现代数学基础

51 阶的估计基础

■ 潘承洞　于秀源

高等教育出版社

现代数学基础

51 阶的估计基础

■ 潘承洞　于秀源

高等教育出版社·北京

内容简介

本书讲述阶的估计方法与应用。全书共分六章，在讲述阶的概念和基本运算之后，分别介绍与级数、积分、离散和、连续和、隐函数、导函数、Tauber 型定理等有关的阶的估计问题，并介绍了常用的分部积分法与 Laplace 方法。

本书可供具有一定数学基础的理工科大学生、研究生和科技工作人员使用。

图书在版编目(CIP)数据

阶的估计基础/潘承洞，于秀源编著．—北京：高等教育出版社，2015.1

ISBN 978-7-04-041350-2

Ⅰ.①阶… Ⅱ.①潘…②于… Ⅲ.①数学分析 Ⅳ.①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 274398 号

策划编辑 赵天夫 责任编辑 赵天夫 封面设计 赵 阳 责任印制 张福涛

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印 刷 北京市白帆印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 13.75
字 数 240 千字
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
版 次 2015 年 1 月第 1 版
印 次 2015 年 1 月第 1 次印刷
定 价 49.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 41350-00

目 录

第一章 阶的概念及 O 与 o 的运算 1

1.1 基本概念 1

1.2 大 O 与小 o 的运算 7

1.3 几个基本定理及其应用 11

1.4 Γ-函数与 Stirling 公式 22

1.5 渐近级数 30

1.6 例题 34

习题 42

第二章 级数与积分 45

2.1 无穷级数与无穷乘积的收敛性 45

2.2 Fourier 级数的收敛性 52

2.3 极限过程的交换 61

2.4 例题 74

习题 78

第三章 离散和与连续和 81

3.1 分部求和公式 81

3.2 Euler-Maclaurin 求和公式 90

3.3 变符号项的和式的估计 104

3.4 积分和 110

3.5 例题 116
习题 128

第四章 隐函数与导函数 133

4.1 Lagrange 定理 133
4.2 迭代法 139
4.3 导函数的阶 150
4.4 例题 158
习题 165

第五章 分部积分法与 Laplace 方法 167

5.1 分部积分法 167
5.2 Laplace 方法 172
5.3 例题 181

第六章 Tauber 型定理 191

6.1 小 o Tauber 定理 192
6.2 大 O Tauber 定理 200

参考书目 207

后记 209

第一章

阶的概念及 O 与 o 的运算

本章主要介绍无穷大量与无穷小量的阶的概念以及阶的比较, O 与 o 的基本运算规则和有关的基本定理. 这些内容是以后各章的基础. 所以, 除了理论知识外, 本章还包含了较多的例题和习题, 以使读者能够较深刻地理解这些基本知识, 并熟练地运用它们.

1.1 基本概念

在本书中, 多次涉及变量或函数的极限过程. 通常, 这些变量或函数的定义域及相关的条件是容易判定的, 因此, 为叙述简洁, 将不对它们一一列举. 若确属必要, 则将个别地予以说明. 特别地, 若不特别说明, 则 "∞" 表示 "$+\infty$" (通常意义下的正无穷大).

定义 1 若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, 则称 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时是无穷小量, 记为

$$f(x) = o(1), \quad x \to x_0.$$

特别地, 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 则称 a_n 当 $n \to \infty$ 时是无穷小量, 记为

$$a_n = o(1), \quad n \to \infty.$$

注 由定义可知,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a \quad 与 \quad f(x)=a+o(1), \quad x\to x_0$$

是等价的; 此外, 若 $b\neq 0$, 则 $\frac{a+o(1)}{b+o(1)}=\frac{a}{b}+o(1)$.

下面是几个无穷小量的例子:

$$\frac{x+\sin x}{x^2+5x-2},\ \frac{3x}{e^x+\log x},\ \sqrt{x+1}-\sqrt{x},\ \log\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{\sin x}{x} \quad (x\to\infty);$$

$$xe^x+3\log(1+x),\ e^{\sin x}\cos x-1,\ \int_{x^{-2}}^{\infty} e^{-t}\log t dt \quad (x\to 0);$$

$$(-1)^n\frac{\sin n}{n}+e^{-\frac{1}{n^2}\log n}-1,\ \sum_{k=n}^{\infty}\frac{2\log k+\sin k}{k^3} \quad (n\to\infty),$$

其中 $\log x$ 是数 x 以数 $e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 为底的对数 (在本书中总是使用这个表示).

定义 2 *若 $\lim_{x\to x_0}|f(x)|=\infty$ (或 $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$, 或 $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$), 则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时是无穷大量 (或正无穷大量, 或负无穷大量).*

对于数列 $\{a_n\}$ 有相应的定义.

下面的一些量都是无穷大量:

$$Ax^n+Bx^m \quad (n\neq m, A^2+B^2\neq 0, x\to\infty);$$

$$x+\sin x\log x \quad (x\to\infty);$$

$$x^\alpha+A(\log x)^\beta \quad (\alpha>0, x\to\infty);$$

$$\frac{1}{\sin x}+\cos x+1 (x\to 0),\quad \frac{5}{\sqrt{x}-1} \quad (x\to 1);$$

$$(-1)^n n+\frac{1}{\sqrt{n}}+\sqrt{n},\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \quad (n\to\infty).$$

无穷大量与无穷小量的概念, 只反映变量的变化趋势, 对于变量的其他性质并未做出任何描述. 而在具体问题中, 除了变量的变化趋势, 我们更关心的却是对于这种变化趋势的量的方面的了解, 经常需要比

较变量的变化趋势在量的方面的差异, 并通过对这些差异的分析, 找出它们的内在联系. 在这些差异中, 最明显的一个就是变化 "速度" 的不同. 例如, 变量 $\sqrt{x}, x^2$ 与 x^3 当 $x \to \infty$ 时虽都是无穷大量, 但是它们趋于 ∞ 的 "速度" 是大不相同的. 事实上, 由于

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x}} = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2} = \infty,$$

我们可以说, 当 $x \to \infty$ 时, 这三个变量趋于 ∞ 的 "速度" 是无法相比的. 粗略地说, x^2 趋于 ∞ 的速度相对于 $\sqrt{x}$ 趋于 ∞ 的速度, 是一个无穷大量. x^3 相对于 x^2 亦有这种关系.

当然, 变量之间这种增长 (或变化) "速度" 的差异, 并不单单存在于无穷大量或无穷小量之间. 例如, 分别取 a_n 及 b_n 为

$$\begin{aligned} a_n:&\quad \frac{2n-1}{n}, \quad 1+\sin\frac{1}{n}, \quad 1+\log\frac{1}{n}, \\ b_n:&\quad \frac{1}{n^2}, \quad \sin\frac{1}{n^2}, \quad \log\frac{n-1}{n}, \end{aligned}$$

则在 a_n 与 b_n 之间也有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$$

的关系.

为了清楚表明变量在变化趋势方面的差异, 我们引进 "阶" 的概念.

定义 3 若

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

则称 $f(x)$ 对于 $g(x)$ 当 $x \to x_0$ 时是无穷小量, 记为

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \to x_0.$$

若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是无穷大量, 则称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 低阶的无穷大量.

若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是无穷小量, 则称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小量.

定义 4 若

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1,$$

则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 当 $x\to x_0$ 时是等价的, 记为

$$f(x)\sim g(x),\quad x\to x_0\quad 或\quad f(x)=g(x)(1+o(1)),\quad x\to x_0.$$

例如

$$\sin x=x(1+o(1)),\quad e^x-1=x(1+o(1)),\quad x\to 0;$$

$$\log\left(1+\frac{\log x}{x}\right)=\frac{\log x}{x}(1+o(1)),\quad e^{\frac{1}{x^2}}-1=\frac{1}{x^2}(1+o(1)),\quad x\to\infty.$$

定义 5 设 $g(x)>0$, 若存在常数 $A>0$, 使得

$$|f(x)|\le Ag(x),\quad x\in(a,b)$$

成立, 则称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的强函数, 记为

$$f(x)=O(g(x)),\quad x\in(a,b).$$

例如

$$\cos x=O(1),\quad -\infty<x<\infty;$$

$$\log x=O(x),\quad x\ge 1.$$

注 1 显然, 改变 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在有限个点的数值, 不影响强函数关系.

注 2 如果 $\lim_{x\to x_0}f(x)$ 存在有限, 则存在 $\delta>0$, 使得

$$f(x)=O(1),\quad x\in(x_0-\delta,x_0+\delta);$$

如果 $\lim_{x\to\infty}f(x)$ 存在有限, 则存在 $A>0$, 使得

$$f(x)=O(1),\quad |x|>A.$$

注 3 在定义 5 中, 常数 A 被称为 "大 O 常数", 它与变量 x 无关, 在一般情况下, 这点不做特别说明. 但是, "大 O 常数" 可能与参变量有关, 例如, 在

$$\sin(xy) = O(1)$$

中, "大 O 常数" 与参数 y 无关, 但在

$$\sin(xy) = O(x)$$

中, "大 O 常数" 就与参数 y 有关, 此时我们常用 $O_y(\cdots)$ 代替 $O(\cdots)$, 以表明大 O 常数与参数 y 有关, 例如

$$\sin(xy) = O_y(x).$$

当然, 在不致引起误会, 或这个参数的引进对整个问题的处理没有影响时, 也可以略去不写.

定义 6 假设当 $x \to x_0$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是无穷大量 (无穷小量), 且存在常数 $A > 0, B > 0$, 使得

$$Af(x) \leq g(x) \leq Bf(x), \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

成立, 则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 当 $x \to x_0$ 时是同阶无穷大量 (无穷小量), 记为

$$f(x) \approx g(x), \quad x \to x_0.$$

注 对于 $x \to -\infty, x \to +\infty$ 以及 $x \to \infty$ 的情形, 请读者给出同阶无穷大量 (无穷小量) 的定义.

例如,

$$3x\sin(x-2) + |\log x| \approx |\log x|, \quad x \to 0+;$$

$$\left(4 + \cos\frac{1}{1-x}\right)\left(2e^{\frac{1}{(x-1)^2}} + x\right) \approx e^{\frac{1}{(x-1)^2}}, \quad x \to 1;$$

$$\log(n + \sin n) \approx 3\log n, \quad e^{\frac{1}{n}} - 1 \approx \sin\frac{4}{n}, \quad n \to \infty.$$

例 1 设 $\varepsilon > 0$ 及 A 是任意常数, 则对于任意的 $a > 0$, 有

$$x^A = o((1+a)^{\varepsilon x}), \quad x \to \infty, \tag{1}$$

$$(\log x)^A = o(x^\varepsilon), \quad x \to \infty, \tag{2}$$

$$(f(x))^A = o(e^{\varepsilon f(x)}), \quad x \to \infty, \tag{3}$$

其中 $f(x)$ 是单调上升的函数, 且

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

解 不妨设 $A > 0$. 令 $n = [x]$, $[x]$ 表示 x 的整数部分 (即不超过 x 的最大整数), $m = [A] + 1$, 则当 $x \to \infty$ 时, 显然也有 $n \to \infty$, 因此, 当 $n \geq 2m+1$ 时, 有

$$(1+a)^x \geq (1+a)^n \geq C_n^{m+1} a^{m+1} \geq \frac{a^{m+1}}{(m+1)!}(n-m)^{m+1}$$

$$\geq \frac{a^{m+1}}{(m+1)!}\left(\frac{n}{2}\right)^{m+1} = \frac{a^{m+1}n^{m+1}}{2^{m+1}(m+1)!}.$$

由于 a 与 m 都是常数, 所以当 $n \to \infty$ 时, 有

$$\frac{(1+a)^x}{x^A} \geq \frac{a^{m+1}n^{m+1}}{2^{m+1}(m+1)!}\frac{1}{(1+n)^m} \geq \frac{a^{m+1}}{2^{2m+1}(m+1)!} \cdot n.$$

由此得到: 对于任意的常数 A 及 $a > 0$, 有

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^A}{(1+a)^x} = 0. \tag{4}$$

在上式中取 $x = \varepsilon y$, 则

$$\lim_{y\to\infty} \frac{y^A}{(1+a)^{\varepsilon y}} = 0,$$

由此得到 (1) 式.

在 (4) 式中取 $a = e-1, x = \varepsilon \log y$, 则

$$\lim_{y\to\infty} \frac{(\log y)^A}{y^\varepsilon} = 0,$$

这就是 (2) 式.

在 (2) 式中取 $x = e^{f(y)}$, 则当 $y \to \infty$ 时, $x \to \infty$, 于是得到 (3) 式. □

1.2 大 O 与小 o 的运算

下面是有关大 O 与小 o 的基本运算法则, 本书以后各章节中将直接引用它们而不注明具体出处.

法则 1 若 $f(x)$ 是无穷大量, $x \to x_0$, 并且 $\varphi(x) = O(1)$, 则

$$\varphi(x) = o(f(x)), \quad x \to x_0.$$

法则 2 若 $f(x) = O(\varphi), \varphi = O(\psi)$, 则

$$f(x) = O(\psi).$$

法则 3 若 $f(x) = O(\varphi), \varphi = o(\psi)$, 则

$$f(x) = o(\psi).$$

法则 4 $O(f) + O(g) = O(f + g)$.

法则 5 $O(f)O(g) = O(fg)$.

法则 6 $o(1)O(f) = o(f)$.

法则 7 $O(1)o(f) = o(f)$.

法则 8 $O(f) + o(f) = O(f)$.

法则 9 $o(f) + o(g) = o(|f| + |g|)$.

法则 10 $o(f) \cdot o(g) = o(fg)$.

法则 11 $\{O(f)\}^k = O_k(f^k)$, k 是自然数. 一般地, "大 O 常数"与 k 有关.

法则 12 $\{o(f)\}^k = o(f^k)$.

法则 13 若 $f \sim g, g \sim \varphi$, 则 $f \sim \varphi$.

法则 14 若 $f = o(g), g \sim \varphi$, 则 $g \sim \varphi \pm f$.

法则 15 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是正值函数, $f(x)=o(g(x))$, $x\to\infty$, 则

$$\int_A^B f(x)dx = o\left(\int_A^B g(x)dx\right), \quad B>A\to\infty.$$

特别地, 若存在 A_0 使得 $\int_{A_0}^{\infty} g(x)dx<\infty$, 则

$$\int_A^{\infty} f(x)dx = o\left(\int_A^{\infty} g(x)dx\right), \quad A\to\infty.$$

法则 16 若 a_n 与 b_n 都取正值 $(n=1,2,3,\cdots)$, $a_n=o(b_n), n\to\infty$, 则

$$\sum_{n=N}^{M} a_n = o\left(\sum_{n=N}^{M} b_n\right), \quad M>N\to\infty;$$

特别地, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n<\infty$, 则

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = o\left(\sum_{n=N}^{\infty} b_n\right), \quad N\to\infty.$$

以上的法则都易验证, 我们仅举几个法则证明如下, 其余请读者补足.

法则 6 的证明 设 $\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=0$, 且

$$|g(x)|\le Mf(x), \quad x\in(a,b).$$

则

$$0\le\lim_{x\to x_0}\left|\frac{\varphi(x)g(x)}{f(x)}\right|\le M\lim_{x\to x_0}|\varphi(x)|=0,$$

于是

$$\varphi(x)g(x)=o(f(x)).$$ □

法则 11 的证明 设 $|g(x)|\le Mf(x)$, $x\in(a,b)$. 则

$$|g(x)|^k\le M^k f^k(x), \quad x\in(a,b),$$

即

$$(g(x))^k=O_k(f^k(x)), \quad x\in(a,b).$$ □

下面是关于大 O 与小 o 两个简单却重要的注记.

注 1 在上面的基本运算中, 我们没有说到关于反函数的性质. 一般地, 如果 $\varphi(x)$ 与 $f(x)$ 都是增函数, $\tilde{\varphi}(x)$ 与 $\tilde{f}(x)$ 分别表示它们的反函数, 那么, 由

$$\varphi(x) = o(f(x))$$

不能得到

$$\tilde{f}(x) = o(\tilde{\varphi}(x)).$$

这可从下例看出:

$$f(x) = e^x, \quad \varphi(x) = \frac{e^x}{x}, \quad x \to \infty.$$

注 2 $\varphi = O(f)$ 是一个不等式, 而 $\varphi = o(g)$ 所表示的则是一个极限. 一般地, 由

$$f = O(g) \quad 与 \quad f = O(h)$$

不能得到任何关于 g 和 h 的关系的信息. 例如, 我们有

$$\sin x = O(1), \quad \sin x = O(2), \quad \sin x = O(x), \quad 0 < x < +\infty,$$

但是从上面的 "等式" 难以断定 1, 2 及 x 的关系.

上面的基本法则虽然简单, 却使我们能够容易地处理大量的阶的估计问题. 例如,

当 $x \to \infty$ 时,

$$5x + \sin x \sim 5x; \quad 3e^x + x^4 \sim 3e^x; \quad 8e^x + x^3 \log x = O(e^x);$$

$$2 + \sin\frac{1}{x} = O(1); \quad x^n \log(\log\log x)^2 = o(x^{n+1});$$

当 $x \to 0+$ 时,

$$x^2 + x^3 = o(x); \quad x\log x + x^2(\log\log(1+x^2))^3 = o(\sqrt{x}); \quad e^x \log\frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$x\cos x + \sin x = O(x); \quad \frac{1}{|\log x|^3 + 5} = o\left(\frac{1}{\log\log\frac{1}{x}}\right).$$

例 1 设 $f(x)\to\infty$, $x\to x_0$, $P(x)$ 与 $Q(x)$ 是多项式:

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,\quad a_n\neq 0,$$
$$Q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0,\quad b_m\neq 0.$$

则当 $x\to x_0$ 时, 有

(1) $P(f(x))+Q(f(x))\begin{cases}\sim a_n(f(x))^n, & n>m,\\ \sim (a_n+b_n)(f(x))^n, & n=m, a_n+b_n\neq 0,\\ \sim b_m(f(x))^m, & n<m;\end{cases}$

(2) $P(f(x))Q(f(x))\sim a_nb_m(f(x))^{n+m}$;

(3) $\dfrac{P(f(x))}{Q(f(x))}\sim\dfrac{a_n}{b_m}(f(x))^{n-m}$.

解 此处给出结论 (3) 的证明. 结论 (1) 与结论 (2) 的证明与之类似.

由定理条件, 当 $x\to x_0$ 时, 有

$$\frac{P(f)}{Q(f)}=\frac{a_nf^n+a_{n-1}f^{n-1}+\cdots+a_1f+a_0}{b_mf^m+b_{m-1}f^{m-1}+\cdots+b_1f+b_0}=\frac{a_nf^n(1+o(1))}{b_mf^m(1+o(1))}$$
$$=\frac{a_n}{b_m}f^{n-m}(1+o(1)).$$ □

例 2 设 $a_n=O(b_n), n\geq 1$, 并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n<\infty$, 则存在常数 C, 使得

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=C+O\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}b_k\right),\quad n\to\infty.$$

解 显然, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ 收敛, 因此存在常数 C 使得 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=C$, 于是

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{\infty}a_k-\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k=C+O\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}b_k\right),\quad n\to\infty.$$ □

注 在例 2 中, 如果使用估计 $\sum_{k=1}^{n}a_k=O\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)$, 那么, 只能得到估计 $\sum_{k=1}^{n}a_k=O(1)$, 由此可见, 稍微细致的估计技巧常能产生更为精确的结果.

1.3 几个基本定理及其应用

定理 1 在 x_0 的某个邻域内, 若 $f^{(n)}(x)$ 存在, 且 $|f^{(n)}(x)| \leq M$, 则

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + O(|x - x_0|^n)$$

在 x_0 的该邻域内成立.

这是 Taylor 公式的推论.

由定理 1 立即可以得到下面的推论.

推论 1 下面的估计式成立:

(1) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)$, $x \to 0$;

(2) $\cos x = x - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$, $x \to 0$;

(3) $\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$, $x \to 0$;

(4) $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + O(x^2)$, $x \to 0$;

(5) $e^x = 1 + x + O(x)^2$, $x \to 0$.

更一般地, 有下面的推论.

推论 2 若 $f(x)$ 满足条件 $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, 则有下面的估计式:

(1) $\sin f(x) = f(x) - \frac{f^3(x)}{3!} + O(|f^5(x)|)$, $x \to x_0$;

(2) $\cos f(x) = 1 - \frac{f^2(x)}{2} + O(f^4(x))$, $x \to x_0$;

(3) $\log(1 + f(x)) = f(x) - \frac{f^2(x)}{2} + O(|f^3(x)|)$, $x \to x_0$;

(4) $(1 + f(x))^a = 1 + af(x) + O(f^2(x))$, $x \to x_0$;

(5) $e^{f(x)} = 1 + f(x) + O(f^2(x))$, $x \to x_0$.

例如,

$$\log(1 + \sin x) = \sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x + O(|\sin x|^3), \quad x \to 0.$$

上面所列举的几个常用的公式, 当然不是仅在 $x = 0$ 的邻域内才

能使用. 例如, 有

$$e^x = 1 + x + O(x^2), \quad |x| < 1,$$
$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4), \quad |x| < \infty.$$

下面, 我们给出定理 1 及其推论的几个简单应用.

例 1 证明

$$\lim_{x\to\infty} \frac{n(\sqrt[n]{n} - 1)}{\log n} = 1. \tag{1}$$

解 因为

$$\sqrt[n]{n} = \exp\left(\frac{\log n}{n}\right) = 1 + \frac{\log n}{n} + O\left(\frac{\log^2 n}{n^2}\right), \quad n \to \infty,$$

所以

$$n(\sqrt[n]{n} - 1) = \log n + O\left(\frac{\log^2 n}{n}\right), \quad n \to \infty,$$
$$\frac{n(\sqrt[n]{n} - 1)}{\log n} = 1 + O\left(\frac{\log n}{n}\right), \quad n \to \infty,$$

由此推出

$$\lim_{x\to\infty} \frac{n(\sqrt[n]{n} - 1)}{\log n} = 1. \qquad \square$$

例 2 设 $a = O(1)$, $b = O(1)$, 则

$$(n+a)^{n+b} = n^{n+b}e^a\left(1 + \frac{a\left(b - \frac{a}{2}\right)}{n} + O(n^{-2})\right). \tag{2}$$

解 记 $a_n = (n+a)^{n+b}$, 则

$$\begin{aligned}\log a_n &= (n+b)\log(n+a) = (n+b)\left(\log n + \log\left(1 + \frac{a}{n}\right)\right)\\ &= (n+b)\log n + (n+b)\left(\frac{a}{n} - \frac{a^2}{2n^2} + O\left(\frac{a^3}{n^3}\right)\right)\\ &= (n+b)\log n + a + a\left(b - \frac{a}{2}\right)\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),\end{aligned}$$

因此

$$a_n = n^{n+b}\exp\left(a + a\left(b - \frac{a}{2}\right)\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$
$$= n^{n+b}e^a\left(1 + a\left(b - \frac{a}{2}\right)\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right). \qquad \square$$

在例 2 中取 $b = 0$, 得到

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a\left(1 - \frac{a^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

例 3 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^x - \cos\frac{x}{2}}{\left(\sin x - \sin\frac{x}{2}\right)\log(1+x)}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(x+e^x) + 2\sin x}{\sqrt{1+2x} - \cos x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x^\alpha}}} - \sqrt{x}\right)$, $0 < \alpha < 2$;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\log\left(1+\frac{2}{x^2}\right)\left(e - (1+\frac{1}{x})^x\right)}{1 - 2x\tan\frac{1}{2x}}$.

解 (1) 当 $x \to 0$ 时, 有

$$x\log(1+x) = x\left(x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)\right)$$
$$= x^2 - \frac{x^3}{2} + O(x^4),$$
$$(1+x)^x = \exp(x\log(1+x)) = \exp\left(x^2 - \frac{x^3}{2} + O(x^4)\right)$$
$$= 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + O(x^4),$$

所以

$$\frac{(1+x)^x - \cos\frac{x}{2}}{\left(\sin x - \sin\frac{x}{2}\right)\log(1+x)} = \frac{1 + x^2 + O(x^3) - \left(1 - \frac{x^2}{8} + O(x^4)\right)}{\left(x - \frac{x}{2} + O(x^3)\right)\left(x + O(x^2)\right)}$$
$$= \frac{\frac{9}{8}x^2 + O(x^3)}{\frac{1}{2}x^2 + O(x^3)} = \frac{9}{4}(1 + O(x))$$
$$= \frac{9}{4}(1 + o(1)),$$

即

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^x-\cos\frac{x}{2}}{\left(\sin x-\sin\frac{x}{2}\right)\log(1+x)}=\frac{9}{4}.$$

(2) 当 $x\to 0$ 时, 有

$$\begin{aligned}\log(x+e^x)&=\log(x+1+x+O(x^2))=\log(1+2x+O(x^2))\\&=2x+O(x^2),\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\log(x+e^x)+2\sin x}{\sqrt{1+2x}-\cos x}&=\frac{2x+O(x^2)+2(x+O(x^3))}{1+x+O(x^2)-(1+O(x^2))}\\&=\frac{4x+O(x^2)}{x+O(x^2)}=4(1+O(x)),\end{aligned}$$

即

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+e^x)+2\sin x}{\sqrt{1+2x}-\cos x}=4.$$

(3) 当 $x\to\infty$ 时, 由于 $0<\alpha<2$, 有

$$\begin{aligned}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x^\alpha}}}&=\sqrt{x}\left(1+\sqrt{\frac{1}{x}+x^{\frac{\alpha}{2}-2}}\right)^{\frac{1}{2}}\\&=\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt{1+x^{\frac{\alpha}{2}-1}}\right)+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\\&=\sqrt{x}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}x^{\frac{\alpha}{2}-1}+O(x^{\alpha-2})\right)+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right),\end{aligned}$$

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x^\alpha}}}-\sqrt{x}=\frac{1}{2}+o(1),$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x^\alpha}}}-\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2}.$$

(4) 当 $x\to\infty$ 时, 有

$$x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)=1-\frac{1}{2x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

所以

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^{1-\frac{1}{2x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)}=e\left(1-\frac{1}{2x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right),$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{x\log\left(1+\frac{2}{x^2}\right)\left(e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)}{1-2x\tan\frac{1}{2x}} &= \frac{\log\left(1+\frac{2}{x^2}\right)\left(e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)}{\frac{1}{x}-2\tan\frac{1}{2x}}\\ &= \frac{\left(\frac{2}{x^2}+O\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)\left(\frac{e}{2x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}{\frac{1}{x}-2\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{24x^3}+O\left(\frac{1}{x^5}\right)\right)}\\ &= \frac{\frac{e}{x^3}+O\left(\frac{1}{x^4}\right)}{-\frac{1}{12x^3}+O\left(\frac{1}{x^5}\right)},\end{aligned}$$

从而得到

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\log(1+\frac{2}{x^2})(e-(1+\frac{1}{x})^x)}{1-2x\tan\frac{1}{2x}}=-12e. \qquad \square$$

例 4 求极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos^n\dfrac{x}{\sqrt{n}}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x})$, $x>0$.

解 (1) 由

$$\begin{aligned}\left(\cos\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n &= \left(1-\frac{x^2}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^n = e^{n\log\left(1-\frac{x^2}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}\\ &= e^{n\left(-\frac{x^2}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^{-\frac{x^2}{2}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)}\\ &= e^{-\frac{x^2}{2}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right),\end{aligned}$$

得到

$$\lim_{x\to\infty}\cos^n\frac{x}{\sqrt{n}}=e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

(2) 由

$$\begin{aligned}n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x}) &= n^2x^{\frac{1}{n}}\left(1-x^{-\frac{1}{n(n+1)}}\right) = n^2x^{\frac{1}{n}}\left(1-e^{-\frac{1}{n(n+1)}\log x}\right)\\ &= n^2x^{\frac{1}{n}}\left(1-\left(1-\frac{1}{n(n+1)}\log x+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right)\\ &= n^2x^{\frac{1}{n}}\left(\frac{\log x}{n(n+1)}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\\ &= \frac{n^2}{n(n+1)}x^{\frac{1}{n}}\log x+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\end{aligned}$$

得到

$$\lim_{x\to\infty} n^2\left(x^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{n+1}}\right)=\log x. \qquad \square$$

例 5 判断下列无穷积分或无穷级数的收敛性:

(1) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\left(e^{\frac{1}{x^2}}-1\right)^a}{\log^b\left(1+\frac{1}{x}\right)}dx$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\log(1+n)}\sin\frac{1}{n^{\beta}},\ \beta>0$

(3) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\log\left(1+\sin\frac{1}{x^{\alpha}}\right)}{x^{\beta}\log\cos\frac{1}{x}}dx,\ \alpha>0$;

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^{\beta}}{\log^{\gamma}(1+n)}$;

(5) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{x^p}\right)}{x\sqrt[3]{1+x^2}}dx,\ p$ 是实数;

(6) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{x^m\arctan x}{2+x^n}dx,\ n>0$;

(7) $\displaystyle\int_0^1\frac{\log x}{(1-x^2)^a(\sin x)^p}dx,\ p$ 是实数.

解 首先注意, 本例中的级数 (或积分) 的通项 (或被积函数) 对于充分大的 n (或 x) 皆取正值 (或恒负值).

(1) 当 $x\to\infty$ 时,

$$\frac{\left(e^{\frac{1}{x^2}}-1\right)^a}{\log^b\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{\left(\frac{1}{x^2}+O\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)^a}{\left(\frac{1}{x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^b}=\frac{1}{x^{2a-b}}\left(1+O\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

因此,

$$\int_1^{\infty}\frac{\left(e^{\frac{1}{x^2}}-1\right)^a}{\log^b\left(1+\frac{1}{x}\right)}dx\begin{cases}\text{收敛}, & \text{当 } 2a-b>1,\\ \text{发散}, & \text{当 } 2a-b\le 1.\end{cases}$$

(2) 当 $n\to\infty$ 时, 由于 $\beta>0$, 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\log(1+n)}\sin\frac{1}{n^{\beta}}&=\frac{1}{\log(1+n)}\left(\frac{1}{n^{\beta}}+O\left(\frac{1}{n^{3\beta}}\right)\right)\\&=\frac{1}{n^{\beta}\log(1+n)}\left(1+O\left(\frac{1}{n^{2\beta}}\right)\right),\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\log(1+n)}\sin\frac{1}{n^{\beta}}\begin{cases}\text{收敛}, & \text{当 } \beta>1,\\ \text{发散}, & \text{当 } 0<\beta\le 1.\end{cases}$$

(3) 由于 $\alpha>0$, 当 $x\to\infty$ 时, 有

$$\begin{aligned}\frac{\log\left(1+\sin\frac{1}{x^{\alpha}}\right)}{x^{\beta}\log\cos\frac{1}{x}}&=\frac{\log\left(1+\frac{1}{x^{\alpha}}+O\left(\frac{1}{x^{3\alpha}}\right)\right)}{x^{\beta}\log\left(1-\frac{1}{2x^{2}}+O\left(\frac{1}{x^{4}}\right)\right)}\\&=\frac{\frac{1}{x^{\alpha}}+O\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right)}{x^{\beta}\left(-\frac{1}{2x^{2}}+O\left(\frac{1}{x^{4}}\right)\right)}\\&=-\frac{2}{x^{\alpha+\beta-2}}\left(1+O\left(\frac{1}{x^{\alpha_0}}\right)\right),\end{aligned}$$

其中 $\alpha_0=\min(2\alpha,2)>0$, 因此

$$\int_1^{\infty}\frac{\log\left(1+\sin\frac{1}{x^{\alpha}}\right)}{x^{\beta}\log\cos\frac{1}{x}}dx\begin{cases}\text{收敛}, & \text{当 }\alpha+\beta>3,\\ \text{发散}, & \text{当 }\alpha+\beta\le 3.\end{cases}$$

(4) 当 $n\to\infty$ 时,

$$\frac{\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^{\beta}}{\log^{\gamma}(1+n)}=\frac{\left(\frac{1}{2n^{2}}+O\left(\frac{1}{n^{4}}\right)\right)^{\beta}}{\log^{\gamma}(1+n)}=\frac{1+O\left(\frac{1}{n^{2}}\right)}{2^{\beta}n^{2\beta}\log^{\gamma}(1+n)},$$

因此,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^{\beta}}{\log^{\gamma}(1+n)}\begin{cases}\text{收敛}, & \text{当 }\beta>\frac{1}{2}\text{ 或 }\beta=\frac{1}{2},\gamma>1,\\ \text{发散}, & \text{当 }\beta<\frac{1}{2}\text{ 或 }\beta=\frac{1}{2},\gamma\le 1.\end{cases}$$

(5) 当 $x\to\infty$ 时, $\log(1+x^{-p})=O\left(x^{\frac{1}{3}}\right)$, 故

$$\frac{\log(1+x^{-p})}{x\sqrt[3]{1+x^{2}}}=\log(1+x^{-p})\cdot\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}\left(1+O\left(\frac{1}{x^{2}}\right)\right)=O\left(\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}\right),$$

所以, 积分对任意的 p 都收敛.

(6) 当 $x\to\infty$ 时,

$$\frac{x^{m}\arctan x}{2+x^{n}}=\frac{\pi}{2}x^{m-n}(1+o(1)),\quad n>0,$$

所以

$$\int_1^{\infty}\frac{x^{m}\arctan x}{2+x^{n}}dx\begin{cases}\text{收敛}, & \text{当 }n-m>1;\\ \text{发散}, & \text{当 }n-m\le 1.\end{cases}$$

(7) 当 $x \to 0$ 时,

$$\frac{\log x}{(1-x^2)^a(\sin x)^p} = \frac{\log x}{x^p}(1+o(1));$$

当 $x \to 1$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{\log x}{(1-x^2)^a(\sin x)^p} &= \frac{\log(1-(1-x))}{(1-x^2)^a(\sin x)^p} \\ &= -\frac{1}{2^a(\sin 1)^p(1-x)^{a-1}}(1+o(1)),\end{aligned}$$

所以, 当 $p<1$ 且 $a<2$ 时, 积分

$$\int_0^1 \frac{\log x}{(1-x^2)^a(\sin x)^p}dx$$

收敛, 否则积分发散. □

例 6 设 $f(x)=o(1)$, $g(x)=o(1)$, $b\neq 0$, 则

$$\begin{aligned}\frac{a+f(x)}{b+g(x)} &= \frac{a+f(x)}{b}\left(1+\frac{g(x)}{b}\right)^{-1} \\ &= \frac{a+f(x)}{b}\left(1-\frac{g(x)}{b}+O(g^2(x))\right) \\ &= \frac{a}{b}+\frac{f(x)}{b}-\frac{ag(x)}{b^2}+O(f(x)g(x))+O(g^2(x)).\end{aligned}$$

定理 2 设 $b_n>0$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\infty$, 且 $a_n=o(b_n), n\to\infty$, 则

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = o\left(\sum_{n=1}^{N} b_n\right), \quad N\to\infty.$$

证明 用 K_n 表示使

$$\sum_{i=1}^{k} b_i < \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i}$$

成立的最大的整数 k, 则

$$K_n \to \infty \quad (n\to\infty).$$

于是

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| &= O(1)\sum_{i=1}^{K_n} b_i + o(1)\sum_{i=K_n}^{n} b_i \\ &= O(1)\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i} + o(1)\sum_{i=1}^{n} b_i \\ &= o(1)\sum_{i=1}^{n} b_i. \end{aligned}$$

□

与定理 2 类似地, 可以证明下面的两个定理:

定理 2′ 设 $g(x) > 0$, $f(x) = o(g(x))$, $x \to \infty$, 且 $\int_a^{\infty} g(x)dx$ 发散, 则

$$\int_a^x f(t)dt = o\left(\int_a^x g(t)dt\right), \quad x \to \infty.$$

定理 3 设 $\{b_n\}$ 是正数列, $a_n = o(b_n)$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n. \tag{3}$$

又设当 $0 \leq x < 1$ 时, 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n < \infty, \tag{4}$$

并且

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \to \infty, \quad x \to 1-, \tag{5}$$

则

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \to 1-.$$

推论 1 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足定理 3 中的条件, 且

$$a_n = b_n(1 + o(1)), \quad n \to \infty,$$

则

$$f(x) = g(x)(1 + o(1)), \quad x \to 1-.$$

证明 记 $c_n = a_n - b_n$, 则

$$c_n = o(b_n), \quad n \to \infty,$$

由定理 3 得到

$$f(x) - g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = o(g(x)), \quad x \to 1-. \qquad \square$$

推论 2 设 (3) 式中的两个级数当 $0 \le x < 1$ 时收敛, 设

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad 与 \quad t_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$$

满足条件

(1) $t_n > 0$; (2) $\sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n \to \infty$, $x \to 1-$; (3) $s_n = o(t_n)$, $n \to \infty$,

则

$$f(x) - g(x) = o(g(x)), \quad x \to 1-.$$

证明 由幂级数乘法定理知道

$$F(x) = \frac{1}{1-x} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n, \quad 0 \le x < 1,$$

$$G(x) = \frac{1}{1-x} g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n, \quad 0 \le x < 1.$$

将定理 3 用于函数 $F(x)$ 与 $G(x)$ 即可证得推论. $\square$

推论 3 在推论 2 中, 若将其中的假设条件 (3) 改为

$$s_n \sim t_n, \quad n \to \infty,$$

则有

$$f(x) \sim g(x), \quad x \to 1-.$$

例 7 设 $y_{n+1} > y_n, y_n \to \infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}},$$

此处假定右端极限存在.

解 设 a 是有限数, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a,$$

则由假设条件及定理 2 得到

$$\begin{aligned}x_k-x_{k-1}&=a(y_k-y_{k-1})+o(y_k-y_{k-1}),\\ x_n-x_1&=\sum_{k=2}^{n}(x_k-x_{k-1})=a\sum_{k=2}^{n}(y_k-y_{k-1})+\sum_{k=2}^{n}o(y_k-y_{k-1})\\ &=a(y_n-y_1)+o\left(\sum_{k=2}^{n}(y_k-y_{k-1})\right)=a(y_n-y_1)+o(y_n),\end{aligned}$$

由此易得所需结论.

如果 $a=+\infty$ ($a=-\infty$ 时可类似地证明), 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=0.$$

不难推出 $x_n>x_{n-1}, x_n\to\infty$, 于是, 由已经证明的结论可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\infty.$$ □

例 8 设

$$a_n\sim\log n,\quad n\to\infty,$$

则

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\sim\frac{1}{1-x}\log\frac{1}{1-x},\quad x\to1-.$$

解 由

$$\frac{1}{1-x}\log\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$$

及关系式

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sim\log n,$$

由定理 3 的推论 1 得到所需要的结论. □

1.4 Γ-函数与 Stirling 公式

设 x 是复数, 定义

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}dt,\quad \mathrm{Re}(x)>0. \tag{1}$$

在本节, 我们仅考虑 x 是实数的情形.

容易验证, 积分 (1) 对于 $x\geq x_0>0$ 是一致收敛的, 因此, 当 $x>0$ 时, 它是连续函数. 此外, 由分部积分容易得到, 当 $x>n$ 时, 有

$$\Gamma(x)=(x-1)\Gamma(x-1)=\cdots=(x-1)(x-2)\cdots(x-n)\Gamma(x-n). \tag{2}$$

特别地, 若 n 是正整数, 则

$$\Gamma(n+1)=n!.$$

引理 1 *若对于任意的 $b>a$, 都有*

$$\int_a^b dx\int_{\alpha}^{\beta}f(x,y)dy=\int_{\alpha}^{\beta}dy\int_a^b f(x,y)dx,$$

其中 a 与 β 是有限数, 且上述积分是常义积分; 又设积分 $\int_a^{\infty}f(x,y)dx$ 关于 $\alpha\leq y\leq\beta$ 一致收敛, 则

$$\int_a^{\infty}dx\int_{\alpha}^{\beta}f(x,y)dy=\int_{\alpha}^{\beta}dy\int_a^{\infty}f(x,y)dx.$$

引理 2 *设 $f(x,y)\geq 0$. 若对一切 $c<b$ 及 $\gamma<\beta$ 都有*

$$\int_a^c dx\int_{\alpha}^{\beta}f(x,y)dy=\int_{\alpha}^{\beta}dy\int_a^c f(x,y)dx$$

及

$$\int_a^b dx\int_{\alpha}^{\gamma}f(x,y)dy=\int_{\alpha}^{\gamma}dy\int_a^b f(x,y)dx,$$

则当下式中有一方存在时, 有

$$\int_a^b dx\int_{\alpha}^{\beta}f(x,y)dy=\int_{\alpha}^{\beta}dy\int_a^b f(x,y)dx;$$

当 b 或 β 为无穷大时, 上述结论仍旧成立.

引理 1 与引理 2 的证明可见于一般的数学分析教科书.

引理 3 对于任意的 $\alpha>0$ 及 $\beta>0$, 有

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}=\int_0^{\infty}\frac{t^{\beta-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}dt=\int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}dy. \tag{3}$$

证明 由 (1) 式及变量代换 $y=xt$, 我们得到

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)&=\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx\int_0^{\infty}y^{\beta-1}e^{-y}dy\\&=\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx\int_0^{\infty}x^{\beta}t^{\beta-1}e^{-xt}dt\\&=\int_0^{\infty}x^{\alpha+\beta-1}e^{-x}dx\int_0^{\infty}t^{\beta-1}e^{-xt}dt.\end{aligned}\tag{4}$$

我们首先说明上式右端的累次积分可以交换积分次序. 对于任何 $x_0>0$, 积分

$$\int_0^{\infty}e^{-x(1+t)}t^{\beta-1}dt\quad(x\geq x_0)$$

的被积函数是非负的, 因此, 这个积分关于 x 是一致收敛的, 于是, 由引理 1 得到

$$\int_{x_0}^{X}dx\int_0^{\infty}x^{\alpha+\beta-1}e^{-x}t^{\beta-1}e^{-xt}dt=\int_0^{\infty}dt\int_{x_0}^{X}x^{\alpha+\beta-1}e^{-x}t^{\beta-1}e^{-xt}dx,$$

其中 $X>x_0$ 是任意有限数. 由于 $x_0>0$ 可以任意小, 所以, 由引理 2 可以得到

$$\int_0^{X}dx\int_0^{\infty}x^{\alpha+\beta-1}e^{-x}t^{\beta-1}e^{-xt}dt=\int_0^{\infty}dt\int_0^{X}x^{\alpha+\beta-1}e^{-x}t^{\beta-1}e^{-xt}dx.$$

同理可证, 对任意的有限数 $T>0$, 有

$$\int_0^{T}dt\int_0^{\infty}x^{\alpha+\beta-1}e^{-x}t^{\beta-1}e^{-xt}dx=\int_0^{\infty}dx\int_0^{T}x^{\alpha+\beta-1}e^{-x}t^{\beta-1}e^{-xt}dt.$$

由以上二等式及引理 2, 可知 (4) 式的右端的累次积分可以交换积分

次序, 因此, (4) 式成为

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) &= \int_0^\infty t^{\beta-1}dt \int_0^\infty e^{-x(1+t)}x^{\alpha+\beta-1}dx \\ &= \int_0^\infty t^{\beta-1}dt \int_0^\infty \frac{e^{-y}y^{\alpha+\beta-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}dy \\ &= \Gamma(\alpha+\beta)\int_0^\infty \frac{t^{\beta-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}dt.\end{aligned}$$

做变换 $t=\tan^2\theta$, 上式右端积分成为

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{t^{\beta-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}dt &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2\beta-1}(\cos\theta)^{2\alpha-1}d\theta \\ &= \int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}dy.\end{aligned}$$

□

引理 4 当 $x>0$ 时, 有 "二重公式":

$$\Gamma(2x)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

证明 在 (3) 式中取 $\alpha=\beta=x$, 则

$$\frac{(\Gamma(x))^2}{\Gamma(2x)} = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1}dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{x-1}dt.$$

令 $t=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{y}\right)$, 则上式右端的积分成为

$$\begin{aligned}2\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{x-1}dt &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}y\right)^{x-1} y^{-\frac{1}{2}}dy \\ &= 2^{1-2x}\int_0^1 (1-y)^{x-1}y^{-\frac{1}{2}}dy \\ &= 2^{1-2x}\frac{\Gamma(x)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}.\end{aligned}$$

由此式及前一等式, 证得引理结论. □

下面来研究 $\Gamma(x)$ 当 $x\to\infty$ 的阶. 首先讨论当 x 取整数值的情形.

引理 5 存在常数 C, 使得

$$\log\Gamma(n) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\log n - n + C + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

证明 由

$$\log\Gamma(n) = \log((n-1)!) = \sum_{k=1}^{n-1} \log k$$

及

$$\log k = \int_k^{k+1} \log k dt = \int_k^{k+1} (\log k - \log t) dt + \int_k^{k+1} \log t dt,$$

得到

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} \log k &= \int_1^n \log t dt - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \log \frac{t}{k} dt \\
&= n\log n - n + 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^1 \log \frac{k+t}{k} dt \\
&= n\log n - n + 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^1 \log\left(1 + \frac{t}{k}\right) dt \\
&= n\log n - n + 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right),
\end{aligned}$$

利用第 1.2 节例 2, 可知

$$\sum_{k=1}^{n} \log k = n\log n - n - \frac{1}{2}\log n + C + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

其中 C 为常数. □

注 引理 5 证明中的最后一个等式利用了第二节的例 2 以及对于 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ 的估计, 后者的证明可以见于一般的数学分析教科书, 也可利用本书第 3.2 节中的定理推导.

为了将结果推广到 x 为非整数的情形, 需要下面的引理.

