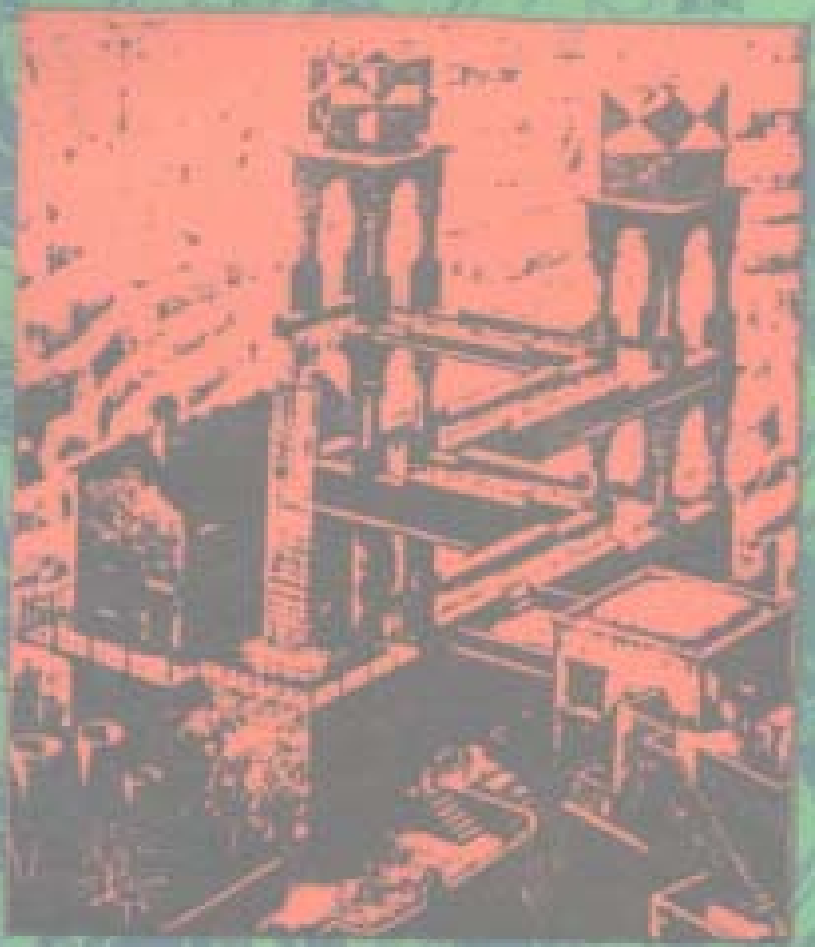
定性与半定量物理学

[illegible] 著



[illegible]教育出版社

04

353311

定性与半定量物理学

赵凯华 著



高等教育出版社

（京）112号

本书是北京大学物理系赵凯华教授在选修课讲义基础上编写的。全文曾在《大学物理》杂志(1988年第10期到1990年12期)刊载，深受广大读者欢迎。经作者增补修改后汇集出版。

作者在书中把基础物理知识生动地、巧妙地与当今物理学前沿如粒子物理、生物物理、天体物理、对称性、分形等等新鲜概念与课题结合起来，与物理学的思想，方法及其历史发展结合起来，古今纵横、上下环宇，格调清新、启人心智，是物理爱好者和师生们不可多得的参考读物，也有利于物理教学改革的探索。

本书内容有绪论及对称性原理、量纲分析、数量级估计、自然界的物理学等四章，并有较丰富的例题。

本书可作为各类高等学校本科和专科物理专业及学习物理课程的其他理工农医专业大学生、研究生、有关教学或科研人员的参考读物，也可供中专、中学教师及物理爱好者阅读或作进修之用。

责任编辑　邹延肃

D20-20



高等教育出版社出版
新华书店总店北京科技发行所发行
河北省香河县印刷厂印装

开本 850×1168　1/32　印张 8.75　字数 206,000
1991年10月第1版　1991年10月第1次印刷
印数 0001—1 780

ISBN 7-04-003502-2/O·1063
定价　4.00元

序

这本小册子的内容，原本是作者在北京大学物理系从1987到1989年开设的一门选修课，听众有二年级以上的本科生和研究生，应《大学物理》编辑部之约，从1988年10月起，又在该刊上连载了两年零三个月，前后为期凡二十有七．现略事修订增补，汇成此册．

读者不难看出，本书与OUSPEA考试（我国赴美研究生考试，1980—1988）有着密切的渊源．书中不少例题直接采自OUSPEA试题．应当说，我国的物理教学，模式是比较单一而古板的．欧美各大学（特别是OUSPEA）试题风格的清新颖异、内容的丰富多采，使我们耳目为之一新．不少教师正从中吸取营养，改进自己的教学．这些试题涉及的知识面极广，所用的方法也比较特殊（从我们传统的眼光看，也许还不大"正规"）．若仅"就题论题"地讲述，会给人以头绪纷乱、支离破碎之感．用一定的线索把有关的知识和方法尽可能地贯穿起来——这便是作者的初衷．如果书中的某些片断，有幸被纳入现行的常规教学体系之内，作者将因此而感到欣慰．错误之处，祈读者不吝指教．

在作者备课、讲课期间，北大王正行和王稼军曾给予协助；在本稿连续刊出于《大学物理》时，北师大胡镜寰，做了大量校订工作，北师大天文系李宗伟在刊出后又对一些天文数据和提法给予指正，作者在此一并表示感谢。

作者谨识

燕园·马年仲冬

目　录

绪论…… 1
第一章　对称性原理…… 7
§1. 什么是对称性…… 7
§2. 因果关系　对称性原理……32
§3. 对称性的自发破缺……45
参考文献……62
第二章　量纲分析……63
§1. Π 定理和例题……63
§2. 模拟试验与物理相似性原理……80
§3. 物理方程中常数的压缩与恢复……96
参考文献…… 100
第三章　数量级估计…… 101
§1. 物理世界的层次和基本物理常数…… 101
§2. 原子…… 110
§3. 原子核…… 118
§4. 分子和晶体…… 125
§5. 物性…… 151
§6. 地球、太阳和月亮…… 172
参考文献…… 176
第四章　自然界的物理学…… 178
§1. 人类生存的环境…… 178
§2. 太阳系…… 200
§3. 恒星和其它天体…… 227
§4. 宇宙…… 251
参考文献…… 272

绪　论

物理学推理性强，逻辑严密，实验测量可达极高的精度．这些都是物理学与其它学科相区别的突出特点．物理学是一门高度定量化的学科，它使人类对自然界的认识获得了长足而深入的进步成为自然科学中公认的成功范例．在历史上，作为一门定量化的严密学科为物理学赢得声誉的，首先是牛顿力学．牛顿的万有引力定律把苹果和月亮的运动法则统一起来，不仅成功地解释了由开普勒总结的行星运行规律，由此定律还推算出月球运动的若干细节，说明了岁差、章动和潮汐等现象．众所周知，牛顿力学最辉煌的成就要算对一颗新行星(海王星)的预言，理论推算的误差只有1°①近代物理学高度精确的计算和测量更加令人赞叹不已．1957年量子电动力学计算的电子反常磁矩值为 $\mu=1.0011614\mu_B$ (μ_B为玻尔磁子)，它与以前所得的精密实验值 $\mu=(1.001167\pm0.000005)\mu_B$ 符合到第六位有效数字！到了1984年，物理学家竟然能写出它的十二位有效数字：$\mu/\mu_B=1.001159652193$．更有甚者，1987年H. Dehmelt小组测得的：这一量值的最新结果是

$$\mu/\mu_B=1001159652187.9(4.3)\times10^{-12},$$

达到了13位有效数字．H. Dehmelt为此分享了1989年诺贝尔物理奖②．遗憾的是，物理学中这样高度定量化的研究方法未能推广到其它学科，如生命科学和社会科学中去．这是因为在这些领域中的现象要错综复杂得多，理论家所需的素材(观察资料)很

① 参看 A.P. 弗伦奇，牛顿力学，人民教育出版社，1980，第八章，§16．

② 参看郭奕玲，《物理通报》1990年第1期，第1页．

少可能有物理学中那样的精度，因而他们无法建立起较为完善的数学模型.

由于定量的方法在物理学中获得如此的成功，在这个领域中"定性"一词往往成了带贬意的字眼儿. 卢瑟福有句名言："定性就是定量化不够". 在一些人的心目中，作定性的分析是出于不得已，只有高度定量化才是最重要的. 其实这种认识是片面的，事情并不尽然. 我们可以举些例子来说明.

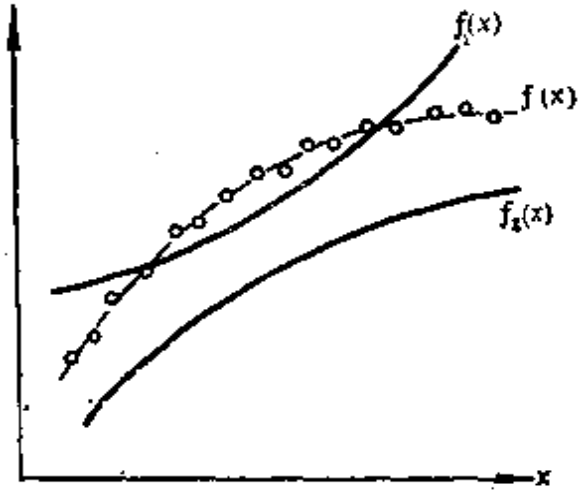


图 0-1　理论曲线与实验曲线的拟合

设想图 0-1 中的虚线 $f(x)$ 是一条实验曲线，实线 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 是建立在两个不同模型上的理论曲线，它们都与实验曲线拟合得不太好. 从定量的意义上说，$f_1(x)$ 的曲线稍好些，因为偏差 $\int|f_1(x)-f(x)|\mathrm{d}x<\int|f_2(x)-f(x)|\mathrm{d}x$. 但从定性的趋势看，$f_2(x)$ 比 $f_1(x)$ 更接近 $f(x)$. 为了进一步探索这实验现象的机理，你更倾向于哪个理论模型呢？我猜大多数理论物理学家宁愿要 $f_2(x)$，认为它背后的理论模型更接近真正的机理，尽管它给出的定量结果比 $f_1(x)$ 的偏差大. 讲这个例子，我不是要证明什么，只是想揭示人们心理上的一个自然倾向，即乐于承认曲线的定性趋势所具有的内在价值.

作为另一个例子，我们考虑圆电流在自身所在平面内的磁场

分布．学过普通物理的人谁都知道，圆心处的磁感应强度为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2R}(\text{定义为 } B_0), \tag{0.1}$$

式中 R 为圆线圈的半径，I 为电流强度．圆心以外的地方情况怎样呢？原则上我们是可以根据毕奥-萨伐尔定律来计算的，甚至其结果还可以用解析式表达出来①．在圆内 $(r<R)$，

$$B(r)=\frac{2B_0}{\pi}\frac{1}{1-k^2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta; \tag{0.2}$$

在圆外 $(r>R)$，

$$B(r)=-\frac{2B_0}{\pi}\left[\frac{k'}{1-k'^2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k'^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta - k'\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\theta}}\right], \tag{0.3}$$

这里 $k=1/k'=r/R$，r 为场点到圆心的距离．以上两式包含了第一、二类全椭圆积分，它们的数值可以在数学手册中查到，也可以利用它们的级数展开式作数值计算．所得数值结果还可以用曲线表示出来，如图 0-2．不过，如果不是某种实验装置或工程技术设

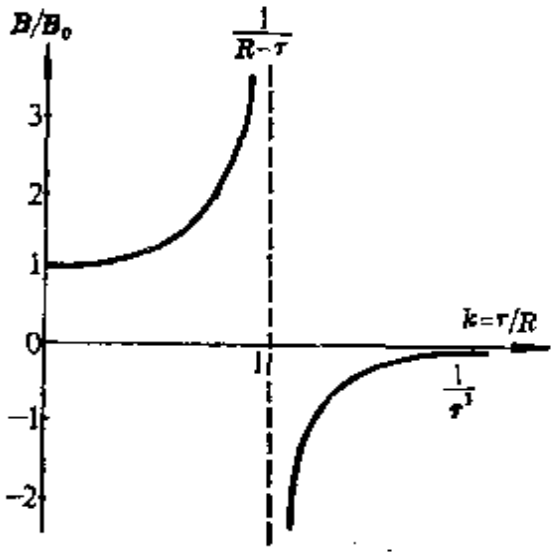


图 0-2　圆电流在自身所在平面内的磁场分布

① 参看彭中汉，蔡领，《大学物理》1983 年第 11 期，12 页．

计的需要，看了(0.2)和(0.3)那样的复杂公式，我们对磁场的分布能形成些什么概念呢？图 0-2 中的曲线倒能给我们一个大概的印象，它告诉我们，由圆心趋向圆周($r\to R$)时，$B\to\infty$；过渡到圆外，B 突然反向，随着 $r\to\infty$，B 从 $-\infty\to 0$. 在 $r=R$ 和 ∞ 处 B 的渐近行为是怎样的？回答这个问题，可以取(0.2)和(0.3)式在 $k\to 1$，$k'\to 1$ 和 0 时渐近表达式. 但我们可以有更简单的办法：当场点趋近圆周时，圆弧可看成是无限长的直导线，所以在这里 B 的渐近行为是反比于 $R-r$ 的；当 $r\to\infty$ 时，圆线圈看起来象个磁偶极子，从而 B 渐近地反比于 r^3. 仔细的验证会告诉我们，(0.2)和(0.3)式的渐近行为确实如此. 如果不是这样，那就是什么地方推导错了，故而用这种取极限情形的方法还可检查繁复计算的对错. 如果我们根本就不需要定量的结果，利用上述取极限的方法，我们可立即得到磁场分布的一个大致概念. 这种取极限情形的方法，是物理学中重要的定性方法之一. 讲这个例子，我是想说明，并非在所有的场合下繁复的计算都是必要的. 有时定性的方法来得更为有效.

我国物理教学的优良传统，是课程的内在联系紧密，论述条理清晰，逻辑严整. 这样可使学生获得的知识在结构上不是零散现象的罗列和定律的堆砌，而是一个有层次、有组织的有机整体. 正象近代庞大计算机的软件那样，这种知识结构有利于“读出”和“写入”，其中还有各种层次的“子程序”、“功能块”，调用起来也很方便. 然而，我们总觉得，在我们的教学中还缺少点什么. 问题在于，我们的学生不是亲自编写“程序”的人，他们不知问题的来龙去脉，不体会独立创新工作中的甘苦. 每逢遇到问题，我们的学生总喜欢用系统的理论工具去作详尽的定量计算，或利用现有的仪器埋头于细致的测量，尽管有的问题本可以通过简单的思考就能得到定性的或半定量的结论. 下面我想引用一段费因曼的故事，这

直接摘自他的一本回忆录.[①]故事描述他第二次去日本时遇到的情况:

"在我所到的地方，每位搞物理的人都告诉我他们正在做什么,我也愿意同他们讨论. 通常他们先一般地讲讲问题的所在,然后就开始大串大串地写起公式来.

"'等一下',我说:'这个一般性问题有特例吗?'

"'怎么会没有?当然有.'

"'好吧,请给我举个例子.'这是为了我自己,因为我不能普遍地理解任何事,我心中必须怀着一个特例,注视着它如何发展. 起初有些人以为我有点迟钝,以为我不懂,因为我问了许多'愚蠢的'问题，如'阴极是正的还是负的?''阳离子往这边走，还是往那边走?'

"但是过了一会儿,当这位朋友停在一串方程式中间想说点什么的时候,我却说:'请稍等一下，这儿有个错!那不可能是对的!'

"此人检查一下他的公式,过了一会儿,果真发现了错误. 他很惊讶,想道:'真见鬼,这家伙怎么搞的,开初他简直不懂,现在怎么会在这团乱糟糟的公式中找出个错儿?'

"他以为我在跟着他一步步地作数学推演,其实不是那么一回事. 我心中有了特殊的物理实例，这正是他企图分析的问题. 我从直觉和经验知道这件事的性质. 所以当公式告诉我们说这件事应如此这般时，我一感到不对头，就跳起来说:'等等，那有个错儿!'

"这样,在日本,没有物理实例我就不懂,也不能和任何人讨论问题. 但他们经常给不出实例来. 即便给出来,也往往是个弱例,就是说,这问题本可用简单得多的分析方法来解决.

① Feynman, R. P.; *"Surely You're Joking, Mr. Feynman!"* W. W. Norton & Co. 1985, p. 223.(中译本:吴丹迪等译《爱开玩笑的科学家——费曼》,科学出版社,1989.)

"因为我总不问数学方程，而是问他们想搞的问题的物理实例，我的访问被总结到一篇油印的文章里，在科学家中间传阅．文章的标题是«费因曼的轰炸和我们的回击»．"

当一位成熟的物理学家进行探索性的科学研究时，常常从定性的或半定量的方法入手．这包括对称性的考虑和守恒量的利用、量纲分析、数量级估计、极限情形和特例的讨论、简化模型的选取、以至概念和方法的类比，等等．他们通过定性的思考或半定量的试验，力求先对问题的性质、解的概貌取得一个总体的估计和理解．否则一下子陷入细枝末节的探讨，往往会一叶障目，只见树木，不识森林①．这种定性或半定量的分析问题的能力，对初学者来说却是最难不过的．因为这要靠一定的物理直觉和洞察力，没有相当的经验和功力是做不到的．但是，青年学生应从头培养这种能力．平常除了刻苦学习之外，还应勤于思考(但不是空洞的思辩)，以寻找各种事物之间的内在联系．经过定量计算或精密测量之后，对所得的某些结果人们未必就知道其所以然．从整体上作了定性思考之后，才有可能抓住问题的本质．有意识地这样锻炼下去，久而久之，就会融会贯通．孔夫子曰："学而不思则罔(无知)，思而不学则殆(危险)．"哲理名言，似乎也适用于这层意思．

① 本书封面上那副"瀑布"的怪画里，每个局部看上去似乎都是正确的，但总体上看，水流竟然会周而复始地自动循环起来，而且还推动着磨坊的一架水轮机．这岂不成了一架"永动机"?!此画可作为上面这段正文的一个绝妙的注脚．

"瀑布"这幅怪画与那幅美妙的"骑士图"出自同一位作者，他就是当代杰出的荷兰画家埃舍尔(M. C. Escher)．埃舍尔的作品构思巧妙，立意奇特，蕴含深刻的哲理，在西方极有影响．可惜中国人对他的作品还不太熟悉．感谢杨振宁先生首先把他的"骑士图"介绍给中国读者(见本书第一章图 1-22 和该处有关的段落)．好意的装帧设计人又将它选用在本书封面上，与那幅"瀑布"叠印在一起，使之相得益彰，令人绝倒!

第一章　对称性原理

§ 1. 什么是对称性?

在现代物理学中对称性是个很深刻的问题. 在粒子物理、固体物理、原子物理等许多领域里,对称性问题都很重要. 描述对称性的数学语言是群论. 这里不打算用群论方法去探讨一些较深的问题, 而是介绍对称性原理在基础物理中的应用.

对称性的概念最初来源于生活. 在艺术、建筑等领域中,所谓"对称", 通常是指左右对称. 人体本身就有近似的左和右的对称性. 各类建筑,特别是很多民族的古代建筑,都有较高的左右对称性. 我国古代的宫殿、寺庙和陵墓建筑尤为突出,而园林建筑的布局则错落有致,于不对称中见对称.

左右对称只是各种对称性中的一种. 除了左右对称之外, 读者也许还会想到轴对称、球对称等概念. 在数学和物理学中对称性的概念是逐步发展的, 今天它已具有十分广泛的含义. 为了说明在最普遍的意义下什么是对称性,我们得先引入一些概念.

首先是"体系",它是我们研究的对象;其次是"状态", 同一体系可以处在不同的状态; 不同的状态可以是"等价"的, 也可以是"不等价"的. 设想我们有一个圆, 这是个几何学中理想的圆(图 1-2*a*), 在它的圆周上打个点作为记号,点在不同的方位代表体系(圆) 处在不同的状态. 如果我们所选的体系中不包括这个记号, 其不同的状态看上去没有区别,我们就说这些状态都是等价的. 如果把这个记号包括在我们所选的体系之内,则不同的状态将不等价.

我们把体系从一个状态变到另一个状态的过程叫做"变换",



图 1-1　左右对称的天安门

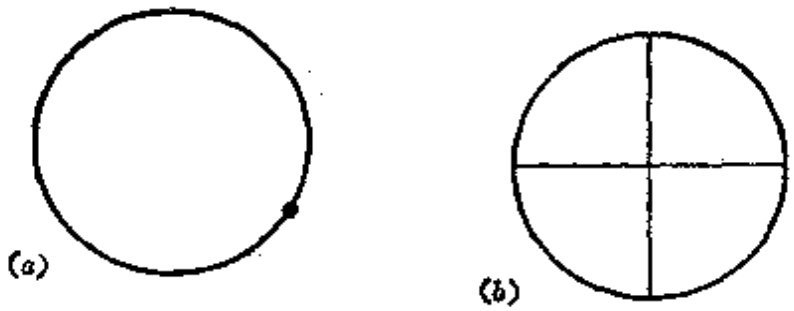


图 1-2　圆的对称性

或者说，我们给它一个“操作”. 如果一个操作使体系从一个状态变换到另一个与之等价的状态，或者说，状态在此操作下不变，我们就说这体系对于这一操作是“对称的”，而这个操作叫做这体系的一个“对称操作”. 例如图 1-2*a* 中那个圆（不考虑上面的记号）对于围绕中心旋转任意角度的操作来说都是对称的；或者说，旋转任意角度的操作都是这圆的对称操作. 如果我们在圆内加一对相互垂直的直径（见图 1-2*b*），这个体系的对称操作就少得多了. 转角必须是 90° 的整数倍，操作才是对称的. 由此可见，图 1-2*b* 中的图形要比单纯一个圆的对称性少多了.

以上这个有关“对称性”的普遍定义，是德国大数学家魏尔（H. Weyl）首先提出来的.

最常用的对称操作是时空操作，转动、平移、镜象反射、标度变换等属空间操作，时间平移、时间反演等属时间操作. 除了时空操

作之外，物理学中还用到许多其它的对称操作，如置换、规范变换、电荷共轭变换（即粒子与反粒子之间的变换）和某些动力学变换等，其中有的比时空变换抽象得多．下面我们先有选择地介绍其中一些．

1．镜象对称

通常说"左右对称"，确切的名称是镜象对称，或者说宇称（parity），相应的操作是空间反射（镜面反射）．在这种操作下，沿反射镜面法线方向的坐标 $x \to -x$，其它方向不变，于是左手变成右手（图 1-3）．

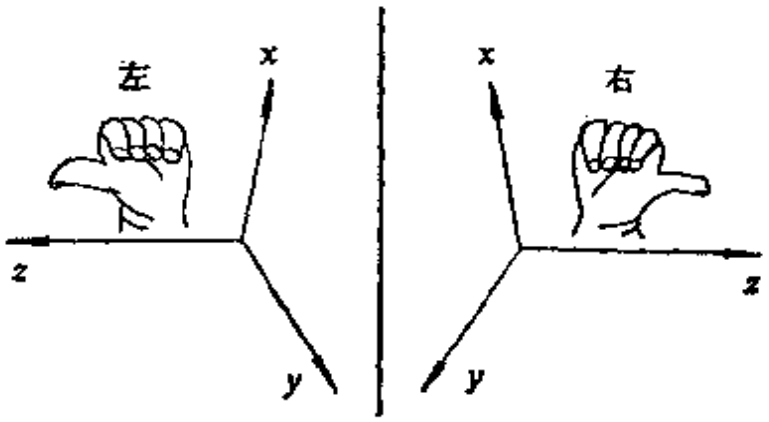


图 1-3　空间反射与镜象对称

物理学中有各式各样的矢量，它们在空间反射操作下该怎样变换？对于位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 来说，这是清楚的：与镜面垂直的分量反向，平行的分量不变．和 $\boldsymbol{r}$ 相联系的速度 $\boldsymbol{v}$、加速度 $\boldsymbol{a}$、乃至力 $\boldsymbol{f}$ 等矢量都应有相同的变换规律．但是存在另一类矢量，它们在空间反射操作下具有不同的变换规律．绕定轴的角速度

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}}{r^2} \quad (r \perp \text{转轴})$$

就是这样．如图 1-4 所示，在空间反射操作下，$\boldsymbol{\omega}$ 与镜面垂直的分量不变，平行的分量却反向．和 $\boldsymbol{\omega}$ 相似，角位移和角加速度、以及力矩等矢量都应有这样的变换规律．通常把空间反射时服从前一

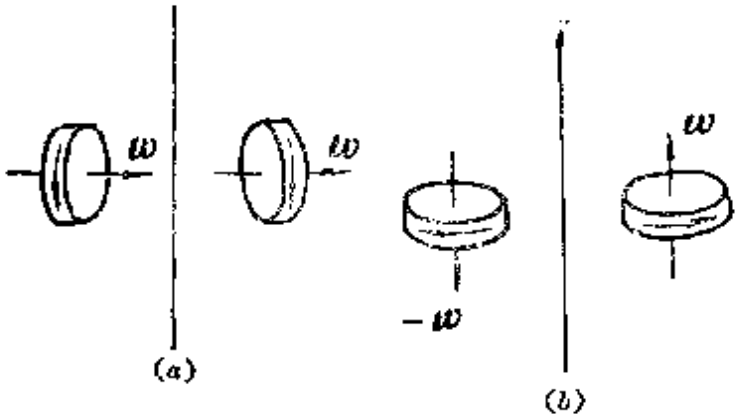


图 1-4　角速度的空间反射变换

类变换规律的矢量叫极矢量，后一类叫轴矢量．说实在的，也许根本不应该把轴矢量看成真正的矢量，因为它们所描述的实际上是一个平面内的事物．用个矢量来表示，不过是一种约定．轴矢量往往由两个极矢量的矢积构成，如果我们统一用右手坐标系来定义矢积的方向，则轴矢量必然会有与极矢量相反的空间反射变换规律．

从库仑定律可以论证，电场 $\boldsymbol{E}$ 是极矢量；从毕奥-萨伐尔定律可以论证，磁场 $\boldsymbol{B}$ 是轴矢量．以上结论留给读者作为练习，自己去推论．

镜象对称是物理学中最重要的对称性之一．我们暂时介绍到这里，下面还要不断地回到这个问题上来．

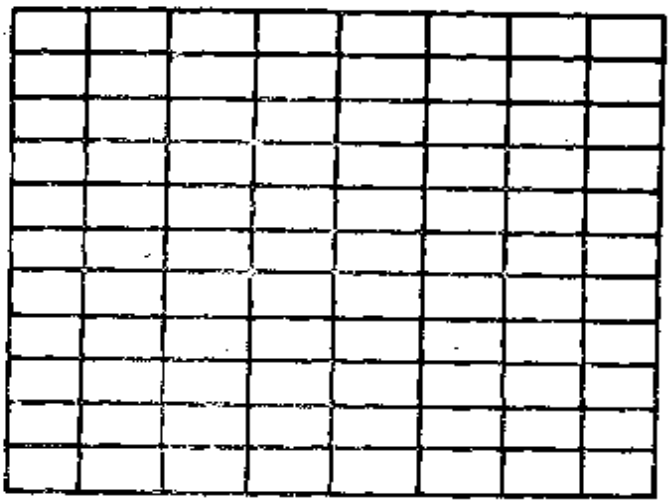
2．转动与平移

图 1-2 中所举的都是绕定轴转动的例子．若一体系绕某个轴每转 $2\pi/n$ 角度后恢复原状，则该轴称为 n 次轴．例如图 1-2a 中带点的圆周只有 1 次轴，图 1-2b 中带十字的圆具有 4 次轴；正方形具有 4 次轴，而长方形只有 2 次轴；等边三角形具有 3 次轴，正六边形具有 6 次轴，当然它同时也是 3 次轴和 2 次轴．

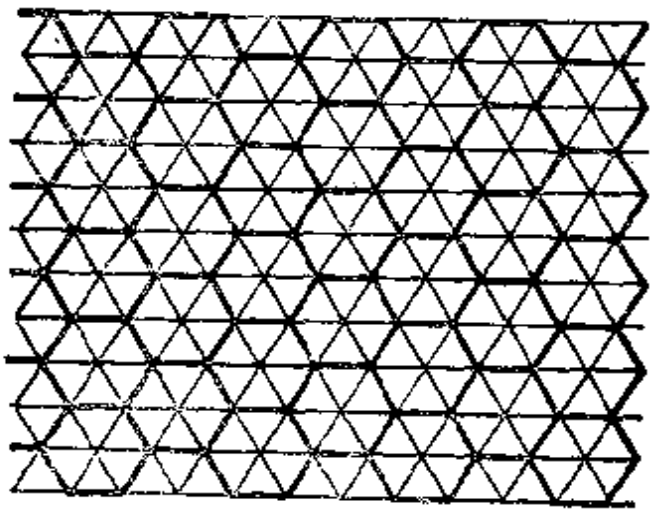
下面我们看平移的例子．一条无穷长的直线对沿自身方向的任何平移是不变的，即它具有这种平移对称性．一个无穷大的平

面对沿面内的任何平移也是不变的，故它也具有平移对称性，而这里的平移是二维的．倘若如图 1-5 所示，在无穷大的平面内打上均匀的格子，则只有受到特殊限制的平移才构成对称操作，即平移只能沿某几个特殊的方向走若干整数步，步长等于该方向格子的边长．

严格周期性的网格在具有平移对称性的同时，还具有一定的转动对称性．例如图 1-5*a* 中所示的长方形网格具有 2 次转动对称，垂直纸面通过每个格点和空格中心都有一条 2 次轴．图 1-5*b*



(*a*) 长方形网格



(*b*) 三角形与六角形网格

图 1-5　平面网格的平移对称性

本是三角形网格，若略去其中细线不看，只看粗线，则是六角形的蜂窝状网格．垂直纸面通过三角形网格的每个格点和中心都有一条 3 次轴；垂直纸面通过六角形网格的中心有一条 6 次轴，而通过其格点只有 3 次轴．

我们知道，夫琅禾费衍射相当于进行一次傅里叶变换．①衍射主极强处于倒格点的位置．下面结合二维格点作些具体说明．设想在图 1-5 所示网格的每个格点上放置一个点状衍射物（原子），它们的位矢 $\boldsymbol{R}_n$ 可用两个基矢 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$ 来表述：

$$\boldsymbol{R}_n = n_1\boldsymbol{a}_1 + n_2\boldsymbol{a}_2, \tag{1.1}$$

这里 $n=(n_1, n_2)$ 是一对任意整数（见图 1-6 的上部）．二维衍射的理论告诉我们，如果入射光的波矢 $\boldsymbol{k}$ 垂直于格点所在的平面（图 1-6 的纸平面），则衍射主极强的方向沿 $\boldsymbol{k}+2\pi\boldsymbol{K}_h$，这里

$$\boldsymbol{K}_h = h_1\boldsymbol{b}_1 + h_2\boldsymbol{b}_2, \tag{1.2}$$

式中 $\boldsymbol{b}_1$ 和 $\boldsymbol{b}_2$ 称为倒格矢，它们的方向分别与 $\boldsymbol{a}_2$ 和 $\boldsymbol{a}_1$ 垂直，而大小 $b_1=1/a_1$，$b_2=1/a_2$，亦即

$$\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{b}_j = \delta_{ij}(i, j=1, 2), \tag{1.3}$$

式(1.2)中的 $h=(h_1, h_2)$ 为另一对任意整数，称为密勒指数，它们标志衍射斑的级别．由式(1.3)，

$$\boldsymbol{K}_h\cdot\boldsymbol{R}_n = h_1n_1 + h_2n_2 = \text{整数},$$

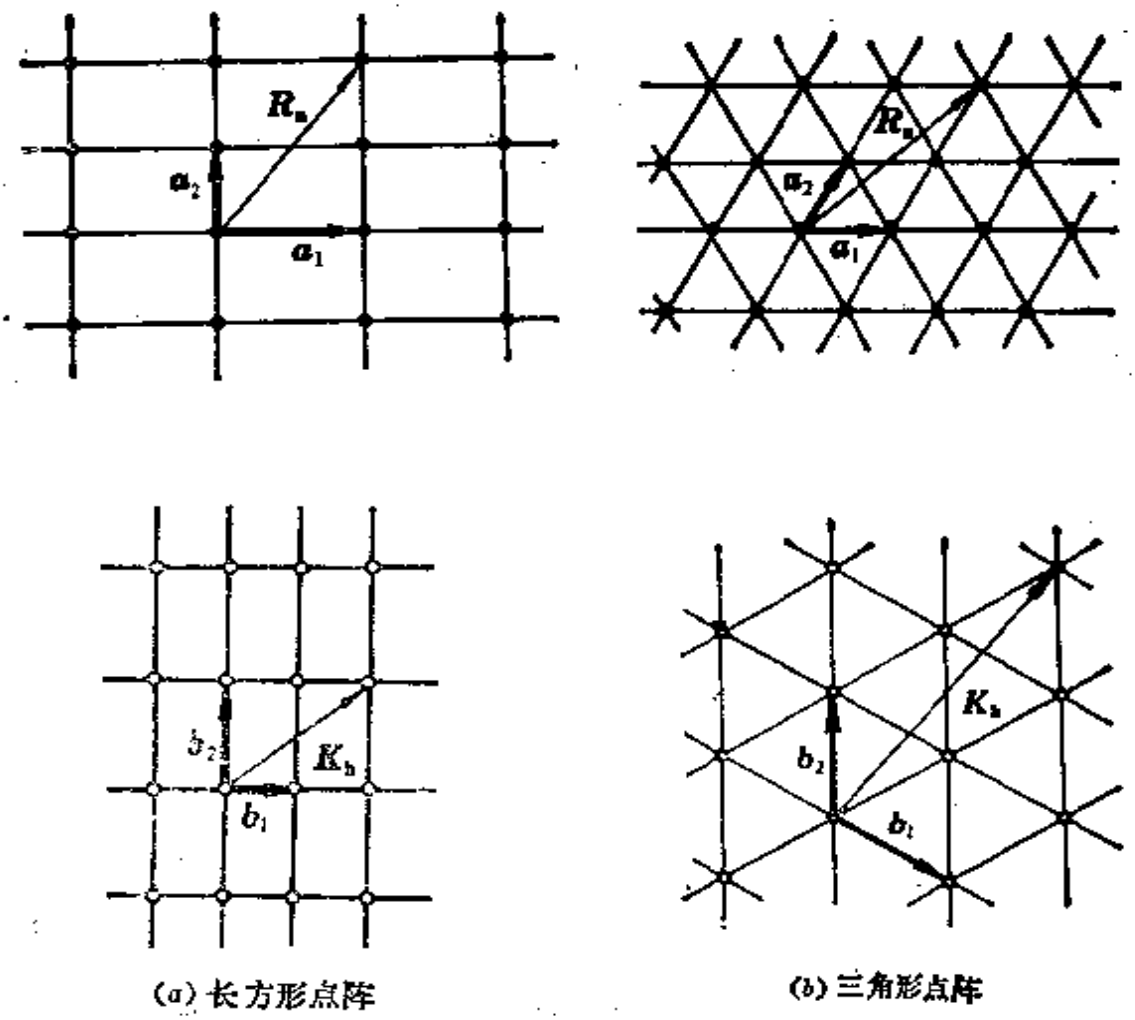
对任何 h，n，有

$$\exp(2\pi i\boldsymbol{K}_h\cdot\boldsymbol{R}_n) = 1. \tag{1.4}$$

倒格矢与衍射斑的分布情景示于图 1-6 的下方．可以看出，它们保持着原始格点的平移对称性和相同次数的转动对称性，然而图样的取向似乎转了 90°．

应当指出，平移的周期性限制着格子转动对称性的级次．用群论可以证明，在严格周期性的格子中只能有 1 次、2 次、3 次、4

① 参见赵凯华、钟锡华：《光学》下册，第五章，§4，北京大学出版社，1984．



(a) 长方形点阵　　(b) 三角形点阵

图 1-6　点阵的基矢和倒格矢

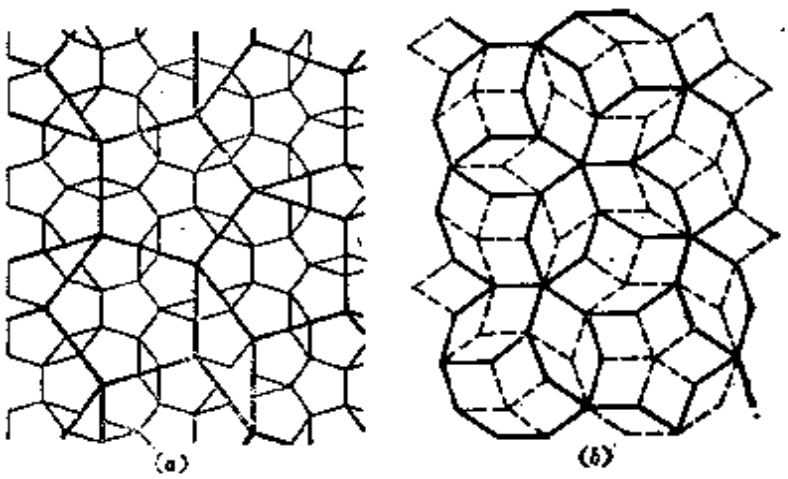


图 1-7　二维 Penrose 格子

次和6次轴．而不能有其它的，如5次、8次轴等．道理是显然的：我们可以用长方形、正方形、等边三角形、正六边形的砖铺满路面，但谁也无法只用正五边形或正八边形的砖铺砌路面而不留下空隙．对三维的点阵情况也是如此，所以从来在晶体的X射线衍射图样中只有上述级次的转动对称轴．但是，1984—1985年间却发生了一件希罕的事，先是Shechtman等人①在急冷的铝锰合金中发现包含5次轴的金属相，继则郭可信等人②在钛钒镍合金中也发现了同样的对称性，这一发现立即在国际上引起了强烈的反响．

有趣的是，早在1974年英国数学家Penrose试图用正五边形覆盖平面，发现五边形之间需填补菱形、尖帽形等多种图形，才能铺满平面（见图1-7*a*）．如果把此图中相邻五边形的中心连接起来，我们就得到图1-7*b*中实线构成的图样．用虚线进一步将图1-7*b*分割，我们就会发现，只需用胖、瘦两种菱形就可将平面铺满．Penrose铺砌法既没有平移周期性，也没有严格的5次的转动对称性，但1982年英国晶体学家Mackay以Penrose点阵（即在Penrose图样的每个节点上放置一个"原子"而构成的点阵）作光学衍射实验，结果得到了具有$5\times2=10$次对称而没有平移周期的明锐衍射斑．这一意外的结果当时并没有引起很多注意，上述奇特金相的发现，才使人们重新想起了Penrose铺砌问题．

为什么Penrose点阵会具有明锐的10次对称衍射斑？让我们再仔细看看图1-7．在图1-7*a*内的每个正五边形中心都有一个局部的5次轴；在图1-7*b*内也可发现许多正五星形，在它们的中

① D. Shechtman *et al*, *Phys. Rev. Lett*, 53, 1951 (1984)

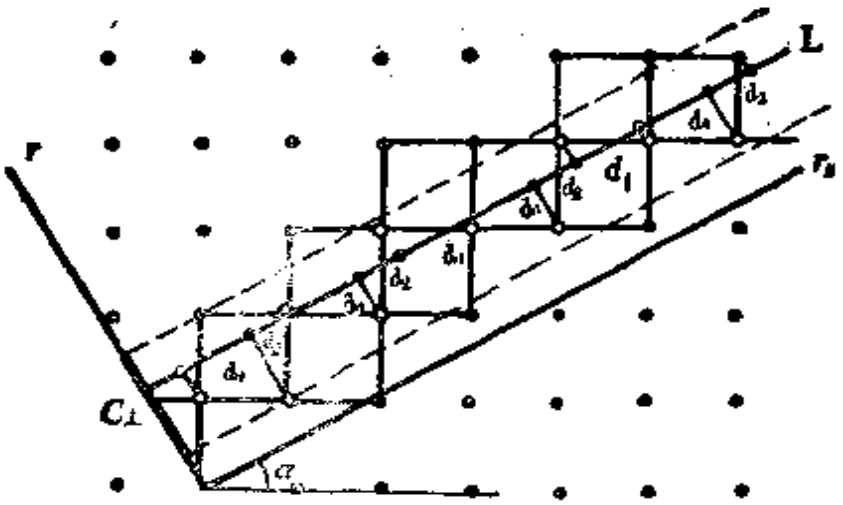
② 郭可信，《物理》**14** (8), 449 (1985)
张泽，叶恒强，郭可信，*Phil. Mag*, **A52**, L49 (1985)
还可参考：冯国光《大学物理》1986年第10期，p. 1；张泽、王大能《物理》**16** (9), 557 (1987).

心也有一个局部的 5 次轴. 从线段的取向来看，两图中都只有十个，它们以等角距平分整个圆周角. 我们说，Penrose 格子具有长程的取向有序、但无平移周期性. 这类格子称为准格子，原子按这种格子排列起来形成的"晶体"，称为准晶体. 可以证明，准格子通常是具有严格周期性的高维格子以无理数为斜率向低维空间投影的结果. ① 二维 Penrose 格子是五维或六维立方格子沿某个特殊方向在二维空间上的投影. 用投影的方法可以简捷地解释准格子产生明锐衍射斑的问题，下面我们用二维正方格子向一维的投影作为示范.

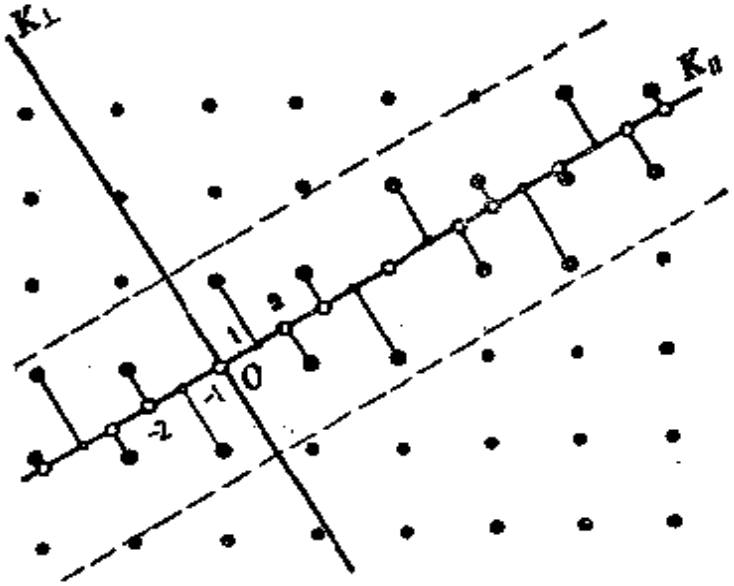
如图 1-8*a*，在二维正方格子的平面内选一斜线 L，作为物理空间，取每个被 L 穿过的正方格子的左下顶点（图中用空心小圈表示），它形成全体二维点阵的一个子集 $\mathscr{L}$，将 $\mathscr{L}$ 内的格点投影到 L 上，得到图中 L 上的一系列黑点，这就是我们需要的一维准格子（衍射屏）. 为简单计，取方格子的边长为 1. 可以看出，L 上相邻格点之间的距离只有两种：$d_1=|\cos\alpha|$ 和 $d_2=|\sin\alpha|$，在图中示出的那一段上，它们排列的顺序是 $\cdots d_1d_2d_1d_2d_1d_1d_2d_1d_1d_2\cdots\cdots$，只要 L 的斜率 $\tan\alpha$ 是无理数，这里就不会有周期性的规律. 取直角坐标轴 $r_{/\!/}$ 和 $r_\perp$，分别平行和垂直于 L，将二维格子的位矢 $\boldsymbol{R}_n$ 按此坐标系分解为 $R_{/\!/}$ 和 $R_\perp$ 分量. 子集 $\mathscr{L}$ 内各点 $R_{/\!/}$ 的集合记作 $\mathscr{L}_{/\!/}$，它们就是 L 上格点的坐标，$\mathscr{L}$ 内各点 $R_\perp$ 的集合记作 $\mathscr{L}_\perp$，这些投影位于图 1-8(*a*) $r_\perp$ 轴上介于两平行虚线之间的那段粗线段 $O_\perp$ 内，其长度 $\nu=|\cos\alpha|+|\sin\alpha|$. 设 $\mathscr{L}$ 内共有 N 个点，可以证明，由于 $\tan\alpha$ 为无理数，当 N 足够大时，它们在 $O_\perp$ 线段上投影是均匀密集分布的，从而具有线密度 N/ν.

现在我们看图 1-8*b* 所示的倒格矢空间. 对于单位边长的正方格子，其倒格子也是单位边长的正方格子，格点的位置代表二维

① V. Elser, *Acta Cryst.* **A42**, 36(1986).



(a) 实空间的投影



(b) 倒格矢空间的投影

图 1-8　二维正方格点在一维空间上的投影

点阵夫琅禾费衍射斑之所在. 以倒格矢 $\boldsymbol{K}=0$ 的地方(0 级衍射斑)为原点取直角坐标轴 $K_\parallel$ 和 $K_\perp$, 分别平行和垂直于 L. 物理空间 L 上一维准格子的衍射花样将沿倒格空间的 $K_\parallel$ 轴分布. 计算 $K_\parallel$ 轴上任意点 $\boldsymbol{K}$ 处的衍射振幅 $S(\boldsymbol{K})$是不容易的, 但由于 $\tan\alpha$ 是无理数,各倒格矢的 $K_\parallel$、$K_\perp$ 分量有一一对应关系, 全倒

格空间的点阵在 $K_{/\!/}$ 轴上的投影无一重叠，它们均匀密集地排列在 $K_{/\!/}$ 轴上，故对于 $K_{/\!/}$ 轴上任何坐标为 K 的点，总可找到许多无限靠近它的点，它们是二维倒格矢的投影．所以我们不必考虑普遍的 K 点，只需考虑这些投影处的衍射振幅，它们是容易计算的．

$$\begin{aligned} S(K_{/\!/}) &= \sum_{R_{/\!/}\in\mathscr{L}_{/\!/}} \exp(2\pi i K_{/\!/}R_{/\!/}) \\ &= \sum_{R_\perp\in\mathscr{L}_\perp} \exp(-2\pi i K_\perp R_\perp) \\ &= \frac{N}{\nu}\int_{c_\perp} \exp(-2\pi i K_\perp R_\perp)\mathrm{d}R_\perp \\ &\propto N\sin(\pi|K_\perp|\nu)/\pi|K_\perp|\nu. \end{aligned} \tag{1.5}$$

在上面的推导中，从第一行过渡到第二行，用到了式(1.4)和关系式 $\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{R}=K_{/\!/}R_{/\!/}+K_\perp R_\perp$；将对 $R_{/\!/}\in\mathscr{L}_{/\!/}$ 求和换为对 $R_\perp\in\mathscr{L}_\perp$ 求和，用到了 $R_{/\!/}$ 和 $R_\perp$ 之间的一一对应关系．最后一行未写等号，是因为这里省略了一个相因子，它对强度 $I(K_{/\!/})=|S(K_{/\!/})|^2$ 的计算是无关紧要的．

式(1.5)中的函数与光学中单缝衍射因子是一样的，大家比较熟悉．忽略一些小的起伏不计，粗略地说，$I(K_{/\!/})$ 随 $|K_\perp|$ 的增大而急剧减小，亦即，只有图 1-8*b* 中距 $K_{/\!/}$ 轴不远的倒格点的投影处(图中空心小圈)才有较大的衍射强度．$|K_\perp|$ 越小，强度越大(图中用较大的圈表示)．当 $|K_\perp|$ 大到一定范围之外(譬如说，图中两条平行虚线之外)，相应的 $K_{/\!/}$ 处衍射强度已低于探测仪器的灵敏度，可不再考虑．两虚线之间倒格点的投影是离散的，这表明，图 1-8*a* 中 L 上的一维准点阵将产生明锐的衍射斑．若一维点阵的分布完全随机，不会产生明锐衍射斑，因此，准周期性的点阵产生明锐衍射斑的结论，使我们有点意外．

现在回到 Penrose 点阵上来．图 1-9 所示是三维空间里的一个正二十面体，它共有 12 个顶点，我们用空心小圈表示它上半部

的 6 个顶点. 从二十面体的中心 O 引向这 6 个顶点，可得 6 个矢量，其中"1"是个 5 次轴. 将六维立方点阵沿适当方向投影到三维空间里，可以将六维立方格子的 6 个基矢投影到图 1-9 所示的那 6 个矢量的位置上. 注意: 这里所说的六维立方格子的投影，既在物理空间，也在倒格空间里进行，6 个基矢的投影方向是一致的. 在物理空间内，用这 6 个基矢可以构成三维准周期的 Penrose 格子，新近发现的准晶体相，就具有这种准二十面体的结构. 在倒格空间里，中央对应 $K=0$ 的 O 点是 0 级衍射斑. 在图 1-8*b* 中，1，2 和 -1，-2 各点是二维 K 空间原点近邻的一维投影，那里具有较大的衍射振幅和衍射强度. 同理，在图 1-9 中 1, 2, 3, 4, 5, 6 和它们的对角顶点 -1，-2，-3，-4，-5，-6 是六维 K 空间原点近邻的三维投影，这里也具有较大的衍射振幅和衍射强度. 其它衍射振幅较强的点将同样地对称性分布在它们的周围. 如果进一步投影到垂直于与图 1-9 中矢量"1"的平面上，就得到二维的 Penrose 格子，它的衍射花样将有 5 次和 10 次的旋转对称性 (参

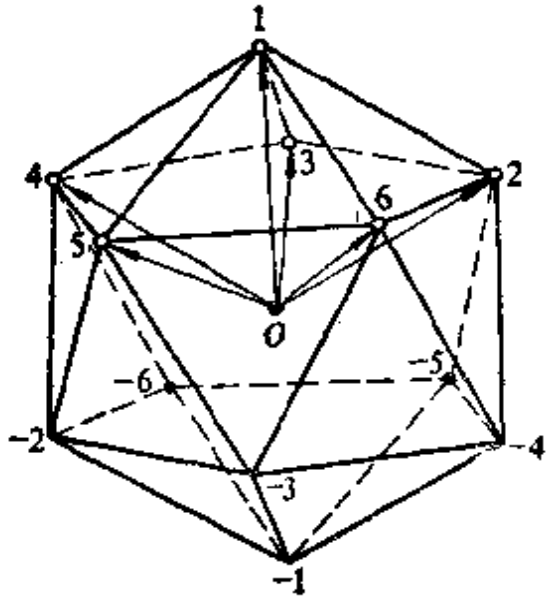


图 1-9　二十面体对称性

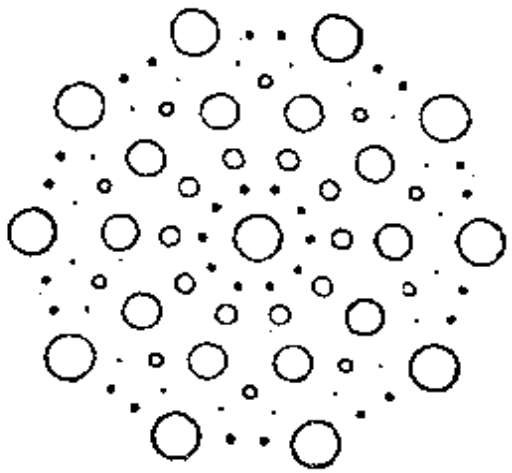
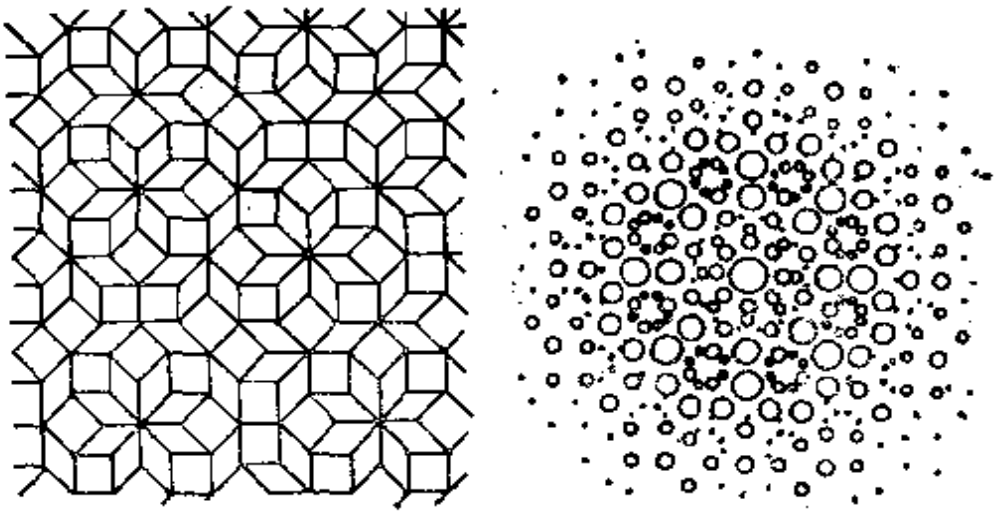


图 1-10　二十面体准晶格的十次对称衍射图
(图中圆圈的大小代表衍射斑的强弱)

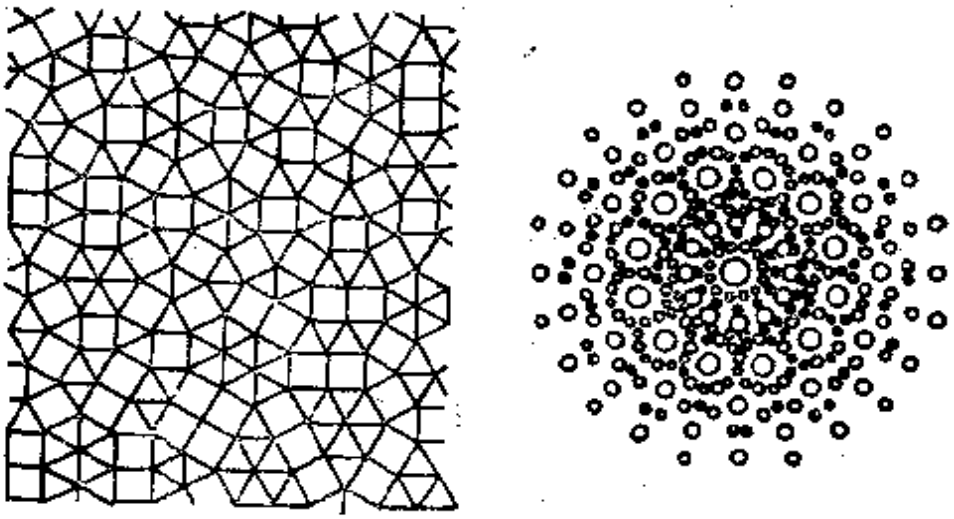
见图 1-10).

继 5 次和 10 次旋转对称的准晶发现之后，近年来又发现 8 次[①]和 12 次[②]旋转对称的准晶体(参见图 1-11 和 1-12).



(a) 网格　　(b) 衍射图

图 1-11　8 次轴准晶



(a) 网格　　(b) 衍射图

图 1-12　12 次轴准晶

① N. Wang, H. Chen, K. H. Kuo, *Phys. Rev. Lett* **59**, 1010(1987); N. Wang, K. K. Fung, K. H. Kuo, *Appl. Phys. Lett*. **52**, 2120(1988).

② T. Ishimasa, H. U. Nissen, Y, Fukano, *Phys, Rev. Lett*, **55**, 511(1985); H. Chen, D. X. Li, K. H. Kuo, *Phys. Rev. Lett*. **60**, 1645(1988).

3. 标度变换

“标度不变性”的概念对许多读者是比较生疏的，但它是近年来物理学中一个饶有兴味的问题，我们这里也花些笔墨作一定的介绍.

所谓“标度变换”，通俗地说，就是放大或缩小. 乍看起来，在物理世界中具有标度不变性的事物并不那么容易找到. 海洋中却生长着一种甲壳动物，叫做鹦鹉螺(nautilus)，它们美丽的外壳为标度不变性提供了一个很好的范例(见图 1-13). 在数学中可以用平面极坐标(r, θ)描述一条螺线，具有标度不变性的函数关系是 $\ln r \propto \theta$，这时当整个图形放大或缩小时，只需转过一个角度，

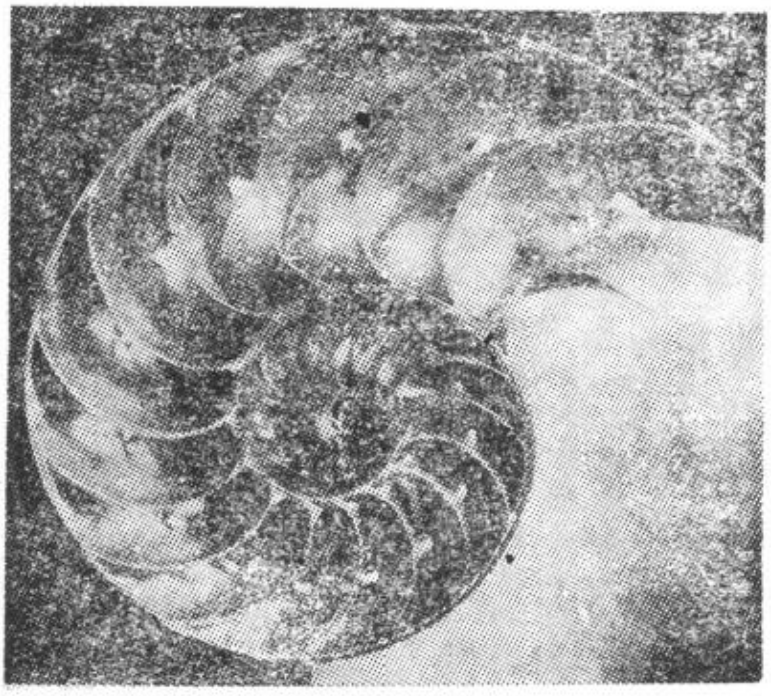


图 1-13　呈对数螺线状的鹦鹉螺壳具有标度不变性

就可与原来的曲线重合. 鹦鹉螺壳的剖面显示出的正是这种对数螺线. 早在 1683 年笛卡儿就描述过这种曲线，因为.这种曲线的切线与径矢之间夹角处处保持恒定，笛卡儿叫它“等角螺线”(equiangular spiral). “对数螺线”的名称是瑞士数学家伯努利

(J. Bernoulli)取的，是他首先发现这曲线的标度不变性. 他感到这曲线具有如此美妙的性质，嘱咐要把它铭刻在自己的墓碑上，并附上一句颂词. Eadem mutata resurgo(图 1-14)，意思是"虽然改变了，我还是和原来一样！"是造物主无边的智慧赋予螺壳这样一种美妙的属性吗？在自然界中动物和植物生长时细胞分裂的规律是一个变两个、两个变四个、四个变八个，等等，即生物的生长服从指数律，因而在某些动物和植物身上可以找到对数螺线，这绝不是偶然的. 鹦鹉螺壳的形状不是绝无仅有的天然对数螺线，如果我们仔细观察向日葵的花盘(图 1-15)，就会发现，一粒粒葵花籽在花盘上也排列出很多条相互交织着的对数螺线. 细心的读者一定会在自然界里观察到更多的对数螺线.

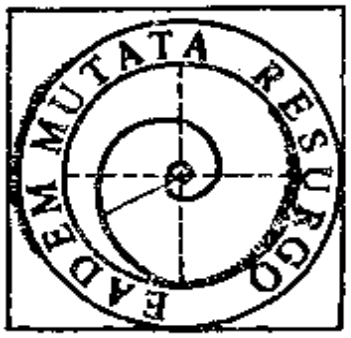


图 1-14 伯努利墓碑上的对数螺线铭文

现在让我们回到物理世界来. 其实，在物理世界中并不乏标度不变的事物. 一个重要的例子，是凝聚态物质在相变临界点附近所表现的行为. 在临界点附近，涨落的关联长度趋于无穷，由有限晶格常数引起的所有效应都被抹平，这里不再有特征的尺度，热力学函数将具有标度不变性. 这正是威尔孙重正化群的理论基础，为此他获得了 1982 年的诺贝尔物理学奖金.

上述例子显得有点深奥，在物理世界中较通俗的例子也是有的，不过"不变性"有时不那么严格，是在统计意义下的不变性. 几乎在每一本分子物理的教科书中都能找到下边这张图 (图 1-16)，图中的点是在显微镜观察下，每隔 30 秒所记录下来的几个布朗微粒的位置. 应注意：点与点间的联线并不是微粒的轨迹. 微粒的真正轨迹是一条曲曲弯弯的线. 如果我们将这条曲线的某个局部放大，则更细微的曲折开始显露出来，得到的曲线并不显得比原来更

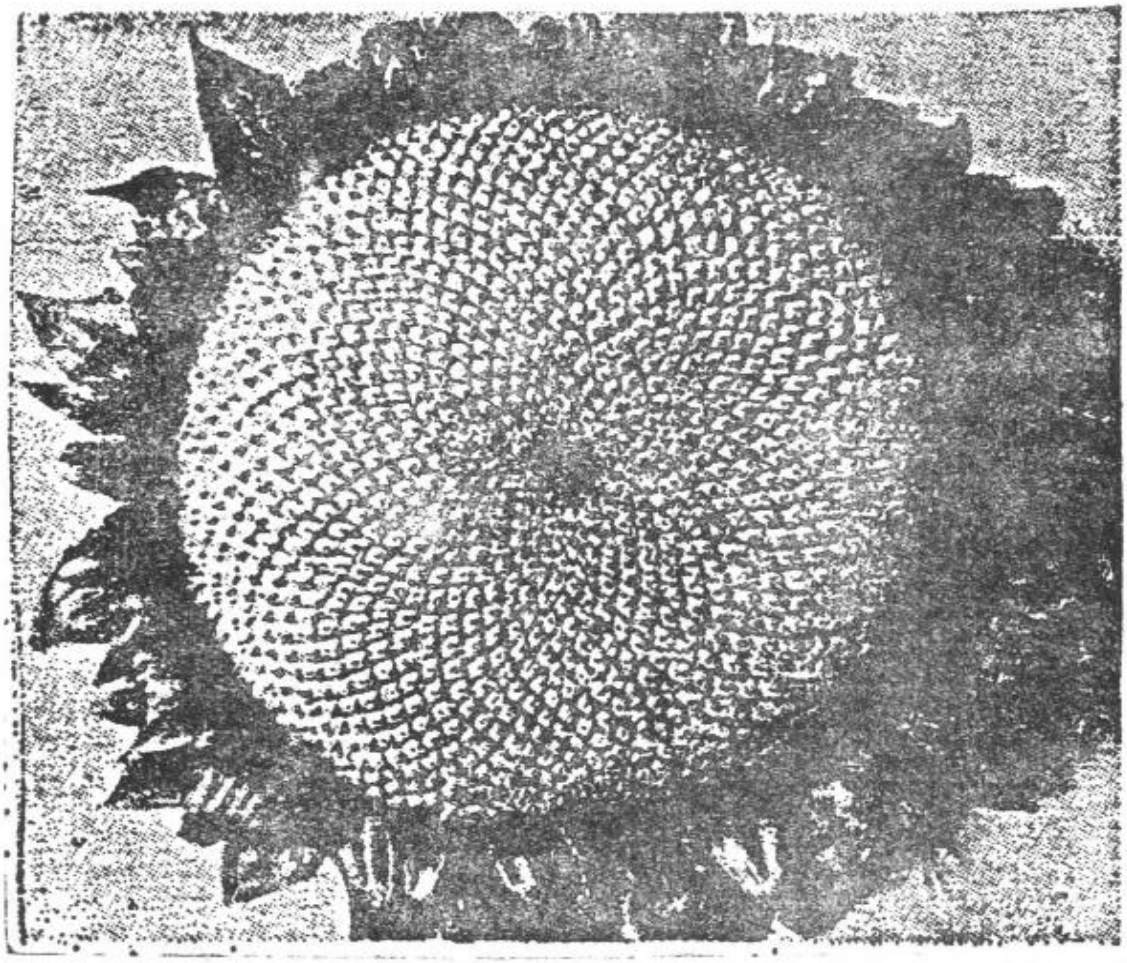


图 1-15　向日葵花盘上的对数螺线

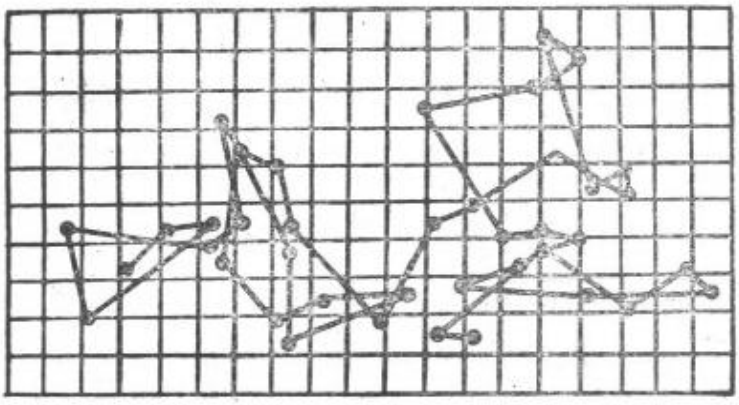


图 1-16　布朗运动

直些，而是一条与原来类似的曲曲弯弯的线．这是一种在标度变换下呈现的自相似现象．

作为比这更通俗的例子，可以考察某个国家的海岸线长度．严格说来，海岸线的长度与你采用的比例尺有关．在小比例尺的地

图上，海岸线上许多小的曲折被拉直了，总长度显得短了．随着比例尺的不断放大，一批批越来越小的海湾显露出来，海岸线的总长度也就越变越长．这过程实际上是无穷尽的，即使绘制一平方米，甚至一平方厘米范围内的地图，由海滩上那些大大小小的砂粒组成的海岸线仍旧是曲曲弯弯的．亦即，海岸线在标度变换下具有无限嵌套的自相似性．在无限放大比例尺的情况下，海岸线的长度将趋于无穷．

通常说，曲面是二维的，曲线是一维的，二维的曲面有一定的面积，一维的曲线面积为零，但有一定的长度．象上述海岸线那样的形体，它们没有面积，但长度是无穷大，它们的维数介于 1 和 2 之间，不是整数．这种具有分数维的形体，叫做“分形”或“分形体”，英语是 fractal，这个字是 Mandelbrot 造出来的①，他写道：“浮云不呈球形，山峰不是锥体，海岸线不是圆圈，树皮并不光滑，闪电从不沿直线行进”．他看到带有分形性质的事物在自然界是相当普遍的．

下面对分数维的概念作一简单介绍．先想一想我们怎样在日常生活中判断一个几何对象的维数．取一个正方形，把它的每个边长放大 3 倍，我们将得到 $3^2=9$ 个和原来一样的正方形，于是我们说，这个图形是 2 维的；取一个立方体，把每个边长放大 3 倍，就会得到 $3^3=27$ 个原来的立方体．在一般情形下，把一个 d 维的几何对象每一维的尺寸都放大 l 倍，我们就得到 k 个原来的几何对象，即 $l^d=k$，或

$$d=\frac{\ln k}{\ln l}, \tag{1.6}$$

---

① B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, San Francisco, 1982；于渌，郝柏林，《相变和临界现象》，科学出版社，1984；黄畇，《物理》**15**(5)，269(1986)；姚凯伦，《物理》**15**(11)，663(1986)．

这个式子完全可以推广到非整数的空间维数上，它是1919年数学家 Hausdorff 给维数下的定义，后称 Hausdorff 维数.

怎样设想具有非整数维的几何对象呢？这里我们只举一个例子. 把一个立方体的每个面等分成9块，挖掉中间的一块. 这样一来，27个小立方体中的7个被挖掉了，还剩下20个. 对于这20个小立方体如法炮制（见图1-17），并把这过程无穷地重复下去. 最后剩下的是一块遍体镂空的海绵状物，叫做 Sierpinski 海绵. 它是多少维的几何对象？试取图1-17中左下角的一个边长为1/3的立方体，把尺寸放大 $l=3$ 倍，即得到整个图形，其中包含 $k=20$ 个边长为1/3的同样的立方体. 于是 Sierpinski 海绵的 Hausdorff 维数应为

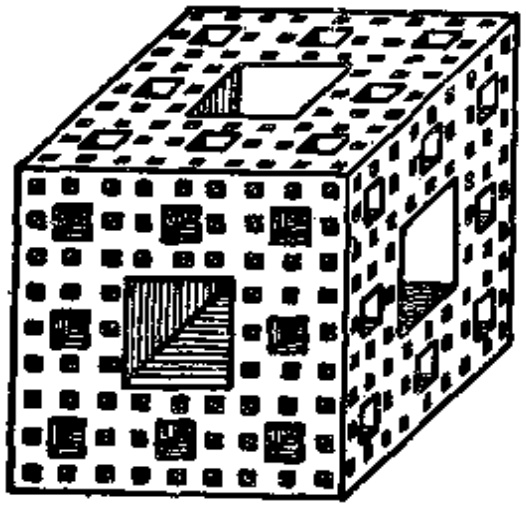


图 1-17 Sierpinski 海绵的空间维数是 2.7268…

$$d=\frac{\ln 20}{\ln 3}=2.7268\cdots.$$

另一个重要的分形例子是 Cantor 集合. 如图1-18a，我们取一线段（为了画得清楚，可用一段有粗细的棒代替，如图），将它等分三段，除去中间那段，留下左右两段；下一步将剩下的两段如法炮制，即三等分后除去中间一段. 将这操作无限地重复下去，剩余的点集，叫做 Cantor 集合. 用与上面同样的办法，可以论证，Cantor 集合的 Hausdorff 维数是

$$d=\frac{\ln 2}{\ln 3}=0.6309\cdots.$$

说到 Cantor 集合，顺便谈谈它的积分. 设想图1-18a中原来那条“棒”具有均匀的线密度，每除去1/3时，就把其质量均匀地加在剩下的两段上. 这样，当这种操作持续到无穷，“棒”收缩到

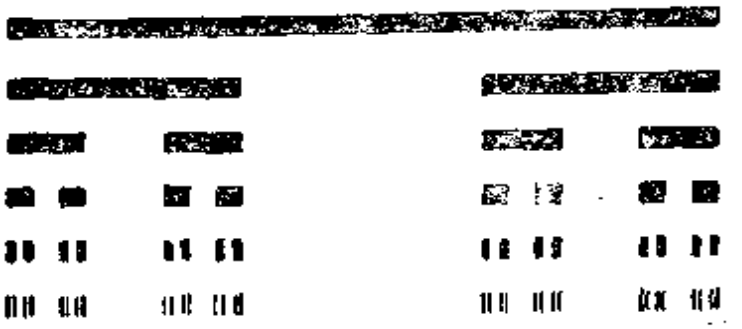
Cantor 集合 C 上时，C 上每点的线密度趋于 ∞，但总质量不变. 如果把“棒”的取向作 x 轴，$C(x)$ 代表 x 点的线密度，则

$$C(x)=\begin{cases}\infty, & x\in C,\\ 0, & x\notin C.\end{cases} \tag{1.7}$$

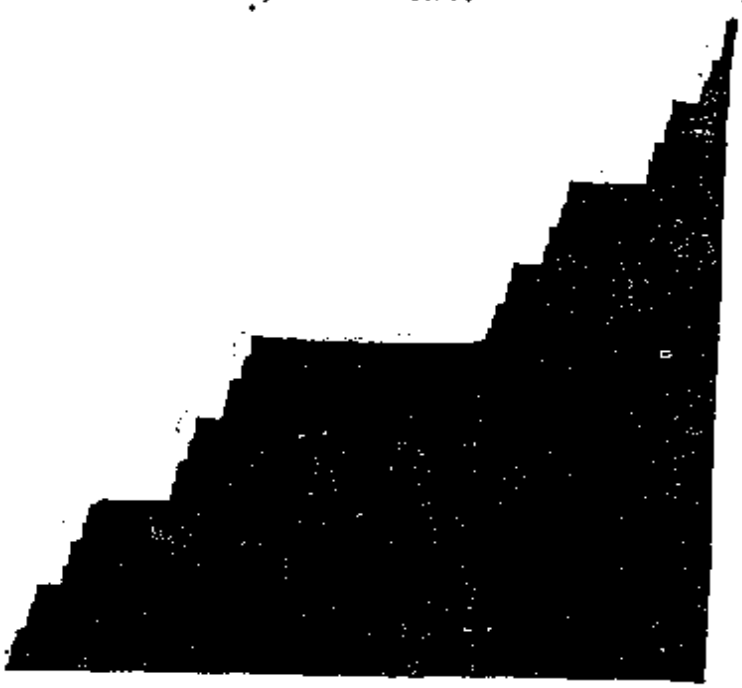
$[0, x]$ 区间的质量为

$$\mathrm{d}(x)=\int_0^x C(x)\mathrm{d}x. \tag{1.8}$$

函数 $\mathrm{d}(x)$ 的曲线(见图 1-18b)在集合 C 的每个点上有一垂直跃



(a) Cantor 集合



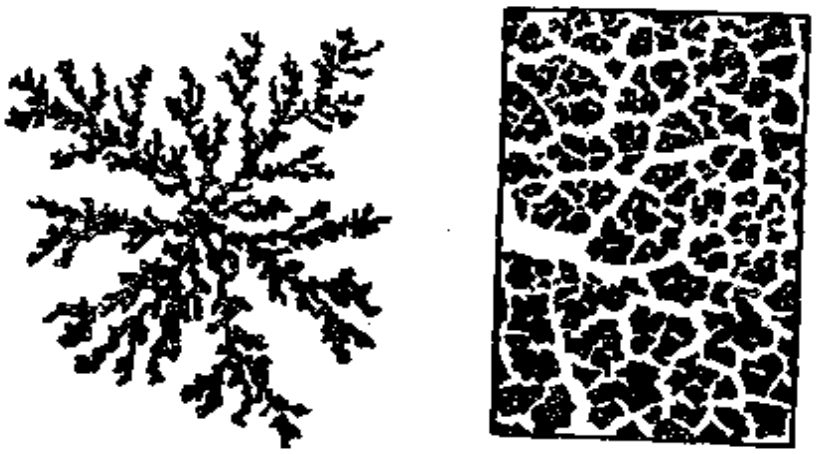
(b) 魔鬼楼梯

图 1-18 Cantor集合及其积分

变，在其余地段则是平台．这类函数或曲线叫做魔鬼楼梯(devil's Staircase)．难道象 $C(x)$ 和 $d(x)$ 这类稀奇古怪的函数，除了用来作"脑筋体操"外，还能有什么物理意义吗？的确不错，在物理学里许多地方，如振动中的同步锁相、固体中的长程周期结构、流体中的 Rayleigh–Bénard 对流、多孔介质中的入侵逾渗(invasion percolation)等，都出现魔鬼楼梯的影子．

也许已经离题太远了，让我们回到"标度不变性"问题上来．Sierpinski 海绵和 Cantor 集合的例子表明，分形体在标度变换下呈现无限嵌套的自相似性，通俗地说，就是"部分和整体相似"．上述数学中分形的标度不变性是严格的，然而自然界中多数分形体(如海岸线、布朗粒子的轨迹)是随机的，它们的标度不变性只有在统计意义下才成立．

近年来分形的理论引起科学界广泛的兴趣，人们把它运用到许多实际问题上，其范围从电化学沉积、薄膜形态、树状凝结、介电击穿、液体的粘性爪进(viscous fingering)，到材料的龟(音 jūn)裂，等等．无论在计算机模拟和实验方面，都取得一些有意思的结果．图 1–19*a* 是一个应用非常广泛的分形凝聚模型，叫做扩散置限聚集



(*a*). DLA　　(*b*). 龟裂

图 1–19　计算机模拟的分形

(diffusion-limited aggregation, 简写作 DLA)；图 1-19b 是计算机模拟的龟裂图样. 它们都具有在标度变换下的自相似性质. 对于二维空间里模型，它们的 Hausdorff 维数都接近 1.7.

4. 时间平移和反演

一个静止不变的体系对任何间隔 Δt 的时间平移表现出不变性，而一个周期性变化的体系(例如单摆)只对周期 T 整数倍的时间平移不变. 它们都具有一定的时间平移对称性.

把时间 $t \to -t$ 的变换，叫做时间反演操作，这相当于时间倒流. 在现实中时间是不会倒流的，但我们可以设想将现象用录相机录下来，然后倒过来放映. 日常生活中的大多数现象是不具有时间反演对称性的. 当我们把摄制的录相带倒放时，立即会看出与正常过程不同的滑稽场面：人倒退着走路；弥漫在空气里的烟逐渐被收拢到烟斗中去；地上的碎瓷片飞起来，跳到桌子上，自己拼凑成一只完整的茶杯；……. 但也有少数理想的体系具有时间反演不变性，无阻尼的单摆就是这样的例子，单摆的录相片正、反放映，看不出什么区别.

在时间反演操作下，不同的物理量表现出不同的性质. 例如，在时间反演操作下速度是要反向的，但加速度不变. 经时间反演，自由落体变成上抛体，但两者的加速度都是向下的重力加速度 g. 所以加速度具有时间反演不变性(与此相联系地，力也是如此). 武打电视片的摄制者常利用这一点，让演员从高处跳下，拍摄下来倒着放映，就可以表现一个人从平地一跃而起，跳上高墙的场面. 但是拍摄这类镜头时，演员应穿紧身衣裤. 在电视连续剧《西游记》里有过这样一个场面，在乌鸡国里妖道全真与孙悟空斗法时，他纵身一跃，跳上身背后的假山. 这时宽大的道袍竟然飘逸而起，于是倒拍的特技露了破绽. 殊不知空气的阻力与速度的方向相反，而速度不是时间反演不变的.

在电磁学里，电荷是时间反演不变的，电流就要反向；电场 $\boldsymbol{E}$ 是时间反演不变的，磁场 $\boldsymbol{B}$ 就要反向。这样的例子还可举出很多.

在探讨时间平移不变性时，应注意区分个别现象和物理定律，区分微分方程和它的初始条件. 在探讨时间反演不变性时，除了上述区别外，还应注意区分宏观规律和它的微观动力学基础. 下面举些简单的例子来说明.

简谐振子的运动方程(它代表物理定律)

$$m\ddot{x}+\gamma\dot{x}+kx=0 \tag{1.9}$$

对任何间隔 Δt 的时间平移都是不变的. 但给定了初始条件，它的解描述的过程是阻尼振动. 我们具体看到每次激发起来的运动，振幅由大变小，没有时间平移不变性. 然而，我们把一个弹簧振子挂在那里，今天做实验观察到的现象，明天还能重复；牛顿在17世纪发现的万有引力定律，今天仍旧适用. 这就是物理定律的时间平移不变性.

式(1.9)中加速度项 $m\ddot{x}$ 和位移项 kx 是对时间反演不变的，而正比于速度的阻尼项 $\gamma\dot{x}$ 在时间反演下反号，所以有阻尼的过程在时间上是不可逆的. 我们再看扩散方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0,\ \boldsymbol{j}=-D\nabla\rho, \tag{1.10}$$

式中 ρ 和 $\boldsymbol{j}$ 分别是质量密度和质量流密度，D 是扩散系数，第二式称为斐克(Fick)定律. 在斐克定律中等式左端 $\boldsymbol{j}$ 在时间反演下反向，而右端不变，故扩散也是在时间上不可逆的过程. 以上这些不可逆的方程都是描述宏观过程的.

如果对物理系统进行微观描述，我们看到的是许许多多的微观粒子，它们服从的物理定律，如牛顿运动方程，麦克斯韦方程，以及量子力学的规律等，几乎全都是在时间反演下不变的①.

那么，当我们从微观世界逐步过渡到宏观世界时，走到哪里我们将遇到二者的分野？设想我们有一架出色的变焦摄影机，我们要用它来拍摄一个人抽烟斗的影片，以获取从微观到宏观一系列场面的镜头．起初，我们只能看到空气分子和烟粒子到处乱飞，相互碰撞着．若此时我们把拍摄下来的影片倒着放映，我们看不出与正着放映有什么区别．现在，我们让镜头对准较大的视场．个别粒子的图象看不清了，我们看到的是涨落起伏的烟团．倘若这时不告诉你影片是正着还是倒着放映，你看得出来吗？这就难说了．当视场大到一定程度，你看到烟缕不是在扩散，而是在聚拢时，你会怀疑影片在反演．最后，当变焦镜头拉开到把整个宏观画面拍摄进去时，你一看到烟斗从空气中把烟一缕缕地吸回去，立即可以肯定，影片在倒着放映．在从微观向宏观过渡的进程中，我们的观察和感受发生了怎样的变化？这里发生的事，是清洗掉个别粒子微观运动的信息，而代之以其平均运动，后者是概率统计规律在起作用．宏观的不可逆性来自概率统计性，并非源于微观动力学，这就是问题的实质．

厄任费斯特夫妇(P. Ehrenfest & T. Ehrenfest)两人都是物理学家，他们提出一个生动的比喻(见图 1-20)，用以说明气体扩散的统计性质．一只狗身上有许多跳蚤，另一只狗身上没有跳蚤．经过一段亲昵的相处后，它们身上的跳蚤将变得差不多一样多，对每只跳蚤来说，它可在两只狗之间自由地跳来跳去，行踪完全可逆．但是对狗来说，染上了跳蚤之后，就不会自动消除．狗的处境是不可逆的．这正是微观世界和宏观世界不同命运的绝妙写照．“君不见黄河之水天上来，奔流到海不复回？君不见高堂明镜悲白发，朝如青丝暮成雪？”诗人哀叹韶华如流，人生易老，这反映的是宏观

① 迄今为止发现对时间反演不变性稍有破坏的微观过程，只有弱相互作用的 K 介子衰变，参见§2末第44页．

世界的命运和情感. 组成生命的个别原子和分子决不担心自己会老化,这里什么都是可逆的，对宏观世界发生的一切,可以完全漠不关心.

