其线电荷密度为η；负电荷以速度$\boldsymbol{v}_0 = v_0\boldsymbol{i}$运动，其线电荷密度为$-\eta$．一质子在$z$轴上$z = r_0$处以速度$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{i}$越过，对于此时此刻，试证明：

(1) 在S系中质子受电流的作用力为磁力，等于

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mu_0\eta e v_0 v}{2\pi r_0}\boldsymbol{k};$$

(2) 在质子静止的参考系S'中，由于导线缩短，使得正、负电荷的线电荷密度分别为

$$\eta_+' = \frac{\eta}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad \eta_-' = \frac{-\eta(1-v_0 v/c^2)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

从而总的线电荷密度为

$$\eta' = \frac{\eta v_0 v}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

(3) 质子在S'系中受到的力为电力

$$\boldsymbol{F}' = \frac{\eta e v_0 v}{2\pi\varepsilon_0 r_0 c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}\boldsymbol{k}.$$

[证明] (1) 由题 10－26 的结果可以知道，当长直带电直线沿着该直线作匀速运动时，在其周围所产生的电场的分布与它静止放置时形式上相同，只是线电荷密度的含意有所不同．因此，按题意，在 S 系中的观测者看来，质子所受到的电流的作用力仅为磁力．利用匀速运动电荷磁场的公式，考虑到各线元所产生的磁场方向相同，可得质子所在处的磁感应强度的大小为

$$B = \int\frac{\mu_0\eta\mathrm{d}x}{4\pi}\frac{v(1-v^2/c^2)\sin\theta}{[1-(v^2/c^2)\sin^2\theta]^{3/2}}\frac{1}{r^2}.$$

上式中的积分与习题 10－26 的积分完全类似，因此可得

$$\begin{aligned}B &= \frac{\mu_0\eta v(1-v^2/c^2)}{4\pi r_0}\int\frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{[1-(v^2/c^2)\sin^2\theta]^{3/2}}\\ &= \frac{\mu_0\eta v(1-v^2/c^2)}{4\pi r_0}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}X}{[(v^2/c^2)X^2+(1-v^2/c^2)]^{3/2}}\\ &= \frac{\mu_0\eta v(1-v^2/c^2)}{4\pi r_0}\frac{X}{(1-v^2/c^2)[(v^2/c^2)X^2+(1-v^2/c^2)]^{1/2}}\Bigg|_{-1}^{1}\\ &= \frac{\mu_0\eta v(1-v^2/c^2)}{4\pi r_0}\frac{2}{1-v^2/c^2} = \frac{\mu_0\eta v}{2\pi r_0}.\end{aligned}$$

再利用洛伦兹力的公式，可得质子所受到的磁力为

$$\boldsymbol{F} = e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0\eta e v_0 v}{2\pi r_0}\boldsymbol{k}.$$

(2) 按题意，在 S 系中负电荷的线密度 $\eta_- = \mathrm{d}q_-/\mathrm{d}x = -\eta_+ = -\eta$．由于负电荷以速度 $\boldsymbol{v}_0 = v_0\boldsymbol{i}$ 运动，因此有

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_0\sqrt{1-v_0^2/c^2},$$

其中 $\mathrm{d}x_0$ 是线元 $\mathrm{d}q_-$ 的固有长度．在S'系中负电荷的运动速度为

$$\boldsymbol{v}_-' = \frac{v_0 - v}{1-vv_0/c^2}\boldsymbol{i},$$

带电 $\mathrm{d}q_-$ 的线元的长度为

$$dx' = dx_0\sqrt{1-v_-'^2/c^2} = \frac{dx}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}\sqrt{1-v_-'^2/c^2}\ .$$

因为 $$\sqrt{1-v_-'^2/c^2} = \sqrt{1-(\frac{v_0-v}{1-v_0v/c^2})^2\frac{1}{c^2}} = \frac{\sqrt{1-v_0^2/c^2}\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-v_0v/c^2},$$

故有 $$dx' = dx\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-v_0v/c^2},$$

$$\eta_-' = \frac{dq_-}{dx'} = \frac{dq_-}{dx}\frac{(1-v_0v/c^2)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{-\eta(1-v_0v/c^2)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

在 S 系中正电荷是静止的，$\eta_+ = dq_+/dx_0 = \eta$；而在S'系中，正电荷以速度$-v$运动，有

$$dx' = dx_0\sqrt{1-v^2/c^2}, \qquad \eta_+' = \frac{dq_+}{dx'} = \frac{\eta}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

由上述结果可以得到，带电直导线的总的线电荷密度为

$$\eta' = \eta_+' + \eta_-' = \frac{\eta v_0 v}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

(3) 在S'系中，静止的质子只受到了电力的作用．利用习题 10－26 和本题(2)的结果可得，长直带电导线在质子处的场强为

$$\boldsymbol{E}' = \frac{\eta'}{2\pi\varepsilon_0 r_0}\boldsymbol{k}.$$

所以，质子所受到的电场力为

$$\boldsymbol{F}' = e\boldsymbol{E}' = \frac{\eta e v_0 v}{2\pi\varepsilon_0 r_0 c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}\boldsymbol{k}.$$

利用力的相对论变换公式由 $\boldsymbol{F}'$ 求 $\boldsymbol{F}$，亦可得到本题(1)的结果.

第十一章　恒定磁场和磁介质

11－1. 一载流无限长直圆管，内半径为 r_1，外半径为 r_2，传导电流为 I，电流沿轴线方向流动并且均匀地分布在管的横截面上．求磁感应强度的分布．

[解] 根据载流直圆筒的轴对称性，安培环路 L 可选为过场点 P 所作的以轴心为圆心的圆．由于磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 均按右手螺旋法则沿环路切线方向，因此有

$$\oint_{(L)} \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_{(L)} B\,\mathrm{d}l = B2\pi r\,.$$

根据安培环路定理，上述积分应等于穿过环路 L 的电流的代数和的 μ_0 倍，即 $\mu_0\sum I_i$．所以，有如下的结果：

当 $r<r_1$ 时，　$\sum I_i = 0$，　$B = 0$；

当 $r_1<r<r_2$ 时，　$\sum I_i = \dfrac{I(r^2-r_1^2)}{r_2^2-r_1^2}$，　$B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\dfrac{r^2-r_1^2}{r_2^2-r_1^2}$；

当 $r>r_2$ 时，　$\sum I_i = I$，　$B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$．

11－2. 一根长电缆由半径为 R_1 的导体圆柱，以及内外半径分别为 R_2 和 R_3 的同轴导体圆筒构成．电流 I 从一导体流去，从另一导体流回，电流都沿轴线方向流动，并且都均匀地分布在其横截面上．设 r 为到轴线的垂直距离，试求磁感应强度随 r 的变化．

[解] 考虑到本题 $\sum I_i$ 在各个区域中的具体取值，有如下的结果：

当 $r<R_1$ 时，　$\sum I_i = \dfrac{Ir^2}{R_1^2}$，　$B = \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}$；

当 $R_1<r<R_2$ 时，　$\sum I_i = I$，　$B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$；

当 $R_2<r<R_3$ 时，　$\sum I_i = \dfrac{I(R_3^2-r^2)}{R_3^2-R_2^2}$，　$B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\dfrac{R_3^2-r^2}{R_3^2-R_2^2}$；

当 $r>R_3$ 时，　$\sum I_i = 0$，　$B = 0$．

11－3. 矩形截面的螺绕环的内外直径分别为 D_1 和 D_2，厚度为 h．

(1) 试求环内磁感应强度的分布；

(2) 试证明通过螺绕环截面的磁通量为

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \ln \frac{D_2}{D_1},$$

其中 N 为螺绕环的总匝数，I 为线圈中的电流强度.

[解] (1) 根据螺绕环的对称性，安培环路 L 可选为过场点 P 所作的以螺绕环中心轴为圆心的圆. 由于磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 均沿环路切线方向，因此有

$$\oint_{(L)} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_{(L)} B \,\mathrm{d}l = B 2\pi r .$$

根据安培环路定理，上述积分等于穿过环路 L 的电流的代数和的 μ_0 倍，即 $\mu_0 N I$. 因此，由上式可得环内磁感应强度的分布为

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}.$$

(2) 由上式可得，螺绕环截面的磁通量为

$$\Phi_B = \iint B \,\mathrm{d}S = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \ln \frac{D_2}{D_1}.$$

11－4. 一无限长圆柱形直导线外包一层磁导率为 μ 的圆筒形磁介质，导线半径为 R_1，磁介质的外半径为 R_2，导线内有电流 I 通过，且电流沿导线横截面均匀分布.

(1) 试求磁介质内外的磁场强度和磁感应强度的分布，并画出 $H-r$ 和 $B-r$ 曲线；

(2) 试求磁介质内外表面的磁化电流的线密度.

[解] (1) 利用有磁介质时的安培环路定理以及介质的磁化规律，即在磁介质内 $B = \mu H$，在磁介质外 $B = \mu_0 H$，可得

当 $r < R_1$ 时，　$H = \dfrac{I r}{2\pi R_1^2}$，　$B = \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}$；

当 $R_1 < r < R_2$ 时，　$H = \dfrac{I}{2\pi r}$，　$B = \dfrac{\mu I}{2\pi r}$；

当 $r > R_2$ 时，　$H = \dfrac{I}{2\pi r}$，　$B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$.

画 $H-r$ 和 $B-r$ 曲线(略).

(2) 利用磁场强度的定义式 $\boldsymbol{H} = \dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M}$，可得

当 $R_1 < r < R_2$ 时，　$M = \dfrac{(\mu - \mu_0) I}{2\pi \mu_0 r}$；

再利用磁化电流线密度公式 $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{n}$，可得磁介质内外表面的磁化电流的线密度分别为

$$A_1' = \frac{(\mu - \mu_0) I}{2\pi \mu_0 R_1}, \qquad A_2' = -\frac{(\mu - \mu_0) I}{2\pi \mu_0 R_2}.$$

11－5. 在均匀磁化的无限大磁介质中挖出一半径为 r，高为 h 的圆柱形空穴，其轴平行于磁化强度 $\boldsymbol{M}$，试证明：

(1) 对于细长空穴($h >> r$)，空穴中点的 $\boldsymbol{H}$ 与磁介质中的 $\boldsymbol{H}$ 相等；

(2) 对于扁平空穴($h << r$)，空穴中点的 $\boldsymbol{B}$ 与磁介质中的 $\boldsymbol{B}$ 相等.

[证明] (1) 如图(a)所示，对于细长空穴($h >> r$)的中点 1 及其邻近的介质中的一点 2 而言，挖出空穴所造成的附加磁感应强度 $\boldsymbol{B}'$ 来源于空穴表面的宛如细长螺线管的磁化电流，其线密度的大小为 $A' = M$. 由于是空穴，介质表面外法线方向指向空穴内部，因此磁化电流在细长空穴内形成的 $\boldsymbol{B}_1'$ 方向与 $\boldsymbol{M}$ 相反，其大小为 $B_1 = \mu_0 A' = \mu_0 M$. 而在细长空穴之外，$\boldsymbol{B}_2' = 0$. 如果假定在未挖空穴的均匀介质中，磁感应强度为 $\boldsymbol{B}_0$，磁场强度为 $\boldsymbol{H}_0$，则在挖了细长空穴之后，有如下结果：

$$\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_1' = \boldsymbol{B}_0 - \mu_0 \boldsymbol{M},$$

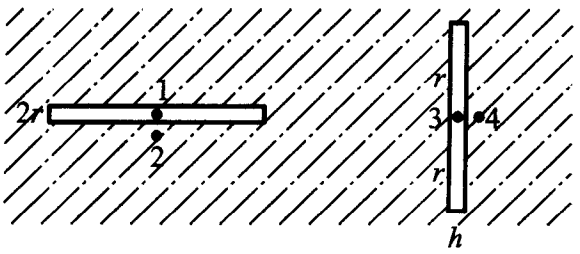
$$\boldsymbol{H}_1 = \frac{\boldsymbol{B}_1}{\mu_0} - \boldsymbol{M}_1 = \frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0} - \boldsymbol{M} = \boldsymbol{H}_0;$$

$$\boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_2' = \boldsymbol{B}_0,$$

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{\boldsymbol{B}_2}{\mu_0} - \boldsymbol{M}_2 = \frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0} - \boldsymbol{M} = \boldsymbol{H}_0.$$

所以，$\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{H}_2$，即细长空穴中点的 $\boldsymbol{H}$ 与磁介质中的 $\boldsymbol{H}$ 相等.

按照磁荷观点，在挖了细长空穴之后，在空穴两头形成了磁荷. 在 $h >> r$ 的条件下，距场点很远的小磁荷对中心磁场的贡献 $H_1' \approx H_2' \approx 0$，由此立即可得 $\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{H}_2$.



(a)　　(b)

题 11－5 图

(2) 如图(b)所示，对于扁平空穴($h \ll r$)的中点 3 及其邻近的介质中的一点 4 而言，挖出空穴后磁化电流 $A' = M$ 只是形成了一个半径很大、电流很小的电流环，因此在 $h \ll r$ 的条件下，该电流环对中心磁场的贡献 $B_3' \approx B_4' \approx 0$，所以有 $\boldsymbol{B}_3 = \boldsymbol{B}_4$，即扁平空穴中点的 $\boldsymbol{B}$ 与磁介质中的 $\boldsymbol{B}$ 相等.

按照磁荷观点，在挖了扁平空穴之后，在空穴两边形成了均匀带有磁荷的平面. 在 $h \gg r$ 的条件下，利用与平行板电容器类似的结果可求得 $\boldsymbol{H}_3' = \boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{H}_4' = 0$，于是有如下结果：

$$\boldsymbol{H}_3 = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{M}, \qquad \boldsymbol{H}_4 = \boldsymbol{H}_0;$$

$$\boldsymbol{B}_3 = \boldsymbol{B}_4 = \boldsymbol{B}_0 = \mu_0 \boldsymbol{H}_0 + \mu_0 \boldsymbol{M}.$$

11－6. 已知铁环中心线的周长为 30 cm，横截面积为 1.0 cm^2，在环上密绕 300 匝漆包导线，当导线中通有电流 32 mA 时，通过环横截面积的磁通量为 2.0×10^{-6} Wb. 试求：(1) 铁环内部 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的大小；(2) 铁的磁化率 χ_m 和相对磁导率 μ_r；(3) 铁环的磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 的大小.

[解] $B = \Phi_B / S = 2.0\times10^{-2}$ T，

$H = NI/L = 32$ A/m，

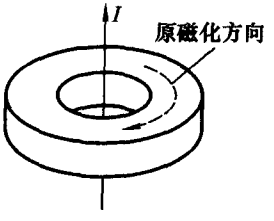
$M = B/\mu_0 - H = 1.6\times10^4$ A/m，

$\chi_m = M/H = 497$，

$\mu_r = 1 + \chi_m = 498$.

对于铁磁材料，与 B/μ_0 相比 H 可以忽略不计，即 $M \approx B/\mu_0$.

11－7. 矩磁材料具有接近矩形的磁滞回线，只要反向场一超过矫顽力，磁化方向就立即反转. 矩磁材料的用途是制作计算机中存储元件的环形磁心. 如图所示，磁心的内、外直径分别为 0.5 mm 和 0.8 mm，高为 0.3 mm. 这个磁心由矫顽力为 H_c = 160 A/m 的矩磁铁氧体材料制成，并假定原来已被磁化. 现在，我们要将磁心的磁化方向全部翻转过来，问穿过磁心的导线中通过的脉冲电流的峰值至少应该多大？

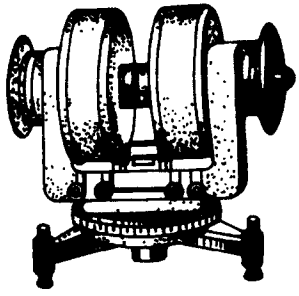


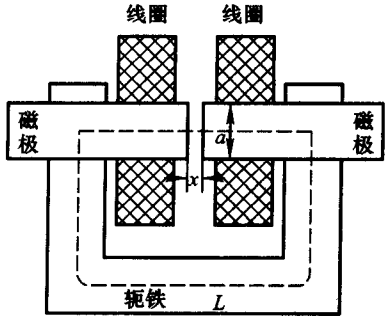
题 11－7 图

[解] 利用有磁介质时的安培环路定理可得，$2\pi r H = I$. 为使磁心的磁化方向完全翻转过来，应使环外沿的磁场也达到其矫顽力值 H_c. 所以，穿过磁心的导线中应通过的脉冲电流的峰值至少应为

$$i_{min} = 2\pi r_2 H_c = 0.40 \text{ A}.$$

11－8. 请你设计一个**电磁体**(electromgnet)，要求在宽度为0.1 m的气隙中产生1T的磁场．已知铜的电阻率为$\rho=2\times10^{-6}\,\Omega\cdot\mathrm{m}$，密度为$d=9\,\mathrm{g/cm^3}$，铜导线容许通过的最大的电流密度为$j_{\max}=10^3\,\mathrm{A/cm^2}$，环形铁心的矩形截面积为1 m×2 m，试计算该电磁体消耗的功率以及至少要用多少铜？试问该电磁体的两磁极间的引力有多大？





题11－8图

[解] 将安培环路定理应用于如图所示的电磁铁，有

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{B}{\mu_0}x+\frac{B}{\mu}(L-x)=NI\,.$$

由于$\mu>>\mu_0$即$\mu_r>>1$，上式中的第二项可以忽略，因此有

$$NI=\frac{B}{\mu_0}x\,.$$

所以，铜导线所消耗的功率为

$$P=I^2R=I^2\frac{\rho N2(a+b)}{S}=2\frac{I}{S}\rho(a+b)NI$$

$$=2j_{\max}\rho(a+b)\frac{B}{\mu_0}x=9.5\,\mathrm{MW}\,.$$

所需要铜的质量为

$$m=2N(a+b)Sd=2(a+b)\frac{B}{j_{\max}\mu_0}xd=4.3\times10^2\,\mathrm{kg}\,.$$

按照磁荷观点，两磁极间的引力为

$$F_{\mathrm{m}}=\sigma_{\mathrm{m}}abH_1=Bab\frac{B}{2\mu_0}=\frac{abB^2}{2\mu_0}=8\times10^5\,\mathrm{N}\,.$$

第十二章　电磁感应

12－1. 一无限长直导线通有交变电流 $i = I_0 \sin \omega t$，在它的旁边有一与它共面的矩形线圈 *ABCD*，长为 *l* 的 *AB* 和 *CD* 两边与直导线平行，它们到直导线的距离分别为 *d* 和 $d+b$．试求矩形线圈所围面积的磁通量，以及线圈中的感应电动势．

[解] 长直导线在距其 r_0 处产生的磁场为

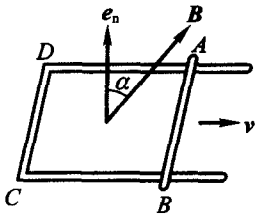
$$B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r_0} \sin \omega t .$$

矩形线圈所围面积的磁通量及线圈中的感应电动势分别为

$$\Phi_B = \int_d^{d+b} \frac{\mu_0 I_0 l}{2\pi r} \sin \omega t \, \mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I_0 l}{2\pi} \ln \frac{d+b}{d} \sin \omega t ,$$

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu_0 I_0 l \omega}{2\pi} \ln \frac{d+b}{d} \cos \omega t .$$

12－2. 如图所示，线圈 *ABCD* 放在 $B = 6.0 \times 10^{-1}$ T 的均匀磁场中，磁场方向与线圈平面的法线方向之间的夹角为 $\alpha = 60°$，长为 0.20 m 的 *AB* 边可左右滑动．若令 *AB* 边以速率 $v = 5.0$ m/s 向右运动，试求线圈中感应电动势的大小及感应电流的方向．



题 12－2 图

[解] 在 *AB* 向右滑动的过程中，电子在洛伦兹力 $-e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 的作用下从 *B* 向 *A* 运动，因此感应电动势和感应电流的方向都从 $A \to B$，感应电动势的大小为

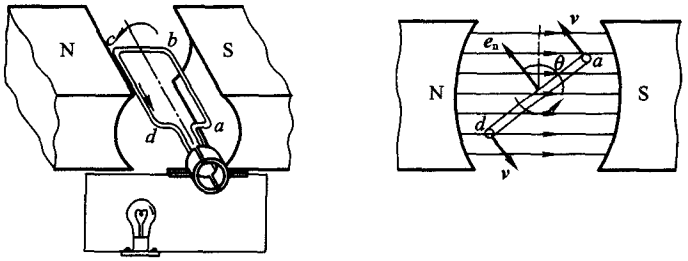
$$\mathcal{E} = \int_A^B (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = lvB\cos\alpha = 0.30\,\mathrm{V} .$$

12－3. 如图所示，交流发电机线圈的转轴 *OO'* 与均匀磁场 ***B*** 垂直．已知 $B = 0.84$ T，线圈面积 $S = 25\,\mathrm{cm}^2$，线圈匝数 $N = 10$，每秒钟转 50 圈．若开始时线圈平面的法线与 ***B*** 垂直，求线圈中的感应电动势．

[解] 当 $t = 0$ 时 $\theta_0 = \pi/2$，因此感应电动势为

$$\mathcal{E} = NBS\omega \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = NBS\omega \cos \omega t = 6.6 \cos(100\pi t) ,$$

式中 $\mathcal{E}$ 的单位为 V，*t* 的单位为 s．



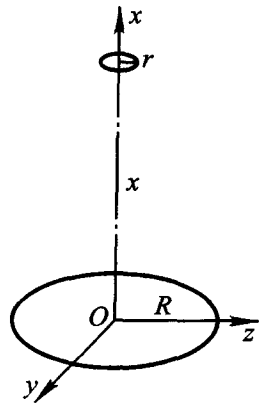
题 12－3 图　交流发电机的基本原理

12－4. 两同轴平面圆线圈的半径分别为 R 与 r，相距 x 平行放置．由于 $x>>R>r$，小线圈面积内的磁场可看成是均匀的．(1) 试求小线圈面积的磁通量；(2) 若小线圈以匀速率 v 沿轴线方向离开大线圈平行移动，试求小线圈中产生的感应电动势的大小和方向．

[解] 设中心在原点的大线圈平放在 yz 平面内，它在 x 轴附近产生的磁场沿 x 轴正方向；小线圈的中心位于$(x, 0, 0)$处．小线圈内近似均匀的磁场的大小及小线圈的磁通量分别为

$$B=\frac{\mu_0 R^2 I}{2(R^2+x^2)^{3/2}},$$

$$\Phi_B=\frac{\mu_0 \pi r^2 R^2 I}{2(R^2+x^2)^{3/2}}.$$



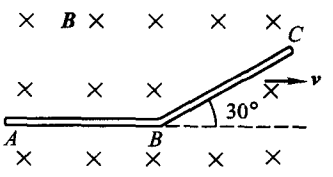
题 12－4 图

因此，当小线圈以匀速率 v 沿轴线方向离开大线圈移动时，在小线圈中产生的感应电动势的大小为

$$\mathcal{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}=\frac{3}{2}\frac{\mu_0 \pi r^2 R^2 I}{2(R^2+x^2)^{5/2}}2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{3\mu_0 \pi r^2 R^2 I x v}{2(R^2+x^2)^{5/2}},$$

其方向与 x 轴正方向构成右手螺旋．

12－5. 如图所示，相接成 30°角的导体 AB 和 BC 的长度均为 10 cm，磁场方向垂直于纸面向里，其大小为 $B=2.5\times10^{-2}$ T．若使该导体在均匀磁场中以速率 $v=1.5\,\mathrm{m/s}$ 运动，方向与 AB 段平行，试问 AC 间的电势差是多少？哪一端的电势高？



题 12－5 图

[解] 导体运动方向与 AB 段平行，AB 段上没有感应电动势产生；对于 BC 段，有

$$\mathcal{E} = \int_B^C v B\cos 60^\circ \,\mathrm{d}l = v B l \cos 60^\circ = 1.9\times10^{-3}\ \mathrm{V}.$$

所以，AC 间的电势差为

$$U_{AC} = -\mathcal{E} = -1.9\times10^{-3}\ \mathrm{V},$$

C 点的电势高.

12－6. 在半径 $R = 0.50$ m 的圆柱体内有一均匀磁场，其方向与圆柱体的轴线平行，且 $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t = 1.0\times10^{-2}$ T/s，圆柱体外无磁场. 试求离开中心 O 的距离分别为 0.10 m，0.25 m 和 0.50 m 各点的有旋电场.

[解] 匀速变化均匀磁场具有圆柱对称性，它所产生的有旋电场所形成的电场线是以圆柱轴为圆心的一系列同心圆，因此有

$$\mathcal{E} = \oint \boldsymbol{E}_\mathrm{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 2\pi r E_\mathrm{r} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\pi r^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t},$$

即

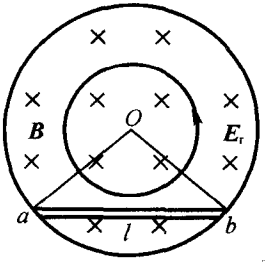
$$E_\mathrm{r} = -\frac{1}{2}r\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}.$$

由此可得，当 $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t = 1.0\times10^{-2}$ T/s 时，有旋电场的场强方向均与磁场 $\boldsymbol{B}$ 方向构成左手螺旋，其大小分别为

r/m	0.1	0.25	0.5
$E_r/(\mathrm{V\cdot m^{-1}})$	5.0×10^{-4}	1.3×10^{-3}	2.5×10^{-3}

12－7. 如图所示，磁感应强度为 B 的均匀磁场充满在半径为 R 的圆柱体内，有一长为 l 的金属棒放在该磁场中. 如果 B 正以速率 $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$ 变化，试证明：由这一变化磁场产生的、作用于棒两端的电动势等于

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\frac{l}{2}\sqrt{R^2-(\frac{l}{2})^2}.$$



题 12－7 图

[证明] 可以有以下两种证明方法：

(1) 有旋电场 E_r 所形成的电场线是以圆柱轴为圆心的同心圆；若以与磁场方向形成右手螺旋为正方向，则它在该方向上的投影为

$$E_\mathrm{r} = -\frac{1}{2}r\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t},$$

图中具体给出了在 $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t>0$ 时 $\boldsymbol{E}_\mathrm{r}$ 的方向.

考虑导体棒上的 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 段，其上所产生的感生电动势为

$$\mathrm{d}\mathcal{E} = \boldsymbol{E}_\mathrm{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -E_\mathrm{r}\,\mathrm{d}x\cos\theta = \frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x\frac{h}{r} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\sqrt{R^2-(\frac{l}{2})^2}\,\mathrm{d}x.$$

将上式积分可得，由变化磁场产生并作用于棒两端的电动势为

$$\mathcal{E}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\sqrt{R^2-(\frac{l}{2})^2}\int_0^l \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\frac{l}{2}\sqrt{R^2-(\frac{l}{2})^2}\ .$$

在 $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t>0$ 的情况下，感生电动势的方向是从 a 指向 b 的.

(2) 设想取回路 $ObaO$，并以顺时针方向为正方向，则根据法拉第电磁感应定律，有

$$\mathcal{E}_{ObaO}=-S\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{2}lh\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=-\frac{l}{2}\sqrt{R^2-(\frac{l}{2})^2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\ .$$

由于 Oa 和 Ob 上的 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{r}}$ 垂直于 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，即 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{r}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$，因此有 $\mathcal{E}_{Ob}=\mathcal{E}_{Oa}=0$，所以回路 $ObaO$ 中只有我们感兴趣的导体棒 ba 段上有感生电动势，即棒两端的电动势为

$$\mathcal{E}_{ab}=-\mathcal{E}_{ba}=-\mathcal{E}_{ObaO}=\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\frac{l}{2}\sqrt{R^2-(\frac{l}{2})^2}\ .$$

12－8. 电子感应加速器轨道半径为 84 cm，其内最大磁通量为 1.8 Wb，电子被加速的时间共计 4.2 ms. 如果电子最终获得的能量为 1.2×10^8 eV，试求电子需绕行多少周？电子沿轨道绕行一周平均获得的能量是多少？电子绕行的路程是多少？

[解] 电子沿轨道绕行一周所获得的平均能量是 $e\,E_{\mathrm{r}}\,2\pi R$，它在数值上等于 $e\,\mathrm{d}\Phi_B/\mathrm{d}t$. 假定电子在 Δt 时间内共绕行了 N 周，其间电子轨道内的磁通量从零线性地增加到了 $\Phi_{B\max}$，于是有

$$E_{\mathrm{k}}=Ne\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}=Ne\frac{\Phi_{B\max}}{\Delta t}\ .$$

所以，为了达到 1.2×10^8 eV 的能量，电子所需绕行的周数为

$$N=\frac{E_{\mathrm{k}}\,\Delta t}{e\,\Phi_{B\max}}=2.8\times10^5\ ,$$

电子沿轨道绕行一周平均获得的能量为

$$\frac{E_{\mathrm{k}}}{N}=\frac{e\,\Phi_{B\max}}{\Delta t}=4.3\times10^2\ \mathrm{eV}\ ,$$

电子绕行的路程总共为

$$L=N\,2\pi R=1.5\times10^6\ \mathrm{m}\ .$$

12－9. (1) 长 30 cm、直径 3.0 cm 的纸筒上绕有 500 匝线圈，试求该线圈的自感 L_0. (2) 如果在这个线圈内放入 $\mu_{\mathrm{r}}=5000$ 的铁心，并假定线圈与铁心之间没有缝隙，试求这时线圈的自感 L.

[解] 利用载流长直螺线管中磁感应强度和线圈磁链的公式

$$B=\frac{\mu_0\mu_r N I}{l}\qquad 和\qquad \Psi=NB\pi R^2=\frac{\mu_0\mu_r N^2\pi R^2 I}{l},$$

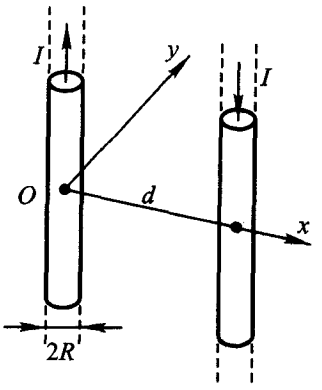
可以得到在铁心放入线圈前后线圈的自感分别为

$$L_0=\frac{\Psi_0}{I}=\frac{\mu_0 N^2\pi R^2}{l}=0.74\,\text{mH},$$

$$L=\frac{\Psi}{I}=\frac{\mu_0\mu_r N^2\pi R^2}{l}=\mu_r L_0=3.7\,\text{H}.$$

12－10. 横截面半径均为 R 的两根平行长直导线，中心相距为 d，它们分别载有大小相等、方向相反的电流，属于同一回路．设导线内部的磁通量可以忽略不计，试证明这样一对导线的长为 l 的一段的自感为

$$L=\frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{d-R}{R}.$$



题 12－10 图

[解] 如图所示，两根长直导线在其间产生的磁场沿 y 轴正方向，该磁场的大小为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{d-x}\right).$$

忽略导线内部磁通量，这样一对导线的长为 l 的一段的自感为

$$L=\frac{\Phi_l}{I}=\int_R^{d-R}\frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{d-x}\right)\mathrm{d}x=\frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{d-R}{R}.$$

设 r 是场点到导线中心线的垂直距离，在导线内部，$B\propto r$；而在导线外部，$B\propto 1/r$．因此，在 $R\ll d$ 的情况下，尽管在计算磁通量时可以忽略导线内部的贡献，可以忽略导线半径的有限性，但是在计算导线之间的磁通量时却必须考虑到导线半径的有限性，上式积分的下限不能近似取为 0.

12－11. 由漆包细导线绕成的小圆线圈的面积为 $S_1=4.0\,\text{cm}^2$，其匝数为 $N_1=50$．把它放在另一个半径 $R_2=20\,\text{cm}$，$N_2=100$ 匝的圆线圈中心，两线圈同轴共面．

(1) 如果把大线圈在小线圈中产生的磁场看成是均匀的，试求这两线圈间的互感．

(2) 如果大线圈导线中的电流每秒减小 50 A，试求小线圈中的感应电动势．

[解] (1) 大线圈在小线圈中心产生的磁场为

$$B_{12}=\frac{\mu_0 N_2 I_2}{2R_2}.$$

若把大线圈在小线圈中产生的磁场看成是均匀的，则通过小线圈的磁链为 $\Psi_{12}=N_1 B_{12} S_1$. 所以，这两个线圈的互感为

$$M=\frac{\Psi_{12}}{I_2}=\frac{\mu_0 N_1 N_2 S_1}{2R_2}=6.3\times10^{-6}\ \mathrm{H}.$$

(2) 若大线圈导线中电流每秒减小 50 A，则小线圈中的感应电动势为

$$\mathcal{E}_{12}=-M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}=3.1\times10^{-4}\ \mathrm{V}.$$

12－12. 耦合因数为 $k=0.50$ 的两个线圈，顺接串联后的总自感为 1.90H；在它们的形状和位置都不变的情况下，反接串联的总自感为 0.70H. 试求这两个线圈的自感以及它们之间的互感.

[解] 设这两个线圈的自感分别为 L_1 和 L_2，它们之间的互感为 M，则按题意有

$$L_1+L_2+2M=1.90,\qquad L_1+L_2-2M=0.70.$$

由此可解得

$$M=\frac{1.90-0.70}{4}\mathrm{H}=0.30\ \mathrm{H}.$$

再利用

$$M=k\sqrt{L_1L_2}=0.50\sqrt{L_1L_2},$$

即　$L_1L_2=4M^2=0.36$，

由　$L_1+L_2=1.90\mathrm{H}-2M=1.30\mathrm{H}$

可解得

$$L_1=0.90\mathrm{H},\qquad L_2=0.40\mathrm{H}.$$

12－13. 一螺线管长 30 cm，由 2500 匝漆包导线均匀密绕而成，其中铁心的相对磁导率 $\mu_r=1000$. 当它的导线中通有 2.0 A 的电流时，求螺线管中心处的磁场能量密度.

[解] 螺线管中心处的 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 方向相同，其大小分别为

$$B=\frac{\mu_r\mu_0 NI}{l},\qquad H=\frac{NI}{l}.$$

所以，螺线管中心处的磁场能量密度为

$$w=\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}=\frac{\mu_r\mu_0 N^2 I^2}{2l^2}=1.7\times10^5\ \mathrm{J/m^3}.$$

12－14. 一根长直导线载有电流 I，且 I 均匀地分布在导线的横截面上．试求在长度为 l 的一段导线内部的磁场能量.

[解] 长直导线内部 $\mu_r \approx 1$，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 方向相同，大小分别为

$$B=\frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}, \qquad H=\frac{I r}{2\pi R^2}.$$

于是，在长度为 l 的一段导线内部的磁场能量为

$$W_{ml}=\frac{1}{2}\iiint \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\,\mathrm{d}V=\frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi R^4}\int_0^R r^3\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi}.$$

12－15. 一根同轴线由长直导线及套在它外面的同轴圆筒构成，导线与圆筒之间充满了相对磁导率 $\mu_r \approx 1$ 的介质．假定导线的半径为 R_1，圆筒的内外半径分别为 R_2 和 R_3．电流 I 由圆筒流去，由直导线流回，并均匀地分布在它们的横截面上．(1) 试给出空间各个范围内的磁能密度表达式．(2) 当 $R_1=1.0\,\mathrm{mm}$，$R_2=4.0\,\mathrm{mm}$，$R_3=5.0\,\mathrm{mm}$，$I=10\,\mathrm{A}$ 时，在每米长度的同轴线中所储存的磁场能量.

[解] (1) 利用习题 11－2 的结果及 $H=B/\mu_r\mu_0 \approx B/\mu_0$，在空间的各个范围内的磁能密度表达式分别为：

当 $r<R_1$ 时，　$B=\dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}$，　$w_m=\dfrac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 R_1^4}$；

当 $R_1<r<R_2$ 时，　$B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$，　$w_m=\dfrac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}$；

当 $R_2<r<R_3$ 时，　$B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\dfrac{R_3^2-r^2}{R_3^2-R_2^2}$，　$w_m=\dfrac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}\left(\dfrac{R_3^2-r^2}{R_3^2-R_2^2}\right)^2$；

当 $r>R_3$ 时，　$B=0=\mu_0 H$，　$w_m=0$.

(2) 在每米长度的同轴线中储存的磁场能量为

$$\begin{aligned}W_{ml}&=\frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2}\left[\int_0^{R_1}\frac{r^2}{R_1^4}+\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r^2}+\int_{R_2}^{R_3}\frac{1}{r^2}\left(\frac{R_3^2-r^2}{R_3^2-R_2^2}\right)^2\right]2\pi r\,\mathrm{d}r\\&=\frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\left[\frac{1}{4}+\ln\frac{R_2}{R_1}+\frac{R_3^4\ln(R_3/R_2)}{(R_3^2-R_2^2)^2}-\frac{R_3^2}{R_3^2-R_2^2}+\frac{R_3^4-R_2^4}{4(R_3^2-R_2^2)^2}\right]\\&=1.7\times10^{-5}\,\mathrm{J}.\end{aligned}$$

12－16. 红宝石激光器中的脉冲氙灯，常用 2000 μF 的电容器充电到 4 000 V 后放电时的瞬时大电流来发光．若电源给电容器充电时的最大输出电流为 1.0 A，试求此充电电路的时间常量．若脉冲氙灯在放电时灯管的内

阻约为 0.50 Ω，试求最大的放电电流，以及放电电路的时间常量.

[解] 在电源给电容器充电的过程中，有

$$i=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\frac{q_0}{\tau}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}.$$

已知充电时的最大电流为 $i_1=q_0/\tau_1=1.0\,\mathrm{A}$，所以充电电路的时间常量为

$$\tau_1=\frac{q_0}{i_1}=\frac{CU}{i_1}=8.0\,\mathrm{s}.$$

在脉冲氙灯的电容器放电时，其最大的放电电流 i_2 以及放电电路的时间常量 τ_2 分别为

$$i_2=\frac{q_0}{\tau_2}=\frac{CU}{RC}=\frac{U}{R}=8.0\times10^3\,\mathrm{A},$$

$$\tau_2=RC=1.0\,\mathrm{ms}.$$

12－17. 一个自感为 3.0 H、电阻为 6.0 Ω的线圈接在 12 V 的电源上，电源的内阻可忽略不计．试求刚接通和接通 0.20 s 时的 d*i*/d*t*，以及电流达到 1.0 A 时的 d*i*/d*t*.

[解] 在电感接通电源之后，电流变化所遵从的规律是

$$i=\frac{U}{R}(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}),$$

其中 $\tau=L/R=0.50\,\mathrm{s}$．因此，电流随时间的变化率为

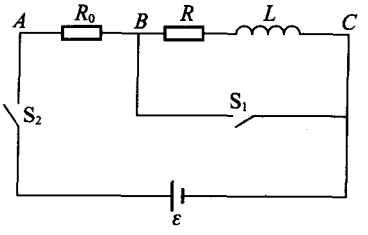
$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{U}{R\tau}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}=4.0\mathrm{e}^{-2t}.$$

在刚接通时，$t=0$，d*i*/d*t* = 4.0 A/s；在接通 $t=0.20\,\mathrm{s}$ 时，d*i*/d*t* = 2.7 A/s；而在电流达到 1.0 A 时，有

$$i=\frac{U}{R}(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})=1.0\,\mathrm{A},\qquad \text{即}\qquad \mathrm{e}^{-2t}=0.50,$$

代入上式即可得这时的 d*i*/d*t* = 2.0 A/s.

12－18. 如图所示，一自感为 *L*、电阻为 *R* 的线圈，与一无自感电阻 R_0 串联后接在电源上．设电源的电动势为 ε，内阻可忽略不计．(1) 试求开关 S_2 闭合 *t* 时间后，线圈两端的电势差 u_{BC}．(2) 若 ε = 20 V，R_0 = 50 Ω，*R* = 150 Ω，*L* = 5.0 H，τ 为电路的时间常量，试求 t = 0.5 τ 时线圈两端



题 12－18 图

的电势差 u_{BC}，以及无自感电阻 R_0 两端的电势差 u_{AB}. (3) 待电路中电流达到其稳定值后，闭合开关 S_1，试求在闭合 0.01 s 后，通过 S_1 中的电流的大小和方向.

[解] (1) 开关 S_2 闭合后，t 时间后电感线圈中通过的电流为

$$i=\frac{\mathcal{E}}{R+R_0}(1-\mathrm{e}^{-\frac{R+R_0}{L}t}).$$

这时，电感线圈两端的电势差为

$$u_{BC}=iR+L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathcal{E}}{R+R_0}(R+R_0\,\mathrm{e}^{-\frac{R+R_0}{L}t}).$$

(2) 若 $\mathcal{E}=20\ \mathrm{V}$，$R_0=50\ \Omega$，$R=150\ \Omega$，$L=5.0\ \mathrm{H}$，则在

$$t=\frac{\tau}{2}=\frac{L}{2(R+R_0)}$$

时，电感线圈及电阻 R_0 两端的电势差分别为

$$u_{BC}=\frac{20}{150+50}(150+50\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}})\ \mathrm{V}=18\ \mathrm{V},$$

$$u_{AB}=2.0\ \mathrm{V}.$$

(3) 待上述电路中电流达到稳定值后，闭合开关 S_1，这时开关 S_2 并未打开. 若以此为计时零点，则通过 S_1 中的电流随时间的变化规律为

$$i=\frac{\mathcal{E}}{R_0}-\frac{\mathcal{E}}{R+R_0}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}.$$

因此，开关 S_1 闭合 0.01 s 后通过 S_1 的电流为 0.33 A，方向从 B 到 C.

12－19. 电阻 R 与电容 C 串联后接到电动势为 $\mathcal{E}$ 的电源上，电源的内阻可以忽略不计. 试证明：在电容充电过程中，电阻 R 上所产生的总焦耳热等于充电过程完结时电容器中储存的能量，而与电阻 R 的大小无关.

[证明] 在电容充电过程中，通过电阻 R 的电量 q 和电流 i 分别为

$$q=q_0(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}),$$

$$i=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\frac{q_0}{\tau}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}},$$

其中 $q_0=C\mathcal{E}$，$\tau=RC$. 于是，电阻 R 上所产生的总焦耳热为

$$\int_0^{\infty}(\frac{q_0}{\tau}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})^2R\,\mathrm{d}t=\frac{\mathcal{E}^2}{R}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{2t}{RC}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}C\mathcal{E}^2,$$

它等于充电过程完结时电容器中储存的能量，而与电阻 R 的大小无关.

12－20. 在一串联电路中，电阻为 $3.00\times10^6\ \Omega$，电容为 1.00 μF，电源的电动势为 $\mathcal{E}=4.00$ V，其内阻可忽略不计. 试求在电路接通后 1.00 s 时的下列各量：(1) 电容极板上电荷的增加速率 $\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$. (2) 电容器内所储存能量的增加速率 $\mathrm{d}W/\mathrm{d}t$. (3) 电阻所产生的热功率 P_R. (4) 电源所提供的功率 $P_{\mathcal{E}}$.

[解] 在 RC 电路的充电过程中，有 $q=q_0(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})$. 因此，在电路接通后 1.00 s 时，有如下结果：

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathcal{E}}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}=\frac{4.00\,\mathrm{V}}{3.00\times10^6\,\Omega}\mathrm{e}^{-0.333}=9.56\times10^{-7}\,\mathrm{C/s},$$

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right)=\frac{q}{C}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=1.08\times10^{-6}\,\mathrm{J/s},$$

$$P_R=i^2R=\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right)^2R=2.74\times10^{-6}\,\mathrm{J/s},$$

$$P_{\mathcal{E}}=i\mathcal{E}=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}=3.82\times10^{-6}\,\mathrm{J/s}.$$

12－21. (1) 已知某地的地球磁场是 5.8×10^{-5} T，试问在半径为 2.0 mm 的环中有多少个磁通量子？

(2) 如果超导量子干涉器件(SQUID)可以测量小到 1/10000 个磁通量子的变化，试问用半径为 2.0 mm 的环构成 SQUID，它能测量的最小磁场改变是多少？

[解] (1) 已知磁通量子 $\Phi_0=2.068\times10^{-15}$ Wb，因此 $B=5.8\times10^{-5}$ T 的地球磁场在半径为 $R=2$ mm 的环中的磁通量子数为

$$N=\frac{\pi R^2B}{\Phi_0}=\frac{3.142\times(2.0\times10^{-3})^2\times5.8\times10^{-5}}{2.068\times10^{-15}}=3.5\times10^5.$$

(2) 若 SQUID 可以测量小到 $\Delta N=1/10000$ 个磁通量子的变化，则半径为 $R=2$ mm 的环构成的 SQUID 能测量的最小磁场改变是

$$\Delta B=\frac{\Phi_0}{\pi R^2}\Delta N=\frac{2.068\times10^{-15}}{3.142\times(2.0\times10^{-3})^2}\times10^{-4}\,\mathrm{T}=1.6\times10^{-14}\,\mathrm{T}.$$

第十三章　电　　路

13－1. 一个内阻为 $R_g = 25\,\Omega$ 的电流计，当其指针偏转达满刻度时通过的电流为 $I_g = 1.00\,\text{mA}$.

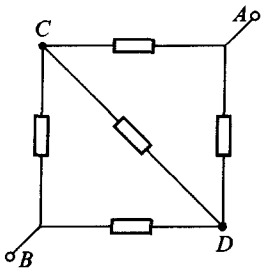
(1) 把它改装成量程为 1.00 A 的安培计时，试问应并联多大的电阻？

(2) 把它改装成量程为 1.00 V 的伏特计时，试问应串联多大的电阻？

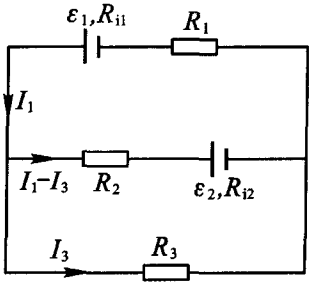
[解] (1) 并联 $2.5\times10^{-2}\,\Omega$；(2) 串联 $9.75\times10^{2}\,\Omega$.

13－2. 图中的每一个电阻的阻值都是 1.0 Ω，试求 *A* 和 *B* 之间的总电阻.

[解] 根据对称性，*C* 和 *D* 两点的电势相等，因此没有电流通过它们之间的电阻，可将其略去. 所以，*A* 和 *B* 之间的总电阻为四个 1.0 Ω电阻两两串联后再并联，即等于 1.0 Ω.



题 13－2 图



题 13－3 图

13－3. 在如图所示的电路中，$R_{i1}=R_{i2}=0.3\,\Omega$，$R_1=1.5\,\Omega$，$R_2=2.5\,\Omega$，$\mathcal{E}_1=12.0\text{V}$，$\mathcal{E}_2=6.0\text{V}$，通过 R_3 的电流为 $I_3=3.0\,\text{A}$，方向如图中箭头所示. 试求通过 R_1 和 R_2 的电流以及 R_3 的数值.

[解] 对于如图所示的回路 *BADCB* 和 *FEDCF*，可以列出如下的基尔霍夫方程：

$$I_1(R_1+R_{i1})-\mathcal{E}_1+I_3R_3=0\,,$$

$$-\mathcal{E}_2-(I_1-I_3)(R_2+R_{i2})+I_3R_3=0\,.$$

解上述方程组，可得

$$I_1=3.13\,\text{A}\,,\quad I_2=I_1-I_3=0.13\,\text{A}\,,\quad R_3=2.13\,\Omega\,.$$

13－4. 对于如图所示的电路，(1) 试求 *A* 和 *B* 两点间的电势差. (2) 若将 *A* 和 *B* 两点接通，试求通过电动势为 8.0 V 的电池的电流.

[解] (1) 在 *A* 和 *B* 断开的情况下，可以只考虑一个回路. 设该回路中的

电流为 I_0，其正方向沿顺时针方向，则有

$$I_0(2.0+1.0+2.0+2.0+1.0+1.0)\Omega-8.0\text{V}+12.0\text{V}=0,$$

即　　$$I_0=-\frac{4}{9}\text{A}=-0.44\text{ A}.$$

于是，A 和 B 两点间的电势差为

$$U_{AB}=U_{CD}+10.0\text{V}$$

$$=-\frac{4}{9}(2.0+1.0+2.0)\text{V}-8.0\text{V}+10.0\text{V}=-\frac{2}{9}\text{V}=-0.22\text{V}.$$

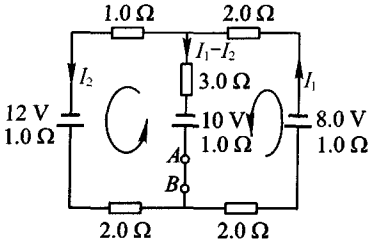
(2) 若将 A 和 B 两点接通，如图所示，则可列出基尔霍夫方程组如下：

$$I_1(2.0+1.0+2.0)\Omega+8.0\text{V}+(I_1-I_2)(3.0+1.0)\Omega-10.0\text{V}=0,$$

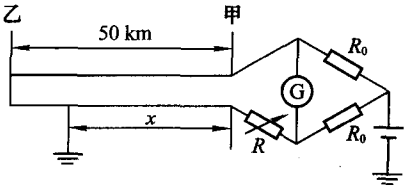
$$I_2(1.0+1.0+2.0)\Omega-12.0\text{V}-(I_1-I_2)(1.0+3.0)\Omega+10.0\text{V}=0.$$

解上述方程组可得，通过电动势为 8.0 V 的电池的电流为

$$I_1=\frac{3}{7}\text{A}=0.43\text{ A}.$$



题 13－4 图



题 13－5 图

13－5. 如图所示，甲乙两站相距 50 km，其间有两条相同的电话线，有一条因在某处触地而发生故障．为了确定触地点到甲站的距离 x，甲站的检修人员先让乙站人员把两条电话线短路，然后调节电阻 R，使通过检流计 G 的电流为零．已知单位长度电话线的电阻为 6.0 Ω / km，测得 R 的阻值为 360 Ω，试求 x.

[解] 当调节电阻 R 使通过检流计 G 的电流为零时，有数值关系

$$6.0\times(50-x+50)=6.0x+360,$$

由此可解得 $x=20\text{km}$.

13－6. 试在同一时间坐标轴上，画出简谐交流电压

$$u_1(t)=311\cos(100\pi t-\frac{2\pi}{3})$$

和　　$$u_2(t)=311\sin(100\pi t-\frac{5\pi}{6})$$

的曲线．式中 t 的单位是 s，u_1 和 u_2 的单位是 V．试问它们的峰值、有效值、频率、周期和初相位各多少？两者的相位差是多少？哪个超前？

[解] (图从略).

$$U_{01}=U_{02}=311\,\mathrm{V},\qquad U_1=U_2=220\,\mathrm{V},$$

$$f_1=f_2=50\,\mathrm{Hz},\qquad T_1=T_2=0.02\,\mathrm{s},$$

$$\varphi_{10}=-\frac{2}{3}\pi,\qquad \varphi_{20}=\frac{2}{3}\pi,$$

$$\Delta\varphi=\varphi_{20}-\varphi_{10}=\frac{4\pi}{3},$$

即 u_2 比 u_1 超前 $\frac{4\pi}{3}$ 或落后 $\frac{2\pi}{3}$.

13－7. 已知 $CuSO_4$ 溶液的电阻率为 40 Ω·cm，相对介电常量 $\varepsilon_r=80$. 若在 $CuSO_4$ 溶液中插进两块平行铜板作电极通入交流电，试问频率多大时电阻与容抗的数值相等.

[解] 电容器的电容为 $C=\varepsilon_r\varepsilon_0 S/d$，两极间的电阻为 $R=\rho d/S$．按题意，$R=1/\omega_1 C$，$\rho=0.40\,\Omega\cdot\mathrm{m}$，$\varepsilon_r=80$，可得

$$f_1=\frac{1}{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0\rho}=5.6\times10^8\,\mathrm{Hz}.$$

13－8. 一电阻和电感串联的电路，接到电压为 110 V 的交流电源上.