引理 6 设 a 是常数, 则

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+a)} = x^{-a} + O(x^{-a-1}).$$

证明 首先假定 $a>1$, 由引理 3 得到

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(x)\Gamma(a)}{\Gamma(x+a)}&=\int_0^1(1-y)^{a-1}y^{x-1}dy=\int_0^\infty(1-e^{-t})^{a-1}e^{-xt}dt\\&=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}}(1-e^{-t})^{a-1}e^{-xt}dt+\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^\infty(1-e^{-t})^{a-1}e^{-xt}dt\\&=I_1+I_2,\end{aligned}\tag{5}$$

其中

$$\begin{aligned}I_1&=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}}(1-e^{-t})^{a-1}e^{-xt}dt=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}}(t+O(t^2))^{a-1}e^{-xt}dt\\&=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}}t^{a-1}(1+O(t))e^{-xt}dt\\&=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}}t^{a-1}e^{-xt}dt+O\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}}t^ae^{-xt}dt\right)\\&=x^{-a}\int_0^{\sqrt{x}}t^{a-1}e^{-t}dt+O\left(x^{-a-1}\int_0^{\sqrt{x}}t^ae^{-t}dt\right)\\&=x^{-a}\Gamma(a)+O\left(x^{-a}\int_{\sqrt{x}}^\infty t^{a-1}e^{-t}dt\right)+O\left(x^{-a-1}\int_0^{\sqrt{x}}t^ae^{-t}dt\right)\\&=x^{-a}\Gamma(a)+O\left(x^{-a}\int_{\sqrt{x}}^\infty e^{-\frac{t}{2}}dt\right)+O\left(x^{-a-1}\int_0^{\sqrt{x}}t^ae^{-t}dt\right)\\&=x^{-a}\Gamma(a)+O(x^{-a-1}),\end{aligned}\tag{6}$$

$$I_2=\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^\infty(1-e^{-t})^{a-1}e^{-xt}dt=O\left(\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^\infty e^{-xt}dt\right)=O(x^{-a-1}).\tag{7}$$

由 (5) 式, (6) 式和 (7) 式得到, 当 $a>1$ 时, 有

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(a)}{\Gamma(x+a)}=x^{-a}\Gamma(a)+O(x^{-a-1}),\tag{8}$$

即

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+a)}=x^{-a}+O(x^{-a-1}).\tag{9}$$

若 $a<1$, 必有自然数 k 存在, 使 $a+k>1$. 由上面的证明得到

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+k+a)}=x^{-a-k}+O(x^{-a-k-1}).$$

再由 $\Gamma(x)$ 的递推公式 (2) 立即得到 (9). □

定理 1 设 $x>0$, 则

$$\Gamma(x)=x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}\sqrt{2\pi}\left(1+O\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

证明 若 x 是整数, 则可由 $\Gamma(x)$ 的连续性进行证明; 因此, 只需对 x 是非整数的情形进行证明.

设 $x=n+a$, n 是正整数, $0<a<1$, 则由引理 5 及引理 6 得到

$$\begin{aligned}\log\Gamma(x)&=\log\Gamma(n+a)=\log\Gamma(n)+a\log n+O\left(\frac{1}{n}\right)\\&=\left(n-\frac{1}{2}\right)\log n-n+C+a\log n+O\left(\frac{1}{n}\right)\\&=\left(x-a-\frac{1}{2}\right)\log(x-a)-x+a+C+a\log(x-a)+O\left(\frac{1}{x}\right)\\&=\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x-x+C+O\left(\frac{1}{x}\right).\end{aligned}\tag{10}$$

由引理 4 知

$$\log\Gamma(2x)+\log\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=(2x-1)\log 2+\log\Gamma(x)+\log\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right),$$

由此并利用 (10) 式, 得到

$$\begin{aligned}&\left(2x-\frac{1}{2}\right)\log(2x)-2x+C+\log\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)+O\left(\frac{1}{x}\right)\\&\quad=(2x-1)\log 2+\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x+x\log\left(x+\frac{1}{2}\right)\\&\qquad-2x-\frac{1}{2}+2C+O\left(\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

使上式两边常数项相等, 得到

$$C=\log\sqrt{2\pi}.$$

代入 (10), 得到定理结论. □

由定理 1 可以得到 $n!$ 的渐近估计. 事实上, 由 $n!=\Gamma(n+1)$ 及定理 1, 有

$$n!=(n+1)^{n+\frac{1}{2}}e^{-(n+1)}\sqrt{2\pi}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right);$$

由此及

$$\begin{aligned}(n+1)^{n+\frac{1}{2}}&=n^{n+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}=n^{n+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\&=n^{n+\frac{1}{2}}e^{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\&=n^{n+\frac{1}{2}}e^{n\left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\&=n^{n+\frac{1}{2}}e^{1+O\left(\frac{1}{n}\right)}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\&=n^{n+\frac{1}{2}}e\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\end{aligned}$$

得到

$$n!=n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\sqrt{2\pi}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).\quad(11)$$

此即著名的 Stirling 公式.

利用 (11) 式可以得到二项式系数

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}\quad(k=0,1,\cdots,n)$$

的渐近估计. 我们知道, 它的值开始是随 k 增大而增大, 当 $k=[\frac{n}{2}]$ 时达到最大值, 然后随 k 增大而减小. 由于 $C_n^k=C_n^{n-k}$, 不妨假定 $k\leq\frac{n}{2}$. 我们来考察当 k 与 $\frac{n}{2}$ 之差 "比较大" 时, C_n^k 的阶的变化情况.

由 (11) 式得到

$$\begin{aligned}C_n^k&=\frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^{k}\left(1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right)\sqrt{2\pi(n-k)}\left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k}\left(1+O\left(\frac{1}{n-k}\right)\right)}\\&=\frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\left(1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right)}{\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^{k}\sqrt{2\pi(n-k)}\left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k}}\\&=\left(\frac{n}{2\pi k(n-k)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{k}\right)^{k}\left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k}\left(1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right).\end{aligned}$$

令 $k=\frac{n}{2}-l$, 我们要研究 $l=o(n)$ 的情形. 此时,

$$\left(\frac{n}{k(n-k)}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{n}{\left(\frac{n}{2}\right)^2-l^2}\right)^{\frac{1}{2}}=2\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+O\left(\frac{l^2}{n^2}\right)\right),$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{n}{k}\right)^k\left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k}&=\left(\frac{n}{\frac{n}{2}-l}\right)^{\frac{n}{2}-l}\left(\frac{n}{\frac{n}{2}+l}\right)^{\frac{n}{2}+l}\\&=2^n\left(1-\frac{2l}{n}\right)^{l-\frac{n}{2}}\left(1+\frac{2l}{n}\right)^{-l-\frac{n}{2}}.\end{aligned}$$

因此,

$$C_n^k\sim\left(\frac{2}{n\pi}\right)^{\frac{1}{2}}2^n\left(1+\frac{2l}{n}\right)^{-l-\frac{n}{2}}\left(1-\frac{2l}{n}\right)^{l-\frac{n}{2}},\tag{12}$$

其中

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{2l}{n}\right)^{l-\frac{n}{2}}&=\exp\left(\left(l-\frac{n}{2}\right)\log\left(1-\frac{2l}{n}\right)\right)\\&=\exp\left(l-\frac{n}{2}\right)\left(-\frac{2l}{n}-\frac{2l^2}{n^2}+O\left(\frac{l^3}{n^3}\right)\right)\\&=\exp\left(l-\frac{l^2}{n}+O\left(\frac{l^3}{n^2}\right)\right),\end{aligned}$$

以及 (用同样的方法可以证明)

$$\left(1+\frac{2l}{n}\right)^{-l-\frac{n}{2}}=\exp\left(-l-\frac{l^2}{n}+O\left(\frac{l^3}{n^2}\right)\right),$$

所以

$$C_n^k\sim\left(\frac{2}{n\pi}\right)^{\frac{1}{2}}2^n\exp\left(-\frac{2l^2}{n}+O\left(\frac{l^3}{n^2}\right)\right).$$

由上式看出, 当 $l=0$ 时, C_n^k 达到最大, 且

$$C_n^k\sim\left(\frac{2}{n\pi}\right)^{\frac{1}{2}}2^n;\tag{13}$$

而当 $l=o(n)$ 时, 有

$$C_n^k\sim C_n^{\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{2l^2}{n}+O\left(\frac{l^3}{n^2}\right)\right).\tag{14}$$

由上式看出, 当 $l=o\left(\sqrt{n}\right)$ 时, C_n^k 与 $C_n^{\frac{n}{2}}$ 是同阶的; 但当

$$n^\alpha<l<n^\beta,\quad \alpha>\frac{1}{2},\quad \beta<\frac{2}{3}$$

时, C_n^k 的阶远比 $C_n^{\frac{n}{2}}$ 的阶小.

1.5 渐近级数

设 $\{\varphi_k\}$, $k=0,1,2,\cdots$, 为一函数序列, 满足条件

$$\varphi_{k+1}(x)=o(\varphi_k(x)),\quad x\to\infty;\quad k=0,1,\cdots. \tag{1}$$

又设存在常数 $C_0,C_1,C_2,\cdots$, 使得下面的式子成立:

$$\begin{cases} f(x)=O(\varphi_0(x)),\quad x\to\infty;\\ f(x)=C_0\varphi_0(x)+O(\varphi_1(x)),\quad x\to\infty;\\ f(x)=C_0\varphi_0(x)+C_1\varphi_1(x)+O(\varphi_2(x)),\quad x\to\infty;\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n-1}C_i\varphi_i(x)+O(\varphi_n(x)),\quad x\to\infty;\\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{2}$$

显然, (2) 式中后面的估计式较前面的估计式精确. 例如由 (1) 式可以得到

$$C_0\varphi_0(x)+O(\varphi_1(x))=(C_0+o(1))\varphi_0(x)=O(\varphi_0(x)),\quad x\to\infty.$$

定义 如果 (2) 成立, 我们用下面的式子来表示它:

$$f(x)\approx C_0\varphi_0(x)+C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+\cdots,\quad x\to\infty, \tag{3}$$

并且把 (3) 式的右边称为 $f(x)$ 的渐近级数或渐近展开.

例 当 $x\to\infty$ 时,

$$e^{-x}\int_1^x\frac{e^t}{t}dt\approx\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{2!}{x^3}+\frac{3!}{x^4}+\cdots.$$

解 记 $f(x)=\int_1^x\frac{e^t}{t}dt$, 则

$$f(x)=\int_1^x\frac{e^t}{t}dt=\int_1^x\frac{de^t}{t}=\frac{e^t}{t}\Big|_1^x+\int_1^x\frac{e^t}{t^2}dt, \tag{4}$$

其中

$$\int_1^x \frac{e^t}{t^2}dt = \int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^t}{t^2}dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{e^t}{t^2}dt = O(e^{\frac{\pi}{2}}) + O(x^{-2}e^x). \tag{5}$$

由 (4) 式与 (5) 式得到

$$f(x) = x^{-1}e^x + O(x^{-2}e^x), \quad x \to \infty. \tag{6}$$

将 (4) 式右端的积分再进行一次分部积分, 就得到下面的估计式:

$$f(x) = x^{-1}e^x + x^{-2}e^x + O(x^{-3}e^x), \quad x \to \infty. \tag{7}$$

一般地, 可以得到 $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

$$f(x) = e^t\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{2!}{t^3} + \cdots + \frac{(n-1)!}{t^n}\right)\Big|_1^x + n!\int_1^x \frac{e^t}{t^{n+1}}dt. \tag{8}$$

容易证明对任意自然数 n 有

$$\int_1^x \frac{e^t}{t^{n+1}}dt = O(x^{-n-1}e^x), \quad x \to \infty. \tag{9}$$

所以, 对每一正整数 n, 下面的估计式成立:

$$e^{-x}f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \cdots + \frac{(n-1)!}{x^n} + O(x^{-n-1}), \quad x \to \infty, \tag{10}$$

即

$$e^{-x}f(x) \approx \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \cdots, \quad x \to \infty. \tag{11}$$

从上例中我们可以看出, 如果令

$$F(x) = e^{-x}f(x), \quad S_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \cdots + \frac{(n-1)!}{x^n},$$

则对于任何固定的 n,

$$\rho_n(x) = F(x) - S_n(x) \to 0, \quad x \to \infty.$$

确切地说, 我们有

$$\lim_{x\to\infty} x^n\rho_n(x) = 0, \quad x \to \infty, \tag{12}$$

以及

$$\rho_n(x) = O(x^{-n-1}), \quad x \to \infty. \tag{13}$$

上面的例子是取 $\varphi_k(x) = x^{-k}$, 这是一种简单但常用的函数. 对函数序列 $\{x^{-k}\}, k = 0, 1, 2\cdots$, 可以用下面的话来表达渐近展开的概念.

设函数 $F(x)$ 与级数

$$C_0 + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \cdots + \frac{C_n}{x^n} + \cdots \tag{14}$$

的第 $n+1$ 个部分和 $S_n(x)$ 之差是 $\rho_n(x)$,

$$\rho_n(x) = F(x) - S_n(x) = F(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{C_k}{x^k}.$$

若对于任意固定的 n, (12) 式都成立, 则称级数 (14) 给出了函数 $F(x)$ 的渐近展开, 称 (14) 式中的级数为 $F(x)$ 的渐近级数, 并记作

$$F(x) \approx C_0 + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \cdots. \qquad \square$$

注 $F(x)$ 的渐近级数并不一定要收敛到函数 $F(x)$, 它甚至可以是发散的.

渐近级数具有以下性质:

性质 1 *若*

$$F(x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{x^k}, \quad F(x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{x^k}, \tag{15}$$

则

$$C_k = B_k, \quad k = 0, 1, 2, \cdots.$$

证明 由渐近级数的定义, 对每一 n, 必有

$$\lim_{x\to\infty} \left[C_0 - B_0 + \frac{C_1 - B_1}{x} + \cdots + \frac{C_n - B_n}{x^n} \right] x^n = 0, \tag{16}$$

这只有当

$$C_k = B_k, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n$$

时才可能. $\square$

性质 2 若

$$F(x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{x^k}, \quad G(x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{x^k}, \tag{17}$$

则有

$$F(x) \pm G(x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k \pm B_k}{x^k}, \tag{18}$$

$$F(x)G(x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{x^k}, \tag{19}$$

其中

$$A_k = \sum_{m=0}^{k} C_m B_{k-m}.$$

证明 我们只证明 (19) 式; (18) 式的证明留给读者.

由假设知, 对任意的 n, 有

$$F(x) = C_0 + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \cdots + \frac{C_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \to \infty,$$

以及

$$G(x) = B_0 + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \cdots + \frac{B_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \to \infty.$$

将上面两式相乘, 即得

$$F(x)G(x) = A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \cdots + \frac{A_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right),$$

其中

$$A_k = \sum_{m=0}^{k} C_m B_{k-m}. \qquad \square$$

性质 3 若

$$F(x) \approx \sum_{k=2}^{\infty} \frac{C_k}{x^k},$$

则

$$\int_x^{\infty} F(t)dt \approx \sum_{k=2}^{\infty} \frac{C_k}{(k-1)x^{k-1}}. \tag{20}$$

证明 记

$$S_n(x)=\sum_{k=2}^{n}\frac{C_k}{x^k},\quad \rho_n(x)=F(x)-S_n(x),$$

则

$$\rho_n(x)=o\left(\frac{1}{x^n}\right),\quad x\to\infty,$$

所以

$$\begin{aligned}\int_x^\infty F(t)dt&=\int_x^\infty S_n(t)dt+\int_x^\infty \rho_n(t)dt\\&=\sum_{k=2}^{n}\frac{C_k}{(k-1)x^{k-1}}+\int_x^\infty \rho_n(t)dt\\&=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{C_{k+1}}{kx^k}+\int_x^\infty \rho_n(t)dt.\end{aligned}$$

对充分大的 x, 我们有

$$\int_x^\infty \rho_n(t)dt=o\left(\int_x^\infty\frac{dt}{t^n}\right)=o\left(\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\right),$$

于是,

$$\int_x^\infty F(t)dt=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{C_{k+1}}{kx^k}+o\left(\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\right).$$

这就是 (20) 式. □

注 一般地, 渐近级数不能进行逐项微分, 请读者举例说明之.

1.6 例题

例 1 设 k, l 是整数, $k>1$, 则当 $n\to\infty$ 时, 有

$$\begin{aligned}C_{nk+l}^{n}&=\frac{\Gamma(nk+l+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(nk-n+l+1)}\\&=(1+o(1))\frac{(k-1)^n}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{k}{k-1}\right)^{nk+l+\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

解 由第 1.4 节引理 6 及定理 1, 得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(nk+l+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(nk-n+l+1)} \\
&\quad\sim \left(\frac{nk}{nk-n}\right)^{l} \frac{\Gamma(nk+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(nk-n+1)} \\
&\quad\sim \left(\frac{k}{k-1}\right)^{l} \left(\frac{nk}{e}\right)^{nk} \left(\frac{e}{n}\right)^{n} \left(\frac{e}{nk-n}\right)^{nk-n} \sqrt{\frac{2\pi nk}{2\pi n \cdot 2\pi(nk-n)}} \\
&\quad\sim \frac{(k-1)^n}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{k}{k-1}\right)^{nk+l+\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

□

例 2 设

$$f_k(n) = \frac{k^{n-k}k!}{n!}, \quad 1 \le k \le n,$$

则 $f_k(n)$ 为 k 的增函数; 令 $l = n-k$, 则当 $l = o(n)$ 时, 有

$$f_k(n) \sim \exp\left(-\frac{l^2}{2n} + O\left(\frac{l^3}{n^2}\right)\right).$$

解 因为

$$\frac{f_k(n)}{f_{k+1}(n)} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^{n-k} \le 1, \quad 1 \le k \le n,$$

所以 $f_k(n)$ 单调增加, 且在 $k = n$ 处达到最大值 1. 若 $l = n-k = o(n)$, 由 Stirling 公式, 有

$$\begin{aligned}
f_k(n) = \frac{k^{n-k}k!}{n!} &= \sqrt{\frac{k}{n}} e^{n-k} \left(\frac{k}{n}\right)^{n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \sqrt{\frac{n-l}{n}} e^{l} \left(1 - \frac{l}{n}\right)^{n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \left(1 + O\left(\frac{l}{n}\right)\right) e^{l} \exp\left(n \log\left(1 - \frac{l}{n}\right)\right) \\
&= \left(1 + O\left(\frac{l}{n}\right)\right) e^{l} \exp\left(-l - \frac{l^2}{2n} + O\left(\frac{l^3}{n^2}\right)\right) \\
&= \left(1 + O\left(\frac{l}{n}\right)\right) \exp\left(-\frac{l^2}{2n} + O\left(\frac{l^3}{n^2}\right)\right).
\end{aligned}$$

□

例 3 设

$$f_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!n^k},$$

则 $f_k(n)$ 为 k 的减函数, 在 $k=0$ 处取最大值 1, 且当 $k=o(n)$ 时,

$$f_k(n) \sim \exp\left(-\frac{k^2}{2n}+O\left(\frac{k^3}{n^2}\right)\right).$$

解 证法与例 2 中的方法相同, 略. □

例 4 设

$$f_k(n)=\frac{k^n}{k!},$$

则 $f_k(n)$ 当 $k\approx t$ 时达到极大值, 此处 t 满足超越方程

$$t\log t = n-2^{-1}.$$

令 $l=|t-k|$, 则当 $l=o(t^a)\left(a<\frac{2}{3}\right)$ 时,

$$\frac{k^n}{k!} \sim t^{n-t}e^t(2\pi t)^{-\frac{1}{2}}\exp\{-(1+\log t)l^2/2t\}.$$

解 由 Stirling 公式得到

$$\frac{k^n}{k!}=(2\pi k)^{-\frac{1}{2}}e^k k^{n-k}\left(1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right).$$

令

$$f(x)=(2\pi x)^{-\frac{1}{2}}e^x x^{n-x},\quad g(x)=\log f(x),$$

则

$$g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

易证

$$g'(t)=0,$$

其中 t 满足方程

$$t\log t = n-\frac{1}{2}.$$

所以 $\frac{k^n}{k!}$ 在 $k\approx t$ 处达到极大值. 令 $l=|k-t|$, 则

$$\frac{k^n}{k!}=(2\pi t)^{-\frac{1}{2}}e^k t^{n-k}\left(1+\frac{l}{t}\right)^{n-k-\frac{1}{2}}\left(1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right).$$

所以, 当 $l=o(t)$ 时, 有

$$\frac{k^n}{k!}\sim(2\pi t)^{-\frac{1}{2}}e^t t^{n-t}e^l t^{-l}\left(1+\frac{l}{t}\right)^{t\log t-t-l},$$

其中

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{l}{t}\right)^{t\log t-t-l}&=\exp\left((t\log t-t-l)\log\left(1+\frac{l}{t}\right)\right)\\&=\exp\left((t\log t-t-l)\left(\frac{l}{t}-\frac{l^2}{2t^2}+O\left(\frac{l^3}{t^3}\right)\right)\right)\\&=t^l e^{-l}\exp\left(-(1+\log t)\frac{l^2}{2t}+O\left(\frac{l^3\log t}{t^2}\right)\right),\end{aligned}$$

于是

$$\frac{k^n}{k!}\sim(2\pi t)^{-\frac{1}{2}}e^t t^{n-t}\exp\left(-(1+\log t)\frac{l^2}{2t}+O\left(\frac{l^3\log t}{t^2}\right)\right).$$

由上式看出, 当 $l=o(t^\alpha)$, $\alpha<\frac{2}{3}$ 时, 有

$$\frac{l^3\log t}{t^2}=o(1),$$

因此,

$$\frac{k^n}{k!}\sim t^{n-t}e^t(2\pi t)^{-\frac{1}{2}}\exp\{-(1+\log t)l^2/2t\}.\qquad\square$$

例 5 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上满足 Lipschitz 条件, 则

$$\lim_{h\to0+}\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx=\pi f(0).$$

解 设 $0<a<1$, 则

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx&=\int_{-h^a}^{h^a}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx+\int_{1\geq|x|>h^a}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx\\&=I_1(h)+I_2(h),\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} I_1(h) &= f(0)\int_{-h^a}^{h^a}\frac{h}{h^2+x^2}dx+\int_{-h^a}^{h^a}\frac{h(f(x)-f(0))}{h^2+x^2}dx \\ &= \pi f(0)+O\left(\int_{1\geq|x|>h^a}\frac{h}{h^2+x^2}dx\right)+O\left(\int_0^{h^a}\frac{hx}{h^2+x^2}dx\right) \\ &= \pi f(0)+O(h^{1-a})+O(h\log h^{a-1}), \\ I_2(h) &= \int_{h^a<|x|<1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx = O(h^{1-a}). \end{aligned}$$

综合以上讨论得到

$$\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx=\pi f(0)+O(h^{1-a})=\pi f(0)+o(1). \qquad \square$$

例 6 当 $x\to 1-$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^{n^2}\sim\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}.$$

解 记

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n^2},\quad \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n,$$

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n,\quad t_n=b_0+b_1+\cdots+b_n.$$

显然

$$S_n\sim\sqrt{n}.$$

由幂级数乘法定理及 $(1-x)^a$ 的级数展开式, 我们知道,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty}t_nx^n &= \frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{(1-x)^{3/2}} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{3}{2}+n-1\right)\frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

比较上式左右两端的系数, 得到

$$t_n=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{3}{2}+n-1\right)}{n!}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{(2n+1)!}{(2^nn!)^2}.$$

利用 Stirling 公式, 得到

$$\begin{aligned} t_n &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{(2n+1)^{2n+\frac{3}{2}}e^{-(2n+1)}\sqrt{2\pi}(1+o(1))}{2^{2n}n^{2n+1}e^{-2n}2\pi(1+o(1))} \\ &= \frac{\sqrt{n}}{e}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n+\frac{3}{2}}(1+o(1)) = \sqrt{n}(1+o(1)). \end{aligned}$$

因此, $S_n \sim t_n$. 由此及第 1.3 节定理 3 的推论 3 得到所需结论. □

例 7 设 $a_n = o\left(n^{\frac{1}{2}}\log^{-1}n\right)$, 则

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = o\left((1-x)^{-\frac{3}{2}}\left(\log\frac{1}{1-x}\right)^{-1}\right), \quad x \to 1-.$$

解 由假设知,

$$a_n = \begin{cases} O\left(n^{\frac{1}{2}}\right), & n \le (1-x)^{-\frac{1}{2}}, \\ o\left(n^{\frac{1}{2}}\log^{-1}n\right), & n > (1-x)^{-\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

因此,

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{2\le n\le(1-x)^{-\frac{1}{2}}} a_n x^n + \sum_{n>(1-x)^{-\frac{1}{2}}} a_n x^n \\ &= O\left(\sum_{n\le(1-x)^{-\frac{1}{2}}} n^{\frac{1}{2}}\right) + o\left(\sum_{n>(1-x)^{-\frac{1}{2}}} n^{\frac{1}{2}}\log^{-1}n\cdot x^n\right) \\ &= O\left((1-x)^{-\frac{3}{4}}\right) + o\left(\log^{-1}\frac{1}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{2}}x^n\right). \end{aligned} \tag{1}$$

在例 6 中已经证明了

$$\frac{1}{(1-x)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}{2^n n!}x^n,$$

且

$$\frac{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}{2^n n!} \sim 2\sqrt{\frac{n}{\pi}},$$

于是, 由此及第 1.3 节定理 3 的推论 3 得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{2}}x^n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}, \quad x \to 1-.$$

由上式及 (1) 式, 结论得证. □

例 8 设 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 是连续函数且满足条件

$$\varphi(x) \sim Ax^{\alpha}, \quad \psi(x) \sim Bx^{\beta}, \quad x \to \infty \quad (\alpha \geq 0, \beta \geq 0),$$

则

$$f(x) = \int_0^x \varphi(t)\psi(x-t)dt \sim AB\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}x^{\alpha+\beta+1}, \quad x \to \infty.$$

解 令

$$\varphi(t) = At^{\alpha} + \varphi_1(t), \quad \psi(t) = Bt^{\alpha} + \psi_1(t),$$

其中

$$\varphi_1(t) = o(t^{\alpha}), \quad \psi_1(t) = o(t^{\beta}), \quad t \to \infty,$$

则

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \varphi(t)\psi(x-t)dt \\ &= AB\int_0^x t^{\alpha}(x-t)^{\beta}dt + A\int_0^x t^{\alpha}\psi_1(x-t)dt \\ &\quad + B\int_0^x \varphi_1(t)(x-t)^{\beta}dt + \int_0^x \varphi_1(t)\psi_1(x-t)dt. \end{aligned} \tag{2}$$

容易证明

$$\int_0^x t^{\alpha}(x-t)^{\beta}dt = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}x^{\alpha+\beta+1}.$$

利用第 1.3 节定理 2′ 推出

$$\int_0^x \varphi_1(t)(x-t)^{\beta}dt = o(x^{\alpha+\beta+1}), \tag{3}$$

$$\int_0^x t^{\alpha}\psi_1(x-t)dt = o(x^{\alpha+\beta+1}), \tag{4}$$

$$\int_0^x \varphi_1(t)\psi_1(x-t)dt = o(x^{\alpha+\beta+1}). \tag{5}$$

由 (2), (3), (4), (5) 式得到所要证的结论. □

例 9 证明

$$\int_1^x \left(1+\frac{1}{t}\right)^t dt = ex - \frac{e}{2}\log x + O(1).$$

解 当 $t \geq 2$ 时,

$$t\log\left(1+\frac{1}{t}\right) = t\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} + O\left(\frac{1}{t^3}\right)\right) = 1 - \frac{1}{2t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

所以

$$\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e^{1-\frac{1}{2t}+O\left(\frac{1}{t^2}\right)} = e\left(1 - \frac{1}{2t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right)\right),$$

$$\begin{aligned}\int_1^x \left(1+\frac{1}{t}\right)^t dt &= \int_1^2 \left(1+\frac{1}{t}\right)^t dt + \int_2^x \left(1+\frac{1}{t}\right)^t dt \\ &= O(1) + e\int_2^x \left(1 - \frac{1}{2t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) dt \\ &= O(1) + e\int_2^x \left(1 - \frac{1}{2t}\right) dt + O\left(\int_2^x \frac{1}{t^2} dt\right) \\ &= ex - \frac{e}{2}\log x + O(1).\end{aligned}$$

□

例 10 证明

$$(xe^{2(x-n)})^n = O(e^{x^2+x}), \quad x > 0,\ n = 1, 2, 3, \cdots.$$

其中 O 常数与 n 无关.

解 考虑函数

$$f(x) = x^n e^{2n(x-n)-x^2-x},$$

则

$$f'(x) = e^{2n(x-n)-x^2-x}(nx^{n-1} + x^n(-2x+2n-1)).$$

令 $f'(x) = 0$, 得到 $f(x)$ 的极大值点为 $x = n$, 此时 $f(x)$ 的极大值是

$$f(n) = n^n e^{-n^2-n} = e^{n\log n - n^2 - n} = O(1).$$

这就是需要证明的结论. □

例 11 对于任意的 α, $0<\alpha<\frac{1}{2}$, 有

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=O(n^{-\alpha}). \tag{6}$$

解 对于任意的 $\alpha, 0<\alpha<\frac{1}{2}$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx&=\int_0^{\frac{\pi}{2}-n^{-\alpha}}\sin^n x dx+\int_{\frac{\pi}{2}-n^{-\alpha}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx\\&=O(\cos^n n^{-\alpha})+O(n^{-\alpha})\\&=O(1)\left(1-\frac{n^{-2\alpha}}{2}+O(n^{-4\alpha})\right)^n+O(n^{-\alpha}).\end{aligned} \tag{7}$$

由

$$\log\left(1-\frac{n^{-2\alpha}}{2}+O(n^{-4\alpha})\right)=-\frac{n^{-2\alpha}}{2}+O(n^{-4\alpha})$$

及 $0<\alpha<\frac{1}{2}$, 得到

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{n^{-2\alpha}}{2}+O(n^{-4\alpha})\right)^n&=\exp\left(n\left(-\frac{n^{-2\alpha}}{2}+O(n^{-4\alpha})\right)\right)\\&=\exp\left(-\frac{n^{1-2\alpha}}{2}+O(n^{1-4\alpha})\right)\\&=O(1)\exp\left(-\frac{n^{1-2\alpha}}{4}\right),\end{aligned} \tag{8}$$

由 (7) 式与 (8) 式得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=O(n^{-\alpha})+O(1)\exp\left(-\frac{n^{1-2\alpha}}{2}\right)=O(n^{-\alpha}). \qquad \square$$

注 如果使用通常的 "$\varepsilon-N$ 语言", 一般只能证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=o(1)$, 却不能给出像 (6) 式这样的结果. 事实上, 通过变量代换可以将 I_n 直接写成 Γ-函数的形式, 从而利用 Stirling 公式得到 $I_n\sim cn^{-\frac{1}{2}}$, $n\to\infty$, $c>0$. 引入上述证明过程是为了加深读者对积分分段估计方法的理解.

习 题

1. 设 $f(x)$ 为下列函数:

(1) $\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x+\sqrt[4]{x}}}$; (2) $\sin\frac{1}{x^2}\log(1+\frac{1}{x^a})$, $a>0$;

(3) $e^{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}}\log\frac{1}{x+5}$;

当 $x\to\infty$ 时, 确定 $f(x)\sim$?

2. 设 $f(x)$ 为下列函数, 确定 $f(x)\sim$?

(1) $f(x)=\tan^3 x-3\tan x$, $x\to\frac{\pi}{3}$;

(2) $f(x)=(1-2x)^{x^{-\frac{1}{2}}}$, $x\to 0$;

(3) $f(x)=x^x-1$, $x\to 1$.

3. 当 $x\to\infty$ 时, 按阶的大小将下列函数进行排列;

$$(\log x)^a;\quad (\log\log x)^\beta;\quad x^a;\quad x^{(\log x)^a};\quad x^{(\log x)^{x^a}};$$
$$e^{ax};\quad e^{x^a};\quad e^{(\log x)^A};\quad (1+x)^a,$$

其中 $0<a<1$, $0<\beta<1$, $A>2$.

4. 当 $x\to 0$ $(x>0)$ 时, 按阶的大小将下列函数进行排列:

$$(x+1)\sin x^2;\quad \cos x-1;\quad (1+x)^x-1;\quad x^x-1;$$
$$e^{2x}-1-2x^2;\quad \sqrt[3]{1-\sqrt{x}}-1;\quad 2^{x^2}-1;$$
$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}};\quad e^{-\frac{a}{x}};\quad (\log x)^{-\frac{a}{x}};\quad \left(\log\frac{1}{x}\right)^{\log x},$$

其中 $a>0$.

5. 证明: 若 $0<k<1$, 则

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\sim\frac{1}{2}\log\frac{1}{1-k},\quad k\to 1-.$$

6. 设 $\sigma>0$, 若级数 $\sum_{n=1}^\infty\frac{a_n}{n^\sigma}$ 收敛, 则

$$\sum_{n=1}^\infty a_n x^n=o\left(\frac{1}{(1-x)^\sigma}\right),\quad x\to 1-.$$

7. 证明:

$$\sum_{n=1}^\infty(x^{n^2}-x^{2n^2})\sim\frac{c}{\sqrt{1-x}},\quad x\to 1-,$$

其中 $c>0$.

8. 设 $b_n > 0$, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 对一切 x 收敛, 又设存在 $s < \infty$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = s,$$

则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 也对一切 x 收敛, 而且

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sim s \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad x \to \infty.$$

9. 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = \mathrm{A}$ 存在有限, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = Ae^x(1 + o(1)), \quad x \to \infty.$$

10. 以 $\pi(x)$ 表示不超过 x 的素数个数. 已知 $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ $(x \to \infty)$, 那么第 n 个素数 $p_n \sim$?

11. 证明:

$$\left(x + 1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x = ex^x + O(x^{x-1}).$$

12. 证明: 对于任意自然数 n,

$$\int_1^x (\log t)^n dt = O(x(\log x)^n).$$

13. 设 $na_n \downarrow 0$ $(n \to \infty)$, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛, 则

$$a_n = o\left(\frac{1}{n \log n}\right), \quad n \to \infty.$$

14. 对任意的 $x > 0$, 当 $n \to \infty$ 时, 有

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+x} \sim e^x \left(1 + \frac{x^2}{2n}\right).$$

15. 证明: 若 $0 < a < 1$, 令

$$\frac{1}{(1-x)^a} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

则存在常数 C_1, C_2, 使得

$$0 < C_1 < \frac{a_n}{n^{a-1}} < C_2 < \infty.$$

16. 设

$$a_n \sim \frac{1}{\log n}, \quad n \to \infty,$$

则

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sim \frac{1}{(1-x)\log\frac{1}{1-x}}, \quad x \to 1-.$$

第二章

级数与积分

在第一章中, 给出了阶的估计的一些应用. 在本章中, 将通过大量的例题, 使读者进一步了解阶的估计在级数与积分理论中的应用.

2.1 无穷级数与无穷乘积的收敛性

本节要进一步研究无穷级数及无穷乘积的收敛性. 目的主要是阐明 O 与 o 的估计对收敛性问题的应用, 而不在于证明或列举各种形式的判别方法. 因此, 尽管要引用一些判别法则, 却不证明它们. 当然, 对个别法则也给出了证明, 但只限于那些比较复杂的 "临界情形". 事实上, 正是在这些情形中, 才显示出使用 O 与 o 的便利.

已经知道, 若 $\alpha > 1$, 则下面的级数收敛 (n_0 是适当的自然数):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}, \quad \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log\log n)^{\alpha}},$$
$$\cdots, \quad \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n \log n \log\log n \cdots (\log \cdots \log n)^{\alpha}};$$

而且, 当 $\alpha \leq 1$ 时, 它们都发散. 这些级数在收敛性问题中常作为 "标尺" 与其他级数相比较.

定理 1 (Gauss) 设 $\lambda > 1$, 且

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\lambda}\right), \quad n \geq n_0, \tag{1}$$

其中 n_0 是常数. 则级数

$$\sum a_n \begin{cases} \text{收敛}, & \text{当 } \alpha > 1; \\ \text{发散}, & \text{当 } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

证明 不妨假定 $n_0 = 1$, 而且当 $n \geq 1$ 时, 有

$$\left|\frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\lambda}\right)\right| \leq \frac{1}{2}.$$

由 (1) 式得到

$$a_n = a_1 \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\alpha}{k} + O\left(\frac{1}{k^\lambda}\right)\right),$$

由此及

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \log\left(1 - \frac{\alpha}{k} + O\left(\frac{1}{k^\lambda}\right)\right) &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{\alpha}{k} + O\left(\frac{1}{k^\lambda}\right) + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \\ &= -\alpha \log n + C' + O\left(\frac{1}{n^{\lambda-1}}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

推出, 当 $n \to \infty$ 时, 有

$$\begin{aligned} a_n &= C n^{-\alpha} e^{O(\frac{1}{n^{\lambda-1}}) + O(\frac{1}{n})} \\ &= \frac{C}{n^\alpha}\left(1 + O\left(\frac{1}{n^{\lambda-1}}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \end{aligned}$$

其中 C' 与 C 均为常数且 $C \neq 0$. 由此定理得证. □

推论 设整数 $k \geq 1$, 且对于某个 n_0,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^k + b_1 n^{k-1} + \cdots + b_k}{n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_k}, \quad n \geq n_0.$$

则级数

$$\sum a_n \begin{cases} \text{收敛}, & \text{当 } b_1 - a_1 < -1; \\ \text{发散}, & \text{当 } b_1 - a_1 \geq -1. \end{cases}$$

定理 2 设

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=1+\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\quad n\geq 1. \tag{2}$$

则级数

$$\sum(-1)^n a_n \begin{cases} \text{收敛}, & \text{当 } \alpha<0; \\ \text{发散}, & \text{当 } \alpha\geq 0. \end{cases}$$

证明 与定理 1 的证明类似地, 我们得到

$$a_n=Cn^\alpha e^{O(\frac{1}{n})}=Cn^\alpha\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)=Cn^\alpha+O\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right),$$

其中 C 为正常数.

当 $\alpha<0$ 时, 级数 $\sum O\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right)$ 收敛, 故级数 $\sum(-1)^n a_n$ 与 $\sum(-1)^n n^\alpha$ 有相同的收敛性, 即级数 $\sum(-1)^n a_n$ 收敛.

当 $\alpha\geq 0$ 时, 对于充分大的 n, 有

$$a_n=Cn^\alpha+O\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right)>\frac{C}{2}n^\alpha,$$

所以级数 $\sum(-1)^n a_n$ 必不收敛. □

例 1 研究超越几何级数

$$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots$$
$$+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)}{1\cdot 2\cdots n(n+1)}\cdot\frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n)}x^{n+1}+\cdots$$

的收敛性, 其中 α,β,γ 不为负整数或零.

解 以 a_n 表示该级数的第 n 项, 则

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}x=x\left(1+\frac{\alpha+\beta-\gamma-1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

若 $|x| \neq 1$, 则有常数 C, C', 当 $n \to \infty$ 时, 有

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 x^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{\alpha+\beta-\gamma-1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \\ &= a_1 x^{n-1} e^{\sum\limits_{k=1}^{n-1} \log(1+\frac{\alpha+\beta-\gamma-1}{k}+O(\frac{1}{k^2}))} \\ &= a_1 x^{n-1} e^{(\alpha+\beta-\gamma-1)\log n + O(\frac{1}{n}) + C'} \\ &= C x^{n-1} n^{(\alpha+\beta-\gamma-1)} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

由此可见, 级数 $\sum a_n$ 与 $\sum x^{n-1} n^{(\alpha+\beta-\gamma-1)}$ 有相同的收敛性, 即: 当 $|x| < 1$ 时, $\sum a_n$ 收敛; 当 $|x| > 1$ 时, $\sum a_n$ 发散.

若 $x = 1$, 由于

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2 + (\alpha+\beta)n + \alpha\beta}{n^2 + (\gamma+1)n + \gamma}, \quad n \to \infty,$$

则由定理 1 的推论可知, 当 $\alpha + \beta < \gamma$ 时, $\sum a_n$ 收敛; 当 $\alpha + \beta \geq \gamma$ 时, $\sum a_n$ 发散.

若 $x = -1$, 取 $a_n = (-1)^n b_n$, 则

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n^2 + (\alpha+\beta)n + \alpha\beta}{n^2 + (\gamma+1)n + \gamma} = 1 + \frac{\alpha+\beta-\gamma-1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

由定理 2, 级数

$$\sum a_n \begin{cases} \text{收敛}, & \text{当 } \alpha+\beta-\gamma < 1; \\ \text{发散}, & \text{当 } \alpha+\beta-\gamma \geq 1. \end{cases}$$

现在, 我们研究无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \tag{3}$$

的收敛性问题.

在数学分析课程中, 已经证明了: 无穷乘积 (3) 收敛的充要条件是级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n) \tag{4}$$

收敛, 而且有等式

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)=e^{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\log(1+a_n)}.$$

此外, 无穷乘积 (3) 发散于零的充要条件是无穷级数 (4) 发散于 $-\infty$. □

定理 3 对于自然数 k, 若级数

$$\sum a_n,\quad \sum a_n^2,\quad \cdots,\quad \sum a_n^k \quad 及 \quad \sum |a_n|^{k+1}$$

都收敛, 则无穷乘积 (3) 也收敛.

证明 因为 $\sum a_n$ 收敛, 所以 $a_n\to 0$. 因此, 不妨设 $|a_n|<1$ $(n\geq 1)$, 由

$$\log(1+a_n)=a_n-\frac{1}{2}a_n^2+\frac{1}{3}a_n^3-\cdots+\frac{(-1)^{k-1}}{k}a_n^k+O(|a_n|^{k+1})$$

及假设条件, 可得到级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+a_n)$$

的收敛性. 由前所述, 即可得到 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 的收敛性. □

例 2 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 则无穷乘积 (3) 收敛的充要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛.

解 由前所述, 这里只需考察级数 (4) 与 $\sum a_n^2$ 的关系.

由于 $\sum a_n$ 收敛, 所以 $a_n=o(1), n\to\infty$. 因此

$$\log(1+a_n)=a_n-\frac{1}{2}a_n^2+r_n,$$

其中 $r_n=o(a_n^2)$.

$$\log(1+a_n)-a_n\sim-\frac{1}{2}a_n^2,\quad n\to\infty.$$

上式右端保持定号, 因此 $\sum\log(1+a_n)$ 收敛的充要条件是 $\sum a_n^2$ 收敛. □

例 3 设 k 是自然数, 级数 $\sum |a_n|^k$ 收敛. 则无穷乘积

$$\prod (1-a_n)e^{a_n+\frac{1}{2}a_n^2+\frac{1}{3}a_n^3+\cdots+\frac{1}{k-1}a_n^{k-1}} \tag{5}$$

收敛.

解 我们需要证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\log(1-a_n)+a_n+\frac{1}{2}a_n^2+\cdots+\frac{1}{k-1}a_n^{k-1}\right) \tag{6}$$

收敛.

事实上, 由于 $a_n=o(1)$ $(n\to\infty)$, 所以不妨假设 $|a_n|<1$ $(n\geq 1)$, 于是

$$\log(1-a_n)+a_n+\frac{1}{2}a_n^2+\cdots+\frac{1}{k-1}a_n^{k-1}=O(|a_n|^k).$$

因此, 由假设条件得到 (6) 的收敛性, 从而 (5) 收敛. □

例 4 研究下列无穷乘积的收敛性:

(1) $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{\log(n+x)-\log n}$; (2) $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{n+c}\right)e^{\frac{x}{n}}$, $c>0$;

(3) $\displaystyle\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^\beta-1}{n^\beta+1}\cos\frac{\pi}{n}$, $\beta>0$.

解 (1) 对充分大的 n,

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{\log(n+x)-\log n}&=\left(\log\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\log\log(1+\frac{x}{n})}\\&=e^{\frac{1}{n}\log(\frac{x}{n}+O(\frac{1}{n^2}))}=1-\frac{\log n-\log x}{n}+O\left(\frac{\log^2 n}{n^2}\right),\end{aligned}$$

所以, 对任意固定的 x, 无穷乘积发散.

(2) 对充分大的 n, 有

$$\begin{aligned}\log\left(\left(1-\frac{x}{n+c}\right)e^{\frac{x}{n}}\right)&=\frac{x}{n}+\log\left(1-\frac{x}{n+c}\right)\\&=\frac{cx}{n(n+c)}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

所以, 无穷乘积对任何 x 为收敛.

(3) 当 $n \to \infty$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{n^\beta - 1}{n^\beta + 1}\cos\frac{\pi}{n} &= \left(1 - \frac{2}{n^\beta + 1}\right)\left(1 - \frac{\pi^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\\ &= 1 - \frac{2}{n^\beta + 1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

所以, 当 $\beta > 1$ 时, 无穷乘积收敛; 当 $\beta \leq 1$ 时, 无穷乘积发散. □

下面来研究 Γ 函数的无穷乘积表示.

引理 1 设 $s > 0$. 则

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^n t^{s-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt.$$

证明

$$\int_0^n t^{s-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \int_0^{n^{\frac{1}{3}}} t^{s-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt + I, \tag{7}$$

这里

$$I = \int_{n^{\frac{1}{3}}}^n t^{s-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt.$$

显然

$$I = O\left(\int_{n^{\frac{1}{3}}}^n t^{s-1}\left(1 - \frac{n^{\frac{1}{3}}}{n}\right)^n dt\right) = O\left(\frac{n^s}{s}e^{-n^{\frac{1}{3}}}\right), \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{n^{\frac{1}{3}}} t^{s-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt &= \int_0^{n^{\frac{1}{3}}} t^{s-1}e^{n\log(1-\frac{t}{n})}dt\\ &= \int_0^{n^{\frac{1}{3}}} t^{s-1}\left(e^{-t+O(n^{-\frac{1}{3}})}\right)dt\\ &= \int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{-t}t^{s-1}dt + O(n^{-\frac{1}{3}})\\ &= \Gamma(s) + O(n^{-\frac{1}{3}}).\end{aligned} \tag{9}$$

由 (7) ~ (9) 式引理得证. □

由上面的引理就可得到 $\Gamma(s)$ 的无穷乘积表示.