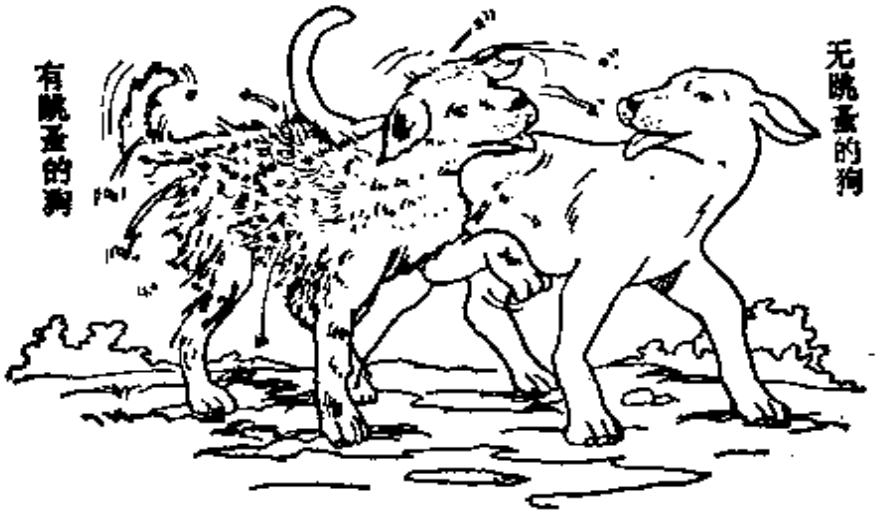


图 1-20　厄任费斯特的狗和跳蚤

5. 置换对称性

将三个阻值相等的电阻器并联,无论将它们如何对换,电路的状态都是等价的. 这是一个置换对称性的例子. 我们说"状态等价"而未说"状态不变",是因为从电路的角度看，只要求三个电阻器阻值相等,并不要求它们的形状、颜色、以及质料等完全一样.

世界上没有绝对雷同的宏观物体，但同类的微观粒子却是全同的. 哲学家莱布尼兹早就给出了全同性的定义：如果无法确认两个物体之间的差别,它们就是全同的. 它意味着,在许多东西中若交换两个全同物体的位置，其物理状态是保持不变的. 在经典物理学中，全同物体的这种置换对称性，没有观测到的效应. 但是,随着量子理论的建立,不可分辨的全同性获得了非凡的重要意义. 它蕴涵着一种新的力存在，这就是"交换力". 如果没有这种交换力存

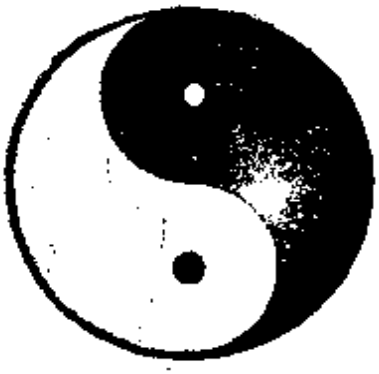


图 1-21　阴阳图——只对联合变换对称之一例

在，就不会有我们现在所了解的化学，分子和原子都不能存在，从而我们自己也不存在了.有关交换力的问题，我们不在这里详细讨论.

下面暂时不再介绍更多类型的对称性了，只是在结束本节时指出，相继进行两个或两个以上对称变换，由此构成的联合变换也必然是对称变换；然而反过来不一定正确，有时联合变换是对称变换，而构成它的每个分解动作却不单独构成对称变换. 我国古老的阴阳图就是这样的例子（见图 1-21）；围绕中心旋转 180°，相当于黑白互换，只有两个变换联合起来，才能使图形完全不变. 另一个精彩的例子是下面一张骑士图案（图 1-22），这图是荷兰画家



图 1-22　Escher 的骑士图案——另一个只对联合变换对称的例子

M. C. Escher 设计的，曾被杨振宁在他的《基本粒子发现简史》一书中引用过. 对于这幅图案来说，单纯的镜象反射和单纯的黑白互换，都不能使图案保持不变，只有二者联合起来（也许还得加上必要的平移），才构成它的对称操作. 下面我们将看到物理学中许多联合对称操作的例子.

§2. 因果关系　对称性原理

1. 原理和举例

现在我们来讨论对称性与自然规律(物理定律)之间的关系. 自然规律反映了事物之间的因果关系. 所谓"因果关系", 就是在一定条件下会出现一定的现象. 这时, 我们把前者(条件)称为"原因", 后者(现象)称为"结果". 对于一条稳定的因果关系来说, 最重要的有两条: 可重复性和预见性. 其实这就是科学本身存在的必要前提. 以上两条性质要求"相同的原因必定产生相同的结果", 但世间的事物没有绝对相同的(除了一件事物与其自身), 所以我们把语气放宽一些, 用"等价"一词代替"相同", 把因果关系归结为下列公式:

$$\text{等价的原因} \longrightarrow \text{等价的结果}.$$

这里的箭头表示"必定产生". 这就是因果性的等价原理. 下面举个例子. 我们在气轨上作两体碰撞的实验. 这些实验可以由一些学生在星期一作, 也可以由另一些学生在星期五作, 他们都能验证动量守恒定律. 这类实验可以在北京作, 也可以在上海作, 同样可以获得预期的结果. 这里没有摩擦的气轨保证了等价的条件. 它必定产生等价的结果——动量守恒.

看了上述例子, 读者也许已经能联想到对称性与因果性之间的关系. 从星期一到星期五, 这是时间平移操作; 从北京到上海, 这是空间平移操作. 实验条件(仪器)是等价的, 这意味着"原因"对于上述操作(时间平移或空间平移)对称. 实验现象(动量守恒)也是等价的, 这意味着"结果"也是对称的. 所以用对称性的语言来说, 上述等价原理可改写成下列公式:

$$\text{对称的原因} \longrightarrow \text{对称的结果}.$$

应注意, 因果关系的等价原理中箭头是单向的, 即只有"等价的原

因必定产生等价的结果”，但等价的结果有可能来源于不等价的原因．从而上列公式中的箭头也是单向的，即对称的结果也有可能来源于不对称的原因，所以我们说：

> 原因中的对称性必反映在结果中，即结果中的对称性至少有原因中的对称性那样多．

反过来应该说：

> 结果中的不对称性必在原因中有反映，即原因中的不对称性至少有结果中的不对称性那样多．

以上原理叫做“对称性原理”，它是皮埃尔·居里(Pierre Curie)于1894年首先提出的①．下面举几个例子．

首先，我们试用对称性原理来论证：在有心力的作用下，行星的轨道一定在一个平面内．我们假设太阳和行星都是理想的球体，作用力 $\boldsymbol{f}$ 沿两球心的联线．设某时刻行星具有速度 $\boldsymbol{v}$，则 $\boldsymbol{f}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 两个矢量决定一个平面，即图 1–23 的纸平面．以上所述的条件就足以决定行星以后的运动了，亦即，这体系(太阳和行星)的全部原因（力 $\boldsymbol{f}$ 和速度 $\boldsymbol{v}$)对图 1–23 的纸平面具有镜象反射对称性．根据对称性原理，结果(行星的轨道)至少也具有这种对称性，故它不可能向某侧偏斜而离开此平面．

根据同样的道理，我们可以论证，当我们抛射一个物体时，若没有其它原因，抛体的轨迹不会偏离其初速度 $\boldsymbol{v}_0$ 与重力 $m\boldsymbol{g}$ 所决定的铅直平面．如果我们发现抛体的轨迹朝某一侧偏斜(结果中出现了不对称性)，我们相信，一定存在对此平面不对称的原因，譬如有横向的风．这是上述对称性原理反过来的应用．在足球场上我们常会看到，球员踢出的球会拐弯(特别是在罚角球时)，这种球

① P. Curie, *Journal de physique*, (Paris), 3rd series, Vol. 3, pp395—415(1894)

俗称"香蕉球". 赛场上没有风，球偏斜的方向可以由踢球的人控制. 这是什么原因呢？也许我们不懂流体力学，不懂得球与空气的相互作用是怎样使球偏斜的，但是，若我们懂得对称性原理，我们就敢肯定，在球离开球员的脚之前就已存在不对称的原因了. 仔细找找原因，我们就会发现，香蕉球踢出时必定是旋转的，它旋转的方向决定了向哪边偏斜. 旋转——这就是对初始的铅直平面左右不对称的因素，轨迹的偏斜正是这个不对称因素的反映. 也许有人认为，这不对称的因素太细微了，不易察觉. 的确如此，场外的观众是无法察觉到球的旋转的，但它的存在也是确实的，踢球的人完全明白这一点.

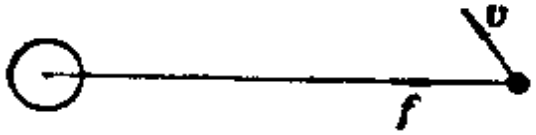


图 1-23　在有心力的作用下行星的轨道在一个平面内

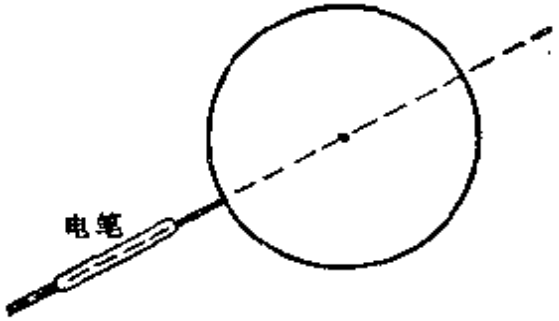


图 1-24　为一均匀球体充电

在分析了上面的力学例子之后，我们再分析一个电学的例子. 设有一均匀球体(暂不假定它是导体还是绝缘体)，用一枝电笔给它充电. 假设充电的方式是比较对称的，譬如，电笔通过一根导线与很远的一个带电体相联，导线与电笔都沿此球的径矢方向布置，即充电时它们与球体表面垂直，延线通过球心 (图 1-24)，充电后将电笔与导线撤离到很远的地方，试问电荷在均匀导体上怎样分布. 球体本身的几何形状和充电的方式构成了本问题的全部原因，它具有轴对称性. 根据对称性原理，电荷在均匀球体上的分布

至少也具有这种轴对称性. 但是我们知道,若此球体是导体,电荷将在它的表面均匀分布, 此种分布具有球对称性. 它包含了上述轴对称性, 但多于轴对称性. 这并不违背对称性原理. 因为原理说,结果中的对称性至少和原因中的对称性一样多,但不排斥比它多.

现在让我们对上述同一问题用稍微不同的观点来分析. 假定我们不知道这球体当初是怎样充电的, 或者我们故意忽视这个问题. 仅就体系的几何形状而言,它应具有球对称性. 是否在此均匀球体上的电荷分布必定具有球对称性?从电学原理我们知道,除非此球是导体,我们不能肯定电荷的分布具有球对称性. 是否在这种情况下对称性原理不灵了?是的. 要上述对称性原理成立,还需有一个条件,即问题中所给的"原因"必须是充分的,它能将结果唯一地确定. 在绝缘体上电荷的分布与充电方式有关, 不给出充电方式,不能唯一地确定电荷的分布,上述对称性原理也就不灵了. 对于导体,其上电荷的分布与充电方式无关,给定其形状即可唯一地确定其上电荷的分布,从而上述对称性原理又灵了.

从上面的例子我们看到, 当给出的"原因"不足以唯一地确定"结果"时,不能用对称性原理. 然而,如果在这种情况下我们将可能出现的全部"结果"放在一起考虑, "原因"中所表现的对称性就会恢复. 举个最简单的例子,考虑下列代数方程

$$x^2-1=0, \tag{1.11}$$

显然此方程对 $x\to -x$ 的变换是不变的,即它对于这种变换是对称的. 但是式(1.11)的两个根 $x=\pm 1$ 中哪一个对上述变换都不对称. 这是因为我们所给的"原因"(方程)不足以唯一地确定"结果"(根). 然而,此方程全部根的集合仍具有方程式本身的对称性. 这类例子在物理学中也是屡见不鲜的. 例如氢原子的哈密顿量具有球对称性,但并非每个波函数都具有那样高的对称性. 然而把所有

波函数放在一起组成一个集合，总体上看，它们又恢复了球对称性．所以，在不存在唯一性的情况下，可将对称性原理的表述修改如下：

> **原因中的对称性必反映在全部可能结果的集合中，即全部可能结果的集合中的对称性至少有原因中的对称性那样多．**

这样一来，对称性原理又可以用了．

例题 1　简谐振动的微分方程为

$$\ddot{x}+\omega^2 x=0,\ (\omega\text{——给定常量})$$

对下列哪些变换，此方程具有不变性？

(a) 时间反演　(b) 时间平移　(c) 时间膨胀

(d) 空间反射　(e) 空间平移　(f) 空间膨胀

试验证，此方程的通解(即所有可能解的集合)

$$x=x_0\sin(\omega t+\varphi),\ (x_0,\varphi\text{——任意常量})$$

具有同样的对称性．

解　微分方程对(a)、(b)、(d)、(f)具有不变性．为验证通解具有相应的不变性，相当于证明，在该变换下，只需将任意常数 x_0，φ 换个写法，即可使解的形式保持不变．实际上，(a)$t\to -t$ 时，令 $\varphi'=\pi-\varphi$，(b)$t\to t+\Delta t$ 时，令 $\varphi'=\varphi+\omega\Delta t$，(d)$x\to -x$ 时，令$\varphi'=\pi+\varphi$，(f)$x\to ax$ 时，令 $x_0'=ax_0$，都可保通解形式不变．

在电磁学课程里经常使用对称性分析的方法，这可使问题大大简化．不过，那种对称性分析通常是在定律已知的基础上进行的．例如，根据库仑定律，我们知道点电荷的电场沿径矢方向，从而利用对称性我们可以得出无限长均匀带电直线的电场在垂直面内沿径矢方向的结论；又如，由于我们知道了毕奥-萨伐尔定律，利用对称性我们可以肯定，无穷大均匀载流平面的磁场与此面平行且垂直于电流．然而，利用本节上面叙述的对称性原理，我们能够在不知道定律的情况下判断某些矢量的方向．下面举一个例子．

例题 2 考虑一根无限长载流导线，其旁有一点电荷 q，它以速度 v 平行于电流方向运动．试利用对称性原理分析电荷受力的方向．

解 这问题里所给的体系有多种对称性操作("因"的对称性)，在这些操作的变换下电荷所受的力 f 应该不变("果"的对称性)．我们的任务就是要寻找那些有助于判断 f 的方向的对称操作．

取坐标系如图 1-25，z 轴与电流平行，x 轴沿导线到电荷的垂直联线．我们取的第一个对称操作是以 $x=0$ 平面为镜面的空间反射 P_x 加上围绕 z 轴的 180° 旋转 R_z(图 1-25a)．不难看出，在此联合操作下点电荷 q 的位置复原，而载流直导线和速度 v 始终未变，即 P_x+R_z 是这体系的一个对称操作．现在看 f 各分量的变换

$$f'_x \equiv P_x(f_x) = -f_x,\ f'_y \equiv P_x(f_y) = f_y,\ f'_z \equiv P_x(f_z) = f_z;$$
$$f''_x \equiv R_z(f'_x) = -f'_x = f_x,\ f''_y \equiv R_z(f'_y) = -f'_y = -f_y,$$
$$f''_z \equiv R_z(f'_z) = f'_z = f_z.$$

但根据对称性原理应有

$$f''_x = f_x,\ f''_y = f_y,\ f''_z = f_z.$$

可以看出，对于 y 分量前后结论矛盾，除非 $f_y=0$．

我们取的第二个对称操作是以 $z=0$ 平面为镜面作空间反射 P_z 加上时间反演 T(见图 1-25b)．电流在空间反射和时间反演操作下的行为与速度一样，在 P_z+T 的联合操作下方向都将复原，即这也确是体系的一个对称操作．力 f 的空间反射和时间反演性质与加速度相同，对于 z 分量，我们有

$$f'_z \equiv P_z(f_z) = -f_z,\ f''_z \equiv T(f'_z) = f'_z = -f_z.$$

但对称性要求 $f''_z = f_z$，故二者矛盾，除非 $f_z=0$．

由此可见，力 f 的唯一不为零的分量只能是 f_x，即 f 只可能沿 $\pm x$ 方向．

如果读者学过洛伦兹力的公式，这问题中 f 的方向本来是可以立刻得到的．上面的例子表明，即使不知道具体的物理定律，仅仅根据对称性原理，我们也能走得相当远．那么，这是否意味着，有关的对称性(如空间反射、时间反演，转动等)对定律(如洛伦兹力公式)可能采取的形式，给予相当的限制？是的．上面的推理过程已隐含着一个假定，即电磁学的定律是具有空间反射、时间反演和转动不变性的．否则推论会与事实相悖．由此可见，自然界的规

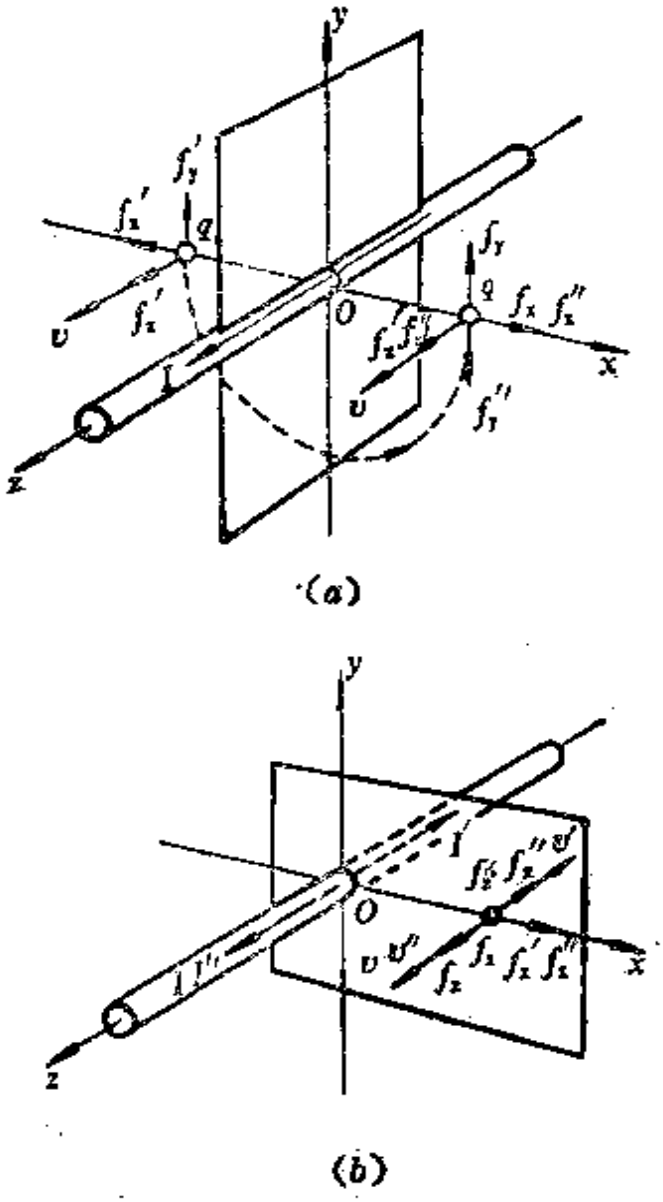


图 1-25　无限长载流直导线旁运动电荷受力的方向问题

律是分层次的，正象一个国家，宪法是最高层次的法律；下面每个部门可以有自己的具体法规，但它们不能与宪法相悖；地方上各单位还可以有适合本地的守则、土政策，但原则上它们不应与上一层次的法规抵触．初学物理的中学生或物理的门外汉也许会有这样的误解：物理学家们研究各种自然现象，要为它们每个找出一条或几条定律来，那得有多少条定律呀！殊不知，物理学中的许多定律，如胡克定律、欧姆定律，是经验性的，它们仅适用于一定物料，一定

的场合. 物理学家孜孜以求的，主要是那些适用性更广泛的基本定律，如力学中的牛顿定律、电磁学中的麦克斯韦方程等. 凌架于这些基本物理规律之上的，还有更高层次的法则，对称性原理属之. 当代理论物理学家(特别是粒子物理学家)正充分自觉地运用对称性原理，去寻求未知的基本定律. 层次愈高，认识就愈统一，定律的形式也愈简单，数量也愈少. 这才是物理学家梦寐以求的最高境地.

闲话少提，让我们回到电磁学上来. 在例题 2 中除电荷外，基本上未涉及电磁学量. 如果我们想用对称性原理讨论更多的电磁学问题，必涉及$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$一类电磁矢量. 如§ 1 所述，在镜象反射操作下，矢量表现出"极矢量"和"轴矢量"两种不同的行为. 该处还曾提到，利用库仑定律和毕奥-萨伐尔定律可证明：$\boldsymbol{E}$ 是极矢量，$\boldsymbol{B}$ 是轴矢量. 其实，若我们预先设定电磁场具有上述性质，无需库仑定律和毕奥-萨伐尔定律的其它细节，我们即可分析通常在电磁学课本内讨论的许多对称性问题，而且所得结论将会更普遍. 下面再看几个例子.

例题 3　利用对称性原理论证：无限长均匀带电直导线周围的电场在垂直于导线的平面内呈径向分布.

解　(i) 对于垂直于导线任意平面的镜象反射操作，系统是对称的，故极矢量 $\boldsymbol{E}$ 不可能有垂直于反射面(即平行于导线)的分量. (ii)对含导线的任意平面的镜象反射，系统也是对称的，故极矢量 $\boldsymbol{E}$ 不可能有垂直此面的(即角向)分量. 亦即，$\boldsymbol{E}$ 只能沿径向.

例题 4　利用对称性原理论证：无限长密绕螺线管(截面形状可以任意)在空间任何一点产生的磁场与轴平行. (忽略有限螺矩的影响)

解　若忽略有限螺矩效应，则螺线管各匝所在平面皆与轴线垂直，故整个系统对任意垂直于轴线的平面的镜象反射是对称的，所以轴矢量 $\boldsymbol{B}$ 不可能有平行此面(即垂直轴线)的分量. 即磁力线只能是平行于轴线的平行线.

如果我们进一步利用安培环路定理和在横向无穷远磁场趋于零的条件，不难得到螺线管外 $\boldsymbol{B}=0$，内部均匀的结论.

2. 从奥斯特实验到宇称不守恒

现在让我们考虑图 1-26 所示问题，无限长直导线沿南北方向放置，上方与之平行地悬挂一小磁棒。试问：当我们突然将导线中的电流接通后，小磁棒朝什么方向偏转？或者说，它所受的力矩在什么方向？

力是极矢量，而力矩是轴矢量．只要注意到这一点，仿照上题的方法，本题是不难解决的．这个问题留给读者自己作练习．下面讲个与此有关的故事．

本题所讨论的就是有名的奥斯特实验，今天凡懂得一点电磁

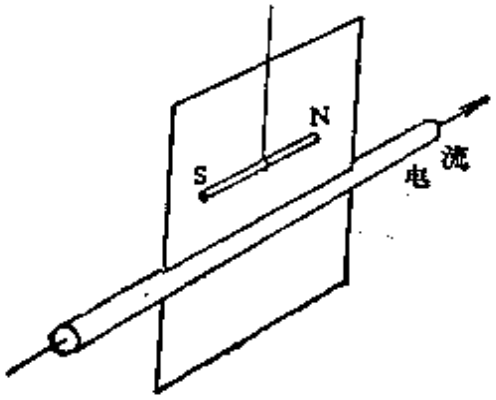


图 1-26　奥斯特实验

学的人都熟悉其结果，早已对它习以为常．恩斯特·马赫(Ernst Mach)是一位著名的物理学家，在他年轻的时候，当他刚了解到这个实验时，却感到在理智上受到很大的震动．因为在他看来，整个体系(载流直导线，磁棒，地磁场)都处在同一平面内(见图 1-26)磁棒怎么会向左或向右偏转呢？不知读者对马赫这个疑问作何感想．难道电磁定律不遵从宇称守恒律吗？现在我们知道磁棒是有内部结构的，它等效于一些分子环流沿轴排列．所以，就象前文引用的"香蕉球"的例子一样，磁棒实际上并不是左右对称的，电磁学的宇称不存在什么问题．

上述故事给了我们什么启发呢？五十年代中期摆在粒子物理学家面前一个难解的谜．即所谓 τ-θ 之谜，τ 和 θ 是当时发现的

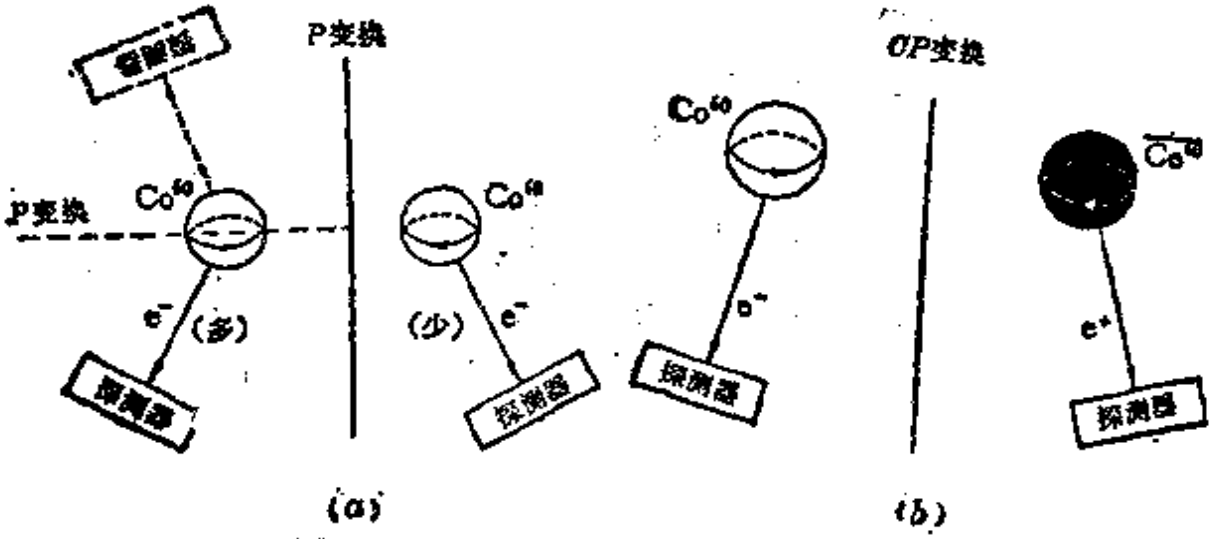


图 1-27　Co^{60} 的 β 蜕变实验的 P 变换与 CP 变换

两种重介子，实验测出，它们的质量相等，寿命也一样．但是 τ 介子可蜕变为三个 π 介子

$$\tau^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^- \text{ 或 } \pi^+ + \pi^0 + \pi^0$$

而 θ 介子却蜕变为两个 π 介子

$$\theta^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$$

由于 π 介子自身的宇称为负，从而 θ 介子的宇称似乎应当为正．而 τ 介子的宇称为负，如果说 τ 和 θ 不是同一种粒子，那就很难解释它们的质量和寿命完全相同；如果说它们是同一种粒子，那么为什么蜕变过程表现出不同的宇称．理论家陷入了进退两难之境！

1956 年李政道和杨振宁提出弱相互作用过程中宇称不守恒的设想，此设想旋即为吴健雄的钴 60 原子核 β 蜕变的实验所证实．该实验中的蜕变反应为

$$Co^{60} \rightarrow Ni^{60} + e^- + \bar{\nu}_e,$$

其中 e^- 为电子，$\bar{\nu}_e$ 为反中微子．作实验时将 Co^{60} 样品在 10^{-2}K 的极低温下放在线圈产生的磁场中，使其自旋和磁矩排列起来，用装置探测射出电子数的多少．在图 1-27a 中先只看用实线所画部分，

这里有两套按镜象对称布置的装置. 比较两边探测器中记录的电子数是否相等，即可检验宇称是否守恒. 实际上作的实验是以图 a 中左边所示水平虚线为镜面的，利用共同的钴源，把第二个探测器安放在上方用虚线所画的位置上. 这样的安排与前面所述装置等价. 实验的结果表明，两探测器读数相差甚大，这就推翻了宇称守恒定律.

前面磁棒的例子表明，当我们不了解其内部结构时，会错认为它在镜子里的象和它本身一样，其实经镜象反射后"分子环流"反向，磁棒的南北极是要对调的. 弱作用过程中表现的宇称不守恒现象，是否也由于人们对粒子的"内部结构"认识不足所致？为了回答上面的问题，首先要解决，一个粒子在镜子里的象究竟该是什么？一个最自然的想法，认为镜象不是它本身，而是它的反粒子. 从粒子变到其反粒子的操作叫"电荷共轭变换"，用 C 表示. 通常镜象变换用 P 表示. 人们开始怀疑，粒子的镜象变换也许应该是 CP 联合变换，而不是单纯的 P 变换. 若如图 1-27b 那样安排，将 Co^{60} 换成它的反核 $\overline{Co^{60}}$，将电子 e^- 换成正电子 e^+，也许实验结果能恢复对称性. 只因没有现成的反核 $\overline{Co^{60}}$，目前尚无法做这样的实验. 但其它的实验是做过的，例如 R. L. Garwin 等所做的 π 介子蜕变实验. 如图 1-28a 所示，一个静止的 π^+ 介子蜕变为一个 μ^+ 介子和中微子 ν_μ. 由于动量守恒，μ^+ 和 ν_μ 的运动方向相反；由于角动量守恒，它们的自旋方向也相反. 但是，每个粒子的自旋与其自身运动之间在取向上是否该有关联？实验表明，π^+ 介子蜕变放出的 μ^+ 的自旋相对于自身运动全部是左旋的. 这就是说，自然界只存在图 1-28a 镜面左方的过程，而不存在其右方的镜象过程. 然而，如图 1-28b 右方那样，用 π^+ 的反粒子 π^- 来做实验，则实验上测得 π^- 放出的 μ^- 自旋全部是右旋的. 以上实验表明了，π 介子蜕变过程破坏宇称守恒，但保持 CP 不变.

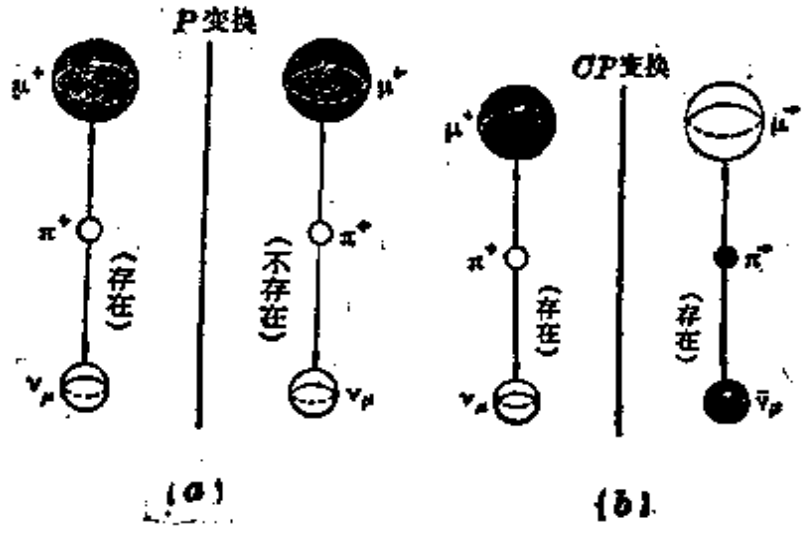


图 1-28 Garwin 有关 CP 守恒的实验

对于一个静质量不为零的粒子，其自旋与自身运动之间取向的关联并不那么本质，因为在比它快的参照系看来它的运动方向就反了，从而左旋变右旋，右旋变左旋．可是，对于静质量为零的粒子来说，它们永远以光速运动，不可能有比它们快的参照系．在上述 Garwin 实验中，蜕变产物中 μ 子是有静质量的，在此实验中不出现右旋的 μ^+ 和左旋的 μ^-，并不意味着在其它的过程中它们永远不出现．事实上，在 K^+ 的三体蜕变过程中产生的 μ^+ 就有右旋的．但是根据动量和角动量守恒的推断，Garwin 实验中产生的中微子 ν_μ 都是左旋的，反中微子 $\bar{\nu}_\mu$ 都是右旋的．目前对中微子的质量是否为零尚无最后定论，如果其质量果真严格为零，则 ν_μ 的左旋性和 $\bar{\nu}_\mu$ 的右旋性将具有原则意义．迄今所知，各种弱过程中放出的 ν_μ 或 ν_e 全是左旋的，而 $\bar{\nu}_\mu$ 或 $\bar{\nu}_e$ 全是右旋的，这似乎支持了上述看法．中微子的这一性质表明，在弱作用过程中，宇称不守恒，而 CP 是守恒的．

CP 守恒似乎拯救了宇称不守恒，即我们可以认为粒子的真正镜象本来就应该是 CP 联合变换的产物．但 CP 守恒的好景不长，1964 年 J. W. Cronin 和 V. R. Fitch 等在实验中发现，K_L^0 介

子的蜕变过程中有 3/1000 的概率违反 CP 不变性. 这表明，CP 守恒只是近似的定律，迄今所有实验表明，只有将 C、P 再与时间反演变换 T 结合起来，才能严格地保持对称性.

既然 CPT 严格守恒，而在弱作用过程中 CP 稍有破坏，这意味着，在弱作用过程中时间反演的对称性也稍有破坏. 这便是我们在§1中(第 29 页脚注)曾提到的微观不可逆过程.

迄今为止，我们谈论的宇称不守恒，CP 或 T 的不守恒，说的都是弱作用过程，对于它种相互作用，没有这个问题.

微观的电磁相互作用无疑在 C、P、T 分别操作下都是不变的. 曾使少年的马赫迷惑不解的原因，是他当时没想到，磁棒的微观本质是电流环. 迄今为止，尚没有确凿的证据表明有磁单极存在. 倘若有一天果真发现了磁单极，到那时电磁相互作用还保持 C、P、T 分别守恒吗？这要看我们对磁单极上所带的磁荷 g 怎样理解了. 如果我们坚持电磁作用 C、P、T 分别守恒，则由真正的磁荷组成的磁偶极子仍在一切方面与电流环保持等效，但磁荷将具有奇怪的变换性质：(1)在 C 变换下电荷反号，从而电流反向，电流环的磁矩也反向. 要使磁偶极矩也反向，必须有 $g\to -g$，即磁单极的反粒子具有相反的磁荷. (2)在 P 变换下，电流环的磁矩是轴矢量. 要使磁偶极矩也具有轴矢量的性质，必须有 $g\to -g$，即在镜象变换下南北极互换，故磁荷是赝标量. (3)在 T 变换下电流反向，从而电流环的磁矩也反向. 要使磁偶极矩也反向，必须有 $g\to -g$，即在时间反演下南极表现出北极的行为，反之亦然. 大家都知道，电荷 e 在 P、T 变换下都是不变的，故磁荷和电荷的性质大不相同. 有源的麦克斯韦方程

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_e,\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\end{cases}\quad\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\\ \nabla\times\boldsymbol{H}=\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{j}_e,\end{cases}\qquad(1.12)$$

对“电”和“磁”是不够对称的，因为式中只有电荷密度 ρ_e 和电流密度 $\boldsymbol{j}_e$，而没有磁荷密度 ρ_m 和磁流密度 $\boldsymbol{j}_m$. 若果真发现了磁单极，则麦克斯韦方程应写为

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_e,\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}-\boldsymbol{j}_m,\end{cases}\qquad\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\rho_m,\\ \nabla\times\boldsymbol{H}=\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{j}_e.\end{cases}\tag{1.13}$$

这方程看上去对于“电”和“磁”对称得多了，但由于电荷和磁荷的 P、T 变换性质不同，这只是形式上的对称.

§3. 对称性的自发破缺

1. 什么是对称性自发破缺？

在自然界或实验室中有时会发生这样一类现象，一个体系原来具有较高的对称性，突然之间对称性明显下降，产生所谓“对称性的自发破缺”，为什么叫“自发”呢？因为谁也没有施加不对称的因素，所以说，不对称的现象是自发地产生的. 这样的例子非常多，我们举一个有意思的例子——Bénard 流.

我们在家里烧开水时，壶里水传递热量的方式主要靠对流. 由于火较集中地在壶底的中央部分加热，这里的水先热起来，于是密度减少，向上升起，较冷的水密度较大，从四周下沉到壶底. 如此周而复始，形成对流. 这种热的传递方式比热传导效率高得多.

现在我们考虑这样一个实验，如图 1-29a 所示，在一个水平放置的扁平器皿内盛有一薄层液体，其深度比器皿的横向尺度小得多，从而边缘效应可以忽略. 从下面均匀加热，在液层上下造成一个恒定的温度差 $\Delta T=T_2-T_1$，热量将以何种方式向上传递？热传导是可以的，要形成对流却有困难. 因为要对流，必须在有的地方向上流，在有的地方向下流. 然而这里的实验装置在水平方向上是均匀的，它具有平移不变性，对流的存在必破坏这种对称性.

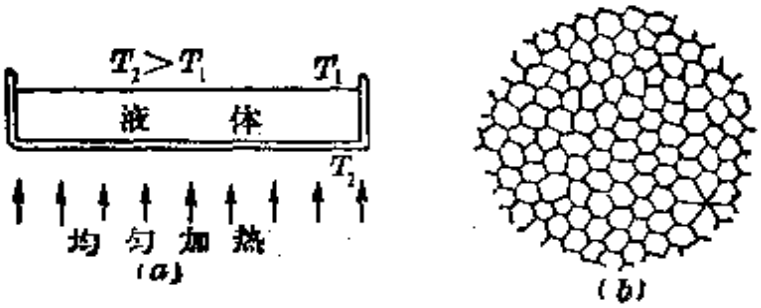


图 1-29 Bénard 对流

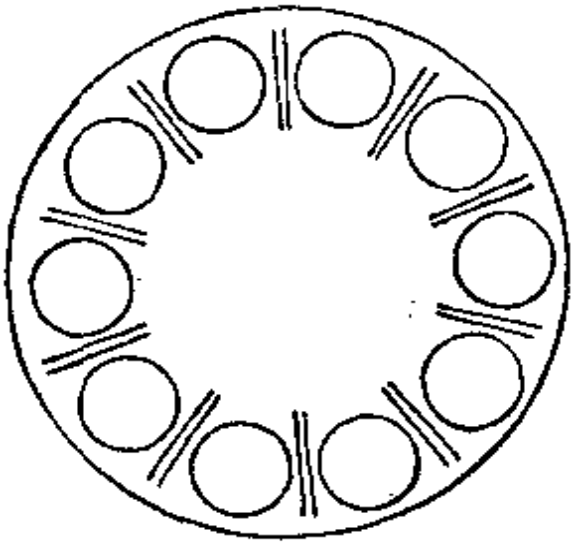


图 1-30 发生在餐桌上的对称性自发破缺

事实怎样呢?实验表明,当温差 ΔT 不太大时,这装置中只有热传导,不发生对流. 可是当温差 ΔT 达到一定临界值时,对流突然发生了. 这时如果从上往下看,液层中呈现花纹. 液层上表面是自由的,在表面张力的作用下花纹常呈六角形的网格状,象蜂窝似的(图 1-29*b*),布满整个平面. 实验表明,每个六角形的中心液体向上流,边界处液体向下流,花纹的尺度由有关的参量决定. 这种对流现象首先是法国学者 Bénard 发现的,称为 Bénard 对流. 出现网格,意味着平移对称性的步长和取向不再是任意的了,即体系的对称性大大下降. 花纹并非实验装置中原有的,而是在一定条件

下自动产生的，这是一种“自组织”现象. Bénard 对流是对称性自发破缺的一个很好的例子.

发生 Bénard 对流现象时，液层中哪点向上，哪点向下？这是难以预料的. 对称性自发破缺从哪里突然开始，带有偶然性. 打一个生活中的比方，譬如设筵招待宾客. 吃饭之前，服务员将餐具布置在圆桌面上. 设桌面布置得如此对称，各碟子严格等距，相邻碟子间的筷子也放得不偏不倚，严格与两边等距(见图 1-30). 入席时各人坐在碟子后面，距两边的筷子等远. 我们还假定，所有的人都没有偏爱用某只手持筷的习惯. 于是在未开筵前这“体系”是左右对称的. 突然某个人先拿起了一双筷子，譬如，拿的是他左边的那双，于是邻座的人就不得不也拿左手边的筷子. 这过程迅速传遍了全桌，最后人人都拿了自己左手边的筷子. 左右对称性被彻底打破了！这过程有个偶然的开端，向左或向右的结局也是偶然的. 这也可以说是一种对称性的自发破缺.

看起来，对称性自发破缺的现象似乎与居里的对称性原理不符. 其实不然，我们不妨举另外一个例子来说明. 设想我们削一枝铅笔，铅笔本身如此均匀，削得也如此准确，笔头和笔杆可看作具有严格轴对称的圆锥体和圆柱体. 设桌面是严格水平的，室内空气绝对宁静，我们小心翼翼地用手将此铅笔尖朝下竖立在桌面上，尽量使其轴线没有一点偏斜. 将手放开后会发生什么事？这恐怕是人人都能预料的：笔倒下了. 倒向哪一边？那就难以预料了. 铅笔未倒之前，它对于铅垂线具有轴对称性；倒下后，这种对称性突然打破了. 显然，这也可以说是一种对称性的自发破缺. 违反对称性原理吗？有人说：“铅笔未倒之前，它倒向何方虽不能预料，但它朝各方向倒下的概率是相等的，即概率分布具有轴对称性”. 是的，在这个问题里没有唯一性定理，所以我们应按修正了的表述来理解，对称性原理即全部可能的结果的集合仍是对称的.

然而问题到此还没有结束，如果这时有人反驳说："铅笔倒向何方虽难预料，但绝不是没有原因的，譬如铅笔质量分布稍不均匀，轴线稍有偏斜，或有不可避免的微弱干扰等，只不过这些原因过于细微，我们难以察觉罢了"．对！这也是解救"对称性原理"困境的另一种方案，把初始条件中这些极不显眼的不对称因素计及在内，体系的原因本来就不对称，难怪结果不对称了．可是，"如此细小的原因怎么会引出如此明显的结果来呢？"这就和对称性原理无关了，它属于另一个问题，即体系的"稳定性问题"．

上文我们多次使用了"严格的"这个词来形容对称性，认真追究起来，这是不确切的．世上没有百分之百的绝对严格．当一个体系中存在或受到破坏对称性的微扰时，通常会发生三种不同情况：

a．稳定　偏离对称性的因素会衰减掉，它们在结果中不体现出来．现今的太阳系属于这种例子．各行星的轨道大体上在同一平面内，从而对此平面太阳系有镜象对称，尽管有破坏这一对称性的内部或外部的众多微扰，但据科学家考证，太阳系的这一对称性从行星诞生时就保持着，直到现在，预计它还会长久保持下去．这表明，太阳系有抗拒这些微扰的稳定性．

b．随动　有多大的不对称原因，相应地产生多大的不对称后果，既不放大，也不衰减．直流电路属于这种例子．电路中电阻的布局偏离对称到什么程度，电流分布的不对称就达到相应的程度．

c．不稳定　破坏对称性的微扰会被放大，最终在现象中表现出明显的后果．对称性的自发破缺就是这样产生的．

一个体系的稳定性往往与其内部或外部的参量有关．有的体系，当有关参量达到一定临界值时会突然失稳，对称性自发破缺就此发生了．各种相变大体上属于这类现象．"对称性自发破缺"的概念最先出自凝聚态物理，以后运用于粒子物理、天体物理等学

科，取得了惊人的成就. 60—70 年代建立起来的弱电统一理论和大爆炸宇宙学，都与对称性自发破缺的概念有密切关系.

下面介绍两个重大的对称性破缺问题，一个是宇宙间的重子反重子不对称性，一个是生物界的左右不对称性.

2. 重子-反重子的不对称性

环顾今日我们周围的世界，几乎一切看到的物质都是由质子、中子组成的原子核和核外的电子构成的. 按照狄拉克的理论，每种粒子都有自己的反粒子，如反质子、反中子、反电子(即正电子)等. 1933 年他因这个理论获得了诺贝尔物理学奖. 在狄拉克方程中，粒子和反粒子处在对称的地位，当时他认为，在自然界中正、反粒子的地位也应是完全对称的. 虽然我们的地球，以至整个太阳系中刚好质子、中子和电子占优势，在其它某地方，也许这地方十分遥远，应存在"反物质世界"，在那里的原子、分子是由反质子、反中子和正电子构成的. 由于由物质和反物质构成的星体光谱一样，用当时的天文学手段很难区分. 以狄拉克为代表的这一"反物质世界"的假说曾为许多人信奉，但从那时以来的各种天文观测，越来越对这一假设不利：宇宙线中反质子与质子数量之比，最多只有 10^{-4} 的数量级；无论在太阳系内、银河系内，还是整个星系团的更大范围内，都未观测到正、反粒子对湮没时发射的强大 γ 射线，等等. 看来这一假设应该否定了.

质子、中子和它们的反粒子，在粒子物理的分类学中属于重子. 当前实验高能物理所及的能量范围已接近 TeV(10^{12}eV)，这比质子或中子的静能(GeV 量级，即 10^{9}eV)大 10^{3} 倍. 从现在的所有实验事实来看，重子数是个守恒量. 重子数 B 是这样定义的：每个重子的重子数 $B=1$，每个反重子的重子数 $B=-1$. 这样，在重子对产生和湮没的过程中，重子数总和保持为零. 在其它有重子参与的过程中，重子数 B 的总和也是不变的. 倘若认为重子数

守恒是一条在任何情况下都颠扑不破的定律，我们就只好认为，宇宙从它一诞生的时候起就存在现今那样多的不为零的重子数，即重子和反重子从头起就是不对称的.

现代标准宇宙学，是大爆炸宇宙学. 这学说认为，宇宙是在一次巨大的爆炸中诞生的. 宇宙早期处于极高温度和极高密度的混沌状态. 随着时间的流逝，宇宙膨胀着，冷却着. 在各个演化阶段宇宙内存在哪些粒子？如果温度足够高，kT(k——玻耳兹曼常数)在数量级上大于某种粒子的静能：

$$kT \gg m_0c^2, \tag{1.14}$$

这种粒子及其反粒子就可以从真空中成对地产生，同时也成对地湮没. 此时，这种粒子在动态平衡中大量存在. 当宇宙冷却到上述不等式不再成立的时候，该种粒子将难以产生. 如果剩下来的粒子和反粒子数目严格相等，它们遇到一起就湮没掉了，从而在宇宙中绝灭.

质子或中子的静能为 GeV 量级，按式(1.14)估计，它们的数目开始冻结下来的温度为 $T_a \sim m_pc^2/k \sim 10^{13}$K. 在宇宙进一步因膨胀而冷却的过程中，$T \ll T_a$，能量范围远低于 GeV. 现代实验高能物理可以肯定，在这种条件下重子数严格守恒. 也就是说，当今宇宙中的质子、中子总数与反质子、反中子总数之差，与早期质子、中子冻结下来的时候一样多. 据估计，宇宙中现存的重子数(主要是质子和中子)与光子数(主要在宇宙背景辐射中)之比大约是 $1:10^9$—10^{10}①. 在 $T \gg T_a$ 以前，质子、中子和它们的反粒子与光子处于热平衡态，故可认为，那时它们的数量级是一样的. 可见，宇宙早期质子、中子和它们的反粒子数量都比现在大十亿倍以上，相比之下，正反粒子数量上的差额，或者说不对称性，是微乎其微的. 宇宙冷却时，它们之中的绝大部分湮没掉了，剩下那一点点"残渣"

① 详见第四章 §3. 例题 24

却成为构筑我们周围绚丽多彩的世界和人类自身的基石. 这里只有质子和中子，几乎再也看不到它们的反粒子了. 就这样，我们看到，从当初正反粒子微不足道的不对称性是如何发展到现在这样一个完全不对称的世界的.

尽管当初正反重子之间的不对称性如此之小，我们不能因此而自我安慰，放弃追究这一对称性破缺是怎样来的原因. 当然可以假定，宇宙从它一诞生起，就存在现今那样多的不为零的重子数. 但是彻底的宇宙演化观主张，一切都是从简单、对称、均衡开始的，一切复杂的、不对称的、不均衡的现象都不是原初如此，而是有其起源的. 正、反重子原初不对称的假设，人们不大乐意接受.

当前，对正、反重子不对称性比较可能的解释，是在早期极高温的宇宙中存在着违反重子数守恒的过程. 这类过程能量之高，是现今实验高能物理学家无法实现的. 在60—70年代温伯格(Weinberg)、萨拉姆(Salam)和格拉肖(Glashow)成功地发展了统一弱作用和电磁作用的理论以来，人们普遍相信，强作用也可以与弱、电作用统一起来，这就是所谓"大统一理论". 大统一理论的最早，也是最简单的版本，叫做SU(5)理论. 这理论预言，在早期宇宙温度在10^{28}—10^{32}K范围内的时代(所谓"大统一时代")存在过重子数B不守恒的过程，使B围绕零产生微小的涨落. 在T降到T_c以下时，偶然的涨落被冻结下来，形成了今天的对称性破缺的世界. 现在我们有办法用实验方法来验证这个理论吗？大统一理论的这一方案预言，在宇宙冷却到现在的温度以后，唯一可能的B不守恒过程是质子蜕变. 也就是说，质子不再是稳定的粒子了，SU(5)理论估计，它的寿命为

$$\tau_p \simeq 10^{28}-2.5\times 10^{31}\text{年}$$

这提供了验证该理论的一个判据. 要知道，宇宙的年龄才只有10^{10}年的数量级，这样长的半衰期能测量吗？没有关系，只要有足够多

的质子(譬如 10^{33} 个,约合近万吨物质),观测一年左右的时间,如果上述理论预言正确,总该探测到几个事例.重要的问题是如何去掉背景干扰.屏蔽物本身的天然放射性能量较低,容易识别,最麻烦的是宇宙线经大气后产生的 μ 子和中微子的干扰.所以实验必须在很深的矿井中做.理论预言质子蜕变有多种可能的渠道,其中最主要的是

$$p\rightarrow\pi^0+e^+,\ \pi^0\rightarrow 2\gamma.$$

由于动量守恒,从静止质子蜕变产生的 π^0 和 e^+ 是朝相反方向飞出的,这一特征使它容易与其它假象区别开来(参见图 1-31).

1983 年前后,美国、印度、日本等国家针对 SU(5)大统一理论做了一些探测质子蜕变的实验,其中最有说服力的实验是美国 LBM 公司的一个协作组在俄亥俄(Ohio)州克里弗兰(Cleveland)市以东六百多米的 Morton Thiokol 盐矿中进行的①.探测装置如图 1-32 所示,其中部是 $17\times18\times23\ m^3$ 的纯水,矩形体的六面布置了 2048 只光电倍增管,每只直径为 12.5cm,想藉此来探测 e^+ 和两个高能光电子在通过纯水时产生的切连科夫辐射.经过 204 天的连续观察,未测到一个质子蜕变事件.据此推算,τ_p 一定大于 1.7×10^{32} 年,从而否定了 SU(5)理论.

近年来,各国科学家进一步修改着大统一理论,提出一些新的方案;实验方面也在改进探测装置,准备适应理论的发展.总之,究竟质子是否蜕变?一时尚难有定论.

3. 生物界的左右不对称性

大多数动物在外观上看都具有左右对称性,当然也有少数例外,如蜗牛、比目鱼等.但体内的器官就不那么对称了,例如人的心脏在左,盲肠在右,等等.这类不对称性还只是比较肤浅的,如果深入到分子水平,我们就会发现一种普遍存在于生物界的更深

① J. M. LoSecco, F. Reines and D. Sinclair, *Sci. Am.* **252**,54(June 1985).

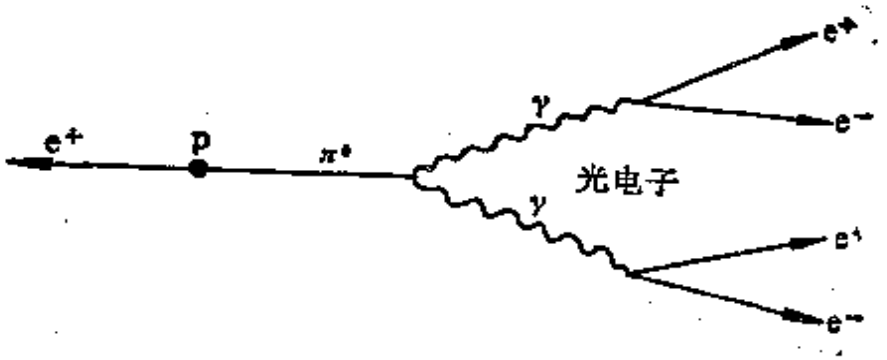


图 1-31　质子蜕变反应

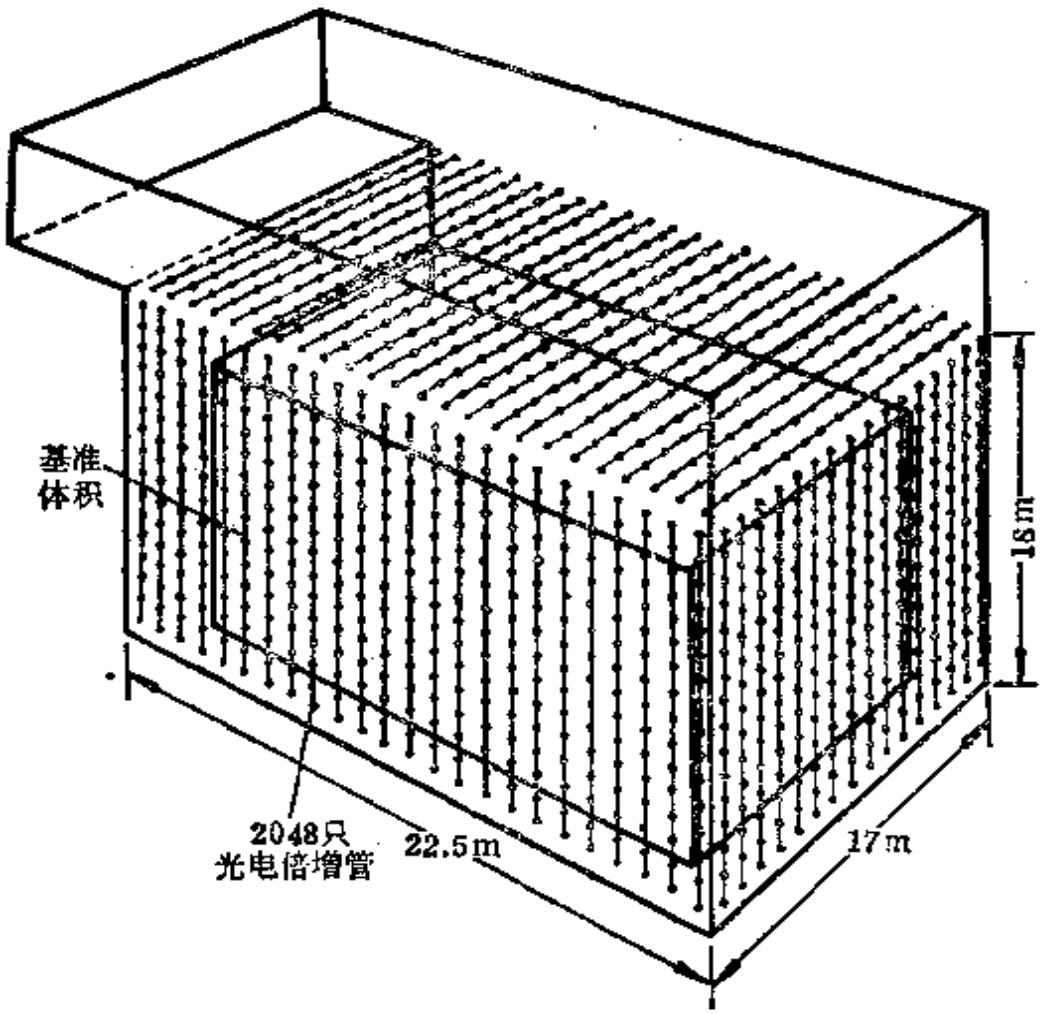


图 1-32　IBM 协作组探测质子蜕变的实验装置

刻的左右不对称性. 可以不算夸大地说，历史上正是这种不对称性的发现，引导人类进入了认识微生物的大门. ①

奠定微生物学基础的，是被誉为"人类的恩人"的法国化学家路易·巴斯德(Louis Pasteur). 是他科学地论证了传染病起源于微生物，是他从理论上阐明了有机体的免疫性是怎么回事，是他创立了消毒法使食物免于腐烂、使外科手术不致感染，是他创立的疫苗接种法拯救了成千上万儿童的生命，…. 可是，巴斯德的博士论文是物理和化学方面的. 1844 年德国化学家 E. F. Mitscherlich 的一篇论文引起巴斯德对晶体的浓厚兴趣. 他发现，酒石酸钠铵和葡萄酸钠铵的结晶具有相同的晶形，一样的化学性质，但溶液的旋光性质却不同. 前者使偏振面向右旋转，后者无旋光性. 巴斯德自 1847 年起撰写的论文正是关于液体旋光现象的. 对于上述现象，当时的流行看法都倾向于去证明两种晶体是完全不同的，巴斯德对此抱怀疑态度. 在他不懈的实验观察下，终于在 1848 年揭开了这个谜. 他发现，酒石酸盐和葡萄酸盐的晶体都有半面晶面(hemi hedral facet)，在前者半面晶面全是向右倾斜的，在后者有的向左，有的向右，互为镜象反射(图 1-33). 他小心翼翼地把葡萄酸盐中向左和向右的小晶体挑选出来，分别制成溶液，结果发

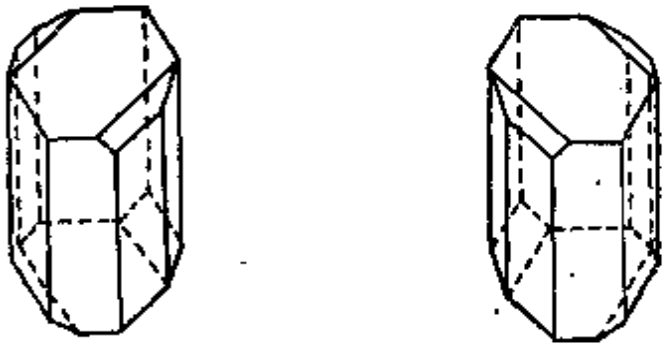


图 1-33　1850 年巴斯德发表的葡萄酸钠铵的两种互为镜象的晶体

① 有关生物体内化合物的左右不对称性，除参考本章末所列的文献[5]外，还可参考 J. Applequist, *American Scientist*, 75(1), 57(1987).

现，一个使光的偏振面左旋，另一个右旋．二者等量混合，则不表现光活性(旋光性)．这样，巴斯德就发现了酒石酸盐的左、右两种旋光异构体，并证明了葡萄酸盐实际上是它们的等量混合．这种光惰性（即无旋光性）的物质叫做外消旋体（racmate)．这工作使他一举成名．

此后，巴斯德对晶体如此着迷，他到处用结晶学的观点来研究物质．巴斯德先后有过两个强烈的信念，一是光活性与晶形不对称密切相关，二是光活性必有与生命过程相联系的起源．对前一命题，他遇到了不少例外，实际上溶液的光活性是与分子结构的不对称性相关的，而分子结构的不对称性不一定反映在晶形上．后来他对此命题作了修改．后一命题却被当时和以后的研究不断地证实着．引导着巴斯德一步步地走入微生物的领域．

巴斯德的微生物研究是从发酵问题开始的．戊醇是酿酒工业中的一种副产品，1855 年巴斯德发现它有光活性和光惰性两种异构体．当时盛行的看法认为戊醇的光活性溯源于生成它的糖类的光活性．巴斯德却认为戊醇和糖类分子的结构差别太大，恐怕上述看法不对．这个问题引导他深入研究发酵过程，终于证实了发酵过程是与活的微生物(酵母)的生长过程相联系的．于是，发酵的生物理论战胜了当时的化学理论．巴斯德的发酵论文是 1857 年发表的，1860 年他研究了生物的自然发生问题，1867 年研究了葡萄酒和啤酒的病害，1868 年研究了桑蚕病害，1881 年研究了传染病和疫苗，1885 年研究了狂犬病的预防，…．就这样，巴斯德从研究有机物晶形的不对称性与光活性的联系开始，一步步跨向前去，成为了一位空前伟大的微生物学家．

巴斯德走了这样一条道路并不是偶然的．下面我们即将看到，生命的微观过程最显著的一个特征，是分子水平上的对称性破缺．

现代的生物化学告诉我们，有机化合物的旋光异构现象是与

有机分子中碳原子四个价键的空间构型有关，如图 1-34 所示，碳原子的四个价键不在同一平面内，而是指向四面体的顶点，碳原子本身占据四面体的中心。当四个价键被不同的基团 R_1、R_2、R_3、R_4 所饱和时，可以得到两个（也只能得到两个）不同的四面体，它们彼此互为镜象，但不能叠合，形成左（L）、右（D）型的异构体①。例如在甘油醛中，四个基团分别为 CH_2OH，H，CHO 和 OH，L、D 两种构型的甘油醛见图 1-35，图中省略了四面体中心的 C 原子，（+）、（−）代表该物质的水溶液旋光的方向，（−）代表左旋，（+）代表右旋。应注意，单糖分子的 D、L 构型是以甘油醛为标准进行比较而确定的，其它有机分子的 D、L 构型也按一定的规则约定，与它们水溶液旋光方向的（+）、（−）没有必然的联系。例如，D 型丙氨酸的光活性是左旋的，L 型丙氨酸的光活性呈右旋，故而我们有 D（−）和 L（+）型的丙氨酸（见图 1-36）。

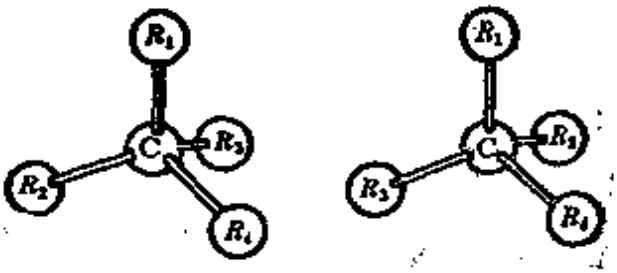


图 1-34　碳四面体左、右两种构型

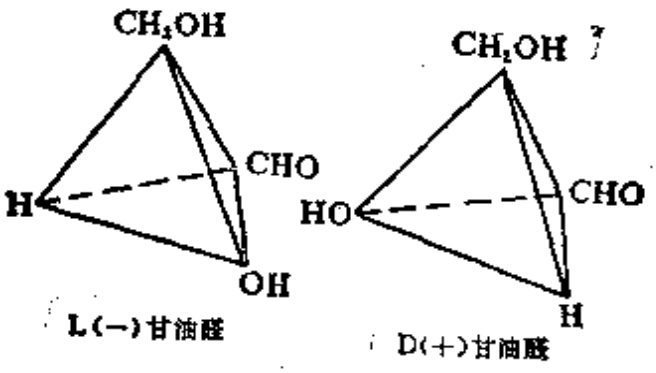


图 1-35　甘油醛的旋光异构体

① L 代表 levo，D 代表 dextro，法文左、右之意。

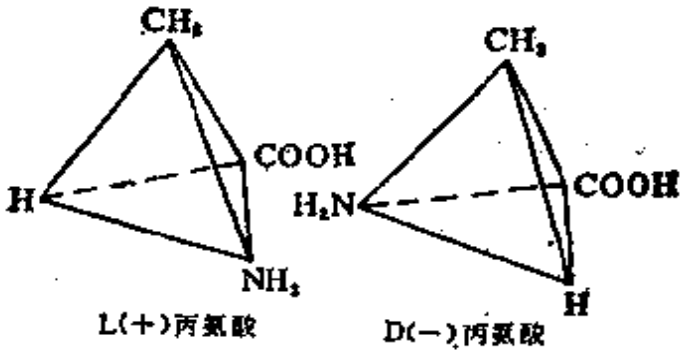


图 1-36　丙氨酸的旋光异构体

生命的基本物质是蛋白质(protein),它由氨基酸(amino acid)的链组成,每种氨基酸都有 D、L 两种旋光异构体. 如果我们试图用 CO_2、氨等原料去人工合成氨基酸，得到的产品总是 D、L 型各半的外消旋物，它们总体上保持着左右对称性. 但是生物蛋白质几乎全部是由 L 型的氨基酸组成的，尤其在高等动物中更是如此. 这是怎么回事?

在 19 世纪以前人们是用"生机论"来解释生命现象的,人们认为,由有机化合物组成的活体之所以有生命,是因为有某种神秘的"生命力(vital force)"在支配. 1824 年 F. Wöhler 用无机物合成了尿素之后,为人类用自己的双手创造出生命打开了希望之门,生机论动摇了. 然而巴斯德以及后来的一系列有关生物体内化合物左、右不对称性的发现,又使我们产生疑窦. 只是人工合成出有机物,还不意味着创造出生命. 是什么力量在所有生物活体内从左、右化合物中挑选出一半呢?难道有位上帝,或者什么精灵，象巴斯德那样,在众多的晶体中挑选着其中的一种异构体?其实干这件事的不是别人，而是生物体内的催化剂——酶(enzyme)在起作用. 在生物体内,酶负责食物消化、神经传导等多种功能. 酶这样一种生物催化剂与普通的化学催化剂不同，其突出的特点是催化效率极高(是普通催化剂的 10^7—10^{13} 倍),反应条件温和(无需高温、高

压、强酸、强碱等生物体不能容忍的条件），和专一性（包括对旋光异构体的专一性）特别强．其实，酶本身就是一种特殊的蛋白质，它也有 D、L 构型之分．生物体内的酶是 L 型的，它只消化和制造 L 型的氨基酸，对 D 型的氨基酸不起作用．这是因为酶和它的作用物在空间构型上有高度的适配性，犹如只有特定的钥匙配特定的锁那样，若把锁进行镜象变换，原来的钥匙就不适用了．不仅高等生物在有机化合物的 D、L 构型上有如此的选择性，低等生物也有此现象．有人作过这样的实验，用 D、L 混合的糖水去培养某种细菌，结果发现细菌只"食用"溶液中的一种旋光异构物，把"不对路"的那一种剩下来．

支配生命过程的物理、化学规律（主要是电磁相互作用）是左右对称的．因此我们可以设想，把我们的现实世界全部来一次镜象反射变换．在那个世界里一切生物和我们的相反，体内的酶和蛋白质都是 D 型的，它们偏爱食物中的 D 型氨基酸．我们相信，生活在这"镜象世界"里的朋友生活得和我们一样好．但是，若把那个世界里的个别动物（譬如一只青蛙）捉到我们这里来，起初它可照样鼓噪、跳跃，一时看不出什么异常．然而当它捉到一只飞蛾并把它吞下时，却无法把它消化掉．长此以往，这只"镜象蛙"非饿死不可．L. Carroll 写了一本著名的童话，叫做《阿丽思漫游奇境记》．书中写道，小女孩阿丽思在一面穿衣镜前思索了一会儿，走进了镜子里边，说道："小猫咪，你喜欢住在这所镜象房子里吗？我不知道他们会不会给你牛奶喝？或许镜子里的牛奶不大好喝…"不知该书的作者是否知道，镜子里的牛奶岂止不好喝，从镜子外边走进去的动物根本无法消化它！

生物体内化合物的这种左右不对称性正是其生命力的体现．上文所及，维持这种左右不平衡状态的是生物体内的酶．生物一旦死亡，酶便失去活性，造成左右不平衡的生物化学反应也就停止

了．此后随着时间的推移，L型氨基酸逐渐向D型氨基酸转化，直至D、L型各占一半，反应达到平衡而告终．其实，氨基酸的这种外消旋作用并非从死亡时才开始的，研究表明，在生物体老化的过程中，D型氨基酸已按一定速度在体内积累起来，体温越高的动物外消旋的速度越快．由此可见，生命与分子的不对称性如形影之相守，息息相关．

无机界的化合物总体上是左右对称的，上面我们用酶的作用解释了生物个体内化合物不对称的根源．地球上生命发源之初，左右对称性的破缺是怎样开始的？不从物理上说明这个问题，生命现象的本质仍蒙着一层“生机论”的神秘色彩．有的科学家相信，生物分子协调一致的不对称，说明所有生命是同源的．由于偶然的涨落，对称性自发地破缺了．“天平”偏向了一边，这样造就出来的第一批不对称的有机化合物，构成了地球上生物圈的共同始祖．否则怎能说明，在生物进化的过程中，通过竞争和自然淘汰，只保留下来偏向同一面的不对称生物？这种看法目前尚缺乏足够的证据．也有人在地球上形成生物的外部条件上找原因．譬如，宇宙线中的正、负带电粒子是不对称的，它们在地磁场中的回旋运动也不对称，从而使阳光通过大气时，其中左右旋偏振光的成分不对称．再通过光合作用，合成了生物体内不对称的有机化合物．实际测量表明，这种效应即使有，也极其微弱，恐怕难以说明问题．总之，这个问题当前仍是悬案，没有定论．

4．对称性意味着不可分辨性

如本章开头所说，对称性即不变性．换句话说，哪里存在一种对称性，就意味着这里边包含一种不可分辨性，或者说，有一件不可认识的事物．若用信息论的语言说，则对称性越高，信息量越少，即信息熵越高．可见，“对称性”和“熵”，这两个概念有着内在的联系．如上所述，伴随着生命的老化（在这不可逆的过程中熵增

加着)，体内有机化合物逐渐外消旋化(左右对称的程度增加了)。这就是一个很好的例子.

本章里讨论的对称性有两类：一类是某个物体或某件具体事情的对称性，另一类是物理定律的对称性．若一只洁白无瑕的花瓶具有完美的轴对称性，我们就无法分辨它的前后左右．亦即它绕中心轴的方位是不可认识的．这例子指的是一个物体的对称性．牛顿定律具有伽利略不变性，这种对称性使我们不能分辨绝对静止和绝对运动，亦即在牛顿力学领域内绝对时空是不可认识的．但麦克斯韦方程不服从伽利略变换，这曾给予人们在电磁学或光学领域内认识绝对时空的希望．迈克耳孙和莫雷做了实验，结果失败了，导致了相对论的诞生．人们认识到，牛顿力学及其对称性(伽利略不变性)都是不精确的，应为相对论力学和洛伦兹协变性所替代．这种更精确的对称性却更彻底地否定了"绝对时空"的可认识性．这些例子都谈论的是物理定律的对称性问题．由此可见，与个别事物的对称性相比，物理定律的对称性具有更普遍而深远的意义.

R. 费因曼曾编造过一些生动有趣、寓意深刻的假想情节，来说明对称性和不可分辨性之间的关系①．我们将以他的脚本为基础，略加删改，铺陈出下面一段故事来：

设想一位中国人和一位外国人通长途电话．这位中国人基本上通晓该国语言，只是不会说"左"和"右"两个字．他企图通过电话向那位外国朋友解释汉语里的"左"和"右"是什么意思．应该怎么办？他可以告诉对方："请你面向南站着，你东边的是左手，西边的是右手"．如果他连外语中"东、西、南、北"也不会说，但知道该国也在北半球，他可以告诉对方："请你中午面向太阳，朝日出方向的是左手，日落的方向是右手"．这个例子表明，人体有左右对称

① R. Feynman, *The Character of Physical Law*, MIT Press, 1962, Chap. 4

性，我们难以就其自身来定义左和右，但我们所处的环境（自转着的地球）左、右是不对称的，故可借环境的不对称性来定义个别物体（人体）的左和右.

对于物理定律的对称性，情况就不那么简单了. 设想在茫茫宇宙的深处果真有智慧的"外星人"，犹如科学幻想电影中的"火星人"马丁叔叔(Martian)，他们的科学知识一点也不比地球上的人类少. 然而地球人和"外星人"彼此丝毫也不知道对方所处的环境（譬如对方的星球朝哪边转，等等），只是用某种方式通上了话. 当然，一开始需要沟通彼此的语言. 最容易解释清楚的是数目字，因为一方可以说："嘀嗒，一；嘀嗒，嘀嗒，二；嘀嗒，嘀嗒，嘀嗒，三；…". 聪明的对方很快就明白了"一、二、三"的含义. 美国康奈尔大学的物理教授 P. Mobrison 曾研究过，其它的事物，如化学元素的名称，长度和时间的单位等，也都是可以解释清楚的.唯独到了"左"、"右"两字，就把人难住了. 因为他们不了解对方的环境，无法借助于环境的不对称性来说明左和右. 地球人想告诉对方，"你心脏所在的一方是左边"，但不知，"外星人"的心脏是否和我们一样，也在左边？ 也许他们根本就没有心脏！ 地球人又想用旋光性来解释我们"左"、"右"的定义："蔗糖溶液使光的偏振面转向右方". 但一想，也不知他们那里有没有甘蔗？即使有，而且他们那里生物圈内的物种和地球上基本一样，会不会生物体内的有机分子刚好全都是地球上的"镜象"？因为这也是完全可能的.

为什么"左"、"右"的定义这样难以解释清楚？归根结蒂，是因为这里遇到的物理、化学定律具有左右对称性，致使"左"、"右"这一纯粹是语言上的约定，无法用客观事物来区分.

"有了！"一位粒子物理学家忽然想到，在弱作用过程中宇称不守恒，即左右不对称. 在宇宙间只有左旋的中微子和右旋的反中微子. 想到这里，这位粒子物理学家马上告诉"外星朋友"："你知道

什么是中微子和反中微子吗？它们的自旋相对自身运动的取向分别是左旋和右旋”. 于是，大家都满意地感到理解了对方“左”和“右”的定义. 他们非常高兴，地球上的主人邀请这位“外星朋友”来作客，并介绍了地球上的见面礼节——伸出右手握手. 对方欣然允诺，并表示来访时入乡随俗，一定尊重地球上的礼节.

这一天，一切准备就绪，地球上的主人翘首仰望长空，等待着天外来客. 忽然间，那位粒子物理学家惊叫起来：“不好！”他想起来了，这位来客的家乡会不会是“反物质世界”？果真那样，他会把我所说的“中微子”理解成“反中微子”，他所理解的“左”和“右”是颠倒的. 要不要立刻打个星际长途电话，先把这件事问清楚？这不可能，因为 CP 对称，这件事是说不清楚的. 只好耐心地等待，远方客人来到之后，一看他伸出哪只手，就水落石出了. 如果他伸出右手，就赶上前去握手寒喧；如果伸出左手，可就糟了，他是“反物质人”！赶快大喝一声：“请快离开！我们碰到一起将同归于尽，一切都会湮没掉的！”

参 考 文 献

[1] H. 魏尔：对称，商务印书馆 1986.

[2] J. Rosen: *A Symmetry Primer for Scientists*, John Wiley & Sons, 1983.

[3] 杨振宁：基本粒子发现简史，上海科学技术出版社，1963.

[4] 陆琰、罗辽复：从电子到夸克——粒子物理，科学出版社，1986.

[5] R. Feynman: *Lecture on Physics*, Vol. 1. Chap.52, Addison-Wesley Pub. Co. 1963.

[6] L. O. 布琼：光与生命，科学出版社，1984. 第 8 章.

第二章　量纲分析

§1. Π定理和例题

在通常的物理教科书中，量纲理论往往只是顺便提及和一带而过．关于量纲的应用，在教学中也只介绍单位的换算、检查公式的对错等少数方面．在本章里我们将介绍量纲分析方法的理论基础和更多方面的应用．

由于各物理量之间存在着规律性的联系，我们不必对每个物理量的单位都独立地予以规定．我们可以选定一些物理量作为"基本量"，并为每个基本量规定一个"基本量度单位"，其它物理量的量度单位则可按照它们与基本量之间的关系式(定义或定律)导出，这些物理量称为"导出量"，它们的单位称为"导出单位"．按照此种方法构成的一套单位，构成一定的"单位制"．在不同的单位制中，不仅基本量的选取可以不同，基本量的数目也可以不同．例如CGS单位制中有三个基本量，而MKSA单位制中有四个基本量．

在选定了单位制之后，导出量的量度单位就可由基本量度单位表达出来，这种表达式称为该导出量的"量纲式"．设X_1, X_2, $\cdots$, X_m是所选单位制中的m个基本单位，用$[P]$代表导出量P的量纲式，则

$$[P]=X_1^{a_1}X_2^{a_2}\cdots X_m^{a_m}, \tag{2.1}$$

指数$(a_1, a_2, \cdots, a_m)$称为物理量P的"量纲"．显然，一个物理量的量纲与单位制的选择有关．未给定单位制，就谈不上量纲．

量纲可以看成是某个"矢量空间"中的"矢量"．对式(2.1)两端取对数，则有

$$\ln[P]=a_1\ln X_1+a_2\ln X_2+\cdots+a_m\ln X_m, \tag{2.2}$$

这里，若我们把 $\ln X_1$, $\ln X_2$, …, $\ln X_m$ 看作 m 维空间的"正交基矢"，则 $(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ 就是"矢量" $\ln[P]$ 在基矢上的投影，或者说，是它的"分量"。今后为了简便，我们把量纲式写成

$$\ln[P] \sim (a_1, a_2, \cdots, a_m) \tag{2.3}$$

所谓几个物理量的量纲彼此独立，是指无法用它们幂次的乘积组成无量纲量。用矢量的语言表达，这很清楚，就是代表它们量纲的矢量彼此线性无关。从几何的观点看，两个矢量线性无关，就是它们不共线；三个矢量线性无关，就是它们不共面；…。在 m 维空间内最多有 m 个彼此线性无关的矢量。m 个矢量 $(a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{mi})$ $(i=1, \cdots, m)$ 线性无关的条件是由它们组成的行列式不等于零：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2.4}$$

量纲分析法的理论基础是"Π 定理"，这定理是 Buckingham 在 1914 年提出的①：

设某物理问题内涉及 n 个物理量（包括物理常数）$P_1, P_2, \cdots, P_n$，而我们所选的单位制中有 m 个基本量 $(n>m)$，则由此可组成 $n-m$ 个无量纲的量 $\Pi_1, \Pi_2, \cdots, \Pi_{n-m}$。在物理量 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 之间存在的函数关系式

$$f(P_1, P_2, \cdots, P_n) = 0, \tag{2.5}$$

可表达成相应的无量纲形式

$$\boxed{F(\Pi_1, \Pi_2, \cdots, \Pi_{n-m}) = 0}. \tag{2.6}$$

（在 $n=m$ 的情况下，有两种可能。若 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 的量纲彼此

① Buckingham, E., *Phys. Rev.* **4**(4), 345(1914); *J. Wash. Acad. Sci.* **3**, 347 (1914). Π 为希腊字母，读作 *pi*.

独立，则不能由它们组成无量纲的量；若不独立，则还可能组成无量纲的量.）

定理的证明如下：

设 n 个物理量的量纲为

$$\ln[P_i]\sim(a_{1i},\ a_{2i},\ \cdots,\ a_{mi}),\quad (i=1,\ \cdots,\ n) \tag{2.7}$$

其中最多只能有 m 个是线性无关的. 我们假定它们是其中的前 m 个，则其余 $n-m$ 个物理量中的任何一个都可表示成它们的线性组合，即

$$\ln[P_{m+j}]=x_1\ln[P_1]+x_2\ln[P_2]+\cdots+x_m\ln[P_m],$$
$$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n-m) \tag{2.8}$$

写成分量形式，用矩阵表示，则有

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{1,m+j} \\ a_{2,m+j} \\ \vdots \\ a_{m,m+j} \end{bmatrix}$$
$$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n-m) \tag{2.9}$$

由于等式左端方阵的行列式不等于零，故对于每个 j 有一组解 $(x_{1j},\ x_{2j},\ \cdots,\ x_{mj})$，共 $n-m$ 组. 这就是说，我们有

$$[P_{m+j}]=[P_1]^{x_{1j}}[P_2]^{x_{2j}}\cdots[P_m]^{x_{mj}},$$
$$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n-m) \tag{2.10}$$

或者说

$$\Pi_j\equiv P_1^{-x_{1j}}P_2^{-x_{2j}}\cdots P_m^{-x_{mj}}P_{m+j}$$
$$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n-m) \tag{2.11}$$

是一些无量纲的量，这样的无量纲量共有 $n-m$ 个.

现在我们设想把 $P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_m$ 的量度单位分别改变为原来的 $1/\alpha_1,\ 1/\alpha_2,\ \cdots,\ 1/\alpha_m$，则在此新单位制中这些量的数值 $P'_1, P'_2,\ \cdots,\ P'_m$ 与原来的数值 $P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_m$ 有如下关系

$$P'_i = \alpha_i P_i \quad (i=1, 2, \cdots, m) \tag{2.12}$$

量纲关系式(2.10)表明，物理量 P_{m+1}, P_{m+2}, $\cdots$, P_n 在新旧单位制之间的数值关系为

$$P'_{m+j} = \alpha_1^{x_{1j}} \alpha_2^{x_{2j}} \cdots \alpha_m^{x_{mj}} P_{m+j}$$
$$(j=1, 2, \cdots, n-m) \tag{2.13}$$

取 $\alpha_i = P_i^{-1}$, 由式(2.12)及(2.13), 则有

$$\begin{cases} P'_i = 1 & (j=1, 2, \cdots, m) \\ P'_{m+j} = \Pi_j & (j=1, 2, \cdots, n-m) \end{cases}$$

函数关系(2.5)不应受量度单位变换的影响，亦即，我们有

$$f(P'_1, P'_2, \cdots, P'_n) = 0,$$

对于上述特殊选择，有

$$f(\overbrace{1, 1, \cdots, 1}^{m个}, \Pi_1, \Pi_2, \cdots, \Pi_{n-m})$$
$$\equiv F(\Pi_1, \Pi_2, \cdots, \Pi_{n-m}) = 0,$$

这便是上面的式(2.6)，于是定理证讫.

Π 定理可以表示成另一等价形式，这一形式在很多场合更便于使用. 在一定问题中物体系的发展和演化往往由若干个变量决定，不妨叫它们做"主定参量". 在上面的推演中，$\ln[P_1]$, $\ln[P_2]$, $\cdots$, $\ln[P_m]$ 实际上起着一组新基矢的作用，我们尽量选为代表主定参量的量纲矢量. 如果在其它的物理量中，此时此刻我们感兴趣的是其中的某一个，譬如 P_{m+1} 则我们可以从式 (2.6)中把 Π_1 解出来.

$$\Pi_1 = \Phi(\Pi_2, \cdots, \Pi_{n-m}),$$

因 $\Pi_1 = P_1^{-x_{11}} P_2^{-x_{21}} \cdots P_m^{-x_{m1}} P_{m+1}$, 代入上式，并将 P_{m+1} 解出，于是有

$$\boxed{P_{m+1} = P_1^{x_{11}} P_2^{x_{21}} \cdots P_m^{x_{m1}} \Phi(\Pi_2, \cdots, \Pi_{n-m}),} \tag{2.14}$$

这便是 Π 定理另一种形式的表述.