(1) 若交流伏特计不论接于电阻还是电感的两端，其读数都相同，试问这读数是多少？

(2) 若改变电阻和电感的大小，使接于电感两端的伏特计读数为 50 V，试问接于电阻两端的伏特计读数是多少？

[解] (1) 电阻和电感的串联电路两端的电压为 $U=\sqrt{U_R^2+U_L^2}$．因此，若 $U_R=U_L$，则这读数为

$$U_R=U_L=U/\sqrt{2}=78\,\mathrm{V}.$$

(2) 若 $U_L=50\,\mathrm{V}$，则电阻两端的电压读数为

$$U_R=\sqrt{U^2-U_L^2}=\sqrt{110^2-50^2}\,\mathrm{V}=98\,\mathrm{V}.$$

13－9. 在某频率下，电容 C 和电阻 R 的阻抗之比为 $Z_C:Z_R=3:4$，现将它们串联后接到该频率的 100 V 交流电源上．试求：(1) C 和 R 两端的电压 U_C 和 U_R；(2) 总电压与电流之间的相位差.

[解] (1) 电阻和电容的串联电路两端的电压为

$$U=\sqrt{U_R^2+U_C^2},$$

且有　$U_C:U_R=Z_C:Z_R$.

因此，当 $Z_C:Z_R=3:4$，$U=100\,\mathrm{V}$ 时，有如下结果：

$$U_C=60\,\mathrm{V},\qquad U_R=80\,\mathrm{V}.$$

(2) 总电压 U 与电流 I 间的相位差为

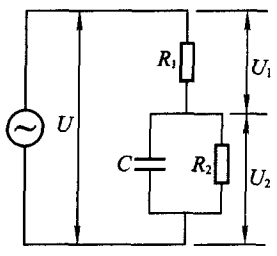
$$\Delta\varphi=-\arctan\frac{U_C}{U_R}=-36°52',\text{即总电压落后于电流}36°52'.$$

13－10. 在某频率下，电感 L 和电容 C 的阻抗之比为 $Z_L:Z_C=2:1$．现将它们并联后接到该频率的交流电源上，若总电流为 $I=10\,\mathrm{mA}$，试求通过 L 和 C 的电流 I_L 和 I_C.

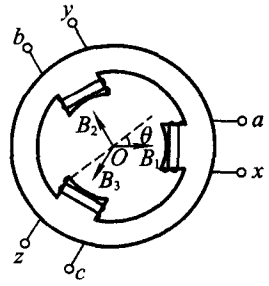
[解] L 和 C 并联后，通过它们的电流的大小与其阻抗成反比，即 $I_C:I_L=2:1$．同时，由于它们有共同的电压，因此电流 I_C 与 I_L 的相位相反，即 $I=I_C-I_L$．所以，有 $I_L=10\,\mathrm{mA}$ 和 $I_C=20\,\mathrm{mA}$.

13－11. 在如图所示的电路中，已知 $U_1=U_2=20\,\mathrm{V}$，$Z_C=R_2$，试用矢量图解法求总电压 U，以及总电压与总电流之间的相位差.

[解] $U=2U_1\cos22.5°=37\,\mathrm{V}$，$\varphi_u-\varphi_i=22.5°$.



题 13－11 图



题 13－12 图

13－12. 三对线圈按照如图所示的方式放置，它们的轴线之间的夹角均为 $120°$．在线圈中通过三相交流电，即相邻线圈中电流的相位差正好是 $120°$，因此在这三个轴线方向上的磁感应强度分别为

$$B_1=B_0\cos\omega t,$$

$$B_2=B_0\cos(\omega t+120°),$$

$$B_3=B_0\cos(\omega t+240°).$$

试证明它们合成的磁场是以角速度 ω 旋转的、大小为 $3B_0/2$ 的磁场．在这种旋转磁场的带动下，线圈以稍低的转速随之旋转，这就是**三相感应(异步)电动机**依据的基本原理.

[证明] 将 $\boldsymbol{B}_1$，$\boldsymbol{B}_2$ 和 $\boldsymbol{B}_3$ 分别投影到 x 和 y 轴上，各分量分别为

$$B_{1x} = B_1 = B_0\cos\omega t\,,$$

$$B_{2x} = B_2\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}B_0\cos(\omega t + 120^\circ)\,,$$

$$B_{3x} = B_3\cos 240^\circ = -\frac{1}{2}B_0\cos(\omega t + 240^\circ)\,;$$

$$B_{1y} = 0\,,$$

$$B_{2y} = B_2\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}B_0\cos(\omega t + 120^\circ)\,,$$

$$B_{3y} = B_3\sin 240^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}B_0\cos(\omega t + 240^\circ)\,.$$

于是，总磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的 x 和 y 分量分别为

$$B_x = B_{1x} + B_{2x} + B_{3x} = \frac{3}{2}B_0\cos\omega t\,,$$

$$B_y = B_{1y} + B_{2y} + B_{3y} = \frac{3}{2}B_0\sin\omega t\,.$$

由此可得合成磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的大小及其与 x 轴的夹角 α 分别为

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \frac{3}{2}B_0\,,\qquad \alpha = \arctan\frac{B_y}{B_x} = \omega t\,,$$

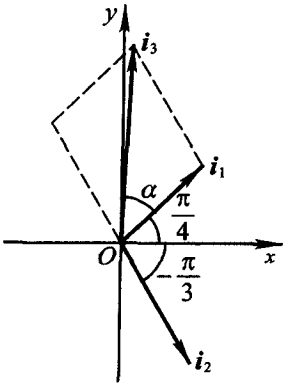
即合成磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 以匀角速 ω 沿逆时针方向旋转.

13－13. 有三条支路汇聚于一点，电流的正方向为 i_1 流出汇聚点，i_2 和 i_3 流进汇聚点．设

$$i_1 = 30\cos(\omega t + \frac{\pi}{4})\,,$$

$$i_2 = 40\cos(\omega t - \frac{\pi}{3})$$

(i_1 和 i_2 的单位是 A)，试用矢量图解法求 i_3 的瞬时值表达式.



题 13－13 图

[解] 按题意，有 $i_1 = i_2 + i_3$，即

$$i_3 = i_1 + (-i_2)\,.$$

据此可作出矢量图，并根据余弦定理得

$$I_{03} = \sqrt{I_{01}^2 + I_{02}^2 - 2I_{01}I_{02}\cos 105^\circ} = 56\text{A}\,.$$

再由　$I_{02}^2 = I_{01}^2 + I_{03}^2 - 2I_{01}I_{03}\cos\alpha$，

可得　$\alpha = \arccos\dfrac{I_{01}^2 + I_{03}^2 - I_{02}^2}{2I_{01}I_{03}} = 44°$.

所以，i_3 的瞬时值表达式为

$$i_3 = 56\cos(\omega t + 89°).$$

13－14. 试证明 *RC* 串联后与 *L* 并联的电路的总阻抗及其相位差分别为

$$Z = \omega L\sqrt{\frac{1+(\omega CR)^2}{(1-\omega^2 LC)^2+(\omega CR)^2}},$$

$$\varphi = \arctan\frac{(1-\omega^2 LC)+(\omega CR)^2}{\omega^3 RLC^2}.$$

[证明]

$$\frac{1}{\tilde{Z}} = \frac{1}{R+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} = \frac{\mathrm{j}\omega C}{\mathrm{j}\omega CR+1} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L}$$

$$= \frac{-\omega^2 LC + \mathrm{j}\omega CR + 1}{-\omega^2 LCR + \mathrm{j}\omega L},$$

$$\tilde{Z} = \frac{-\omega^2 LCR + \mathrm{j}\omega L}{1-\omega^2 LC + \mathrm{j}\omega CR}$$

$$= \frac{(-\omega^2 LCR+\mathrm{j}\omega L)(1-\omega^2 LC-\mathrm{j}\omega CR)}{(1-\omega^2 LC)^2+(\omega CR)^2}$$

$$= \frac{\omega^4 L^2C^2R+\mathrm{j}\omega L(1-\omega^2 LC+\omega^2C^2R^2)}{(1-\omega^2 LC)^2+(\omega CR)^2}.$$

故有　$$Z = \frac{\sqrt{[\omega^4 L^2C^2R]^2+[\omega L(1-\omega^2 LC+\omega^2C^2R^2)]^2}}{(1-\omega^2 LC)^2+(\omega CR)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{\omega^2L^2[1+(\omega CR)^2][(1-\omega^2 LC)^2+(\omega CR)^2]}}{(1-\omega^2 LC)^2+(\omega CR)^2}$$

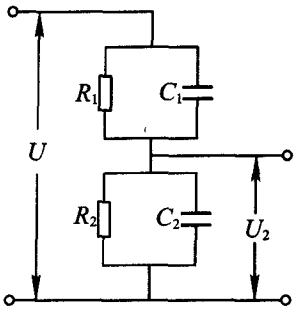
$$= \omega L\sqrt{\frac{1+(\omega CR)^2}{(1-\omega^2 LC)^2+(\omega CR)^2}},$$

$$\varphi = \arctan\frac{(1-\omega^2 LC)+(\omega CR)^2}{\omega^3 RLC^2}.$$

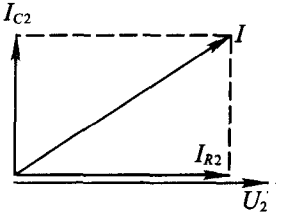
13－15. 如图(a)所示的电路是一种脉冲分压器，它是为了消除分布电容的影响而设计的. 当C_1，C_2，R_1和R_2满足一定的条件时，该分压器就能和直流电路一样使输入电压U与输出电压U_2之比等于电阻之比，即

$$\frac{U_2}{U}=\frac{R_2}{R_1+R_2},$$

而与频率无关. 试求电容和电阻应满足的条件.



(a)



(b)

题 13－15 图

[解] (1) 解法一：矢量图解法.

首先，对 R_2C_2 并联电路来说，电阻和电容两端的电压$\tilde{U}_2$是共同的，即

$$\tilde{U}_2=\tilde{I}_{R2}R_2=\tilde{I}_{C2}\tilde{Z}_{C2}.$$

如图(b)所示，矢量$\boldsymbol{I}_{R2}$与 $\boldsymbol{U}_2$ 方向一致，而表示总电流的矢量 $\boldsymbol{I}$ 比它们超前相位 $\varphi_2=\arctan(Z_{C2}/R_2)$. 显然，$R_1C_1$ 并联电路的情况与此相同，但在一般情况下 φ_1 与 φ_2 并不相同. 其次，对于由 R_1C_1 和 R_2C_2 两个并联电路串联所构成的脉冲变压器来说，总电流矢量 $\boldsymbol{I}$ 是共同的，因此当 φ_1 与 φ_2 不相同时，矢量 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{U}_2$ 的方向也不相同，即

$$U\neq U_1+U_2,\qquad \frac{U_2}{U}\neq\frac{R_2}{R_1+R_2}.$$

但是，当 $\varphi_1=\varphi_2$ 时，即当

$$\frac{Z_{C1}}{R_1}=\frac{Z_{C2}}{R_2}\qquad 或\qquad C_1R_1=C_2R_2$$

时，对于共同的矢量 $\boldsymbol{I}$，矢量$\boldsymbol{I}_{R1}$和$\boldsymbol{I}_{R2}$的方向相同，矢量 $\boldsymbol{U}_1$ 和 $\boldsymbol{U}_2$ 的方向也相同，于是就可以得到

$$\frac{U_2}{U}=\frac{R_2}{R_1+R_2}$$

的结果. 所以，该脉冲变压器的电容和电阻应满足的条件是

$$C_1R_1=C_2R_2.$$

(2) 解法二：复数法.

先求出 R_1C_1 并联电路和 R_2C_2 并联电路的复阻抗

$$\tilde{Z}_1 = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \mathrm{j}\omega C_1} = \frac{R_1}{1 + \mathrm{j}\omega C_1 R_1} = \frac{R_1 - \mathrm{j}\omega C_1 R_1^2}{1 + \omega^2 C_1^2 R_1^2},$$

$$\tilde{Z}_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \mathrm{j}\omega C_2} = \frac{R_2}{1 + \mathrm{j}\omega C_2 R_2} = \frac{R_2 - \mathrm{j}\omega C_2 R_2^2}{1 + \omega^2 C_2^2 R_2^2},$$

于是，整个电路的复阻抗为

$$\begin{aligned}\tilde{Z} &= \tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2 = \frac{R_1 - \mathrm{j}\omega C_1 R_1^2}{1 + \omega^2 C_1^2 R_1^2} + \frac{R_2 - \mathrm{j}\omega C_2 R_2^2}{1 + \omega^2 C_2^2 R_2^2} \\ &= \frac{(1+\omega^2 C_2^2 R_2^2)(R_1 - \mathrm{j}\omega C_1 R_1^2) + (1+\omega^2 C_1^2 R_1^2)(R_2 - \mathrm{j}\omega C_2 R_2^2)}{(1+\omega^2 C_1^2 R_1^2)(1+\omega^2 C_2^2 R_2^2)} \\ &= \frac{R_1(1+\omega^2 C_2^2 R_2^2) + R_2(1+\omega^2 C_1^2 R_1^2)}{(1+\omega^2 C_1^2 R_1^2)(1+\omega^2 C_2^2 R_2^2)} - \\ &\qquad \mathrm{j}\frac{\omega C_1 R_1^2(1+\omega^2 C_2^2 R_2^2) + \omega C_2 R_2^2(1+\omega^2 C_1^2 R_1^2)}{(1+\omega^2 C_1^2 R_1^2)(1+\omega^2 C_2^2 R_2^2)}.\end{aligned}$$

对上述结果进行比较可以看出，只要电容和电阻满足条件

$$C_1 R_1 = C_2 R_2,$$

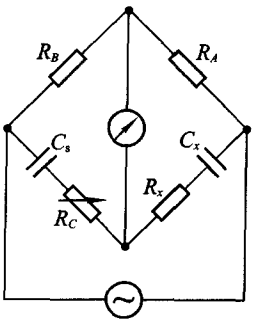
则在任何频率下都有

$$(R_1 + R_2)\tilde{Z}_2 = R_2 \tilde{Z} \qquad \text{或} \qquad \frac{\tilde{Z}_2}{\tilde{Z}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

由于两个 RC 并联电路是相互串联着的，它们有共同的总电流 $\tilde{I}$，因此有

$$\frac{\tilde{U}_2}{\tilde{U}} = \frac{\tilde{Z}_2}{\tilde{Z}}, \qquad \frac{U_2}{U} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

13－16. 在如图所示的交流电桥中，标准电容 $C_s = 0.100\,\mu\mathrm{F}$，平衡时测得 $R_A = 1000.0\,\Omega$，$R_B = 2050.0\,\Omega$，$R_C = 10.0\,\Omega$，试求待测电容的 C_x 和 R_x 之值.



题 13－16 图

[解] 电桥平衡时，有

$$(R_x + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_x}) R_B = (R_C + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_s}) R_A.$$

令上式两边的实部和虚部分别相等，可得电桥的平衡条件为

$$R_x R_B = R_C R_A, \qquad C_x R_A = C_s R_B .$$

将各物理量的数据代入以上两式，即可求得

$$C_x = 0.205\,\mu\text{F}, \qquad R_x = 4.88\,\Omega .$$

13－17. 某发电机的额定容量为 22 kV·A，试问它能供多少盏功率因数为 0.5、平均功率为 40 W 的日光灯正常发光？如果把日光灯的功率因数提高到 0.8，能供多少盏？

[解] 当 $\cos\varphi = 0.5$ 时，该发电机能供 275 盏日光灯正常发光；当 $\cos\varphi = 0.8$ 时，能供 440 盏日光灯正常发光.

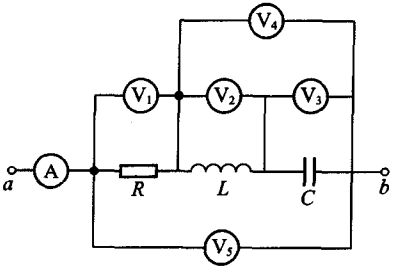
13－18. 在如图所示的电路中，A 是交流安培计，V_1，V_2，V_3，V_4 和 V_5 等是交流伏特计，且有 $R = 300\,\Omega$，$L = 250\,\text{mH}$，$C = 8.00\,\mu\text{F}$. 如果我们把 a 和 b 两端分别接到 220 V，50 Hz 的市电电源两极上，试问：(1) A，V_1，V_2，V_3，V_4 和 V_5 的读数各是多少？(2) a 和 b 之间的电路所消耗的功率是多少？

[解] a 和 b 间的阻抗为

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} = 438\,\Omega .$$

通过它们的电流即安培计的读数以及各个伏特计的读数分别为

$$I = 0.502\,\text{A},$$
$$U_1 = I R_1 = 151\,\text{V},$$
$$U_2 = I\omega L = 39.4\,\text{V},$$
$$U_3 = I/\omega C = 200\,\text{V},$$
$$U_4 = U_3 - U_2 = 161\,\text{V},$$
$$U_5 = 220\,\text{V}.$$



题 13－18 图

由于这里的 L 和 C 表示的是纯电感和纯电容，而把实际元件中的损耗都归并到 R 中去了，因此 a 和 b 间消耗的功率为

$$P_{ab} = UI\cos\varphi = I^2 R = 75.6\,\text{W}.$$

13－19. 一台 110 V 50 Hz 的交流电源供给某电路 330 W 的功率，功率因数为 0.6，且电流相位落后于电压. (1) 若在电路中串联一电容器使功率因数提高到 1，试求该电容器的电容以及这时电源所供给的功率；(2) 若改为并联一电容器使功率因数提高到 0.9，试求该电容器的电容以及这时电源所供给的功率.

[解] 按题意，原来的用电电路为电感性的，其阻抗为

$$\tilde{Z} = R + \mathrm{j}Z_L, \qquad \cos\varphi = R/Z,$$

$$Z = U^2\cos\varphi/P = 22\,\Omega.$$

(1) 若在电路中串联电容器 C_1，使 $\cos\varphi_1 = 1$，则有

$$C_1 = \frac{1}{\omega Z_L} = \frac{1}{\omega Z\sqrt{1-\cos^2\varphi}} = 181\,\mu\mathrm{F},$$

$$P_1 = \frac{U^2}{Z_1} = \frac{U^2}{R} = \frac{U^2}{Z\cos\varphi} = 917\,\mathrm{W}.$$

(2) 若改为并联一电容器 C_2，使功率因数提高到 $\cos\varphi_2 = 0.9$，则对于这样一个 RL 串联后再与 C_2 并联的电路，有

$$\tilde{Z}_2 = \left(\frac{1}{R+\mathrm{j}\omega L} + \mathrm{j}\omega C_2\right)^{-1} = \frac{R+\mathrm{j}[\omega L - \omega C_2(R^2+\omega^2L^2)]}{(1-\omega^2LC_2)^2+(\omega C_2R)^2}.$$

由

$$\cos\varphi_2 = \frac{Z_{R2}}{Z_2} = \frac{R}{\sqrt{R^2+[\omega L-\omega C_2(R^2+\omega^2L^2)]^2}} = 0.9,$$

可得

$$C_2 = \frac{\sqrt{1-\cos^2\varphi} \pm \cos\varphi\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\varphi_2}-1}}{\omega Z},$$

由此可求出 C_2 等于 158 μF 或 74 μF. 这时，电源供给的功率为

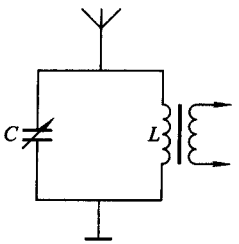
$$P_2 = \frac{U^2\cos\varphi_2}{Z_2} = \frac{U^2\cos\varphi_2\sqrt{(1-\omega C_2Z_L)^2+(\omega C_2R)^2}}{Z}$$

$$\approx 330\,\mathrm{W}.$$

13－20. 在 RLC 串联电路中，$R=400\,\Omega$，$L=0.10\,\mathrm{H}$，$C=0.50\,\mathrm{F}$，试求频率 f 分别为 50 Hz 和 1000 Hz 时的阻抗 Z 和相位差 φ，试问电流相位是落后于电压还是超前于电压？

[解] $f_1 = 50\,\mathrm{Hz}$ 时，$Z_1 = 6.3\,\mathrm{k}\Omega$，$\varphi_1 = -86°$，电流超前于电压；$f_2 = 1000\,\mathrm{Hz}$ 时，$Z_2 = 0.51\,\mathrm{k}\Omega$，$\varphi_2 = 38°$，电流落后于电压.

13－21. 如图所示，在收音机接收天线的调谐回路中，电感 $L \approx 300\,\mu\mathrm{H}$，可变电容器 C 的最大电容量为 360 pF，最小电容量为 25 pF，试问该调谐回路能否满足接收中波段 535 kHz 到 1605 kHz 的要求？



题 13－21 图

[解] 该调谐回路共振频率的最小值和最大值分别为

$$f_{\min}=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC_{\max}}}=484\ \text{kHz}\ ,$$

$$f_{\max}=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC_{\min}}}=1838\ \text{kHz}\ .$$

因此，该调谐回路可以满足接收中波段的要求.

13－22. 在 *RLC* 串联电路中，$L=0.10\,\text{H}$，$C=25\,\text{pF}$，$R=10\,\Omega$.

(1) 试求共振频率.

(2) 如总电压为 50 mV，试求共振时电感 L 上的电压.

[解] (1) 该串联共振电路的共振频率为

$$f_0=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}=101\ \text{kHz}\ .$$

(2) 在总电压为 $U=50\,\text{mV}$ 时，共振时电感 L 上的电压为

$$U_L=QU=\frac{\omega_0 L}{R}U=316\,\text{V}\ .$$

13－23. 在 *RLC* 串联共振电路中，已知共振频率为 $f_0=6.0\times10^5\,\text{Hz}$，$R=15\,\Omega$，$C=400\,\text{pF}$，试求该电路的 Q 值.

[解] 该电路的 Q 值为

$$Q=\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{1}{\omega_0 CR}=44\ .$$

第十四章　电磁场和电磁波

14－1. 设圆形平行板电容器的交变电场为 $E=720\sin(10^5\pi t)$ (其中 t 的单位是 s，E 的单位是 V/m)，电荷在电容器极板上均匀分布，且边缘效应可以忽略．试求电容器两极板间的位移电流密度，以及距离电容器极板中心连线 $r=1.0\,\text{cm}$ 处，经过时间 $t=2.0\times10^{-5}\,\text{s}$ 时磁感应强度的大小．

[解] (1) 电容器两极板间的位移电流密度为

$$j_\text{d}=\frac{\partial D}{\partial t}=\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}=2.00\times10^{-3}\cos(10^5\pi t)\,.$$

(2) 以电容器极板中心连线为圆心，以 $r=1.0\,\text{cm}$ 为半径作一圆，以它为积分环路，则有

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{1}{\mu_0}B2\pi r=\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}=\pi r^2\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\,.$$

所以，经过 $t=2.0\times10^{-5}\,\text{s}$ 时磁感应强度的大小为

$$B=\frac{\mu_0\varepsilon_0 r}{2}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{\mu_0\varepsilon_0 r}{2}E_0\omega\cos\omega t=1.26\times10^{-11}\,\text{T}\,.$$

14－2. 电磁波的产生，总是与电荷的加速运动相联系的．可以证明，以加速度 $\boldsymbol{a}$ 沿 x 轴正方向作匀加速直线运动的点电荷 q，它产生的电场和磁场分别为

$$E=\frac{qa\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0c^2r}\,,\qquad B=\frac{qa\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0c^3r}\,,$$

其中 θ 为点电荷到场点的矢量 $\boldsymbol{r}$ 与运动方向之间的夹角．电场和磁场的方向互相垂直，且两者都垂直于电磁波的传播方向．在 X 射线管中，若有一束高速电子与金属靶碰撞，则电子束的突然减速就会产生强烈的电磁辐射，这就是 X 射线．假定有一个初始能量为 2.0×10^4 eV 的电子均匀减速，在 5.0×10^{-9} m 的距离内停止下来，试求在垂直于加速度的方向上，距离碰撞点为 0.30 m 处的辐射电场的大小．

[解] 在均匀减速的情况下，加速度的大小为

$$a=\frac{v_0^2}{2s}=\frac{E_{\text{k}0}}{ms}\,.$$

将场强公式代入上式，可得

$$E=\frac{q\,a\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}=\frac{e\,E_{k0}\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2 m s r}=3.7\times10^{-2}\ \mathrm{V/m}.$$

14－3. 对于一个正在充电的平行圆板电容器，忽略电容器的边缘效应，试证明：(1) 坡印廷矢量 $\boldsymbol{S}$ 处处沿半径方向指向电容器内部；(2) 电能流进电容器内的功率 P，等于储存在该体积中的电场能量的增加率．由此可见，储存在电容器中的电能并不是通过导线进入电容器的，而是通过导线和电容器极板周围的空间进入电容器的．

[证明] (1) 对于一个正在充电的平行圆板电容器，忽略电容器的边缘效应，则其电场 $\boldsymbol{E}$ 以及位移电流 $\boldsymbol{j}_d=\partial\boldsymbol{D}/\partial t$ 的方向都是从正极板指向负极板的，因而磁场 $\boldsymbol{H}$ 是沿着以圆柱轴为圆心的圆的切线方向，并与 $\boldsymbol{E}$ 构成右手螺旋的．所以，坡印廷矢量 $\boldsymbol{S}$ 处处沿半径方向指向电容器内部．

(2) 由于 $j_d=\dfrac{\partial D}{\partial t}=\varepsilon_0\dfrac{\partial E}{\partial t}$，因此有

$$H=\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}\frac{r}{2},\qquad S=EH=\varepsilon_0 E\frac{\partial E}{\partial t}\frac{r}{2}.$$

所以，从周围空间流进间距为 l 的电容器内的功率为

$$P=2\pi RlS=\varepsilon_0 E\frac{\partial E}{\partial t}\pi R^2 l.$$

另一方面，储存在该体积中的电场能量为

$$W=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\pi R^2 l,$$

其随时间的增加率 $\partial W/\partial t$ 就等于上述功率 P.

14－4. **太阳能电池**(solar cell)是直接把光能转换为电能的一种装置，它的电流是由太阳光对半导体 pn 结的电场区内原子的作用产生的．现有一块太阳能电池板，它的尺寸是 58 cm×53 cm．当正对太阳时，此电池板能产生 14 V 的电压，并可提供 2.7 A 的电流．太阳光对垂直于光线的面积的辐射能流密度是 1.35 kW/m^2，试求此电池板利用太阳能的效率．

[解] 该太阳能电池所得到的太阳光的辐射能功率为

$$P_r=0.58\times0.53\times1.35\times10^3\ \mathrm{W}=4.1\times10^2\ \mathrm{W},$$

而它所能够提供的电功率为

$$P_e=14\times2.7\ \mathrm{W}=38\ \mathrm{W}.$$

所以，此电池板利用太阳能的效率为

$$\eta=P_e/P_r=38/(4.1\times10^2)=9\%.$$

14－5. 波长为 $\lambda=3.0\text{cm}$ 的平面电磁波，其电场的振幅为 $E_0=30\text{V/m}$. (1) 试问该电磁波的频率 ν 为多少？(2) 磁场的振幅 B_0 为多大？(3) 对于一个垂直于传播方向的面积为 0.50m^2 的全吸收表面，该电磁波的平均辐射压强是多大？

[解] (1) 该电磁波的频率为

$$\nu=\frac{c}{\lambda}=1.0\times10^{10}\text{ Hz}.$$

(2) 利用 $\sqrt{\varepsilon_r\varepsilon_0}\,E_0=\sqrt{\mu_r\mu_0}\,H_0$ 和 $\overline{S}=\frac{1}{2}E_0H_0$，可得

$$B_0=\mu_0H_0=\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\;E_0=1.0\times10^{-7}\text{ T}.$$

(3) 由于电磁波具有动量，当它垂直射到一个面积为 A 的全吸收表面上时，这个表面在 Δt 时间内所吸收的电磁动量为 $g\,Ac\Delta t$，于是该表面所受到的电磁波的平均辐射压强为

$$p=\overline{g}c=\frac{\overline{S}}{c}=\frac{E_0H_0}{2c}=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\frac{E_0^2}{2c}=4.0\times10^{-9}\text{ Pa}.$$

14－6. 假定在绕太阳的圆轨道上有一个球形的“尘埃粒子”，密度为 1.0 g/cm^3. 已知太阳表面的辐射功率为 $6.9\times10^7\text{ W/m}^2$，试问粒子的半径 r 多大时，太阳把它推向外的光压等于把它拉向内的万有引力？

[解] 假设在球形粒子的半径为 r 时，太阳把它推向外的光压等于把它拉向内的万有引力，则利用习题 14－5(3)的结果 $p=\overline{g}c=\overline{S}/c$，有

$$\frac{\overline{S}_s}{c}\pi r^2=G\frac{4}{3}\pi r^3\rho\frac{m_s}{{R_s}^2},$$

即

$$r=\frac{3\overline{S}_s{R_s}^2}{4cG\rho m_s}=6.3\times10^{-7}\text{ m}.$$

14－7. 利用太阳常量 $I_0=1.35\text{ kW/m}^2$，

(1) 试求太阳光的总压力与太阳对地球的引力的比值.

(2) 试将太阳光在地面 1 m^2 镜面上产生的光压，与大气压强进行比较.

[解] (1) 对于地球而言，$\overline{S}=I_0$. 因此，利用习题 14－5(3)的结果 $p=\overline{S}/c=I_0/c$，太阳光的总压力、太阳对地球的引力及两者的比值分别为

$$F_1=\frac{I_0}{c}\pi R_e^2=\frac{1.35\times10^3}{3.00\times10^8}\pi(6.37\times10^6)^2\text{ N}=5.74\times10^8\text{ N},$$

$$F_g=G\frac{m_em_s}{R_{es}^2}=6.67\times10^{-11}\frac{5.98\times10^{24}\times1.99\times10^{30}}{(1.50\times10^{11})^2}\text{ N}=3.53\times10^{22}\text{ N},$$

$$\frac{F_1}{F_g}=\frac{5.74\times10^{8}}{3.53\times10^{22}}=1.63\times10^{-14}.$$

(2) 与习题 14－5(3)的情况不同，这里是镜面反射．当电磁波垂直射到一个面积为 A 的镜面上时，在 Δt 时间内电磁动量的改变为 $2gAc\Delta t$，于是该表面所受到的电磁波的平均辐射压强为习题 14－5(3)的结果的两倍，即太阳光在地面 $1\ \mathrm{m}^2$ 镜面上产生的光压为

$$p\times1\ \mathrm{m}^2=(2I_0/c)\times1\ \mathrm{m}^2=9\times10^{-6}\ \mathrm{Pa},$$

与大气压强 $101325\ \mathrm{Pa}\approx10^5\ \mathrm{Pa}$ 相比十分微小，只是后者的 $1/10^{10}$．

14－8. 由激光器发出的 $1.0\ \mathrm{kW}$ 的光束，照射在一个固态铝球的下部使其悬浮起来．已知铝的密度是 $2.7\times10^3\ \mathrm{kg/m^3}$，并假定铝球自由漂浮在光束中，试问铝球的直径是多大？

[解] 假定激光束处在铝球的范围内，则能流密度 $\bar{S}$ 与照射面积的乘积就等于激光束的功率 $P=1.0\ \mathrm{kW}$．再利用习题 14－5(3)的结果 $p=\bar{g}c=\bar{S}/c$，当铝球自由地漂浮在光束中时，有

$$\frac{P}{c}=\frac{1}{6}\pi D^3\rho g.$$

所以，这时铝球的直径为

$$D=\sqrt[3]{\frac{6P}{\pi c\rho g}}=\sqrt[3]{\frac{6\times1.0\times10^3}{\pi\times3.0\times10^8\times2.7\times10^3\times9.8}}\ \mathrm{m}=0.62\ \mathrm{mm}.$$

14－9. 试证明：电磁波的波动方程(14.40)在洛伦兹变换下是不变的，即在使用带撇的时空坐标时仍保持相同的形式．

[提示] 利用 $c=1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$，关于电场 $\boldsymbol{E}$ 的偏微分方程(电磁波的波动方程)

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0,\tag{14.40}$$

可以写成如下的三分量形式：

$$\frac{\partial^2E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2E_x}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2E_x}{\partial t^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2E_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2E_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2E_y}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2E_y}{\partial t^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2E_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2E_z}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2E_z}{\partial t^2}=0.$$

实际上，还有关于磁场 $\boldsymbol{B}$ 的相应方程，它们都可以统一用下式表示：

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0,$$

其中标量函数 $\phi(x,y,z,t)$ 可由上述波动方程解得.

假设坐标系S'相对于惯性坐标系S以匀速 $\boldsymbol{u}$ 沿彼此重合的 x 和 x' 轴正方向运动，而 y 和 y' 轴以及 z 和 z' 轴分别保持平行，且两坐标原点 O 和 O' 在共同的时间零点 $t=t'=0$ 时刻重合. 在这种情况下，时空坐标的洛伦兹变换可以表示为

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}},\\
y' &= y,\\
z' &= z,\\
t' &= \frac{t-\dfrac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.
\end{aligned}\tag{7.1}$$

本题要求证明在惯性系S和S'中，电磁波的波动方程(14.40)在洛伦兹变换下是不变的，即在使用带撇的时空坐标时仍保持如下相同的形式：

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z'^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t'^2}=0,$$

标量函数 $\phi(x',y',z',t')$ 与 $\phi(x,y,z,t)$ 可由相同形式的波动方程解得.

[证明] 为了将波动方程用带撇的时空坐标表示出来，我们先利用洛伦兹变换(7.1)式得出以下各式：

$$\frac{\partial x'}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}},\qquad \frac{\partial x'}{\partial t}=\frac{-u}{\sqrt{1-u^2/c^2}},$$

$$\frac{\partial t'}{\partial x}=\frac{-u/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}},\qquad \frac{\partial t'}{\partial t}=\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}},$$

$$\frac{\partial y'}{\partial y}=\frac{\partial z'}{\partial z}=1,$$

$$\frac{\partial x'}{\partial y}=\frac{\partial x'}{\partial z}=\frac{\partial y'}{\partial x}=\frac{\partial y'}{\partial z}=\frac{\partial z'}{\partial x}=\frac{\partial z'}{\partial y}=0.$$

然后，利用上述各式以及数学变换，可得

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}=\frac{\partial \phi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial \phi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x}+\frac{\partial \phi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x}+\frac{\partial \phi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\frac{\partial \phi}{\partial x'}+\frac{-u/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\frac{\partial \phi}{\partial t'},$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}=\frac{1}{1-u^2/c^2}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2}+\frac{u^2}{c^4}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2}\right)-\frac{2u}{c^2-u^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'\partial t'};\tag{a}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}=\frac{-u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\frac{\partial \phi}{\partial x'}+\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\frac{\partial \phi}{\partial t'},$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}=\frac{1}{1-u^2/c^2}\left(u^2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2}\right)-\frac{2uc^2}{c^2-u^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'\partial t'};\tag{b}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2};\tag{c}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 \phi}{\partial z'^2}.\tag{d}$$

由式(a)—式(d)即可证得

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial z'^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2}=0.$$

所以，在洛伦兹变换下电磁波的波动方程是不变式，标量函数 $\phi(x', y', z', t')$ 与 $\phi(x, y, z, t)$ 可由相同形式的波动方程解得．然而，在伽利略变换下，电磁波的波动方程不是不变式．

第十五章　光的干涉

15－1. 眼睛最敏感的光波穿过厚度为 0.11 mm 的空气层时，在空气层厚度内包含有多少个完整的波形？同样的光波穿过同样厚度的熔融石英片(n = 1.46)时，在石英片厚度范围内包含有多少个完整的波形？

[解] 波长为 $\lambda = 555\,\text{nm}$ 的光波，在空气层内包含有 $d/\lambda = 198$ 个完整的波形，而在同样厚度的熔融石英片内包含有 $nd/\lambda = 289$ 个完整的波形.

15－2. 一平面波在坐标原点的振动为 $E = A\cos\omega t$，波的传播方向与 x、y 和 z 轴的夹角分别为 $\alpha = 60°$、$\beta = 90°$ 和 $\gamma = 30°$，空间 P 点的坐标为 $x = 10\lambda$、$y = 3\lambda$ 和 $z = 6\sqrt{3}\lambda$，其中 λ 为平面波的波长. 试问 P 点的振动相位比坐标原点落后多少？

[解] P 点的坐标和传播矢量 $\boldsymbol{k}$ 的方向余弦分别为

$$x = 10\lambda, \quad y = 3\lambda, \quad z = 6\sqrt{3}\lambda;$$

$$\cos\alpha = 1/2, \quad \cos\beta = 0, \quad \cos\gamma = \sqrt{3}/2.$$

因此，P 点的振动相位比坐标原点落后

$$\Delta\varphi = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = \frac{2\pi}{\lambda}(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) = 28\pi,$$

或者说，P 点的振动是与坐标原点同相位的.

15－3. 在杨氏干涉实验中，用 $\lambda = 632.8$ nm 的氦氖激光束垂直照射间距为 1.14 mm 的两个小孔，小孔至屏幕的垂直距离为 1.50 m. 试求在下列两种情况下屏幕上干涉条纹的间距：(1) 整个装置放在空气中；(2) 整个装置放在 $n = 1.33$ 的水中.

[解] (1) $\Delta x_1 = \dfrac{d_2}{d_1}\lambda = 0.833$ mm；

(2) $\Delta x_2 = \dfrac{d_2}{nd_1}\lambda = 0.626$ mm.

15－4. 在杨氏干涉装置中，已知双缝间距为 0.342 mm，双缝至屏幕的垂直距离为 2.00 m，测得第 10 级干涉亮纹至零级亮纹间的距离为 3.44 cm，试求光源的单色光波长.

[解] $\lambda = \dfrac{d_1}{d_2}\Delta x = 588$ nm.

15－5. 利用习题 15－4 的装置，若光源包含波长分别为 436.0 nm 和

546.0 nm 的蓝和绿两种色光，试求这两种光的二级亮纹的间距.

[解] $x_2 - x_1 = 2\dfrac{d_2}{d_1}(\lambda_2 - \lambda_1) = 1.29\ \text{mm}$.

15－6. 将很薄的云母片($n=1.58$)覆盖在双缝干涉实验装置的一条缝上，利用波长为 550.0 nm 的光源，观察到干涉条纹移动了 9 个条纹的距离，试求该云母片的厚度.

[解] $d = \dfrac{|k|\lambda}{n-1} = 8.53\ \mu\text{m}$.

15－7. 在杨氏干涉装置中，宽度为 $b=0.25\text{nm}$ 的光源至双孔的距离为 $r_s=20\text{cm}$，波长为 $\lambda=546\text{nm}$.

(1) 试求双孔处的横向相干宽度 d.

(2) 试问当双孔间距为 $d'=0.50\text{mm}$ 时，在观察屏幕上能否看到干涉条纹？为能观察到干涉条纹，光源至少应再移远多少距离？

[解] (1) 表征该扩展光源空间相干性的 β 角为

$$\beta < \lambda / b,$$

从而在距离 $R = 20\ \text{cm}$ 处的横向相干宽度为

$$d < r_s\beta = r_s\lambda / b = 0.437\ \text{mm}.$$

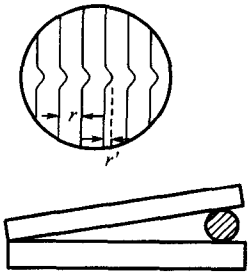
(2) 当双孔间距为 $d'=0.50\text{mm}$ 时，在屏幕上不能看到干涉条纹. 为了观察到干涉条纹，必须使 r_s 变为

$$r_s' > bd'/\lambda = 22.9\ \text{cm}.$$

15－8. 两块平板玻璃叠合在一起，一端互相接触，在距接触线为 $l = 12.50\ \text{cm}$ 处用一金属细丝垫的两板之间. 以波长为 $\lambda=546.0\text{nm}$ 的单色光垂直入射，测得条纹间距为 $\Delta x=1.50\text{mm}$，试求该金属细丝的直径 D.

[解] $D = l\Delta d / \Delta x = l\lambda / 2\Delta x = 22.8\ \mu\text{m}$.

15－9. 利用空气劈形膜的等厚干涉条纹，可以测量精密加工的工件表面上极小的纹路深度. 在工件表面上放一平板玻璃，使其间形成空气劈形膜，如果在单色光照射下用眼睛观察到了如图所示的干涉条纹，试问工件表面上的纹路是凹的还是凸的？并证明纹路的深度可表示为 $H=\dfrac{r'}{r}\dfrac{\lambda}{2}$.



题 15－9 图

[解] (1) 在理想情况下，在空气劈形膜上观察到的等厚条纹应为平行于棱边的直条纹. 现在，有局部条纹向偏离棱边的方向弯曲，说明在工件表面的相应位置处有一条垂直于棱边的不平

的纹路．由于同一条等厚条纹对应于相同的膜厚度，因此在图中所示的同一条纹上，弯离棱边的部分与直的部分对应的膜厚度应该相等．在理想情况下，离开棱越远，膜的厚度应该越大；而现在在同一条纹上远离棱边处与近棱边处膜的厚度却是相等的，这说明工件表面的纹路是凸出来的．

(2) 这种等厚干涉条纹是利用空气劈形膜形成的，若相邻条纹的间距为 r，则所对应的劈形膜的厚度差为 $\Delta d=\lambda/2$．因此，利用几何关系可得，若条纹的弯曲距离为 r'，则纹路的高度或深度 H 为

$$H=\frac{r'}{r}\Delta d=\frac{r'}{r}\frac{\lambda}{2}.$$

15－10. 如图所示的是一种干涉膨胀仪，CC' 是用热膨胀系数很小的石英或**殷钢**(invar)制成的环柱，放在光学玻璃平板 AB 和 A'B' 之间；被测样品 M 置于该环柱内，样品上表面稍微倾斜与 AB 的下表面形成一空气劈尖．若以波长为 λ 的单色光垂直照射到 AB 上，则可以观察到由空气劈尖形成的等厚条纹．设在温度为 t_0 时测得样品的长度为 l_0，在温度升高到 t 的过程中数得通过视场中某一刻线的干涉条纹的数目为 N，试证明被测样品材料的热膨胀系数可表示为

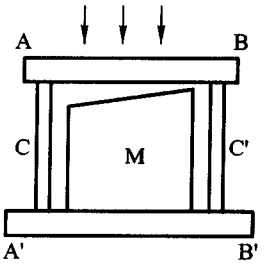
$$\alpha=\frac{N\lambda}{2l_0(t-t_0)}.$$

[解] 如果通过视场中某一刻线的干涉条纹的数目为 N，则说明该空气劈尖的厚度改变了 $N\lambda/2$．在上述测量过程中，样品的长度从 l_0 变到了 $l=l_0+\alpha_l l_0(t-t_0)$，其改变量为

$$\Delta l=l-l_0=\alpha_l l_0(t-t_0)=N\lambda/2.$$

由此可得热膨胀系数的表达式为

$$\alpha=\frac{N\lambda}{2l_0(t-t_0)}.$$



题 15－10 图

15－11. (1) 设平凸透镜与平板玻璃能完全接触，两者之间充满空气构成观察牛顿环的装置．利用波长为 589 nm 的单色光源，测得第 k 个暗环的直径为 0.70 mm，第 $k+15$ 个暗环的直径为 2.20 mm，试求透镜凸面的曲率半径．如果已知透镜凸面的曲率半径，则利用这种方法可以求得所用光波的波长．(2) 如果间隙中充满折射率为 1.33 的水，则上述两暗环的直径变为多大？

[解] (1) $R=(r_{k+15}^2-r_k^2)/15\lambda=12.3\text{cm}$.

(2) 两暗环的直径将分别变为

$$D_k' = 2r_k' = 2\sqrt{\frac{kR\lambda}{n}} = \frac{2r_k}{\sqrt{n}} = 0.61\,\text{mm},$$

$$D'_{k+15} = 2r'_{k+15} = \frac{2r_{k+15}}{\sqrt{n}} = 1.91\,\text{mm}.$$

15－12. 用波长为 589 nm 的钠黄光观察牛顿环．在透镜与平板玻璃接触良好的情况下，测量得到第 20 个暗环的直径为 0.687 cm．当透镜向上移动 5.00×10^{-4} cm 时，同一级暗环的直径变为多少？

[解] 按题意，$2r_{20}=6.87$ mm．当透镜向上移动 $d=5.00\times10^{-4}$ cm 时，则有

$$R^2 = r_k'^2 + [R-(d_k'-d)]^2 \qquad \text{和} \qquad 2d_k' = k\lambda,$$

这时同一级暗环的直径变为

$$D'_{20} = 2r'_{20} = 2\sqrt{R(k\lambda-2d)} = 2r_k\sqrt{1-\frac{2d}{k\lambda}} = 2.67\,\text{mm}.$$

15－13. 在太阳光的垂直照射下，水面上的一层油膜显示出彩色干涉条纹，在 A 和 B 两点间的颜色依次为黄、绿、蓝、红、黄．设黄光的波长为 580 nm，而油膜的折射率为 1.50，试求 A 和 B 两点油膜的厚度差．如果颜色的次序变为黄、绿、蓝、绿、黄，则厚度差是多少？

[解] 若 A 和 B 两点间的干涉色依次为黄、绿、蓝、红、黄，则薄膜的厚度是随之逐渐减小的，在干涉色从蓝变到红的地方干涉级将减小一级．因此，这时 A 和 B 两点处油膜的厚度差为

$$d_A - d_B = \lambda/2n = 0.193\,\mu\text{m}.$$

然而，当颜色的次序变为黄、绿、蓝、绿、黄时，薄膜的厚度将随之逐渐减小后又增大，因此这时 A 和 B 两点处油膜的厚度差是零．

15－14. 波长范围为 400～700 nm 的白光垂直入射在肥皂膜上，已知肥皂膜的厚度为 0.55 μm，折射率为 1.35，试问在反射光中哪些波长的光干涉相长？哪些波长的光干涉相消？

[解] 考虑到半波损失，当满足 $2nd=(k+1/2)\lambda$ 时，即反射光中波长为 424 nm 和 594 nm 的光，将干涉相长；而当满足 $2nd=k\lambda$ 时，即反射光中波长为 495 nm 的光，将干涉相消．

15－15. 照相机镜头的折射率为 1.50，其表面涂敷了一层折射率为 1.38 的氟化镁(MgF_2)增透膜．为使镜头对黄绿光反射最小，试求氟化镁薄膜的最小厚度．

[解] 为使镜头对黄绿光反射最小，应适当选择 MgF_2 薄膜的厚度，使得

经 MgF_2 薄膜上、下表面的黄绿反射光干涉相消．由于空气 $n_1 \approx 1$，MgF_2 薄膜 $n_2=1.38$，照相机镜头 $n_3=1.50$，光线都是从光疏介质到光密介质，因此不需要考虑半波损失所带来的附加光程差．所以，MgF_2 薄膜的厚度 d 满足

$$2n_2 d = (2k+1)\frac{\lambda}{2},$$

即　$$d = (2k+1)\frac{\lambda}{4n_2} = (2k+1)\times 99.6\ \text{nm}.$$

按题意，MgF_2 薄膜的最小厚度为 99.6 nm．

15－16. 迈克耳孙干涉仪用波长为 589.3 nm 的钠黄光观察，视场中心为亮点，此外还能看到 10 个亮环．今移动一臂中的反射镜，发现有 10 个亮环向中心收缩而消失，即中心级次减小 10，此时视场中除中央亮点外还剩 5 个亮环．试求开始时中央亮点的干涉级，反射镜移动的距离，以及反射镜移动后视场中最外那个亮环的干涉级．

[解] 设 $\theta_{\min}$ 表示相应于视场中所能看到的最外那个亮环的光线的倾角，视场中该亮环的级别是最低的，上述过程表明

$$2nd_1 = k_1\lambda,$$

$$2nd_1\cos\theta_{\min} = (k_1-10)\lambda,$$

$$2nd_2 = k_2\lambda = (k_1-10)\lambda,$$

$$2nd_2\cos\theta_{\min} = (k_2-5)\lambda = (k_1-15)\lambda.$$

可得　$$\frac{k_1}{k_1-10} = \frac{k_1-10}{k_1-15},$$　即　$k_1=20$，　$k_2=10$；

$$2n(d_1-d_2) = 10\lambda,$$　即　$$d_1-d_2 = \frac{10\lambda}{2n} = 2.947\,\mu\text{m}.$$

所以，开始时中央亮点的干涉级为 20，反射镜移动的距离为 2.947 μm，反射镜移动后视场中最外那个亮环的干涉级为 5．

15－17. (1) 利用迈克耳孙干涉仪进行长度的精密测量，光源是镉的红色谱线，波长为 643.8 nm，谱线宽度为 1.0×10^{-3} nm，试问一次测量长度的量程是多少？

(2) 如果使用波长为 632.8 nm，谱线宽度为 1.0×10^{-6} nm 的氦氖激光，则一次测量长度的量程又是多少？

(3) 若探测器能分辨 0.1 个条纹，则在上述两种情况下测量长度的精度是多少？

[解] (1) 光源的 $\Delta\lambda$ 决定的能产生干涉条纹的最大光程差为

$$\Delta L_c = \lambda^2/\Delta\lambda,$$

从而决定了迈克耳孙干涉仪一次测长的量程是 $\Delta L_c/2$．因此，对镉光源量程为 21 cm．

(2) 对氦氖激光光源量程为 200 m．

(3) 如果探测器能分辨 0.1 个条纹，则在上述两种情况下的测长精度约为 0.03μm．

15－18. 设平凸透镜与平板玻璃之间充满空气，构成观察牛顿环的装置．利用波长为 630 nm 的单色光源，测得牛顿环从中间数第 3 环和第 13 环的半径分别为 0.70 mm 和 1.70 mm，试求透镜凸面的曲率半径．

[解] 实际做实验时，透镜与平板玻璃之间难免有灰尘，中央的条纹级数不一定是零．设中央的气隙厚度为 d_0，则利用图 15－22 可得

$$R^2 = r_k^2 + [R-(d_k-d_0)]^2, \tag{a}$$

$$2d_k = k\lambda. \tag{b}$$

由于 $R \gg d_k$，忽略二级小量可得

$$r_k^2 = 2R(d_k-d_0). \tag{c}$$

利用式(c)，可得

$$r_{k_1}^2 = 2R(d_{k_1}-d_0), \qquad r_{k_2}^2 = 2R(d_{k_2}-d_0). \tag{d}$$

以上两式相减，再利用式(b)，可得

$$r_{k_2}^2 - r_{k_1}^2 = 2R(d_{k_2}-d_{k_1}) = R(k_2-k_1)\lambda, \tag{e}$$

$$R = \frac{r_{k_2}^2 - r_{k_1}^2}{(k_2-k_1)\lambda} = \frac{(1.7^2-0.7^2)\,\text{mm}^2}{(13-3)\times 630\,\text{nm}} = 0.38\,\text{m}.$$

讨论一：如果中央气隙的厚度满足 $2d_0 = k_0\lambda$，则应该有

$$r_k^2 = R(k-k_0)\lambda, \qquad \frac{r_{k_2}^2}{r_{k_1}^2} = \frac{k_2-k_0}{k_1-k_0}, \tag{f}$$

审查本题给出的数据，发现并不满足式(f)，即

$$\frac{r_{k_2}^2}{r_{k_1}^2} = \frac{1.7^2}{0.7^2} = 5.9, \qquad \frac{k_2-k_0}{k_1-k_0} = \frac{13}{3} = 4.3,$$

两者并不相等．产生这一结果的原因是，中央气隙位置并不一定刚好就是干涉条纹的中心，代替关系式 $2d_0 = k_0\lambda$ 的应该是

$$d_0 = \frac{1}{2}k_0\lambda + \delta, \tag{g}$$

其中 δ 的绝对值小于 $\lambda/2$．

联立式(b)、式(c)和式(g)，可得

$$\frac{r_{k_2}^2}{r_{k_1}^2}=\frac{d_{k_2}-d_0}{d_{k_1}-d_0}=\frac{(k_2-k_0)\lambda-2\delta}{(k_1-k_0)\lambda-2\delta}, \tag{h}$$

$$\delta=\frac{(3r_{k_2}^2-13r_{k_1}^2)\lambda}{2(r_{k_2}^2-r_{k_1}^2)}=302\,\text{nm}. \tag{i}$$

将此结果代回到前面的公式，发现结果都是自洽的.