我们有

$$\begin{aligned}\int_0^n t^{s-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt &= n^s\int_0^1 (1-t)^n t^{s-1}dt\\ &= \frac{n^s}{s}\int_0^1 (1-t)^n dt^s = n^s\frac{n}{s}\int_0^1 (1-t)^{n-1}t^s dt\\ &= \cdots = n^s\frac{n(n-1)\cdots 1}{s(s+1)\cdots(s+n-1)}\int_0^1 t^{s+n-1}dt\\ &= n^s\frac{n(n-1)\cdots 1}{s(s+1)\cdots(s+n)}\\ &= \frac{1}{s}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^s\left(1+\frac{s}{k}\right)^{-1}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

由此并利用引理 1, 得到

$$\Gamma(s)=\frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^s\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1},\quad s>0. \tag{10}$$

2.2 Fourier 级数的收敛性

在本节中, 总是假定 $f(x)$ 是定义在实轴上的周期为 2π 的函数, 并在 $[0,2\pi]$ 上可积, 此外, 定义

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx,$$

称它们为 $f(x)$ 的 Fourier 系数 $(n=0,1,2,\cdots)$, 并称相应的级数

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

为 $f(x)$ 的 Fourier 级数, 记

$$S_n(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

下面, 我们来研究 $f(x)$ 的 Fourier 系数与 Fourier 级数的某些性质.

定理 1 设 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 则当 $n\to\infty$ 时,

$$\int_a^b g(x)\cos nx dx = o(1),$$
$$\int_a^b g(x)\sin nx dx = o(1).$$

证明 因为 $g(x)$ 可积, 所以必有界:

$$|g(x)|\leq M,\quad x\in[a,b].$$

设 $k=k(n)$ 是 n 的增函数, 且 $k\to\infty$ $(n\to\infty)$, 记

$$x_i = a+\frac{i}{k}(b-a),\quad \Delta x_i = x_{i+1}-x_i,\quad i=0,1,2,\cdots,k,$$
$$D_i = \sup|g(x')-g(x'')|,\quad x',x''\in[x_i,x_{i+1}].$$

由于 $g(x)$ 可积, 所以

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{k-1} D_i\Delta x_i = 0. \tag{1}$$

容易看出,

$$\begin{aligned}\int_a^b g(x)\cos nx dx &= \sum_{i=0}^{k-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)\cos nx dx\\ &= \sum_{i=0}^{k-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (g(x)-g(x_i))\cos nx dx\\ &\quad +\sum_{i=0}^{k-1} g(x_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}}\cos nx dx\\ &= O\left(\sum_{i=0}^{k-1} D_i\Delta x_i\right)+O\left(\frac{k}{n}\right).\end{aligned}$$

由上式, 取 $k=[\sqrt{n}]$, 并利用 (1) 式, 证得定理的第一个结论.

同理可证

$$\int_a^b g(x)\sin nx dx = o(1),\quad n\to\infty.$$ □

注 显然, 当 n 替代以一般变量 $\lambda \to \infty$ 时, 定理 1 依然成立.

推论 当 $n \to \infty$ 时, $a_n = o(1), b_n = o(1)$.

下面考虑 $S_n(x)$ 的收敛性质. 为此, 先将它进行变换.

由 a_n 与 b_n 的表达式, 有

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos kx \int_0^{2\pi} f(t)\cos ktdt\right. \\ &\quad \left. + \sin kx \int_0^{2\pi} f(t)\sin ktdt\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t)\right) f(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-t)}{\sin\frac{x-t}{2}} f(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-x}^{2\pi-x} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}} f(x+u)du. \end{aligned}$$

由 $f(x)$ 的周期性, 得到

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} f(x+t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} (f(x+t)+f(x-t))dt. \end{aligned}$$

在上式中, 取 $f(x) \equiv 1$, 则得到

$$1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} dt, \quad n \geq 1.$$

对于常数 s, 记

$$\varphi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2s$$

(在本节中总使用这一记法), 则

$$\begin{aligned} S_n(x)-s &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}(f(x+t)+f(x-t)-2s)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\varphi(t)dt. \end{aligned}$$

定理 2 下列两条件之一成立时, 就有

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=s:$$

(1) 存在 $\delta>0$, $\frac{\varphi(t)}{t}$ 在某一区间 $[0,\delta]$ 上可积;

(2) 存在 $\delta>0$, 在某一区间 $[0,\delta]$ 中, $\varphi(t)$ 是非负的增函数, 而且 $\lim_{t\to 0}\varphi(t)=0$.

证明 (1) 有

$$\begin{aligned} S_n(x)-s &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\varphi(t)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}\varphi(t)dt \\ &\quad +\frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta}\left(\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}-\frac{2}{t}\right)\varphi(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt \\ &\quad +\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\varphi(t)dt. \end{aligned}$$

由于 $\frac{\varphi(t)}{t}$, $(\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}-\frac{2}{t})\varphi(t)$ 以及 $\frac{\varphi(t)}{\sin\frac{t}{2}}$ 分别在 $[0,\delta]$, $[0,\delta]$ 以及 $[\delta,\pi]$ 上可积, 所以由定理 1 就可得到

$$S_n(x)-s=o(1),\quad n\to\infty.$$

(2) 由 (1) 的证明过程可见, 只需证明

$$\int_0^{\delta}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}\varphi(t)dt=o(1),\quad n\to\infty.$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\delta} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}\varphi(t)dt \\
&\quad = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}\varphi(t)dt + \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\delta} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}\varphi(t)dt \\
&\quad = I_1 + I_2. \qquad (2)
\end{aligned}$$

由积分中值定理得到

$$\begin{aligned}
I_1 &= \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\int_{\xi}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}dt \quad \left(0 \le \xi \le \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\
&= \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\int_{(n+\frac{1}{2})\xi}^{\frac{n+\frac{1}{2}}{\sqrt{n}}} \frac{\sin t}{t}dt \\
&= O\left(\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right), \\
I_2 &= \varphi(\delta)\int_{\eta}^{\delta} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}dt \quad \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \le \eta \le \delta\right) \\
&= \varphi(\delta)\int_{(n+\frac{1}{2})\eta}^{(n+\frac{1}{2})\delta} \frac{\sin u}{u}du \\
&= o(\varphi(\delta)),
\end{aligned}$$

所以当 $n \to \infty$ 时,

$$\int_0^{\delta} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}\varphi(t)dt = o(1). \qquad \square$$

以下考虑 $S_0(x), S_1(x), \cdots, S_{n-1}(x)$ 的算术平均

$$\begin{aligned}
\sigma_n(x) &= \frac{1}{n}(S_0(x) + S_1(x) + \cdots + S_{n-1}(x)) \\
&= \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{\sin\frac{t}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t(f(x+t)+f(x-t))dt \\
&= \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}(f(x+t)+f(x-t))dt.
\end{aligned}$$

在上面的等式中取 $f(x) \equiv 1$, 得到

$$1 = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt.$$

因此

$$\sigma_n(x)-s=\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2(f(x+t)+f(x-t)-2s)dt$$

$$=\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2\varphi(t)dt. \tag{3}$$

定理 3 (Fejér-Lebesgue) *若*

$$\int_0^t|f(x+u)+f(x-u)-2s|du=o(t),\quad t\to 0,$$

则 $\sigma_n(x)-s=o(1),n\to\infty$.

证明 由假设条件可知

$$\int_0^t|\varphi(u)|du=\int_0^t|f(x+u)+f(x-u)-2s|du=o(t).$$

令 $\Phi(t)=\int_0^t|\varphi(u)|du$, 则

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2\varphi(t)dt$$

$$=4\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{t^2}\varphi(t)dt+\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}}-\frac{4}{t^2}\right)\sin^2\frac{nt}{2}\varphi(t)dt$$

$$=4\left(\int_0^{\frac{1}{n}}+\int_{\frac{1}{n}}^{n^{-\frac{1}{3}}}+\int_{n^{-\frac{1}{3}}}^{\pi}\right)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{t}\right)^2\varphi(t)dt+O(1)$$

$$=I_1+I_2+I_3+O(1).$$

当 $n\to\infty$ 时, 有

$$|I_1|\le\int_0^{\frac{1}{n}}n^2|\varphi(t)|dt=n^2\cdot o\left(\frac{1}{n}\right)=o(n),$$

$$|I_2|\le 4\int_{\frac{1}{n}}^{n^{-\frac{1}{3}}}\frac{1}{t^2}|\varphi(t)|dt=4\int_{n^{-1}}^{n^{-\frac{1}{3}}}\frac{1}{t^2}d\Phi(t)$$

$$\le 4n^2\Phi\left(\frac{1}{n}\right)+4n^{\frac{2}{3}}\Phi(n^{-\frac{1}{3}})+8\int_{n^{-1}}^{n^{-\frac{1}{3}}}\frac{\Phi(t)}{t^3}dt$$

$$=o(n)+o(n^{\frac{1}{3}})+\int_{n^{-1}}^{n^{-\frac{1}{3}}}\frac{o(t)}{t^3}dt=o(n)+o(n^{\frac{1}{3}}),$$

$$\begin{aligned}|I_3| &\le 4\int_{n^{-\frac{1}{3}}}^{\pi}\frac{1}{t^2}|\varphi(t)|dt = 4\int_{n^{-\frac{1}{3}}}^{\pi}\frac{1}{t^2}d\Phi(t)\\ &\le 4n^{\frac{2}{3}}\Phi(n^{-\frac{1}{3}}) + O(1) + 8\int_{n^{-\frac{1}{3}}}^{\pi}\frac{\Phi(t)}{t^3}dt\\ &= o(n^{\frac{1}{3}}) + O(1) + O(n^{\frac{2}{3}}),\end{aligned}$$

此处用到了 $f(x)$ 的可积性 (因而 $\Phi(t) = O(1)$).

联合以上诸式, 即可得到

$$\sigma_n(x) - s = o(1). \qquad \square$$

定理 4 (Weierstrass) 设 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 中连续. 则对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在多项式 $P(x)$, 使得

$$|g(x) - P(x)| < \varepsilon, \quad x \in [a,b].$$

证明 令 $f(t) = g\left(a + \frac{b-a}{2\pi}t\right), t \in [0,2\pi]$, 则 $f(t)$ 是 $[0,2\pi]$ 上的连续函数, 因而一致连续, 所以

$$\int_0^t |f(x+u) - f(x)|du = o(t), \quad t \to 0$$

关于 $x \in [0,2\pi]$ 是一致的. 由定理 3 及其证明过程可知 $\sigma_n(t)$ 一致收敛于 $f(t), t \in [0,2\pi]$, 即存在 n_0, 使得

$$|\sigma_{n_0}(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad t \in [0,2\pi],$$

此处 $\sigma_{n_0}(t) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n_0}(\lambda_k \cos kt + \mu_k \sin kt)$, λ_i 与 μ_i 是适当的常数. 利用三角函数的 Taylor 展开式, 我们知道, 存在多项式 $p(t)$, 使

$$|p(t) - \sigma_{n_0}(t)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad t \in [0,2\pi],$$

于是

$$|f(t) - p(t)| < \varepsilon, \quad t \in [0,2\pi].$$

令 $P(x) = p\left(2\pi\frac{x-a}{b-a}\right), x \in [a,b]$, 则 $P(x)$ 即是所求的多项式. $\square$

例 1 若 $f(x)=O(1), x\in[0,2\pi]$, 则

$$S_n(x)=O(\log n).$$

解

$$\begin{aligned}S_n(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}(f(x+t)+f(x-t))dt\\&=\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\frac{1}{n+1}}+\int_{\frac{1}{n+1}}^{\pi}\right)(f(x+t)+f(x-t))\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}dt\\&=O(1)\int_0^{\frac{1}{n+1}}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}dt+O(1)\int_{\frac{1}{n+1}}^{\pi}\frac{dt}{\sin\frac{t}{2}}\\&=O(\log n).\end{aligned}$$

□

例 2 若 $f(x)=O(1)$, 且 $a_n=O\left(\frac{1}{n}\right), b_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$, 则 $S_n(x)=O(1)$.

解 容易验证

$$S_n(x)=\sigma_{n+1}(x)+\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}k(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

由假设条件, 显然

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}k(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=O\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{1}{k}\right)=O(1),$$

所以只需证明 $\sigma_n(x)=O(1)$. 事实上, 由于 $f(x)=O(1)$, 有

$$\begin{aligned}|\sigma_n(x)|&=\left|\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2(f(x+t)+f(x-t))dt\right|\\&=O\left(\frac{1}{n}\right)\left(\int_0^{\frac{1}{n}}+\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\right)\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{t^2}dt\\&=O\left(\frac{1}{n}\right)\left(\int_0^{\frac{1}{n}}n^2dt+\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{dt}{t^2}\right)\\&=O(1).\end{aligned}$$

□

例 3 若 $\int_0^t |\varphi(u)|du = o(t)$, 则 $S_n(x) = o(\log n)$.

解 令 $\Phi(t) = \int_0^t |\varphi(u)|du$, 则

$$\begin{aligned}
S_n(x) - s &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\varphi(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\log n}{n}} + \int_{\frac{\log n}{n}}^{\pi}\right)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\varphi(t)dt \\
&= O(n)\int_0^{\frac{\log n}{n}} |\varphi(t)|dt + O(1)\int_{\frac{\log n}{n}}^{\pi}\frac{|\varphi(t)|}{t}dt \\
&= o(\log n) + O(1)\int_{\frac{\log n}{n}}^{\pi}\frac{1}{t}d\Phi(t) \\
&= o(\log n) + O(1)\left(\frac{1}{t}\Phi(t)\Big|_{\frac{\log n}{n}}^{\pi} + \int_{\frac{\log n}{n}}^{\pi}\frac{\Phi(t)}{t^2}dt\right) \\
&= o(\log n) + O(1)\left(\int_{\frac{\log n}{n}}^{\frac{1}{\sqrt{\log n}}} + \int_{\frac{1}{\sqrt{\log n}}}^{\pi}\right)\frac{\Phi(t)}{t^2}dt \\
&= o(\log n) + O(1)\int_{\frac{\log n}{n}}^{\frac{1}{\sqrt{\log n}}}\frac{o(t)}{t^2}dt + O(1)\int_{\frac{1}{\sqrt{\log n}}}^{\pi}\frac{dt}{t^2} \\
&= o(\log n).
\end{aligned}$$

□

例 4 设自然数列 $\{\lambda_k\}$ 满足条件

$$\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} \geq C > 1, \quad k \geq 0,$$

又设

$$\alpha_k = O(\lambda_k^{-\alpha}), \quad \beta_k = O(\lambda_k^{-\alpha}), \quad 0 < \alpha < 1.$$

则级数

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(\alpha_k \cos\lambda_k x + \beta_k \sin\lambda_k x)$$

在 $[0, 2\pi]$ 上收敛, 而且满足条件

$$f(x+h) - f(x) = O(|h|^{\alpha}), \quad x \in [0, 2\pi],$$

其中 O 常数与 x 无关.

解 由 $C>1$ 及

$$\lambda_n=\lambda_{n_0}\prod_{k=n_0}^{n-1}\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}>\lambda_{n_0}C^{n-n_0},$$

可知级数 $\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha_k\cos\lambda_k x+\beta_k\sin\lambda_k x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上一致收敛于连续函数 $f(x)$.

不妨设 $|h|<\lambda_1^{-1}$, 显而易见, 必有 N 存在, 使得

$$\frac{1}{\lambda_{N+1}}\leq|h|<\frac{1}{\lambda_N},$$

由

$$\begin{aligned}|f(x+h)-f(x)|\leq&\left(|\sum_{k=1}^{N}|+|\sum_{k=N+1}^{\infty}|\right)(\alpha_k(\cos\lambda_k(x+h)-\cos\lambda_k x)\\&+\beta_k(\sin\lambda_k(x+h)-\sin\lambda_k x)),\end{aligned}$$

并利用 λ_n 的估计式得到, 上式右端为

$$\begin{aligned}&\leq\sum_{k=1}^{N}(2|\alpha_k|\lambda_k|h|+2|\beta_k|\lambda_k|h|)+2\sum_{k=N+1}^{\infty}(|\alpha_k|+|\beta_k|)\\&=O(|h|)\sum_{k=1}^{N}\lambda_k^{1-\alpha}+O\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\lambda_k^{-\alpha}\right)\\&=O(|h|\lambda_N^{1-\alpha})+O(\lambda_{N+1}^{-\alpha})\\&=O(|h|^{\alpha}).\end{aligned}$$

□

2.3 极限过程的交换

所谓极限过程的交换, 在这里主要是指二重积分求积次序的交换, 二重级数求和顺序的交换, 以及无穷级数的逐项积分. 关于这些类型的定理, 我们已经接触许多, 例如, 第 1.4 节中的引理 1 和引理 2 以及下面的三个引理, 都是众所周知的结果.

引理 1 若 $a_{mn} \geq 0$ $(m \geq 1, n \geq 1)$, 则下面等式中一方的存在就可保证另一方的存在, 并且等式成立

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}. \tag{1}$$

引理 2 若 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ 都是 $[a,b]$ 上的连续函数, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

在 $[a,b]$ 上一致收敛, 则

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx.$$

引理 3 设

(1)

$$f_n(x) \geq 0, \quad n \geq 1, x \geq a; \tag{2}$$

(2) 对任意的 $c < b$ (或对任何有限的 c), 都有

$$\int_a^c \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^c f_n(x)dx. \tag{3}$$

则有等式

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx \tag{4}$$

或

$$\int_a^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^{\infty} f_n(x)dx, \tag{5}$$

此处假定上式中有一方存在.

此外, 如果 (2) 式不成立, 则将 (3) 式中的 $f_n(x)$ 改为 $|f_n(x)|$ 后, 定理仍成立.

上面所提到的这些引理, 虽然应用范围相当广泛, 但是对于大量的交换极限过程问题, 却无法应用或者有很大困难, 原因是对于函数的非负性 (或对于 $|f(x,y)|, |a_{mn}|$) 的要求是太强了. 举例来说, 为了使 (1) 式成立, 所需要的是

$$\lim_{M\to\infty}\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{mn},$$

即

$$\lim_{M\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{mn}-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{M}a_{mn}\right)=\lim_{M\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=M+1}^{\infty}a_{mn}=0.$$

这样以来, 问题归结为, 当 $M\to\infty$ 时, 对于和式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=M+1}^{\infty}a_{mn} \tag{6}$$

的估计. 一般说来, a_{mn} 是变号的, 所以, 若用

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=M+1}^{\infty}|a_{mn}| \tag{7}$$

作为 (6) 的估计, 实在太粗糙了. 这正是引理 1 的局限之处. 然而, 如果能从整体上对

$$A(n)=\sum_{m=M+1}^{\infty}a_{mn}$$

进行估计, 然后估计 (6) 式, 那就可能得出比 (7) 式更为精细的结果. 这正是应用阶的估计方法解决这类问题的基本出发点. 对于积分次序的交换以及级数的逐项积分, 存在着同样的情况, 读者可以从以后的例子中体会和理解.

注意, 在处理这类估计时, 一般要涉及两个以上的变量. 因此, 在使用 O 或 o 符号时, 一定要注意它们对相应变量的一致性. 鉴于这一原因, 下面在做估计时, 我们往往不使用 O 或 o 符号, 而宁可写出分析表达式. 这样做, 还有一个好处, 就是可以保证估计式的精确性.

定理 1 (有界收敛定理) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 对任意 $x \in (a,b)$ 是收敛的, 又设

(1) 对任意的 $\delta > 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $(a, c-\delta)$ 及 $(c+\delta, b)$ 上一致收敛 (其中 $a < c < b$);

(2) $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = O(1), n \geq 1$, 其中 O 常数与 x 无关.

则有下面的等式:

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

证明 令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, 对于充分小的 $\delta > 0$, 有

$$\begin{aligned} &\left| \int_a^b S(x)dx - \int_a^b S_n(x)dx \right| \\ &\quad \leq \left| \int_a^{c-b} (S(x) - S_n(x))dx \right| + \left| \int_{c+\delta}^b (S(x) - S_n(x))dx \right| \\ &\qquad + \left| \int_{c-\delta}^{c+\delta} S(x)dx \right| + \left| \int_{c-\delta}^{c+\delta} S_n(x)dx \right|. \end{aligned} \tag{8}$$

当 $\delta \to 0$ 时, 由于 $S_n(x) = O(1), S(x) = O(1)$, 我们可得到

$$\left| \int_{c-\delta}^{c+\delta} S(x)dx \right| = O(\delta), \quad \left| \int_{c-\delta}^{c+\delta} S_n(x)dx \right| = O(\delta), \quad n \geq 1.$$

而对于固定的 δ, 由一致收敛性可知, 当 $n \to \infty$ 时,

$$\left| \int_a^{c-\delta} (S(x) - S_n(x))dx \right| + \left| \int_{c+\delta}^b (S(x) - S_n(x))dx \right| = o(1),$$

由上两式及 (8) 式, 我们看到, 若先取 δ 充分小, 再使 n 充分大, 就可使得

$$\left| \int_a^b S(x)dx - \int_a^b S_n(x)dx \right| < \varepsilon,$$

其中 $\varepsilon > 0$ 是任意的给定数. 这就证明了定理. □

定理 2 (Hardy) 设当 $x>0$ 时, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛. 则当级数 $\sum_{n=0}^{\infty} n!a_n$ 收敛时, 有等式

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} n!a_n.$$

证明 由于 $\sum_{n=0}^{\infty} n!a_n$ 收敛, 所以 $n!a_n = O(1)$, 从而对于任意固定的 $X>0$, 有

$$|a_n x^n| = \left|\frac{a_n n!}{n!}x^n\right| = O(1)\frac{X^n}{n!}, \quad 0 \le x \le X.$$

因此, $e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(0,X)$ 上一致收敛. 由引理 2 得到

$$\begin{aligned}\int_0^X e^{-x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^X e^{-x}x^n dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\int_0^{\infty} e^{-x}x^n dx - \int_X^{\infty} e^{-x}x^n dx\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n!a_n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_X^{\infty} e^{-x}x^n dx.\end{aligned}$$

这样, 定理的证明归结为对下式的证明:

$$\lim_{X\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_X^{\infty} e^{-x}x^n dx = 0. \tag{9}$$

利用分部积分法, 可以得出

$$\int_X^{\infty} e^{-x}x^n dx = e^{-X}(X^n + nX^{n-1} + \cdots + n!),$$

所以,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_X^{\infty} e^{-x}x^n dx &= \sum_{n=0}^{\infty} n!a_n \frac{e^{-X}}{n!}(X^n + nX^{n-1} + \cdots + n!) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n!a_n e^{-X} \sum_{m=0}^{n} \frac{X^m}{m!} \\ &= e^{-X} \sum_{n=0}^{\infty} (r_n - r_{n+1}) \sum_{m=0}^{n} \frac{X^m}{m!}, \end{aligned} \tag{10}$$

其中

$$r_n = \sum_{k=n}^{\infty} k! a_k = o(1), \quad n \to \infty. \tag{11}$$

显然,

$$\sum_{n=0}^{M} (r_n - r_{n+1}) \sum_{m=0}^{n} \frac{X^m}{m!} = \sum_{n=0}^{M} r_n \frac{X^n}{n!} - r_{M+1} \left(1 + X + \cdots + \frac{X^M}{M!}\right).$$

由此及 (11) 式可以看到, (10) 式右端等于

$$e^{-X} \lim_{M \to \infty} \sum_{n=0}^{M} (r_n - r_{n+1}) \sum_{m=0}^{n} \frac{X^m}{m!} = e^{-X} \sum_{n=0}^{\infty} r_n \frac{X^n}{n!}. \tag{12}$$

再利用 (11) 式, 得到上式右端为

$$\begin{aligned} e^{-X} \sum_{n=0}^{\infty} r_n \frac{X^n}{n!} &= e^{-X} \left(O(1) + o(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}\right) \\ &= O(e^{-X}) + o(1) = o(1), \quad X \to \infty. \end{aligned}$$

由上式及 (12), (10) 式, 即可得到 (9) 式. □

例 1 证明

$$\begin{aligned} &\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\left(m + \frac{1}{2}\right)\left(m + n + \frac{1}{2}\right)} \\ &\quad = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\left(m + \frac{1}{2}\right)\left(m + n + \frac{1}{2}\right)}. \end{aligned} \tag{13}$$

解 由于所涉及的二重级数不绝对收敛, 所以不能应用引理 1. 对任意的自然数 N, 显然有

$$\begin{aligned} &\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{(-1)^n}{\left(m + \frac{1}{2}\right)\left(m + n + \frac{1}{2}\right)} \\ &\quad = \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\left(m + \frac{1}{2}\right)\left(m + n + \frac{1}{2}\right)}. \end{aligned}$$

因此, (13) 的证明归结为证明下面的等式:

$$\begin{aligned}&\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(m+n+\frac{1}{2}\right)}\\&\quad+\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{-N-1}\frac{(-1)^n}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(m+n+\frac{1}{2}\right)}\\&\quad\equiv I_1+I_2=o(1),\quad N\to\infty.\end{aligned}\tag{14}$$

我们首先研究 I_1, 将它分成下面的两个和:

$$\begin{aligned}I_1=&\sum_{m=-N-1}^{\infty}\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(m+n+\frac{1}{2}\right)}\\&+\sum_{m=-\infty}^{-N-2}\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(m+n+\frac{1}{2}\right)}\\=&\,I_{11}+I_{12}.\end{aligned}\tag{15}$$

当 $m\geq -N-1$ 时,

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{m+n+\frac{1}{2}}\right|<\frac{1}{m+N+\frac{3}{2}},$$

因此,

$$\begin{aligned}|I_{11}|=&\left|\sum_{m=-N-1}^{\infty}\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(m+n+\frac{1}{2}\right)}\right|\\\leq&\sum_{m=-N-1}^{\infty}\frac{1}{\left|m+\frac{1}{2}\right|\left(m+N+\frac{3}{2}\right)}\\\leq&\sum_{-N-1\leq m<-\frac{1}{2}N-\frac{1}{2}}\frac{1}{\frac{1}{2}N\left(m+N+\frac{3}{2}\right)}\\&+\sum_{-\frac{1}{2}N-\frac{1}{2}\leq m\leq N}\frac{1}{\frac{1}{2}N\left|m+\frac{1}{2}\right|}+\sum_{m=N+1}^{\infty}\frac{1}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2}\\=&\,O\left(\frac{\log N}{N}\right).\end{aligned}\tag{16}$$

利用等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4},$$

得到

$$\begin{aligned}\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{m+n+\frac{1}{2}} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{m+n+\frac{1}{2}} - \sum_{n=-\infty}^{N}\frac{(-1)^n}{m+n+\frac{1}{2}}\\ &= (-1)^m\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{2}} - \sum_{n=-\infty}^{N}\frac{(-1)^n}{m+n+\frac{1}{2}}\\ &= (-1)^m\pi - \sum_{n=-\infty}^{N}\frac{(-1)^n}{m+n+\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}I_{12} &= \sum_{m=-\infty}^{-N-2}\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(m+n+\frac{1}{2}\right)}\\ &= \pi\sum_{m=-\infty}^{-N-2}\frac{(-1)^m}{m+\frac{1}{2}} - \sum_{m=-\infty}^{-N-2}\sum_{n=-\infty}^{N}\frac{(-1)^n}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(m+n+\frac{1}{2}\right)}.\end{aligned}$$

显然

$$\sum_{m=-\infty}^{-N-2}\frac{(-1)^m}{m+\frac{1}{2}} = O\left(\frac{1}{N}\right),$$

而且, 利用对 I_{11} 的处理方法, 可以得到

$$\sum_{m=-\infty}^{-N-2}\sum_{n=-\infty}^{N}\frac{(-1)^n}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(m+n+\frac{1}{2}\right)} = O\left(\frac{\log N}{N}\right).$$

将上面的这两个估计式与 (16), (15) 式联合就得到

$$I_1 = O\left(\frac{\log N}{N}\right) = o(1), \quad N\to\infty.$$

同理可以证明

$$I_2 = o(1), \quad N\to\infty.$$

由此二式立即可得 (14) 式, 从而证得 (13) 式. □

例 2 设 $0\le\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots$, $\lambda_n\to\infty$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n e^{-\lambda_n x}.$$

又设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\lambda_n^{-y}$ 当 $y>0$ 时收敛. 则

$$g(y)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\lambda_n^{-y}=\frac{1}{\Gamma(y)}\int_0^{\infty} x^{y-1}f(x)dx. \tag{17}$$

解 对任意固定的 $x>0$ 与 $y>0$, $\lambda_n^y e^{-\lambda_n x}$ 对充分大的 n 是递减的, 因而级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x}=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^y e^{-\lambda_n x}\cdot a_n\lambda_n^{-y}$$

收敛. 由此可知, 对任意固定的 $a, A, 0<a\le x\le A<\infty$, 该级数一致收敛. 因此

$$\begin{aligned}\int_a^A\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x}\right)x^{y-1}dx&=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\int_a^A x^{y-1}e^{-\lambda_n x}dx\\&=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\lambda_n^{-y}\Gamma(y)-\sum_{n=0}^{\infty} a_n\int_0^a x^{y-1}e^{-\lambda_n x}dx\\&\quad-\sum_{n=0}^{\infty} a_n\int_A^{\infty} x^{y-1}e^{-\lambda_n x}dx.\end{aligned} \tag{18}$$

现在考虑

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\int_0^a x^{y-1}e^{-\lambda_n x}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda_n^y}\int_0^{\lambda_n a} u^{y-1}e^{-u}du.$$

由于 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda_n^y}$ 收敛, $\int_0^{\lambda_n x} u^{y-1}e^{-u}du$ 关于 n 是单调的, 而且关于 a, n 是一致有界的, 即

$$\int_0^{\lambda_n a} u^{y-1}e^{-u}du<\Gamma(y),$$

我们有

$$\begin{aligned}\lim_{a\to 0}\sum_{n=0}^{\infty} a_n\int_0^a x^{y-1}e^{-\lambda_n x}dx&=\lim_{a\to 0}\sum_{n=0}^{\infty} a_n\lambda_n^{-y}\int_0^{\lambda_n a} u^{y-1}e^{-u}du\\&=0.\end{aligned}$$

同样方法可以证明

$$\lim_{A\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_n\int_A^{\infty} x^{y-1}e^{-\lambda_n x}dx=0.$$

将上面二式代入 (18) 式, 即可得到 (17) 式. □

例 3 说明下式中交换求和与积分次序的合理性:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2x}dx=\int_0^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2x}\right)dx.$$

解 对任意的 $A,a,0<a<A$, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2x}$$

关于 $a\leq x\leq A$ 是一致收敛的, 所以

$$\begin{aligned}\int_a^A\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2x}\right)dx&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_a^A\frac{\sin nx}{x}dx\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^{\infty}\frac{\sin nx}{x}dx-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^a\frac{\sin nx}{x}dx\\&\quad-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_A^{\infty}\frac{\sin nx}{x}dx\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx+I_1+I_2.\end{aligned}\tag{19}$$

我们需要证明

$$\lim_{a\to0}I_1=\lim_{A\to\infty}I_2=0.$$

事实上,

$$\begin{aligned}I_1&=-\sum_{n=1}^{M}\frac{1}{n^2}\int_0^a\frac{\sin nx}{x}dx-\sum_{n=M+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^a\frac{\sin nx}{x}dx\\&=O(a\log M)+O\left(\sum_{n=M+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^{na}\frac{\sin u}{u}du\right)\\&=O(a\log M)+O\left(\frac{1}{M}\right).\end{aligned}$$

取 $M=\frac{1}{a}$, 则

$$I_1=O\left(a\log\frac{1}{a}\right)+O(a).$$

$$I_2 = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_A^{\infty} \frac{\sin nx}{x} dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{nA}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du$$
$$= O(A^{-1}).$$

因此,

$$\lim_{a \to 0} I_1 = \lim_{A \to \infty} I_2 = 0,$$

亦即我们证明了

$$\int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^{\infty} \frac{\sin nx}{x} dx. \qquad \square$$

例 4 设积分

$$\int_0^1 |f(y)| dy, \quad \int_0^{\infty} y^{-2} |f(y)| dy$$

都收敛, 则

$$\int_0^{\infty} \sin \alpha x dx \int_0^{\infty} f(y) e^{-xy} dy = \int_0^{\infty} f(y) dy \int_0^{\infty} \sin \alpha x e^{-xy} dx$$
$$= \alpha \int_0^{\infty} \frac{f(y)}{\alpha^2 + y^2} dy. \tag{20}$$

解 只证明第一个等式即可.

对于任意固定的 $A > a > 0$, 由假设条件可知积分

$$\int_0^{\infty} f(y) e^{-xy} dy$$

关于 $x \in [a, A]$ 是一致收敛的, 因此

$$\int_a^A \sin \alpha x dx \int_0^{\infty} f(y) e^{-xy} dy$$
$$= \int_0^{\infty} f(y) dy \int_a^A \sin \alpha x e^{-xy} dx$$
$$= \int_0^{\infty} f(y) dy \int_0^{\infty} \sin \alpha x e^{-xy} dx - \int_0^{\infty} f(y) dy \int_0^a \sin \alpha x e^{-xy} dx$$
$$- \int_0^{\infty} f(y) dy \int_A^{\infty} \sin \alpha x e^{-xy} dx.$$

这样一来, (20) 的证明归结为对

$$\lim_{a\to 0}\int_0^{\infty} f(y)dy\int_0^{a}\sin\alpha x e^{-xy}dx=0 \tag{21}$$

与

$$\lim_{A\to\infty}\int_0^{\infty} f(y)dy\int_A^{\infty}\sin\alpha x e^{-xy}dx=0 \tag{22}$$

的证明.

由于 $|\sin\alpha x|\le\alpha x$, 所以

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^{\infty} f(y)dy\int_0^{a}\sin\alpha x e^{-xy}dx\right|\\
&\quad\le\int_0^{\infty}|f(y)|dy\int_0^{a}\alpha x e^{-xy}dx\\
&\quad\le\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}|f(y)|dy\int_0^{a}\alpha x dx+\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\infty}|f(y)|dy\int_0^{a}\alpha x e^{-xy}dx\\
&\quad\le\frac{1}{2}\alpha a^2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}|f(y)|dy+O\left(\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\infty}|f(y)|\left(\frac{1}{y^2}+\frac{ae^{-ay}}{y}\right)dy\right)\\
&\quad\le\frac{1}{2}\alpha a^2\left(\int_0^{1}|f(y)|dy+\int_1^{\frac{1}{\sqrt{a}}}\frac{|f(y)|}{ay^2}dy\right)+o(1)\\
&\quad=O(a^2)+O(a)+o(1)=o(1).
\end{aligned}$$

这就证明了 (21) 式.

另一方面, 有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^{\infty} f(y)dy\int_A^{\infty}\sin\alpha x e^{-xy}dx\right|\\
&\quad=\left|\int_0^{\infty} f(y)\frac{y\sin\alpha A+\alpha\cos\alpha A}{\alpha^2+y^2}e^{-Ay}dy\right|\\
&\quad=O\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{A}}}|f(y)|dy\right)+O\left(\int_{\frac{1}{\sqrt{A}}}^{1}|f(y)|e^{-Ay}dy\right)\\
&\qquad+O\left(\int_1^{\infty}|f(y)|e^{-Ay}dy\right)\\
&\quad=o(1)+O(e^{-\sqrt{A}})+O\left(\frac{1}{A^2}\int_1^{\infty}\frac{|f(y)|}{y^2}dy\right)\\
&\quad=o(1)+O(e^{-\sqrt{A}})+O\left(\frac{1}{A^2}\right)=o(1).
\end{aligned}$$

这就证明了 (22) 式. □

例 5 设积分

$$\int_0^1 |f(y)|dy, \quad \int_1^\infty \frac{|f(y)|}{y}dy$$

都收敛. 则

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \cos\alpha x dx \int_0^\infty f(y)e^{-xy}dy &= \int_0^\infty f(y)dy \int_0^\infty \cos\alpha x e^{-xy}dx \\ &= \int_0^\infty \frac{yf(y)}{\alpha^2+y^2}dy.\end{aligned}$$

证明留给读者.

例 6 试计算积分

$$J_1(\alpha,\beta) = \int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x^\beta}dx, \quad 0<\beta<2, \alpha>0;$$

$$J_2(\alpha,\beta) = \int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{x^\beta}dx, \quad 0<\beta<1, \alpha>0.$$

解 利用等式

$$\frac{1}{x^\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty y^{\beta-1}e^{-xy}dy, \quad x>0$$

得

$$J_1(\alpha,\beta) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty \sin\alpha x dx \int_0^\infty y^{\beta-1}e^{-xy}dy.$$

在例 4 中取

$$f(y) = y^{\beta-1},$$

则下面两个积分都收敛:

$$\int_0^1 y^{\beta-1}dy, \quad \int_1^\infty \frac{dy}{y^{3-\beta}}.$$

所以

$$\begin{aligned}J_1(\alpha,\beta) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty y^{\beta-1}dy \int_0^\infty \sin\alpha x e^{-xy}dy \\ &= \frac{\alpha}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty \frac{y^{\beta-1}}{\alpha^2+y^2}dy.\end{aligned}$$

令 $y^2=\alpha^2 t$, 则

$$\begin{aligned} J_1(\alpha,\beta) &= \frac{\alpha^{\beta-1}}{2\Gamma(\beta)}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{\beta-2}{2}}}{1+t}dt \\ &= \frac{\pi\alpha^{\beta-1}}{2\Gamma(\beta)\sin\frac{\beta\pi}{2}}. \end{aligned}$$

这里用到了下面的事实

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \quad 0<a<1.$$

同样的方法, 可以得到

$$J_2(\alpha,\beta) = \frac{\pi\alpha^{\beta-1}}{2\Gamma(\beta)\cos\frac{\beta\pi}{2}}.$$

取 $\alpha=1,\beta=1$, 则得到

$$J_1(1,1) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}. \qquad \square$$

例 7 $\int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

解

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt,$$

在上例中, 取 $\alpha=1,\beta=\frac{1}{2}$, 得到

$$J_2\left(1,\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cos\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \qquad \square$$

2.4 例题

例 1 证明: 当且仅当 $p\geq\frac{1}{2}$ 时, 数列

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p}, \quad n=1,2,3,\cdots$$

是单调减少的.

解 当 $|x|<1$ 时, 我们有

$$\log\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right).$$

取 $x=\frac{1}{2n+1}$, 则由上式得出

$$\begin{aligned}\log a_n&=(n+p)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{2(n+p)}{2n+1}\left(1+\frac{1}{3(2n+1)^2}+\frac{1}{5(2n+1)^4}+\cdots\right)\\&=\left(1+\frac{p-\frac{1}{2}}{n+\frac{1}{2}}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)(2n+1)^{2k}}.\end{aligned}$$

因此, 当 $p\geq\frac{1}{2}$ 时, $\log a_n$ 是单调减少的, 从而 a_n 也是单调减少的.

另一方面, 由

$$\log a_n=1-\frac{\frac{1}{2}-p}{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{12n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

$$\log a_{n+1}-\log a_n=\frac{\frac{1}{2}-p}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{3}{2}\right)}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

可见, 若 $p<\frac{1}{2}$, 则对于充分大的 n, 数列 $\{a_n\}$ 不能是单调减少的, 因此 $p\geq\frac{1}{2}$ 应是使之单调减小的必要条件. □

例 2 设 $\varphi(x)$ 在 $x>0$ 定义, 对于 $x\geq1$, 有

$$\varphi(x)=a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}+\cdots,$$

其中 a_n $(n\geq0)$ 是实数. 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)=\varphi(1)+\varphi(2)+\cdots+\varphi(n)+\cdots$$

收敛的充要条件是 $a_0=a_1=0$.

解 有

$$\begin{aligned}\varphi(1)+\varphi(2)+\cdots+\varphi(N)&=\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{1}{n^k}\\&=a_0N+a_1\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}+\sum_{k=2}^{\infty}a_k\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^k},\end{aligned}\quad(1)$$

由于 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ 收敛, 所以上式右端最后一个级数关于 N 一致收敛. 因此, 极限

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=2}^{\infty} a_k \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=2}^{\infty} a_k \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$$

必存在, 这样, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)$ 收敛的充要条件就是极限

$$\lim_{N\to\infty}\left(a_0 N + a_1\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\right)$$

的存在性, 即 $a_0 = a_1 = 0$. □

例 3 在上例的记号下, 试研究无穷级数

$$\varphi(1)+\varphi(1)\varphi(2)+\varphi(1)\varphi(2)\varphi(3)+\cdots+\varphi(1)\varphi(2)\cdots\varphi(n)+\cdots \tag{2}$$

的收敛性.

解 若对于某个自然数 $n, \varphi(n) = 0$, 则级数 (2) 显然收敛. 因此, 以下我们假定 $\varphi(n)\neq 0, n = 1, 2, 3, \cdots$.

显然, 当 $n\to\infty$ 时, $\varphi(n)\to a_0$, 故有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\varphi(1)\varphi(2)\cdots\varphi(n)|} = |a_0|. \tag{3}$$

事实上, 若 $a_0 = 0$, 上式当然成立. 若 $a_0\neq 0$, 则

$$|\varphi(n)| = (1+o(1))|a_0|, \quad n\to\infty.$$

令 $k = [\sqrt{n}]$ 为 $\sqrt{n}$ 的整数部分, 得到

$$\begin{aligned}(|\varphi(1)\varphi(2)\cdots\varphi(n)|)^{\frac{1}{n}} &= \left(\prod_{i=1}^{k}|\varphi(i)|\right)^{\frac{1}{n}}\left(\prod_{i=k+1}^{n}a_0(1+o(1))\right)^{\frac{1}{n}}\\ &= \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}O(1)\right)(a_0(1+o(1)))^{\frac{n-k}{n}}\\ &= \exp\left(O\left(\frac{k}{n}\right)\right)(a_0(1+o(1)))^{\frac{n-[\sqrt{n}]}{n}}\\ &= a_0(1+o(1)), \quad n\to\infty,\end{aligned}$$

这就是 (3) 式.

由 (3) 式得到: 若 $|a_0|<1$, 则 (2) 收敛; 若 $|a_0|>1$, 则 (2) 发散.

若 $a_0=1$, 为简单计, 不妨设 $\varphi(n)>0$ $(n\geq 1)$. 对充分大的 n, 有

$$\begin{aligned}\log\varphi(n)&=\log\left(1+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\cdots\right)=\log\left(1+\frac{a_1}{n}+r_n'\right)\\&=\frac{a_1}{n}+r_n,\end{aligned}$$

其中 $r_n'=O\left(\frac{1}{n^2}\right), r_n=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. 由此得到

$$\begin{aligned}\log\prod_{k=1}^{n}\varphi(k)&=\sum_{k=1}^{n}\log\varphi(k)=a_1\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n}r_k\\&=a_1\log n+C'+O\left(\frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$

其中 C' 是某一常数. 于是, 有常数 $C>0$, 使得

$$\begin{aligned}\varphi(1)\varphi(2)\cdots\varphi(n)&=e^{C'+O\left(\frac{1}{n}\right)}n^{a_1}\\&=Cn^{a_1}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).\end{aligned}$$

因此, 当 $a_1<-1$ 时, 级数 (2) 收敛; 当 $a_1\geq -1$ 时, 级数 (2) 发散.

若 $a_0=-1$, 令 $\psi(n)=-\varphi(n)=1-\frac{a_1}{n}-\frac{a_2}{n^2}-\cdots$, 则

$$\varphi(1)\varphi(2)\cdots\varphi(n)=(-1)^n\psi(1)\psi(2)\cdots\psi(n).$$

用同样的方法, 可以得到: 存在数 $\mu_n=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, 使

$$\log\left(\prod_{k=1}^{n}\psi(k)\right)=-a_1\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n}\mu_k=-a_1\log n+D+\delta_n,$$

其中 D 是常数, $\delta_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$. 上式给出

$$\begin{aligned}\psi(1)\psi(2)\cdots\psi(n)&=n^{-a_1}e^De^{\delta_n}=n^{-a_1}e^D\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\&=e^Dn^{-a_1}+O\left(\frac{1}{n^{a_1+1}}\right).\end{aligned}$$

因此, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\psi(1)\cdots\psi(n)$ 即级数 (2) 当且仅当 $a_1>0$ 时收敛.

综合以上讨论, 可知级数 (2) 在下述情形下收敛:

(1) 存在自然数 n_0, 使 $\varphi(n_0)=0$;

(2) $|a_0|<1$;

(3) $a_0=1, a_1<-1$;

(4) $a_0=-1, a_1>0$. □

习 题

1. 证明: 设 $x\neq 0,-1,-2,\cdots$. 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!a_n}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 有相同的收敛性.

2. 求极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x\int_x^1\frac{\cos t}{t^2}dt$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_0^x\sqrt{1+t^4}dt}{x^3}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_x^{\infty}\frac{1}{t}e^{-t}dt}{\log\frac{1}{x}}$; (4) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha}\log x\int_x^1\frac{f(t)\log t}{t^{\alpha+1}}dt$,

其中 $\alpha>0, f(t)$ 在 $[0,1]$ 上连续.

3. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_0p_n+S_1p_{n-1}+\cdots+S_np_0}{p_0+p_1+\cdots+p_n},$$

其中正数序列 $p_0,p_1,p_2,\cdots,p_n,\cdots$ 满足条件

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{p_0+p_1+\cdots+p_n}=0,$$

而且 $\lim_{n\to\infty}S_n=s$.

4. 设数列 $\{a_n\}$ $(n\geq 2)$ 满足条件

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=1-\frac{1}{n}-\frac{\alpha_n}{n\log n}.$$

则级数 $\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ 当 $\alpha_n\geq\alpha>1$ 时收敛, 而当 $\alpha_n\leq\alpha'<1$ 时发散.

5. 设级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x^2-1)(x^2-2^2)\cdots(x^2-n^2)$$

在 $x=x_0$ (x_0 非整数) 收敛. 则它在所有点 $x\in(-\infty,\infty)$ 收敛.

6. 设 $x \neq 0, -1, -2, \cdots$. 则无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{x} \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}$$

收敛 (这是 Γ-函数的一个定义).

7. 判定无穷乘积 $\prod a_n$ 的收敛性, 其通项为:

(1) $a_n = 1 + \dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^{\alpha}}}{x^n}$; (2) $a_n = 1 + \dfrac{1}{n^{\alpha}} \left(1 - \dfrac{x \log n}{n}\right)^{n}$;

(3) $a_n = 1 + \dfrac{2n+1}{(n^2-1)(n+1)^{\alpha}}$; (4) $a_n = 1 + \dfrac{n^{\alpha}}{\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)^{2n}}$.