下面我们将介绍一系列运用 Π 定理作量纲分析的例题.

例题 1 用量纲法证明勾股弦定理.

解 一个直角三角形的面积 A 可由它的一边(譬如斜边 c)和一个锐角(譬如 α) 所决定. α 是无量纲的, 按式(2.14),我们有

$$A=c^2\Phi(\alpha)$$

如图 2-1, 作 c 边的垂线将三角形分成两个与原来相似的小直角三角形,它们各有一个同样的锐角 α,故它们的面积应分别为

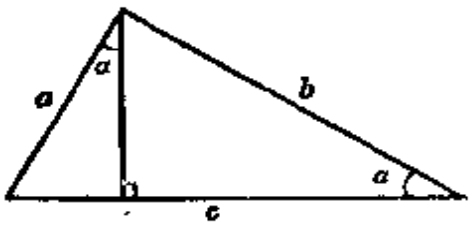


图 2-1 证明勾股弦定理

$$A_1=a^2\Phi(\alpha),\quad A_2=b^2\Phi(\alpha).$$

由 $A=A_1+A_2$ 得

$$c^2\Phi(\alpha)=a^2\Phi(\alpha)+b^2\Phi(\alpha),$$

消去 $\Phi(\alpha)$,即得

$$c^2=a^2+b^2.$$

这便是著名的勾股弦定理. 西方称之为毕达哥拉斯(Pythagoras)定理. 这是现代初等数学课程中必不可少的内容. 读者曾否想到,它竟然可以用 Π 定理如此简洁地证明!

上面的例题是个几何问题. 在物理学中,仅仅靠量纲分析,也可得到某些重要结论. 虽然不一定像上面的例题那样, 在每一问题中都能得到完全的定量结果, 但往往与它只差一个无量纲的未知函数或未知系数. 有时, 借助于量纲以外其它来源的知识和推理(如已知的特例或实验规律), 还可不太难地进一步获知那未知函数的某些特征,甚至将它完全确定下来.

在下面的例题中,除个别的(主要是电磁学的)问题外,我们都选取质量(M)、长度(L)和时间(T)作为基本量,故 $m=3$.

例题 3　细棒的转动惯量

解　设一均匀细棒，长度为 l，质量为 m，求绕通过其中点 O 的转轴的转动惯量 I(图 2-2).

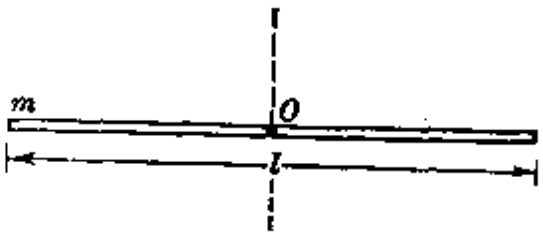


图 2-2　细棒的转动惯量

转动惯量的量纲式为

$$[I]=[M][L]^2,$$

故任意形状的物体的转动惯量可写为

$$I=ml^2(\Phi\{\Pi\}),$$

其中 m 是该物体的总质量，l 是它的某个特征长度. $\{\Pi\}$代表一组能确定其几何形状的无量纲参量，如长方形两边长之比，三角形底与高之比，或某些角度及它们的三角函数等. 对于几何形状相似的物体，函数 $\Phi(\{\Pi\})$是等同的. 对于那些只用一个特征长度即可完全确定的几何形体，如正方形或立方体、圆或球、细棒等，Φ 退化为一个未知常数，下面用 k 表示. 故细棒的转动惯量可写成

$$I=kmr^2, \tag{2.15}$$

进一步确定 k，尚需其它知识. 这里我们利用转动惯量的平行轴定理：

$$I=I_C+md^2, \tag{2.16}$$

这里 I_C 是绕通过质心某个特定轴的转动惯量，若将此轴平行移动一距离 d，则绕新轴的转动惯量 I 由上式决定.

设式(2.15)中的 I 代表细棒的 I_C，即绕中点 O 的转动惯量. 将轴移至端点，则 $d=l/2$，按式(2.16)，转动惯量将为

$$I'=\left(k+\frac{1}{4}\right)ml^2, \tag{2.17}$$

现在我们设想，将细棒平分为两段，每段的质量为 $m/2$，长度为 $l/2$，按式(2.17)，它们绕通过其端点 O 的转动惯量皆为

$$I''=\frac{1}{8}\left(k+\frac{1}{4}\right)ml^2,$$

由于两段绕同一轴的转动惯量之和等于总的转动惯量 $I=kml^2$，即

$$2I''=I, \text{ 或 } \frac{2}{8}\left(k+\frac{1}{4}\right)=k,$$

由此得 $k=1/12$，代入式(2.15)和(2.17)，得细棒的转动惯量为：

$$\begin{cases} \text{通过中心} \quad I=\dfrac{1}{12}ml^2; & (2.18) \\ \text{通过一端} \quad I'=\dfrac{1}{3}ml^2. & (2.19) \end{cases}$$

这结果与通常用积分方法计算出来的一致.

用本题的方法还可求出更复杂情况，如长方形、三角形、多边形、圆等的转动惯量，而无需作繁复的积分①.

例题3　单摆的周期.

解　单摆是大家都很熟悉的例子，其周期 T 的表达式平常需要通过解微分方程求得，这里我们用量纲分析来讨论它. 这种方法的关键是选好与问题有关的变量. 在本题中我们选单摆的质量 m、重力加速度 g 和摆长 l 为独立变量，此外再考虑周期 T 和总能量 E 两个量. 本题的量纲关系比前两题稍复杂一些，我们采用比较正规的方法来分析. 把上述各物理量的量纲列成矩阵如下，每纵列代表一个变量的量纲矢量：

	m	g	l	T	E
M	1	0	0	0	1
L	0	1	1	0	2
T	0	−2	0	1	−2

解代数方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\text{和}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix},$$

得

$$\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}\text{和}\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

由此获得 $n-m=2$ 个无量纲组合

$$\Pi_1=T\sqrt{\frac{g}{l}},\quad \Pi_2=\frac{E}{mgl}.$$

按照式(2.14)我们可以写出

$$T=\sqrt{\frac{l}{g}}\,\Phi\left(\frac{E}{mgl}\right), \qquad (2.20)$$

① R. Rabinoff, *Am. J. Phys* **53**(5), 501, (1985)；译文见《大学物理》1987 年第 7 期，第 31 页.

这里的函数 Φ 不能用量纲法进一步定出了. mgl 代表摆角为 90° 时相对于最低点的势能，Π_2 代表相应于此情况的约化能量. 在摆幅很小时 $\Pi_2 \ll 1$，可将函数 Φ 按宗量的幂次展开：

$$\Phi = C_0 + C_1\left(\frac{E}{mgl}\right) + C_2\left(\frac{E}{mgl}\right)^2 + \cdots,$$

于是

$$T = C_0\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + C_1'\left(\frac{E}{mgl}\right) + C_2'\left(\frac{E}{mgl}\right)^2 + \cdots\right], \tag{2.21}$$

式中 C_0, $C_1' = C_1/C_0$, $C_2' = C_2/C_0$ 等都是纯数. 在小摆幅的极限下，上式可只保留第一项，这时周期 T 既与质量 m 无关，又与摆幅无关. 这两点都不是显然的.

顺便指出，理论推导表明，式(2.20)的解析表达式为全椭圆积分

$$\Phi(\Pi) = 4K(\sqrt{\Pi/2}). \tag{2.22}$$

$\Pi \to 0$ 时 $K \to \frac{\Pi}{2}$，从而 $\Phi \to C_0 = 2\pi$，这是大家熟知的结果. 大摆幅时周期随约化能量 Π_2 变化的曲线示于图 2-3. 可以看出在相当大的摆幅范围内，周期 T 偏离小摆幅的极限 $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$ 是不大的. 在 $E/mgl = 1$ 时(90°)，T 增加 18%，$E/mgl = 2$ 时(180°，即从圆周的最高点滑下)，$T \to \infty$.

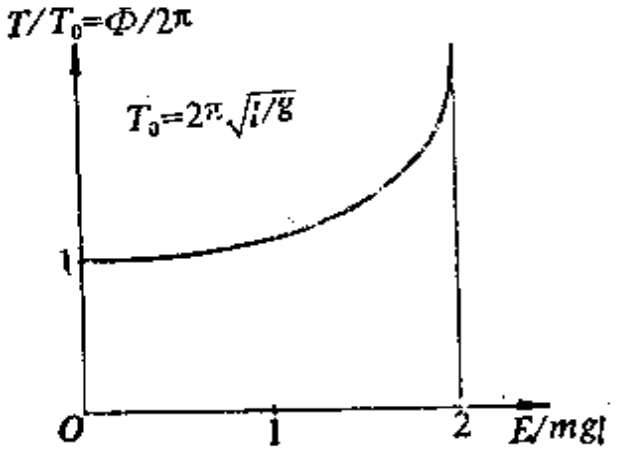


图 2-3 单摆的周期

例题 4 一道 N 质点碰撞的考题

质量分别为 m_1, …, m_N 的 N 个质点静止地放在一无限大无摩擦的水平平面上. 它们排在一条直线上，位置分别为 x_1, …, x_N. 另有一质量为 m 的质点 P 位于此直线上某处，具有沿此直线的初速 v_i. 待所有质点不再碰撞以后，P 经历了 n 次碰撞，并获得末速 v_f. 如果其初速为 $3v_i$，质点 P 将经

历多少次碰撞?其末速将为何?解释你的答案的理由.

解 设质点的初始位置为 x. 这道题中有 $N+1$ 个位置变量 $x, x_1, \cdots, x_N$ 和 $N+1$ 个质量 m, m_1, $\cdots$, m_N, 还有一系列无量纲的恢复系数 $\{e\}$, 再加上质点 P 的初速 v_i, 即可构成本题的全部主定参量. 质点 P 的碰撞次数 n 和末速 v_f 完全由它们决定. 由上述 $2N+3$ 个有量纲的量很容易构造出 $2N$ 个无量纲的量: x_1/x, $\cdots$, x_N/x; m_1/m, $\cdots$, m_N/m. 由此还剩下三个具有独立量纲的量 x, n, v_i, 它们的量纲表如下:

	x	m	v_i
M	0	1	0
L	1	0	1
T	0	0	−1

它们的行列式不等于零, 因此不可能再有无量纲的组合了. 无量纲量 n 和 v_f/v_i 只能是上述无量纲量的函数

$$n=\Phi\left(\frac{x_1}{x}, \cdots, \frac{x_N}{x}, \frac{m_1}{m}, \cdots, \frac{m_N}{m}, \{e\}\right), \tag{2.23}$$

$$\frac{v_f}{v_i}=\Psi\left(\frac{x_1}{x}, \cdots, \frac{x_N}{x}, \frac{m_1}{m}, \cdots, \frac{m_N}{m}, \{e\}\right), \tag{2.24}$$

它们的数值与 v_i 无关. 故当 $v_i \to 3v_i$ 时, 碰撞次数 n 不变, 末速 $v_f \to 3v_f$.

例题 5 试用量纲法由开普勒第三定律推论万有引力的性质.

解 由开普勒第二定律得知, 万有引力为有心力, 设它具有 $f=K/r^n$ 的形式, 并设行星轨道的半长轴 a 和周期 T, 除 K 外, 还取决于行星本身的质量 m、能量 E 和角动量 P_ϕ. 有关参量的量纲为

	m	K	E	P_ϕ	a^3/T^2
M	1	1	1	1	0
L	0	$n+1$	2	2	3
T	0	−2	−2	−1	−2

根据此量纲表可算出, 由 m、K、E、P_ϕ 组成的一个无量纲量有

$$\Pi=\frac{P_\phi E^{\frac{n-3}{2(n-1)}}}{m^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{n-1}}}.$$

根据 Π 定理

$$\frac{a^3}{T^2}=\frac{K^{\frac{1}{n-1}}E^{\frac{n-3}{2(n-1)}}}{m}\Phi(\Pi).$$

然而开普勒第三定律宣称：$a^3/T^2=$常量，它是太阳系的常量，与行星的性质 m、E、P_ϕ 无关. 故由上式得 $\Phi=1$, $n=2$(平方反比律)和 $K\propto m$, 即

$$\frac{a^3}{T^2}=\frac{K}{m}=\text{太阳系常数}.$$

例题 6 带电粒子在静电场和静磁场中的运动轨迹.

试判断下列命题的真伪:

(1) 从静止出发在静电场中运动的带电粒子，其轨迹与它的质量无关;

(2) 若质量为 m_1 的正离子从静止出发在静电场和静磁场中描绘出某一轨迹. 若使各处电场改变某一适当的因子，可使另一质量为 m_2 的正离子从静止出发描绘出同一轨迹来.

(在本题中设带电粒子的运动是非相对论性的.)

解 设带电粒子的电荷和质量分别为 q 和 m, 它在三维空间的坐标可用一个长度参量 L 和两个无量纲参量(譬如角度)θ_1 和 θ_2 表征. 设 L_0, θ_{10}, θ_{20} 为它们在 $t=0$ 时刻的初始值. 轨道方程可写作如下参量形式

$$\begin{cases} L=L(L_0,\ \theta_{10},\ \theta_{20},\ q,\ m,\ E,\ B,\ \{\varphi\},\ t), \\ \theta_1=\theta_1(L_0,\ \theta_{10},\ \theta_{20},\ q,\ m,\ E,\ B,\ \{\varphi\},\ t), \\ \theta_2=\theta_2(L_0,\ \theta_{10},\ \theta_{20},\ q,\ m,\ E,\ B,\ \{\varphi\},\ t). \end{cases} \tag{2.25}$$

这里 E、B 分别代表电场 E 和磁场 B 的大小，用一组角度$\{\varphi\}$代表它们的方向. 上面我们采用的是 SI 单位制，因而在洛伦兹力的表达式中不出现常数 c. SI 制有四个基本量，所以从 L_0, q, m, E, B, t 六个变量中可以组成两个无量纲量

$$\Pi_1=\sqrt{\frac{qE}{mL_0}}\,t\equiv\bar{t}$$

$$\Pi_2=\frac{qL_0B^2}{mE}$$

这里 Π_1 可看成是无量纲的"约化时间", 故今后用 $\bar{t}$ 表示. 按照 Π 定理，轨道方程(2.25)可无量纲化如下

$$\begin{cases} L=L_0\Phi(\theta_{10},\ \theta_{20},\ \{\varphi\},\ \bar{t},\ \Pi_2), \\ \theta_1=\Theta_1(\theta_{10},\ \theta_{20},\ \{\varphi\},\ \bar{t},\ \Pi_2), \\ \theta_2=\Theta_2(\theta_{10},\ \theta_{20},\ \{\varphi\},\ \bar{t},\ \Pi_2). \end{cases} \tag{2.26}$$

式中 Φ, Θ_1, Θ_2 皆为无量纲函数.

无磁场时, $\Pi_2=0$, 要保持轨道不变，只需约化时间 $\bar{t}$ 不变. 当 $m=m_1\to m_2=\alpha m_1$ 时, 只要改变时间尺度, 使 $t_2=\sqrt{\alpha}\,t_1$, 即可保持 $\bar{t}$ 不变. 从而命题

(1)为真.

加上磁场后，当 $m=m_1\to m_2=\alpha m_1$ 时，要保持 $\bar{t}$ 和 Π_2 同时不变，除了改变时间尺度外，E 和 B 中至少有一个必须作适当改变. 现保持 B 不变，则要求 $t_2=\alpha t_1$，$E_2=E_1/\alpha$，才能保持 $\bar{t}$ 和 Π_2 同时不变. 故命题(2)也成立.

例题7　一道量子真空涨落的考题

两块无限大平行平面壁相距 s，皆由理想导体构成. 从经典理论看，两壁间是没有相互作用的，但若计及(相对论性)电磁场的量子真空涨落效应，为了确定两壁间单位面积上的作用力 f，哪些物理量可能被牵涉到？试用量纲分析法把 f 确定到只差一个数值系数.

解　除了距离 s 外，这里可能涉及的参量只有 c(真空中的光速)和 h(普朗克常数)了. 从量纲表

	s	c	h	f
M	0	0	1	1
L	1	1	2	−1
T	0	−1	−1	−2

可以解出 $[f]=[s]^{-4}[c][h]$，

即

$$f\propto\frac{ch}{s^4}. \tag{2.27}$$

例题8　试用量纲法导出粘性系数 η、扩散系数 D、热导率 $\varkappa$ 和比热 c、流体密度 ρ、平均热运动速率 $\bar{v}$、平均自由程 λ 之间的比例关系.

答　η 和 $\varkappa/c\propto\rho\bar{v}\lambda$，

而　　$D\propto\bar{v}\lambda$.

用最粗略的平均自由程概念，得到上列三式的比例系数都是 $1/3$[①]. 严格的理论只有从确定分布函数入手，计算是相当繁复的. 所得系数，对 η 来说是 0.499；对 $\varkappa/c$ 来说，还要再乘以 2.5—2.522；对 D 来说，情况就更复杂了[②]. 但不管怎样，本题内给出的定性关系，在数量级上是正确的.

例题9　黑体辐射

解　在普朗克提出量子论之前，维恩 (W. Wien) 曾根据热力学原理证明，黑体的辐射频谱必有如下的函数形式

① 李椿等，热学，第四章. 人民教育出版社，1978.

② 王竹溪，统计物理学导论，第四章. 高等教育出版社，1965.

$$r_0(v,\ T)=cv^3\Phi\left(\frac{v}{T}\right), \tag{2.28}$$

式中 c 为真空中光速. v 为频率，T 为绝对温度. 只靠热力学不能进一步把函数 Φ 的形式确定下来. 但是由此我们可以得到斯特藩-玻耳兹曼定律和维恩位移定律. 为此我们先求温度 T 时的辐射本领

$$\begin{aligned}R(T)&=\int_0^\infty r(vT)\,\mathrm{d}v=c\int_0^\infty v^3\Phi\left(\frac{v}{T}\right)\mathrm{d}v\\&=cT^4\int_0^\infty\left(\frac{v}{T}\right)^2\Phi\left(\frac{v}{T}\right)\mathrm{d}\left(\frac{v}{T}\right)\\&=cT^4\int_0^\infty x^3\Phi(x)\,\mathrm{d}x.\qquad(x=v/T)\end{aligned}$$

上式右端的定积分是个与 T 无关的常数，于是我们得到了 $R\propto T^4$ 的结论(斯特藩-玻耳兹曼定律)，但比例系数不知.

为了导出位移定律，我们先把黑体的辐射频谱(2.28)式改用 $\lambda=c/v$ 表示. 因 $\mathrm{d}v=-\frac{c}{\lambda^2}\mathrm{d}\lambda$，由 $r_0(\lambda,\ T)\mathrm{d}\lambda=|r_0(v,\ T)\mathrm{d}v|$ 的条件得

$$r_0(\lambda,\ T)=\frac{c^5}{\lambda^5}\Phi'\left(\frac{c}{\lambda T}\right); \tag{2.28'}$$

在温度 T 时 $r_0(\lambda,\ T)$ 的极大值位于

$$\frac{\partial r_0(\lambda,\ T)}{\partial\lambda}=-\frac{5c^5}{\lambda^6}\Phi\left(\frac{c}{\lambda T}\right)-\frac{c^6}{\lambda^7T}\Phi'\left(\frac{c}{\lambda T}\right)=0$$

的地方，$\Phi'(x)$ 代表 $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}x$. 这相当于求下式的根

$$5\Phi(x)+x\Phi'(x)=0,\qquad(x=c/\lambda T)$$

设此根位于 $x=c/\lambda T=x_0$ 处，于是

$$\lambda_{\max}T=c/x_0\quad\text{(维恩位移定律)}$$

由于函数 Φ 未知，常数 c/x_0 也未知.

今天，在普朗克之后我们已经知道黑体辐射的量子本性，上述两条定律可以很简捷地由量纲分析导出. 为了便于作量纲分析，我们宁肯用具有能量量纲的 kT (k 为玻耳兹曼常数)代替 T. 除此之外，参与本问题的普适常数还应该有 c 和 h(普朗克常数). 故可假定 $R(T)$ 仅由 kT, c, h 三个主定参量所决定. 现将它们的量纲表列出如下：

	kT	c	h	R
M	1	0	1	1
L	2	1	2	0
T	−2	−1	−1	−3

由此得

$$[R]=[kT]^4[c]^{-2}[h]^{-3}$$

即 $R\propto T^4$，且得斯特藩-玻耳兹曼常数 $\sigma\propto k^4/c^2h^3$。(利用普朗克公式所得结果为$\sigma=2\pi^5k^4/15c^2h^3$，即上面未能定出的比例常数为 $2\pi^5/15=40.80$)。

在位移定律中 λ_{max} 决定于 k, c, h，由量纲法可得

$$[\lambda_{max}]=[kT]^{-1}[c][h],$$

即 $\lambda_{max}T=$常数 b，维恩常数 $b\propto ch/k$。(利用普朗克公式所得结果为 $b=0.2014ch/k$)。

由此可见，有了普朗克常数 h 的概念之后，可以不用热力学，仅从量纲上就能得出两条黑体辐射定律。虽然仍不能将 σ、b 两个常数最后解出，但它们与普适常数 k, c, h 之间的依赖关系已弄清楚了。

例题 10　圆棒弯曲时内力矩与半径的关系

解　有一根长度为 l、截面半径为 r 的圆棒(见图 2-4a)，把它置于两个支撑点上。棒在自重的作用下稍有弯曲(图 2-4b)。若考察左边半根棒，我们会注意到，来自左面支点的垂直作用力 N 和这半根棒的重量 $W/2$ 大小相等、方向相反，形成一个顺时针方向的力偶。但是由于棒处于平衡状态，所以右边半根棒对它施加的力必产生一个大小相等、方向相反的力偶矩，称为此棒的"内力矩"。

首先让我们来分析一下，内力矩是怎样产生的。当圆棒弯曲时，上侧缩短，内部产生压应力；下侧伸长，内部产生张应力(图 2-4c)。这一张一压，就形成了内力矩。设上、下侧长度的改变量为 Δl，则应变为 $\Delta l/l$，内力矩应正比于材料的杨氏模量 Y 和应变 $\Delta l/l$。设棒对曲率中心的张角为 α，则 $l=R\alpha$，

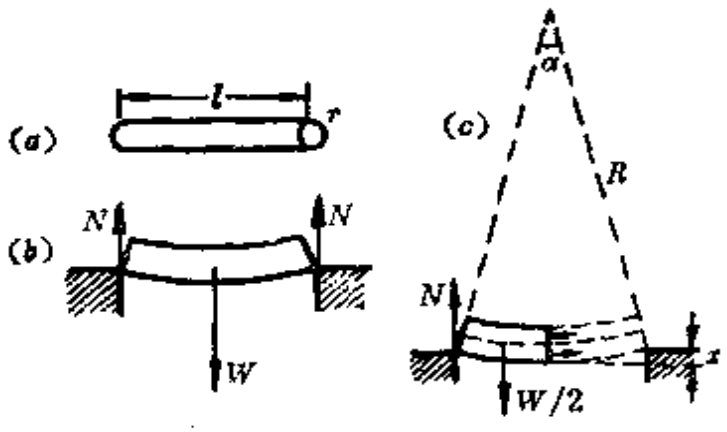


图 2-4　弯曲圆棒的内力矩

$\Delta l=r\alpha$, 故 $\Delta l/l=r/R$. 现用量纲法来分析, 内力矩 $L_{内}$ 的量纲为

$$[L_{内}]=ML^2T^{-2},$$

杨氏模量的量纲为

$$[Y]=ML^{-1}T^{-2},$$

由此不难看出

$$\Pi_1=\frac{L_{内}}{Yr^3}$$

是个无量纲量, 另一个无量纲的量就是上面得到的 $\Pi_2=r/R$. 按照 II 定理, 我们有

$$L_{内}=Yr^3\Phi\left(\frac{r}{R}\right),$$

按胡克定律, $L_{内}\propto\Delta l/l=r/R$, 故应取 $\Phi\propto r/R$, 于是得

$$L_{内}\propto Yr^4/R, \tag{2.29}$$

即内力矩正比于圆棒半径的四次方. 理论计算表明, 上式中的比例系数是 $\pi/4$, 即 $L_{内}=Y\pi r^4/4R$.

例题 11　决定水面波的因素有二: 一是表面张力, 它促使表面的任何弯曲展平; 二是重力, 它促使水面的任何倾斜恢复水平. 试用量纲分析法确定, 当以上每个单一因素起作用时, 波速 v 与约化波长 $\lambda\!\!\!^{-}=\lambda/2\pi$ 的依赖关系. 哪个因素对长波起主要作用? 哪个因素对短波起主要作用?

答　表面张力起作用时, $v\propto\sqrt{\gamma/\rho\lambda\!\!\!^{-}}$(短波时起主要作用); 重力起作用时, $v\propto\sqrt{g\lambda\!\!\!^{-}}$(长波时起主要作用). 式中——$\gamma$ 表面张力系数, ρ——水的密度, g——重力加速度.

例题 12　上题中讨论水面的重力波时, 未考虑水的深度 h 的影响, 亦即它相当于 $h\gg\lambda\!\!\!^{-}$ 的深水极限情形. 在 $h\ll\lambda\!\!\!^{-}$ 的相反情形里, v 将不取于波长, 而取决于深度. 试用量纲法分析 v 与 h 的依赖关系.

答　$v\propto\sqrt{gh}$.

根据 II 定理可以预期, 对于任意的 h 和 $\lambda\!\!\!^{-}$, 水面波速的表达式可写成

$$v=\sqrt{g\lambda\!\!\!^{-}}\Phi(\Pi),$$

这里 $\Pi=\lambda\!\!\!^{-}/h$, 上面两题的结果告诉我们, $\Phi(\Pi)$ 具有如下极限行为:

$$\begin{cases}\Pi\to 0\text{ 时}, \Phi(\Pi)\to\text{常数};\\ \Pi\to\infty\text{ 时}, \Phi(\Pi)\to\Pi^{-1/2}.\end{cases}$$

流体力学的理论计算表明, $\Phi=\tanh(\Pi^{-1/2})$, 从而

$$v=\sqrt{gk}\tanh\sqrt{h/k} \tag{2.30}$$

上面的量纲分析定性地与此式符合.

从以上各种例子可以看出，用量纲的方法常常很简便. 甚至不需要知道具体的定律和机制，便可得到一些重要的概念和信息. 然而，正确地运用它并不总是那么容易. 难的是主定参量的选择. 这要求相当的经验和对现象本质透彻的了解. 特别是在那些未知的领域内，更需要有物理上的直觉和洞察力，才能处理得妥贴. 这里回顾一段历史上的插曲，是很有教益的.

瑞利(Lord Rayleigh)是最早提倡使用量纲法的先驱者之一. 1915 年他用量纲法讨论流动着的流体的导热问题，他的推理后来遭到许多人的批评，他自己未能对此作出令人信服的辩解.

瑞利当时讨论的问题可表述如下：在无穷大空间内作匀速平行运动的不可压缩无粘性流体中，置放一个给定形状的固定物体，它与远处流体保持恒定的温度差 θ. 待流场达到恒定后，试分析影响单位时间内由该物体传出热量 H 的因素.

瑞利是这样选择主定参量的：物体的特征线度 l，远处未受扰流场中的流速 v，温度差 θ，流体单位体积的热容 c 和热导率 $\varkappa$，瑞利所选的单位制是五元的：除质量 M、长度 L、时间 T 之外，还有温度 Θ 和热量 Q(选这样的单位制当然是无可非议的). 以上各参量的量纲列于下表：

	l	v	θ	c	$\varkappa$	H
M	0	0	0	0	0	0
L	1	1	0	−3	1	0
T	0	−1	0	0	1	−1
Θ	0	0	1	−1	1	0
Q	0	0	0	1	1	1

这里共 6 个变量($n=6$)，5 个基本量，本应有 $n-m=1$ 个无量纲组合量. 但这里 5×5 的行列式显然等于 0，因为第一行都是 0，所以

由前5个参量还可多组成一个无量纲量. 这里的两个无量纲量为

$$\Pi_1=\frac{H}{\varkappa l\theta},\quad \Pi_2=\frac{lvc}{\varkappa}$$

故有

$$H=\varkappa l\theta\Phi\left(\frac{lvc}{\varkappa}\right) \tag{2.31}$$

它表明,在给定 l, $\varkappa$ 的情况下,H 正比于温差 θ; 此外它只取决于 v 和 c 的乘积,即对于不同的 v 和 c, 只要 v 与 c 乘积一样,H 的值就相同.

略布欣斯基(Рябушинский)对瑞利这个推论作了批评. 他也取这5个主定参量,但认为,若取通常的 M、L、T 三个基本量,温度和热量都应具有能量的量纲,于是

	l	v	θ	c	$\varkappa$	H
M	0	0	1	0	0	1
L	1	1	2	−3	1	2
T	0	−1	−2	0	−1	−3

这里可以决出三个无量纲量

$$\Pi_1=\frac{H}{\varkappa l\theta},\quad \Pi_2=\frac{lvc}{\varkappa},\quad \Pi_3=cl^3$$

所以有

$$H=\varkappa l\theta\Phi\left(\frac{lvc}{\varkappa},\ cl^3\right) \tag{2.32}$$

这表明,在 θ, l, $\varkappa$ 给定后,H 不仅取决于 v 和 c 的乘积,它还取决于 c 本身.

在对略布欣斯基的答复中瑞利写道①:"略布欣斯基所提出的问题,与其说是属于我所涉及的相似性原理的应用这一方面的,不如说是属于逻辑方面的. 问题很值得进一步探讨. 我的结论是在

① 瑞利的原作见 Nature, V. 95, 1915, pp. 669—68; 略布欣斯基的批评见 Nature, V. 95, 1915, p. 105; 瑞利的答复见 Nature, V. 95, 1915, p. 646. 这段争论载入下列书籍: Bridgman, P. W., *Dimensional Analysis*, New Haven, Yale University Press, 1932.

通常的傅里叶热传导方程的基础上得出的，在方程中温度和热量被看作是 *sui generis*(不同质的) 量. 如果由分子理论提供的关于热的本质的进一步认识，使我们处于比以前研究个别问题时还要坏的境地，那的确是一个佯谬. 佯谬的解决看来应该是，在傅里叶方程中包含着被在略布欣斯基的论证中忽视的关于热和温度本质的某些东西".

看了这段答辩，读者感到问题澄清了吗？正如后来 Bridgman 说的，瑞利的答复难以令人满意，他对这个矛盾全然没有给出解释. 瑞利和略布欣斯基二人中，究竟谁是谁非呢？

一般说来，当我们选取更多的基本量时，都会出现一些新的物理常数. 例如用国际 MKSA 的电磁学单位制($m=4$)，就比用高斯单位制($m=3$)多个物理常数 ε_0 或 μ_0. 瑞利采用的五元单位制中包含两个新的物理常数：热功当量 J 和玻耳兹曼常数 k，它们在瑞利的单位制中的量纲式分别为

$$[J]=ML^2/T^2Q,\quad k=ML^2/T^2\Theta$$

选取主定参量时，应该把它们也包括进去，这样一来，我们就可比瑞利多得到一个无量纲量

$$\Pi_3=\frac{Jcl^3}{k},$$

从而瑞利的式(2.31)应修改为

$$H=\varkappa l\theta\Phi\left(\frac{lvc}{\varkappa},\ \frac{Jcl^3}{k}\right) \tag{2.31'}$$

由于 J、k 是普适常数，这公式与略布欣斯基的式(2.32)基本上一样. 所以，看来略布欣斯基是对的.

然而，流体是不可压缩和无粘性的，在这个问题中没有热能与机械能的转化，力学过程与热过程独立进行，因此在这里热功当量 J 一定不重要，也就是说，在式(2.31')中的 Φ 函数实际上不依赖于 $\Pi_3=Jcl^3/k$. 这样，我们又回到了瑞利的结论!

§2. 模拟试验与物理相似性原理

1. 模拟试验的相似性原理

在工程技术以及其它许多领域中，人们常希望利用模拟试验来代替对实际现象的研究，例如用水代替石油来研究它们在管道中的流动，把设计好的飞机缩小成模型放在风洞中试验其性能，等等．这样做，不仅在经济上有很大好处，并带来很大方便，而且还使我们可能在一定程度上预言某些在目前尚无法达到的条件下出现的情况．怎样才能使我们模拟试验的结果真的对实际有指导意义？先看一个流体力学的例子——流体在管道中的流动．

考虑在截面积 S 不变的水平管道内作恒定流动的液体，如果流体有粘性(设粘性系数为 η)，流动要靠压强梯度 $\Delta p/\Delta l$ 来维持，流量 Q 是正比于压强梯度的．设管道的截面是圆形的，直径为 d，则 $S=\pi d^2/4$．由于有粘性，靠近管壁处流体的流速小，管中心流速大．在截面上流体的平均流速应定义为 $\bar{v}=Q/S=4Q/\pi d^2$．在这个问题中另一个有关的参量应该是流体的密度 ρ．把所有的这些参量的量纲列出：

	ρ	d	η	$\bar{v}$	$\Delta p/\Delta l$
M	1	0	1	0	1
L	−3	1	−1	1	−2
T	0	0	−1	−1	−2

由此决出两个无量纲参量

$$\Pi_1=\frac{\Delta p/\Delta l}{\rho\bar{v}^2/d},\qquad \Pi_2=\frac{\rho d\bar{v}}{\eta},$$

这里的 Π_2 称为“雷诺(Reynolds)数”，常记作 R，它是流体力学中的一个非常重要的无量纲数．根据 Π 定理，管道截面上的总压力梯度可写作

$$\frac{\Delta P}{\Delta l}=\frac{\Delta p}{\Delta l}S=\frac{\rho\bar{v}^2S}{d}\Phi(\mathrm{R}). \tag{2.33}$$

这里的无量纲函数$\Phi(\mathrm{R})$称为"管道阻力系数"，它依赖于雷诺数R，流体的流量可写为

$$Q=\bar{v}S=\frac{d}{\rho\bar{v}\Phi(\mathrm{R})}\frac{\Delta P}{\Delta l}=\frac{\pi d^3}{4\rho\bar{v}\Phi(\mathrm{R})}\frac{\Delta p}{\Delta l}$$

$$=\frac{\pi d^4}{4\eta\mathrm{R}\Phi(\mathrm{R})}\frac{\Delta p}{\Delta l},$$

或

$$Q=\Gamma(\mathrm{R})\frac{d^4}{\eta}\frac{\Delta p}{\Delta l}, \tag{2.34}$$

这里$\Gamma(\mathrm{R})=\pi/4\mathrm{R}\Phi(\mathrm{R})$.

从以上两式(2.33)和(2.34)可以看出，全部问题已归结为求函数关系$\Phi(\mathrm{R})$或$\Gamma(\mathrm{R})$. 如果我们在一定直径的管道中用实验方法测水在其中流动时阻力系数$\Phi(\mathrm{R})$与速度的依赖关系，所得数据可以在研究其它液体(如石油、水银)在另外直径的管道中流动时加以利用. 甚至在许多情况下(速度远小于声速，从而压缩性不重要时)，运用到空气在管道中的流动. 图2-5很好地说明了这一点，水和空气的实验数据的确差不多落在相同的曲线上.

流体的运动有两种截然不同的形式——层流和湍流. 图2-5所示实验数据表明，函数$\Phi(\mathrm{R})$有两支，一支对应于层流，另一支对应于湍流. 在R较小的一段曲线，对应于层流，它是哈根(G. Hagen)于1839年和泊肃叶(J. L. M. Poiseuille)于1840年用实验建立的. 在直管道中作层流流动的流线是平行直线，流体没有任何加速度，可以预期流量Q与惯性(密度ρ)没有关系，亦即式(2.34)中的$\Gamma(\mathrm{R})$为常数，或者说阻力系数$\Phi(\mathrm{R})\propto\mathrm{R}^{-1}$. 理论上可以证明，在这种情况下的流量公式为

$$Q=\frac{\pi r^4}{8\eta}\frac{\Delta p}{\Delta l}, \tag{2.35}$$

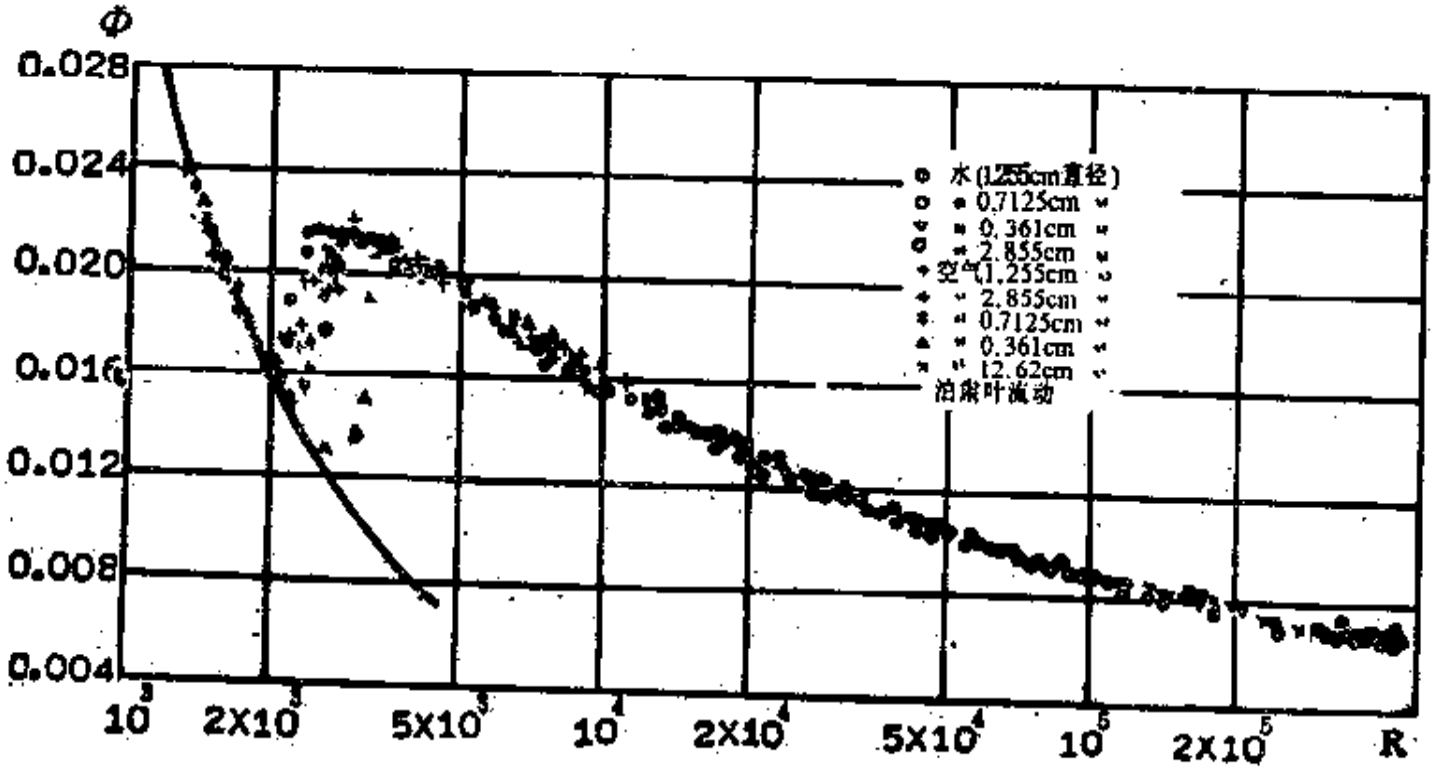


图 2-5　圆形管道内 Φ(R)的实验数据

式中 $r=d/2$ 是圆形管道的半径. 上述公式是有名的"泊肃叶公式", 它表明, 在小雷诺数的情况下 $\Gamma(\mathrm{R})=\pi/128$, $\Phi(\mathrm{R})=32/\mathrm{R}$. 在雷诺数 $\mathrm{R}=2000$—2600 范围内存在一个过渡区. 由层流向湍流过渡的这个雷诺数值, 称为"临界雷诺数", 常记作 R_c. (应注意: 不同情况下的临界雷诺数, 数量级可以相差很大, 上面所给的数值只适用于圆形管道).

下面我们来看运动物体在流体中的阻力 f. 这种情况下的曳引系数(drag coefficient)C_D 定义为

$$C_D=\frac{2f}{\rho v^2 S}, \tag{2.36}$$

式中 v 和 S 分别为物体的速度与横截面积. 对于直径为 d 的球体来说, $S=\pi d^2/4$. 图 2-6 所示为对球体的曳引系数 C_D 与雷诺数 $\mathrm{R}=\rho v d/\eta$ 函数间关系的实验数据. 由图可见, 当 $\mathrm{R}\ll 1$ 时, $C_D\propto \mathrm{R}^{-1}$; 当 $\mathrm{R}\sim 10^3$—10^5 时, C_D 几乎与 R 无关. 故曳引系数可以写成:

$$C_D=\frac{C_0}{\mathrm{Re}}(1+C_1\mathrm{R}), \text{①} \tag{2.37}$$

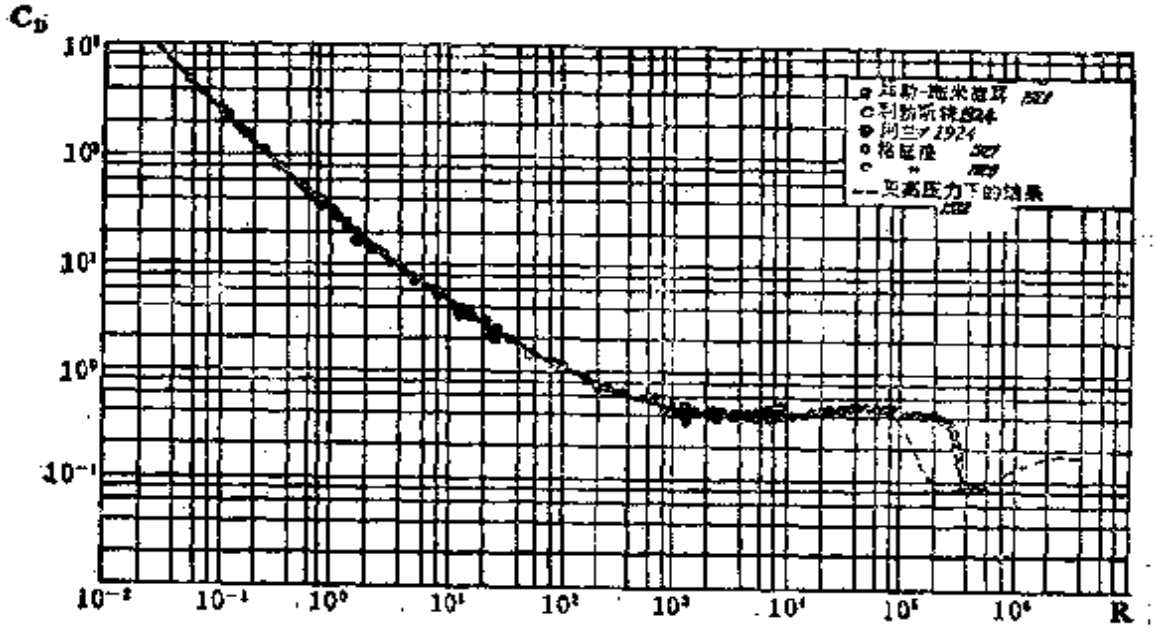


图 2-6 在流体中运动球体曳引系数 $C_D(\mathrm{R})$ 的实验数据

① 参见 Л. Г. 洛强斯基, 流体与气体力学, 下册, 542 页, 人民教育出版社, 1959.

也就是说，对于小雷诺数，阻力 $f\propto\eta$ 和 v；对于大雷诺数，$f\propto v^2$，且与粘性系数无关.

对于在粘性流体中作缓慢运动的小球，其所受阻力有个著名的公式——斯托克斯公式：

$$f=6\pi\eta r v, \tag{2.38}$$

式中 $r=d/2$ 为小球半径. 这公式是用层流的理论计算出来的，根据它可以定出式 (2.36) 中的 $C_0=24$(进一步的理论计算得 $C_1=3/16$).

例题 13　小孩玩的气球皮重 10g，吹胀后直径达 30cm，试按斯托克斯公式计算它在空气中的下落速度。你的结果符合实际吗？

解　当重力与空气阻力平衡时：

$$mg=6\pi\eta r v,$$

气球以速度 v 匀速下落：

$$v=\frac{mg}{6\pi\eta r}.$$

室温下空气的粘性系数 $\eta\simeq1.8\times10^{-5}\mathrm{N\cdot s/m^2}$，代入上式，得

$$v=\frac{10^{-2}\mathrm{kg}\times9.8\mathrm{m/s^2}}{6\pi\times1.8\times10^{-5}\mathrm{N\cdot s/m^2}\times0.15\mathrm{m}}=1.9\times10^3\mathrm{m/s},$$

这速率接近声速的 6 倍，显然是荒唐的。问题出在哪里？

经验告诉我们，在空气中飘浮的气球，下落是很慢的，速率最多每秒几十厘米。按 $v\simeq50\mathrm{cm/s}$ 估算，取空气密度 $\rho=1.29\mathrm{kg/m^3}$，得气球下落时的雷诺数

$$\mathrm{R}=\frac{\rho dv}{\eta}=\frac{1.29\mathrm{kg/m^3}\times0.3\mathrm{m}\times0.5\mathrm{m/s}}{1.8\times10^{-5}\mathrm{N\cdot s/m^2}}\sim10^5!$$

原来速率虽“小”，雷诺数却不小。对于这样大的雷诺数，斯托克斯公式早已不成立了，这时我们需要用高雷诺数的公式. 在式(2.37) 中略去第一项，得曳引系数 $C_D=C_0C_1=24\times3/16=9/2$，代入(2.36)，令其中阻力 f 与重力 mg 平衡，得气球下落的终极速度(terminal velocity)为

$$v=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{mg}{\pi d^2}}\simeq0.8\mathrm{m/s},$$

这数值就比较接近真实情况了.

从这个例子我们看到，有量纲的物理量(如速率)的大小是相对的，只有无量纲参数的大小才有绝对意义.

在第一章§1中我们曾经提到，通常遇到的物理系统是不具有标度不变性的，即一般说来，几何上的相似性并不等于物理上也相似.然而在工程技术中作模型试验时，总不能把模型做得和实物一样大小.怎样保证缩小了的模型与实物在物理上保持相似性？上面的一些例子表明，两现象在物理上相似的条件是有关的无量纲组合量具有相同的数值.这样，我们就可以像单位换算那样容易地从一现象的特征量推算出另一现象的特征量来.

在研究飞机机翼受到的上举力时，雷诺数 $\mathrm{R}=\rho lv/\eta$ 是个重要的无量纲参量.这里 l 是机翼的特征线度，v 是飞机的飞行速度.为了保证 R 数值不变，l 变小了，其它特征量就得改变.或者加大 v，或者加大 ρ，减小 η.因为粘滞系数 $\eta\propto\rho\bar{v}\lambda$，其中空气分子的平均热运动速率 $\bar{v}\propto\sqrt{T}$，而分子的平均自由程 $\lambda\propto 1/\rho$，故在一定温度 T 之下，η 与密度 ρ 无关.所以在航空技术的研究中，人们不得不建造压缩空气在其中作高速循环的密封型风洞来作模型试验.

不要以为只有动力学模拟中才有保持物理相似性的困难，其实在静力学中也存在类似的问题.考虑弹性结构(如桥梁桁架)的模拟.各向同性建筑材料的弹性性能由两个常数确定，即杨氏模量 Y 和无量纲的泊松(Poisson)比 σ(横向缩短与纵向伸长之比).如果结构是在重力下达到平衡的，则比重 ρg 将是重要参量.加上特征长度 L 和负载力 P，共是五个参量.除原有的一个无量纲量 σ 外，稍加分析我们即可发现，在剩下的四个量中只有两个量纲彼此独立，我们还可找到另外两个无量纲量

$$\Pi_1=\frac{P}{L^3\rho g},\quad \Pi_2=\frac{Y}{L\rho g}$$

如果模型采用与实物相同的材料来制做，则 Y，σ，ρ 不变，重力加速度 g 通常也是不变的．令 P 按正比于 L^3 的比例缩小．可保证 Π_1 不变，但怎样才能在 L 缩小时保持 Π_2 不变？似乎尺度缩小的模型试验已是不可能的了．然而出路尚有一条，加大 g！把模型装在离心机上甩，用惯性离心力来模拟重力，以增大有效的 g．实际中正是这样做的(参见图 2-7)．

用量纲法还可以使我们从一次试验中取得的有限数据里，分析出更多的结论．下面我们举一个观测原子弹爆炸的例子．有关火球半径 R 随时间 t 变化的数据记录如下：

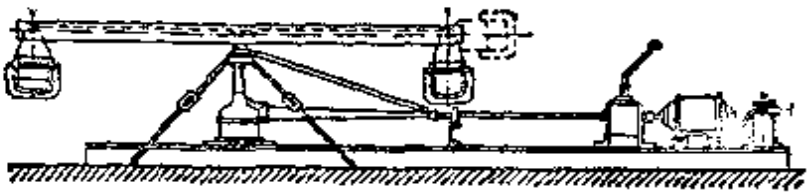


图 2-7　模型试验用的离心机

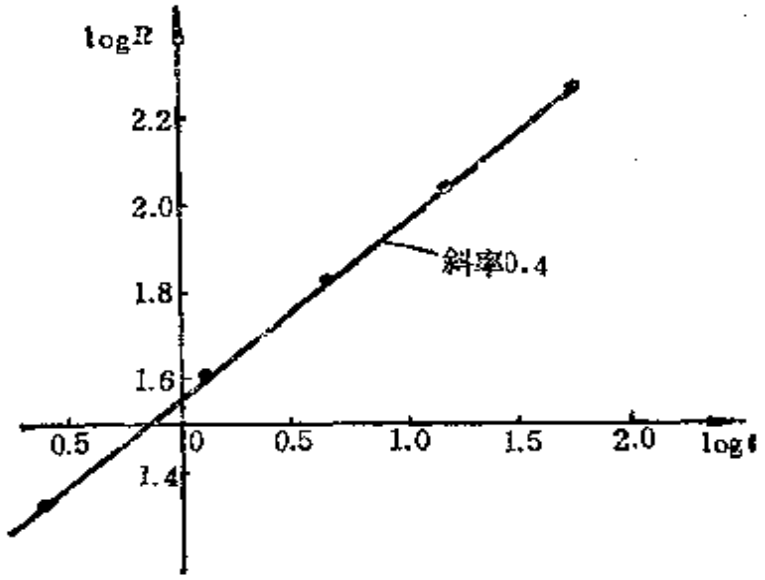


图 2-8　原子弹爆炸火球 R-T 关系

t(ms)	0.24	0.66	1.22	4.61	15.0	53.0
R(m)	19.9	31.9	41.0	67.3	106.5	175.0

试着用对数坐标作二者关系的曲线如图 2-8，我们发现它是一条斜率为 0.4 的直线．怎样理解这件事？膨胀着的火球外缘是冲击波，决定其推进速度大小的可能有哪些物理因素？原子弹释放的能量 E 可能是一个，空气的密度 ρ 可能是另一个，还有其它的因素吗？现在 E、ρ 加上 R、T，我们已有四个参量，在通常的 MKS 单位制中它们已能构成一个无量纲的组合，即

$$\Pi=\frac{Et^2}{\rho R^5}$$

从这里得

$$R=\left(\frac{E}{\rho\Pi}\right)^{1/5}t^{2/5}\propto t^{2/5},$$

这便解释了观测数据显示的结果．看来我们所选的物理参量是对的，而且已经基本上够了．如果我们进一步设无量纲参量 Π 的数量级为 1，取 $\rho\simeq1.3\mathrm{kg/m^3}$，则可估计出原子弹爆炸时释放出能量的数量级：

$$E\sim\frac{\rho R^5}{t^2}\sim10^{14}\mathrm{J}$$

2．生物界的比例问题

工程技术问题暂时就谈到这里，现在让我们把目光转向生物界，那里有许多有趣的比例问题，那怕用最粗略的量纲概念，也能得到一些不平凡的结论．

鸵鸟是当今世界上最大的鸟，有人说它不会飞是因为翅膀退化了．如果鸵鸟长了一副与它身体的大小成比例的翅膀，是否它就能飞起来了呢？

飞翔的必要条件是空气的上举力 f 至少与体重 $W=mg$ 平

衡．按高雷诺数的情况估算，量纲法给出如下的比例关系

$$f=CS\rho v^2, \tag{2.39}$$

式中 S 是翅膀的面积，ρ 为空气密度，v 是起飞或飞行的速度，C 是个无量纲的比例系数．能起飞的条件是 $f>W$，即

$$v>\sqrt{\frac{mg}{CS\rho}}.$$

我们作一个简单的几何相似性假设，设鸟的几何线度为 l，质量 $m\propto$ 体积 $\propto l^3$，$S\propto l^2$，于是起飞的临界速度 $v_0\propto\sqrt{l}$．燕子的最小飞行速率大约是 20km/h，而鸵鸟的体长 l 大约是燕子的 25倍，从而起飞的临界速度大 $\sqrt{25}=5$ 倍，即需要 100km/h，这已接近飞机起飞速率的量级，再擅长奔跑的鸵鸟也是做不到的．实际上鸵鸟的奔跑速度大约只有 40km/h．

上面的比例关系还告诉我们，象麻雀这样的小鸟和天鹅这样的大飞禽，起飞和着陆的姿式是不会相同的．小鸟只需从枝头跳到空中用翅膀拍打一两下，就能达到飞行的临界速率；大鸟则首先要沿着地面或水面奔跑或滑行一段，或者从一个高的栖木向下俯冲，才能达到飞行的临界速度．当今最大的飞行动物是信天翁，它的翅膀全长 3 米多，通常是借助上升的气流在高空作长时间的翱翔．在恐龙时代有一种会飞的爬虫类动物，叫做翼龙(图 2-9)．其



图 2-9　经艺术家复原的翼龙形象及其与鹰的比例

翅膀全长竟达16米，看来这样大的动物是不能起飞的，除非爬上峭壁或栖息在高大的林梢，象滑翔机那样从那里滑翔.

跳蚤是擅长跳跃的，小小的一只跳蚤能跳几十厘米高．一个人身高一般不足2米，而跳蚤的身长是毫米量级的，约比人体的线度小三个数量级．长久以来流传一种说法：假如跳蚤长得和人那样大，它就能跳几百米高．尽管早在三百多年前伽利略就指出这种观点是错误的，但谬种仍在不断流传．上述"比例定律"错在哪里？显然，以上的推断单纯地从几何相似性出发，未考虑物理上是否相似．合乎实际的假设应该是，对所有的动物，每单位质量的肌肉所提供的能量大体是同量级的．这样，跳到高度 h 需要的能量 $mgh \propto m$，而肌肉能够提供的能量也正比于 m，从而 h 的数量级与 m 无关．即各种动物，无论大小，能跳的高度在数量级上大体一样．象人那样大的跳蚤最多也只能跳几米高！

未受过物理训练的人，常以为任何事物的尺度都可以随意地放大和缩小．古今中外，有关大人国、小人国的构想，屡见不鲜．先从我国古籍中摘出几条看看．晋张华撰《博物志·异人》云："龙伯国人，长之十丈，生万八千岁而死"；又《博物志·外国》云："大人国，其人孕三十六年"；汉东方朔撰《神异经·西北荒经》云："西北荒中有小人，长一分，其君朱衣玄冠，乘辂（音 hé，挽车横木）车马，引为威仪"．这类描述大多记载了上古时代的神话，其中着重的是身躯的大小，间或涉及生命的节奏．从量纲的角度看，长度 L 和时间 T，二者之间该有什么比例关系？谁也说不清．较近的著作描写得细致得多．十八世纪英国作家斯威夫特（J. Swift）写了一本有名的讽刺小说《格列佛游记（*Gulliver's travels*）》，书中述说了主人公格列佛在小人国和大人国的奇遇．固然这同样是无稽之谈，由于叙述较具体，我们不妨故作认真，给它来一番物理分析，倒也是一次很好的相似性原理的练习．

为了方便，我们假定这些大人和小人的几何线度 l 都与正常人差一个数量级，但同为在地球上生活的血肉之躯，体内的成分和物理、化学过程都是相似的.

首先研究一下大人国的公民. 设身体的平均密度与我们相同，从而他们的体重 $\propto l^3$，而骨骼的截面积 $\propto l^2$，因此单位截面上承担的静态负荷 $\propto l$，即等于我们的 10 倍. 运动使骨骼增加另一部分负荷，除质量外，它还正比于加速度. 按《游记》书中描写，在大人国里的生活节奏与我们差不多，故一切速度和加速度 $\propto l$，从而动态负荷又大了 10 倍，即在单位骨骼截面上承担的负荷可能等于我们的 100 倍. 所以大人国里的公民决不敢作稍微剧烈一点的动作，否则他们骨折的可能性比我们大 100 倍. 从高度跌下来时，重力 $\propto mg \propto l^3$，而空气阻力 $\propto$ 面积 $\propto l^2$，故最后达到的极限速度 $\propto l$，对大人国的公民来说，也大了 10 倍，即重力对他们的威胁比我们大得多. 与此相反，小人国里的公民在这一点上是享有优越性的，他们在剧烈的运动中骨折的危险比我们小 100 倍，重力给他们带来的威胁也要小得多. 《游记》中描写，小人国中有一人仓惶地从躺着的格列佛的腰部往下跳，竟跌伤了. 其实，那怕他从站着的格列佛的肩膀上跳下来，也不会受伤，虽然按比例，这高度相当他们的几层楼. 正像我们的一只老鼠从天花板上跌落一样，不是什么危险也没有吗？

然而，小人国里的公民也有自己的苦恼. 我们的体温是恒定的(37°C)，与周围的环境保持一定的温差 ΔT. 按照牛顿冷却定律，单位时间从体表散失的热量正比于皮肤的面积($\propto l^2$)和 ΔT，这要靠体内发生的热量来补偿，这热量正比于体重或体积($\propto l^3$). 可见，与自身的体重相比，小人国里的公民必须摄入比我们大 10 倍发热量的食物. 此外，按衍射公式计算，眼睛最小分辨角的理论极限 $\theta \propto \lambda/D$，这里 λ 是可见光的波长，D 为瞳孔的直径. 可见，

小人国公民的最小分辨角比我们大 10 倍. 假定他们的明视距离比我们的小 10 倍,则在他们书上印的字应和我们的一样大. 但是他们的书页线度比我们的小 10 倍, 如果我们的书上每行印 30 个字的话,他们的书上每行只印 3 个字,每页里的行数也要相应地少 10 倍.

沿此线索,读者恐怕还会想到更多的方面,说明几何相似的东西在物理上常常是不相似的. 地球上人类身躯的尺度只能是现在的数量级,过多地放大和缩小,在物理上都是不现实的.

前文我们曾提到伽利略, 大家都公认, 他是物理学的开山祖师. 应当指出, 在标度变换下物理规律不是不变的, 这一思想也首先是伽利略提出的. 在他看来, 这一思想和他发现的运动定律同样重要. 他把两者都写进了他最重要的著作之中. 这本著作是《关于两种新科学的对话(*Dialogue on Two New Sciences*)》. 这里的图 2-10 就是从该书中复制而来的. 图中是两块狗骨头,小的一块是正常狗的骨头,大的一块是一种假想巨犬的骨头. 这只巨犬的长、宽、高都比正常狗大一倍. 伽利略指出,为了能够支撑自身的体重,这只巨犬的骨头必须具有如此一副长粗不成比例的模样.

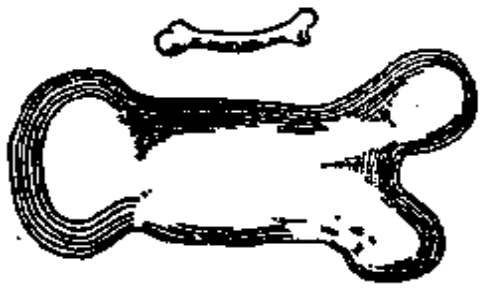


图 2-10 伽利略《关于两种新科学的对话》里的插图

例题 14 如果煮一只 4.5kg 的火鸡需要 3 小时, 煮一只 9kg 的火鸡需要多长时间?

答 3 小时 $\times 2^{2/3} \simeq 5$ 小时, 这种估计与一些著名的烹饪指南上所说的相当符合.

上面对生物体的相似性分析是十分粗糙的, 在所有问题里都假定只有一个特征长度 l. 实际上对生物体的相似性分析还可作

得更细致一点，为此可以深入地研究一下生物体长度与粗细的比例定律.

对于一定粗细的实心圆柱体，竖着的时候，其高度 l 有个临界值 l_c 超过它，在自重力的作用下直立的姿态不再是稳定的，它开始弯折. 为了定性地估算这个 l_c，我们考虑柱体微弯时弹性势能和

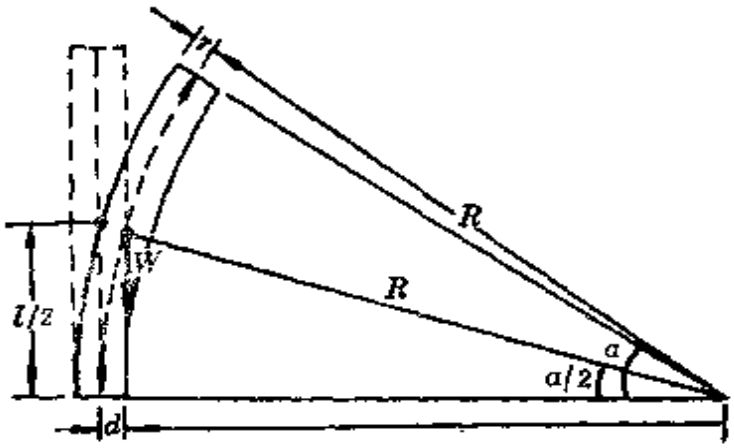


图 2-11 推导圆柱抗弯折的临界高度

重力势能的变化. 仍像在例题 10 里那样，假定弯曲的柱体呈圆弧形①. 我们用柱长对曲率中心所张的角度 α 来描述形变，按式 (2.29)，弯曲形变在柱内引起的内力矩为

$$L_{内} \propto \frac{Yr^4}{R} \propto \frac{Yr^4}{l}\alpha, \quad \left(\alpha = \frac{l}{R}\right)$$

从而弹性势能的增量为

$$\Delta E_{弹} = \int_0^{\alpha} L_{内} \mathrm{d}\alpha \propto \frac{Yr^4}{l}\alpha^2. \tag{2.40}$$

弯折时柱体的重心下降为

$$\Delta h = \frac{l}{2} - R\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{l}{2} - \frac{R\alpha}{2}\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right] = \frac{l\alpha^2}{24}.$$

柱体的重量为 $W = \pi r^2 l\rho g$，故重力势能的改变为

① 严格的弹性力学计算表明，此假定不对. 然而对于小形变的最低级近似，所得结果定性正确.

$$\Delta E_{重}=-W\Delta h=-\frac{\pi r^2 l^2\rho g}{24}\alpha^2, \tag{2.41}$$

式中负号表示 $E_{重}$ 减少. 当$|\Delta E_{重}|\geqslant\Delta E_{弹}$时,直立柱体失稳,故 l_c 由$|\Delta E_{重}|=\Delta E_{弹}$决定. 从(2.40)、(2.41)知

$$r^2 l_c^2\rho g\alpha^2\propto Y r^4\alpha^2/l_c,$$

即

$$l_c\propto\left(\frac{Yr^2}{\rho g}\right)^{1/3}\propto r^{2/3}. \tag{2.42}$$

这公式表明，一圆柱体在自重力作用下能抗弯折的临界高度并没有它的半径 r 增长得快. 例如当半径加倍时，其临界高度只增大 $2^{2/3}=1.59$ 倍.

顺便说起,在上面的分析里,我们并没有讨论，在立柱失稳后弯折的最终归宿. 要讨论这个问题，必须分析小形变高级近似的情况,这就需要用严格的弹性力学理论了. 后者表明,在$l>l_c$的最初阶段里,立柱并不一弯到底，而是在上端弯折到一定程度后,便找到一个新的稳定平衡点.

把式(2.42)运用到树木的高度与粗细关系的问题上，是饶有

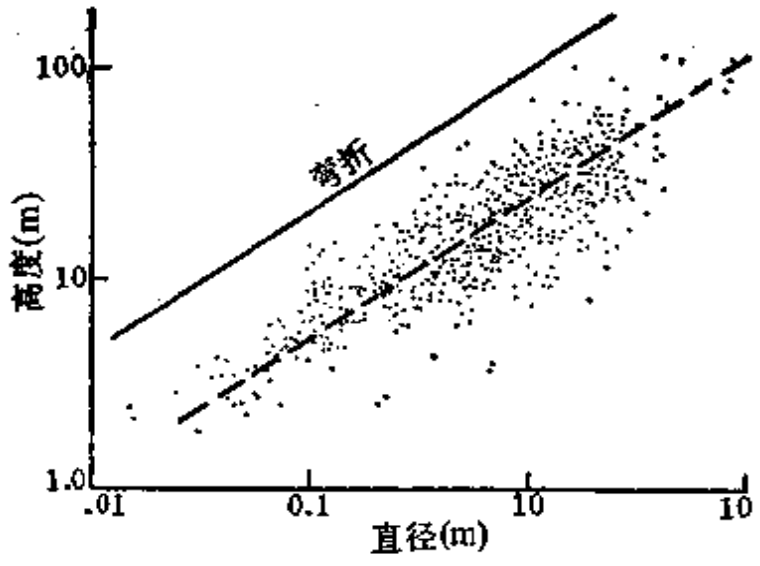


图 2-12　北美洲一些树木长粗比的数据

兴味的. 当然,树不是光杆,其上有树冠;此外,决定树高的因素也未必就只是它的抗弯折能力. 图 2-12给出一些北美洲树木的 l-r 关系的数据.上面那条实线代表抗弯折临界高度,纵横坐标都是按对数标度的,此直线的斜率等于 2/3. 虚线的方程也具有 $l=Cr^{2/3}$ 的形式,为拟合那些实际的分散数据点,这里取 $C=34.9$. 看来没有数据点出现在那条代表理论极限的实线之上,且拟合曲线的斜率也接近 2/3. 以上结果加强了我们这样的信念,即抗弯折强度是决定树木高粗比的关键因素.

如果像前文那样,只用同一个特征长度 l 来表征动物的体型,我们得到体表面积 $S\propto l^2$ 和质量 $m\propto$ 体积 $\propto l^3$ 的结论,即 S 与 m 的关系应为

$$S\propto m^{2/3}=m^{0.67}.$$

人们预期,代谢率(即体内利用食物产生热量的速率)也按同一比例,即 $\propto m^{2/3}=m^{0.67}$. 但是 1932 年 Kleiber 对哺乳动物的实验观察结果并不是这样,而是 $S\propto m^{0.63}$(图 2-13)和产热率 $\propto m^{0.75}$(图 2-14). 差别虽不大,但已足以对上述单一特征长度的模型提出挑战.

为了改善我们的模型,应该考虑如下事实,即动物躯体的大部分更接近圆柱状,这或许是一种经得住弯折的构造. 若果真如此,身体各部分的长度 l 与半径 r 应有如下比例关系

$$l\propto r^{2/3},\text{ 或 }r\propto l^{3/2}.$$

圆柱体的体积 $\pi r^2 l\propto l^4$, 从而质量 $m\propto l^4$,或者说 $l\propto m^{1/4}$,$r\propto m^{3/8}$, 因此体表面积(主要是柱形的侧面积)

$$S\propto rl\propto m^{5/8}.$$

$5/8=0.625$, 非常接近 0.63.

为求得代谢速率,我们不仅要计算面积,而且要计算用于使肌肉弯曲的功率. 这功率 P 等于所施的力乘以肌肉收缩的速率 v.

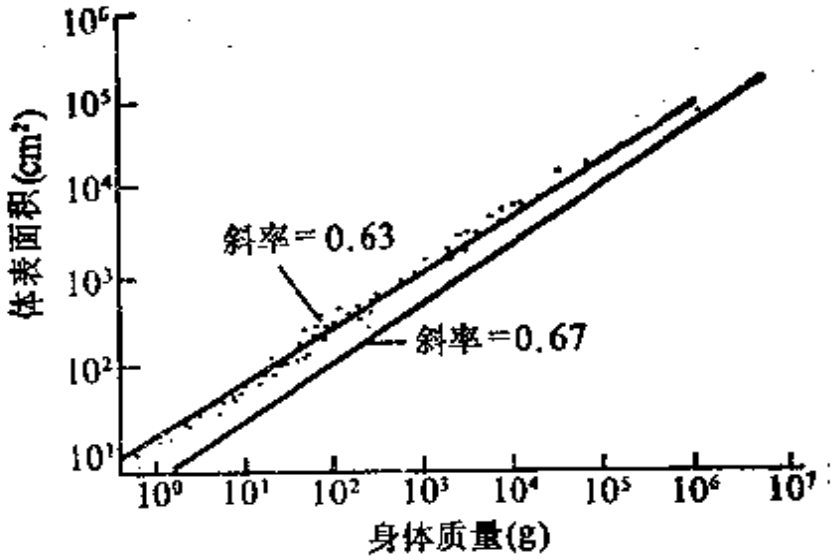


图 2-13　各种大小哺乳动物的体表面积

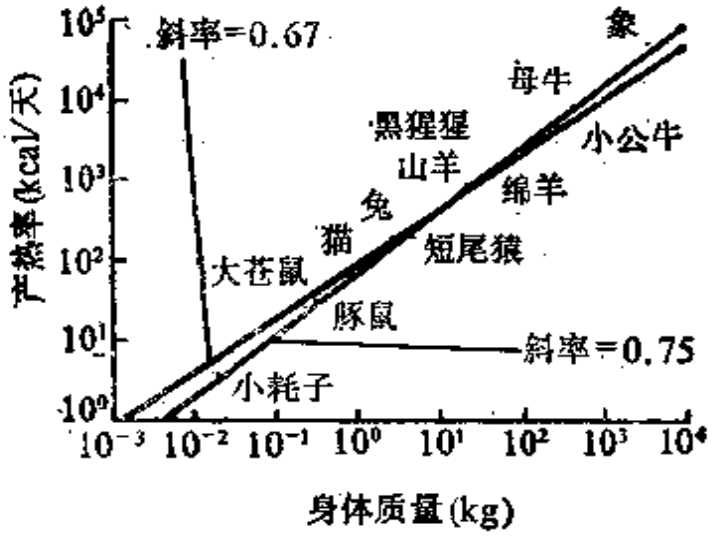


图 2-14　各种大小哺乳动物的代谢率

实验发现，所有哺乳动物每单位面积肌肉发出的力 $\sigma = F/S$ 是相同的；对于随意肌纤维，肌肉收缩的速率也相同，故

$$P \propto \sigma S' v \propto S',$$

这里 S' 是肌肉的横截面积，它正比于 $r^2 \propto m^{3/4}$，于是

$$P \propto m^{3/4} = m^{0.75}.$$

如果我们假设产热率正比于功率 P，图 2-14 的实验结果便得到了

解释. 由于代谢过程要利用通过肺壁所吸收的氧气, 所以肺的表面积也正比于 $m^{0.75}$. 这结果也得到实验上很好的证实. 在生物学中称为 Kleiber 定律①.

每次心跳所抽运的血液量正比于心脏的体积, 假定它 $\propto m$, 则单体时间抽运的血液量正比于 mf, 这里 f 是心跳的频率. 血液的抽运量应与需求相适应, 即应有 $mf \propto m^{0.75}$, 由此得

$$f \propto m^{-0.25}.$$

这意味着大型哺乳动物应具有较低的脉搏频率. 实验上也观察到了这一点. 如果我们进一步对哺乳动物的心率和它们的寿命作比较, 就可发现, 寿命与心跳周期相比, 对所有哺乳动物都大体相同. 这就是说, 不管躯体大小如何, 每一哺乳动物一生中心跳的次数大体相同. ②

上面以相似律(2.42)为基础来分析哺乳动物身体各部分的比例关系, 并不是无可非议的. 有人提出, 抗骨折才是决定性的因素. 若那样, 则式(2.42)应代之以 $l_0 \propto r^3$. 于是后面一系列的结论都要作相应的改变. 生物学的问题较物理学复杂得多, 对这个问题的讨论我们就此搁笔了.

§ 3. 物理方程中常数的压缩与恢复③

在作理论演算时, 为了书写简便, 人们常把公式中的物理常数压缩掉一些. 通常的说法是"令公式中的某些常数为 1", 从而不再出现. 例如我们处理这样一个问题: 将一质量为 m 的质点悬挂在劲度系数为 k 的弹簧下端, l 为弹簧的原长, g 为重力加度速. 将质点从未伸长的弹簧下端由静止状态释放, 求弹簧长度 x 随时间 t 的变化.

① M. Kleiber, *The Fire of Life*. Wiley, N. Y. (1961).
② T. Mc Mahon, *Science*, 179, 1201(1973).
③ 可参考E. A. Desloge, *Am. J. Phys.* **52**(4), 312(1984).

牛顿运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-k(x-l)+mg, \tag{2.43}$$

初始条件为

$$[x]_{t=0}=l, \tag{2.44}$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right]_{t=0}=0, \tag{2.45}$$

令 $m=k=g=1$, 则微分方程化为

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-x+l+1, \tag{2.46}$$

初始条件形式不变. 由此求得问题的解为

$$x=l+1-\cos t. \tag{2.47}$$

这种压缩物理常数的作法在量子场论中最常用. 在那里总出现光速 c 和约化普朗克常数 $\hbar(=h/2\pi)$. 人们常说"令 $c=\hbar=1$", 或者说"取 $c=\hbar=1$ 的单位制", 于是质点的能量公式化为

$$E=\sqrt{p^2+m^2}, \ (p\text{——动量}, m\text{——质量}) \tag{2.48}$$

玻尔磁子的公式化为

$$\mu_B=\frac{e}{2m}, \ (e\text{——电子电荷}, m\text{——电子质量}) \tag{2.49}$$

等等. c 和 $\hbar$ 都从公式里消失了. 这种单位制叫做"自然单位制".

我们不禁要问: 所谓"令 $m=k=g=1$"或"取 $c=\hbar=1$ 的单位制"是什么意思? 必要的时候, 如何将这些常数恢复起来? 本节就来讨论这个问题.

让我们回顾一下 §1 中有关 Π 定理证明的段落. 在具有 m 个基本量的单位制中, 我们可以把 m 个量纲彼此独立的量 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 的量度单位改变为原来的 $1/\alpha_1, 1/\alpha_2, \cdots, 1/\alpha_m$, 这时在新单位制中这些量的数值 $P'_1, P'_2, \cdots, P'_m$ 分别改变为

$$P'_i=\alpha_iP_i, \ (i=1, 2, \cdots, m). \tag{2.50}$$

由量纲式(2.10)可知，其它量 P_{m+1}, P_{m+2}, …, P_n 在新旧单位制之间的数值关系为

$$P'_{m+j}=\alpha_1^{\pi_{1j}}\alpha_2^{\pi_{2j}}\cdots\alpha_m^{\pi_{mj}}P_{m+j},\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n-m) \quad (2.51)$$

取 $\alpha_i=P_i^{-1}$，则有

$$\begin{cases}P'_i=1 & (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)\\ P'_{m+j}=\Pi_j, & (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n-m)\end{cases}$$

这里 Π_j 是无量纲的. 经过上述单位变换，原有的函数关系或方程式

$$f(P_1P_2,\ \cdots,\ P_n)=0$$

变为

$$f(P'_1,\ P'_2,\ \cdots,\ P'_n)=f(1,\ \cdots,\ 1,\ \Pi_1,\ \cdots,\ \Pi_{n-m})=0$$

上面所述压缩方程式中常数的办法就是这个意思. 例如当人们说“令 $m=k=g=1$”或“取 $m=k=g=1$ 的单位制”时，就相当于取 $P_1=m$, $P_2=k$, $P_3=g$ 为新基，令 $\alpha_1=1/m$, $\alpha_2=1/k$, $\alpha_3=1/g$，从而有 $P'_1=m'=1$, $P'_2=k'=1$, $P'_3=g'=1$，所以更准确的说法应该是在新的单位制中，$m'=k'=g'=1$. 余下的量，如 x, t 等(相当于 P_{m+1}, P_{m+2}, …)也都换为 x', t' 等(相当于 P'_{m+1}, P'_{m+2}…)，它们都已是无量纲的了. 在(2.44)--(2.47)各式中所有的符号，都要理解为带撇的.

被压缩掉的常数如何恢复？这要靠式(2.13). 列出上面弹簧振子例题中全部物理量的量纲式：

	m	k	g	x	l	t
M	1	1	0	0	0	0
L	0	0	1	1	1	0
T	0	−2	−2	0	0	1

由此得到

$$[x]=[l]=[k]^{-1}[m][g],$$

$$[t]=[k]^{-1/2}[m]^{1/2}.$$

从而
$$x'=\frac{kx}{mg},\quad l'=\frac{kl}{mg},\quad t'=\sqrt{\frac{k}{m}}\,t,$$

将它们代入加撒的式(2.47)即

$$x'=l'+1-\cos t',$$

得
$$x=l+\frac{mg}{k}\left(1-\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right). \tag{2.52}$$

在此表达式中常数 k, m, g 得到了恢复.

在量子场论中采用的自然单位制中也可以压缩掉三个物理常数. 除 c, $\hbar$ 外第三个取什么?有人取质量,有人取能量,等等,在各种书籍文献中没有统一的习惯. 其实也可像在式(2.48)、(2.49)中那样, 不再压缩第三个常数. 这相当于不取 $\alpha_3=P_3^{-1}$, 而是取 $\alpha_3=1$. 设 $P_1=c$, $P_2=\hbar$, $P_3=m$, 及 $\alpha_1=1/c$, $\alpha_2=1/\hbar$, $\alpha_3=1$. 现在我们来恢复式(2.48)、(2.49)中常数 c, $\hbar$. 先写出有关量的量纲式来,对电磁量我们采用高斯单位制:

	c	$\hbar$	m	E	p	e	μ_B
M	0	1	1	1	1	1/2	1/2
L	1	2	0	2	1	3/2	5/2
T	−1	−1	0	−2	−1	−1	−1

由此得
$$[E]=[c]^2[m]$$
$$[p]=[c][m]$$
$$[e]=[c]^{1/2}[\hbar]^{1/2}$$
$$[\mu_B]=[c]^{-1/2}[\hbar]^{3/2}[m]^{-1}$$

从而在新单位制中

$$E'=E/c^2,\ p'=p/c,\ m'=m$$
$$e'=e/\sqrt{c\hbar},\ \mu'_B=\mu_B\sqrt{c/\hbar^3},$$

将它们代入加撒的式(2.48)和(2.49),即

$$E'=\sqrt{p'^2+m'^2},\ \mu'_B=e'/2m',$$

就可得到

$$E=c\sqrt{p^2+m^2c^2}, \tag{2.53}$$

和

$$\mu_B=\frac{e\hbar}{2mc}, \tag{2.54}$$

式中的常数 c、$\hbar$ 得到了恢复.

参 考 文 献

[1] Bridgman, P. W.: *Dimensional Analysis*, New Haven, Yale University Press, 1932.

[2] Л. И. 谢多夫: 力学中的相似方法与量纲理论, 科学出版社, 1982.

[3] J. W. 凯恩, M. M. 斯特海姆: 生命科学物理学, 科学出版社, 1985.

[4] Haldane, J. B. S.: *The World of Mathematics*, Vol. II, 1956; 译文见«物理教学»1986 年第 3 期, 28 页.

第三章　数量级估计

§ 1. 物理世界的层次和基本物理常数

理论物理学家在进行详细计算之前，为了选择和建立恰当的物理和数学模型，需要先粗略地估计各量的大小和各种可能效应的相对重要性，以判断什么是决定现象的主要机制.实验物理学家在着手准备精密测量之前，为了选择合适的仪器和测量方法，也需要对各有关物理量的数量级先做一番估计.掌握特征量的数量级，往往是研究一个物理问题时登堂入室的关键.学习物理，就应该经常练习着对各种事物作粗略的数量级估计，留心尺度大小改变时所产生的影响. 有意识地将这种作法养成习惯，久而久之，可以加深我们对物理现象的实感，从而增进我们对事物本质的洞察能力.

数量级的估算，可以有不同的深度：

1. 直接记住一些基本常数，重要单位的换算率，以及在本人生活经历中有过特殊接触的事物的数量级. 这也是进一步对其它量作数量级估算的出发点.

2. 广泛寻求量与量之间的关联. 这可借助于经验规律、量纲分析或现象类比等，也可找些粗糙的理论依据.

3. 从基本原理来估计物理量的数量级.有些物理量的量值是可精确计算的，但在更多的场合，需要建立适当的物理模型，采取一定的近似方法.