讨论二：如果题目中所测得是牛顿环从中间数第 2 环和第 12 环的半径分别为 0.70 mm 和 1.70 mm，则可得

$$\delta=\frac{(2r_{k_2}^2-12r_{k_1}^2)\lambda}{2(r_{k_2}^2-r_{k_1}^2)}=-13\,\text{nm}. \tag{j}$$

这时实际上是从中间数不足 2 环和 12 环. 尽管这时

$$\frac{r_{k_2}^2}{r_{k_1}^2}=\frac{1.7^2}{0.7^2}=5.9,\qquad \frac{k_2-k_0}{k_1-k_0}=\frac{12}{2}=6,$$

两者差别甚微，但含义深刻.

讨论三：如果题目中所测得是牛顿环从中间数第 5 环和第 15 环的半径分别为 0.70 mm 和 1.70 mm，则可得

$$\delta=\frac{(5r_{k_2}^2-15r_{k_1}^2)\lambda}{2(r_{k_2}^2-r_{k_1}^2)}=932\,\text{nm}. \tag{k}$$

这里的 δ 值大于 $\lambda/2=315\,\text{nm}$，显然与本问题的假定“从中间数第 5 环和第 15 环”相驳，因此题目本身不自洽.

第十六章　光的衍射

16－1. 在夫琅禾费单缝衍射实验中，以波长为 589 nm 的平行光垂直入射到单缝上．若缝宽为 0.10 mm，试问第一级极小出现在多大的角度上？若要使第一级极小出现在 0.50°的方向上，则缝宽应多大？

[解] $\theta_1 \approx \lambda / b_1 = 0.005\,89\ \text{rad} = 0.34^\circ$.

$$b_2 \approx \frac{\lambda}{\theta_2} = \frac{589\times10^{-9}}{0.50\times2\pi/360}\ \text{m} = 67\ \mu\text{m}\ .$$

16－2. 用水银灯发出的波长为 546 nm 的绿色平行光垂直入射到一单缝上，置于缝后的透镜的焦距为 40 cm，测得第二级极小至衍射图样中心的线距离为 0.30 cm．当我们用波长未知的光做实验时，测得第三级极小到中心的线距离为 0.42 cm，试求未知波长．

[解] 由衍射极小位置的关系式 $\theta \approx \sin\theta = k\lambda / b$，可得

$$\theta_{12} = 2\lambda_1 / b\ , \qquad \theta_{23} = 3\lambda_2 / b\ .$$

故有　$$\lambda_2 = \frac{2}{3}\frac{f\,\theta_{23}}{f\,\theta_{12}}\lambda_1 = \frac{2\times4.2}{3\times3.0}\times546\ \text{nm} = 510\ \text{nm}\ .$$

16－3. 在单缝夫琅禾费衍射装置中，用细丝代替单缝，就构成了衍射细丝测径仪．已知光波波长为 630 nm，透镜焦距为 50 cm，今测得零级衍射斑的宽度为 1.0 cm，试求该细丝的直径．

[解] 由零级衍射斑的宽度 $2f\,\Delta\theta = 2f\,\lambda / d = 1.0\text{cm}$，可得细丝的直径为 $d = 100\lambda = 63\mu\,\text{m}$.

16－4. 在迎面驶来的汽车上，两盏前灯相距 1.2 m，试问在汽车离人多远的地方，眼睛恰好能分辨这两盏灯？设夜间人眼瞳孔的直径为 5.0 mm，入射光波长为 550 nm，而且仅考虑人眼瞳孔的衍射效应．

[解] 根据瑞利判据，应有

$$\delta\theta_{\text{m}} = 1.2\,\text{m}/l = \Delta\theta = 1.22\lambda / D\ ,$$

即　$$l = \frac{1.2\times5.0\times10^{-3}}{1.22\times550\times10^{-9}}\ \text{m} = 8.9\,\text{km}\ .$$

16－5. 为使望远镜能分辨角间距为 3.00×10^{-7} rad 的两颗星，其物镜的直径至少应多大？为了充分利用此望远镜的分辨本领，该望远镜应有多大的角放大率？假定人眼的最小分辨角为 2.68×10^{-4} rad .

[解] 物镜的直径至少应为 $D = 1.22\lambda / \delta\theta_{\text{m}} = 2.24\,\text{m}$.

为充分利用此望远镜的分辨本领，它的角放大率应为 893 倍.

16－6. 一架生物显微镜，物镜的标号为 10×0.25，即物镜的放大率为 10 倍，数值孔径 $n\sin\theta$ 为 0.25；若光波的波长以 550 nm 计算，试问可分辨的最小距离是多大？目镜物方焦面上恰可分辨的两物点的艾里斑中心间距是多大？

[解] 这架生物显微镜可分辨的最小距离是

$$\delta y_{\min}=\frac{0.61\lambda}{n\sin\theta}=\frac{0.61\times550\times10^{-9}}{0.25}\,\mathrm{m}=1.3\,\mu\mathrm{m}.$$

目镜物方焦平面上恰可分辨两物点的艾里斑中心间距等于物镜的放大率乘以 $\delta y_{\min}$，即 $13\,\mu\mathrm{m}$.

16－7. 一般照相机对远近不同物点拍摄时，其像距总是和镜头焦距 f 很接近，因此照相机物镜恰好能分辨的两个像点的最小间距为

$$\delta y'=f\,\delta\varphi'=\frac{1.22\lambda f}{D},$$

其中 D 是照相机物镜的有效孔径，其大小可以调节. 通常把 D/f 称为物镜的**相对孔径**，而将其倒数 f/D 称为**光圈**. 由此可见，照相机底片处每毫米能分辨的最多刻痕数为

$$N=\frac{1}{\delta y'}=\frac{1}{1.22\lambda}\frac{D}{f}.$$

这里的 $\delta y'$ 和 λ 等都是以 mm 为单位的. 假如用光圈 2.8 来进行拍摄，并用 $\lambda=550\,\mathrm{nm}$ 来计算，则照相机底片处每毫米所能分辨的刻痕数是多少？一般胶卷颗粒度大小只能分辨每毫米 200 刻痕左右，试问这时感光胶片所能分辨的最小间距是多少？这要求照相机使用的光圈必须多大？

[解] 当光圈为 2.8 时，

$$N_1=\frac{1}{1.22\lambda}\frac{D_1}{f}=5.3\times10^2;$$

若 $N_2=200$，则胶片能分辨的最小间距 $\delta y_2'$ 和照相机应使用的光圈分别为

$$\delta y_2'=\frac{1}{N_2}\,\mathrm{nm}=5.0\,\mu\mathrm{m},$$

$$\frac{f}{D_2}=\frac{1}{1.22\lambda N_2}\,\mathrm{nm}=7.5\approx8.$$

16－8. 用氦氖激光器发出的 $\lambda=632.8\,\mathrm{nm}$ 的红光，垂直入射到一平面透射光栅上，测得第一级极大出现在 38°的方向上，试求这一平面透射光栅的光栅常量 d，这意味着该光栅在 1 cm 内有多少条狭缝？第二级谱线的衍射

角是多大？

[解] 利用光栅方程，可得光栅常量为

$$d=\frac{k\lambda}{\sin\theta}=1.03\,\mu\mathrm{m}.$$

这意味着该光栅在 1 cm 内有 9730 条狭缝．若设 θ_2 为这一光栅的第二级谱线的衍射角，则有 $\sin\theta_2=2\lambda/d=1.2>1$，表明该光栅的第二级谱线实际上是不存在的．

16－9. 用 $\lambda=589.3\,\mathrm{nm}$ 的钠黄光垂直入射到一个平面透射光栅上，测得第三级谱线的衍射角为 10°11′，而用未知波长的单色光垂直入射时，测得第二级谱线的衍射角为 6°12′，试求此未知波长．

[解] 当 $\lambda=589.3\,\mathrm{nm}$ 时，第三级谱线衍射角为 $\theta_3=10.18^\circ$；当用未知波长 λ' 的光时，第二级谱线衍射角为 $\theta_2'=6.20^\circ$．利用它们所满足的光栅方程 $d\sin\theta_3=3\lambda$ 和 $d\sin\theta_2'=2\lambda'$，可解得

$$\lambda'=\frac{3\lambda\sin\theta_2'}{2\sin\theta_3}=540.2\,\mathrm{nm}.$$

16－10. 波长为 600 nm 的单色光垂直入射在一光栅上，第二和第三级谱线分别出现在衍射角 θ 满足关系式 $\sin\theta_2=0.20$ 和 $\sin\theta_3=0.30$ 处，第四级缺级．试求该光栅的光栅常量 d 以及光栅狭缝的最小可能宽度 b．然后，按此 d 和 b 的值，列出屏幕上可能呈现的谱线的全部级数．

[解] 由光栅方程 $d\sin\theta_2=2\lambda$ 即可求得光栅常量为

$$d=10\lambda=6.0\,\mu\mathrm{m}.$$

因谱线第四级缺级，$d/b=4$，所以光栅狭缝的最小可能宽度为

$$b=d/4=1.5\,\mu\mathrm{m},$$

这时缺级出现在单缝衍射的一级暗纹处．当然，光栅狭缝的可能宽度还可以是 $b=d/4$ 的 2 倍或 3 倍，这时缺级就会出现在单缝衍射的二级或三级暗纹处．按以上选定的 d 和 b 值，可以列出屏幕上可能呈现的谱线的全部级数为

$$0，\pm1，\pm2，\pm3，\pm5，\pm6，\pm7，\pm9.$$

16－11. 一光源的发光部件内含有氢原子和氘原子的混合物，它所发射的光是中心波长为 $\lambda=656.3\,\mathrm{nm}$ 的红双线，波长间隔 $\Delta\lambda=0.18\,\mathrm{nm}$．若用一光栅在第一级谱线中能分辨这两条谱线，光栅的刻痕数目 N 至少应是多少？

[解] 按照式 $R=\lambda/\delta\lambda=kN$，已知 $k=1$，因此有

$$N=\lambda/\delta\lambda=3647.$$

16－12. 一块每厘米有 6000 条刻线的光栅，以波长范围为 400～700 nm 的白光垂直入射．试计算第一级和第二级光谱的角宽度，两者是否重叠？

[解] 利用光栅方程可得，一级光谱和二级光谱的谱线分别分布在

$$\theta_1 = 13°53' \to 24°50' \qquad 和 \qquad \theta_2 = 28°41' \to 57°8'$$

的范围内，其角宽度分别为10°57'和28°27'．显然，这两级谱线并不重叠．

16－13. (1) 一块宽度为 2.54 cm 的光栅上，有 800 条刻痕，用水银蒸气放电产生的光正入射，试求 $\lambda = 436.0\,\text{nm}$ 的蓝光谱线在第三级光谱中的角色散本领，在第五级光谱中的色分辨本领以及能分辨的最小波长间隔．(2) 已知水银灯光的主要谱线是

$$\lambda_1 = 436.0\,\text{nm}, \qquad \lambda_2 = 492.0\,\text{nm}, \qquad \lambda_3 = 546.0\,\text{nm},$$
$$\lambda_4 = 577.0\,\text{nm}, \qquad \lambda_5 = 579.0\,\text{nm}.$$

如果采用长度为 10.00 cm 和缝数为 50 000 的光栅，并用焦距为 2.00 m 的透镜将水银灯光的谱线聚焦在屏幕上，试求在第一级光谱中各线的位置，试问这些谱线能否分辨？

[解] (1) 由光栅方程可得第三级光谱的衍射角为

$$\theta_3 = \arcsin\frac{3\lambda}{d} = \arcsin\frac{3\lambda N}{L} = 2.36°,$$

因此在第三级光谱中的角色散本领为

$$D_3 = \frac{3N}{W\cos\theta_3} = 9.46\times10^{-5}/\text{nm}.$$

在第五级光谱中，该光栅的色分辨本领以及能分辨的最小波长间隔分别为

$$R_5 = 5N = 4000, \qquad \delta\lambda_5 = \lambda/5N = 0.11\,\text{nm}.$$

(2) 利用 $\sin\theta = k\lambda N/L$ 可得，第一级光谱中各谱线相应的衍射角分别为

$$\theta_{11}=12.59°, \qquad \theta_{12}=14.24°, \qquad \theta_{13}=15.84°,$$
$$\theta_{14}=16.77°, \qquad \theta_{15}=16.83°.$$

利用 $x = f\tan\theta$ 可得，第一级光谱中各谱线离开中心的距离为

$$x_1=0.447\,\text{m}, \qquad x_2=0.508\,\text{m}, \qquad x_3=0.567\,\text{m},$$
$$x_4=0.603\,\text{m}, \qquad x_5=0.605\,\text{m}.$$

由于光栅的色分辨本领 $R=\lambda/\delta\lambda=kN$，因此在第一级光谱中该光栅能分辨的波长差为 $\lambda/50000$，所以上述谱线都能分辨．

16－14. (1) 已知氯化钠的晶体结构是简单的立方点阵，它的摩尔质量和密度分别为 $M = 58.5\times10^{-3}$ kg/mol 和 $\rho = 2.17\times10^{3}$ kg/m^3，试证明相邻两离子之间的平均距离(即晶格常量)为

$$a = \sqrt[3]{\frac{M}{2N\rho}} = 0.2819\,\text{nm}.$$

(2) 用波长λ = 0.154 nm 的 X 射线(Cu K_α辐射)射在氯化钠晶体表面上，试问当 X 射线与表面分别成多大掠射角时，可观察到第一级和第二级反射主极大谱线.

[解] (1) 对于由同一种原子构成的简立方点阵来说，每一个原子都为周围的 8 个立方原胞所共有，在忽略边缘效应的情况下，可以认为 1 mol 晶体是由$N = 6.022\times10^{23}$个立方原胞组成的. 而对于氯化钠晶体来说，它由两种离子构成，其分子量为 58.5，摩尔质量为 M，因此有 $M = 2Na^3\rho$，即

$$a = \sqrt[3]{\frac{M}{2N\rho}} = 0.2819\ \text{nm}.$$

(2) 这里只考虑与表面平行的晶面系，这时晶面间距 d 就等于晶格常量 a. 因此，由布拉格条件$2d\sin\theta = k\lambda$可得，第一、二级反射主极大谱线所相应的掠射角分别为

$$\theta_1 = \arcsin\frac{\lambda}{2a} = 15°58',\qquad \theta_2 = \arcsin\frac{2\lambda}{2a} = 33°22'.$$

16－15. 已知λ = 0.0559 nm 的 X 射线(Ag K_α辐射)，以掠射角 16°2' 射向某一晶体表面时，出现第三级反射极大. 当一未知波长的 X 射线以掠射角 14°42' 射向同一晶体表面时，给出第一级反射极大. 试求产生上述衍射的晶面系的面间距 d 以及未知 X 射线的波长.

[解] 按题意，可列出以下两个方程：

$$2d\sin\theta_3 = 3\lambda,$$

$$2d\sin\theta_1' = \lambda'.$$

由此可解出产生上述衍射的晶面系面间距 d 及未知 X 射线的波长λ'分别为

$$d = \frac{3\lambda}{2\sin\theta_3} = 0.154\ \text{nm},$$

$$\lambda' = 3\lambda\frac{\sin\theta_1'}{\sin\theta_3} = 0.0781\ \text{nm}.$$

16－16. 假设在入射的 X 射线束中，含有 0.095～0.130 nm 这一波带中的各种波长. 已知晶体的晶格常量为 a = 0.281 nm，入射角为 30°. 试问对于图中所示的两组晶面族来说，分别有哪些波长的 X 射线会产生衍射极大？

[解] 图中所示的两组晶面族的晶面间距分别为

$$d_1 = a \qquad \text{和} \qquad d_2 = \sqrt{2}\,a/2,$$

入射的 X 射线束对于这两组晶面族的掠射角分别为

$$\theta_1 = 60° \qquad \text{和} \qquad \theta_2 = 75°.$$

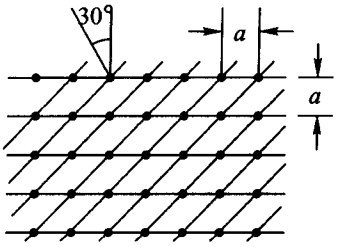
根据布拉格条件

$$2d\sin\theta = k\lambda,$$

波长为

$$\lambda_1 = \frac{2a\sin\theta_1}{k} = \frac{0.487}{k}\ \text{nm}$$

的 X 射线将对 $d_1 = a$ 的晶面族产生衍射极大，它们在入射的 X 射线束中的波长为 0.122 nm 和 0.0974 nm，分别相应于 $k=4$ 和 $k=5$. 与此类似，对于 $d_2 = \sqrt{2}\,a/2$ 的晶面族产生衍射极大的波长应满足

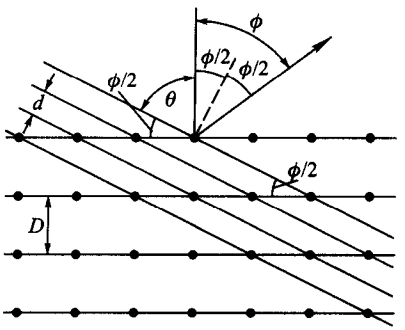


题 16－16 图

$$\lambda_2 = \frac{2d_2\sin\theta_2}{k} = \frac{0.384}{k}\ \text{nm},$$

它们在入射的 X 射线束中的波长为 0.128 nm 和 0.0960 nm，分别相应于 $k=3$ 和 $k=4$.

16－17. 戴维孙和革末在他们的一个实验中，将电子垂直入射到与主布拉格平面平行而切割出来的表面上，他们在沿表面法线 50° 角处观测到构造性干涉. 已知镍的原子间距是 0.215 nm，试求联系于电子束的波长.



题 16－17 图

[解] 如图所示，镍原子间距是 $D=0.215\,\text{nm}$，造成构造性干涉的晶面族的面间距是

$$d = D\sin(\phi/2),$$

其中 $\phi = 50°$ 是散射角. 由于掠射角是 $\theta = 90° - \phi/2$，因此利用布拉格条件[式(16.30)] $2d\sin\theta = k\lambda$，并令 $k=1$，可得

$$2D\sin(\phi/2)\sin(90° - \phi/2) = \lambda,$$
$$2D\sin(\phi/2)\cos(\phi/2) = \lambda,$$
$$D\sin\phi = \lambda.$$

所以，电子束的波长为

$$\lambda = D\sin\phi = 0.215\sin 50°\ \text{nm} = 0.165\ \text{nm}.$$

第十七章　光的偏振

17－1. 在测定感光乳胶特性的实验中，需要用一系列不同强度的光使感光片曝光，这些不同强度的光可以借助于两个偏振片得到．为了使感光片以 1 : 0.8 : 0.6 : 0.4 : 0.2 : 0 的光强比曝光，两个偏振片之一的透振方向必须相应地转过多大的角度？

[解] 按马吕斯定律，为使感光片以 1 : 0.8 : 0.6 : 0.4 : 0.2 : 0 光强比曝光，θ 角依次为 0°, 26°34', 39°14', 50° 46', 63° 26', 90°.

17－2. 将透振方向相互平行的两块偏振片 M 和 N 共轴平行放置，并在它们之间平行地插入另一块偏振片 B，B 与 M 的透振方向之间的夹角为 θ．若用强度为 I_0 的单色自然光垂直入射到偏振片 M 上，并假定不计偏振片对光能量的吸收，试问透过检偏器 N 的出射光强将如何随 θ 角而变化？

[解] $I_B = (I_0 \cos^2\theta)/2$，$I_N = (I_0 \cos^4\theta)/2$.

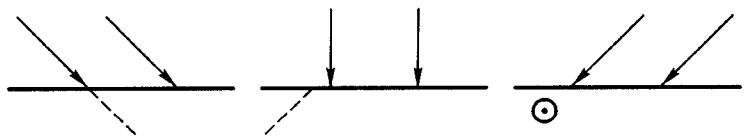
17－3. 在习题 17－2 中，若起偏器 M 和检偏器 N 的透振方向之间的夹角为 60°，则当 θ=0° 和 30° 时，出射光强 I 和入射光强之比分别为多少？

[解] 当 θ=0° 时，光强比为 $(\cos^2 60°)/2 = 1/8$；当 θ=30° 时，光强比为 $(\cos^4 30°)/2 = 9/32$ 或 0.

17－4. 布儒斯特定律提供了一种测定不透明电介质折射率的方法．今测得某一电介质的起偏振角为 57°，试求该电介质的折射率．

[解] 利用布儒斯特定律可得，$n_2 = n_1 \tan\theta_b = 1.54$.

17－5. 用惠更斯作图法决定图中三种情况下的 o 光和 e 光的传播方向和振动方向．(图解略)



(a) 负晶体　　(b) 正晶体　　(c) 负晶体

题 17－5 图

17－6. (1) 已知石英的主折射率 $n_o = 1.5443$，$n_e = 1.5534$，用石英制作适用于钠黄光(λ = 589.3 nm)和水银光(λ = 546.1 nm)的 1/4 波片，其最小厚度分

别是多少？

(2) 在已经有一自然光源和一偏振片的情况下，怎样用此 1/4 波片产生一圆偏振光以及长短轴之比为 2 : 1 的椭圆偏振光？

[解] 由 $(n_e - n_o)d = \lambda/4$ 可得，波片的最小厚度分别为

$$d_1 = 16.2\,\mu m \quad 和 \quad d_2 = 15.0\,\mu m .$$

为了利用 1/4 波片产生圆偏振光，可令自然光通过起偏器后再通过一个 1/4 波片，且波片的光轴方向与起偏器的透振方向成45°角．同样的方法还可以产生长短轴之比为 2 : 1 的椭圆偏振光，只需使 1/4 波片的光轴方向与起偏器的透振方向成 26° 34' 或 63° 26' 角即可．显然，这里假定了该波片的光轴方向与起偏器的透振方向之间的相对取向已事先标记好，否则还需要一个检偏器才能完成上述实验．

17－7. (1) 已知方解石的主折射率 $n_o = 1.6584$，$n_e = 1.4864$，线偏振光垂直入射到一块表面与光轴平行的方解石晶片上，如果入射光的振动方向与晶片主截面成 30°角，试求晶片中 o 光和 e 光的光强之比．

(2) 为使晶片对钠黄光(λ=589.3nm)成为半波片，其最小厚度是多少？

(3) 从该半波片透出的线偏振光的振动面相对于入射光的振动面转过了多大的角度？

[解] (1) 按题意，入射光的振动方向与晶片中 e 光的振动方向成 30°角，因此晶片中 o 光和 e 光的光强之比为 $I_o : I_e = 1 : 3$．

(2) 为了使晶片对钠黄光成为半波片，其最小厚度为

$$d = \frac{\lambda}{2(n_o - n_e)} = 1.71\,\mu m .$$

(3) 在本题所给出的情况下，从该波片透出的线偏振光的振动面相对于入射光的振动面转过了 60° 或 120°．

17－8. 用自然光源以及起偏器和检偏器各一件，如何鉴别下列三种透明片：偏振片，半波片和 1/4 波片．

[解] (1) 令自然光通过起偏器后产生线偏振光，然后顺序将待鉴别的三种透明片平行共轴置于其后，若透明片绕轴转动 360° 出现两次消光现象，则该透明片是偏振片．

(2) 为了进一步鉴别半波片和 1/4 波片，可将检偏器平行共轴置于起偏器之后，然后顺序将待鉴别的两种透明片平行共轴置于起偏器和检偏器之间，若透明片绕轴转动任意角度后，再将检偏器转动 360° 时都会出现两次消光现象，则该透明片是半波片，余下的则是 1/4 波片．

17－9. 将一块表面与光轴平行的、厚 0.025 mm 的方解石晶片，放置在

两正交偏振片之间．从第一块偏振片射出的线偏振光垂直入射在晶片上，振动方向与晶片光轴方向成 45°角．试问当可见光透过第二块偏振片时，其光谱 400～700 nm 中缺少哪些波长的谱线？如果上述两块偏振片的透振方向互相平行，则透射光中缺少哪些波长的谱线？假定双折射率 $n_o - n_e = 0.172$ 可看做常量．

[解] 当 $d(n_o - n_e)/k$ 正好处在 400～700 nm 范围内时，波片对于某些波长的光是全波片，两正交偏振片将使其后这些波长的光出现消光现象．由此可确定，在透过第二个偏振片的可见光光谱中缺少波长为 614 nm, 534 nm, 478 nm, 430 nm 的谱线，它们分别相应于 $k = 7, 8, 9, 10$.

如果两个偏振片的透振方向互相平行，则透射光中缺少那些使波片成为半波片的波长，即 662 nm, 573 nm, 506 nm, 453 nm, 410 nm.

17－10. 现有一个由硝基苯液体制成的长 2.00 cm、高 4.0 mm 的克尔盒，已知硝基苯液体对波长为 $\lambda = 589.3$ nm 的黄光的克尔常量为 $k = 2.44\times10^{-12}$ m/V^2. 试问：(1) 当克尔盒的上下表面间加 4000 V 电压时，双折射率$(n_o - n_e)$和相位差是多少？(2) 若起偏器的透振方向与电场方向成 45°角，那么为了得到圆偏振光，外加电压应是多少？

[解] (1) 双折射率和相位差分别为

$$(n_o - n_e) = k E^2 \lambda = 1.44\times10^{-6},$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta L = \frac{2\pi}{\lambda} k d E^2 \lambda = 2\pi k d E^2 = 3°31'.$$

(2) 若起偏器的透振方向与电场方向成 45°角，为了得到圆偏振光，外加电压 $U = E d$ 应大到能使 $\Delta\varphi = \pi/2$，或 $2\pi k d E^2 = \pi/2$，即

$$U = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{d}{k}} = 2.02\times10^4 \text{ V}.$$

17－11. 在透振方向相互平行的两偏振片之间，平行放置一片垂直于光轴切割的石英晶片，已知石英对钠黄光的旋光率为 21.7(°)/mm. 试问当石英晶片的厚度等于多大时，钠黄光不能通过第二个偏振片？

[解] 为使钠黄光不能通过第二个偏振片，需使石英晶片所造成的旋光角度达到90°，即石英晶片的厚度为

$$d = (90°/21.7°)\,\text{mm} = 4.25\ \text{mm}.$$

17－12. 已知葡萄糖溶液的比旋光率为 20.5(°)·cm^3/(dm·g). 为了测量它的浓度，将它装满在 12.0 cm 长的玻璃管中．当一单色线偏振光垂直于玻璃管的端面入射、并沿着管的中心轴线通过时，从检偏器测得光的振动面旋转了 1.23°. 试求该葡萄糖水溶液的浓度．

[解] $\rho_s = \varphi / \alpha' d = 0.051\ \mathrm{g/cm^3}$.

17－13. 已知重火石玻璃的费尔德常量 $V = 1.4\times10^3$ (°)/(m·T)，现将一块长 5.00 cm 的重火石玻璃块放在磁感应强度为 0.200 T 的磁场内，试问：(1) 当一束线偏振光通过玻璃块时，振动面旋转了多少度？(2) 如果要求旋转 180°，则光束必须在玻璃内反射多少次？

[解] 线偏振光的振动面旋转了14°．如果要求旋转 180°，则光束必须在玻璃内反射 13 次.

第十八章　光的吸收、散射和色散

18－1. 某种介质的吸收系数为$\alpha_a = 0.32\ \mathrm{cm}^{-1}$，试求透射光强分别为入射光强的 0.1，0.2，0.5 及 0.8 倍时，该介质的厚度各为多少？如果我们改用$\alpha_a = 10^{-2}\ \mathrm{cm}^{-1}$的玻璃或$\alpha_a = 10^{4}\ \mathrm{cm}^{-1}$的金属，则结果将如何？

[解] 该种介质的厚度分别为 7.2 cm，5.0 cm，2.2 cm，0.70 cm；玻璃的厚度分别为 2.3 m，1.6 m，0.69 m，0.22 m；金属的厚度分别为 2.3 μm，1.6 μm，0.69 μm，0.22 μm.

18－2. 为了防止红外线进入光学系统，在有些光学仪器前加一个水透镜(即隔热水瓶). 如果水对红外光的平均吸收系数$\alpha_a = 1.0\ \mathrm{cm}^{-1}$，要阻止绝大部分(99%)红外线进入，水透镜需要多厚？

[解] 要求水透镜的厚度为 4.6 cm.

18－3. 红光透过 15 m 深的海水后，光强减弱到原来的 1/4，试求海水对红光的吸收系数以及光强减弱到原来的 1%时透过海水的深度.

[解] 海水对红光的吸收系数为$9.2\times10^{-4}\ \mathrm{cm}^{-1}$. 如果光强减弱到了原来的 1%，则红光透过海水的深度为 50 m.

18－4. 浓度为2.0×10^{-4} g/mL 的某种溶液，以 589 nm 波长的光测得其光密度值为 0.44. 现以同种光同样厚度的容器测量未知浓度的同种溶液，得到的光密度值为 0.66，试求该未知浓度.

[解] $\rho_s' = \dfrac{\lg(I_0/I)'}{\lg(I_0/I)}\rho_s = 3.0\times10^{-4}\ \mathrm{g/mL}$.

18－5. 设白光中波长为 690 nm 的红光和波长为 430 nm 的蓝光强度相同，试问在瑞利散射的散射光中两者的比例是多少？

[解] $\dfrac{I_{s1}}{I_{s2}} = \dfrac{\lambda_2^4}{\lambda_1^4} = \dfrac{430^4}{690^4} = 0.151$，即在散射光中蓝光强度是红光强度的 6.63 倍，或红光和蓝光光强的比例约为 3 : 20.

18－6. 太阳光束由小孔射入暗室，室内的人沿着与光束垂直以及与之成 45°的方向观测时，所测得的由瑞利散射所形成的光强之比等于多少？

[解] 入射自然光的散射光遵从$I_\theta \propto 1+\cos^2\theta$的规律，因此有

$$\frac{I_{90^\circ}}{I_{45^\circ}} = \frac{1+\cos^2 90^\circ}{1+\cos^2 45^\circ} = \frac{2}{3} = 0.67\ .$$

18－7. 在苯 C_6H_6 的拉曼散射光谱中，较强的各条谱线与入射光的波数

$(1/\lambda_0)$之差分别为 607 cm^{-1}，992 cm^{-1}，1178 cm^{-1}，1586 cm^{-1}，3047 cm^{-1}，3062 cm^{-1}．今以$\lambda_0 = 488.0$ nm 的氩离子激光入射，试计算各条斯托克斯线和反斯托克斯线的波长．

[解] 由于波数$1/\lambda = \omega/2\pi$，因此波数$1/\lambda$之间的和差关系与角频率ω之间的和差关系是一样的．所以，在拉曼散射中较强的各条谱线的波数与入射光的波数$(1/\lambda_0)$之差，所对应的正是各个角频率之差，即

$$\frac{1}{\lambda_j} = \frac{\omega_j}{2\pi c}$$

分别等于 607 cm^{-1}, 992 cm^{-1}, 1178 cm^{-1}, 1586 cm^{-1}, 3047 cm^{-1}, 3062 cm^{-1}．今以$\lambda_0 = 488.0$ nm 的激光入射，各斯托克斯谱线的波长为λ_S，

$$\frac{1}{\lambda_S} = \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_j} = \frac{\omega_0 - \omega_j}{2\pi c}\ ;$$

而反斯托克斯谱线的各个波长为λ_A，

$$\frac{1}{\lambda_A} = \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_j} = \frac{\omega_0 - \omega_j}{2\pi c}.$$

于是，可以得到

$\lambda_j^{-1}/\mathrm{cm}^{-1}$ = 607，992，1178，1586，3047，3062；

$\lambda_j/\mu\mathrm{m}$ = 16.47，10.08，8.489，6.305，3.282，3.266；

λ_S/nm = 502.9，512.8，517.8，528.9，573.2，573.7；

λ_A/nm = 474.0，465.5，461.5，452.9，424.8，424.6.

由此可见，利用拉曼散射可以把原来波长λ_j在红外波段的分子光谱，转移到波长λ_S和λ_A在可见光波段的拉曼光谱来进行研究．

18－8. 水银灯蓝、绿谱线的波长分别为$\lambda_1 = 435.8$ nm 和$\lambda_2 = 546.1$ nm，一块光学玻璃对它们的折射率分别为$n_1 = 1.65250$ 和$n_2 = 1.62450$，试利用柯西色散公式计算这种玻璃对钠黄线$\lambda_3 = 589.3$ nm 的折射率 n_3 以及色散率 $\mathrm{d}n_3/\mathrm{d}\lambda$.

[解] 由柯西色散公式$n_1 = A + \frac{B}{\lambda_1^2}$和$n_2 = A + \frac{B}{\lambda_2^2}$，可解得

$$B = \frac{n_1 - n_2}{1/\lambda_1^2 - 1/\lambda_2^2} = 1.4644\times10^4\ \mathrm{nm}^2,$$

$$A = n_1 - \frac{B}{\lambda_1^2} = 1.5754\ .$$

于是，这种玻璃对钠黄线的折射率 n_3 及色散率 $\mathrm{d}n_3/\mathrm{d}\lambda$ 分别为

$$n_3 = A + \frac{B}{\lambda_3^2} = 1.6176,$$

$$\frac{\mathrm{d}n_3}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{2B}{\lambda_3^3} = -1.4311\times10^{-4}\ \mathrm{nm}^{-1}.$$

18－9. 一块顶角为 50°的棱镜由玻璃制成，其色散特性可用柯西色散公式描写，其中常量 $A = 1.53974$，$B = 4.6528\times10^3\ \mathrm{nm}^2$. 棱镜的位置放置得使它对波长 550.0 nm 的光产生最小偏向角，试计算该棱镜的角色散本领 D 为多大.

[解] 根据角色散本领 D 的定义，有

$$D = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{2\sin(\alpha/2)}{\sqrt{1-n^2\sin^2(\alpha/2)}}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}.$$

由科希公式得折射率及色散率分别为

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} = 1.5548, \qquad \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{2B}{\lambda^3} = -5.4850\times10^{-5}\ \mathrm{nm}^{-1}.$$

将 n 和 $\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda$ 的数值代入前式，即得

$$D = -6.1502\times10^{-5}\ \mathrm{rad/nm}.$$

18－10. 对于可见光以及波长不太短的电磁波，物质的折射率 n 大于 1，因此由真空入射到物质表面上时不会发生全反射. 然而，波长为 0.67 nm 的 X 射线，由真空入射到某种玻璃时，在掠射角不超过 0.1°的条件下却发生了全反射，试计算玻璃对这一波长的电磁波的折射率 n 并说明之.

[解] 按题意，$\lambda = 0.67\ \mathrm{nm}$ 的 X 射线在由真空入射到某种玻璃时，在其入射角为 $\theta_i = 89.9°$ 时发生了全反射，即这时的折射角 $\theta_r = 90°$. 利用折射定律 $n_2/n_1 = \sin\theta_1/\sin\theta_2$ 可得，这种玻璃对该波长的电磁波的折射率 n 为

$$n = \frac{\sin 89.9°}{\sin 90°} = 0.999998 < 1.$$

本题的结果表明，电磁波在棱镜物质中的传播速度可以比真空中的光速大，这似乎违背了相对论. 然而，实际情况却并非如此. 相对论所要求的是任何信号传递速度都不能超过真空中的光速，对波的相速并没有这个限制. 根据惠更斯原理用折射率方法所得到的介质中的光速，正是电磁波的相速. 而大多数其他方法所测出的都是光的信号传递速度，或者粗略地说，都是能量传播速度或群速.

第十九章　从经典物理学到量子力学

19－1. 现测得太阳和北极星的λ_m分别为 510 nm 和 350 nm，将星球看成绝对黑体，试利用维恩位移律估算出它们的表面温度和黑体辐出度.

[解] 利用λ_{m1} = 510 nm 和λ_{m2} = 350 nm，根据维恩位移律和斯特藩–玻尔兹曼定律，可得太阳和北极星的表面温度及辐出度分别为

$$T_1 = \frac{b}{\lambda_{m1}} = 5.69\times10^3\ \mathrm{K},$$

$$T_2 = \frac{b}{\lambda_{m2}} = 8.29\times10^3\ \mathrm{K};$$

$$M_1(T) = \sigma T_1^4 = 5.94\times10^7\ \mathrm{W/m^2},$$

$$M_2(T) = \sigma T_2^4 = 2.68\times10^8\ \mathrm{W/m^2}.$$

19－2. 太阳辐射到地球大气层外表面单位面积的辐射通量 I_0，称为太阳常量，实验测得其值为 $I_0 = 1.35\ \mathrm{kW/m^2}$. 试由太阳常量估算出太阳(近似当做黑体)表面的温度.

[解] 把太阳近似当做黑体，由斯特藩–玻尔兹曼定律，可以求出太阳的总辐射功率为 $\sigma T^4 \cdot 4\pi R^2$，其中 $R = 6.96\times10^8$ m 是太阳的平均半径. 设 $r = 1.50\times10^{11}$ m 是日地距离，则由于地球大气层外表面上的面元 ΔS 接收到的是在立体角 $\Delta S / r^2$ 之内的太阳辐射，它就等于太阳常量乘以 ΔS，因此有

$$\sigma T^4 4\pi R^2 \frac{\Delta S / r^2}{4\pi} = I_0 \Delta S,$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{I_0 r^2}{\sigma R^2}} = 5.77\times10^3\ \mathrm{K}.$$

19－3. 试证明，黑体单色辐出度 $M_{0\lambda}(T)$ 与辐射能量密度 $w(\lambda, T)$ 之间的关系式为

$$M_{0\lambda}(T) = \frac{1}{4} c w(\lambda, T). \tag{19.46}$$

[解] 若电磁波正入射到面积元 dA 上，则单位时间内通过 dA 向一侧辐射的能量为

$$c\, w(\lambda, T)\, \mathrm{d}A.$$

各向同性的辐射场包含各种传播方向(总立体角为 4π)，因此传播方向在立体角 $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi$ 内的辐射能流为

$$c\,w(\lambda,T)\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi}=\frac{c\,w(\lambda,T)}{4\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

若 $\mathrm{d}\Omega$ 与 $\mathrm{d}A$ 法线方向间的夹角为 θ，则有效面积元为 $\mathrm{d}A\cdot\cos\theta$，在单位时间内、传播方向在 $\mathrm{d}\Omega$ 立体角内通过 $\mathrm{d}A$ 向一侧辐射的能量为

$$c\,w(\lambda,T)\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi}\cos\theta\,\mathrm{d}A=\frac{c\,w(\lambda,T)\mathrm{d}A}{4\pi}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,,$$

在单位时间内通过 $\mathrm{d}A$ 向一侧辐射的总辐射能量 $M_{0\lambda}(T)\mathrm{d}A$ 应为对 $\mathrm{d}\Omega$ 的积分，或对 $\theta(0\to\pi/2)$和 $\varphi(0\to2\pi)$的积分，即

$$\begin{aligned}M_{0\lambda}(T)\mathrm{d}A&=\int c\,w(\lambda,T)\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi}\cos\theta\,\mathrm{d}A\\&=\frac{c\,w(\lambda,T)\mathrm{d}A}{4\pi}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{1}{4}c\,w(\lambda,T)\mathrm{d}A\,,\end{aligned}$$

式(19.46)得证.

19－4. 从钠中脱出一个电子至少需要 2.30 eV 能量. 若用波长为 430 nm 的光投射到钠的表面上，试求：(1) 钠的截止频率 ν_0 及其相应的波长 λ_0；(2) 出射光电子的最大动能 $E_{\mathrm{k\,max}}$ 和最小动能 $E_{\mathrm{k\,min}}$；(3) 截止电压 U_0.

[解] 由 $A=2.30\mathrm{eV}$，$\lambda=430\mathrm{nm}$，利用爱因斯坦的光量子论及实验规律，可以得到下述结果：

(1) 只有当每个光量子的能量 $h\nu$ 大于逸出功 A 时，才有光电子逸出金属表面，因此钠的截止频率 ν_0 和红限波长 λ_0 分别为

$$\nu_0=\frac{A}{h}=\frac{2.30\times1.60\times10^{-19}}{6.626\times10^{-34}}\mathrm{Hz}=5.55\mathrm{Hz}\,,$$

$$\lambda_0=\frac{c}{\nu_0}=540\mathrm{nm}\,.$$

(2) 当光子能量 $h\nu$ 完全被光电子吸收，并在逸出过程中未因碰撞而损失能量时，该电子克服逸出功而逸出金属后将具有最大动能，即

$$E_{\mathrm{k\,max}}=h\nu-A=0.943\times10^{-19}\ \mathrm{J}=0.589\ \mathrm{eV}\,.$$

如果在光电子逸出金属的过程中部分能量因碰撞而损失后，使光电子刚好能克服逸出功而逸出金属，这些光电子将具有最小动能

$$E_{\mathrm{k\,min}}=0.$$

(3) 光电效应的截止电压为

$$U_0 = \frac{E_{k\,max}}{e} = 0.589\ \text{V}\ .$$

19－5. 利用波长分别为 253.6 nm，283.0 nm，303.9 nm，330.2 nm，366.3 nm，435.8 nm 的光照射某金属表面，测得截止电压分别为 2.60 V，2.11 V，1.81 V，1.47 V，1.10 V，0.57 V．设电子电荷及光速均为已知，试确定普朗克常量 h 的数值及该金属的逸出功 A.

[解] (1) 图解法：利用 $\nu=c/\lambda$，可以得到各波长所对应的频率分别为 $(11.83, 10.60, 9.872, 9.085, 8.190, 6.884)\times10^{14}$ Hz．以频率为横轴，以截止电压为纵轴，可画出 $U_0-\nu$ 图(图略)．利用

$$eU_0=h\nu-A \qquad \text{和} \qquad A=h\nu_0\ ,$$

由 $U_0-\nu$ 直线的斜率及其与横轴的交点，可以得到

$$h = 6.64\times10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}\ , \qquad \nu_0=5.58\times10^{14}\ \text{Hz}\ ,$$

$$A=h\nu_0 = 3.71\times10^{-19}\ \text{J} = 2.32\text{eV}\ .$$

(2) 解析法：令

$$y=eU_0\ , \qquad x=\nu\ , \qquad a=-A\ , \qquad b=h\ ,$$

则式 $eU_0=h\nu-A$ 可化为 $y=a+bx$．为了从离散的实验数据得出参量 a 和 b，可采用最小二乘法.

最小二乘法(method of least squares)是从实验数据求经验公式的最精确方法之一，其基本原理是：在具有同一准确程度的许多测定值中的最概然值，是当各测定值的残差(测定值与其算术平均值之差)的二乘方的和为最小时所求得的值．按最小二乘法，可先算出：

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n}\ ,$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i)}{n}\ ,$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}\ , \qquad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}\ .$$

由此即可求得

$$h=b=\frac{S_{xy}}{S_{xx}}\ , \qquad A=-a=b\bar{x}-\bar{y}\ .$$

将本题的实验数据代入上式，可得

$$h = 6.61\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}, \qquad A = 3.64\times10^{-19}\ \mathrm{J} = 2.27\ \mathrm{eV}.$$

19－6. 在理想条件下，正常人的眼睛接收到 550 nm 的可见光时，只要每秒光子数达 100 个就会有光的感觉，试问与此相当的光功率是多少？

[解] 正常人的眼睛有光的感觉时所相应的光功率为

$$I_{\min} = 100h\nu = \frac{100hc}{\lambda} = 3.62\times10^{-17}\ \mathrm{W}.$$

19－7. (1) 广播天线以频率 1 MHz、功率 1 kW 发射无线电波，试求它每秒发射的光子数. (2) 利用太阳常量 $I_0 = 1.35\ \mathrm{kW/m^2}$，计算每秒人眼接收到的来自太阳的光子数. 假定光的平均波长为 550 nm，人的眼球接受光的面积为 1 $\mathrm{cm^2}$。这两个结果说明了，为什么在研究广播辐射和太阳光学时，电磁辐射的量子特性并未直接显示出来.

[解] (1) 广播天线每秒发射的光子数为

$$N = \frac{P\times1\mathrm{s}}{h\nu} = \frac{1\times10^{3}}{6.626\times10^{-34}\times1\times10^{6}} = 1.5\times10^{30}.$$

(2) 每秒人眼接收到的来自太阳的光子数为

$$N = 2\times\frac{I_0\times1\mathrm{s}\times10^{-4}\ \mathrm{m^2}}{hc/\lambda} = 7.5\times10^{17}.$$

这样巨大的光子数表明，在研究广播辐射和太阳光学时，电磁辐射的量子特性并未直接显示出来. 又如，天空中相当明亮的一等星在地球表面产生的光照度大约为 10^{-6} lx (勒克斯). 然而，对于波长为 556 nm 的光，1 lx 相当于 0.016 $\mathrm{W/m^2}$，由此可估算出该一等星的星光每秒进入人眼的光子数大约为 $N = 8.9\times10^{6}$. 由于正常人眼只要每秒吸收 100 个光子就有感觉，可见天上某些星星的“眨眼”也不是由光的量子性引起的.

19－8. 波长为 $\lambda_0 = 0.0708\,\mathrm{nm}$ 的 X 射线在石蜡上受到康普顿散射，试求在 $\pi/2$ 和 π 方向上所散射的 X 射线的波长以及反冲电子所获得的能量各是多少？

[解] 康普顿波长

$$\lambda_{\mathrm{C}} = \frac{h}{m_{\mathrm{e}}c} = 2.4263\times10^{-12}\ \mathrm{m}.$$

在 $\theta = \pi/2$ 和 π 方向上散射的 X 射线的波长 $\lambda_{\pi/2}$ 和 λ_{π} 以及反冲电子所获得的能量 $\Delta E_{\pi/2}$ 和 ΔE_{π} 分别为

$$\lambda_{\pi/2} = \lambda_0 + \lambda_{\mathrm{C}}(1-\cos\theta) = \lambda_0 + \lambda_{\mathrm{C}} = 0.0732\,\mathrm{nm},$$

$$\lambda_{\pi} = \lambda_0 + 2\lambda_{\mathrm{C}} = 0.0756\,\mathrm{nm},$$

$$\Delta E_{\pi/2} = h\nu_0 - h\nu = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda_0\lambda} = \frac{hc\lambda_C}{\lambda_0\lambda_{\pi/2}} = 582\,\text{eV},$$

$$\Delta E_{\pi} = \frac{2hc\lambda_C}{\lambda_0\lambda_{\pi}} = 1.16\times10^3\,\text{eV}.$$

19－9. 试计算巴尔末线系可见光区四条谱线的波长.

[解] 波长分别为：$\lambda_3 = 656.1\,\text{nm}$，$\lambda_4 = 486.0\,\text{nm}$，$\lambda_5 = 433.9\,\text{nm}$和$\lambda_6 = 410.1\,\text{nm}$.

19－10. 试计算氢原子各线系的长波极限波长λ_{1m}和短波极限波长λ_{sm}.

[解] 按照广义的巴尔末公式，各线系的长波极限波长($n = m + 1$)和短波极限波长($n \to \infty$)分别为

$$\lambda_{1m} = \frac{1}{R}\frac{m^2(m+1)^2}{(m+1)^2 - m^2} = \frac{1}{R}\frac{m^2(m+1)^2}{(2m+1)}; \qquad \lambda_{sm} = \frac{m^2}{R}.$$

具体计算可得

$$\lambda_{1m} = 121.5\,\text{nm}, 656.1\,\text{nm}, 1.875\,\mu\text{m}, 4.050\,\mu\text{m}, 7.456\,\mu\text{m};$$

$$\lambda_{sm} = 91.12\,\text{nm}, 364.5\,\text{nm}, 0.8201\,\mu\text{m}, 1.458\,\mu\text{m}, 2.278\,\mu\text{m}.$$

19－11. 已知氢原子的电离能为 13.60 eV. 设氢原子处在某一定态，从该定态移去一个电子所需要的能量是 0.85 eV. 电子从基态跃迁到其他定态(激发态)所需要的能量称为激发能，试问从上述定态向激发能为 10.20 eV 的另一定态跃迁时，所产生的谱线的波长是多少？属什么线系？

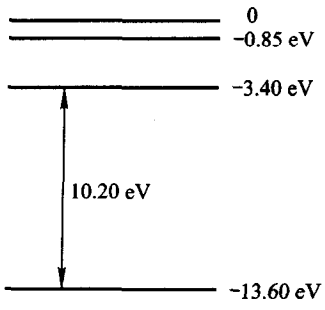
[解] 如图所示，该跃迁发生在能量差为

$$E_n - E_m = (13.60 - 10.20 - 0.85)\,\text{eV} = 2.55\,\text{eV}$$

的两能级之间，而该跃迁所产生的谱线的波长为

$$\lambda = \frac{hc}{E_n - E_m} = 487\,\text{nm},$$

属于巴尔末线系.



题 19－11 图

19－12. 动能为 20 eV 的电子，与处在基态的氢原子相碰，使氢原子激发. 当氢原子回到基态时，辐射出波长为 121.6 nm 的光子，试求碰撞后电子的速度.

[解] 按题意，电子动能$E_{k0} = 20\,\text{eV}$的一部分在与氢原子相碰时为氢原子提供了激发能

$$E_n - E_m = hc/\lambda ,$$

而余下的动能使电子在碰撞后仍具有一定的速度 v，因此有

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = E_{k0} - \frac{hc}{\lambda} .$$

所以，碰撞后电子的速度为

$$v = \sqrt{\frac{2}{m_e}(E_{k0} - \frac{hc}{\lambda})} = 1.85\times10^6\ \mathrm{m/s} .$$

19－13. 已知氢原子的电离能为 13.60 eV，一个能量为 15.20 eV 的光子被氢原子中的基态电子吸收而形成一个光电子，试求该光电子远离氢原子核时的速度及其德布罗意波长.

[解] 在远离氢原子核时，所形成的光电子具有的能量 E 等于光子的能量 15.20 eV 减去氢原子的电离能 13.60 eV，即 E = 1.60 eV. 于是，这时该光电子的速度 v 和德布罗意波长 λ 分别为

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m_e}} = 7.50\times10^5\ \mathrm{m/s} ,$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_e E}} = 0.970\,\mathrm{nm} .$$

19－14. 一束带电量与电子电量相同的粒子，经 206 V 电压加速后，测得其德布罗意波长为 2.0 pm，试求粒子的质量.

[解] 已知粒子所带电量为 $e = 1.60\times10^{-19}$ C，经 U = 206 V 电压加速后获得的动能为 $E_k = eU$，其德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} = 2.0\times10^{-12}\ \mathrm{m} .$$

于是，可解得这粒子的质量为

$$m = \frac{h^2}{2eU\lambda^2} = 1.67\times10^{-27}\ \mathrm{kg} = 1.01\,\mathrm{u} .$$

如果要确定该粒子究竟是什么粒子，则需要更精确的测量数据.

19－15. 热中子平均动能为 $(3/2)kT$. 试问当温度为 300 K 时，一个热中子的动能多大？相应的德布罗意波长是多少？

[解] 当温度为 300 K 时，一个热中子的平均动能 $\overline{E}_k$ 及其相应的德布罗意波长 λ 分别为

$$\overline{E}_k = \frac{3}{2}kT = 6.21\times10^{-21}\ \mathrm{J} = 3.88\times10^{-2}\ \mathrm{eV} ,$$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_n \bar{E}_k}} = 0.145\,\text{nm}.$$

19－16. 设电子和光子的波长均为 0.50 nm，试求两者的动量及动能之比.