8. 证明: 当 $\alpha < -1, \beta < -2$ 或者 $-1 < \alpha < \frac{\beta}{2} - 1$ 时, 积分 $\int_0^{\infty} x^{\alpha} |\cos x|^{x^{\beta}} dx$ 收敛.

9. 证明: 当且仅当 $x \geq \frac{1}{2}$ 时, 数列

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \left(1+\frac{x}{n}\right), \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

单调减小.

10. 设数列 a_n, b_n $(n \geq 0)$ 满足下列条件:

(1) $b_n \neq 0$;

(2) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 当 $|x| < r$ $(r > 0)$ 时收敛;

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} = q, |q| < r$.

令 $C_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0, n = 1, 2, \cdots$ 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C_n}{b_n} = f(q).$$

11. 证明下面的二重积分可以交换积分次序:

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \cos(2mx) y e^{-y^2(1+x^2)} dy.$$

12. 设 $c > b > 0, c - a - b > 0$. 证明

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{n!} \int_0^1 t^{b+n-1}(1-t)^{c-b-1} dt$$
$$= \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-a-b-1} dt.$$

13. 在第 2.4 节例 2 的记号下, 证明无穷乘积

$$\varphi(1)\varphi(2)\varphi(3)\cdots\varphi(n)\cdots$$

收敛的充要条件是 $a_0 = 1, a_1 = 0$.

第三章

离散和与连续和

本章研究离散和 $\sum a_n$ 与连续和 $\int_a^b f(x)dx$ 的关系, 此处 a_n 与 $f(x)$ 以某种方式相关联着. 我们主要使用分部求和法.

分部求和法是变换分析表达式以进行阶的估计所使用的基本方法之一, 应用范围非常广. 它的原理虽然简单, 在具体使用时, 却需要较高的技巧. 应用得当, 则可得出相当深刻的结果.

3.1 分部求和公式

定理 1 (分部求和公式) 设

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad n \geq 1,$$

则下面的等式成立:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = \sum_{n=1}^{N-1} S_n(b_n - b_{n+1}) + S_N b_N. \tag{1}$$

证明 由 S_n 的定义, 显然有

$$a_n = S_n - S_{n-1}, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

因此,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} a_n b_n &= \sum_{n=1}^{N} (S_n - S_{n-1}) b_n \\ &= \sum_{n=1}^{N} S_n b_n - \sum_{n=1}^{N} S_{n-1} b_n \\ &= \sum_{n=1}^{N} S_n b_n - \sum_{n=0}^{N-1} S_n b_{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} S_n (b_n - b_{n+1}) + S_N b_N. \end{aligned}$$ □

假设函数 $b(x)$ 是可微的, 并且满足条件 $b(n) = b_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 定义函数

$$S(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{1 \le n \le x} a_n, & x \ge 1, \\ 0, & x < 1, \end{cases}$$

则定理 1 可以写成下面的形式:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b(n) = S(N) b(N) - \int_1^N S(x) b'(x) dx, \tag{2}$$

此处已假定右端积分的存在性.

事实上, 由于

$$\begin{aligned}\int_1^N S(x) b'(x) dx &= \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} S(x) b'(x) dx \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} S_n \int_n^{n+1} b'(x) dx = \sum_{n=1}^{N-1} S_n (b(n+1) - b(n)), \end{aligned}$$

由此及 (1) 式即可得到 (2) 式.

利用 (2) 式, 有时可以更方便地借助已知的积分公式进行估计.

例 1 证明

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kt \log k = \begin{cases} O\left(\dfrac{1}{t} \log n\right), & \dfrac{1}{n} \le t \le \pi; \\ O(n^2 t \log n), & 0 \le t \le \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

解 在 (2) 式中, 取

$$b(x) = \log x, \quad a_n = \sin nt,$$

则由

$$|S(x)| = \left| \sum_{k \leq x} \sin kt \right| = O\left(\frac{1}{t}\right), \quad t \neq 0,$$

得到

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \sin kt \log k &= S(n) \log n - \int_1^n S(x) x^{-1} dx \\ &= O\left(\frac{1}{t}\right) \log n + O\left(\frac{1}{t}\right) \int_1^n \frac{dx}{x} \\ &= O\left(\frac{1}{t} \log n\right), \quad t \neq 0. \end{aligned}$$

另一方面, 当 $0 \leq t \leq \frac{1}{n}$ 时, 有

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kt \log k \leq t \sum_{k=1}^{n} k \log k = O(n^2 t \log n). \qquad \square$$

定理 2 *设 $\{b_n\}$ 是递减的正数序列, 又设*

$$m \leq \sum_{k=1}^{n} a_k \leq M, \quad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

则对于任意的自然数 n, 有

$$b_1 m \leq \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq b_1 M.$$

证明 令 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, 则

$$S_n - m \geq 0, \quad S_n - M \leq 0, \quad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

由定理 1, 注意到上面的不等式以及 b_n 的单调性, 可以推得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= S_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}) \\ &= (S_n - m) b_n + \sum_{k=1}^{n-1} (S_k - m)(b_k - b_{k+1}) + m b_1 \\ &\geq m b_1. \end{aligned}$$

同理可证

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq M b_1. \qquad \square$$

定理 3 (Abel) 设 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = s$. 则

$$\lim_{x \to 1-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = s.$$

证明 令 $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, 则 $S_n - s \to 0\ (n \to \infty)$.

由定理 1 知道,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k x^k &= S_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} S_k (x^k - x^{k+1}) \\ &= S_n x^n + (1-x) \sum_{k=0}^{n-1} (S_k x^k - s x^k) + (1-x) s \sum_{k=0}^{n-1} x^k.\end{aligned}$$

对于固定的 $|x| < 1$, 当 $n \to \infty$ 时, 显然有

$$S_n \to s, \quad \sum_{k=0}^{n-1} x^k \to \frac{1}{1-x}, \quad x^n \to 0.$$

因此, 当 $n \to \infty$ 时,

$$S_n x^n \to 0, \quad (1-x) \cdot s \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x^k \to s.$$

现取

$$m = [(1-x)^{-\frac{1}{2}}],$$

此处 $[x]$ 表示 x 的整数部分, 则当 $x \to 1-$ 时有 $S_k - s = o(1), k \geq m$, 所以

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} (S_k - s) x^k &= \sum_{k=0}^{m} (S_k - s) x^k + \sum_{k=m+1}^{n} (S_k - s) x^k \\ &= O(m) + o\left(\sum_{k=m+1}^{n} x^k \right) \\ &= O(m) + o\left(\frac{1}{1-x} \right).\end{aligned}$$

综合以上讨论, 使 $n \to \infty$, 得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k &= s + O(m(1-x)) + o(1)\\ &= s + O(\sqrt{1-x}) + o(1),\end{aligned}$$

$$\lim_{x \to 1-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = s. \qquad \square$$

注 定理 3 亦可由 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 在 $[0,1]$ 上的一致收敛性得到.

作为定理 3 的一个应用, 我们证明级数乘法定理.

定理 4 (级数乘法定理) 设级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ 与 $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ 分别收敛于 A 与 B. 记

$$C_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0.$$

当级数 $\sum_{k=0}^{\infty} C_k$ 收敛时, 必有

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k = AB.$$

证明 由定理 3 的证明可知, 级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad 与 \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

当 $|x| < 1$ 时是收敛的, 因此, 由幂级数乘法公式, 有

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k.$$

由此等式, 并利用定理 3, 即可得到定理结论. $\square$

注意, 如果在定理 4 中去掉 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n$ 收敛的条件, 那么定理 4 的结论就不一定成立. 事实上, 若取

$$a_n = b_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}},$$

则

$$|C_n| = \frac{1}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{n-2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1} \cdot \sqrt{1}} > \frac{n-1}{n} > \frac{1}{2},$$

因此, $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ 发散, 定理 4 的结论显然不成立.

但是, 此种情况却能证明下面的稍弱的结论:

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\widetilde{C}_k = AB(1+o(1)), \quad \widetilde{C}_k = \sum_{m=0}^{k} C_m.$$

事实上, 令

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k,$$

则

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

$$\widetilde{C}_n = \sum_{k=0}^{n} C_k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k} a_m b_{k-m} = \sum_{m=0}^{n} a_m B_{n-m},$$

$$\sum_{k=0}^{n}\widetilde{C}_k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k} a_m B_{k-m} = \sum_{k=0}^{n} B_k A_{n-k}. \tag{3}$$

取 $n_0 = [\log n]$, 则

$$\sum_{k=0}^{n} B_k A_{n-k} = \sum_{k=0}^{n_0} B_k A_{n-k} + \sum_{k=n_0+1}^{n-n_0} B_k A_{n-k} + \sum_{k=n-n_0+1}^{n} B_k A_{n-k}.$$

由于

$$A_n = A + o(1), \quad B_n = B + o(1), \quad n \to \infty,$$

可得到 $A_n = O(1), B_n = O(1)$, 以及

$$\sum_{k=0}^{n_0} B_k A_{n-k} = O(1)\sum_{k=0}^{n_0} A_{n-k} = O(n_0),$$

$$\sum_{k=n-n_0+1}^{n} B_k A_{n-k} = O(1)\sum_{k=n-n_0+1}^{n} B_k = O(n_0),$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=n_0+1}^{n-n_0} B_k A_{n-k} &= \sum_{k=n_0+1}^{n-n_0} (B+o(1))(A+o(1)) \\ &= \sum_{k=n_0+1}^{n-n_0} (AB+o(1)) = nAB + o(n) + O(n_0).\end{aligned}$$

将这些等式代入 (3) 式, 就得到

$$\sum_{k=0}^{n}\widetilde{C}_k = nAB + o(n) + O(n_0) = nAB + o(n),$$

即

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\widetilde{C}_k = AB(1+o(1)),$$

此即所求证者.

定理 1 与定理 2 在级数理论中有很多应用, 特别是在处理变号级数的收敛性以及部分和的估计时应用最为广泛. 比如, 在例 1 中, 由于应用定理 1, 所以对 $\sum_{k=1}^{n}\sin kt\log k$ 估计时, 利用了 $\sum_{k=1}^{n}\sin kt = O\left(\frac{1}{t}\right)(t\neq 0)$. 这就充分考虑了由于 $\sin kt$ 符号变化所造成的影响. 如果直接将被加项取绝对值, 即取估计式

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kt\log k = O\left(\sum_{k=1}^{n}\log k\right),$$

那么将只能得到一个对于 $\sum\sin kt\log k$ 的粗糙的估计. 同样地, 对于级数收敛性的判别, 若是正项级数, 比较判别法通常是很有效的, 但对于各项符号不一致的级数, 利用分部求和公式所得到的判别法则更为有力和实用. 作为一个例子, 我们给出下面的定理.

定理 5 对于级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nb_n$, 令 $A_n=\sum_{k=0}^{n}a_k$, 若 $\lim_{n\to\infty}A_nb_n$ 存在, 且

$$\sum_{k=0}^{\infty}A_k(b_k-b_{k+1})<\infty,$$

则级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

证明 这是定理 1 的显然推论. □

由定理 5, 可以推出 Abel 判别法、Dirichlet 判别法等众所周知的级数收敛性判别法. 此外, 还可得到下面的判别法:

(1) 若 $\sum_{k=0}^{\infty}(b_k-b_{k+1})$ 绝对收敛, $\sum_{k=0}^{\infty}a_k$ 收敛, 则 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

(2) 若 $\sum_{n=0}^{\infty}(b_n-b_{n+1})$ 绝对收敛, $\sum_{k=0}^{n}a_k=O(1)$ $(n\geq 1)$ 且 $b_n=o(1)$ $(n\to\infty)$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

(3) 若数列 $\{b_n\}$ 单调下降且趋于 0, 则级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nb_n$ 收敛.

我们也可以得到对于变号的函数项级数的一致收敛性判别法则, 此处不再一一列举.

定理 6 *设正数序列 $\{b_n\}$ 单调减少. 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$ 在任何区间上一致收敛的充要条件是 $nb_n=o(1), n\to\infty$.*

证明 必要性. 取 $x=\frac{\pi}{2m}$, $n=\left[\frac{1}{2}m+1\right]$, 由一致收敛性可知, 当 $m\to\infty$ 时, 关系式

$$\sum_{k=n}^{m}b_k\sin kx=o(1),$$

对于任何区间上的 x 一致地成立. 但是, 当 $n\leq k\leq m$, $x=\frac{\pi}{2m}$ 时, $\frac{\pi}{4}\leq kx\leq\frac{1}{2}\pi$, 因此, 由 $\{b_n\}$ 的单调性可知

$$\begin{aligned}o(1)&=\sum_{k=n}^{m}b_k\sin kx\geq b_m\sum_{k=n}^{m}\sin kx\\&>b_m\left(\frac{1}{2}m-1\right)\sin\frac{\pi}{4}\geq\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{4}mb_m>0.\end{aligned}$$

由此推得

$$mb_m=o(1),\quad m\to\infty.$$

必要性证毕.

充分性. 由于 $\sin kx$ 是周期为 2π 的奇函数, 所以只需证明级数 $\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx$ 在 $0\leq x\leq\pi$ 上的一致收敛性. 由 Cauchy 收敛准则, 就是要证明

$$S_{n,m}=\sum_{k=n}^{m}b_k\sin kx=o(1),\quad n\to\infty$$

关于 $0\leq x\leq\pi$ 及 $m\geq n$ 一致地成立. 根据已知条件, 有

$$r_n=\max_{m\geq n}(mb_m)=o(1).$$

当 $0 \le x \le \frac{\pi}{m}$ 时, 对于 $n \le k \le m$ 有

$$0 \le kx \le \pi, \quad \sin kx \ge 0.$$

因此, 由显然的不等式 $|\sin x| \le x$, 可以得到

$$\begin{aligned} |S_{n,m}| = \left|\sum_{k=n}^{m} b_k \sin kx\right| &\le \sum_{k=n}^{m} b_k \cdot kx = x \sum_{k=n}^{m} kb_k \\ &\le x \cdot m \cdot r_n \le \pi r_n = o(1), \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

当 $x \ge \frac{\pi}{n}$ 时, 对于 $n \le k \le m$, 有 $kx \ge \pi$. 这时, 诸 $\sin kx$ 的符号变化很少有规律性, 若采用上面所使用的方法就太粗糙了, 因此, 使用定理 2, 利用不等式

$$|\sin nx + \cdots + \sin lx| \le \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}$$

以及不等式

$$\frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \le \frac{\pi}{x}, \quad 0 < x \le \pi,$$

由定理 2 得到

$$|S_{n,m}| \le \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} b_n \le \frac{\pi b_n}{x} \le nb_n = o(1), \quad n \to \infty.$$

在上面两种情形中, 使用了不同方法, 其中的差别, 在于需要考虑 $\sin kx$ 的变化所造成的影响. 然而, 在第一种情况, 为了使 $\sin kx$ 保持一定的符号, $x \le \frac{\pi}{m}$ 的要求是太苛刻了, 其实只需要 $x \le \frac{\pi}{k}$. 因此, 在考虑 $S_{n,m}$ 当 $\frac{\pi}{m} \le x \le \frac{\pi}{n}$ 的性质时, 我们将它分成两部分来考虑.

取 $l = \left[\frac{\pi}{x}\right]$ 以及

$$\begin{aligned} S_{n,m} &= \sum_{k=n}^{m} b_k \sin kx = \sum_{k=n}^{l} b_k \sin kx + \sum_{k=l+1}^{m} b_k \sin kx \\ &= S_{n,l} + S_{l+1,m}. \end{aligned}$$

对上式右端的两个和分别使用前面的方法, 可得到

$$|S_{n,l}| \le lr_n x \le \pi r_n = o(1), \quad n \to \infty,$$

$$|S_{l+1,m}| \le b_{l+1} \frac{\pi}{x} \le (l+1) b_{l+1} = o(1), \quad n \to \infty.$$

由此立即推出

$$S_{n,m} = o(1), \quad n \to \infty. \qquad \square$$

3.2 Euler-Maclaurin 求和公式

在估计和式 $\sum a_n$ 时, 经常遇到 $a_n = f(n)$ 的情形, 此处 $f(n)$ 是一个定义在实轴上的函数, 具有一定的光滑性, 或者是单调函数. 此时, Euler-Maclaurin 求和公式常是一个有力的工具.

定理 1 设当 $x \geq a_0$ 时, $f(x)$ 是非负的增函数. 则对于任意的实数 a, b, $b \geq a \geq a_0$, 有

$$\left| \sum_{a \leq n \leq b} f(n) - \int_a^b f(x)dx \right| \leq f(b). \tag{1}$$

证明 记

$$A = \begin{cases} a, & a \text{ 为整数}, \\ [a]+1, & a \text{ 为非整数}, \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} b, & b \text{ 为整数}, \\ [b], & b \text{ 为非整数}. \end{cases}$$

由 $f(x)$ 的递增性得到

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^A f(x)dx + \int_B^b f(x)dx + \int_A^B f(x)dx \\ &\geq \int_a^A f(x)dx + \int_B^b f(x)dx + f(A) + f(A+1) + \cdots \\ &\quad + f(B-1) \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^A f(x)dx + \int_B^b f(x)dx + f(A+1) + f(A+2) + \cdots \\ + f(B). \end{aligned}$$

联合以上二式, 得到

$$\begin{aligned} -f(b) &\leq \int_a^A f(x)dx + \int_B^b f(x)dx - f(B) \\ &\leq \int_a^b f(x)dx - \sum_{a\leq n\leq b} f(n) \\ &\leq \int_a^A f(x)dx + \int_B^b f(x)dx - f(A) \leq f(b). \end{aligned}$$

由此立即可得到 (1) 式. □

注意, 由上面的不等式可以看到, 我们实际上证明了一个比定理 1 更强一点的结论.

定理 2 设当 $x \geq a_0$ 时, $f(x)$ 是非负的减函数. 则对于任意的 $a \geq a_0$, 极限

$$\alpha = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{a\leq n\leq N} f(n) - \int_a^N f(x)dx \right)$$

存在, 而且

$$-\int_a^A f(x)dx \leq \alpha \leq f(A) - \int_a^A f(x)dx,$$

其中

$$A = \begin{cases} a, & \text{当 } a \text{ 是整数,} \\ [a]+1, & \text{当 } a \text{ 非整数.} \end{cases}$$

此外, 若更有条件

$$f(x) = o(1), \quad x \to \infty,$$

则对于任意的 $x \geq a_0 + 1$, 有不等式

$$\left| \sum_{a_0\leq n\leq x} f(n) - \int_{a_0}^x f(t)dt - \alpha \right| \leq f(x-1).$$

证明 令

$$g(x)=\sum_{a\le k\le x}f(k)-\int_a^x f(t)dt,$$

则由 $f(x)$ 的递减性可知

$$\begin{aligned}g(n+1)-g(n)&=\sum_{a\le k\le n+1}f(k)-\int_a^{n+1}f(t)dt-\sum_{a\le k\le n}f(k)+\int_a^n f(t)dt\\&=f(n+1)-\int_n^{n+1}f(t)dt\le 0,\end{aligned}$$

即 $\{g(n)\}$ $(n\ge 1)$ 是递减数列. 由于 $f(x)\ge 0$, 又可得到

$$\begin{aligned}g(n)&=\sum_{k=A}^{n}f(k)-\int_a^n f(x)dx\\&=\sum_{k=A}^{n}f(k)-\int_A^n f(x)dx-\int_a^A f(x)dx\\&\ge\sum_{k=A}^{n}f(k)-\sum_{k=A}^{n-1}f(k)-\int_a^A f(x)dx\\&=f(n)-\int_a^A f(x)dx\\&\ge-\int_a^A f(x)dx.\end{aligned}$$

因此, $\{g(n)\}$ 是单调下降的有界数列, 所以必有极限 α 存在:

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{a\le n\le N}f(N)-\int_a^N f(x)dx\right)=\alpha,$$

而且 α 满足定理中的条件.

现在, 假定更有 $f(x)=o(1)$ $(x\to\infty)$. 那么, 对于任意的 x,

$x \geq a_0 + 1$, 有

$$\begin{aligned} g(x) - \alpha &= \sum_{a \leq n \leq x} f(n) - \int_a^x f(t)dt - \lim_{N \to \infty} \left(\sum_{a \leq n \leq N} f(n) - \int_a^N f(t)dt \right) \\ &= -\int_{[x]}^x f(t)dt - \lim_{N \to \infty} \left(\sum_{n=[x]+1}^N f(n) - \int_{[x]}^N f(t)dt \right) \\ &= -\int_{[x]}^x f(t)dt + \lim_{N \to \infty} \sum_{n=[x]+1}^N \int_{n-1}^n (f(t) - f(n))dt. \end{aligned}$$

由关于 $f(x)$ 的假设条件, 得到

$$\begin{aligned} g(x) - \alpha &\leq \lim_{N \to \infty} \sum_{n=[x]+1}^N \int_{n-1}^n (f(n-1) - f(n))dt \\ &= f([x]) \leq f(x-1), \end{aligned}$$

以及

$$g(x) - \alpha \geq -\int_{[x]}^x f(t)dt \geq -(x - [x])f([x]) \geq -f(x-1). \qquad \square$$

定理 3 设 $f(x)$ 在 (a, b) 上有连续的导函数. 则下面的等式成立:

$$\begin{aligned} \sum_{a < n \leq b} f(n) = &\int_a^b f(x)dx + \int_a^b \left(x - [x] - \frac{1}{2} \right) f'(x)dx \\ &+ \left(a - [a] - \frac{1}{2} \right) f(a) - \left(b - [b] - \frac{1}{2} \right) f(b). \end{aligned}$$

证明 在第 3.1 节 (2) 式中令 $a_n = 1, b_n = f(n)$, 得到

$$\sum_{a < n \leq b} f(n) = [b]f(b) - [a]f(a) - \int_a^b [x]f'(x)dx.$$

而

$$\begin{aligned}-\int_a^b [x]f'(x)dx &= \int_a^b \left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f'(x)dx + \int_a^b \left(\frac{1}{2}-x\right)f'(x)dx \\ &= \int_a^b \left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f'(x)dx \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}-x\right)f(x)\Big|_a^b + \int_a^b f(x)dx \\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f'(x)dx \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}-b\right)f(b) - \left(\frac{1}{2}-a\right)f(a).\end{aligned}$$

由以上二式定理得证. □

上面的公式称为 Euler 求和公式, 现在我们用它来证明 Stirling 公式.

在定理 3 中取 $f(x)=\log x, a=1, b=n$, 得到

$$\sum_{1<m\le n}\log m = \int_1^n \log x dx + \int_1^n \frac{\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)}{x}dx + \frac{1}{2}\log n.$$

令

$$b_1(x) = x-[x]-\frac{1}{2}.$$

显然 $b_1(x)$ 以 1 为周期. 现定义一个周期为 1 的函数 $b_2(x)$,

$$b_2(x)-b_2(0) = \int_0^x b_1(t)dt,$$

则对任意 x 有 $b_2(x)=O(1)$. 故

$$\int_1^\infty \frac{b_1(x)}{x}dx$$

收敛. 因此, 得到

$$\log n! = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n + C + \gamma_n.$$

这里

$$C = \int_1^{\infty} \frac{b_1(x)}{x} dx,$$
$$\gamma_n = -\int_n^{\infty} \frac{b_1(x)}{x} dx. \tag{2}$$

显然,

$$\gamma_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

所以

$$\log n! = \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n - n + C + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

为了得到更精密的公式, 先来求出 $b_2(x)$. 由于 $b_2(x)$ 为周期函数, 所以不妨假定 $0 < x < 1$,

$$b_2(x) - b_2(0) = \int_0^x \left(t - \frac{1}{2}\right) dt = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2},$$

即

$$b_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + b_2(0).$$

令

$$\int_0^1 b_2(t) dt = 0,$$

得到

$$b_2(0) = \frac{1}{12}.$$

所以当 $0 < x < 1$ 时,

$$b_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}.$$

由周期性可以得到对一般的 x 有

$$b_2(x) = \frac{(x - [x])^2}{2} - \frac{x - [x]}{2} + \frac{1}{12}.$$

利用 $b_2(x)$ 可以得到更精密的公式,

$$\begin{aligned}\gamma_n &= -\int_n^{\infty} \frac{b_1(x)}{x}dx = -\int_n^{\infty} \frac{db_2(x)}{x} \\ &= \frac{b_2(0)}{n} - \int_n^{\infty} \frac{b_2(x)}{x^2}dx = \frac{1}{12n} - \int_n^{\infty} \frac{b_2(x)}{x^2}dx \\ &= \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

如果用下面的方法来定义一串周期函数 $b_l(x)$ $(l = 1, 2, 3, \cdots)$:

(1) $b_l(x)$ 是以 1 为周期的函数.

(2) $b_{l+1}(x) - b_{l+1}(0) = \int_0^x b_l(t)dt.$

由条件 (1) 及 (2) 就完全确定了函数 $b_l(x)$ $(l = 1, 2, \cdots)$. 为了求出函数 $b_l(x)$ $(l = 3, 4, \cdots)$ 的表达式, 将 $b_1(x)$ 展成下面的 Fourier 级数

$$b_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n}, \tag{3}$$

当 $x \neq [x]$ 时 $b_1(x)$ 是连续的.

由于级数 (3) 有界收敛, 所以可以逐项求积分, 由此得到

$$b_2(x) - b_2(0) = \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi nt}{n^2}\Big|_0^x,$$

即

$$b_2(x) - \frac{1}{12} = \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi x}{n^2} - \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

所以

$$b_2(x) = \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi x}{n^2}, \tag{4}$$

这是一个在任一区间内绝对且一致收敛的级数. 再积分得到

$$b_3(x) - b_3(0) = \frac{1}{4\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n^3}.$$

由条件

$$\int_0^1 b_3(x)dx = 0,$$

定出常数

$$b_3(0) = 0,$$

即

$$b_3(x) = \frac{1}{4\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n^3}, \tag{5}$$

再积分得到

$$b_4(x) = -\frac{1}{8\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\pi x}{n^4}. \tag{6}$$

由数学归纳法可以证明下面的公式

$$b_{2k}(x) = (-1)^{k+1}\frac{2}{(2\pi)^{2k}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\pi x}{n^{2k}}, \tag{7}$$

$$b_{2k+1}(x) = (-1)^{k+1}\frac{2}{(2\pi)^{2k+1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n^{2k+1}}. \tag{8}$$

由 (7) 式及 (8) 式得到

$$b_{2k}(0) = (-1)^{k+1}\frac{2}{(2\pi)^{2k}}\zeta(2k), \tag{9}$$

$$b_{2k+1}(0) = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, \tag{10}$$

这里

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \quad (s = \sigma + it, \sigma > 1)$$

称为 Riemann ζ-函数.

利用上面的结果, 可以将 Stirling 公式进一步精密化. 由 (2) 式知

$$-\gamma_n = \int_n^{\infty}\frac{b_1(x)}{x}dx.$$

由分部积分得到

$$\begin{aligned}-\gamma_n &= \int_n^\infty \frac{b_1(x)}{x}dx = \frac{b_2(x)}{x}\bigg|_n^\infty + \int_n^\infty \frac{b_2(x)}{x^2}dx \\ &= -\frac{b_2(0)}{n} + \int_n^\infty \frac{b_2(x)}{x^2}dx \\ &= -\frac{b_2(0)}{n} - \frac{b_3(0)}{n^2} + 2\int_n^\infty \frac{b_3(x)}{x^3}dx \\ &= -\frac{b_2(0)}{n} - \frac{b_3(0)}{n^2} - \frac{2b_4(0)}{n^3} - \cdots \\ &\quad -\frac{(l-2)!b_l(0)}{n^{l-1}} + (l-1)!\int_n^\infty \frac{b_l(x)}{x^l}dx. \end{aligned} \tag{11}$$

由第二中值公式及 (7), (8) 两式知

$$\left|\int_n^\infty \frac{b_l(x)}{x^l}dx\right| \le \frac{2}{(2\pi)^l}\frac{\zeta(l)}{n^l}, \tag{12}$$

这样就得到了下面的更精密的 Stirling 公式

$$\begin{aligned}\log n! = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n + C + \frac{b_2(0)}{n} + \frac{b_3(0)}{n^2} + \frac{2b_4(0)}{n^3} \\ + \cdots + \frac{(l-2)!b_l(0)}{n^{l-1}} + \varepsilon_n, \end{aligned} \tag{13}$$

这里

$$|\varepsilon_n| \le \frac{2(l-1)!}{(2\pi)^l}\frac{\zeta(l)}{n^l}. \tag{14}$$

利用分部积分法, 易证下面的定理.

定理 4 设 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 内有连续的二阶导函数. 则

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha<n\le\beta} f(n) = \int_\alpha^\beta f(x)dx + b_1(\beta)f(\beta) - b_1(\alpha)f(\alpha) \\ -b_2(\beta)f'(\beta) + b_2(\alpha)f'(\alpha) + \int_\alpha^\beta b_2(x)f''(x)dx. \end{aligned}$$

从上面的讨论中, 可以看到, 假若对 $f(x)$ 的光滑性要求高一些, 那么, 对和式 $\sum f(n)$ 的估计就愈精确. 下面, 我们来给出一个常用的一般性公式.

定理 5 (Euler-Maclaurin 公式) 设 $f(x)$ 在 $[1,\infty)$ 上具有 m $(m \geq 1)$ 阶连续导函数. 则对于任意的 $n \geq 1$, 有

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)dx + \sum_{k=1}^{m}(f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(1))b_k(0) + R_m,$$

此处 R_m 为由下式定义的余项:

$$R_m = (-1)^{m+1}\int_1^n b_m(x)f^{(m)}(x)dx.$$

由于 $b_{2k+1}(0) = 0$ $(k > 0)$ 所以上面的公式亦可改写成

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)dx + \sum_{k=1}^{m} b_{2k}(0)f^{(2k-1)}(n) + C - \frac{f(n)}{2} + R_{2m},$$

其中

$$C = \frac{f(1)}{2} - \sum_{k=1}^{m} b_{2k}(0)f^{(2k-1)}(1).$$

证明 用归纳法来证明定理.

当 $m = 1$ 时, 由于 $b_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}, b_1(0) = -\frac{1}{2}$, 故定理结论即

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)dx + \frac{f(1) - f(n)}{2} + \int_1^n b_1(x)f'(x)dx.$$

此即定理 3.

现设定理当 $m = l$ 时成立. 对 R_l 使用分部积分公式, 得到

$$\begin{aligned}
&(-1)^{l+1}\int_1^n b_l(x)f^{(l)}(x)dx \\
&= (-1)^{l+1}(b_{l+1}(1)f^{(l)}(n) - b_{l+1}(0)f^{(l)}(1)) + (-1)^{l+2}\int_1^n b_{l+1}(x)f^{(l+1)}(x)dx \\
&= (-1)^{l+1}b_{l+1}(0)(f^{(l)}(n) - f^{(l)}(1)) + (-1)^{l+2}\int_1^n b_{l+1}(x)f^{(l+1)}(x)dx.
\end{aligned}$$

这里用到了

$$b_l(0) = b_l(1), \quad b'_{l+1}(x) = b_l(x), \quad 0 < x < 1.$$

因为

$$b_{2j+1}(0) = 0, \quad j \geq 1,$$

所以当 $l \geq 1$ 时, 有

$$(-1)^{l+1} b_{l+1}(0) = b_{l+1}(0),$$

因此得到

$$R_l = b_{l+1}(0)(f^{(l)}(n) - f^{(l)}(1)) + (-1)^{l+2} \int_1^n b_{l+1}(x) f^{(l+1)}(x) dx.$$

由此看出定理将 l 换成 $l+1$ 亦成立, 由归纳法定理得证. □

因为

$$b_{2m}(x) = (-1)^{m+1} \frac{2}{(2\pi)^{2m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi nx}{n^{2m}},$$

所以

$$|b_{2m}(x)| \leq \frac{2}{(2\pi)^{2m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}} \leq \frac{4}{(2\pi)^{2m}}. \tag{15}$$

由此看出, 只要 $f^{(m)}(x)$ 之增长不要过速, 则余项通常是很小的.

例 1 估计和式

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} (\log k)^{\beta}, \quad \alpha > 0, \beta > 0,$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

解 由定理 1, 得到

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} (\log k)^{\beta} = \int_1^n x^{\alpha} (\log x)^{\beta} dx + O(n^{\alpha} (\log n)^{\beta}) \\ &= \frac{1}{\alpha+1} n^{\alpha+1} (\log n)^{\beta} - \frac{\beta}{\alpha+1} \int_1^n x^{\alpha} (\log x)^{\beta-1} dx + O(n^{\alpha} (\log n)^{\beta}) \\ &= \frac{1}{\alpha+1} n^{\alpha+1} (\log n)^{\beta} + O(n^{\alpha+1} (\log n)^{\beta-1}). \end{aligned}$$

由定理 2, 存在常数 λ, 使得

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}} = \int_1^n \frac{dx}{x^{\alpha}} + \lambda + O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right) \\ &= \begin{cases} \log n + \gamma + O\left(\dfrac{1}{n}\right), & \text{当 } \alpha = 1, \\ \dfrac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha} + \mu + O\left(\dfrac{1}{n^{\alpha}}\right), & \text{当 } \alpha < 1, \end{cases} \end{aligned}$$

其中 γ, μ 都是常数. □

例 2 估计和式

$$S(n,x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\log k}{k^x}.$$

解 令 $f(y)=\frac{\log y}{y^x}$, 可以证明, 当 $2m+x>1$ 时, 有

$$\int_1^{\infty}|f^{(2m)}(y)|dy<\infty.$$

由定理 5, 得到下面的估计:

$$S(n,x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\log k}{k^x}=\int_1^n y^{-x}\log y dy+C(x)+\frac{1}{2}\frac{\log n}{n^x}+R(n,x),$$

此处

$$C(x)=-\sum_{k=1}^{m}b_{2k}(0)f^{(2k-1)}(1)-\int_1^{\infty}f^{(2m)}(t)b_{2m}(t-[t])dt,$$

$$R(n,x)=\sum_{k=1}^{m}b_{2k}(0)f^{(2k-1)}(n)+O\left(\int_n^{\infty}|f^{(2m)}(t)|dt\right).$$

若 $x=0$, 取 $m=1$, 则得到 Stirling 公式:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\log k&=\int_1^n\log x dx+C(0)+\frac{1}{2}\log n+b_2(0)+O\left(\frac{1}{n}\right)\\&=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+C(0)+b_2(0)+O\left(\frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$

其中常数项是 $C(0)+b_2(0)$ 的形式. □

例 3 设 $m>0$. 则当 $n\to\infty$ 时有

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}^m\sim\left(\frac{2}{n\pi}\right)^{\frac{m}{2}}2^{nm}\left(\frac{\pi n}{2m}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证明 在第一章内, 我们已经对二项式系数 $\binom{n}{k}$ 的阶的变化做了

讨论, 它的最大值在中间 $\left(k=\left[\frac{n}{2}\right]\text{处}\right)$. 令 $l=\frac{n}{2}-k$, 则

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}^m &= \sum_{|l|\le\frac{n}{2}}\binom{n}{l}^m \\ &= \sum_{|l|\le n^{3/5}}\binom{n}{l}^m+\sum_{|l|>n^{3/5}}\binom{n}{l}^m \\ &= \Sigma_1+\Sigma_2. \end{aligned}\tag{16}$$

由第 1.4 节 (14) 式得到,

$$\Sigma_2=o(\Sigma_1),\tag{17}$$

$$\Sigma_1\sim\left(\frac{2}{n\pi}\right)^{\frac{m}{2}}2^{nm}\sum_{|l|\le n^{3/5}}\exp\left(-\frac{2ml^2}{n}\right),\tag{18}$$

$$\sim\left(\frac{2}{n\pi}\right)^{\frac{m}{2}}2^{nm}\sum_{|l|\le n}\exp\left(-\frac{2ml^2}{n}\right).\tag{19}$$

令

$$f(x)=\exp\left(-\frac{2mx^2}{n}\right),$$

由定理 5 得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=-n}^{n}f(k) &= \int_{-n}^{n}f(x)dx+\frac{f(n)+f(-n)}{2} \\ &\quad+\sum_{k=1}^{m}b_{2k}(0)(f^{(2k-1)}(n)-f^{(2k-1)}(-n))+R_m,\end{aligned}$$

其中

$$R_m=-\int_{-n}^{n}f^{(2m)}(x)b_{2m}(x)dx.$$

不难看出

$$\frac{d^k}{dx^k}f(x)=\left(\sqrt{\frac{2m}{n}}\right)^n e^{-y^2}p(y),$$

这里 $y=\sqrt{\frac{2m}{n}}x$, $p(y)$ 为 y 的 k 次多项式. 所以

$$R_m=O\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f^{(2m)}(x)|dx\right)=O\left(\left(\sqrt{\frac{2m}{n}}\right)^{2m-1}\right)=O(n^{\frac{1}{2}-m}).$$

同样可得到

$$\frac{f(n)+f(-n)}{2}+\sum_{k=1}^{m} b_{2k}(0)(f^{(2k-1)}(n)-f^{(2k-1)}(-n))=O(n^{\frac{1}{2}-m}).$$

而

$$\int_{-n}^{n} f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx+O(n^{-1}),$$

所以

$$\sum_{k=-n}^{n} f(k)\sim\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\sqrt{\frac{\pi n}{2m}}.$$

这样就证明了

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}^{m}\sim\left(\frac{2}{n\pi}\right)^{\frac{m}{2}}2^{nm}\left(\frac{\pi n}{2m}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad \square$$

下面的例子在计算机算法研究中是感兴趣的.

例 4 求 $P(n),Q(n)$ 的渐近估计, 其中

$$P(n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^{n-k}k!}{n!},$$

$$Q(n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!n^{k}}.$$

解 由第 1.6 节的例 2 及例 3 知

$$P(n)\sim\sum_{0\le l\le n}\exp\left(-\frac{l^2}{2n}\right),$$

$$Q(n)\sim\sum_{0\le l\le n}\exp\left(-\frac{l^2}{2n}\right).$$

但

$$\sum_{0\le l\le n}\exp\left(-\frac{l^2}{2n}\right)\sim\int_{0}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2n}}dx=\sqrt{\frac{\pi n}{2}},$$

故

$$P(n)\sim\sqrt{\frac{\pi n}{2}},$$

$$Q(n)\sim\sqrt{\frac{\pi n}{2}}. \qquad \square$$

3.3 变符号项的和式的估计

在本节中, 我们要考虑对于形如

$$\sum_{n=0}^{N}(-1)^n f(n)$$

的和式的估计, 此处 $f(x)$ 是定义在 $[0,\infty)$ 上的正值函数.

对于这样的和式, 当然可以利用第 3.2 节中的定理进行估计. 例如, 可以把上面的和式写成

$$\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k f(k)=\sum_{k=0}^{n} f(2k)-\sum_{k=1}^{n+1} f(2k-1)$$

或

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k f(k)=f(2n)+\sum_{k=0}^{n-1} f(2k)-\sum_{k=1}^{n} f(2k-1),$$

然后应用上节定理于每一个和, 再将它们相减. 但是, 这种做法很不精细, 因为它没有充分显示出和式中正项与负项的 "抵消" 作用. 粗略地说, 对每一个和式 $\sum f(2k)$ 或 $\sum f(2k-1)$ 进行估计时所产生的 O 项, 本来是可以互相 "抵消" 一部分的, 现在却是将绝对值相加了, 所以对误差项的估计是粗糙的. 例如, 对于和式

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\sqrt{k},$$

按上述方法, 利用

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{2k}=\frac{2\sqrt{2}}{3}n^{\frac{3}{2}}+O(\sqrt{n}),$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{2k-1}=\frac{1}{3}(2n-1)^{\frac{3}{2}}+O(\sqrt{n}),$$

只能得到估计式

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\sqrt{k}=O(\sqrt{n}).$$

这是一个很粗糙的估计.

当然, 如果利用 Euler-Maclaurin 求和公式, 那么可以得到较为精细的估计. 但是, 对于那些并不需要很精细估计的问题而言, 使用这个公式所需要的大量繁复运算, 是太费时费力了.

下面, 我们给出几个可行的定理.

定理 1 设 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上是正值函数, $f''(x)$ 在任意有限区间上可积. 则

$$\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k f(k)=\frac{1}{2}f(0)-\frac{1}{2}f(2n+2)+O\left(\int_0^{2n+2}|f''(x)|dx\right).$$

证明 由简单的计算, 可以知道

$$f(2k+1)-f(2k)=f'(2k)+\int_{2k}^{2k+1}(2k+1-x)f''(x)dx,$$

以及

$$\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}f'(x)dx=f'(2k)+\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}(2k+2-x)f''(x)dx. \tag{1}$$

因此,

$$\begin{aligned}
&f(2k+1)-f(2k)\\
&\quad=\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}f'(x)dx-\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}(2k+2-x)f''(x)dx\\
&\qquad+\int_{2k}^{2k+1}(2k+1-x)f''(x)dx\\
&\quad=\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}f'(x)dx-\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}f''(x)dx\\
&\qquad+\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}|x-2k-1|f''(x)dx\\
&\quad=\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}f'(x)dx-\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}(1-|x-2k-1|)f''(x)dx.
\end{aligned}$$

由此得到

$$-\sum_{k=0}^{n}(f(2k+1)-f(2k))+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\int_{2k}^{2k+2}f'(x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\int_{2k}^{2k+2}(1-|x-2k-1|)f''(x)dx,$$

即

$$\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k f(k)+\frac{1}{2}\int_0^{2n+2}f'(x)dx=\sum_{k=0}^{n}\int_{2k}^{2k+2}O(|f''(x)|)dx$$
$$=O\left(\int_0^{2n+2}|f''(x)|dx\right). \qquad \square$$

例 1 估计和式

$$\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\sqrt{k+1}.$$

解 令 $f(x)=\sqrt{x+1}$, 则

$$f''(x)=-\frac{1}{4}(x+1)^{-\frac{3}{2}},$$

由定理 1, 得到

$$\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\sqrt{k+1}=-\frac{1}{2}\sqrt{2n+2}+O(1).$$

显然, 这里的估计比前面得到的 $O(\sqrt{n})$ 要好得多. $\square$

定理 2 设 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上是正值函数, $f'''(x)$ 在任意有限区间上可积. 则

$$\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^{k+1}f(k)=-\frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{4}f'(0)+\frac{1}{2}f(2n+2)$$
$$-\frac{1}{4}f'(2n+2)+O\left(\int_0^{2n+2}|f'''(x)|dx\right).$$

证明 利用公式

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)+\int_a^{a+h}\frac{1}{2}(a+h-x)^2f'''(x)dx,$$

得到

$$f(2k+1)-f(2k)=f'(2k)+\frac{1}{2}f''(2k)+\int_{2k}^{2k+1}\frac{1}{2}(2k+1-x)^2f'''(x)dx. \tag{2}$$

由 (1) 式, 又有

$$f'(2k)=\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}f'(x)dx-\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}(2k+2-x)f''(x)dx,$$

以及

$$f''(2k)=\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}f''(x)dx-\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}(2k+2-x)f'''(x)dx.$$

将此二式代入 (2) 式, 得到

$$\begin{aligned}f(2k+1)-f(2k)&=\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}f'(x)dx-\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}(2k+2-x)f''(x)dx\\&\quad+\frac{1}{4}\int_{2k}^{2k+2}f''(x)-\frac{1}{4}\int_{2k}^{2k+2}(2k+2-x)f'''(x)dx\\&\quad+\int_{2k}^{2k+1}\frac{1}{2}(2k+1-x)^2f'''(x)dx\\&=\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}f'(x)dx-\frac{1}{4}\int_{2k}^{2k+2}f''(x)dx\\&\quad-\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}(2k+1-x)f''(x)dx\\&\quad-\frac{1}{4}\int_{2k}^{2k+2}(2k+2-x)f'''(x)dx\\&\quad+\int_{2k}^{2k+1}\frac{1}{2}(2k+1-x)^2f'''(x)dx.\end{aligned} \tag{3}$$

由分部积分可以得到

$$\begin{aligned}&\int_{2k}^{2k+2}(2k+1-x)f''(x)dx\\&\quad=-\frac{1}{2}\left(f''(2k+2)-f''(2k)-\int_{2k}^{2k+2}(2k+1-x)^2f'''(x)dx\right)\\&\quad=-\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}f'''(x)dx+\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}(2k+1-x)^2f'''(x)dx.\end{aligned}$$

代入 (3) 式, 得到

$$f(2k+1)-f(2k)=\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}f'(x)dx-\frac{1}{4}\int_{2k}^{2k+2}f''(x)dx+O\left(\int_{2k}^{2k+2}|f'''(x)|dx\right).$$

因此,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(f(2k+1)-f(2k))&=\frac{1}{2}\int_{0}^{2(n+1)}f'(x)dx-\frac{1}{4}\int_{0}^{2(n+1)}f''(x)dx\\&\quad+O\left(\int_{0}^{2(n+1)}|f'''(x)|dx\right)\\&=\frac{1}{2}(f(2n+2)-f(0))-\frac{1}{4}(f'(2n+2)-f'(0))\\&\quad+O\left(\int_{0}^{2(n+1)}|f'''(x)|dx\right).\end{aligned}$$

□

例 2 给出和式

$$S(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\sqrt{k^2+t^2}},$$

当 $t\to\infty$ 时的渐近表示.