数量级的估计本无一定之规，没有什么系统的方法. 我们在这里只能为读者提供一些准备知识和范例，实际问题可能涉及物理学的各个领域，方法也是多种多样的，全凭读者自己灵活运

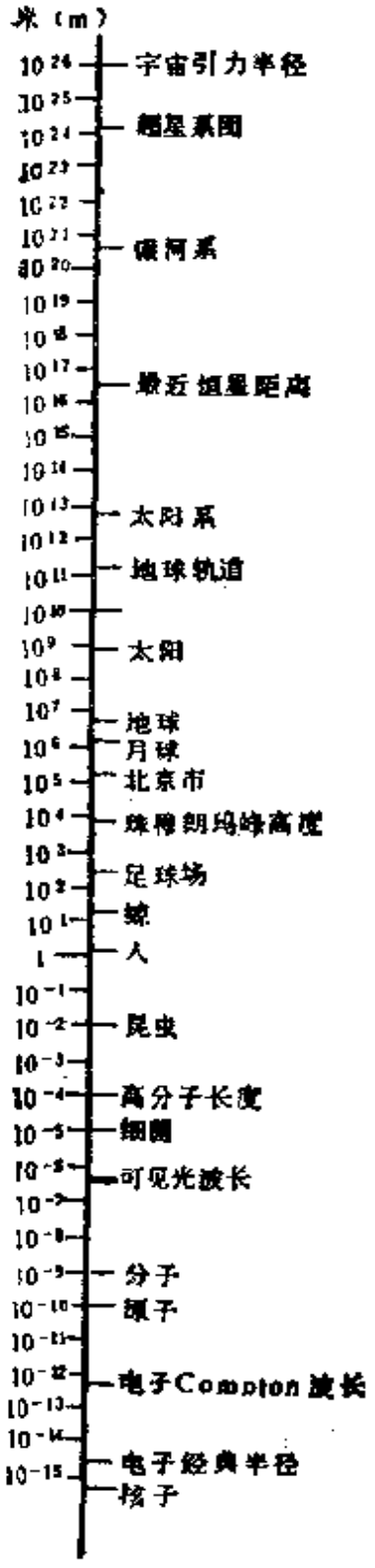


图 3-1 宇宙间各种事物大小的标度

用.

天地造化，层出不尽；物理世界，气象万般.人类选择了与自身大小相适应的长度单位——米(m). 自然界内的事物，在尺度上，大可以大到 10^{26} m(宇宙的引力半径，见下文)，小可以小到 10^{-15} m(核子的半径)，上下可以差上几十个数量级(见图 3-1). 世间事物的尺度大小，差距如此悬殊，历史上曾召引了多少古圣先哲的遐想和议论. 战国时代的一位名家惠施说："至大无外，谓之大一；至小无内，谓之小一."(载于《庄子·天下》) 墨家则进一步提出"端"的概念，认为"端，体之无序（疑为"厚"之误）而最前者也."(《墨经·经上》)"端，是无间也."(《经说上》)"非半弗 都（音 zhúo，砍），则不动，说在端."(《经下》)另一位名家公孙龙则说："一尺之捶(杖)，日取其半，万世不竭."(亦载于《庄子·天下》).

说起"至大无外"，大莫过于宇宙.宇宙是否无限大?这个问题今天尚无定论. 从前人们认为，只有无限大的东西才是没有边界的，从而是"无外"的. 自从爱因斯坦创立广义相对论以来，人们认识到，空

间是可以弯曲的，一个曲率为正的空间，即使体积有限大，也可以没有边界，也可以是“至大无外”的.

有个简单办法用牛顿力学估算出宇宙的大小来. 为此先介绍一下黑洞的引力半径的概念.

我们知道，为了摆脱一个质量为 M、半径为 R 的星球，所需的“第二宇宙速度”为

$$v=\sqrt{\frac{2GM}{R}}, \tag{3.1}$$

这里 G 是引力常数. 若星球的质量 M 如此之大，使 $v=c$(光速)，这时就连光子也不能克服其引力的作用而发射出来. 因此外界看不到这个星体，这类星体称为“黑洞”. 使式(3.1)中 $v=c$ 时的半径为

$$R_g=\frac{2GM}{c^2}, \tag{3.2}$$

称为“席瓦西 (Schwartzschild)半径”，或“引力半径”①. 反过来说，一个质量为 M 的星球，当它的半径缩到 R_g 以下时，它就成为黑洞.

现代天文观测证明，宇宙在大尺度上[大于 10^8 秒差距(pc)② $\simeq 3\times10^8$ 光年 $\simeq 3\times10^{24}$ m] 物质分布是相当均匀的. 我们考虑一个均匀球体，其半径为 R，密度为 ρ，则

$$M=\frac{4\pi R^3}{3}\rho,$$

如果这个体系的半径 R 恰好达到自己的引力半径 R_g

$$R_g=\frac{8\pi G R_g^3\rho}{3c^2},$$

① 这里所用推导式(3.2)的方法，是拉普拉斯远在相对论建立之前给出的，用的都是牛顿力学概念. 但所得公式凑巧与广义相对论的结果——席瓦西公式一致.

② 秒差距(parsec，缩写为 pc)，量度天体距离的单位，主要用于太阳系之外. 若天体的周年视差为 1″，其距离即为 1pc. parsec 是 parallax(视差)和 second(秒)之缩并.

即

$$R_g=\left(\frac{3c^2}{8\pi G\rho}\right)^{1/2}, \tag{3.3}$$

则生活在此球内部的人，不可能把光子发射到数量级比 R_g 大的范围之外．将宇宙的平均密度为临界密度 $\rho_0\simeq 5\times10^{-30}\mathrm{g/cm^3}$（见第四章§4, 1），代入上式，即得宇宙的引力半径

$$R_g\simeq 10^{28}\,\mathrm{cm}=10^{26}\,\mathrm{m},$$

我们索性说，这就是"宇宙的半径"．

现在我们来看"至小无内"的"小一"．用今天的话说，就是没有内部结构的物质最小单元．墨家管它叫做"端"，说它没有大小（无厚）．密得没有间隙（无间），不可分割（非半弗都）．这与古希腊德谟克利特（Democritus）的"原子论"思想是一致的．"原子"一词，在西方叫 atom，源于希腊文 $\alpha\tau o\mu os$，这里字头 α 代表否定，$\tau o\mu os$ 是由动词演化而来的形容词，意思是"可切割的"，故 atom 的原意是"不可分割的"东西，它的最早中译名是"莫破"（严复译《穆勒名学》）．总之，早年的原子论者都把"原子"看作是坚不可摧的物质最小单元．从上文所引公孙龙的话来看，他所持的观点恰好与原子论相反，不承认有组成物质的最小单元，而是主张物质可以无限分割（日取其半，万世不竭）．从现代物理学的观点来看，双方都有点道理，但都是片面的．问题的关键在于，物质的结构是多层次的．这一点，双方都没有想到．

是什么决定着物质结构的层次？是那些普适的物理常数．如果说，宇宙间果真有什么东西是坚不可摧的，那也是普适的物理常数，它们往往代表着一些绝对不可逾越的界限．二十世纪物理学理论革命的标志，是相对论和量子论的诞生．这两个理论各自提出一个不可逾越的普适物理常数．相对论提出，真空中光速 c 是一切物体和信号不可超越的最大速度；量子论提出，普朗克常数 h 是不可分割的最小作用量子．最初接触这两个理论的人往往感到，

它们如此违反普通人的常识，实在令人难以接受．但是当我们掌握了近代物理的基本知识之后，反而会觉得，宇宙间存在这些不可逾越的界限是很自然的事；倘若没有这些界限，现实世界会变成什么样子，是不可思议的．我们不妨看看，当初创立这些理论的大师们是怎样想的，我们将会从中得到很大的教益和启迪．

爱因斯坦1946年在《自述》中说，当他16岁时(1895年)，曾无意中想到一个"追光"的假想实验．他想"如果我以真空中的光速 c 追随一条光线运动，究竟会看到什么现象呢？"我们知道，当冲浪运动员赶上海浪时，在他看来，海浪变成了静止的波形．如果有人能赶上光波，在他看来，光波也将变成具有静止波形的电磁场．这是麦克斯韦电磁理论所不允许的，因为麦克斯韦理论认为，只有变化的磁场激发电场，变化的电场激发磁场，才能形成电磁波，没有无源的静电场和静磁场．这里只有两个选择：要么麦克斯韦方程在有的参考系中不成立，即在电磁学领域里相对性原理失效；要么必须放弃(经典的)速度合成律．二者必居其一，无法调和．当时的大多数物理学家宁愿牺牲相对性原理，以保住(经典的)速度合成律；然而爱因斯坦却与众不同，他从头起就直觉地相信麦克斯韦方程组在运动参照系中仍然成立，可是这与(经典的)速度合成律矛盾，而放弃后者就意味着必须承认"同时性"是相对的，这一点在观念上曾是极难接受的．经过十年的曲折，爱因斯坦终于认识到，这是非接受不可的．他终于在1905年建立起狭义相对论．这理论表明：光速 c 是一切物体和信号速度的上限．

对于今天的读者来说，"物理定律与参考系的选择有关"恐怕已成为更难接受的概念了．要保证电磁学服从相对性原理，就不允许"追光"实验存在．如果在教学中从这里引入"光速是一切速度的上限"这一思想，岂不比从迈克耳孙-莫雷以太漂移实验的零结

果说起，要自然得多吗？①

现在来看存在普朗克常数 h 的必要性.

我们知道，原子是物质化学结构的基础. 在这一层次中，原子表现出高度的稳定性. 原子碰撞、辐射、化学反应等各种过程，只能使它们激发，最终它们还是要回到原始状态(基态)的，上述过程无法使原子改变. 中世纪有多少炼金术士，他们穷毕生之精力，汗流浃背地日夜守候在炉旁，希冀化铁为金，结果无不枉费了心机. 这一切都表明，原子的结构和属性是高度稳定的.

然而，自从卢瑟福的 α 粒子散射实验证明了原子中有核存在以后，原子的稳定性在理论上出现了危机. 与由万有引力维系的太阳系不同，按照经典的电磁理论，由库仑力维系的原子中，电子将在加速运动中因不断地向外辐射电磁波而丢失自身的能量，以致它绕核旋转的半径越来越小，最后掉进原子核里. 于是正负电荷中和，原子全部坍缩了. 按照经典电动力学计算，原子坍缩的时间为 10^{-9} 秒的数量级. 为了挽救原子的命运，尼耳斯·玻尔于 1913 年给电子轨道强加了量子化条件，为电子建设了一系列"空间站"，让它们在这里作稳定运动而不辐射. 这里所说的"空间站"，就是玻尔原子模型里的定态轨道. 下节里将看到，定态轨道的半径正比于 h^2，如果普朗克常数 $h\to 0$，定态轨道的半径亦随之趋于 0，这意味着"空间站"的瓦解和原子的坍缩. 可见，支撑着原子稳定结构的，正是普朗克常数.

原子只是物质结构的一个层次，这层次是建筑在电磁相互作用上的. 更深一个层次，是原子核，那里是强相互作用在统治着. 虽然相互作用常数不同，普朗克常数在这里同样起着支撑作用. 亦即，决定物质结构各微观层次的，各有其相应的物理常数，而使各层次间拉开距离而不连续过渡的，也是普朗克常数.

① 阳兆祥，吴寿锽，《物理》16(3)，187，(1987).

表 3-1　1986 年基本常数推荐值

量	符号	数值	单位	相对不确定度 (ppm)
光速	c	299792458	$m \cdot s^{-1}$	定义值
真空导磁率	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ 12.566370614…	$N \cdot A^{-2}$ $10^{-7} N \cdot A^{-2}$	定义值
真空电容率，$1/\mu_0 c^2$	ε_0	8.854187817…	$10^{-12} F/m$	定义值
牛顿引力常数	G	6.67259(85)	$10^{-11} m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$	128
普朗克常数	h	6.6260755(40)	$10^{-34} J \cdot s$	0.60
$h/2\pi$	$\hbar$	1.05457266(63)	$10^{-34} J \cdot s$	0.60
基本电荷	e	1.60217733(49)	$10^{-19} C$	0.30
电子质量	m_e	0.91093897(54)	$10^{-30} kg$	0.59
质子质量	m_p	1.6726231(10)	$10^{-27} kg$	0.59
质子-电子质量比	m_p/m_e	1836.152701(37)		0.020
精细结构常数	α	7.29735308(33)	10^{-3}	0.045
精细结构常数的倒数	α^{-1}	137.0359895(61)		0.045
里德伯常数	R_∞	10973731.534(13)	m^{-1}	5.0012
阿伏伽德罗常数	L, N_A	6.0221367(36)	$10^{23} mol^{-1}$	0.59
法拉第常数	F	96485.309(29)	$C \cdot mol^{-1}$	0.30
摩尔气体常数	R	8.314510(70)	$J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$	8.4
玻耳兹曼常数，R/N_A	k	1.380658(12)	$10^{-23} J \cdot K^{-1}$	8.5
斯特藩-玻耳兹曼常数，$\pi^2 k^4/60\hbar^3 c^2$	σ	5.67051(19)	$10^{-8} W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$	34
电子伏，$(e/C)J = \{e\}J$	eV	1.60217733(49)	$10^{-19} J$	0.30
(统一)原子质量单位 原子质量常数，$\frac{1}{12} m(^{12}C)$	u	1.6605402(10)	$10^{-27} kg$	0.59

前面，我们论述了物理常数的重要意义．在表3-1中给出1986年7月在加拿大渥太华的国际科技数据委员会 (CODATA) 会议上发表的基本物理常数推荐值．我们建议，读者至少要记住

其中 8 个的数量级，那就是 c, h(或 $\hbar$), e, G, m_e, m_p, N_A 和 k. 这对在日常经常遇到的问题中作数量级估计是大有好处的. 下面我们对这些常数的意义作些说明.

开列在上面的 8 个基本常数可分为三类:

1. c, $\hbar$ (或 h), e, G 四个常数都出现在最基本的物理定律之中，目前尚不能用比它们更基本的常数将它们表示出来. 前已述及，c 出现在相对论中，是标志时空关系的基本常数; h(或 $\hbar=h/2\pi$, 称为约化普朗克常数)出现在量子力学中，是统治微观世界的基本常数. 至于 e 和 G，它们分别是标志电磁力和引力相互作用强度的特征常数. 另外两种相互作用(强作用和弱作用)的特征常数，理论尚不成熟，不列入我们的清单.

2. 基本粒子的质量，目前尚没有理论能将它们用别的基本常数表达出来，它们是作为实验的结果被接受下来的. 除非专门研究粒子物理，否则静质量非零的基本粒子中，最重要的是电子、质子和中子. 中子的质量 m_n 和质子质量 m_p 十分接近，作数量级估计时，常可不加区别. 必要时可记住二者差别

$$\Delta m = m_n - m_p \simeq 2.3\times10^{-30}\,\mathrm{kg} \simeq 1.29\,\mathrm{MeV}/c^2 \simeq 2.5\,m_e,$$

而 $m_p \simeq 1836\,m_e$, $m_n \simeq 1839\,m_e$, 粗略地可以认为原子质量单位

$$\mathrm{u} \simeq m_p \simeq m_n \simeq 1840\,m_e, \text{ 甚至 } 2000\,m_e.$$

3. 阿佛伽德罗常数 N_A 是联系物理微观单位与宏观单位的最重要换算系数; 玻耳兹曼常数是温度与能量间的换算系数. 粗略地说，

$$N_A\mathrm{u} \simeq 1\,\mathrm{g/mol},$$

即

$$N_A \simeq \frac{1}{\mathrm{u}}(\mathrm{g/mol}).$$

气体常数 R 是摩尔热容的基本单位，它可由 N_A 和 k 算出

$$R = N_A k \simeq 8.3\ \mathrm{J/mol\cdot K} \simeq 2.0\,\mathrm{cal/mol\cdot K}.$$

热量单位卡(cal) 本属应淘汰的单位，但许多(特别是物理化

学方面的）书籍和文献中所给的热学常数仍常用此单位表示. cal 的定义有多种，15 度卡 $cal_{15}=4.1855J$，国际蒸汽表卡 $cal_{IT}=4.1868J$，热化学卡 $cal_{th}=4.184J$. 作为数量级估计，可取 $1cal\simeq 4.2J$.

能量是个与多方面有广泛联系的物理量，在微观领域中它们的单位特别繁多. 最常用的是电子伏 eV(和与此相关的 MeV、GeV 等). eV 与 J 或 aJ($1aJ=10^{-18}J$)的换算关系为

$$1eV\simeq 1.60\times10^{-19}J=0.160aJ,$$

$$1J\simeq 6.2\times10^{18}eV,\text{ 或 }1aJ\simeq 6.2eV.$$

在与热现象联系时，能量常用温度 T 的单位开尔文 K，或 RT 的宏观单位 J/mol 或 kJ/mol 来表示；在化学中反应热或结合能更多地采用 kcal/mol 作单位；在与光谱联系时，则用光的频率单位 Hz 或折合成波长 λ 来表示. 它们彼此间换算的定义式如下：

表 3-2　与能量有关单位间的对应关系

	eV	K	aJ*	kJ/mol	kcal/mol	PHz*	λ(μm)
eV	1	1.16×10^{4}	1.60×10^{-1}	9.6×10	2.3×10	2.4×10^{-1}	1.24
K	0.86×10^{-4}	1	1.38×10^{-5}	8.3×10^{-3}	1.98×10^{-3}	2.1×10^{-5}	1.44×10^{4}
aJ	6.2	7.2×10^{4}	1	6.0×10^{2}	1.43×10^{2}	1.51	1.99×10^{-1}
kJ/mol	1.04×10^{-2}	1.20×10^{2}	1.66×10^{-3}	1	2.4×10^{-1}	2.5×10^{-3}	1.20×10^{2}
kcal/mol	4.4×10^{-2}	5.0×10^{2}	7.0×10^{-3}	4.2	1	1.05×10^{-2}	2.9×10
PHz	4.1	4.8×10^{4}	6.6×10^{-1}	4.0×10^{2}	9.6×10	1	3.0×10^{-1}
λ(μm)	1.24	1.44×10^{4}	1.99×10^{-1}	1.20×10^{2}	2.9×10	3.0×10^{-1}	1

* $1aJ=10^{-18}J$，$1PHz=10^{15}Hz$.

$$\mathrm{eV}=kT=\frac{RT}{N_A}=h\nu=\frac{hc}{\lambda}. \tag{3.4}$$

各种单位间对应的数值关系列于表 3-2 中.

其中 $$1\,\mathrm{K}\simeq10^{-4}\,\mathrm{eV},\ 1\mathrm{eV}\simeq10^{4}\,\mathrm{K},$$

而温度与辐射波长的关系可认为是

$$T\lambda\simeq1.5\,\mathrm{K}\cdot\mathrm{cm}$$

这里的 λ 约为维恩位移定律中 $\lambda_{\max}$ 的 5 倍，因为

$$T\lambda_{\max}\simeq0.3\,\mathrm{K}\cdot\mathrm{cm} \tag{3.5}$$

在微观物理(特别是原子、原子核层次)中，空间距离的数量级范围约从 10^{-8} cm(Å)到 10^{-13} cm(fm)，能量的数量级范围约从 eV 到 MeV 或 GeV，把上文提出的那些重要的基本常数或它们的组合用这类单位来表示，往往是很方便的. 现在把它们列在表 3-3 中.

表 3-3 用 eV 和 Å 表示的基本物理常数及其组合

$\hbar c=1.97\,\mathrm{keV}\cdot\text{Å}\simeq2\,\mathrm{keV}\cdot\text{Å}$
$e^2=14.4\,\mathrm{eV}\cdot\text{Å}$
$m_e=0.51\,\mathrm{MeV}/c^2\simeq\frac{1}{2}\,\mathrm{MeV}/c^2$
$m_p=0.94\,\mathrm{GeV}/c^2\simeq1\,\mathrm{GeV}/c^2$
$k=8.6\times10^{-5}\,\mathrm{eV/K}\simeq10^{-4}\,\mathrm{eV/K}$

例题 1 求对晶格常数为 3Å 的晶体作 X 射线衍射实验所需 X 光管加速电压的数量级.

解 $3\text{Å}=3\times10^{-4}\,\mu\mathrm{m}$，由表 3-2 查得 $1\,\mu\mathrm{m}$ 波长对应能量 1.24eV，故 3Å 波长对应能量 $(1.24/3\times10^{-4})\mathrm{eV}\simeq4\,\mathrm{keV}$，故 X 光管需加速电压 4kV。

§2. 原　子

原子由原子核和电子组成. 通常说原子这一层次的内容，主要是指核外电子的行为；而原子核本身的结构，则属另一个更深的层

次. 在微观物理学中,我们了解得最清楚的,是原子这一层次.

原子层次是电磁相互作用统治的领地，有关的物理常数有电子电荷 e 和静质量 m_e. 此外，原子内部服从量子力学的规律，故而普朗克常数 h 或 $\hbar$ 也是很重要的. 下面我们将看到，原子内电子的运动是非相对论性的,尽管如此,我们仍把光速 c 列在原子重要常数的清单里. 在涉及电磁相互作用时，把 c 列入总是比较保险的. 于是我们的常数清单包括以下四个成员:

$$e,\ m_e,\ h(\text{或}\hbar),\ c$$

首先让我们用量纲法作一番粗略分析，采用高斯单位制是比较方便的,因为这样可以少一个常数 ε_0 或 μ_0. 在高斯单位制中有 M、L、T 三个基本量,故上述四个量不会是量纲彼此独立的，我们至少可以找出一个无量纲的组合.这就是通常所说的"精细结构常数":

$$\alpha=\frac{e^2}{\hbar c}=\left(\frac{1.97\,\text{keV}\cdot\text{Å}}{14.4\,\text{eV}\cdot\text{Å}}\right)^{-1}=\frac{1}{137},\tag{3.6}$$

具有长度量纲的量可以写成如下形式

$$l=\frac{\hbar}{m_e c}\Phi(\alpha),\tag{3.7}$$

其中 $\Phi(\alpha)$是某个无量纲的函数.这里有物理意义的重要特征长度有三,它们分别相当于取式(3.7)中的 $\Phi(\alpha)=1/\alpha,\ 1,\ \alpha$, 即①

$$\begin{cases} l_1=\dfrac{\hbar}{m_e c\alpha}=\dfrac{\hbar^2}{m_e e^2}\left[=\dfrac{\hbar^2c^2}{m_e c^2 e^2}=\dfrac{(1.97\text{keV}\cdot\text{Å})^2}{0.51\text{MeV}\times 14.4\text{eV}\cdot\text{Å}}\right] \\ \quad=0.53\text{Å}, \\ l_2=\dfrac{\hbar}{m_e c}\left[=\dfrac{\hbar c}{m_e c^2}=\dfrac{1.97\,\text{keV}\cdot\text{Å}}{0.51\,\text{MeV}}\right] \\ \quad=3.9\times10^{-3}\,\text{Å}=3.9\times10^{2}\,\text{fm}, \\ l_3=\dfrac{\hbar\alpha}{m_e c}=\dfrac{e^2}{m_e c^2}\left[=\dfrac{14.4\,\text{eV}\cdot\text{Å}}{0.51\,\text{MeV}}\right]=2.8\times10^{-5}\text{Å}=2.8\,\text{fm}. \end{cases}$$

① 下面方括号内的演算步骤,显示了利用表 3-3 的优越性.

l_1 是玻尔半径，l_2 是电子的康普顿波长，l_3 是经典电子半径，它们的意义将分别在下文提到.

我们还可由量纲法得到具有能量量纲的特征量：

$$E=m_e c^2\Psi(\alpha), \tag{3.8}$$

这里 $\Psi(\alpha)$ 也是一个无量纲函数. 取 $\Psi(\alpha)=1$ 时，$E=m_e c^2$ 是电子的静能，它的数量级远超出原子层次的能量. 下面我们将看到，在原子层次内，特征能量是 $\Psi(\alpha)\sim O(\alpha^2)$ 量级的.

最简单的原子是氢原子，这里有一个电子绕原子核(质子)运动. 作为粗略估计，设电子运行在半径为 r 的圆形轨道上，动量为 p，总能量为

$$E=\frac{p^2}{2m_e}-\frac{e^2}{r}, \tag{3.9}$$

利用海森伯不确定度关系(uncertainty relation)

$$\Delta p\Delta x\simeq\hbar.$$

因电子的平均动量为 0，故 $\Delta p\simeq p$，此外，$\Delta x\simeq r$，从而有①

$$p\simeq\frac{\hbar}{r}. \tag{3.10}$$

代入式(3.9)，得

$$E=\frac{\hbar^2}{2m_e r^2}-\frac{e^2}{r}, \tag{3.11}$$

基态的 r 应使 E 取极小值，即应有

$$\frac{dE}{dr}=-\frac{\hbar^2}{m_e r^3}+\frac{e^2}{r^2}=0② \tag{3.12}$$

---

① 式(3.10)也可用德·布洛意波在轨道上形成驻波的条件来得到. 对于电子的定态，轨道的周长 $2\pi r$ 应为德·布洛意波长 $\lambda=h/p$ 的整数倍：

$$2\pi r=n\lambda=nh/p,\ (n=1,2,\cdots)$$

从而

$$p=n\hbar/r.$$

对于基态，取 $n=1$，即得式(3.10).

② 根据位力 (virial) 定理，平均动能等于势能绝对值之半，由此也可得到式(3.12)及(3.13).

从这里解出

$$r=\frac{\hbar^2}{m_e e^2}\equiv a_B, \tag{3.13}$$

对应的能量极值为

$$E=-\frac{m_e e^4}{2\hbar^2}\equiv -\mathrm{Ry}. \tag{3.14}$$

可以看出，式(3.13)中的 a_B 就是前面得到的特征长度 l_1，称为“玻尔半径”，其数值约为 1/2Å. 式(3.14)中的 Ry 相当于在式(3.8)中取 $\Psi(\alpha)=\alpha^2/2$，即

$$\mathrm{Ry}=\frac{\alpha^2}{2}m_e c^2=\frac{0.51\,\mathrm{MeV}}{2\times(137)^2}=13.6\mathrm{eV}.$$

它是氢原子基态上电子的束缚能，叫做能量的“里德伯(Rydberg)单位”.其数值比电子静能 $m_e c^2$ 小 $\alpha^2/2=2.7\times10^{-5}$ 倍.可见，氢原子中电子的运动是非相对论性的. 光速 c 不出现在 a_B 和 Ry 的表达式中这一事实，也反映出这一点.

对于高激发态，轨道半径 r_n 要乘以 n^2，能量要除以 n^2(n——主量子数)；对于重的元素，半径要除以 Z，能量要乘以 Z^2(Z——核电荷数，即原子序数). 即

$$r_n=\frac{n^2}{Z}a_B, \tag{3.15}$$

$$E_n=-\frac{Z^2}{n^2}\mathrm{Ry}. \tag{3.16}$$

其实这里的 Z 应理解为受内层电子屏蔽的核的有效电荷数，它对每个壳层是不同的. 以上讨论的只是圆轨道，对于椭圆轨道，我们还要考虑它们贯穿原子实的影响，情况是比较复杂的. 倒不如我们看看实际数据在周期表内的分布情况，规律反而简单些. 表3-4给出全部较稳定元素价电子的电离能和原子半径的数据，可以看出，它们之间数量级的差别不算很大. 大体说来，在每个周期内，从碱金属到惰性气体，价电子电离能随原子序数而增加. 电离

表 3-4 原子的电离能和半径

原子序数 Z	元素	电离能 (eV)	原子半径 (Å)	原子序数 Z	元素	电离能 (eV)	原子半径 Å	原子序数 Z	元素	电离能 (eV)	原子半径 (Å)
1	H	13.6	0.53	32	Ge	8.1	1.22	63	Eu	5.7	1.65
2	He	24.6	0.93	33	As	10	1.21	64	Gd	6.2	1.61
3	Li	5.4	1.52	34	Se	9.8	1.17	65	Tb	6.7	1.59
4	Be	9.3	1.12	35	Br	11.8	1.14	66	Dy	6.8	1.59
5	B	8.3	0.80	36	Kr	14.0	1.69	67	Ho	—	1.58
6	C	11.3	0.77	37	Rb	4.2	2.44	68	Er	—	1.57
7	N	14.5	0.74	38	Sr	5.7	2.15	69	Tm	—	1.56
8	O	13.6	0.74	39	Y	6.6	1.80	70	Yb	6.2	1.70
9	F	17.4	0.72	40	Zr	7.0	1.57	71	Lu	5.0	1.56
10	Ne	21.6	1.12	41	Nb	6.8	1.41	72	Hf	5.5	1.57
11	Na	5.1	1.86	42	Mo	7.2	1.36	73	Ta	6	1.43
12	Mg	7.6	1.60	43	Tc	—	1.3	74	W	8.0	1.37
13	Al	6.0	1.43	44	Ru	7.5	1.33	75	Re	7.9	1.37
14	Si	8.1	1.17	45	Rh	7.7	1.34	76	Os	8.7	1.34
15	P	11.0	1.10	46	Pd	8.3	1.38	77	Ir	9.2	1.35
16	S	10.4	1.06	47	Ag	7.6	1.44	78	Pt	9.0	1.38
17	Cl	13.0	0.97	48	Cd	9.0	1.49	79	Au	9.2	1.44
18	Ar	15.8	1.54	49	In	5.8	1.62	80	Hg	10.4	1.52
19	K	4.3	2.31	50	Sn	7.8	1.4	81	Tl	6.1	1.71
20	Ca	6.1	1.97	51	Sb	8.6	1.41	82	Pb	7.4	1.75
21	Sc	6.6	1.60	52	Te	9.0	1.37	83	Bi	8	1.48
22	Ti	6.8	1.46	53	I	10.4	1.33	84	Po	—	1.4
23	V	6.7	1.31	54	Xe	12.1	1.9	85	At	—	1.4
24	Cr	6.8	1.25	55	Cs	3.9	2.62	86	Rn	10.7	2.2
25	Mn	7.4	1.29	56	Ba	5.2	2.17	87	Fr	--	2.7
26	Fe	7.9	1.26	57	La	5.6	1.88	88	Ra	5.3	2.20
27	Co	7.9	1.25	58	Ce	6.9	1.65	89	Ac	—	2.0
28	Ni	7.6	1.24	59	Pr	5.8	1.65	90	Th	—	1.65
29	Cu	7.7	1.28	60	Nd	6.8	1.64	91	Pa	—	—
30	Zn	9.4	1.33	61	Pm		—	92	U	4	1.4
31	Ga	6.0	1.22	62	Sm	5.6	1.66				

能最小的是铯(Cs)，只有 3.9 eV；最大的是氦(He)，24.6 eV．在每个周期内原子半径的变化规律如下：碱金属的最大，随原子序增加，半径减小，到卤素半径达到极小，惰性气体的半径又有回升．原子半径最大的是钫(Fr)，2.7 Å；其次是铯(Cs)，2.62Å；除氢作为例外，半径最小的是氟(F)，0.72 Å．

例题 2　试利用前面求氢原子基态能量(3.14)的粗略算法求氦原子基态的电离能．

解　氦原子核的电荷数 $Z=2$，核外有两个电子，总能量可写成

$$E=\frac{p_1^2}{2m_e}+\frac{p_2^2}{2m_e}-\frac{Ze^2}{r_1}-\frac{Ze^2}{r_2}+\frac{e^2}{r_{12}},$$

式中 p_1、p_2 分别为两电子的动量，r_1、r_2 分别为两电子到核的距离，r_{12} 为两电子之间的距离．

我们可以直观地认为，能量的极小应发生在两电子相对于核处于对称状态的时候．这时，$p_1=p_2=p$，$r_1=r_2=r$，$r_{12}=r_1+r_2=2r$，于是

$$E=\frac{p^2}{m_e}-\frac{2e^2}{r}\left(Z-\frac{1}{4}\right).$$

仿照前面的作法，利用海森伯不确定度关系，有 $p\simeq\hbar/r$，故

$$E=\frac{\hbar^2}{m_e r^2}-\frac{2e^2}{r}\left(Z-\frac{1}{4}\right),$$

由 E 取极小值的条件 $dE/dr=0$ 可得

$$r=\frac{a_B}{(Z-1/4)},$$

$$E=-2(Z-1/4)^2\,\mathrm{Ry}.$$

这里 1/4 一项反映了一个电子对另一电子的静电屏蔽效应．上式中 E 的绝对值代表剥离两个电子所需的能量．当第一个电子被剥离后，剩下的是个 $Z=2$ 的类氢离子，其能量为 $-Z^2\mathrm{Ry}$，故第一个电子的电离能为

$$|E|-Z^2\mathrm{Ry}=2\left(Z^2-\frac{1}{2}Z+\frac{1}{16}\right)\mathrm{Ry}-Z^2\mathrm{Ry}=\left(Z^2-Z+\frac{1}{8}\right)\mathrm{Ry}$$

$$=2\frac{1}{8}\,\mathrm{Ry}=28.9\,\mathrm{eV}.$$

与表 3-4 中所给的精确值 24.6 eV 相比，数量级是对的，绝对数量偏大了很多．看来，用这种粗糙的求极值法得到象(3.13)、(3.14)那样精确的公式，是相当的巧合．

原子中的能量，主要是静电势能和电子动能，按照位力(virial)定理，二者绝对值差一半，是同数量级的．用表 3-4 中的价电子电离能除以原子半径，可作为价电子处电场强度大小的量度．简单的估算表明，氦的最大，26.5×10^{10} V/m；铯的最小，1.49×10^{10} V/m．对于绝大多数元素，这电场的数量级在 10^{11} V/m 上下．这数值比当今实验室中能达到的最大电场强度高出几个量级．

现在我们估算一下速度和角动量．由于动量 $p=m_e$，$v=\hbar/a_B$ [见式[(3.10)]，所以

$$v=\hbar/m_e a_B=\alpha c\ll c. \tag{3.17}$$

此式再次表明，电子运动是非相对论性的．基态角动量为

$$L=pa_B=\hbar. \tag{3.18}$$

这是意料中的，因为它正是玻尔的量子化条件．

原子层次的时间尺度，可用电子通过 a_B 的时间 τ 来表征：

$$\tau=\frac{a_B}{v}=\frac{a_B}{\alpha c}=\frac{\hbar^3}{m_e e^4}=\frac{\hbar}{2\mathrm{Ry}}. \tag{3.19}$$

这也是波函数 ψ 变化的特征时间，因为按薛定谔方程：

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=E\psi, \tag{3.20}$$

而能量 $E\sim$Ry．

例题 3　氚(^{3}H)是放射性的，它放出一个电子和反中微子．衰变成 ^{3}He(一中性 ^{3}H 原子的质量比中性 ^{3}He 原子约大 20 keV)，试论证：计算 β 衰变后 He^+ 离子内电子态的演化时，可认为核过程是突变的[所谓突变近似(sudden approximation)]．

解　依题意，电子和反中微子获得能量 $\Delta E=20$ keV，假定平均说来电子获能 $E\simeq10$ keV，而电子的动能是非相对论性的，它离开原子的速度为 $v=\sqrt{2E/m_e}$，时间为

$$\tau_1\sim\frac{a_B}{v}=\frac{a_B}{\sqrt{2E/m_e}},$$

而原子核外电子波函数的变化时标为 $\tau_2=a_B/\alpha c$，故

$$\frac{\tau_2}{\tau_1}=\frac{\sqrt{2E/m_e}}{\alpha c}=\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{2E}{m_ec^2}}=\frac{1}{137}\sqrt{\frac{20}{5.1\times10^5}}\sim30\gg1.$$

即相对于 τ_2 来说，τ_1 可忽略不计，故可采用突变近似来讨论电子量子态的变迁.

现在让我们估算一下原子层次内磁效应的量级. 先看磁矩. 对于半径为 r 的圆形轨道来说，电流 $I=ev/2\pi r$，面积 $S=\pi r^2$，在高斯制中 $\mu=IS/c=evr/2c$. 对于氢原子基态，取 $r=a_B$，$v=\alpha c$，于是

$$\mu=\frac{\alpha}{2}ea_B=\frac{e\hbar}{2m_ec}\equiv\mu_B \tag{3.21}$$

μ_B 称作"玻尔磁子". 式中 ea_B 显然是原子电偶极矩的量度，原子的磁矩比它小 $\alpha/2$ 倍. 在高斯制中，磁矩的单位可写成 erg/Gs (因 $\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}$ 是能量)，因 1 erg $=10^{-7}$ J $=6.2\times10^{11}$ eV (见表 3-2)，

$$1\text{Gs}=10^{-4}\text{ T},$$

磁矩单位可换算成 eV/T:

$$1\text{ erg/Gs}=6.2\times10^{15}\text{ eV/T}. \tag{3.22}$$

由式(3.21)可以算出玻尔磁子的大小:

$$\mu_B=0.93\times10^{-20}\text{ erg/Gs}$$
$$=0.58\times10^{-4}\text{ eV/T},$$

这是原子内磁矩的典型量级. 下面估算磁能和磁场的量级.

自旋轨道间的磁相互作用，给出的能量差引起光谱的精细结构. 氢或碱金属原子光谱中主线系($nP\to n'S$ 跃迁)的分裂，最能够反映出这种磁相互作用来. 氢原子 2P 态能级的分裂，可以用理论作较严格的计算. 计算结果表明，能量差只有 10^{-5} eV 量级，这数值不太典型. 典型的例子可以选钠原子光谱中的黄色 D 线. 不过要计算钠 3P 能级的分裂却不很容易，因为价电子内有 10 个电子屏蔽着，很难从理论上估计核的有效电荷数 Z^*. 我们不妨用实验数据来估算. 钠黄双线的波长分别为 5890 和 5896 Å，它们

的平均波长 $\lambda=5893$ Å，波长差 $\Delta\lambda=6$ Å，设 E 和 ΔE 分别代表与它们对应的能级差（见图 3-2），则有

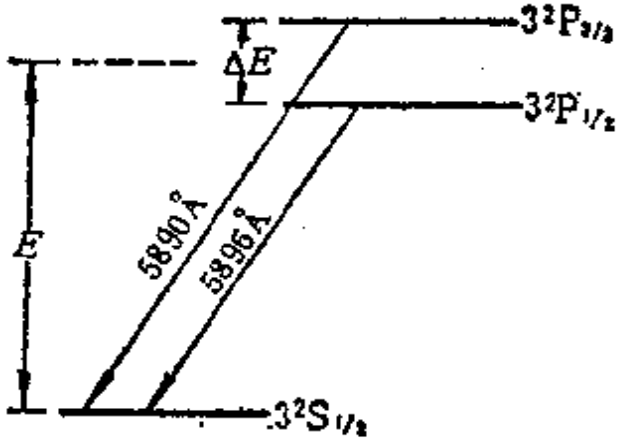


图 3-2　钠 D 线的能级跃迁

$$E=hc/\lambda,$$

$$\Delta E=|\mathrm{d}E/\mathrm{d}\lambda|\Delta\lambda$$
$$=hc\Delta\lambda/\lambda^2$$
$$=2\pi\hbar c\Delta\lambda/\lambda^2,$$

代入钠黄光的数据后，得

$$\Delta E$$
$$=\frac{2\pi\times1.97\mathrm{keV}\cdot\text{Å}\times6\text{ Å}}{(5893\text{Å})^2}$$
$$=2.1\times10^{-3}\mathrm{eV}.$$

这便是原子中磁能的典型量级，它比电能（~10 eV）小四个数量级，或者说，原子中磁能/电能~α^2，这正是“精细结构常数”这个名称的来源.

若在磁场 B 中磁矩 μ 分裂成 $\pm\mu B$ 两个能级的话，能级差

$$\Delta E=2\mu B,$$

取 $\mu\sim\mu_B$，则可估计出磁感应强度 B 的量级：

$$B\sim\frac{\Delta E}{2\mu_B}\sim\frac{2.1\times10^{-3}\mathrm{eV}}{2\times0.58\times10^{-4}\mathrm{eV/T}}=18\mathrm{T},$$

这大体上是现今实验室中产生恒磁场的上限.

§ 3. 原 子 核

原子核和原子是物质结构中两个不同的层次，或许是分得最开的两个层次，这里我们不打算深入讨论原子核的问题，只就核的半径、结合能等几个数量级问题作些分析.

原子核是由质子和中子（统称核子）组成的，核子之间的相互作用要比库仑力复杂得多. 核力在短距离内是斥力，在较长距离

内呈现按指数律递减的吸引力.由于核力的复杂性质,我们不能象在原子物理中那样计算其空间尺度和能量. 有关原子核的基本数据,我们先作为实验事实承认下来. 早年卢瑟福在 α 粒子散射实验中确立原子的有核模型时,就已确认,核的半径小于 10^{-14} m(10 fm). 到现在已有许多方法来测定原子核的大小. 测量结果表明,各种原子核的半径 R 与原子质量数(即核子数) A 之间有如下经验关系式

$$R=r_0A^{1/3}, \tag{3.23}$$

其中 $r_0=1.20$ fm, 上式表明,核的体积 V 正比于核子数

$$V=\frac{4\pi}{3}R^3=AV_0, \tag{3.24}$$

式中

$$V_0=\frac{4\pi}{3}r_0^3=7.24\,\mathrm{fm}^3, \tag{3.25}$$

这就是说,原子核内的核子就像刚性球那样堆积在一起, V_0 相当于每个核子占有的固有体积, r_0 代表着核子中心间平均距离的数量级. 周期表内原子核最大的 $A\sim240$, $A^{1/3}\sim6$, 故最大的核半径 $R\sim7$ fm. 核半径的大小决定了核内物质的质量密度

$$\rho_N=\frac{m_N}{V_0}\sim10^{14}\,\mathrm{g/cm^3}. \tag{3.26}$$

其中 $m_N\simeq m_p\simeq m_n$ 为核子质量. 地球上物质的宏观密度最大不过 20 g/cm^3 左右,这是因为原子核只占原子中很小一点空间. 如果物质由原子核密排组成,则其密度将大得惊人. 三十年代发现中子后不久,朗道(Л. Д. Ландау)就提出宇宙中可能存在全是核子(绝大部分是中子)组成的天体. 直到六十年代后期天文观测才真正发现了这种天体——中子星. 这种星体很小,半径约 10 km 量级,但质量与太阳质量 $M_\odot\sim10^{30}$ kg 差不多(详见第四章§3).

原子核的结合能是自由核子结合成原子核时所释放出来的能

量. 如果原子核是由 Z 个质子和 N 个中子组成，则各组分单独存在时质量总和为 Zm_p+Nm_n. 设组成原子核后的质量为 $M_N(A, Z)$，其中 $A=N+Z$，则质量亏损为

$$\Delta M = Zm_p+Nm_n - M_N(A, Z). \tag{3.27}$$

按照爱因斯坦的质能关系，原子核的结合能为

$$B(A, Z)=\Delta Mc^2 \tag{3.28}$$

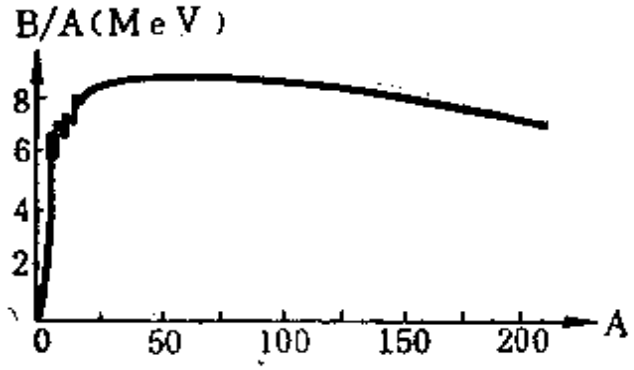


图 3-3 原子核的平均结合能

此外，我们还可以定义每个核子的平均结合能为 $B(A, Z)/A$. 图 3-3 给出了平均结合能随 A 变化的曲线. 它显示出以下几个特点：

(i) 在 $A<30$ 的原子核内，B/A 有周期性变化，最大值落于 A 等于 4 的倍数上. 这表明 4 个核子(2 个质子和 2 个中子)构成一个稳定的集体.

(ii) 在 $A>30$ 的原子核中，B/A 变化不大，即 B 近似地正比于 A. 它显示了核力具有饱和性.

(iii) 在 A 为中等数值($A\sim56$，对应于铁元素附近)，B/A 最大；在 $A\sim40$—120 之间，$B/A\sim8.6$ MeV；当 A 很大时，例如对于 ^{238}U，$B/A\sim7.5$ MeV. 这一条性质很重要，它表明，一个很重的核(譬如 $A\sim240$ 的核)分裂成两个 $A\sim120$ 的核，应放出能量，这便是裂变能；两个轻核(譬如氘核)聚合成较重的核(^{4}He 核)，也会放出能量，这是聚变能.

由于对核力的性质不像对电磁力那样了解得清楚，我们能用§1 中列举的基本常数，对原子核做些什么估算呢？§2 里在分析核外电子运动时，曾得到三个特征长度：玻尔半径(l_1)、电子的康普

顿波长(l_2)和电子的经典半径(l_3). 迄今为止,我们只讨论了玻尔半径,它代表着原子层次的空间尺度. 对于后面两个特征长度,我们尚未议论过. 现在让我们来看看它们的物理意义.

电子的经典半径为

$$r_0=\frac{e^2}{m_e c^2}=2.8\,\text{fm}, \tag{3.29}$$

它表明,如果设想电子为半径等于 r_0 的小球,则它的静电自能($\propto e^2/r_0$)与静能 $m_e c^2$ 同数量级. 这式子里不出现普朗克常数 h,故曰"经典"半径. 这是否可以认为,我们可以像对硬球那样,把电子放入一个比它稍大的盒子里? 上文已提到,原子核的半径在 10 fm 以下,比 r_0 略大. 所以按照上述看法,电子是可以被"装进"原子核里的. 其实,历史上在未发现中子之前,人们确曾认为原子核是由质子和电子组成的. 然而这是一种纯经典的看法,实际情况完全不是那么回事.

从量子观点来看,电子(和一切微观粒子一样)具有波粒二象性. 海森伯不确定度关系

$$\Delta p\Delta x\simeq\hbar$$

反映了这一点. 这就是说,要把一个量子粒子"关进"几何线度为 Δx 的盒子里,它的动量的不确定度

$$\Delta p\simeq\frac{\hbar}{\Delta x}$$

随着 Δx 的减小,Δp 不断增大. 当 Δp 超过 mc 的数量级时,粒子的能量 $E=c\sqrt{p^2+m^2c^2}\sim c\sqrt{(\Delta p)^2+m^2c^2}$ 超过 $\sqrt{2}\,mc^2$,粒子成为相对论性的了.

从相对论性的量子观点来看,任何单粒子的波动方程都丧失了意义,因为在这样高的能量下,粒子随时可以产生和湮没,这时只有描述粒子数不守恒系统的量子场论才可能是自洽的. 与跨入相对论的门坎 $\Delta p=mc$ 相对应的几何线度是

$$\Delta x = \frac{\hbar}{mc}$$

"把粒子装进线度比这还小的盒子里"的概念是毫无意义的. 因为在这样小的盒子里已不可能有单粒子的描述了, 我们不再能确切地知道,这"粒子"是否仍原封不动地在里面存在着. 上式中 Δx 的表达式,正是该种粒子的约化康普顿波长 λ_0, 即

$$\lambda_0 = \frac{\hbar}{mc}. \tag{3.30}$$

这就是说, λ_0 是一个量子粒子在空间定域的最小几何线度. 小于此限,谈论粒子的定域就是句空话. 例如电子的 $\lambda_0 = 3.9 \times 10^2\,\mathrm{fm}$, 比原子核的线度大两个数量级, 所以, 说"电子是原子核的一种组分"是没有意义的. 然而核子(质子、中子)的 $\lambda_0 = 0.18\,\mathrm{fm}$, 它比式(3.23)中的 $r_0 = 1.20\,\mathrm{fm}$ 小,故认为原子核由核子组成, 是可以说得通的.

中子是 1932 年查德威克 (J. Chadwick) 发现的. 中子的质量比质子略大,差值 $\Delta m = m_n - m_p$ 与电子质量 m_e 同数量级,故当时也有人认为,中子由质子和电子组成. 尽管自由中子会衰变为质子和电子

$$\mathrm{n} \to \mathrm{p} + \mathrm{e} + \nu_e,$$

从康普顿波长的观点看, 认为电子是中子组成部分的看法仍旧是没有意义的.

例题 4　两氘核(^{2}H)相碰而聚合时,释放出 3.25 MeV 能量:

$$^2\mathrm{H} + {}^2\mathrm{H} \to {}^3\mathrm{He} + \mathrm{n} + 3.25\,\mathrm{MeV}.$$

但因氘核带有电量 e, 氘核需要有多大的动能, 才得克服彼此间库仑斥力的势垒?

解　对于氘核, $A=2$, 半径 $R = r_0 A^{1/3} = 1.51\,\mathrm{fm}$. 两氘核相碰时, 中心距离为 $2R$, 库仑势垒的高度为

$$U = \frac{e^2}{2R} = \frac{14.4\,\mathrm{eV}\cdot\text{Å}}{2 \times 1.51\,\mathrm{fm}} = 0.48\,\mathrm{MeV}.$$

这能量相当于 5.5×10^9 K 的温度. 由于存在量子力学中的隧穿效应，实际上所需的有效温度不到 10^8 K 就够了.

例题 5　粗略地估计碳核表面的电场.

解　对于碳核，$Z=6$，$A=12$，半径 $R=r_0A^{1/3}=2.75\,\mathrm{fm}$，表面电场强度为

$$\frac{Ze}{R^2}=\frac{Ze^2}{eR^2}=\frac{6\times14.4\,\mathrm{eV\cdot\AA}}{e\cdot(2.75\,\mathrm{fm})^2}=1.14\times10^{21}\,\mathrm{V/m},$$

这电场比价电子轨道处的电场高出 10 个数量级.

§1 中曾提到过，原子的英文名 atom 来源于希腊文，意思是“不可分割的”. 本世纪以来科学的发现表明，这是不对的. 今天我们大家都知道，原子由原子核和电子组成，原子核由质子和中子组成；或者说，原子可分割为原子核和电子(电离)，原子核可分割为质子和中子(裂变). 哲学上有个命题，叫做“物质无限可分”. 这个命题对不对？为了回答这个问题，首先要说清楚，什么叫做“分割”. 我们暂且朴素地(也许可以说是“机械地”)按字面上去理解，即整体在物理上可以分解为若干组分，各组分的质量和几何尺寸小于整体，且它们的质量之和大体上等于整体的质量，占用体积之和不大于整体的体积.

首先我们从“质量”的角度来考查一下物质的可分性. 由于部分组成整体时一定要有结合能，这将引起“质量亏损”，即整体的质量小于各组分质量之和. 我们试比较一下各物质结构层次里结合能与各组分的质量(或者说“静能”)的大小. 在下节里我们将看到，氢分子中两个原子的结合能为 0.33 Ry$\simeq$4 eV，而每个原子的质量为 GeV 的量级，故二者相比差 8—9 个量级. 在原子层次内，电子与核之间的结合能为 eV—keV 的量级，这比电子的质量 0.5 MeV 小 3—5 个量级，比原子核的质量还要再小 3—4 个量级. 原子核内的结合能平均每核子 8 MeV，这仍比核子的质量 GeV 小 2 个量级. 可见，在上述各层次里，结合能引起的质量亏损都远小于各组分本身的质量；亦即，整体的质量差不多等于各组分质量之

和，从这个意义上讲，它们在结构上的“可分性”是说得通的．不过我们也看到，随着物质结构层次的深入，结合能引起的质量亏损与各组分质量之比在一步步地增大．如果到达某个层次，这个比值趋于 1、甚至大于 1，“可分性”的概念就要发生本质上的变化．

下面我们再从“几何线度”方面来探讨物质的可分性．由于微观客体的波粒二象性，容纳一个粒子的空间是不能无限缩小的．上文指出，我们应以式(3.30)给出的康普顿约化波长 λ_0 作为其几何线度的下限，它是反比于粒子的质量的．如果我们把物质一层层地分割下去，随着组分质量愈分愈小，容纳它的空间线度反而要愈来愈大．单凭这一点，我们就会预感到，“无限分割”是不可能的．

最后我们来实际地看看，物质结构的下一个层次——质子和中子是否“可分割”？质子和中子属于重子(baryon)，重子和介子同参与强相互作用，统称“强子(hadron)”．早在 50 年末 60 年代初，大量高能物理实验预示着，强子是有内部结构的．当前强子的结构模型是“夸克(quark) 模型”．① 粗略地讲，重子由三个夸克组成，介子由一个夸克和一个反夸克组成．如带电粒子之间的电磁相互作用是通过交换光子来实现的，夸克之间的相互作用(称为“色作用”) 是通过胶子 (gluon) 来实现的．但是这里所用的“组成”这个词的含义与物质结构以前各层次大不相同．迄今为止，实验并没有直接观察到自由的(即单独存在的)夸克或胶子．这是因为色相互作用具有“禁闭”的性质，即它不随粒子间的距离的增大而迅速减弱，从而使得最终把粒子分开所需的能量成为无穷大．实际上在你提供的能量远不到无穷大时就会发生新的情况．，图 3-4 各分图所示的强子模型可为这里过程作个很形象化的注解：强子内的夸克由一种胶(胶子)连接起来 (图 a)，当我们企图把两个夸克拉开时，胶被拉成弦状(图 b)．当你提供的能量足够大时，此能

① 参见秦旦华、高崇寿，《粒子物理学概要》，第三章，高等教育出版社，1988 年．

量可以转化为夸克反夸克偶对形式的物质(图 c). 最后弦断了,变成两个强子 (图 d). 你永远不能成功地解放夸克, 而只能像实验中观测到的那样,产生出新强子. 总之, 说"强子为有内部结构的复合粒子"是对的,但不能说强子是"可分割的". 至少按字面上的含义是这样.

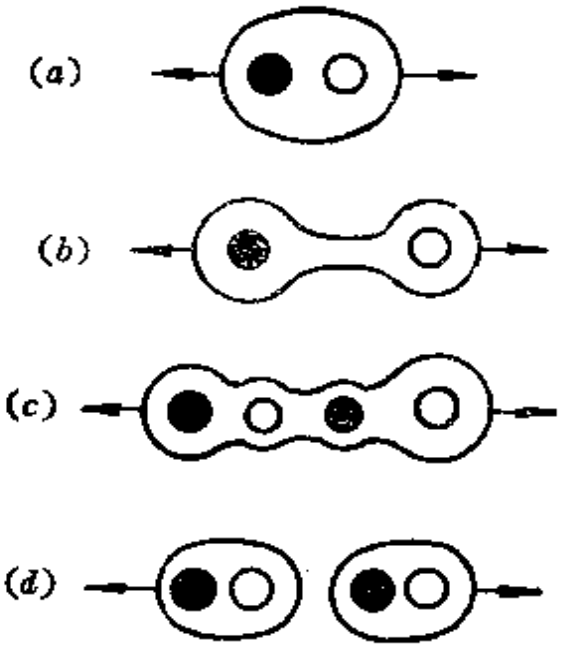


图 3-4 从强子中解放出夸克的失败尝试
(图中黑、白小圆圈分别代表夸克和反夸克)

§ 4. 分子和晶体

分子是由原子组成的, 它的典型尺度是 10Å 的数量级, 但生物大分子可以是很长的链,长达 0.1 mm 的数量级,但宽度仍是几个 Å. 研究和改造分子的学科, 与其说是物理, 不如说是化学的领地,正是分子的化学结构决定着宏观的物性. 此外,生命过程主要是在分子这个层次上进行的,分子生物学的诞生,标志着生命科学的发展已深入到了微观的水平.

1. 氢分子

在原子物理中氢原子的理论占据特殊的重要地位, 因为它最

简单，是唯一有严格解的原子．由氢原子理论导出的概念是处理更复杂原子的基础．同样，在分子这一层次里氢分子的理论占据特殊的重要地位，由此引出的概念也是处理更复杂分子的基础．

氢分子 H_2 由两个氢原子组成．氢分子最低的能级相当于两个氢原子各有一个电子在 1s 轨道上，它们的自旋可以同向，也可以反向．当两个原子相互靠近到电子云发生重叠时，电子轨道就要重新组合，自旋取向相反时形成单重态，取向相同时形成三重态．图 3-5*a* 和 *b* 分别为它们的电子云等密度线图．单重态中电子波函数的轨道部分是对称的，电子云在两核之间的区域内有较大的密度．这里的电子云同时和两个核有较强的库仑引力，这作用超过两核之间的库仑斥力，把它们结合在一起．这样一对为两个原子所共有的、自旋相反配置的电子结构，称为"共价键"，这种电子状态称为"成键态"．在三重态中电子波函数的轨道部分是反对称的，

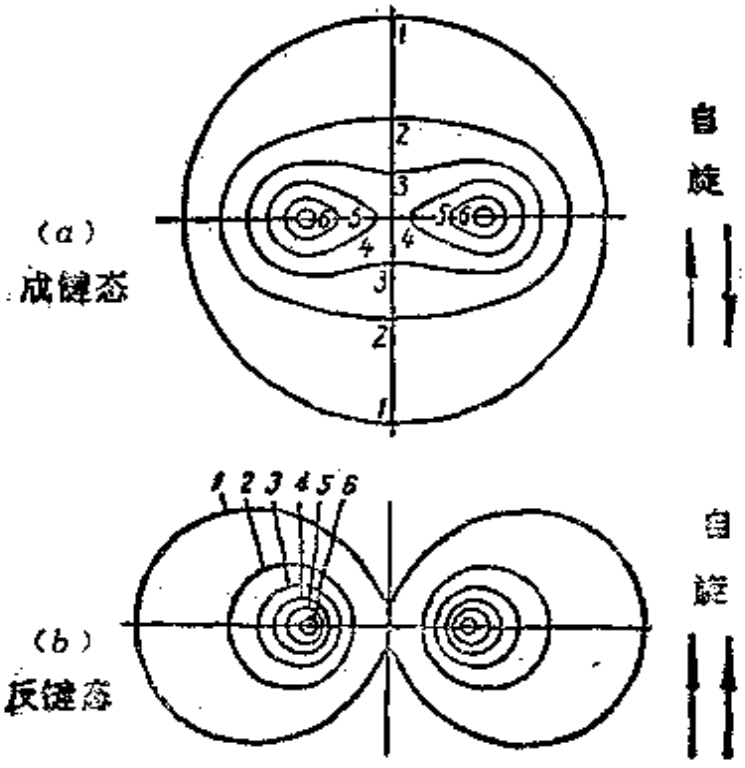


图 3-5　H_2 分子中电子云的等密度线
（图中数字代表密度递增的顺序）

在两核联线的中垂面上及其附近电子云的密度较小，这时两原子不能键合，故而这种电子状态称为“反键态”.

为了计算处于成键态时两核之间的距离(键长)和结合能，通常采用玻恩(Born)-奥本海默(Oppenheimer)近似，这实际上是一种绝热近似(adiabatic approximation)：先把两原子核间的距离 r 作为参量，计算电子在不同 r 值下基态的能量 E(动能+势能)，于是得到一个函数 $E(r)$. 在讨论核的运动时，E-r 曲线可看作是它们的“势能”曲线. 单重态和三重态的 E-r 曲线具有图 3-6 中所示的形式：三重态的“势能”无极小，这是反键态的特征；单重态的“势能”在某个 r_0 处有极小值，它表明，两原子可在这个距离上键合. r_0 代表键长，能量极小值 $E(r_0)$ 与 $r\to\infty$ 时的值 $E(\infty)$ 之差，近似地[①]给出结合能 E_B 的大小

$$E_B\simeq E(\infty)-E(r_0). \tag{3.31}$$

氢分子 r_0 和 E_B 值的计算标志着量子化学的发端.

用各种近似方法进行的量子力学计算都是相当繁难的，但在 $r=\infty$ 和 $r=0$ 的两个极端情形下 E 值无需重新计算，即可从已有结果中判知. $r\to\infty$ 相当于两个无相互作用的氢原子，每个原子有 1 Ry 的结合能，故 $E(\infty)=-2$ Ry(原子分离极限). 当 $r\to 0$ 时，两核之间有无穷大的库仑斥力，$E(0)\to+\infty$. 如果我们将库仑斥力势 e^2/r 从总能量 E 中扣除，差值 $E'(r)=E-e^2/r$ 将趋于有限值. 这极限情形相当于核电荷为 $2e$ 的氦原子的结合能，即把氦原子的两个电子剥离掉所需的电离能. 由表 3-4 可以查出，氦原子第一个电子的电离能为 24.6 eV，折合为 1.8 Ry. 第二个电子的电离能是氢原子的 $z^2=4$ 倍，即 4 Ry. 故总共 5.8 Ry，即

$$E'(0)=-5.8\ \text{Ry}$$

(原子联合极限).

① 忽略 10^{-2} Ry 量级的零点振动能.

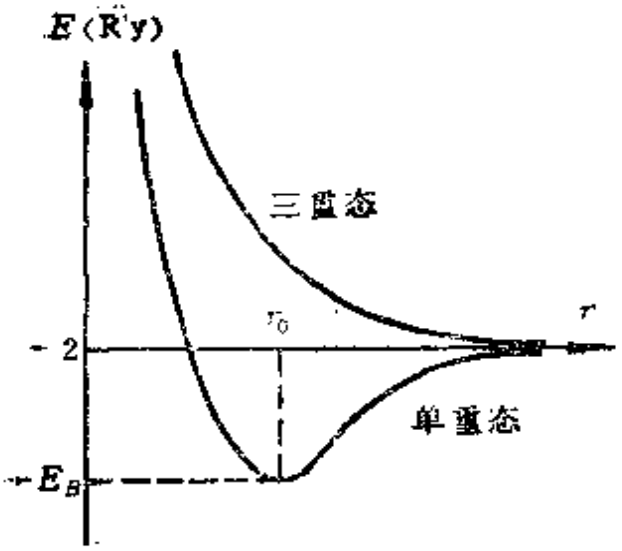


图 3-6 H_2 分子的 E–r 曲线

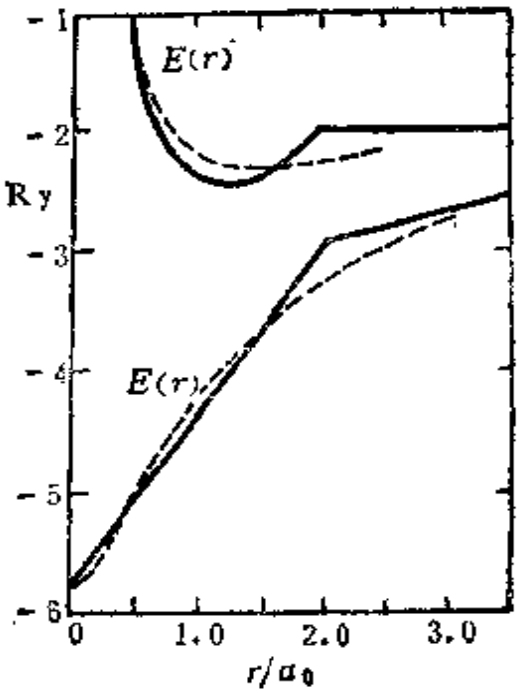


图 3-7 用内插法计算 H_2 分子的结合能 E_B 和键长 r_0

现在我们用粗略的内插法来估算 $0<r<\infty$ 区间的 $E(r)$.① 假设 $r\geqslant 2a_B$(a_B——玻尔半径)时 $E(r)$ 可用常数 $E=-2\text{Ry}$ 代替，从而 $E'=-2-e^2/r$; 当 r 从 $2a_B$ 减少到 0 时，取 E' 沿一条直线降到 -5.8Ry，然后补上一项 e^2/r，即可得到 $E(r)$ 在 0—$2a_B$ 区间的曲线. 这些都在图 3-7 内用实线表示. 如此得到的 $E(r)$ 曲线在 $r=r_0=1.20a_B$ 处有一极小值 $E(r_0)=-2.45\text{Ry}$. 亦即，这样估算的结果是键长等于 $1.20a_B$，结合能等于 0.45Ry. 准确的 $E(r)$ 和 $E'(r)$ 曲线在图 3-7 中用虚线表示，键长和结合能的精确值为 $r_0=1.43a_B$，$E_B=0.33\text{Ry}$. 对于如此粗略的估算方法，应该说，这样的结果也算得是差强人意了.

2. 共价键

共价键有两个基本特征：饱和性和方向性.

① V. F. Weisskopf, *Am. J. Phys.* **53** (5), 399, (1985).

"饱和性"，是指一个原子只能形成一定数目的共价键，因此，通过共价键只能和一定数目的其它原子相结合．共价键只能由未配对的电子形成．例如，氢原子在 1s 轨道上只有一个电子，自旋可以取任意方向，这样的电子是未配对的，它们可以形成共价键；在氦原子中，1s 轨道上有两个电子，根据泡利原理，它们必须具有相反的自旋，这种自旋已配对的电子不能形成共价键，故没有两个氦原子组成的"氦分子"．能形成共价键的数目与未配对的价电子数目相等．

"方向性"指原子只在特定的方向上形成共价键．根据量子理论，共价键的强弱取决于形成共价键的两个电子轨道相互交叠的程度．因此，一个原子是在价电子波函数最大的方向上与其它原子键合的．例如，p 态的价电子云具有哑铃的形状，因此在对称轴的两头形成共价键．为了形成共价键，有时可以发生轨道的杂化．

碳原子有 6 个电子，处于基态时，两个电子填满 1s 轨道，两个填满 2s 轨道，剩下两个电子在 $2p$ 壳层．在这种情况下只有两个 $2p$ 电子未配对，似乎只应形成两个共价键．但是碳原子经常表现为 4 价，典型的例子是甲烷(CH_4)，一个碳原子与四个氢原子键合在一起．这里发生了 $2s$ 和 $2p$ 的轨道杂化．我们知道，s 态是球对称的；p 态的波函数具有轴对称性，对原点是反对称的，即一头正一头负．两态叠加，电子云就偏到原点的一侧（见图 3-8）．将一个 s 轨道和分别以 x, y, z 为轴的三个 p 轨道作适当的组合，可得到偏向空间任何方向的杂化轨道．这样的杂化轨道共可组成四个，若要它们对原点具有最大程度的对称性，它们的方向应如图 3-9 所示，指向立方体的八个顶角中彼此都不相邻的四个，或者说，它们指向一个正四面体的顶角．这就是碳原子形成共价键的四个方向，任何两个邻键之间的夹角皆为 109.5°．若在以碳原子为中心

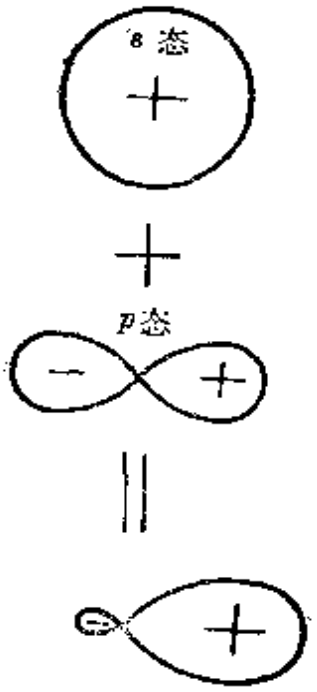


图 3-8 s-p 轨道杂化

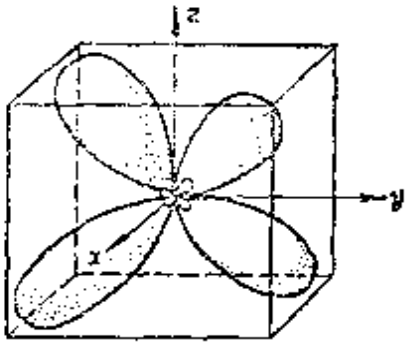


图 3-9 碳原子在四面体顶角方向上具有极大的杂化轨道

的四面体顶角上各与一个氢原子键合，就形成甲烷的分子(见图 3-10).

甲烷分子是碳氢化合物的一个典型，长碳氢链分子也由共价键组成. 例如图 3-10 中的辛烷(C_8H_{18})分子，就是由八节 CH_2 组成，每个碳原子仍有四个键，它们分别指向四面体的顶角，其中两个与氢原子结合，另两个与邻节内的碳原子连接，在长链的两端各补上一个氢原子. 这类碳氢化合物叫做"烷烃"，它们的分子通式为 C_nH_{2n+2}(如 $n=1$, CH_4 为甲烷; $n=2$, C_2H_8 为乙烷; …. 对于辛烷，$n=8$). 烷烃属化合物称为"饱和碳氢化合物"，其分子中碳原子之间都是单键. 除非将分子从这里拆开，否则无法再增大氢的比例了.

乙烯(C_2H_4)分子是由两节 CH_2 组成的，实验表明，六个原子总处在同一平面内. 这就是说，两个 CH_2 不能以两碳原子的联线为轴作相对转动. 整个分子就像刚体一样，两边一起转动. 在乙

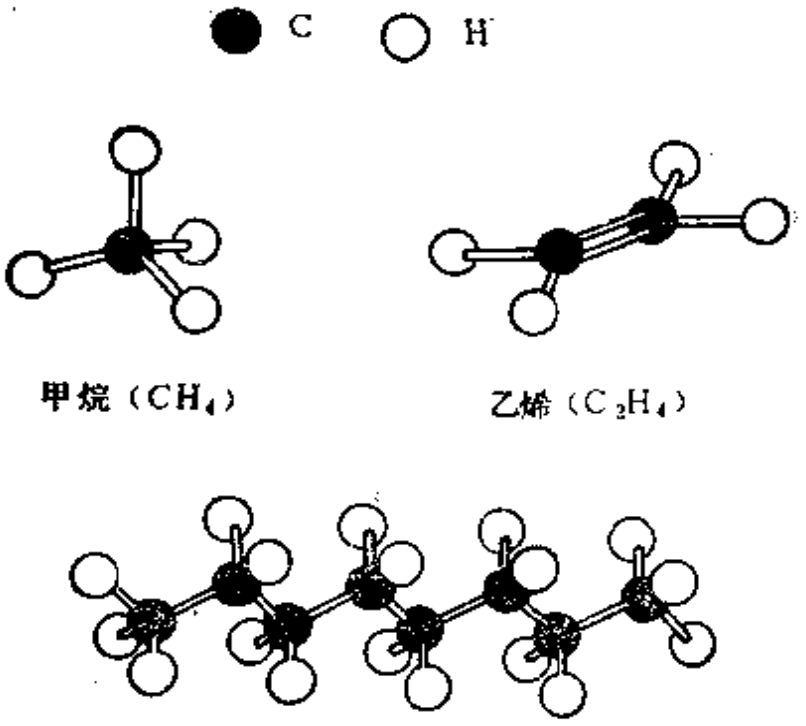


图 3-10　几种有机分子

烯中两个碳原子是怎样结合的？很自然的解释是它们之间由双键连接．这相当于每个碳原子除了用两个键与氢原子结合外，另外两个处在垂直平面内的键彼此相联(见图 3-10)，这样就把分子的两头约束在一起，无法作相对转动．乙烯属"烯烃"类，其通式为 C_nH_{2n}（如 $n=2$，C_2H_4 为乙烯；$n=3$，C_3H_6 为丙烯；…）．

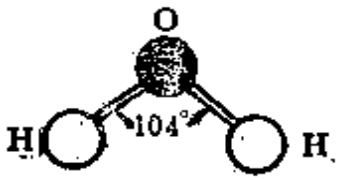


图 3-11　水分子

除烷烃、烯烃外，第三类碳氢化合物的通式为 C_nH_{2n-2}，即氢的比例比烯烃更少一点．按照结构的不同，它们分属"炔烃"，"二烯烃"，等等．烯烃、炔烃等化合物统属"不饱和碳氢化合物"，其分子中碳原子间有双键，乃至三键．

水(H_2O)分子中氧原子在中央，两个氢原子在两侧，但三者并不在一条线上，而是有 104° 的键角(图 3-11)．此角比 90° 大，比

四面体型的键角 109.5° 小，较接近后者．从而我们会想到，氧原子中是否也形成了四面体型的杂化轨道？氧原子有 8 个电子，其中 2 个处于 1s 态，形成满壳层；另外 6 个在 2s 和 2p 轨道上，这里共可容纳 8 个电子，故而有两个空位．我们假定，像碳原子那样，氧原子中的 2s 和 2p 四个轨道也发生杂化现象，形成指向四面体四个顶点的四个轨道．与碳原子不同的是，这四个杂化轨道中的两个已被配了对的电子填满，只有另外两个轨道上的电子是未配对的，可以形成共价键，各自与一个氢原子相结合．水分子中不成键的那两对电子称为"孤对(lone-pair)"．它们虽不能形成共价键，但是在它们所在的方向上负电荷多，容易与其它水分子中的氢靠近，形成一种较共价键为弱的连接，这叫做"氢键"．鉴于氢键的重要性，我们将在后面另辟专门的篇幅来介绍它．

现在我们来看看，上述各种分子的结合能．

原子层次中，能量的数量级是里德伯单位 Ry＝13.6eV，长度的数量级是玻尔半径 a_B＝0.53 Å．从氢分子的例子可以看出，在分子层次中能量略小，长度略大，数量级是一样的，故用同样的单位也是方便的．但为了四舍五入后数值简便好记，我们更多地用宏观上的 kcal/mol 作为结合能的单位，换算关系如下：

1Ry＝13.6eV，宏观上相当于 313 kcal/mol，100 kcal/mol 微观上相当于 4.4eV＝0.32 Ry．

如前所述，在氢分子的基态中键长 $1.43a_B$，结合能 0.33 Ry，宏观上约合 103 kcal/mol，粗略地说，就是 100 kcal/mol 的数量级．在甲烷等碳化合物中，每个 C—H 键的结合能约 93 kcal/mol，水分子中每个 H—O 键的结合能为 110 kcal/mol，它们的数量级也都是 100 kcal/mol．表 3-5 内列出一些典型共价键的结合能数据．作为数量估计之用，我们不妨粗略地把它们分成两组：一组是较强的共价键，从 H—O，H—H，H—C，H—N，直至 C—C

C—C, C—O 等，其数值在每键 100 kcal/mol 左右；另一组包含 O═O, Cl—Cl, N≡N, F—F 等，它们较弱，数值约为前者的一半，即每键 50 kcal/mol 左右.

表 3-5 典型的共价键结合能

键	kcal/mol·bond
H—O	110
H—H	103
H—C	98
H—N	93
C═O	176/2=88
C—C	83
C—O	83
C≡O	149/2=74
O═O	117/2=59
Cl—Cl	57
N≡N	99/2=49
F—F	37

现在我们用这些知识来分析几个燃烧的例子. 什么是燃烧? 空气中的氧分子分解为两个原子，同有机燃料中的碳和氢结合成二氧化碳和水一类稳定的化合物，从而氧分子从较弱的化学键进入较强的化学键，将多余的能量释放出来. 所以，从燃烧中获得的能量应为强键与较弱键能量之差，即从空气中每取一个氧原子，约释放能量 50 kcal/mol.

例题 6 甲烷(沼气)是家用气体燃料的重要组成部分. 试估计烧掉每摩尔的甲烷时得到的热量.

解 甲烷燃烧的化学反应方程式为

$$CH_4+2O_2 \longrightarrow CO_2+2H_2O,$$

即烧掉一个甲烷分子用掉两个氧分子，四个较弱的键断开，代之以水和 CO_2 中的强键. 因此烧掉每摩尔的甲烷约获得热量 $4\times 50=200$ kcal/mol (实际值应是 190 kcal/mol).

例题 7 估计燃烧每千克汽油释放的能量是多少?

解 原油和天然气主要是饱和碳氢化合物，不饱和的碳氢化合物是在加工过程中生成的. 在饱和的(即烷烃属)化合物中，$n=1\sim 4$ 在常温常压下是气体，$n=5\sim 15$ 则成液体(如汽油、轻油、重油等)，$n=16\sim 40$ 成固体(石蜡).

汽油分子中碳与氢原子数之比是 $1:2\left(1+\frac{1}{n}\right)$，$n\gg 5$，故作为粗略估算，

可把分子的碳氢键拆成节，每节写成 CH_2，这相当于在上列比例式中忽略 1 后面的 $1/n$ 项．对于每节碳氢链，有下列近似的化学反应式：

$$CH_2+\frac{3}{2}O_2 \longrightarrow CO_2+H_2O,$$

即平均每节用掉空气中的三个氧原子，故获得能量 $3\times 50=150$ kcal/mol．CH_2 的分子量为 14，每千克释放能量 $150\times 10^3/14=1.07\times 10^4$ kcal $\simeq 10^4$ kcal．这大体上是符合实际的。

例题 8　计算单位质量葡萄糖(一种典型的醣)的含热量。

解　葡萄糖的分子式为 $C_6H_{12}O_6$，分子量为 180，氧化的反应式为

$$C_6H_{12}O_6+6O_2 \longrightarrow 6CO_2+6H_2O,$$

这里消耗 12 个氧原子，获得能量约 $12\times 50=600$ kcal/mol，相当于 $600/180=3.33$ kcal/g(实际值应为 3.81 kcal/g)．

大家都知道，恩里科·费米(Enrico Fermi)是一位集实验大师和理论泰斗于一身的少有的伟大物理学家，他也是用简单方法作数量级估计的能手．在 1945 年 7 月的一个星期一的早上，当世界上第一枚原子弹在美国新墨西哥州沙漠里爆炸时，40 秒钟后，爆炸的冲击波传到基地营．这时，费米把预先从笔记本上撕下来的碎纸举到头顶上撒下，碎纸片飘落到他身后约 2 m 处．经过一番心算，费米宣称那枚原子弹的威力相当于一万吨 TNT 炸药．这估计为后来精密仪器的测量所证实，一时传为佳话．现在人们把作粗略数量估算的智力测验问题，叫做 Fermi quiz(费米测验题)．下面我们举与上文话题有关的，费米的另一估算例子．

仅仅为了保持体温，一个人每天需要吃多少食物？费米是这样估算的：他说从阅读侦探小说得知，死尸需要半天时间体温降到室温．他设人的体重为 60 kg，由此他估计出，活人仅为了保持体温，每天需要补充热量 2000 kcal．怎样理解费米的这个结论呢？由于构成人体相当大部分的物质是水(约占 65% 以上)，故可认为人体的比热接近于 1 kcal/kg·K；此外，体温为 310 K，设室温为 300K，则尸体在冷却过程中共放出热量 $60\times 1\times(310-300)=600$ kcal．

这热量是在不断降温的情况下释放的，活人的体温保持恒定，在同一段时间内向环境散发的热量将比此数量大．据指数律降温来估计，此数量约是活人在半天内散热量的60%左右，即活人半天内要散热1000 kcal，全天散热数量加倍，即2000 kcal．这数大约等价于100 W的功率，若再除以体重，得单位体重的基础代谢率1.6 W/kg．如果按葡萄糖含热值3.81 kcal/g计算，每天需要0.53 kg．

一个20岁男子睡眠时的代谢率，实际数据约为1.1 W/kg，亦即按费米的方法计算，数据稍偏高了一点．按法医学，尸冷是个较复杂的问题，因素很多，除环境外，尸体的年龄、胖瘦，死因等都会影响降温的速度．此外身体各部位，体内各器官，降温的速度也有所不同．我们不能奢望上述估算会很精确．

一个人挑了100斤(50 kg)的担子在平路上走了一天(可按8小时计)，汗流浃背，疲惫不堪，歇工后，饭也要多吃两碗，可是，按照物理学中"功"的定义，这人却没有作功！因此有人要责备物理学不讲道理．也有人说，生理上作功和物理上作功是不同的概念，此人在生理上作了功，但物理上没有作功．我们要问：物理学果真对这个问题无能为力、说不清楚吗？

当一个人作激烈的运动，或担当繁重的体力劳动时，他体内的生物化学反应进行的速度加快，这些反应使他体内的无序性增加，他从而感到疲劳．从物理学的观点看，就是他体内的熵产生率增加了．他怎样才能消除疲劳？这必须把体内积累下来多余的熵排除出去．排熵的办法就是发热和出汗，每向周围环境散发热量Q，他就排出Q/T这么多的熵($T=310$ K，人的体温)．热量散发了，熵也排出了，但体内能量的收支也不平衡了．此时需要低熵的能量来源，这就是食物．所以劳动完了休息过来后，他饿了．

我们假定这个人劳动后多吃了二斤(1 kg)食物，试由此估算

一下他劳动时体内的熵产生率. 按照目前我国食物的组成，发热量按 3.5 kcal/g 计算，食物补偿的热量 $Q=3500\,\mathrm{kal}\simeq 1.5\times10^7\,\mathrm{J}$. 假定这就是排熵时的热量，而熵是在 $t=8$ 小时 $=28800\,\mathrm{s}$ 内产生的，故劳动时熵产生率为

$$\sigma=\frac{Q}{Tt}=\frac{1.5\times10^7\,\mathrm{J}}{310\,\mathrm{K}\times28800\,\mathrm{s}}=1.7\,\mathrm{W/K}.$$

作为对比，我们计算一个体重 60 kg 的人睡眠时的熵产生率

$$\sigma_0=\frac{60\,\mathrm{kg}\times1.1\,\mathrm{W/kg}}{310\,\mathrm{K}}=0.2\,\mathrm{W/K}.$$

可见，$\sigma/\sigma_0\simeq8.5$ 倍，即劳动时体内的熵产生率要高得多.

例题 9　如果把人体看成黑体，估计一下每秒由体表辐射出去的能量，并与上文对人体散热的估算作一比较. (设环境温度为 300K)

解　设人体的表面积 S 为 m^2 的量级，则散热率为

$$\frac{dQ}{dt}=S\sigma(T^4-T_0^4)\simeq1\times5.67\times10^{-8}\times(310^4-300^4)\simeq64.3\,\mathrm{W},$$

式中 $\sigma=5.67\times10^{-8}\,\mathrm{W/m^2\cdot K^4}$ 为斯特藩-玻耳兹曼常量. 以上结果比上文的 100 W 略小.

例题 10　如果一个体重 70 kg 的男人每分钟用掉 1 升空气中的氧，他的代谢率有多高?

解　每摩尔空气占体积 22.4 升，其中氧的体积约占 20%. 每摩尔氧气释放能量 $2\times50\,\mathrm{kcal}=420\,\mathrm{kJ}$，故该男子的代谢率为

$$\frac{4.2\times10^5\,\mathrm{J}}{22.4\times20\%\times60\mathrm{s}\times70\,\mathrm{kg}}=22\,\mathrm{W/kg}.$$

比基础代谢率约高出一倍.

3. 离子键

除共价键外，较强的化学键还有离子键和金属键两种. 共价键可以把原子结合成分子，也可以结合成晶体(如金刚石)；离子键和金属键通常把原子结合成晶体，下面我们先谈离子键.