[解] (1) 由德布罗意关系式，可得电子的动量为

$$p_e = \frac{h}{\lambda};$$

由爱因斯坦关系式，可得光子的动量为

$$p_{ph} = \frac{E_{ph}}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

所以，电子和光子的动量之比为

$$\frac{p_e}{p_{ph}} = 1.$$

(2) 对于电子，当它的能量不高时，其德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_e E_e}},$$

即　$$E_e = \frac{p_e^2}{2m_e} = \frac{h^2}{2m_e\lambda^2};$$

对于光子，其能量为

$$E_{ph} = h\nu = \frac{hc}{\lambda}.$$

所以，电子和光子的能量之比为

$$\frac{E_e}{E_{ph}} = \frac{h^2}{2m_e\lambda^2}\frac{\lambda}{hc} = \frac{h}{2m_e\lambda c} = 2.4\times10^{-3}.$$

19－17. (1) 若电子的动能等于它的静能，试求该电子的速度和德布罗意波长. (2) 若一个光子的能量等于一个电子的静能，试问该光子的频率、波长和动量各是多少?

[解] (1) 根据狭义相对论，电子的动能为 $E_k = mc^2 - m_0c^2$；而按题意，已知 $E_k = m_0c^2$，所以有

$$mc^2 = 2m_0c^2,$$

即　$$m = 2m_0.$$

将　$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

代入，即可得该电子的速度为

$$v=\frac{\sqrt{3}}{2}c=0.866c\,.$$

按照德布罗意假设，该电子的波长为

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{hc}{mvc}=\frac{hc}{2\times0.866m_0c^2}=1.40\times10^{-3}\ \text{nm}\,.$$

(2) 若一个光子的能量等于一个电子的静能，即 $E=m_0c^2$，则可得光子的频率、波长和动量分别为

$$\nu=\frac{E}{h}=\frac{m_0c^2}{h}=\frac{8.187\times10^{-14}\ \text{J}}{6.626\times10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}=1.24\times10^{20}\ \text{Hz}\,,$$

$$\lambda=\frac{c}{\nu}=\frac{hc}{m_0c^2}=\frac{1.24\ \text{keV}\cdot\text{nm}}{511\ \text{keV}}=2.43\times10^{-3}\ \text{nm}\,,$$

$$p=\frac{E}{c}=\frac{m_0c^2}{c}=m_0c=2.73\times10^{-22}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}\,.$$

19－18. (1) 物理光学的一个基本结论是，在被观测物小于所用照射光波长的情况下，任何光学仪器都不能把物体的细节分辨出来．若要研究线度为 0.020 μm 的病毒，用电子显微镜可以形成非常好的病毒的像．试问这时电子所需要的加速电压是多少？(2) 电子显微镜中所用加速电压一般都很高，电子被加速后的速度很大，因而必须考虑相对论修正．试导出电子的德布罗意波长与加速电压 U_a 之间的关系．

[解] (1) 已知电子的德布罗意波长比病毒的线度 0.020 μm 小 1000 倍，即 $\lambda\approx0.020\,\text{nm}$，因此由

$$h/\sqrt{2m_eeU_a}=\lambda$$

可得，电子所需的加速电压为

$$U_a=\frac{h^2}{2m_e\,e\lambda^2}=3.8\,\text{kV}\,.$$

(2) 按照德布罗意假设，电子的波长为 $\lambda=h/p$．由于电子被加速后的速度很大，在计算电子的动量 p 时必须考虑相对论修正．根据狭义相对论，电子的动量与能量之间的关系为

$$E^2=m_0^2c^4+p^2c^2\,,\qquad\text{(a)}$$

又

$$E=m_0c^2+eU_a\,.\qquad\text{(b)}$$

将式(b)代入式(a)，可得

$$(m_0c^2+eU_a)^2=m_0^2c^4+p^2c^4\,,$$

即　$$p=\sqrt{2m_0eU_a}\,(1+\frac{eU_a}{2m_0c^2})^{\frac{1}{2}}. \tag{c}$$

将式(c)代入 $\lambda=h/p$，可得

$$\lambda=\frac{h}{\sqrt{2m_0eU_a}\cdot\sqrt{1+\dfrac{eU_a}{2m_0c^2}}}=\frac{hc}{\sqrt{2m_0c^2eU_a}\cdot\sqrt{1+\dfrac{eU_a}{2m_0c^2}}}$$

$$=\frac{1.24\times10^3\ \text{eV}\cdot\text{nm}}{\sqrt{2\times0.511\times10^6\ \text{eV}\cdot eU_a}\cdot\sqrt{1+\dfrac{eU_a}{2\times0.511\times10^5\ \text{eV}}}}$$

$$=\frac{1.226\,\text{nm}}{\sqrt{(U_a/\text{V})(1+0.978\times10^{-6}U_a/\text{V})}}=\frac{1.226\,\text{nm}}{\sqrt{U_r/\text{V}}},$$

式中 $U_r=U_a(1+0.978\times10^{-6}U_a/\text{V})$，此即所要证明的结果.

19－19. (1) 在 5.4 mT 的均匀磁场中，电子作半径为1.2cm 的圆周运动，试求它的德布罗意波长. (2) 目前世界上能量最高的电子加速器是西欧中心的正负电子对撞机 LEP，每束电子的能量可达到 50 GeV，试求这些电子的德布罗意波长.

[解] (1) 这些电子的德布罗意波长为

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{eRB}=0.12\ \text{nm};$$

(2) 能量达到 50 GeV 的电子的德布罗意波长为

$$\lambda=\frac{hc}{E}=0.025\,\text{fm}.$$

19－20. (1) 试证明一个粒子的康普顿波长与其德布罗意波长之比为

$$\frac{\lambda_C}{\lambda_D}=\sqrt{(\frac{E}{E_0})^2-1},$$

式中 E_0 和 E 分别为粒子的静能和运动粒子的总能量. (2) 试问电子的动能为何值时，它的德布罗意波长等于它的康普顿波长？

[解] (1) 一个粒子的康普顿波长和德布罗意波长分别为

$$\lambda_C=\frac{h}{m_0c},\qquad \lambda_D=\frac{h}{p}.$$

故有　$$\frac{\lambda_C}{\lambda_D}=\frac{p}{m_0c}=\frac{pc}{m_0c^2}=\frac{\sqrt{E^2-E_0^2}}{E_0}=\sqrt{(\frac{E}{E_0})^2-1}.$$

(2) 按题意，$\dfrac{\lambda_C}{\lambda_D}=1$，所以有

$$\sqrt{(\frac{E}{E_0})^2-1}=1,\qquad \text{即}\qquad E=\sqrt{2}\,E_0.$$

因此，这时该粒子的动能为

$$E_k=E-E_0=(\sqrt{2}-1)E_0=0.4\,E_0.$$

19－21. 设质量为 m 的粒子在下式给出的一维无限深势阱中运动：

$$U(x)=\infty \qquad (x<0,\ x>a),$$

$$U(x)=0 \qquad (0<x<a).$$

试用德布罗意的驻波条件，求该粒子能量的可能取值.

[解] 利用德布罗意关系 $p=h/\lambda$，可得

$$E=\frac{p^2}{2m}=\frac{h^2}{2m\lambda^2};$$

再利用德布罗意的驻波条件 $a=n\lambda$，可得

$$\lambda=\frac{a}{n}.$$

由此立即得出，粒子能量的可能取值为

$$E=\frac{h^2}{2m\lambda^2}=\frac{h^2n^2}{2ma^2}.$$

注意：这里的粒子并非光子，不能用关系式

$$\lambda=c/\nu \qquad \text{或} \qquad E=h\nu=h\frac{c}{\lambda}.$$

第二十章　波函数与薛定谔方程

20－1. 设粒子的波函数为 $\psi(x, y, z)$，试写出在 $(x, x+\mathrm{d}x)$ 范围内找到粒子的概率的表达式.

[解] 在 $(x, x+\mathrm{d}x)$ 范围内找到粒子的概率为

$$\rho(x)\,\mathrm{d}x = [\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x, y, z)|^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z]\,\mathrm{d}x\,.$$

20－2. 设用球面坐标表示的粒子波函数为 $\psi(r, \theta, \varphi)$，试求粒子在球壳 $(r, r+\mathrm{d}r)$ 中被观测到的概率，以及在 (θ, φ) 方向上的立体角元

$$\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

中找到粒子的概率.

[解] 在球面坐标系中，在 (r, θ, φ) 附近体积元 $r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$ 中找到粒子的概率为 $|\psi(r, \theta, \varphi)|^2 r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$，因此有以下结果：

(1) 粒子在球壳 $(r, r+\mathrm{d}r)$ 中被观测到的概率为

$$\rho(r)\,\mathrm{d}r = [\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}|\psi(r,\theta,\varphi)|^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi]\,r^2\mathrm{d}r\,.$$

(2) 在 (θ, φ) 方向的立体角元 $\mathrm{d}\Omega=\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$ 中找到粒子的概率为

$$\rho(\theta,\varphi)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = [\int_0^{\infty}|\psi(r,\theta,\varphi)|^2\,r^2\mathrm{d}r]\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

20－3. 设一维运动的粒子处在

$$\psi(x)=A\,x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\ (x\geqslant 0),\qquad \psi(x)=0\ \ (x\leqslant 0)$$

的状态，其中 $\lambda>0$. 试求：(1) 归一化因子，(2) 粒子坐标的概率分布，(3) 在何处找到粒子的概率最大，(4) x 和 x^2 的平均值.

[解] (1) 利用分部积分法或查积分表，可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}A^2x^2\mathrm{e}^{-2\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{A^2}{4\lambda^3},$$

即该波函数的归一化因子为 $2\sqrt{\lambda^3}\,/\,A$，则归一化波函数为

$$\psi(x)=2\sqrt{\lambda^3}\,x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\qquad (x\geqslant 0),$$
$$\psi(x)=0\qquad (x\leqslant 0).$$

(2) 粒子坐标的概率分布为

$$\rho(x)=|\psi(x)|^2=4\lambda^3x^2\mathrm{e}^{-2\lambda x}\qquad (x\geqslant 0),$$
$$\rho(x)=0\qquad (x\leqslant 0).$$

(3) 由 $x \geqslant 0$ 范围内的极值条件 $\mathrm{d}\rho(x)/\mathrm{d}x = 0$，可得

$$4\lambda^3[2x\mathrm{e}^{-2\lambda x} + x^2(-2\lambda)\mathrm{e}^{-2\lambda x}] = 0,$$

即　　$x(1-\lambda x) = 0.$

由此可解得

$$x = 0 \qquad \text{或} \qquad x = 1/\lambda .$$

在 $x = 0$ 处，$\rho(0) = 0$，概率最小；在 $x = 1/\lambda$ 处，找到粒子的概率最大，这时有 $\rho(1/\lambda) = 4\lambda\mathrm{e}^{-2}$.

(4) x 和 x^2 的平均值分别为

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} 4\lambda^3 x^3 \mathrm{e}^{-2\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2\lambda},$$

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 x^2\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} 4\lambda^3 x^4 \mathrm{e}^{-2\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{\lambda^2}.$$

20－4. 设粒子在沿 x 轴运动时，速率的不确定度为 $\Delta v = 1\mathrm{cm/s}$，试估算下列情况下粒子坐标的不确定度 Δx：(1) 电子，(2) 质量为 10^{-13} kg 的布朗粒子，(3) 质量为 10^{-4} kg 的小弹丸.

[解] 由不确定关系可得以下结果：

(1) 对于电子，$m_e = 9.1\times10^{-31}$ kg，有

$$\Delta x_1 \geqslant \frac{\hbar}{2}\frac{1}{\Delta p_x} = \frac{h}{4\pi m_e \Delta v} = 5.8\times10^{-3}\ \mathrm{m};$$

(2) 对于 $m_2 = 10^{-13}$ kg 的布朗粒子，有

$$\Delta x_2 \geqslant \frac{\hbar}{2}\frac{1}{\Delta p_x} = \frac{h}{4\pi m_2 \Delta v} = 5.3\times10^{-20}\ \mathrm{m};$$

(3) 对于 $m_3 = 10^{-4}$ kg 的小弹丸，有

$$\Delta x_3 \geqslant \frac{\hbar}{2}\frac{1}{\Delta p_x} = \frac{h}{4\pi m_3 \Delta v} = 5.3\times10^{-29}\ \mathrm{m}.$$

20－5. 质量为 m 的粒子处在宽度为 a 的一维无限深方势阱中，试利用不确定关系估算该粒子可能具有的最小能量 E_1.

[解] 由不确定关系可得，当 $\Delta x \approx a$ 时，$\Delta p_x \geqslant \hbar/2a$. 因此，一维无限深方势阱中的粒子可能具有的最小能量为

$$E_1 \approx \frac{(\Delta p_x)^2}{2m} \approx \frac{\hbar^2}{8ma^2}.$$

与利用定态薛定谔方程得到的 $n=1$(基态)能量[式(20.70)]

$$E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$$

相比，前者是后者的$1/4\pi^2$倍．由此可见，利用不确定关系，以及利用不确定度$\Delta p_x \geqslant \hbar / 2a$作为粒子的动量并利用经典动能公式来计算粒子的能量，都只能认为是在做很粗略的估算．

20－6. 在发现中子以前，人们曾经认为原子核是由 A 个质子和$(A-Z)$个电子组成的．试用不确定关系估算原子核中质子和中子动能的量级，并大致说明电子不可能是原子核的结构单元．即使是原子核在发生β 衰变时临时产生出来的电子，其动能最多也只有几个 MeV，它的德布罗意波长也远大于核半径，电子不可能在原子核内久留，几乎立刻逸出核外．

[解] 假定原子核的直径为$d \approx A^{1/3}\ \text{fm}$，按照不确定关系，在原子核大小范围内运动的质子和中子的动能约为

$$E_{\text{kp}} \approx \frac{(\Delta p_x)^2}{2m_{\text{p}}} \approx \frac{\hbar^2}{8m_{\text{p}}(\Delta x)^2} \approx \frac{(\hbar c)^2}{8d^2 m_{\text{p}} c^2}$$

$$= \frac{197^2\ \text{MeV}^2 \cdot \text{fm}^2}{8 \times A^{2/3}\ \text{fm}^2 \times 938\ \text{MeV}} = 5.2\ \text{MeV}/A^{2/3},$$

它比核子的静能 940 MeV 小得多．

倘若电子被束缚在原子核内，则电子的动能约为

$$E_{\text{ke}} \approx \frac{(\Delta p_x)^2}{2m_{\text{e}}} \approx \frac{\hbar^2}{8m_{\text{e}}(\Delta x)^2} \approx \frac{(\hbar c)^2}{8d^2 m_{\text{e}} c^2} = 9.5 \times 10^3\ \text{MeV}/A^{2/3},$$

这个能量远大于电子的静能以及原子核的结合能．实际上，由于这种情况下电子动能的经典值比其静能 0.5 MeV 大得多，因此应该用相对论公式来计算其动能，即

$$E_{\text{ke}} \approx pc \approx \frac{\hbar c}{2\Delta x} \approx 100\ \text{MeV}/A^{1/3}.$$

为了把动能这么大的电子束缚在原子核中，需要大小相同的负的势能——质子和电子之间的库仑引力势能．然而，即使在原子核大小的范围内，质子与电子之间的库仑引力势能也只有

$$E_{\text{pe}} \approx \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} = -1.4\ \text{MeV}/A^{1/3}.$$

若令 $A=40$，则动能 $E_{\text{ke}} \approx 29\,\text{MeV}$，而电子与所有质子之间总的库仑引力势能 $\left|E_{\text{pe}}\right| < 17\,\text{MeV}$．况且，这里还未计及电子与电子之间的排斥作用，因此电子不可能是原子核的结构单元．

20－7. 试结合以下三个具体例子，用德布罗意波说明：在原子中电子轨道运动的概念完全没有意义，而在电子的荷质比实验以及 α 粒子的散射实

验中，可以近似地把它们当做经典粒子来处理．(1) 原子的尺度$\approx 10^{-10}$ m，原子中电子的动能≈ 10 eV；(2) 在测量电子荷质比的实验中，电子束截面的线度$\approx 10^{-4}$ m，电子的加速电压≈ 10 V；(3) 带电粒子在**威耳逊云室**(Wilson cloud chamber)中的轨迹是一串小雾滴，雾滴的线度约为 1 μm，所观测电子的能量≈ 1000 eV．

[解] (1) 动能$E_k \approx 10$ eV 的电子，德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{2m_e c^2 E_k}} = \frac{1.24\times10^3}{\sqrt{2\times0.511\times10^6\times10}}\text{nm} = 0.39\text{ nm},$$

它与原子的尺度≈ 0.1 nm 相当，因此在原子中电子轨道运动的概念完全没有意义．

(2) 在测量荷质比的实验中，加速电压≈ 10 V 的电子的德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{2m_e c^2 eU}} = \frac{1.24\times10^3}{\sqrt{2\times0.511\times10^6\times10}}\text{nm} = 0.39\text{ nm},$$

它远小于电子束截面的线度$\approx 10^{-4}$ m，故可当做经典粒子处理．

(3) 在威耳逊云室中，1000 eV 能量的电子的德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{2m_e c^2 eU}} = \frac{1.24\times10^3}{\sqrt{2\times0.511\times10^6\times1000}}\text{nm} = 0.039\text{ nm},$$

它远小于雾滴的线度(约为 1 μm)，故可当做经典粒子处理．

20－8. 若钠黄光谱线($\lambda = 589$ nm)的自然宽度为$\Delta\nu/\nu = 1.6\times10^{-8}$，试问钠原子相应的激发态的平均寿命约为多少？

[解] 由不确定关系可得，该激发态的平均寿命为

$$\Delta t \approx \frac{\hbar}{2\Delta E} = \frac{\hbar}{2h\Delta\nu} = \frac{\lambda}{4\pi(\Delta\nu/\nu)c} = 9.8\times10^{-9}\text{ s}.$$

20－9. 一维波函数$\psi(x) = Ae^{-\alpha^2x^2/2}$所表示的波包，称为**高斯波包**，其中$\alpha$ 为实数．

(1) 假若以概率密度下降到其最大值的 1/e 定义波包的大小Δx，试证明对于高斯波包有$\Delta x = 1/\alpha$；

(2) 试求其动量分布函数，并按Δx 的定义计算动量范围Δp，验算$\Delta x\cdot\Delta p$满足不确定关系．

[解] (1) 高斯波包的概率密度为

$$\rho(x) = A^2 e^{-\alpha^2x^2}.$$

在$x=0$处，概率密度达到其最大值$\rho(0)=A^2$．进一步，由

$$\rho(x_1) = A^2 e^{-\alpha^2 x_1^2} = \rho(0)/e = A^2/e$$

可以解出，$|x_1| = 1/\alpha$，即粒子的位置主要局限在$|x_1| = 1/\alpha$的范围内.

因此，若以概率密度下降到其最大值的 1/e 定义波包的大小Δx，则有

$$\Delta x = 1/\alpha .$$

(2) 对波函数作傅里叶变换，可得

$$\varphi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-\alpha^2 x^2/2} e^{-ipx/\hbar} dx .$$

利用在题目附注中给出的广义高斯积分公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Ax^2 - Bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{B^2/4A},$$

这里有 $A=\alpha^2/2$，$B=ip/\hbar$，于是上述积分式化为

$$\varphi(p) = \frac{A}{\sqrt{\hbar\alpha}} e^{-p^2/2\hbar^2\alpha^2},$$

故有　$\rho(p) = |\varphi(p)|^2 = \frac{A^2}{\hbar\alpha^2} e^{-p^2/\hbar^2\alpha^2}$.

在 $p=0$ 时 $\rho(0)=\frac{A^2}{\hbar\alpha^2}$ 达到其最大值；由

$$\rho(p_1) = \frac{A^2}{\hbar\alpha^2} e^{-p_1^2/\hbar^2\alpha^2} = \rho(0)/e,$$

可解得高斯波包的动量范围是

$$\Delta p = \hbar\alpha .$$

所以，对于高斯波包，满足不确定关系

$$\Delta x \cdot \Delta p \approx \hbar .$$

20－10. 设体系的波函数为

$$\psi(x,t) = A e^{-\alpha x^2 - i\omega t},$$

式中 A，α 和 ω 均为正实数. 为使此波函数满足方程

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) + V(x,t)\psi(x,t),$$

势函数$V(x,t)$应是怎样的函数？

[解] 在薛定谔方程的左边和右边，代入$\psi(x,t) = A e^{-\alpha x^2 - i\omega t}$，可得

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \hbar\omega\psi(x,t),$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)+V(x,t)\,\psi(x,t)$$

$$=-\frac{\hbar^2\alpha}{m}(2\alpha x^2-1)\psi(x,t)+V(x,t)\,\psi(x,t).$$

令以上两式相等，即得

$$V(x,t)=\frac{\hbar^2\alpha}{m}(2\alpha x^2-1)+\hbar\omega,$$

它是与时间无关的实函数.

20－11. 设 $\psi_1(\boldsymbol{r},t)$ 和 $\psi_2(\boldsymbol{r},t)$ 是薛定谔方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi+V(\boldsymbol{r})\psi$$

的两个解，试证明 $\int\psi_1^*\psi_2\,\mathrm{d}^3r$ 与时间无关，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int\psi_1^*\psi_2\,\mathrm{d}^3r\right)=0.$$

[注：对任一标量场 φ 和矢量场 $\boldsymbol{f}$，有 $\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{f})=(\nabla\varphi)\cdot\boldsymbol{f}+\varphi\nabla\cdot\boldsymbol{f}$.]

[证明] 按题意，有

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_1=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi_1+V(\boldsymbol{r})\psi_1,\tag{a}$$

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_2=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi_2+V(\boldsymbol{r})\psi_2.\tag{b}$$

将式(a)两边取复共轭，有

$$-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_1^*=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi_1^*+V(\boldsymbol{r})\psi_1^*.\tag{c}$$

再将 ψ_1^* 和 ψ_2 分别左乘式(b)和(c)并相减，可得

$$\mathrm{i}\hbar\left(\psi_1^*\frac{\partial}{\partial t}\psi_2+\psi_2\frac{\partial}{\partial t}\psi_1^*\right)$$

$$=-\frac{\hbar^2}{2m}(\psi_1^*\nabla^2\psi_2-\psi_2\nabla^2\psi_1^*).$$

利用题目附注中给出的 $\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{f})=(\nabla\varphi)\cdot\boldsymbol{f}+\varphi\nabla\cdot\boldsymbol{f}$，由上式可得

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\psi_1^*\psi_2)=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\cdot(\psi_1^*\nabla\psi_2-\psi_2\nabla\psi_1^*).\tag{d}$$

在闭合面 S 所包围的体积 V 中积分上式，并利用矢量分析和场论中的奥－高公式，可得

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{(V)}(\psi_1^*\psi_2)\mathrm{d}V=-\frac{\hbar^2}{2m}\oiint_{(S)}(\psi_1^*\nabla\psi_2-\psi_2\nabla\psi_1^*)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\,.$$

当积分体积遍及全空间时，波函数的统计诠释要求上式中的面积分趋于零，由此即可得到本题所要求证明的结果.

20－12. 由定态波函数$\psi_1=\frac{1}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}$、$\psi_2=\frac{1}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}$和$\psi_3=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}$计算概率流密度，并说明它们的传播方向.

[解] 在球面坐标系中，有

$$\nabla\psi=\frac{\partial\psi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi\,.$$

(1) 对于$\psi_1=\frac{1}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}$，考虑到它对$\theta$和$\varphi$的偏微商均为零，用$\mu$表示粒子质量，则该波函数相应的概率流密度为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j}_1&=-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2\mu}(\psi_1^*\nabla\psi_1-\psi_1\nabla\psi_1^*)\\&=-\frac{\mathrm{i}\hbar\boldsymbol{e}_r}{2\mu}[\frac{1}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}(\frac{-1}{r^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}+\frac{\mathrm{i}k}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr})-\frac{1}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}(\frac{-1}{r^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}+\frac{-\mathrm{i}k}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr})]\,,\end{aligned}$$

即　　$\boldsymbol{j}_1=\frac{\hbar k}{\mu r^2}\boldsymbol{e}_r\,,$

它沿着矢径$\boldsymbol{e}_r$方向，说明ψ_1表示一个发散的球面波.

(2) 对于$\psi_2=\frac{1}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}$，与(1)同样的考虑可得

$$\boldsymbol{j}_2=-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2\mu}(\psi_2^*\nabla\psi_2-\psi_2\nabla\psi_2^*)=-\frac{\hbar k}{\mu r^2}\boldsymbol{e}_r\,,$$

它逆着矢径$\boldsymbol{e}_r$方向，说明ψ_2表示一个会聚的球面波.

(3) 对于$\psi_3=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}$，考虑到它对$r$和$\theta$的偏微商均为零，有

$$\nabla\psi_3=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi_3}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi=\frac{1}{r\sin\theta}\mathrm{i}m\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi\,,$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j}_3&=-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2\mu}(\psi_3^*\nabla\psi_3-\psi_3\nabla\psi_3^*)\\&=-\frac{\mathrm{i}\hbar\boldsymbol{e}_\varphi}{2\mu}\frac{1}{2\pi r\sin\theta}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}(\mathrm{i}m\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi})-\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}(-\mathrm{i}m\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi})]\end{aligned}$$

$$=\frac{m\hbar \boldsymbol{e}_\varphi}{2\pi\mu r\sin\theta},$$

即　　$$\boldsymbol{j}_3=\frac{m\hbar}{2\pi\mu r\sin\theta}\boldsymbol{e}_\varphi,$$

它沿着矢径$\boldsymbol{e}_\varphi$方向，说明ψ_3表示一个绕z轴旋转的波.

20－13. 判断下列波函数所描写的状态哪些可能是定态：

(1) $\psi_1(x,t)=u(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x-\mathrm{i}Et/\hbar}+v(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x-\mathrm{i}Et/\hbar}$，

(2) $\psi_2(x,t)=u(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_1t/\hbar}+u(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_2t/\hbar}\quad (E_1\neq E_2)$，

(3) $\psi_3(x,t)=u(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et/\hbar}+u(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Et/\hbar}$.

[解] 作为一个定态波函数，要求它满足以下两个条件：

① 它应具有$\psi(\boldsymbol{r},t)=\psi(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et/\hbar}$的形式；

② $\psi(\boldsymbol{r})$应满足定态薛定谔方程$\hat{H}\psi(\boldsymbol{r})=E\psi(\boldsymbol{r})$.

只有具有$\psi(\boldsymbol{r},t)=\psi(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et/\hbar}$形式的波函数所描写的状态才有可能是定态. 所以，波函数$\psi_1(x,t)$可能是定态波函数，而$\psi_2(x,t)$和$\psi_3(x,t)$不可能是定态波函数.

20－14. 试取一维无限深方势阱的中心为坐标原点，即

$$V(x)=0\quad (|x|<\frac{a}{2}),\qquad V(x)=\infty\quad (|x|\geqslant\frac{a}{2}).$$

(1) 证明粒子的波函数可表示为

当$n=1,3,5,\cdots$，$|x|<\frac{a}{2}$时，$\psi_n(x)=(\frac{2}{a})^{1/2}\cos(\frac{n\pi x}{a})$；

当$n=2,4,6,\cdots$，$|x|<\frac{a}{2}$时，$\psi_n(x)=(\frac{2}{a})^{1/2}\sin(\frac{n\pi x}{a})$；

当$|x|\geqslant\frac{a}{2}$时，$\psi_n(x)=0$.

(2) 求出该粒子处于基态($n=1$)时的动量分布.

[解] (1) 在方势阱内，定态薛定谔方程及其解可表示为

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi=0,$$

$$\psi=A\sin kx+B\cos kx\qquad (|x|<a/2),\qquad\text{(a)}$$

其中

$$k=\sqrt{2mE}/\hbar.$$

因为势阱的壁无限高，物理上要求在势阱壁上及势阱外波函数为零，即要求

$$-A\sin(ka/2)+B\cos(ka/2)=0,$$

$$A\sin(ka/2)+B\cos(ka/2)=0.$$

由此可得，A，B 和 k 必须同时满足

$$A\sin(ka/2)=0$$

和　　$$B\cos(ka/2)=0$$

这两个条件，但是 A 和 B 不能同时为零，因此可得以下两组解：

$$A=0,\qquad \cos(ka/2)=0;$$

$$B=0,\qquad \sin(ka/2)=0.$$

这就要求 $k=\sqrt{2mE}/\hbar$ 只能取 π/a 的整数倍，即要求势阱中粒子的能量只能取以下离散值：

$$E=E_n=\frac{\hbar^2\pi^2n^2}{2ma^2}\qquad (n=1,2,3,\cdots).\tag{b}$$

式(a)的归一化形式即本题所要求证明的结果.

在势函数具有空间反射不变性[即 $V(x)=V(-x)$]的情况下，对应于任何一个能量本征值 E，总可以找到其薛定谔方程的一组完全的解，它们之中每一个解都有确定的宇称. 在本题中，对于第一组解，n 为奇数，粒子处在偶宇称态；而对于第二组解，n 为偶数，粒子处在奇宇称态.

(2) 对基态($n=1$)波函数 $\psi_1(x)$ 作傅里叶变换，可得

$$\varphi_1(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_1(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px/\hbar}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi\hbar a}}\int_{-a/2}^{+a/2}\cos\frac{\pi x}{a}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px/\hbar}\,\mathrm{d}x.$$

利用积分公式

$$\int\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x)+C,$$

可得　　$$\varphi_1(p)=\frac{1}{\sqrt{\pi\hbar a}}\frac{\pi}{a}\frac{\hbar^2a^2}{\pi^2\hbar^2-a^2p^2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}pa/2\hbar}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}pa/2\hbar})$$

$$=\frac{2\sqrt{\pi\hbar a}\,\hbar}{\pi^2\hbar^2-a^2p^2}\cos\frac{ap}{2\hbar}.$$

所以，处于基态的粒子的动量分布为

$$|\varphi_1(p)|^2=\frac{4\pi\hbar^3a}{(\pi^2\hbar^2-a^2p^2)^2}\cos^2\frac{ap}{2\hbar}.$$

20－15. 设粒子在一维无限深方势阱中运动，能量量子数为 n，试求：(1) 距势阱内壁四分之一宽度以内发现粒子的概率；(2) n 为何值时在上述区域内找到粒子的概率最大；(3) 当 $n\to\infty$ 时该概率的极限，并说明这一结果的物理意义.

[解] (1) 距势阱内壁四分之一宽度以内发现粒子的概率为

$$\begin{aligned}P_{1/4} &= \int_0^{a/4}|\psi_n(x)|^2\,\mathrm{d}x+\int_{3a/4}^{a}|\psi_n(x)|^2\,\mathrm{d}x,\\ &=\int_0^{a/4}\frac{2}{a}\sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x+\int_{3a/4}^{a}\frac{2}{a}\sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{4}-\frac{1}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2n\pi}\sin\frac{3n\pi}{2}\\ &=\frac{1}{2}+\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi)\sin\frac{n\pi}{2}.\end{aligned}$$

(2) 当 $n=3$ 时，$P_{1/4}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3\pi}$ 达到了它的最大值，这时在上述区域内找到粒子的概率最大.

(3) 当 $n\to\infty$ 时，$P_{1/4}\to 1/2$，说明这时已趋于经典结果，粒子在势阱内处处等概率.

20－16. 试证明，无论能量多高，一维无限深方势阱中粒子的位置平均值都是 $x=a/2$，粒子的动量平均值都是零. 因此，能量本征函数并不是动量本征函数.

[证明] 一维无限深方势阱中粒子的波函数为

$$\psi_n(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{a}}\sin\left(\dfrac{n\pi x}{a}\right) & (0<x<a),\\ 0 & (x\leqslant 0\text{ 或 }x\geqslant a),\end{cases}\tag{20.73}$$

其中 $n=1,2,3,4,\cdots$. 由此可得，势阱中粒子的位置和动量的平均值分别为

$$\bar{x}=\int_0^a\frac{2}{a}x\sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x=\frac{a}{2},$$

$$\begin{aligned}\bar{p}&=\int_0^a\frac{2}{a}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\left[-\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right]\mathrm{d}x\\ &=\int_0^a\frac{2}{a}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\left[-\mathrm{i}\hbar\frac{n\pi}{a}\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right]\mathrm{d}x\\ &=-\mathrm{i}\hbar\frac{n\pi}{a^2}\int_0^a\sin\left(\frac{2n\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x=0,\end{aligned}$$

上述结果与能量量子数 n 的取值无关，本命题得证．在上述关于 $\bar{x}$ 的积分是利用分部积分法或查表得到的，即用到了以下公式：

$$\int x\sin^2\beta x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{4}-\frac{x}{4\beta}\sin 2\beta x-\frac{1}{8\beta^2}\cos 2\beta x\,.$$

20－17. 试求出二维无限深方势阱中粒子可能有的能级和波函数，并分析在同一能级上的波函数的数目．

[解] 假设粒子处在二维无限深方势阱中，即

$$V(x,y)=\begin{cases}0 & (0<x<a,\ 0<y<b),\\ \infty & (\text{其他区域}).\end{cases}\tag{a}$$

在势阱内，即当 $0<x<a,\ 0<y<b$ 时，$V(x,y)=0$，定态薛定谔方程可写为

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi(x,y)=E\psi(x,y)\,,\tag{b}$$

以下只对那些可以分离变量的解进行讨论[①].

假定定态薛定谔方程(b)的解 $\psi(x,y)$ 可分离变量，即

$$\psi(x,y)=f(x)\,g(y)\,.\tag{c}$$

其中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的形式类似于式(20.67)，即

$$f(x)=A_x\sin(k_x x+\delta_x)\,,$$

$$g(y)=A_y\sin(k_y x+\delta_y)\,.$$

因为势阱的壁无限高，从物理上考虑，粒子不可能穿透无限高的势阱壁．按照波函数的统计诠释，要求波函数在势阱壁上及势阱外均为零．因此，式(c)所给出的势阱内粒子的波函数，必须满足如下的边界条件：

$$f(0)=0\,,\qquad f(a)=0\,;\qquad g(0)=0\,,\qquad g(b)=0\,.\tag{d}$$

边界条件 $f(0)=0$，要求 $\delta_x=0$；边界条件 $f(a)=0$，要求 $\sin k_x a=0$，即

$$k_x a=n_x\pi\qquad (n_x=1,2,3,\cdots)\,;\tag{e}$$

边界条件 $g(0)=0$，要求 $\delta_y=0$；边界条件 $g(b)=0$，要求 $\sin k_y b=0$，即

$$k_y b=n_y\pi\qquad (n_y=1,2,3,\cdots)\,.\tag{f}$$

再利用归一化条件

$$\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^b\mathrm{d}y\left|\psi(x,y)\right|^2=1\,,$$

可以得到类似于式(20.73)的波函数

① 杨柱林等．近代物理．北京：科学出版社，2004．50－53

$$\psi_{n_x n_y}(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{ab}}\sin\left(\dfrac{n_x\pi x}{a}\right)\sin\left(\dfrac{n_y\pi x}{b}\right) & (0<x<a,\ 0<y<b),\\ 0 & \text{(其他区域)}.\end{cases}\qquad \text{(g)}$$

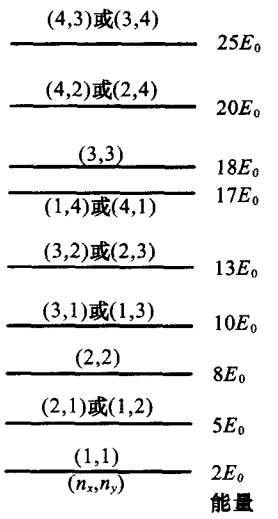
最后，将上述波函数代入定态薛定谔方程式(b)，可以得到粒子的能量本征值为

$$E_{n_x n_y}=\frac{\hbar^2\pi^2}{2mab}(n_x^2+n_y^2)=E_0(n_x^2+n_y^2)$$

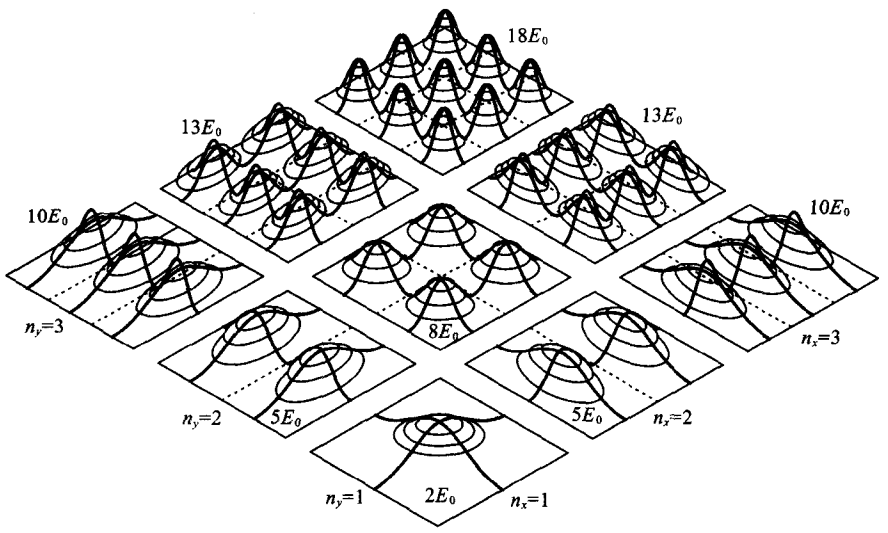
$$(n_x,n_y=1,2,3,\cdots)\ .\qquad \text{(h)}$$

在图(a)中，给出了与量子数 n_x 和 n_y 相应的能级图；在图(b)中，给出了与量子数 n_x 和 n_y 相应的(低能级)概率分布.

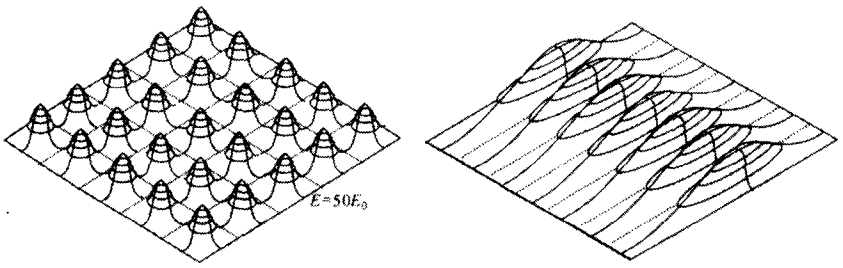
除了相应于 $n_x=n_y$ 的 $E_{n_x n_y}=2E_0$，$8E_0$，$27E_0,\cdots$ 的各个能级外，其他能级都是简并的. 例如，$E_{n_x n_y}=13E_0$ 能级是两重简并的，而 $E_{n_x n_y}=50E_0$ 能级是三重简并的，且存在能量相同概率分布完全不同的两种状态，如图(c)所示.



题 20-17 图(a)



题 20-17 图(b)



题 20-17 图(c)

20－18. 一个电子被禁闭在一个三维无限深方势阱中，平行于 x，y 和 z 轴的三条边的边长分别为 a，b 和 c，试求该电子可能有的波函数和能量．若这个势阱盒子的边长均为 $2\times10^{-10}\,\mathrm{m}$，试求该电子的第一激发态相对于基态的激发能．

[解] 设势阱外势能 $V=\infty$，势阱内 $V=0$．于是，有

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi=(E-V)\psi.$$

设　　$\psi=XYZ$，

$$E=E_x+E_y+E_z,$$

$$k_x=\frac{\sqrt{2mE_x}}{\hbar},\qquad k_y=\frac{\sqrt{2mE_y}}{\hbar},\qquad k_z=\frac{\sqrt{2mE_z}}{\hbar},$$

则由上述方程可以得到三个一维的无限深势阱方程．对于每一个一维的方程，由于势阱内 $V=0$，因此有

$$X=A\sin(k_xx+\delta_x),$$

$$Y=B\sin(k_yy+\delta_y),$$

$$Z=C\sin(k_zx+\delta_z).$$

在势阱外，$V=\infty$，因此有

$$X(0)=0,\qquad X(a)=0;$$

$$Y(0)=0,\qquad Y(b)=0;$$

$$Z(0)=0,\qquad Z(c)=0.$$

由 $x=0$, $y=0$, $z=0$ 处的边界条件可得

$$\delta_x=0,\qquad \delta_y=0,\qquad \delta_z=0;$$

而再由 $x=a$, $y=b$, $z=c$ 处的边界条件

$$X(a)=A\sin k_xa=0,$$

$$Y(b)=B\sin k_yb=0,$$

$$Z(c)=C\sin k_z c=0,$$

可得　$k_x=\dfrac{n_x\pi}{a}$，　$k_y=\dfrac{n_y\pi}{b}$，　$k_z=\dfrac{n_z\pi}{c}$，

$$E=\frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(\frac{n_x^2}{a^2}+\frac{n_y^2}{b^2}+\frac{n_z^2}{c^2}\right),$$

$$\psi=\sqrt{\frac{8}{abc}}\sin\frac{n_x\pi x}{a}\sin\frac{n_y\pi y}{b}\sin\frac{n_z\pi z}{c}$$

$$(n_x, n_y, n_z=1, 2, 3,\cdots).$$

与题 20－17 类似，这里也存在能级简并问题.

若电子被禁闭在一个边长为 $a=b=c=2\times10^{-8}\text{cm}$ 的立方势阱盒子中，则其基态和第一激发态的能量分别为

$$E_{111}=\frac{3\hbar^2\pi^2}{2m_e a^2},\qquad E_{211}=\frac{6\hbar^2\pi^2}{2m_e a^2}.$$

所以，电子的第一激发态相对于基态的激发能为

$$\Delta E=\frac{3\hbar^2\pi^2}{2m_e a^2}=\frac{3\times197^2\times3.14^2\ \text{fm}^2\cdot\text{MeV}^2}{2\times0.511\times0.2^2\ \text{nm}^2\cdot\text{MeV}}=28\text{eV}.$$

20－19. 设线性谐振子的势能为 $\dfrac{1}{2}\mu\omega^2x^2$，试证明

$$\psi(x)=\sqrt{\frac{\alpha}{3\sqrt{\pi}}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha^2x^2}(2\alpha^3x^3-3\alpha x)\qquad\left(\alpha=\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}\right)$$

是线性谐振子的定态波函数，并求出此波函数所对应的能级.

[解] 对已知波函数 $\psi(x)$ 求导数，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x)=\sqrt{\frac{\alpha}{3\sqrt{\pi}}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha^2x^2}(-2\alpha^5x^4+9\alpha^3x^2-3\alpha),$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x)=\sqrt{\frac{\alpha}{3\sqrt{\pi}}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha^2x^2}(-2\alpha^5x^4+9\alpha^3x^2-3\alpha)]$$

$$=\sqrt{\frac{\alpha}{3\sqrt{\pi}}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha^2x^2}(2\alpha^7x^5-17\alpha^5x^3+21\alpha^3x)$$

$$=\alpha^2(\alpha^2x^2-7)\,\psi(x).$$

将上述结果代入线性谐振子的薛定谔方程

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x)+\frac{1}{2}\mu\omega^2x^2\psi(x)=E\psi(x)$$

或　$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x)-\alpha^4x^2\psi(x)+\frac{2\mu}{\hbar^2}E\psi(x)=0,$$

可得　$E=\frac{7}{2}\hbar\omega$.

这一结果表明，题目所给出的$\psi(x)$的确是线性谐振子的定态波函数，并且此波函数所对应的是$E=E_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega$中$n=3$的能级.

20－20. 二维各向同性谐振子，

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})+\frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2),$$

试用分离变量法求能级和定态波函数，并求各能级的简并度.

[解] 线性谐振子的归一化的能量本征值和定态波函数分别为

$$E=E_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega\qquad(n=0,1,2,\cdots),\tag{20.92}$$

$$\psi_n(x)=A_n\,\mathrm{e}^{-\alpha^2x^2/2}\,\mathrm{H}_n(\alpha x),\tag{20.95}$$

其中　$A_n=\sqrt{\frac{\alpha}{2^n\,n!\sqrt{\pi}}}$，　$\alpha=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$.

设二维各向同性谐振子的定态波函数为

$$\psi(x,y)=X(x)Y(y),\tag{a}$$

其中$X(x)$和$Y(y)$具有式(20.95)的形式，满足一维定态薛定谔方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x)+\frac{1}{2}m\omega^2x^2=E_xX(x),\tag{b}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}Y(x)+\frac{1}{2}m\omega^2y^2=E_yY(y).\tag{c}$$

其中　$E_x=(n_x+\frac{1}{2})\hbar\omega$，　$E_y=(n_y+\frac{1}{2})\hbar\omega$.　(d)

将$\psi(x,y)=X(x)Y(y)$代入二维各向同性谐振子的定态薛定谔方程

$$[-\frac{\hbar^2}{2m}(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})+\frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)]X(x)Y(y)=EX(x)Y(y),$$

并利用式(b)、式(c)和式(d)，可得

$$E=E_x+E_y=(n_x+n_y+1)\hbar\omega=(n+1)\hbar\omega,\tag{e}$$

其中 n_x，$n_y=0,1,2,\cdots$，因此有

$$n=n_x+n_y=0,1,2,\cdots.$$

对于一定的能级，量子数 n 值确定，n_x 可以取 $n+1$ 个值，相应地有 $n_y=n-n_x$ 与之对应．对于每一对 (n_x,n_y)，都有相应的不尽相同的波函数，因此二维各向同性谐振子能级的简并度为 $n+1$．

20－21．三维各向同性谐振子，

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+\frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2+z^2),$$

试用分离变量法求能级和定态波函数，并求各能级的简并度．

[解] 与题 20－20 类似，设三维各向同性谐振子的定态波函数为

$$\psi(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z), \tag{a}$$

其中 $X(x)$、$Y(y)$ 和 $Z(z)$ 具有式(20.95)的形式，满足一维定态薛定谔方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x)+\frac{1}{2}m\omega^2x^2=E_xX(x), \tag{b}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}Y(x)+\frac{1}{2}m\omega^2y^2=E_yY(y), \tag{c}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}Z(z)+\frac{1}{2}m\omega^2z^2=E_zZ(z). \tag{d}$$

其中　$E_x=(n_x+\frac{1}{2})\hbar\omega$，　$E_y=(n_y+\frac{1}{2})\hbar\omega$，　$E_z=(n_z+\frac{1}{2})\hbar\omega$．　(e)

将 $\psi(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)$ 代入三维谐振子的定态薛定谔方程

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+\frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2+z^2)\right]\psi(x,y,z)=E\psi(x,y,z),$$

并利用式(b)、式(c)、式(d)和式(e)，可得

$$E=E_x+E_y+E_z=(n_x+n_y+n_z+\frac{3}{2})\hbar\omega=(n+\frac{3}{2})\hbar\omega, \tag{f}$$

其中 n_x，n_y，$n_z=0,1,2,\cdots$，因此有 $n=n_x+n_y+n_z=0,1,2,\cdots$．

对于一定的能级，量子数 n 值确定，n_x 可以取 $n+1$ 个值，相应地有 $n_y+n_z=n-n_x=0,1,2,\cdots,n-n_x$ 与之对应，这可以有 $n-n_x+1$ 种取法．利用等差级数求和公式，可得

$$\sum_{n_x=0}^{n}(n-n_x+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}. \tag{g}$$

对于每一对 (n_x,n_y,n_z)，都有相应的不尽相同的波函数，因此二维各向同性

谐振子能级的简并度为 $f_n=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

20－22. 二维耦合谐振子，

$$\hat{H}=\hat{T}+\hat{V}=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+\frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)+\lambda xy,$$

其中 $|\lambda|<m\omega^2$，试求能级.

[解] 作坐标变换 $X=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$，$Y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x-y)$，可以证明

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial X^2}+\frac{\partial^2}{\partial Y^2}. \tag{a}$$

于是，题目所给出的哈密顿算符可写为

$$\begin{aligned}\hat{H}&=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial X^2}+\frac{\partial^2}{\partial Y^2}\right)+\frac{1}{2}m\omega^2(X^2+Y^2)+\frac{1}{2}\lambda(X^2-Y^2)\\&=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial X^2}+\frac{\partial^2}{\partial Y^2}\right)+\frac{1}{2}(m\omega^2+\lambda)X^2+\frac{1}{2}(m\omega^2-\lambda)Y^2,\end{aligned} \tag{b}$$

按题意，$|\lambda|<m\omega^2$，$m\omega^2\pm\lambda>0$. 二维耦合谐振子的定态薛定谔方程

$$\hat{H}\psi=E\psi \tag{c}$$

的解 $\psi(X,Y)$ 可分离变量，即

$$\psi(X,Y)=f(X)g(Y), \tag{d}$$

其中 $f(X)$ 和 $g(Y)$ 分别满足

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial X^2}+\frac{1}{2}m\omega_X^2X^2\right]f(X)=E_Xf(X), \tag{e}$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial Y^2}+\frac{1}{2}m\omega_Y^2Y^2\right]g(Y)=E_Yg(Y). \tag{f}$$

其中　$\omega_X=\sqrt{\omega^2+\dfrac{\lambda}{m}}$，　$\omega_Y=\sqrt{\omega^2-\dfrac{\lambda}{m}}$. (g)

$$E_X=\left(n_X+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_X,\quad E_Y=\left(n_Y+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_Y. \tag{h}$$

将 $\psi(X,Y)=f(X)g(Y)$ 代入二维耦合谐振子的定态薛定谔方程(c)，并利用式(e)、式(f)、式(g)和式(h)，可得能级

$$E=E_X+E_Y=\left(n_X+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_X+\left(n_Y+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_Y$$

$$(n_X,n_Y=0,1,2,3,\cdots). \tag{f}$$

20－23. 试将一维自由粒子的定态波函数 $e^{ipx/\hbar}$ 和 $e^{-ipx/\hbar}$ 组合成具有确定宇称的波函数.

[解] 所组合成的偶宇称波函数为 $A(e^{ipx/\hbar}+e^{-ipx/\hbar})$，奇宇称波函数为 $A(e^{ipx/\hbar}-e^{-ipx/\hbar})$.

20－24. 按照核力的介子理论，核力的较长程部分是通过核子间吞吐 π 介子而传递的. 已知 π 介子质量 $m_\pi \approx 270m_e$，试据此估算核力的作用力程.

[解] 本题所涉及的能量和动量的不确定值约为

$$\Delta E \approx m_\pi c^2,$$

$$\Delta p \approx \Delta E/c \approx m_\pi c.$$

根据不确定关系，位置的不确定值约为

$$\Delta x \approx \hbar/\Delta p \approx \hbar/m_\pi c.$$

就数量级而言，Δx 就是核力力程 r_0，所以有

$$r_0 \approx \hbar/m_\pi c = 1.4\times10^{-15}\,\mathrm{m} = 1.4\,\mathrm{fm}.$$

这个结果也可以由量纲分析得到. 实验表明，核力与电荷无关. 因此，在力程 r_0 的结构式中，除介子质量 m_π 外，只能出现普适常量. 由于问题涉及介子的产生和湮没，有关的普适常量中应包含光速 c 和普朗克常量 $\hbar$，它们分别代表相对论效应和量子效应. 从量纲结构看，由 m_π，$\hbar$ 和 c 只能构造出一种特征长度，即康普顿波长 $\hbar/m_\pi c$.

20－25. **(补充题)**考虑到原子或原子核的反冲，当原子在能量为 E_1 和 E_2 $(>E_1)$ 的两定态之间跃迁时，发射或吸收的光子所具有的能量 $h\nu$，分别比 E_2-E_1 小或大一个量

$$E_r = \frac{(E_2-E_1)^2}{2mc^2}.$$

对于原子系统或分子系统，其定态的能量宽度通常有 $\Delta E \geqslant E_r$，这时一个系统发射的光子就能够被另一个同类系统所吸收，即发生共振吸收；然而，对于原子核系统通常有 $\Delta E < E_r$，这时就不一定发生共振吸收. 试加以说明.