解 首先注意, 对任意固定的 t, 这个级数总是收敛的. 因此, 可以考虑

$$S(t)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\frac{1}{\sqrt{k^2+t^2}}.$$

在定理 1 中, 取 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}$, 则由

$$f'(x)=-\frac{x}{(x^2+t^2)^{3/2}},$$

$$f''(x)=\frac{2x^2-t^2}{(x^2+t^2)^{5/2}}$$

得到

$$\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\frac{1}{\sqrt{k^2+t^2}}=\frac{1}{2t}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{(2n+2)^2+t^2}}+O\left(\int_0^{2(n+1)}\left|\frac{2x^2-t^2}{(x^2+t^2)^{5/2}}\right|dx\right),$$

因而

$$S(t)=\frac{1}{2t}+O\left(\int_0^{\infty}\left|\frac{2x^2-t^2}{(x^2+t^2)^{5/2}}\right|dx\right).$$

做变换 $x=yt$, 得到

$$\int_0^{\infty}\left|\frac{2x^2-t^2}{(x^2+t^2)^{5/2}}\right|dx=\frac{1}{t^2}\int_0^{\infty}|1-2y^2|(1+y^2)^{-\frac{5}{2}}dy=O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

将此式代入前一式, 得到

$$S(t)=\frac{1}{2t}+O\left(\frac{1}{t^2}\right),\quad t\to\infty.$$ □

注意, 尽管定理 1 与定理 2 有很广的应用范围, 我们在处理具体问题时, 却不可拘泥于固定程式, 而要根据具体情形灵活应用各种方法. 例如, 对于和式

$$\sum_{k=2}^{2n+1}(-1)^k\log k,$$

可以采用下面的方法: 有

$$\sum_{k=2}^{2n+1}(-1)^k\log k=-\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{1}{2k}\right).$$

当 $2k\geq 2$ 时, 有展开式

$$\log\left(1+\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2k}-\frac{1}{8k^2}+O\left(\frac{1}{k^3}\right),$$

其中 O 常数与 k 无关. 于是

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{2n+1}(-1)^k\log k&=-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{8k^2}+O\left(\frac{1}{k^3}\right)\right)\\&=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+C'+O\left(\frac{1}{n}\right)\\&=-\frac{1}{2}\log n+C+O\left(\frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$

此处 C' 与 C 都是常数.

3.4 积分和

积分和是一种特殊的离散和. 本节将对积分用积分和近似表示时所产生的误差进行估计.

设 $f(x)$ 是 (a,b) 上的可积函数, 则

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)$$

给出了离散和 $S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)$ 与连续和 $\int_a^b f(x)dx$ 的极限关系. 但是, 在大量实用问题中, 需要进一步了解它们之间的逼近程度, 即无穷小量

$$\Delta_n = \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right) \quad (n\to\infty)$$

的阶.

定理 1 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是有界变差函数, 则

$$\Delta_n = \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

证明 以 V 表示 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的全变差, 即

$$V = \inf \sup \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|,$$

则

$$|\Delta_n| \le \int_0^{\frac{1}{n}} \left(\sum_{k=1}^{n} \left| f\left(x + \frac{k-1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\right) dx \le \int_0^{\frac{1}{n}} V dx = \frac{1}{n}V. \quad \square$$

定理 2 设 $0<\xi<1$, $f(x)$ 在 $[0,\xi]$ 上单调上升, 在 $[\xi,1]$ 中单调下降, 且 $f(\xi)=M$. 则对于任意自然数 n, 有

$$-\frac{M-f(0)}{n} \le \Delta_n \le \frac{M-f(1)}{n},$$

其中 Δ_n 由定理 1 定义.

证明 设 $\frac{l-1}{n} \le \xi < \frac{l}{n}$, 则由 $f(x)$ 所满足的条件得到

$$\begin{aligned}\Delta_n &\le \sum_{k=l}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) dx \\ &\le \frac{M - f\left(\frac{l}{n}\right)}{n} + \sum_{k=l+1}^{n} \frac{f\left(\frac{l-1}{n}\right) - f\left(\frac{l}{n}\right)}{n} \\ &= \frac{M - f(1)}{n},\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}-\Delta_n &\le \sum_{k=1}^{l} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) dx \\ &\le \frac{f\left(\frac{l}{n}\right) - \min\left(f\left(\frac{l-1}{n}\right), f\left(\frac{l}{n}\right)\right)}{n} + \sum_{k=1}^{l-1} \frac{f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right)}{n} \\ &= \frac{\max\left(f\left(\frac{l-1}{n}\right), f\left(\frac{l}{n}\right)\right) - f(0)}{n} \le \frac{M - f(0)}{n}.\end{aligned}$$

□

定理 3 设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界而且可积, 则当 $n \to \infty$ 时, 有

$$\begin{aligned}\Delta_n &= \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \\ &= \frac{b-a}{2n}(f(a) - f(b))(1 + o(1)).\end{aligned}$$

证明 由中值定理, 我们得到

$$\begin{aligned}\Delta_n &= \sum_{k=1}^{n} \int_{a+\frac{b-a}{n}(k-1)}^{a+\frac{b-a}{n}k} \left(f(x) - f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right) \right) dx \\ &= \sum_{k=1}^{n} \int_{a+\frac{b-a}{n}(k-1)}^{a+\frac{b-a}{n}k} f'(\xi_k) \left(x - a - k\frac{(b-a)}{n} \right) dx,\end{aligned}$$

其中

$$a + (k-1)\frac{b-a}{n} < \xi_k < a + k\frac{(b-a)}{n}.$$

以 M_k 与 m_k 分别表示 $f'(x)$ 在区间 $(a + (k-1)\frac{b-a}{n}, a + k\frac{(b-a)}{n})$ 中的上确界与下确界, 则

$$\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} m_k \le -\Delta_n \le \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} M_k.$$

由于 $f'(x)$ 是可积的, 所以, 当 $n \to \infty$ 时, 有

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} m_k = (1+o(1))\int_a^b f'(x)dx = (1+o(1))(f(b)-f(a)),$$

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} M_k = (1+o(1))(f(b)-f(a)).$$

联合此二式及前一式, 就得到所要证明的定理. □

如果 $f(x)$ 有更好的光滑性, 那么, 积分和对积分的逼近程度也会更精确. 例如, 可以证明下面的定理.

定理 4 设 $f''(x)$ 存在, 且在 $[a,b]$ 上可积. 令

$$\Delta_n' = \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+(2k-1)\frac{b-a}{2n}\right),$$

则当 $n \to \infty$ 时, 有

$$\Delta_n' = \frac{(b-a)^2}{24n^2}(f'(b)-f'(a))(1+o(1)).$$

证明 由 Taylor 公式, 对于 $x \in \left(a+(k-1)\frac{b-a}{n}, a+k\frac{b-a}{n}\right)$, 有

$$\begin{aligned} &f(x) - f\left(a+(2k-1)\frac{b-a}{2n}\right) \\ &= \left(x-a-(2k-1)\frac{b-a}{2n}\right) f'\left(a+(2k-1)\frac{b-a}{2n}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(x-a-(2k-1)\frac{b-a}{2n}\right)^2 f''(\xi_k), \end{aligned}$$

其中 $\xi_k = \xi_k(x)$ 是 x 与 $a+(2k-1)\frac{b-a}{2n}$ 之间的某个数. 由此得到

$$\begin{aligned} \Delta_n' &= \sum_{k=1}^{n} \int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\cdot\frac{b-a}{n}} \left(f(x) - f\left(a+\frac{(2k-1)(b-a)}{2n}\right)\right) dx \\ &= \sum_{k=1}^{n} \int_{a+\frac{(k-1)(b-a)}{n}}^{a+\frac{k}{n}(b-a)} \left(\left(x-a-(2k-1)\frac{b-a}{2n}\right) f'\left(a+(2k-1)\frac{b-a}{2n}\right)\right. \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\left(x-a-(2k-1)\frac{b-a}{2n}\right)\right)^2 f''(\xi_k)\Bigg)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_{a+\frac{(k-1)(b-a)}{n}}^{a+\frac{k}{n}(b-a)}\left(x-a-(2k-1)\frac{b-a}{2n}\right)^2 f''(\xi_k)dx.$$

以 M_k 与 m_k 分别表示 $f''(x)$ 在区间 $\left(a+\frac{(k-1)(b-a)}{n}, a+\frac{k}{n}(b-a)\right)$ 中的上确界与下确界, 则

$$\frac{1}{24}\frac{(b-a)^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n}m_k\le\Delta_n'\le\frac{1}{24}\frac{(b-a)^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n}M_k.$$

由 $f''(x)$ 的可积性, 我们就得到定理的结论. □

例 1 证明

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin\frac{k}{n}\pi}=\frac{2n}{\pi}(\log 2n+\gamma-\log\pi)+O(1).$$

解 我们有

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin\frac{k}{n}\pi}=\frac{2n}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}+n\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\sin\frac{k}{n}\pi}-\frac{1}{\frac{k}{n}\pi}-\frac{1}{\frac{(n-k)\pi}{n}}\right)\frac{1}{n}.$$

由定理 1, 有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\sin\frac{k}{n}\pi}-\frac{1}{\frac{k}{n}\pi}-\frac{1}{\frac{(n-k)}{n}\pi}\right)$$
$$=\int_0^1\left(\frac{1}{\sin\pi x}-\frac{1}{\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)}\right)dx+O\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$=-\frac{2}{\pi}\log\frac{\pi}{2}+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

由此式, 并利用

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}=\log n+\gamma+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

就可得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin\frac{k}{n}\pi}&=\frac{2n}{\pi}\left(\log n+\gamma+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)-\frac{2n}{\pi}\log\frac{\pi}{2}+O(1)\\&=\frac{2n}{\pi}\left(\log n+\gamma-\log\frac{\pi}{2}\right)+O(1)\\&=\frac{2n}{\pi}(\log 2n+\gamma-\log\pi)+O(1).\end{aligned}$$

□

上面, 我们对常义可积函数的积分和做了一些研究. 这些结果大都可以平行地在多重积分和或广义积分和中找到. 下面, 我们列举出部分定理, 不再给出证明.

定理 5 设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调, 广义积分 $\int_0^1 f(x)dx$ 存在, 则当 $n\to\infty$ 时,

$$\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\sim n\int_0^1 f(x)dx.$$

定理 6 设 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上常义可积, 则在定理 5 的条件下, 有

$$\sum_{k=1}^{n-1}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)f\left(\frac{k}{n}\right)\sim n\int_0^1 f(x)\varphi(x)dx,\quad n\to\infty.$$

定理 7 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 中单调, 广义积分 $\int_0^1 f(x)dx$ 存在, 则

$$\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=o(n),\quad n\to\infty.$$

关于这三个定理, 需要做以下说明.

1. 定理 7 的证明, 基于下面的等式

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}f\left(\frac{2k-1}{n}\right)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

以及定理 5, 其中 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 表示 $\frac{n}{2}$ 的整数部分.

2. 定理 5 的逆定理, 一般来说是不成立的. 例如, 函数

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}$$

在 $(0,1)$ 上单调下降, 而且

$$\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{n}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n} - \frac{n}{n-k}\right) = 0.$$

但是, 积分

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}\right) dx$$

不存在.

对于无穷区间上的广义积分, 有下面的定理.

定理 8 设当 $x \geq 0$ 时, $f(x)$ 是单调的, 且 $\int_0^\infty f(x)dx < \infty$, 则

$$h\sum_{n=1}^{\infty} f(nh) = (1 + o(1)) \int_0^\infty f(x)dx, \quad h \to 0+.$$

例 2 已知 Euler 常数 γ 可以表示为无穷积分

$$\gamma = \int_0^\infty e^{-x} \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}\right) dx,$$

证明

$$\gamma = \lim_{t \to 1-} \left\{ (1-t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{1-t^n} - \log \frac{1}{1-t} \right\}.$$

解 在定理 8 中, 取

$$f(x) = e^{-x} \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}\right),$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nh} \left(\frac{1}{1-e^{-nh}} - \frac{1}{nh}\right) \sim \frac{\gamma}{h}.$$

令 $t = e^{-h}$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{1-t^n} + \frac{1}{\log \frac{1}{t}} \log(1-t) \sim \frac{\gamma}{\log \frac{1}{t}}.$$

由此及等式

$$\log \frac{1}{t} = -\log(1-(1-t)) \sim 1-t, \quad t \to 1-$$

即可得证所需的结论. □

3.5 例题

例 1 估计和式

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k \log k.$$

解 记

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-[\log n]} 2^k \log k + \sum_{k=n-[\log n]+1}^{n} 2^k \log k = S_n^1 + S_n^2.$$

显然有

$$S_n^1 \leq 2^{n+2-\log n} \log n = 2^{n+2} 2^{-\log n} \log n.$$

另一方面, 当 $\frac{k}{n} < 1$ 时, 有

$$\log\left(1 - \frac{k}{n}\right) = -\frac{k}{n} + O\left(\frac{k^2}{n^2}\right).$$

由此, 有

$$\begin{aligned}
S_n^2 &= \sum_{k=n-[\log n]+1}^{n} 2^k \log k = \sum_{k=1}^{[\log n]} 2^{n+1-k} \log(n+1-k) \\
&= 2^{n+1} \sum_{k=1}^{[\log n]} \frac{1}{2^k} \left(\log(n+1) + \log\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)\right) \\
&= 2^{n+1} \log(n+1) \sum_{k=1}^{[\log n]} \frac{1}{2^k} + 2^{n+1} \sum_{k=1}^{[\log n]} \frac{1}{2^k} \left(-\frac{k}{n+1} + O\left(\frac{k^2}{n^2}\right)\right) \\
&= 2^{n+1} \log(n+1) \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) - 2^{n+1} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{[\log n]} \frac{k}{2^k} \\
&\quad + O\left(\frac{2^{n+1}}{n^2} \sum_{k=1}^{[\log n]} \frac{k^2}{2^k}\right) = 2^{n+1} \log(n+1) + O\left(\frac{2^{n+1}}{\sqrt{n}} \log(n+1)\right).
\end{aligned}$$

于是

$$S_n = S_n^1 + S_n^2 = S_n^2(1 + o(1)) = 2^{n+1} \log(n+1)(1 + o(1)), \quad n \to \infty.$$

□

例 2 设数列 $\{\varphi_n\}$ 满足条件

$$\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < \cdots, \quad \varphi_n \to \infty \quad (n \to \infty).$$

则

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k^k = \varphi_n^n(1 + o(1)), \quad n \to \infty.$$

解 不妨假定 $\varphi_1 > 1$. 有

$$\begin{aligned}\frac{S_n}{\varphi_n^n} &= \frac{1}{\varphi_n^n}\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^k = 1 + \frac{\varphi_{n-1}^{n-1}}{\varphi_n^n} + \frac{\varphi_{n-2}^{n-2}}{\varphi_n^n} + \cdots + \frac{\varphi_1}{\varphi_n^n} \\ &< 1 + \frac{1}{\varphi_n} + \frac{1}{\varphi_n^2} + \frac{1}{\varphi_n^3} + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{\varphi_n}\left(1 + \frac{1}{\varphi_n} + \frac{1}{\varphi_n^2} + \cdots\right) = 1 + O\left(\frac{1}{\varphi_n}\right). \end{aligned}$$ □

从上面的两个例子可看到, 一般地, 随着 $f(n)$ 的阶的变化, 决定和式 $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$ 的阶的主要部分, 可以是 $o(n)$ 项之和, 甚至可以是一项. 了解这一点并且学会分析决定 S_n 的主要部分, 乃是十分重要的技巧.

例 3 估计和式

$$S(T) = \sum_{\substack{0<m<T \\ m\neq n}} \sum_{0<n<T} \frac{1}{m^\sigma n^\sigma \left|\log \frac{m}{n}\right|} \quad \left(\frac{1}{2} \leq \sigma < 1\right).$$

解 显然, 只要估计

$$\sum = \sum_{0<m<n<T} \frac{1}{m^\sigma n^\sigma \log \frac{n}{m}}$$

即可. 记

$$\begin{aligned}\sum &= \sum_{1\leq n<T} \frac{1}{n^\sigma} \sum_{0<m<\frac{n}{2}} \frac{1}{m^\sigma \log \frac{n}{m}} + \sum_{1\leq n<T} \frac{1}{n^\sigma} \sum_{\frac{n}{2}\leq m<n} \frac{1}{m^\sigma \log \frac{n}{m}} \\ &= \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2.\end{aligned}$$

由第 3.2 节定理 1, 对于和式 $\sum_1$, 有

$$\sum\nolimits_1 \leq \sum_{1\leq n<T} \frac{1}{n^\sigma} \frac{1}{\log 2} \sum_{0<m<\frac{n}{2}} \frac{1}{m^\sigma} = O(1) \sum_{1\leq n<T} \frac{1}{n^\sigma} n^{1-\sigma} = O(T^{2-2\sigma}).$$

在估计和式 $\sum_2$ 之前, 先要证明: 对于 $|r| \le \frac{1}{2}$, 恒有

$$|\log(1+r)| \ge \frac{1}{2}|r|. \tag{1}$$

事实上, 由 $\log(1+x)$ 的展开式, 有

$$\begin{aligned}|\log(1+r)| &= \left|r - \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{3}r^3 - \cdots\right| \\ &\ge |r| - r^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}|r| + \frac{1}{4}|r^2| + \cdots\right) \\ &\ge |r| - r^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right) = |r| - |r^2| \ge \frac{1}{2}|r|.\end{aligned}$$

现在估计 $\sum_2$. 做变换 $r = n - m$, 则

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_2 &= \sum_{1\le n<T}\frac{1}{n^\sigma}\sum_{\frac{n}{2}\le m<n}\frac{1}{m^\sigma\log\dfrac{n}{m}} \\ &= \sum_{1\le n<T}\frac{1}{n^\sigma}\sum_{1\le n-m\le\frac{n}{2}}\frac{1}{m^\sigma\log\left(1+\frac{n-m}{m}\right)} \\ &= O(1)\sum_{1\le n<T}\frac{1}{n^\sigma}\sum_{1\le r\le\frac{n}{2}}\frac{1}{(n-r)^\sigma\log\left(1-\frac{r}{n}\right)} \\ &= O(1)\sum_{1\le n<T}\frac{n}{n^{2\sigma}}\sum_{1\le r\le\frac{n}{2}}\frac{1}{r} \\ &= O(1)\sum_{1\le n<T}\frac{\log n}{n^{2\sigma-1}} = O(T^{2-2\sigma}\log T).\end{aligned}$$

综合以上估计式, 得到

$$S(T) = O(T^{2-2\sigma}\log T). \qquad \square$$

例 4 估计和式

$$S_n = \sum_{k=-n}^{n} e^{-\frac{k^2\alpha}{n}} \quad (\alpha > 0).$$

解 在 Euler-Maclaurin 公式中, 取 $f(x) = e^{-\frac{\alpha x^2}{n}}$, 则

$$f'(x) = -\frac{2\alpha x}{n}e^{-\frac{\alpha x^2}{n}}, \quad f''(x) = \left(-\frac{2\alpha}{n} + \left(\frac{2\alpha}{n}\right)^2 x^2\right)e^{-\frac{\alpha x^2}{n}}, \quad \cdots,$$

$$f^{(m)}(x) = p_m(x)e^{-\frac{\alpha x^2}{n}}, \quad \cdots,$$

其中 $p_m(x)$ 是 x 的 m 次多项式, 其系数仅与 n,α 有关. 由第 3.2 节定理 5, 有

$$S_n = \int_{-n}^{n} f(t)dt - \frac{1}{2}f(n) + \frac{1}{2}f(-n) + \sum_{k=1}^{m} b_{2k}(0)(f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(-n)) + R_m,$$

其中 m 是自然数.

对于固定的 m, 当 $n \to \infty$ 时, 有

$$f(n) + f(-n) = 2e^{-\alpha n},$$

$$\sum_{k=1}^{m} b_{2k}(0)(f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(-n)) = O(n^{2m}e^{-\alpha n}),$$

$$|R_m| \leq b_{2m}(0)\int_{-\infty}^{\infty} |f^{(2m)}(x)|dx = O\left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}\left(e^{-\frac{\alpha x^2}{n}}\right)\right| dx\right).$$

做变换 $x = y\sqrt{\frac{n}{2\alpha}}$, 得到

$$R_m = O\left(\left(\frac{2\alpha}{n}\right)^{m-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{d^{2m}}{dy^{2m}}e^{-\frac{y^2}{2}}\right| dy\right) = O(n^{\frac{1}{2}-m}).$$

此外,

$$\int_{-n}^{n} f(t)dt = \int_{-n}^{n} e^{-\frac{\alpha t^2}{n}}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha t^2}{n}}dt + O\left(\int_{n}^{\infty} e^{-\frac{\alpha t^2}{n}}dt\right) = \sqrt{\frac{n\pi}{\alpha}} + O(e^{-\beta n}),$$

其中 $\beta > 0$ 是常数 (例如, 可取 $\beta = \frac{1}{2}\alpha$).

联合以上结果, 得到

$$S_n = \sqrt{\frac{n\pi}{\alpha}} + O(n^{\frac{1}{2}-m}),$$

其中 m 可以是任意自然数. □

例 5 设 $\delta > 0$, 数列 $\{a_n\}$ 满足条件

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n = 1, 2, 3, \cdots; \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = o(1), \quad n \to \infty.$$

记

$$\binom{m}{\alpha}=\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(m-\alpha+1)},$$

则

$$A_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{k+\delta-1}{\delta-1}a_{n-k}=o(n^{\delta-1}).$$

解 由 Γ-函数的渐近表示,

$$\Gamma(x)\sim x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}\sqrt{2\pi}(1+o(1)),\quad x\to\infty.$$

因此, 当 $k\to\infty$ 时,

$$\begin{aligned}\binom{k+\delta-1}{\delta-1}&=\frac{\Gamma(k+\delta)}{\Gamma(\delta)\Gamma(k+1)}\\&=\frac{(k+\delta)^{k+\delta-\frac{1}{2}}e^{-k-\delta}\sqrt{2\pi}(1+o(1))}{\Gamma(\delta)(k+1)^{k+1-\frac{1}{2}}e^{-k-1}\sqrt{2\pi}(1+o(1))}\\&=\frac{k^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}(1+o(1)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\binom{k+\delta-1}{\delta-1}-\binom{(k-1)+\delta-1}{\delta-1}\\&\quad=\binom{k+\delta-2}{\delta-2}=\frac{k^{\delta-2}}{\Gamma(\delta-1)}(1+o(1)).\end{aligned}\tag{2}$$

现在估计 A_n. 取 $n_0=[\varepsilon n]$, $0<\varepsilon<1$, 则

$$\begin{aligned}A_n&=\sum_{k=0}^{n}\binom{k+\delta-1}{\delta-1}a_{n-k}\\&=\sum_{k=0}^{n_0-1}\binom{k+\delta-1}{\delta-1}a_{n-k}+\sum_{k=n_0}^{n}\binom{k+\delta-1}{\delta-1}a_{n-k}\\&=A_n^1+A_n^2.\end{aligned}$$

由

$$\binom{k+\delta-1}{\delta-1}=O(k^{\delta-1})$$

得到

$$A_n^1 = \sum_{k=0}^{n_0-1} \binom{k+\delta-1}{\delta-1} a_{n-k} = a_n + \sum_{k=1}^{n_0-1} \binom{k+\delta-1}{\delta-1} a_{n-k}$$
$$= O\left(\frac{1}{n}\right) + \sum_{k=1}^{n_0-1} O(k^{\delta-1}) O\left(\frac{1}{n-k}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right) + O(1) \sum_{k=1}^{n_0-1} \frac{k^{\delta-1}}{n-k}$$
$$= O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{n_0^\delta}{n-n_0}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{\varepsilon^\delta}{1-\varepsilon} n^{\delta-1}\right),$$

其中 O 常数与 ε 无关. 因此, 对于任意给定的 $\eta > 0$, 总可找到适当的 ε, $0 < \varepsilon < 1$, 使得

$$|A_n^1| < \eta n^{\delta-1}.$$

对于选定的 ε, 记 $b_k = \binom{k+\delta-1}{\delta-1}$, $S_{-1} = 0$, 则

$$A_n^2 = \sum_{k=n_0}^{n} b_k a_{n-k} = \sum_{k=n_0}^{n} b_k (S_{n-k} - S_{n-k-1})$$
$$= \sum_{k=n_0}^{n} b_k S_{n-k} - \sum_{k=n_0}^{n} b_k S_{n-k-1}$$
$$= \sum_{k=n_0}^{n} b_k S_{n-k} - \sum_{k=n_0+1}^{n+1} b_{k-1} S_{n-k}$$
$$= b_{n_0} S_{n-n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} (b_k - b_{k-1}) S_{n-k}$$
$$= b_{n_0} S_{n-n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} (b_k - b_{k-1}) S_{n-k},$$

由此式和 (2) 式, 以及假设条件 $S_n = o(1)$, 得到

$$A_n^2 = \sum_{k=0}^{n-n_0-1} S_k \binom{n-k+\delta-2}{\delta-2} + S_{n-n_0} b_{n_0}$$
$$= o(1) \sum_{k=0}^{n-n_0-1} O(n^{\delta-2}) + o(1) O(n_0^{\delta-1})$$
$$= o(n^{\delta-1}).$$

综合以上估计, 得到

$$A_n = A_n^1 + A_n^2 = o(n^{\delta-1}). \qquad \square$$

例 6 估计和式 $\sum_{n=0}^{\infty} \log(1-be^{-nt})$ 当 $t \to 0+$ 时的阶, 其中 $0 < b < 1$.

解 令 $f(x) = \log(1-be^{-xt})$. 当 $x > 0$ 时, 由于 $be^{-xt} < 1$, 故有展开式

$$f(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} b^k e^{-kxt},$$

$$f^{(l)}(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b^k}{k}(-kt)^l e^{-kxt} = (-1)^{l-1} t^l \sum_{k=1}^{\infty} b^k k^{l-1} e^{-kxt}.$$

设 m 是自然数, 则由 Euler-Maclaurin 公式得到, 对于充分大的自然数 N, 有

$$\sum_{n=0}^{N} \log(1-be^{-nt}) = \int_0^N \log(1-be^{-xt})dx + C + \frac{1}{2}\log(1-be^{-Nt}) + \sum_{l=1}^{N} b_{2l}(0) f^{(2l-1)}(N) - \int_0^N f^{(2m)}(x) b_{2m}(x) dx.$$

当 $N \to \infty$, 有

$$f^{(2l-1)}(N) \to 0,$$

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^N f^{(2m)}(x) b_{2m}(x) dx \right| \\ &\quad \le |b_{2m}(0)| \int_0^{\infty} |f^{(2m)}(x)| dx \\ &\quad = O(t^{2m}) \sum_{k=1}^{\infty} b^k k^{2m-1} \int_0^{\infty} e^{-kxt} dx = O(t^{2m-1}). \end{aligned}$$

因此,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \log(1-be^{-nt}) = \int_0^{\infty} \log(1-be^{-xt})dx + C + O(t^{2m-1}),$$

其中

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2}\log(1-b) - \sum_{l=1}^{m} b_{2l}(0) f^{(2l-1)}(0) \\ &= \frac{1}{2}\log(1-b) - \sum_{l=1}^{m} b_{2l}(0)(-1)^{2l-2} t^{2l-1} \sum_{k=1}^{\infty} b^k k^{2l-2} \\ &= \frac{1}{2}\log(1-b) - \sum_{l=1}^{m} b_{2l}(0) t^{2l-1} \sum_{k=1}^{\infty} b^k k^{2l-2}. \end{aligned}$$

此外, 做变换 $xt = y$, 得到

$$\int_0^{\infty} \log(1 - be^{-xt})dx = \frac{1}{t}\int_0^{\infty} \log(1 - be^{-y})dy.$$

综合以上诸式, 得到: 当 $t \to 0+$ 时, 对任意的自然数 m, 有

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \log(1 - be^{-nt}) = {} & \frac{1}{t}\int_0^{\infty} \log(1 - be^{-y})dy + \frac{1}{2}\log(1-b) \\ & - \sum_{l=1}^{m-1} b_{2l}(0) t^{2l-1} \sum_{k=1}^{\infty} b^k k^{2l-2} + O(t^{2m-1}). \end{aligned}$$ □

例 7 设数列 $\{\lambda_n\}$ 满足条件:

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \cdots, \quad \lambda_n \to \infty \quad (n \to \infty),$$

函数 $b'(x)$ 在任意有限区间 $[\lambda_1, \xi]$ 上连续. 则

$$\sum_{\lambda_1 \le \lambda_n \le x} a_n b(\lambda_n) = S(x)b(x) - \int_{\lambda_1}^{x} S(t)b'(t)dt, \tag{3}$$

其中 $S(x) = \sum_{\lambda_1 \le \lambda_n \le x} a_n$.

解 有

$$\begin{aligned} & S(x)b(x) - \sum_{\lambda_1 \le \lambda_n \le x} a_n b(\lambda_n) \\ &= \sum_{\lambda_1 \le \lambda_n \le x} a_n (b(x) - b(\lambda_n)) = \sum_{\lambda_1 \le \lambda_n \le x} \int_{\lambda_n}^{x} a_n b'(t)dt \\ &= \int_{\lambda_1}^{x} \left(\sum_{\lambda_1 \le \lambda_n \le t} a_n \right) b'(t)dt = \int_{\lambda_1}^{x} S(t)b'(t)dt. \end{aligned}$$ □

很明显, (3) 式是第 3.1 节 (2) 式的推广. 下面, 证明一个关于素数和的估计, 借以说明这个公式的应用.

例 8 设 p 是素数, 已知

$$S(x)=\sum_{p\leq x}\frac{\log p}{p}=\log x+O(1), \tag{4}$$

证明

$$\sum_{p\leq x}\frac{1}{p}=\log\log x+a+O\left(\frac{1}{\log x}\right),$$

其中 a 是常数.

解 在 (3) 式中, 取

$$\lambda_1=2,\quad \lambda_n=p_n\quad (n\geq 2);\quad a_n=\frac{\log p_n}{p_n},\quad b(x)=\frac{1}{\log x},$$

得到

$$\begin{aligned}\sum_{p\leq x}\frac{1}{p}&=S(x)\frac{1}{\log x}+\int_2^x S(t)\frac{dt}{t\log^2 t}\\&=(\log x+O(1))\frac{1}{\log x}+\int_2^x(\log t+O(1))\frac{dt}{t\log^2 t}\\&=\log\log x+O\left(\frac{1}{\log x}\right)+a+O(1)\int_x^\infty\frac{dt}{t\log^2 t}\\&=\log\log x+a+O\left(\frac{1}{\log x}\right).\end{aligned}$$

□

例 9 设 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上, $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 令

$$\widetilde{\Delta}_n=\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{2n+1}\left(f(a)+2\sum_{k=1}^n f\left(a+2k\frac{b-a}{2n+1}\right)\right),$$

则当 $n\to\infty$ 时,

$$\widetilde{\Delta}_n=\frac{(b-a)^2}{24}(f'(b)+2f'(a))\frac{1}{n^2}(1+o(1)).$$

解 由定义可知

$$\widetilde{\Delta}_n = \int_a^{a+\frac{b-a}{2n+1}} (f(x)-f(a))dx + \sum_{k=1}^{n} \int_{a+(2k-1)\frac{b-a}{2n+1}}^{a+(2k+1)\frac{b-a}{2n+1}} \left(f(x) - f\left(a + 2k\frac{b-a}{2n+1} \right) \right) dx.$$

利用与第 3.4 节定理 3 相同的证明方法, 可将这个等式简化为

$$\widetilde{\Delta}_n = \int_a^{a+\frac{b-a}{2n+1}} (x-a)f'(\xi_0)dx + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \int_{a+(2k-1)\frac{b-a}{2n+1}}^{a+(2k+1)\frac{b-a}{2n+1}} \left(x - a - 2k\frac{b-a}{2n+1} \right)^2 f''(\xi_k)dx,$$

并且推出需要的结论. □

例 10 设 $a>0, x_n$ 是方程

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \cdots + \frac{1}{x-n} = a$$

在 (n,∞) 中的零点, 则当 $n\to\infty$ 时,

$$x_n = \frac{n+\frac{1}{2}}{1-e^{-a}} + o(1).$$

解 令

$$p(x) = \frac{1}{2x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-k},$$

则由于 $\lim_{x\to k-} p(x) = -\infty$, $\lim_{x\to k+} p(x) = +\infty$ $(0\le k\le n)$ 以及 $\lim_{x\to\infty} p(x) = 0$ 可知, 方程 $p(x)=a$ 在区间

$$(0,1), \quad (1,2), \quad \cdots, \quad (n-1,n), \quad (n,\infty)$$

中都有且仅有一个零点.

取 $\beta = \frac{1}{1-e^{-a}}$, $f(x) = \frac{1}{\beta - x}$, 则

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{\beta - x} = a = p(x_n).$$

由例 9, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{\beta - x} &= \widetilde{\Delta}_n + \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{\beta} + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\beta - \frac{2k}{2n+1}}\right)\\ &= \widetilde{\Delta}_n + \frac{1}{2\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta - k}\\ &= \widetilde{\Delta}_n + p\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta\right) > p\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta\right)\end{aligned}$$

对于充分大的 n 成立.

但是, 当 $x \geq n$ 时, $p(x)$ 是减函数, 故由

$$p(x_n) = \int_0^1 f(x)dx > p\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta\right)$$

推出 $x_n < \left(n+\frac{1}{2}\right)\beta$. 由中值公式, 我们进一步得到

$$0 < \left(n+\frac{1}{2}\right)\beta - x_n = -\frac{\widetilde{\Delta}_n}{p'(\xi)} < -\frac{\widetilde{\Delta}_n}{p'\left((n+\frac{1}{2})\beta\right)}, \tag{5}$$

其中 $x_n < \xi < \left(n+\frac{1}{2}\right)\beta$.

容易证明, 当 $n \to \infty$ 时,

$$np'\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta\right) = -(1+o(1))\int_0^1 \frac{dx}{(\beta - x)^2}.$$

由此, 利用例 9 中对 $\widetilde{\Delta}_n$ 的阶的估计, 并由 (5) 式, 得到

$$x_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\beta + o(1).$$

证毕. □

例 11 设 $f(x)$ 在 $[0,\infty]$ 上是单调的, 积分 $\int_0^\infty f(x)dx$ 存在且有限, 则

$$h\sum_{n=1}^{\infty} f(nh) = (1+o(1))\int_0^\infty f(x)dx, \quad h \to 0+.$$

解 由广义积分的存在性及 $f(x)$ 的单调性, 知 $f(x) \to 0$ $(x \to \infty)$. 此外, $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上不变号, 我们不妨设 $f(x) \geq 0$. 于是, 有

$$\int_h^{(m+1)h} f(x)dx \leq h(f(h) + f(2h) + \cdots + f(mh)) \leq \int_0^{mh} f(x)dx.$$

令 $m \to \infty$, 得到

$$\int_h^\infty f(x)dx \le h\sum_{n=1}^\infty f(nh) \le \int_0^\infty f(x)dx,$$

即

$$h\sum_{n=1}^\infty f(nh) = (1+o(1))\int_0^\infty f(x)dx, \quad h \to 0+. \qquad \square$$

例 12 证明: 当 $t \to 1-$ 时, 对任意的 $a>0$, 有

$$\sum_{n=1}^\infty n^{a-1}t^n \sim \Gamma(a)\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-a}.$$

解 在例 11 中, 取 $f(x)=e^{-x}x^{a-1}$, 则当 $h \to 0+$ 时, 有

$$\sum_{n=1}^\infty e^{-nh}(nh)^{a-1} = (1+o(1))\frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}dx = \frac{1}{h}\Gamma(a)(1+o(1)).$$

做变换 $e^{-h}=t$, 则 $h=\log\frac{1}{t}$, 上式成为

$$\left(\log\frac{1}{t}\right)^a\sum_{n=1}^\infty n^{a-1}t^n = (1+o(1))\Gamma(a). \qquad \square$$

例 13 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 对每个自然数 n, 令

$$\delta_n = \frac{b-a}{n}, \quad f_{kn} = f(a+k\delta_n).$$

则当 $n \to \infty$ 时,

$$\prod_{k=1}^n (1+f_{kn}\delta_n) = (1+o(1))e^{\int_a^b f(x)dx}.$$

解 当 $|x| \le \frac{1}{2}$ 时,

$$\log(1+x) = x + O(x^2).$$

设 $|f(x)| \le M$, $x \in [a,b]$, 则当 $\delta_n M \le \frac{1}{2}$ 时, 有

$$\sum_{k=1}^n \log(1+f_{kn}\delta_n) - \sum_{k=1}^n f_{kn}\delta_n = O\left(\delta_n\sum_{k=1}^n f_{kn}^2\delta_n\right). \tag{6}$$

当 $\delta_n \to 0$ 时,

$$O\left(\delta_n \sum_{k=1}^{n} f_{kn}^2 \delta_n\right) = O(\delta_n) \int_a^b f^2(x)dx \to 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} f_{kn}\delta_n \to \int_a^b f(x)dx,$$

于是由此二式及 (6) 式即可得证. □

例 14 对于固定的实数 t, 令 $z = 2ne^{\frac{it}{\sqrt{n}}}$, 则当 $n \to \infty$ 时,

$$\left|\prod_{k=1}^{n} \frac{2n-k}{z-k}\right| = (1+o(1))\left(\frac{2}{e}\right)^{t^2}.$$

解 由简单的计算可以得到

$$\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{2n-k}{z-k}\right|^2 = \prod_{k=1}^{n} \frac{(2n-k)^2}{4n^2 - 4nk\cos\frac{t}{\sqrt{n}} + k^2}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{8nk}{(2n-k)^2}\sin^2\frac{t}{2\sqrt{n}}}.$$

当 $x \to 0$ 时, $\sin x = x(1+o(1))$, 所以, 当 $n \to \infty$ 时,

$$\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{2n-k}{z-k}\right|^2 = (1+o(1))\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{8nk}{(2n-k)^2}\frac{t^2}{4n}}.$$

利用例 13 的结论, 有

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{8nk}{(2n-k)^2}\frac{t^2}{4n}} = (1+o(1))e^{-\int_0^1 \frac{2xt^2}{(2-x)^2}dx} = (1+o(1))\left(\frac{2}{e}\right)^{2t^2}. \quad \square$$

习 题

1. 设 $0 < \sigma < 1$, 证明:

$$\sum_{0<m<n<\infty}\sum \frac{e^{-(m+n)\delta}}{m^\sigma n^\sigma \log\frac{n}{m}} = O\left(\delta^{2\sigma-2}\log\frac{1}{\delta}\right),$$

当 $\delta > 0$ 时成立.

2. 证明:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{1\cdot(2n+1)}+\frac{1}{3\cdot(2n-1)}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)\cdot 1}\right)=\frac{\pi^2}{16}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}(\log 2)^2$.

3. 证明: 当 $t\to 0+$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-n^2t}=\frac{1}{2}\log t+\frac{1}{2}\gamma+O(\sqrt{t}),$$

其中 $\gamma=-\int_0^{\infty}e^{-x}\log x dx$.

4. 证明: 对于任意的自然数 $m\geq 3$, 当 $t\to 0+$ 时, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log(1-e^{-nt})=-\frac{\pi^2}{6t}-\frac{1}{2}\log t+\frac{1}{2}\log 2\pi+\frac{t}{24}+O(t^m).$$

5. 证明: 当 $n\to\infty$ 时, 有

$$\frac{1}{\log n}-\frac{1}{\log(n+1)}+\frac{1}{\log(n+2)}-\cdots=\frac{1}{2}\frac{1}{\log n}+O\left(\frac{1}{n(\log n)^2}\right).$$

6. 以 p 表示素数, 对于任意自然数 m, 已知

$$\sum_{p\leq x}\log p=x+O(x(\log x)^{-m}).$$

证明: 对于任意的自然数 N, 有

$$\sum_p e^{-pt}=-\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{t}\frac{1}{(\log t)^{n+1}}\int_0^{\infty}e^{-y}(\log y)^n dy$$
$$+o\left(\frac{1}{t}\frac{1}{(\log t)^{N+1}}\right),\quad t\to 0-,$$

其中 $\sum_p$ 表示对所有素数求和.

7. 证明: 若 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=S$, 对于固定的 x, $f_n(x)$ 是 $(0,1)$ 上的减函数, 且

$$\lim_{x\to 1-}f_n(x)=1\quad(n=1,2,\cdots).$$

则

$$\lim_{x\to 1-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nf_n(x)=S.$$

8. 令 $\Delta^1 b_n = b_{n+1} - b_n$, $\Delta^m b_n = \Delta^{m-1} b_{n+1} - \Delta^{m-1} b_n$ $(m \geq 2)$,

$$S_k^{(1)} = \sum_{n=1}^{k} a_n, \quad S_k^{(m)} = \sum_{n=1}^{k} S_n^{(m-1)},$$

并且规定 $b_n = 0$ $(n > N)$, 则

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = (-1)^m \sum_{n=1}^{N} S_n^{(m)} \Delta^m b_n.$$

9. 设 $b_k \geq 0$, $b_k + b_{k+2} \geq 2b_{k+1}$ $(k = 1, 2, \cdots)$. 又设 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, 且

$$m \leq \sum_{k=1}^{n} S_k \leq M \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

则

$$m(b_1 - b_2) + S_N b_N \leq \sum_{n=1}^{N} a_n b_n \leq M(b_1 - b_2) + S_N b_N.$$

10. 令 $\rho(x) = \frac{1}{2} - x + [x], \sigma(x) = \int_0^x \rho(t)dt$, 设 $f(x)$ 在 (a, ∞) 上定义且是二次连续可微的, 并且

$$\int_a^{\infty} |f''(x)|dx < \infty.$$

则对任意的 $b \geq a$, 有

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = C + \int_a^b f(x)dx + \rho(b)f(b) - \sigma(b)f(b) - \int_b^{\infty} \sigma(x)f''(x)dx,$$

其中 C 是常数.

11. 证明:

(1) $$\sum_{1\leq n\leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right),$$

其中 γ 是常数 (Eluer 常数);

(2) 当 $x \geq 2$ 时, 存在常数 C, 使

$$\sum_{1\leq n\leq x} \frac{\log n}{n} = \frac{1}{2}\log^2 x + C + O\left(\frac{\log x}{x}\right);$$

(3) 当 $x \geq 2$ 时, 存在常数 C, 使

$$\sum_{2\leq n\leq x} \frac{1}{n \log n} = \log\log x + C + O\left(\frac{1}{x \log x}\right).$$

12. 估计下列各和式当 $N \to \infty$ 时的阶:

(1) $\sum_{n=1}^{N} n^{\alpha}(\log n)^{\beta}$, $\alpha > 0$;

(2) $\sum_{n=1}^{N} e^{n\alpha}(\log n)^{\beta}$, $\alpha > 0$;

(3) $\sum_{n=1}^{N} (\log n)^{\alpha}$, α 是实数.

13. 以 p 表示素数, 证明: 存在常数 $B > 0$, 使得

(1) $\prod_{p \le x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = B \log x + O(1)$;

(2) 对于 $\alpha > -1$, 有常数 A, B, 使得

$$A \frac{x^{1+\alpha}}{\log x} < \sum_{p \le x} p^{\alpha} < B \frac{x^{1+\alpha}}{\log x}, \quad x \ge 2.$$

14. 当 $x \to 0+$ 时, 估计 $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2 x}$ 的阶.

第四章

隐函数与导函数

在阶的估计问题中, 我们经常遇到以隐函数形式出现的变量. 在少数情况下, 可以将它们用显函数的形式 (幂级数、积分等) 表示出来; 但在多数情况下, 往往不能很方便地找到它的显函数表示. 因此, 对于这种变量的阶的估计, 就较为复杂.

在这一章里, 首先介绍 Lagrange 定理. 利用它可以将一些变量从隐函数形式变为显函数形式. 但是, 这个定理需要的条件较强, 所以, 使用范围受到一定限制. 因此, 我们将介绍估计隐函数形式的变量的阶所常用的迭代法, 这是一个不太繁杂而又有效的方法. 最后, 将研究函数的阶与其导函数的阶之间的关系.

4.1 Lagrange 定理

本节中关于隐函数及反函数的 Lagrange 定理, 乃是复变函数论中的重要定理. 它们的证明涉及复变函数的许多基础知识, 所以, 我们仅是引用它们, 而不在本书中给出证明. 有兴趣的读者, 可以参看复变函数论的基础教科书.

定理 1 设 z, z_0 都是复数. 若 $f(z)$ 在域 $|z - z_0| \leq \rho_0$ 内解析, 且

有展开式

$$\omega = f(z) = \omega_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots,$$

其中 $a_1 \neq 0$, 则必存在 $\delta_0 > 0$, 使得 $\omega = f(z)$ 的反函数 $z = \varphi(\omega)$ 在 $|\omega - \omega_0| \leq \delta_0$ 中是单值解析函数. 此外若 $F(z)$ 在 $|z - z_0| \leq \rho_0$ 中解析,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n,$$

则有

$$F(\varphi(\omega)) = F(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} \left\{ F'(\zeta) \left(\frac{\zeta - z_0}{f(\zeta) - \omega_0} \right)^n \right\}_{\zeta = z_0} (\omega - \omega_0)^n \tag{1}$$

在 $|\omega - \omega_0| \leq \delta_0$ 中成立.

特别地, 有

$$z = \varphi(\omega) = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} \left\{ \left(\frac{\zeta - z_0}{f(\zeta) - \omega_0} \right)^n \right\}_{\zeta = z_0} (\omega - \omega_0)^n. \tag{2}$$

定理 2 设 z, z_0 都是复数, $\omega = f(z)$ 在 $|z - z_0| \leq \rho_0$ 内解析, 有展开式

$$\omega = f(z) = \omega_0 + a_k(z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \cdots,$$

其中 $a_k \neq 0$ $(k \geq 2)$, 则存在 $\delta_0 > 0$ 及正数 η, 在区域

$$|\omega - \omega_0| \leq \delta_0, \quad |\arg(\omega - \omega_0)| \leq \pi - \eta$$

内存在 $\omega = f(z)$ 的反函数 $z = \varphi(\omega)$. 它在该区域内解析, 且有展开式

$$z = \varphi(\omega) = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} \left\{ \frac{(\zeta - z_0)^n}{(f(\zeta) - \omega_0)^{\frac{n}{k}}} \right\}_{\zeta = z_0} (\omega - \omega_0)^{\frac{n}{k}}, \tag{3}$$

此处 $(\omega - \omega_0)^{\frac{1}{k}}$ 为取定的某一分支函数.