当两个相同的原子之间形成共价键时，由于对称性的要求，参与成键的电子对等分配，这样形成的双原子分子没有电偶极矩. 但

表 3-6　典型离子晶体的键长和结合能

晶体	d(Å)	ε_B^*(计算)	ε_B(计算) kcal/mol	ε_B(实验)
NaF	2.39	122	103	88
NaCl	2.82	103	85	75
NaBr	2.99	98	77	67
KF	2.69	108	97	86
KCl	3.15	92	84	77
KBr	3.30	88	78	68

是，当原子不同时，不再有上述对称性，部分或全部电子云可以从一种原子迁移到另一种原子．发生上述情况的典型例子是碱金属(或氢)的卤化物，它们的分子中一方是满壳层外有个结合松散的价电子，另一方的壳层上有个“空穴”．电子云转移后，两边成为带异号电荷的离子，离子间靠静电力结合在一起．如 KF 是 K^+ 和 F^- 离子的结合，NaCl 是 Na^+ 和 Cl^- 离子的结合，等等．这类化学键称为“离子键”．实际上，共价键和离子键是两个极端，多数情况居于二者之间．与共价键不同，离子键既没有饱和性，也没有方向性．靠静电力离子可以正负离子相间地无限堆积下去，成为晶体、这种晶体叫做“离子晶体”．

表 3-6 给出一些典型离子晶体中相邻离子的间距（键长）d 和结合能 ε_B．离子晶体结合能中最主要部分是静电势能（库仑能）ε_{Bt}^*．以 NaCl 晶体为例，晶体中相邻的 Na^+、Cl^- 离子间距离 $d=2.82$ Å、晶体的摩尔库仑能为

$$\varepsilon_B^*=\frac{1}{2}AN_A\frac{e^2}{d}. \tag{3.32}$$

式中 A 称为 Madelung 常数，它与晶体结构有关，对于立方晶体

$$A=6-\frac{12}{\sqrt{2}}+\frac{8}{\sqrt{3}}-\cdots=1.7476①, \tag{3.33}$$

① 可参看赵凯华、陈熙谋，《电磁学》第一章，§ 5，例题 2．

而式(3.33)中出现 1/2 因子，是因为计算键能时，每个离子被重复计算了两次．把 A 的数值代入，得

$$\varepsilon_B^* = 0.8738 N_A \frac{e^2}{d} = 103\,\text{kcal/mol}.$$

上式里 $e^2/d = 0.38\,\text{Ry}$ 代表 Na^+、Cl^- 结合成单个 NaCl 分子的库仑能，此数值在宏观上相当于 118 kcal/mol，比 ε_B^* 大．这是否表明，形成一个个 NaCl 分子比形成晶体更稳定呢？不是的！我们不应拿此数和 ε_B^* 比，而是要和 $2\varepsilon_B^*$ 比，从而结论正好相反，是晶体比单个分子更稳定．

ε_B^* 代表把晶体拆成正负离子所需的能量，但通常所谓晶体的结合能 ε_B，是指把晶体拆成中性原子所需的能量．两者之差为

$$\varepsilon_B - \varepsilon_B^* = -\frac{1}{2}(I - Y), \tag{3.34}$$

这里

$$I(\text{Na 的电离能}) = 118\,\text{kcal/mol},$$

$$Y(\text{Cl 的电子亲合能}) = 83\,\text{kcal/mol},$$

因而 $\varepsilon_B = 85\,\text{kcal/mol}$（式中出现 1/2 因子的理由同前）．这数值并不精确，因为除静电作用外，影响晶体结合能的还有其它因素（如排斥力、范德瓦耳斯力、零点振动等），NaCl 晶体 ε_B 的实际值是 75 kcal/mol，其它典型离子晶体的数值也差不多在 80 kcal/mol 上下．我们可以更粗略地说，离子键与强共价键一样，同属 100 kcal/mol 数量级．所以，离子晶体还是比较硬的，但是比较脆．这是因为晶体内相邻离子本来都是带异号电的，一旦受到敲打，晶体产生局部滑移．于是在滑移面两侧同号离子排在一起（见图 3 12），静电斥力使晶体碎裂．

4．金属键

原子结合为晶体的另一重要形式是通过金属键．孤立的金属原子中通常有一、二或三个束缚较松散的外层电子，而其余的电子形成束缚较紧的原子实．当这样的原子凑在一起时，原子实常形

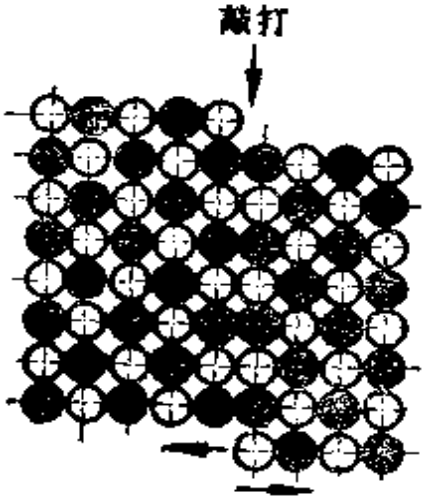


图 3-12　离子晶体

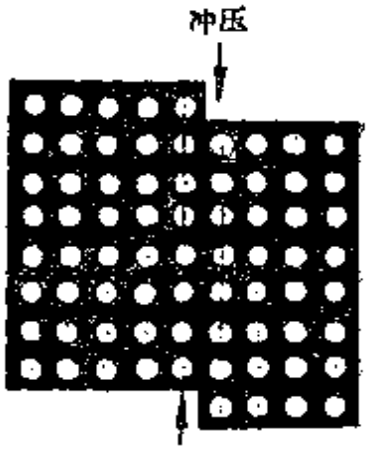


图 3-13　金属晶体

成规则的晶格，外层电子被"共有化"，可在整个晶体内自由运动.

金属的共同特点是不透明，有金属光泽，能导热、导电，富有延展性. 上面几条性质都和自由电子的存在有关：对金属热导和电导的主要贡献来自自由电子，而导体将使电磁波（光波）强烈反射. 至于金属的延展性，可用图 3-13 来说明. 图中白圆圈代表带正电的原子实，黑色背景代表共有化的自由电子. 其结构好象是由自由电子作为"胶体"把原子实堆砌起来：即使当晶体受到冲压而使原子实发生局部滑移时，自由电子仍可把新的"邻居"粘合在一起. 这便是金属材料良好延展性的由来.

下面我们以碱金属为例来估算金属结合能的数量级①. 为了简化我们的模型，假定晶格是简单立方的，即每个原胞中心有个正离子（原子实），自由电子气均匀充满整个晶体，平均每个原胞有一个电子. 设原胞的边长为 d，晶体的体积为 V，其中原子总数为 N，于是 $V/N=d^3$. 首先估算静电能 E_{V}.

由于每个原胞总体上无净电荷，故可忽略原胞之间的相互影

① 参见 V. F. Weisskopf, *Am. J. Phys.* **53** (10), 940 (1985)

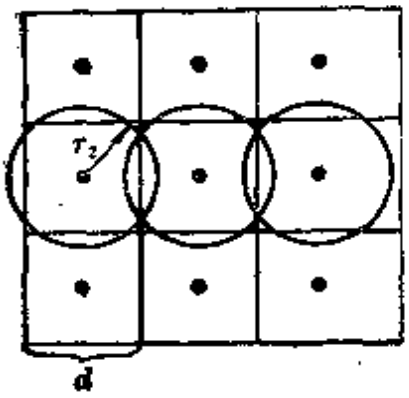


图 3-14 用半径为 r_s 的球代替边长为 d 的立方原胞

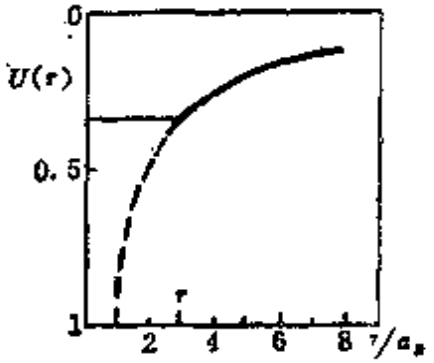


图 3-15 原子实的赝势模型

响. 近似地用半径 $r_s=(3/4\pi)^{1/3}d$ 的等体积球代替每个原胞(见图 3-14),从而球内自由电子的电荷体密度为

$$\rho_e=-\frac{3e}{4\pi r_s^3}. \tag{3.35}$$

我们试用一个等效的能函数(Ur)(通常称为"赝势")来描述原子实对外层电子的影响. 人为地给原子实选择一个适当的半径 r_0, 在 $r>r_0$ 以外取 $U(r)$为带 $+e$ 电荷的库仑势

$$U=e/r, \quad (r>r_0) \tag{3.36}$$

在 $r\leqslant r_0$ 的内部有两个效应作用在电子上: 一是原子核的吸引力增大, 二是泡利不相容原理给贯穿到原子实内部的电子一个等效的排斥力. 最简单的办法是假定 $U(r)$在原子实内部为常数

$$U=e/r_0, \ (r\leqslant r_0) \tag{3.37}$$

整个函数的曲线示于图 3-15. 用这样的赝势模型可以计算出最外层电子的电离能 I, 然后与 I 的实验值比较, 可反过来确定参数 r_0. 对于钠, 从 $I=5.14$ eV $=0.378$ Ry 定出的 $r_0=3.26\,a_B$,

在赝势 $U(r)$内自由电子的静电能为

$$E_V=4\pi\int_0^{r_s}\rho_e U(r)r^2\mathrm{d}r=-\frac{3e^2}{r_s^3}\int_{r_0}^{r_s}r\mathrm{d}r-\frac{3e^2}{r_s^3r_0}\int_0^{r_0}r^2\mathrm{d}r$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{e^2}{r_s}+\frac{e^2r_0^2}{2r_s^3}. \tag{3.38}$$

现在来计算电子的动能 E_K. 这里最基本的因素不是温度，而是泡利不相容原理，它迫使电子不能占据相同的量子态. 计及这一效应最简单的办法是配给每个电子一间"住房"，譬如那半径为 r_s 的球体. 象在 §2 中讨论氢原子时那样，利用海森伯不确定度关系得动量 $p\simeq\hbar/r_s$，于是有

$$E_K=p^2/2m_e\simeq\hbar^2/2m_er_s^2. \tag{3.39}$$

这公式的数量级是对的，但具体数值过于粗糙. 准确的办法应利用自由费米气模型，其结果是给上式添加一个数量级为 1 的系数 η:

$$E_K=\eta\hbar^2/2m_er_s^2,\quad \eta=2.21,\ ① \tag{3.40}$$

最后，我们需要求总能量

$$E=E_V+E_K=-\frac{3}{2}\frac{e^2}{r_s}+\frac{e^2r_0^2}{2r_s^3}+2.21\frac{\hbar^2}{2m_er_s^2} \tag{3.41}$$

对 r_s 的极小值. 由 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}r_s=0$ 得

$$r_s=(\eta'+\sqrt{\eta'^2+4r_0^2})a_B/2, \tag{3.42}$$

这里 $\eta'=(2/3)\eta=1.473$. 对于钠晶体，上式给出 $r_s=4.08a_B$. 该处的能量值为 $E=-0.446\,\mathrm{Ry}=-6.07\,\mathrm{eV}$，而孤立的 Na 原子电离能为 5.14 eV，二者相抵差 0.93 eV，代表把 Na 原子组成晶体的结合能. 钠晶的等效 r_s 和结合能的实际值分别为 $4.00\,a_B$ ② 和 1.11 eV.

---

① 按量子统计，费米气体中粒子的平均动能为

$$E_K=\frac{3}{5}\left(\frac{6\pi^2}{g}\right)^{2/3}\frac{\hbar^2}{2m_e}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}=\frac{3}{5}(3\pi^2)^{2/3}\frac{\hbar^2}{2m_ed^2}$$
$$=5.74\frac{\hbar^2}{2m_ed^2}=\frac{3^{7/3}\pi^{2/3}}{5\times4^{2/3}}\frac{\hbar^2}{2m_er_s^2}=2.21\frac{\hbar^2}{2m_er_s^2},$$

式中 $g=2S+1$ 为简并度. 对于电子，自旋 $S=1/2$，$g=2$.

② 钠晶体是体心立方的，晶格常数为 $8.08\,a_B$，每个原胞内有两个原子，故用简单立方代替时，等效的 $d=8.08a_B/2^{1/3}=6.41a_B$，$r_S=(3/4\pi)^{1/3}d=4.00a_B$.

怎样理解金属键的由来呢？图 3-16(*a*) 给出钠原子和金属钠中电子云密度 ρ_a 和 ρ_m 随 r 变化的分布曲线. ρ_m 是均匀分布的，从 ρ_a 形式的分布过渡到 ρ_m，需要作两个变化：(i)把 $r=0$ 附近的峰值(阴影区)移到 $r=r'$ (曲线 ρ_a 和 ρ_m 的交点处) 到 r_0 之间 (空间是足够的，因后者是个球壳)，这种变化不改变势能，因 $r\leqslant r_0$ 以内 $U(r)$ 是常数；(ii)把 $r>r_s$ 的尾部移至 $r=r_s$ 的球内，这将使势能减少. 上述电子云密度的迁移基本上不改变电子的动能①. 故而金属中电子云的总能量比孤立原子低，这便是金属键能的由来. 从力的角度看，上述电子云密度的迁移都趋向相邻原子实之间的区域，那里有较多负电荷的积累，有利于把正离子吸引在一起.

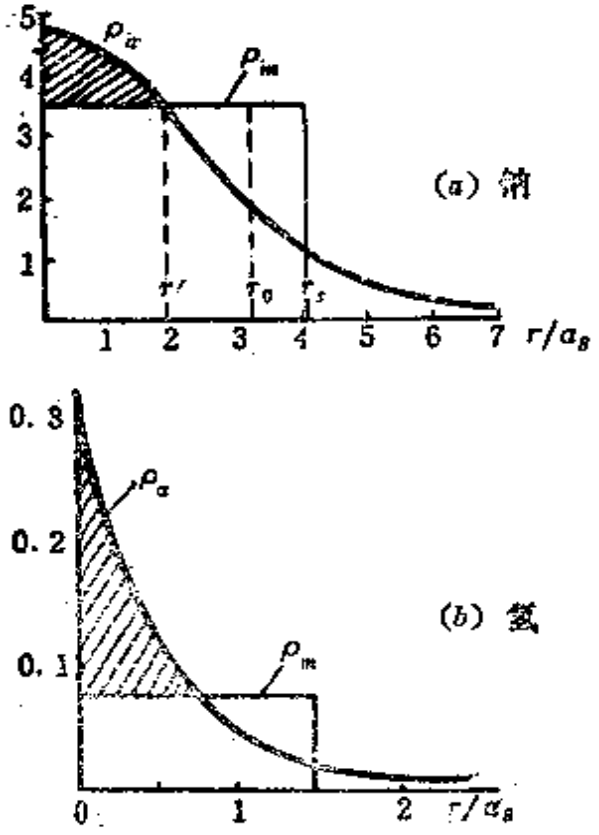


图 3-16 原子和金属电子云密度分布的对比

在周期表上，氢常被列在碱金属一族. 它们的共同特点是最外层有一个 s 电子. 为什么在常压下氢不能凝聚成金属？我们知道，即使在极低温下，氢气凝成的固态也是分子晶体(即由 H_2 分子之间很弱的力结合成的晶体)，而不是金属. 与碱金属的区别就在于氢原子中没有内层电子与核形成有一定半径 r_0 的原子实，这使得(i)原子中电子云密度 ρ_a 在 $r=0$ 附近有更高的峰值(见图 3-16*b*)；(ii)将阴影区向外推移时，势能要增高. 相对来说，氢原子中 $r>r_s$ 的尾区密度小得多，把这部分电子云移进 $r=r_s$ 球内引

① 对有的金属(例如铜)，能带结构使电子的有效质量 $m_e^*>m_e$，动能也会下降.

起势能降低的效应比较弱.类似上面的计算表明,对于金属氢,$r_s=1.47a_B$, $E=E_V+E_K$ 的极小值为 -1.02Ry，这比氢原子的能量 -1Ry 稍低,即金属氢的结合能为 0.02 Ry. 本节开头已指出,氢分子的结合能是 0.33 Ry,或者说每个原子 0.165 Ry,此数值远大于金属氢. 所以金属氢是极不稳定的，其中原子很容易结合成氢分子.

最后,我们拿金属键和共价键作个数量级的比较. 如前所述,金属钠的结合能是 1.11 eV，这相当于 26 kcal/mol，比共价键弱得多. 不过钠是很软的，这数值在金属中不算典型. 铜的结合能为 3.5 eV，折合成 80.5 kcal/mol，这就和强共价键属同一量级了.

5. 范德瓦耳斯键与氢键

上面讨论的都是分子内部把原子结合在一起的化学键，其实分子和分子之间还存在着较弱的吸引力. 在气体状态下这种力使实际气体的行为偏离理想气体状态方程，在凝聚态下它把分子键合在一起. 分子间的这种作用力统称范德瓦耳斯 (Van der Waals)力. 范德瓦耳斯力有以下几个主要来源:

(*a*) 静电力(Keesom 力)

这是极性分子固有电偶极矩之间的相互作用力，对强极性分子组成的物质(如水)来说,这是分子间相互作用中的最大部分:

(*b*) 诱导力(Debye 力)

在两个极性分子之间除固有电矩间的 Keesom 力之外，每个分子还会在对方电场的感应下产生诱导电矩. 由于诱导电矩而产生的附加作用称诱导力或 Debye 力

(*c*) 色散力(London 力)

这是无极分子的振荡产生瞬时电矩之间的相互作用力. 因为它与振荡频率有关，故曰"色散". 这是无极分子或弱极性分子之

间的主要相互作用.

表 3-7 给出一些分子之间范德瓦耳斯力各成分的能量，其中 ε_K、ε_D、ε_L 分别代表由 Keesom 力、Debye 力和 London力所贡献的结合能，

$$\varepsilon_B = \varepsilon_K + \varepsilon_D + \varepsilon_L \tag{3.43}$$

代表范德瓦耳斯键的总结合能.

从表 3-7 可见，范德瓦耳斯键的数量级在 1—10 kcal/mol 之

表 3-7 范德瓦耳斯键结合能(kcal/mol)

分子	偶极矩 (D)*	ε_K	ε_D	ε_L	ε_B
Ar	0	0.000	0.000	2.03	2.03
CO	0.12	0.0007	0.002	2.09	2.09
HI	0.38	0.006	0.027	6.18	6.21
HBr	0.78	0.164	0.120	5.24	5.52
HCl	1.03	0.79	0.24	4.02	5.05
NH_3	1.50	3.13	0.37	3.57	7.07
H_2O	1.84	8.69	0.46	2.15	11.30

* 1D(德拜单位) $=10^{-18}$e. s. u.

表 3-8 范德瓦尔斯半径(Å)

原 子	半 径	原 子	半 径
H	1.2	F	1.35
C	1.72	Cl	1.80
N	1.5	Br	1.95
P	1.9	I	2.15
As	2.0	He	1.40
Sb	2.2	Ne	1.54
O	1.4	Ar	1.92
S	1.85	Kr	1.98
Se	2.00	Xe	2.18
Te	2.20	CH_3	2.0

间，它比共价键、离子键和金属键弱得多．范德瓦耳斯键没有方向性和饱和性，它能把分子结合在一起，成为分子晶体．在由同类原子组成的分子晶体（如 Cl_2 晶体）中，两个相邻分子内的原子间距之半，称为该类原子的范德瓦耳斯半径，表 3-8 给出若干原子的范德瓦耳斯半径．可以看出，其数量级为 1—2 Å．

本节上文谈到水分子时，已提到过氢键，这是一种由氢原子参与的特殊类型的化学键．氢键可用化学式 X—H…Y 来表示，其中 X 和 Y 都是电负性较强的原子（例如在水分子通过氢键结成冰时，X 和 Y 都是 O 原子）．当 H 原子以共价键和 X 结合时，由于 X 的电负性高，把部分电子云吸引过去，使 H 原子带一定的正电荷．Y 是具有孤对电子的原子，它和 H 原子之间存在静电吸引力和部分共价键力，X—H…Y 间的这种形式的作用力，即为氢键力．

如果问什么是氢键的本质？可以说，X—H 基本上是共价键，而 H…Y 则是一种强力的有方向性的范德瓦耳斯力．不过在形成氢键 X—H…Y 之后，X—H 的键长拉长，H…Y 的距离比 H 和 Y 的范德瓦耳斯半径之和缩短，X 到 Y 的总距离还是缩短了．例如水汽分子中的 O—H 键长 0.96 Å，在冰里伸至 0.97 Å；H 和 O 的范德瓦耳斯半径分别是 1.2 Å 和 1.4 Å，加起来是 2.6 Å，而冰内 H…O 键长是 1.76 Å．

氢键有强弱之分，上述键长的变化越显著，氢键越强．强氢键出现在酸或酸式盐中电负性强的原子之间．最强的氢键 F—H—F 可达到两边对称的程度，总键长 2.26 Å，键能 36 kcal/mol，中等氢键 X—H 键长拉长不多，键能大约在 5～7 kcal/mol 之间．冰里的氢键属中等，键能约 5 kcal/mol．弱氢键出现在碱或碱式盐中，键能只有 1 kcal/mol 上下．

常压下，水冷至 0°C 以下即结晶成六方晶系的冰，在这种体系

里，H_2O 分子是以氢键联接而成图 3-17 所示很空旷的结构(图中虚线表示氢键)，故冰的密度较小(约 $0.9\,g/cm^3$)．当温度升高冰熔化时，其空旷的氢键体系瓦解，成为堆积密度较大的水；另一方面，热膨胀又使水的密度下降．所以在略高于熔点的温区内，两种相反的因素影响着水的密度，导致水在 4°C 时具有最大的密度．

冰熔化时，只有一小部分(约 15%)氢键断裂；在 20°C 下，水里的氢键大约还保留了一半；即使在沸点附近，液态水中的氢键依然有相当数量．随着温度升高，水中氢键逐渐断裂，需要吸收热量，所以水的比热很高．此外，氢键的存在还多方面地影响着水的物理性质，如粘性和表面张力都较大．若加表面活性剂(如肥皂，洗涤剂)破坏表面层的氢键，就可降低表面张力，例如肥皂液的表面张力大约只有纯水的 1/3．

为什么肥皂膜特别稳定？这要从肥皂分子说起．肥皂是硬脂酸钠，在水溶液中分解为正负离子 Na^+ 和 $C_{17}H_{35}COO^-$，其中 COO^- 是亲水的羧基头，$C_{17}H_{35}$ 链是疏水(亲油)的碳氢尾，这种“两亲离子”(amphipathicion) 趋向于按图 3-18 所示的形式排列在水的表面．如果肥皂膜受到扰动，则表面扩张的地方两亲离子的

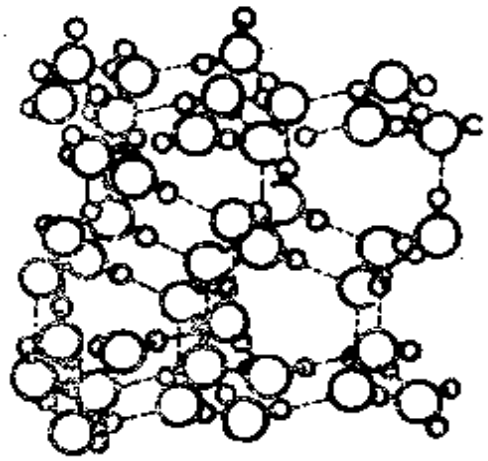


图 3-17　冰的氢键体系
(大圈代表氧，小圈代表氢，虚线代表氢键)

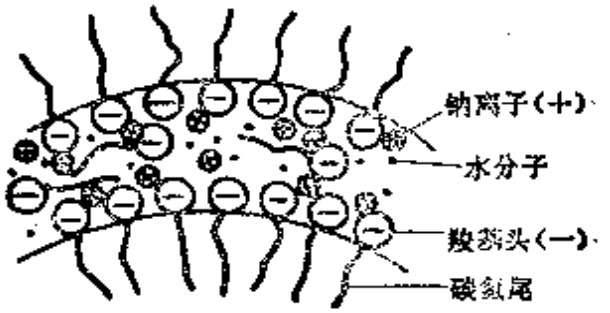


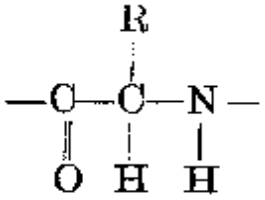
图 3-18　肥皂膜的结构

面密度减小，使表面的性能更象纯水，即表面张力增加；表面收缩的地方情况相反，表面张力减少．这就产生了一种恢复力，使受扰表面恢复平衡．这种效应称为 Marangoni 效应．

水分子既可为生成氢键提供H，又能有孤对电子接受H，所以凡能为生成氢键提供 H 与接受 H者，如 ROH，ROOOH，Cl_3CH，$R_2C=O$，$RCONH_2$ 等化合物（R 为某基团），均可通过氢键和水结合，在水中有较大的溶解度，使水成为应用最广的极性溶剂．汽油、煤油等是典型的非极性溶剂，分子间靠范德瓦耳斯力结合，不能和水生成氢键，故基本上不溶于水．

氢键的键长、键角和方向性等各方面都比较灵活；此外它的键能不大，形成和破坏也比较容易，许多迹象表明，它在生命过程中起着重要作用．下面举两个例子．

蛋白质是由肽键相联的氨基酸链，它的每一节具有如下形式：



其中 R 可以是 20 种不同的基团之一．但是长链并非一字排开，而是具有空间结构．生物体内蛋白质分子的天然结构皆呈螺

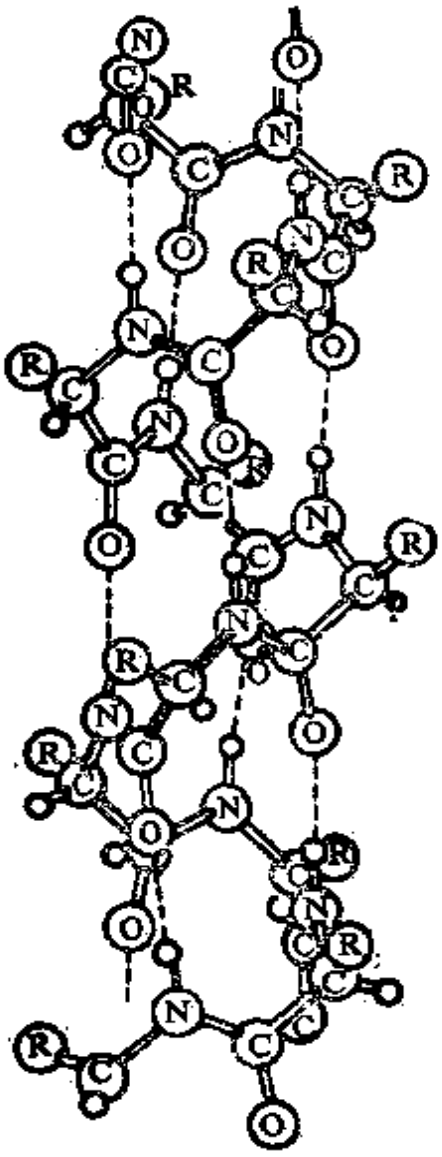
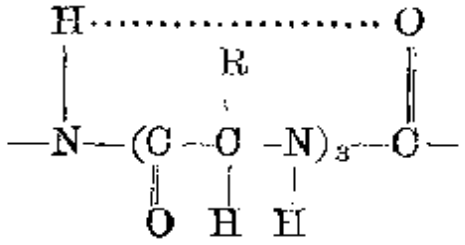


图 3-19　蛋白质分子的右旋 α 螺旋体结构
（小圆代表 H，虚线为氢键）

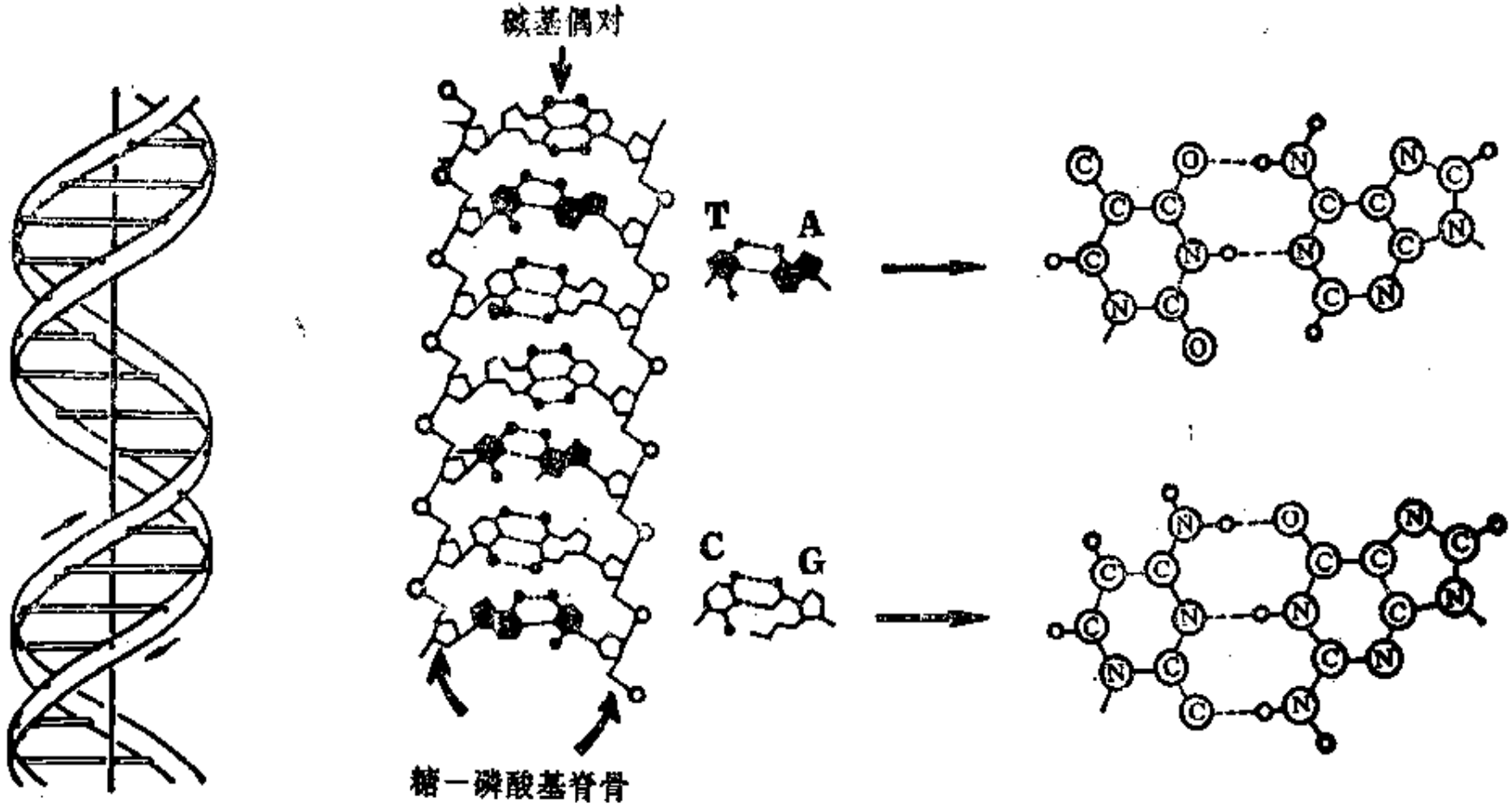
旋状，这种螺旋结构是由氢键来维系的，它们把某一节内的亚胺基 NH 和另一节内的羰基 CO 联接起来(见图 3-19)．鲍林(Pauling)等人 1951 年发现了一种 α 螺旋体结构，它每一循环的结构是

氢键



其中包含 3.6 节氨基酸．这一模型很快为 X 射线衍射图样所证实．后来理论计算也表明，这是唯一没有应变能的结构．鲍林为此获 1954 年诺贝尔化学奖．蛋白质分子的活性与这种天然的螺旋结构有密切关系．一旦遭到高温或酸碱的侵袭而将天然的氢键破坏，蛋白质就发生变性(denaturation)．一般说来，这种过程是不可逆的．

另一个与氢键有关的例子也是获诺贝尔奖金的项目——J. Watson 和 F. Crick 于 1953 年发现的 DNA 双螺旋结构．在我们地球上几乎一切生命体中遗传信息全都编码在 DNA 分子中．DNA 分子由两条糖和磷酸基组成的链为脊骨，盘旋成双股螺旋结构(图 3-20a)．每根链条上排列着仅由四种核苷酸碱基组成的密码，这四种碱基是腺嘌呤(A)，鸟嘌呤(G)，胸腺嘧啶(T)和胞嘧啶(C)．四种碱基的化学结构见图 3-20 c，只有一条链上的 A 可以和另一条链上的 T 通过两条氢链互连，以及一条链上的 C 可以和另一条链上的 G 通过三条氢键互连．所以两条链上的密码是严格互补的(见图 3-20b)．通过氢键连接起来的碱基偶对，构成图 3-20(a)中双螺旋扶梯上的“横档”．这些氢键在 DNA 复制和转录的过程中断开，使两股链条分离，形成一对互补的模板，各自产生下一代的互补双螺旋链．



(a) Watson 和 Orick 原始的双螺旋结构图解　(b) 互补的核苷酸碱基通过氢键(虚线)连接　(c) 四种核苷酸碱基 T、A、C、G 的化学结构

图 3-20　DNA 的双螺旋结构

6. 分子的振动、转动和电子能级

在结束本节之前，简单谈一下有关分子层次的另一方面问题，即分子的振动能级、转动能级与电子能级数量级的比较.

从光谱上看，振动能级间的跃迁在红外波段，转动能级间的跃迁在远红外和微波波段，而电子跃迁在可见光波段. 从下面的例题可以看出，这样大的数量级差别，是电子和原子质量的巨大差别造成的.

例题 11 估计由两个相同原子结合成的双原子分子的电子能级、振动能级和转动能级之间的比例关系①

解 以 M 和 m_e 分别代表原子和电子的质量，r_0 代表键长，E_e、E_v、E_l 分别代表电子能级、振动能级和转动能级.

分子中的电子能级与原子中的电子能级数量级应相同，可估计为

$$E_e\sim e^2/a_B(a_B=\hbar^2/m_ee^2 \text{ 为玻尔半径})。$$

振动能级可写为

$$E_v\sim nh\nu\sim n\hbar\omega,\qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

ω 为分子振动的角频率. 在平衡距离 r_0 附近两原子间的有效势能表现成弹性振子的形式

$$U(r)=U(r_0)+k(r-r_0)^2/2, \tag{3.44}$$

其中 $\omega^2=k/\mu$，$\mu=M/2$ 为约化质量. 当振幅 $|r-r_0|$ 达到 r_0 的数量级时，分子将离解，而分子的结合能与电子能级 E_e 同量级，于是

$$kr_0^2\sim E_e,\ \text{或}\ k\sim E_e/r_0^2\sim E/a_B^2,$$

故

$$E_v^2\sim\hbar^2\omega^2\sim\frac{\hbar^2k}{\mu}\sim\frac{\hbar^2E_e}{Ma_B}\sim\frac{m_eE_ec^2}{Ma_B}\sim\frac{m_e}{M}E_e^2,$$

即

$$E_v\sim\sqrt{m_e/M}\,E_e. \tag{3.45}$$

转动能级由下式决定

$$E_l\sim l(l+1)\hbar^2/2I\sim\hbar^2/2I,\ (l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

式中 $I=\mu r_0^2=Mr_0^2/2$ 为分子的转动惯量. 故

$$E_l\sim\frac{\hbar^2}{\mu r_0^2}\sim\frac{\hbar^2}{Ma_B^2}=\frac{m_ec^2}{Ma_B}\sim\frac{m_e}{M}E_e. \tag{3.46}$$

① 钱伯初，量子力学基本原理和计算方法，甘肃人民出版社 1984.

综合(3.45)、(3.46)两式，得到如下比例关系：

$$E_e:E_v:E_l=1:\sqrt{m_e/M}:m_e/M. \tag{3.47}$$

除了特别轻的元素外，一般$(m_e/M)\sim10^{-4}$. 因$E_e\sim10\,\mathrm{eV}$，从而$E_v\sim0.1\,\mathrm{eV}$，$E_l\sim10^{-3}$—$10^{-4}\,\mathrm{eV}$. 现给出O_2分子的实验数据作为参考：

离解能$=5.08\,\mathrm{eV}$，$r_0=1.2074\,\text{Å}$，

$\hbar\omega=0.1959\,\mathrm{eV}$，$\hbar^2/2I=1.7923\times10^{-4}\,\mathrm{eV}$.

例题 12　试估计氢分子转动能级和振动能级的"解冻"温度.

解　$$E_e\sim\frac{e^2}{a_B}=\frac{14.4\,\mathrm{eV}\cdot\text{Å}}{0.5\text{Å}}\sim30\mathrm{eV}\sim3\times10^4\mathrm{K}.$$

对于氢原子

$$m_e/M=m_e/m_p=1/1840\sim5\times10^{-4},$$
$$\sqrt{m_e/M}\sim1/43\sim2\times10^{-2},$$

即转动能级的解冻温度为

$$E_l\sim E_em_e/M\sim150\,\mathrm{K},$$

振动能级的解冻温度为

$$E_v\sim\sqrt{m_e/M}\,E_e\sim6000\,\mathrm{K}.$$

§5. 物　　性

本节将讨论物质的一些宏观属性的数量级. 如果只要求知道大概的数量级，从微观模型来估算并不太困难. 但要说明不同物质间的具体差别，给出一、二位有效数字，就不那么容易了. 然而我们常常可以找到同一物质不同属性之间的联系，如汽化热与沸点的关系、熔解热与熔点的关系，以及它们与表面张力的关系，等等. 这类关系有的可用某些粗略的理论模型来解释，有的也可以是纯经验性的. 不管怎样，这对我们记忆和估算物性常数总是有帮助的.

1. 固体和液体的密度与原子间隔

设μ为摩尔质量. N_A为阿伏伽德罗数，d为原子的平均间距，则d^3为平均每个原子占有的体积，密度ρ将由下式决定

$$\rho=\frac{\mu}{d^3N_A}. \tag{3.48}$$

d 的数量级是可以估计的. 原子的尺度是玻尔半径 $a_B\simeq0.5$ Å 的量级，较重的原子半径 a 比 a_B 大几倍. 此外，d 还与键长、晶体结构等因素有关，并不简单地等于 $2a$，可能要比这略大. 故 d 的数量级应为 $2a_B$ 的若干倍，具体的倍数就不容易估计了. 下面我们借助密度的实验数据来估计 d. 对于常温下为固体或液体的物质，$\mu\simeq10$—200，而密度 $\rho\simeq0.5$—$20\,\mathrm{g/cm^3}$. 据此以及用式(3.48)来估计，大体上取 d 的数值在 5—$10a_B$，即 2.5—5 Å 是合适的. 实际上最轻的元素锂(Li)的摩尔质量 $\mu\simeq7$，密度 $\rho=0.53\,\mathrm{g/cm^3}$，这相当于 $d\simeq2.8$ Å，密度最大的元素是铼(Re)、锇(Os)、铱(Ir)、铂(Pt)等金属，ρ 分别为 20.5, 22.5, 22.4, $21.4\,\mathrm{g/cm^3}$，相应的 d 在 2.4—2.5 Å 之间，d 大的是较重的碱金属，铷(Rb)和铯(Cs)的密度 ρ 分别为 1.53 和 $1.87\,\mathrm{g/cm^3}$，相应的 d 分别为 4.5 和 4.9 Å.

2. 固体的弹性模量与液体的压缩性

为简单起见，只考虑各向同性固体介质. 我们先回顾一下几个重要的弹性模量及其相互间的关系. 一个是体弹性模量 K（应力与体应变之比），另外有杨氏模量 Y（应力与线应变之比）和剪变模量 G（剪应力与剪应变之比，又称"刚性系数"）. 它们之间的关系需通过泊松比 σ（棒的横向收缩与纵向伸长之比）表示出来

$$Y=3K(1-2\sigma), \tag{3.49}$$

$$G=\frac{3K(1-2\sigma)}{2(1+\sigma)}=\frac{Y}{2(1+\sigma)}. \tag{3.50}$$

对于多数金属 $\sigma\simeq0.3$ 左右，一般 σ 在 0.2—0.4 之间，所以 K、Y、G 三个模量是同数量级的. 表 3-9 给出一些固体弹性模量的数值. 从表中可以看出，不同物质弹性模量的数量级差别不大. 拿 K 来

表 3-9　固体的弹性模量(单位：N/m^2)①

固体	K	Y	G	σ
铝	7.8×10^{10}	6.8×10^{10}	2.5×10^{10}	0.355
黄铜	13.9×10^{10}	10.5×10^{10}	3.8×10^{10}	0.374
铜	16.1×10^{10}	12.6×10^{10}	4.6×10^{10}	0.37
金	16.9×10^{10}	8.1×10^{10}	2.85×10^{10}	0.42
电解铁	16.7×10^{10}	21×10^{10}	8.2×10^{10}	0.29
铅	3.6×10^{10}	1.51×10^{10}	0.54×10^{10}	0.43
镁	3.6×10^{10}	4.23×10^{10}	1.62×10^{10}	0.306
铂	14.2×10^{10}	16.8×10^{10}	6.4×10^{10}	0.303
银	10.4×10^{10}	7.5×10^{10}	2.7×10^{10}	0.38
不锈钢	16.4×10^{10}	19.7×10^{10}	7.57×10^{10}	0.30
熔凝石英	3.7×10^{10}	7.3×10^{10}	3.12×10^{10}	0.17
聚苯乙烯	0.41×10^{10}	0.36×10^{10}	0.133×10^{10}	0.353

表 3-10　液体的压缩系数 $\varkappa$(单位 m^2/N)

液　体	$\varkappa$
酒精(C_2H_5OH)	111×10^{-11}
三氯甲烷($CHCl_3$)	101×10^{-11}
水(H_2O)	45×10^{-11}
甘油($CH_2OH\cdot CHOH\cdot CH_2OH$)	21×10^{-11}
汞(Hg)	3.7×10^{-11}

① Y、G、σ 值取自饭田修一等，物理学常用数表(第二版)，科学出版社 1987，3.1.22．K 值由式(3.49)算出．

② 除汞的数据外，皆取自饭田修一等，物理学常用数表(第二版)，科学出版社 1987，3.2.1.2．

说，数值范围大体在 10^{10}—$10^{11}N/m^2$ 之间．其实这情况不仅适用于固体，对液体也差不多．不过对于液体通常不说"体弹性模量"，而用它的倒数 $\varkappa=K^{-1}$，称作"压缩系数"，其数量级在 10^{-11}—10^{-10} m^2/N 之间或稍大(见表 3-10)．数量级如此整齐，个中有什么道理？

原来在我们居住的这个星球上，物质大都是由原子、分子组成

的，决定原子"大小"的是其中的电子云．由于电子是费米子，它们服从泡利不相容原理．在固体或液体中，正常状态下相邻原子的电子云已有接触和部分重叠．当固体或液体受到挤压时，它们抗压缩的力主要来自电子云的简并压强．在§4.中讨论金属键时，我们曾给过电子气动能的公式．若电子气的数密度为 $N/V=d^{-3}$，则整个电子气的总动能为

$$E=NE_K=\zeta\frac{\hbar^2N}{m_e^*d^2}=\zeta\frac{\hbar^2N}{m_e^*}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}. \tag{3.51}$$

这里 $\zeta=3(3\pi^2)^{2/3}/10=2.87$ 是个数量级为 1 的系数，m_e^* 是电子的有效质量．电子气的简并压强为

$$p=-\frac{\partial E}{\partial V}=\frac{2\zeta}{3}\frac{\hbar^2}{m_e^*}\left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}. \tag{3.52}$$

即 $V\propto p^{3/5}$，从而

$$\frac{\partial V}{\partial p}\propto\frac{3}{5}p^{-2/5},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}=\frac{3}{5}p^{-2/5}\cdot p^{-3/5}=\frac{3}{5}p^{-1}.$$

按定义，体弹性模量为

$$K=-\left[\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T\right]^{-1}=\frac{5}{3}p=\frac{10}{9}\zeta\frac{\hbar^2}{m_e^*}\left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}$$
$$=\zeta'\frac{\hbar^2}{m_e^*d^5}, \tag{3.53}$$

式中 $\zeta'=10\zeta/9=(3\pi^2)^{2/3}/3\simeq3.2$．取 $d\simeq2.5$—5 Å，$m_e^*\simeq1.5\,m_e$（对于铜，$m_e^*=1.47\,m_e$；对于铝，$m_e^*=1.61\,m_e$），得 $K\simeq10^{10}$—10^{11} N/m^2，这正是表 3-9 和 3-10 给出的数量级．如果用大气压表示，这相当于 10^5—10^6 大气压．在我们的星球上，只有地心附近才有这样大的压强（参见第四章§1）．

3．熔解与汽化

从量纲上可以看出，相变的摩尔潜热 A 与相变温度 T 之间应

表 3-11　熔点与摩尔熔解热、沸点与摩尔汽化热的关系①

物质	Λ_m(kcal/mol)	T_m(K)	f_m	物　质	Λ_v(kcal/mol)	T_v(K)	f_v
Ag	2.70	1235.08	1.1	Ag	59.90	2436	12.4
Al	2.58	933.52	1.4	Al	70.13	2793	12.6
Au	2.955	1337.58	1.1	Au	80.88	3081	13.2
Cd	1.48	594.258	1.3	Bi	32.6	1810	9.0
Co	3.87	1767	1.1	Br_2	7.06	332.35	10.7
Cr	4.047	2130	0.96	Cl_2	4.878	239.05	10.3
Cu	3.14	1357.6	1.2	Cu	71.77	2839	12.7
Fe	3.30	1809	0.92	Fe	83.55	3135	13.4
Ge	8.83	1210.4	3.7	H	0.219	20.397	5.4
Hg	0.548	234.288	1.2	He	0.020	4.216	2.4
In	0.78	429.784	0.91	Hg	14.172	629.81	11.3
Ir	6.3	2720	1.2	Mg	30.45	1363	11.2
K	0.562	336.4	0.84	N_2	1.335	77.348	8.7
Mg	2.140	922	1.2	O_2	1.630	90.180	9.0
Mn	2.88	1517	0.96	CCl_4	7.17	349.9	10.3
N	0.172	63.15	1.4	CS_2	6.290	319.37	10.7
Na	0.622	370.98	0.84	CH_3COOH	5.35	391.4	6.9
Nb	6.30	2740	1.2	CH_3OH	8.430	337.9	12.6
Nd	1.71	1289	0.67	C_2H_5OH	9.23	351.7	13.2
Ni	4.31	1728	1.2	CH_4	1.955	111.67	8.8
O_2	0.106	54.363	0.98	C_2H_6	3.518	184.53	9.5
Pb	1.147	600.652	0.96	C_3H_8	4.486	231.09	9.7
Si	21.1	1685	6.3	C_4H_{10}	5.088	272.7	9.3
W	8.46	3660	1.2	C_2H_4	3.236	169.45	9.5
CS_2	1.05	161.2	3.3	$(C_2H_5)_2O$	6.33	308.0	10.3
H_2O	1.4364	273.16	2.6	H_2O	9.717	373.1	13.0
SiO_2	2.04	1883	0.55	NH_3	5.581	239.78	11.7

① 饭田修一等，物理学常用数表(第二版)，科学出版社 1987.6.1.

有如下关系

$$\Lambda \propto RT, \text{或 } \Lambda/RT = f,$$

这里 R 是气体常数，f 是一个因物质而异的无量纲纯数．表 3-11 给出许多物质的摩尔熔解热 Λ_m，熔点 T_m，摩尔汽化热 Λ_v，沸点

T_v，以及相应的无量纲数

$$f_m=\Lambda_m/RT_m \text{ 和 } f_v=\Lambda_v/RT_v \tag{3.54}$$

可以看出，对于大多数物质，不仅 f_m 和 f_v 的数量级分别相同，数值也相近．粗略地说，可以认为 $f_m\sim1$，$f_v\sim10$，或者说

$$\begin{cases}\text{摩尔熔解熵 } S_m=\Lambda_m/T_m=f_mR\sim R, & (3.55)\\ \text{摩尔汽化熵 } S_v=\Lambda_v/T_v=f_vR\sim10R. & (3.56)\end{cases}$$

这些基本上都是经验规律．(3.55)叫做 Richard 定律，(3.56)叫做 Trouton 定则．f_v 比 f_m 大一个数量级，是因为液体汽化时，体积将膨胀三个数量级，这一过程中要对外作大量的功，然而，固体和液体的密度却是相近的．

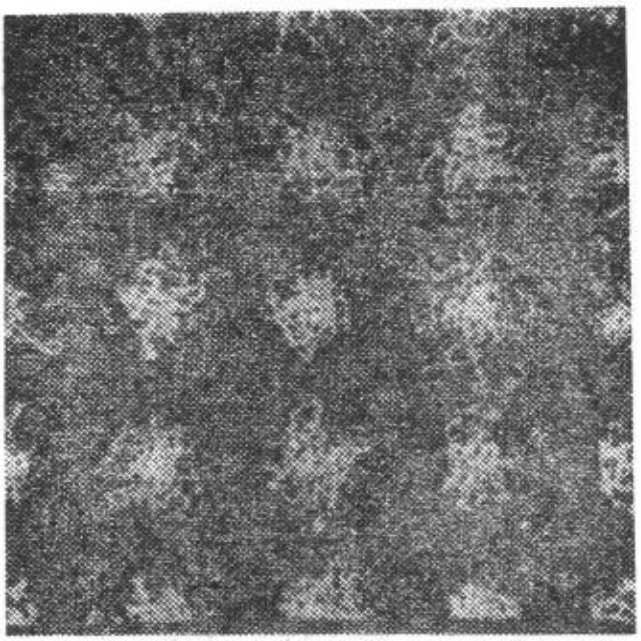
作这样一个计算是有趣的：让 1 摩尔的理想气体的体积从 V_1 膨胀到 V_2，看它的熵变化多少？理想气体等温膨胀的摩尔熵变公式是大家熟悉的：

$$\Delta S=R\ln(V_2/V_1). \tag{3.57}$$

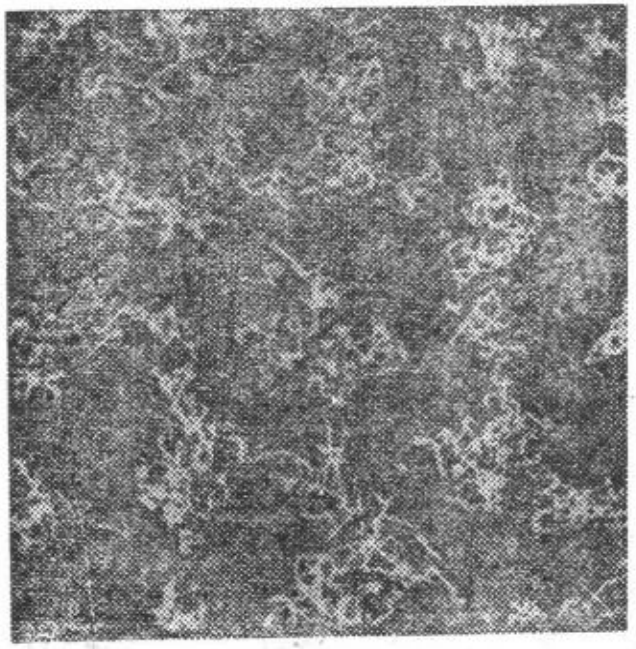
如果硬把这个公式用于汽化过程，令 $V_2=V_g$，$V_1=V_l$，(V_g 和 V_l 分别是气体和液体的摩尔体积)，设 $V_g/V_l\sim10^8$，则得 $\Delta S=\Lambda_v/T_v=6.9R$，即 $f_v=6.9$．这数值比 10 小了一些．当然，在汽化过程中援用理想气体模型，本来就不合理．不过我愿在此指出，只需对 $V_1=V_l$ 加以重新解释，上式还是可以用于相变过程的．为了说明这一点，我们先对凝聚态中原子或分子的热运动情况稍加分析．

我们对气体和固体中原子或分子①的热运动情况比较熟悉．在气体中分子是可以在整个体积内自由迁徙的，只不过它们不时地彼此碰撞，改变着自己的运动方向．在固体(晶体)中每个原子局限在固定位置附近作小振动，其振幅 δ_a 随温度 T 而增长．然而，即使当 $T\to T_m$ 固体趋于熔化时，δ_a 也比原子间距 d 要小很

① 下文为了说话方便，我们把固体和液体中的微观单元统称原子，在气体中统称分子。



(*a*) 固态



(*b*) 接近熔点的液态

图 3-21　计算机模拟的原子运动轨迹

多：① $(\delta_s)_{T=T_m}\sim d/6$. 图 3-21(*a*)是用计算机模拟的晶体中原子的

① 设晶格振动的频率为 ω_E(爱因斯坦模型)，原子的质量为 m，则振动的能量(动能＋势能)为 $m\omega_E^2\delta_S^2=kT$，或 $\delta_S=\sqrt{kT/m\omega_E^2}$. 用已知的 ω_E 的数据去估算，对许多物质，$(d/\delta_s)_{T=T_m}$ 的数值在 4.4—7.2 之间，平均值约为 6，故可认为

$$(\delta_S)_{T=T_m}\sim d/6.$$

轨迹，它们是以每个格点为中心的复杂李萨如图形.

液体的情况我们了解得较少. 大体说来，当 $T\to T_m$ 时，原子振动中的非谐成分越来越大，晶格结构由松弛而趋于瓦解. 个别原子不再围绕一个固定位置振动. 在迁徙过程中，它们不总是回到原处. 计算机模拟出来的图 3-21(b) 就是这种情况的写照. 在液体中我们仍可给各原子的活动范围定义一个平均线度 δ_l. 即使在同一温度 T_m 下，δ_l 也要比 δ_s 大些. 但这并不意味着液体的密度比固体有显著的减小. 实际上液体里的原子仍旧被周围的原子牢牢地约束着，它们迁徙时不得不"连推带挤"地排开其它原子，为自身开道. 所以 δ_l 虽比 δ_s 大，但仍比 d 小得多.

气体的摩尔体积为 $V_g=RT/p$(p——压强)，我们可以认为 $v_g=V_g/N_A$(N_A——阿伏伽德罗数) 是每个气体分子享有的体积，它实际上就是分子数密度 n 的倒数：$v_g=n^{-1}$. 在固体和液体中我们不把相应的 v_s 和 v_l 与密度联系起来，而是把它们定义为

$$v_s=\delta_s^3,\ v_l=\delta_l^3, \tag{3.58}$$

并令 $V_s=N_Av_s$，$V_l=N_Av_l$，在相变点上统计力学能为我们提供下列式式①

$$\begin{cases} \text{气液相变：}(V_g/V_l)_{T=T_v}=\exp(\Lambda_v/RT_v), \\ \quad \text{或}(v_g/v_l)_{T=T_v}=\exp(\lambda_v/kT_v), \end{cases} \tag{3.59}$$

$$\begin{cases} \text{固液相变：}(V_l/V_s)_{T=T_m}=\exp(\Lambda_m/RT_m), \\ \quad \text{或}\ (v_l/v_s)_{T=T_m}=\exp(\lambda_m/kT_m). \end{cases} \tag{3.60}$$

式中 $\lambda_v=\Lambda_v/N_A$，$\lambda_m=\Lambda_m/N_A$. 这两个公式酷似(3.54)，但含义略有不同. 在(3.60)中若取 $\Lambda_m/RT_m=f_m\sim 1$，则得 $(V_l/V_s)_{T=T_m}=2.7$，于是

$$(\delta_l/\delta_s)_{T=T_m}=(2.7)^{1/3}=1.4.$$

这正是上文所说的，即使在温度同为 T_m 时，δ_l 也比 δ_s 大. 若

① 参见 H. Bernstein & V. Weisskopf. *Am. J. Phys.* 55 (11), 974 (1987), *Appendix.*

再注意到$(\delta_s)_{T=T_m}\sim d/6$，则知$(\delta_l)_{T=T_m}\sim d/4$，即$\delta_l$仍比$d$小得多．在(3.59)中取$\Lambda_v/RT_v=f_v\sim 10$，则得$(V_g/V_l)_{T=T_v}=2.2\times 10^4$．设汽化时体积膨胀$10^3$倍，即$(V_g/d^3)_{T=T_v}=10^3$，则有$(V_l/d^3)_{T=T_v}=1/22$和$(\delta_l)_{T=T_v}=d/2.8$，即汽化时$\delta_l$仍比原子间距$d$为小．

下面看看，物质的相变潜热与凝聚态结合能的关系．所谓结合能，是把凝聚态物质中所有原子或分子都分开所需的能量．按能量守恒定律，对于温度为T时固体的结合能$\varepsilon_B(T)$，显然有下列公式

$$\varepsilon_B(T)=\Lambda_v+\Lambda_m+\int_T^{T_v}(C_{液}-C_{汽})\mathrm{d}T. \tag{3.61}$$

式中$C_{液}$和$C_{汽}$分别是该物质在凝聚态和汽态时的摩尔热容．式(3.61)右端的物理意义是清楚的，它是下列过程中的全部净热交换：先使物质从T升温，经两次相变成为温度为T_v的蒸汽，然后使蒸汽过冷地冷却到原来的温度T．如果我们讨论的是液体，则上式中没有Λ_m项．

若固体服从杜隆-珀替定律，则摩尔热容为$3R$，液体的情况也差不多．考虑到常温下分子的振动自由度仍"冻结"着，故蒸汽的定压比热为$(5/2)R$(单原子分子)，$(7/2)R$(双原子分子)或$3R$(三个以上原子组成的非线型分子)．总之，我们可以说，摩尔热容的数量级为R．故上式最后一项的数量级不超过RT_v，它比Λ_v至少小一个数量级．又

$$\Lambda_m=\frac{f_m}{f_v}\cdot\frac{T_m}{T_v}\cdot\Lambda_v<\frac{\Lambda_v}{10},$$

即此项也至少比Λ_v小一个数量级．总之，在式(3.61)右端中，Λ_v占80～90%以上，粗略估算时，可以认为

$$\varepsilon_B\simeq\Lambda_v \tag{3.62}$$

据说，在国外某华裔中餐馆老阔想制作一块一米立方的豆腐

为广告，以招徕生意，但由于豆腐瘫软而始终未果．这是可以理解的，但坚硬岩石太高了也会瘫软，你相信吗？请看下面的例题．

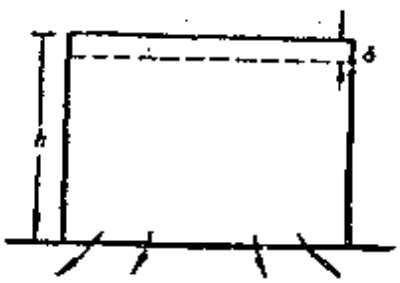


图 3-22　山高的上限

例题 13　估计一下地球上山高的极限．

解　假设山峰的高度主要受岩基的刚度所限制．若山太高，加在岩基上的压强过大，它将从弹性形变过渡到塑性形变，开始流动．计算这一过程所需能量时，不妨认为固态岩基先升温至熔点，熔化后又过冷地降到原有温度．设固态和过冷液态的比热差不多，于是升温和降温过程中与外界的能量交换大体相抵，唯一要计算的是熔解热．能量的来源是因山高下降所释放的重力势能．如图 3-22 所示，设山是上下同样粗的柱体，下降距离 δ 时势能减少 $A\delta\rho gh$（A 为山的横截面积，ρ 为其密度，g 是重力加速度）．与此同时，熔化的岩石吸热 $A\delta\rho\Lambda_m/\mu$（μ 为岩石的摩尔质量）．令两者相等，作为山高极限的条件，于是我们有 $A\delta\rho gh=A\delta\rho\Lambda_m/\mu$ 得

$$h=\frac{\Lambda_m}{\mu g}. \tag{3.63}$$

可以认为岩石的主要成份是 SiO_2，因此 $\mu=60\,g/mol$，由表 3-11 查得 SiO_2 的 $\Lambda_m=2.04\,kcal/mol=854\,J/mol$，代入上式，得山高的上限 $h=14.5\,km$

世界上最高的山峰珠穆朗玛峰高 8.84 km，确小于此限，但属同一数量级．古诗中常有山高“万仞”的说法，如：

“黄河远上白云间，一片孤城万仞山，

羌笛何须怨杨柳，春风不度玉门关．”

（唐王之涣《凉州词》）．“仞”是古代的长度单位，具体的大小其说不一，大约是几尺（4～8 尺），我们取其中，1 仞≃6 尺＝2 m，则万仞≃20 km，这数值显然是夸大了．凉州在现今的甘肃省武威县，凉州一带的山是祁连山，它的高度实际上只有海拔 4 km 左右．当然作诗不是大地测量，诗人的浪漫主义谁也不会去责怪．

例题 14　估计一下月球上山高的上限．

解　月球上的重力加速度为地球上的 1/6．在其它条件相似的情况下，月球上山高的上限大 6 倍，即 84 km．这不到月球半径 1738 km 的5%．

佛家言：天地从形成到毁灭，谓之一"劫"，或"劫簸"、"劫波"（梵文 kalpa 的音译）．为了解释这样一段时间有多长，"佛祖"做了多种比喻．佛典《大智度论》曰："佛以譬喻说劫义。四十里石山，有长寿人，百岁一来，以细软衣拂拭此大石尽，而劫未尽．又四十里大城满芥子．有长寿人，百岁一来取一芥子，芥子尽而劫尚不尽．"这便是"盘石劫"、"芥子劫"之说．我们不妨以"盘石劫"为据估算一下"佛祖"所说的一劫具有怎样的数量级．

40 里折合 20 km，如果以此为山高，数量偏大．按照前面的分析，取山高为 10 km 的数量级，还是合理的．假设此山方圆数百里，其底座面积为 $(10^2\,\mathrm{km})^2$，故体积为 $10^5\,\mathrm{km}^3\sim10^{20}\,\mathrm{cm}^3$．岩石 ($SiO_2$) 的平均密度小于 $3\,\mathrm{g/cm}^3$，平均摩尔质量 $\mu\sim60\,\mathrm{g/mol}$，从而石山内所含物质的摩尔数约为

$$n=3\,\mathrm{g/cm}^3\times10^{20}\,\mathrm{cm}^3/60\,\mathrm{g/mol}\sim5\times10^{18}\,\mathrm{mol},$$

现在来估算一下，那位长寿老人每次拂拭中磨损掉多少山石物质．假定衣料与山石间摩擦力为 0.1 N，位移 10 cm，因此作功 10^{-2} J．我们不妨认为山石比 J 软的衣料耐磨 1000 倍，即每次拂拭传递给山石的能量为 10^{-5} J．如 § 4 所述，典型的共价键化学结合能为 $100\,\mathrm{kcal/mol}\sim4.2\times10^5\,\mathrm{J/mol}$，即老人每次抹去 $10^{-5}\,\mathrm{J}/(4.2\times10^5\,\mathrm{J/mol})\sim2.3\times10^{-11}\,\mathrm{mol}$ 的山石物质．要把整座石山抹平，他需要来 $5\times10^{18}/2.3\times10^{-11}\sim2\times10^{29}$ 次．老人每百年来一次，共历时 2×10^{31} 年．这便是"佛祖"对宇宙寿命的预言．

这是个什么数字？第一章(51 页)提到，SU(5)大统一理论预言的质子蜕变寿命 τ_p 正合此数！若质子都蜕变掉了，原子核全部瓦解，现在形式的宇宙当然就此毁灭．难道这正是"佛祖"隐喻之所指？不过 IBM 公司协作组的实验已否定了上述结论，他们给出 τ_p 的下限是 1.7×10^{32} 年．这就对了！"佛祖"不是说"大石尽，而劫未尽"吗？

4. 液体的表面张力

用金属丝弯成如图 3-23 所示的框子，它下面的一边是可以滑动的．在框内形成肥皂膜后，将它竖起来，下坠一定的砝码，使其重量与液体的表面张力平衡．用这种办法可测出液体的表面张力来．

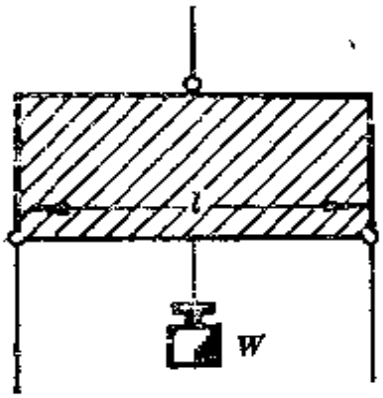


图 3-23　测定表面张力的实验装置

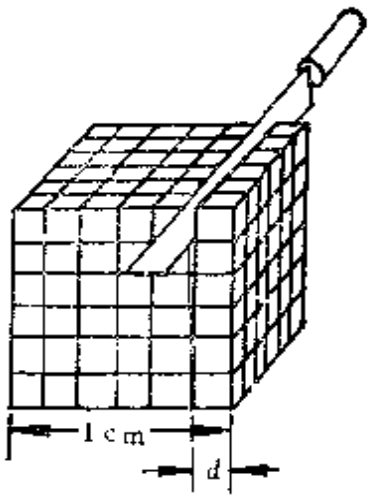


图 3-24　表面张力与结合能的关系

液体表面张力的大小，和边界线的长度 l 成正比，即

$$f=\gamma l. \tag{3.64}$$

γ 叫做"表面张力系数"．若图 3-23 所示的装置中砝码的重量为 W，则 $f=2\gamma l=W$，由此可得 $\gamma=W/2l$，这里有因子 2．是因为液膜有两个表面．

表面张力系数 γ 也可理解为增加单位表面积所需能量，所以它和液体单位体积内的结合能 $\bar{\varepsilon}_B$ 有一定联系．①

令液体中分子的平均间距为 d．我们设想将一块边长各 1 cm 的立方液体切割为边长为 d cm 的小立方体(参见图 3-24)，则平均说来每个小立方体内有一个分子．这样，我们就算把这 1 cm^3 的液体中的分子全部分开了．在此切割的过程中，每个方向

① 单位体积内的结合能 $\bar{\varepsilon}_B$ 与摩尔结合能 ε_B 之间的关系为

$$\bar{\varepsilon}_B=\varepsilon_B\rho/\mu(\rho\text{—密度}\quad\mu\text{—摩尔质量}). \tag{3.65}$$

上要切 $(d^{-1}-1)\simeq d^{-1}$ 刀．三个方向上共切 $3d^{-1}$ 刀．每切一刀增加两个面积为 1cm^2 的新表面，每增加 1cm^2 的表面需能量 γerg，故总共需能量 $3d^{-1}\cdot 2\gamma=6\gamma/d$．此项能量按定义应等于 $\bar{\varepsilon}_B$，于是

$$\bar{\varepsilon}_B=6\gamma/d,\text{或 }\gamma=\bar{\varepsilon}_B d/6. \tag{3.66}$$

表 3-12　液体的结合能与表面张力系数

液体	温度	$\bar{\varepsilon}_B$ (erg/cm³)	d (Å)	γ 或 dyn/cm (erg/cm²)	
				估算值	实验值
H_2O	20°C	24.5×10^9	3.2	139	73
CCl_4	20°C	3.1×10^9	5.4	28	27
Ne	−248°C	1.1×10^9	3.0	5.5	5.5
Ar	−188°C	2.7×10^9	3.4	15	13.2

这便是表面张力系数 γ 和结合能 $\bar{\varepsilon}_B$ 之间的关系．现在就用这公式来估算一下几种液体的表面张力（见表 3-12）．从表内所列数值可以看出，除了水之外，数据都符合得很好．水的计算值约大了一倍，这是由于水分子不对称，具有较大的电偶极矩，简单地作立方切割是不行的．

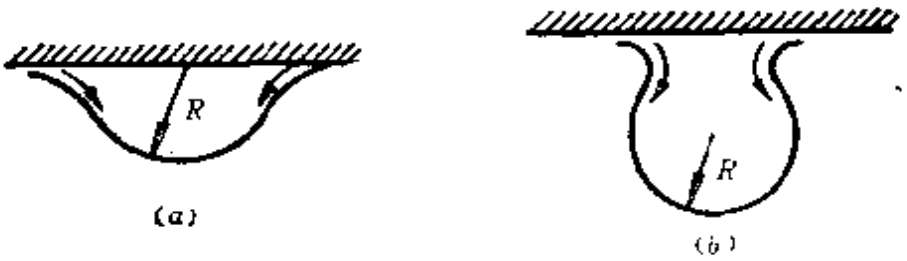
例题 15　估计从天花板上落下的水滴的大小．

解　我们采用图 3-25(a)所示的模型，认为水成半球形时，若重量大于表面张力，就会下滴．设此时半球的半径为 R，则

$$2\pi R\gamma=(2\pi/3)R^3\rho g,$$

即

$$R=\sqrt{3\gamma/\rho g}.$$



(a)　(b)

图 3-25　天花板上的水滴

而水滴落下来时形成的球形体积应与原来的半球体积相等：

$$(4\pi/3)r^3=(2\pi/3)R^3, \text{即 } r^3=R^3/2.$$

于是水滴半径为

$$r=\frac{1}{2^{1/3}}\left(\frac{3\gamma}{\rho g}\right)^{1/2}=1.37\sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}. \tag{3.67}$$

取 $\gamma=73\,\mathrm{dyn/cm}$，得 $\gamma=0.38\,\mathrm{cm}$，这个结果的数量级是对的，但数值稍微偏大．若换成图 3-25(*b*)的模型，认为略有细颈时才开始下滴，算得的 γ 值也许更符合实际．

如果你熟悉水滴半径的数量级，可将本例题倒过来，估算水的表面张力。

另一个与表面张力有关的问题是水面波的相速问题．对于长波，使液面展平的恢复力是重力；对于短波，则是表面张力．用量纲分析法不难得知，水面波的相速 v 与约化波长 λ 的关系：

$$\begin{cases}\text{长波：}v\propto\sqrt{g\lambda},\\ \text{短波：}v\propto\sqrt{\gamma/\rho\lambda}.\end{cases}$$

在一般情况下，重力和表面张力都起作用，理论上可证明，普遍公式应为

$$v=\sqrt{g\lambda+\gamma/\rho\lambda}. \tag{3.68}$$

可以看出，当 λ 由小变大时，起初 $v\propto\lambda^{-1/2}$，最后 $v\propto\lambda^{1/2}$．先减少后增加，中间经过一个极小值．不难从式(3.68)求出波速的这个极值 v_m 和对应的波长 λ_m 来：

$$v_m=\sqrt{2}\,(\gamma g/\rho)^{1/4},\quad \lambda_m=\sqrt{\gamma/\rho g}\,. \tag{3.69}$$

用 $\rho=1\,\mathrm{g/cm^3}$，$\gamma=73\,\mathrm{dyn/cm}$ 代入，得 $v_m=23\,\mathrm{cm/s}$，$\lambda_m=0.27\,\mathrm{cm}$．也许有人会注意到，这个 λ_m 和例题 15 中水滴的半径 r 是同数量级的．

激发水面波澜的能量从哪里来？这往往是风．当风速和水面波的相速 v 一致时，空气与水面的能量交换最为有效，这时风速决定了水面波速 v，从而决定了它的波长．当风速太小时(小于上述 v_m)，水面波便激发不起来．古诗云："风乍起，吹皱一池春

水”(冯延巳《谒金门》)，说明水波是风吹起来的；又云：“清风徐来，水波不兴”(苏轼《前赤壁赋》)，即风速太小了不行．虽说诗人墨客惯用夸张的笔法，他们观察自然现象还是够仔细的！

分子的间隔 d，数量级是 Å，即 10^{-10} m；山的最大高度 $h\sim10$ km—10^4 m；液滴的半径 r 是 mm 数量级的，即 10^{-3} m．大小相差如此悬殊，难道在这之间还有什么联系？简单的心算就可以告诉我们，从数量级上看，$r\sim\sqrt{hd}$．是巧合吗？恐怕不是．让我们来仔细考察一下．用式(3.67)，(3.66)，(3.65)可以作如下推演：

$$r^2\sim\frac{\gamma}{\rho g}=\frac{\bar{\varepsilon}_B d}{6\rho g}=\frac{\varepsilon_B d}{6\mu g}.$$

粗略地说，摩尔汽化热 Λ_v 与 ε_B 是差不多的．而对于岩浆，T_m 与 T_v 都为 10^3 K 的量级，故 $\Lambda_m\sim(f_m/f_v)\Lambda_v\sim\Lambda_v/10\sim\varepsilon_B/10$．所以上式化为

$$r^2\sim\frac{\Lambda_m d}{\mu g}=hd. \tag{3.70}$$

这里利用了式(3.63)，$h=\Lambda_m/\mu g$ 是山高的极限．式(3.70)表明，r 确实是 h 和 d 的比例中项．上下相差十几个数量级的事物之间竟存在着这样深刻的联系，想起镌刻在北京颐和园内一座石牌坊上乾隆皇帝的对联，使我们惊叹不已．

“境自远尘皆入咏，物含妙理总堪寻．”

例题 16 根据你所知道的事实，估计一下，仅仅由于毛细作用，树干中水的上升高度。

解 令 p_0 为大气压，R 为液面的曲率半径．γ 和 ρ 分别为水的表面张力系数和密度，θ 为接触角，r 为毛细管的半径，h 为水柱的高度(见图 3-26)，我们有

$$R\cos\theta=r,$$

$$\begin{cases}A\text{ 点的压强} & p_A=p_0-\dfrac{2\gamma}{R},\\ B\text{ 点的压强} & p_B=p_A+\rho gh=p_0=p_0,\end{cases}$$

由此可得

$$h=\frac{2\gamma}{\rho g R}=\frac{2\gamma\cos\theta}{\rho g r}. \qquad (3.71)$$

上式右端各量中最难估计的是树干内毛细导管的半径r. 这些纤维状的细胞是可以在光学显微镜下观察到的，看起来好象几毫米那样大。光学显微镜的放大倍率受到衍射效应的限制，一般只有几百倍. 这样看来，树干中毛细管径 r 可取作 10^{-3} cm 的数量级. 另取 $\gamma=73\,\mathrm{dyn/cm}$, $\rho=1\,\mathrm{g/cm^3}$, $g=980\,\mathrm{cm/s^2}$, $\theta\sim0$, 代入上式右端，得 $h\sim150\,\mathrm{cm}\sim1.5\,\mathrm{m}$. 可见，毛细作用不能用来解决树冠的供水问题.

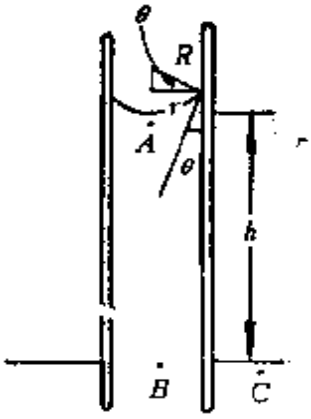


图 3-26 毛细作用

那么是什么因素起作用呢？渗压是个可能的候选者。

5. 渗透压

渗透现象可用图 3-27 所示的装置来演示. 图中的外桶装有水，内桶装有水和糖的溶液. 水分子能自由地通过把内桶和外桶隔开的薄膜. 但是糖分子较大，不能通过. 因为这个膜对水分子来说是可透过的，对糖分子来说是不可透过的，所以叫做“半透膜(semipermeable membrane)”. 设 $p_{水}$为纯水的压强，$p_{糖}$为溶液的压强，它由 $p'_{水}$ 和 $p_{糖}$ 两部分组成：

$$p_{溶}=p'_{水}+p_{糖}.$$

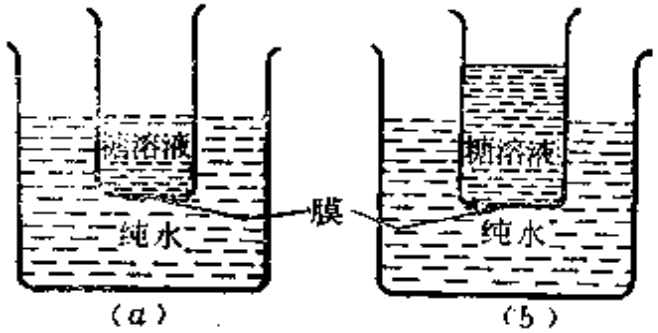


图 3-27 渗透现象

最初时刻内、外桶的高度相同（图 3-19a），这时半透膜两侧 $p_{溶}=p_{水}$，可是

$$p_{水}-p_{水}'=p_{糖}>0.$$

由于外桶中水的压强 $p_{水}$ 大于内桶中水的分压强 $p_{水}'$，压强差 $\Pi\equiv p_{水}-p_{水}'$驱动水通过半透膜，由外桶进入内桶，使内桶的水位升高. 当内、外水位的高度差造成的压强差与 Π 达到平衡时，通过半透膜的水流停止(图 3-27b). 这时半透膜两侧 $p_{水}=p_{水}'$，于是

$$p_{溶}=p_{水}+\Pi. \tag{3.72}$$

Π 称为溶液的"渗透压(osmotic pressure)",它等于溶液中溶质的分压强 $p_{糖}$.

实验发现,对于稀溶液,溶质的分压强,即渗透压 Π,是服从理想气体定律的:

$$\Pi V=nRT, \tag{3.73}$$

这里 n 是溶质(糖)的摩尔数,V 是内桶溶液的初始体积. 这定律称为范托夫(Vant, Hove)定律. 这定律可以这样来解释:在稀释溶液中,溶质分子的行为就象是个理想气体.虽然溶质分子不断地和水分子碰撞,但它们彼此之间却是难得相碰的. 它们的行为就和没有相互作用的粒子一样,这正符合理想气体模型的假定.

范托夫定律更常用溶质的摩尔浓度 $C=n/V$ 来表示,这时式(3.73)写作

$$\Pi=CRT. \tag{3.74}$$

例题 17　早春季节,枫树中的树汁(糖溶液)上升,是渗透压造成的. 设树汁中含有重量为 1% 的蔗糖($C_{12}H_{22}O_{11}$),温度为 27°C,求渗透压和树汁上升的高度.

解　蔗糖的分子量是 $12\times12+22\times1+11\times16=342\,g/mol$,$1m^3$ 溶液的质量近似等于 $1\,m^3$ 水的质量($10^3\,kg$),其中含糖 $10^3kg\times1\%=10kg=10^4g$,即10/342=29.3 mol. 故树汁的摩尔浓度为 $C=29.3\,mol/m^3$. 温度 $T=273+27=300\,K$,代入式(3.74),得渗透压

$$\Pi=CRT=29.3\,mol/m^3\times8.3\,J/(mol\cdot K)\times300\,K$$
$$=7.3\times10^4\,N/m^2.$$

树汁上升的高度为

$$h=\frac{\Pi}{\rho g}=\frac{7.3\times10^4N/m^2}{10^3\,kg/m^3\times9.8\,m/s^2}=7.4\,m.$$

在枫树的汁液中糖的浓度是可以大于 1% 的,所以渗透压可以成为春天枫树中汁液上升的主要原因.这也回答了例题 16 中未能解决的问题. 但是参天的大树(如冷杉)可以高达 60 m 以上,无

论毛细作用和渗透作用，都不能解释树汁是如何达到树冠顶部的问题．长期以来，这一直是个谜．水中的内聚力所引起的负压强似乎能解开它的谜底．

什么是"负压强"？设想我们用图 3-28 所示装置测量水的内聚力，当活塞上提时，水略微有点膨胀，但在内聚力的作用下，水柱不会立即断开（图 3-28*a*），但这时它施加在活塞上一个向下的拉力，而不是向上的压力．或者说，这时水的压强是负的，即负压强．当活塞提升到一定限度时，水柱断裂，与活塞分离（图 3-28*b*）．实验上测得，水中负压强的极限值可达 300 大气压，这比前面我们从水的结合能算出的断裂强度还小两个数量级，但已足以把汁液送上参天大树的顶端而绰绰有余．

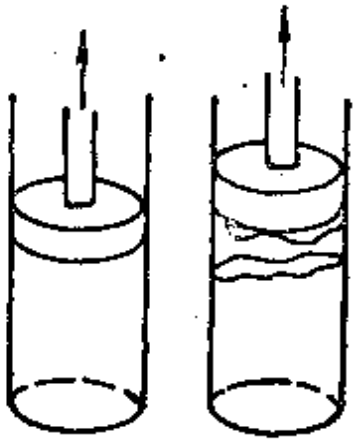


图 3-28　水的负压强

树干中水的负压强怎样形成？树干的木质部内有许多半径 $2.5\times(10^{-5}$—$10^{-4}\,\mathrm{m})$ 的密封细管，其中充满了水．当水从叶面蒸发时，水柱就向上移动以保持不断裂，于是在管道中形成负压强．树干底部的压强仍是大气压强，不断地把树汁压送到顶端．对于高度 $h=60\,\mathrm{m}$ 的大树，仅需负压 4.8 大气压，这是水的内聚力完全能够负担得起的．

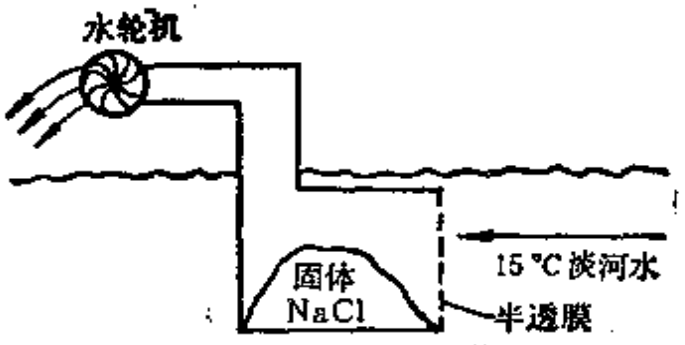


图 3-29　盐机

例题 18　图 3-29 是一架理想"盐机"方案的示意图. 设排放液体的当量浓度是 1N(1 mol 盐/升), 从 $1\,m^3$ 的固体盐能获得最大功有多少? (盐的密度为 $2.2\,g/cm^3$) 这相当于内燃机消耗多少燃料? (设热机的效率为 20%)

答　最大功 94 J, 相当于 1 g 燃料.