[解] (1) 在理想情况下，可设定态能量具有完全确定的值. 我们首先考虑一个静止原子的发射. 由于动量守恒，在跃迁发生之前，原子的动量为零；在跃迁发生之后，发射了光子的原子必然反冲，其动量与所发射光子的动量方向相反、大小相等，即

$$p_{at}+p_{ph}=0 \qquad \text{或} \qquad p_{at}=p_{ph}=\frac{h\nu}{c}. \tag{a}$$

又由于能量守恒，在跃迁发生之前，我们有一个处在能量 E_2 的定态中的静止原子；在跃迁发生之后，我们有一个处在定态 E_1 中的具有动能 $p_{at}^2/2m$ 的原子和一个能量 $h\nu$ 的光子，它们满足

$$E_2 = E_1 + \frac{p_{at}^2}{2m} + h\nu,$$

或
$$E_2 - E_1 = h\nu(1 + \frac{h\nu}{2mc^2}). \tag{b}$$

一般而言，$h\nu/2mc^2$ 是一个比 1 小得多的量，可以有

$$h\nu = (E_2 - E_1)(1+\frac{h\nu}{2mc^2})^{-1} \approx (E_2 - E_1)(1-\frac{h\nu}{2mc^2})$$

$$\approx E_2 - E_1 - \frac{(E_2 - E_1)^2}{2mc^2}, \tag{c}$$

其中 $\frac{(E_2 - E_1)^2}{2mc^2}$ 项就是原子的反冲能 E_r.

对于吸收过程，按照类似的考虑可得

$$h\nu = (E_2 - E_1)(1-\frac{h\nu}{2mc^2})^{-1} \approx (E_2 - E_1)(1+\frac{h\nu}{2mc^2})$$

$$\approx E_2 - E_1 + \frac{(E_2 - E_1)^2}{2mc^2}. \tag{d}$$

在原子或分子跃迁的情况下，$E_2 - E_1 \approx 10^1$ eV，$mc^2 \approx 10^{11}$ eV，这时的原子或分子的反冲能 $E_r \approx 10^{-10}$ eV 很小，可以忽略不计；然而，在核跃迁的情况下，$E_2 - E_1 \approx 10^6$ eV，$mc^2 \approx 10^{11}$ eV，原子反冲能 $E_r \approx 10$ eV 已不能再忽略不计了．原子反冲能的存在，使得一个系统在 $2\rightarrow1$ 跃迁中发射一个光子，不能被另一个相同的系统吸收而发生相反的 $1\rightarrow2$ 跃迁，这时的发射谱不等同于吸收谱.

(2) 根据不确定性原理，定态能量有一不确定度或能量宽度 ΔE．对于基态，$\Delta E_0 \rightarrow 0$；对于激发态，寿命越短，能量宽度 ΔE 越大．因此，即使是在不考虑原子反冲的情况下，在能量为 E_1 和 E_2 的两个态之间跃迁时，发射或吸收的光子的能量也是不完全确定的，而是处在 $E_2 - E_1 \pm \Delta E/2$ 的能量范围内，其中 ΔE 是这两个态总的能量宽度．进一步考虑到原子反冲，则在定态的能量宽度 $\Delta E \geqslant E_r$ 时，一个系统发射的光子就能够被另一个同类系统吸收，产生共振吸收；然而，如果 $\Delta E < E_r$，就不一定能发生共振吸收.

在核跃迁中，核激发态的有限寿命 Δt 所引起的能量不确定度 ΔE 比核的反冲能量要小得多，因而使得一个核所发射的 γ 光子不可能被另一个同类核吸收．例如，当 ^{60}Ni 发射 1.33 MeV 的 γ 射线时，有

$$\Delta t \approx 10^{-14}\ \mathrm{s},$$

$$\Delta E \approx h/\Delta t \approx 0.4\ \mathrm{eV},$$

$$E_r = (E_2 - E_1)^2 / 2mc^2 = 15.8\ \mathrm{eV},$$

这时原子的反冲能 E_r 比能量宽度 ΔE 大得多．但是，在特殊的条件下，可以大大地减弱这种反冲效应．

1957 年，穆斯堡尔(R.L.Mössbauer，1929—)发现了无核反冲的 γ 射线共振吸收现象，后来人们把它称为**穆斯堡尔效应**(Mössbauer effect)．他将发射体和吸收体的原子都嵌置在晶体中，这时是整个晶体发生反冲，而不是单个原子．因为反冲体的质量非常大，所以反冲能比 $E_2 - E_1$ 小得多，这样就能够发生共振吸收．

由于穆斯堡尔谱线非常窄，当我们利用多普勒效应通过改变源的运动速度，使发出的 γ 射线能量发生微小的变化时，就可以用 γ 射线共振吸收和共振散射来测量核能级的超精细结构，确定核磁矩的大小、核激发态的寿命、固体内电场和磁场的大小以及研究固体的晶格振动等．目前，它已成为物理学、化学和生物学等领域的重要研究手段之一．

第二十一章　力学量与本征态

21－1. 对于任何归一化的波函数$\psi(\boldsymbol{r})$，试证明粒子的动能平均值可以表示为

$$\overline{T}=\frac{\hbar^2}{2m}\int_{全}|\nabla\psi(\boldsymbol{r})|^2\,\mathrm{d}\tau\,.$$

[证明] (1) 假定波函数已经归一化，利用

$$\hat{p}_x=-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x},\quad \hat{p}_y=-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial y},\quad \hat{p}_z=-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial z},$$

可得

$$\overline{p_x^2}=\int_{全}\psi^*\hat{p}_x^2\psi\,\mathrm{d}\tau=\int_{全}\psi^*(-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x})^2\psi\,\mathrm{d}\tau\,.$$

由于$\hat{p}_x=-\mathrm{i}\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$是厄米算符，由

$$\int\mathrm{d}\tau\psi^*\hat{A}\varphi=\int\mathrm{d}\tau(\hat{A}\psi)^*\varphi \tag{21.34}$$

可得

$$\overline{p_x^2}=\int_{全}(-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi)^*(-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi)\,\mathrm{d}\tau=\hbar^2\int_{全}|\frac{\partial}{\partial x}\psi|^2\,\mathrm{d}\tau\,.$$

类似地，可得

$$\overline{p_y^2}=\hbar^2\int_{全}|\frac{\partial}{\partial y}\psi|^2\,\mathrm{d}\tau\,,$$

$$\overline{p_z^2}=\hbar^2\int_{全}|\frac{\partial}{\partial z}\psi|^2\,\mathrm{d}\tau\,.$$

动能算符可以用动量算符表示为

$$\hat{T}=\frac{1}{2m}(\hat{p}_x^2+\hat{p}_y^2+\hat{p}_z^2)\,,$$

因此有

$$\overline{T}=\frac{1}{2m}(\overline{\hat{p}_x^2}+\overline{\hat{p}_y^2}+\overline{\hat{p}_z^2})=\frac{\hbar^2}{2m}\int_{全}[|\frac{\partial}{\partial x}\psi|^2+|\frac{\partial}{\partial y}\psi|^2+|\frac{\partial}{\partial z}\psi|^2]\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{\hbar^2}{2m}\int_{全}|\nabla\psi(\boldsymbol{r})|^2\,\mathrm{d}\tau\,.$$

(2) 利用动量算符$\hat{\boldsymbol{p}}=-\mathrm{i}\hbar\nabla$的厄米性质，可将上述证明过程表述为

$$\overline{T}=\frac{1}{2m}\int_{全}\psi^{*}\hat{p}^{2}\psi\,\mathrm{d}\tau\quad \overline{T}=\frac{1}{2m}\int_{全}(\hat{p}\psi)^{*}(\hat{p}\psi)\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{2m}\int_{全}|\hat{p}\psi|^{2}\,\mathrm{d}\tau=\frac{\hbar^{2}}{2m}\int_{全}|\nabla\psi|^{2}\,\mathrm{d}\tau\,.$$

21－2. 设波函数φ_1和φ_2均已归一化，但是不正交，$\int_{全}\varphi_1^{*}\varphi_2\,\mathrm{d}\tau=b$ $(0<b<1)$，试将φ_1和φ_2线性叠加，组成两个正交归一化的波函数ψ_1和ψ_2.

[解] 将φ_1和φ_2线性叠加，组成两个波函数ψ_1和ψ_2，即

$$\psi_1=C_1\varphi_1+C_2\varphi_2,\qquad \psi_2=C_3\varphi_1+C_4\varphi_2\,.$$

如果先不考虑归一化问题，则组成两个正交波函数ψ_1和ψ_2的条件为

$$\int_{全}\psi_1^{*}\psi_2\,\mathrm{d}\tau=\int_{全}(C_1^{*}\varphi_1^{*}+C_2^{*}\varphi_2^{*})(C_3\varphi_1+C_4\varphi_2)\,\mathrm{d}\tau=0$$

按题意，有

$$\int_{全}\varphi_1^{*}\varphi_1\,\mathrm{d}\tau=\int_{全}\varphi_2^{*}\varphi_2\,\mathrm{d}\tau=1,$$

$$\int_{全}\varphi_1^{*}\varphi_2\,\mathrm{d}\tau=b\qquad (0<b<1),$$

可得系数C_1，C_2，C_3和C_4必须满足的条件

$$C_1^{*}C_3+C_2^{*}C_4+(C_1^{*}C_4+C_2^{*}C_3)b=0\,.\qquad\text{(a)}$$

以下举例说明几组可能的取值：

(1) 选取$C_1=C_2=C_3=1$，$C_4=-1$，归一化后可得

$$\psi_1=[2(1+b)]^{-1/2}(\varphi_1+\varphi_2),\qquad \psi_2=[2(1+b)]^{-1/2}(\varphi_1-\varphi_2)\,.$$

(2) 选取$C_1=1$，$C_2=0$，$C_3=b$，$C_4=-1$，归一化后可得

$$\psi_1=\varphi_1,\qquad \psi_2=(1-b^{2})^{-1/2}(b\varphi_1-\varphi_2)\,.$$

(3) 选取$C_1=1$，$C_2=-b$，$C_3=0$，$C_4=1$，归一化后可得

$$\psi_1=(1-b^{2})^{-1/2}(\varphi_1-b\varphi_2),\qquad \psi_1=\varphi_1\,.$$

21－3. 试证明

$$[\hat{p}_x,\psi(x)]=-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

$$[\hat{p}_x^{2},\psi(x)]=-\hbar^{2}\frac{\partial^{2}\psi}{\partial x^{2}}-2\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x}\hat{p}_x\,.$$

[证明] 设$\varphi(x)$是任意波函数，有

$$[\hat{p}_x,\psi(x)]\,\varphi(x)=-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}(\psi\varphi)+\mathrm{i}\hbar\psi\frac{\partial}{\partial x}\varphi=-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x}\varphi(x),$$

这就证明了$[\hat{p}_x,\psi(x)]=-\mathrm{i}\hbar\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$.

利用对易式满足的恒等式以及上述结果，可得

$$
\begin{aligned}
[\hat{p}_x^2, \psi(x)]\varphi(x) &= [\hat{p}_x, \psi]\hat{p}_x\varphi + \hat{p}_x[\hat{p}_x, \psi]\varphi \\
&= (-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x})(-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x})\varphi + (-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x})(-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x})\varphi \\
&= (-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x})(-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x})\varphi - \hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\varphi + (-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x})(-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x})\varphi \\
&= -\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\varphi(x) - 2\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x}\hat{p}_x\varphi(x),
\end{aligned}
$$

这就证明了

$$
[\hat{p}_x^2, \psi(x)] = -\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - 2\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x}\hat{p}_x.
$$

21－4. 利用量子力学的基本对易式以及对易式的恒等式，试证明

$$
\begin{aligned}
&[\hat{L}_x, x] = 0, \quad [\hat{L}_x, y] = \mathrm{i}\hbar z, \quad [\hat{L}_x, z] = -\mathrm{i}\hbar y, \\
&[\hat{L}_y, x] = -\mathrm{i}\hbar z, \quad [\hat{L}_y, y] = 0, \quad [\hat{L}_y, z] = \mathrm{i}\hbar x, \\
&[\hat{L}_z, x] = \mathrm{i}\hbar y, \quad [\hat{L}_z, y] = -\mathrm{i}\hbar x, \quad [\hat{L}_z, z] = 0.
\end{aligned}
$$

[证明] 利用角动量算符定义式和基本对易式，可得

$$
\begin{aligned}
[\hat{L}_x, x] &= [y\hat{p}_z - z\hat{p}_y, x] \\
&= [y, x]\hat{p}_z + y[\hat{p}_z, x] - [z, x]\hat{p}_y - z[\hat{p}_y, x] = 0, \\
[\hat{L}_x, y] &= [y\hat{p}_z - z\hat{p}_y, y] \\
&= [y, y]\hat{p}_z + y[\hat{p}_z, y] - [z, y]\hat{p}_y - z[\hat{p}_y, y] \\
&= -z[\hat{p}_y, y] = \mathrm{i}\hbar z, \\
[\hat{L}_x, z] &= [y\hat{p}_z - z\hat{p}_y, z] \\
&= [y, z]\hat{p}_z + y[\hat{p}_z, z] - [z, z]\hat{p}_y - z[\hat{p}_y, z] \\
&= y[\hat{p}_z, z] = -\mathrm{i}\hbar y,
\end{aligned}
$$

同样还可以得到

$$
\begin{aligned}
&[\hat{L}_y, x] = -\mathrm{i}\hbar z, \quad [\hat{L}_y, y] = 0, \quad [\hat{L}_y, z] = \mathrm{i}\hbar x, \\
&[\hat{L}_z, x] = i\hbar y, \quad [\hat{L}_z, y] = -\mathrm{i}\hbar x, \quad [\hat{L}_z, z] = 0.
\end{aligned}
$$

21－5. 试证明

$$
[\hat{\boldsymbol{L}}, r^2] = 0, \quad [\hat{\boldsymbol{L}}, \hat{p}^2] = 0, \quad [\hat{\boldsymbol{L}}, \boldsymbol{r}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}] = 0,
$$

并说明$[\hat{\boldsymbol{L}}, V(r)] = 0$的原因.

[证明] (1) 利用角动量与位置各分量之间的对易式，可得

$$\begin{aligned}[\hat{L}_x, r^2] &= [\hat{L}_x, x^2] + [\hat{L}_x, y^2] + [\hat{L}_x, z^2] \\ &= [\hat{L}_x, x]x + x[\hat{L}_x, x] + [\hat{L}_x, y]y + \\ &\qquad y[\hat{L}_x, y] + [\hat{L}_x, z]z + z[\hat{L}_x, z] \\ &= 0 + 0 + \mathrm{i}\hbar z y + \mathrm{i}\hbar y z - \mathrm{i}\hbar y z - \mathrm{i}\hbar z y = 0.\end{aligned}$$

同理可得$[\hat{L}_y, r^2]=0$，$[\hat{L}_z, r^2]=0$.

(2) 利用角动量与动量各分量之间的对易式，可得

$$\begin{aligned}[\hat{L}_x, \hat{p}^2] &= [\hat{L}_x, \hat{p}_x^2] + [\hat{L}_x, \hat{p}_y^2] + [\hat{L}_x, \hat{p}_z^2] \\ &= [\hat{L}_x, \hat{p}_x]\hat{p}_x + \hat{p}_x[\hat{L}_x, \hat{p}_x] + [\hat{L}_x, \hat{p}_y]\hat{p}_y + \\ &\qquad \hat{p}_y[\hat{L}_x, \hat{p}_y] + [\hat{L}_x, \hat{p}_z]\hat{p}_z + \hat{p}_z[\hat{L}_x, \hat{p}_z] \\ &= \mathrm{i}\hbar \hat{p}_z \hat{p}_y + \mathrm{i}\hbar \hat{p}_y \hat{p}_z - \mathrm{i}\hbar \hat{p}_y \hat{p}_z - \mathrm{i}\hbar \hat{p}_z \hat{p}_y = 0.\end{aligned}$$

同理可得$[\hat{L}_y, \hat{p}^2] = 0$，$[\hat{L}_z, \hat{p}^2] = 0$.

(3) 利用角动量与动量及位置各分量之间的对易式，可得

$$\begin{aligned}[\hat{L}_x, \boldsymbol{r}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}] &= [\hat{L}_x, x\hat{p}_x] + [\hat{L}_x, y\hat{p}_y] + [\hat{L}_x, z\hat{p}_z] \\ &= [\hat{L}_x, x]\hat{p}_x + x[\hat{L}_x, \hat{p}_x] + [\hat{L}_x, y]\hat{p}_y + \\ &\qquad y[\hat{L}_x, \hat{p}_y] + [\hat{L}_x, z]\hat{p}_z + z[\hat{L}_x, \hat{p}_z] \\ &= \mathrm{i}\hbar z \hat{p}_y + \mathrm{i}\hbar y \hat{p}_z - \mathrm{i}\hbar y \hat{p}_z - \mathrm{i}\hbar z \hat{p}_y = 0.\end{aligned}$$

同理可得$[\hat{L}_y, \boldsymbol{r}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}]=0$，$[\hat{L}_z, \boldsymbol{r}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}]=0$.

(4) 由于算符$\hat{\boldsymbol{L}}$只与角变量(θ, φ)有关，而$V(r)$只与变量r有关，所以有$[\hat{\boldsymbol{L}}, V(r)] = 0$. 事实上，算符$\hat{\boldsymbol{L}}$是三维空间无穷小转动算符，而$r^2, \hat{p}^2, \boldsymbol{r}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}, V(r)$等都是转动下的标量，所以角动量算符与它们都是可对易的.

21－6. 令$\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm \mathrm{i}\hat{L}_y$，试证明

$$[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \pm\hbar\hat{L}_\pm, \qquad \hat{L}_z\hat{L}_\pm = \hat{L}_\pm(\hat{L}_z \pm \hbar).$$

[证明] 利用角动量各分量的对易式，可得

$$\begin{aligned}[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] &= \hat{L}_z\hat{L}_\pm - \hat{L}_\pm\hat{L}_z = \hat{L}_z(\hat{L}_x \pm \mathrm{i}\hat{L}_y) - (\hat{L}_x \pm \mathrm{i}\hat{L}_y)\hat{L}_z \\ &= \hat{L}_z\hat{L}_x \pm \mathrm{i}\hat{L}_z\hat{L}_y - \hat{L}_x\hat{L}_z \mp \mathrm{i}\hat{L}_y\hat{L}_z \\ &= [\hat{L}_z, \hat{L}_x] \pm \mathrm{i}[\hat{L}_z, \hat{L}_y] \\ &= \mathrm{i}\hbar\hat{L}_y \pm \mathrm{i}(-\mathrm{i}\hbar\hat{L}_x) = \pm\hbar(\hat{L}_x \pm \mathrm{i}\hat{L}_y) = \pm\hbar\hat{L}_\pm,\end{aligned}$$

这就证明了

$$[\hat{L}_z,\ \hat{L}_\pm] = \pm\hbar\hat{L}_\pm .$$

再利用

$$[\hat{L}_z,\ \hat{L}_\pm] = \hat{L}_z\hat{L}_\pm - \hat{L}_\pm L_z = \pm\hbar\hat{L}_\pm ,$$

移项后即可得到所要证明的 $\hat{L}_z\hat{L}_\pm = \hat{L}_\pm(\hat{L}_z \pm \hbar)$.

21－7. 设线性算符 $\hat{F}$ 不是厄米算符，即 $\hat{F} \neq \hat{F}^+$. 试证明算符 $\hat{F}$ 可以分解为 $\hat{F} = \hat{A} + \mathrm{i}\hat{B}$，其中 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 均为厄米算符，并求出算符 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$.

[解] 我们先假定可以将算符 $\hat{F}$ 分解成 $\hat{F} = \hat{A} + \mathrm{i}\hat{B}$，其中 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 均为厄米算符，于是我们有

$$\hat{F} = \hat{A} + \mathrm{i}\hat{B}, \qquad \hat{F}^+ = \hat{A}^+ - \mathrm{i}\hat{B}^+ = \hat{A} - \mathrm{i}\hat{B}.$$

由以上两式可解得

$$\hat{A} = \frac{1}{2}(\hat{F} + \hat{F}^+), \qquad \hat{B} = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\hat{F} - \hat{F}^+).$$

显然，这样组合成的 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 的确是厄米算符，即

$$\hat{A}^+ = \frac{1}{2}(\hat{F} + \hat{F}^+)^+ = \frac{1}{2}(\hat{F}^+ + \hat{F}) = \hat{A},$$

$$\hat{B}^+ = \frac{-1}{2\mathrm{i}}(\hat{F} - \hat{F}^+)^+ = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\hat{F} - \hat{F}^+) = \hat{B},$$

它们必定存在，且必定有 $\hat{A} + \mathrm{i}\hat{B} = \hat{F}$，本命题得证.

21－8. 试证明 $(\hat{A}\hat{B})^+ = \hat{B}^+\hat{A}^+$.

[证明] 算符 $\hat{A}$ 的**厄米共轭算符** $\hat{A}^+$ 的定义式

$$\int \mathrm{d}\tau\psi^*\hat{A}^+\varphi = \int \mathrm{d}\tau(\hat{A}\psi)^*\varphi \qquad \text{或} \qquad (\psi, \hat{A}^+\varphi) = (\hat{A}\psi, \varphi),$$

可得

$$\int \mathrm{d}\tau\psi^*(\hat{A}\hat{B})^+\varphi = \int \mathrm{d}\tau(\hat{A}\hat{B}\psi)^*\varphi = \int \mathrm{d}\tau[\hat{A}(\hat{B}\psi)]^*\varphi = \int \mathrm{d}\tau(\hat{B}\psi)^*\hat{A}^+\varphi$$

$$= \int \mathrm{d}\tau\psi^*\hat{B}^+\hat{A}^+\varphi = \int \mathrm{d}\tau\psi^*(\hat{B}^+\hat{A}^+)\varphi ,$$

因为 ψ 和 φ 是任意波函数，所以有 $(\hat{A}\hat{B})^+ = \hat{B}^+\hat{A}^+$.

21－9. 与对易式类似，可定义**反对易式**(anticommutator)为

$$[\hat{A}, \hat{B}]_+ = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A},$$

试证明

$$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}]_+ - [\hat{A}, \hat{C}]_+\hat{B},$$

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]_+\hat{C} - \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]_+ .$$

[证明] 利用对易式的恒等式以及反对易式的定义，可得

$$\begin{aligned}[\hat{A}\hat{B},\ \hat{C}] &= [\hat{A},\ \hat{C}]\hat{B} + \hat{A}[\hat{B},\ \hat{C}] \\ &= \hat{A}\hat{C}\hat{B} - \hat{C}\hat{A}\hat{B} + \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{A}\hat{C}\hat{B} \\ &= \hat{A}(\hat{B}\hat{C} + \hat{C}\hat{B}) - (\hat{A}\hat{C} + \hat{C}\hat{A})\hat{B} \\ &= \hat{A}\,[\hat{B}, \hat{C}]_+ - [\hat{A}, \hat{C}]_+\hat{B}, \\ [\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] &= [\hat{A},\ \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A},\ \hat{C}] \\ &= \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{B}\hat{A}\hat{C} + \hat{B}\hat{A}\hat{C} - \hat{B}\hat{C}\hat{A} \\ &= (\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A})\hat{C} - \hat{B}(\hat{A}\hat{C} + \hat{C}\hat{A}) \\ &= [\hat{A}, \hat{B}]_+\hat{C} - \hat{B}\,[\hat{A}, \hat{C}]_+ .\end{aligned}$$

21－10. 试证明

(1) 若体系的哈密顿算符 $\hat{H}$ 不显含时间 t，则 $\hat{H}$ 为守恒量，即能量守恒.

(2) 若体系为自由粒子，$\hat{H}=\dfrac{\hat{p}^2}{2m}$，则动量 $\hat{\boldsymbol{p}}$ 为守恒量，角动量 $\hat{\boldsymbol{L}}$ 也是守恒量.

(3) 若体系为中心力场中的粒子，$\hat{H}=\dfrac{\hat{p}^2}{2m}+V(r)$，则角动量 $\hat{\boldsymbol{L}}$ 为守恒量，但动量 $\hat{\boldsymbol{p}}$ 并不是守恒量.

[证明] 按定义，守恒量 $\hat{A}$ 是能同时满足

$$\frac{\partial \hat{A}}{\partial t} = 0 \qquad \text{和} \qquad [\hat{A}, \hat{H}] = 0$$

这两个条件的力学量. 因此有以下结果：

(1) 若体系的哈密顿算符 $\hat{H}$ 不显含时间 t，即

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial t} = 0,$$

又有 $[\hat{H}, \hat{H}] = 0$，故 $\hat{H}$ 为守恒量.

(2) 若体系为自由粒子，

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m},$$

这时有

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{p}}}{\partial t} = 0, \qquad [\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{H}] = \frac{1}{2m}[\hat{\boldsymbol{p}},\ \hat{p}^2] = 0,$$

故动量 $\hat{\boldsymbol{p}}$ 为守恒量. 又由于

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{L}}}{\partial t}=0,$$

$$[\hat{\boldsymbol{L}}, \hat{H}]=\frac{1}{2m}[\hat{\boldsymbol{L}}, \hat{p}^2]=0,$$

故角动量 $\hat{\boldsymbol{L}}$ 也是守恒量.

(3) 若体系为中心力场中的粒子,

$$\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+V(r),$$

这时有

$$[\hat{\boldsymbol{L}}, \hat{p}^2]=0, \qquad [\hat{\boldsymbol{L}}, V(r)]=0,$$

因此角动量 $\hat{\boldsymbol{L}}$ 仍然是守恒量. 与(2)不同的是，这里我们有 $[\boldsymbol{p}, V(r)]\neq 0$，因此动量 $\hat{\boldsymbol{p}}$ 并不是守恒量.

21－11. 设力学量 $\hat{A}$ 不显含 t，试证明在束缚定态下有

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\hat{A}}}{\mathrm{d}t}=0.$$

[证明] (1) 证法一：对于不显含 t 的力学量 $\hat{A}$，有

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\hat{A}}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\overline{[\hat{A}, \hat{H}]}=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int\psi^*\hat{A}\hat{H}\psi\,\mathrm{d}^3r-\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int\psi^*\hat{H}\hat{A}\psi\,\mathrm{d}^3r.$$

利用 $\hat{H}$ 的厄米性以及对于束缚定态有 $\hat{H}\psi=E\psi$，可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\overline{\hat{A}}}{\mathrm{d}t}&=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int\psi^*\hat{A}\hat{H}\psi\,\mathrm{d}^3r-\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int\psi^*\hat{H}\hat{A}\psi\,\mathrm{d}^3r\\&=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int\psi^*\hat{A}(\hat{H}\psi)\,\mathrm{d}^3r-\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int(\hat{H}\psi)^*\hat{A}\psi\,\mathrm{d}^3r\\&=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int\psi^*\hat{A}(E\psi)\,\mathrm{d}^3r-\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int(E\psi)^*\hat{A}\psi\,\mathrm{d}^3r=0.\end{aligned}$$

(2) 证法二：定态波函数可以写成

$$\psi(\boldsymbol{r}, t)=\psi_n(\boldsymbol{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_nt/\hbar},$$

故有

$$\begin{aligned}\overline{\hat{A}}&=\int\psi(\boldsymbol{r}, t)^*\hat{A}\,\psi(\boldsymbol{r}, t)\,\mathrm{d}^3r\\&=\int\psi(\boldsymbol{r})^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_nt/\hbar}\,\hat{A}\,\psi(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_nt/\hbar}\,\mathrm{d}^3r\\&=\int\psi(\boldsymbol{r})^*\hat{A}\,\psi(\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3r,\end{aligned}$$

当力学量 $\hat{A}$ 不显含 t 时，上式给出的结果是与 t 无关的，证毕.

力学量 $\hat{A}$ 的时间微商 $\frac{\mathrm{d}\hat{A}}{\mathrm{d}t}$ 定义为：$\frac{\mathrm{d}\hat{A}}{\mathrm{d}t}$ 在运动状态 $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ 下的平均值 $\overline{\frac{\mathrm{d}\hat{A}}{\mathrm{d}t}}$，等于 $\hat{A}$ 的平均值的时间微商 $\frac{\mathrm{d}\overline{\hat{A}}}{\mathrm{d}t}$，即

$$\overline{\frac{\mathrm{d}\hat{A}}{\mathrm{d}t}} = \int \psi(\boldsymbol{r}, t)^* \frac{\mathrm{d}\hat{A}}{\mathrm{d}t} \psi(\boldsymbol{r}, t) \mathrm{d}^3 r$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \psi(\boldsymbol{r}, t)^* \hat{A}\, \psi(\boldsymbol{r}, t)\, \mathrm{d}^3 r = \frac{\mathrm{d}\overline{\hat{A}}}{\mathrm{d}t}.$$

因此，本命题同样可以表述为：若力学量 $\hat{A}$ 不显含时间 t，则在束缚定态下有 $\frac{\mathrm{d}\overline{\hat{A}}}{\mathrm{d}t} = 0$.

21－12. 证明在势场 $V(r)$ 中运动的粒子有下列关系：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{\hat{\boldsymbol{p}}} = -\overline{\nabla V}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{\hat{\boldsymbol{r}}} = \frac{\overline{\hat{\boldsymbol{p}}}}{m},$$

这就是**埃伦费斯特定理**(Ehrenfest theorem).

[证明] $\hat{\boldsymbol{r}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{p}}$ 都不显含时间 t，因此有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{\hat{\boldsymbol{p}}} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\overline{[\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{H}]}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\overline{[\boldsymbol{r}, \hat{H}]}.$$

由于

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + V(r), \qquad [\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{p}^2] = 0, \qquad [\boldsymbol{r}, V(r)] = 0,$$

$$[\hat{\boldsymbol{p}}, V(r)]\psi = -\mathrm{i}\hbar\nabla(V\psi) + \mathrm{i}\hbar V\nabla\psi$$

$$= -\mathrm{i}\hbar\psi\nabla V - \mathrm{i}\hbar V\nabla\psi + \mathrm{i}\hbar V\nabla\psi$$

$$= (-\mathrm{i}\hbar\nabla V)\psi,$$

$$[x, \hat{p}^2] = [x, \hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2] = [x, \hat{p}_x^2]$$

$$= [x, \hat{p}_x]\hat{p}_x + \hat{p}_x[x, \hat{p}_x] = 2\mathrm{i}\hbar\hat{p}_x,$$

$$[\boldsymbol{r}, \hat{p}^2] = 2\mathrm{i}\hbar\hat{\boldsymbol{p}},$$

可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{\boldsymbol{p}} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\overline{[\boldsymbol{p}, H]} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}(-\mathrm{i}\hbar\overline{\nabla V}) = -\overline{\nabla V},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\overline{[\boldsymbol{r}, \hat{H}]} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\frac{1}{2m}2\mathrm{i}\hbar\overline{\hat{\boldsymbol{p}}} = \frac{\overline{\hat{\boldsymbol{p}}}}{m},$$

这些就是所要求证明的结果.

21－13. 试证明：为了保证 $\hat{L}_z=-\mathrm{i}\hbar\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$ 是厄米算符，波函数 $\psi(r,\theta,\varphi)$ 必须满足单值条件

$$\psi(r,\theta,\varphi)=\psi(r,\theta,\varphi+2\pi).$$

[证明] 如果 $\hat{L}_z$ 是厄米算符，则对于任意两个波函数 ψ 和 χ，应有

$$\int\chi^*\hat{L}_z\psi\mathrm{d}^3x=\int(\hat{L}_z\chi)^*\psi\mathrm{d}^3x,$$

积分范围为全空间. 如果取 χ 与 φ 无关，即 $\chi=\chi(r,\theta)$，则有 $\hat{L}_z\chi=0$，因此有

$$\int\chi^*\hat{L}_z\psi\mathrm{d}^3x=\int(\hat{L}_z\chi)^*\psi\mathrm{d}^3x=0,$$

即
$$\int_0^\infty r^2\mathrm{d}r\int_0^\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\chi(r,\theta)^*\frac{\partial}{\partial\varphi}\psi(r,\theta,\varphi)\mathrm{d}\varphi=0.$$

由于被积函数的 r,θ 部分有任意性，因此必须有

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\psi(r,\theta,\varphi)\mathrm{d}\varphi=\psi(r,\theta,\varphi)\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}=0.$$

由于 $\varphi=0$ 的方向可以任意选择，故上式就是

$$\psi(r,\theta,\varphi)=\psi(r,\theta,\varphi+2\pi),$$

此即周期性边界条件.

21－14. 在 $l=1$ 的情况下，试求：(1) $(\hat{L}^2,\ \hat{L}_x)$ 的共同本征函数，并将它们表示成球谐函数 $\mathrm{Y}_1^m(\theta,\varphi)$ 的线性叠加. (2) 对于 $(\hat{L}^2,\ \hat{L}_z)$ 的共同本征态 $\mathrm{Y}_1^0(\theta,\varphi)$，$\hat{L}_x$ 的可能的测量值及其相应的概率.

[解] (1) 当 $l=1$ 时，$\hat{L}_z$ 的本征值为 0 和 $\pm\hbar$. 由 x,y,z 的轮换对称性可知，$\hat{L}_x$(以及 $\hat{L}_y$)的本征值也是 0 和 $\pm\hbar$，相应的 $(\hat{L}^2,\ \hat{L}_x)$ 的共同本征函数记为 ϕ_{11}，ϕ_{10}，ϕ_{1-1}. 以下我们采用 x,y,z 轮换的方法，求出它们用球谐函数 Y_1^1，Y_1^0，Y_1^{-1} 表达的具体函数形式.

在 $x\to y$，$y\to z$，$z\to x$ 的变换下，有

$$\hat{L}_x\to\hat{L}_y,\quad \hat{L}_y\to\hat{L}_z,\quad \hat{L}_z\to\hat{L}_x,$$

而 $\hat{L}^2$ 不变. 已知

$$\mathrm{Y}_1^1=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{x+\mathrm{i}y}{r},$$

$$\mathrm{Y}_1^0=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{z}{r},$$

$$Y_1^{-1}=\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\varphi}=\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{x-iy}{r}.$$

经过 x, y, z 轮换，成为

$$Y_1^1\to-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{y+iz}{r}=-i\left(\frac{1}{2}Y_1^1+\frac{1}{\sqrt{2}}Y_1^0+\frac{1}{2}Y_1^{-1}\right),$$

$$Y_1^0\to\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-Y_1^1+Y_1^{-1}\right),$$

$$Y_1^{-1}\to\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{y-iz}{r}=i\left(\frac{1}{2}Y_1^1-\frac{1}{\sqrt{2}}Y_1^0+\frac{1}{2}Y_1^{-1}\right).$$

选择适当的相因子后，可得如下归一化的共同本征函数：

$$\phi_{11}=\frac{1}{2}Y_1^1+\frac{1}{\sqrt{2}}Y_1^0+\frac{1}{2}Y_1^{-1}\qquad(l_x=\hbar),$$

$$\phi_{10}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(Y_1^1-Y_1^{-1}\right)\qquad(l_x=0),$$

$$\phi_{1-1}=\frac{1}{2}Y_1^1-\frac{1}{\sqrt{2}}Y_1^0+\frac{1}{2}Y_1^{-1}\qquad(l_x=-\hbar).$$

(2) 利用上述结果，可将 Y_1^0 展开为

$$Y_1^0=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_{11}-\phi_{1-1}\right).$$

展开式中各项系数绝对值的平方，就是 $\hat{L}_x$ 取相应本征值的概率．所以 $\hat{L}_x$ 的可能的测量值是 $l_x=\pm\hbar$，相应的概率均为 1/2.

第二十二章　有心力场和电磁场中的粒子

22－1. 设体系的哈密顿算符 $\hat{H}$ 中含有某个参量 λ，于是 $\hat{H}$ 的本征值 E_n 及其相应的束缚态归一化本征函数 ψ_n 均与参量 λ 有关，且其中 n 表示一组量子数，试证明

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}E_n=(\psi_n,\frac{\partial\hat{H}}{\partial\lambda}\psi_n),$$

这就是**赫尔曼－费恩曼定理**(Hellmann-Feynman theorem)，简称 H－F 定理，它是关于量子体系的能量本征值的最重要的定理之一．适当地选择参量 λ，则某些重要的力学量算符往往可以表示为 $\partial\hat{H}/\partial\lambda$．由此，利用已求出的能量本征值，就可以得到关于各个力学量的平均值的许多信息．

[解] 按题意，E_n 和 ψ_n 满足能量本征值方程

$$\hat{H}\psi_n=E_n\psi_n \qquad 或 \qquad (\hat{H}-E_n)\psi_n=0, \tag{a}$$

且 E_n 和 ψ_n 均与参量 λ 有关．将式(a)对 λ 求导数，可得

$$(\frac{\partial\hat{H}}{\partial\lambda}-\frac{\partial E_n}{\partial\lambda})\psi_n+(\hat{H}-E_n)\frac{\partial\psi_n}{\partial\lambda}=0. \tag{b}$$

以 ψ_n *左乘式(b)两边，并对全空间积分，可得

$$\begin{aligned}\int\psi_n^*(\hat{H}-E_n)\frac{\partial\psi_n}{\partial\lambda}\mathrm{d}\tau&=\int\psi_n^*(\frac{\partial E_n}{\partial\lambda}-\frac{\partial\hat{H}}{\partial\lambda})\psi_n\,\mathrm{d}\tau\\&=\frac{\partial E_n}{\partial\lambda}-(\psi_n,\frac{\partial\hat{H}}{\partial\lambda}\psi_n).\end{aligned} \tag{c}$$

由于 $\hat{H}=\hat{H}^+$，因此有

$$\int\psi_n^*\hat{H}\frac{\partial\psi_n}{\partial\lambda}\mathrm{d}\tau=\int(\hat{H}\psi_n)^*\frac{\partial\psi_n}{\partial\lambda}\mathrm{d}\tau=E_n\int\psi_n^*\frac{\partial\psi_n}{\partial\lambda}\mathrm{d}\tau,$$

于是式(c)的左边的积分为零．所以，由式(c)的右边为零即得

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}E_n=(\psi_n,\frac{\partial\hat{H}}{\partial\lambda}\psi_n),$$

这就是所要求证明的 H－F 定理．

例如，线性谐振子的哈密顿算符和能量本征值分别为

$$\hat{H}=\hat{T}+V=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2,$$

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

$\hbar, m, \omega$ 中的任何一个均可取作为参量 λ．如果取 $\hbar = \lambda$，则有

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial \hbar} = -\frac{\hbar}{m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} = \frac{2}{\hbar}\hat{T}.$$

利用 H－F 定理可以证明，在能量本征态 ψ_n 下，有

$$\overline{T} = \overline{U} = \frac{1}{2}E_n.$$

22－2. 对于氢原子的基态，试求电子处在经典禁区(即 $r > 2a_0$，这时 $E - V < 0$)的概率.

[解] 氢原子的基态波函数为

$$\psi_{100} = R_{10}(r)Y_0^0(\theta, \varphi) = (\frac{2}{a_0^{3/2}}\mathrm{e}^{-r/a_0})(\frac{1}{\sqrt{4\pi}}),$$

电子处在经典禁区 $(r > 2a_0)$的概率为

$$P_1 = \int_{2a}^{\infty}[R_{10}(r)]^2 r^2 \mathrm{d}r = \frac{4}{a_0^3}\int_{2a_0}^{\infty} r^2 e^{-2r/a_0}\mathrm{d}r$$

$$= \frac{4}{a_0^3}[\frac{r^2}{(-2/a_0)} - \frac{2r}{(-2/a_0)^2} + \frac{2}{(-2/a_0)^3}]\mathrm{e}^{-2r/a_0}\Big|_{2a_0}^{\infty}$$

$$= 13\,\mathrm{e}^{-4} = 0.238.$$

此外，计算还表明，对于氢原子的 $(n, n-1, m)$ 态，电子处于经典禁区 $r_n > 2n^2 a_0$(它是最概然半径的两倍)的概率分别为

$n = 2$，　　$P_2 = 297 \times \mathrm{e}^{-8} = 0.0996$；

$n = 3$，　　$P_3 = 7\,457.8 \times \mathrm{e}^{-12} = 0.0458$；

$n = 4$，　　$P_4 = 195\,381 \times \mathrm{e}^{-16} = 0.0220$；

$n = 5$，　　$P_5 = 5\,244\,270 \times \mathrm{e}^{-20} = 0.0108$；

$n = 10$，　　$P_{10} = 8.669 \times 10^{13} \times \mathrm{e}^{-40} = 0.000\,368$.

由此可见，当 n 很大时，量子力学与经典力学的结果趋于一致，这正是对应原理的具体体现.

22－3. 对于氢原子以及核电荷为 Ze 的类氢离子的“圆轨道”(即 $n_r = 0$，或 $l = n - 1$ 的轨道)，计算其最概然半径.

[解] (1) 氢原子的径向波函数为

$$R_{nl}(r)=N_{nl}\mathrm{e}^{-\xi/2}\xi^{l}\mathrm{F}(-n_r;2l+2;\xi),$$

其中$\xi=2r/na_0$，合流超几何函数$\mathrm{F}(-n_r;2l+2;\xi)$在$n_r=0$时等于 1．在半径为$r$到$r+\mathrm{d}r$的球壳内找到电子的概率为

$$w_{nl}(r)\mathrm{d}r=R_{nl}^{2}(r)r^{2}\,\mathrm{d}r.$$

因此，对于圆轨道而言，其最概然半径r_n可由下式决定：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[R_{nl}^{2}(r)r^{2}]=N_{nl}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[\mathrm{e}^{-2r/na_0}(\frac{2}{na_0})^{2n-2}r^{2n}]=0,$$

即

$$-\frac{2}{na_0}\mathrm{e}^{-2r/na_0}r^{2n}+\mathrm{e}^{-2r/na_0}2nr^{2n-1}=0,$$

由此可解得

$$r_n=n^{2}a_0,$$

这就是氢原子圆轨道的最概然半径.

(2) 将氢原子波函数中的a_0换为a_0/Z，即可得到对于核电荷为Ze的类氢离子的波函数．所以，类氢离子圆轨道的最概然半径为

$$r_n=n^{2}a_0/Z.$$

22－4. 试问氢原子处在$n=2$能级时有多少个不同的状态？在不考虑电子自旋的情况下，对于各个状态，试按量子数列出它们的波函数.

[解] 在不考虑电子自旋的情况下，氢原子处在$n=2$能级时有四个不同的状态，它们是

$$\psi_{200}=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}\,a_0^{3/2}}(1-\frac{r}{2a_0})\mathrm{e}^{-r/2a_0},$$

$$\psi_{210}=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}\,a_0^{3/2}}\frac{r}{a_0}\mathrm{e}^{-r/2a_0}\cos\theta,$$

$$\psi_{211}=-\frac{1}{8\sqrt{\pi}\,a_0^{3/2}}\frac{r}{a_0}\mathrm{e}^{-r/2a_0}\sin\theta\,e^{\mathrm{i}\varphi},$$

$$\psi_{21-1}=\frac{1}{8\sqrt{\pi}\,a_0^{3/2}}\frac{r}{a_0}\mathrm{e}^{-r/2a_0}\sin\theta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}.$$

22－5. 以基态氢原子为例，证明定态波函数ψ不是动能T或势能V的本征函数，而是$H=T+V$的本征函数.

[证明] 在库仑场中运动的粒子的哈密顿量可写为

$$H=T+V=-\frac{\hbar^{2}}{2\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial^{2}}{\partial r^{2}}r+\frac{L^{2}}{2\mu r^{2}}-\frac{e^{2}}{4\pi\varepsilon_0 r}.\qquad\text{(a)}$$

将T, V和H分别作用在氢原子的基态波函数

$$\psi_{100}=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,a_0^{3/2}}\mathrm{e}^{-r/a_0} \tag{b}$$

上，则有

$$T\psi_{100}=-\frac{\hbar^2}{2\sqrt{\pi}\,\mu a_0^{3/2}}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\mathrm{e}^{-r/a_0})$$

$$=-\frac{\hbar^2}{2\mu}(-\frac{2}{a_0 r}+\frac{1}{a_0^2})\psi_{100}, \tag{c}$$

$$V\psi_{100}=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\psi_{100}, \tag{d}$$

$$H\psi_{100}=T\psi_{100}+V\psi_{100}$$

$$=-\frac{\hbar^2}{2\mu}(-\frac{2}{a_0 r}+\frac{1}{a_0^2})\psi_{100}-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\psi_{100},$$

将玻尔半径 $a_0=4\pi\varepsilon_0\hbar^2/\mu e^2$ 代入上式，即得

$$H\psi_{100}=-\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0}\psi_{100}. \tag{e}$$

由式(c)和式(d)可以看出，算符 T 和 V 作用到 ψ_{100} 上所得到的是 r 的函数(而不是常量)与 ψ_{100} 的乘积，因此 ψ_{100} 不是它们的本征函数；然而，由式(e)可以看出，算符 $H=T+V$ 作用到 ψ_{100} 上所得到的却是与 r 无关的常量(能量本征值)与 ψ_{100} 的乘积，因此 ψ_{100} 是 $H=T+V$ 的本征函数.

22－6. 以基态氢原子为例，证明 $\overline{V}=2E$，$\overline{T}=-E$，其中 E 是总能量. 实际上，这个结果对于在库仑场中运动的粒子都是成立的.

[证明] 利用题 22－5 的结果，可得

$$\overline{V}=\int\psi_{100}^{*}V\psi_{100}\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{4}{a_0^3}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-r/a_0}\frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{e}^{-r/a_0}r^2\mathrm{d}r=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0}=2E_1,$$

$$\overline{T}=\int\psi_{100}^{*}T\psi_{100}\,\mathrm{d}\tau$$

$$=-\frac{2\hbar^2}{\mu a_0^3}\int\mathrm{e}^{-r/a_0}(-\frac{2}{a_0 r}+\frac{1}{a_0^2})\mathrm{e}^{-r/a_0}r^2\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2\hbar^2}{\mu a_0^5}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-2r/a_0}(2a_0 r-r^2)\mathrm{d}r=\frac{\hbar^2}{2\mu a_0^2}=\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0}=-E_1,$$

其中 $E_1=-\dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0}$ 是氢原子基态的能量.

实际上，利用量子力学的位力定理和 H－F 定理可以证明，对于受到遵从平方反比律的吸引力作用的粒子，$V\propto 1/r$，都有

$$\langle T\rangle_n=-\frac{1}{2}\langle V\rangle_n=-E_n \qquad (E_n\propto\hbar^{-2});$$

而对于谐振子，$V\propto r^2$，则有

$$\langle T\rangle_n=\langle V\rangle_n=\frac{E_n}{2} \qquad (E_n\propto\hbar).$$

22－7. 设氢原子处在

$$\psi(r,\theta,\varphi)=R_{32}(r)\mathrm{Y}_2^1(\theta,\varphi)+R_{21}(r)\mathrm{Y}_1^0(\theta,\varphi)$$

的状态中，(1) 将此波函数归一化；(2) 该状态能量有无确定值？如果没有，求能量的可能值以及取这些值的概率；(3) 求能量的平均值.

[解] (1) 球谐函数满足正交归一化条件，即

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{Y}_l^m{}^*(\theta,\varphi)\mathrm{Y}_{l'}^{m'}(\theta,\varphi)=\delta_{ll'}\delta_{mm'};$$

同时，氢原子的径向波函数 $R_{nl}(r)$ 也是归一化的，且对不同的 n 是正交的，即

$$\int_0^{\infty}r^2\,\mathrm{d}r\,R_{nl}(r)R_{n'l}(r)=\delta_{nn'}.$$

于是，在对本题所给出的波函数进行归一化时，乘积

$$\psi^*\psi=(R_{32}\,\mathrm{Y}_2^1+R_{21}\,\mathrm{Y}_1^0)^*(R_{32}\,\mathrm{Y}_2^1+R_{21}\,\mathrm{Y}_1^0)$$

中只有 $R_{32}\,\mathrm{Y}_2^1{}^*R_{32}\,\mathrm{Y}_2^1$ 和 $R_{21}\,\mathrm{Y}_1^0{}^*R_{21}\,\mathrm{Y}_1^0$ 两项对积分有贡献，即

$$\int\mathrm{d}\tau\psi^*\psi=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\,\mathrm{Y}_2^1{}^*\mathrm{Y}_2^1\int_0^{\infty}r^2\mathrm{d}rR_{32}^2+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\,\mathrm{Y}_1^0{}^*\mathrm{Y}_1^0\int_0^{\infty}r^2\mathrm{d}rR_{21}^2$$

$$=1+1=2.$$

所以，归一化的波函数应是

$$\psi(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2}}[R_{32}(r)\mathrm{Y}_2^1(\theta,\varphi)+R_{21}(r)\mathrm{Y}_1^0(\theta,\varphi)].$$

(2) 上述状态不是氢原子的能量本征态，能量可能值为

$$E_2=-\frac{e^2}{32\pi\varepsilon_0 a_0},\qquad E_3=-\frac{e^2}{72\pi\varepsilon_0 a_0},$$

而且取这些值的概率均为1/2.

(3) 处在上述状态的氢原子能量的平均值为

$$\overline{E}=\frac{1}{2}E_2+\frac{1}{2}E_3=-\frac{13e^2}{576\pi\varepsilon_0 a_0}.$$

22－8. 设氢原子处在

$$\psi(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{2}R_{21}(r)Y_1^0(\theta,\varphi)-\frac{\sqrt{3}}{2}R_{21}(r)Y_1^{-1}(\theta,\varphi)$$

的状态中，求氢原子的能量 E、角动量 L^2 和 L_z 的可能值，以及取这些可能值的概率，并求这些力学量的平均值.

[解] 处在该状态中的氢原子的能量和角动量 L^2 都是确定的，

$$E_2=-\frac{e^2}{32\pi\varepsilon_0 a_0},$$

$$L^2=l(l+1)\hbar^2=2\hbar^2.$$

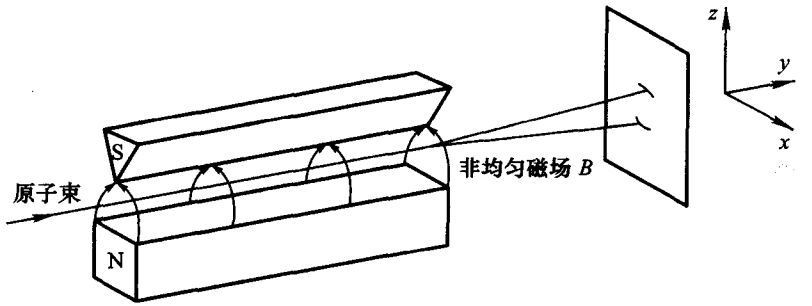
然而，L_z 却可以取 0, $-\hbar$ 两个可能值，取这两个可能值的概率分别为 1/4 和 3/4，L_z 的平均值为 $-3\hbar/4$.

22－9. 讨论氢原子的 ψ_{200}，ψ_{210}，ψ_{211} 和 ψ_{21-1} 四个状态的宇称.

[解] 可以证明，ψ_{nlm} 的宇称取决于 $(-1)^l$，因此 ψ_{200} 具有偶宇称，而 ψ_{210}，ψ_{211} 和 ψ_{21-1} 都具有奇宇称.