我们已经知道, 若

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,$$

那么, $f(x)$ 的阶可以通过它的幂级数的部分和得到估计. 因此, Lagrange 定理对隐函数的阶所做出的估计是很精确的. 下面, 我们举几个应用 Lagrange 定理的例子. 鉴于刚才所说的情形, 我们将只着眼于寻求形如 (1)—(3) 的级数表示, 而不再考虑阶的估计. 在下面的例子中, 除特别说明外, z 均表示复数.

例 1 设 $a\neq 0,\omega=f(z)=ze^{-az}$. 求反函数 $z=\varphi(\omega)$.

解 在定理 1 中, 取 $z_0=0,\omega_0=0$, 则

$$\frac{\zeta-z_0}{f(\zeta)-\omega_0}=\frac{\zeta}{f(\zeta)}=e^{a\zeta}.$$

因此, 由 (2) 式得到

$$\begin{aligned}z=\varphi(\omega)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}(e^{an\zeta})_{\zeta=0}\,\omega^n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(an)^{n-1}}{n!}\omega^n=\sum_{n=1}^{\infty}a^{n-1}\frac{n^{n-2}}{(n-1)!}\omega^n.\end{aligned}$$

这个级数的收敛半径是

$$R=\frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{\frac{a^n(n+1)^{n-1}}{n!}}}=\frac{1}{e|a|}.$$ □

例 2 以 E 表示行星的偏近点角, e 表示行星轨道的偏心率, $t-T$ 表示自行星最后一次通过近日点时所经历的时间, U 表示行星绕太阳转一整周的周期, 则有 Kepler 方程

$$E-e\sin E=\frac{t-T}{U}2\pi.$$

令 $\frac{t-T}{U}2\pi=\tau$, 则上述方程成为

$$e=\frac{E-\tau}{\sin E}.$$

试将 E 表成 e 的函数.

解 在定理 1 中, 取

$$f(E)=\frac{E-\tau}{\sin E},\quad E_0=\tau,\quad e_0=0,$$

则

$$\frac{E-E_0}{f(E)-e_0}=\sin E.$$

因此, 由 (2) 式得到

$$E=\tau+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left\{\frac{d^{n-1}}{dE^{n-1}}(\sin E)^n\right\}_{E=\tau}e^n. \qquad \square$$

例 3 设 a, b 是常数, $a\neq 0$; $n>1$ 是整数. 求

$$\omega=f(z)=az+bz^n$$

的满足条件

$$z_0=0,\quad \omega_0=0$$

的反函数 $z=\varphi(\omega)$.

解 变换已知的关系式, 得到

$$\frac{\zeta-z_0}{f(\zeta)-\omega_0}=\frac{\zeta}{f(\zeta)}=\frac{1}{a+b\zeta^{n-1}}.$$

因此, 由 (2) 式得到

$$z=\varphi(\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{d^{k-1}}{d\zeta^{k-1}}\left(\frac{1}{(a+b\zeta^{n-1})^k}\right)_{\zeta=0}\omega^k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{k!}\omega^k.$$

当 $k=1$, 显然有 $a_k=\frac{1}{a}$.

当 $k>1$, 对充分小的 ζ, 有展开式

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(a+b\zeta^{n-1})^k}\\&=\frac{1}{a^k}\frac{1}{\left(1+\frac{b}{a}\zeta^{n-1}\right)^k}\\&=\frac{1}{a^k}\frac{1}{(k-1)!}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(m+k-1)(m+k-2)\cdots(m+1)\frac{b^m}{a^m}\zeta^{m(n-1)},\end{aligned}$$

由此得到

$$a_k = \frac{d^{k-1}}{d\zeta^{k-1}}\left(\frac{1}{(a+b\zeta^{n-1})^k}\right)_{\zeta=0}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{(-1)^m b^m (m+k-1)!(mn-m)!}{(k-1)!m!a^{m+k}}, & k = m(n-1)+1, m \geq 1 \text{ 是整数}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

于是, 所求的反函数是

$$z = \varphi(\omega)$$
$$= \frac{1}{a}\omega + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m b^m (mn)!(mn-m)!}{(m(n-1)+1)!(m(n-1)!)a^{m+k}m!}\omega^{m(n-1)+1}. \quad \square$$

例 4 研究方程 $x^t = e^{-x}$ 的解 x 当 $t \to \infty$ 的阶.

解 令 $x = 1+z$, $t^{-1} = \omega$, 则原方程成为

$$\log(1+z) = -\omega(1+z).$$

在定理 1 中, 取 $f(z) = -\frac{\log(1+z)}{1+z}$, $z_0 = 0, \omega_0 = 0$, 则由 (2) 式可以得出

$$z = -\omega + c_1\omega^2 + c_2\omega^3 + \cdots,$$

其中 $c_1, c_2, \cdots$ 是常数, 因此, 有

$$x = 1 - \frac{1}{t} + c_1\frac{1}{t^2} + c_2\frac{1}{t^3} + \cdots = 1 - \frac{1}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

显然, 若做进一步的计算, 则 O 项可以精确到 $O\left(\frac{1}{t^m}\right)$, m 是任意固定的自然数. $\square$

例 5 设方程 $x = \cot x$ 的根是 $x_1, x_2, x_3, \cdots$, 试寻求 x_n 当 $n \to \infty$ 的阶.

解 从 $y = x$ 与 $y = \cot x$ 的图像中可以看出, 方程 $x = \cot x$ 确有无穷多个根, 而且

$$x_n \in (n\pi, (n+1)\pi), \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots.$$

今设 $x_n > 0$, $n\pi < x_n < (n+1)\pi$, 则

$$x_n = \cot x_n = \cot(x_n - n\pi).$$

但是 $x_n \to \infty$, 所以必有 $x_n - n\pi \to 0$. 令

$$x = n\pi + z, \quad \frac{1}{n\pi} = \omega, \quad z_0 = 0, \quad \omega_0 = 0,$$

则由原方程可以得到

$$\frac{1}{\omega} + z = \cot z,$$

$$\omega = f(z) = \frac{\sin z}{\cos z - z\sin z}.$$

利用定理 1, 由 (2) 式得出

$$\begin{aligned} z = \varphi(\omega) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} \left\{ \left(\frac{\zeta(\cos\zeta - \zeta\sin\zeta)}{\sin\zeta} \right)^n \right\}_{\zeta=0} \omega^n \\ &= \omega + c_2\omega^2 + c_3\omega^3 + \cdots. \end{aligned}$$

回到原来的变量, 就得到

$$x_n = n\pi + z = n\pi + \frac{1}{n\pi} + \frac{c_2}{(n\pi)^2} + \cdots = n\pi + \frac{1}{n\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

对于 $x_n < 0$ 的情形, 用同样的方法处理. □

例 6 研究方程

$$\cos x = \frac{1}{\log x}$$

的根 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ 当 $n \to \infty$ 的阶.

解 由函数 $y = \cos x$ 与 $y = \frac{1}{\log x}$ 的图像可以看出, 方程 $\cos x = \frac{1}{\log x}$ 的根有无穷多个. 以 x_n, y_n 记之, 则有

$$x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \cdots < x_n < y_n \cdots,$$

其中

$$\left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi < x_n < 2n\pi, \quad 2n\pi < y_n < \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

下面考虑 x_n 当 $n \to \infty$ 的阶, 对于 y_n, 可以用同样的方法处理.

令

$$x_n = 2n\pi - \frac{\pi}{2} + z, \quad \omega = \frac{1}{\log\left(2n\pi - \frac{\pi}{2}\right)}, \quad z_0 = 0, \quad \omega_0 = 0,$$

则原方程给出

$$\sin z = \cos\left(2n\pi - \frac{\pi}{2} + z\right) = \frac{1}{\log\left(2n\pi - \frac{\pi}{2} + z\right)} = \frac{1}{\log\left(e^{\frac{1}{\omega}} + z\right)},$$

因此

$$e^{\frac{1}{\omega}} + z = e^{\frac{1}{\sin z}},$$

$$\frac{1}{\omega} = \log\left(e^{\frac{1}{\sin z}} - z\right) = \frac{1}{\sin z} + \log\left(1 - ze^{-\frac{1}{\sin z}}\right) = \frac{1}{f(z)},$$

而且

$$\frac{z - z_0}{f(z) - \omega_0} = \frac{z}{\sin z} + z\log\left(1 - ze^{-\frac{1}{\sin z}}\right).$$

由定理 1 可以推得

$$\begin{aligned} z &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} \left\{ \left(\frac{z}{\sin z} + z\log\left(1 - ze^{-\frac{1}{\sin z}}\right) \right)^n \right\}_{z=0} \omega^n \\ &= \omega + c_2\omega^2 + c_3\omega^3 + \cdots. \end{aligned}$$

回到原来的变量, 就是

$$\begin{aligned} x_n &= \left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi + z = \left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi + \frac{1}{\log\left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi} + O\left(\frac{1}{\log^2 n}\right) \\ &= \left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi + \frac{1}{\log 2n\pi} + O\left(\frac{1}{\log^2 n}\right). \end{aligned}$$

□

4.2 迭代法

在上一节中, 我们看到, 对于隐函数的阶的估计, Lagrange 定理确实有其可取之处, 因为它能以幂级数的形式将隐函数表示出来, 所以能够对隐函数的阶有十分精确的了解. 但是, Lagrange 定理在应用中

有很大的局限性. 首先它要求 $f(z)$ 是解析函数, 这是一个很严格的条件. 其次, 即使解析性的条件满足了, 具体计算幂级数的系数也常是一个繁杂的工作.

另一方面, 从阶的估计的观点来看, 我们仅需要了解 "阶", 而并不一定需要一个幂级数展开式. 因此, 在具体问题的处理中, 人们常避开 Lagrange 定理所涉及的复杂计算, 或者相对地降低对假设条件的要求. 迭代法就是常用的一个方法.

首先, 让我们看两个例子.

例 1 设变量 x 与 t 满足关系式

$$xe^x = t. \tag{1}$$

试求: 当 $t \to \infty$ 时, 变量 $x = x(t)$ 的阶.

解 由于 xe^x 是 x $(x \geq 0)$ 的增函数, 所以, 方程 (1) 的解 $x(t)$ 的存在性是确定的.

不妨设 $x > 1$, 在 (1) 式两端取对数, 得到

$$x = \log t - \log x, \tag{2}$$

因此,

$$1 < x < \log t, \quad x = \log t + O(\log\log t).$$

再在两边取对数, 得到

$$\log x = \log\log t + \log\left(1 + O\left(\frac{\log\log t}{\log t}\right)\right) = \log\log t + O\left(\frac{\log\log t}{\log t}\right),$$

所以

$$x = \log t - \log\log t + O\left(\frac{\log\log t}{\log t}\right),$$

若在上式两端再取对数, 则又得到

$$\begin{aligned}\log x &= \log\log t + \log\left(1 - \frac{\log\log t}{\log t} + O\left(\frac{\log\log t}{\log^2 t}\right)\right)\\ &= \log\log t - \frac{\log\log t}{\log t} - \frac{1}{2}\frac{(\log\log t)^2}{\log^2 t} + O\left(\frac{\log\log t}{\log^2 t}\right).\end{aligned}$$

于是, 由 (2) 式得到更进一步的估计式

$$x=\log t-\log\log t+\frac{\log\log t}{\log t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\log\log t}{\log t}\right)^2+O\left(\frac{\log\log t}{\log^2 t}\right).$$

显然, 若将这一过程继续下去, 就可以使 O 项中无穷小的阶逐渐提高, 事实上, 用归纳法不难证明: 对任意的自然数 N, 有

$$x=\log t-\log\log t+P_0(\log\log t)\frac{\log\log t}{\log t}+P_1(\log\log t)\frac{\log\log t}{(\log t)^2}+\cdots$$
$$+P_N(\log\log t)\frac{\log\log t}{(\log t)^{N+1}}+O\left(\frac{\log\log t}{(\log t)^{N+1}}\right),$$

其中 $P_k(y)$ 是 k 次多项式. □

例 2 设变量 x 与 t 满足方程式

$$e^x+\log x=t.$$

证明: 当 $t\to\infty$ 时, 有

$$x=\log t-\frac{\log\log t}{\log t}-\frac{1}{2}\frac{(\log\log t)^2}{t^2}+\frac{\log\log t}{t^2\log t}+O\left(\frac{(\log\log t)^3}{t^3}\right).$$

解 对于充分大的 t, 有 $x>1$, 由原方程式可以得到

$$x=\log(t-\log x)=\log t+\log\left(1-\frac{\log x}{t}\right)$$
$$=\log t-\frac{\log x}{t}-\frac{1}{2}\frac{\log^2 x}{t^2}+O\left(\frac{\log^3 x}{t^3}\right), \tag{3}$$

因此, 又得到

$$\log x=\log\left\{\log t-\frac{\log x}{t}-\frac{1}{2}\frac{\log^2 x}{t^2}+O\left(\frac{\log^3 x}{t^3}\right)\right\}$$
$$=\log\log t+\log\left\{1-\frac{\log x}{t\log t}-\frac{1}{2}\frac{\log^2 x}{t^2\log t}+O\left(\frac{\log^3 x}{t^3\log t}\right)\right\}$$
$$=\log\log t-\frac{\log x}{t\log t}-\frac{1}{2}\frac{\log^2 x}{t^2\log t}-\frac{1}{2}\frac{\log^2 x}{t^2\log^2 t}+O\left(\frac{\log^3 x}{t^3\log t}\right). \tag{4}$$

将此式代入 (3) 式, 得到

$$x=\log t-\frac{\log\log t}{t}+\frac{\log x}{t^2\log t}+\frac{1}{2}\frac{\log^2 x}{t^3\log t}-\frac{1}{2}\frac{\log^2 x}{t^3\log^2 t}$$
$$-\frac{1}{2}\frac{(\log\log t)^2}{t^2}+O\left(\frac{\log^3 x}{t^3}\right).$$

由上式, 并再利用由 (3) 与 (4) 式推得的

$$\log x = \log\log t - \frac{\log\log t}{t\log t} + O\left(\frac{(\log\log t)^2}{t^2\log t}\right),$$

就可以得到

$$x = \log t - \frac{\log\log t}{t} + \frac{\log\log t}{t^2\log t} - \frac{1}{2}\frac{(\log\log t)^2}{t^2} + O\left(\frac{(\log\log t)^3}{t^3}\right). \quad \square$$

从上面的两个例子可以看到, 为了估计一个函数方程所确定的变量 (隐函数) x 的阶, 不是给出这个变量的明确表达式, 而是用另一个变量和一个误差项表示它, 将这个新变量和误差项代入函数方程, 又得到另一个新变量和一个精确一些的误差项; 再代入函数方程, 出现了一个新变量和一个更精确一些的误差项; …… 如此反复地做下去, 就得到一串变量

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

及相应的误差

$$r_1, r_2, r_3, \cdots, r_n, \cdots, \quad r_n = o(r_{n-1}), \quad n \to \infty.$$

于是就用 x_n 反映出变量 x 的变化趋势. 这就是迭代法的基本思想.

一般地, 假设给出了一个原始值 x_0 以及函数

$$F_1(x,y), F_2(x,y), \cdots, F_n(x,y), \cdots,$$

其中 y 是参变量, 令

$$x_1(y) = F_1(x_0,y),\ x_2(y) = F_2(x_1,y),\ \cdots,\ x_n = F_n(x_{n-1},y),\ \cdots.$$

要研究 $y \to y_0$ 时, $x_n(y)$ 的阶. 当然, 诸 $x_n(y)$ 的存在性, 是已经假定的. 更进一步, 若

$$F_n(x,y) = F(x,y), \quad n = 1,2,3,\cdots,$$

且对每一个固定的 y, 有

$$\lim_{n\to\infty} x_n(y) = x(y),$$

那么, $x(y)$ 应该是方程

$$x = F(x, y)$$

的解. 因此, 对由这一函数方程所决定的隐函数 $x(y)$ 当 $y \to y_0$ 时的阶的性质, 可以通过对 $x_n(y)$ 当 $y \to y_0$ 时的阶的性质反映出来.

为了使读者对迭代法的概念有较为深刻的了解, 我们再举一个积分方程的例子.

考虑方程

$$z(x) = 1 + \int_x^{\infty} K(x,t)F(t)z(t)t^{-2}dt,$$

其中, $F(t)$ 当 $t > t_0$ 时解析,

$$F(t) = a + O\left(\frac{1}{t}\right),$$

$$K(x,t) = -\int_x^t e^{2\omega(t-s)}\left(\frac{s}{t}\right)^{2\rho} ds, \quad \omega < 0,\ \rho > 0,\ |F(t)| \leq A,$$

A 是常数.

在解这个积分方程时, 常需要考虑下面所定义的函数 $\{z_n(x)\}$:

$$z_0(x) = 1,$$

$$z_n(x) = \int_x^{\infty} K(x,t)F(t)z_{n-1}(t)t^{-2}dt, \quad n \geq 1.$$

现在, 考察 $z_n(x)$ 的阶.

例 3 沿用上面的记号, 当 $x > x_0$ 时, 存在常数 B, 使得

$$|z_n(x)| \leq \frac{(AB)^n}{n!}x^{-n}; \tag{5}$$

此外, 如果对于 $x > x_0$, 有 $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}$, 则

$$z_n(x) = \sum_{k=n}^{N} c_{k,n}x^{-k} + O(x^{-N-1}), \tag{6}$$

其中 $c_{k,n}$ 是仅与 n 有关的常数.

解 当 $t > x$ 时, 有

$$|K(x,t)| = \int_x^t e^{2\omega(t-s)} \left(\frac{s}{t}\right)^{2\rho} ds \leq \int_0^{t-x} e^{2\omega y} dy \leq B,$$

B 是某个常数, 因此, 由 $z_0(x)$ 与 $z_n(x)$ 的表达式可知:

当 $n = 1$ 时, (5) 式显然成立;

若 (5) 式对于 $n = k$ 成立, 则有

$$|z_k(x)| \leq \frac{(AB)^k}{k!} x^{-k},$$

及

$$\begin{aligned} |z_{k+1}(x)| &\leq \int_x^\infty BA \frac{(AB)^k}{k!} t^{-k-2} dt = \frac{(AB)^{k+1}}{k!} \int_x^\infty t^{-k-2} dt \\ &= \frac{(AB)^{k+1}}{(k+1)!} x^{-k-1}. \end{aligned}$$

这样, 由归纳法证得 (5) 式.

下面, 仍用归纳法证明 (6) 式.

当 $n = 0$ 时, (6) 式显然成立.

设对于 $n = k$ 及任意的自然数 N, 有

$$z_k(x) = \sum_{m=k}^{N} c_{k,m} x^{-m} + O(x^{-N-1}).$$

由 $F(x)$ 的幂级数展开式, 得到

$$F(t) z_k(t) = \sum_{m=k}^{N} b_m x^{-m} + O(x^{-N-1}).$$

利用定积分的微分法则, 不难得出

$$\begin{aligned} z'_{k+1}(x) &= \int_x^\infty e^{2\omega(t-x)} \left(\frac{x}{t}\right)^{2\rho} F(t) z_k(t) t^{-2} dt \\ &= \int_x^\infty e^{2\omega(t-x)} \left(\frac{x}{t}\right)^{2\rho} \left(\sum_{m=k}^{N} b_m t^{-m}\right) t^{-2} dt \\ &\quad + O(1) \int_x^\infty e^{2\omega(t-x)} t^{-N-3} \left(\frac{x}{t}\right)^{2\rho} dt. \end{aligned}$$

利用分部积分法, 注意到 $\omega<0$, 容易得出

$$\begin{aligned}&\int_x^{\infty} e^{2\omega(t-x)}\left(\frac{x}{t}\right)^{2\rho}\left(\sum_{m=k}^{N} b_m t^{-m}\right) t^{-2}dt\\&=\sum_{m=k}^{N} b_m e^{-2\omega x}x^{2\rho}\int_x^{\infty} e^{2\omega t}t^{-m-2-2\rho}dt\\&=\sum_{m=k}^{N} c_m x^{-m-2},\end{aligned}$$

以及

$$\int_x^{\infty} e^{-2\omega(t-x)}\left(\frac{x}{t}\right)^{2\rho} t^{-N-3}dt=O(x^{-N-3}),$$

因此

$$z'_{k+1}(x)=\sum_{m=k}^{N} c_m x^{-m-2}+O(x^{-N-3}).$$

由此式及 $z_{k+1}(x)\to 0$ $(x\to\infty)$, 得到

$$\begin{aligned}z_{k+1}(x)&=-\int_x^{\infty} z'_{k+1}(t)dt=\sum_{m=k}^{N}\widetilde{c}_m x^{-m-1}+O(x^{-N-2})\\&=\sum_{m=k}^{N}\widetilde{c}_{m-1}x^{-m-1}+O(x^{-N-1}),\end{aligned}$$

这就是 $n=k+1$ 时的 (6) 式. □

以下, 我们考虑一般的迭代过程, 为简便起见, 我们考虑最简单的一种: 对于给定的函数 $f(x)$ 与数值 x_0, 令

$$\begin{aligned}x_1&=f_1(x_0)=f(x_0),\\x_2&=f_2(x_0)=f(f_1(x_0)),\quad\cdots,\\x_n&=f_n(x_0)=f(f_{n-1}(x_0)),\quad\cdots,\end{aligned}$$

称 x_n 为第 n 次迭代.

引理 1 设 $f(x)$ 当 $|x|<\rho$ 时有展开式

$$f(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots, \tag{7}$$

其中 $|a_1|<1$, 则存在 ρ_1, $0<\rho_1<\rho$, 对于 $|x|<\rho_1$, 有

$$0<|f_n(x)|<b^n|x|, \quad n=1,2,3,\cdots,$$

此处 $|a_1|<b<1$.

证明 显然,

$$\frac{f(x)}{x}=a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots.$$

选取 $\rho_1>0$ 充分小, 使得对于 $0<|x|<\rho_1$, 有

$$0<\left|\frac{f(x)}{x}\right|<b<1,$$

于是 $0<|f(x)|<bx$.

设 $|x_0|<\rho_1$, 则由上面的结果可得到

$$0<|x_1|=|f(x_0)|<bx_0<\rho_1$$

以及

$$0<|x_2|=|f(x_1)|<b|x_1|<b^2|x_0|<\rho_1.$$

逐次应用这一方法, 并由数学归纳法, 得到

$$0<|x_n|=|f(x_{n-1})|<b^n|x_0|<\rho_1. \qquad \square$$

引理 2 设复变函数 $f_n(z)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 $|z|<r$ 中解析, 且存在常数 b, $0<b<1$, 使得

$$|f_n(z)|<b^n, \quad |z|<r, \quad n=1,2,3,\cdots,$$

则无穷乘积

$$F(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$$

在 $|z|<r$ 中解析.

这是复变函数论的一个定理. 证明略.

定理 1 在引理 1 的条件与记号下, 对任意的 $x_0, 0 < |x_0| < \rho_1$, 极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{a_1^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x_0)}{a_1^n} = \omega(x_0)$$

存在, $\omega(x)$ 在 $|x| < \rho_1$ 中是 x 的解析函数, 且满足函数方程

$$\omega(f(x)) = a_1\omega(x). \tag{8}$$

证明 我们有

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}}{a_1 x_n} &= \frac{f(x_n)}{a_1 x_n} = 1 + \frac{a_2}{a_1}x_n + \frac{a_3}{a_1}x_n^2 + \cdots \\ &= 1 + x_n\left(\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_1}x_n + \cdots\right).\end{aligned}$$

由引理 1 得到

$$\frac{x_{n+1}}{a_1 x_n} = 1 + r_n = 1 + O(b^n),$$

因而极限

$$\lim_{n\to\infty} x_n a_1^{-n} x_0^{-1} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n-1}(1 + r_k)$$

存在, 而且有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{a_1^n} = x_0 \prod_{k=0}^{\infty}(1 + r_k) = \omega(x_0).$$

由

$$x_n = f_n(x_0) = f_{n-1}(x_1)$$

得到

$$\omega(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{a_1^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{f_{n-1}(x_1)}{a_1^n} = \frac{1}{a_1}\omega(x_1) = \frac{1}{a_1}\omega(f(x_0)).$$

这就是 (8) 式.

至于 $\omega(x)$ 在 $|x| < \rho_1$ 中的解析性, 可由引理 1 与引理 2 推出. □

从定理 1 可知, 对于充分小的 x, 若 $f(x)$ 可以表成 (7) 式的形式, 那么, x_n 的阶与 a_1^n 相同. 由证明过程可知, x 可以是复数. 在这里,

$|a_1| < 1$ 是关键条件. 事实上, 若 $|a_1| \geq 1, x_n$ 就不会有这么规则的性质, 例如, 考虑

$$f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots,$$

若取 $x_0 = it_0$, t_0 是某 (任意) 实数, 则容易证明

$$x_n \to \infty \quad (n \to \infty).$$

但是, 若取 $x_0 = t_0$, 则容易证明

$$x_n = \sin_n x_0 = \sin(\sin_{n-1} x_0) = o(1) \quad (n \to \infty).$$

可见, 对于不同的 x_0, x_n 具有迥然不同的性质.

鉴于 $|a_1| = 1$ 时, n 次迭代的性质的多样性, 下面, 我们仅考虑 x 为实数, 以及 $a_1 = 1, a_2 = -1$ 的情形.

定理 2 设 $\{x_n\}$ 是满足下列等式的正数序列:

$$x_{n+1} = x_n - x_n^2 + O(x_n^{2+a}), \quad 0 < a \leq 1, \tag{9}$$

则下述结论中必有一个成立:

(i) 存在常数 $p > 0$, 使得 $x_n \geq p$ 对于一切 $n \geq 1$ 成立;

(ii) 存在 n_0, 当 $n \geq n_0$ 时, x_n 单调下降趋于零, 且

$$x_n = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+a}}\right) + O\left(\frac{\log n}{n^2}\right).$$

证明 由 (9) 知道, 存在正数 A, 使得

$$|x_{n+1} - x_n + x_n^2| \leq A x_n^{2+a}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots. \tag{10}$$

若结论 (i) 不成立, 则无论 p 多么小, 都可找到 x_k, 使 $0 < x_k < p$. 现在, 取 p 充分小, 使得当 $0 < x < p$ 时, 有

$$x - x^2 > Ax^{2+a} \quad 且 \quad Ax^3 < x^2. \tag{11}$$

于是, 存在 x_{n_0}, $0 < x_{n_0} < p$, 使得

$$x_{n_0+1} = x_{n_0} - x_{n_0}^2 + r_{n_0} < x_{n_0},$$

其中 $|r_{n_0}| \leq Ax_0^3$. 逐次应用 (10) 式与 (11) 式, 就得到

$$x_{n_0} > x_{n_0+1} > \cdots > x_n > \cdots, \quad x_n \to 0.$$

令 $x_n = \frac{1}{y_n}$, 则

$$y_n \to \infty \quad (n \to \infty),$$

于是 (9) 式成为

$$\frac{1}{y_{n+1}} = \frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_n^2} + O\left(\frac{1}{y_n^{2+a}}\right),$$

从而

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n \left(1 - \frac{1}{y_n} + O\left(\frac{1}{y_n^{1+a}}\right)\right)^{-1} \\ &= y_n \left(1 + \frac{1}{y_n} + O\left(\frac{1}{y_n^{1+a}}\right)\right) + O\left(\frac{1}{y_n}\right), \\ y_{n+1} - y_n &= 1 + O\left(\frac{1}{y_n^a}\right) + O\left(\frac{1}{y_n}\right). \end{aligned} \tag{12}$$

因此, 对于充分大的 n, 有

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &> \frac{1}{2}, \\ y_n > \frac{1}{4}n, \quad y_n^{-1} &= O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

由此及 (12) 式, 推出

$$\begin{aligned} y_n &= n + O(n^{1-a}) + O(\log n), \\ x_n = \frac{1}{y_n} &= \frac{1}{n}\left(1 + O\left(\frac{1}{n^a}\right) + O\left(\frac{\log n}{n}\right)\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{n}\left(1 + O\left(\frac{1}{n^a}\right) + O\left(\frac{\log n}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

□

4.3 导函数的阶

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是可积函数, 令

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt,\quad G(x)=\int_a^x g(t)dt.$$

在第一章中已经看到, 由 $f(x)$ 的阶的性质, 可以推知 $F(x)$ 的阶的性质. 例如, 若

$$f(x)=O(g(x)),\quad G(x)\to\infty\quad (x\to\infty),$$

则 $F(x)=O(G(x))$. 对于 "o", 可以相应地得到一些定理.

现在的问题是, 我们希望从 $F(x)$ 或 $G(x)$ 的阶, 导出对 $f(x)$ 或 $g(x)$ 的阶的认识. 一般来说, 这不是一个可以简单地逆推的问题. 例如, 若取

$$f(x)=e^x,\quad g(x)=e^x(1+\cos e^x),$$

则

$$F(x)=e^x,\quad G(x)=e^x+\sin e^x.$$

显然 $G(x)=F(x)+o(1)$, $x\to\infty$, 但是极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}$$

却是不存在的.

然而, 倘使附加一些条件, 那么, 就能够通过函数的阶推导出导函数的阶.

定理 1 设 $xf(x)$ 当 $x>a$ 时是连续递增函数[①], 且

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt\sim Ax^m,\quad m>0,\quad x\to\infty,$$

则当 $x\to\infty$ 时,

$$f(x)\sim mAx^{m-1}.$$

[①]连续的条件并非必要, 但此时可以保证 $F'(x)=f(x)$.

证明 不妨设 $A=1$, 于是

$$F(x)=x^m+o(x^m),\quad x\to\infty.$$

设 $0<\eta<1$, 则

$$\begin{aligned}F(x+\eta x)-F(x)&=\int_x^{x+\eta x}f(t)dt=((1+\eta)^m-1)x^m+o(x^m)\\&=m\eta x^m+O(\eta^2m^2x^m)+o(x^m).\end{aligned}$$

但 $xf(x)$ 是增函数, 所以

$$\int_x^{x+\eta x}f(t)dt=\int_x^{x+\eta x}tf(t)\frac{dt}{t}\geq\frac{\eta xf(x)}{1+\eta}.$$

联合上面二式, 得到

$$\frac{f(x)}{x^{m-1}}\leq m(1+\eta)+O(\eta m^2)+o(1)\frac{1+\eta}{\eta}.$$

由于 η 可以任意小, 上式给出

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{f(x)}{x^{m-1}}\leq m. \tag{1}$$

类似地, 从

$$F(x)-F(x-\eta x)=\int_{x-\eta x}^{x}f(t)dt$$

出发, 可以证得

$$\underline{\lim_{x\to\infty}}\frac{f(x)}{x^{m-1}}\geq m,$$

由此式及 (1) 式, 定理得证. □

推论 1 设 $(1-x)f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上是连续的增函数, 且对于某个 $m>0$, 有

$$f(x)\sim\frac{A}{(1-x)^m},\quad x\to1-,$$

则

$$f'(x)\sim\frac{mA}{(1-x)^{m+1}}.$$

证明 令

$$1-x=\frac{1}{y},\quad y\in(1,\infty),\quad g(y)=f\left(1-\frac{1}{y}\right),$$

则

$$g'(y)=\frac{1}{y^2}f'\left(1-\frac{1}{y}\right),$$
$$yg'(y)=\frac{1}{y}f'\left(1-\frac{1}{y}\right)=(1-x)f'(x).$$

因此, $yg'(y)$ 是连续的增函数, 且满足

$$g(y)\sim Ay^m,\quad y\to\infty.$$

由定理 1 得到

$$g'(y)\sim mAy^{m-1},$$

即

$$(1-x)^2f'(x)\sim\frac{mA}{(1-x)^{m-1}},\quad x\to1-,$$
$$f'(x)\sim\frac{mA}{(1-x)^{m+1}}.$$

□

推论 2 若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, $a_n>0$, $x\in[0,1)$, 对于 $m>0$, 有

$$f(x)\sim\frac{1}{(1-x)^m},\quad x\to1-,$$

则 $f'(x)\sim\frac{m}{(1-x)^{m+1}}$.

证明 令 $a_0+a_1+\cdots+a_n=A_n$, 则

$$g(x)=\frac{f(x)}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^n\sim\frac{1}{(1-x)^{m+1}},\quad x\to1-.$$

显然,

$$(1-x)g'(x)=A_1+(2A_2-A_1)x+(3A_3-2A_2)x^2+\cdots$$

是增函数 (因为上式中诸系数为正数), 所以推论 1 给出

$$g'(x) \sim \frac{m+1}{(1-x)^{m+2}} \quad (x \to 1-).$$

由此得到

$$f'(x) = ((1-x)g(x))' = (1-x)g'(x) - g(x) \sim \frac{m}{(1-x)^{m+1}}. \qquad \square$$

定理 2 设

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt = x^2 + O(x). \tag{2}$$

若 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上是增函数, 则

$$f(x) = 2x + O(\sqrt{x}).$$

证明 设 $p > 0$, 则由 $f(x)$ 的递增性得出

$$\begin{aligned} f(x) &\le \frac{1}{p}\int_x^{x+p} f(t)dt = \frac{1}{p}(F(x+p) - F(x)) \\ &= \frac{1}{p}((x+p)^2 - x^2 + O(x+p)) \\ &= 2x + p + O(1) + O\left(\frac{x}{p}\right). \end{aligned}$$

取 $p = \sqrt{x}$, 上式给出

$$f(x) \le 2x + O(\sqrt{x}). \tag{3}$$

类似地, 从考虑

$$f(x) \ge \frac{1}{p}\int_{x-p}^x f(t)dt$$

出发, 又可得到不等式 $f(x) \ge 2x + O(\sqrt{x})$. 将此结果与 (3) 式比较, 就证明了定理. $\square$

定理 3 设 (2) 式成立, $f''(x)$ 存在且满足条件

$$f''(x) \ge 0 \quad (x \ge a).$$

则存在常数 A, 使得

$$f(x) = 2x + A + o(1), \quad x \to \infty; \tag{4}$$

此外, 有

$$f'(x) = 2 + o(1), \quad x \to \infty.$$

证明 由于 $f''(x) \geq 0$, 所以, $f'(x)$ 是增函数, 由此易知, 存在 x_0, 使得

$$f'(x) \leq 2, \quad x \geq x_0.$$

若不然, 则有 x_1 及 $a > 2$, 使得 $f'(x) \geq a > 2$, 对于 $x \geq x_1$ 成立, 这与 (2) 式矛盾.

因此, 当 $x \geq x_0$ 时, $f(x) - 2x$ 是减函数. 从而, 对于 $x > x_1 \geq x_0$, 有

$$F(x) - x^2 - F(x_1) + x_1^2 = \int_{x_1}^{x} (f(t) - 2t)dt \leq (x - x_1)(f(x_1) - 2x_1). \tag{5}$$

但是, 由 (4) 式知道, 对于 $x \geq a$, 有

$$|F(x) - x^2| \leq Mx,$$

由此, 并在 (5) 式中令 $x \to \infty$, 就推出

$$f(x_1) - 2x_1 \geq A_1,$$

其中 A_1 是常数. 但 $f(x) - 2x$ 是减函数, 故有数 A, 使得

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - 2x) = A$$

这就是 (4) 式.

此外, 由于 $f'(x)$ 是增函数, 而且对于 $x \geq x_0$ 有 $f'(x) \leq 2$, 所以存在常数 B, 使得 $\lim_{x \to \infty} f'(x) = B$. 由 (4) 式可知, 必有 $B = 2$, 即 $f(x) = 2 + o(1)$ $(x \to \infty)$. □

定理 4 设 $f''(x)$ 存在, 且 $f(x)=O(x^{\alpha}), f''(x)=O(x^{\beta})$ $(\beta>-1)$, 则

$$f'(x)=O\left(x^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\right). \tag{6}$$

证明 由于 $f''(x)=O(x^{\beta})$, 所以, 必有

$$f'(x)=\int_a^x f''(t)dt+O(1)=O(x^{\beta+1}).$$

若 $\alpha\geq\beta+2$, 则 (6) 式由上式而得出.

若 $\alpha<\beta+2$, 取正数 $\eta<1$, 由 Taylor 公式可知

$$f(x+\eta x)-f(x)=\eta x f'(x)+\frac{1}{2}\eta^2x^2f''(x+\theta\eta x),$$

其中 $0<\theta<1$, 于是

$$\begin{aligned}|f'(x)|&\leq\frac{|f(x+\eta x)|+|f(x)|}{\eta x}+\frac{1}{2}\eta x|f''(x+\theta\eta x)|\\&=O(1)\left(\frac{x^{\alpha-1}}{\eta}+\eta x^{\beta+1}\right),\end{aligned}$$

其中 O 常数与 x,η 都无关, 取 $\eta=x^{\frac{\alpha-\beta}{2}-1}$, 上式给出 (6) 式. □

注意, 在定理 4 中, 条件 $\beta>-1$ 是不可少的. 例如, 取 $f(x)=x+\log x$, 则

$$f(x)=O(x),\quad f''(x)=O\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

但是 $f'(x)\neq O(x^{\frac{1+(-2)}{2}})$.

定理 5 若 $f''(x)$ 是 $[0,\infty)$ 上的连续函数, $f(0)=A$, 且存在常数 M, 使得

$$f''(x)>-\frac{M}{x^2},\quad 0<x<\infty,$$

则

$$f'(x)=o\left(\frac{1}{x}\right),\quad x\to0+.$$

证明 由 Taylor 定理可知, 对于任意的 δ, $0<\delta<1$, 有

$$f(x+\delta x)-f(x)=\delta x f'(x)+\frac{1}{2}\delta^2x^2f''(x+\theta\delta x),\quad 0<\theta<1.$$

因此

$$\begin{aligned} xf'(x) &= \frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta} - \frac{1}{2}\delta x^2 f''(x+\theta\delta x) \\ &\le \frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta} + \frac{1}{2}\delta x^2 \frac{M}{x^2(1+\theta\delta)^2}, \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0+} xf'(x) \le \lim_{x\to 0+} \frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta} + \frac{1}{2}M\delta = \frac{1}{2}M\delta.$$

但 $\delta > 0$ 可以任意小, 所以

$$\lim_{x\to 0+} xf'(x) \le 0.$$

用同样方法, 从

$$f(x-\delta x) - f(x) = -\delta x f'(x) + \frac{1}{2}\delta^2 x^2 f''(x-\theta\delta x)$$

出发, 可以证明

$$\lim_{x\to 0+} xf'(x) \ge 0.$$ □

下面我们证明一个较为一般的结果.

定理 6 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ (当 $x \ge 0$ 时) 满足下面的条件:

(1) $f(x)$ 与 $g(x)$ 连续可导;

(2) $f(x)$ 为单调增加的凸函数;

(3) $\frac{1}{g(x)}$ 为凸函数;

(4) $f(x) \sim g(x)$, $x \to \infty$.

则

$$f'(x) \sim g'(x), \quad x \to \infty.$$

证明 容易看出 $f(x)$ 趋于无穷, 所以 $g(x)$ 亦趋于无穷, 即 $\frac{1}{g(x)}$ 趋于零, 但 $\frac{1}{g(x)}$ 为凸函数, 所以它为下降函数, 因而 $g(x)$ 一定为增函数.

取数 ε, $0 < \varepsilon < \frac{1}{6}$. 设 $0 < h < \frac{x}{2}$, 则当 x 充分大时, 有

$$f(x-h) < (1+\varepsilon^2)g(x-h), \tag{7}$$

$$f(x+h) < (1+\varepsilon^2)g(x+h), \tag{8}$$

$$(1-\varepsilon^2)g(x) < f(x) < (1+\varepsilon^2)g(x). \tag{9}$$

由 $f(x)$ 的凸性得到

$$f(x+h)-f(x)\geq hf(x)\geq f(x)-f(x-h). \tag{10}$$

由以上几式可以得出下面的不等式

$$\begin{aligned}&(1+\varepsilon^2)g(x+h)-(1-\varepsilon^2)g(x)\\&\quad>hf'(x)>(1-\varepsilon^2)g(x)-(1+\varepsilon^2)g(x-h).\end{aligned} \tag{11}$$

同样, 由 $\frac{1}{g(x)}$ 的凸性得到

$$\frac{1}{g(x+h)}\geq\frac{1}{g(x)}+h\left(\frac{1}{g(x)}\right)'=\frac{g(x)-hg'(x)}{g^2(x)}, \tag{12}$$

$$\frac{1}{g(x-h)}\geq\frac{1}{g(x)}-h\left(\frac{1}{g(x)}\right)'=\frac{g(x)+hg'(x)}{g^2(x)}. \tag{13}$$

现在限制 $h<\frac{g}{g'}$, 将 (12), (13) 代入 (11) 得到

$$(1+\varepsilon^2)g(x+h)-(1-\varepsilon^2)g(x)-hg'(x)>h(f'(x)-g'(x)),$$

即

$$\frac{1+\varepsilon^2}{g-hg'}g^2-(1-\varepsilon^2)g-hg'>h(f'-g').$$

上式亦可写成

$$\frac{h^2g'^2+2\varepsilon^2g^2-hgg'\varepsilon^2}{g-hg'}>h(f'-g').$$

所以

$$\frac{h^2g'^2+2\varepsilon^2g^2}{g-hg'}>h(f'-g').$$

同样可以得到

$$-\frac{h^2g'^2+\varepsilon^2(2g^2+hgg')}{hg}<f'-g'.$$

由以上二式得到

$$\frac{h^2g'^2+2\varepsilon^2g^2}{h(g-hg')}>f'-g'>-\frac{h^2g'^2+2\varepsilon^2g^2+hgg'\varepsilon^2}{hg}. \tag{14}$$

在 (12) 式中取 $h = x$, 利用定理的假设, 得到

$$\frac{g(x) - xg'(x)}{g(x)} \leq \frac{g(x)}{g(2x)} \sim \frac{f(x)}{f(2x)} \sim \frac{f(x)}{f(2x) + f(0)} \leq \frac{1}{2}.$$

因此对充分大的 x 有

$$\frac{xg'(x)}{g(x)} > \frac{1}{3}. \tag{15}$$

由上式知道若取 $h = \frac{\varepsilon g}{g'}$, 则 h 满足 $h < \frac{x}{2}$, 将 $h = \varepsilon \frac{g}{g'}$ 代入 (14) 式得到

$$\frac{3\varepsilon}{1-\varepsilon} g' > f' - g' > -(3\varepsilon + \varepsilon^2) g', \tag{16}$$

定理结论得证. □

函数 x^λ, e^x, e^{x^2} 等都满足定理中函数 $g(x)$ 的条件.

4.4 例题

例 1 设函数 $f(x)$ 满足条件

$$f(x) = x - ax^k + O(x^l), \quad x \to 0, \tag{1}$$

这里 $l \geq 2k > 2, a > 0$. 令

$$y_0 = x,\ y_1 = f(y_0),\ y_2 = f(y_1),\ \cdots,\ y_n = f(y_{n-1}),\ \cdots, \tag{2}$$

则存在 $\delta > 0$, 对于 $0 < x < \delta$, 有

$$y_n \sim n^{-\frac{1}{k-1}} ((k-1)a)^{-\frac{1}{k-1}}.$$

解 对于充分小的 x, 显然有

$$ax^k > O(x^l),$$

其中 $O(x^l)$ 项即是 (1) 中的 O 项. 这样, 必有 $\delta > 0$, 当 $0 < x < \delta$ 时, 数列 $\{y_n\} = \{y_n(x)\}$ 是递减的, 而且 $y_n > 0$, 因此必有极限 $y = \lim_{n\to\infty} y_n \leq x$. 在 (2) 式中取极限, 得到

$$y = y - ay^k + O(y^l).$$

当 δ 充分小时, 只有 $y=0$ 一个解, 因此得到 $y_n=o(1), n\to\infty$.

令 $y_n^{k-1}=z_n$, 则 (2) 式给出

$$z_{n+1}^{\frac{1}{k-1}}=z_n^{\frac{1}{k-1}}-az_n^{\frac{k}{k-1}}+O\big(z_n^{\frac{l}{k-1}}\big),$$

因此

$$z_{n+1}=z_n\left(1-az_n+O\big(z_n^{\frac{l-1}{k-1}}\big)\right)^{k-1}=z_n-a(k-1)z_n^2+O(z_n^3).$$

做变换 $x_n=a(k-1)z_n=a(k-1)y_n^{k-1}$, 上式成为

$$x_{n+1}=x_n-x_n^2+O(x_n^3).$$

由第 4.2 节定理 2 及 $x_n=o(1)$, 推出

$$x_n=\frac{1}{n}+O\left(\frac{\log n}{n^2}\right).$$

回到原来的变量 y_n, 就是

$$\begin{aligned}y_n&=((k-1)a)^{-\frac{1}{k-1}}x_n^{\frac{1}{k-1}}=((k-1)a)^{-\frac{1}{k-1}}\left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{\log n}{n^2}\right)\right)^{\frac{1}{k-1}}\\&=((k-1)a)^{-\frac{1}{k-1}}n^{-\frac{1}{k-1}}\left(1+O\left(\frac{\log n}{n}\right)\right).\end{aligned}$$

这就是要证的结论. □

例 2 设数列 $\{b_n\}$ 满足条件

$$b_{n+1}=b_n+O\left(\frac{b_n^2}{n^2}\right),\quad b_n=o(n),$$

则 $b_n=O(1)$.