6. 固体的热膨胀系数

固体中相邻原子间的相互作用势大致如图 3-30 所示, 在 $r=d$ 处有个极小, 这相当于平衡位置. 这里势阱的深度 $-U(d)=E_B$(结合能). 令 $x=r-d$, 围绕平衡点作势能函数 $U(r)$ 的泰勒展开,

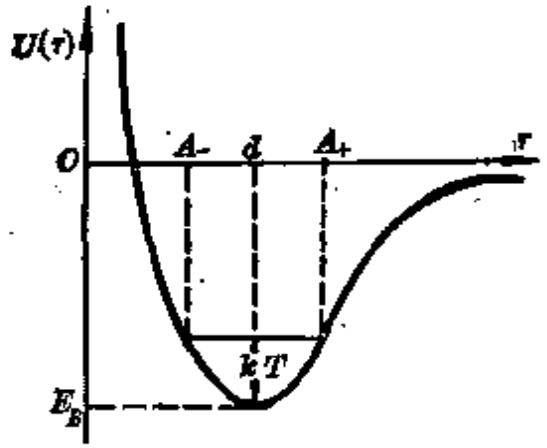


图 3-30　原子间相互作用势

$$U(r)=U(d)+ax^2-bx^3+\cdots. \tag{3.75}$$

式中 $a=(1/2!)U''(d)$,

$$b=-(1/3!)U'''(d).$$

因 $U'(d)=0$, 故式中没有 $O(x)$ 项. 如果只保留到 $O(x^2)$ 项, 势能曲线是对称的抛物线, 这时原子围绕平衡位置作简谐振动, 左右两边幅度相等, 偏离平衡位置的平均位移 $\bar{x}=0$. 若把 $O(x^3)$ 非谐项考虑进去, 则势能曲线呈现不对称性. 随着温度的升高振动增强, 原子的平均位置向外推移, 于是原子间距增大了, 这便是热膨胀. 可见, 热膨胀是由原子的非谐振动引起的. 现在让我们根据 (3.75) 计算 x 的平均值 $\bar{x}$.

先看 (3.75) 中的简谐项 ax^2, 在温度为 T 时振动的平均能量为 kT, 从而振幅 x_0 满足下式

$$ax_0^2=kT,$$

即偏离平衡位置的最远点 $A_\pm$ 的距离为 $\pm x_0=\pm\sqrt{kT/a}$ (见图 3-30). 考虑到非谐项的修正后, 设最远距离为 $x_\pm$, 即

$$ax_{\pm}^2 - bx_{\pm}^3 = kT,\ (bx \ll a),$$

用 $\pm x_0$ 代替非谐项中的 $x_{\pm}$:

$$ax_{\pm}^2 = kT \pm bx_0^3 = kT\left(1 \pm \frac{b}{a}\sqrt{\frac{kT}{a}}\right)$$

开方，得

$$\begin{aligned} x_{\pm} &= \pm\sqrt{\frac{kT}{a}}\left(1 \pm \frac{b}{a}\sqrt{\frac{kT}{a}}\right)^{1/2} \\ &\simeq \pm\sqrt{\frac{kT}{a}}\left(1 \pm \frac{b}{2a}\sqrt{\frac{kT}{a}}\right) \\ &= \pm\sqrt{\frac{kT}{a}} + \frac{b}{2a}\frac{kT}{a}, \end{aligned}$$

故而

$$\bar{x} = (x_+ + x_-)/2 = bkT/2a^2. \tag{3.76}$$

由此得线膨胀系数

$$\alpha = \frac{1}{d}\frac{\Delta\bar{x}}{\Delta T} = \frac{bk}{2da^2}. \tag{3.77}$$

进一步的估算需要知道 a、b、d 诸参量之间的相互关系，这可以有不同的办法. 我们采取的办法是赋予 $U(r)$ 一个具体的解析表达式. 定性地看，图 3-30 中的势能曲线与双原子分子的势能曲线很相似，我们不妨从那里借一个函数来:

$$U(r) = E_B\{\exp[-2\varkappa(r-d)] - 2\exp[-\varkappa(r-d)]\}, \tag{3.78}$$

这函数叫做 Morse 函数①，它在 $r=d$ 处有极小值 $-E_B$，$r\to\infty$ 时，$U\to 0$，故 E_B 代表原子的结合能，而摩尔结合能

$$\varepsilon_B = N_A E_B.$$

$\varkappa$ 是个量纲为长度倒数的可调参量，以便与实验数据拟合. 一般说来，$\varkappa$ 的数量级与 d^{-1} 相同. 由(3.78)得

① P. M. Morse, *Phys. Rev.* **34**, 57 (1929)

表 3-13 结合能与线膨胀系数 α

物质	ε_B(kcal/mol)	α(300K) (单位 10^{-6}/K)	
		估算值	实验值
Ag	68.3	14.5	19.2
Al	76.9	12.9	23.2
Au	87.3	11.3	14.1
C	170	5.82	1.1
Ca	42.1	23.6	22.3
Co	101.2	9.8	13.7
Cu	80.8	12.3	16.8
Fe	98.9	10.1	11.7
Ge	89.3	11.1	5.7
K	21.7	45.7	83
Mo	157.1	6.32	5.0
Na	26 0	38.2	69.6
Ni	102.3	9.73	12.7
Pt	135.0	7.33	8.9
S	66.1	15.0	61
Si	107	9.27	2.5
Ta	186.6	5.32	6.5
Ti	112.0	8.87	8.5
V	112	8.87	7.8
W	200	4.97	4.5

$$U''(d)=2\varkappa^2E_B,\ U'''(d)=-6\varkappa^3E_B,$$

从而 $a=\varkappa^2E_B$, $b=\varkappa^3E_B$, $\bar{x}=\varkappa T/2kE_B$, 最后得到

$$\alpha=\frac{k}{2\varkappa dE_B}=\frac{R}{2\varkappa d\varepsilon_B}.$$

作为粗略估计, 取 $\varkappa d\sim 1$, 于是

$$\alpha\sim\frac{R}{2\varepsilon_B}. \tag{3.79}$$

这样, 我们就把线膨胀系数与结合能 ε_B 简单地联系起来. 式中的气体常数 $R=1.986$ cal/mol·K, 据此以及结合能的数据可算出

α. 计算结果与实验值并列于表 3-13 内. 看来上面的估算除数量级基本正确外，对不少物质，如 C(金刚石)、Ge、Si 等，差别还是较大的. 采用统一形式的势能函数，这种作法可能过于简单化了.

§6. 地球、太阳和月亮

地球、太阳和月亮是与我们关系最密切的三个天体，在表 3-14中先给出它们的一些基本参量，下面再看几个近似估算的例题.

表 3-14 地球、太阳、月球的基本参量

参 量	地球⊕	太阳⊙	月亮☾
半径 R	6371 km	6.960×10^{5} km	1738 km
表面积 S	5.101×10^{8} km^2	6.087×10^{12} km^2	3.796×10^{7} km^2
体积 V	1.083×10^{12} km^3	1.412×10^{18} km^3	2.200×10^{10} km^3
质量 M	5.976×10^{24} kg	1.989×10^{30} kg	7.350×10^{22} kg
平均密度 ρ	5.518 g/cm^3	1.409 g/cm^3	3.341 g/cm^3
到地球的距离 r	—	1.4960×10^{8} km =1AU(定义)	3.844×10^{5} km
对地球所张角半径 θ	—	4.652×10^{-3} rad =15′59.63″	4.522×10^{-3} rad =15′32.60″
对地球所张立体角 ω	—	6.800×10^{-5} sr	6.422×10^{-5} sr

通常说，光在 1 秒钟内绕行地球七圈半，故地球周长 $2\pi R=c/7.5$，由此得地球半径

$$R=\frac{3\times10^{5}}{2\pi\times7.5}=\frac{10^{5}}{5\pi}=6366\text{ km},$$

这数值相当准确.

"米(meter)"的最早定义是地球子午线的四千万分之一，即地球周长 $2\pi R=4\times10^7\,\mathrm{m}$，于是

$$R_{地}=\frac{4\times10^4\,\mathrm{km}}{2\pi}=6366\,\mathrm{km}.$$

数值和前面的估算一样.

例题 19　估计当前天文学中可能的最小分辨角.

解　最小分辨角 $\theta\sim\lambda/a$

(1) 对于光学望远镜，可见光波长 $\lambda\sim5\times10^{-7}\,\mathrm{m}$，望远物镜直径 $a\sim5\,\mathrm{m}$，故 $\theta\sim10^{-7}\,\mathrm{rad}\sim0.02''$. 但由于大气抖动，实际上地面天文台中望远镜的最小分辨角只有 $1''$.

(2) 对于射电望远镜，微波波长 $\lambda\sim0.1\,\mathrm{m}$，而长基线干涉仪 $a\sim$地球直径 $10^4\,\mathrm{km}\sim10^7\,\mathrm{m}$，故 $\theta\sim10^{-8}\,\mathrm{rad}\sim0.002''$. 实际上用特殊手段，还可作得比这更好.

地球的质量 $M_\oplus$ 可用地面上重力加速度 $g\approx9.8\,\mathrm{m/s^2}$ 的事实来估算：

$$M_\oplus=\frac{gR_\oplus^2}{G}=\frac{9.8\mathrm{m/s^2}\times(6.4\times10^6\,\mathrm{m})^2}{6.67\times10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2/kg}}\simeq6\times10^{24}\,\mathrm{kg}.$$

由此可得平均密度

$$\rho=\frac{3M_\oplus}{4\pi R_\oplus^3}=\frac{3\times6\times10^{27}\,\mathrm{g}}{4\pi\times(6.4\times10^3\,\mathrm{cm})^3}\simeq5.5\,\mathrm{g/cm^3}.$$

这数值介于岩石密度 $2.6\,\mathrm{g/cm^3}$ 和铁的密度 $7.9\,\mathrm{g/cm^3}$ 之间. 实际上在高压下地心的密度高达 $13\,\mathrm{g/cm^3}$.

下面我们来比较日月的远近和大小. 用光的传播时间代替距离，更便于记忆. 光从太阳到地球大约走 500 秒(~8.3 分)，而月地距离约为日地距离的 1/400，从而光从月亮到地球约走 1.25 秒左右. 由此很容易估算出日地距离 $r_{日}\simeq3\times10^5\,\mathrm{km/s}\times500\,\mathrm{s}\simeq1.5\times10^8\,\mathrm{km}$，月地距离 $r_{月}\simeq r_{日}/400\simeq3.8\times10^5\,\mathrm{km}$.

日常经验告诉我们，太阳和月亮的大小看起来差不多. 也许月亮有时稍小，因为有一种日蚀是金环蚀. 为了记忆方便，可认为日月的角直径相同，都是半度(0.5°)，即$(\pi/360)\,\mathrm{rad}$. 由此可粗略估计出它们的半径

$$R_\odot = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{360}\right)\times 1.5\times 10^8\,\mathrm{km} = 6.5\times 10^5\,\mathrm{km},$$

$$R_\oplus \simeq \frac{R_\odot}{400} \simeq 1.6\times 10^3\,\mathrm{km}.$$

粗略地说，$R_\oplus \simeq 6.4\times 10^3\,\mathrm{km}$ 是 $R_\oplus$ 的 4 倍，是 $R_\odot$ 的 1/100(较精确的比值应分别是 3.67 倍和 1/109).

现在我们来探讨太阳的辐射问题，太阳的光谱接近一个 6000 K 的黑体，按照维恩位移定律 $\lambda_{\max}T_\odot = b$，取 $b\simeq 0.3\,\mathrm{cm\cdot K}$，得

$$\lambda_{\max}\simeq 5000\,\text{Å},$$

即正好处于可见光波段的中间. 这难道是偶然的巧合吗？当然不是. 应该反过来认识，即人类视觉的敏感波段正好在太阳光谱的极大值附近，是长期进化过程中对阳光适应的结果.

例题 20　估计太阳常数(单位时间落在地球大气层外单位垂直面积上的辐射能)的数量级.

解　太阳的总辐射率(即发光度)为

$$L_\odot = 4\pi R_\odot^2 \sigma T_\odot^4,$$

太阳常数

$$E_\odot = \frac{L_\odot}{4\pi r_\odot^2} = \left(\frac{R_\odot}{r_\odot}\right)^2 \sigma T_\odot^4 = \theta_\odot^2 \sigma T_\odot^4,$$

取 $2\theta_\odot = 0.5^\circ = (\pi/360)\,\mathrm{rad}$，斯特藩-玻耳兹曼常数 $\sigma = 5.67\times 10^{-12}\,\mathrm{W/cm^2\cdot K^4}$，$T_\odot = 6000\,\mathrm{K}$，得太阳常数

$$E_\odot = \left(\frac{\pi}{2\times 360}\right)^2 \times 5.67\times 10^{-12}\times 6000^4$$

$$= 0.14\ \mathrm{W/cm^2} = 2.0\ \mathrm{cal/cm^2\cdot min}.$$

太阳常数是决定人类和地球上一切生物命运的常数，我们应该把它记住. 如果记住了它和 $T_\odot = 6000\,\mathrm{K}$，但记不得斯特藩-玻耳兹曼常数 σ，亦可利用上题的关系式倒过来求 σ.

例题 21　假设地球在热学上象一个黑体，和来自太阳的辐射保持平衡，试推算地球的等效辐射温度.

解　把地球看成等效温度为 $T_\oplus$ 的黑体. 其总辐射率为

$$L_\oplus = 4\pi R_\oplus^2 \sigma T_\oplus^4,$$

从热收支平衡的角度看，它应等于 $\pi R_{\oplus}^2 E_{\odot} = \pi R_{\oplus}^2 \cdot \theta_{\odot}^2 \sigma T_{\odot}^4$，于是

$$\left(\frac{T_{\oplus}}{T_{\odot}}\right)^4 = \frac{\theta_{\odot}^2}{4}$$

即
$$\frac{T_{\oplus}}{T_{\odot}} = \frac{\sqrt{2}\theta_{\odot}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{360}} = 0.047 \sim \frac{1}{20},$$

由此得
$$T = 0.047 T_{\odot} = 280\,\mathrm{K} — 300\,\mathrm{K}.$$

300K 确实是地球表面的典型温度. 在此温度下能有数十亿种不同的分子存在. 略比此温度高些或低些，分子的种类及其相互作用的可能性就大大减少，随之其复杂性也减少了. 我们恰好处在分子可以具备最大复杂性的温度范围之内. 这种复杂性正是生命现象之所依托.

表 3-15 水的蒸汽压

温度 (°C)	蒸汽压 (Torr)
100	760.00
90	525.88
80	355.26
70	233.76
60	149.44
50	95.545
40	55.335
30	31.827
20	17.535
10	9.209
0	4.581

生命只能在特定的条件才能存在. 除适宜的温度 (300 K 左右) 外，其它的条件是液态的水和适宜的大气. 这些条件彼此是相关的. 从表 3-15 可以看出，若大气压减小一个数量级，水将在 40°C 左右沸腾；减小两个数量级，不到 10°C 水就会沸腾. 也就是说，没有足够的大气，地球表面根本就不会有液态的水. 月球表面既无大气，又无水，就是明证.

要在 300 K 的温度下使构成大气层主要成分(氮和氧)的分子不致摆脱地心的引力而逃逸，地球必须有足够大的质量. 假如我们给定地球的密度 $\rho_{\oplus} = 5.5\,\mathrm{g/cm^3}$，那就要求它有足够大的半径. 现在让我们据此来估算地球半径和质量的下限.

设大气分子的平均摩尔质量 $\bar{\mu}=N_A\bar{m}=29\,\mathrm{g/mol}$，这里 $\bar{m}$ 是每个分子的平均质量，N_A 是阿伏伽德罗数．在地球表面分子的引力势能为 $GM_\oplus\bar{m}/R_\oplus$，平均热运动动能的数量级为 kT，这里取 $T=300\,\mathrm{K}$．要用引力维系住大气分子，引力势能必须远大于热运动动能．否则处在麦克斯韦分布高能尾部的分子仍会大量逃脱．设引力势能必须比热运动动能大两个数量级以上，即

$$\frac{GM_\oplus\bar{m}}{R_\oplus}>10^2kT,$$

或两端乘以 N_A，

$$\frac{GM_\oplus\bar{\mu}}{R_\oplus}>10^2RT,$$

这里 $R=N_Ak$ 为气体常数．又 $M_\oplus=4\pi R_\oplus^3\rho_\oplus/3$，代入上式，整理后可得地球半径的下限：

$$R_\oplus>\sqrt{\frac{3\times10^2RT}{4\pi G\bar{\mu}\rho_\oplus}}\simeq2.4\times10^3\,\mathrm{km},$$

于是地球质量的下限为

$$M_\oplus=\frac{4\pi R_\oplus^3\rho_\oplus}{3}>3.05\times10^{23}\,\mathrm{kg}.$$

地球的实际质量 $6.0\times10^{24}\,\mathrm{kg}$ 的确大于此限．月球的平均密度 $\rho_\leftmoon\simeq3.3\,\mathrm{g/cm^3}$，比地球略小．按此密度计算半径和质量的上限分别为 $R_\leftmoon>3.1\times10^3\,\mathrm{km}$ 和 $M_\leftmoon>4.1\times10^{23}\,\mathrm{kg}$，这些不等式实际上是不成立的，难怪月球上没有大气．

参 考 文 献

[1] 杨福家，原子物理学，上海科技出版社，1985.

[2] 黄昆，固体物理学，人民教育出版社，1979.

[3] V. F. Weisskopf. *Search for Simplicity, Am. J. Phys.* **53** (1), 19; **53**(2), 109; **53** (3), 206; **53** (4), 304; **53** (5). 399; **53** (6), 522; **53**

(7), 618; **53** (9), 814; **53**(10), 940; **53** (12), 942, (1985).

[4] 周公度，结构化学基础，北京大学出版社，1989.

[5] R. Cotterill, *The Cambridge Guide to the Material World*, Cambridge University Press. 1985.

[6] J. W. 凯恩，M. M. 斯特海姆，生命科学物理学，科学出版社，1985.

[7] 马光群等，英美大学物理典型题选，南京大学出版社，1986.

[8] 林纯镇、吴崇试编译，我国赴美物理研究生考试(CUSPEA)历届试题集解，高等教育出版社，1985.

[9] 饭田修一等，物理学常用数表(第二版)，科学出版社，1987.

[10] C. W.艾伦，物理量和天体物理量，上海人民出版社，1976.

第四章　自然界的物理学

麦克斯韦曾说过："非常有必要，借助一些表演实验，使那些企图从书本上学习物理科学知识的人，能在户外遇到这些现象时认出它们．当我们发现，科学不只存在于课堂内，不仅可用电灯投射到屏幕上，使我们能目睹物理现象；我们还在体育比赛中，在水、旱两路的旅行中，在大气与海洋的风暴中，以及在一切物质运动中，都能发现科学最高学说的例证，到那时，科学将在我们面前呈现完全不同的面貌"①的确，我们不能只在书本上学习物理学，我们还应在周围的自然界中去寻找物理学．

§1．人类生存的环境

1．大气

根据地质方法的估计，地球的年龄大约为 4.6×10^9 年，原始大气是和地球一起诞生的．原始大气的成分与现代大气完全不同，那时它的成分主要是氢(重量占63.5%)和氦(34.9%)．然而，由于地球内的铁核尚未形成，强劲的太阳风很快就把没有地磁场保护的原始大气吹散了．原始大气存在的时间不过 10^7 年的数量级．以后，地球内部的挥发性物质向地表大量泄漏，其主要成分是 CO_2，CH_4，H_2O(水汽)，CO，NH_3，N_2，HS 等气体，它们组成了地球的次生大气．经过十多亿年，地表开始冷却，稠密大气中的水汽凝结下来，汇聚成原始的水圈．以后火山不断地爆发，排出大量水汽后又回归地面，在漫长的地质年代里，原始水圈逐渐扩展为现在的汪洋大海和湖河池沼．次生大气中的 CO_2 和其它气体被

① *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell.* Vol. II, Ed. W D. Niven, Librarie Scientique, J. Hermann. Paris.

雨水溶解，降落到地面，再渗入地下，储存于地壳之中.

次生大气中本没有氧. 不是大气中的氧创造了生物，而是生物创造了氧! 在溶解了一部分 CO_2 和 NH_3 的海水中，阳光中紫外线的光化作用合成出作为生命前兆的有机化合物. 原始绿色植物出现以后，才在光合作用中释放出游离的氧. 缓慢的氧化作用，使大气中的 CO 变成 CO_2，把 CH_4 氧化成水汽和 CO_2，NH_3 氧化成水汽和 N_2. 于是 CO_2 和 N_2 在大气中占了优势. 由于光合作用长期而持续的进行，氧才从 CO_2 中分解出来，使大气中的氧逐渐积累，达到现代的百分比. 大气中氧的浓度曾几经起伏，大约在 6.5×10^7 年前才稳定到今天的水平.

现代大气的化学成分，按重量百分比计算，N_2 占 75%，O_2 占 23%，两项之和已达 98% 以上. 其余成分中最多的是 Ar，占 1.28%，此外，水汽和 CO_2 的百分比漂浮不定. 尤其是水汽的含量，可由 0.01% 变到 3%，CO_2 平均含量约占 0.05%，但它们对天气和气候的影响却是非常大的.

例题 1　试估计地球大气层的总质量.

解　$1\text{atm}=1.013\times10^5\,\text{N/m}^2\simeq10^5\,\text{N/m}^2$. 这是压在 $1\,\text{m}^2$ 地面上气柱的重量. 除以 $g\simeq10\,\text{m/s}^2$，得 $10^4\,\text{kg/m}^2$，这便是 $1\,\text{m}^2$ 地面上气柱的质量. 故大气层总质量等于此数乘以地表面积 $S_{地}=4\pi R_{地}^2\simeq5\times10^{14}\,\text{m}^2$，即

$$M_{气}\simeq10^4\text{kg/m}^2\times5\times10^{14}\text{m}^2\simeq5\times10^{18}\text{kg}.$$

它约为地球总质量的 $1/10^6$.

例题 2　试考虑地球大气的简单模型. 忽略风、对流等影响，而且不考虑重力的变化.

(a) 假定大气是等温的(处于 0°C)，推算分子随高度分布的一种表达式，粗略地估计一个高度，使它下面拥有 90% 的分子.

(b) 假定大气是完全绝热的，证明温度因此而随高度线性地下降. 试估计对于地球的这一温度递减率(即所谓"绝热递减率").

解　(a) 分子数密度 n 按高度 z 的分布服从玻耳兹曼定律

$$n=n_0e^{-z/h_0},\tag{4.1}$$

其中 $h_0=RT\sqrt{\mu}\,g$. 取空气的平均摩尔质量 $\bar{\mu}=29\,\mathrm{g/mol}$, $T=273\,\mathrm{K}$, 则

$$h_0=\frac{2\times 4.186\times 273}{29\times 10^{-3}\times 9.81}=8034\,\mathrm{m}=8.034\,\mathrm{km},$$

单位面积上的总分子数为

$$N=\int_0^{\infty} n\mathrm{d}z=n_0h_0,$$

高度在 $z=0$ 到 h 之间单位面积上的分子数为

$$N(h)=\int_0^h n\mathrm{d}z=n_0h_0(1-\mathrm{e}^{-h/h_0}). \tag{4.2}$$

取 $$(1-\mathrm{e}^{-h/h_0})=90\%,$$

得 $$h=-h_0\ln(0.1)=h_0\times 2.3026=18.50\,\mathrm{km}.$$

实际情况应是 15 km, 故等温模型对大气的有效高度估计偏高.

(b) 如图 4-1 所示, 考虑高度从 z 到 $z+\mathrm{d}z$ 的一层大气. 在单位面积上, 它的下部受到向上的压强 p, 上部受到向下的压强 $p+\mathrm{d}p$, 二者之差应与这层大气的重力 $\rho g\mathrm{d}z$ 平衡, 即

$$\mathrm{d}p=-\rho g\mathrm{d}z.$$

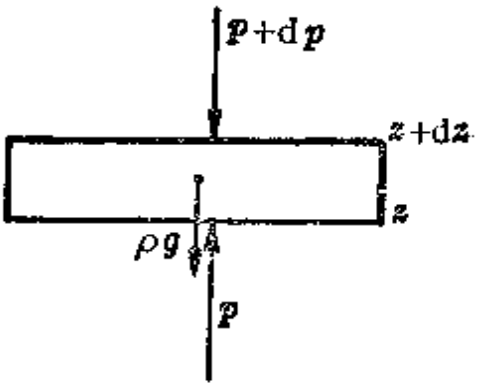


图 4-1 大气的温度垂直梯度

因 $\rho=n\bar{\mu}/N_A$ ($\bar{\mu}$——空气的平均摩尔质量, N_A——阿伏伽德罗数, n——分子数密度), 而 $n=p/kT$, 故

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}=-\frac{\bar{\mu}g}{RT}p, \tag{4.3}$$

式中 $R=kN_A$ 为气体常数.

对于绝热过程

$$\delta Q=C_p\mathrm{d}T-V\mathrm{d}p=0, \tag{4.4}$$

将理想气体状态方程 $V=RT/p$ 代入, 得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}=\frac{C_p}{R}\frac{p}{T}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{T}, \tag{4.5}$$

这里 $\gamma=C_p/C_V$, 而 $C_p-C_V=R$. 于是

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z},$$

将式(4.3)代入, 得

$$\frac{dT}{dz}=-\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\bar{\mu}g}{R}. \tag{4.6}$$

取 $\gamma=7/5$（常温下双原子分子气体），$\bar{\mu}=29\,g/mol$，得大气的绝热递减率

$$\frac{dT}{dz}=-9.8\,K/km\sim-10\,K/km.$$

地球大气中的最下层里频繁地进行着垂直方向上的对流．例如由于太阳辐射，白昼地面温度升高，较暖的气体缓慢上升，气体压强随之逐渐减少．因气流上升缓慢，过程可视为准静态的．又因为干燥空气导热性能不好，过程又可视为绝热的．这便是上述气团绝热上升模型的背景．

干燥气团上升时会遇到图 4-2 所示三种不同情况．第一种情况是大气中温度的垂直梯度超过干气团的绝热递减率 10 K/km（图 a），这时上升的气团会不断加速，大气处于不稳定状态．第二种情况是大气中温度的垂直梯度小于干绝热递减率 10 K/km（图 b），这时上升气团将减速，最终要沉降下来，因而大气处于稳定状态．第三种情况处于以上两种情况之间，大气中温度的垂直梯度等于干绝热递减率 10 K/km（图 c），这时气团匀速上升，大气的稳定度处于中性状态．

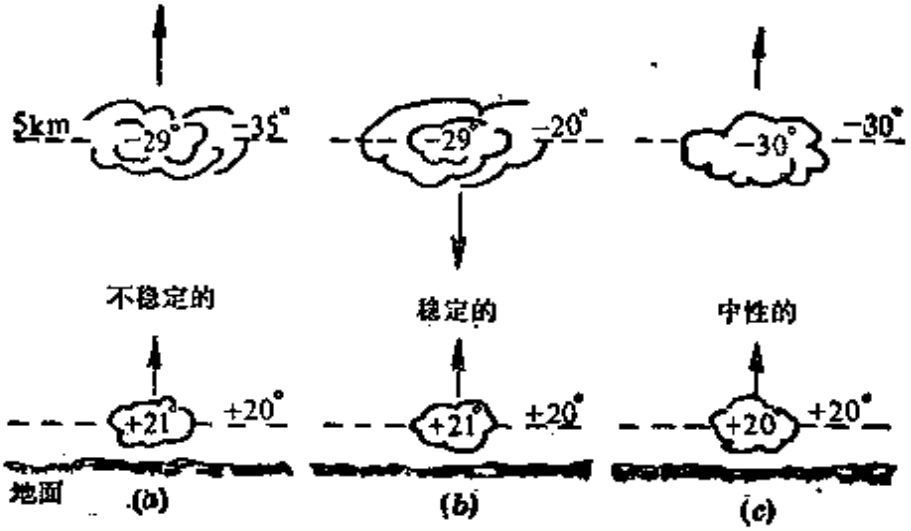


图 4-2　大气结构的垂直稳定度

上面导出的干绝热递减率公式(4.6)对未饱和的湿气团完全适用，但对饱和的湿气团就不适用了．对于后者式(4.4)应修改为

$$C_p\mathrm{d}T - V\mathrm{d}p + \Lambda_v\mathrm{d}N = 0, \tag{4.7}$$

式中 Λ_v 是水的摩尔汽化热，N 是水汽在大气中的摩尔浓度(N = 水汽的摩尔数/干空气的摩尔数)．

于是

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} + \frac{\Lambda_v}{R}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}T}\right)\frac{p}{T}, \tag{4.8}$$

这里比式(4.5)右端多出一项，反映了湿热气团随上升随凝结的放热效应．最后，式(4.6)应修改为

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma}\left(\frac{\bar{\mu}g}{R} + \frac{\Lambda_v}{R}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}z}\right), \tag{4.9}$$

这里的 $\mathrm{d}T/\mathrm{d}z$ 是饱和绝热递减率．式中的 N 与 T、p 有关，$\mathrm{d}N/\mathrm{d}z$ 是负的，故饱和绝热递减率总是比干绝热递减率的绝对值要小，焚风(foehn)就是由这个差值引起的典型效应．

焚风是经常在阿尔卑斯(Alps)山区发生的一种干热风．如图4-3，潮湿的空气被迫沿着山坡向上运动，很快达到它的凝结高度，在迎风的山坡上空形成云层并降雨．当空气越过山峰之后，它已变成干燥的了．它沿背风坡下降时，即形成干热的焚风．图4-4

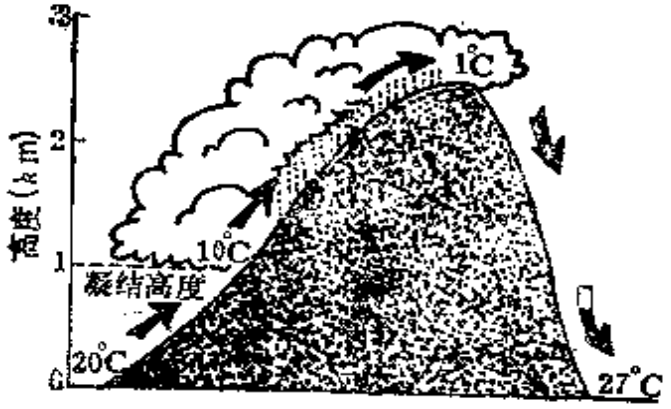


图 4-3　焚风的形成

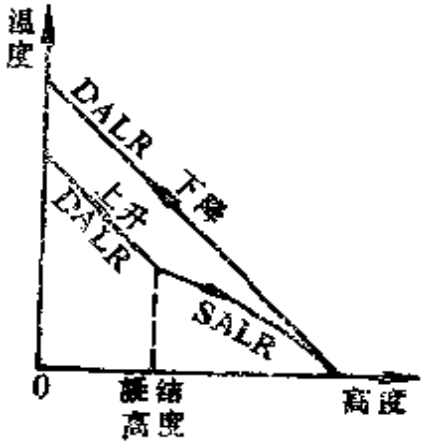


图 4-4　气团温度的变化

给出这气团上升和下降时温度随高度变化的曲线. DALR 代表干绝热递减率(dry adiabatic lapse rate)曲线, SALR 代表饱和绝热递减率(saturated adiabatic lapse rate)曲线. 上升曲线上的拐折点对应的高度是凝结高度, 由于此后一段曲线的斜率绝对值较小, 当气团下降时, 其温度比处于同一高度的上升气团高.

例题 3 有一上升的空气块, 在气压为 675 mmHg, 温度为 5°C 时达到饱和. 在云底上方大约 200 m 的地方, 气压和温度分别达到 659 mmHg 和 3.82°C. 求(a)水汽摩尔浓度的减少, (2)在气块后来所在地方云里液态水的含量(g/m^3).

解 (a) $\Delta N = \frac{RT}{A_v}\left(\frac{\Delta p}{p} - \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{\Delta T}{T}\right) = -5.2\times10^{-4}$,

(b) $0.36\,g/m^3$

例题 4 如图 4-5, 潮湿空气绝热地持续流过山脉. 气象站 M_0 和 M_3 测出的大气压强都是 100 kPa, 气象站 M_2 测出的大气压强为 70 kPa. 在 M_0 处, 空气的温度是 20°C. 随着空气的上升, 在压强为 84.5 kPa 的高度处(图中的 M_1)开始有云形成. 空气由此继续上升, 经 1500 秒后到达山脊的 M_2 站, 在上升过程中空气里的水蒸汽凝结成雨落下. 设每平方米上空潮湿空气的质量为 2000 kg, 每千克潮湿空气中凝结出 2.45 g 的雨水.

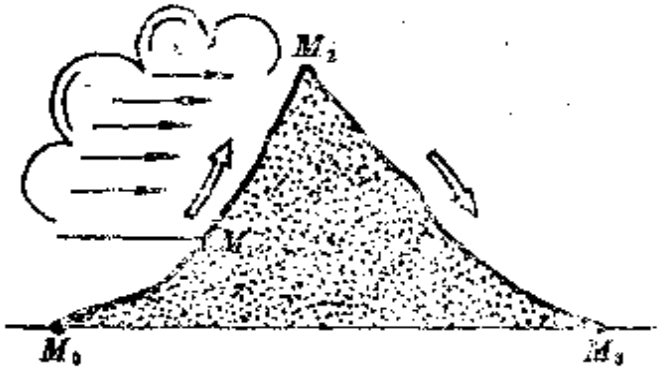


图 4-5 焚风的例题

(a) 试求出在云底高度处(M_1)的温度 T_1,

(b) 假设空气密度随高度线性地减少, 试问云底到 M_0 的高度 h_1 是多少?

(c) 试问在山脊 M_2 处测出的温度 T_2 是多少?

(d) 试求出由于空气中水蒸汽的凝结, 在 3 小时内形成的降雨量. 设在 M_1 和 M_2 之间的降雨是均匀的.

(e) 试问在山脉背面的气象站 M_3 测出的温度 T_3 是多少?讨论 M_3 处空

气的状态，并与 M_0 处相比较.

答 (a) $T_1=279.4\,\mathrm{K}$, (b) $h_1=1408\,\mathrm{m}$, (c) $T_2=270.9\,\mathrm{K}$, (d) 35.3 mm, (e) $T_3=300\,\mathrm{K}>T_0$, M_3 处空气比 M_0 处干热.

2. 海洋和潮汐

地球上绝大部分的水(~97%)在海洋中，其总质量的数量级就不象大气那样容易估计了. 专家们估计，地球表面海洋占71%，约 $3.6\times10^{14}\,\mathrm{m^2}$，平均深度为 3.8 km，如此估算，得地球上水的总质量 $M_{水}\simeq1.4\times10^{21}\,\mathrm{kg}$，约为地球总质量的 1/400. 地球上海洋最深的地方，在太平洋西部马里亚纳群岛(Mariana Islands)东南侧的马里亚纳海沟，该处深达 11.022 km. 如果把珠穆朗玛峰搬到这里，还要没顶 2km以上.

潮汐主要是月球对海水的引力造成的，太阳的引力也起一定的作用. 我们先考虑前者. 我国自古有"昼涨称潮，夜涨称汐"的说法，"潮者，据朝来也；汐者，言夕至也"(葛洪《抱朴子·外伕文》). 这就是说，潮汐现象的特点是每昼夜有两次高潮，而不是一次. 这对应于下面的事实：在任何时刻，围绕地球的海平面总体上有两个突起部分，在理想的情况下①它们分别出现在地表离月球最近和最远的地方. 为什么该是这样呢？

由于地球自转引起的惯性离心力已计入地球的有效重力之内了，它只与纬度有关，与日月的位置无关，这里不必考虑. 我们只考虑地球和月球各自的质心 C、C' 绕着它们共同质心 O 旋转(图4-6). (应注意，这时应把地球的运动看作整体随着质心 C 作平动!)这种运动使地球的每个质元 Δm 受到一个共同的惯性离心力

$$\boldsymbol{f}_0=-\Delta m\boldsymbol{a}_0,$$

式中 $\boldsymbol{a}_0$ 是质心 C 绕 O 旋转的向心加速度，它是由月地之间的引力提供的，这引力相当于月、地的质量集中在各自的质心 C'、C

① 实际上潮峰与月球运行之间常有相位差，见下文.

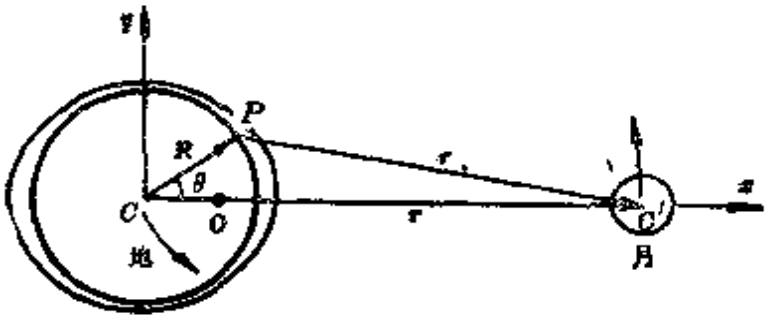


图 4-6　潮汐的成因

上，故 $\boldsymbol{a}_0 = GM_{月}\hat{\boldsymbol{r}}/r^2$，这里 $r = \overline{OO'}$，而 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 为沿 $\overrightarrow{OO'}$ 方向的单位矢量．代入前式，得

$$\boldsymbol{f}_0 = -\frac{G\Delta m M_{月}}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}.$$

如前所述，惯性力 $\boldsymbol{f}_0$ 对地球上每个质元 Δm 是一样的．然而，地表上一点 P 处质元 Δm 受月球的引力 $\boldsymbol{f}_p$ 却因地而异：

$$\boldsymbol{f}_p = \frac{G\Delta m M_{月}}{r'^2}\hat{\boldsymbol{r}}',$$

式中 $\boldsymbol{r}' = \overline{PO'}$，$\hat{\boldsymbol{r}}'$ 是沿 $\overline{PO'}$ 方向的单位矢量．矢量 $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OO'}$ 和 $\boldsymbol{r}' = \overrightarrow{PO'}$ 之间的关系为

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{R},$$

其中 $\boldsymbol{R} = \overrightarrow{OP}$．质元 Δm 所受的引潮力实为 $\boldsymbol{f}_p$ 与 $\boldsymbol{f}_0$ 之和

$$\boldsymbol{f}_{潮} = \boldsymbol{f}_p + \boldsymbol{f}_0 = G\Delta m M_{月}\left(\frac{\boldsymbol{r}'}{r'^3} - \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)$$

$$= G\Delta m M_{月}\left(\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|^3} - \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right),$$

因 $R \ll r$，取泰勒展开的第一项

$$\boldsymbol{f}_{潮} = -G\Delta m M_{月}\boldsymbol{R}\cdot\nabla\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right), \tag{4.10}$$

亦即，引潮力正比于月球引力的梯度，而不是它本身．取坐标系如图 4-6，x 轴沿 $\overrightarrow{OO'}$，y 轴与之垂直，将上式写成分量形式，令其中

$R=R_{\oplus}$，$r=r_{月}$，则有

$$\left.\begin{aligned} f_{潮x} &= \frac{2G\Delta m M_{月}}{r_{月}^3} R_{地}\cos\theta, \\ f_{潮\theta} &= -\frac{G\Delta m M_{月}}{r_{月}^3} R_{地}\sin\theta. \end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

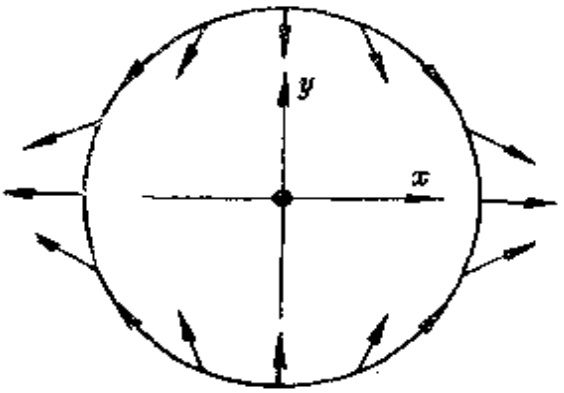


图 4-7　地表引潮力的分布

θ 为 $\boldsymbol{R}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 之间夹角. 引潮力在地表上的分布如图 4-7 所示，在 $\theta=0$ 和 π 处（即离月球最近和最远处）是背离地心的，在这些地方形成海水的高峰；在 $\theta=\pi/2$ 处引潮力指向地心，形成海水的低谷. 随着地球的自转，一昼夜之间两个高峰和两个低谷扫过每个地方. 这便解释了每天两次高潮两次低潮的原因.

式(4.11)同样适用于太阳，只不过其中的 $M_{月}$ 和 $r_{月}$ 应分别代之以 $M_{\odot}$ 和 $r_{\odot}$. 引潮力与日或月的质量成正比，与它们到地球的距离立方成反比，即

$$\frac{f_{日潮}}{f_{月潮}}=\frac{M_{日}}{M_{\odot}}\left(\frac{r_{\odot}}{r_{月}}\right)^3=\frac{7.350\times10^{22}\text{kg}}{1.989\times10^{30}\text{kg}}\left(\frac{1.4960\times10^{8}\text{km}}{3.844\times10^{5}\text{km}}\right)^3$$
$$=2.18. \tag{4.12}$$

这就是说，月球的引潮力为太阳的二倍多，日、月引潮力的效果是线性叠加的，合成的结果与日、月的相对方位有关. 在朔日和望日，月球、太阳和地球几乎在同一直线上(图 4-8*a*)，太阴潮和太阳潮彼此相加，形成每月的两次大潮. 上弦和下弦的时候，月球和太阳的黄经相距 90°(图 4-8*b*)，太阴潮被太阳潮抵消了一部分，形成每月里的小潮.

引潮力不仅作用在流体上，它对固体也有作用，使之发生微小形变. 月球绕地公转和本身自转的周期相同，从而它总以同一面

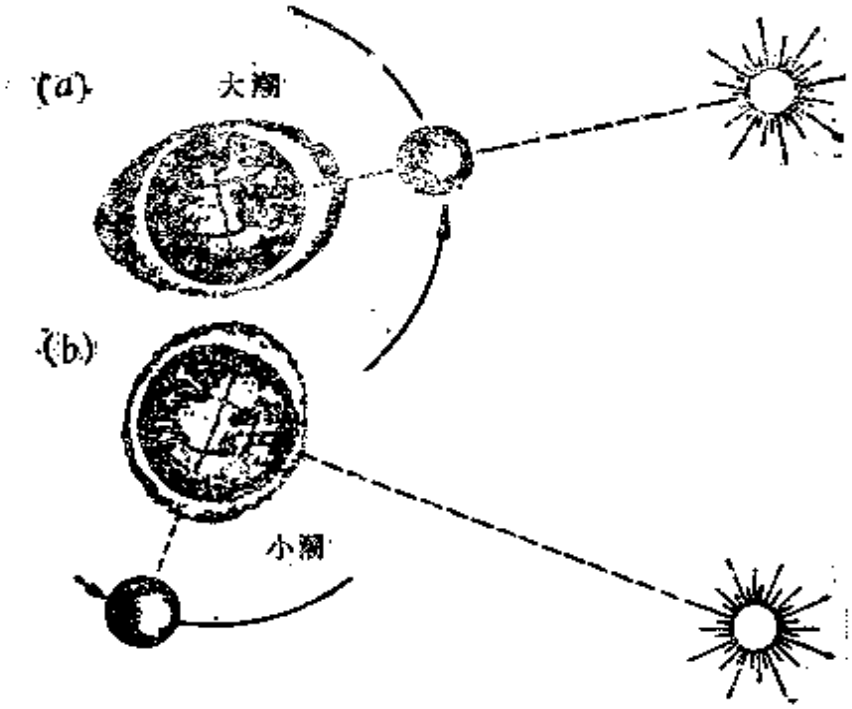


图 4-8　大潮和小潮

对着地球．这种"同步自转"现象，正是长期固体潮的作用造成的．这个问题不打算在这里多讲，而是讨论另外一个问题．当伴星围绕主星运行的过程中若因潮汐作用轨道逐渐缩小，一旦掉进某一临界半径之内，伴星就会被主星的引潮力撕裂成碎片．下面我们就来计算这一临界半径．

设主星的质量为 M，半径为 R，密度为 ρ；伴星半径为 R'，密度为 ρ'，自转角速度为 ω，两星中心之间的距离为 r（见图 4-9）．取 x 轴沿两星中心联线，原点 O 在伴星的中心．伴星的质元 $\Delta m=\rho'\Delta V$ 沿 x 方向共受三个力

$$\begin{cases} \text{引潮力} \quad \Delta f_{\text{潮}}=\dfrac{2GMx}{r^3}\rho'\Delta V, \\ \text{惯性离心力} \quad \Delta f_{\text{离心}}=\omega^2 x\rho'\Delta V, \\ \text{伴星本身引力} \quad \Delta f_{\text{引}}=-\dfrac{4\pi G\rho' x}{3}\rho'\Delta V. \end{cases}$$

我们设想用 $x=0$ 平面将伴星分为两半（$x=0$ 处拉力最大，首



图 4-9　伴星破裂的极限距离

先从这里分裂)，计算外边一半所受 x 方向的拉力

$$F_x=\int\left(\frac{2GMx}{r^3}+\omega^2x-\frac{4\pi G\rho' x}{3}\right)\rho' \mathrm{d}V$$

$$=\int_0^R\left(\frac{2GMx}{r^3}+\omega^2x-\frac{4\pi G\rho' x}{3}\right)\rho'\pi(R'^2-x^2)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\rho'\pi R'^4}{4}\left(\frac{2GM}{r^3}+\omega^2-\frac{4\pi G\rho'}{3}\right), \tag{4.13}$$

设组成伴星物质的极限抗张强度为 σ_m，则使伴星在 $x=0$ 处破裂的条件为

$$\frac{F_x}{\pi R'^2}\geqslant\sigma_m, \tag{4.14}$$

在临界状态下上式取等号.

现在我们假定主星是地球 ($\rho=\rho_{地}$，$R=R_{地}$，$M=M_{地}=4\pi\rho_{地}R_{地}^3/3$)，伴星是月球($\rho'=\rho_{月}$，$R'=R_{月}$，$r=r_{月}$)．因月球的一面总向着地球，亦即它的自转角速度与绕地公转角速度相等

$$\omega^2=GM_{地}/r_{月}^3, \tag{4.15}$$

将以上各参数代入式(4.13)，利用临界条件(4.14)，解出 $r_{月}$ 来

$$r_{月}=R_{地}\left[\frac{\sigma_m}{\pi GR_{月}^2\rho_{地}\rho_{月}}+\frac{\rho_{月}}{3\rho_{地}}\right]^{-1/3} \tag{4.16}$$

设 $\sigma_m=10^8\mathrm{N/m^2}$，$R_{月}=1.74\times10^6\mathrm{m}$，$R_{地}=6.37\times10^6\mathrm{m}$，$\rho_{月}=3.3\times10^3\mathrm{kg/m^3}$，$\rho_{地}=5.5\times10^3\mathrm{kg/m^3}$，由这些数据可以估算出，式(4.16)中包含 σ_m 的一项只有第二项的 1.4%，故可忽略．最后得到临界的月地距离为

$$r_{月C}=R_{地}\left(\frac{\rho_{月}}{3\rho_{地}}\right)^{-1/3}=1.7R_{地} \tag{4.17}$$

可见，一旦月球向地球撞来，在它未与地面接触之前，已被引潮力撕得粉碎.

月球撞向地球！这几乎是不可设想的，但彗星倒有可能. 引潮力的大小与 R' 有关. 在彗星碰到地面之前是否被撕裂，要看它半径 R' 的大小. R' 有个上限 R_C，大过此限，引潮力就会先将它撕裂①. 设彗核由冰组成，$\rho'=0.92\times10^3\,\mathrm{kg/m^3}$，$\sigma_m=10^6\,\mathrm{N/m^2}$，$\omega=0$，当 $r=R_{地}$ 时，得 R' 的上限 $R_C=39\mathrm{km}$. 此时它的质量 $M'=M_C=4\pi\rho' R_C^3/3=2.3\times10^{17}\,\mathrm{kg}=3.9\times10^{-8}M_{\oplus}$. 可惜这对彗星的质量实际上没有什么限制. 因为对于最亮的彗核来说，半径比 R_C 小一个量级，质量比 M_C 小三个量级.

以上的计算是对固体伴星而言的，在多数情况下，星体物质的内聚力是可以忽略的，此时临界距离 r_C 的普遍公式是

$$r_C=R\left(\frac{\rho'}{3\rho}\right)^{-1/3}=1.44R\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^{-1/3} \tag{4.18}$$

早在导出这个公式之前，洛希(E. A. Roche)对于流体伴星的撕裂条件，导出一个公式②

$$r_C=2.45539\,R\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^{-1/3} \tag{4.19}$$

这称为"洛希极限"，有人把式(4.18)称为"刚体的洛希极限". 对流体来说，内聚力更不重要了，流体的特点是形变. 在引潮力的作用下伴星不再呈球形，它将被拉得很长，呈椭球状，在极限的情形下，偏心率可达0.88. 土星环平均半径处到土星中心的距离 r 与土星半径之比 $r/R=2.31$，若土星环与土星本身平均密度相等，则这距离已在洛希极限之内，环中物质理应解体，不该形成一整个椭球

① J. Conwell *and* D. Wilkins, *Am. J. Phys.* 55 (2), 165 (1987).

② 详细推导，参见易照华，天体力学教程，上海科技出版社，1961.

形卫星. 这也算得上是土星环的一种解释.

上面介绍的是潮汐的静态理论,下面讨论它的动态模型.

引潮力产生的潮峰和潮谷实际上以波的形式在海洋中传播. 引潮力是驱动力，重力是恢复力，此外还有各种因素引起的摩擦力. 驱动力的周期 T 是固定的——12 小时 25 分，这是月球达到上、下中天之间的时间间隔. 大洋波有固有的自由周期 T_0，流体力学告诉我们,对于波长 $\lambda \gg$ 深度 h 的"浅水波"来说,自由波的相速 v 将不取决于 λ,而是取决于 h. 用量纲分析可知

$$v=\frac{\omega_0}{k} \propto \sqrt{gh} \text{ 或 } T_0 \propto \frac{\lambda}{\sqrt{gh}}. \tag{4.20}$$

($\omega_0=2\pi/T_0$, $k=2\pi/\lambda$, 实际上列比例式可写作等式 $T_0=\lambda/\sqrt{gh}$, 参见第二章). 潮汐波的波长总是绕地球半周，它远比海洋的深度大，故潮汐波属浅水波. 从色散关系(4.20)看，自由周期 T_0 反比于海洋深度 h 的平方根. 我们采用一个受迫振子模型，设驱动力为

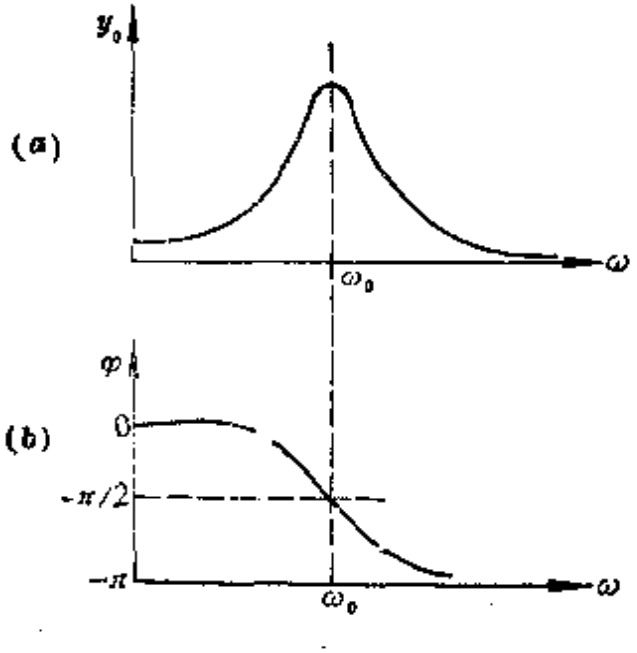


图 4-10 潮汐的振子模型中振幅和相位曲线

$$f(t)=f_0\cos\omega t\,(\omega=2\pi/T),$$

潮高 y 满足的微分方程为

$$\ddot{y}+\gamma\dot{y}+\omega_0^2 y=f/m,\ (m\text{——某个等效质量}),$$

其解的形式为

$$y=y_0\cos(\omega t+\varphi),$$

其中振幅为

$$y_0=\frac{f_0}{m\sqrt{(\omega\quad\omega_0)^2+\gamma^2\omega^2}}.$$

相位差为 $\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{-\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)$. 它们的曲线分别示于图 4-10(*a*)、(*b*).

作为粗略的模型,我们假设月球总在地球的赤道面上(事实上月球的赤纬常变,最高可达南北纬 28.5°),且地球上的洋面没有陆地阻挡,不同纬度之间的海水也互不干扰. 这样,潮汐波都是沿纬度线传播的,波长 $\lambda=\pi R_\oplus\cos\theta$ 只与纬度 θ 有关. 在给定的纬度上,海洋有个共振深度 h_0,它所决定的自由周期

$$T_0=\pi R_\oplus\cos\theta/\sqrt{gh_0}=\text{驱动周期 }T\text{(12 小时 25 分)},$$

即

$$h_0=\frac{1}{g}\left(\frac{\pi R_\oplus\cos\theta}{T}\right)^2. \tag{4.21}$$

在深海区 $h>h_0$ 的地方,$T_0<T$, $\omega_0>\omega$, 从图 4-10*b* 可以看出,此时$\varphi\to0$,即在月球中天处为潮峰,这种潮叫"直接潮";在浅海区$h<h_0$ 的地方,$T_0>T$, $\omega_0<\omega$,此时 $\varphi\to\ \pi$,在月球中天处为潮谷,这种潮叫"间接潮". 根据式(4.21)可以算出,在赤道上($\theta=0$)共振深度 $h_0=21\text{km}$,而在纬度 $\theta=60°$ 的地方共振深度 $h_0=5.2\text{km}$, $\theta=70°$ 的地方 $h_0=2.4\text{km}$,等等. 所以赤道附近以间接潮为主,两极附近多直接潮.

以上潮汐模型是过于简化的,世界各处地理条件千差万别,潮汐的实际情况比这里描绘的要复杂得多.

引潮力不仅作用于海洋,同时也作用于大气,形成气潮. 将上述潮汐的动态模型运用于大气,也许比用于海洋更为合适,因为这里没有"陆地"阻挡它的流动. 但是气潮是很微弱的,估计其幅度最多只有(1/27)mmHg,它很容易被别的因素(如气温的周期变

化)所掩盖.

3. 地球的内部结构

人们如何得知地球内部的构造？可以直接观测的地下深度是非常小的，因为当代最深的钻孔也只有 10 km 的量级. 要探测更深的区域，必须借助于间接的方法，其中最重要的方法是利用地震波.

在短暂的应力作用下，地球介质可以看作是弹性体. 当地内发生任何扰动时，例如地震或人工爆破，一部分能量以弹性波的形式传播出去. 地震波在岩石中传播时，有纵横两种模式，横波叫做 P 波，纵波叫做 S 波. 它们的传播速度 v_P 和 v_S 与介质的弹性模量及密度有如下关系

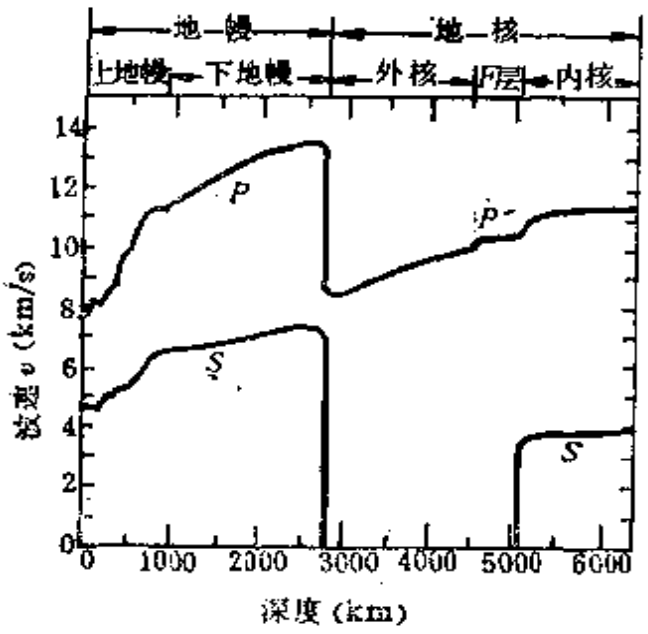


图 4-11 地震波速的纵深分布(CAL3模式)

$$v_P^2=\left(K+\frac{4}{3}G\right)\Big/\rho,$$

$$v_S^2=G/\rho, \qquad (4.22)$$

式中 K 是体弹性模量，G 是剪变模量，ρ 为密度. 利用地震法和其它地球物理方法(如重力法、地磁法等)和地球化学方法，可对地球的内部结构得到一个大概的了解. 当前人们的认识如下.

根据多年来在全球各地对地震观测的分析研究，发现地球内部是分层的. 最突出的一点，是在 2900 km 的深度上，地震 P 波的速度陡然下降，而 S 波不见了(图 4-11). 这表明，在此深度上有个物理性质的间断面. 通常把此面以上的部分叫"地幔(mantle)"，以下的部分叫"地核(core)". 此外，在地下几十千米的深处，地震波速突然增大，这个间断面叫"莫霍面"或"M 界面"，因

为它是1909年南斯拉夫 A. Mohorovičić 首先发现的. M 界面以上的部分叫"地壳(crust),"以下的部分是地幔. "地壳"一词并不确切,这是上世纪末遗留下来的过时概念,当时以为地球内部是融熔的液体,表面上凝固着一层硬壳. 现在知道,地球内部比钢还硬. 如是,地壳、地幔和地核是地球的三大组成部分,它们所占的体积约分别为0.5%、83.3% 和16.2%. 这三大部分还可进一步细分为七层(见图 4-12).

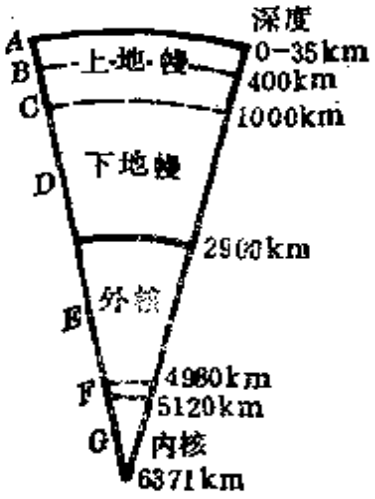


图 4-12 地球内部的分层

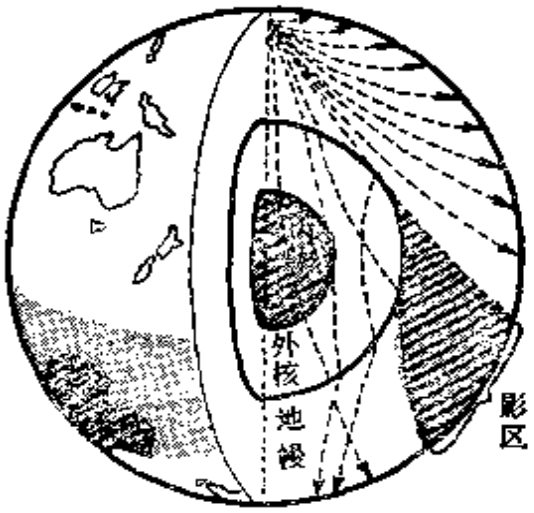


图 4-13 地震波的影区

在地核边界这一陡变的间断面上,可以清晰地产生反射的 P 波和 S 波,但折射的只有 P 波. 这表明,地核内的物质处于液态. 折射现象在地面上离震中 105° 到 142° 的区间造成明显的影区(图 4-13),这是存在物理间断面的明显证据. 约在5000km之下尚有一个可传播 S 波的固态内核,这个新认识是肯定得较晚的.

例题 6 将地球内部结构简化为地幔和地核两部分,它们分别具有均匀密度 ρ_M 和 ρ_C. 试利用总质量 $M_\oplus = 6.0\times10^{24}\,\mathrm{kg}$ 和转动惯量 $I_{地} = 0.33 M_\oplus R_\oplus^2$ 的数据求 ρ_M 和 ρ_C.

解
$$\begin{cases} \dfrac{8\pi}{15}[\rho_M(R_\oplus^5 - R_C^5) + \rho_C R_C^5] = 0.33 M_\oplus R_\oplus^2 \\ \dfrac{4\pi}{3}[\rho_M(R_\oplus^3 - R_C^3) + \rho_C R_C^3] = M_\oplus \end{cases}$$

将 $M_{地}$, $R_{地}$, R_C 的数值代入，可解出

$$\rho_M = 4.2\,\mathrm{g/cm^3}, \quad \rho_C = 12.7\,\mathrm{g/cm^3}.$$

实际上在地幔中密度由 $3.3\,\mathrm{g/cm^3}$ 增到 $5.6\,\mathrm{g/cm^3}$，地核中密度由 $9.9\,\mathrm{g/cm^3}$ 增到 $13\,\mathrm{g/cm^3}$. 这里算出的 ρ_c 作为平均值偏高了一点. 地球的内部压强 p 是单调上升的. 据估计，到地核深部，压强达 $3.6\times10^6\,\mathrm{atm}$，温度也较高. 如第三章 §4 所述，固体的体弹性模量 K 的数量级为 10^5—$10^6\,\mathrm{atm}$，故地核内物质的密度会比常态下大得多. 按照冲击波试验，在地核外缘的温度和压力条件下，铁的密度为 $11.2\,\mathrm{g/cm^3}$；到了地心，可达 $13\,\mathrm{g/cm^3}$. 一般的看法认为，地核中的主要成分是铁和镍.

例题 7　地球内部何处重力加速度 g 最大？试利用上题的模型计算其数据.

解　在地核表面的 g 最大，其值为

$$\begin{aligned} g_{\max} &= \frac{4\pi G}{3}\rho_C R_C \\ &= \frac{4\pi}{3}\times 6.67\times10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2/kg}\times 12.7\times10^3\,\mathrm{kg/m^3} \\ &\quad \times 3470\times10^3\,\mathrm{m} \\ &= 12.3\,\mathrm{m/s^2}. \end{aligned}$$

实际上在地核表面上 $g\simeq10.8\,\mathrm{m/s^2}$. 上面对 g 的估算也偏高了.

在结束本小节之前，最后介绍一下地球最外面的一层——地壳. 地壳的厚度在全球各处是不均匀的. 大陆之下，地壳平均约厚 35 km，但变化很大. 例如我国青藏高原下面的地壳厚度在 65 km 以上. 海洋下面的地壳，厚度只有 5--8 km. 与地幔和地核相比，地壳只不过像一张薄薄的“苹果皮”，其厚度可忽略不计.

4. 地球的辐射收支

第三章 §5 中的例题 21 曾用黑体模型讨论了地球接受阳光辐射的收支平衡问题，结论是地表的典型温度为 300 K. 实际上地表的平均温度为 288 K (15°C). 看来该例题的解法给出的估算结果很不错，然而仔细推敲起来，问题并不如此简单. 因为在该模

型中丝毫未考虑大气的影响. 实际上太阳辐射约有 32% 为大气及其中云雾所反射，约 2% 为地面或洋面所反射. 在估算地表的辐射温度时，应将这部分直接反射掉的能量扣除. 从面积为 $\pi R_{地}^2$ 的垂直截面上获得的太阳能扣除 34%，将它平均分布到 4 倍于此面积的总地表上，按斯特藩-玻耳兹曼定律向星际空间辐射出去，可得

$$T'_{地}=\left(\frac{0.14\mathrm{W/cm^2}\times 66\%}{4\times 5.67\times 10^{-12}\,\mathrm{W/cm^2\cdot K^4}}\right)=253\mathrm{K}=-20^{\circ}\mathrm{C}$$

这反而不符合实际了. 什么原因？仍是大气在起作用. 15°C 的黑体辐射在 $\lambda\sim 10\,\mu m$ 量级的红外波段内，大气中的 CO_2 和水汽恰好是这波段内的强烈吸收体. 只需 2m 厚的一层含 0.03% CO_2 的大气，就可将 $\lambda=15\,\mu m$ 的全部红外辐射吸收掉. 对于 $18\,\mu m$ 以上和 $8.5\,\mu m$ 以下的辐射，水汽是最主要的吸收体. 在 $\lambda=8.5\sim 12\,\mu m$ 之间，有一个可让大部分地球辐射通过的"窗口"（见图 4-14）. 水汽和 CO_2 吸收红外辐射，也重新发射红外辐射，但这是向四面八方的辐射，故其中有一半回到地表. 水汽和 CO_2 这种保护地表热量散失的作用，叫做"温室效应(green-house effect)." 正是大气的这种温室效应，使地表维持在 15°C 的平均温度上，为人类和整个生物圈提供了一个温暖的环境.

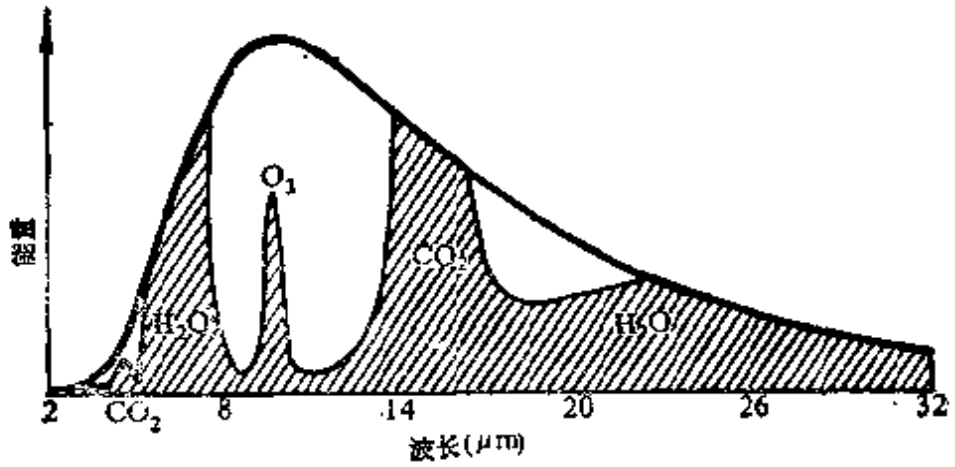


图 4-14　15°C 黑体辐射谱与大气窗口

现在让我们稍稍涉猎一下人类面临的食物、能源和生态环境等问题的一些方面.

能量是守恒的，在这种意义下能量不可能被"消耗". 不过能量的品位可以降格(degradation)，品位高的能量会变成废热，不再可能被利用，这便是通常所谓"能量耗散"的含义. 用物理的语言讲，就是在能量的流程中产生了熵. 定性地说，熵产生得愈多，表示能量耗散愈多. 对于一个开放的生态系统来说，要保持生机和活力，必须把内部耗散过程中产生的多余的熵排出去，或者说，引进"负熵". 上面我们讨论了地球辐射能的收支平衡问题，那是从热力学第一定律的角度讨论的，现在让我们从第二定律的角度来考察. 地球接收阳光的辐射功率为

$$P = E\pi R_{地}^2 = 0.14\,\mathrm{W/cm^2} \times \pi \times (6.4\times10^8\,\mathrm{cm})^2$$
$$= 1.80\times10^{17}\,\mathrm{W},$$

除去直接反射掉的34%，还剩

$$P' = 66\%\,P = 1.19\times10^{17}\,\mathrm{W}.$$

这能量是以 $T_{\odot}' = 6000\,\mathrm{K}$ 的高能光子形式引入的，经过大气、海洋的传输和其它复杂的转化过程，这能量终于以 $T_{地} = 300\,\mathrm{K}$ 的低能长波辐射形式散发到太空中去. 在此过程中的熵流为

$$\sigma_{地} = P\left(\frac{1}{T_{\odot}} - \frac{1}{T_{地}}\right) = -3.9\times10^{14}\,\mathrm{W/K}$$
$$\sim -4\times10^{14}\,\mathrm{W/K}. \qquad (4.23)$$

这就是说，作为处在高温热源(太阳)和低温热库(太空)之间的一个开放系统，地球在单位时间里能引入的负熵有这么多；或者说，这是它排熵能力的上限.

在现代社会中，人类"消耗"的能量(熵产生)有两部分：一部分是维持自身体内新陈代谢所需的能量，这要由食物来补给；另一部分是现代化的生产、交通和生活设施等所耗费的能量，这多半靠矿

物燃料(石油、煤)来提供. 所有这些食物或燃料所能提供的负熵，归根结蒂是通过绿色植物的光合作用由阳光中获得的. 由于矿物燃料主要来自漫长地质年代中的储存和积累，在讨论当代辐射的收支平衡问题时，我们着重考察食物问题.

第三章§4里已给出，60 kg 体重的人体基础代谢的熵产生率约为 0.2 W/K，考虑到体力活动的需要，可设每个人的平均熵产生率为 0.4 W/K. 当今全球总人口为 5×10^9 的量级，考虑到其中有许多是未成年的儿童，体重远小于 60 kg，折合成 3×10^9 个成年人计算，得全人类自身体内的熵产生率为

$$\sigma_{人体}=1.2\times10^9\ \mathrm{W/K}.$$

它只占 $\sigma_{地}$ 的三十多万分之一，似乎是微乎其微. 然而请不要高兴得太早. 有人估计①在辐照到地球上的太阳能中，除了 34% 反射掉以外，被大气吸收的约有 44%，耗费在海水的蒸发的约有 22%. 仅此几项加起来，几乎已达 100%. 在剩下的零头中有 0.17% 消耗在驱动大气和海洋的流动和风浪上. 真正被绿色植物利用来进行光合作用的仅有 0.02% 左右，即 4×10^{13} W. 这部分辐射能提供的负熵流为

$$\sigma_{光合}=\ 1.3\times10^{11}\ \mathrm{W/K}$$

它的绝对值是 $\sigma_{人体}$ 的 10^2 倍，这就算不得太宽裕了. 要知道，自然界生态系统中的食物链是有许多"营养级"的，例如

绿色植物——→草食动物——→初级肉食动物——→顶级肉食动物

构成一个四级的食物链，每级以前一级作为自己的食物. 各营养级生物之间的生态效率(净生产的能量与它同化的能量之比)一般在 4—25% 之间，平均为 10—15%. 把这个因素考虑进去，尽管农

① 这里引用的能流分配比例数字，参照了 *New trends in physics teaching*, Vol IV (Uneso. 1977)一书 Part I, *Energy: the Background and the Way Ahead* 的引言.

业科学技术的发展还会使生态效率有一定程度上的提高，我们应看到，人类食物资源的上限已经在望了．有人从世界淡水和食物两方面的资源作过估计①，全球极限养活人口为 10^{10}，而最佳生存环境需将人口控制在 5×10^9，即当今的人口数．对于我国，极限养活人口为 1.4×10^9，最佳生存环境应为 0.7×10^9，而当今我国人口已达 1.1×10^9．对于我国来说．人口早已超过最佳值，离最高极限值也并不那么遥远了．不对生态环境中资源的上限作科学的估算，一定会遭到大自然的惩罚．

例题 8　(a)如第三章 § 3 所述，在碳水化合物(如葡萄糖 $C_6H_{12}O_6$)中键能最低的是 C—C 键，每键 83.1 kcal/mol，这折合多少 eV 的能量？由此可见，阳光中紫外光子的波长应有个下限 λ_0，波长更短的光子会将 C—C 键打断．试计算 λ_0=？

(b) 太阳光可看作是 6000 K 的黑体辐射，试计算 $\lambda<\lambda_0$ 的辐射能占百分之几？你认为这对生物机体有危险吗？实际情况如何？

(c) 第三章 § 3 里我们还曾给出，葡萄糖所含热量为 3.81 kcal/g，这相当于每个葡萄糖分子氧化后给出多少 eV 的能量？折合每个碳原子给出多少 eV 的能量？这相当波长 λ_1 为多少的一个光子的能量？

(d) 绿色植物进行的光合作用过程，是碳水化合物(葡萄糖)氧化的逆过程，它们从太阳光中取得能量，由 CO_2 和水合成碳水化合物．前面的计算表明，植物叶面每吸收一个波长为 λ_1 的光子，即可把一个碳原子固定到碳水化合物中．你认为，光合作用实际上是这样进行的吗？

(e) 实验观测表明，光合作用中每固定一个碳原子，需要耗费 8 个 $\lambda\leqslant0.7\,\mu$m 的光子．试计算光合作用的效率(即所需能量与实际耗费能量之比)，并与由热力学第二定律给出的最大效率作比较．

解　(a) 3.66 eV，$\lambda_0=0.35\,\mu$m；

(b) $T=6000$ K 对应 11.88 kcal/mol，设 ν_0 为对应于 λ_0 的频率，则 $x_0=h\nu_0/kT=83.1/11.88=6.995$，故 $e^{x_0}\gg1$，普朗克公式可近似用维恩公式代替，即辐射谱为

$$r_T(\nu,\ T)\simeq\frac{2\pi h}{C^2}\,\nu^3e^{-h\nu/kT},$$

① 喻传赞，《百科知识》，1987 年第 6 期，p31

$\nu>\nu_c$ 的辐射能为

$$E_{\nu}=\frac{2\pi h}{C^2}\int_{\nu_0}^{\infty}\nu^3 e^{-h\nu/kT}\,d\nu=\frac{2\pi k^4T^4}{c^2h^3}\int_{x_0}^{\infty}x^3e^{-x}\,dx$$
$$=\frac{2\pi k^4T^4}{c^2h^3}\,e^{-x_0}(x_0^3+3x_0^2+6x_0+6).$$

按斯特潘-玻耳兹曼定律，总辐射能为

$$R_B=\sigma T^4=\frac{2\pi^5k^4T^4}{15c^2h^3},$$

从而

$$\frac{E_{\nu}}{R_B}=\frac{15}{\pi^4}\,e^{-x_0}(x_0^3+3x_0^2+6x_0+6)\simeq 7.5\%.$$

如果这些辐射能都能穿透大气，将会对生物机体产生致命的损伤．幸而大气上层的臭氧能把短波长的紫外线吸收掉，保护了生物得以在陆地上存活．

(c) 每个葡萄糖分子给出 30 eV，折合每个碳原子给出 5 eV $\lambda_1=0.25\mu m$;

(d) $\lambda_1=0.25\,\mu m$ 的光已为大气中的臭氧所吸收，不能进行有效的光合作用．

(e) 实际效率$=\dfrac{(0.25)^{-1}}{8\times(0.7)^{-1}}=35\%$,

热力学最大效率$=\dfrac{6000K-300K}{6000K}=95\%$.

可见，自然界用低能光子进行光合作用，以很低的效率换取了安全．

例题 9　在现代化的养鸡厂中，每 1.5 kg 乾饲料(含热量 4.5 kcal/g)可转化为 1 kg 鸡的体重(70% 水份，含热量 5 kcal/g 乾重)．求人类食物链中这两营养级之间的生态效率．

答　22%．与自然界里的自发过程相比，这生态效率已可算得是相当高的了．

以上两个例题进一步提醒我们，由于日光能量的利用效率极低，人类食物资源的生产是艰难的．

下面再简单讨论一下第二部分作动力用的能源．据统计，现今发达的资本主义国家，这部分能耗的人均值已达本身体力的 100 倍，在不发达的国家中却只有几倍，全球的平均数在 10 倍上下．这个数字还不算大，在地球的辐射收支表内占不到什么比例，

但是工业发展带来的 CO_2 污染，却不是无足轻重的. 自从工业革命之后，尤其是在过去的一个世纪内，由矿物燃料的大量燃烧，大气中的 CO_2 浓度已增加了5%. CO_2 对气候的影响，主要是它的温室效应，使全球的温度升高，其灾难性的后患，目前还很难完全预料. 海水能溶解一部分 CO_2，绿色植物的光合作用也会用掉一部分 CO_2. 不幸的是，现在还有些地方，人们在毫无节制地使用矿物燃料的同时，又大肆砍伐森林. 长此以往，后果堪虞!

§2. 太 阳 系

太阳系的主宰无疑是太阳，然而太阳是一大类重要天体——恒星的典型，有关它较详细的讨论，我们将留到下一节进行. 其次，太阳系的成员主要是九大行星. 在九大行星中，除最外缘的冥王星我们知道得很不确切外，其它八大行星明显地分属两种不同的类型：距太阳较近的四颗行星(水星、金星、地球、火星)体积小，密度高，自转慢，属"类地行星"；距太阳较远的四颗行星(木星、土星、天王星、海王星)体积大，密度小，自转快，属"类木行星". 此外，在内、外两类行星之间有一个数量众多的小行星带.

1989年8月24日凌晨3:40，当旅行者(Voyager)2号空间飞行器途经海王星上空后逼近它最大的"月亮"海卫一(Triton)时，守候在美国加州帕萨迪那(Pasadina)喷气推进实验室中的科学家和记者们在荧光屏上第一次看到了这颗"月亮"几乎是完美无暇的清晰图象. 一时间，他们欢呼雀跃，举杯相庆，惊喜兴奋之情难以言状. 尽管这类事情早已不是第一次经历，然而这次毕竟是迄今为止空间探测距离最远的一次. 要知道，旅行者2号从地球经天王星到海王星，长途跋涉历12年，这图象是它从 6.6×10^6 km 之遥发送回来的，到达地球的电波功率只有 10^{-23}W! 人们怎能不为当代宇航技术的准确和高超而惊叹不已. 1543年哥白尼提出日心说，标

表 4-1　太阳系内各行星的基本参量*

类别	行星	轨道半长轴(地球=1)	轨道面与黄道面夹角	轨道偏心率	赤道半径(km)	公转周期(地球年)	自转周期(地球日)	质量(地球=1)	平均密度(g/cm^3)	表面平均温度(°C)	表面大气压(atm)	卫星数
类	水星	0.39	7.0°	0.206	2440	0.241	58.65	0.056	5.43	昼 430°, 夜 −170°	—	0
地	金星	0.72	3.39°	0.007	6070	0.615	243.01	0.82	5.25	460°	90	0
行	地球	1.00	0	0.017	6378	1.00	0.997	1.00	5.50	15°—20°	1.0	1
星	火星	1.52	1.85°	0.093	3389	1.88	1.026	0.108	3.93	昼 −33°, 夜 −85°	0.008	2
小行星带		2.3—3.3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
类	木星	5.20	1.30°	0.049	71540	11.86	0.0415	318	1.33	无表面	无表面	16
木	土星	9.5	2.49°	0.054	60330	29.46	0.445	95.1	0.71	无表面	无表面	23?
行	天王星	19.2	0.77°	0.047	26145	84.01	0.718	14.5	1.24	无表面	无表面	15
星	海王星	30.1	1.77°	0.009	25000?	164.79	0.669	17.2	1.67	无表面	无表面	8
?	冥王星	39.2	17.2°	0.25	1500—1800	250.3	6.4	0.002	0.4—1.0	昼 −229 夜 −270	0.0001 −0.05	1

* 取材于 J. Baugher, *The Space-Age Solar System*, App. D. John Wiley & Sons,1988，有关海王星的数据，根据旅行者 2 号于 1989 年 8 月 24 日获取的资料作了订正。

志着人类认识太阳系的开端. 尔后，牛顿力学成为天文学的理论基础. 但在探测工具方面，直到 30 年前，主要还是靠地面望远镜. 1957 年苏联的第一颗地球人造卫星 Sputnik 上天，开辟了宇航时代. 1958 年以来，人类共发射了 160 多个月球或行星际的空间探测器，两颗离地球最近的行星(金星和火星)接受了无人驾驶的探测器着陆采访，月球的表面踏上了人类的足迹. 空间时代的来临，陡然间使人类的眼界大大开阔了，人类对太阳系成员的观念不断刷新，旧日许多附会和误解相继澄清. 今天讲太阳系，不计及近 30 年来积累的新知识、新数据，是没有意义的.

我们先把各行星的主要参数列一张表(表 4-1)，然后分门别类地对它们逐个作些介绍. 取材当然是有选择的，侧重于物理和其它一些大家感兴趣的问题(如存在生命的可能性问题)，而地质、地貌方面的资料则从略.

1. 类地行星(terrestrial planets)

以太阳为中心，我们按从内到外的顺序来介绍各大行星.

水星(Mercury)是离太阳最近的行星. 对地球上的观察者来说，它与太阳的角距离不超过 22°. 这意味着，无论作为日出前的晨星，或日落后的昏星，它只能在地平线附近被人观察到. 由于水星离太阳如此之近，日光辐照的强度比地球表面大 7 倍. 水星表面基本上没有大气，因此可以预料，其昼夜温差是会很大的. 早年人们曾以为水星的自转与公转同步，亦即它的一半永远面向太阳，另一半永远背着太阳，从而人们估计它背日一面的表面温度应接近绝对零度. 本世纪 60 年代开始查明，水星的自转周期(58.65 地球日)与公转周期(0.241 地球年，即 88 地球日)之比精确地等于 2:3 (这也是潮汐作用引起的某种共振现象)，表面平均温度白昼 430°C，夜间 −170°C. 在这样严峻的条件下当然不可能存在生命.