第二十三章　自旋和全同粒子

23－1. 在施特恩－格拉赫实验中，处于基态的银原子束通过不均匀的横向磁场，磁场梯度为 $\partial B/\partial z=10^2\,\mathrm{T/m}$，磁极纵向范围为 $L_1=0.040\,\mathrm{m}$，磁极到屏的距离为 $L_2=0.10\,\mathrm{m}$，银原子运动速率为 $v=500\,\mathrm{m/s}$，在屏上两束分开的距离为 $d=0.20\,\mathrm{mm}$．已知银原子的质量是 $1.79\times10^{-25}\,\mathrm{kg}$，忽略磁场边缘效应的影响，试确定银原子磁矩在 z 方向上的投影 μ_z 的大小．



题 23－1 图

[解] 如图所示，处于基态的银原子束以水平速度 $v=500\,\mathrm{m/s}$ 进入磁场区，受到了沿 z 轴方向不均匀的磁场的作用力

$$F_z=\mu_z\frac{\partial B_z}{\partial z}, \tag{a}$$

使其在范围为 $L_1=0.040\,\mathrm{m}$ 的磁场区作抛物线运动，即

$$y=vt, \qquad z=\frac{1}{2}\frac{F_z}{m}t^2. \tag{b}$$

在磁场区的出口处，银原子束已偏离中心

$$z_1=\frac{1}{2}\frac{F_z}{m}\frac{L_1^2}{v^2}, \tag{c}$$

其运动方向与水平 y 轴的偏角为

$$\alpha=\arctan\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)_{L_1}=\arctan\left(\frac{F_zL_1}{mv^2}\right). \tag{d}$$

在磁极到屏之间的 $L_2=0.10\,\mathrm{m}$ 距离内，银原子束沿此方向作直线运动，关于在屏上两束分开的距离 $d=2.0\,\mathrm{mm}$ 的公式是

$$d = 2(z_1 + L_2\tan\alpha) = 2(\frac{1}{2}\frac{F_z}{m}\frac{L_1^2}{v^2} + \frac{F_z L_1 L_2}{mv^2})$$

$$= \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}\frac{L_1}{mv^2}(L_1 + 2L_2)\,. \qquad \text{(e)}$$

$$\mu_z = \frac{mv^2 d}{L_1(L_1+2L_2)}(\frac{\partial B_z}{\partial z})^{-1} = \frac{1.79\times10^{-25}\times500^2\times2.0\times10^{-4}}{0.040\times0.24}\times10^{-2}\ \text{J/T}$$

$$= 9.3\times10^{-24}\ \text{J/T}\,.$$

在实验误差范围内，与玻尔磁子 $\mu_B = 9.27\times10^{-24}$ J/T 量值相符.

23－2. 在施特恩－格拉赫实验中，原子态的氢从温度为400K的炉中射出，在屏上接收到两条谱线，间距为 $d=6.0$mm．若把氢原子换成氯原子，其基态为 $^2P_{3/2}$，其他实验条件不变，试问在屏上可以接收到几条谱线？相邻两谱线的间距为多少？

[解] 由题 23－1 式(e)可以看出，在温度和其他实验条件相同的情况下，相邻两谱线的间距与 μ_z 成正比．对于原子基态，有

$$\mu_z = -m_j g_j \mu_B\,.$$

氢原子基态为 $^2S_{1/2}$，$s=1/2$，$j=1/2$，m_j 可以取 $2j+1=2$ 个值；氯原子基态为 $^2P_{3/2}$，$s=1/2$，$j=3/2$，m_j 可以取 $2j+1=4$ 个值．因此，对于氯原子，屏上可以接收到4条谱线.

对于氢原子基态 $^2S_{1/2}$，$g_j=2$，$m_j g_j = \pm1$；对于氯原子基态 $^2P_{3/2}$，查表得，$g_j = 4/3$ [式(23.33)]，$m_j g_j = \pm2/3$ 和 $\pm6/3$．由 $\mu_z = -m_j g_j \mu_B$ 可得，若氢原子在屏上谱线的间距为 $d=6.0$mm，则氯原子在屏上两相邻谱线的间距为 $2d/3 = 4.0$mm.

23－3. 利用

$$J^2 = L^2 + s^2 + 2\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{L} = L^2 + \frac{3\hbar^2}{4} + 2\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{L}\,,$$

试证明 ϕ_{ljm_j} 是

$$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{L} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{L}$$

的本征态，并求出相应的本征值.

[证明] 对于在有心力场中的电子来说，在计及自旋轨道耦合作用后，总角动量 $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{s}$ 和 L^2 是守恒量，可选用 (L^2, J^2, J_z) 的共同本征函数 ϕ_{ljm_j} 作为有心力场中电子能量本征函数的角度部分，有

$$J^2\phi_{ljm_j}=j(j+1)\hbar^2\phi_{ljm_j},$$

$$J_z\phi_{ljm_j}=m_j\hbar\phi_{ljm_j},$$

$$L^2\phi_{ljm_j}=l(l+1)\hbar^2\phi_{ljm_j}.$$

另一方面，按照定义$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{s}$，我们有

$$J^2=L^2+s^2+2\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{L},$$

而电子的$s^2=s_x^2+s_y^2+s_z^2=\frac{3}{4}\hbar^2$是个常量，因此有

$$J^2=L^2+\frac{3\hbar^2}{4}+2\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{L},$$

即　　$$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{L}=\frac{1}{2}(J^2-L^2-\frac{3\hbar^2}{4}),$$

故有　　$$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{L}\phi_{ljm_j}=\frac{1}{2}(J^2-L^2-\frac{3\hbar^2}{4})\phi_{ljm_j}$$

$$=\frac{\hbar^2}{2}[j(j+1)-l(l+1)-\frac{3}{4}]\phi_{ljm_j},$$

这表明，ϕ_{ljm_j}是

$$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{L}=\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{L}$$

的本征态，其相应的本征值为

$$\frac{\hbar^2}{2}[j(j+1)-l(l+1)-\frac{3}{4}].$$

顺便提及，利用简并定态微扰论的计算方法，我们还可以得到自旋轨道耦合项$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{L}$对能量的一级修正为

$$E_{nlj}^{(1)}=\frac{\hbar^2}{2}[j(j+1)-l(l+1)-\frac{3}{4}]\int_0^\infty R_{nl}^2(r)\xi(r)r^2\,\mathrm{d}r.$$

由此可见，自旋轨道耦合使原来简并的能级分裂开来，简并被部分地消除．当n和l给定后，j可取$j=l\pm1/2$($l=0$除外)两个值，这两个能级之间的差别很小，于是就产生了光谱线的精细结构．现在，在E_{nlj}中仍不含量子数m_j，还有$2j+1$重简并被保留了下来．

23－4．一体系由三个全同的玻色子组成，它们之间没有相互作用．若玻色子有三个可能的单粒子态，试问体系的可能状态共有几个？它们的波函数怎样由单粒子波函数构成？

[解] 设玻色子的单粒子态为 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3，则由三个全同的玻色子组成的体系的状态共有 10 个. 可以分以下三种情况写出该体系的波函数：

(1) 若三个玻色子各处在不同的态，由 $N!/\prod n_i! = 3! = 6$ 可得，其对称波函数由六项组成：

$$\psi_1^S = \frac{1}{\sqrt{6}}[\phi_1(q_1)\phi_2(q_2)\phi_3(q_3) + \phi_1(q_2)\phi_2(q_3)\phi_3(q_1) + \phi_1(q_3)\phi_2(q_1)\phi_3(q_2) + \phi_1(q_3)\phi_2(q_2)\phi_3(q_1) + \phi_1(q_2)\phi_2(q_1)\phi_3(q_3) + \phi_1(q_1)\phi_2(q_3)\phi_3(q_2)];$$

(2) 若三个玻色子中有两个处在相同的态，而另一个处在不同的态，则其对称波函数共有六个，每个由三项组成. 例如，当

$$n_1 = 2,\quad n_2 = 1,\quad n_3 = 0$$

时，由 $N!/\prod n_i! = 3!/2! = 3$ 可得，其对称波函数由三项组成：

$$\psi_2^S = \frac{1}{\sqrt{3}}[\phi_1(q_1)\phi_1(q_2)\phi_2(q_3) + \phi_1(q_1)\phi_1(q_3)\phi_2(q_2) + \phi_1(q_3)\phi_1(q_2)\phi_2(q_1)].$$

类似地可以写出分别相应于：

$n_1 = 2,\quad n_2 = 0,\quad n_3 = 1;$

$n_1 = 0,\quad n_2 = 2,\quad n_3 = 1;$

$n_1 = 1,\quad n_2 = 2,\quad n_3 = 0;$

$n_1 = 0,\quad n_2 = 1,\quad n_3 = 2;$

$n_1 = 1,\quad n_2 = 0,\quad n_3 = 2$

的其他五个对称波函数，它们是

$$\psi_3^S = \frac{1}{\sqrt{3}}[\phi_1(q_1)\phi_1(q_2)\phi_3(q_3) + \phi_1(q_1)\phi_1(q_3)\phi_3(q_2) + \phi_1(q_3)\phi_1(q_2)\phi_3(q_1)],$$

$$\psi_4^S = \frac{1}{\sqrt{3}}[\phi_2(q_1)\phi_2(q_2)\phi_3(q_3) + \phi_2(q_1)\phi_2(q_3)\phi_3(q_2) + \phi_2(q_3)\phi_2(q_2)\phi_3(q_1)],$$

$$\psi_5^S = \frac{1}{\sqrt{3}}[\phi_1(q_1)\phi_2(q_2)\phi_2(q_3) + \phi_1(q_2)\phi_2(q_3)\phi_2(q_1) + \phi_1(q_3)\phi_2(q_1)\phi_2(q_2)],$$

$$\psi_6^S=\frac{1}{\sqrt{3}}[\phi_1(q_1)\phi_3(q_2)\phi_3(q_3)+\phi_1(q_2)\phi_3(q_3)\phi_3(q_1)+$$
$$\phi_1(q_3)\phi_3(q_2)\phi_3(q_1)],$$
$$\psi_7^S=\frac{1}{\sqrt{3}}[\phi_2(q_1)\phi_3(q_2)\phi_3(q_3)+\phi_2(q_2)\phi_3(q_3)\phi_3(q_1)+$$
$$\phi_2(q_3)\phi_3(q_1)\phi_3(q_2)].$$

(3) 若三个玻色子都处在相同的单粒子态，则其对称波函数共有三个，每个只有一项．例如，对应于

$$n_1=3,\qquad n_2=n_3=0;$$
$$n_2=3,\qquad n_1=n_3=0;$$
$$n_3=3,\qquad n_1=n_2=0$$

等三种情况的波函数分别为

$$\psi_8^S=\phi_1(q_1)\phi_1(q_2)\phi_1(q_3),$$
$$\psi_9^S=\phi_2(q_1)\phi_2(q_2)\phi_2(q_3),$$
$$\psi_{10}^S=\phi_3(q_1)\phi_3(q_2)\phi_3(q_3).$$

23－5. 一体系由三个全同的费米子组成，它们之间没有相互作用．若费米子有三个可能的单粒子态，问体系的可能状态共有几个？它们的波函数怎样由单粒子波函数构成？

[解] 设费米子的单粒子态为 ϕ_1,ϕ_2,ϕ_3，则由三个全同的费米子组成的体系的状态只有 1 个，即三个费米子各处在不同的态：

$$\psi^A=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{vmatrix}\phi_1(q_1) & \phi_1(q_2) & \phi_1(q_3)\\ \phi_2(q_1) & \phi_2(q_2) & \phi_2(q_3)\\ \phi_3(q_1) & \phi_3(q_2) & \phi_3(q_3)\end{vmatrix}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{6}}[\phi_1(q_1)\phi_2(q_2)\phi_3(q_3)+\phi_1(q_2)\phi_2(q_3)\phi_3(q_1)+\phi_1(q_3)\phi_2(q_1)\phi_3(q_2)-$$
$$\phi_1(q_3)\phi_2(q_2)\phi_3(q_1)-\phi_1(q_2)\phi_2(q_1)\phi_3(q_3)-\phi_1(q_1)\phi_2(q_3)\phi_3(q_2)].$$

23－6. 碳原子的一种激发态的原子组态是 $1s^22s^23p^13d^1$，试求通过 *LS* 耦合可能形成的原子态．

[解] 原子组态是 $1s^22s^23p^13d^1$，两电子 $s_1=s_2=1/2$，$l_1=1$，$l_2=2$，通过 *LS* 耦合可能形成的原子态．

利用式(23.74)，可得两电子的轨道总角动量量子数为 $l=1,2,3$，自旋总角动量量子数为 $s=0$ 或 1．然后，再按照式(23.74)，将轨道总角动量 $\boldsymbol{L}$ 和自

旋总角动量 $\boldsymbol{S}$ 合成 $\boldsymbol{J}$，即

当 $s=0$ 时，对 $l=1,2,3$ 分别有 $j=1,2,3$，形成单态 ${}^1P_1$，${}^1D_2$ 和 ${}^1F_3$；

当 $s=1$ 时，对 $l=1$，$j=0,1,2$，形成三重态 ${}^3P_0$，${}^3P_1$ 和 ${}^3P_2$；

对 $l=2$，$j=1,2,3$，形成三重态 ${}^3D_1$，${}^3D_2$ 和 ${}^3D_3$；

对 $l=3$，$j=2,3,4$，形成三重态 ${}^3F_2$，${}^3F_3$ 和 ${}^3F_4$.

23－7. 铝原子的原子组态是 $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p$，试求未满支壳层的电子通过 *LS* 耦合可能形成的原子态，并根据洪德定则确定它们的基态.

[解] 未满支壳层的电子 3p，角动量量子数为 $l=1$，自旋角动量量子数为 $s=1/2$. 按照式(23.74)，总角动量量子数为 $j=1/2$ 和 $3/2$，形成原子态 ${}^2P_{1/2}$ 和 ${}^2P_{3/2}$. 根据洪德定则，总角动量量子数最小的态能量最低，因此基态是 ${}^2P_{1/2}$.

第二十五章　热力学基础

25－1. 对于混合气体，通常把某组分气体在相同温度下单独占有混合气体原有体积时的压强，称为该组分气体的**分压强**；把某组分气体单独处在与混合气体相同的压强和温度下所应占有的体积，称为该组分气体的**分体积**．各个分体积占总体积的百分比，称为混合气体中各组分的体积百分比．混合理想气体的总压强等于各组分气体分压强之和，称为**道尔顿分压定律**(Dalton law of partial pressure)；混合理想气体的总体积等于各组分气体分体积之和，称为**分体积定律**．已知空气主要组分的体积百分比是：氮 78%，氧 21%，氩 1%，它们的相对分子质量为：氮(N_2) 28.0，氧(O_2) 32.0，氩(Ar) 39.9，试求在标准状态下空气中各组分的分压强和密度以及空气的密度．

[解] 用下标 1、2 和 3 分别表示氮、氧和氩．在标准状态下，它们的分体积分别为

$$V_1 = 0.78V\ ,\quad V_2 = 0.21V\ ,\quad V_3 = 0.01V\ .$$

把这三种气体混合成标准状态下的空气后，它们的状态将分别从

$$(p, V_1, T)\ ,\quad (p, V_2, T)\ ,\quad (p, V_3, T)\ ,$$

变到 (p_1, V, T)，(p_2, V, T)，(p_3, V, T)．

由于在气体混合过程中温度 T 保持不变，由物态方程可得

$$pV_1 = p_1V\ ,\quad pV_2 = p_2V\ ,\quad pV_3 = p_3V\ .$$

又由于 $p = 1.013\times10^5\ \text{Pa}$，因此有

$$p_1 = pV_1/V = 7.9\times10^4\ \text{Pa}\ ,$$

$$p_2 = pV_2/V = 2.1\times10^4\ \text{Pa}\ ,$$

$$p_3 = pV_3/V = 1.0\times10^3\ \text{Pa}\ .$$

由物态方程可得，摩尔质量分别为 M_1, M_2 和 M_3 的各组分气体的密度分别为

$$\rho_1 = \frac{p_1M_1}{RT} = 0.97\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}\ ,\qquad \rho_2 = \frac{p_2M_2}{RT} = 0.30\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}\ ,$$

$$\rho_3 = \frac{p_3M_3}{RT} = 0.02\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}\ .$$

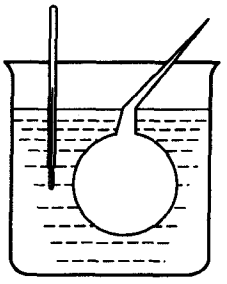
所以，空气在标准状态下的密度为

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = 1.29\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}\ .$$

25－2. 二八自行车轮的直径为 71.12 cm，内胎截面的直径为 3.0 cm. 在温度为–3°C 的天气里向空胎内打气. 打气筒长为 30 cm，截面半径为 1.5 cm. 打了 20 下，气打足了，这时车胎内气体的温度为 7°C，试估算车胎内气体的压强.

[解] $p_2=\dfrac{V_1}{V_2}\dfrac{T_2}{T_1}p_1=2.8\times10^5\ \text{Pa}$.

25－3. 化学中测定易挥发液态物质(如四氯化碳)相对分子质量的一种常用装置如图所示. 将盛有适量四氯化碳的开口细颈玻璃容器放在热水中加热，四氯化碳急剧挥发，把容器内的空气逐出. 当四氯化碳刚刚全部汽化时，立即将细颈封死. 这时容器内只有压强等于大气压的四氯化碳蒸气. 若测量得到封在容器内的蒸气的质量为 1.60×10^{-3} kg，已知容器的容积为 301 mL (毫升)，热水的温度为 80°C，试求四氯化碳的相对分子质量.



题 25－3 图

[解] 根据理想气体的物态方程，可得四氯化碳的摩尔质量为

$$M=\frac{mRT}{pV}=154\,\text{g/mol}.$$

因此，四氯化碳的相对分子质量为 154.

25－4. 一个氮气罐的容积为 50 L (升). 在使用氮气的过程中，测得罐内氮气的压强由 10.13 MPa 降低到了 4.052 MPa，同时氮气的温度由 30°C 降低到了 20°C. 已知氮气的摩尔质量为 2.8×10^{-2} kg/mol，并假定氮气可看做理想气体，试求罐中原有氮气的质量、所用掉氮气的质量以及它们在 20°C 和 1.013×10^5 Pa 时应占有的体积.

[解] (1) 罐中原有氮气的质量为 $m_1=Mp_1V/RT_1=5.6$ kg.

(2) 所用掉氮气的质量和应占有的体积分别为

$$\Delta m=m_1-m_2=\frac{MV}{R}\left(\frac{p_1}{T_1}-\frac{p_2}{T_2}\right)=3.3\ \text{kg},$$

$$\Delta V_0=\frac{(\Delta m)RT_0}{Mp_0}=\frac{3.3\times8.31\times293}{2.8\times10^{-2}\times1.013\times10^5}\ \text{m}^3=2.8\ \text{m}^3.$$

25－5. (1) 试推算标准状态($T_0=273.15$ K，$p_0=1.013\,25\times10^5$ Pa)下 1 m^3 气体的分子数，即**洛施密特常量**(Loschmidt constant). (2) **真空**(vacuum)是指低于一个大气压的气体状态，真空系统的压强称为**真空度**. 目前可获得的极限真空度为 1.33×10^{-11} Pa，试求温度为 27°C 时，在此真空度下 1 m^3 体积中的空气分子数.

[解] (1) 在标准状态(简称 STP)下，气体的摩尔体积为

$$V_{\mathrm{m}}=\frac{RT_0}{p_0}=\frac{8.314\,510\times273.15}{101\,325}\,\mathrm{m^3/mol}=22.41\,\mathrm{L/mol}\,,$$

这时 1 $\mathrm{m^3}$ 气体中的分子数(**洛施密特常量**)为

$$n_0=\frac{N_{\mathrm{A}}}{V_{\mathrm{m}}}=\frac{6.022\,136\,7\times10^{23}}{22.41\times10^{-3}}\,\mathrm{m^{-3}}=2.687\times10^{25}\,\mathrm{m^{-3}}\,.$$

(2) $p'=1.33\times10^{-11}\,\mathrm{Pa}$，$T'=300\,\mathrm{K}$ 时的相应值为

$$V_{\mathrm{m}}'=\frac{RT'}{p}=\frac{8.31\times300}{1.33\times10^{-11}}\,\mathrm{m^3/mol}=1.87\times10^{14}\,\mathrm{m^3/mol}\,,$$

$$n'=\frac{N_{\mathrm{A}}}{V_{\mathrm{m}}'}=\frac{6.02\times10^{23}}{1.87\times10^{14}}\,\mathrm{m^{-3}}=3.22\times10^{9}\,\mathrm{m^{-3}}\,.$$

25－6. (1) 假设空气中氧和氮的体积百分比分别为 20%和 80%，试求空气的平均相对分子质量，并估计在标准状态下 1 $\mathrm{m^3}$ 空气中有多少个分子？其中氧分子有多少个？(2) 估计我们星系中星际气体的密度为 $10^{-21}\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$，设这气体主要是氢，试估算 1 $\mathrm{m^3}$ 体积中的氢原子数，并将此结果与标准状态下的空气以及极限真空度为 $1.33\times10^{-11}\,\mathrm{Pa}$ 的剩余气体加以比较.

[解] (1) 已知空气中氧和氮的分体积分别为

$$V_1=x_1V=0.20V\,,\qquad V_2=x_2V=0.80V\,,$$

其中 $V=V_1+V_2$ 为空气的体积．它们所遵从的物态方程分别为

$$p_0x_1V=\frac{m_1}{M_1}RT_0\,,\qquad p_0x_2V=\frac{m_2}{M_2}RT_0\,,$$

$$p_0V=\frac{m}{\overline{M}}RT\,,$$

其中 $\overline{M}$ 为空气的平均摩尔质量．利用 $m=m_1+m_2$，可得

$$\overline{M}=x_1M_1+x_2M_2=28.8\,\mathrm{g/mol}\,,$$

因此空气的平均相对分子质量为 28.8.

显然，这是一个粗略的估计值．实际上，地球表面的空气由多种气体组成，所含氮、氧、氩和二氧化碳等的体积百分比分别为

$$x_1=78.084\%\,,\qquad x_2=20.946\%\,,$$

$$x_3=0.934\%\,,\qquad x_4=0.033\%\,.$$

忽略氖和氦等含量更小的成分，利用上式可得地面大气的平均摩尔质量为

$$\overline{M}=x_1M_1+x_2M_2+x_3M_3+x_4M_4=28.95\times10^{-3}\,\mathrm{kg/mol}\,,$$

它已很接近公认的标准数据 $28.97\times10^{-3}\,\mathrm{kg/mol}$.

应该强调，在标准状态下 1 m^3 空气中的分子数，实际上就是洛施密特常量 $n_0 = 2.69\times10^{25}\ m^{-3}$，其中氧分子数为 $x_1 n_0 = 5.4\times10^{24}\ m^{-3}$.

(2) 已知氢气的摩尔质量为 $\mu = 2.0\times10^{-3}$ kg/mol，因此 1 m^3 星际气体中的氢原子数为

$$n = \frac{\rho N_A}{M} = \frac{10^{-21}\times6.02\times10^{23}}{2.0\times10^{-3}}\ m^{-3} = 3\times10^5\ m^{-3},$$

即平均每立方厘米只有 0.3 个氢原子，这比极限真空(1.33×10^{-11} Pa)下的分子数还要少 1 万倍.

25－7. 因为在 0.2 MPa 分压强下的氧气是有毒的，所以在一定的水深以下工作的深海潜水员，必须使用特殊的气体混合物. 试问：(1) 按照空气中含氧 21% 体积百分比计算，在海水的什么深度下空气中氧的分压强等于 0.2 MPa？(2) 在深水作业中可使用含 3%氧和 97%氦(体积百分比)的气体混合物，在水深 200 m 时这种气体混合物中氧的分压强是多少？已知海水的密度为 $\rho = 1.025\times10^3\ kg/m^3$.

[解] (1) 混合气体中各组分的分压强与总压强之比，等于各组分的体积百分比. 在含氧 21% 体积百分比的空气中，要使氧的分压强达到 0.2 MPa，则空气的总压强应为 0.95 MPa，由海水产生的压强为 0.85 MPa，这时海水的深度为

$$h = \frac{p - p_0}{\rho g} = \frac{0.85\times10^6}{1.025\times10^3\times9.8}\ m = 85\ m.$$

(2) 对于体积百分比分别为氧 3%和氦 97%的气体混合物，在水深 200 m 时氧的分压强是

$$p_1 = x_1 p = x_1(\rho g h + p_0) \approx 0.063\ MPa.$$

25－8. 国际温标规定，在测定 0°C 到 630.74°C 之间的温度时，采用铂电阻温度计作为标准仪器. 作为一个简化的例子，假设可以采用内插公式

$$R = R_0(1 + At + Bt^2)$$

来描述铂电阻随温度的变化，式中、A 和 B 是由铂电阻温度计在冰点(0°C)、汽点(99.974°C)和硫沸点(444.67°C)下的实验值确定的常量. (1) 如果测得冰点时 $R_1 = 11.000\ \Omega$，汽点时 $R_2 = 15.247\ \Omega$，硫沸点时 $R_3 = 28.887\ \Omega$，试确定 R_0、A 和 B 的值；(2) 试画出 R - t 曲线.

[解] 由内插公式可见，R_0 就是冰点 $t = 0°C$ 时测得的温度计电阻值 R_1，即 $R_0 = R_1 = 11.000\Omega$. 再将汽点和硫沸点温度以及它们相应的电阻值代入内插公式，可得

$$15.247 = 11.000(1 + 99.974A + 99.974^2 B),$$

$$28.887 = 11.000(1 + 444.67A + 444.67^2 B).$$

由以上两个方程可解出

$$A = 3.9214\times10^{-3}\ ^\circ\mathrm{C}^{-1}, \qquad B = -5.947\times10^{-7}\ ^\circ\mathrm{C}^{-2}.$$

25－9. 一体积为$0.51\times10^{-3}\ \mathrm{m}^3$的 1 mol 二氧化碳气体，温度为 50°C，实验测得其压强为 4.17 MPa. 试分别用范德瓦尔斯方程和理想气体物态方程计算它的压强，并将所得结果与实验值进行比较.

[解] 将$T=323\ \mathrm{K}$，$V_m=0.51\times10^{-3}\mathrm{m}^3/\mathrm{mol}$，$a=0.3639\ \mathrm{Pa}\cdot\mathrm{m}^6/\mathrm{mol}$，$b=4.267\times10^{-5}\mathrm{m}^3/\mathrm{mol}$代入范德瓦尔斯方程，可得

$$p = \frac{RT}{V_m - b} - \frac{a}{V_m^2} = 4.35\times10^6\ \mathrm{Pa} = 4.35\ \mathrm{MPa}.$$

若将以上数据代入理想气体的物态方程，则有

$$p' = \frac{RT}{V_m} = \frac{8.315\times323}{0.51\times10^{-3}}\ \mathrm{Pa} = 5.27\ \mathrm{MPa}.$$

与实验值 4.17 MPa 比较，前者比实验值大了 4.3%，而后者却比实验值大了 26.4%，可见理想气体物态方程已偏离实际情况很远.

在常温和10 MPa以下，理想气体物态方程和范德瓦尔斯方程都能较好地反映氮气的性质，超过10 MPa理想气体物态方程就偏离实际情况较远，而直到100 MPa范德瓦尔斯方程所引起的误差还不过2%. 然而，对于二氧化碳，在几个 MPa 时理想气体物态方程就已不适用，超过10 MPa范德瓦尔斯方程也不能很好地反映实际情况. 在需要较高精度的情况下，即使在较低压强下范德瓦尔斯方程也已不再适用，而要选用项数较多的昂内斯方程.

25－10. 在定压 p 下，气体的体积从 V_1 被压缩到 V_2，试计算外界对气体所作的功.

[解] 对于准静态的等压过程，可得

$$A = -\int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V = -p(V_2 - V_1).$$

因$V_2 < V_1$，所以有 $A > 0$，即外界对系统作正功.

一般而言，上述推导对于非静态过程并不成立. 然而，如果在过程中外界的压强保持不变，那么只需要将压强 p 理解为外界的定压，则上述推导依然成立.

25－11. 在$T=273.15\ \mathrm{K}$的恒定温度下，对质量为1.00 g的铜块加压. 已知铜在$T=273.15\ \mathrm{K}$温度下的密度为$\rho=8.93\times10^3\ \mathrm{kg/m}^3$，等温压缩系数为$\kappa=7.63\times10^{-12}\mathrm{m}^2/\mathrm{N}$，试求在压强从 0.10 MPa 增加到 100 MPa 的准静态过

程中，外界对铜块所作的功.

[解] 按定义 $\kappa = -\frac{1}{V}(\frac{\partial V}{\partial p})_T$，在恒温下有 $\mathrm{d}V = -V\kappa \mathrm{d}p$，所以有

$$A = -\int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V = \int_{p_1}^{p_2} V\kappa p\mathrm{d}p = \frac{1}{2}V\kappa(p_2^2 - p_1^2),$$

将铜的数据代入上式，可得外界对铜块所作的功为

$$A = \frac{1}{2}\frac{m}{\rho}\kappa(p_2^2 - p_1^2) = 0.004\,36\ \mathrm{J}.$$

25－12. 温度为 30°C 的铅弹，在击中木板后熔化了. 已知铅的熔点是 327°C，熔化热是 $2.45\times10^4\ \mathrm{J\cdot kg^{-1}}$，比热是 $130\ \mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$，试求此铅弹在击中木板前的最低速度.

[解] 在铅弹射击到木板上之后，如果忽略能量的流失，可以认为其动能都转变成了使它升温并熔化的热能，即

$$\frac{1}{2}mv_{\min}^2 = mc_V(t_2 - t_1) + ml,$$

$$v_{\min} = \sqrt{2c_V(t_2 - t_1) + 2l} = 355\ \mathrm{m/s}.$$

25－13. 在 1.013×10^5 Pa、100°C 时，单位质量的水与饱和水蒸气的焓值分别为 $419.06\times10^3\ \mathrm{J\cdot kg^{-1}}$ 和 $2676.3\times10^3\ \mathrm{J\cdot kg^{-1}}$，试求在上述条件下水的汽化热.

[解] 在等压过程中，系统从外界吸收的热量 Q_p 等于系统焓值的增加 ΔH. 因此，在题目所给出的条件下水的汽化热为

$$Q_p = H_{\mathrm{g}} - H_{\mathrm{l}} = (2\,676.3 - 419.06)\ \mathrm{kJ/kg} = 2\,257.2\ \mathrm{kJ/kg}.$$

25－14. 已知下列气体在 $p \to 0$, $T = 298\ \mathrm{K}$ 时的摩尔焓值分别为

$$H_{\mathrm{m}N_2} = 8.669\times10^3\ \mathrm{J\cdot mol^{-1}},$$

$$H_{\mathrm{m}H_2} = 8.468\times10^3\ \mathrm{J\cdot mol^{-1}},$$

$$H_{\mathrm{m}NH_3} = -2.9154\times10^4\ \mathrm{J\cdot mol^{-1}},$$

氨的合成反应式为

$$\frac{1}{2}N_2 + \frac{3}{2}H_2 \to NH_3,$$

试求在定压下氨的合成热.

[解] 在氨的合成反应过程中，系统所吸收的热量为

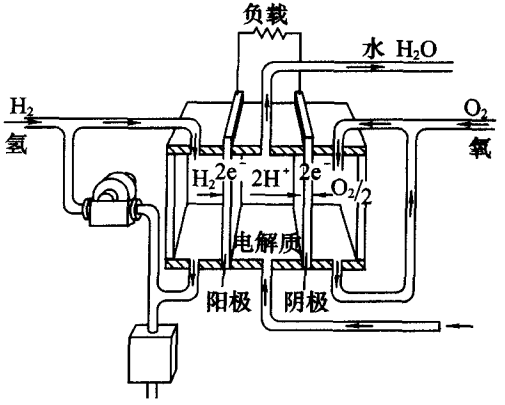
$$Q_p = H_{\mathrm{m}NH_3} - (\frac{1}{2}H_{\mathrm{m}N_2} + \frac{3}{2}H_{\mathrm{m}H_2}) = -46.191\ \mathrm{kJ/mol}.$$

负号表示在合成氨的过程中要放出热量，此即氨的合成热.

25－15. 燃料电池是把化学能直接转换为电能的装置. 如图所示，多孔 Ni 电极浸泡在 KOH 电解液中，氢气和氧气连续通入电极. 两极所进行的化学反应，其总效果是

$$H_2\,(气) + \frac{1}{2}O_2\,(气) \longrightarrow H_2O\,(液).$$

若一燃料电池工作于温度为 298 K 的定压条件下，消耗 1 mol 氢气产生的焓变为 $\Delta H_m = -285.8\,kJ\cdot mol^{-1}$，两极间的电压为 1.229 V，试求该燃料电池的效率.



题 25－15 图

[解] 燃料电池的效率 η 就是将化学能转换为电能的效率. 在理想情况下，该装置是在可逆的等温等压条件下工作的，这时在整个化学反应过程中总的焓变(反应热) ΔH 就是该装置所提供的全部化学能，其中的一部分转换成了电能. 该装置消耗 1 mol 氢气燃料所输出的电功为 $A_e = n_e N_A eU$，其中 n_e 是相应于一个氢气燃料分子该反应所提供的电子数，N_A 是阿伏伽德罗常量. 通常，我们把 $F = N_A e$ 称为**法拉第常量**. 由于在阴极和阳极上的反应分别为

$$H_2 + 2OH^- \rightarrow 2H_2O + 2e^-,$$

$$2e^- + \frac{1}{2}O_2 + H_2O \rightarrow 2OH^-,$$

因此有 $n_e = 2$. 所以，该氢－氧燃料电池的效率为

$$\eta = \frac{A_e}{|\Delta H|} = \frac{n_e N_A eU}{|\Delta H|}$$

$$= \frac{2\times 6.022\times 10^{23}\times 1.602\times 10^{-19}\times 1.229}{2.858\times 10^5} = 82.8\%.$$

燃料电池是航天器内部主要能源，其副产品水可供宇航员饮用.

25－16. 1.0 g 氮气的温度和压强分别为 423 K 和 5.066×10^5 Pa，经准静

态绝热膨胀后，体积变为原来的两倍，试求在这过程中气体对外所作的功.

[解] 由理想气体的物态方程，可得初态体积为

$$V_1=\frac{mRT_1}{p_1M}=2.48\times10^{-4}\ \mathrm{m}^3.$$

按题意，终态体积为$V_2=2V_1$. 对于该绝热过程，有

$$p_2=p_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma}=(5.066\times10^5\ \mathrm{Pa})\left(\frac{1}{2}\right)^{1.4}=1.92\times10^5\ \mathrm{Pa}.$$

在这过程中，外界对气体所作的功为

$$A=-\int_{V_1}^{V_2}p\,\mathrm{d}V=-\int_{V_1}^{V_2}p_1V_1^{\gamma}\frac{1}{V^{\gamma}}\mathrm{d}V=-p_1V_1^{\gamma}\int_{V_1}^{V_2}\frac{1}{V^{\gamma}}\mathrm{d}V$$

$$=\frac{p_1V_1^{\gamma}}{\gamma-1}(V_2^{1-\gamma}-V_1^{1-\gamma})=\frac{1}{\gamma-1}(p_2V_2-p_1V_1)=-76.1\ \mathrm{J},$$

负号表示气体在绝热膨胀时对外作正功.

25－17. 如图所示，1 mol 理想气体经历两个过程 1－4－2 和 1－3－2，由状态 1 变到状态 2. 已知该气体的初态温度为 T_1，末态 $p_2=2p_1$，$V_2=2V_1$，摩尔定容热容为 $C_{V,\mathrm{m}}=3R/2$，试求在这两个过程中气体从外界吸收的热量.

[解] 首先，相应于状态 1 和 2，可分别列出其物态方程为

$$p_1V_1=RT_1,\qquad p_2V_2=RT_2.$$

这里所涉及的是 1 mol 气体，在各量的符号中省去了下标 m. 将

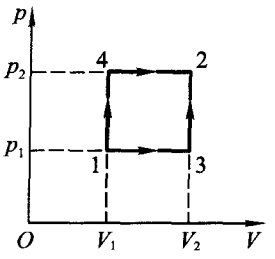
$$p_2=2p_1,\qquad V_2=2V_1$$

代入上式，可得

$$T_2=4T_1.$$

同理可得

$$T_3=T_4=2T_1.$$



题 25－17 图

其次，由于理想气体的内能仅是温度的函数，即 $\mathrm{d}U=C_V\,\mathrm{d}T$，并且已知 $C_{V,\mathrm{m}}=3R/2$，因此状态 1 和 2 之间的内能之差为

$$U_2-U_1=\frac{3}{2}R(T_2-T_1)=\frac{9}{2}RT_1.$$

再次，考虑外界对系统所作的功. 对于 1－4－2 过程，其中等体过程的功为零，总功就等于等压过程 4－2 的功，即

$$A_{1\text{-}4\text{-}2}=A_{4\text{-}2}=-p_2(V_2-V_1)=-R(T_2-2T_1)=-2RT_1.$$

对于 1－3－2 过程，同理可得

$$A_{1-3-2}=A_{1-3}=-p_1(V_2-V_1)=-R(T_3-T_1)=-RT_1.$$

最后，根据热力学第一定律，可以求得在这两个过程中气体从外界吸收的热量分别为

$$Q_{1-4-2}=(U_2-U_1)-A_{1-4-2}=\frac{9}{2}RT_1+2RT_1=\frac{13}{2}RT_1,$$

$$Q_{1-3-2}=(U_2-U_1)-A_{1-3-2}=\frac{9}{2}RT_1+RT_1=\frac{11}{2}RT_1.$$

25－18. 在标准状态下的 0.014 kg 氮气，分别通过等温过程和等压过程被压缩为原体积的一半，试求在这两个过程中气体内能的改变，外界对气体所作的功以及气体从外界吸收的热量．假定氮气可以看做理想气体，且 $C_{V,\mathrm{m}}=5R/2$．

[解] (1) 等温过程：理想气体内能不变，即 $U_2-U_1=0$；外界对气体所作的功为

$$A=-\int_{V_1}^{V_2}p\,\mathrm{d}V=-\nu RT_1\int_{V_1}^{V_2}\frac{1}{V}\mathrm{d}V=-\nu RT_1\ln\frac{V_2}{V_1}=0.787\,\mathrm{kJ}.$$

气体从外界吸收的热量为

$$Q=-0.787\,\mathrm{kJ},$$

即气体向外界放出热量 0.787 kJ.

(2) 等压过程：由初态和末态的理想气体的物态方程，以及 $p_2=p_1$，$V_2=V_1/2$，可求得

$$T_2=\frac{1}{2}T_1.$$

由于理想气体的内能 U 仅是温度 T 的函数，因此有 $\mathrm{d}U=C_V\,\mathrm{d}T$；又已知 $C_V=5\nu R/2$，所以经等压过程气体内能的改变为

$$U_2-U_1=\frac{5}{2}\nu R(T_2-T_1)=-\frac{5}{4}\nu RT_1=-1.42\,\mathrm{kJ}.$$

在等压过程中，外界对气体所作的功为

$$A=-\int_{V_1}^{V_2}p\,\mathrm{d}V=-p_1(V_2-V_1)=\frac{1}{2}p_1V_1=\frac{1}{2}\nu RT_1=0.567\,\mathrm{kJ}.$$

所以，气体从外界吸收的热量为

$$Q=U_2-U_1-A=(-\frac{5}{4}-\frac{1}{2})\nu RT_1=-1.99\,\mathrm{kJ},$$

负号表示气体向外界放热 1.99 kJ．总之，在这一等压过程中，气体内能的减

小以及外界对气体所作的功，都以热量的形式传递给了外界.

25－19. 研究动力循环和致冷循环是热力学的重要应用之一. 内燃机以汽缸内燃烧的气体为工质. 对于四冲程火花塞点燃式汽油发动机来说，它的理想循环是定体加热循环，称为**奥托循环**(Otto cycle). 而对于四冲程压燃式柴油机来说，它的理想循环是定压加热循环，称为**狄塞耳循环**(Diesel cycle). 如图所示，往复式内燃机的**奥托循环**经历了以下四个冲程：

(1) 吸气冲程：当活塞由上止点 T 向下止点 B 运行(0→1)时，进气阀打开，在大气压力下吸入汽油蒸气和空气的混合气体.

(2) 压缩冲程：进气阀关闭，活塞向左运行，混合气体被绝热压缩(1→2)；活塞移到 T 点时，混合气体被电火花点燃迅速燃烧，可以认为是定体加热过程(2→3)，吸收热量 Q_1.

(3) 动力冲程：燃烧气体绝热膨胀，推动活塞对外作功(3→4)；然后，气体在定体条件下降压(4→1)，放出热量 Q_2.

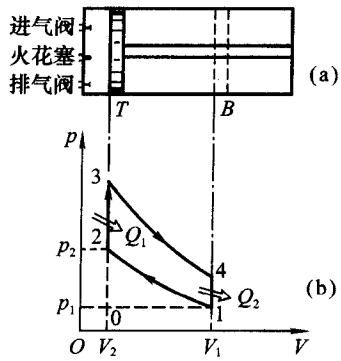
(4) 排气冲程：活塞向左运行，残余气体从排气阀排出.

假定内燃机中的工质是理想气体并保持定量，试求上述奥托循环 1→4 的效率 η.

[**解**] 在奥托循环 1→4 中，吸热和放热只在两个等体过程中进行，即

$$Q_1 = C_V (T_3 - T_2),$$

$$Q_2 = C_V (T_4 - T_1).$$



题 25－19 图

于是，奥托循环的效率为

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}. \qquad \text{(a)}$$

又因 1→2 和 3→4 都是绝热过程，故有

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}, \qquad \text{(b)}$$

$$\frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}. \qquad \text{(c)}$$

由以上两式可得

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4} = \frac{T_3 - T_2}{T_4 - T_1}, \qquad \text{(d)}$$

将它代入式(a)，并利用式(b)和式(c)，可得

$$\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{1}{(V_1/V_2)^{\gamma-1}}. \qquad \text{(e)}$$

引入压缩比 $(V_1/V_2) = r$，最后可得

$$\eta = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}.$$

因此，在一定条件下，奥托循环的效率随着压缩比 r 的增大而提高．通常汽油机的压缩比 r 取 6～9 之间．若取 $r=8$，$\gamma=1.4$，则 $\eta=56.5\%$．

25－20. 逆向**斯特令循环**(Stirling cycle)是回热式致冷机的工作循环．如图所示，它由四个准静态过程组成：

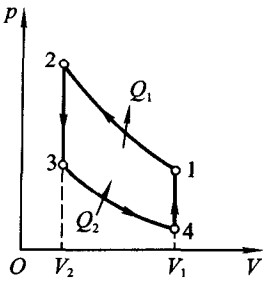
(1) 等温压缩，由 V_1, T_1 到 V_2, T_1；

(2) 等体降温，由 V_2, T_1 到 V_2, T_2；

(3) 等温膨胀，由 V_2, T_2 到 V_1, T_2；

(4) 等体升温，由 V_1, T_2 到 V_1, T_1．

试求该循环中系统从冷库吸收的热量 Q_2 与外界对系统所作的功 A 之比．



题 25－20 图

[**解**] 在等温膨胀过程 3－4 中，系统从冷库(恒温 T_2)吸收的热量为

$$Q_2 = \nu R T_2 \ln\frac{V_1}{V_2};$$

在等温压缩过程 1－2 中，系统向外界放出的热量为

$$Q_1 = \nu R T_1 \ln\frac{V_1}{V_2};$$

而在两个等体过程 2－3 和 4－1 中，系统与外界交换的热量的代数和为零．因此，根据热力学第一定律，在整个逆向斯特令循环过程中，外界对系统作功为

$$A = Q_1 - Q_2 = \nu R(T_1 - T_2)\ln\frac{V_1}{V_2}.$$

所以，该循环中系统从待冷却物体(冷库)吸取的热量 Q_2，与外界对系统所作的功 A 之比为

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{A} = \frac{T_2}{T_1 - T_2},$$

这就是回热式致冷机的致冷系数．致冷机的目的是从冷库中抽取尽量多的热量而消耗最少的功．这种致冷机没有阀门，结构简单，工作方便，现今多用于制备液氮和液氧．

25－21. 狄塞耳循环是一种定压加热循环，它是相应于四冲程压燃式柴油机的理想循环．如图所示，该循环可看成是一定量的理想气体经历了下列的准静态过程：

(1) 绝热压缩，由 V_1, T_1 到 V_2, T_2；

(2) 等压吸热，由 V_2, T_2 到 V_3, T_3；

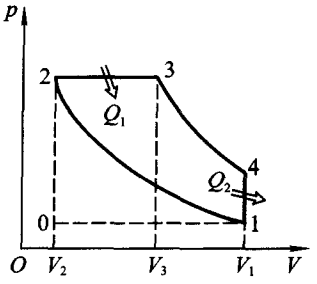
(3) 绝热膨胀，由 V_3, T_3 到 V_1, T_4；

(4) 等体放热，由 V_1, T_4 到 V_1, T_1.

试证明狄塞耳循环的效率为

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{1}{r^{\gamma-1}}\frac{\rho^{\gamma} - 1}{\rho - 1},$$

其中的 $\rho = \dfrac{V_3}{V_2}$，$r = \dfrac{V_1}{V_2}$ 分别称为定压膨胀比和绝热压缩比.



题 25－21 图

[证明] 在狄塞耳循环过程中所吸收的热量，就是在 2－3 等压过程中所吸收的热量，即

$$Q_1 = C_p(T_3 - T_2);$$

而放热只在 4－1 等体过程中发生，即

$$Q_2 = C_V(T_4 - T_1).$$

因此，狄塞耳循环的效率为

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{C_V(T_4 - T_1)}{C_p(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}.$$

对于等压过程 2－3，绝热膨胀过程 3－4 和绝热压缩过程 1－2，分别有

$$\frac{T_3}{T_2} = \frac{V_3}{V_2} = \rho,$$

$$\frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{V_1}{V_3}\right)^{\gamma-1} = \delta^{\gamma-1},$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = r^{\gamma-1},$$

其中的 ρ, δ, r 分别称为定压膨胀比，绝热膨胀比和绝热压缩比. 显然，它们之间满足关系 $\delta = r/\rho$. 利用这些关系式，可得

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{1}{r^{\gamma-1}}\frac{\rho^{\gamma} - 1}{\rho - 1}.$$

由此可见，柴油机的绝热压缩比 r 越大，效率就越高.

第二十六章　统计物理学基础

26－1. 设光子能量和动量之间的关系为 $\varepsilon = cp$，试求平衡辐射时体积为 V 的空腔中，光子能量在 $\varepsilon \sim \varepsilon + \mathrm{d}\varepsilon$ 范围内的状态数.

[解] 根据量子统计的观点，可以把空腔内的辐射场看成是光子理想气体，光子的能量动量关系为 $\varepsilon = cp$. 在体积 V 内，动量大小在 $p \sim p + \mathrm{d}p$ 范围内的自由粒子的微观态数为

$$\frac{4\pi V}{h^3} p^2 \mathrm{d}p . \tag{a}$$

考虑到光子的自旋量子数为 1，自旋在动量方向的投影可取 $\pm\hbar$ 两个可能值，相当于右旋和左旋的圆偏振光. 在体积 V 内，动量大小在 $p \sim p + \mathrm{d}p$ 范围内的光子的量子态数为

$$\frac{8\pi V}{h^3} p^2 \mathrm{d}p . \tag{b}$$

最后，利用光子的能量动量关系 $\varepsilon = cp$ 可得，平衡辐射时体积为 V 的空腔中，光子能量在 $\varepsilon \sim \varepsilon + \mathrm{d}\varepsilon$ 范围内的状态数为

$$N(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon = \frac{8\pi V}{h^3 c^3} \varepsilon^2 \mathrm{d}\varepsilon . \tag{c}$$

26－2. 试证明，对于一维自由粒子，在长度 L 内，在 $\varepsilon \sim \varepsilon + \mathrm{d}\varepsilon$ 的能量范围内，微观态数为

$$g(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon = \frac{2L}{h} \left(\frac{m}{2\varepsilon}\right)^{1/2} \mathrm{d}\varepsilon .$$

[证明] 在长度 L 内，动量在 $p_x \sim p_x + \mathrm{d}p_x$ 范围内，粒子的微观态数为

$$\frac{L}{h} \mathrm{d}p_x . \tag{a}$$

在长度 L 内，动量大小在 $p \sim p + \mathrm{d}p$ 范围内，粒子的微观态数为

$$g(p)\mathrm{d}p = \frac{2L}{h} \mathrm{d}p . \tag{b}$$

对于自由粒子，有

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m}, \qquad p = (2m\varepsilon)^{1/2},$$

$$\mathrm{d}p = \frac{1}{2}(2m\varepsilon)^{-1/2}(2m)\mathrm{d}\varepsilon = \left(\frac{m}{2\varepsilon}\right)^{1/2} \mathrm{d}\varepsilon . \tag{c}$$

将式(c)代入式(b)，可得在长度 L 内，能量在 $\varepsilon\sim\varepsilon+\mathrm{d}\varepsilon$ 范围内，自由粒子的微观态数为

$$g(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon=\frac{2L}{h}\left(\frac{m}{2\varepsilon}\right)^{1/2}\mathrm{d}\varepsilon\,. \tag{d}$$

如果考虑到粒子所存在的内部自由度，则上述结果需作修正．如果粒子的自旋量子数为 1/2，例如电子、质子和中子，则上述结果应乘以 2.

26－3. 试证明，对于二维自由粒子，在面积 L^2 内，在 $\varepsilon\sim\varepsilon+\mathrm{d}\varepsilon$ 的能量范围内，微观态数为

$$g(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon=\frac{2\pi L^2}{h^2}m\mathrm{d}\varepsilon\,.$$

[证明] 在面积 L^2 内，动量在 $p_x\sim p_x+\mathrm{d}p_x$，$p_y\sim p_y+\mathrm{d}p_y$ 范围内，粒子的微观态数为

$$\frac{L^2}{h^2}\mathrm{d}p_x\mathrm{d}p_y\,. \tag{a}$$

利用平面极坐标系，动量空间的面积元可表示为 $p\,\mathrm{d}p\mathrm{d}\theta$．在面积 L^2 内，动量大小在 $p\sim p+\mathrm{d}p$，方向在 $\theta\sim\theta+\mathrm{d}\theta$ 范围内的粒子的微观态数为

$$\frac{L^2}{h^2}p\,\mathrm{d}p\mathrm{d}\theta\,.$$

在面积 L^2 内，动量大小在 $p\sim p+\mathrm{d}p$ 范围内粒子的微观态数为

$$g(p)\mathrm{d}p=\frac{L^2}{h^2}p\,\mathrm{d}p\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=\frac{2\pi L^2}{h^2}p\,\mathrm{d}p\,. \tag{b}$$

对于自由粒子，有

$$\varepsilon=\frac{p^2}{2m},\qquad p^2=2m\varepsilon\,,\qquad p\,\mathrm{d}p=\frac{1}{2}\mathrm{d}p^2=m\mathrm{d}\varepsilon\,. \tag{c}$$

将式(c)代入式(b)，可得在面积 L^2 内，能量在 $\varepsilon\sim\varepsilon+\mathrm{d}\varepsilon$ 范围内，自由粒子的微观态数为

$$g(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon=\frac{2\pi L^2}{h^2}m\mathrm{d}\varepsilon\,. \tag{d}$$

如果考虑到粒子所存在的内部自由度，则上述结果需作修正．如果粒子的自旋量子数为 1/2，例如电子、质子和中子，则上述结果应乘以 2.

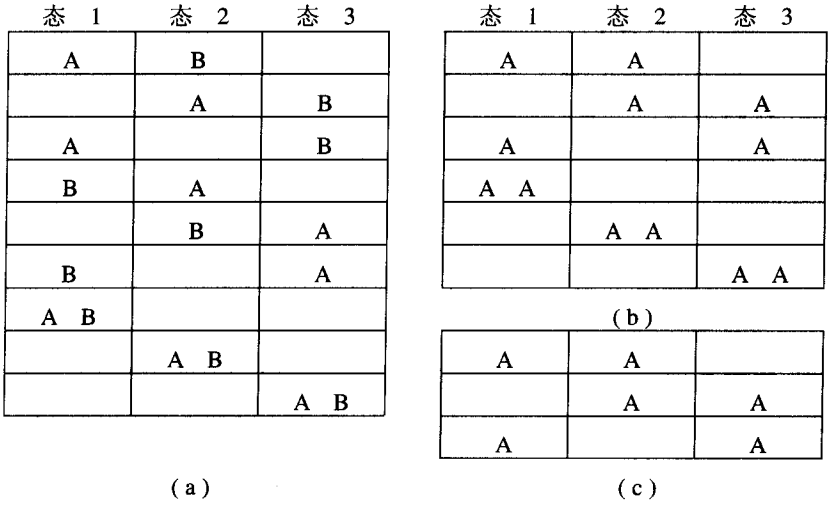
26－4. 设系统由两个近独立的全同粒子组成，它们的单粒子量子态有 3 个．试就这个系统是玻尔兹曼系统、玻色系统和费米系统的情形，分别列出并讨论系统有哪些微观态.