解 设 $|b_{n+1}-b_n|\le A\frac{|b_n|^2}{n^2}$. 取 n 充分大, 使得

$$\frac{|b_n|}{n}<1,\quad \frac{8A(|b_n|+A)}{n}<1.$$

为叙述简便, 以下记 $M=|b_n|+A$, 我们有

$$\begin{aligned}
|b_{n+1}| &\le |b_n|+A=M,\\
|b_{n+2}| &\le |b_{n+1}|+\frac{A}{(n+1)^2}|b_{n+1}|^2 \le M+\frac{AM^2}{(n+1)^2},\\
|b_{n+3}| &\le |b_{n+2}|+\frac{A}{(n+2)^2}|b_{n+2}|^2\\
&\le M+\frac{AM^2}{(n+1)^2}+\frac{A}{(n+2)^2}\left(M+\frac{AM^2}{(n+1)^2}\right)^2\\
&\le M+\frac{AM^2}{(n+1)^2}+\frac{A}{(n+2)^2}(M+M)^2\\
&\le M+4AM^2\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}\right)\\
&\le M+\frac{8AM^2}{n}\le 2M,\\
|b_{n+4}| &\le |b_{n+3}|+\frac{A}{(n+3)^2}|b_{n+3}|^2\\
&\le M+4AM^2\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+3)^2}\right)\le 2M.
\end{aligned}$$

照此方法递推下去, 不难得到, 对于 $k\ge 5$, 有

$$\begin{aligned}
|b_{n+k+1}| &\le M+4AM^2\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+k)^2}\right)\\
&\le M+\frac{4AM^2}{n}\le 2M.
\end{aligned}$$

由此立即得到

$$b_n=O(1).$$ □

例 3 设 $0<x_0<\pi$, 令

$$x_1=\sin x_0,\ x_2=\sin x_1,\ \cdots,\ x_n=\sin x_{n-1},\ \cdots,$$

则

$$x_n=\sqrt{\frac{3}{n}}\left\{1-\frac{3}{10}\frac{\log n}{n}-\frac{C}{2n}+\frac{\alpha\log^2 n+\beta\log n+\gamma}{n^2}+O\left(\frac{\log^3 n}{n^3}\right)\right\},\tag{3}$$

其中 $\alpha=\frac{27}{200},\beta=\frac{9}{20}C-\frac{9}{50},\gamma=\frac{3}{8}C^2-\frac{3}{10}C+\frac{79}{100},C=C(x_0)$, 且

$$\lim_{x_0\to 0+}C(x_0)=+\infty.$$

解 对于固定的 $x_0,0<x_0<\pi$, 显然有 $x_n\to 0\ (n\to\infty)$. 由 $\sin x$ 的幂级数展开式, 有

$$x_{n+1}=\sin x_n=x_n-\frac{1}{6}x_n^3+\frac{1}{120}x_n^5+O(x_n^7).$$

令

$$\omega_n=\frac{3}{x_n^2}, \tag{4}$$

则 $\omega_n\to\infty$, 且

$$\sqrt{\frac{3}{\omega_{n+1}}}=\left(\frac{3}{\omega_n}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{6}\left(\frac{3}{\omega_n}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{120}\left(\frac{3}{\omega_n}\right)^{\frac{5}{2}}+O\left(\omega_n^{\frac{-7}{2}}\right).$$

因此

$$\begin{aligned}\omega_{n+1}&=\omega_n\left(1-\frac{1}{2}\frac{1}{\omega_n}+\frac{3}{40}\frac{1}{\omega_n^2}+O\left(\frac{1}{\omega_n^3}\right)\right)^{-2}\\&=\omega_n\left\{\left(1+2\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\omega_n}-\frac{3}{40}\frac{1}{\omega_n^2}+O\left(\frac{1}{\omega_n^3}\right)\right)\right.\right.\\&\quad\left.\left.+3\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\omega_n}-\frac{3}{40}\frac{1}{\omega_n^2}+O\left(\frac{1}{\omega_n^3}\right)\right)^2+O\left(\frac{1}{\omega_n^3}\right)\right\}\\&=\omega_n+1+\frac{3}{5}\frac{1}{\omega_n}+O\left(\frac{1}{\omega^2}\right),\end{aligned}$$

即

$$\omega_{n+1}-\omega_n=1+\frac{3}{5}\frac{1}{\omega_n}+O\left(\frac{1}{\omega_n^2}\right). \tag{5}$$

由于 $\omega_n\to\infty$, 所以, 当 $n\geq n_0$ 时, $\omega_{n+1}-\omega_n\geq\frac{1}{2}$, 因而必有正数 m, 使得 $\omega_n\geq mn$, 即 $\omega_n^{-1}=O\left(\frac{1}{n}\right)$. 由 (5) 式, 得到

$$\omega_n=n+O(\log n). \tag{6}$$

另一方面, 当 $0<x<1$, 有级数展开式

$$\frac{1}{(\sin x)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-4)^k(1-2k)\frac{B_{2k}}{(2k)!}x^{2k-2},$$

其中 $B_{2k}=(2k)!\,b_{2k}(0)$ 是 Bernoulli 数 ($b_k(x)$ 的定义见第 3.2 节), 利用关系式 $x_{n+1}=\sin x_n$ 以及代换 (4), 我们得到

$$\begin{aligned}\omega_{n+1}&=\omega_n\sum_{k=0}^{\infty}\omega_n^{-k}(1-2k)(-12)^k\frac{B_{2k}}{(2k)!}\\&=\omega_n+1+\frac{3}{5}\frac{1}{\omega_n}+\frac{2}{7}\frac{1}{\omega_n^2}+\frac{3}{25}\frac{1}{\omega_n^3}+\frac{18}{385}\frac{1}{\omega_n^4}+O\left(\frac{1}{\omega_n^5}\right).\end{aligned}\tag{7}$$

由此及 (6) 式, 得到

$$\begin{aligned}\omega_{n+1}-\omega_n&=1+\frac{3}{5}(n+O(\log n))^{-1}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\\&=1+\frac{3}{5}\frac{1}{n}+O\left(\frac{\log n}{n^2}\right).\end{aligned}$$

因此, 若令 $\omega_n=n+\frac{3}{5}\log n+r_n$, 则

$$r_{n+1}-r_n=O\left(\frac{\log n}{n^2}\right),$$

可见级数 $\sum(r_{n+1}-r_n)$ 收敛, 于是

$$\begin{aligned}r_n&=\sum_{k=1}^{n-1}(r_{k+1}-r_k)+r_1=C-\sum_{k=n}^{\infty}(r_{k+1}-r_k)\\&=C+O(1)\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\log k}{k^2}=C+O\left(\frac{\log n}{n}\right),\end{aligned}$$

从而

$$\omega_n=n+\frac{3}{5}\log n+C+\lambda_n,\quad \lambda_n=O\left(\frac{\log n}{n}\right),$$

其中 C 是常数. 将上式代入 (7) 式, 就有

$$\begin{aligned}&n+1+\frac{3}{5}\log(n+1)+C+\lambda_{n+1}\\&=n+\frac{3}{5}\log n+C+\lambda_n+1+\frac{3}{5}\left(n+\frac{3}{5}\log n+C+\lambda_n\right)^{-1}\\&\quad+\frac{2}{7}\left(n+\frac{3}{5}\log n+C+\lambda_n\right)^{-2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\lambda_{n+1}-\lambda_n &= -\frac{3}{5}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{3}{5}\left(n+\frac{3}{5}\log n+C+\lambda_n\right)^{-1}\\ &\quad+\frac{2}{7}\left(n+\frac{3}{5}\log n+C+\lambda_n\right)^{-2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\\ &= -\frac{3}{5}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &\quad+\frac{3}{5}\frac{1}{n}\left(1-\frac{3}{5}\frac{\log n}{n}-\frac{C}{n}+O\left(\frac{\log^2 n}{n^2}\right)\right)\\ &\quad+\frac{2}{7n^2}\left(1+O\left(\frac{\log n}{n}\right)\right)\\ &= \frac{3}{10n^2}-\frac{9}{25}\frac{\log n}{n^2}-\frac{3C}{5n^2}+\frac{2}{7n^2}+O\left(\frac{\log^2 n}{n^3}\right)\\ &= -\frac{9}{25}\frac{\log n}{n^2}+\frac{41-42C}{70n^2}+O\left(\frac{\log^2 n}{n^3}\right).\end{aligned}$$

由第 4.2 节定理 2, 注意到 $\lambda_n = O(\frac{\log n}{n})$, 可以推出

$$\lambda_n = \frac{9}{25}\frac{\log n}{n}+\frac{-79+210C}{350n}+O\left(\frac{\log^2 n}{n^2}\right),$$

从而

$$\begin{aligned}\omega_n &= n+\frac{3}{5}\log n+C+\frac{9}{25}\frac{\log n}{n}+\frac{-79+210C}{350n}+O\left(\frac{\log^2 n}{n^2}\right),\\ x_n &= \sqrt{3}\omega_n^{-\frac{1}{2}}\\ &= \sqrt{3}\left(n+\frac{3}{5}\log n+C+\frac{9}{25}\frac{\log n}{n}+\frac{-79+210C}{350n}+O\left(\frac{\log^2 n}{n^2}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\\ &= \sqrt{\frac{3}{n}}\left(1-\frac{3}{10}\frac{\log n}{n}-\frac{C}{2n}+\frac{\alpha\log^2 n+\beta\log n+\gamma}{n^2}+O\left(\frac{\log^2 n}{n^3}\right)\right),\end{aligned}$$

这就证明了 (3) 式.

下面, 我们证明: 当 $x_0\to 0$ 时, $C=C(x_0)$ 是一个无穷大量.

由 (3) 式可以得到

$$x_n = \sqrt{\frac{3}{n}}\left(1-\frac{3}{10}\frac{\log n}{n}-\frac{1}{2n}C(x_0)+O\left(\frac{\log^2 n}{n^2}\right)\right). \tag{8}$$

因此,

$$C(x_0)=\lim_{n\to\infty}\left(2n-\frac{3}{5}\log n-2x_n n^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{3}}\right). \tag{9}$$

由 x_n 的定义可知, 若 $0<x_0<x_0'<\frac{\pi}{2}$, 则

$$x_n=\sin_n x_0<\sin_n x_0'=x_n',$$

所以,

$$C(x_0)>C(x_0'),\quad 0<x_0<x_0'<\frac{\pi}{2}. \tag{10}$$

另一方面, 由 $x_{n+1}=\sin x_n=\sin_n(\sin x_0)$ 及 (8) 式, 有

$$x_{n+1}=\sqrt{\frac{3}{n}}\left\{1-\frac{3}{10}\frac{\log n}{n}-\frac{C(\sin x_0)}{2n}+O\left(\frac{\log n}{n^2}\right)\right\},$$

又有

$$x_{n+1}-x_n=\sin x_n-x_n=-\frac{1}{6}x_n^3+O(x_n^5)=-\frac{1}{2}\sqrt{3}n^{-\frac{3}{2}}+O\left(n^{-\frac{5}{2}}\log^2 n\right).$$

比较上面的这两个等式, 得到 $C(x_0)$ 应该满足函数方程

$$C(\sin x_0)-C(x_0)=1. \tag{11}$$

但是, (10) 式表明, $C(x_0)$ 是 x_0 的减函数, 所以当 $x_0\to 0$ 时, $C(x_0)$ 应该有确定的极限 $\tilde{C}$; 它不可能是有限数, 否则与 (11) 式矛盾. 这样, 就证明了

$$\lim_{x_0\to 0}C(x_0)=+\infty. \qquad \square$$

例 4 对于 $0<x_0<\pi$, 引用例 3 的记号, 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$ 的收敛性.

解 由例 3 知道,

$$x_n\sim\sqrt{\frac{3}{n}}\quad(n\to\infty);\quad x_n>0\quad(n\geq 1).$$

因此, 所述级数当 $\alpha>2$ 时收敛, 当 $\alpha\leq 2$ 时发散. $\square$

习 题

1. 设 $x = f(x)$ 满足函数方程 $xe^x = \frac{1}{t}$. 证明: 当 $t \to \infty$, 对任意的自然数 m, 有

$$x = \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}k^{k-1}}{k!} t^{-k} + O\left(\frac{1}{t^{m+1}}\right).$$

2. 求函数方程 $t = x(1+x)^m$ 的满足条件 $t = 0, x = 0$ 的根 $x = x(t)$ 的渐近表示.

3. 设 $\{a_n\}$ 满足条件:

(1) $a_{n+1} - a_n = O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{|a_n|^2}{n^2}\right)$;

(2) $a_n = o(n), n \to \infty$,

则 $a_n = O(\log n)$.

4. 证明以下结论:

(1) 若 $x = ye^{(\log y)^a}$, 则对于 $0 < a < 1$ 有

$$y = xe^{-(\log x)^a}(1 + o(1)), \quad x \to \infty;$$

(2) 若 $x = ye^{(\log y)^{\frac{5}{8}}}$, 则

$$y = xe^{-(\log y)^{\frac{5}{8}} + \frac{5}{8}(\log x)^{\frac{1}{4}}}(1 + o(1)), \quad x \to \infty;$$

(3) 记 $\log_2 x = \log\log x, \log_3 x = \log\log\log x, \cdots, \log_k x = \overbrace{\log\log\cdots\log}^{k\text{个}} x$. 设 $m, m_1, \cdots, m_r$ 是自然数. 若 $x = y^m(\log y)^{m_1}(\log_2 y)^{m_2}\cdots(\log_r y)^{m_r}$, 则当 $x \to \infty$ 时,

$$y = m^{\frac{m_1}{m}} x^{\frac{1}{m}} (\log x)^{-\frac{m_1}{m}} (\log_2 x)^{-\frac{m_2}{m}} \cdots (\log_r x)^{-\frac{m_r}{m}} (1 + o(1));$$

(4) 若 $x = \frac{y}{\log y}$, 则当 $x \to \infty$ 时,

$$y = x\left(\log x + \log\log x + \frac{\log\log x}{\log x}\right) + O\left(\frac{x(\log\log x)^2}{\log^2 x}\right).$$

5. 设 $a \geq 0$, $c > 0$, $f'(t) > -ct^{a-1}$ $(t > 1)$, 又设

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{a+1} x^{a+1}(1 + o(1)), \quad x \to \infty,$$

则当 $x \to \infty$ 时, $f(x) \sim x^2$.

第五章

分部积分法与 Laplace 方法

本章主要介绍两个常用的处理积分估计的方法: 分部积分法与 Laplace 方法.

5.1 分部积分法

对于定义在区间 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$, 使用下面的记号 (假定下面各表达式是有意义的):

$$\left.\begin{aligned} f_0(x)=f(x), \quad f_n(x)=\frac{d}{dx}f_{n-1}(x), \quad n=1,2,\cdots, \\ f_{-n}(x)=\int_A^x f_{-n+1}(t)dt, \quad n=1,2,\cdots, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

其中 A 是任意常数.

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 定义在有限区间 $[a,b]$ 上, $g^{(N)}(x)$ 存在, 且在 $[a,b]$ 上可积, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则由分部积分公式可得到

$$\int_a^b g(x)f(x)dx=\sum_{n=0}^{N-1}S_n+R_N, \tag{2}$$

其中

$$S_n=(-1)^n(f_{-n-1}(b)g_n(b)-f_{-n-1}(a)g_n(a)),$$
$$R_n=(-1)^n\int_a^b f_{-n}(x)g_n(x)dx.$$

如果 $[a,b]$ 是无穷区间, 那么, 若 (2) 式中各个积分存在, 而且当 $x \to a, x \to b$ 时所有 $f_{-n-1}(x)g_n(x)$ 的极限也存在, 则 (1) 式仍旧成立.

定理 1 设 $f_{-N}(x)g_N(x)$ 以及 $f_{-N-1}(x)g_{N+1}(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒正 (或恒负), 则 R_N 与 S_N 符号相同, 且 $|R_N| \leq |S_N|$.

证明 对 R_N 的积分表达式再做一次分部积分, 得到

$$R_N = S_N + R_{N+1}.$$

由假设条件, 可知 R_N 与 R_{N+1} 符号相反, 所以必有

$$|R_N| \leq |S_N|. \qquad \square$$

定理 2 若 $|f_{-N-1}(x)|$ 是增函数, $g_N(x)$ 与 $g_{N+1}(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号, 且 $g_N(x)g_{N+1}(x) \geq 0$, 则

$$|R_N| \leq 2|S_N|.$$

若 $|f_{-N-1}(x)|$ 是减函数, 则当 $g_N(x)$ 与 $g_{N+1}(x)$ 在 $[a,b]$ 上符号不变, 且 $g_N(x)g_{N+1}(x) \leq 0$ 时, 上面的不等式仍旧成立.

证明 设 $|f_{-N-1}(x)|$ 是增函数, 不妨设 $g_N(x) \geq 0$, 且 $g_{N+1}(x) \geq 0$, 此时

$$\begin{aligned} |R_{N+1}(x)| &\leq |f_{-N-1}(b)|(g_N(b) - g_N(a)) \\ &\leq |f_{-N-1}(b)g_N(b)| - |f_{-N-1}(a)g_N(a)| \\ &\leq |f_{-N-1}(b)g_N(b) - f_{-N-1}(a)g_N(a)| = |S_N|. \end{aligned}$$

对于 $|f_{-N-1}(x)|$ 是减函数的情况, 可同样地予以证明. $\square$

已经证明的这两个定理, 所需要的条件相当苛刻, 而给出的结果又相当浅显, 因此, 无论如何, 不能对它们有过多的期望. 但是, 它们所体现的使用分部积分法以取得较精细估计的思路对于许多问题的解决是有益的.

例 1 考虑函数

$$F(x)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}}{1+xt}dt$$

当 $x\to\infty$ 时的阶.

解 逐次应用分部积分法, 我们得到, 对于任意的自然数 N,

$$\begin{aligned}F(x)&=1-x\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}}{(1+xt)^2}dt=1-x+2x^2\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}}{(1+xt)^3}dt\\&=\cdots\\&=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n n!x^n+(-1)^{N+1}(N+1)!x^{N+1}\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}}{(1+xt)^{N+2}}dt.\end{aligned}$$

对于 $x\geq 0$, 显然有

$$\begin{aligned}|R_{N+1}|&=(N+1)!x^{N+1}\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}}{(1+xt)^{N+2}}dt\\&\leq(N+1)!x^{N+1}\int_0^{\infty}e^{-t}dt\\&=(N+1)!x^{N+1}.\end{aligned}$$

□

例 2 考虑 "不完全 Γ-函数"

$$\Gamma(\alpha,x)=\int_0^{x}e^{-t}t^{\alpha-1}dt.$$

解 若 x 很小, 那么, 显然可以利用 e^{-t} 的幂级数展开式, 并交换积分与无穷级数求和的次序, 得到

$$\Gamma(\alpha,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{x}\frac{(-t)^n}{n!}t^{\alpha-1}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{x^{n+\alpha}}{n+\alpha}.$$

对于小的 x 值, 上式右端级数是一个很有实用价值的表达式, 因为它的部分和能够迅速而精确地逼近 $\Gamma(\alpha,x)$, 但是, 当 x 的数值较大时, 这个级数的部分和对 $\Gamma(\alpha,x)$ 的逼近是十分缓慢的, 因而实用价值很小.

令

$$\tilde{\Gamma}(\alpha,x)=\int_x^{\infty}e^{-t}t^{\alpha-1}dt.$$

利用分部积分公式, 得到

$$\tilde{\Gamma}(\alpha,x)=e^{-x}x^{\alpha-1}+(\alpha-1)\tilde{\Gamma}(\alpha-1,x).$$

当 $n>\alpha-1$ 时, 逐次使用分部积分公式, 推得

$$\tilde{\Gamma}(\alpha,x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-k+1)}e^{-x}x^{\alpha-k}+\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-n)}\tilde{\Gamma}(\alpha-n,x).$$

上式右端的第二项, 当 $x>0$ 时, 有

$$\begin{aligned}\left|\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-n)}\int_x^\infty e^{-t}t^{\alpha-n-1}dt\right|&<\left|\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-n)}\right|x^{\alpha-n-1}\int_x^\infty e^{-t}dt\\&=\left|\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-n)}\right|e^{-x}x^{\alpha-n-1}.\end{aligned}$$

于是得到: 对于自然数 n, $n>\alpha-1$, 当 $x\to\infty$ 时, 有

$$\tilde{\Gamma}(\alpha,x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-k+1)}e^{-x}x^{\alpha-k}+O\left(\frac{e^{-x}}{x^{n+1-\alpha}}\right).$$

因此得到在同样条件下对 $\Gamma(\alpha,x)$ 的估计:

$$\Gamma(\alpha,x)=\Gamma(\alpha)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-k+1)}e^{-x}x^{\alpha-K}+O\left(\frac{e^{-x}}{x^{n+1-\alpha}}\right).$$

作为一个特例, 在概率论中具有重要地位的余误差函数

$$\int_x^\infty e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2},x^2\right)$$

当 $x\to\infty$ 时, 有估计式

$$\begin{aligned}\int_x^\infty e^{-t^2}dt&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-x^2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-k\right)x^{2k-1}}+O\left(\frac{e^{-x^2}}{x^{2n+1}}\right)\\&=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-k\right)x^{2k-1}}+O\left(\frac{e^{-x^2}}{x^{2n+1}}\right),\end{aligned}$$

其中 n 是任意的自然数. □

例 3 考虑

$$F(x,\alpha)=\int_x^{\infty}\frac{e^{it}}{t^{\alpha}}dt$$

当 $x\to\infty$ 时的阶, 其中 $e^{it}=\cos t+i\sin t,\alpha>0$.

解 逐次应用分部积分公式, 得到

$$\begin{aligned}F(x,\alpha)&=\frac{ie^{ix}}{x^{\alpha}}-i\alpha F(x,\alpha+1)\\&=\frac{ie^{ix}}{x^{\alpha}}+\frac{\alpha e^{ix}}{x^{\alpha+1}}-\alpha(\alpha+1)F(x,\alpha+2)\\&=\cdots\\&=\frac{ie^{ix}}{x^{\alpha}}\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)(ix)^k}+\frac{1}{i^{n+1}}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha)}F(x,\alpha+n+1).\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\left|\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha)}F(x,\alpha+n+1)\right|&=\left|\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha)}\int_x^{\infty}\frac{e^{it}}{t^{\alpha+n+1}}dt\right|\\&\le\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha)}\int_x^{\infty}\frac{dt}{t^{\alpha+n+1}}\\&=\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{x^{\alpha+n}}.\end{aligned}$$

因此, 对任意固定的 n, 当 $x\to\infty$ 时, 都有

$$F(x,\alpha)=\frac{ie^{ix}}{x^{\alpha}}\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)(ix)^k}+O\left(\frac{1}{x^{n+\alpha}}\right).$$ □

显然可以对

$$C(x,\alpha)=\int_x^{\infty}\frac{\cos t}{t^{\alpha}}dt,\quad S(x,\alpha)=\int_x^{\infty}\frac{\sin t}{t^{\alpha}}dt$$

给出相应的估计式, 特别地, 可以对

$$\begin{aligned}\int_x^{\infty}\cos\theta^2d\theta&=\int_{x^2}^{\infty}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt,\\\int_x^{\infty}\sin\theta^2d\theta&=\int_{x^2}^{\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt\end{aligned}$$

做出估计, 这是物理光学中常用到的两个积分.

5.2 Laplace 方法

我们要对形如

$$\int_a^b \varphi(x)e^{nh(x)}dx \tag{1}$$

的积分表达式进行估计.

粗略地说, 当 $x \to \infty$ 时, 无穷大量 e^x 的增长速度 "相当快", 因此, 如果函数 $h(x)$ 在 (a,b) 中某一点 x_0 达到最大值, 那么, 由于 $h(x_0) - h(x) > 0$, $e^{n(h(x_0)-h(x))}$ 的增长也是 "相当快" 的, 即对于 x_0 的任一邻域外的 x 值而言, $e^{nh(x)}$ 相对于 $e^{nh(x_0)}$ 是可以 "忽略不计" 的. 这就是 Laplace 方法的基本思想.

首先, 我们来证明两个关于离散和的结果.

定理 1 设 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 及 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是任意的两组正数, 则

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p_1a_1^n + p_2a_2^n + \cdots + p_ka_k^n} = \max_{1\le l\le k}\{a_l\}.$$

证明 设 $a_m = \max\{a_l\}$, $p = \max\{p_l\}$, 则

$$p_m a_m^n \le \sum_{l=1}^{k} p_l a_l^n \le kpa_m^n.$$

由此, 并利用 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, 得到

$$\begin{aligned} a_m &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p_m a_m^n} \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p_1a_1^n + p_2a_2^n + \cdots + p_ka_k^n} \\ &\le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{kpa_m^n} = a_m. \end{aligned}$$

□

定理 2 设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 及 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是任意的两组正数, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_1a_1^{n+1} + p_2a_2^{n+1} + \cdots + p_ka_k^{n+1}}{p_1a_1^n + p_2a_2^n + \cdots + p_ka_k^n} = \max\{a_l\}.$$

证明 不妨假定所有的 a_l $(1 \le l \le k)$ 互不相同, 且 $a_1 = \max\{a_l\}$,

则

$$\frac{p_1a_1^{n+1}+p_2a_2^{n+1}+\cdots+p_ka_k^{n+1}}{p_1a_1^n+p_2a_2^n+\cdots+p_ka_k^n}$$
$$=\frac{p_1a_1^{n+1}\left(1+\dfrac{p_2}{p_1}\left(\dfrac{a_2}{a_1}\right)^{n+1}+\cdots+\dfrac{p_k}{p_1}\left(\dfrac{a_k}{a_1}\right)^{n+1}\right)}{p_1a_1^n\left(1+\dfrac{p_2}{p_1}\left(\dfrac{a_2}{a_1}\right)^{n}+\cdots+\dfrac{p_k}{p_1}\left(\dfrac{a_k}{a_1}\right)^{n}\right)}.$$

由于 $\frac{a_l}{a_1}<1$ $(2\le l\le k)$, 所以

$$\left(\frac{a_l}{a_1}\right)^n=o(1),\quad n\to\infty, 2\le l\le k,$$
$$\frac{p_1a_1^{n+1}+p_2a_2^{n+1}+\cdots+p_ka_k^{n+1}}{p_1a_1^n+p_2a_2^n+\cdots+p_ka_k^n}=a_1\frac{1+o(1)}{1+o(1)}\to a_1,\quad n\to\infty.\quad\square$$

与定理 1 及定理 2 相应的, 有下面的定理.

定理 1′ 设 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的正值连续函数, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b\varphi(x)(f(x))^n dx}=\max_{x\in[a,b]}f(x).$$

定理 2′ 在定理 1′ 的条件下, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\displaystyle\int_a^b\varphi(x)(f(x))^{n+1}dx}{\displaystyle\int_a^b\varphi(x)(f(x))^n dx}=\max_{x\in[a,b]}f(x).$$

这两个定理的证明与定理 1 及定理 2 完全类似.

例 1 设有多项式

$$p(x)=a(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_k-x),\quad a_i>0,\ 1\le i\le k.$$

若有幂级数展开式

$$-\frac{p'(x)}{p(x)}=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+\cdots,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{c_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n-1}}{c_n}.$$

解 有

$$\frac{p'(x)}{p(x)}=\frac{d}{dx}\log p(x)=\frac{1}{x-a_1}+\frac{1}{x-a_2}+\cdots+\frac{1}{x-a_k},$$

因此, 对于 $|x|<\min\{a_i\}$, 有级数展开式

$$-\frac{p'(x)}{p(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n,$$

$$c_n=\frac{1}{a_1^{n+1}}+\frac{1}{a_2^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{a_k^{n+1}}.$$

由定理 1 得到

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{c_n})^{-1}=\frac{1}{\max\limits_{1\le l\le k}\left\{\dfrac{1}{a_l}\right\}}=\min_{1\le l\le k}\{a_l\}.$$

由定理 2 得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n-1}}{c_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{a_1^n}+\dfrac{1}{a_2^n}+\cdots+\dfrac{1}{a_k^n}}{\dfrac{1}{a_1^{n+1}}+\dfrac{1}{a_2^{n+1}}+\cdots+\dfrac{1}{a_k^{n+1}}}=\frac{1}{\max\limits_{1\le l\le k}\left\{\dfrac{1}{a_l}\right\}}=\min_{1\le l\le k}\{a_l\}.$$

由以上二式, 即可得到所需证的结果. □

在定理 1′ 中, 给出了对于 (1) 型积分的相当粗糙的估计. 如果对于 $h(x)$ 的性质有更多的了解, 那么就可以得到更为精确的估计.

定理 3 (Laplace) 设 $\varphi(x)$ 与 $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义, 且满足条件:

(1) 对于任意的 $n\ge n_0$, $\varphi(x)e^{nh(x)}$ 在 $[a,b]$ 上可积;

(2) $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上只有一个最大值点 $x=\xi$, $\xi\in(a,b)$. 而且在任何不包含 ξ 的闭区间 $[\alpha,\beta]$ 内, 有 $\sup_{x\in[\alpha,\beta]}h(x)<h(\xi)$;

(3) 在 ξ 的某一邻域内, $h''(x)$ 连续, $h''(\xi)<0$;

(4) $\varphi(\xi)\ne0$, $\varphi(x)$ 在 $x=\xi$ 连续.

则当 $n \to \infty$ 时, 有

$$\int_a^b \varphi(x) e^{nh(x)} dx \sim \varphi(\xi) \sqrt{-\frac{2\pi}{nh''(\xi)}} e^{nh(\xi)}. \tag{2}$$

证明 不妨假定 $n_0 = 0$. 事实上, 若对于 $n_0 = 0$ 的情形已经证明, 那么, 在 $n_0 \neq 0$ 时, 令 $\psi(x) = \varphi(x) e^{n_0 h(x)}$, 则 $\psi(x)$ 满足定理的条件 (对应的 $n_0 = 0$), 于是

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \varphi(x) e^{(n+n_0)h(x)} dx = \int_a^b \psi(x) e^{nh(x)} dx \\
&\sim \psi(\xi) \sqrt{-\frac{2\pi}{nh''(\xi)}} e^{nh(\xi)} = \varphi(\xi) \sqrt{-\frac{2\pi}{nh''(\xi)}} e^{(n+n_0)h(\xi)} \\
&\sim \varphi(\xi) \sqrt{-\frac{2\pi}{(n+n_0)h''(\xi)}} e^{(n+n_0)h(\xi)}.
\end{aligned}$$

因此, 以下假定 $n_0 = 0$.

选取 $\delta > 0$ 充分小, 使得

$$h''(x) \leq -k < 0, \quad x \in [\xi - \delta, \xi + \delta].$$

于是

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \varphi(x) e^{n(h(x)-h(\xi))} dx \\
&= \left(\int_a^{\xi-\delta} + \int_{\xi-\delta}^{\xi-n^{-\frac{2}{5}}} + \int_{\xi-n^{-\frac{2}{5}}}^{\xi+n^{-\frac{2}{5}}} + \int_{\xi+n^{-\frac{2}{5}}}^{\xi+\delta} + \int_{\xi+\delta}^{b} \right) \varphi(x) e^{n(h(x)-h(\xi))} dx \\
&= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5.
\end{aligned}$$

设 $m' = \sup_{x \in [a, \xi-\delta]} h(x) - h(\xi) < 0$, 则

$$I_1 = \int_a^{\xi-\delta} \varphi(x) e^{n(h(x)-h(\xi))} dx = O(1) \int_a^{\xi-\delta} |\varphi(x)| e^{nm'} dx = O(e^{nm'}).$$

同理, 若 $m'' = \sup_{x \in [\xi+\delta, b]} h(x) - h(\xi) < 0$, 则

$$I_5 = O(e^{nm''}).$$

由 Tayler 定理知,

$$h(x)-h(\xi)=\frac{1}{2}h''(\eta)(x-\xi)^2,\quad \eta=\xi+\theta(x-\xi),\quad 0<\theta<1,\tag{3}$$

因此

$$\begin{aligned}I_2&=\int_{\xi-\delta}^{\xi-n^{-\frac{2}{5}}}\varphi(x)e^{n(h(x)-h(\xi))}dx\le\int_{\xi-\delta}^{\xi-n^{-\frac{2}{5}}}|\varphi(x)|e^{-n\frac{k}{2}(x-\xi)^2}dx\\&\le\int_{\xi-\delta}^{\xi-n^{-\frac{2}{5}}}|\varphi(x)|e^{-\frac{k}{2}n^{\frac{1}{5}}}dx=O\left(e^{-\frac{k}{2}n^{\frac{1}{5}}}\right).\end{aligned}$$

同理可得到

$$I_4=O(e^{-\frac{k}{2}n^{\frac{1}{5}}}).$$

下面, 估计 I_3.

当 $n\to\infty$ 时, 有

$$\begin{aligned}I_3&=\int_{\xi-n^{-\frac{2}{5}}}^{\xi+n^{-\frac{2}{5}}}\varphi(x)e^{n(h(x)-h(\xi))}dx\\&=\varphi(\xi)(1+o(1))\int_{\xi-n^{-\frac{2}{5}}}^{\xi+n^{-\frac{2}{5}}}e^{n(h(x)-h(\xi))}dx.\end{aligned}$$

令

$$a=\min_{\xi\in[\xi-n^{-\frac{2}{5}},\xi+n^{-\frac{2}{5}}]}h''(x),\quad A=\max_{\xi\in[\xi-n^{-\frac{2}{5}},\xi+n^{-\frac{2}{5}}]}h''(x),$$

则 $a\le A<0$, 而且

$$a=h''(\xi)(1+o(1)),\quad A=h''(\xi)(1+o(1)).$$

记 $\varepsilon_n=n^{-\frac{2}{5}}$, 由 (3) 式得到

$$\int_{\xi-\varepsilon_n}^{\xi+\varepsilon_n}e^{\frac{n}{2}a(x-\xi)^2}dx\le\int_{\xi-\varepsilon_n}^{\xi+\varepsilon_n}e^{n(h(x)-h(\xi))}dx\le\int_{\xi-\varepsilon_n}^{\xi+\varepsilon_n}e^{\frac{n}{2}A(x-\varepsilon)^2}dx.$$

对于上式左端的积分, 有

$$\begin{aligned}
&\int_{\xi-\varepsilon_n}^{\xi+\varepsilon_n} e^{\frac{1}{2}na(x-\xi)^2}dx \\
&= \int_{-\sqrt{-\frac{1}{2}a}n^{\frac{1}{10}}}^{\sqrt{-\frac{1}{2}a}n^{\frac{1}{10}}} e^{-y^2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-na}}dy \\
&= \sqrt{-\frac{2}{na}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy - \int_{\sqrt{-\frac{a}{2}}n^{\frac{1}{10}}}^{\infty} e^{-y^2}dy - \int_{-\infty}^{-\sqrt{-\frac{a}{2}}n^{\frac{1}{10}}} e^{-y^2}dy\right) \\
&= \sqrt{-\frac{2}{na}}(1+o(1))\sqrt{\pi} = \sqrt{-\frac{2\pi}{nh''(\xi)}}(1+o(1)), \quad n\to\infty.
\end{aligned}$$

同理可以得到

$$\int_{\xi-\varepsilon_n}^{\xi+\varepsilon_n} e^{\frac{1}{2}nA(x-\xi)^2}dx = \sqrt{-\frac{2\pi}{nh''(\xi)}}(1+o(1)), \quad n\to\infty.$$

因此,

$$I_3 = \varphi(\xi)(1+o(1))\int_{\xi-\varepsilon_n}^{\xi+\varepsilon_n} e^{n(h(x)-h(\xi))}dx = \varphi(\xi)\sqrt{-\frac{2\pi}{nh''(\xi)}}(1+o(1)).$$

综合以上结果, 得到

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \varphi(x)e^{n(h(x)-h(\xi))}dx \\
&= \varphi(\xi)\sqrt{-\frac{2\pi}{nh''(\xi)}}(1+o(1)+O(e^{nm'})+O(e^{nm''})+O(e^{-\frac{k}{2}n^{\frac{1}{5}}}) \\
&= \varphi(\xi)\sqrt{-\frac{2\pi}{nh''(\xi)}}(1+o(1)), \quad n\to\infty. \qquad \square
\end{aligned}$$

由定理的证明过程可以看出, 若 a 或 b 为 ∞, 则只要 $|\varphi(x)e^{nh(x)}|$ $(n\geq n_0)$ 在相应的无穷区间上可积, 定理结论仍然成立.

作为定理 3 的一个简单应用, 我们再次推导 Stirling 公式.

例 2 我们知道

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty y^n e^{-y}dy = n^{n+1}\int_0^\infty (xe^{-x})^n dx$$

取

$$a=0,\quad b=\infty,\quad \varphi(x)=1,\quad h(x)=-x+\log x,\quad \xi=1,$$

由定理 3 得到

$$n!\sim n^{n+1}\sqrt{\frac{2\pi}{n}}e^{-n}=n^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}e^{-n},\quad n\to\infty,$$

即 Stirling 公式.

在定理 3 中, $h(x)$ 在内点 ξ 处达到最大值, 因而 $h'(\xi)=0, h''(\xi)<0$ 的假设是很自然的. 但是, 我们却经常遇到 $h(x)$ 在某个端点达到最大值的情形. 这时, $h'(\xi)$ 就不一定为 0; 如果 $h(x)$ 在端点 a 达到最大值, 则 $h'(a)\leq 0$; 若在端点 b 达到最大值, 则 $h'(b)\geq 0$. 下面来讨论这些情形.

类似于定理 3 的证明, 可以容易地得到下面的定理 4.

定理 4 设 $\varphi(x)$ 与 $h(x)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上, 满足下列条件:

(1) 对于任意整数 $n\geq n_0$, $\varphi(x)e^{nh(x)}$ 在 $[a,b]$ 上可积;

(2) $h(x)$ 在点 $x=a$ 达到最大值, 而且对于任何区间 $[\alpha,b]$ $(\alpha>a)$, 都有

$$\sup_{x\in[\alpha,b]}h(x)<h(a);$$

(3) 存在 $\eta>0$, 使得 $h''(x)$ 与 $\varphi(x)$ 在 $[a,a+\eta]$ 内是连续函数;

(4) $h'(a)=0, h''(a)<0, \varphi(a)\neq 0$.

则当 $n\to\infty$ 时, 有

$$\int_a^b\varphi(x)e^{nh(x)}dx=(1+o(1))\varphi(a)e^{nh(a)}\sqrt{-\frac{\pi}{2nh''(a)}}.$$

对于 $h'(a)\neq 0$ 或 $h'(b)\neq 0$ 的情形, 则有下面的定理:

定理 5 设 $\varphi(x)$ 与 $h(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上, 且满足下列条件:

(1) 对于任意的 $n\geq n_0$, $\varphi(x)e^{nh(x)}$ 在 $[a,b]$ 上可积;

(2) $h(x)$ 在 $x=a$ 达到最大值, 而且对于任意的 $\alpha>a$, 有

$$\sup_{x\in[\alpha,b]}h(x)<h(a);$$

(3) 存在数 $\eta > 0$, $h'(x)$ 与 $\varphi(x)$ 在 $[a, a+\eta]$ 内连续, $h'(a) < 0$, $\varphi(a) \neq 0$. 则当 $n \to \infty$ 时,

$$\int_a^b \varphi(x) e^{nh(x)} dx = -(1+o(1)) \frac{\varphi(a)}{nh'(a)} e^{nh(a)}.$$

证明 不妨设 $n_0 = 0$, 取 $\delta > 0$ 充分小, 使得

$$h'(x) \leq k < 0, \quad x \in [a, a+\delta],$$

则

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(x) e^{nh(x)} dx &= \left(\int_a^{a+\frac{1}{\sqrt{n}}} + \int_{a+\frac{1}{\sqrt{n}}}^{a+\delta} + \int_{a+\delta}^{a+b} \right) \varphi(x) e^{nh(x)} dx \\ &= I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_a^{a+\frac{1}{\sqrt{n}}} \varphi(x) e^{nh(x)} dx = \varphi(a)(1+o(1)) \int_a^{a+\frac{1}{\sqrt{n}}} e^{nh(x)} dx \\ &= \varphi(a) e^{nh(a)} (1+o(1)) \int_a^{a+\frac{1}{\sqrt{n}}} e^{nh'(\eta)(x-a)} dx, \end{aligned}$$

其中 $\eta = a + \theta(x-a)$, $0 < \theta < 1$. 令

$$m = \min_{x \in [a, a+n^{-\frac{1}{2}}]} h'(x), \quad M = \max_{x \in [a, a+n^{-\frac{1}{2}}]} h'(x),$$

则 $m < M < 0$, 且

$$m = (1+o(1))h'(a), \quad M = (1+o(1))h'(a), \quad n \to \infty.$$

当 $n \to \infty$ 时, 我们得到

$$\begin{aligned} \int_a^{a+\frac{1}{\sqrt{n}}} e^{nm(x-a)} dx &= \frac{-1}{nm} \int_0^{-m\sqrt{n}} e^{-y} dy \\ &= \frac{-1}{nm} \left(\int_0^{\infty} e^{-y} dy - \int_{-m\sqrt{n}}^{\infty} e^{-y} dy \right) \\ &= \frac{-1}{nm} (1+o(1)) = -\frac{1}{nh'(a)} (1+o(1)). \end{aligned}$$

同理可知

$$\int_a^{a+\frac{1}{\sqrt{n}}} e^{nM(x-a)}dx = -\frac{1}{nh'(a)}(1+o(1)).$$

由此二式及

$$\int_a^{a+\frac{1}{\sqrt{n}}} e^{nm(x-a)}dx \le \int_a^{a+\frac{1}{\sqrt{n}}} e^{nh'(x)(x-a)}dx \le \int_a^{a+\frac{1}{\sqrt{n}}} e^{nM(x-a)}dx$$

得到

$$I_1 = -\frac{\varphi(a)}{nh'(a)}(1+o(1))e^{nh(a)}.$$

另外, 我们有

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{a+\frac{1}{\sqrt{n}}}^{a+\delta} \varphi(x)e^{nh(x)}dx = e^{nh(a)} \int_{a+\frac{1}{\sqrt{n}}}^{a+\delta} \varphi(x)e^{nh'(\eta)(x-a)}dx \\ &\le e^{nh(a)} \int_{a+\frac{1}{\sqrt{n}}}^{a+\delta} |\varphi(x)|e^{\sqrt{n}k}dx = e^{nh(a)}O(e^{\sqrt{n}k}), \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{a+\delta}^{b} \varphi(x)e^{nh(x)}dx = e^{nh(a)} \int_{a+\delta}^{b} \varphi(x)e^{n(h(x)-h(a))}dx \\ &\le e^{nh(a)} \int_{a+\delta}^{b} |\varphi(x)|e^{nm'}dx = e^{nh(a)}O(e^{nm'}), \end{aligned}$$

其中 $m' = \sup_{x\in[a+\delta,b]} h(x) - h(a) < 0$.

联合以上估计式, 得到

$$\begin{aligned} &\int_a^b \varphi(x)e^{nh(x)}dx \\ &= \varphi(a)e^{nh(a)}\frac{1}{-nh'(a)}(1+o(1)) + e^{nh(a)}(O(e^{\sqrt{n}k}) + O(e^{nm'})) \\ &= -\varphi(a)e^{nh(a)}\frac{1}{nh'(a)}(1+o(1)). \end{aligned}$$

□

例 3 考虑 n 阶 Bessel 函数

$$I_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_a^b e^{t\cos\theta}\cos n\theta d\theta$$

当 $t \to \infty$ 时的阶.

解 利用定理 4, 取

$$\varphi(\theta)=\cos n\theta,\quad h(\theta)=\cos\theta,\quad a=0,$$

得到

$$I_n(t)\sim\sqrt{\frac{\pi}{2t}}e^t,\quad t\to\infty.$$ □

5.3 例题

例 1 证明: 对任意自然数 N, 有

$$\int_x^\infty e^{-t}t^{-k}dt=e^{-x}\left(x^{-k}+\sum_{n=1}^{N}(-1)^n k(k+1)\cdots(k+n-1)x^{-k-n}\right)+O(e^{-x}x^{-k-N-1}).$$

解 逐次实行分部积分, 得到

$$\begin{aligned}\int_x^\infty e^{-t}t^{-k}dt&=e^{-x}x^{-k}+(-k)\int_x^\infty t^{-k-1}e^{-t}dt\\&=e^{-x}(x^{-k}+(-1)kx^{-k-1})+k(k+1)\int_x^\infty t^{-k-2}e^{-t}dt\\&=\cdots\\&=e^{-x}\left(x^{-k}+\sum_{n=1}^{N}(-1)^n k(k+1)\cdots(k+n-1)x^{-k-n}\right)\\&\quad+O(1)\int_x^\infty t^{-k-N-1}e^{-t}dt.\end{aligned}$$

由此及

$$\int_x^\infty t^{-k-N-1}e^{-t}dt=O(e^{-x}x^{-k-N-1}),$$

立即得证. □

例 2 设 $x>0$, 研究

$$F(x)=\int_0^\infty e^{-t}\frac{dt}{t+x}$$

当 $x\to\infty$ 的性质.