空间时代来临之后，对水星最重要的一次探测是1974—1975年间美国发射的水手(Mariner)10号完成的．那像是一次行星际空间的"台球游戏"：该探测器于1973年11月3日射向金星，金星的引力使它的轨道偏到奔向水星的方向(见图4-15)，然后它沿着一条每次都飞临这两颗行星上空的轨道绕日运行．不巧(或者说太巧)的是这轨道的周期恰好等于水星公转周期的两倍，也就是说，在此期间水星恰好自转了三次．于是水手10号每次飞临水星上空时，它的摄象镜头看到的总是水星的同一半球，水星另一半球的表面至今不为人类所知．水星的表面很象月球，上面布满了环形的陨石坑；但它的平均密度(5.43 g/cm³)比月球大，接近地球的密度，故人们推想，水星中心也有一个金属的内核．

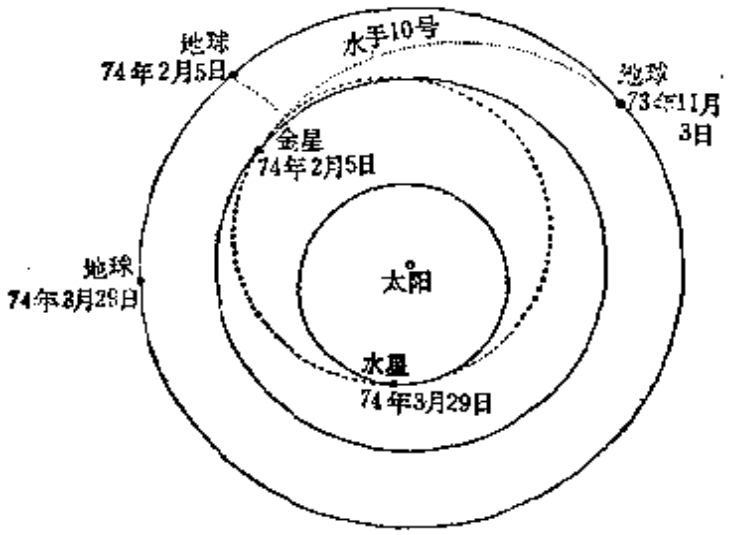


图4-15　水手10号探测金星、水星的轨道

一段有趣的历史插曲是水星轨道近日点的提前引起的．天文观测的数值是每百年575″，用牛顿力学计算地球、金星、木星对水星轨道的摄动作用，可以解释掉532″，剩下43″无法理解．天文学家曾设想在水星轨道内还有一颗离太阳更近的行星，取名为Vulcan．这是古罗马神话里火神的名字，而中国传说中的火神名

叫祝融，故这颗设想的水内行星中文译作"祝融星"．但是反复的天文观测，怎么也找不到这颗行星的踪迹．直到1916年爱因斯坦的广义相对论问世以后，恰好预言水星近日点应另有每百年43"的额外旋进才了结了这段公案．从此，水星近日点的旋进成了广义相对论三大著名实验验证之一，爱因斯坦的理论如此令人信服，天文学家不再有兴趣去寻找那颗"祝融星"了．

金星(Venus)与水星一样，也是轨道小于地球的"地内行星"，从地球上看，它和太阳之间角距离也较小(不超过46°)，所以它也只出现在日落后的西方天空，或日出前的东方天空．无论中国和西方，古代都曾一度把它当作两颗星：黄昏后出现在西方的"长庚星 (Hesperus 或 Vesperus)"，和黎明前出现在东方的"启明星(Phospherus或Lucifer)"．金星是离地球最近的行星，最近时(天文上叫做"下合")只有0.27 AU(1AU～1.5×10^8 km为地球轨道的平均半径)，它是除日、月之外天空最明亮的星体．然而，长期以来在可见光波段人们对金星表面的观察几乎一无所获，这是因为在金星外笼罩着稠密的大气和云层．直到空间时代的来临，这颗神秘行星的面纱才逐渐被揭开．

自1961到1984的20余年内，苏联发射了金星(Venera①)1—16号和金星-哈雷彗星(Vega②)1号、2号等近20个飞行器，美国从1962年到1973年间也发射了水手1，2，3，5，6，10号等多个目标针对(或包含)金星的探测器，1989年4月28日又派出麦哲伦(Magellan)号宇宙飞船去测绘金星表面的地图．经历过金星1—6号的失败之后，金星7—14号成功地登上了这颗行星，有更多的探测器飞临金星的上空，发回大量宝贵的数据、资料和图象．

① 俄文 Венера，"金星"之意．

② 俄文 Вега，系 Венера(金星)与 Комета Галлея (哈雷彗星)之缩写．

现已查明，金星的自转极慢，周期为243地球日．它的赤道与轨道面的夹角只有2.6°，故季节效应不明显．金星的大小和密度都与地球非常接近，故人们推断它的内部结构与地球差不多．五十年代以前人们曾从善良的愿望出发，猜测金星表面的环境也与地球相似，只不过可能更湿更热，从而覆盖着大片的沼泽和森林．但是金星大气的光谱告诉我们那里缺水，首次为上述看法投下阴影．此后，1956年从金星的射电辐射估计，其表面温度可能达到330℃，当时许多人不信会有那么高；1962年水手2号在金星上空测到的数据更高，达400℃．直到1970年金星7号首次在金星的夜半球着陆后，才确切得知其表面温度难以置信地竟高达460℃．在此高温下，夜晚岩石也泛着暗弱的红光．在那里连锌都会熔化，难怪最初几次无人驾驶的登陆器着陆后，无线电系统总不能正常工作．金星7号也只坚持正常工作了23分钟．后来登陆器的设备性能改进了，工作时间最多达到2小时左右．

金星大气的主要成份是CO_2（体积占96.4%），此外有N_2(3.4%)，SO_2(0.02%)，水汽(0.14%)等，表面的大气压高达90 atm．在高度从45到60 km之间的上空长年漂浮着一层黄色的H_2SO_4浓云，下面不断地下着酸雨．但是这雨是不会落地的，因为温度是那样高，雨滴在降到30 km高度之前早已蒸发干了．金星11和12号还观察到，云层下面一道道闪电连绵不断地掠过长空，给"大地"投下一片诡谲的色调．那里恐怖的景象，活像欧洲中世纪描绘的"地狱"．

金星表面是否从来就这样热？诚然金星离太阳比地球近，它接收的日光辐照是地球的1.9倍．但是它那浓密的大气和云层有更高的吸收率和反射率，直接到达金星表面的阳光还不到1%，人们设想，那是一次失控的温室效应造成的．很可能在金星的早期历史中，它的表面与现在的地球差不多，温度没那么高，大气没那

么稠密，还有相当多的液态水．只不过它离太阳稍近了一点，大量的水蒸发到大气中，使大气对红外辐射变得不透明，温室效应使温度越来越高．在高温下岩石里的 CO_2 被大量烘焙出来，进一步加强了温室效应．如此的恶性循环发展下去，直至岩石中的 CO_2 全部被驱赶到空气中为止，形成今天金星的浓厚大气层．有人估计，金星上和地球上储存的 CO_2 总量是差不多的，不过金星的 CO_2 全部在大气里，而地球的 CO_2 大部分在岩石中．

在 90 atm 的金星大气中水汽的分压只有 0.14 atm，而地球表面的海水若全部蒸发，可形成 150 atm 的水汽．金星上的水原来就这么少吗？1978 年美国先驱者-金星(Pioneer-Venus)探测器的测量结果表明，金星上水汽中重水的丰度高于地球上的 100 倍．这表明，阳光中的紫外线曾把金星上的水分子解离成氢和氧，重水分子解离成氘和氧．质量小的氢原子大量挣脱金星的引力而逃逸，剩下的氘与氧基重新结合为重水．这就是说，原初的金星上水比现在多得多．地球之所以免遭此厄运，原因有二：一是它离太阳稍远，有更多的水未蒸发；二是不知何故在地球的大气中较早地形成了一个臭氧层，把波长在 3000 Å 以下①的紫外线大部分吸收掉．保护了水分子免遭光化解离．对地球上的生命而言，上述第二点尤其重要，因为臭氧层不仅为地球保存下来足够数量的液态水，而且使发源于水中的生命能迁徙到陆地上来．否则阳光中的紫外线会使生物机体中的碳水化合物大量解离，它们根本无法生存下去．

火星(Mars)和金星一样，也是地球的近邻，不过它的轨道比地球大 1.5 倍，它在地球的外侧．火星的自转周期几乎和地球一样，是 24 小时 37 分．其赤道与轨道面的倾角为 24°，故季节效应

① 第三章§4 中曾指出，强共价键结合能的典型数量级为 100 kcal/mol，这折合 4.4 eV，相应的光子波长差不多就是 3000Å．

和地球一样明显. 长期以来，人们以为火星的表面环境与地球最相似. 在地面上倍率不特别高的望远镜中人们都可观察到，火星的南北极各有一白色的极冠，它们随着季节而消长. 火星表面的纹理和色调也随季节变化着，这些特征曾被认为是存在厚密植被的证据. 1877 年意大利天文学家 G. Schiaparelli 报道，在火星表面有许多纵横交错的"canali"，这个意大利字的意思相当于英文的 channel(河道)，不幸的是，新闻界把它误解为 canal(运河)而大肆渲染，推测火星上有智慧生物存在，挖掘了这些运河以灌溉干旱的土地. 后来不少有声望的天文学家也卷进去了，公开展示了他们根据自己的观察画下来的运河详图；但另外一些天文学家则说看不到这些运河. 有一点是肯定的，即这些"运河"始终拒绝在天文学家拍摄的照片上显影. 这场争论一直延续到空间时代的来临. 1965 年水手 4 号和 1969 年水手 6 号、7 号火星探测器发回大量的录相资料表明，火星上根本没有什么"运河". 过去的传闻是心理作用造成的，人们常把一片杂乱无章的特征下意识地组成某种有含义的格局. 当偏见太强时，我们往往在欺骗自己.

火星是除金星外另一个有人类派遣的登陆器造访过的行星. 1975 年美国发射的海盗(Viking)1 号和 2 号登上了火星. 它们的探测结果表明，火星表面的大气压只有 0.008 atm，火星大气的组成是 CO_2 体积占 95.6%，N_2 占 2.7%，Ar 占 1.6%，O_2 占 0.1%，而水汽的含量极微. 北半球夏天白昼的温度约 $-10°C$，夜间可降到 $-85°C$；在冬季，白昼的最高温度 $-85°C$，夜间 $-125°C$.

火星上的大气为什么会消失？主要原因看来是它小了一些. 火星的半径为 3389 km，差不多是地球的一半；密度为 3.86 g/cm^3，和我们的月亮差不多，比地球的密度小得多；总质量只有地球的 10.8%，从而表面的引力只有地球的 36.3%. 再者，阳光中的紫外线对火星的原始大气也要起光解作用，把可能存在的 CO_2，水汽

和 N_2 分子解离为较轻的原子. 这种过程在地球的上层大气里同样发生，并促使游离的氧原子结成臭氧分子. 然而弱得多的火星引力却管束不住那些高能的原子，在漫长的岁月里，火星的大气大部分跑掉了.

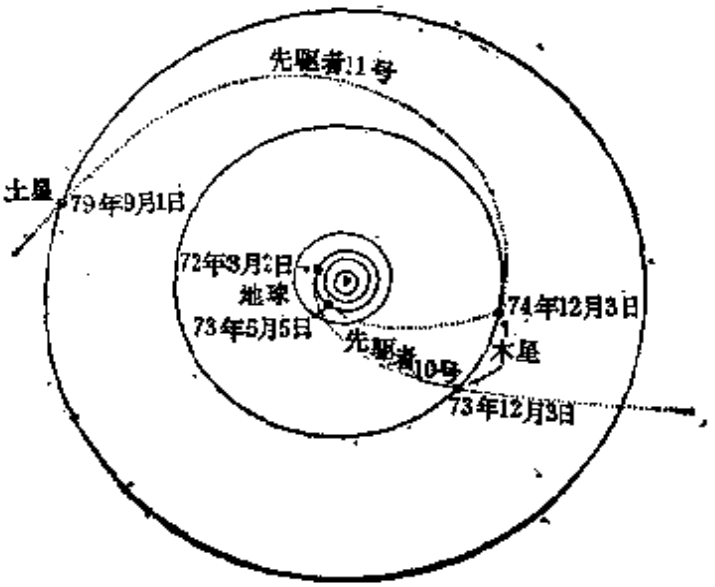
火星的大气如此稀薄，液态水的存在就没多大希望了. 当然这并不是说火星上缺水，显然，在白皑皑的极冠里包含了大量的固态水，即冰雪. 在北极，夏季的温度是 -68°C，南极的夏季温度则为 -110°C. 南北的不对称，可能是因火星轨道有较大偏心率(=0.093)，致使它在北极的夏天里比在南极的夏天离太阳近得多. 在如此低温下，极冠中的水是长年冻结的. 据估计，若极冠里的冰突然全部融解，整个火星表面将被数米深的海洋淹没. 极冠中随季节消长的部分，是 CO_2 结成的干冰. 冬季干冰的厚度达数米，夏季约有 20% 蒸发到大气中. 火星上水的储量决不止极冠里这一点，恐怕在火星的整个外壳(crust)内充满了冻土. 据估计，若这些冻土突然全部融解，火星上海洋的深度将不是数米，而是 30—300 米. 在水手 9 号和海盗号探测器拍摄的照片上可以看到，火星表面有些地方有干涸的河道或洪水冲刷过的迹象. 河道可能是 40 亿年前火星大气尚较稠密时期的遗迹，洪水是由火山爆发和陨石撞击引起的，一时间冻土里的水大量融解，漫溢横流. 总之，当前火星上存在液态水的状况只能是暂时的. 上文说金星的现状由失控的温室效应所致，火星恰好相反，其现状是失控的冰河作用(runaway glaciation)造成的.

火星有一对不大的卫星，它们只有一个小城市那样大：火卫一(Phobos)长 27 km，厚 20 km；火卫二(Deimos)长 15 km，宽 11 km. 二者都不是球形，故而也可以说，这是两块大岩石.

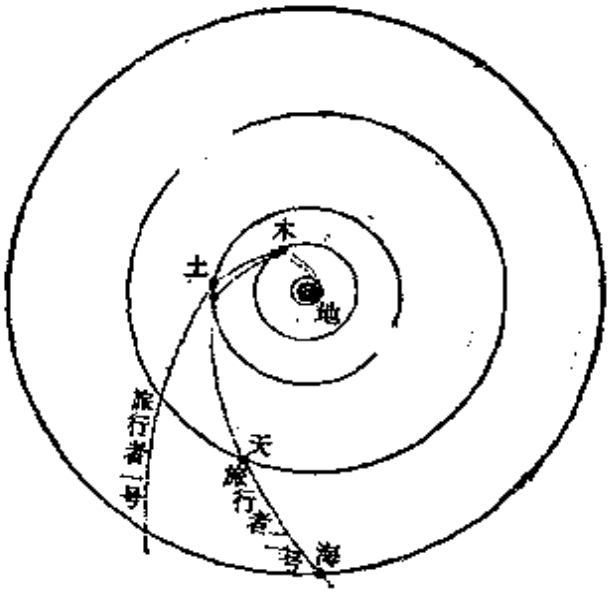
2. 类木行星(Jovian Planets)

与固态的类地行星不同，太阳系外部的类木行星基本上由气

态和液态物质组成. 对外行星的主要探测情况如下：分别在 1972 和 1973 年美国发射先驱者 (Pioneer)10 号和 11 号空间飞行器，前者只飞临木星上空，后者途经木星折向土星，最后两者都飞出太阳系(图 4–16*a*). 1977 年美国又发射了旅行者 (Voyager)1 号和 2 号宇宙飞船，前者只探测了木星和土星，后者途经木星、土星后飞临天王星和海王星(图 4–16*b*).



(*a*) 先驱者号



(*b*) 旅行者号

图 4–16　对外行星探测的飞行器轨道

木星(Jupiter)是太阳系中最大的行星，在太阳系中除太阳外它的质量占了35%，其质量为地球的318倍，但只有太阳质量的0.1%．木星的体积更大，超过地球的1300倍，故其密度比内行星小得多，只有1.4 g/cm³．具有这样低的密度，其主要成份只能和太阳一样，是氢和氦．木星表面是一层相当稠密的湍动气体，其中按质量氢占81%，氦占19%，此外有微量的甲烷(CH_4)，氨(NH_3)，水汽，磷化氢(PH_3)，锗化氢(GeH_4)，乙烷(C_2H_6)，乙炔(C_2H_2)等．大气中还漂浮着浓云，呈现出红、棕、蓝、白等丰富色彩和花纹．木星表面花纹的主流是平行其赤道的一系列亮带(zone)和暗带(belt)(见图4–17)，前者是上升的热气流，后者是下降的冷气流．最惹人注目的是中心在南纬20°的"大红斑 (Great Red Spot)"，它横跨5万千米，是类似于地球上飓风的大气旋．但木星表面大气的花纹稳定得多，大红斑已被人类观察了三百多年，据信这是某种形式的耗散结构．木星外形是扁的，是很快的自转所致，赤道部分的自转周期为9小时50分，极区转速小1/120．

天文学中有个看法：人们对遥远恒星内部的了解大大超过了对我们的近邻——太阳系中的行星．这是因为恒星炽热，它们发出各个波段的电磁辐射(甚至粒子流)，为我们带来大量的信息．此外，恒星处于气态，其结构和规律比较简单．与之相反，行星是冷的，不发光，而且内中是固体，单靠表面的观察，很难推断其内部的构造．就连我们所在的地球，情况也好不了许多，我们对其深部结构，知道得并不确切．不过类木行星的情况比类地行星情况稍好一些．木星中心是否有个固体的核芯？目前尚不能完全肯定，不过可以肯定它的绝大部分处于气体和液体(流体)状态．我们不妨忽略其自转，暂时建立一个流体静力学的模型．

如图4–18，考虑球体中半径从r到$r+dr$的一薄层物质的平衡：

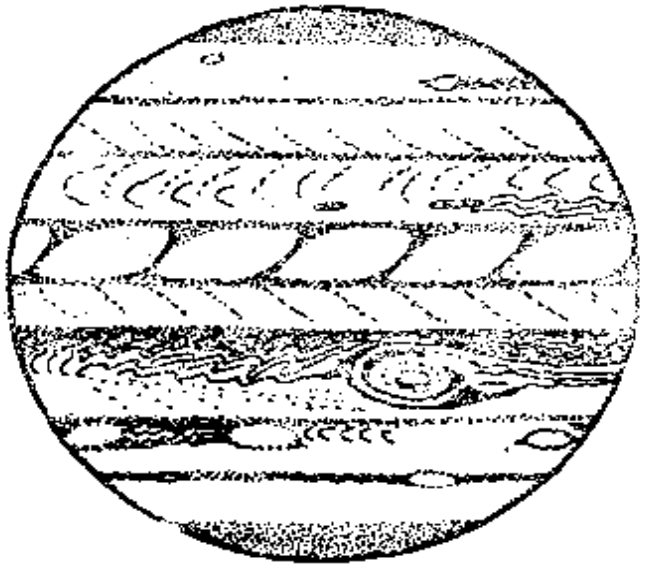


图 4-17　木星

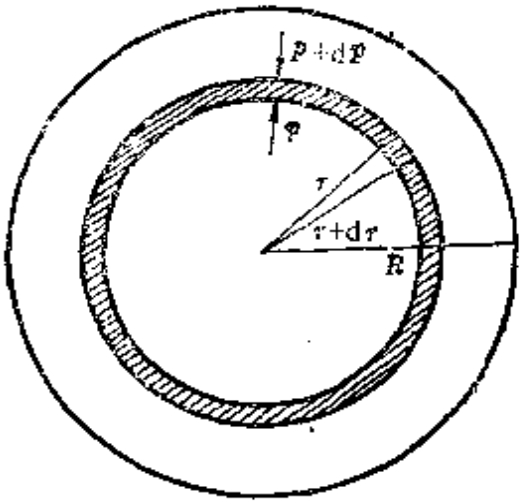


图 4-18　星体内部的压力

$$\mathrm{d}p\cdot 4\pi r^2=-\frac{G\rho(r)M_r}{r^2}\cdot 4\pi r^2\mathrm{d}r,$$

或

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}=-\frac{G\rho(r)M_r}{r^2},\tag{4.24}$$

式中 p 是压强，$\rho(r)$ 是半径为 r 处的密度，M_r 是半径为 r 的球内的总质量：

$$M_r=\int_0^r 4\pi r'^2\rho(r')\mathrm{d}r',$$

或写成

$$\frac{\mathrm{d}M_r}{\mathrm{d}r}=4\pi r^2\rho(r).\tag{4.25}$$

欲解(4.24)和(4.25)两式，需知 p 和 ρ 的关系(物态方程)，我们把它写作多方(polytropic)的形式：

$$p=K\rho^{\gamma},\tag{4.26}$$

这里 K 是个待定的比例系数．选不同的多方指数 γ，我们可得不同的模型．例如选 $\gamma=1$ 得等温理想气体模型，$\gamma=5/3$ 是非相对论性费米气体模型，$\gamma\to\infty$ 相当于密度均匀的不可压缩流体模型．

最后这个模型相当于取平均密度 $\bar{\rho}$ 代替 $\rho(r)$，此时(4.25)和(4.24)可直接积分，得 $M_r=4\pi r^3\bar{\rho}/3$ 和

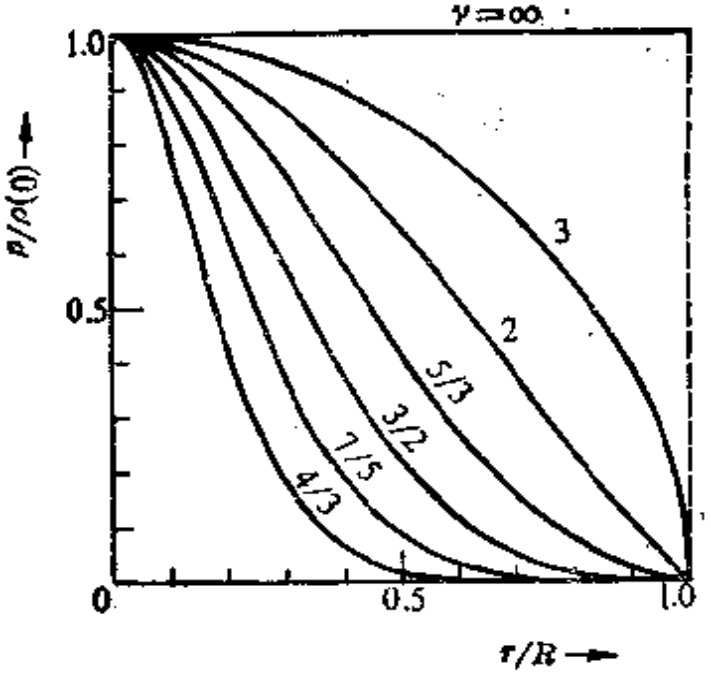
$$p_{\text{均}}(r)=\frac{2\pi}{3}G\bar{\rho}^2(R^2-r^2), \tag{4.27}$$

从而中心压强 $p_{\text{均}}(0)=(2\pi/3)G\bar{\rho}^2R^2$. 用木星的数据 $\bar{\rho}=1.33\,\text{g/cm}^3$, $R\simeq7\times10^4\,\text{km}$ 代入，得 $p_{\text{均}}(0)\simeq1.20\times10^7\,\text{atm}$. 显然星体的密度不全是均匀的，这个数值估计偏小了，但对于非均匀情形，除 $\gamma=2$ 外，式(4.24)是非线性的，只能用数值法求解了. 图 4-19a、b 分别给出不同 γ 值的密度和压强的径向分布，表 4-2 给出不同 γ 值的中心密度和中心压强. 举例来说，若取 $\gamma=2$，则 $\rho(0)=3.29\bar{\rho}\simeq4.6\,\text{g/cm}^3$, $p(0)\simeq3.29p_{\text{均}}(0)\simeq3.95\times10^7\,\text{atm}$, 数值都比均匀情况大许多倍.

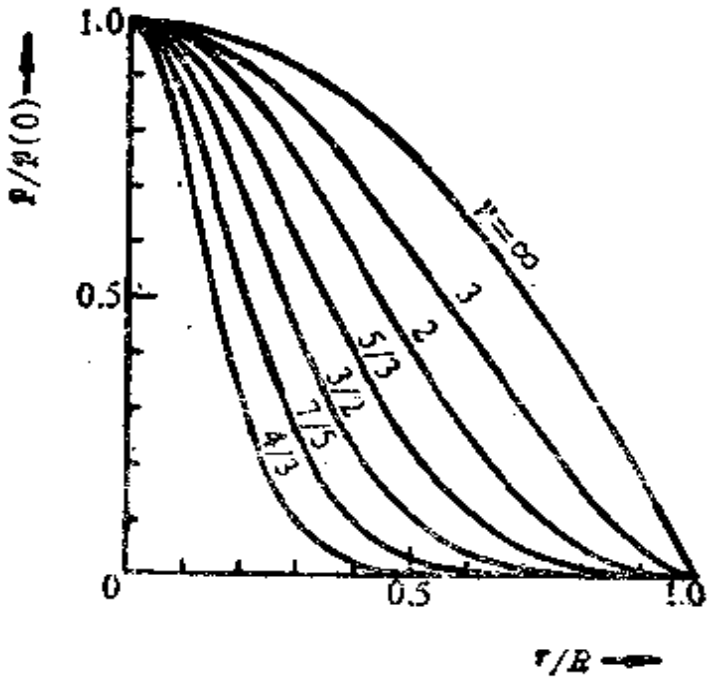
表 4-2 星球的中心密度和中心压强

多方指数 γ	$\rho(0)/\bar{\rho}$	$p(0)/p_{\text{均}}(0)$
3	1.84	1.78
2	3.29	3.29
5/3=1.67	6.00	6.46
3/2=1.5	11.40	13.73
7/5=1.4	23.41	32.76
4/3=1.33	54.21	92.64

按先驱者号和旅行者号探测器发回来的数据可建立起一个较为实际的木星模型. 这理论模型认为，除表面很薄一层是气体外，木星体内绝大部分是液态氢和液态氦的混合物. 在某个深度(譬如说 $3\times10^5\,\text{km}$)以上的氢处于分子液体状态，在此深度以下，压强大于 $3\times10^6\,\text{atm}$，温度高达 11000℃，液体处于金属氢状态. 据估算，此金属氢层的底部压强为 $3.6\times10^7\,\text{atm}$，温度为 19000℃、它的下面很可能有一个由较重物质(金属、硅酸盐、甲烷、氨、冰等)组成的小核(占木星总质量的 9%).



(a)



(b)

图 4-19　星球的密度和压强的径向分布

例题 10　设太阳为一团理想气体，试用式(4.27)估算它的中心温度．这温度能点燃热核反应吗？对于木星情况如何？

解　按理想气体状态方程，均匀密度模型星体的中心温度为

$$RT(0)=\mu p(0)/\bar{\rho},$$

式中 R 为气体常数，μ 为摩尔质量．若只估算数量级，对于太阳和木星，都可取 $\mu\simeq 1\,\mathrm{g/mol}$(即认为大部分是氢原子)．利用式(4.27)，取其中 $r=0$，得

$$RT(0)=\frac{2\pi}{3}\mu G\bar{\rho}R_{星}^{2},$$

式中 $R_{星}$ 为星体半径．

对于太阳，$\bar{\rho}=1.4\,\mathrm{g/cm^3}$，$R_{\odot}=7\times10^{5}\,\mathrm{km}$，得 $RT_{\odot}(0)\sim10^{5}\,\mathrm{kcal/mol}$，折合 $T_{\odot}(0)\simeq5\times10^{7}\,\mathrm{K}$，这足以点燃热核反应．

对于木星，$\bar{\rho}=1.33\,\mathrm{g/cm^3}$，$R_{木}=7\times10^{4}\,\mathrm{km}$，得 $RT_{木}(0)\sim10^{3}\,\mathrm{kcal/mol}$，折合 $T_{木}(0)\simeq5\times10^{6}\,\mathrm{K}$．温度太低了，不能点燃核聚变．

木星表面单位面积上接收到的阳光辐射只有地球的 4%，从热量收支平衡来计算，它的等效温度应是 −165℃，1920 年以来人们就知道其实际等效温度比这数值要高，旅行者号测量的最新数据是 −149℃．理论计算表明，木星辐射的能量是它从太阳吸收的能量的 1.67 倍，这就是说，木星内部有一定的能源．木星的内部在强大的引力作用下缓慢地收缩，从而释放出一些热量来．从上面的例题看，虽然木星的成份和太阳差不多，但它的质量与恒星比毕竟太小了，引力压缩还不能"点燃"核聚变反应．所以人们说木星是一颗"失败了的恒星"．否则它率领它的 16 个卫星，就俨然组成一个小太阳系了．

木卫一、二、三、四是木星的最大的四颗卫星，木卫一(Io)和木卫二(Europa)的大小和地球的月亮差不多，前者稍大，后者稍小；木卫三(Ganymede)和木卫四(Callisto)比水星稍大，是太阳系中最大的卫星．这四颗卫星如此之大，伽利略早就观察到它们，故称伽利略卫星，这些卫星以及木星本身，成份的差别是很大的．木卫一是个不断喷发着岩浆的火山世界，木卫二、三、四的表面都是冰．

四颗卫星的外面几乎都没有大气.有趣的是,木卫二可能是太阳系中除地球外唯一有液态水的星球.在它表面的冰层下有个很深的"地下"海洋(水幔),敷盖着整个硅酸盐的内核.曾有人通过理论计算论证,这水幔很可能足够暖和,说其中有某种形式的生命,也不是不可以设想的.现已发现的16颗木星的卫星可均分为4组.最内的一组4个卫星很小,其中3个是被旅行者号发现的;外面的第二组即伽利略卫星.上述两组卫星的轨道近于圆形,平行于木星的赤道面顺行.再外面的第三组轨道偏心率都较大,与木星赤道面约成30°角,逆向运行.最外面一组卫星太小了,对它们的转动几乎一无所知.

土星(Saturn)是仅次于木星的第二大行星,它离太阳比木星几乎远一倍,也因高速自转(周期10.2小时)而变得有些扁.土星的质量只有木星的30%,平均密度是木星的一半($\bar{\rho}=0.71\,g/cm^3$),故而它更应是最轻的元素氢和氦为主组成的.木星的赤道面与轨道面夹角只有3°,而土星有27°,故土星上的季节效应颇为重要.与木星相似,土星内部也有分子氢和金属氢组成的幔(mantle)和一个硬的内核.据估计,土星内核的平均密度有$19\,g/cm^3$,含25%的金属,75%的冰、甲烷和氨.土星向空间散发的能量是它所接收阳光辐射的三倍,故它的内部也有可观的能源.不过它的引力收缩效应比木星弱得多,其能量来自氦与氢分离而向下沉积时释放出的引力势能.

土星的外表最壮观的是它那美丽的光环.早在1610年伽利略就注意到土星有许多"耳朵";1655年惠更斯已正确地把它描绘成与赤道共面的薄盘;17世纪意大利天文学家卡西尼(G.Cassini)设想它是由大量不相连的碎细物体组成;麦克斯韦用数学证明,在这个距离上引潮力会把任何较大的固体撕碎.据旅行者号的研究推断,土星环内颗粒大小的分布从数米到$1\,\mu m$,其成份是混有杂

表 4-3　土星光环半径

土　星　环	半径 r/R_s	土　星　环	半径 r/R_s
D 环	1.11—1.21	Encke 缝	
C 环	1.21—1.53		
B 环	1.53—1.95	F 环	2.2
Cassini 缝		G 环	2.33
			(非常弥散)
A 环	2.01—2.36	E 环	3.84—4.97

* 土星赤道半径(算到云层顶0.1 atm处) $R_s=60330$ km

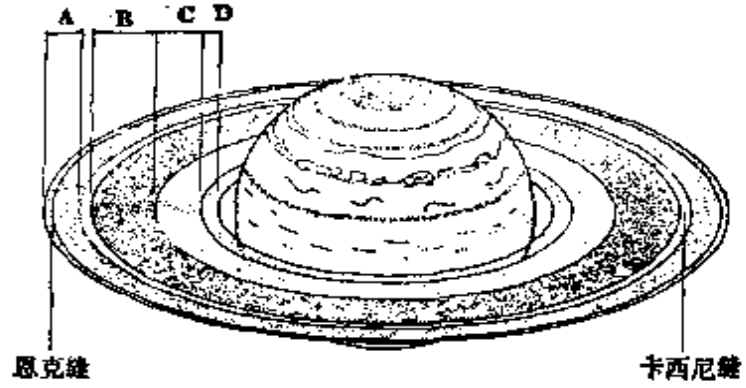


图 4-20　土星光环

质的脏冰雪.土星环就像一张唱片,其上有无数同心圆细缝.最大的是卡西尼缝(宽 3500 km),其次是恩克(Encke)缝(宽 320 km)(见图 4-20). 旅行者 1 号发现, 土星环的厚度小于 10 m. 表 4-3 给出各环的半径, 除 G、E 环外, 它们都落在洛希极限 $r_c=2.455R_s(\rho/\rho')^{1/3}$ 以内[参见式(4.19)]. 然而这公式是对液体而言的, 人们怀疑土星过去是否是一个形成过液体的卫星, 然后又被引潮力撕碎. 很可能是在原始土星形成之时, 外围尘埃物质集聚在赤道面附近一个扁平区内. 较远的物质后来集结成一颗颗卫星, 而洛希极限内的物质因受引潮力的阻止,始终不能凝聚起来.

现在发现的土星卫星有 17 个,最大的是土卫六(Titan),它比木卫三略小, 但大于水星. 土卫六的密度为 1.9 g/cm^3, 这也是土星的卫星中最大的, 由此可推测其成份是冰雪与岩石掺半. 土卫

大令人感兴趣的是它的大气和表面，旅行者1号的探测发现，土卫六的大气出人意料的稠密，表面大气压1.5atm，温度 −180℃．大气成份主要是 N_2(82—94%)，其余部分是甲烷和氩．在土卫六的大气中还检测到多种微量的其它有机化合物，如乙烷、乙炔、丙烷、乙烯、丁二炔(C_4H_2)、甲基乙炔(C_3H_4)、丙炔腈(HC_3N)、氰(C_2N_2)、氰化氢(HCN)等．这都是阳光里紫外线光化学作用的产物，从这个"有机化学实验室"可看到出现生物之前地球次生大气的雏型．据推测，在大气下土卫六的表面是液态甲烷的海洋，其中混有种类丰富的有机化合物．但因为那里实在太冷了，不可能有生命形成．

离土星最近的较大卫星是土卫一(Mimas)，它绕土星转动的周期恰好是卡西尼环缝外缘颗粒的两倍，它的引力产生的共振摄动作用把那里的质点向外拉，正是造成土星环上卡西尼缝的原因．

顺便说起，几世纪以来，人们一直以为九大行星中只有土星有环．1977年以来，人们发现，木星、天王星和海王星都有环，只不过没有土星环那样明显罢了．

天王星(Uranus)到太阳的距离差不多是土星的两倍，是太阳系中次于木星、土星的第三大行星．天王星的成份也与木星，土星相似，主要是氢和氦．天王星最特别的地方，是它几乎"横躺"在公转轨道面上，在它的一年(相当于地球的84年)内，太阳光轮流照射在它的北极和南极上(目前是它的南极处于昼半球)．在地面望远镜中曾看到天王星有5颗卫星，它们都在天王星的赤道面内近圆形的轨道上运行，卫星的自转轴与主星平行．正因为如此，1986年1月当旅行者2号造访天王星时，只能拍摄到这些卫星向阳的南半球，而背日的北半球完全处于黑暗之中．除对已知的5个大卫星进行了较详尽的考查外，旅行者2号新发现了天王星的10颗小卫星．

海王星(Neptune)到太阳的距离大于土星的三倍，它大小与天王星差不多，像是一对孪生兄弟，只是它的密度稍大．在望远镜里看去，海王星的色调偏绿，这是因其大气中除主要成份氢、氦外，尚含较多的甲烷．海王星的大气不像天王星那样平静，这里风云翻滚，旅行者 2 号在它的南纬 22° 处观察到一个"大黑斑"，这是和木星大红斑一类的持久气旋．

人们原已发现海王星有两颗卫星，1989 年 8 月 24 日旅行者飞临海王星时，又发现 6 颗新的小卫星(直径 50—200 km)．旅行者 2 号这次最大的收获，是对原有的海卫一(Triton)进行了较详细的考察，确定了它的半径为 1360 km，这小于地球的月亮，但它的质量却等于 1.9 个地球的月亮．也就是说，海卫一密度较大，其成份应包含相当多的金属和硅酸盐．海卫一具有极稀薄的 N_2 大气，南北极覆盖着固态氮和甲烷的极冠，那里的温度只有 37K．海卫一的表面呈现出许多火山活动的遗迹，加之它的成份与附近星体如此不同，人们怀疑它是位"异乡来客"．海卫一的奇特轨道似乎也说明这一点：其轨道面相对主星赤道面的倾角达 28°，却与主星绕日的轨道共面；此外，它绕主星的旋转是逆行的．

冥王星(Pluto)是太阳系最外的行星，它很奇特，难以归入类木行星的行列．对它半径的最新估计是 1500—1800 km(小于地球的月亮)，质量为 0.0015—0.0024 个地球，密度 0.4—1.0 g/cm^3．最特别的是它轨道偏心率(0.248)是太阳系九大行星里最大的，其近日点在海王星轨道以内(见图 4-21)，当前它正处在这个位置附近．人们只发现一颗冥卫(Charon)，正是它的存在，我们才得以较可靠地估计出其主星的质量来．冥王星如此之小，它的轨道又与海王星相交，有人认为它原是海王星的一颗卫星，而海卫一却可能是来自内太阳系的一颗小行星．一次小行星间的碰撞把它抛掷到一个偏心率很大的绕日轨道上，在另一次的偶然机会里走到海王星

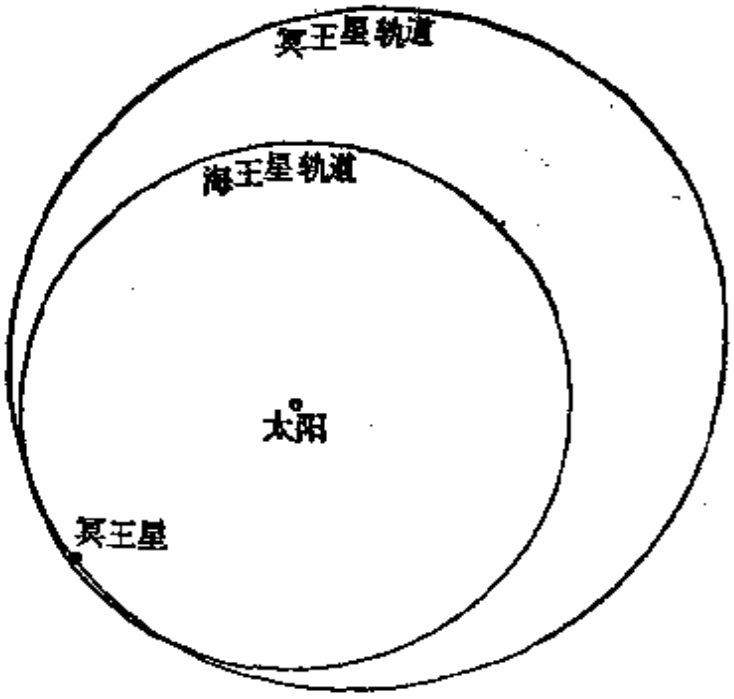


图 4-21　冥王星的轨道

附近，与它原有的卫星相碰，自己被反弹到绕海王星的逆行轨道上，这就是现有的海卫一，那颗原来的海卫碰撞后被抛射到绕日轨道上，成为现在的冥王星．现在的冥卫可能是那次碰撞时从主星身上撕下的一小块．

3．小行星带(asteroidal belt)

1766 年德国天文学家提丢斯(J. Titius)偶然发现一个数列：$(n+4)/10$，将 $n=0, 3, 6, 12, \cdots$代入，可相当准确地给出当时已知行星的轨道半径(参见表 4-4)．这件事起初未引起人们的注意，后来柏林天文台的台长波得(J. Bode)得知后将它发表了，乃为天文界所知．那时天王星尚未发现，提丢斯-波得定则对土星以内的所有行星(包括地球)的位置都描述得很成功，只是在 2.8 AU 处有个空档．1781 年天王星的发现进一步证实这公式有效，更激发了人们在土星和木星之间寻找这颗"缺失"行星的热情．1801 年西西里和尚皮亚齐 (G. Piazzi) 在例行的天文观测中偶然发现在 2.77 AU 处有个小天体，即把它命名为谷神星(Ceres)．其实它的

表 4-4 提丢斯-波得定则

提丢斯-波得数列	行星	实际位置(AU)
$\frac{0+4}{10}=0.40$	水 星	0.39
$\frac{3+4}{10}=0.70$	金 星	0.72
$\frac{6+4}{10}=1.00$	地 球	1.00
$\frac{12+4}{10}=1.60$	火 星	1.52
$\frac{24+4}{10}=2.80$	?	?
$\frac{48+4}{10}=5.20$	木 星	5.2
$\frac{96+4}{10}=10.00$	土 星	9.54
$\frac{192+4}{10}=19.6$	天王星	19.2
$\frac{384+4}{10}=38.8$	海王星	30.1
$\frac{768+4}{10}=77.2$	冥王星	39.4

半径只有500 km，算不得是颗行星. 1802年德国天文学家奥伯斯(H. Olbers)在同一区域内又发现另一小行星，随后命名为智神星(Pallas). 尔后数年，又有人发现另外两颗小行星——婚神星(Juno)和灶神星(Vesta). 到1890年确定了轨道的小行星数已达300有余，现在能用望远镜头拍摄下来的小行星有五十多万. 大部分小行星处在火星和木星之间，到太阳的平均距离是2.8 AU，其中半数的轨道在此数±0.25 AU的范围内. 大多数小行星的轨道是正常的：轨道面与黄道面的夹角仅几度，绕日顺行运转. 但也有少数例外，它们具有很扁的轨道，其中最令人关切的是那些轨道与地球轨道相交的小行星，它们统称阿波罗(Apollo)小行星. 轨道已查明的阿波罗小行星有28个，它们都很小(0.4—8 km). 估计阿波罗小行星的总数约1300. 与地球相撞的概率是25万年中

有一次.

许多小行星都不是球形的,道理很简单.在第三章§5内我们曾推导过一个地球上山高的极限公式(3.63)

$$h=\frac{\Lambda_m}{\mu g},$$

这里 Λ_m 和 μ 分别是岩基物质的摩尔熔解热和摩尔质量，g 是地球表面的重力加速度. 对于半径为 R、平均密度为 ρ 的一般星球来说，$g=4\pi G R\rho/3$,代入上式,得

$$\frac{h}{R}=\frac{3\Lambda_m}{4\pi G\rho\mu R^2}. \tag{4.28}$$

对于地球,$h/R\simeq 0.0023\ll 1$. 若 Λ_m,ρ,μ 的数量级差不多,则 h/R 反比于 R^2. 当一个星球的半径小到 $h/R\simeq 1$ 时，其表面允许的山高与星球的半径可达同一量级，这时仍认为星体呈球形就太勉强了. 令式(4.28)左端等于1,得星球半径的下限

$$R_c=\sqrt{\frac{3\Lambda_m}{4\pi G\rho\mu}}. \tag{4.29}$$

半径小于此限,星体可不呈球形.取类似地球的物质参量,得 $R_c\simeq 300\,\mathrm{km}$,小行星带中的小行星，以及大行星的那些较小的卫星，形状不规则的事实,印证了这个估算.

与土星光环相似，小行星带内也有许多缝. 最大的缝所在处绕日公转的周期恰是木星的两倍，这显然与这颗太阳系中质量最大的行星的摄动引起的共振效应有关. 此外，在周期与木星比等于 3:1, 4:1, 5:2, 5:3, 4:3 处也有一系列缝(称为 Kirkwood缝)，更进一步证明木星摄动的共振作用. 然而，在周期比等于 3:2处出现 Hilda 群(即该处小行星特别密集而不是稀少)，在 1:1 处有 Trojan 群. 同是共振作用，为何有此截然相反的效果?令人不解.

4. 彗星(comets)

由于彗星具有奇特的外观和不易预测的出没规律，古代包括我国在内的许多民族都把它看作不祥之兆. 1687 年牛顿提出，彗星是和其它天体(行星)一样在绕日轨道上运行的天体，它们遵从同样的天体力学定律. 哈雷(E. Halley)注意到，1682 年出现的彗星与 1607 和 1531 年的彗星极其相似，认为它们是同一天体，每 76 年出现一次，并预言它将在 1758 年再次来临. 当它于是年如期到来之后，人们心目中对彗星的恐怖与神秘感消失了. 回头再查阅古籍，发现对哈雷彗星每 76 年一次的记载可连续不断地追溯到公元前 240 年，其中我国古代史籍记载之完整，早已为举世所公认.

彗星与行星的重大区别之一，是它们轨道的偏心率都很大，即其近日点和远日点的距离相差甚远. 总的来说，彗星可分为短周期和长周期两大类. 短周期彗星的扁椭圆轨道完全处在冥王星以里的太阳系中，周期小于 200 地球年. 现在已知的这类彗星约 100 个，大部分都被记录两次以上. 其中最典型的就是哈雷彗星，其近日点在 0.587 AU 处(金星以里)，远日点差不多在海王星轨道处，轨道偏心率达 0.9672. 大多数短周期彗星是顺行的，轨道面相对于黄道面的倾角平均 12°，但约有 1/20 是逆行的，哈雷彗星即属此例，其轨道面倾角为 162.2°. 长周期彗星的轨道延伸到冥王星以外很远的地方，很难说它们的轨道是椭圆还是抛物线. 它们的周期可能达数千、甚至百万地球年，现已记录到的这类彗星约 500 个，但每个在整个人类历史中可能只出现一次. 在长周期彗星中，轨道顺行和逆行的大体上各半.

例题 11　彗星在近日点的速率比在此沿圆形轨道上运行的"行星"大几倍?

解　彗星轨道偏心率≃1，可设其轨道为抛物线. 故在近日点处

$$E_k=|E_p|,\ (E_k——动能,\ E_p——引力势能)。$$

对于沿圆轨道运行的“行星”，按位力定理，

$$E_k=\frac{1}{2}|E_p|.$$

故彗星速率比“行星”大$\sqrt{2}=1.4$倍。

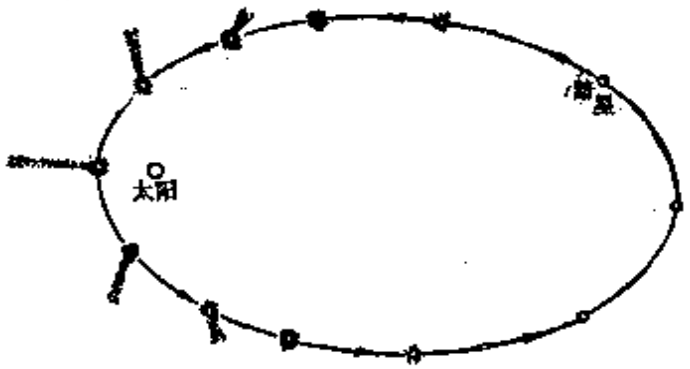


图 4-22　彗星绕日的一个周期

彗星的质量极小，其形状和大小随它们相对于太阳的位置显著地变化（见图 4-22）。彗星的结构主要由彗核(nucleus)，彗发(coma)和彗尾(tail)三部分组成(图 4-23)。1950 年 F. Whipple 提出彗星的“脏雪球”理论，认为彗核由一些易挥发物质(如水、CO_2、HCN、甲醛、甲烷、氨等)的冰组成，其中混杂着一些硅酸盐尘埃和岩石碎块。1986 年 2 月当哈雷彗星再次到达近日点时，苏联发射的一对“金星-哈雷彗星(Vega)”飞行器在离彗核仅八、九千米处穿过它。此外，日本和西欧也利用这次难得的机会发射了考察哈雷彗星的探测器。所有这些探测的结果都肯定了脏雪球理论。对彗发的探测也不出预料，其体积的 80% 是水汽，其密度只有地球海平面上空气密度的 3×10^{-12}，这相当于彗核的蒸发速度是 3×10^4 kg/sec，彗核附近水分子向外飞行的典型速率是 1 km/sec，彗发中除水外，最多的成分是 CO_2。哈雷探测器还在离彗核 10^6 km 处探测到 CO^+、CH^+、C^+、H_2O^+、H^+、C_2^+、OH^+、H_3O^+ 等离子和 OH、CH、C_2、C_3、CN、NH、NH_2 等自由基，这些无疑是阳光光化学作用的产物，人们猜测，在彗核里就有许多复杂的有机分子，包括那些

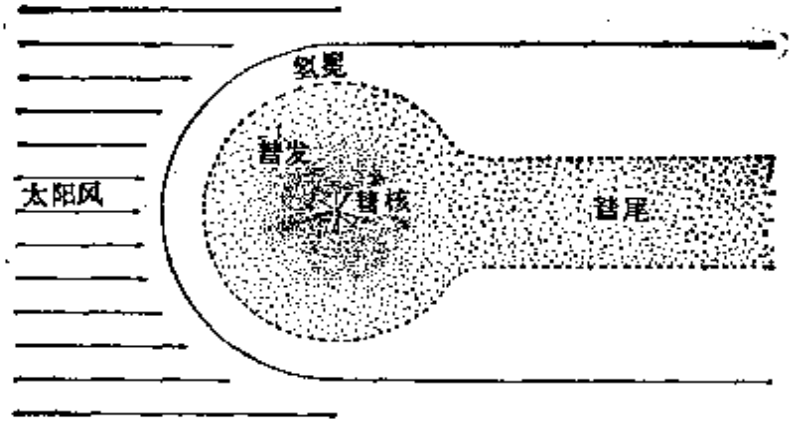


图 4-23　彗星的结构

与生命有关的碳氢化合物、氨基酸、醣、核酸等. 甚至有人假设，第一代生命不是在地球上产生的，而是彗星与地球碰撞时带来的，它们遇到这里的有利环境而孳生繁衍开来.

仔细的观测表明，彗尾实际上有两个(见图 4-24). 第一个永远沿着背离太阳的方向，随着到太阳的距离而消长. 这种彗尾由高激发态的气体离子组成，它们发着荧光. 第二个彗尾的指向稍落后于前者，它相当弥散而暗淡，由自己不发光的尘埃组成，只反射阳光.

彗星的周期是不太准的，例如哈雷彗星每次总迟到 4.1 地球日，也有的彗星提前到来. 据信这是由于彗星临近太阳时，挥发物从彗核的裂隙中喷出，施加一反作用力于彗核，对其轨道产生了摄动. 彗星每次通过近日点时，会有大量物质蒸发后被剥离，可以看到，一些彗星周期性地来临时，一次比一次暗淡，甚至突然消失. 所以相对于行星来说，彗星的寿命是比较有限的.

短周期的彗星寿命一般只有几千年，为了说明在太阳系存在的 47 亿年里总有与观测相符的那样多彗星，必须有持续不断提供新彗星的源泉. 据信，短周期彗星是长周期彗星与太阳系内的天体(特别是质量最大的木星)遭遇时转化而来的. 长周期彗星的远日

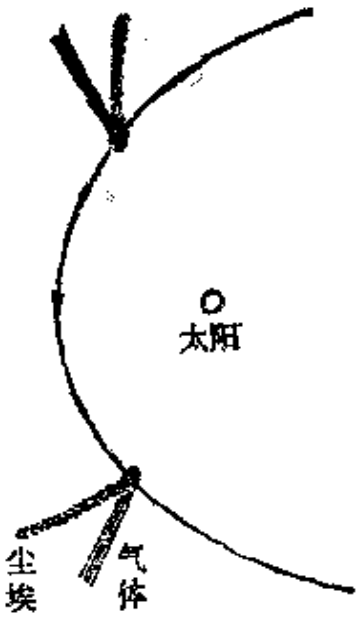


图 4-24　彗尾

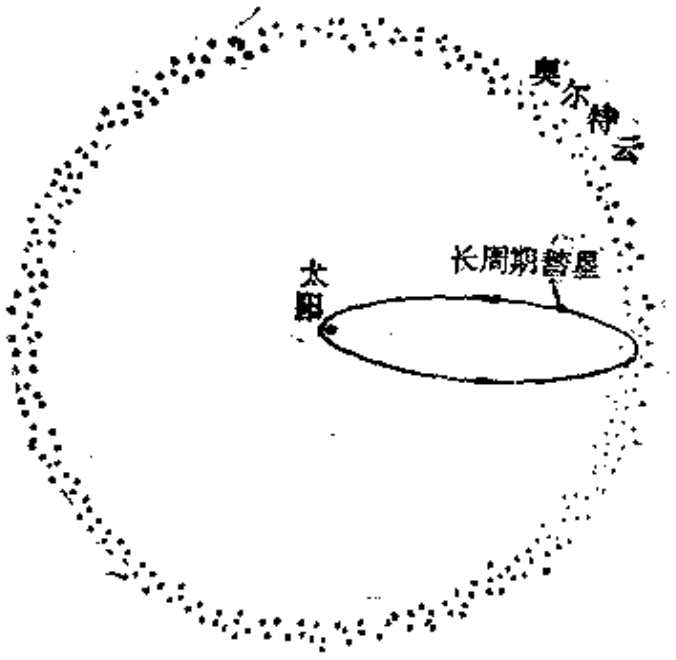


图 4-25　奥尔特云假说

点多在 5×10^4 AU 处，故 1950 年荷兰天文学家奥尔特(J. Oort)假设，在这个距离上聚集了一个由脏雪球组成的永久云层(后称"奥尔特云"，见图 4-25)．由于奥尔特云的半径已达离太阳系最近恒星的间隔的 1/10，毗邻恒星引力的摄动作用会偶尔触及其中个别"脏雪球"的轨道，把它们抛掷到太阳系内部来，形成长周期彗星．

1983 年美国古生物学家 D. Raup 和 J. Sepkoski 对地球上 2.5×10^8 年以来古生物资料进行统计分析后发现，在这段时间里至少发生过七次周期性的大规模物种绝灭事件(mass extinction)，绝灭率最高的一次在白垩纪末，物种绝灭达 70%(图 4-26)，恐龙从此在地球上消失了．事件发生的周期是 2.6×10^7 年，每次延续 2×10^6 年．前此，L. W. Alvarez 等人 1980 年在全球范围内发现了两层富铱的地质沉积物，其沉积年代与两次物种绝灭事件重合．此外，陨石坑形成的统计数据也表明有大体上一致的周期性．当

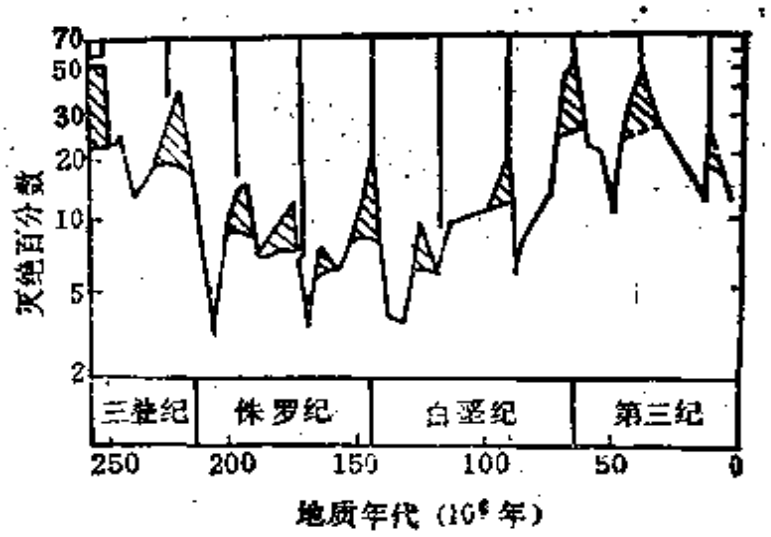


图 4-26　大规模物种绝灭

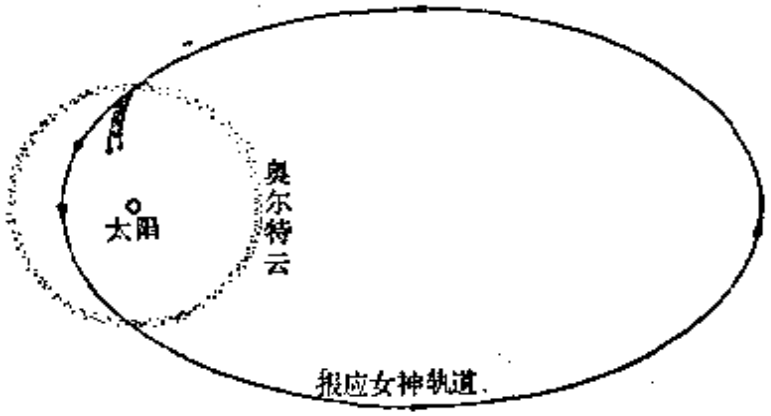


图 4-27　“报应女神”假说

前较有诱惑力的一种解释是太阳有颗伴星，它与太阳互绕的周期是 2.6×10^7 年(见图 4-27)。每当这伴星经过近日点时，必穿过奥尔特云，使其中一小部分星体脱离原来的轨道而进入太阳系，有的与地球相撞，形成陨石雨，使地球上尘埃蔽日，形成类似“核冬天”的灾难，地壳中铱的丰度比宇宙中小得多，陨石雨将相对来说富铱的物质带给地球，这便是富铱沉积层的来源，这位假设的太阳伴侣被命名为 Nemesis，她是希腊神话中专司因果报应的女神。

§3. 恒星和其它天体

1. 恒星(star)

恒星是指由炽热气体组成的、能自己发光的球状或类球状天体. 恒星并非不动，只是因为离我们实在太远，不借助特殊工具和特殊方法，很难发现它们在天球上的位置变化，因此相对于"行星"，我国古代把它们称做"恒星".

茫茫的宇宙之中，一颗颗的恒星是怎样形成的？一箱不均匀气体经过扩散，会变得均匀，这是人们熟知的现象. 在这个例子中，体系的时空尺度都很小，气体的质量也不大，万有引力不起明显的作用. 但在宇宙的演化过程中，引力将起主导作用. 只要某个局部区域由于涨落密度偶尔变得稍高一点，则这个区域内的引力也变得稍强一点，从而吸引着更多的物质到这里，形成更高的密度，相反，若某区域的密度偶尔变得稍低一点，则这个区域内的引力也变得稍弱一点，从而有更多的物质逃离这里，形成更低的密度. 所以，哪怕宇宙开初是均匀的，无结构的，它也会自发地生成非均匀、有结构的状态. 宇宙中各种尺度的结构(恒星、星系、星系团、超星系团)，就是这样在漫长的岁月里(10^9年量级)在万有引力的作用下形成的.

一旦在宇宙的弥漫物质中形成局部密度较高的引力中心，周围物质就会加速地向这里集中. 当密度增长几个量级之后，情况就不同了. 失去了的引力势能部分地转化为热能，气体的温度大大升高，压强(正比于密度与绝对温度的乘积)增长得更快. 终于在气体内部形成一个足以与自引力相抗衡的压力场，制止了物质继续向中心坍缩. 这样建立起来的平衡位形，叫做"星坯". 星坯在力学上是平衡的，但在热学上是不平衡的. 由于它的温度比周围高，它要向外辐射能量. 损失的能量靠进一步的坍缩以释放自身的引

力势能来补偿. 所以从较长的时间尺度看，星坯是不稳定的.

例题 12 (a)计算太阳自身的引力势能. (b)如果以太阳当前的总辐射率 $L_\odot$ 计算，这能量够维持多长时间?

解 (a) 太阳自身的引力势能

$$E_{势}=\frac{GM_\odot^2}{R_\odot}=\frac{6.7\times10^{-11}\,\mathrm{m^3/kg\cdot s^2}\times(2\times10^{30}\,\mathrm{kg})^2}{7\times10^8\,\mathrm{m}}=3.8\times10^{41}\,\mathrm{J}.$$

(b) 太阳可看作表面温度 $T_\odot=6000\,\mathrm{K}$ 的黑体，其总辐射率为

$$L_\odot=4\pi R_\odot^2\sigma T_\odot^4=4\pi\times(7\times10^{10}\,\mathrm{cm})^2\times5.67\times10^{-12}\,\mathrm{W/cm^2\cdot K^4}\times(6000\,\mathrm{K})^4$$
$$=4.5\times10^{26}\,\mathrm{W}.$$

式中 σ 为斯特藩常数. 于是能维持的时间为

$$\tau=E_{势}/L_\odot=0.8\times10^{15}\mathrm{s}=2.5\times10^7\text{ 年}.$$

很多证据表明，太阳稳定地保持今天的状态已有 5×10^9 年了. 相对于这个时间尺度来说，靠引力坍缩提供势能来维持的时间是短暂的.

星坯不是真正的恒星，恒星应有另外的充足能源——热核聚变能. 以太阳为例，其主要化学成分是氢(71%)和氦(26.5%). 在引力收缩阶段，它的温度逐渐升高. 当温度达到 $10^4\,\mathrm{K}$ 以上时，氢原子就充分电离了，形成等离子体. 当中心温度达到 $10^7\,\mathrm{K}$ 的数量级以后，热核反应开始进行，释放出大量能量.

例题 13 试根据式(4.27)和理想气体的物态方程估算太阳中心的温度.

解 太阳中心的压强与温度有如下关系

$$p(0)=\frac{2\pi}{3}G\rho_\odot^2R_\odot^2=\frac{\rho_\odot}{\mu}RT_\odot(0)$$

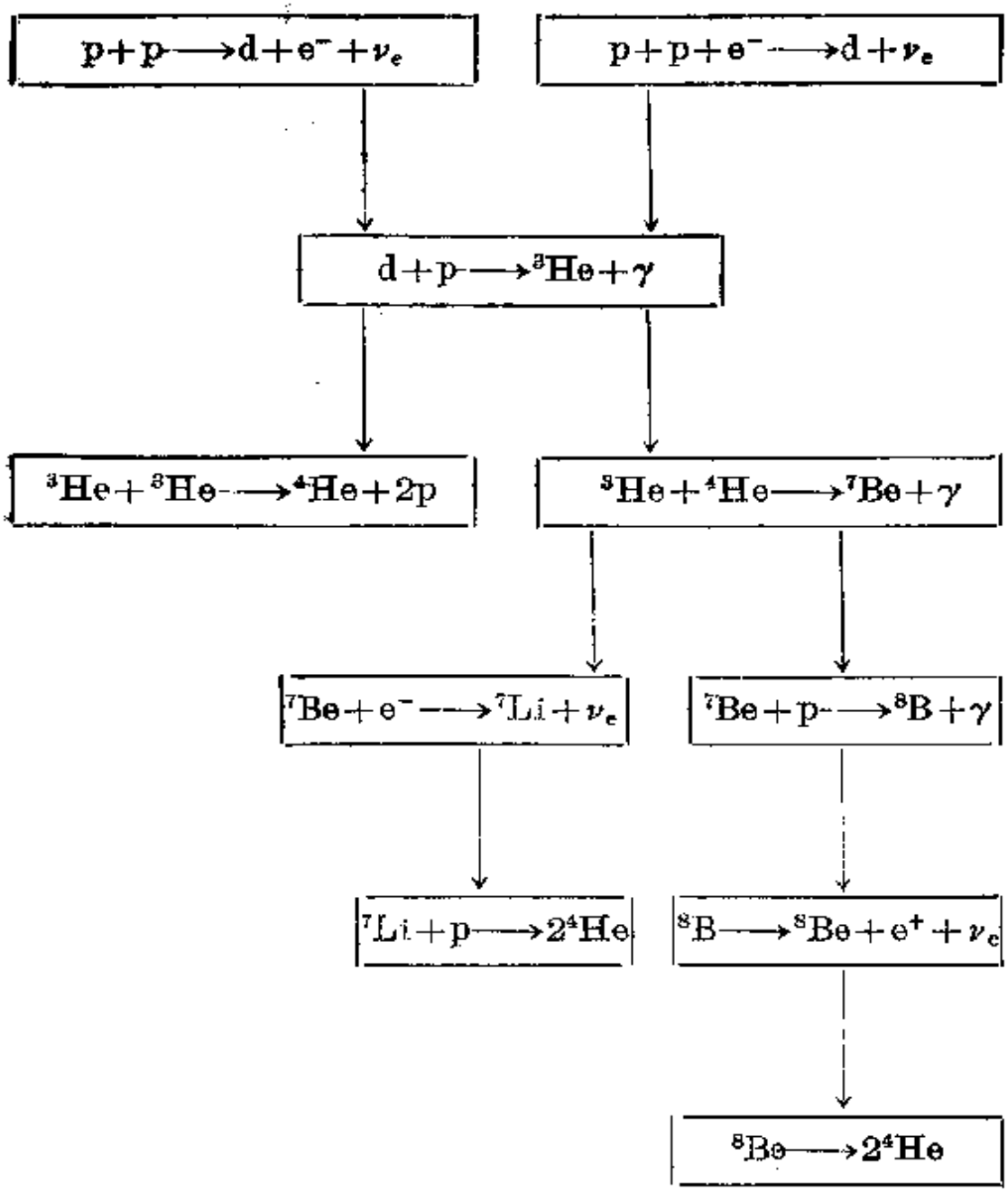
这里 $\mu\simeq1$(摩尔质量)，R——气体常数. 于是

$$T_\odot(0)=\frac{2\pi\mu}{3R}G\rho_\odot R_\odot^2$$
$$\simeq\frac{2\pi\times1\mathrm{g/mol}\times6.71\times10^{-11}\mathrm{m^3/kg\cdot s^2}\times1.4\mathrm{g/cm^3}\times(7\times10^8\,\mathrm{m})^2}{3\times8.3\mathrm{J/mol\cdot K}}$$
$$\simeq1.2\times10^7\,\mathrm{K}$$

由于没考虑自外而内密度递增，以上的估算还比实际低些. 可见，太阳中心的温度能点燃热核反应这一点是勿庸置疑的.

太阳里最有效的热核反应序列是 pp(质子-质子)循环，其主

要反应步骤如下：



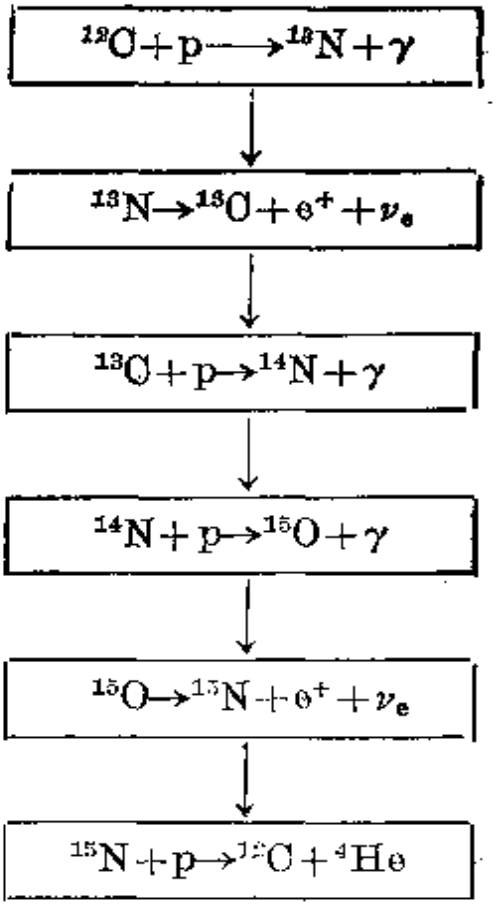
总效果相当于

$$4p\longrightarrow {}^4He+2e^{+}+2\nu_e,$$

释放的能量为 26.7 MeV，其中 25 MeV 用于加热，其余的由中微子 ν_e 带走.

太阳里另一个热核反应序列是 CNO(碳氮氧)循环，其主要反

应步骤为



此循环的净效果也是

$$4p\rightarrow{}^{4}He+2e^{+}+2\nu_e$$

^{12}C 在其中只起了催化剂的作用. 对于以上两种反应,1.5×10^{7} K 的温度是个分界, 比这温度低的(冷星), pp 循环比 CNO 循环重要; 高于这温度(热星)则反之. 太阳属冷星, 在其中 pp 循环为主, 所提供能量占 92%, 其余 8% 由 CNO 循环提供. 太阳和恒星的能源来自核聚变的理论. 主要是贝特(Hans A. Bethe)1938 年提出来的, 为此他获得了 1967 年诺贝尔物理学奖.

例题 14 将太阳中的全部氢核(质子)燃料用完, 能维持多长时间?

解 太阳质量 $M_\odot$ 中约有 70% 是氢, 燃掉每 4 个氢核可得 25 MeV 能量用于加热, 故太阳中的核能储备有

$$E_{核}=\frac{M_\odot\times70\%}{4m_p}\times25\,\mathrm{MeV}=8.2\times10^{44}\,\mathrm{J},$$

维持时间

$$\tau=\frac{E_{\text{核}}}{L_{\odot}}\approx\frac{8.2\times10^{44}\,\text{J}}{4.5\times10^{26}\,\text{W}}=1.8\times10^{18}\,\text{s}=6\times10^{10}\,\text{年}.$$

以上估计是不对的，因为并非太阳中的氢100%可供燃烧．较合理的估计是10%左右的氢可供燃烧．这样，$E_{\text{核}}$和τ都要减少一个数量级，即$\tau\sim6\times10^{9}$年，这与太阳现有的年龄5×10^{9}年差不多．也就是说，在过去的时间里，太阳里可资利用的核燃料已消耗了一半．

例题15　估计太阳每秒钟产生的中微子数．

解　太阳的光度$L_{\odot}=4.5\times10^{26}\,\text{W}=2.8\times10^{39}\,\text{MeV/s}$，在pp循环中每产生25 MeV用于加热能量的同时释放两个中微子，故单位时间放出中微子数为$2L_{\odot}/25\,\text{MeV}=2\times10^{38}/\text{s}$．在地面上中微子通量为$2\times10^{38}/\text{s}\div4\pi r_{\odot}^{2}\simeq7\times10^{10}/\text{s}\cdot\text{cm}^{2}$．

中微子不带电，它与通常物质间的相互作用极弱，从而很难探测．美国布鲁克海文国家实验室的戴维斯(R. Jr. Davis)小组利用装有4×10^{5}升的四氯化碳的钢制容器作中微子探测器，在1500 m深的一个矿井中对太阳中微子进行探测．经过十余年的实验，发现在地球上实际探测到的太阳中微子通量大约只有理论值的1/3．这便是著名的“太阳中微子失踪案”(1974年美国加州理工学院W. A. Fowler教授一篇文章的标题)．此案引起各种猜测，如中微子可能具有微小的静止质量等，时至如今，莫衷一是．由于这个问题关系到恒星内部核反应规律、中微子质量等重大基本问题，多年来世界上许多国家都在进行各种耗费巨大的试验，以期更准确地测量太阳中微子的通量．值得一提的是，1988年第24届国际高能物理会议上报道了一个消息，戴维斯小组发现，1987年的太阳中微子通量比以前年份高出一倍多，与太阳标准模型的估计较为接

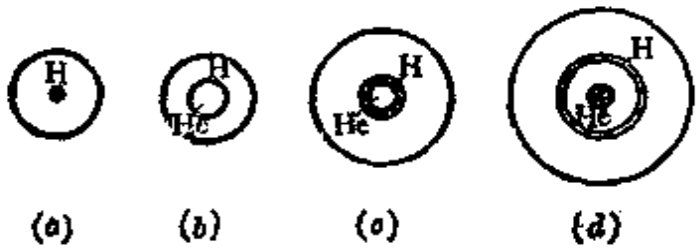


图4-28　恒星的演化

近，这是否意味着太阳中微子失踪案有希望解决，尚难以肯定.

恒星内氢的燃烧是在中心区进行的（图 4-28*a*），燃尽中心区的氢之后就熄火. 这时它的物质构成如图 4-28*b* 所示，中心区主要是燃烧生成物——氦，外围仍主要是未经燃烧的氢. 此后恒星失去能源，又开始在引力作用下收缩，引力收缩使恒星内部的温度全面升高. 再次点燃的首先不是中心的氦核(因其点火温度要高得多)，而是中心与外围之间的氢壳(图 4-28*c*). 在此阶段中心区处于高温状态但没有核能源，它将继续收缩. 而氢壳外的氢层将猛烈地膨胀和降温] 这时这颗恒星由正常状态[所谓"主序星(main sequence star)"] 变成了颜色红、体积和光度很大的红巨星 (red giant). 当此过程进行到一定程度，中心区达到氦点火温度(约 2×10^8 K)，恒星进入下一个燃烧阶段——氦燃烧阶段(图 4-28*d*)，重复着上面一系列过程.

例题 16　观测表明，对于主序星，光度 L 和质量 M 之间存在一条简单的经验规律(见图 4-29)：

$$L\propto M^{3.5},$$

这规律叫做恒星的"质光关系(mass-luminosity relation)". 一颗恒星的寿命

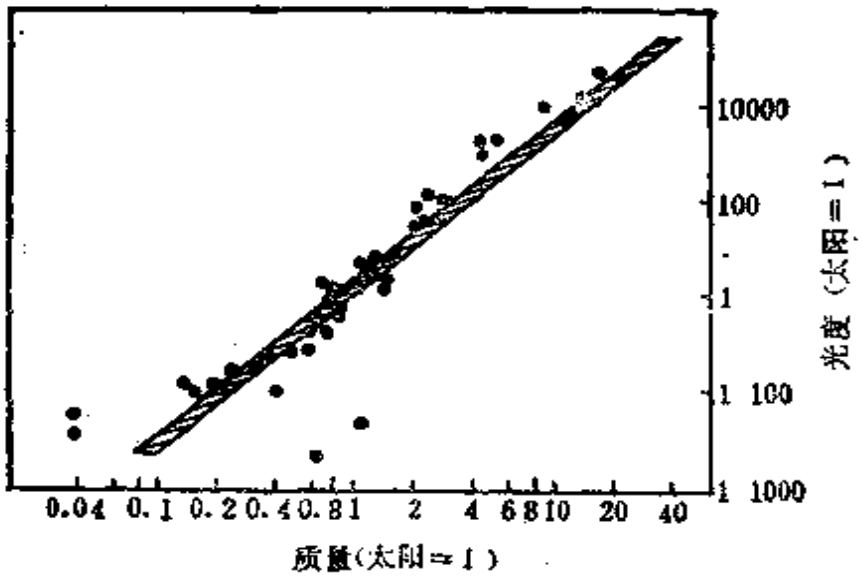


图 4-29　恒星的质光关系

$$\tau \propto \frac{\text{燃料的储备}}{\text{燃料的消耗率}}.$$

τ 与 M 应有怎样的依赖关系？假定太阳的寿命是 10^{10} 年，质量为太阳 4 倍的一颗恒星，寿命是多少？

解 燃料的储备 $\propto M$，燃料的消耗率 $\propto L \propto M^{3.5}$，故寿命 $\tau \propto M^{-2.5}$. 若 $M \to 4M$，$\tau \to 4^{-2.5}\tau = \tau/32$. 即恒星愈大，寿命愈短. 这是因为其温度愈高，热核聚变反应进行得愈快. 若 $\tau_\odot = 10^{10}$ 年，则该恒星的寿命 $\tau = 3 \times 10^8$ 年.

如果恒星的质量足够大，核燃烧将按下面的顺序一个一个阶段地进行下去. 氦燃烧的产物是碳，氦熄火后，在温度达到 10^9K 左右碳被点燃，在一系列核反应中生成 ^{16}O，^{20}Ne，^{23}Na，^{24}Mg，^{28}Si 等核. 碳熄火后，中心区温度继续上升，开始点燃氧，过程中新增添了 ^{31}P，^{32}S 等核. 继氧熄火之后，硅、镁等陆续燃烧，直到恒星中心区剩下的大部分是铁、镍等元素为止. 如第三章 §3 中指出的，在元素周期表内这里每核子的平均结合能最大（参见图 3-3），核聚变反应在此到达了终点站，恒星走入热死亡状态.

上面描述的核燃料相继点火和熄灭的过程，是对质量足够大的恒星而言的. 若质量不够大，核燃烧的过程将在某个阶段中止，直接进入热死亡状态. 大体说来，不同质量的恒星情况如下：

$M < 0.08M_\odot$（$M_\odot$ 代表太阳质量），氢不能点火，它将不经任何核燃烧阶段而进入热死亡.

$0.08M_\odot < M < 0.35M_\odot$，氢能点火，氦不被点燃，氢熄火后即结束核燃烧阶段.

$0.35M_\odot < M < 4M_\odot$(?)，氢熄火后，氦能正常燃烧，氦熄火后，碳不能点燃.

$4M_\odot$(?) $< M < 8-10M_\odot$，这是一个情况比较不清楚的范围.

$8—10M_\odot < M$，氢、氦、碳、氧、氖、硅等都能逐级点燃，最后在中心形成铁核，中心区外面是各种未烧尽的轻元素(Si、Mg、Ne、O、C、He、H)组成的壳层结构.

当一切核聚变燃料都耗尽了，引力就失去平衡，恒星将猛烈坍缩．在此之后，恒星的最终归宿是什么？理论分析表明，按照质量的大小，有三种不同的结局：白矮星、中子星和黑洞．

2．白矮星、中子星和超新星爆发

在没有外部核能源的情况下，恒星要达到某种平衡位形，必须找到足以抗衡引力的支撑力．抵挡引力坍缩的下一道防线是电子的简并压．

我们在第三章§5中曾估算过电子简并压．若不考虑某个数量级与1相差不远的数值系数，估算的步骤大体如下：

$$p_{简}=-\partial E/\partial V, \tag{4.30}$$

其中能量 $E=NE_k$，这里 N 是电子总数，E_k 是每个电子的平均动能，V 代表体积．在第三章里计算地球上物质内的电子简并压时，电子气是非相对论性的，在白矮星上物质的密度要大得多，从而费米动量可能达到相对论性的数量级，故而我们要区分开这两种情况下动能 E_k 与动量 P 之间的关系

$$\begin{cases}\text{非相对论性：} & E_k=P^2/2m_e, \qquad (4.31a)\\ \text{极端相对论性：} & E_k=Pc. \qquad (4.31b)\end{cases}$$

在两情形里动量 P 皆可用海森伯不确定度关系来估算：$P\sim\hbar/d$，这里 $d=n^{-1/3}$，$n=N/V$ 是电子的数密度．从上述各关系式可推导出电子简并压的定性表达式

$$\begin{cases}\text{非相对论性：} & p_{简}\simeq\dfrac{\hbar^2}{m_e}n^{5/3}, \qquad (4.32a)\\ \text{极端相对论性：} & p_{简}\simeq\hbar c n^{4/3}. \qquad (4.32b)\end{cases}$$

若用星体的半径 R 和总质量 M 来表示，$V=4\pi R^3/3$，$N\simeq M/2m_N$，这里 m_N 为核子质量（对于从 He 到 Fe 的大多数原子核，其中质子和中子差不多各占一半，亦即每两个核子对应一个电子），于是

$$n=\frac{N}{V}=\frac{3M}{8\pi m_N R^3}, \tag{4.33}$$

以及

$$\begin{cases}\text{非相对论性：}p_{简}\simeq\dfrac{\hbar^2}{m_e}\left(\dfrac{M}{m_N}\right)^{5/3}\dfrac{1}{R^5}\propto\dfrac{1}{R^5}, & (4.34a)\\ \text{极端相对论性：}p_{简}\simeq\hbar c\left(\dfrac{M}{m_N}\right)^{4/3}\dfrac{1}{R^4}\propto\dfrac{1}{R^4}. & (4.34b)\end{cases}$$

式(4.27)给出一个密度均匀球体内部与自引力抗衡所需的压强. 令该式中 $r=0$, $\bar{\rho}=3M/4\pi R^3$, 得球心处压强

$$p_{引}=p_{均}(0)\frac{3GM^2}{8\pi R^4}.$$

对于密度分布不均匀的星球，中心压强的数值比上式稍大. 这里我们也略去量级与1相差不远的数值因子，写成

$$p_{引}\simeq\frac{GM^2}{R^4}\propto\frac{1}{R^4}. \tag{4.35}$$

星体内部压力平衡的条件是 $p_{简}=p_{引}$. 如图4-30，作 $\log p_{简}$、$\log p_{引}$与 $\log R$ 的曲线. 按式(4.35)，$\log p_{引}-\log R$ 是斜率为 -4 的直线，随着参量 M 的增大而向上平移. 按式(4.34)，$\log p_{简}-\log R$ 曲线在 R 较大(密度小)时是非相对论性的，切线的斜率是 -5, 在 R 较小(密度大)时是相对论性的，切线的斜率渐近地趋于 -4. 这就是说，在非相对论性区里随着星球的收缩，$p_{简}$比 $p_{引}$增长得快，从而总可以有一个交点(平衡位形). 处在这种状态的星体，因其密度大，体积小，表面温度高，发白光，故称做"白矮星(white dwarf)". 白矮星内没有核能源，它是在收缩时升温、靠余热发光的. 随着余热散尽，其表面温度下降，它们将慢慢变成红矮星、黑矮星，直到看不见.

能演化到白矮星的恒星，其质量不能过大. 若质量超过一定的上限 M_0, 代表 $p_{简}$和 $p_{引}$的两条曲线将没有交点(见图4-30). 亦即，这时引力太大，电子简并压已无法抵挡，平衡不可能达到. 计算

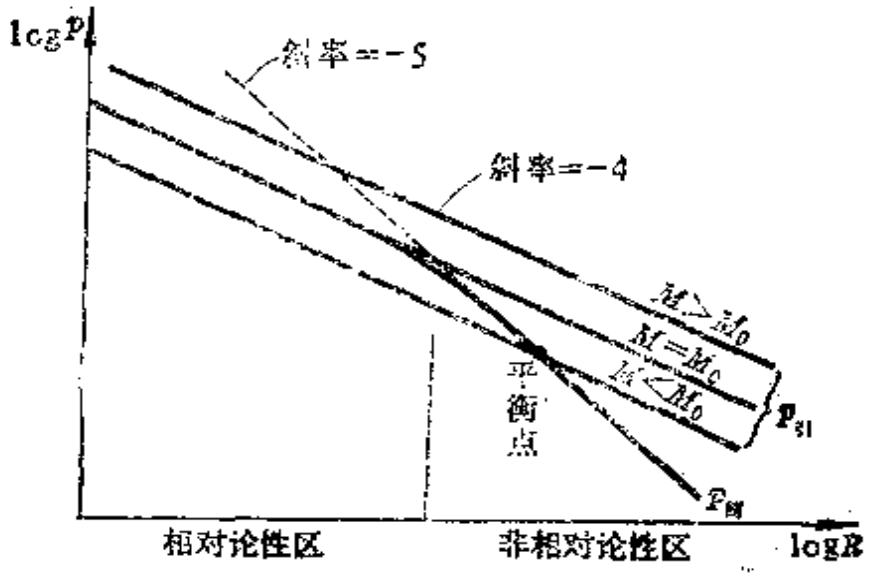


图 4-30　白矮星的 Chandrasekhar 极限

这一质量临界值的办法是令(4.345)和(4.35)右端相等

$$hc\left(\frac{M}{m_N}\right)^{4/3}\frac{1}{R^4}\simeq\frac{GM^2}{R^4},$$

从而解得 M 的上限

$$M_0\simeq\left(\frac{hc}{G}\right)^{3/2}\frac{1}{m_N^2}=3.69\times10^{30}\,\mathrm{kg}. \tag{4.36}$$

这相当于太阳质量 $M_\odot\simeq2\times10^{30}\,\mathrm{kg}$ 的 1.85 倍. 应注意，在上面的演算中我们始终没有认真对待公式里的数值系数，所以我们不能指望上面的结果给出 M_0 的准确数值，它最多只能代表 M_0 的数量级. 较精确的理论表明

$$M_0=1.44M_\odot. \tag{4.37}$$

此极限是印度学者钱德拉塞卡(S. Chandrasekhar)于 1930 年首先提出的，称为"钱德拉塞卡极限". 50 余年后，这项工作使他获得 1983 年的诺贝尔物理学奖金.