[解] (1) 玻尔兹曼系统：这时粒子可以分辨，我们以 A 和 B 标记这两个

粒子；而且，每一个单粒子量子态上能够容纳的粒子数不受限制．这样，两个粒子占据三个量子态的可能方式如图(a)所示，即该玻尔兹曼系统可以有 9 个不同的微观态．

(2) 玻色系统：这时粒子不可分辨，因而不能标记，我们都以 A 表示这两个粒子．对于玻色子，每一个单粒子量子态上能够容纳的粒子数不受限制．于是，两个玻色子占据三个量子态的可能方式如图(b)所示，即该玻色系统可以有 6 个不同的微观态．

(3) 费米系统：这时不仅粒子不可分辨，而且每一个单粒子量子态上最多只能够容纳一个粒子．因此，两个费米子占据三个量子态的可能方式如图(c)所示，即该费米系统只有 3 个不同的微观态．



题 26－4 图

一般而言，对于两个粒子组成的系统来说，玻色系统的微观态数与费米系统的微观态数之和，正好等于玻尔兹曼系统的微观态数．如果可能的单粒子量子态数为 k，则玻尔兹曼系统、玻色系统和费米系统的微观态数目分别为 k^2，$k(k+1)/2$，$k(k-1)/2$．

然而，当全同粒子系统的粒子数超过两个时，玻色系统的微观态数与费米系统的微观态数之和，一般总是小于玻尔兹曼系统的微观态数．换言之，后者除了完全对称态和完全反对称态之外，还有一些没有对称性或只有混杂对称性的状态．例如，在由三个全同粒子组成的系统中，若可能的单粒子态有三种，则玻尔兹曼系统、玻色系统和费米系统的微观态数目分别为 27，10 和 1．

26－5. 设粒子的能级 ε_i 为 $\varepsilon_1=0$，$\varepsilon_2=\varepsilon$，$\varepsilon_3=2\varepsilon,\cdots$，并且都是非简并的. 试分析由 4 个这样的粒子所组成的近独立粒子系，当系统的能量 $E=2\varepsilon$ 时，粒子按能级的分布及其相应的微观态数. 假设系统是：(1) 玻尔兹曼系统，(2) 玻色系统，(3) 费米系统.

[解] (1) 玻尔兹曼系统：为了保证系统的总能量为 $E=2\varepsilon$，该系统中粒子按能级的分布 $\{N_i\}$ 只有两种可能的方式，即

$$\{N_i\}_1:\quad N_1=3,\ N_2=0,\ N_3=1,\ N_l=0\ (l\geqslant 4);$$

$$\{N_i\}_2:\quad N_1=2,\ N_2=2,\ N_l=0\ (l\geqslant 3).$$

由于粒子是可分辨的，且粒子能级非简并，即 $\omega_l=1$，因此分布 $\{N_i\}_1$ 和 $\{N_i\}_2$ 所对应的微观态数分别为

$$W_{\mathrm{BM1}}=\frac{4!}{3!}\prod_l(1)^{N_l}=4,\qquad W_{\mathrm{BM2}}=\frac{4!}{2!\,2!}\prod_l(1)^{N_l}=6.$$

(2) 玻色系统：尽管这时四个粒子按能级的分布仍为(1)中的 $\{N_i\}_1$ 和 $\{N_i\}_2$，但由于玻色子是不可分辨的，交换两个玻色子不会改变系统的微观态，所以这两个分布都各自只包含一个微观态. 实际上，在能级非简并的情况下总有

$$W_{\mathrm{B}}=\prod_l\frac{(1+N_i-1)!}{N_i!\,(1-1)!}=\prod_l\frac{N_i!}{N_i!}=1.$$

(3) 费米系统：这时上述两种分布 $\{N_i\}_1$ 和 $\{N_i\}_2$ 都不能实现. 因为在上述两种分布下，都将出现一个量子态被一个以上粒子占据的情况，而这违背了泡利不相容原理.

所以，如果粒子是费米子，本问题所考虑的系统的总能量不可能是 2ε，而至少应当是 $E=6\varepsilon$.

26－6. 在题 26－5 中，如果能级 ε_1 的简并度为 2，而其他能级的简并度均为 3，试求粒子按能级的分布及其相应的微观态数.

[解] (1) 玻尔兹曼系统：四个粒子按能级的分布与题 26－5 中给出的相同，即

$$\{N_i\}_1:\ N_1=3,\ N_2=0,\ N_3=1,\ N_l=0\ (l\geqslant 4);$$

$$\{N_i\}_2:\ N_1=2,\ N_2=2,\ N_l=0\ (l\geqslant 3).$$

由于粒子能级是简并的，简并度为 $\omega_1=2,\ \omega_l=3\ (l\geqslant 2)$，因此分布 $\{N_i\}_1$ 和 $\{N_i\}_2$ 对应的微观态数分别为

$$W_{\mathrm{BM1}}=\frac{4!}{1!\,3!}2^3 3^1=96,\qquad W_{\mathrm{BM2}}=\frac{4!}{2!\,2!}2^2 3^2=216.$$

(2) 玻色系统：尽管这时四个粒子按能级的分布仍为(1)中的$\{N_i\}_1$和$\{N_i\}_2$，但由于玻色子是不可分辨的，分布$\{N_i\}_1$和$\{N_i\}_2$对应的微观态数分别为

$$W_{\mathrm{B1}}=\frac{(2+3-1)!}{3!\,(2-1)!}\cdot\frac{(3+1-1)!}{1!\,(3-1)!}=\frac{4!\,3!}{3!\,2!}=12,$$

$$W_{\mathrm{B2}}=\frac{(2+2-1)!}{2!\,(2-1)!}\cdot\frac{(3+2-1)!}{2!\,(3-1)!}=\frac{3!\,4!}{2!\,2!\,2!}=18.$$

(3) 费米系统：这时在上面两种分布中$\{N_i\}_1$不能实现，否则将出现一个量子态被一个以上粒子占据的情况，而这违背了泡利不相容原理．分布$\{N_i\}_2$对应的微观态数为

$$W_{\mathrm{F2}}=\frac{2!}{2!\,(2-2)!}\cdot\frac{3!}{2!\,(3-2)!}=\frac{2!\,3!}{2!\,2!}=3.$$

26－7. 假设系统含有两种粒子，其粒子数分别为 N 和 N'；粒子间的相互作用很弱，可以看做是近独立的；粒子可以分辨，处在每一个单粒子量子态的粒子数不受限制．试证明，在平衡态下两种粒子的最概然分布分别为

$$N_i=\omega_i\,\mathrm{e}^{-\alpha-\beta\varepsilon_i}\qquad\text{和}\qquad N_j'=\omega_j'\mathrm{e}^{-\alpha'-\beta\varepsilon_j'},$$

其中ε_i，ω_i，α和ε_j'，ω_j'，α'分别是两种粒子的能级、简并度和拉格朗日乘子．

[证明] 按题设，这是两个近独立的玻尔兹曼系统，它们各自的微观态数分别为

$$W_{\mathrm{BM}}=\frac{N!}{\prod N_i!}\prod\omega_i{}^{N_i},\qquad W'_{\mathrm{BM}}=\frac{N'!}{\prod N_j'!}\prod\omega_j'{}^{N_j'}.$$

根据概率论，系统的总微观态数等于第一种粒子的微观态数与第二种粒子的微观态数的乘积，即等于

$$W_{\mathrm{BM}}\cdot W'_{\mathrm{BM}}=\frac{N!}{\prod N_i!}\prod\omega_i{}^{N_i}\cdot\frac{N'!}{\prod N_j'!}\prod\omega_j'{}^{N_j'}.$$

$$\begin{aligned}\ln(W_{\mathrm{BM}}\cdot W'_{\mathrm{BM}})&=\ln N!-\sum\ln N_i!+\sum N_i\ln\omega_i+\ln N!\\&\quad-\sum\ln N_j'!+\sum N_j'\ln\omega_j'\\&\approx N\ln N-\sum N_i\ln N_i+\sum N_i\ln\omega_i+N'\ln N'\\&\quad-\sum N_j'\ln N_j'+\sum N_j'\ln\omega_j',\end{aligned}$$

$$\delta\ln(W_{\mathrm{BM}}\cdot W'_{\mathrm{BM}})=-\sum(\ln N_i+1)\,\delta N_i+\sum\ln\omega_i\,\delta N_i$$
$$-\sum\ln N_j'\,\delta N_j'+\sum\ln\omega_j'\,\delta N_j'$$
$$=-\sum\ln\frac{N_i}{\omega_i}\delta N_i-\sum\ln\frac{N_j'}{\omega_j'}\delta N_j'=0.$$

由于每一种粒子的总数不变，且整个系统的能量 $E+E'$ 确定，因此有

$$\delta N=\sum\delta N_i=0,\qquad \delta N'=\sum\delta N_j'=0,$$
$$\delta(E+E')=\sum\varepsilon_i\,\delta N_i+\sum\varepsilon_j'\delta N_j'=0,$$
$$\delta\ln(W_{\mathrm{BM}}\cdot W'_{\mathrm{BM}})-\alpha\delta N-\alpha'\delta N'-\beta\delta(E+E')$$
$$=-\sum(\ln\frac{N_i}{\omega_i}+\alpha+\beta\varepsilon_i)\delta N_i-\sum(\ln\frac{N_j'}{\omega_j'}+\alpha'+\beta\varepsilon_j')\delta N_j'=0.$$

按拉格朗日乘子法原理，上式中每个 δN_i 和 $\delta N_j'$ 的系数都等于零，即

$$\ln\frac{N_i}{\omega_i}+\alpha+\beta\varepsilon_i=0$$

和　　$$\ln\frac{N_j'}{\omega_j'}+\alpha'+\beta\varepsilon_j'=0,$$

由此可得本题所要证明的结果．该结果表明，如果把一种粒子看做是一个子系统，系统由两个近独立的子系统组成，则在平衡态下这两个子系统具有相同的 β．

26－8. 在题 26－7 中，如果粒子是玻色子或费米子，结果如何？

[解] 由题 26－7 的证明过程可见，其关键之处在于：若系统由两个近独立的子系统组成，则系统的总微观态数等于两个子系统的微观态数的乘积，且宏观约束条件是给定了每个子系统的粒子数以及系统的总能量(等于两个子系统的能量之和)．显然，若粒子是玻色子或费米子，则利用与题 26－7 类似的证明，可得

$$N_i=\frac{\omega_i}{\mathrm{e}^{\alpha+\beta\varepsilon_i}\mp1},\qquad N_j'=\frac{\omega_j'}{\mathrm{e}^{\alpha'+\beta\varepsilon_j'}\mp1};$$

在以上各式中的拉氏乘子 α，α'，β，分别由以下各式确定：

$$N=\sum_i\frac{\omega_i}{\mathrm{e}^{\alpha+\beta\varepsilon_i}\mp1},\qquad N'=\sum_j\frac{\omega_j'}{\mathrm{e}^{\alpha'+\beta\varepsilon_j'}\mp1},$$
$$E=\sum_i\frac{\omega_i\,\varepsilon_i}{\mathrm{e}^{\alpha+\beta\varepsilon_i}\mp1}+\sum_j\frac{\omega_j'\varepsilon_j'}{\mathrm{e}^{\alpha'+\beta\varepsilon_j'}\mp1},$$

以上各式中负号相应于玻色子，正号相应于费米子．

第二十七章　热力学第二定律和第三定律

27－1. 在与外界绝热的容器中，在隔板的两侧分别有由 N 个 A 原子和 N 个 B 原子组成的理想气体．这两种气体的温度与体积都相同，抽去隔板，两种气体将相互扩散．试证明：在扩散达到平衡后，混合气体的总熵增加 $2Nk\ln 2$；如果这两种原子全同，在扩散达到平衡后总熵不变．人们把不同种气体混合后增加的熵 $2Nk\ln 2$，称为**混合熵**(mixing entropy)．

[证明] (1) 方法一：这两种气体的相互扩散过程是在绝热条件下进行的，与外界又没有功的交换，所以该孤立系的内能不变，即 $\mathrm{d}U=0$．同时，由于理想气体分子之间无相互作用，系统内能仅是温度的函数，所以系统的温度也不变．而且，该扩散过程的初态和终态都是平衡态．因此，根据热力学第一定律和理想气体的物态方程，对于每一种原子而言，有

$$(S_2-S_1)^{(1)}=\int_1^2\frac{\mathrm{d}U+p\,\mathrm{d}V}{T}=\int_V^{2V}\frac{NkT}{TV}\mathrm{d}V$$

$$=Nk\int_{V_1}^{2V_1}\frac{1}{V}\mathrm{d}V=Nk\ln\frac{2V_1}{V_1}=Nk\ln 2\,.$$

所以，不同种气体混合后增加的熵，是上述结果的两倍，即 $2Nk\ln 2$．

(2) 方法二：根据等概率假设，孤立系统宏观状态出现的概率 P 是和它所包含的微观态的数目(或热力学概率) W 成正比的．而且，按照玻耳兹曼关系，系统的熵 $S=k\ln W$．因此，我们可以从统计的观点来得出系统在终态和初态的熵差．设想体系已经到达了终态，那么每一种气体中的一个分子从终态的 $2V_1$ 体积又回到原来那一半体积 V_1 去的概率是 1/2，而 N 个分子扩散后从终态的 $2V_1$ 体积又回到原来那一半体积 V_1 去的概率则是 $(1/2)^N$．显然，$2N$ 个 A 和 B 两种分子同时从终态的 $2V_1$ 体积回到原来各自那一半体积 V_1 去的概率是上述概率的乘积，即 $(1/2)^{2N}$．如果初态和终态的热力学概率分别是 W_1 和 W_2，则有

$$W_2/W_1=P_2/P_1=2^{2N}\,.$$

由玻耳兹曼关系立即可得，两种分子的这一扩散过程使混合气体的总熵增加

$$S_2-S_1=k\ln W_2-k\ln W_1=k\ln\frac{W_2}{W_1}=k\ln 2^{2N}=2Nk\ln 2\,.$$

27－2. 某热机循环从高温热源获得热量 Q_{H}，并把热量 Q_{L} 排给低温热源．设高、低温热源的温度分别为 $T_{\mathrm{H}}=2000\ \mathrm{K}$ 和 $T_{\mathrm{L}}=300\ \mathrm{K}$，试确定在下列条件下热机是可逆、不可逆或不可能存在的．

(1) $Q_H = 1\,000\ \mathrm{J}$，　$A = 900\ \mathrm{J}$；

(2) $Q_H = 2\,000\ \mathrm{J}$，　$Q_L = 300\ \mathrm{J}$；

(3) $A = 1\,500\ \mathrm{J}$，　$Q_L = 500\ \mathrm{J}$.

[解] 可逆热机的效率为

$$\eta_{\max} = \frac{T_H - T_L}{T_H} = \frac{2000-300}{2000} = 85\%\ .$$

据此可以判断：

(1) 当 $Q_H = 1000\ \mathrm{J}$，$A = 900\ \mathrm{J}$ 时，热机的效率为

$$\eta = \frac{A}{Q_H} = \frac{900}{1000} = 90\% > \eta_{\max}\ ,$$

该热机是不可能存在的.

(2) 当 $Q_H = 2000\ \mathrm{J}$，$Q_L = 300\ \mathrm{J}$ 时，热机的效率为

$$\eta = \frac{Q_H - Q_L}{Q_H} = \frac{2\,000 - 300}{2\,000} = 85\% = \eta_{\max}\ ,$$

该热机是可逆的.

(3) 当 $A = 1500\ \mathrm{J}$，$Q_L = 500\ \mathrm{J}$ 时，热机的效率为

$$\eta = \frac{A}{Q_L + A} = \frac{1500}{1500 + 500} = 75\% < \eta_{\max}\ ,$$

该热机是不可逆的.

27－3. 在定压条件下将1.00kg 水从 T_1=273.15 K 加热到 T_2=373.15 K，试求其熵的变化．已知水的定压比热为 $c_p = 4.19\ \mathrm{kJ/(kg\cdot K)}$.

[解] 熵是态函数，因此我们可以在终态与初态之间选择任意一个可逆过程来计算熵的变化，所得结果并不依赖于具体过程的选择．这里，我们可以设想有一系列的温度彼此相差无限小的恒温热源，这些热源的温度分布在 T_1 和 T_2 之间．利用这一系列的热源，可以使水经过一个可逆过程而定压升温，于是有

$$S_2 - S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{mc_p\,\mathrm{d}T}{T} = mc_p \ln\frac{T_2}{T_1} = 1.31\ \mathrm{kJ/K}\ .$$

27－4. 已知空气(可视为理想气体)的摩尔质量为 28.97×10^{-3} kg/mol，在所涉及温度范围内空气比热的平均值分别为 $c_V = 0.722\ \mathrm{kJ/(kg\cdot K)}$ 和 $c_p = 1.009\ \mathrm{kJ/(kg\cdot K)}$，试求1.00kg 空气从状态 1 ($1.013\times10^5$ Pa, 27°C)被压缩到状态 2 (3.546×10^5 Pa, 127°C)的过程中的熵变.

[解] 利用理想气体的物态方程

$$pV = \nu RT$$

以及式(28.32)

$$S=\int[\frac{C_p}{T}\mathrm{d}T-(\frac{\partial V}{\partial T})_p\mathrm{d}p]+S_0\ ,$$

可得理想气体的熵

$$S=C_p\ln T-\nu R\ln p+S_0{}^*\ .$$

于是，空气在两个状态之间的熵差为

$$S_2-S_1=C_p\ln\frac{T_2}{T_1}-\frac{m}{M}R\ln\frac{p_2}{p_1}=-69.3\ \mathrm{J/K}.$$

27－5. (1) 1.00 kg 温度为 273 K 的水与温度为 373 K 的热源接触，水在此温度范围内的平均比热为 4.19 kJ/(kg·K)．设过程均为可逆过程，试问当水温升到 373 K 时，水的熵值变化多少？热源的熵变是多少？总的熵变是多少？(2) 如果 1.00 kg 温度为 273 K 的水先与温度为 323 K 的热源接触并达到热平衡，然后再与温度为 373 K 的热源接触，最后水温升至 373 K，情况将如何？

[解] (1) 在水与热源接触的可逆升温过程中，水的熵变为

$$\Delta S_{\mathrm{w}}=\int_1^2\frac{C\mathrm{d}T}{T}=m\bar{c}\ln\frac{T_2}{T_1}=1.308\ \mathrm{kJ/K}\ .$$

而对于热源来说，由于热源在与其他系统交换热量时只经历等温的内部可逆变化过程，因此有

$$\Delta S_{\mathrm{h}}=\int_1^2\frac{\delta Q}{T}=-\frac{Q}{T_{\mathrm{h}}}=-\frac{m\bar{c}\,\Delta T}{T_{\mathrm{h}}}=-1.123\ \mathrm{kJ/K}\ .$$

所以，总的熵变为

$$\Delta S_{\mathrm{t}}=\Delta S_{\mathrm{w}}+\Delta S_{\mathrm{h}}=0.185\ \mathrm{kJ/K}\ .$$

(2) 如果水首先与温度为 323 K 的热源接触并达到热平衡，然后再与温度为 373 K 的热源接触，最后水温升至 373 K，则对于水来说，熵变仍为 $\Delta S_{\mathrm{w}}=1.308\ \mathrm{kJ/K}$．然而，现在两个热源的熵变分别为

$$\Delta S_{\mathrm{h1}}=\frac{4.19\times50}{323}\mathrm{kJ/K}=-0.649\ \mathrm{kJ/K}\ ,$$

$$\Delta S_{\mathrm{h2}}=\frac{4.19\times50}{373}\mathrm{kJ/K}=-0.562\ \mathrm{kJ/K}\ ,$$

故有　$\left|\Delta S_{\mathrm{h1}}+\Delta S_{\mathrm{h2}}\right|=1.21\ \mathrm{kJ/K}>\left|\Delta S_{\mathrm{h}}\right|=1.12\ \mathrm{kJ/K}\ .$

所以，现在总的熵变为

$$\Delta S_{\mathrm{t}}{}'=\Delta S_{\mathrm{w}}+\Delta S_{\mathrm{h1}}+\Delta S_{\mathrm{h2}}=0.097\ \mathrm{kJ/K}\ .$$

27－6. 一个两端封闭的绝热筒，被一个与筒密接但无摩擦的导热活塞分为两部分，体积均为 1.00 L (升). 首先，把活塞固定在筒的正中间，一边充以 300 K，1.013×10^5 Pa 的空气，另一边充以 300 K，2.026×10^5 Pa 的空气. 然后，活塞被释放，并在新的位置达到平衡. 试计算气体的末压强、末温度以及总熵的增加.

[解] 按题意，这是一个不可逆过程，过程发生在绝热筒内，与外界没有热量和功的交换.

首先，利用理想气体的物态方程计算这个不可逆过程的初态和末态的态参量和态函数. 绝热筒中活塞两边充满的是温度相同的理想气体，在活塞释放后达到新的平衡的过程中与外界没有功的交换，因此理想气体的内能和温度都不变，初态和末态的温度均为 $T=300\,\mathrm{K}$. 已知初态和末态分别为

$$p_{1\mathrm{A}}=1.013\times10^5\ \mathrm{Pa}\,,\qquad p_{1\mathrm{B}}=2p_{1\mathrm{A}}\,,$$

$$V_{1\mathrm{A}}=V_{1\mathrm{B}}=V=1.00\times10^{-3}\ \mathrm{m}^3;$$

$$p_2\,,\qquad V_2=2V_{1\mathrm{A}}=2V\,.$$

于是，可列出理想气体的物态方程

$$p_{1\mathrm{A}}V=\nu_{\mathrm{A}}RT\,,\qquad (2p_{1\mathrm{A}})V=\nu_{\mathrm{B}}RT\,,$$

$$p_2(2V)=(\nu_{\mathrm{A}}+\nu_{\mathrm{B}})RT\,.$$

由此可解得，气体的末压强为

$$p_2=\frac{1}{2V}(\nu_{\mathrm{A}}RT+\nu_{\mathrm{B}}RT)=\frac{3}{2}p_{1\mathrm{A}}=1.520\times10^5\ \mathrm{Pa}\,.$$

在关于理想气体自由膨胀的例题 27.2 中，我们**设想**理想气体从初态 (T_0,V_1) 到终态 (T_0,V_2) 经历了一个可逆的等温过程(**注意**：该过程不再绝热). 已知 $\mathrm{d}U=0$，对于等温可逆过程有

$$\delta Q_{\mathrm{rev}}=\mathrm{d}U+p\mathrm{d}V=p\mathrm{d}V\,,$$

$$S_2-S_1=\int_1^2\frac{\delta Q}{T}=\int_1^2\frac{p\mathrm{d}V}{T_0}=\nu R\int_1^2\frac{\mathrm{d}V}{V}=\nu R\ln\frac{V_2}{V_1}\,.$$

与例题 27.2 类似，本题可以将上述关系用到活塞分割开的体积 V_{A} 和 V_{B}. 于是有

$$S_{2\mathrm{A}}-S_{1\mathrm{A}}=\nu_{\mathrm{A}}R\ln\frac{V_{2\mathrm{A}}}{V_{1\mathrm{A}}}\,,$$

$$S_{2\mathrm{B}}-S_{1\mathrm{B}}=\nu_{\mathrm{B}}R\ln\frac{V_{2\mathrm{B}}}{V_{1\mathrm{B}}}\,.$$

利用本题的具体关系

$$\frac{V_{2A}}{V_{1A}}=\frac{p_{1A}}{p_{2A}},\qquad \frac{V_{2B}}{V_{1B}}=\frac{p_{1B}}{p_{2B}},\qquad p_2=\frac{3}{2}p_{1A}=\frac{3}{4}p_{1B},$$

以及　$\nu_{1B}R=\dfrac{p_{1B}V}{T}=\dfrac{2p_{1A}V}{T}=2\nu_{1A}R$，

可以得到

$$\begin{aligned}S_2-S_1&=\nu_A R\ln\frac{V_{2A}}{V_{1A}}+\nu_B R\ln\frac{V_{2B}}{V_{1B}}\\&=\nu_A R\ln\frac{p_{1A}}{p_{2A}}+2\nu_B R\ln\frac{p_{1B}}{p_{2B}}\\&=\nu_A R\ln[\frac{p_{1A}}{p_{2A}}(\frac{p_{1B}}{p_{2B}})^2]\\&=\frac{p_{1A}V}{T}\ln[\frac{2}{3}(\frac{4}{3})^2]\\&=\frac{p_{1A}V}{T}\ln\frac{32}{27}\\&=0.057\,4\ \text{J/K}.\end{aligned}$$

27－7. 在焦耳实验中，假定容器的左、右两部分容积相同，开始时容器的左半部贮有 25°C, 2.026×10^5 Pa 的氮气．当活塞被打开后，气体向右半部真空室自由膨胀，试求膨胀后 1.00 kg 气体的熵变.

[解] 理想气体自由膨胀所引起的熵变为

$$\Delta S=\nu R\ln(V_2/V_1)=\frac{m}{M}R\ln2=0.206\ \text{kJ/K}.$$

题目中所给的数据 $p_1=2.026\times10^5$ Pa 和 $T_1=298$ K 在这里并未用到．在实际问题中，常常会遇到这种情况.

第二十八章　均匀物质的统计热力学

28－1. 在 25°C 恒温下将水从 1.013×10^5 Pa 加压到 1.013×10^8 Pa，试求水的熵变及从外界吸收的热量．已知水在此范围内的实验数据为

$$(\frac{\partial V}{\partial T})_p = A + Bp,$$

其中 $A=4.5\times10^{-9}\,\mathrm{m^3\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}$，$B=1.4\times10^{-17}\,\mathrm{m^3\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}\cdot Pa^{-1}}$.

[解] 利用麦克斯韦关系，可得

$$(\frac{\partial S}{\partial p})_T = -(\frac{\partial V}{\partial T})_p = -(A + Bp).$$

由此可得水在此等温过程中的熵变及从外界吸收的热量分别为

$$\Delta S = \int_{p_1}^{p_2}(\frac{\partial S}{\partial p})_T \mathrm{d}p = -\int_{p_1}^{p_2}(A+Bp)\mathrm{d}p$$

$$= -A(p_2-p_1) - \frac{1}{2}B(p_2^2-p_1^2) = -0.526\ \mathrm{J/(mol\cdot K)},$$

$$Q = T\Delta S = -157\ \mathrm{J/mol}.$$

28－2. 对于处在边长为 L 的立方体中的非相对论粒子，有

$$\varepsilon_i = \frac{p_i^2}{2m} = \frac{1}{8m}(\frac{h}{L})^2(n_x^2+n_y^2+n_z^2) \qquad (n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, \cdots).$$

试根据 $p=-\sum_i N_i\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial V}$ 和 $U=\sum_i N_i\varepsilon_i$，证明 $p=\frac{2}{3}\frac{U}{V}$．实际上，这个结论对于玻尔兹曼分布、玻色分布和费米分布都是成立的．而且，若单原子分子的能量 $\varepsilon_i=ap_i^n$，其中 a 是常量，n 是正整数，则有 $p=\frac{n}{3}\frac{U}{V}$.

[证明] 利用

$$\varepsilon_i=\frac{p_i^2}{2m}=\frac{h^2}{8m}V^{-2/3}(n_x^2+n_y^2+n_z^2) \qquad \text{和} \qquad U=\sum_i N_i\varepsilon_i,$$

可得

$$p=-\sum_i N_i\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial V}=-\sum_i N_i\frac{\partial}{\partial V}[\frac{h^2}{8m}V^{-2/3}(n_x^2+n_y^2+n_z^2)]$$

$$=\frac{2}{3}\sum_i N_i[\frac{h^2}{8m}V^{-5/3}(n_x^2+n_y^2+n_z^2)]=\frac{2}{3}\frac{1}{V}\sum_i N_i\varepsilon_i=\frac{2}{3}\frac{U}{V}.$$

由上述推导过程可以看出，若单原子分子的能量

$$\varepsilon_i = a p_i^n ,$$

则有　$\varepsilon_i \propto V^{-n/3}$，　$\dfrac{\partial \varepsilon_i}{\partial V} = -\dfrac{n}{3}\dfrac{1}{V}\varepsilon_i$，

故有　$p = \dfrac{n}{3}\dfrac{U}{V}$.

28－3. 对于处在边长为 L 的立方体中的相对论粒子，有

$$\varepsilon_i = c p_i = (\frac{h}{L})(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)^{1/2} \qquad (n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, \cdots) .$$

试根据 $p = -\sum_i N_i \dfrac{\partial \varepsilon_i}{\partial V}$ 和 $U = \sum_i N_i \varepsilon_i$，证明 $p = \dfrac{1}{3}\dfrac{U}{V}$.

[证明] 对于静止质量为零的粒子(如光子)①，利用

$$\varepsilon_i = c p_i = (\frac{h}{L})(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)^{1/2} \qquad 和 \qquad U = \sum_i N_i \varepsilon_i ,$$

可得　$p = -\sum_i N_i \dfrac{\partial \varepsilon_i}{\partial V} = -\sum_i N_i \dfrac{\partial}{\partial V}[hV^{-1/3}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)^{1/2}]$

$$= \frac{1}{3}\sum_i N_i [hV^{-4/3}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)] = \frac{1}{3}\frac{1}{V}\sum_i N_i \varepsilon_i = \frac{1}{3}\frac{U}{V} .$$

28－4. 试根据麦克斯韦速率分布证明，速率和能量的涨落分别为

$$\overline{(v - \bar{v})^2} = \frac{kT}{m}(3 - \frac{8}{\pi}) , \qquad \overline{(\varepsilon - \bar{\varepsilon})^2} = \frac{3}{2}(kT)^2 .$$

[提示：在证明过程中，可以利用以下的递推公式和积分公式

$$I_n = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} x^n dx = \frac{n-1}{2\alpha} I_{n-2} ,$$

$$I_0 = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} , \qquad I_1 = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} x dx = \frac{1}{2\alpha} . \ ]$$

[证明] 利用

$$\bar{v} = \int_0^\infty v f(v) dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} , \qquad \overline{v^2} = \int_0^\infty v^2 f(v) dv = \frac{3kT}{m} ,$$

可得　$\overline{(v - \bar{v})^2} = \overline{(v^2 - 2v\bar{v} + \bar{v}^2)} = \overline{v^2} - \bar{v}^2$

$$= \frac{3kT}{m} - \frac{8kT}{\pi m} = \frac{kT}{m}(3 - \frac{8}{\pi}) ,$$

此即所要求证的第一个关系式．再利用上述结果，可得

① 对于静止质量不为零的粒子(如电子)，其相对论情况下的讨论见习题 28-15.

$$\bar{\varepsilon}=\frac{1}{2}m\overline{v^2}=\frac{3}{2}kT,$$

$$\overline{\varepsilon^2}=\int_0^\infty 4\pi n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT}v^2}v^2\left(\frac{1}{4}m^2v^4\right)\mathrm{d}v$$

$$=\frac{m^2\alpha^{3/2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x^2}x^6\,\mathrm{d}x=\frac{m^2\alpha^{3/2}}{\sqrt{\pi}}\frac{15\sqrt{\pi}}{16\alpha^{7/2}}=\frac{15}{4}(kT)^2.$$

由此可证得本题所要求证的第二个关系式，即

$$\overline{(\varepsilon-\bar{\varepsilon})^2}=\overline{(\varepsilon^2-2\varepsilon\bar{\varepsilon}+\bar{\varepsilon}^2)}=\overline{\varepsilon^2}-\bar{\varepsilon}^2$$

$$=\frac{15}{4}(kT)^2-\left(\frac{3}{2}kT\right)^2=\frac{3}{2}(kT)^2.$$

28－5. 假定处在重力场中的气柱的高度为 H，截面为 S，试证明该气柱的内能和热容分别为

$$U=U_0+NkT-\frac{NmgH}{\mathrm{e}^{mgH/kT}-1},$$

$$C_V=C_V^0+Nk-\frac{N(mgH)^2\mathrm{e}^{mgH/kT}}{(\mathrm{e}^{mgH/kT}-1)^2}\frac{1}{kT^2}.$$

[证明] 在重力场中，气体分子具有势能 mgz，因此气体分子的密度和能量是空间坐标的函数，即随高度 z 而变化. 对于单原子分子理想气体，粒子的能量为

$$\varepsilon=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+mgz.$$

重力场中粒子的配分函数为

$$Z=\frac{1}{h^3}\iint_{(S)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^H\mathrm{e}^{-\beta mgz}\mathrm{d}z\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta p_x^2/2m}\mathrm{d}p_x\cdot$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta p_y^2/2m}\mathrm{d}p_y\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta p_z^2/2m}\mathrm{d}p_z$$

$$=\frac{S}{\beta mg}(1-\mathrm{e}^{-\beta mgH})\left(\frac{2\pi m}{\beta h^2}\right)^{3/2}.$$

由此可得气柱的内能为

$$U=-N\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z$$

$$= -N\frac{\partial}{\partial\beta}\ln[(\frac{2\pi m}{h^2})^{3/2}\frac{S}{mg}\beta^{-5/2}(1-\mathrm{e}^{-\beta mgH})]$$

$$= -N\frac{\partial}{\partial\beta}[-\frac{5}{2}\ln\beta+\ln(1-\mathrm{e}^{-\beta mgH})]$$

$$= \frac{5}{2}N\beta^{-1}-\frac{Nmg H\mathrm{e}^{-\beta mgH}}{1-\mathrm{e}^{-\beta mgH}}$$

$$= U_0+NkT-\frac{NmgH}{\mathrm{e}^{mgH/kT}-1},$$

再利用定体热容的定义，即可得到

$$C_V=(\frac{\partial U}{\partial T})_V=C_V^0+Nk-\frac{\partial}{\partial T}(\frac{NmgH}{\mathrm{e}^{mgH/kT}-1})_V$$

$$=C_V^0+Nk-\frac{N(mgH)^2\mathrm{e}^{mgH/kT}}{(\mathrm{e}^{mgH/kT}-1)^2}\frac{1}{kT^2}.$$

显然，上述结果不限于单原子分子的情况.

28－6. 对于双原子分子，常温下 kT 远大于转动的能级间距 $\Delta\varepsilon^{\mathrm{r}}$. 已知双原子分子的转动能级为

$$\varepsilon^{\mathrm{r}}=\frac{j(j+1)\hbar^2}{2I}\qquad(j=0,1,2,\cdots),$$

其中 I 是分子的转动惯量，j 是转动量子数. 试证明双原子分子理想气体的转动熵为

$$S^{\mathrm{r}}=Nk+Nk\ln(T/\Theta_{\mathrm{r}}),$$

其中 $\Theta_{\mathrm{r}}=\hbar^2/2Ik$.

[证明] 由于双原子分子转动能级的简并度为 $\omega^{\mathrm{r}}=2j+1$，所以双原子分子理想气体的转动配分函数是

$$Z^{\mathrm{r}}=\sum_{j=0}^{\infty}(2j+1)\,\mathrm{e}^{-j(j+1)\hbar^2/2IkT}$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}(2j+1)\,\mathrm{e}^{-j(j+1)\Theta_{\mathrm{r}}/T},$$

其中 $\Theta_{\mathrm{r}}=\hbar^2/2Ik$ 是转动的特征温度，一般具有 10^1~10^2K 的数量级. 在室温范围内，转动能级间距 $\Delta\varepsilon^{\mathrm{r}}<<kT$，满足能量连续条件，这时对转动能级的求和可以化为积分. 令

$$x=j(j+1),\qquad \mathrm{d}x=2j+1\,(\mathrm{d}j=1),$$

则有　$Z^{\mathrm{r}}=\int(2j+1)\mathrm{e}^{-j(j+1)\Theta_{\mathrm{r}}/T}\,\mathrm{d}j=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\Theta_{\mathrm{r}}x/T}\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{T}{\Theta_{\mathrm{r}}}=\frac{8\pi^2IkT}{h^2}=\frac{8\pi^2I}{h^2\beta}.$$

将上式代入熵的统计表达式，即得双原子分子理想气体的转动熵为

$$S^{\mathrm{r}}=Nk(\ln Z^{\mathrm{r}}-\beta\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z^{\mathrm{r}})=Nk\ln\frac{T}{\Theta_{\mathrm{r}}}+Nk.$$

28－7. 令 $x=\Theta_{\mathrm{E}}/T$，试证明爱因斯坦固体的熵为

$$S=3Nk[\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}-\ln(1-\mathrm{e}^{-x})],$$

上式的低温极限为 $S\approx 3Nkx\mathrm{e}^{-x}$，高温极限为 $S\approx 3Nk(\ln T-\ln\Theta_{\mathrm{E}}+1)$.

[证明] 爱因斯坦提出，固体中原子的热运动可以看成是具有同样角频率的 $3N$ 个谐振子的振动，这些谐振子是可分辨的，遵从玻尔兹曼分布．每个谐振子的能级为

$$\varepsilon_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega\qquad(n=0,1,2,\cdots),$$

该谐振子系统的配分函数为

$$Z=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega(n+\frac{1}{2})}=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}}{1-\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega}}=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta k\Theta_{\mathrm{E}}}}{1-\mathrm{e}^{-\beta k\Theta_{\mathrm{E}}}},$$

其中 $\Theta_{\mathrm{E}}=\hbar\omega/k$ 是爱因斯坦特征温度．将上式代入熵的统计表达式，即可得到爱因斯坦固体的熵为

$$S=3Nk[-\frac{1}{2}\beta k\Theta_{\mathrm{E}}-\ln(1-\mathrm{e}^{-\beta k\Theta_{\mathrm{E}}})+\frac{1}{2}\beta k\Theta_{\mathrm{E}}+\frac{\beta k\Theta_{\mathrm{E}}\mathrm{e}^{-\beta k\Theta_{\mathrm{E}}}}{\mathrm{e}^{-\beta k\Theta_{\mathrm{E}}}-1}]$$

$$=3Nk[\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}-\ln(1-\mathrm{e}^{-x})],$$

其中 $x=\beta k\Theta_{\mathrm{E}}=\Theta_{\mathrm{E}}/T$.

在低温区，即当 $T\ll\Theta_{\mathrm{E}}$ 或 $x\gg 1$ 时，由于

$$\mathrm{e}^x-1\approx\mathrm{e}^x,\qquad 1-\mathrm{e}^{-x}\approx 1,$$

所以以上所得到的熵的表达式可以化为

$$S\approx 3Nk[\frac{x}{\mathrm{e}^x}-\ln 1]=3Nkx\mathrm{e}^{-x};$$

而在高温区，即当$T >> \Theta_E$或$x << 1$时，可将e^x展开为

$$e^x = 1 + x + \cdots,$$

只保留到x的一次项，于是上式可化为

$$S \approx 3Nk[\frac{x}{1+x-1} - \ln(1-1+x)]$$

$$= 3Nk(1 - \ln x) = 3Nk[\ln(T/\Theta_E) + 1].$$

28－8. 试证明温度为T时，在体积V内光子气体的平均总光子数为

$$\overline{N} = \frac{2.404 k^3 T^3}{\pi^2 c^3 \hbar^3} V,$$

并据此估算温度为1000 K的平衡辐射和温度为2.7 K的宇宙背景辐射中的光子数密度．计算中可以利用积分公式

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx = 2.404.$$

[证明] 根据量子统计理论，可把空腔内的辐射场看做光子气体，光子的动量和能量分别为

$$\boldsymbol{p} = \hbar \boldsymbol{k} \quad 和 \quad \varepsilon = \hbar\omega = cp. \tag{a}$$

光子是玻色子，达到平衡后遵从玻色分布．由于空腔壁不断发射和吸收光子，光子气体中光子数是不守恒的，在导出其玻色分布时只存在能量E确定的条件而不存在光子数N确定的条件，只能引进一个拉格朗日乘子β，而另一个拉格朗日乘子$\alpha = -\mu/kT = 0$，即平衡状态下光子气体的化学势$\mu = 0$．因此，光子气体的统计分布为

$$N_i = \frac{\omega_i}{e^{\beta\varepsilon_i} - 1}. \tag{b}$$

光子是玻色子，自旋量子数为s=1，简并度似应等于$s(s+1)$=3，但由于电磁场存在横波条件，满足一个约束方程，所以实验上光子的自旋简并度取为2，在物理上就表现为光子具有两个不同的偏振方向．光子自旋在动量方向上的投影可取$\pm\hbar$两个可能值，相当于右旋和左旋圆偏振光．

考虑到光子自旋有两个投影，在体积V内，动量大小在p到$p + dp$范围内，光子的量子态数为

$$g(p)dp = \frac{8\pi V}{h^3} p^2 dp. \tag{c}$$

利用式(a)$\varepsilon = \hbar\omega = cp$可得，在$\omega$到$\omega + d\omega$范围内，光子的量子态数为

$$g(\omega)d\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega. \tag{d}$$

将式(d)中的量子态数代替式(b)中的分子(简并度 ω_i)可得，在 ω 到 $\omega + \mathrm{d}\omega$ 角频率范围内的平均光子数为

$$\mathrm{d}\overline{N} = \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^2 \,\mathrm{d}\omega}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/kT} - 1}. \tag{e}$$

所以，温度为 T 时，在体积 V 内光子气体的平均总光子数为

$$\overline{N} = \int_0^\infty \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^2 \,\mathrm{d}\omega}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/kT} - 1} = \frac{V k^3 T^3}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{x^2}{\mathrm{e}^x - 1} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{2.404\, k^3 T^3}{\pi^2 c^3 \hbar^3} V. \tag{f}$$

根据上述公式，可以估算出温度为 1000 K 的平衡辐射以及温度为 2.7 K 的宇宙背景辐射中的光子数密度分别为

$$\overline{n}_{1000} = \frac{2.40\times(1.38\times10^{-23}\times10^3)^3}{\pi^2(3.0\times10^8\times1.055\times10^{-34})^3}\ \mathrm{m}^{-3} = 2.0\times10^{16}\ \mathrm{m}^{-3},$$

$$\overline{n}_{2.7} = \frac{2.40\times(1.38\times10^{-23}\times2.7)^3}{\pi^2(3.0\times10^8\times1.055\times10^{-34})^3}\ \mathrm{m}^{-3} = 3.9\times10^{8}\ \mathrm{m}^{-3}.$$

28－9. 试利用习题 19－3 证明的黑体单色辐出度 $M_{0\lambda}(T)$ 与辐射能量密度 $w(\lambda, T)$ 之间的关系式

$$M_{0\lambda}(T) = \frac{1}{4} c w(\lambda, T), \tag{19.46}$$

推导普朗克黑体辐射公式

$$M_{0\lambda}(T) = \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{1}{\mathrm{e}^{c_2/\lambda T} - 1}, \tag{19.10}$$

其中　$c_1 = 2\pi hc^2$，　$c_2 = \dfrac{hc}{k}$.

[解] 在习题 28－8 的题解中，我们把空腔内的辐射场看做光子气体，光子的动量和能量分别为

$$\boldsymbol{p} = \hbar \boldsymbol{k} \qquad \text{和} \qquad \varepsilon = \hbar\omega = cp. \tag{a}$$

平衡状态下光子气体的化学势 $\mu = 0$，因此光子气体的统计分布为

$$N_i = \frac{\omega_i}{\mathrm{e}^{\beta\varepsilon_i} - 1}. \tag{b}$$

考虑到光子自旋有两个投影，在体积 V 内，动量大小在 p 到 $p + \mathrm{d}p$ 范围内，光子的量子态数为

$$g(p)\mathrm{d}p=\frac{8\pi V}{h^3}p^2\,\mathrm{d}p. \tag{c}$$

利用式(a)

$$\varepsilon=\hbar\omega=cp$$

得到了在ω到$\omega+\mathrm{d}\omega$范围内，光子的量子态数为

$$g(\omega)\mathrm{d}\omega=\frac{V}{\pi^2c^3}\omega^2\,\mathrm{d}\omega. \tag{d}$$

将式(d)中的量子态数代替式(b)中的分子(简并度ω_i)可得，在ω到$\omega+\mathrm{d}\omega$角频率范围内的平均光子数以及单位体积中辐射场的能量分别为

$$\mathrm{d}\overline{N}=\frac{V}{\pi^2c^3}\frac{\omega^2\mathrm{d}\omega}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/kT}-1}, \tag{e}$$

$$w(\omega,T)\mathrm{d}\omega=\frac{\hbar\omega}{\pi^2c^3}\frac{\omega^2\mathrm{d}\omega}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/kT}-1}. \tag{f}$$

利用$\omega=2\pi c/\lambda$，式(f)可以改写为

$$w(\omega,T)\mathrm{d}\omega=\frac{\hbar}{\pi^2c^3}\frac{\omega^3\mathrm{d}\omega}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/kT}-1}=\frac{h}{2\pi^3c^3}\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^3\frac{2\pi c}{\lambda^2}(-\mathrm{d}\lambda)\frac{1}{\mathrm{e}^{hc/k\lambda T}-1}$$

$$=\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{\mathrm{e}^{hc/k\lambda T}-1}(-\mathrm{d}\lambda)=w(\lambda,T)(-\mathrm{d}\lambda),$$

$$w(\lambda,T)=\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{\mathrm{e}^{hc/k\lambda T}-1}.$$

最后，利用式(19.46)，可得普朗克黑体辐射公式

$$M_{0\lambda}(T)=\frac{1}{4}cw(\lambda,T)=\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{\mathrm{e}^{hc/k\lambda T}-1}=\frac{c_1}{\lambda^5}\frac{1}{\mathrm{e}^{c_2/\lambda T}-1},$$

其中　$c_1=2\pi hc^2$，　$c_2=\dfrac{hc}{k}$.

在高频极限情况下，$\hbar\omega/kT=c_2/\lambda T>>1$，$\mathrm{e}^{c_2/\lambda T}-1\approx\mathrm{e}^{c_2/\lambda T}$，由普朗克公式可以得到维恩公式(19.8).

在低频极限情况下，$\hbar\omega/kT=c_2/\lambda T<<1$，$\mathrm{e}^{c_2/\lambda T}\approx1+c_2/\lambda T$，由普朗克公式可以得到瑞利－金斯公式(19.9).

28－10. 试求有限尺寸腔体积内电磁驻波模(简正模)的数目，并利用经典的能量均分定理导出瑞利－金斯公式；再利用普朗克提出的能量子假定，导出普朗克黑体辐射公式.

[解] 在自由空间中，所有频率的电磁波都可以持续振荡；但在有限尺寸腔体积内，则只有那些在这空间中形成的电磁驻波，才能持续振荡而维持其

存在，这就是电磁驻波模(简正模).

(1) 一维腔体

电磁驻波模可表示为

$$\xi(x)=A\sin(kx+\delta).$$

如图(a)所示，由边界条件 $\xi(0)=0$ 可得

$$\delta=0;$$

由边界条件 $\xi(L)=0$ 可得

$$kL=n\pi$$

或　　$$L/(\lambda/2)=n,$$

其中 $n=1,2,\cdots$，即腔长为半波长的整数倍. 若用频率表示，有

$$2L\nu/c=n,$$

再考虑到有两个偏振态，故在单位长度内，在 ν 到 $\nu+\mathrm{d}\nu$ 频率范围内的简正模数为

$$g(\nu)\mathrm{d}\nu=\frac{4}{c}\mathrm{d}\nu.$$

(2) 二维腔体

对于边长为 L 的正方形，有

$$k_x=n_x\pi/L,$$

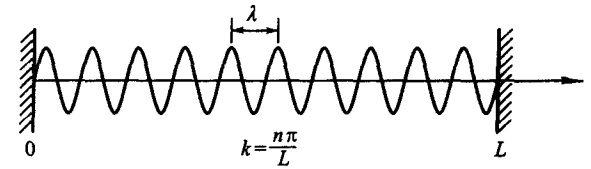
$$k_y=n_y\pi/L,$$

其中 $n_x,n_y=1,2,\cdots$. 在如图(b)所示的 k 空间中，

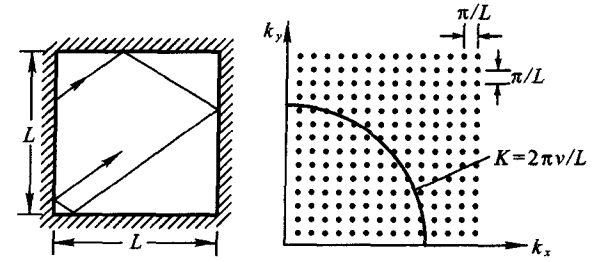
当 $\Delta k_x=\Delta k_y=\pi/L$ 时，$\Delta n_x=\Delta n_y=1$，

或者说，在二维 k 空间的简正模密度为 $(\pi/L)^2$. 频率在 $0\sim\nu$ 之间，即在 k 空间中位于半径为 $k=2\pi\nu/c$ 的圆内的总模数为

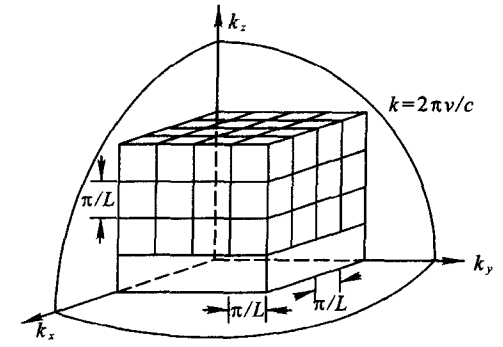
$$\frac{2\times(1/4)(\pi k^2)}{(\pi/L)^2}=\frac{2\pi\nu^2}{c^2}L^2,$$



(a) 一维腔体及模数



(b) 二维腔体及模数



(c) 三维腔体及模数

题 28-10 图[①]

① 章志鸣，沈元华，陈惠芬. 光学. 北京：高等教育出版社，2000. 222

上式左边分子的 2 来源于两个偏振态，(1/4)来源于 k 只取正值[只计及第一象限的(1/4)圆]. 在单位面积内，在 ν 到 $\nu+\mathrm{d}\nu$ 频率范围内的简正模数为

$$g(\nu)\mathrm{d}\nu=\frac{4\pi\nu}{c^2}\mathrm{d}\nu .$$

(3) 三维腔体

如图(c)所示，对于边长为 L 的正方体，考虑三维 k 空间中位于半径为 $k=2\pi\nu/c$ 的球体，只计及第一象限的(1/8)球体，总模数为

$$\frac{2\times(1/8)(4\pi k^3/3)}{(\pi/L)^3}=\frac{8\pi\nu^3}{3c^3}L^3 ,$$

在单位体积内，在 ν 到 $\nu+\mathrm{d}\nu$ 频率范围内的简正模数为

$$g(\nu)\mathrm{d}\nu=\frac{8\pi\nu^2}{c^3}\mathrm{d}\nu . \tag{a}$$

(4) 利用经典的能量均分定理导出瑞利－金斯公式

按照连续能量的玻尔兹曼统计导出的能量均分定理，每个简正模的平均能量为 kT，则利用式(a)以及题 19－3 证明的式(19.46)，可得

$$\langle\varepsilon\rangle=\frac{\int_0^\infty E\exp(-E/kT)\mathrm{d}E}{\int_0^\infty \exp(-E/kT)\mathrm{d}E}=kT , \tag{b}$$

$$w(\nu,T)\mathrm{d}\nu=\frac{8\pi\nu^2}{c^3}kT\,\mathrm{d}\nu=\frac{8\pi(c/\lambda)^2}{c^3}kT\frac{c}{\lambda^2}(-\mathrm{d}\lambda)$$

$$=\frac{8\pi kT}{\lambda^4}(-\mathrm{d}\lambda)=w(\lambda,T)(-\mathrm{d}\lambda) ,$$

$$M_{0\lambda}(T)=\frac{1}{4}cw(\lambda,T)=\frac{2\pi ckT}{\lambda^4} , \tag{c}$$

该式就是瑞利－金斯公式(19.9).