解 由逐次分部积分, 不难得到

$$F(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}+(-1)^n n!\int_0^\infty e^{-t}\frac{dt}{(t+x)^{n+1}}$$
$$=F_n(x)+R_n(x).$$

显然

$$0<(-1)^n R_n(x)=n!\int_0^\infty e^{-t}\frac{dt}{(t+x)^{n+1}}<\frac{n!}{x^{n+1}},$$

即 $R_n(x)$ 与 $F_{n+1}(x)$ 的最后一项有相同的符号, 但 $R_n(x)$ 的绝对值比它小, 因此, 序列

$$F_1(x),F_2(x),\cdots,F_n(x),\cdots$$

应该具有

$$(F_n-F)(F-F_{n+1})\geq 0$$

的特点. 为了说明这一点, 我们对 $R_n(x)$ 做进一步分析. 设

$$x=N+\eta,\quad 0\leq\eta<1,$$

N 是自然数, 又设 $F_{N+1}<F<F_N$, 则

$$R_N(N+\eta)=(-1)^N N!\int_0^\infty e^{-t}\frac{dt}{(t+N+\eta)^{N+1}}$$
$$=\frac{(-1)^N N!}{(N+\eta)^{N+1}}\int_0^\infty e^{-t}\left(1+\frac{t}{N+\eta}\right)^{-N-1}dt.$$

由

$$e^{-t}\left(1+\frac{t}{N+\eta}\right)^{-N-1}\leq e^{-t},$$

可知上式右端积分关于 N 一致收敛, 因此, 当 $N\to\infty$ 时,

$$\left(\frac{(-1)^N N!}{(N+\eta)^{N+1}}\right)^{-1}R_N(N+\eta)\to\int_0^\infty e^{-2t}dt=\frac{1}{2}.$$

这说明, 当 N 充分大时, 若 $x=N+\eta, 0\leq\eta<1$, 则 $R_N(x)$ 以 $F_{N+1}(X)$ 中最后的一项的一半为极限. □

例 3 设 $g(x)$ 是定义在 $[0,\infty)$ 上的增函数, 当 $x\to+\infty$ 时,

$$g(x)\to+\infty,\quad g(x)=o(x),$$

此外, 存在常数 $\gamma>0$, 使得当 $\alpha\in[1-\gamma,1+\gamma]$ 时, 极限

$$f(\alpha)=\lim_{x\to\infty}\frac{g(\alpha x)}{g(x)}$$

存在, 且是 α 的连续函数. 令 $\alpha_n=\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-x+g(x)}x^n dx$, 则当 $n\to\infty$ 时,

$$\log\alpha_n\sim g(n).$$

解 设对于 $x\geq 1$, 有 $g(x)<Gx$, G 是正常数, 做变换 $x=ny$, 则

$$\begin{aligned}\alpha_n&=\frac{e^{-n}n^{n+1}}{n!}\int_0^\infty(e^{1-y+\frac{1}{n}g(ny)}y)^n dy\\&=\frac{e^{-n}n^{n+1}}{n!}\Big\{\int_0^\eta(e^{1-y+y\frac{g(ny)}{ny}}y)^n dy\\&\quad+\int_\eta^{1-\eta}(e^{1-y+y\frac{g(ny)}{ny}}y)^n dy+\int_{1-\eta}^{1+\eta}(e^{1-y+y\frac{g(ny)}{ny}}y)^n dy\\&\quad+\int_{1+\eta}^\infty(e^{1-y+y\frac{g(ny)}{ny}}y)^n dy\Big\},\end{aligned}\tag{1}$$

其中 $\eta>0$ 满足条件

$$0<\eta<\frac{1}{2},\quad \eta<\gamma,$$

而且, 对于 $0\leq x\leq\eta$, 有

$$xe^{1-x+G\eta}<\frac{1}{2}.$$

下面, 分别估计 (1) 式右端的四个积分.

对于第一个积分, 显然有

$$\int_0^\eta(ye^{1-y+y\frac{g(ny)}{ny}})^n dy<\int_0^\eta(ye^{1-y+Gy})^n dy<\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

为了估计第二个积分, 我们指出, 对于上面的 $\eta>0$, 还可以假定它充分小, 使得当 $x\in[\eta,1-\eta]$ 时, 有 $xe^{1-x}<1$, 事实上, 由函数 xe^{1-x}

在 $[\eta, 1-\eta]$ 中的递增性, 只需要证明当 η 充分小时,

$$(1-\eta)e^{\eta} < 1.$$

这可由下面的展开式推出:

$$(1-\eta)e^{\eta} = (1-\eta)\left(1+\eta+\frac{1}{2}\eta^2+\frac{1}{3!}\eta^3+\cdots\right) = 1-\frac{1}{2}\eta^2+o(\eta^3).$$

由此, 知存在与 η 有关的数 $\delta = \delta(\eta)$, 使得对于 $x \in [\eta, 1-\eta]$, 有

$$xe^{1-x+\delta x} < \theta_1(\eta) = \theta_1 < 1.$$

对于充分大的 n, 有 $\frac{g(nx)}{nx} < \delta$, 因此, 当 $n \to \infty$ 时, 对于固定的 η, 有

$$\int_{\eta}^{1-\eta} (ye^{1-y+y\frac{g(ny)}{ny}})^n dy < \int_{\eta}^{1-\eta} (ye^{1-y+\delta y})^n dy = O(\theta_1^n).$$

另一方面, 由于 $g(x) = o(x)$ $(x \to \infty)$, 容易证明, 存在 $\theta_2 = \theta_2(\eta) < 1$, 当 $n \to \infty$ 时, 对于固定的 η, 有

$$\int_{1+\eta}^{\infty} (ye^{1-y+y\frac{g(ny)}{ny}})^n dy = O(\theta_2^n).$$

于是证明了: 对于充分小的 η, 当 $n \to \infty$ 时, 有

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \frac{e^{-n}n^{n+1}}{n!}\int_{1-\eta}^{1+\eta} (xe^{1-x+x\frac{g(nx)}{nx}})^n dx + O(\sqrt{n}\theta^n) \\ &= \frac{n^{n+1}}{n!}\int_{1-\eta}^{1+\eta} (xe^{-x})^n e^{g(nx)} dx + O(\sqrt{n}\theta^n),\end{aligned}$$

其中 $\theta = \theta(\eta) < 1$. 由 $g(x)$ 的递增性, 显然存在数

$$A = A(n,\eta), \quad g(n(1-\eta)) \le A \le g(n(1+\eta)),$$

使得

$$\alpha_n = \frac{n^{n+1}}{n!}e^{A}\int_{1-\eta}^{1+\eta} (xe^{-x})^n dx + O(\sqrt{n}\theta^n).$$

对于固定的 η, 当 $n \to \infty$ 时, 有

$$\frac{n^{n+1}}{n!}\int_{1-\eta}^{1+\eta} (xe^{-x})^n dx = 1+o(1), \quad \theta^n = o(1).$$

因此,

$$\alpha_n = e^{A(n,\eta)}(1+o(1)),$$

$$\log \alpha_n = A(n,\eta)(1+o(1)). \tag{2}$$

由假定条件, 函数 $f(\alpha)$ 是连续函数, 因此, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 当 η 充分小时, 对于充分大的 n, 有

$$(1-\varepsilon)g(n) \leq g(n(1-\eta)) \leq A(n,\eta) \leq g(n(1+\eta)) \leq g(n)(1+\varepsilon).$$

由此及 (2) 式, 得到需要的结论. □

注 在例 3 中并没有直接应用已有的定理, 所用到的仅是 Laplace 方法的基本思想, 即找出积分表达式的主部.

例 4 设 α, β 是实数, 则当 $n \to \infty$ 时,

$$\frac{1}{n!}\int_0^{n+\alpha\sqrt{n}+\beta} e^{-x}x^n dx = A + \frac{B}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

其中

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{t^2}{2}}dt, \quad B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\beta - \frac{\alpha^2+2}{3}\right)e^{-\frac{\alpha^2}{2}}.$$

解 令 $\delta = n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{6}$.

做变换 $x = n(y+1)$, 则所求的积分成为

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n!}\int_0^{n+\alpha\sqrt{n}+\beta} e^{-x}x^n dx \\
=&\frac{e^{-n}n^{n+1}}{n!}\int_{-1}^{\alpha n^{-\frac{1}{2}}+\beta n^{-1}} (e^{-y}(1+y))^n dy \\
=&\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\int_{-1}^{\alpha n^{-\frac{1}{2}}+\beta n^{-1}} (e^{-y}(1+y))^n dy \\
=&\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&\cdot\left(\int_{-\delta}^{\alpha n^{-\frac{1}{2}}+\beta n^{-1}} (e^{-y}(1+y))^n dy + \int_{-1}^{-\delta} (e^{-y}(1+y))^n dy\right).
\end{aligned}$$

对于 $-1 \le y \le -\delta$,

$$|e^{-y}(1+y)|^n \le |e^{\delta}(1-\delta)|^n \le e^{-\frac{1}{2}n\delta^2} = e^{-\frac{1}{2}n^{2\varepsilon}}.$$

所以

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{n!}\int_0^{n+\alpha\sqrt{n}+\beta} x^n e^{-x}dx \\ &= \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\int_{-\delta}^{\alpha n^{-\frac{1}{2}}+\frac{\beta}{n}} (e^{-y}(1+y))^n dy + O(\sqrt{n}e^{-\frac{1}{2}n^{2\varepsilon}}). \end{aligned}$$

当 $-\delta \le y \le \alpha n^{-\frac{1}{2}} + \beta n^{-1}$ 时, 有

$$e^{-y}(1+y) = \exp\left(-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}(1+\theta y)^{-4}\right),$$

其中 $0 < \theta = \theta(x) < 1$, 但是 $|ny^4| \le n(n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon})^4 = n^{-1+4\varepsilon}$, 所以对充分大的 n,

$$e^{-n\frac{y^4}{4}(1+\theta y)^{-4}} = 1 + O(n^{-1+4\varepsilon}).$$

于是

$$I = \sqrt{\frac{n}{2\pi}}(1+O(n^{-1+4\varepsilon}))\int_{-\delta}^{\alpha n^{-\frac{1}{2}}+\beta n^{-1}} e^{-n(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3})}dy + O(\sqrt{n}e^{-\frac{1}{2}n^{2\varepsilon}}).$$

利用

$$e^{n\frac{y^3}{3}} = 1 + n\frac{y^3}{3} + O(n^{-1+6\varepsilon})$$

以及

$$\int_{-\delta}^{\alpha n^{-\frac{1}{2}}+\beta n^{-1}} e^{-n\frac{y^2}{2}}dy = O(n^{-\frac{1}{2}}),$$

推出

$$
\begin{aligned}
I =& \sqrt{\frac{n}{2\pi}}(1+O(n^{-1+4\varepsilon}))\int_{-\delta}^{\alpha n^{-\frac{1}{2}}+\beta n^{-1}} e^{-\frac{n}{2}y^2}\left(1+n\frac{y^3}{3}+O(n^{-1+6\varepsilon})\right)dy \\
&+O(\sqrt{n}e^{-\frac{1}{2}n^{2\varepsilon}}) \\
=& \sqrt{\frac{n}{2\pi}}(1+O(n^{-1+4\varepsilon}))\int_{-\delta}^{\alpha n^{-\frac{1}{2}}+\beta n^{-1}} e^{-\frac{n}{2}y^2}\left(1+n\frac{y^3}{3}\right)dy \\
&+O(n^{-1+6\varepsilon})+O(\sqrt{n}e^{-\frac{1}{2}n^{2\varepsilon}}) \\
=& \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n^{\varepsilon}}^{\alpha+\beta n^{-\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2}}\left(1+\frac{x^3}{3\sqrt{n}}\right)dx+O(n^{-1+6\varepsilon}) \\
=& \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\alpha+\beta n^{-\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2}}\left(1+\frac{x^3}{3\sqrt{n}}\right)dx+O(n^{-1+6\varepsilon}) \\
=& \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{x^2}{2}}dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\alpha+\beta n^{-\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \\
&+\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\int_{-\infty}^{\alpha+\beta n^{-\frac{1}{2}}}\frac{1}{3}x^3e^{-\frac{x^2}{2}}dx+O(n^{-1+6\varepsilon}). \qquad (3)
\end{aligned}
$$

当 $n\to\infty$ 时, 有

$$
\int_{\alpha}^{\alpha+\beta n^{-\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\beta n^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\alpha^2}{2}}(1+o(1)),
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\alpha+\beta n^{-\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2}}x^3dx &= \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{x^2}{2}}x^3dx+\int_{\alpha}^{\alpha+\beta n^{-\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2}}x^3dx \\
&= -\int_{-\infty}^{\alpha} x^2de^{-\frac{x^2}{2}}+O(n^{-\frac{1}{2}}) \\
&= -(\alpha^2+2)e^{-\frac{\alpha^2}{2}}+O(n^{-\frac{1}{2}}).
\end{aligned}
$$

把这两个估计式代入 (3) 式, 就证明了所需的结论. □

例 5 设 $0<\lambda<1$, 以 x_n 表示方程

$$
1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}=\lambda e^x
$$

的唯一正根, 则当 $n\to\infty$ 时,

$$
x_n=n+\alpha\sqrt{n}+\beta+o(1),
$$

其中 α 与 β 分别满足等式

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\lambda,\quad \beta=\frac{1}{3}(\alpha^2+2).$$

解 由分部积分, 可知

$$K_n(x)=\frac{1}{n!}\int_0^x e^{-y}y^n dy=1-e^{-x}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right),$$

因此, x_n 就是方程 $K_n(x)=1-\lambda$ 的正根. 由例 4 可知, 当 $n\to\infty$ 时,

$$K_n(n+\alpha\sqrt{n}+\beta)=A+\frac{B}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

此处 A, B 在例 4 中定义:

$$A=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{t^2}{2}}dt,\quad B=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\beta-\frac{\alpha^2+2}{3}\right)e^{-\frac{\alpha^2}{2}}.$$

现在, 设 α, β 满足

$$A=1-\lambda,\quad B=0,$$

则由

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=1$$

推出

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\lambda,\quad \beta=\frac{\alpha^2+2}{3}.$$

因此只需证明: 当 $n\to\infty$ 时,

$$x_n-(n+\alpha\sqrt{n}+\beta)=o(1).$$

若上式不成立, 则存在 $c>0$, 对于无穷多个 n 值, 有

(1) $x_n-(n+\alpha\sqrt{n}+\beta)>c$, 或

(2) $x_n-(n+\alpha\sqrt{n}+\beta)<-c$.

若不等式 (1) 成立, 那么, 存在无穷多个 n, 使得

$$1-\lambda=K_n(x_n)>K_n(n+\alpha\sqrt{n}+\beta+c)=A+\frac{B'}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

其中

$$B' = B + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c e^{-\frac{\alpha^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c e^{-\frac{\alpha^2}{2}} > 0,$$

因而

$$1 - \lambda = A + \frac{B'}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \lambda + \frac{B'}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

当 $n \to \infty$ 时, 这显然是矛盾的, 因此, 不等式 (1) 是不可能的. 同理, 不等式 (2) 也不可能成立. 至此, 得到需要证明的结果. □

例 6 设 $g(x)$ 与 $h(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上有定义, 对于 $t \geq 0$, 积分

$$f(t) = \int_\alpha^\beta g(x) e^{th(x)} dx$$

存在. 又设存在常数 $\eta > 0$, 使得 $t \in [\alpha, \alpha + \eta]$ 时, $h'(x)$ 是连续函数, 且有常数 $\varepsilon > 0$, 使得

$$h'(x) < 0, \quad x \in [\alpha, \alpha + \eta],$$
$$h(x) < h(\alpha) - \varepsilon, \quad x \in [\alpha + \eta, \beta].$$

又设当 $x \to \alpha$ 时,

$$h'(x) \sim -A(x - \alpha)^{\mu - 1}, \quad \mu > 0,$$
$$g(x) \sim B(x - \alpha)^{\lambda - 1}, \quad \lambda > 0,$$

则当 $t \to \infty$ 时, 有

$$f(t) = \int_\alpha^\beta g(x) e^{th(x)} dx \sim \frac{B}{\mu} \Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\mu}{At}\right)^{\frac{\lambda}{\mu}} e^{th(\alpha)}. \tag{4}$$

解 当 $t \to \infty$ 时,

$$\left| \int_{\alpha+\eta}^\beta g(x) e^{th(x)} dx \right| \leq e^{t(h(\alpha) - \varepsilon)} \int_{\alpha+\eta}^\beta |g(x)| dx = o(t^{-\frac{\lambda}{\mu}} e^{th(\alpha)}). \tag{5}$$

做变换 $y = h(\alpha) - h(x)$, 则

$$\int_\alpha^{\alpha+\eta} g(x) e^{th(x)} dx = e^{th(\alpha)} \int_0^Y k(y) e^{-ty} dy, \tag{6}$$

其中

$$Y = h(\alpha) - h(\alpha+\eta) > 0, \quad k(y) = -\frac{g(x)}{h(x)}$$

(注意, x 是 y 的函数).

当 $x \to \alpha$ 时,

$$y = h(\alpha) - h(x) = -\int_\alpha^x h'(z)dz \sim \frac{A}{\mu}(x-\alpha)^\mu,$$

因此, 当 $y \to 0$ 时,

$$x - \alpha \sim \left(\frac{y\mu}{A}\right)^{\frac{1}{\mu}}.$$

但是, 当 $x \to \alpha$ 时,

$$-\frac{g(x)}{h(x)} \sim \frac{B}{A}(x-\alpha)^{\lambda-\mu},$$

所以,

$$k(y) \sim \frac{B}{A}\left(\frac{y\mu}{A}\right)^{\frac{\lambda}{\mu}-1}, \quad y \to 0,$$

由此及 (6) 式, 当 $\eta \to 0$ 且 $t \to \infty$ 时,

$$\begin{aligned}
&\int_\alpha^{\alpha+\eta} g(x)e^{th(x)}dx \\
&\sim e^{th(\alpha)}\int_0^Y \frac{B}{A}\left(\frac{y\mu}{A}\right)^{\frac{\lambda}{\mu}-1} e^{-ty}dy \\
&= e^{th(\alpha)}\frac{B}{A}\left(\frac{\mu}{A}\right)^{\frac{\lambda}{\mu}-1}\int_0^{tY} e^{-x}\left(\frac{x}{t}\right)^{\frac{\lambda}{\mu}-1}\frac{1}{t}dx \\
&\sim \frac{B}{\mu}\left(\frac{\mu}{A}\right)^{\frac{\lambda}{\mu}}\Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)t^{-\frac{\lambda}{\mu}},
\end{aligned}$$

由此及 (5) 得到 (4) 式. □

第六章

Tauber 型定理

在前面我们证明了下面的结论 (Abel 定理):

设

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s.$$

则

$$\lim_{x\to 1-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = s.$$

由下面的例子可以看出它的逆定理并不正确.

我们有

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}, \quad |x| < 1,$$

所以

$$\lim_{x\to 1-} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{2}.$$

但级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$$

发散.

由这个例子可见, 若要使 Abel 定理的逆定理成立, 对系数 a_k 必须加上某些限制. 假如可以假定 $a_k \geq 0$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$, 则 Abel 定理的逆定理正确. 在 $a_k = o\left(\frac{1}{k}\right)$ 的条件下, A. Tauber 证明了逆定理成

立. J. E. Littlewood 证明了当 $a_k = O\left(\frac{1}{k}\right)$ 的情形下逆定理亦成立.

若

$$\lim_{x\to 1-}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \lim_{y\to 0+}\sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-ky} = s,$$

则称 $\sum a_k$ 是 Abel 可求和的. 上面的例子告诉我们: 若 $\sum a_k$ 是 Abel 可求和的, 则要加上某些附加条件才能保证

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{x\to 0+}\sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-kx} = s.$$

由于 A. Tauber 在 $a_k = o\left(\frac{1}{k}\right)$ 的条件下首先证明了上面的定理, 因此我们通常把研究这类问题的定理称之为 Tauber 型定理.

6.1 小 o Tauber 定理

由

$$\lim_{x\to 1-}\sum a_n x^n = s \quad 与 \quad a_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n\to\infty)$$

或

$$\lim_{x\to 0+}\int_0^{\infty} f(t)e^{-tx}dt = s \quad 与 \quad f(t) = o\left(\frac{1}{t}\right) \quad (t\to\infty)$$

分别导出

$$\sum a_n = s \quad 或 \quad \int_0^{\infty} f(t)dt = s.$$

这种定理称为小 o Tauber 定理.

定理 1 设 $f(x)$ 在任一区间 $[0,x]$ 上可积 (这一假定, 我们以下就省略了), 记

$$J(y) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-yx}dx \quad (y>0).$$

若 $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$, 且

$$\lim_{y\to 0+}\int_0^{\infty} f(x)e^{-yx}dx = s,$$

则

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = s.$$

证明 令

$$\tilde{J}(x) = \int_0^x f(t)dt,$$

则

$$\begin{aligned}
\tilde{J}(y^{-1}) - J(y) &= \int_0^{\frac{1}{y}} f(x)dx - \int_0^{\infty} f(x)e^{-yx}dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{y}} (1 - e^{-yx})f(x)dx - \int_{\frac{1}{y}}^{\infty} e^{-yx}f(x)dx \\
&= I_1 + I_2, \\
I_1 &= \int_0^{\frac{1}{y}} (1 - e^{-yx})f(x)dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{y}} O(yx)o\left(\frac{1}{x}\right)dx = o(1), \\
I_2 &= -\int_{\frac{1}{y}}^{\infty} e^{-yx}f(x)dx = o(1)\int_{\frac{1}{y}}^{\infty} e^{-yx}\frac{dx}{x} \\
&= o(y)\int_{\frac{1}{y}}^{\infty} e^{-yx}dx = o(1).
\end{aligned}$$

由以上诸式得到

$$\tilde{J}\left(\frac{1}{y}\right) - J(y) = o(1), \quad y \to 0+,$$

此即

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \lim_{y\to 0+}\int_0^{\infty} f(x)e^{-yx}dx = s. \qquad \square$$

推论 若 $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, 且

$$\lim_{x\to 1-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s,$$

则

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s.$$

证明 取

$$f(x)=a_n,\quad x\in[n,n+1),\quad n\geq 0,$$

则

$$\begin{aligned}J(y)&=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_n^{n+1}e^{-yx}dx=\frac{1}{y}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(e^{-ny}-e^{-(n+1)y})\\&=\frac{1-e^{-y}}{y}\sum_{n=0}^{\infty}a_ne^{-ny}.\end{aligned}$$

令 $x=e^{-y}$, 则当 $y\to 0+$ 时, $x\to 1-$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1-}\sum a_nx^n&=\lim_{y\to 0+}\frac{1-e^{-y}}{y}\sum a_ne^{-ny}\\&=\lim_{y\to 0+}J(y)=s.\end{aligned}$$

由定理 1 得到

$$\int_0^{\infty}f(x)dx=s,$$

亦即

$$\begin{aligned}s&=\lim_{n\to\infty}\int_0^{n+1}f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\int_k^{k+1}f(x)dx\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}a_k=\sum_{k=0}^{\infty}a_k.\end{aligned}$$

□

定理 2 设

$$f(0)=0,\quad \lim_{y\to 0+}\int_0^{\infty}e^{-yx}f(x)dx=s.$$

则

$$\int_0^{\infty}f(x)dx=s$$

的充要条件是

$$\int_0^x tf(t)dt=o(x),\quad x\to\infty.$$

证明 必要性. 令

$$g(x)=\int_0^x tf(t)dt,$$
$$F(x)=\int_0^x f(t)dt,$$

则

$$g(x)=xF(x)-\int_0^x F(t)dt,$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{g(x)}{x}&=F(x)-\frac{1}{x}\int_0^x F(t)dt\\&=F(x)-s-\frac{1}{x}\int_0^x(F(t)-s)dt=o(1).\end{aligned}$$

必要性得证.

充分性. 令 $\psi(x)=\int_0^x(t+1)dF(t)$, 则

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(x)e^{-yx}dx&=\int_0^\infty e^{-yx}dF(x)=\int_0^\infty\frac{e^{-yx}}{1+x}d\psi(x)\\&=y\int_0^\infty\frac{\psi(x)}{1+x}e^{-yx}dx+\int_0^\infty\frac{\psi(x)}{(1+x)^2}e^{-yx}dx.\end{aligned}$$

下面证明

$$\psi(x)=o(x).$$

事实上,

$$\begin{aligned}F(x)-F(1)&=\int_1^x f(t)dt=\int_1^x\frac{dg(t)}{t}\\&=\frac{g(x)}{x}-g(1)+\int_1^x\frac{g(t)}{t^2}dt\\&=o(1)+O(1)+o(\log x),\end{aligned}$$

所以

$$\psi(x)=\int_0^x(t+1)dF(t)=F(x)+g(x)=o(x).$$

因此

$$\int_0^\infty\frac{\psi(x)}{1+x}e^{-yx}dx=o(1)\int_0^\infty e^{-yx}dx=o\left(\frac{1}{y}\right),\quad y\to 0+.$$

由此得到

$$\lim_{x\to 0+}\int_0^\infty f(x)e^{-yx}dx=\lim_{y\to 0+}\int_0^\infty \frac{\psi(x)}{(1+x)^2}e^{-yx}dx.$$

显然

$$\frac{\psi(x)}{(1+x)^2}=o\left(\frac{1}{x}\right),$$

所以由定理 1 知

$$\int_0^\infty \frac{\psi(x)}{(1+x)^2}dx=s,$$

但

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\psi(x)}{(1+x)^2}dx&=-\int_0^\infty \psi(x)d\frac{1}{1+x}=\int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{1+x}\\&=\int_0^\infty dF(x)=\int_0^\infty f(t)dt.\end{aligned}$$

定理得证. □

推论 设

$$f(x)=\sum_{n=0}^\infty a_n e^{-nx},\quad x>0,$$

且

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=s.$$

则 $\sum_{n=0}^\infty a_n=s$ 的充要条件是

$$\sum_{k=1}^n ka_k=o(n),\quad n\to\infty.$$

证明 令

$$f(x)=a_n,\quad n\le x<n+1,$$

则由定理 2 立即得出结论. □

和级数相似, 下面我们引入关于积分的求和法. 设

$$F(x)=\int_0^\infty e^{-xt}f(t)dt,\quad x>0.$$

若 $\lim_{x\to 0+} F(x)=s$, 则称积分

$$\int_0^\infty f(t)dt$$

在 Abel 意义下是可求和的, 其值为 s. 简称为 (A) 求和. 此外我们还要引入一个求和概念.

设

$$A(x)=\int_0^x f(t)dt,$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x A(t)dt=s.$$

则称

$$\int_0^\infty f(t)dt$$

在 Cesàro 意义下是可求和的, 其值为 s, 简称为 (C) 求和.

下面的定理说明了积分的收敛性包含了 (A) 求和到同一值.

定理 3 设

$$F(x)=\int_0^\infty f(t)e^{-xt}dt,\quad x>0.$$
$$\int_0^\infty f(t)dt=s.$$

则

$$\lim_{x\to 0+}F(x)=s.$$

读者可自己给出证明.

下面的定理说明了 (C) 求和包含了 (A) 求和.

定理 4 设

$$F(x)=\int_0^\infty f(t)e^{-xt}dt,\quad x>0,$$
$$\int_0^x f(t)dt\sim sx,\quad x\to\infty.$$

则

$$F(x)\sim\frac{s}{x},\quad x\to 0+.$$

在上面的定理中取

$$f(t)=\int_0^t g(y)dy,$$

则定理的假设告诉我们:

$$\int_0^\infty g(t)dt$$

是 (C) 求和到 s. 但此时有

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_0^\infty e^{-tx}f(t)dt=-\frac{1}{x}\int_0^\infty f(t)de^{-tx}\\&=\frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-tx}g(t)dt,\end{aligned}$$

所以定理的结论是

$$\lim_{x\to 0+}\int_0^\infty e^{-tx}g(t)dt=s.$$

即

$$\int_0^\infty g(t)dt$$

是 (A) 求和到 s.

为了证明定理 4, 我们需要下面的引理.

引理 1 设

$$F(x)=\int_0^\infty e^{-xt}f(t)dt,\quad x>0,$$

$$f(t)\sim At^\alpha,\quad t\to\infty,\alpha>-1.$$

则

$$F(x)\sim\frac{A\Gamma(\alpha+1)}{x^{\alpha+1}},\quad x\to 0+.$$

证明 因为

$$\int_0^\infty e^{-xt}t^\alpha dt=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{x^{\alpha+1}},\quad x>0,$$

所以不妨假定 $A=0, f(t)=o(t^{\alpha})$. 这样[①]

$$\begin{aligned} x^{\alpha+1}|F(x)| &\leq x^{\alpha+1}\int_0^{\sqrt{x}} e^{-xt}|f(t)|dt + o\left(x^{\alpha+1}\int_{\sqrt{x}}^{\infty} e^{-xt}t^{\alpha}dt\right) \\ &= O(x^{\alpha+1}) + o(1). \end{aligned}$$

由此得到

$$F(x) = o(x^{-1-\alpha}), \quad x \to 0+.$$

引理得证. □

现在来证明定理 4.

定理 4 的证明 令

$$a(t) = \int_0^t f(y)dy,$$

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt}da(t) = x\int_0^{\infty} e^{-xt}a(t)dt.$$

由引理 1 得到

$$\frac{F(x)}{x} \sim \frac{s}{x^2}, \quad x \to 0+,$$

亦即

$$F(x) \sim \frac{s}{x}, \quad x \to 0+. \qquad \square$$

如果不对 $f(t)$ 加上限制, 则定理 4 是不可逆的. 例如取 $f(t) = 1+\sin t + t\cos t$, 则

$$\int_0^t f(y)dy = t + t\sin t.$$

此时

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-xt}dt \\ &= \frac{1}{x} + \frac{2x^2}{(x^2+1)^2} \sim \frac{1}{x}, \quad x \to 0+, \end{aligned}$$

[①]求得 $O(x^{\alpha+1})$ 时用到了 $f(x)$ 在 $[0,R]$ 上的可积性.

但是

$$\frac{1}{t}\int_0^t f(y)dy$$

当 $t \to \infty$ 时极限不存在.

6.2 大 O Tauber 定理

本节主要证明下面的定理.

定理 1 设

$$f(x) = O\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-xt} f(t)dt \to s, \quad x \to 0+.$$

则必有

$$\int_0^\infty f(t)dt = s.$$

定理 1 称为大 O Tauber 定理. 我们先来证明几个引理.

引理 1 设 $g(x)$ 为 $[c,1]$ 上的连续函数, $g(x) = 0, 0 \le x < c < 1$. 则对任给的 $\varepsilon > 0, \alpha > 0$, 必有两个多项式 $p(x), P(x)$ 存在, 满足

$$p(x) < g(x) < P(x), \quad 0 \le x \le 1,$$

$$\int_0^1 \left(\log\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} (P(x) - p(x))dx < \varepsilon.$$

证明 不妨设 $g(c+) > 0$. 我们可以构造一个在 $[0,1]$ 上的连续函数 $h(x)$,

$$h(x) = \begin{cases} g(x), & \text{当 } x \in (c-\delta, c), \\ g(c+)\dfrac{(x-c+\delta)}{\delta}, & \text{当 } x \in (c-\delta, c), \end{cases} \tag{1}$$

这里 δ 为一个适当小的正数, 这样可使 $g(x) \le h(x), 0 \le x \le 1$, 且

$$\int_0^1 \left(\log\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} (h(x) - g(x))dx$$

$$\le g(c+)\int_{c-\delta}^c \left(\log\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx = o(1), \quad \text{当 } \delta \to 0+.$$

换句话说, 对任给的 $\eta>0$, 必有 $\delta>0$ 存在, 使得由 (1) 定义的 $h(x)$, 满足

$$h(x)\geq g(x),\quad 0\leq x\leq 1, \tag{2}$$

$$\int_0^1\left(\log\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}(h(x)-g(x))dx<\eta. \tag{3}$$

由第 2.2 节定理 4 知, 必有多项式 $Q(x)$ 存在, 使

$$|h(x)-Q(x)|<\eta,\quad 0\leq x\leq 1. \tag{4}$$

令 $P(x)=Q(x)+\eta$, 则有 $g(x)\leq h(x)<P(x), 0\leq x\leq 1$, 且

$$\begin{aligned}&\int_0^1\left(\log\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}(P(x)-g(x))dx\\&\leq\int_0^1\left(\log\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}(P(x)-Q(x))dx\\&\quad+\int_0^1\left(\log\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}(Q(x)-h(x))dx\\&\quad+\int_0^1\left(\log\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}(h(x)-g(x))dx\\&<\eta\Gamma(\alpha)+\eta\Gamma(\alpha)+\eta=2\eta\Gamma(\alpha)+\eta.\end{aligned} \tag{5}$$

同样可以证明必有多项式 $p(x)$ 存在, 满足

$$p(x)<g(x),\quad 0\leq x\leq 1 \tag{6}$$

及

$$\int_0^1\left(\log\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}(g(x)-p(x))dx<2\eta\Gamma(\alpha)+\eta. \tag{7}$$

现在取

$$\eta=\frac{\varepsilon}{4\Gamma(\alpha)+2},$$

则由 (5) 及 (7) 立即得到引理的断言. □

引理 2 设 $f(t) \geq 0, t \geq 0,$

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-xt} f(t)dt, \quad x > 0,$$

$$F(x) \sim \frac{s}{x^\alpha}, \quad \alpha > 0,\ x \to 0+.$$

则对任一满足引理 1 中条件的函数 $g(x)$, 必有

$$\int_0^\infty e^{-tx} g(e^{-tx}) f(t)dt \sim \frac{s}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{x^\alpha} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} g(e^{-t})dt. \tag{8}$$

证明 设 ε 为任给的正数, 由引理 1 知必有两个多项式 $p(x)$ 及 $P(x)$ 存在, 满足

$$p(x) < g(x) < P(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{9}$$

及

$$\int_0^1 \left(\log \frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} (P(x) - p(x))dx < \varepsilon. \tag{10}$$

由引理的假设知对任意自然数 n 有

$$\int_0^\infty e^{-xt(n+1)} f(t)dt \sim \frac{s}{(n+1)^\alpha x^\alpha}, \quad x \to 0+. \tag{11}$$

因为

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-t(n+1)} t^{\alpha-1} dt,$$

所以 (8) 式对于 $g(x)$ 为多项式的情形时是成立的, 亦即

$$\int_0^\infty e^{-tx} P(e^{-tx}) f(t)dt \sim \frac{s}{\Gamma(\alpha)x^\alpha} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} P(e^{-t})dt, \tag{12}$$

$$\int_0^\infty e^{-tx} p(e^{-tx}) f(t)dt \sim \frac{s}{\Gamma(\alpha)x^\alpha} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} p(e^{-t})dt. \tag{13}$$

在 (10) 中令

$$\log \frac{1}{x} = t,$$

则它成为

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} (P(e^{-t}) - p(e^{-t}))dt < \varepsilon. \tag{14}$$

由于 $f(x)\geq 0$, 所以

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-xt}p(e^{-xt})f(t)dt &\leq \int_0^\infty e^{-xt}g(e^{-xt})f(t)dt\\ &\leq \int_0^\infty e^{-xt}P(e^{-xt})f(t)dt, \qquad (15)\\ \int_0^\infty e^{-t}p(e^{-t})t^{\alpha-1}dt &\leq \int_0^\infty e^{-t}g(e^{-t})t^{\alpha-1}dt\\ &\leq \int_0^\infty e^{-t}P(e^{-t})t^{\alpha-1}dt. \qquad (16)\end{aligned}$$

由 (12), (14), (15) 得到

$$\begin{aligned}&\overline{\lim_{x\to 0+}}\, x^\alpha\Gamma(\alpha)\int_0^\infty e^{-xt}g(e^{-xt})f(t)dt\\ &\quad\leq \lim_{x\to 0+} x^\alpha\Gamma(\alpha)\int_0^\infty e^{-xt}P(e^{-xt})f(t)dt\\ &\quad\leq s\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}P(e^{-t})dt\\ &\quad\leq s\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}g(e^{-t})dt+s\varepsilon, \qquad (17)\end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned}&\underline{\lim_{x\to 0+}}\, x^\alpha\Gamma(\alpha)\int_0^\infty e^{-xt}g(e^{-xt})f(t)dt\\ &\quad\geq x^\alpha\Gamma(\alpha)\int_0^\infty e^{-xt}p(e^{-tx})f(t)dt\\ &\quad\geq s\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}p(e^{-t})dt\\ &\quad\geq s\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}g(e^{-t})dt-s\varepsilon. \qquad (18)\end{aligned}$$

由于 ε 可任意小, 故由以上两式立即推出 (8), 引理得证. □

定理 2 设 $f(x)$ 为 $(0,\infty)$ 内的非负函数,

$$F(x)=\int_0^\infty e^{-xt}f(t)dt,\quad x>0.$$

若

$$F(x)\sim\frac{s}{x^\alpha},\quad \alpha>0,\ x\to 0+,$$

则必有

$$\int_0^x f(t)dt \sim \frac{sx^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad x \to \infty.$$

证明 在引理 2 中取

$$g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le e^{-1}, \\ \dfrac{1}{x}, & e^{-1} < x \le 1. \end{cases}$$

则由 (8) 式得到

$$\int_0^{x^{-1}} f(t)dt \sim \frac{sx^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1}dt, \quad x \to 0+,$$

亦即

$$\int_0^x f(t)dt \sim \frac{sx^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad x \to \infty. \qquad \square$$

推论 1 设 $f(t)$ 为 $(0,\infty)$ 内的有界函数,

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-xt} f(t)dt, \quad x > 0.$$

若

$$F(x) \sim \frac{s}{x}, \quad x \to 0+,$$

则

$$\int_0^x f(t)dt \sim sx, \quad x \to \infty.$$

证明 由假设知, 必存在正数 $B > 0$, 使得

$$B + f(t) \ge 0.$$

令

$$f_1(t) = B + f(t),$$

则

$$F_1(x) = \int_0^\infty e^{-xt} f_1(t)dt \sim \frac{B+s}{x}, \quad x \to 0+.$$

所以由定理 2 知, 必有

$$\int_0^x f_1(t)dt \sim (B+s)x, \quad x \to \infty,$$

亦即

$$\int_0^x f(t)dt \sim sx, \quad x \to \infty. \qquad \square$$

由推论 1 的证明可看出, $f(t)$ 为有界函数的条件可改为下面的单边条件

$$f(t) \geq -B, \quad 0 \leq t < \infty.$$

推论 2 设

$$a_n \geq 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sim \frac{s}{1-x}, \quad x \to 1-.$$

则

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sim sn, \quad n \to \infty.$$

证明 取

$$f(x) = a_n, \quad x \in [n, n+1), \quad n \geq 0,$$

则

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} f(t)dt = \frac{1-e^{-x}}{x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-nx}.$$

由假设知

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-nx} \sim \frac{s}{1-e^{-x}}, \quad x \to 0+,$$

即

$$F(x) \sim \frac{s}{x}, \quad x \to 0+,$$

所以由定理 2 知

$$\int_0^x f(t)dt \sim sx, \quad x \to \infty.$$

由此推出

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sim sn, \quad n \to \infty. \qquad \square$$

同样, 推论中的 $a_n \geq 0$, 可减弱为 $a_n \geq -B$.

定理 3 设

$$f(x) > -\frac{B}{x}, \quad 0 < x < \infty,$$

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-xt} f(t)dt \to s, \quad x \to 0+.$$

则

$$\int_0^\infty f(t)dt = s.$$

证明 由 $f(x) > -\frac{B}{x}$ 知

$$F''(x) = \int_0^\infty e^{-xt} t^2 f(t)dt.$$

由第 4.3 节定理 5 知

$$F(x) = o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to 0+,$$

所以

$$\int_0^\infty e^{-xt}(B + tf(t))dt = \frac{B}{x} - F(x) \sim \frac{B}{x}, \quad x \to 0+.$$

因为

$$B + tf(t) > 0,$$

由定理 2 得到

$$\int_0^x (B + tf(t))dt \sim Bx, \quad x \to \infty.$$

因此

$$\int_0^x tf(t)dt = o(x), \quad x \to \infty.$$

再由第 6.1 节定理 2 得到

$$\int_0^\infty f(t)dt = s. \qquad \square$$

定理 1 显然是定理 3 的特殊情形.

参考书目

[1] 华罗庚. 数论导引. 北京: 科学出版社, 1979.

[2] 徐利治. 数学分析的方法及例题选讲. 北京: 商务印书馆, 1955.

[3] De Bruijn N G. *Asymptotic Methods in Analysis.* North Holland, Amsterdam, 1958.

[4] Copson E T. *Asymptotic Expansions.* Cambridge, 1965.

[5] Erdelyi A. *Asymptotic Expansions.* Dover Press, New York, 1956.

[6] Hardy G H. *Divergent Series.* Oxford University Press, Oxford, 1949.

[7] Pólya G and Szegö G. *Problems and Theorems in Analysis* I, II. Springer-Verlag, Berlin, 1978.

[8] Titchmarsh E C. *The Theory of Functions.* 2nd edition. Oxford University Press, Oxford, 1952 (有中译本).

[9] Zygmund A. *Trigonometrical Series.* Warsaw, 1935.

后　记

潘承洞先生与我合作的《阶的估计》一书自一九八三年出版以来, 三十一个春秋过去了.

本书是在对《阶的估计》一书的原有内容进行精简整合后形成的; 保留了其中与基础性理论和方法有关的大部分内容, 做了适当调整和增减, 使之更加体现阶的估计方法的特点, 并更加贴近具有一定数学基础的大学生、研究生和科技工作人员的需要.

今年 5 月 26 日是我的恩师潘承洞先生诞辰八十周年, 谨以本书的完成表示对先生的纪念.

衷心感谢展涛教授在本书编写过程中的鼎力帮助和支持; 衷心感谢高等教育出版社的赵天夫先生为本书的出版所做的细致、卓有成效的工作.

于秀源

2014 秋于杭州

现代数学基础图书清单

(书号前缀为 978-7-04-0xxxxx-x)

序号	书号	书名	作者
1	21717-9	代数和编码 (第三版)	万哲先 编著
2	22174-9	应用偏微分方程讲义	姜礼尚、孔德兴、陈志浩
3	23597-5	实分析 (第二版)	程民德、邓东皋、龙瑞麟 编著
4	22617-1	高等概率论及其应用	胡迪鹤 著
5	24307-9	线性代数与矩阵论 (第二版)	许以超 编著
6	24465-6	矩阵论	詹兴致
7	24461-8	可靠性统计	茆诗松、汤银才、王玲玲 编著
8	24750-3	泛函分析第二教程 (第二版)	夏道行 等编著
9	25317-7	无限维空间上的测度和积分 —— 抽象调和分析 (第二版)	夏道行 著
10	25772-4	奇异摄动问题中的渐近理论	倪明康、林武忠
11	27261-1	整体微分几何初步 (第三版)	沈一兵 编著
12	26360-2	数论I —— Fermat的梦想和类域论	[日] 加藤和也、黑川信重、斎藤毅 著
13	26361-9	数论II —— 岩泽理论和自守形式	[日] 黑川信重、栗原将人、斎藤毅 著
14	38040-8	微分方程与数学物理问题 (中文校订版)	[瑞典] 纳伊尔 • 伊布拉基莫夫 著
15	27486-8	有限群表示论 (第二版)	曹锡华、时俭益
16	27431-8	实变函数论与泛函分析 (上册, 第二版修订本)	夏道行 等编著
17	27248-2	实变函数论与泛函分析 (下册, 第二版修订本)	夏道行 等编著
18	28707-3	现代极限理论及其在随机结构中的应用	苏淳、冯群强、刘杰 著
19	30448-0	偏微分方程	孔德兴
20	31069-6	几何与拓扑的概念导引	古志鸣 编著
21	31611-7	控制论中的矩阵计算	徐树方 著
22	31698-8	多项式代数	王东明 等编著
23	31966-8	矩阵计算六讲	徐树方、钱江 著
24	31958-3	变分学讲义	张恭庆 编著
25	32281-1	现代极小曲面讲义	[巴西] F. Xavier、潮小李 编著
26	32711-3	群表示论	丘维声 编著
27	34675-6	可靠性数学引论 (修订版)	曹晋华、程侃 著
28	34311-3	复变函数专题选讲	余家荣、路见可 主编
29	35738-7	次正常算子解析理论	夏道行
30	34834-7	数论 —— 从同余的观点出发	蔡天新
31	36268-8	多复变函数论	萧荫堂、陈志华、钟家庆
32	36168-1	工程数学的新方法	蒋耀林

(续表)

序号	书号	书名	作者
33	34525-4	现代芬斯勒几何初步	沈一兵、沈忠民
34	36472-9	数论基础	潘承洞 著
35	36950-2	Toeplitz系统预处理方法	金小庆 著
36	37037-9	索伯列夫空间	王明新
37	37252-6	伽罗瓦理论 —— 天才的激情	章璞 著
38	37266-3	李代数 (第二版)	万哲先 编著
39	38651-6	实分析中的反例	汪林
40	38890-9	泛函分析中的反例	汪林
41	37378-3	拓扑线性空间与算子谱理论	刘培德
42	31845-6	旋量代数与李群、李代数	戴建生 著
43	33260-5	格论导引	方捷
44	39503-7	李群讲义	项武义、侯自新、孟道骥
45	39502-0	古典几何学	项武义、王申怀、潘养廉
46	40458-6	黎曼几何初步	伍鸿熙、沈纯理、虞言林
47	41057-0	高等线性代数学	黎景辉、白正简、周国晖
48	41305-2	实分析与泛函分析 (续论) (上册)	匡继昌
49	41285-7	实分析与泛函分析 (续论) (下册)	匡继昌
50	41223-9	微分动力系统	文兰
51	41350-2	阶的估计基础	潘承洞、于秀源

网上购书： academic.hep.com.cn, www.china-pub.com, 卓越, 当当, www.landraco.com

其他订购办法：

各使用单位可向高等教育出版社读者服务部汇款订购。书款通过邮局汇款或银行转账均可。购书免邮费，发票随后寄出。

单位地址： 北京西城区德外大街4号
电　　话： 010-58581118
传　　真： 010-58581113

通过邮局汇款：
单位名称： 高等教育出版社读者服务部
地　　址： 北京西城区德外大街4号
邮　　编： 100120

通过银行转账：
户　　名： 高等教育出版社有限公司
开 户 行： 交通银行北京马甸支行
银行账号： 110060437018010037603

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话　(010) 58581897　58582371　58581879

反盗版举报传真　(010) 82086060

反盗版举报邮箱　dd@hep.com.cn

通信地址　北京市西城区德外大街 4 号　高等教育出版社法务部

邮政编码　100120



■ 学科类别：数学

academic.hep.com.cn

ISBN 978-7-04-041350-2



定价 49.00 元

封面
书名
版权
目录
第一章　阶的概念及O与o的运算
　　1.1　基本概念
　　1.2　大O与小o的运算
　　1.3　几个基本定理及其应用
　　1.4　Γ-函数与Stirling公式
　　1.5　渐近级数
　　1.6　例题
　　习题
第二章　级数与积分
　　2.1　无穷级数与无穷乘积的收敛性
　　2.2　Fourier级数的收敛性
　　2.3　极限过程的交换
　　2.4　例题
　　习题
第三章　离散和与连续和
　　3.1　分部求和公式
　　3.2　Euler-Maclaurin求和公式
　　3.3　变符号项的和式的估计
　　3.4　积分和
　　3.5　例题
　　习题
第四章　隐函数与导函数
　　4.1　Lagrange定理
　　4.2　迭代法
　　4.3　导函数的阶
　　4.4　例题
　　习题
第五章　分部积分法与Laplace方法
　　5.1　分部积分法
　　5.2　Laplace方法
　　5.3　例题
第六章　Tauber型定理
　　6.1　小oTauber定理

6.2 大OTauber定理
参考书目
后记
封底