下面我们估算一下白矮星的密度. 白矮星密度数值的跨度很大. 取电子动量刚跨入相对论性领域的情形为典型，$P\simeq m_ec$，或者说 $n\simeq\lambda_e^{-3}$(λ_e 为电子的约化康普顿波长，参见第三章 § 3 里的分

析). 于是质量密度的数量级为[见(4.33)]

$$\rho\sim 2m_N n\sim m_N/\lambda_c^3\sim m_N(m_e c/\hbar)^3\sim 10^6\,\mathrm{g/cm^3},$$

这比地球中心的密度大 10^5 倍，从而其中心的压强 $p\propto(n)^{5/3}$，比地球中心的压强大$(10^5)^{5/3}\sim 10^8$ 倍，即 10^{13}—10^{14} atm.

当恒星的质量大于钱德拉塞卡极限时，引力坍缩将冲破电子简并压这道防线，它前面的再下一道防线是中子简并压.

实际上当恒星质量尚未达到钱德拉塞卡极限时，电子的费米动能已高到足以在物质内部引起逆 β 衰变

$$e^- + p \to n + \nu_e.$$

这过程使星体内的原子核由普通的核变为富中子核. 原子核中出现过多的中子. 就会使核结构变得松散. 当密度超过 $4\times10^{11}\,\mathrm{g/cm^3}$ 时，中子开始从原子核中分离出来，成为自由中子. 当密度达到 $4\times10^{14}\,\mathrm{g/cm^3}$ 时，物质中的原子核大部分瓦解，形成自由中子气体. 简并的中子气为引力坍缩设置了另一道，也是最后一道防线. 由中子的简并压与自引力抗衡形成的稳定位形，叫做"中子星".

中子星的质量也有上限. 若不考虑中子间的强相互作用，质量上限 M 的计算方法几乎与白矮星情形一样，唯一的区别是中子总数 $N=M/m_N$，而不是 $M/2m_N$，这相当于将式(4.36)中的 m_N 代之以 $m_N/2$，从而使 M_0' 比 M_0 大了四倍. 实际上没有那样大，现在普遍的看法是中子星的质量上限大约为

$$M_0'=2M_\odot, \tag{4.38}$$

称为奥本海默(J. R. Oppenheimer)上限. 密度的估算方法也和白矮星情形相似，只是把电子的康普顿波长换为中子的康普顿波长，即

$$\rho\sim m_N/\lambda_N^3=m_N(m_N c/\hbar)^3\sim 10^{16}\,\mathrm{g/cm^3},$$

这密度比正常的原子核密度还大.

1932 年发现中子后不久，朗道(J. Л. Ландау)即提出由中子组成致密星的设想. 1934 年巴德 (W. Baade) 和兹威基(F. Zwicky) 也提出了中子星的概念，并指出中子星可能产生于超新星爆发. 1939 年奥本海默和沃尔科夫(G. M. Volkoff)通过计算建立了第一个中子星的模型.但真正在观测上找到中子星,却发生在几乎三十年之后.

1967 年 10 月，英国剑桥的一位研究生贝尔(J. Bell)偶尔发现一个奇怪的射电源，它每隔 1.337 秒发出一个脉冲讯号. 讯号的周期是如此稳定，贝尔和她的导师休伊什(A. Hewish)曾以为他们可能和某种外星文明接上了头，从而最初为这类射电源所取的代号是 LGM，意思是"小绿人 (Little Green Men)". 后来大家都认识到，事情没有那么浪漫，这类天体被定名为"脉冲星(pulsar)". 脉冲星的特点是脉冲周期短，且周期高度稳定. 多年来人们认为周期最短的脉冲星是蟹状星云中的中心星 PS0531，其周期为 0.0331s，即每秒约转 30 次. 脉冲星周期的年变化不超过 10^{-6}s. 1982 年人们发现了一颗更为奇特的脉冲星，称为 PSR 1917+214,其脉冲周期竟短到 1.56 ms,周期的增长率只有 10^{-19}，即年变化不超过 5×10^{-9}s，比最准确的原子钟的精确度还要高 5 个数量级.

脉冲星发出周期这样稳定的脉冲辐射，这意味着那里一定进行着某种准确的周期运动. 下面分析两种可能性：自转和双星互绕.

例题 17 (a)一个球形物体以角速度 ω 转动，如果唯一阻止这物体离心瓦解的力是万有引力，这物体必须具有的最小密度是多少？用这个结果去估计蟹状星云脉冲星的最小密度. (b)如果该脉冲星的质量大约为一个太阳的质量，该星可能的半径最大是多少？(c)事实上它的密度接近于核物质的密度，它的半径是多少？

解 (a) 不瓦解的条件为

$$\frac{GM}{R^2} > R\omega^2, \quad \left(M = \frac{4\pi R^3\rho}{3}\right)$$

或

$$\rho \geqslant 3\omega^2/4\pi G. \tag{4.39}$$

此条件与半径无关. 以 $\omega = 2\pi \times 30\,\mathrm{s}^{-1}$ 计算, 得密度的下限①

$$\rho_0 = \frac{3\omega^2}{4\pi G} = 1.3 \times 10^{11}\,\mathrm{g/cm^3}.$$

这表明, 脉冲星不可能是高速自转的白矮星, 因为白矮星的密度只有 10^6—$10^8\mathrm{g/cm^3}$, 若以这样大的角速旋转, 离心力早把它撕裂了. 理论中设想的中子星倒有可能, 因为它们的密度远大于 $10^{11}\,\mathrm{g/cm^3}$.

(*b*) 按 ρ_0 计算, 星体半径的上限为

$$R_0 = \left(\frac{3M_\odot}{4\pi\rho_0}\right)^{1/3} = 1.5 \times 10^3\,\mathrm{km}.$$

(*c*) 按核密度 $\rho_N = 10^{14}\,\mathrm{g/cm^3}$ 计算, 星体的半径为

$$R = \left(\frac{3M_\odot}{4\pi\rho_N}\right)^{1/3} \simeq 17\,\mathrm{km}.$$

这是质量为 $M_\odot$ 数量级的中子星半径的大小.

以上例题的结果表明, 脉冲星可能是高速旋转的中子星.

例题 18 设一对双星的密度 ρ 和半径 R 彼此一样, 以周期 T 围绕共同的质心相互绕转. 求它们密度的下限.

解 设双星中心间距为 r, 按照开普勒第三定律

$$T^2/r^3 = 4\pi^2/G\mu,$$

这里 $\mu = M/2$ 是约化质量, $M = 4\pi R^3\rho/3$. 代入后得

$$(r/R)^{3/2} = T(G\rho/6\pi)^{1/2},$$

r 的最小值是 $2R$, 这相当于双星表面密度. 于是

$$T(G\rho/6\pi)^{1/2} > 2^{3/2},$$

或

$$\rho > 48\pi/T^2G. \tag{4.40}$$

按 $T = 1/30$ 秒计算, 得密度的下限

---

① 在例题 17 中我们是用蟹状星云脉冲星的周期 0.033 s 来估计密度下限 ρ_0 的. 若用 PSR1917+214 周期的量级 1 ms 来估计, ω 大 30 倍, $\rho_0 \propto \omega^2$ 大 3 个量级, 这就达到了核密度 $10^{14}\,\mathrm{g/cm^3}$ 的量级. 看来 1 ms 已是中子星周期的下限, 转得再快, 中子星也会瓦解.

$$\rho_0 = 4S\pi/T^2G = 2\times10^{13}\,\mathrm{g/cm^3}.$$

从本题计算的密度值看，这对双星不可能是一对白矮星，只可能是一对中子星．然而进一步分析表明，如果中子星组成的双星周期短到1秒左右，引力辐射将非常强大，决不可能维持那样高度稳定的周期．所以脉冲星是中子双星的可能性应当排除．

经过多方证认，脉冲星就是高速旋转的中子星．

现在人们普遍相信，中子星是中等质量($M<2M_\odot$)的恒星经引力坍缩而形成的致密星体．引力坍缩的过程是很猛烈的，它导致恒星内大规模的核爆炸，这就是我们观测到的超新星 (supernova)爆发．在爆发的短暂时间内，光度可达10^7—$10^{10}L_\odot$，释放能量10^{40}—10^{55}J，增亮10^7—10^8倍．作为爆发的结果，恒星的绝大部分物质被抛向宇宙空间，形成星云，其中心部分残留下来，形成一个致密星体．最典型的例子是上面提到的蟹状星云和其中心的脉冲星 PS 0531．

1731年英国一位天文学爱好者用望远镜在南方夜空的金牛座上发现了一团云雾状的东西，外形象个螃蟹，人们称它为"蟹状星云(Crab Nebula)"．后来的观测表明，这只"螃蟹"在膨胀，膨胀的速率为每年0.21″．到1920年，它的半径达到180″，推算起来，其膨胀开始的时刻应在180″÷0.21″/年=860年之前，即公元1060年左右．人们相信，蟹状星云是九百多年前一次超新星爆发中抛射出来的气体壳层．这一点在我国史籍中得到了证实．在«宋会要»中有完整的记载："嘉佑元年三月，司天监言，客星没，客去之兆也．初，至和元年五月晨出东方，守天关．昼见如太白，芒角四出，色赤白，凡见二十三日"．这段话的大意如下：负责观测天象的官员(司天监)说，超新星(客星)最初出现于北宋至和元年(公元1054年)，位置在天关星(即金牛座ζ星)附近，白昼看起来赛过金星(太白)，历时23天．往后虽慢慢暗下来，但还继续可用肉眼观

测近两年之久(650 天)，直到嘉佑元年(1056 年)这位"客人"才隐没. 其实这位"客人"并未离去，它留下一件遗物(蟹状星云)和一具残骸(脉冲星,即中子星).

超新星是极罕见的天象，在每个亮星系里平均每二三百年才有一次. 可是就在不久前，1987 年从 2 月 23 日起在南天星空的大麦哲伦云(Large Magellanic Cloud)东北爆发了一颗超新星，当即命名为 1987 A. 天文学家使用 80 年代的研究手段探测到这个超新星事件的全过程，获得了较完整的知识，2 月 23 日世界上两个较大的地下探测器同时记录了簇发式的中微子事例，如果这确系超新星事件的产物，它将对天体物理和粒子物理的进展作出重要贡献.

例题 19　1987 年 2 月记录的中微子暴事例发生在几秒钟的间隔内，据认为这是由一次超新星爆发辐射出来的. 据推断，中微子的能量分布在 10—40 MeV 范围内. 假设所有这些中微子是在这颗超新星爆发时同时辐射出来的，在运行了大约 170000 光年的距离之后到达地球时，其到达时间先后分布在大约 2 秒钟的间隔内，试以此估算中微子质量的上限.

解　若中微子有微小质量 m_ν，其飞行速度

$$v=\frac{\sqrt{E_\nu^2-m_\nu^2}}{E_\nu}\simeq 1-\frac{1}{2}\left(\frac{m_\nu}{E_\nu}\right)^2,\quad \text{(自然单位制)}$$

中微子飞行时间

$$t=\frac{L}{v}\simeq L\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{m_\nu}{E_\nu}\right)^2\right],$$

$$\Delta t=\frac{L}{v_1}-\frac{L}{v_2}\simeq\frac{L}{2}\,m_\nu^2\left[\frac{1}{E_{\nu 1}^2}-\frac{1}{E_{\nu 2}^2}\right]$$

已知 $\Delta t=2\text{s}$, $E_{\nu 1}=10\,\text{MeV}$, $E_{\nu 2}=40\,\text{MeV}$, $L=170000\,\text{ly}$(光年),

故
$$m_\nu^2\simeq\frac{2\Delta t}{L}\cdot\frac{E_{\nu 1}^2\cdot E_{\nu 2}^2}{E_{\nu 2}^2-E_{\nu 1}^2}\simeq 81\times 10^{-12}(\text{MeV})^2,$$

即 $m_\nu\simeq 9\text{eV}$. 这结果把中微子静止质量的上限进一步压低了许多.

各种观测资料还表明，脉冲星的另一个特点，是其表面的磁场非常强，最高可达 10^9T，比地磁场大 13 个数量级以上.

例题 20　(a)太阳的自转周期为 27 天，若它收缩到原子核密度而不损失

角动量，其自转周期将变为多少？

(*b*) 太阳极区磁场为 1—2Gs 的数量级，若它收缩到原子核密度而保持磁通守恒，其极区磁场将为多少？这足以说明脉冲星强大磁场的成因吗？

解 (*a*) 在总质量 M 不变的情况下，半径 r 与密度 ρ 的关系是 $r\propto\rho^{-1/3}$，从而转动惯量 $I\propto\rho r^5\propto\rho^{-2/3}$. 在角动量 $I\omega$ 守恒的条件下 $\omega\propto I^{-1}$，周期 $T\propto I\propto\rho^{-2/3}$. 从太阳密度 $\rho_\odot=1.4\,g/cm^3$ 缩到原子核密度 $\rho_{核}\simeq10^{14}\,g/cm^3$，密度增大 14 个数量级，故 T 小 $14\times\frac{2}{3}\simeq9$ 个量级，由 27 天缩到 1 ms，这正是 PSR1917+214 周期的数量级.

(*b*) 在磁通守恒的条件下，磁场 $B\propto r^{-2}\propto\rho^{2/3}$. 在密度增大 14 个量级的情况下，磁场 B 增大 9 个多量级，由 Gs 量级达到 10^5 T 量级. 这倒是上述转得最快的脉冲星 PSR1917+214 表面磁场的量级，比脉冲星表面磁场最高值小 4 个量级. 看来，为了解释一般脉冲星表面的强大磁场，还得有另外的机制.

例题 21 一中子星具有太阳的质量，半径为 20 km，表面磁场 10^8 T. 若其中的中子自旋 100% 极化，能否产生这样大的磁场？

解 $M_\odot=2\times10^{30}$ kg，这相当于 12×10^{56} 个中子的质量. 中子的磁矩具有核磁子 5×10^{-24} erg/Gs 的数量级，若 100% 极化，整个中子星具有磁矩 6×10^{33} erg/Gs. 表面磁场 $B\sim(6\times10^{33}\ \mathrm{erg/Gs})/(2\times10^6\ \mathrm{cm})^3\sim10^{15}\mathrm{Gs}\sim10^{11}\mathrm{T}$，这足以解释中子星表面最强大的磁场而绰绰有余.

3. 黑洞

黑洞 (black hole) 是广义相对论预言的一种特殊天体，这名字是 1969 年美国科学家惠勒(John Wheeler)取的. 黑洞的基本特征是具有一个封闭的视界(horizon)，外来的物质和辐射可以进入视界以内，而视界内的任何物质(包括光子)都不能跑到外面. 早在 1798 年拉普拉斯曾用经典的牛顿引力理论预言过，如果一个天体的半径 R_g 与质量 M 满足下式

$$R_g=\frac{2GM}{c^2}, \tag{4.41}$$

则在它的表面逃逸速度已达光速 c，任何物质都不能摆脱其引力的束缚而发射出来 (见第三章 § 1). 1939 年奥本海默等人用广义相

对论推导出同一公式，这便是黑洞视界半径的公式. 拉普拉斯当年所得的纯经典公式，居然与后来用广义相对论导出的公式，连数值系数都相符，这不能不说有些巧合.

恒星晚期引力坍缩时，若其质量大过奥本海默极限(约 $2M_\odot$)，中子简并压也抵挡不住强大的引力，它将变为黑洞. 在黑洞里物质将被引力挤压到一个奇点内，这里的密度和时空曲率都是无穷大. 所以黑洞的结构就是包在视界内的一个奇点，通常说一个黑洞的大小指的是它的视界的大小，黑洞的内、外是以视界为分界的. 在广义相对论建立后不久，席瓦西(K. Schwarzschild)于 1917 年就找到爱因斯坦场方程的一个球对称解，此解可用来描述不转动的黑洞，它所依赖的唯一参量是黑洞的质量 M. 1963 年克尔(R. Kerr)又找到一个可描述匀速自转黑洞的解，它是轴对称的，只依赖于质量和转速两个参量. 1967 年加拿大科学家以色列(W. Israel)证明，不管恒星结构如何复杂和不对称，一旦它坍缩成黑洞，若无自转，其结构只能是绝对球对称的. 1970—1973 年间，英国理论物理学家霍金(S. Hawking)和他的学生、同事们又证明了这样一个猜想：无论怎样复杂和不对称的恒星，坍缩成有自转的黑洞后，必具有克尔解所描述的那种轴对称的简单结构. 以上的结论后来演变成一句谚语："黑洞是无毛的". 黑洞的"无毛定理(no-hair theorem)"表明，所有黑洞的结构都非常简单.

典型中子星的质量为 $M\simeq M_\odot=2\times10^{30}$ kg，半径为 $R\simeq10$ km，若它进一步收缩为黑洞，按式(4.41)，其引力半径 $R_g\simeq3$ km. 由质量为 $M\simeq M_\odot=6\times10^{24}$ kg 的星体收缩成的黑洞，$R_g\simeq0.9$ cm. 质子那样大小的微黑洞($R_g\simeq10^{-13}$ cm)，其质量为 $M\simeq10^{11}$ kg，这相当于一座大山. 如果在地球上有这么一个微黑洞，任何岩层、地幔都承受不了，它只能钻到地心，才能停在那里. 当然，仅靠自身的引力，质量 $M<2M_\odot$ 的恒星是不会坍缩成黑洞的. 形成

上述小黑洞，需要强大的外部压力．惠勒曾经计算，用全世界海洋里所有的重水来制造一颗巨大的氢弹，它爆炸时在中心形成的压缩力是足以产生一颗小黑洞的．当然，在这颗小黑洞制出后，已经没有人去观察它了．然而，这种小黑洞是有可能在早期宇宙的高温高压条件下产生的．果真如此，我们可把这些黑洞称作"原生(primordial)黑洞"．原生黑洞的思想是1971年霍金提出的，在此之前，苏联的采尔道维奇(Я. Б. Зельдович)和诺维可夫(И. Д. Новиков)也曾提过类似的见解．那么，原生黑洞现今到哪里去了呢？且看下面的剖析．

热力学第二定律告诉我们，熵是只增不减的．如果近边有些黑洞，我们似乎可以找到一条使熵减少的途径．就像把废品丢进垃圾箱那样，我们可以把一些物质和它们所携带的熵丢进黑洞．这样，黑洞外面的世界里熵就减少了．至于黑洞里的熵是否增加，反正我们是看不见的，不去管它好了！诚然，我们对黑洞内部的事物是无法观察的，但黑洞内熵的多少会不会反映到它的外部特征上来？仔细想想，黑洞视界的表面积倒真的和熵的性质有点像．按式(4.41)，表面积 $S_0=4\pi R_0^2\propto M^2$．物质掉进黑洞就出不来，从而 M 有增无减，S_0 就更是有增无减了．若质量分别为 M_1 和 M_2 的两个黑洞相碰后融合成一个黑洞，其质量 $M=M_1+M_2$，从而

$$M^2=(M_1+M_2)^2>M_1^2+M_2^2,$$

这就是说，合成的大黑洞的表面积大于原来两个黑洞表面积之和．这不是很像两罐气体混合后的熵，大于原来各罐气体的熵之和吗？沿着上述思路，普林斯顿的研究生真的提出这样的看法：视界表面积的大小是黑洞内熵的量度．

若黑洞有熵，怎能没有温度？若黑洞有温度，它是否像黑体那样发出辐射？"辐射"就是向外抛出物质和能量，那还算得是什么"黑洞"？乍看起来，"黑洞辐射"简直是疯子的想法．1973年底霍

金在两位苏联人思想的启发下，终于推算出开头连他自己都不相信的结果，即黑洞果真按照热力学第二定律所要求的那样，向外发射粒子．或者说，黑洞不黑，它会"蒸发"．这怎么可能呢？原来迄今为止我们一直是按照"经典"的广义相对论来理解黑洞的，如果把广义相对论和量子论结合起来，"黑洞蒸发"的概念就不是不可接受的了．下面我们给出此现象的一个粗略的物理图象①．

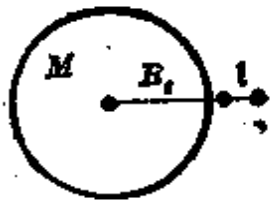


图 4-31　黑洞给虚粒子对的引潮力

我们知道，在真空的量子涨落过程中，粒子和反粒子的虚偶对不断地产生和湮没着．根据海森伯的不确定性原理，在短暂的时间里，虚偶对的能量是不确定的，不一定满足能量守恒定律．这种过程在黑洞的周围也持续不断地发生着．在虚偶对短暂的分离时间里，有一定的概率使一个粒子在黑洞内，一个粒子在黑洞外．黑洞外的引力场加在虚粒子偶对上的引潮力有可能使虚粒子实化，其中一个带着负能量进入黑洞，另一个带着正能量逃至无穷远．这过程相当于黑洞"发射"了一个粒子，同时其自身的能量减少了．此种过程只有当黑洞具有微观的尺度时，才有较大的概率．下面我们来估算一下，黑洞"发射"粒子的特征能量 ε_0．如图 4-31 所示，设在质量为 M 的视界附近产生了一个虚粒子对．令每个虚粒子的质量为 m，它们沿径向分离开一个距离 l．使它们分开的引潮力为

$$f=\frac{GMml}{R_g^3}, \tag{4.42}$$

要使虚粒子对实化，至少需将它们分离到 $l=\lambda\!\!\!^{-}_C=\hbar/mc$（粒子的约化康普顿波长）的距离以外，作功 fl 达 $2mc^2$ 以上．令

① 可参阅陈良范、周敏犖，《物理》第 12 卷，第 12 期，705 页(1983)．有关黑洞的问题，还可参阅W. J. Kaufmann, *Black Holes and Warped Spacetime*, W. H. Freeman and Co., 1979(中译本：何妙福、车饱印译，科学出版社 1987)．

$$fl \simeq \frac{GMml^2}{R_g^3} \simeq \frac{GMm\lambda_C}{R_g^3} \sim 2mc^2,$$

将 λ_C 和 R_g 的表达式(4.41 式)代入,得发射粒子的特征能量

$$\varepsilon_0 = mc^2 = \frac{\hbar c^3}{4GM}, \tag{4.43}$$

现在我们可以仿照研究黑体辐射的方法，用量纲分析讨论黑体的总辐射率 L. 设 L 仅与 ε_0, c, $\hbar$ 有关,于是

	ε_0	c	$\hbar$	L
M	1	0	1	1
L	2	1	2	2
T	−2	−1	−1	−3

由此得 $$[L] = [\varepsilon_0]^2[c]^0[\hbar]^{-1}$$

即 $$L \propto \frac{\varepsilon_0^2}{\hbar} = \frac{\hbar c^6}{G^2M^2}.$$

为了与斯特藩-玻耳兹曼定律对比,我们考虑辐射本领

$$R_T = \frac{L}{4\pi R_g^2} \propto \frac{\hbar c^8}{G^4M^4} \propto \frac{1}{M^4}. \tag{4.44}$$

如果把黑洞的视界看作黑体，则其等效温度 $T \propto M^{-1}$. 这就是说，黑洞质量愈小，温度就愈高，"蒸发"得愈快，其寿命也就愈短. 一个质量比 $M_\odot$ 大几倍的黑洞,其温度的数量级为 10^{-7} K, 比宇宙的背景辐射温度 3 K(见下节)低多了，故其辐射小于吸收. 然而对于质量小的原生黑洞来说,温度可以相当高,蒸发得相当快. 宇宙的年龄近 2×10^{10} 年，能够生存到今天的原生黑洞,其质量应大于 4×10^{12} kg. 这种原生黑洞的引力半径约为质子的几十倍. 比这再大的原生黑洞是可能存活到今天的. 它们的温度极高，发射着强烈的 γ 射线和 X 射线. 这种黑洞若有就是"白热化"的，用"黑"色来形容它们实在不恰当.

原生黑洞的霍金辐射理论虽仍处于假说阶段，其前景是诱人

的. 它巩固和发展了黑洞的热力学，并对现今的大爆炸宇宙学提出了挑战性的观点.

4. 红移和类星体

光谱线的红移定义为

$$z=\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda_0}, \tag{4.45}$$

式中 λ_0 是静止光源谱线的波长，λ 是拍摄到天体发射的同一谱线的波长. 迄今为止，人们已知的红移主要有三种：引力红移，宇宙红移和相对论性多普勒红移. 现在公认，宇宙红移(即哈勃红移)实质上也是多普勒红移.

引力红移也是广义相对论预言的一个效应. 其实，只要把爱因斯坦的质能关系式 $E=mc^2$ 和普朗克的光子能量公式 $E=h\nu$ 联系起来，即可理解和计算引力红移. 因为令上述两式相等，即得光子的惯性质量 $m=h\nu/c^2$. 按照爱因斯坦的等价原理，这也是光子的引力质量. 当光子从质量为 M、半径为 R 的星球表面发射到远方，其引力势能增加了

$$\Delta E_{势}=\frac{GMm}{R}=\frac{GMh\nu}{c^2R},$$

它的动能就要减少相应的量 $\Delta E=h\Delta\nu$. 由此即可得频率的变化量

$$|\Delta\nu|=\frac{GM\nu}{c^2R},$$

即红移量为

$$z=\frac{\Delta\lambda}{\lambda}=\left|\frac{\Delta\nu}{\nu}\right|=\frac{GM}{c^2R}. \tag{4.46}$$

由于白矮星表面的引力场强大，天体上的引力红移效应首先在这里得到证实. 地面上的引力红移实验是庞德(R. V. Pound)、雷布卡(G. A. Rebka)等人于 1959 年完成的. 实验是在哈佛的塔内进行的，测量光线在经历了高度差 $\Delta H=22.6\,\mathrm{m}$ 后频率的变化

$\Delta\nu$. 光子高度改变 ΔH 时，引力势能改变

$$\Delta E_{势}=mg\Delta H=h\nu g\Delta H/c^2,$$

它在数值上应等于 $\Delta E=h\Delta\nu$，由此推算得红移量为

$$z=\left|\frac{\Delta\nu}{\nu}\right|=\frac{g\Delta H}{c^2}\simeq 2.46\times10^{-15}. \tag{4.47}$$

这个量是非常小的，要求实验中所用的光谱线宽极窄. 庞德等人以放射性的 ^{57}Co 为 γ 射线源. 利用穆斯堡尔效应测得引力红移为 $z=(2.57\pm0.26)\times10^{-15}$，从而验证了上述理论.

现在来看宇宙红移. 大约在 1917 年，斯里弗(V. M. Slipher)发现河外星系谱线有系统的红移，它随星云的距离而增大. 这效应当时称为"斯里弗红移". 但人们不理解，为什么距离不同会导致红移不同，所以一开始斯里弗红移就被解释为多普勒效应，只是人们指望用太阳而不是星系本身的运动来说明它. 这种看法在大量观测事实面前显得愈来愈站不住脚. 1918 年维尔茨 (C. W. Wirtz)建议，除太阳运动外，星系在所有方向上都有离我们而去的普遍退行，即宇宙呈现出一种膨胀图景. 这一看法是符合建立在广义相对论基础上的宇宙模型的. 1929 年哈勃(E. P. Hubble)宣布：由红移算出的河外星系视向退行速度 v 和距离 D 之间大致成线性关系. 从此人们便排除了对斯里弗红移距离效应的解释，认为它是宇宙膨胀的多普勒效应，并把它的名称改为"哈勃红移"，和它的解释一起，沿用至今. 在星系的退行速度 $v\ll c$ 时，多普勒频移 $z\simeq v/c$，哈勃红移常用退行速度表示，写成

$$v=H_0D \tag{4.48}$$

这公式叫做"哈勃定律"，比例系数 H_0 叫"哈勃常数". 根据 1974—1976 桑德奇(A. R. Sandage)等人刷新的数据，$H_0=55\,\mathrm{km/s\cdot Mpc}=17\,\mathrm{km/s\cdot Mly}$(pc 为秒差距，ly 为光年，M 为百万，$1\mathrm{pc}\simeq3.26\,\mathrm{ly}$).

经典的多普勒效应只有纵向运动引起的频移 $\Delta\nu/\nu=v/c$. 相对论性的多普勒效应既有纵向频移

$$\frac{\nu+\Delta\nu}{\nu}=\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\simeq 1+\frac{v}{c},\quad \frac{\Delta\nu}{\nu}\simeq\frac{v}{c},\tag{4.49}$$

也有横向频移

$$\frac{\nu+\Delta\nu}{\nu}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\simeq 1-\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2,$$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu}\simeq-\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2.\tag{4.50}$$

可以看出，横向频移是 $\beta=v/c$ 的高次效应，只在 $\beta\simeq 1$ 时才明显. 哈勃红移是宇宙学原因引起的多普勒红移，但并非所有的多普勒红移都具有宇宙学的意义，局域性的天体运动(纵向的和横向的)，也可以引起多普勒频移.

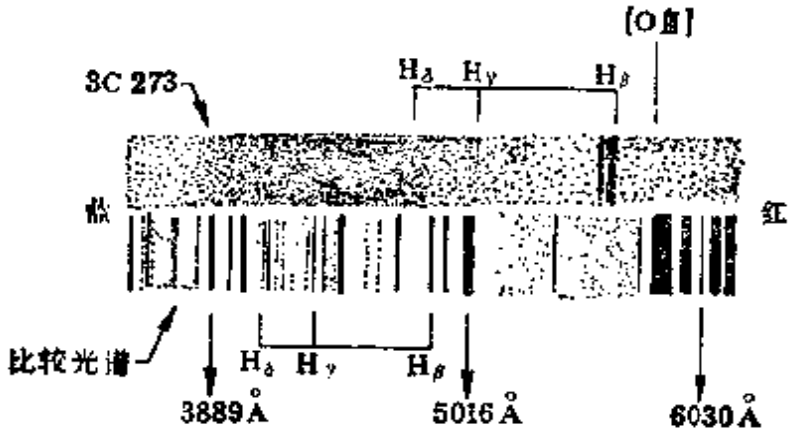


图 4-32 类星体 3C273 的光谱

类星体(quasar)是 20 世纪 60 年代发现的一种最令人困惑的新型天体，它们是一些射电源，其光学对应体在照相底片上具有类似恒星的象，它们的光谱有巨大的红移 (见图 4-32). 射电源 3C273 光学对应体的谱线红移 $z=0.158$; 3C48 的 $z=0.367$, 现在 $z>4$ 的类星体已有 6 个以上. 例如 Q 0051-279(御夫座). 还有

的类星体发射和吸收谱线具有多重红移，如 PHL957 的发射线红移为 2.69，吸收线的红移有五组：2.67，2.55，2.54，2.31，2.23.

例题 22 (*a*)类星体 3C48 所成的光学象角直径小于 1″，而且光谱线看来象是红移 $z=0.367$ 的氢光谱．假定这红移是由类星体高速度引起的，试估计它的退行速度 v．(*b*)如果该速度 v 是宇宙膨胀引起的，试利用哈勃定律求它的距离 D．人们观测到地球上接受这类星体的能流是太阳能流的 10^{-17}，试比较类星体和太阳的能量输出．一个星系必须包括多少恒星，才能产生这么多的能量？(*c*)如果红移是由类星体表面的大引力势能引起的，若它的半径等于 $R_\odot$，求类星体的质量．(*d*)据观察，类星体的强度以一天的时间尺度而显著变化，你能够从这个事实推断出一个类星体直径的上限吗？如果类星体的直径等于这个极限，为了和观察到角直径小于 1″ 这个事实一致，类星体离开我们的最小距离该是多少？它可能在我们的银河系中吗？

解 (*a*) $z=0.367$，$1+z=\sqrt{(1-\beta)/(1-\beta)}$，

$$\therefore\quad \beta=\frac{(1+z)^2-1}{(1+z)^2+1}=0.30,\ v=0.30c.$$

(*b*) $$D=\frac{v}{H_0}=\frac{0.30\times 3\times 10^5\ \mathrm{km/s}}{17\ \mathrm{km/s\cdot My}}=5.3\times 10^9\ \mathrm{ly}.$$

类星体能流

$$L_q=\left(\frac{D}{r}\right)^2\times 10^{-17}\,L_\odot=\left(\frac{5.3\times 10^9\ 年}{500\ 秒}\right)\times 10^{-17}L_\odot=10^{12}\,L_\odot.$$

如果类星体是个星系，它必须包含 10^{12} 个太阳那样大小的恒星．这星系比我们的银河系大 2.5 倍．

(*c*) $$\frac{GM}{c^2R_\odot}=z=0.367.$$

类星体质量

$$M_q=\frac{c^2Rz_\odot}{G}=\frac{(3\times 10^8\ \mathrm{m/s})^2\times 7\times 10^8\ \mathrm{m}\times 0.367}{6.7\times 10^{-11}\ \mathrm{m^3/kg\cdot s^2}}$$
$$=3.5\times 10^{35}\ \mathrm{kg}=1.7\times 10^5\,M_\odot=10^{-7}\,M_g,$$

式中 $M_g=1.7\times 10^{12}M_\odot$ 是(*b*)内设想的星系的总质量．

(*d*) 这个类星体作为一个整体，它的各部分之间应有因果联系，故其直径 $2R_q$ 约为光一天的行程：

$$2R_q=3\times 10^5\ \mathrm{km/s}\times 24\times 60\times 60\ \mathrm{s}=2.6\times 10^{10}\ \mathrm{km}.$$

从而

$$D>\frac{2R_q}{5\times 10^{-6}\ \mathrm{rad}}=5.3\times 10^{15}\ \mathrm{km}=5.6\times 10^2\ \mathrm{ly}.$$

$$\left(1''=\frac{\pi}{3600\times180}=5\times10^{-6}\,\mathrm{rad},\ 1\mathrm{ly}=9.5\times10^{12}\,\mathrm{km}\right)$$

银河系的直径为 $25\,\mathrm{kpc}=8\times10^{4}\,\mathrm{ly}$，这类星体应该在其内.

本例题讨论的类星体 3C48，其红移还不算是最大的，对于 OQ172 来说 $z=3.53$，用多普勒效应来解释，其速度高达 $0.9c$，其哈勃距离上 $10^{10}\,\mathrm{ly}$！这几乎处在宇宙的"边缘"，向我们展示着宇宙早期的历史. 类星体这么遥远，其视亮度又很高，这就很容易叫人得出结论：类星体的产能率高到令人难以置信的程度. 如果用引力红移来解释，其质量也大得不可思议. 当前类星体的红移仍是个谜，它在根本问题上向现代天文学提出了严峻的挑战. 但我们相信，为克服"红移危机"所作的种种努力，必将大大推进天体物理的发展.

§4. 宇　　宙

1. 宇宙观的发展

在科学不发达的古代，人们已开始对宇宙的结构产生种种的设想和猜测. 在中国有盖天、浑天、宣夜诸说①；在希腊，从亚里斯多德到托勒玫，数百年间建立起极为精致而复杂的宇宙模型，那时在人们的观念里，毫无例外地把人类自己放在宇宙的中心. 历史上，是哥白尼率先否定了地心说，把宇宙的中心移到太阳上，随着天文学的发展，人们了解到，与银河系中其它许许多多恒星一样，太阳也不过是一颗普普通通的恒星. 实际上，在许许多多的星系中，我们的银河系也不过是一个普普通通的星系. 宇宙观发展的历史，其实就是人类(地球)逐渐从宇宙中心的地位上一步步退下来的历史. 愈来愈多的观测事实表明，宇宙在大尺度上看是均匀各向同性的，换句话说，宇宙根本就没有中心.

宇宙观的另一个重要问题是：宇宙在空间上是无限的，还是有

① 《中国大百科全书·天文学卷》.

限的？从欧几里德几何学的观点看，只有无穷大的东西才可能是没有中心的．如果认为宇宙是无限的，就会产生下列两个佯谬．

(i) 奥伯斯(Olbers)佯谬(1823 年)：夜晚的天空为什么是黑暗的？

如前所述，观测表明，宇宙内的物质分布在大尺度上(大于 10^8pc，约合 10^{24}—10^{25} m)是均匀各向同性的．设恒星的数密度为 n，平均光度(总辐射率)为 $\bar{L}$，则地球上的观测者夜晚沿任何方位在单位立体角内接收到星光的光通量应为

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\Omega}=\int_0^\infty \frac{n\bar{L}}{4\pi r^2}\cdot 4\pi r^2\mathrm{d}r = n\bar{L}\int_0^\infty \mathrm{d}r=\infty ! \qquad (4.51)$$

当然，这里没考虑近处的星体对远处星体的遮掩．即使考虑了这一点，射到地面的星光虽不再是 ∞，至少远处星光的贡献也与近处星光(最近的恒星是太阳)一样．就是说，如果宇宙无限，无论白昼还是夜晚，任何方位的天空都应和太阳一样耀眼．这显然不符合实际．

(ii) 齐利格(Seoliger)佯谬(1894 年)：引力势的方程无解．

与光通量一样，万有引力也与距离平方成反比．引力势 $\Phi(r)$ 应满足泊松方程

$$\nabla^2\Phi(r)=4\pi G\rho_0. \qquad (4.52)$$

这里 ρ_0 是个常数，它代表宇宙在大尺度内的平均密度．只要 $\rho_0\neq 0$，在无限大空间内 $\rho(r)$ 就不存在有限常数解．但是对于均匀各向同性的无限大宇宙，$\Phi(r)$也应等于常数，这显然是自相矛盾的．

1917 年爱因斯坦建立了广义相对论，认为宇宙空间的几何性质是非欧几里德的，或者说，空间是弯曲的．一个弯曲的空间可以既是有限的，同时又是没有边界和没有中心的，就像地球的表面那样．只不过地球表面是二维的弯曲空间，而宇宙是四维的弯曲时

空.

爱因斯坦最初设想的宇宙，是封闭的、有限的和静止的.但是他自己建立的引力场方程却没有这样的解. 他在自己的场方程上加了一个宇宙项(所谓 Λ 项)，才得到他所想象的定态解. 这个解所代表的空间具有常曲率半径 $R_E=\Lambda^{-1/2}$ 和均匀密度

$$\rho_E=c^2\Lambda/4\pi G$$

(从而 $R_E=c/\sqrt{4\pi G\rho_E}$). 这便是爱因斯坦的静态宇宙模型.

爱因斯坦引进的常数 Λ 是要由观测数据来确定的. 理论物理学家信奉一条门训，即能不引进多余的待定常数，就不要引进. 可是去掉了 Λ 项，就得不到定态解. 这一点不难理解，因为星系间存在着万有引力，只靠引力是达不到平衡的. 即使引进 Λ 项(它相当于某种斥力)，爱因斯坦的静态宇模型也是不稳定的，稍受干扰，它就膨胀或坍缩. 然而，为什么非找定态解不可呢？要知道，自古以来在人们的观念里，宇宙无始无终，在时间上应是无限的. 否则怎样想象宇宙创生之前或宇宙末日之后的情景呢？ 所以人们乐于接受静态的宇宙模型，至多也只是循环往复式的运动. 所以说，在理论上能摒弃这种观念而引入真正的非循环式的动态宇宙模型，应算得上是一种勇敢的设想. 1922 年苏联学者弗里德曼(А. А. Фридман) 取 $\Lambda=0$，得到爱因斯坦原始场方程的非定态解.他的理论表明，存在着一个临界密度 ρ_C，若现在宇宙的平均密度 $\rho_0<\rho_C$，则宇宙是开放的、无限的，它一直膨胀下去；若 $\rho_0>\rho_C$，宇宙起初膨胀，到达一定程度后，它将转为收缩. 图 4-33 中的曲线显示了弗里德曼动态宇宙模型可能的不同前景.

弗里德曼的理论工作是在没有宇宙膨胀观测事实的条件下作出的. 哈勃有关红移的观测 1929 年才发表. § 3中已提到，哈勃红移可用星系的退行运动引起的多普勒效应来解释，他总结出的规律是星系的退行速度 v 正比于距离 D，

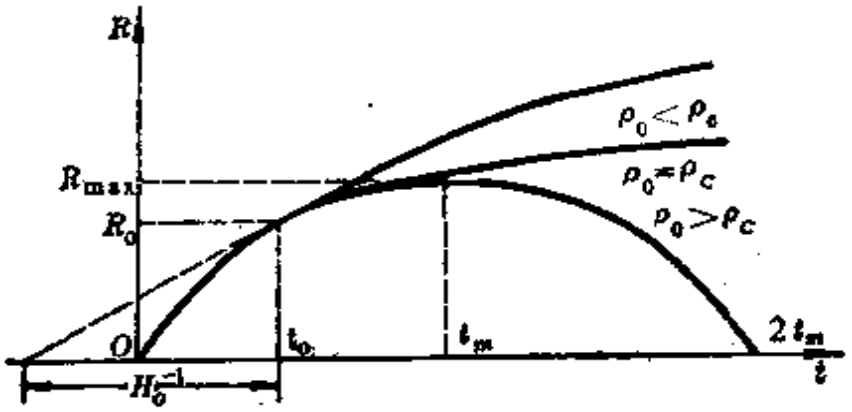


图 4-33　弗里德曼动态宇宙模型的两种前景

$$v=H_0D. \tag{4.53}$$

这便是哈勃定律. 由这里人们很自然地得出"宇宙在膨胀"的推论. 我们可利用哈勃定律，在牛顿力学的框架内得到弗里德曼宇宙模型临界密度的表达式.

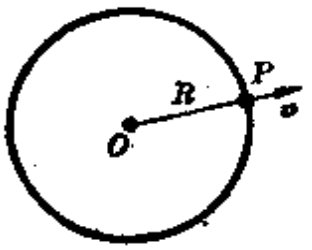


图 4-34　宇宙的一个典型球状区

宇宙本没有中心，也可以说，任何一点都是中心. 选择某观测点(地球)O 为中心，考虑在半径为 R 的球面上一个星系 P(见图 4-34)，按照牛顿的引力理论，只有球内的质量

$$M=\frac{4\pi}{3}R^3\rho$$

对 P 有作用，从而球面上星系的逃逸速度是

$$v_{逃}=\sqrt{\frac{2GM}{R}}=\sqrt{\frac{8\pi G}{3}R^2\rho}. \tag{4.54}$$

随着宇宙的膨胀，R、ρ、$v_{逃}$ 都随时间而变，我们分别用 R_0，ρ_0 和 $v_{逃}^0$ 代表它们在 $t=t_0$(现在)的数值. 如果星系 P 现在的退行速度 $v_0>v_{逃}^0$，则它将永远退行，即宇宙将永远膨胀下去；如果 $v_0<v_{逃}^0$，则星系 P 经过一段时间的退行后令停下来，然后重新靠拢，这就是说，宇宙在经过一段时间的膨胀后会停下来，然后重新收缩. 临界

的情况是

$$v_0 = v_{\text{逃}}^0, \tag{4.55}$$

按哈勃定律，$v_0 = H_0 R_0$，而 $v_{\text{逃}}^0$ 由式(4.54)决定，在其中取 $R = R_0$，$\rho = \rho_0$. 代入式(4.55)后得

$$\rho_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \equiv \rho_c. \tag{4.56}$$

这便是宇宙临界密度的表达式用哈勃常数现在的公认值

$$H_0 = 15\,\text{km/s}\cdot\text{Mly}$$

代入，得

$$\rho_c \approx 5\times 10^{-30}\,\text{g/cm}^3.$$

现实宇宙中质量的平均密度 ρ_0 究竟比 ρ_c 大还是小？这个问题就不那么容易回答了. 我们留到以后去讨论. 暂且假定，$\rho_0 \approx \rho_c$.

在图 4-33 中曲线的斜率是星系的退行速度 v，切线与横轴交点到切点垂足 $t = t_0$ 处的距离等于 H_0^{-1}，它的意义如下：若宇宙过去一直以现在观测到的速率膨胀，则所有星系在 $t = t_0 - H_0^{-1}$ 时曾会聚在一点. 如果这便是宇宙创生的时刻，则 H_0^{-1} 代表宇宙的年龄. 其实，无论哪种前景，宇宙的膨胀都是减速的，所以哈勃常数随时间的倒退而增加. 故宇宙的实际年龄 $t_0 < H_0^{-1}$. 这便是哈勃常数给我们的启示.

关于哈勃常数的数值，有过一段历史插曲. 在三、四十年代里，哈勃常数曾被确定为 $H_0 = 170\,\text{km/s}\cdot\text{Mly}$，比现在的公认值大得多. 用它来计算宇宙年龄的上限，将是 1.76×10^9 年. 然而大量证据说明银河系的年龄大约是 $1—1.5\times 10^{10}$ 年，这种估计一方面是从地球上各种放射性同位素（特别是 ^{235}U 和 ^{238}U）的相对丰度估算出来的，另一方面是从恒星演化的计算得到的. 大家知道，目前公认的地球年龄为 4.6×10^9 年，这竟比宇宙的年龄上限 H_0^{-1} 还大！于是出现了“年龄佯谬”. 这佯谬使当时的天文学家怀疑，哈勃红移是否是宇宙膨胀的证据. 对哈勃常数最重要的修正来自对

河外星系距离的修订. 从五十年代到七十年代，经过多次修改，才得到今天哈勃常数的公认值 $H_0=15\,\mathrm{km/s\cdot MIy}$. 按此数估算，宇宙年龄的上限应是 2×10^{10} 年，年龄佯谬自然就烟消冰释了. 于是，膨胀的宇宙模型得到了愈来愈多的承认.

顺便说起，只要宇宙在时间上有起点，奥伯斯佯谬也解决了. 因为式(4.51)中对 r 积分的上限不再是 ∞，而应是 ct_0(t_0——宇宙年龄)，于是积分不再发散.

2. 大爆炸宇宙模型

早在 1948 年，伽莫夫(G. Gamow)和他的同事们就提出了一个"大爆炸"宇宙理论，预言了早期宇宙遗留下一个微波辐射背景，当今的温度应是 5K. 由于他们的计算在细节上并不完全正确，以及当时高能物理达到的阶段尚不足以使物理学家和天文学家对探索宇宙的早期起源感到有信心，这个理论未受到物理学界的认真对待，在天文学界也鲜为人知. 自从 60 年代后半发现 3K 宇宙背景辐射以来的十年里，情况发生了变化. 大爆炸宇宙理论逐渐被广泛接受，以致被天文学家称为宇宙的"标准模型". 谓之"标准"，并非说它在一切细节上都已成熟无误，而是指它已成为检验各种理论思想和论证观测计划的基础.

所谓"大爆炸"，并不是在地球上我们习见的那种起源于一个确定地点的爆炸. 宇宙创生时期的大爆炸从一开始就充满整个空间，爆炸中每一对粒子间的距离都在猛烈地增长. 所谓"整个空间"，可以指的是整个无限宇宙，也可以是一个弯曲的有限的封闭宇宙. 宇宙究竟有限还是无限？对我们现在要讨论的问题来说，几乎完全不重要. 宇宙的初期，温度极高，密度极大. 随着它的膨胀，密度减小，温度下降.

当今的宇宙中有各种层次的结构，如核子、原子核、原子、分子、地球、太阳系、银河系、超星系团，然而早期宇宙的结构却简单

得多，其中主要是极高温的辐射和某些种类的粒子。

宇宙的膨胀是绝热的，辐射与粒子的物态方程不同，它遵循的膨胀规律也不同。在宇宙中取任意一个体积 $V=\frac{4\pi}{3}R^3$ 的典型球状区(见图 4-34)，令 E_r，p_r 分别代表其中辐射的能量和压强，$\varepsilon_r=E_r/V$ 代表能量度。对于绝热过程有

$$\mathrm{d}E_r=-p_r\mathrm{d}V,$$

而 $\mathrm{d}E_r=V\mathrm{d}\varepsilon_r+\varepsilon_r\mathrm{d}V$，于是有

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_r}{\varepsilon_r+p_r}=-\frac{\mathrm{d}V}{V},$$

辐射的物态方程为 $p_r=\varepsilon_r/3$，故上式化为

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_r}{\varepsilon_r}=-\frac{4}{3}\frac{\mathrm{d}V}{V},$$

由此得

$$\varepsilon_r\propto V^{-4/3}\propto R^{-4}. \tag{4.57}$$

另一方面，根据黑体辐射定律

$$\varepsilon_r\propto T_r^4$$

(T_r——辐射温度)，与式(4.57)比较即得

$$T_r\propto R^{-1}. \tag{4.58}$$

此外，光子的平均能量 $\overline{h\nu}\propto T_r$，故光子的数密度

$$n_\gamma=\varepsilon_r\sqrt{h\nu}\propto T_r^3, \tag{4.59}$$

其质量密度

$$\rho_r=\varepsilon_r/c^2\propto T_r^4. \tag{4.60}$$

现在我们来考虑宇宙膨胀的时标。对于早期宇宙，爱因斯坦的场方程可简化为

$$R^2=\frac{8\pi G}{3}\rho R^2. \tag{4.61}$$

用量纲分析不难得到，早期宇宙的特征时标

$$t\propto\frac{1}{\sqrt{G\rho}}.$$

取 $\rho\approx\rho_r$, 于是

$$t\propto\frac{1}{\sqrt{\rho_r}}\propto R^2\propto T_r^{-2}. \tag{4.62}$$

亦即, 每当宇宙年龄增长一个数量级, 其(辐射)温度下降两个数量级.

研究早期宇宙的演化史, 主要需弄清两个问题: 在演化各阶段宇宙内究竟有些什么样的粒子? 这些粒子是否处于热平衡态? 回答这两个问题要靠下面两个判据:

(i) 成分判据

设某种粒子的静质量为 m, 如果宇宙的温度 T(指辐射温度 T_r, 下同)满足下列不等式

$$kT>mc^2 \tag{4.63}$$

(k——玻耳兹曼常数), 则该种粒子及其反粒子的偶对可以在热辐射场中不断地产生, 不断地湮没, 它们将在动态平衡中大量地存在. 在相反的情况下, 热辐射的温度不足以产生这种粒子对, 但已有的却可以湮没掉, 这种粒子就很快从宇宙中消失.

(ii) 脱耦判据

粒子在相互"碰撞"的过程中进行反应, 相互转化. 按照统计力学, 只有碰撞的次数足够多, 粒子之间才能达到热平衡. 设粒子的碰撞频率为 Γ, 其倒数 $1/\Gamma$ 定义为"碰撞时间" τ, 则只有在 $\tau<t$(宇宙年龄)的情况下, 该种粒子才可能与宇宙间其它成分处于热平衡态. 由式(4.62)知, $t\propto T^{-2}$, 那么 τ 随 T 怎样变化? 因碰撞频率

$$\Gamma=n\sigma v,$$

这里 n 是粒子的数密度, σ 是碰撞截面, v 是粒子的热速度. 在条件(4.63)成立的情况下, $n\propto n_r\propto T^3$, $v\approx c$(极端相对论性的), 而

σ 一般都是随 T 增加的，故随 T 的下降，$\tau=1/I'$ 增大得比 T^{-3} 快，从而 τ/t 增大的比 T^{-1} 快．所以当 T 下降到低于某个临界值 T_d(脱耦温度)时，我们有

$$\tau>t, \tag{4.64}$$

此时该种粒子不再与宇宙间其它成分碰撞，处于完全脱离热耦合的状态．

现在我们可以来讨论宇宙演化的进程了．从上文所述可以看到，宇宙早期是处于热平衡态的，那时决定性的因素是温度 T．按照动力学的计算，人们可以找到宇宙年龄 t 与温度之间的对应关系($t\propto T^{-2}$)．所以人们已习惯于用温度来代表早期宇宙演化进程所经历的时间．我们不打算追溯得更早，而是选取 $T=10^{12}$K(相当于 $t=10^{-4}$s)作为叙述的起点．这个温度相当于 100MeV 的能量，对这个能量范围，现代高能物理学已能提供充足而可靠的知识．

表 4-5 粒子的质量与湮没温度

分类	粒子	mc^2	T_d
重子	n, p	0.94GeV	10^{13}K
轻子	τ^+, τ^-	1.78GeV	2×10^{13}K
	μ^+, μ^-	0.1GeV	10^{12}K
	e^+, e^-	0.5MeV	6×10^9K
	ν_τ, $\bar{\nu}_\tau$	<164MeV	
	ν_μ, $\bar{\nu}_\mu$	<0.5MeV	
	ν_e, $\bar{\nu}_e$	<46eV	
光子	γ	0	

表 4—5 中给出各种粒子的质量和依照成分判据 (4.63) 确定的临界温度 $T_d=mc^2/k$ 粒子开始大规模湮没的温度)．在我们选择的时间起点上，中子 n 质子 p 和它们的反粒子(这是重子中最轻的粒子) 本应早已湮没光了．但是由于某种目前尚不甚明白的原

因，极少量的 n、p 残存了下来. 此问题我们曾在第一章 § 3 介绍过，这里只当作事实承认下来，不再赘述. 表 4—5 还表明，在 $T \leqslant 10^{12}\,\mathrm{K}$ 时，轻子中的 τ^+、τ^- 也早已消失，μ^+、μ^- 濒临灭绝，只剩下正负电子和各种中微子大量存在. 在尔后的演化中有几个重要的里程碑，下面逐一介绍.

(i) 中微子的脱耦

理论计算表明，中微子的脱耦温度 T_d 可取作 $10^{10}\mathrm{K}$，当 $T > T_d$ 时，不仅它们和电子之间会有各种转化过程，如

$$e^+ + e^- \rightleftharpoons \nu_e + \bar{\nu}_e,$$

它们还会引起残存的 n、p 相互转变：

$$\begin{cases} n + \nu_e \rightleftharpoons p + e^-, \\ p + \nu_e \rightleftharpoons n + e^+, \end{cases}$$

这些过程使中子和质子的数目达到热平衡：

$$\frac{N_n}{N_p} = e^{-\Delta mc^2/kT},$$

其中 $\Delta m = m_n - m_p = 2.3 \times 10^{-30}\,\mathrm{kg} \sim 1.3\,\mathrm{MeV} \sim 1.5 \times 10^{10}\,\mathrm{K}$. 在中微子的脱耦温度 $T_d = 10^{10}\,\mathrm{K}$ 下，比值为

$$\left(\frac{N_n}{N_p}\right) = e^{-\Delta mc^2/kT_d} = e^{-1.5} = 22\%. \qquad (4.65)$$

当宇宙继续降温时，如果自由中子和质子一样不衰变，这个比值将永远保持下去. 实际上自由中子是要进行衰变的：

$$n \longrightarrow p + e^- + \nu_e,$$

从而比值 (N_n/N_p) 将逐渐减小，直到全部的中子与质子形成稳定的原子核为止.

(ii) 氦核的形成

周期表中第一个最稳定的核素是 $^4\mathrm{He}$，它是由两个质子和两个中子组成的，总结合能为 28.3 MeV，相当于 $33 \times 10^{10}\,\mathrm{K}$. 所以在 $T < T_d$ 的温度下 $^4\mathrm{He}$ 是难以被 γ 光子摧毁的. 但是 2p 和 2n

四个粒子不易同时碰在一起有效地直接合成 ^{4}He，中间需经过合成氘核 d 的步骤：

$$p+n \longrightarrow d+\gamma.$$

d 的结合能很小，只有 2.22 MeV，在 $T=10^{10}$ K 的温度下超过这能量的 γ 光子大量存在，它们可使上述反应逆向进行，把氘核分解．只有当温度 T 降到 10^9 K 时，高能 γ 光子变得非常少，p 和 n 合成的氘核不再分解，很快进一步形成 ^{4}He 核．结合到 ^{4}He 核中的中子不再衰变为质子，此后宇宙间 N_n/N_p 比值不再改变，保持到现在．

$T=T_d=10^{10}$ K 对应 $t=1$s，$T=10^9$ K 对应 $t=3$ min，中间大约经历了三分钟．自由中子的寿命为 10.1 分钟①，在三分钟里有 $(1-e^{-3/10.1})=25.9\%$ 转变为质子，使得 N_n/N_p 比值下降到 13%，以剩下的中子全部结合进 ^{4}He 核里来计算，氦的宇宙丰度(按重量)应为

$$Y(^4\mathrm{He})=\frac{2N_n}{N_p+N_n}=23\%.$$

其余的都是氢(质子)．以上的计算是粗略的．精确的计算给出的数值为 $Y(^4\mathrm{He})=23.6\%$．

根据英国皇家格林尼治天文台的 Bernard Pagel 及其同事们前不久对众多星系中的原始星云进行的发射光谱观测，

$$Y(^4\mathrm{He})=23.5\%.$$

大爆炸理论的预言与氦丰度的观测结果符合得愈来愈好．

(iii) 中性原子的复合

宇宙演化的下一个里程碑是电子与质子或氦核复合成电中性的原子．在此之前它们处在电离的等离子体状态；等离子体是带

① 中子寿命的最新值与氦丰度问题，参见 *New Scienoist*, 1608, p. 30 (1988)；《物理》第 17 卷，第 12 期，第 750 页 (1988)。

电粒子体系，它们与光子之间频繁地碰撞着，保持很强的热耦合；变成中性原子组成的气体之后，就几乎不再与光子碰撞，或者说，与光子脱耦．这时，对光子来说，宇宙变得透明了．原子的电离能为 10eV 的数量级，有效的原子形成应发生在远低于这能量的温度下．取中性原子的有效复合温度为 4000K (折合 0.3eV)，此刻对应的宇宙年龄是 4×10^5 年．

(iv) 当今宇宙中的热辐射

自从宇宙变得对光子透明以后，光子体系就与宇宙间的其它成分脱耦，随着宇宙的膨胀而降温．式(4.58)告诉我们，辐射温度 $T_r\propto R^{-1}$．据估算，自从大规模地发生中性原子复合以来，宇宙的尺度 R 增大了三个多数量级，与此相应地，辐射温度 T_r 降了三个多数量级，达到 3K 左右．当今的宇宙里应无处不有地充满了等效温度约为 3K 的黑体辐射，这便是大爆炸宇宙模型的一个最重要的预言．这预言在 60 年代被观测证实了，经过十年左右许多人的反复验证，3K 的微波背景辐射被完全确认下来，其最初发现者彭齐亚斯(A. A. Penzias)和威尔孙(R. W. Wilson)分享了 1978 年的诺贝尔物理学奖金．然而发现的过程说来却有点偶然．

3．微波背景辐射的发现

在 1965 年以前的好些年里，天体物理学家并不知道大爆炸模型要求存在一个微波背景辐射，并可能实际被观测到，尽管有关的技术条件早在一、二十年前就已具备了．1964 年彭齐亚斯和威尔孙两位美国射电天文学家用贝尔电话实验室在新泽西州的一架噪声极低的角状反射天线去测量高银纬区(即银河平面以外区域)发出的射电波强度．这种测量特别困难，问题是怎样将它们与天线结构、放大器电路和地球大气层的干扰噪声区别开来．大气层噪声与大气层厚度有关，应有方向性；放大器电路的噪声可用液氦温度的"冷负载"设备消除．他们二人本打算在 7.35cm 波长上验

证天线本身的噪声确可忽略不计.之后,再在21cm波长上去观测星系本身.出乎他二人意料之外,在7.35cm波长上他们收到了相当大的与方向无关的微波噪声. 在随后的一年里他们发觉这天电噪声既在一日之中没有变化, 也不随季节而涨落. 这种噪声显然不像是来自银河系的, 否则我们早应该观察到来自酷似银河系的仙女座大星云M31强烈的7.35cm电磁辐射. 他们观测到的噪声似乎是从更广阔的宇宙深处产生的.

为了彻底弄清噪声的来源,显然,还需检验一下天线本身,看它的电噪声是否比预期的高. 特别是人们知道有一对鸽子曾在这天线的喉部筑过巢,在那里涂了一层被彭齐亚斯委婉地称之为"白色电介质"的东西. 1965年天线的喉部被拆开,这些肮脏的东西被清除掉,但想尽各种办法,仍然使观察到的噪声水平降低不多. 这种噪声到底是从哪里来的?

无线电工程师常用"等效温度"来描写射电噪声的强度. 彭齐亚斯和威尔孙二人发现他们收到的射电噪声的等效温度在2.5--4.5K之间. 有一天, 彭齐亚斯为别的事打电话给另一位射电天文学家、麻省理工学院的伯克(B. Burke). 这位伯克一方面知道彭齐亚斯他们的观测, 另一方面又刚好几经辗转地知道普林斯顿大学的一个青年理论物理学家皮伯斯(P. E. J.Peebles)在一次学术报告中说起, 早期宇宙应遗留下一个10K的射电噪声背景(他把等效温度估计高了). 皮伯斯就顺便把这一情况告知了彭齐亚斯,使他和普林斯顿的人联系上.

普林斯顿有几位实验物理学家,迪克(R. H. Dicke)罗尔(P. G. Roll)和威金森(D. T. Wilkinson),他们已着手装置一架噪声极低的小型天线, 以便观测早期宇宙遗留下来的辐射. 在迪克等人未完成测量装置之前, 他接到了彭齐亚斯的电话. 于是他们决定分别在《天体物理杂志(*Astrophysical Joumal*)》上各发表一篇

通讯．彭齐亚斯和威尔孙仍非常谨慎，文章用了一个很稳重的标题："在 4080Mc/s 额外天线温度的测量"（这里 4080Mc/s 即 7.35 cm 波长）．他们只是宣布有效天顶噪声温度的测量比预期值高出 3.5K，而避免作出任何宇宙学的解释，只在附注内提到迪克等人的通讯可能为此提供一种说明．

这些微波辐射果真是早期宇宙遗留下来的"化石"吗？为了最终证明这一点，需要知道它的频谱是否符合普朗克的黑体辐射公式．罗尔和威金森继彭齐亚斯等人之后在 3.2cm 波长也作了测量，此后射电天文学家们在许多不同波长上都作了测量．测量结果表明，辐射强度随波长的变化符合普朗克分布，等效温度约为 2.7 K 左右（见图 4-35）．不过，要想使结论有最大的说服力，还必须把测量的波长范围扩展到把频谱极大值包含进去．对 3K 左右的黑体辐射来说，$\lambda_{max} \leqslant 0.1$ cm，不幸的是，地球的大气层对 $\lambda < 0.3$ cm 的辐射已不大透明了．到了 1972 年，康奈尔火箭小组和麻省理工学院气球小组在大气层外测量的报告表明，辐射谱符合大约为 3K 的黑体辐射分布，1974 年一个伯克利气球小组肯定在 0.25—0.06 cm 波段辐射谱经过峰值后下降．到此看来已证明，在宇宙背景中的确有接近 3 K 的黑体辐射．于是大爆炸宇宙模型获得了最强有

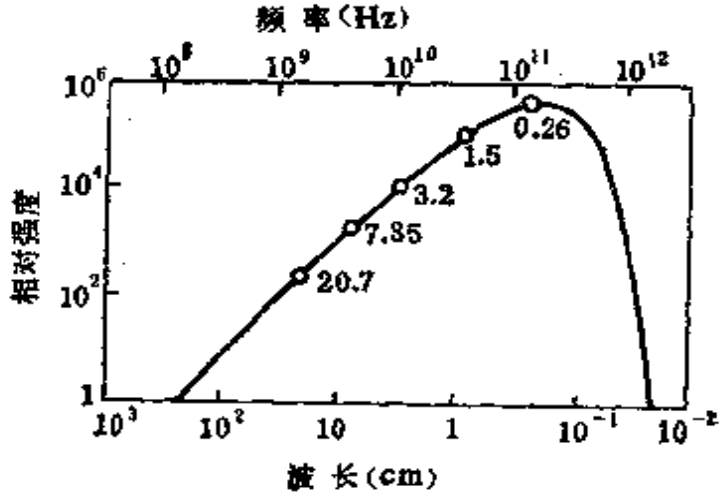


图 4-35　2.7K 黑体辐射谱

力的证据.

例题 23　估算宇宙背景辐射中光子的数密度 n_γ.

解　辐射的能量密度为

$$\varepsilon_\gamma=\frac{4}{c}\sigma T^4,$$

(σ——斯特藩-玻耳兹曼常数)，光子的平均能量为

$$\overline{h\nu}\simeq h\nu_{\max}=\frac{hc}{\lambda_{\max}}=\frac{h\sigma T}{b},$$

(b——维恩常数)．于是光子的数密度为

$$n_\gamma=\frac{\varepsilon_\gamma}{\overline{h\nu}}=\frac{4\sigma b T^3}{\overline{h}hc^2}\sim 300\ \mathrm{cm}^{-3}$$

以上结果的数量级是对的，更细致的计算给出 n_γ 较准确的结果是 500 cm^{-3}.

4. 宇宙的密度与短缺质量(missing mass)

前面讲过，由哈勃常数 H_0 算出的临界密度 $\rho_c\approx 5\times 10^{-30}\ \mathrm{g/cm^3}$ 主宰着宇宙的命运，现实的宇宙密度 ρ_0 大于还是小于 ρ_c 将给宇宙带来完全不同的前景．然而 ρ_0 究竟有多大？这是一个非常难回答的问题，要看用什么方法去估计星系的质量.

观测发现，对每种类型的星系，其质量 M 和光度 L 之比有较固定的数值．弥散不大．例如，对旋涡星系，$M/L\sim 8$—12，(M 以 $M_\odot$ 为单位，L 以 $L_\odot$ 为单位，下同)；对椭圆星系，$M/L\sim 10$—20，等等．因此，只要我们测出了星系的光度，就可以根据该类星系的平均质光比算出星系的质量．这样得出的星系质量称为"光度质量"．用光度方法估算，当今宇宙的平均密度约为

$$\rho_0^{\text{光度}}\approx 3\times 10^{-31}\ \mathrm{g/cm^3}=0.06\rho_c,$$

如果说这就是宇宙中全部质量的话，则宇宙是开放的、无限的，它将永远膨胀下去.

例题 24　如果光度质量反映了宇宙中全部重子(质子和中子)的质量，试求宇宙中重子与光子数密度与质量密度之比.

解　重子数密度

$$n_B=\frac{\rho_{光度}}{m_p}=\frac{3\times10^{-31}\,g/cm^3}{1.67\times10^{-24}\,g}=1.8\times10^{-7}\,cm^{-3},$$

在例题 23 中用微波背景辐射估计的光子数密度为 $n_r\sim500\,cm^{-3}$. 故

$$\frac{n_B}{n_r}\approx3.6\times10^{-10}.$$

这比值我们曾在第一章§3 里引用过.

光子质量密度为

$$\rho_r=\frac{n_r\overline{h\nu}}{c^2}=\frac{4\sigma T^4}{c^3}=6.8\times10^{-34}\,g/cm^3.$$

故

$$\frac{\rho_B}{\rho_r}\simeq\frac{\rho_{光度}}{\rho_r}\simeq4.4\times10^2.$$

即现今宇宙中的质量主要是由重子提供的.

例题 25　从上题可见，当今宇宙中粒子性物质占主导地位，在宇宙早期温度多高以前辐射占主导地位?

解　按(4.60)，$\rho_r\propto T_r^4$，而 $\rho_B\propto R^{-3}\propto T_r^3$ [见(4.58)]，故

$$\frac{\rho_B}{\rho_r}\propto T_r^{-1}.$$

按上题，当今 $\rho_B/\rho_r\simeq4.4\times10^2$，即在宇宙中的辐射温度比现在的 3K 高 4.4×10^2 倍，即 1300K 时，ρ_B 与 ρ_r 同数量级. 早于那时，$\rho_r>\rho_B$，辐射占主导地位.

测量星系质量的另一类方法是动力学方法. 动力学方法之一是“双星系法”，这是根据开普勒第三定律测双星质量方法的推广，把它运用到两个相互绕转的星系上. 动力学方法之二是“旋转曲线法”，即通过测旋转着的星系内旋转速度 v 随到星系中心距离 r 变化的曲线，求出其质量和质量分布. 动力学方法之三是“位力法”，此法的依据是位力定理

$$2T+U=0. \tag{4.66}$$

若我们把每个星系当作一个质点来看待，则总动能为

$$T=\sum_i\frac{1}{2}M_iv_i^2,$$

总势能为

$$U=-\sum_{i}\frac{GM_iM_j}{r_{ij}},$$

进一步假定星系的质量都相等；$M_i=M_j=\langle M\rangle$，因 v_i 和 r_{ij} 可从观测得出，利用式(4.66)即可求出平均质量$\langle M\rangle$. 这叫做位力质量.

使天文学家大惑不解的，是星系的动力学质量往往比光度质量大得多(大几十倍到几百倍)，如此估算出宇宙的平均密度 ρ_0 将大于 ρ_c. 从而我们的结论应该改变为：宇宙是封闭的，有限的，将来要坍缩.

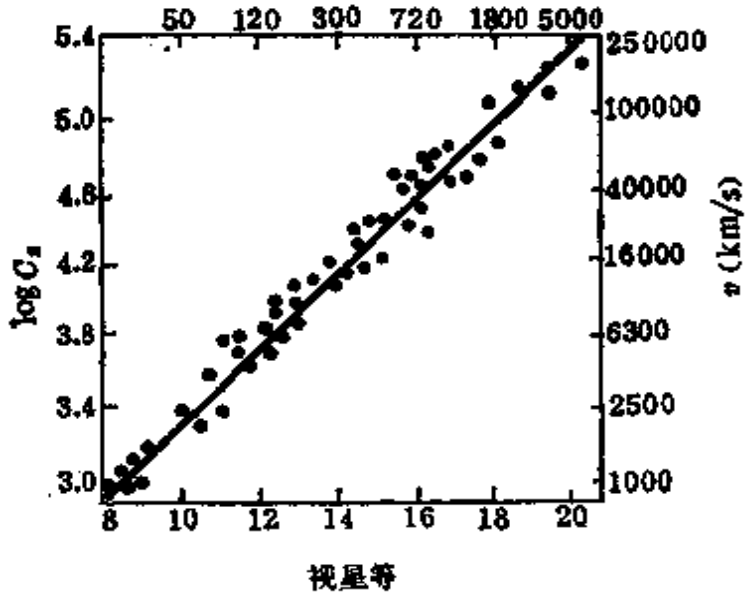


图 4-36 哈勃图

除了上述三种动力学方法测星系的质量外，还可用宇宙学方法从整体上测算宇宙的平均密度. 图 4-36 是一张红移 z 和视星等 m 的关系图，称为"哈勃图". 我们知道，天文学中常用的视星等 m 并不能反映天体的真实发光本领，因为它显然与天体的距离 r 有关. 天文学中规定，天体位于 10pc 时的视星等为"绝对星等" m_0，视星等与绝对星等之间的关系为

$$m=m_0-5+5\log r, \tag{4.67}$$

(这里 r 以 pc 为单位). 根据哈勃定律, $r\propto$ 红移 z, 故上式化为

$$m=C+5\log z, \tag{4.68}$$

C 是一个与 m_0 有关的常数. 从哈勃图 4-36 可以看出, 代表各星系的点子位于一条斜率为 5 的直线两旁不远. 这一方面表明哈勃定律成立, 另一方面表明 C(或者说绝对星等 m_0)虽不严格相等, 数值的弥散程度也不大. 然而, 我们在上面的叙述里隐讳了一点, 即常数 C 中含 $5\log H$(H——哈勃常数)一项. 对于固定时刻, 这项固然是常数. 但由于宇宙膨胀的速度是减缓的, 在宇宙演化的早期, H 比现在的 H_0 大. 视星等 m 愈大, 表示星系离我们愈远, 我们现在所观测到的是它们更加早期的历史状态. 因 H 随 m 的增大, 哈勃图不应该是一条直线, 它在大 m 的一端要向上翘, 上翘的程度反映了宇宙膨胀速度是怎样减缓的, 而后者取决于密度比 ρ_0/ρ_c. 所以从原则上我们可以根据哈勃图曲线上翘的程度来判断宇宙密度.

在小尺度内哈勃图对直线的偏离是不显著的, 要有效地用它来判断宇宙密度, 需做红移很大的天体的哈勃图. 人们很自然地想到了类星体. 不幸的是, 用类星体做出的哈勃图非常弥散. 或者说, 它们的绝对星等相差极大. 现在的办法是用一定的标准从类星体中选择出光度可能比较相近的, 然后再做它们的哈勃图. 目前已经有许多种不同的选择方法, 研究过多种不同类型的类星体. 研究的结果有一点是共同的, 即 $\rho_0/\rho_c>1$, 故宇宙是封闭的、有限的, 将来要坍缩.

我们看到, 用光度学方法测定的宇宙密度和动力学或宇宙学方法测定的结果竟相差如此悬殊. 天文学家自然会想到, 在光度质量中短缺的是一些不发光的暗物质的质量. 这些暗物质藏身在什么地方? 一个重要的迹象是星系的旋转曲线.

图 4-37 是星系 NGC5055 的旋转曲线. 典型的星系旋转曲线

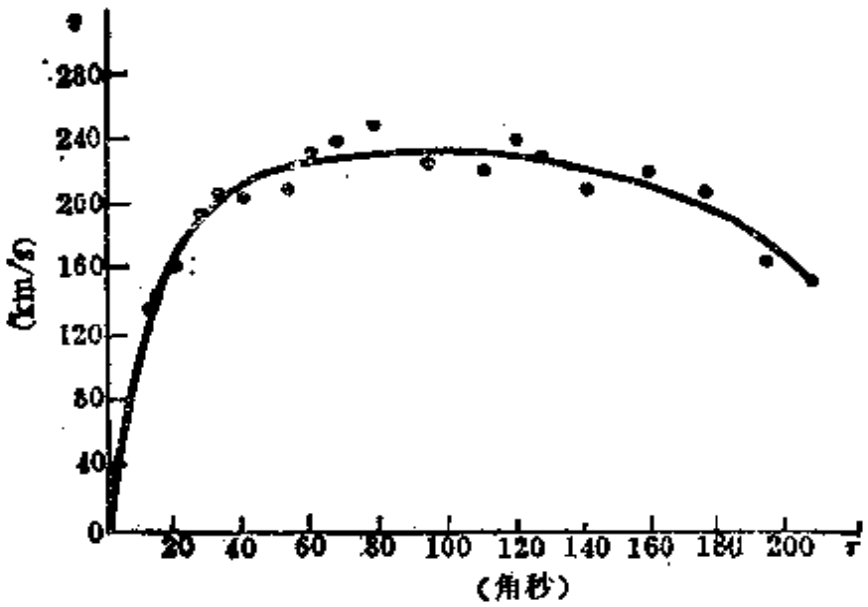


图 4-37　NGC5055 的旋转曲线

如下：靠中心的部分 $v \propto r$. 即类似于刚体；在边缘部分 $v \propto r^{-1/2}$，即类似于平方反比有心力场中的开普勒运动：

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

但是近年来射电望远镜的观测发现，星系最外围部分 v 不随 $r^{-1/2}$ 减小，而近似为常数. 这表明，在星系外围有一个质量很大的暗物质包层——星系晕.

提供星系中短缺质量的暗物质，其主组成是什么？是气体吗？不会太多，否则星系的引力不可能把质量比自身还大得多的气体束缚住. 是尘埃吗？也不会太多，否则星系所发的光将被严重阻挡，这与观测事实不符. 根据恒星演化理论，作为恒星归宿的矮星、中子星和黑洞也不可能有那样多. 1980 年一些物理学家宣称，中微子的静质量可能不为零，这想法在天体物理学界引起的反响似乎比粒子物理学界还要大，因为许多人马上想到，宇宙中的短缺质量也许就是中微子. 尽管这个问题至今尚没有定论，但使人们的思想大为开阔. 近年来兴起的超对称、超引力等理论预言了许多

新粒子，多数属于"微子"(引力微子、光微子、胶微子，W微子，Z微子，超中微子等)，还有磁单极子．它们都不是重子，大都不参与或很少参与电磁相互作用，不可能在现今的实验室内被发现，这些属性都很符合不可视暗物质候选者的身份．此外，还有人认为，按照霍金的假设宇宙早期形成的原生黑洞，或许也应列入暗物质候选者的名单．

总之，当前"短缺质量"问题仍是个谜；宇宙有限还是无限？前景如何？也都是些尚未解决的难题．

5．"热寂说"的终结

1850年克劳修斯(R. Clausius)把焦耳的发现和卡诺的理论调和起来，总结成热力学第一和第二定律．1854年他进一步引进"熵"的概念，重新表述了热力学第二定律．"热寂说"几乎是从一开头就伴随着热力学第二定律诞生和发展的．用克劳修斯自己的话说，热力学两条定律意味着：

(i) 宇宙的能量是常数；

(ii) 宇宙的熵趋于一个极大值．

那就是说，全宇宙将达到热平衡，进入热寂状态．宇宙热寂的结局，固然令人懊恼，但最令人不可理解的，是为什么现实的宇宙并没有达到热寂状态．因为长期以来，人们总认为宇宙基本上是静态的，它在时间上无始又无终，似乎它早就该处于热寂状态了．由于"热寂说"在感情上和理智上都给人以强烈的冲击，克劳修斯的同时代人就曾群起而攻之，但是很多反对意见都被克劳修斯驳倒了．当时批判"热寂说"的观点中对后世影响较大的有两家之言．

1872年玻耳兹曼提出了"涨落说"．我们知道，正是他首先赋予了熵的增加以统计解释．按照这种解释，热平衡态总伴随着涨落现象，后者是不遵从热力学第二定律的．玻耳兹曼认为，在宇宙的某些局部可以偶然地出现巨大的涨落，在那里熵没有增加，甚至

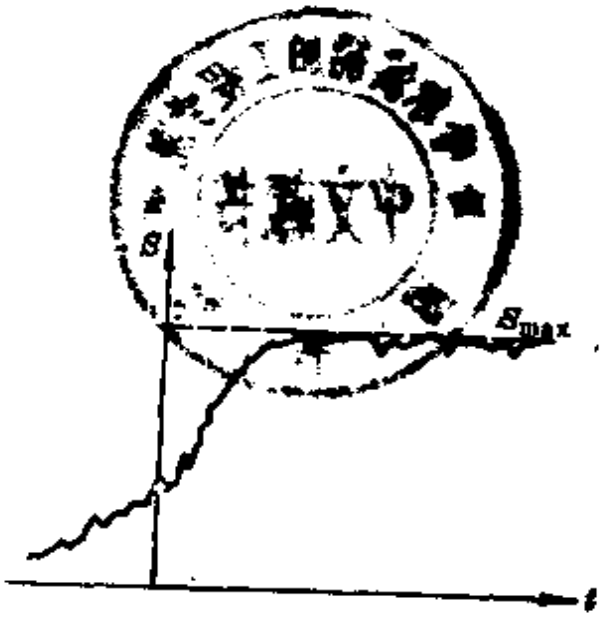


图 4-38　玻耳兹曼的涨落说

在减少(见图 4-38)．这种说法有一定的吸引力，但尚缺乏事实的根据．

1875—76 年恩格斯在《自然辩证法》中写道："运动的不灭不能仅仅从数量上去把握，而且还必须从质量上去理解"．根据这一原则，他有如下的信念："放射到太空中去的热一定有可能通过某种途径(指明这一途径，将是以后自然科学的课题)转变为另一种运动形式，在这种运动形式中，它能够重新集结和活动起来"．

在苏联和我国的一些热学教科书中，除经常引用上面两种说法来批判"热寂说"外，还有过如下一些流行的论点．一种认为宇宙是无限的，不是封闭的，因而不能把热力学第二定律推广到全宇宙．另一种认为，这个问题的答案不可免地要归到一种"原始推动力"，为宗教迷信中"上帝创造世界"的说法开辟了道路．

多少年来总感觉对"热寂说"的批判说服力不强，没有真正解决问题．现在看来，有的说法连前提也未必成立．如前所述，今天要对宇宙是否无限作出科学的结论，为时尚早．现在回过头来看，"热寂说"的要害在于忽视了引力场在宇宙演化中的作用。由于存在万有引力，宇宙根本没有平衡态，它只能处于动态的演化过程之中．大爆炸宇宙学使"热寂说"的佯谬迎刃而解．宇宙虽不一定是无限的，但它不是静态的．对于每个静态体系，熵有个可能达到的



图 4-39　膨胀的宇宙中熵的变化

353311

固定极大值 S_{max}(图 4-38 中的虚线);但对于膨胀着的系统,每一瞬时熵可能达到的极大值 S_{max} 也是与时俱增的(图 4-39 中的虚线).如果膨胀得足够快,系统不但不能每时每刻即上进程以达到新的平衡,而且实际熵值 S 的增长(图 4-39 中的实线)落后于 S_{max} 的增长,二者的差距愈拉愈大.虽然系统的熵不断增加,但它与平衡态(热寂状态)却相距愈来愈远.我们的宇宙中发生的正是这种情况.

总之,膨胀的宇宙模型以出乎意料的方式消释了"热寂"的疑团,展现了完全另一副情景:宇宙早期是基本上处于热平衡的高温高密度的"热粥",从这个单调的浑沌状态开始,一步步发展出愈来愈复杂的多样化结构.于是,在微观上形成了原子核、原子、分子(从较简单的无机分子到高级的生物大分子),在宏观上演化出星系团、星系、恒星、太阳系、地球、生命,直至人类这样的智慧生物和愈来愈发达的人类社会.古埃及神话中的凤凰鸟(phoenix)焚身于烈火之后,从自己的灰烬中青春焕发地再生.这真是当代宇宙观的一个绝妙的写照!宇宙不但不会死,反而会从早期的"热寂"状态(热平衡态)下生机勃勃地复生.固然,当今的宇宙学尚不能预卜宇宙的最终结局,但是折磨了物理学界和哲学界一百多年的梦魇——热寂说,作为历史的一页,可以尽管放心地翻过去了.

参 考 文 献

[1] C. W.艾伦,物理量和天体物理量,上海人民出版社,1976.

[2] F. N. 巴什,通俗天文学,科学普及出版社,1985.

[3] J. F. Baugher, *The Space-Age Solar System*, John Wiley, 1988.

[4] S.温伯格,最初三分钟,科学出版社,1981.

[5] S. W. Hawking, *A Brief History of Time*, Bamtam Books, 1988.

[6] 彭秋和,黄克谅,神秘的宇宙,科学出版社,1987.