(5) 普朗克黑体辐射公式的导出

利用普朗克提出的能量子假定，式(b)中的积分用求和来代替，于是有

$$\langle\varepsilon\rangle=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}nh\nu\exp(-nh\nu/kT)}{\sum_{n=0}^{\infty}\exp(-nh\nu/kT)}=\frac{-h\nu\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\chi}\sum_{n=0}^{\infty}\exp(-n\chi)}{\sum_{n=0}^{\infty}\exp(-n\chi)}$$

$$=\frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT)-1} ,$$

$$w(\nu,T)\mathrm{d}\nu=\frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT)-1}\mathrm{d}\nu$$

$$=\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{\exp(h\nu/kT)-1}\mathrm{d}\nu=\frac{8\pi h}{c^3}(\frac{c}{\lambda})^3\frac{c}{\lambda^2}(-\mathrm{d}\lambda)\frac{1}{\mathrm{e}^{hc/k\lambda T}-1}$$

$$=\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{\mathrm{e}^{hc/k\lambda T}-1}(-\mathrm{d}\lambda)=w(\lambda,T)(-\mathrm{d}\lambda),$$

$$w(\lambda,T)=\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{\mathrm{e}^{hc/k\lambda T}-1}.$$

最后，利用式(19.46)，可得普朗克黑体辐射公式

$$M_{0\lambda}(T)=\frac{1}{4}cw(\lambda,T)=\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{\mathrm{e}^{hc/k\lambda T}-1}=\frac{c_1}{\lambda^5}\frac{1}{\mathrm{e}^{c_2/\lambda T}-1},$$

其中　$c_1=2\pi hc^2$，　$c_2=\frac{hc}{k}$.

28－11. 试利用普朗克黑体辐射公式，导出斯特藩－玻尔兹曼定律和维恩位移律.

[解]（1）斯特藩－玻尔兹曼定律

对普朗克黑体辐射公式积分，有

$$M_0(T)=\int_0^\infty M_{0\lambda}(T)\mathrm{d}\lambda=\int_0^\infty\frac{c_1}{\lambda^5}\frac{1}{\mathrm{e}^{c_2/\lambda T}-1}\mathrm{d}\lambda=\frac{c_1T^4}{c_2^4}\int_0^\infty\frac{x^3}{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x.$$

从附录 1.3 中列举的积分公式，查得上式中的积分等于$\pi^4/15$，由此可得斯特藩－玻尔兹曼定律，即

$$M_0(T)=\frac{c_1T^4}{c_2^4}\frac{\pi^4}{15}=\frac{2\pi hc^2T^4}{(hc/k)^4}\frac{\pi^4}{15}=\frac{2\pi^5k^4}{15h^3c^2}T^4=\sigma T^4.$$

（2）维恩位移律

对普朗克黑体辐射公式求极值，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}M_{0\lambda}(T)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(\frac{c_1\lambda^{-5}}{\mathrm{e}^{c_2/\lambda T}-1})=0,$$

$$\mathrm{e}^{-c_2/\lambda T}+\frac{c_2}{5\lambda T}-1=0,$$

由此可解得

$$\frac{c_2}{\lambda_{\max}T}=4.965,\qquad\lambda_{\max}T=\frac{c_2}{4.965}=2.898\times10^{-3}\ \mathrm{m\cdot K}.$$

28－12. 试利用习题 26－3 证明的能态密度公式

$$g(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon=\frac{2\pi L^2}{h^2}m\mathrm{d}\varepsilon,$$

说明在二维的理想玻色气体中，不存在玻色－爱因斯坦凝聚.

[解] (1) 说明一：理想玻色气体温度降低到某有限温度 T_c 时，化学势趋于零；继续降温就会有宏观数量的粒子凝聚到基态. 发生玻色-爱因斯坦凝聚的临界温度 T_c 决定于

$$\int_0^\infty \frac{g(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{e}^{\varepsilon/kT_c}-1}=N.$$

将二维自由粒子的能态密度

$$g(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon=\frac{2\pi L^2}{h^2}m\mathrm{d}\varepsilon$$

代入上式，并令 $x=\varepsilon/kT_c$，可得

$$\frac{2\pi L^2}{h^2}mkT_c\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-1}=N.$$

由于　$$\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}=\frac{1}{\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^{-x})}=\mathrm{e}^{-x}(1+\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x}+\cdots),$$

$$\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

该级数是发散的，表明在有限温度下二维理想玻色气体的化学势不可能趋于零. 所以，在有限温度下二维理想玻色气体不会发生玻色－爱因斯坦凝聚.

(2) 说明二：对于理想玻色气体，在能量连续条件得以满足的情况下，我们可以用积分来代替对能级的求和，利用粒子数密度 n 来确定化学势. 在讨论玻色–爱因斯坦凝聚的发生时，由于在三维情况下我们有

$$p^2\mathrm{d}p=\frac{(2m)^{3/2}}{2}\varepsilon^{1/2}\mathrm{d}\varepsilon,$$

因此在把对能级的求和变为积分时，在被积函数中出现了因子 $\sqrt{\varepsilon}$，从而在计算积分时丢失了 $\varepsilon=0$ 能级对积分的贡献. 在一定的温度 T_c 以下，粒子开始向 $\varepsilon=0$ 能级迅速集聚，这时就必须在积分项之外再附加上 $N_0(T)$ 项，才能用积分来代替求和. 所以，从形式上看，只有当被积函数中出现了能量因子的正幂时，才有玻色–爱因斯坦凝聚发生.

然而，对于二维的理想玻色气体，三维情况下的 $p^2\mathrm{d}p$ 应为 $p\mathrm{d}p$，它可化为

$$p\,\mathrm{d}p=m\,\mathrm{d}\varepsilon.$$

由此可见，被积函数中能量因子并不出现，因此不会在计算积分时丢失 $\varepsilon=0$ 能级对积分的贡献．换言之，这时总是可以用积分直接替代求和，不会在某一温度以下发生宏观数量的粒子开始向 $\varepsilon=0$ 能级迅速集聚的现象，即不会发生玻色－爱因斯坦凝聚．

实际上，对于一维的理想玻色气体，三维情况下的 $p^2\,\mathrm{d}p$ 应为 $\mathrm{d}p$，它可化为

$$\mathrm{d}p=\sqrt{m/2}\,(1/\sqrt{\varepsilon})\,\mathrm{d}\varepsilon\,.$$

由此可见，$1/\sqrt{\varepsilon}$ 因子的出现，不会在计算积分时丢失 $\varepsilon=0$ 能级对积分的贡献，结果与二维情况类似．

28－13. 已知绝对零度时铜的费米能级 $\varepsilon_{\mathrm{F}}^0=7.04\,\mathrm{eV}$，试求 20 K 时铜的化学势及其电子的平均能量．

[解] $T=20\,\mathrm{K}$ 时铜的化学势 ε_{F} 和电子的平均能量 $\bar{\varepsilon}$ 分别为

$$\varepsilon_{\mathrm{F}}\approx\varepsilon_{\mathrm{F}}^0\left[1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\varepsilon_{\mathrm{F}}^0}\right)^2\right]$$

$$=7.04\times[1-4.94\times10^{-8}]\,\mathrm{eV}\approx7.04\,\mathrm{eV}\,,$$

$$\bar{\varepsilon}=\frac{U}{N}\approx\frac{3}{5}\,\varepsilon_{\mathrm{F}}^0\left[1+\frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\varepsilon_{\mathrm{F}}^0}\right)^2\right]$$

$$=\frac{3}{5}\times7.04\times[1+2.47\times10^{-7}]\,\mathrm{eV}\approx4.22\,\mathrm{eV}\,,$$

在有效数字范围内它们都与绝对零度时的数值相同．

28－14. 试证明绝对零度下电子气体中电子的平均速率为

$$\bar{v}=\frac{3}{4}\frac{p_0}{m}\,,$$

其中 p_0 是费米动量．

[证明] 利用

$$p_0=\sqrt{2m\varepsilon_{\mathrm{F}}^0}\,,$$

可得 $T=0\,\mathrm{K}$ 时电子气体中电子的平均速率为

$$\bar{v}=\frac{4\pi V}{Nh^3}(2m)^{3/2}\int_0^{\varepsilon_{\mathrm{F}}^0}v\varepsilon^{1/2}\,\mathrm{d}\varepsilon=\frac{4\pi V}{Nh^3}(2m)^{3/2}\int_0^{\varepsilon_{\mathrm{F}}^0}\sqrt{\frac{2}{m}}\,\varepsilon\,\mathrm{d}\varepsilon$$

$$=\frac{8\pi mV}{Nh^3}(\varepsilon_{\mathrm{F}}^0)^2=\frac{8\pi mV}{Nh^3}(\varepsilon_{\mathrm{F}}^0)^{3/2}\frac{p_0}{\sqrt{2m}}=\frac{3}{4}\frac{p_0}{m}\,.$$

28－15. 白矮星是一种热核反应燃料已基本耗尽的老恒星，其星体物质基本上是核聚变的产物——氦，靠缓慢收缩释放出来的引力势能而发出亮度很小的白光．白矮星体积很小而密度很大，如天狼星 B，$m\approx 2\times10^{30}\,\mathrm{kg}$，$\rho\approx10^{10}\,\mathrm{kg/m^3}$，中心温度$T\approx2\times10^{7}\,\mathrm{K}$，氦原子全部电离，可把白矮星看成是含有$N$个电子和$N/2$个氦核的系统，其电子数密度为

$$n=\frac{N}{V}\approx\frac{m/(2m_{\mathrm{p}})}{m/\rho}=\frac{\rho}{2m_{\mathrm{p}}}\approx10^{36}/\mathrm{m^3}.$$

(1) 估算白矮星上电子气体的费米能ε_{F}和费米温度T_{F}，与白矮星的温度比较．说明白矮星上的电子气体是高度简并的，可以近似看做处在绝对零度的理想费米气体．

(2) 将白矮星电子气体的费米能ε_{F}与电子的静能相比，说明相对论效应是显著的，但还不具有压倒的影响．

(3) 利用习题 28－2 和 28－3 的结果，求出在非相对论以及极端相对论情况下的电子气体的简并压．

(4) 当星体半径改变时，简并压造成的内能变化与引力势能的变化相抵，可得非相对论情况下有$R\propto m^{-1/2}$，即质量愈大的白矮星愈小；在极端相对论情况下，仅当白矮星质量等于称为钱德拉塞卡极限的质量$m_{\mathrm{c}}=1.4m_{\mathrm{日}}$时，电子气体的简并压与自引力达到平衡．试分析在白矮星质量小于和大于该极限质量的情况下，将会怎样？

[解] (1) 利用式(28.114)和式(28.116)可得，白矮星上电子气体的费米能ε_{F}和费米温度分别为

$$\varepsilon_{\mathrm{F}}^{0}=\frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2\frac{N}{V})^{2/3}\approx5\times10^{-14}\,\mathrm{J},$$

$$T_{\mathrm{F}}=\frac{\varepsilon_{\mathrm{F}}^{0}}{k}\approx4\times10^{9}\,\mathrm{K}.$$

电子气体的费米温度T_{F}远高于白矮星的温度$2\times10^{7}\,\mathrm{K}$，说明白矮星上的电子气体是高度简并的，可以近似看做处在绝对零度的理想费米气体．

(2) 电子的静能为

$$\varepsilon_0=m_{\mathrm{e}}c^2\approx8\times10^{-14}\,\mathrm{J},$$

它与白矮星电子气体的费米能$\varepsilon_{\mathrm{F}}\approx5\times10^{-14}\,\mathrm{J}$具有相同的数量级，说明相对论效应是显著的，但还不具有压倒的影响．

(3) 利用习题 28－2 的结果可得，在非相对论情况下的电子气体的简并压为

$$p_{非}=\frac{2}{3}\frac{U}{V}=\frac{2}{3}\frac{N}{V}\frac{3}{5}\varepsilon_F^0=\frac{2}{5}(3\pi^2)^{2/3}\frac{\hbar^2}{2m}(\frac{N}{V})^{5/3}=2\times10^{22}\,\text{Pa}.$$

在相对论情况下，作为静质量 m 不为零并具有动能 ε 的电子，其能量－动量关系式(7.33)为

$$(\varepsilon+mc^2)^2=p^2c^2+m^2c^4,$$

可得　$$p^2=\frac{(\varepsilon+mc^2)^2-m^2c^4}{c^2},$$

$$p^2\mathrm{d}p=[\frac{(\varepsilon+mc^2)^2-m^2c^4}{c^2}]^{1/2}\frac{(\varepsilon+mc^2)}{c^2}\mathrm{d}\varepsilon$$

$$=m^2c\,x^{1/2}(x+2)^{1/2}(x+1)\mathrm{d}\varepsilon$$

在极端相对论情况下，$x=\varepsilon/(mc^2)\to\infty$，因此有

$$p^2\mathrm{d}p=\frac{\varepsilon^2}{c^3}\mathrm{d}\varepsilon,$$

$$g(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon=\frac{8\pi V}{h^3}p^2\mathrm{d}p=\frac{8\pi V}{h^3c^3}\varepsilon^2\mathrm{d}\varepsilon,$$

式中考虑到了自旋因子 2．利用得到式(28.114)和式(28.115)的方法，可得

$$\frac{8\pi V}{h^3c^3}\int_0^{\varepsilon_F^0}\varepsilon^2\mathrm{d}\varepsilon=N,$$

$$\varepsilon_F^0=hc(\frac{3N}{8\pi V})^{1/3},$$

$$U(0)=\frac{8\pi V}{h^3c^3}\int_0^{\varepsilon_F^0}\varepsilon^3\mathrm{d}\varepsilon=\frac{3}{4}N\varepsilon_F^0.$$

在极端相对论情况下，白矮星电子气体的简并压为

$$p_{相}=\frac{1}{3}\frac{U}{V}=\frac{1}{4}\frac{N}{V}\varepsilon_F^0=\frac{1}{4}hc(\frac{3}{8\pi})^{1/3}(\frac{N}{V})^{4/3}=2\times10^{22}\,\text{Pa}.$$

(4) 当星体半径改变时，简并压造成的内能变化与引力势能的变化相抵，可得非相对论情况下有 $R\propto m^{-1/2}$，即质量愈大的白矮星愈小．

在极端相对论情况下，仅当白矮星质量等于称为钱德拉塞卡极限的质量 $m_c=1.4m_{日}$ 时，电子气体的简并压与自引力达到平衡．如果白矮星质量小于该极限质量 m_c，电子气体的简并压大于自引力，星体将膨胀而减小电子的动能，使大多数电子变成非相对论性的．如果白矮星质量大于该极限质量 m_c，电子气体的简并压不足以抗衡自引力，星体将坍缩，直致星体的密度变得很高而发生新的过程，例如超新星爆发．

第二十九章　相变和临界现象

29－1. 在 $p_0=101\,325$ Pa 的压强下，冰的熔点为 273.15 K，这时水的比体积为 $v=1.000\,13\times10^{-3}\,\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}}$，冰的比体积为 $v=1.0907\times10^{-3}\,\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}}$，冰的熔化热为 $l=3.35\times10^5\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}}$，试求冰水两相平衡曲线的斜率 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}T$.

[解] 冰水两相平衡曲线的斜率为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}=\frac{l}{T(v^{\beta}-v^{\alpha})}=\frac{3.35\times10^5}{273.15\times(1.000\,13-1.090\,7)\times10^{-3}}\ \mathrm{Pa/K}$$

$$=-1.35\times10^7\ \mathrm{Pa/K},$$

其中负号表示随着温度的升高压强降低，或随着压强的增加温度降低，这是与水的比体积小于冰(即 $v^{\beta}<v^{\alpha}$)密切相关的.

冬季在冰上滑冰时，冰刀与冰面接触部位熔化的水起了很好的润滑作用. 冰刀对冰面的压力是造成接触部位冰熔化的原因之一. 若运动员的体重为 60 kg，冰刀面积为 0.1 $\mathrm{cm^2}$，则人体对冰面的压强为 5.9×10^7 Pa. 与本题所得到的 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}T$ 值比较可得，这个压强约可使冰的熔点下降到 $-4.3^{\circ}\mathrm{C}$. 如果是在 $-5^{\circ}\mathrm{C}$ 以下的气温中滑冰，则在使冰刀与冰面接触部位熔化的原因中，还有一部分是来自两者之间的摩擦所产生的热量.

冰川是在极地或高山地区由降落在雪线以上的大量积雪，在重力和巨大压力下形成的巨大冰体. 冰川的底部由于受到巨大压力使熔点降低，部分冰熔化为水，从而使整个冰川能以每年几米到几十米的速度沿地面滑移.

29－2. 在 $p_0=101325\,\mathrm{Pa}$ 的压强下，水的沸点为 99.974°C，这时水的比体积为 $v^{\alpha}=1.043\times10^{-3}\,\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}}$，水的汽化热为 $l=2.257\times10^6\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}}$，水蒸气的比体积为 $v^{\beta}=1.673\,\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}}$，试求水和水蒸气两相平衡曲线的斜率的倒数 $\mathrm{d}T/\mathrm{d}p$.

[解] 水和水蒸气两相平衡曲线斜率的倒数为

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}p}=\frac{T_{\mathrm{b}}(v^{\beta}-v^{\alpha})}{l}=\frac{373.124\times(1\,673-1.043)\times10^{-3}}{2.257\times10^6}\ \mathrm{K/Pa}$$

$$=2.76\times10^{-4}\ \mathrm{K/Pa},$$

与实验值符合. 在 $p_0=101\,325$ Pa 附近，外部压强每增加 3623 Pa，水的沸点就升高 1 K.

大气压强是随高度的增加而减小的，所以水的沸点也随海拔高度的增加

而降低．例如，在海拔 2000 m 的高山上，水的沸点约为 94 K．这时煮水易沸腾，但温度较低，食物不易煮熟．日常生活中使用的高压锅可使锅内压强达到通常大气压强的 1.2～1.4 倍，沸点可达 105～110°C，较容易将食物煮熟煮烂．

29－3. 试说明单元系两相平衡共存时，两相系统的以下各量均趋于无穷：

$$C_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p, \qquad \alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p, \qquad \kappa = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T.$$

[解] 在单元系两相平衡共存时，两相系统的平衡温度和平衡压强都保持不变，然而系统的熵和体积却会随着两相的相互变化而改变，因此在

$$C_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p, \quad \alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \quad 和 \quad \kappa = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$$

各量的分母为零的情况下，分子却可以是有限的，所以这些量必定都将趋于无穷．

29－4. 在三相点附近，已知固态和液态氨的蒸气压方程分别为

$$\ln\{p\} = 27.92 - \frac{3754\,\mathrm{K}}{T}, \qquad \ln\{p\} = 24.38 - \frac{3063\,\mathrm{K}}{T},$$

其中 $\{p\}$ 是以 Pa 为单位的压强的数值．假设氨蒸气为理想气体，而液相和固相的比体积与气相的比体积相比较可以忽略，试求氨三相点的温度和压强，以及在三相点氨的汽化热、升华热和熔化热．

[解] 显然，氨三相点的温度 T_t 和压强 p_t 应同时满足题目所给出的固态氨的蒸气压方程和液态氨的蒸气压方程，即有

$$\ln\{p_t\} = 27.92 - \frac{3\,754\ \mathrm{K}}{T_t},$$

$$\ln\{p_t\} = 24.38 - \frac{3\,063\ \mathrm{K}}{T_t}.$$

将以上两方程联立，可解得 $T_t = 195.2\,\mathrm{K}$，$p_t = 5\,934\ \mathrm{Pa}$．

与气相的比体积相比较，液相和固相的比体积可以忽略，这时对于气液和气固两相的克拉珀龙方程可分别简化为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \frac{L_v}{T_t V_{mg}} \qquad 和 \qquad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \frac{L_s}{T_t V_{mg}}.$$

利用理想气体在标准状态下的摩尔体积 $V_{mg}^0 = 2.241\,4\times10^{-2}\ \mathrm{m^3/mol}$，以及液态氨和固态氨的蒸气压方程的蒸气压方程，可以得到在三相点氨的汽化热 L_v，升华热 L_s 和熔化热 L_m 分别为

$$L_{\mathrm{v}} = [\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}]_{\mathrm{v}}\, T_{\mathrm{t}}\, V_{\mathrm{mg}} = \frac{3\,063\ \mathrm{K}}{T_{\mathrm{t}}^2}\, p_{\mathrm{t}} T_{\mathrm{t}} \frac{p_0 V_{\mathrm{mg}}^0 T_{\mathrm{t}}}{p_{\mathrm{t}} T_0}$$

$$= \frac{3\,063\ \mathrm{K} \times p_0 V_{\mathrm{mg}}^0}{T_0} = 25.47\ \mathrm{kJ/mol}\,,$$

$$L_{\mathrm{s}} = [\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}]_{\mathrm{s}}\, T_{\mathrm{t}}\, V_{\mathrm{mg}} = \frac{3\,754\ \mathrm{K}}{T_{\mathrm{t}}^2}\, p_{\mathrm{t}} T_{\mathrm{t}} \frac{p_0 V_{\mathrm{mg}}^0 T_{\mathrm{t}}}{p_{\mathrm{t}} T_0}$$

$$= \frac{3\,754\ \mathrm{K} \times p_0 V_{\mathrm{mg}}^0}{T_0} = 31.21\ \mathrm{kJ/mol}\,,$$

$$L_{\mathrm{m}} = L_{\mathrm{s}} - L_{\mathrm{v}} = 5.74\ \mathrm{kJ/mol}\,.$$

第三部分　附　　录

附录一　常用的数学结果

附录 1.1　偏导数和全微分

一　偏导数

设二元函数 $u=u(x,y)$，当变量 x 有一个改变量 Δx 而变量 y 保持不变时，得到一个改变量 $\Delta u=u(x+\Delta x,y)-u(x,y)$，如果当 $\Delta x\to 0$ 时，极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}$$

存在，那么这个极限就称为函数 $u=u(x,y)$ 关于变量 x 的**偏导数**或**偏微商**，记为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 或 $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}$. 类似地，有

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{\Delta y}.$$

一般而言，上述偏导数仍然是变量 x 和 y 的二元函数. 偏导数可以按照单变量函数的微分法则求出，只需对所论变量求导数，其余变量都看做常量.

二　全微分

二元函数 $u=u(x,y)$ 对其中的一个变量(例如 x)的**偏微分**，定义为

$$\mathrm{d}_x u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x.$$

设函数 $u=u(x,y)$ 在点 (x,y) 的某邻域内有定义. 若函数的全改变量可表示为

$$\Delta u=u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)=P\Delta x+Q\Delta y+O(\rho),$$

式中 P, Q 与 Δx，Δy 无关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数 $u=u(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分或可微，这时函数 $u=u(x,y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 一定存在，且有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=Q.$$

全改变量 Δu 的线性主部 $P\Delta x+Q\Delta y$ 称为函数 $u=u(x,y)$ 的**全微分**，可记为

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

函数在一点可微的充分条件是：如果在点 (x,y) 函数 $u=u(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 存在而且连续，那么函数在该点是可微的.

一般而言，偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}=P$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y}=Q$ 也是变量 x 和 y 的二元函数，再次求导可得

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}.$$

对于足够规则的函数，求导次序可以交换，因此有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

反之，设有微分式

$$\mathrm{d}u=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

如果其中的 P 和 Q 满足条件 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，则上式是某一函数 $u=u(x,y)$ 的全微分，该条件称为**完整微分条件**. 如果微分式

$$\mathrm{d}v=R(x,y)\mathrm{d}x+S(x,y)\mathrm{d}y$$

不满足完整微分条件，但存在函数 $\lambda(x,y)$ 使

$$\lambda\mathrm{d}v=\lambda R\mathrm{d}x+\lambda S\mathrm{d}y$$

满足完整微分条件，则 $\lambda\mathrm{d}v$ 是一个全微分，$\lambda(x,y)$ 称为微分式 $\mathrm{d}v$ 的**积分因子**. 可以证明，如果只有两个独立变量，微分式必有积分因子；如果有三个以上的独立变量，则微分式就不一定有积分因子了.

三 复合函数的微分法

设函数 $u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$ 的偏导数在点 (x,y) 处连续，而且函数 $f=f(u,v)$ 的偏导数在与 (x,y) 对应的点 (u,v) 处也连续，则复合函数 $f=f(u(x,y),v(x,y))$ 在点 (x,y) 处存在连续的偏导数，并且有

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

复合函数 $f=f(u(x,y),v(x,y))$ 在点 (x,y) 处的全微分仍有以下形式：

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}v.$$

四　隐函数的微分法

函数 $z=z(x,y)$ 也可以用隐函数的形式给出，即

$$F(x,y,z)=0.$$

应用复合函数的微商公式，在上述方程两端同时对 x 或对 y 求偏导数，可得

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

当 $\dfrac{\partial F}{\partial z}\neq 0$ 时，可解得隐函数 $z=z(x,y)$ 的两个偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

利用上式可以证明

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}=-1.$$

附录 1.2　矢量分析和场论

一　标量场的梯度　矢量场的散度和旋度

若空间区域 D 的每一点 $M(x,y,z)$ 对应一个数量值 $\varphi(x,y,z)$ [或矢量值 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$]，则它在此空间区域 D 上就构成了一个标量场(或矢量场)，用点 $M(x,y,z)$ 的标量函数 $\varphi(x,y,z)$ [或矢量函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$]表示.

在直角坐标系中，标量场的梯度以及矢量场的散度和旋度可分别表示为

$$\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F} = \nabla\cdot\boldsymbol{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \nabla\times\boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k},$$

其中　$\nabla = \boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$

称为**矢量微分算符**或**那勃勒**(nabla)**算符**，而

$$\Delta = \nabla\cdot\nabla = \nabla^2$$

称为**拉普拉斯**(Laplace)**算符**.

二　定理

标量场的梯度必为无旋场，即$\nabla\times\nabla\varphi = 0$；反之，无旋场必可表示为标量场的梯度，换言之，若$\nabla\times\boldsymbol{F} = 0$，则$\boldsymbol{F} = \nabla\varphi$.

矢量场的旋度必为无源场，即$\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{F} = 0$；反之，无源场必可表示为另一矢量场的旋度，换言之，若$\nabla\cdot\boldsymbol{F} = 0$，则$\boldsymbol{F} = \nabla\times\boldsymbol{A}$.

奥－高公式(Ostrovski-Gauss formula)或**高斯定理**：矢量场通过任意闭合曲面S的通量等于它所包围的体积V内的散度的积分，即

$$\oiint_{(S)} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}S = \iiint_{(V)} (\nabla\cdot\boldsymbol{F})\mathrm{d}V.$$

斯托克斯公式(Stokes formula)或**斯托克斯定理**：矢量场在任意闭合回路L上的环量等于以它为边界的曲面S上旋度的积分，即

$$\oint_{(L)} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_{(S)} (\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\mathrm{d}S.$$

三　常用的运算公式

$$\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi,$$

$$\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{F}) = (\nabla\varphi)\cdot\boldsymbol{F} + \varphi\nabla\cdot\boldsymbol{F},$$

$$\nabla\times(\varphi\boldsymbol{F}) = (\nabla\varphi)\times\boldsymbol{F} + \varphi\nabla\times\boldsymbol{F},$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{F}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F}) - \nabla^2\boldsymbol{F}.$$

附录 1.3　积　　分

一　高斯积分和 Γ 函数

利用如下的计算：

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{+\infty} e^{-r^2}\,2\pi r\,dr = \pi,$$

可得**高斯积分**

$$I = \int_0^{\infty} e^{-r^2}\,dr = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

由此可得**广义高斯积分**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Ax^2-Bx}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}}\,e^{B^2/4A}.$$

定义 Γ 函数为

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{\nu-1}\,dt \qquad (\nu>0).$$

用分部积分可以证明，Γ 函数有如下递推关系：

$$\Gamma(\nu) = (\nu-1)\Gamma(\nu-1).$$

由 Γ 函数可以看出，$\Gamma(1)=1$；与高斯积分 I 比较可见，令 $y=x^2$，则有

$$I = \int_0^{\infty} e^{-y}\frac{1}{2\sqrt{y}}dy = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

即　　$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

因此，利用递推关系式可以得到

$$\Gamma(n+1) = n!,$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}(2n-1)!!,$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right) = (-1)^n\frac{2^n\sqrt{\pi}}{(2n-1)!!} \qquad (n=1,2,3,\cdots).$$

于是，有如下的积分结果：

$$I_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-y}\,y^{\frac{n-1}{2}}\,dy = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right),$$

$$I_{2m-1}=\frac{1}{2}\Gamma(m)=\frac{1}{2}(m-1)!,$$

$$I_{2m}=\frac{1}{2}\Gamma(m+\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{m+1}}(2m-1)!!,$$

其中 $(2m-1)!!=(2m-1)\cdot(2m-3)\cdots\cdot 5\cdot 3\cdot 1$.

二 其他积分公式

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x)+C,$$

$$\int_0^\infty\frac{x}{e^x-1}dx=\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^2}\int_0^\infty y e^{-y}dy=\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}\approx 1.645,$$

$$\int_0^\infty\frac{x^2}{e^x-1}dx=\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^3}\int_0^\infty y^2 e^{-y}dy=2\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^3}=2.404,$$

$$\int_0^\infty\frac{x^3}{e^x-1}dx=\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^4}\int_0^\infty y^3 e^{-y}dy=6\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{15},$$

$$\int_0^\infty\frac{x^{1/2}}{e^x-1}dx=\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^{3/2}}\int_0^\infty y^{1/2}e^{-y}dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^{3/2}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\times 2.612,$$

$$\int_0^\infty\frac{x^{3/2}}{e^x-1}dx=\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^{5/2}}\int_0^\infty y^{3/2}e^{-y}dy=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^{5/2}}=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}\times 1.341,$$

$$\int_0^\infty\frac{x}{e^x+1}dx=\sum_{k=1}^\infty(-1)^{k-1}\frac{1}{k^2}\int_0^\infty y e^{-y}dy=\sum_{k=1}^\infty(-1)^{k-1}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

附录二　常用的物理常量和数据

附录 2.1　基本物理常量(2002 年国际推荐值)

物理量	符号	数值
真空中光速	c	$299\,792\,458\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$
真空磁导率	μ_0	$12.566\,370\,614\cdots\times10^{-7}\ \mathrm{N\cdot A^{-2}}$
真空介电常量	ε_0	$8.854\,187\,817\cdots\times10^{-12}\ \mathrm{F\cdot m^{-1}}$
牛顿引力常量	G	$6.674\,2(10)\times10^{-11}\ \mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}}$
普朗克常量	h	$6.626\,069\,3(11)\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}$
元电荷	e	$1.602\,176\,53(14)\times10^{-19}\ \mathrm{C}$
磁通量子	Φ_0	$2.067\,833\,72(18)\times10^{-15}\ \mathrm{Wb}$
玻尔磁子	μ_B	$927.400\,949(80)\times10^{-26}\ \mathrm{J\cdot T^{-1}}$
核磁子	μ_N	$5.050\,783\,43(43)\times10^{-27}\ \mathrm{J\cdot T^{-1}}$
里德伯常量	R_∞	$10\,973\,731.568\,525(73)\ \mathrm{m^{-1}}$
玻尔半径	a_0	$0.529\,177\,210\,8(18)\times10^{-10}\ \mathrm{m}$
电子质量	m_e	$9.109\,382\,6(16)\times10^{-31}\ \mathrm{kg}$
电子磁矩	μ_e	$-928.476\,412(80)\times10^{-26}\ \mathrm{J\cdot T^{-1}}$
质子质量	m_p	$1.672\,621\,71(29)\times10^{-27}\ \mathrm{kg}$
质子磁矩	μ_p	$1.410\,606\,71(12)\times10^{-26}\ \mathrm{J\cdot T^{-1}}$
中子质量	m_n	$1.674\,927\,28(29)\times10^{-27}\ \mathrm{kg}$
中子磁矩	μ_n	$-0.966\,236\,45(24)\times10^{-26}\ \mathrm{J\cdot T^{-1}}$
阿伏伽德罗常量	N_A	$6.022\,141\,5(10)\times10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$
摩尔气体常量	R	$8.314\,472(15)\ \mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}$
玻尔兹曼常量	k	$1.380\,6505(24)\times10^{-23}\ \mathrm{J\cdot K^{-1}}$
斯特藩常量	σ	$5.670\,400(40)\times10^{-8}\ \mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-4}}$

附录 2.2　保留单位和标准值

名称	符号	数值
电子伏特	eV	$1.602\,176\,53(14)\times10^{-19}\ \mathrm{J}$
原子质量单位	u	$1.660\,538\,86(28)\times10^{-27}\ \mathrm{kg}$
标准大气压	atm	101 325 Pa
标准重力加速度	g_n	$9.806\,65\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$

附录 2.3 太阳系的基本数据(Ⅰ)

星体	平均半径 / m	质量 / kg	自转周期 / s
太阳	6.96×10^{8}	1.99×10^{30}	$(2.2\sim3.2)\times10^{6}$
水星	2.44×10^{6}	3.30×10^{23}	5.10×10^{6}
金星	6.05×10^{6}	4.87×10^{24}	2.1×10^{7}
地球	6.37×10^{6}	5.98×10^{24}	8.62×10^{4}
火星	3.39×10^{6}	6.42×10^{23}	8.86×10^{4}
木星	6.98×10^{7}	1.90×10^{27}	3.54×10^{4}
土星	5.82×10^{7}	5.68×10^{26}	3.68×10^{4}
天王星	2.37×10^{7}	8.70×10^{25}	3.85×10^{4}
海王星	2.24×10^{7}	1.03×10^{26}	5.69×10^{4}
月球	1.74×10^{6}	7.36×10^{22}	2.36×10^{6}

附录 2.4 太阳系的基本数据(Ⅱ)①

星体	轨道平均半径 / m	轨道运动周期 / s	轨道偏心率
水星	5.79×10^{10}	7.59×10^{6}	0.206
金星	1.08×10^{11}	1.94×10^{7}	0.006 8
地球	1.496×10^{11}	3.156×10^{7}	0.016 7
火星	2.28×10^{11}	5.95×10^{7}	0.093 4
木星	7.78×10^{11}	3.75×10^{8}	0.048 5
土星	1.43×10^{12}	9.34×10^{8}	0.055 6
天王星	2.87×10^{12}	2.65×10^{9}	0.047 2
海王星	4.50×10^{12}	5.21×10^{9}	0.008 6
月球	3.84×10^{8}	2.36×10^{6}	0.055

① 太阳的平均密度为 1.41×10^{3} kg/m^3，太阳表面重力加速度为 274 m/s^2. 地球的平均密度为 5.52×10^{3} kg/m^3，地球表面赤道和两极处的重力加速度分别为 9.780 4 m/s^2 和 9.832 2 m/s^2. 地球平均轨道速度为 2.98×10^{4} m/s，加速度为 5.93×10^{-3} m/s^2. 月球表面重力加速度为 1.67 m/s^2，月球的轨道数据都是相对于地球的.

附录三　诺贝尔物理学奖获得者简介

时间	获奖者	国籍	研究成果
1901	伦琴 (W.C.Röntgen)	德国	1895 年研究真空管放电时发现 X 射线
1902	塞曼 (P.Zeeman)	荷兰	1896 年发现磁场对辐射现象的影响即塞曼效应
	洛伦兹 (H.A.Lorentz)	荷兰	对塞曼效应的理论研究
1903	贝可勒尔 (A.H.Becquerel)	法国	1896 年发现天然放射性
	皮埃尔·居里 (P.Curie)	法国	对天然放射性现象的研究
	居里夫人 (M.S.Curie)	法籍波	
1904	瑞利 (Lord Rayleigh)	英国	气体密度研究及与此有关的氩的发现
1905	勒纳德 (P.Lenard)	德国	阴极射线研究，1892 年通过金属窗引出阴极射线
1906	约瑟夫·汤姆孙 (J.J.Thomson)	英国	电荷通过气体的理论和实验研究，1897 年发现电子
1907	迈克耳孙 (A.A.Michelson)	美国	创制光学精密仪器，从事光谱学和精密度量学研究
1908	李普曼 (G.Lippmann)	法国	发明基于干涉现象的彩色照相法
1909	马可尼 (G.Marconi)	意大利	发明无线电报和对发展无线电通讯的贡献
	布劳恩 (C.F.Braun)	德国	对无线电报的研究和改进
1910	范德瓦尔斯(J.D.van der Waals)	荷兰	气体和液体物态方程的研究
1911	维恩 (W.Wien)	德国	发现热辐射定律
1912	达列 (N.G.Dalén)	瑞典	发明点燃航标灯和浮标灯的自动调节装置
1913	昂内斯 (H.K.Onnes)	荷兰	研究低温下物质性质，制成液氦，发现超导现象
1914	劳厄 (M.von Laue)	德国	1912 年发现晶体的 X 射线衍射
1915	威廉·布拉格(W.H.Bragg)	英国	利用 X 射线分析晶体结构
	劳伦斯·布拉格(W.L.Bragg)	英国	
1917	巴克拉 (C.G.Barkla)	英国	发现元素的特征 X 射线
1918	普朗克 (M.Planck)	德国	1900 年提出能量子概念，为量子理论奠立基础
1919	斯塔克 (J.Stark)	德国	发现阴极射线多普勒效应及光谱线在电场下的分裂
1920	纪尧姆 (C.E.Guillaume)	法国	发现镍合金钢的反常特性以及在精密仪器中的应用
1921	爱因斯坦 (A.Einstein)	德国	在数学物理方面的成就和发现光电效应规律
1922	尼尔斯·玻尔 (N.Bohr)	丹麦	研究原子结构和原子辐射，1913 年提出氢原子模型
1923	密立根 (R.A.Millikan)	美国	对基本电荷和光电效应的工作，1909 年油滴实验
1924	曼尼·塞格巴恩(M.Siegbahn)	瑞典	X 射线光谱学领域的发现和研究
1925	弗兰克 (J.Franck)	德国	发现电子与原子碰撞时只能转给原子分立的能量
	赫兹 (G.L.Hertz)	德国	

时间	获奖者	国籍	研究成果
1926	佩林 (J.B.Perrin)	法国	物质不连续结构的研究，发现沉积平衡
1927	康普顿 (A.H.Compton)	美国	1923 年发现光子与自由电子的非弹性散射作用即康普顿效应
	查耳斯·威耳逊 (C.T.R.Wilson)	英国	发现用蒸汽凝聚使带电粒子的径迹成为可见的方法
1928	里查孙 (O.W.Richardson)	英国	对热电子发射现象的工作，发现里查孙定律
1929	德布罗意 (L.V.de Broglie)	法国	1925 年提出电子的波动性
1930	拉曼 (C.V.Raman)	印度	1928 年发现光散射的拉曼效应
1932	海森伯 (W.K.Heisenberg)	德国	1925 年创立量子力学的矩阵力学，1927 年提出不确定关系
1933	薛定谔 (E.Schrödinger)	奥地利	1926 年创立量子力学非相对论波动力学即薛定谔方程
	狄拉克 (P.A.M.Dirac)	英国	1928 年创立量子力学相对论波动力学即狄拉克方程
1935	查德威克 (J.Chadwick)	英国	1932 年发现中子
1936	赫斯 (V.F.Hess)	奥地利	1911 年发现宇宙线
	卡尔·安德森 (C.D.Anderson)	美国	1932 年发现正电子
1937	戴维孙 (C.J.Davisson)	美国	1927 年发现电子在晶体中的衍射现象
	乔治·汤姆孙 (G.P.Thomson)	英国	
1938	费米 (E.Fermi)	意大利	发现辐射产生新放射性核素及慢中子产生核裂变
1939	劳伦斯 (E.O.Lawrence)	美国	发明和发展回旋加速器，用加速器取得成果
1943	斯特恩 (O.Stern)	美国	发展分子束方法，发现质子磁矩
1944	拉比 (I.I.Rabi)	美国	用核磁共振法测原子核磁矩
1945	泡利 (W.Pauli)	奥地利	1924 年发现所谓的泡利不相容原理
1946	布里奇曼 (P.W.Bridgman)	美国	发明高压装置并创立了高压物理
1947	阿普顿 (E.V.Appleton)	英国	研究大气高层物理性质，发现无线电短波电离层
1948	布莱克 (P.M.S.Blackett)	英国	发展威耳逊云室，在粒子和宇宙线方面贡献
1949	汤川秀树 (H.Yukawa)	日本	从核力理论基础上预言介子的存在
1950	鲍威尔 (C.F.Powell)	英国	发展核乳胶方法，发现介子
1951	科克罗夫特 (J.D.Cockroft)	英国	用人工加速粒子进行核蜕变工作
	瓦尔顿 (E.T.S.Walton)	爱尔兰	
1952	布洛赫 (F.Bloch)	美国	在核磁共振精密测量方法上的发展及有关发现
	珀塞尔 (E.M.Purcell)	美国	
1953	泽尼克 (F.Zernike)	荷兰	提出了相衬法，发明了相衬显微镜
1954	玻恩 (M.Born)	英国	量子力学研究，特别是对波函数的统计解释
	博思 (W.Bothe)	德国	提出了符合法以及用这一方法获得的发现

时间	获奖者	国籍	研究成果
1955	兰姆 (W.E.Lamb)	美国	氢光谱精细结构(即兰姆位移)的发现
	库什 (P.Kusch)	美国	1947 年精密测定电子磁矩，发现反常磁矩
1956	肖克利 (W.Shockley)	美国	半导体方面研究，1947 年发现晶体管放大效应
	巴丁 (J.Bardeen)	美国	
	布拉顿 (W.H.Brattain)	美国	
1957	杨振宁 (C.N.Yang)	美籍中	对宇称定律的深入研究，1956 年发现在弱相互作用
	李政道 (T.D.Lee)	美籍中	下宇称不守恒
1958	切连科夫 (P.A.Cherenkov)	原苏联	1934 年发现切连科夫效应
	弗兰克 (M.Frank)	原苏联	1937 年理论解释切连科夫效应
	塔姆 (Y.Tamm)	原苏联	
1959	西格里 (E.Segre)	美籍意	1955 年发现反质子
	张伯伦 (O.Chamberlain)	美国	
1960	格拉泽 (D.A.Glaser)	美国	发明气泡室
1961	霍夫斯塔特 (R.Hofstadter)	美国	研究电子被核散射问题，发现核子结构
	穆斯堡尔 (R.L.Mössbauer)	德国	1958 年发现无反冲 γ 共振吸收
1962	朗道 (L.D.Landau)	原苏联	物质凝聚态理论的研究，特别是液氦的研究
1963	梅耶夫人 (M.G.Mayer)	美籍德	1949 年提出核壳层模型
	詹森 (J.H.D.Jensen)	德国	
	维格纳 (E.P.Wigner)	美籍匈	核和基本粒子理论
1964	汤斯 (C.H.Townes)	美国	独立制成微波激射器，导至激光器的发展
	巴索夫 (N.G.Basov)	原苏联	
	普罗霍罗夫(A.M.Prokhorov)	原苏联	
1965	费恩曼 (R.P.Feynman)	美国	对量子电动力学方面所做的对粒子物理学具有深远影
	薛温格 (J.S.Schwinger)	美国	响的基础工作
	朝永振一郎 (S.Tomonaga)	日本	
1966	卡斯特勒 (A.Kastler)	法国	发现和发展了研究原子磁共振的光学方法
1967	贝斯 (H.A.Bethe)	美国	核反应理论，恒星能量产生理论
1968	阿尔瓦雷兹 (L.W.Alvarez)	美国	发展氢泡室和数据分析系统，发现大量共振态
1969	盖尔曼 (M.Gell - Mann)	美国	基本粒子及其相互作用分类，1964 年提出夸克模型
1970	阿尔芬 (H.Alfven)	瑞典	磁流体动力学基本研究和发现，及其在等离子体物理
			中的应用
	尼尔 (L.Neel)	法国	反铁磁性和铁氧体磁性的基本研究和发现
1971	伽博 (D.Gabor)	英籍匈	1948 年发明全息照相

时间	获奖者	国籍	研究成果
1972	巴丁 (J.Bardeen)	美国	1957 年提出了称为 BCS 理论的超导理论
	库珀 (L.N.Cooper)	美国	
	施里弗 (J.R.Schrieffer)	美国	
1973	约瑟夫森 (B.D.Josephson)	英国	理论预言通过隧道阻挡层的超流现象即约瑟夫森效应
	贾埃弗 (I.Giaever)	美籍挪	发现超导体中隧道效应
	江琦 (Leo Esaki)	日本	发现半导体的隧道效应，1957 年制成隧道二极管
1974	赖尔 (Martin Ryle)	英国	射电天文物理的开拓工作，射电望远镜的发展
	赫威斯 (A.Hewish)	英国	射电天文物理的开拓工作，发现脉冲星
1975	阿格·玻尔 (A.Bohr)	丹麦	发现核内集体运动和粒子运动的联系
	莫特尔孙 (B.R.Mottelson)	丹麦	
	雷恩瓦特 (L.J.Rainwater)	美国	
1976	里克特 (B.Richter)	美国	独立发现 J/ψ 粒子
	丁肇中 (S.C.C.Ting)	美籍中	
1977	菲利浦·安德森 (P.W.Anderson)	美国	对磁性和无序系统的电子结构的理论研究
	莫特 (N.F.Mott)	英国	
	范弗莱克 (J.H.van Vleck)	美国	
1978	彭齐亚斯 (A.A.Penzias)	美国	发现宇宙微波背景辐射
	罗伯特·威耳逊 (R.W.Wilson)	美国	
	卡皮查 (P.L.Kapitsa)	原苏联	低温物理方面的发明和发现
1979	温伯格 (S.Weinberg)	美国	在研究基本粒子相互作用性质，特别是在发展弱相互
	萨拉姆 (A.Salam)	巴基斯坦	作用与电磁相互作用统一理论方面所作出的贡献
	格拉肖 (S.L.Glashow)	美国	
1980	克罗宁 (J.W.Cronin)	美国	发现 K^0 介子衰变时复合宇称 CP 不守恒
	菲奇 (V.L.Fitch)	美国	
1981	凯·塞格巴恩 (K.Siegbahn)	瑞典	发展高分辨电子能谱仪和光电子能谱的研究
	布洛姆伯根 (N.Bloembergen)	美国	非线性光学和激光光谱学的研究
	肖洛 (A.L.Schawlow)	美国	激光及激光光谱学的研究
1982	肯尼思·威耳逊 (K.G.Wilson)	美国	提出相变的临界现象理论
1983	钱德拉塞卡 (S.Chandrasekhar)	美籍巴	对恒星结构和演化过程的研究，特别是对白矮星的结构和变化的精确预言
	福勒 (W.A.Fowler)	美国	宇宙中化学元素的形成理论
1984	鲁比亚 (C.Rubbia)	意大利	1983 年发现中间玻色子 W^+、Z^0，以及为此而发明的
	范德梅尔 (S.van der Meer)	荷兰	随机冷却方案聚焦单一反质子束，使 $p-\bar{p}$ 对撞

时间	获奖者	国籍	研究成果
1985	克里青 (K.von Klitzing)	德国	1980 年发现量子霍耳效应
1986	鲁斯卡 (E.Ruska)	德国	1933 年发明电子显微镜
	宾尼格 (G.Binnig)	德国	1981 年发明扫描隧道显微镜
	罗赫尔 (H.Rohrer)	瑞士	
1987	缪勒 (K.A.Müller)	瑞士	1986 年发现高临界温度氧化物超导体
	贝德罗兹 (J.G.Bednorz)	美国	
1988	莱德曼 (L.M.Lederman)	美国	1962 年中微子束工作，发现 μ 中微子，验证轻子
	施瓦茨 (M.Schwartz)	美国	的二重态结构
	斯坦伯格 (J.Steinberger)	美国	
1989	拉姆齐 (N.F.Ramsey)	美国	发明分离振荡场的方法并应用于氢微波激射器和原子钟
	德默尔特 (H.G.Dehmelt)	美国	发展电磁陷阱捕获带电粒子技术，用于高精度测
	保罗 (W.Paul)	德国	量基本物理常量
1990	弗里德曼 (J.I.Freidman)	美国	电子对质子的深度非弹性散射的开创性实验研
	肯得尔 (H.W.Kandall)	美国	究，证实了强子有结构的理论
	泰勒 (R.E.Taylor)	加拿大	
1991	德燃纳 (P.G.de Gennes)	法国	把研究简单系统中有序现象的方法，推广到复杂物质系统，特别是液晶和高分子聚合物
1992	乔治·夏帕克 (G.Charpak)	法国	对粒子探测器特别是多丝正比室的发明和发展
1993	约瑟夫·泰勒 (J.H.Taylor)	美国	发现一对脉冲星，为研究引力开辟了新的可能性
	拉塞尔·赫尔斯 (R.A.Hulse)	美国	
1994	沙尔 (C.G.Shull)	美国	发展中子散射技术
	布罗克豪斯 (B.N.Brockhouse)	加拿大	
1995	马丁·珀尔 (M.L.Perl)	美国	珀尔及其合作者在 1975 年发现 τ 轻子
	弗雷德里克·雷恩斯 (F.Reines)	美国	雷恩斯与克拉埃德·考恩(C. Cowan)在 1956 年首次成功地观测到电子反中微子
1996	戴维·李 (D.M.Lee)	美国	发现 ^{3}He 的超流现象
	道格拉斯·奥谢罗夫(D.D.Osheroff)	美国	
	罗伯特·理查森 (R.C.Richardson)	美国	
1997	朱棣文 (S.Chu)	美籍中	发现用激光冷却和捕陷原子的方法
	克洛德·科恩－塔努吉 (C.N.Cohen-Tannoudji)	法国	
	威廉·菲利普斯 (W.D.Phillips)	美国	

时间	获奖者	国籍	研究成果
1998	霍斯特·斯托默 (H.L.Störmer)	美国	发现具有分数电荷激发的新型量子流体
	崔琦 (D.C.Tsui)	美籍中	
	罗伯特·劳夫林 (R.B.Laughlin)	美国	
1999	杰拉尔杜斯·霍弗特 (Gerardus't Hooft)	荷兰	解释了物理学领域中电磁相互作用和弱相互作用的量子结构以及揭示了粒子物理学理论如何用来精确计算物理量，提供了可以用于预计新的粒子特性的“理论机器”
	马丁努斯·韦尔特曼 (Martinus J.G.Veltman)	荷兰	
2000	杰克·基尔比 (Jack S.Kilby)	美国	发明和开发集成电路芯片
	泽雷斯·阿尔费罗夫 (Zhores I.Alferov)	白俄罗斯	发明了基于异质结构的快速光电子和微电子元件
	赫伯特·克勒默 (Herbert Kroemer)	美国	
2001	卡尔·维曼 (Carl E.Wieman)	美国	发现新物质状态 BEC(碱金属原子稀薄气体的玻色－爱因斯坦凝聚)
	沃尔夫冈·克特勒 (Wolfgang Ketterle)	德国	
	埃里克·康奈尔 (Eric A.Cornell)	美国	
2002	雷蒙德·戴维斯 (Raymond Davis Jr.)	美国	天体物理中宇宙中微子的检测方面的贡献
	小柴昌俊 (Masatoshi Koshiba)	日本	
	里卡尔多·贾柯尼 (Riccardo Giacconi)	美国	天体物理中宇宙 X 射线源的发现
2003	阿列克谢·阿布里科索夫 (Alexei A.Abrikosov)	美，俄	超导和超流理论方面的开创性贡献
	维塔利·金茨堡 (Vitaly L.Ginzburg)	俄国	
	安东尼·莱格特 (Anthony J.Leggett)	英，美	
2004	戴维·格罗斯 (David J.Gross)	美国	粒子物理强相互作用理论中的“渐进自由”现象的发现
	戴维·波利策 (H.David Politzer)	美国	
	弗兰克·维尔切克 (Frank Wilczek)	美国	
2005	罗伊·格劳伯 (Roy J. Glauber)	美国	对光学相干的量子理论领域的贡献
	约翰·霍尔 (John L. Hall)	美国	对基于激光的精密光谱学，包括光频梳技术领域的贡献
	特奥多尔·亨施 (Theodor W. Hänsch)	德国	
2006	约翰·马瑟(John C. Mather)	美国	发现了宇宙微波背景辐射的黑体形式和各向异性
	乔治·斯穆特(George F. Smoot)	美国	